

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA - DEP^{TO} DE PROJETO MECÂNICO
CENTRO DE TECNOLOGIA

Tese de Mestrado

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Márcio Coelho de Mattos
de Mattos E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 19 / 07 / 93.

H. Ingo Weber
ORIENTADOR

Sistemas Amortecidos com Atrito Seco

Autor: Márcio Coelho de Mattos

Orientador: Prof. Dr. Hans Ingo Weber

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação
da Faculdade de Engenharia Mecânica como parte
dos requisitos para a obtenção do título de Mestre
em Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA - DEP^{TO} DE PROJETO MECÂNICO
CENTRO DE TECNOLOGIA

Tese de Mestrado

Sistemas Amortecidos com Atrito Seco

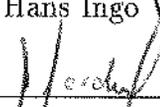
Autor: Márcio Coelho de Mattos 436

Orientador: Prof. Dr. Hans Ingo Weber

Aprovado por:



Prof. Dr. Hans Ingo Weber - Presidente

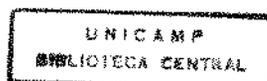


Prof. Dr. Rodmar Cardinali



Prof. Dr. Mário Francisco Mucheroni

Campinas-SP, 19 de Julho de 1993



AGRADECIMENTOS

- Ao Prof Dr Hans I. Weber, pela orientação prestada neste trabalho.
- Ao colega Fermín Bazan, pelas muitas sugestões e auxílio em matemática aplicada.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.
- Aos técnicos do Laboratório de Projeto mecânico (DPM-FEM) e do Centro de Tecnologia (CT-UNICAMP) pelos serviços prestados na realização da parte experimental.
- Ao Engenheiro Tadeu Pissinatti Sant'Anna e ao Prof Guilherme E. C. Laux, e a toda equipe do LABDIN-CT-UFES, pelo constante estímulo para a realização do meu mestrado.
- A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

*“Feliz o homem que acha a
sabedoria, e o homem que adquire o
conhecimento;*

*porque melhor é o lucro que ela dá
do que a prata,
e melhor a sua renda do que o ouro mais
fino.*

*Mais preciosa é do que
pérolas,
e tudo o que podes desejar não é
comparável a ela.*

*O alongar-se da vida está na sua
mão direita,
na sua mão esquerda riquezas e honra.*

*Os seus caminhos são caminhos
deliciosos, e todas as suas veredas paz.*

*É árvore da vida para os
que a alcançam e felizes são todos os que a
retêm”*

Provérbios 3

Aos meus pais

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre sistemas amortecidos com atrito viscoso/coulomb. Trata-se de um sistema de vários graus de liberdade onde apenas uma das coordenadas está sujeita ao efeito do atrito seco. As dificuldades encontradas durante o estudo do problema são apresentadas, bem como uma discussão sobre métodos para análise de sistemas não lineares e sua aplicabilidade ao problema. Usa-se a solução exata no domínio do tempo para o estudo de sistemas com até 4 graus de liberdade.

A influência do atrito na resposta em frequência de sistemas com determinados modelos é apresentada, bem como a redução na amplitude de vibração destes sistemas. Realiza-se uma comparação entre os sistemas de dois graus de liberdade amortecidos com atrito seco e o absorvedor dinâmico de vibrações convencional. Estuda-se o caso real de uma viga engastada em uma das extremidades, com massas concentradas e atrito seco na extremidade livre. O problema de modelamento discreto de sistemas contínuos no estudo de sistemas amortecidos com atrito seco é discutido.

ABSTRACT

In this work we present a study on systems with combined coulomb and viscous friction. It concerns systems with several degrees of freedom and coulomb damping actuating on only one coordinate. The difficulties encountered during this study are presented. Methods to analyze non-linear systems and their applicability in the study of dry friction damped systems are discussed. The exact solution in the time domain is used to study systems with 1 up to 4 degrees of freedom.

