

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

200206372

# Determinação da Rigidez e Amortecimento Equivalente Proveniente do Fluido Escoando e Interagindo Com Placas Flexíveis- Teoria e Constatações Experimentais

Autor: Gustavo Campos Padovese  
Orientador: Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos

60/01

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Gustavo Campos  
Padovese E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 06 08 2001  
Ilmar Ferreira Santos  
ORIENTADOR

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

# Determinação da Rigidez e Amortecimento Equivalente Proveniente do Fluido Escoando e Interagindo Com Placas Flexíveis- Teoria e Constatações Experimentais

Autor: **Gustavo Campos Padovese**

Orientador: **Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2001  
S.P. - Brasil

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	I/UNICAMP
	P/136d
V.	
T.º	47538
PREC.	837/22
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREC.º	25 11,00
DATA	06-02-02
N.º CPD	

CM00163087-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P136d      Padovese, Gustavo Campos  
               Determinação da rigidez e amortecimento equivalente  
               proveniente do fluido escoando e interagindo com placas  
               flexíveis – teoria e constatações experimentais / Gustavo  
               Campos Padovese.--Campinas, SP: [s.n.], 2001.

              Orientador: Ilmar Ferreira Santos.  
               Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
               Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

              1. Aeroelasticidade. 2. Placas e cascas elásticas. 3.  
               Dinâmica dos fluidos. I. Santos, Ilmar Ferreira. II.  
               Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
               Engenharia Mecânica. III. Título.

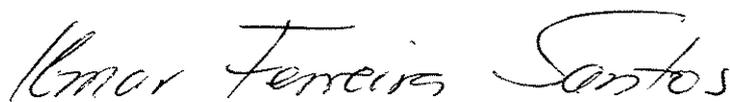
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Determinação da Rigidez e  
Amortecimento Equivalente  
Proveniente do Fluido Escoando e  
Interagindo Com Placas Flexíveis-  
Teoria e Constatações Experimentais**

Autor: Gustavo Campos Padovese

Orientador: Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos



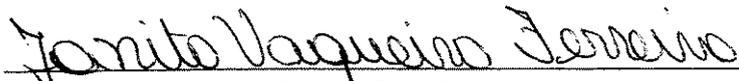
---

Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas



---

Prof. Dr. Paulo Carlos Kaminski  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo



---

Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira  
Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 06 de agosto de 2001.

# Dedicatória

*Eu dedico este trabalho ao meu pai, Gerson, à minha mãe, Leila, aos meus irmãos, Ricardo e Camila, e à querida Ellen, pelo apoio e carinho que sempre me deram em todos os momentos.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar eu agradeço ao **Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos**, pela sua enorme contribuição à minha formação, pelo seu constante incentivo e apoio, pelo exemplo de dedicação à profissão e pela amizade que compartilhou comigo durante estes anos.

Aos colegas **Amauri de Souza, Fábio Hildebrand Russo, Rodrigo Nicoletti, Cristina M. Saracho, Cláudio A. de Carvalho Silva e Alberto C. Nogueira Jr.** pelas contribuições e dicas ao trabalho, pelo incentivo, pela grande amizade e por todos os momentos de descontração.

Agradeço a todos os funcionários do Departamento de Projeto Mecânico pelo suporte que me ofereceram neste trabalho, principalmente aos técnicos mecânicos **Eli Paulino e Gastão Bosco** que foram os responsáveis pela construção da bancada de testes e aos técnicos em eletrônica **Rosângelo W. A. Ferreira e Mauro Romero** que auxiliaram nas medições experimentais.

Agradeço ao chefe do Departamento de Energia, **Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa**, pela permissão na utilização do túnel de vento, bem como aos técnicos mecânicos daquele departamento, especialmente à **Alcimar da Silveira**, sem o qual a realização deste trabalho não seria possível.

Agradeço ao **Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail**, pela sua co-orientação, seus conselhos e sua retidão à frente da Comissão de Pós-Graduação.

À **FAPESP**, que acreditou no trabalho desenvolvido e forneceu o suporte financeiro para a bolsa de estudos e para a construção da bancada de testes.

Em especial, agradeço à **Ellen**, que sempre me apoiou, me compreendeu e me deu forças nos momentos mais difíceis.

Quanto mais conhecemos, mais amamos

*Leonardo da Vinci*

# Resumo

PADOVESE, Gustavo Campos, *Determinação da Rigidez e Amortecimento Equivalente Proveniente do Fluido Escoando e Interagindo Com Placas Flexíveis - Teoria e Constatações Experimentais*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 217p. Dissertação (Mestrado)

A modelagem e compreensão do comportamento da rigidez e amortecimento de estruturas submetidas a um escoamento, é ainda um problema complexo que envolve a interação de dois campos das ciências mecânicas. A teoria clássica da elasticidade lida com deformações de corpos flexíveis sob carregamentos externos pré-definidos. Geralmente, a carga externa agindo sobre o corpo é independente da deformação do mesmo. Entretanto, a situação é diferente quando se considera os efeitos do escoamento. As cargas aerodinâmicas dependem da atitude do corpo em relação ao escoamento. Até mesmo a deformação elástica tem uma importante influência na determinação da carga externa. Com os recentes avanços da Mecânica dos Fluidos Computacional (CFD), através do FLOTRAN, um programa computacional comercial, pode-se calcular o campo de pressão em torno de uma placa plana flexível, resolvendo as equações de Navier-Stokes em três dimensões. Este programa é integrado com um programa feito em MATLAB, que resolve as equações estruturais de uma placa, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Estes dois programas interagem até que uma posição de equilíbrio seja obtida. Em torno desta posição de equilíbrio os coeficientes de rigidez e amortecimento devido ao escoamento são obtidos teoricamente, através de pequenas perturbações impostas. Uma bancada de testes foi construída para simular a placa flexível, obtendo-se a sua função de resposta em frequência. Testes são conduzidos, inicialmente sem a influência do escoamento, em seguida, com a influência deste, acoplado a bancada de testes a um túnel de vento. Com este trabalho, uma melhor compreensão sobre o comportamento dinâmico de estruturas submetidas a um escoamento incompressível é obtida, e rigidez e amortecimento provenientes do escoamento são quantificados teoricamente. Depois de obter uma melhor compreensão dos aspectos numéricos envolvidos, utilizando uma placa simples, o modelo do escoamento pode ser modificado e acoplado a um modelo estrutural mais sofisticado.

## *Palavras Chave*

Interação fluido-estrutura, aeroelasticidade, placas flexíveis.

# Abstract

PADOVESE, Gustavo Campos, *Determination of the Equivalent Stiffness and Damping Deriving from the Fluid Flow passing through Flexible Plates - Theory and Experimental Verification*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 217p. Dissertação (Mestrado)

The understanding and modelling of the stiffness and the damping behavior of structures when subjected to a flow field, is still a very complex problem, dealing with the interaction of two major fields of mechanical sciences. The classical theory of elasticity deals with strains of flexible bodies under predefined external loads. Generally, the external load acting on the body is independent on the deformation of the body itself. However, the situation is different when one considers the fluid flow effects. The aerodynamic loads depend on the relative attitude of the body to the flow. Even the elastic deformation has an important role on the determination of external load. With the recent developments on the Computational Fluid Dynamics (CFD), through FLOTRAN, a commercial fluid flow solver, one can calculate the pressure field around a flexible flat plate, solving the three-dimensional Navier-Stokes equations. This solver is integrated with a program made using MATLAB, which solves the structural plate equations, using the Finite Element Method. These two programs interact until an equilibrium position is attained and then the equivalent fluid flow coefficients are obtained theoretically, through given small perturbations, around the equilibrium position. An experimental test rig was built, in order to simulate the flexible flat plate, obtaining its frequency response function. Tests are conducted, firstly with no fluid flow around the plate, and secondly, with the influence of a fluid flow, coupling the test rig with a wind tunnel. With this work, a better understanding concerning the stiffness and the damping behavior of structures is obtained when subjected to a flow field. After getting a better understanding of numerical issues involved in the fluid-structure dynamical interactions, while using a simple plate, the fluid model can be coupled to a more sophisticated structural model.

## *Keywords*

Fluid-structure interaction, aeroelasticity, flexible plates.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>6</b>
2.1	Estado da arte . . . . .	6
2.1.1	Palhetas flexíveis . . . . .	7
2.1.2	Asas flexíveis . . . . .	13
2.1.3	Placas flexíveis . . . . .	18
2.2	Conclusão . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Bancada de testes experimentais</b>	<b>21</b>
3.1	Introdução . . . . .	21
3.2	Componentes e funcionamento da bancada de testes experimentais . . . . .	22
3.3	Instrumentação e sistema de aquisição de dados . . . . .	25
3.4	Preparação experimental . . . . .	27
3.4.1	Célula de carga . . . . .	27
3.4.2	Extensômetro . . . . .	28
3.5	Conclusão . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Fluido</b>	<b>33</b>
4.1	Introdução . . . . .	33
4.2	Equações governantes da mecânica dos fluidos . . . . .	34
4.2.1	Equação da conservação da massa . . . . .	36
4.2.2	Equação da conservação da quantidade de movimento . . . . .	37
4.3	Diferentes tipos de escoamento . . . . .	39
4.3.1	Escoamentos compressíveis e incompressíveis . . . . .	40

4.3.2	Escoamento potencial . . . . .	42
4.3.3	Escoamento não-viscoso . . . . .	43
4.3.4	Escoamento com $Re \ll 1$ ( <i>Creeping flow</i> ) . . . . .	44
4.3.5	Aproximação de camada limite . . . . .	44
4.4	Classificação matemática das equações de conservação . . . . .	45
4.4.1	Problemas hiperbólicos . . . . .	48
4.4.2	Problemas parabólicos . . . . .	49
4.4.3	Problemas elípticos . . . . .	50
4.5	Utilização do <i>software</i> FLOTRAN . . . . .	51
4.6	Modelo matemático através do <i>software</i> FLOTRAN . . . . .	52
4.6.1	O modelo de turbulência $k - \varepsilon$ . . . . .	54
4.6.2	Discretização das equações de conservação pelo método dos elementos finitos . . . . .	56
4.6.3	O algoritmo de solução . . . . .	60
4.6.4	A malha utilizada na solução do problema . . . . .	61
4.6.5	Condições de contorno . . . . .	64
4.6.6	Estudo de convergência da solução e alguns resultados . . . . .	67
4.7	Conclusões . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Modelo matemático da estrutura</b>	<b>72</b>
5.1	Introdução . . . . .	72
5.2	Teoria de placas . . . . .	73
5.3	Elementos finitos aplicados às placas . . . . .	76
5.3.1	Funções de forma . . . . .	79
5.3.2	Matrizes de massa, rigidez e vetor de força nodal equivalente . . . . .	82
5.4	Validação do programa computacional . . . . .	84
5.4.1	Comparação estática teórica . . . . .	85
5.4.2	Comparação dinâmica teórico-experimental . . . . .	86
5.5	Conclusões . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Interação fluido-estrutura</b>	<b>90</b>

6.1	Introdução . . . . .	90
6.2	A metodologia de interação fluido-estrutura . . . . .	91
6.2.1	Compatibilidade entre os domínios e as malhas de solução . . . . .	93
6.2.2	Troca de cargas e deslocamentos . . . . .	96
6.2.3	Atualização da malha do fluido . . . . .	98
6.3	Estudo de convergência complementar da solução . . . . .	99
6.4	Conclusões . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Obtenção da rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do fluido</b>	<b>104</b>
7.1	Introdução . . . . .	104
7.2	Obtenção dos coeficientes equivalentes . . . . .	105
7.3	Variação da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes equivalentes	106
7.3.1	Variação das amplitudes de perturbação no cálculo dos coeficientes de rigidez . . . . .	108
7.3.2	Variação das amplitudes de perturbação no cálculo dos coeficientes de amortecimento . . . . .	113
7.4	Influência da malha no cálculo da rigidez equivalente para o segundo modo .	117
7.5	Cálculo das frequências naturais e fatores de amortecimento teórico . . . . .	121
7.5.1	Introdução do modelo de amortecimento proporcional . . . . .	122
7.5.2	Introdução das matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes . . .	123
7.6	Construção das FRFs teóricas . . . . .	124
7.7	Conclusão . . . . .	127
<b>8</b>	<b>Testes experimentais - Frequências naturais e fatores de amortecimento</b>	<b>129</b>
8.1	Introdução . . . . .	129
8.2	Procedimento experimental . . . . .	130
8.3	Extração das frequências naturais e fatores de amortecimento . . . . .	133
8.4	Funções de resposta em frequência dos testes realizados . . . . .	135
8.4.1	Resultados obtidos para o primeiro modo . . . . .	137
8.4.2	Resultados obtidos para o segundo modo . . . . .	149
8.4.3	Resultados obtidos para o terceiro modo . . . . .	157
8.5	Conclusões . . . . .	166

<b>9</b>	<b>Combinação teórico-experimental e obtenção dos coeficientes equivalentes</b>	<b>169</b>
9.1	Introdução . . . . .	169
9.2	Comparação dos coeficientes equivalentes obtidos teoricamente em termos de velocidade do escoamento e ângulo de ataque . . . . .	170
9.2.1	Coeficientes de rigidez equivalente . . . . .	171
9.2.2	Coeficientes de amortecimento equivalente . . . . .	179
9.3	Discussão da ordem de grandeza dos elementos das matrizes de rigidez e amor- tecimento estruturais e dos provenientes do escoamento . . . . .	187
9.3.1	Elementos da matriz de rigidez . . . . .	187
9.3.2	Elementos da matriz de amortecimento . . . . .	189
9.4	Comparação teórico-experimental em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento . . . . .	190
9.5	Comparações teórico-experimentais das curvas de FRF . . . . .	195
9.5.1	Resultados obtidos para o primeiro modo . . . . .	196
9.5.2	Resultados obtidos para o segundo modo . . . . .	202
9.5.3	Resultados obtidos para o terceiro modo . . . . .	206
9.6	Conclusões . . . . .	209
<b>10</b>	<b>Conclusões e perspectivas futuras</b>	<b>212</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>220</b>

# Lista de Figuras

1.1	Foto de um compressor real de 12 estágios com 41 palhetas por estágio. Convênio Petrobrás-Funcamp - Comportamento Dinâmico de Palhetas Flexíveis de um compressor axial da REVAP. . . . .	2
3.1	Foto da bancada de testes experimentais com seus componentes e instrumentação. (1) placa plana flexível, (2) massa, (3) eixos, (4) molas, (5) excitador + célula de carga, (6) extensômetro. . . . .	23
3.2	Bancada de testes experimentais acoplada com o túnel de vento. (7) túnel de vento, (8) sistema massa-placa-excitador. . . . .	24
3.3	Detalhe da massa principal(2), mostrando o engastamento da placa flexível. .	24
3.4	Desenho esquemático mostrando o funcionamento da bancada de testes experimentais. . . . .	25
3.5	Detalhe da célula de carga acoplada ao excitador e à base da massa. . . . .	26
3.6	Detalhe do extensômetro colado na placa flexível. . . . .	27
3.7	Localização do extensômetro. . . . .	29
3.8	Aplicação das forças através dos pesos padrão. . . . .	30
3.9	Curva de calibração. . . . .	31
4.1	Escoamento de um fluido com partículas suspensas em um canal. . . . .	47
4.2	Dimensões e disposição dos volumes que constituem o domínio da solução do problema. As dimensões estão dadas em metros. . . . .	62
4.3	Volume do domínio de solução do problema discretizado. . . . .	64
4.4	Vista lateral do volume do domínio de solução do problema, à esquerda, e zoom da vista lateral, à direita. . . . .	65
4.5	Condições de contorno aplicadas no volume externo e na superfície da placa. .	66

4.6	Coeficiente de pressão ao longo da corda (largura) da placa. À esquerda tem-se a superfície de sucção (superfície superior) e à direita a superfície de pressão (superfície inferior) da placa. . . . .	69
4.7	Pressões nas superfícies da placa. . . . .	70
4.8	Trajatória de várias partículas do fluido, onde as cores representam o campo de pressão. . . . .	71
4.9	Trajatória de várias partículas do fluido, onde as cores representam a velocidade. . . . .	71
5.1	Deformação de um elemento diferencial de placa. . . . .	74
5.2	Elemento finito retangular para placa de Kirchhoff. . . . .	79
5.3	Funções de forma para o elemento retangular de placa de Kirchhoff para o nó $i$ (esquerda) e para o nó $j$ (direita). . . . .	83
5.4	Funções de forma para o elemento retangular de placa de Kirchhoff para o nó $k$ (esquerda) e para o nó $l$ (direita). . . . .	84
5.5	Malha $4 \times 4$ para uma placa quadrada. . . . .	86
5.6	FFT do sinal de aceleração. . . . .	88
5.7	Foto do teste experimental realizado para obtenção das frequências naturais de uma placa completamente livre. . . . .	88
6.1	Algoritmo de solução. . . . .	93
6.2	Engastamento da placa fora do túnel de vento, fazendo com que o comprimento da placa para a solução estrutural fique maior do que para a solução do escoamento. . . . .	94
6.3	Exemplo ilustrativo de uma malha com nós estruturais não coincidentes com os nós do escoamento. . . . .	95
6.4	Exemplo ilustrativo de uma malha com nós estruturais coincidentes com os nós do escoamento. . . . .	96
6.5	Comparação entre as diversas divisões da malha. As linhas representam o bordo de fuga da placa. . . . .	100
6.6	Evolução das iterações para o caso de $17 \times 17$ divisões da malha, à esquerda. À direita vê-se uma ampliação na ponta da placa. A linha representa o bordo de fuga da placa. . . . .	101

6.7	Posição de equilíbrio da placa atingida após 4 iterações, para uma malha de $22 \times 22$ divisões. . . . .	102
7.1	Rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do escoamento em torno da placa. . . . .	107
7.2	Posição de equilíbrio da placa plotada junto com uma perturbação na forma do primeiro modo, multiplicada por uma constante $ct = 1$ , à esquerda. À direita, mesma posição de equilíbrio plotada junto com uma perturbação na forma do segundo modo, multiplicada por uma constante $ct = 1$ . . . . .	109
7.3	Posição de equilíbrio da placa plotada junto com uma perturbação na forma do terceiro modo, multiplicada por uma constante $ct = 3$ . . . . .	109
7.4	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,01$ . Cálculos feitos para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	110
7.5	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,001$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,0001$ . Cálculos feitos para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	110
7.6	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,01$ . Cálculos feitos para o <b>segundo modo</b> . . . . .	111
7.7	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,001$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,0001$ . Cálculos feitos para o <b>segundo modo</b> . . . . .	111

7.8	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,01$ . Cálculos feitos para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	112
7.9	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,001$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante $ct = 0,0001$ . Cálculos feitos para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	113
7.10	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 1$ . Cálculos feitos para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	114
7.11	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa. Os coeficientes foram obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 10$ . Cálculos feitos para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	114
7.12	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 1$ . Cálculos feitos para o <b>segundo modo</b> . . . . .	115
7.13	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa. Os coeficientes foram obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 10$ . Cálculos feitos para o <b>segundo modo</b> . . . . .	115

7.14	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 1$ . Cálculos feitos para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	116
7.15	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa. Os coeficientes foram obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante $ct = 10$ . Cálculos feitos para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	117
7.16	Malha de $21 \times 16$ divisões, refinada em torno da linha modal da placa. . . .	118
7.17	Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se a malha de $16 \times 16$ divisões, e à direita tem-se a malha de $17 \times 17$ divisões. . . . .	119
7.18	Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se a malha de $19 \times 19$ divisões, e à direita tem-se a malha de $20 \times 16$ divisões. . . . .	120
7.19	Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para as duas malhas de $21 \times 16$ divisões. . . . .	120
7.20	Comparação da posição de equilíbrio da placa para as malhas de $16 \times 16$ , $17 \times 17$ , $19 \times 19$ , $20 \times 16$ e as duas malhas de $21 \times 16$ divisões (A e B). As linhas representam o bordo de fuga da placa. . . . .	121
7.21	Função de distribuição normal de Gauss plotadas para os três primeiros modos.	126
8.1	Formas modais para o primeiro modo, à esquerda, e para o segundo modo, à direita. . . . .	136
8.2	Forma modal para o terceiro modo. . . . .	136
8.3	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>1º de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	137
8.4	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>2º de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	139

8.5	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>3° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	140
8.6	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>4° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	141
8.7	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>6° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	142
8.8	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>7° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	143
8.9	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>8° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	144
8.10	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>9° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	145
8.11	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>10° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	146
8.12	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>11° de ângulo de ataque</b> , para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	147
8.13	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>1° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	149
8.14	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>2° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	150

8.15	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>3° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	151
8.16	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>4° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	152
8.17	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>6° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	153
8.18	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>7° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	154
8.19	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>8° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	155
8.20	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>1° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	158
8.21	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>2° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	159
8.22	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>3° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	160
8.23	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>4° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	162
8.24	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>6° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	163

8.25	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>7° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	164
8.26	Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>8° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	165
9.1	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de <b>30,4 m/s</b> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de <b>27,5 m/s</b> . . . . .	171
9.2	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . Resultados para a velocidade de <b>20,5 m/s</b> . . . . .	172
9.3	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de <b>30,4 m/s</b> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de <b>27,5 m/s</b> . . . . .	173
9.4	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . Resultados para a velocidade de <b>20,5 m/s</b> . . . . .	173
9.5	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de <b>30,4 m/s</b> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de <b>27,5 m/s</b> . . . . .	174
9.6	Coefficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . Resultados para a velocidade de <b>20,5 m/s</b> . . . . .	175

9.7	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	176
9.8	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	176
9.9	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	177
9.10	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	178
9.11	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	178
9.12	Coeficientes equivalentes de <b>rigidez</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	179
9.13	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	180
9.14	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	180

9.15	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	181
9.16	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>primeiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	181
9.17	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	182
9.18	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	183
9.19	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	184
9.20	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>segundo modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	184
9.21	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	185
9.22	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	185

9.23	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de 30,4 <i>m/s</i> , à direita tem-se os resultados para a velocidade de 27,5 <i>m/s</i> . . . . .	186
9.24	Coeficientes equivalentes de <b>amortecimento</b> plotados sobre a superfície da placa, para o <b>terceiro modo</b> , com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . Resultados para a velocidade de 20,5 <i>m/s</i> . . . . .	186
9.25	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>primeiro modo</b> com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . . . . .	198
9.26	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>primeiro modo</b> com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . . . . .	200
9.27	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>primeiro modo</b> com <b>ângulo de ataque de 3°</b> . . . . .	201
9.28	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>primeiro modo</b> com <b>ângulo de ataque de 4°</b> . . . . .	202
9.29	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>segundo modo</b> com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . . . . .	203
9.30	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>segundo modo</b> com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . . . . .	204
9.31	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>segundo modo</b> com <b>ângulo de ataque de 3°</b> . . . . .	205
9.32	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>segundo modo</b> com <b>ângulo de ataque de 4°</b> . . . . .	206
9.33	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>terceiro modo</b> com <b>ângulo de ataque de 1°</b> . . . . .	207
9.34	Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o <b>terceiro modo</b> com <b>ângulo de ataque de 2°</b> . . . . .	208

# Lista de Tabelas

3.1	Valores da tensão de saída quando aplicadas as forças correspondentes. . . .	32
4.1	Valores de $\phi$ , $\Gamma_\phi$ e $S_\phi$ . . . . .	57
4.2	Malhas utilizadas no estudo de convergência da solução. . . . .	68
5.1	Comparação do deslocamento central de uma placa quadrada, engastada em todos os lados. $w_{max} = \beta FL^2/D$ . * Erro em relação ao deslocamento exato. .	85
5.2	Valores utilizados nos cálculos das frequências naturais da placa completamente livre. . . . .	86
5.3	Comparação das 5 primeiras frequências naturais [Hz] para a placa retangular completamente livre. * Erro do valor teórico em relação ao experimental. . .	87
6.1	Propriedades e dimensões utilizadas nos cálculos feitos no estudo de convergência da solução fluido-estrutura. . . . .	99
8.1	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 1º de ângulo de ataque, para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	138
8.2	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 2º de ângulo de ataque, para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	139
8.3	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3º de ângulo de ataque, para o <b>primeiro modo</b> . . . . .	140

8.4	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 4° de ângulo de ataque, para o primeiro modo. . . . .	141
8.5	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 6° de ângulo de ataque, para o primeiro modo. . . . .	142
8.6	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 7° de ângulo de ataque, para o primeiro modo. . . . .	144
8.7	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 8° de ângulo de ataque, para o primeiro modo. . . . .	144
8.8	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 9° de ângulo de ataque, para o primeiro modo. . . . .	145
8.9	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 10° de ângulo de ataque, para o primeiro modo. . . . .	146
8.10	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 11° de ângulo de ataque, para o primeiro modo. . . . .	147
8.11	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 1° de ângulo de ataque, para o segundo modo. . . . .	150
8.12	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 2° de ângulo de ataque, para o segundo modo. . . . .	151
8.13	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3° de ângulo de ataque, para o segundo modo. . . . .	152

8.14	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>4° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	153
8.15	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>6° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	154
8.16	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>7° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	155
8.17	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>8° de ângulo de ataque</b> , para o <b>segundo modo</b> . . . . .	156
8.18	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>1° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	159
8.19	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>2° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	160
8.20	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>3° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	161
8.21	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>4° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	162
8.22	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>6° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	163
8.23	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>7° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	164

8.24	Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com <b>8° de ângulo de ataque</b> , para o <b>terceiro modo</b> . . . . .	164
9.1	Valores das constantes $\alpha$ e $\beta$ que ajustam a matriz de amortecimento estrutural, para cada um dos três primeiros modos. . . . .	190
9.2	Comparações teórico-experimentais das <b>frequências naturais</b> para <b>ângulo de ataque de 1°</b> . . . . .	192
9.3	Comparações teórico-experimentais das <b>frequências naturais</b> para <b>ângulo de ataque de 2°</b> . . . . .	193
9.4	Comparações teórico-experimentais das <b>frequências naturais</b> para <b>ângulo de ataque de 3°</b> . . . . .	193
9.5	Comparações teórico-experimentais das <b>frequências naturais</b> para <b>ângulo de ataque de 4°</b> . . . . .	194
9.6	Comparações teórico-experimentais dos <b>fatores de amortecimento</b> para <b>ângulo de ataque de 1°</b> . . . . .	195
9.7	Comparações teórico-experimentais dos <b>fatores de amortecimento</b> para <b>ângulo de ataque de 2°</b> . . . . .	195
9.8	Comparações teórico-experimentais dos <b>fatores de amortecimento</b> para <b>ângulo de ataque de 3°</b> . . . . .	196
9.9	Comparações teórico-experimentais dos <b>fatores de amortecimento</b> para <b>ângulo de ataque de 4°</b> . . . . .	196

# Nomenclatura

## Letras Latinas

$a$	metade do comprimento de um elemento de placa [m].
$A_i$	área na superfície da placa envolvendo o $i$ -ésimo nó [ $m^2$ ].
$b$	metade da largura de um elemento de placa [m].
$C_{ni}$	fator que multiplica as matrizes relacionadas ao modo $n$ , calculado para a frequência $i$ .
$c_p$	coeficiente de pressão.
$ct$	constante que multiplica o autovetor no cálculo das condições de perturbação.
$d_i$	amortecimento equivalente associado ao $i$ -ésimo nó [ $Ns/m$ ].
$D$	rigidez à flexão da placa [ $N/m^2$ ].
$E$	módulo de elasticidade de Young [ $N/m^2$ ].
$h$	espessura da placa [m].
$k_i$	rigidez equivalente associada ao $i$ -ésimo nó [ $N/m$ ].
$k$	energia cinética turbulenta.
$Ma$	número de Mach.
$M_x$	momento na direção $x$ [ $Nm$ ].
$M_y$	momento na direção $y$ [ $Nm$ ].
$M_{xy}$	momento no plano $xy$ [ $Nm$ ].
$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6,$ $N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}$	funções de forma da placa.

$p$	pressão [ $N/m^2$ ].
$P_\infty$	pressão estática de referência [ $N/m^2$ ].
$P_i$	pressão atuante no $i$ -ésimo nó [ $N/m^2$ ].
$q_\infty$	pressão dinâmica [ $N/m^2$ ].
$Re$	número de Reynolds.
$S_\phi$	termo fonte na equação de transporte de um escalar.
$T$	temperatura do fluido [ $K$ ].
$u$	velocidade do escoamento na direção $x$ [ $m/s$ ].
$u_s$	deslocamento na direção $x$ [ $m$ ].
$u_{st}$	velocidade do fluido na direção da linha de corrente [ $m/s$ ].
$v$	velocidade do escoamento na direção $y$ [ $m/s$ ].
$v_s$	deslocamento na direção $y$ [ $m$ ].
$V_\infty$	velocidade do escoamento não perturbado [ $m/s$ ].
$V_{saída}$	tensão de saída da ponte de <i>Wheatstone</i> [ $V$ ].
$w$	velocidade do escoamento na direção $z$ [ $m/s$ ].
$w_s$	deslocamento na direção $z$ [ $m$ ].
$W^e$	função de ponderação do elemento de fluido do FLOTRAN.

## Letras Gregas

$\alpha$	constante multiplicativa da matriz de massa.
$\beta$	constante multiplicativa da matriz de rigidez.
$\gamma_{xy}$	deformação angular no plano $xy$ .
$\Gamma_\phi$	coeficiente de difusão na equação de transporte de um escalar.
$\varepsilon$	taxa de destruição da energia cinética turbulenta.
$\varepsilon_x$	deformação linear na direção $x$ .
$\varepsilon_y$	deformação linear na direção $y$ .
$\varepsilon_{0^\circ}$	deformação linear na direção a $0^\circ$ da colagem do extensômetro.
$\varepsilon_{45^\circ}$	deformação linear na direção a $45^\circ$ da colagem do extensômetro.
$\varepsilon_{90^\circ}$	deformação linear na direção a $90^\circ$ da colagem do extensômetro.
$\zeta_n$	fator de amortecimento associado ao $n$ -ésimo modo.
$\theta$	ângulo de ataque [ $^\circ$ ].
$\theta_x$	ângulo de rotação em relação a $x$ [ $rad$ ].
$\theta_y$	ângulo de rotação em relação a $y$ [ $rad$ ].
$\rho$	massa específica do fluido [ $kg/m^3$ ].
$\rho_s$	massa específica do material da placa [ $kg/m^3$ ].
$\lambda$	segundo coeficiente de viscosidade.
$\lambda_n$	autovalor associado ao $n$ -ésimo modo.
$\mu$	viscosidade dinâmica [ $Ns/m^2$ ].
$\nu$	viscosidade estática.
$\nu_s$	coeficiente de Poisson.
$\phi$	representação da variável na equação de transporte de um escalar.
$\sigma_x$	tensão normal na direção $x$ [ $N/m^2$ ].
$\sigma_y$	tensão normal na direção $y$ [ $N/m^2$ ].
$\sigma_z$	tensão normal na direção $z$ [ $N/m^2$ ].
$\tau_{xy}$	tensão tangencial no plano $xy$ [ $N/m^2$ ].

$\tau_{yz}$  tensão tangencial no plano  $yz$  [ $N/m^2$ ].

$\tau_{zx}$  tensão tangencial no plano  $zx$  [ $N/m^2$ ].

$\omega_n$  frequência natural associada ao  $n$ -ésimo modo [ $rad/s$ ].

## Siglas

*CFD* *Computational Fluid Dynamics.*

*FFT* *Fast Fourier Transform.*

*FRF* *Frequency Response Function.*

## Vetores e Matrizes

- $B$  matriz das derivadas das funções de forma.
- $D$  matriz de amortecimento estrutural proporcional.
- $D_f$  matriz de amortecimento equivalente.
- $D_{f1}$  matriz de amortecimento equivalente calculada para o primeiro modo.
- $D_{f2}$  matriz de amortecimento equivalente calculada para o segundo modo.
- $D_{f3}$  matriz de amortecimento equivalente calculada para o terceiro modo.
- $D_1$  matriz de amortecimento proporcional ajustada para o primeiro modo.
- $D_2$  matriz de amortecimento proporcional ajustada para o segundo modo.
- $D_3$  matriz de amortecimento proporcional ajustada para o terceiro modo.
- $D_{gl i}$  matriz de amortecimento global, para a frequência  $i$ .
- $f$  vetor das forças nodais equivalentes.
- $F_f$  vetor força proveniente do escoamento agindo sobre a placa.
- $g$  vetor da forças de corpo ou volume.
- $I$  tensor unitário.
- $H_i$  vetor da Função de Resposta em Frequência, calculado para a frequência  $i$ .
- $K$  matriz de rigidez.
- $K_f$  matriz de rigidez equivalente.
- $K_{f1}$  matriz de rigidez equivalente calculada para o primeiro modo.
- $K_{f2}$  matriz de rigidez equivalente calculada para o segundo modo.
- $K_{f3}$  matriz de rigidez equivalente calculada para o terceiro modo.
- $K_{gl i}$  matriz de rigidez global, para a frequência  $i$ .
- $M$  matriz de massa.
- $N$  vetor das funções de forma.
- $q$  vetor dos graus de liberdade estruturais.
- $q_{eq}$  vetor de deslocamento correspondente à posição de equilíbrio da placa.

- $\mathbf{q}_{\text{pert}}$  vetor de perturbação de deslocamento.
- $\dot{\mathbf{q}}_{\text{pert}}$  vetor de perturbação de velocidade.
- $\mathbf{T}$  tensor das tensões cisalhantes do fluido.
- $\mathbf{V}$  vetor das velocidades do escoamento.
- $\mathbf{X}_{\text{exc } i}$  transformada de Fourier do vetor de excitação, para a frequência  $i$ .
- $\Phi_n$  autovetor associado ao  $n$ -ésimo modo.

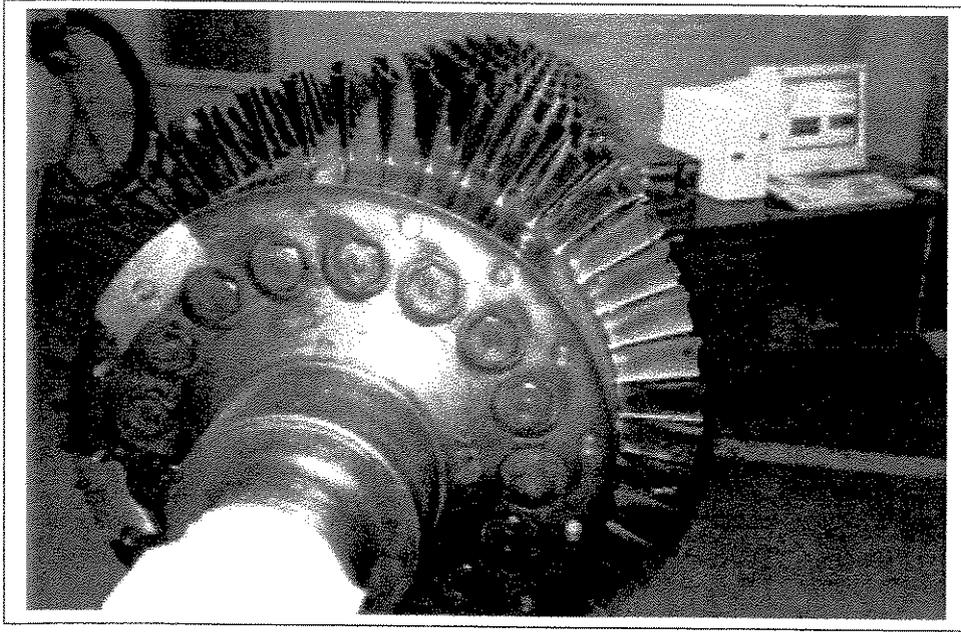
# Capítulo 1

## Introdução

A análise do comportamento dinâmico de rotores com palhetas flexíveis apoiados sobre mancais elásticos, é um problema que ainda é investigado a partir de modelos muito simplificados, que muitas vezes não permitem extrair informações a respeito da influência do fluido escoando e interagindo com as palhetas. A grande parte dos modelos propostos somente levam em conta, na dinâmica das palhetas flexíveis, a rigidez e amortecimento provenientes da estrutura em si, não incluindo a rigidez e amortecimento equivalentes, ou mesmo as instabilidades impostas pelo fluido, dada a dificuldade de descrever este acoplamento fluido-estrutura de forma precisa.

A análise das características dinâmicas e vibratórias de palhetas flexíveis é de fundamental importância no projeto, qualidade, confiabilidade e integridade estrutural de uma turbina. As vibrações induzidas nas palhetas podem levar a níveis de tensões elevadas e a falha por fadiga.

As palhetas flexíveis acopladas a máquinas rotativas são parte de um equipamento elaborado (veja Figura 1.1), com grandes exigências de confiabilidade e eficiência, e que operam em condições severas de temperatura e rotação.



**Figura 1.1:** Foto de um compressor real de 12 estágios com 41 palhetas por estágio. Convênio Petrobrás-Funcamp - Comportamento Dinâmico de Palhetas Flexíveis de um compressor axial da REVAP.

Em particular, as palhetas representam o componente mais crítico do projeto de turbinas e compressores, pois estão sujeitas a falhas por fadiga causadas por vibrações excessivas e comportamento dinâmico instável. Portanto, a análise das características dinâmicas das palhetas, englobando o estudo das frequências naturais, modos de vibração e interação com o fluido, é essencial para assegurar que, nas condições de operação da máquina, os níveis de tensão e deformação para as palhetas se mantenham dentro de limites seguros.

Uma abordagem muito usual na análise dinâmica de palhetas é considerá-la separadamente do rotor e sem a influência das forças aerodinâmicas. Neste tipo de análise são empregados modelos complexos e com muitos graus de liberdade, que descrevem detalhadamente a geometria da palheta. A influência do rotor na dinâmica da palheta é incluída por equações de compatibilidade cinemática. O objetivo dessa análise é obter informações, nas condições normais de operação do rotor, a respeito do nível de tensão e frequências naturais da palheta. O rotor, neste caso, opera com velocidade constante e apenas o efeito da aceleração centrífuga e o efeito giroscópico, supostos ambos constantes, representam a influência da dinâmica do rotor sobre a resposta da palheta. Os modelos construídos, em geral, utili-

zam o método dos elementos finitos para descrever a geometria da palheta (Saracho, 1998). Outro tipo de análise, bastante empregado é considerar o conjunto das palhetas com o disco (Santos e Colla, 1997). Entretanto, este tipo de análise também não fornece informações a respeito da interação dinâmica das palhetas, do fluido acoplado e do conjunto completo.

Através da determinação da rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do fluido, para uma dada condição de velocidade e ângulo de ataque do escoamento, obtém-se matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes. De posse dessas matrizes equivalentes, o analista interessado em obter o comportamento dinâmico estrutural das palhetas, ou do rotor acoplado com as palhetas, pode introduzi-las no modelo estrutural utilizado, incluindo dessa forma o efeito do escoamento.

A interação fluido-estrutura, é um dos ramos da análise multidisciplinar que vem sendo estudada por um longo tempo. Entretanto, até recentemente, os modelos utilizados se baseavam em modelos simplificados e reduzidos, sendo a maioria analíticos. Isso acontecia principalmente devido à dificuldade de solução das equações de Navier-Stokes para o fluido. Os pesquisadores já tinham trabalho suficiente tentando buscar modos de resolver as equações do escoamento assumindo que todas as condições de contorno e geometria eram fixas. Além disso, a análise computacional, desde o começo, sempre foi muito cara.

Com os recentes desenvolvimentos da Fluido Dinâmica Computacional (*CFD - Computational Fluid Dynamics*), como também, da velocidade de processamento dos computadores, torna-se possível estabelecer e resolver numericamente, modelos de escoamentos bastante acurados, baseados nas equações de Navier-Stokes, para regimes de escoamento subsônicos, supersônicos ou mesmo transônicos, extremamente complexos. Tais avanços vêm permitindo o desenvolvimento de estudos de modelos multidisciplinares. Um dos mais importantes, e foco desse trabalho, é o estudo da interação fluido-estrutura, mais especificamente a análise aeroelástica, estática ou dinâmica, de estruturas. Através da análise aeroelástica, torna-se possível o cálculo da posição de equilíbrio estática de uma palheta, quando submetida a um escoamento, bem como das forças atuantes na estrutura provenientes do escoamento do

fluido, encontrando também a correspondente rigidez e amortecimento proveniente desta análise fluido-estrutura conjugada.

A teoria clássica de elasticidade lida com tensões e deformações de corpos flexíveis sob deslocamentos e forças externas pré-definidas. O carregamento externo agindo no corpo é, em geral, independente da deformação do mesmo. É usualmente assumido que a deformação é pequena e não afeta substancialmente a ação das forças externas. Porém, a situação é diferente quando se acopla o fluido. As forças aerodinâmicas dependem da atitude relativa do corpo em relação ao escoamento. A própria deformação elástica tem papel importante na determinação do carregamento externo. A ação das forças aerodinâmicas, dependendo das condições do escoamento, pode levar a uma estabilidade adicional da estrutura, ou a instabilidade. Tais instabilidades podem causar falha por fadiga ou mesmo excessivas tensões, e levar à destruição da estrutura.

O objetivo principal do projeto de pesquisa em que esse trabalho se insere é o de, a longo prazo, modelar palhetas flexíveis acopladas ao rotor girando, e interagindo com o fluido escoando. Isso ainda não é possível devido à complexidade da geometria e tamanho de um modelo de elementos finitos tri-dimensional para uma única palheta. Soma-se a isso, a alta complexidade do escoamento de uma turbina real, que requer modelos numéricos com malhas muito finas, geralmente processados em supercomputadores. Além disso, testes experimentais que representem bem as condições do escoamento de uma turbina real, são geralmente feitos em turbinas reais instrumentadas, disponíveis somente nos fabricantes ou em centros avançados de pesquisa associados aos fabricantes.

Este trabalho está, portanto, focado no levantamento e desenvolvimento das ferramentas básicas computacionais e experimentais para a análise da interação fluido-estrutura. O modelo adotado será então, inicialmente, uma placa delgada, de modo a reduzir o tamanho e complexidade do modelo por elementos finitos estrutural. O modelo do escoamento também será simplificado em comparação com o de uma turbina real, levando em conta somente uma única placa, com um modelo subsônico, adequado à condição onde os testes experimentais

serão realizados. Com isto, espera-se estabelecer e validar as ferramentas básicas para então se somar ao modelo global, aspectos mais reais e complexos, melhorando-o cada vez mais, de modo que possa representar uma turbina com vários estágios.

É neste contexto que cada um dos tópicos envolvidos será aprofundado e expandido. Determinar a rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do fluido escoando e interagindo com palhetas flexíveis, parece ser possível somente se um enfoque metuculoso for elaborado para cada uma das sub-áreas correlacionadas. Desta forma, viabiliza-se o aprimoramento de hipóteses e modelos matemáticos, bem como a identificação antecipada da interação fluido/palheta flexível. Estas investigações têm como meta principal entender melhor o acoplamento dinâmico do fluido com a estrutura e ganhar sensibilidade para se prever o comportamento da rigidez e amortecimento provenientes do escoamento.

# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica

### 2.1 Estado da arte

Com o objetivo de mostrar o estado da arte da pesquisa e desenvolvimento no estudo de cascatas de palhetas interagindo com o escoamento e, além disso, situar o presente trabalho dentro do contexto geral no estudo de palhetas bem como de interação fluido-estrutura, levando em conta os seus objetivos, hipóteses e simplificações, a apresentação desta pesquisa bibliográfica será dividida em três partes:

- palhetas flexíveis em cascata (girando) interagindo com o fluido; onde será apresentada a diversidade de modelos propostos, passando por modelos de escoamento mais simples até os mais avançados e complexos, mostrando a sua evolução. A seção tem ainda o objetivo de discutir o método de cálculo de instabilidades (*flutter*) presente nesses casos;
- asas flexíveis de aeronaves (não girantes) interagindo com o fluido; onde os principais métodos de análise da interação fluido-estrutura serão apresentados e suas vantagens e desvantagens discutidas. Esta seção é importante no contexto deste trabalho, jus-

tamente por mostrar os atuais métodos de análise da interação fluido-estrutura, onde dentre eles, um será utilizado nesse trabalho;

- placas flexíveis (não girantes) interagindo com o fluido; que é o modelo simplificado adotado no presente trabalho.

### 2.1.1 Palhetas flexíveis

Existem dois tipos principais de vibrações induzidas pelas forças aerodinâmicas no estudo de uma palheta ou estágio da turbina, que são o *flutter* e a vibração ressonante. No primeiro, as forças aerodinâmicas que atuam na vibração dependem somente desse movimento, sendo uma vibração auto-excitada. Já no segundo tipo, as forças aerodinâmicas que excitam o sistema são independentes do movimento vibratório. Para tanto, existem dois principais objetivos na análise aerodinâmica transiente aplicada à turbina. O primeiro é calcular a condição de susceptibilidade à instabilidades (*flutter*), através do cálculo das forças agindo nas superfícies das palhetas, devido à vibração das mesmas, sujeitas a condições uniformes de entrada e saída do escoamento. O segundo objetivo é o cálculo da ressonância, onde se calcula as forças agindo nas palhetas, devido a variações nas condições uniformes de entrada e saída do escoamento.

A maioria dos modelos aerodinâmicos utilizados para calcular as cargas atuantes nas palhetas, são modelos que consideram o escoamento em regime transiente, com as mais variadas hipóteses e simplificações. Verdon (Verdon, 1993), realizou uma excelente revisão dos diversos métodos utilizados, bem como Srinivasan (Srinivasan, 1997). Até não muito tempo atrás, os modelos utilizados no cálculo aeroelástico eram bastante simplificados. Eles eram baseados em escoamentos não-viscosos linearizados, aplicáveis a cascatas de aerofólios finos e levemente carregadas. Outros procedimentos de solução eram baseados em modelos semi-analíticos para duas dimensões, em que o escoamento tinha componentes axiais de velocidade subsônica ou supersônica, sem descolamento. Com a necessidade de se levar em conta importantes fenômenos de escoamento, tais como, excitação com amplitude

finita, separação da camada limite viscosa e grandes choques em escoamentos transônicos, começou-se a desenvolver novos modelos capazes de calcular mais precisamente as variações do escoamento no tempo, escoamentos com não-linearidades, não-viscosos (Euler) ou mesmo viscosos (Navier-Stokes).

Os modelos mais atuais, utilizados nos cálculos aerodinâmicos para palhetas e cascatas, são baseados nas equações de Euler ou Navier-Stokes, resolvidas em malhas dependentes do tempo que deformam conforme o movimento pré-estabelecido das palhetas. Os esforços das pesquisas aplicam os procedimentos da CFD para uma única palheta ou uma cascata de palhetas, de modo que as capacidades de previsão consigam englobar tantas condições físicas quanto possíveis, dentro das limitações dos recursos computacionais.

Um dos modelos aerodinâmicos mais simples é utilizado por Omprakash (Omprakash et al., 1994), que fez um estudo sobre estabilidade de uma cascata de palhetas de turbina à gás de baixa pressão. As forças agindo na palheta foram calculadas através de uma análise bi-dimensional não-viscosa compressível, baseada no método dos painéis (teoria potencial). O método de solução leva em conta a correção cinemática do ângulo relativo do escoamento devido ao movimento vibratório. As considerações de estabilidade são feitas numa abordagem quasi-estática de potência por ciclo de vibração. O trabalho aerodinâmico em um ciclo, para um dado modo de vibração das palhetas (previamente calculado por um modelo estrutural), é calculado através do produto da força periódica variando com o tempo, e da amplitude harmônica de vibração especificada. A condição de instabilidade é verificada, quando o trabalho aerodinâmico em um ciclo é positivo, indicando que energia é alimentada nas palhetas, causando uma condição de *flutter*. Essa metodologia de cálculo da condição de *flutter*, como será vista adiante, é bastante comum nos trabalhos científicos que estudam palhetas, sendo utilizada na maioria deles.

Aotsuka (Aotsuka et al., 1999) realizou um estudo teórico-experimental, onde uma cascata de palhetas foi estudada para uma condição de regime transônico, utilizando as equações de Euler (escoamento não-viscoso) bi-dimensionais. Para as palhetas, são impostas

vibrações onde os ângulos de fase entre cada uma são variados em cada caso. Dessa forma, para cada caso, o trabalho das forças aerodinâmicas é calculado e a condição de instabilidade é verificada, como no caso do trabalho anteriormente citado. As comparações feitas mostram boa concordância do modelo teórico somente em termos qualitativos.

Abhari (Abhari e Giles, 1997) utiliza um modelo misto, no qual faz uso de um modelo bi-dimensional em regime transiente das equações de Navier-Stokes em uma fina camada viscosa, em conjunto com as equações de Euler, fora dessa camada. O movimento oscilatório dos aerofólios e o modelo de turbulência de Baldwin-Lomax são incluídos na camada viscosa. A malha para a camada viscosa, nas proximidades da palheta possui um movimento de acordo com o movimento da palheta e por isso ela é 'esticada' e 'comprimida', de modo que a interface com a malha da região não-viscosa fique estacionária. Esse movimento é incluído na modelagem matemática das equações do fluido. Ainda são incluídos efeitos quasi-tri-dimensionais através da especificação de uma espessura em uma terceira dimensão. Esta abordagem mista, permite que o *solver* da porção não-viscosa se mantenha inalterado e somente o *solver* da porção viscosa se altere devido aos movimentos da malha. Novamente, para vários casos de vibração impostas com diferentes ângulos de fase entre as palhetas, trabalho das forças aerodinâmicas por ciclo, chamado aqui de amortecimento aerodinâmico, foi calculado e a condição de instabilidade (*flutter*) verificada. Para o cálculo, são utilizados dois casos padrão, chamados *Fourth* e *Seventh Standard Test cases*, para os quais, resultados experimentais estão disponíveis. Os resultados são comparados e mostram boa concordância.

Hoyniak (Hoyniak e Clark, 1999) utiliza um modelo bi-dimensional, linearizado, em regime transiente das equações de Navier-Stokes, utilizando ainda um modelo de turbulência. O modelo também leva em conta o movimento pré-estabelecido das palhetas, onde a malha se deforma. Alguns resultados, comparados com resultados disponíveis mostraram a boa concordância em alguns casos, e em outros casos, não tão boa assim. Novamente, o método de cálculo da condição de *flutter* é a imposição de um certo movimento vibratório, com diferentes ângulos de fase entre as palhetas, onde para cada condição, o trabalho aerodinâmico em um ciclo é calculado. A vantagem do método de solução das equações utilizado é o

emprego da linearização no tempo, permitindo um processamento mais rápido. Em outro trabalho, Clark (Clark e Hall, 1999), detalha o desenvolvimento do mesmo modelo (Hoyniak e Clark, 1999) e outros estudos são feitos demonstrando uma boa concordância, porém indicando que o modelo deve ser estendido para três dimensões, levando em conta os efeitos tri-dimensionais do escoamento. Isso se deve ao fato de que quando o escoamento é descolado da palheta, essa região pode variar significativamente da raiz da mesma até a ponta.

Já Fransson (Fransson et al., 1998), mostra um estudo comparativo entre diferentes métodos numéricos e resultados experimentais. Os autores se valeram de 4 métodos numéricos diferentes. O primeiro, chamado FINSUP, e fornecido pela Rolls Royce, resolve equações potenciais para escoamentos isoentrópicos, 2D irrotacionais, usando o método dos elementos finitos com malhas de elementos triangulares, onde vibrações das palhetas são assumidas. Nele é possível determinar uma variação da espessura do escoamento (quasi-3D). O Método de Newton-Raphson é utilizado na solução, bem como uma linearização no tempo. O segundo, chamado NOVAK 2D60, e fornecido pela GE Aircraft Engines, resolve as equações de Euler bi-dimensionais, com também a opção quasi-3D, linearizadas no tempo, onde pequenas perturbações periódicas são assumidas para perturbar o escoamento médio em regime, e vibrações para as palhetas são assumidas. O terceiro método, chamado INST, resolve as equações de Euler não linearizadas para um escoamento em regime permanente e transiente em torno de palhetas 2D, onde novamente são assumidas vibrações para as mesmas. Finalmente, o último método utilizado, chamado VOLFAP, e fornecido pela Volvo Aero Corporation, resolve um escoamento quasi-3D viscoso pelas equações de Navier-Stokes para fluido compressível. Nele um modelo de turbulência é utilizado. Em todas as simulações foram calculados o trabalho aerodinâmico por ciclo (chamado de amortecimento aerodinâmico pelos analistas de palhetas). Através desses métodos e de comparações teórico-experimentais, os autores concluíram que a qualidade das previsões têm de ser melhoradas, especialmente para investigações viscosas. Além disso, os códigos viscosos devem se tornar mais 'baratos' para se fazerem passíveis de uso.

Outro modelo proposto, pode ser encontrado no trabalho de Chuang (Chuang e Ver-

don, 1999), que considera o fluido não-viscoso (Euler), em um modelo agora tri-dimensional, em regime transiente, dado o deslocamento das palhetas. A malha, nesse caso, também se deforma de acordo com o deslocamento das palhetas e esse movimento é incluído na modelagem matemática do fluido. As equações são discretizadas utilizando-se o método dos volumes finitos. Novamente, como em todos os outros trabalhos discutidos até o presente momento, o trabalho aerodinâmico por ciclo é calculado para a verificação de instabilidades. Os resultados mostram boa concordância, porém o código ainda precisa de futuros desenvolvimentos e validação para o caso de regimes transônicos. Além disso, é necessário também, a inclusão e validação de capacidades viscosas do modelo.

Pode-se observar através dos trabalhos citados até agora, a grande quantidade de modelos diferentes utilizados para a solução do escoamento em torno de palhetas. Os modelos utilizados mostram a evolução natural inerente ao processo científico, passando de modelos potenciais, a modelos não-viscosos até chegar nos modelos incluindo efeitos viscosos e também tri-dimensionais. Entretanto, ainda hoje, nem todos autores se valem de cálculos tri-dimensionais e que também incluam os efeitos viscosos, mostrando que o processo de pesquisa está em pleno desenvolvimento. É possível ver que na maioria das vezes, quando o escoamento é considerado em um modelo tri-dimensional, não se incluem os fenômenos viscosos, utilizando-se ao invés as equações de Euler, ou quando os efeitos viscosos estão incluídos (equações de Navier-Stokes), os modelos utilizados, são bi-dimensionais. Outro aspecto de evolução a ser notado, é a crescente inclusão dos modelos de turbulência nos escoamentos viscosos.

É importante notar ainda, que em todos esses casos, o movimento das palhetas é imposto, e as malhas se deslocam e deformam, de acordo com esse movimento. Os movimentos são impostos, de maneira tal, que respeitem formas modais previamente calculadas, ou assumidas, levando em conta a fase entre cada palheta, calculando o trabalho aerodinâmico por ciclo, e esperando-se que o *flutter* ocorra em determinada condição. Nesses trabalhos, o trabalho aerodinâmico por ciclo, calculado através do produto da força que age na palheta pela amplitude de vibração especificada em um ciclo de oscilação, é chamado de amortecimento

aerodinâmico, porém não é uma medida que pode ser comparada, quantificada ou mesmo incluída de forma compatível ao amortecimento estrutural. Este nome é dado somente porque é uma indicação da estabilidade do sistema.

Com esses movimentos impostos, as equações do fluido são ligeiramente modificadas de forma a incluir o movimento da malha. Entretanto, nenhuma consideração ou cálculo estrutural é feito ou incluído nos modelos. De acordo com Sayma (Sayma et al., 1998), existem algumas implicações desta abordagem que simplificam o problema, tais como, a frequência de *flutter* do sistema aeroelástico tem de ser assumida igual à frequência natural do sistema estrutural. Nenhuma interação entre os diversos modos ocorre. A abordagem somente é válida quando o sistema aeroelástico tenha chegado a uma condição de regime permanente e, por fim, se o modo de *flutter* não é conhecido previamente, todas as possíveis combinações de fase entre as palhetas precisam ser tentadas. Dessa maneira, se faz necessário que o modelo estrutural seja incluído na modelagem, de forma a interagir com o modelo do escoamento.

Caminhando nessa direção, de incluir o modelo estrutural nos cálculos, com um modelo bem simples, bi-dimensional e utilizando as equações de Euler e Navier-Stokes, Hwang (Hwang e Fang, 1999) apresenta um estudo, comparando cálculos não-viscosos e viscosos, chegando à conclusão que, em alguns casos a viscosidade tem efeito amortecedor. O modelo de fluido utilizado é discretizado através do método dos volumes finitos, utilizando, nos cálculos viscosos, um modelo de turbulência. O modelo estrutural é muito simples, considerando os aerofólios rígidos, mas podendo movimentar-se na vertical e rotacionar. Para tanto, são consideradas molas, com as equações sendo integradas no tempo, pelo Método de Runge-Kutta de quarta ordem, juntamente com as equações do fluido, onde existe uma malha que se deforma.

Um modelo mais elaborado é apresentado por Sayma (Sayma et al., 1998). Neste modelo, as equações de Navier-Stokes tri-dimensionais são resolvidas, introduzindo-se um modelo de turbulência. Os modos de vibração são calculados previamente pelo método dos

elementos finitos e um modelo linear modal é utilizado para o cálculo estrutural conjugado com o fluido. Os dois modelos são integrados no tempo, sendo ligados por uma troca de condições do contorno a cada passo de tempo. As vantagens desta abordagem são justamente de que nenhuma hipótese sobre os modos e frequências críticas de vibração tiveram que ser assumidas previamente e que observa-se a interação entre diferentes modos. No início de uma análise, um cálculo em regime permanente é feito e então uma perturbação é dada às palhetas em uma dada forma modal. Então o sistema é calculado no tempo, observando a sua resposta, seja ela amortecida ou auto-excitada, calculando o decaimento logarítmico. Esse modelo é um dos mais completos encontrados, porém é ainda de alto custo computacional de processamento bem como de memória.

A modelagem integrada do fluido interagindo com a estrutura, tri-dimensional, incluindo os efeitos viscosos e modelos de turbulência, de uma cascata de palhetas completa, ainda permanece um desafio grande. Isto ocorre devido à complexidade do escoamento dentro da turbina, sendo muitas vezes transônico, envolvendo choques e devido também à complexidade estrutural, quando se inclui um estágio inteiro de palhetas. Os modelos aerodinâmicos utilizados vêm avançando, incluindo mais efeitos físicos quanto possível. Mais recentemente, algumas linhas de pesquisadores, vêm também se utilizando dos benefícios trazidos na introdução de um modelo estrutural na solução do problema, caracterizando um dos métodos da interação fluido-estrutura, cuja aplicação mais similar e desenvolvida é em asas de aeronaves. Entretanto, os custos computacionais dos modelos aplicados às palhetas, permanecem muito altos e não existe ainda um código que leve em conta todos esses efeitos e que seja passível de uso em projetos industriais.

### **2.1.2 Asas flexíveis**

Quando se fala em interação fluido-estrutura aplicada a asas de avião, as pesquisas, em alguns casos, encontram-se bastante avançadas. Isso porque o modelo de escoamento para estes casos é bem menos complicado do que para uma cascata de palhetas. Para a aeronave,

a asa é somente uma, enquanto que para um modelo de um estágio inteiro de palhetas, geralmente encontram-se mais de 10 palhetas. Em certos casos, para uma asa, o escoamento também é transônico, porém o mesmo tipo de escoamento é muito mais complicado em um estágio envolvendo várias palhetas, onde as ondas de choque de uma interferem nas outras, exigindo condições de contorno de entrada e saída especiais e mais elaboradas. Além disso, o modelo estrutural é consideravelmente mais complicado para várias palhetas, existindo várias condições de operação e de ângulos de fase entre as palhetas onde instabilidades podem ocorrer.

Como os modelos desenvolvidos para palhetas vêm conquistando o seu avanço, o caminho natural da pesquisa é introduzir os modelos estruturais para resolver conjuntamente com o modelo do fluido. Com isso, os modelos feitos para palhetas passam a utilizar os métodos e técnicas de solução atualmente desenvolvidos e em desenvolvimento para asas. Por essa razão é necessário conhecer os métodos utilizados para asas.

Já existem diversos modelos e diferentes abordagens tri-dimensionais utilizando as equações de Navier-Stokes, conjuntamente com modelos estruturais discretizados pelo método dos elementos finitos. Os modelos feitos para asas de avião, geralmente, incluem a estrutura como placas, e a discretização do domínio do fluido é menos complicada do que para estágios de turbinas com várias palhetas. Os modelos existentes são feitos para os casos estático ou mesmo dinâmico, e estes são organizados principalmente de dois modos diferentes: um modo fortemente acoplado e outro fracamente acoplado. O caso fracamente acoplado (Hwang e Fang, 1999) (Sayma et al., 1998), pode ser subdividido em dois: integrado ou modular. O caso integrado altera a fonte dos códigos computacionais utilizados na solução do problema, seja o código utilizado na solução do escoamento, seja o código utilizado na solução estrutural, integrando-os em um único. Embora, este método integre os códigos computacionais, as equações são resolvidas separadamente. No caso modular, fracamente acoplado, os códigos computacionais não são alterados para que se integrem em um único, permitindo que um grande número de programas, mesmo com código fechado, seja utilizado.

Na outra abordagem dos problemas de interação fluido-estrutura, o caso fortemente acoplado, o problema do escoamento, bem como o estrutural, são tratados como um só, em um único domínio. Nessa abordagem, as equações são reescritas. Porém as matrizes associadas à estrutura são muitas ordens de magnitude maiores que as matrizes associadas ao fluido. Isso causa dificuldades no momento da solução do problema. Como as matrizes, neste caso, são uma só, sua solução é numericamente ineficiente ou mesmo impossível. Alguns autores utilizam esse método, porém os casos estudados se limitam a casos bi-dimensionais e que não provam ser melhores e mais eficientes que a abordagem fracamente acoplada.

O trabalho de Donea (Donea et al., 1982) é um trabalho bastante referenciado na literatura. Nele os autores desenvolvem uma metodologia baseada no método dos elementos finitos para resolver o problema de interação fluido-estrutura transiente. Eles ressaltam a dificuldade que é encontrada em se tratar os problemas do fluido em uma malha que se movimenta. Isso porque existem duas abordagens na discretização de uma região de fluido (ou qualquer meio contínuo). A primeira é a Lagrangeana, onde a malha está contida na região de fluido e se move com ele (abordagem tradicional para a parte estrutural). A segunda é Euleriana, que trata a malha computacional como uma referência fixa, e que o fluido a atravessa (abordagem tradicional para fluidos). Então, os autores desenvolvem a sua abordagem em cima da generalização desses conceitos, a abordagem Lagrangiana-Euleriana arbitrária, conhecida também como o método ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*). Nessa generalização, a malha do fluido é tratada como uma referência que pode estar se movendo com uma velocidade arbitrária. Na verdade, o movimento da malha estará ligado ao movimento da estrutura. Então, novos termos, que levam em conta o movimento da malha, são inseridos nas equações que regem o fluido. Os autores desenvolvem o método e apresentam alguns resultados simples bi-dimensionais. Essa metodologia modifica ligeiramente as equações do fluido, porém mesmo assim, esse método é fracamente acoplado, pois a solução do fluido e da estrutura é feita separadamente, de forma sequencial.

No trabalho de Guruswamy (Guruswamy e Yang, 1981), os autores desenvolvem um código computacional que utiliza um procedimento aeroelástico para a análise de aerofólios

finos oscilando, com dois graus de liberdade somente (translação vertical e rotação). As equações do fluido, apesar de levarem em conta a compressibilidade, são baseadas em escoamento potencial, onde a viscosidade é desprezada. Elas não são modificadas de forma a levar em conta o movimento da malha. Então, as equações de movimento do aerofólio são integradas no tempo, e a cada instante são calculadas a força e momento que agem sobre o aerofólio.

Em outro trabalho, Guruswamy (Guruswamy, 1988) melhora o modelo para o fluido, resolvendo agora as equações de Euler (sem ainda levar em conta a viscosidade), para o caso tri-dimensional, através do método das diferenças finitas. O modelo estrutural considerado é baseado nas formas modais previamente calculadas por um modelo de elementos finitos. Os cálculos são feitos para metade de uma asa, para várias condições de escoamento. Neste caso também, as equações do fluido não são modificadas e as forças aerodinâmicas são calculadas a cada instante de tempo e aplicadas em 'pontos aerodinâmicos de controle'. A malha, a cada passo de tempo é atualizada, com base na malha anterior e respeitando algumas restrições.

Guruswamy (Guruswamy e Byun, 1993), melhora os modelos do escoamento e estrutural, com base sempre na mesma metodologia de seus outros trabalhos. Agora, as equações de Navier-Stokes são resolvidas e um modelo de elementos finitos para cascas é utilizado. A utilização de elementos finitos para a parte estrutural é comentada pelo autor, como sendo melhor, pois é capaz de tratar estruturas mais complexas, com maior precisão. A cada passo de tempo, as forças e deslocamentos nas fronteiras do fluido/estrutura são trocadas. As forças são inicialmente calculadas para cada elemento da estrutura, e então interpoladas para cada nó. Os deslocamentos também são interpolados para cada nó do fluido, através dos deslocamentos obtidos de cada nó estrutural. O autor ressalta que esse procedimento não conserva o trabalho feito pelas forças aerodinâmicas e é necessário o uso de malhas finas, tanto para a estrutura, como para o fluido.

