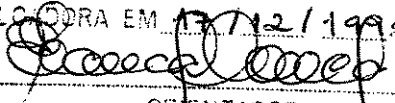


155502007

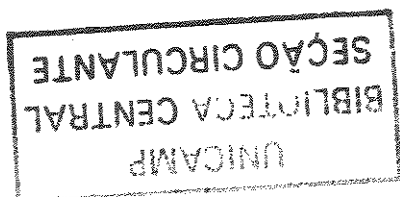
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
ESE DEFENDIDA POR CARMO DE COVAS
SANTOS E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 13/12/1998


ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Modelo para Análise de Deslocamento Miscível no Meio Poroso usando A Teoria dos Canais de Fluxo

Autor: Carmo de Covas Santos
Orientador: Antônio Cláudio de França Corrêa
Co-orientadora: Maria Cristina de Castro Cunha



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

Modelo para Análise de Deslocamento Miscível no Meio Poroso usando A Teoria dos Canais de Fluxo

Autor: Carmo de Covas Santos

Orientador: Antônio Cláudio de França Corrêa

Co-orientadora: Maria Cristina de Castro Cunha

Curso: Engenharia de Petróleo

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 1998.
S.P. - Brasil.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Modelo para Análise de Deslocamento Miscível no Meio Poroso usando A Teoria dos Canais de Fluxo

Autor: **Carmo de Covas Santos**

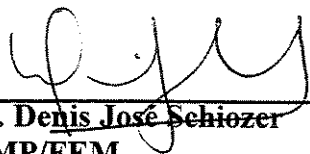
Orientador: **Antônio Cláudio de França Corrêa**

Co-orientadora: **Maria Cristina de Castro Cunha**

Banca Examinadora:



**Prof. Dr. Antônio Cláudio de França Corrêa, Presidente.
UNICAMP**



**Prof. Dr. Denis José Schiozer
UNICAMP/FEM**



**Prof. Dr. Luiz Eraldo Araújo Ferreira
PETROBRAS/EPBA**

Campinas, 17 de dezembro de 1998.

Dedicatória:

À minha querida esposa Regina, pela confiança e apoio.

Às minhas adoráveis filhas Rebeca e Raquel, pela compreensão e paciência.

Aos meus pais, Avelino e Neide, por me indicarem sempre os melhores caminhos.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Antônio Cláudio de França Corrêa, pelas sugestões, incentivo e confiança em mim depositada.

À Prof^a. Dr^a. Maria Cristina de Castro Cunha um agradecimento especial pela dedicação e interesse.

Ao Prof. Euclides José Bonet pelo incentivo e sempre presente bom humor.

Aos professores e funcionários do curso de Mestrado em Engenharia de Petróleo da UNICAMP, pela atenção e colaboração.

Aos colegas de curso, pela amizade e companheirismo.

À UNICAMP, pelo suporte tecnológico.

À PETROBRAS S/A, pela oportunidade e suporte financeiro.

O conhecimento se constrói aos poucos...

Resumo

SANTOS, Carmo de Covas, *Modelo para Análise de Deslocamento Miscível no Meio Poroso usando A Teoria dos Canais de Fluxo*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 71 p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho apresenta um modelo para análise de deslocamento miscível a dois componentes, em uma única fase, considerando reservatórios homogêneo e heterogêneo, e mobilidade total constante ($M = 1$). Os canais de fluxo são gerados a partir da solução da equação diferencial parcial da Função Corrente. A discretização desta equação resulta num sistema matricial pentadiagonal, o qual é resolvido utilizando-se o método iterativo do Gradiente Conjugado com Precondicionador Diagonal. A Equação de Difusão-Convecção é definida para um canal de fluxo genérico e discretizada pelo método das diferenças finitas. A solução desta equação é então aplicada para os canais de fluxo calculados a partir da função corrente. O tratamento numérico da Equação de Difusão-Convecção usando o método de ponderação a montante estabiliza a solução, porém introduz erros de dispersão numérica. Uma modificação do esquema de Diminuição das Variações Totais (TVD) de segunda ordem, descrito para equações hiperbólicas, é utilizado para produzir soluções de melhor resolução. O Simulador numérico é validado com base no trabalho de Abaszadeh-Deghani e Brigham, 1982. Modelos heterogêneos são simulados para mostrar a influência da variação da permeabilidade no comportamento das linhas de fluxo e na totalização das concentrações no poço produtor.

Palavras Chave

- Canais de Fluxo, Deslocamento Miscível, Difusão, Convecção, Heterogêneo.

Abstract

SANTOS, Carmo de Covas, *Model for Analysis of Miscible Displacement in the Porous Media using Streamtubes Theory*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 71 p. Dissertação (Mestrado).

This work describes a model for the analysis of a two-components, single phase miscible displacement, considering both homogeneous and heterogeneous reservoirs, and constant total mobility ($M = 1$). The streamtubes are computed from the solution of the partial differential equation of the Stream Function. The discretization of such equation results in a pentadiagonal matrix system, which is solved using the Conjugate Gradient methods with Diagonal Preconditioning. The Diffusion-Convection Equation is solved for each streamtube, using the finite-difference method. The numerical treatment of the Diffusion-Convection Equation using upstream weighting method stabilizes the solution, but it introduces numerical dispersion. A modification of the methods of Total Variation Diminishing (TVD) of second order, described for hyperbolic equations, is used to produce solutions of better resolution. The numerical solution is validated against the work of Abaszadeh-Deghani and Brigham, 1982. Heterogeneous systems are simulated to show the influence of the permeability variations in the behavior of the streamtubes, and in the computation of the concentrations in the producing well.

Key Words

- Streamtubes, Miscible displacement, Diffusion, Convection, Heterogeneous.

Índice

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas.....	xii
Nomenclatura	xiii
1 – Introdução.....	1
2 – Revisão da Literatura	4
3 – Teoria dos Canais de Fluxo.....	9
4 – Modelagem Matemática.....	13
4.1 – Formulação do Modelo do Problema.....	13
4.2 – Equação Geradora dos Canais de fluxo	15
4.2.1 – Modelagem Matemática da Equação da Função Corrente	15
4.3 – Equação de Fluxo.....	19
4.3.1 – Mecanismos de Transporte.....	19
4.3.2 – Modelagem Matemática da Equação de Difusão-Convecção	20
4.3.3 – Adimensionalização	24
5 – Modelagem Numérica.....	28
5.1 – Equação da Função Corrente	28
5.1.1 – Definição da malha.....	29
5.1.2 – Obtenção das equações discretizadas	30
5.1.3 – Sistema de equações	33
5.2 – Equação de Difusão-Convecção	35
5.2.1 – Definição da malha.....	36
5.2.2 – Formulação pelo método explícito	37

5.2.3 – Formulação pelo método implícito.....	38
5.2.4 – Técnica de Diminuição das Variações Totais	40
6 – Modelagem Computacional	43
6.1 – Equação da Função Corrente	43
6.2 – Equação de Difusão-Convecção	50
7 – Validação do Modelo	54
8 – Aplicações	59
8.1 – Sistema Homogêneo	59
8.1.1 – Deslocamento de um pulso em fluxo monofásico.....	60
8.1.2 – Perfil de concentração no poço produtor para uma injeção contínua.....	60
8.2 – Sistema Heterogêneo	61
8.2.1 – Direção principal de anisotropia paralela ao eixo injetor-produtor - Modelo I.....	62
8.2.2 – Direção principal de anisotropia paralela a base do <i>five-spot</i> - Modelo II.....	63
8.2.2 – Sem controle de direção de anisotropia – Modelo III	64
9 – Conclusões e Recomendações.....	65
Referências Bibliográficas	66
Apêndices.....	70
A – Método de Diminuição das Variações Totais.....	70

Lista de Figuras

3.01 - Feixes de canais de fluxo e linhas de divisão	9
3.02 - Linhas eqüipotenciais e de fluxo para $\frac{1}{4}$ de five-spot.....	10
3.03 - Linhas de fluxo, eqüipotenciais e frente de avanço entre um poço injetor e um produtor.11	
4.01 - Modelo físico do problema para $\frac{1}{4}$ de <i>five-spot</i>	14
4.02 - Esquema para um canal de fluxo genérico	15
4.03 - Representação geométrica para um canal de fluxo genérico	20
5.01 - Esquema de malha ponto centrado para a EFC	30
5.02 - Representação do esquema de diferenças finitas para a EFC.....	33
5.03 - Malha unidimensional ponto centrado para EDC.....	37
6.01 - Fluxograma simplificado do programa em FORTRAN	44
6.02 - Sistema de equações resultante para o caso Homogêneo	45
6.03 - Canais de fluxo para um matriz homogênea. NC=40 e P=600x600.....	46
6.04 - Totalização das concentrações no poço produtor (caso homogêneo), Npe=4000, NC=40 e P=600x600.....	47
6.05 - Relação entre a discretização da função corrente e a área acumulada dos canais.	48
6.06 - Canais de fluxo normalizados (caso homogêneo), NC=40 e P=700x700.	49
6.07 - Soluções da EDC através dos métodos Implícito e Explícito. Lc= 1.512	51
6.08 - Efeito da discretização no perfil de Concentração – Npe=4000, qd=1/80, dt=1e-7.....	52
6.09 - Comparativo dos perfis de concentração – Método Implícito /TVD, NDC=40.....	52
6.10 - Perfis de Concentração em um canal qualquer ($\Delta t = cte$ – Método explícito).....	53

7.01 - Relações geométricas entre o Simulador e o trabalho de Abbaszadeh.....	55
7.02 - Validação com o modelo de Abbaszadeh-Dehghani para <i>five-spot</i> homogêneo Npe=250, NC=40, P=700x700.....	57
7.03 -Comportamento da curva de Concentração normalizada para vários tamanhos de pulso. Npe=250, NDC=40, NC=40, P=700x700.	58
8.01 - Perfil de concentração no poço produtor. Npe=500, NDC=40, NC=40, Pulso=2%Vp	60
8.02 - Perfil de concentração no poço produtor Npe=500, NDC=40, NC=40.....	60
8.03 - Linhas de fluxo geradas pelo simulador para o Modelo I montada sobre a imagem representativa do modelo.geológico	62
8.04 - Perfil de Concentração no poço produtor - Modelo I Npe=500, NDC=40, NC=40, Pulso=2%	62
8.05 - Linhas de fluxo geradas pelo simulador para o Modelo II montada sobre a imagem representativa do modelo.geológico	63
8.06 - Perfil de Concentração no poço produtor - Modelo II Npe=500, NDC=40, NC=40, Pulso=2%	63
8.07 - Linhas de fluxo geradas pelo simulador para o Modelo III montada sobre a imagem representativa do modelo.geológico	64
8.08 - Perfil de Concentração no poço produtor- Modelo III Npe=500, NDC=40, NC=40, Pulso=2% Vp.....	64

Lista de Tabelas

4.01 - Resumo da Modelagem Matemática do Problema	27
7.01 - Dados do reservatório para $\frac{1}{4}$ de <i>five-spot</i>	57

Nomenclatura

Letras Latinas

A	área de $\frac{1}{4}$ de <i>five-spot</i>	m^2
A_s	área da seção transversal ao fluxo (canal)	m^2
A_{sD}	área da seção transversal ao fluxo (canal), adimensional	
a	distância entre poços iguais, injetores ou produtores (Abbaszadeh)	
b	termo independente	
$b_s(x)$	base da seção transversal do canal	
C_i	concentração da espécie i no meio poroso	Kg/m^3
C_I	concentração inicial no meio poroso	Kg/m^3
C_J	concentração injetada	Kg/m^3
C_i^*	passo intermediário no cálculo da Concentração (TVD)	
C_{Di}	concentração da espécie i no meio poroso, adimensional	
C_N	concentração normalizada (Abbaszadeh)	
C_o	concentração na injeção	
D_i	coeficiente de difusão molecular	m^2/s
F	termo de fluxo da EDC (TVD)	
f	termo de fluxo calculado (TVD)	
h	tamanho da malha associado à variável espacial	m
h_s	altura da seção transversal do canal	m

$\bar{\bar{K}}$	tensor coeficiente de dispersão hidrodinâmica	
K	coeficiente de dispersão hidrodinâmica	
k_i	permeabilidade absoluta na posição i	m^2
K_l	coeficiente de dispersão longitudinal	m^2/s
K_t	coeficiente de dispersão transversal	m^2/s
k_N	permeabilidade normalizada, adimensional	
k_x	permeabilidade absoluta na direção x	m^2
k_y	permeabilidade absoluta na direção y	m^2
L_c	comprimento característico do canal de fluxo	m
$\dot{m}$	fluxo mássico na seção do canal	$Kg/(m^2.s)$
M	discretização do canal	
M_A	matriz dos coeficientes do sistema pentadiagonal	
M_B	matriz dos coeficientes do sistema tridiagonal	
M	mobilidade total	
N_{Pe}	número de Peclet, adimensional	
N_{PeAB}	número de Peclet (Abbaszadeh), adimensional	
q	vazão de injeção do canal	m^3/s
q_T	vazão total de injeção	m^3/s
q_D	vazão de injeção do canal, adimensional	
t	tempo	s
t_D	tempo, adimensional	
t_{DAB}	tempo, adimensional (Abbaszadeh)	
u	função genérica $u(x,t)$	
$\vec{u}$	vetor velocidade	
$\vec{u}_C$	vetor velocidade convectiva	
$\vec{u}_D$	vetor velocidade difusiva	

u_x	velocidade de Darcy na direção x	
u_y	velocidade de Darcy na direção y	
v	vetor de incógnitas	
V	volume de controle	m^3
V_p	volume poroso	m^3
x	distância	m
x_D	variável do comprimento do canal, adimensional	

Letras Gregas

α_l	dispersividade longitudinal do meio poroso	m
ΔV_p	tamanho do banco (<i>slug</i>) em fração do V_p	
Δx	dimensão do bloco na direção x	m
Δy	dimensão do bloco na direção y	m
λ_x	mobilidade total na direção x	$m^2 / Pa.s$
λ_y	mobilidade total na direção y	$m^2 / Pa.s$
μ	viscosidade	$Pa.s$
ρ	massa específica	Kg/m^3
Φ	função potencial	
ϕ	porosidade do meio, adimensional	
φ	função corrente	$Pa.s / m^2$
$\psi_{i,j}$	solução numérica para φ no ponto (i,j)	

Superescritos

n	nível de tempo
$*$	nível intermediário (TVD)
ref	referência

Subscritos

D	adimensional
l	longitudinal
s	seção
t	transversal
x	direção x
y	direção y

Abreviaturas

CC1	condição de contorno à esquerda da EDC
CC2	condição de contorno à direita da EDC
CCI	condição de contorno inferior da EFC
CCS	condição de contorno superior da EFC
CI	condição inicial da EDC
EDC	equação de difusão-convecção
EFC	equação da função corrente
MGCPD	método do gradiente conjugado com Precondicionador Diagonal
NC	número de canais
NDC	número de discretização dos canais de fluxo
P	dimensões da matriz dos coeficientes do sistema pentadiagonal
TVD	<i>total variation diminishing</i>

Siglas

DEP	Departamento de Engenharia de Petróleo.
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
ISATIS	Simulador Geoestatístico desenvolvido pela Geovariance

Índices

i, j indica o bloco de simulação

$i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$ interfaces do bloco

Operadores

$\sum_i$ somatório

$\prod_{i=1}^n K_i$ produtório

Capítulo 1

Introdução

A previsão de comportamento de reservatórios de petróleo através do modelo dos canais de fluxo é uma técnica largamente utilizada na indústria do petróleo. De forma relativamente simples um problema de duas dimensões é reduzido a uma série de problemas unidimensionais elementares, tornando-se especialmente apropriado à modelagem dos sofisticados mecanismos de recuperação não convencional de petróleo, desde que associado a padrões de fluxo relativamente simples.

A vantagem desse método, publicado por Higgins e Leighton em 1962, é que soluções aproximadas para problemas de deslocamento podem ser freqüentemente obtidas sem ter que recorrer a simuladores numéricos matematicamente complexos e caros. O crescente número de publicações sobre o assunto atesta a importância dessa técnica.

O objetivo deste trabalho é estudar o deslocamento miscível com dois componentes, para um sistema de injeção em malha de cinco pontos, utilizando a teoria de canais de fluxo. Para isto, foi montado um simulador que gera os canais de fluxo, a partir da Equação da Função Corrente e, faz o acoplamento da equação de fluxo através da implantação da solução da Equação de Difusão-Convecção ao longo dos canais de fluxo gerados.

No campo da engenharia do petróleo, mais especificamente com relação à Engenharia de Reservatórios, o emprego deste tipo de simulador tem se revelado uma importante ferramenta de auxílio aos técnicos da área na caracterização dos reservatórios pelo fornecimento de diversas informações, muitas das quais não podendo ser obtidas com a devida confiabilidade a partir de testes de laboratório ou de dados de campo. Tais informações podem ser de caráter qualitativo ou quantitativo, permitindo um conhecimento mais detalhado do comportamento de fluxo entre poços.

Dentre as informações que podem ser obtidas por meio da simulação, citam-se:

Concentração do efluente no poço produtor, para injeções contínuas e descontínuas;

Perfil de concentração da frente de avanço nos canais de fluxo;

Avaliação do tempo de irrupção (*breakthrough*) do fluido deslocante;

Curva de recuperação do fluido deslocado;

Mapa de canais de fluxo para padrões homogêneos e heterogêneos de distribuição de permeabilidades.

Para desenvolvimento e teste do simulador utilizaram-se os seguintes equipamentos:

Microcomputador Pentium 166 MHz, 64 MB RAM;

Microcomputador P-II 400MHz, 128MB RAM, DEP / FEM / UNICAMP.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica da literatura sobre canais de fluxo, deslocamento miscível e tratamento numérico da Equação de Difusão-Convecção.

No Capítulo 3 é feita uma descrição das características principais da teoria dos canais de fluxo.

No Capítulo 4 são apresentadas as hipóteses utilizadas no estabelecimento do problema e descrita a modelagem matemática da Equação da Função Corrente e da Equação de Difusão Convecção.

No Capítulo 5 são formulados os modelos numéricos das equações resultantes da modelagem matemática do capítulo anterior.

No Capítulo 6 é feita uma rápida descrição do modelo computacional acentuando os principais elementos característicos da sua construção.

No Capítulo 7 o modelo é validado com base no trabalho de Abaszadeh-Dehghani e Brigham, 1982.

No Capítulo 8 são feitas algumas aplicações do simulador com objetivo de analisar o comportamento do reservatório, quando sujeito a injeções contínuas e descontínuas, considerando sistemas homogêneo e heterogêneo.