The influence of dry friction on the frequency response of systems with determinate models is studied as well as the reduction of amplitude of vibration in this systems. A comparison between 2DOF dry friction damped systems and conventional dynamic absorber of vibration is presented. The study of a real case of a clamped beam on one end, distributed masses and coulomb friction on the free end is realized. The problem of discrete modelling of continuous systems in the study of dry friction damped systems is discussed.

Conteúdo

Introdução	1
1 Revisão Bibliográfica	4
1.1 Levantamento Bibliográfico	4
1.2 Leis de Atrito	6
1.3 Métodos para o Estudo de Sistemas não Lineares	8
1.3.1 Método do Balanço Harmônico Incremental	8
1.3.2 Operadores de Volterra	14
1.3.3 Método das Formas Normais	15
1.3.4 Comentários Gerais sobre Sistemas Amortecidos com Atrito Seco	16
2 Sistemas de 1 e 2 Graus de Liberdade com Atrito Viscoso/Coulomb	19
2.1 Sistema de 1 grau de liberdade - Discussão de Resultados	19
2.2 Sistema de 2 Graus de Liberdade	28
2.2.1 Sistema Linear como um Absorvedor de Vibrações	29
2.2.2 Sistema 1 - Atrito Atuando em uma coordenada	34
2.2.3 Sistema 2 - Atrito atuando entre coordenadas	43
3 Sistemas Contínuos e Sistemas de Vários Graus de Liberdade	48
3.1 Sistema Contínuo em Estudo	49
3.2 Equacionamento do Sistema Contínuo	50
3.3 Obtenção de um Modelo Discreto Equivalente para o Sistema Contínuo	55

3.3.1	Considerações Iniciais	55
3.3.2	Considerações sobre a energia cinética e Computação da matriz massa	56
3.3.3	Computação da Matriz Rigidez	58
3.3.4	Resultados	59
3.4	Atuação da Força de Atrito no Sistema Equivalente	59
3.5	Obtenção de um Modelo Discreto Desacoplado Inercialmente para o Sistema Contínuo	61
3.5.1	Considerações Iniciais	61
3.5.2	Desacoplamento Inercial - Matriz Rigidez Assimétrica	62
3.5.3	Desacoplamento Inercial - Matriz Rigidez Simétrica - 20 Restrições	62
3.5.4	Desacoplamento Inercial - Matriz Rigidez Simétrica - Menos Restrições	68
3.6	Matriz de Rank Deficiente no Problema de Discretização	72
3.6.1	Considerações Iniciais	72
3.6.2	Estudo de casos para o Procedimento da Subseção 3.6.1	75
3.6.2.1	Caso 1 - Sistema Contínuo da Seção 3.2	75
3.6.2.2	Caso 2 - Viga Biapoiada Modelada com 2 Graus de Liberdade	77
3.6.3	Proposição de um Método para a Obtenção do Sistema Desacoplado	80
4	Estudo Experimental	83
4.1	Dispositivo Experimental	83
4.2	Procedimentos	84
4.3	Resultados	89
5	Análise e Conclusões	99
	Bibliografia	102
	Apêndice A - Sistema Livre de 1 Grau de Liberdade com Atrito Seco	106
	Apêndice B - Curva de Resposta em Frequência para o Sistema de 1 GL	110
	Apêndice C - Calibração do Sensor de Medição da Força Normal	114

Introdução

Um sistema pode ser considerado, do ponto de vista matemático, como um operador pelo qual uma excitação $F(t)$ é mapeada em uma resposta $X[F(t)]$, onde $F(t)$ é a entrada do sistema e $X[F(t)]$ sua saída. Quanto à natureza da relação saída/entrada dos sistemas, estes classificam-se em *lineares e não lineares*. Sistemas lineares caracterizam-se por satisfazerem duas propriedades muito importantes que simplificam muito seu estudo e estão expressas em sua relação saída/entrada, a saber:

- princípio da superposição $\rightarrow X[F_1(t) + F_2(t)] = X[F_1(t)] + X[F_2(t)]$
- princípio da proporcionalidade $\rightarrow X[aF(t)] = aX[F(t)]$

Sistemas não lineares não obedecem às duas relações anteriores, principalmente à primeira. Além disto, sistemas não lineares podem ser sensíveis às condições iniciais do problema, desenvolvendo soluções topologicamente diferentes para mudanças naquelas condições.