É interessante notar o desenvolvimento dos trabalhos, em que na maioria das vezes, o mesmo caminho é seguido por outros autores, mostrando a natural evolução, conside-

rando inicialmente sistemas mais simples e então partindo para sistemas mais complicados. Inicialmente, resolve-se equações simplificadas do fluido, bi-dimensionais, com um modelo estrutural também bastante simplificado, baseado em molas equivalentes. Então um modelo tri-dimensional é utilizado, inicialmente com as equações de Euler. Por fim, as equações de Navier-Stokes são utilizadas, juntamente com um modelo de elementos finitos estrutural, com procedimentos de interpolação, tanto para as forças aplicadas na malha estrutural, como para deslocamentos para a malha do fluido.

Bendiksen (Bendiksen, 1991), indo em outra direção, propõe, em seu trabalho, a abordagem fortemente acoplada, em que o fluido e estrutura são considerados como um só domínio. Porém, o modelo é ainda bi-dimensional, aplicado a cascatas de palhetas e o autor afirma que a maior vantagem do método é calcular mais precisamente, sem erros a troca de energia entre os domínios do fluido e da estrutura. Entretanto, essa abordagem ainda não provou ser mais vantajosa que os outros métodos fracamente acoplados, solucionados de forma sequencial.

Bhardwaj (Bhardwaj et al., 1998) apresenta um procedimento para calcular a deflexão estática de asas submetidas a um escoamento. É utilizado um código computacional, que resolve as equações de Navier-Stokes, com modelo de turbulência, acoplado a um outro código que resolve, via método dos elementos finitos, a parte estrutural da asa. Os códigos não são modificados, mas somente é montado um esquema de comunicação, interpolando as cargas aerodinâmicas e também os deslocamentos. Neste trabalho, os autores explicitam com detalhes os métodos de interpolação e resultados de asas reais são comparados com boa concordância.

Farhat (Farhat et al., 1998) propõe um método sequencial de cálculo, porém modificando as equações do fluido de modo a levar em conta o movimento da malha, utilizando para isso o método ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*). No trabalho apresentado, uma abordagem muito importante é explicada, no que se refere ao movimento e acomodação da malha do fluido. É a abordagem da 'pseudo-estrutura', onde de acordo com os deslocamentos da

superfície fluido-estrutura, a malha do fluido se movimenta e deforma, calculando-se os deslocamentos de cada nó como se esta fosse uma estrutura. É um passo intermediário que visa acomodar a malha da melhor maneira possível, sem ter de refazê-la. Neste caso, as equações de Navier-Stokes também são utilizadas, discretizadas pelo método dos volumes finitos, juntamente com um solver estrutural baseado no método dos elementos finitos. O trabalho enfoca o problema de conservação de energia e movimento entre as superfícies do fluido e da estrutura, quando estas não possuem nós que coincidem, ou seja, a maioria dos casos. São explicados também os métodos de interpolação das cargas aerodinâmicas, bem como da superfície de deslocamento do fluido. É importante notar nesse caso que, dois códigos computacionais diferentes somente poderiam ser utilizados, se o código do fluido incluísse o movimento da malha na solução das equações do escoamento.

Klein (Klein e Gerlach, 1998) apresenta um trabalho bastante interessante na área de micro-dispositivos, onde utiliza dois programas comerciais de elementos finitos para simular a interação fluido-estrutura, o ANSYS para a estrutura e o FLOTRAN para o fluido. A solução é bi-dimensional, e esforços são aplicados para trabalhar com ambos programas de modo que um passe informações para o outro e vice-versa. Os autores comentam ainda que a vantagem de tal abordagem é a desnecessária modificação nas equações do fluido, podendo ser utilizados qualquer programa comercial para resolver cada uma das disciplinas envolvidas. Para isso, basta somente um modo de troca de informações. São comparados ainda, dois métodos de solução: o método de Newton-Raphson e o método de Gauss-Seidel. Mostra-se que para problemas fortemente acoplados, como no caso de escoamento de água, é necessário o uso do método de Newton-Raphson para a solução.

### **2.1.3 Placas flexíveis**

Embora o modelo escolhido para este trabalho seja uma placa plana fina flexível, devido às simplificações inerentes, os casos estudados pelos diversos trabalhos da literatura envolvendo placas têm um enfoque diferente do adotado aqui. Isso acontece pois a placa nos dois

enfoques, possui funções diferentes.

No caso deste trabalho, a placa flexível faz o papel de um aerofólio, com a intenção de substituir por um modelo simplificado, uma palheta de turbina ou mesmo asa de avião. A placa é engastada em um de seus lados, com os outros três lados livres, onde o escoamento engloba toda a sua superfície, ficando a placa imersa no mesmo.

Na maioria dos casos estudados na literatura, o modelo de placa faz parte de uma superfície, tal como uma asa ou fuselagem de uma aeronave, ou pode ser parte de grandes estruturas espaciais, como painéis solares. Nesse caso a placa é estudada, geralmente com todos os seus lados engastados. O fluido está em contato somente com uma de suas superfícies, portanto o escoamento não engloba toda a placa. Assim, o objetivo é a investigação da susceptibilidade a *flutter* da placa. Para isto, vários tipos de modelos estruturais são utilizados. São utilizados modelos padrão para placas (Dowell, 1971), considerando expansões modais e incluindo as forças aerodinâmicas através de versões simplificadas das equações do fluido. Além disso, em alguns casos (Chandiramani et al., 1996), o comportamento de modelos de placas incorporando não-linearidades geométricas é estudado. Há ainda casos em que uma condição de *flutter* é calculada, porém sem a utilização do fluido, mas com uma força agindo na direção axial da placa (Higuchi e Dowell, 1990) (Higuchi e Dowell, 1992).

O modelo de placas a ser utilizado nesse trabalho possui uma função diferente dos modelos de placa presentes na maioria dos trabalhos que tratam desse assunto. Como visto, nestes trabalhos, a placa faz parte de uma superfície e o modelo em si é o objeto de estudo. Já o modelo estrutural baseado em placas utilizado nesse trabalho, é simplesmente escolhido e utilizado em função das simplificações envolvidas. O que se objetiva com esse trabalho, é buscar uma metodologia que traga a solução de problemas de interação fluido-estrutura de uma forma geral. Nesse sentido o modelo estrutural pode ser qualquer baseado no método dos elementos finitos, e não necessariamente uma placa. Sendo assim, uma revisão mais aprofundada sobre placas não se faz necessária dentro do contexto deste trabalho, onde o foco do estudo é a interação fluido-estrutura.

## 2.2 Conclusão

Com todos os trabalhos citados aqui, pode-se ver a grande diversidade de modelos para o fluido utilizados na solução do escoamento em cascatas de palhetas. Vê-se que os modelos vêm melhorando e incluindo mais efeitos quanto possível. A evolução demonstra a necessidade de utilização de um modelo tri-dimensional das equações de Navier-Stokes, incluindo ainda um modelo de turbulência.

Há ainda, a necessidade mostrada em alguns trabalhos mais recentes (Sayma et al., 1998) (Hwang e Fang, 1999) aplicados em palhetas, da utilização dos métodos desenvolvidos para asas. Os deslocamentos da malha não são mais impostos, mas sim é incluído o modelo estrutural no processo de solução. Isso, engloba as vantagens já discutidas anteriormente.

As diferentes metodologias de interação fluido-estrutura mais utilizadas e desenvolvidas para asas de aeronaves foram discutidas. Existem vários métodos de solução e não há ainda um consenso sobre o melhor. Cada um possui a sua particularidade, suas vantagens e desvantagens. Dentro dessas metodologias, será utilizada neste trabalho, o método fracamente acoplado, permitindo que dois códigos computacionais diferentes interajam entre si, sendo a solução de forma sequencial e sem a necessidade de modificação das equações do escoamento.

Além de simular a interação fluido-estrutura em regime permanente, de forma a obter a posição de equilíbrio estática para a placa, o principal objetivo desse trabalho é também o de preencher uma lacuna nessa área. Como visto nesta breve descrição da bibliografia disponível, todos os autores somente se preocupam no cálculo de instabilidades do sistema. Somente é calculada a condição de instabilidade ou de estabilidade das palhetas. O objetivo deste trabalho é o de, através do método de introdução de pequenas perturbações, obter uma rigidez e amortecimento equivalentes, provenientes do fluido. Isso permitiria ao analista, a posterior inclusão desses coeficientes nas matrizes estruturais do sistema, incluindo os efeitos do fluido, dentro de certas faixas de operação.

# Capítulo 3

## Bancada de testes experimentais

### 3.1 Introdução

Para a realização dos testes experimentais, uma bancada de testes foi projetada e construída com o objetivo de obter as curvas de Função de Resposta em Frequência (FRF) da placa flexível. Essa bancada foi ainda acoplada a um túnel de vento, de modo que as FRFs fossem também obtidas quando a placa é submetida a um escoamento com determinada velocidade e ângulo de ataque. Os testes foram realizados em uma placa fina flexível, engastada em uma de suas extremidades, feita de aço e com dimensões de  $340 \times 100 \times 1$ mm.

Apresenta-se então, neste capítulo, uma descrição detalhada da bancada de testes experimentais, com seus componentes, instrumentação e sistema de aquisição de sinais.

É importante notar que a adoção do modelo de placa, facilita ainda a construção e condições de engaste da mesma. Se um aerofólio fosse escolhido, sua construção e engaste ficariam mais complicados.

## 3.2 Componentes e funcionamento da bancada de testes experimentais

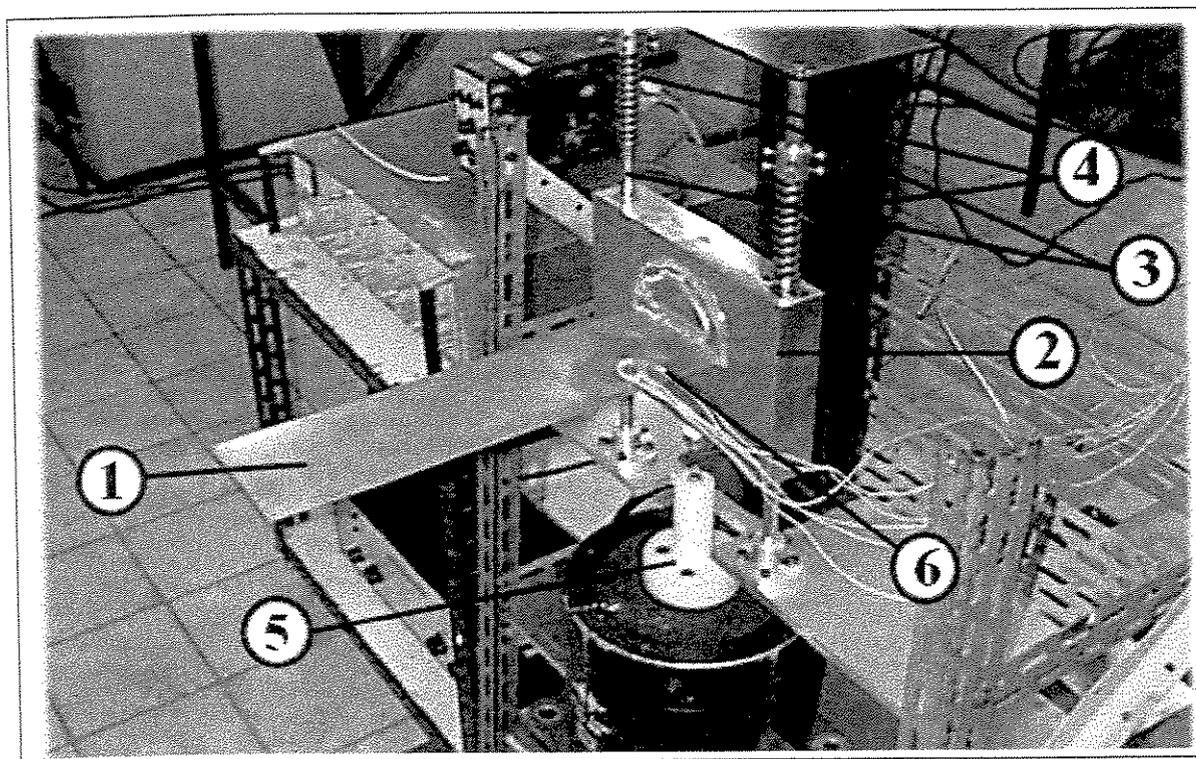
A bancada de testes experimentais, com seus diversos componentes e a instrumentação instalada pode ser vista na Figura 3.1. A placa flexível(1) é engastada em uma de suas extremidades. A fim de que não se perturbe o escoamento dentro do túnel de vento(7) (Figura 3.2), somente a placa está dentro do mesmo. Por isso ela atravessa uma das paredes do túnel e é engastada em uma massa(2), que serve como suporte que fica o mais próximo possível da parede do túnel. Esta massa(2) permite fixar a placa(1) com determinado ângulo de ataque conhecido. A massa(2) está ainda conectada em dois eixos(3), por meios de rolamentos axiais, que permitem movimento somente na direção vertical. A massa(2) também é suportada por molas(4) que permitem o ajuste da posição vertical da placa.

Um excitador acoplado à massa(2) através de uma célula de carga(5), é utilizado para excitar a massa(2) e a placa(1) na direção vertical. Um extensômetro(6) é conectado à placa(1). Utilizando os sinais da célula de carga e do extensômetro, é possível obter a Função de Resposta em Frequência (FRF) da massa + placa flexível. Na Figura 3.2 pode-se ver a bancada acoplada ao túnel de vento.

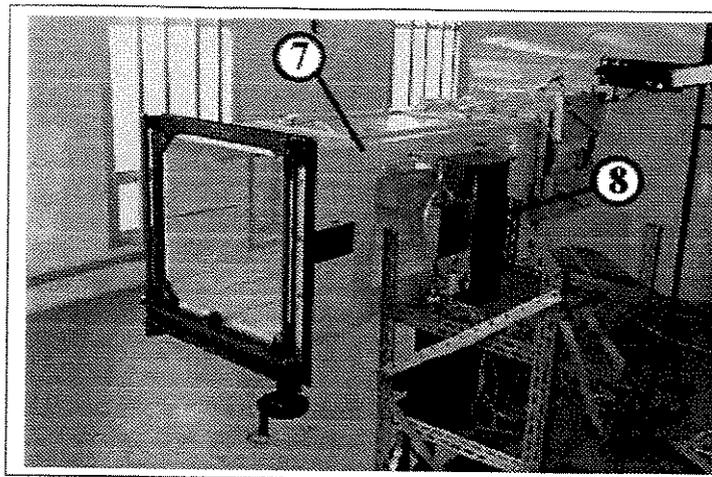
Assim, enumerando os componentes da bancada de testes, tem-se:

1. placa fina flexível instrumentada com extensômetro(6);
2. massa que engasta a placa e que permite fixá-la com determinado ângulo de ataque conhecido;
3. eixos que servem de guias, conectados à massa(2) que permitem somente o movimento vertical do conjunto;
4. molas que suportam a massa(2) e que permitem o ajuste da posição vertical da placa(1);

5. excitador conectado à uma célula de carga, que por sua vez está conectado à massa(2);
6. extensômetro conectado à placa(1);
7. túnel de vento Plint & Partners, de seção retangular, instrumentado com *tubo de pitot*,
8. sistema de aquisição de sinais.

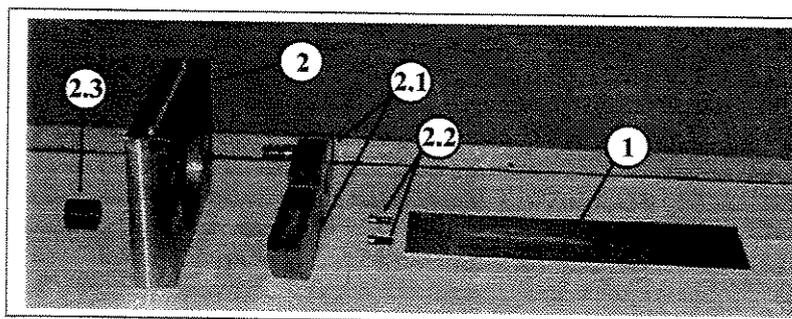


**Figura 3.1:** Foto da bancada de testes experimentais com seus componentes e instrumentação.  
(1) placa plana flexível, (2) massa, (3) eixos, (4) molas, (5) excitador + célula de carga, (6) extensômetro.



**Figura 3.2:** Bancada de testes experimentais acoplada com o túnel de vento. (7) túnel de vento, (8) sistema massa-placa-excitador.

A Figura 3.3 mostra em detalhes a massa principal(2) onde é engastada a placa(1). Pode-se observar que da massa principal foi retirada uma porção de material em forma de um cilindro. Esse cilindro foi então dividido em duas metades(2.1), que podem ser vistas na Figura 3.3. Entre estas duas metades é posicionada a placa flexível(1) e as metades do cilindro unidas através de parafusos(2.2), engastando assim a placa. Este conjunto (1+2.1+2.2) é montado e encaixado na massa(2), onde existe um furo passante por onde passa um parafuso soldado em uma das faces de uma das metades do cilindro(2.1). A esse parafuso é encaixada uma porca(2.3), que através do seu aperto trava o conjunto, fixando um determinado ângulo de ataque.



**Figura 3.3:** Detalhe da massa principal(2), mostrando o engastamento da placa flexível.

A Figura 3.4 mostra ainda um desenho esquemático da bancada de testes acoplada com o túnel de vento. Pode-se observar a direção da excitação e o movimento da massa + placa flexível na direção vertical.

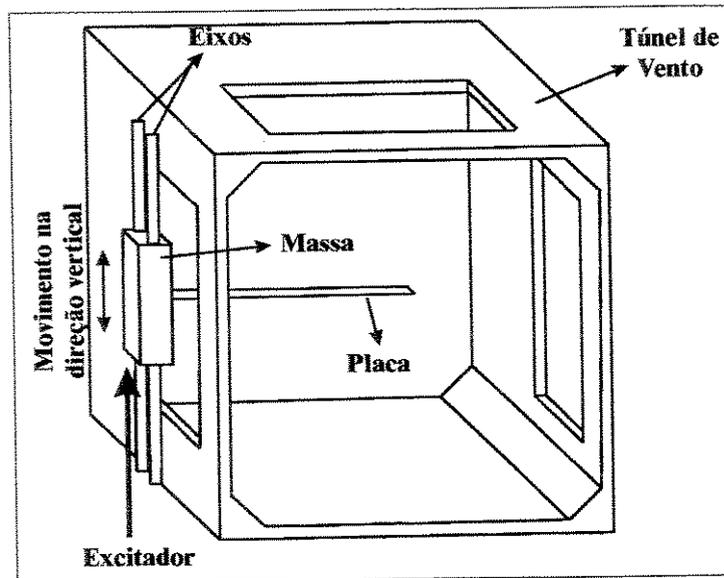


Figura 3.4: Desenho esquemático mostrando o funcionamento da bancada de testes experimentais.

### 3.3 Instrumentação e sistema de aquisição de dados

Para que a Função de Resposta em Frequência (FRF) da placa flexível, quando excitada em sua base, possa ser determinada, a instrumentação da bancada de testes experimentais é feita basicamente com uma célula de carga e com um extensômetro. Além desses dois instrumentos de medição, é necessário ainda todo um sistema de aquisição de dados, para que os sinais elétricos possam ser adquiridos e convertidos em arquivos em um computador. Assim, a instrumentação e o sistema de aquisição de dados compreende:

- **excitador**, Brüel & Kjær, modelo 1808, que está conectado à célula de carga, e esta à base da massa, onde está engastada a placa flexível. O excitador excita a placa flexível

engastada de acordo com um sinal enviado a ele por meio da placa de aquisição de sinais;

- **célula de carga**, Brüel & Kjær, modelo 8200 (sensibilidade de  $3,82 \text{ pC/N}$ ), que está conectada entre a base da massa principal e o excitador, e mede a força aplicada na massa principal (veja detalhe na Figura 3.5);
- **condicionador de sinais** da célula de carga, Brüel & Kjær, modelo 2626, que recebe o sinal da célula de carga, amplificando-o e enviando-o à placa de aquisição;
- **extensômetro** tipo roseta a  $45^\circ$ , KYOWA, modelo KFC-1-D17-11, com diâmetro de  $5 \text{ mm}$ , que mede a deformação em três direções da placa flexível em um determinado ponto (veja detalhe na Figura 3.6);
- **ponte de Wheatstone** Philips, modelo PR 9330, com 4 canais disponíveis, que recebe o sinal de cada direção da deformação e envia para a placa de aquisição de sinais;
- computador pentium 166 MHz, com placa de aquisição de dados modelo DT-EZ01 da Data Translation com 8 canais disponíveis;
- *software* DT-VEE da Hewlett Packard, versão para Windows'95 para aquisição e análise de dados.

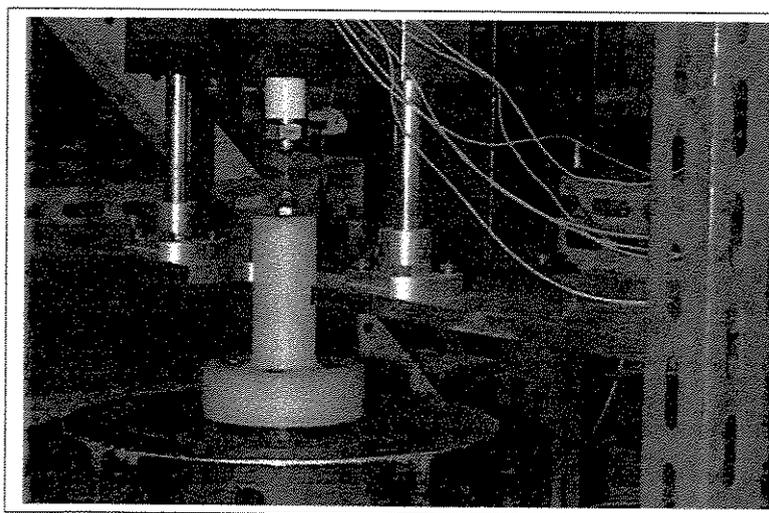


Figura 3.5: Detalhe da célula de carga acoplada ao excitador e à base da massa.

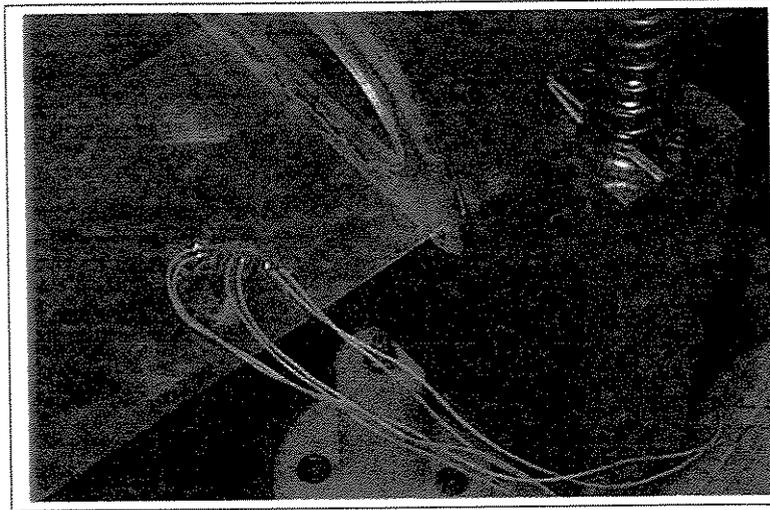


Figura 3.6: Detalhe do extensômetro colado na placa flexível.

## 3.4 Preparação experimental

Uma vez que a bancada de testes experimentais foi montada, e que toda a instrumentação e sistema de aquisição de dados foi preparada, montada e conectada, passa-se à fase de preparação experimental. Denomina-se aqui, preparação experimental, à fase de ajuste da sensibilidade do condicionador de sinais da célula de carga e calibração do extensômetro. Isso é necessário para que se possa relacionar corretamente os sinais adquiridos em *Volts* com as grandezas físicas. Para tanto, essa seção estará dividida em duas partes: uma contendo o ajuste feito para a célula de carga e outra para o extensômetro.

### 3.4.1 Célula de carga

O procedimento de preparação e ajuste da célula de carga é relativamente simples. Inicialmente, deve-se ajustar o condicionador de sinais da célula de carga com a sensibilidade da mesma, em  $pC/N$ , de acordo com a carta de calibração fornecida pelo fabricante. Deve-se ajustar também o ganho do condicionador, de modo que o sinal a ser medido não exceda o valor máximo de saturação e desse modo seja cortado. O ganho também determina a relação

do sinal em *Volts* ( $V$ ) com a força em *Newtons* ( $N$ ). Por exemplo, se o ganho for de 1, tem-se uma relação de que  $1V$  equivale a  $1N$ .

Feito isso, para saber o valor do sinal adquirido, basta dividir o sinal em *Volts* pelo ganho escolhido para ter o sinal em *Newtons*.

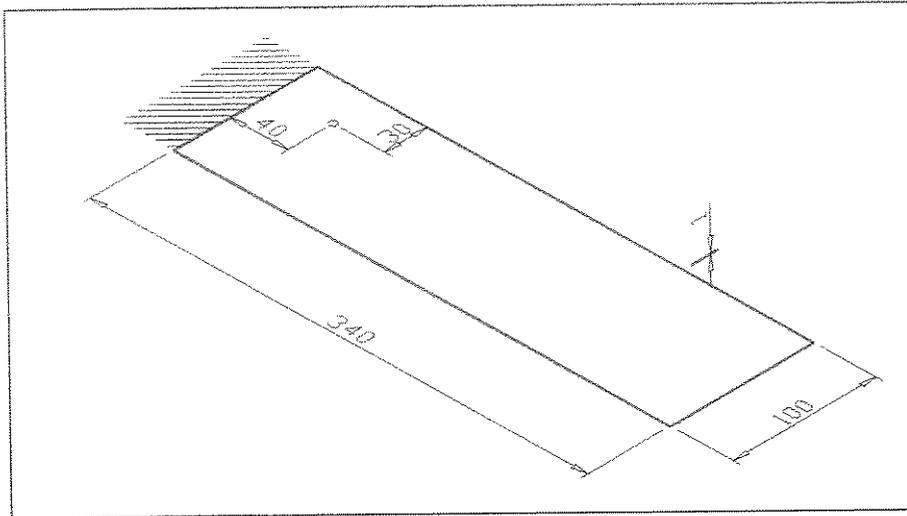
### 3.4.2 Extensômetro

Antes de tratar da calibração do extensômetro propriamente dita, é importante comentar sobre a escolha da posição mais favorável à colagem do extensômetro na placa.

É desejável que o local em que sejam medidas as deformações da placa, apresente níveis de deformações relativamente mais elevados quando comparados com outras regiões da placa. Isto porque, no local onde as deformações são maiores, é onde se terá uma maior sensibilidade na medição, ou seja, um sinal de maior amplitude, mais destacado do ruído.

O modelo de placa flexível simplificado escolhido para este trabalho consiste em uma placa retangular fina. Essa placa possui dois modos de vibração básicos, mudando somente o número de linhas modais, que são o de flexão e o de torção. Então, foi feito um estudo com o auxílio do *software* ANSYS, calculando a posição da placa onde as deformações são maiores, levando em conta os primeiros modos de flexão, bem como o de torção. Para os modos de flexão, as melhores posições são perto do engaste, considerando-se a deformação na direção do comprimento da placa, ou  $\varepsilon_x$ . Já para o modo de torção, as melhores posições, também são perto do engaste, porém considerando a deformação  $\gamma_{xy}$ . Então, decidiu-se posicionar o extensômetro na posição indicada na Figura 3.7, com as dimensões reais da placa também mostradas.

Testes realizados antes da calibração, mostraram que medindo o sinal das deformações  $\varepsilon_{0^\circ}$  e  $\varepsilon_{90^\circ}$  e analisando o sinal no domínio da frequência através da Transformada de Fourier



**Figura 3.7:** Localização do extensômetro.

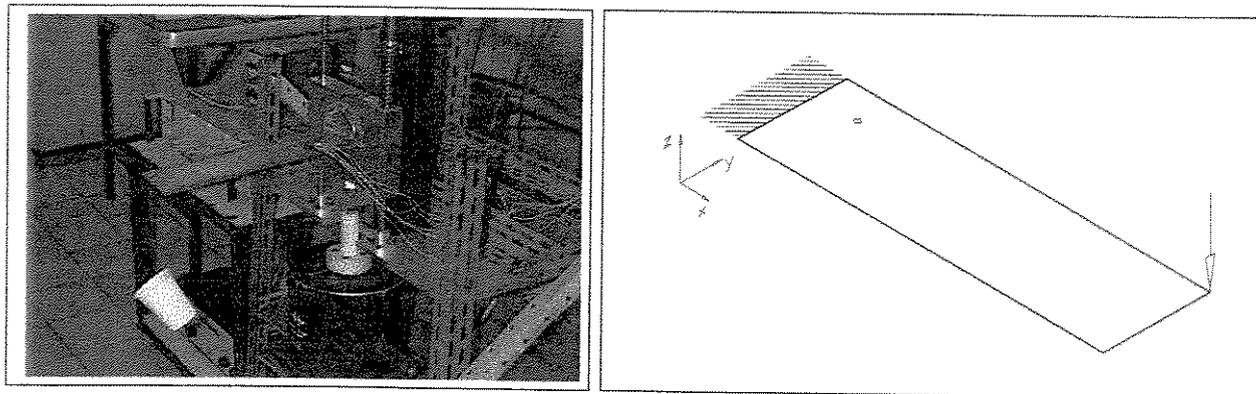
(*FFT - Fast Fourier Transform*), não mostravam a existência da terceira frequência natural, que corresponde ao primeiro modo de torção. Esses testes somente acusavam a existência dos modos de flexão. Porém medindo a deformação a  $45^\circ$ , ou  $\varepsilon_{45^\circ}$ , os testes mostram a existência tanto dos modos de flexão quanto de torção. Isto ocorre, pois os modos de flexão estão diretamente ligados às tensões na direção do comprimento da placa, já os modos de torção estão ligados às tensões cisalhantes. Então, medindo somente a deformação a  $45^\circ$ , ou  $\varepsilon_{45^\circ}$ , é possível detectar todos os modos, pois transformando a deformação do sistema de coordenadas cartesiano para as deformações realmente medidas pelo extensômetro roseta a  $45^\circ$  ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $45^\circ$ ), elas são relacionadas por:

$$\varepsilon_{0^\circ} = \varepsilon_x \quad ; \quad \varepsilon_{90^\circ} = \varepsilon_y \quad e \quad \varepsilon_{45^\circ} = \frac{\gamma_{xy} + \varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad (3.1)$$

ou seja, a deformação a  $45^\circ$  medida pelo extensômetro é proporcional a  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , sendo capaz de captar os modos de flexão bem como os de torção. Portanto, o sinal utilizado para todos os testes foi a deformação à  $45^\circ$ . Além disso, medindo somente esse sinal, faz-se necessária a calibração de só um canal.

Para a calibração, foi aplicada uma força pontual na ponta da placa (vide Figura 3.8), pendurando pesos padrões através de um fio de *nylon*. Com isso, sabe-se exatamente a

posição, direção e módulo da força aplicada na placa.



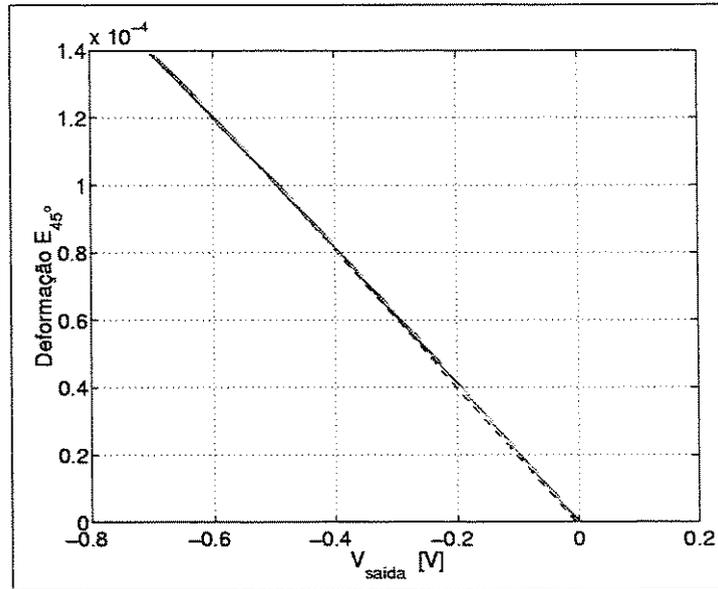
**Figura 3.8:** Aplicação das forças através dos pesos padrão.

Foram utilizados no total 11 pesos diferentes para a calibração. Com a ponte balanceada (zerada), foram-se adicionando os pesos até atingir a força mais alta e, em seguida, retirando os mesmos, de modo a verificar se ocorria alguma forma de histerese. Para cada força aplicada media-se a voltagem de saída da ponte. Com isso tem-se uma relação entre força aplicada e voltagem de saída. Porém, necessita-se da relação entre voltagem de saída e deformação a  $45^\circ$ . Para obter essa relação faz-se o uso do modelo matemático via elementos finitos, que foi desenvolvido em MATLAB, e será apresentado no Capítulo 5. Aplicando as forças correspondentes, com uma discretização refinada (malha de  $20 \times 20$  elementos), obtêm-se as deformações teóricas  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  correspondentes, exatamente no ponto em que o extensômetro foi colado. Essas deformações são transformadas, via equação (3.1), para a obtenção da deformação a  $45^\circ$ . Com isso, consegue-se outra relação, a relação teórica de força aplicada e deformação correspondente, que com a relação experimental de força aplicada e voltagem, obtém-se a relação desejada de **deformação a  $45^\circ$  versus voltagem**.

Assim, de posse dos pontos, ajusta-se uma reta entre eles, através do método dos mínimos quadrados, supondo uma aproximação linear. No teste de calibração, o procedimento de colocar e tirar os pesos foi feito duas vezes, gerando 4 retas, vistas na Figura 3.9. Vê-se, através da Figura 3.9, a ausência de histerese e a linearidade na curva de calibração. Assim, a constante de calibração é obtida tirando-se a média entre as 4 inclinações das

curvas, obtendo-se a relação:

$$\varepsilon_{45^\circ} = -2,0005 \cdot 10^{-4} \cdot V_{\text{saída}} \quad (3.2)$$



**Figura 3.9:** Curva de calibração.

Os valores de tensão da deformação  $\varepsilon_{45^\circ}$  são mostrados na Tabela 3.1.

## 3.5 Conclusão

Apresentou-se aqui, todo um capítulo referente à bancada de testes experimentais. Foram apresentados todos os aspectos pertinentes e importantes quanto aos componentes e funcionamento da bancada. A instrumentação e sistema de aquisição de sinais necessários para a obtenção das Funções de Resposta em Frequência (FRF), quando a placa está sem a influência do fluido (bancada desacoplada do túnel de vento) e quando a placa está sob a influência do fluido (bancada acoplada ao túnel de vento), foram descritas. Além disso, a preparação experimental, englobando os ajustes de sensibilidade e calibração do extensômetro também foram descritos.

$F[N]$	$V_{saída}[V]$	$F[N]$	$V_{saída}[V]$
0.000	-0.0007	0.000	0.0009
- 0.3149	-0.0563	- 0.3149	-0.0557
- 0.6229	-0.1085	- 0.6229	-0.1080
- 1.0938	-0.1895	- 1.0938	-0.1891
- 1.5568	-0.2741	- 1.5568	-0.2703
- 1.8717	-0.3292	- 1.8717	-0.3256
- 2.1798	-0.3818	- 2.1798	-0.3801
- 2.6301	-0.4680	- 2.6301	-0.4623
- 2.9518	-0.5245	- 2.9518	-0.5214
- 3.2667	-0.5864	- 3.2667	-0.5821
- 3.5748	-0.6432	- 3.5748	-0.6375
- 3.8799	-0.7026	- 3.8799	-0.6961
- 3.8799	-0.7027	- 3.8799	-0.6960
- 3.5748	-0.6459	- 3.5748	-0.6392
- 3.2667	-0.5910	- 3.2667	-0.5843
- 2.9518	-0.5321	- 2.9518	-0.5239
- 2.6301	-0.4741	- 2.6301	-0.4653
- 2.1798	-0.3928	- 2.1798	-0.3849
- 1.8717	-0.3381	- 1.8717	-0.3250
- 1.5568	-0.2832	- 1.5568	-0.2683
- 1.0938	-0.2039	- 1.0938	-0.1884
- 0.6229	-0.1208	- 0.6229	-0.1071
- 0.3149	-0.0682	- 0.3149	-0.0536
0.000	-0.0121	0.000	0.0016

**Tabela 3.1:** Valores da tensão de saída quando aplicadas as forças correspondentes.

Com tudo isso finalizado, pôde-se conduzir os testes experimentais, inicialmente com a bancada desacoplada do túnel de vento, onde mede-se as frequências naturais e fatores de amortecimento estruturais. Em seguida, com a bancada acoplada ao túnel, mede-se as frequências naturais e fatores de amortecimento estruturais, agora acrescidos da influência do fluido. Os testes e seus resultados serão apresentados no Capítulo 8.

# Capítulo 4

## Fluido

### 4.1 Introdução

Para realizar um trabalho na área de escoamento de fluidos, é necessária a compreensão detalhada de todos os aspectos físicos e matemáticos dos tipos de escoamentos e de suas equações. A área da modelagem de escoamentos não é trivial, bem como a solução dos problemas via métodos numéricos através da CFD (*Computational Fluid Dynamics*), que está se tornando cada vez mais utilizada devido aos avanços tanto de velocidade dos computadores como dos próprios métodos numéricos. Portanto, o pesquisador engajado nessa área deve ter um sólido conhecimento das origens das equações de conservação que regem os escoamentos, dos tipos e aspectos matemáticos de cada equação, bem como das hipóteses e simplificações que podem ser feitas. De acordo com cada hipótese e/ou simplificação assumida, as equações de conservação podem mudar de classificação, representando uma solução diferente, e conseqüentemente um método de atacar o problema numericamente totalmente diferente, surgindo novas dificuldades e cuidados a serem tomados.

Dentro desse contexto, é objetivo desse capítulo realizar uma breve discussão de como obter as equações de conservação que regem os fluidos e apresentá-las. Serão mostradas as

diversas simplificações que podem ser feitas nas equações que levam aos diferentes regimes de escoamento. Uma discussão sobre as características e classificação das equações também será feita.

É importante ressaltar que somente os aspectos básicos serão comentados devido à existência de uma vasta literatura sobre o assunto. Talvez, para um pesquisador dedicado exclusivamente à área da mecânica dos fluidos, grande parte desse capítulo seja muito básica e deveria ser retirada devido à redundância das informações. Entretanto esse trabalho situa-se em uma área de transição entre mecânica dos fluidos e mecânica dos sólidos. Por essa razão, seria ideal para os pesquisadores mais atuantes na área da mecânica dos sólidos, ter uma breve revisão dos conceitos da mecânica dos fluidos.

A utilização de um *software* comercial para resolver a parte da mecânica dos fluidos desse trabalho se fez necessária devido à impossibilidade, a nível de mestrado, de elaboração de um programa computacional que resolvesse as equações de Navier-Stokes, tal a complexidade e extensão da tarefa. Portanto o FLOTRAN, um pacote de fluidos do ANSYS, baseado no método dos elementos finitos, foi escolhido para a utilização na solução do escoamento. O *software* resolve as equações de Navier-Stokes e faz parte de um pacote que permite a utilização das facilidades de pré- e pós-processamento, como geração de malhas e visualização dos resultados. Além disso, há a possibilidade de interação com outro *software* para a implementação da interação fluido-estrutura. Sendo assim, este capítulo também apresentará a malha e condições de contorno utilizadas na solução do escoamento em torno da placa, além de discutir um pouco do método utilizado pelo FLOTRAN para resolver o escoamento.

## 4.2 Equações governantes da mecânica dos fluidos

Todas as equações que governam a mecânica dos fluidos são baseadas e obtidas através dos princípios de conservação. Os princípios de conservação aplicados para se obter as equações são os de *massa*, *quantidade de movimento* e *energia*. Aplicando-se a conservação de massa

e energia, quantidades escalares, chega-se a uma equação para cada princípio. Aplicando-se a conservação da quantidade de movimento, quantidade vetorial, chega-se a três equações, uma para cada componente de um escoamento em três dimensões.

Os princípios de conservação de uma determinada propriedade, seja ela massa, quantidade de movimento ou energia, são aplicados a um volume de controle e respeitam simples leis físicas: *massa é conservada*, *energia é conservada* e quantidade de movimento pode ser variada pela ação de forças externas e respeita a *segunda Lei de Newton do movimento*.

É importante ressaltar aqui, que a seguir serão mostradas as equações integrais e que elas se baseiam no *Teorema de Transporte de Reynolds*. Em seguida é aplicado o *Teorema da Divergência de Gauss*, transformando as equações de sua forma integral na forma diferencial. O objetivo a seguir é somente apresentar as equações e ressaltar os seus significados físicos. O detalhamento matemático completo pode ser encontrado em literatura adequada.

Outro aspecto importante a ser ressaltado é a exclusão da equação da energia desse trabalho. A equação da energia pode ser excluída devido à hipótese adotada de escoamento incompressível, eliminando os efeitos térmicos e de compressibilidade do modelo. Para um problema incompressível tri-dimensional, tem-se quatro incógnitas, que são as velocidades em cada direção ( $u$ ,  $v$  e  $w$ ) mais a pressão ( $p$ ), para quatro equações, que são as equações de conservação da quantidade de movimento, também chamadas de equações de Navier-Stokes, mais a equação de conservação da massa, ou também chamada de equação da continuidade. Com isso o problema pode ser resolvido, pois o número de equações e de incógnitas se iguala.

Entretanto, se a hipótese de escoamento compressível fosse assumida, mais duas equações teriam de ser utilizadas: a equação da energia e a equação dos gases. Isso porque acrescentam-se mais duas incógnitas ao problema, que são a massa específica do fluido e sua temperatura. Aqui, por razões que serão esclarecidas mais tarde (Seção 4.6), a hipótese de escoamento incompressível é bastante adequada e será assumida ao longo do trabalho.

### 4.2.1 Equação da conservação da massa

A equação de conservação da massa ou equação da continuidade é baseada no princípio físico da conservação da massa, ou seja, a massa é conservada. Imaginando um volume de controle fixo no espaço, pode-se dizer que a quantidade líquida de massa que atravessa o volume de controle através de sua superfície é igual à quantidade de massa acumulada dentro do volume controle. Uma forma tradicional para deduzir a equação, consiste em escrever a afirmação anterior em uma equação integral, baseada no *Teorema de Transporte de Reynolds*, ficando a equação escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.1)$$

Aplicando o *Teorema da divergência de Gauss*, o termo convectivo pode ser também expresso na forma de uma integral de volume originando a equação de massa na sua forma diferencial.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (4.2)$$

Escrevendo a equação em coordenadas cartesianas, tem-se que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

É importante ressaltar que a equação (4.3), pode ser ainda simplificada, neste caso, pela hipótese de escoamento incompressível, verificando que a massa específica do fluido,  $\rho$ , não varia com o espaço, e que pode ser eliminada da equação. Porém, opta-se aqui por escrever a equação da forma apresentada, pois o algoritmo de solução incompressível do FLOTRAN é considerado um caso especial do algoritmo compressível, e escrito considerando a variação da massa específica do fluido. Tal aspecto do algoritmo será apresentado com mais detalhes convenientemente mais tarde (Seção 4.6.3).

## 4.2.2 Equação da conservação da quantidade de movimento

A equação da conservação da quantidade de movimento é baseada na *segunda Lei do movimento de Newton*, o que traduzindo para um volume de controle equivale a dizer que a taxa de variação da quantidade de movimento do volume de controle é igual à somatória das forças que agem no mesmo. As forças que agem no volume de controle podem ser de dois tipos diferentes: *forças de superfície*, tais como pressão, tensões normais e cisalhantes; e *forças de corpo ou de campo*, tais como gravidade, forças eletromagnéticas, etc. As forças de superfície podem ser representadas pelo tensor de tensões  $\mathbf{T}$ , que aqui inclui também as forças de pressão. As forças de corpo podem ser representadas por uma força genérica, por unidade de massa  $\mathbf{g}$ . Assim, a equação da quantidade de movimento, na sua forma integral, baseada no *Teorema de Transporte de Reynolds* fica escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T} \cdot d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} d\mathcal{V} \quad (4.4)$$

O tensor de tensões é relacionado com as velocidades, considerando a hipótese de fluido Newtoniano, ou seja, aquele cujas tensões cisalhantes são proporcionais aos gradientes de velocidade. Desse modo, Stokes escreveu a seguinte relação constitutiva para os fluidos:

$$\mathbf{T} = - (p - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T] \quad (4.5)$$

onde  $p$  é a pressão estática,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\mathbf{I}$  é o tensor unitário e  $\lambda$  é o segundo coeficiente de viscosidade.

Aplicando o *Teorema da divergência de Gauss* à equação (4.4) e substituindo a equação (4.5), após algumas manipulações matemáticas, as equações de conservação da quantidade de movimento, mais conhecidas como equações de Navier-Stokes ficam em sua forma diferencial mais completa como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \rho g_y \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (4.8)$$

Algumas simplificações bastante comuns são usualmente feitas. Considerando a hipótese de escoamento incompressível, o produto do segundo coeficiente de viscosidade e do divergente da velocidade é zero. Uma outra simplificação é feita no tensor de tensões, para o caso incompressível e de viscosidade constante. Notando que a soma de três termos que podem ter a ordem das derivadas trocadas iguala-se à equação da conservação da massa, pode-se eliminá-los, pois ficam igual a zero.

Com essas simplificações, as equações de Navier-Stokes em sua forma mais usual ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho g_x \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (4.11)$$

### 4.3 Diferentes tipos de escoamento

As equações de conservação apresentadas, conhecidas genericamente como equações de Navier-Stokes, compõem um sistema de equações, são acopladas, não-lineares e bastante difíceis de se resolver. Somente em casos muito restritos e com geometrias muito simples é que se pode obter soluções analíticas e tais soluções são clássicas e bem conhecidas. Há casos em que alguns termos das equações tomam parte reduzida na descrição de determinado tipo de escoamento e são muito pequenos quando comparados com os outros, portanto pode-se simplificar o modelo matemático simplesmente desprezando esses termos. Isto leva a diferentes tipos de modelos matemáticos que descrevem bem determinados tipos de escoamentos. Com isto, diferentes métodos de resolução podem ser utilizados, nos quais o esforço computacional fica bastante reduzido.

É importante notar que **as equações de Navier-Stokes descrevem todos os tipos de escoamento** e os diferentes modelos matemáticos para cada tipo de escoamento sempre provém de simplificações feitas em tais equações.

### 4.3.1 Escoamentos compressíveis e incompressíveis

Em muitos casos, a massa específica de determinado fluido pode ser considerada constante. Nesses casos o escoamento é dito incompressível. Isto acontece para o escoamento de líquidos, onde a compressibilidade pode ser assumida constante, bem como para o escoamento de gases onde o número de Mach é menor do que 0,3. (O número de Mach é definido como a razão entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no fluido.) Para os escoamentos incompressíveis, se o escoamento também é isotérmico (a viscosidade também pode ser considerada constante), as equações de conservação de massa e da quantidade de movimento ficam dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_x \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g_y \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g_z \quad (4.15)$$

Quando um escoamento pode ser considerado incompressível, e é descrito pelas equações (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15), tem-se um sistema de quatro equações e quatro incógnitas ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $p$ ). Portanto não é necessário o uso da equação da energia.

Os escoamentos compressíveis são governados pelas equações de Navier-Stokes conforme apresentadas na seção anterior, onde se considera que a massa específica do fluido varia tanto temporalmente quanto espacialmente. Quando se considera um escoamento compressível, a massa específica também passa a ser uma incógnita e a equação da energia tem de ser utilizada para que se possa resolver os problemas. Porém, a equação da energia envolve também outra incógnita, que é a temperatura, e soma-se também outra equação: a

equação de estado dos gases, onde  $\rho = f(T, p)$ . Portanto, tem-se seis incógnitas ( $u, v, w, p, T$  e  $\rho$ ) e seis equações.

É muito comum na área de aerodinâmica e em escoamentos em turbomáquinas, existirem diferentes regimes de escoamento dependendo da velocidade do mesmo. Dependendo do *número de Mach* (a razão entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no fluido), o escoamento pode ser classificado em *subsônico* ou *supersônico*.

Para escoamentos com um número de Mach menor do que 1 ( $Ma < 1$ ), o escoamento é chamado de subsônico. Caso contrário, para um número de Mach maior do que 1 ( $Ma > 1$ ), o escoamento é chamado de supersônico.

No caso de escoamentos supersônicos podem existir ondas de choque. Para compreender a física da onda de choque, imagine um escoamento supersônico em torno de um aerofólio. Com a presença do aerofólio, existe uma onda de pressão que viaja na direção contrária à do escoamento. Essa informação viaja com a velocidade do som local. Quando o escoamento é subsônico, a onda se propaga até o infinito e é como se o aerofólio nunca alcançasse a onda. Portanto não existe o choque. Porém, se o escoamento é supersônico, o aerofólio tem velocidade comparável à velocidade que viaja a informação, estabelecendo-se o choque. É como se o aerofólio alcançasse a onda de pressão que viaja em direção contrária.

Pode existir ainda um regime de escoamento onde coexistem os regimes subsônico e supersônico, o chamado regime *transônico*. Imagine ainda o mesmo aerofólio, porém agora com uma velocidade do escoamento subsônica bastante alta. O escoamento que o aerofólio enxerga é subsônico, porém por causa da curvatura do aerofólio, o escoamento acelera na parte superior e tem a sua velocidade aumentada acima da velocidade do som. Isso caracteriza o regime transônico, onde na parte superior há uma região com velocidade supersônica e na parte inferior uma região com velocidade subsônica.

### 4.3.2 Escoamento potencial

O escoamento potencial é um dos modelos matemáticos mais simples que se pode construir. Primeiramente, o escoamento é considerado não-viscoso. Isso é feito pois, geralmente, os efeitos de viscosidade (efeitos difusivos) do fluido estão confinados a uma parcela pequena do espaço e próxima às superfícies sólidas do corpo, e são bem pequenos quando comparados com os outros termos. Adicionalmente, é imposta a condição de que o campo de velocidades é irrotacional. Isto porque, os efeitos de rotação impostos ao fluido provém dos efeitos difusivos vindos das superfícies sólidas (condição de aderência da partícula do fluido junto às paredes). Matematicamente, a condição de irrotacionalidade do campo de velocidades pode ser escrita como:

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (4.16)$$

A partir disso, pode-se considerar que existe um potencial de velocidades  $\phi$ , tal que:

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \quad (4.17)$$

Então, inserindo a equação (4.17) na equação da continuidade para um fluido incompressível (4.12), tem-se que:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.18)$$

que é o *Laplaciano* de  $\phi$ .

Esta é uma equação linear e, portanto, vale o princípio de superposição, podendo-se definir soluções analíticas simples (escoamento uniforme, fonte, sorvedouro, vórtice), que podem ser combinadas para obter soluções mais complexas.

O escoamento potencial é um escoamento simétrico. Basta observar a equação de Laplace e ver que não há uma direção preferencial para o escoamento. Tome como exemplo

o escoamento em torno de um cilindro. Não importa a velocidade do escoamento, este será sempre uniforme e não se pode dizer qual a direção do escoamento sem se conhecer o sentido da velocidade.

### 4.3.3 Escoamento não-viscoso

Novamente, se se considerar que longe das superfícies sólidas, os efeitos de viscosidade são pequenos, pode-se assumir que o escoamento é não-viscoso. Isto equivale a dizer que as forças de superfície agindo em um volume de controle infinitesimal são somente de pressão, desprezando-se as tensões normais e cisalhantes. Desse modo, a equação da quantidade de movimento fica dada por:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (4.19)$$

Esta é a chamada *equação de Euler*.

Neste tipo de escoamento, a partícula de fluido adjacente à parede sólida desliza sobre esta. A única condição imposta é que a sua velocidade normal à parede seja nula (a partícula não atravessa a parede).

As equações de Euler são mais utilizadas para modelar escoamentos compressíveis a altos números de Mach, onde o número de Reynolds é tão alto que os efeitos viscosos e de turbulência são reduzidos somente a pequenas regiões perto das paredes.

As equações de Euler não representam uma vantagem muito grande em sua solução comparadas com as equações completas de Navier-Stokes. Isto acontece principalmente porque os termos convectivos (não lineares) não são desprezados. Porém, se se modela um escoamento pelas equações de Euler, pode se fazer uma malha muito mais 'grossa' próximo das superfícies do corpo do que seria necessário se o modelo fosse com as equações completas

de Navier-Stokes. Isto representa uma vantagem computacional bastante grande.

#### 4.3.4 Escoamento com $Re \ll 1$ (*Creeping flow*)

O escoamento não-viscoso é considerado quando os termos convectivos ou de inércia são muito maiores que os termos difusivos, ou seja, quando o número de Reynolds é muito grande. Assim os termos difusivos podem ser desprezados. Porém, quando a situação é inversa, ou seja, quando os termos convectivos tomam uma parte muito menor do que os termos difusivos, ou seja, quando o número de Reynolds é muito menor do que 1 ( $Re \ll 1$ ), os termos convectivos podem ser desprezados. Isto acontece quando a velocidade do escoamento é muito pequena, quando o fluido é muito viscoso, ou quando as dimensões geométricas são muito pequenas. O escoamento fica então dominado pelas forças viscosas, de pressão e de corpo. A equação da quantidade de movimento fica dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i = 0 \quad (4.20)$$

Esta equação é válida se se considera as propriedades do fluido constantes. Também como a velocidade é muito baixa, pode-se desprezar o termo transiente. Este tipo de escoamento é chamado *creeping flow* ou escoamento de Stokes.

#### 4.3.5 Aproximação de camada limite

A aproximação de camada limite é muito comum em mecânica dos fluidos e as equações de Navier-Stokes podem ser simplificadas se o escoamento tiver uma direção predominante. O escoamento deve respeitar algumas condições: inicialmente, que o transporte difusivo na direção principal do escoamento é muito menor quando comparado ao transporte convectivo e pode então ser desprezado; a velocidade na direção predominante é muito maior do que as outras componentes do escoamento; e que o gradiente de pressão transversal à direção

predominante do escoamento é muito menor do que na direção principal. Desse modo a equação clássica da quantidade de movimento na direção  $x$  (direção predominante) para a camada limite em duas dimensões se reduz a:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.21)$$

A equação da quantidade de movimento para a direção  $y$  (direção transversal) se reduz a  $\partial p / \partial y = 0$ . A equação (4.21) deve ser resolvida com a equação de conservação da massa. Porém, geralmente, não se dispõe do gradiente de pressão em  $x$ , e é muito comum calcular esse gradiente através do cálculo do escoamento externo à camada limite, que é geralmente feito através de uma hipótese de escoamento potencial.

A equação da camada limite pode ser calculada utilizando-se um processo de marcha (característica das equações parabólicas), já que o escoamento foi assumido com uma direção principal, não ocorrendo recirculação, e o escoamento a jusante só é influenciado pelo que acontece a montante.

## 4.4 Classificação matemática das equações de conservação

De acordo com o tipo de escoamento que se pretende estudar, algumas simplificações nas equações de conservação são feitas. Com essas simplificações, as equações de conservação podem ser substancialmente alteradas e com isso a forma de sua solução também sofre grandes alterações.

Os problemas em mecânica dos fluidos, em geral, podem ser classificados em três tipos: os *hiperbólicos*, os *parabólicos* e os *elípticos*. Esta é também a classificação que se dá às equações que governam os escoamentos, ou as equações de conservação. Tais equações são

equações diferenciais parciais quasi-lineares de segunda ordem. Elas têm essa classificação porque todas as derivadas de mais alta ordem (segunda ordem) aparecem de forma linear, ou seja, não existem produtos ou exponenciais das derivadas e elas aparecem multiplicadas por termos que dependem somente das variáveis. Matematicamente, pode-se classificar tais equações em hiperbólicas, parabólicas ou elípticas utilizando uma relação entre os coeficientes da equação diferencial parcial. Para uma equação diferencial parcial geral de segunda ordem da forma

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \left( x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

pode-se determinar o seu tipo através da relação

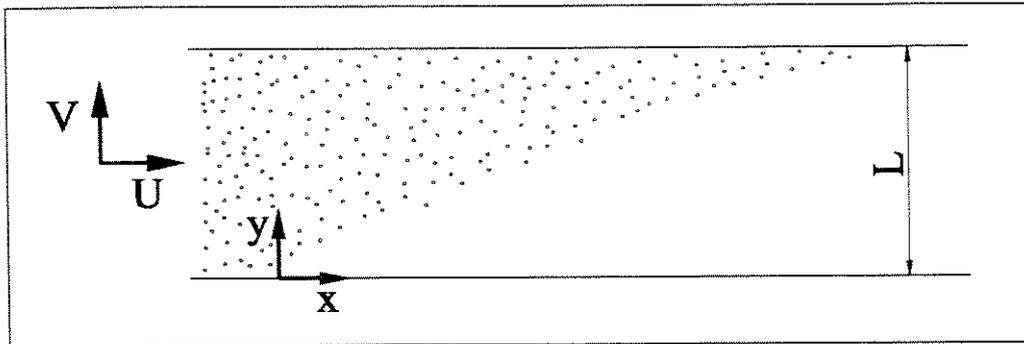
$$\begin{aligned} < 0 & \quad \text{elíptica} \\ b^2 - ac = 0 & \quad \text{parabólica} \\ > 0 & \quad \text{hiperbólica} \end{aligned}$$

Porém, somente problemas muito simplificados é que recaem em uma única classificação. Geralmente, os problemas resolvidos numericamente através da CFD, são governados por sistemas de equações e portanto a classificação do problema é mista. Tome como exemplo o sistema de equações constituído pela equação da conservação da massa (equação (4.3)) e pelas equações da quantidade de movimento (equações (4.6), (4.7) e (4.8)). Este é um problema elíptico no espaço e parabólico no tempo.

É importante que fique claro que é necessária a compreensão dos tipos de problemas e sua identificação através das equações que o governam. Com isso, pode-se atacar e resolver os problemas da forma certa, de acordo com a natureza da solução de determinado problema.

## Exemplo ilustrativo

A fim de exemplificar o comportamento dos diferentes tipos de equações e dar um significado físico maior a elas, será considerado aqui um problema simplificado de transporte de massa bi-dimensional (Larsen e Michelsen, 1999).



**Figura 4.1:** Escoamento de um fluido com partículas suspensas em um canal.

Considere o escoamento de um fluido, cuja componente de velocidade,  $U$ , na direção  $x$  é constante, em um canal de largura  $L$ . Existem partículas idênticas suspensas no fluido cuja concentração é  $c(x, y)$ . As partículas têm a mesma velocidade do escoamento na direção  $x$  e é suposto que elas são influenciadas por um campo externo de força na direção  $y$ . Suponha que a velocidade,  $V$ , das partículas na direção  $y$  é determinada pela magnitude do campo externo e pela viscosidade do fluido, e é assumida positiva e constante. As partículas podem ainda se difundir no meio e são caracterizadas pela constante de difusão  $D$ , que representa difusividade em uma aproximação de transporte turbulento. Suponha ainda que a concentração inicial das partículas é  $c(0, y) = c_0$ , constante. As partículas precipitam quando atingem a parede superior do canal. Veja Figura 4.1.

A equação que governa o problema, para o caso de regime permanente, pode ser escrita como:

$$U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (4.22)$$

Através da equação (4.22), pode-se perceber os termos semelhantes que regem o trans-

porte de quantidades através dos mecanismos de convecção-difusão. Os termos de derivada de ordem 1 são os termos convectivos, e os termos de derivada de ordem 2 são difusivos. Pode-se comparar os mesmos termos nas equações de conservação apresentadas anteriormente, identificando os termos convectivos e difusivos naquelas equações.

#### 4.4.1 Problemas hiperbólicos

Continuando no problema apresentado, pode-se torná-lo hiperbólico considerando o caso em que a difusão é muito pequena quando comparada com a convecção, ou seja, quando  $D \rightarrow 0$ . Dessa forma, pode-se reescrever a equação (4.22) da seguinte maneira:

$$U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad (4.23)$$

Lembrando do cálculo, que a derivada total de uma quantidade é dada por:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy \quad (4.24)$$

Dividindo-se por  $dx$ , tem-se que:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\partial c}{\partial x} + \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{\partial c}{\partial y} \quad (4.25)$$

Comparando as equações (4.25) e (4.23), tem-se que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{U} \quad (4.26)$$

Isso significa que a concentração  $c$  é constante ao longo das curvas características, que nesse caso são linhas retas dadas por (4.26). É fácil perceber a física desse problema: como não há difusão, as partículas somente seguem o escoamento, cujas componentes de velocidade são  $U$  e  $V$ , até atingirem a parede superior do canal e precipitarem. Dessa forma,

a concentração das mesmas é constante ao longo das linhas definidas pela direção do vetor de velocidade.

Os problemas hiperbólicos se caracterizam por apresentarem um comportamento em que um ponto do domínio somente influencia uma região compreendida entre as suas curvas características. Com isso são necessárias somente condições de contorno a montante e não a jusante. Pode-se ainda, tirar vantagem desse comportamento e estabelecer um método de solução do problema em que se marcha a solução somente na região ao longo das curvas características do problema, sendo necessário armazenar as variáveis somente da estação de cálculo e da estação a montante.

Os escoamentos supersônicos, de regime permanente e não-viscosos, são tipicamente de comportamento hiperbólico. Tais escoamentos, devido a sua característica de compressibilidade, comportam ondas de som e de choque. Os problemas de onda são problemas regidos por equações hiperbólicas, daí o comportamento de tais escoamentos.

#### 4.4.2 Problemas parabólicos

Voltando ao problema proposto na sua forma original, pode-se torná-lo parabólico considerando-se que a difusão axial possa ser ignorada. Isso equivaleria a dizer que na direção axial, o termo convectivo exerce muito mais influência do que o termo difusivo. Reescrevendo a equação (4.22), tem-se que:

$$U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (4.27)$$

A solução desse problema pode ser elaborada também com um processo de marcha, só que agora a marcha se dá ao longo de uma coordenada, neste caso a direção  $x$ . Então marcha-se as condições de contorno, que são necessárias somente a montante, ao longo do eixo  $x$ , resolvendo um problema elíptico em cada estação. Neste caso, também pode-se somente

armazenar duas estações de variáveis como no caso hiperbólico. A solução é conduzida, marchando-se, até onde se desejar.

Os termos convectivos das equações de Navier-Stokes possuem o comportamento parabólico. Portanto, é fácil perceber que a informação não depende das condições a jusante, elas são somente carregadas pela velocidade, dependendo somente das condições a montante.

### 4.4.3 Problemas elípticos

Se o problema proposto for considerado em sua forma original, este será elíptico. Nos problemas elípticos, um ponto do domínio influencia o domínio do problema em todas as direções. Os efeitos de difusão, bem como os de pressão causam esse comportamento elíptico. A informação viaja em todas as direções, até no sentido contrário do da velocidade. Por isso são necessárias condições de contorno em toda a fronteira do problema, como também a solução do problema deve ser feita de maneira simultânea, armazenando todo o domínio. escoamentos subsônicos apresentam esse comportamento, bem como os que podem ser considerados incompressíveis ou viscosos.

É por causa dessas características dos escoamentos que se discutiu acima que o sistema de equações composto pela equação de conservação da massa e pelas equações de Navier-Stokes consiste em um sistema misto. Como todas as formas de transporte estão presentes nas equações de Navier-Stokes, é necessário que se resolva um problema elíptico no espaço, com todas as condições de contorno presentes, resolvendo todas as variáveis conjuntamente. Porém devido à presença do termo transiente, é necessário que se marche o problema elíptico de forma parabólica no tempo, onde somente as condições iniciais são prescritas.

## 4.5 Utilização do *software* FLOTRAN

Através da breve apresentação dos diferentes tipos de escoamentos, pôde-se perceber a diversidade de modelos que podem ser assumidos. De acordo com as diversas hipóteses assumidas, que levam a simplificações das equações que governam os escoamentos, muito do esforço computacional pode ser aliviado consideravelmente. Entretanto, é importante ressaltar mais uma vez que as equações de Navier-Stokes descrevem qualquer tipo de escoamento, pois são equações gerais. Como visto nos diversos trabalhos citados nas referências bibliográficas, as pesquisas para asas de aeronaves, bem como para palhetas de turbinas, caminham no sentido de englobar tantas condições físicas quanto possível. Para isso, os modelos são tri-dimensionais, considerando as equações de Navier-Stokes e incluindo um modelo de turbulência. Com tudo isso em vista, para esse trabalho, essas mesmas condições são escolhidas como modelo para o escoamento do fluido em torno da placa flexível. Isso é feito mesmo que, para esse caso específico, alguma simplificação que não oferecesse mudanças significativas no resultado da solução pudesse ser utilizada.

