

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS-UNICAMP
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA-FEM
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL-DMC

Síntese de funções de influência e Green para o tratamento da interação dinâmica solo-estrutura através de equações integrais de contorno.

Número de publicação FEM:

Registro na BAE/UNICAMP:

por Edivaldo Romanini
orientador Prof.Dr.Euclides de Mesquita Neto

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

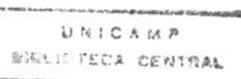
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR EDIVALDO ROMANINI

E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 10/07/95.

E. S. C. Y. U.

ORIENTADOR

Julho de 1995.



Cm 00077183-2

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/Unicamp
	R661A
V.	5
T.º DE L.	25778
PROJ.	433/95
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
X	<input type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	20/09/95
N.º CPD	

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R661s

Romanini, Edivaldo

Síntese de funções de influência e green para o tratamento da interação dinâmica solo-estrutura através de equações integrais de contorno / Edivaldo Romanini.-- Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

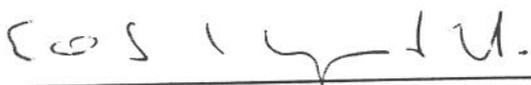
1. Funções de Green. 2. Amortecimento (mecânica).
3. Equações integrais. 4. Materiais viscoelásticos. ✓
I. Mesquita Neto, Euclides. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

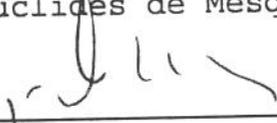
Tese de: Doutorado

Título da Tese: Síntese de funções de influência e Green para o tratamento da interação dinâmica solo-estrutura através de equações integrais de contorno.

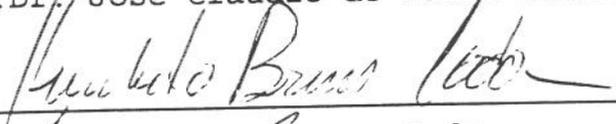
Aprovado por



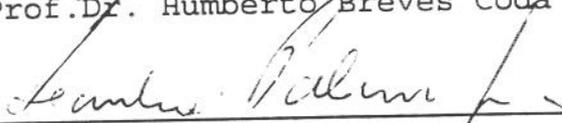
Prof.Dr. Euclides de Mesquita Neto



Prof.Dr. José Cláudio de Faria Telles



Prof.Dr. Humberto Breves Coda



Prof.Dr. Leandro Palermo Júnior



Prof.Dr. Fernando Iguti

Campinas, 11 de Julho de 1995.

À minha mãe, e aos meus irmãos,
dedico.

Agradecimentos:

-Ao Professor Dr.Euclides de Mesquita Neto pela orientação segura e competente;

-Aos professores, alunos e funcionários do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP;

-Aos amigos Edson Rodrigues Carvalho, Leandro Ferreira de Aguiar, Fernando Iguti, Carlson Verçosa, João Campos, Carlos Daros, Renato Marques, Celso Correia de Souza, José Antonio Menoni, Edson Capello e Bento R. de Pontes;

-Aos professores e funcionários do Departamento de Ciências Exatas da UFMS;

-À CAPES, pelo apoio financeiro; e

-À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro que proporcionou a infraestrutura de laboratório para a realização deste trabalho.

"A dúvida pertence aos sábios,
a certeza aos ignorantes."
Bertrand Russell

Notação

$i = \sqrt{-1}$	unidade imaginária.
ε_{ij}	tensor deformação.
σ_{ij}	tensor tensão.
μ^*, λ^*	módulos de Lamé complexos.
η	coeficiente de amortecimento.
ν	coeficiente de Poisson.
E, G	módulos de elasticidade longitudinal e transversal.
G^*	módulo de elasticidade transversal complexo.
$\bar{\psi}$	vetor rotação.
$\bar{\Delta}$	dilatação cúbica.
c_L^*, c_S^*	velocidades complexas das ondas longitudinal e transversal.
k_L^*, k_S^*	números de ondas longitudinal e transversal.
$\beta, \alpha_L, \alpha_S$	números de onda.
n^*	razão entre as velocidades das ondas transversal e longitudinal.
ω	frequência angular.
ρ	densidade do material.
$A_{i,s}, B_{i,s}$	amplitudes das ondas.
$F_{\text{Ray}} = F_R$	função de Rayleigh.
A_0	frequência adimensional.
a	semi-lado da fundação.
H_{ij}	funções de flexibilidade dinâmica complexas.
N_{ij}	matriz de flexibilidade dinâmica.
$\bar{U}_R, \bar{W}_R, \bar{\phi}_y$	graus de liberdade de corpo rígido.

\bar{F}_i, \bar{M}_y	forças externas.
t_k	coordenadas dos pontos da integração gaussiana.
γ_k	pesos da integração gaussiana.
$ J $	Jacobiano da transformação.
Ω	domínio considerado.
Γ_i	contorno considerado.
U_{ij}^*	solução fundamental em deslocamentos do espaço elástico completo.
t_{ij}^*	solução fundamental em tensões do espaço elástico completo.
exp	função exponencial.
sen	função seno.
cos	função cosseno.
senh	função seno hiperbólico.
cosh	função cosseno hiperbólico.
\bar{K}_i	vetor que contém as tensões na interface solo-fundação.
\bar{E}_q	matriz de equilíbrio de forças e momento.
\bar{C}_c	matriz de compatibilidade cinemática.
n_f	número de elementos sob a interface solo-fundação.
N_{wz}	flexibilidade dinâmica vertical.
N_{ux}	flexibilidade dinâmica horizontal.
N_{ϕ_m}	flexibilidade dinâmica devido ao momento.
N_{ϕ_x}, N_{ϕ_y}	termos cruzados da matriz de flexibilidade dinâmica.
\mathbb{R}^n	espaço euclidiano n-dimensional.
\mathbb{C}	espaço dos números complexos.
δ	delta de Dirac.

\bar{G}_{0ij}	funções de Green.
Rc	razão entre as velocidades das ondas transversais.
e/a	razão de engastamento.
h	altura da camada viscoelástica.

Abreviaturas

D.S.S.I.	Dynamic Soil-Structure Interaction.
P.V.M.T.	Problema de Valor de Contorno em Tensões.
P.V.C.M.	Problema de Valor de Contorno Misto.
M.E.F.	Método dos Elementos Finitos.
M.E.C.	Método dos Elementos de Contorno.
M.S.	Método da Superposição.
M.S.M.	Método da Superposição Modificado.
S.D.M.	Substructure Deletion Method (Método de Subestrutur <u>u</u> ração por Eliminação).

índice

Resumo	i
Abstract	ii
Introdução	1
1.- Equações da viscoelasticidade	11
2.- Propagação de ondas	20
2.1.- Problemas de valores de contorno viscoelástico na D.S.S.I.	21
2.1.1.- Solução dos problemas de valores de contorno em tensões	22
2.2.- Preparação para a solução no problema tridimensional	23
2.3.- Campos de deslocamentos e tensões	27
2.3.1.- Deslocamentos	28
2.3.2.- Tensões	29
2.4.- Funções de flexibilidade para um carregamento vertical	30
2.5.- Problema de valor de contorno bidimensional para o semi-espaço - carregamento vertical	32
2.6.- Problema de valor de contorno bidimensional para o semi-espaço - carregamento horizontal	35
2.7.- Adimensionalização das grandezas	37
3.- O Método da Superposição (M.S.) para a interação dinâmica de fundações de superfície com o semi-espaço	39
3.1.- Funções de flexibilidade complexas	39
3.2.- Equações de compatibilidade cinemática (deslocamentos de corpo rígido)	43
3.3.- Superposição das funções de flexibilidade complexas	45
3.4.- Equações de equilíbrio do sistema solo-fundação e matriz global do problema	47
3.5.- Campo de deslocamentos na superfície	52
4.- Interação dinâmica de fundações de superfície com uma camada viscoelástica sobre uma base rígida	54
4.1.- Colocação do problema	55
4.2.- Funções de influência do problema	58

4.2.1.- Solução do P.V.C.T. para um carregamento horizontal	61
4.3.- Evolução numérica das funções de influência	67
4.4.- A versão direta do Método dos Elementos de Contorno	70
4.5.- Discretizações no Contorno	70
4.6.- Interação com uma fundação rígida	71
4.7.- Validações e comparações	72
4.7.1.- Reserva de memória nos métodos	80
4.7.2.- Tempo necessário de CPU	80
5.- Funções de influência para o problema da interação dinâmica de fundações de superfície em meios estratificados	81
5.1.- Funções de flexibilidade do problema	82
5.2.- Carregamentos na superfície de um domínio visco-elástico estratificado com n camadas horizontais ...	85
5.3.- Resultados numéricos	87
5.3.1.- Fundação rígida de superfície sobre um semi-espaço viscoelástico homogêneo	90
5.3.2.- Camada viscoelástica sobre uma base rígida ...	92
5.3.3.- Camada viscoelástica sobre o semi-espaço	95
5.3.4.- Comentários	102
6.- O Método da Superposição Modificado (M.S.M.)	103
6.1.- Funções de Green no Método da Superposição Modificado	103
6.2.- Campo de deslocamentos	109
6.3.- Elementos lineares: solução via função de Green	110
6.4.- Elementos lineares: solução via transformada de Fourier	112
6.5.- Elementos quadráticos: solução via funções de Green	116
6.6.- Comparações entre o Método da Superposição e o Método da Superposição Modificado	117
7.- Fundações parcialmente engastadas	124
7.1.- O Método de Subestruturação por Eliminação	125
7.1.1.- Matriz de flexibilidade para a superfície do solo viscoelástico estratificado	127

7.1.2.- Matriz de flexibilidade da parte escavada do solo por elementos de contorno	127
7.1.3.- Matriz de flexibilidade dinâmica para a região engastada	128
7.2.- Resultados numéricos	130
7.2.1.- O semi-espaço viscoelástico homogêneo	131
7.2.2.- Camada viscoelástica sobre uma base rígida ...	135
7.2.3.- Camada viscoelástica sobre o semi-espaço	144
8.- Funções de influência no interior do semi-espaço viscoelástico e homogêneo	148
8.1.- Funções de flexibilidade para um carregamento vertical	149
8.2.- Funções de flexibilidade para um carregamento horizontal	157
8.3.- Subestruturação com funções de influência no interior do semi-espaço viscoelástico	158
Conclusões e perspectivas	165
Bibliografia	167
Apêndice A	177
Apêndice B	181
Apêndice C	184

Resumo

Este trabalho desenvolve uma metodologia para a síntese de funções de influência e Green para solos viscoelásticos lineares que apresentam estratificações horizontais. A finalidade deste é viabilizar a análise do problema da interação dinâmica solo-estrutura. Estas funções são obtidas para as fontes na superfície e no interior dos solos. Os problemas são formulados para o estado plano de deformação e no domínio da frequência. Partindo-se das funções de influência ou Green sintetizadas, desenvolvem-se duas metodologias para tratar estruturas de fundações parcial- ou totalmente engastadas nos solos. A primeira utiliza as funções de influência sintetizadas com fontes na superfície do semi-espaço viscoelástico e possibilita a análise de estruturas parcialmente engastadas. A segunda metodologia baseia-se em funções de influência com fontes no interior do solo e permite a análise de estruturas totalmente engastadas ou mesmo situadas no interior do domínio considerado. Comparações com respeito ao esforço de discretização, ao tempo de processamento e a capacidade de armazenamento entre a presente metodologia e a versão direta do chamado Método dos Elementos de Contorno são discutidas.

Abstract

This dissertation presents a methodology to synthesize influence or Green's functions for linear viscoelastic horizontally stratified soil profiles. These functions are applied to describe the linear dynamic soil-structure interaction phenomena. Influence functions for sources at the soil surface or buried at the domain are considered. Throughout this work a state of plane strain and stationary behaviour is assumed. The synthesized functions are used together with two substructure methodologies to model the dynamic behaviour of partially embedded and buried structures. The first methodology, called the Substructure Deletion Method, applies surface influence functions and allows the description of partial embedment. The second methodology based on functions with buried sources allow the analysis of totally embedded or buried structures. The present methodologies are compared with an implementation on the direct version of the Boundary Element Method. Comparisons include discretization effort, memory requirements and processing time.

Introdução

Os problemas relacionados com a interação dinâmica solo-estrutura (Dynamic Soil-Structure Interaction; D.S.S.I.), vêm constituindo-se ao longo dos anos numa importante área da pesquisa técnica e científica. Dentre alguns de seus objetivos destacam-se o desenvolvimento de projetos de estruturas em contato com o solo e sujeitas a excitações externas como: terremotos, ondas marítimas, forças eólicas ou vibrações de máquinas. As vibrações provocadas por um determinado mecanismo podem ocasionar distúrbios operacionais em outras máquinas, bem como perturbar o trabalho de pessoas que localizam-se próximas a estes mecanismos. Assim faz-se necessário uma análise detalhada do fenômeno de vibrações a fim de atenuá-las, ou mesmo eliminá-las.

Os primeiros estudos visando a compreensão do problema da D.S.S.I. caracterizaram-se por metodologias experimentais que nem sempre estavam em concordância com a realidade, bem como deixavam a desejar no que diz respeito a uma formulação teórica mais abrangente. Todavia, nas últimas décadas uma série de metodologias experimentais, analíticas e numéricas têm contribuído consideravelmente para a determinação da resposta completa ao problema de fundações dinamicamente excitadas sobre a superfície ou engastadas no solo.

Barkan [08], através de técnicas experimentais, desenvolveu várias tabelas e fórmulas empíricas que estimam com uma boa precisão os coeficientes ligados ao problema da dinâmica de fundações para cada modo possível de vibração (translacional e rotacional). Entretanto seu modelo fornece informações razoáveis, quanto à resposta da fundação, apenas sob a ação de baixas frequências (caso quase estático). Além disso, como nenhum amortecimento de radiação é incluído em seu modelo, as amplitudes do movimento em frequências próximas à ressonância não são estimadas realisticamente.

A análise da dinâmica de fundações interagindo com o solo apresenta um significativo avanço e um grande embasamento teórico a partir da associação do problema ao fenômeno de

propagação de ondas.

Quando deseja-se analisar teoricamente o problema da D.S.S.I. surge imediatamente a questão do modelo matemático para reproduzir o comportamento dinâmico dos solos. A dinâmica dos solos é relativamente complexa e envolve processos de propagação de perturbações em forma de onda. Um dos fenômenos mais característicos da dinâmica dos solos é a retirada de energia em forma de ondas que se propagam indefinidamente, a partir de uma fonte; sem sofrerem reflexão. Isto implica que nos solos ocorrem pelo menos dois tipos de fenômenos dissipativos. De fato, por um lado a energia é dissipada em termos de ondas que se propagam pelo meio, o chamado amortecimento geométrico, por outro a energia é dissipada por meio dos mecanismos de atrito interno, amortecimento interno ou material.

Consequentemente, qualquer modelo matemático para o solo que pretenda ter um certo grau de compromisso com a realidade necessita incluir estes efeitos dissipativos, bem como a dependência das propriedades elásticas e inerciais em relação às variáveis que regem os processos de propagação de perturbações através dos mesmos. Assim, a determinação de modelos matemáticos que visam dar uma compreensão dos fenômenos de propagação de perturbações em meios elásticos ou viscoelásticos e que tentam, de algum modo, simular o solo tem despertado o interesse de um grande número de pesquisadores.

O trabalho pioneiro de Lord Rayleigh [72] mostrou que além das clássicas ondas de corpo, dilatação e cisalhamento, que se propagam em um meio elástico ilimitado, existem ondas que se propagam perto das superfícies externas do meio. Estas ondas são hoje conhecidas como ondas de Rayleigh ou ondas de superfície. Em 1904 Lamb [46] resolveu o problema de uma força concentrada, um delta de Dirac, posicionado na superfície e no interior do solo; este modelado como um semi-espaco elástico. Lamb [46] mostrou que a uma razoável distância da fonte de excitação prevaleciam as ondas de Rayleigh.

Após os estudos realizados por Lamb foram desenvolvidas ao longo dos anos várias contribuições para o tratamento do pro

blema de deslocamentos e tensões resultante da aplicação de um dado carregamento num semi-espaço elástico.

Reissner [73] apresentou em 1936 o que é considerado a primeira aplicação do problema da interação dinâmica solo-estrutura na engenharia. Seu artigo sobre a resposta de um disco cilíndrico sem rigidez e verticalmente carregado sobre um semi-espaço elástico marcou o início da moderna dinâmica dos solos. A teoria de Reissner propiciou uma grande contribuição à modelagem destes problemas pois revelou a existência do amortecimento de radiação proveniente da propagação de ondas não refletidas. Em seus estudos, Reissner concluiu que ondas de tensão são geradas na superfície de contato entre o solo e a fundação. Estas ondas propagam-se tanto em forma de ondas de superfície como em ondas de corpo [45]. O tratamento de Reissner é essencialmente a solução de um Problema de Valor de Contorno em Tensões (P.V.C.T.) da elasto dinâmica.

Utilizando um método conhecido como o método da matriz de transferência, Thomson [78] analisou o problema elastodinâmico da transmissão de ondas planas num meio elástico estratificado. O último constituído de um número arbitrário de placas finas, paralelas e com propriedades materiais distintas.

Os movimentos na superfície e no interior de um semi-espaço elástico e uniforme, produzidos pela aplicação de uma carga impulsiva com variação no tempo dada pela função de Heaviside foi também investigado por Pekeris [65,66]. Pekeris analisou o efeito de uma carga concentrada, localizada no interior do semi-espaço; a uma dada profundidade da superfície. Os deslocamentos foram obtidos por meio de soluções tentativa e da colocação de condições de contorno nas equações transformadas de Navier. Como os deslocamentos, que descrevem a solução do problema, são dados em termos de integrais indefinidas e a análise é feita no meio elástico é necessário o tratamento dos integrandos através de transformações para o plano complexo, evitando-se possíveis pólos e tratando as ramificações.

As soluções para os problemas da D.S.S.I. tornaram-se mais rigorosas a partir do momento que associou-se o fenômeno de

vibrações do sistema solo-fundação como um Problema de Valor de Contorno Misto (P.V.C.M.) da elastodinâmica. Nos problemas de valores de contorno misto prescreve-se em parte da superfície do semi-espaço um campo de deslocamentos compatível com a fundação ali assentada, na parte complementar da superfície são prescritas forças de superfície nulas.

Awojobi e Grootenhuis [07] analisaram todos os possíveis modos de oscilação de um corpo rígido circular e retangular bidimensional (infinitamente longo) sobre a superfície de um semi-espaço. Os autores acima representaram o problema de valor de contorno misto por meio de integrais semi-infinitas.

Lysmer [51] modelou o problema da interação dinâmica solo-estrutura tentando obter uma analogia com o sistema massa-mola-amortecedor. Discretizando a superfície de contato por meio de anéis concêntricos de tensão vertical e uniforme, Lysmer obteve uma solução para o caso da vibração vertical axi-simétrica de uma fundação circular rígida sob um semi-espaço. Uma aproximação similar para o problema de fundações verticalmente carregadas foi ainda elaborado por Elorduy, Nieto e Szekely [27]. Os trabalhos de Lysmer [51] e Elorduy, Nieto e Szekely aproximam a solução de um P.V.C.M. através da superposição de um P.V.C.T. acrescidos de equações de compatibilidade cinemática e equilíbrio de esforços.

Nas últimas décadas, o desenvolvimento de poderosos equipamentos computacionais viabilizou a análise dos problemas da interação dinâmica solo-estrutura através de métodos numéricos. O Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) também foi utilizado para modelar fenômenos da D.S.S.I. A maior limitação da aplicação do M.E.F. é a incapacidade deste em reproduzir o amortecimento geométrico, uma vez que suas malhas são necessariamente limitadas e induzem algum tipo de reflexão de ondas [38,48,54]. Os pesquisadores do M.E.F. tem tentado eliminar esta limitação através do desenvolvimento de elementos "infinitos" [10,17] ou pela inclusão de fronteiras absorventes [15,74,77]. Os resultados obtidos até o presente momento não são completamente satisfatórios.

A partir do final da década de 70, com o trabalho de Dominguez [24], o chamado Método dos Elementos de Contorno

(M.E.C.) foi pela primeira vez aplicado à problemas da D.S.S.I. Desde então, inúmeras formulações e aplicações [01,13,14,26,39,53,67] mostraram que o M.E.C. é muito eficiente para problemas exteriores, de domínios ilimitados, pois modela com naturalidade o chamado amortecimento geométrico ou a chamada condição de radiação. O Método dos Elementos de Contorno consiste basicamente na transformação da equação diferencial, que governa o problema e é definida em todo seu domínio, em uma equação integral definida no contorno. Para a resolução numérica dos problemas é necessário o uso de funções ponderadoras denominadas soluções fundamentais [09,13]. A solução da equação integral é aproximada discretizando-se o contorno do domínio e assumindo-se uma variação conhecida das incógnitas ao longo do mesmo (constante, linear, quadrático) [13,14].

Para tratar os problemas da interação dinâmica solo-estrutura em domínios ilimitados a utilização de soluções fundamentais exige a criação artificial de contornos que teoricamente devem estender-se ao infinito [09,53]. Na prática é necessário determinar um modo adequado de truncar este contorno artificial criado. Como solução alternativa para o problema, faz-se o uso das chamadas funções de Green pois estas exigem apenas a discretização da superfície de contato das estruturas com o solo. Todavia, o preço a ser pago com o uso das funções de Green é a necessidade de um trabalho analítico mais complexo, trabalho este que tem sido objeto de estudo de um grande número de pesquisadores.

Uma análise significativa na busca de funções de Green para o problema da elastodinâmica foi realizada por Lane R. Johnson [41]. Em seu trabalho a autora descreve a solução completa tridimensional para a equação da elastodinâmica, num semi-espaço elástico, devido a uma perturbação inicial caracterizada pela aplicação de um delta de Dirac no domínio elástico. Johnson resolve o problema inicialmente no domínio transformado de Laplace. O posterior retorno ao domínio do tempo é realizado através do método de Cagniard-de-Hoop.

Utilizando as funções de Green sintetizadas por Johnson, ao invés das tradicionais soluções fundamentais, Triantafyllidis

[79] resolve o problema da elastodinâmica através do Método das Equações Integrais de Contorno. Triantafyllidis faz a aplicação de sua metodologia num semi-espço tridimensional, para o caso de uma fundação sobre a superfície do domínio elástico e submetida a uma carga vertical caracterizada por um impulso.

Gazetas e Roesset [35] apresentaram um estudo sobre as vibrações verticais de uma fundação rígida apoiada na superfície de um solo estratificado, com camadas horizontais, sobre um semi-espço elástico. O problema elastodinâmico é estudado através de um método semi-analítico e o algoritmo da FFT, determinando assim a chamada matriz de flexibilidade do sistema solo-fundação. O estudo analítico é baseado na solução direta das equações de ondas em termos de deslocamentos e da colocação adequada de condições físicas que acompanham o problema, estas representadas no modelo pelas condições de contorno na superfície e nas interfaces das camadas.

Através de uma ligeira modificação no método da matriz de transferência de Haskell-Thomson, Kausel e Roesset [42] determinaram uma nova metodologia, ligada às matrizes de rigidez de camadas, para estudar o problema da excitação interna num semi-espço elástico estratificado. Neste método obtém-se uma matriz de rigidez de camadas com algumas vantagens em relação as matrizes de rigidez usuais como: simetria, fácil adaptação à análise de múltiplos domínios, bem como a implementação de técnicas de subestruturação.

Luco e Apsel [50] e posteriormente Apsel e Luco [05] desenvolveram também um trabalho referente à síntese de funções de Green para o problema da elastodinâmica em domínios estratificados. A formulação deste método é feita inicialmente no domínio da frequência e é baseada na representação da resposta completa do problema em termos de integrais semi-infinitas com respeito ao número de onda, após uma expansão numa série de Fourier em relação ao azimute. Os integrandos para cada número de onda e frequência são determinados por meio de uma fatoração nos termos dos coeficientes generalizados de transmissão e reflexão, os quais são calculados através de um esquema iterativo. Resultados no domínio

do tempo podem ser conseguidos, nesta técnica, por meio de uma síntese de Fourier sobre o espectro da frequência.

Recentemente, Wang e Rajapakse [80] elaboraram uma técnica ligada ao método de funções de Green para calcular os deslocamentos e as tensões num semi-espaco elástico com camadas horizontais e sujeito a excitações harmônicas no tempo. As matrizes de rigidez das camadas, que descrevem a relação entre os deslocamentos e as tensões na parte superior e inferior de cada camada no domínio da transformada de Hankel, são conseguidas explicitamente através de uma solução analítica para deformações axi-simétricas no meio elástico, homogêneo e isotrópico. As funções de Green, para os deslocamentos e tensões no semi-espaco com camadas, são obtidas pela transformação inversa das integrais de Hankel. Apenas termos exponenciais negativos nos parâmetros da transformada de Hankel aparecem na matriz de rigidez de camadas, garantindo assim a estabilidade numérica da solução na equação de rigidez global.

No tratamento dos problemas da D.S.S.I. a maioria dos autores considera o solo um meio elástico. Quando deseja-se representar seus efeitos viscoelásticos deve-se alterar as equações constitutivas elásticas, que definem o meio, para equações constitutivas viscoelásticas tentando de algum modo simular seus efeitos dissipativos [53]. O princípio da correspondência entre soluções elásticas e viscoelásticas [37] garante que no domínio transformado (domínio da transformada de Fourier ou Laplace) a solução viscoelástica é obtida pela troca das constantes elásticas (E, G, λ, μ) por suas correspondentes viscoelásticas complexas $(E^*, G^*, \lambda^*, \mu^*)$ na solução analítica original. No chamado domínio da frequência é possível obter-se a solução fundamental para a viscoelastodinâmica pela simples aplicação do princípio da correspondência. Uma solução fundamental para viscoelastodinâmica no domínio do tempo requer a avaliação da transformada de Fourier inversa. Esta tarefa ainda está por ser feita. Alguns autores, entretanto, vêm trabalhando na busca de funções de influência, ou mesmo soluções fundamentais, para domínios viscoelásticos no domínio da frequência. Gaul [31] e Mesquita [56] sintetizaram funções de

influência, para a dinâmica de fundações, num semi-espaço viscoelástico bi- e tridimensional. A técnica baseia-se na substituição de soluções tentativa nas equações de ondas, que surgem da modificação da equação de Navier no domínio da frequência, com auxílio da decomposição de Helmholtz [75].

Um pré-requisito da análise da interação dinâmica de fundações rígidas e com propriedades inerciais não-nulas com os solos é a síntese das chamadas matrizes de flexibilidade dinâmica $H^*(\omega)$, ou rigidez dinâmica $K^*(\omega)$, para fundações sem massa [31]. A figura 1 ilustra um sistema solo-fundação-máquina com geometria e propriedades idênticas ao sistema solo-fundação, exceto que a massa da fundação neste último é considerada nula.

Uma vez determinada a resposta harmônica do sistema com a fundação sem massa, a resposta do estado estacionário de uma fundação com massa, ou de qualquer estrutura suportada sobre ela, pode ser calculada. Além disso, a resposta transiente à uma força não-harmônica provocada por um dado mecanismo pode também ser obtida com o auxílio da análise de Fourier [31].

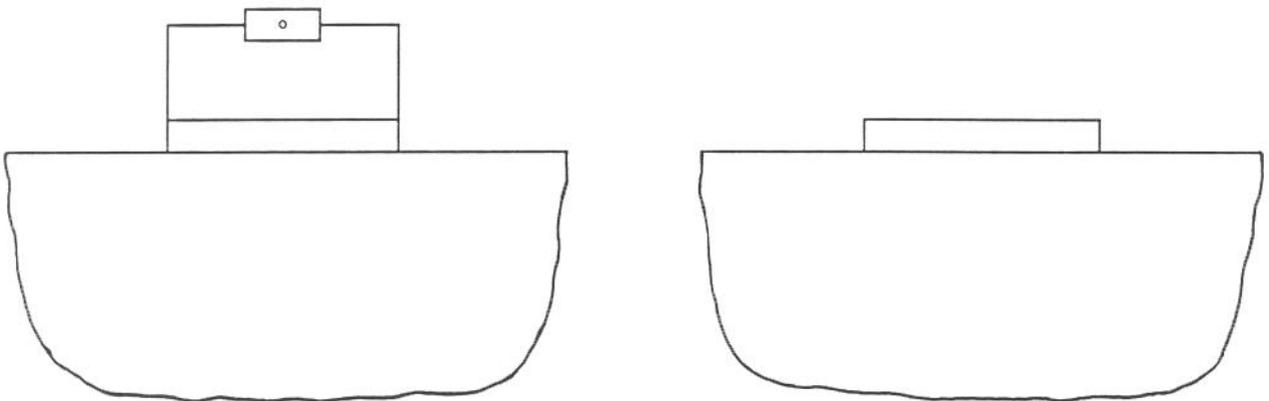


Figura 1. Sistemas solo-fundação-máquina e solo-fundação.

Embora existam metodologias para síntese de funções de Green para diversos problemas da D.S.S.I. [35,41,42,50,65,71,78] a implementação das mesmas é praticamente impossível, a menos que todo o formidável trabalho analítico/numérico a elas associado seja feito.

Em sua tese de doutorado Mesquita [56] sintetizou matrizes de influência dinâmica para fundações bi- e tridimensionais assentadas na superfície de um semi-espaco viscoelástico, no domínio da frequência. Este trabalho [56], por sua vez, já era uma extensão do trabalho de livre docência de Gaul [31].

Com a intenção de contribuir nos estudos da análise dinâmica de fundações e/ou estruturas, em contato com o solo, este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de funções de influência ou Green, para sintetizar matrizes de flexibilidade dinâmica para o problema da viscoelastodinâmica bidimensional no domínio da frequência. O presente trabalho traz duas contribuições significativas para a modelagem da D.S.S.I., quando comparado à [56]. A primeira contribuição diz respeito a uma modelagem mais realista dos solos pela inclusão de camadas ou estratificações horizontais. A segunda, e talvez mais importante, é a formulação e implementação de duas metodologias que permitem o tratamento de fundações parcial- ou totalmente engastadas nos solos.

Em síntese, a análise dinâmica do sistema solo-fundação, através de funções de influência, compõe-se da solução de um problema de valor de contorno em tensões. Visando aproximar o problema de valor de contorno criado, o presente método faz a superposição das funções de influência em segmentos discretizados da interface solo-fundação, chegando-se assim ao chamado Método da Superposição (M.S.).

No capítulo 1 desta dissertação destacam-se as equações viscoelásticas bem como a caracterização do solo através de suas constantes complexas. A seguir, no capítulo 2, pela decomposição de Helmholtz, procura-se escrever a equação de Navier como equações desacopladas de ondas (longitudinal e transversal). Obtém-se assim, por meio de soluções tentativa, as expressões para o campo de deslocamentos e tensões. Através das condições de contorno em tensões, das soluções tentativa, dos deslocamentos e da transformação integral de Fourier sintetiza-se as funções de influência para o domínio considerado.

Para resolver o problema da interação dinâmica solo-estrutura bidimensional superpõe-se, no capítulo 3, as funções de

influência em cada segmento discretizado da interface solo-fundação no semi-espaço viscoelástico. Constrõe-se, a seguir, a matriz global de flexibilidade dinâmica. Adiciona-se ainda, a esta matriz global, as equações de compatibilidade cinemática e de equilíbrio de forças para uma fundação considerada como um corpo rígido.

Descrito o Método da Superposição, passa-se à determinação das funções de influência em domínios estratificados. Assim, no capítulo 4, considera-se o problema da interação dinâmica de fundações de superfície sobre uma camada viscoelástica sobre uma base rígida. Neste problema são feitas algumas comparações com outras metodologias, particularmente a versão direta do M.E.C., a fim de validar o presente método.

No capítulo 5, sintetiza-se também funções de influência para outro problema da viscoelastodinâmica, qual seja, o problema da interação dinâmica de fundações de superfície sobre uma camada viscoelástica sobre um semi-espaço.

Em seguida, no capítulo 6, pela alteração na forma de carregamento na superfície do semi-espaço viscoelástico (i.e., aplicando um delta de Dirac ao invés de um carregamento constante por segmentos nas tensões de superfície), chega-se às funções de Green características do Método da Superposição Modificado (M.S.M.).

Ampliando o campo de análise para os problemas da D.S.S.I. descreve-se ainda, no capítulo 7, um método recente de subestruturação por eliminação (Substructure Deletion Method; S.D.M.). Neste utilizam-se as funções de influência de superfície, anteriormente sintetizadas, para avaliar o comportamento dinâmico de fundações engastadas em vários perfis de solo.

Finalmente, no capítulo 8, desenvolvem-se as funções de influência para o interior do semi-espaço viscoelástico e homogêneo. A finalidade agora é a adaptação destas funções numa outra técnica de subestruturação que permite o tratamento de fundações situadas no interior do solo.

1.-Equações da viscoelasticidade

A descrição do comportamento de materiais viscoelásticos é mais complicada do que a análise de sólidos elásticos e fluidos Newtonianos. Num sólido elástico a tensão é determinada pela deformação do material relativo a uma dada configuração fixa de referência. Assim em cada ponto material de um sólido elástico a tensão no tempo atual depende somente do valor atual da deformação. Num fluido Newtoniano a tensão é determinada pelo gradiente do campo de velocidade (e densidade, se o fluido é compressível), sendo a tensão num dado ponto uma função do valor atual do gradiente de velocidade. Materiais viscoelásticos exibem, por sua vez, um comportamento que pode-se situar entre os sólidos e os fluidos clássicos; entretanto, as tensões em tais materiais não são determinadas apenas pelo seu estado atual de deformação e movimento, mas, o passado histórico da deformação tem de ser considerado. Por este motivo tais materiais são usualmente denominados materiais com memória.

O fato dos materiais viscoelásticos apresentarem características de memória faz com que as equações viscoelásticas tenham um aspecto diferente das equações da elasticidade. Desse modo, para um material viscoelástico, isotrópico e linear o tensor deformação infinitesimal é definido [16] como,

$$\varepsilon_{ij}(\tau) = \frac{1}{2} [U_{i,j}(\tau) + U_{j,i}(\tau)], \quad (-\infty < \tau \leq t) \quad (1.1)$$

em que, τ indica a variável tempo, t o tempo atual, U_i o deslocamento e a vírgula significa a diferenciação parcial com respeito à coordenada x_i .

Considerando o tensor tensão σ_{ij} as equações constitutivas para um contínuo viscoelástico e isotrópico [16] têm a forma:

$$\sigma_{ij}(x, t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t 2\mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.2)$$

com $\lambda(t-\tau)$ e $\mu(t-\tau)$ sendo funções de relaxação e o índice repetido indicando uma soma.

Antes de prosseguir no desenvolvimento das equações da viscoelasticidade, vale a pena fazer um breve comentário a respeito das equações reduzidas viscoelásticas.

Uma dada equação diferencial parcial ou equação integral, que descreve o modelo matemático de um determinado problema físico, está bem colocada em termos matemáticos se esta estiver acompanhada de suas condições de contorno e condições iniciais. Entretanto, quando trabalha-se em domínios transformados, Fourier por exemplo, não são consideradas as condições iniciais do problema. A não inclusão das condições iniciais em alguns problemas transformados pode ser analisada de acordo com a seguinte colocação.

Seja o problema viscoelástico para o caso especial onde as forças de corpo e as condições de contorno são harmônicas no tempo e com frequência angular ω , isto é,

$$f(x,t) = \bar{F}(x,\omega) \exp(i\omega t).$$

Admite-se que a solução deste problema, dado pelo deslocamento $u(x,t)$, possa ser colocado [28] na forma,

$$u(x,t) = u^T(x,t) + u^E(x,t),$$

em que, $u^T(x,t)$ é a parte transiente da solução, enquanto que,

$$u^E(x,t) = \bar{U}(x,\omega) \exp(i\omega t),$$

representa as oscilações do estado estacionário do problema. Sejam ainda, as funções $\bar{U}(x,\omega)$ e $\bar{F}(x,\omega)$ integráveis para (x,ω) em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C} .

A parte $\bar{U}(x,\omega)$ dada na solução anterior é determinada de modo a satisfazer as condições de contorno do problema sob uma

dada densidade de força de corpo. Já a parte transiente é colocada como a solução homogênea do problema sob condições de contorno também homogêneas mas satisfazendo as condições iniciais,

$$u^T(x, 0) = u(x, 0) - \bar{U}(x, \omega),$$

$$\frac{\partial u^T(x, 0)}{\partial t} = v(x, 0) - i\omega \bar{U}(x, \omega),$$

em que $u(x, 0)$ e $v(x, 0)$ são funções que dependem apenas da posição. Vê-se nas expressões anteriores que os valores iniciais do campo de deslocamentos atuam apenas na parte transiente da solução [28].

Visto que em qualquer sistema físico existe sempre amortecimento, interno ou externo, é razoável supor que a parte transiente da solução desapareça após um certo intervalo de tempo. Dessa forma, deve-se considerar apenas a solução do problema em seu estado estacionário reformulando-o de modo que o instante de observação do movimento esteja suficientemente longe dos estágios iniciais (início da perturbação). Evidentemente esta é uma hipótese simplificadora visto que a variável tempo é eliminada da equação diferencial que governa o problema.

O problema de valor inicial e de contorno é portanto reduzido a um problema de valor de contorno somente. O significado matemático para esta representação, isto é, $\bar{U}(x, \omega)$, é dado pela integral de todas as frequências possíveis ou transformada de Fourier,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(x, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Retomando a análise das equações da viscoelasticidade, se a deformação é uma função harmônica no tempo, ou seja,

$$\varepsilon_{ij}(x, \tau) = \varepsilon_{ij}(x) \exp(i\omega\tau), \quad (1.3)$$

tem-se,

$$\frac{d\varepsilon_{ij}(x, \tau)}{d\tau} = i\omega \varepsilon_{ij}(x) \exp(i\omega\tau). \quad (1.4)$$

Considerando as relações (1.3) e (1.4) e fazendo $\eta=t-\tau$, a equação (1.2) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) = i\omega \left[\int_0^{\infty} \lambda(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \varepsilon_{kk}(x) \delta_{ij} \exp(i\omega t) + \\ i\omega \left[\int_0^{\infty} 2\mu(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \varepsilon_{ij}(x) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pela propriedade das funções de relaxação, em que, $\lambda(t)=\mu(t)=0$, para $t<0$, pode-se reescrever a equação (1.5) na forma,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) = i\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \varepsilon_{kk}(x) \delta_{ij} \exp(i\omega t) + \\ i\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} 2\mu(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \varepsilon_{ij}(x) \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

ou ainda,

$$\sigma_{ij}(x, t) = [\lambda^*(\omega) \varepsilon_{kk}(x) \delta_{ij} + 2\mu^*(\omega) \varepsilon_{ij}(x)] \exp(i\omega t), \quad (1.7)$$

em que, $\lambda^*(\omega)$ e $\mu^*(\omega)$ são funções de valores complexos ou módulos de Lamé complexos. As integrais na equação (1.6) indicam a trans

formada de Fourier de $\lambda^*(\omega)$ e $\mu^*(\omega)$, ou seja,

$$\lambda^*(\omega) = i\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right], \quad (1.8)$$

$$\mu^*(\omega) = i\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right].$$

Em particular, assumindo o tensor tensão σ_{ij} também harmônico na variável t , segue de (1.7) que:

$$\sigma_{ij}(x) = [\lambda^*(\omega) \varepsilon_{kk}(x) \delta_{ij} + 2\mu^*(\omega) \varepsilon_{ij}(x)]. \quad (1.9)$$

A equação (1.9) acima é a mesma equação constitutiva para problemas elásticos lineares. A única diferença está nos módulos de Lamé $\lambda^*(\omega)$ e $\mu^*(\omega)$ que são complexos e dependem da frequência. Portanto a formulação de problemas viscoelásticos harmônicos no tempo tem as mesmas características dos problemas ligados a elasticidade linear substituindo-se as constantes elásticas pelas correspondentes viscoelásticas.

A equação (1.2) pode ainda ser escrita em termos de deslocamentos. Para isso, considera-se o balanço da quantidade de movimento linear no caso dinâmico em viscoelasticidade [16], dado por:

$$\sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = \rho \frac{\partial^2 U_i(t)}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

em que, F_i são as forças de corpo, ρ é a densidade de massa e U_i o vetor deslocamento.

Combinando as relações (1.1), (1.2) e (1.10) obtém-se as

equações de movimento em viscoelasticidade como:

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial U_{i,jj}}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial U_{k,ki}}{\partial \tau} d\tau + F_i = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}. \quad (1.11)$$

Na equação (1.11) admitindo as forças de corpo por unidade de volume nulas, ou seja, $F_i=0$, e novamente considerando os deslocamentos harmônicos no tempo, pode-se reescrever (1.11) na forma,

$$\mu^*(\omega) \bar{U}_{i,jj} + [\lambda^*(\omega) + \mu^*(\omega)] \bar{U}_{k,ki} = -\omega^2 \rho \bar{U}_i. \quad (1.12)$$

As constantes físicas do material, dadas pelo módulo de Lamé complexo, equações (1.8), podem ainda serem escritas como:

$$\mu^*(\omega) = \mu [1 + i\eta_\mu(\omega)], \quad (1.13)$$

$$\lambda^*(\omega) = \lambda [1 + i\eta_\lambda(\omega)],$$

em que os coeficientes $\eta_\mu(\omega)$ e $\eta_\lambda(\omega)$ caracterizam o amortecimento material (interno) do sistema.

A seguir será exemplificado a relação entre as constantes que caracterizam materiais elásticos e viscoelásticos tomando-se como ponto de partida modelos viscoelásticos simples. Desse modo, seja um elemento elástico dado por uma mola de constante elástica k , e um elemento viscoso dado por um amortecedor com constante de viscosidade c , ilustrados na figura 1.1.

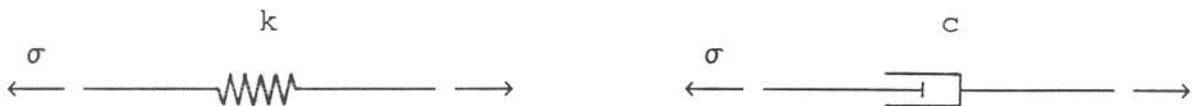


Figura 1.1. Elementos elástico e viscoso representados, respectivamente, pela mola e amortecedor.

A aplicação de uma tensão σ em cada elemento ocasiona uma deformação ϵ que corresponde a um acréscimo da distância entre os extremos de cada elemento no estado carregado para o estado descarregado. Assim, para o elemento elástico tem-se $\sigma=k\epsilon$, enquanto que para o elemento viscoso, $\sigma=c\dot{\epsilon}$.

A combinação do elemento elástico e viscoso em paralelo é conhecida como um elemento de Voigt ou Kelvin-Voigt [45].

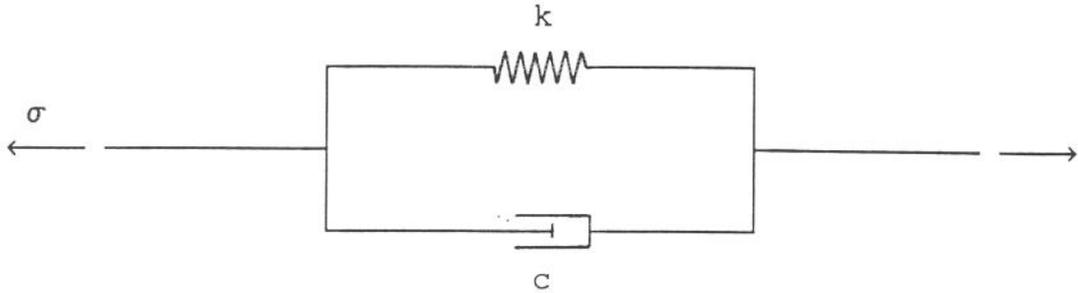


Figura 1.2. Elemento elástico e viscoso em paralelo.

No elemento de Kelvin-Voigt a deformação ϵ é a mesma na mola e no amortecedor. Sejam σ_M a tensão na mola e σ_A a tensão no amortecedor, então $\sigma=\sigma_M+\sigma_A$.

Segue-se que, $\sigma=\sigma_M+\sigma_A=k\epsilon+c\dot{\epsilon}$, assim a equação constitutiva para este elemento é dada por:

$$\sigma=k\epsilon+c\dot{\epsilon}. \quad (1.14)$$

Considerando um movimento harmônico no tempo de frequência ω , pode-se reescrever (1.14) como,

$$\bar{\sigma}\exp(i\omega t)=(k\bar{\epsilon}+i\omega c\bar{\epsilon})\exp(i\omega t),$$

ou seja,

$$\bar{\sigma}=k(1+i\omega f)\bar{\epsilon}, \quad (1.15)$$

em que $f=c/k$ é o coeficiente de amortecimento.

Uma comparação entre a equação (1.15) e a equação elástica da mola, $\sigma = k\varepsilon$, sugere que a relação entre o comportamento elástico e viscoelástico no domínio da frequência é dado pela simples troca de k por $k^* = k(1+i\omega f)$ [53]. Esta representação do amortecimento indica que a dissipação de energia é dependente da frequência.

O modelo de Kelvin-Voigt, que apresenta uma relação diretamente proporcional entre frequência e o coeficiente de amortecimento, não reproduz o comportamento de solos e outros materiais de engenharia, para todas as faixas de frequência, especialmente as mais altas [33,56]. Outro modelo, chamado de "histerese constante", admite que o coeficiente de amortecimento seja independente da frequência $k^* = k(1+i\eta)$, em que η é um coeficiente constante [56].

Baseado nestas observações pode-se estabelecer uma relação para aproximar a descrição de mecanismos de amortecimento material num sólido (visco)-elástico. Esta relação faz com que as constantes elásticas comumente utilizadas, λ e μ , sejam trocadas no domínio da frequência por suas relações complexas:

$$\begin{aligned}\mu^* &= \mu [1+i\eta_\mu], \\ \lambda^* &= \lambda [1+i\eta_\lambda].\end{aligned}\tag{1.16}$$

Os termos η_μ e η_λ são denominados coeficientes constantes de amortecimento e usualmente tomados como $\eta_\mu = \eta_\lambda = \eta$.

As constantes viscoelásticas podem ainda serem escritas de outras formas indicando uma analogia com as constantes físicas de meios elásticos utilizadas em engenharia [56]:

$$\begin{aligned}\mu^* &= G^*, \\ \lambda^* &= \frac{G^* [E^* - 2G^*]}{3G^* - E^*}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Na equação (1.17) tem-se $G^* = G[1+i\eta_s]$ e $E^* = E[1+i\eta_p]$. E e

G são, respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal. Nota-se que para $\eta_s = \eta_D = 0$, $G^* = G$ e $E^* = E$.

A razão de Poisson viscoelástica pode ainda ser dada por,

$$\nu^* = \frac{E^*}{2G^*} - 1. \quad (1.18)$$

Deve-se notar que em (1.18) se $\eta_D = \eta_s$ ou $\eta_\lambda = \eta_\mu$, então, ν é real.

2.-Propagação de ondas

Em domínios elásticos, isotrópicos e homogêneos, as equações que descrevem o comportamento físico do meio são usualmente obtidas através da análise das tensões e deformações que sofre o meio, quando submetidos à ação de forças. A equação linear do movimento, também chamada de equação do movimento de Navier-Cauchy ou equação de Navier, pode ainda ser decomposta em equações de ondas longitudinal e transversal, bastando para isso aplicar, respectivamente, os operadores divergente e rotacional. Nota-se por essa decomposição a importância do estudo das equações de onda em problemas elásticos. Quanto às técnicas de resolução para a equação de onda uma das mais simples e úteis é a análise da solução por meios de ondas planas.

Uma onda plana propagando-se na direção definida pelo vetor unitário $\vec{q}=(l,m,n)$ é uma perturbação na qual todos os pontos em qualquer plano perpendicular a \vec{q} possuem os mesmos deslocamentos no mesmo tempo.

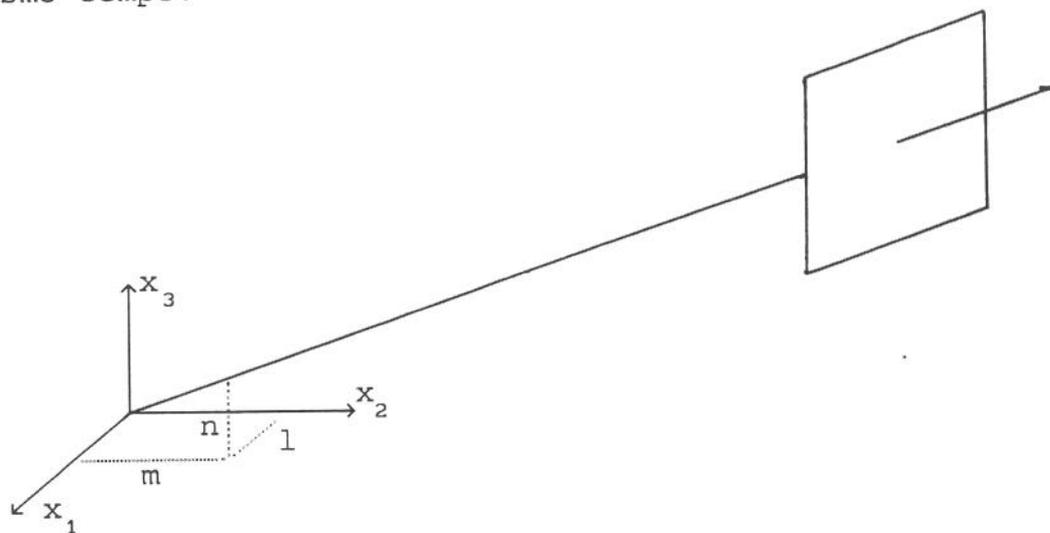


Figura 2.1. Deslocamento correspondente a propagação de uma onda plana.

Através das constantes físicas do meio, onde ocorre a propagação, e pelo estudo dos autovalores e autovetores associados à equação de Navier, pode-se mostrar que num meio elástico

ilimitado existem somente dois tipos possíveis de ondas planas, a saber, a longitudinal e a transversal [75].

Outro tipo comum de onda encontrada em semi-espacos elásticos é a onda de superfície ou onda de Rayleigh [46]. A onda de Rayleigh não é uma onda plana, sendo caracterizada por um decaimento exponencial em relação à profundidade. Pode-se também mostrar que a onda não plana de Rayleigh é obtida pela superposição de ondas longitudinais e transversais.

Um dos primeiros estudos visando a resolução da equação de Navier num meio elástico por meio da equação de ondas foi realizado por Lamb em 1904 [46]. Neste trabalho pioneiro; foi considerado a propagação das vibrações sobre a superfície de um sólido elástico semi-infinito e isotrópico devido à aplicação de uma força arbitrária num ponto, ou linha qualquer, na superfície ou no interior do domínio. Neste estudo, as equações de Navier são desacopladas em duas equações de ondas, sendo uma escalar e a outra vetorial. Formalmente é admitida uma solução tentativa por meio de ondas planas que decaem com a profundidade. Em seguida esta solução é colocada nas equações desacopladas das ondas obtendo-se, através das condições de contorno, uma relação entre os parâmetros como amplitudes e números de onda do problema.

Na busca da solução da equação viscoelástica dada pela equação (1.12) procurar-se-á seguir um desenvolvimento similar ao descrito por Lamb no caso elástico [46].

2.1.-Problemas de valores de contorno viscoelástico na D.S.S.I.

Os problemas da interação dinâmica solo-estrutura são, em geral, problemas de valor de contorno misto (P.V.C.M.) da elastodinâmica. Nestes problemas parte das condições de contorno são prescritas na forma de deslocamentos, por exemplo, um campo de deslocamentos compatível com o movimento da fundação na interface solo-estrutura. A outra parte é geralmente descrita em termos de

forças de superfície (tractions), ou seja, uma superfície isenta de tensões no contorno complementar à interface solo-fundação.

Neste presente trabalho, seguindo a tradição iniciada por Lysmer [51], iniciar-se-á pela solução de problemas de valor de contorno em tensões (P.V.C.T.), ou pelo primeiro problema de valor de contorno em tensões da elastodinâmica [28]. Na sequência as soluções dos P.V.C.T. serão superpostas e a elas adicionadas condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio de esforços para se obter a solução aproximada do P.V.C.M.

A figura 2.2. mostra dois típicos P.V.C.T. que serão tratados para posteriormente aproximarem a solução do P.V.C.M.

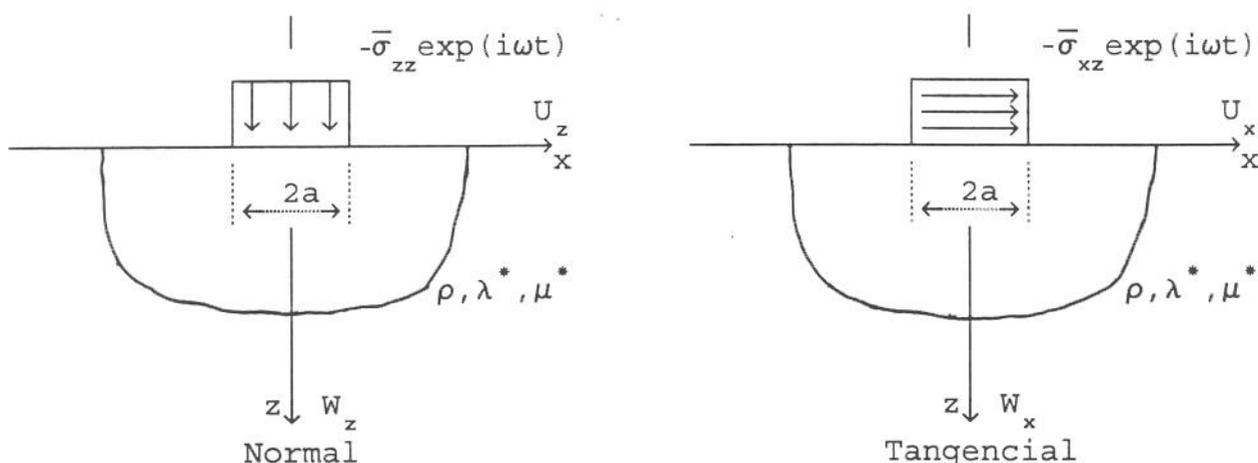


Figura 2.2. Carregamentos normal e tangencial na superfície do semi-espaço viscoelástico.

2.1.1.1.-Solução dos problemas de valores de contorno em tensões

Assumindo os deslocamentos harmônicos no tempo, ou seja,

$$U_i^E(x, t) = \bar{U}_i(x) \exp(i\omega t),$$

pode-se escrever a equação de Navier, na ausência de forças de

corpo (eq. 1.12), na forma:

$$\mu^* \bar{U}_{i,jj} + [\lambda^* + \mu^*] \bar{U}_{k,ki} = - \omega^2 \rho \bar{U}_i \quad (2.1)$$

Para que o P.V.C.T. seja bem posto resta especificar as condições de contorno. Assim, considerando os carregamentos normal σ_{zz} e tangencial σ_{xz} na superfície do semi-espaço, as condições de contorno em tensões são dadas pelas forças de superfície t_p ($p=x,z$), que para os casos bi- e tridimensional são respectivamente:

$$2\text{-D} \quad t_p = \bar{\sigma}_{0pz}(x, z=0) = \begin{cases} \bar{\sigma}_{pz} & ; \quad |x| \leq a \\ 0 & ; \quad |x| > a \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$3\text{-D} \quad t_p = \bar{\sigma}_{0pz}(x, y, z=0) = \begin{cases} \bar{\sigma}_{pz} & ; \quad |x| \leq a \quad , \quad |y| \leq b \\ 0 & ; \quad |x| > a \quad , \quad |y| > b \end{cases} \quad (2.2b)$$

em que $p=x,z$.

As condições de contorno em (2.2a) para o caso bidimensional estão ilustradas na figura 2.2.

2.2.- Preparação para a solução no problema tridimensional

Colocado o problema de valor de contorno em tensões, o passo seguinte consiste na resolução da equação viscoelástica para o caso tridimensional. Com o auxílio de identidades vetoriais apropriadas pode-se decompor a equação (2.1) em equações de onda.

Desse modo, utilizando a identidade vetorial,

$$\nabla^2 \bar{U} = \nabla(\nabla \bar{U}) - \nabla x(\nabla x \bar{U}), \quad (2.3a)$$

que tem a forma indicial,

$$\bar{U}_{i,jj} = \bar{U}_{j,ji} - e_{ijk} e_{klm} \bar{U}_{m,lj}, \quad (2.3b)$$

pode-se escrever (2.1) como:

$$\mu^* [\bar{U}_{j,ji} - e_{ijk} e_{klm} \bar{U}_{m,lj}] + [\lambda^* + \mu^*] \bar{U}_{k,ki} + \omega^2 \rho \bar{U}_i = 0. \quad (2.4)$$

Considerando o vetor rotação infinitesimal do contínuo,

$$2\bar{\psi}_n = e_{nkl} \bar{U}_{l,k} = \nabla \times \bar{U}, \quad (2.5a)$$

e definindo a dilatação cúbica do meio como:

$$\bar{\Delta} = U_{j,j} = \nabla \bar{U}, \quad (2.5b)$$

a equação (2.4) é reescrita na forma:

$$\frac{[\lambda^* + 2\mu^*]}{\omega^2 \rho} \bar{\Delta}_{,i} - \frac{\mu^*}{\omega^2 \rho} 2e_{imn} \bar{\psi}_{n,m} + \bar{U}_i = 0. \quad (2.6)$$

Num contínuo viscoelástico é comum definir a velocidade da onda de dilatação c_L^* e de cisalhamento c_S^* como,

$$c_L^{*2} = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho} \quad ; \quad c_S^{*2} = \frac{\mu^*}{\rho}, \quad (2.7)$$

em que ρ é a densidade do meio. Também é frequente encontrar os

números complexos de onda na forma,

$$k_L^{*2} = \frac{\omega^2}{c_L^{*2}} \quad ; \quad k_S^{*2} = \frac{\omega^2}{c_S^{*2}} \quad . \quad (2.8)$$

Portanto, com o auxílio das relações (2.7) e (2.8) a equação (2.6) pode ainda ser colocada como,

$$\bar{U}_i = - \frac{1}{k_L^{*2}} \bar{\Delta}_{,i} + \frac{2}{k_S^{*2}} e_{imn} \bar{\psi}_{n,m} \quad . \quad (2.9)$$

Na equação anterior, utilizando-se a decomposição de Helmholtz, e lembrando que os operadores divergente e rotacional satisfazem as equações,

$$e_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\Delta} \right] = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} [e_{imn} \bar{\psi}_{n,m}] = 0, \quad (2.10)$$

pode-se desacoplar a equação (2.9) nas equações de onda:

$$\bar{\Delta} + \frac{1}{k_L^{*2}} \bar{\Delta}_{,ii} = 0, \quad (2.11)$$

$$\bar{\psi}_i + \frac{1}{k_S^{*2}} \bar{\psi}_{i,jj} = 0. \quad (2.12)$$

Em (2.11) a dilatação cúbica $\bar{\Delta}$ satisfaz a equação escalar da onda (ou equação dilatacional da onda), cuja velocidade de propagação c_L^* é comumente referida como velocidade da onda dilatacional. Ondas dilatacionais são também chamadas de ondas longitudinais, ou ondas irrotacionais ou, em sismologia, de ondas-P. Já o vetor rotação em (2.12) satisfaz a equação vetorial da onda sendo esta conhecida como equação transversal da onda,

também chamada de onda equivolumental, pois seu divergente é nulo. Estas ondas ainda são conhecidas como ondas transversais, ondas de cisalhamento, ou ondas-S. A velocidade de propagação c_s^* é frequentemente referida como velocidade da onda de cisalhamento do meio viscoelástico.

Nas equações desacopladas (2.11) e (2.12) é importante observar que a unicidade da decomposição é garantida [28], colocando-se algumas restrições, uma delas pode ser dada por:

$$\bar{\psi}_{1,1} = 0. \quad (2.13)$$

Para as equações de onda (2.11) e (2.12) admite-se uma solução relacionada com cada termo envolvido. Assim para o termo dilatacional tridimensional pode-se supor sua solução na forma,

$$\bar{\Delta} = A k_L^{*2} \exp[-\alpha_L z + i(\beta x + \gamma y)], \quad (2.14)$$

em que, A é a amplitude de onda, enquanto α_L , β e γ são números de onda.