Estamos particularmente interessados em sistemas mecânicos e, mais precisamente, no estudo de vibrações mecânicas. Encontrar sistemas vibrantes que sejam puramente lineares não é tarefa fácil, conforme afirmam Schmidt & Tondl [Schmidt-86], embora importantes problemas de vibração possam ser tratados por modelos lineares.

O modelamento de um problema de vibração em um sistema mecânico conduz sempre, do ponto de vista das forças nele atuantes, a 4 parcelas:

- forças de excitação \rightarrow fonte de energia para vibrar,
- forças restauradoras \rightarrow provenientes da rigidez do sistema,
- forças amortecedoras \rightarrow provenientes da dissipação de energia,
- forças de inércia \rightarrow na verdade, consequência da ação das demais forças.

Não linearidades na força de excitação podem ocorrer em sistemas com vibrações auto-excitadas e paramétricas. Forças restauradoras de natureza não linear têm sido tratadas na literatura, especialmente rigidezes lineares por intervalos (no deslocamento) e as forças que são funções polinomiais do deslocamento. Forças amortecedoras são em geral não lineares, embora o uso de um coeficiente de amortecimento constante seja comum nos modelos

utilizados para o estudo de vibrações mecânicas. Esta simplificação não implica em maiores problemas no caso de baixo amortecimento, isto é, quando as forças de amortecimento são de pequena magnitude se comparadas às outras forças atuantes no sistema. No estudo de sistemas cujo amortecimento apresenta características não lineares destacam-se as equações de Van der Pol e sistemas amortecidos com atrito seco. Estudos muito específicos têm sido desenvolvidos para a análise de sistemas com auto-excitações e excitações paramétricas de natureza não linear [Schmidt-86]. Em se tratando de rigidez e amortecimentos não lineares, a tabela 1 dá um resumo das principais não linearidades tratadas com frequência nos últimos anos na literatura sobre vibrações em sistemas mecânicos. Em se tratando de rigidez polinomial, o caso mais estudado refere-se ao oscilador de Duffing, que apresenta apenas o termo de grau 3.

força restauradora não linear	$x'' + ax' + \sum_{n=1}^N \mu_n x^n = f(t)$	rigidez polinomial
	$x'' + ax'' + b_1 x = f(t) \quad x < x_1 \text{ ou } x > x_2$	rigidez linear
	$x'' + ax' + b_2 x = f(t) \quad x_1 > x > x_2$	por intervalos
amortecimento não linear	$x'' + (b - \delta x^2)x' + x = f(t)$	Van Der Pol
	$x'' + cx' + kx + \mu(x')\text{Sgn}(x') = f(t)$	atrito seco
	$x' + cx' x' + kx = f(t)$	amortecimento quadrático

Tabela 1 - Não linearidades apresentadas mais frequentemente em publicações sobre sistemas mecânicos nos últimos anos

A obtenção de um modelo que represente de maneira satisfatória um determinado problema de caráter não linear envolve a aplicação de teorias e técnicas de significativa complexidade, uma vez que não se encontra disponível um tratamento teórico completo e geral para problemas desta natureza, como no caso da teoria aplicada a sistemas lineares. Na última década surgiram algumas aplicações de teorias como as de Volterra e Wiener, cuja utilização na análise de sistemas mecânicos é ainda recente e, conforme veremos mais adiante, um tanto restrita, uma vez que não se adequam a uma classe importante de problemas nesta área, a de sistemas lineares por intervalos. Uma vez que os métodos têm, em grande parte, requerido funções analíticas para descrever os coeficientes das equações diferenciais que regem os problemas, sua aplicação a sistemas lineares por intervalos não tem sido possível.