Como dito anteriormente no início desse capítulo, a utilização de um *software* se fez necessária devido à impossibilidade de criar um programa capaz de resolver as equações de Navier-Stokes num projeto de Mestrado. Para isso, o *software* comercial FLOTRAN (Göhner e Mauch, 1998) foi escolhido. O FLOTRAN é um pacote de CFD do *software* ANSYS (SAS, 1997), tendo como base o método dos elementos finitos. Como o FLOTRAN é feito com base no ANSYS, possui as mesmas facilidades deste, como a geração de malhas, interface gráfica, pré-processamento, aplicação das condições de contorno, pós-processamento, visualização dos resultados, etc. O *software* em questão é uma ferramenta poderosa e relativamente geral, no sentido de que permite que se modele escoamentos tanto incompressíveis como compressíveis, escoamentos com troca de calor, escoamentos com múltiplas espécies, escoamentos em regime transiente e que permite introduzir alguns modelos de turbulência. Ele resolve as equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da continuidade, equação da energia, caso o algoritmo compressível seja utilizado e equações de turbulência, caso o modelo de turbulência

seja utilizado.

Como o FLOTRAN é um *software* de código fechado, é muito difícil de se determinar exatamente como funciona o algoritmo de solução, especialmente para o caso de fluidos, onde não-linearidades estão presentes e a solução é feita em muitas iterações até a convergência, onde se pode incluir vários efeitos na modelagem. Estão presentes várias explicações sobre a dedução das matrizes que compõem o sistema de equações, discretizadas pelo método dos elementos finitos, bem como informações sobre o algoritmo de solução. Entretanto, como em todo *software* comercial de código fechado, as informações muitas vezes, não incluem detalhes e explicações mais aprofundadas que permitiriam o total esclarecimento sobre o algoritmo de solução. Porém vale ressaltar que para o caso deste trabalho, a solução feita pelo *software* não influencia no resultado final, já que não é necessária nenhuma modificação no algoritmo ou nas equações do fluido, já que um método sequencial de solução de interação fluido-estrutura é utilizado.

A seguir serão apresentadas as hipóteses assumidas pelo *software*, bem como aquelas assumidas nesse trabalho. Será apresentada ainda a discretização e obtenção das matrizes com base no método dos elementos finitos, como também o algoritmo de solução utilizado pelo *software*, de modo geral, com base no manual do ANSYS.

## 4.6 Modelo matemático através do *software* FLOTRAN

Para o escoamento, algumas hipóteses são assumidas:

- o fluido é Newtoniano;
- existe somente uma única fase;

- o domínio do problema não muda durante a solução;

Para a dedução das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, mostradas nas seções anteriores, essas hipóteses acima citadas, já estão subentendidas. Porém, para o caso do escoamento em torno da placa flexível, mais algumas devem ser assumidas:

- o escoamento é considerado em regime permanente;
- o escoamento é considerado incompressível, pois a condição em que a placa será testada no túnel de vento, será bem abaixo de Mach 0,3, podendo-se desconsiderar a compressibilidade do fluido, mantendo sua massa específica constante;
- será considerado o modelo de turbulência  $k - \varepsilon$ .

A partir dessas hipóteses, define-se então, as equações a serem resolvidas:

- a equação da continuidade (4.3), desprezando-se o termo transiente (regime permanente);
- as equações de Navier-Stokes (4.9), (4.10) e (4.11), desprezando-se o termo transiente (regime permanente) e
- o modelo de turbulência  $k - \varepsilon$ .

Ressalta-se que nem a equação da energia, nem a equação dos gases ideais, precisam ser incluídas, devido à hipótese de escoamento incompressível, eliminando os efeitos térmicos e de compressibilidade do modelo.

Com isso, tem-se sete incógnitas ( $u, v, w, P, k, \varepsilon$  e  $\mu_t$ ), com sete equações disponíveis, a equação da continuidade, as equações de Navier-Stokes, uma para cada direção ( $x, y$  e  $z$ ), e o modelo de turbulência, com mais três equações.

## 4.6.1 O modelo de turbulência $k - \varepsilon$

Quando os efeitos inerciais são grandes em relação aos efeitos viscosos, o escoamento pode se tornar turbulento. Isto acontece principalmente com altas velocidades do escoamento. Como visto no Capítulo 2, os recentes trabalhos vêm adotando os modelos de turbulência, incluindo-os no modelo de escoamento e resolvendo o modelo de turbulência juntamente com as equações de Navier-Stokes. É nesse sentido que será adotado o modelo de turbulência, onde será dada aqui uma rápida apresentação do modelo de turbulência utilizado pelo FLOTRAN (SAS, 1997).

A idéia principal do modelo de turbulência vem da observação de que em um escoamento turbulento, a velocidade instantânea flutua em cada ponto. Então ela pode ser expressa como um valor médio e um componente flutuante:

$$u = \bar{u} + u' \quad (4.28)$$

onde  $\bar{u}$  é a componente do valor médio da velocidade, na direção  $x$ ; e  $u'$  é a componente flutuante da velocidade, na direção  $x$ .

Essa expressão da velocidade é então substituída no lugar da velocidade instantânea nas equações da conservação da quantidade de movimento. É realizada então uma média no tempo das equações. Estas operações fazem surgir novos termos nas equações, os quais são agrupados e chamados de *tensor de Reynolds*, que representa a transferência de quantidade de movimento adicional causada pela turbulência.

O *tensor de Reynolds* é expresso por:

$$\sigma_x^R = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u' u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u' v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u' w'}) \quad (4.29)$$

$$\sigma_y^R = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho v' u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v' v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho v' w'}) \quad (4.30)$$

$$\sigma_z^R = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho w' u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho w' v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho w' w'}) \quad (4.31)$$

Os termos do *tensor de Reynolds* são então assumidos como uma forma de tensão viscosa, introduzindo um coeficiente como incógnita, a viscosidade turbulenta  $\mu_t$ . Como um exemplo, tem-se que:

$$-\overline{\rho u' v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.32)$$

Com isso, pode-se perceber que os termos do *tensor de Reynolds* passam a ter a mesma forma dos termos difusivos das equações de conservação da quantidade de movimento original. Estes dois termos (do *tensor de Reynolds* e os termos difusivos) podem então ser combinados definindo uma viscosidade efetiva, como a soma da viscosidade dinâmica e da viscosidade turbulenta.

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad (4.33)$$

Portanto, o principal objetivo do problema de turbulência fica em determinar a viscosidade turbulenta.

O modelo de turbulência a duas equações é então utilizado para calcular a viscosidade turbulenta através da expressão:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.34)$$

onde  $k$  é a energia cinética turbulenta; e  $\varepsilon$  é a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta.

Então as equações diferenciais resolvidas pelo FLOTRAN no modelo de turbulência a duas equações ( $k - \varepsilon$ ), para o caso de regime transiente, é o seguinte:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial u k}{\partial x} + \frac{\partial v k}{\partial y} + \frac{\partial w k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \rho \varepsilon \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial w \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.36)$$

É importante notar que essas equações possuem a mesma forma da equação de conservação da quantidade de movimento e portanto constituem equações de transporte de uma propriedade. No caso, a propriedade transportada é a energia cinética turbulenta,  $k$ , para a equação (4.35) e a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta,  $\varepsilon$ , para a equação (4.36). Isso faz com que as equações do modelo de turbulência, juntamente com as equações de conservação da quantidade de movimento possam ser tratadas de uma mesma forma, quando da discretização das mesmas, escrevendo-as como uma equação geral de transporte de um escalar.

Como visto nas equações (4.34), (4.35) e (4.36), estas possuem várias constantes, como  $C_\mu$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$  e  $\sigma_\varepsilon$ , que podem ser encontradas, com seus valores numéricos padrão no manual do usuário do FLOTRAN (SAS, 1997), e que não são descritas aqui. Além disso, na mesma referência, pode-se encontrar uma descrição mais detalhada das equações de conservação da quantidade de movimento e das equações do modelo de turbulência, com todos os termos de regime transiente, termos considerando a compressibilidade do fluido e outros termos fonte, os quais não são utilizados aqui.

#### 4.6.2 Discretização das equações de conservação pelo método dos elementos finitos

A discretização começa notando que as equações de conservação da quantidade de movimento e do modelo de turbulência, podem ser escritas de uma forma geral escrevendo-as como uma equação de transporte de um escalar (excluindo aqui o termo transiente, devido à hipótese de regime permanente), para maior facilidade e generalização:

$$\frac{\partial (\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \phi)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w \phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi \quad (4.37)$$

onde  $\phi$  é a variável,  $\Gamma_\phi$  é o coeficiente de difusão e  $S_\phi$  é o termo fonte.

Na Tabela 4.1 pode-se ver as variáveis, coeficientes de difusão e termos fonte para cada equação a ser discretizada. A vantagem de se escrever as equações de conservação dessa maneira está no fato que essa é uma maneira genérica. Discretizando a equação (4.37), se está discretizando as equações de Navier-Stokes, bem como as equações do modelo de turbulência, mudando somente as variáveis e coeficientes adequados.

Equação de Conservação	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
Quant. de movimento em $x$	$u$	$\mu_e$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$
Quant. de movimento em $y$	$v$	$\mu_e$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$
Quant. de movimento em $z$	$w$	$\mu_e$	$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$
Energia cinética	$k$	$\frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$-\rho\varepsilon$
Dissipação da energia cinética	$\varepsilon$	$\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$-C_2\rho\varepsilon^2/k$

**Tabela 4.1:** Valores de  $\phi$ ,  $\Gamma_\phi$  e  $S_\phi$ .

Os diferentes termos da equação, os termos convectivos, os termos difusivos e os termos fonte, serão tratados separadamente. O objetivo é escrever uma equação, organizando as matrizes dos elementos da seguinte maneira, de forma a escrever o sistema:

$$\left( [\mathbf{A}_{\text{convectivo}}^e] + [\mathbf{A}_{\text{difusivo}}^e] \right) \{ \phi^e \} = \{ S_\phi^e \} \quad (4.38)$$

### Termos convectivos

A discretização dos termos convectivos é bastante delicada e merece bastante cuidado. Qualquer que seja o método de discretização utilizado, diferenças finitas, volumes finitos ou elementos finitos, o mesmo problema aparece quando o escoamento é convectivo dominante. O uso de diferenças centrais na discretização do termo convectivo (que equivale à aplicação do método clássico de Galerkin em elementos finitos), traz instabilidades ao sistema, quando o escoamento é convectivo dominante. As diferenças centrais dependem do ponto de interesse e de pontos tanto a montante quanto a jusante. Para acabar com as instabilidades, geralmente utiliza-se esquemas de discretização a montante (para trás), também chamados de

esquemas *upwind*. Nestes esquemas, o termo convectivo é aproximado por uma derivada que depende do ponto de interesse e de pontos a montante. Pensando fisicamente, é um esquema mais plausível, pois em um processo que depende somente de convecção, as informações dependem do que acontece a montante e são 'levadas' pelo escoamento. O problema das aproximações *upwind* é que elas introduzem uma difusão que não está presente fisicamente no escoamento, a chamada difusão numérica. Assim, vários esquemas têm sido propostos para diminuir a difusão numérica e ao mesmo tempo manter a estabilidade. Muitos esquemas para elementos finitos, modificam as funções de ponderação. No caso do FLOTRAN, a discretização do termo convectivo é feita através de uma abordagem a montante de linha de corrente (*streamline upwind*) (Rice e Schnipke, 1985), na qual não é necessário modificar as funções de ponderação, não apresentando instabilidade e diminuindo a difusão numérica presente nos métodos *upwind* tradicionais.

Essa abordagem pode ser explicada, inicialmente, pensando que o transporte se dá de maneira puramente convectiva, sem nenhuma difusão física ou termos de fonte. Portanto, a equação de transporte escalar se torna:

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \phi)}{\partial z} = 0 \quad (4.39)$$

que pode ser transformada para um sistema baseado nas linhas de corrente, sendo escrita como:

$$\frac{\partial(\rho u_s \phi)}{\partial s} = 0 \quad (4.40)$$

A equação (4.40) indica que na ausência de outros efeitos, o valor de  $\phi$  é constante ao longo da linha de corrente e todo o transporte ocorre ao longo dela. Em um elemento é assumido que o termo convectivo é constante. Com isso, a contribuição do termo convectivo para o elemento da matriz pode ser avaliado simplesmente por:

$$[\mathbf{A}_{\text{convectivo}}^e] = \frac{\partial(\rho u_s \phi)}{\partial s} \int_{\mathcal{V}} W^e d\mathcal{V} \quad (4.41)$$

Isso é feito para cada elemento, e a derivada é calculada por uma diferença simples:

$$\frac{\partial (\rho u_s \phi)}{\partial s} = \frac{(\rho u_s \phi)_U - (\rho u_s \phi)_D}{\Delta s} \quad (4.42)$$

onde  $D$  é o subscrito para o valor do nó a jusante;  $U$  é o subscrito para o valor onde a linha de corrente que passa pelo nó a jusante entra no elemento; e  $\Delta s$  é a distância entre o nó a jusante e o ponto a montante.

O processo consiste em percorrer todos os elementos identificando os nós a jusante. Então, o ponto onde a linha de corrente que passa pelo nó a jusante entra no elemento e o valor de  $(\rho u_s \phi)_U$  são calculados através de fatores de ponderação, baseados no fluxo mássico de cada lado do elemento.

### Termos difusivos

Os termos difusivos possuem uma abordagem mais simples e mais comum. Utiliza-se o método de Galerkin, que é largamente conhecido e utilizado. Os termos difusivos são multiplicados pelas funções de ponderação, que são iguais às funções de forma do elemento e integrados sobre o volume. Então, aplica-se uma integração por partes obtendo:

$$\begin{aligned} \text{Termos} \\ \text{difusivos} \end{aligned} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial W^e}{\partial x} \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial W^e}{\partial y} \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial W^e}{\partial z} \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} d\mathcal{V} \quad (4.43)$$

Assim que a derivada de  $\phi$  é substituída pelos valores nodais e pelas derivadas da função de ponderação, os valores nodais são extraídos das integrais. Assim, a matriz que representa a contribuição dos termos difusivos fica como:

$$[\mathbf{A}_{\text{difusivo}}^e] = \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial W^e}{\partial x} \Gamma_\phi \frac{\partial W^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial y} \Gamma_\phi \frac{\partial W^e}{\partial y} + \frac{\partial W^e}{\partial z} \Gamma_\phi \frac{\partial W^e}{\partial z} \right) d\mathcal{V} \quad (4.44)$$

## Termos fonte

Os termos fonte são calculados simplesmente multiplicando-os pelas funções de ponderação e integrando sobre o volume, obtendo:

$$S_{\phi}^e = \int_{\mathcal{V}} W^e S_{\phi} d\mathcal{V} \quad (4.45)$$

### 4.6.3 O algoritmo de solução

O algoritmo de solução do FLOTRAN é um algoritmo segregado, em que cada grau de liberdade é calculado de forma sequencial. Porém, como as equações são acopladas, cada equação é resolvida com valores intermediários dos outros graus de liberdade.

Inicialmente, escreve-se uma expressão para as velocidades, utilizando as equações da quantidade de movimento em termos do gradiente de pressão. Calcula-se as velocidades aproximadamente, assumindo um campo de pressão. Então, formula-se uma equação de pressão, utilizando a equação da continuidade, que é tratada e discretizada como os termos convectivos, no caso incompressível. A equação da pressão, com as velocidades calculadas no passo anterior, é resolvida para se calcular a pressão. Assim, os gradientes de pressão são calculados e as velocidades são atualizadas de forma que satisfaçam a conservação de massa. Em seguida, as equações de turbulência são resolvidas, e as propriedades efetivas são atualizadas baseado na solução da turbulência. Por fim, a razão de convergência é checada.

Todos esses passos fazem parte de uma iteração global. Tudo é repetido novamente até que a solução convirja, ou seja, os graus de liberdade não variem mais que um valor mínimo especificado, ou que o número máximo de iterações seja atingido.

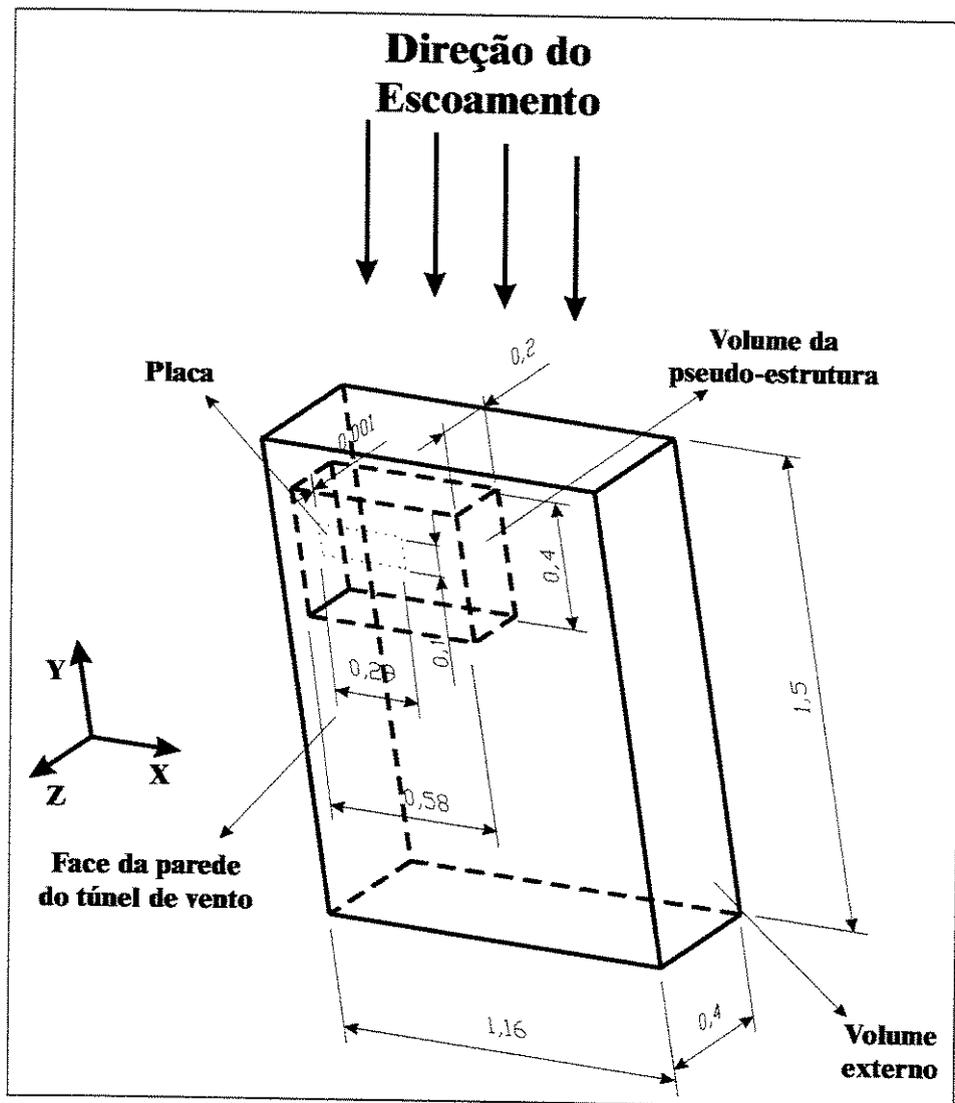
#### 4.6.4 A malha utilizada na solução do problema

Depois que todos os detalhes pertinentes à mecânica dos fluidos e aos métodos numéricos utilizados para resolver os escoamentos, mais especificamente nesse caso, o *software* FLOTRAN, foram apresentados e estão claros, passa-se agora à fase de construção do modelo discretizado.

Uma parte muito importante na solução de qualquer problema pelo método dos elementos finitos, principalmente na parte de fluidos, é a malha utilizada na discretização do domínio de solução do problema.

No caso deste trabalho, o escoamento em torno de uma placa flexível, inicialmente foi criado um volume com as dimensões da placa, de modo a representar exatamente a geometria real da placa a ser ensaiada no túnel de vento. Tal volume tem a forma de um paralelepípedo e possui as seguintes dimensões:  $290\text{ mm}$  de comprimento,  $100\text{ mm}$  de largura e  $1\text{ mm}$  de espessura. Em seguida, foi necessária a criação de mais dois volumes em torno do volume inicial da placa. Esses volumes também possuem a forma de paralelepípedos, sendo um maior que o outro em todas as dimensões e os dois maiores que a placa, de forma que um volume englobasse o outro, mas a face onde a placa é engastada, constitui uma das fronteiras do domínio. Então esta face, a face do volume maior inclui também a face do volume intermediário, chamado também de volume da pseudo-estrutura, e a face engastada da placa. Isto é feito de modo a representar a parede do túnel de vento onde a placa será testada e que constitui uma das fronteiras do problema. Veja Figura 4.2.

Foi necessária a criação de dois volumes que englobassem a placa e que um contesse o outro, pois isso faz parte do algoritmo de solução fluido-estrutura utilizado no trabalho e que será comentado no Capítulo 6. É importante ressaltar que, se o objetivo fosse somente a simulação do escoamento em torno da placa, sem considerar a interação fluido-estrutura, seria necessário somente a construção do volume maior.



**Figura 4.2:** Dimensões e disposição dos volumes que constituem o domínio da solução do problema. As dimensões estão dadas em metros.

As dimensões totais do volume do domínio da solução (volume externo) foram escolhidas através das dimensões da placa, assim como as dimensões do volume intermediário, ou da pseudo-estrutura. Para o comprimento (direção  $x$ ), o volume externo foi escolhido com um tamanho equivalente a 4 vezes o comprimento da placa. Já para o volume intermediário, foi escolhido um tamanho equivalente de 2 vezes o comprimento da placa. Para a largura (direção  $y$ ), a dimensão do volume externo, foi de 8 vezes a largura da placa, com a adição de mais uma largura de volume externo a jusante. Esse espaço adicional, a jusante da placa, é uma característica das malhas construídas para fluidos, onde é necessário que os vórtices que

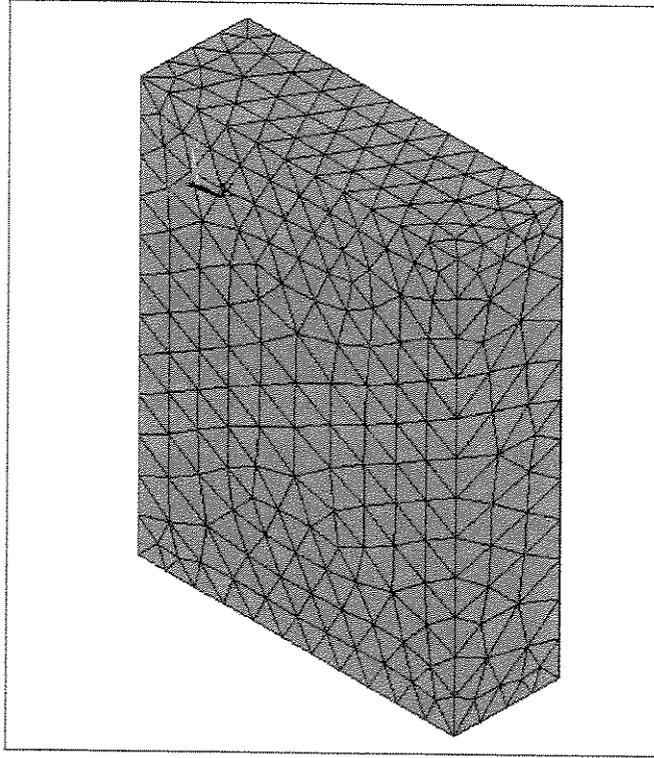
surtem após o contato com as superfícies se desenvolvam e sejam captados no domínio da solução. Para a largura, o volume intermediário, foi escolhido com um tamanho de 4 vezes a largura da placa. Por fim, para a espessura (direção  $z$ ), a dimensão do volume externo foi de 400 vezes a espessura da placa. Já para o volume intermediário, foi escolhido uma espessura de 200 vezes a espessura da placa.

Em seguida, as faces superior e inferior mais largas da placa são divididas de modo a conter divisões iguais à discretização feita com os elementos retangulares que são utilizados na solução da estrutura. Procedendo dessa forma, quando o volume do fluido for discretizado, na superfície da placa, os nós tanto da malha utilizada pelo fluido, como pela malha utilizada pela estrutura serão coincidentes. A malha utilizada pelo fluido na superfície da placa terá o dobro de nós da malha utilizada pela estrutura, sendo metade dos nós utilizadas na superfície inferior e metade na superfície superior. Essa condição é necessária à solução da interação fluido-estrutura, no caso deste trabalho, e será justificada quando se tratar do algoritmo da interação fluido-estrutura.

Colocadas essas restrições, outras restrições são impostas nas arestas, tanto do volume intermediário, como do volume externo. Restringe-se o número de divisões imposto nas linhas que formam as arestas desses volumes. Assim, quando o *software* construir a malha, ele terá de respeitar o número de divisões imposto.

Com tudo isso feito, aciona-se a geração automática de malhas do *software* ANSYS. O tipo de elemento escolhido para discretizar a geometria 3D foi o elemento tetraédrico em uma malha não estruturada. Dessa forma, o ANSYS constrói a malha nos volumes intermediário e externo (obviamente o volume da placa não é discretizado), respeitando as condições de divisão das arestas mencionada, fazendo uma malha bastante refinada perto da placa e gradualmente passando a ser menos refinada longe dela. Esse grau de refinamento nas proximidades da placa é feito porque é nessa região que os gradientes de velocidade e pressão são maiores.

Na Figura 4.3 pode-se ver o volume do domínio de solução do problema discretizado.

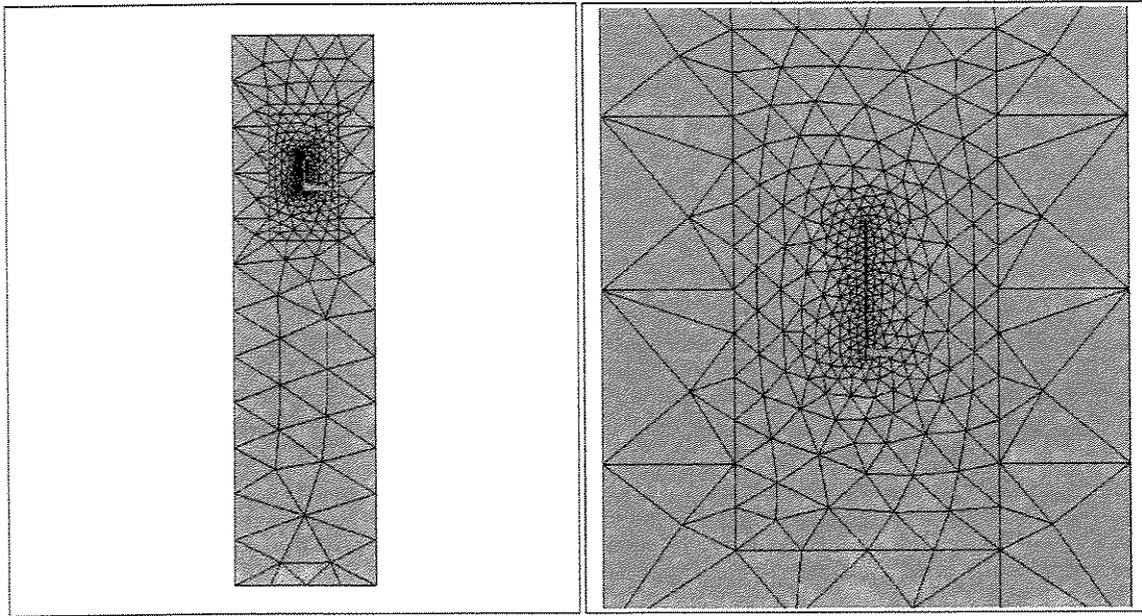


**Figura 4.3:** Volume do domínio de solução do problema discretizado.

Na Figura 4.4, vê-se o mesmo volume, em uma vista lateral da superfície onde a placa está engastada, à esquerda. À direita vê-se uma vista ampliada da vista lateral, focalizando a placa no centro do volume. Pode-se perceber a placa pelas linha finas e compridas no centro do volume. Pode-se ver também a face do volume intermediário. Note ainda o grau de refinamento da malha nas proximidades da placa e como esse refinamento diminui gradualmente até as faces externas. A malha do fluido mostrada nessas duas figuras possui um total de 3962 nós, e 19040 elementos, para uma divisão na superfície da placa de 16 por 16 divisões em cada direção ( $x$  e  $y$ ), totalizando 289 nós para a malha estrutural.

#### 4.6.5 Condições de contorno

As condições de contorno impostas em uma análise típica em fluidos podem ser de dois tipos: velocidade e pressão. Dessa forma, as condições de contorno impostas para a solução



**Figura 4.4:** Vista lateral do volume do domínio de solução do problema, à esquerda, e zoom da vista lateral, à direita.

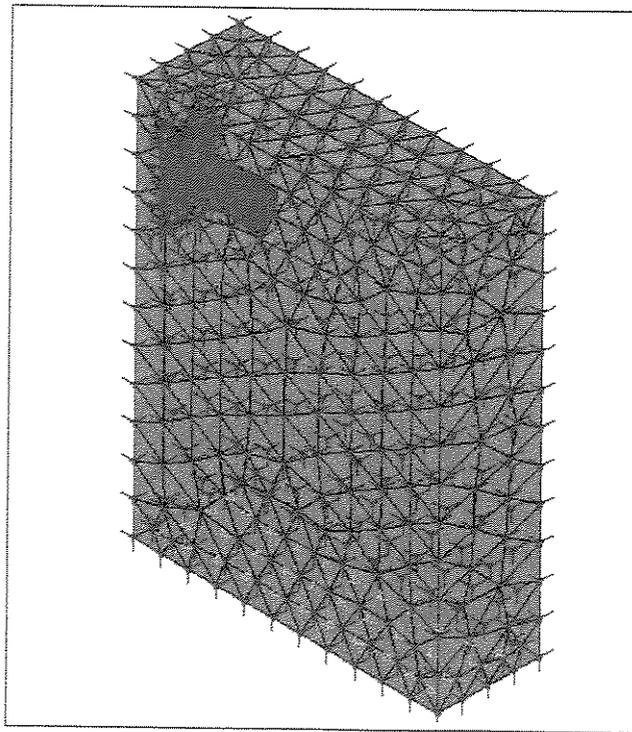
do problema são:

- condição de velocidade zero em todas as direções, aplicada em todos os nós da superfície da placa, que representa a condição de aderência das partículas de fluido adjacentes à uma superfície. Esta condição de contorno é aplicada quando se calcula o escoamento em torno de uma superfície estática. No caso deste trabalho, como será visto adiante, esta condição é utilizada durante o cálculo da posição de equilíbrio estático da placa. Porém quando o amortecimento equivalente é calculado, uma perturbação de velocidade em torno da posição de equilíbrio é dada, sendo necessário que os nós da superfície da placa tenham a velocidade especificada;
- condição de velocidade zero em todas as direções, em todos os nós da superfície onde a placa está engastada (superfície vista na Figura 4.4), que também representa a condição de aderência na parede lateral do túnel de vento;
- condição de pressão zero a jusante. Mais especificamente esta condição é imposta em todos os nós da superfície do volume externo que está perpendicular à direção

do escoamento, a jusante. A pressão é imposta com valor zero para servir como um valor de referência para que as pressões em todos os outros pontos do domínio sejam calculados. Esta condição é imposta a jusante, pois espera-se que o domínio de solução seja suficientemente grande, e que o escoamento já esteja sem perturbações nesse ponto.

- condição de velocidade em todas as outras superfícies do volume externo. Esta é a condição da velocidade do escoamento livre, ou seja, a velocidade do escoamento longe da placa. Esta condição é imposta por meio de um valor absoluto de velocidade ( $V_\infty$ ) e um ângulo de incidência (ângulo de ataque) na placa ( $\theta$ ). Portanto, na direção  $y$  a velocidade é dada por  $-V_\infty \cos\theta$ , na direção  $z$  por  $V_\infty \sin\theta$  e na direção  $x$  a velocidade é zero.

Na Figura 4.5 pode-se observar as condições de contorno que foram aplicadas no volume externo, bem como na superfície da placa para a mesma malha mostrada nas Figuras 4.3 e 4.4. Observe que aqui pode-se ter uma noção de tamanho da placa em relação a todo o volume de solução do problema. As setas vermelhas representam as condições de velocidade e os triângulos amarelos as condições de pressão.



**Figura 4.5:** Condições de contorno aplicadas no volume externo e na superfície da placa.

#### 4.6.6 Estudo de convergência da solução e alguns resultados

Assim que a malha para o problema do escoamento foi definida, como indicado na seção anterior, fez-se um estudo de convergência da solução. Isso é necessário, para se ter certeza do uso nas simulações posteriores, de uma malha refinada o bastante para garantir a correta solução do problema.

Para esse estudo, o escoamento em torno da placa foi simulado para uma condição de velocidade de  $10 \text{ m/s}$  com um ângulo de ataque de  $10^\circ$ , utilizando um valor de massa específica do ar de  $1,205 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade de  $1,8135 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$ , condição semelhante à que a placa é realmente testada no túnel de vento. Para essa condição, foram testadas várias malhas, aumentando o refinamento na superfície da placa, de modo a alcançar um resultado que não variasse mais, checando o grau de refinamento necessário à correta solução do problema. As diferentes malhas testadas podem ser vistas na Tabela 4.2, onde se mostra também o número de nós correspondente da malha na superfície da placa e o número de nós total da malha do fluido e correspondente número de elementos.

Já na Figura 4.6, mostra-se o resultado do coeficiente de pressão da superfície superior da placa, conhecida também como superfície de sucção, e da superfície inferior, conhecida como superfície de pressão, para as diversas malhas.

O coeficiente de pressão é uma medida bastante utilizada na área de aerodinâmica. É uma forma de comparar a pressão nos diversos pontos de interesse com a pressão dinâmica do escoamento livre. A pressão dinâmica do escoamento é definida por:

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \quad (4.46)$$

e o coeficiente de pressão é dado por:

$$c_p = \frac{P - P_\infty}{q_\infty} \quad (4.47)$$

Entretanto, no caso deste trabalho, como não é definida uma pressão estática  $P_\infty$  de referência para o cálculo das pressões no FLOTRAN, o coeficiente de pressão calculado e apresentado na Figura 4.6, é obtido como:

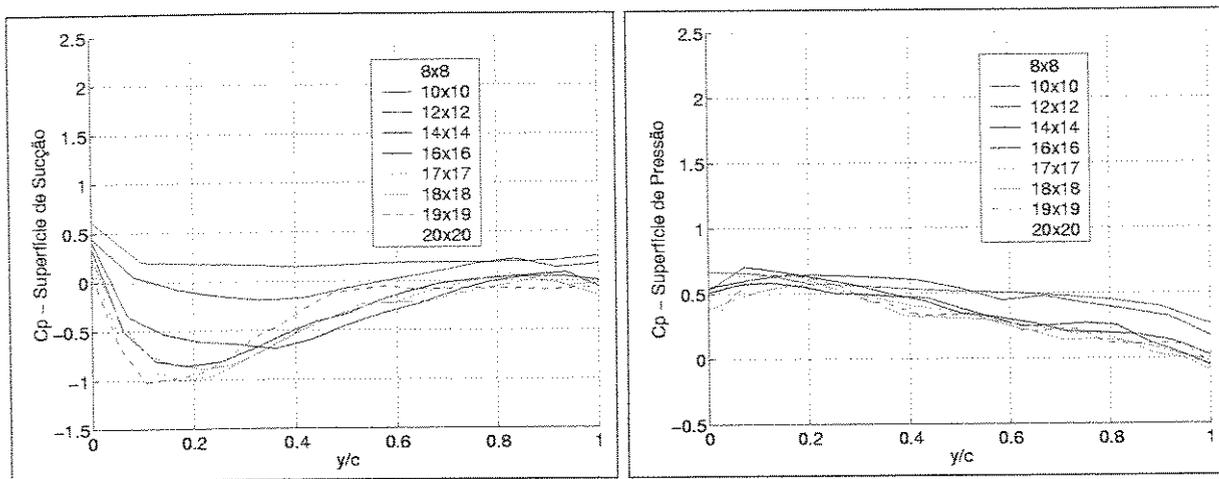
$$c_p = \frac{P}{q_\infty} \quad (4.48)$$

Nota-se que, com um refinamento pobre (malha com  $8 \times 8$  divisões), a solução é completamente errada. Porém, aumentando o refinamento da malha, a solução vai convergindo para uma única solução e os gráficos se sobrepõem. A convergência da solução com o refinamento da malha também é testada com um estudo de interação fluido-estrutura a ser apresentado adiante, onde a posição de equilíbrio estático da placa é comparada.

Malha na superfície da placa	Número de nós na superfície da placa	Número de nós da malha do fluido	Número de elementos da malha do fluido
$8 \times 8$ divisões	81	524	1935
$10 \times 10$ divisões	121	882	3455
$12 \times 12$ divisões	169	1564	6792
$14 \times 14$ divisões	225	2772	12998
$16 \times 16$ divisões	289	3962	19040
$17 \times 17$ divisões	324	4873	23961
$18 \times 18$ divisões	361	5173	25323
$19 \times 19$ divisões	400	6663	33669
$20 \times 20$ divisões	441	7506	37987

**Tabela 4.2:** Malhas utilizadas no estudo de convergência da solução.

Na Figura 4.7 é mostrado ainda, o campo de pressões nas superfícies da placa para a malha de  $20 \times 20$  divisões. Já nas Figuras 4.8 e 4.9 mostra-se a trajetória de diversas partículas de fluido. Na Figura 4.8 a trajetória é colorida com as respectivas pressões, já na Figura 4.9 a trajetória é colorida com o módulo da velocidade. É interessante notar a presença do vórtice na ponta da placa (Mittal e Tezduyar, 1995), indicando a correta solução do problema. O vórtice é esperado devido à diferença de pressão entre as superfícies inferior e superior da placa.



**Figura 4.6:** Coeficiente de pressão ao longo da corda (largura) da placa. À esquerda tem-se a superfície de sucção (superfície superior) e à direita a superfície de pressão (superfície inferior) da placa.

## 4.7 Conclusões

Toda a modelagem teórica relativa ao fluido foi apresentada, com as equações de conservação explicitadas e definidas. O *software* FLOTRAN, escolhido para resolver o problema do fluido foi apresentado, bem como a discretização das equações que governam o escoamento nesse caso. Uma breve descrição do algoritmo de solução do FLOTRAN foi apresentada. É importante ressaltar que o uso de um *software* comercial para a solução do problema do fluido se faz necessário devido à dificuldade da solução das equações de Navier-Stokes, num trabalho de Mestrado. Faz-se necessário comentar também que apesar dos *softwares* comerciais de código fechado conterem manuais, estes não contêm todas as informações necessárias à completa e detalhada compreensão de seu algoritmo de solução.

Neste capítulo, foram apresentados todos os aspectos relevantes do domínio e malha escolhidos para a solução do problema, bem como condições de contorno aplicadas.

Foram mostrados também alguns resultados obtidos comparando diversas malhas que se foi refinando. Os resultados mostram convergência e são complementados pelos resultados obtidos no Capítulo 6.

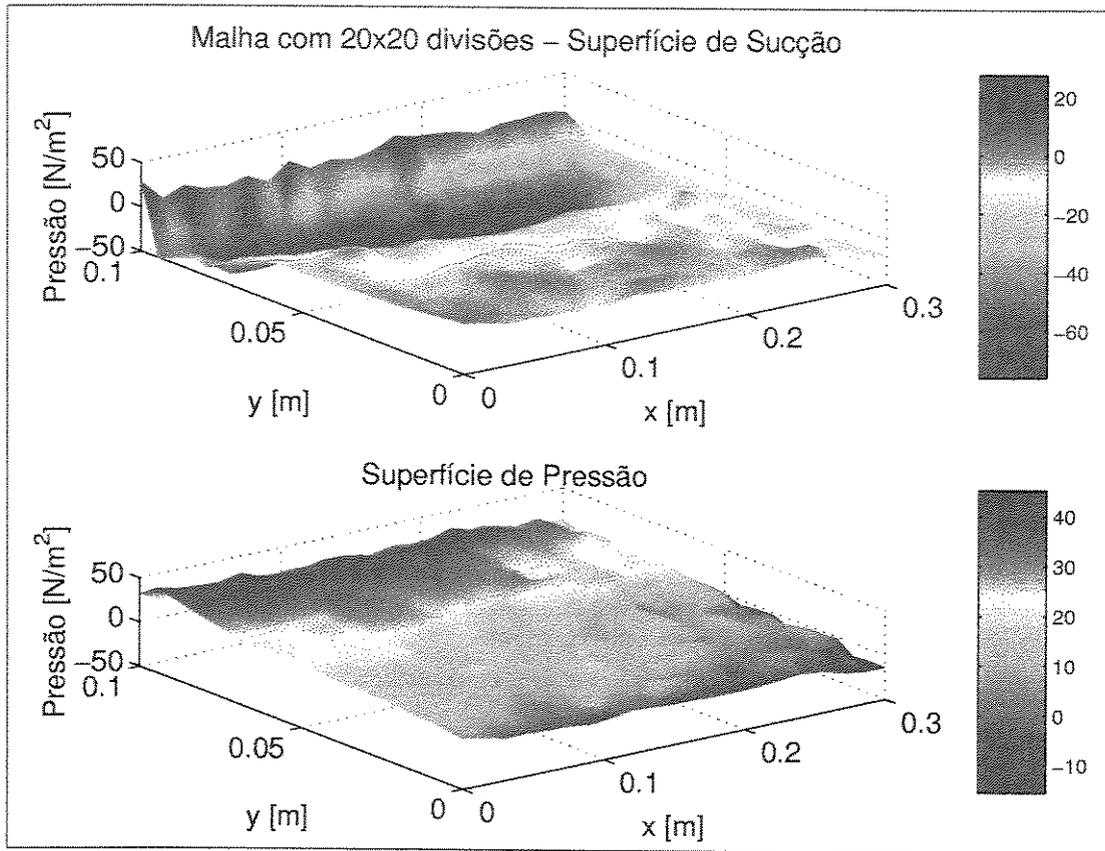


Figura 4.7: Pressões nas superfícies da placa.

A parte de mecânica de fluidos está toda apresentada e de agora em diante o algoritmo de solução fluido-estrutura utilizará as informações contidas neste capítulo.

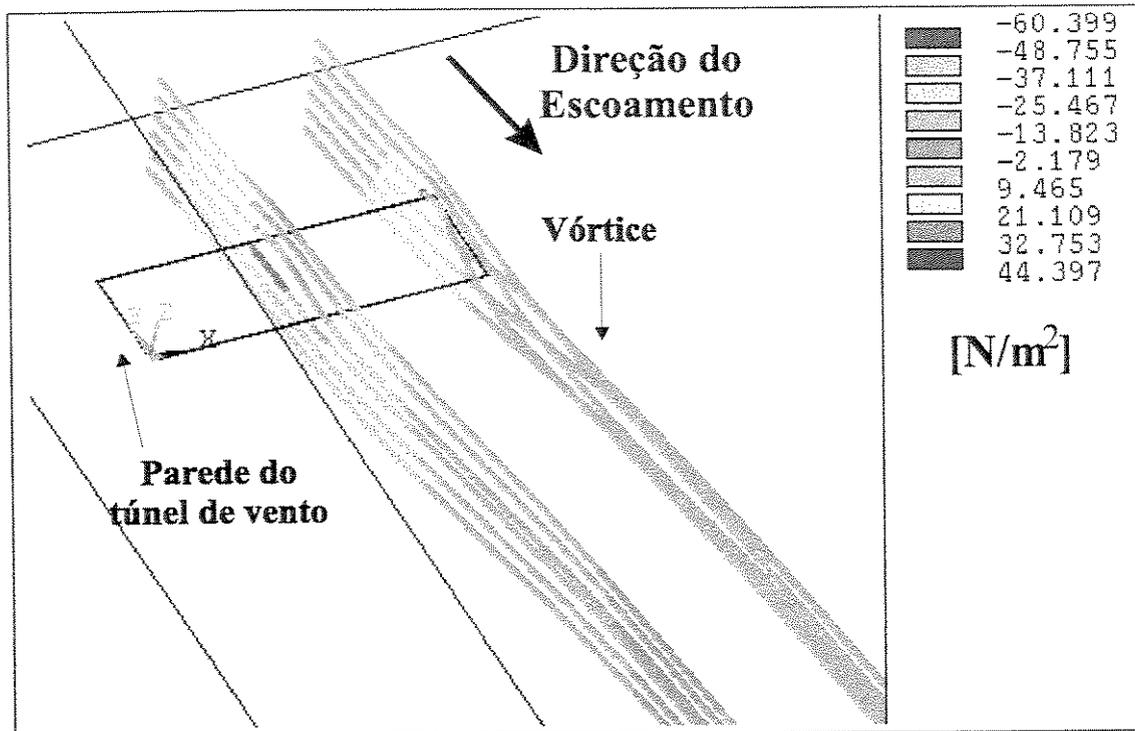


Figura 4.8: Trajetória de várias partículas do fluido, onde as cores representam o campo de pressão.

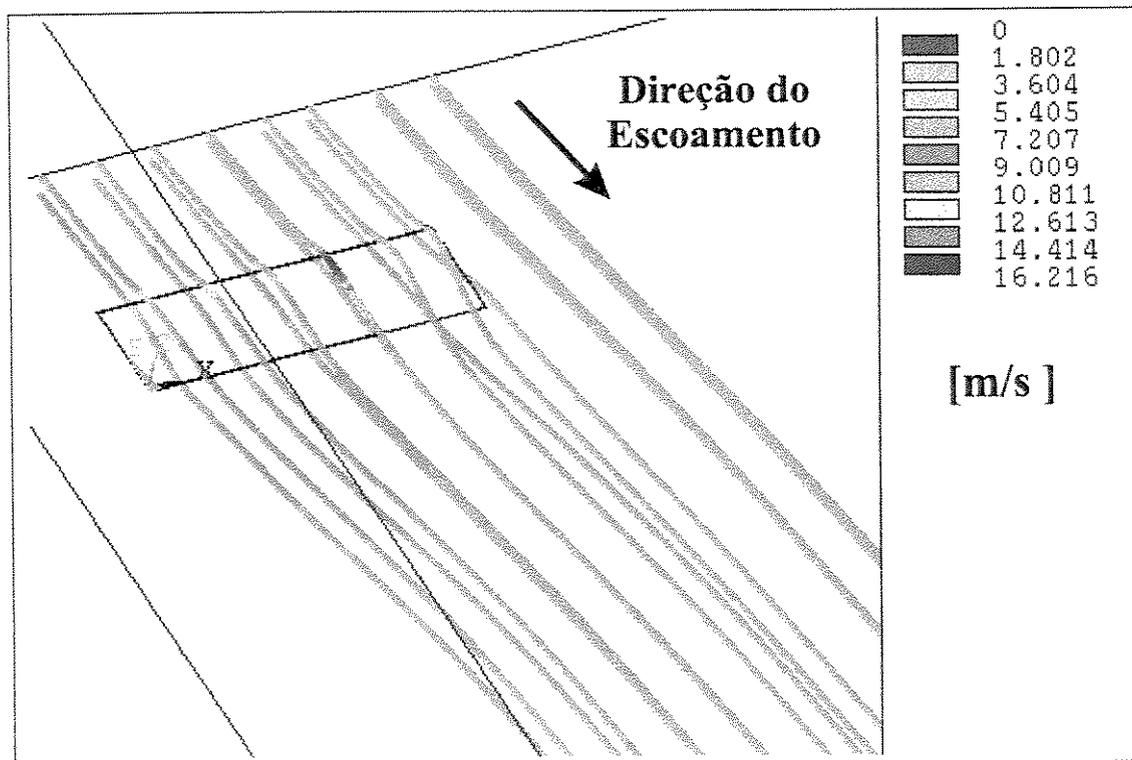


Figura 4.9: Trajetória de várias partículas do fluido, onde as cores representam a velocidade.

# Capítulo 5

## Modelo matemático da estrutura

### 5.1 Introdução

Com o modelo do escoamento pronto e devidamente testado, é necessário agora a construção de um modelo estrutural. Como modelo mecânico para a parte estrutural deste estudo, será considerado o modelo de placas. O modelo de placa constitui uma boa escolha para os objetivos deste estudo, devido a simplicidade da modelagem matemática e também devido à simplicidade de construção da bancada de testes.

Ressalta-se aqui que, o que se objetiva neste estudo é obter uma sensibilidade maior quanto ao comportamento de rigidez e amortecimento de estruturas quando submetidas a um escoamento. O objetivo é desenvolver uma metodologia que possa ser útil e confiável quanto a comparações teórico-experimentais para uma posterior modelagem de uma estrutura mais complexa real, como palhetas de turbina, asas de aeronave, rotores de helicóptero, ou mesmo pontes. Portanto, a escolha de uma placa para representar o problema é bastante adequada.

O modelo de placas, bem como o modelo de cascas, representa uma forma particular de um sólido tridimensional, cuja espessura de tais estruturas é muito pequena quando

comparada com as outras dimensões. Isso significa que várias aproximações podem ser feitas, não requerendo o uso de elementos finitos tridimensionais para o tratamento das mesmas, simplificando bastante o problema.

Além da vantagem desta simplificação do ponto de vista matemático, existe ainda a vantagem do ponto de vista experimental. Uma placa é muito mais fácil de ser construída, não possuindo um perfil como nos aerofólios reais. Além disso, pode-se construir uma placa bem fina, o que resultaria em uma estrutura menos rígida e mais fácil de ser deformada com o túnel de vento de baixa pressão dinâmica em que os testes experimentais são feitos.

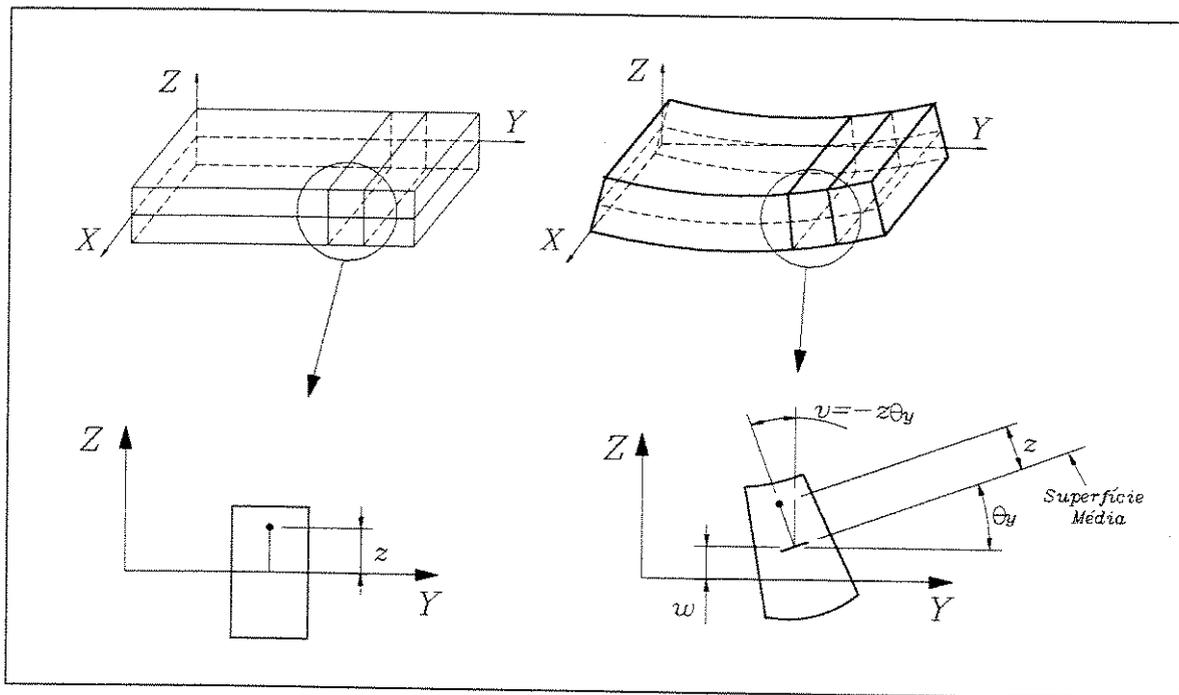
Assim apresenta-se aqui a modelagem matemática da parte estrutural, que consiste na teoria de placas.

## 5.2 Teoria de placas

A teoria de placas a ser apresentada aqui é uma teoria desenvolvida para flexão de placas finas e é baseada na teoria primeiramente formalizada por Kirchhoff (Cook et al., 1989) (Zienkiewicz e Taylor, 1998), e que conseqüentemente leva o seu nome.

As placas, assim como as vigas, suportam o carregamento através de sua flexão. Assim como na teoria de vigas, pontos na superfície média da placa  $z = 0$  deslocam-se somente na direção  $z$ , quando a placa deforma-se em flexão. Na flexão de placas, os carregamentos externos não possuem componentes paralelas ao plano  $xy$ , portanto  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$  na superfície média  $z = 0$ . Essa, juntamente com a diferença na geometria (pois as cascas podem ser superfícies curvas no espaço), são as principais diferenças entre placas e cascas. As cascas, além das tensões de flexão, admitem tensões de membrana, ou seja, tensões que agem tangente à superfície média. Nas placas, assim como nas cascas, a tensão na direção normal,  $\sigma_z$ , é pequena quando comparada às tensões nas outras direções,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , e é desprezada.

Inicialmente pode-se pensar na placa como uma longa viga de largura unitária. Aliás, exceto pela tensão  $\tau_{xy}$ , a teoria de placas é uma extensão da teoria de vigas de uma para duas dimensões. A primeira e mais importante hipótese assumida é a de que *as seções planas normais à superfície média da placa permanecem planas e normais à superfície média durante a deformação*. Por essa razão, as tensões transversais  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  são consideradas zero. Essa é a diferença fundamental entre a teoria de placas de Kirchhoff (aplicável a placas finas) da teoria de placas de Mindlin-Reissner (aplicável a placas grossas). Na teoria de placas de Mindlin-Reissner, as seções planas normais à superfície média da placa permanecem planas, mas não necessariamente normais à superfície média.



**Figura 5.1:** Deformação de um elemento diferencial de placa.

Desse modo, pode-se observar através da Figura 5.1, que o estado de deformação apresentado pelas placas pode ser escrito como:

$$u_s = -\theta_x z \quad v_s = -\theta_y z \quad (5.1)$$

onde  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são pequenos ângulos de rotação com relação à direção normal e são definidos

por

$$\theta_x = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \theta_y = \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (5.2)$$

De acordo com as relações lineares do tensor de deformações, tem-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_s}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_s}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Escrevendo a Lei de Hooke generalizada, as relações tensão deformação, para um material isotrópico, ficam da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu_s^2} & \frac{E\nu_s}{1-\nu_s^2} & 0 \\ \frac{E\nu_s}{1-\nu_s^2} & \frac{E}{1-\nu_s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu_s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Os momentos resultantes,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ , podem ser avaliados da seguinte maneira:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \quad (5.5)$$

Substituindo as equações (5.3) e (5.4) nas equações dos momentos resultantes (5.5), pode-se realizar a integração encontrando as relações de momento-curvatura para as placas.

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \quad (5.6)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \quad (5.7)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu_s) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (5.8)$$

onde  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_s^2)}$  é a rigidez a flexão da placa e é análoga à rigidez a flexão da viga  $EI$ .

Escrevendo as relações momento-curvatura matricialmente, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D & \nu_s D & 0 \\ \nu_s D & D & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_s)D/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

ou equivalentemente:

$$\{\mathbf{Mom}\} = - [\mathbf{D}] \{\chi\}$$

### 5.3 Elementos finitos aplicados às placas

Será desenvolvida aqui a teoria pertinente à obtenção das matrizes de massa, rigidez e força externa equivalente através do método dos elementos finitos para as placas finas discutidas anteriormente (Cook et al., 1989).

A equação que rege a dinâmica de uma estrutura é obtida observando que o trabalho das forças externas deve ser absorvido pelo trabalho das forças internas, inerciais e viscosas, para um dado movimento cinemático infinitesimal. Então para um elemento infinitesimal, este balanço fica dado por

$$\int_{\mathcal{V}} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\Phi\} d\mathcal{S} + \sum_{i=1}^n \{\delta \mathbf{u}\}_i^T \{\mathbf{p}\}_i = \int_{\mathcal{V}} \left( \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} + \{\delta \mathbf{u}\}^T \rho \{\ddot{\mathbf{u}}\} + \{\delta \mathbf{u}\}^T \kappa_d \{\dot{\mathbf{u}}\} \right) d\mathcal{V} \quad (5.10)$$

onde  $\{\delta \mathbf{u}\}$  e  $\{\delta \epsilon\}$  são os deslocamentos e suas correspondentes deformações arbitrárias infinitesimais, respectivamente;  $\{\mathbf{F}\}$  são as forças de campo;  $\{\Phi\}$  são forças de superfície que são tipicamente diferentes de zero somente sobre uma porção da superfície  $S_e$ ;  $\{\mathbf{p}\}_i$  são cargas concentradas em  $n$  pontos do elemento;  $\{\delta \mathbf{u}\}_i^T$  é o deslocamento do ponto no qual a carga  $\{\mathbf{p}\}_i$  é aplicada;  $\rho$  é a massa específica do material;  $\kappa_d$  é o amortecimento do material, análogo à viscosidade.

O campo de deslocamentos, que é uma função do tempo e espaço, e suas duas primeiras derivadas, podem ser aproximadas por

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{q}\} \quad \{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}]\{\dot{\mathbf{q}}\} \quad \{\ddot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} \quad (5.11)$$

Nas equações (5.11), as funções de forma  $[\mathbf{N}]$ , são dadas em função apenas do espaço, e os graus de liberdade nodais  $\{\mathbf{q}\}$  são funções apenas do tempo. Sabendo que as derivadas das funções de forma são dadas por:

$$[\mathbf{B}] = [\partial][\mathbf{N}] \quad (5.12)$$

e que

$$\{\epsilon\} = [\partial]\{\mathbf{u}\} \quad (5.13)$$

E ainda, para um material linear:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}]\{\epsilon\} \quad (5.14)$$

pode-se substituir as equações (5.11), (5.12), (5.13) e (5.14) na equação (5.10), obtendo:

$$\{\delta\mathbf{q}\}^T \left[ \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}][\mathbf{B}]d\mathcal{V}\{\mathbf{q}\} + \int_{\mathcal{V}} \rho[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]d\mathcal{V}\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \int_{\mathcal{V}} \kappa_a[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]d\mathcal{V}\{\dot{\mathbf{q}}\} - \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{N}]^T\{\mathbf{F}\}d\mathcal{V} - \int_S [\mathbf{N}]^T\{\Phi\}dS - \sum_{i=1}^n \{\mathbf{p}\}_i \right] = 0 \quad (5.15)$$

Como  $\{\delta\mathbf{q}\}$  é arbitrário, pode-se reescrever a equação (5.15) como:

$$[\mathbf{M}^e]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}^e]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}^e]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{r}^{ext}\} \quad (5.16)$$

onde as matrizes de massa, de amortecimento e rigidez do elemento são definidas por:

$$[\mathbf{M}^e] = \int_{\mathcal{V}} \rho[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]d\mathcal{V} \quad (5.17)$$

$$[\mathbf{C}^e] = \int_{\mathcal{V}} \kappa_a[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]d\mathcal{V} \quad (5.18)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}][\mathbf{B}]d\mathcal{V} \quad (5.19)$$

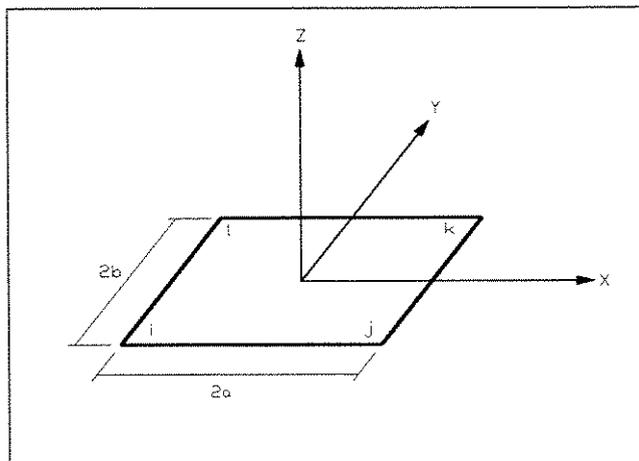
e o vetor de forças externas é definido como:

$$\{\mathbf{r}^{ext}\} = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{N}]^T\{\mathbf{F}\}d\mathcal{V} + \int_S [\mathbf{N}]^T\{\Phi\}dS + \sum_{i=1}^n \{\mathbf{p}\}_i \quad (5.20)$$

Ressalta-se aqui que a teoria apresentada nessa seção, desde a equação (5.10) até a equação (5.20), é geral e pode ser aplicada a qualquer tipo de modelo estrutural, não se restringindo somente às placas. A partir de agora é que a atenção é focada no desenvolvimento de um elemento finito aplicado às placas finas, através da teoria de Kirchhoff. Além disso, as equações das matrizes de massa (5.17) e amortecimento (5.18) utilizam aqui uma dedução mais geral e simples comumente encontrada na teoria do Método dos Elementos Finitos, onde considera-se  $\rho$  e  $\kappa_d$  quantidades escalares. Isto implica, no caso da matriz de massa em desconsiderar-se a inércia rotacional. É importante dizer ainda que a formulação apresentada para a matriz de amortecimento (5.18) utilizada aqui não será usada neste trabalho. A matriz de amortecimento utilizada será uma matriz de amortecimento proporcional, como será visto no Capítulo 7.

### 5.3.1 Funções de forma

Existem muitos elementos desenvolvidos para placas, com diferentes geometrias e hipóteses disponíveis (Cook et al., 1989) (Zienkiewicz e Taylor, 1998). Aqui será apresentado o elemento retangular para a placa fina de Kirchhoff. Esse elemento é escolhido devido à sua simplicidade, sendo sua geometria retangular adequada à modelagem da placa real.



**Figura 5.2:** Elemento finito retangular para placa de Kirchhoff.

O elemento, como visto na Figura 5.2, possui 4 nós ( $i, j, k, l$ ) e 3 graus de liberdade para cada nó ( $w_n, \theta_x$  e  $\theta_y$ ), totalizando 12 graus de liberdade, que podem ser escritos como:

$$\{\mathbf{q}\} = \left\{ w_i - \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad w_j - \frac{\partial w_j}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad w_k - \frac{\partial w_k}{\partial y} \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad w_l - \frac{\partial w_l}{\partial y} \frac{\partial w_l}{\partial x} \right\}^T \quad (5.21)$$

O campo de deslocamentos  $w(x, y)$  pode ser representado por um polinômio cúbico completo, ao qual são adicionados dois termos de quarta ordem simétricos, totalizando 12 termos. O polinômio é representado como:

$$w(x, y) \approx \bar{w}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (5.22)$$

Pode-se reescrever a expressão (5.22) convenientemente da seguinte forma matricial:

$$\bar{w} = \{\mathbf{P}\}_{1 \times 12} \{\alpha\}_{12 \times 1} \quad (5.23)$$

onde  $\{\mathbf{P}\} = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3 y \quad xy^3\}$

e  $\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}\}^T$

Para encontrar as funções de forma do elemento, basta substituir os valores de  $x$  e  $y$

em cada nó, montando o sistema

$$\{\mathbf{q}\}_{12 \times 1} = [\mathbf{A}]_{12 \times 12} \{\alpha\}_{12 \times 1} \quad (5.24)$$

que é equivalente a

$$\{\alpha\}_{12 \times 1} = [\mathbf{A}]_{12 \times 12}^{-1} \{\mathbf{q}\}_{12 \times 1} \quad (5.25)$$

Como  $\bar{w} = \{\mathbf{P}\} \{\alpha\}$  e  $\{\alpha\}$  é dado pela equação (5.25), tem-se então que

$$\bar{w} = \{\mathbf{P}\}_{1 \times 12} [\mathbf{A}]_{12 \times 12}^{-1} \{\mathbf{q}\}_{12 \times 1} \quad (5.26)$$

Portanto, as funções de forma são dadas por:

$$[\mathbf{N}]_{1 \times 12} = \{\mathbf{P}\}_{1 \times 12} [\mathbf{A}]_{12 \times 12}^{-1} \quad (5.27)$$

Utilizando o *software* MATHEMATICA para realizar a inversão da matriz  $[\mathbf{A}]$  e as demais operações algébricas, obteve-se as funções de forma analiticamente, e estas são dadas por:

$$N_1 = \frac{1}{4} - \frac{3x}{8a} + \frac{x^3}{8a^3} - \frac{3y}{8b} + \frac{xy}{2ab} - \frac{x^3y}{8a^3b} + \frac{y^3}{8b^3} - \frac{xy^3}{8ab^3} \quad (5.28)$$

$$N_2 = \frac{-b}{8} + \frac{bx}{8a} + \frac{y}{8} - \frac{xy}{8a} + \frac{y^2}{8b} - \frac{xy^2}{8ab} - \frac{y^3}{8b^2} + \frac{xy^3}{8ab^2} \quad (5.29)$$

$$N_3 = \frac{a}{8} - \frac{x}{8} - \frac{x^2}{8a} + \frac{x^3}{8a^2} - \frac{ay}{8b} + \frac{xy}{8b} + \frac{x^2y}{8ab} - \frac{x^3y}{8a^2b} \quad (5.30)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} + \frac{3x}{8a} - \frac{x^3}{8a^3} - \frac{3y}{8b} - \frac{xy}{2ab} + \frac{x^3y}{8a^3b} + \frac{y^3}{8b^3} + \frac{xy^3}{8ab^3} \quad (5.31)$$

$$N_5 = \frac{-b}{8} - \frac{bx}{8a} + \frac{y}{8} + \frac{xy}{8a} + \frac{y^2}{8b} + \frac{xy^2}{8ab} - \frac{y^3}{8b^2} - \frac{xy^3}{8ab^2} \quad (5.32)$$

$$N_6 = \frac{-a}{8} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{8a} + \frac{x^3}{8a^2} + \frac{ay}{8b} + \frac{xy}{8b} - \frac{x^2y}{8ab} - \frac{x^3y}{8a^2b} \quad (5.33)$$

$$N_7 = \frac{1}{4} + \frac{3x}{8a} - \frac{x^3}{8a^3} + \frac{3y}{8b} + \frac{xy}{2ab} - \frac{x^3y}{8a^3b} - \frac{y^3}{8b^3} - \frac{xy^3}{8ab^3} \quad (5.34)$$

$$N_8 = \frac{b}{8} + \frac{bx}{8a} + \frac{y}{8} + \frac{xy}{8a} - \frac{y^2}{8b} - \frac{xy^2}{8ab} - \frac{y^3}{8b^2} - \frac{xy^3}{8ab^2} \quad (5.35)$$

$$N_9 = \frac{-a}{8} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{8a} + \frac{x^3}{8a^2} - \frac{ay}{8b} - \frac{xy}{8b} + \frac{x^2y}{8ab} + \frac{x^3y}{8a^2b} \quad (5.36)$$

$$N_{10} = \frac{1}{4} - \frac{3x}{8a} + \frac{x^3}{8a^3} + \frac{3y}{8b} - \frac{xy}{2ab} + \frac{x^3y}{8a^3b} - \frac{y^3}{8b^3} + \frac{xy^3}{8ab^3} \quad (5.37)$$

$$N_{11} = \frac{b}{8} - \frac{bx}{8a} + \frac{y}{8} - \frac{xy}{8a} - \frac{y^2}{8b} + \frac{xy^2}{8ab} - \frac{y^3}{8b^2} + \frac{xy^3}{8ab^2} \quad (5.38)$$

$$N_{12} = \frac{a}{8} - \frac{x}{8} - \frac{x^2}{8a} + \frac{x^3}{8a^2} + \frac{ay}{8b} - \frac{xy}{8b} - \frac{x^2y}{8ab} + \frac{x^3y}{8a^2b} \quad (5.39)$$

onde:

$$[\mathbf{N}] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9 \quad N_{10} \quad N_{11} \quad N_{12}] \quad (5.40)$$

Plotadas, elas podem ser vistas nas Figuras 5.3, e 5.4.