A colocação da solução tentativa (2.14) na equação (2.11) fornece,

$$\alpha_L^2 = (\beta^2 + \gamma^2) - k_L^{*2}. \quad (2.15)$$

Considerando como solução tentativa na equação (2.12) uma onda na forma,

$$\bar{\psi}_j = B_j k_s^{*2} \exp[-\alpha_s z + i(\beta x + \gamma y)], \quad j=1,2, \quad (2.16)$$

obtem-se a equação de restrição,

$$\alpha_s^2 = (\beta^2 + \gamma^2) - k_s^{*2}. \quad (2.17)$$

Das relações (2.13) e (2.16) segue que,

$$B_3 = \frac{i}{\alpha_s} [\beta B_1 + \gamma B_2]. \quad (2.18)$$

Quando a condição $\text{Re}(\alpha_L, \alpha_s) > 0$ é satisfeita, tem-se as chamadas ondas planas que decaem com a profundidade. Esta condição também indica a não existência de ondas vindo do infinito [31]. Esta é uma condição necessária para que a condição de radiação (de Sommerfeld), associada ao amortecimento geométrico, seja satisfeita.

2.3.- Campos de deslocamentos e tensões

No ítem 2.2 foi possível decompor a equação de Navier no domínio tridimensional em equações de ondas relacionadas com o divergente $\bar{\Delta}$ e as componentes do vetor rotação $\bar{\psi}_i$. Neste ítem utiliza-se a equação de deslocamentos (2.9) para também relacionar o tensor tensão com estes mesmos termos.

Assim considera-se um semi-espaco viscoelástico, homogêneo e isotrópico no qual as tensões assumem a forma,

$$\sigma_{ij}(x, t) = \bar{\sigma}_{ij}(x) \exp(i\omega t).$$

O tensor tensão e o tensor deformação de Cauchy podem então serem escritos, respectivamente, como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \delta_{ij} \lambda^* \bar{\epsilon}_{kk} + 2\mu^* \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (2.19)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} [\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}]. \quad (2.20)$$

Combinando as relações (2.9), (2.19) e (2.20) o tensor tensão pode finalmente ser colocado na forma:

$$\bar{\sigma}_{ij} = G \left(\delta_{ij} \frac{(1-2n^{*2})}{n^{*2}} \bar{\Delta} - \frac{2}{k_L^{*2}} \bar{\Delta}_{,ij} + \frac{2}{k_S^{*2}} [e_{ikl} \bar{\psi}_{l,kj} + e_{jlk} \bar{\psi}_{k,li}] \right), \quad (2.21)$$

em que $n^{*2} = \frac{k_L^{*2}}{k_S^{*2}}$.

2.3.1.- Deslocamentos

Pelas soluções tentativas (2.14) e (2.16), obtém-se da equação (2.9) as componentes do vetor deslocamento como,

$$\bar{U}_1(x, y, z) = \left\{ -A_i \beta \exp(-\alpha_L z) - \frac{2}{\alpha_S} \left[B_1 \beta \gamma - B_2 (-\gamma^2 + \alpha_S^2) \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.22a)$$

$$\bar{U}_2(x, y, z) = \left\{ -A_i \gamma \exp(-\alpha_L z) + \frac{2}{\alpha_S} \left[B_1 (\beta^2 - \alpha_S^2) + B_2 \beta \gamma \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.22b)$$

$$\bar{U}_3(x, y, z) = \left\{ A \alpha_L \exp(-\alpha_L z) - 2i \left[B_1 \gamma - B_2 \beta \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)). \quad (2.22c)$$

2.3.2.- Tensões

Da mesma forma, substituindo as tentativas (2.14) e (2.16) mais a equação (2.18) na equação (2.21) tem-se as componentes do tensor de tensões dado por,

$$\bar{\sigma}_{xz}(x, y, z) = 2G^* \left\{ Ai\beta\alpha_L \exp(-\alpha_L z) + \left[2B_1\beta\gamma + B_2(\gamma^2 - \beta - \alpha_S^2) \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.23a)$$

$$\bar{\sigma}_{yz}(x, y, z) = 2G^* \left\{ Ai\gamma\alpha_L \exp(-\alpha_L z) + \left[B_1(\gamma^2 - \beta + \alpha_S^2) - 2B_2\beta\gamma \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.23b)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(x, y, z) = G^* \left\{ -A(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_S^2) \exp(-\alpha_L z) + 4i \left[B_1\gamma\alpha_S - B_2\beta\alpha_S \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.23c)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(x, y, z) = G^* \left\{ A(\beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha_L^2 - \alpha_S^2) \exp(-\alpha_L z) + \frac{4i\beta}{\alpha_S} \left[B_1\beta\gamma + B_2(\gamma^2 - \alpha_S^2) \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.23d)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x, y, z) = 2G^* \left\{ A\beta\gamma \exp(-\alpha_L z) + \frac{i}{\alpha_S} \left[B_1(\gamma^2 - \beta^2 + \alpha_S^2) + B_2\gamma(\gamma^2 - \beta^2 - \alpha_S^2) \right] \exp(-\alpha_S z) \right\} \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.23e)$$

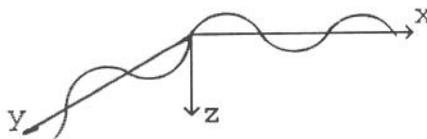
$$\bar{\sigma}_{yy}(x, y, z) = G^* \left\{ -A(\beta^2 - 2\alpha_L^2 + \alpha_S^2) \exp(-\alpha_L z) + \right.$$

$$\frac{4i\gamma}{\alpha_s} \left[B_1 (\beta^2 - \alpha_s^2) + B_2 \beta \gamma \right] \exp(-\alpha_s z) \} \exp(i(\beta x + \gamma y)). \quad (2.23f)$$

2.4.-Funções de flexibilidade para um carregamento vertical

A aplicação de um carregamento vertical na superfície do meio viscoelástico tridimensional, pode ser colocado em termos matemáticos pelas condições de contorno do problema. Para obter a chamada função de flexibilidade no semi-espaco considera-se agora uma distribuição de tensões harmônicas cujas variáveis são números de ondas β , γ . Futuramente estas distribuições harmônicas em β e γ serão superpostas e ponderadas pelo espectro da distribuição espacial das tensões (eq. 2.2).

Desse modo, para



$$\bar{\sigma}_{0zz}(x, y, z=0) = -\bar{\sigma}_{zz} \exp[i(\beta x + \gamma y)], \quad (2.24a)$$

e adicionalmente,

$$\bar{\sigma}_{0yz}(x, y, z=0) = \bar{\sigma}_{0xz}(x, y, z=0) = 0, \quad (2.24b)$$

segue da equação (2.23) o sistema algébrico,

$$\begin{cases} A(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_s^2) + B_1(-i4\gamma\alpha_s) + B_2(i4\beta\alpha_s) = \bar{\sigma}_{zz}/G^* \\ A(i\beta\alpha_L) + B_1(2\beta\gamma) + B_2(\gamma^2 - \beta^2 - \alpha_s^2) = 0 \\ A(i\gamma\alpha_L) + B_1(\gamma^2 - \beta^2 + \alpha_s^2) + B_2(-2\beta\gamma) = 0 \end{cases}, \quad (2.25)$$

que resolvido para as amplitudes A , B_1 , B_2 fornece:

$$A = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{G^*} \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_s^2)}{F_{\text{Ray}}(\beta, \gamma)}, \quad (2.26a)$$

$$B_1 = - \frac{i\bar{\sigma}_{zz}}{G^*} \frac{\gamma \alpha_L}{F_{\text{Ray}}(\beta, \gamma)}, \quad (2.26b)$$

$$B_2 = \frac{i\bar{\sigma}_{zz}}{G^*} \frac{\beta \alpha_L}{F_{\text{Ray}}(\beta, \gamma)}, \quad (2.26c)$$

$$B_3 = 0, \quad (2.26d)$$

em que,
$$F_{\text{Ray}}(\beta, \gamma) = \left[2(\beta^2 + \gamma^2) - k_s^{*2} \right]^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)\alpha_L\alpha_s. \quad (2.27)$$

A expressão (2.27) é conhecida na literatura como a função de Rayleigh [46].

Determinadas as amplitudes (A_1, B_1, B_2, B_3) , o próximo passo é construir o campo de deslocamentos com o auxílio das equações (2.22). Estes deslocamentos são ocasionados pela distribuição de tensões dada pela expressão (2.24). Dessa forma tem-se,

$$\bar{U}_1(x, y, z=0) = - \frac{\bar{\sigma}_{zz} i\beta}{G^* F_{\text{Ray}}(\beta, \gamma)} \left[(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_s^2) - 2\alpha_L\alpha_s \right] \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.28a)$$

$$\bar{U}_2(x, y, z=0) = - \frac{\bar{\sigma}_{zz} i\gamma}{G^* F_{\text{Ray}}(\beta, \gamma)} \left[(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_s^2) - 2\alpha_L\alpha_s \right] \exp(i(\beta x + \gamma y)), \quad (2.28b)$$

$$\bar{U}_3(x, y, z=0) = - \frac{\bar{\sigma}_{zz} \alpha_L}{G^* F_{\text{Ray}}(\beta, \gamma)} (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha_s^2) \exp(i(\beta x + \gamma y)). \quad (2.28c)$$

Da condição de contorno (2.24) é possível reescrever as equações (2.28) em termos da **função de flexibilidade** principal, H_{iz}^h ($i=w,u,v$), (deslocamento na mesma direção do carregamento) e das funções de flexibilidade cruzadas (deslocamento perpendicular ao carregamento) para o problema da distribuição de tensões espacialmente harmônicas (h) na superfície do semi-espaço, isto é,

$$\bar{H}_{wz}^h(\beta, \gamma) = \frac{\bar{U}_3}{\bar{\sigma}_{0zz}} = \frac{\alpha_L}{G^* F_{Ray}(\beta, \gamma)} (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha_S^2), \quad (2.29a)$$

$$\bar{H}_{uz}^h(\beta, \gamma) = \frac{\bar{U}_1}{\bar{\sigma}_{0zz}} = \frac{i\beta}{G^* F_{Ray}(\beta, \gamma)} \left[\left(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_S^2 \right) - 2\alpha_L \alpha_S \right], \quad (2.29b)$$

$$\bar{H}_{vz}^h(\beta, \gamma) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{\sigma}_{0zz}} = \frac{i\gamma}{G^* F_{Ray}(\beta, \gamma)} \left[\left(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_S^2 \right) - 2\alpha_L \alpha_S \right]. \quad (2.29c)$$

2.5.-Problema de valor de contorno bidimensional para o o semi-espaço - **carregamento vertical**

Na análise anterior foram deduzidas as funções de flexibilidade para um carregamento na superfície do semi-espaço viscoelástico tridimensional. Através de considerações de deformação plana segue de modo análogo o caso bidimensional. Assim para a condição de contorno dada por (Fig. 2.2.):

$$t_z = \bar{\sigma}_{0zz}(x, z=0) = \begin{cases} -\bar{\sigma}_{zz} & , |x| \leq a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}, \quad (2.30)$$

basta tomar o limite $\gamma \rightarrow 0$ no problema tridimensional para obter

as funções de flexibilidade no semi-espaço bidimensional como,

$$\bar{H}_{wz}^h(\beta) = \frac{\alpha_L (\beta^2 - \alpha_S^2)}{G^* F_{Ray}(\beta)}, \quad (2.31a)$$

$$\bar{H}_{uz}^h(\beta) = \frac{i\beta \left[(\beta^2 + \alpha_S^2) - 2\alpha_L \alpha_S \right]}{G^* F_{Ray}(\beta)}, \quad (2.31b)$$

$$\bar{H}_{vz}^h(\beta) = 0. \quad (2.31c)$$

$$\text{em que, } \alpha_L = \sqrt{\beta^2 - k_L^{*2}}, \quad \alpha_S = \sqrt{\beta^2 - k_S^{*2}} \quad (2.32a)$$

e

$$F_{Ray}(\beta) = \left[2\beta^2 - k_S^{*2} \right]^2 - 4\beta^2 \alpha_L \alpha_S. \quad (2.32b)$$

A solução do P.V.C.T., para uma distribuição de forças de superfície dada por (2.30), pode ser obtida com auxílio das funções de flexibilidades (2.29) e da transformação integral de Fourier. Lembrando que a transformada de Fourier para o número de onda β da função $\bar{U}_j(x)$ é dada por,

$$\bar{U}_j(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_j(x) \exp(-i\beta x) dx, \quad j = 1, 2, \quad (2.33)$$

em que, $\bar{U}_1(x) = \bar{W}_z(x)$, $\bar{U}_2(x) = \bar{U}_z(x)$, tem-se para as condições de contorno em tensões de superfície, dadas pela equação (2.30), que:

$$\bar{\sigma}_{0zz}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{0zz}(x, z=0) \exp(-i\beta x) dx = -\bar{\sigma}_{zz} \int_{-a}^a \exp(-i\beta x) dx$$

$$= - \frac{2\bar{\sigma}_{zz} \text{sen}(\beta a)}{\beta} . \quad (2.34)$$

É importante destacar que a expressão (2.34) representa o espectro da distribuição espacial de tensões (2.2) no domínio do número de onda β . Por sua vez, os deslocamentos no domínio β podem ser obtidos pela relação entre tensões e funções de flexibilidade de acordo com a equação (2.29), ou seja,

$$\bar{U}_j(\beta) = \bar{H}_{jz}^h(\beta) \bar{\sigma}_{0zz}(\beta) . \quad (2.35)$$

Pela definição da transformada inversa de Fourier e utilizando a equação (2.35) pode-se escrever:

$$\bar{U}_j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_j(\beta) \exp(i\beta x) d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{jz}^h(\beta) \bar{\sigma}_{0zz}(\beta) \exp(i\beta x) d\beta . \quad (2.36a)$$

Substituindo agora a expressão (2.34) em (2.36a) pode-se, finalmente escrever o campo de deslocamentos como,

$$\bar{U}_j(x) = - \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{jz}^h(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta, \quad j = 1, 2 , \quad (2.36b)$$

em que, $\bar{H}_{1z}^h(\beta) = \bar{H}_{wz}^h(\beta)$ e $\bar{H}_{2z}^h(\beta) = \bar{H}_{uz}^h(\beta)$.

A equação (2.36b) fornece a solução do P.V.C.T. tal como descrito por (2.30). O campo de deslocamentos \bar{U}_j é obtido a partir da avaliação numérica da integral em (2.36b).

2.6.-Problema de valor de contorno bidimensional para o semi-espaco - carregamento horizontal

De modo similar ao carregamento vertical, tem-se para uma distribuico de tensoes tangenciais as seguintes condicoes de contorno na superficie do semi-espaco:

$$t_x = \bar{\sigma}_{0xz}(x, z=0) = \begin{cases} -\bar{\sigma}_{xz} & , |x| \leq a \\ 0 & , |x| > a . \end{cases} \quad (2.37)$$

Seguindo o mesmo procedimento da secao anterior, obtem-se as funcoes de flexibilidade para uma distribuico horizontal de tensoes na forma,

$$\bar{H}_{ux}^h(\beta) = - \frac{\alpha_s (\beta^2 - \alpha_s^2)}{G^* F_{Ray}(\beta)} , \quad (2.38a)$$

$$\bar{H}_{wx}^h(\beta) = \frac{i\beta \left[(\beta^2 + \alpha_s^2) - 2\alpha_L \alpha_s \right]}{G^* F_{Ray}(\beta)} . \quad (2.38b)$$

É interessante observar de (2.31b) e (2.38b) que, $\bar{H}_{uz}^h(\beta) = \bar{H}_{wx}^h(\beta)$. Esta relacao expressa a conhecida reciprocidade dinamica [56].

As solucoes em deslocamentos para os P.V.C.T., dados por (2.30) e (2.37) para uma excitaao temporalmente harmnica na superficie do semi-espaco viscoelastico, podem ser finalmente escritas como:

$$\bar{w}_z(x) = - \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{wz}^h(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta, \quad (2.39a)$$

$$\bar{U}_z(x) = - \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{uz}^h(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta, \quad (2.39b)$$

$$\bar{U}_x(x) = - \frac{\bar{\sigma}_{xz}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{ux}^h(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta, \quad (2.39c)$$

$$\bar{W}_x(x) = - \frac{\bar{\sigma}_{xz}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{wx}^h(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta. \quad (2.39d)$$

As soluções representadas nas relações (2.39) fornecem os deslocamentos para os dois problemas de valor de contorno em tensões. Pode-se ainda reescrever estes deslocamentos numa forma mais compacta, ou seja,

$$\bar{W}_p(x) = - \frac{\bar{\sigma}_{pz}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{wp}^h(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta, \quad (2.40a)$$

$$\bar{U}_p(x) = - \frac{\bar{\sigma}_{pz}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{up}^h(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta, \quad (2.40b)$$

com $p=z, x$.

As integrais em (2.40) devem ser evoluídas numericamente. As soluções $\bar{W}_p(x)$ e $\bar{U}_p(x)$ do P.V.C.T. para uma distribuição de tensões espaciais constantes por partes (eqs. 2.30 e 2.37), são chamadas **funções de influência** dos P.V.C.T.

2.7.-Adimensionalização das grandezas

É costume em problemas da interação dinâmica solo-estrutura trabalhar com variáveis outras que não as definidas até aqui, quais sejam: β , k_L^* , k_S^* , α_L , α_S . Trabalham-se nestes problemas com grandezas adimensionais A_0 e K_I que serão definidas a seguir.

Lembrando que β é um número de onda tem-se uma relação entre β , a frequência circular ω e a velocidade de propagação das perturbações c , na forma,

$$c = \frac{\omega}{\beta} . \quad (2.41)$$

Seja agora uma variável adimensional K_I ligada à velocidade de propagação de ondas:

$$K_I = \frac{c_S}{c} , \quad (2.42)$$

e um fator n^* , o mesmo da seção 2.3, relacionando as velocidades de propagação das ondas longitudinal e transversal,

$$n^* = \frac{c_S}{c_L} . \quad (2.43)$$

Baseado no modelo análogo de Lysmer [51], em que o comportamento dinâmico de fundações verticalmente carregadas são representadas por sistemas massa-mola-amortecedor, pode-se escrever uma frequência adimensional A_0 na forma,

$$A_0 = \frac{\omega \cdot a}{c_S} , \quad (2.44)$$

em que, a é o semi-lado da fundação como indicado na figura 2.2.

A expressão (2.44) mostra que é possível visualizar A_0

como uma frequência indicando o tempo a/c_s no qual uma onda de cisalhamento leva para caminhar do centro até o extremo de uma determinada fundação.

Finalmente com estas relações adimensionais pode-se expressar o número de onda β como:

$$\beta = \frac{A_0 K_I}{a} . \quad (2.45)$$

Na sequência deste trabalho procurar-se-á seguir esta adimensionalização principalmente na implementação computacional dos problemas da D.S.S.I.

3.-O Método da Superposição (M.S.) para a interação dinâmica de fundações de superfície com o semi-espço

O objetivo deste capítulo é montar um esquema básico visando a solução do problema da D.S.S.I. para o caso de uma fundação na superfície do semi-espço viscoelástico bidimensional pelo Método da Superposição (M.S.). O passo fundamental para obter esta solução é dado pela resolução de um Problema de Valor de Contorno Misto (P.V.C.M.), que por sua vez é obtido pela superposição do Problema de Valor de Contorno em Tensões (P.V.C.T.), equações (2.40a) e (2.40b), somadas às condições de equilíbrio e compatibilidade cinemática do sistema solo-fundação. A fundação é considerada como um corpo rígido.

3.1.-Funções de flexibilidade complexas

Utilizando a adimensionalização sugerida no item 2.7 e o fato dos núcleos das integrais de extremos infinitos serem pares ou ímpares pode-se colocar o campo de deslocamentos, para as condições de contorno dadas pela equação (2.30), como:

$$\bar{W}_z(x) = - \frac{2a\bar{\sigma}_{zz}}{\pi G(1+i\eta_s)^2} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{\sqrt{K_I^2 - \frac{n^2}{(1+i\eta_D)}}}{F_{Ray}(K_I)} \frac{\text{sen}(A_0 K_I)}{A_0 K_I} \cos\left(\frac{A_0 x K_I}{a}\right) dK_I, \quad (3.1a)$$

$$\bar{U}_z(x) = \frac{2a\bar{\sigma}_{zz}}{\pi G(1+i\eta_s)} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{F_{Nen}(K_I)}{F_{Ray}(K_I)} \frac{\text{sen}(A_0 K_I)}{A_0} \text{sen}\left(\frac{A_0 x K_I}{a}\right) dK_I, \quad (3.1b)$$

$$\text{com } F_{Nen}(K_I) = \left[2K_I^2 - \frac{1}{(1+i\eta_s)} \right] - 2 \left[K_I^2 - \frac{n^2}{(1+i\eta_D)} \right]^{1/2} \left[K_I^2 - \frac{1}{(1+i\eta_s)} \right]^{1/2},$$

$$F_{\text{Ray}}(K_I) = \left[2K_I^2 - \frac{1}{(1+i\eta_s)} \right]^2 - 4K_I^2 \left[K_I^2 - \frac{n^2}{(1+i\eta_D)} \right]^{1/2} \left[K_I^2 - \frac{1}{(1+i\eta_s)} \right]^{1/2} .$$

Identifica-se η_s e η_D como os coeficientes de amortecimento transversal e longitudinal, respectivamente, e $G^* = G(1+i\eta_s)$ como o módulo de elasticidade transversal complexo.

Do mesmo modo, o campo de deslocamentos para as condições de contorno dadas pela equação (2.37) é da forma,

$$\bar{U}_x(x) = \frac{2a\bar{\sigma}_{xz}}{\pi G(1+i\eta_s)^2} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{\sqrt{K_I^2 - \frac{1}{(1+i\eta_s)}}}{F_{\text{Ray}}(K_I)} \frac{\text{sen}(A_0 K_I)}{A_0 K_I} \cos\left(\frac{A_0 x K_I}{a}\right) dK_I , \quad (3.2a)$$

$$\bar{W}_x(x) = \frac{2a\bar{\sigma}_{xz}}{\pi G(1+i\eta_s)} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{F_{\text{Nen}}(K_I)}{F_{\text{Ray}}(K_I)} \frac{\text{sen}(A_0 K_I)}{A_0} \text{sen}\left(\frac{A_0 x K_I}{a}\right) dK_I . \quad (3.2b)$$

As expressões (3.1) e (3.2) devem ser avaliadas numericamente e quando normalizadas em relação às excitações $\bar{F}_p = 2a\bar{\sigma}_{pz}$ fornecem as funções de flexibilidade complexas associadas a solução do P.V.C.T. para o semi-espaço (s) viscoelástico na forma:

$$\frac{\bar{W}_p}{2a\bar{\sigma}_{pz}} = \bar{H}_{wp}^s = f_{1wp} + i f_{2wp} , \quad (3.3a)$$

$$\frac{\bar{U}_p}{2a\bar{\sigma}_{pz}} = \bar{H}_{up}^s = f_{1up} + i f_{2up} , \quad (3.3b)$$

em que $p=z, x$.

Estas funções de flexibilidade complexas podem ser escritas em termos dos parâmetros do problema como: $\bar{H}_{ij}^s(x, \omega, \rho, \nu, \eta, G)$.

Nas figuras 3.1 a 3.4 tem-se as partes real e imaginária da solução do P.V.C.T. para o semi-espço viscoelástico, equações (3.1) e (3.2), em que utilizam-se como parâmetros do problema a razão de Poisson $\nu=0.33$, o amortecimento $\eta=0.10$ e a frequência adimensional $A_0=1.0$.

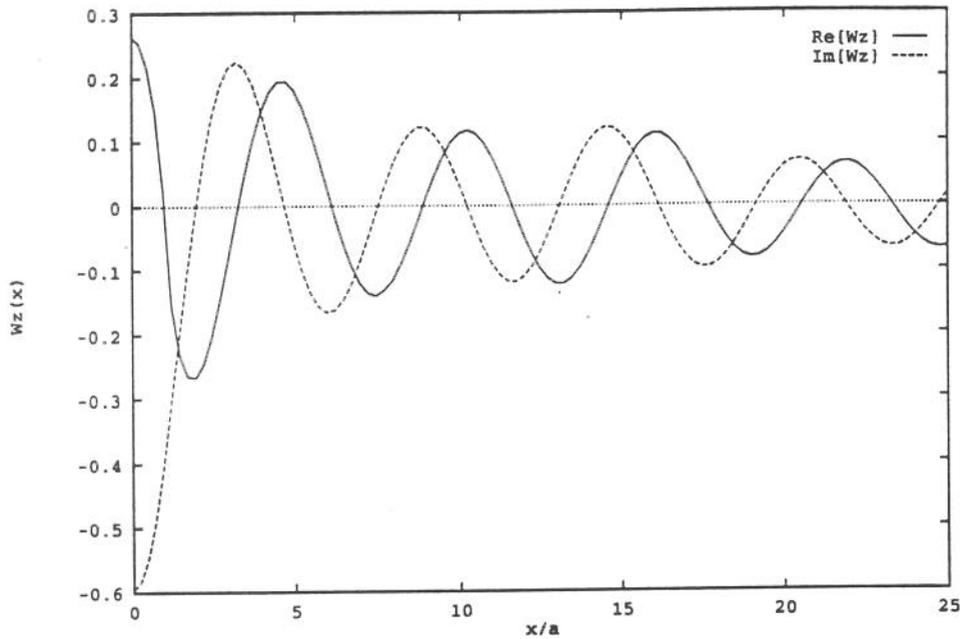


Figura 3.1. Deslocamentos $Wz(x)$ para o P.V.C.T. no semi-espço.

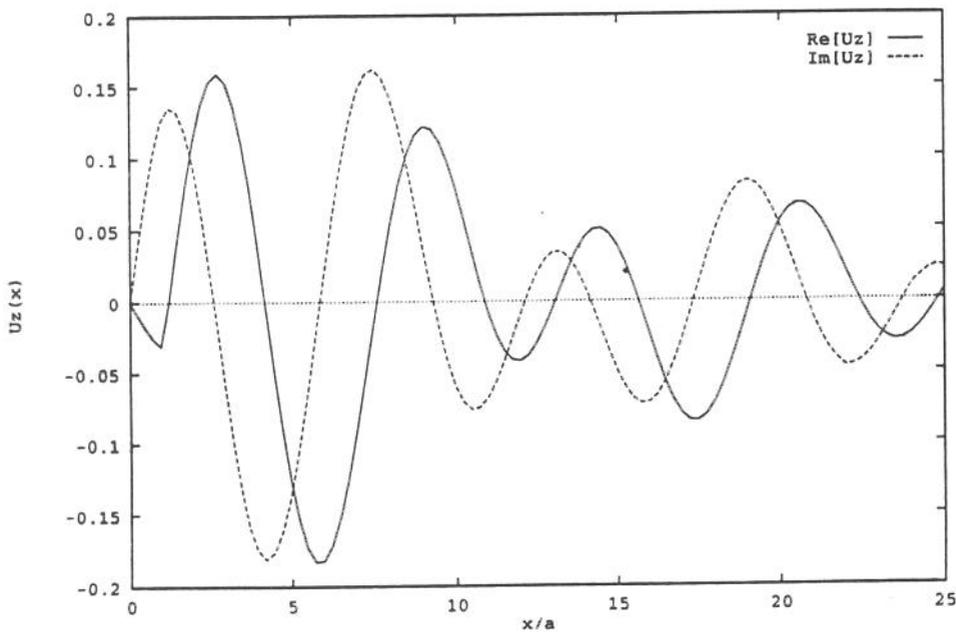


Figura 3.2. Deslocamentos $Uz(x)$ para o P.V.C.T. no semi-espço.

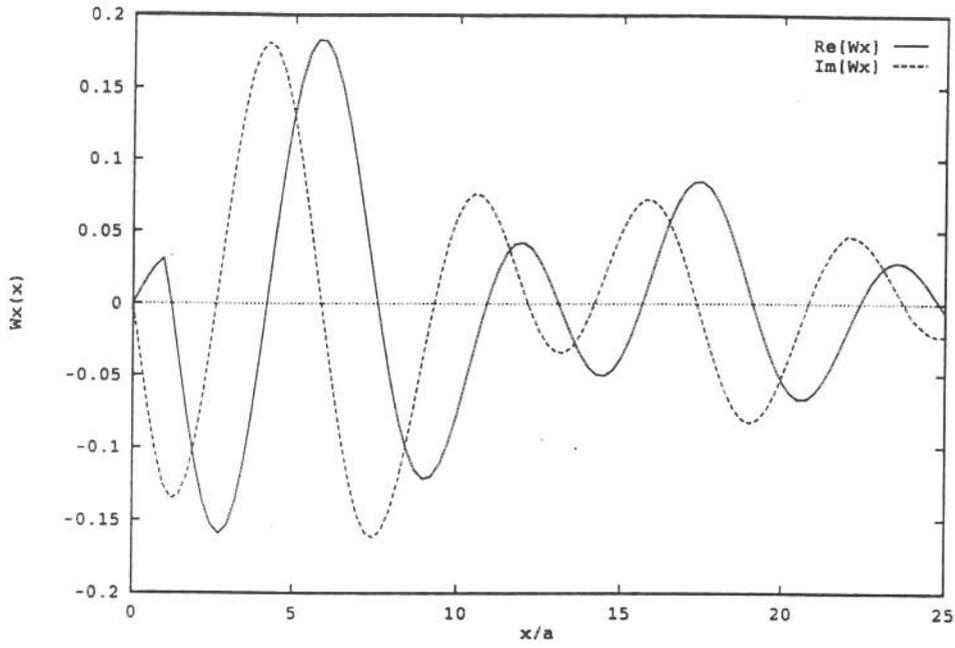


Figura 3.3. Deslocamentos $W_x(x)$ para o P.V.C.T. no semi-espaco.

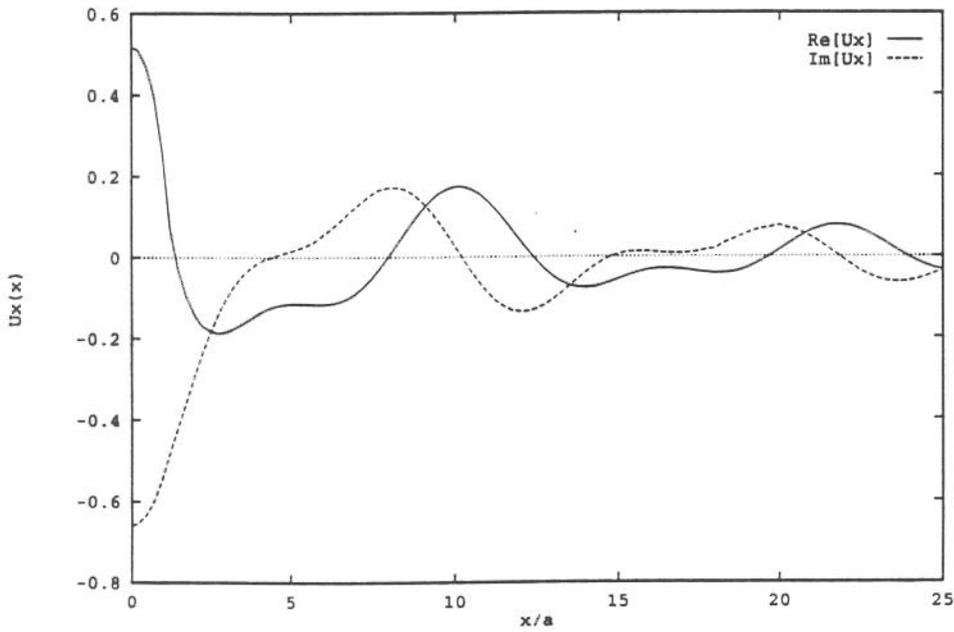


Figura 3.4. Deslocamentos $U_x(x)$ para O P.V.C.T. no semi-espaco.

3.2.-Equações de compatibilidade cinemática (deslocamentos de corpo rígido)

Assumindo que entre o solo e a fundação não ocorre deslizamento (contato soldado), as condições de compatibilidade cinemática relacionando os graus de liberdade de corpo rígido da fundação e os deslocamentos nodais dos elementos na superfície do solo podem ser colocadas na forma [67],

$$\{\bar{U}_f\} = [S] \{\bar{P}\}, \quad (3.4)$$

em que, $\{\bar{U}_f\}_{2nx1}$ é o vetor dos deslocamentos dos pontos nodais nos elementos que discretizam a interface solo-fundação e $\{\bar{P}\}_{3x1}$ é o vetor dos deslocamentos de corpo rígido, dado por:

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{W}_R, \bar{U}_R, \bar{\phi}_y\}^T. \quad (3.5)$$

Na equação anterior \bar{W}_R e \bar{U}_R representam os deslocamentos e $\bar{\phi}_y$ a rotação linearizada do movimento de corpo rígido da fundação.

A matriz de transformação $[S]_{2nx3}$ é montada a partir das n submatrizes $[S^n]_{2x3}$. Estas matrizes expressam o vetor de deslocamentos num ponto nodal i arbitrário, devido a um movimento de corpo rígido unitário e são dadas por,

$$[S^n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_0 - x_i) \\ 0 & 1 & -(z_0 - z_i) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

em que, (x_i, z_i) são as coordenadas do i -ésimo ponto nodal e (x_0, z_0) as coordenadas do ponto de referência dos movimentos de corpo rígido da fundação. Este ponto de referência é normalmente considerado o ponto central em relação a interface solo-fundação.

Das equações (3.4), (3.5) e (3.6) os deslocamentos de

corpo rígido da fundação $\{\bar{W}_R, \bar{U}_R, \bar{\phi}_y\}^T$, podem ser relacionados com o i -ésimo deslocamento nodal total no solo, $\bar{W}_T(x_i)$, $\bar{U}_T(x_i)$ através da relação:

$$\bar{W}_T(x_i) = \bar{W}_R + (x_0 - x_i) \bar{\phi}_y, \quad (3.7a)$$

$$\bar{U}_T(x_i) = \bar{U}_R - (z_0 - z_i) \bar{\phi}_y. \quad (3.7b)$$

Os deslocamentos nodais totais no solo \bar{W}_T , \bar{U}_T são, por sua vez, obtidos pela superposição dos campos de deslocamentos \bar{W}_z , \bar{U}_z (eq. 3.1) provenientes das excitações normais \bar{F}_z , e os deslocamentos \bar{W}_x , \bar{U}_x (eq. 3.2) das excitações tangenciais \bar{F}_x . Dessa forma, tem-se:

$$\bar{W}_T(x) = \bar{W}_z(x) + \bar{W}_x(x), \quad (3.8a)$$

$$\bar{U}_T(x) = \bar{U}_z(x) + \bar{U}_x(x). \quad (3.8b)$$

em que,

$$\bar{W}_z(x) = \frac{1}{\pi G} \bar{H}_{wz}^s(x) \cdot \bar{F}_z(x), \quad (3.9a)$$

$$\bar{W}_x(x) = \frac{1}{\pi G} \bar{H}_{wx}^s(x) \cdot \bar{F}_x(x), \quad (3.9b)$$

$$\bar{U}_z(x) = \frac{1}{\pi G} \bar{H}_{uz}^s(x) \cdot \bar{F}_z(x), \quad (3.9c)$$

$$\bar{U}_x(x) = \frac{1}{\pi G} \bar{H}_{ux}^s(x) \cdot \bar{F}_x(x). \quad (3.9d)$$

Das equações (3.8) e (3.9) pode-se escrever estes deslocamentos totais como:

$$\bar{W}_T(x) = \frac{\bar{H}_{wz}^s(x) \cdot \bar{F}_z(x)}{\pi G} + \frac{\bar{H}_{wx}^s(x) \cdot \bar{F}_x(x)}{\pi G}, \quad (3.10a)$$

$$\bar{U}_T(x) = \frac{\bar{H}_{uz}^s(x) \cdot \bar{F}_z(x)}{\pi G} + \frac{\bar{H}_{ux}^s(x) \cdot \bar{F}_x(x)}{\pi G}. \quad (3.10b)$$

3.3.-Superposição das funções de flexibilidade complexas

Denomina-se de Método da Superposição (M.S.) a técnica baseada na aplicação sucessiva da relação (3.3a) e (3.3b) em cada segmento discretizado da interface solo-fundação. Assumindo-se um campo de tensões constantes em cada um destes segmentos, analisa-se a influência destas tensões (localizadas) em relação aos segmentos restantes.

Dessa forma, para uma distribuição de tensões constantes por segmentos, com uma discretização regular de n elementos na interface solo-fundação, como mostra a figura 3.5, tem-se:

$$\bar{\sigma}_{Opz}(x) = \bar{\sigma}_{Opzi}^M, \quad x_i^M - a_i < x < x_i^M + a_i. \quad (3.11)$$

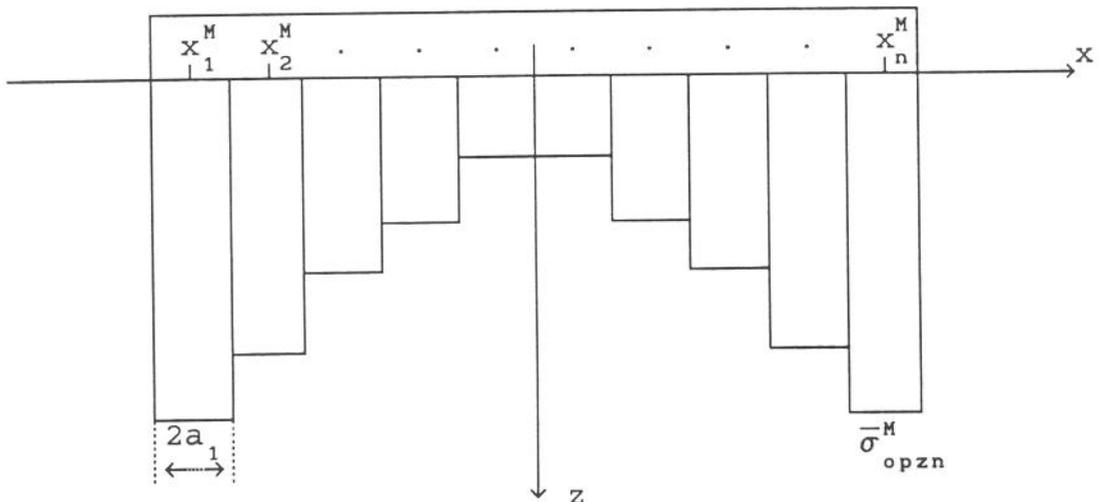


Figura 3.5. Discretização das tensões sob a fundação.

As funções de flexibilidade complexas serão superpostas na interface solo-fundação de modo a constituírem uma relação geral entre esforços $\bar{F}_f(x)$ e deslocamentos $\bar{U}_f(x)$, dada por,

$$\left\{ \bar{U}_f(x_i) \right\} = \frac{1}{\pi G} \left[\bar{H}_f^s(x_i, x_j) \right] \left\{ \bar{F}_f(x_j) \right\} . \quad (3.12)$$

A equação (3.12) indica a relação entre o deslocamento no centro do i-ésimo elemento sob a fundação que é provocado por uma tensão constante aplicada no j-ésimo elemento.

Utilizando o Método da Superposição, pode-se agora escrever os deslocamentos dados nas equações (3.10a) e (3.10b) na forma discreta, como:

$$\bar{W}_T(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\bar{H}_{wz}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\pi G} + \bar{H}_{wx}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\pi G} \right], \quad (3.13a)$$

$$\bar{U}_T(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\bar{H}_{uz}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\pi G} + \bar{H}_{ux}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\pi G} \right]. \quad (3.13b)$$

$$i=1, 2, \dots, n.$$

Igualando-se os deslocamentos de corpo rígido (eq. 3.7) aos deslocamentos nodais da relação (3.13) tem-se:

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{H}_{wz}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\pi G} + \bar{H}_{wx}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\pi G} \right] - \bar{W}_R - (x_0 - x_i) \bar{\phi}_y = 0. \quad (3.14a)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{H}_{uz}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\pi G} + \bar{H}_{ux}^s(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\pi G} \right] - \bar{U}_R + (z_0 - z_i) \bar{\phi}_y = 0. \quad (3.14b)$$

3.4.-Equações de equilíbrio do sistema solo-fundação e matriz global do problema

Para completar a colocação do problema resta incluir as condições de equilíbrio do sistema solo-fundação. Para as excitações vertical, horizontal e do momento estas condições são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{F}_z = \sum_{j=1}^n \bar{F}_{zj} , \quad (3.15a)$$

$$\bar{F}_x = \sum_{j=1}^n \bar{F}_{xj} , \quad (3.15b)$$

$$\frac{\bar{M}_y}{a} = \sum_{j=1}^n \bar{F}_{zj} \frac{x_j}{a} . \quad (3.15c)$$

Define-se a seguir o fator normalizado de tensões \bar{K}_{ij} que descreve a relação entre a tensão local em cada segmento discretizado (Fig. 3.5), e a tensão média sob a fundação. Dessa forma, considerando as excitações externas na direção normal \bar{F}_z e tangencial \bar{F}_x , as tensões normalizadas podem ser escritas como:

$$\bar{K}_{zzj} = \frac{\bar{\sigma}_{zj}}{\bar{\sigma}_z} = \frac{\bar{F}_{zj}}{a_j} \frac{a}{\bar{F}_z} \longrightarrow \bar{K}_{zzj} = \frac{\bar{F}_{zj}}{\bar{F}_z} \frac{a}{a_j} , \quad (3.16a)$$

$$\bar{K}_{xxj} = \frac{\bar{\sigma}_{xj}}{\bar{\sigma}_x} = \frac{\bar{F}_{xj}}{a_j} \frac{a}{\bar{F}_x} \longrightarrow \bar{K}_{xxj} = \frac{\bar{F}_{xj}}{\bar{F}_x} \frac{a}{a_j} , \quad (3.16b)$$

em que a é o semi-lado da fundação.

Sem perda de generalidade, admitindo-se os carregamentos

externos na forma,

$$\bar{F}_z \neq 0, \quad \bar{F}_x = \bar{M}_y = 0, \quad (3.17)$$

pode-se escrever,

$$\bar{F}_z = \sum_{j=1}^n \bar{F}_{zj} \longrightarrow \frac{\bar{F}_z}{\bar{F}_z} = 1 = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{F}_{zj}}{\bar{F}_z} = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{F}_{zj}}{\bar{F}_z} \frac{a_j}{a_j} = \sum_{j=1}^n \bar{K}_{zzj} d_j,$$

em que $d_j = \frac{a_j}{a}$.

Logo,

$$\sum_{j=1}^n d_j \bar{K}_{zzj} = 1. \quad (3.18)$$

Do mesmo modo,

$$\bar{F}_x = \sum_{j=1}^n \bar{F}_{xj} = 0 \longrightarrow 0 = \frac{0}{\bar{F}_z} = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{F}_{xj}}{\bar{F}_z} \frac{a_j}{a_j} = \sum_{j=1}^n \bar{K}_{xzzj} d_j,$$

portanto,

$$\sum_{j=1}^n d_j \bar{K}_{xzzj} = 0. \quad (3.19)$$

Em relação ao momento tem-se,

$$\frac{\bar{M}_y}{a} = \sum_{j=1}^n \bar{F}_{zj} \frac{x_j}{a} = 0 \longrightarrow 0 = \frac{\bar{M}_y/a}{\bar{F}_z} = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{F}_{zj}}{\bar{F}_z} \frac{a_j}{a_j} \frac{x_j}{a_j} = \sum_{j=1}^n \bar{K}_{zzj} d_j \frac{x_j}{a_j}.$$

$$\text{Assim, } \sum_{j=1}^n d_j \bar{K}_{zzj} \frac{x_j}{a} = 0. \quad (3.20)$$

Das relações (3.16)-(3.20), as equações de equilíbrio de forças podem ser escritas como:

$$\sum_{j=1}^n \bar{F}_{zj} = \bar{F}_z \longrightarrow \sum_{j=1}^n \bar{K}_{zzj} d_j = 1, \quad (3.21a)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{F}_{xj} = 0 \longrightarrow \sum_{j=1}^n \bar{K}_{xzzj} d_j = 0, \quad (3.21b)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{M_{yj}}{a} = 0 \longrightarrow \sum_{j=1}^n \bar{K}_{zzj} d_j \frac{x_j}{a} = 0. \quad (3.21c)$$

As expressões em (3.14) também podem ser reescritas, utilizando as equações (3.16)-(3.20), na forma:

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{K}_{zzj} d_j \bar{H}_{wz}^s(x_i, x_j) + \bar{K}_{xzzj} d_j \bar{H}_{wx}^s(x_i, x_j) \right] - \frac{\pi G}{\bar{F}_z} \bar{W}_R - \frac{\pi G}{\bar{F}_z} \frac{(x_0 - x_i)}{a} \bar{\phi}_y a = 0. \quad (3.22a)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{K}_{zzj} d_j \bar{H}_{uz}^s(x_i, x_j) + \bar{K}_{xzzj} d_j \bar{H}_{ux}^s(x_i, x_j) \right] - \frac{\pi G}{\bar{F}_z} \bar{U}_R + \frac{\pi G}{\bar{F}_z} \frac{(z_0 - z_i)}{a} \bar{\phi}_y a = 0. \quad (3.22b)$$

Finalmente os deslocamentos podem ser normalizados. Dessa forma, multiplicando-os pelo fator $\pi G / \bar{F}_z$ tem-se:

$$\bar{W}_{Rn} = \frac{\bar{W}_R \pi G}{\bar{F}_z}, \quad \bar{U}_{Rn} = \frac{\bar{U}_R \pi G}{\bar{F}_z}, \quad \bar{\phi}_{Rn} = \frac{\bar{\phi}_y \pi G}{\bar{F}_z}. \quad (3.23)$$

De posse das equações (3.21)-(3.23) pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\left[\begin{array}{c|c} d_j \bar{H}_{wz}^s(x_1, x_j) & d_j \bar{H}_{wx}^s(x_1, x_j) \\ \hline d_j \bar{H}_{uz}^s(x_1, x_j) & d_j \bar{H}_{ux}^s(x_1, x_j) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} (-1, 0) \quad (0, 0) \quad \left(\frac{x_1}{a}, 0\right) \\ (-1, 0) \quad (0, 0) \quad \left(\frac{x_2}{a}, 0\right) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (-1, 0) \quad (0, 0) \quad \left(\frac{x_n}{a}, 0\right) \\ \hline (0, 0) \quad (-1, 0) \quad (0, 0) \\ (0, 0) \quad (-1, 0) \quad (0, 0) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (0, 0) \quad (-1, 0) \quad (0, 0) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{K}_{zz1} \\ \bar{K}_{zz2} \\ \vdots \\ \bar{K}_{zzn} \\ \hline \bar{K}_{xz1} \\ \bar{K}_{xz2} \\ \vdots \\ \bar{K}_{xzn} \\ \hline \bar{W}_{Rn} \\ \bar{U}_{Rn} \\ \bar{\phi}_{Rn} \cdot a \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} (0, 0) \\ (0, 0) \\ \vdots \\ (0, 0) \\ \hline (0, 0) \\ (0, 0) \\ \vdots \\ (0, 0) \\ \hline (1, 0) \\ (0, 0) \\ (0, 0) \end{array} \right] \quad (3.24)$$

O sistema (3.24) pode ainda ser escrito na forma compacta,

$$\begin{bmatrix} \bar{H}^s & \vdots & \bar{C}_c \\ \hline \bar{E}_q & \vdots & M \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{K} \\ \bar{P}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_N \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

em que,

- $[\bar{H}^s]$ matriz com as funções de flexibilidade do problema;
- $[\bar{E}]$ matriz de equilíbrio de forças;
- $[\bar{C}_c]$ matriz com as equações de compatibilidade cinemática;
- $[M]$ matriz de massa;
- $\{\bar{K}\}$ vetor das distribuições de tensões na interface;
- $\{\bar{P}_N\}$ vetor dos deslocamentos normalizados;
- $\{\bar{F}_N\}$ vetor que contém as excitações externas normalizadas (forças externas).

Vale a pena destacar que na construção do sistema (3.24), ou (3.25), considerou-se as excitações externas dadas por $\bar{F}_z \neq 0$, $\bar{F}_x = \bar{M}_y = 0$. Analogamente para as excitações do problema na forma $\bar{F}_x \neq 0$, $\bar{F}_z = \bar{M}_y = 0$ ou $\bar{M}_y \neq 0$, $\bar{F}_z = \bar{F}_x = 0$, obtém-se dois novos sistemas que diferenciam-se do primeiro apenas na posição em que são aplicadas estas excitações.

Ao se resolver o sistema (3.25), para três valores distintos do vetor de excitação externa normalizado \bar{F}_N , dados por:

$$\bar{F}_N = \{ (1, 0), (0, 0), (0, 0) \}^T \text{ para } \bar{F}_z \neq 0,$$

$$\bar{F}_N = \{ (0, 0), (1, 0), (0, 0) \}^T \text{ para } \bar{F}_x \neq 0,$$

$$\bar{F}_N = \{ (0, 0), (0, 0), (1, 0) \}^T \text{ para } \bar{M}_y \neq 0,$$

respectivamente, pode-se, então, associar os três vetores dos

deslocamentos normalizados resultantes \bar{P}_N às colunas de uma matriz de flexibilidade da fundação rígida N , que, por sua vez, relaciona as forças externas aplicadas à fundação $\bar{F}_e = \{\bar{F}_z, \bar{F}_x, \bar{M}_y/a\}^T$ com os deslocamentos de corpo rígido da fundação $\bar{P} = \{\bar{W}_R, \bar{U}_R, \bar{\phi}_y \cdot a\}^T$, como:

$$\{\bar{P}\} = \frac{1}{\pi\mu} [N] \{\bar{F}_e\}. \quad (3.26)$$

Pode-se mostrar, para o caso de uma fundação rígida de superfície com contato soldado na interface solo-fundação [56], que a estrutura da matriz de flexibilidade N é dada por:

$$\frac{1}{\pi\mu} \cdot \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{um} \\ 0 & N_{\phi x} & N_{\phi m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_x \\ \bar{M}_y/a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{W}_R \\ \bar{U}_R \\ \bar{\phi}_y \cdot a \end{Bmatrix}. \quad (3.27)$$

As funções N_{ij} podem ser encontradas em [56]. No presente trabalho estas funções serão deduzidas nos capítulos 4 e 5, a partir da particularização de perfis de solo estratificados.

3.5.-Campo de deslocamentos na superfície

Outra possibilidade do presente método é a determinação do campo de deslocamentos na superfície do semi-espço (e fora da interface solo-fundação). Estes deslocamentos são provocados por fundações dinamicamente excitadas [55]. Os deslocamentos na superfície, indicados por $\bar{W}_c(x)$ e $\bar{U}_c(x)$, são obtidos pela superposição das funções de flexibilidade ponderadas pelas forças na interface solo-fundação, \bar{F}_{zj} e \bar{F}_{xj} ,

$$\bar{W}_c(x) = \sum_{j=1}^{N_c} \left[\bar{H}_{wz}^s(x, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\pi G} + \bar{H}_{wx}^s(x, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\pi G} \right], \quad (3.28a)$$

$$\bar{U}_c(x) = \sum_{j=1}^{N_c} \left[\bar{H}_{uz}^s(x, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\pi G} + \bar{H}_{ux}^s(x, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\pi G} \right]. \quad (3.28b)$$

No apêndice C deste trabalho são plotados alguns campos de deslocamentos em que utilizam-se as relações (3.28) acima.

4.-Interação dinâmica de fundações de superfície com uma camada viscoelástica sobre uma base rígida

No capítulo anterior foi descrito o Método da Superposição para o problema de fundações rígidas de superfície interagindo com um semi-espaço viscoelástico bidimensional, homogêneo e isotrópico. Este capítulo apresenta uma extensão da metodologia anterior para sintetizar funções de influência para solos que possam ser modelados como uma camada viscoelástica sobre uma rocha rígida, como ilustra a figura 4.1. Estas funções de influência são incorporadas ao Método da Superposição (M.S.) para descrever o problema da interação de fundações bidimensionais rígidas assentadas sobre a camada viscoelástica.

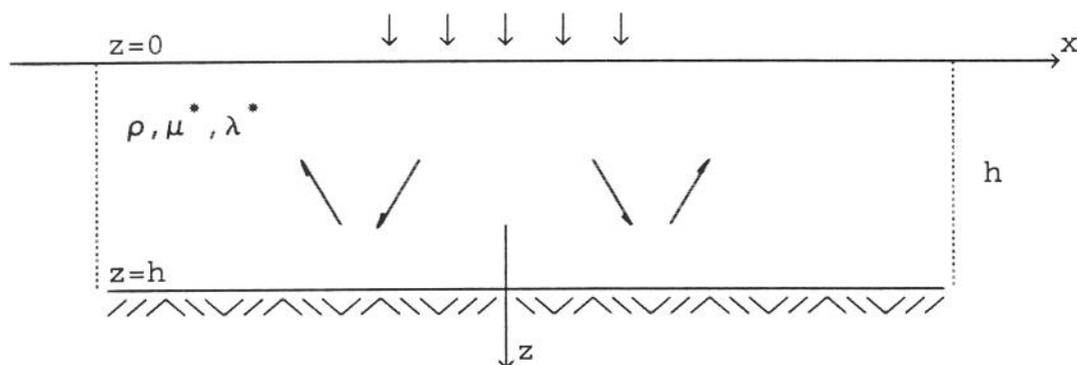


Figura 4.1. Propagação de ondas na camada viscoelástica sobre uma base rígida.

Um esquema padrão da chamada versão direta do Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.) [01,67] será utilizado no intuito de validar o presente método, assim como observar o comportamento dos métodos em relação ao esforço computacional, discretização e tempo de processamento.

O Método dos Elementos de Contorno constitui-se numa poderosa ferramenta computacional para a análise dos problemas da D.S.S.I. Uma de suas características está na necessidade da introdução de contornos artificiais nos domínios ilimitados a fim de reproduzir a situação real considerada [26].

Em relação as formulações analíticas e semi-analíticas ligadas às equações integrais de contorno, como o Método da Superposição e o Método da Função de Green, as dificuldades estão na intrincada formulação matemática associada ao fato que para cada condição de contorno do problema é necessário o desenvolvimento de novas funções de influência. Por outro lado, estes métodos caracterizam-se por uma grande economia de memória, já que apenas a superfície de contato entre o solo e a estrutura necessita ser discretizada.

4.1.-Colocação do problema

O modelo físico do problema agora considerado é aquele dado pela figura 4.1, ou seja, a interação dinâmica de fundações rígidas de superfície 2-D com uma camada viscoelástica (solo) sobre uma base rígida, e esquematizado na figura 4.2.

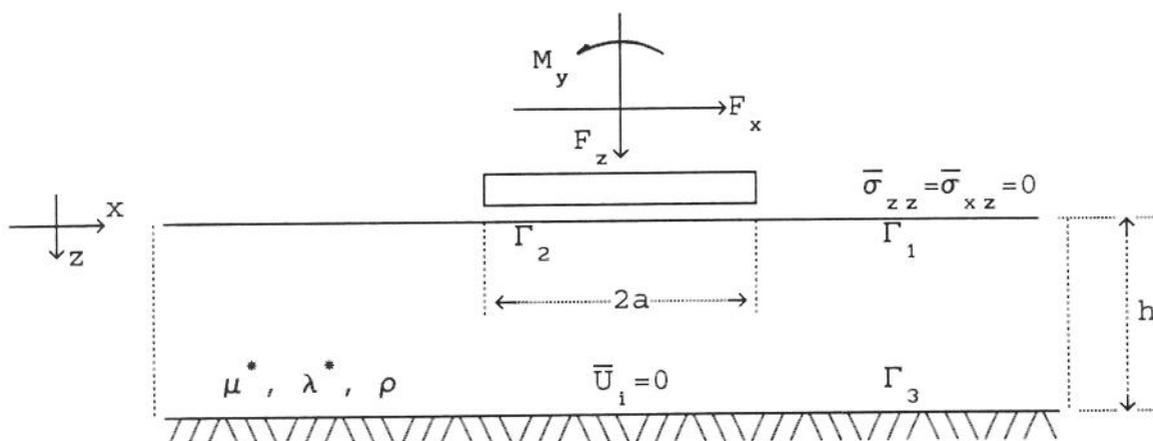


Figura 4.2. Fundação rígida de superfície sobre uma camada viscoelástica sobre uma base rígida.

Seguindo os mesmos procedimentos adotados no capítulo 2, considera-se o campo de deslocamentos dado pela equação transformada de Navier (2.1). As soluções tentativa que agora

incorporam a reflexão das ondas longitudinal e transversal (Fig.4.1) assumem, para a dilatação cúbica e o vetor de rotações infinitesimais, a forma:

$$\bar{\Delta} = \left[A_1 k_L^{*2} \exp(-\alpha_L z) + A_2 k_L^{*2} \exp(\alpha_L z) \right] \exp(i\beta x), \quad (4.1a)$$

$$\bar{\psi} = \left[B_1 k_s^{*2} \exp(-\alpha_s z) + B_2 k_s^{*2} \exp(\alpha_s z) \right] \exp(i\beta x). \quad (4.1b)$$

Como considera-se o estado plano de deformações, pode-se então verificar facilmente em (2.5a) que $\bar{\psi} = \bar{\psi}_2$, $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_3 = 0$.

Substituindo as relações anteriores na equação das ondas,

$$\frac{1}{k_L^{*2}} \nabla^2 \bar{\Delta} + \bar{\Delta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{k_s^{*2}} \nabla^2 \bar{\psi} + \bar{\psi} = 0 \quad (4.2)$$

tem-se a equação restrição,

$$\alpha_L^2 = \beta^2 - k_L^{*2} \quad \text{e} \quad \alpha_s^2 = \beta^2 - k_s^{*2}. \quad (4.3)$$

Do campo de deslocamentos dado pela equação (2.9), e considerando o problema de deformação plana, $\bar{U}_1 = (\bar{U}_1, 0, \bar{U}_3)$, segue que,

$$\bar{U}_1 = \left\{ -i\beta \left[A_1 \exp(-\alpha_L z) + A_2 \exp(\alpha_L z) \right] + 2\alpha_s \left[B_1 \exp(-\alpha_s z) - B_2 \exp(\alpha_s z) \right] \right\} \exp(i\beta x), \quad (4.4a)$$

$$\bar{U}_3 = \left\{ \alpha_L \left[A_1 \exp(-\alpha_L z) - A_2 \exp(\alpha_L z) \right] + 2i\beta \left[B_1 \exp(-\alpha_S z) + B_2 \exp(\alpha_S z) \right] \right\} \exp(i\beta x). \quad (4.4b)$$

Como visto nos capítulos anteriores, a estratégia para a solução do problema da interação dinâmica de uma fundação de superfície com o solo requer a solução de dois problemas de valores de contorno em tensões (P.V.C.T.), nos quais somente são conhecidas as tensões na superfície da camada ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2$), como ilustra a figura 4.3.

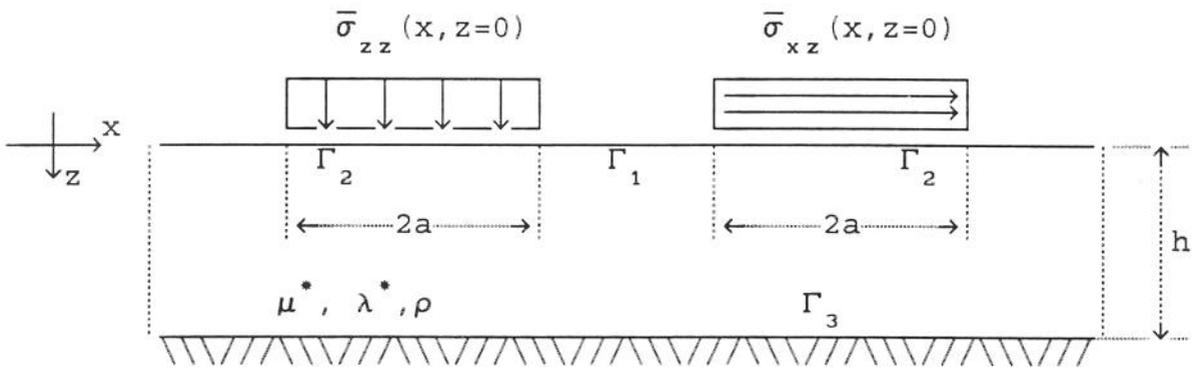


Figura 4.3. Distribuição das tensões na superfície do domínio.

