

C2  
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR WILLIAM PORTILHO  
DE PAIVA E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 28/02/2005

  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

# Análise de Problemas Estáticos e Dinâmicos em Placas Anisotrópicas Utilizando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: William Portilho de Paiva  
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

27/2006

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
CESAR LATTES  
DESENVOLVIMENTO DE COLEÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

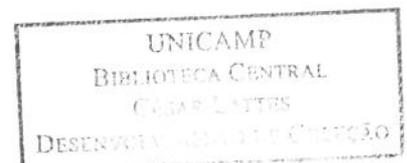
# Análise de Problemas Estáticos e Dinâmicos em Placas Anisotrópicas Utilizando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: William Portilho de Paiva  
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005  
S.P. - Brasil



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

# Análise de Problemas Estáticos e Dinâmicos em Placas Anisotrópicas Utilizando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: William Portilho de Paiva

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero



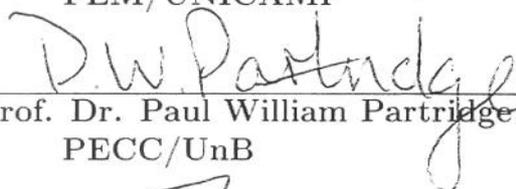
Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente  
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto  
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello  
FEM/UNICAMP

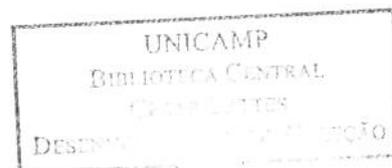


Prof. Dr. Paul William Partridge  
PECC/UnB



Prof. Dr. Webe João Mansur  
COPPE/UFRJ

Campinas, 28 de Fevereiro de 2005.



UNIDADE BC  
Nº CHAMADA T/UNICAMP  
P166a  
V \_\_\_\_\_ EX \_\_\_\_\_  
TOMBO BC/ 71268  
PROC. 16.145-07  
C \_\_\_\_\_ D X  
PREÇO 11,00  
DATA 24/11/07  
BIB-ID 397501

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P166a Paiva, William Portilho de  
Análise de problemas estáticos e dinâmicos em placas  
anisotrópicas utilizando o método dos elementos de contorno /  
William Portilho de Paiva.--Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: Paulo Sollero  
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Anisotropia. 2. Dinâmica. 3. Materiais compostos. 4.  
Métodos de elementos de contorno. 5. Placas (Engenharia). I.  
Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Analysis of static and dynamic problems in anisotropic plate bending  
using boundary element methods

Palavras-chave em Inglês: Anisotropy, Dynamic, Composite materials, Boundary element  
method, Plates

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Euclides de Mesquita Neto, Renato Pavanello, Paul William  
Partridge e Webe João Mansur

Data da defesa: 28/02/2005

## Dedicatória

À Seila, por sua compreensão e carinho.

8150705148

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho. Agradeço:

À Seila, que com sua vibração contagiante me impulsionou sempre para frente.

Aos meus pais e aos meus sogros, amigos em todos os momentos.

Ao Professor Paulo Sollero pela acolhida, pela proposta do tema e acompanhamento do trabalho.

Ao Professor M. H. Aliabadi da Queen Mary College, Universidade de Londres, pelo acolhimento e apoio durante o período em que estive na Inglaterra.

Aos Professores Euclides e Renato pela oportunidade de realizar o programa de estágio docente.

A todos os professores do Departamento de Mecânica Computacional, que de uma forma ou outra contribuíram com este trabalho.

A todos os colegas do departamento, pela amizade e companhia. Em especial ao Éder e ao Pedro, pelas preciosas horas de discussão tanto no período das disciplinas quanto na elaboração deste trabalho.

Ao Departamento de Mecânica Computacional pela infra-estrutura fornecida durante a realização deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia da Queen Mary College pelo total apoio a este trabalho no período em que lá estive.

O apoio financeiro recebido da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, que tornou possível a realização deste trabalho.

A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

A Deus por tudo!

*Graças te dou, ó Pai, Senhor do céu e da terra,  
que ocultastes estas coisas aos sábios e entendidos,  
e as revelaste aos pequeninos. Sim, ó Pai, porque assim te aprouve.*  
Cristo

## Resumo

Paiva, William Portilho, *Análise de Problemas Estáticos e Dinâmicos em Placas Anisotrópicas Utilizando o Método dos Elementos de Contorno*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 175 p. Tese (Doutorado).

Esta tese apresenta o desenvolvimento, a implementação e aplicações de uma formulação de elementos de contorno para análise de problemas estáticos e dinâmicos em placas anisotrópicas submetidas a carregamentos de flexão. O trabalho se baseia na teoria de placas finas de *Kirchhoff*. Uma vez que a formulação dinâmica de elementos de contorno não foi encontrada na literatura consultada, as análises são realizadas utilizando-se uma formulação desenvolvida a partir das soluções fundamentais para elastostática. As integrais de domínio, provenientes dos carregamentos distribuídos ou dos termos de inércia, são transformadas em integrais de contorno usando-se o método da reciprocidade dual. Esta formulação é aplicada no cálculo da deflexão de placas isotrópicas e anisotrópicas, na análise dinâmica de estruturas ortotrópicas, anisotrópicas e estruturas de materiais compósitos laminados, submetidas a cargas harmônicas. É analisada a influência dos nós internos e da malha na precisão dos resultados. Os resultados numéricos são apresentados para problemas quase-isotrópicos, ortotrópicos e totalmente anisotrópicos. Os resultados obtidos são comparados com resultados presentes na literatura e mostram boa concordância.

*Palavras chaves:* Anisotropia, Dinâmica, Materiais compostos, Métodos de elementos de contorno, Placas (Engenharia).

## Abstract

Paiva, William Portilho, *Analysis of Static and Dynamic Problems in Anisotropic Plate Bending Using the Boundary Element Methods*. Campinas, Mechanical Engineering Faculty, State University of Campinas, 2005, 175 p. Ph. D. Thesis (Doctorate).

Here, static and dynamic analysis of a number of anisotropic problems using the boundary element method are presented. The formulation used is developed from the elastostatic fundamental solutions and the domain integrals due to inertial terms are transformed into boundary integrals by using the dual reciprocity method. Application is made to the calculation of deflections in anisotropic plates, to the dynamic analysis of orthotropic plates and to the analysis of anisotropic and composite laminar plates under harmonic loads. Numerical results are presented for quasi-isotropic, orthotropic and anisotropic problems. The influence of number of internal nodes and number of boundary elements on the accuracy of the results is analyzed. The results are compared with other results from the literature showing good agreement.

*Keywords:* Anisotropy, Dynamic, Composite materials, Boundary element method, Plates.

# Sumário

Lista de Figuras	xxi
Lista de Tabelas	xxiii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações gerais sobre materiais compósitos . . . . .	1
1.2 Considerações iniciais sobre o estudo de placas . . . . .	4
1.3 Evolução do método dos elementos de contorno . . . . .	5
1.4 Conteúdo do presente trabalho . . . . .	7
<b>2 Introdução aos materiais compósitos</b>	<b>11</b>
2.1 Definição e considerações preliminares . . . . .	11
2.2 Características gerais . . . . .	12
2.3 Vantagens e desvantagens . . . . .	14
2.4 Aplicações . . . . .	15
2.5 Classificação . . . . .	17
2.6 Comportamento mecânico . . . . .	18
<b>3 Elasticidade anisotrópica</b>	<b>21</b>
3.1 Análise de tensão e deformação . . . . .	21
3.1.1 Tensor de tensões . . . . .	22
3.1.2 Equações de equilíbrio . . . . .	23
3.1.3 Tensor de deformações . . . . .	24
3.1.4 Equações de compatibilidade . . . . .	25
3.2 Elasticidade anisotrópica . . . . .	26
3.3 Equação constitutiva de uma lâmina . . . . .	32
3.4 Equação constitutiva de um laminado simétrico . . . . .	35
<b>4 Introdução à teoria de placas</b>	<b>39</b>
4.1 Considerações gerais . . . . .	39
4.2 Hipóteses básicas . . . . .	41
4.3 Placa de <i>Kirchhoff</i> . . . . .	42
4.4 Equações constitutivas . . . . .	43
4.5 Cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias . . . . .	45
4.6 Condições de contorno . . . . .	47

4.7	Placas isotrópicas . . . . .	47
4.7.1	Equação diferencial . . . . .	47
4.7.2	Soluções fundamentais isotrópicas . . . . .	48
4.8	Placas anisotrópicas . . . . .	50
4.8.1	Equação diferencial . . . . .	50
4.8.2	Soluções fundamentais anisotrópicas . . . . .	53
4.8.3	Comportamento da solução fundamental anisotrópica . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Método dos elementos de contorno</b>	<b>61</b>
5.1	Equação integral de contorno . . . . .	61
5.2	Tipos de elementos de contorno . . . . .	69
5.3	Tratamento das singularidades . . . . .	70
5.3.1	Tratamento das singularidades para elementos constantes . . . . .	73
5.3.2	Tratamento das singularidades para elementos quadráticos . . . . .	77
5.4	Implementação computacional . . . . .	82
5.5	Aplicação das condições de contorno e solução do sistema de equações . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Método da reciprocidade dual</b>	<b>87</b>
6.1	Considerações gerais . . . . .	87
6.2	Transformação das integrais de domínio para o contorno . . . . .	88
6.3	Implementação computacional . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Transformação das integrais de carga do domínio para o contorno</b>	<b>93</b>
7.1	Transformação exata . . . . .	93
7.2	Transformação aproximada pelo MRD . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Análise estática de placas isotrópicas</b>	<b>101</b>
8.1	Considerações gerais . . . . .	101
8.2	Placa quadrada simplesmente apoiada em quatro lados . . . . .	102
8.3	Placa retangular simplesmente apoiada em quatro lados . . . . .	109
8.4	Placa simplesmente apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois . . . . .	112
8.5	Placa engastada nos quatro lados . . . . .	113
8.6	Placas sujeitas a diversas condições de contorno . . . . .	115
<b>9</b>	<b>Análise estática de placas anisotrópicas</b>	<b>117</b>
9.1	Estudo de funções de aproximação . . . . .	117
9.2	Estudo de condições de contorno . . . . .	119
9.3	Placa quase-isotrópica retangular apoiada . . . . .	123
9.4	Placa quase-isotrópica quadrada apoiada-engastada . . . . .	125
9.5	Placa quase-isotrópica engastada . . . . .	127
9.6	Placas quase-isotrópicas com geometrias diversas . . . . .	129
9.7	Laminado simétrico quadrado simplesmente apoiado . . . . .	130

<b>10</b>	<b>Análise dinâmica de placas anisotrópicas</b>	<b>133</b>
10.1	Aplicação do MRD na análise de placas sob carregamento harmônico . . . . .	133
10.2	Análise de convergência de malha . . . . .	134
10.3	Análise modal de uma placa ortotrópica simplesmente apoiada . . . . .	135
10.4	Análise modal de uma placa ortotrópica engastada . . . . .	137
<b>11</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>139</b>
11.1	Conclusões . . . . .	139
11.2	Propostas para trabalhos futuros . . . . .	141
<b>A</b>	<b>Relações entre os sistemas de coordenadas cartesiano e polar</b>	<b>151</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo das derivadas da solução fundamental isotrópica</b>	<b>153</b>
B.1	Cálculo de $\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}$ . . . . .	153
B.2	Cálculo de $\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}$ . . . . .	155
B.3	Cálculo de $\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}$ . . . . .	156
<b>C</b>	<b>Cálculo de <math>Q_n^*</math></b>	<b>159</b>
<b>D</b>	<b>Dedução das soluções fundamentais isotrópicas de força cortante equivalente e momento</b>	<b>163</b>
D.1	Dedução de $V_n^*$ . . . . .	163
D.2	Dedução de $M_n^*$ . . . . .	165
<b>E</b>	<b>Derivadas de <math>R_i</math> e <math>S_i</math></b>	<b>171</b>
E.1	Derivadas primeiras de $R_i$ . . . . .	171
E.2	Derivadas segundas de $R_i$ . . . . .	171
E.3	Derivadas terceiras de $R_i$ . . . . .	172
E.4	Derivadas quartas de $R_i$ . . . . .	172
E.5	Derivadas primeiras de $S_i$ . . . . .	173
E.6	Derivadas segundas de $S_i$ . . . . .	173
E.7	Derivadas terceiras de $S_i$ . . . . .	174
E.8	Derivadas quartas de $S_i$ . . . . .	174

# Lista de Figuras

1.1	Primeira seção de fuselagem de jato comercial a ser fabricada com material compósito. Crédito: The Boeing Company. . . . .	3
2.1	À esquerda: Citroën ID-19 1957. À direita: GM Corvette 1953. . . . .	16
2.2	Asa do A380 em fabricação pela Airbus UK. Crédito: Reinforced Plastics Abril-2004 . . . . .	16
2.3	Compósito unidirecional. . . . .	17
2.4	Comportamento mecânico de um material isotrópico. . . . .	18
2.5	Comportamento mecânico de um material anisotrópico. . . . .	19
2.6	Comportamento mecânico de um material ortotrópico. . . . .	19
3.1	Componentes de tensão para estado plano de tensão. . . . .	22
3.2	Deformação de um corpo. . . . .	24
3.3	Lâmina ortotrópica . . . . .	32
3.4	Sistemas de coordenadas da lâmina $(x_1x_2)$ e do laminado $(\bar{x}_1\bar{x}_2)$ . . . . .	33
3.5	Laminado simétrico . . . . .	35
3.6	Transformação de sistemas de coordenadas. . . . .	38
4.1	Definição de lâmina. . . . .	40
4.2	Definição de placa. . . . .	40
4.3	Flecha. . . . .	41
4.4	Equilíbrio de forças e momentos em uma placa. . . . .	44
4.5	Elemento de placa submetido a momentos nas bordas. . . . .	45
4.6	Elemento de placa submetido a momentos em direções arbitrárias. . . . .	45
4.7	Momento volvente no contorno. . . . .	46
4.8	Solução fundamental. . . . .	49
4.9	Comportamento da solução fundamental isotrópica $(0 \leq r \leq 100\,000)$ . . . . .	57
4.10	Comportamento da solução fundamental anisotrópica - $E_1/E_2 \approx 1$ $(0 \leq r \leq 100\,000)$ . . . . .	58
4.11	Comportamento da solução fundamental anisotrópica - $E_1/E_2 = 2$ $(0 \leq r \leq 100\,000)$ . . . . .	58
4.12	Comportamento da solução fundamental isotrópica $(0 \leq r \leq 1)$ . . . . .	59
4.13	Comportamento da solução fundamental anisotrópica - $E_1/E_2 \approx 1$ $(0 \leq r \leq 1)$ . . . . .	60
4.14	Comportamento da solução fundamental anisotrópica - $E_1/E_2 = 2$ $(0 \leq r \leq 1)$ . . . . .	60
5.1	Placa finita contida em uma placa infinita. . . . .	62

5.2	Canto $i$ do contorno da placa. . . . .	66
5.3	Contorno circular acrescido a um canto de placa. . . . .	67
5.4	Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno. . . . .	70
5.5	Aproximação da variável de contorno $w$ por funções polinomiais. . . . .	71
5.6	Elemento quadrático descontínuo. . . . .	78
5.7	Discretização usando elementos constantes. . . . .	84
5.8	Esquema da montagem das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ . . . . .	84
7.1	Transformação da integral de domínio em integral de contorno. . . . .	95
8.1	Placa simplesmente apoiada em suas quatro bordas. . . . .	102
8.2	Malha de elementos de contorno e distribuição de pontos internos. . . . .	103
8.3	Deslocamentos $w(x)$ em $y = 0,1$ . . . . .	104
8.4	Deslocamentos $w(x)$ em $y = 0,2$ . . . . .	105
8.5	Deslocamentos $w(x)$ em $y = 0,3$ . . . . .	106
8.6	Deslocamentos $w(x)$ em $y = 0,4$ . . . . .	107
8.7	Deslocamentos $w(x)$ em $y = 0,5$ . . . . .	108
8.8	Nós internos para cálculo da deflexão. . . . .	109
8.9	Placa simplesmente apoiada em suas quatro bordas. . . . .	110
8.10	Malha de elementos de contorno e distribuição de pontos internos. . . . .	110
8.11	Deslocamentos $w(x)$ em uma placa retangular. . . . .	111
8.12	Deslocamentos $w(x, y)$ em uma placa. . . . .	111
8.13	Placa simplesmente apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois. . . . .	112
8.14	Deslocamentos $w(x)$ em uma placa retangular. . . . .	113
8.15	Placa engastada nos quatro lados. . . . .	114
8.16	Deslocamentos $w(x, y)$ em uma placa ELEE. . . . .	116
9.1	Problema físico: (a) placa apoiada (b) placa engastada. . . . .	118
9.2	Malha de elementos de contorno constante e nós internos. . . . .	118
9.3	Malha quadrada de elementos de contorno (a) constantes e (b) quadráticos. . . . .	123
9.4	Malha retangular de elementos de contorno (a) constantes e (b) quadráticos. . . . .	124
9.5	Configuração geométrica e malhas triangular e semi-circular. . . . .	129
10.1	(e) 5ª frequência = 299,1 Hz. . . . .	135
10.2	Modos de vibrar. . . . .	136
A.1	Sistema de coordenadas. . . . .	151
C.1	$\partial r / \partial n = \cos \beta$ . . . . .	161

# Lista de Tabelas

2.1	Propriedades básicas de alguns metais, fibras e matrizes. . . . .	13
8.1	Erros $\varepsilon$ entre os resultados obtidos pelo MEC e pela série. . . . .	104
8.2	Erros $\varepsilon$ entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos. . . . .	105
8.3	Erros $\varepsilon$ entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos. . . . .	106
8.4	Erros $\varepsilon$ entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos. . . . .	107
8.5	Erros $\varepsilon$ entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos. . . . .	108
8.6	Estudo de convergência da série para valores de deflexão. . . . .	109
8.7	Deslocamentos $w$ no centro da placa - $\nu = 0$ . . . . .	114
8.8	Deslocamentos $w$ no centro da placa - 10 elementos. . . . .	115
8.9	Deslocamentos $w$ no centro da placa - 10 elementos. . . . .	115
9.1	Deflexões $w$ [mm] e erros $\varepsilon$ [%] entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=1$ ). . . . .	119
9.2	Deflexões $w$ [mm] no centro da placa para várias condições de contorno ( $a/b=1$ ). . . . .	120
9.3	Deflexões $w$ [mm] no centro da placa para várias discretizações ( $a/b=1$ ). . . . .	122
9.4	Deflexões $w$ [mm] no centro de uma placa rotacionada ( $a/b=1$ ). . . . .	122
9.5	Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=1$ ) para elementos constantes. . . . .	124
9.6	Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=2$ ) para elementos constantes. . . . .	125
9.7	Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=1$ ). . . . .	125
9.8	Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=2$ ). . . . .	125
9.9	Comparações entre os resultados obtidos e analíticos. . . . .	126
9.10	Comparações entre os resultados obtidos e analíticos. . . . .	127
9.11	Deslocamentos $w$ [mm] no centro da placa. . . . .	128
9.12	Deslocamentos $w$ [mm] no centro da placa. . . . .	128
9.13	Valores de $\alpha$ . . . . .	129
9.14	Deflexão em pontos internos de uma placa triangular. . . . .	130
9.15	Deflexão em pontos internos de uma placa semi-circular. . . . .	130
9.16	Comparativo entre a precisão da deflexão no centro da placa usando MEC e MRD (84 elementos constantes) e MEF (72 elementos triangulares cúbicos usando simetria). . . . .	131
10.1	Frequência fundamental adimensional para placa apoiada. . . . .	137
10.2	Frequência fundamental adimensional para uma placa engastada. . . . .	138

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo será feita uma apresentação geral dos conceitos relacionados aos materiais compósitos, às teorias de placas e ao métodos dos elementos de contorno. Serão dadas algumas definições relacionadas aos materiais compósitos e apresentado um breve relato histórico do uso destes materiais. As três principais teorias de placas e suas características serão relacionadas. Uma revisão sobre a evolução do método dos elementos de contorno e do método da reciprocidade dual, dentro da qual será situado o presente trabalho, também será apresentada. Na seqüência serão expostos os motivos que levaram ao desenvolvimento da formulação aqui desenvolvida. Uma visão geral do presente trabalho também será apresentada.

### 1.1 Considerações gerais sobre materiais compósitos

Materiais compósitos podem ser definidos como aqueles formados a partir da associação de dois ou mais materiais distintos, chamados constituintes. Em geral os constituintes apresentam propriedades mecânicas, elétricas ou térmicas muito diferentes entre si.

O emprego de materiais compósitos como materiais de alta performance remonta há milhares de anos. Uma grande quantidade deles pode ser encontrada na natureza. Os ossos do corpo humano, por exemplo, são formados por laminados fibrosos multidirecionais. Estes laminados são constituídos por camadas de fibras de colágeno reforçadas por fosfato de cálcio. Madeira e bambu são outros exemplos de compósitos naturais de alta performance. São constituídos de fibras de celulose em uma matriz de lignina e apresentam uma alta resistência na direção das fibras aliada à baixa densidade e condutividade térmica.

O início da utilização de materiais compósitos pela humanidade se perdeu no tempo. Supõe-se que o início do desenvolvimento dos compósitos laminados tenha se dado no Egito antigo, na região do vale do Rio Nilo, por volta de 3500 a.C. Artigos de madeira eram construídos a partir de lâminas de madeira coladas umas às outras, em direções transversais. Originalmente esta técnica deve ter sido usada devido à uma escassez de madeira de boa qualidade: finas lâminas de madeira de boa qualidade era coladas sobre um substrato de madeira de qualidade inferior. O objetivo disso era apenas dar um melhor acabamento às peças, com benefícios estruturais ocorrendo por acaso. Laminados compósitos também eram conhecidos dos assírios que, por volta de 1000 a.C, já os empregavam na fabricação de arcos e flechas (Hickman 1959). Registros escritos sobre o emprego de compósitos são mais recentes. Um dos primeiros registros é encontrado na Bíblia. O livro de Êxodo, no Velho Testamento, cita que por volta de 800 a.C. os israelitas introduziram o uso de palha picada feita com vegetais fibrosos para reforçar tijolos de argila. Semelhantemente, as civilizações pré-colombianas da América Central utilizavam fibras vegetais para reforçar tijolos e cerâmicas. Descobertas arqueológicas recentes trouxeram à tona máscaras e adornos fabricados com materiais laminados compostos de tecido-argila até então desconhecidos na região (Beaubien e Kaplan 2000). Provavelmente esses reforços eram mais usados para diminuir os danos causados pelo aparecimento de trincas durante o processo de secagem da argila do que para obter algum reforço estrutural.

O desenvolvimento de compósitos estruturais só teve início muito séculos depois com o surgimento do concreto armado, do cimento-amianto, dos polímeros reforçados com fibras de vidro, boro etc. Os compósitos poliméricos reforçados por fibras começaram a surgir por ocasião da Segunda Guerra. Nessa época foi lançada a primeira edição do livro de Lekhnitskii (1968) sobre elasticidade anisotrópica bidimensional, o qual se tornou um clássico na área.

As pesquisas por materiais de alta resistência, alta rigidez e baixo peso impuseram ciclos históricos na aplicação de materiais na indústria aeronáutica. Partindo do uso da madeira, passando pelas ligas de alumínio e magnésio, chega-se ao estado atual, no qual a indústria aeroespacial está, cada vez mais, substituindo o uso de metais pelo uso de compósitos fibra-

matriz. Em 2003 a Boeing começava a apontar para o desenvolvimento de uma aeronave com alto índice de utilização de materiais compósitos. Em 12 de junho de 2003, a empresa anunciava em seu site, a decisão de iniciar a fabricação do 7E7, o primeiro jato comercial a ter a maior parte das estruturas primárias - incluindo asas e fuselagem - fabricada com materiais compósitos. Em 11 de janeiro de 2005 a empresa anunciava a entrega da primeira seção da fuselagem (Figura 1.1).



Figura 1.1: Primeira seção de fuselagem de jato comercial a ser fabricada com material compósito. Crédito: The Boeing Company.

A princípio com utilização restrita à indústria aeroespacial, atualmente a utilização dos materiais compósitos modernos vem se estendendo aos mais diversos ramos industriais. O motivo desse crescimento é que esses materiais apresentam características bastante desejáveis para muitas aplicações em engenharia. A facilidade de distribuição e alinhamento das fibras na matriz permite que possam ser obtidas propriedades mecânicas, térmicas e elétricas bastante específicas para o material de modo que este venha a atender as exigências de determinado projeto.

Na maioria das vezes, devido a forma com que as fibras são dispostas na matriz, o material compósito passa a apresentar, como característica, maior rigidez e resistência mecânica em uma determinada direção. Esta característica, chamada anisotropia, fornece ao engenheiro

um material de baixa densidade e de alta rigidez e resistência mecânica que, num projeto bem elaborado, coincidem com a direção de maior sollicitação da estrutura. Por outro lado, a anisotropia torna o tratamento matemático de estruturas de materiais compósitos bem mais difícil do que o tratamento de estruturas de materiais isotrópicos. Devido a sua grande importância, os materiais compósitos têm sido objeto de muitos estudos, com vários livros publicados sobre o assunto (Agarwal e Broutman 1990; Gibson 1994; Staab 1999; Kollár e Springer 2003; Qatu 2004).

## 1.2 Considerações iniciais sobre o estudo de placas

A adoção de hipóteses simplificadoras, visando analisar a placa como um elemento bi-dimensional, fez surgir diferentes teorias para verificar o comportamento geral desta superfície estrutural. Kirchhoff (1950) estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas finas, derivando a expressão da energia potencial para uma placa inclinada e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais para obter uma equação diferencial, onde a rigidez a flexão foi definida em termos do módulo de Young e coeficiente de Poisson. Adicionalmente, ele percebeu que as três condições de contorno naturais propostas por Poisson (1829) não eram compatíveis com a natureza de quarta ordem da equação diferencial obtida e mostrou que estas poderiam ser reduzidas a duas condições de contorno naturais. Esta teoria não leva em conta o efeito da deformação pelo esforço cortante, assumindo-se que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação. As hipóteses apresentadas por Kirchhoff resultaram em uma equação diferencial de quarta ordem, na qual o deslocamento é dado em função de duas coordenadas no plano médio da placa. Esta equação pode ser considerada como uma eficiente representação do comportamento de placas finas para pequenos deslocamentos, apresentando boa precisão de resultados para uma grande variedade de carregamentos e geometrias. Entretanto, a teoria desenvolvida por Kirchhoff não apresenta bons resultados quando são analisadas placas de maior espessura. Neste caso devem ser aplicadas as teorias de placas moderadamente espessas, tornando o problema de flexão de placas mais análogo e próximo à teoria da elasticidade tridimensional. A teoria formulada por Reissner (1944) assume uma distribuição de tensões internas e leva em consideração o efeito da deformação

pelo esforço cortante. Com isso, é obtido um sistema de equações diferenciais de sexta ordem e, a partir deste sistema, satisfaz-se as três condições de contorno necessárias para o problema. Mindlin (1951) também formulou uma teoria semelhante para analisar placas moderadamente espessas onde, assumindo-se que as distorções que ocorrem na espessura são constantes, as tensões são obtidas a partir da geometria imposta para as deformações. O sistema de equações diferenciais obtido é de sexta ordem e também satisfaz as três condições de contorno requeridas. As formulações apresentadas por Reissner e Mindlin podem ser consideradas como expressivas contribuições para o aprimoramento da teoria bidimensional de placas.

### 1.3 Evolução do método dos elementos de contorno

As soluções analíticas para problemas de elasticidade envolvendo materiais anisotrópicos restringem-se a um pequeno número de problemas estáticos de domínios simples. No caso de estruturas, o domínio torna-se bastante complexo, sendo que seu tratamento só é possível através de métodos numéricos ou métodos experimentais. Com a evolução dos computadores os métodos numéricos passaram a ser utilizados para um número bem maior de problemas. Dentre os métodos numéricos que mais se destacam no tratamento de problemas estruturais estão o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC).

A obtenção de uma formulação de elementos de contorno é matematicamente mais complicada que a de elementos finitos, todavia, os elementos de contorno possuem como atrativo a possibilidade de reduzir o número de dimensões do problema (Somigliana 1885), o que leva a um conjunto reduzido de equações e a uma quantidade menor de dados requeridos para computação. Embora a idéia de redução do número de dimensões do problema pelo uso de formulação integral de contorno seja conhecida desde o final do século XIX, o MEC, na forma como é apresentado hoje, só se desenvolveu quase 80 anos depois, quando Rizzo (1967) e Cruse e Rizzo (1968) apresentaram a formulação das equações integrais singulares, com as variáveis físicas acopladas umas às outras na formulação direta do método. A partir disso, o MEC se desenvolveu de forma bastante rápida, sendo atualmente um método bem estabelecido, com vasta bibliografia publicada (Brebbia e Domínguez 1989; Domínguez

1993; Kane 1994; Wrobel 2002; Aliabadi 2002; Gaul *et al.* 2003).

A primeira formulação do método dos elementos de contorno para problemas anisotrópicos foi proposta por Rizzo e Shyppy (1970). Uma importante contribuição foi dada por Cruse e Swedlow (1971) que propuseram uma solução fundamental para materiais anisotrópicos em termos de funções de variáveis complexas. Vogel e Rizzo (1973) e Wilson e Cruse (1978) apresentaram as primeiras aplicações do método dos elementos de contorno na análise de problemas anisotrópicos tridimensionais. A partir destes trabalhos, a solução fundamental no espaço complexo tem sido bastante usada nas mais diferentes aplicações do método dos elementos de contorno. As primeiras aplicações do MEC em análise de placas anisotrópicas começaram a surgir na década de 80. Wu (1980) e Wu e Altiero (1981) apresentaram a solução fundamental anisotrópica para placas numa aplicação do método indireto dos elementos de contorno. A mesma solução fundamental foi usada por Shi e Bezine (1988) e por Rajamohan e Raamachandran (1999) na análise de placas anisotrópicas pelo método direto dos elementos de contorno e pelo método de simulação de carga, respectivamente. Na mesma linha dos trabalhos anteriores, Albuquerque *et al.* (2003a) apresentaram uma análise de flexão em compósitos laminados.

Análises de outros problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos também foram realizadas por Deb e Banerjee (1990), Sollero e Aliabadi (1993), Zhang e Gross (1993), Deb (1996), Aliabadi e Sollero (1998), Albuquerque *et al.* (2003b) e Zhang (2000), dentre outros.

As soluções fundamentais isotrópicas para problemas de elastostática e elastodinâmica já se encontram bem estabelecidas e já foram estudadas para os mais diversos problemas. Para materiais anisotrópicos, porém, a solução fundamental analítica só se encontra bem estabelecida para elastostática (Beskos 1997) sendo que a necessidade de pesquisas para problemas de dinâmica ainda persiste.

Uma alternativa para se tratar problemas elastodinâmicos é o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual proposto por Nardini e Brebbia (1982). Nesta formulação são usadas as soluções fundamentais da elastostática para problemas dinâmicos, sendo que a integral de domínio proveniente do termo de inércia é transformada em integral de contorno

através da aplicação do teorema da reciprocidade. A primeira aplicação do método dos elementos de contorno de reciprocidade dual para o tratamento de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos foi proposta por Schlar e Partridge (1993) para problemas estacionários tridimensionais e por Albuquerque *et al.* (2003b) para problemas transientes bidimensionais.

Estudos de problemas de flexão em placas usando o método dos elementos de contorno têm sido realizado por vários pesquisadores. Problemas elastostáticos de flexão de placas isotrópicas são mostrados por Paiva (1987), Silva (1988), El-Zafrany *et al.* (1995), Rashed *et al.* (1998), Sanches (1998), Chaves *et al.* (1999) e He (2000) enquanto problemas de flexão de placas isotrópicas sujeitas a solicitação dinâmica são mostrados por Davies e Moslehy (1994), Tanaka *et al.* (1998) e Simões (2001). Análises estáticas de flexão em placas anisotrópicas são mostradas por Shi e Bezzine (1988) e Rajamohan e Raamachandran (1999).

## 1.4 Conteúdo do presente trabalho

A motivação para o desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno voltada para a análise do comportamento mecânico dos materiais compósitos advém da crescente utilização desses materiais devido às suas excelentes propriedades mecânicas. O recente impulso verificado atualmente na indústria aeroespacial brasileira mostra ser este um campo de pesquisa muito importante a ser explorado pelos pesquisadores brasileiros, uma vez que as simulações numéricas têm se apresentado como ferramentas indispensáveis no sucesso alcançado pelas empresas dessa área, com uma redução significativa no tempo de concepção.

O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido há várias décadas e através dos anos se consolidando como uma ferramenta de análise computacional extremamente útil em várias disciplinas de engenharia. Tem sido aplicado em muitos problemas de elasticidade e sua formulação básica para tais problemas publicada por vários autores (Brebbia e Domínguez 1989; Kane 1994; Banerjee 1994). Todavia, não foram encontradas na literatura consultada, formulações para a análise de problemas de flexão de placas anisotrópicas solicitadas dinamicamente, usando o método dos elementos de contorno. Assim, nesta tese será apresentado o desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno de reciprocidade dual cujo objetivo é a análise numérica de flexão em placas de materiais compósitos sujeitas a

solicitações dinâmicas. Na formulação desenvolvida são utilizadas as soluções fundamentais de flexão da elastostática (Wu e Altiero 1981). As integrais de domínio provenientes dos termos de inércia são transformados em integrais de contorno através do uso do método da reciprocidade dual. A formulação desenvolvida foi implementada em um programa computacional e vários problemas foram analisados. A precisão dos resultados numéricos obtidos no presente trabalho é analisada pela comparação com resultados analíticos obtidos na literatura e com resultados numéricos obtidos usando-se outros métodos, como o método das diferenças finitas e o métodos dos elementos finitos.

No Capítulo 2 será apresentada uma definição de material compósito. Também será apresentada uma classificação dos compósitos quanto à sua forma construtiva e uma visão geral sobre suas características, tais como: composição, propriedades mecânicas e comportamento mecânico. Os casos em que esses materiais são aplicados e as vantagens e desvantagens que isso implica também serão abordados.

No Capítulo 3 será feita uma introdução aos conceitos básicos da teoria da elasticidade para materiais anisotrópicos. A formulação de tensão e deformação será revista, levando à definição da equação constitutiva anisotrópica. Será mostrada a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados simétricos a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados.

No Capítulo 4 serão apresentadas algumas considerações gerais sobre placas, incluindo as definições e nomenclatura relacionadas. As hipóteses básicas em que se baseiam as teorias de placas serão introduzidas. Uma vez introduzidas, estas hipóteses serão relacionadas com a teoria de *Kirchhoff*. Com base nesta teoria, serão obtidas as equações constitutivas de placas. Será mostrado o cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias. Também serão relacionadas as variáveis referentes às três principais condições de contorno: livre, apoiada e engastada. Será apresentada ainda a obtenção das equações diferenciais e das soluções fundamentais, isotrópica e anisotrópica.

No Capítulo 5 a formulação de elementos de contorno será apresentada de forma detalhada. Será apresentada a obtenção da equação integral de contorno e os tipos de elementos de contorno. Também será apresentado o tratamento das singularidades para elementos

constantes e quadráticos. A implementação computacional, a aplicação das condições de contorno e a solução do sistema de equações também serão detalhadas. O método é baseado em equações integrais de contorno. Por meio do teorema da reciprocidade, dois estados são relacionados, sendo um conhecido e outro a ser determinado. O estado a ser determinado é o do problema a ser resolvido, o objetivo da análise (o meio, o corpo, a peça), o qual tem geometria, carregamentos e condições de contorno definidos. O estado conhecido é dado pela solução fundamental, que é a resposta de um domínio infinito, cujas propriedades são as mesmas do estado a ser determinado, à aplicação de uma carga concentrada unitária e pontual.

No Capítulo 6 será desenvolvida a formulação do método da reciprocidade dual (MRD) para o tratamento de problemas bidimensionais de elasticidade em materiais anisotrópicos, considerando a presença de forças de corpo genéricas. Por meio do MRD as integrais de domínio provenientes das forças de corpo serão transformadas em integrais de contorno. A consideração das forças de corpo como genéricas irá facilitar a particularização da formulação para o tratamento de problemas específicos apresentados nos capítulos posteriores.

No Capítulo 7 serão apresentadas duas outras formulações alternativas para se evitar a discretização do domínio. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio proveniente da carga distribuída em integral de contorno. A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o MRD.

No Capítulo 8 serão apresentados alguns exemplos da aplicação da formulação do método dos elementos de contorno. Serão analisados diferentes problemas envolvendo variadas condições de contorno, dimensões e propriedades de material. Nos exemplos apresentados será utilizada a formulação isotrópica.

No Capítulo 9 serão apresentados vários exemplos da aplicação da formulação do MEC e do MRD, usando elementos constantes e quadráticos, na análise estática de placas anisotrópicas. Serão analisados diferentes problemas envolvendo variadas condições de contorno, dimensões, propriedades de material, malhas e funções de aproximação.

No Capítulo 10 será apresentada uma metodologia para análise numérica de placas anisotrópicas sob carregamento harmônico. O comportamento da placa obedece as hipóteses

da teoria de *Kirchhoff*. As integrais de domínio devido à presença da carga harmônica serão transformadas em integrais de contorno usando-se o MRD. Várias análises serão apresentadas, nas quais será calculada a frequência fundamental para diversas condições de contorno e propriedades de material. A precisão dos resultados numéricos é verificada pela comparação entre resultados analíticos ou calculados pelos métodos das diferenças finitas ou elementos finitos.

Finalmente, no Capítulo 11 serão apresentadas as considerações finais e conclusões obtidas através da análise dos resultados apresentados nesta tese. Também serão citados os tópicos relacionados com o tema do presente trabalho que ainda demandam pesquisas e ficam como sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Introdução aos materiais compósitos

Neste capítulo será apresentada uma definição de material compósito. Também será apresentada uma classificação dos compósitos quanto à sua forma construtiva e uma visão geral sobre suas características, tais como: composição, propriedades mecânicas e comportamento mecânico. Os casos em que esses materiais são aplicados e as vantagens e desvantagens que isso implica também serão abordados.