### 5.3.2 Matrizes de massa, rigidez e vetor de força nodal equivalente

Obtidas as funções de forma, para obter as matrizes de massa, rigidez e vetor de força nodal equivalente, basta introduzir as funções de forma nas equações obtidas anteriormente, equação (5.17) para a matriz de massa, equação (5.19) para a matriz de rigidez e equação (5.20) para o vetor de força nodal equivalente.

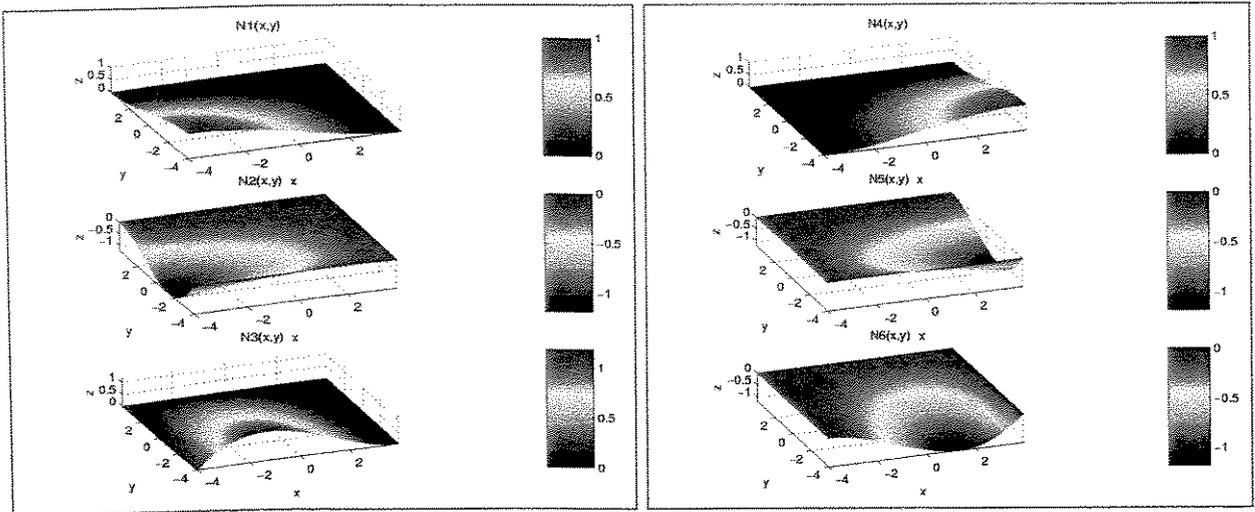


Figura 5.3: Funções de forma para o elemento retangular de placa de Kirchhoff para o nó  $i$  (esquerda) e para o nó  $j$  (direita).

Dessa forma, a matriz de massa fica dada por:

$$[\mathbf{M}]_{12 \times 12} = \rho_s h \int_{-b}^b \int_{-a}^a [\mathbf{N}]_{12 \times 1}^T [\mathbf{N}]_{1 \times 12} dx dy \quad (5.41)$$

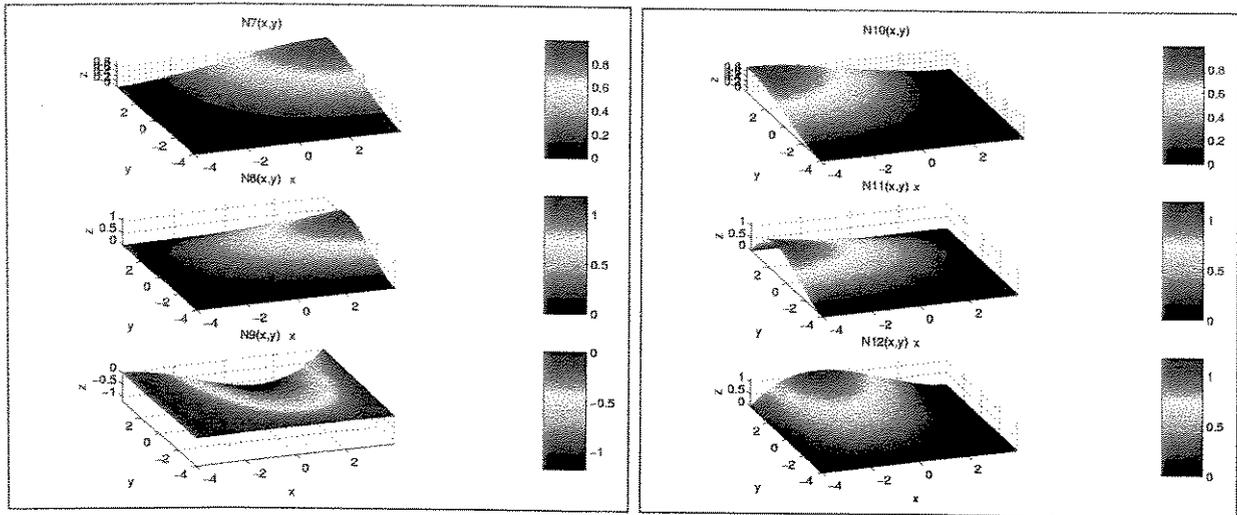
Para a matriz de rigidez, deve-se anteriormente definir a matriz  $[\mathbf{B}]$ . Após a integração na direção  $z$ , e utilizando as relações de momento-curvatura (5.9), chega-se que  $[\mathbf{B}]$  é dada por:

$$[\mathbf{B}]_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \dots \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \dots \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & \dots \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Portanto a matriz de rigidez fica dada por:

$$[\mathbf{K}]_{12 \times 12} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [\mathbf{B}]_{12 \times 3}^T [\mathbf{D}]_{3 \times 3} [\mathbf{B}]_{3 \times 12} dx dy \quad (5.43)$$

Finalmente, como só são consideradas forças de superfície, o vetor de forças nodais



**Figura 5.4:** Funções de forma para o elemento retangular de placa de Kirchhoff para o nó  $k$  (esquerda) e para o nó  $l$  (direita).

equivalentes fica dado por:

$$\{\mathbf{f}\}_{12 \times 1} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [\mathbf{N}]_{12 \times 1}^T q \, dx \, dy \quad (5.44)$$

Novamente utilizando o *software* MATHEMATICA, obtiveram-se as matrizes de massa e rigidez, bem como o vetor de forças nodais equivalente analiticamente. Então foi elaborado um programa em MATLAB que através das dimensões da placa e do número de elementos nas direções  $x$  e  $y$ , desenha a placa e a malha, numera os nós e os elementos, e faz a montagem das matrizes globais da placa em questão.

## 5.4 Validação do programa computacional

A fim de testar e validar o programa computacional desenvolvido, foram feitos dois tipos de testes: o primeiro estático, aplicando uma força pontual no centro da placa e comparando-se o deslocamento nesse ponto com os resultados disponíveis nas referências bibliográficas (Zienkiewicz e Taylor, 1998); e o segundo dinâmico, calculando-se as frequências naturais da placa e comparando-se com testes experimentais e com resultados obtidos através do

software ANSYS.

### 5.4.1 Comparação estática teórica

O primeiro teste feito para validar o programa desenvolvido consistiu em aplicar uma força pontual no centro de uma placa quadrada, engastada em todos os lados, e calcular o deslocamento no mesmo ponto central, através da equação:

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{F} \quad (5.45)$$

Os cálculos foram feitos para diferentes discretizações, aumentando-se o refinamento da malha e podem ser vistos na Tabela (5.1). Através do deslocamento máximo no centro da placa ( $w_{max}$ ), calcula-se um fator  $\beta$ , através da relação  $w_{max} = \beta FL^2/D$ , que é comparado com o valor teórico exato, de acordo com a referência (Zienkiewicz e Taylor, 1998). Na relação acima,  $F$  é a força aplicada,  $L$  é o comprimento da placa e  $D$  é a rigidez à flexão da placa.

Malha	$\beta$	Erro*
$2 \times 2$	0,005932	5,9%
$4 \times 4$	0,006148	9,7%
$8 \times 8$	0,005807	3,7%
$12 \times 12$	0,005712	2,0%
$16 \times 16$	0,005673	1,3%
Exato (Timoshenko)	0,00560	—

**Tabela 5.1:** Comparação do deslocamento central de uma placa quadrada, engastada em todos os lados.  $w_{max} = \beta FL^2/D$ . \* Erro em relação ao deslocamento exato.

Pela Figura (5.5) pode-se observar, como exemplo, uma malha utilizada, plotada juntamente com os nós e elementos, com uma divisão de  $4 \times 4$ .

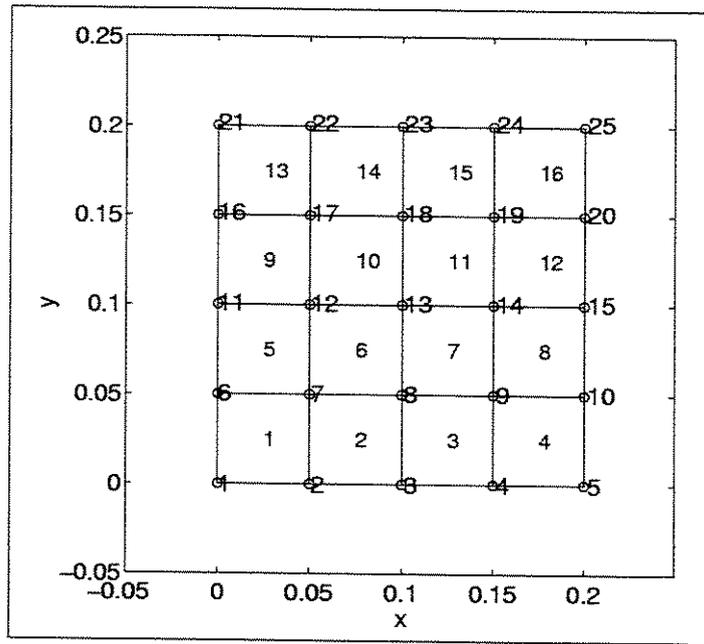


Figura 5.5: Malha  $4 \times 4$  para uma placa quadrada.

### 5.4.2 Comparação dinâmica teórico-experimental

No segundo teste feito para validar o programa, montaram-se as matrizes de rigidez e de massa e calcularam-se os autovalores, que correspondem às frequências naturais do sistema, para uma placa retangular completamente livre.

Os valores das constantes físicas utilizados nos cálculos das frequências naturais podem ser vistos na Tabela 5.2.

Módulo de elasticidade do aço	$E = 2,1e11 \text{ N/m}^2$
Módulo de Poisson do aço	$\nu_s = 0,33$
Massa específica do aço	$\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$
Comprimento da placa	$0,3 \text{ m}$
Largura da placa	$0,1 \text{ m}$
Espessura da placa	$0,001 \text{ m}$

Tabela 5.2: Valores utilizados nos cálculos das frequências naturais da placa completamente livre.

Na Tabela 5.3 mostra-se a comparação dos valores das 5 primeiras frequências naturais, obtidos pelo programa em MATLAB, pelo *software* ANSYS e experimentalmente. Na Figura 5.6 mostram-se dois resultados experimentais. A figura mostra a FFT do sinal de aceleração

da placa, quando esta é excitada com uma leve batida em diferentes pontos. Ressaltam-se os picos representando as 5 primeiras frequências naturais.

Malha	Teórico	ANSYS	Experimental	Erro*
$2 \times 2$	59,87	62,56	60,6	-1,2%
	108,38	106,19	110,0	-1,5%
	190,27	218,14	168,7	+12,8%
	231,12	223,96	232,5	-0,6%
	382,98	309,64	330,6	+15,84%
$4 \times 4$	59,59	60,51	60,6	-1,7%
	107,95	107,64	110,0	-1,9%
	167,38	175,53	168,7	-0,8%
	228,99	226,95	232,5	-1,5%
	331,31	362,82	330,6	+0,2%
$8 \times 8$	59,43	59,72	60,6	-1,5%
	107,90	107,87	110,0	-2,0%
	165,67	168,23	168,7	-1,8%
	228,61	228,40	232,5	-1,7%
	327,46	336,50	330,6	-1,0%
$12 \times 12$	59,41	59,54	60,6	-2,0%
	107,88	107,87	110,0	-1,9%
	165,40	166,61	168,7	-2,0%
	228,46	228,45	232,5	-1,7%
	326,28	330,66	330,6	-1,3%

**Tabela 5.3:** Comparação das 5 primeiras frequências naturais [Hz] para a placa retangular completamente livre. \* Erro do valor teórico em relação ao experimental.

Na Figura 5.7, pode-se ver uma foto do teste experimental feito para a obtenção das frequências naturais da placa. Pode-se ver na foto um acelerômetro colado na placa e o amplificador de sinais que estava ligado a um computador com placa de aquisição de dados. Leves batidas foram aplicadas à placa em diferentes locais de modo a excitar os modos de flexão como os de torção. A Figura 5.6 mostra a FFT de dois sinais de aceleração onde uma leve batida foi utilizada como excitação para cada um.

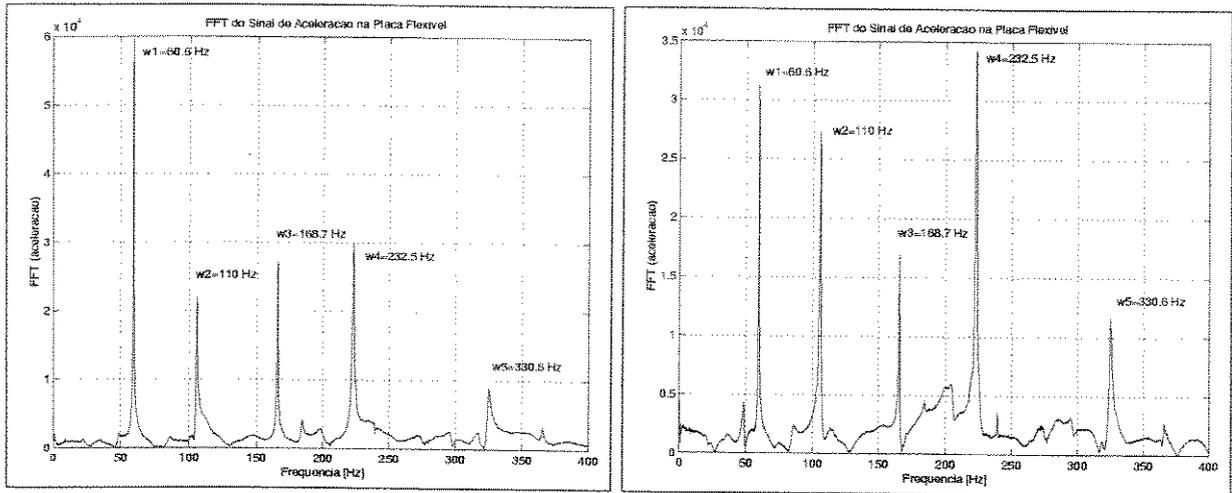


Figura 5.6: FFT do sinal de aceleração.

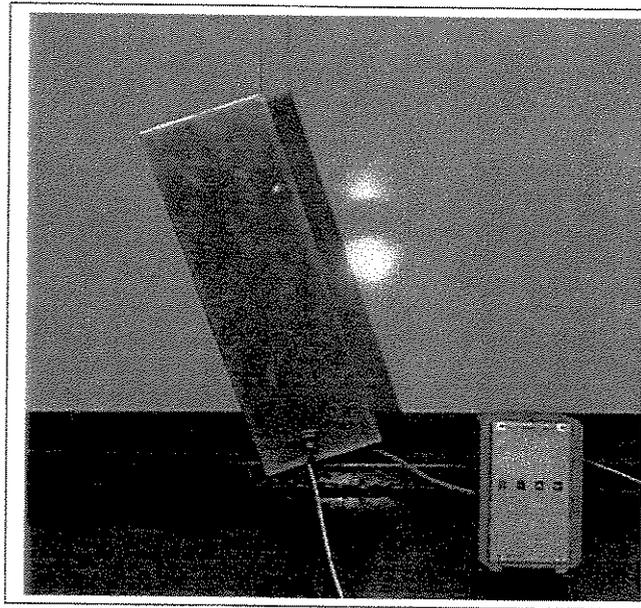


Figura 5.7: Foto do teste experimental realizado para obtenção das frequências naturais de uma placa completamente livre.

## 5.5 Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas as hipóteses e equações referentes ao modelo matemático estrutural utilizado neste trabalho. O modelo estrutural é baseado na teoria de Kirchhoff para placas finas. Foi apresentado também, a obtenção das matrizes de massa e rigidez, bem

como o vetor de forças nodais equivalente.

A fim de validar o programa computacional elaborado em MATLAB, foram apresentados testes feitos, primeiramente em um caso estático e em seguida em um caso dinâmico, comparando deslocamentos a partir de uma força aplicada e frequências naturais, respectivamente.

Com os modelos do escoamento e estrutural prontos, passa-se agora à montagem da interação entre os dois modelos, a partir de trocas de condições de contorno. Essa é a parte da interação fluido-estrutura, a ser apresentada no próximo capítulo.

# Capítulo 6

## Interação fluido-estrutura

### 6.1 Introdução

Uma vez que os modelos matemáticos da estrutura e do fluido foram devidamente apresentados, detalhados e testados, tem início a parte da interação fluido-estrutura. É para desenvolver essa interação que os modelos do escoamento do fluido (através do FLOTRAN) e da placa flexível (através do MATLAB) foram desenvolvidos. Agora os dois modelos devem trabalhar juntos trocando informações, interagindo sob um algoritmo especial, até que se consiga a condição de equilíbrio estático da placa submetida a um escoamento e, num momento posterior, perturbar essa condição, obtendo as matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes, provenientes do fluido.

Uma observação muito importante é feita aqui. Se o objetivo fosse somente obter a condição de equilíbrio estático da placa, poderia-se perfeitamente desenvolver os dois modelos dentro do ANSYS, fazendo somente um programa. Porém os objetivos desse estudo vão além disso. É necessário o conhecimento dos valores de cada elemento das matrizes de amortecimento e de rigidez estrutural, de modo a somar posteriormente novos elementos, provenientes do fluido, para que se possa comparar o amortecimento e rigidez do fluido com

os da estrutura. A obtenção das matrizes de massa e de rigidez através do ANSYS é relativamente complicada, preferindo-se aqui, fazer um programa computacional em uma linguagem simples (MATLAB), onde se tenha perfeito domínio das matrizes e de seus elementos. Além disso, torna-se mais fácil a posterior inclusão de outras matrizes na análise do problema, como a inclusão de matrizes relacionadas ao movimento giroscópico dos corpos, como no caso do estudo de palhetas de turbinas.

Com tudo isso em mente, apresenta-se nesse capítulo, a metodologia utilizada na interação entre os dois modelos de modo a obter a posição de equilíbrio estático da placa, bem como a posterior metodologia de obtenção dos coeficientes equivalentes de amortecimento e rigidez provenientes do fluido. Os requisitos de compatibilidade de malha são apresentados e discutidos. O algoritmo é apresentado e o resultado de alguns casos são mostrados, bem como um complemento da convergência da malha mostrado no Capítulo 4.

## 6.2 A metodologia de interação fluido-estrutura

A idéia básica do algoritmo de interação fluido-estrutura, no caso deste trabalho, é a de trocar condições de contorno entre os modelos do escoamento e da estrutura, até que a condição de equilíbrio seja atingida.

Inicialmente calcula-se o campo de pressão através do modelo do escoamento em torno da placa na sua posição não deformada; aplicam-se as pressões como cargas nodais equivalentes na estrutura; calcula-se a sua deformação através de um cálculo estático; deforma-se a malha do fluido, de acordo com a deformação calculada da placa; por fim, recalcula-se o campo de pressão em torno da nova posição da placa, iniciando uma nova iteração. O processo é finalizado assim que a deformação da placa não apresente mais mudanças significativas, de acordo com um critério de convergência pré-estabelecido, o que caracteriza a convergência do processo à posição de equilíbrio estático da mesma.

Com essa idéia básica em mente, o algoritmo de interação fluido-estrutura pode ser definido com os seguintes passos, podendo ser visto também na Figura 6.1:

1. Definir o domínio de solução do fluido bem como da estrutura, discretizá-los, definindo também suas condições de contorno;
2. Calcular o campo de pressão em torno da placa (através do FLOTRAN);
3. Aplicar as pressões calculadas na superfície da placa como cargas nodais equivalentes na estrutura;
4. Calcular os deslocamentos da estrutura (através do MATLAB);
5. Verificar a convergência do deslocamento dos nós. Se o processo convergiu, então pode-se parar, caso contrário, é necessário continuar com o algoritmo;
6. Definir os deslocamentos calculados como nova geometria do modelo do escoamento;
7. Atualizar a malha do fluido, de acordo com os deslocamentos calculados;
8. Recalcular o campo de pressão, retornando ao passo 2.

O algoritmo pode, à primeira vista, parecer simples e de fácil implementação, porém ele exige algumas compatibilidades e constante trocas de informações entre os *softwares*. Para que o algoritmo funcione perfeitamente, alguns dos processos possuem particularidades e serão comentados com detalhes.

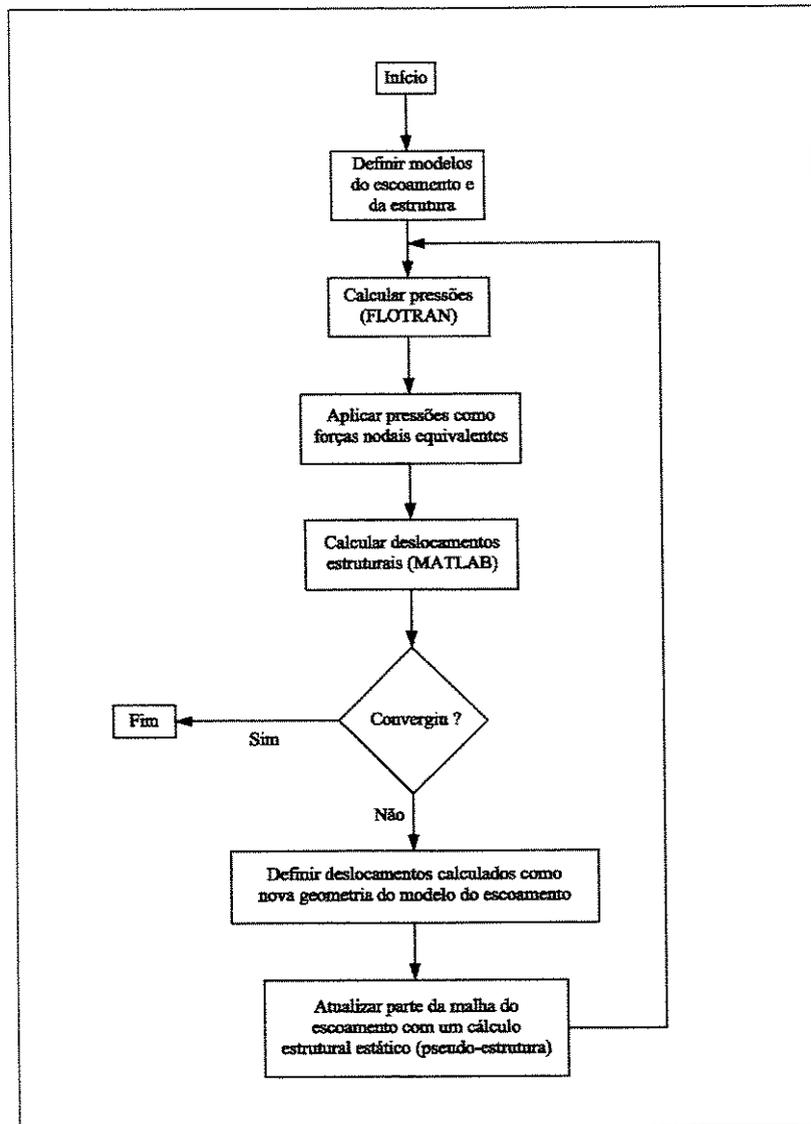


Figura 6.1: Algoritmo de solução.

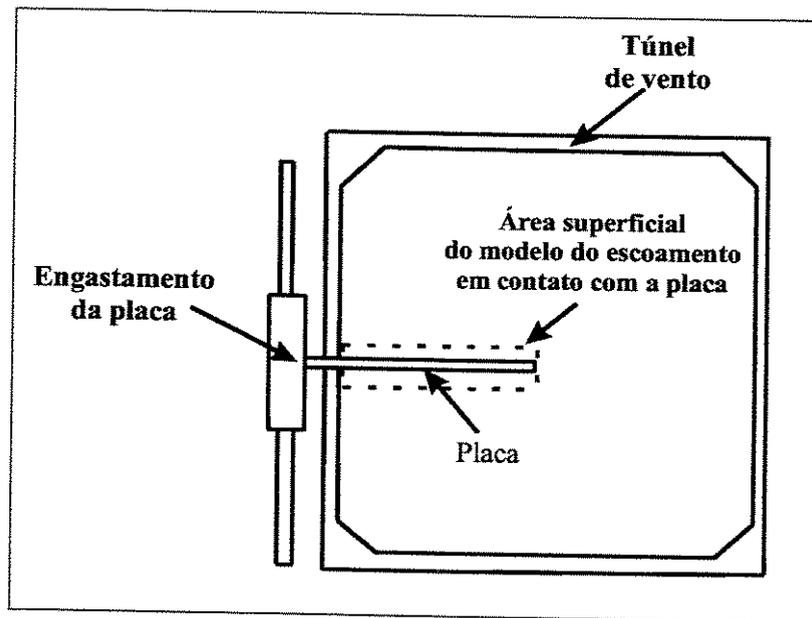
## 6.2.1 Compatibilidade entre os domínios e as malhas de solução

### (A) Sobre o domínio de solução do fluido e da estrutura

Geralmente, quando se quer realizar um cálculo de interação fluido-estrutura desse tipo em uma estrutura real, tal como a metade de asa de uma aeronave, discretiza-se toda a parte estrutural, desde o engaste. Então o domínio do fluido também é definido e discretizado a

partir do engaste, de modo que a área superficial da estrutura seja a mesma do modelo do escoamento. Nada mais natural e lógico.

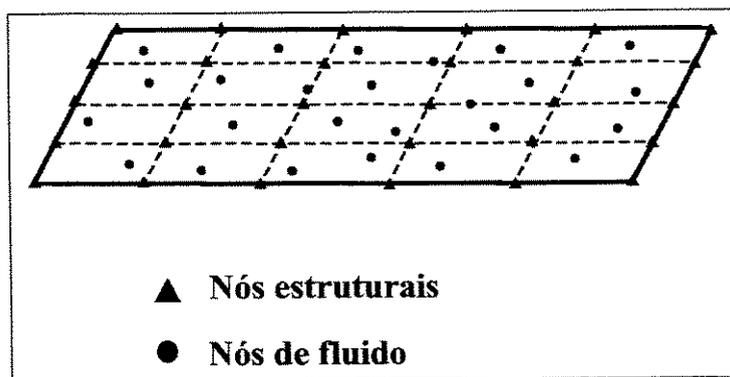
Entretanto, no caso deste trabalho, a área superficial do modelo do escoamento que fica em contato com a superfície estrutural não é a mesma da área superficial da estrutura. A área superficial da estrutura é maior do que a área superficial do modelo do escoamento em contato com a superfície estrutural (ou área molhada). Isto acontece pois a condição de ensaio da placa no túnel de vento será feita com o engaste da mesma fora do túnel, de modo a não perturbar o escoamento. Então, a condição de engaste estrutural da placa não coincide com a parede do túnel do vento (início do domínio do fluido), exigindo que exista uma pequena parte da estrutura que não está sob a ação da pressão do escoamento (veja Figura 6.2). O resultado é que a superfície estrutural da placa terá mais elementos e nós que a superfície do fluido.



**Figura 6.2:** Engastamento da placa fora do túnel de vento, fazendo com que o comprimento da placa para a solução estrutural fique maior do que para a solução do escoamento.

## (B) Compatibilidade entre a superfície do modelo estrutural e a superfície do modelo de escoamento

A maneira de discretização da superfície estrutural e da superfície do fluido em contato com a superfície estrutural é um grande problema e merece bastante cuidado nos problemas de interação fluido-estrutura. Geralmente, as malhas do fluido precisam ser muito mais refinadas do que as malhas estruturais, principalmente nos contornos onde existem superfícies sólidas. Portanto, podem existir vários nós na superfície do fluido contidos em um único elemento estrutural (veja Figura 6.3). Isso torna a aplicação das pressões dos nós do fluido como cargas nos nós da estrutura bastante complicada, envolvendo interpolações com algoritmos especializados e complexos. Além disso, com as interpolações, dependendo da distribuição e do número de nós nas duas superfícies, podem ocorrer erros no sentido de que nem toda a energia contida no fluido é passada de forma correta para a estrutura (Bhardwaj et al., 1998) (Farhat et al., 1998).



**Figura 6.3:** Exemplo ilustrativo de uma malha com nós estruturais não coincidentes com os nós do escoamento.

Da mesma forma que é difícil tratar a troca de cargas do fluido para a estrutura, ocorre o problema inverso, de dificuldade equivalente, que é a atualização da superfície do fluido, de acordo com os deslocamentos calculados pela estrutura. São necessárias novas interpolações, com os mesmos problemas, podendo gerar novamente imperfeições na troca de energia entre a estrutura e fluido.

A implementação de algoritmos capazes de mapear a superfície com inúmeros nós de

fluido para os nós da estrutura e vice-versa, apesar de já estarem desenvolvidos e discutidos na literatura (Bhardwaj et al., 1998) (Farhat et al., 1998) (Simth et al., 1996), não seria possível dentro desse projeto de Mestrado, contendo abrangente escopo teórico e experimental como esse. A solução adotada de forma a contornar esse problema foi a de fazer coincidir todos os nós da superfície da estrutura com a superfície do fluido (veja Figura 6.4). Dessa forma, evita-se a utilização de interpolações, bem como garante-se que toda a energia é passada do fluido para a estrutura e vice-versa. Isso é feito mesmo que a malha utilizada para a estrutura tenha que ser muitas vezes mais refinada do que seria necessário se fosse uma análise estrutural comum.

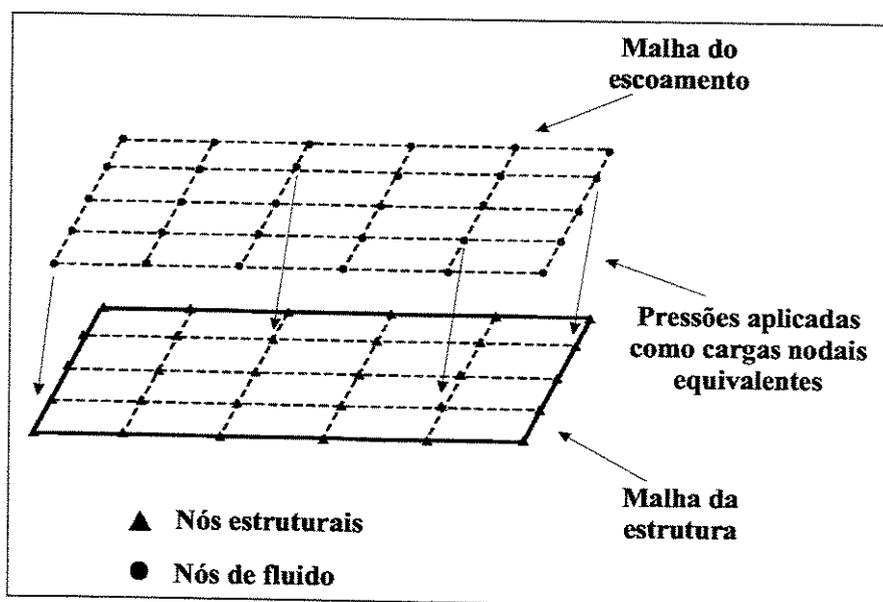


Figura 6.4: Exemplo ilustrativo de uma malha com nós estruturais coincidentes com os nós do escoamento.

## 6.2.2 Troca de cargas e deslocamentos

### (A) Aplicação das pressões como cargas estruturais

Toda vez que se resolve o modelo do escoamento, chega-se à valores de pressão em cada nó do domínio do fluido. Sabendo a posição (coordenadas) dos nós da superfície superior

e inferior da placa, pode-se extrair as pressões nesses nós e utilizá-las como cargas para a análise estrutural.

A maneira de aplicação das pressões é feita através da utilização do vetor de forças nodais equivalentes. Esse vetor é dado pela equação (5.44), em que a pressão atuante em um elemento é introduzida como forças e momentos nos nós do elemento.

Para cada nó da superfície estrutural da placa, existem dois nós da superfície do fluido, um inferior e outro superior. O valor da pressão da superfície superior é subtraído do valor inferior, obtendo uma pressão para cada nó. Como a construção do vetor de forças nodais equivalentes assume que a pressão é uniforme em todo o elemento e é aplicada no centro do mesmo, é necessário interpolar as pressões obtidas nos nós para o centro do elemento estrutural. Como os elementos nesse caso, são retangulares e os nós estão situados à mesma distância do centro do elemento, é feita uma média aritmética entre os quatro nós de cada elemento, obtendo assim a pressão no centro do mesmo. Desse modo, é montado para cada elemento, o vetor de forças nodais equivalente, chegando-se assim, ao vetor global de força  $\mathbf{F}_f$ , que será aplicado na estrutura.

Com a aplicação das pressões calculadas pela solução das equações do fluido (FLOTRAN), a equação do problema estrutural (MATLAB), que calcula os deslocamentos da placa, fica dada por:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}_f \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez estrutural,  $\mathbf{q}$  é o vetor dos graus de liberdade estruturais e  $\mathbf{F}_f$  é o vetor de forças nodais equivalentes proveniente do fluido.

## **(B) Aplicação dos deslocamentos na malha do escoamento**

Quando se obtém os deslocamentos estruturais, é necessário atualizar a geometria da placa na malha do fluido. Isso é feito simplesmente impondo deslocamentos dos nós da superfície da placa iguais aos calculados pela análise estrutural (através da equação (6.1)). Com isso, modifica-se a geometria do domínio do fluido, fazendo-se com que esta tenha a geometria deformada, calculada estruturalmente. Percebe-se aqui, novamente, a facilidade na atualização da geometria da placa na malha do escoamento, devido à coincidência dos nós estruturais e do escoamento.

### **6.2.3 Atualização da malha do fluido**

Depois que os deslocamentos foram impostos à malha do fluido, é necessário reorganizar internamente esta, de modo a 'acomodar' a nova geometria. Isto é feito através do volume intermediário, ou volume da pseudo-estrutura criado, comentado no Capítulo 4. Este volume intermediário, discretizado como parte do domínio de solução do fluido, serve no momento de cálculo do fluido, como elementos de fluido. Porém, depois que os deslocamentos foram calculados, este volume serve como uma 'pseudo-estrutura'. Seus elementos agora se tornam elementos estruturais tri-dimensionais, onde a atualização da superfície (contorno) da malha do fluido, através da aplicação dos deslocamentos estruturais, funciona como uma condição de contorno. Nas outras superfícies desse volume, as superfícies externas em contato com o volume maior do fluido, são aplicadas condições de contorno de engaste, evitando o movimento da malha e mantendo os nós conectados com os nós do volume exterior. Somente na superfície de engastamento da placa (parede do túnel de vento) é que são colocadas condições de contorno de modo a restringir que os nós se movimentem para fora ou para dentro do volume, porém nas outras direções os nós são livres para se movimentar.

Uma vez colocadas as condições de contorno descritas acima, juntamente com as condições de deslocamento da placa, realiza-se um cálculo estático, utilizando como proprieda-

des, 1% do módulo de elasticidade e 1% do módulo de Poisson do aço, de forma a calcular deslocamentos dos nós internos, reestruturando a malha do fluido. Este cálculo é feito utilizando o próprio ANSYS.

Esta abordagem tem a vantagem de não ser necessária a construção de uma nova malha a cada iteração, principalmente porque o FLOTRAN guarda os resultados de cada nó do fluido, permitindo que ele recomece suas iterações da última análise feita, diminuindo o número de iterações necessárias dentro das análises subsequentes do fluido.

### 6.3 Estudo de convergência complementar da solução

Com o algoritmo desenvolvido e implementado, passou-se à fase de testes do mesmo. A seguir apresentam-se testes feitos com as mesmas malhas e propriedades do ar, descritas na Seção 4.6.6. As propriedades e dimensões da placa podem ser vistas na Tabela 6.1. (Note as dimensões da placa em cada caso. No caso do fluido, ela possui um comprimento de 0,30 m e no caso da estrutura de 0,34 m, representando um vão entre o engastamento da placa e a parede interna do túnel de vento de 0,04 m.)

Módulo de elasticidade do aço	$E = 2,1e11 \text{ N/m}^2$
Módulo de Poisson do aço	$\nu_s = 0,33$
Massa específica do aço	$\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$
Comprimento da placa	0,34 m
Largura da placa	0,1 m
Espessura da placa	0,001 m

**Tabela 6.1:** Propriedades e dimensões utilizadas nos cálculos feitos no estudo de convergência da solução fluido-estrutura.

Na Figura 6.5 mostra-se uma comparação que valida a convergência da solução através do refinamento da malha, tratada no Capítulo 4. Foram feitos testes refinando-se a malha do fluido na placa (e conseqüentemente da estrutura), começando com uma malha de  $10 \times 10$ , passando por  $12 \times 12$ ,  $14 \times 14$ ,  $16 \times 16$ ,  $17 \times 17$ ,  $19 \times 19$ ,  $21 \times 21$ ,  $22 \times 22$ ,  $23 \times 23$  até  $24 \times 24$  divisões. Os testes foram feitos com uma condição de convergência de 0,02 %

dos deslocamentos em cada nó, entre as iterações. Isso significa que todos os nós deveriam obedecer a condição de que cada nó estrutural não deveria possuir uma variação de deslocamento superior a 0,02%, caso contrário, o algoritmo seguiria procurando pela nova condição de equilíbrio. Tiveram de ser feitas, em média, um total de 4 iterações para se alcançar o critério de convergência. Verificou-se, ainda, que nem sempre é possível alcançar um grau de precisão maior que essa, pois os deslocamentos ficam oscilando em torno de um valor de equilíbrio, sem que haja uma convergência maior da solução. A Figura 6.5 mostra a comparação correspondente ao bordo de fuga da placa para os diversos casos. Pode-se perceber que aumentando mais as divisões do que  $16 \times 16$ , os resultados também oscilam em torno de um valor de equilíbrio, significando que não há como melhorar mais a precisão e indicando a convergência da solução com o refinamento das malhas utilizadas.

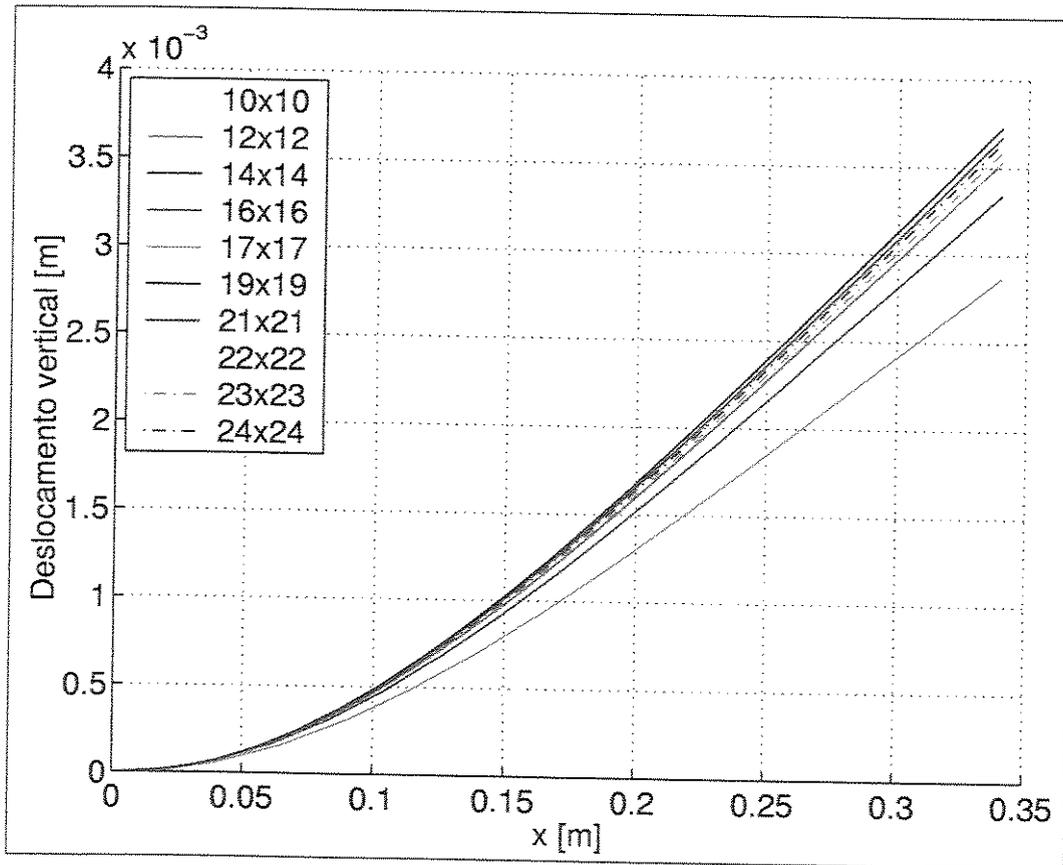
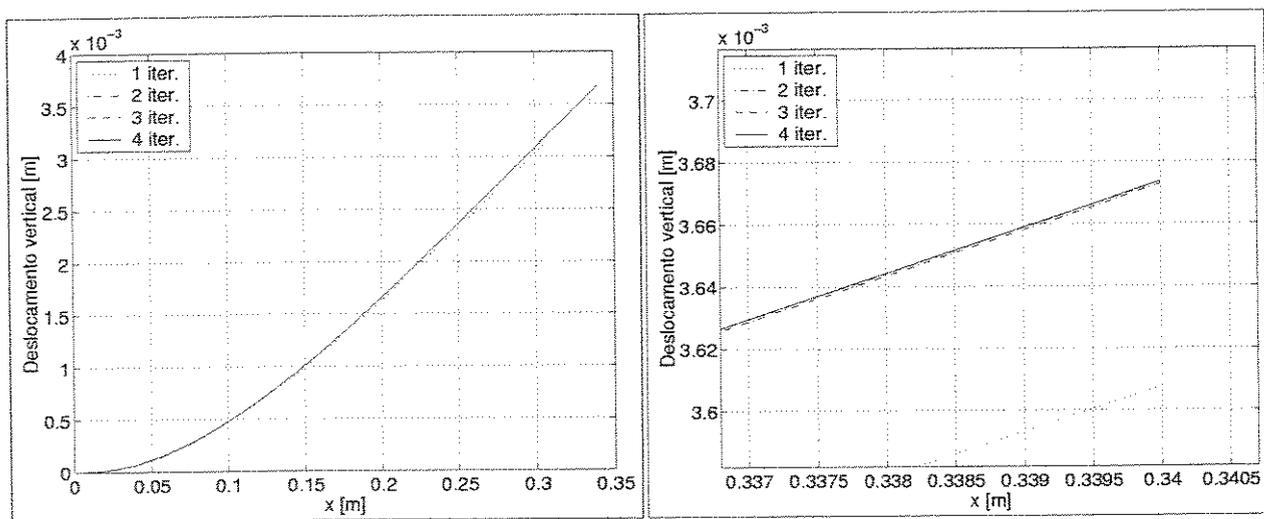


Figura 6.5: Comparação entre as diversas divisões da malha. As linhas representam o bordo de fuga da placa.

Os valores de deslocamento mostrados na Figura 6.5 mostram que uma placa de

0,34 m × 0,10 m, submetida a um escoamento de 10 m/s a 10° de inclinação, tem um deslocamento em sua ponta (no bordo de fuga) de 3,8 mm. Analisando ainda os deslocamentos, entre as malhas, a precisão alcançada é em torno de micra.

A Figura 6.6 mostra a evolução do teste feito com uma malha de 17 × 17 divisões. Foram necessárias 4 iterações para se atingir a convergência estática. Na mesma figura à esquerda pode-se ver uma ampliação do deslocamento feito na ponta da placa. Vê-se que da segunda para a terceira e desta para a quarta iteração, a mudança no resultado é praticamente imperceptível.



**Figura 6.6:** Evolução das iterações para o caso de 17 × 17 divisões da malha, à esquerda. À direita vê-se uma ampliação na ponta da placa. A linha representa o bordo de fuga da placa.

Na Figura 6.7, apresenta-se a placa para o caso de 22 × 22 divisões da malha, depois de 4 iterações, onde obteve-se a convergência especificada. É difícil notar através da figura, mas a placa também torce um pouco, ficando o seu bordo de ataque com maior deslocamento vertical que o bordo de fuga.

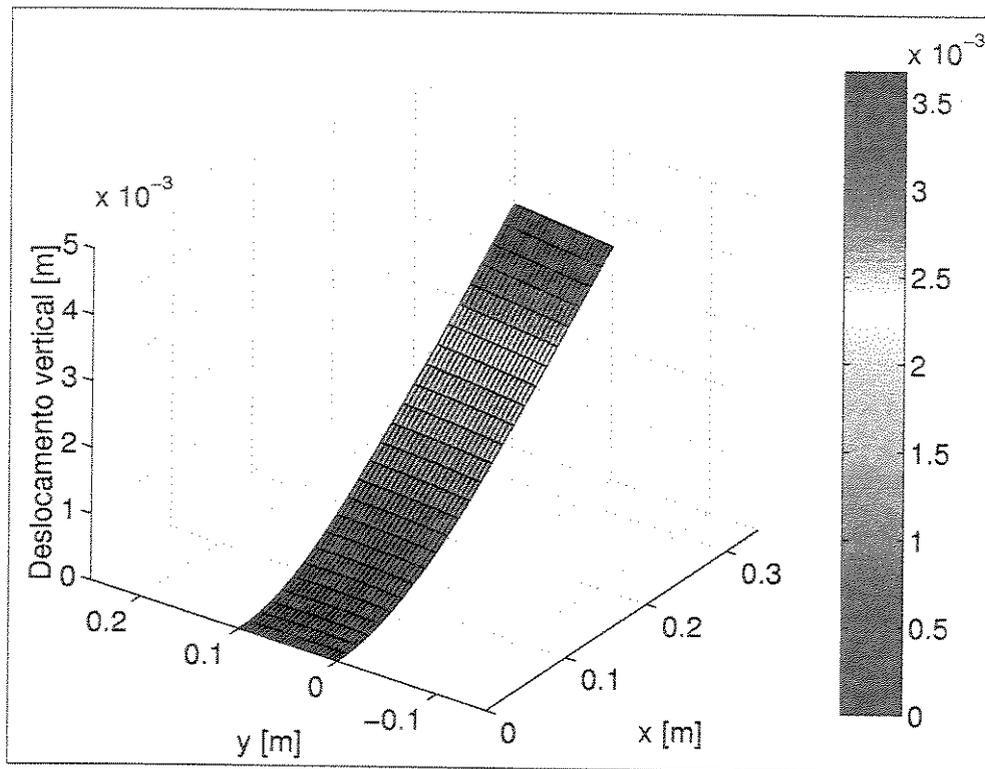


Figura 6.7: Posição de equilíbrio da placa atingida após 4 iterações, para uma malha de  $22 \times 22$  divisões.

## 6.4 Conclusões

Toda a metodologia relacionada à interação fluido-estrutura deste trabalho foi descrita e explicada neste capítulo. Os aspectos de compatibilidade de domínio e malhas entre o fluido e estrutura, bem como aspectos relacionados à troca de cargas e deslocamentos, como também a metodologia de atualização das malhas foram detalhados e justificados. Os resultados mostrados revelam a viabilidade do algoritmo como também a convergência das malhas escolhidas que se foram refinando. Desse modo, através de um número médio de 4 iterações, conseguiu-se chegar à posição de equilíbrio estático da placa quando submetida a um escoamento.

A metodologia de interação fluido-estrutura apresentada aqui, tem como resultado a obtenção da posição de equilíbrio estático da placa submetida ao escoamento. Entretanto, é necessário ainda a obtenção dos coeficientes de rigidez e amortecimento equivalente

provenientes do escoamento. Estes são obtidos a partir da posição de equilíbrio da placa, introduzindo pequenas perturbações. No próximo capítulo, a obtenção dos coeficientes equivalentes será tratada.

# Capítulo 7

## Obtenção da rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do fluido

### 7.1 Introdução

Todo o procedimento de cálculo da interação fluido-estrutura tratados até agora, bem como os exemplos de convergência da solução através do refinamento da malha, somente tratam o problema de forma estática. Ou seja, a posição de equilíbrio obtida no final do processo de interação entre os dois modelos, é a posição de equilíbrio estático obtido através da equação (6.1),  $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}_f$ . Entretanto, é necessário ainda obter os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento provenientes do fluido. Estes são obtidos a partir da posição de equilíbrio estático da placa.

Uma vez que a placa encontra-se em sua posição de equilíbrio estático, ou seja, quando a interação fluido-estrutura convergiu, os coeficientes de rigidez e amortecimento equivalente podem ser obtidos. Este capítulo trata da obtenção dos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento provenientes do fluido. Além disso, toda a formulação utilizada para o cálculo de frequências naturais e fatores de amortecimento do sistema é também incluída

aqui.

## 7.2 Obtenção dos coeficientes equivalentes

A partir da solução convergida da interação fluido-estrutura, ou seja, da posição de equilíbrio estático da placa, obtém-se os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento introduzidos pelo escoamento.

Se a obtenção da rigidez equivalente é desejada, então uma pequena perturbação em torno da posição de equilíbrio estático, em uma forma modal pré-calculada, é imposta à placa. A malha do fluido é atualizada através do procedimento de pseudo-estrutura e um novo campo de pressão em torno da placa é calculado. Sabendo a diferença entre esse novo campo de pressão e o campo de pressão da posição de equilíbrio, e sabendo também a perturbação dada, a rigidez equivalente é calculada da seguinte forma, para cada nó estrutural  $i$  :

$$k_i = \frac{\Delta P_i}{\Delta \mathbf{q}_i} A_i \quad (7.1)$$

onde  $A_i$  é a área envolvendo cada nó. Se o nó em questão estiver no meio da placa, sua área será equivalente à área de um elemento. Caso o nó esteja posicionado nas bordas da placa, sua área será a metade de um elemento. Por fim, caso o nó for um dos quatro nós localizados nos cantos da placa, sua área será de um quarto da área de um elemento.

Caso a obtenção do amortecimento equivalente seja desejada, então uma perturbação de velocidade, em uma forma modal pré-calculada é imposta à placa. A placa permanece em sua posição de equilíbrio, mas na análise do escoamento, são impostas velocidades aos nós da fronteira fluido-estrutura e um novo campo de pressão é calculado. Novamente, sabendo da diferença entre os campos de pressão e da velocidade de perturbação, o amortecimento

equivalente é calculado da seguinte forma, para cada nó estrutural  $i$  :

$$d_i = \frac{\Delta P_i}{\Delta \dot{\mathbf{q}}_i} A_i \quad (7.2)$$

A velocidade de perturbação imposta, é dada multiplicando-se o autovetor (forma modal)  $\Phi_n$  pela frequência natural associada a esse modo (autovalor)  $\omega_n$ , ou  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{pert}} = \Phi_n \cdot \omega_n$ .

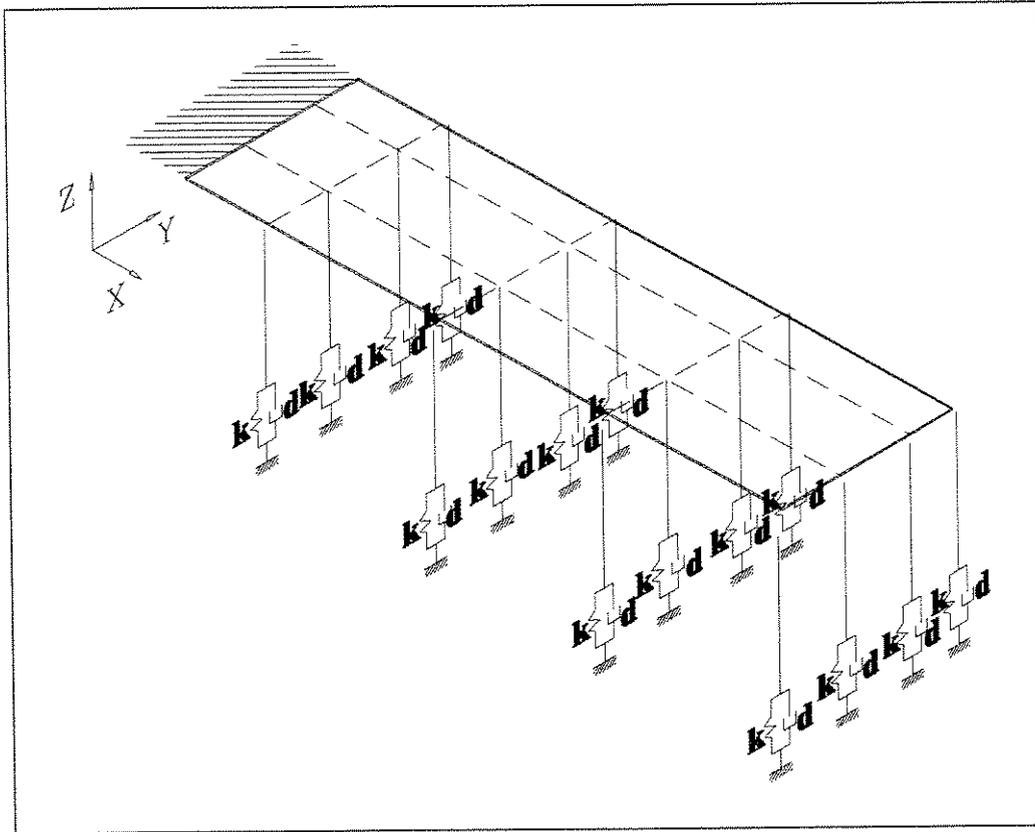
Como pode ser notado pelas equações (7.1) e (7.2), para cada nó, um coeficiente equivalente de rigidez e amortecimento é calculado. Então, duas matrizes diagonais são criadas, correspondendo às matrizes de rigidez  $\mathbf{K}_f$  e amortecimento  $\mathbf{D}_f$  equivalentes, provenientes do escoamento:

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & k_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_2 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

O significado físico dessas matrizes é ilustrado na Figura 7.1, onde para cada nó, existe um amortecedor e molas equivalentes conectados com a estrutura.

### 7.3 Variação da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes equivalentes

Como dito anteriormente, Seção 7.2, os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento são calculados através da imposição de uma perturbação de deslocamento ou velocidade em torno da posição de equilíbrio da placa, respectivamente. Estes coeficientes são calculados



**Figura 7.1:** Rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do escoamento em torno da placa.

pelas equações (7.1), para a rigidez equivalente e (7.2), para o amortecimento equivalente. Entretanto, estas perturbações podem tomar diversas amplitudes. É o objetivo desta seção, analisar a influência da amplitude das perturbações impostas no cálculo dos coeficientes equivalentes.

No caso do cálculo da rigidez equivalente, onde se impõe uma perturbação de deslocamento, a amplitude desta perturbação deve ser pequena, para que não se altere significativamente as condições do escoamento, e obtenham-se os coeficientes de rigidez baseado no método das perturbações.

Já no caso do cálculo do amortecimento equivalente, onde se impõe uma perturbação de velocidade, a amplitude desta perturbação não deve ser muito pequena pois isto poderia trazer problemas no cálculo dos coeficientes equivalentes, gerando um denominador muito pequeno. A perturbação não deve ser nem muito grande, pois pode gerar uma velocidade-

de muito grande, irreal para a condição de vibração da placa. Então é necessário realizar diversos testes, de modo a verificar a influência da perturbação no cálculo dos coeficientes equivalentes, de modo a encontrar uma amplitude para cada caso que possa ser usada adequadamente.

### 7.3.1 Variação das amplitudes de perturbação no cálculo dos coeficientes de rigidez

Os coeficientes equivalentes são calculados separadamente para cada caso, ou seja, para o caso da rigidez e do amortecimento. Além disso, eles são calculados separadamente também para cada modo. A perturbação para o caso da rigidez é dada então, com um deslocamento em torno da posição de equilíbrio da placa, para cada forma modal separadamente.

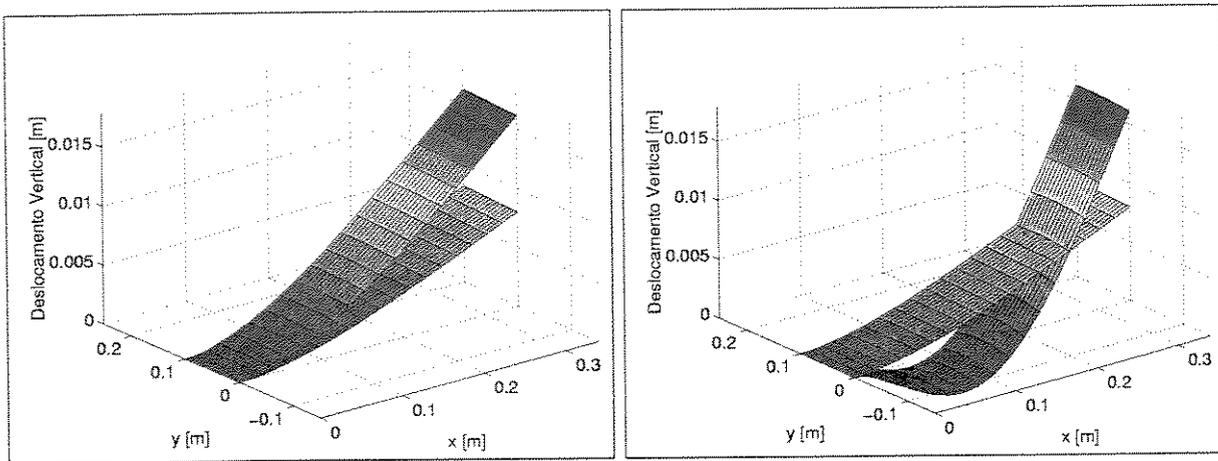
A perturbação é dada somando-se à posição de equilíbrio da placa, a forma modal previamente calculada, multiplicada por um coeficiente que dá o valor da amplitude do deslocamento. Convencionou-se, para facilidade, como uma maneira de normalização, que o coeficiente multiplicador dos autovetores, ou seja, da forma modal, seria dado pela razão do valor máximo do deslocamento estático da placa, pelo valor máximo do autovetor, multiplicado por uma constante. Esta constante é que se variou para obter as diferentes amplitudes de perturbação. Então a perturbação imposta à placa fica dada por:

$$\mathbf{q}_{\text{pert}} = ct \cdot \frac{\max(\mathbf{q}_{\text{eq}})}{\max(\Phi_n)} \cdot \Phi_n + \mathbf{q}_{\text{eq}} \quad (7.4)$$

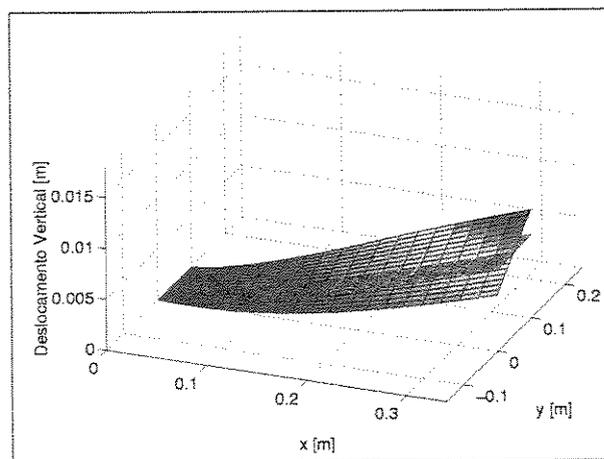
onde  $ct$  é a constante que multiplica o autovetor,  $\Phi_n$  é o autovetor correspondente ao  $n$ -ésimo modo,  $\mathbf{q}_{\text{eq}}$  é o vetor de deslocamento correspondente à posição de equilíbrio da placa, e  $\mathbf{q}_{\text{pert}}$  é o vetor de perturbação de deslocamento imposto à placa.

Como visualização da perturbação dada à placa, pode-se observar na Figura 7.2, a posição de equilíbrio da placa, juntamente com uma perturbação dada na forma do primeiro

modo, com uma constante exagerada  $ct = 1$ , à direita, e uma perturbação dada na forma do segundo modo, com uma constante exagerada  $ct = 1$ , à esquerda. Na Figura 7.3, pode-se ver a posição de equilíbrio da placa, juntamente com uma perturbação dada na forma do terceiro modo, com uma constante exagerada de  $ct = 3$ .

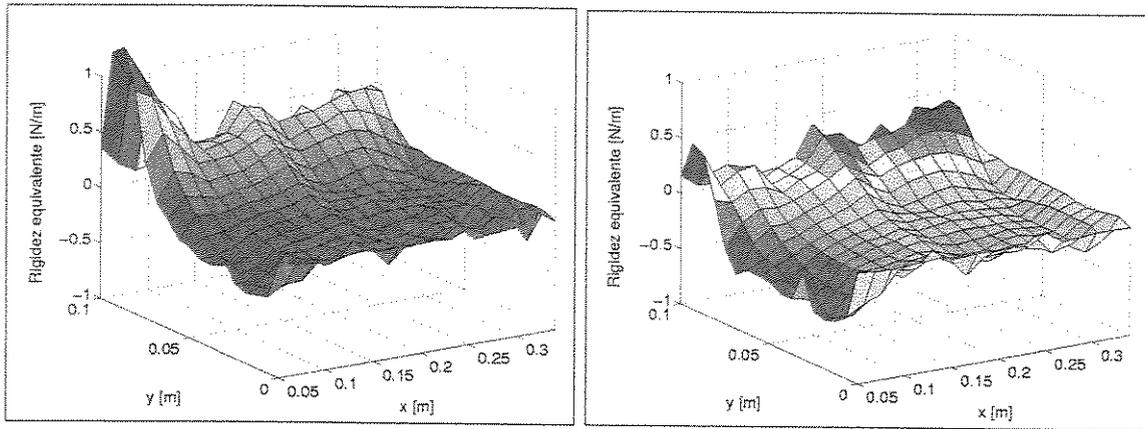


**Figura 7.2:** Posição de equilíbrio da placa plotada junto com uma perturbação na forma do primeiro modo, multiplicada por uma constante  $ct = 1$ , à esquerda. À direita, mesma posição de equilíbrio plotada junto com uma perturbação na forma do segundo modo, multiplicada por uma constante  $ct = 1$ .