Assim, para completar a colocação do problema de valor de contorno com uma excitação vertical, consideram-se as condições de contorno em tensões (forças de superfície) e deslocamentos dadas, respectivamente, por,

$$\bar{\sigma}_{zz}(x, z=0) = -\bar{\sigma}_{zz} \exp(i\beta x) \quad , \quad \bar{\sigma}_{xz}(x, z=0) = 0, \quad (4.5a)$$

$$\bar{U}_x(x, z=h) = \bar{U}_z(x, z=h) = 0. \quad (4.5b)$$

4.2.-Funções de influência do problema

A fim de obter as funções de influência para o problema descrito no ítem anterior, considera-se o campo de tensões, dado pela equação (2.21), que agora assume a forma:

$$\bar{\sigma}_{xz} = 2G^* \left[A_1 i\beta\alpha_L \exp(-\alpha_L z) - A_2 i\beta\alpha_L \exp(\alpha_L z) - B_1 \exp(-\alpha_S z) (2\beta^2 - k_S^{*2}) - B_2 \exp(\alpha_S z) (2\beta^2 - k_S^{*2}) \right] \exp(i\beta x), \quad (4.6a)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = G^* \left\{ - (2\beta^2 - k_S^{*2}) \left[A_1 \exp(-\alpha_L z) + A_2 \exp(\alpha_L z) \right] - 4B_1 i\beta\alpha_S \exp(-\alpha_S z) + 4B_2 i\beta\alpha_S \exp(\alpha_S z) \right\} \exp(i\beta x). \quad (4.6b)$$

Desse modo, conforme as equações (4.4), (4.5) e (4.6) pode-se montar um sistema 4x4 na forma,

$$\begin{cases} -A_1 (2\beta^2 - k_S^{*2}) + A_2 (2\beta^2 - k_S^{*2}) - B_1 4i\beta\alpha_S + B_2 4i\beta\alpha_S = -\bar{\sigma}_{zz}/G^* \\ A_1 i\beta\alpha_L - A_2 i\beta\alpha_L - B_1 (2\beta^2 - k_S^{*2}) - B_2 (2\beta^2 - k_S^{*2}) = 0 \\ -A_1 i\beta e^{-\alpha_L h} - A_2 i\beta e^{\alpha_L h} + B_1 2\alpha_S e^{-\alpha_S h} - B_2 2\alpha_S e^{\alpha_S h} = 0 \\ A_1 \alpha_L e^{-\alpha_L h} - A_2 \alpha_L e^{\alpha_L h} + B_1 2i\beta e^{-\alpha_S h} + B_2 2i\beta e^{\alpha_S h} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

No sistema anterior indica-se a função exponencial $\exp(\cdot)$ por $e^{(\cdot)}$. Este sistema quando resolvido analiticamente nas amplitudes de onda $A_{i,s}$ e $B_{i,s}$ fornece,

$$A_1 = \frac{\bar{\sigma}_{zz} \left\{ Q_3 \left[Q_1 \exp[(\alpha_L - \alpha_S)h] - Q_2 \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h] \right] - 4\beta^2 \alpha_L \alpha_S Q_3 \right\}}{2G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_S)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_S)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_S Q_3 \right]}, \quad (4.8a)$$

$$A_2 = - \frac{\bar{\sigma}_{zz} \left\{ Q_3 \left[Q_1 \exp[-(\alpha_L - \alpha_S)h] + Q_2 \exp[-(\alpha_L + \alpha_S)h] \right] + 4\beta^2 \alpha_L \alpha_S \right\}}{2G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_S)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_S)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_S Q_3 \right]}, \quad (4.8b)$$

$$B_1 = - \frac{i\bar{\sigma}_{zz} \beta \alpha_L \left[Q_1 \exp[-(\alpha_L - \alpha_S)h] + Q_2 \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h] - (\beta^2 + \alpha_S^2) \right]}{2G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_S)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_S)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_S Q_3 \right]}, \quad (4.8c)$$

$$B_2 = \frac{i\bar{\sigma}_{zz} \beta \alpha_L \left[Q_1 \exp[(\alpha_L - \alpha_S)h] + Q_2 \exp[-(\alpha_L + \alpha_S)h] - (\beta^2 + \alpha_S^2) \right]}{2G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_S)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_S)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_S Q_3 \right]}. \quad (4.8d)$$

em que,

$$F_R(\beta) = F_{Ray}(\beta) = \left(2\beta^2 - k_S^{*2} \right)^2 - 4\beta^2 \alpha_L \alpha_S, \quad (4.9a)$$

$$F_N(\beta) = \left(2\beta^2 - k_S^{*2} \right)^2 + 4\beta^2 \alpha_L \alpha_S, \quad (4.9b)$$

$$Q_1 = \left(\beta^2 + \alpha_L \alpha_S \right), \quad Q_2 = \left(\beta^2 - \alpha_L \alpha_S \right), \quad Q_3 = \left(2\beta^2 - k_S^{*2} \right). \quad (4.9c)$$

Admitindo-se que a solução obtida obedece a condição de radiação, aqui representadas por $\text{Re}(\alpha_L) > 0$ e $\text{Re}(\alpha_S) > 0$, tem-se:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} A_1 = \frac{\bar{\sigma}_{zz} (\beta^2 + \alpha_S^2)}{G^* F_R(\beta)}, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} B_1 = \frac{i\bar{\sigma}_{zz} \beta \alpha_L}{G^* F_R(\beta)}, \quad (4.10a)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} A_2 = 0, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} B_2 = 0. \quad (4.10b)$$

As expressões anteriores mostram, analiticamente que, para a base rígida suficientemente longe da superfície, isto é, quando $h \rightarrow \infty$, as amplitudes de onda A_1 e B_1 coincidem com as amplitudes de onda no caso da excitação harmônica na superfície do semi-espaco viscoelástico (eqs 2.26a e 2.26b, com $\gamma=0$).

De posse destas amplitudes de onda obtém-se as funções de flexibilidade dinâmica para o problema de um carregamento vertical na superfície da camada viscoelástica sobre uma base rígida, H_{1j}^b .

Assim tem-se,

$$\bar{H}_{wz}^b(\beta) = \frac{F_{Num1}(\beta)}{F_{Den1}(\beta)}, \quad (4.11a)$$

$$\bar{H}_{uz}^b(\beta) = \frac{F_{Num2}(\beta)}{F_{Den1}(\beta)}, \quad (4.11b)$$

em que,

$$F_{Num1}(\beta) = \alpha_L \left\{ Q_3 \left[Q_2 \sinh(\alpha_L(h-z) + \alpha_S h) - Q_1 \sinh(\alpha_L(h-z) - \alpha_S h) \right] - \right. \\ \left. 2\alpha_L \alpha_S \left[Q_2 \sinh(\alpha_L h + \alpha_S(h-z)) - Q_1 \sinh(\alpha_L h - \alpha_S(h-z)) \right] + \right. \\ \left. 4\beta^2 \alpha_L \alpha_S \sinh(\alpha_L z) + 2\beta^2 (\beta^2 + \alpha_S^2) \sinh(\alpha_S z) \right\}, \quad (4.12a)$$

$$F_{Num2}(\beta) = -i\beta \left\{ Q_3 \left[Q_2 \cosh(\alpha_L(h-z) + \alpha_S h) - Q_1 \cosh(\alpha_L(h-z) - \alpha_S h) \right] - \right. \\ \left. 2\alpha_L \alpha_S \left[Q_2 \cosh(\alpha_L h + \alpha_S(h-z)) + Q_1 \cosh(\alpha_L h - \alpha_S(h-z)) \right] + \right. \\ \left. 4\beta^2 \alpha_L \alpha_S \cosh(\alpha_L z) + 2\alpha_L \alpha_S (\beta^2 + \alpha_S^2) \cosh(\alpha_S z) \right\}, \quad (4.12b)$$

$$F_{Den1}(\beta) = G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_S)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_S)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_S Q_3 \right] \quad (4.12c)$$

4.2.1.-Solução do P.V.C.T. para um carregamento horizontal

Para um carregamento horizontal na superfície do domínio obtém-se o sistema na forma,

$$\begin{cases} C_1 i\beta\alpha_L & - & C_2 i\beta\alpha_L & - & D_1 (2\beta^2 - k_s^{*2}) & - & D_2 (2\beta^2 - k_s^{*2}) & = & \bar{\sigma}_{xz} / 2G^* \\ C_1 (2\beta^2 - k_s^{*2}) + C_2 (2\beta^2 - k_s^{*2}) & + & D_1 4i\beta\alpha_s & & - & D_2 4i\beta\alpha_s & = & 0 \\ C_1 i\beta e^{-\alpha_L h} & + & C_2 i\beta e^{\alpha_L h} & - & D_1 2\alpha_s e^{-\alpha_s h} & + & D_2 2\alpha_s e^{\alpha_s h} & = & 0 \\ C_1 \alpha_L e^{-\alpha_L h} & - & C_2 \alpha_L e^{\alpha_L h} & + & D_1 2i\beta e^{-\alpha_s h} & + & D_2 2i\beta e^{\alpha_s h} & = & 0 \end{cases} , \quad (4.13)$$

que resolvido para as amplitudes $C_{1,s}$ e $D_{1,s}$ fornece,

$$C_1 = - \frac{4i\bar{\sigma}_{xz}\beta\alpha_s \left[Q_1 \exp[(\alpha_L - \alpha_s)h] + Q_2 \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h] - Q_3 \right]}{4G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_s)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_s)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_s Q_3 \right]} , \quad (4.14a)$$

$$C_2 = \frac{4i\bar{\sigma}_{xz}\beta\alpha_s \left[Q_1 \exp[-(\alpha_L - \alpha_s)h] + Q_2 \exp[-(\alpha_L + \alpha_s)h] - Q_3 \right]}{4G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_s)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_s)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_s Q_3 \right]} , \quad (4.14b)$$

$$D_1 = - \frac{\bar{\sigma}_{xz} \left\{ Q_3 \left[Q_1 \exp[-(\alpha_L - \alpha_s)h] - Q_2 \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h] \right] - 4\beta^2 \alpha_L \alpha_s \right\}}{4G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_s)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_s)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_s Q_3 \right]} , \quad (4.14c)$$

$$D_2 = - \frac{\bar{\sigma}_{xz} \left\{ Q_3 \left[Q_1 \exp[(\alpha_L - \alpha_s)h] - Q_2 \exp[-(\alpha_L + \alpha_s)h] \right] - 4\beta^2 \alpha_L \alpha_s \right\}}{4G^* \left[F_N(\beta) Q_1 \cosh((\alpha_L - \alpha_s)h) - F_R(\beta) Q_2 \cosh((\alpha_L + \alpha_s)h) - 8\beta^2 \alpha_L \alpha_s Q_3 \right]} . \quad (4.14d)$$

Com as amplitudes das ondas dadas nas equações (4.14) constrói-se as funções de flexibilidade dinâmica para um carregamento horizontal na superfície de uma camada viscoelástica sobre uma base rígida na forma,

$$\bar{H}_{ux}^b(\beta) = \frac{F_{Num3}(\beta)}{F_{Den1}(\beta)}, \quad (4.15a)$$

$$\bar{H}_{wx}^b(\beta) = \frac{F_{Num4}(\beta)}{F_{Den1}(\beta)}, \quad (4.15b)$$

em que,

$$\begin{aligned} F_{Num3}(\beta) = & \alpha_s \left\{ Q_3 \left[Q_2 \sinh(\alpha_L h + (h-z)\alpha_s) + Q_1 \sinh(\alpha_L h - (h-z)\alpha_s) \right] - \right. \\ & 2\beta^2 \left[Q_2 \sinh(\alpha_L (h-z) + \alpha_s h) + Q_1 \sinh(\alpha_L (h-z) - \alpha_s h) \right] - \\ & \left. 4\beta^2 \alpha_L \alpha_s \sinh(\alpha_s z) + 2\beta^2 Q_3 \sinh(\alpha_L z) \right\}, \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} F_{Num4}(\beta) = & i\beta \left\{ Q_3 \left[Q_2 \cosh(\alpha_L h + (h-z)\alpha_s) - Q_1 \cosh(\alpha_L h - (h-z)\alpha_s) \right] - \right. \\ & 2\alpha_L \alpha_s \left[Q_2 \cosh(\alpha_L (h-z) + \alpha_s h) + Q_1 \cosh(\alpha_L (h-z) - \alpha_s h) \right] + \\ & \left. 4\beta^2 \alpha_L \alpha_s \cosh(\alpha_s z) + 2\alpha_L \alpha_s Q_3 \cosh(\alpha_L z) \right\}. \end{aligned} \quad (4.16b)$$

Novamente para a base rígida suficientemente distante da superfície obtém-se as funções de flexibilidade para o semi-espaço viscoelástico para uma excitação harmônica:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \bar{H}_{wz}^b(\beta, z=0) = \frac{\alpha_L (\beta^2 - \alpha_s^2)}{G^* F_{Ray}(\beta)} = \bar{H}_{wz}^h(\beta), \quad (4.17a)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \bar{H}_{uz}^b(\beta, z=0) = \frac{i\beta \left[(\beta^2 - \alpha_s^2) - 2\alpha_L \alpha_s \right]}{G^* F_{Ray}(\beta)} = \bar{H}_{uz}^h(\beta), \quad (4.17b)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \bar{H}_{ux}^b(\beta, z=0) = - \frac{\alpha_s (\beta^2 - \alpha_s^2)}{G^* F_{Ray}(\beta)} = \bar{H}_{ux}^h(\beta), \quad (4.17c)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \bar{H}_{wx}^b(\beta, z=0) = \frac{i\beta \left[(\beta^2 - \alpha_s^2) - 2\alpha_L \alpha_s \right]}{G^* F_{Ray}(\beta)} = \bar{H}_{wx}^h(\beta). \quad (4.17d)$$

As funções de flexibilidade para o problema da camada viscoelástica sobre a base rígida podem ainda serem escritas em relação à altura h , aos números de onda α_L , α_s , e β e às variáveis espaciais (x, z) , ou seja,

$$\bar{H}_{wz}^b(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z) = \frac{\bar{W}_z(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z)}{\bar{\sigma}_{zz}(\beta, x, z=0)}, \quad (4.18a)$$

$$\bar{H}_{uz}^b(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z) = \frac{\bar{U}_z(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z)}{\bar{\sigma}_{zz}(\beta, x, z=0)}, \quad (4.18b)$$

$$\bar{H}_{ux}^b(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z) = \frac{\bar{U}_x(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z)}{\bar{\sigma}_{xz}(\beta, x, z=0)}, \quad (4.18c)$$

$$\bar{H}_{wx}^b(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z) = \frac{\bar{W}_x(\beta, \alpha_L, \alpha_s, h, x, z)}{\bar{\sigma}_{xz}(\beta, x, z=0)}. \quad (4.18d)$$

As equações (4.18) contém as funções de influência em deslocamentos $\bar{W}_i(\beta)$ e $\bar{U}_i(\beta)$ para uma excitação em tensões com um número de onda monocromático β . Para uma excitação com um espectro

de número de onda arbitrário as funções de influência podem ser obtidas com a ajuda da transformada de Fourier,

$$\bar{U}_i(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}_{ij}^b(\beta) \bar{\sigma}_{ij}(\beta) \exp(i\beta x) d\beta. \quad (4.19)$$

Novamente a superposição da solução do P.V.C.T. somadas às condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio de forças possibilita a formação de um P.V.C.M. que resolvido fornecem os deslocamentos de corpo rígido da fundação assim como as tensões na base da fundação.

As figuras 4.4 a 4.7 ilustram a solução do P.V.C.T., equações (4.19), para as excitações na superfície de uma camada viscoelástica sobre uma base rígida. Para obter estas figuras utilizam-se como parâmetros a razão de Poisson $\nu=0.40$, o amortecimento $\eta=0.10$, a altura da camada viscoelástica $h/a=2.0$ e a frequência adimensional $A_0=1.0$.

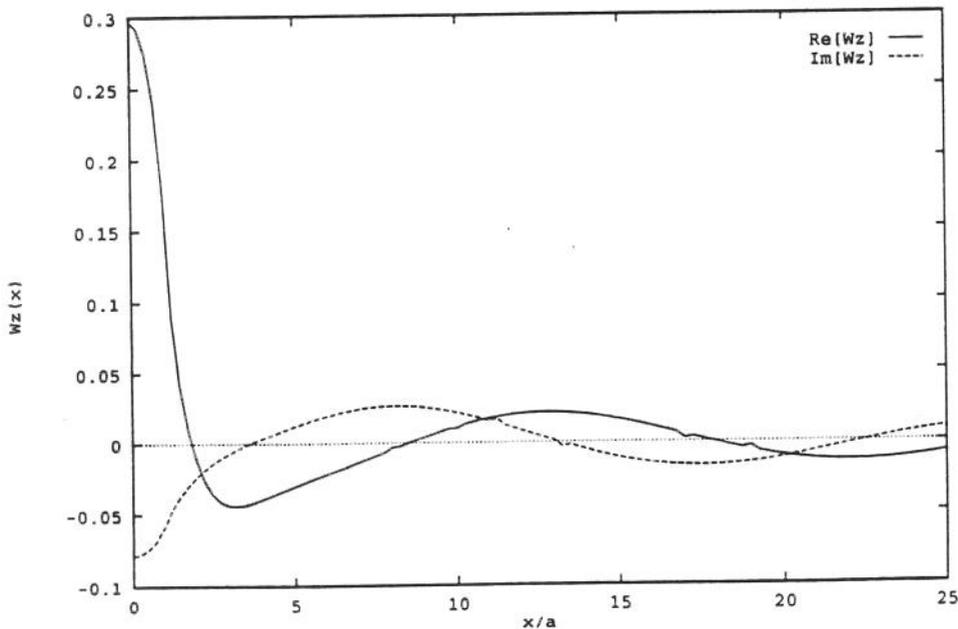


Figura 4.4. Deslocamentos $Wz(x)$ para o P.V.C.T. no problema da camada viscoelástica sobre uma base rígida.

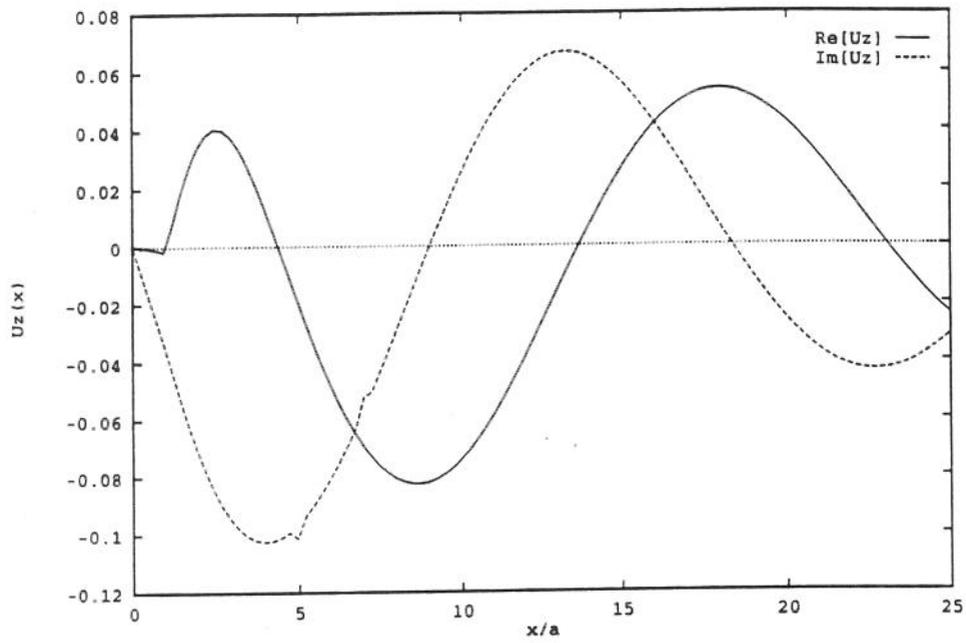


Figura 4.5. Deslocamentos $U_z(x)$ para o P.V.C.T.

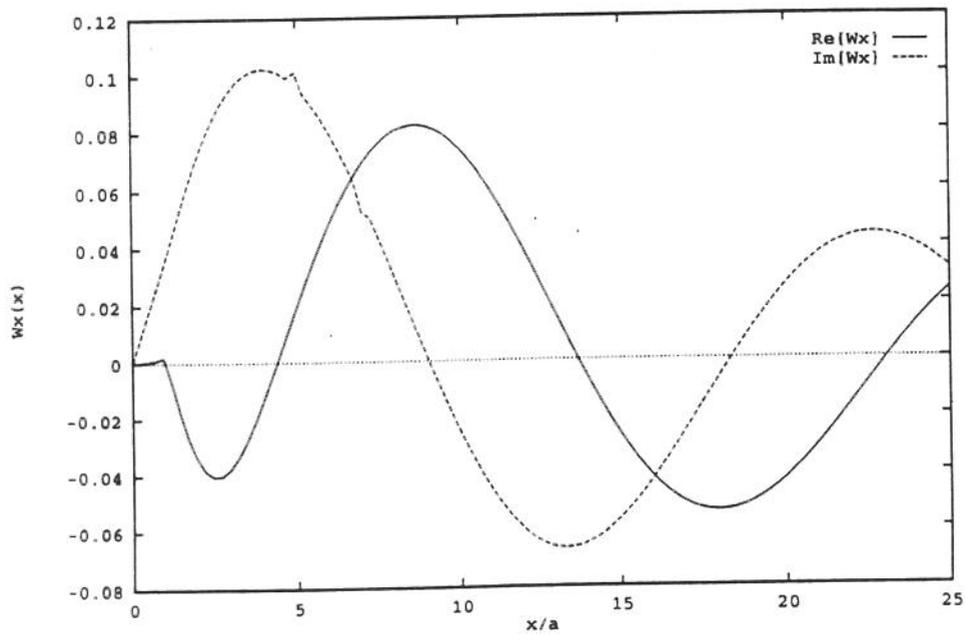


Figura 4.6. Deslocamentos $W_x(x)$ para o P.V.C.T.

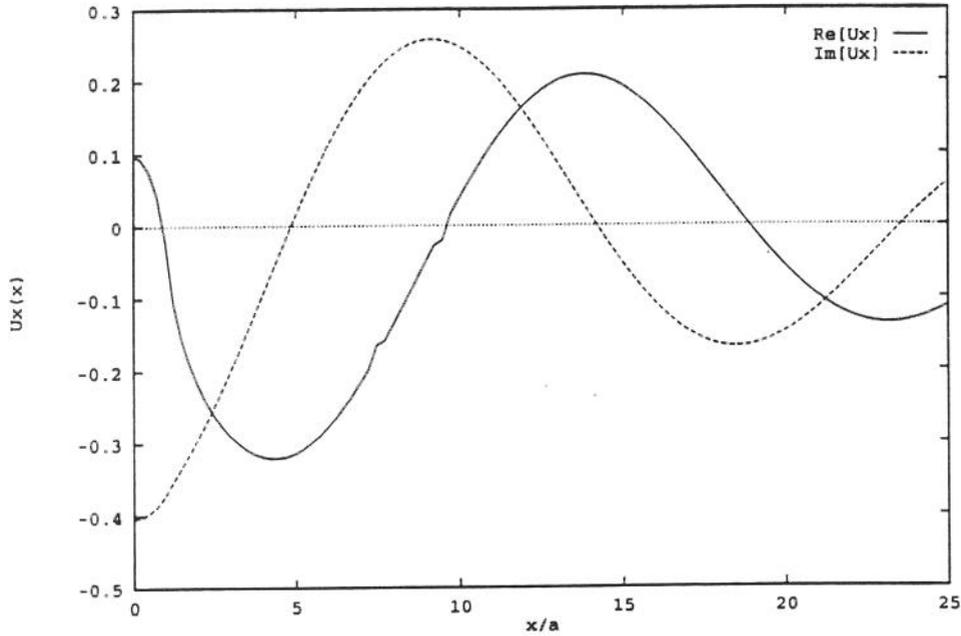


Figura 4.7. Deslocamentos $U_x(x)$ para o P.V.C.T.

No P.V.C.T., e conforme a equação matricial (3.25), as relações superpostas de tensão-deslocamentos dão origem a um sistema de equações algébricas complexas, um vetor armazenando as tensões, outro contendo os deslocamentos normalizados \bar{P}_N e finalmente as excitações externas normalizadas \bar{F}_N , ou seja,

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{H}^b & \bar{C}_c \\ \hline \bar{E}_q & M \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{K} \\ \bar{P}_N \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \bar{F}_N \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

No presente caso uma fundação sem propriedades de inércia $M=0$ é considerada. Pela solução do sistema (4.20) é possível, de forma análoga ao exposto no item 3.4, obter os elementos de uma matriz complexa de flexibilidade dinâmica N_{ij} , cuja estrutura

ra é dada por:

$$\frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{um} \\ 0 & N\phi_x & N\phi_m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{W}_R \\ \bar{U}_R \\ \bar{\phi}_y/a \end{Bmatrix}. \quad (4.21)$$

A tabela 1 mostra a parte real dos termos da matriz de flexibilidade dinâmica N_{wz} , N_{ux} e $N\phi_m$ para vários números de elementos na interface solo-fundação, n_f . Pode-se ver que a convergência para N_{wz} e N_{ux} é muito rápida. Para o termo $N\phi_m$ a convergência é mais lenta.

n_f	Re (N_{wz})	Re (N_{ux})	Re ($N\phi_m$)
02	0.302957E+0	0.534591E+0	0.604731E+0
04	0.288317E+0	0.518686E+0	0.442040E+0
08	0.280853E+0	0.510640E+0	0.393465E+0
16	0.277096E+0	0.506600E+0	0.373718E+0
32	0.275514E+0	0.504589E+0	0.364723E+0

Tabela 1. Comportamento das componentes da matriz de flexibilidade dinâmica com o aumento do número dos elementos na interface solo-fundação, n_f ($\eta=0.10$, $\nu=0.40$, $A_0=0.05$, $h/a=2.0$).

A dimensão do sistema (4.20) é dada por,

$$\text{Dim}(M.S.) = (2 \times n_f + 3)^2. \quad (4.22)$$

4.3.-Evolução numérica das funções de influência

O esquema de integração utilizado para evoluir as integrais impróprias que caracterizam as funções de influência é

de fundamental importância no Método da Superposição, pois é ele que faz o método ser competitivo ou não. Inicialmente trabalhou-se com uma técnica de integração com avanço de passo associada a um critério de convergência [56]. Esta técnica mostrou-se tão ineficiente computacionalmente, especialmente em altas frequências, que tornou o método praticamente inútil. Uma considerável melhora foi obtida quando passou-se a utilizar a estratégia de Longman [47] para a evolução numérica de integrais impróprias com núcleos oscilantes. O tempo computacional de integração foi drasticamente reduzido por um fator 50 para baixas frequências até 1000 para frequências mais altas.

A figura 4.8 ilustra o comportamento de um dos núcleos das integrais que aparece nas funções de influência, equação (2.40a).

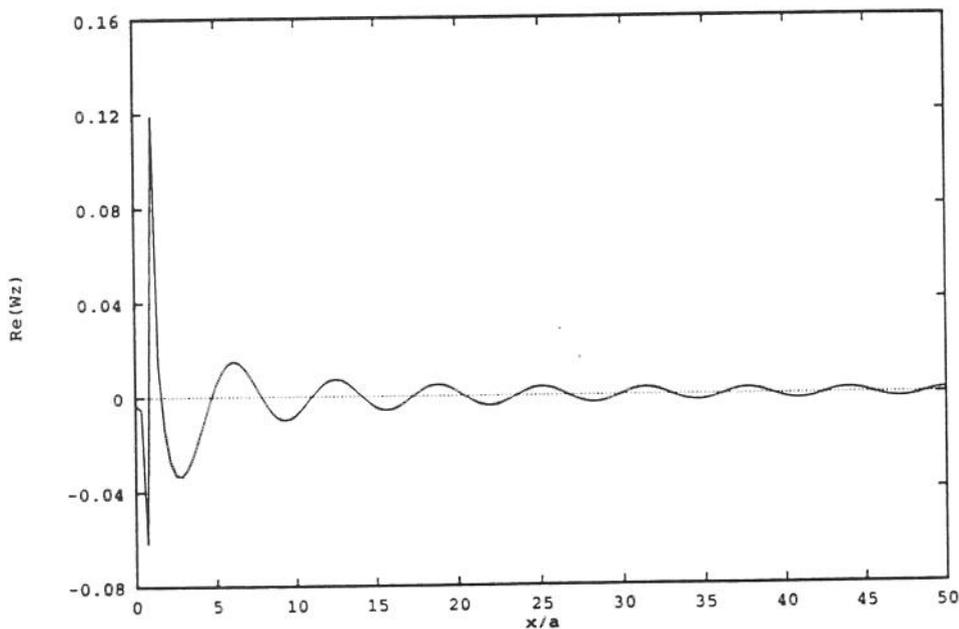


Figura 4.8. Comportamento do núcleo da integral em $Re(\bar{W}_z)$.

Vê-se na figura 4.9 o valor absoluto da função de flexibilidade $\bar{H}_{wz}^s = \bar{W}_z \cdot G^* / \bar{\sigma}_{zz}$ plotada versus a frequência adimensional A_0 . Para o semi-espço elástico tem-se um pólo de primeira espécie da função de Rayleigh tornando a integral da equação (2.40a) também imprópria com respeito ao integrando. As integrais no caso elástico devem então ser tratadas por meio do Valor Principal de Cauchy evoluindo a integração numérica de contorno no plano complexo.

Já para o semi-espço viscoelástico encontra-se um pico de ressonância ao invés de um pólo [32]. Desse modo, a integral da equação (2.40a) não é imprópria e pode ser evoluída numericamente sem maiores problemas. O valor absoluto da função de flexibilidade no semi-espço viscoelástico é também mostrada na figura 4.9 para as constantes de amortecimento $\eta=0.10$ e $\eta=0.20$.

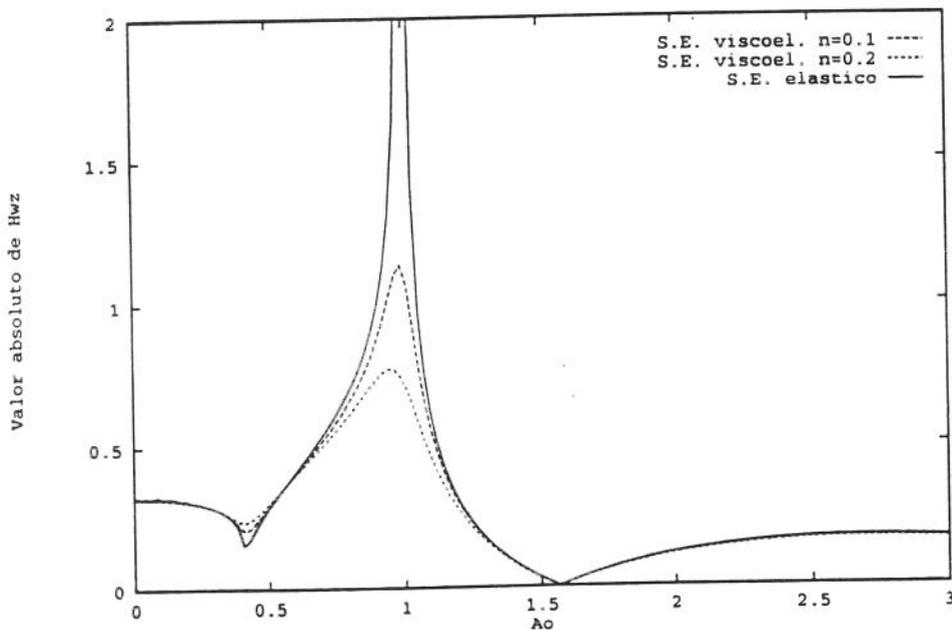


Figura 4.9. Valor absoluto da função de flexibilidade para o Semi-Espço (S.E.).

4.4.-A versão direta do Método dos Elementos de Contorno

Um esquema de elementos de contorno para o problema estacionário da viscoelastodinâmica bidimensional [01,67] foi utilizado a fim de fazer algumas comparações com o Método da Superposição. A equação de Navier (2.1) foi transformada na seguinte equação integral por meio do teorema da reciprocidade [09]:

$$c(\theta)U_i(x,\omega) = \int_{\Gamma} (t_j U_{ij}^* - U_j t_{ij}^*) d\Gamma, \quad (4.23)$$

em que $c(\theta)$ é um termo ligado as características geométricas do contorno.

Esta equação integral foi discretizada assumindo-se uma distribuição espacial constante dos deslocamentos U_i e trações t_i nos contornos Γ_i , conduzindo a uma relação tensão-deslocamentos do tipo,

$$[G] \{t\} = [H] \{U\}, \quad (4.24)$$

com U_{ij}^* e t_{ij}^* indicando, respectivamente, as componentes do deslocamento e da tensão na solução fundamental para o espaço bidimensional elástico completo. O amortecimento material foi incorporado no M.E.C. por meio das constantes de Lamé de modo análogo às equações (1.16) [67].

4.5.-Discretizações no contorno

Uma das grandes vantagens do Método dos Elementos de Contorno reside em sua habilidade em modelar qualquer espécie de contorno. O preço a ser pago, entretanto, é que todos os contornos devem ser discretizados e eventualmente truncados. Para o problema

de uma camada viscoelástica ilimitada na direção x, e ilustrada na figura 4.2., os contornos Γ_1 e Γ_3 devem ser ilimitados. Uma implementação realística implica no truncamento da discretização a alguma distância da interface solo-fundação Γ_2 .

4.6.-Interação com uma fundação rígida

Para analisar o problema da interação de uma fundação rígida com o solo, condições de equilíbrio e de compatibilidade cinemática devem ser adicionadas à equação (4.24). Definindo os deslocamentos e as trações nos elementos sobre a fronteira Γ_i como,

$$U_i, t_i = \begin{cases} U_s, t_s & (U_i, t_i \in \Gamma_1) \\ U_f, t_f & (U_i, t_i \in \Gamma_2) \\ U_h, t_h & (U_i, t_i \in \Gamma_3), \end{cases} \quad (4.25)$$

e observando que devido as condições de contorno dadas por $t_s = U_h = 0$ o problema pode ser reduzido a um sistema de equações algébricas na forma [67],

$$[A] \{x\} = \{b\}, \quad (4.26)$$

com,

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{\{t_f\}, \{t_h\}, \{U_f\}, \{U_s\}, \{\bar{P}\}\}^T, \\ \{b\} &= \{\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{\bar{F}_e\}\}^T, \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que $\{\bar{P}\} = \{\bar{W}_R, \bar{U}_R, \bar{\phi}_y a\}^T$ e $\{\bar{F}_e\} = \{\bar{F}_z, \bar{F}_x, \bar{M}_y/a\}^T$.

A matriz A em (4.26) contém as funções de influência, as condições de compatibilidade cinemática e as equações de equilíbrio de corpo rígido do sistema solo-fundação. Chamando n_s , n_f e n_h respectivamente o número de elementos discretizados em Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 a dimensão total do sistema algébrico (4.26) será:

$$\text{Dim(M.E.C.)} = [2 \times (n_f + n_h + n_s) + 3]^2. \quad (4.28)$$

4.7.-Validações e comparações

As figuras 4.10 a 4.17 mostram o comportamento dos elementos N_{wz} , N_{ux} e $N_{\phi m}$ dados pela equação (4.21) para o Método da Superposição comparado com os resultados apresentados por Abascal e Dominguez [01], baseados no M.E.C., em que os autores utilizaram elementos constantes. Estes resultados foram obtidos para a razão de Poisson $\nu=0.40$ e o coeficiente de amortecimento $\eta=0.10$. Para os elementos N_{wz} e N_{ux} vê-se que existe uma boa concordância mesmo para uma discretização relativamente pobre ($n_f=8$) no Método da Superposição. Algumas diferenças são notadas para $\text{Re}(N_{ux})$ na faixa de frequência $0.8 \leq A_0 \leq 1.2$. Em relação ao momento, os elementos $\text{Re}(N_{\phi m})$ e $\text{Im}(N_{\phi m})$ ilustrados nas figuras 4.12, 4.13, 4.16 e 4.17 são mais sensíveis à distribuição de tensões de superfície e somente apresentam uma boa concordância com Abascal/Dominguez [01] para $n_f=32$.

A matriz completa de flexibilidade dinâmica para a condição de contato soldado na interface solo-fundação exibe termos fora da diagonal $N_{\phi x}$ e N_{um} . Estes elementos acoplam o deslocamento horizontal e a rotação na fundação. Os termos acoplados são usualmente omitidos mas são importantes do ponto de vista de sistemas dinâmicos relacionados com fundações [49]. As figuras 4.18 e 4.19 mostram as partes real e imaginária dos termos fora da diagonal $N_{\phi x}$ e N_{um} obtidos pelo presente método e por Pontes [67] baseado no M.E.C. também com elementos constantes. Os parâmetros para a implementação do M.E.C. são $n_f=20$, $n_s=82$ e $n_h=44$. A

implementação via Método da Superposição reproduz muito bem a conhecida versão dinâmica do teorema de reciprocidade de Betti, $N\phi_x = N_{um}$ [49]. Para o M.E.C. esta reciprocidade é também razoavelmente reproduzida no espectro de frequência considerado.

Admitindo o modelo físico dado pela figura 4.2, quando $h \rightarrow \infty$, isto é, supondo que a base rígida localiza-se suficientemente distante da superfície, pode-se reproduzir computacionalmente, utilizando o Método da Superposição, o problema da excitação harmônica na superfície de um semi-espaço viscoelástico. As figuras 4.20, 4.21 e 4.22 mostram respectivamente, os elementos N_{wz} , N_{ux} e N_{ϕ_m} da matriz de flexibilidade dinâmica para o semi-espaço obtidas pelo Método da Superposição e pelo Método dos Elementos de Contorno.

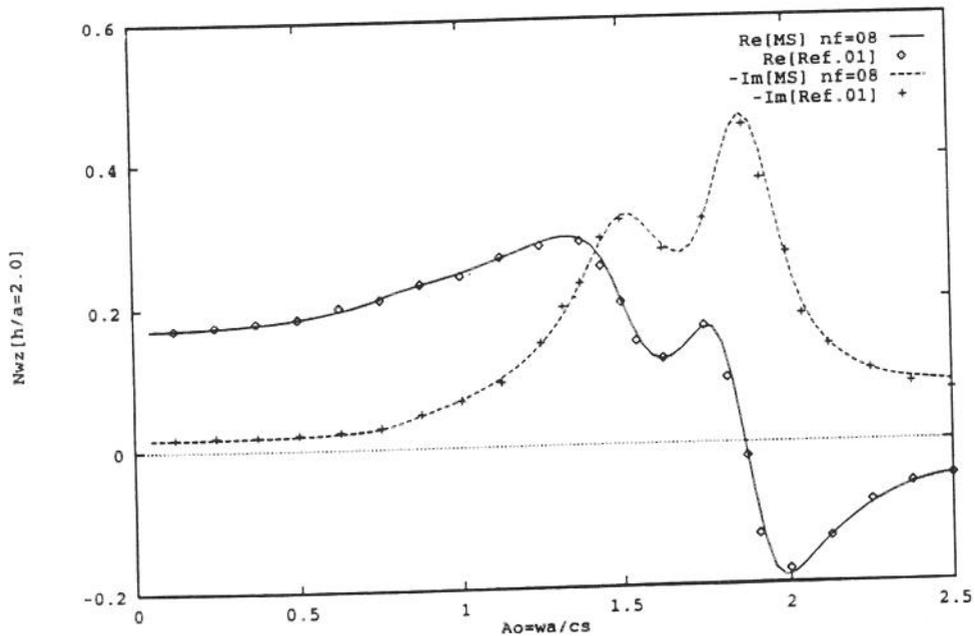


Figura 4.10. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica vertical.

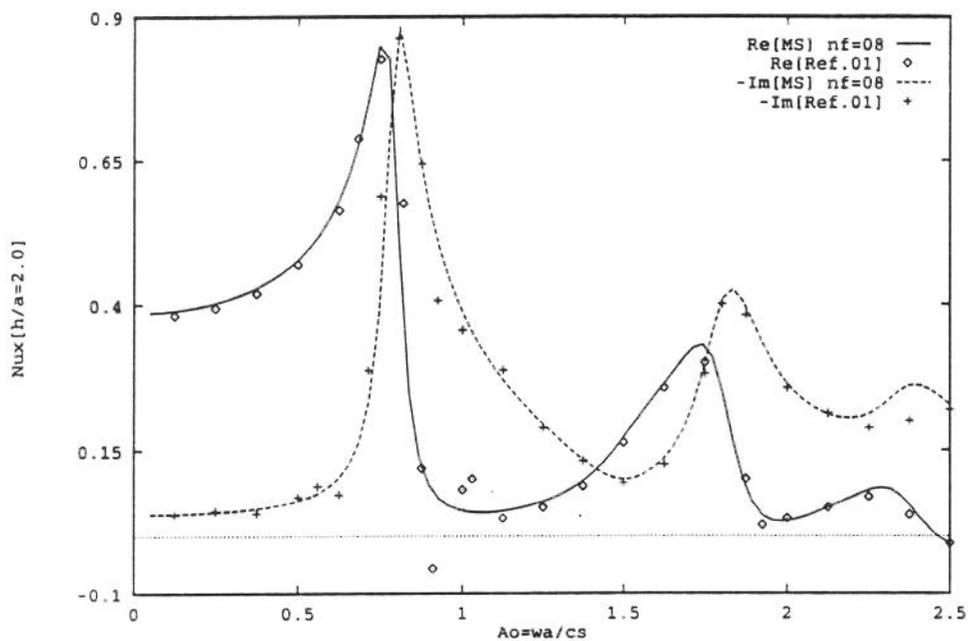


Figura 4.11. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica horizontal.

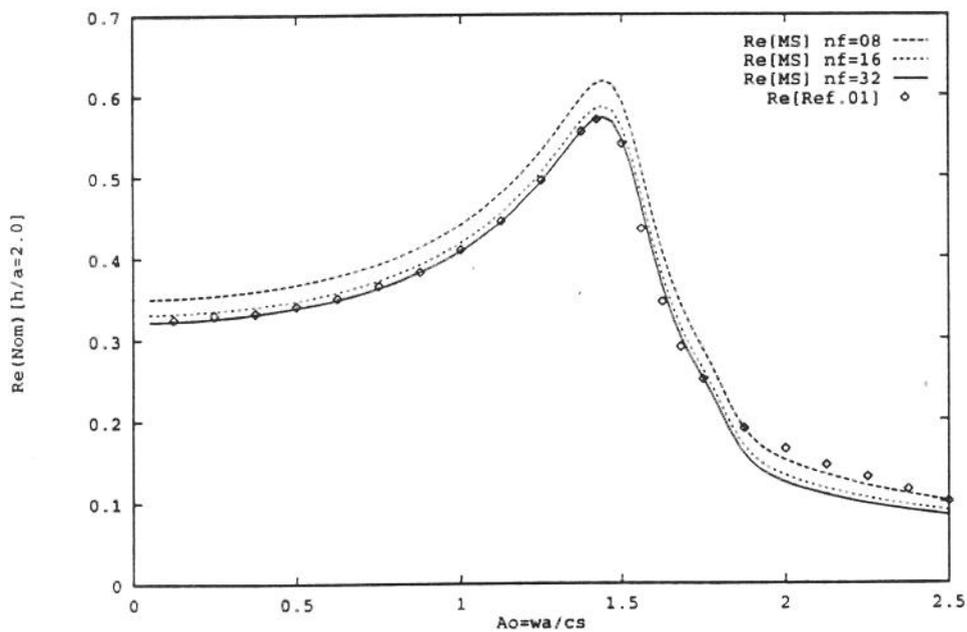


Figura 4.12. Componente real da flexibilidade dinâmica relacionada ao momento.

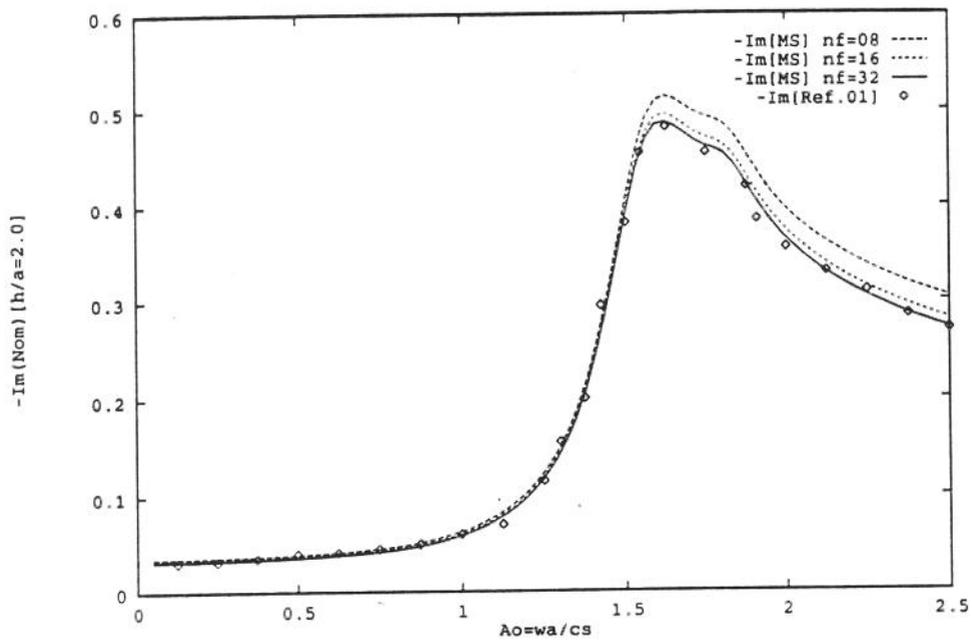


Figura 4.13. Componente imaginária da flexibilidade dinâmica relacionada ao momento.

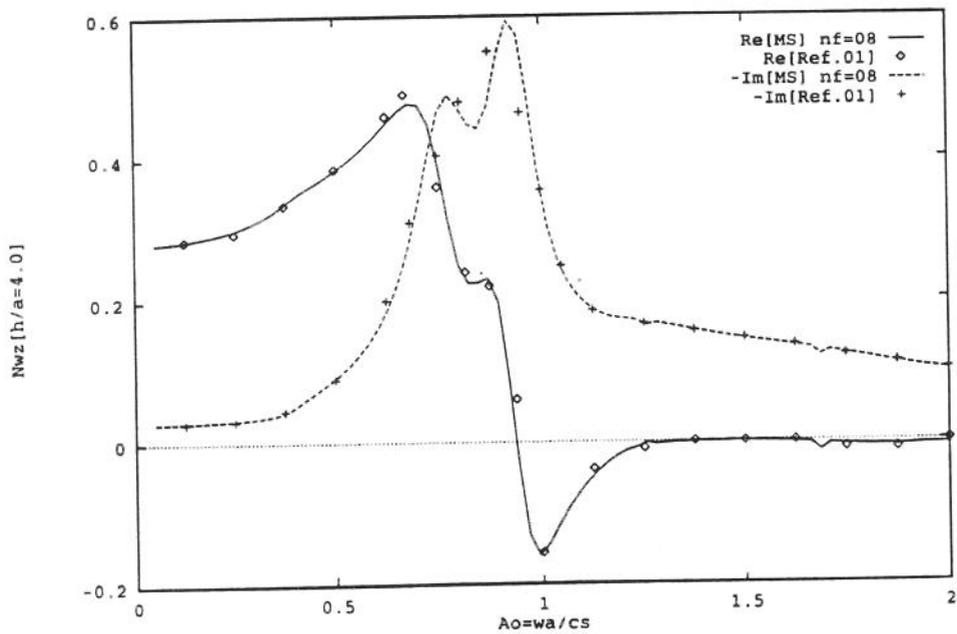


Figura 4.14. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica vertical.

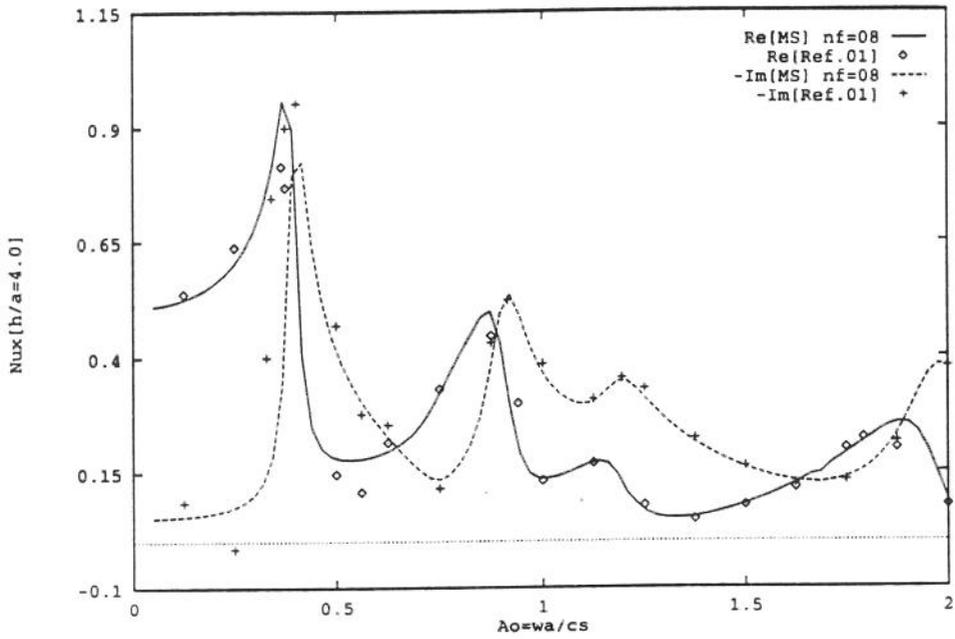


Figura 4.15. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica horizontal.

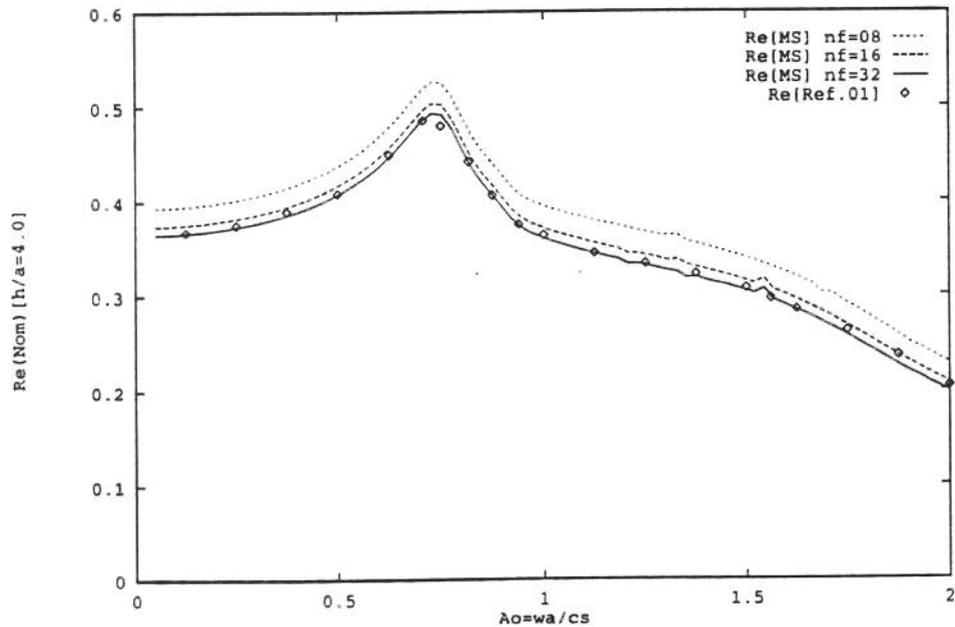


Figura 4.16. Componente real da flexibilidade dinâmica relacionada ao momento.

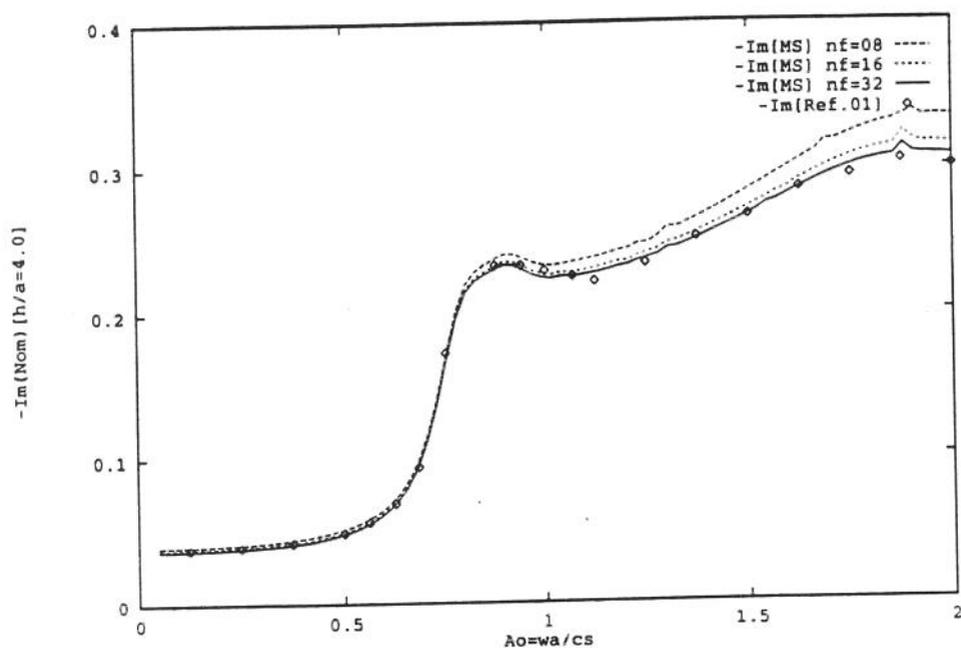


Figura 4.17. Componente imaginária da flexibilidade dinâmica relacionada ao momento.

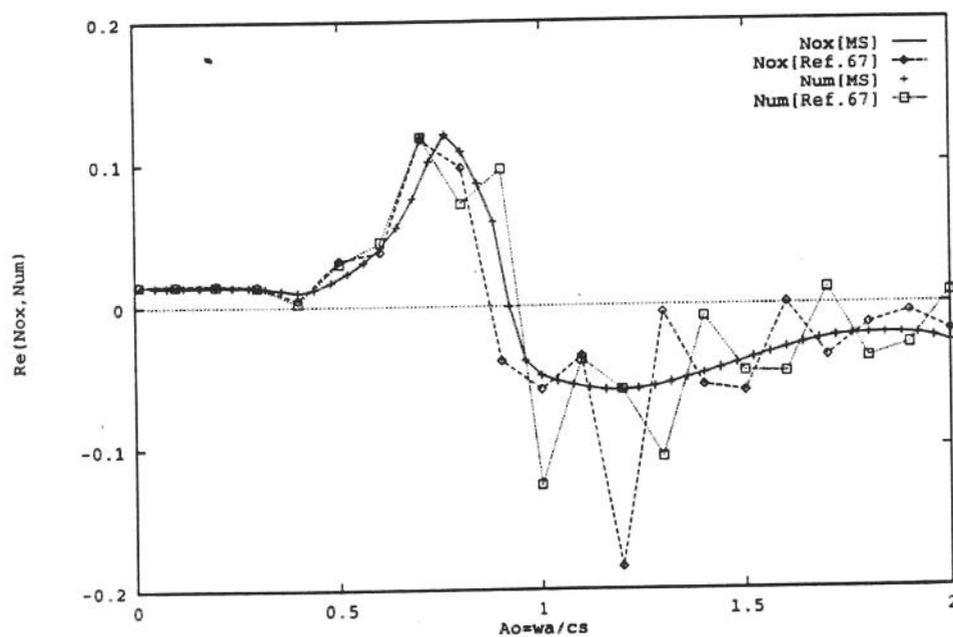


Figura 4.18. Componente real dos termos fora da diagonal da matriz de flexibilidade dinâmica.

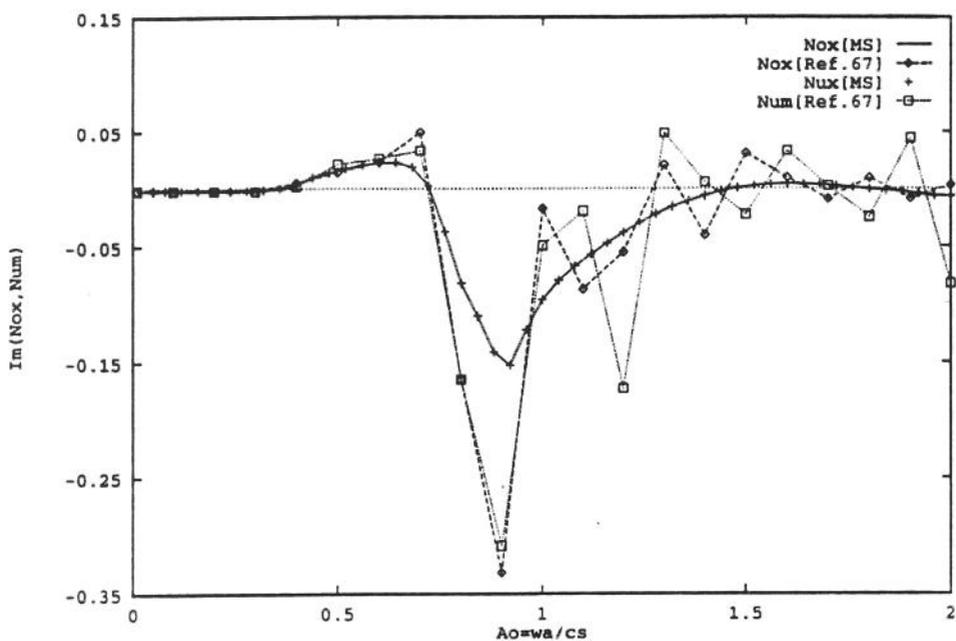


Figura 4.19. Componente imaginária dos termos fora da diagonal da matriz de flexibilidade dinâmica.

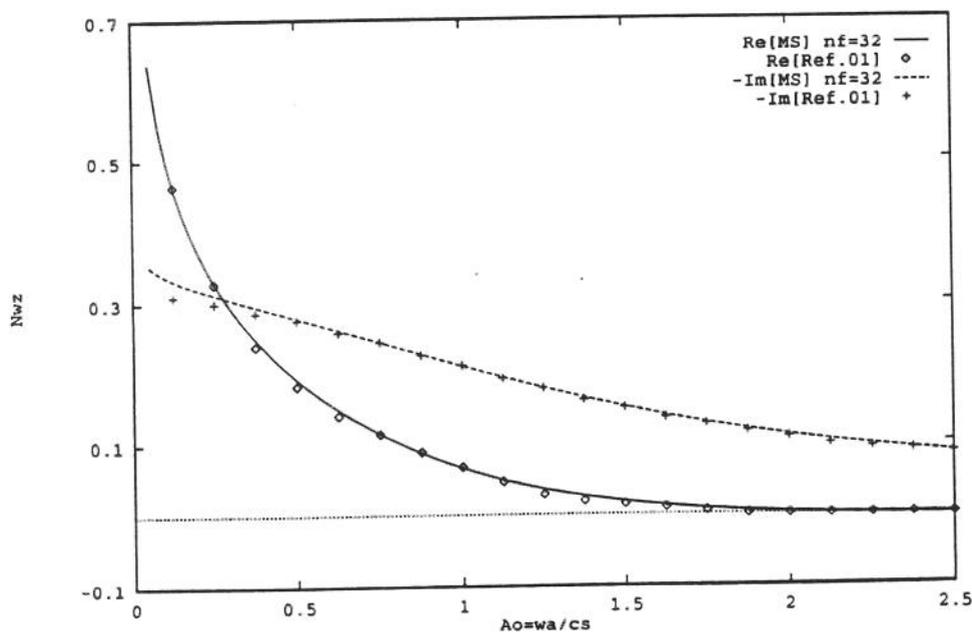


Figura 4.20. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica vertical para o semi-espaço ($\nu=0.40$, $\eta=0.10$).

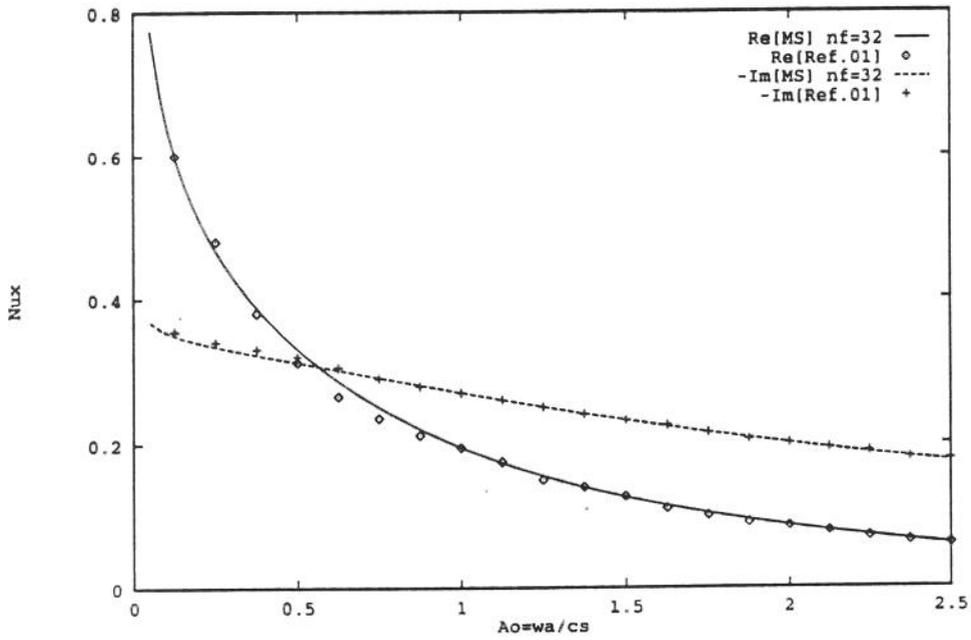


Figura 4.21. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica horizontal para o semi-espço ($\nu=0.40$, $\eta=0.10$).