No Capítulo 9 são apresentadas as conclusões e recomendações.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Canais de fluxo

O modelo dos canais de fluxo baseia-se no fato de que, conhecida a geometria de fluxo em um sistema areal, é possível reduzir um problema de duas dimensões a uma série de problemas de uma dimensão, o que o torna especialmente apropriado à modelagem de mecanismos de recuperação não convencional, desde que associados a padrões de fluxo relativamente simples. Soluções aproximadas para problemas de deslocamento podem ser obtidas sem que se faça o uso de simuladores numéricos matematicamente complexos e caros.

Modelos deste tipo foram propostos por Muskat (1949) utilizando técnicas semi-analíticas para obter eficiência de varrido na irrupção de água adotando padrões de injeção regular e disperso. Collins (1961), através de uma aproximação por diferenças finitas, definiu linhas de fluxo para qualquer distribuição de poços. Ambos trabalharam com razões de mobilidade unitária e descreveram técnicas de superposição de imagens definindo os contornos da área a ser estudada.

Hauber (1963) descreveu o método considerando os canais de fluxo como sendo formado por três linhas de fluxo, onde a área da seção transversal era função do comprimento ao longo da linha de fluxo central. Aplicou técnicas de integração para determinar a vazão em cada

canal de fluxo e utilizou deslocamento tipo pistão para um padrão de injeção *five-spot*. Assumiu fluido incompressível, camadas horizontais homogêneas e espessura uniforme.

Higgins e Leighton (1962 e 1964) aplicaram a teoria de canais de fluxo para o padrão *five-spot*, assumindo fluido incompressível, reservatório homogêneo e espessura constante. Dividiram os canais de fluxo em células com igual volume. Definiram fatores de forma para cada célula baseando-se no modelo potenciométrico e simularam, para cada canal de fluxo, um deslocamento frontal de acordo com a teoria de Buckley e Leverett (1941).

As abordagens anteriores, por se tratarem dos trabalhos iniciais sobre canais de fluxo, foram desenvolvidas para sistemas homogêneos e razão de mobilidade unitária. Algumas modificações tornaram-se necessárias para atender a aplicações mais realistas. Os trabalhos seguintes abordam várias técnicas desenvolvidas com o objetivo de tratar as heterogeneidades do meio poroso. Variações de espessura, permeabilidade, bem como condições de contorno, são consideradas através de coeficientes que distorcem convenientemente o traçado das linhas de fluxo.

LeBlanc *et al.* (1971) descreveram um método que se baseia na geração de linhas de fluxo pela superposição de soluções da linha fonte. O modelo é facilmente adaptável a qualquer distribuição de poços e tipo de mecanismo de deslocamento. Reservatórios estratificados e com razões de mobilidades não unitárias podem ser modelados. No caso da mobilidade diferente de um, o regime não é permanente. LeBlanc *et al.* contornaram este problema assumindo que a geometria de fluxo permanece a mesma. Cada canal é dividido em células definidas nos espaços entre linhas equipotenciais adjacentes. À medida que um banco de fluido vai sendo injetado, calculam-se as resistências ao fluxo em cada célula, função da saturação, das permeabilidades relativas, das viscosidades e da geometria das células. A resistência ao fluxo oferecido por cada canal é obtida como a resultante de um sistema em série das resistências de suas células. A vazão total do poço é rateada entre os canais de forma proporcional às resistências ao fluxo.

Martin *et al.* (1979) consideraram a influência da mobilidade dos fluidos nas linhas de fluxo e compararam os resultados para canais de fluxo fixo e variável. Seu modelo calcula a posição precisa do banco de fluidos superando, com isso, os efeitos da dispersão numérica.

Romeu (1985) propôs um método mais eficiente e mais simples para o cálculo de fatores de forma em malhas de fluxo que o proposto por Higginns e Leighton. Utilizou a teoria do deslocamento pistão. Considerou a razão de mobilidade unitária, reservatório homogêneo e usou a teoria da variável complexa.

Cox (1987) observou que variações na razão de mobilidade são tão importantes quanto as heterogeneidades do reservatório. Utilizou a aproximação de Dykstra-Parsons para considerar os efeitos de varrido vertical e as heterogeneidades do reservatório.

Thiele *et al.* (1994) modelaram deslocamentos convectivos, usando canais de fluxo, em sistemas heterogêneos. A direção do fluxo durante o deslocamento é traçada, a cada tempo, pelos canais de fluxo, os quais são recalculados de acordo com as alterações na distribuição da mobilidade do fluido. Uma solução unidimensional de Riemann (Buckley e Leverett, por exemplo) é aplicada ao longo dos canais de fluxo. A solução bidimensional resultante não apresenta difusão numérica e pode incluir os efeitos da gravidade, difusão física longitudinal, tratar processos multifásicos e composicionais multicomponentes.

Ferreira (1994) analisou o deslocamento unidimensional de dois fluidos incompressíveis, com o fluido molhante deslocando o não molhante. O escoamento é imiscível e leva em consideração os efeitos capilares transversais através de uma modelagem para transferência de massa entre a fração contínua e a descontínua. O fluxo mássico se dá em contracorrente com magnitude proporcional à massa de água total e à diferença de saturação entre as duas frações. O fenômeno físico é representado matematicamente por um sistema hiperbólico cuja solução é obtida através do método das características.

Santos (1996) associou à teoria de canais de fluxo o modelo de Ferreira (1994). As linhas de fluxo foram geradas seguindo o procedimento de LeBlanc e os fatores de forma foram obtidos pelo método de Romeu.

Equação de Difusão-Convecção

O escoamento de fluidos no meio poroso envolve dois fenômenos: convecção e dispersão. A convecção relaciona-se ao deslocamento do fluido por um gradiente de pressão. A dispersão hidrodinâmica (Bear, 1972) está associada à mistura provocada pela difusão molecular, devido aos gradientes de concentração e à dispersão mecânica causada pela agitação do fluido no meio poroso. Segundo Lake (1989), a equação que descreve os deslocamentos miscíveis no meio poroso é a equação de Difusão-Convecção. Trata-se de uma equação de difícil tratamento numérico.

Settari *et al.* (1976) analisaram métodos de resolução das equações de Difusão-Convecção desenvolvidos através da técnica de diferenças finitas dividindo o problema em duas categorias: hiperbólico e parabólico, caráter este determinado pelo número de Peclet, que mostra a relação entre o transporte convectivo e o difusivo. Quando o processo difusivo é dominante (altos números de Peclet) surgem problemas como dispersão numérica e instabilidades. Estes são enfrentados substituindo-se a aproximação de segunda ordem para o termo convectivo pela aproximação de primeira ordem, o que causa uma suavização artificial das frentes de concentração. O refinamento de malha pode minimizar este efeito.

Harten *et al.* (1983) introduziram o conceito de métodos TVD (*Total Variation Diminishing*). Tais métodos consistem, basicamente, em acoplar um termo de fluxo anti-difusivo com um limitador de fluxo ao tradicional esquema de 1 ponto a montante. Harten (1983) e Sweby (1984) demonstraram os critérios algébricos que devem ser obedecidos pelo limitador para que o esquema final conduza a redução das variações totais ao longo do tempo. Mais recentemente, Chen *et al.* (1991) descreveram um método TVD de segunda ordem para equação hiperbólica. Esta técnica está detalhada no livro *Numerical Methods for problems with moving fronts*, Sinlayson (1994).

Pinto (1991) analisou métodos numéricos de diferenças finitas utilizados na resolução de problemas de escoamento de fluidos em meios porosos. Deu enfoque aos erros de dispersão numérica, principalmente no estudo dos escoamentos convectivos. Utilizou os Métodos de Redução das Variações Totais que foram introduzidos por Harten (1983) para reduzir essa dispersão.

Capítulo 3

Teoria dos Canais de Fluxo

Dado um campo de escoamento, linha de fluxo é o caminho da partícula fluida formado pela tangente à velocidade em cada ponto num dado instante de tempo. Estas curvas começam e terminam em pontos onde fluidos entram e saem do sistema, respectivamente. A Figura 3.01 ilustra linhas de fluxo para escoamento incompressível entre vários poços. As linhas pontilhadas dividem as linhas de fluxo em “feixes”, onde todas as linhas de fluxo conectam poço produtores e injetores. Estas linhas pontilhadas são chamadas de linhas de divisão.

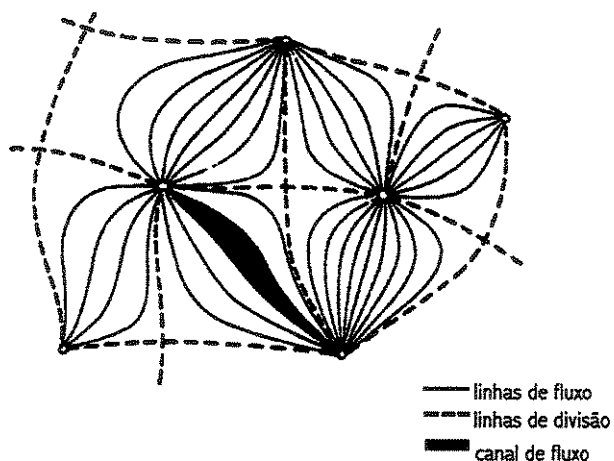


Figura 3.01 – Feixes de canais de fluxo e linhas de divisão

Canal de fluxo é definido como a região entre duas linhas de fluxo adjacentes (Figura 3.01). Como estas linhas de fluxo não se cruzam e não existe fluxo de um canal para outro, a quantidade de fluido que sai ou entra em um determinado canal é a mesma. É justamente esta propriedade que permite o tratamento dos canais de fluxo como subsistemas unidimensionais independentes.

Quando, sobre as linhas de fluxo, sobrepõem-se linhas eqüipotenciais, os resultados são padrões característicos do sistema, como é exemplificado na Figura 3.02. As malhas de fluxo assim formadas gozam de propriedades especiais. É bastante conhecido, por exemplo, que a interseção entre linhas de fluxo e linhas eqüipotenciais se dá sempre segundo ângulos retos. Estas malhas de fluxo resultam de aplicações de fenômenos de transporte regidos pela equação de Laplace.

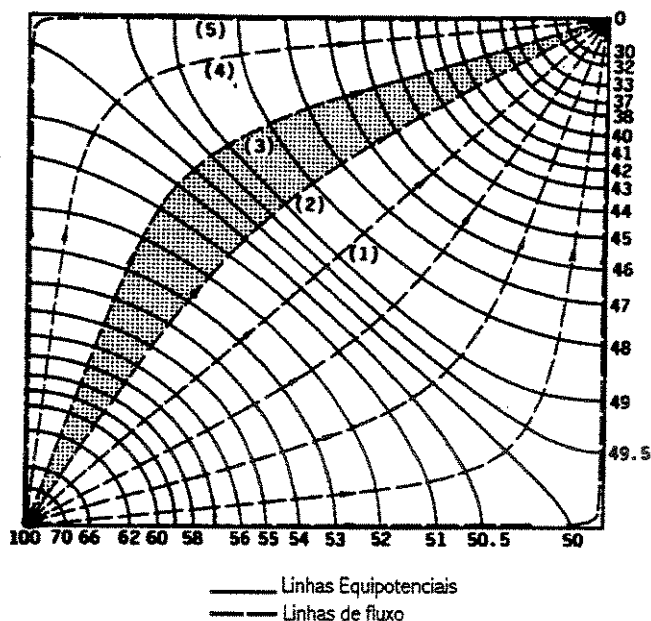


Figura 3.02 – Linhas eqüipotenciais e de fluxo para $\frac{1}{4}$ de five-spot

A vazão em cada canal é proporcional ao ângulo de partida de suas linhas de fluxo. Se estes ângulos forem uniformemente espaçados, as vazões em todos os canais de fluxo serão iguais, o que não é intuitivamente percebido de imediato. Por exemplo, em um sistema de dois poços, um produtor e um injetor, como na Figura 3.03, poderia parecer que os canais que partem de frente para o poço produtor (canais, 1, 2...) conduzem uma vazão maior do que aqueles que partem do

lado oposto (canais, 8, 7...). Entretanto, conforme esta ilustrada, as áreas injetadas, após determinado tempo, são exatamente iguais. À medida que as linhas que limitam um canal se afastam ocorre uma diminuição da velocidade da frente de avanço no canal.

A abordagem clássica da teoria dos canais de fluxo considera sistemas homogêneos e razão de mobilidade unitária. Com o objetivo de atender a aplicações mais realistas foram introduzidas técnicas para tratamento das heterogeneidades do meio poroso. Este trabalho vem sendo feito de forma gradual e sofisticada. Condições de contorno são reproduzidas através do método das imagens, variações de espessura e permeabilidade são consideradas através de coeficientes que distorcem convenientemente o traçado das linhas de fluxo. São alguns exemplos dessas técnicas.

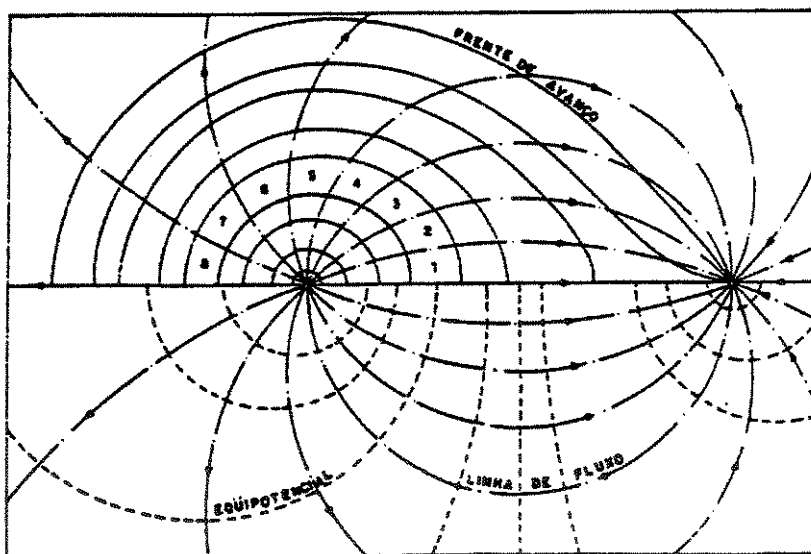
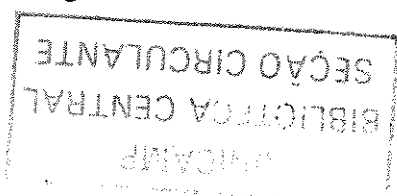


Figura 3.03 – Linhas de fluxo, equipotenciais e frente de avanço entre um poço injetor e um produtor.

Quando a razão de mobilidade for diferente de um, o regime não é permanente. Este problema foi contornado por LeBlanc assumindo que a geometria de fluxo permanece a mesma (linhas de fluxo fixas). Cada canal é dividido em células definidas nos espaços entre linhas equipotenciais adjacentes. À medida que um banco de fluido vai sendo injetado, calculam-se as resistências ao fluxo em cada célula, função da saturação, das permeabilidades relativas, das viscosidades e da geometria das células. A resistência ao fluxo oferecido por cada canal é obtida



como a resultante de um sistema em série das resistências de suas células. A vazão total do poço é rateada entre os canais de forma proporcional às resistências ao fluxo.

Podemos considerar a geometria dos canais de fluxo variável com o tempo e mobilidade total diferente de 1. Neste caso, os canais de fluxo são recalculados periodicamente de acordo com as alterações na distribuição de mobilidade do fluido. Maiores informações podem ser obtidas nos trabalhos de Martin *et al.*(1979) e Thiele *et al.*(1994).

Capítulo 4

Modelagem Matemática

Neste trabalho, estuda-se o deslocamento miscível no meio poroso utilizando-se a teoria dos canais de fluxo. A idéia consiste em achar o caminho das linhas de fluxo dos fluidos no reservatório, e então resolver uma equação unidimensional de fluxo ao longo das linhas de fluxo, ou ao longo do canal de fluxo definido por estas linhas. Neste capítulo é feita a formulação do problema e apresentada a modelagem matemática da equação de Fluxo (Equação de Difusão-Convecção) e da equação geradora dos canais de fluxo (Equação da Função Corrente).

4.1 - Formulação do Modelo do Problema

O modelo físico simplificado a ser estudado é de um reservatório limitado, heterogêneo, contendo dois poços, um injetor e um produtor. A Figura 4.01 ilustra este modelo, cujas principais hipóteses são listadas a seguir:

Apenas um fluido móvel originalmente no sistema;

Ausência de interação rocha-fluido;

Deslocamento miscível a dois componentes;

Difusão molecular negligenciável;

Efeitos viscosos e gravitacionais desprezíveis;

Escoamento monofásico, incompressível e isotérmico;

Modelo físico de geometria quadrada, correspondendo a “ $\frac{1}{4}$ de *five-spot*”, não havendo escoamento através dos limites laterais do meio poroso;

Razão de mobilidade unitária;

Reservatório de espessura e porosidade constantes;

Reservatório heterogêneo e isotrópico.

O equacionamento do modelo físico considerado requer a aplicação da solução unidimensional de uma equação de fluxo ao longo dos canais de fluxo, estes previamente definidos levando-se em consideração as heterogeneidades do reservatório.

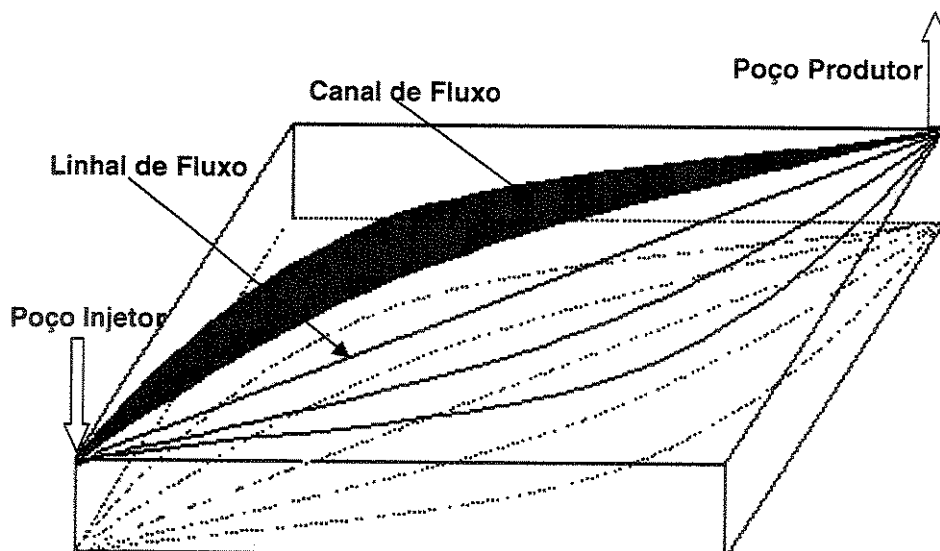


Figura 4.01 - Modelo físico do problema para $\frac{1}{4}$ de *five-spot*

4.2 - Equação geradora dos canais de fluxo

O tratamento matemático dado aos canais de fluxo faz o uso de funções corrente, conforme Martin *et al.* (1979) e Thiele *et al.* (1994), que são funções escalares similares à pressão. Tais funções têm valores constantes ao longo das linhas de fluxo.