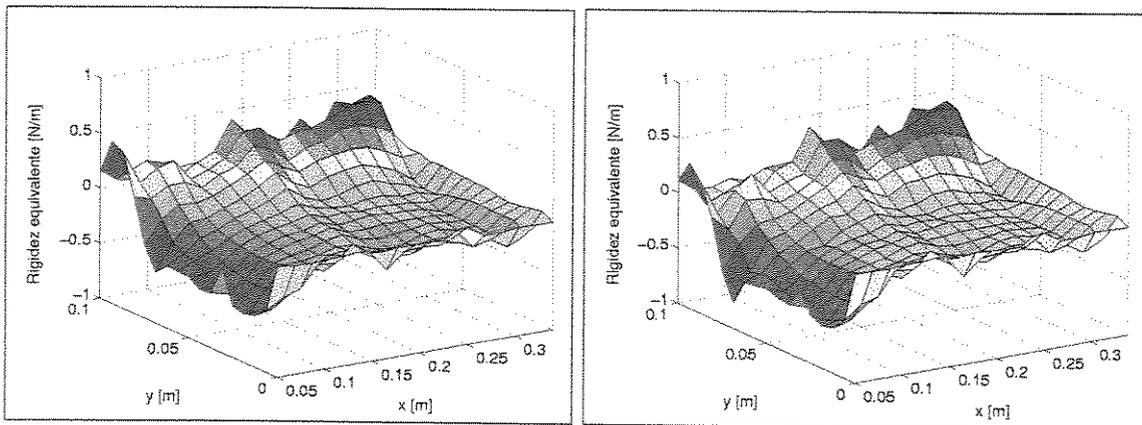
**Figura 7.3:** Posição de equilíbrio da placa plotada junto com uma perturbação na forma do terceiro modo, multiplicada por uma constante  $ct = 3$ .

Variando o valor de  $ct$ , pôde-se verificar a influência da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes de rigidez equivalente, para o primeiro modo. Os valores de  $ct$  testados corresponderam a 0, 1, 0,01, 0,001 e 0,0001. O modelo utilizado no cálculo, foi o escolhido pelos testes feitos de convergência da malha, para um caso de velocidade de



**Figura 7.4:** Coeficientes equivalentes de **rigidez** plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,01$ . Cálculos feitos para o **primeiro modo**.

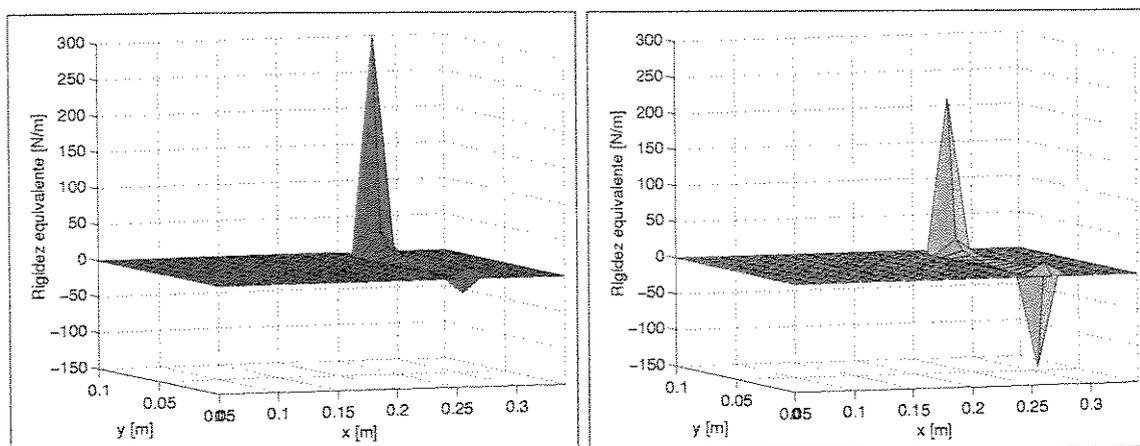
27,5 m/s e 3° de ângulo de ataque. Os resultados são apresentados nas Figuras 7.4 e 7.5, onde plota-se o valor da rigidez equivalente sobre a superfície da placa.



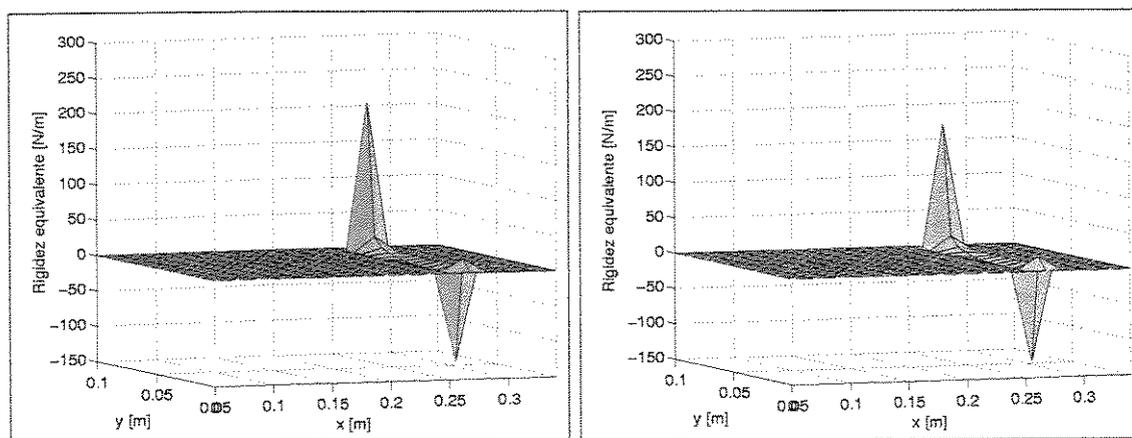
**Figura 7.5:** Coeficientes equivalentes de **rigidez** plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,001$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,0001$ . Cálculos feitos para o **primeiro modo**.

Na Figura 7.4, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0,10$ , à esquerda e  $ct = 0,01$ , à direita. Já na Figura 7.5, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0,001$ , à esquerda e  $ct = 0,0001$ , à direita. Pode-se observar que conforme se diminui a amplitude da perturbação (diminui-se  $ct$ ), obtêm-se valores menores de rigidez, sendo que estes não variam mais, indicando uma convergência

da rigidez equivalente.



**Figura 7.6:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0, 1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0, 01$ . Cálculos feitos para o **segundo modo**.



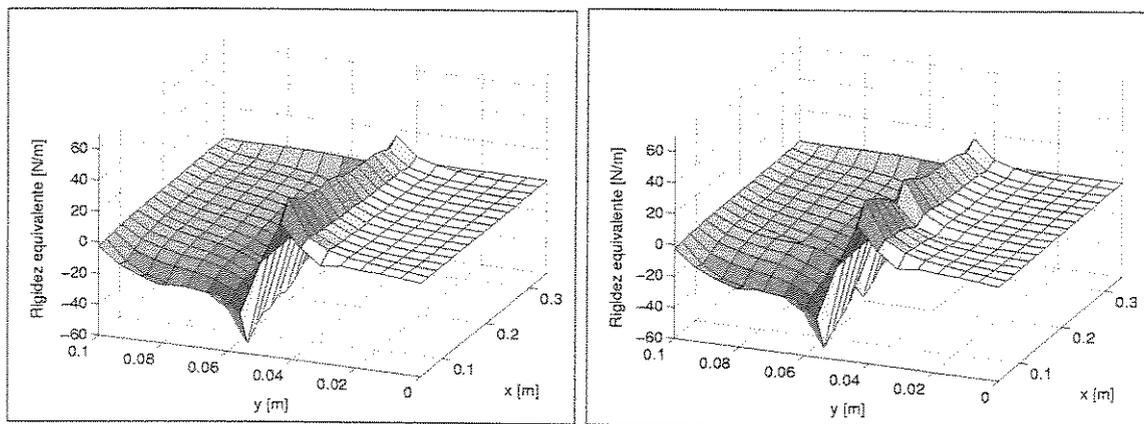
**Figura 7.7:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0, 001$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0, 0001$ . Cálculos feitos para o **segundo modo**.

Novamente, variando o valor de  $ct$ , pôde-se verificar a influência da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes de rigidez equivalente, para o segundo modo agora. Os valores de  $ct$  testados corresponderam a 0,10, 0,01, 0,001 e 0,0001. Os resultados são apresentados nas Figuras 7.6 e 7.7, onde plota-se o valor da rigidez equivalente sobre a superfície da placa.

Na Figura 7.6, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante

$ct = 0,1$ , à esquerda e  $ct = 0,01$ , à direita. Já na Figura 7.7, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0,001$ , à esquerda e  $ct = 0,0001$ , à direita. Pode-se observar novamente, que conforme se diminui a amplitude da perturbação (diminui-se  $ct$ ), obtém-se valores menores de rigidez, sendo que estes não variam mais, indicando uma convergência da rigidez equivalente.

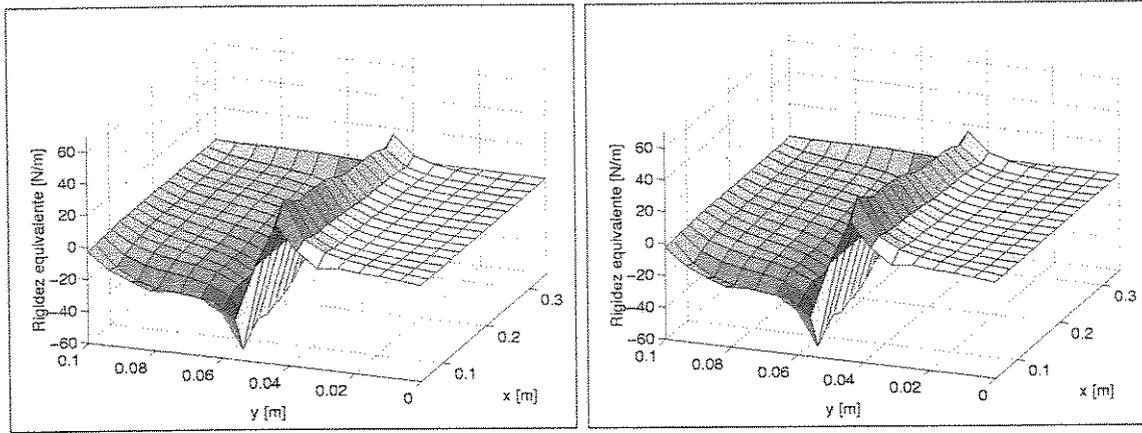
Por último, variando o valor de  $ct$ , pôde-se verificar a influência da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes de rigidez equivalente, para o terceiro modo. Os valores de  $ct$  testados corresponderam a  $0,1$ ,  $0,01$ ,  $0,001$  e  $0,0001$ . Os resultados são apresentados nas Figuras 7.8 e 7.9, onde plota-se o valor da rigidez equivalente sobre a superfície da placa.



**Figura 7.8:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,01$ . Cálculos feitos para o **terceiro modo**.

Na Figura 7.8, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0,1$ , à esquerda e  $ct = 0,01$ , à direita. Já na Figura 7.9, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0,001$ , à esquerda e  $ct = 0,0001$ , à direita. Pode-se observar nesse caso que conforme se diminui a amplitude da perturbação o resultado dos coeficientes equivalentes varia muito pouco, indicando a convergência da rigidez equivalente.

Pelos resultados observados, escolheu-se como uma constante adequada para a definição da amplitude de perturbação, a constante  $ct = 0,001$ .



**Figura 7.9:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,001$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando um deslocamento imposto, usando uma constante  $ct = 0,0001$ . Cálculos feitos para o terceiro modo

### 7.3.2 Variação das amplitudes de perturbação no cálculo dos coeficientes de amortecimento

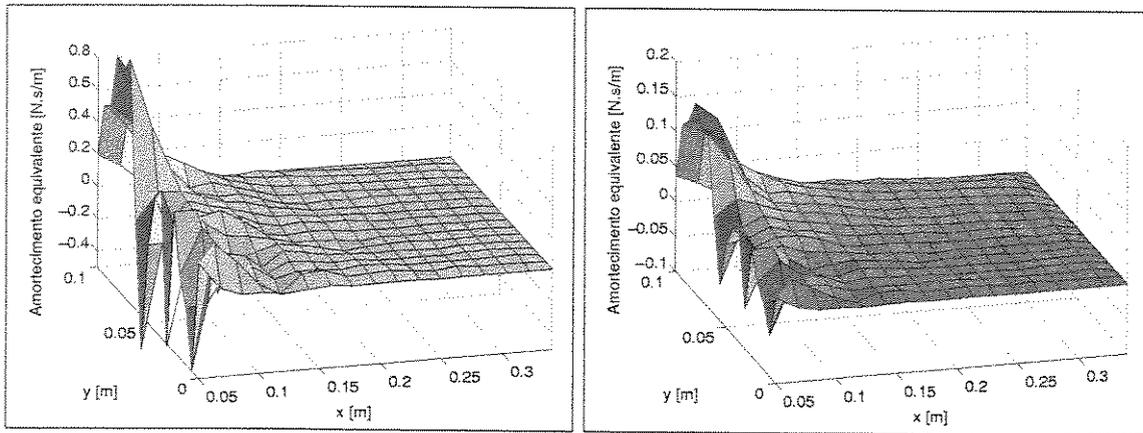
A perturbação de velocidade é dada impondo uma velocidade à placa a partir da posição de equilíbrio desta. Então a forma modal previamente calculada é multiplicada pela frequência natural correspondente, além de um coeficiente que dá o valor da amplitude da velocidade. Este coeficiente é exatamente o mesmo usado para o caso da rigidez. Dessa maneira, a perturbação imposta à placa fica dada por:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{pert}} = ct \cdot \frac{\max(\mathbf{q}_{\text{eq}})}{\max(\Phi_n)} \cdot \Phi_n \cdot \omega_n \quad (7.5)$$

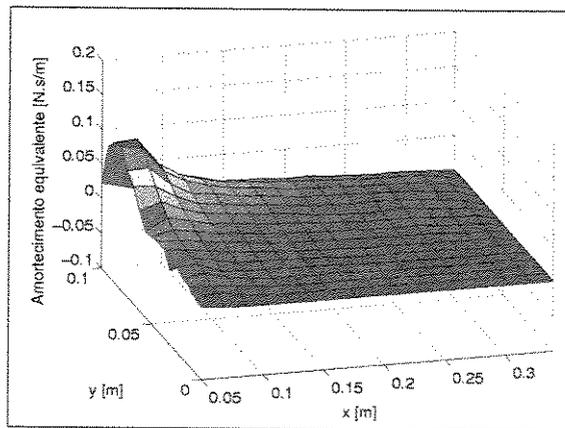
onde  $\omega_n$  é a frequência natural correspondente ao  $n$ -ésimo modo, e  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{pert}}$  é o vetor de perturbação de velocidade imposto à placa.

Variando o valor de  $ct$ , pôde-se verificar a influência da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes de amortecimento equivalente, para o primeiro modo. Os valores de  $ct$  testados corresponderam a 0,1, 1 e 10. O modelo utilizado no cálculo, foi o escolhido pelos testes feitos de convergência da malha, para um caso de velocidade de  $30,5 \text{ m/s}$  e  $3^\circ$

de ângulo de ataque. Os resultados são apresentados nas Figuras 7.10 e 7.11, onde plota-se o valor do amortecimento equivalente sobre a superfície da placa.



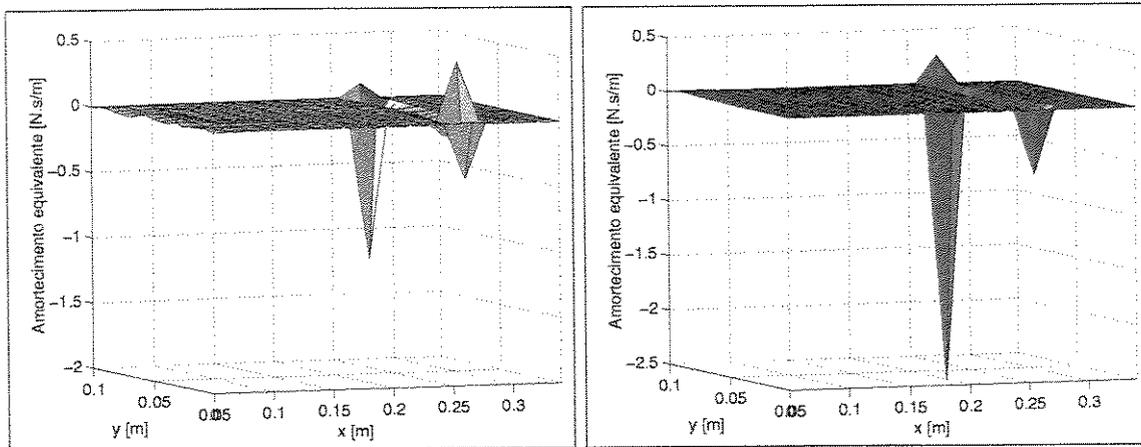
**Figura 7.10:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 0, 1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 1$ . Cálculos feitos para o **primeiro modo**.



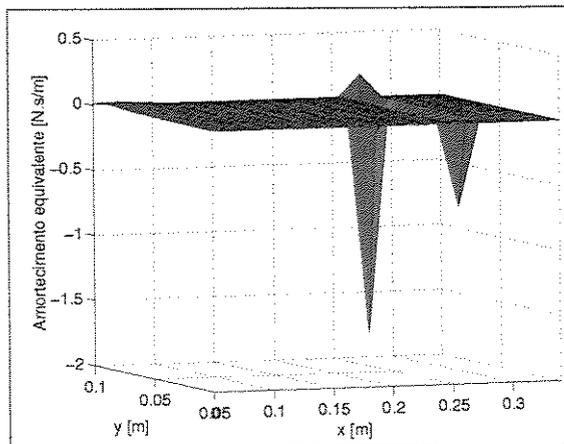
**Figura 7.11:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa. Os coeficientes foram obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 10$ . Cálculos feitos para o **primeiro modo**.

Na Figura 7.10, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0, 1$ , à esquerda e  $ct = 1$ , à direita. Já na Figura 7.11, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 10$ . Pode-se observar que conforme se aumenta a amplitude da perturbação (aumenta-se  $ct$ ), obtém-se valores menores de amortecimento, sendo que estes começam a não variar mais e ficar mais "estáveis", indicando a convergência do amortecimento equivalente.

Variando o valor de  $ct$ , pôde-se verificar a influência da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes de amortecimento equivalente, para o segundo modo. Os valores de  $ct$  testados corresponderam a 0, 1, 1 e 10. Os resultados são apresentados nas Figuras 7.12 e 7.13, onde plota-se o valor do amortecimento equivalente sobre a superfície da placa.



**Figura 7.12:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 0,1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 1$ . Cálculos feitos para o **segundo modo**.



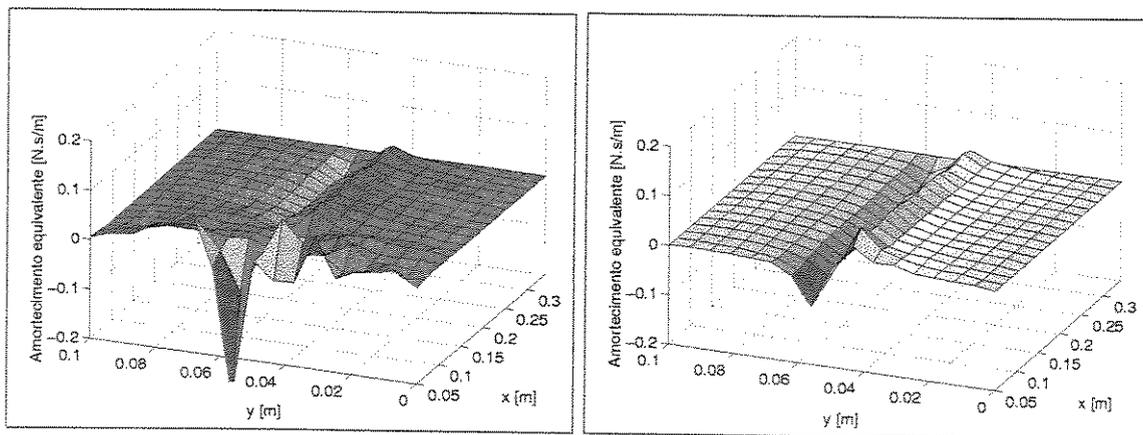
**Figura 7.13:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa. Os coeficientes foram obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 10$ . Cálculos feitos para o **segundo modo**.

Na Figura 7.12, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0,1$ , à esquerda e  $ct = 1$ , à direita. Já na Figura 7.13, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 10$ . Pode-se observar que conforme se aumenta a amplitude da perturbação (aumenta-se  $ct$ ), obtém-se valores menores de amortecimento,

sendo que estes começam a não variar mais e ficar mais estáveis, indicando a convergência do amortecimento equivalente.

Variando o valor de  $ct$ , pôde-se verificar a influência da amplitude da perturbação no cálculo dos coeficientes de amortecimento equivalente, para o terceiro modo. Os valores de  $ct$  testados corresponderam a 0, 1, 1 e 10. Os resultados são apresentados nas Figuras 7.14 e 7.15, onde plota-se o valor do amortecimento equivalente sobre a superfície da placa.

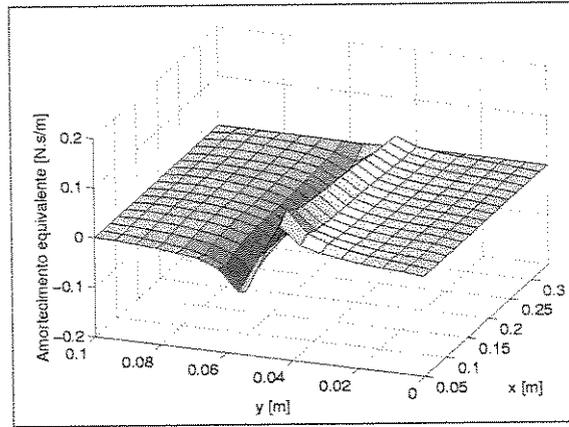
Por último, na Figura 7.14, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 0, 1$ , à esquerda e  $ct = 1$ , à direita. Já na Figura 7.15, estão plotados os coeficientes equivalentes utilizando-se uma constante  $ct = 10$ . Pode-se observar que conforme se aumenta a amplitude da perturbação (aumenta-se  $ct$ ), obtém-se valores menores de amortecimento, sendo que estes começam a não variar mais e ficar mais "estáveis", indicando a convergência do amortecimento equivalente.



**Figura 7.14:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 0, 1$ . À direita tem-se os coeficientes obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 1$ . Cálculos feitos para o **terceiro modo**.

Em vista dos resultados obtidos, escolheu-se como uma constante adequada para a definição da amplitude de perturbação de velocidade, a constante  $ct = 10$ .

É interessante notar para esses casos de velocidade imposta para o cálculo do amortecimento equivalente, no caso dos três modos analisados, que em todos os casos era impossível



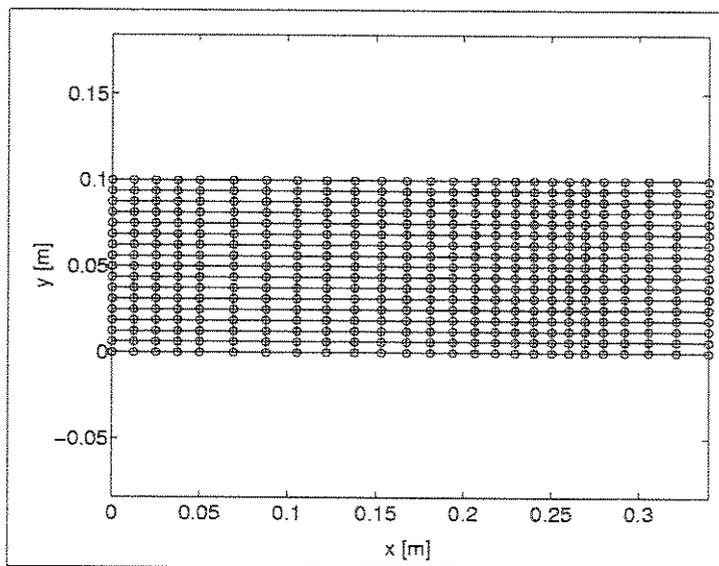
**Figura 7.15:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa. Os coeficientes foram obtidos utilizando velocidade imposta, usando uma constante  $ct = 10$ . Cálculos feitos para o **terceiro modo**.

aumentar mais, por um fator de 10 vezes a constante  $ct$ . Isto acontece pois aumentando muito a constante que define a amplitude da velocidade de perturbação, a velocidade se torna muito grande, não correspondendo mais a uma "perturbação" de velocidade real. Então estas velocidades que são impostas como condições de contorno na solução do escoamento (FLOTRAN), tornam a solução instável e esta não converge, impossibilitando o cálculo do amortecimento equivalente.

## 7.4 Influência da malha no cálculo da rigidez equivalente para o segundo modo

Como visto na seção anterior, os gráficos da rigidez equivalente calculada para o segundo modo, apresentam "grandes picos" na proximidade da linha modal da placa, ou seja, a linha em que os valores do autovetor (forma modal) apresentam uma mudança de sinal. Com o objetivo de verificar o comportamento dos valores de rigidez próximos à esta linha modal, um teste incluindo algumas malhas foi realizado e os resultados são apresentados e discutidos a seguir.

Para este estudo, foram utilizadas 6 malhas diferentes, com um escoamento com um ângulo de ataque de  $1^\circ$  e uma velocidade de  $20,5\text{m/s}$ . As malhas utilizadas foram de:  $16 \times 16$ ,  $17 \times 17$ ,  $19 \times 19$ ,  $20 \times 16$  divisões e duas malhas de  $21 \times 16$  divisões, ligeiramente diferentes entre si. As malhas de  $20 \times 16$  divisões e de  $21 \times 16$  divisões não possuem os elementos com o mesmo tamanho. Com o objetivo de obter um maior refinamento nas proximidades da linha modal, estas malhas foram refinadas com divisões menores na proximidade da linha modal, aumentando a divisão conforme se aproxima das extremidades da placa, na direção do comprimento da mesma (veja Figura 7.16).

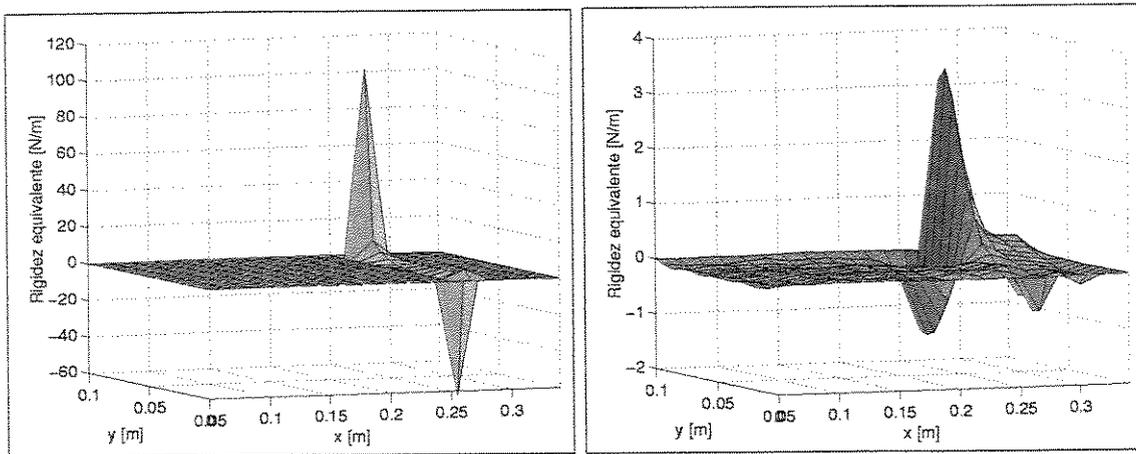


**Figura 7.16:** Malha de  $21 \times 16$  divisões, refinada em torno da linha modal da placa.

Entretanto, a posição da linha modal não pode ser exatamente definida. Isto acontece pois calculando os autovetores com uma malha de  $16 \times 16$  divisões, por exemplo, obtém-se uma posição estimada da linha modal. Vai existir uma fila de nós perpendiculares ao eixo  $x$ , onde os valores dos autovetores serão negativos. A fila de nós seguinte terá os valores dos autovetores positivos. Essa mudança de sinal é que indica a existência da linha modal, ou seja, uma linha em que os valores dos autovetores é zero. A posição da linha modal é entre essas duas coordenadas  $x$  das filas de nós onde a mudança de sinal acontece. Fazendo outra malha diferente, colocando uma fileira de nós na posição anteriormente estimada e realizando um novo cálculo dos autovetores, a posição da linha modal não estará no mesmo lugar. Existirão duas novas filas de nós que a linha modal estará compreendida. Dessa

forma, é impossível calcular *exatamente* a posição da linha modal. É possível somente estimar a sua posição. É por isso que duas malhas com o mesmo número de divisões foram utilizadas. Nas malhas em que as divisões não são iguais, a suposta posição da linha modal é imposta e, a partir dela é que se discretiza o restante da placa. Então, as malhas de  $21 \times 16$  divisões, possuem como diferença somente a posição da linha modal. Com o modelo estrutural utilizado aqui, a posição da linha modal é em torno de  $x = 0.26 \text{ m}$ .

Os resultados com os cálculos da rigidez equivalente estão apresentados na Figura 7.17, onde mostra-se a malha de  $16 \times 16$  divisões, à esquerda e a malha de  $17 \times 17$  divisões, à direita; na Figura 7.18, onde mostra-se a malha de  $19 \times 19$  divisões, à esquerda e a malha de  $20 \times 16$  divisões, à direita; e na Figura 7.19, onde mostra-se as duas malhas de  $21 \times 16$  divisões.



**Figura 7.17:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se a malha de  $16 \times 16$  divisões, e à direita tem-se a malha de  $17 \times 17$  divisões.

É interessante notar a grande diferença entre os valores da rigidez equivalente entre as diversas malhas, principalmente em torno da linha modal. Acontece que na fila de nós mais próxima da linha modal, a perturbação de deslocamento imposto é próxima de zero, justamente porque o autovetor, na linha modal aproxima-se de zero. Então quando se calcula a rigidez equivalente, um termo muito próximo de zero no denominador da equação (7.1) influencia o cálculo da rigidez, fazendo com que os valores na linha modal sejam grandes em comparação com o resto da placa. Essa influência depende do quanto a fila de nós é próxima

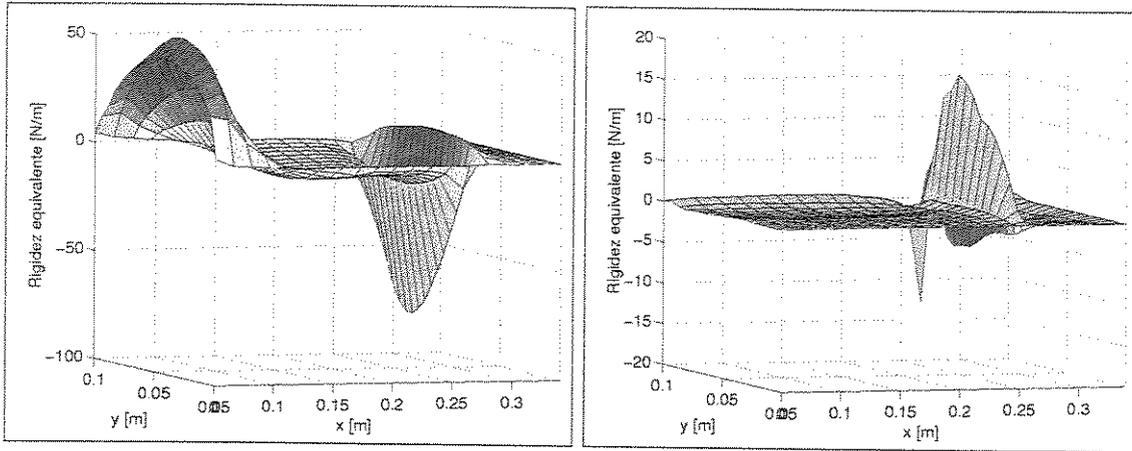


Figura 7.18: Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa. À esquerda tem-se a malha de  $19 \times 19$  divisões, e à direita tem-se a malha de  $20 \times 16$  divisões.

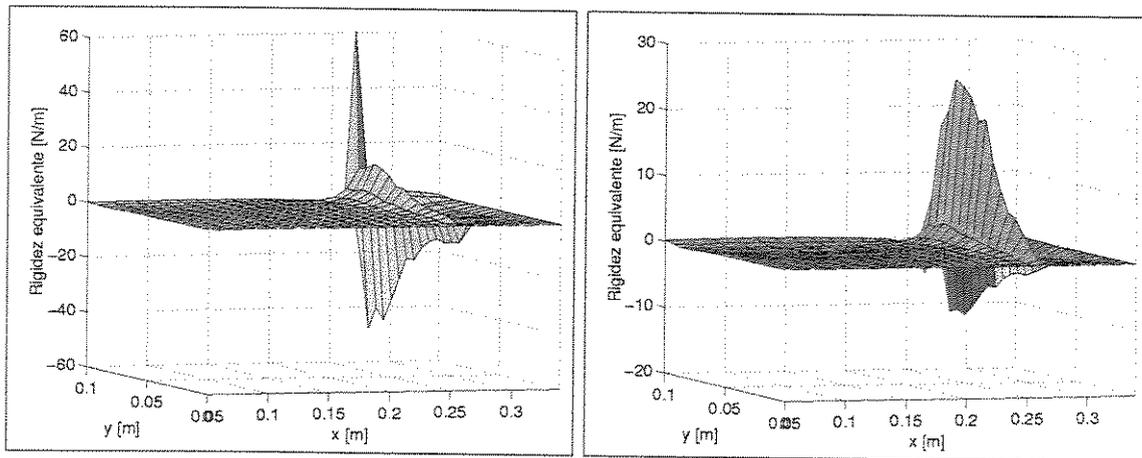
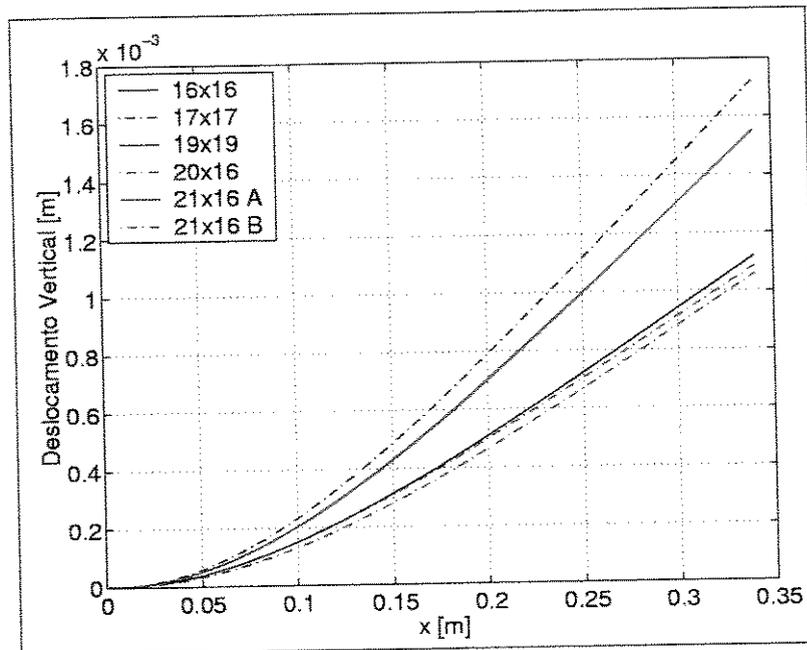


Figura 7.19: Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para as duas malhas de  $21 \times 16$  divisões.

da linha modal da placa, ou seja, do quanto o valor do autovetor aproxima-se de zero. Isso depende da malha utilizada.

Outro aspecto muito importante a ser notado e que influencia no cálculo da rigidez equivalente, especialmente no caso do segundo modo, onde não há uma posição bem definida da linha modal, é a posição de equilíbrio da placa. A Figura 7.20 mostra uma comparação feita da posição de equilíbrio da placa para as diferentes malhas estudadas nesta seção. A diferença entre as posições de equilíbrio é pequena, não influenciando significativamente o resultado, se somente a posição de equilíbrio da placa fosse desejada (Seção 6.3). Porém ocorre que o modelo não possui precisão numérica suficiente e influencia no cálculo da rigidez.

O fato mais marcante e que comprova a limitação da precisão numérica é a diferença entre as posições de equilíbrio entre as duas malhas de  $21 \times 16$  divisões. Essas malhas possuem o mesmo número de elementos e somente os nós estão em posições um pouco deslocadas entre si.



**Figura 7.20:** Comparação da posição de equilíbrio da placa para as malhas de  $16 \times 16$ ,  $17 \times 17$ ,  $19 \times 19$ ,  $20 \times 16$  e as duas malhas de  $21 \times 16$  divisões (A e B). As linhas representam o bordo de fuga da placa.

## 7.5 Cálculo das frequências naturais e fatores de amortecimento teórico

Uma parte muito importante no cálculo teórico deste trabalho, é o cálculo das frequências naturais e fatores de amortecimento, bem como das formas modais. Esse cálculo é feito através da solução de um problema de autovalor e autovetor, através das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. As formas modais (autovetores) são utilizados na obtenção dos coeficientes equivalentes, como citado na seção anterior. Além disso, através do cálculo das frequências naturais, anteriormente à introdução dos coeficientes equivalentes, pode-se intro-

duzir um modelo de amortecimento proporcional à matriz de massa e rigidez, ajustado por coeficientes, para cada fator de amortecimento associado ao seu respectivo modo, fazendo-o aproximadamente igual ao fator de amortecimento medido experimentalmente. Através desse modelo, pode-se calcular as frequências naturais da placa e seus respectivos fatores de amortecimento (ajustados através das medições experimentais). De posse desses valores, introduz-se as matrizes formadas pelos coeficientes equivalentes, realizando novamente o cálculo das frequências naturais e fatores de amortecimento, podendo-se agora comparar teórico-experimentalmente, os valores de frequências naturais e fatores de amortecimento, sem a influência do escoamento e com a influência deste.

### 7.5.1 Introdução do modelo de amortecimento proporcional

Considerando que a matriz de amortecimento pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, ou seja, que a matriz de amortecimento pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (7.6)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes, tem-se o chamado amortecimento proporcional.

Assim, a placa flexível, é representada pela seguinte equação, introduzindo o amortecimento proporcional:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7.7)$$

Definindo  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{q}$  e  $\mathbf{y}_2 = \dot{\mathbf{y}}_1$ , tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

Resolvendo o problema de autovalor e autovetor associado, obtém-se autovetores iguais ao problema sem amortecimento, porém obtém-se autovalores complexos.

Os autovalores complexos conjugados  $\lambda_n$ , supondo um sistema sub-amortecido, aparecem da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= -\zeta_n \omega_n - \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} j \\ \lambda_{n+1} &= -\zeta_n \omega_n + \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} j\end{aligned}\tag{7.9}$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_n$  é a frequência natural do  $n$ -ésimo modo e  $\zeta_n$  é o fator de amortecimento modal associado ao  $n$ -ésimo modo.

Desse modo, basta utilizar as equações (7.9) para extrair as frequências naturais e fatores de amortecimento, sendo dados por:

$$\omega_n = \sqrt{[Re(\lambda_n)]^2 + [Im(\lambda_n)]^2}\tag{7.10}$$

$$\zeta_n = \frac{-Re(\lambda_n)}{\sqrt{[Re(\lambda_n)]^2 + [Im(\lambda_n)]^2}}\tag{7.11}$$

### 7.5.2 Introdução das matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes

Através da equação de equilíbrio para a placa, equação (7.7), introduz-se a pressão exercida pelo escoamento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_r\tag{7.12}$$

As matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes são introduzidas no modelo e adicionadas às matrizes de rigidez estrutural e amortecimento proporcional, respectivamente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_r)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_r)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7.13)$$

Finalmente, para cada condição do escoamento e forma modal escolhida, um novo problema de autovalor e autovetor pode ser resolvido. Assim, as mudanças nas frequências naturais e fatores de amortecimento podem ser comparadas e verificadas.

## 7.6 Construção das FRFs teóricas

Para que a teoria desenvolvida até agora possa ser verificada, além de somente em termos das variações da frequência natural e fator de amortecimento, será discutida nesta seção, a construção das FRFs teóricas. Como será visto no próximo capítulo, os testes experimentais resultam na medição das FRFs. Por isso, se faz necessário, a construção das FRFs teóricas, incluindo os coeficientes equivalentes nas matrizes de amortecimento e rigidez, para que se possa fazer a comparação teórico-experimental.

As matrizes de amortecimento estrutural proporcional têm as suas constantes  $\alpha$  e  $\beta$  ajustadas para cada modo. Isto será mostrado com detalhes nos próximos capítulos, mas em suma, obtém-se um conjunto de matrizes de amortecimento proporcional ajustadas de acordo com o fator de amortecimento obtido experimentalmente, para cada modo. Além disso, os coeficientes equivalentes de amortecimento e rigidez são obtidos para cada modo em separado. Portanto, se faz necessário, no cálculo das FRFs teóricas, que se leve em conta essa informação. A FRF é obtida no domínio da frequência, portanto nas redondezas de cada modo, as matrizes obtidas para esse modo, é que devem ter influência no cálculo da FRF, mais do que as obtidas para os outros modos. Deve existir uma forma de levar em conta a influência de cada matriz de rigidez e amortecimento equivalentes obtidas para os diversos modos, assim como as matrizes de amortecimento proporcional, de acordo com que

se faz o cálculo da FRF em cada frequência.

A maneira escolhida aqui, para levar em conta essa influência, é a de multiplicar as matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes, bem como as matrizes de amortecimento proporcional, por fatores ligados à frequência de cálculo da FRF e em seguida, somar todas as matrizes obtidas para os diversos modos, para formar as matrizes de amortecimento e rigidez globais. Esses fatores são dados pela função de distribuição normal de Gauss, dada pela seguinte forma:

$$C_{ni} = \exp\left(\frac{-(\omega_i - \omega_n)}{ft_n}\right) \quad (7.14)$$

onde  $C_{ni}$  é o fator que multiplica as matrizes relacionadas ao modo  $n$ , calculado para a frequência  $i$ ;  $\omega_i$  é a frequência de cálculo da FRF;  $\omega_n$  é a frequência natural do modo  $n$ ; e  $ft_n$  é um fator que está ligado com a largura da função de Gauss, para cada modo  $n$ .

A Figura 7.21, mostra o gráfico dos fatores  $C_{ni}$ , para os três modos da placa. Pode-se observar que o fator é máximo ( $= 1$ ) para um determinado modo, quando a frequência de cálculo da FRF é igual à frequência natural do modo. À medida que a frequência de cálculo da FRF se distancia deste modo, o fator tende a zero e as matrizes por ele multiplicadas terão muito pouca influência no cálculo da FRF.

Para o cálculo da FRF, as matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes, juntamente com a matriz de amortecimento proporcional são adicionadas às matrizes de rigidez e amortecimento estruturais, de acordo com a frequência de cálculo da FRF, resultando nas matrizes globais:

$$\mathbf{K}_{gi} = \mathbf{K} + C_{1i}\mathbf{K}_{f1} + C_{2i}\mathbf{K}_{f2} + C_{3i}\mathbf{K}_{f3} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{D}_{gi} = C_{1i}\mathbf{D}_1 + C_{2i}\mathbf{D}_2 + C_{3i}\mathbf{D}_3 + C_{1i}\mathbf{D}_{f1} + C_{2i}\mathbf{D}_{f2} + C_{3i}\mathbf{D}_{f3} \quad (7.16)$$

onde  $\mathbf{K}_{gi}$  é a matriz de rigidez global, para a frequência  $i$ ;  $\mathbf{K}_{fn}$  é a matriz de rigidez equiva-

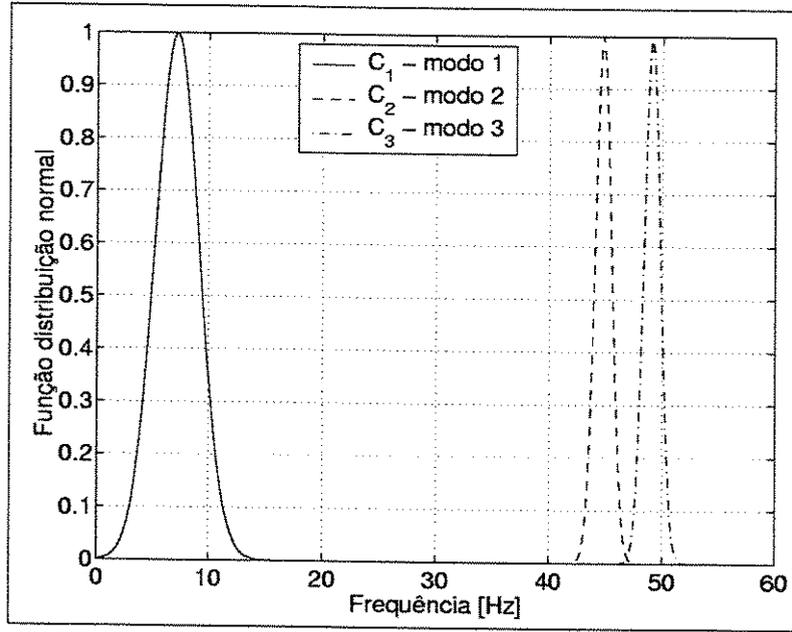


Figura 7.21: Função de distribuição normal de Gauss plotadas para os três primeiros modos.

lente calculada para o primeiro modo;  $\mathbf{K}_{r2}$  é a matriz de rigidez equivalente calculada para o segundo modo;  $\mathbf{K}_{r3}$  é a matriz de rigidez equivalente calculada para o terceiro modo;  $\mathbf{D}_{gli}$  é a matriz de amortecimento global, para a frequência  $i$ ;  $\mathbf{D}_{r1}$  é a matriz de amortecimento equivalente calculada para o primeiro modo;  $\mathbf{D}_{r2}$  é a matriz de amortecimento equivalente calculada para o segundo modo;  $\mathbf{D}_{r3}$  é a matriz de amortecimento equivalente calculada para o terceiro modo;  $\mathbf{D}_1$  é a matriz de amortecimento proporcional ajustada para o primeiro modo;  $\mathbf{D}_2$  é a matriz de amortecimento proporcional ajustada para o segundo modo;  $\mathbf{D}_3$  é a matriz de amortecimento proporcional ajustada para o terceiro modo.

Então a FRF é calculada através de:

$$\mathbf{H}_i = \left( \mathbf{K}_{gli} + j\omega_i \mathbf{D}_{gli} - \omega_i^2 \mathbf{M} \right)^{-1} \cdot \mathbf{X}_{exc\ i} \quad (7.17)$$

onde  $\mathbf{X}_{exc\ i}$  é a transformada de Fourier do vetor de excitação, aplicado nos graus de liberdade que estão engastados, representando a excitação aplicada experimentalmente pelo excitador.

## 7.7 Conclusão

Através desse capítulo, a metodologia de obtenção dos coeficientes e matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes, introduzido pelo escoamento, foi definida. Para cada nó estrutural, uma rigidez e amortecimento equivalentes são calculados, como se uma mola e amortecedor fictícios fossem conectados a ele, influenciando-o somente os graus de liberdade de deformação linear.

A maneira de imposição das perturbações, tanto de deslocamento, como de velocidade, foi detalhada e um estudo das constantes que definem a amplitude dessas perturbações foi feito e apresentado. Com isso, pôde-se escolher as constantes que definem a amplitude das perturbações, tanto de deslocamento como de velocidade.

Um estudo sobre a influência da malha e da localização da linha modal para o segundo modo foi feito. É preciso ter em mente as limitações numéricas e computacionais do modelo. Conforme a malha escolhida, após o cálculo do autovetor para o segundo modo, os nós nas proximidades da linha modal, "estarão mais próximos desta", ou seja, os valores do autovetor destes nós terão valores mais próximos de zero ou não, dependendo da malha. Com isso, gera-se os picos vistos nos gráficos da rigidez equivalente para o segundo modo. Além disso, é preciso levar em conta também a precisão numérica no cálculo da posição de equilíbrio da placa. Isto afeta também o cálculo dos coeficientes equivalentes, em especial no caso do segundo modo onde a presença da linha modal tem a propriedade de magnificar os valores de amortecimento e rigidez nesta região. A limitação na precisão numérica do modelo fica mais visível quando compara-se a posição de equilíbrio da placa, que muda com duas malhas com o mesmo número de elementos, como visto na Figura 7.20. É interessante notar que o terceiro modo, é um modo simétrico. Por isso, o autovetor para este modo apresenta uma linha modal bem definida, ou seja, os nós posicionados no centro da placa possuem valores exatamente zero. Por isso, o cálculo da rigidez e amortecimento equivalente não é influenciado, pois simplesmente estes não são definidos nesta posição.

Foi apresentado ainda o modelo de amortecimento proporcional que serve para ajustar o fator de amortecimento para cada modo, fazendo com que os fatores de amortecimento teóricos fiquem aproximadamente iguais aos obtidos experimentalmente. Sendo assim, para cada modo, ter-se-á um conjunto de  $\alpha$  e  $\beta$  ajustados.

De posse do modelo completo, ou seja, das matrizes de massa, rigidez e amortecimento proporcional, pode-se realizar o cálculo dos autovalores e autovetores associados, calculando as frequências naturais, fatores de amortecimento (autovalores) e formas modais (autovetores). Isso é feito inicialmente, sem a introdução da influência do escoamento. Após isso, as matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes são construídas e adicionadas às matrizes de rigidez e amortecimento global (fluido + estrutura). Um novo cálculo de autovalor e autovetor é feito. Pode-se, então, comparar as modificações em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento.

Além dessas comparações, pode-se construir as curvas de FRF teoricamente, aplicando o mesmo tipo de excitação utilizada experimentalmente, de forma a comparar as mudanças e diferenças entre as diversas curvas. Com isso a forma de construção das FRFs foi apresentada, levando em conta os fatores que multiplicam as matrizes obtidas para os diferentes modos, de modo que essas matrizes possam influenciar corretamente, no domínio da frequência, os modos para que as mesmas foram calculadas.

Toda essa metodologia será utilizada nos próximos capítulos, onde os resultados experimentais e teóricos são apresentados.

# Capítulo 8

## Testes experimentais - Frequências naturais e fatores de amortecimento

### 8.1 Introdução

Até aqui, foi apresentada toda a parte teórica deste trabalho. Foram apresentados o modelo do escoamento, o modelo estrutural, a interação entre os dois modelos, a obtenção dos coeficientes equivalentes, bem como o detalhamento da bancada de testes experimentais e seu funcionamento. Antes de passar aos resultados teóricos e comparações teórico-experimentais, serão apresentados os resultados experimentais. O objetivo deste capítulo é o de apresentar as curvas de Função de Resposta em Frequência (FRF) da placa, sem a influência do escoamento e com a influência deste. Quando a placa está sob a influência do escoamento, diversas comparações em termos de diferentes ângulos de ataque e velocidades do escoamento são feitas. Essas comparações são feitas com base nas FRFs, comparando as variações das frequências naturais e aumento dos fatores de amortecimento. Será descrito ainda, o procedimento experimental utilizado na obtenção das FRFs.

## 8.2 Procedimento experimental

Com a bancada de testes toda preparada, já acoplada com o túnel de vento, pôde-se realizar os experimentos com o objetivo de obter as funções de resposta em frequência da placa.

### (A) Sinal de excitação

As frequências naturais da placa eram previamente conhecidas, através dos resultados teóricos, bem como de testes experimentais preliminares. Neste trabalho, somente as três primeiras frequências naturais foram estudadas, pois até essa faixa, os dois tipos de modos possíveis já estão englobados, ou seja, os modos de flexão e de torção.

O sinal de excitação utilizado foi uma senóide de amplitude constante, mas de frequência variável linearmente. Os testes foram divididos de forma a excitar um modo de cada vez, separadamente. Então o sinal de excitação tem sua frequência variada dentro de uma faixa, em torno de cada frequência natural. Para a primeira frequência natural, por volta dos  $7\text{ Hz}$ , a faixa utilizada foi de 1 a  $10\text{ Hz}$ . Para a segunda frequência natural, por volta dos  $44\text{ Hz}$ , a faixa utilizada foi de 40 a  $48\text{ Hz}$ . Para a terceira frequência natural, por volta dos  $51\text{ Hz}$ , a faixa utilizada foi de 48 a  $58\text{ Hz}$ .

A divisão da excitação em faixas em torno das frequências naturais teve por objetivo, concentrar a energia de excitação, de modo que a resposta obtida fosse a melhor possível. Com isso, melhores resultados em termos de medição do amortecimento, medido através da função de resposta em frequência, seriam obtidos.

## (B) Sinais adquiridos

Uma vez que o sinal de excitação é enviado ao excitador e este inicia a excitação da placa, os sinais de entrada e resposta do sistema começam a ser adquiridos por meio do controle do usuário, que determina o momento do início de aquisição dos mesmos, simultaneamente. O sinal de entrada é o sinal proveniente da célula de carga, medindo a força de excitação no sistema. O sinal de resposta é o sinal proveniente do extensômetro, medindo a deformação da placa.

Para a aquisição dos sinais, foi utilizado um tempo total de 55 s, com 6600 pontos, e uma frequência de aquisição de 120 Hz. Essa frequência de aquisição é adequada aos sinais medidos pois a maior frequência de interesse fica em torno dos 51 Hz. Portanto a frequência de aquisição escolhida evita os erros de *aliasing*, pois é maior que o dobro da maior frequência de interesse do sinal.

## (C) Tratamento dos sinais

Os sinais, com vista à obtenção das FRFs, foram tratados através da teoria de sinais aleatórios, obtendo-se as densidades espectrais de potência para os auto-espectros e os espectros cruzados. Cada sinal foi dividido em 10 blocos, aplicando uma janela de *Hanning* a cada um deles, fazendo-se então uma média entre estes. A divisão em frequência resultante foi de 0,18 Hz. A janela de *Hanning* se faz necessária, para evitar os erros de *leakage* presentes no tratamento de tais sinais.

A partir do tratamento de cada sinal, obtém-se uma curva de FRF. Entretanto, nos testes experimentais, de modo a obter um resultado mais confiável, realizou-se cada teste duas vezes, obtendo duas curvas de FRF para cada caso. Então com estas duas curvas, faz-se uma média entre as duas. Os resultados apresentados a seguir são correspondentes à essa metodologia aplicada.

#### (D) Medição da velocidade do escoamento

A velocidade do escoamento fornecida pelo túnel de vento é medida através de um *tubo de pitot* próprio do túnel de vento, localizado no interior deste, à montante. O *tubo de pitot* consiste de um manômetro que mede a pressão dinâmica do escoamento, sendo o valor lido em milímetros de coluna d'água.

Para que a medida da velocidade fique determinada, é necessário que se determine também o valor da massa específica do ar. Para isto, são medidos também, os valores da pressão atmosférica e temperatura locais. Essas duas medidas são tomadas pouco antes da entrada em operação do túnel e consequente testes, e pouco depois do desligamento deste. Então é realizada uma média aritmética simples, de modo a obter uma medida mais realista da massa específica do ar, esperando compensar as variações de pressão e temperatura ambientes ao longo dos testes.

A massa específica é calculada através de:

$$\rho = \frac{P_{atm}}{R T_{atm}} \quad (8.1)$$

onde  $R = 286 \text{ J/kg K}$ .

Já a velocidade é calculada através da pressão dinâmica, introduzindo um fator de correção dado pelo fabricante do túnel de vento:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,965 \Delta P}{\rho}} \quad (8.2)$$

## 8.3 Extração das frequências naturais e fatores de amortecimento

Quando as Funções de Resposta em Frequência são obtidas, é necessário que as frequências naturais e fatores de amortecimento sejam extraídos de alguma maneira. Essas informações podem ser extraídas de diversos métodos através das teorias de análise modal (Maia et al., 1997). Alguns desses métodos são bastante sofisticados e complexos, envolvendo a medida das FRFs em vários pontos da estrutura, de forma a obter não somente as frequências naturais e fatores de amortecimento, mas também as formas modais. Outros métodos, por sua vez, podem ser bastante simples e mesmo visuais. Eles consideram cada modo separadamente, analisando somente um pico da FRF (uma frequência natural) por vez.

A frequência natural pode ser extraída muito facilmente, de maneira visual através do pico da FRF. O fator de amortecimento, da mesma maneira, pode ser extraído visualmente através da largura do pico da FRF. Este método, apesar de simples, pode trazer uma precisão não muito boa, devido à maneira que a extração é feita.

Devido a esse fato, utiliza-se aqui, um método linear considerando cada modo separadamente (baixa densidade modal). Este método interpola as curvas de FRF em torno do pico de cada frequência natural, tratando o sistema como se fosse de 1 grau de liberdade (Arruda, 2000).

O método consiste em assumir um amortecimento viscoso (amortecimento é proporcional à velocidade), e a partir da equação de equilíbrio da estrutura:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = F \quad (8.3)$$

escreve-se a equação da função de resposta em frequência utilizando as propriedades modais

das matrizes de massa, amortecimento e rigidez estruturais,

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{m}_r ; \quad \Phi^T \mathbf{D} \Phi = \mathbf{d}_r \quad \text{e} \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{k}_r \quad (8.4)$$

onde  $\Phi$  é o vetor dos autovalores do sistema, e  $\mathbf{m}_r$ ,  $\mathbf{d}_r$  e  $\mathbf{k}_r$ , são matrizes diagonais, chamadas de matrizes de massa, amortecimento e rigidez modais, respectivamente.

A equação de função de resposta em frequência é obtida, aplicando a transformada de Fourier, resultando em:

$$\mathbf{H}(\omega) = \Phi \left[ \frac{1}{\mathbf{k}_r - \omega^2 \mathbf{m}_r + i\omega \mathbf{d}_r} \right] \Phi^T \quad (8.5)$$

ou ainda definindo uma matriz diagonal das frequências naturais  $\omega_r$  e outra matriz dos fatores de amortecimento  $\zeta_r$  como:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\mathbf{k}_r}{\mathbf{m}_r}} \quad \text{e} \quad \zeta_r = \frac{\mathbf{d}_r}{2\sqrt{\mathbf{k}_r \mathbf{m}_r}} \quad (8.6)$$

chega-se à seguinte equação para a função de resposta em frequência:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{A}_r}{\omega_r - \omega^2 + i2\zeta_r \omega \omega_r} \quad (8.7)$$

onde  $\mathbf{A}_r = \phi_{ir} \phi_{jr} / \mathbf{m}_r$ .

A partir da equação (8.7), divide-se a função de resposta em frequência em suas partes real e imaginária, reescrevendo a equação como:

$$[\mathbf{R}(\omega) + i\mathbf{I}(\omega)] [\omega_r^2 - \omega^2 + i2\zeta_r \omega \omega_r] = \mathbf{A}_r \quad (8.8)$$

Chamando, por simplicidade  $a_1 = \omega_r^2$ ,  $a_2 = \zeta_r \omega_r$  e  $a_3 = \mathbf{A}_r$ , escreve-se separadamente as equações para a parte real e imaginária:

$$a_1 \mathbf{R}(\omega) - 2a_2 \mathbf{I}(\omega) \omega - a_3 = \mathbf{R}(\omega) \omega^2 \quad (8.9)$$

$$a_1 \mathbf{I}(\omega) + 2a_2 \mathbf{R}(\omega)\omega = \mathbf{I}(\omega)\omega^2 \quad (8.10)$$

Por fim, a partir das equações (8.9) e (8.10), monta-se um sistema de equações  $n \times 3$ , que é resolvido e os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  levam à frequência natural e fator de amortecimento. É importante notar que  $n$  é o dobro do número de pontos escolhidos que representam o pico de frequência que se deseja extrair os parâmetros. Geralmente esse número é de 10 pontos em torno do pico da frequência natural da função de resposta em frequência.

O sistema a ser resolvido fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} R_1 & -2I_1\omega_1 & -1 \\ I_1 & 2R_1\omega_1 & 0 \\ R_2 & -2I_2\omega_2 & -1 \\ I_2 & 2R_2\omega_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{(n \times 3)} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} R_1\omega_1^2 \\ I_1\omega_1^2 \\ R_1\omega_2^2 \\ I_1\omega_2^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}_{(n \times 1)} \quad (8.11)$$

## 8.4 Funções de resposta em frequência dos testes realizados

Os resultados apresentados aqui serão divididos por cada modo analisado. Como dito anteriormente, somente os primeiros três modos serão analisados. O primeiro modo é de flexão, o segundo modo também é de flexão, porém com uma linha nodal, e o terceiro modo é de torção. Pode-se observar as formas modais obtidas para a placa, através de resultados obtidos pelo programa computacional estrutural, nas Figuras 8.1 e 8.2.

Os gráficos com as Funções de Resposta em Frequência serão apresentados, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento testadas, num mesmo gráfico. Uma subdivisão,

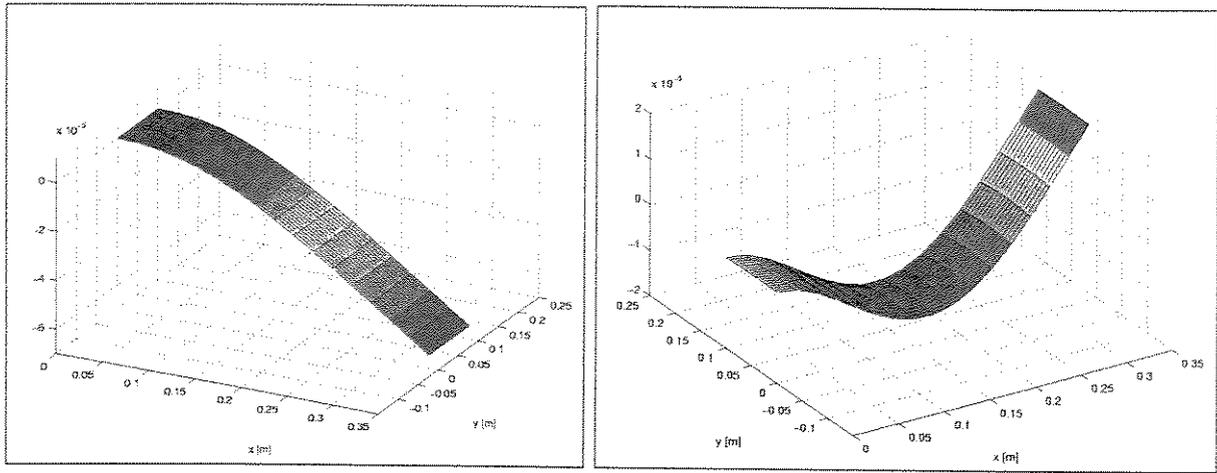


Figura 8.1: Formas modais para o primeiro modo, à esquerda, e para o segundo modo, à direita.

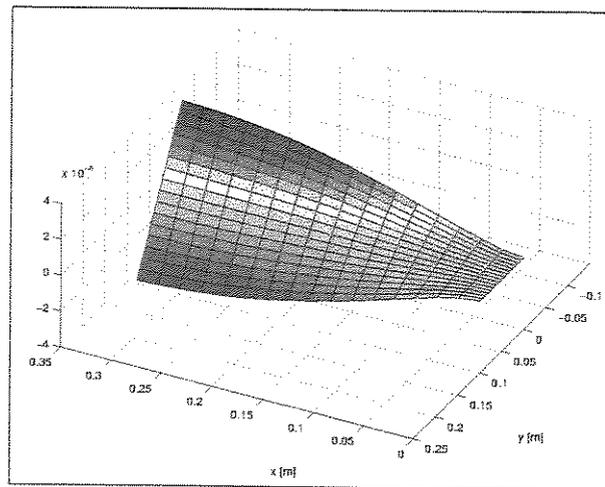


Figura 8.2: Forma modal para o terceiro modo.

contendo os resultados para os diferentes ângulos de ataque também é feito, de modo a organizar melhor a apresentação e discussão dos mesmos.