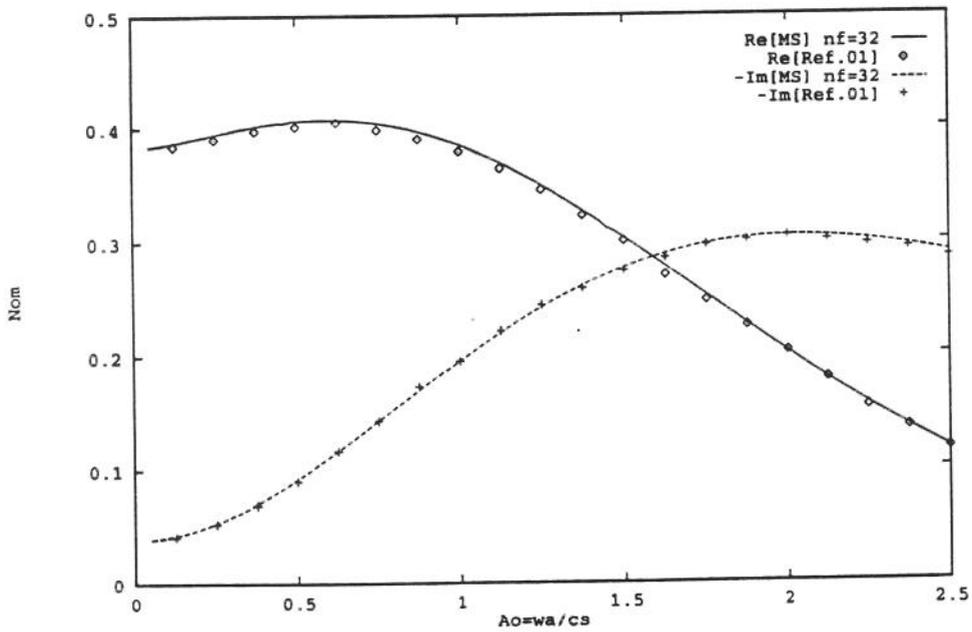


Figura 4.22. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica relacionada ao momento para o semi-espço ($\nu=0.40$, $\eta=0.10$).

Pode-se ver nas figuras 4.10 a 4.22 que o Método da Superposição, aqui considerado, mostra-se eficiente para a análise do problema da interação dinâmica de uma camada viscoelástica sobre uma base rígida. Nota-se que, mesmo para uma discretização não muito refinada, o Método da Superposição apresenta resultados compatíveis com a versão direta do Método dos Elementos de Contorno.

4.7.1-Reserva de memória nos métodos

O sistema algébrico utilizado no Método da Superposição para obter as componentes da matriz de flexibilidade dinâmica nas figuras 4.10, 4.11, 4.14 e 4.15 (com $n_f=8$) tem, de acordo com a equação (4.22), a dimensão $\text{Dim}(\text{M.S.})=19 \times 19$. Para as figuras 4.12, 4.13, 4.16 e 4.17 o maior sistema tem a dimensão $\text{Dim}(\text{M.S.})=67 \times 67$. Os dados de discretização reportados por [01] implicam, para uma malha mais refinada, num sistema de dimensão $\text{Dim}(\text{M.E.C.})=140 \times 140$ e $\text{Dim}(\text{M.E.C.})=198 \times 198$, respectivamente. Nas figuras 4.18 e 4.19 os sistemas têm respectivamente as dimensões $\text{Dim}(\text{M.E.C.})=295 \times 295$, enquanto $\text{Dim}(\text{M.S.})=19 \times 19$.

4.7.2.-Tempo necessário de CPU

Os tempos de CPU relativos utilizado pelo Método da Superposição e pelo Método dos Elementos de Contorno para o mesmo número de pontos de frequência na figura 4.14 foram respectivamente, $T(\text{M.S.})=1.0$ e $T(\text{M.E.C.})=1.18$. Vê-se assim que o tempo de CPU em ambos os métodos não difere de modo expressivo.

5.-Funções de influência para o problema da interação dinâmica de fundações de superfície em meios estratificados

Nos capítulos anteriores analisou-se o comportamento dinâmico de fundações de superfície interagindo com o solo, sendo este caracterizado basicamente por dois modelos físicos, a saber, o semi-espaço viscoelástico e a camada viscoelástica sobre uma base rígida "bedrock".

Tendo como motivação os resultados obtidos pelo presente método desenvolve-se, neste capítulo, as funções de influência para um modelo do solo um pouco mais complexo, qual seja, o de uma ou mais camadas viscoelásticas assentadas sobre um semi-espaço, como ilustra a figura 5.1.

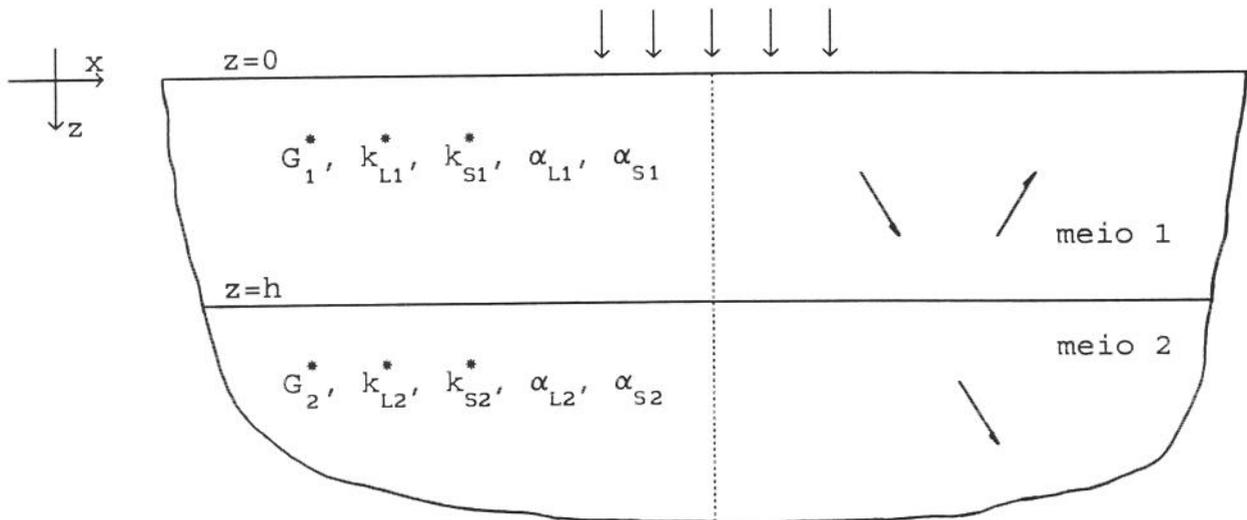


Figura 5.1. Camada viscoelástica sobre o semi-espaço.

A camada viscoelástica caracterizada pelo meio 1 na figura 5.1, possui propriedades materiais distintas do semi-espaço, meio 2.

Uma combinação adequada entre as velocidades da onda de cisalhamento nos meios 1 e 2 faz com que o problema da camada viscoelástica sobre o semi-espaço consiga simular os problemas já estudados, ou seja, da fundação rígida de superfície interagindo

com o semi-espaço ($G_1=G_2$) e o problema de uma camada viscoelástica sobre uma base rígida ($G_2 \gg G_1$).

5.1.-Funções de flexibilidade do problema

Baseado na metodologia desenvolvida neste trabalho, o ponto inicial para a síntese das funções de flexibilidade em solos com camadas parte da representação adequada de soluções tentativa para as equações de onda. Devido a mudança de meio, a propagação das ondas de dilatação e cisalhamento deve prever a reflexão destas quando é analisado o meio 1. Em relação ao meio 2, as ondas de dilatação e cisalhamento transmitidas devem caminhar sem reflexão.

Dessa forma, as soluções tentativa para o domínio estratificado, em que é assumido o estado plano de deformações, podem ser colocadas como:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= \left[A_1 k_{L1}^{*2} \exp(-\alpha_{L1} z) + A_2 k_{L1}^{*2} \exp(\alpha_{L1} z) \right] \exp(i\beta x) \\ \bar{\psi}_1 &= \left[B_1 k_{S1}^{*2} \exp(-\alpha_{S1} z) + B_2 k_{S1}^{*2} \exp(\alpha_{S1} z) \right] \exp(i\beta x) \end{aligned} \quad \text{em } \Omega^1, \quad (5.1)$$

$$\bar{\Delta}_2 = A_3 k_{L2}^{*2} \exp[-\alpha_{L2} z + i\beta x] \quad \text{em } \Omega^2. \quad (5.2)$$

$$\bar{\psi}_2 = B_3 k_{S2}^{*2} \exp[-\alpha_{S2} z + i\beta x]$$

Nas soluções tentativa acima tem-se 6 amplitudes de onda nos meios 1 e 2. A fim de determiná-las deve-se construir um sistema algébrico 6x6 que ao ser resolvido analiticamente fornece as amplitudes em função dos números de onda α_{L1} , α_{S1} , k_{L1}^* , k_{S1}^* , β , da altura da camada viscoelástica h e do módulo de elasticidade transversal complexo G_1^* .

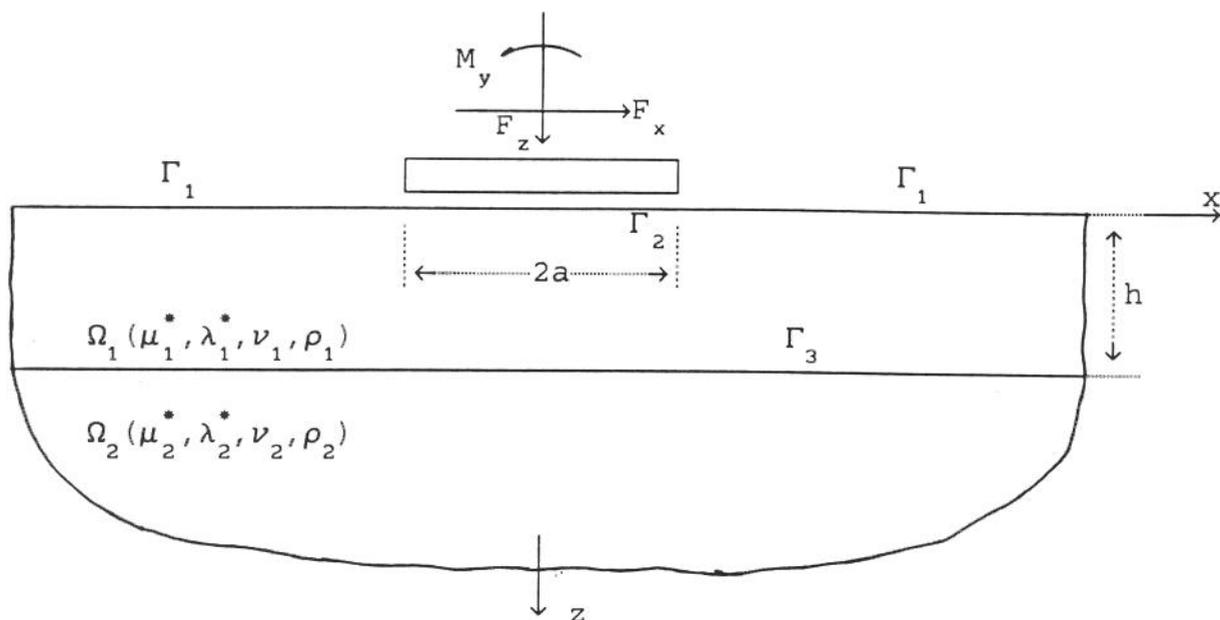


Figura 5.2. Fundação rígida de superfície sobre o solo estratificado: camada viscoelástica sobre o semi-espaço.

São as condições de contorno que tornam determinado o sistema algébrico do problema. As tensões na superfície do meio 1 ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2$), mostrado na figura 5.2, são da forma,

$$\bar{\sigma}_{zz}^1 = -\bar{\sigma}_{zz} \exp(i\beta x) \quad ; \quad \bar{\sigma}_{xz}^1(x, z=0) = 0. \quad (5.3)$$

A continuidade dos deslocamentos e o equilíbrio das tensões na interface Γ_3 , são descritas por:

$$\bar{U}_x^1(x, z=h^-) = \bar{U}_x^2(x, z=h^+), \quad \bar{U}_z^1(x, z=h^-) = \bar{U}_z^2(x, z=h^+), \quad (5.4)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^1(x, z=h^-) = \bar{\sigma}_{zz}^2(x, z=h^+), \quad \bar{\sigma}_{xz}^1(x, z=h^-) = \bar{\sigma}_{xz}^2(x, z=h^+). \quad (5.5)$$

Desse modo, introduzindo as soluções tentativa (5.1) e (5.2) nos campos de deslocamento e tensões, eqs. (2.9) e (2.21), respectivamente, e admitindo as condições de contorno dadas nas expressões (5.3) a (5.5) obtém-se,

$$i\beta \left[A_1 \exp(-\alpha_{L1} h) + A_2 \exp(\alpha_{L1} h) - A_3 \exp(-\alpha_{L2} h) \right] - 2\alpha_{s1} \left[B_1 \exp(-\alpha_{s1} h) - B_2 \exp(\alpha_{s1} h) \right] + 2\alpha_{s2} B_3 \exp(-\alpha_{s2} h) = 0, \quad (5.6a)$$

$$\alpha_{L1} \left[A_1 \exp(-\alpha_{L1} h) - A_2 \exp(\alpha_{L1} h) \right] - \alpha_{L2} A_3 \exp(-\alpha_{L2} h) + 2i\beta \left[B_1 \exp(-\alpha_{s1} h) + B_2 \exp(\alpha_{s1} h) - B_3 \exp(-\alpha_{s2} h) \right] = 0, \quad (5.6b)$$

$$G_1^* i\beta \alpha_{L1} \left[A_1 \exp(-\alpha_{L1} h) - A_2 \exp(\alpha_{L1} h) \right] - G_2^* i\beta \alpha_{L2} A_3 \exp(-\alpha_{L2} h) - G_1^* (2\beta^2 - k_{s1}^{*2}) \left[B_1 \exp(-\alpha_{s1} h) + B_2 \exp(\alpha_{s1} h) \right] + G_2^* (2\beta^2 - k_{s2}^{*2}) B_3 \exp(-\alpha_{s2} h) = 0, \quad (5.6c)$$

$$G_1^* (2\beta^2 - k_{s1}^{*2}) \left[A_1 \exp(-\alpha_{L1} h) + A_2 \exp(\alpha_{L1} h) \right] - G_2^* (2\beta^2 - k_{s2}^{*2}) A_3 \exp(-\alpha_{L2} h) + G_1^* 4i\beta \alpha_{s1} \left[B_1 \exp(-\alpha_{s1} h) - B_2 \exp(\alpha_{s1} h) \right] - G_2^* 4i\beta \alpha_{s2} B_3 \exp(-\alpha_{s2} h) = 0, \quad (5.6d)$$

$$i\beta \alpha_{L1} \left[A_1 - A_2 \right] - (2\beta^2 - k_{s1}^{*2}) \left[B_1 + B_2 \right] = 0, \quad (5.6e)$$

$$(2\beta^2 - k_{s1}^{*2}) \left[A_1 + A_2 \right] + 4i\beta \alpha_{s1} \left[B_1 - B_2 \right] = \bar{\sigma}_{zz} / G_1^*. \quad (5.6f)$$

Uma vez resolvido o sistema acima, a síntese das funções de flexibilidade segue os mesmos passos da metodologia descrita nos capítulos anteriores. No apêndice B desta dissertação encontram-se as funções de influência para o problema da camada

viscoelástica sobre o semi-espaço.

5.2.-Carregamentos na superfície de um domínio viscoelástico estratificado com n camadas horizontais

A presente formulação pode ainda ser estendida para o caso geral da excitação na superfície de um domínio viscoelástico composto de n camadas horizontais, estas com propriedades materiais distintas.

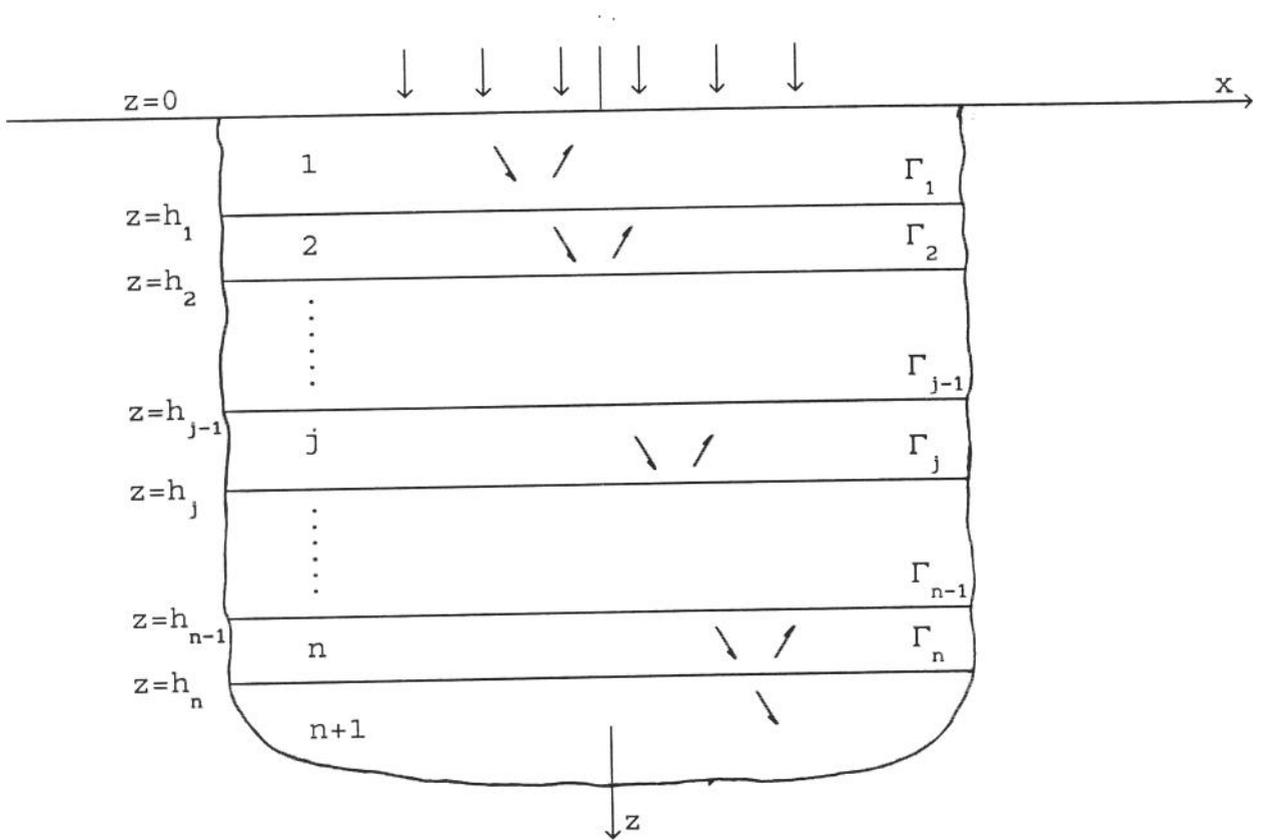


Figura 5.3. Camadas viscoelásticas horizontais sobre o semi-espaço.

As soluções tentativa, para a geometria ilustrada na

figura 5.3, podem ser escritas como:

$$\bar{\Delta}_j = \left[A_{2j-1} k_{L_j}^{*2} \exp(-\alpha_{L_j} z) + A_{2j} k_{L_j}^{*2} \exp(\alpha_{L_j} z) \right] \exp(i\beta x), \quad (5.7a)$$

$$\bar{\Omega}_j = \left[B_{2j-1} k_{S_j}^{*2} \exp(-\alpha_{S_j} z) + B_{2j} k_{S_j}^{*2} \exp(\alpha_{S_j} z) \right] \exp(i\beta x), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (5.7b)$$

Por sua vez para a última camada, considerada um semi-espaço, tem-se as seguintes soluções tentativa:

$$\bar{\Delta}_{n+1} = A_{2n+1} k_{L_{n+1}}^{*2} \exp(-\alpha_{L_{n+1}} z + i\beta x), \quad (5.8a)$$

$$\bar{\Omega}_{n+1} = B_{2n+1} k_{S_{n+1}}^{*2} \exp(-\alpha_{S_{n+1}} z + i\beta x). \quad (5.8b)$$

As condições de contorno na superfície do domínio, para uma excitação vertical, podem ser colocadas para o primeiro P.V.C.T. (carregamento vertical) como:

$$\bar{\sigma}_{zz}(x, z=0) = -\bar{\sigma}_{zz} \exp(i\beta x) \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{xz}(x, z=0) = 0. \quad (5.9)$$

Para o segundo P.V.C.T. (carregamento horizontal) as condições de contorno são dadas por:

$$\bar{\sigma}_{zz}(x, z=0) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{xz}(x, z=0) = -\bar{\sigma}_{xz} \exp(i\beta x). \quad (5.10)$$

Admitindo a continuidade dos deslocamentos e o equilí

brio das tensões nas interfaces $\Gamma_{i,s}$, pode-se escrever, respectivamente:

$$\bar{U}_x^j(x, z=h_j^-) = \bar{U}_x^{j+1}(x, z=h_j^+), \quad \bar{U}_z^j(x, z=h_j^-) = \bar{U}_z^{j+1}(x, z=h_j^+), \quad (5.11a)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^j(x, z=h_j^-) = \bar{\sigma}_{zz}^{j+1}(x, z=h_j^+), \quad \bar{\sigma}_{xz}^j(x, z=h_j^-) = \bar{\sigma}_{xz}^{j+1}(x, z=h_j^+). \quad (5.11b)$$

Novamente com a introdução das soluções tentativa (5.7) e (5.8) nos campos de deslocamento e tensões adicionadas às condições de contorno (5.9), (5.10) e (5.11), pode-se obter uma matriz quadrada de ordem $2 \times (2 \times n + 1) = 4 \times n + 2$ relacionando as amplitudes e os números de ondas. A resolução algébrica desta matriz, em relação as amplitudes, fornece as funções de flexibilidade para o problema da excitação na superfície do domínio viscoelástico composto de n camadas horizontais com propriedades materiais distintas.

5.3.-Resultados numéricos

Para verificar a validade do presente método no caso estratificado, algumas comparações com trabalhos ligados à dinâmica de fundações tornam-se necessárias [01,35]. Neste trabalho indica-se a razão entre as velocidades das ondas transversais nos meios 1 e 2 por $Rc = c_{s2}/c_{s1}$. Os valores dos elementos da matriz de flexibilidade dinâmica N_{ij} são plotados para a frequência adimensional $A_0 = \omega a / c_s$ considerada no meio 1 e variando numa faixa de 0 até 2.5. Novamente as propriedades físicas do meio são dadas pela razão de Poisson $\nu = 0.40$ e o coeficiente de amortecimento $\eta = 0.10$. Em todos os resultados numéricos mostrados neste capítulo utilizam-se $n_f = 16$ elementos constantes sob a fundação para o Método da Superposição.

Nas figuras 5.4 a 5.7 tem-se as soluções do P.V.C.T. para o problema da camada viscoelástica sobre o semi-espaço.

Nestas figuras são utilizados como parâmetros a razão de Poisson $\nu=0.40$, o amortecimento $\eta=0.10$, a frequência adimensional $A_0=1.0$, a altura da camada viscoelástica $h/a=2.0$ e a razão entre as velocidades das ondas transversais $R_c=2.0$.

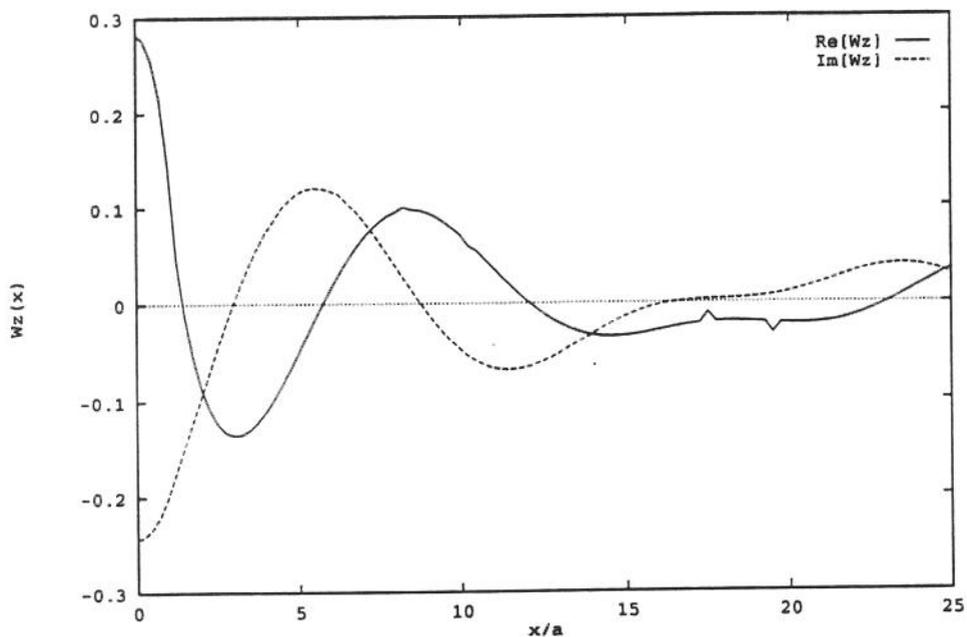


Figura 5.4. Deslocamentos $W_z(x)$ para o P.V.C.T.

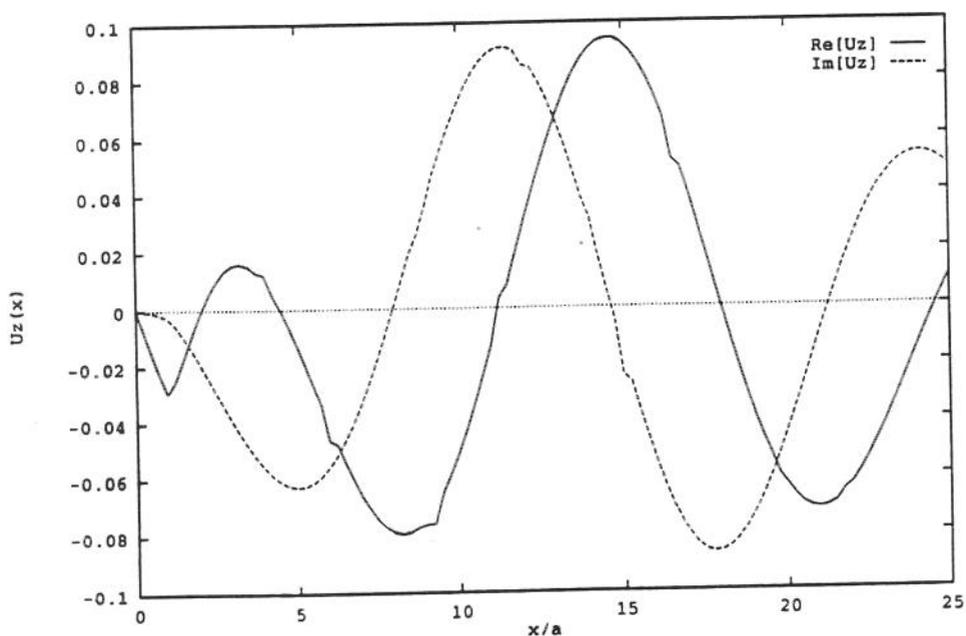


Figura 5.5. Deslocamentos $U_z(x)$ para o P.V.C.T.

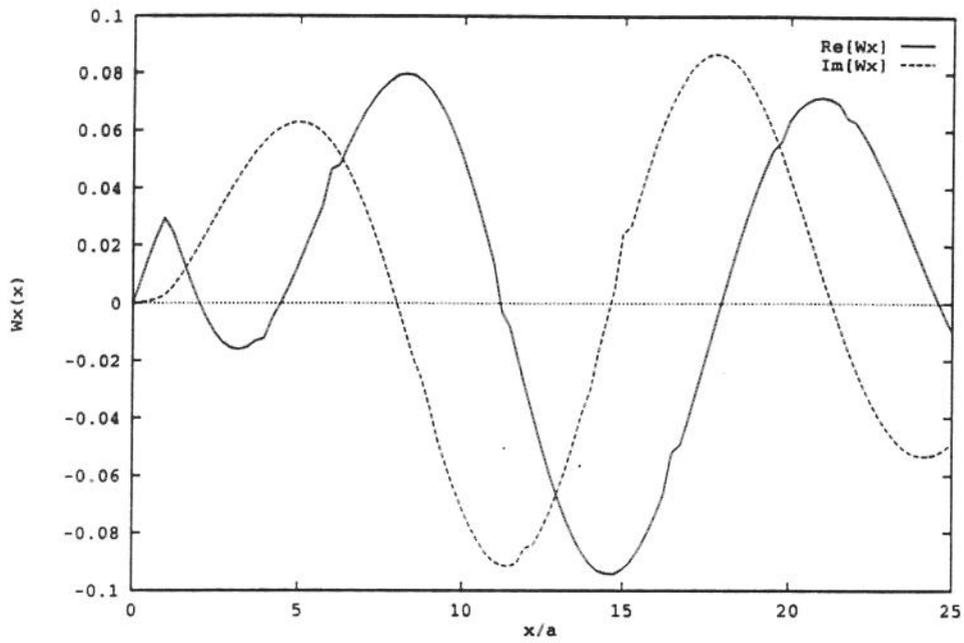


Figura 5.6. Deslocamentos $W_x(x)$ para o P.V.C.T.

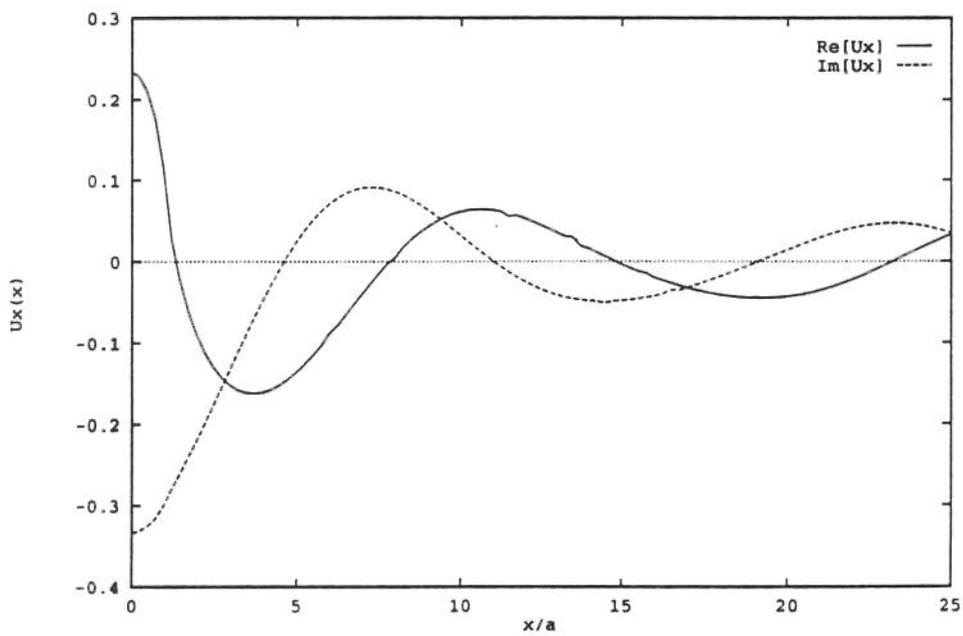


Figura 5.7. Deslocamentos $U_x(x)$ para o P.V.C.T.

5.3.1.-Fundação rígida de superfície sobre um semi-espaço viscoelástico homogêneo

Uma primeira validação do presente método no problema estratificado considera o semi-espaço viscoelástico bidimensional, isto é, $Rc=c_{s2}/c_{s1}=1.0$.

A figura 5.8 mostra os valores obtidos para as partes real e imaginária da flexibilidade dinâmica vertical. Os resultados são plotados juntos aos de Gazetas e Roesset [35] que analisaram o problema com um esquema de integração direta da equação da onda no domínio da frequência. Estes resultados são ainda comparados aos de Abascal e Dominguez [01] que também resolveram o problema com a implementação de subdomínios no Método dos Elementos de Contorno utilizando elementos constantes. As figuras 5.9 e 5.10 mostram as flexibilidades horizontal e de rotação e apresentam uma boa concordância em todos os casos.

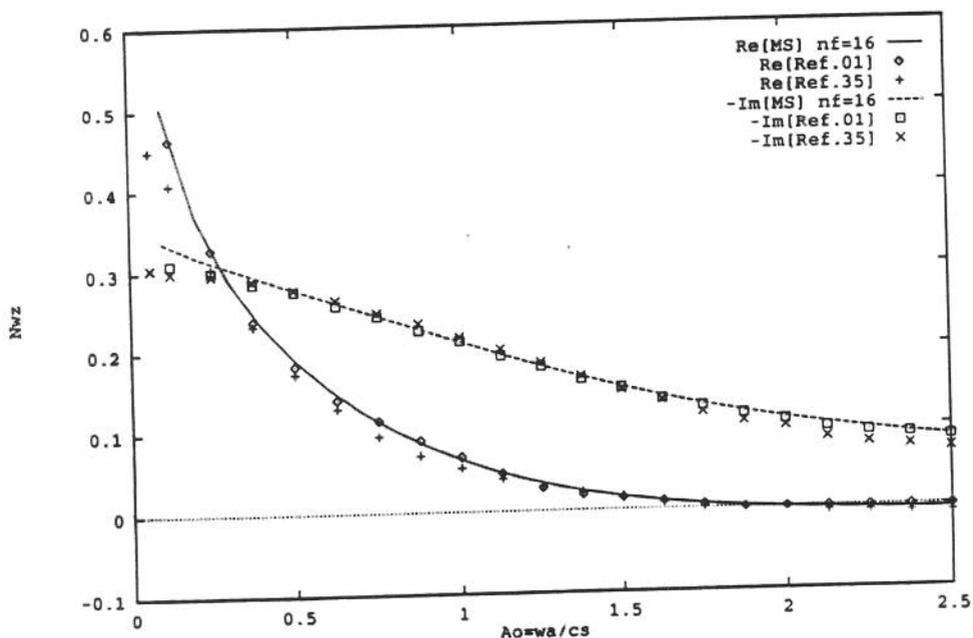


Figura 5.8. Flexibilidade dinâmica vertical para o semi-espaço.

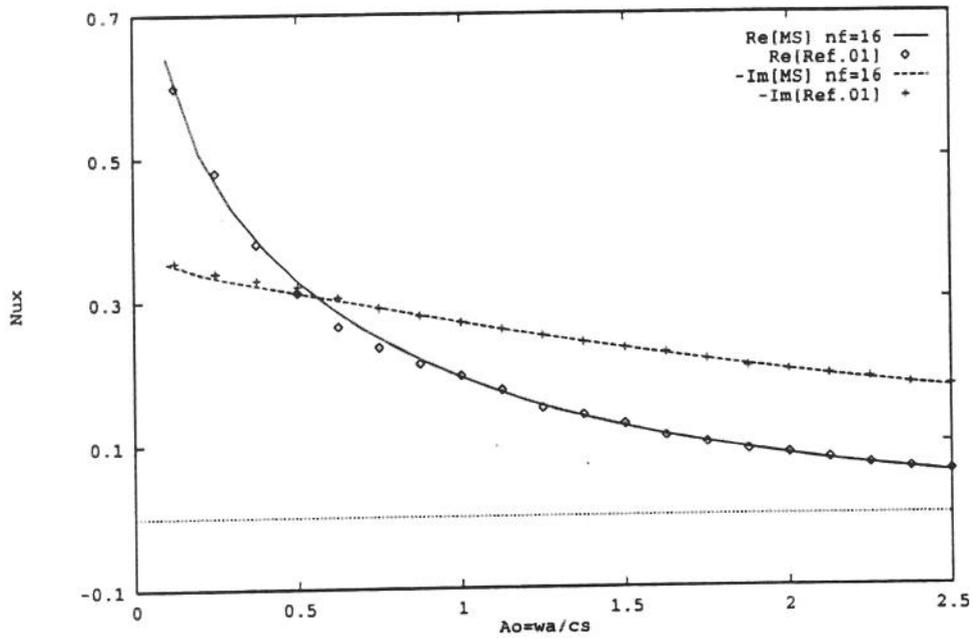


Figura 5.9. Flexibilidade dinâmica horizontal para o semi-espaco.

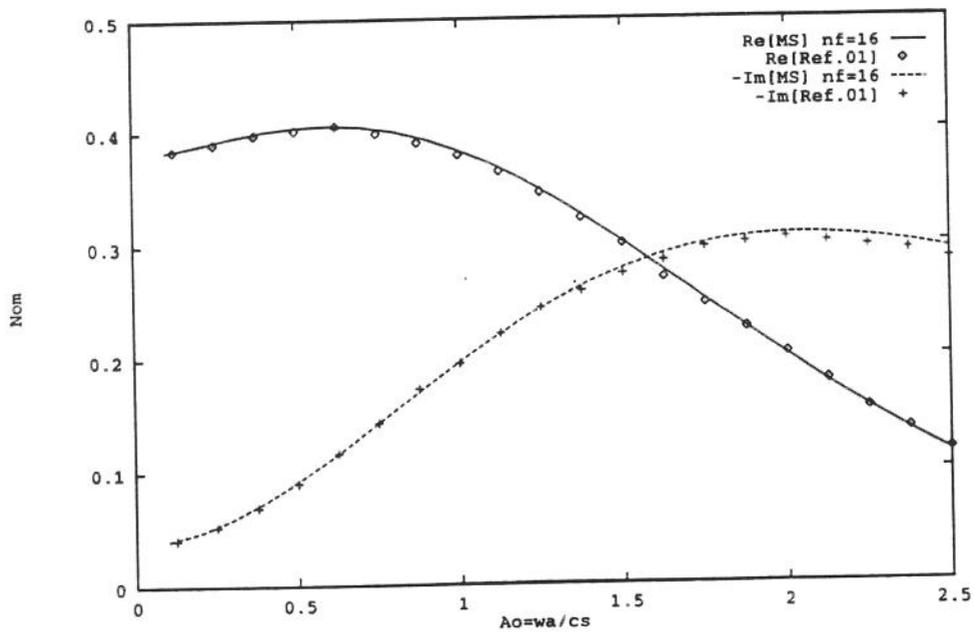


Figura 5.10. Flexibilidade dinâmica relacionado ao momento para o semi-espaco.

5.3.2.-Camada viscoelástica sobre uma base rígida

Como afirmado anteriormente o caso estratificado pode também simular o problema de uma camada viscoelástica sobre uma base rígida, para isto, é suficiente considerar $Rc=c_{s2}/c_{s1} \rightarrow \infty$. As figuras 5.11, 5.12 e 5.13 mostram as partes real e imaginária das flexibilidades dinâmica no (M.S.) comparado com Gazetas/Roesset e Abascal/Dominguez, em que a profundidade da camada viscoelástica é dada por $h/a=2.0$. O caso $h/a=4.0$ é mostrado nas figuras 5.14, 5.15 e 5.16 e nota-se uma boa concordância entre os métodos.

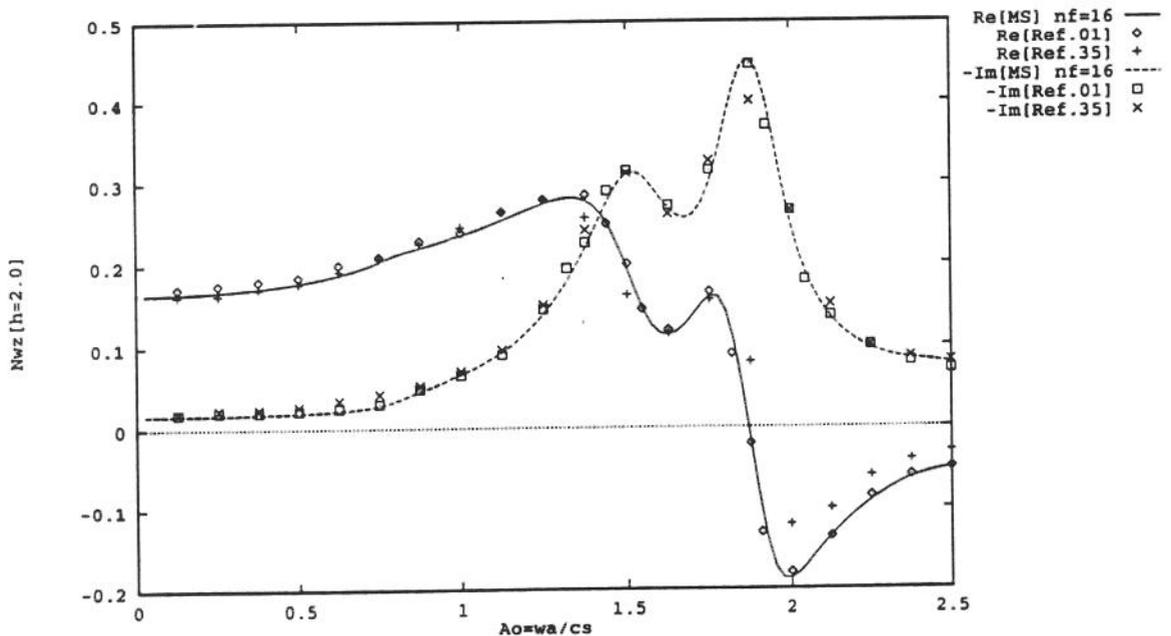


Figura 5.11. Flexibilidade dinâmica vertical.

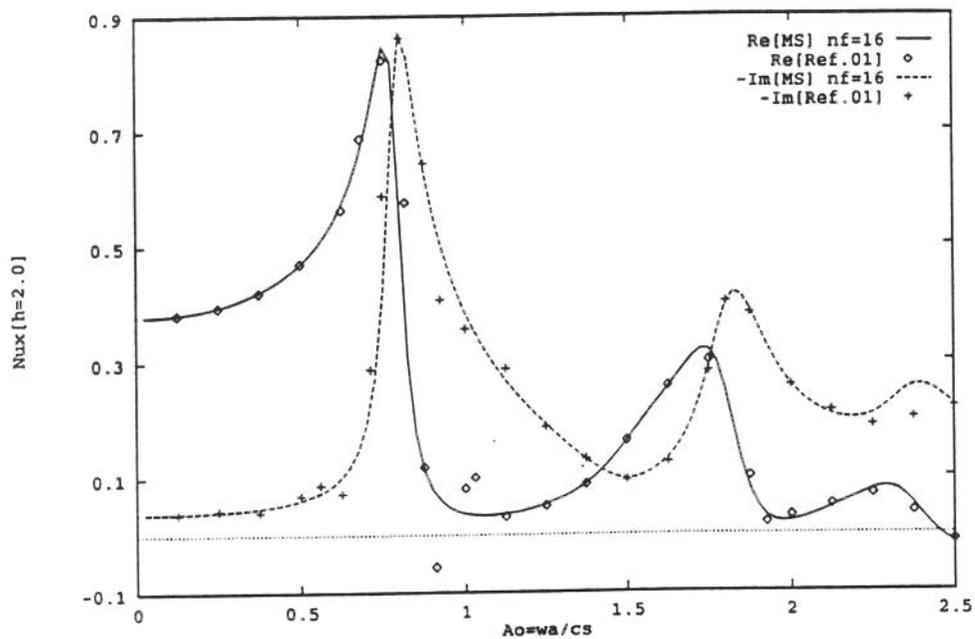


Figura 5.12. Flexibilidade dinâmica horizontal.

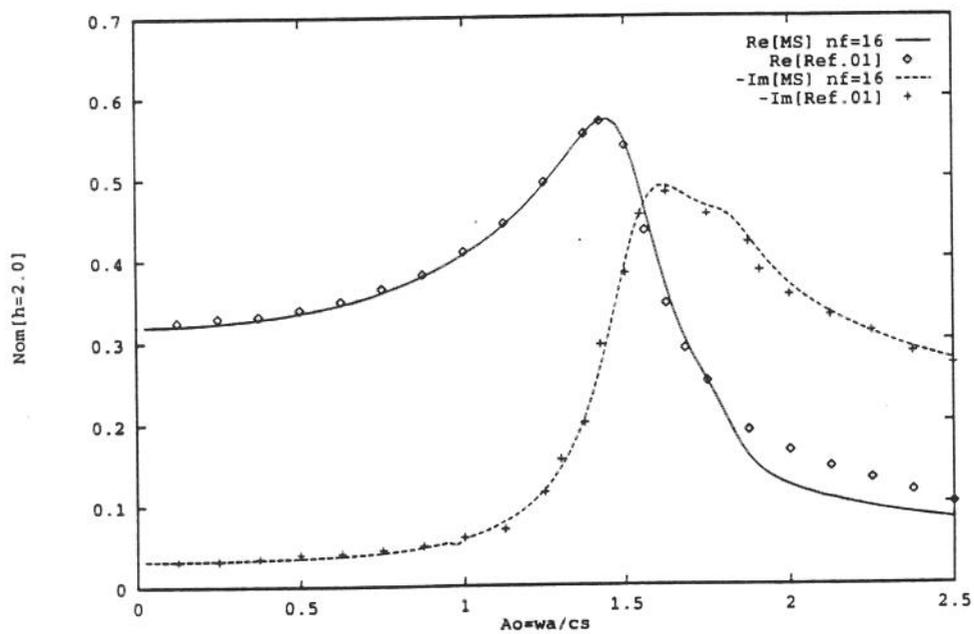


Figura 5.13. Flexibilidade dinâmica devido ao momento.

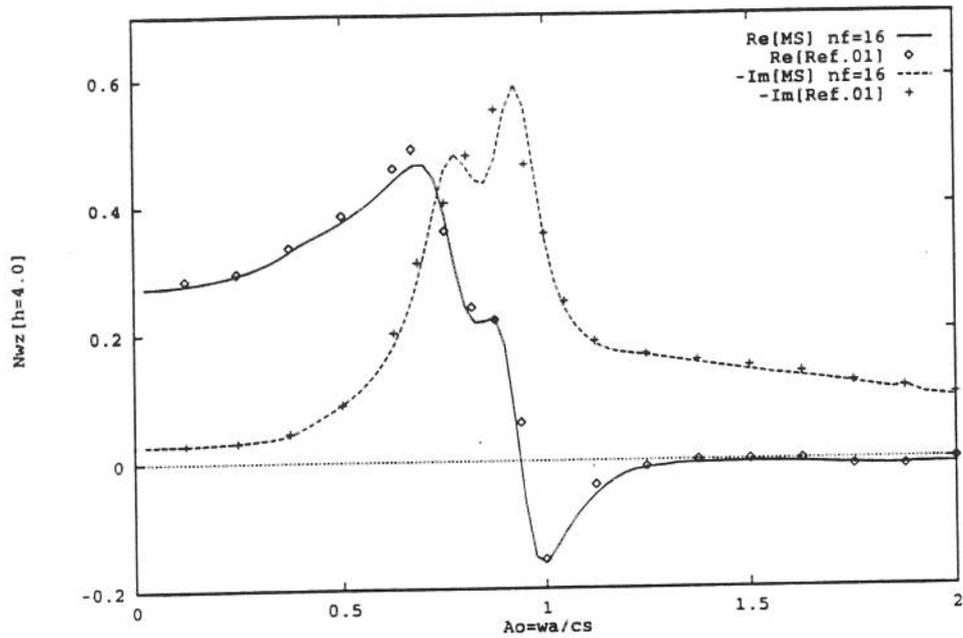


Figura 5.14. Flexibilidade dinâmica vertical.

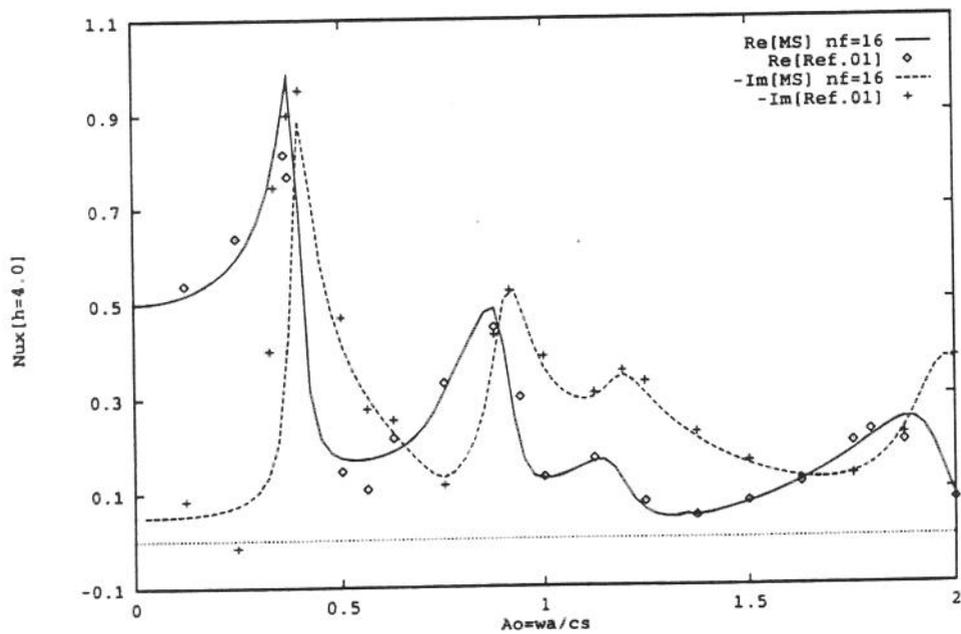


Figura 5.15. Flexibilidade dinâmica horizontal.

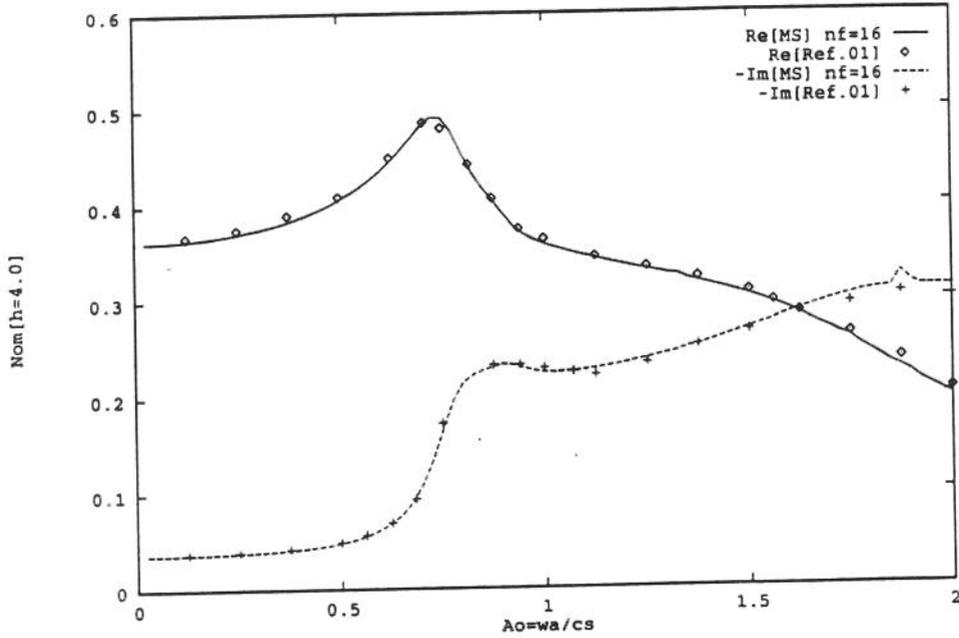


Figura 5.16. Flexibilidade dinâmica devido ao momento.

5.3.3.-Camada viscoelástica sobre o semi-espaço

Após as validações anteriores a análise pode-se estender para o caso geral de uma camada viscoelástica sobre o semi-espaço. Novamente os resultados são comparados aos de Abascal/Dominguez. As propriedades do material são as mesmas descritas no item 5.3. A razão entre as velocidades das ondas de cisalhamento nos meios 1 e 2 é dada por $R_c=2.0$ e $R_c=4.0$. A altura da camada viscoelástica é também a mesma, isto é, $h/a=2.0$ e $h/a=4.0$. As figuras 5.17 a 5.28 mostram os elementos da matriz de flexibilidade dinâmica N_{ij} para todos estes casos.

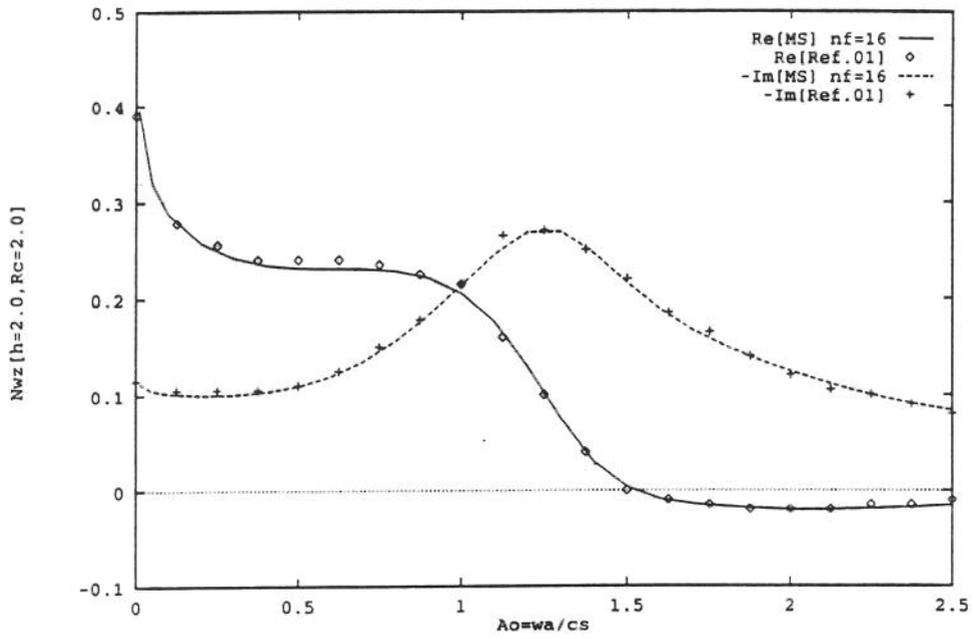


Figura 5.17. Flexibilidade dinâmica vertical.

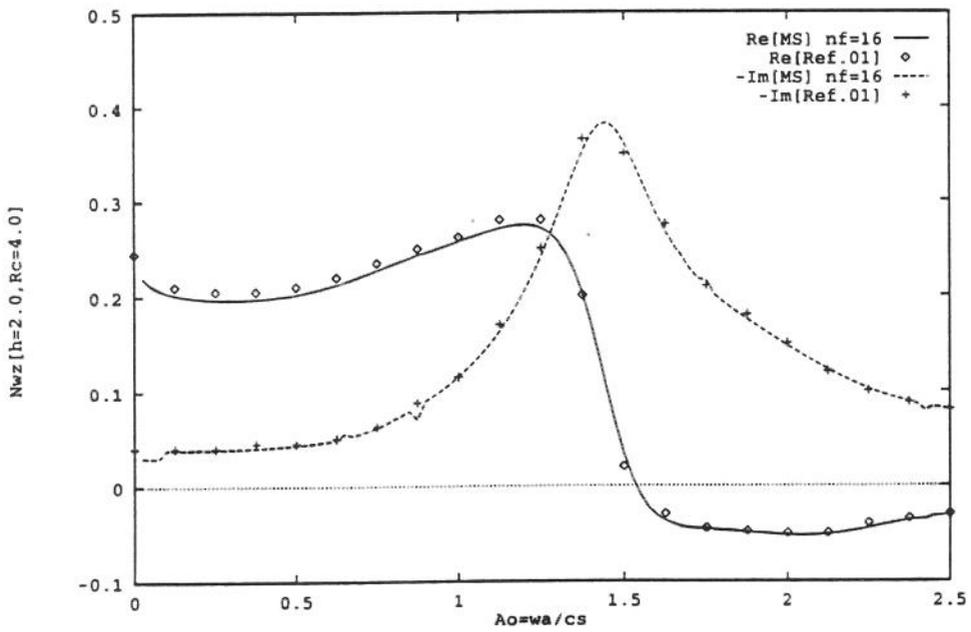


Figura 5.18. Flexibilidade dinâmica vertical.

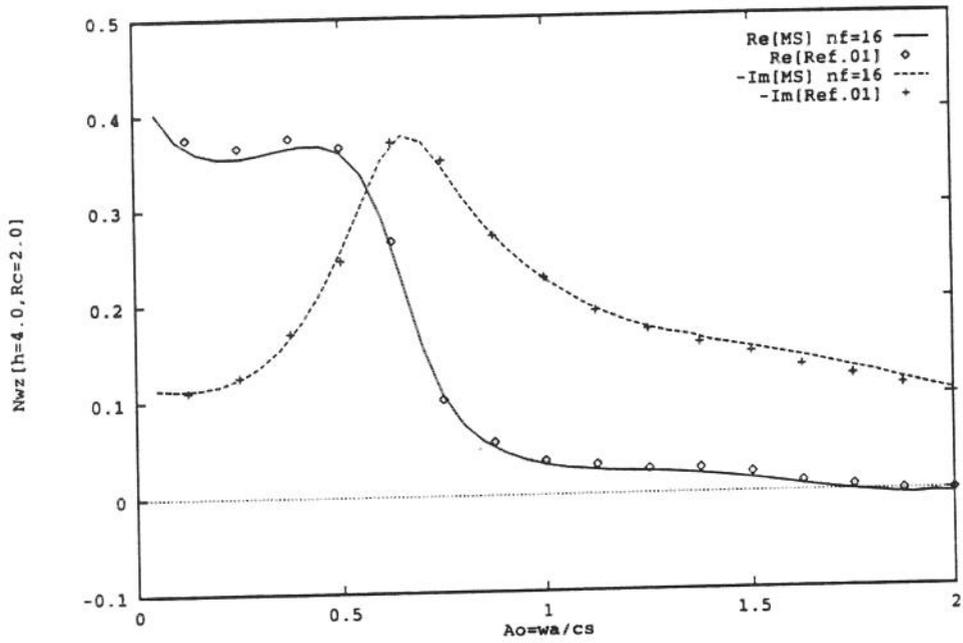


Figura 5.19. Flexibilidade dinâmica vertical.

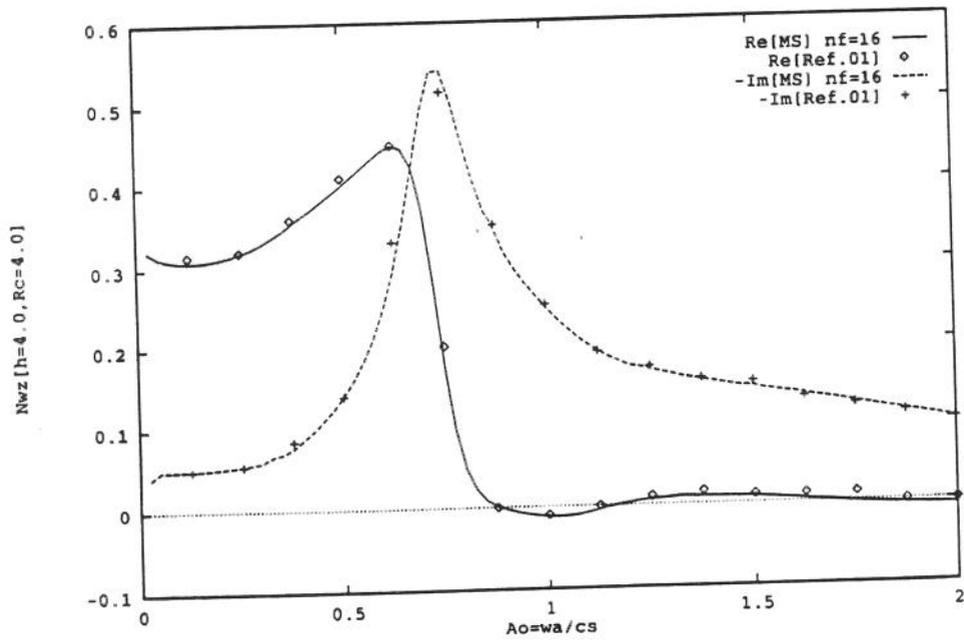


Figura 5.20. Flexibilidade dinâmica vertical.