### 2.1 Definição e considerações preliminares

A palavra compósito significa constituído de duas ou mais partes. Qualquer material que tenha dois ou mais materiais constituintes distintos, chamados fases, pode ser considerado como um material compósito. No entanto, esta definição é muito vaga e pode abranger, por exemplo, os materiais metálicos, pois em geral são constituídos por vários elementos de liga, ou os plásticos, que recebem grande número de aditivos e pigmentos em sua composição. Dessa forma, procura-se estreitar um pouco mais esta classificação considerando-a válida somente quando as fases apresentam diferenças significativas entre suas propriedades físicas e as propriedades do compósito resultante sejam sensivelmente diferentes das propriedades das fases, tomadas isoladamente. Tais diferenças geralmente são mais evidentes quando: as fases são materiais quimicamente distintos, quando vistos numa escala macroscópica; as fases definem claramente uma interface; uma das fases representa mais de 10% do volume total do material; a relação entre as propriedades mecânicas das fases é igual ou maior que 5 (Agarwal e Broutman 1990).

Desde há muito tempo o homem vem se utilizando de materiais compósitos. Atualmente nota-se que não há limites quando se combinam diferentes materiais com o objetivo de produzir um compósito buscando um material no qual as vantagens se reforcem e evitando aqueles onde as desvantagens se combinem (Staab 1999).

Os compósitos formam, atualmente, uma importante classe de materiais de engenharia que oferece propriedades mecânicas excepcionais, flexibilidade de projeto e facilidade de fabricação únicas. Vantagens adicionais incluem: alta relação entre resistência e peso, resistência à corrosão, excelente resistência à fadiga e níveis de isolamento acústico acima dos apresentados pelos metais (Agarwal e Broutman 1990).

## 2.2 Características gerais

Em geral os materiais compósitos apresentam as seguintes características: baixa massa específica aliada à resistência e rigidez específicas altas, estabilidade dimensional, grande resistência à fadiga, grande resistência à corrosão, baixa transmissão de ruídos, versatilidade de projeto com possibilidade de escolha da direção de maior resistência, várias possibilidades de combinações de constituintes, e pequena quantidade de energia requerida durante o processo de fabricação.

Os constituintes de um compósito são, geralmente, arranjos de forma que uma ou mais fases descontínuas são embebidas em uma fase contínua. A fase contínua é chamada de matriz e a descontínua é chamada de reforço pois, normalmente, é muito mais resistente que a fase contínua.

Dentre as várias classes de matrizes podem ser citadas as poliméricas, cujas resinas mais comumente utilizadas são: epóxi, fenólica e poliéster. Dentre os reforços mais comumente utilizados estão as fibras de vidro, de Kevlar, de grafite e de boro, as quais podem ter o diâmetro variando desde milésimos de milímetro até alguns centímetros. A Tabela 2.1 resume as propriedades básicas de alguns metais, fibras e matrizes para efeito de comparação (Nabarrete 1998).

Tabela 2.1: Propriedades básicas de alguns metais, fibras e matrizes.

	Material	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	E [MPa]	G [MPa]	$\nu$	$\sigma_{rup}$ [MPa]	$\epsilon$ [%]
Metais	Aço	7800	205000	79000	0,3	400 a 1600	1,8 a 10
	Liga de Al	2800	75000	29000	0,3	450	10
Reforços	Vidro E	2600	81000	33000	0,22	2600	4,9
	Vidro S	2500	89000	37000	0,2	4400	5,7
	Kevlar 49	1450	130000	12000	0,4	3600	2,8
	Carbono HR	1750	230000	40000	0,3	3300	1,4
	Carbono HM	1900	390000	21000	0,4	3400	0,6
Matrizes	Epóxi	1200	4500	1600	0,4	130	2
	Poliéster	1200	4000	1400	0,4	80	2,5

Na Tabela 2.1,  $\rho$  representa a densidade do material, E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\sigma_{rup}$  é a tensão de ruptura à tração e  $\epsilon$  é o alongamento.

Normalmente os valores teóricos de resistência mecânica dos materiais são muito maiores que aqueles reais obtidos na prática. Esta disparidade ocorre devido à presença de imperfeições e falhas nos materiais. Como a população de falhas e defeitos em um sólido é proporcional ao seu volume, a redução de suas dimensões implica em uma redução da ocorrência de defeitos. Por este motivo os reforços quase sempre estão sob a forma de fibras. O fato de transformar determinado material em fibra reduz muito seu volume em relação à sua área, resultando na diminuição da quantidade de defeitos que poderiam estar presentes no material com conseqüente aumento de sua resistência mecânica (Agarwal e Broutman 1990).

Entretanto, a utilização de fibras diretamente como material de construção mecânica é, de certa forma, impraticável devido à possibilidade destas se embramarem e torcerem e, também, à dificuldade de dar-lhes uma forma particular e ainda, transmitir e distribuir o carregamento entre si. Quando associadas a uma matriz para formar um compósito, as fibras são unidas pela matriz que as mantém dispostas de maneira organizada. A matriz também é responsável pela transferência do carregamento às fibras, por protegê-las de ataques do meio, por facilitar o manuseio e assegurar a forma do componente mecânico.

O comportamento mecânico dos materiais compósitos é complexo e determinado, principalmente, pelas fibras. As fibras são fornecidas na forma de fios, mantas, tecidos ou fios

picados. As características dos compósitos podem variar enormemente quando fabricados por diferentes processos, ainda que materiais constituintes idênticos sejam utilizados. Isto ocorre porque o processo afeta diretamente a microestrutura do produto final (Sih 1987; Staab 1999).

As propriedades físicas e mecânicas dos compósitos são dependentes das propriedades, geometria e concentração dos constituintes. Aumentando o volume de reforço a resistência e a rigidez do material podem ser aumentadas até um limite a partir do qual tornam a diminuir devido ao volume de reforço ser tão grande que o volume de matriz se torna insuficiente para mantê-los separados e eles perdem a adesão entre si. A adesão entre as fibras e a matriz é muito importante pois o comportamento mecânico dos compósitos é, também, dependente da interação fibra-matriz.

No projeto de um componente de material compósito ainda deve ser levado em conta, além das propriedades do reforço e da matriz, o arranjo geométrico que define a disposição do reforço na matriz, a fração de volume de cada um dos constituintes na mistura, o carregamento ao qual o componente será submetido quando em operação e o ambiente em que estará trabalhando.

## **2.3 Vantagens e desvantagens**

Os compósitos reforçados com fibras já se firmaram como excelentes materiais de construção mecânica. Um exemplo é a substituição das ligas de alumínio convencionais por compósitos reforçados com fibras de carbono, que superam as propriedades mecânicas das ligas de alumínio em cerca de três vezes, em aplicações aeronáuticas. Além disso a fabricação de qualquer componente em compósito consome muito menos energia que a fabricação do mesmo componente em alumínio. A fabricação de um componente mecânico em material compósito demanda somente um sétimo da energia necessária para a produção do mesmo componente usando alumínio.

Por outro lado, componentes fabricados com compósitos têm alguns inconvenientes: a matéria-prima em si é mais cara que a maioria dos metais comumente utilizados, o que eleva o preço do componente; a reparação de peças danificadas é mais difícil; apresentam níveis

de qualidade muito baixos ao serem reciclados. Os materiais compósitos, quando danificados, apresentam ainda um outro problema: os componentes fabricados com compósitos são capazes de absorver energias de impacto consideravelmente maiores que similares fabricados com metais, porém, quando falham, apresentam uma fratura frágil, isto é, falham sem aviso. Assim, um impacto forte pode separar a matriz da fibra sem produzir sinais externamente visíveis. Isso aponta, posteriormente, para uma falha de um componente aparentemente intacto, ao contrário daqueles fabricados com metais dúteis, que se deformam ao sofrerem impactos, o que, em termos de segurança, é interessante, pois possibilita a detecção visual da falha.

Um grande problema enfrentado pelas companhias aéreas é a manutenção de suas aeronaves. Embora o material laminado normalmente permaneça não danificado exteriormente, finas camadas podem se separar umas das outras no interior do material. Granizo ou pássaros batendo contra aeronaves são, algumas vezes, suficientes para iniciar esse processo. Nestes casos, a peça inteira deve ser trocada, encarecendo a manutenção do equipamento. Entretanto, a troca da peça é necessária apenas nos casos em que o componente é de muita responsabilidade. Já na indústria automobilística, por exemplo, é muito comum a execução de reparos em partes de componentes com grande sucesso.

## 2.4 Aplicações

Atualmente os compósitos reforçados com fibras são rotineiramente usados nas mais diversas aplicações: aeroespaciais, automobilísticas, na construção civil, em plataformas marítimas, contêineres e tubulações, na fabricação de materiais esportivos e de lazer, na fabricação de artigos de segurança e defesa, de aparelhos eletrônicos e eletrodomésticos.

A utilização de materiais compósitos tem crescido muito nos últimos anos, começando a ganhar um caráter de otimização estrutural devido as suas características de alta resistência mecânica aliada ao baixo peso específico, o que vem ampliando seu campo de aplicação. Além da indústria aeroespacial que foi uma das primeiras a utilizá-los, outra indústria que vem aumentando sua utilização é a automobilística. Já nos anos 50, compósitos de fibra de vidro e epóxi começaram a ser utilizados pela Citroën na fabricação do D-19 com uma produção

anual de 70.000 veículos e também pela General Motors na fabricação do Corvette, com uma produção anual de 10.000 veículos (Nabarrete 1998).



Figura 2.1: À esquerda: Citroën ID-19 1957. À direita: GM Corvette 1953.

Nos anos 60 começaram a ser introduzidos os primeiros compósitos em aviões de passageiros. A princípio eram usados compósitos de fibra de vidro em painéis. A partir de 1980 o Airbus A310 passou a utilizar *spoilers*, lemes para estabilizadores verticais e outras partes estruturais fabricados com compósitos reforçados com fibras de carbono que representam cerca de 8% de contribuição no peso estrutural total da aeronave, enquanto no A320 essa contribuição é de 12% chegando a 16% no A340 (Hilgert 1994).



Figura 2.2: Asa do A380 em fabricação pela Airbus UK. Crédito: Reinforced Plastics Abril-2004

Na Alemanha já se projetam cabines de locomotivas feitas totalmente de compósito re-

forçado com fibras de carbono em matriz epóxi, reduzindo seus pesos para cerca de um terço em comparação com as fabricadas em aço.

No Brasil a indústria automobilística faz uso maciço de compósitos na construção de autopeças como pára-choques, capôs, e até cabines para as linhas de ônibus e caminhões. Além das vantagens já citadas em termos de peso e resistência as cabines de compósitos têm ainda outros pontos positivos: são mais silenciosas que suas concorrentes em aço, graças às melhores propriedades de absorver sons dos materiais compósitos e ao contrário das fabricadas com aço, não apresentam corrosão.

## 2.5 Classificação

Os materiais compósitos podem ser classificados de várias formas conforme sua característica preponderante. Tomando como referência o reforço, os compósitos podem ser classificados como reforçados por partículas ou como reforçados por fibras. Conforme a disposição do reforço na matriz obtém-se um material unicamada, multicamada, unidirecional etc. Porém, não são estas as únicas variáveis que vão influenciar o comportamento do material, pois suas propriedades vão depender da forma final do componente fabricado, da geometria das fibras, das dimensões das fibras, da distribuição, do volume, do alinhamento e da concentração das fibras na matriz. Devido a tantas variáveis é possível moldar ou construir um sistema compósito adequado e perfeitamente ajustado a uma aplicação em particular.

Tomando como ponto de partida o sistema compósito mais simples de ser estudado temos o compósito laminado unidirecional, que consiste de fibras paralelas inseridas em uma matriz (Figura 2.3).

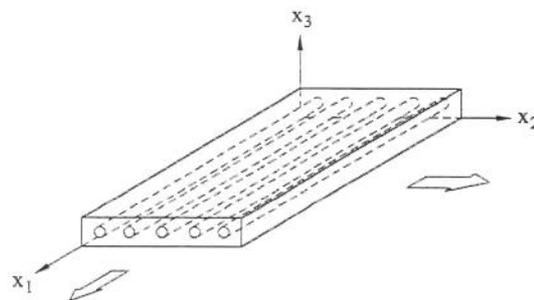


Figura 2.3: Compósito unidirecional.

Este sistema é chamado de lâmina. Um compósito laminado é um sistema formado por várias lâminas dispostas em uma seqüência de orientação conveniente, tal que o laminado resultante apresente as características requeridas no projeto.

## 2.6 Comportamento mecânico

Uma vez que esta tese apresenta análises de problemas envolvendo tanto os materiais com comportamento mecânico isotrópico como aqueles com comportamento mecânico anisotrópico, cabe aqui uma descrição onde fiquem patentes as diferenças básicas entre as propriedades de cada um deles. Essas diferenças podem ser explicadas por meio das suas respostas aos carregamentos de tração e cisalhamento.

Considere três corpos de prova sendo o primeiro fabricado com material isotrópico, o segundo com material ortotrópico e o terceiro com material anisotrópico.

Um carregamento uniaxial em tração no corpo de prova isotrópico causa um alongamento na direção do carregamento e uma contração na direção transversal, enquanto que os ângulos entre dois lados adjacentes não sofrem nenhuma mudança (Figura 2.4).

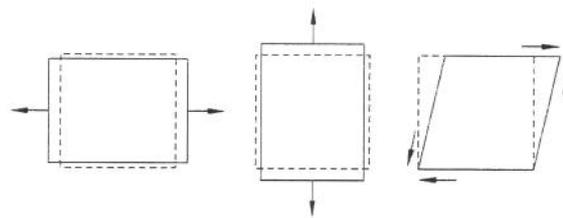


Figura 2.4: Comportamento mecânico de um material isotrópico.

Da mesma forma, a distorção causada por um carregamento de cisalhamento puro altera os ângulos entre lados adjacentes sem causar alteração alguma nos comprimentos. Além disso, quando a direção do carregamento aplicado é alterada, a resposta do material permanece constante. Isto é, carregamentos iguais, aplicadas em diferentes direções, causam alterações iguais nos comprimentos e ângulos. Portanto, conclui-se que o comportamento dos materiais isotrópicos é independente da direção do carregamento, que tensões normais causam apenas deformações volumétricas e que tensões de cisalhamento causam apenas deformações geométricas.

No corpo de prova anisotrópico existe, tipicamente, um acoplamento entre alongamento e deformação de cisalhamento segundo o qual o carregamento uniaxial em tração causa alterações tanto nos comprimentos como nos ângulos (Figura 2.5).

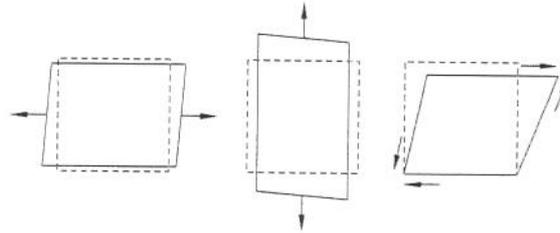


Figura 2.5: Comportamento mecânico de um material anisotrópico.

Da mesma forma, um carregamento de cisalhamento puro também resulta em alterações tanto nas dimensões lineares como nas angulares. Além disso, quando o carregamento é aplicado em diferentes direções seus efeitos são alterações desiguais em comprimentos e ângulos. Ou seja, o comportamento dos materiais anisotrópicos é dependente da direção da aplicação do carregamento.

A resposta de um material ortotrópico, em geral, é similar à do material anisotrópico, ou seja, é dependente da direção da aplicação do carregamento. Carregamentos de tração ou de cisalhamento provocarão tanto alterações em comprimentos quanto em ângulos. Entretanto, em casos especiais, quando os carregamentos são aplicados em algumas direções específicas, a resposta do material é similar à dos materiais isotrópicos nos quais tensões normais causam apenas deformações volumétricas e tensões de cisalhamento causam apenas deformações geométricas (Figura 2.6). Estas direções com comportamento especial são os eixos de simetria do material.

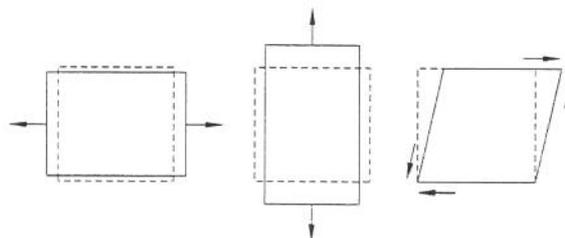


Figura 2.6: Comportamento mecânico de um material ortotrópico.

Os materiais ortotrópicos tridimensionais, geralmente, têm três eixos de simetria perpendiculares entre si. Os compósitos unidirecionais são materiais ortotrópicos nos quais as direções longitudinais e transversais são eixos de simetria. Devido a essa característica os compósitos unidirecionais também são chamados de transversalmente isotrópicos. Em geral os compósitos laminados apresentam comportamento ortotrópico ou anisotrópico.

# Capítulo 3

## Elasticidade anisotrópica

Neste capítulo será feita uma introdução aos conceitos básicos da teoria da elasticidade para materiais anisotrópicos. A relação entre tensão e deformação será revista, levando à definição da equação constitutiva anisotrópica. Será mostrada a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados simétricos a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados. Será mostrada a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados simétricos a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados. As formulações matemáticas presentes neste capítulo serão usadas nos capítulos posteriores, quer seja na obtenção da formulação do método dos elementos de contorno, quer seja na comparação com resultados numéricos obtidos a partir das formulações propostas.

### 3.1 Análise de tensão e deformação

Neste trabalho faz-se uso da teoria da elasticidade linear clássica, a qual é baseada em duas hipóteses de linearidade: linearidade física e linearidade geométrica. A primeira assume que a equação constitutiva dada pela relação tensão-deformação é linear. A segunda assume que as deformações podem ser representadas pelo tensor de deformação infinitesimal de Cauchy.

São usadas a notação de tensor Cartesiano e a notação indicial, salvo onde explicitamente mencionado. De acordo com a convenção da notação indicial, o uso de índices repetidos indicam uma somatória, eliminando o uso do símbolo  $\sum$ . As derivadas parciais são representadas por uma vírgula, por exemplo:  $\kappa_{i,j} \equiv \partial\kappa_i/\partial x_j$  com  $(i, j = 1, 2)$ . O delta de Kronecker,

denotado por  $\delta_{ij}$ , representa a matriz identidade.

São introduzidas as definições básicas de elasticidade para problemas bidimensionais, assumindo-se que as forças externas são funções das coordenadas Cartesianas  $x_1, x_2$  prescritas. Um corpo contínuo sofre deformação quando sua configuração inicial muda ou deforma devido a uma ação física. A análise dessa deformação também é apresentada.

### 3.1.1 Tensor de tensões

Um corpo bidimensional deformável, em equilíbrio, submetido a cargas externas, é mostrado na Figura 3.1. Em geral, um corpo pode ser submetido a dois tipos de carregamentos externos: forças de corpo ou forças de superfície. As forças de corpo atuam em porções de volume ou massa internos ao corpo. Forças centrífugas, magnéticas e gravitacionais são exemplos de forças de corpo. As forças de superfície atuam no contorno do corpo.

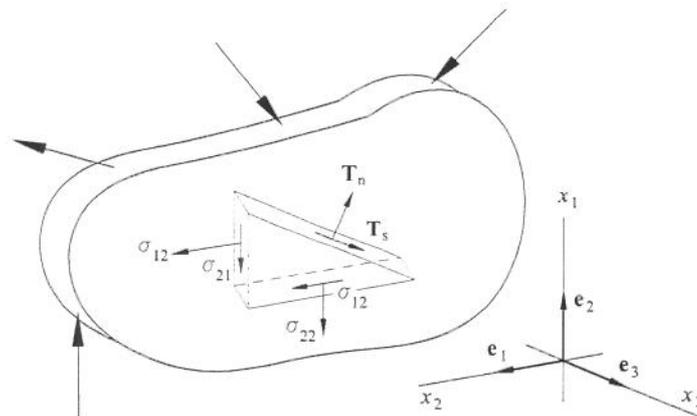


Figura 3.1: Componentes de tensão para estado plano de tensão.

Seja um elemento de área  $\Delta S$  situado no interior ou na superfície de um corpo e  $\Delta \mathbf{F}$  as forças resultantes que atuam em  $\Delta S$ . O conceito de tensão é obtido fazendo-se a área  $\Delta S$  tender a zero e assumindo-se que a relação  $\Delta \mathbf{F} / \Delta S$  tende a um limite definido:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \mathbf{T} \quad , \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{T}$  é o vetor das forças de superfície e representa a força por unidade de área em um ponto, atuando em um elemento infinitesimal.

O caso particular no qual  $\mathbf{T}_1$  e  $\mathbf{T}_2$  representam as forças de superfícies que atuam em faces perpendiculares aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  resulta em:

$$\mathbf{T}_i = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões e  $\mathbf{e}_j$  são vetores base unitários.

Se o elemento infinitesimal mostrado na Figura 3.1 está em equilíbrio, o vetor de forças de superfície  $T_i$  em um ponto qualquer no contorno  $\Gamma$  é expresso por

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.3)$$

onde  $n_j$  é o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma$  nesse ponto.

### 3.1.2 Equações de equilíbrio

Se o corpo está em equilíbrio, a somatória de todas as forças que agem em cada elemento infinitesimal (Figura 3.1) deve ser igual a zero, isto é,

$$\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (3.4)$$

onde  $b_i$  é o vetor de forças de corpo,  $\rho$  é a densidade do material e  $\ddot{u}_i$  é o vetor de acelerações, que corresponde à segunda derivada do vetor de deslocamentos  $u_i$  em relação ao tempo  $\tau$ .

Pode-se mostrar que, na ausência de forças de corpo, a Equação (3.4) se reduz a

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (3.5)$$

Estas equações de equilíbrio são satisfeitas se

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}, \\ \sigma_{12} &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A função  $F(x_1, x_2)$  é chamada função de tensão de Airy (Lekhnitskii 1963).

Por sua vez, o equilíbrio de momentos é expresso por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.7)$$

que implica na simetria do tensor de tensões.

### 3.1.3 Tensor de deformações

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. Sejam P e Q dois pontos tomados em um corpo em estado não deformado. Estes pontos são separados por uma distância  $dS$  e tem coordenadas  $x_i$  e  $x_i + dx_i$ , respectivamente, como mostrado na Figura 3.2. Quando este corpo é submetido a um carregamento externo, passa a assumir uma configuração deformada e os pontos P e Q são deformados para P' e Q', definidos pelas coordenadas  $\xi_i$  e  $\xi_i + d\xi_i$ , respectivamente. A distância entre P' e Q' é dada por  $ds$ .

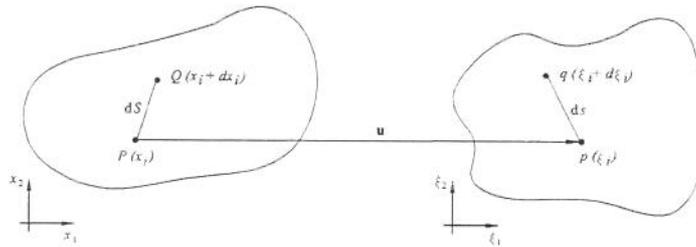


Figura 3.2: Deformação de um corpo.

Assumindo que os componentes de deslocamento  $u_i$  em P são funções de  $x_i$ , isto é,

$$u_i = u_i(x_1, x_2), \quad (3.8)$$

e usando a transformação

$$d\xi_i = (\delta_{ij} + u_{i,j})dx_j, \quad (3.9)$$

pode-se mostrar que a deformação ocorre sempre que  $dS^2 \neq ds^2$ . Esta deformação pode ser expressa pelos componentes  $\gamma_{ij}$  do tensor de deformações de Green, definido por:

$$ds^2 - dS^2 = 2\gamma_{ij}dx_idx_j. \quad (3.10)$$

Expressando  $ds$  e  $dS$  em termos de componentes Cartesianos, resulta que os componentes de deformações finitas são dados por

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j} \quad (3.11)$$

e que o tensor de deformações é simétrico. Para gradientes de deslocamento  $u_{k,i}$  suficientemente pequenos ( $|u_{k,i}| \ll 1$ ), o produto na Equação (3.11) é desprezível e  $\gamma_{ij}$  reduz-se a

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.12)$$

Esta simplificação resulta no tensor de deformações simétrico ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ) para deformações infinitesimais.

### 3.1.4 Equações de compatibilidade

Para garantir a unicidade dos deslocamentos  $u_i$ , os componentes  $\epsilon_{ij}$  do tensor de deformações não podem ser atribuídos arbitrariamente, mas devem satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. Estas condições podem ser obtidas pela eliminação de  $u_i$  das Equações (3.12) através da diferenciação destas equações em relação a  $x_k$  e  $x_l$  e trocando a ordem das derivadas, resultando:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0, \quad (3.13)$$

que reduz se à forma

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = \epsilon_{12,12} \quad (3.14)$$

para o caso bidimensional.

## 3.2 Elasticidade anisotrópica

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões e o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.15)$$

sendo o coeficiente de linearidade  $C_{ijkl}$  um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor das propriedades elásticas. Devido às restrições de simetria tem-se que

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (3.16)$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que

$$C_{ijkl} = C_{klji}. \quad (3.17)$$

Estas considerações reduzem o número de propriedades elásticas de 81 para 21. Como a direção das tensões principais não coincidem necessariamente com a direção das deformações principais, apenas 18 das 21 propriedades são independentes (Lekhnitskii 1963).

Considerando as 21 propriedades elásticas, a Equação (3.15) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.18)$$

A Equação (3.15) também pode ser escrita na forma

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (3.19)$$

onde  $S_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido as mesmas razões do tensor de propriedades elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes.

A Equação (3.19) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1963), a Equação (3.20) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como (Lekhnitskii 1963)

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1/E_1 & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\
a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\
a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\
a_{22} &= 1/E_2 & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\
a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} & a_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\
a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & a_{33} &= 1/E_3 \\
a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & a_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\
a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & a_{44} &= 1/G_{23} \\
a_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} & a_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\
a_{55} &= 1/G_{13} & a_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\
a_{66} &= 1/G_{12}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde  $E_k$  são os módulos de elasticidade longitudinais, referindo-se aos eixos  $x_k$ ,  $G_{ij}$  são os módulos de elasticidade transversais, para os planos definidos pelos eixos  $x_i x_j$ . Os coeficientes  $\nu_{ij}$  são chamados coeficientes de Poisson. As constantes  $\eta_{jk,l}$  são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes  $\eta_{l,jk}$  são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim,  $\zeta_{ij,kl}$  são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em planos outros, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ( $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ ), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a Equação (3.21) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \tag{3.25}$$

Em estado plano de deformação ( $\sigma_3 = -1/a_{33}(a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{36}\sigma_6)$ ,  $\sigma_4 = \sigma_5 = \varepsilon_3 = 0$ ) a Equação (3.21) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

onde

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6). \quad (3.27)$$

Substituindo as Equações (3.12), (3.15) na Equação (3.4), obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos

$$C_{ijkl}u_{k,jl} + p_i = 0 \quad (3.28)$$

onde  $p_i$  é o termo que contém todas as forças de volume.

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções  $F(x_1, x_2)$  chamadas funções tensão de Airy (Lekhnitskii 1963) dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + \mathcal{U} \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + \mathcal{U} \\ \sigma_{12} &= -F_{,12}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma função potencial na qual

$$\mathcal{U}_{,i} = p_i. \quad (3.30)$$

Substituindo as Equações (3.29) na equação constitutiva (3.25) e então na equação de compatibilidade (3.14), resulta na equação diferencial para funções tensão  $F(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ -(a_{12} + a_{22})\mathcal{U}_{,11} + (a_{16} + a_{26})\mathcal{U}_{,12} - (-a_{11} + a_{12})\mathcal{U}_{,22}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

No caso da ausência de forças de corpo a Equação (3.31) pode ser escrita como

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0. \quad (3.32)$$

Criando o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (3.33)$$

aplicando este operador na função tensão  $F(x_1, x_2)$  na forma

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0 \quad (3.34)$$

e expandindo a Equação (3.34) tem-se

$$\begin{aligned} & F_{,2222} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1222} + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4) F_{,1122} \\ & - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1112} + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1111} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

As Equações (3.32) e (3.35) serão idênticas se  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  forem raízes da equação

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0. \quad (3.36)$$

As raízes da Equação (3.36) são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares ( $\mu_k$  e  $\bar{\mu}_k$ ) conforme mostrado por Lekhnitskii (1968).

Criando-se a variável

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad k = 1, 2 \quad (3.37)$$

tem-se que

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k}. \quad (3.38)$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se

$$F(x_1, x_2) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \quad (3.39)$$

Introduzindo a notação

$$\frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \Psi_k(z_k), \quad (3.40)$$

onde a convenção de soma não é empregada em  $k$ , e substituindo a Equação (3.39) na Equação (3.29), obtém-se os componentes de tensão

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\text{Re} \left[ \mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re} \left[ \Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re} \left[ \mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right]\end{aligned}\tag{3.41}$$

onde  $\Psi_k^{(1)}$  representa a primeira derivada de  $\Psi_k$ .

Substituindo a Equação (3.41) na Equação (3.25) e então na Equação (3.28), desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned}u_1 &= 2\text{Re} [q_{11} \Psi_1(z_1) + q_{12} \Psi_2(z_2)] \\ u_2 &= 2\text{Re} [q_{21} \Psi_1(z_1) + q_{22} \Psi_2(z_2)]\end{aligned}\tag{3.42}$$

onde

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26} \end{bmatrix}\tag{3.43}$$

é a matriz de parâmetros complexos.

Uma vez que as condições de contorno sejam conhecidas, determina-se a função tensão, dada pelas Equações (3.29) com derivadas dadas pela Equação (3.40), que satisfaça estas condições, determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas Equações (3.42), e tensões, dados pelas Equações (3.41).

### 3.3 Equação constitutiva de uma lâmina

Se for considerada apenas uma lâmina, na qual as fibras imersas numa matriz estão alinhadas unidirecionalmente (Figura 2.3), esta lâmina é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

onde  $Q_{ij}$  são as componentes do tensor de rigidez, ou seja

$$\mathbf{Q} = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}. \quad (3.45)$$

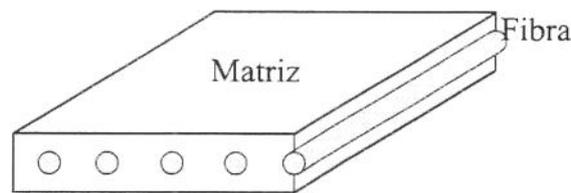


Figura 3.3: Lâmina ortotrópica

Considerando, como hipótese básica, a homogeneização da lâmina, em termos das propriedades de engenharia, os componentes do tensor de rigidez podem ser escritos como

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) & Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} & Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sendo a lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro propriedades elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais  $E_1$  e  $E_2$  nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal  $G_{12}$  e a razão de Poisson,  $\nu_{12}$ . A quinta propriedade elástica,  $\nu_{21}$  pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da matriz  $\mathbf{Q}$

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2. \quad (3.47)$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina ( $x_1, x_2$ ) não são coincidentes com os eixos do laminado ( $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ). Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual deve ser transformada para o eixo de referência do laminado (Figura 3.4) para então se determinar a relação constitutiva.

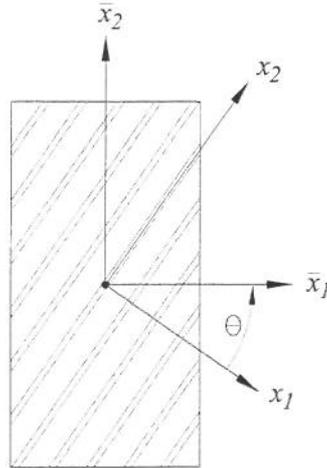


Figura 3.4: Sistemas de coordenadas da lâmina ( $x_1x_2$ ) e do laminado ( $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ).

Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

onde  $\sigma'_{ij}$  e  $\varepsilon'_{ij}$  são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e  $\mathbf{T}$  a matriz de transformação dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

sendo

$$m = \cos\theta \quad (3.51)$$

$$n = \text{sen}\theta. \quad (3.52)$$

Convém observar que a matriz inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo  $\theta$ , conforme Figura 3.4, pelo ângulo negativo  $-\theta$ . A equação constitutiva pode ser escrita da forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

onde  $(\mathbf{T}^{-1})'$  representa a matriz transposta da matriz inversa de  $\mathbf{T}$  e

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Multiplicando-se as matrizes da Equação (3.53), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

onde

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \text{sen}^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \text{sen}^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\text{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\text{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen} \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) (\text{sen}^3 \theta \cos \theta)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\text{sen}\theta \cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\text{sen}\theta \cos^3\theta) \quad (3.56)$$

A matriz  $\bar{Q}$  é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas,  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$ , são combinações lineares das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz  $\bar{Q}$  é parecida com a matriz  $Q$  dos materiais totalmente anisotrópicos ( $\bar{Q}_{16} \neq 0$ ,  $\bar{Q}_{26} \neq 0$ ). Quando se tem  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

### 3.4 Equação constitutiva de um laminado simétrico

Laminados simétricos são laminados cujas lâminas são montadas de maneira que haja um plano médio em relação ao qual para cada lâmina de um lado deste plano existe uma outra, idêntica em propriedade e orientação, localizada a mesma distância porém do outro lado deste plano médio (Figura 3.5).

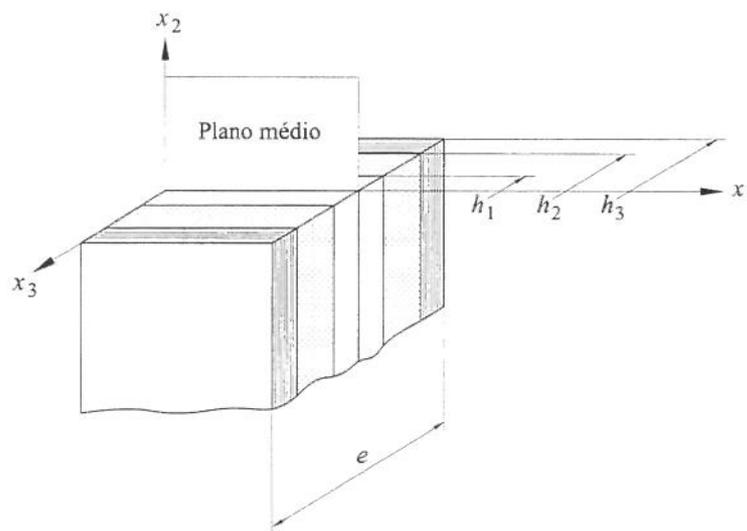


Figura 3.5: Laminado simétrico

A não existência de um plano médio implica num laminado no qual não é possível uma análise bidimensional pois, mesmo que o carregamento seja constante em relação ao eixo  $x_3$ ,

ao longo de toda a espessura do laminado, além das deformações no plano  $x_1x_2$ , haveria também uma flexão em torno do eixo  $x_1$ , aparecendo deformações nos três eixos.

A hipótese inicial sobre a qual os laminados simétricos podem ser tratados pela formulação aqui apresentada é que as deformações em qualquer reta perpendicular ao plano  $x_1x_2$  sejam as mesmas em toda a espessura do laminado. Isto equivale a dizer que as lâminas encontram-se perfeitamente coladas (não há escorregamentos entre uma lâmina e outra).

Os componentes do tensor de tensões atuantes num laminado são obtidas integrando as componentes atuantes em cada lâmina, ao longo de toda a espessura  $e$  do laminado, ou seja

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \sigma'_{ij} dx_3 \quad (3.57)$$

onde  $\sigma'_{ij}$  é o tensor de tensão atuante em uma lâmina individual e  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensão média no laminado.

Considere o laminado constituído de  $N$  lâminas genericamente ortotrópicas, conforme mostrado na Figura 3.5. As forças atuantes no plano médio deste laminado podem ser obtidas pela substituição da integral contínua pela soma das integrais, representando a contribuição de cada lâmina

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}_l dx_3. \quad (3.58)$$

Substituindo a Equação (3.55) na Equação (3.58) tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_l \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} dx_3 \right\}. \quad (3.59)$$

Convém lembrar que o tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}$  é, por hipótese, o mesmo em todas as lâminas.

Sendo a matriz de rigidez  $\bar{Q}_l$  e o vetor deformação  $\varepsilon_{ij}$  constantes ao longo da espessura da lâmina ( $h_l - h_{l-1}$ ), a Equação (3.59) pode ser reescrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \left[ \sum_{l=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_l (h_l - h_{l-1}) \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.60)$$

A matriz de rigidez média pode ser expressa como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_L \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

onde

$$\mathbf{Q}_L = \left[ \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \mathbf{Q}_l (h_l - h_{l-1}) \right] \quad (3.62)$$

que é equivalente à matriz de rigidez constitutiva do laminado.

O tensor de flexibilidade para o laminado é dada pelo inverso do tensor de rigidez, ou seja

$$[a_{ij}]_L = \mathbf{Q}_L^{-1}. \quad (3.63)$$

Muitas vezes tem-se ainda a necessidade de se escrever o tensor de rigidez  $\mathbf{Q}$  e de flexibilidade  $[a_{ij}]$  do laminado em relação a um outro referencial. Neste caso, por um procedimento similar ao realizado para encontrar as Equações (3.56) determina-se que

$$a'_{11} = a_{11} \cos^4 \theta + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a_{22} \sin^4 \theta + (a_{16} \cos^2 \theta + a_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta$$

$$a'_{22} = a_{11} \sin^4 \theta + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a_{22} \cos^4 \theta - (a_{16} \cos^2 \theta + a_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta$$

$$a'_{12} = a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$a'_{66} = a_{66} + 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2(a_{26} - a_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$a'_{16} = [a_{22} \sin^2 \theta - a_{11} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta$$

$$+ a_{16} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) + a_{26} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$a'_{26} = [a_{22} \cos^2 \theta - a_{11} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta + a_{16} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + a_{26} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \quad (3.64)$$

onde  $a'_{ij}$  representa a matriz de constantes elásticas do laminado escrita no sistema  $x'_1, x'_2$  (Figura 3.6) enquanto que  $a_{ij}$  representa esta mesma matriz escrita no sistema  $x_1, x_2$ .