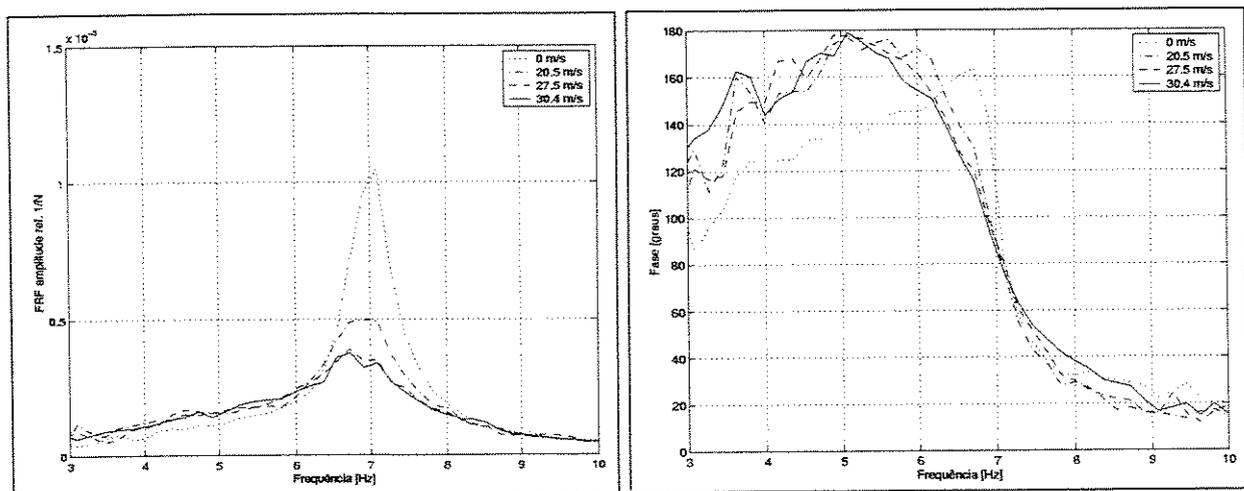
Foram escolhidas três diferentes velocidades do escoamento para serem testadas, uma mais baixa, de  $20,5 \text{ m/s}$  ( $Re = 125475,6$ ), uma intermediária, de  $27,5 \text{ m/s}$  ( $Re = 168320,9$ ) e outra mais alta, de  $30,4 \text{ m/s}$  ( $Re = 186071,1$ ), a qual corresponde à maior velocidade fornecida pelo ventilador do túnel de vento, onde o número de Reynolds é calculado com base na largura da placa. Em todas as figuras onde aparece a velocidade de  $0 \text{ m/s}$ , significa que o teste foi realizado com o túnel de vento desligado, correspondendo à resposta somente estrutural, sem o efeito do escoamento.

### 8.4.1 Resultados obtidos para o primeiro modo

Apresenta-se aqui os resultados dos testes feitos excitando-se o sistema em torno da primeira frequência natural. Compara-se as diferentes velocidades utilizadas, juntamente com a resposta da estrutura sem o efeito do escoamento, para os diferentes ângulos de ataque.

#### (A) Teste com $1^\circ$ de ângulo de ataque

Através da Figura 8.3 pode-se ver o resultado dos testes em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento, aumentando-se a velocidade do escoamento. Através do gráfico das FRFs, pode-se ver que as frequências naturais não sofrem mudanças significativas. Entretanto, os fatores de amortecimento aumentam com o aumento da velocidade do escoamento. Estas duas tendências podem também ser observadas pelo gráfico do ângulo de fase, onde a fase de  $90^\circ$  entre a excitação e resposta, indica a presença de uma frequência natural e a inclinação da curva de fase indica o grau de amortecimento presente. Quanto maior a inclinação da curva de fase em torno do ângulo de  $90^\circ$ , maior o grau de amortecimento.



**Figura 8.3:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $1^\circ$  de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

A Tabela 8.1 apresenta os valores das frequências naturais e fatores de amortecimento extraídos das curvas de FRF. Comprova-se a tendência de pouca modificação em termos de

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	6,96	0,051	6,95	0,070	6,93	0,083

**Tabela 8.1:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 1° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

frequência natural. Além disso, pode-se notar, novamente, o aumento do fator de amortecimento com o aumento da velocidade do escoamento, indicando que a presença do escoamento introduz uma dissipação de energia vibracional adicional, nesse caso.

### (B) Teste com 2° de ângulo de ataque

Através da Figura 8.4 e da Tabela 8.2, pode-se observar o mesmo comportamento dos resultados de 1° de ângulo de ataque. Pouca diferença é notada. As frequências naturais não sofrem mudanças significativas. Os fatores de amortecimento aumentam com o aumento da velocidade do escoamento.

Comparando-se os fatores de amortecimento obtidos com um ângulo de ataque de 2° com o de 1°, vê-se que estes aumentam com o aumento do ângulo de ataque. Este comportamento pode ser explicado pela maior diferença de pressão imposta à placa, quando aumenta-se o ângulo de ataque, fazendo com que o amortecimento acrescentado à estrutura também aumente.

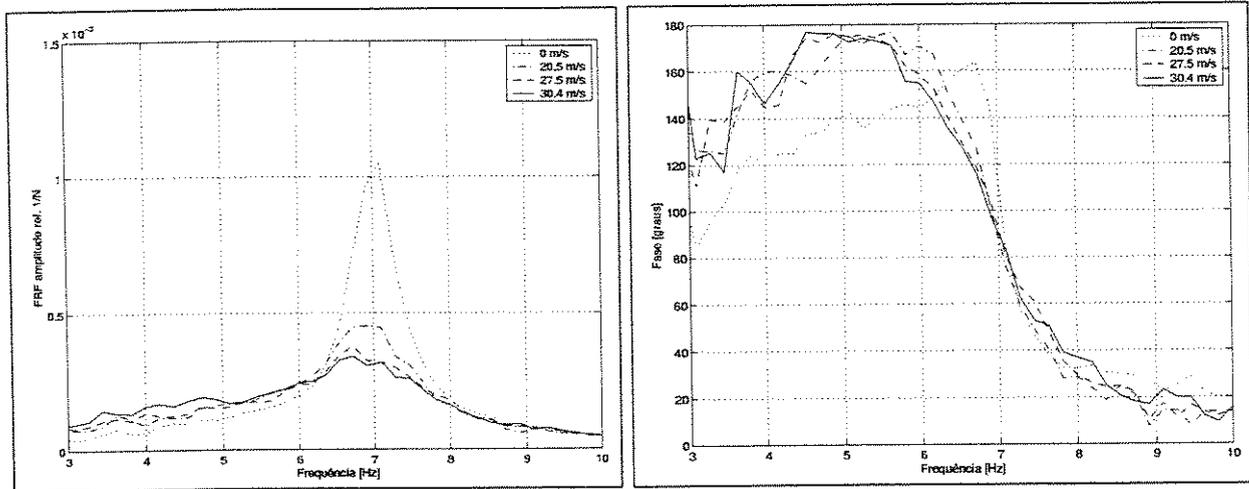


Figura 8.4: Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $2^\circ$  de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

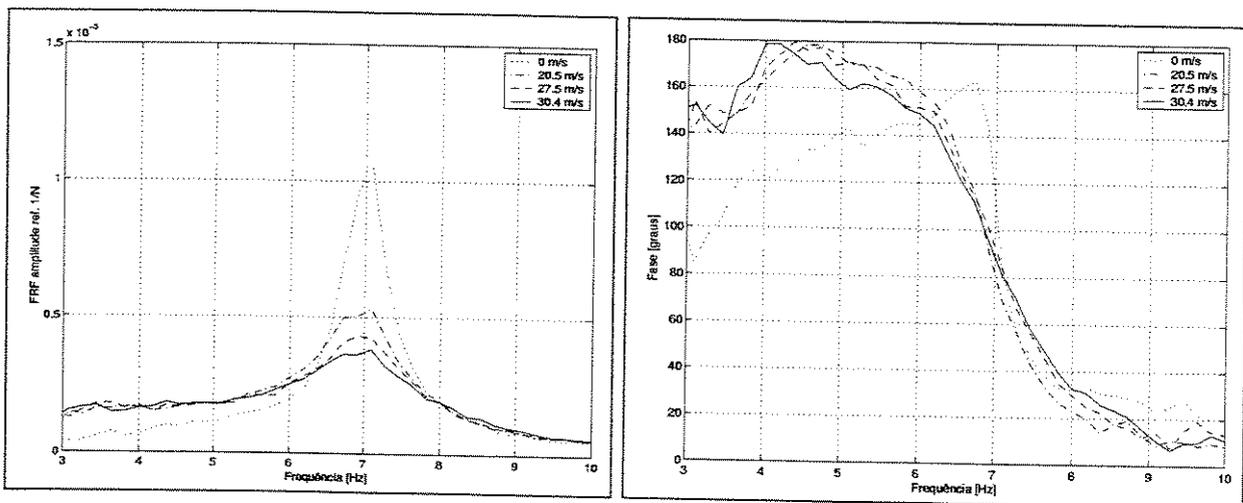
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat.	Fat.amort.	Freq.nat.	Fat.amort.	Freq.nat.	Fat.amort.	Freq.nat.	Fat.amort.
[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]
6,97	0,013	6,96	0,056	6,98	0,079	6,96	0,087

Tabela 8.2: Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $2^\circ$  de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

### (C) Teste com 3° de ângulo de ataque

Novamente, através da Figura 8.5 e da Tabela 8.3, pode-se observar o mesmo comportamento dos resultados de 1° e de 2° de ângulo de ataque. As frequências naturais não sofrem mudanças significativas e os fatores de amortecimento aumentam com o aumento da velocidade do escoamento.

Comparando-se os fatores de amortecimento obtidos com um ângulo de ataque de 1°, 2° e 3°, vê-se que estes aumentam sucessivamente, com o aumento do ângulo de ataque (veja Tabelas 8.3, 8.2 e 8.1).



**Figura 8.5:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	6,93	0,063	6,98	0,083	6,97	0,097

**Tabela 8.3:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

(D) Teste com 4° de ângulo de ataque

Comparando agora os resultados obtidos com um ângulo de 4°, com os ângulos de 1°, 2° e 3°, observa-se que as frequências naturais sofrem pequenas mudanças, tendo seu valor aumentado um pouco. Os fatores de amortecimento preservam sua tendência e aumentam com o aumento do ângulo de ataque. Os resultados podem ser vistos na Figura 8.6 e na Tabela 8.4.

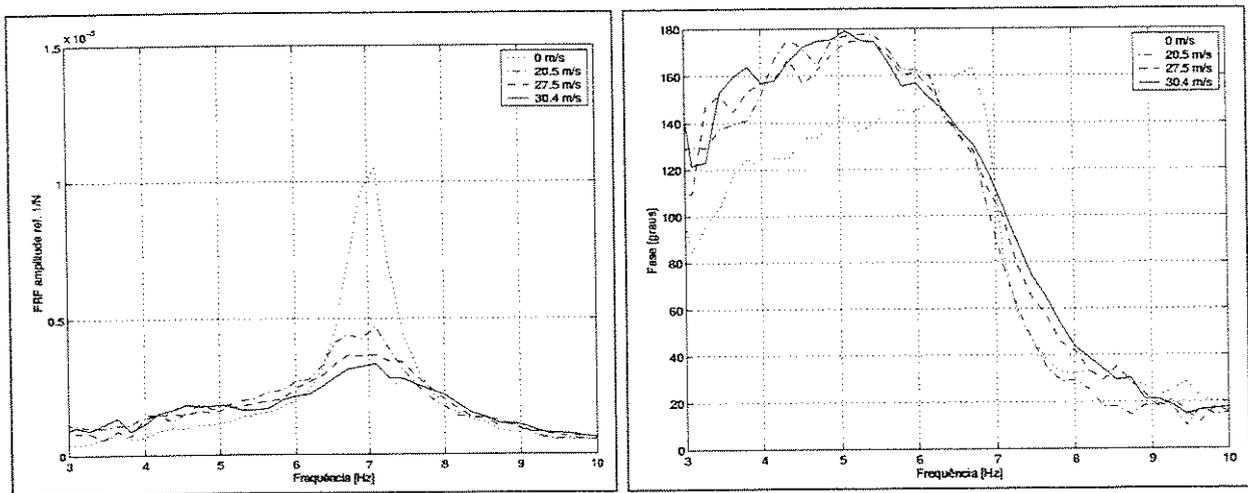


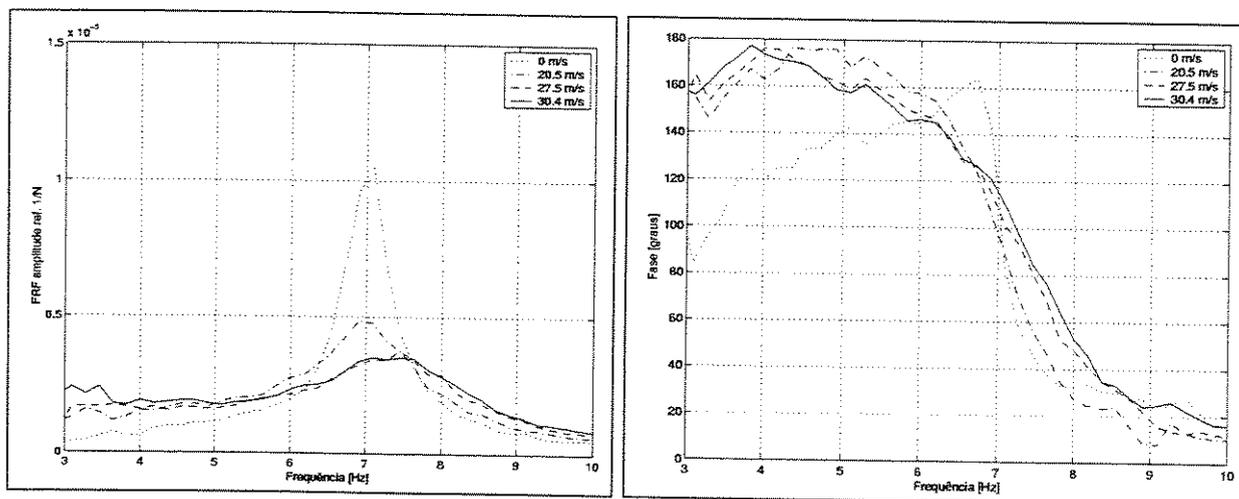
Figura 8.6: Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 4° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	6,96	0,064	7,13	0,085	7,23	0,097

Tabela 8.4: Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 4° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

### (E) Teste com 6° de ângulo de ataque

Seguindo a tendência dos resultados de 4° de ângulo de ataque, as frequências naturais para o caso de 6° de ângulo de ataque sofrem um pequeno aumento com o aumento da velocidade do escoamento. O mesmo acontece com os fatores de amortecimento (veja Figura 8.7). Comparando os ângulos de 1°, 2°, 3°, 4° e 6° vê-se que os fatores de amortecimento sempre aumentam, tanto com o aumento do ângulo de ataque, quanto com o aumento da velocidade do escoamento (veja Tabela 8.5).



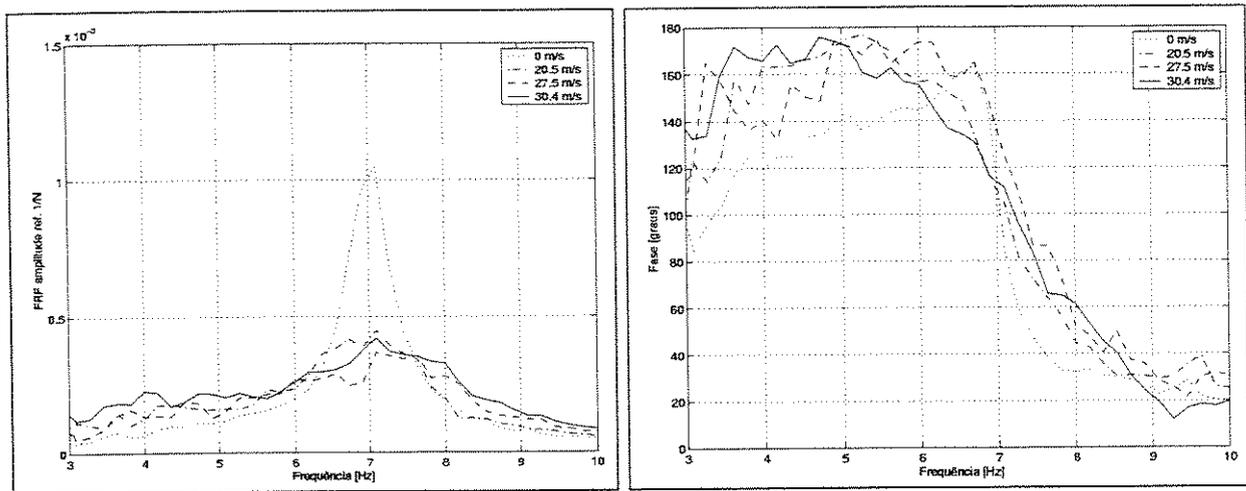
**Figura 8.7:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 6° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	7,05	0,075	7,28	0,110	7,37	0,124

**Tabela 8.5:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 6° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

## (F) Teste com $7^\circ$ de ângulo de ataque

Os resultados obtidos com um ângulo de ataque de  $7^\circ$ , mostram um comportamento um pouco diferente da tendência anterior. No caso das frequências naturais, estas aumentam em pequeno grau, como para os resultados de  $4^\circ$  e  $6^\circ$ .



**Figura 8.8:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $7^\circ$  de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

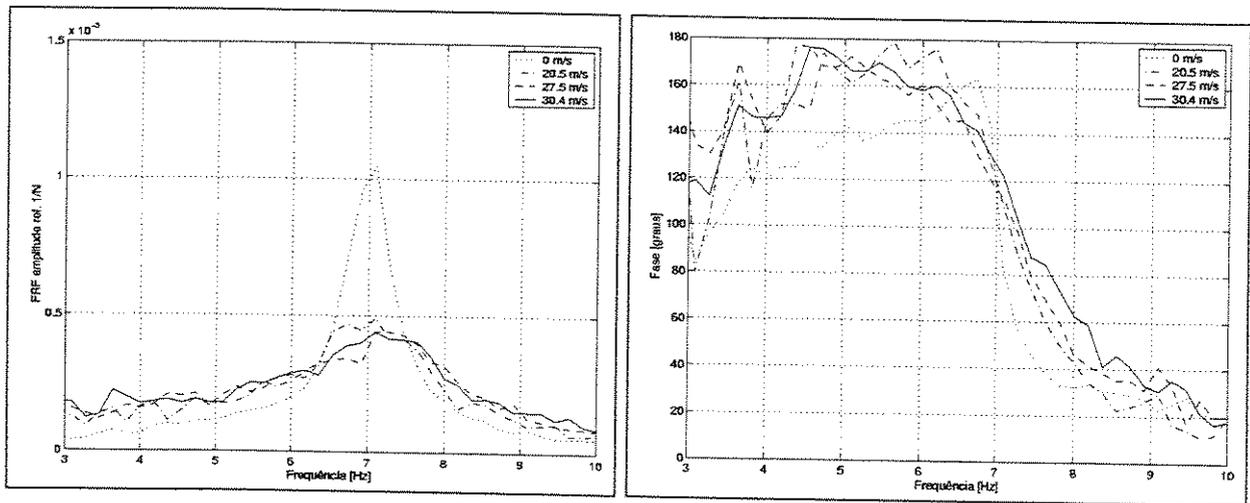
Os fatores de amortecimento também aumentam com o aumento da velocidade do escoamento. Porém, estes são menores do que para o caso de  $6^\circ$ , acabando com a tendência de aumento do amortecimento com o aumento do ângulo de ataque. A explicação mais provável para esse comportamento está ligada à condição do escoamento sobre a placa. Para uma placa plana, sem curvatura nenhuma e com uma espessura muito pequena, o escoamento descola da superfície superior em pequenos ângulos de ataque, ou seja, em torno dos  $6^\circ$  a  $7^\circ$ . Diz-se que o escoamento encontra-se *estolado*. Como será visto nas seções seguintes, o escoamento encontra-se quase totalmente descolado em  $6^\circ$ , e em  $7^\circ$  este está totalmente descolado. Com isso, a diferença de pressão entre as superfícies superior e inferior cai bastante, causando a diminuição do fator de amortecimento, quando comparado com o ângulo de  $6^\circ$  (veja Figuras 8.8 e 8.7 e Tabelas 8.6 e 8.5).

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	7,14	0,078	7,43	0,078	7,38	0,116

**Tabela 8.6:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 7° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

**(G) Teste com 8° de ângulo de ataque**

Os resultados obtidos para o ângulo de ataque de 8° mostram as mesmas tendências vistas no ângulo de 7°. As frequências naturais sofrem um leve aumento. Já os fatores de amortecimento, apesar de aumentarem com o aumento da velocidade, não aumentam com o aumento do ângulo de ataque (veja Figura 8.9 e Tabela 8.7).



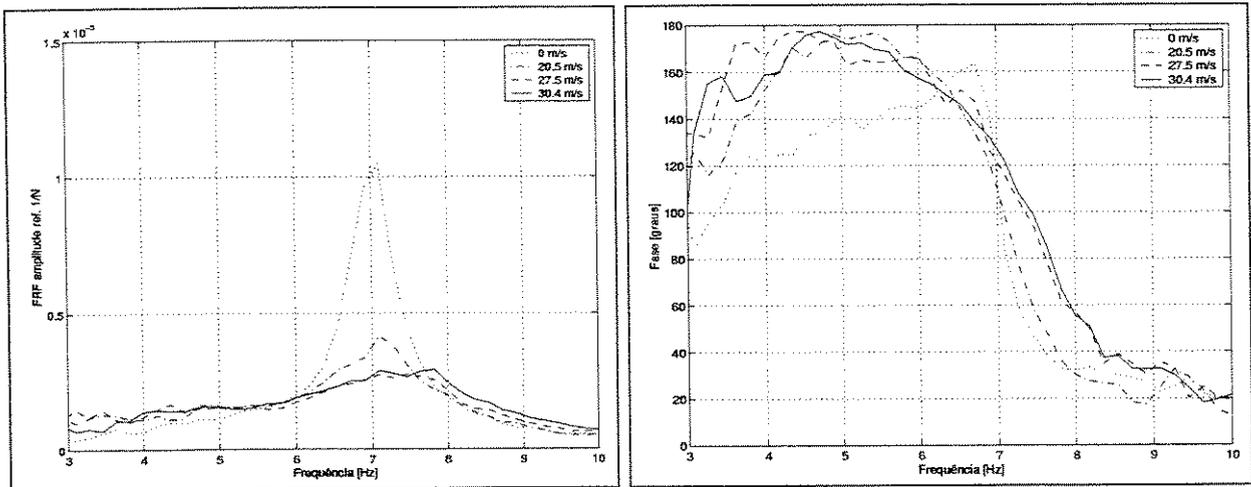
**Figura 8.9:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 8° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	7,20	0,062	7,32	0,101	7,46	0,103

**Tabela 8.7:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 8° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

**(H) Teste com 9° de ângulo de ataque**

Novamente, os resultados obtidos para o ângulo de ataque de 9° mostram as mesmas tendências vistas nos ângulos de 8° e 7°. As frequências naturais sofrem um leve aumento. Já os fatores de amortecimento, apesar de aumentarem com o aumento da velocidade, não aumentam com o aumento do ângulo de ataque (veja Figura 8.10 e Tabela 8.8).



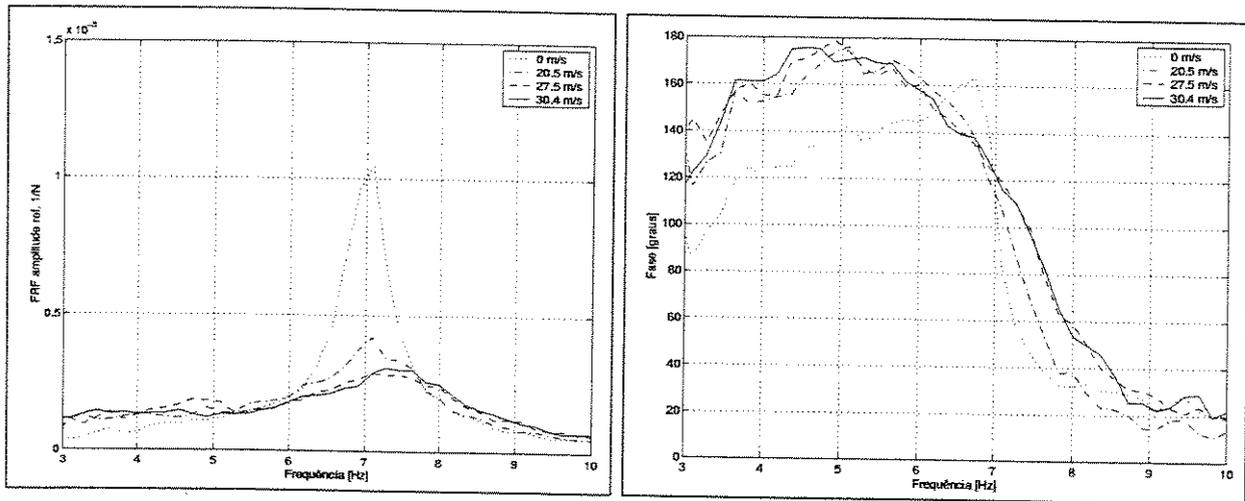
**Figura 8.10:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 9° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	7,14	0,065	7,43	0,094	7,50	0,105

**Tabela 8.8:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 9° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

**(I) Teste com 10° de ângulo de ataque**

O mesmo comportamento é notado para os resultados de 10°. As frequências naturais sofrem um leve aumento. Já os fatores de amortecimento, apesar de aumentarem com o aumento da velocidade, não aumentam com o aumento do ângulo de ataque (veja Figura 8.11 e Tabela 8.9).



**Figura 8.11:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 10° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	7,19	0,068	7,46	0,104	7,47	0,105

**Tabela 8.9:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 10° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

### (J) Teste com 11° de ângulo de ataque

Para o último ângulo de ataque testado, o ângulo de 11°, a mesma tendência é notada. As frequências naturais sofrem um leve aumento. Já os fatores de amortecimento não aumentam com o aumento do ângulo de ataque, para o caso desse ângulo de ataque elevado, assim como para o caso da maior velocidade, o fator de amortecimento sofreu uma leve diminuição (veja Figura 8.12 e Tabela 8.10).

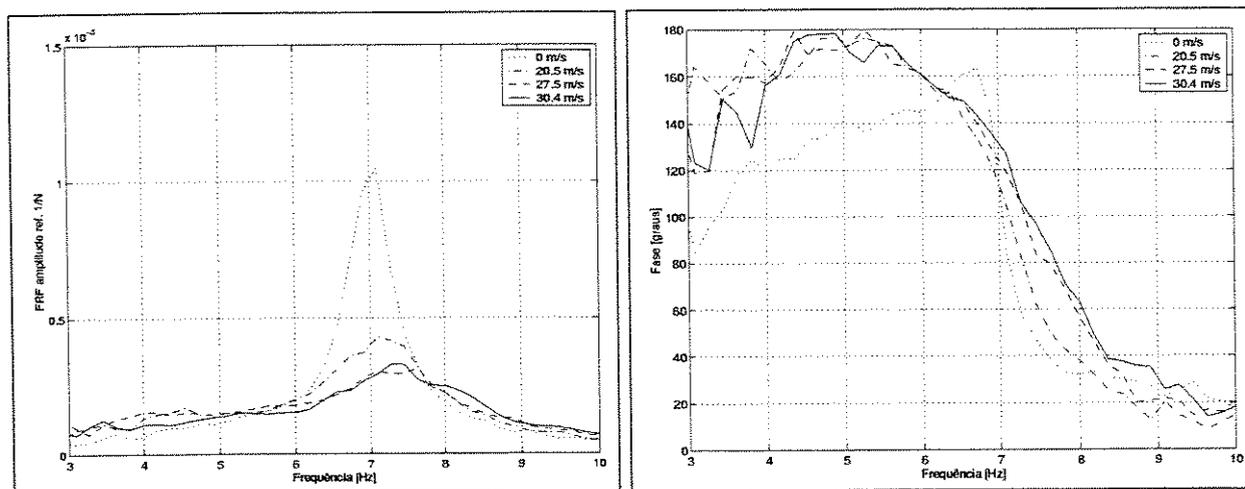


Figura 8.12: Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 11° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
6,97	0,013	7,19	0,069	7,42	0,099	7,54	0,092

Tabela 8.10: Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 11° de ângulo de ataque, para o primeiro modo.

## • Conclusões dos resultados apresentados para o primeiro modo

Pode-se concluir que as frequências naturais, para os resultados apresentados para o primeiro modo, sofrem uma mudança quase insignificante. Isso fica claro observando que para os ângulos de ataque de  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  e  $3^\circ$ , quase nenhuma mudança é observada. Para os ângulos de  $4^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $7^\circ$ ,  $8^\circ$ ,  $9^\circ$ ,  $10^\circ$  e  $11^\circ$ , as mudanças são muito pequenas e variam em torno do mesmo valor, não apresentando um comportamento de aumento da frequência natural com o aumento do ângulo de ataque. Como será visto nas próximas seções, a variação das frequências naturais para os outros modos é bastante grande quando comparada com a variação do primeiro modo.

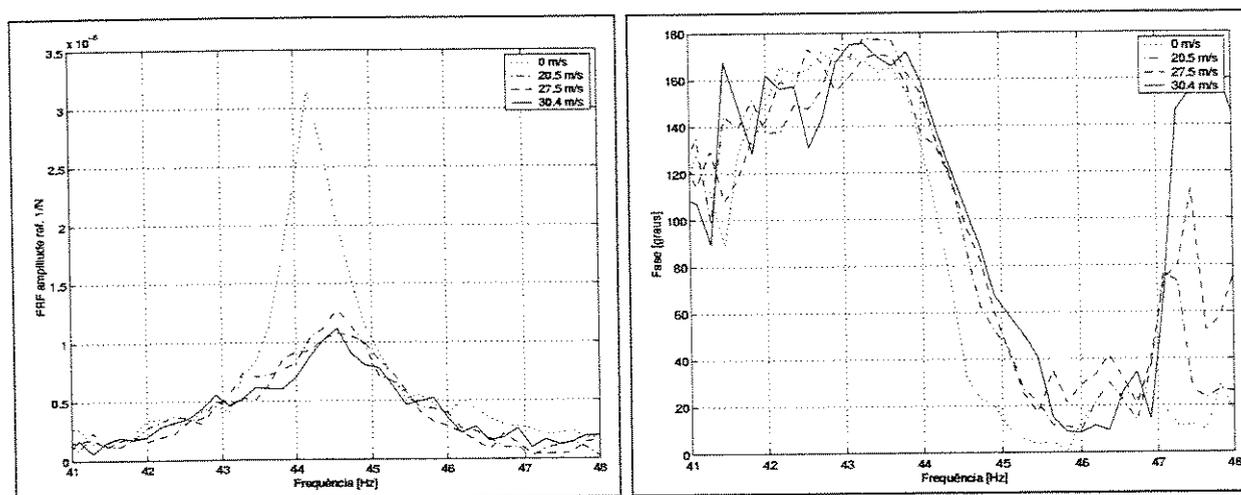
Já para o fator de amortecimento, os resultados podem ser divididos em 2 grupos. O primeiro grupo, que compreende os ângulos de ataque de  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $4^\circ$  e  $6^\circ$ , apresenta um comportamento de aumento do fator de amortecimento, tanto em função do ângulo de ataque, quanto em função da velocidade do escoamento. Isto ocorre, como já mencionado anteriormente, devido ao aumento da diferença de pressão entre as superfícies da placa, com o aumento tanto da velocidade, quanto do ângulo de ataque. Em um segundo momento, a partir do ângulo de  $7^\circ$ , quando o escoamento encontra-se descolado da superfície superior da placa, o fator de amortecimento não aumenta mais devido ao aumento do ângulo de ataque, sofrendo uma leve redução para o caso para o caso de ângulos de ataque muito grandes ( $11^\circ$ ) e altas velocidades, veja item (J).

## 8.4.2 Resultados obtidos para o segundo modo

Apresenta-se aqui os resultados dos testes feitos excitando-se o sistema em torno da segunda frequência natural. Comparam-se as diferentes velocidades utilizadas, juntamente com a resposta da estrutura sem o efeito do escoamento, para os diferentes ângulos de ataque.

### (A) Teste com 1° de ângulo de ataque

A partir da Figura 8.13 e da Tabela 8.11, pode-se observar, para o caso de 1° de ângulo de ataque, com a excitação em torno do segundo modo, que há uma tendência de aumento da frequência natural da placa com o aumento da velocidade do escoamento. Ocorre também uma tendência de aumento do fator de amortecimento com o aumento da velocidade do escoamento.



**Figura 8.13:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 1° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

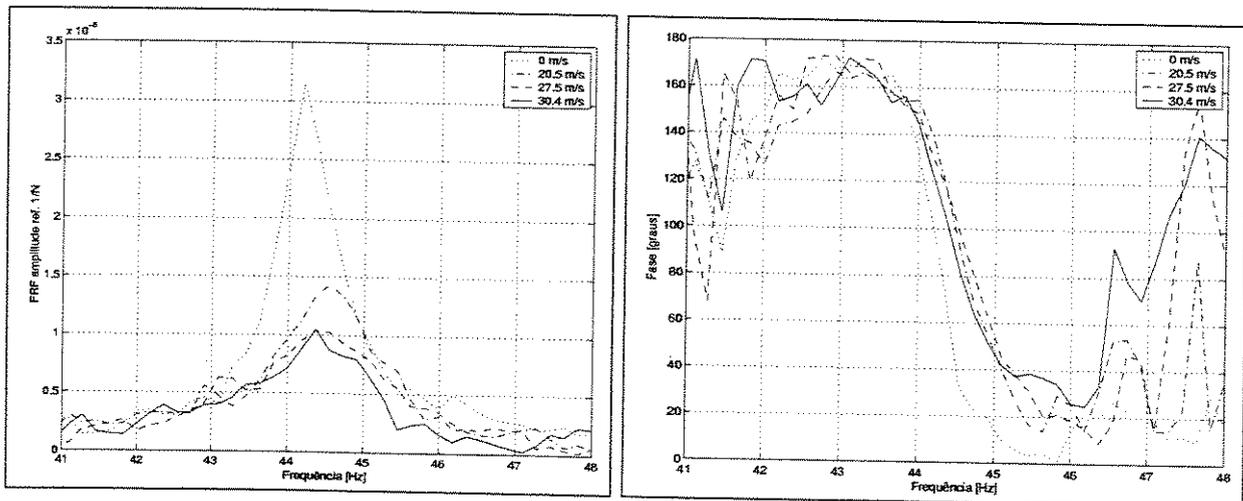
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
44,27	0,004	44,49	0,007	44,56	0,008	44,57	0,008

**Tabela 8.11:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 1° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

### (B) Teste com 2° de ângulo de ataque

A partir da Figura 8.14 e da Tabela 8.12, pode-se observar, para o caso de 2° de ângulo de ataque, com a excitação em torno do segundo modo, que a tendência de aumento da frequência natural da placa com o aumento da velocidade do escoamento, não se apresentou nesse caso, ocorrendo o contrário. Entretanto, fator de amortecimento aumentou com o aumento da velocidade do escoamento, mantendo-se a tendência anterior.

O fato de a tendência de aumento da frequência natural ter invertido, como será visto nos próximos casos, não será verificada. A frequência natural para o segundo modo aumenta com o aumento da velocidade do escoamento. Isto acontece pois para ângulos de ataque muito pequenos, as variações são insignificantes, ficando difícil observar a tendência de aumento da frequência natural.



**Figura 8.14:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 2° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

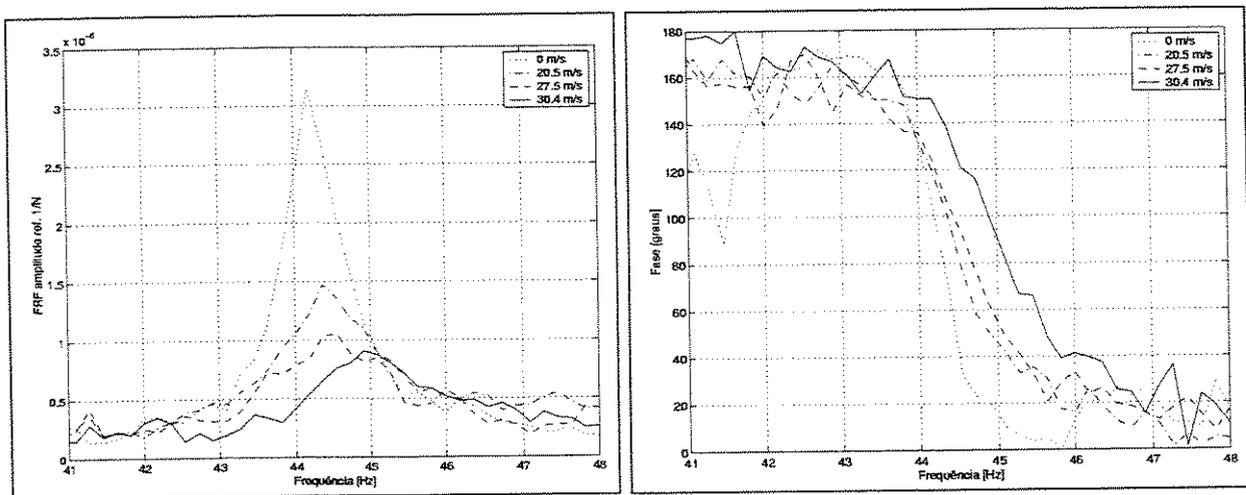
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
44,27	0,004	44,56	0,008	44,52	0,010	44,47	0,010

**Tabela 8.12:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 2° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

### (C) Teste com 3° de ângulo de ataque

Novamente, a partir da Figura 8.15 e da Tabela 8.13, pode-se observar, para o caso de 3° de ângulo de ataque, o claro aumento da frequência natural da placa com o aumento da velocidade do escoamento.

Ocorre também o aumento do fator de amortecimento com o aumento da velocidade do escoamento. Comparando ainda os fatores de amortecimento de 1°, 2° e 3°, vê-se que estes aumentam com o aumento do ângulo de ataque.



**Figura 8.15:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

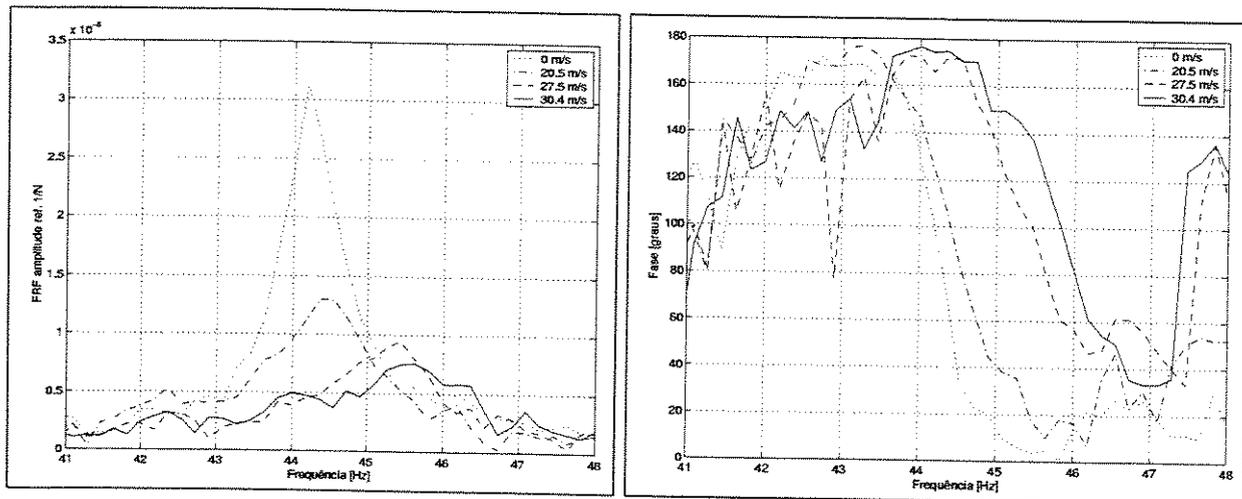
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
44,27	0,004	44,47	0,012	44,55	0,013	45,05	0,015

**Tabela 8.13:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

#### (D) Teste com 4° de ângulo de ataque

Para os testes feitos com 4° de ângulo de ataque, novamente ocorre um aumento das frequências naturais, com o aumento da velocidade do escoamento (veja Figura 8.16 e Tabela 8.14). Comparando ainda as frequências obtidas para os casos anteriores, observa-se um aumento da frequência natural, não somente com o aumento da velocidade do escoamento, mas também com o aumento do ângulo de ataque.

Os fatores de amortecimento, nesse caso, aumentam também com o aumento da velocidade do escoamento. Porém eles não superam os valores obtidos para o ângulo de ataque de 3°, ficando próximos deste. No caso de velocidades mais altas,  $V = 30,4 \text{ m/s}$ , o fator de amortecimento se reduz de  $\zeta = 0,013$  (3°) para  $\zeta = 0,010$  (4°).



**Figura 8.16:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 4° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

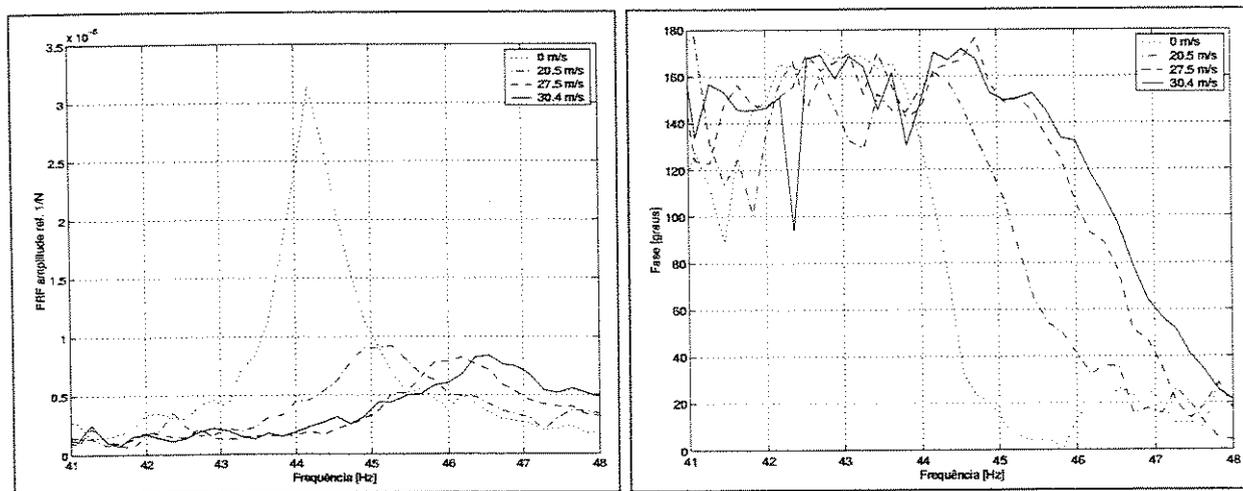
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
44,27	0,004	44,47	0,008	45,35	0,008	45,79	0,010

**Tabela 8.14:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 4° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

### (E) Teste com 6° de ângulo de ataque

Para o ângulo de ataque de 6°, as frequências naturais têm um aumento maior ainda que para o caso de 4°, confirmando a tendência de aumento das frequências com o aumento da velocidade do escoamento e ângulo de ataque.

Neste caso os fatores de amortecimento também aumentam com a velocidade do escoamento, e ainda superam os valores obtidos dos outros ângulos de ataque até o momento (veja Figura 8.17 e Tabela 8.15).



**Figura 8.17:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 6° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

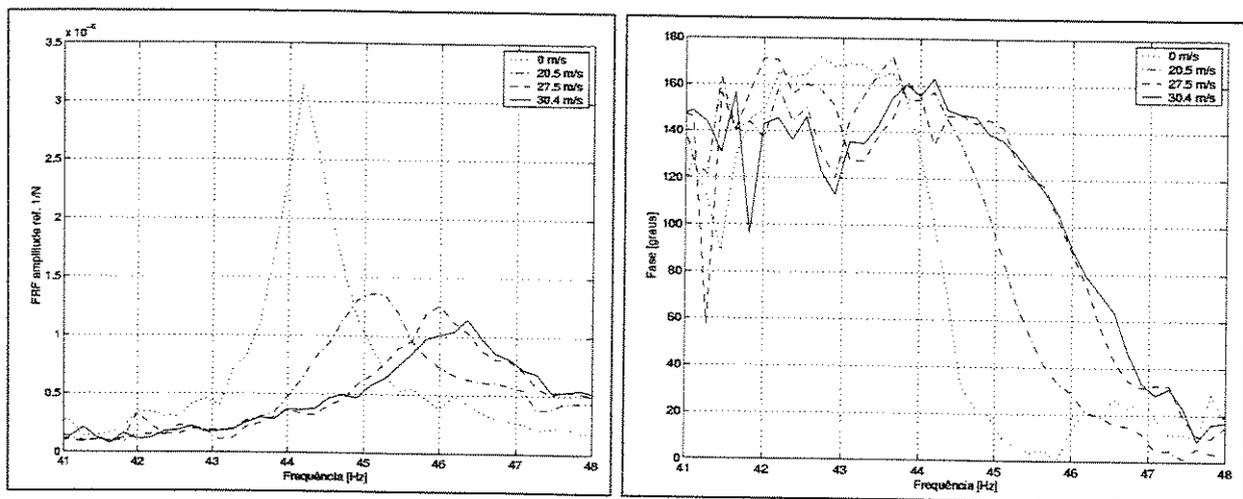
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
44,27	0,004	45,26	0,012	46,23	0,013	46,60	0,015

**Tabela 8.15:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $6^\circ$  de ângulo de ataque, para o segundo modo.

### (F) Teste com $7^\circ$ de ângulo de ataque

No caso do ângulo de ataque de  $7^\circ$ , as frequências naturais também aumentam com o aumento da velocidade do escoamento. Entretanto, o aumento destas com o aumento do ângulo de ataque não se observa mais. Isto está ligado novamente à condição especial do escoamento descolado, diminuindo a diferença de pressão agindo na placa.

Nesse caso ocorre também o aumento dos fatores de amortecimento com o aumento dos ângulos de ataque, bem como da velocidade do escoamento (veja Figura 8.18 e Tabela 8.16).



**Figura 8.18:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $7^\circ$  de ângulo de ataque, para o segundo modo.

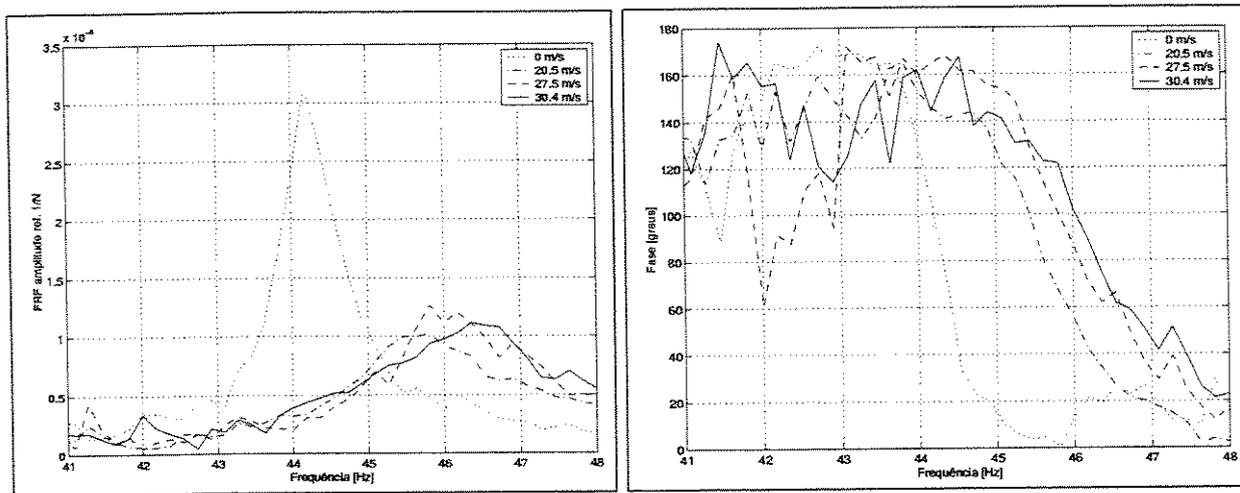
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
44,27	0,004	45,17	0,011	45,99	0,014	46,09	0,016

**Tabela 8.16:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $7^\circ$  de ângulo de ataque, para o segundo modo.

### (G) Teste com $8^\circ$ de ângulo de ataque

Para o ângulo de ataque de  $8^\circ$ , as mesmas condições anteriores (caso de  $7^\circ$ ) ocorrem. Há um aumento das frequências naturais com o aumento da velocidade do escoamento, mas estas não superam os valores encontrados para o caso de  $6^\circ$ .

Ocorre também o aumento dos fatores de amortecimento, tanto em termos de aumento de ângulo de ataque, quanto de velocidade do escoamento (veja Figura 8.19 e Tabela 8.17).



**Figura 8.19:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $8^\circ$  de ângulo de ataque, para o segundo modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
44,27	0,004	45,65	0,013	46,09	0,014	46,26	0,018

**Tabela 8.17:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 8° de ângulo de ataque, para o segundo modo.

• **Conclusões dos resultados apresentados para o segundo modo**

Com os resultados apresentados excitando-se a placa em torno do segundo modo, observa-se o claro aumento da frequência natural com o aumento da velocidade do escoamento. A única exceção se fez no caso do ângulo de ataque de 2°, onde a frequência teve um comportamento inverso. Com um ângulo de 1° e 2°, as frequências mudam pouco com a velocidade do escoamento.

Observa-se que com o aumento do ângulo de ataque, também ocorre um aumento da frequência natural. Este comportamento é observado até o ângulo de ataque de 6°, onde as frequências naturais, para cada velocidade aumentam sucessivamente com o aumento do ângulo de ataque. Entretanto, aumentando o ângulo de ataque além deste ângulo, para 7°, este comportamento não é mais observado. As frequências naturais continuam aumentando com o aumento da velocidade do escoamento, porém estas não são maiores do que para o caso de 6°. Isto pode ser explicado novamente, pela condição do escoamento descolado, diminuindo a diferença de pressão exercida na placa, fazendo com que a frequência natural não aumente mais com o aumento do ângulo de ataque. Isto acontece também para o ângulo de 8°.

Já para os fatores de amortecimento, ocorre uma tendência de aumento dos mesmos com o aumento da velocidade do escoamento, bem como o aumento do ângulo de ataque. Porém ocorrem alguns casos em que isso não é observado. O aumento do amortecimento com o aumento da velocidade do escoamento, até uma certa faixa de velocidade, como é o caso destes resultados, é esperada. Entretanto, o amortecimento não deveria aumentar

sempre com o aumento do ângulo de ataque, devido ao descolamento do escoamento para ângulos de ataque mais altos. O que acontece aqui é uma medida pouco precisa dos fatores de amortecimento. Os fatores de amortecimento neste caso variam em torno de 1 % (ou 0,010) para baixo, faixa que fica duvidoso a correta obtenção dos fatores de amortecimento, devido à falta de precisão numérica experimental, pois os amortecimentos são muito baixos. É bom notar que no caso dos resultados obtidos para o primeiro modo, os fatores de amortecimento eram bem maiores, em torno de 10 % (ou 0,100), podendo ser obtidos com uma maior precisão.

### **8.4.3 Resultados obtidos para o terceiro modo**

Apresenta-se aqui os resultados dos testes feitos excitando-se o sistema em torno da terceira frequência natural. Compara-se as diferentes velocidades utilizadas, juntamente com a resposta da estrutura sem o efeito do escoamento, para os diferentes ângulos de ataque.

Estes resultados obtidos tiveram uma qualidade menor em termos das FRFs medidas por causa de sua forma modal, juntamente com o tipo de excitação utilizada. O terceiro modo é um modo de torção. Soma-se a isso, o tipo de excitação utilizada, com um excitador conectado à base da massa que engasta a placa. A excitação utilizada excita da mesma maneira toda a linha de engastamento da placa, com a mesma intensidade e com a mesma fase. Isso faz com que os modos de flexão sejam perfeitamente excitados, entretanto os modos de torção sejam muito pouco ou quase nada excitados. A excitação só é mais sentida pelos modos de torção quando os ângulos de ataque são mais elevados, e a dinâmica do escoamento passa a acoplar os movimentos de flexão e torção da placa de maneira mais significativa.

Justamente pela natureza da forma modal de torção deste modo, acontecerá um fenômeno muito interessante de instabilidade, quando a placa flexível é montada com ângulos de ataque muito grandes, isto será visto a seguir com detalhes.

### (A) Teste com 1° de ângulo de ataque

Através da Figura 8.20 e da Tabela 8.18, pode-se perceber que a frequência natural, diferentemente dos resultados obtidos para o segundo modo, diminui com o aumento da velocidade do escoamento. Neste caso, a variação da frequência natural, para este ângulo de ataque é maior do que para o mesmo caso em torno do segundo modo. É como se o modo de torção fosse mais sensível ao aumento da velocidade do escoamento.

O fator de amortecimento não apresenta um comportamento definido, pois para a velocidade mais baixa, este aumentou, porém com o aumento da velocidade, voltou a diminuir. Entretanto, como nos casos para o segundo modo, estes amortecimentos são muito pequenos, sendo difícil obter medidas com a precisão necessária a determinar a verdadeira tendência dos mesmos.

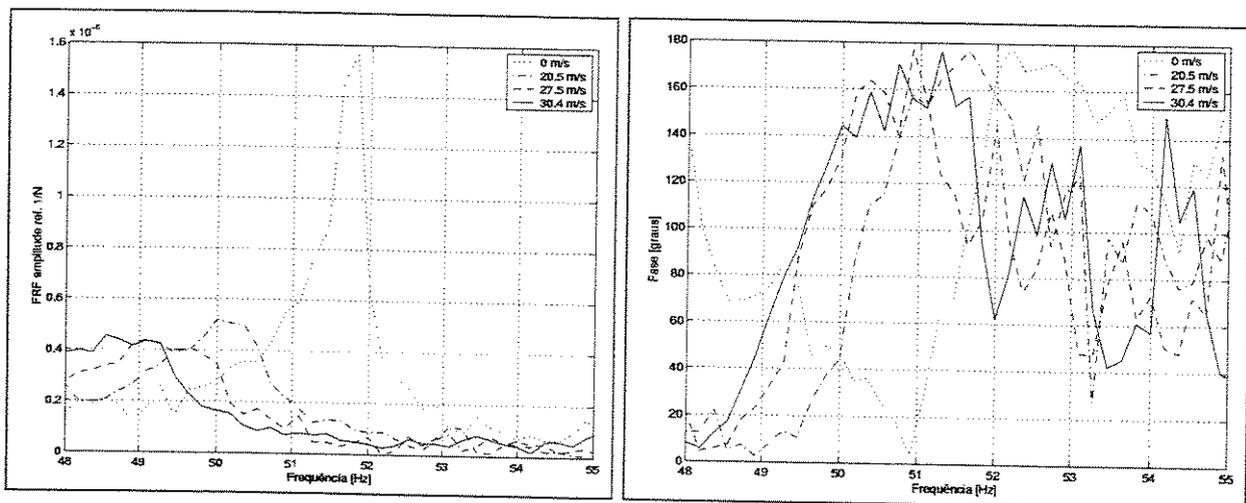


Figura 8.20: Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 1° de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

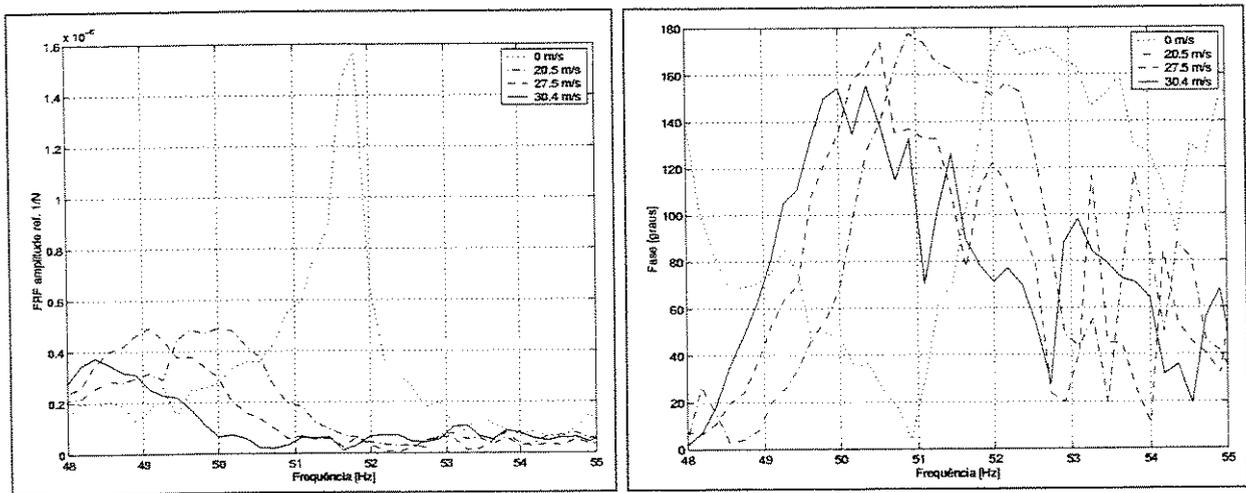
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
51,86	0,002	50,16	0,006	49,34	0,006	48,81	0,003

**Tabela 8.18:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 1° de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

### (B) Teste com 2° de ângulo de ataque

Como para os resultados obtidos para o ângulo de ataque de 1°, a frequência natural diminuiu com o aumento do ângulo de ataque, para esse caso. Esta diminuição é ainda maior do que para o caso de 1° de ângulo de ataque.

Novamente, os fatores de amortecimento não puderam ser medidos com satisfatória precisão, colocando os resultados em dúvida. Entretanto, para este caso, os fatores de amortecimento diminuíram com o aumento da velocidade do escoamento.



**Figura 8.21:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 2° de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

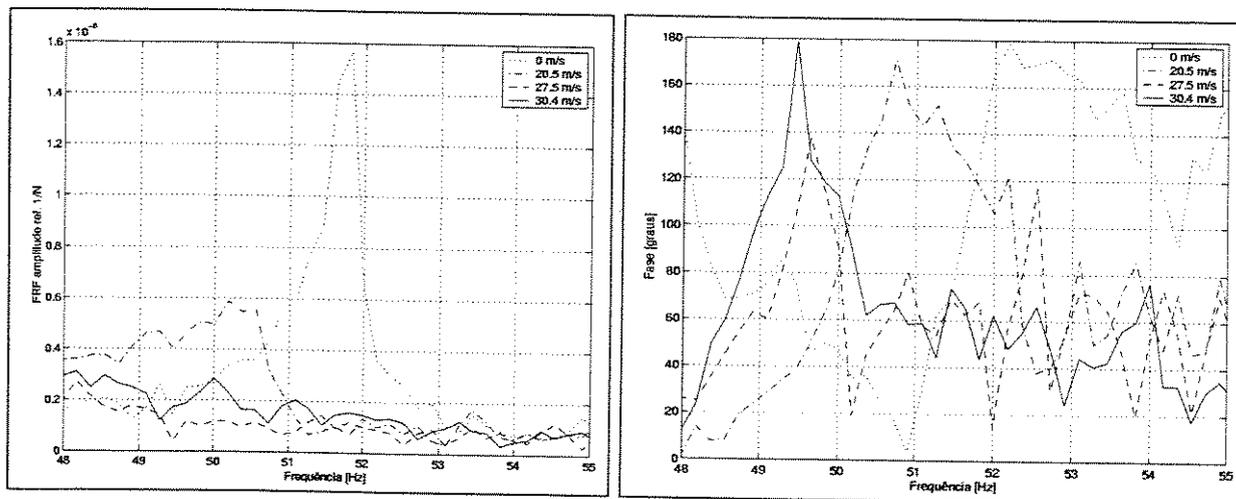
Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
51,86	0,002	49,93	0,006	48,90	0,002	48,49	0,001

**Tabela 8.19:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 2º de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

### (C) Teste com 3º de ângulo de ataque

Quando, no começo desta seção, mencionou-se a pior qualidade das curvas de FRF, se fazia referência ao caso de 3º e 4º de ângulo de ataque. Nota-se que as curvas de FRF não puderam ser visualizadas, mesmo com vários testes conduzidos, obtendo-se resultados muito ruins, sendo que nem mesmo pôde-se extrair as frequências naturais e fatores de amortecimento.

Alguma informação em termos da posição das frequências naturais podem ser observadas no gráfico do amortecimento (Figura 8.22, à direita).



**Figura 8.22:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3º de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
51,86	0,002	--	--	--	--	--	--

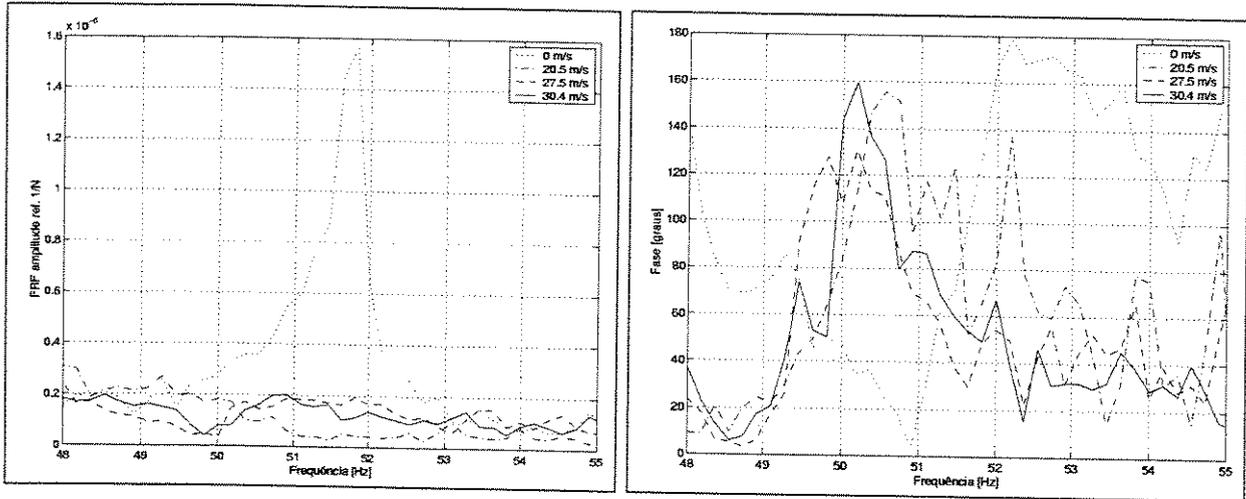
**Tabela 8.20:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com 3° de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

#### (D) Teste com 4° de ângulo de ataque

Novamente as curvas de FRF não puderam ser visualizadas, obtendo-se resultados muito ruins, não podendo ser extraídas as frequências naturais e fatores de amortecimento.

Estes resultados são curiosos. Tais resultados ruins podem ter sua causa ligada à maneira de excitação da placa, que não favorece a excitação dos modos de torção. Nesse caso, uma excitação em um ponto diferente do centro da placa deveria ter sido utilizada. Porém isso não era possível fisicamente, devido à montagem da bancada no túnel de vento, onde nada deveria ficar dentro do túnel, de modo a não perturbar o escoamento. Outro fator é que a placa deveria ter seu engaste o mais próximo possível da parede do túnel, tornando impossível, com a montagem utilizada, a utilização de uma excitação diferente.

Além disso, como será visto para os próximos ângulos de ataque, estes são ângulos próximos do descolamento do escoamento (6°, 7° e 8°), O escoamento descolado induz uma condição de instabilidade, excitando o terceiro modo da placa, na frequência natural da mesma, como será visto a seguir. Essa inversão da variação da frequência natural, pode ter contribuído adicionalmente para a resposta muito baixa nesse dois casos (3° e 4°) de ângulo de ataque.



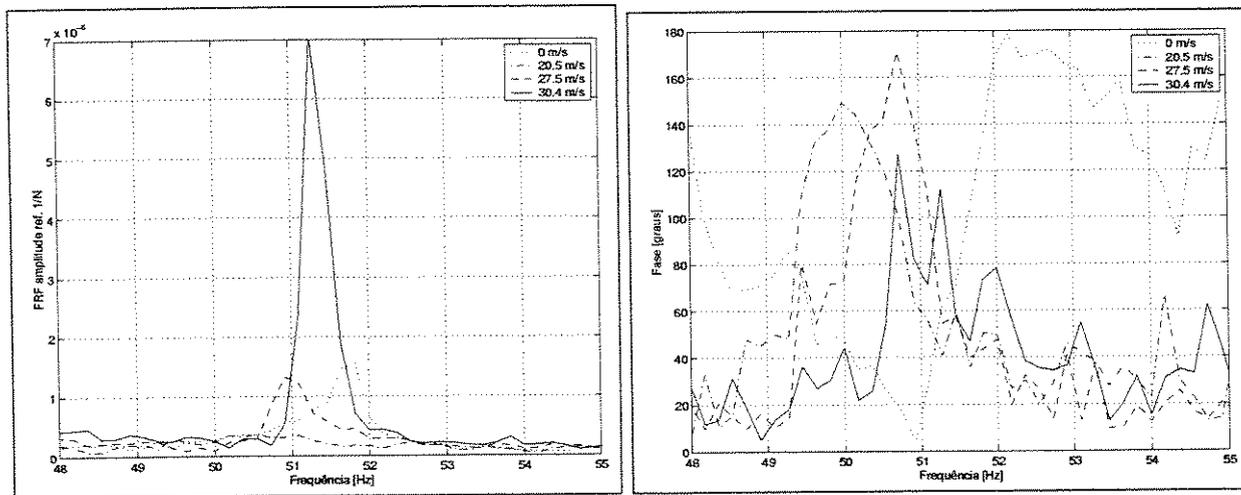
**Figura 8.23:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $4^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
51,86	0,002	---	---	---	---	---	---

**Tabela 8.21:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $4^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

### (E) Teste com $6^\circ$ de ângulo de ataque

Neste caso, pode-se ver através da Figura 8.24, o fenômeno conhecido como *stall flutter*, para a condição de maior velocidade do escoamento. Neste caso, o ângulo de ataque de  $6^\circ$ , é um ângulo em que o escoamento começa a se descolar (*stall*), fazendo com que na maior velocidade, o escoamento excite a placa em seu terceiro modo, o modo de torção. Como visto na figura, a amplitude da resposta é muito maior do que para os outros casos, indicando fortes vibrações. Com isso o amortecimento diminui bastante.