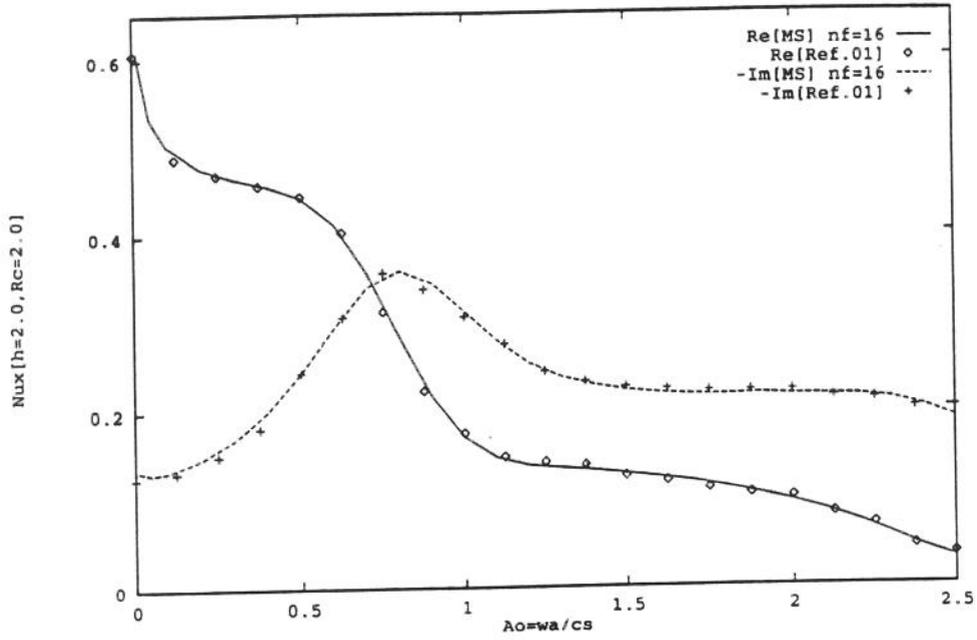


Figura 5.21. Flexibilidade dinâmica horizontal.

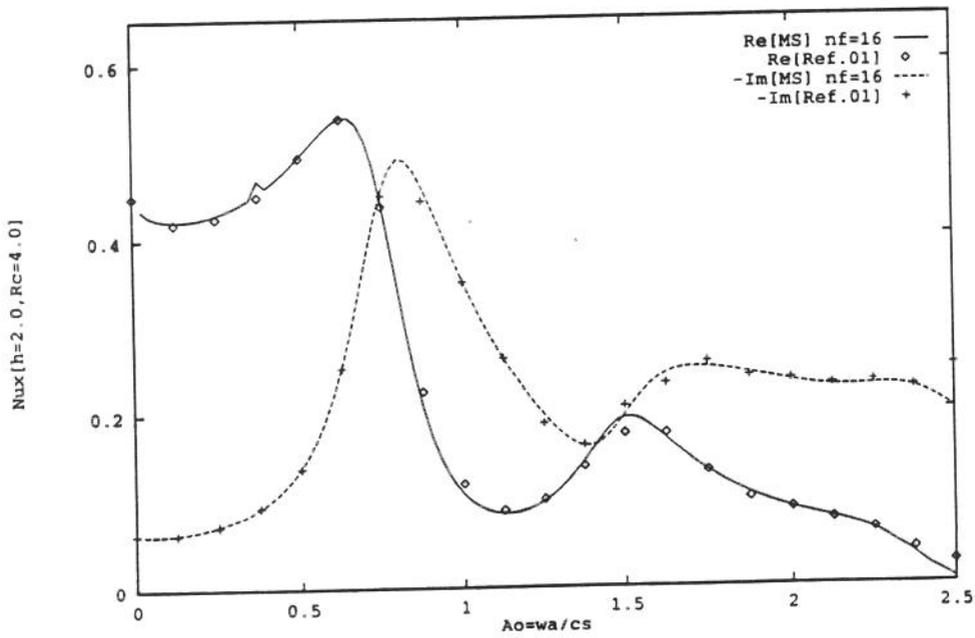


Figura 5.22. Flexibilidade dinâmica horizontal.

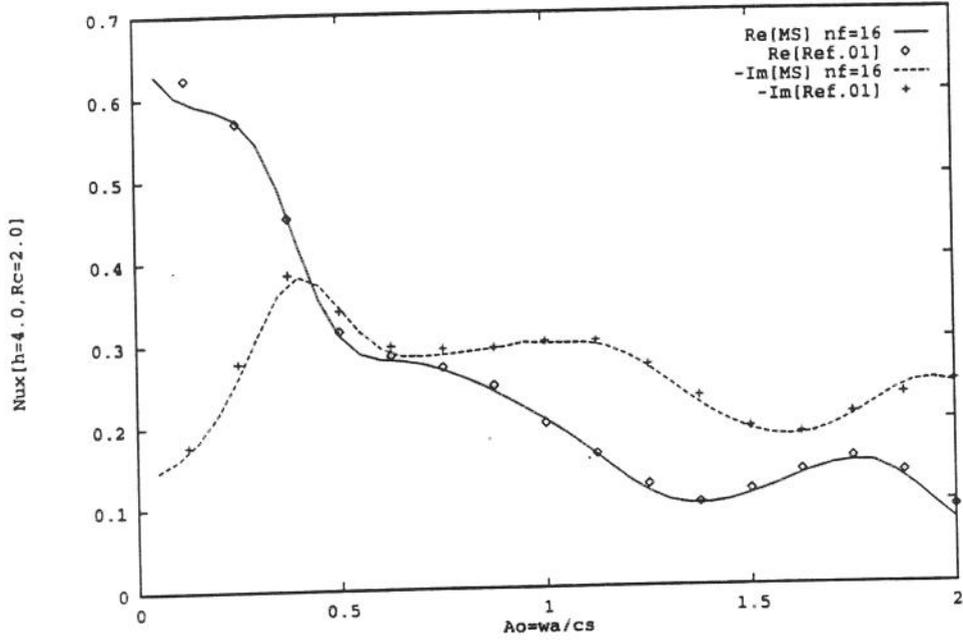


Figura 5.23. Flexibilidade dinâmica horizontal.

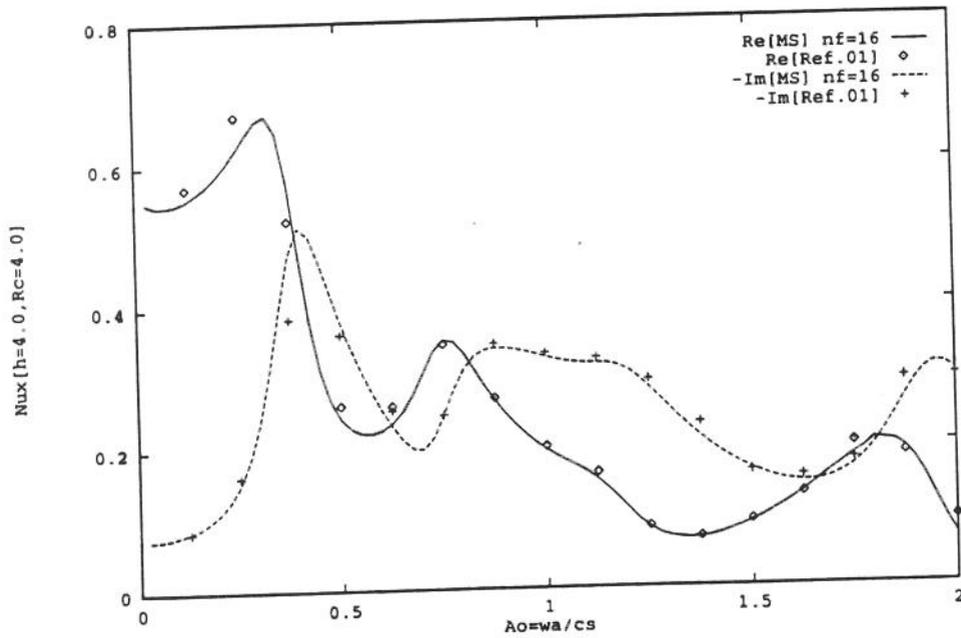


Figura 5.24. Flexibilidade dinâmica horizontal.

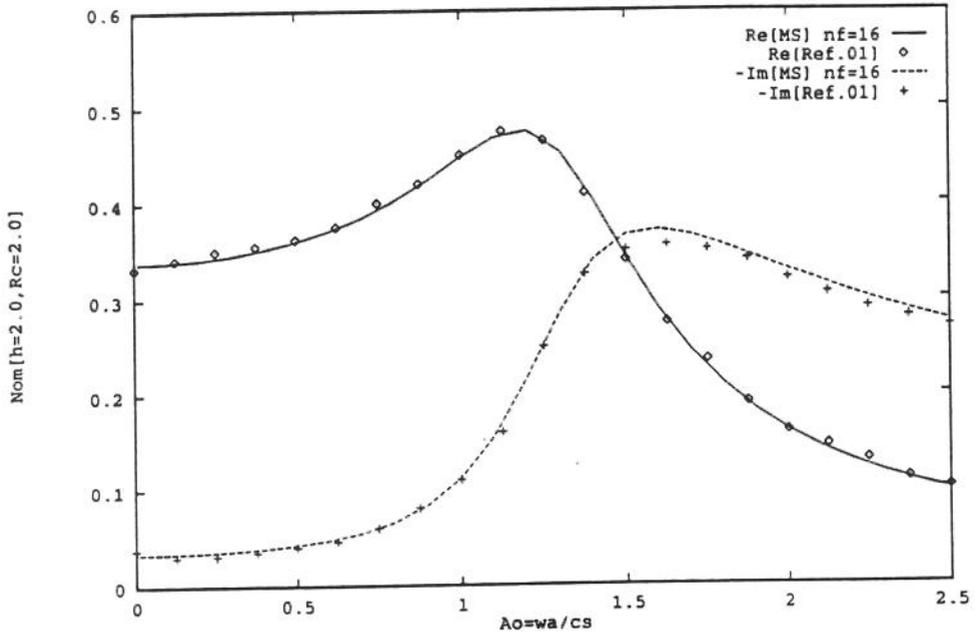


Figura 5.25. Flexibilidade dinâmica devido ao momento.

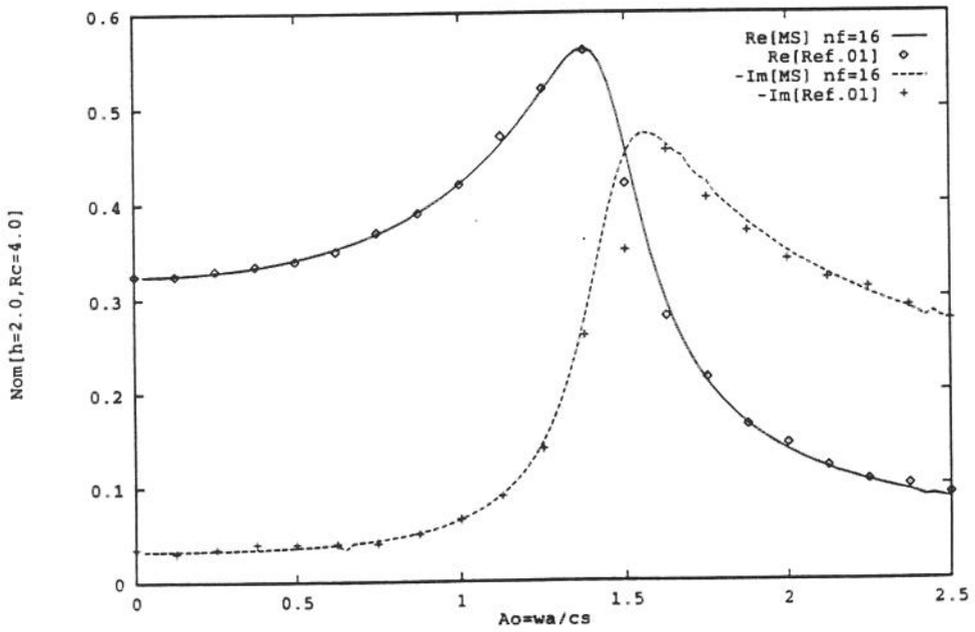


Figura 5.26. Flexibilidade dinâmica devido ao momento.

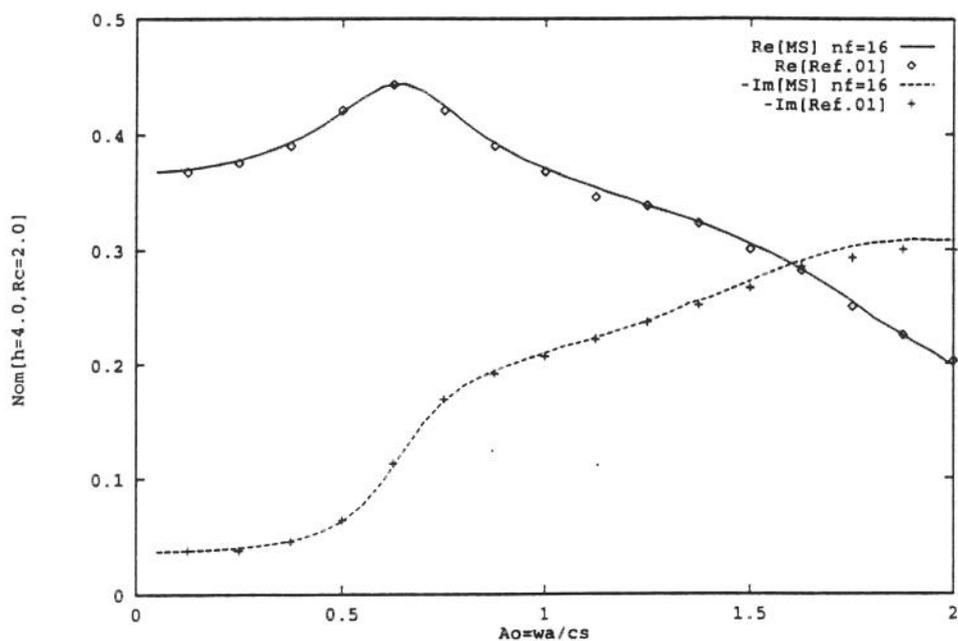


Figura 5.27. Flexibilidade dinâmica devido ao momento.

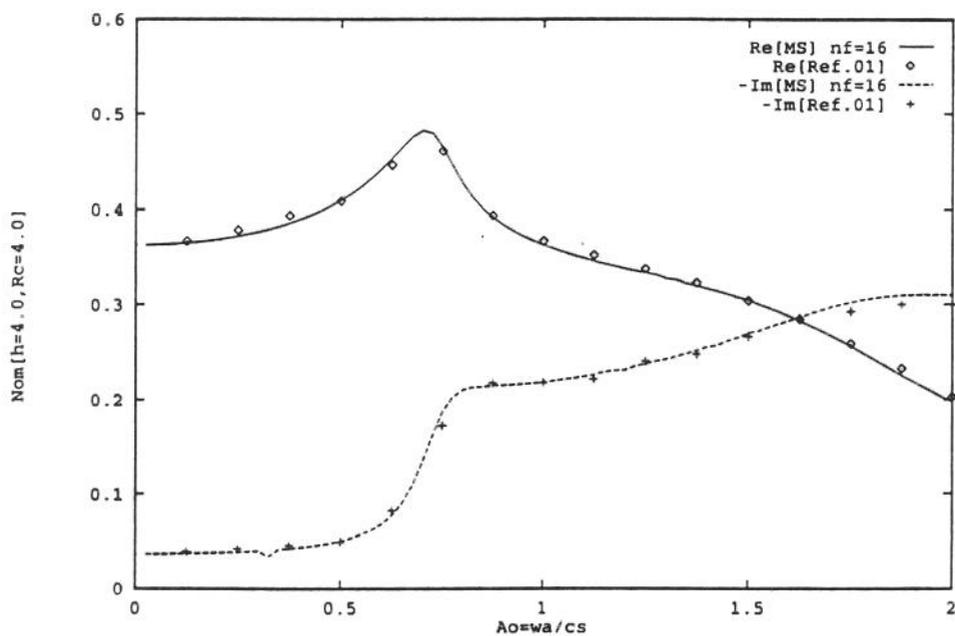


Figura 5.28. Flexibilidade dinâmica devido ao momento.

5.3.4.-Comentários

Pode-se notar, pelas figuras 5.8 a 5.28, que o Método da Superposição apresenta resultados satisfatórios também para o problema da interação dinâmica de fundações rígidas de superfície assentadas numa camada viscoelástica sobre um semi-espaço. As funções de influência, sintetizadas neste capítulo, podem ainda simular o problema de fundações dinamicamente excitadas sobre a superfície de uma semi-espaço, como ilustra as figuras 5.8 a 5.10, e o problema de uma camada viscoelástica sobre uma base rígida, ilustrado nas figuras 5.11 a 5.16. Para o problema da camada viscoelástica sobre um semi-espaço (figuras 5.17 a 5.28), pode-se notar uma boa concordância dos resultados numéricos obtidos, quando comparado a versão direta do M.E.C.

Convém observar novamente que no Método da Superposição apenas a interface do sistema solo-fundação necessita ser discretizada. Acredita-se pois que em meios horizontalmente estratificados, com um grande número de camadas, a presente metodologia torna-se uma alternativa interessante para a análise dos problemas da D.S.S.I.

6.-O Método da Superposição Modificado (M.S.M.)

O Método da Superposição (M.S.), apresentado no capítulo 3, tem como característica a aplicação de carregamentos, descritos por tensões constantes, em segmentos discretizados da interface solo-fundação. A influência destes carregamentos (localizados) em relação aos segmentos restantes torna possível obter uma matriz de flexibilidade dinâmica que ao final fornece a resposta, no domínio da frequência, do problema da interação dinâmica solo-estrutura.

Uma variação do Método da Superposição pode ser conseguida por meio de uma alteração na forma do carregamento. O Método da Superposição Modificado (M.S.M.), considerado neste capítulo, tem como característica a aplicação de um delta de Dirac em cada segmento discretizado da interface solo-fundação, ao invés de carregamentos constantes nestes elementos.

6.1.-Funções de Green no Método da Superposição Modificado

Seja \bar{U}_{kl} como sendo o deslocamento na direção k , devido a uma excitação na direção l . Assim, em relação à convenção para as componentes do campo de deslocamento pré-adotadas, tem-se:

$$\bar{U}_{zz} = \bar{W}_z; \quad \bar{U}_{xz} = \bar{U}_z;$$

$$\bar{U}_{zx} = \bar{W}_x; \quad \bar{U}_{xx} = \bar{U}_x.$$

Da mesma forma, pode-se redefinir as funções de flexibilidade \bar{H}_{kl} , como:

$$\bar{H}_{wz} = \bar{H}_{zz}; \quad \bar{H}_{uz} = \bar{H}_{xz};$$

$$\bar{H}_{wx} = \bar{H}_{zx}; \quad \bar{H}_{ux} = \bar{H}_{xx}.$$

Nos capítulos anteriores viu-se que no domínio do número de onda β , o campo de deslocamentos $\bar{U}_{k1}(\beta)$ pode ser obtido pelo produto da transformada da distribuição de tensões na superfície do domínio, $\bar{\sigma}_{ok1}(\beta)$, pela função de flexibilidade neste domínio, $\bar{H}_{k1}(\beta)$.

Desse modo, a expressão:

$$\bar{U}_{k1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{k1}(\beta) \bar{\sigma}_{oz1}(\beta) \exp(i\beta x) d\beta, \quad (6.1)$$

fornece o campo de deslocamentos provocado por uma distribuição espacial de tensões $\bar{\sigma}_{oz1}(x)$, uma vez conhecida sua expansão no domínio do número de onda, $\bar{\sigma}_{oz1}(\beta)$.

Supondo agora que a excitação para o problema seja dada pela aplicação do delta de Dirac na superfície do domínio, tem-se para um carregamento na direção 1, a expressão,

$$\bar{\sigma}_{oz1}(x) = \sigma_{z1} \delta(x=\xi, z=0), \quad (6.2)$$

em que δ indica o delta de Dirac.

Novamente pode-se determinar a tensão $\bar{\sigma}_{oz1}(x)$ no domínio β pela transformada de Fourier,

$$\bar{\sigma}_{oz1}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{oz1}(x) \exp(-i\beta x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{z1} \delta(\xi, 0) \exp(-i\beta x) dx. \quad (6.3)$$

Pela propriedade do delta de Dirac, segue que,

$$\bar{\sigma}_{oz1}(\beta) = \sigma_{z1} \exp(-i\beta\xi). \quad (6.4)$$

Com auxílio das equações (6.1) e (6.3) pode-se expressar o campo de deslocamentos no semi-espço, \bar{U}_{k1} , em função de um

carregamento concentrado (delta de Dirac) aplicado no ponto ξ na superfície do semi-espço, orientado segundo a direção 1 e com intensidade σ_{z1} , como:

$$\bar{U}_{k1}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{k1}(\beta) \sigma_{z1} \exp[i\beta(x-\xi)] d\beta. \quad (6.5a)$$

Considerando em (6.5a) a amplitude da força aplicada na superfície igual a unidade ($\sigma_{z1}=1$), tem-se a chamada função de Green do problema, na forma:

$$\bar{G}_{0k1}(x) = \bar{U}_{k1}(x, \sigma_{z1}=1) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{k1}(\beta) \exp[i\beta(x-\xi)] d\beta. \quad (6.5b)$$

A função de Green em (6.5b) representa a componente do campo de deslocamentos na direção k , devido a uma força concentrada unitária aplicada na direção 1. O índice "0" indica que estão sendo considerados somente os deslocamentos na superfície do semi-espço ($z=0$).

Como anteriormente, as funções de Green relacionadas aos deslocamentos na superfície do semi-espço representam a transformada de Fourier das funções de flexibilidade $\bar{H}_{k1}(\beta)$ nesta superfície.

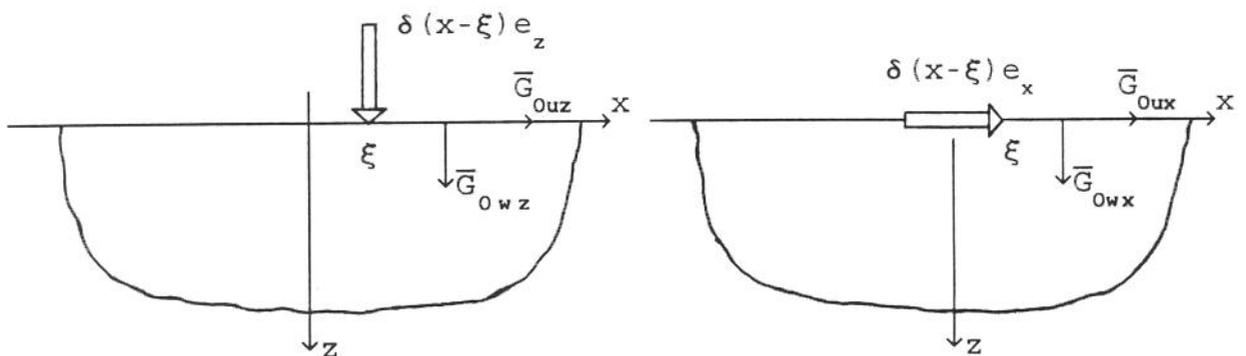


Figura 6.1. Representação do campo de deslocamentos devido a atuação do delta de Dirac na superfície do domínio (funções de Green).

A próxima etapa consiste na dedução do campo de deslocamentos para uma distribuição qualquer de tensões por meio da superposição da função de Green. Sem perda de generalidade, considera-se o carregamento na direção z .

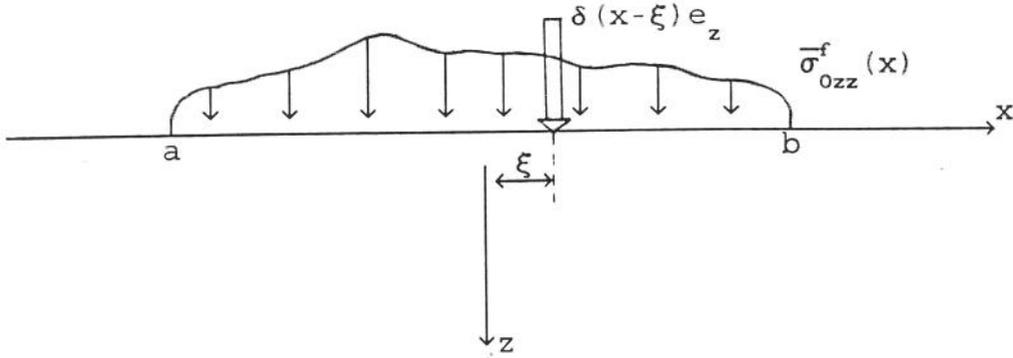


Figura 6.2. Carregamento arbitrário na superfície do domínio.

Para uma distribuição qualquer de tensões $\bar{\sigma}_{0zz}^f(x)$ sobre a superfície do semi-espaco pode-se escrever o campo de deslocamentos, via superposição da função de Green [86], como:

$$\bar{W}_z^f(x) = \int_a^b \bar{G}_{0wz}(x, \xi) \bar{\sigma}_{0zz}^f(\xi) dx, \quad (6.6)$$

em que,

$$\bar{G}_{0wz}(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{wz}(\beta) \exp[i\beta(x-\xi)] d\beta. \quad (6.7)$$

Para o caso da interação dinâmica de estruturas rígidas bidimensionais com o solo admite-se que a distribuição de tensões sobre a superfície do domínio seja constante por segmentos, como indicado na figura 3.5.

No problema aproximado, novamente supõe-se uma discretização regular com n elementos. Assim as tensões podem ser

colocadas na forma,

$$\bar{\sigma}_{0zz}^f(x) = \bar{\sigma}_{0zzi} \quad , \quad x_i - a_i < x < x_i + a_i \quad , \quad (6.8)$$

com $i=1, 2, \dots, n$.

Das equações (6.6), (6.7) e (6.8) obtém-se o campo de deslocamentos provenientes de n elementos na interface solo-fundação, como:

$$\begin{aligned} \bar{W}_z^f(x) = & \bar{\sigma}_{0zz1} \int_{x_1}^{x_2} \bar{G}_{0wz}(x, \xi) d\xi + \bar{\sigma}_{0zz2} \int_{x_2}^{x_3} \bar{G}_{0wz}(x, \xi) d\xi + \\ & + \dots + \bar{\sigma}_{0zzn} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \bar{G}_{0wz}(x, \xi) d\xi \quad , \quad a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{W}_z^f(x) = \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}_{0zzj} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{G}_{0wz}(x, \xi) d\xi. \quad (6.9)$$

A equação anterior fornece o campo de deslocamentos na superfície do semi-espço em qualquer ponto de coordenada x para uma distribuição de tensões aproximada por elementos constantes como mostra a equação (6.8).

Os valores das tensões $\bar{\sigma}_{0zzi}$ são desconhecidos. Sua determinação será novamente possível a partir da introdução das condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio de uma fundação rígida e/ou flexível.

Para o caso em questão admite-se que a compatibilidade cinemática se dê em relação ao ponto médio x_i^M de cada elemento

discreto sob a fundação,

$$\bar{W}_z^f(x_i^M) = \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}_{0zzj}^M \int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{G}_{0wz}(x_i^M, \xi) d\xi, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (6.10)$$

Lembrando a equação (6.5b) pode-se reescrever a equação (6.10) do seguinte modo:

$$\bar{W}_z^f(x) = \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}_{0zzj}^M \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{wz}(\beta) \exp[i\beta(x-\xi)] d\beta \right\} d\xi. \quad (6.11)$$

Deve-se observar que a introdução da função de Green implica num acréscimo de uma integração para a obtenção do campo de deslocamentos, $\bar{W}_z^f(x)$, quando comparado à metodologia apresentada anteriormente. Ou seja, torna-se necessário convoluir a função de Green com a representação discretizada do campo de tensões na interface solo-fundação.

A integração adicional em (6.11) pode ser feita por um tradicional esquema gaussiano, na forma:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{G}_{0wz}(x, \xi) d\xi = \sum_{k=1}^{NG} \gamma_k \bar{G}_{0wz}(x, t_k) |J|, \quad (6.12)$$

em que, γ_k são os pesos da integração gaussiana, t_k as coordenadas dos pontos de integração e $|J|$ o Jacobiano da transformação.

Como no capítulo 3, constrói-se de modo inteiramente análogo a matriz de compatibilidade cinemática e a matriz de equilíbrio de forças. A única alteração em relação a matriz de flexibilidade dinâmica, dada anteriormente, diz respeito as funções de flexibilidade complexas, mais especificamente nos termos \bar{H}_{k1} , devido ao delta de Dirac.

6.2.-Campo de deslocamentos

Utilizando a adimensionalização sugerida no item 2.7, as funções de Green dos deslocamentos vertical e horizontal no Método da Superposição Modificado, são dadas respectivamente por:

$$\bar{G}_{0wz}(x, \xi) = -\frac{1}{\pi G(1+i\eta_s)^2} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{\sqrt{K_I^2 - \frac{n^2}{(1+i\eta_D)}}}{F_{Ray}(K_I)} \cos\left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a}\right) dK_I, \quad (6.13a)$$

$$\bar{G}_{0uz}(x, \xi) = \frac{1}{\pi G(1+i\eta_s)} \int_{K_I=0}^{\infty} K_I \frac{F_{Nen}(K_I)}{F_{Ray}(K_I)} \operatorname{sen}\left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a}\right) dK_I, \quad (6.13b)$$

$$\bar{G}_{0wx}(x, \xi) = -\frac{1}{\pi G(1+i\eta_s)} \int_{K_I=0}^{\infty} K_I \frac{F_{Nen}(K_I)}{F_{Ray}(K_I)} \operatorname{sen}\left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a}\right) dK_I, \quad (6.13c)$$

$$\bar{G}_{0ux}(x, \xi) = -\frac{1}{\pi G(1+i\eta_s)^2} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{\sqrt{K_I^2 - \frac{1}{(1+i\eta_s)}}}{F_{Ray}(K_I)} \cos\left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a}\right) dK_I. \quad (6.13d)$$

Novamente, a evolução numérica das funções de Green nas equações (6.13) é de fundamental importância no Método da Superposição Modificado. O núcleo destas integrais caracterizam-se como funções oscilantes com decaimento em relação a coordenada x .

Outra observação relevante em (6.13) diz respeito ao ponto $x=\xi$ ou $x \neq \xi$. De fato, quando $x=\xi$, os termos trigonométricos anulam-se ou são unitários.

Assim para $x=\xi$ tem-se:

$$\bar{G}_{0wz}(x, \xi) = - \frac{1}{\pi G(1+i\eta_s)^2} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{\sqrt{K_I^2 - \frac{n^2}{(1+i\eta_D)}}}{F_{Ray}(K_I)} dK_I, \quad (6.14a)$$

$$\bar{G}_{0uz}(x, \xi) = \bar{G}_{0wx}(x, \xi) = 0, \quad (6.14b)$$

$$\bar{G}_{0ux}(x, \xi) = - \frac{1}{\pi G(1+i\eta_s)^2} \int_{K_I=0}^{\infty} \frac{\sqrt{K_I^2 - \frac{1}{(1+i\eta_s)}}}{F_{Ray}(K_I)} dK_I. \quad (6.14c)$$

Portanto, em (6.14) quando $x=\xi$, troca-se o carácter oscilante com decaimento nos núcleos das integrais por um decaimento em relação a coordenada x . Por este motivo, para evoluir numericamente as integrais semi-infinitas que aparecem nestas equações deve-se prever os casos $x=\xi$ e $x \neq \xi$ nos programas computacionais.

6.3.-Elementos lineares: solução via função de Green

Na seção anterior desenvolveu-se, na equação (6.11), uma expressão para determinar os deslocamentos em qualquer ponto da superfície do semi-espaco (x), causadas pela superposição de n distribuições de tensões constantes nos pontos x_j . Entretanto, a função de Green sintetizada permite, como mostra a equação (6.6), a determinação de um campo de deslocamentos para uma distribuição arbitrária de tensões na superfície do semi-espaco, $\sigma_{0zz}^f(x)$.

Se ao invés de elementos constantes forem utilizadas como funções interpoladoras os elementos lineares as equações

anteriores sofrem uma ligeira alteração. Desse modo, admitindo que as tensões em cada um dos n-elementos sob a interface solo-fundação possam ser aproximadas de forma linear, tem-se para um k-ésimo elemento a expressão:

$$\sigma_{zj}^k(x) = \sigma_{zj1}^k \phi_1^k(x) + \sigma_{zj2}^k \phi_2^k(x), \quad \text{com } x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad (6.15)$$

em que,

$$\phi_1^k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)}{(x_{k+1} - x_k)}; \quad \phi_2^k(x) = \frac{(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)}, \quad (6.16)$$

são as funções de forma linear no sistema global de coordenadas, enquanto σ_{zj1}^k e σ_{zj2}^k são os valores desconhecidos das tensões nos extremos x_k e x_{k+1} do k-ésimo elemento.

Na maioria das vezes é conveniente escrever as equações num sistema local de coordenadas. Assim, para o caso linear utilizando a transformação de coordenadas:

$$x(\eta) = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \eta + \frac{(x_{k+1} + x_k)}{2}, \quad (6.17)$$

pode-se reformular a equação (6.15) como:

$$\sigma_{zj}^k(\eta) = \sigma_{zj1}^k \phi_1^k(\eta) + \sigma_{zj2}^k \phi_2^k(\eta), \quad (6.18)$$

em que,

$$\phi_1^k(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta); \quad \phi_2^k(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta), \quad \text{com } -1 \leq \eta \leq 1. \quad (6.19)$$

Desse modo, aproximando as tensões na superfície do domínio por elementos lineares as equações do campo de

deslocamentos podem ser escritas, para o k-ésimo elemento, como:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{kj}(x) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \bar{G}_{0kj}(x, \xi) [\sigma_{zj1}^k \phi_1^k(\xi) + \sigma_{zj2}^k \phi_2^k(\xi)] d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \bar{G}_{0kj}(x, \eta) [\sigma_{zj1}^k \phi_1^k(\eta) + \sigma_{zj2}^k \phi_2^k(\eta)] |J| d\eta. \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.4.-Elementos lineares: solução via transformada de Fourier

A fim de comparar os deslocamentos no P.V.C.T. entre o Método da Superposição e o Método da Superposição Modificado, no caso linear, torna-se necessário o desenvolvimento da transformada de Fourier para as tensões de superfície num semi-espaço viscoelástico devido a um carregamento linear, como ilustra a figura 6.3.

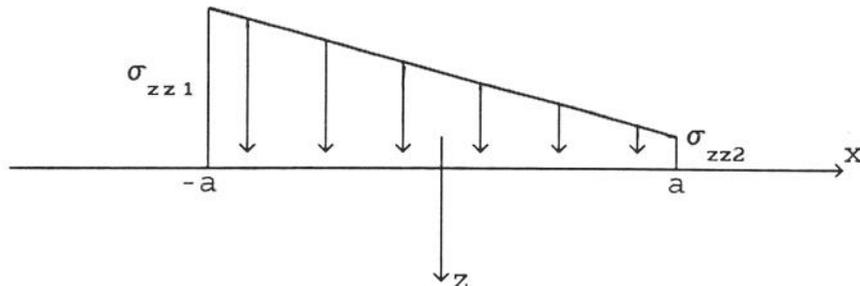


Figura 6.3. Carregamento linear em tensões na superfície do semi-espaço.

As condições de contorno em tensões para o carregamento linear podem ser colocadas na forma:

$$\bar{\sigma}_{ozz}(x, z=0) = \begin{cases} \sigma_{zz1} \phi_1(x) + \sigma_{zz2} \phi_2(x), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (6.21)$$

em que $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são as mesmas funções definidas em (6.16) com $x_k = -a$, $x_{k+1} = a$ e σ_{zz1} , σ_{zz2} sendo os valores das tensões nos pontos $x = -a$ e $x = a$, respectivamente.

Como na equação (2.34a), tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{0zz}(\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{0zz}(x) \exp(-i\beta x) dx = \int_{-a}^a [\sigma_{zz1} \phi_1(x) + \sigma_{zz2} \phi_2(x)] \exp(-i\beta x) dx \\ &= \left[\frac{[\exp(i\beta a) - \exp(-i\beta a)]}{2a\beta^2} - i \frac{\exp(i\beta a)}{\beta} \right] \sigma_{zz1} \\ &\quad - \left[\frac{[\exp(i\beta a) - \exp(-i\beta a)]}{2a\beta^2} - i \frac{\exp(i\beta a)}{\beta} \right] \sigma_{zz2}' \end{aligned} \quad (6.22)$$

em que $i^2 = -1$ é a unidade imaginária.

Na expressão anterior utilizando a conhecida fórmula de Euler:

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta), \quad (6.23)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{0zz}(\beta) &= \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\beta a)}{\beta} + i \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta a)}{a\beta^2} - \frac{\cos(\beta a)}{\beta} \right] \right\} \sigma_{zz1} \\ &\quad + \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\beta a)}{\beta} - i \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta a)}{a\beta^2} - \frac{\cos(\beta a)}{\beta} \right] \right\} \sigma_{zz2}'. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Novamente, os deslocamentos no domínio β podem ser obtidos pela relação entre tensões e as funções de flexibilidade

para o semi-espaço viscoelástico como:

$$\bar{U}_{ij}(\beta) = \bar{H}_{ij}^h(\beta) \bar{\sigma}_{0zj}(\beta). \quad (6.25)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier na equação anterior, tem-se:

$$\bar{U}_{ij}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{ij}(\beta) \exp(i\beta x) d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{ij}^h(\beta) \bar{\sigma}_{0zj}(\beta) \exp(i\beta x) d\beta. \quad (6.26)$$

em que $\bar{H}_{ij}^h(\beta)$ são as funções de flexibilidade para o semi-espaço viscoelástico (eqs. 2.31).

Adicionando a equação (6.24) em (6.26) pode-se reescrever, com auxílio do Método da Superposição, os deslocamentos para o P.V.C.T. com um carregamento vertical ($j=z$), na forma:

$$\begin{aligned} \bar{W}_z(x) = & \frac{1}{2\pi} (\sigma_{zz1} + \sigma_{zz2}) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{wz}^h(\beta) \frac{\text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta + \\ & \frac{i}{2\pi} (\sigma_{zz1} - \sigma_{zz2}) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{wz}^h(\beta) \left[\frac{\text{sen}(\beta a)}{a\beta^2} - \frac{\cos(\beta a)}{\beta} \right] \exp(i\beta x) d\beta, \end{aligned} \quad (6.27a)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_z(x) = & \frac{1}{2\pi} (\sigma_{zz1} + \sigma_{zz2}) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{uz}^h(\beta) \frac{\text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta + \\ & \frac{i}{2\pi} (\sigma_{zz1} - \sigma_{zz2}) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{uz}^h(\beta) \left[\frac{\text{sen}(\beta a)}{a\beta^2} - \frac{\cos(\beta a)}{\beta} \right] \exp(i\beta x) d\beta. \end{aligned} \quad (6.27b)$$

Na equação anterior fazendo $\sigma_{zz1} = \sigma_{zz2} = \sigma_{zz}$ tem-se as

mesmas expressões para um carregamento constante nas tensões de superfície (eqs. 2.39a e 2.39b).

A figura 6.4 mostra os deslocamentos $\bar{W}_z(x)$ para o P.V.C.T. no semi-espço viscoelástico com o Método da Superposição comparado com o Método da Superposição Modificado (funções de Green). Utilizam-se como parâmetros do problema a frequência adimensional $A_0=1.0$, a razão de Poisson $\nu=0.40$, o amortecimento $\eta=0.10$ e 16 pontos gaussianos no M.S.M. Assume-se ainda, nesta figura, um carregamento constante com $\sigma_{zz1}=\sigma_{zz2}=1.0$.

Já na figura 6.5 tem-se os deslocamentos $\bar{W}_z(x)$ para os mesmos parâmetros da figura anterior agora assumindo-se um carregamento linear dado por $\sigma_{zz1}=1.0$ e $\sigma_{zz2}=0.1$.

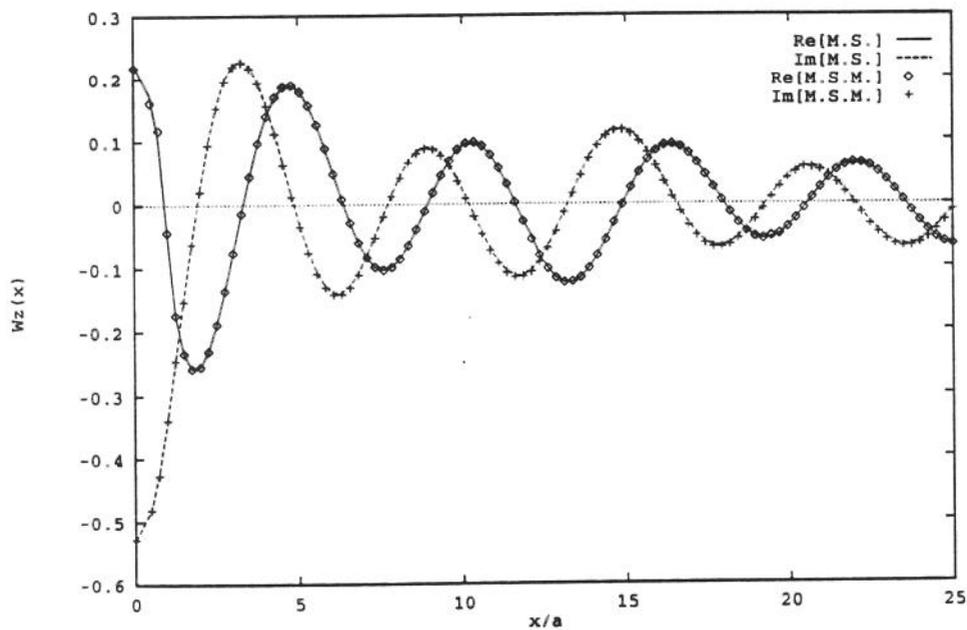


Figura 6.4. Deslocamentos $\bar{W}_z(x)$ para o P.V.C.T. linear, com $\sigma_{zz1}=\sigma_{zz2}=1.0$.

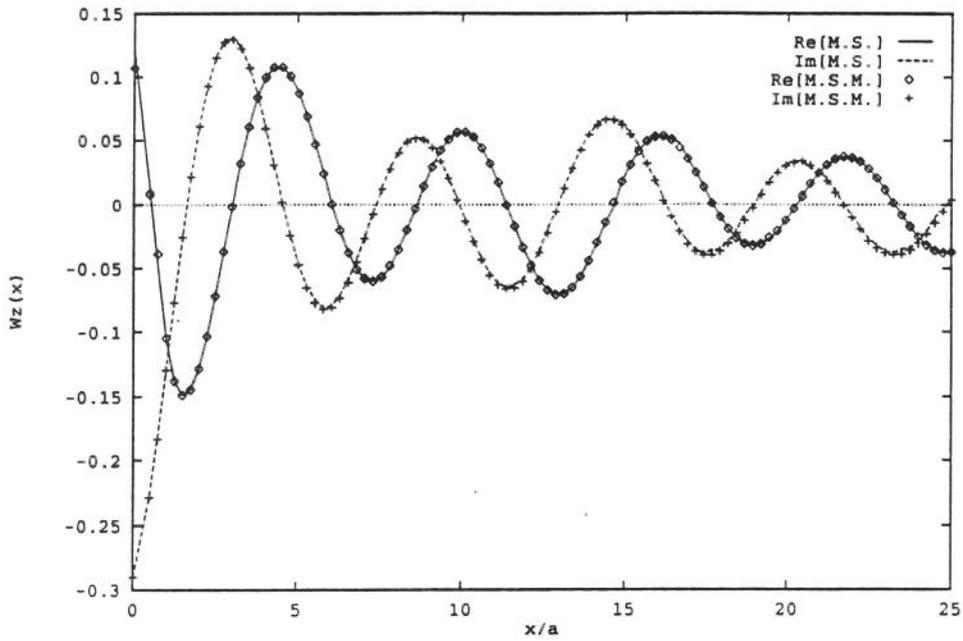


Figura 6.5. Deslocamentos $\bar{W}_z(x)$ para o P.V.C.T. linear, com $\sigma_{zz1}=1.0$ e $\sigma_{zz2}=0.1$.

6.5.-Elementos quadráticos: solução via função de Green

Outro modo de aproximar o comportamento das tensões na superfície do domínio é através da utilização de elementos quadráticos em cada um dos n -elementos do campo discretizado. Novamente para um k -ésimo elemento no sistema local de coordenadas pode-se obter um análogo da equação (6.18), agora para elementos quadráticos, na forma:

$$\sigma_{zj}^k(\eta) = \sigma_{zj1}^k \phi_1^k(\eta) + \sigma_{zj2}^k \phi_2^k(\eta) + \sigma_{zj3}^k \phi_3^k(\eta), \quad (6.28)$$

em que,

$$\phi_1^k(\eta) = \frac{\eta(\eta-1)}{2}; \quad \phi_2^k(\eta) = (1-\eta)(1+\eta); \quad \phi_3^k(\eta) = \frac{\eta(1+\eta)}{2}, \quad (6.29)$$

com $-1 \leq \eta \leq 1$.

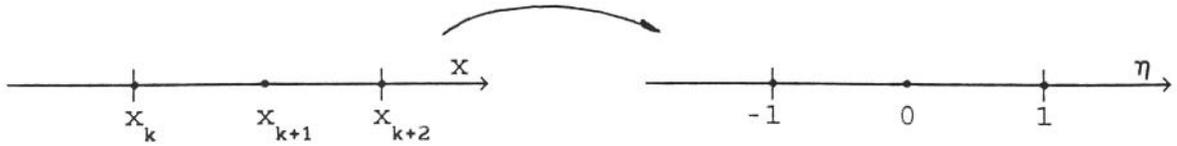


Figura 6.6. Coordenadas global e local para a representação do elemento quadrático.

O campo de deslocamentos pode então ser escrito no k -ésimo elemento, ilustrado na figura 6.6., como:

$$\bar{U}_{ij}(x) = \int_{-1}^1 \bar{G}_{0ij}(x, \eta) [\sigma_{zj1}^k \phi_1^k(\eta) + \sigma_{zj2}^k \phi_2^k(\eta) + \sigma_{zj3}^k \phi_3^k(\eta)] |J| d\eta, \quad (6.32)$$

em que $|J| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2}$.

6.6.-Comparações entre o Método da Superposição e o Método da Superposição Modificado

O Método da Superposição Modificado será agora comparado ao Método da Superposição, no caso constante, para a análise de fundações rígidas de superfície interagindo com uma camada viscoelástica sobre uma base rígida (figura 4.1). Como no Método da Superposição as funções de flexibilidade, serão armazenadas numa matriz de flexibilidade dinâmica composta das equações de equilíbrio dinâmico, compatibilidade cinemática e da matriz de massa do problema. No Método da Superposição Modificado as condições de contorno podem ser arbitrárias, como ilustrado na figura 6.2, e são obtidas pela aplicação do delta de Dirac na superfície do domínio considerado.

Uma análise entre as tensões de superfície dadas pelo

Método da Superposição, equação (2.34), e pelo Método da Superposição Modificado, equação (6.4), mostra que as tensões neste último são analiticamente mais simples de serem determinadas. Entretanto, o preço a ser pago é que este último torna-se mais lento devido ao esquema de integração numérica utilizado.

M.S.M.						
NG	Re(N _{wz})	-Im(N _{wz})	Re(N _{ux})	-Im(N _{ux})	Re(N _{φ_m})	-Im(N _{φ_m})
02	0.231228	0.064935	0.031142	0.383357	0.400986	0.058544
04	0.237541	0.065921	0.037562	0.384502	0.419933	0.060574
06	0.239780	0.066261	0.039838	0.384893	0.426673	0.061291
08	0.240941	0.066435	0.041017	0.385093	0.430164	0.061661
16	0.242743	0.066703	0.042847	0.385398	0.435582	0.062235
M.S.	0.244649	0.066977	0.044764	0.385713	0.441247	0.062834

Tabela 2. Variação da solução no Método da Superposição Modificado e no Método da Superposição em alguns pontos gaussianos.

A tabela 2 mostra o comportamento dos elementos N_{wz} , N_{ux} e N_{ϕ_m} para o problema descrito no capítulo 4. Considera-se uma discretização de 8 elementos constantes na base da fundação, $n_f=8$. As propriedades materiais são as mesmas dadas nas figuras anteriores, isto é, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$. Os resultados são avaliados para a frequência adimensional $A_0=1.0$ e a altura da base rígida $h/a=2.0$.

Para o número de pontos gaussianos NG, mostrados na tabela 2, pode-se notar que não existe uma grande variação na resposta do problema. Acredita-se que isto ocorra devido ao carregamento constante que foi assumindo para as tensões de superfície.

A figura 6.7. mostra a comparação entre a componente vertical \bar{W}_z , do campo de deslocamentos obtida no Método da Superposição (M.S.) e no Método da Superposição Modificado (M.S.M.). Os resultados mostram uma boa concordância.

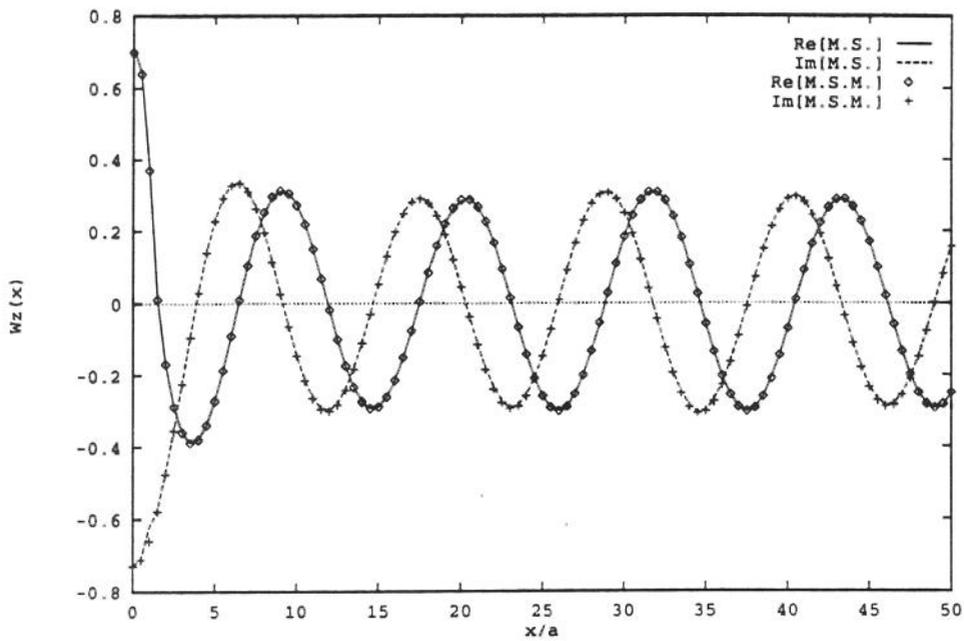


Figura 6.7. Deslocamento vertical $\bar{W}_z(x)$ ($A_0=0.5$; $\nu=0.25$; $\eta=0.01$).

Na tabela 3 compara-se o tempo de CPU normalizado entre os dois métodos para o mesmo problema reportado na tabela 2. Os dados do problema também são os mesmos. Nesta tabela tem-se um crescimento linear do tempo de CPU em relação ao aumento do número de pontos gaussianos.

	NG	02	04	06	08	16
Tempo de CPU	M.S.M.	1.96	3.92	5.88	7.85	15.70
	M.S.	1.0				

Tabela 3. Variação do tempo de CPU no Método da Superposição Modificado e no Método da Superposição.

As figuras 6.8, 6.9 e 6.10 mostram os elementos N_{wz} , N_{ux} e N_{ϕ_m} num espectro maior de frequências $0 \leq A_0 \leq 2.5$. Nestas figuras

também comparam-se os resultados obtidos no Método da Superposição (figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13) com o Método da Superposição Modificado com elementos constantes para alguns pontos gaussianos. Em todos estes resultados consideram-se $n_f=8$, $h/a=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

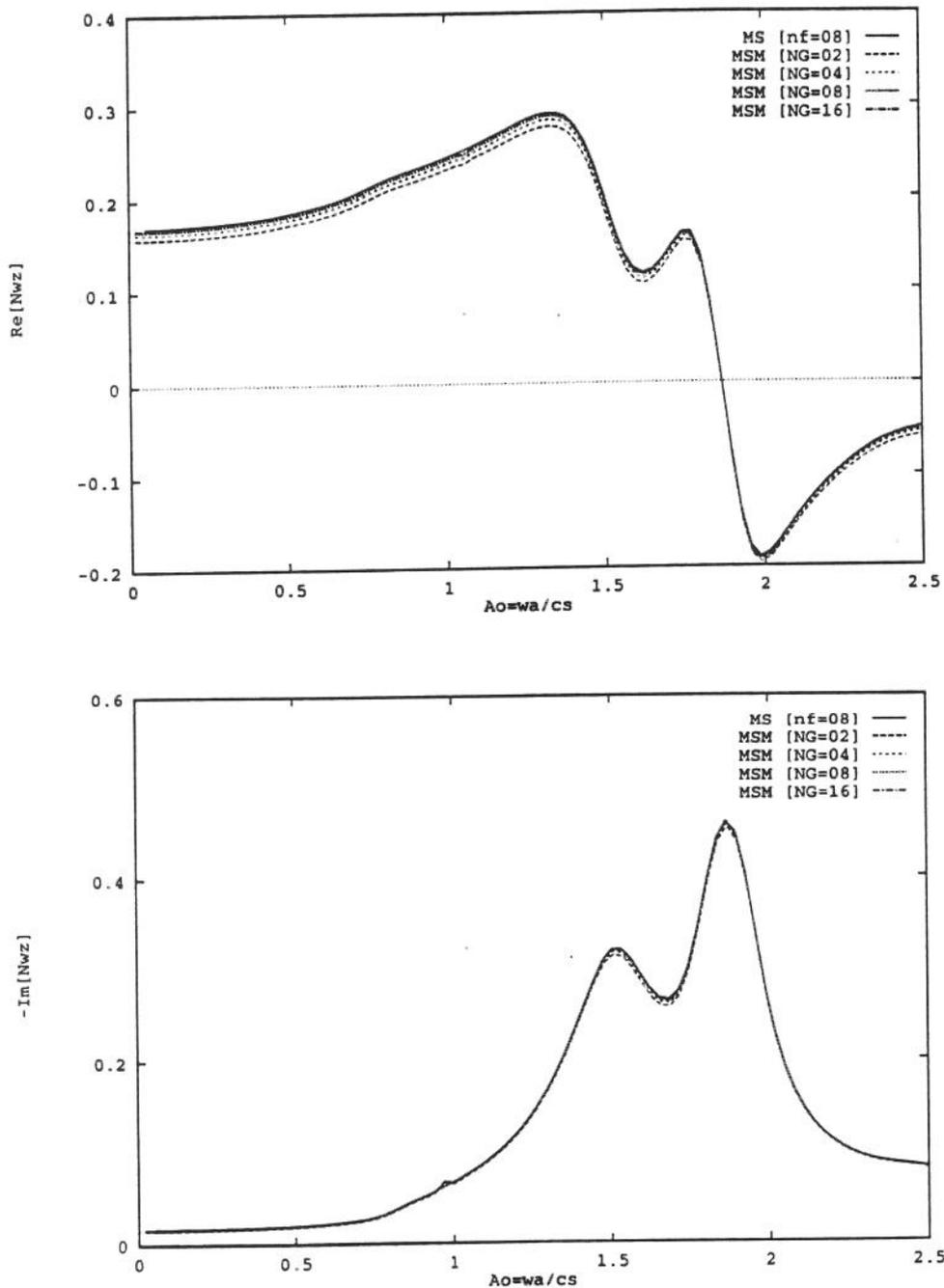


Figura 6.8. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica vertical Nwz .

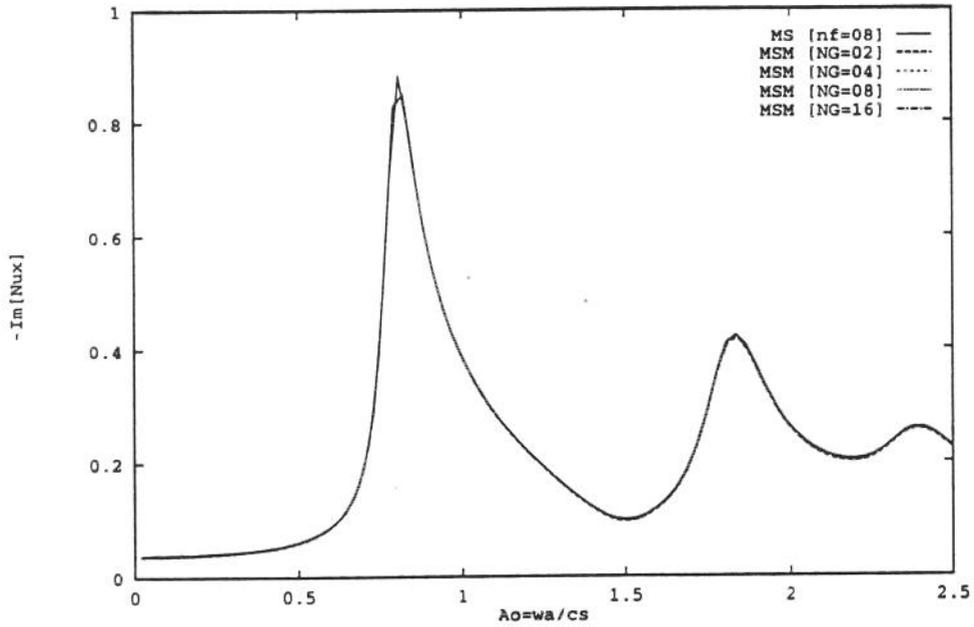
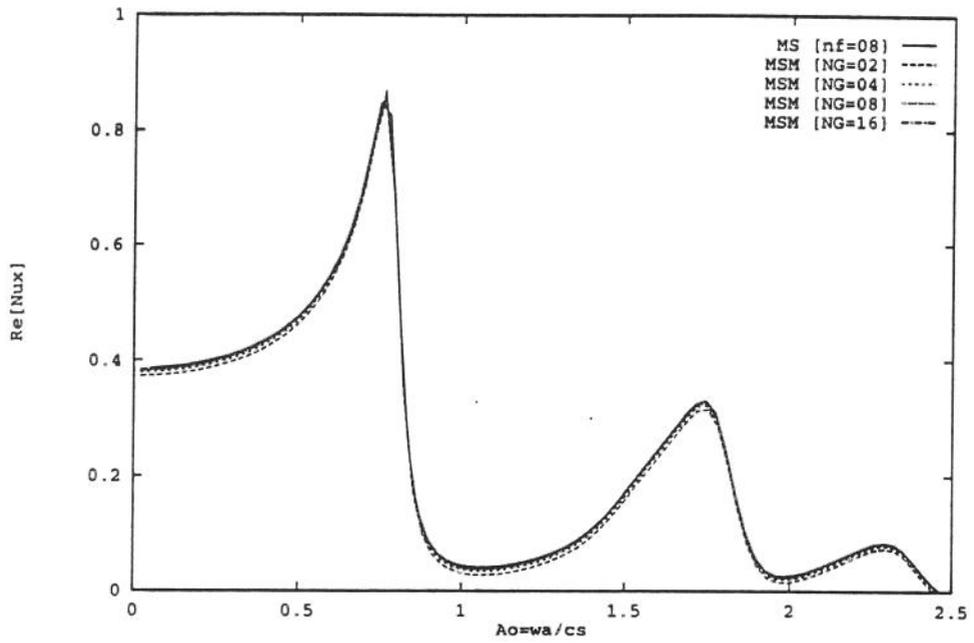


Figura 6.9. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica horizontal N_{ux} .