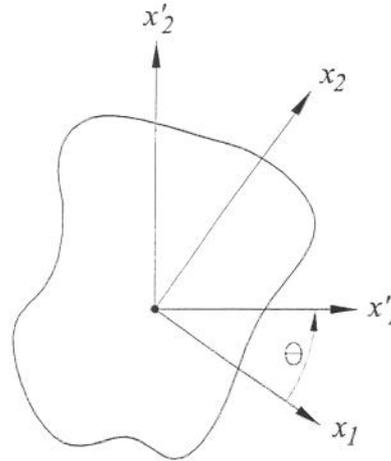


Figura 3.6: Transformação de sistemas de coordenadas.

As raízes da equação característica podem ser escritas num novo sistema de coordenadas, conforme mostrado por Lekhnitskii (1968) como

$$\mu'_k = \frac{\mu_k \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \quad (3.65)$$

onde  $\mu'_k$  representa as raízes da equação característica no referencial  $x'_1, x'_2$  e  $\mu_k$  as raízes da mesma equação no referencial  $x_1, x_2$ .

# Capítulo 4

## Introdução à teoria de placas

Neste capítulo serão apresentadas algumas considerações gerais sobre placas, incluindo as definições e nomenclatura relacionadas. As hipóteses básicas em que se baseiam as teorias de placas serão introduzidas. Uma vez introduzidas, estas hipóteses serão relacionadas com a teoria de *Kirchhoff*. Com base nesta teoria serão obtidas as equações constitutivas de placas. Será mostrado o cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias. Também serão relacionadas as variáveis referentes às três principais condições de contorno: livre, apoiada e engastada. Será apresentada ainda a obtenção das equações diferenciais e das soluções fundamentais, isotrópica e anisotrópica.

### 4.1 Considerações gerais

Na classificação usual da teoria da elasticidade existem os elementos estruturais unidimensionais (barras, vigas e eixos), os elementos estruturais bidimensionais (as lâminas, subclassificadas em chapas, placas e cascas) e os elementos tridimensionais, que são sólidos onde as três dimensões perpendiculares entre si são de ordem de grandeza equivalentes. Neste trabalho serão estudados somente os elementos de placas.

As **lâminas** são elementos estruturais que têm uma das dimensões, a espessura, muito menor em relação às outras duas. A espessura é “cortada ao meio” por uma superfície equidistante das faces da lâmina, chamada **superfície média** (Figura 4.1). As **chapas** são lâminas com superfície média plana sujeitas a carregamentos nesse plano. As **placas** são lâminas com faces planas e simétricas em relação à superfície média, também plana, e

sujeitas a carregamentos aplicados perpendicularmente a esse plano (Figura 4.2). Finalmente, as **casca**s são lâminas com superfície média curva ou poliédrica.

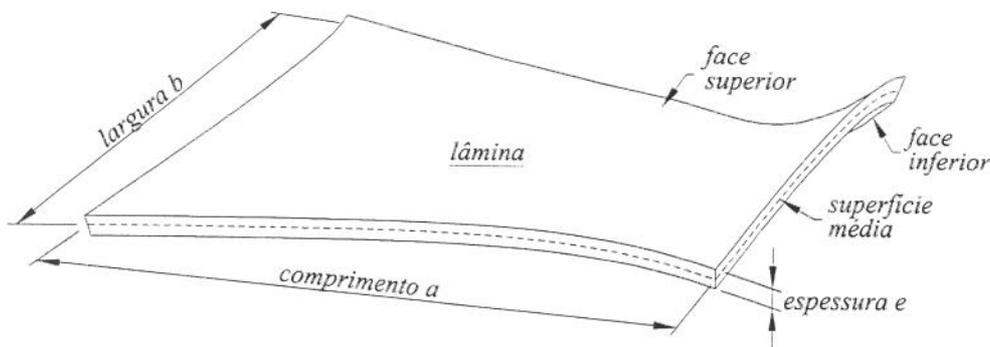


Figura 4.1: Definição de lâmina.

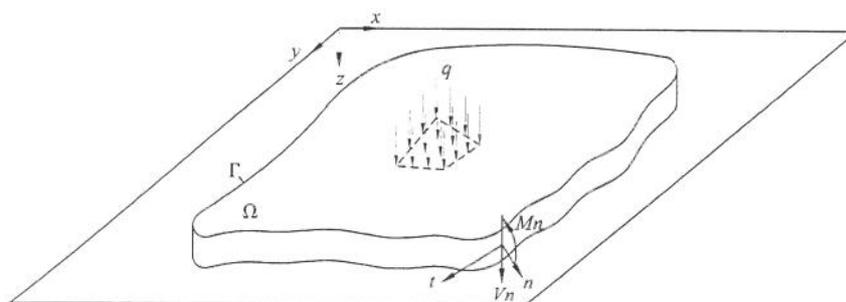


Figura 4.2: Definição de placa.

Uma consideração importante diz respeito à espessura da placa. Uma placa pode ser classificada como espessa, fina ou muito fina, correspondendo a cada classificação um modelo matemático específico. A rigor, não existe uma regra clara para essa classificação, entretanto, considera-se como placa espessa aquela cuja relação entre sua espessura  $e$  e a menor das duas dimensões restantes, ou seja, a largura  $b$ , for maior que  $1/5$ . Uma placa é considerada fina quando a relação  $e/b$  for menor que  $1/5$  e é considerada muito fina quando essa relação for muito menor. Em qualquer caso, a espessura pode ser constante ou variável. Estas dimensões, entretanto, foram definidas para materiais metálicos, tais como aço e alumínio. Dependendo das propriedades elásticas do material esta razão entre as dimensões tem que ser revista. Uma definição mais completa é baseada no efeito das tensões de cisalhamento

normais ao plano da placa. Se o efeito dessas tensões forem desprezíveis no comportamento da estrutura, então temos uma placa fina.

Outra consideração importante a ser feita relaciona-se com a flecha. Flecha é o deslocamento  $w$  fora do plano de um dado ponto da superfície média da placa quando esta é submetida a um carregamento. A flecha é considerada pequena quando a relação entre o deslocamento  $w$  e a espessura  $e$  for menor que  $1/5$  (Figura 4.3).

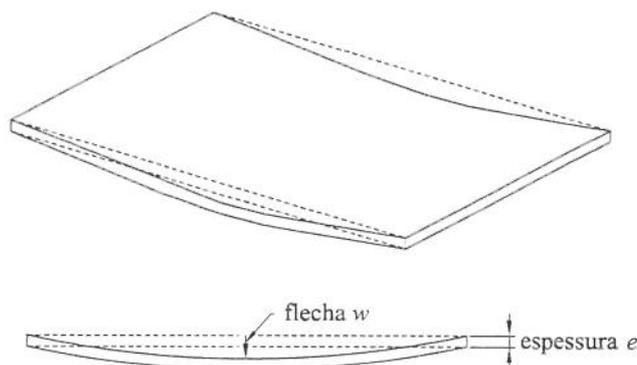


Figura 4.3: Flecha.

Sob a ação de um carregamento a placa se deforma. A superfície média acompanha essa deformação, assumindo uma nova configuração, e recebe o nome de **superfície elástica**.

## 4.2 Hipóteses básicas

O estudo de placas segue basicamente duas teorias: a teoria de Kirchhoff (1950) e a teoria de Reissner-Mindlin (Reissner 1944; Mindlin 1951).

A formulação clássica de *Kirchhoff* para placas finas apresenta algumas hipóteses simplificadoras. Basicamente, o uso destas hipóteses tem como aspecto principal a não consideração do efeito dos esforços cortantes nas deformações por flexão. Isto decorre da hipótese de que seções planas permanecem planas após a deformação. Em função das hipóteses apresentadas nesta teoria, assumida como uma teoria de deformações impostas, pode-se deduzir que o deslocamento  $w$  depende somente de  $x_1$  e  $x_2$  e que os deslocamentos  $u$  e  $v$  são lineares em  $x_3$ .

Com base nas hipóteses adotadas, a análise do comportamento da placa é feita em regime elástico linear para materiais homogêneos. O equilíbrio é feito na posição não deslocada,

utilizando-se a hipótese de pequenas deformações. Sendo assim, se a deflexão da placa é pequena em comparação com sua espessura, quando a mesma está sujeita a um carregamento  $g(x_1, x_2)$ , as seguintes hipóteses podem ser adotadas:

i) Os deslocamentos normais ao plano da placa são pequenos e as deformações na direção da espessura são pequenas o suficiente para serem desprezadas;

ii) As tensões normais atuando nos planos paralelos ao plano médio são pequenas, quando comparadas com as outras componentes de tensão, e podem ser desprezadas;

iii) Os componentes de deslocamento contidas no plano da placa, variam linearmente com a espessura;

iv) Retas normais ao plano médio na posição não deformada permanecem normais após a deformação. Isto significa desprezar as deformações por cortante que causam distorção;

v) Não existem tensões de cisalhamento nas faces externas paralelas ao plano médio da placa.

As teorias de *Reissner* (tensões impostas) e *Mindlin* (deslocamentos impostos) para a flexão de placas moderadamente espessas, consideram ainda o efeito da deformação por cortante na formulação do problema. As hipóteses a serem consideradas por estas formulações são semelhantes àquelas apresentadas na teoria de *Kirchhoff*. Entretanto estas teorias consideram que as retas normais ao plano médio da placa na posição não deformada não mais permanecem normais após a deformação. Isto significa incluir as deformações por cortante, que causam distorção na peça.

### 4.3 Placa de *Kirchhoff*

Uma vez introduzidos todos esses conceitos, pode-se relacioná-los de acordo com a teoria de placas finas, também conhecida como teoria de *Kirchhoff*, na qual se baseia a formulação desenvolvida nesta tese. Na formulação apresentada nesta tese são assumidas algumas hipóteses simplificadoras necessárias para se escreverem as equações diferenciais básicas de um elemento de placa fina.

Com relação ao material assume-se que esse seja:

- isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico;

- homogêneo;
- elástico-linear.

Concernente à geometria, assume-se que a placa tem espessura:

- fina;
- constante.

Quanto ao comportamento da placa em relação ao carregamento considera-se que:

- os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura  $e$  da placa (as flechas são pequenas);
- não há deformação do plano médio da placa;
- um plano normal à superfície média da placa, antes da deformação, permanece normal à superfície média deformada, após a deformação;
- as tensões normais e de cisalhamento na direção transversal à placa são desprezíveis.

## 4.4 Equações constitutivas

A Figura 4.4 mostra um elemento de dimensões  $dx$  e  $dy$  extraído de uma placa submetida a uma carga  $q = q(x, y)$ . Nessa figura indicam-se os esforços internos por unidade de comprimento segundo os sentidos considerados positivos.

O equilíbrio de forças na direção  $w$  nesse elemento é dado por

$$-Q_x \partial y + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \partial x \right) \partial y - Q_y \partial x + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \partial y \right) \partial x + q \partial x \partial y = 0. \quad (4.1)$$

Após algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (4.2)$$

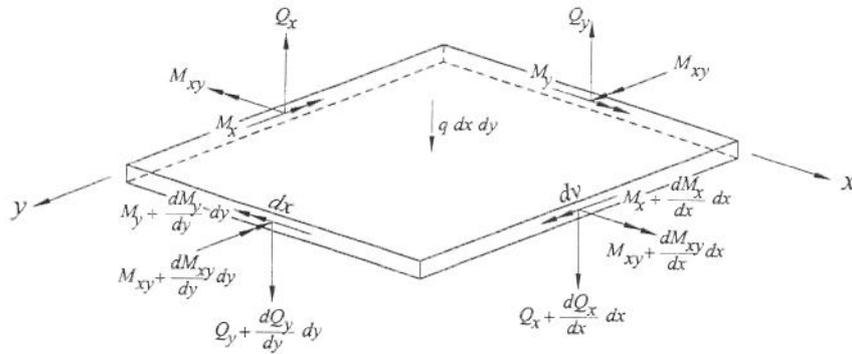


Figura 4.4: Equilíbrio de forças e momentos em uma placa.

O equilíbrio de momentos em relação a um eixo paralelo a  $x$  que passa pelo centro do elemento é dado por:

$$Q_y \partial x \frac{\partial y}{2} + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \partial y \right) \partial x \frac{\partial y}{2} - M_{xy} \partial y + \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \partial x \right) \partial y \quad (4.3)$$

$$+ M_y \partial x - \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} \partial y \right) \partial x = 0.$$

Após algumas considerações chega-se à seguinte equação:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y. \quad (4.4)$$

O equilíbrio de momentos em relação a um eixo paralelo a  $y$  que passa pelo centro do elemento é dado por:

$$-Q_x \partial y \frac{\partial x}{2} - \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \partial x \right) \partial y \frac{\partial x}{2} + M_{xy} \partial x - \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \partial y \right) \partial x \quad (4.5)$$

$$- M_x \partial y + \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \partial x \right) \partial y = 0.$$

Novamente, após algumas considerações, tem-se:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x. \quad (4.6)$$

Estas são as equações de equilíbrio de um elemento de placa.

## 4.5 Cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias

Ao aplicarem-se momentos  $M_x$  e  $M_y$  em planos perpendiculares entre si surgem momentos de flexão e de torção em dois planos arbitrários e perpendiculares entre si. Tomando um elemento ABCD de uma placa solicitada nas bordas por momentos  $M_x$  e  $M_y$  observa-se que as faces desse elemento também estão submetidas a  $M_x$  e  $M_y$  (Figura 4.5).

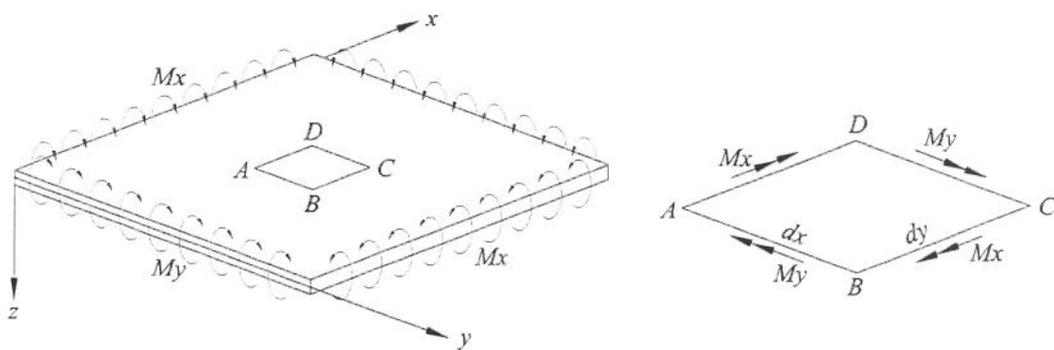


Figura 4.5: Elemento de placa submetido a momentos nas bordas.

Tomando os eixos  $n$  e  $t$  perpendiculares entre si e formando o ângulo  $\alpha$  com os eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, os momentos provocados por  $M_x$  e  $M_y$  em planos paralelos a essas direções serão  $M_n$  e  $M_{nt}$  (Figura 4.6).

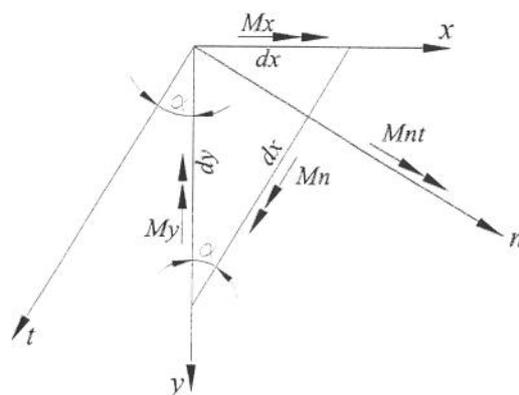


Figura 4.6: Elemento de placa submetido a momentos em direções arbitrárias.

O momento fletor  $M_n$  e o momento volvente  $M_{nt}$  são considerados positivos pela regra da mão direita de acordo com os eixos  $n$  e  $t$ .

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo  $t$  tem-se  $M_n$ ,

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.7)$$

e, fazendo-se o equilíbrio em torno do eixo  $n$  tem-se  $M_{nt}$

$$M_{nt} = (M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (4.8)$$

Da mesma forma a força cortante  $Q_n$  pode ser escrita como:

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha. \quad (4.9)$$

Kirchhoff (1950) mostrou que as condições de contorno de força cortante  $Q_n$  e momento volvente  $M_{nt}$  podem ser escritas como uma única condição de contorno dada por (Figura 4.7):

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}. \quad (4.10)$$

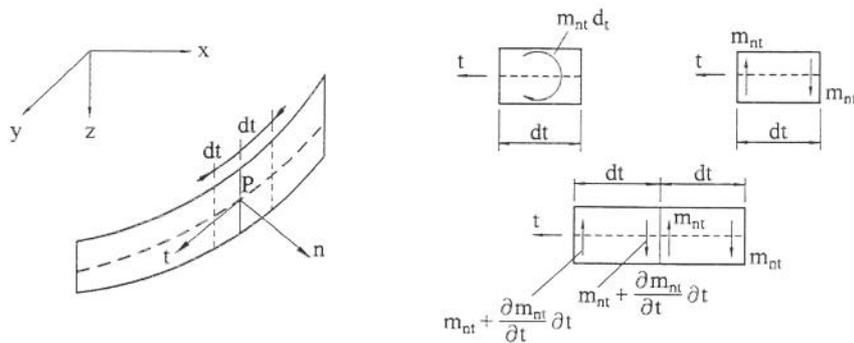


Figura 4.7: Momento volvente no contorno.

Portanto, as condições de contorno de deslocamentos são a deflexão  $w$  e a rotação  $\frac{\partial w}{\partial n}$  e as condições de contorno de carregamento são a força cortante equivalente  $V_n$  e o momento fletor  $M_n$ .

## 4.6 Condições de contorno

Para solucionar o problema de placas é necessária a prescrição das condições de contorno do problema em questão. Considerando-se o sistema de coordenadas genérico  $n_t$  da Figura 4.2, as condições de contorno podem ser dadas por:

Condições de contorno	Conhecidas	Desconhecidas
Engastada	$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	$V_n \quad M_n$
Apoiada	$w = 0 \quad M_n = 0$	$\frac{\partial w}{\partial n} \quad V_n$
Livre	$V_n = 0 \quad M_n = 0$	$w \quad \frac{\partial w}{\partial n}$

Com relação às condições de contorno, a teoria de *Kirchhoff* determina que apenas duas condições são suficientes para a completa determinação de  $w$ .

## 4.7 Placas isotrópicas

### 4.7.1 Equação diferencial

Conhecendo-se os momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  dados por

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (4.11)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (4.12)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4.13)$$

onde  $D$  é a rigidez à flexão da placa, e derivando-se esta expressão obtém-se (Fernandes 1974):

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right); \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = D(1 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}; \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D(1 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}. \quad (4.17)$$

Substituindo as expressões de (4.14) a (4.17) nas expressões (4.4) e (4.6) obtém-se  $Q_x$  e  $Q_y$  em função do deslocamento  $w$ , dados por

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad (4.18)$$

$$Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (4.19)$$

A Equação (4.2) está escrita em função das derivadas de  $Q_x$  e  $Q_y$ , as quais são dadas por

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right); \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right). \quad (4.21)$$

que, substituídas em (4.2) resulta na equação diferencial de placas elásticas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (4.22)$$

Esta equação é também conhecida como equação de Lagrange.

### 4.7.2 Soluções fundamentais isotrópicas

Na formulação das equações integrais do método dos elementos de contorno, por meio do teorema da reciprocidade, dois estados de tensão num corpo são relacionados. Um estado de tensão é conhecido e o outro necessita ser determinado. O estado a ser determinado está relacionado com o problema a ser resolvido, ou seja, com a análise a ser realizada. O problema

a ser resolvido pode ser representado por um meio, um corpo ou uma peça mecânica, o qual tem geometria, carregamentos e condições de contorno definidos. O estado conhecido é dado pela resposta de um corpo de domínio infinito, cujas propriedades de material são as mesmas do estado a ser determinado, à aplicação de uma carga concentrada unitária e pontual. À esta resposta é dado o nome de solução fundamental.

A formulação do método dos elementos de contorno requer o conhecimento da solução fundamental de um problema de elasticidade. A solução fundamental é a resposta de um meio elástico infinito, cujas propriedades de material são as mesmas do componente que se quer analisar, à aplicação de um carregamento unitário pontual. No caso particular de placas, a solução fundamental é dada pelo deslocamento  $w$  em um ponto  $P'(x, y)$  qualquer do domínio, chamado ponto campo, devido a aplicação de uma carga unitária  $q$  em um ponto  $P(x_0, y_0)$  qualquer, chamado ponto fonte (Figura 4.8).

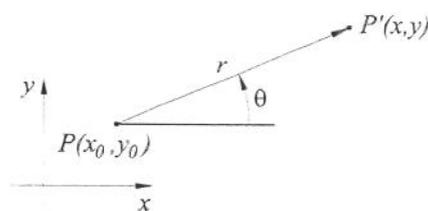


Figura 4.8: Solução fundamental.

Na Figura 4.8,  $r$  é a distância do ponto fonte ao ponto campo e  $\theta$  é o ângulo entre o vetor formado por  $r$  e o eixo  $x$  do sistema de coordenadas adotado.

Dentre as várias soluções fundamentais encontradas na literatura (Bézine 1978; Stern 1979; Danson 1979), optou-se por usar

$$w^* = \frac{r^2}{8\pi D} \left( \ln(r) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.23)$$

que apresenta como vantagem ter suas derivadas escritas de forma mais simples (Danson 1979). Essa escolha se deve ao fato que o método de elementos de contorno exige a utilização de diversas derivadas da solução fundamental  $w^*$ . As demais soluções fundamentais são derivadas desta e dadas por

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{r}{4\pi D} \ell n(r), \quad (4.24)$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 (1 - \nu) + \nu \right\}, \quad (4.25)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ \nu + 2\text{sen}^2 \beta (1 - \nu) - 3 \right] + \frac{1 - \nu}{4\pi R} \cos 2\beta. \quad (4.26)$$

onde  $\beta$  é ângulo formado entre  $r$  e  $n$ , conforme apresentado por Paiva (1987).

## 4.8 Placas anisotrópicas

### 4.8.1 Equação diferencial

A partir das equações de equilíbrio e considerando a simetria de momentos ( $M_{xy} = M_{yx}$ ), conforme mostrado na Seção 4.4, tem-se

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q,$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x,$$

onde os momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  são dados por:

$$\begin{aligned} M_x &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_y &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{xy} &= - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

e as forças cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
Q_x &= \left[ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right], \\
Q_y &= \left[ D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right],
\end{aligned} \tag{4.28}$$

sendo  $w$  a deflexão e  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) os coeficientes de rigidez à flexão da placa, dados por (Lekhnitskii 1968):

$$D_{ij} = B_{ij} \frac{h^3}{12}, \tag{4.29}$$

onde  $h$  é a espessura da placa e  $B_{ij}$  são constantes dadas por:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{1}{\Delta} (a_{22}a_{66} - a_{26}^2), & B_{22} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{66} - a_{16}^2), \\
B_{12} &= \frac{1}{\Delta} (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}), & B_{66} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \\
B_{16} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}), & B_{26} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}, \tag{4.31}$$

sendo que as constantes  $a_{ij}$  são obtidas das equações constitutivas para materiais anisotrópicos, dadas por (Lekhnitskii 1968):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Substituindo as Equações (4.27) e (4.28) em (4.2) a (4.6) obtém-se

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (4.33)$$

conhecida como equação diferencial de flexão para placas anisotrópicas finas, conforme a teoria de Kirchhoff.

Considerando que os coeficientes de rigidez à flexão  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) da placa anisotrópica são dados no sistema de coordenadas  $x, y$ , em um novo sistema de coordenadas  $n, t$  arbitrário, serão dados por  $D'_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ):

$$D'_{11} = D_{11} \cos^4 \alpha + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + D_{22} \sin^4 \alpha + 2(D_{16} \cos^2 \alpha + D_{26} \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha, \quad (4.34)$$

$$D'_{22} = D_{11} \sin^4 \alpha + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + D_{22} \cos^4 \alpha + 2(D_{16} \sin^2 \alpha + D_{26} \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha, \quad (4.35)$$

$$D'_{12} = D_{12} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha \sin 2\alpha, \quad (4.36)$$

$$D'_{66} = D_{66} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha \sin 2\alpha, \quad (4.37)$$

$$D'_{16} = \frac{1}{2} [D_{22} \sin^2 \alpha - D_{11} \cos^2 \alpha + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha + D_{16} \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) + D_{26} \sin^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (4.38)$$

$$D'_{26} = \frac{1}{2} [D_{22} \cos^2 \alpha - D_{11} \sin^2 \alpha + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha + D_{16} \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) + D_{26} \cos^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (4.39)$$

conforme mostrado por Lekhnitskii (1968).

#### 4.8.2 Soluções fundamentais anisotrópicas

Esta formulação do método dos elementos de contorno requer o conhecimento da solução fundamental de um problema de elasticidade. A solução fundamental é a resposta à aplicação de um carregamento unitário pontual de um meio elástico infinito, cujas propriedades de material são as mesmas do componente que se quer analisar. No caso particular de placas, a solução fundamental é dada pelo deslocamento  $w$  em um ponto  $P$  qualquer do domínio, chamado ponto campo, devido a aplicação de uma carga unitária  $q$  em um ponto  $P'$  qualquer, chamado ponto fonte (Figura 4.8).

A solução fundamental para placas anisotrópicas em flexão é obtida em termos das raízes  $\mu_k$  da equação característica

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \quad (4.40)$$

Para materiais homogêneos as raízes desta equação, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são sempre complexas e dadas por:

$$\mu_k = d_k + ie_k, \quad (4.41)$$

onde  $d_k$  e  $e_k$  são as partes real e imaginária de  $\mu_k$  e  $\bar{\mu}_k$  o conjugado de  $\mu_k$ .

Seguindo a definição introduzida nas seções anteriores, a solução fundamental é a solução da equação diferencial (4.33) com o termo não homogêneo igual a uma força concentrada dada pela função delta de Dirac  $\delta(P, P')$ , ou seja,

$$\Delta\Delta w^*(P, P') = \delta(P, P'), \quad (4.42)$$

onde  $\Delta\Delta(\cdot)$  é o operador diferencial dado por:

$$\Delta\Delta(\cdot) = \frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + 4 \frac{D_{16}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial^3 \partial y} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \frac{D_{26}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4}. \quad (4.43)$$

Como mostrado por Shi e Bezzine (1988), a solução fundamental de flexão para placas anisotrópicas é dada por:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D_{22}} \{C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)\} \quad (4.44)$$

onde

$$C_1 = \frac{(d_1 - d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_1}, \quad (4.45)$$

$$C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_2}, \quad (4.46)$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)}{GH}, \quad (4.47)$$

e

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2, \quad (4.48)$$

$$H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2. \quad (4.49)$$

$R_i$  e  $S_i$  são funções dadas por:

$$\begin{aligned} R_i = & r^2 [(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 - e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta] \times \\ & \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \right] - 3 \right\} - \\ & 4r^2 e_i \operatorname{sen} \theta (\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta) \arctan \frac{e_i \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

e

$$\begin{aligned}
S_i &= r^2 e_i \text{sen} \theta (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) \times \\
&\quad \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} \left( (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta \right) \right] - 3 \right\} + \\
&\quad r^2 \left[ (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 - e_i^2 \text{sen}^2 \theta \right] \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}, \tag{4.51}
\end{aligned}$$

onde, conforme mostrado na Figura 4.8,

$$r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}, \tag{4.52}$$

$$\theta = \arctan \frac{y - y_o}{x - x_o}. \tag{4.53}$$

O coeficiente  $a$  que aparece nas funções  $R_i$  e  $S_i$  é uma constante arbitrária. Neste trabalho usa-se  $a = 1$ .

A solução fundamental  $V_n^*$ , é dada por

$$V_n^* = - \left( h_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + h_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} \right) - \frac{1}{R_c} \left( h_5 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + h_6 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + h_7 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \tag{4.54}$$

onde  $R_c$  é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno  $\Gamma$  e  $h_1$  a  $h_7$  são dados por:

$$h_1 = D_{11} n_x (1 + n_y^2) + 2D_{16} n_y^3 - D_{12} n_x n_y^2, \tag{4.55}$$

$$h_2 = 4D_{16} n_x + D_{12} n_y (1 + n_x^2) + 4D_{66} n_y^3 - D_{11} n_x^2 n_y - 2D_{26} n_x n_y^2, \tag{4.56}$$

$$h_3 = 4D_{26} n_y + D_{12} n_x (1 + n_y^2) + 4D_{66} n_x^3 - D_{22} n_x n_y^2 - 2D_{16} n_x^2 n_y, \tag{4.57}$$

$$h_4 = D_{22} n_y (1 + n_x^2) + 2D_{26} n_x^3 - D_{12} n_x^2 n_y, \tag{4.58}$$

$$h_5 = (D_{12} - D_{11}) \cos 2\alpha - 4D_{16}\text{sen}2\alpha, \quad (4.59)$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha - 4D_{66}\text{sen}2\alpha, \quad (4.60)$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12}) \cos 2\alpha - 4D_{26}\text{sen}2\alpha. \quad (4.61)$$

A solução fundamental  $M_n^*$  é dada por

$$M_n^* = - \left( f_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + f_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \quad (4.62)$$

onde  $f_1$  a  $f_3$  são dados por:

$$f_1 = D_{11}n_x^2 + 2D_{16}n_x n_y + D_{12}n_y^2, \quad (4.63)$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2 + 2D_{66}n_x n_y + D_{26}n_y^2), \quad (4.64)$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2 + 2D_{26}n_x n_y + D_{22}n_y^2, \quad (4.65)$$

As derivadas que aparecem em  $V_n^*$  e  $M_n^*$  são calculadas por meio da combinação linear das derivadas das funções  $R_i$  e  $S_i$ . São dadas, detalhadamente por Shi e Bezine (1988).

### 4.8.3 Comportamento da solução fundamental anisotrópica

Nesta seção é apresentada uma análise do comportamento da solução fundamental para placa anisotrópica fina. A solução fundamental de flexão em um meio completamente anisotrópico é calculada para valores de raio pequeno e grande. Seus resultados são comparados com a solução fundamental isotrópica usando propriedades de material quase-isotrópicas.

É mostrado que a solução fundamental anisotrópica apresenta boa concordância com a isotrópica somente quando valores de raios grandes são usados (Paiva *et al.* 2002).

É mostrada a faixa de raio na qual ambas as soluções fundamentais apresentam uma boa concordância, bem como as faixas na qual a concordância dos resultados é muito pobre.

Este tipo de análise é importante para aqueles que estão implementando a formulação anisotrópica e tem a formulação de elementos de contorno isotrópica implementada e funcionando adequadamente. Neste caso, os resultados de cada passo da formulação anisotrópica pode ser conferido com a isotrópica quando as propriedades de um material quase-isotrópico são usados na formulação anisotrópica. Este procedimento diminui o tempo de verificação da implementação.

As soluções fundamentais isotrópica e anisotrópica são estudadas para dois casos. No primeiro caso o raio  $r$  é variado de 0 a 100 000 com incrementos de 1 000 unidades e no segundo caso o raio  $r$  é variado de 0 a 1 com incrementos de 0,001 unidade. Em ambos os casos o ângulo  $\theta$  é variado de 0 a  $2\pi$  com incrementos de  $\pi/10$ .

No primeiro caso foram realizadas três diferentes análises. A Figura 4.9 mostra o comportamento da solução fundamental isotrópica (Eq. 4.23) com as seguintes propriedades de material adotadas:  $E = 2\,200\,000$  e  $\nu = 0$ .

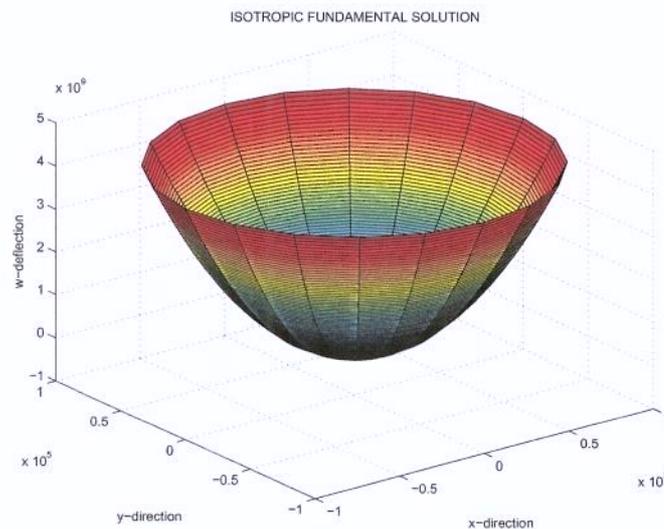


Figura 4.9: Comportamento da solução fundamental isotrópica ( $0 \leq r \leq 100\,000$ ).

A solução fundamental isotrópica é bem estabelecida e pode ser usada como referência.

O comportamento da solução fundamental anisotrópica (Eq. 4.44), com propriedades de material quase-isotrópicas adotadas ( $E_1 = 2\,200\,000$ ;  $E_2 = 2\,199\,999$ ;  $\nu = 0$ ) é mostrado na Figura 4.10.

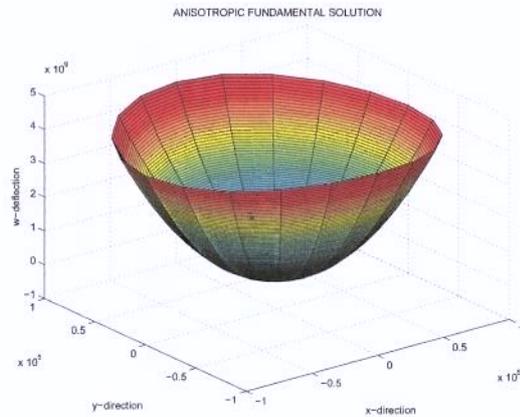


Figura 4.10: Comportamento da solução fundamental anisotrópica -  $E_1/E_2 \approx 1$  ( $0 \leq r \leq 100\,000$ ).

Uma comparação qualitativa entre as Figuras 4.9 e 4.10 mostra uma concordância muito boa entre as soluções fundamentais para raios de valores grandes.

A Figura 4.11 mostra o resultado da solução fundamental anisotrópica (Eq. 4.44) para um material ortotrópico. Neste caso, as propriedades de material adotadas são dadas por:  $E_1 = 2\,200\,000$ ;  $E_2 = 1\,100\,000$ ;  $\nu = 0$ .

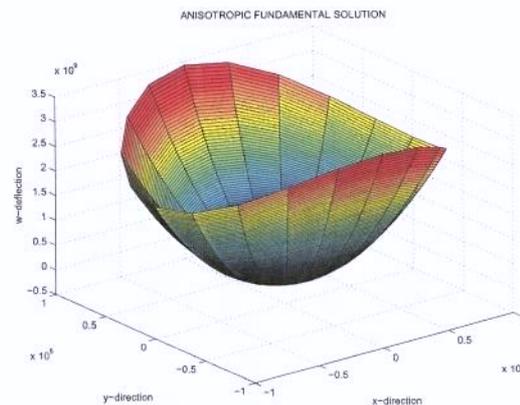


Figura 4.11: Comportamento da solução fundamental anisotrópica -  $E_1/E_2 = 2$  ( $0 \leq r \leq 100\,000$ ).

Como pode ser vista na Figura 4.11, a deflexão dos pontos situados na direção do eixo  $x$  são menores que aqueles colocados ao longo da direção do eixo  $y$ . Isso ocorre devido à diferença da rigidez nas direções  $x$  e  $y$  dada pela diferença entre os módulos de elasticidade. Na Figura 4.10, pela mesma razão, pode ser vista uma pequena diferença na deflexão nas direções  $x$  e  $y$ .

No segundo caso foi realizada uma análise semelhante à anterior, usando pequenos valores de raio. Para o raio variando de 0 a 1, o comportamento da solução fundamental isotrópica (Eq. 4.23), com as mesmas propriedades de material previamente adotada ( $E = 2\,200\,000$ ;  $\nu = 0$ ) é dado na Figura 4.12.

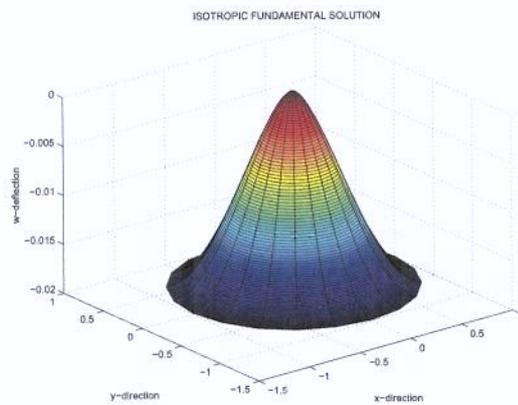


Figura 4.12: Comportamento da solução fundamental isotrópica ( $0 \leq r \leq 1$ ).

O comportamento da solução fundamental anisotrópica (Eq. 4.44), com propriedades de material quase-isotrópicas adotada ( $E_1 = 2\,200\,000$ ;  $E_2 = 2\,199\,999$ ;  $\nu = 0$ ), para raios variando de 0 a 1, é mostrado na Figura 4.13.

Finalmente, a Figura 4.14 mostra os resultados, para raios variando entre 0 e 1, da solução fundamental anisotrópica (Eq. 4.44) para um material ortotrópico com  $E_1 = 2\,200\,000$ ;  $E_2 = 1\,100\,000$ ;  $\nu = 0$ .