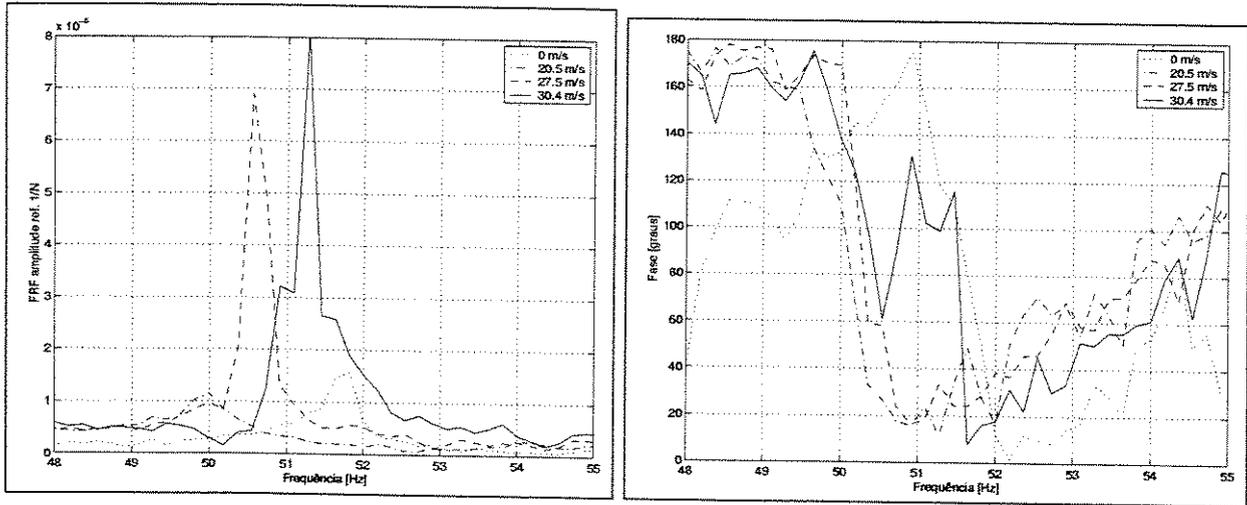
**Figura 8.24:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $6^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat.	Fat.amort.	Freq.nat.	Fat.amort.	Freq.nat.	Fat.amort.	Freq.nat.	Fat.amort.
[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]
51,86	0,002	50,72	0,004	51,13	0,002	51,39	0,000

**Tabela 8.22:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $6^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

### (F) Teste com $7^\circ$ de ângulo de ataque

Novamente pode-se observar o *stall flutter*, agora com maior intensidade e começando com uma velocidade menor do que era necessário com o ângulo de ataque menor. Nesse caso, com o escoamento mais descolado ainda, é necessária uma velocidade menor para induzir a placa a vibrar auto-excitada. Pode-se observar que os picos da FRF, no caso dessa vibração auto-excitada, se deslocam aumentando sua frequência de vibração, como consequência do aumento da velocidade do escoamento que introduz uma rigidez maior ao conjunto placa+escoamento.



**Figura 8.25:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $7^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
51,86	0,002	49,97	0,006	50,59	0,001	51,32	0,000

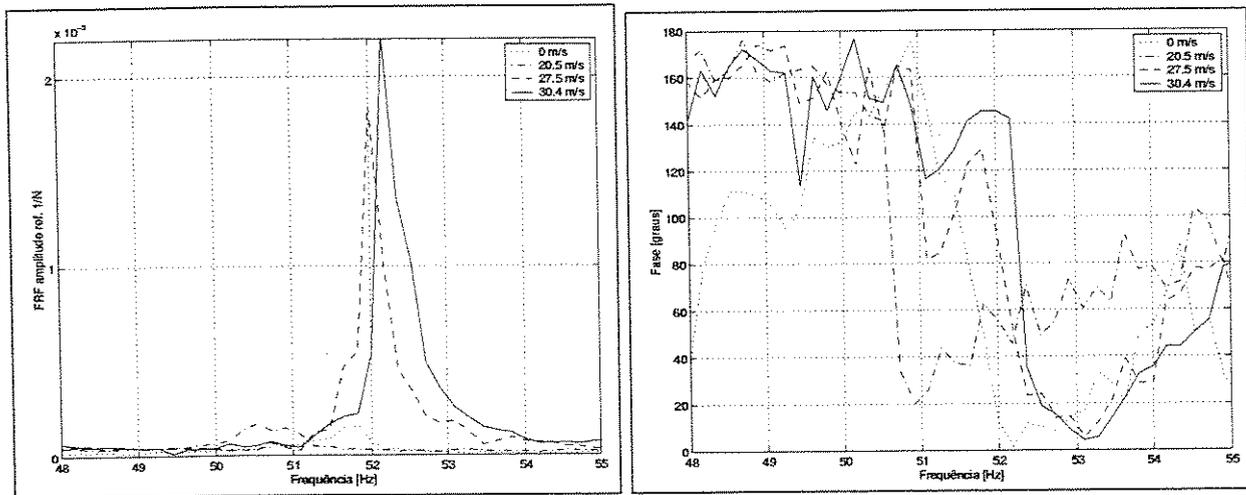
**Tabela 8.23:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $7^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

### (G) Teste com $8^\circ$ de ângulo de ataque

Pode ser visto novamente, o *stall flutter*, como no caso de  $7^\circ$ , iniciando-se com uma velocidade menor do que a com  $6^\circ$ . Além disso, através dos resultados para  $7^\circ$  e  $8^\circ$ , pode-se observar novamente o aumento da frequência de vibração auto-excitada do conjunto placa+escoamento.

Velocidade do escoamento							
0 m/s		20,5 m/s		27,5 m/s		30,4 m/s	
Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]	Freq.nat. [Hz]	Fat.amort. [-]
51,86	0,002	50,57	0,000	52,09	0,001	52,27	0,000

**Tabela 8.24:** Frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $8^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.



**Figura 8.26:** Gráfico da FRF, à esquerda e da fase, à direita, comparando-se as diferentes velocidades do escoamento, com  $8^\circ$  de ângulo de ataque, para o terceiro modo.

### • Conclusões dos resultados apresentados para o terceiro modo

A partir dos resultados apresentados para o terceiro modo, pode-se verificar a tendência de diminuição da frequência natural com o aumento da velocidade do escoamento. Se a velocidade do escoamento pudesse ser aumentada ainda mais, através de um ventilador mais potente, por exemplo, poder-se-ia observar o fenômeno de *flutter* clássico.

Entretanto, o *stall flutter* pôde ser observado durante os testes. Este se origina em um mecanismo diferente do mecanismo do *flutter* clássico (Fung, 1993). O *stall flutter* está ligado ao ângulo de *stall* da placa, onde o escoamento descolado, excita a estrutura em torno de seu terceiro modo, o modo de torção. Neste caso não há acoplamento entre os modos. Pode-se observar ainda que para um ângulo onde o escoamento encontra-se mais descolado, a velocidade necessária para induzir instabilidade na estrutura é menor. Além disso, quanto maior o ângulo de ataque e velocidade do escoamento, mais próximo da frequência natural da estrutura sem a influência do escoamento, a instabilidade irá ocorrer.

Já o *flutter* clássico está relacionado com o acoplamento dos modos de flexão e de torção. Como para o segundo modo (flexão), a frequência natural aumenta com o aumento da velocidade do escoamento, e para o terceiro modo (torção), a frequência diminui, para

uma certa velocidade, os dois modos se encontram, diminuindo o amortecimento, e acoplando os dois, induzindo uma instabilidade (vibração auto-excitada). A estrutura retira energia do escoamento.

Outros testes foram conduzidos com uma placa de dimensões  $340 \times 100 \times 0.4mm$ , ou seja, as mesmas dimensões da placa utilizada nos testes apresentados, porém com uma espessura menor que a metade da placa anterior. Para esta placa, pôde-se observar o fenômeno de *flutter* clássico.

## 8.5 Conclusões

Apresentou-se neste capítulo toda a parte relacionada com a realização dos experimentos, desde os procedimentos experimentais, como medição da velocidade do escoamento, tratamento dos sinais obtidos, obtenção das curvas de Função de Resposta em Frequência da placa e extração das frequências naturais e fatores de amortecimento.

Os testes experimentais foram realizados, obtendo-se as curvas de FRF da placa, inicialmente com o túnel de vento desligado, obtendo a resposta estrutural, e em seguida, com o túnel de vento ligado, obtendo a resposta da placa, com a influência do escoamento. Os testes foram realizados para várias condições de ângulo de ataque e para três condições de velocidade do escoamento. As curvas de FRF foram obtidas utilizando uma excitação senoidal, variando-se a frequência do sinal em torno da frequência natural de cada modo separadamente. Somente os três primeiros modos foram analisados, pois estes contêm as duas principais formas modais, a de torção e a de flexão.

Para os resultados obtidos para o primeiro modo, vê-se que não há grande tendência de aumento da frequência natural com o aumento da velocidade do escoamento, nem com o aumento do ângulo de ataque. Os fatores de amortecimento aumentam tanto em função do aumento da velocidade do escoamento, como em função do ângulo de ataque, até o ângulo de

6°. Após este ângulo, quando o escoamento é descolado da placa, os fatores de amortecimento não aumentam mais com o aumento do ângulo de ataque.

Já no caso dos resultados obtidos para o segundo modo, vê-se que ocorre um aumento da frequência natural com o aumento da velocidade do escoamento, como também do ângulo de ataque. Isto acontece novamente até o ângulo de ataque de 6°, onde a partir deste, a frequência natural passa a não aumentar mais em função do aumento do ângulo de ataque. Os fatores de amortecimento, apresentam comportamento semelhante ao ocorrido com o primeiro modo. Estes aumentam tanto em função da velocidade do escoamento, como em função do ângulo de ataque. Como para o primeiro modo, espera-se que os fatores de amortecimento, a partir do ângulo de 7°, não aumentem mais com o aumento do ângulo de ataque. O que ocorreu é que estes aumentam ligeiramente em função do aumento do ângulo de ataque. Entretanto, como estes fatores são muito baixos, a sua identificação experimental com alta precisão torna-se muito difícil, juntamente com uma correta indicação da tendência de aumento ou diminuição. Os fatores medidos para este modo são em torno de 1 %, quando os fatores medidos para o primeiro modo, são em torno de 10 %.

Para o último modo analisado, o terceiro modo, pôde-se observar uma tendência inversa à observada para o segundo modo. Neste caso, a frequência natural diminui com o aumento da velocidade do escoamento. Pôde-se observar que essa diminuição da frequência é mais sensível nesse modo, pois a variação foi maior do que para o segundo modo. Para os ângulos de ataque de 3° e 4° não puderam ser obtidos dados que possibilitassem resultados conclusivos. Estes resultados não satisfatórios estão relacionados com o fato da forma de excitação utilizada não excitar corretamente o modo de torção em condições de escoamento onde os ângulos de ataque são baixos. Porém para ângulos mais altos, o escoamento induz vibrações auto-excitadas, aumentando a amplitude de vibração da placa com frequência de vibração próxima à da frequência natural da placa.

É importante ressaltar que se fosse possível aumentar a velocidade do escoamento, poder-se-ia observar o fenômeno de *flutter* clássico da placa. Este fenômeno de instabilidade

é gerado pelo acoplamento dos modos de torção e flexão, onde a estrutura recebe energia do escoamento e transfere a mesma para os movimentos vibratórios. Este fenômeno pode ser observado, no entanto, numa outra placa com dimensões  $340 \times 100 \times 0.4mm$ .

Entretanto, pôde-se observar outro tipo de instabilidade, gerada pelo descolamento (*stall*) do escoamento, excitando a placa em seu terceiro modo (modo de torção), o *stall flutter*. Viu-se que para o ângulo de  $6^\circ$ , quando o escoamento começa o seu descolamento, somente na velocidade mais alta é que o fenômeno de *stall flutter* foi observado. Para ângulos de ataque mais altos, onde o escoamento já encontra-se completamente descolado, observa-se que a velocidade necessária para que o fenômeno ocorra, diminui, gerando violentas oscilações.

# Capítulo 9

## Combinação teórico-experimental e obtenção dos coeficientes equivalentes

### 9.1 Introdução

No capítulo anterior, apresentou-se toda a parte experimental deste trabalho. Diversos casos foram testados variando-se a velocidade do escoamento e o ângulo de ataque. Com isso puderam ser extraídas informações das mudanças impostas pela presença do escoamento em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento. A partir disso, é necessária a obtenção teórica da rigidez e amortecimento provenientes do fluido, e a subsequente adição destes coeficientes nas matrizes de rigidez e amortecimento estruturais. Com isso, pode-se realizar um novo cálculo de autovalores e autovetores e verificar as mudanças em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento, comparando esses resultados com os resultados experimentais obtidos.

Nessa direção, este capítulo apresenta diversos casos de ângulo de ataque e velocidade do escoamento em que os coeficientes obtidos são apresentados em forma de gráficos, mostrando a variação destes coeficientes na superfície da placa. Em seguida, são apresenta-

das tabelas contendo comparações teórico-experimentais em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento para os casos de  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  e  $4^\circ$  de ângulo de ataque. Estas comparações são feitas somente para estes ângulos por eles estarem situados em uma faixa onde instabilidades não estão presentes, sendo a metodologia de obtenção dos coeficientes equivalentes válida. Por último apresenta-se uma comparação em termos das curvas de FRFs.

## 9.2 Comparação dos coeficientes equivalentes obtidos teoricamente em termos de velocidade do escoamento e ângulo de ataque

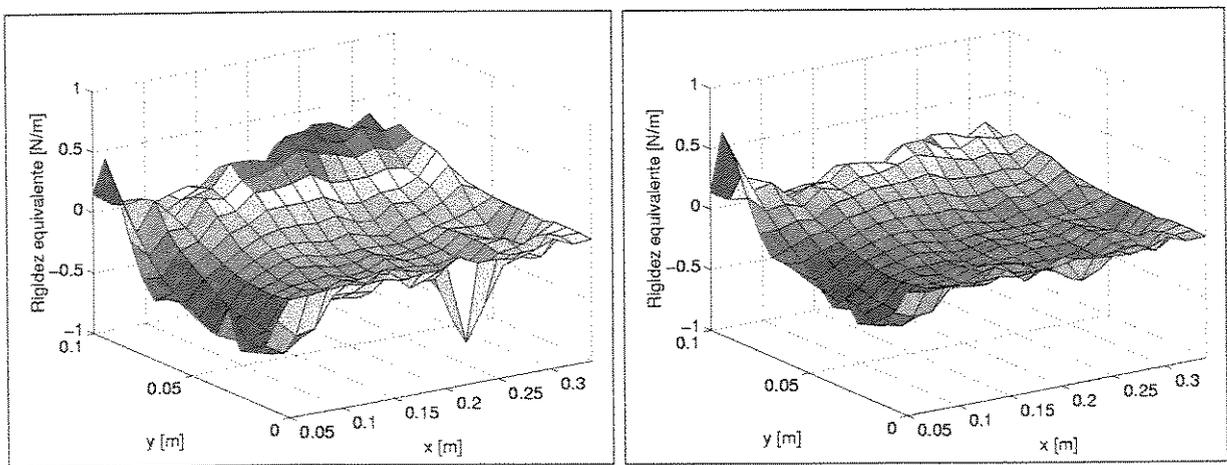
Será feito aqui uma comparação entre os diversos coeficientes equivalentes, tanto de amortecimento como de rigidez, em termos de velocidade do escoamento e ângulo de ataque. Estes coeficientes serão apresentados, plotados sobre a superfície da placa, tentando-se extrair seu significado físico e ilustrando a sua influência na alteração das características de frequência natural e fator de amortecimento do sistema fluido-estrutura.

Será apresentada uma comparação entre os três casos de velocidade ( $20,5\text{ m/s}$ ,  $27,5\text{ m/s}$  e  $30,4\text{ m/s}$ ), e entre dois ângulos de ataque ( $1^\circ$  e  $2^\circ$ ) somente, de modo a simplificar e não tornar a discussão muito longa. Como será visto, são muitos gráficos para cada caso, e uma discussão envolvendo mais ângulos de ataque seria monótona e desnecessária. Os resultados apresentados entre os ângulos de  $1^\circ$  e  $2^\circ$  já representam a tendência do comportamento da solução na faixa de  $1^\circ$  a  $4^\circ$ , onde as instabilidades vistas nos resultados experimentais não estão presentes.

## 9.2.1 Coeficientes de rigidez equivalente

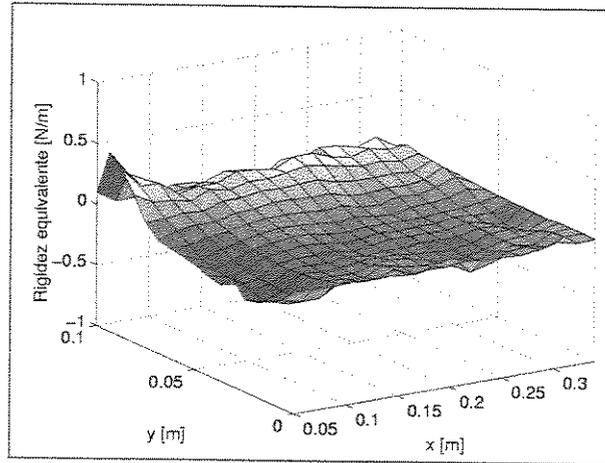
### (A) Resultados obtidos para o primeiro modo

Os gráficos das Figuras 9.1 e 9.2, representam os coeficientes de rigidez equivalente calculados para o primeiro modo, nas três velocidades do escoamento diferentes e para o ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Comparando os gráficos pode-se perceber que a distribuição da rigidez é a mesma para os três casos. A mudança fica por conta da amplitude diferente entre as três velocidades. Vê-se que a amplitude diminui com a diminuição da velocidade do escoamento. Esse comportamento induz a uma variação menor na frequência natural do primeiro modo, com a diminuição da velocidade do fluido. Além disso, como se pode ver nos gráficos, há partes sobre a superfície da placa em que a rigidez é positiva e outras em que a rigidez é negativa. Isso pode ser explicado pois o primeiro modo não contém nenhuma linha modal. Dessa forma, a distribuição da rigidez está diretamente ligada à distribuição de pressão sobre a superfície da placa (vide Figura 4.7 por exemplo). Assim, como existem regiões onde a rigidez é positiva e outras onde ela é negativa, estas se compensam fazendo com que as mudanças de frequência para o primeiro modo sejam mínimas. Isso é exatamente o que acontece em torno do primeiro modo, como visto pelos resultados experimentais.



**Figura 9.1:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

É importante notar, que todas as distribuições de rigidez e amortecimento equivalentes apresentadas aqui, **estão plotadas multiplicando-se por  $-1$ , a partir de como foram obtidas através das equações (7.1) e (7.2)**. Isso acontece, pois quando a rigidez e amortecimento são introduzidas nas matrizes estruturais, estas distribuições têm o seu valor trocado de sinal, pois elas mudam do lado direito para o esquerdo da equação de equilíbrio da placa, equação (7.12).



**Figura 9.2:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

Compara-se agora as Figuras 9.1 e 9.2, onde o ângulo de ataque é de  $1^\circ$ , com as Figuras 9.3 e 9.4, onde o ângulo de ataque é de  $2^\circ$ . Analisando estas figuras, observa-se que a diferença entre os ângulos de ataque é a amplitude das curvas. Com um ângulo de ataque maior, aumenta-se a pressão atuante na placa, aumentando também a amplitude dos valores da rigidez. As mesmas características da distribuição da rigidez se observam, portanto estas se compensam, fazendo com que a mudança em termos de frequência natural seja mínima.

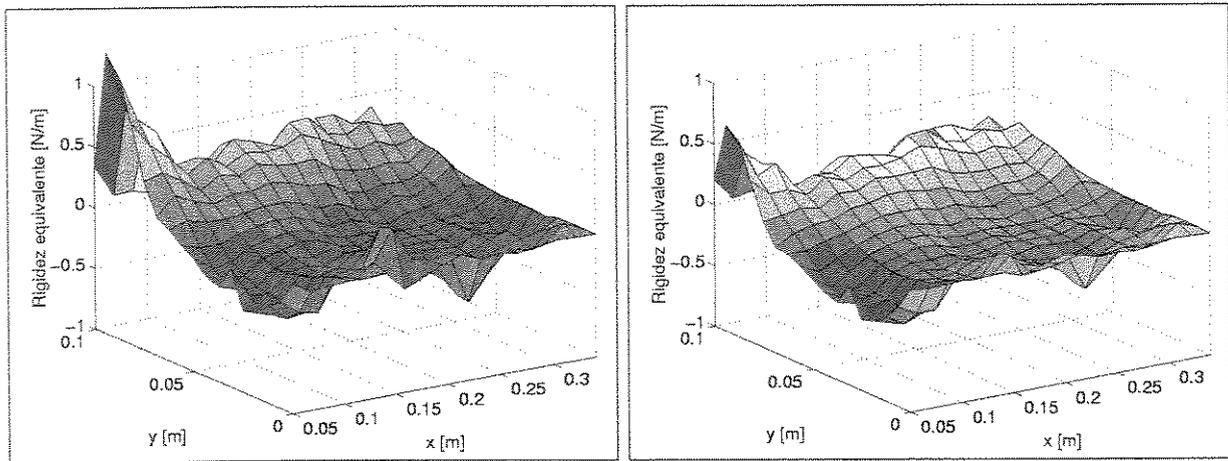


Figura 9.3: Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

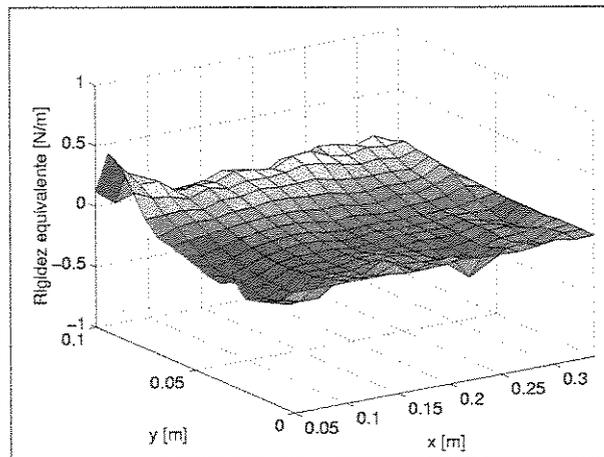
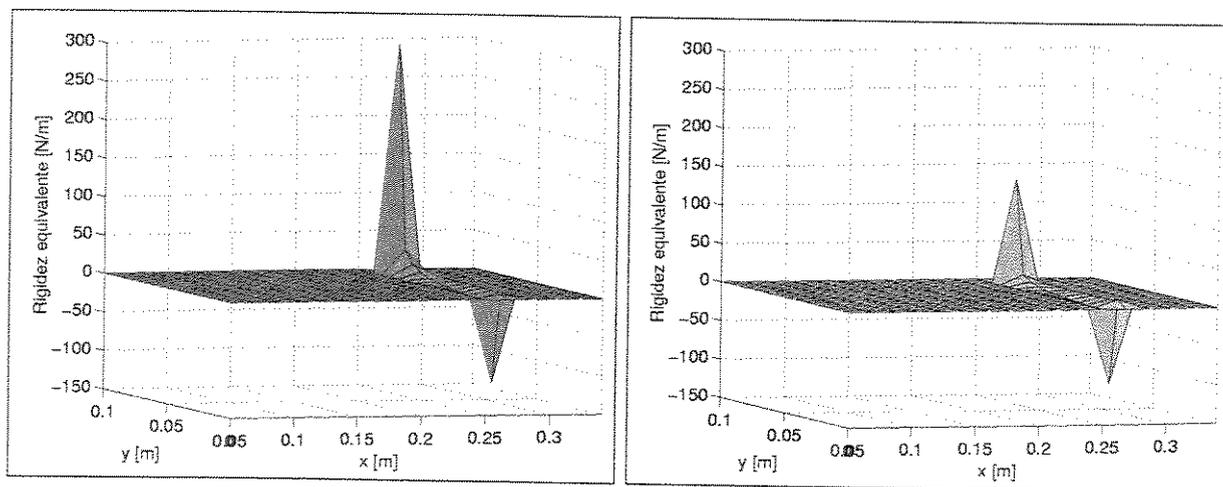


Figura 9.4: Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

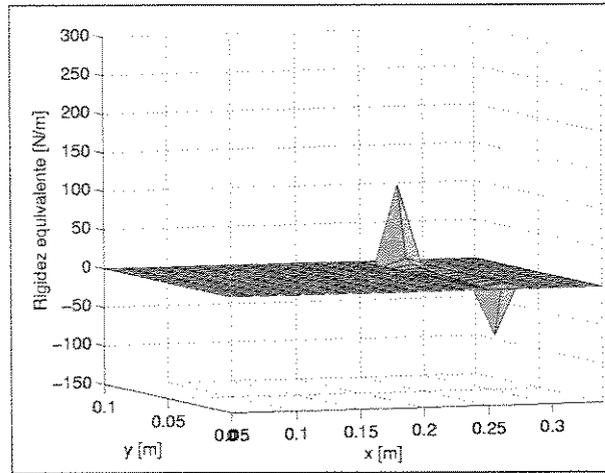
### (B) Resultados obtidos para o segundo modo

Analisa-se agora os gráficos das Figuras 9.5 e 9.6, que representam os coeficientes de rigidez equivalente calculados para o segundo modo, nas três velocidades do escoamento diferentes e para o ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Comparando os gráficos pode-se perceber que a distribuição da rigidez é novamente a mesma para os três casos de velocidades diferentes. As mudanças ficam

também por conta das amplitudes da rigidez com a mudança da velocidade do escoamento. Diminuindo a velocidade do escoamento, diminui-se a amplitude da rigidez equivalente. É curioso verificar que no caso do segundo modo, a forma modal tem muito maior influência na determinação da rigidez equivalente, como explicado na Seção 7.4. Se a linha modal não existisse, a distribuição de rigidez seria semelhante ao primeiro modo. De acordo com as mudanças de pressão ao longo da linha modal, a rigidez em cada nó fica mais negativa ou positiva. Entretanto, fora da linha modal, os valores dos coeficientes são baixos, mas positivos. Quando a rigidez equivalente é somada à matriz estrutural, o efeito global é o de introduzir uma rigidez positiva, fazendo com que a frequência natural para esse modo aumente, como realmente acontece experimentalmente.



**Figura 9.5:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o **segundo modo**, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .



**Figura 9.6:** Coeficientes equivalentes de **rigidez** plotados sobre a superfície da placa, para o **segundo modo**, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

Compara-se agora as Figuras 9.5 e 9.6, onde o ângulo de ataque é de  $1^\circ$ , com as Figuras 9.7 e 9.8, onde o ângulo de ataque é de  $2^\circ$ . Analisando estas figuras, observa-se que a diferença entre os ângulos de ataque não é somente a amplitude das curvas, mas também a distribuição da rigidez ao longo da linha modal. Fica difícil tecer considerações sobre o comportamento da rigidez, comparando diversos ângulos de ataque para o caso do segundo modo, exatamente por causa dos problemas explicados na Seção 7.4. Vê-se que o comportamento dos gráficos não é uniforme e os valores da rigidez na região da linha modal são amplificados justamente pela sua presença.

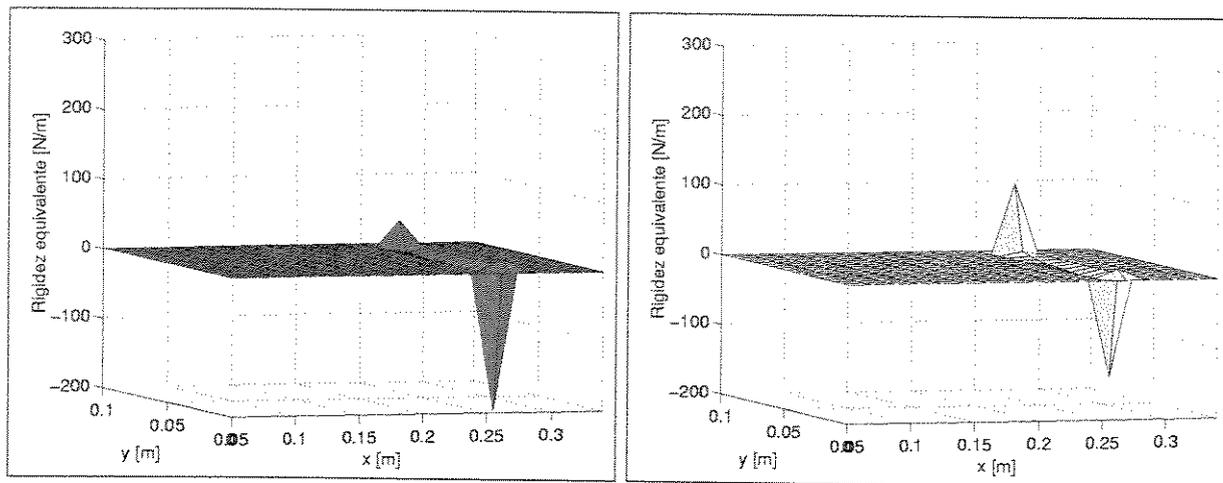


Figura 9.7: Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o segundo modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

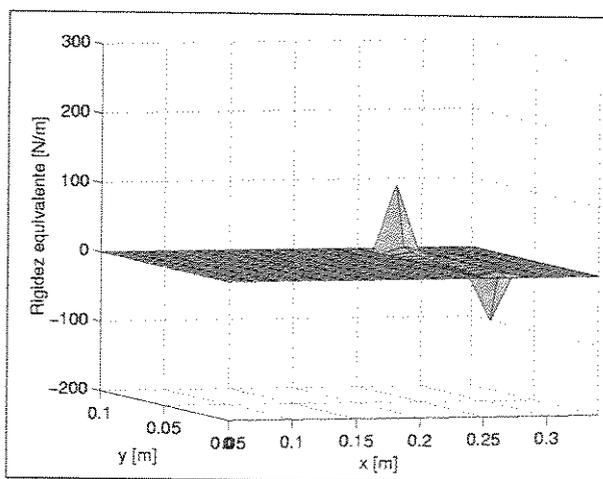


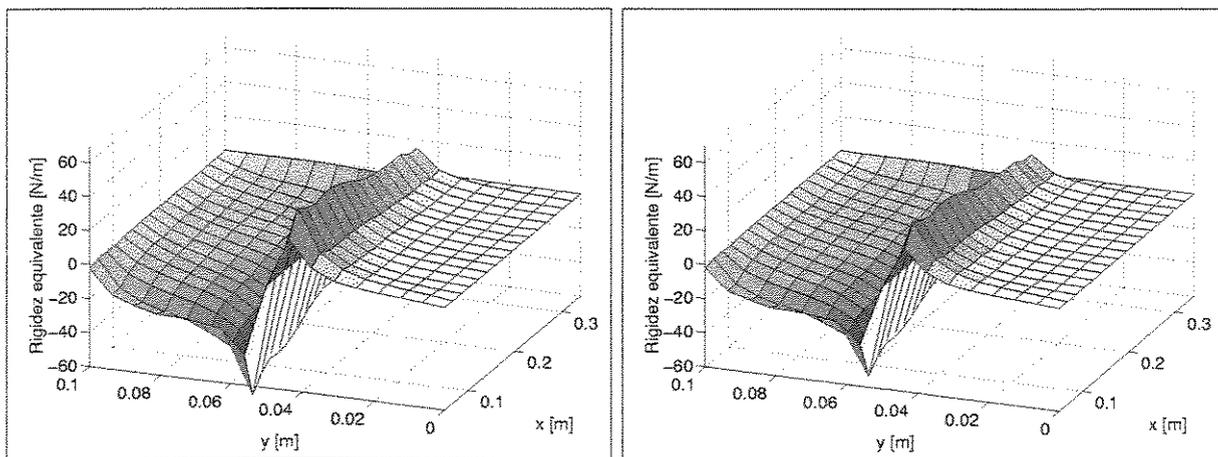
Figura 9.8: Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o segundo modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

### (C) Resultados obtidos para o terceiro modo

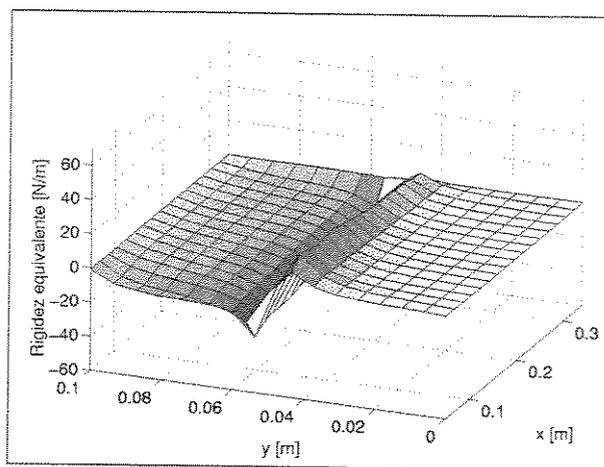
Analisa-se agora os gráficos das Figuras 9.9 e 9.10, que representam os coeficientes de rigidez equivalente calculados para o terceiro modo, nas três velocidades do escoamento diferentes e para o ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Comparando os gráficos pode-se perceber que a distribuição da rigidez não difere para os três casos de velocidades diferentes. A diferença fica por conta

novamente das amplitudes da rigidez. Diminuindo-se o valor da velocidade do escoamento, diminui-se a amplitude da rigidez equivalente. Neste caso, como também existe uma linha modal, a rigidez está novamente ligada à ela, como para o caso do segundo modo. Neste caso, para a linha modal, a rigidez equivalente não é definida, pois não existe deslocamento imposto ao longo desta linha, ou seja não existe diferença entre o deslocamento imposto e a posição de equilíbrio da placa.

Pode-se perceber ainda que a placa possui duas regiões distintas, definidas pela forma modal. Metade da placa apresenta valores de rigidez negativa e metade apresenta valores de rigidez positiva. Nota-se que a parte negativa possui amplitude maior do que a parte positiva. Portanto, quando esses coeficientes são adicionados à matriz estrutural, o efeito global é o de retirar rigidez da placa, fazendo que com a frequência natural do conjunto seja diminuída. É o que acontece experimentalmente para o caso do terceiro modo.

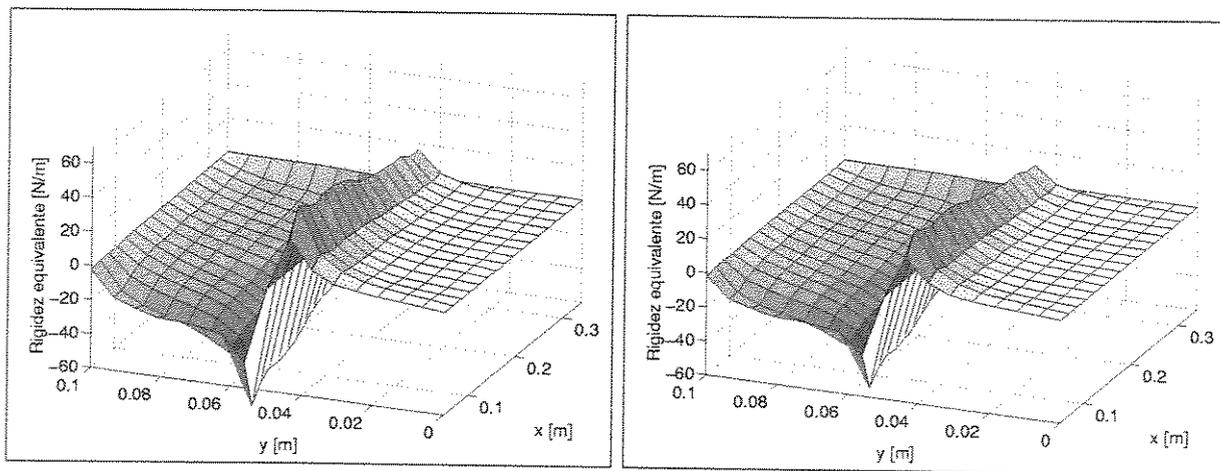


**Figura 9.9:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o terceiro modo, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

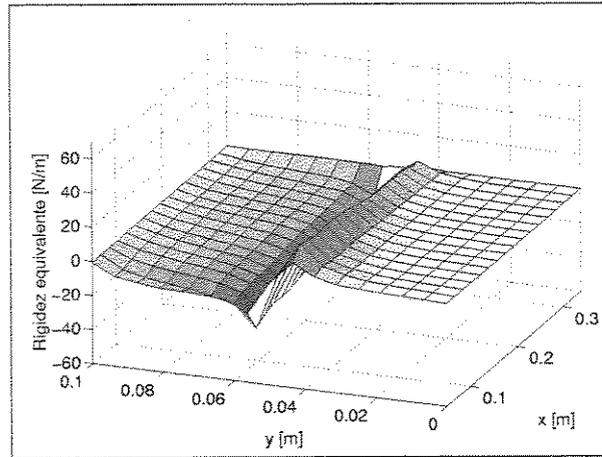


**Figura 9.10:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o terceiro modo, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

Compara-se agora as Figuras 9.9 e 9.10, onde o ângulo de ataque é de  $1^\circ$ , com as Figuras 9.11 e 9.12, onde o ângulo de ataque é de  $2^\circ$ . Analisando estas figuras, é difícil ver uma diferença significativa entre elas. Porém como a pressão é maior para o caso de  $2^\circ$  de ângulo de ataque, as amplitudes de rigidez para este caso devem ser também maiores. Pode-se observar este comportamento através do gráfico das maiores velocidades ( $30,4 \text{ m/s}$ ), onde as amplitudes estão um pouco maiores para o caso de  $2^\circ$ .



**Figura 9.11:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o terceiro modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

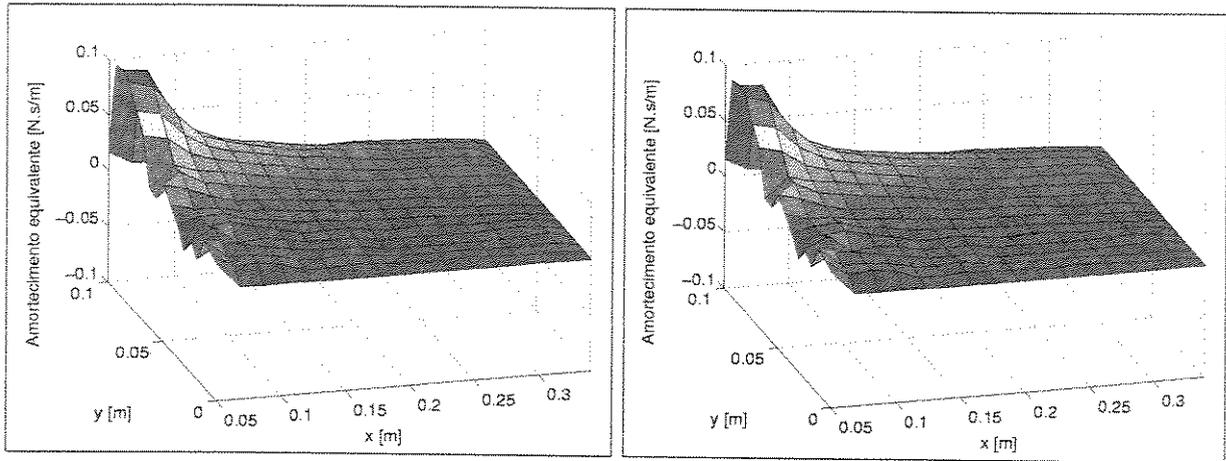


**Figura 9.12:** Coeficientes equivalentes de rigidez plotados sobre a superfície da placa, para o terceiro modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

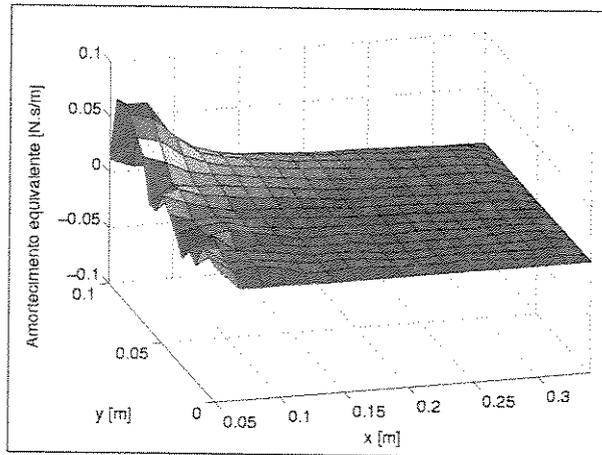
## 9.2.2 Coeficientes de amortecimento equivalente

### (A) Resultados obtidos para o primeiro modo

Os gráficos das Figuras 9.13 e 9.14, representam os coeficientes de amortecimento equivalente calculados para o primeiro modo, nas três velocidades do escoamento diferentes e para o ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Comparando os gráficos pode-se perceber que a distribuição do amortecimento é a mesma para os três casos, variando a velocidade. A mudança fica por conta, como no caso da rigidez, da amplitude diferente dos coeficientes de amortecimento entre as três velocidades. Vê-se que a amplitude diminui com a diminuição da velocidade do escoamento. Pode-se ver através dos gráficos, que para o primeiro modo, os coeficientes de amortecimento são todos positivos. Dessa forma, quando eles são introduzidos na matriz de amortecimento estrutural, será introduzido um amortecimento positivo, fazendo com que o sistema fique mais estável, e aumentando o fator de amortecimento para o primeiro modo, como visto para os testes experimentais.



**Figura 9.13:** Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .



**Figura 9.14:** Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

Compara-se agora as Figuras 9.13 e 9.14, onde o ângulo de ataque é de  $1^\circ$ , com as Figuras 9.15 e 9.16, onde o ângulo de ataque é de  $2^\circ$ . Analisando estas figuras, fica difícil perceber a diferença entre as mesmas. Os valores dos coeficientes de amortecimento estão praticamente os mesmos, quase sem diferenças em termos de ângulo de ataque.

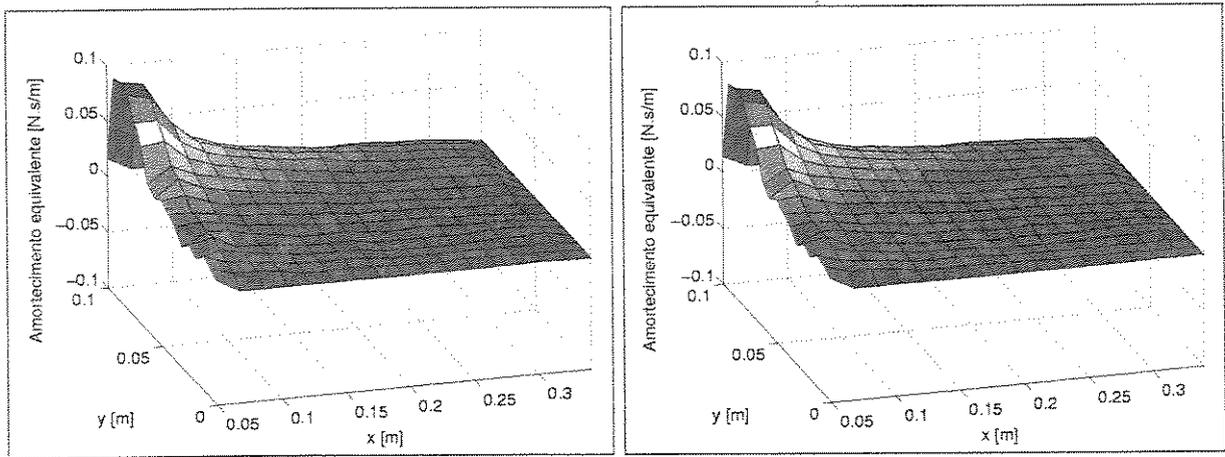


Figura 9.15: Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

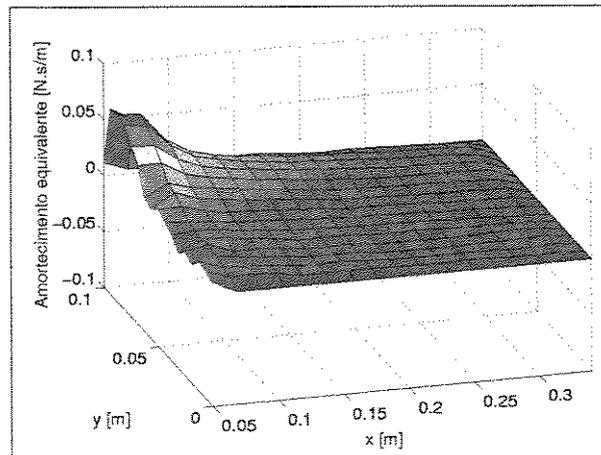


Figura 9.16: Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o primeiro modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

### (B) Resultados obtidos para o segundo modo

Analisa-se agora os gráficos das Figuras 9.17 e 9.18, que representam os coeficientes de amortecimento equivalente calculados para o segundo modo, nas três velocidades do escoamento diferentes e para o ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Comparando os gráficos pode-se perceber que a distribuição do amortecimento é novamente a mesma para os três casos de velocidades diferentes. As mudanças, novamente, ficam também por conta das amplitudes do

amortecimento com a mudança da velocidade do escoamento. Diminuindo a velocidade do escoamento, diminui-se a amplitude do amortecimento equivalente. Como para o caso da rigidez, a forma modal tem bastante influência no amortecimento equivalente. Pode-se ver que na linha modal, encontram-se coeficientes negativos, enquanto que nas outras regiões da placa encontram-se coeficientes positivos bastante pequenos. Mesmo que existam coeficientes negativos bastante grandes, existem muitos coeficientes positivos que são somados na matriz estrutural. Dessa forma, neste caso, como esperado experimentalmente, esta combinação deve introduzir um amortecimento adicional, tornando o sistema mais estável.

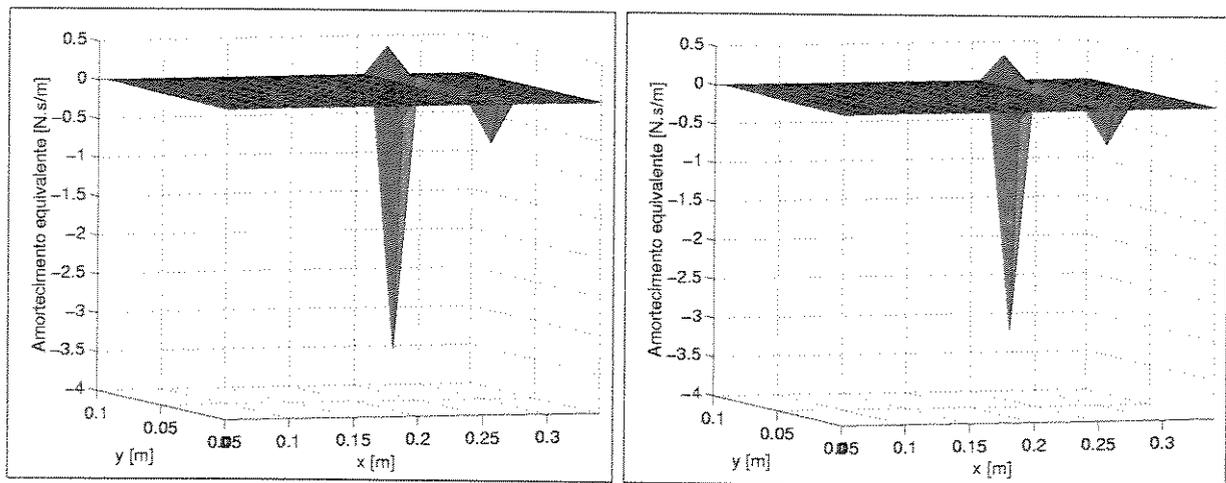


Figura 9.17: Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o segundo modo, com ângulo de ataque de  $1^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

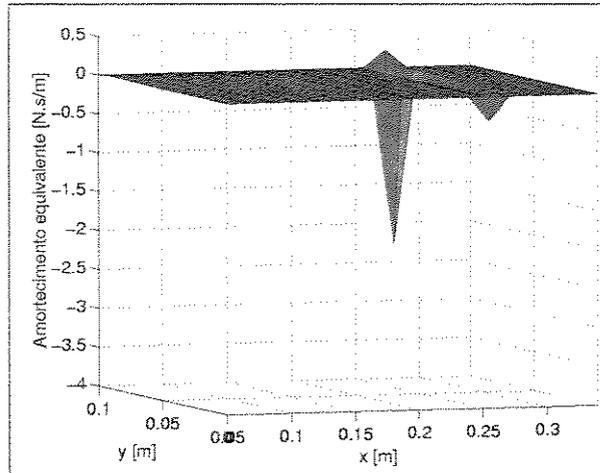


Figura 9.18: Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa, para o **segundo modo**, com **ângulo de ataque** de  $1^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

Compara-se agora as Figuras 9.17 e 9.18, onde o ângulo de ataque é de  $1^\circ$ , com as Figuras 9.19 e 9.20, onde o ângulo de ataque é de  $2^\circ$ . Analisando estas figuras, observa-se, como para o primeiro modo, uma diferença muito pequena nas amplitudes. Entretanto, neste caso, as amplitudes negativas das curvas são menores para os casos do ângulo de  $2^\circ$ . Isto está de acordo com o experimento, pois aumentando o ângulo de ataque, espera-se um sistema mais estável. Nesse caso, uma amplitude menor em comparação com o ângulo de ataque de  $1^\circ$  será somada negativamente na matriz estrutural. Como nesse caso essa amplitude negativa é menor, o sistema ficará realmente mais estável.

É importante dizer que as comparações feitas para o segundo modo, tanto em termos de rigidez equivalente, quanto em termos de amortecimento equivalente, são especulações. Embora pareçam, na maioria dos casos estar corretas, é preciso tomar muito cuidado nas afirmações feitas devido aos problemas encontrados no cálculo dos coeficientes para este modo, que podem gerar resultados errados.

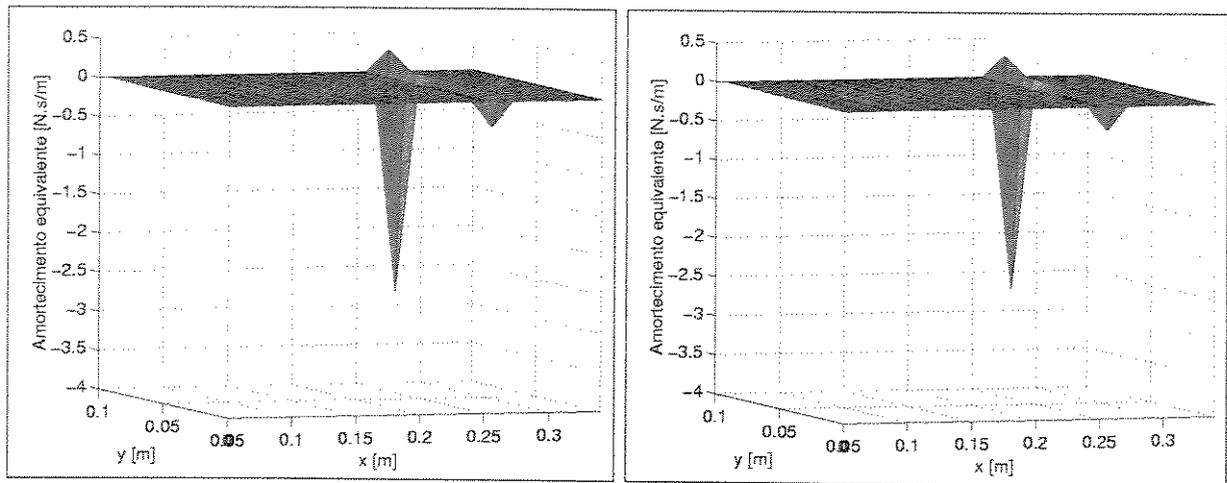


Figura 9.19: Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o segundo modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .

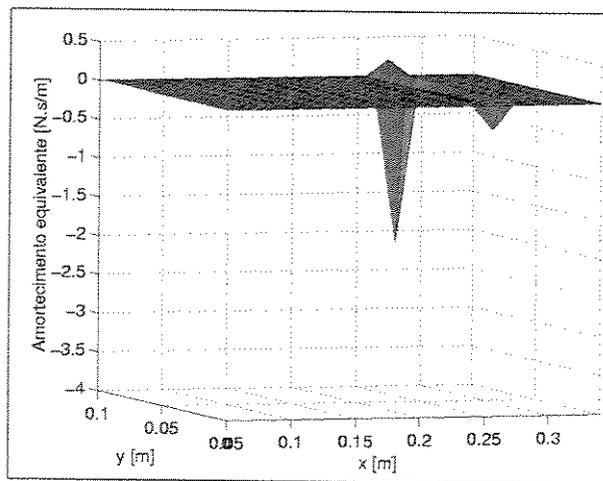
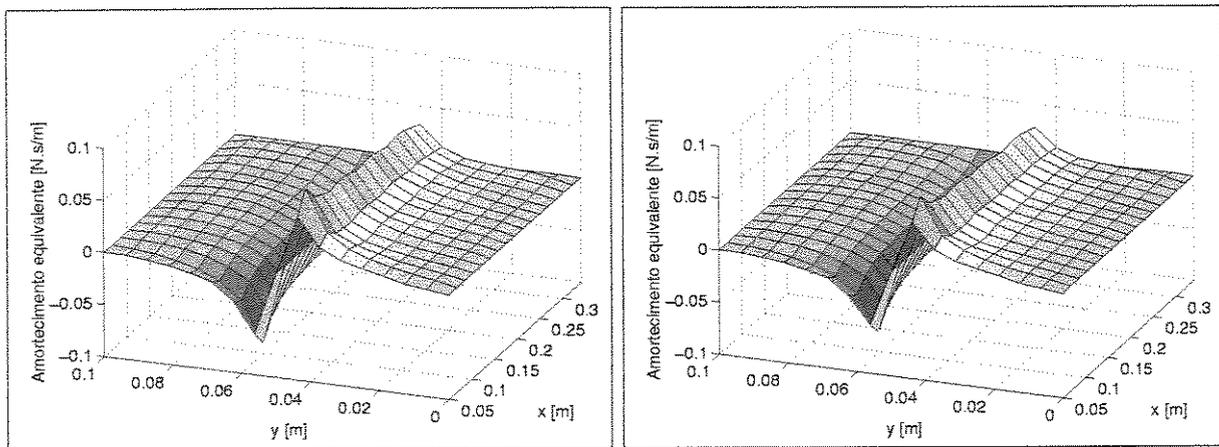


Figura 9.20: Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o segundo modo, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

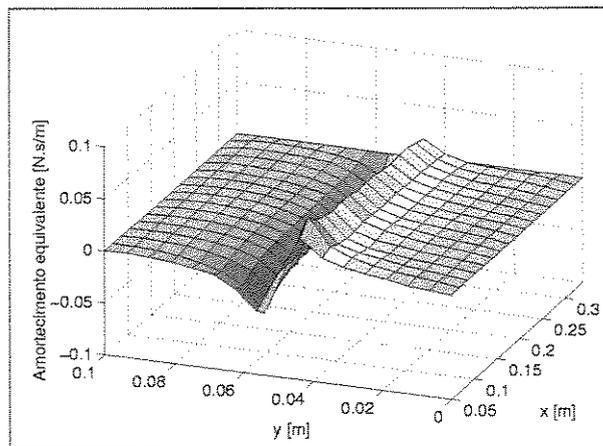
### (C) Resultados obtidos para o terceiro modo

Analisa-se agora os gráficos das Figuras 9.21 e 9.22, que representam os coeficientes de amortecimento equivalente calculados para o terceiro modo, nas três velocidades do escoamento diferentes e para o ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Como em todos os casos anteriores, a distribuição do amortecimento não difere para os três casos de velocidades. A diferença fica por

conta novamente das amplitudes do amortecimento. Diminuindo-se o valor da velocidade do escoamento, diminui-se a amplitude do amortecimento equivalente. Neste caso novamente, a linha modal está presente, o amortecimento está ligado à ela. As amplitudes de amortecimento variam entre positivas e negativas, e somente pelo gráfico é impossível determinar qual será a tendência do fator de amortecimento ligado a esse modo. Se este será mais estável ou instável. Espera-se, de acordo com os experimentos, que o sistema fique mais estável, aumentando-se o fator de amortecimento.



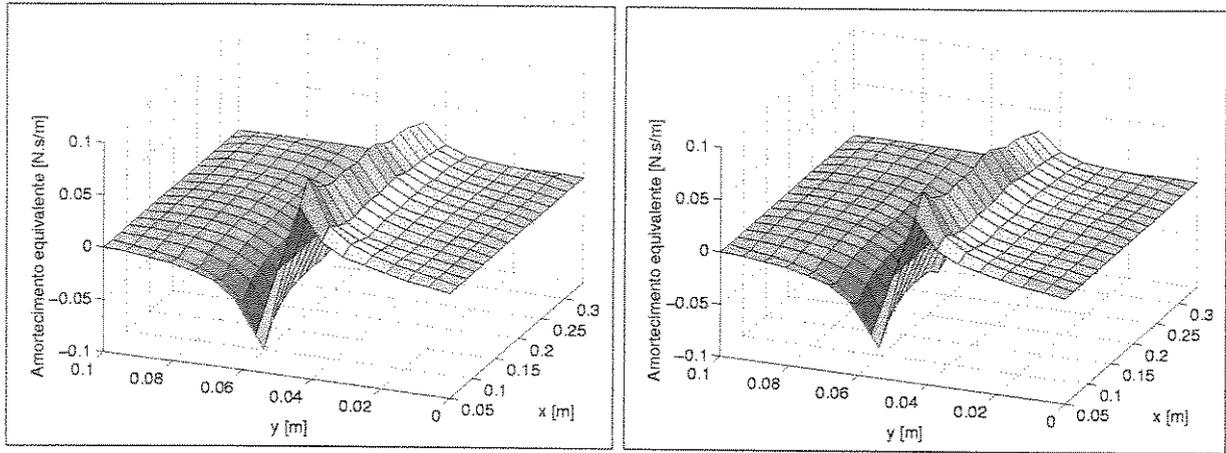
**Figura 9.21:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa, para o **terceiro modo**, com **ângulo de ataque de  $1^\circ$** . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .



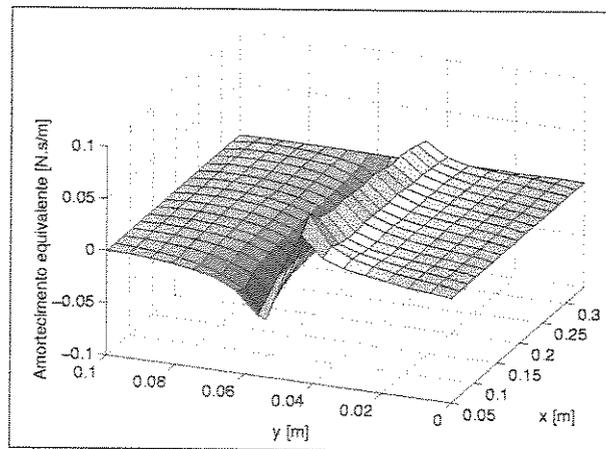
**Figura 9.22:** Coeficientes equivalentes de **amortecimento** plotados sobre a superfície da placa, para o **terceiro modo**, com **ângulo de ataque de  $1^\circ$** . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

Compara-se agora as Figuras 9.21 e 9.22, onde o ângulo de ataque é de  $1^\circ$ , com as

Figuras 9.23 e 9.24, onde o ângulo de ataque é de  $2^\circ$ . Analisando estas figuras, é difícil ver uma diferença significativa entre elas. Os valores dos coeficientes de amortecimento estão praticamente os mesmos, quase sem diferenças em termos de ângulo de ataque.



**Figura 9.23:** Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o **terceiro modo**, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . À esquerda tem-se os resultados para a velocidade de  $30,4 \text{ m/s}$ , à direita tem-se os resultados para a velocidade de  $27,5 \text{ m/s}$ .



**Figura 9.24:** Coeficientes equivalentes de amortecimento plotados sobre a superfície da placa, para o **terceiro modo**, com ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Resultados para a velocidade de  $20,5 \text{ m/s}$ .

## 9.3 Discussão da ordem de grandeza dos elementos das matrizes de rigidez e amortecimento estruturais e dos provenientes do escoamento

Para que se possa ter uma idéia da ordem de grandeza dos elementos das matrizes de rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do escoamento, em relação aos elementos das matrizes de rigidez e amortecimento estruturais, faz-se aqui uma breve comparação entre eles.

Os elementos das matrizes de rigidez, como também da matriz de amortecimento, estão relacionados aos graus de liberdade da placa. Como visto no Capítulo 5, a placa possui os graus de liberdade de deslocamento linear na direção vertical  $z$ , e rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$ . Os coeficientes equivalentes são obtidos como se molas e amortecedores fictícios fossem conectados a cada nó estrutural, influenciando somente os graus de liberdade de deslocamento linear. Por isso, estes coeficientes equivalentes são introduzidos nas matrizes, nas posições relativas aos graus de liberdade de deslocamento. Além disso, estes coeficientes são introduzidos somente na diagonal principal das matrizes, não existindo termos cruzados, indicando que não há um acoplamento em termos de rigidez e amortecimento equivalente, entre os diversos nós, com as hipóteses feitas aqui. Evidentemente que comparações da ordem de grandeza dos elementos que estão ligados aos graus de liberdade de rotação podem ser feitas, entretanto, a comparação que realmente interessa é a comparação dos coeficientes equivalentes, com os elementos ligados aos graus de liberdade de deslocamento.

### 9.3.1 Elementos da matriz de rigidez

Os elementos da matriz de rigidez estrutural **ligados aos graus de liberdade de deslocamento, da diagonal principal** possuem uma ordem de grandeza que varia entre

$1,1 \cdot 10^7 N/m$  a  $2,4 \cdot 10^7 N/m$ , dependendo da localização dos nós. Já os coeficientes equivalentes, para o **primeiro modo**, possuem valores (em termos absolutos) da ordem de grandeza de  $0,2 N/m$ , variando um pouco, dependendo da localização do nó e das condições do escoamento. Para o **segundo modo**, os coeficientes na maioria dos nós, também possuem valores da ordem de  $0,2 N/m$ . Entretanto, nas proximidades da linha modal, estes valores aumentam bastante, atingindo valores em torno de até  $200 N/m$ . Porém, como discutido na Seção 7.4, estes valores se mostram bastante diferentes, de acordo com a malha utilizada. Quando a placa vibra, a linha modal apresenta um deslocamento zero. Portanto, de acordo com que se aproxima dela, é como se a rigidez aumentasse e exatamente na linha modal ocorresse uma singularidade, onde a rigidez tende ao infinito. Já para o **terceiro modo**, os coeficientes equivalentes possuem valores (em termos absolutos) da ordem de grandeza que variam de zero a  $40 N/m$ . Novamente, próximo à linha modal os coeficientes possuem as maiores magnitudes, justamente por serem os locais de menor deslocamento durante o movimento da placa na forma modal.

De uma forma geral, os coeficientes equivalentes possuem uma ordem de grandeza muito menor do que os elementos associados aos graus de liberdade de deslocamento que compõem a diagonal principal da matriz de rigidez. Esta diferença é bastante grande, da ordem de  $10^7$ . Entretanto, como visto, os coeficientes equivalentes variam bastante influenciados com a forma modal, sendo que os maiores valores estão nas proximidades da linha modal. É importante ressaltar que neste caso a diferença entre os coeficientes equivalentes e os elementos é muito grande e os coeficientes equivalentes se tornam quase insignificantes em termos práticos de engenharia. Porém o caso estudado aqui é um caso em que as velocidades do escoamento envolvidas são muito baixas. Quando se aplicar a mesma metodologia para um caso real, onde o escoamento é geralmente acima de  $Ma = 0,8$ , estes coeficientes poderão ser melhor comparados com os elementos de rigidez estrutural e não serão tão insignificantes assim.

### 9.3.2 Elementos da matriz de amortecimento

A matriz de amortecimento estrutural será tratada aqui separando-se cada modo, pois ela é composta pelas matrizes de rigidez e massa multiplicadas por constantes ajustadas para cada modo separadamente (veja Tabela 9.1). Por isso existe uma matriz de amortecimento estrutural para cada modo.