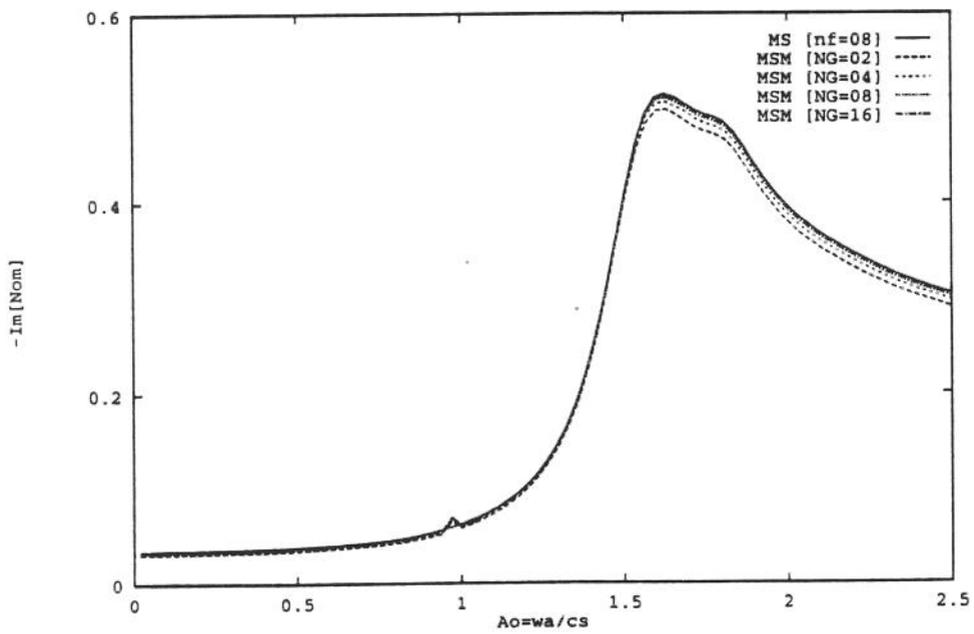
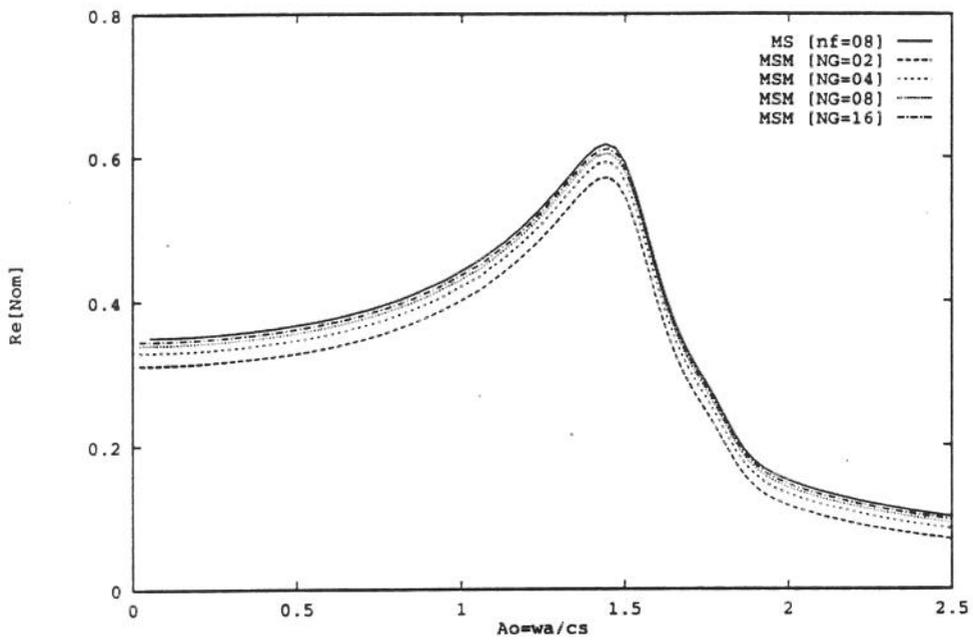


Figura 6.10. Componentes real e imaginária da flexibilidade dinâmica relacionada ao momento $N\phi_m$.

Como pode-se ver nas figuras anteriores o Método da Superposição Modificado (M.S.M.) e o Método da Superposição (M.S.) apresentam o mesmo comportamento para os elementos da matriz N_{ij} . Uma significativa vantagem do (M.S.M.) em comparação ao (M.S.) é a facilidade do primeiro em representar condições de contorno arbitrárias para um carregamento aplicado na superfície do domínio.

7.-Fundações parcialmente engastadas

Nos capítulos anteriores apresentou-se uma metodologia para tratar a interação dinâmica de fundações rígidas assentadas na superfície de solos horizontalmente estratificados.

Em problemas da engenharia, entretanto, as estruturas de fundações encontram-se frequentemente total- ou parcialmente engastadas nos solos. Assim, visando ampliar a gama de problemas da D.S.S.I. a serem considerados, este capítulo apresenta uma metodologia que permite a síntese de matrizes de flexibilidade para fundações parcialmente engastadas.

A rigor, a versão direta do Método dos Elementos de Contorno permite a modelagem do problema da interação dinâmica de estruturas total- ou parcialmente engastadas no solo, com estratificações arbitrárias [04,12]. As limitações desta metodologia, com respeito às estratégias de truncamento da discretização, já foram comentadas nos capítulos anteriores.

Antes da formalização da versão direta do M.E.C., o tratamento de problemas com engastamentos podia ser feito através da abordagem por equações integrais de contorno [06], ou então, por uma abordagem mista, que inclui uma discretização por elementos finitos da porção a ser escavada (retirada) do domínio homogêneo original [62].

A questão crucial das metodologias acima descritas era a necessidade de se dispor de uma função de Green ou uma função de influência com fontes no interior do domínio [81,82]. Conforme será visto no próximo capítulo, a síntese de funções de influência ou Green com fontes no interior do domínio constitui-se numa tarefa consideravelmente mais complexa do que aquela em que são consideradas fontes na superfície.

Para evitar o uso de funções de Green com fontes interna, Dasgupta [20] propôs uma metodologia chamada de Método de Subestruturação por Eliminação (Substructure Deletion Method, S.D.M.). Esta metodologia permite obter a matriz de flexibilidade/rigidez de fundações rígidas ou flexíveis parcialmente engastadas no solo, a partir de funções de influência ou Green com fontes na superfície; mais a discretização da região retirada (limitada) do

solo escavado, através dos elementos finitos.

Neste capítulo será implementada uma modificação do S.D.M., tal como sugerido por Gaul [32].

7.1.-O Método de Subestruturação por Eliminação

Um domínio homogêneo, Ω^h , pode ser entendido como a união (soma) de uma região engastada, Ω^s , mais uma porção retirada do solo, Ω^e , como ilustra a figura 7.1. Evidentemente estas regiões devem possuir as mesmas propriedades materiais. A matriz de flexibilidade dinâmica para o domínio viscoelástico com engastamento pode então ser obtida utilizando a técnica de subestruturação.

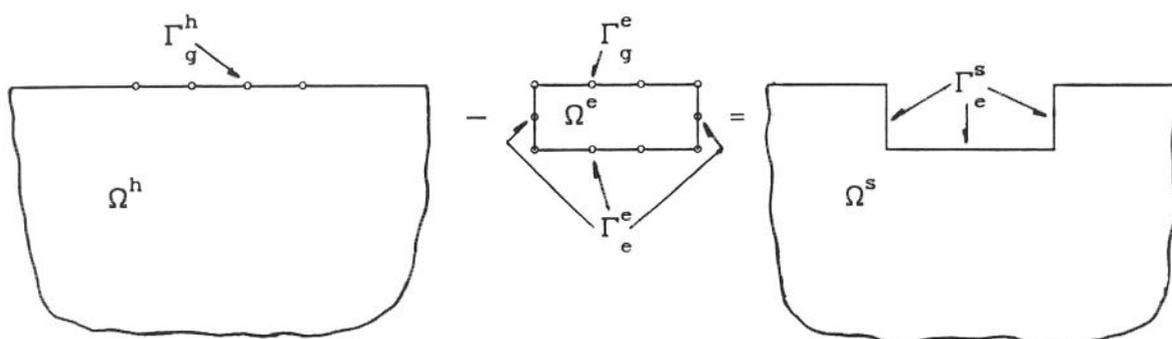


Figura 7.1. Domínio viscoelástico-parte escavada=região engastada.

No método de subestruturação por eliminação é conveniente representar adequadamente as três regiões do solo, a saber, o domínio viscoelástico, Ω^h ; a porção retirada (limitada) do solo também chamada parte escavada, Ω^e ; e a região que representa o solo ilimitado escavado, Ω^s , que é objeto do presente estudo. A figura 7.1 esquematiza a técnica de subestruturação proposta.

É interessante observar que o domínio homogêneo pode ser reconstituído, bastando para isso incluir a parte escavada limitada na região do solo ilimitado com escavação e assumir

condições de compatibilidade cinemática e equilíbrio nas interfaces de acoplamento.

No Método da Subestruturação por Eliminação pode-se desacoplar o problema original em dois métodos distintos: um aplicado a região do domínio viscoelástico, outro a região escavada. A análise na região escavada pode ser feita por métodos numéricos convencionais como o Método dos Elementos Finitos, o Método das Diferenças Finitas ou o Método dos Elementos de Contorno. Como trata-se de uma região limitada os problemas numéricos referentes ao truncamento da discretização são inexistentes. Já para a superfície do domínio viscoelástico homogêneo será conveniente analisá-la através do Método da Superposição ou o Método da Superposição Modificado desenvolvido nos capítulos anteriores deste trabalho.

Originalmente no método de subestruturação proposto por Dasgupta a parte escavada limitada do solo foi modelada pelo Método dos Elementos Finitos. Os nós no interior do domínio posteriormente são condensados aos nós da interface solo-fundação. Visando eliminar a condensação nodal Gaul [32] propôs o uso do Método dos Elementos de Contorno. A princípio o Método dos Elementos de Contorno parece ser o caminho mais natural a ser seguido, pois somente o contorno (superfície) do domínio é discretizado. Gaul descreveu a metodologia mas não apresentou resultados numéricos. Recentemente, Betti e Abdel-Ghaffar [11] desenvolveram um estudo numérico sobre o Método de Subestruturação por Eliminação para analisar o comportamento dinâmico de uma fundação rígida tridimensional. Os autores não sintetizaram a função de Green para o semi-espaço, e sim, interpolaram dados fornecidos por Wong e Luco [85].

O Método de Subestruturação por Eliminação visa obter a matriz de flexibilidade dinâmica C_{ee}^s relacionando deslocamentos U_e^s e tensões t_e^s sobre a superfície escavada Γ_e^s do solo Ω^s , mostrado na figura 7.1. A relação tensão-deslocamentos é dada pela equação:

$$\{U_e^s\} = [C_{ee}^s] \{t_e^s\}. \quad (7.1)$$

A formulação do método também requer a função de flexibilidade na superfície do contorno Γ_g^h relacionando os deslocamentos U_g^h e as tensões t_g^h do problema homogêneo para o domínio Ω^h . Também é necessário conhecer a matriz de flexibilidade dinâmica (ou rigidez) do domínio escavado e limitado Ω^e . Neste as tensões de superfície $t_g^e \cup t_e^e$ e os deslocamentos $U_g^e \cup U_e^e$ devem ser conectados adequadamente.

7.1.1.-Matriz de flexibilidade para a superfície do solo viscoelástico estratificado

Nos capítulos anteriores descreveu-se uma metodologia para sintetizar as funções de flexibilidade de superfície para vários perfis de solo: o semi-espço homogêneo bi- e tridimensional [56]; uma camada viscoelástica sobre base rígida; a camada viscoelástica sobre o semi-espço. Admitindo-se que a distribuição de tensões sobre a superfície homogênea do solo Γ_g^h pode ser discretizada por elementos constantes é possível, no Método da Superposição, obter a matriz de flexibilidade dinâmica relacionando deslocamentos $U_g^h = U(x)$, com $x \in \Gamma_g^h$ e tensões $t_g^h = t(x)$, com $x \in \Gamma_g^h$, na forma:

$$\{U_g^h\} = [C_{gg}^h] \{t_g^h\}. \quad (7.2)$$

7.1.2.-Matriz de flexibilidade da parte escavada do solo por elementos de contorno

A parte escavada e limitada do solo Ω^e pode ser modelada pelo Método dos Elementos de Contorno com elementos constantes para as tensões $t_g^e \cup t_e^e$ e deslocamentos $U_g^e \cup U_e^e$ na superfície externa

$\Gamma_g^e \cup \Gamma_e^e$. Dessa forma, tem-se o sistema de equações algébricas:

$$\begin{bmatrix} H_{gg}^e & H_{ge}^e \\ H_{eg}^e & H_{ee}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_g^e \\ U_e^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{gg}^e & G_{ge}^e \\ G_{eg}^e & G_{ee}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_g^e \\ t_e^e \end{Bmatrix}. \quad (7.3)$$

Pré-multiplicando a equação (7.3) por $[H]^{-1}$ pode-se reescrevê-la na forma,

$$\begin{Bmatrix} U_g^e \\ U_e^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{gg}^e & C_{ge}^e \\ C_{eg}^e & C_{ee}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_g^e \\ t_e^e \end{Bmatrix}, \quad (7.4)$$

em que, $[C] = [H]^{-1} [G]$.

7.1.3.-Matriz de flexibilidade dinâmica para a região engastada

A idéia principal no Método de Subestruturação por Eliminação é a representação da região engastada através da subtração da parte escavada Ω^e do domínio Ω^h . Deve-se considerar em ambos os domínios as mesmas propriedades materiais. Sob estas hipóteses os deslocamentos e as tensões nas superfícies Γ_g^h e Γ_g^e são dadas por:

$$\{U_g^h\} = \{U_g^e\} \quad ; \quad \{t_g^h\} = \{t_g^e\}. \quad (7.5)$$

Nas interfaces escavadas Γ_e^s e Γ_e^e as condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio devem ser descritas, respectivamente, por:

$$\{U_e^s\} = \{U_e^e\} \quad ; \quad \{t_e^s\} + \{t_e^e\} = \{0\}. \quad (7.6)$$

Através das equações (7.2), (7.3) (7.5) e (7.6), obtém-se uma relação entre deslocamentos e tensões na forma,

$$\{U_e^s\} = [C_{eg}^e (C_{gg}^e - C_{gg}^h)^{-1} C_{ge}^e - C_{ee}^e] \{t_e^s\}. \quad (7.7)$$

Comparando as equações (7.7) e (7.1), pode-se escrever a matriz de flexibilidade dinâmica para a região engastada $[C_{ee}^s]$ como:

$$[C_{ee}^s] = [C_{eg}^e (C_{gg}^e - C_{gg}^h)^{-1} C_{ge}^e - C_{ee}^e]. \quad (7.8)$$

Desse modo, é possível sintetizar a matriz de flexibilidade dinâmica para uma região engastada através do uso de funções de influência na superfície do solo e da representação da parte escavada limitada por elementos de contorno.

A matriz de flexibilidade na equação (7.8) pode agora ser utilizada para descrever a interação dinâmica de fundações engastadas rígidas e/ou flexíveis com o solo. Como na equação (3.25) considera-se uma fundação rígida sem massa. A fim de obter a desejada matriz de flexibilidade condições de equilíbrio e compatibilidade cinemática devem ser colocadas sobre os nós do domínio Ω^s . Como resultado obtém-se uma matriz de flexibilidade para uma fundação engastada rígida $[N]$ relacionando o vetor de excitação, ou de forças externas que atuam sobre a fundação $\{\bar{F}_e\}$, e o vetor dos deslocamentos de corpo rígido $\{\bar{P}\}$, na forma,

$$\{\bar{P}\} = [N] \{\bar{F}_e\}. \quad (7.9)$$

A estrutura da matriz de flexibilidade dinâmica é dada por:

$$\begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{um} \\ 0 & N_{\phi x} & N_{\phi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_x \\ \bar{M}_y/a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{W}_R \\ \bar{U}_R \\ \bar{\phi}_y \cdot a \end{Bmatrix}. \quad (7.10)$$

7.2.-Resultados numéricos

Neste tópicos realiza-se uma série de comparações entre o Método de Subestruturação por Eliminação (S.D.M.) e a implementação baseada na versão direta do Método dos Elementos de Contorno para fundações engastadas em vários perfis de solo. Os resultados numéricos mostram os termos vertical, horizontal, de rotação e cruzados da matriz de flexibilidade dinâmica para diferentes razões de engastamento. A figura 7.2 ilustra os parâmetros utilizados nas comparações com os artigos de referência.

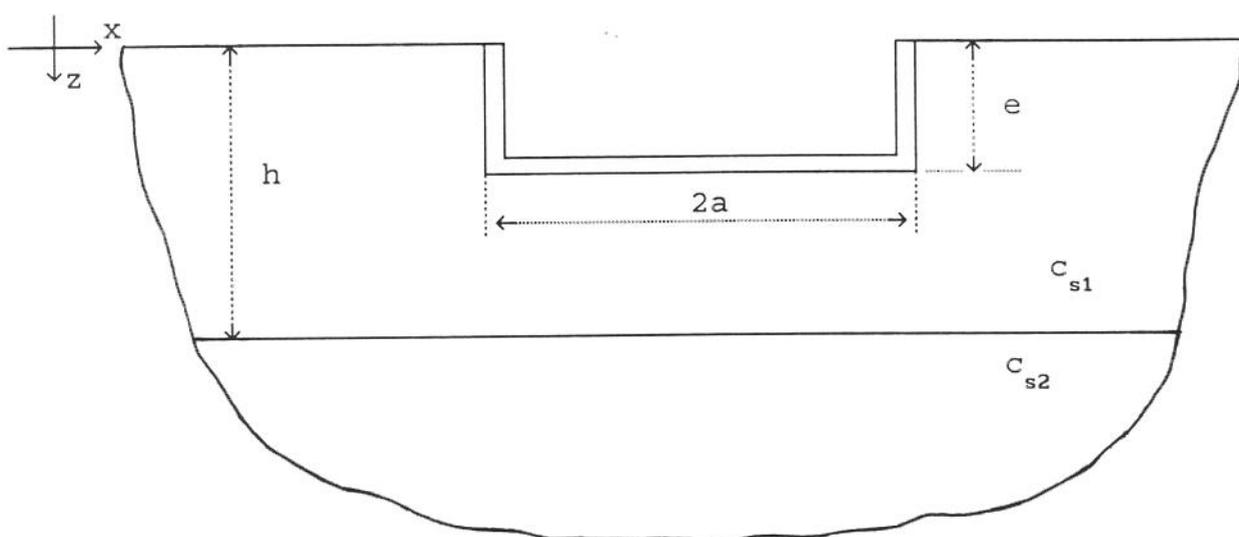


Figura 7.2. Fundação engastada numa camada viscoelástica sobre o semi-espaço.

Na figura 7.2 indica-se a altura da camada viscoelástica por h . Na mesma figura e/a refere-se a razão do engastamento. Por sua vez, indica-se $Rc=c_{s2}/c_{s1}$ como a razão entre as velocidades das ondas transversais entre a camada viscoelástica e o semi-espaço.

Para a maioria dos resultados, utiliza-se a razão de Poisson $\nu=0.33$ e o amortecimento material $\eta=0.10$. Quando a razão de Poisson diferencia-se da anteriormente citada tem-se uma indicação na figura. Os valores dos elementos da matriz de

flexibilidade dinâmica N_{ij} , são plotados para a frequência adimensional $A_0 = w.a/c_{s1}$. No programa computacional desenvolvido utilizam-se elementos constantes nas interfaces da fundação. Na interface horizontal (2a) tem-se uma discretização com 8 elementos constantes. Já a interface vertical (e) a discretização varia de acordo com a razão de engastamento. Para $e/a=0.5$ e $e/a=1.0$ utilizam-se 4 elementos constantes. Consideram-se 8 elementos constantes na interface vertical quando $e/a=2.0$.

Em relação as referências para comparação tem-se em Estorff e Schmid [29] a utilização do Método dos Elementos de Contorno com elementos constantes. No artigo de Abascal e Domínguez, [01] referenciado nos capítulos anteriores, tem-se a utilização do M.E.C. também com elementos constantes. Por fim, alguns resultados são ainda comparados a Israil e Ahmad [39] que utilizaram o M.E.C. com elementos quadráticos para analisar o comportamento dinâmico de fundações de superfície ou engastadas.

7.2.1.-0 semi-espço viscoelástico homogêneo

Nas figuras 7.3, 7.4, e 7.5 mostram-se os valores absolutos das flexibilidades dinâmicas N_{wz} , N_{ux} , N_{ϕ_m} para uma fundação engastada num semi-espço viscoelástico e homogêneo através do Método de Subestruturação por Eliminação (SDM). Investiram-se três razões de engastamento, a saber, $e/a=0.0$ (fundação de superfície), $e/a=0.5$ e $e/a=1.0$. Os valores absolutos dos elementos da matriz de flexibilidade dinâmica $Abs(N_{ij})$ indicam uma boa concordância com os resultados reportados por Estorff (EST) [29]. Na figura 7.6 tem-se os termos cruzados N_{um} e N_{ϕ_x} para as mesmas razões de engastamento. Estes resultados não são fornecidos por Estorff.

Realizou-se ainda um estudo de convergência para $Abs(N_{ij})$ no Método de Subestruturação por Eliminação para o semi-espço viscoelástico. Nas figuras 7.7, 7.8 e 7.9 tem-se o decréscimo da razão de engastamento na proporção: $e/a=0.25$, $e/a=0.15$, $e/a=0.10$ e $e/a=0.0$. Os resultados para $e/a \rightarrow 0.0$

mostram um comportamento de convergência para os elementos da matriz de flexibilidade dinâmica.

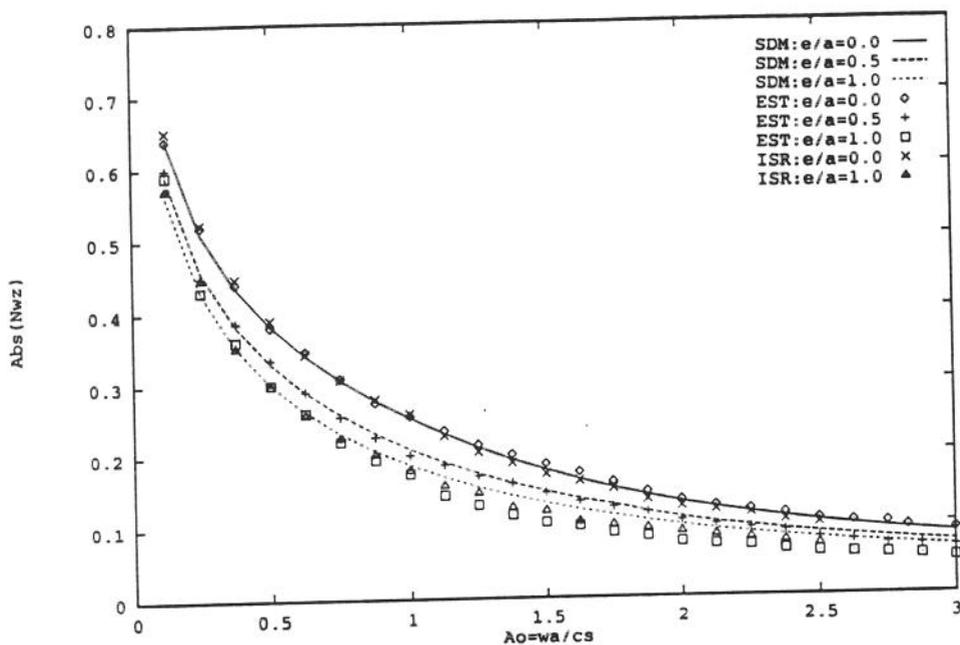


Figura 7.3. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica vertical para o semi-espaço.

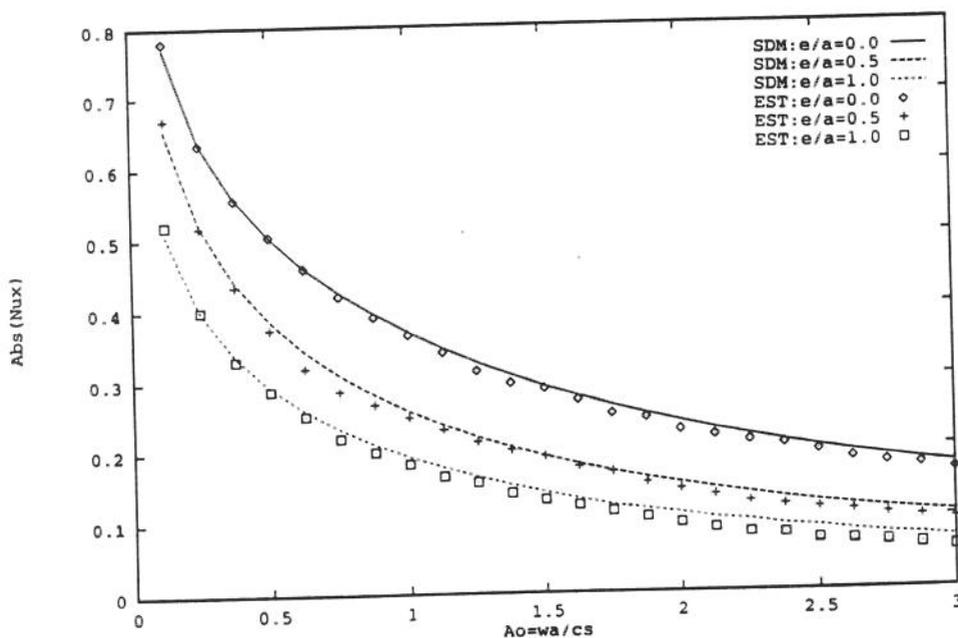


Figura 7.4. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica horizontal para o semi-espaço.

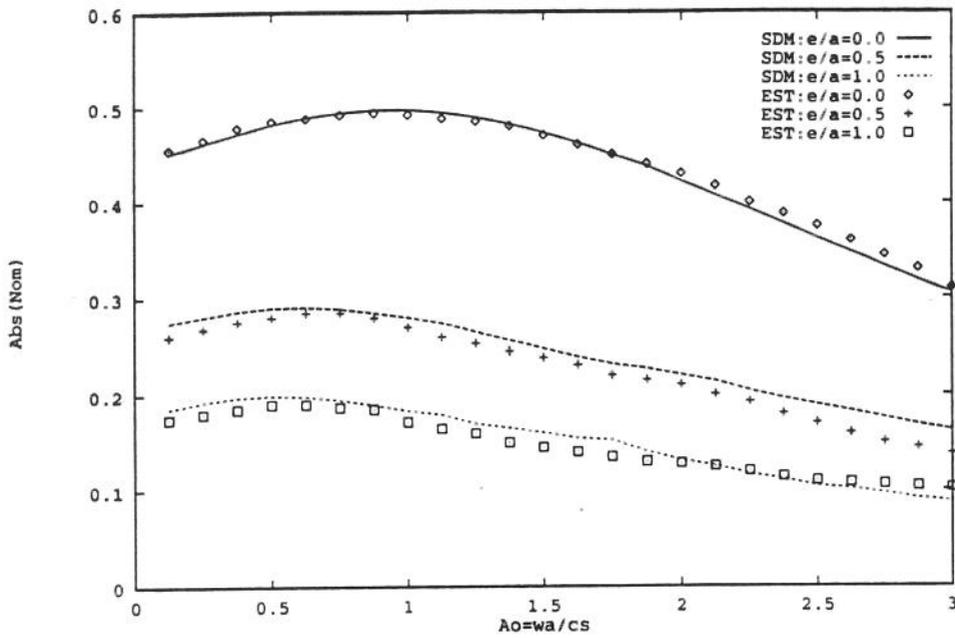


Figura 7.5. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica devido ao momento para o semi-espaço.

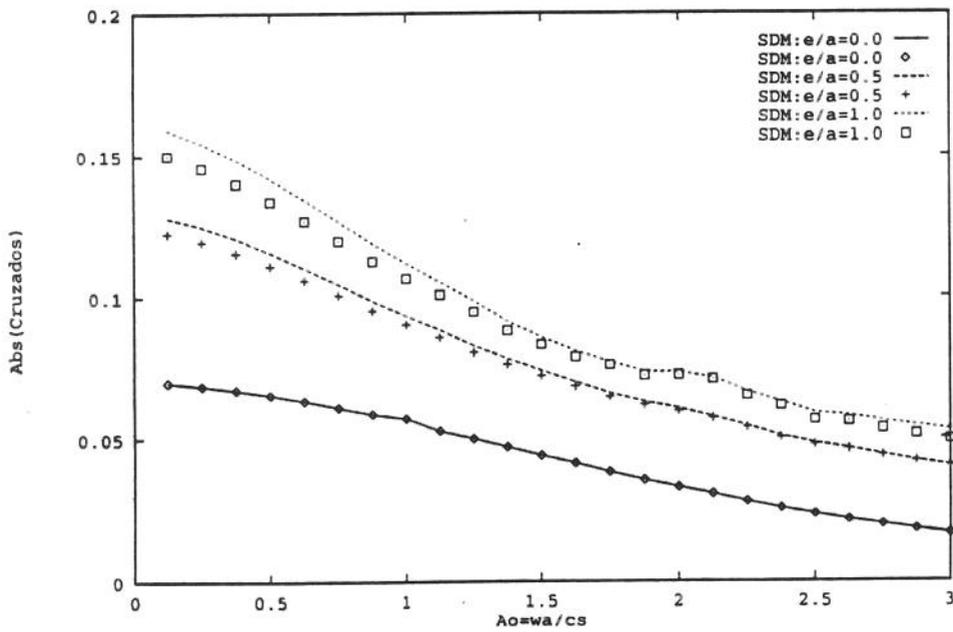


Figura 7.6. Valor absoluto dos termos cruzados da matriz de flexibilidade dinâmica N_{um} e $N\phi_x$ para o semi-espaço.

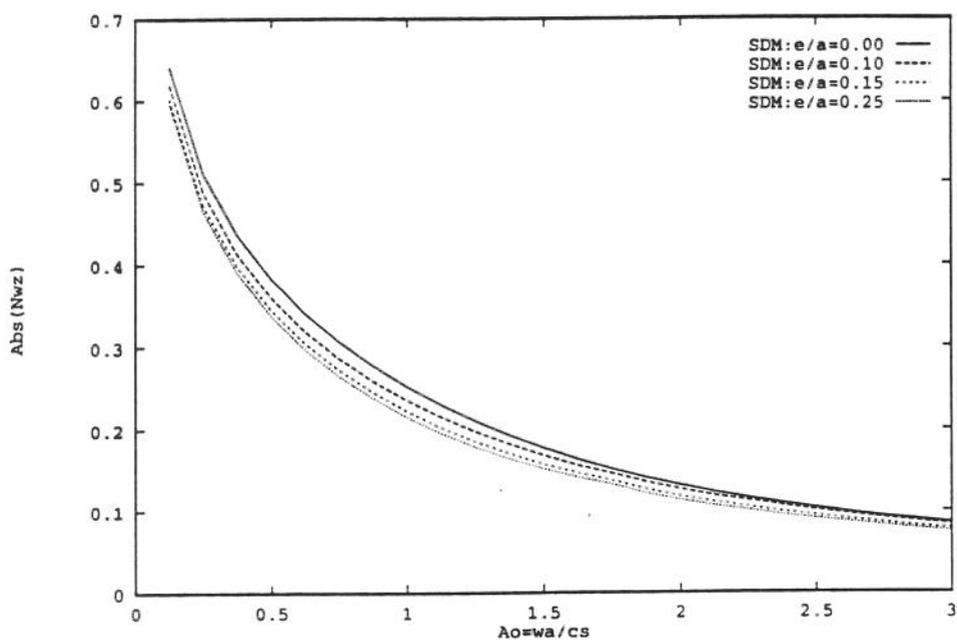


Figura 7.7. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica vertical para valores do engastamento próximos da superfície.

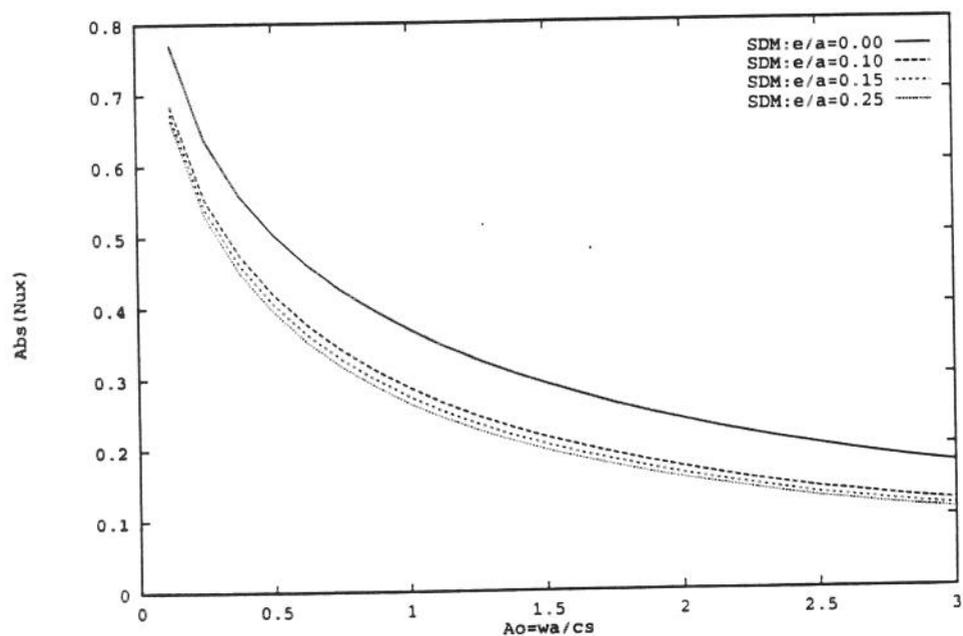


Figura 7.8. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica horizontal para valores do engastamento próximos da superfície.

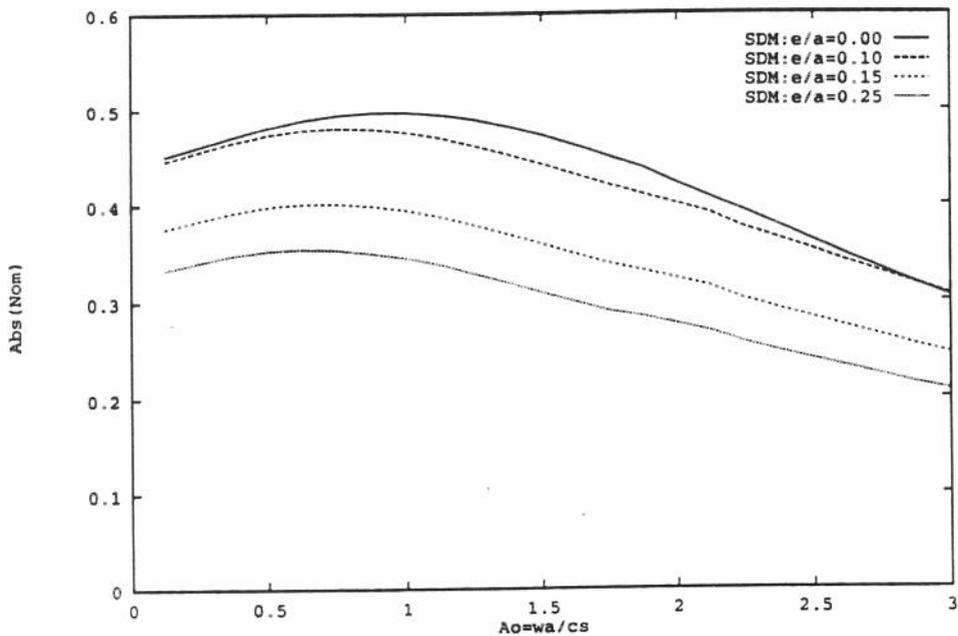


Figura 7.9. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica devido ao momento para valores do engastamento próximos da superfície.

7.2.2.-Camada viscoelástica sobre uma base rígida

Nesta seção investiga-se o comportamento dinâmico de fundações engastadas numa camada viscoelástica sobre uma base rígida. Consideram-se três espessuras diferentes para a camada viscoelástica: $h/a=2.0$, $h/a=3.0$ e $h/a=5.0$. Novamente comparam-se os resultados com Estorff e Schmid (EST) e Israil e Ahmad (ISR).

Nas figuras 7.10, 7.11, 7.12 encontra-se o valor absoluto das flexibilidades dinâmicas com $h/a=2.0$, e razão de engastamento $e/a=0.0$, $e/a=0.5$ e $e/a=1.0$. Vê-se na figura 7.13 os termos cruzados N_{um} e $N\phi_x$.

Pode-se notar nas figuras 7.10 a 7.12 algumas discrepâncias entre o SDM e EST mesmo para a fundação de superfície, $e/a=0.0$. Entretanto na comparação dos resultados com Abascal e Dominguez [01], mostrado nas figuras 7.14 a 7.16, nota-se uma boa concordância entre os métodos.

Para $h/a=5.0$ e razão de engastamento idêntico às figuras anteriores, tem-se os resultados ilustrados nas figuras 7.17, 7.18 e 7.19. Na figura 7.20 mostra-se os termos cruzados para $h/a=5.0$. Notam-se também algumas discrepâncias entre os métodos quando a razão de engastamento torna-se maior.

Nas figuras 7.21 e 7.22 comparam-se os resultados obtidos pelo presente método aos de Israil e Ahmad (ISR) para a flexibilidade dinâmica vertical (partes real e imaginária) com $e/a=0.0$, $e/a=1.0$ e $e/a=2.0$. Por fim, nas figuras 7.23 e 7.24 tem-se as partes real e imaginária da flexibilidade dinâmica vertical N_{wz} , em que utilizam-se $h/a=4.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$. Nestas últimas figuras comparam-se os dados obtidos aos de Abascal e Dominguez (ABA) para o caso $e/a=0.0$. Nas figuras 7.23 e 7.24 analisam-se ainda as razões de engastamento $e/a=1.0$, $e/a=2.0$ e $e/a=3.0$.

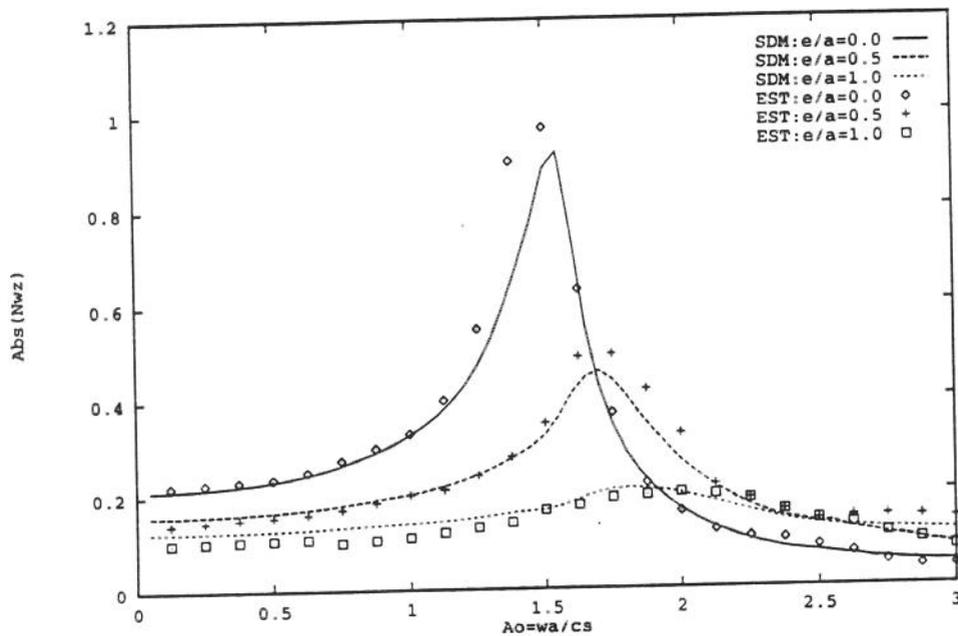


Figura 7.10. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=2.0$.

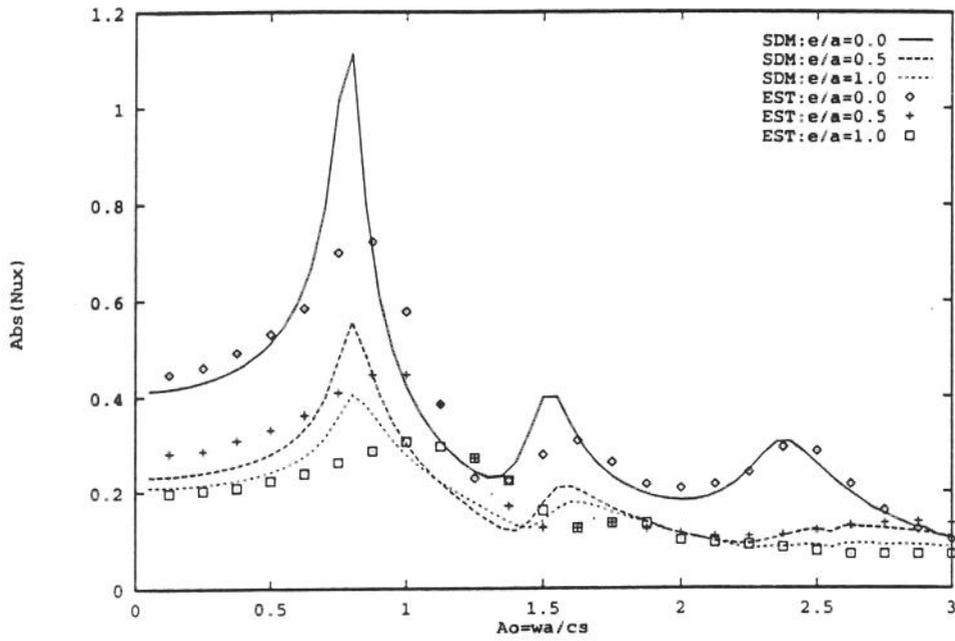


Figura 7.11. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica horizontal para $h/a=2.0$.

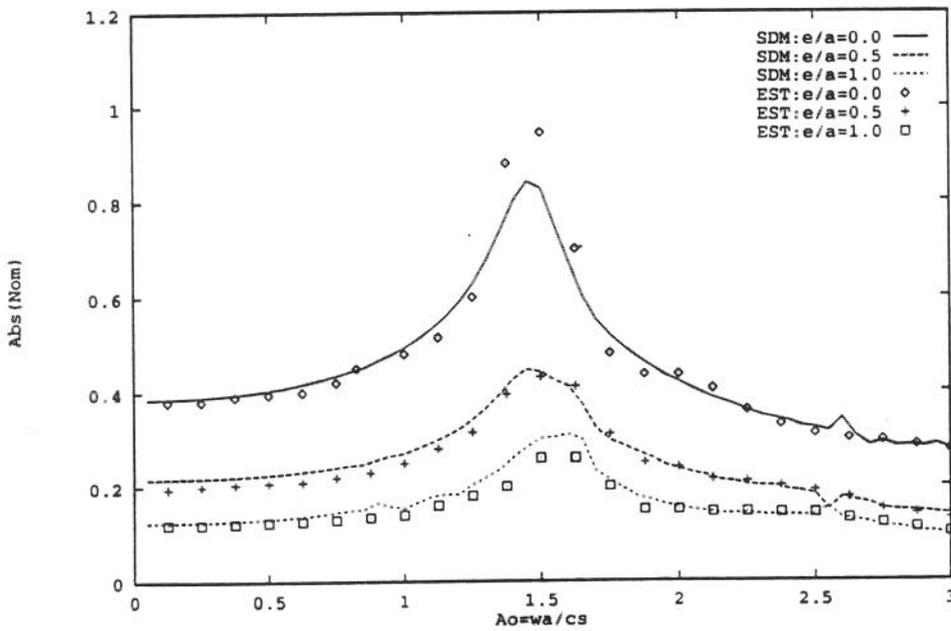


Figura 7.12. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica relativa ao momento para $h/a=2.0$.

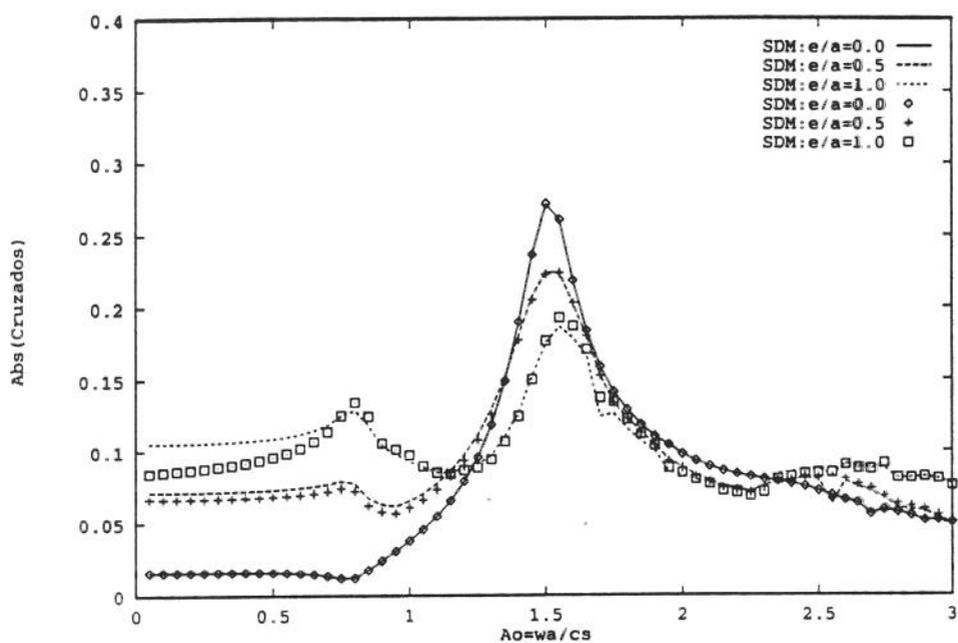


Figura 7.13. Valor absoluto dos termos cruzados da matriz de flexibilidade dinâmica N_{ϕ_x} para $h/a=2.0$.

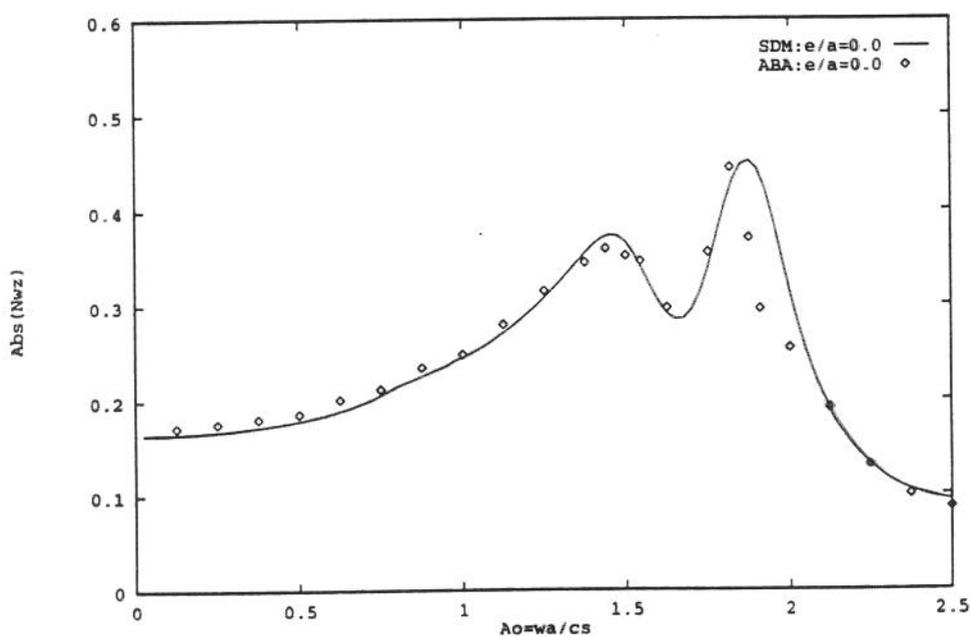


Figura 7.14. Valor da absoluta da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

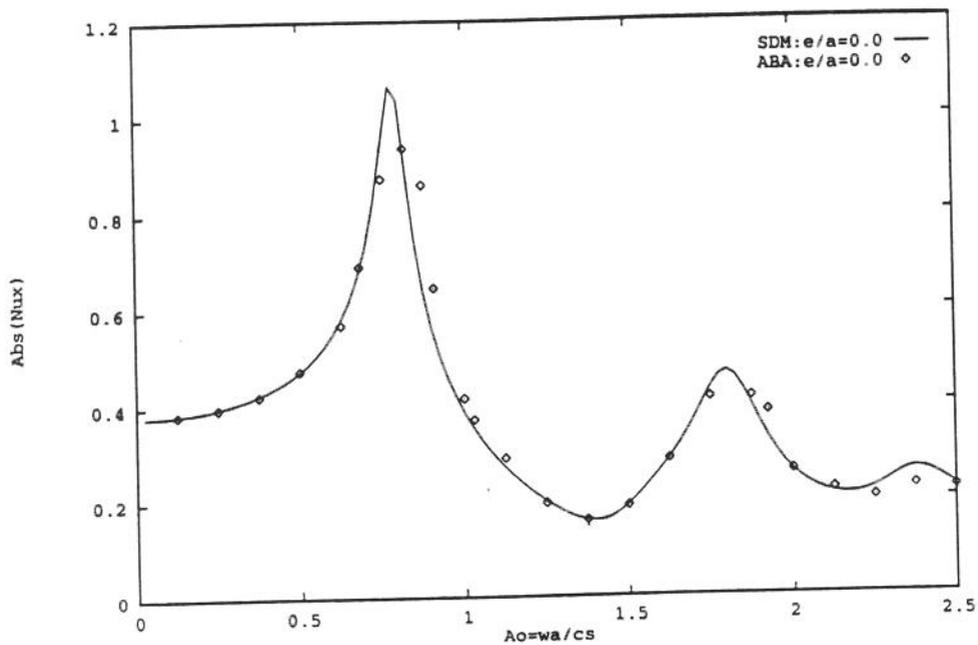


Figura 7.15. Valor absoluto da flexibilidade dinâmico horizontal para $h/a=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

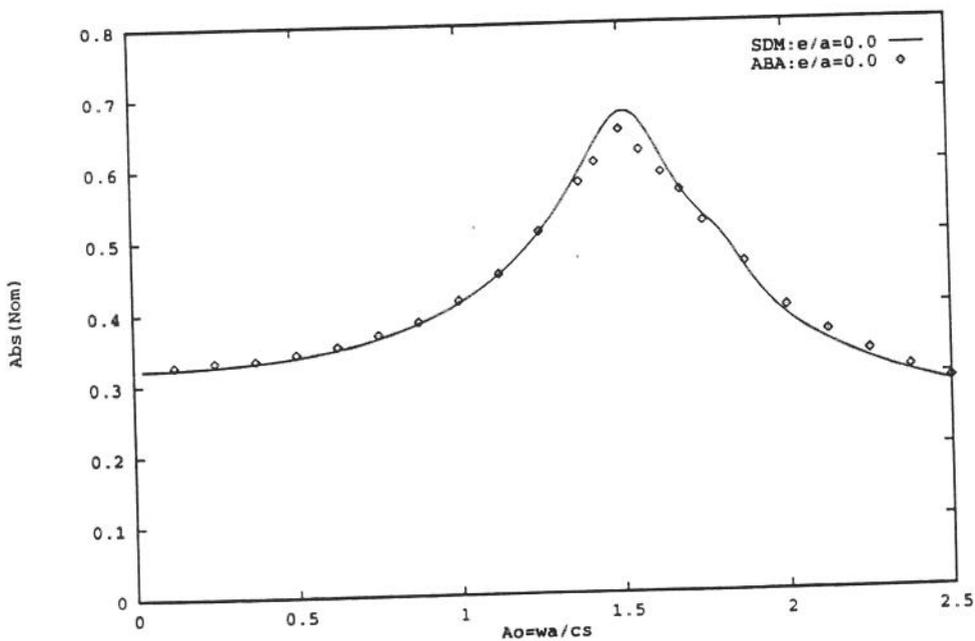


Figura 7.16. Valor absoluto da flexibilidade dinâmico relativa ao momento para $h/a=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

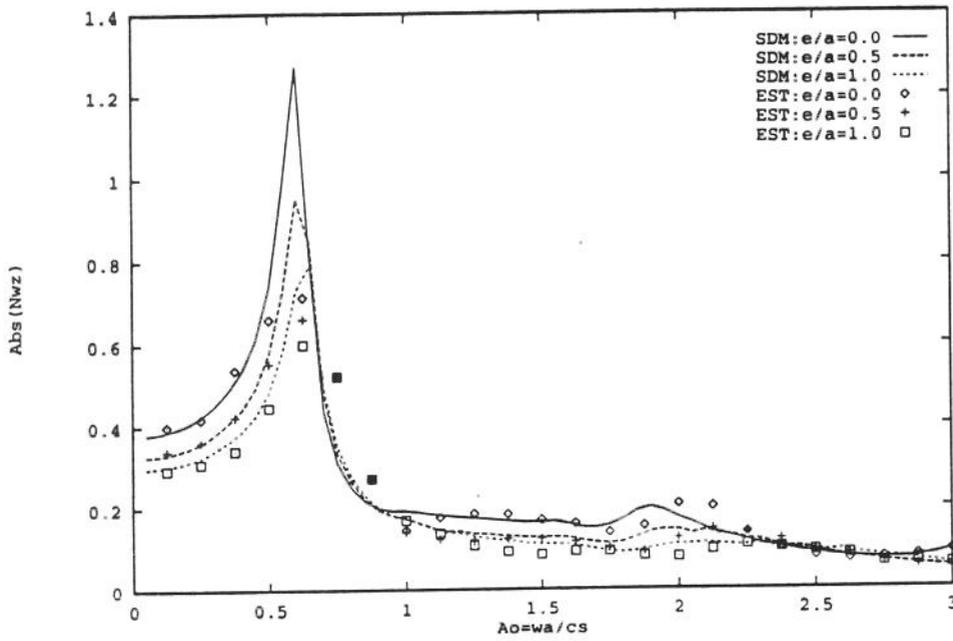


Figura 7.17. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=5.0$.

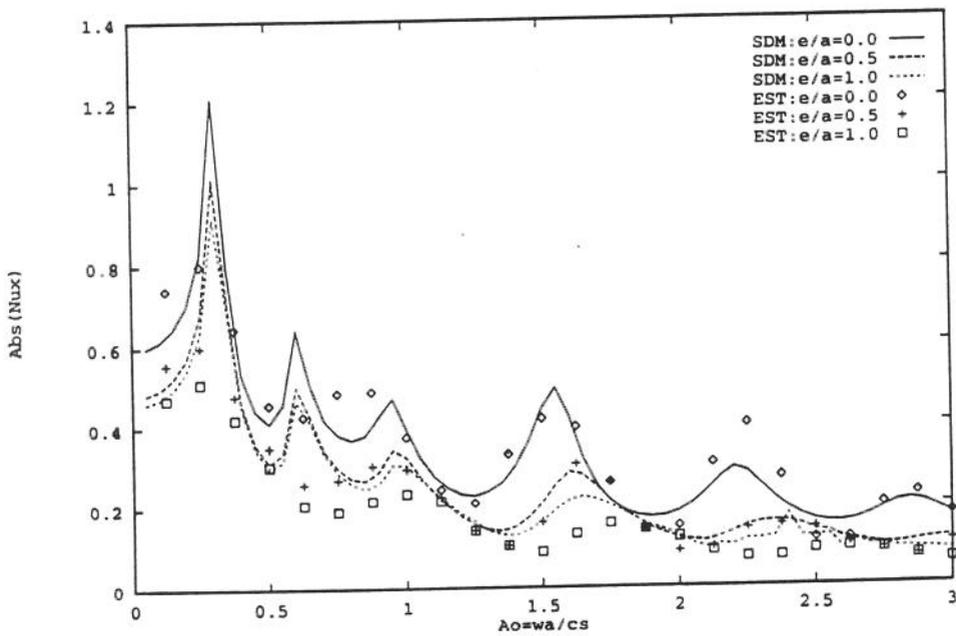


Figura 7.18. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica horizontal para $h/a=5.0$.

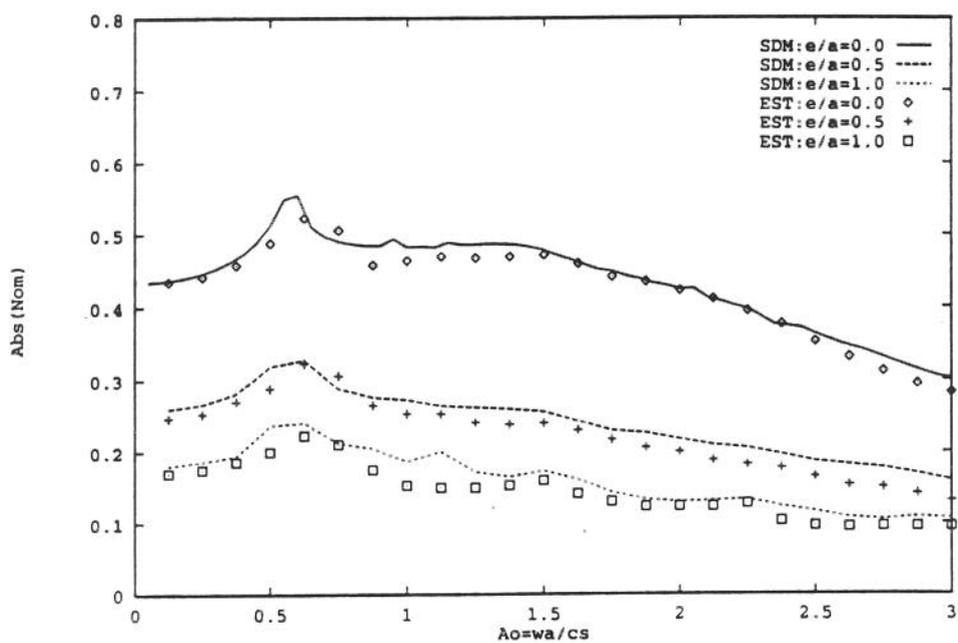


Figura 7.19. Valor absoluto da flexibilidade dinâmica relativa ao momento para $h/a=5.0$.

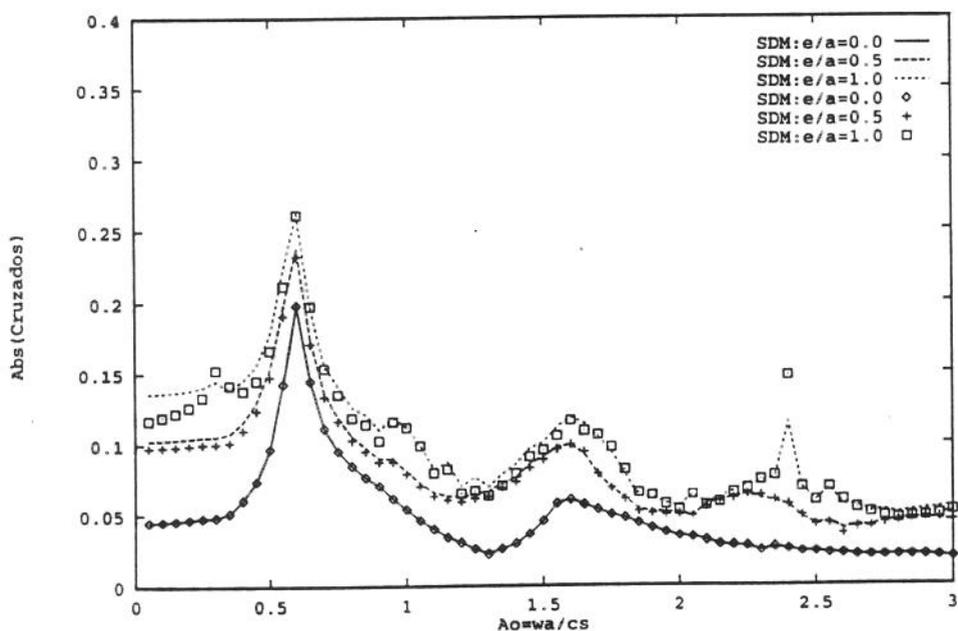


Figura 7.20. Valor absoluto dos termos cruzados da matriz de flexibilidade dinâmica N_{um} , $N_{\phi x}$ para $h/a=5.0$.

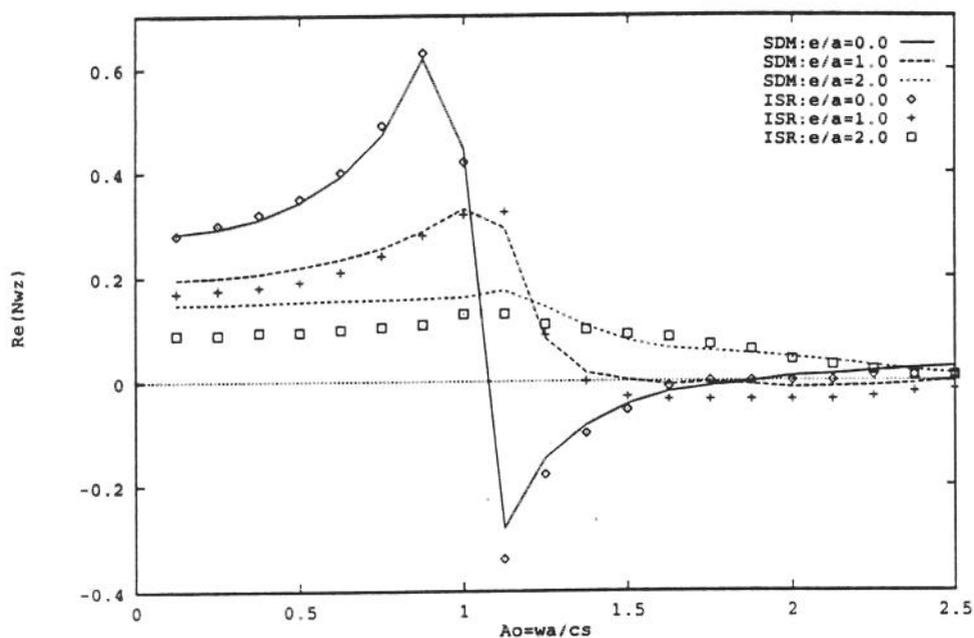


Figura 7.21. Parte real da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=3.0$.