A comparação entre as Figuras 4.12 e 4.13 mostra que as soluções fundamentais não apresentam boa concordância entre si para pequenos valores de raios. Como pode ser visto, comparando as Figuras 4.12, 4.13 e 4.14, para pequenos valores de raios o comportamento dos resultados quase-isotrópicos são mais similares aos ortotrópicos que aos isotrópicos. Este fato sugere que, durante a implementação e depuração da formulação anisotrópica, para efeitos de

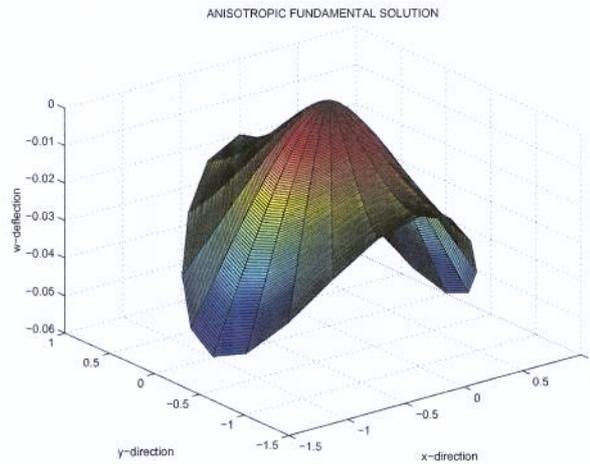


Figura 4.13: Comportamento da solução fundamental anisotrópica -  $E_1/E_2 \approx 1$  ( $0 \leq r \leq 1$ ).

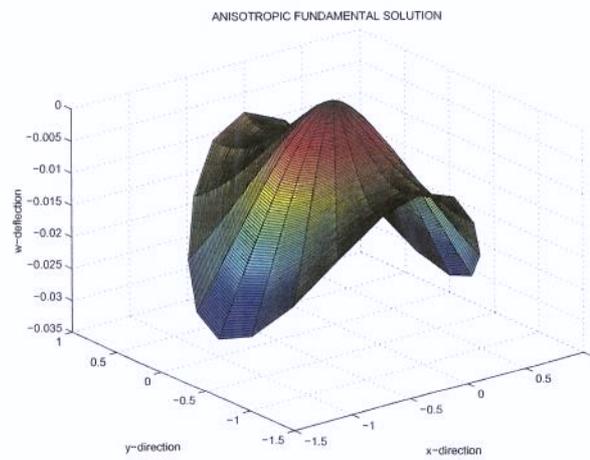


Figura 4.14: Comportamento da solução fundamental anisotrópica -  $E_1/E_2 = 2$  ( $0 \leq r \leq 1$ ).

comparação entre as soluções isotrópicas e anisotrópicas, sejam usados raios grandes (maiores que  $10^3$  unidades de comprimento). Neste caso os resultados da formulação anisotrópica podem ser comparados com os resultados da formulação isotrópica em qualquer ponto do programa.

# Capítulo 5

## Método dos elementos de contorno

Neste capítulo a formulação de elementos de contorno será apresentada de forma detalhada. Será apresentada a obtenção da equação integral de contorno e os tipos de elementos de contorno. Também será apresentado o tratamento das singularidades para elementos constantes e quadráticos. A implementação computacional, a aplicação das condições de contorno e a solução do sistema de equações também serão detalhadas. O método é baseado em equações integrais de contorno. Por meio do teorema da reciprocidade, dois estados são relacionados, sendo um conhecido e outro a ser determinado. O estado a ser determinado é o do problema a ser resolvido, o objetivo da análise (o meio, o corpo, a peça), o qual tem geometria, carregamentos e condições de contorno definidos. O estado conhecido é dado pela solução fundamental, que é a resposta de um domínio infinito, cujas propriedades são as mesmas do estado a ser determinado, à aplicação de uma carga concentrada unitária e pontual.

### 5.1 Equação integral de contorno

Para a determinação da equação integral para pontos do domínio da placa, seja uma placa de domínio finito  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  contida em outra de domínio infinito  $\Omega_\infty$  e contorno  $\Gamma_\infty$ . Conforme a Figura 5.1, a placa finita está submetida a um carregamento  $q$  distribuído em uma área  $\Omega_q$  (Paiva 1987).

O teorema de Betti é obtido considerando-se que a placa de domínio finito é submetida a dois carregamentos não simultâneos  $q$  e  $q^*$ , associados a superfícies elásticas  $w$  e  $w^*$ , respectivamente. São identificados dois estados de tensão  $\sigma$  e  $\sigma^*$ , com seus respectivos estados de

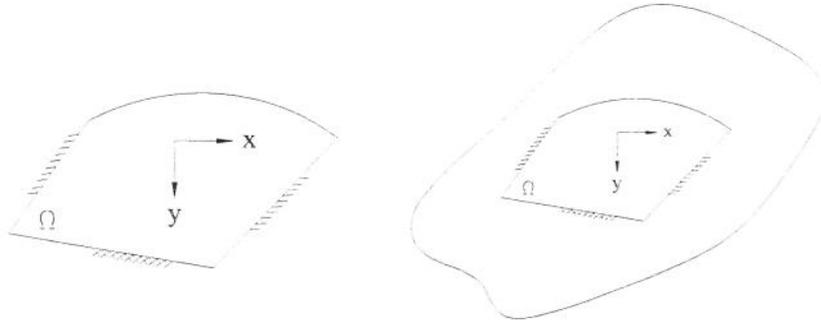


Figura 5.1: Placa finita contida em uma placa infinita.

deformação  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^*$ , que podem relacionar-se da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{11}^* \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \varepsilon_{22} + \sigma_{33}^* \varepsilon_{33} + \tau_{12}^* \varepsilon_{12} + \tau_{13}^* \varepsilon_{13} + \tau_{21}^* \varepsilon_{21} + \tau_{23}^* \varepsilon_{23} + \tau_{31}^* \varepsilon_{31} + \tau_{32}^* \varepsilon_{32}) \, d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \sigma_{33} \varepsilon_{33}^* + \tau_{12} \varepsilon_{12}^* + \tau_{13} \varepsilon_{13}^* + \tau_{21} \varepsilon_{21}^* + \tau_{23} \varepsilon_{23}^* + \tau_{31} \varepsilon_{31}^* + \tau_{32} \varepsilon_{32}^*) \, d\Omega \quad (5.1)$$

Chamando-se de  $I$  o segundo membro da Equação (5.1) e desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, obtém-se:

$$I = \int_{\Omega} (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \tau_{12} \gamma_{12}^*) \, d\Omega. \quad (5.2)$$

A partir das relações de deformação-deslocamento (3.12), das relações constitutivas (3.6) e da rigidez à flexão da placa, integra-se ao longo da espessura da placa, obtendo:

$$I = \int_{\Omega} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} + D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \, d\Omega. \quad (5.3)$$

A partir das relações dos momentos fletores (4.11), (4.12) e (4.13), a Equação (5.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \int_{\Omega} \left( -M_{11} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} - M_{22} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} - 2M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right) d\Omega. \quad (5.4)$$

A obtenção das equações necessárias à formulação do método é feita a partir da transformação da integral sobre o domínio  $\Omega$ , equação (5.4), em uma integral sobre o contorno  $\Gamma$ . Desta forma, integrando-se por partes o primeiro termo da equação (5.4), obtém-se:

$$- \int_{\Omega} M_{11} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} n_1 d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} d\Omega \quad (5.5)$$

sendo,  $n_1$  o cosseno diretor do vetor normal ao contorno na direção  $x_1$ .

De acordo com a Figura A.1, os cossenos diretores de um ponto P do contorno, são dados por:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos \alpha; \\ n_2 &= \text{sen} \alpha. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Integrando-se novamente a segunda parcela do lado direito da equação (5.5) e considerando-se as definições apresentadas nas equações (5.6), pode-se escrever:

$$- \int_{\Omega} M_{11} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} w^* \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} w^* d\Omega. \quad (5.7)$$

De forma análoga, integrando-se o segundo termo da equação (5.4), obtém-se:

$$- \int_{\Omega} M_{22} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{22} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \text{sen} \alpha + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} w^* \text{sen} \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} w^* d\Omega. \quad (5.8)$$

O terceiro termo da equação (5.4) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} 2M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega = - \int_{\Omega} M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega - \int_{\Omega} M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega. \quad (5.9)$$

Integrando-se por partes cada termo do membro direito da equação (5.9), uma vez em relação a  $x_1$  e a outra vez em relação a  $x_2$ , obtém-se:

$$\int_{\Omega} 2M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cos \alpha - M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} w^* \cos \alpha + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} w^* \operatorname{sen} \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} w^* d\Omega. \quad (5.10)$$

Substituindo-se na equação (5.4) os três termos encontrados nas equações (5.7), (5.8) e (5.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} I = & - \int_{\Gamma} \left( M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cos \alpha + M_{22} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \operatorname{sen} \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cos \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \operatorname{sen} \alpha \right) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) \operatorname{sen} \alpha \right] w^* d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} \right) w^* d\Omega. \end{aligned} \quad (5.11)$$

De acordo com as equações de equilíbrio de momentos fletores (4.4) e (4.6), com a equação dos esforços cortantes normais ao contorno (4.9) e com a equação diferencial de placas (4.22), a Equação (5.11) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I = & - \int_{\Gamma} \left( M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cos \alpha + M_{22} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \operatorname{sen} \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cos \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \operatorname{sen} \alpha \right) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A partir das relações entre os sistemas de coordenadas, apresentadas no Apêndice A, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \operatorname{sen} \alpha; \\ \frac{\partial w^*}{\partial x_2} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Substituindo-se na equação (5.12) as equações (5.13), obtém-se:

$$\begin{aligned}
I = & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} [M_{11} \cos^2 \alpha + 2M_{12} \text{sen} \alpha \cos \alpha + M_{22} \text{sen}^2 \alpha] \right. \\
& + \frac{\partial w^*}{\partial s} [(M_{22} - M_{11}) \text{sen} \alpha \cos \alpha + M_{12} (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)] \left. \right\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Substituindo-se na equação (5.14) as equações (3.21), pode-se escrever:

$$I = - \int_{\Gamma} \left( M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) + \int_{\Omega} q w^* d\Omega. \tag{5.15}$$

Integrando-se por partes o segundo termo da integral de contorno da equação (5.15), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \tag{5.16}$$

sendo,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  as coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração. No caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, a primeira parcela da equação (5.16) se anula. Caso contrário, ela dará origem a reações nos cantos da placa. Desta maneira, a equação (5.16) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \tag{5.17}$$

sendo,  $N_c$  o número total de cantos do contorno da placa e  $w_{ci}^*$  o deslocamento fundamental do canto  $i$  da placa.

Uma interpretação apropriada das reações de canto da placa,  $R_{ci}$ , pode ser escrita a partir dos momentos volventes anterior e posterior ao canto da placa, ou seja:

$$R_{ci} = M_{ns_i}^+ - M_{ns_i}^- \tag{5.18}$$

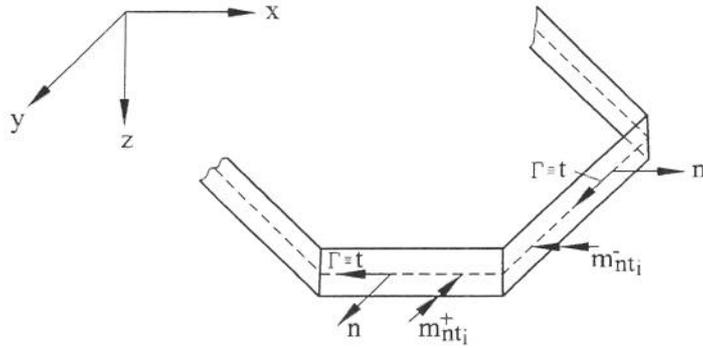


Figura 5.2: Canto  $i$  do contorno da placa.

sendo,  $M_{ns}^+$  e  $M_{ns}^-$  os momentos volventes posterior e anterior ao canto  $i$  da placa, respectivamente.

Substituindo-se na equação (5.15) o valor encontrado pela equação (5.17), obtém-se:

$$I = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* + Q_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^N R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} q w^* d\Omega. \quad (5.19)$$

Considerando-se que o carregamento  $q$  está distribuído em  $\Omega_q$  e utilizando-se a equação (3.32) na equação (5.19), pode-se escrever:

$$I = \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^N R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} q w^* d\Omega. \quad (5.20)$$

O termo do primeiro membro da equação (5.1) pode ser desenvolvido de modo análogo, chegando-se a:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{11}^* \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \varepsilon_{22} + \tau_{12}^* \varepsilon_{12}) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^N R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} q^* w d\Omega. \quad (5.21)$$

Portanto, a partir das equações (5.20) e (5.21), a equação final do teorema de Betti aplicado ao estudo de placas é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^N R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} q w^* d\Omega = \\ \int_{\Gamma} \left( V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^N R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} q^* w d\Omega. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Supondo-se que o carregamento  $q^*$  na Equação (5.22) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto  $P$  do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora a solução fundamental e aplicando as propriedades da função delta de Dirac, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 w(P) + \int_{\Gamma} V_n^*(P, P') w(P') d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(P, P') \frac{\partial w}{\partial n}(P') d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(P, P') w_{c_i}(P') = \\
 \int_{\Gamma} w^*(P, P') V_n(P') d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n}(P, P') M_n(P') d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^*(P, P') R_{c_i}(P') + \\
 \int_{\Omega} w^*(P, P') b(P') d\Omega \quad . \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

A equação (5.23) é a equação integral de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes ( $V_n$ ), momentos de flexão na direção normal ( $M_n$ ), reações de canto ( $R_c$ ), deslocamentos ( $w$ ) e rotações em relação à normal ( $\partial w/\partial n$ ) conhecidos no contorno.

Para transformar a equação (5.23), escrita em termos de valores de domínio da placa, numa relação com apenas valores do contorno é necessário um artifício. Acrescenta-se ao domínio uma pequena região  $\Omega_e$  de modo que o novo domínio seja dado por  $\Omega$  e  $\Omega_e$  com um contorno  $\Gamma + \Gamma_e - \Gamma^*$ , como mostra a Figura 5.3.

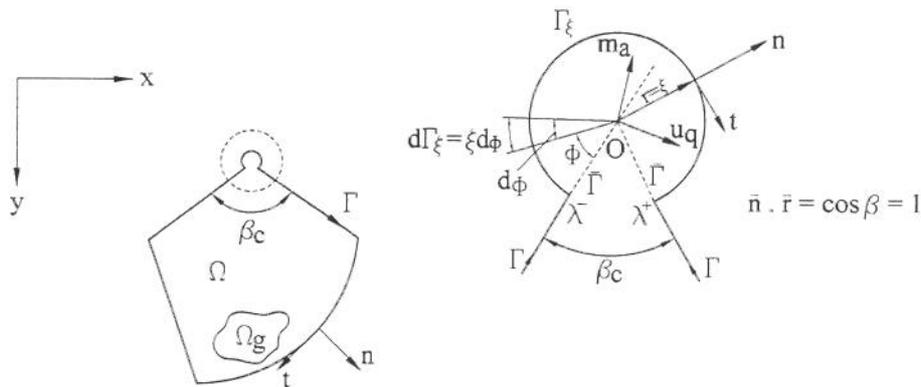


Figura 5.3: Contorno circular acrescentado a um canto de placa.

Com o artifício da Figura 5.3, após as integrações em  $\Gamma_e$  com as integrais sobre os contornos  $\Gamma - \Gamma^*$  entendidas no sentido do valor principal, quando  $\epsilon$  tende a zero, a partir de Paiva (1987) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 cw(P) + \int_{\Gamma} V_n^*(P, P')w(P')d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(P, P')\frac{\partial w}{\partial n}(P')d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(P, P')w_{c_i}(P') = \\
 \int_{\Gamma} w^*(P, P')V_n(P')d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n}(P, P')M_n(P')d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(P, P')R_{c_i}(P') + \\
 \int_{\Omega} w^*(P, P')b(P')d\Omega. \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

A Equação (5.26) representa a equação integral de placas finas para pontos do contorno da placa. A quantidade  $C(P)$  representa as descontinuidades dos cantos da placa, sendo dada por:

$$C(P) = \frac{\beta_c}{2\pi} \tag{5.25}$$

onde,  $\beta_c$  é a angulosidade do canto da placa (Figura 5.3). Quando o ponto do contorno não apresenta angulosidades, a Equação (5.25) pode ser reduzida a  $C(P) = 1/2$ .

Para problemas de flexão em placas anisotrópicas tem-se a equação integral de contorno escrita em termos de quatro valores de contorno básicos, isto é, deflexão  $w$ , inclinação da normal  $\partial w/\partial n$ , força cortante equivalente  $V_n$  e momento fletor  $M_n$ . Em um problema bem colocado, dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas. Conforme mostrado por Paiva (1987), a primeira equação integral de contorno é dada por:

$$\begin{aligned}
 cw(P) + \int_{\Gamma} V_n^*(P, P')w(P')d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(P, P')\frac{\partial w}{\partial n}(P')d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(P, P')w_{c_i}(P') = \\
 \int_{\Gamma} w^*(P, P')V_n(P')d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n}(P, P')M_n(P')d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(P, P')R_{c_i}(P') + \\
 \int_{\Omega} w^*(P, P')b(P')d\Omega \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

onde  $R_{c_i}$  e  $w_{c_i}$  são as reações e deflexões de canto, respectivamente, no  $i$ -ésimo canto da placa;  $Nc$  é o número de cantos do contorno; o símbolo “\*” representa as soluções fundamentais;

$b$  é a força de corpo aplicada no domínio da placa e  $c$  é introduzido para considerar que o ponto  $Q$  pode estar sobre o contorno, interno ou externo a ele. Se o ponto estiver sobre um contorno suave,  $c = 1/2$ .

Pode se verificar que num problema de flexão em placa há sempre duas incógnitas a serem determinadas em qualquer ponto do contorno e, conseqüentemente, a solução do problema requer que uma segunda equação integral de contorno seja estabelecida.

A segunda equação integral de contorno é obtida pela derivada da Equação (5.26) em relação à direção  $n_0$  normal ao contorno no ponto fonte, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 c \frac{\partial w}{\partial n_0}(P) + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(P, P') w(P') d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(P, P') \frac{\partial w}{\partial n}(P') d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_0}(P, P') w_{c_i}(P') = \\
 \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(P, P') V_n(P') d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n}(P, P') M_n(P') d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_0}(P, P') R_{c_i}(P') + \\
 \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(P, P') b(P') d\Omega. \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

## 5.2 Tipos de elementos de contorno

Uma vez que é muito difícil encontrar soluções analíticas gerais para as equações integrais de contorno (5.26) e (5.27), torna-se necessário o uso de soluções numéricas. Quando soluções numéricas são usadas, o contorno é aproximado por elementos discretos. Estes elementos discretos são chamados elementos de contorno. A geometria destes elementos é descrita por funções conhecidas, sobre os quais as equações integrais de contorno são facilmente calculadas, de maneira que seja obtido um sistema de equações a partir do qual os valores de contorno desconhecidos são encontrados.

Considere-se a Figura 5.4 onde o contorno de uma placa é aproximado por uma série de segmentos (elementos de contorno)  $\Gamma_i$ , cujo número e forma são escolhido para representá-lo adequadamente.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos chamados “nós” ou “pontos nodais” e os valores das variáveis associados a eles são denominados “valores nodais”. Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão agora aproximados por funções

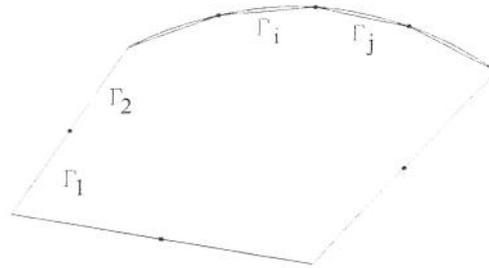


Figura 5.4: Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno.

polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento. As funções geralmente utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, o que implica em elementos com um, dois ou três pontos nodais, respectivamente. Na Figura 5.5 está indicada a aproximação do deslocamento  $w$  sobre um elemento usando as funções já mencionadas.

No elemento constante, como é necessário apenas um parâmetro para definir a função de aproximação, o ponto nodal é, geralmente, colocado no meio do elemento. No elemento linear já é necessária a definição de dois pontos nodais, que podem ser colocados nas extremidades do elemento, caracterizando o elemento linear contínuo. Caso alguns desses pontos nodais seja definido no interior do elemento, fica caracterizado o elemento linear descontínuo (Figura 5.5). No elemento quadrático, são necessários três nós, pois são três os parâmetros que definem uma função quadrática. No elemento quadrático contínuo, dois desses pontos estão localizados nas extremidades do elemento. O terceiro ponto está localizado no centro do elemento. No elemento quadrático descontínuo, os pontos das extremidades são deslocados para pontos localizados no interior do elemento.

### 5.3 Tratamento das singularidades

Quando a integração é realizada com ambos os pontos, fonte e campo, localizados no contorno, em determinados momentos a distância  $r$  entre eles tende a zero, levando a uma integração singular. Rajamohan e Raamachandran (1999) apresentaram uma formulação na qual as singularidades foram evitadas pela colocação dos pontos fonte fora do domínio do problema.

Nesta tese é feito o desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno na

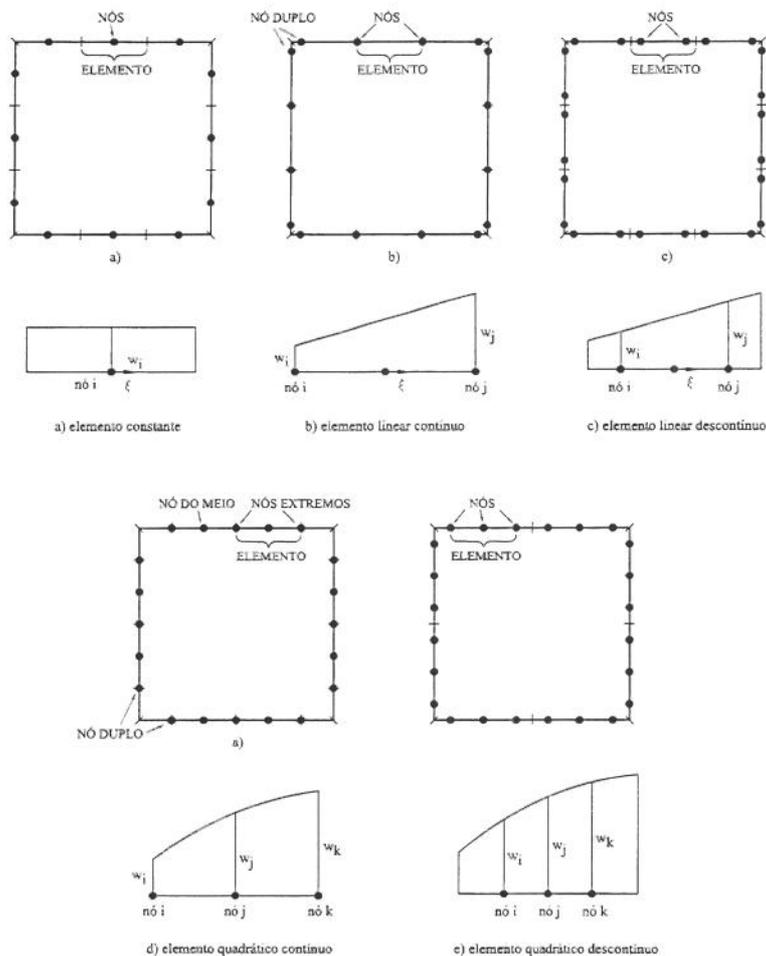


Figura 5.5: Aproximação da variável de contorno  $w$  por funções polinomiais.

qual os pontos fontes são alocados sobre o contorno. Sob essas condições, o tratamento das singularidades não pode ser evitado. A formulação de elementos de contorno usada inclui duas equações integrais de contorno nas quais são encontradas integrais com integrandos dos seguintes tipos: regular; com singularidade fraca; com singularidade forte e com singularidade fortíssima (hipersingularidade). Nesta seção é apresentado um procedimento detalhado para o tratamento das integrais com singularidade forte e hipersingularidade inerentes à formulação. Todos os termos da integração analítica são apresentados (Paiva *et al.* 2003). Um procedimento semelhante foi desenvolvido por Rashed *et al.* (1998) para placas isotrópicas espessas.

As derivadas da solução fundamental de deflexão (4.44) podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções  $R_i$  e  $S_i$ , dadas pelas Equações (4.50) e (4.51). Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi D_{22}} \left[ C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3 \left( \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (5.28)$$

As derivadas de todos os outros termos são obtidas da mesma maneira. As derivadas de  $R_i$  e  $S_i$  são apresentadas no Apêndice E.

Como pode ser visto nas equações apresentadas no Apêndice E, as derivadas de  $R_i$  e  $S_i$  apresentam singularidade fraca ( $\log r$ ), forte ( $r^{-1}$ ), e hipersingularidade ( $r^{-2}$ ) e necessitam uma atenção especial durante a integração.

As Equações (5.26) e (5.27) apresentam integrais da solução fundamental nas quais, de acordo com a Equação (4.44), verifica-se que a solução fundamental  $w^*$  e suas derivadas  $\partial w^*/\partial n$  e  $\partial w^*/\partial n_0$  são funções regulares, isto é, não apresentam singularidade e, portanto, podem ser resolvidas analiticamente ou usando quadratura de Gauss.

A partir da Equação (4.44) verifica-se que as equações integrais de contorno (5.26) e (5.27) apresentam integrais impróprias. O mesmo ocorre em relação às derivadas da Equação (4.62). Estas integrações podem ser realizadas analiticamente ou usando Gauss logarítmico.

Por outro lado, as integrais de  $V_n^*$  e de  $\partial M_n^*/\partial n_0$ , conforme Equações (5.95), incluem um salto, apresentando singularidade forte. Estas integrais devem ser computadas no sentido do valor principal de Cauchy.

Finalmente, a partir das derivadas quartas de  $R_i$  e  $S_i$  apresentadas no Apêndice E pode se mostrar que a integral de  $\partial V_n^*/\partial n_0$  do termo  $H_{21}$  da Equação (5.95) contém uma hipersingularidade. Esta hipersingularidade deve ser interpretada no sentido do valor principal de Hadamard.

A avaliação de integrais com singularidade forte e hipersingularidade pode ser aproximada por uma estratégia cuja seqüência é descrita a seguir:

- O primeiro passo é aplicar uma regularização na qual as singularidades das integrais impróprias são isoladas em uma integral mais simples. A integral resultante ainda é uma integral imprópria com singularidade de mesma ordem.

- Após a regularização, a avaliação da integral imprópria remanescente pode seguir dois procedimentos básicos, referidos como métodos direto e indireto.
- No método direto, as integrais com singularidade forte e hipersingularidade, interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy e Hadamard, respectivamente, são calculadas diretamente como integrais parte-finita, como introduzidas por Guiggiani e Casalini (1987) e Portela *et al.* (1992).
- No método indireto, as integrais com singularidade forte e hipersingularidade são transformadas em integrais regulares ou com singularidade mais fraca (Lutz *et al.* 1991).

Neste Projeto foi adotado o método direto para o cálculo das integrais com singularidade forte e hipersingularidade.

### 5.3.1 Tratamento das singularidades para elementos constantes

**Análise de  $V_n^*$ :** Analisemos  $V_n^*$ , dado pela Equação (4.54). Uma vez que elementos constantes tem geometria retilínea, a segunda parte da Equação (4.54) é zero devido ao raio  $R$  tender ao infinito. Assim,  $V_n^*$  é dado apenas por derivadas terceiras de  $w^*$ . Então,

$$V_n^* = - \left( h_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + h_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} \right), \quad (5.29)$$

e, analogamente à Equação (5.28), temos:

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} = \frac{1}{8\pi D_{22}} \left[ C_1 \frac{\partial^3 R_1}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 R_2}{\partial x^3} + C_3 \left( \frac{\partial^3 S_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 S_2}{\partial x^3} \right) \right]; \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{8\pi D_{22}} \left[ C_1 \frac{\partial^3 R_1}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^3 R_2}{\partial x^2 \partial y} + C_3 \left( \frac{\partial^3 S_1}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 S_2}{\partial x^2 \partial y} \right) \right]; \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{8\pi D_{22}} \left[ C_1 \frac{\partial^3 R_1}{\partial x \partial y^2} + C_2 \frac{\partial^3 R_2}{\partial x \partial y^2} + C_3 \left( \frac{\partial^3 S_1}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 S_2}{\partial x \partial y^2} \right) \right] e \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} = \frac{1}{8\pi D_{22}} \left[ C_1 \frac{\partial^3 R_1}{\partial y^3} + C_2 \frac{\partial^3 R_2}{\partial y^3} + C_3 \left( \frac{\partial^3 S_1}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 S_2}{\partial y^3} \right) \right]. \quad (5.33)$$

Observando as Equações (E.6 ... E.9) e (E.20 ... E.23) do Apêndice E verifica-se que as derivadas terceiras de  $R_i$  e  $S_i$  reduzem-se a

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^{(4-j)} \partial y^{(j-1)}} = \frac{1}{r} a_{ji} \text{ e} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^{(4-j)} \partial y^{(j-1)}} = \frac{1}{r} b_{ji}, \quad (5.35)$$

onde  $a_{ji}$  e  $b_{ji}$  são funções de  $\theta$  (Figura 4.8), sendo que  $i=1,2$ ,  $j=1,2,3,4$  e não há implicação de soma em  $j$ . Quando elementos retilíneos são usados  $a_{ji}$  e  $b_{ji}$  são constantes dadas por:

$$a_{1i} = \frac{4 (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.36)$$

$$a_{2i} = \frac{4 [d_i (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) + e_i^2 \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.37)$$

$$a_{3i} = \frac{4 [(d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) d_i \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.38)$$

$$a_{4i} = \frac{4 [d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.39)$$

$$b_{1i} = -\frac{2e_i \text{sen} \theta}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.40)$$

$$b_{2i} = \frac{2e_i \cos \theta}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.41)$$

$$b_{3i} = \frac{2e_i [2d_i (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) - (d_i^2 - e_i^2) \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta} \quad e \quad (5.42)$$

$$b_{4i} = \frac{2e_i [(3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}. \quad (5.43)$$

A substituição das Equações (5.34) e (5.35) na Equação (5.30) resulta:

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} = \frac{1}{8\pi D_{22}} \left[ C_1 \frac{1}{r} a_{11} + C_2 \frac{1}{r} a_{12} + C_3 \left( \frac{1}{r} b_{11} - \frac{1}{r} b_{12} \right) \right]. \quad (5.44)$$

Analogamente pode se apresentar uma forma geral para a substituição das Equações (5.34) e (5.35) nas Equações (5.30) a (5.33) como:

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{(4-j)} \partial y^{(j-1)}} = \frac{1}{r} m_j, \quad (5.45)$$

onde  $m_n$  são constantes dadas por:

$$m_j = \frac{1}{8\pi D_{22}} [C_1 a_{j1} + C_2 a_{j2} + C_3 (b_{j1} - b_{j2})]. \quad (5.46)$$

A substituição das Equações (5.45) em (5.29) resulta:

$$V_n^* = - \left( h_1 \frac{1}{r} m_1 + h_2 \frac{1}{r} m_2 + h_3 \frac{1}{r} m_3 + h_4 \frac{1}{r} m_4 \right), \quad (5.47)$$

ou

$$V_n^* = \frac{1}{r} M, \quad (5.48)$$

onde  $M$  é uma constante dada por:

$$M = - (h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3 + h_4 m_4). \quad (5.49)$$

A partir das deduções até aqui apresentadas pode se verificar que o termo  $H_{11}$  da Equação (5.95) pode ser interpretado no sentido do valor principal de Cauchy como:

$$\int_{\Gamma_e} V_n^*(P, P') d\Gamma_e = M \int_{-L}^L \frac{1}{r} dr = 0, \quad (5.50)$$

onde  $L$  é metade do comprimento do elemento.

**Análise de  $\partial M_n^*/\partial n_0$ :** Seguindo o mesmo procedimento,  $\partial M_n^*/\partial n_0$  pode ser obtido. Analogamente, fazendo-se:

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} = \frac{\partial M_n^*}{\partial x} n_{0x} + \frac{\partial M_n^*}{\partial y} n_{0y}, \quad (5.51)$$

da Equação (4.62) obtém-se  $\partial M_n^*/\partial x$  e  $\partial M_n^*/\partial y$ :

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x} = - \left( f_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + f_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + f_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} \right) e \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial y} = - \left( f_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + f_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} + f_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} \right). \quad (5.53)$$

Substituindo-se as Equações (5.45) em (5.52) e (5.53) e posteriormente em (5.51), esta pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} = - \left( f_1 \frac{1}{r} b_1 + f_2 \frac{1}{r} b_2 + f_3 \frac{1}{r} b_3 \right) n_{0x} - \left( f_1 \frac{1}{r} b_2 + f_2 \frac{1}{r} b_3 + f_3 \frac{1}{r} b_4 \right) n_{0y}, \quad (5.54)$$

ou

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} = \frac{1}{r} N, \quad (5.55)$$

onde

$$N = - (f_1 b_1 + f_2 b_2 + f_3 b_3) n_{0x} - (f_1 b_2 + f_2 b_3 + f_3 b_4) n_{0y}. \quad (5.56)$$

Portanto, o termo  $H_{22}$  da Equação (5.95) pode ser interpretado no sentido do valor principal de Cauchy, resultando:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma_e = N \int_{-L}^L \frac{1}{r} dr = 0. \quad (5.57)$$

**Análise de  $\partial V_n^*/\partial n_0$ :** A partir das derivadas quartas de  $R_i$  e  $S_i$  apresentadas no Apêndice E pode se mostrar que a integral de  $\partial V_n^*/\partial n_0$  do termo  $H_{21}$  da Equação (5.95) contém uma hipersingularidade. Esta hipersingularidade deve ser interpretada no sentido do valor principal de Hadamard. Assim temos:

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial n_0} = - \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial x} n_{0x} + \frac{\partial V_n^*}{\partial y} n_{0y} \right) \quad (5.58)$$

e usando a Equação (5.29) temos:

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial x} = - \left( h_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + h_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + h_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x \partial y^3} \right) e \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial y} = - \left( h_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + h_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + h_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x \partial y^3} + h_4 \frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4} \right). \quad (5.60)$$

Integrando  $H_{21}$  da Equação (5.95) no sentido do valor principal de Hadamard, temos:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma_e = T \int_{-L}^L \frac{1}{r^2} dr = -T \frac{2}{L}. \quad (5.61)$$

Um vez que todas as singularidades foram adequadamente tratadas, as integrais (5.76), (5.84) e (5.86) podem ser substituídas na equação matricial (5.94) e o problema pode ser solucionado usando-se os procedimentos tradicionais do MEC.

### 5.3.2 Tratamento das singularidades para elementos quadráticos

Na Seção 5.3.1 foi apresentado um procedimento, associado ao uso de elementos constantes, para o tratamento das integrais com singularidade forte e hipersingularidade

inerentes à formulação. Nesta seção é apresentada uma extensão deste procedimento ao uso de elementos quadráticos.

Considerando um elemento de contorno quadrático descontínuo retilíneo cujos nós estão posicionados arbitrariamente nos pontos  $\xi = -2/3$ ,  $\xi = 0$  e  $\xi = +2/3$  (Figura 5.6), temos as seguintes funções de forma:

$$N_1 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right) ; \quad (5.62)$$

$$N_2 = \left( 1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \xi \right) ; \quad (5.63)$$

$$N_3 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right) . \quad (5.64)$$



Figura 5.6: Elemento quadrático descontínuo.

**Análise de  $V_n^*$ :** Tomando-se  $V_n^*$ , dado pela Equação (4.54), a singularidade é isolada, resultando:

$$V_n^* = \frac{1}{r} M, \quad (5.65)$$

onde

$$M = -(h_i m_i) \quad (i = 1..4) ; \quad (5.66)$$

$$m_j = \frac{1}{8\pi D_{22}} [C_1 a_{j1} + C_2 a_{j2} + C_3 (b_{j1} - b_{j2})] ; \quad (5.67)$$

$$a_{1i} = \frac{4 (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta} ; \quad (5.68)$$

$$a_{2i} = \frac{4 [d_i (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) + e_i^2 \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.69)$$

$$a_{3i} = \frac{4 [(d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) d_i \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.70)$$

$$a_{4i} = \frac{4 [d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.71)$$

$$b_{1i} = -\frac{2e_i \text{sen} \theta}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.72)$$

$$b_{2i} = \frac{2e_i \cos \theta}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}; \quad (5.73)$$

$$b_{3i} = \frac{2e_i [2d_i (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) - (d_i^2 - e_i^2) \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta} e \quad (5.74)$$

$$b_{4i} = \frac{2e_i [(3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \text{sen} \theta]}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta}. \quad (5.75)$$

Nas expressões acima a variação dos índices  $i$  e  $j$  é dada por  $i = 1..2$  e  $j = 1..4$  sendo que os índices repetidos não implicam em soma.