Os elementos da matriz de amortecimento estrutural **ligados aos graus de liberdade de deslocamento, da diagonal principal, para o primeiro modo** possuem uma ordem de grandeza que varia entre  $150 \text{ Ns/m}$  a  $230 \text{ Ns/m}$ , dependendo da localização dos nós. Já os coeficientes equivalentes, para este modo, têm sua ordem de grandeza em torno de  $0.02 \text{ Ns/m}$ , variando em torno deste valor, dependendo da localização dos nós e das condições do escoamento.

Já os elementos da matriz de amortecimento estrutural, **para o segundo modo**, também têm sua ordem de grandeza variando entre  $150 \text{ Ns/m}$  a  $230 \text{ Ns/m}$ . Os coeficientes equivalentes, para este modo, novamente têm uma ordem de grandeza de  $0.02 \text{ Ns/m}$ . Entretanto, como para o caso da rigidez, nas proximidades da linha modal, os valores são bem maiores, podendo chegar a cerca de  $3 \text{ Ns/m}$ . Novamente, como o deslocamento da linha modal é zero, sua velocidade também é zero, e à medida que se aproxima da linha modal, o amortecimento aumenta.

Para o **terceiro modo**, os elementos da matriz de amortecimento estrutural, possuem uma ordem de grandeza variando entre  $6,5 \text{ Ns/m}$  a  $13 \text{ Ns/m}$ . Já os coeficientes equivalentes de amortecimento, para este modo, possuem uma ordem de grandeza que varia de zero a  $0.03 \text{ Ns/m}$ . De novo, como existe uma linha modal, os maiores valores de amortecimento se encontram nas proximidades da linha modal.

Como acontece com a rigidez, os coeficientes equivalentes de amortecimento também são bastante menores em magnitude em comparação com os elementos encontrados nas

matrizes de amortecimento estrutural proporcional. Como será visto nas próximas seções, apesar dos coeficientes equivalentes possuírem valores bastante pequenos em comparação com os estruturais, estes influenciam as frequências naturais e fatores de amortecimento quando a estrutura é submetida ao escoamento.

## 9.4 Comparação teórico-experimental em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento

Faz-se agora uma comparação teórico-experimental em termos de frequências naturais e fatores de amortecimento. A comparação é feita para os casos de 1º, 2º, 3º e 4º de ângulo de ataque, onde instabilidades não estão presentes.

É importante lembrar a metodologia de cálculo das frequências naturais e fatores de amortecimento, que está apresentada no Capítulo 7.

Inicialmente, obteve-se as curvas experimentais e extraiu-se as frequências naturais e fatores de amortecimento, que estão mostrados no Capítulo 8. A partir dos fatores de amortecimento experimentais, obtidos para o caso estrutural (sem a influência do escoamento), ajustou-se a matriz de amortecimento estrutural proporcional  $\mathbf{D}$ , através das constantes  $\alpha$  e  $\beta$  (equação (7.6)), para cada fator de amortecimento, ligados às três primeiras frequências naturais. Portanto obtiveram-se três conjuntos de constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , que ajustam o fator de amortecimento teórico, fazendo-o igual ao experimental, para cada modo. Ou seja, obtiveram-se três matrizes  $\mathbf{D}$ , para cada um dos modos. As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  que ajustam os fatores de amortecimento, podem ser vistos na Tabela 9.1.

1º Modo		2º Modo		3º Modo	
$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\alpha_3$	$\beta_3$
1,225	$9,6 \cdot 10^{-6}$	1,65	$9,6 \cdot 10^{-6}$	1,35	$5,6 \cdot 10^{-7}$

**Tabela 9.1:** Valores das constantes  $\alpha$  e  $\beta$  que ajustam a matriz de amortecimento estrutural, para cada um dos três primeiros modos.

Foi ajustado ainda o módulo de elasticidade do aço. Utilizou-se para os cálculos contidos nesta seção, bem como na próxima, um valor do módulo de elasticidade 6% menor do que o valor nominal de  $E = 2,1e11N/m^2$  (veja Tabelas 5.2 e 6.1). Com os primeiros cálculos de frequências naturais, observou-se que as frequências calculadas teoricamente tinham valores um pouco maiores do que as medidas experimentalmente. Para tentar ajustar as propriedades do material, fazendo com que as frequências naturais experimentalmente medidas e teoricamente calculadas tivessem valores mais próximos, diminui-se de 6% o valor do módulo de elasticidade do material da placa.

Em seguida, os coeficientes de rigidez e amortecimento são obtidos para cada caso de ângulo de ataque, de velocidade do escoamento e para cada modo. Estes coeficientes são somados às matrizes de rigidez e amortecimento estruturais, respeitando a forma modal, fazendo novamente um cálculo de autovalor e autovetor, obtendo assim as frequências naturais e fatores de amortecimento de cada caso.

A seguir apresentam-se 4 tabelas, contendo as comparações teórico-experimentais de frequências naturais. Nas Tabelas 9.2, 9.3, 9.4 e 9.5, encontram-se as comparações de frequências naturais, para os casos de 1º, 2º, 3º e 4º de ângulo de ataque, respectivamente. Estão mostradas as variações das frequências naturais teóricas e experimentais, juntamente com o erro percentual, para os três modos analisados.

Analisando os resultados obtidos para o primeiro modo, pode-se observar que a previsão de que a frequência natural para esse modo não possui uma variação significativa, confirmou-se. As frequências não variam com uma tendência de aumento ou de diminuição, ficando sempre em torno de um mesmo valor. É realmente como se os coeficientes de rigidez calculados, que ora são positivos, ora negativos, se compensam de alguma forma, resultando em uma frequência que não varia. Os erros estão dentro de uma faixa muito razoável, em torno de 3,1%, sendo os maiores erros obtidos nas frequências naturais, quando comparados com os outros modos.

Para o caso do segundo modo, os resultados são também bastante satisfatórios. Pode-se ver que as frequências naturais realmente aumentam com o aumento da velocidade do escoamento. Os erros também são bastante baixos, em torno de 1,0%. Entretanto pode-se notar que a variação absoluta em termos de frequência, para o modelo teórico é menor do que para o experimento. É interessante notar também que para os ângulos de ataque de 1° e 2°, as frequências naturais teóricas aumentaram comparando ambos os casos. Porém essa variação não foi observada comparando-se os ângulo de 3° e 4°, onde as frequências realmente aumentam com o aumento da velocidade do escoamento, mas não com o aumento do ângulo de ataque.

Já para o caso do terceiro modo, os resultados obtidos são também bastante satisfatórios. Vê-se que as frequências naturais realmente diminuem com o aumento da velocidade do escoamento, para todos os casos de ângulo de ataque. Entretanto, parece haver uma insensibilidade quanto à variação do ângulo de ataque, pois a frequência não diminui quando se aumenta o ângulo de ataque.

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	7,17	6,97	2,9	7,19	6,96	3,3
2ª freq. nat. [Hz]	44,82	44,27	1,2	44,84	44,49	0,8
3ª freq. nat. [Hz]	49,10	51,86	-5,3	48,65	50,16	-3,0
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	7,18	6,95	3,3	7,13	6,93	2,9
2ª freq. nat. [Hz]	44,85	44,56	0,7	44,85	44,57	0,6
3ª freq. nat. [Hz]	48,36	49,34	-2,0	48,24	48,81	-1,2

**Tabela 9.2:** Comparações teórico-experimentais das frequências naturais para ângulo de ataque de 1°.

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	7,17	6,97	2,9	7,19	6,96	3,3
2ª freq. nat. [Hz]	44,82	44,27	1,2	44,84	44,56	0,6
3ª freq. nat. [Hz]	49,10	51,86	-5,3	48,65	49,93	-2,6
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	7,19	6,98	3,0	7,20	6,96	3,5
2ª freq. nat. [Hz]	44,86	44,52	0,8	44,89	44,47	0,9
3ª freq. nat. [Hz]	48,36	48,90	-1,1	48,25	48,49	-0,5

**Tabela 9.3:** Comparações teórico-experimentais das frequências naturais para ângulo de ataque de 2°.

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	7,17	6,97	2,9	7,18	6,93	3,6
2ª freq. nat. [Hz]	44,82	44,27	1,2	44,83	44,47	0,8
3ª freq. nat. [Hz]	49,10	51,86	-5,3	48,65	---	---
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	5,90	6,98	-15,5	7,26	6,97	4,2
2ª freq. nat. [Hz]	44,85	44,55	0,7	44,86	45,05	-0,4
3ª freq. nat. [Hz]	48,39	---	---	48,27	---	---

**Tabela 9.4:** Comparações teórico-experimentais das frequências naturais para ângulo de ataque de 3°.

A seguir apresentam-se 4 tabelas, contendo as comparações teórico-experimentais de fatores de amortecimento. As Tabelas 9.6, 9.7, 9.8 e 9.9, apresentam as comparações de fatores de amortecimento, para os casos de 1°, 2°, 3° e 4° de ângulo de ataque, respectivamente. Estão mostradas as variações dos fatores de amortecimento teóricas e experimentais, juntamente com o erro percentual, para os três modos analisados.

À primeira vista, os erros percentuais parecem muito grandes indicando uma discrepância forte entre os resultados teóricos e experimentais. Entretanto algumas considerações devem ser feitas. É bem sabido que a determinação correta dos fatores de amortecimento estruturais é difícil e imprecisa. Os fatores de amortecimento dão uma idéia sobre o grau de estabilidade e de decaimento da resposta do sistema. Na maioria dos casos, quando

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	7,17	6,97	2,9	6,23	6,96	-10,5
2ª freq. nat. [Hz]	44,82	44,27	1,2	44,77	44,47	0,7
3ª freq. nat. [Hz]	49,10	51,86	-5,3	48,68	---	---
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat. [Hz]	7,17	7,13	0,5	7,24	7,23	0,1
2ª freq. nat. [Hz]	44,85	45,35	-1,1	44,85	45,79	-2,1
3ª freq. nat. [Hz]	48,39	---	---	48,27	---	---

**Tabela 9.5:** Comparações teórico-experimentais das frequências naturais para ângulo de ataque de 4°.

se têm uma idéia da ordem de grandeza dos fatores de amortecimento, é mais do que suficiente para a análise do sistema. Além disso, como estes são números muito pequenos, qualquer variação mínima produz um erro grande. Analisando os fatores de amortecimento obtidos, estes, na maioria dos casos, são uma estimativa realista do sistema físico real, embora seu erro seja grande. Pôde-se realmente prever a ordem do amortecimento introduzido pelo escoamento interagindo com a estrutura. Pode-se observar que o fator de amortecimento teórico aumenta com o aumento da velocidade do escoamento, como esperado, nesse casos onde instabilidades não estão presentes. Observa-se também que não há uma tendência forte do aumento dos fatores de amortecimento com o aumento do ângulo de ataque.

É importante comentar que apesar da boa estimativa obtida para os fatores de amortecimento, a análise de interação fluido-estrutura, produziu fatores de amortecimento um pouco mais altos para todos os casos analisados. Isto quer dizer que este tipo de análise introduziu um amortecimento adicional, refletido no aumento dos fatores de amortecimento, quando compara-se os resultados teóricos e resultados experimentais.

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,013	0,013	0,0	0,085	0,051	66,7
2ª freq. nat.	0,004	0,004	0,0	0,014	0,007	100,0
3ª freq. nat.	0,002	0,002	0,0	0,008	0,006	33,3
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,107	0,070	52,9	0,118	0,083	42,2
2ª freq. nat.	0,018	0,008	125,0	0,019	0,008	137,5
3ª freq. nat.	0,011	0,006	83,3	0,012	0,003	300,0

**Tabela 9.6:** Comparações teórico-experimentais dos fatores de amortecimento para ângulo de ataque de 1°.

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,013	0,013	0,0	0,083	0,056	48,2
2ª freq. nat.	0,004	0,004	0,0	0,015	0,008	87,5
3ª freq. nat.	0,002	0,002	0,0	0,008	0,006	33,3
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,106	0,079	34,2	0,116	0,087	33,3
2ª freq. nat.	0,018	0,010	80,0	0,019	0,010	90,0
3ª freq. nat.	0,011	0,002	450,0	0,012	0,001	1100,0

**Tabela 9.7:** Comparações teórico-experimentais dos fatores de amortecimento para ângulo de ataque de 2°.

## 9.5 Comparações teórico-experimentais das curvas de FRF

Utilizando a teoria desenvolvida na Seção 7.6, compara-se agora as curvas de FRF obtidas experimentalmente com as contruídas teoricamente, através da introdução dos coeficientes equivalentes, gerando as matrizes globais (fluido+estrutura).

As curvas teóricas foram geradas utilizando-se como sinal de excitação o mesmo sinal teórico que tem a sua frequência variada e que foi utilizado como entrada para o excitador. Entretanto, esse sinal teórico não tem a mesma amplitude do sinal medido experimentalmente

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,013	0,013	0,0	0,082	0,063	30,2
2ª freq. nat.	0,004	0,004	0,0	0,015	0,012	25,0
3ª freq. nat.	0,002	0,002	0,0	0,008	---	---
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,130	0,083	56,6	0,117	0,097	20,6
2ª freq. nat.	0,018	0,013	38,5	0,018	0,015	20,0
3ª freq. nat.	0,011	---	---	0,012	---	---

**Tabela 9.8:** Comparações teórico-experimentais dos fatores de amortecimento para ângulo de ataque de 3°.

Vel. do escoamento	0 m/s			20,5 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,013	0,013	0,0	0,096	0,064	50,0
2ª freq. nat.	0,004	0,004	0,0	0,014	0,008	75,0
3ª freq. nat.	0,002	0,002	0,0	0,008	---	---
Vel. do escoamento	27,5 m/s			30,4 m/s		
	Teor.	Exp.	% Er.	Teor.	Exp.	% Er.
1ª freq. nat.	0,113	0,085	33,0	0,122	0,097	25,8
2ª freq. nat.	0,018	0,008	125,0	0,019	0,010	90,0
3ª freq. nat.	0,011	---	---	0,012	---	---

**Tabela 9.9:** Comparações teórico-experimentais dos fatores de amortecimento para ângulo de ataque de 4°.

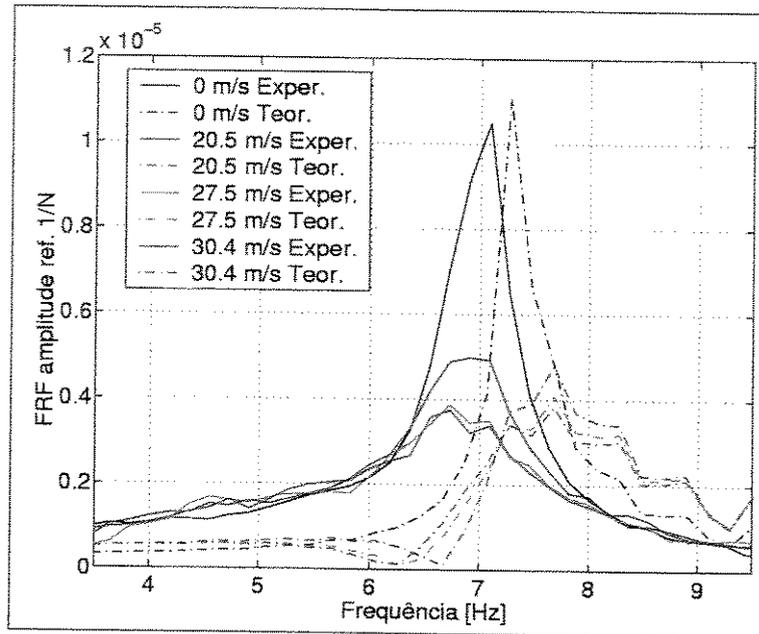
pela célula de carga. Então, esse sinal é multiplicado por uma constante de forma a obter a amplitude da força obtida experimentalmente, medida pela célula de carga.

### 9.5.1 Resultados obtidos para o primeiro modo

A Figura 9.25, mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do primeiro modo, para um ângulo de ataque de 1°. Estas curvas representam os resultados obtidos e discutidos na seção anterior. Ou seja, não existe uma tendência de mudança da frequência natural. Além disso, observa-se a boa concordância e boa previsão do modelo fluido-estrutura adotado quanto à amplitude de resposta do sistema. Conforme aumenta-se

a velocidade do escoamento, o pico da curva de FRF diminui e o fator de amortecimento aumenta. Outro ponto a ser observado é o grau de amortecimento do sistema, que pode ser visto pela abertura da curva de FRF. Quanto mais largo for o pico, maior o grau de amortecimento do sistema. Por estes gráficos, pode-se observar que os erros bastante grandes em termos dos valores dos fatores de amortecimentos, comentados na seção anterior, não representam erros tão grandes assim. A resposta do sistema acompanha bem as curvas experimentalmente obtidas.

Pode-se observar, não só para os casos do primeiro modo, mas também para o segundo modo, que as curvas teóricas encontram-se deslocadas para a direita em relação às curvas experimentais. Isto indica que as frequências calculadas teoricamente possuem valores maiores do que os obtidos experimentalmente, apesar do módulo de elasticidade do aço ter sido diminuído de 6%. Uma maior diminuição do módulo de elasticidade, apesar de diminuir a diferença entre as curvas, não teria sentido físico. O problema do cálculo teórico resultar em frequências naturais mais altas, está ligado com a condição de engastamento da placa. Teoricamente é imposto ao modelo um engastamento perfeito, onde as rotações dos nós engastados têm valores exatamente nulos. Entretanto esta condição não se verifica na realidade. O engastamento não é totalmente perfeito, fazendo com que se obtenha as diferenças nas frequências naturais observadas aqui.



**Figura 9.25:** Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o primeiro modo com ângulo de ataque de  $1^\circ$ .

É importante observar também, nas Figuras 9.25, 9.26, 9.27 e 9.28, que representam as curvas de comparação teórico-experimental das FRFs em torno do primeiro modo, o aparecimento de anti-ressonâncias nas curvas teóricas. Essas anti-ressonâncias estão ligadas à presença do sistema massa-mola que engasta a placa, como pode ser visto na Figura 3.1, com os elementos designados pelos números (2), para a massa e (4), para as molas. Esse sistema massa-mola, possui uma frequência natural medida experimentalmente, em torno de  $2Hz$  e é bastante amortecido.

O modelo matemático utilizado para construir teoricamente as curvas de FRF, leva em conta somente a massa(2). Esta tem o seu valor dividido pelo número de nós presentes no engaste. Cada parcela é somada na diagonal principal da matriz de massa, na posição correspondente ao nó, representando a inércia total do sistema que responde à excitação da força. O valor de rigidez das molas(4), não foi incluído pois o resultado da curva de FRF não modificaria significativamente o comportamento do sistema na região de frequência de interesse de resposta da placa. Se a mola fosse incluída, poder-se-ia observar somente um outro pico de frequência natural em torno dos  $2Hz$ , representando o sistema massa-mola. É

interessante notar que nas curvas teóricas representando a placa sem a influência do fluido, a anti-ressonância não está presente, justamente porque a mola não foi incluída. Ela estaria presente se a mola fosse incluída, só que apareceria em uma frequência próxima aos  $3Hz$ . Com a introdução da rigidez equivalente do fluido, a anti-ressonância aparece, pois a rigidez que é acrescentada (proveniente do fluido) faz com que a anti-ressonância que deveria estar localizada em uma frequência mais baixa, desloque sua posição para a direita.

Experimentalmente, esta anti-ressonância não foi detectada porque a coerência medida entre o sinal de excitação e de resposta, que mede o grau de ruído dos sinais experimentais, é baixa para frequências abaixo de  $5,5Hz - 6,0Hz$ . Além disso, a discretização (resolução em frequência) experimental é pobre e o sistema massa(2)-mola(4) bastante amortecido, fazendo com que o pico de frequência natural seja visualizado com dificuldade.

A Figura 9.26, mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do primeiro modo, para um ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Como dito anteriormente, as curvas representam os resultados obtidos e discutidos na seção anterior. Não é observada uma tendência de mudança da frequência natural e as amplitudes de resposta estão bem representadas pelo modelo teórico, quando comparados com o experimental.

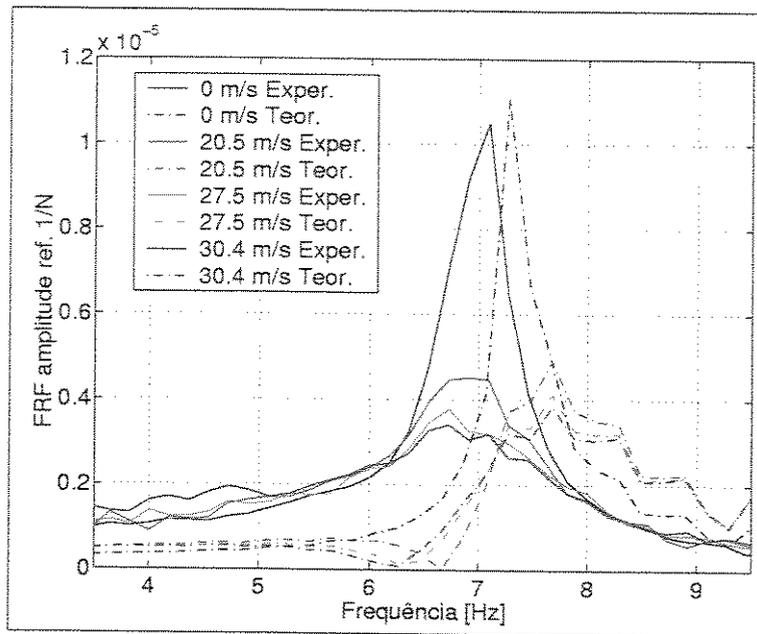


Figura 9.26: Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o primeiro modo com ângulo de ataque de  $2^\circ$ .

Já a Figura 9.28, mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do primeiro modo, para um ângulo de ataque de  $3^\circ$ . Novamente, os comentários anteriores são pertinentes e se aplicam para este caso.

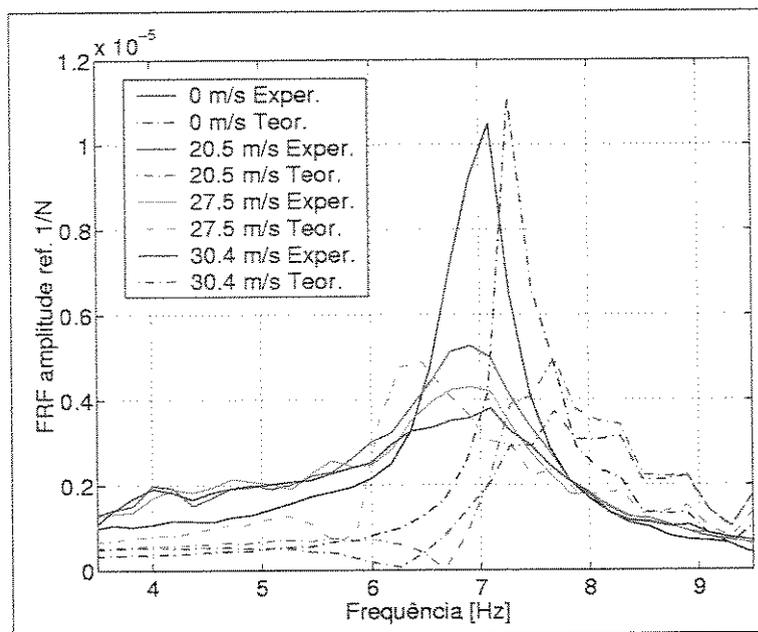


Figura 9.27: Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o primeiro modo com ângulo de ataque de  $3^\circ$ .

A Figura 9.28, mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do primeiro modo, para um ângulo de ataque de  $4^\circ$ . Novamente, os comentários anteriores são pertinentes e se aplicam para este caso.

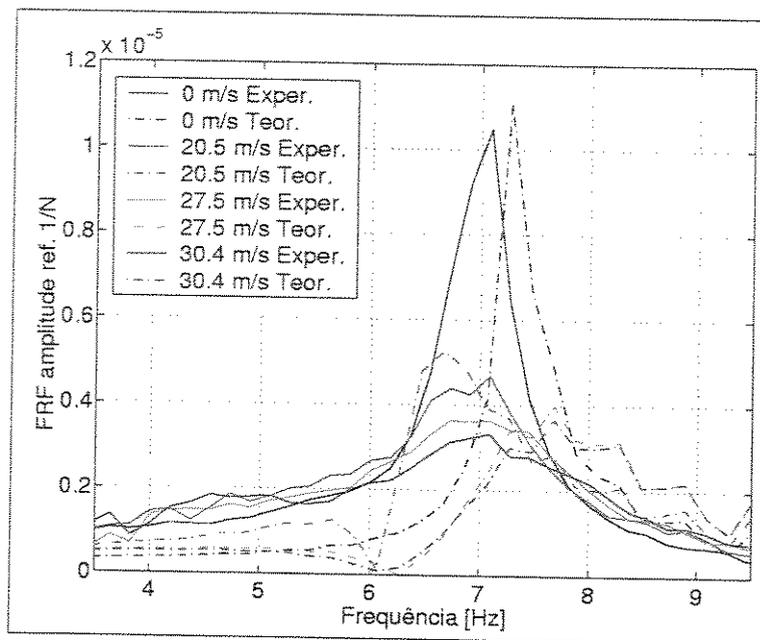
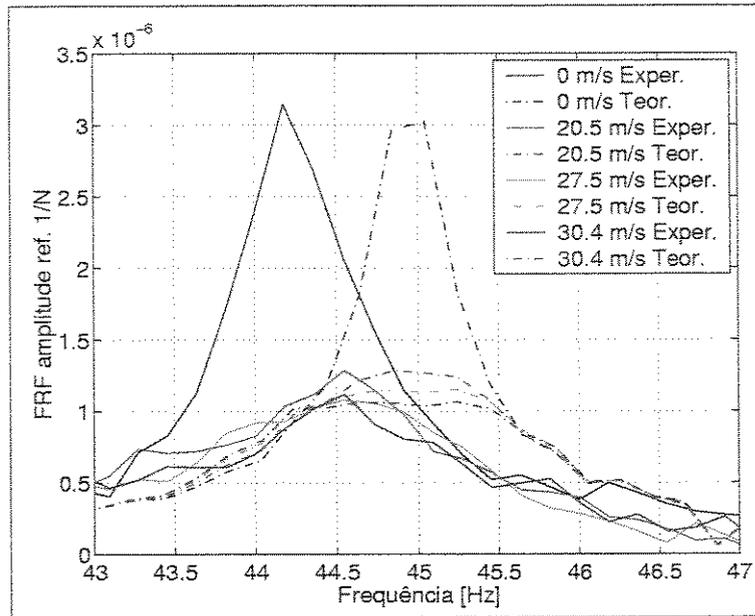


Figura 9.28: Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o primeiro modo com ângulo de ataque de  $4^\circ$ .

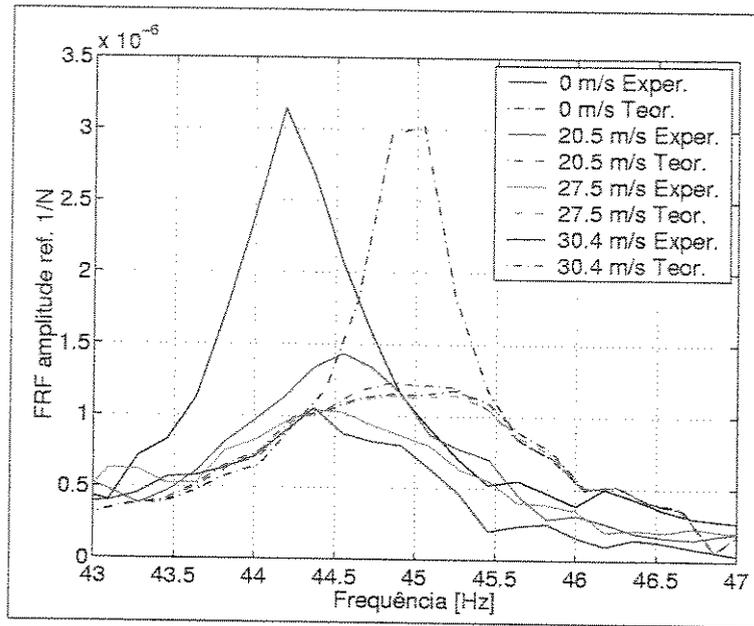
### 9.5.2 Resultados obtidos para o segundo modo

Mostra-se agora as curvas obtidas para o segundo modo da placa. A Figura 9.29 mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do segundo modo, para um ângulo de ataque de  $1^\circ$ . Como mencionado para o caso do primeiro modo, estas curvas representam os resultados mostrados e discutidos na seção anterior. Como este é um ângulo de ataque pequeno, as mudanças em termos da frequência natural, que para o segundo modo devem aumentar, são insignificantes. Já as amplitudes de resposta teóricas correspondem bem às medidas experimentalmente. O grau de amortecimento das curvas teóricas é realmente um pouco maior do que das curvas medidas experimentalmente.



**Figura 9.29:** Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o **segundo modo** com **ângulo de ataque de  $1^\circ$**  .

A Figura 9.30 mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do segundo modo, para um ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Como dito para o caso anterior, de  $1^\circ$  de ângulo de ataque, estes dois são ângulos de ataque pequenos e, portanto as mudanças em termos da frequência natural são insignificantes.



**Figura 9.30:** Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o **segundo modo** com ângulo de ataque de  $2^\circ$  .

Já a Figura 9.31 mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do segundo modo, para um ângulo de ataque de  $3^\circ$ . Neste caso, como o ângulo de ataque já é significativo, as frequências naturais deveriam aumentar com o aumento da velocidade do escoamento. Entretanto, este comportamento não é visto através dos gráficos. Ele somente pôde ser visto através da Tabela 9.4, onde esta tendência existe, mas é muito pequena. A variação da frequência natural medida experimentalmente é maior do que a apresentada teoricamente.

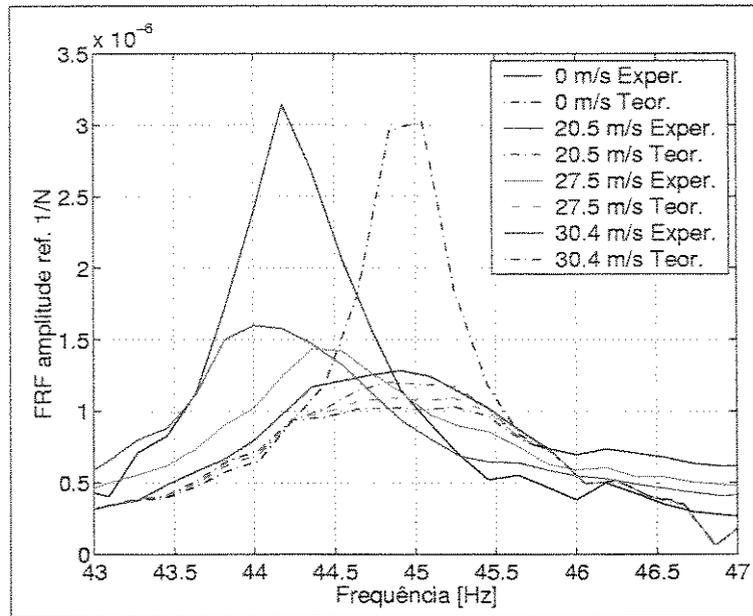


Figura 9.31: Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o **segundo modo** com **ângulo de ataque de 3°**.

Por fim, a Figura 9.32 mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do segundo modo, para um ângulo de ataque de 4°. Neste caso, ocorre o mesmo comportamento para o caso anterior, de 3° de ângulo de ataque. O aumento da frequência natural com o aumento da velocidade do escoamento não pode ser observado pelos gráficos. Ele somente pôde ser visto através da Tabela 9.5, onde esta tendência existe, mas é muito pequena. A variação da frequência natural medida experimentalmente é maior do que a apresentada teoricamente.

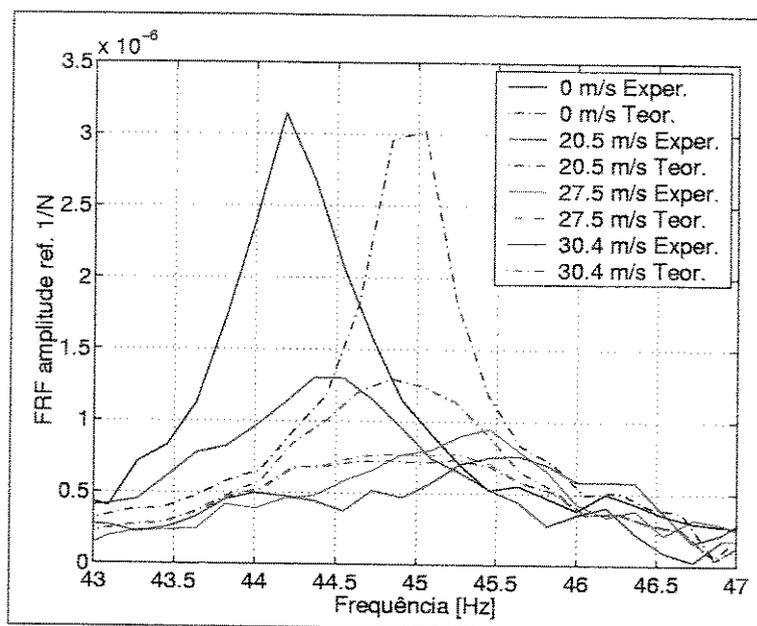


Figura 9.32: Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o segundo modo com ângulo de ataque de  $4^\circ$ .

### 9.5.3 Resultados obtidos para o terceiro modo

Mostra-se agora as curvas obtidas para o terceiro modo da placa. A Figura 9.33 mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do terceiro modo, para um ângulo de ataque de  $1^\circ$ . É interessante notar que não existe um pico na curva de FRF para o caso somente estrutural teórico. Isto confirma as afirmações feitas na Seção 8.4.3. O terceiro modo é um modo de torção e excitando-se todos os nós do engaste da placa com a mesma amplitude e fase, não é possível excitar os modos de torção, somente os de flexão. Isto é confirmado pelo modelo teórico no gráfico apresentado. A curva de FRF apresentada para este mesmo caso (sem a presença do escoamento), só que agora experimental, somente foi obtida porque a montagem experimental sempre contém imperfeições e desalinhamentos. É interessante notar ainda que o modelo teórico de interação fluido-estrutura é capaz de prever o acoplamento que surge do fluido com este modo, fazendo com que o pico de FRF apareça. Para este modo, a variação da frequência natural pode ser vista através dos gráficos. De acordo com as medições experimentais, a frequência natural diminui com o aumento da velocidade do escoamento, indicando que o escoamento contribui com uma redução da rigidez

do sistema estrutura-fluido. Isto é verificado tanto teoricamente quanto experimentalmente.

Com o aumento da velocidade do escoamento percebe-se um pequeno aumento do grau de amortecimento do sistema, nas curvas experimentais. Já nas curvas teóricas este comportamento não se reproduz, indicando uma redução do grau de amortecimento com o aumento da velocidade do fluido. Isto é fácil de se visualizar, com o aumento dos picos de ressonância.

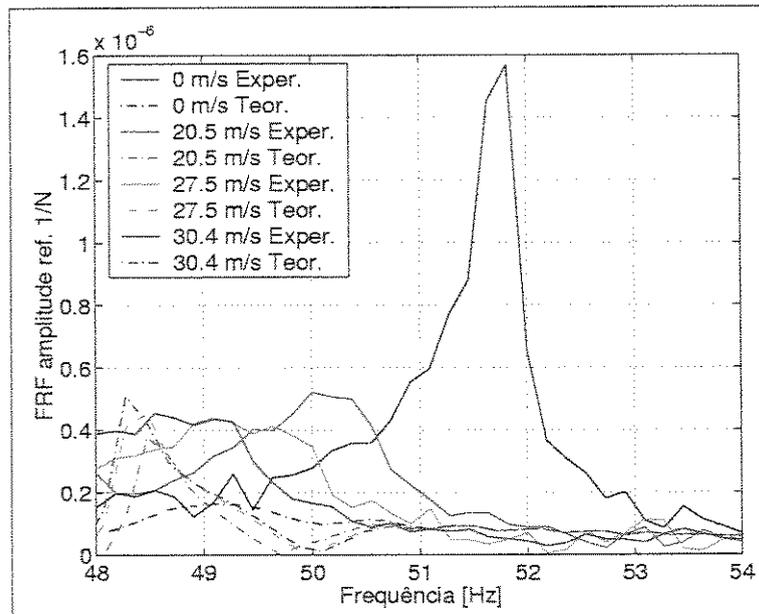


Figura 9.33: Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o terceiro modo com ângulo de ataque de  $1^\circ$ .

A Figura 9.34 mostra a comparação teórico-experimental das curvas de FRF em torno do terceiro modo, para um ângulo de ataque de  $2^\circ$ . Para este caso, os mesmos comentários para o caso de  $1^\circ$  de ângulo de ataque são pertinentes e se aplicam.

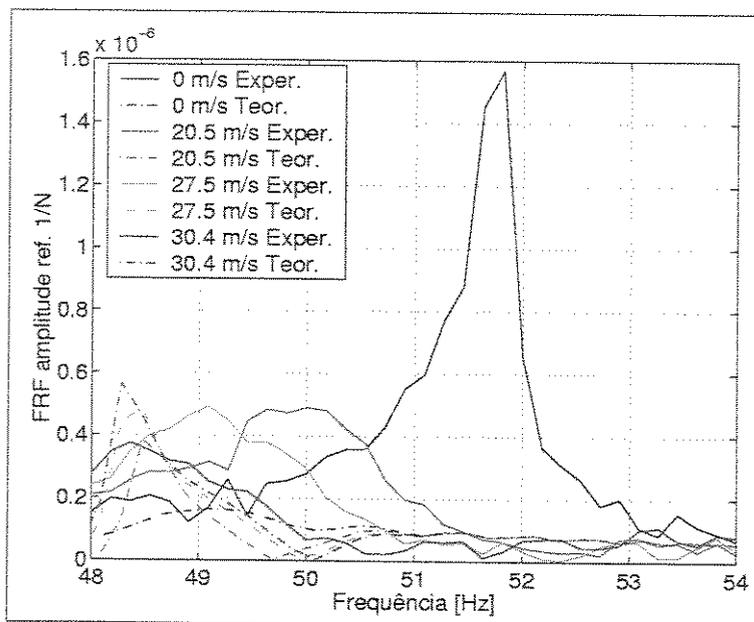


Figura 9.34: Comparação teórico-experimental das curvas de FRF, para o terceiro modo com ângulo de ataque de  $2^\circ$ .

## 9.6 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentadas algumas comparações dos coeficientes equivalentes entre as diversas velocidades analisadas e entre dois ângulos de ataque, ressaltando sempre o significado físico, relacionando a distribuição dos coeficientes equivalentes e a possível alteração das frequências naturais e fatores de amortecimento. Foi apresentada também uma breve discussão sobre a ordem de grandeza dos coeficientes equivalentes em comparação com os elementos das matrizes estruturais de rigidez e amortecimento. Foram apresentadas as comparações teórico-experimentais abrangendo frequências naturais, fatores de amortecimento e FRF, para os ângulos de  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  e  $4^\circ$ , onde instabilidade não estão presentes.

Analisando os resultados obtidos, pode-se concluir que a metodologia de interação fluido-estrutura utilizada, em conjunto com o método utilizado no cálculo dos coeficientes equivalentes consegue estimar as mudanças de frequências naturais e fatores de amortecimento. Para as frequências naturais, pôde-se ver que, no primeiro modo, as frequências calculadas teoricamente realmente não apresentam mudanças significativas, coincidindo com os resultados obtidos experimentalmente. Para o segundo modo, as frequências calculadas teoricamente, aproximam-se muito das obtidas experimentalmente, sendo que estas aumentam com o aumento da velocidade do escoamento. Para o terceiro modo, as frequências calculadas diminuem com o aumento da velocidade do escoamento, refletindo também o comportamento obtido experimentalmente. É importante notar, entretanto, no caso do segundo e terceiro modos, que apesar de poder ser observada uma variação das frequências naturais, esta variação apresentou uma magnitude menor do que a variação apresentada experimentalmente.

No caso dos fatores de amortecimento, pôde-se obter uma boa estimativa dos mesmos, representando o comportamento de aumento do amortecimento com o aumento da velocidade do escoamento, ainda que os fatores obtidos teoricamente fossem um pouco maiores do que os obtidos experimentalmente.

É importante notar que os resultados relacionados com a variação das frequências naturais do segundo e terceiro modos apresentam uma sensibilidade maior à variação da velocidade do que à variação do ângulo de ataque da placa. Pôde-se observar que a segunda frequência natural sempre aumenta com o aumento da velocidade do fluido, mas aumentando-se o ângulo de ataque, esta mesma tendência não é confirmada, embora as frequências não tendam a diminuir. A sensibilidade à variação das frequências naturais é bem menor nos resultados obtidos teoricamente que nos resultados experimentais, possivelmente porque no caso dos coeficientes de rigidez, estes foram subestimados nos cálculos numéricos. A partir dos gráficos, comparando-se as curvas de FRF, é impossível observar a tendência no aumento da frequência natural para o segundo modo. Somente na comparação feita para o terceiro modo é que as variações da frequência natural foram vistas.

Vários fatores podem estar ligados à esse comportamento. Isso pode estar ligado à precisão do modelo teórico do escoamento. Isso porque, como se pode ver, as variações de frequências têm valores muito pequenos, em sua maioria acontecendo na segunda casa decimal. Talvez o modelo do escoamento não consiga captar essa variação devido ao grande número de graus de liberdade do sistema, exigindo um grande esforço computacional e numérico. Foi vista através dos gráficos que ilustram a rigidez e amortecimento equivalentes sobre a placa, que muitas vezes a diferença entre dois ângulos de ataque, para a mesma velocidade de escoamento, era quase imperceptível. Além disso, outro fator que pode causar essa alteração é a escolha da amplitude das perturbações dadas ao sistema para o cálculo da rigidez e amortecimento equivalente. A perturbação imposta interfere diretamente no cálculo dos coeficientes. Escolheu-se aqui realizar um estudo para determinar um fator comum que multiplique e que determine as amplitudes de perturbação de uma forma padrão para todos os casos, sem que essas amplitudes fossem dadas aleatoriamente ou ajustando os resultados finais. Entretanto, o uso da mesma amplitude para todos os casos pode não ser a melhor escolha, pois para cada caso, o sistema possui uma posição de equilíbrio diferente. O uso das amplitudes padronizadas é um fator de compromisso, pois de um lado se tira a aleatoriedade da escolha, padronizando os cálculos, porém de outro, pode não ser a melhor escolha para todos os casos.

Já no caso dos fatores de amortecimento, além das mesmas dificuldades encontradas para as frequências naturais, existe ainda a dificuldade experimental na determinação confiável dos fatores de amortecimento e de precisão numérica experimental. Entretanto, a partir das comparações das curvas de FRF, pôde-se observar que o grau de amortecimento obtido através dos coeficientes equivalentes representa uma estimativa muito boa se se observar a abertura das curvas de FRF e a amplitude de resposta na ressonância das mesmas.

Em suma, os resultados indicam a validade do uso do método na previsão da influência do escoamento na resposta dinâmica do sistema acoplado fluido-estrutura. Entretanto, existem muitos pontos a serem estudados e aprofundados. Estes se concentram principalmente no modelo do escoamento, onde um modelo com muitos graus de liberdade tem de ser utilizado. Com um modelo tão grande, muitas vezes a precisão numérica obtida não é satisfatória, exigindo-se um modelo cada vez mais refinado. Entretanto, existem limites computacionais de processamento, de memória e de espaço em disco que limitam bastante a escolha da malha utilizada na solução do problema. As conclusões em geral e sugestões para novos trabalhos serão comentadas a seguir, no próximo capítulo.

# Capítulo 10

## Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho, foram tratados os principais aspectos da interação fluido-estrutura, objetivando desenvolver uma metodologia que possa ser aplicada a estruturas complexas reais, onde a influência do escoamento está presente de forma relevante e que não possa ser desprezada. Para isto, utilizou-se um modelo estrutural simplificado, de placa plana, onde a própria geometria permitiu que simplificações no modelo estrutural pudessem ser feitas. Além disso, o modelo do escoamento também pôde ser simplificado, tratando o mesmo como incompressível, hipótese condizente com as condições de escoamento reais onde os testes experimentais foram realizados. Com modelos mais simples, tanto para a estrutura quanto para o fluido, torna-se mais fácil a elaboração da metodologia de interação entre ambos, uma vez reconhecida a complexidade inerente da interação fluido-estrutura, que envolve dois dos principais campos das ciências mecânicas. O objetivo final da metodologia apresentada neste trabalho é a obtenção da rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do fluido interagindo com a estrutura. Uma vez que a rigidez e amortecimento equivalentes são obtidos, para determinado caso, o analista estrutural pode introduzir estas informações nas matrizes de rigidez e amortecimento estruturais. Com isso, a resposta dinâmica do sistema acoplado pode ser obtida sem a solução do sistema acoplado, resolvendo novamente as equações do escoamento, que é um trabalho complicado e computacionalmente muito custoso.

A primeira parte do trabalho apresentado, foi a revisão bibliográfica. Nela, abordou-se três temas principais: a interação fluido-estrutura de palhetas flexíveis em cascata (girando), a interação fluido-estrutura de asas de aeronaves (não-girantes), e a interação fluido-estrutura de placas flexíveis. O primeiro tema foi abordado, pois o objetivo final do grupo de pesquisa em que este trabalho se insere, é o desenvolvimento de ferramentas capazes de tratar o caso de palhetas flexíveis em compressores e turbinas reais. O caso da interação fluido-estrutura de palhetas é um dos mais complicados, pois envolve estruturas complexas, não somente pela geometria, mas também pela existência de muitas palhetas acopladas a um mesmo rotor, tornando somente o problema estrutural bastante complicado. Soma-se a isso, o problema do escoamento, envolvendo várias palhetas e estágios girantes, onde as condições de temperatura e pressão são extremas, e onde o escoamento, na maioria dos casos é transônico. Com um estudo detalhado dos trabalhos de palhetas, pôde-se verificar a evolução dos modelos de escoamento, passando de escoamentos potenciais bi-dimensionais a escoamentos tri-dimensionais com base nas equações de Navier-Stokes, incluindo modelos de turbulência. O modelo de escoamento dos trabalhos mais recentes está bem desenvolvido, possibilitado principalmente pelos avanços da mecânica dos fluidos computacional (CFD). Entretanto, estes trabalhos têm como objetivo principal a verificação de possíveis instabilidades nas condições de operação das turbinas e compressores (*flutter*). A obtenção da rigidez e amortecimento equivalente não é o seu foco. Entretanto, a visível evolução dos modelos de escoamento, mostra a tendência no estudo dos mesmos e influenciou diretamente na escolha do modelo de escoamento tri-dimensional, baseado nas equações de Navier-Stokes, introduzindo um modelo de turbulência, utilizado neste trabalho.

O segundo tema abordado na revisão bibliográfica, é o caso de asas de aeronaves. Os trabalhos, neste caso, mostram uma preocupação e aprofundamento maior na metodologia de interação fluido-estrutura. Isto porque, o problema de ambas as disciplinas envolvidas é simplificado em relação às palhetas de turbina. A principal contribuição à este trabalho foi a escolha de uma metodologia de interação fluido-estrutura, que pudesse ser utilizada de forma relativamente simples, utilizando programas computacionais diferentes, de modo que se pudesse chegar condição de equilíbrio estática da estrutura, quando submetida ao

escoamento. Além disso, pode-se ver que várias metodologias estão sendo desenvolvidas, indicando o caminho a ser seguido caso se queira resolver problemas mais complicados, no domínio do tempo, onde não-linearidades estejam presentes, destacando os trabalhos de Donea (Donea et al., 1982) e Farhat (Farhat et al., 1998).

Por último, alguns trabalhos de placas flexíveis foram pesquisados, entretanto os modelos de placas utilizados possuem uma característica diferente do modelo utilizado neste trabalho. Na bibliografia, o interesse dos modelos de placas, é o de tratar a placa como parte integrante de uma estrutura, como uma asa, estudando principalmente não-linearidades estruturais e susceptibilidade a instabilidades. A placa utilizada neste trabalho, tem como objetivo de substituir por um modelo de geometria mais simples, um aerofólio, tal como uma asa ou uma palheta. Nesse sentido, estes trabalhos, levando em conta tal foco, contribuíram em menor grau para o desenvolvimento das hipóteses aqui apresentadas.

Como segunda parte deste trabalho, a bancada de testes foi apresentada, seus componentes e funcionamento foram detalhados e ilustrados. Foram explicitados também o sistema de instrumentação e aquisição de sinais. A bancada consiste basicamente de uma placa engastada a uma massa que pode ser excitada na direção vertical e que pode ser acoplada a um túnel de vento. O objetivo principal da bancada de testes é a obtenção das curvas de Função de Resposta em Frequência da placa, inicialmente sem a influência do escoamento, e então com a influência deste, acoplando a bancada com um túnel de vento.

Em seguida, toda a parte relativa à mecânica dos fluidos e ao modelo de escoamento foram apresentados. Inicialmente, uma revisão sobre as equações de conservação e tipos e condições de escoamento foi apresentada. A inclusão desta parte pode parecer um tanto básica e desnecessária para um pesquisador engajado em pesquisas na área de fluidos. Porém como este trabalho situa-se em uma área de transição entre a mecânica dos sólido e a mecânica dos fluidos, é útil e serve como uma revisão dos conceitos envolvidos para os pesquisadores mais envolvidos com a área da mecânica dos sólidos. O *software* FLOTRAN foi escolhido para a solução do problema do escoamento neste trabalho. Ressalta-se aqui que

qualquer outro *software* poderia ter sido escolhido, já que a modelagem da interação fluido-estrutura, no caso deste trabalho, independe do tipo de método utilizado para a solução do escoamento, bem como do *software* utilizado. Dessa forma, algumas informações sobre o FLOTRAN foram incluídas e discutidas. Apresentou-se as dimensões e domínio do problema do escoamento, bem como a malha utilizada na solução. Para isto, realizou-se um estudo preliminar de refinamento da malha e convergência da solução em termos do coeficiente de pressão sobre a superfície da placa. Alguns resultados qualitativos, como a trajetória de algumas partículas de fluido, foram plotadas e comparadas com a bibliografia (Mittal e Tezduyar, 1995), como mais uma forma de verificar a solução.

Em seguida, agora toda a parte relativa ao problema estrutural foi apresentada. O modelo de placas finas baseado na teoria de Kirchhoff foi apresentado. A obtenção das funções de forma e matrizes de rigidez e de massa foi apresentada. Com o modelo pronto e implementado em MATLAB, foram feitos alguns testes estáticos, comparando os resultados com a bibliografia (Zienkiewicz e Taylor, 1998) e alguns testes dinâmicos, comparando os resultados com experimentos conduzidos, de forma a validar o modelo estrutural desenvolvido.

Com o modelo estrutural e do escoamento prontos, passou-se à apresentação da metodologia de interação fluido-estrutura. Esta objetiva a obtenção da posição de equilíbrio estático da placa, quando submetida ao escoamento. Os diversos aspectos desta foram apresentados e discutidos, como a compatibilidade entre os domínios de solução, compatibilidade entre as superfícies das malhas de fluido e estrutura, e troca de condições de contorno, além da atualização da malha do fluido a cada iteração. Foi apresentado ainda, um estudo realizado com diversas malhas, comparando a posição de equilíbrio atingida e que serviu para a escolha da malha a ser utilizada nos cálculos subsequentes.

Com tudo isto pronto, um capítulo sobre a obtenção dos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento foi apresentado. A obtenção destes coeficientes foi apresentada, assim como um estudo das amplitudes de perturbação utilizadas no cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento. Uma parte muito importante foi ainda realizada e apresenta-

da, que consiste em um estudo da obtenção da rigidez equivalente para o segundo modo. Algumas malhas diferentes foram utilizadas e foi visto que os resultados foram diferentes entre si. Isto traz implicações no cálculo dos coeficientes e no resultado das comparações teórico-experimentais, assim como algumas sugestões de investigações futuras. Foi visto que de acordo com a posição relativa da linha modal com os nós mais próximos desta, o denominador do cálculo da rigidez equivalente torna-se próximo de zero, fazendo com que se obtenham valores bastante altos de rigidez nestes pontos, em comparação com o resto da placa. Estes resultados variam bastante, dependendo da malha utilizada. Além disso, a posição de equilíbrio da placa influencia os resultados de rigidez equivalente, na medida em que esta posição varia entre as diversas malhas. Isso representa um problema de precisão numérica do modelo acoplado. Isso é evidente a partir da comparação de duas malhas com o mesmo número de nós, que diferem minimamente somente na localização dos mesmos, e que apresentam diferentes posições de equilíbrio e também diferentes resultados para o cálculo da rigidez equivalente.

Neste capítulo, foram apresentadas ainda a maneira de adição dos coeficientes equivalentes nas matrizes de rigidez e amortecimento estruturais, assim como o modelo de amortecimento estrutural proporcional foi discutido.

O capítulo seguinte mostrou todos os testes experimentais realizados. Foram apresentados os parâmetros utilizados na excitação, aquisição dos dados, bem como na medição e cálculo da velocidade do escoamento. Os testes foram conduzidos para três velocidades de escoamento diferentes, para vários ângulos de ataque, de forma a comparar as diferentes condições. Estes foram divididos ainda por cada frequência natural excitada. Para o primeiro modo, observou-se que não há uma tendência de aumento da frequência natural, com o aumento da velocidade, nem com o aumento do ângulo de ataque. Já os fatores de amortecimento aumentam tanto em função do aumento da velocidade do escoamento, como em função do ângulo de ataque, porém somente até o ângulo de  $6^\circ$ . Após este ângulo, quando o escoamento é descolado da placa, os fatores de amortecimento não aumentam mais com o aumento do ângulo de ataque. Para o segundo modo, a frequência natural aumenta com

o aumento do ângulo de ataque. Os fatores de amortecimento apresentam comportamento semelhante ao do primeiro modo. Para o terceiro modo, a frequência natural apresentou uma tendência inversa à do segundo modo, esta diminui com o aumento da velocidade, sendo que para este modo, a variação em termos de frequência é maior do que para o segundo modo. Pôde-se observar durante os testes experimentais o fenômeno de *stall flutter*, onde o escoamento descolado, em altos ângulos de ataque (que para a placa plana é em torno de  $6^\circ$ ), excita a mesma no seu modo de torção.

É importante comentar a dificuldade de medição dos fatores de amortecimento aqui. Na maioria dos casos, esses fatores são bastante pequenos, por isso é realmente difícil estimar precisamente os mesmos, principalmente devido à limitação do sistema de aquisição de sinais. Para uma boa estimativa seria melhor que se aumentasse a resolução em frequência das curvas de FRF. Entretanto, isto somente seria possível com um período de tempo de aquisição dos sinais um pouco mais longo, o que era impossível através dos computadores com limitada memória utilizados. Como sugestão, ficaria a utilização de um sistema de aquisição dedicado e com capacidade de tratamento dos sinais "on-line", em que se possa visualizar as curvas de FRF ao mesmo tempo em que os sinais são adquiridos. Além disso, as velocidades fornecidas pelo túnel também são pequenas, fazendo com que as variações em termos de frequência e mesmo fatores de amortecimento fossem pequenas. Utilizando um túnel de vento de maior capacidade, impondo maiores variações de velocidade à placa, seria possível obter resultados melhores definidos.

No último capítulo, foram apresentados alguns resultados teóricos, comparando as três velocidades ensaiadas no túnel de vento, para os ângulos de ataque de  $1^\circ$  e  $2^\circ$ . Viu-se que com o aumento da velocidade, há uma tendência de aumento dos valores absolutos dos coeficientes de rigidez e amortecimento. Entretanto, dependendo do caso, estes se distribuem de diferentes formas de modo a representar as modificações em termos de frequência natural e amortecimento do sistema acoplado. Como por exemplo, no caso da rigidez para o primeiro modo onde não há uma tendência de variação da frequência natural. Neste caso, os coeficientes de rigidez variam com valores ora positivos, ora negativos, de forma a não

introduzir uma rigidez adicional ao sistema. Viu-se ainda que nos casos estudados, não havia uma grande variação em termos de ângulo de ataque, mostrando uma sensibilidade menor em relação ao ângulo de ataque do que com relação à velocidade. Como visto experimentalmente, na maioria dos casos, isto é verdade, pois as mudanças para ângulos de ataque muito pequenos são insignificantes. Além disso, com mudanças tão pequenas, chega-se muito perto da precisão numérica do modelo do fluido.

Todos esses comentários estão refletidos nas comparações teórico-experimentais apresentadas, seja em termos de tabelas, seja em termos de gráficos de FRF. Estas comparações mostram a viabilidade da metodologia desenvolvida aqui. As frequências naturais seguem as tendências exibidas nos testes experimentais. Para o segundo modo, a tendência de aumento da frequência natural é pequena, podendo ser percebida somente em termos do cálculo de autovalores. Para o terceiro, esta tendência já é mais facilmente vista porque existe uma variação maior da frequência natural, o que vem confirmar os resultados experimentais, onde se viu que para o terceiro modo, a variação das frequências naturais foi maior.

Apesar da metodologia desenvolvida apresentar a capacidade de representar o acoplamento fluido-estrutura e ser possível reconstruir o comportamento dinâmico do sistema acoplado, visto através das curvas de FRF, existem muitos pontos a serem estudados e entendidos. O principal deles é um estudo mais aprofundado da precisão numérica do sistema acoplado. Esta precisão está mais diretamente ligada à solução do escoamento do que com a solução da estrutura. Isso porque, para o escoamento, é necessária uma malha mais refinada do que para a estrutura. Com os recursos computacionais muitas vezes limitados, é difícil refinar-se ainda mais a malha. Isso geraria um sistema muito caro computacionalmente. A sua solução ficaria mais demorada e o espaço em disco necessário aumentaria muito. Em termos de comparação, para a solução de um caso típico de uma malha  $16 \times 16$ , apresentada aqui, o tempo necessário à obtenção da posição de equilíbrio, rodando-se em uma estação de trabalho Unix, era de aproximadamente 12 horas. O espaço em disco necessário, para a mesma análise, é de aproximadamente 1 Gb. É necessário um estudo mais aprofundado da influência da solução do escoamento, possivelmente utilizando um outro *software*, para com-

paração da solução e custos computacionais. Com isso seria possível investigar a influência da linha modal no cálculo dos coeficientes equivalentes, além da influência da posição de equilíbrio. Seria interessante, ao mesmo tempo, utilizar malhas com interfaces diferentes para o escoamento e estrutura. Assim seria necessário implementar um método de interpolação das pressões aerodinâmicas nos nós estruturais, como também os deslocamentos dos nós estruturais para os nós da malha do escoamento.

# Referências Bibliográficas

- Abhari, R. S., Giles, M. A. Navier-stokes analysis of airfoils in oscillating transonic cascades for the prediction of aerodynamic damping. *Journal of Turbomachinery*, v. 119, n.1, p.77–84, 1997.
- Aotsuka, M., Watanabe, T., Machida, Y. Aerodynamic damping characteristics of a transonic turbine cascade. *In: International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*. 99-GT-50, 1999.
- Arruda, J. R. F. *Notas de aula: IM 335 Análise modal de estruturas*, Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, Brasil 2000.
- Bendiksen, O. O. A new approach to computational aeroelasticity. p. 1712–1727. AIAA-91-0939-CP, 1991.
- Bhardwaj, M. K., Kapania, R. K., Reichenbach, E., Guruswamy, G. P. Computational fluid dynamics/computational structural dynamics interaction methodology for aircraft wings. *AIAA Journal*, v. 36, n.12, p.2179–2186, 1998.
- Chandiramani, N. K., Librescu, L. I., Plaut, R. Flutter of geometrically-imperfect-shear-deformable laminated flat panels using non-linear aerodynamics. *Journal of Sound and Vibration*, v. 192, n.1, p.79–100, 1996.
- Chuang, H. A., Verdon, J. M. A nonlinear numerical simulator for three-dimensional flows through vibrating blade rows. *Journal of Turbomachinery*, v. 121, n.2, p.348–357, 1999.

- Clark, W. S., Hall, K. C. A time-linearized navier-stokes analysis of stall flutter. *In: International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*. 99-GT-383, 1999.
- Cook, R. D., Malkus, D. S. , Plesha, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*, Cap. 11: Bending of flat plates e 13: Finite elements in dynamics and vibrations, p. 314–339, 367–428. Reading: John Wiley & Sons, Inc., 3 ed., 1989.
- Donea, J., Giuliani, S. , Halleux, J. P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33,p.689–723, 1982.
- Dowell, E. H. Generalized aerodynamic forces on a flexible plate undergoing transient motion in a shear flow with an application to panel flutter. *AIAA Journal*, v. 9, n.5, p.834–841, 1971.
- Farhat, C., Lesoinne, M. , LeTallec, P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 157,p.95–114, 1998.
- Fransson, T. H., Jöcker, M., Bölcs, A. , Ott, P. Viscous and inviscid linear/nonlinear calculations versus quasi 3d experimental cascade data for a new aeroelastic turbine standard configuration. *In: International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*. 98-GT-490, 1998.
- Fung, Y. C. *An introduction to the theory of aeroelasticity*, Cap. 9: Buffeting and Stall flutter, p. 320–326. Reading: Dover Publications, Inc., 3 ed., 1993.
- Göhner, U., Mauch, H. Flotran: Numerical method and industrial applications. *International Journal of Computer Applications in Technology*, v. 11, n.3, p.199–202, 1998.
- Guruswamy, G. P. Time-accurate unsteady aerodynamic and aeroelastic calculations of wings using euler equations. *In: AIAA/ASME/ASCE/AHS 29th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. AIAA-88-2281, 1988.

- Guruswamy, G. P., Byun, C. Fluid-structural interactions using navier-stokes flow equations coupled with shell finite element structures. *In: AIAA 24th Fluid Dynamics Conference*. AIAA-93-3087, 1993.
- Guruswamy, G. P., Yang, T. Y. Aeroelastic time response analysis of thin airfoils by transonic code ltran2. *Computers and Fluids*, v. 9, n.4, p.409–425, 1981.
- Higuchi, K., Dowell, E. H. Dynamic stability of a rectangular plate with four free edges subjected to a follower force. *AIAA Journal*, v. 28, n.7, p.1300–1305, 1990.
- Higuchi, K., Dowell, E. H. Effect of structural damping on flutter of plates with a follower force. *AIAA Journal*, v. 30, n.3, p.820–825, 1992.
- Hoyniak, D., Clark, W. S. Aerodynamic damping predictions using a linearized navier-stokes analysis. *In: International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*. 99-GT-207, 1999.
- Hwang, C. J., Fang, J. M. Flutter analysis of cascades using an euler/navier-stokes solution-adaptive approach. *Journal of Propulsion and Power*, v. 15, n.1, p.54–63, 1999.
- Klein, A., Gerlach, G. Simulation of fluid-structure interaction in micropumps by coupling of two commercial finite-element programs. *In: SPIE Conference on Microfluidic Devices and Systems*, v. 3515, p. 194–204, Santa Clara. SPIE The International Society for Optical Engineering, 1998.
- Larsen, P. S., Michelsen, J. A. *Notes on Computational Fluid Mechanics*, Department of Energy Engineering - Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark 1999.
- Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., He, J., Lieven, N. A. J., Lin, R. M., Skingle, G. W., To, W., Urgueira, A. P. V. *Theoretical and experimental modal analysis*, Cap. 4: Modal analysis identification methods, p. 185–264. Reading: Research Studies Press Ltd., 1 ed., 1997.
- Mittal, S., Tezduyar, T. E. Parallel finite element simulation of 3d incompressible flows:

- Fluid-structure interactions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 21,p.933–953, 1995.
- Omprakash, V., Sarlashkar, A. V., Lam, T. C. T., Shuster, L. H. , McCloskey, T. H. Flutter stability investigation of low-pressure steam turbine bladed disks. *Proceedings of the 1994 International Joint Power Generation Conference*, v. 26,p.57–64, 1994.
- Rice, J. G., Schnipke, R. J. A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 48,p.313–327, 1985.
- Santos, I. F., Colla, G. C. Influência de palhetas flexíveis na dinâmica de sistemas rotativos. *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*. (CD-Rom), Bauru - SP, 1997.
- Saracho, C. M. *Análise numérica e experimental do comportamento dinâmico de palhetas flexíveis*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 148p, Dissertação (Mestrado).
- SAS. *ANSYS Users Manual*, 1997.
- Sayma, A. I., Vahdati, M., Imregun, M. , Green, J. S. Whole-assembly flutter analysis of a low-pressure turbine blade. *The Aeronautical Journal*, v. 102, n.1018, p.459–463, 1998.
- Simth, M. J., Cesnik, C. E. S., Hodges, D. H. , Moran, K. J. An evaluation of computational algorithms to interface between cfd and csd methodologies. *AIAA-98-1400-CP*, p. 745–755, 1996.
- Srinivasan, A. V. Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v. 119, n.4, p.742–775, 1997.
- Verdon, J. M. Review of unsteady aerodynamic methods for turbomachinery aeroelastic and aeroacoustic applications. *AIAA Journal*, v. 31, n.2, p.235–250, 1993.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The finite element method: Volume 2 - Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*, Cap. 1: Plate and shell bending approximation:

thin (Kirchhoff) plates and  $C_1$  continuity requirements, p. 1–65. Reading: McGraw-Hill Book Company, 4 ed., 1998.