Sistemas amortecidos com atrito seco estão exatamente nesta última condição. A complexidade será ainda maior se a função $\mu(x')$ (vide tabela 1) não for uma função linear de seus parâmetros, pois o sistema, além de não ser regido por funções analíticas, perde a linearidade nos intervalos.

O estudo de sistemas envolvendo atrito seco é, não obstante a ausência de uma teoria geral estabelecida para estes sistemas, muito importante, pois seu efeito está presente em uma série de aplicações em engenharia, tais como escoamento de fluidos, usinagem, guias de máquinas, juntas, transportadores, etc. . .

Capítulo 1

Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta, além do levantamento bibliográfico, um comentário sobre o coeficiente de atrito e a apresentação de algumas ferramentas e métodos utilizados no estudo de sistemas não lineares. Por fim, apresenta-se um conjunto de observações levantadas junto à literatura e condensadas aqui para uma idéia da complexidade do problema.

1.1 Levantamento Bibliográfico

A análise de sistemas não lineares teve grande progresso nas duas últimas décadas, sobretudo nos anos 80-90, devido em grande parte à constante evolução dos recursos computacionais. Do lado do desenvolvimento teórico, foi no final da década de 60 que teve início a teoria do caos e o estudo dos problemas de bifurcação. O conhecimento envolvido em tais técnicas remonta, todavia, ao século passado e, conforme Guckenheimer & Holmes [Holmes-90], têm seus aspectos qualitativos fundamentados por Poincaré (1880,1890,1899), com grandes contribuições, já neste século, de Birkhof (1927), Liapunov (1949) e outros autores da escola Russa. Paralelamente ao desenvolvimento da teoria do caos e da bifurcação, a evolução da computação fez com que muitos métodos desenvolvidos para o estudo de sistemas de equações diferenciais, que até aquele momento tinham uma utilização mais restrita, fossem otimizados e aplicados em um campo maior. Foi, de fato, devido à evolução da informática que muitos estudos realizados por Liapunov, Bogoliubov, Andronov e outros conceituados pesquisadores obtiveram maior aplicabilidade.

A utilização em problemas de engenharia, não só da teoria que se desenvolveu para o estudo do caos mas também dos métodos adequados ao estudo de sistemas não lineares, tais como a perturbação de parâmetros, o método do balanço harmônico, o método de Galerkin e a teoria de Volterra, foi alvo de vários autores: Nayfeh [Nayfeh-73], Guckenheimer & Holmes [Holmes-90], Wiggins [Wiggins-90], Schetzen [Schetzen-89], Schmidt & Tondl [Schmidt-86],

Jezequel [Jezequel-91].

No que se refere a sistemas amortecidos com atrito seco, porém, apenas nos últimos 5 anos têm aparecido trabalhos publicados com a aplicação da teoria da bifurcação e caos. Toda a bibliografia consultada referencia o trabalho de Den Hartog [Hartog-31] como o primeiro trabalho de significativa importância no estudo de vibrações mecânicas amortecidas com atrito de Coulomb. O autor desenvolve uma expressão analítica para a curva de resposta em frequência de um oscilador de um grau de liberdade com atrito de Coulomb e excitação cossenoidal, válida quando não ocorrem aderências¹ durante o movimento. O mesmo autor desenvolve em [Hartog-72] uma solução aproximada para o problema utilizando um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente. Depois destes trabalhos de Den Hartog, Yeh [Yeh-66] desenvolveu uma expressão equivalente para um sistema particular de dois graus de liberdade.