4.2.1 - Modelagem Matemática da Equação da Função Corrente

Considere o canal de fluxo mostrado na Figura 4.02, o qual é formado por duas linhas de fluxo adjacentes com funções corrente ϕ_1 e ϕ_2 .

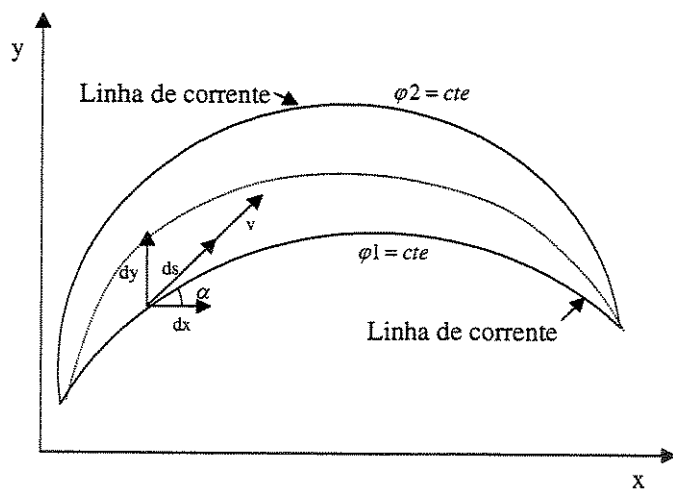


Figura 4.02 - Esquema para um canal de fluxo genérico

Pode-se escrever uma linha de corrente em duas dimensões utilizando-se da forma paramétrica,

$$x = x(s) \quad \text{e} \quad y = y(s). \quad (4.01)$$

Para um dado campo de escoamento, a linha de corrente é tangente à velocidade em cada ponto. A inclinação do vetor velocidade é dada por:

$$\frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{u_y}{u_x}, \quad (4.02)$$

onde u_x e u_y são as velocidades de Darcy nas direções x e y , respectivamente.

A Equação 4.02 pode ser reescrita como:

$$u_y \cdot \frac{dx}{ds} - u_x \cdot \frac{dy}{ds} = 0. \quad (4.03)$$

Considerando-se uma função, chamada de função corrente, que seja constante ao longo da linha de fluxo, tem-se:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 0, \text{ ao longo desta linha de fluxo.} \quad (4.04)$$

Comparando as Equações 4.03 e 4.04, observa-se que a função corrente deve satisfazer às seguintes relações:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_y \quad \text{e,} \quad (4.05)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -u_x. \quad (4.06)$$

Considerando a Lei de Darcy para as velocidades u_x e u_y , obtém-se:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\lambda_y \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{e,} \quad (4.07)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \lambda_x \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (4.08)$$

onde λ_x e λ_y são as mobilidades totais nas direções x e y , respectivamente. No caso de fluxo monofásico as mobilidades são dadas por:

$$\lambda_x = \frac{k_x}{\mu} \quad \text{e}, \quad (4.09)$$

$$\lambda_y = \frac{k_y}{\mu}. \quad (4.10)$$

Reescrevendo as Equações 4.07 e 4.08, temos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda_y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{e}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (4.12)$$

Derivando as Equações 4.11 e 4.12 obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\lambda_y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \text{e}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right). \quad (4.14)$$

Subtraindo a Equação 4.14 da 4.13, obtemos a equação diferencial que governa a função corrente,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda_y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Na geometria definida pela distribuição de poços *five-spot*, associa-se à equação anterior as condições de contorno para $\frac{1}{4}$ de *five-spot*. Assim, as funções correntes $\varphi(x, y)$ são obtidas resolvendo a Equação 4.15 com condições de contorno de Dirichlet.

Por hipótese, para obtermos solução única para o cálculo da função corrente, e para que a mesma varie entre 0 e 1, atribuímos os seguintes valores de condições de contorno para o padrão $\frac{1}{4}$ de *five-spot*: $\varphi = 1$, para o lado esquerdo e superior, e $\varphi = 0$, para o lado direito e inferior. Matematicamente, estas condições são representadas por:

$$\varphi(x = 0, y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4.16)$$

$$\varphi(x = 1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4.17)$$

$$\varphi(x, y = 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (4.18)$$

$$\varphi(x, y = 1) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.19)$$

4.3 - Equação de Fluxo.

4.3.1 - *Mecanismos de Transporte*

O transporte de fluidos no meio poroso geralmente compreende dois fenômenos: a convecção e a dispersão. A convecção está associada ao movimento global do fluido (Lei de Darcy), e é consequência da imposição de um gradiente de potencial ao meio poroso. Sendo assim, os fatores que a determinam dependem basicamente do arranjo entre poços e das condições de operação (se produz a vazão ou a pressão constante, por exemplo).

A dispersão hidrodinâmica está relacionada com a formação de uma zona de mistura miscível entre os fluidos (componentes), incluindo dois processos: dispersão mecânica e difusão molecular.

A dispersão mecânica é resultante do movimento das partículas do fluido no meio poroso. Ela ocorre devido ao fato de as partículas individuais do fluido terem de percorrer, inclusive a velocidades diferentes, canais tortuosos por entre os poros da rocha. O resultado é um movimento aleatório de fluido através de passagens irregulares que tende a espalhar o fluido deslocante no fluido deslocado.

A difusão molecular ocorre devido à existência de gradientes de concentração ao longo das seções perpendiculares às direções médias de fluxo. É causada pelo movimento aleatório de moléculas diferentes. Seu valor é significativo somente em condições de baixas velocidades, podendo ser desprezado. Lake (1989) sugere que, se a velocidade intersticial for superior a $3.5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s} \cong (3 \text{ cm/dia})$, então a convecção domina o processo.

Segundo Lake (1989), o deslocamento miscível através de um meio poroso é regido por uma equação diferencial do tipo Difusão-Convecção. Isto será verificado a seguir.

4.3.2 - Modelagem Matemática da Equação de Difusão-Convecção

Na modelagem matemática do problema adotou-se, para um canal de fluxo genérico, a representação unidimensional mostrada na Figura 4.03. Considerou-se o deslocamento isotérmico miscível de um componente por outro (completamente miscível) num meio poroso heterogêneo permeável.

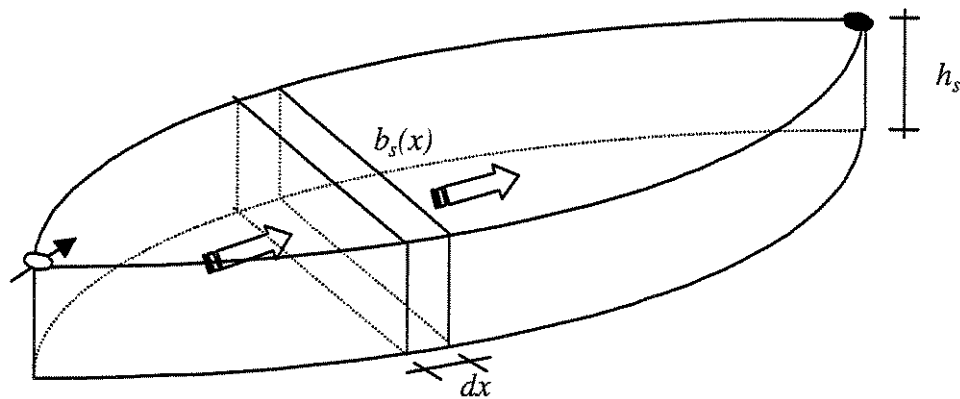


Figura 4.03 - Representação geométrica para um canal de fluxo genérico

Considere o volume de controle $V = b_s(x) \cdot h_s \cdot \Delta x = A_s(x) \cdot \Delta x$, onde $b_s(x)$ é a base e h_s é a altura da seção transversal ao fluxo. $A_s(x)$ é a área da seção transversal ao fluxo e varia com a posição dentro do canal.

Aplicando-se a Lei de Conservação da massa ao volume de controle considerado, obtém-se:

$$(\dot{m}_{x+\Delta x} - \dot{m}_x) \cdot A_s(x) = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \phi \cdot C_i \cdot A_s(x) \cdot \Delta x), \quad (4.20)$$

onde $\dot{m}$ é o fluxo mássico na seção do canal, ρ é a massa específica, ϕ é a porosidade e C_i é a concentração da espécie i no meio poroso.

Dividindo-se ambos os lados da Equação 4.20 por Δx obtém-se:

$$\frac{(\dot{m}_{x+\Delta x} \cdot A_s(x) - \dot{m}_x \cdot A_s(x))}{\Delta x} = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \phi \cdot C_i \cdot A_s(x)). \quad (4.21)$$

Nesta equação pode-se usar,

$$\dot{m} = \rho \cdot \bar{u}_x, \quad (4.22)$$

onde $\bar{u}_x$ é o vetor velocidade na direção do escoamento.

Considerando-se fluido incompressível e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se a equação diferencial na forma infinitesimal:

$$\frac{\partial (\bar{u}_x \cdot A_s(x))}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi \cdot C_i \cdot A_s(x)). \quad (4.23)$$

A velocidade pode ser decomposta em duas parcelas:

$$\bar{u}_x = \bar{u}_D + \bar{u}_C, \quad (4.24)$$

onde $\bar{u}_D$ é o vetor velocidade difusiva e $\bar{u}_C$ é o vetor velocidade convectiva.

Sabe-se que o vetor velocidade difusiva é dado por:

$$\bar{u}_D = -\phi \cdot \bar{K} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial x}, \quad (4.25)$$

onde $\bar{K}$ é o tensor coeficiente de dispersão hidrodinâmica, o qual contempla as contribuições resultantes da dispersão mecânica e difusão molecular.

Segundo Settari (1977), o coeficiente de dispersão hidrodinâmica pode ser descrito, para um escoamento unidimensional, como:

$$K = D + \alpha \cdot \frac{|u|}{\phi}, \quad (4.26)$$

Aqui, D é o coeficiente de difusão molecular na matriz porosa, ou seja, a razão entre a difusividade molecular e o fator de tortuosidade. α é freqüentemente denominado dispersividade do meio poroso. Em escoamentos multidimensionais, tem sido observada experimentalmente a existência de dois valores distintos de dispersão: dispersão longitudinal, a qual ocorre na direção do vetor velocidade ($\bar{u}_x$), e dispersão transversal, a qual é homogênea no plano perpendicular a $\bar{u}_x$. Então, os coeficientes de dispersão hidrodinâmica, longitudinal e transversal, são dados por:

$$K_l = D + \alpha_l \cdot \frac{|u|}{\phi} \quad \text{e}, \quad (4.27)$$

$$K_t = D + \alpha_t \cdot \frac{|u|}{\phi}. \quad (4.28)$$

Admitindo-se que o tensor coeficiente de dispersão hidrodinâmica, seja formado apenas pelo componente longitudinal e desprezando-se a difusão molecular, conclui-se que:

$$K_l = \frac{\alpha_l \cdot u_x}{\phi}. \quad (4.29)$$

De fato, se a velocidade intersticial é superior a 3cm/dia (Lake,1989), o termo de mistura na Equação 4.27 domina o primeiro termo. Isto se verifica na maioria dos processos de recuperação não convencional.

Por outro lado, o vetor velocidade convectiva é dado por:

$$\bar{u}_c = C_i \cdot \bar{u}_x. \quad (4.30)$$

Substituindo-se as Equações 4.24, 4.25, 4.29 e 4.30 na Equação 4.23, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_i \cdot u_x \cdot A_s(x) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\alpha_l \cdot u_x \cdot A_s(x) \cdot \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) = -\phi \cdot b_s(x) \cdot h_s \cdot \frac{\partial C_i}{\partial t}. \quad (4.31)$$

Considerando-se que $u_x \cdot A_s(x) = q(t)$ é a vazão total, resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_i \cdot \underbrace{u_x \cdot A_s(x)}_{q(t)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\alpha_l \cdot \underbrace{u_x \cdot A_s(x)}_{q(t)} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) = -\phi \cdot \underbrace{b_s(x) \cdot h_s}_{A_s(x)} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial t}, \quad (4.32)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_i - \alpha_l \cdot \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) = - \frac{\phi \cdot b_s(x) \cdot h_s}{q(t)} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial t}, \quad (4.33)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha_l} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \left(\frac{\phi \cdot b_s(x) \cdot h_s}{q(t) \cdot \alpha_l} \right) \frac{\partial C_i}{\partial t}. \quad x > 0 \text{ e } t \geq 0 \quad (4.34)$$

Esta é a Equação de Difusão-Convecção para um canal de fluxo genérico. Nesta equação, o primeiro e o segundo termo representam, respectivamente, as contribuições difusiva e convectiva ao escoamento. O terceiro termo é o de evolução temporal. Para obtenção de uma solução única, associamos à Equação 4.34, as seguintes condições adicionais:

Por hipótese, como condição inicial, o reservatório encontra-se com fluido homogeneamente distribuído com concentração inicial, C_I , constante em todos os pontos. Matematicamente, esta condição é expressa por,

$$C_i(x,0) = C_I; \quad x > 0. \quad (4.35)$$

A condição de contorno interna representa um reservatório sujeito a uma injeção com composição constante (fluido injetado), C_J . Matematicamente, esta condição é expressa por,

$$C_i(0,t) = C_J; \quad t \geq 0. \quad (4.36)$$

A condição de contorno externa é tal que a variação da concentração com a posição, para x igual ao comprimento característico do canal de fluxo, L_c , é igual a composição inicial, C_I . Matematicamente, esta condição é expressa por,

$$\frac{\partial C_i(L_c,t)}{\partial x} = C_I; \quad t \geq 0. \quad (4.37)$$

4.3.3 - Adimensionalização

Considere as seguintes variáveis adimensionais:

$$C_{D_i} = \frac{C_i(x,t) - C_I}{C_J - C_I}, \quad (4.38)$$

onde C_{D_i} é a concentração adimensional da espécie i no meio poroso, C_I é a concentração do fluido no meio poroso e C_J é a concentração do fluido injetado;

$$x_D = \frac{x}{\sqrt{A}}, \quad (4.39)$$

onde x_D é a variável adimensional do comprimento do canal e A é a área de $\frac{1}{4}$ de *five-spot*;

$$t_D = \frac{q_T \cdot t}{A \cdot \phi \cdot h_s} \cdot \frac{1}{N_{pe}}, \quad (4.40)$$

onde t_D é o tempo adimensional, q_T é a vazão total e N_{pe} é o Número de Peclet, adimensional, que é definido, independente da velocidade como:

$$N_{Pe} = \frac{\sqrt{A}}{\alpha_l}. \quad (4.41)$$

A vazão adimensional, $q_D(t_D)$, é definida como:

$$q_D(t_D) = \frac{q(t_D)}{q_T}. \quad (4.42)$$

A base da seção transversal, adimensional, $b_{s_D}(x_D)$, é definida como:

$$b_{sD}(x_D) = \frac{b_s(x_D)}{\sqrt{A}}. \quad (4.43)$$

A substituição destas variáveis adimensionais na Equação 4.34 e nas suas condições inicial e de contorno resultam na Equação de Difusão-Convecção e suas condições de contorno e inicial na forma adimensionalizada:

$$\frac{\partial^2 C_{Di}}{\partial x_D^2} - N_{Pe} \cdot \frac{\partial C_{Di}}{\partial x_D} = \frac{b_{sD}(x_D)}{q_D(t_D)} \cdot \frac{\partial C_{Di}}{\partial t_D}; \quad x_D > 0 \text{ e } t_D \geq 0 \quad (4.44)$$

Como condição inicial, o reservatório encontra-se com concentração adimensional inicial igual a 0 (zero), constante em todos os pontos. Matematicamente, esta condição é expressa por,

$$C_{Di}(x_D, 0) = 0; \quad x_D > 0. \quad (4.45)$$

A condição de contorno interna representa um reservatório sujeito a uma injeção com composição, constante e igual a 1. Matematicamente, esta condição é expressa por,

$$C_{Di}(0, t_D) = 1; \quad t_D \geq 0. \quad (4.46)$$

A condição de contorno externa é tal que a variação da concentração adimensional com a posição, para x_D igual ao comprimento característico do canal de fluxo, L_c , é igual a 0 (zero). Matematicamente, esta condição é expressa por,

$$\frac{\partial C_{Di}(L_c, t_D)}{\partial x_D} = 0. \quad t_D \geq 0. \quad (4.47)$$

Um resumo deste capítulo é apresentado na Tabela 4.01, a seguir:

Tabela 4.01 – Resumo da Modelagem Matemática do Problema

Canais de Fluxo	
$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda_y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0$	(4.15)
$\varphi(x=0, y) = 1 \quad 0 \leq y \leq 1$	(4.16)
$\varphi(x=1, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 1$	(4.17)
$\varphi(x, y=0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$	(4.18)
$\varphi(x, y=1) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$	(4.19)
Equação de Difusão-Convecção	
$\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \left(\frac{\phi \cdot b_s(x) \cdot h_s}{q(t) \cdot \alpha_i} \right) \frac{\partial C_i}{\partial t}, \quad x > 0 \text{ e } t \geq 0$	(4.34)
$C_i(x, 0) = C_I \quad x \geq 0$	(4.35)
$C_i(0, t) = C_J \quad t \geq 0$	(4.36)
$\frac{\partial C_i(L_c, t)}{\partial x} = C_I \quad t \geq 0$	(4.37)
Equação de Difusão-Convecção Adimensionalizada	
$\frac{\partial^2 C_{Di}}{\partial x_D^2} - N_{Pe} \cdot \frac{\partial C_{Di}}{\partial x_D} = \frac{b_{sD}(x_D)}{q_D(t_D)} \cdot \frac{\partial C_{Di}}{\partial t_D}, \quad x_D > 0 \text{ e } t_D \geq 0$	(4.44)
$C_{Di}(x_D, 0) = 0 \quad x_D > 0$	(4.45)
$C_{Di}(0, t_D) = 1 \quad t_D \geq 0$	(4.46)
$\frac{\partial C_{Di}(L_c, t_D)}{\partial x_D} = 0 \quad t_D \geq 0$	(4.47)

Capítulo 5

Modelagem Numérica

A obtenção de um modelo numérico¹ é feita a partir da discretização das equações do modelo matemático, colocando-as em uma forma adequada à simulação numérica. Esta discretização leva a um conjunto de equações lineares cuja solução fornece a resposta aproximada em pontos discretos do domínio (reservatório). A técnica de discretização mais usada em simulação numérica de reservatórios é o método de diferenças finitas. Neste capítulo é feito o tratamento numérico dos modelos gerados no capítulo anterior, a Equação da Função Corrente e a Equação de Difusão-Convecção.