Para o elemento quadrático, já levando em conta a discretização do contorno, a integral de  $V_n^*$  da equação integral de contorno (5.26) é representada por

$$\int_{\Gamma_e} V_n^* d\Gamma_e = M \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{1}{r} dr, \quad (5.76)$$

onde  $f$  indica a integração no sentido do valor principal de Cauchy,  $l$  é o comprimento do elemento e  $r$  é dado em função da coordenada intrínseca  $\xi$ :

$$r = \frac{l}{2} (\xi - \xi_0) \quad (5.77)$$

de maneira que

$$\int_{\Gamma_e} V_n^* d\Gamma_e = \frac{2M}{l} \int_{-1}^{+1} \frac{N_k}{\xi - \xi_0} J d\xi \quad (5.78)$$

onde  $N_k$  são as funções de forma e  $J$  é o Jacobiano da transformação de coordenadas. Neste caso  $J = 1/2$ , uma vez que foi assumido que o elemento tem geometria retilínea. Fazendo a integração analítica, tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{N_1}{\xi - \xi_0} d\xi = \frac{3}{4} \left[ \frac{\xi_0 (3\xi_0 - 2)}{2} \ln \left| \frac{1 - \xi_0}{1 + \xi_0} \right| + 3\xi_0 - 2 \right]; \quad (5.79)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{N_2}{\xi - \xi_0} d\xi = \frac{1}{2} \left[ \frac{(3\xi_0 - 2)(3\xi_0 + 2)}{2} \ln \left| \frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0} \right| - 9\xi_0 \right]; \quad (5.80)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{N_3}{\xi - \xi_0} d\xi = \frac{3}{4} \left[ \frac{\xi_0 (3\xi_0 + 2)}{2} \ln \left| \frac{1 - \xi_0}{1 + \xi_0} \right| + 3\xi_0 + 2 \right]. \quad (5.81)$$

**Análise de  $\partial M_n^*/\partial n_0$ :** Seguindo o mesmo procedimento,  $\partial M_n^*/\partial n_0$  pode ser obtido. Tomando-se  $M_n^*$ , dado pela Equação (4.62), a singularidade é isolada, resultando:

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} = \frac{1}{r} N, \quad (5.82)$$

onde

$$N = -(f_i m_i) n_{0x} - (f_j m_{j+1}) n_{0y} \quad (i, j = 1..3). \quad (5.83)$$

Levando em conta a discretização do contorno com elementos quadráticos, a integral de  $\partial M_n^*/\partial n_0$  da equação integral de contorno (5.27) é representada por:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} d\Gamma_e = N \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{1}{r} dr. \quad (5.84)$$

A equação (5.84) pode ser reescrita em função da coordenada intrínseca, resultando:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} d\Gamma_e = \frac{2N}{l} \int_{-1}^{+1} \frac{N_k}{\xi - \xi_0} J d\xi . \quad (5.85)$$

**Análise de  $\partial V_n^*/\partial n_0$ :** A partir das derivadas quartas de  $R_i$  e  $S_i$  apresentadas no Apêndice E pode se mostrar que a integral de  $\partial V_n^*/\partial n_0$  da Equação (5.27) contém uma hipersingularidade. Esta hipersingularidade deve ser interpretada no sentido do valor principal de Hadamard. Isolando a singularidade e levando em conta a discretização do contorno, a integral de  $\partial V_n^*/\partial n_0$  é representada por:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0} d\Gamma_e = T \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{r^2} dr \quad (5.86)$$

onde  $\int$  indica a integração no sentido do valor principal de Hadamard e  $T$  é uma função de  $\theta$ . Deve-se notar que  $M$ ,  $N$  e  $T$  não são singulares. Reescrevendo-se a equação (5.86) em função da coordenada intrínseca, obtém-se:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0} d\Gamma_e = \frac{2T}{l} \int_{-1}^{+1} \frac{N_k}{(\xi - \xi_0)^2} J d\xi \quad (5.87)$$

onde

$$\int_{-1}^{+1} \frac{N_1}{(\xi - \xi_0)^2} d\xi = \frac{3}{4} \left[ (3\xi_0 - 1) \ln \left| \frac{1 - \xi_0}{1 + \xi_0} \right| + \frac{6\xi^2 - 2\xi - 3}{\xi_0^2 - 1} \right]; \quad (5.88)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{N_2}{(\xi - \xi_0)^2} d\xi = \frac{1}{2} \left[ 9\xi_0 \ln \left| \frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0} \right| - \frac{18\xi_0^2 - 13}{\xi_0^2 - 1} \right]; \quad (5.89)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{N_3}{(\xi - \xi_0)^2} d\xi = \frac{3}{4} \left[ (3\xi_0 + 1) \ln \left| \frac{1 - \xi_0}{1 + \xi_0} \right| + \frac{6\xi^2 + 2\xi - 3}{\xi_0^2 - 1} \right]. \quad (5.90)$$

Um vez que todas as singularidades foram adequadamente tratadas, o problema pode ser solucionado usando-se os procedimentos tradicionais do MEC.

## 5.4 Implementação computacional

Assume-se que o contorno  $\Gamma$  é dividido em  $Ne$  elementos de contorno constante  $\Gamma_e$  de maneira que a integral sobre o contorno seja obtida de forma aproximada fazendo-se a somatória das integrais sobre cada elemento. Assim, a Equação (5.26) é discretizada para um dado ponto fonte  $Q$ . Desconsiderando-se a ação das forças de corpo, representadas pela integral de domínio, que serão tratadas mais à frente, obtém-se então, a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 cw(P) + \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} V_n^*(P, P') w(P') d\Gamma_e - \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} M_n^*(P, P') \frac{\partial w}{\partial n}(P') d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(P, P') w_{c_i}(P') = \\
 \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} w^*(P, P') V_n(P') d\Gamma_e - \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n}(P, P') M_n(P') d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(P, P') R_{c_i}(P').
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

Uma vez que foi assumido que o contorno foi discretizado usando-se elementos constantes, os valores de  $w(P')$ ,  $\partial w(P')/\partial n$ ,  $V_n(P')$  e  $M_n(P')$  são constantes e podem ser tirados do integrando. Portanto,

$$\begin{aligned}
 cw(P) + \sum_{i=1}^{Ne} w(P') \int_{\Gamma_e} V_n^*(P, P') d\Gamma_e - \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\partial w}{\partial n}(P') \int_{\Gamma_e} M_n^*(P, P') d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(P, P') w_{c_i}(P') = \\
 \sum_{i=1}^{Ne} V_n(P') \int_{\Gamma_e} w^*(P, P') d\Gamma_e - \sum_{i=1}^{Ne} M_n(P') \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n}(P, P') d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(P, P') R_{c_i}(P').
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

Da mesma forma, a Equação (5.27) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 c \frac{\partial w}{\partial n_0}(P) + \sum_{i=1}^{Ne} w(P') \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma - \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\partial w}{\partial n}(P') \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_0}(P, P') w_{c_i}(P') = \\
 \sum_{i=1}^{Ne} V_n(P') \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma - \sum_{i=1}^{Ne} M_n(P') \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n}(P, P') d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_0}(P, P') R_{c_i}(P').
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

As Equações (5.92) e (5.93) podem ser escritas na forma matricial, resultando:

$$\begin{aligned}
c \left\{ \begin{array}{c} w^* \\ \frac{\partial w^*}{\partial n_0} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{Ne} \left( \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right]_i \left\{ \begin{array}{c} w^* \\ \frac{\partial w^*}{\partial n} \end{array} \right\}_i \right) + \sum_{i=1}^{Nc} \left( \left\{ \begin{array}{c} R_{c1} \\ R_{c2} \end{array} \right\}_i w_{c_i}^* \right) = \\
\sum_{i=1}^{Ne} \left( \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right]_i \left\{ \begin{array}{c} V_n^* \\ M_n^* \end{array} \right\}_i \right) + \sum_{i=1}^{Nc} \left( \left\{ \begin{array}{c} w_{c1} \\ w_{c2} \end{array} \right\}_i R_c^* \right). \quad (5.94)
\end{aligned}$$

Os termos da equação matricial (5.94) são dados por:

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \int_{\Gamma_e} V_n^*(P, P') d\Gamma_e ; & H_{12} &= \int_{\Gamma_e} M_n^*(P, P') d\Gamma_e ; \\
H_{21} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma_e ; & H_{22} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma_e ; \\
G_{11} &= \int_{\Gamma_e} w^*(P, P') d\Gamma_e ; & G_{12} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n}(P, P') d\Gamma_e ; \\
G_{21} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(P, P') d\Gamma_e ; & G_{22} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n}(P, P') d\Gamma_e . \quad (5.95)
\end{aligned}$$

Os valores resultantes destas integrais são chamados de coeficientes de influência.

Assumindo-se que a posição do ponto fonte  $Q$  varia de 1 a  $Ne$  e agrupando os termos semelhantes, é obtido um sistema de equações dado por:

$$\mathbf{Hw} = \mathbf{Gv}. \quad (5.96)$$

Seja a placa retangular mostrada na Figura 5.7 discretizada usando-se um elemento constante por lado. Nestes elementos os valores de  $w$ ,  $\partial w/\partial n$ ,  $V_n$  e  $M_n$  são assumidos como constantes e iguais ao valor do nó central, em todo o elemento. Os pontos nos extremos dos elementos são usados para a definição da geometria do problema. Esses pontos também são usados como pontos de colocação e neles são calculados os deslocamentos de canto  $w_c$  e as reações de canto  $R_c$ .

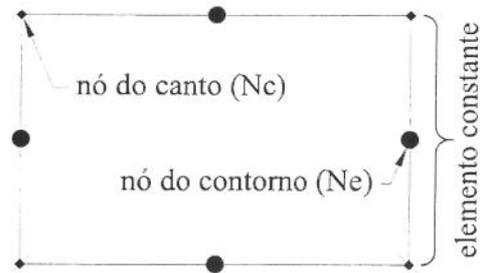


Figura 5.7: Discretização usando elementos constantes.

O esquema da montagem das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  para o problema proposto é mostrado na Figura 5.8.

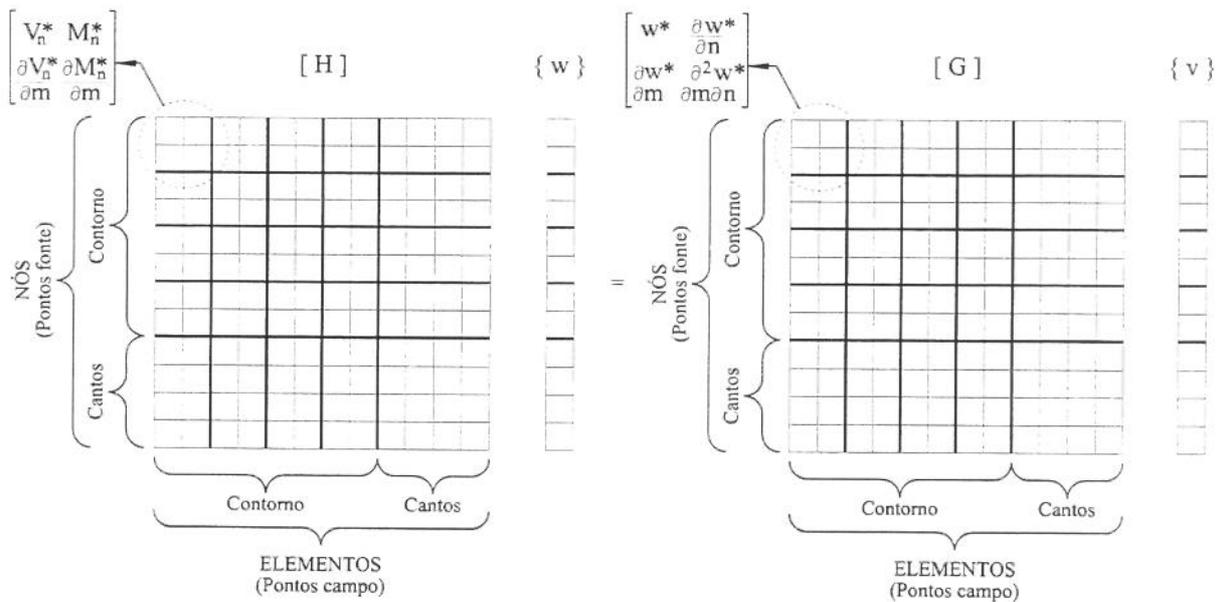


Figura 5.8: Esquema da montagem das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ .

Conforme a Figura 5.8,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são duas matrizes de dimensões  $J \times J$ , onde  $J = 2Ne + Nc$ , e  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  são dois vetores de comprimento  $J$ .

Nesta seção foi apresentada a montagem das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  usando-se elementos constantes por motivo de simplicidade. O uso de elementos de ordem superior é possível e faz-se de maneira semelhante.

## 5.5 Aplicação das condições de contorno e solução do sistema de equações

Num problema bem colocado haverá  $N_1$  valores conhecidos em  $\Gamma_1$  e  $N_2$  valores conhecidos em  $\Gamma_2$ , portanto haverá somente  $N$  incógnitas no sistema de equações (5.96), sendo  $N = N_1 + N_2$ . As condições de contorno são introduzidas em (5.96) por meio da troca de colunas entre as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , de maneira que todas as incógnitas sejam passadas para o lado esquerdo da igualdade e os valores conhecidos sejam agrupados à direita. Após a aplicação das condições de contorno a matriz  $\mathbf{H}$ , que originalmente era formada apenas pelas soluções fundamentais de esforços, passa a ser chamada de  $\mathbf{A}$ , e inclui também soluções fundamentais de deslocamentos. O vetor  $\mathbf{w}$ , por sua vez, passa a conter todas as incógnitas, sejam elas valores de deslocamentos ou esforços, sendo, então, chamado de  $\mathbf{x}$ . No lado direito da equação, a matriz  $\mathbf{G}$  e o vetor  $\mathbf{v}$ , modificados, são multiplicados, obtendo-se o vetor  $\mathbf{y}$ . Assim, o sistema de equações representado pela Equação (5.96) é reescrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{5.97}$$

e pode ser resolvido por qualquer método de solução de sistema de equações lineares.

# Capítulo 6

## Método da reciprocidade dual

Neste capítulo será desenvolvida a formulação do método da reciprocidade dual (MRD) para o tratamento de problemas bidimensionais de elasticidade em materiais anisotrópicos, considerando a presença de forças de corpo genéricas. Por meio do MRD as integrais de domínio provenientes das forças de corpo serão transformadas em integrais de contorno. A consideração das forças de corpo como genéricas irá facilitar a particularização da formulação para o tratamento de problemas específicos apresentados nos capítulos posteriores.

### 6.1 Considerações gerais

A aplicação do método dos elementos de contorno requer, sempre, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida. Essa solução fundamental deve levar em conta todos os termos da equação governante de forma a evitar as integrais de domínio na formulação da equação integral de contorno. Quando isso não for possível, tornam-se necessárias técnicas especiais para o tratamento desses termos de domínio.

A solução das equações integrais de contorno (5.26) e (5.27) apresentadas na Seção 5.1 implica no cálculo das integrais de domínio nas quais o termo  $b$  representa a força de corpo que age sobre o componente analisado.

A forma mais comum de calcular essas integrais de domínio, utilizada quando se iniciou o uso dos elementos de contorno para problemas com carga no domínio, é discretizar a região em um conjunto de células internas e usar um método de integração, como o método de Gauss, para realizar a integração dentro de cada célula. No entanto, a discretização e integração

em células internas faz com que o método dos elementos de contorno perca seu atrativo principal, que é a solução de problemas da mecânica do contínuo através da discretização e integração apenas no contorno do problema. Outra abordagem pode ser vista em Mansur e Loeffler (1987).

O MRD se apresenta como uma alternativa que dispensa a necessidade da discretização e integração no domínio para a solução de problemas cuja formulação envolva integrais de domínio. Com isso, torna-se possível a utilização das soluções fundamentais da elastostática nas análises de problemas elastodinâmicos. O MRD foi introduzido por Nardini e Brebbia (1982) para análise de vibrações livres sem amortecimento em problemas bidimensionais isotrópicos, e tem sido usado por vários autores para resolver uma grande variedade de problemas da mecânica do contínuo. Nesta seção é apresentada de forma sucinta, a formulação do MRD, baseado no livro de Partridge *et al.* (1992).

## 6.2 Transformação das integrais de domínio para o contorno

Uma vez que as forças de corpo estão presentes na definição do problema, conforme pode ser visto nas equações integrais apresentadas na Seção 5.1, a seguinte aproximação pode ser proposta para a integral de domínio que contém o termo  $b$ ,

$$b \cong \sum_{m=1}^M \alpha^m f^m. \quad (6.1)$$

Nessa equação,  $\alpha^m$  é um conjunto de coeficientes a serem determinados,  $f^m$  é uma função de aproximação, que depende apenas da geometria do problema e  $M$  é o número total de nós do contorno e nós internos.

Pelo procedimento tradicional em problemas de elasticidade isotrópica e problemas potenciais, adota-se uma função  $f^m$  e encontra-se uma solução particular  $\hat{w}$  correspondente. Para o caso de elasticidade anisotrópica, porém, este procedimento torna-se bastante difícil. Não foram encontradas na literatura consultada soluções particulares conhecidas para o caso anisotrópico obtidas desta maneira. Um procedimento alternativo é assumir-se uma solução particular  $\hat{w}$  e então encontrar as funções  $f^m$  através da equação de equilíbrio (Schlar 1994;

Kogl e Gaul 2000).

Sendo a Equação (4.33) a equação diferencial governante para placas anisotrópicas e se for possível encontrar uma função  $\hat{w}$ , associada a cada  $f$ , que satisfaça a seguinte relação

$$D_{11} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial y^4} = f \quad (6.2)$$

onde  $\hat{w}$  é uma das soluções particulares, admitida na forma:

$$\hat{w} = c_1 r^4 + c_2 r^5 + c_3 r^6 + c_4 r^7, \quad (6.3)$$

então os termos de domínio das equações integrais da Seção 5.1 podem ser reescritos pela substituição das Equações (6.1) e (6.2) como segue

$$\int_{\Omega} w^* b d\Omega = \sum_{m=1}^M \alpha^m \int_{\Omega} w^* f^m d\Omega \quad (6.4)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial n_0} b d\Omega = \sum_{m=1}^M \alpha^m \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial n_0} f^m d\Omega. \quad (6.5)$$

Aplicando-se, novamente, o teorema da reciprocidade na integral de domínio (6.4), esta pode ser transformada na seguinte integral de contorno:

$$\int_{\Omega} w^* b d\Omega = \sum_{m=1}^M \alpha^m \left( c \hat{w}^m + \int_{\Gamma} V_n^* \hat{w}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^* \frac{\partial \hat{w}^m}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* \hat{V}_n^m d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} \hat{M}_n^m d\Gamma \right) \quad (6.6)$$

onde o coeficiente  $c$  é idêntico ao definido anteriormente nas equações (5.26) e (5.27). Analogamente às Equações (4.62) e (4.54), os termos  $M_n^m$  e  $V_n^m$  são determinados pelas derivadas da solução particular  $\hat{w}$  dada em (6.3). Similarmente, a Equação (6.5) é aproximada por

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial n_0} b d\Omega = \sum_{m=1}^M \alpha^m \left( c \hat{w}^m + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0} \hat{w}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} \frac{\partial \hat{w}^m}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_0} \hat{V}_n^m d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n} \hat{M}_n^m d\Gamma \right). \quad (6.7)$$

As integrais de domínio transformadas em integrais de contorno, conforme Equações (6.6) e (6.7), podem ser substituídas nas Equações (5.26) e (5.27), tendo como resultado as equações de contorno finais dadas por:

$$\begin{aligned}
cw(Q) + \int_{\Gamma} V_n^*(Q, P)w(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(Q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \\
\int_{\Gamma} w^*(Q, P)V_n(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P)M_n(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(Q, P)R_{c_i}(P) + \\
\sum_{m=1}^M \alpha^m \left( c\hat{w}^m + \int_{\Gamma} V_n^* \hat{w}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^* \frac{\partial \hat{w}^m}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* \hat{V}_n^m d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} \hat{M}_n^m d\Gamma \right)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

e

$$\begin{aligned}
c\frac{\partial w}{\partial n_0}(Q) + \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(Q, P)w(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(Q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_0}(Q, P)w_{c_i}(P) = \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(Q, P)V_n(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n}(Q, P)M_n(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_0}(Q, P)R_{c_i}(P) + \\
\sum_{m=1}^M \alpha^m \left( c\frac{\partial \hat{w}^m}{\partial n_0} + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0} \hat{w}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0} \frac{\partial \hat{w}^m}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_0} \hat{V}_n^m d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n} \hat{M}_n^m d\Gamma \right).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Pode-se notar que as Equações (6.8) e (6.9) não apresentam mais nenhuma integral de domínio e que os termos entre parênteses envolvem somente valores conhecidos. Este procedimento dá o nome ao método, pois o princípio da reciprocidade foi aplicado em ambos os lados das equação integrais, a fim de se levar todas as integrais para o contorno.

Deve-se notar que  $\hat{w}^m$ ,  $\partial \hat{w}^m / \partial n$ ,  $\hat{V}_n^m$  e  $\hat{M}_n^m$  são funções conhecidas que dependem apenas da geometria dos elementos do contorno e das coordenadas dos nós internos. Outro ponto importante a ser notado é que a utilização dessa aproximação implica em que as matrizes **H** e **G** possam ser usadas em ambos os lados da equação.

### 6.3 Implementação computacional

As equações (6.8) e (6.9) podem ser escritas na forma matricial, resultando:

$$\begin{aligned}
 c \left\{ \begin{array}{c} w^* \\ \frac{\partial w^*}{\partial n_0} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_e} \left( \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right]_i \left\{ \begin{array}{c} w^* \\ \frac{\partial w^*}{\partial n} \end{array} \right\}_i \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \left( \left\{ \begin{array}{c} R_{c1} \\ R_{c2} \end{array} \right\}_i w_{c_i}^* \right) = \\
 \sum_{i=1}^{N_e} \left( \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right]_i \left\{ \begin{array}{c} V_n^* \\ M_n^* \end{array} \right\}_i \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \left( \left\{ \begin{array}{c} w_{c1} \\ w_{c2} \end{array} \right\}_i R_c^* \right) + \\
 \sum_{m=1}^M \alpha^m \left( c \left\{ \begin{array}{c} \hat{w}^m \\ \frac{\partial \hat{w}^m}{\partial n_0} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_e} \left( \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right]_i \left[ \begin{array}{c} \hat{W}_{1m} \\ \hat{W}_{2m} \end{array} \right]_i + \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right]_i \left[ \begin{array}{c} \hat{V}_{1m} \\ \hat{V}_{2m} \end{array} \right]_i \right) \right).
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Os termos  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  da Equação (6.10) são dados em (5.95), enquanto que  $\hat{W}_{ij}$  e  $\hat{V}_{ij}$  são dados por:

$$\hat{W}_{1m} = \hat{w}^m ; \quad \hat{W}_{2m} = \frac{\partial \hat{w}^m}{\partial n} \tag{6.11}$$

$$\hat{V}_{1m} = \hat{V}_n^m ; \quad \hat{V}_{2m} = \hat{M}_n^m. \tag{6.12}$$

Assumindo-se que a posição do ponto fonte  $Q$  varia de 1 a  $N_e$  e agrupando-se os termos semelhantes, é obtido um sistema de equações dado por:

$$\mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{d} \tag{6.13}$$

onde

$$\mathbf{d} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{W}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{V}}) \boldsymbol{\alpha} \tag{6.14}$$

e  $\boldsymbol{\alpha}$  é o vetor dos coeficientes da Equação (6.1) e dado por

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} . \tag{6.15}$$

A Equação (6.10) é a base para a aplicação do MRD e envolve apenas discretização e integração no contorno. Os nós internos não fazem parte de nenhum elemento e apenas suas coordenadas são necessárias como dados de entrada. Em geral, a definição de nós internos não é uma condição necessária para a obtenção da solução no contorno. No entanto, a solução será mais precisa se estes forem utilizados.

# Capítulo 7

## Transformação das integrais de carga do domínio para o contorno

Como pode ser visto nas equações integrais de contorno, a formulação ainda apresenta integrais de domínio, provenientes de forças de corpo  $b$  quaisquer. Estas integrais podem ser computadas no domínio pela integração direta de sua área  $\Omega_b$  (Figura 4.2), como feito por Shi e Bezzine (1988), por exemplo. Entretanto, a formulação de elementos de contorno perde sua característica principal, que é a discretização somente no contorno, porque este procedimento necessita discretização do domínio em células. Rajamohan e Raamachandran (1999) apresentaram uma alternativa para evitar a discretização do domínio propondo um método pelo qual a integral de domínio é substituída por uma integral particular polinomial. Neste capítulo serão apresentadas duas outras formulações alternativas para se evitar a discretização do domínio. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio proveniente da carga distribuída em integral de contorno, seguindo os procedimentos apresentados por Venturini (1988) e por Albuquerque *et al.* (2003c), para problemas de flexão de placa isotrópicas e anisotrópicas, respectivamente. A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o MRD.

### 7.1 Transformação exata

Como pode ser visto nas equações (5.26) e (5.27), a formulação ainda apresenta integrais de domínio, provenientes de forças de corpo  $b$  quaisquer. Nesta seção considera-se

$b = q$  onde  $q$  é o carregamento aplicado no domínio. A integral de domínio proveniente da carga distribuída é transformada em integral de contorno pela transformação exata. Dois casos de carregamentos podem ser considerados: carregamento uniformemente distribuído e linearmente distribuído.

Considere a placa da Figura 4.2, sob carregamento  $q$ , aplicado em uma área  $\Omega_q$ . Assumindo que o carregamento  $q$  tem uma distribuição linear  $(Ax + By + C)$  na área  $\Omega_q$  a integral de domínio pode ser escrita fazendo-se a integração no elemento  $d\rho(\rho d\theta)$  variando-se  $\rho$  de 0 a  $r$ , onde  $r$  é o valor do raio de integração no contorno  $\Gamma_q$  (Figura 7.1). Assim,

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\Omega_q} (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta \quad (7.1)$$

ou

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta. \quad (7.2)$$

Definindo-se  $F^*$  como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho, \quad (7.3)$$

podemos escrever

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \quad (7.4)$$

Considerando um ângulo infinitesimal  $d\theta$  (Figura 7.1) a relação entre o comprimento do arco  $rd\theta$  e o comprimento infinitesimal do contorno  $d\Gamma$ , pode ser escrito como

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \quad (7.5)$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma. \quad (7.6)$$

Usando as propriedades do produto interno de vetores unitários  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{r}$  indicados na Figura 7.1 pode-se escrever

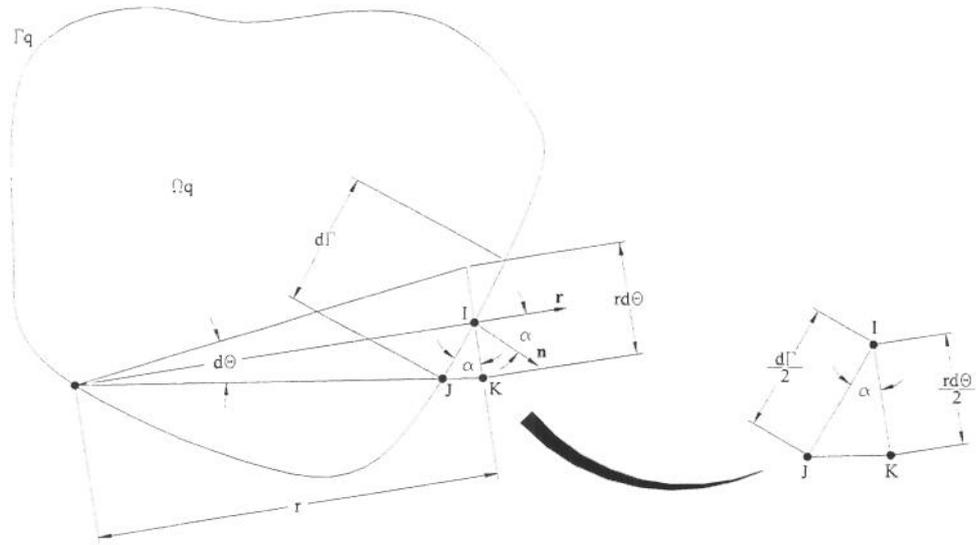


Figura 7.1: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

$$d\theta = \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{r}d\Gamma. \quad (7.7)$$

Finalmente, substituindo a equação (7.7) na equação (7.4) a integral de domínio da equação (5.26) pode ser escrita como integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\Gamma_q} \frac{F^*}{r} \mathbf{n}\mathbf{r} d\Gamma. \quad (7.8)$$

Uma vez que

$$x = \rho \cos \theta \quad (7.9)$$

e

$$y = \rho \text{sen} \theta, \quad (7.10)$$

a integral  $F^*$  pode ser escrita substituindo-se as equações (4.44), (7.9) e (7.10) em (7.3), obtendo-se:

$$F^* = \int_0^r \frac{1}{8\pi} (A\rho \cos \theta + B\rho \text{sen} \theta + C) [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] \rho d\rho. \quad (7.11)$$

A equação (7.11) pode ser reescrita como

$$F^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta) \int_0^r \rho^2 [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho + \right. \\ \left. C \int_0^r \rho [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho \right\}. \quad (7.12)$$

Seguindo procedimento similar para obter equação (7.12), o termo de domínio da equação (5.27) pode ser escrito como

$$\int_{\Omega_q} q \frac{\partial w^*}{\partial n_0} d\Omega = \int_{\theta} G^* d\theta, \quad (7.13)$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial w^*}{\partial n_0} \rho d\rho. \quad (7.14)$$

Substituindo-se a derivada da solução fundamental  $w^*$  em relação à normal no ponto fonte e as equações (7.9) e (7.10) na equação (7.14), obtém-se:

$$G^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta) \int_0^r \rho^2 \left[ C_1 \frac{\partial R_1}{\partial n_0} + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial n_0} + C_3 \left( \frac{\partial S_1}{\partial n_0} - \frac{\partial S_2}{\partial n_0} \right) \right] d\rho + \right. \\ \left. C \int_0^r \rho \left[ C_1 \frac{\partial R_1}{\partial n_0} d\rho + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial n_0} + C_3 \left( \frac{\partial S_1}{\partial n_0} - \frac{\partial S_2}{\partial n_0} \right) \right] d\rho \right\}. \quad (7.15)$$

Como pode ser visto as integrais das equações (7.12) e (7.15) são independentes de  $\theta$ . Elas são calculadas analiticamente e dadas por:

$$\int_0^r R_i \rho d\rho = \frac{r^4}{16} \left\{ -16e_i \arctan \frac{e_i \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \theta (\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta) - \right. \\ \left[ -7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2)}{a^2} \right] \times \\ \left. [-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \operatorname{sen} 2\theta] \right\}, \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r S_i \rho d\rho &= \frac{r^4}{16} \left\{ 2e_i \left[ -7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2 \theta + (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2)}{a^2} \right] \times \right. \\
&\quad \text{sen} \theta (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) + 2 \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta} \times \\
&\quad \left. [1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \text{sen} 2\theta] \right\}, \tag{7.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r R_i \rho^2 d\rho &= \frac{r^5}{50} \left\{ -40e_i \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta} \text{sen} \theta (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) - \right. \\
&\quad \left[ -17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2 \theta + (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2)}{a^2} \right] \times \\
&\quad \left. [-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \text{sen} 2\theta] \right\}, \tag{7.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r S_i \rho^2 d\rho &= \frac{r^5}{50} \left\{ 2e_i \left[ -17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2 \theta + (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2)}{a^2} \right] \times \right. \\
&\quad \text{sen} \theta (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) + 5 \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta} \times \\
&\quad \left. [1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \text{sen} 2\theta] \right\}, \tag{7.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho d\rho &= \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta} \text{sen} \theta + \right. \\
&\quad \left. \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2 \theta + (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) \right\}, \tag{7.20}
\end{aligned}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \text{sen}\theta}{\cos\theta + d_i \text{sen}\theta} (\cos\theta + 2d_i \text{sen}\theta) + \right. \\ \left. \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2\theta + (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta)^2)}{a^2} \right] [d_i \cos\theta + (d_i^2 - e_i^2) \text{sen}\theta] \right\}, \quad (7.21)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho d\rho = \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2\theta + (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta)^2)}{a^2} \right] \text{sen}\theta + \right. \\ \left. 6 \arctan \frac{e_i \text{sen}\theta}{\cos\theta + d_i \text{sen}\theta} (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta) \right\}, \quad (7.22)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2\theta + (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta)^2)}{a^2} \right] \times \right. \\ \left. (\cos\theta + 2d_i \text{sen}\theta) - 6 \arctan \frac{e_i \text{sen}\theta}{\cos\theta + d_i \text{sen}\theta} [d_i \cos\theta + (d_i^2 - e_i^2) \text{sen}\theta] \right\}, \quad (7.23)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \text{sen}\theta}{\cos\theta + d_i \text{sen}\theta} \text{sen}\theta + \right. \\ \left. \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2\theta + (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta)^2)}{a^2} \right] (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta) \right\}, \quad (7.24)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \text{sen}\theta}{\cos\theta + d_i \text{sen}\theta} (\cos\theta + 2d_i \text{sen}\theta) + \right. \\ \left. \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2\theta + (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta)^2)}{a^2} \right] [d_i \cos\theta + (d_i^2 - e_i^2) \text{sen}\theta] \right\}, \quad (7.25)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \text{sen}^2\theta + (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta)^2)}{a^2} \right] \text{sen}\theta + \right. \\ \left. 4 \arctan \frac{e_i \text{sen}\theta}{\cos\theta + d_i \text{sen}\theta} (\cos\theta + d_i \text{sen}\theta) \right\}, \quad (7.26)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ \left. (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) + 4 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}. \quad (7.27)$$

Na formulação apresentada nesta seção considerou-se o carregamento aplicado no domínio como constante e uniformemente distribuído ou linearmente distribuído, no entanto, a formulação pode ser estendida para outros carregamentos de ordens mais elevadas.

## 7.2 Transformação aproximada pelo MRD

Num problema de flexão de placas sob carregamento constante uniformemente distribuído, a força de corpo atuante é a carga  $q$ . Conforme comentado anteriormente, os coeficientes  $\alpha^m$  são, inicialmente, desconhecidos, mas podem ser determinados tomando-se o valor de  $q$  em  $M$  diferentes pontos do contorno de maneira que seja obtido um conjunto de equações semelhante a (6.1), dado por

$$q \cong \sum_{m=1}^M \alpha^m f^m. \quad (7.28)$$

Tomando o valor de  $q$  em diferentes pontos, o conjunto de equações (7.28) pode ser obtido. Expressando essas equações na forma matricial, tem-se

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}. \quad (7.29)$$

Como  $q$  e  $f$  são valores conhecidos, o vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  pode ser obtido facilmente:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}. \quad (7.30)$$

Assim, para o problemas com carregamento constante uniformemente distribuído, o vetor (6.14) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{W}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{V}}) \mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}. \quad (7.31)$$

Aplicando as condições de contorno, através da permutação de colunas entre as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , chega-se ao sistema de equações da Equação (5.97).

# Capítulo 8

## Análise estática de placas isotrópicas

Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos da aplicação da formulação do método dos elementos de contorno. Serão analisados diferentes problemas envolvendo variadas condições de contorno, dimensões e propriedades de material. Nos exemplos apresentados será utilizada a formulação isotrópica. O objetivo dos exemplos apresentados é demonstrar a aplicabilidade do método em problemas reais e assegurar que seus resultados estão em boa concordância com resultados da literatura.

### 8.1 Considerações gerais

Foram analisados diferentes problemas envolvendo variadas condições de contorno, dimensões e propriedades de material. As condições de contorno consideradas foram: placa simplesmente apoiada em quatro lados; apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois; engastada nos quatro lados; engastada em um lado e apoiada nos outros três; apoiada em dois lados adjacentes e engastada nos outros dois; engastada em três lados e apoiada no restante; livre em um lado e apoiada nos outros três; engastada-livre-engastada-apoiada e livre em um lado e engastada nos outros três.

No primeiro problema são apresentadas análises mais detalhadas usando duas malhas, sendo uma com 5 elementos e outra com 10 elementos em cada lado da placa. Para cada uma dessas malhas foram calculados os deslocamentos em 25 pontos no domínio da placa e comparados com soluções analíticas. Nesse mesmo problema também investigou-se o efeito da relação  $a/b$  entre a largura e o comprimento da placa na precisão dos resultados obtidos.

Também no segundo problema são calculados os deslocamentos em 25 pontos internos. Nos demais casos foram calculados somente os deslocamentos no ponto central da placa.

Em todos os casos analisados a placa é retangular e o carregamento considerado é constante e distribuído uniformemente por toda a superfície da placa. Os problemas apresentados tem solução por série (Timoshenko e Woinowsky-Krieger 1959) ou solução aproximada obtida pelo método das diferenças finitas (Bareš 1970) as quais são usadas para comparação com os resultados obtidos no presente trabalho.

## 8.2 Placa quadrada simplesmente apoiada em quatro lados

A Figura 8.1 mostra o problema físico considerado: uma placa quadrada simplesmente apoiada em quatro lados, submetida a carregamento constante distribuído uniformemente por toda a sua superfície.

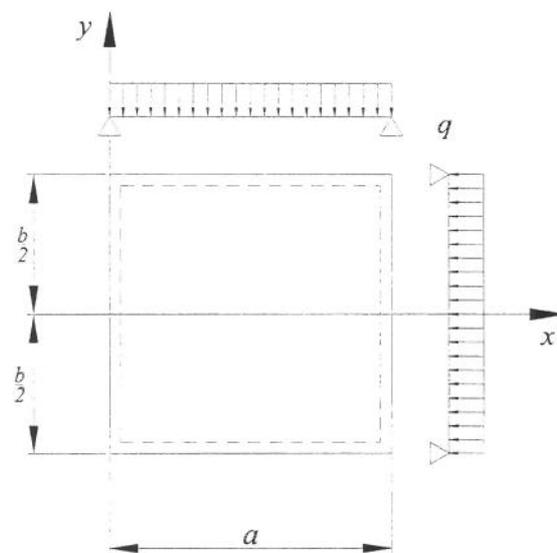


Figura 8.1: Placa simplesmente apoiada em suas quatro bordas.

As propriedades geométricas e de material adotadas neste exemplo são: largura  $a = 1$ , comprimento  $b = 1$ , espessura  $e = 0,1$ , módulo de elasticidade  $E = 1$ , razão de Poisson  $\nu = 0,3$  e carregamento aplicado  $q = -1$ .

Para um problema com estas condições de contorno e carregamento a seguinte expressão pode ser usada (Timoshenko e Woinowsky-Krieger 1959):

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (8.1)$$

onde  $\alpha_m$  é dado por

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (8.2)$$

e as coordenadas  $x$  e  $y$  são tomadas conforme Figura 8.1.

Foram realizadas duas análises usando elementos de contorno constantes. Na primeira análise foi usada uma malha composta por 5 elementos por lado da placa e na segunda foi usada uma malha composta por 10 elementos por lado da placa. Em ambos os casos foram usados 81 nós internos. A Figura 8.2 mostra a malhas de elementos de contorno e a distribuição de pontos internos empregadas.