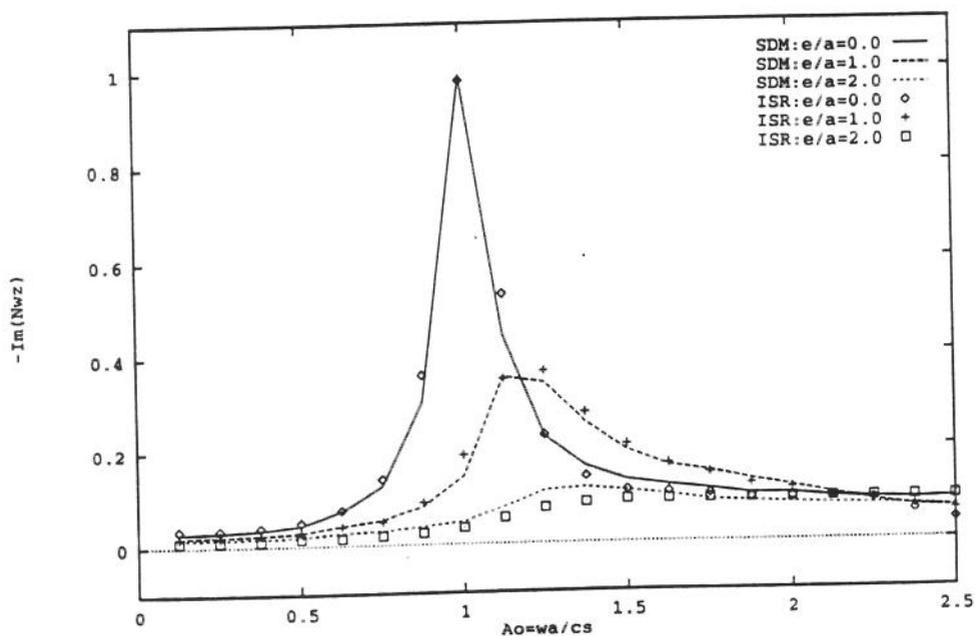


Figura 7.22. Negativo da parte imaginária da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=3.0$.

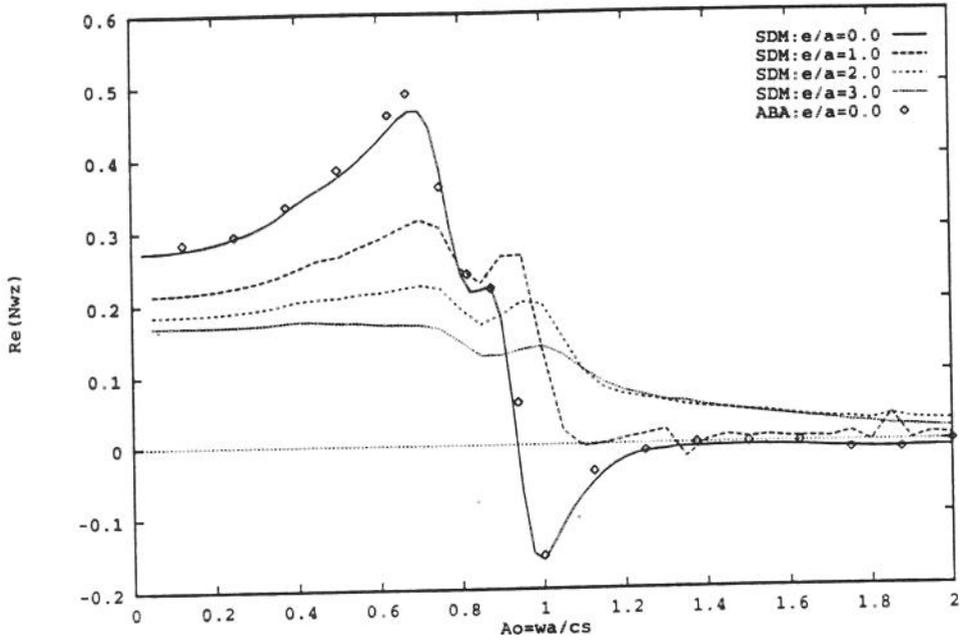


Figura 7.23. Parte real da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=4.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

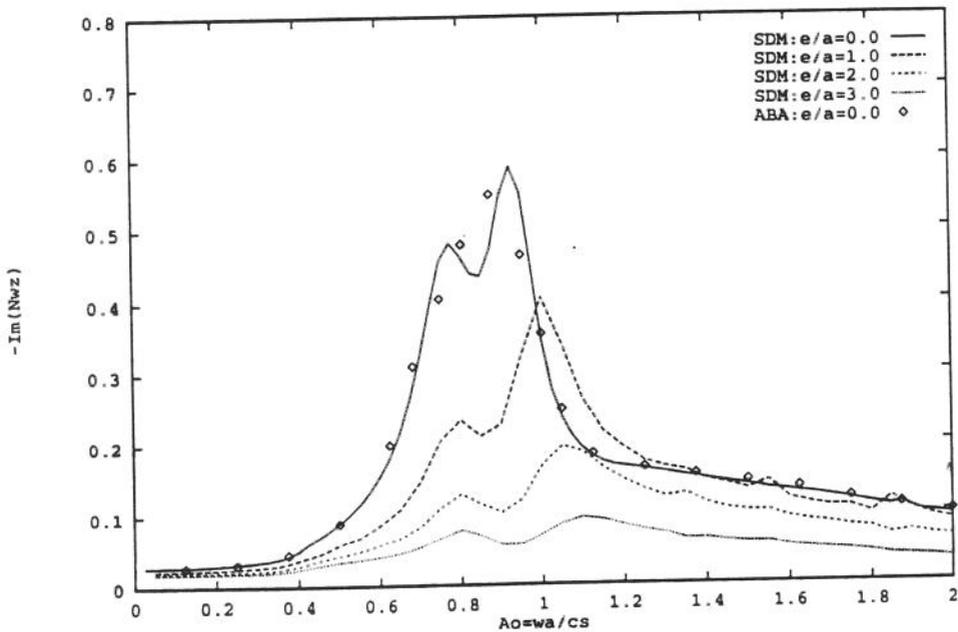


Figura 7.24. Negativo da parte imaginária da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=4.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

7.2.3.-Camada viscoelástica sobre o semi-espaço

Nas figuras 7.25 a 7.30 ilustram-se o comportamento dos elementos vertical N_{wz} da matriz de flexibilidade dinâmica para uma camada viscoelástica sobre o semi-espaço. A razão de propagação das velocidades das ondas transversais nos meios 1 e 2 é dada por $R_c=2.0$. Nas figuras 7.25 e 7.26 vê-se, respectivamente, as partes real e imaginária do elemento N_{wz} para $h/a=3.0$ e $e/a=0.0, 1.0$ e 2.0 . Comparam-se os resultados obtidos aos de Israil e Ahmad (ISR). Nota-se que não existe uma boa concordância entre os métodos, mesmo para a fundação de superfície $e/a=0.0$. A fim de verificar o comportamento do Método de Subestruturação por Eliminação para uma camada viscoelástica sobre o semi-espaço, comparam-se ainda alguns resultados aos de Abascal e Dominguez.

Nas figuras 7.27 e 7.28 tem-se as partes real e imaginária para $h/a=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$. Para a fundação de superfície a comparação com Abascal e Dominguez mostra uma excelente concordância. O comportamento do Método da Subestruturação por Eliminação para uma razão de engastamento diferente de zero mostra-se também coerente.

Finalmente, nas figuras 7.29 e 7.30 repete-se a análise anterior agora para $h/a=4.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

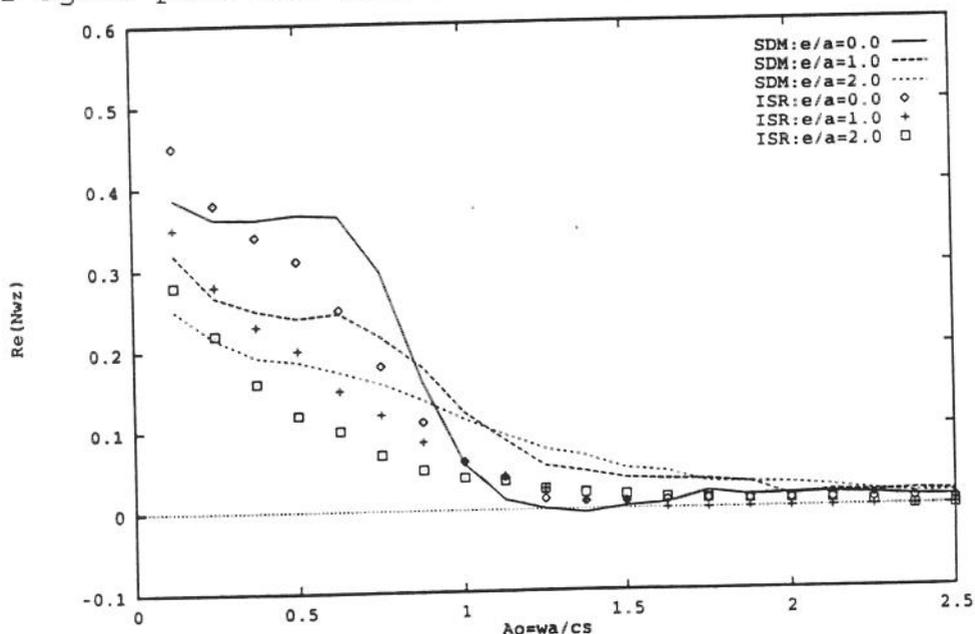


Figura 7.25. Parte real da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=3.0$ e $R_c=2.0$.

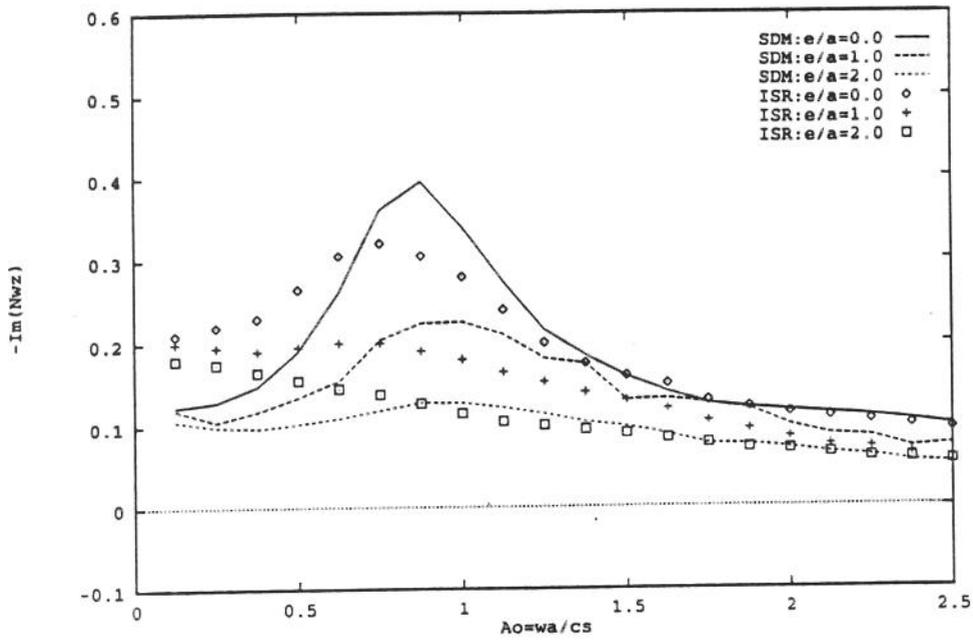


Figura 7.26. Negativo da parte imaginária da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=3.0$ e $Rc=2.0$.

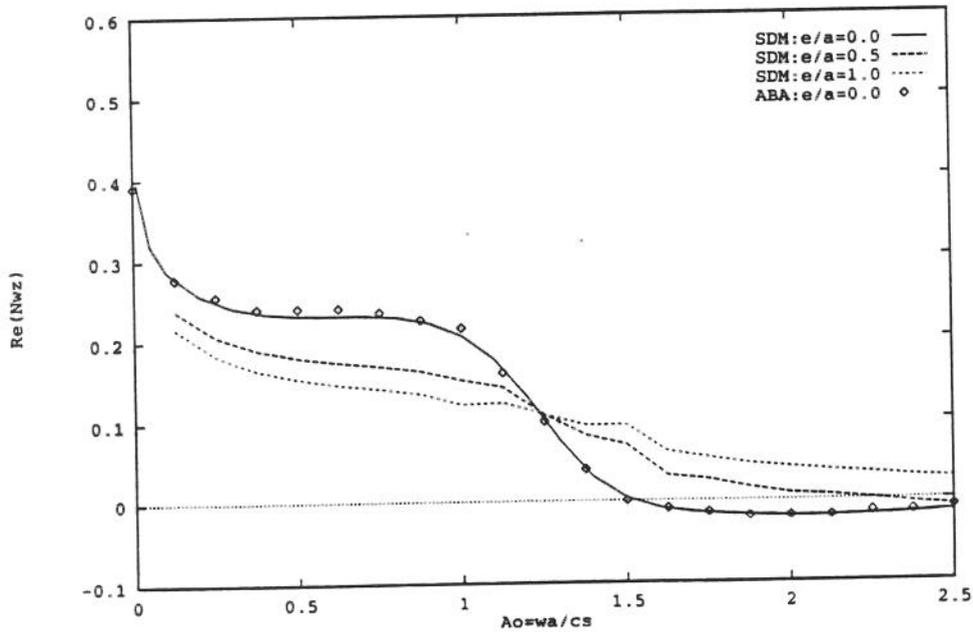


Figura 7.27. Parte real da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=2.0$, $Rc=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

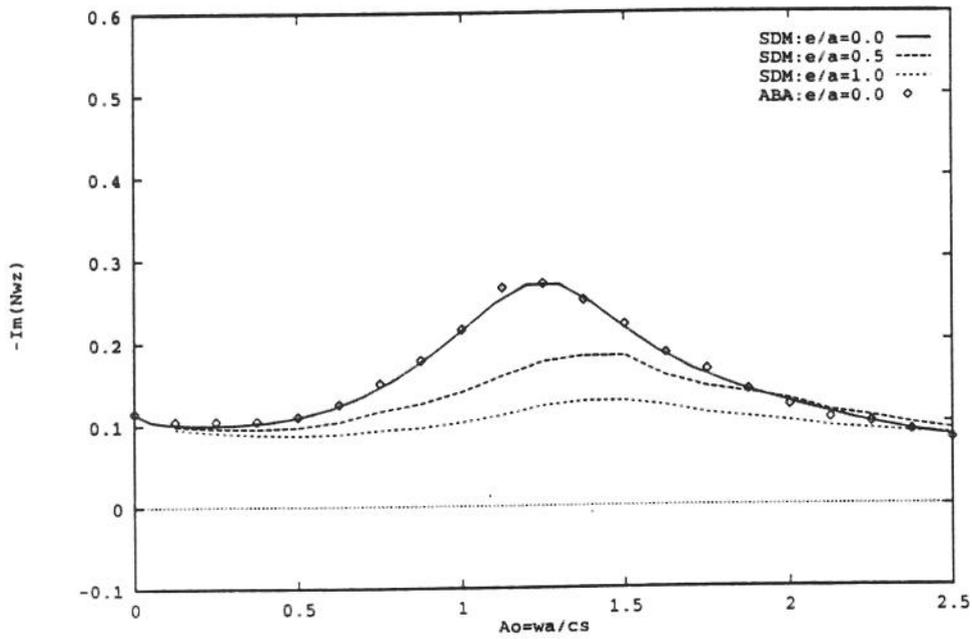


Figura 7.28. Negativo da parte imaginária da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=2.0$, $Rc=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

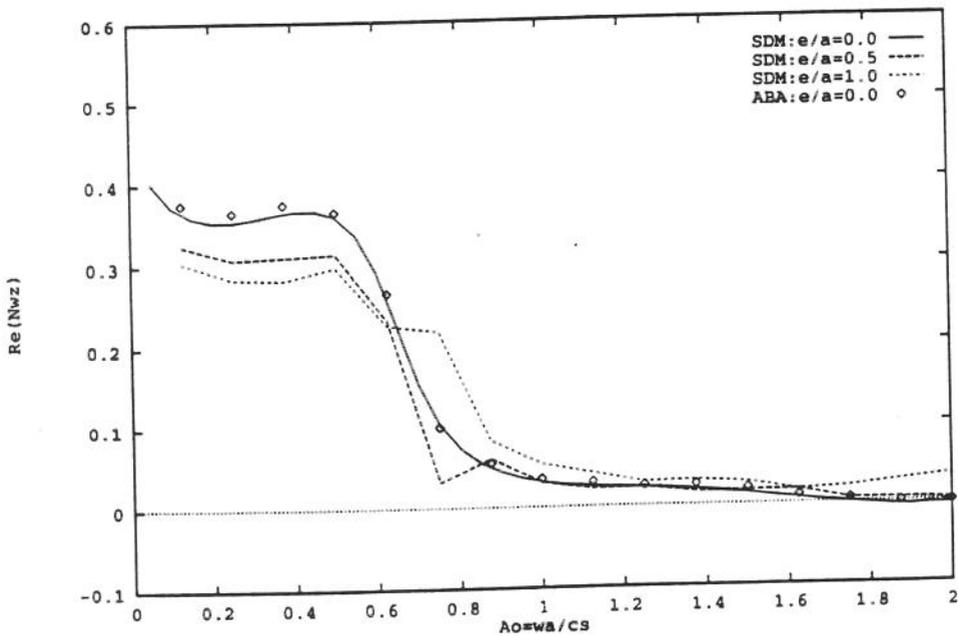


Figura 7.29. Parte real da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=4.0$, $Rc=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

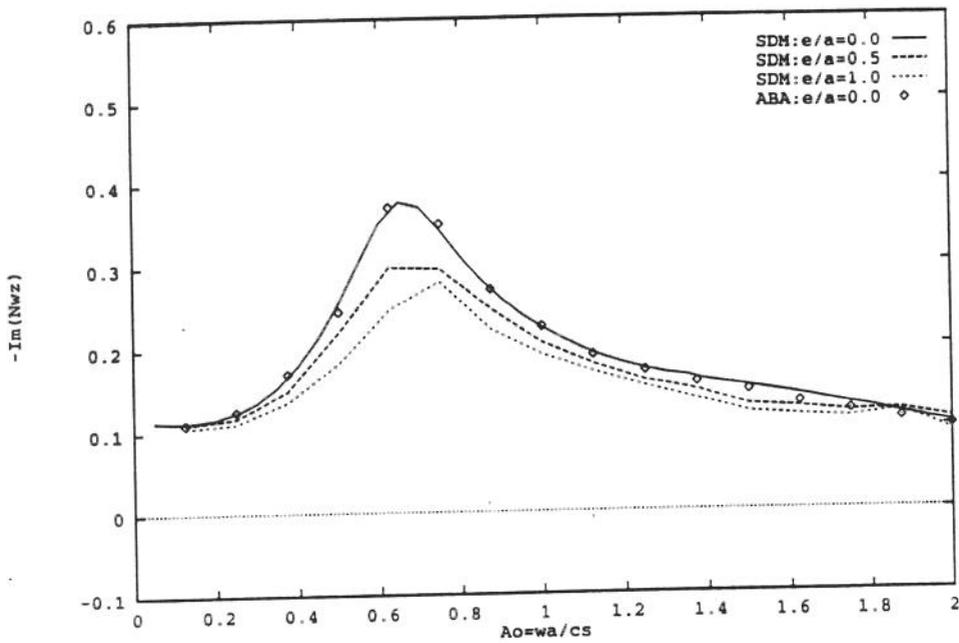


Figura 7.30. Negativo da parte imaginária da flexibilidade dinâmica vertical para $h/a=4.0$, $R_c=2.0$, $\nu=0.40$ e $\eta=0.10$.

Neste capítulo analisou-se o comportamento de fundações rígidas parcialmente engastadas em diversos perfis de solo. As figuras 7.3 a 7.30 mostram que o Método de Subestruturação por Eliminação, aqui apresentado, constitui-se numa alternativa eficiente para tratar dos problemas ligados a D.S.S.I.

8.-Funções de influência no interior do semi-espço visco-elástico e homogêneo

O problema a ser considerado neste capítulo refere-se à dedução de funções de influência com fontes (excitações) no interior dos solos.

A solução formal para descrever os deslocamentos e tensões produzidas por uma fonte sísmica localizada abaixo da superfície de um semi-espço elástico foi rigorosamente analisada por Pekeris [65,66]. O método de resolução de Pekeris, baseado na teoria desenvolvida por Lamb [46], é, todavia, demasiadamente complexo, além de possuir restrições quanto às aplicações práticas. A função de influência a ser deduzida para o interior do meio viscoelástico, parte da mesma metodologia que norteou este trabalho, qual seja, considera-se um carregamento harmônico no tempo e localizado a uma profundidade h da superfície do solo, em seguida, através de soluções tentativa e da colocação adequada de condições de contorno em tensões, obtém-se as desejadas funções de flexibilidade para o problema. A figura 8.1 ilustra o carregamento no interior do domínio viscoelástico e homogêneo.

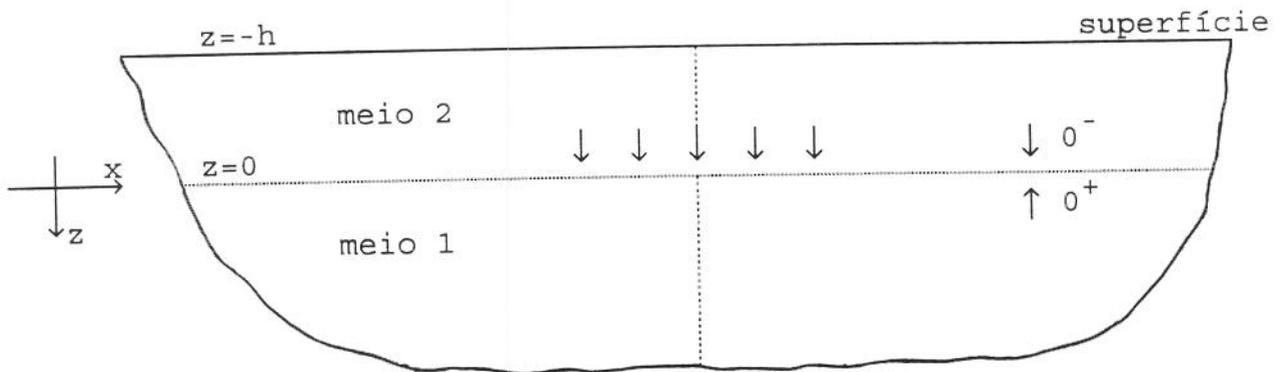


Figura 8.1. Carregamento vertical e harmônico no tempo localizado a uma profundidade h da superfície do domínio.

Na figura anterior, o carregamento está localizado no nível $z = 0$ e a superfície situa-se em $z = -h$. Os meios acima da linha

do carregamento (meio 2) e abaixo (meio 1) possuem as mesmas propriedades físicas.

8.1. Funções de flexibilidade para um carregamento vertical

Considerando um carregamento vertical no interior do semi-espaço viscoelástico e homogêneo localizado a uma profundidade de $z=h$ da superfície livre, as condições de contorno em tensões podem ser colocadas na forma,

$$\bar{\sigma}_{zz}^1(x, z=0^+) - \bar{\sigma}_{zz}^2(x, z=0^-) = \bar{\sigma}_{zz} \exp(i\beta x), \quad (8.1)$$

em que os índices superiores 1 e 2 indicam qual o meio considerado.

Na superfície do semi-espaço, ou seja, em $z=-h$, admite-se o estado livre de tensões, assim as condições de contorno são da forma:

$$\bar{\sigma}_{zz}^2(x, z=-h) = \bar{\sigma}_{xz}^2(x, z=-h) = 0. \quad (8.2)$$

De modo similar às funções de flexibilidade na superfície do domínio, consideram-se as equações das ondas na forma:

$$\frac{1}{k_L^{*2}} \nabla^2 \bar{\Delta} + \bar{\Delta} = 0, \quad (8.3a)$$

$$\frac{1}{k_S^{*2}} \nabla^2 \bar{\psi} + \bar{\psi} = 0. \quad (8.3b)$$

Como soluções tentativa para as equações (8.3), nas

regiões 1 e 2 tem-se,

$$\bar{\Delta}_1 = A_1 k_L^{*2} \exp(-\alpha_L z + i\beta x) \quad \text{em } \Omega_1, \quad (8.4a)$$

$$\bar{\Delta}_2 = A_2 k_L^{*2} \exp(-\alpha_L z + i\beta x) + A_3 k_L^{*2} \exp(\alpha_L z + i\beta x) \quad \text{em } \Omega_2. \quad (8.4b)$$

$$\bar{\psi}_1 = B_1 k_S^{*2} \exp(-\alpha_S z + i\beta x) \quad \text{em } \Omega_1, \quad (8.5a)$$

$$\bar{\psi}_2 = B_2 k_S^{*2} \exp(-\alpha_S z + i\beta x) + B_3 k_S^{*2} \exp(\alpha_S z + i\beta x) \quad \text{em } \Omega_2. \quad (8.5b)$$

Nas equações (8.4) e (8.5) vê-se novamente as amplitudes das ondas de dilatação e cisalhamento dadas pelas constantes $A_{i,s}$ e $B_{i,s}$. Já os coeficientes k_L^* , k_S^* , α_L , α_S , β são os números de ondas previamente definidos. Ainda referindo-se as estas equações, as tentativas de solução em $\bar{\Delta}$ e $\bar{\psi}$ mostram que no meio 2 existe a propagação de ondas diretas (amplitudes A_3 e B_3) e refletidas (amplitudes A_2 e B_2). Para o meio 1 supõe-se apenas a propagação de ondas sem reflexão (amplitudes A_1 e B_1), como ilustra a figura 8.2.

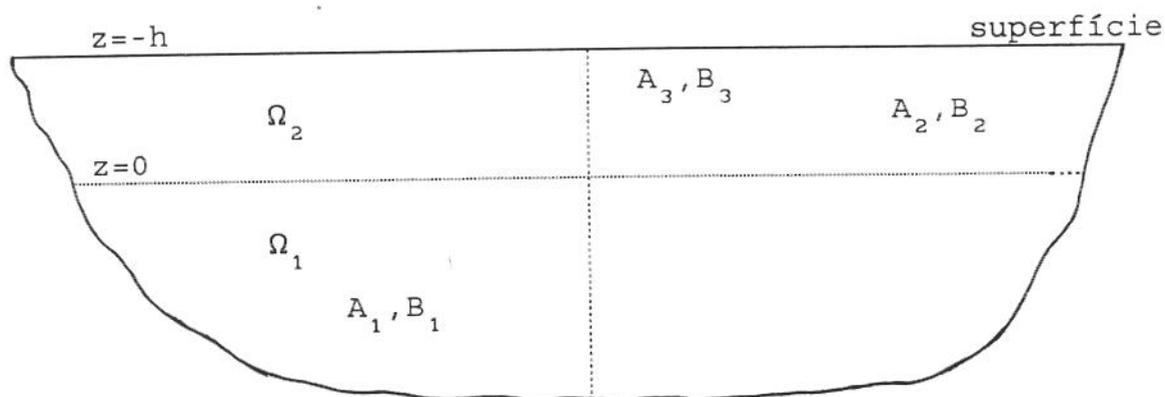


Figura 8.2. Propagação de ondas de cisalhamento e dilatação nos meios 1 e 2.

Novamente, através da manipulação adequada dos operadores hiperbólicos envolvidos, pode-se escrever o campo de tensões

na forma,

$$\bar{\sigma}_{xz} = G^* \left[-\frac{2}{k_L^{*2}} \frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial z \partial x} + \frac{2}{k_S^{*2}} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} \right) \right], \quad (8.6a)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = G^* \left[\frac{(1-2n^{*2}) \bar{\Delta}}{n^{*2}} - \frac{2}{k_L^{*2}} \frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial z^2} + \frac{4}{k_S^{*2}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z \partial x} \right], \quad (8.6b)$$

em que, $n^{*2} = \frac{k_L^{*2}}{k_S^{*2}}$.

Assumindo o estado de deformações planas, o campo de deslocamentos pode ser colocado como:

$$\bar{U}_x = -\frac{1}{k_L^{*2}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x} - \frac{2}{k_S^{*2}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}, \quad (8.7a)$$

$$\bar{U}_z = -\frac{1}{k_L^{*2}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z} + \frac{2}{k_S^{*2}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}. \quad (8.7b)$$

Com o auxílio das equações (8.6) e (8.7) e admitindo no nível do carregamento $z=0$ condições de continuidade dos deslocamentos e tensões, pode-se ainda escrever:

$$\left(-\frac{1}{k_L^{*2}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x} - \frac{2}{k_S^{*2}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right)_1 = \left(-\frac{1}{k_L^{*2}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x} - \frac{2}{k_S^{*2}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right)_2, \quad (8.8a)$$

$$\left(-\frac{1}{k_L^{*2}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z} + \frac{2}{k_S^{*2}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right)_1 = \left(-\frac{1}{k_L^{*2}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z} + \frac{2}{k_S^{*2}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right)_2, \quad (8.8b)$$

$$\left[-\frac{2}{k_L^{*2}} \frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial z \partial x} + \frac{2}{k_S^{*2}} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2} \right) \right]_1 = \left[-\frac{2}{k_L^{*2}} \frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial z \partial x} + \frac{2}{k_S^{*2}} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2} \right) \right]_2. \quad (8.8c)$$

As equações (8.4) e (8.5) dão origem a quatro equações com seis incógnitas nas amplitudes de ondas $A_{i,s}$ e $B_{i,s}$. Entretanto as equações (8.6), (8.7) e (8.8) fornecem seis condições de contorno garantindo assim a existência e a unicidade de solução para o problema. De fato, na superfície $z=-h$ (região 2), tem-se a propagação das ondas de acordo com as equações (8.4) e (8.5), com as condições de contorno dadas por (8.2). Assim, após a colocação das soluções tentativa nestas condições de contorno obtém-se,

$$i\beta\alpha_L \left(\exp(\alpha_L h) A_2 - \exp(-\alpha_L h) A_3 \right) - (2\beta^2 - k_S^{*2}) \left(\exp(\alpha_S h) B_2 + \exp(-\alpha_S h) B_3 \right) = 0, \quad (8.9a)$$

$$-(2\beta^2 - k_S^{*2}) \left(\exp(\alpha_L h) A_2 + \exp(-\alpha_L h) A_3 \right) - 4i\beta\alpha_S \left(\exp(\alpha_S h) B_2 - \exp(-\alpha_S h) B_3 \right) = 0 \quad (8.9b)$$

Do mesmo modo, substituindo as soluções tentativa nas condições de contorno da interface tem-se,

$$(2\beta^2 - k_S^{*2}) (A_1 - A_2 - A_3) + 4i\beta\alpha_S (B_1 - B_2 + B_3) = \frac{\bar{\sigma}}{G^*} \frac{zz}{z}. \quad (8.9c)$$

Ainda na interface $z=0$, a condição de continuidade em deslocamentos e tensões, equações (8.8), fornece:

$$i\beta (A_1 - A_2 - A_3) - 2\alpha_S (B_1 - B_2 + B_3) = 0, \quad (8.9d)$$

$$\alpha_L (A_1 - A_2 + A_3) + 2i\beta (B_1 - B_2 - B_3) = 0, \quad (8.9e)$$

$$i\beta\alpha_L (A_1 - A_2 + A_3) - (2\beta^2 - k_S^{*2}) (B_1 - B_2 - B_3) = 0. \quad (8.9f)$$

Portanto, com as equações (8.9) constrói-se um sistema algébrico nas amplitudes $A_{i,s}$ e $B_{i,s}$ que ao ser resolvido analiticamente possibilita a obtenção das funções de flexibilidade para um carregamento vertical no interior do semi-espaco viscoelástico e homogêneo 2-D. Após alguns cálculos, as amplitudes de ondas nas regiões 1 e 2 podem ser escritas na forma:

$$A_1 = - \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{2G^* k_s^{*2}} \left[\frac{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h] + F_N(\beta) \exp[-(\alpha_L + \alpha_S)h] - 4\beta^2(2\beta^2 - k_s^{*2})}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h]} \right], \quad (8.10a)$$

$$A_2 = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{2G^* k_s^{*2}} \left[\frac{4\beta^2(2\beta^2 - k_s^{*2}) - F_N(\beta) \exp[-(\alpha_L - \alpha_S)h]}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h]} \right], \quad (8.10b)$$

$$A_3 = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{2G^* k_s^{*2}}, \quad (8.10c)$$

$$B_1 = \frac{i\beta \bar{\sigma}_{zz}}{4G^* k_s^{*2} \alpha_S} \left[\frac{F_N(\beta) \exp[(\alpha_L - \alpha_S)h] - F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h] - 4\alpha_L \alpha_S (2\beta^2 - k_s^{*2})}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h]} \right], \quad (8.10d)$$

$$B_2 = \frac{i\beta \bar{\sigma}_{zz}}{4G^* k_s^{*2} \alpha_S} \left[\frac{F_N(\beta) \exp[(\alpha_L - \alpha_S)h] - 4\alpha_L \alpha_S (2\beta^2 - k_s^{*2})}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h]} \right], \quad (8.10e)$$

$$B_3 = - \frac{i\beta \bar{\sigma}_{zz}}{4G^* k_s^{*2} \alpha_S}, \quad (8.10f)$$

em que,

$$F_R(\beta) = F_{Ray}(\beta) = (2\beta^2 - k_s^{*2})^2 - 4\beta^2 \alpha_L \alpha_s \quad \text{e} \quad F_N(\beta) = (2\beta^2 - k_s^{*2})^2 + 4\beta^2 \alpha_L \alpha_s.$$

Na região 2 tem-se as soluções tentativa dadas por (8.4b) e (8.5b), com as amplitudes de ondas obtidas através das equações (8.10b), (8.10c), (8.10e) e (8.10f). Desse modo, o campo de deslocamentos, nesta região, é dado por:

$$\bar{U}_z^2(x, z) = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{2G^* k_s^{*2} \alpha_s} \left[\frac{F_R(\beta) M_{z1}(z) + F_N(\beta) M_{z2}(z) - M_{z3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right] \exp(i\beta x), \quad (8.11a)$$

$$\bar{U}_x^2(x, z) = \frac{i\beta \bar{\sigma}_{zz}}{2G^* k_s^{*2}} \left[\frac{F_R(\beta) M_{z4}(z) - F_N(\beta) M_{z5}(z) + M_{z6}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right] \exp(i\beta x), \quad (8.11b)$$

em que,

$$M_{z1}(z) = \alpha_L \alpha_s \exp[\alpha_L(z+h) + \alpha_s h] - \beta^2 \exp[\alpha_L h + \alpha_s(z+h)], \quad (8.12a)$$

$$M_{z2}(z) = \alpha_L \alpha_s \exp[-\alpha_L(z+h) + \alpha_s h] + \beta^2 \exp[\alpha_L h - \alpha_s(z+h)], \quad (8.12b)$$

$$M_{z3}(z) = 4\beta^2 \alpha_L \alpha_s (2\beta^2 - k_s^{*2}) [\exp(-\alpha_L z) + \exp(-\alpha_s z)], \quad (8.12c)$$

$$M_{z4}(z) = \exp[\alpha_L(z+h) + \alpha_s h] - \exp[\alpha_L h + \alpha_s(z+h)], \quad (8.12d)$$

$$M_{z5}(z) = \exp[-\alpha_L(z+h) + \alpha_s h] + \exp[\alpha_L h - \alpha_s(z+h)], \quad (8.12e)$$

$$M_{z6}(z) = 4(2\beta^2 - k_s^{*2}) [\beta^2 \exp(-\alpha_L z) + \alpha_L \alpha_s \exp(-\alpha_s z)]. \quad (8.12f)$$

Construído o campo de deslocamentos (8.11) pode-se escrever as funções de flexibilidade como:

$$\bar{H}_{wz}^2(\beta, z) = -\frac{1}{2G^* k_s^* \alpha_s} \left[\frac{F_R(\beta) M_{z1}(z) + F_N(\beta) M_{z2}(z) - M_{z3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right], \quad (8.13a)$$

$$\bar{H}_{uz}^2(\beta, z) = -\frac{i\beta}{2G^* k_s^*} \left[\frac{F_R(\beta) M_{z4}(z) - F_N(\beta) M_{z5}(z) + M_{z6}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right]. \quad (8.13b)$$

O campo de deslocamentos na região 1 pode também ser construído de modo inteiramente análogo ao descrito para a região 2. Assim com as amplitudes de ondas dadas nas equações (8.10a) e (8.10d), mais as soluções tentativa das equações (8.4a) e (8.5a), constrói-se o campo de deslocamentos para a região 1, como:

$$\bar{U}_z^1(x, z) = -\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{2G^* k_s^* \alpha_s} \left[\frac{F_R(\beta) N_{z1}(z) + F_N(\beta) M_{z2}(z) - M_{z3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right] \exp(i\beta x) \quad (8.14a)$$

$$\bar{U}_x^1(x, z) = \frac{i\beta \bar{\sigma}_{zz}}{2G^* k_s^*} \left[\frac{F_R(\beta) N_{z2}(z) + F_N(\beta) M_{z5}(z) - M_{z6}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right] \exp(i\beta x). \quad (8.14b)$$

em que,

$$N_{z1}(z) = \alpha_L \alpha_s \exp[-\alpha_L(z-h) + \alpha_s h] - \beta^2 \exp[\alpha_L h - \alpha_s(z-h)], \quad (8.15a)$$

$$N_{z2}(z) = \exp[-\alpha_L(z-h) + \alpha_s h] - \exp[\alpha_L h - \alpha_s(z-h)]. \quad (8.15b)$$

As respectivas funções de flexibilidade para a região 1

são da forma:

$$\bar{H}_{wz}^1(\beta, z) = \frac{1}{2G^* k_s^{*2} \alpha_s} \left[\frac{F_R(\beta) N_{z1}(z) + F_N(\beta) M_{z2}(z) - M_{z3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right], \quad (8.16a)$$

$$\bar{H}_{uz}^1(\beta, z) = - \frac{i\beta}{2G^* k_s^{*2}} \left[\frac{F_R(\beta) N_{z2}(z) + F_N(\beta) M_{z5}(z) - M_{z6}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right]. \quad (8.16b)$$

Vale a pena observar que as funções de flexibilidade dadas nas equações (8.13) e (8.16) satisfazem:

$$\bar{H}_{wz}^1(\beta, z=0) = \bar{H}_{wz}^2(\beta, z=0) \quad \text{e} \quad \bar{H}_{uz}^1(\beta, z=0) = \bar{H}_{uz}^2(\beta, z=0). \quad (8.17)$$

Ainda nas equações (8.13) e (8.16) pode-se notar, quando $h=0$, que:

$$\bar{H}_{wz}^1(\beta, z) = \frac{\alpha_L [-(2\beta^2 - k_s^{*2}) \exp(-\alpha_L z) + 2\beta^2 \exp(-\alpha_s z)]}{G^* F_R(\beta)}, \quad (8.18a)$$

$$\bar{H}_{uz}^1(\beta, z) = \frac{i\beta [(2\beta^2 - k_s^{*2}) \exp(-\alpha_L z) - 2\alpha_L \alpha_s \exp(-\alpha_s z)]}{G^* F_R(\beta)}. \quad (8.18b)$$

Portanto, fazendo $z=0$ nas expressões acima, tem-se:

$$\bar{H}_{wz}^1(\beta, z=0) = \frac{\alpha_L (\beta^2 - \alpha_s^2)}{G^* F_R(\beta)}, \quad (8.19a)$$

$$\bar{H}_{uz}^1(\beta, z=0) = \frac{i\beta [(\beta^2 + \alpha_s^2) - 2\alpha_L \alpha_s]}{G^* F_R(\beta)}. \quad (8.19b)$$

Nota-se assim que as funções de flexibilidade dadas por (8.19a) e (8.19b) são as mesmas na seção 2.5, equações (2.31a) e (2.31b), para um carregamento harmônico vertical aplicado na superfície do semi-espço viscoelástico e homogêneo.

8.2.-Funções de flexibilidade para um carregamento horizontal

Os cálculos para um carregamento harmônico no tempo, interno e horizontal no nível $z=0$, mostrado na figura 8.3, podem ser realizados de modo inteiramente similar.

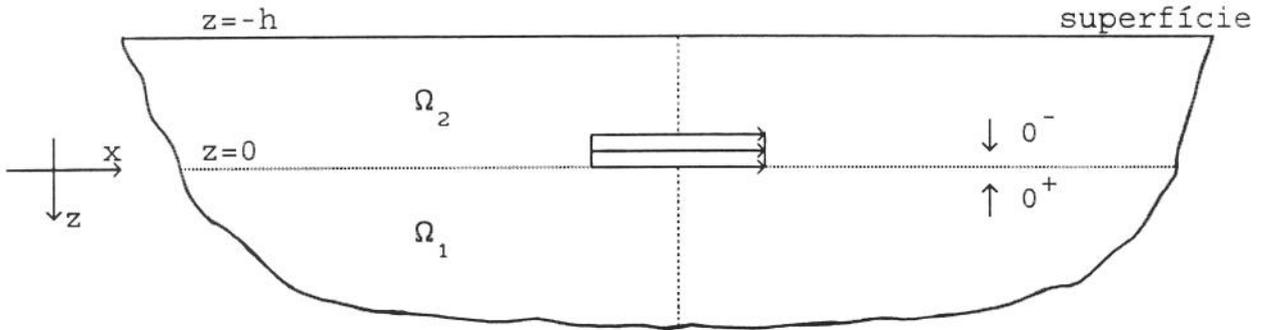


Figura 8.3. Carregamento horizontal e harmônico no tempo a uma profundidade h da superfície.

As funções de flexibilidade nas regiões Ω_1 e Ω_2 são agora dadas por:

$$\bar{H}_{ux}^2(\beta, z) = - \frac{1}{2G^* k_s^{*2} \alpha_L} \left[\frac{F_R(\beta) M_{x1}(z) - F_N(\beta) M_{x2}(z) + M_{z3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right], \quad (8.20a)$$

$$\bar{H}_{wx}^2(\beta, z) = \frac{i\beta}{2G^* k_s^{*2}} \left[\frac{F_R(\beta) M_{z4}(z) + F_N(\beta) M_{z5}(z) - M_{x3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_s)h]} \right], \quad (8.20b)$$

$$\bar{H}_{ux}^1(\beta, z) = - \frac{1}{2G^* k_s^{*2} \alpha_L} \left[\frac{F_R(\beta) N_{x1}(z) - F_N(\beta) M_{x2}(z) + M_{z3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h]} \right], \quad (8.20c)$$

$$\bar{H}_{wx}^1(\beta, z) = - \frac{i\beta}{2G^* k_s^{*2}} \left[\frac{F_R(\beta) N_{z2}(z) - F_N(\beta) M_{z5}(z) + M_{x3}(z)}{F_R(\beta) \exp[(\alpha_L + \alpha_S)h]} \right], \quad (8.20d)$$

em que,

$$M_{x1}(z) = \beta^2 \exp[\alpha_L(z+h) + \alpha_S h] - \alpha_L \alpha_S \exp[\alpha_L h + \alpha_S(z+h)], \quad (8.21a)$$

$$M_{x2}(z) = \beta^2 \exp[-\alpha_L(z+h) + \alpha_S h] - \alpha_L \alpha_S \exp[\alpha_L h - \alpha_S(z+h)], \quad (8.21b)$$

$$M_{x3}(z) = 4(2\beta^2 - k_s^{*2}) [\alpha_L \alpha_S \exp(-\alpha_L z) + \beta^2 \exp(-\alpha_S z)], \quad (8.21c)$$

$$N_{x1}(z) = \beta^2 \exp[-\alpha_L(z-h) + \alpha_S h] - \alpha_L \alpha_S \exp[\alpha_L h - \alpha_S(z-h)]. \quad (8.21d)$$

8.3.-Subestruturação com funções de influência no interior do semi-espaco viscoelástico

As funções de influência deduzidas para o interior do semi-espaco viscoelástico homogêneo podem ser adaptadas num outro método de subestruturação para tratar a interação dinâmica de estruturas parciais ou totalmente engastadas (enterradas) no solo [81,82,83]. Este método difere-se do estudado no capítulo 7, pois agora as funções de influência não atuam apenas sobre a superfície do domínio. Entretanto, algumas hipóteses como a retirada de uma porção limitada do meio viscoelástico será novamente considerada.

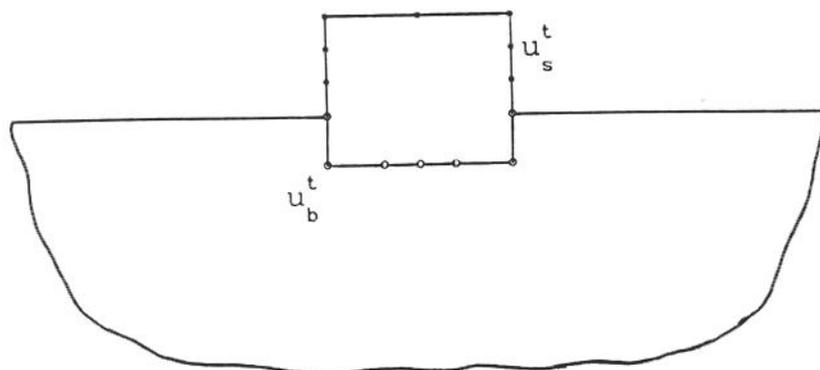


Figura 8.4. Estrutura engastada no semi-espaco viscoelástico.

A análise inicia-se através da relação entre forças e deslocamentos para uma estrutura engastada no solo homogêneo (i.e., não escavado), ilustrado na figura 8.4, dada pela equação:

$$\begin{Bmatrix} F_s \\ F_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{Bmatrix} \quad (8.22)$$

Na equação (8.22) F_s e F_b indicam as amplitudes das forças na estrutura e de interação da estrutura com o solo, respectivamente. Na mesma equação u_s^t e u_b^t são, respectivamente, os deslocamentos da estrutura e na interface solo-estrutura. Como hipótese considera-se ainda a base, onde ocorre a interação da estrutura com o solo, inicialmente flexível. Na equação (8.22) tem-se a relação entre forças e deslocamentos dada pela matriz de rigidez dinâmica S , que pode ser obtida com o auxílio de métodos numéricos convencionais como o Método dos Elementos Finitos ou o Método dos Elementos de Contorno.

A figura 8.5 ilustra o esquema de subestruturação a ser utilizado. Nesta figura indica-se o solo homogêneo com o subscrito f . Neste domínio a matriz de rigidez dinâmica será indicada por S_{bb}^f . Para o domínio representando a região engastada (indicado pelo subscrito g) tem-se a matriz de rigidez dinâmica dada por S_{bb}^g . Finalmente para a porção retirada do solo (indicada pelo

subescrito e), S_{bb}^e será sua matriz de rigidez dinâmica.

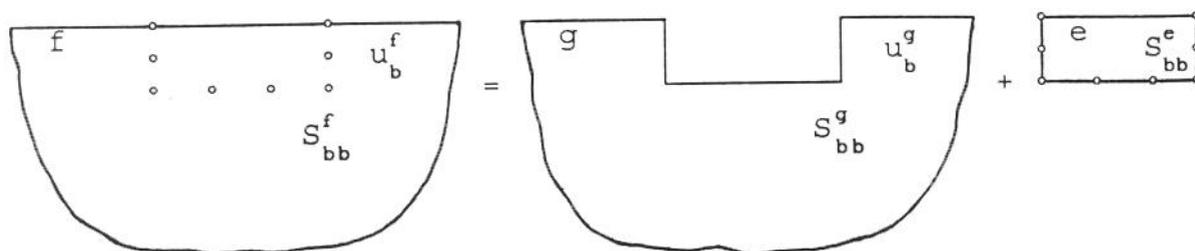


Figura 8.5. Esquematização para o método de subestruturação com funções de influência no interior do domínio.

Por tratar-se de um domínio ilimitado a matriz de rigidez dinâmica do solo com engastamento S_{bb}^g não é obtida trivialmente. Entretanto, utilizando novamente o fato que um semi-espço viscoelástico pode ser entendido como a soma da região com o engastamento mais uma porção retirada deste semi-espço, a matriz S_{bb}^g pode então ser sintetizada.

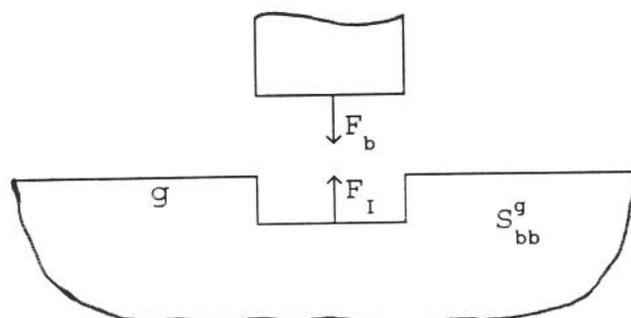


Figura 8.6. Representação das forças de interação solo-estrutura.

Considerando os subsistemas indicados na figura 8.6, vê-se que as forças de interação do solo com a estrutura dependem do movimento relativo $u_b^t - u_b^g$ [81].

Desse modo, pode-se escrever:

$$F_I = S_{bb}^g (u_b^t - u_b^g), \quad (8.23)$$

Considerando o equilíbrio de forças mostrado na figura 8.6 tem-se:

$$F_I + F_b = 0, \quad (8.24)$$

e então da equação (8.22) e (8.24) pode-se escrever:

$$S_{bb}^g (u_b^t - u_b^s) + S_{bs} u_s^t + S_{bb}^s u_b^t = 0, \quad (8.25)$$

logo,

$$S_{bs} u_s^t + S_{bb}^s u_b^t + S_{bb}^g (u_b^t - u_b^g) = 0. \quad (8.26)$$

Combinando (8.22) e (8.26) as equações relacionando forças e deslocamentos do sistema solo-estrutura podem ser colocadas como [81,82]:

$$\begin{Bmatrix} F_s \\ S_{bb}^g u_b^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{Bmatrix}. \quad (8.27)$$

Como anteriormente observado, o semi-espaco resulta quando insere-se a porção retirada do solo no domínio com o engastamento. Desse modo, obtém-se:

$$S_{bb}^e + S_{bb}^g = S_{bb}^f. \quad (8.28)$$

Admitindo que a estrutura consista apenas da porção retirada do solo (e assim as propriedades materiais são as mesmas), pode-se reformular a equação (8.26), considerando $S_{bs} = 0$,

$S_{bb}^s = S_{bb}^e$ e $u_b^t = u_b^f$, como:

$$(S_{bb}^e + S_{bb}^g) u_b^f = S_{bb}^g u_b^g . \quad (8.29)$$

Introduzindo (8.28) em (8.29), tem-se:

$$S_{bb}^f u_b^f = S_{bb}^g u_b^g . \quad (8.30)$$

Agora, das equações (8.27) e (8.30) encontra-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_s \\ S_{bb}^f u_b^f \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} S_{ss} & S_{sb} \\ \hline S_{bs} & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_s^t \\ u_b^t \end{array} \right\} . \quad (8.31)$$

Nesta formulação por subestruturação escreve-se o vetor carregamento como o produto da matriz de rigidez dinâmica do semi-espaço livre S_{bb}^f (discretizada nos nós onde será inserida subsequentemente a estrutura) e do deslocamento u_b^f nos mesmos nós. A matriz de rigidez (ou flexibilidade) dinâmica S_{bb}^f em pontos interiores do semi-espaço pode ser obtida através das funções de influência no interior do meio viscoelástico deduzidas nos itens anteriores deste capítulo.

Utilizando a equação (8.28), pode-se ainda reescrever (8.31) como:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_s \\ S_{bb}^f u_b^f \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} S_{ss} & S_{sb} \\ \hline S_{bs} & S_{bb}^s - S_{bb}^e + S_{bb}^f \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_s^t \\ u_b^t \end{array} \right\} . \quad (8.32)$$

Se ao invés de uma base flexível considerar-se uma base rígida, as equações anteriores sofrem uma ligeira modificação. Com efeito, admitindo uma base rígida os movimentos na interface

solo-estrutura podem ser referenciados em relação a um ponto fixo dessa base, por exemplo o, indicado na figura 8.7.

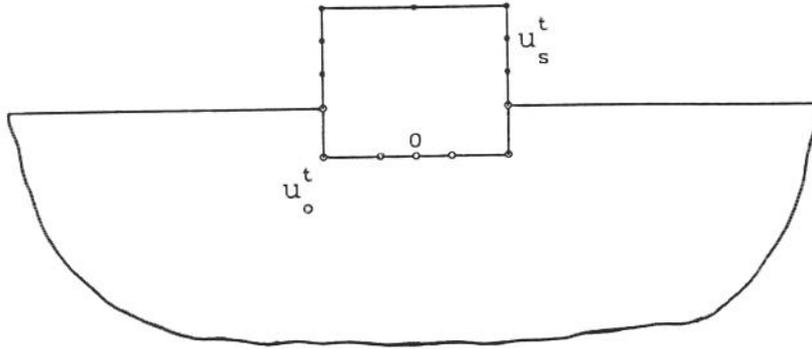


Figura 8.7. Estrutura engastada no semi-espço viscoelástico com uma base rígida.

Pode-se assim, relacionar os deslocamentos para os pontos da base rígida na forma:

$$\{u_b^t\} = [A] \{u_o^t\}, \quad (8.33)$$

em que A é a matriz de compatibilidade cinemática e \$u_o^t\$ o vetor que contém os três graus de liberdade em deslocamentos do problema.

Da equação anterior pode-se agora escrever os deslocamentos da estrutura e da base rígida como:

$$\begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_o^t \end{Bmatrix}, \quad (8.34)$$

em que I indica a matriz identidade.

Introduzindo (8.34) em (8.31) e pré-multiplicando o resultado pela transposta da matriz definida em (8.33) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_s \\ A^T S_{bb}^f u_b^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ss} & S_{so} \\ S_{os} & S_{oo}^s + S_{oo}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_o^t \end{Bmatrix}. \quad (8.35)$$

em que, $S_{so} = S_{sb} A;$ (8.36a)

$$S_{oo}^s = A^T S_{bb}^s A; \quad (8.36b)$$

$$S_{oo}^g = A^T S_{bb}^g A; \quad (8.36c)$$

$$S_{os} = S_{so}^T. \quad (8.36d)$$

As equações de compatibilidade da base rígida para o subsistema do solo g são formuladas de modo análogo à equação (8.33), assim:

$$\{u_b^g\} = [A] \{u_o^g\}. \quad (8.37)$$

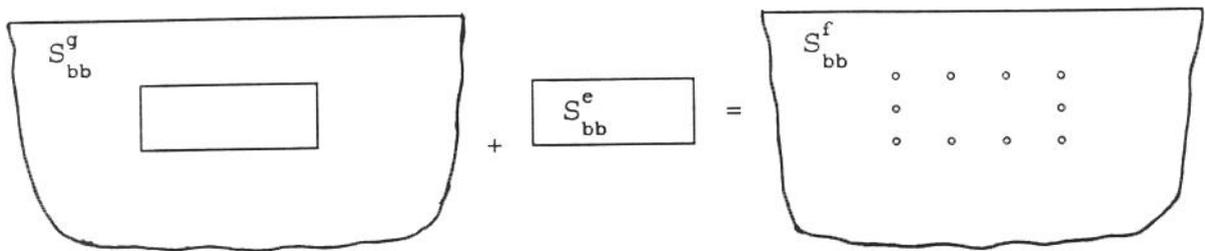


Figura 8.8. Estrutura localizada no interior do solo.

A formulação por subestruturação com funções de influência no interior do meio viscoelástico, pode também ser utilizada para o estudo de estruturas localizadas no interior do solo, como ilustra a figura 8.8.

A implementação da função de influência com fonte no interior do domínio, assim como a implementação da técnica de subestruturação, apresentada neste capítulo, serão atividades a serem desenvolvidas após a conclusão do presente trabalho.

Conclusões e perspectivas

No presente trabalho desenvolveu-se uma metodologia semi-analítica visando a determinação de funções de influência e Green em meios viscoelásticos estratificados. Modelou-se o problema da interação dinâmica solo-estrutura no domínio da frequência.

O comportamento de fundações rígidas, dinamicamente excitadas, em perfis de solo com estratificações horizontais foi também analisado. Para estas fundações as funções de influência foram adicionadas às condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio de forças. Comparações e validações entre o presente método e outros métodos numéricos, principalmente a versão direta do Método dos Elementos de Contorno, foram apresentadas. Os resultados numéricos obtidos mostraram uma boa concordância na maioria dos casos estudados.

Além de obter a resposta dinâmica para fundações de superfície, o presente método mostrou-se também eficiente quando utilizado em conjunto com duas técnicas de subestruturação. A primeira metodologia, designada por Método de Subestruturação por Eliminação, permite a obtenção de matrizes de flexibilidade e/ou rigidez para fundações parcialmente engastadas a partir de funções de influência ou Green com fontes na superfície do solo. A implementação aqui feita é original e mostra que, em diversos perfis de solo horizontalmente estratificados, a metodologia é precisa para graus de engastamento relativamente não elevados das fundações. A segunda metodologia formulada a partir de funções de influência ou Green com fontes situadas no interior do domínio, permite o tratamento de fundações engastadas ou mesmo situadas no interior do solo.

Nos problemas da interação dinâmica solo-estrutura, aqui tratados, considerou-se o solo viscoelástico constituído basicamente de três perfis distintos, a saber, o semi-espaço viscoelástico, a camada viscoelástica sobre uma base rígida e a camada viscoelástica sobre um semi-espaço. Apresentou-se também uma generalização da presente metodologia visando a síntese de funções de influência e Green para perfis de solo com número arbitrário de camadas

horizontais.

A metodologia, aqui apresentada, tende a ser matematicamente mais complexa e trabalhosa do que aquela dada pela versão direta do Método dos Elementos de Contorno, além de exigir a reformulação do problema para cada perfil do solo. Entretanto, o método aqui proposto, somente necessita discretizar a interface solo-fundação, o que representa uma grande vantagem quando comparada a versão direta do Método dos Elementos de Contorno, a qual exige a discretização de diversos planos ilimitados e a utilização de estratégias de truncamento arbitrárias que não garantem, a priori, a convergência dos resultados. O presente método torna-se assim uma alternativa eficiente para o tratamento de problemas envolvendo um grande número de interfaces.

O trabalho apresenta comparações que incluem os requisitos de memória, o tempo de processamento e a precisão dos resultados entre o Método da Superposição e/ou Método da Superposição Modificado com a versão direta do Método dos Elementos de Contorno.

Como perspectivas de continuidade do presente trabalho pode-se mencionar:

- a. sua extensão para o caso tridimensional;
- b. a formulação e implementação de funções de influência e Green para um maior número de camadas horizontais com o auxílio de recursos de manipulação simbólica por computador, por exemplo, utilizando o programa Mathematica;
- c. a implementação com fontes no interior do domínio para tratamento de corpos totalmente engastados;
- d. a incorporação de fundações ou estruturas flexíveis interagindo com o solo;
- e. a incorporação de excitações provenientes do interior do solo através de ondas;
- f. a reformulação do presente trabalho para a obtenção de funções de influência e Green no domínio do tempo, o que possibilita o tratamento de problemas transientes e não-lineares, por exemplo, contato não-soldado e escorregamento na interface solo-fundação.

Bibliografia:

- [01] Abascal, R., Dominguez, J.: Vibrations of Footings on Zoned Viscoelastic Soils. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.112, Nr.5, pp.433-447, 1986.
- [02] Abramowitz, M., Stegun, I.S.(Eds.): *Handbook of Mathematical Functions*. New York, Dover Publications, 1972.
- [03] Achenbach, S.D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland Publications Comp., 1973.
- [04] Ahmad, S., Bharadwaj, A.: Horizontal Impedance of Embedded Strip Foundations in Layered Soil. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.117, pp.1021-1041, 1991.
- [05] Apsel, R., Luco, J.E.: On the Green's Functions for a Layered Half-Space. Part II, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.73, Nr.4, pp.931-951, 1983.
- [06] Apsel, R., Luco, J.E.: Impedance Functions for Foundations Embedded in Layered Medium: An Integral Equation Approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.15, pp.213-231, 1987.
- [07] Awojobi, A.O., Grootenhuis, P.: Vibration of Rigid Bodies on Semi-Infinite Elastic Media. *Proc. Royal Society of London, Serie A*, Vol.287, pp.27-63, 1965.
- [08] Barkan, D.D.: *Dynamics of Bases and Foundations*. McGraw-Hill, New York, 1962.
- [09] Beskos, D.E.: Boundary Element Methods in Dynamic Analysis. *Applied Mechanics Review*, Vol.40, pp.1-23, 1987.
- [10] Bettess, P.: *Infinite Elements*. Ed. Penshaw Press, 1992.