5.1 - Equação da Função Corrente (EFC).

A EFC (4.15) é uma equação diferencial parcial elíptica resultante da modelagem matemática dos canais de fluxo. Ela é também conhecida como equação de Laplace. Este tipo de equação ocorre freqüentemente associado a modelagem matemática de problemas de distribuição de temperatura, de problemas potenciais em eletricidade e eletromagnetismo e de escoamento irrotacional de fluidos incompressíveis. Estes problemas são chamados de problemas de valor de contorno (solução estática). Quando a função é especificada em todos os pontos do contorno o

¹ Maiores detalhes sobre simulação numérica de reservatórios podem ser obtidos em Aziz e Settari (1979), Mattax (1990) e Aziz (1994).

problema é chamado de Dirichlet e, é possível mostrar que existe uma única solução, a qual depende continuamente dos dados no contorno.

Considere a equação da função corrente φ na sua forma diferencial, conforme Tabela 4.01:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda_y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.01)$$

sujeita às seguintes condições de contorno de Dirichlet:

$$\varphi(x=0, y) = ccs = 1; \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5.02)$$

$$\varphi(x=1, y) = cci = 0; \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5.03)$$

$$\varphi(x, y=0) = cci = 0; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.04)$$

$$\varphi(x, y=1) = ccs = 1. \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.05)$$

Condições de contorno fechadas são desejáveis para que o problema elíptico seja bem posto. Com esta formulação matemática podemos garantir¹ (i) existência de solução, (ii) unicidade desta solução, (iii) que pequenas perturbações nos dados de entrada acarretem pequenas variações na solução (estabilidade).

5.1.1 - Definição da malha

Considere que a solução da Equação 5.01 esteja sobre o quadrado $0 \leq x, y \leq 1$. O primeiro passo na construção da solução aproximada é a discretização do domínio. Para isto introduz-se a malha ponto centrado conforme Figura 5.01.

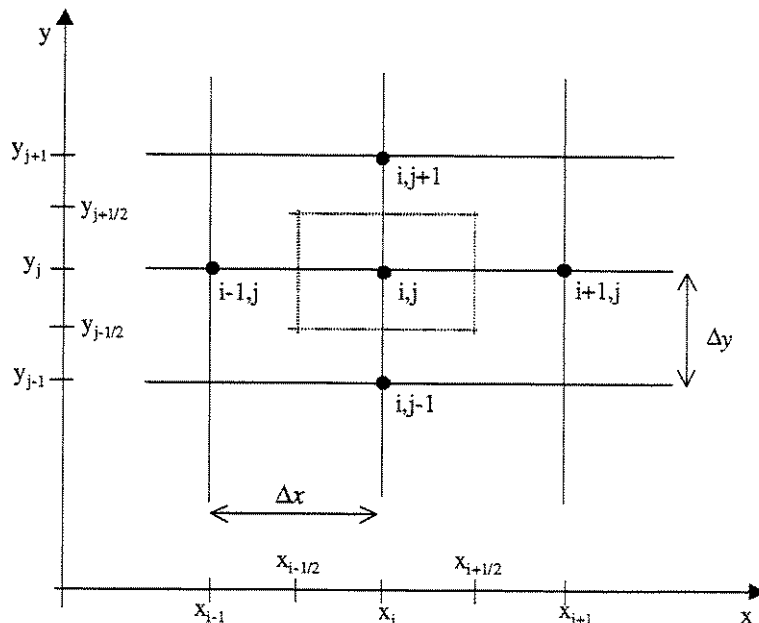


Figura 5.01 - Esquema de malha ponto centrado para a EFC

Adotando-se uma malha uniforme e de igual espaçamento nas duas direções resulta:

$$\Delta x = \Delta y . \quad (5.06)$$

5.1.2 - Obtenção das equações discretizadas.

O primeiro passo, por simplicidade, aproxima as derivadas em relação a x no ponto (x_i, y_i) por:

¹ Maiores detalhes sobre métodos numéricos para equações diferenciais parciais podem ser obtidos em Ames (1977), Quinney (1987) e Press et al. (1992).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cong \frac{\left(F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left(F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i-1/2,j}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}, \quad (5.07)$$

onde,

$$F(x, y) = \frac{1}{\lambda_y}. \quad (5.08)$$

Considerando as seguintes aproximações,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{e}, \quad (5.09)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} = \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (5.10)$$

onde $\psi_{i,j}$ é uma aproximação ou a solução numérica para φ no ponto (i, j) . Obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cong \frac{F_{i+1/2,j} \cdot [\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}] - F_{i-1/2,j} \cdot [\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}]}{\Delta x^2}. \quad (5.11)$$

De forma similar,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cong \frac{G_{i,j+1/2} \cdot [\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}] - G_{i,j-1/2} \cdot [\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}]}{\Delta y^2}, \quad (5.12)$$

onde,

$$G(x, y) = \frac{1}{\lambda_x}. \quad (5.13)$$

Substituindo-se as Equações 5.11 e 5.12 na Equação 5.01, observando-se a malha regular adotada, obtém-se:

$$F_{i+1/2,j} \cdot \psi_{i+1,j} + F_{i-1/2,j} \cdot \psi_{i-1,j} + G_{i,j+1/2} \cdot \psi_{i,j+1} + G_{i,j-1/2} \cdot \psi_{i,j-1} - \left(F_{i+1/2,j} + F_{i-1/2,j} + G_{i,j+1/2} + G_{i,j-1/2} \right) \cdot \psi_{i,j} = 0, \quad (5.14)$$

onde $i, j = 1, N$

Definindo-se,

$$a_{i,j} = F_{i+1/2,j}, \quad (5.15)$$

$$d_{i,j} = -\left(F_{i+1/2,j} + F_{i-1/2,j} + G_{i,j+1/2} + G_{i,j-1/2} \right), \quad (5.16)$$

$$c_{i,j} = F_{i-1/2,j}, \quad (5.17)$$

$$b_{i,j} = G_{i,j+1/2} \quad e, \quad (5.18)$$

$$f_{i,j} = G_{i,j-1/2}. \quad (5.19)$$

Substituindo-se estas igualdades na Equação 5.14, chega-se finalmente a equação que deve ser satisfeita em cada ponto (i, j) da malha:

$$a_{i,j} \cdot \psi_{i+1,j} + c_{i,j} \cdot \psi_{i-1,j} + b_{i,j} \cdot \psi_{i,j+1} + f_{i,j} \cdot \psi_{i,j-1} + d_{i,j} \cdot \psi_{i,j} = 0. \quad (5.20)$$

5.1.3 - Sistema de equações

Para que o sistema de equações lineares seja escrito na forma matricial torna-se necessário a construção de um vetor equivalente ao ψ . Desta forma, numera-se as duas dimensões da malha em uma seqüência de uma única dimensão conforme Figura 5.02, onde v é o vetor de incógnitas equivalente.

$$a_k \cdot v_{k+1} + c_k \cdot v_{k-1} + b_k \cdot v_{k+N} + f_k \cdot v_{k-N} + d_k \cdot v_k = 0, \quad (5.21)$$

onde $k = 1, 2, \dots, N, \dots, P$ e $P = N^2$.

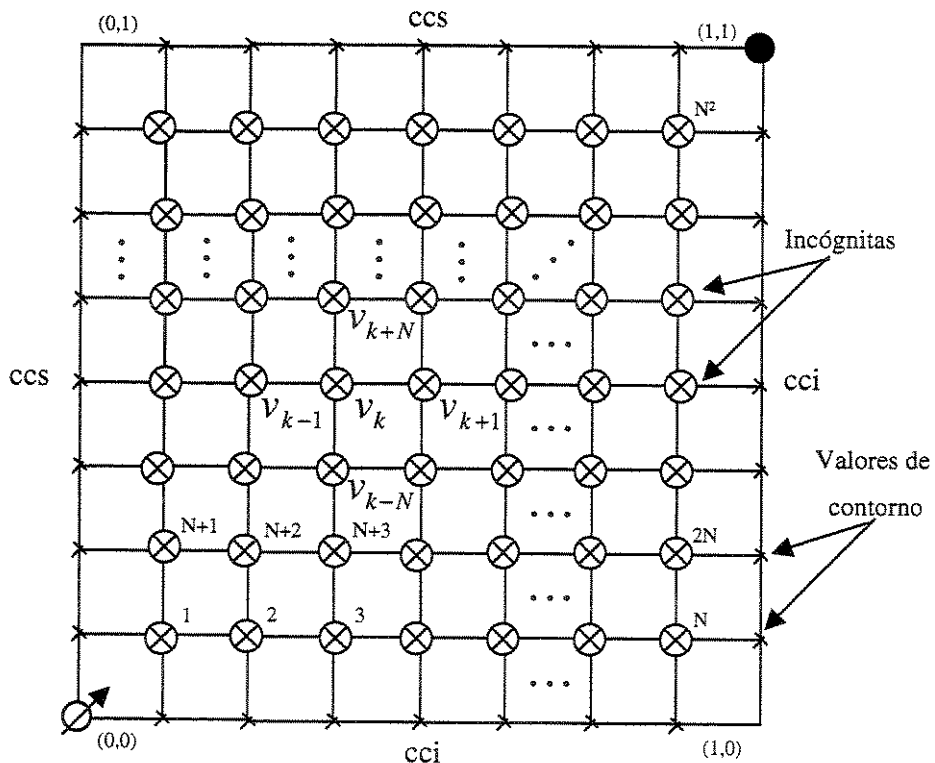


Figura 5.02 - Representação do esquema de diferenças finitas para a EFC.

Valores de v nos pontos representados por x no contorno do quadrado devem ser especificados. Se colocarmos todas estas informações conhecidas para o lado direito da Equação 5.21, então a equação fica da forma,

$$M_A \cdot v = b, \quad (5.22)$$

onde M_A é a matriz dos coeficientes, chamada “tridiagonal com franjas”, v é o vetor de incógnitas e b é o vetor de termos independentes.

O sistema de equações resultante é pentadiagonal, com a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_N & d_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{N+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{N+1} & a_{N+1} & 0 & \cdots & 0 & b_{N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{N+2} & 0 & \cdots & 0 & c_{N+2} & d_{N+2} & a_{N+2} & 0 & \cdots & 0 & b_{N+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{N+3} & 0 & \cdots & 0 & c_{N+3} & d_{N+3} & a_{N+3} & 0 & \cdots & 0 & b_{N+3} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2N} & 0 & \cdots & 0 & c_{2N} & d_{2N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{p-N} & 0 & \cdots & 0 & c_{p-N} & d_{p-N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{p-N+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{p-N+1} & a_{p-N+1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{p-N+2} & 0 & \cdots & 0 & c_{p-N+2} & d_{p-N+2} & a_{p-N+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{p-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{p-1} & d_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & \cdots & 0 & c_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_N \\ v_{N+1} \\ v_{N+2} \\ v_{N+3} \\ \vdots \\ v_{2N} \\ \vdots \\ v_{p-N} \\ v_{p-N+1} \\ v_{p-N+2} \\ \vdots \\ v_{p-1} \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \\ b_{N+1} \\ b_{N+2} \\ b_{N+3} \\ \vdots \\ b_{2N} \\ \vdots \\ b_{p-N} \\ b_{p-N+1} \\ b_{p-N+2} \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ b_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_N \\ v_{N+1} \\ v_{N+2} \\ v_{N+3} \\ \vdots \\ v_{2N} \\ \vdots \\ v_{P-N} \\ v_{P-N+1} \\ v_{P-N+2} \\ \vdots \\ v_{P-1} \\ v_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \cdot ccs - f_1 \cdot cci \\ -f_2 \cdot cci \\ -f_3 \cdot cci \\ \vdots \\ -a_N \cdot cci - f_N \cdot cci \\ -c_{N+1} \cdot ccs \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -a_{2N} \cdot cci \\ \vdots \\ -a_{P-N} \cdot cci \\ -(c_{P-N+1} + b_{P-N+1}) \cdot ccs \\ -b_{P-N+2} \cdot ccs \\ \vdots \\ -b_{P-1} \cdot ccs \\ -a_P \cdot cci - b_P \cdot ccs \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

5.2 - Equação de Difusão-Convecção (EDC)

Muitos problemas em engenharia de reservatório envolvem a solução de equações de fluxo cujas soluções são caracterizadas por frentes estreitas e baixos níveis de dispersão. Isto é particularmente importante no deslocamento de pequenos bancos de produtos químicos/polímeros, no deslocamento miscível de hidrocarbonetos, e na maioria dos processos térmicos.

As dificuldades encontradas no tratamento numérico das equações de Difusão-Convecção, segundo Settari et. al. (1977), têm origem na discretização do termo de fluxo convectivo. Estão, portanto, relacionadas ao caráter destas equações, que podem ser classificadas como parabólico ou hiperbólico, dependendo da relação existente entre os termos difusivo e convectivo (Número de Peclet). Como consequência, desenvolveram-se dois enfoques técnicos para tratar o problema: aquele que trata o problema como parabólico e aquele que trata como hiperbólico.

Considere a modelagem matemática da EDC para um canal de fluxo qualquer, conforme Tabela 4.01:

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} - N_{Pe} \cdot \frac{\partial C_D}{\partial x_D} = \frac{b_{sD}(x_D)}{q_D(t_D)} \cdot \frac{\partial C_D}{\partial t_D}, \quad x_D > 0 \text{ e } t_D \geq 0 \quad (5.24)$$

com condição inicial dada por,

$$C_D(x_D, 0) = 0 = CI; \quad x_D > 0 \quad (5.25)$$

e condições de contorno dadas por,

$$C_D(0, t_D) = 1 = CC1; \quad t_D \geq 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial x_D}(L_c, t_D) = 0 = CC2. \quad t_D \geq 0 \quad (5.27)$$

Trata-se de um problema de evolução temporal cujas condições de contorno à esquerda, são do tipo de Dirichlet, e à direita são do tipo de Neumann.

Como a idéia é trabalhar com altos valores do Número de Peclet, o que dá um caráter fortemente convectivo ao escoamento, conclui-se pela utilização da técnica hiperbólica para tratar o problema.

5.2.1 - Definição da malha

Considere que a solução da Equação 5.24 esteja sobre a região $0 < x < L_c$ e $t \geq 0$. O primeiro passo na construção da solução aproximada é a discretização do domínio. Para isto introduz-se a malha ponto centrado mostrada na Figura 5.04, onde o tamanho da variável espacial é $x_i = i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, M$, e o da variável tempo é $t^n = n \cdot k$, $n = 0, 1, \dots$, onde k é o tamanho da malha associado à variável tempo.

Separando-se as variáveis no nível de tempo t^n (conhecidas), e no nível t^{n+1} (incógnitas)

e chamando-se $\lambda e_i^n = \frac{q_i^n}{b_{s_i}^n} \cdot \frac{k}{h}$, tem-se o esquema explícito para C_i^{n+1} :

$$C_{i-1}^n \cdot \left[\lambda e_i^n \cdot \left(NPe_i^n + \frac{1}{h} \right) \right] + C_i^n \cdot \left[1 - \lambda e_i^n \cdot \left(NPe_i^n + \frac{2}{h} \right) \right] + C_{i+1}^n \left[\lambda e_i^n \cdot \left(\frac{1}{h} \right) \right] = C_i^{n+1} \quad (5.30)$$

Considerando-se que q_i e b_{s_i} não variam com o tempo, λe_i é função apenas da posição. Convém, por simplicidade, eliminar o sobrescrito de evolução no tempo. O mesmo raciocínio aplica-se ao NPe_i logo,

$$C_i^{n+1} = C_{i-1}^n \cdot \left[\lambda e_i \cdot \left(NPe_i + \frac{1}{h} \right) \right] + C_i^n \cdot \left[1 - \lambda e_i \cdot \left(NPe_i + \frac{2}{h} \right) \right] + C_{i+1}^n \left[\lambda e_i \cdot \left(\frac{1}{h} \right) \right], \quad (5.31)$$

onde $i = 1, 2, \dots, M-1$ e, $n = 1, 2, \dots$.

A solução no tempo inicial é conhecida. Logo, quando toma-se $n = 0$ na Equação 5.31, a única incógnita é C_i^1 . Calculando-se estes valores, para todo i , pode-se passar ao nível de tempo $n = 1$, e assim sucessivamente. Tem-se então um esquema de evolução temporal no qual a cada nível de tempo calcula-se a incógnita de modo explícito.

5.2.3 - Formulação pelo método implícito

Diferente da formulação explícita, a implícita calcula as concentrações, no instante de tempo t^{n+1} , através de um sistema único de equações. O método é incondicionalmente estável.

No que diz respeito a discretização da EDC (4.44) adotou-se o mesmo critério utilizado no esquema explícito, sendo que a solução para o tempo t^{n+1} é obtido de uma só vez através da solução do sistema de equações,

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{k} + \frac{q_i^{n+1}}{b_{si}^{n+1}} \left[NPe_i^{n+1} \cdot \frac{C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{h} - \frac{C_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right] = 0. \quad (5.32)$$

Separando-se as variáveis no nível de tempo t^n (conhecidas) e no nível t^{n+1} (incógnitas)

e chamando $\lambda e_i^{n+1} = \frac{k}{h} \cdot \frac{q_i^{n+1}}{b_{si}^{n+1}}$, tem-se:

$$-C_{i-1}^{n+1} \cdot \left[\lambda e_i^{n+1} \left(NPe + \frac{1}{h} \right) \right] + C_i^{n+1} \cdot \left[1 + \lambda e_i^{n+1} \cdot \left(NPe + \frac{2}{h} \right) \right] - C_{i+1}^{n+1} \left[\lambda e_i^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{h} \right) \right] = C_i^n \quad (5.33)$$

Como no esquema explícito, λe_i é função apenas da posição, o que nos permite eliminar o sobrescrito da evolução no tempo. Logo,

$$-C_{i-1}^{n+1} \cdot \left[\lambda e_i \cdot \left(NPe + \frac{1}{h} \right) \right] + C_i^{n+1} \cdot \left[1 + \lambda e_i \cdot \left(NPe + \frac{2}{h} \right) \right] - C_{i+1}^{n+1} \left[\lambda e_i \cdot \left(\frac{1}{h} \right) \right] = C_i^n, \quad (5.34)$$

onde $i = 1, 2, \dots, M-1$ e, $n = 1, 2, \dots$.

Como os coeficientes das equações não dependem da variável primária Concentração, obtém-se um sistema de equações lineares. Na forma matricial, estabelecidas as condições de contorno, o sistema a ser resolvido a cada nível de tempo, é dado por:

$$M_B C^{n+1} = C^n. \quad (5.35)$$

Observando-se a equação de Difusão-Convecção verifica-se que a mesma é função apenas das Concentrações nos blocos $i-1$, i e $i+1$. Temos conseqüentemente um sistema tridiagonal que é resolvido evoluindo-se do nível de tempo t^n para o t^{n+1} .