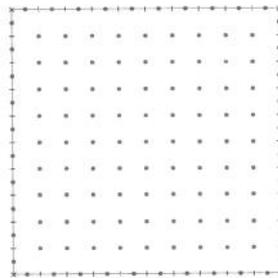


Figura 8.2: Malha de elementos de contorno e distribuição de pontos internos.

Usando o programa de elementos de contorno implementado foram calculados os deslocamentos  $w$  nos 81 pontos internos. Devido a simetria somente um quarto do problema físico foi levado em consideração na comparação dos resultados. Os deslocamentos obtidos foram comparados com aqueles calculados analiticamente segundo Timoshenko e

Woinowsky-Krieger (1959), usando-se a Equação (8.1). Os erros em percentagem,  $\varepsilon$ , foram calculados segundo a expressão

$$\varepsilon = \left| \frac{w_n - w_a}{w_a} \right| \cdot 100 \quad (8.3)$$

sendo  $w_n$  o resultado numérico calculado usando-se o programa de elementos de contorno implementado e  $w_a$  o resultado aproximado por série.

Na Tabela 8.1 são apresentados os erros  $\varepsilon$  entre os resultados numéricos obtidos pela presente implementação e os analíticos para  $w$  em função de  $x$ , para  $x = \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5\}$  em  $y = -0, 4$  conforme coordenadas mostradas na Figura 8.1.

Tabela 8.1: Erros  $\varepsilon$  entre os resultados obtidos pelo MEC e pela série.

No de elementos	5		10	
No termos da série	1	3	1	3
Coordenada $x$	Erros [%]			
0,1	22.5286	16.5556	8.4996	3.2105
0,2	11.2380	8.2361	3.3241	0.5358
0,3	4.3858	3.9581	0.4910	0.0792
0,4	1.3026	2.3872	1.1577	0.0993
0,5	0.5859	2.1356	1.7030	0.1886

O comportamento típico dos resultados para este problema pode ser visto na Figura 8.3, onde foram adotados 10 elementos de contorno em cada lado da placa e 3 termos na série ( $m = 1, 3, 5$ ).

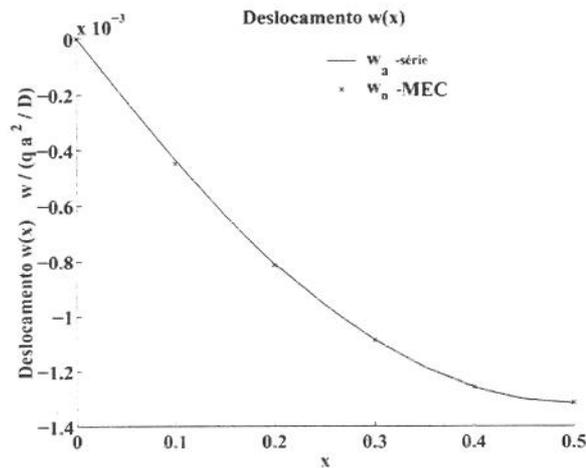


Figura 8.3: Deslocamentos  $w(x)$  em  $y = 0,1$ .

Neste caso analisado observa-se pela Tabela 8.1 que os resultados apresentam uma divergência para valores de  $x$  próximos das bordas, que vai diminuindo à medida que  $x$  afasta-se da borda. Isso está ligado, em parte, ao efeito da reação de canto apresentado na formulação de placas finas, e em parte, a outros fatores tais como o uso de elementos de contorno constantes, malha pouco refinada e até mesmo pelo uso de poucos termos na série. Uma análise mais detalhada dos resultados deve levar em conta os dados apresentados a seguir.

Na Tabela 8.2 são apresentados os erros  $\varepsilon$  entre os resultados numéricos obtidos pela presente implementação e os analíticos para  $w$  em função de  $x$ , para  $x = \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5\}$  em  $y = -0, 3$  conforme coordenadas mostradas na Figura 8.1.

Tabela 8.2: Erros  $\varepsilon$  entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos.

Nº de elementos	5		10	
Nº termos da série	1	3	1	3
Coordenada $x$	Erros [%]			
0,1	13.2154	8.3984	5.1608	0.6865
0,2	7.5812	5.0099	2.6446	0.1913
0,3	3.6795	3.2726	0.4202	0.0261
0,4	1.4455	2.4032	1.0118	0.0773
0,5	0.7496	2.1433	1.5025	0.1400

O comportamento típico dos resultados para este problema pode ser visto na Figura 8.4 onde também foram adotados 10 elementos de contorno em cada lado da placa e 3 termos na série ( $m = 1, 3, 5$ ).

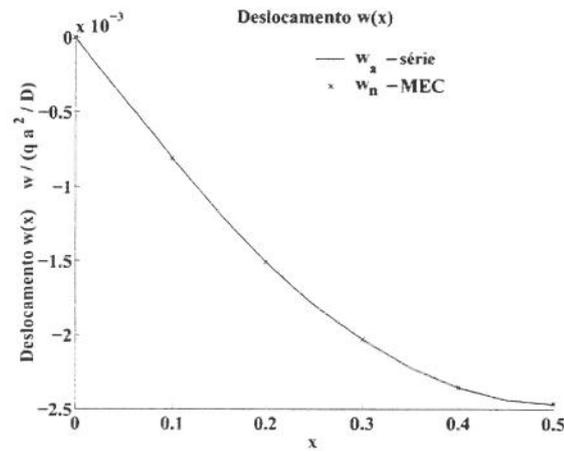


Figura 8.4: Deslocamentos  $w(x)$  em  $y = 0,2$ .

Observa-se, também na Tabela 8.2, a divergência comentada anteriormente, porém com

valores bem menores, pois a coordenada  $y$  está um pouco mais afastada da borda. Este mesmo efeito pode ser observado nas demais análises apresentadas a seguir.

Na Tabela 8.3 são apresentados os erros  $\varepsilon$  entre os resultados numéricos obtidos pela presente implementação e os analíticos para  $w$  em função de  $x$ , para  $x = \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5\}$  em  $y = -0, 2$  conforme coordenadas mostradas na Figura 8.1.

Tabela 8.3: Erros  $\varepsilon$  entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos.

Nº de elementos	5		10	
Nº termos da série	1	3	1	3
Coordenada $x$	Erros [%]			
0,1	8.0847	3.9906	4.0518	0.1105
0,2	5.4783	3.2147	2.1625	0.0300
0,3	3.0139	2.6348	0.3307	0.0385
0,4	1.3814	2.2378	0.9179	0.0809
0,5	0.8221	2.0832	1.3551	0.1212

O comportamento típico dos resultados para este problema pode ser visto na Figura 8.5. Assim como nos casos anteriores, aqui também foram adotados 10 elementos de contorno em cada lado da placa e 3 termos na série ( $m = 1, 3, 5$ ).

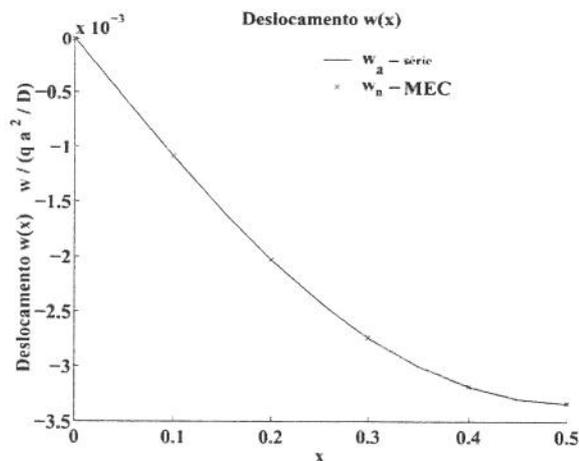


Figura 8.5: Deslocamentos  $w(x)$  em  $y = 0,3$ .

Na Tabela 8.4 são apresentados os erros  $\varepsilon$  entre os resultados numéricos obtidos pela presente implementação e os analíticos para  $w$  em função de  $x$ , para  $x = \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5\}$  em  $y = -0, 1$  conforme coordenadas mostradas na Figura 8.1.

Tabela 8.4: Erros  $\varepsilon$  entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos.

Nº de elementos	5		10	
Nº termos da série	1	3	1	3
Coordenada $x$	Erros [%]			
0,1	6.1513	2.4197	3.5733	0.0677
0,2	4.4444	2.3560	1.9145	0.1234
0,3	2.5984	2.2395	0.2715	0.0792
0,4	1.2859	2.0815	0.8691	0.0905
0,5	0.8195	1.9979	1.2723	0.1184

O comportamento típico dos resultados para este problema pode ser visto na Figura 8.6, onde adotou-se 10 elementos de contorno em cada lado da placa e 3 termos na série ( $m = 1, 3, 5$ ).

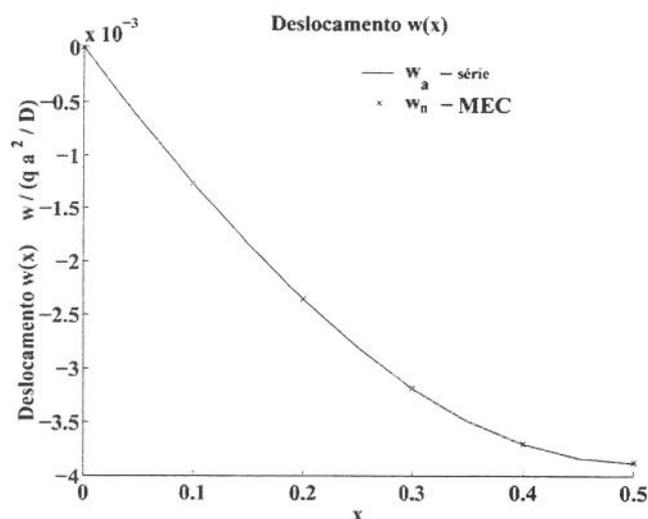


Figura 8.6: Deslocamentos  $w(x)$  em  $y = 0,4$ .

Na Tabela 8.5 são apresentados os erros  $\varepsilon$  entre os resultados numéricos obtidos pela presente implementação e os analíticos para  $w$  em função de  $x$ , para  $x = \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5\}$  em  $y = 0$  conforme coordenadas mostradas na Figura 8.1.

Tabela 8.5: Erros  $\varepsilon$  entre os resultados obtidos (MEC) e analíticos.

Nº de elementos	5		10	
Nº termos da série	1	3	1	3
Coordenada $x$	Erros [%]			
0,1	5.8468	2.2195	3.4381	0.1066
0,2	4.1673	2.1346	1.8388	0.1486
0,3	2.4645	2.1127	0.2518	0.0923
0,4	1.2465	2.0220	0.8542	0.0947
0,5	0.8101	1.9609	1.2461	0.1188

O comportamento típico dos resultados para este problema pode ser visto na Figura 8.7. Como nos demais casos, foram adotados 10 elementos de contorno em cada lado da placa e 3 termos na série ( $m = 1, 3, 5$ ).

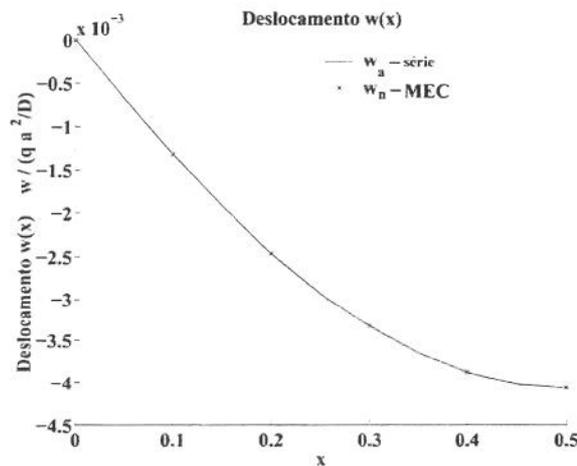


Figura 8.7: Deslocamentos  $w(x)$  em  $y = 0,5$ .

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) diz que com apenas um termo na série é possível obter resultados com erros máximos em torno de 2,5%. A Tabela 8.6 apresenta os valores da deflexão  $w$  em cada um dos nós internos mostrados na Figura 8.8, dadas em função das coordenadas  $x$  e  $y$  destes nós e em função do número de termos na série.

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 8.6, verifica-se que a série converge rapidamente e que o ideal é usar-se pelo menos três termos na série.

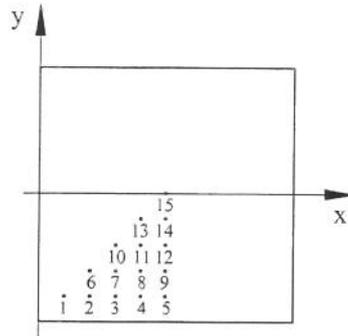


Figura 8.8: Nós internos para cálculo da deflexão.

Tabela 8.6: Estudo de convergência da série para valores de deflexão.

Nós	Coordenadas		Deflexão $w$ $\chi$ número de termos na série			
	x	y	1 termo	2 termos	4 termos	8 termos
1	0.1	-0.4	5.2695	4.5092	4.5092	4.5092
2	0.2	-0.4	9.8072	8.5770	8.5770	8.5770
3	0.3	-0.4	13.0350	11.8050	11.8050	11.8050
4	0.4	-0.4	14.6380	13.8780	13.8780	13.8780
5	0.5	-0.4	14.5920	14.5920	14.5920	14.5920
6	0.2	-0.3	18.2190	16.0300	16.0300	16.0300
7	0.3	-0.3	24.2520	22.0630	22.0630	22.0630
8	0.4	-0.3	27.2900	25.9360	25.9360	25.9360
9	0.5	-0.3	27.2710	27.2710	27.2710	27.2710
10	0.3	-0.2	32.6800	29.8490	29.8490	29.8490
11	0.4	-0.2	36.8390	35.0890	35.0890	35.0890
12	0.5	-0.2	36.8950	36.8950	36.8950	36.8950
13	0.4	-0.1	42.7320	40.7610	40.7610	40.7610
14	0.5	-0.1	42.8590	42.8950	42.8950	42.8950
15	0.5	0.0	44.8740	44.8740	44.8740	44.8740

### 8.3 Placa retangular simplesmente apoiada em quatro lados

Também foram realizadas análises em uma placa retangular cujas propriedades geométricas e de material adotadas são dadas por: largura  $a = 2$ , comprimento  $b = 1$ , espessura  $e = 0,1$ , módulo de elasticidade  $E = 1$ , razão de Poisson  $\nu = 0,3$  e carregamento aplicado  $q = -1$ .

A Figura 8.9 mostra o problema físico considerado.

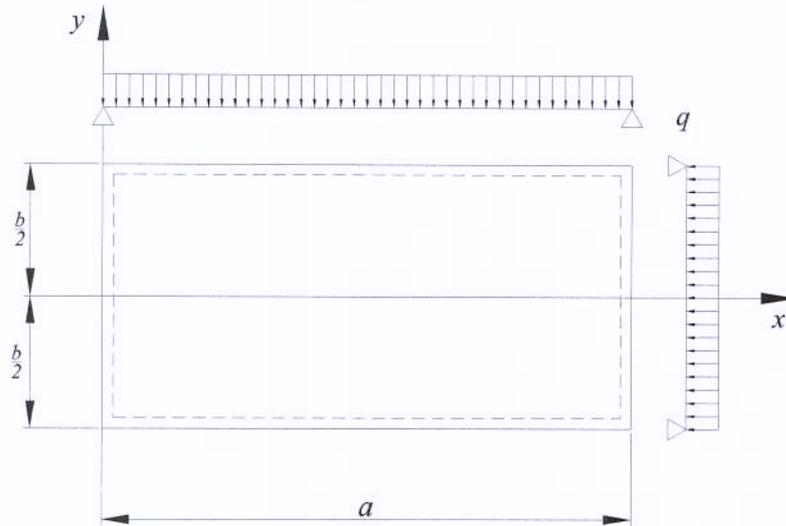


Figura 8.9: Placa simplesmente apoiada em suas quatro bordas.

A discretização consistiu de 5 elementos no lado menor, 10 elementos no lado maior e 81 pontos internos. A Figura 8.10 mostra tanto a malha de elementos de contorno quanto a distribuição de pontos internos empregadas.

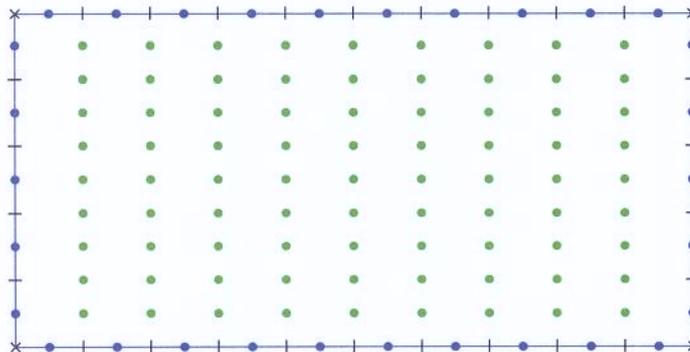


Figura 8.10: Malha de elementos de contorno e distribuição de pontos internos.

Devido a simetria somente um quarto do problema físico foi levado em consideração na comparação dos deslocamentos  $w$ . Os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno são comparados (Figura 8.11) com a equação (8.1) usando 3 termos da série ( $m = 1, 3, 5$ ).

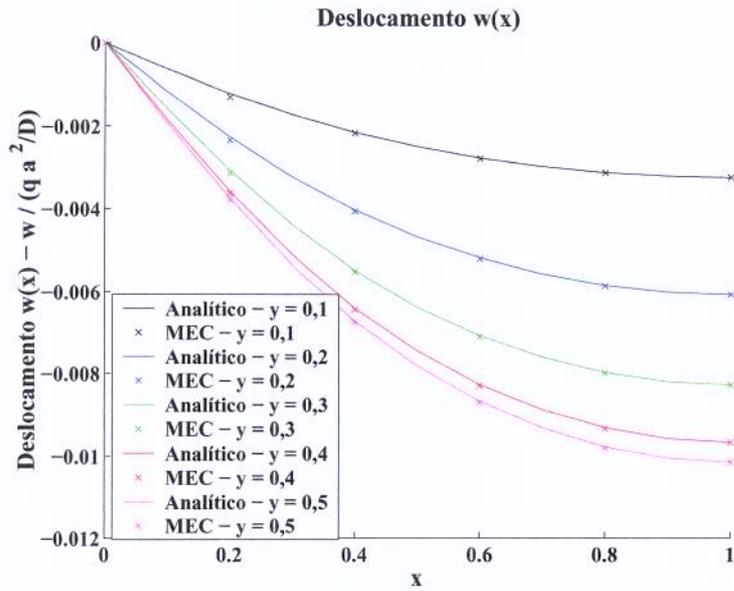


Figura 8.11: Deslocamentos  $w(x)$  em uma placa retangular.

Além da formulação, também foi implementado um pós-processador, através do qual pode-se ter uma visualização da placa deformada (Figura 8.12).

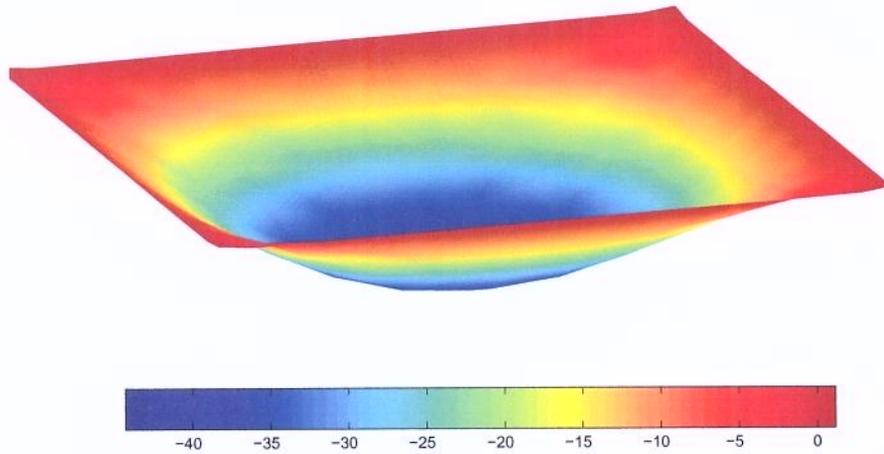


Figura 8.12: Deslocamentos  $w(x, y)$  em uma placa.

## 8.4 Placa simplesmente apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois

A Figura 8.13 mostra o problema físico considerado: uma placa retangular simplesmente apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois, submetida a carregamento constante distribuído uniformemente.

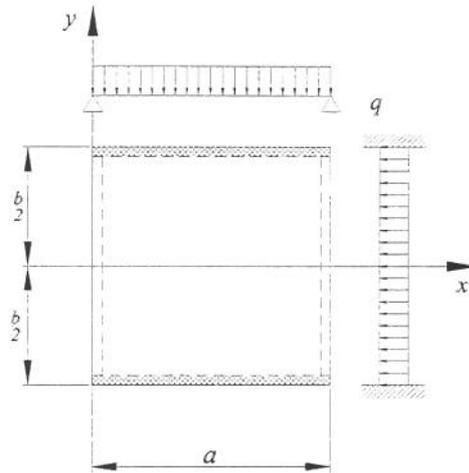


Figura 8.13: Placa simplesmente apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois.

As propriedades geométricas e de material adotadas neste exemplo são as mesmas do problema anterior: largura  $a = 1$ , comprimento  $b = 1$ , espessura  $e = 0,1$ , módulo de elasticidade  $E = 1$ , razão de Poisson  $\nu = 0,3$  e carregamento aplicado  $q = -1$ .

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) assumem que, para um problema com tais condições de contorno e carregamento, a placa está simplesmente apoiada em todo o contorno. Usando a equação (8.1) é calculado  $w_1$ . Independentemente, calculam-se as deflexões  $w_2$  em uma placa submetida ao mesmo carregamento, na qual é imposta a condição de contorno de momento em dois lados opostos. A superposição dos efeitos resulta na deflexão  $w$ , a qual é dada pela diferença

$$w = w_1 - w_2 \quad (8.4)$$

onde  $w_2$  é dado pela seguinte equação

$$w_2 = -\frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^5 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \left( \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (8.5)$$

Foi realizada uma análise usando 10 elementos constantes no contorno, em cada lado da placa, e 81 pontos internos cujos resultados são comparados com a equação (8.4). A malha de elementos de contorno e a distribuição de pontos internos empregadas é a mesma mostrada na Figura 8.2. Devido a simetria somente um quarto do problema físico foi levado em consideração na comparação dos deslocamentos  $w$ . Os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno são comparados (Figura 8.14) com a equação (8.4) usando 3 termos da série ( $m = 1, 3, 5$ ).

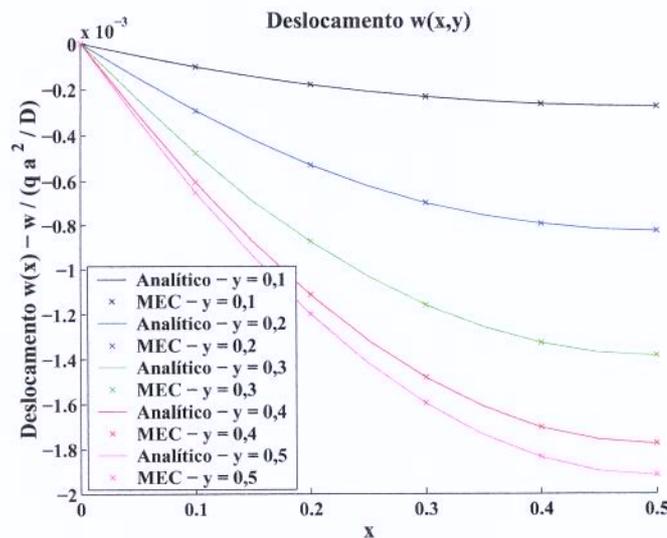


Figura 8.14: Deslocamentos  $w(x)$  em uma placa retangular.

## 8.5 Placa engastada nos quatro lados

A Figura 8.15 mostra o problema físico considerado: uma placa retangular engastada nos quatro lados, submetida a carregamento constante distribuído uniformemente.

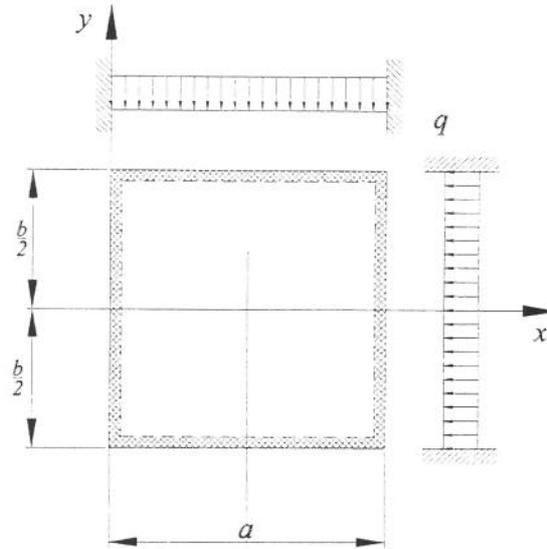


Figura 8.15: Placa engastada nos quatro lados.

As propriedades geométricas e de material adotadas neste exemplo são: largura  $a = 1$ , comprimento  $b = 1$ , espessura  $e = 0,1$ , módulo de elasticidade  $E = 1$  e carregamento aplicado  $q = -1$ . Foram analisados sete casos diferentes sendo que nos três primeiros estudou-se o efeito da variação da malha, para  $\nu = 0$ , usando, em cada caso, 10, 15 e 20 elementos por lado da placa. Nas análises restantes estudou-se o efeito da variação do razão de Poisson, nas quais foram considerados os seguintes valores:  $\nu = 0$ ;  $\nu = 0,15$ ;  $\nu = 0,25$  e  $\nu = 0,3$ .

Os resultados numéricos obtidos pelo método dos elementos de contorno foram comparados com Tabelas elaboradas por Bareš (1970).

Na Tabela 8.7 são apresentados os deslocamentos obtidos no centro da placa pelo método numérico e seu erro em relação aos apresentados por Bareš (1970), para três diferentes malhas.

Tabela 8.7: Deslocamentos  $w$  no centro da placa -  $\nu = 0$ .

Nº de elementos	$w$	$\epsilon$
10	0,0152	0,7217
15	0,0152	0,7482
20	0,0152	0,7547

Na Tabela 8.8 são apresentados os deslocamentos obtidos no centro da placa pelo método numérico e seu erro em relação aos apresentados por Bareš (1970), para quatro diferentes valores de razão de Poisson. Para todos os casos a malha utilizada foi de 10 elementos em cada lado da placa.

Tabela 8.8: Deslocamentos  $w$  no centro da placa - 10 elementos.

$\nu$	$w$	$\varepsilon$
0,00	0,0152	0,7217
0,15	0,0148	0,3502
0,25	0,0142	0,4180
0,30	0,0138	0,5574

## 8.6 Placas sujeitas a diversas condições de contorno

Além das análises apresentadas nas seções anteriores várias outras foram realizadas, cujos resultados são apresentados resumidamente na Tabela 8.9, onde  $w$  é o resultado obtido numericamente usando o programa de elementos de contorno implementado, e  $\varepsilon$  é o erro em percentagem entre o resultado numérico e o apresentado por Bareš (1970). Foram utilizadas malhas com 10 elementos em cada lado da placa. As propriedades geométricas e de material adotadas são: largura  $a = 1$ , comprimento  $b = 1$ , espessura  $e = 0,1$ , módulo de elasticidade  $E = 1$ , carregamento aplicado  $q = -1$  e razão de Poisson  $\nu = 0$ . As condições de contorno são descritas por suas iniciais: A = apoiado, E = engastado e L = livre.

Tabela 8.9: Deslocamentos  $w$  no centro da placa - 10 elementos.

Condição de contorno	$w$	$\varepsilon$
AAEA	0,0309	7,4523
AAEE	0,0233	7,3805
EEEE	0,0185	1,7517
AAAL	0,0921	1,0458
ELEA	0,0271	1,2756
ELEE	0,0225	0,2220

Usando o pós-processador implementado no programa pode-se ter uma visualização da placa deformada, para uma condição de contorno ELEE, por exemplo, (Figura 8.16).

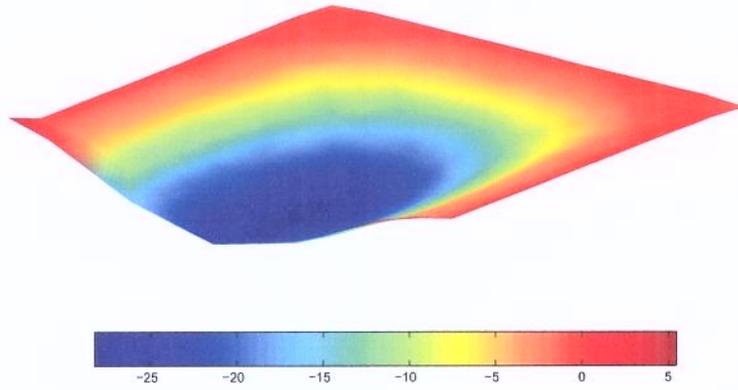


Figura 8.16: Deslocamentos  $w(x, y)$  em uma placa ELEE.

# Capítulo 9

## Análise estática de placas anisotrópicas

Neste capítulo serão apresentados vários exemplos da aplicação da formulação do MEC e do MRD, usando elementos constantes e quadráticos, na análise estática de placas anisotrópicas. O objetivo dos exemplos apresentados é demonstrar a aplicabilidade do método em problemas reais e assegurar que seus resultados estejam em boa concordância com resultados da literatura. Serão analisados diferentes problemas envolvendo variadas condições de contorno, dimensões, propriedades de material, malhas e funções de aproximação.

### 9.1 Estudo de funções de aproximação

Nesta seção são apresentados os resultados da aplicação do MRD aos problemas de flexão em placas, usando a formulação anisotrópica. Este estudo tem por objetivo verificar a precisão do método na aproximação dos termos de domínio, referentes ao carregamento distribuído. A verificação se dá pela comparação entre os valores da deflexão em dois pontos da placa, calculados pelo MRD, e os valores da deflexão calculados analiticamente. Foi realizado um extenso estudo no qual para um mesmo problema foram realizadas muitas análises variando a solução particular e condições de contorno impostas. Também foram realizados alguns testes de convergência de malhas, nos quais foram variados o número de elementos da malha e o número de nós internos.

Foi analisado o problema de uma placa ortotrópica quadrada de dimensões  $a = 1$  m e espessura  $h = 0,01$  m. As propriedades de material adotadas foram:

$E_1 = 206,8 \cdot 10^9$  Pa,  $E_2 = 13,8 \cdot 10^9$  Pa,  $G_{12} = 0,6055 \cdot 10^9$  Pa e  $\nu = 0,3$  e o carregamento aplicado foi  $q = -1000$  N/m<sup>2</sup>.

Foram analisados dois problemas, nos quais foram aplicadas condições de contorno de apoio simples (Figura 9.1a) e engaste (Figura 9.1b).

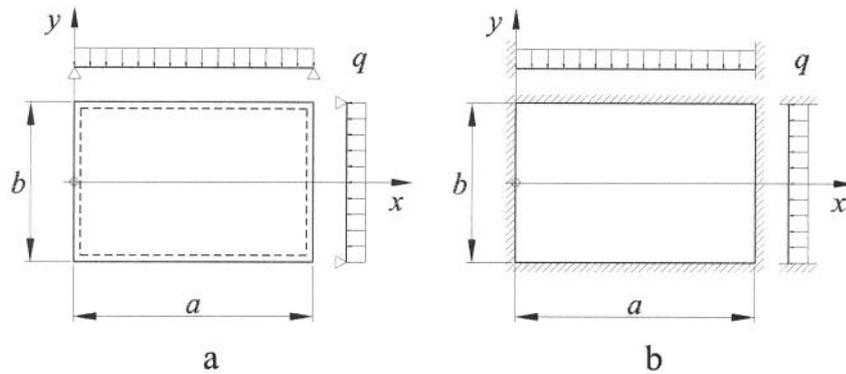


Figura 9.1: Problema físico: (a) placa apoiada (b) placa engastada.

Para cada condição de contorno, apoiada ou engastada, foram estudadas sete soluções particulares. A Figura 9.2 mostra a discretização (60 elementos de contorno constantes) e o número de nós internos (49 nós internos) usados.

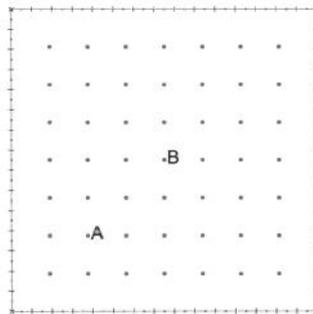


Figura 9.2: Malha de elementos de contorno constante e nós internos.

Foram calculadas as deflexões nos nós internos A e B. Conforme a Figura 9.1, o nó A tem as seguintes coordenadas:  $x = 0,2$  m e  $y = -0,3$  m. O nó B está no centro da placa.

A Tabela 9.1 apresenta os erros em porcentagem  $\varepsilon$ , calculados conforme a equação (8.3), para várias soluções particulares. Para o problema da placa apoiada,  $w_n$  são as deflexões

calculadas numericamente pelo MRD e  $w_a$  são as deflexões calculadas analiticamente segundo a solução obtida por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) usando solução por séries, tomando-se 3 termos, dada por:

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6} \sum_{m=1,3,\dots}^M \sum_{n=1,3,\dots}^N \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \frac{m^4}{a^4} D_{11} + \frac{2m^2n^2}{a^2b^2} (D_{12} + 2D_{66}) + \frac{n^4}{b^4} D_{22} \right]}, \quad (9.1)$$

cujas coordenadas são tomadas conforme Figura 9.1a. Para o problema da placa engastada,  $w_n$  são as deflexões calculadas numericamente pelo MRD e  $w_a$  são as deflexões calculadas pela transformação exata apresentada por Albuquerque *et al.* (2003c).

Tabela 9.1: Deflexões  $w$  [mm] e erros  $\varepsilon$  [%] entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=1$ ).

Solução particular $\hat{w}$	Placa apoiada				Placa engastada			
	Ponto A		Ponto B		Ponto A		Ponto B	
	$w_a = 0,455$	$w_n$	$\varepsilon$	$w_n$	$\varepsilon$	$w_n$	$\varepsilon$	
$r^4 + r^5$	0,4491	1,28	0,8067	0,28	0,06862	1,26	0,16034	0,51
$r^4 - r^5$	0,4495	1,22	0,8082	0,09	0,06913	0,53	0,16089	0,17
$r^4 + r^5 + r^6$	0,4496	1,19	0,8073	0,20	0,06874	1,10	0,16048	0,43
$r^4 - r^5 - r^6$	0,4498	1,15	0,8083	0,09	0,06901	0,71	0,16078	0,24
$r^4 + r^5 + r^6 + r^7$	0,4513	0,82	0,8087	0,04	0,06829	1,74	0,16065	0,32
$r^4 - r^5 - r^6 - r^7$	0,4513	0,80	0,8090	0	0,06834	1,67	0,16074	0,26
$r^4 - r^5 - r^7$	0,4514	0,78	0,8102	0,16	0,06873	1,11	0,16115	0,01

Analisando-se a Tabela 9.1 observam-se que os erros sempre são menores quando os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  da Equação (6.3) são negativos. No caso de placa apoiada, nota-se que, em geral, os erros diminuem à medida que polinômios de ordens maiores vão sendo usados, independentemente do fato dos coeficientes serem positivos ou negativos. Verifica-se que para qualquer solução particular adotada, o erros no ponto central da placa sempre são menores que 0,3%. No caso de placa engastada, a diminuição dos erros ocorrem somente para os coeficientes positivos. No entanto, mesmo quando coeficientes negativos são usados, observam-se que o erros são menores que 0,5%.

## 9.2 Estudo de condições de contorno

Com o objetivo de avaliar a generalidade da formulação também foram estudados vários outros problemas onde foram analisadas diversas condições de contorno, perfazendo um total

de vinte e sete análises, cujos resultados são apresentados na Tabela 9.2. Nestes casos foi usada a solução particular  $\hat{w} = r^4 + r^5$ .

As dimensões e propriedades de material adotadas são as mesmas das análises anteriores. Os eixos de ortotropia do material coincidem com os sistemas de coordenadas de cada figura da tabela. As condições de contorno são rotacionadas para que um número maior casos seja previsto. Na tabela são apresentados as deflexões  $w_a$  calculadas pela transformação exata apresentada por Albuquerque *et al.* (2003c), as deflexões  $w_n$ , calculadas pelo MRD e os erros, calculados conforme Equação (8.3).

Tabela 9.2: Deflexões  $w$  [mm] no centro da placa para várias condições de contorno ( $a/b=1$ ).

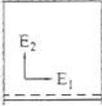
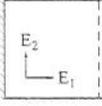
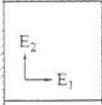
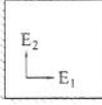
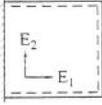
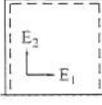
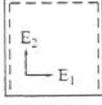
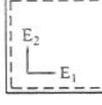
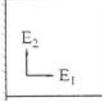
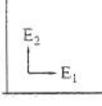
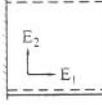
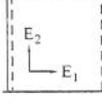
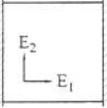
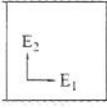
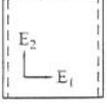
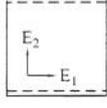
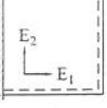
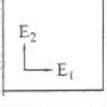
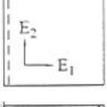
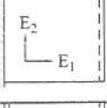
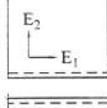
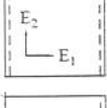
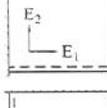
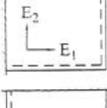
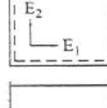
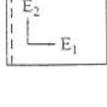
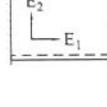
Condição de contorno	$w_a$	$w_n$	$\varepsilon$	Condição de contorno	$w_a$	$w_n$	$\varepsilon$
	0,16087	0,16005	0,51		0,31245	0,31058	0,60
	0,15557	0,15560	0,02		0,93275	0,92318	1,03
	0,32981	0,32800	0,55		0,74118	0,73740	0,51
	0,77189	0,76746	0,57		7,66667	7,66700	0,01
	2,56706	2,56312	0,15		37,92606	37,83399	0,24
	0,16058	0,15977	0,50		0,67222	0,66753	0,70

Tabela 9.2: Deflexões  $w$  [mm] no centro da placa para várias condições de contorno ( $a/b=1$ ).