As dificuldades encontradas para sistemas com maior número de graus de liberdade fizeram com que o problema fosse estudado principalmente por via numérica. O levantamento indica que a maioria dos trabalhos desta fase já ocorreram na década de 80, aproveitando, talvez, a implementação de métodos numéricos antes limitados pelo *poder de solução* dos computadores. Em [Pratt-81] um sistema de 2 graus de liberdade é analisado visando ao estudo do efeito do atrito na energia dissipada e no movimento *stick-slip*. O método do balanço harmônico foi o único apresentado, até onde conhecemos, como um método alternativo à solução exata no domínio do tempo. Lau [Lau-82] apresenta um variação deste método, que permite uma resposta mais rápida no domínio da frequência, método este aplicado mais tarde a sistemas com atrito seco [Pierre-85] e a sistemas assimétricos lineares por intervalos [Wong-91]. Marui & Kato [Marui-84] complementam o trabalho de Den Hartog estudando sistemas com excitação pela base e, com maior profundidade, os movimentos com aderência. Shaw [Shaw-86] estende o trabalho de Den Hartog para sistemas que apresentam coeficiente de atrito estático e dinâmico diferentes, considerando uma mudança abrupta entre eles. Movimentos instáveis também são analisados pela aplicação dos conceitos propostos por Guckenheimer & Holmes [Holmes-90] e bifurcações são encontradas sob variação do fator de amortecimento relativo ao amortecimento viscoso. Vários outros trabalhos apresentam estudos sobre sistemas com atrito seco, seja considerando sistemas com configurações particulares [Anderson-90][Ferri-85][Ferri-88][Oertel-89][Schmidt-86], variações da lei de atrito [Anderson-90][Karnopp-83][Powell-92], atrito atuando juntamente com outras não linearidades [Dowell-85][Hamdam-92][Klarbring-90][Narayanan-91] ou aplicações e verificações em estudos experimentais [Cheng-89][Kato-74][Wang-91].

¹A conceituação deste e de outros termos é dada ao longo do texto.

Um outro ponto de vista importante no estudo de vibrações envolvendo atrito seco refere-se ao atrito como excitador de vibrações [Dweib-90] [Stelter-90] [Hamdam-92].

1.2 Leis de Atrito

Uma lei para reger a variação do coeficiente de atrito como função de alguns parâmetros, tais como a velocidade de escorregamento e a força normal, ainda não foi rigorosamente estabelecida. Sabe-se que os principais parâmetros envolvidos são a rugosidade das superfícies em atrito, a força normal que atua nas superfícies e a velocidade relativa entre as mesmas. Mesmo considerando apenas estes parâmetros, não existe uma função $\mu(x')$ que possa ser considerada definitiva [Stelter-90] e modelos empíricos são utilizados para o coeficiente de atrito.

A primeira lei adotada para representar o coeficiente de atrito foi a de Coulomb e esta é até hoje a mais utilizada nos estudos, sendo a adoção de coeficientes de atrito estático e dinâmico diferentes um aperfeiçoamento daquela lei. A transição entre estes coeficientes, porém, é motivo de várias expressões para o coeficiente de atrito em função da velocidade, cujos parâmetros têm sido ajustados, às vezes, a dados práticos. A influência de um coeficiente de atrito variável na resposta de sistemas amortecidos com atrito seco é objeto de alguns estudos [Oertel-89] [Powell-92] [Wang-91] [Stelter-90]. A figura 1.1 apresenta algumas expressões para o coeficiente de atrito em função da velocidade x' . Os parâmetros envolvidos nas funções apresentadas podem ser identificados como segue:

- μ_s : coeficiente de atrito estático. Em 1.1-a representado por μ_0 .
- μ_d : coeficiente de atrito dinâmico. Em 1.1-a também representado por μ_0 .
- Os parâmetros α , λ e β não têm denominação específica como μ_s e μ_d . Notemos que α , λ e β , ao contrário de μ_s e μ_d , são dimensionais, uma vez que o coeficiente de atrito é adimensional.

A consideração de uma função μ contínua para todo o eixo das velocidades, tal como ilustrada em 1.1-e e apresentada em [Schmidt-86]² é discutível devido ao fato de nunca haver, por esta função, uma região de aderência, fenômeno que, para baixas frequências, tem sido verificado experimentalmente [Marui-84][Pratt-81]. Não temos encontrado na literatura autores que tenham trabalhado com funções $\mu(x')$ contínuas e diferenciáveis para todo o eixo das velocidades.

²O autor apenas sugere a forma da curva. A expressão apresentada é apenas uma alternativa para aproximar a sugestão do autor. Entretanto, não se tem conseguido uma aproximação razoável a não ser por funções transcendentais.