A forma geral do sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix}
 \left[1 + \lambda e_1 \cdot \left(NPe + \frac{2}{h}\right)\right] & -\left[\lambda e_1 \cdot \left(\frac{1}{h}\right)\right] & 0 & 0 & 0 \\
 -\left[\lambda e_2 \cdot \left(NPe + \frac{1}{h}\right)\right] & \left[1 + \lambda e_2 \cdot \left(NPe + \frac{2}{h}\right)\right] & -\left[\lambda e_2 \cdot \left(\frac{1}{h}\right)\right] & 0 & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & -\left[\lambda e_{M-2} \cdot \left(NPe + \frac{1}{h}\right)\right] & \left[1 + \lambda e_{M-2} \cdot \left(NPe + \frac{2}{h}\right)\right] & -\left[\lambda e_{M-2} \cdot \left(\frac{1}{h}\right)\right] \\
 0 & 0 & 0 & -\left[\lambda e_{M-1} \cdot \left(NPe + \frac{1}{h}\right)\right] & \left[1 + \lambda e_{M-1} \cdot \left(NPe + \frac{1}{h}\right)\right]
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 C_1^{n+1} \\
 C_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 C_{M-2}^{n+1} \\
 C_{M-1}^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 C_1^n + C_0^{n+1} \cdot \lambda e_1 \cdot \left(NPe + \frac{1}{h}\right) \\
 C_2^n \\
 \vdots \\
 C_{M-2}^n \\
 C_{M-1}^n
 \end{bmatrix}
 \quad (5.36)$$

5.2.4 - Técnica de Diminuição das Variações Totais (TVD)

Nos itens anteriores, 5.22 e 5.23, utilizou-se o tradicional método de diferenças finitas de ponderação a montante (ou 1 ponto a montante) para o termo convectivo da equação de Difusão-Convecção. As respostas numéricas obtidas, que serão detalhadas no capítulo seguinte, revelam a introdução de uma parcela significativa de dispersão numérica artificial no cálculo das concentrações. Será utilizado, como alternativa para controle da dispersão numérica, a técnica de

diminuição das variações totais. Os esquemas de Diminuição das Variações Totais (TVD) são métodos de discretização de alta resolução que obedecem ao princípio da entropia¹ e, consequentemente, fornecem aproximações fisicamente corretas.

Um método de diferenças finitas é dito de diminuição das variações totais se obedecer,

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n). \quad (5.37)$$

O método consiste em definir um limitador de fluxo, que deve obedecer a alguns critérios previamente determinados. A escolha do limitador de fluxo é a chave para provar que o método obedece a propriedade acima. No caso da EDC, Equação 4.44, a técnica é implementada através de uma modificação do esquema montado para a equação hiperbólica (Apêndice-A).

Colocando a Equação 4.44 na forma da Equação A-03 (Apêndice-A) e desprezando-se os subscritos da adimensionalização, obtém-se:

$$b_s(x) \cdot \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{q \cdot N_{Pe} \cdot C - q \cdot \frac{\partial C}{\partial x}}_{\text{fluxo}} \right] = 0. \quad (5.38)$$

O termo de fluxo é dado por,

$$F = q \cdot \left(N_{Pe} \cdot C - \frac{\partial C}{\partial x} \right). \quad (5.39)$$

A equação que representa a evolução temporal do cálculo das concentrações é dada, em função dos termos de fluxo na forma discretizada, por:

¹ Maiores informações podem ser encontradas em Pinto(1991)

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x \cdot b_s(x_i)} \left[\left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \left(f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \right], \quad (5.40)$$

onde,

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = q \cdot \left(N_{pe} \cdot C_{i+\frac{1}{2}}^* - \frac{C_{i+1}^* - C_i^*}{\Delta x} \right), \quad (5.41)$$

é o termo de fluxo calculado no ponto médio para um passo intermediário na evolução temporal do problema e,

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = q \cdot \left(N_{pe} \cdot C_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} \right), \quad (5.42)$$

é o termo de fluxo calculado no ponto médio para um tempo qualquer n . C^n e C^* são, respectivamente, os valores calculados e projetados no ponto médio para função Concentração.

Capítulo 6

Modelagem Computacional

O modelo computacional desenvolvido consiste de um programa em FORTRAN, cujo fluxograma simplificado é apresentado na Figura 6.01. A base do programa encontra-se na implementação numérica da solução da EFC para o domínio de um padrão de $\frac{1}{4}$ de *five-spot*. O acoplamento com a EDC é obtido através da implementação da solução unidimensional da mesma ao longo dos canais de fluxo gerados. O programa elaborado permite a simulação de deslocamentos miscíveis a dois componentes considerando reservatórios homogêneo e heterogêneo e mobilidade total constante ($M = 1$). Neste capítulo, apresenta-se, de forma simplificada, a técnica utilizada na solução da Equação 5.22 e na implementação do esquema explícito, implícito e TVD da EDC.

6.1 – Equação da Função Corrente.

O tratamento numérico de sistemas decorrentes da discretização de problemas de valor de contorno geralmente não apresentam dificuldades quanto a estabilidade. Entretanto, a eficiência dos algoritmos é fortemente influenciada pela carga computacional e necessidade de armazenamento requerida. Normalmente geram sistemas proibitivamente grandes. Por exemplo, um problema simples com um malha espacial de 100×100 pode envolver 10.000 incógnitas, implicando numa matriz de coeficientes de dimensões 10.000×10.000 , contendo 10^8 elementos. Este tipo de matriz esparsa não deve ser armazenada na sua forma cheia.

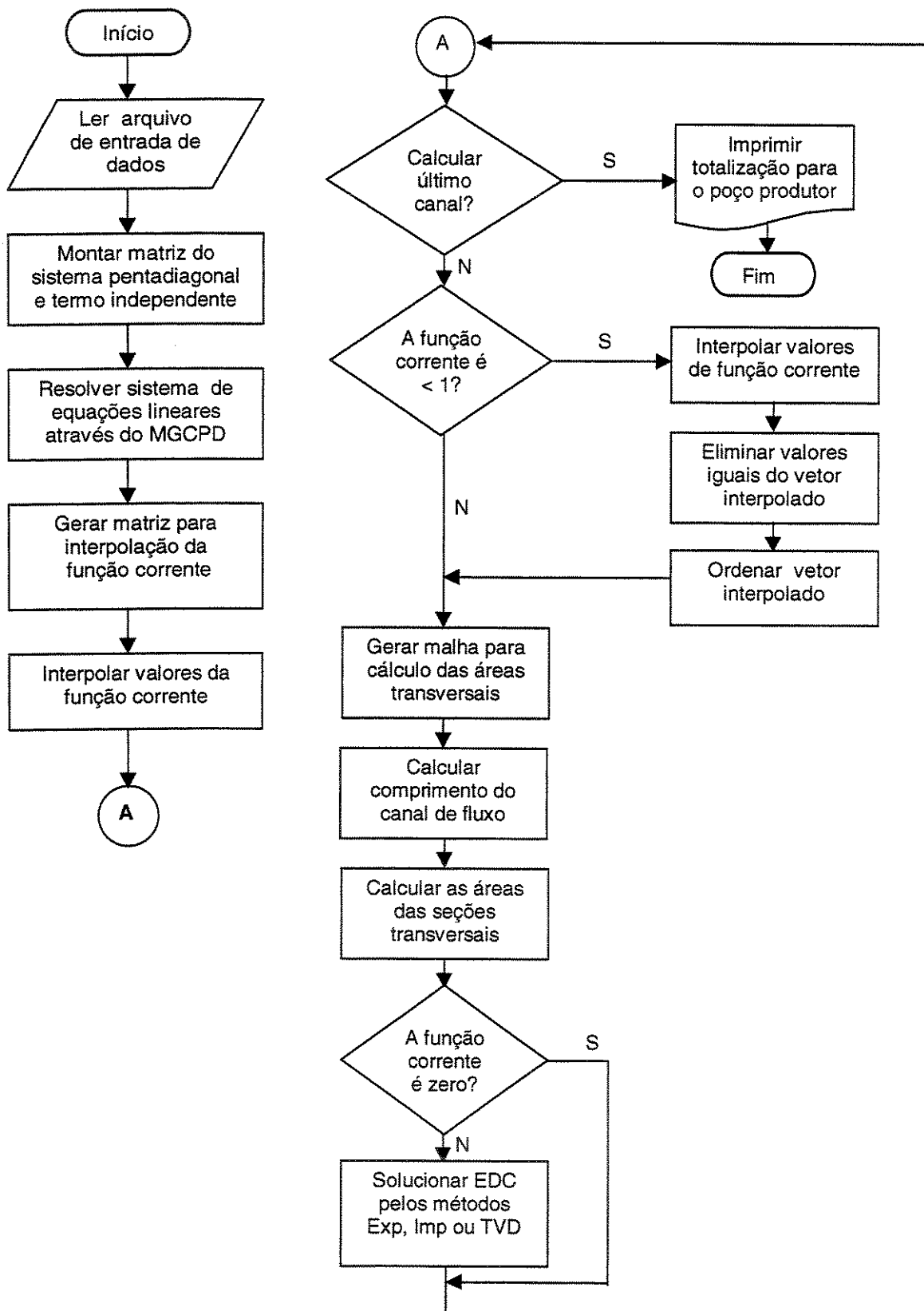


Figura 6.01 – Fluxograma simplificado do programa em FORTRAN

Para resolver o sistema linear pentadiagonal resultante da discretização da Equação elíptica 4.16 utilizou-se a técnica iterativa do gradiente conjugado com preconditionador diagonal (MGCPD). Optou-se por este método devido ao mesmo ser indicado para grandes sistemas cuja matriz de coeficientes seja positiva definida. Ainda, com a finalidade de tirar vantagem da característica de esparsidade da matriz, efetuou-se uma modificação no algoritmo do MGCPD. Alterou-se a forma de armazenamento da matriz dos coeficientes, de maneira que a mesma passasse a ser efetuada através da carga de cinco vetores, correspondentes às diagonais principal, inferior, superior, inferior e superior afastadas. O algoritmo usado pode ser encontrado em Demmel (1997), embora nesta edição não contemple a modificação descrita acima.

Inicialmente, aplicou-se o programa para um reservatório homogêneo, caso particular do sistema 5.23, cuja forma simplificada é apresentada na Figura 6.02. Este caso foi simulado considerando-se, para $\frac{1}{4}$ de *five-spot*, 40 canais (NC=40), malha de 600x600 (P=360.000) e um incremento constante e igual a $1/NC$ para a função corrente. As linhas de fluxo interpoladas, a partir da solução deste sistema, apresentaram boa resolução e foram consideradas adequadas à geração dos canais de fluxo, como mostra a Figura 6.03. Nesta primeira etapa, a EDC foi resolvida utilizando-se o método explícito.

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 \vdots \\
 v_N \\
 v_{N+1} \\
 v_{N+2} \\
 v_{N+3} \\
 \vdots \\
 v_{2N} \\
 \vdots \\
 v_{P-N} \\
 v_{P-N+1} \\
 v_{P-N+2} \\
 \vdots \\
 v_{P-1} \\
 v_P
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -1 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 -1 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 -2 \\
 -1 \\
 \vdots \\
 -1 \\
 -1
 \end{bmatrix}$$

Figura 6.02 – Sistema de equações resultante para o caso Homogêneo

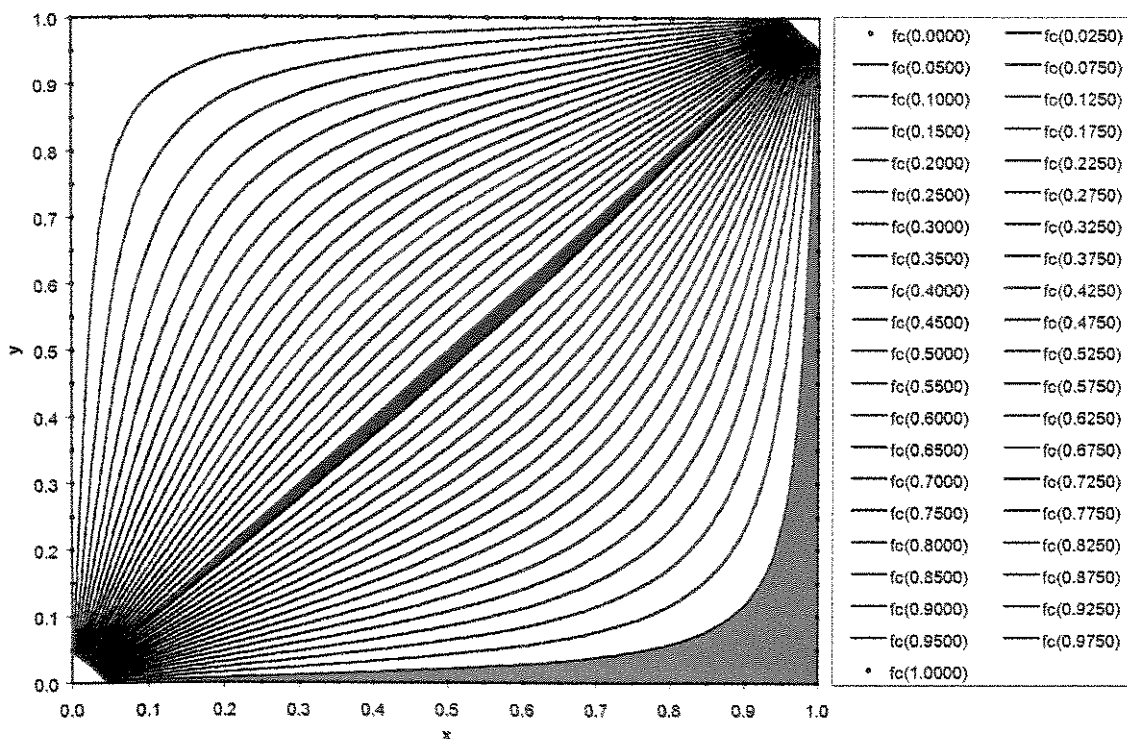


Figura 6.03 – Canais de fluxo para um matriz homogênea. NC=40 e P=600x600.

Observa-se uma grande discrepância entre o valor da área dos canais de fluxo centrais e o valor da área dos mais afastados do eixo injetor-produtor, ilustrados, respectivamente, em azul e verde na Figura 6.03. Como o incremento na função corrente, neste caso, é constante, a vazão de injeção por canal também o é. Nos canais onde as áreas de seção transversal ao fluxo são maiores desenvolvem-se perfis de velocidade menores. Esta ocorrência provoca um atraso na chegada da frente de avanço (*breakthrough*) destes canais mais afastados do eixo injetor-produtor, influenciando, principalmente, o trecho final da curva de totalização das concentrações. Este efeito acentua-se para valores menores de número de canais (NC), como pode ser observado na Figura 6.04 onde é mostrado a totalização da concentração no poço produtor considerando 20, 40 e 80 canais.

Com o objetivo de corrigir o problema, investigou-se a correlação existente entre o domínio usado na interpolação da função corrente e as áreas acumuladas dos canais de fluxo gerados, obtendo-se como resultado a Figura 6.05. É possível observar que, para pequenas variações na

função corrente, ocorre uma variação mais significativa no valor da área do canal, ou seja, próximo às bordas do padrão $\frac{1}{4}$ de *five-spot* o valor da área dos canais é significativamente superior ao valor das áreas dos canais centrais. De posse dessas informações, verificou-se a necessidade de normalizar o cálculo das linhas de fluxo de forma que os canais de fluxo gerados possuísem áreas iguais.

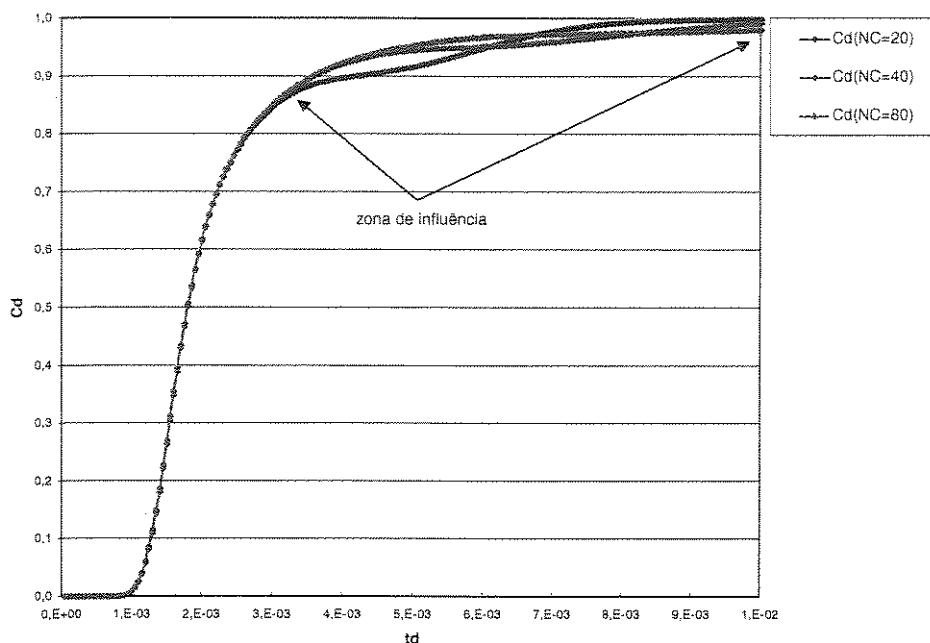


Figura 6.04 - Totalização das concentrações no poço produtor (caso homogêneo), $N_{pe}=4000$, $NC=40$ e $P=600 \times 600$.

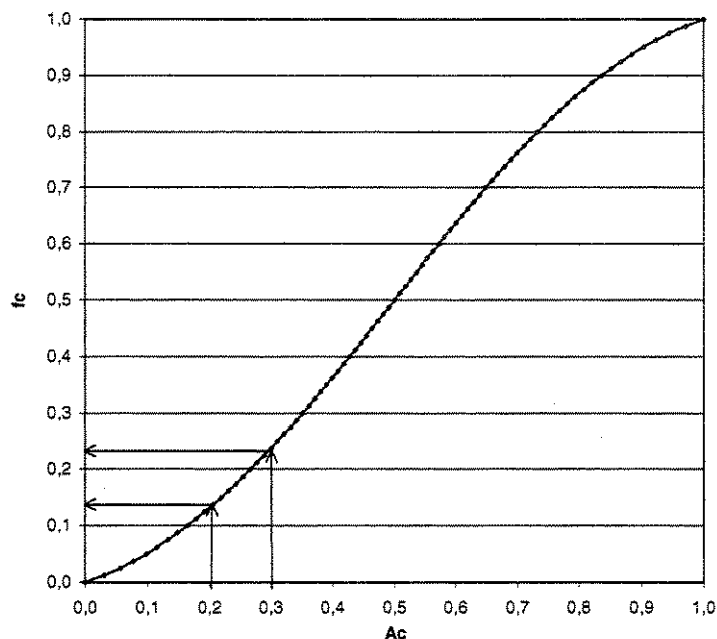


Figura 6.05 - Relação entre a discretização da função corrente e a área acumulada dos canais.