Condição de contorno	$w_a$	$w_n$	$\varepsilon$	Condição de contorno	$w_a$	$w_n$	$\varepsilon$
	0,14992	0,15088	0,65		2,22511	2,20356	0,97
	0,73394	0,72749	0,88		11,14475	11,13642	0,07
	0,32121	0,31934	0,58			Simétrico	
	1,72627	1,71771	0,50			Simétrico	
	11,41948 <sup>(*)</sup>	11,41275 <sup>(*)</sup>	0,06 <sup>(*)</sup>			Simétrico	
	0,29772	0,29658	0,38		4,45283	4,43470	0,41
	0,70492	0,69911	0,82		2,04727	2,04636	0,04
	0,31392	0,31245	0,47		3,29837	3,28501	0,41
	27,42317	27,36837	0,20		2,35564	2,35344	0,09

Condições de contorno:            Engastada ----- Apoiada        Livre

(\*) Neste caso a carga  $q$  aplicada foi reduzida para  $q = -10 \text{ N/m}^2$  para evitar deformação excessiva, devido a menor rigidez da placa decorrente da condição de contorno adotada.

As próximas análises dizem respeito à discretização. Adotando-se uma placa com as mesmas dimensões e propriedades mecânicas dos problemas anteriores, realizou-se um estudo

de convergência de malhas, considerando duas condições de contorno: apoiada e engastada. A Tabela 9.3 apresenta os resultados das deflexões numéricas  $w_n$ , analíticas  $w_a$  e o erro em porcentagem  $\varepsilon$  entre elas.

Tabela 9.3: Deflexões  $w$  [mm] no centro da placa para várias discretizações ( $a/b=1$ ).

Condição de contorno: apoiada - $w_a = 0,8090$				
Elementos	49 nós internos		225 nós internos	
	$w_n$	$\varepsilon$	$w_n$	$\varepsilon$
15	0,8067	0,28	0,8071	0,23
19	0,8070	0,25	0,8074	0,20
25	0,8072	0,21	0,8076	0,16
Condição de contorno: engastada - $w_a = 0,16116$				
Elementos	49 nós internos		225 nós internos	
	$w_n$	$\varepsilon$	$w_n$	$\varepsilon$
15	0,16034	0,51	0,16038	0,48
19	0,16061	0,34	0,16066	0,30
25	0,16080	0,21	0,16085	0,18

Analisando-se os dados apresentados na Tabela 9.3, observa-se que os resultados convergem com o aumento da discretização e do número de nós internos, embora, pelos resultados obtidos anteriormente, percebe-se claramente que os problemas aqui apresentados não requerem refinamento da malha.

Para testar a robustez da formulação implementada foi feita a análise de uma placa rotacionada em  $30^\circ$ . As dimensões e propriedades são as mesmas fornecidas anteriormente. A condição de contorno adotada é apoiada nas quatro bordas. Foi adotada solução particular  $\hat{w} = r^4 + r^5$ . Os resultados analíticos, numéricos e os erros são mostrados na Tabela 9.4.

Tabela 9.4: Deflexões  $w$  [mm] no centro de uma placa rotacionada ( $a/b=1$ ).

$w_a$	0,809
$w_n$	0,800
$\varepsilon$	1,07

A Tabela 9.4 mostra que o programa implementado está funcionando corretamente, independentemente do sistema de coordenadas adotado.

A partir da observação das Tabelas 9.1, 9.2, 9.3 e 9.4, pode-se concluir que o MRD apresenta bons resultados, independentemente da solução particular, das condições de

contorno, da malha e do sistema de coordenadas adotados, sendo obtidos erros pequenos (abaixo de 1,5%), mesmo usando elementos constantes.

### 9.3 Placa quase-isotrópica retangular apoiada

A Figura 9.1a mostra o problema físico considerado: uma placa quase-isotrópica retangular simplesmente apoiada em quatro lados, submetida a carregamento constante distribuído uniformemente por toda a sua superfície.

As propriedades do material adotado neste exemplo são: módulos de elasticidade  $E_1 = 1 - (1 \cdot 10^{-15})$  Pa e  $E_2 = 1$  Pa e razão de Poisson  $\nu = 0,3$ . O carregamento aplicado é  $q = -1$  N/m<sup>2</sup>.

Para um problema com estas condições de contorno e carregamento a deflexão é calculada conforme a Equação (8.1), cujas coordenadas são tomadas conforme Figura 9.1a.

O primeiro exemplo analisado é o problema de uma placa quadrada ( $a/b = 1$ ), adotando  $a = 1$  m,  $b = 1$  m e  $h = 0,1$  m. Foram usadas duas malhas, sendo a primeira composta por 60 elementos de contorno constantes (Figura 9.3a) e a segunda composta por 20 elementos de contorno quadráticos descontínuos (Figura 9.3b). Em ambos os casos foram usados 81 nós internos.

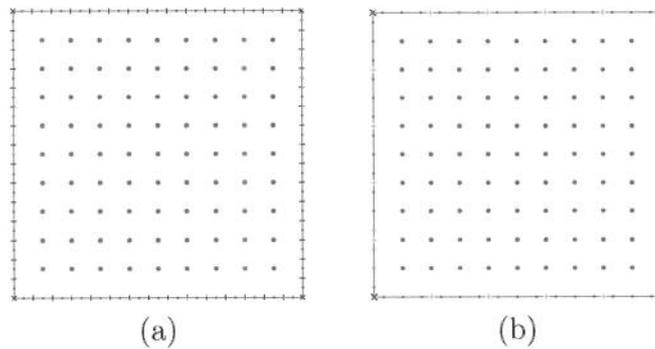


Figura 9.3: Malha quadrada de elementos de contorno (a) constantes e (b) quadráticos.

O segundo exemplo é o de uma placa retangular ( $a/b = 2$ ), adotando  $a = 2$  m,  $b = 1$  m e  $h = 0,1$  m. As discretizações consistiram de duas malhas. A primeira formada por 15 elementos constantes no lado menor e 30 elementos constantes no lado maior (Figura 9.4a). A segunda composta por 5 elementos quadráticos descontínuos no lado menor

e 10 elementos quadráticos descontínuos no lado maior (Figura 9.4b). Neste exemplo também foram usados 81 nós internos em ambos os casos.

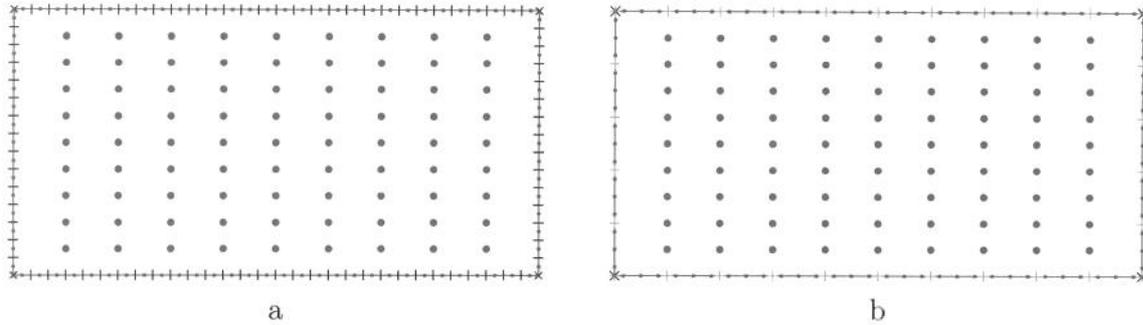


Figura 9.4: Malha retangular de elementos de contorno (a) constantes e (b) quadráticos.

Os deslocamentos  $w$  no centro das placas e em um ponto de coordenadas  $x = 0,2$  m e  $y = 0,3$  m foram calculados utilizando-se duas metodologias. Na primeira, foi utilizado o MEC, sendo que as integrais de domínio foram resolvidas pela transformação exata, conforme demonstrado na Seção 7.1. Na segunda, os termos de domínio foram calculados pelo MRD. Os deslocamentos obtidos foram comparados com aqueles calculados analiticamente segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), usando-se a Equação (8.1) com 3 termos da série ( $m = 1, 3, 5$ ).

As Tabelas 9.5 e 9.6 apresentam os resultados numéricos para a deflexão  $w_n$ , calculados usando-se as formulações isotrópicas e anisotrópicas implementadas, o resultado analítico  $w_a$  e os erros em percentagem,  $\varepsilon$ , calculados segundo a Equação (8.3). Os resultados obtidos pelo MRD foram calculados usando-se  $f = 1 - r - r^2 - r^3$  como função de aproximação.

Tabela 9.5: Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=1$ ) para elementos constantes.

Eq. (8.1)		Formulação isotrópica		Formulação anisotrópica	
		MEC	MRD	MEC	MRD
$x = 0,5$	$y = 0$				
	$w_n$	44.1880	44.7614	44.1876	43.9632
	$\varepsilon$	0.4048	0.8876	0.4057	0.8098
	$w_a = 44.3676$				
$x = 0,2$	$y = 0,3$				
	$w_n$	16.3371	16.5608	16.3549	16.2472
	$\varepsilon$	0.5171	0.8450	0.4087	1.0646
	$w_a = 16.4220$				

Tabela 9.6: Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=2$ ) para elementos constantes.

Eq. (8.1)		Formulação isotrópica		Formulação anisotrópica		
		MEC	MRD	MEC	MRD	
$x = 1$	$y = 0$	$w_n$	110.4164	106.5752	110.5124	108.1127
$w_a = 110.7083$		$\varepsilon$	0.2637	3.7333	0.1769	1.7718
$x = 0,2$	$y = 0,3$	$w_n$	24.5682	21.8536	24.7683	23.6190
$w_a = 24.6326$		$\varepsilon$	0.2617	11.2817	0.5508	2.3134

As Tabelas 9.7 e 9.8 apresentam a comparação entre os resultados numéricos para a deflexão  $w_n$ , calculados usando-se elementos de contorno constantes e quadráticos em conjunto com a formulação anisotrópica implementada, o resultado analítico  $w_a$  e os erros  $\varepsilon$ , em percentagem, dados pela Equação (8.3)

Tabela 9.7: Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=1$ ).

Coordenadas	Eq. (8.1)	Formulação anisotrópica usando elementos		
		constantes	quadráticos	
$x = 0,5$	$w_a = 44.3676$	$w_n$	44.1876	44.5239
$y = 0$		$\varepsilon$	0.4057	0.3523
$x = 0,2$	$w_a = 16.4220$	$w_n$	16.3549	16.5063
$y = 0,3$		$\varepsilon$	0.4087	0.5131

Tabela 9.8: Comparações entre os resultados obtidos e analíticos ( $a/b=2$ ).

Coordenadas	Eq. (8.1)	Formulação anisotrópica usando elementos		
		constantes	quadráticos	
$x = 1$	$w_a = 110.7083$	$w_n$	110.5124	110.7348
$y = 0$		$\varepsilon$	0.1769	0.0239
$x = 0,2$	$w_a = 24.6326$	$w_n$	24.7683	24.8201
$y = 0,3$		$\varepsilon$	0.5508	0.7610

Analisando as Tabelas 9.5, 9.6, 9.7 e 9.8 observam-se que bons resultados foram obtidos. Com estes resultados verificam-se que as formulações isotrópica e anisotrópica, usando tanto elementos constantes quanto elementos quadráticos, foram implementadas corretamente.

## 9.4 Placa quase-isotrópica quadrada apoiada-engastada

A Figura 8.13 mostra o problema físico considerado: uma placa quase-isotrópica quadrada simplesmente apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois, submetida a

carregamento constante distribuído uniformemente.

As propriedades geométricas e de material adotadas neste exemplo são: largura  $a = 1$  m, comprimento  $b = 1$  m, espessura  $h = 0,1$  m, módulos de elasticidade  $E_1 = 1 - (1 \cdot 10^{-15})$  Pa e  $E_2 = 1$  Pa, razão de Poisson  $\nu = 0,3$  e carregamento aplicado  $q = -1$  N/m<sup>2</sup>.

Para um problema com estas condições de contorno e carregamento, a deflexão é calculada segundo a Equação (8.4).

As malhas de elementos de contorno constantes e quadráticos e a distribuição de nós internos empregadas são as mesmas mostradas na Figura 9.3a e na Figura 9.3b.

Usando os programas implementados foram calculados os deslocamentos  $w$  no centro da placa e em um ponto de coordenadas  $x = 0,2$  e  $y = 0,3$ . Os deslocamentos obtidos foram comparados com aqueles calculados analiticamente segundo a Equação (8.4), usando 3 termos da série ( $m = 1, 3, 5$ ). Os erros em percentagem,  $\varepsilon$ , foram calculados segundo a Equação (8.3), sendo  $w_n$  o resultado numérico calculado usando-se os programas de elementos de contorno implementados e  $w_a$  o resultado analítico.

Os resultados obtidos usando-se as formulações isotrópica e anisotrópica em conjunto com elementos constantes são apresentados na Tabela 9.9. Neste caso, as deflexões foram calculadas usando-se  $f = 1 - r - r^2 - r^3$  como função de aproximação.

Tabela 9.9: Comparações entre os resultados obtidos e analíticos.

Eq. (8.1)		Formulação isotrópica		Formulação anisotrópica	
		MEC	MRD	MEC	MRD
$x = 0,5$ $y = 0$	$w_n$	20.9218	21.1099	20.9219	20.8306
	$w_a = 20.9418$	$\varepsilon$	0.0955	0.8026	0.0951
$x = 0,2$ $y = 0,3$	$w_n$	5.7691	5.8383	5.7698	5.7015
	$w_a = 5.7828$	$\varepsilon$	0.2366	0.9613	0.2241

Na Tabela 9.10 é apresentada a comparação entre os resultados obtidos usando-se elementos constantes e quadráticos em conjunto com a formulação anisotrópica.

Nas Tabelas 9.9 e 9.10 observa-se que bons resultados foram obtidos. Com estes resultados verificam-se que as formulações isotrópica e anisotrópica foram implementadas com sucesso, e que a formulação anisotrópica também pode ser usada na análise de flexão em placas

Tabela 9.10: Comparações entre os resultados obtidos e analíticos.

Coordenadas	Eq. (8.1)	Formulação anisotrópica usando elemento		
			constante	quadrático
$x = 0,5$	$w_a = 20.9418$	$w_n$	20.9219	20.9877
$y = 0$		$\varepsilon$	0.0951	0.2191
$x = 0,2$	$w_a = 5.7828$	$w_n$	5.7698	5.8004
$y = 0,3$		$\varepsilon$	0.2241	0.3048

isotrópicas, para diferentes condições de contorno.

## 9.5 Placa quase-isotrópica engastada

A Figura 8.15 mostra o problema físico considerado: uma placa quase-isotrópica, quadrada, engastada nos quatro lados, submetida a carregamento constante distribuído uniformemente.

As propriedades geométricas e de material adotadas neste exemplo são: largura  $a = 1$  m, comprimento  $b = 1$  m, espessura  $h = 0,01$  m, módulos de elasticidade  $E_1 = 210\,000\,100$  Pa e  $E_2 = 210\,000\,000$  Pa e carregamento aplicado  $q = -1$  N/m<sup>2</sup>. Foram analisados quatro casos diferentes onde estudou-se o efeito da variação do coeficiente de Poisson, considerando-se os seguintes valores:  $\nu = 0$ ;  $\nu = 0,15$ ;  $\nu = 0,25$  e  $\nu = 0,3$ .

Os resultados numéricos obtidos pelo MEC e pelo MRD foram comparados com tabelas elaboradas por Bareš (1970), que apresentam as seguintes equações para as deflexões no centro da placa:

$$w_a = 0,0153 \frac{qa^4}{Eh^3}; \quad (9.2)$$

$$w_a = 0,0149 \frac{qa^4}{Eh^3}; \quad (9.3)$$

$$w_a = 0,0143 \frac{qa^4}{Eh^3}; \quad (9.4)$$

$$w_a = 0,0139 \frac{qa^4}{Eh^3}; \quad (9.5)$$

para  $\nu = 0$ ;  $\nu = 0,15$ ;  $\nu = 0,25$  e  $\nu = 0,3$ , respectivamente.

Na Tabela 9.11 são apresentados os deslocamentos obtidos no centro da placa pelo método numérico (usando elementos constantes) e seu erro em relação aos apresentados por Bareš (1970), para os quatro diferentes valores de coeficiente de Poisson. Para todos os casos a malha utilizada foi de 40 elementos, com 9 nós internos. A função de aproximação usada foi  $f = 1 - r - r^2 - r^3$ .

Tabela 9.11: Deslocamentos  $w$  [mm] no centro da placa.

$\nu$	$w_a$	Formulação isotrópica				Formulação anisotrópica			
		MEC		MRD		MEC		MRD	
		$w$	$\epsilon$	$w$	$\epsilon$	$w$	$\epsilon$	$w$	$\epsilon$
0,00	7.286e-5	7.234e-5	0.708	7.347e-5	0.837	7.234e-5	0.711	7.219e-5	0.912
0,15	7.095e-5	7.069e-5	0.372	7.089e-5	0.091	7.071e-5	0.341	7.057e-5	0.541
0,25	6.810e-5	6.780e-5	0.440	6.791e-5	0.264	6.782e-5	0.411	6.768e-5	0.609
0,30	6.619e-5	6.581e-5	0.580	6.589e-5	0.456	6.583e-5	0.551	6.570e-5	0.748

Na Tabela 9.12 é apresentado um comparativo entre o uso de elementos constantes e quadráticos. Foram realizados dois grupos de análises, sempre usando a formulação anisotrópica. Nas análises do primeiro grupo foram usados 40 elementos constantes e 9 nós internos. Nas análises do segundo grupo foram usados 12 elementos quadráticos e 9 nós internos.

Tabela 9.12: Deslocamentos  $w$  [mm] no centro da placa.

$\nu$	$w_a$	Formulação anisotrópica usando elemento			
		Bareš (Bareš 1970)		constante	quadrático
		$w$	$\epsilon$	$w$	$\epsilon$
0,00	7.286e-5	7.234e-5	0.711	7.269e-5	0.235
0,15	7.095e-5	7.071e-5	0.341	7.105e-5	0.146
0,25	6.810e-5	6.782e-5	0.411	6.815e-5	0.068
0,30	6.619e-5	6.583e-5	0.551	6.615e-5	0.065

Em todos os casos apresentados nas Tabelas 9.11 e 9.12 observam-se bons resultados. Isso mostra que as implementações das formulações isotrópica e anisotrópica, usando elementos constantes e quadráticos estão corretas.

## 9.6 Placas quase-isotrópicas com geometrias diversas

Com o objetivo de testar a validade da implementação em problemas mais gerais, foram realizadas mais duas análises, levando em conta uma geometria triangular eqüilateral e outra semi-circular. As propriedades de material adotadas nestes exemplos são: módulos de elasticidade  $E_1 = 205$  GPa,  $E_2 = 205,001$  GPa, razão de Poisson  $\nu_{12} = 0,3$ . Em ambos os casos a carga aplicada é de  $-1$  N/m<sup>2</sup> e a espessura da placa é  $h = 0,01$  m. A placa triangular mede 1 m de altura e a placa semi-circular tem raio de 1 m (Figura 9.5).

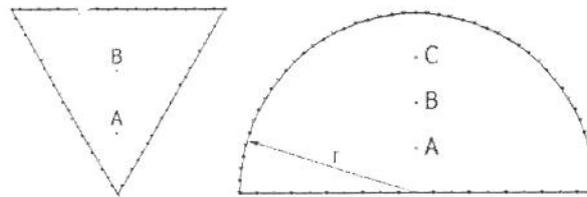


Figura 9.5: Configuração geométrica e malhas triangular e semi-circular.

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) apresentam a seguinte expressão para a placa triangular:

$$w_a = \frac{q}{64aD} \left[ x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left( \frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right) \quad (9.6)$$

onde  $a$  é a altura do triângulo. A expressão para a placa semi-circular é dada por:

$$w_a = \alpha \frac{qr^4}{D} \quad (9.7)$$

onde, para cada um dos pontos A, B e C mostrado na Figura 9.5, o valor de  $\alpha$  é dado na Tabela 9.13.

Tabela 9.13: Valores de  $\alpha$ .

Ponto	$\alpha$
A	-0,03922
B	-0,05400
C	-0,03729

Utilizando o programa de elementos de contorno, em conjunto com a formulação anisotrópica, foram calculados os deslocamentos nos pontos A e B da placa triangular. A

Tabela 9.14 mostra os deslocamentos obtidos, comparados com aqueles calculados segundo a Equação (9.6). Os erros em porcentagem foram calculados pela Equação (8.3).

Tabela 9.14: Deflexão em pontos internos de uma placa triangular.

Ponto	$w_a$ [mm]	$w_n$ [mm]	Erro [%]
A	-0,01156	-0,01151	0,46
B	-0,03083	-0,03070	0,41

Utilizando o mesmo programa, também foram calculados os deslocamentos nos pontos A, B e C da placa semi-circular. A Tabela 9.15 mostra os deslocamentos obtidos, comparados com aqueles calculados segundo a Equação (9.7). Os erros em porcentagem foram calculados pela Equação (8.3).

Tabela 9.15: Deflexão em pontos internos de uma placa semi-circular.

Ponto	$w_a$ [mm]	$w_n$ [mm]	Erro [%]
A	-0,03922	-0,03945	0,59
B	-0,05400	-0,05381	0,36
C	-0,03729	-0,03723	0,16

Analisando as Tabelas 9.14 e 9.15 verifica-se que a implementação pode ser utilizada para os mais variados tipos de geometrias, fornecendo bons resultados.

## 9.7 Laminado simétrico quadrado simplesmente apoiado

Nesta seção é analisado o problema de uma placa laminada composta por nove lâminas  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . A condição de contorno imposta é a de bordas simplesmente apoiadas. A placa é quadrada e suas dimensões são: largura  $a = 1$  m e espessura  $h = 0,001$  m. As propriedades de cada lâmina, fabricada com compósito de grafite-epoxi, usadas nesta análise são:  $E_{11} = 30 \cdot 10^6$  Pa,  $E_{22} = 0,75 \cdot 10^6$  Pa,  $G_{12} = 0,45 \cdot 10^6$  Pa e  $\nu = 0,25$ . Todas as lâminas têm a mesma espessura. O carregamento aplicado é constante e distribuído uniformemente sobre toda a superfície, sendo  $q_0 = -1$  N/m<sup>2</sup>. Este problema foi analisado por Lakshminarayana e Murthy (1984) usando o método dos elementos finitos (MEF). A deflexão no ponto central da placa é comparada

na Tabela 9.16 com a solução de elementos finitos e com a solução analítica. Com uma malha de 84 elementos obteve-se a mesma precisão dos resultados usando elementos finitos publicados na literatura (Lakshminarayana e Murthy 1984). A solução analítica para a deflexão no centro da placa é dada por (Noor e Mathers. 1975):

$$\frac{w_a E_{22} h^3}{q a^4} \times 10^3 = 4.4718 \quad (9.8)$$

da qual, para este problema, obtém-se  $w_a = 5.9624$  mm.

Tabela 9.16: Comparativo entre a precisão da deflexão no centro da placa usando MEC e MRD (84 elementos constantes) e MEF (72 elementos triangulares cúbicos usando simetria).

Método numérico	Deflexão e erro	
	$w_n$	$\epsilon$
FEM	5,9344	0,47
MEC <sup>(1)</sup>	5,9344	0,47
MEC <sup>(2)</sup>	5,9732	0,16
MRD <sup>(3)</sup>	6,0132	0,85
MRD <sup>(4)</sup>	5,9427	0,33

<sup>(1)</sup> Usando elementos constantes

<sup>(2)</sup> Usando elementos quadráticos

<sup>(3)</sup> Usando  $\hat{w} = r^4 + r^5$

<sup>(4)</sup> Usando  $\hat{w} = r^4 - r^5$

Uma análise da Tabela 9.16 mostra que os erros obtidos usando-se o MEC ficam abaixo de 0,5% e que o uso de elementos quadráticos tende a apresentar melhores resultados. Verifica-se também que o erro obtido usando-se o MRD fica abaixo de 1%. Neste trabalho foram usados 84 elementos de contorno constantes para discretizar a placa inteira, no primeiro caso, e 12 elementos de contorno quadráticos no segundo caso. Lakshminarayana e Murthy (1984) usaram considerações de simetria e 72 elementos triangulares cúbicos para discretizar um quarto da placa. Comparando-se os métodos numéricos utilizados, observa-se que se a placa inteira fosse discretizada pelo MEF seria necessário um número bem maior de elementos para obter a mesma precisão. Além disso se for levado em conta o número de nós ou graus de liberdade, o MEC tem menos nós por elemento. Por outro lado, as matrizes do MEF são esparsas e simétricas, enquanto que as matrizes do MEC são cheias e não simétricas. Pelo exposto, vê-se que a comparação entre MEC e MEF não é trivial. Ambos são métodos numéricos bem

estabelecidos e tem suas vantagens e desvantagens. Portanto, a escolha por um dos métodos estará vinculada à experiência do pesquisador com uma das duas formulações.

# Capítulo 10

## Análise dinâmica de placas anisotrópicas

Neste capítulo será apresentada uma metodologia para análise numérica de placas anisotrópicas sob carregamento harmônico. O comportamento da placa obedece as hipóteses da teoria de *Kirchhoff*. As integrais de domínio devido à presença da carga harmônica serão transformadas em integrais de contorno usando-se o MRD. Várias análises serão apresentadas, nas quais será calculada a frequência fundamental para diversas condições de contorno e propriedades de material. A precisão dos resultados numéricos é verificada pela comparação entre resultados analíticos ou calculados pelos métodos das diferenças finitas ou elementos finitos.

### 10.1 Aplicação do MRD na análise de placas sob carregamento harmônico

Neste problema, a equação diferencial de placa (4.33) deve levar em conta a presença de carga harmônica:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \omega^2 w \quad (10.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $h$  é a espessura da placa e  $\omega$  é a frequência circular de vibração.

A força de corpo atuante neste problema é dada por  $\rho h \omega^2 w$ . Uma vez que  $\rho h \omega^2$  é

uma constante, os coeficientes  $\alpha^m$  podem ser determinados tomando-se o valor de  $w$  em  $M$  diferentes pontos do contorno de maneira que seja obtido um conjunto de equações semelhante a (6.1), dado por

$$w \cong \sum_{m=1}^M \alpha^m f^m. \quad (10.2)$$

Tomando-se o valor de  $w$  em diferentes pontos, o conjunto de equações (10.2) pode ser obtido. Expressando essas equações na forma matricial, tem-se

$$\mathbf{w} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}. \quad (10.3)$$

Como  $w$  e  $f$  são valores conhecidos, o vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  pode ser obtido facilmente:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{w}. \quad (10.4)$$

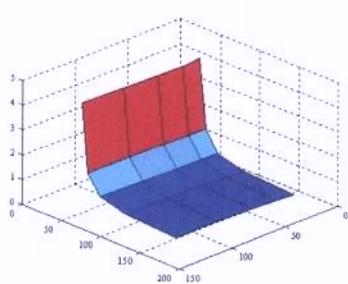
Assim, para o problemas com carregamento constante uniformemente distribuído, o vetor (6.14) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{d} = \rho h \omega^2 (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{T}}) \mathbf{F}^{-1}\mathbf{w}. \quad (10.5)$$

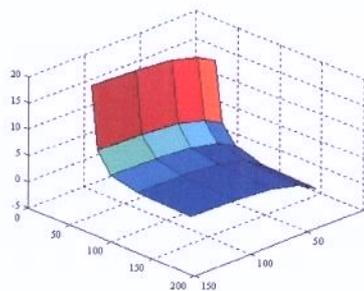
Aplicando as condições de contorno, através da permutação de colunas entre as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , chega-se ao sistema de equações da Equação (5.97).

## 10.2 Análise de convergência de malha

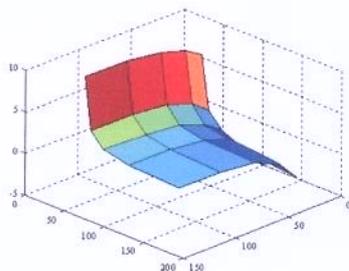
Nesta seção é realizada uma análise de convergência de malha com objetivo de se conhecer o comportamento da formulação em função do número de elementos e de nós internos. Foi considerada uma placa ortotrópica quadrada de dimensões  $a = 1$  m e espessura  $h = 0,01$  m. O carregamento aplicado é de  $-1$  Pa e as propriedades do material são:  $E_1 = 118,3$  GPa,  $E_2 = 29,575$  GPa,  $G_{12} = 28,397$  GPa,  $\nu_1 = 0,083$ ,  $\nu_2 = 0,02075$  e  $\rho = 1900$  kg/m<sup>3</sup>. O número de elementos no contorno foi variado de 36 a 156 e o número de nós internos foi variado de 9 a 121. A convergência dos resultados é mostrada nas Figuras 10.1. Os modos de vibrar são mostrados na Figura 10.2.



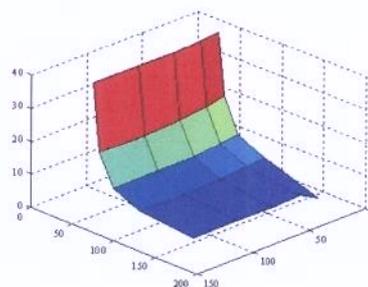
(a) 1ª frequência = 100,8 Hz



(b) 2ª frequência = 162,2 Hz.



(c) 3ª frequência = 242,2 Hz



(d) 4ª frequência = 264,7 Hz.

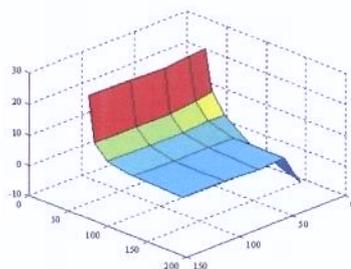


Figura 10.1: (e) 5ª frequência = 299,1 Hz.

A Figura 10.1 mostra a convergência dos resultados com o aumento tanto do número de elementos quanto de nós internos. Nesta figura também fica patente a importância da quantidade de nós internos para o cálculo de frequências mais altas.

### 10.3 Análise modal de uma placa ortotrópica simplesmente apoiada

Nesta seção é analisado o problema de uma placa ortotrópica, simplesmente apoiada. A configuração geral da placa de dimensões: comprimento  $a = 1$  m, largura  $b = 1$  m e

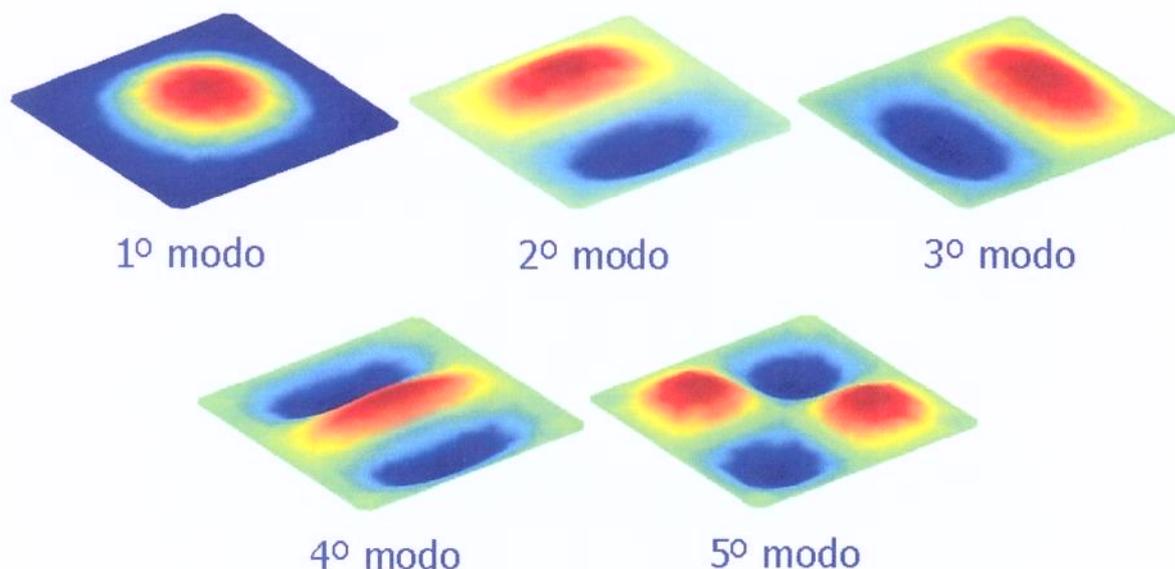


Figura 10.2: Modos de vibrar.

espessura  $h = 0,01$  m é mostrada na Figura 9.1a. Nas análises realizadas foi investigado o efeito das variações da razão de ortotropia do material, de acordo com as seguintes relações:  $D_{11}/(D_{12} + 2D_{66})$  e  $D_{22}/(D_{12} + 2D_{66})$ .

Foram adotadas as seguintes propriedades de material: módulo de elasticidade  $E_1 = 118.3 \cdot 10^9$  Pa e densidade  $\rho = 1900$  kg/m<sup>3</sup>. O módulo de elasticidade  $E_2$  é dado em função de  $x$  e  $y$  onde  $x$  é dado por  $D_{22}/(D_{12} + 2D_{66})$  e  $y$  é dados por  $D_{11}/(D_{12} + 2D_{66})$ , de maneira que

$$E_2 = E_1 \frac{x}{y}. \quad (10.6)$$

Quando  $E_1 \geq E_2$  então  $\nu_{12} = 0.083$  e  $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$ . Por outro lado, quando  $E_2 \geq E_1$  então  $\nu_{21} = 0.083$  e  $\nu_{12} = \nu_{21}E_1/E_2$ . O módulo de elasticidade transversal é dado por,

$$G_{12} = \frac{E_1(1 - y\nu_{21})}{2y(1 - \nu_{12}\nu_{21})}. \quad (10.7)$$

Na análise pelo MRD foram usados 44 elementos de contorno e 121 nós internos e na análise por elementos finitos, usando-se o Ansys<sup>®</sup>, foram empregados 6400 elementos do tipo “Shell63”.

A frequência natural fundamental, adimensionalizada, é dada por (Chen 1998):

$$\omega^2 = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\rho h} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^4. \quad (10.8)$$

Os resultados numéricos obtidos para  $\lambda$  são dados na Tabela 10.1, onde o erro é calculado em relação aos resultados analíticos apresentados por Gibson (1994), conforme Equação (8.3).

Tabela 10.1: Frequência fundamental adimensional para placa apoiada.

$D_{22}/(D_{12} + 2D_{66})$	Gibson (1994)	Chen (1998)	FEM	DRM	$\varepsilon$
	$D_{11}/(D_{12} + 2D_{66}) = 0.5$				
0.5	4.135	4.118	4.135	4.141	0.2
1	4.297	4.429	4.297	4.557	6.1
2	4.576	4.557	4.576	4.752	3.9
	$D_{11}/(D_{12} + 2D_{66}) = 1$				
0.5	4.297	4.279	4.297	4.544	5.8
1	4.443	4.425	4.443	4.649	5.0
2	4.698	4.678	4.698	4.820	2.6
	$D_{11}/(D_{12} + 2D_{66}) = 2$				
0.5	4.576	4.557	4.576	4.726	3.2
1	4.698	4.678	4.698	4.815	2.5
2	4.917	4.897	4.917	4.975	1.2

Analisando-se a Tabela 10.1, verifica-se que, em alguns casos, os erros não são tão bons, porém os resultados são promissores, principalmente se for levado em conta que foram usados elementos constantes (Paiva *et al.* 2004).

## 10.4 Análise modal de uma placa ortotrópica engastada

Nesta seção é realizada a análise modal de uma placa ortotrópica engastada. As dimensões e propriedades de material seguem as considerações feitas na Seção 10.3.

As frequências fundamentais calculadas numericamente são obtidas usando-se a Equação (10.8) sendo que os resultados para  $\lambda$  são dados na Tabela 10.2, onde os erros são calculados em relação aos resultados analíticos apresentados por Chen (1998).

Tabela 10.2: Freqüência fundamental adimensional para uma placa engastada.

$D_{22}/(D_{12} + 2D_{66})$	Analítico (Chen 1998)	Dif. Finitas (Chen 1998)	FEM	DRM	Error (%)
$D_{11}/(D_{12} + 2D_{66}) = 0.5$					
0.5	5.324	5.171	5.298	5.300	0.5
1	5.712	5.551	5.681	5.725	0.2
2	6.307	6.131	6.268	6.336	0.5
$D_{11}/(D_{12} + 2D_{66}) = 1$					
0.5	5.712	5.551	5.681	5.729	0.3
1	6.034	5.866	5.999	6.068	0.6
2	6.553	6.371	6.511	6.596	0.7
$D_{11}/(D_{12} + 2D_{66}) = 2$					
0.5	6.307	6.131	6.268	6.340	0.5
1	6.553	6.371	6.511	6.596	0.7
2	6.972	6.779	6.925	7.018	0.7

Analisando-se a Tabela 10.2 observam-se que bons resultados foram obtidos. Assim, verifica-se que a formulação para análise dinâmica de placa engastada foi implementada corretamente (Paiva *et al.* 2004).

# Capítulo 11

## Considerações finais

Nesta tese foi apresentado o desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno de reciprocidade dual cujo objetivo é a análise numérica de flexão em placas de materiais compósitos sujeitas a solicitações dinâmicas. Na formulação desenvolvida foram utilizadas as soluções fundamentais de flexão da elastostática e as integrais de domínio provenientes dos termos de inércia foram transformados em integrais de contorno através do uso do método dos elementos de contorno de reciprocidade dual. A formulação desenvolvida foi implementada em um programa computacional e vários problemas foram analisados. A precisão dos resultados numéricos obtidos no presente trabalho foi analisada pela comparação com resultados analíticos obtidos na literatura e com resultados numéricos obtidos usando-se outros métodos, como o método das diferenças finitas e o métodos dos elementos finitos.