- [11] Betti, R., Abdel-Aghffar, A.M.: Analysis of Embedded Foundations by Substructure Deletion Method. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.120, Nr.6, pp.1283-1303, 1994.
- [12] Bharadwaj, A., Ahmad, S.: Rocking Impedance of Embedded Strip Foundations in Layered Soil. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol.118, pp.796-813, 1992.
- [13] Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method for Engineers. Petenck Press, London, Computational Mechanics Publications, Boston, 1978.
- [14] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C.: Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, 1984.
- [15] Cerjan, C., Kosloff, D., Reshef, M.: A Nonreflecting Boundary Conditions for Discrete Acoustic and Elastic Wave Equations. Geophysics, Vol.50, pp.705-708, 1985.
- [16] Christensen, R.M.: Theory of Viscoelasticity. Academic Press, New York, 1982.
- [17] Chuhan, Z., Chongbin, Z.: Coupling Method of finite and Infinite Elements for Strip Foundation Wave Problem. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.15, pp.839-851, 1987.
- [18] Crandal, S.H.: The Role of Damping in Vibration Theory. Journal of Sound and Vibration, Vol.11, pp.3-18, 1970.
- [19] Dasgupta, G.: A Numerical Solution for Viscoelastic Half Planes. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.102, pp.601-612, 1976.

- [20] Dasgupta, G.: Foundation Impedance Matrices by Substructure Deletion. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.106, Nr.EM3, pp.517-523, 1980.
- [21] Dasgupta, S.P., Rao, K.N.S.V.: Dynamics of Rectangular Footings by Finite Elements. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol.104, Nr.GT5, pp.621-637, 1978.
- [22] Davis, P., Rabinowitz, P.: Numerical Integration, Blaisdell, Waltham, Mass., 1967.
- [23] Dravinski, M., Mossessian, T.K.: On Evaluation of the Green's Functions for Harmonic Line Loads in a Viscoelastic Half-Space. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.26, pp.823-841, 1988.
- [24] Dominguez, J.: Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations. Report R78-20, M.I.T., 1978.
- [25] Dominguez, J., Abascal, R.: Dynamic of Foundations. In Topics in Boundary Element Research, Cap.2, C.A.Brebbia (Ed.), Vol.4, Applications in Geomechanics, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987.
- [26] Dominguez, J.: Boundary Elements in Dynamics. Computational Mechanics Publications, 1993.
- [27] Elorduy, S., Nieto, S.A., Szekely, E.M.: Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodic Vertical Loading. Proc. Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials. Univ. of New Mexico, pp.105-121, 1967.
- [28] Eringen, A.C., Suhubi, E.S.: Elastodynamics. Vol.II, Academic Press, New York, 1975.

- [29] Estorff, O.von, Schmid, G.: Application of the Boundary Element Method to the Analysis of the Vibration of Strip Foundations on a Soil Layer. International Symposium on Dynamic Soil-Structure Interaction, Minneapolis, September, 4-5, pp.11-17, 1984.
- [30] Forsythe, G.E., Malcom, M.A., Moler, C.B.: Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice Hall, 1977.
- [31] Gaul, L.: Zur Dynamik der Wechselwirkung von Strukturen mit dem Baugrund. Habilitationsschrift, Universität Hannover, 1980.
- [32] Gaul, L.: Machine Foundation Soil Interaction; Combined Continuum and Boundary Element Approach. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol.8, pp.169-198, 1986.
- [33] Gaul, L., Bohlen, S., Kemple, S.: Transient and Forced Oscillations of Systems with Constant Hysteretic Damping. Mechanics Research Communications, Vol.12, pp.187-201, 1985.
- [34] Gazetas, G.: Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.2, pp.2-42, 1983.
- [35] Gazetas, G., Roesset, J.M.: Vertical Vibration of Machine Foundations. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol.105, pp.1435-1454, 1979.
- [36] Gazetas, G., Dobry, R.: Vertical Response of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations. Journal of Geotechnical Engineering, Vol.111, Nr.6, pp.750-771, 1985.
- [37] Gurtin, M.E., Stenberg, E.: On Linear Theory of Viscoelasticity. Archive for Rat. Mech. and Analysis, Vol.11, pp.290-356, 1962.

- [38] Hadjian, A.H., Luco, J.E., Tsai, N.C.: Soil-Structure Interaction: Continuum or Finite Element? Nuclear Eng. Design, Vol.31, pp.151-167, 1974.
- [39] Israil, A.S.M., Ahmad, S.: Dynamic Vertical Compliance of Strip Foundations in Layered Soils. Earthquake Engineering and Structural Dynamic, Vol.8, pp.933-950, 1989.
- [40] Johnson, G.R., Christiano, P., Epstein, H.I.: Stiffness Coefficients for Embedded Footings. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol.101, Nr.GT8, pp.789-800, 1975.
- [41] Johnson, L.R.: Green's Function for the Lamb's Problem. Geophysics Journal of Royal Astronomic Society, Vol.37, pp.99-131, 1974.
- [42] Kausel, E., Roesset, J.M.: Stiffness Matrices for Layered Soils. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.71, Nr.6, pp.1743-1761, 1981.
- [43] Kobayashi, S., Nishimura, N.: Green's Tensors for Elastic Half-space. An Application of B.I.E.M.. In Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.42, Part 2, pp.228-241, 1980.
- [44] Kobayashi, S.: Some Problems of the Boundary Integral Equation Methods in Elastodynamics. In Boundary Elements, C.A.Brebbia, et. al. (Eds.), Berlin: Springer Verlag, pp.775-784, 1983.
- [45] Kolsky, H.: Stress Waves in Solids. Dover Publications, New York, 1963.
- [46] Lamb, H.: On the Propagation of Tremor over the Surface of an Elastic Solid. Philosophical Transactions of the Royal

Society of London, Series A, Vol.203, pp.1-42, 1904.

- [47] Longman, I.M.: Note on Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions. Cambridge Philosophical Society, Vol.52, pp.764-768, 1956.
- [48] Luco, J.E., Hadjian, H.D.Bos: The Dynamic Modeling of the Half-Plane by Finite Elements. Nuclear Eng. Design, Vol.31, pp.184-194, 1974.
- [49] Luco, J.E., Westmann, A.M.: Dynamic Response of a Rigid Footing bonded to an Elastic Half-Space. Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.39, pp.527-537, 1972.
- [50] Luco, J.E., Apsel, R.: On the Green's Functions for a Layered Half-Space. Part I-II, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.73, Nr.4, pp.909-929, 1983.
- [51] Lysmer, J.: Vertical Motions of Rigid Footings. Ph.D. thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1965.
- [52] Lysmer, J., Richart, F.E.: Dynamic Response of Footings to Vertical Loading. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol.92, pp.65-91, 1966.
- [53] Manolis, G.D., Beskos, D.E.: Boundary Elements Methods in Elastodynamics. Unwin Hyman, London, 1988.
- [54] Medina, F., Penzien, J.: Infinite Elements for Elastodynamics Earthquake Engineering and Structural Dynamic, Vol.10, pp.699-709, 1982.
- [55] Mesquita, E.: Acoplamento Dinâmico de Fundações através do Solo Considerando-se as Tensões Tangenciais na Interface Solo/Fundação. COBEM 87-IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, S.C., pp.481-484, 1987.

- [56] Mesquita, E.: Zur dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem viskoelastischen Halbraum. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr.120, Düsseldorf, 1989.
- [57] Mesquita, E., Romanini, E.: Green's Function Approach Versus Direct Boundary Element Scheme to Model the Dynamic Interaction of Foundations Resting on a Viscoelastic Layer over a Bedrock. In Boundary Elements XIV, Vol.2, C.A.Brebbia, et. al. (Eds.), pp.107-121, 1992.
- [58] Mesquita, E., Romanini, E., Pontes Jr., B.R.: Green's Function and Boundary Element Method to Describe the Dynamic Interaction of Surface Foundations with Stratified Soils. Proc.XII COBEM, Brasília, December, 7-10, Vol.1, pp.205-208, 1993.
- [59] Mesquita, E., Romanini, E., Pontes Jr., B.R.: The Substructure Deletion Method: Dynamic Compliance Matrices for Embedded Foundations. Proc. XV CILAMCE, Belo Horizonte, pp.690-698, 1994.
- [60] Mesquita, E., Romanini, E., Pontes Jr. B.R.: A Boundary Element Implementation of the Substructure Deletion Method. Accepted, 17 BEM.
- [61] Minklowitz, S.: The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North Holland Publications Comp., 1977.
- [62] Mita, A., Luco, J.E.: Dynamic Response of Embedded Foundations: A Hybrid Approach. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.63, pp.233-259, 1987.
- [63] Novak, M.: State-of-the-Art in Analysis and Design of Machine Foundations. Developments in Geotechnical Engineering, Vol.43, A.S.Crakmak (Ed.), Soil Structure Interaction, Elsevier, pp.171-192, 1987.

- [64] Novak, M., Beredugo, Y.O.: Vertical Vibration of Embedded Footings. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol.98, Nr.SM12, pp.1291-1310, 1972.
- [65] Pekeris, C.L.: The Seismic Surface Pulse. Proc. of the Nat. Academic Science, Vol.41, pp.469-480, 1955.
- [66] Pekeris, C.L.: The Seismic Burried Pulse. Proc. of the Nat. Academic Science, Vol.41, pp.629-639, 1955.
- [67] Pontes, B.R.: Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais com o Solo: Uma Comparação entre um Método Semi-Analítico e o Método dos Elementos de Contorno. Tese de Mestrado, UNICAMP, S.P., Brasil, 1992.
- [68] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vatterling, W.T.: Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [69] Rajapakse, R.K.N.D., Karasudhi, P.: An Efficient Elastodynamic Infinite Element. Int. J. Solids Structures, Vol.22, Nr.6, pp.643-657, 1986.
- [70] Rajapakse, R.K.N.D., Wang, Y.: Elastodynamic Green's Function of Orthotropic Half Space. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.117, Nr.3, pp.588-604, 1991.
- [71] Rajapakse, R.K.N.D., Wang, Y.: Green's Function for Transverserly Isotropic Elastic Half Space. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.119, Nr.9, pp.1724-1746, 1994.
- [72] Rayleigh, Lord: On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid. Proc. London Mathematical Society, Vol.17, pp.4-11, 1887.

- [73] Reissner, E.: Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes. Ing. Archiv 7, pp.389-396, 1936.
- [74] Reynolds, A.C.: Boundary Conditions for the Numerical Solution of Wave Propagation Problems. Geophysics, Vol.45, pp.895-904, 1979.
- [75] Segel, L.A.: Mathematics Applied to Continuum Mechanics. Dover Publications, New York, 1987.
- [76] Sneddon, I.N.: Fourier Transforms. McGraw-Hill, New York, 1951.
- [77] Smith, W.D.: A Nonreflecting Plane Wave Boundary for Wave Propagation Problems. Journal of Computational Physics, Vol.15, pp.492-503, 1974.
- [78] Thomson, W.T.: Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium. Journal of Applied Physics, pp.89-93, 1950.
- [79] Triantafyllidis, T.: 3-D Time Domain BEM using Half-Space Green's Functions. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.8, Nr.3, pp.115-124, 1991.
- [80] Wang, Y., Rajapakse, R.K.N.D.: Axisymmetric Elastodynamics Green's Functions of a Layered Transversely Isotropic Half-Space. In Boundary Elements XIV, Vol.2, C.A.Brebbia et. al. (Eds.), pp.135-149, 1992.
- [81] Wolf, J.P.: Dynamic Soil-Structure Interaction. Prentice-Hall, 1985.
- [82] Wolf, J.P., Darbre, G.R.: Dynamic-Stiffness Matrix of Soil by the Boundary-Element Method: Conceptual Aspects. Earthquake

Engineering and Structural Dynamics, Vol.12, pp.385-400, 1984.

- [83] Wolf, J.P., Darbre, G.R.: Dynamic-Stiffness Matrix of Soil by the Boundary-Element Method: Embedded Foundation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.12, pp.401-416, 1984.
- [84] Wong, H.L., Luco, J.E.: Dynamic Interaction between Rigid Foundations in a Layered Half-Space. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.14, pp.149-158, 1986.
- [85] Wong, H.L., Luco, J.E.: Tables of Impedance Functions for Square Foundations on Layered Media. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, Vol.4, Nr.2, pp.64-81, 1985.
- [86] Wylie, C.R.: Advanced Engineering Mathematics. McGraw-Hill, Tokyo, 1975.

Apêndice A: Códigos Computacionais

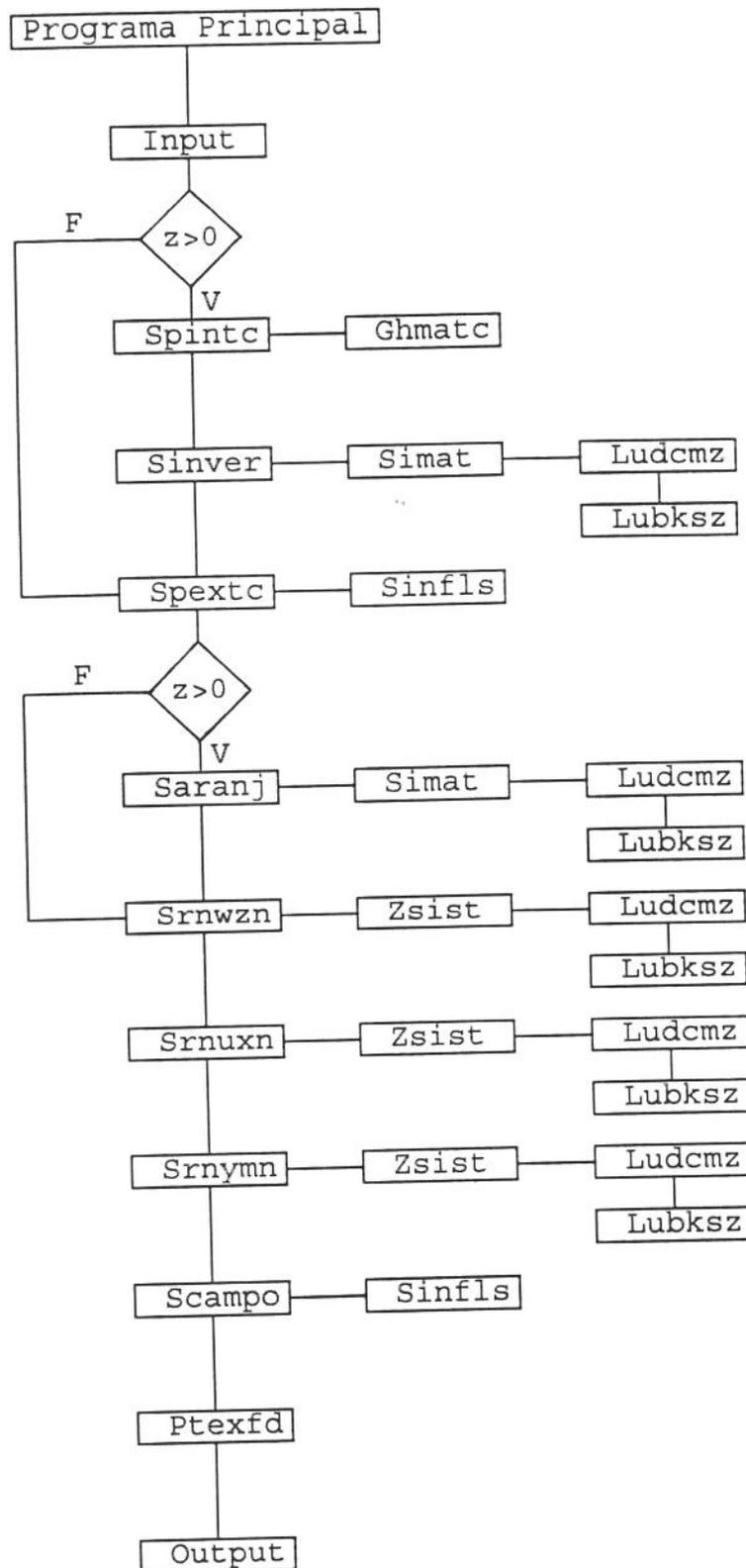


Figura A.1. Fluxograma para o problema da dinâmica de fundações.

Um extenso trabalho computacional foi realizado a fim de viabilizar as formulações teóricas descritas nesta dissertação. Os resultados numéricos apresentados foram conseguidos através de programas computacionais desenvolvidos na linguagem FORTRAN. As máquinas utilizadas foram, basicamente, os microcomputadores 486-Dx2/66Mhz, 486Dx4/100Mhz e as estações de trabalho SUN SPARK 20 do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

A figura A.1 ilustra um fluxograma com as principais subrotinas desenvolvidas e/ou utilizadas neste trabalho. Este fluxograma sintetiza um programa computacional capaz de fornecer a resposta, no domínio da frequência, dos deslocamentos de corpo rígido e dos campos de deslocamentos e tensões de uma fundação de superfície ou engastada nos diversos perfis de solo considerados.

Baseado no fluxograma anterior, apresenta-se agora um breve comentário a respeito das principais subrotinas desenvolvidas.

•Programa Principal: Define os vetores, matrizes e as principais variáveis utilizadas no programa. Além de coordenar as tarefas para as várias subrotinas, o programa principal faz a opção entre analisar a resposta dinâmica de uma fundação de superfície ($z=0$), com a opção F, ou de uma fundação engastada ($z>0$), opção V.

•Subrotina Input: Discretiza o domínio considerado. Vale a pena recordar que o presente método necessita apenas discretizar os nós de liberdade da interface solo-fundação. No caso de uma fundação engastada, esta subrotina também fornece a discretização do domínio fechado Ω_e para as matrizes G e H no Método dos Elementos de Contorno.

•Subrotina Spintc: Define os vetores, matrizes e os blocos de variáveis necessários para calcular as matrizes G e H no M.E.C.

- Subrotina Ghmatc: Calcula as matrizes G e H no M.E.C. para um domínio fechado utilizando elementos constantes.
- Subrotina Sinver: Faz o arranjo necessário para obter a matriz de flexibilidade dinâmica do domínio fechado Ω_e .
- Subrotina Simat: Executa a inversão numérica da matriz H obtida no M.E.C. utilizando as subrotinas Ludcmz e Lubksz.
- Subrotina Ludcmz: Faz a decomposição de uma matriz complexa na forma LU com pivoteamento parcial.
- Subrotina Lubksz: Resolve os sistemas triangulares originários da decomposição da subrotina anterior.
- Subrotina Spextc: Coordena o cálculo das integrais semi-infinitas, ou funções de influência, para o Método da Superposição ou para o Método da Superposição Modificado.
- Subrotina Sinfls: Calcula as diversas funções de influência através de três esquemas de integração, a saber:
 - i) Para um intervalo finito, utilizando uma integração gaussiana com refinamento do intervalo;
 - ii) Para um intervalo semi-infinito, utilizando o esquema de integração de Longman [47] para funções oscilantes com decaimento;
 - iii) Para um intervalo semi-infinito através de um esquema de avanço de passo para funções com decaimento mas sem oscilação.
- Subrotina Saranj: Faz o arranjo do sistema matricial dado pela equação (7.8) em que calcula a matriz de flexibilidade de uma fundação engastada pelo método de subestruturação. Utiliza a subrotina Simat para inverter a matriz da equação (7.8).
- Subrotina Srnwzn: Constroi a matriz de flexibilidade dinâmica (equação 3.25) a fim de obter as tensões e os deslocamentos de corpo rígido, devido a um carregamento vertical F_z . A resolução

numérica do sistema é feita utilizando a subrotina Zsist que coordena a entrada de dados para as subrotinas Ludcmz e Lubksz.

•Subrotina Srnuxn: Possui as mesmas características da subrotina anterior, a menos que agora é calculado as flexibilidades dinâmicas N_{ux} e N_{um} (equação 4.21).

•Subrotina Srnymn: Calcula as funções de flexibilidade devido ao momento $N_{\phi x}$ e $N_{\phi m}$ (equação 4.21).

•Subrotina Scampo: Coordena o cálculo das funções de flexibilidade para o campo de deslocamentos fora da interface solo-fundação.

•Subrotina Ptexfd: Calcula o campo de deslocamentos fora da interface solo-fundação (equação 3.28).

•Subrotina Output: Apresenta os resultados obtidos armazenando-os em códigos de saída previamente definidos.

Apêndice B: Funções de influência em meios estratificados

No capítulo 5, ítem 5.1, as equações (5.6a) a (5.6f) originam um sistema algébrico relacionando as amplitudes e os números de ondas para o problema de uma camada viscoelástica sobre o semi-espço. A resolução deste sistema algébrico, em relação as amplitudes de onda, fornecem as funções de influência do problema.

Assim para uma excitação vertical dada pelo delta de Dirac na superfície do domínio, indicado na figura 5.1, tem-se:

$$G_{wz}^c(x, \xi) = \frac{1}{\pi G_1 (1+i\eta_{s1})} \int_0^{\infty} \left[\frac{k_{s1}^{*2} [Q_1(K_I) + Q_2(K_I)]}{K_I} \right] \cos \left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a} \right) dK_I,$$

$$G_{uz}^c(x, \xi) = \frac{-1}{\pi G_1 (1+i\eta_{s1})} \int_0^{\infty} \left[\frac{2k_{s1}^{*2} \alpha_{s1} [Q_2(K_I) - Q_1(K_I)] + K_I}{2K_I^2 - (1+i\eta_{s1})^{-1}} \right] \text{sen} \left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a} \right) dK_I$$

Para uma mesma excitação, só que agora na direção x, tem-se:

$$G_{ux}^c(x, \xi) = \frac{1}{\pi G_1 (1+i\eta_{s1})} \int_0^{\infty} \left[\frac{k_{s1}^{*2} \alpha_{s1} [Q_4(K_I) + Q_5(K_I)]}{2K_I^2 - (1+i\eta_{s1})^{-1}} \right] \cos \left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a} \right) dK_I,$$

$$G_{wx}^c(x, \xi) = \frac{-1}{\pi G_1 (1+i\eta_{s1})} \int_0^{\infty} \left[\frac{k_{s1}^{*2} [Q_4(K_I) - Q_5(K_I)] - 1}{2K_I} \right] \text{sen} \left(A_0 K_I \frac{(x-\xi)}{a} \right) dK_I.$$

em que,

$$Q_1(K_I) = \left[\frac{F_2(K_I) D_2(K_I) - F_4(K_I) D_1(K_I)}{F_1(K_I) D_2(K_I) - F_3(K_I) D_1(K_I)} \right];$$

$$Q_2(K_I) = \left[\frac{-F_1(K_I)Q_1(K_I) + F_2(K_I)}{D_1(K_I)} \right];$$

$$Q_4(K_I) = \left[\frac{F_8(K_I)D_2(K_I) - F_9(K_I)D_1(K_I)}{-F_1(K_I)D_2(K_I) + F_3(K_I)D_1(K_I)} \right];$$

$$Q_5(K_I) = \left[\frac{F_3(K_I)Q_4(K_I) + F_9(K_I)}{D_2(K_I)} \right];$$

$$F_1(K_I) = \alpha_{L1} \left[[(2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) - 2\alpha_{L2}\alpha_{S2}] (G_1^* - G_2^*) + G_1^* k_{S2}^{*2} \right] \left[F_{N1}(K_I) \exp(\alpha_{L1}h) + F_{R1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1}h) \right] + \alpha_{L2} k_{S2}^{*2} G_2^* \left[F_{N1}(K_I) \exp(\alpha_{L1}h) - F_{R1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1}h) \right] + 2(2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L1} \exp(\alpha_{S1}h) \left\{ [2K_I^2 G_2^* - (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) G_1^*] [(2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) - 2\alpha_{L2}\alpha_{S2}] - [(2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) G_1^* + 2\alpha_{S1}\alpha_{S2} G_2^*] k_{S2}^2 \right\};$$

$$F_2(K_I) = K_I \alpha_{L1} \left\{ \alpha_{L1} \left[\exp(\alpha_{L1}h) - \exp(-\alpha_{L1}h) \right] \left[[(2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) - 2\alpha_{L2}\alpha_{S2}] (G_1^* - G_2^*) + k_{S2}^{*2} G_1^* \right] + \left[\exp(\alpha_{L1}h) + \exp(-\alpha_{L1}h) \right] k_{S2}^{*2} \alpha_{L2} G_2^* \right\};$$

$$F_3(K_I) = \alpha_{L1} \left[(G_1^* - G_2^*) F_{R2}(K_I) + (2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) k_{S2}^{*2} G_1^* \right] \left[F_{N1}(K_I) \exp(\alpha_{L1}h) + F_{R1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1}h) \right] + (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L2} k_{S2}^{*2} G_1^* \left[F_{N1}(K_I) \exp(\alpha_{L1}h) - F_{R1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1}h) \right] + 2(2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L1} \exp(\alpha_{S1}h) \left\{ [2K_I^2 G_2^* - (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) G_1^*] F_{R2}(K_I) - [4K_I^2 \alpha_{S1} \alpha_{L2} + (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) (2K_I^2 - k_{S2}^{*2})] k_{S2}^{*2} G_1^* \right\};$$

$$F_4(K_I) = K_I \alpha_{L1} \left\{ \alpha_{L1} [\exp(\alpha_{L1} h) - \exp(-\alpha_{L1} h)] [F_{R2}(K_I) (G_1^* - G_2^*) + (2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) k_{S2}^{*2} G_1^*] + [\exp(\alpha_{L1} h) + \exp(-\alpha_{L1} h)] (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L2} k_{S2}^{*2} G_1^* \right\};$$

$$F_8(K_I) = (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \left\{ \alpha_{L1} [\exp(\alpha_{L1} h) + \exp(-\alpha_{L1} h)] \left[[(2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) - 2\alpha_{L2} \alpha_{S2}] (G_1^* - G_2^*) + k_{S2}^{*2} G_1^* \right] + [\exp(\alpha_{L1} h) - \exp(-\alpha_{L1} h)] k_{S2}^{*2} \alpha_{L2} G_2^* \right\};$$

$$F_9(K_I) = (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \left\{ \alpha_{L1} [\exp(\alpha_{L1} h) + \exp(-\alpha_{L1} h)] \left[F_{R2}(K_I) (G_1^* - G_2^*) + (2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) k_{S2}^{*2} G_1^* \right] + [\exp(\alpha_{L1} h) - \exp(-\alpha_{L1} h)] (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L2} k_{S2}^{*2} G_1^* \right\};$$

$$D_1(K_I) = \alpha_{L1} \left[[(2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) - 2\alpha_{L2} \alpha_{S2}] (G_1^* - G_2^*) + G_1^* k_{S2}^{*2} \right] \left[F_{R1}(K_I) \exp(\alpha_{L1} h) + F_{N1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1} h) \right] + \alpha_{L2} k_{S2}^{*2} G_2^* [F_{R1}(K_I) \exp(\alpha_{L1} h) - F_{N1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1} h)] + 2(2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L1} \exp(-\alpha_{S1}) \left[[2K_I^2 G_2^* - (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) G_1^*] [(2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) - 2\alpha_{L2} \alpha_{S2}] - [(2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) G_1^* - 2\alpha_{S1} \alpha_{L2} G_2^*] k_{S2}^{*2} \right];$$

$$D_2(K_I) = \alpha_{L1} \left[(G_1^* - G_2^*) F_{R2}(K_I) + (2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) k_{S2}^{*2} G_1^* \right] \left[F_{R1}(K_I) \exp(\alpha_{L1} h) + F_{N1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1} h) \right] + (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L1} k_{S2}^{*2} G_1^* [F_{R1}(K_I) \exp(\alpha_{L1} h) - F_{N1}(K_I) \exp(-\alpha_{L1} h)] + 2(2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) \alpha_{L1} \exp(-\alpha_{S1} h) \left[[2K_I^2 G_2^* - (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) G_1^*] F_{R2}(K_I) + [4K_I^2 \alpha_{S1} \alpha_{L2} - (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) (2K_I^2 - k_{S2}^{*2})] k_{S2}^{*2} G_1^* \right];$$

$$F_{R1}(K_I) = (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) - 4K_I^2 \alpha_{L1} \alpha_{S1}; \quad F_{R2}(K_I) = (2K_I^2 - k_{S2}^{*2}) - 4K_I^2 \alpha_{L2} \alpha_{S2};$$

$$F_{N1}(K_I) = (2K_I^2 - k_{S1}^{*2}) + 4K_I^2 \alpha_{L1} \alpha_{S1}.$$

Apêndice C: Campos de deslocamentos e tensões

O programa computacional desenvolvido, cujo fluxograma está ilustrado no apêndice A, é capaz de fornecer o campo de deslocamentos fora da interface solo-fundação, além do campo de tensões sob a fundação.

Para as excitações vertical (F_z), horizontal (F_x) e de rotação (M_y), as figuras C1 a C6 mostram o campo de tensões sob a fundação.

Nas figuras C1 e C2 vê-se as partes real e imaginária dos vetores tensão K_{zz} e K_{xz} devido a excitação vertical F_z . Do mesmo modo, para a excitação horizontal F_x , as figuras C3 e C4 mostram as componentes real e imaginária dos vetores K_{zx} e K_{xx} . Finalmente tem-se nas figuras C5 e C6 as partes real e imaginária dos vetores tensão K_{yz} e K_{yx} para o momento M_y . Em todos os resultados desse apêndice, utilizam-se como parâmetros a frequência adimensional $A_0=1.0$, a razão de Poisson $\nu=0.40$ e o coeficiente de amortecimento $\eta=0.10$.

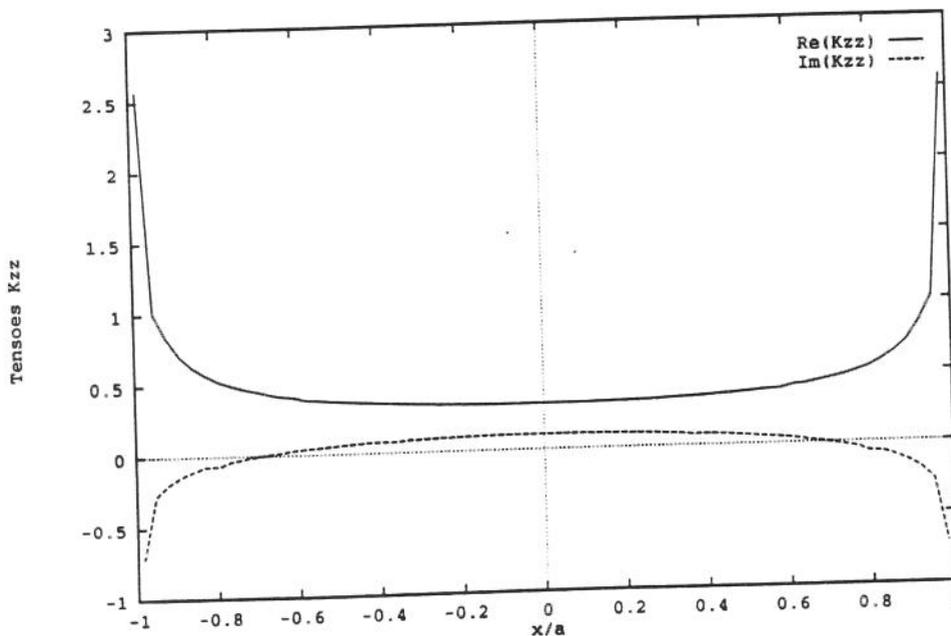


Figura C1. Componentes real e imaginária do vetor tensão K_{zz} .

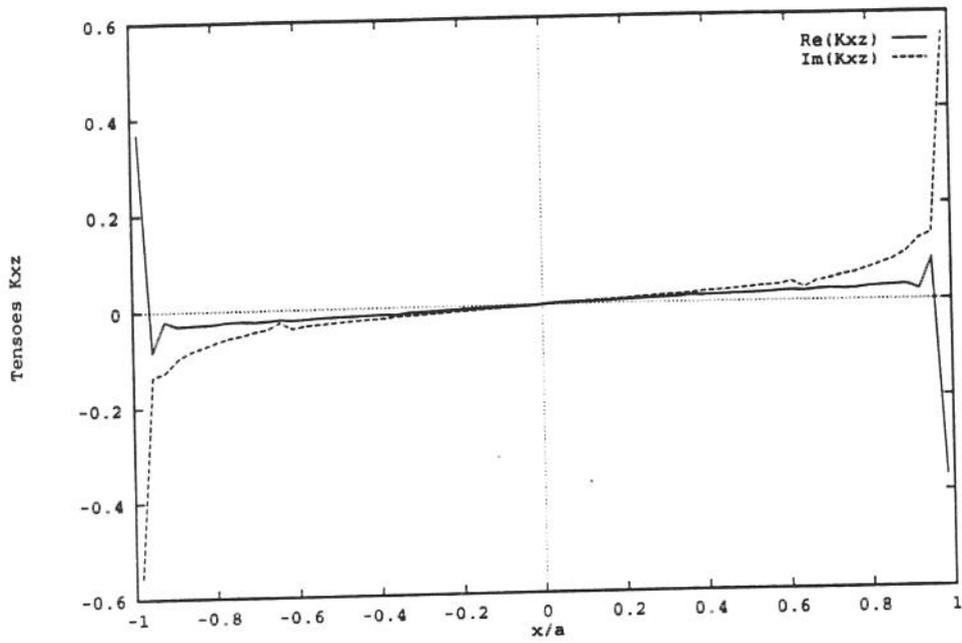


Figura C2. Componentes real e imaginária do vetor tensão K_{xz} .

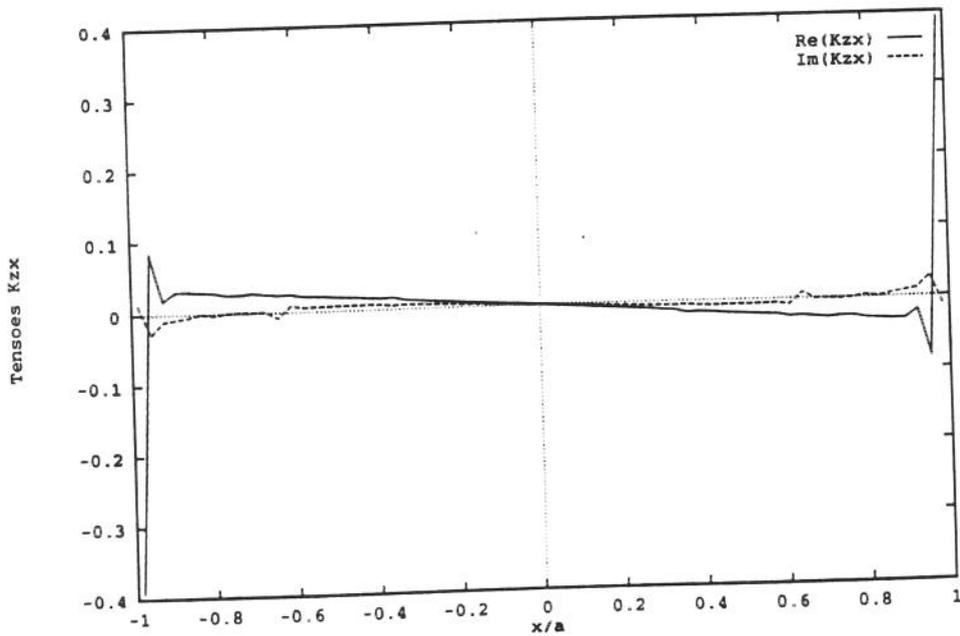


Figura C3. Componentes real e imaginária do vetor tensão K_{zx} .

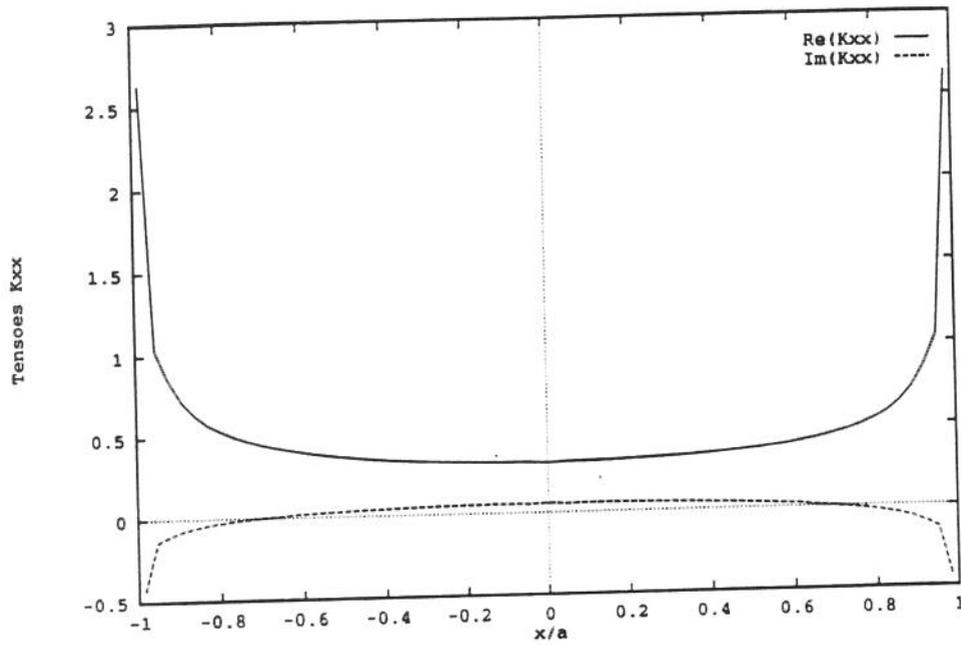


Figura C4. Componentes real e imaginária do vetor tensão K_{xx} .

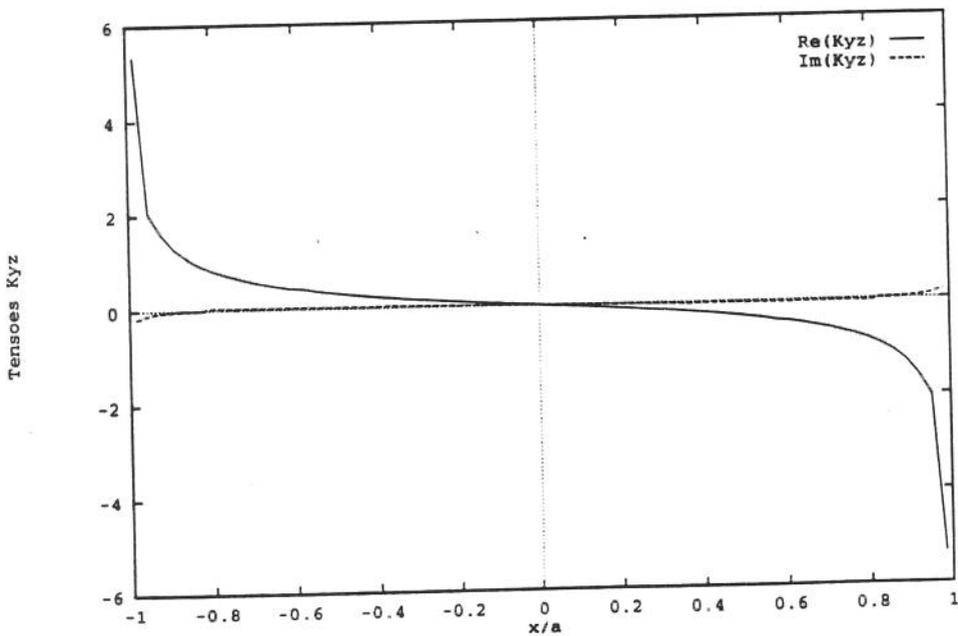


Figura C5. Componentes real e imaginária do vetor tensão K_{yz} .

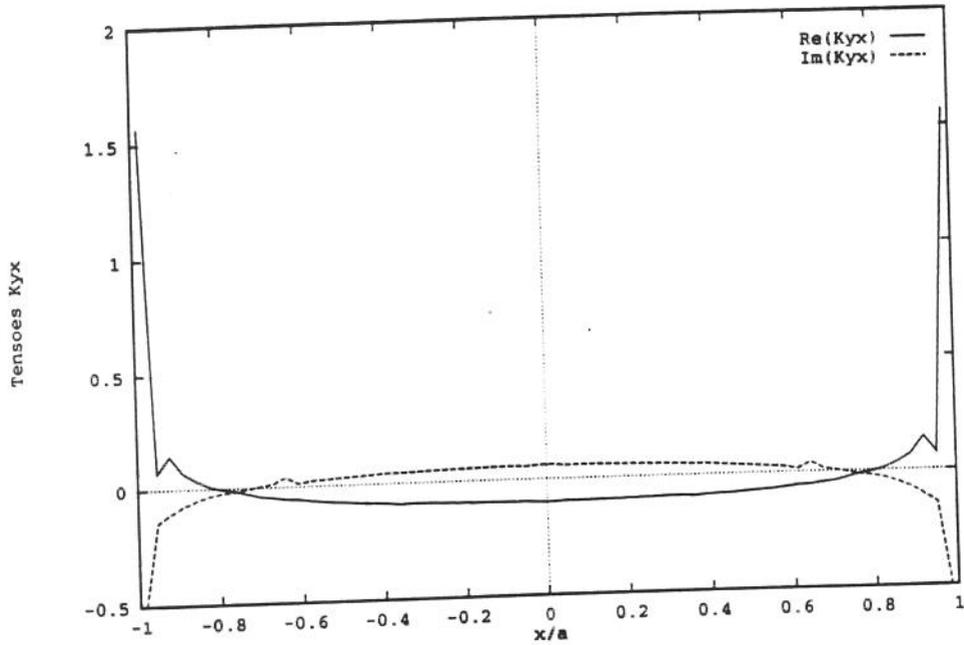


Figura C6. Componentes real e imaginária do vetor tensão K_{yx} .

O campo de deslocamentos fora da interface solo-fundação pode ser obtido de acordo com as equações (3.28a) e (3.28b). Nas figuras C7 a C15 vê-se as partes real, imaginária e o valor absoluto dos deslocamentos W_z , U_z , W_x , U_x , W_y e U_y para os três tipos de excitação: vertical, horizontal e de rotação.

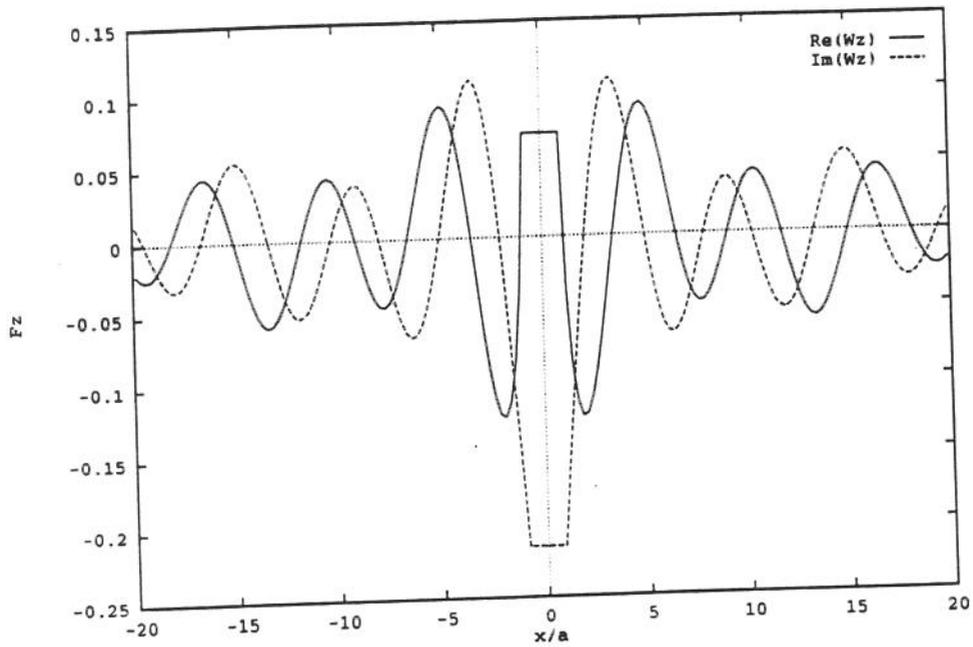


Figura C7. Componentes real e imaginária do deslocamento Wz .

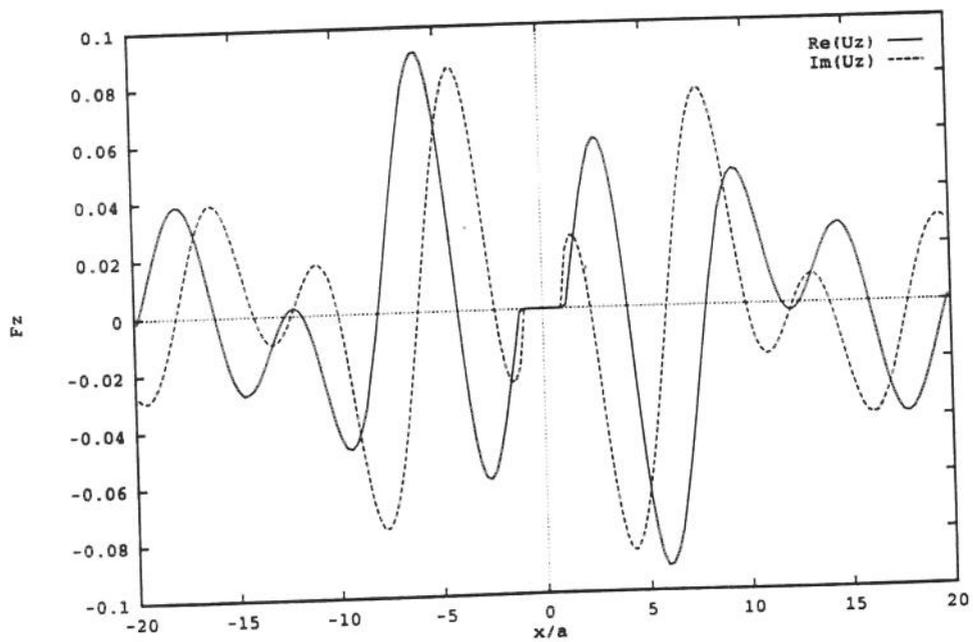


Figura C8. Componentes real e imaginária do deslocamento Uz .

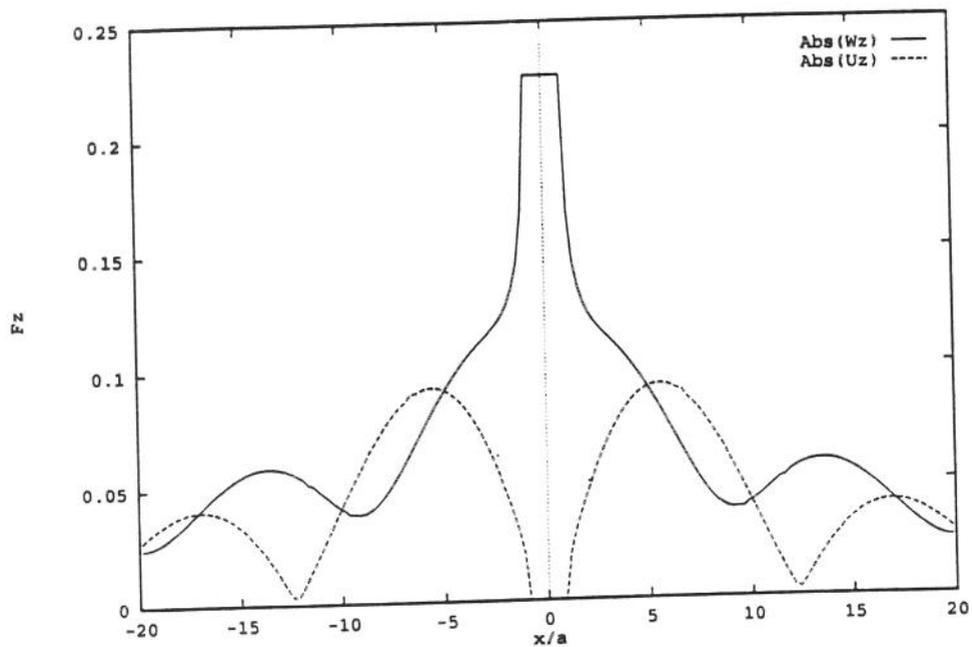


Figura C9. Valor absoluto dos deslocamentos W_z e U_z .

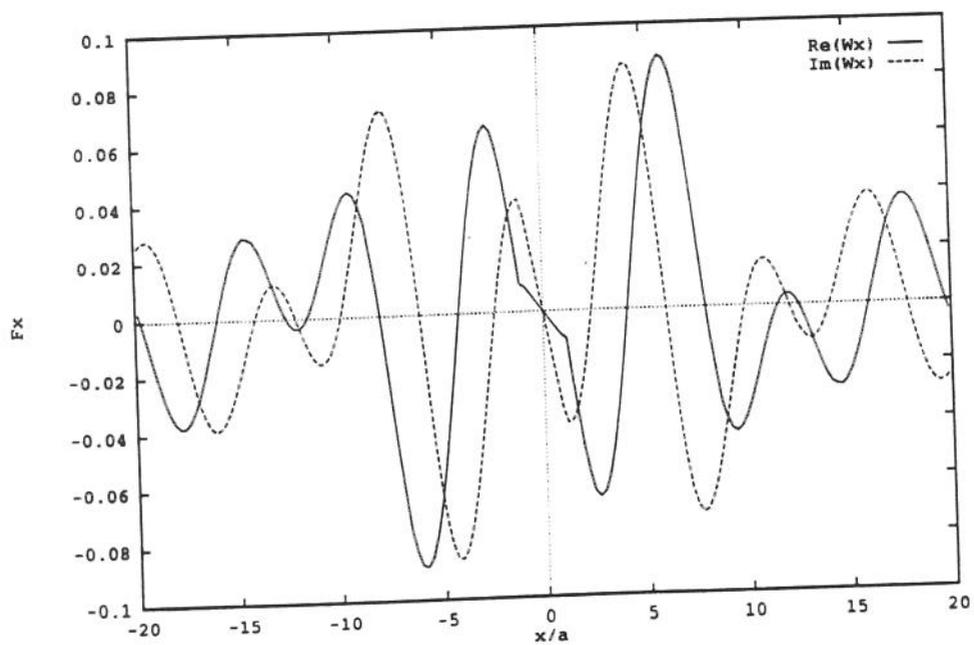


Figura C10. Componentes real e imaginária do deslocamento W_x .

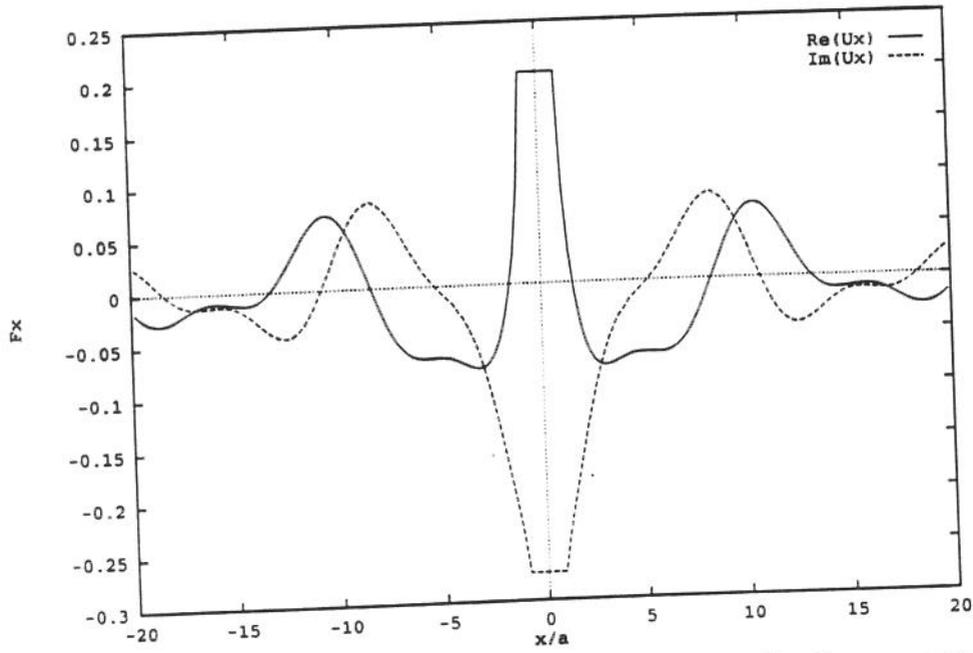


Figura C11. Componentes real e imaginária do deslocamento U_x .

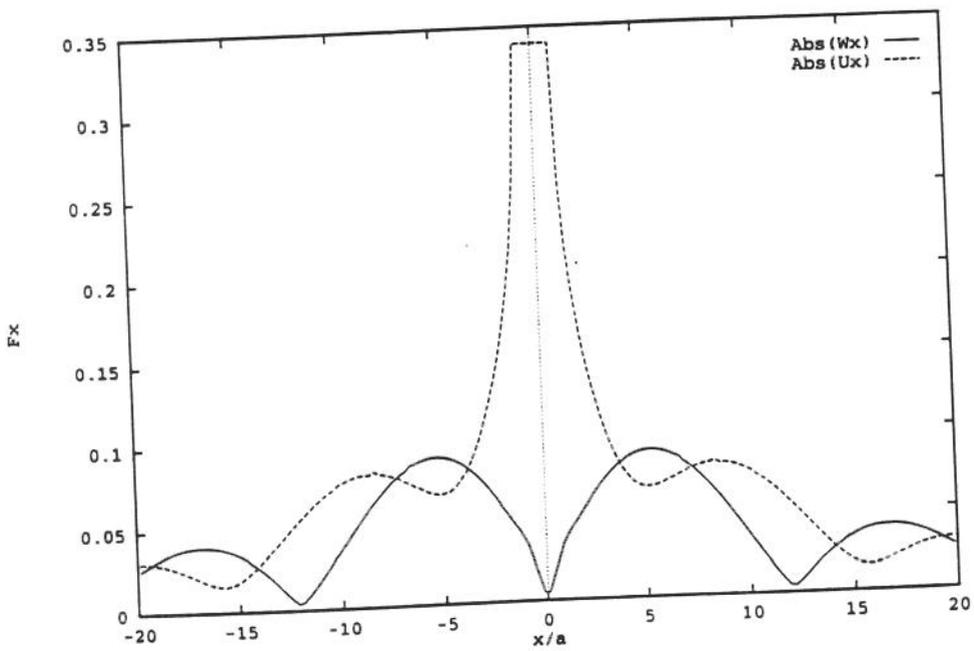


Figura C12. Valor absoluto dos deslocamentos W_x e U_x .

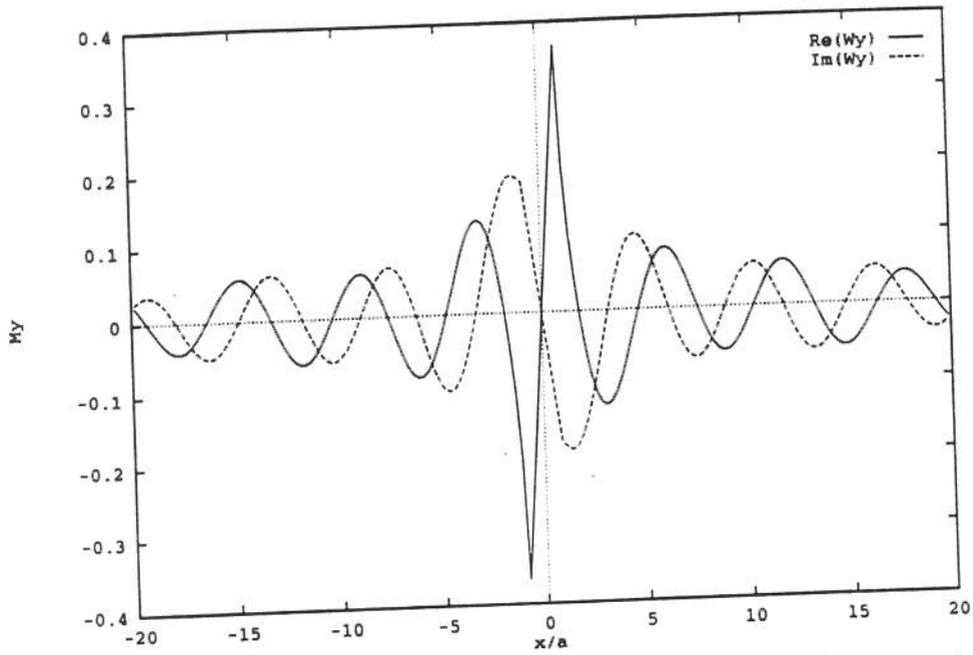


Figura C13. Componentes real e imaginária do deslocamento W_y .

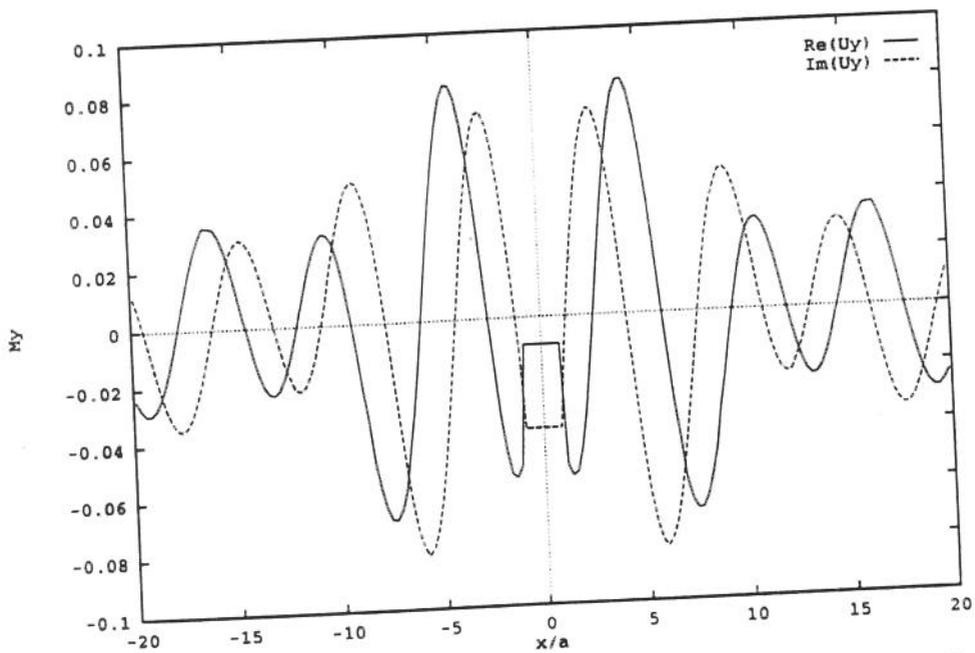


Figura C14. Componentes real e imaginária do deslocamento U_y .

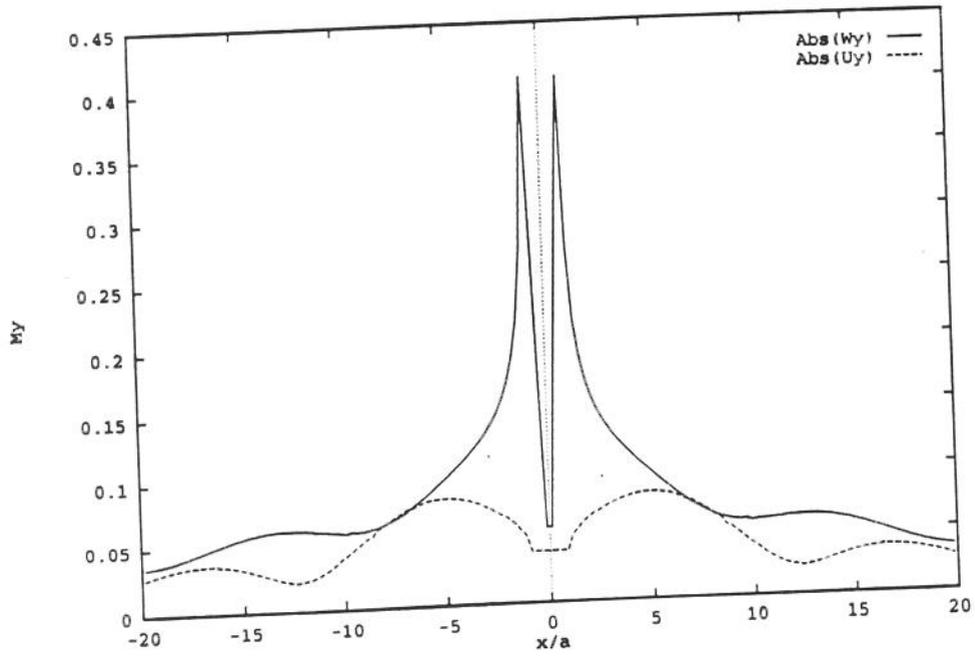


Figura C15. Valor absoluto dos deslocamentos W_y e U_y .