A Figura 6.06 mostra a vantagem desta normalização. Vale observar que, para efetuar o cálculo das linhas de corrente de forma normalizada, foi necessário alterar a malha de discretização do sistema para $P=700 \times 700$, aumentando o tempo de máquina despendido na resolução do sistema. Isto se justifica porque os canais de fluxo são obtidos através de interpolação da solução da função corrente e esta interpolação, para valores pequenos da função corrente, fica prejudicada devido ao fato de que as linhas que chegam ou saem dos poços próximos da borda do $\frac{1}{4}$ do *five-spot* tem valores de derivada próximo de zero ou infinito. É oportuno registrar também que, para atender a esta normalização, a vazão que era constante por canal, agora deve ser ponderada com a variação da função corrente, ou seja, a mesma é proporcional a $\Delta\phi$.

A etapa seguinte à geração dos canais de fluxo normalizados, seria o acoplamento da solução da EDC ao longo dos canais de fluxo gerados. As técnicas numéricas utilizadas nesta implementação serão discutidas no próximo item. Ainda neste capítulo, serão descritas as características principais da entrada de dados para o sistema heterogêneo.

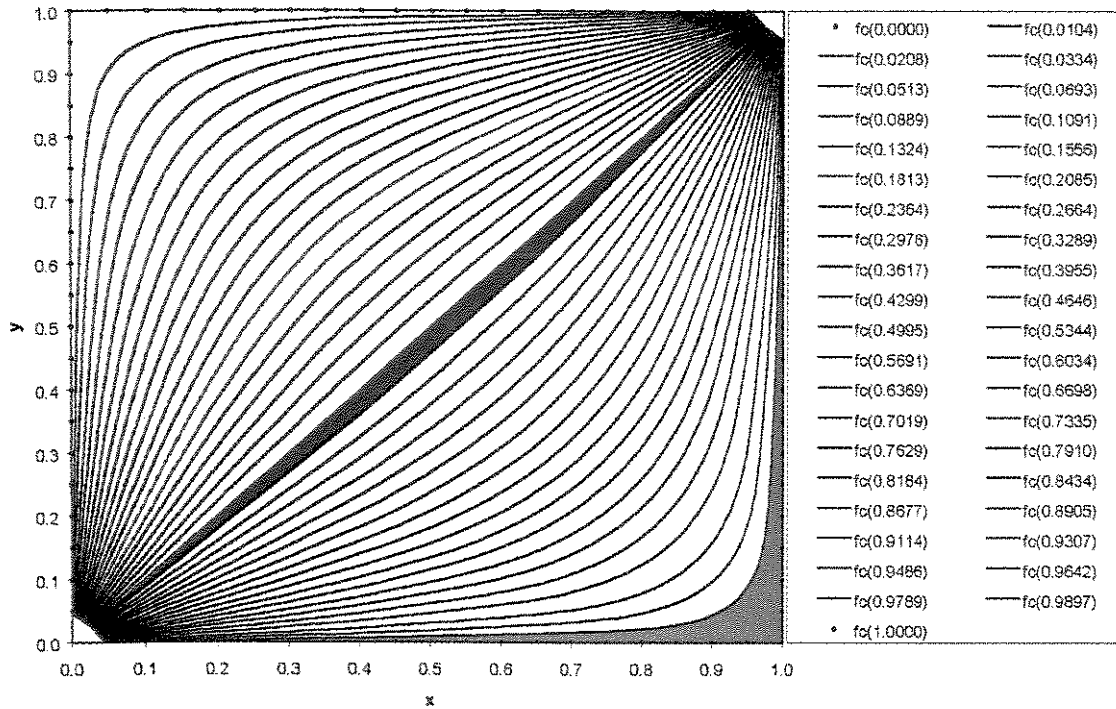


Figura 6.06 – Canais de fluxo normalizados (caso homogêneo), NC=40 e P=700x700.

A geração dos canais de fluxo para o caso heterogêneo introduz um novo elemento no Simulador. Este elemento é uma matriz de permeabilidades que deve ser fornecida ao sistema. Para gerar este dado de entrada simulou-se três modelos geológicos hipotéticos usando o ISATIS (Simulador Geoestatístico da Geovariance). A matriz resultante destas simulações possui dimensões de P=700x700 e é fornecida ao sistema em forma de um vetor de 490.000 pontos. Antes de processados, estes dados de permeabilidade são normalizados pela média geométrica das permeabilidades da matriz, ou seja,

$$k_N(i) = \frac{k_i}{\sqrt[P]{\prod_{i=1}^P k_i}}. \quad (6.01)$$

O sistema homogêneo seria um caso particular do modelo de entrada de dados proposto onde a matriz de permeabilidade fornecida seria unitária.

6.2 – Equação de Difusão-Convecção.

Ao contrário do problema de valor de contorno, a principal preocupação no desenvolvimento computacional do problema de valor inicial (evolução) é a estabilidade do algoritmo. No esquema explícito, a instabilidade destes algoritmos está associada, principalmente, à discretização adotada para o termo de primeira ordem no espaço (convectivo). O uso da discretização centrada para este termo resulta em soluções que apresentam oscilações espúrias ou são fisicamente incorretas, a não ser que o termo difusivo seja fortemente significativo. Já a discretização por um ponto a montante deste mesmo termo estabiliza a solução numérica, mas introduz erros de dispersão numérica. Em processos onde a dispersão física é alta (Peclet baixo), a dispersão numérica não influi tanto na solução. Contudo, em processos de recuperação secundária, onde uma frente estreita pode se formar na interface dos fluidos, deslocado e deslocante, o método de um ponto a montante atenua a forma da frente, causando irrupção mais rápida do fluido deslocante.

Diferente do esquema explícito, o implícito gera um sistema de equações lineares tridiagonal, cuja solução é obtida de maneira direta utilizando-se a eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial para garantir estabilidade. Como no esquema explícito, os problemas devido a dispersão numérica persistem no esquema implícito. A resposta numérica para os dois esquemas implementados é, em termos práticos, a mesma, como pode ser observado na Figura 6.07.

O comportamento cumulativo da dispersão numérica pode ser observado, de forma clara, na Figura 6.08. Percebe-se também, nesta mesma figura, a influência do tamanho das células na dispersão numérica. Por este motivo o refinamento local acompanhando a frente de avanço torna-se uma alternativa viável para controle da dispersão numérica. Uma outra opção é a utilização dos esquemas de Diminuição das Variações Totais (TVD), que são métodos de discretização de alta resolução que obedecem ao princípio da entropia e, conseqüentemente, fornecem aproximações fisicamente corretas. Como, tanto o esquema implícito como o explícito

apresentam o mesmo nível de dispersão numérica, optou-se pela técnica de TVD como alternativa para reduzi-la. Esta técnica está descrita em detalhes no Apêndice-A.

O ganho com a utilização da técnica de TVD, a nível de redução da dispersão numérica, pode ser observado na Figura 6.09.

Considerando a evolução temporal da EDC dentro de um canal de fluxo genérico, percebe-se que, para um mesmo intervalo de tempo considerado, ocorre um afastamento maior entre os perfis da frente de avanço nas posições próximas aos poços, isto devido ao estreitamento das seções transversais que convergem para o poço e o conseqüente aumento da velocidade nesta região. Fica claro quando observado na Figura 6.10.

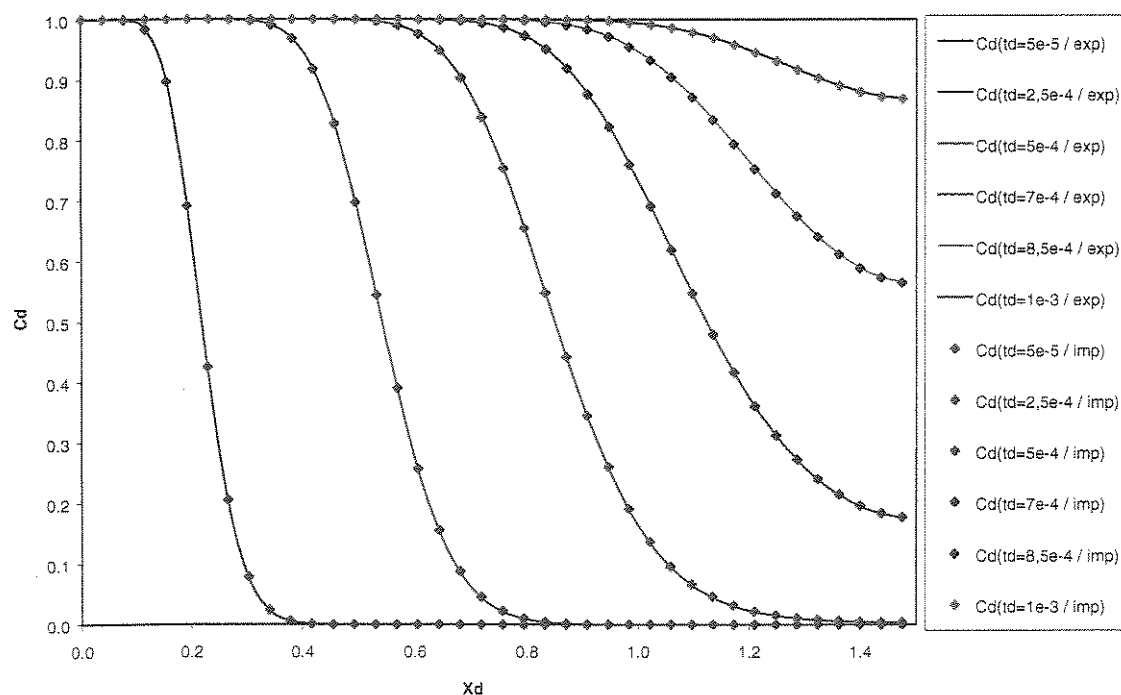


Figura 6.07 – Soluções da EDC através dos métodos Implícito e Explícito. $L_c = 1.512$

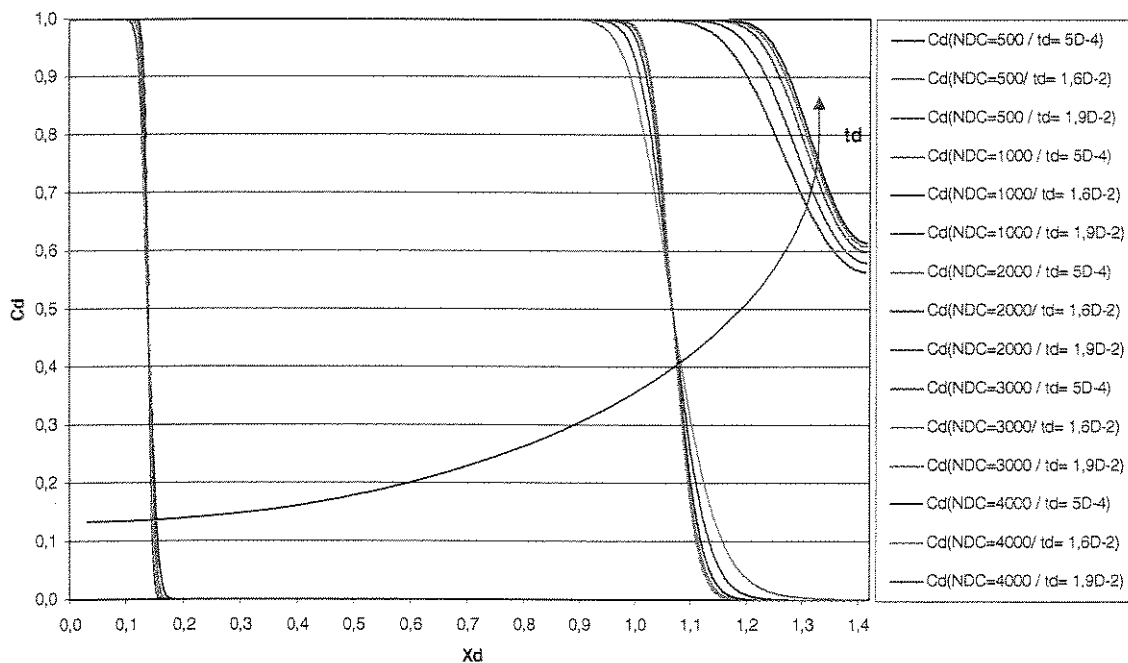


Figura 6.08 – Efeito da discretização no perfil de Concentração – $Npe=4000$, $q_d=1/80$, $dt=1e-7$.

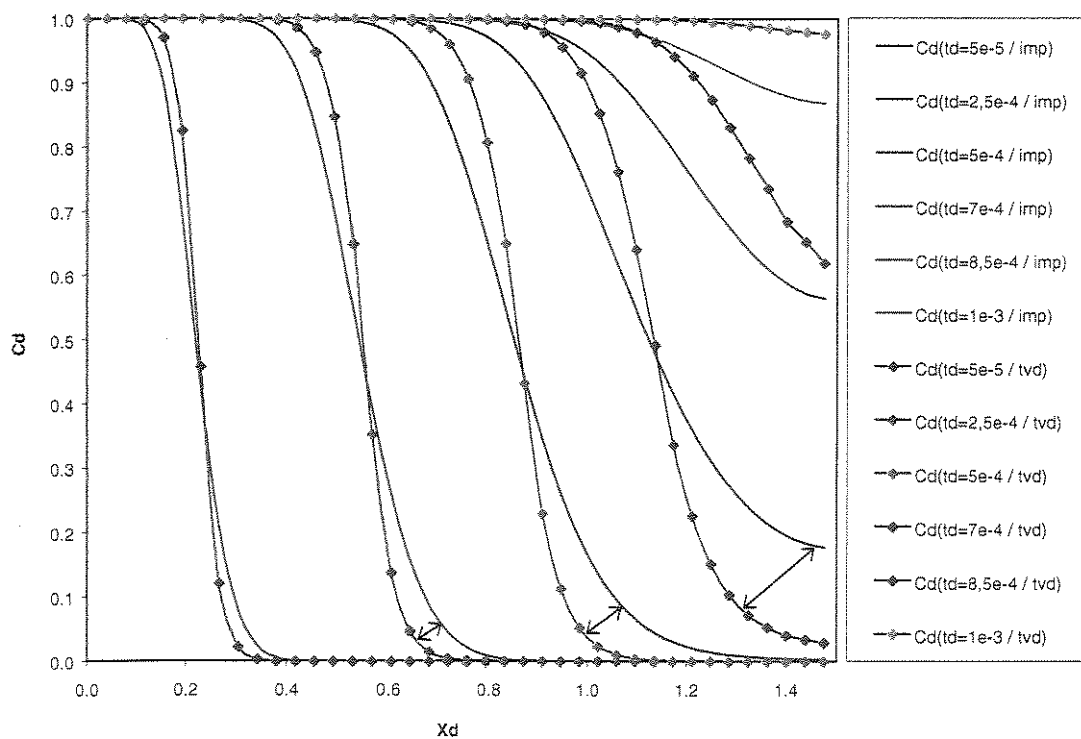


Figura 6.09 – Comparativo dos perfis de concentração – Método Implícito /TVD, $NDC=40$.

Capítulo 7

Validação do modelo

Com a finalidade de testar o simulador, quanto ao aspecto de reproduzir o comportamento de um traçador e comparar a performance dos resultados obtidos do mesmo, foi selecionada uma das soluções reportadas na literatura para o *five-spot* homogêneo (solução analítica), apresentada por Abbaszadh-Dehghani e Brigham em 1982.

As curvas de irrupção do traçador descritas no trabalho de Abbaszadeh-Dehghani e Brigham (1982) para diferentes números de Peclet e para diferentes padrões de escoamento foram obtidas através de um rigoroso tratamento dos fenômenos que envolvem o deslocamento miscível de traçadores. A curva de irrupção do traçador, que corresponde ao número de Peclet de 500 para um *five-spot* homogêneo (veja Figura 3.20 de Abbaszadh-Dehghani e Brigham, 1982), foi selecionada para comparação. Deve-se notar que o número de Peclet usado por Abbaszadeh é definido como a razão entre a distância entre poços iguais, isto é, dois injetores ou dois produtores, e a dispersividade longitudinal.

Para esta simulação, adotou-se as mesmas propriedades estabelecidas por Agca (1990). Considerou-se somente $\frac{1}{4}$ de *five-spot* (Figura 7.01). Injetou-se um banco de traçador correspondente a 2% do volume poroso (V_p) executando a simulação até uma vez e meia o volume poroso injetado ($1,5V_p$).

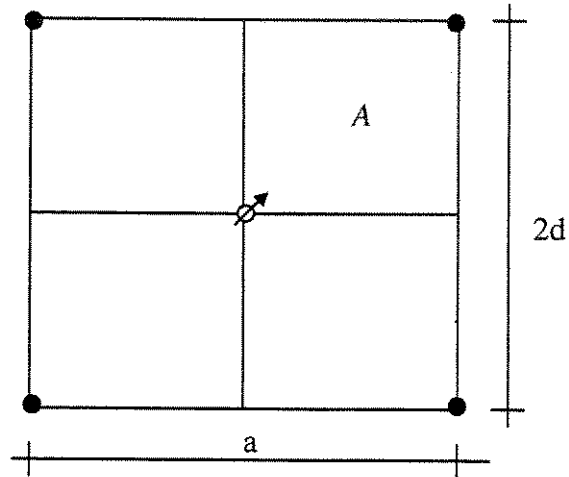


Figura 7.01 – Relações geométricas entre o Simulador e o trabalho de Abbaszadeh.

De acordo com as definições dadas ao número de Peclec, tem-se:

para o número de Peclet de Abbaszadeh,

$$N_{pe_{AB}} = \frac{a}{\alpha_l}, \quad (7.01)$$

onde a é a distância entre poços iguais, injetores ou produtores; e,

para o número de Peclet da simulação em quetão, já definido no capítulo 4 (Equação 4.41),

$$N_{pe} = \frac{\sqrt{A}}{\alpha_l}. \quad (7.02)$$

A relação estabelecida é dada por:

$$N_{pe} = \frac{1}{2} \cdot N_{pe_{AB}}, \quad (7.03)$$

ou seja, para a comparação prevista ($N_{peAB} = 500$), a simulação considera um número de Peclet “equivalente” de 250.