### 11.1 Conclusões

Neste trabalho foram apresentados os conceitos relacionados aos materiais compósitos, incluindo suas classificações quanto à forma construtiva e características, tais como: composição, propriedades mecânicas e comportamento mecânico. Os casos em que esses materiais são aplicados e as vantagens e desvantagens que isso implica também foram abordados.

Foi feita uma introdução aos conceitos básicos da teoria da elasticidade para materiais anisotrópicos. Foi apresentada a formulação de tensão e deformação e também foi mostrada a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados simétricos a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados.

As hipóteses básicas em que se baseiam as teorias de placas foram introduzidas e relacionadas com a teoria de *Kirchhoff*. Com base nesta teoria foram obtidas as equações constitutivas de placas. Também foi apresentada a obtenção das equações diferenciais e das soluções fundamentais, isotrópica e anisotrópica.

A formulação do método dos elementos de contorno para a análise de problemas de elastodinâmica em materiais anisotrópicos foi obtida usando soluções fundamentais da elastostática e considerando os termos de inércia como forças de corpo. As integrais de domínio provenientes dos termos de inércia foram transformadas em integrais de contorno usando o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual. As soluções particulares de deslocamentos foram escolhidas e as funções de aproximação foram determinadas a partir da equação de equilíbrio. O método dos elementos de contorno foi formulado de maneira que as forças de corpo fossem consideradas como genéricas, facilitando sua particularização para problemas específicos.

Os carregamentos distribuídos no domínio foram aproximados no contorno usando-se duas alternativas: pela transformação exata ou pelo MRD.

Foram apresentados alguns exemplos da aplicação da formulação isotrópica do método dos elementos de contorno implementada. Diferentes problemas envolvendo variadas condições de contorno, dimensões e propriedades de material foram apresentados. Outros exemplos da aplicação da formulação anisotrópica do MEC e do MRD, usando elementos constantes e quadráticos, na análise estática de placas anisotrópicas também foram apresentados. Foram analisados diferentes problemas envolvendo variadas condições de contorno, dimensões, propriedades de material, malhas e funções de aproximação. Também foi apresentada uma metodologia para análise dinâmica de placas anisotrópicas. As integrais de domínio devido aos termos de inércia foram transformadas em integrais de contorno usando-se o MRD. Nas várias análises apresentadas foram calculadas as frequências fundamentais para diversas condições de contorno e propriedades de material. A precisão dos resultados numéricos foi verificada pela comparação entre resultados analíticos ou calculados pelos métodos das diferenças finitas ou elementos finitos.

De acordo com os resultados apresentados conclui-se que tanto a formulação isotrópica

quanto a anisotrópica foram implementadas adequadamente. Embora ainda haja a necessidade de mais algum estudo, também pode-se dizer que o MRD pode ser aplicado com sucesso na consideração dos termos de domínio na formulação anisotrópica dinâmica utilizando-se métodos de elementos de contorno.

## 11.2 Propostas para trabalhos futuros

A presente tese abre uma linha de pesquisas promissora no estudo de flexão de placas anisotrópicas usando o MEC. Dentre os vários tópicos vislumbrados no decorrer do trabalho, ficam como propostas para trabalhos futuros:

- A implementação de uma rotina para o cálculo das tensões devido à flexão da placa.
- A alteração do código computacional implementado de forma a permitir a análise de problemas multi-contornos, como por exemplo, placas contendo furos.
- O estudo e implementação de uma formulação que permita a análise de placas com condições de vinculação no domínio.
- A consideração de critérios de falhas nas análises.
- A extensão da formulação para outras aplicações, como análise de fundações elásticas, por exemplo.
- O estudo da possibilidade de realizar análises de placas com espessuras variáveis.
- A extensão da formulação para para placas espessas, considerando as teorias de Reissner e Mindlin.
- A extensão da implementação dos elementos quadráticos para a formulação dinâmica.
- A solução do problema de convergência em problemas dinâmicos nos casos onde há inércia de rotação. Duas possíveis soluções apontadas são: (a) usar o ponto de colocação fora do domínio e eliminando a segunda equação integral de contorno e (b) buscar outras soluções fundamentais que levem em conta os termos de inércia de rotação.

- A inclusão dos efeitos de amortecimento nas análises dinâmicas.
- A implementação da formulação transiente.

## Referências

- Agarwal, B. D. e Broutman, L. J. (1990). *Analysis and Performance of Fiber Composites*. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Paiva, W. P. (2003a). “Bending analysis of symmetric laminate composites using the boundary element method.” *15<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Gliwice/Szczyrk, Poland. CR-Rom.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Fedelinski, P. (2003b). “Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems.” *Computers and Structures*, 81, 1707–1713.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., Venturini, W. S., e Aliabadi, M. H. (2003c). “Exact transformation of domain integrals into boundary integrals in anisotropic plate bending boundary element method.” *4<sup>th</sup> International Conference on Boundary Element Techniques*, Granada, Espanha.
- Aliabadi, M. H. (2002). *The Boundary Element Method : Applications in Solids and Structures*. John Wiley & Sons, New York, 1st edition.
- Aliabadi, M. H. e Sollero, P. (1998). “Crack growth analysis in homogeneous orthotropic laminates.” *Composite Science and Technology*, 58, 1697–1703.
- Banerjee, P. K. (1994). *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill Book Company, Inc., England.
- Bareš, R. (1970). *Tablas Para el Calculo de Placas y Vigas Pared*. Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona.
- Beaubien, H. F. e Kaplan, E. (2000). “A textile-clay composite from the ancient maya world: A previously unreported artifact material.” *32<sup>nd</sup> International Symposium on Archaeometry*, Mexico City, Mexico.
- Beskos, D. E. (1997). “Boundary element methods in dynamic analysis: Part ii (1986-1996).” *Appl. Mech. Rev.*, 50(3), 149–197.
- Brebbia, C. e Domínguez, J. (1989). *Boundary Element: An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 2nd edition.
- Bézine, G. (1978). “Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary

- conditions." *Mechanics Research Communications*, 5(4), 197–206.
- Chaves, E. W. V., Fernandes, G. R., e Venturini, W. S. (1999). "Plate bending boundary element formulation considering variable thickness." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 53, 405–418.
- Chen, Y. Z. (1998). "Evaluation of fundamental vibration frequency of an orthotropic plate bending by using an iterative approach." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 161, 289–296.
- Cruse, T. A. e Rizzo, F. J. (1968). "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problems." *Journal of Mathematic Analysis Applied*, 22, 244–259.
- Cruse, T. A. e Swedlow, J. L. (1971). "Interactive program for analysis and design problems in advanced composites technology." *Report No. AFLMTR-71-268*, Carnegie-Mellon University.
- Danson, D. J. (1979). "Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. Master's thesis, University of Southampton, Southampton.
- Davies, T. W. e Moslehy, F. A. (1994). "Modal analysis of plates using the dual reciprocity boundary element method." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14, 357–362.
- Deb, A. (1996). "Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings." *Computers and Structures*, 58, 715–726.
- Deb, A. e Banerjee, P. K. (1990). "Bem for general anisotropic 2d elasticity using particular integrals." *Communications in Applied Numerical Methods*, 6, 111–119.
- Domínguez, J. (1993). *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- El-Zafrany, A., Fadhil, S., e Debbih, M. (1995). "An efficient approach for boundary element bending analysis of thin and thick plates." *Computers & Structures*, 56(4), 565–576.
- Fernandes, G. B. (1974). "Introdução à teoria das placas elásticas." *Report no.*, Universidade Estadual de Campinas - FEC, Limeira, SP.
- Gaul, L., M., e Wagner, M. (2003). *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course With Advanced Topics*. Springer-Verlag, Southampton, 1st edition.

- Gibson, R. F. (1994). *Principles of composite material mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Guiggiani, M. e Casalini, P. (1987). "Direct computation of cauchy principal value integrals in advanced boundary elements." *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 24, 1711–1716.
- He, W. J. (2000). "An equivalent boundary integral formulation for bending problems of thin plates." *Computers & Structures*, 74, 319–322.
- Hickman, C. N. (1959). "Ancient composite bows." *Journal of the Society of Archer-Antiquaries*, 2.
- Hilgert, R. (1994). "Lightweight engineering for aerospace." *High Tech Report - Daimler Benz*, 4, 48–57.
- Kane, J. A. (1994). *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, New Jersey.
- Kirchhoff, G. R. (1950). "On the equilibrium and motion of an elastic plate." *J. Math.*, 40, 51–58.
- Kogl, M. e Gaul, L. (2000). "A boundary element method for transient piezoelectric analysis." *Engr. Anal. with Boundary Elements*, 24, 591–598.
- Kollár, L. P. e Springer, G. S. (2003). *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lakshminarayana, H. V. e Murthy, S. S. (1984). "A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates." *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 20, 591–623.
- Lekhnitskii, S. G. (1963). *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-Day, San Francisco.
- Lekhnitskii, S. G. (1968). *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 2nd edition.
- Lutz, E., Gray, L., e Ingrassia, A. R. (1991). "Indirect evaluation of surface stress in the boundary element method." *Boundary Integral Methods*, L. Morino e R. Piva, eds., Springer Verlag, 339–348.
- Mansur, W. J. e Loeffler, C. F. (1987). "Uma nova abordagem com o método dos elementos

- de contorno para solução de problemas com carga de domínio.” *VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, Rio de Janeiro, Brasil.
- Mindlin, R. D. (1951). “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates.” *Journal of Applied Mechanics*, 18, 31–38.
- Nabarrete, A. (1998). “Materiais compostos aplicados a componentes automotivos.” *Revista Pesquisa & Tecnologia - FEI*, 17, 3–10.
- Nardini, D. e Brebbia, C. A. (1982). “A new approach to free vibration analysis using boundary elements.” *Boundary Element Method in Engineering*, England. 312–326.
- Noor, A. K. e Mathers., M. D. (1975). “Shear flexible finite element models of laminated composite plates and shells.” *Report no.*, NASA, Technical Report TND-8044, Houston/USA.
- Paiva, J. B. (1987). “Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas,” PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., e Wrobel, L. C. (1992). *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. CMP - Elsevier, Southampton.
- Poisson, S. D. (1829). “Memoire sur l’équilibre et le mouvement des corps solides.” *Journal of Mathematical Physics*, 12(8).
- Portela, A., Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. (1992). “The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1269–1287.
- Paiva, W. P., Sollero, P., e Albuquerque, E. L. (2002). “Analysis of the fundamental solution for anisotropic thin plates.” *15<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference*, New York, USA. CD–Rom.
- Paiva, W. P., Sollero, P., e Albuquerque, E. L. (2003). “Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems.” *Latin American Journal of Solid and Structures*, 1(1), 49–74.
- Paiva, W. P., Sollero, P., Albuquerque, E. L., Pavanello, R., e Aliabadi, M. H. (2004). “Dynamics of thin anisotropic plates.” *5<sup>th</sup> International Conference on Boundary Element Techniques*, Lisboa, Portugal. CD–Rom.

- Qatu, M. (2004). *Vibration of Laminated Shells and Plates*. Ford Motor Company - Oakland University, MI, USA.
- Rajamohan, C. e Raamachandran, J. (1999). "Bending of anisotropic plates by charge simulation method." *Advances in Engineering Software*, 30, 369–373.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H., e Brebbia, C. A. (1998). "Hypersingular boundary element formulation for reissner plates." *International Journal of Solids and Structures*, 35(18), 2229–2249.
- Reissner, E. (1944). "On the theory of bending elastic plates." *Journal of Mathematical Physics*, 23, 184.
- Rizzo, F. J. (1967). "An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics." *Quarterly of Applied Mathematics*, 25(1), 83–95.
- Rizzo, F. J. e Shyppy, D. J. (1970). "A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies." *Journal of Composite Materials*, 4, 36–61.
- Sanches, L. C. F. (1998). "Uma resolução de placas com a teoria de mindlin através do método dos elementos de contorno. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas - Faculdade de Engenharia Civil.
- Schlar, N. A. (1994). *Anisotropic analysis using boundary elements*. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Schlar, N. A. e Partridge, P. W. (1993). "3d anisotropic elasticity with bem using the isotropic fundamental solution." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11, 137–144.
- Shi, G. e Bezine, G. (1988). "A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems." *Journal of Composite Materials*, 22, 694–716.
- Sih, G. C. (1987). "Microstructure and damage dependence of advanced composite material behavior." *Composite Material Response: Constitutive relations and damage mechanisms*, G. C. Sih, ed., Kluwer Academic Publishers, chapter 1, 1–23.
- Silva, N. A. (1988). "Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas. Master's thesis, Universidade de São Paulo, Departamento de Estruturas - Escola de Engenharia de São Carlos.

- Simões, R. (2001). “Um estudo de placas sob cargas dinâmicas estacionárias e com o efeito da não linearidade geométrica sob cargas estáticas usando o método dos elementos de contorno. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas - Faculdade de Engenharia Civil.
- Sollero, P. e Aliabadi, M. H. (1993). “Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method.” *International Journal of Fracture*, 64, 269–284.
- Somigliana, C. (1885). “Sopra l’equilibrio di un corpo elastico isotropo.” *Nuovo Cimento*, 17, 140–148, 272–276.
- Staab, G. H. (1999). *Laminar composites*. Butherworth-Heinemann, Boston.
- Stern, M. (1979). “A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems.” *International Journal of Solids Structures*, 15, 769–782.
- Tanaka, M., Matsumoto, T., e Shiozaki, A. (1998). “Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures.” *Computers & Structures*, 66(6), 725–735.
- Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- Venturini, W. S. (1988). “Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e das aplicações em problemas de engenharia,” Tese de Livre-Docência, Universidade de São Paulo.
- Vogel, S. M. e Rizzo, F. J. (1973). “An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems.” *Journal of Elasticity*, 3, 203–216.
- Wilson, R. B. e Cruse, T. A. (1978). “Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary integral equation stress analysis.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, 1383–1397.
- Wrobel, L. C. (2002). *The Boundary Element Method: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. John Wiley & Sons, New York, 1st edition.
- Wu, B. C. (1980). “A new method for the solution of anisotropic thin-plate bending problems,” PhD thesis, Michigan State University.
- Wu, B. C. e Altiero, N. J. (1981). “A new numerical method for the analysis of anisotropic

- thin-plate bending problems." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 25, 343–353.
- Zhang, C. (2000). "Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids." *Int. J. of Solids and Structures*, 37, 6107–6130.
- Zhang, C. e Gross, D. (1993). "Interaction of anti-plane cracks with elastic waves in transversely isotropic materials." *Acta Mechanica*, 101, 231–247.



## Apêndice A

# Relações entre os sistemas de coordenadas cartesiano e polar

Nesta Seção são apresentadas algumas relações entre os sistemas de coordenadas cartesiano e polar as quais são usadas na dedução de várias equações apresentadas nesta tese.

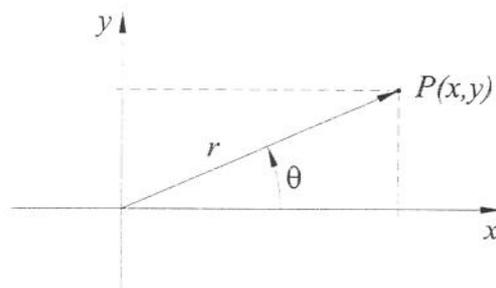


Figura A.1: Sistema de coordenadas.

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \longrightarrow x = r \cos \theta, \quad (\text{A.1})$$

$$\text{sen} \theta = \frac{y}{r} \longrightarrow y = r \text{sen} \theta, \quad (\text{A.2})$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \longrightarrow \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad (\text{A.3})$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r}. \quad (\text{A.5})$$

Assim, se  $\frac{x}{r} = \cos\theta$ ,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta. \quad (\text{A.6})$$

Da mesma forma é calculado  $\frac{\partial r}{\partial y}$ , obtendo-se como resultado  $\frac{y}{r} = \text{sen}\theta$ . Portanto

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \text{sen}\theta, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right] \rightarrow \frac{y}{x} = u; \frac{\partial}{\partial x} [\arctan u] = \frac{1}{1+u^2} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{A.8})$$

Então

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{\frac{\partial y}{\partial x} x - y \frac{\partial x}{\partial x}}{x^2} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y}{x^2} = \quad (\text{A.9})$$

$$= -\frac{y}{x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{y}{r} \frac{1}{r} \rightarrow \frac{y}{r} = \text{sen}\theta. \quad (\text{A.10})$$

Portanto

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\text{sen}\theta}{r}. \quad (\text{A.11})$$

$\frac{\partial \theta}{\partial y}$  é calculado da mesma forma, obtendo

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r^2} = \frac{y}{r} \frac{1}{r} \rightarrow \frac{y}{r} = \text{cos}\theta. \quad (\text{A.12})$$

Portanto

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\text{cos}\theta}{r}. \quad (\text{A.13})$$

# Apêndice B

## Cálculo das derivadas da solução fundamental isotrópica

### B.1 Cálculo de $\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}$

A derivada segunda da solução fundamental  $w^*$  em relação a  $x$  pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w^*}{\partial x} \right). \quad (\text{B.1})$$

Substituindo-se a solução fundamental dada pela Equação (4.23), ou seja,

$$w^* = \frac{r^2}{8\pi D} \ell n(r) - \frac{r^2}{16\pi D},$$

na Equação (B.1), obtém-se

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{r^2}{8\pi D} \ell n(r) - \frac{r^2}{16\pi D} \right] \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Calculando-se inicialmente  $\frac{\partial w^*}{\partial x}$ , pode-se escrever

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{r^2}{8\pi D} \ell n(r) - \frac{r^2}{16\pi D} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando-se a propriedade distributiva na Equação (B.3) tem-se

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r^2}{8\pi D} \ell n(r) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r^2}{16\pi D} \right), \quad (\text{B.4})$$

e removendo-se as constantes da derivada,

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{1}{8\pi D} \frac{\partial}{\partial x} (r^2 \ln(r)) - \frac{1}{16\pi D} \frac{\partial (r^2)}{\partial x}. \quad (\text{B.5})$$

Derivando-se  $r^2 \ln(r)$  em relação a  $x$  substituindo  $r^2$  por  $x^2 + y^2$ , conforme Equação (A.4) obtém-se

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{1}{8\pi D} \left[ \frac{\partial r^2}{\partial x} \ln(r) + r^2 \frac{\partial \ln(r)}{\partial x} \right] - \frac{1}{16\pi D} \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x}. \quad (\text{B.6})$$

Prosseguindo com a derivada de  $\ln(r)$  em relação a  $x$  e novamente substituindo  $r^2$  conforme Equação (A.4), chega-se a

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{1}{8\pi D} \left[ \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x} \ln(r) + r^2 \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] - \frac{1}{16\pi D} \left[ \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2)}{\partial x} \right]. \quad (\text{B.7})$$

Sendo  $\frac{1}{r} r^2 = r$ ,  $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$  e  $\frac{\partial (y^2)}{\partial x} = 0$ , tem-se

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{1}{8\pi D} \left\{ \left[ \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2)}{\partial x} \right] \ln(r) + r \cos \theta \right\} - \frac{1}{16\pi D} 2x. \quad (\text{B.8})$$

Conforme Equação (A.1),  $r \cos \theta = x$ , de onde vem que

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{1}{8\pi D} \{2x \ln(r) + x\} - \frac{x}{8\pi D} \quad (\text{B.9})$$

sobre a qual aplicando-se a propriedade distributiva, resulta

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{2x \ln(r)}{8\pi D} + \frac{x}{8\pi D} - \frac{x}{8\pi D}, \quad (\text{B.10})$$

onde observa-se que as duas últimas parcelas se anulam, de forma que

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{x \ln(r)}{4\pi D}. \quad (\text{B.11})$$

Uma vez obtida a primeira derivada, pode-se calcular a segunda derivada da solução fundamental  $w^*$  em relação a  $x$ , ou seja,  $\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}$ ,

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w^*}{\partial x} \right). \quad (\text{B.12})$$

Substituindo-se a Equação (B.11) na Equação (B.12), tem-se

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x \ell n(r)}{4\pi D} \right). \quad (\text{B.13})$$

Removendo-se a constante para fora da derivada, tem-se

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi D} \frac{\partial}{\partial x} [x \ell n(r)] \quad (\text{B.14})$$

e tomando-se a derivada do produto,

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi D} \left[ \frac{\partial x}{\partial x} \ell n(r) + x \frac{\partial \ell n(r)}{\partial x} \right]. \quad (\text{B.15})$$

Se  $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$  e derivando o  $\ell n(r)$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + x \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \quad (\text{B.16})$$

ou, reescrevendo,

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \frac{x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \right]. \quad (\text{B.17})$$

Sendo  $\frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}$  obtém-se finalmente

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.18})$$

## B.2 Cálculo de $\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}$

A segunda derivada da solução fundamental  $w^*$  em relação a  $y$  é calculada da mesma forma que para  $x$  bastando fazer a troca de variáveis, de onde obtém-se

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.19})$$

### B.3 Cálculo de $\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}$

A segunda derivada da solução fundamental  $w^*$  em relação a  $x$  e  $y$  é calculada da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right). \quad (\text{B.20})$$

Conforme comentado no Apêndice B.2, pode-se fazer a troca de variável na Equação (B.11), a qual substituída em (B.20) resulta em

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y \ln(r)}{4\pi D} \right). \quad (\text{B.21})$$

Tirando a constante para fora da derivada

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi D} \frac{\partial y \ln(r)}{\partial x} \quad (\text{B.22})$$

e fazendo a derivada da multiplicação, tem-se

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi D} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \ln(r) + y \frac{\partial \ln(r)}{\partial x} \right). \quad (\text{B.23})$$

Uma vez que  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$  e fazendo-se a derivada de  $\ln(r)$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi D} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (\text{B.24})$$

onde, substituindo  $r$  por  $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi D} \frac{1}{r} \frac{\partial (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \quad (\text{B.25})$$

e resolvendo-se a derivada, tem-se,

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi D} \frac{y}{r} \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x \quad (\text{B.26})$$

e reescrevendo,

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{4\pi D r} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.27})$$

resulta em

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{4\pi D r^2} \quad (\text{B.28})$$

e que ainda pode ser escrita em sua forma final

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi D} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}. \quad (\text{B.29})$$



# Apêndice C

## Cálculo de $Q_n^*$

Uma força  $Q_n^*$  aplicada numa direção  $n$  qualquer é dada por

$$Q_n^* = Q_x^* \cos \alpha + Q_y^* \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{C.1})$$

onde  $Q_x^*$  e  $Q_y^*$  são dados pelas equações (4.18) e (4.19), respectivamente, nas quais o deslocamento  $w$  é conhecido e dado pela solução fundamental  $w^*$ . Portanto,

$$Q_x^* = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right). \quad (\text{C.2})$$

Substituindo-se as equações (B.18) e (B.19) em (C.2), tem-se,

$$Q_x^* = -D \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{C.3})$$

Colocando  $\frac{1}{4\pi D}$  em evidência,

$$Q_x^* = -D \frac{1}{4\pi D} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, \quad (\text{C.4})$$

que pode ser simplificado para

$$Q_x^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{C.5})$$

Conforme equações (A.6) e (A.7), tem-se

$$Q_x^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\ell n(r) + \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \right] \right\} \quad (\text{C.6})$$

e como se sabe,  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , então,

$$Q_x^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [2\ell n(r) + 1] \right\} \quad (\text{C.7})$$

ou

$$Q_x^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [2\ell n(r)] \right\}. \quad (\text{C.8})$$

Resolvendo a derivada, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} [2\ell n(r)] = 2 \frac{\partial \ell n(r)}{\partial x} = 2 \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (\text{C.9})$$

Da Equação (A.5) tem-se que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (\text{C.10})$$

de onde vem que

$$\frac{\partial}{\partial x} [2\ell n(r)] = \frac{2}{r} \frac{x}{r} = \frac{2x}{r^2} \quad (\text{C.11})$$

que substituída em (C.8) resulta

$$Q_x^* = -\frac{1}{4\pi} \frac{2x}{r^2}. \quad (\text{C.12})$$

Simplificando chega-se finalmente a

$$Q_x^* = -\frac{x}{2\pi r^2}. \quad (\text{C.13})$$

Procedimento idêntico é utilizado para calcular  $Q_y^*$ , através do qual obtém-se

$$Q_y^* = -\frac{y}{2\pi r^2}, \quad (\text{C.14})$$

e substituindo-se (C.13) e (C.14) na Equação (C.1), tem-se

$$Q_n^* = -\frac{x}{2\pi r^2} \cos \alpha - \frac{y}{2\pi r^2} \sin \alpha, \quad (\text{C.15})$$

e colocando-se  $-\frac{1}{2\pi r}$  em evidência,

$$Q_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \left( \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \operatorname{sen} \alpha \right). \quad (\text{C.16})$$

Conforme Equação (A.5)

$$\frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{y}{r} = \frac{\partial r}{\partial y} \quad (\text{C.17})$$

assim, a expressão entre parênteses pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{C.18})$$

e pode se verificar facilmente que

$$\frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{C.19})$$

e assim,

$$Q_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{C.20})$$

onde, conforme a Figura C.1,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos \beta. \quad (\text{C.21})$$

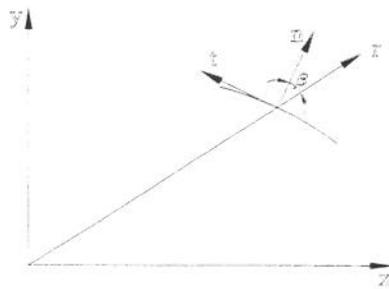


Figura C.1:  $\partial r / \partial n = \cos \beta$ .

Portanto,

$$Q_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \cos \beta. \quad (\text{C.22})$$

## Apêndice D

# Dedução das soluções fundamentais isotrópicas de força cortante equivalente e momento

### D.1 Dedução de $V_n^*$

A solução fundamental  $V_n^*$ , é dada por

$$V_n^* = Q_n^* + \frac{\partial M_{nt}^*}{\partial t} \quad (\text{D.1})$$

sendo

$$Q_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \cos \beta \quad (\text{D.2})$$

onde  $\cos \beta = \frac{\partial r}{\partial n}$ , e

$$\frac{\partial M_{nt}^*}{\partial t} = \frac{1-\nu}{4\pi} \cos 2\beta \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \quad (\text{D.3})$$

onde  $\nu$  é a razão de Poisson e  $R$  é o raio de curvatura do contorno no ponto  $P$ . Portanto,

$$V_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \cos \beta + \frac{1-\nu}{4\pi} \cos 2\beta \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right), \quad (\text{D.4})$$

e aplicando a propriedade distributiva, tem-se

$$V_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \cos \beta + \frac{(1-\nu) \cos 2\beta}{4\pi R} - \frac{(1-\nu) \cos 2\beta \cos \beta}{4\pi r}, \quad (\text{D.5})$$

onde, colocando-se  $\frac{1}{4\pi}$  em evidência,

$$V_n^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{(1-\nu) \cos 2\beta}{R} - \frac{2 \cos \beta}{r} - \frac{(1-\nu) \cos 2\beta \cos \beta}{r} \right]. \quad (D.6)$$

Da trigonometria sabe-se que  $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$ , que substituído em  $V_n^*$  resulta

$$V_n^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{(1-\nu) \cos 2\beta}{R} - \frac{2 \cos \beta}{r} - \frac{(1-\nu) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \cos \beta}{r} \right], \quad (D.7)$$

e aplicando-se a propriedade distributiva pode-se escrever

$$V_n^* = \frac{(1-\nu) \cos 2\beta}{4\pi R} + \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{2 \cos \beta}{r} - \frac{(1-\nu) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \cos \beta}{r} \right], \quad (D.8)$$

onde, colocando-se em evidência  $\frac{\cos \beta}{r}$ , da segunda parcela,

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ -2 - (1-\nu) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta, \quad (D.9)$$

e, sendo  $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ , vale escrever  $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ , então

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ -2 + (\nu - 1) (1 - \sin^2 \beta - \sin^2 \beta) \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta, \quad (D.10)$$

de forma que

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ (\nu - 1) (1 - 2\sin^2 \beta) - 2 \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta. \quad (D.11)$$

Aplicando-se a propriedade distributiva em  $(\nu - 1)$ ,

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ \nu - 1 - 2\nu \sin^2 \beta + 2\sin^2 \beta - 2 \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta, \quad (D.12)$$

e colocando-se  $2\sin^2 \beta$  em evidência e fazendo as somas possíveis chega-se a

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ 2\sin^2 \beta (-\nu + 1) + \nu - 3 \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta. \quad (D.13)$$

Reescrevendo a expressão acima, chega-se a  $V_n^*$ , conforme apresentado por Paiva (1987)

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ \nu + 2\sin^2 \beta (1 - \nu) - 3 \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta. \quad (D.14)$$

## D.2 Dedução de $M_n^*$

A solução fundamental  $M_n^*$  é dada por

$$M_n^* = M_x^* \cos^2 \alpha + M_y^* \sin^2 \alpha + 2M_{xy}^* \sin \alpha \cos \alpha, \quad (\text{D.15})$$

sendo que  $M_x^*$ ,  $M_y^*$  e  $M_{xy}^*$  são dados pelas equações (4.11), (4.12) e (4.13) nas quais o deslocamento  $w$  é conhecido e dado pela solução fundamental  $w^*$ . Portanto, substituindo  $\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}$  e  $\frac{\partial^2 w^*}{\partial xy}$ , mostradas nos Apêndices B, B.2 e B.3, nas equações (4.11), (4.12) e (4.13), tem-se

$$M_x^* = -D \left\{ \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] + \nu \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (\text{D.16})$$

e

$$M_y^* = -D \left\{ \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] + \nu \frac{1}{4\pi D} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{D.17})$$

Colocando-se  $\frac{1}{4\pi D}$  em evidência e fazendo-se a distributiva de  $\nu$  da segunda parcela,

$$M_x^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \nu \ell n(r) + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{D.18})$$

e

$$M_y^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \nu \ell n(r) + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (\text{D.19})$$

e colocando-se  $\ell n(r)$  em evidência,

$$M_x^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{D.20})$$

e

$$M_y^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (\text{D.21})$$

da mesma forma,

$$M_{xy}^* = -D (1 - \nu) \frac{1}{4\pi D} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad (\text{D.22})$$

ou

$$M_{xy}^* = \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad (\text{D.23})$$

substituindo-se  $M_x^*$ ,  $M_y^*$  e  $M_{xy}^*$  na Equação (D.15) tem-se

$$\begin{aligned} M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \cos^2 \alpha + \\ & - \frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] \text{sen}^2 \alpha + \\ & - 2 \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

e colocando-se  $-\frac{1}{4\pi}$  em evidência e expandindo, tem-se

$$\begin{aligned} M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) (1 + \nu) \cos^2 \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \alpha + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \alpha + \right. \\ & + \ell n(r) (1 + \nu) \text{sen}^2 \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha + \\ & \left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha \right] \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

na qual, aplicando-se a propriedade distributiva sobre  $(1 - \nu)$  da última parcela da Equação (D.25), tem-se

$$\begin{aligned} M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left[ \ell n(r) (1 + \nu) \cos^2 \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \alpha + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \alpha + \right. \\ & + \ell n(r) (1 + \nu) \text{sen}^2 \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha + \\ & \left. + 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha - 2\nu \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Colocando-se em evidência  $\ell n(r)(1 + \nu)$  e agrupando os valores semelhantes,

$$\begin{aligned}
 M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) + \right. \\
 & + \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha \right] + \\
 & \left. + \nu \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha \right] \right\}. \quad (\text{D.27})
 \end{aligned}$$

Aplicando-se as relações fundamentais da trigonometria, e a propriedade dos produtos notáveis na expressão contida no primeiro par de colchetes,  $M_n^*$  pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \nu \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha \right] \right\}. \quad (\text{D.28})
 \end{aligned}$$

Pode-se verificar facilmente que

$$\frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{D.29})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \nu \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha \right] \right\}. \quad (\text{D.30})
 \end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $\left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha$  e  $\left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \alpha$  em (D.30),  $M_n^*$  não se altera, assim,

$$\begin{aligned}
M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \right. \\
& + \nu \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha + \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha - \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \alpha - \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \alpha \right] \right\}. \tag{D.31}
\end{aligned}$$

Aplicando produtos notáveis aos termos negativos da expressão entre colchetes e colocando em evidência  $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$  e  $\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2$  nos demais termos, obtém-se

$$\begin{aligned}
M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \right. \\
& + \nu \left[ - \left( \frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \right)^2 \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) \right] \right\}. \tag{D.32}
\end{aligned}$$

Lembrando mais uma vez que  $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ , portanto,

$$\begin{aligned}
M_n^* = & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \nu \left[ - \left( \frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}. \tag{D.33}
\end{aligned}$$

Agora, usando as equações (A.6) e (A.7) do Apêndice A, tem-se que

$$\left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 = \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1, \tag{D.34}$$

então

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \left[ - \left( \frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \text{sen} \alpha \right)^2 + 1 \right] \right\}. \quad (\text{D.35})$$

Aplicando a mesma relação apresentada na Equação (D.29), e multiplicando-se cada termo dentro do colchete por  $\nu$ ,  $M_n^*$  pode ser simplificado para

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 - \nu \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \right\}, \quad (\text{D.36})$$

e colocando-se o termo  $\left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2$  em evidência, tem-se, finalmente,

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ell n(r) (1 + \nu) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 (1 - \nu) + \nu \right\}. \quad (\text{D.37})$$



# Apêndice E

## Derivadas de $R_i$ e $S_i$

### E.1 Derivadas primeiras de $R_i$

$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = 2r (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta) \right] - 2 \right\} - 4r e_i \text{sen} \theta \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}, \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial y} = 2r [d_i (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) - e_i^2 \text{sen} \theta] \times \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta) \right] - 2 \right\} - 4r e_i (\cos \theta + 2d_i \text{sen} \theta) \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}. \quad (\text{E.2})$$

### E.2 Derivadas segundas de $R_i$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} = 2 \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta] \right\}, \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} = 2d_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta] \right\} - 4e_i \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}, \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} = 2(d_i^2 - e_i^2) \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta] \right\} - 8d_i e_i \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}. \quad (\text{E.5})$$

### E.3 Derivadas terceiras de $R_i$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} = \frac{4(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]}, \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4[d_i(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) + e_i^2 \text{sen} \theta]}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]}, \quad (\text{E.7})$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{4[(d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) d_i \text{sen} \theta]}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]}, \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} = \frac{4[d_i(d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \text{sen} \theta]}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]}. \quad (\text{E.9})$$

### E.4 Derivadas quartas de $R_i$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^4} = -\frac{4[(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 - e_i^2 \text{sen}^2 \theta]}{r^2 [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]^2}, \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^3 \partial y} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{d_i}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta} + \frac{2e_i^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{[(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]^2} \right\}, \quad (\text{E.11})$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^2 + e_i^2)}{[(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]} - \frac{2e_i^2 \cos^2 \theta}{[(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]^2} \right\}, \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{d_i (d_i^2 + e_i^2)}{[(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]} - \frac{2e_i^2 \cos \theta (2d_i \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) \text{sen} \theta)}{[(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]^2} \right\}, \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial y^4} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^4 - e_i^4)}{(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta} - \frac{2e_i^2 \cos \theta [(3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \text{sen} \theta]}{[(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]^2} \right\}. \quad (\text{E.14})$$

## E.5 Derivadas primeiras de $S_i$

$$\frac{\partial S_i}{\partial x} = r e_i \text{sen} \theta \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta) \right] - 2 \right\} + 2r (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}, \quad (\text{E.15})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial y} = r e_i (\cos \theta + 2d_i \text{sen} \theta) \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta) \right] - 2 \right\} + 2r [d_i (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) - e_i^2 \text{sen} \theta] \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}. \quad (\text{E.16})$$

## E.6 Derivadas segundas de $S_i$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} = 2 \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}, \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} = & e_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta] \right\} + \\ & 2d_i \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta},\end{aligned}\quad (\text{E.18})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} = & 2d_i e_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta] \right\} + \\ & 2(d_i^2 - e_i^2) \arctan \frac{e_i \text{sen} \theta}{\cos \theta + d_i \text{sen} \theta}.\end{aligned}\quad (\text{E.19})$$

## E.7 Derivadas terceiras de $S_i$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^3} = -\frac{2e_i \text{sen} \theta}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]},\quad (\text{E.20})$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2e_i \cos \theta}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]},\quad (\text{E.21})$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{2e_i [2d_i (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta) - (d_i^2 - e_i^2) \text{sen} \theta]}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]},\quad (\text{E.22})$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial y^3} = \frac{2e_i [(3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \text{sen} \theta]}{r [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]}.\quad (\text{E.23})$$

## E.8 Derivadas quartas de $S_i$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^4} = \frac{4e_i \text{sen} \theta (\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)}{r^2 [(\cos \theta + d_i \text{sen} \theta)^2 + e_i^2 \text{sen}^2 \theta]^2},\quad (\text{E.24})$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^3 \partial y} = \frac{2e_i}{r^2} \left\{ \frac{1}{(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta (\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)}{[(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta]^2} \right\}, \quad (\text{E.25})$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4e_i \cos \theta [d_i (\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta) + e_i^2 \operatorname{sen} \theta]}{r^2 [(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta]^2}, \quad (\text{E.26})$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{2e_i}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^2 + e_i^2)}{(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{2(d_i^2 + e_i^2) \cos \theta (\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta) - 4e_i^2 \cos^2 \theta}{[(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta]^2} \right\}, \quad (\text{E.27})$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial y^4} = -\frac{4e_i}{r^2} \left\{ \frac{d_i (d_i^2 + e_i^2)}{(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{\cos \theta [d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \operatorname{sen} \theta]}{[(\cos \theta + d_i \operatorname{sen} \theta)^2 + e_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta]^2} \right\}. \quad (\text{E.28})$$

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
CSAP LATHES  
DESENVOLVA ESTO DE COLEÇÃO