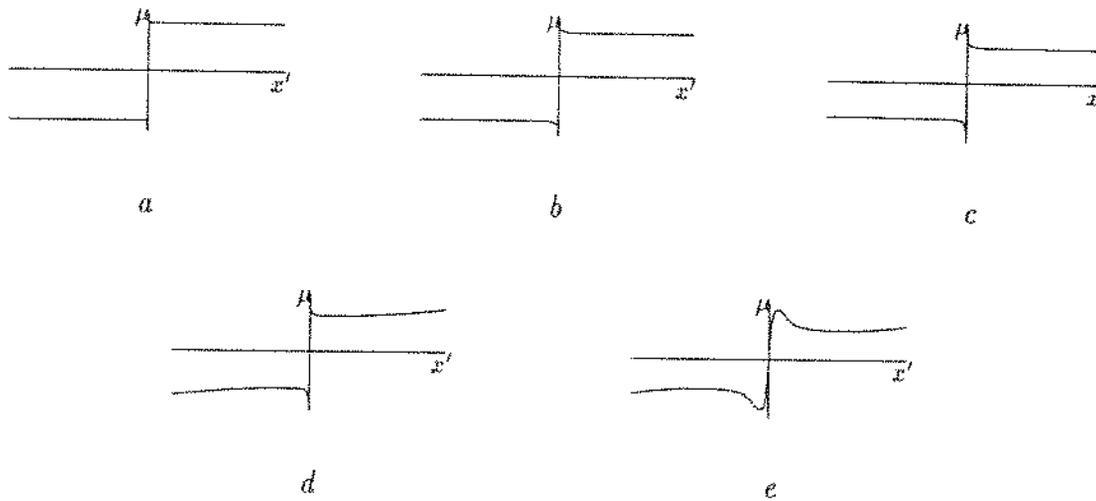


Figura 1.1 - a : $\mu(|x'|) = \mu_0$ b : $\mu(|x'|) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-\alpha|x'|}$ c : $\mu(|x'|) = \mu_d + \frac{\mu_s - \mu_d}{1 + \alpha|x'|}$
 d : $\mu(|x'|) = \mu_d + \frac{\mu_s - \mu_d}{1 + \alpha|x'|} + \lambda x'^2$ e : $\mu = \left[\mu_d + \frac{\mu_s - \mu_d}{1 + \alpha x'^2} + \lambda x'^2 \right] \tanh(\beta x')$

A solução analítica de equações diferenciais contendo funções não lineares como as apresentadas na figura 1.1-e é extremamente complicada, o que prejudica o estudo de sistemas com tais modelos. Aliás, a simples presença da exponencial, tal como em 1.1-b, ou de potências da velocidade, como em 1.1-c e 1.1-d, resulta uma equação diferencial cuja solução ainda não é conhecida. A admissão de uma função analítica não tem revelado, ainda que possamos desconsiderar os movimentos com aderência, nenhuma vantagem sobre as funções não analíticas, a não ser que representem mais fielmente a variação do coeficiente de atrito com a velocidade, o que também não se pode afirmar, a menos que se façam experimentos para casos específicos. A expansão destas funções analíticas em série³ não tem revelado grande vantagem, uma vez que, para que a série aproxime bem a função, é necessário que se leve em conta um número muito grande de termos (mais de uma dezena, às vezes). Isto é, muitas vezes, operacionalmente inviável. Consideremos, por exemplo, uma das mais simples funções analíticas que aproximam a lei de Coulomb, $\mu(v) = \mu \tanh(\beta v)$, β grande. Neste caso, quanto mais quisermos aproximar a lei de Coulomb (β maior), mais restrita ficará a faixa de velocidade onde a série é válida, pois a série de MacLaurin para a função $\tanh(x)$ converge apenas no intervalo $|x| < \pi/2$ e, portanto, devemos garantir que a velocidade não ultrapassará $\pi/2\beta$. O uso de polinômios ortogonais, tais como Laguerre, Hermite, Legendre, Chebyshev e outros também têm apresentado o problema de termos que levar em consideração polinômios até ordens altas (superiores a dez). A utilização destes polinômios é mais comum do ponto de vista de identificação e modelamento, e não do ponto de vista da computação da resposta a uma entrada conhecida.