O tempo adimensional foi definido por Abbaszadeh como:

$$t_{DAB} = \frac{q_T \cdot t}{A \cdot h_s \cdot \phi}, \quad (7.04)$$

e para a simulação em questão, definido no capítulo 4 (Equação 4.40) por,

$$t_D = \frac{q_T \cdot t}{A \cdot h_s \cdot \phi} \cdot \frac{1}{N_{pe}} \quad (7.05)$$

A relação que se estabelece é dada por:

$$t_D = \frac{1}{N_{pe}} \cdot t_{DAB} = \frac{1}{N_{pe}} \cdot Vp \quad (7.06)$$

O valor da concentração foi normalizado pelo produto da concentração injetada, pelo tamanho do banco e pela raiz quadrada do número de Peclet. Logo,

$$C_N = \frac{C_D}{C_o \cdot \Delta Vp \cdot \sqrt{N_{peAB}}}, \quad (7.07)$$

onde C_o é a concentração na injeção e ΔVp é o tamanho do banco (*slug*) em fração do Vp .

Os dados da simulação estão reportados na Tabela 7.01. A Figura 7.02 mostra a comparação entre a saída da simulação e a solução analítica.

Tabela 7.01 – Dados do reservatório para $\frac{1}{4}$ de *five-spot*

Dados para simulação (Sistema homogêneo)	
Dimensões do reservatório	1x1x1
Porosidade	0.25
Volume poroso	0.25
Vazão de Injeção adimensional	1
Tamanho do banco do traçador (V_p)	2%
N_{pe} (equivalente)	250
N_{pe}_{AB}	500

O esquema adotado para controle da dispersão numérica (TVD) resultou numa modelagem aproximada da dispersão física. Apesar da dispersão numérica, o tempo de irrupção (V_p), bem como a posição e valor do pico de concentração, apresentaram ajuste razoável.

Na Figura 7.03 é apresentado um comparativo dos perfis de concentração para vários valores de tamanho de pulso.

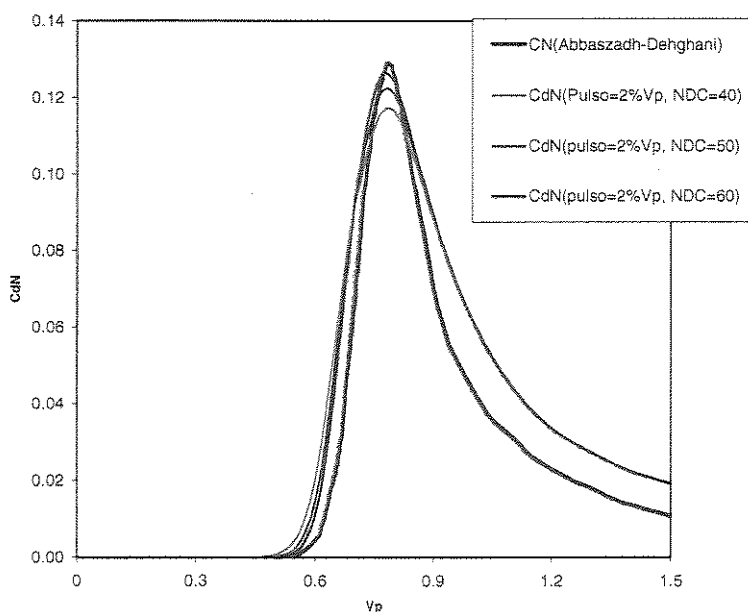


Figura 7.02 – Comparação com o modelo de Abbaszadeh-Dehghani para *five-spot* homogêneo $N_{pe}=250$, $N_C=40$, $P=700 \times 700$.

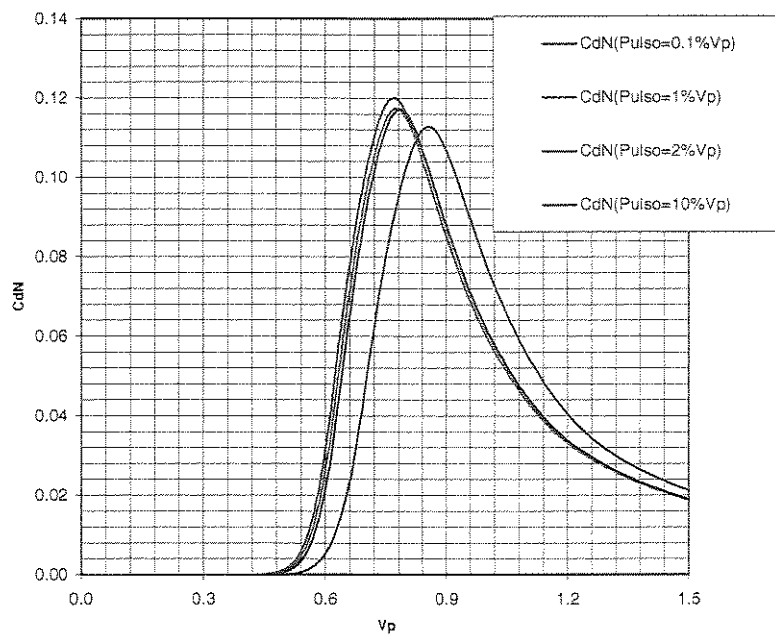


Figura 7.03 –Comportamento da curva de Concentração normalizada para vários tamanhos de pulso. $N_{pe}=250$, $NDC=40$, $NC=40$, $P=700 \times 700$.

Capítulo 8

Aplicações

Neste capítulo são feitas aplicações que têm como objetivo analisar o comportamento do deslocamento miscível, a dois componentes, para um padrão *five-spot* de distribuição de poços. Considera-se inicialmente o caso homogêneo, onde determina-se a distribuição de concentração no poço produtor para deslocamentos contínuos e descontínuos (pulso). Já para o heterogêneo, são simulados 3 modelos que demonstram o comportamento do simulador quando submetido a uma matriz de permeabilidade.

8.1 – Sistema Homogêneo

Tanto para o caso homogêneo como para o heterogêneo são considerados os canais de fluxo normalizados. No caso homogêneo estes canais apresentam comportamento simétrico em relação ao eixo injetor-produtor. Durante este item e o seguinte, serão apresentados os principais aspectos da análise do deslocamento miscível no meio poroso. Os principais objetivos desta análise é definir o perfil de concentração da frente de avanço nos canais de fluxo, para injeções contínuas e descontínuas, totalizar as concentrações do efluente no poço produtor e avaliar o tempo de irrupção (*breakthrough*) do mesmo. Estas informações permitem um conhecimento mais detalhado do comportamento de fluxo entre poços. Mesmo as informações qualitativas deste tipo de teste são de grande valia para melhor entendimento do comportamento de fluxo a nível de reservatórios. Em seguida são apresentados os dois exemplos para sistemas homogêneos.

8.1.1 Deslocamento de um pulso em fluxo monofásico

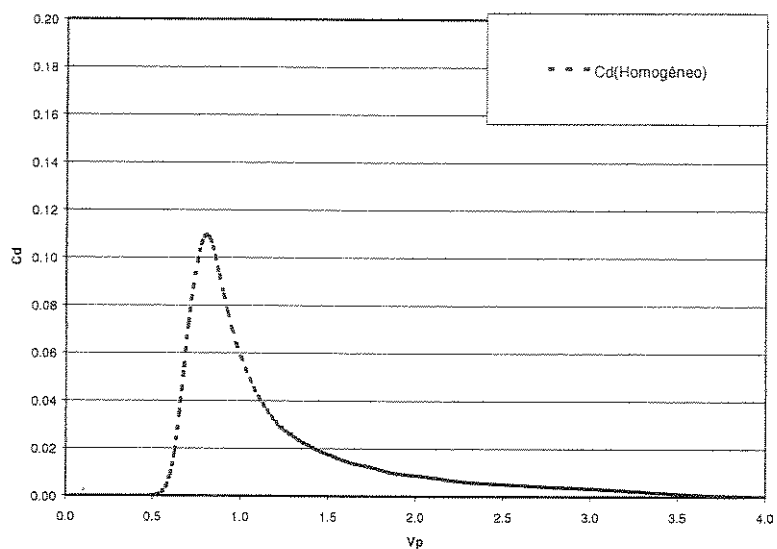


Figura 8.01 – Perfil de concentração no poço produtor. $N_{pe}=500$, $NDC=40$, $NC=40$, Pulso=2% V_p

8.1.2 - Perfil de concentração no poço produtor para uma injeção contínua

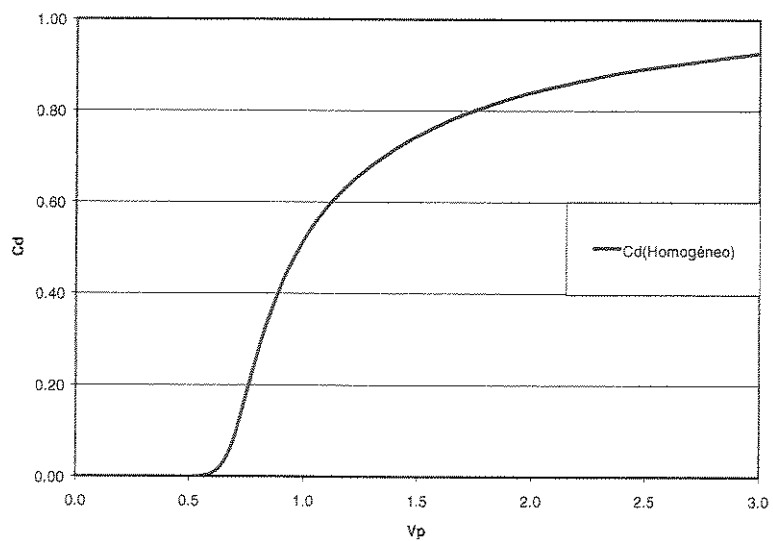


Figura 8.02 – Perfil de concentração no poço produtor $N_{pe}=500$, $NDC=40$, $NC=40$.

8.1 – Sistema Heterogêneo

Para que o simulador trabalhe com sistemas heterogêneos, torna-se necessário o fornecimento, através de uma matriz de permeabilidade, de imagens representativas de modelos geológicos. As imagens utilizadas foram geradas num *software* de modelagem geoestatística (ISATIS), através de Simulação Gaussiana não convencional usando modelos variográficos gaussianos, cuja direção de anisotropia definiu o alinhamento das curvas de permeabilidade. Foram simulados três casos com objetivos distintos, os modelos I, II e III. O modelo I descreve um reservatório cujas variações de permeabilidade são determinadas segundo uma direção principal de anisotropia paralela ao eixo injetor-produtor do *five-spot*. O modelo II descreve um reservatório cujas variações de permeabilidade seguem uma direção principal de anisotropia paralela a base do padrão *five-spot*, enquanto que o modelo III foi simulado sem controle de direção de anisotropia.

Para os três casos considerados, foram simulados pulsos com 2% do volume poroso e número de Peclet 500. Os canais de fluxo computados foram montados sobre as imagens representativas dos modelos geológicos com o objetivo de mostrar a influência das variações de permeabilidade na forma e disposição destes canais. Para caracterizar esta influência no perfil das concentrações totalizadas no poço produtor, são apresentados gráficos com os pulsos gerados nos respectivos sistemas heterogêneos (Modelo I, II e III) juntamente com a saída do simulador para o sistema homogêneo. Em seguida são apresentados os três casos heterogêneos.

8.2.1 – Direção principal de anisotropia paralela ao eixo injetor-produtor - Modelo I

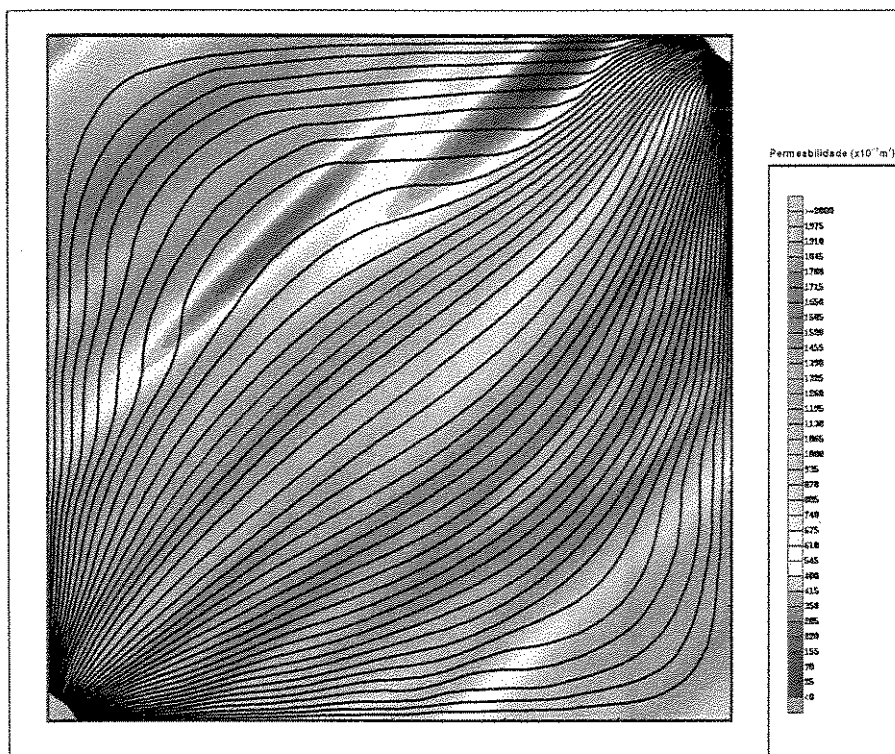


Figura 8.03 – Linhas de fluxo geradas pelo simulador para o Modelo I montada sobre a imagem representativa do modelo geológico.

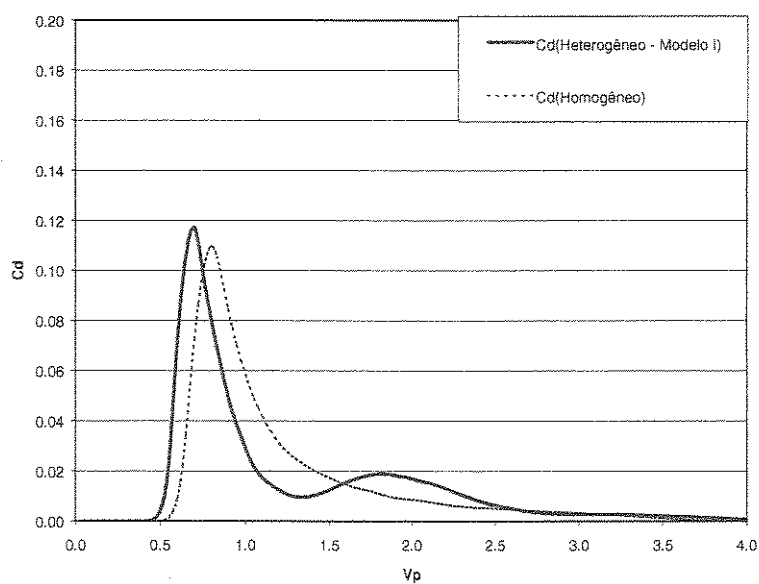


Figura 8.04 – Perfil de Concentração no poço produtor - Modelo I
Npe=500, NDC=40, NC=40, Pulso=2 %

8.2.2 – Direção principal de anisotropia paralela a base do five-spot - Modelo II

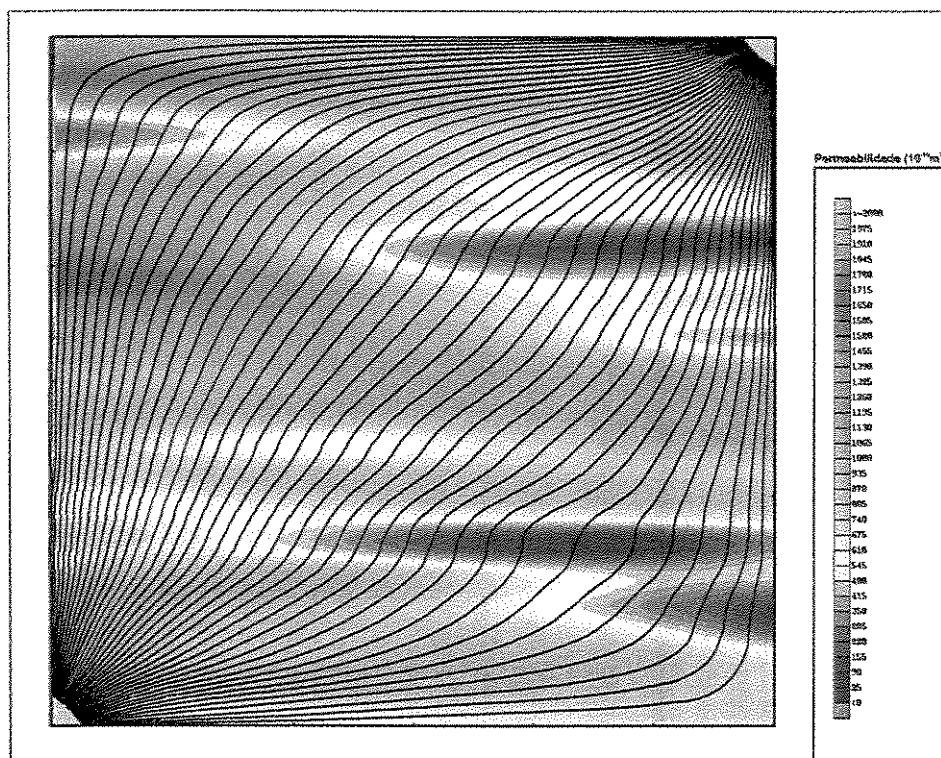


Figura 8.05 – Linhas de fluxo geradas pelo simulador para o Modelo II montada sobre a imagem representativa do modelo geológico

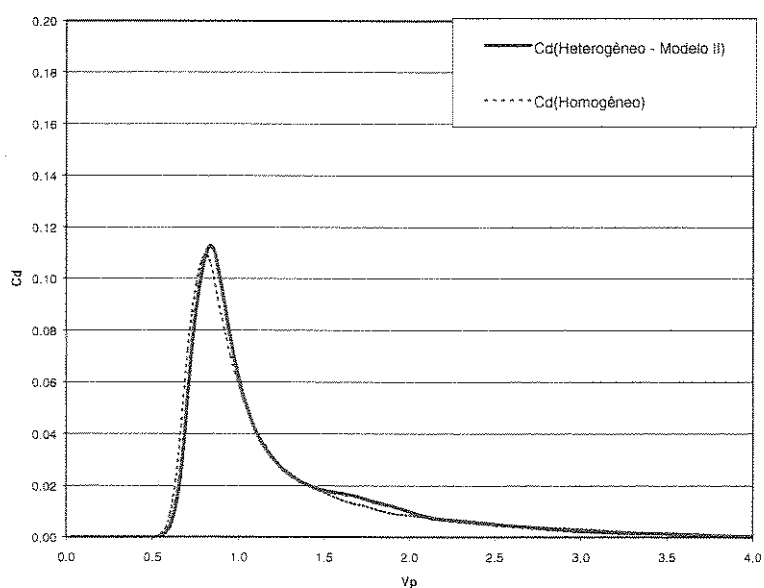


Figura 8.06 - Perfil de Concentração no poço produtor - Modelo II
 Npe=500, NDC=40, NC=40, Pulso=2 %

8.2.3 – Sem controle de direção de anisotropia - Modelo III

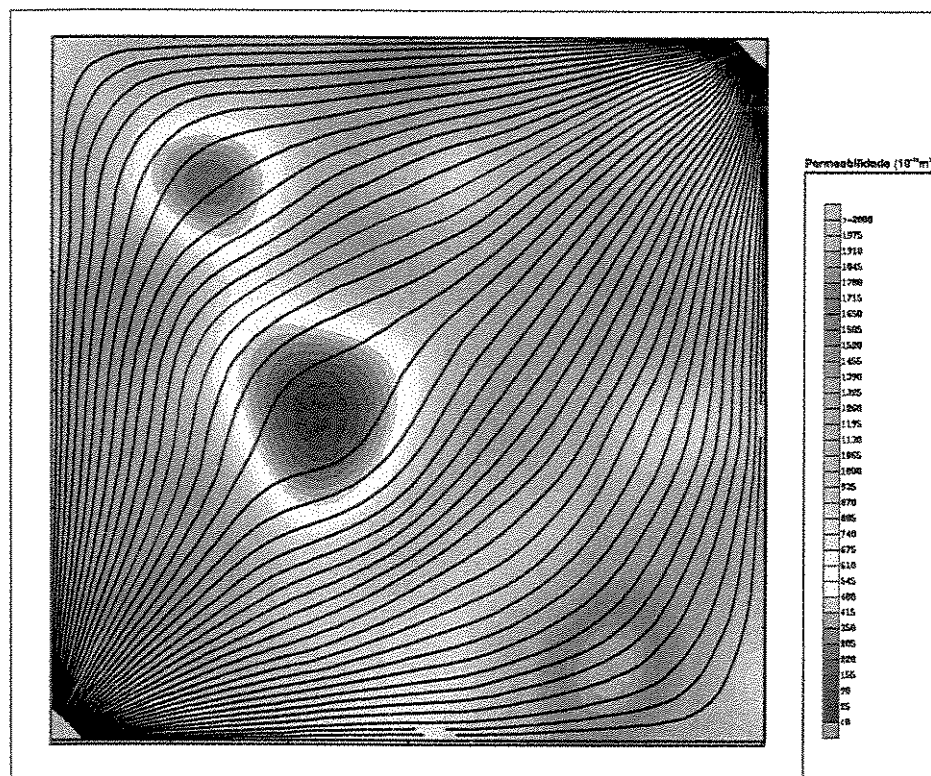


Figura 8.07 – Linhas de fluxo geradas pelo simulador para o Modelo III montada sobre a imagem representativa do modelo geológico

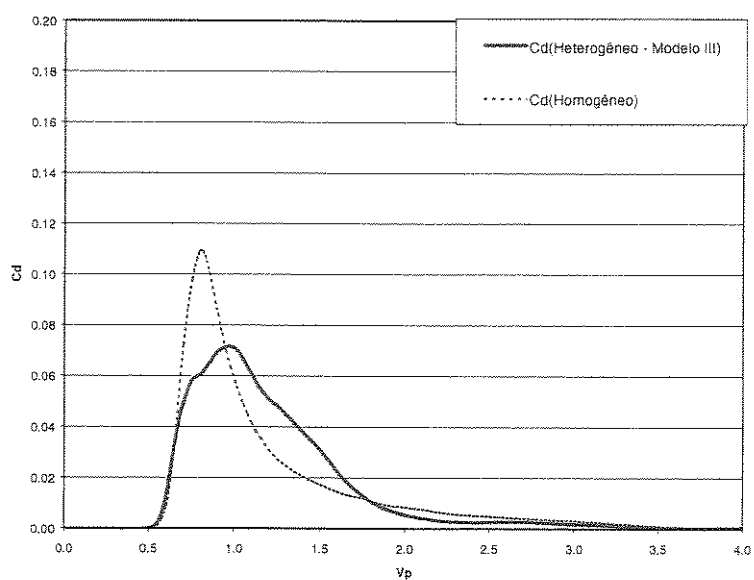


Figura 8.08 - Perfil de Concentração no poço produtor- Modelo III
Npe=500, NDC=40, NC=40, Pulso=2% Vp

Capítulo 9

Conclusões e Recomendações

O método desenvolvido neste estudo pode ser usado em projetos de testes com traçadores (poço-a-poço). A quantidade de traçador requerida e o tempo de irrupção do traçador pode ser computada pelo método aqui apresentado.

O estudo mostra que as curvas de *breakthrough* para os sistemas homogêneos dependem da geometria e da dispersividade do meio poroso.

Para sistemas heterogêneos, o programa calcula as linhas de fluxo considerando uma dada matriz de permeabilidade. As variações de permeabilidade alteram a forma e a disposição espacial dos canais de fluxo e consequentemente, o perfil de concentração computado no poço produtor.

O método apresentado neste estudo considera somente o padrão *five-spot*. O mesmo pode ser estendido para incluir a análise de deslocamento miscível para outros padrões de distribuição de poços. Para o padrão *five-spot*, pode-se ainda aplicar outros tipos de mecanismo de deslocamento, adequando o programa a objetivos específicos, como composicional, por exemplo.

Referências Bibliográficas

- ABBASZADEH-DEGHANI, M e BRIGHAM, W. E.: *Analysis of unit mobility ratio well-to-well tracer flow to determine reservoir heterogeneity*. Stanford: SUPRI, 1982.
- AGCA, C., POPE, G. A. e SEPEHRNOORI, K.: Modelling and Analysis of Tracer Flow in oil Reservoir, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 4 (1990), 3-19.
- ALMEIDA, A. R. e COTTA, R. M.: Analytical Solution of the Tracer Equation for the Homogeneous Five-Spot Problem, *Soc. Pet. Eng. J.* (march 1996) 31-38.
- AMES, W. F.: *Numerical methods for partial differential equations*, New York: Academic : London : T. Nelson, 1977.
- AZIZ, K. e SETTARI, A.: *Petroleum Reservoir Simulation*. Essex: Applied Science Publishers, 1979.
- AZIZ, K. .: *Notes for Petroleum Reservoir Simulation*. Department of Petroleum Engineering School of Earth Sciences: Stanford University, 1994.
- BEAR, J.: *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier Publishing Company, New York, 1972.

- BIRD, R. B. , STEWART, W. E. e LIGHTFOOT, E. N.: *Transport Phenomena*, Wiley International Edition.
- BRATVEDT, F., GIMSE, T. e TEGNANDER, C.: Streamline Computation for Porous Media Flow including Gravity, *Transport in Porous Media*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- COLLINS, R. E.: *Flow of Fluids through . 63 s Materials*, Reinhold Publishing Corporation, New York.
- COX, D.O.: Waterflood Performance Estimation with a Layered Streamtube Model, *Soc. Pet. Eng. J.* (june 1987) 79-87.
- CUNHA, M. C. C.: *Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1993.
- DEMMELE, J. W. : *Applied numerical linear algebra*, SIAM (1997).
- DOYLE, R. E. e WURL, T. M.: Stream Channel Concept Applied to Waterflood Performance Calculations for Multiwell, Multizones, Three-component Cases, *J. Petr. Technol.* (march.1971) 373-380.
- FERREIRA, D. M.: *Análise do comportamento de reservatórios heterogêneos submetidos à injeção de água*. Campinas, SP: UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, 1994 . Dissertação (Mestrado).
- FERRONI, J. G.: *Aplicação do método da integral de contorno na modelagem do transporte de traçadores radioativos em meios porosos*. Campinas, SP: UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, 1996 . Dissertação (Mestrado).

- FINLAYSON, B.H.: *Numerical Methods for problems with moving fronts*, Ravena Park Inc., 1994.
- HAUBER, W. C.: Prediction of Waterflood Performance for Arbitrary Well Patterns and Mobility Ratios, *Jour. Petr.Tech.* (jan 1964) 95-103.
- HIGGINS, R. V. e LEIGHTON, A. J.: A Computer Method to Calculate Two-Phase Flow in Any Irregularly Bounded Porous Medium, *Jour. Petr.Tech.* (june 1962) 679.
- HIGGINS, R. V., BOLEY, D. W., e LEIGHTON, A. J.: Aids to Forecasting the Performance of Water Floods, *J. Petr. Tech.* (sept.1964) 1076-1082; Trans., AIME, 231.
- LAKE, L. W., Pope, G. A., Carey, F. e Sepehrnoori, K.: Isothermal, Multiphase, Multicomponent Fluid Flow in Permeable Media, *Part I, In Situ*, V. 8, n.1, 1984.
- LAKE, L. W.: *Enhanced oil recovery*, Austin, Prentice Hall, 1989.
- LEBLANC, J. L. e CAUDLE, B. H.: A Streamline Model for Secondary Recovery, *Soc. Pet. Eng. J.* (march 1971) 7-12.
- MARLE, C. M.: *Multiphase Flow in Porous Media*. IFP, Paris: Editions Technip, 1981.
- MARTIN, J. C. e WEGNER, R. E.: Numerical Solution of Multifase , Two-dimensional incompressible Flow using Streamtube relationships, *Soc. Pet. Eng. J.* (oct.1979) 3113-323; Trans., AIME, 267.
- MATTAX, C. C. e Dalton, R. L.: *Reservoir Simulation*, Richardson, TX: SPE Monograph Series, 1990.
- MUSKAT, M.: *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1973.

- PINTO, A. C. C.: *Esquemas de Alta Resolução para controle da Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios*, Campinas, SP: UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, 1991 . Dissertação (Mestrado).
- PORTELLA, R. C. M.: *Interpretação e Automação de testes de deslocamento miscível usando soluções no Espaço de Laplace e Deconvolução*, Campinas, SP: UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, 1989 . Dissertação (Mestrado).
- PRESS, W. H.: *Numerical recipes in Fortran 77 : the art of scientific computing*, 2nd ed. Cambridge, Mass. : Cambridge Univ., 1992.
- QUINNEY, D.: *An introduction to the numerical solution of differential equations*, Electronic & electrical engineering research studies, Letchworth : Res. Stud., c1987.
- ROMEY, R. K.: Um Método Direto para Cálculo de Fatores de Forma em Malhas de Fluxo, *B. Téc. Petrobrás*, Rio de Janeiro, v.28(1):17-26,Jan./mar. 1985.
- SANTOS, R L.: *Estudo de Injeção de Traçadores em Meios Porosos através do Método de Diferenças Finitas com Discretização Exponencial*, Campinas, SP: UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, 1995 . Dissertação(Mestrado).
- SETTARI, A. , PRICE, H. S. e DUPONT, T.: Development and Application of Variational Methods for Simulation of Miscible Displacement in Porous Media, *Soc. Pet. Eng. J.* (jun-1977), Trans., AIME, v. 263, 228-246.
- THIELE, M. R., BLUNT, M. J. e ORR, F. M.: *A New Technique for Predicting Flow in Heterogeneous Systems Using Streamtubes*, *Soc. Pet. Eng. J.* (april 1994) 571-582.

APÊNDICE A – Método de Diminuição das Variações Totais

Os métodos de correção de fluxo tem como objetivo limitar a introdução de oscilações que ocorrem quando se usa uma discretização com ordem de aproximação h^2 em problemas com frentes abruptas. Nestes métodos a propriedade principal esta baseada na definição de variação total associada à discretização:

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|. \quad (\text{A-01})$$

Um método das diferenças finitas é dito de diminuição das variações totais, em cada evolução no tempo, se a variação total diminuir, isto é,

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n). \quad (\text{A-02})$$

A escolha do limitador de fluxo é a chave para provar que o método obedece a propriedade acima. Os fundamentos do método foram estabelecidos pelos trabalhos de Harten (1983), Yee et al. (1985) e Sweby (1984). Trabalhos recentes elaborados por Shu e Osher (1988,1989) e Chen et al. (1991) juntamente com os fundamentos da teoria foram compilados por Finlayson (1994) e são considerados aqui.

O método TVD de segunda ordem apresentado por Finlayson (1994) é descrito para a equação hiperbólica,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0. \quad (\text{A-03})$$

Considere a EDC para um canal de fluxo qualquer (Equação 4.45), reproduzida abaixo.

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} - N_{Pe} \cdot \frac{\partial C_D}{\partial x_D} = \frac{b_{sD}(x_D)}{q_D(t_D)} \cdot \frac{\partial C_D}{\partial t_D} \quad x_D > 0 \text{ e } t_D > 0 \quad (\text{A-04})$$

Desprezando-se os subscritos da adimensionalização e reescrevendo na forma da Equação A-03, obtém-se:

$$b_s(x) \cdot \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{q \cdot N_{Pe} \cdot C - q \cdot \frac{\partial C}{\partial x}}_{\text{fluxo}} \right] = 0, \quad (\text{A-05})$$

Observe que o coeficiente $b_s(x)$, do termo de variação da concentração no tempo, é o elemento que faz a diferença entre a Equação A-5 e a Equação A-3. Portanto, para que se possa utilizar o modelo descrito para a Equação A-03 faz-se necessário uma modificação no termo de evolução temporal do método.

Considerando a função $C(x,t)$, obtém-se para o termo de fluxo F ,

$$F = q \cdot \left(N_{Pe} \cdot C - \frac{\partial C}{\partial x} \right). \quad (\text{E-06})$$

Avaliando F , segundo o critério abaixo, chega-se ao seguinte o valor para K_1 ,

$$K1 = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial C} \geq 0 \\ 1 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial C} < 0 \end{cases}, \quad K1 = 0. \quad (\text{A-07})$$

Calcula-se os valores de Δ_i através da equação

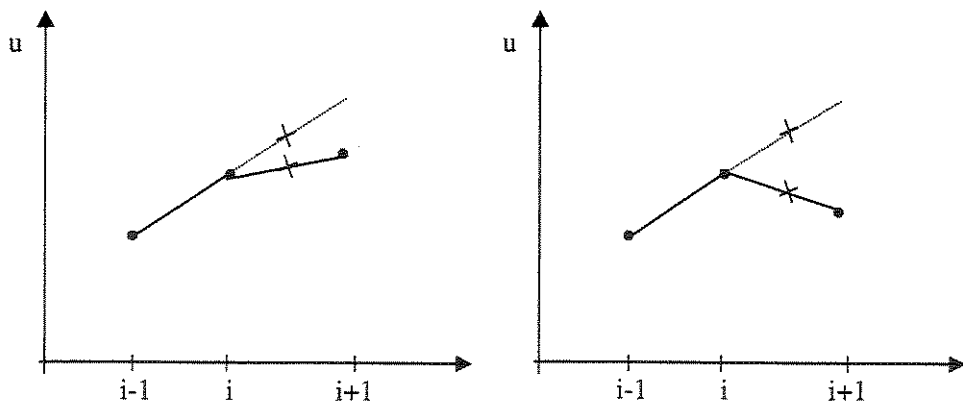
$$\Delta_i = \text{sign}(C_{i+k1}^n - C_{i-1+k1}^n) \max \left\{ \min \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ |C_{i+k1}^n - C_{i-1+k1}^n| \end{array} \right\} (C_{i+1+k1}^n - C_{i+k1}^n) \text{sign}(C_{i+k1}^n - C_{i-1+k1}^n) \right\}. \quad (\text{A-08})$$

Os valores para $i = 1$ e $i = NDC$ são necessários e são nulos,

$$\Delta_1 = 0, \Delta_{NDC} = 0. \quad (\text{A-09})$$

Toma-se $C_0 = C_1$ e $C_{NDC} = C_{NDC+1}$ e avalia-se através da Equação A-08. Com os valores de Δ_i , obtidos através das Equações A-08 e A-09, calcula-se o valor da função no ponto médio,

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n = C_i^n + \frac{1}{2} \Delta_i. \quad (\text{A-10})$$



(a) Inclinações com o mesmo sinal

(b) Inclinações com sinais opostos.

Figura A-01 – Etapas para correção do fluxo

Na figura A-01 o valor da função no ponto médio pode ser obtido interpolando-se entre os pontos i e $i + 1$ ou entre os pontos i e $i - 1$ e extrapolando-se para $i + 1/2$. Na figura A-01(a) as inclinações possuem o mesmo sinal. A Equação A-01 seleciona a inclinação que possui o menor valor absoluto para usar na Equação A-10. O valor escolhido é o menor deles, o qual não conduz a um máximo estranho (o x .inferior da figura A-01(a)). Se as inclinações são de sinais opostos, como na figura A-01(b), então existe um extremo local e adota-se $\Delta = 0$. Neste caso o valor da função no ponto médio será tomado como u_i ; o extremo não prejudica, embora a frente pode tornar-se estreita. Quando $u_i = u_{i-1}$ então a menor inclinação em valor absoluto é zero. Assim, considera-se:

$$\text{sign}(0) = 1. \quad (\text{A-11})$$

Em seguida avalia-se o fluxo que é dado por,

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = q \cdot \left(N_{pe} \cdot C_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} \right) \quad \text{e}, \quad (\text{A-12})$$

no passo seguinte, obtém-se o valor projetado,

$$C_i^* = C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot b_s(x_i)} \left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (\text{A-13})$$

C_i^* é um passo intermediário na evolução temporal do problema. O coeficiente $b_s(x)$, multiplicador do termo de variação da concentração no tempo da Equação A-05, passa então dividindo o segundo termo da Equação A-14, que define o valor projetado. Este é o ajuste utilizado para adequar o modelo hiperbólico ao problema em questão.

Repete-se o mesmo procedimento utilizando C^* , conforme sequência definida pelas equações A-15, A-16 e A-17 a seguir:

$$\Delta_i^* = \text{sign}(C_i^* - C_{i-1}^*) \max \left\{ \min \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ |C_i^* - C_{i-1}^*| \\ (C_{i+1}^* - C_i^*) \text{sign}(C_i^* - C_{i-1}^*) \end{array} \right\} ; \right. \quad (\text{A-14})$$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^* = C_i^* + \frac{1}{2} \Delta_i^*; \quad (\text{A-15})$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = q \cdot \left(N_{pe} \cdot C_{i+\frac{1}{2}}^* - \frac{C_{i+1}^* - C_i^*}{\Delta x} \right). \quad (\text{A-16})$$

O valor final é então obtido através da Equação A-17, onde, da mesma forma como foi obtida a Equação A-13, considera-se a divisão pelo coeficiente $b_s(x)$.

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x \cdot b_s(x_i)} \left[\left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \left(f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \right]. \quad (\text{A-17})$$