³Esta poderia ser uma vantagem.

Neste trabalho considera-se o modelo de Coulomb para o estudo de sistemas amortecidos com atrito seco. A mudança entre os coeficientes estático e dinâmico é considerada abrupta.

1.3 Métodos para o Estudo de Sistemas não Lineares

1.3.1 Método do Balanço Harmônico Incremental

O método do balanço harmônico tem sido largamente utilizado na solução de problemas e parte da premissa de que a resposta do sistema é periódica e pode ser expressa por uma série de harmônicos, a amplitude e fase dos quais podem ser obtidas quando se aplica o procedimento. Mesmo quando nenhuma solução em forma fechada aproximada é possível, o método tem se mostrado, segundo a literatura, muito eficiente quando a resposta do sistema é periódica ou quase periódica. O trabalho computacional envolvido, entretanto, cresce muito quando o número de harmônicos considerados para a computação da resposta e o número de graus de liberdade se elevam.

O método do balanço harmônico serve para a computação de resposta no domínio do tempo e, uma vez que a preocupação maior tem sido a curva de resposta em frequência, o método torna-se, devido à dificuldade particular dos sistemas amortecidos com atrito seco, tão trabalhoso quanto a solução exata. Um desenvolvimento deste método a partir de perturbações dos parâmetros do sistema levou a um outro método também comum no estudo de problemas não lineares, o qual facilita a obtenção da curva de resposta em frequência, uma vez que as amplitudes e fases dos harmônicos são obtidos diretamente quando um determinado critério de convergência é satisfeito. Em se tratando de sistemas com atrito seco, a dificuldade adicional, como veremos adiante, continua, devido ao termo que representa o atrito seco não ser uma função analítica do tempo.

Consideremos um sistema de um grau de liberdade com amortecimento viscoso e de Coulomb, cuja equação de movimento pode ser escrita como ($x' = dx/dt$):

$$mx'' + cx' + kx + \mu N \text{Sgn}(x') = A_0 \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

onde $\text{Sgn}(x') = \pm 1$, conforme a velocidade seja positiva ou negativa, respectivamente.

Adimensionalizando convenientemente 1.1 pela introdução de

$$y = \frac{k}{\mu N} x \quad \theta = \omega t \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \eta = \frac{\mu}{\omega_0} \quad F = \frac{A_0}{\mu N} \quad (1.2)$$

podemos reescrever a equação 1.1 na forma ($\dot{y} = dy/d\theta$)

$$\eta^2 \ddot{y} + 2\xi\eta\dot{y} + y + \text{Sgn}(\dot{y}) = f(\theta) \quad f(\theta) = F \cos(\theta) \quad (1.3)$$

onde $\text{Sgn}(\dot{y}) = \pm 1$, conforme $\text{Sgn}(x')$.

O primeiro passo consiste na consideração de que a resposta possui um estado estacionário e um incremento. Seja um estado de movimento vibratório $y_0(\theta)$ correspondente à excitação $F_0 \cos(\theta)$ e ao parâmetro η_0 . Uma vizinhança do estado do movimento pode ser expressa pela adição de incrementos sobre os parâmetros, da seguinte forma:

$$y(\theta) = y_0(\theta) + \Delta y(\theta) \quad F = F_0 + \Delta F \quad \eta = \eta_0 + \Delta \eta \quad (1.4)$$

Para considerarmos a expansão em série da função $\text{Sgn}(\dot{y})$ devemos recorrer à teoria da distribuição [Kanwal-83]⁴. Expressando a função $\text{Sgn}(\dot{y})$ em uma forma apropriada para tratá-la via teoria da distribuição temos:

$$\text{Sgn}(\dot{y}) = 2H(\dot{y}) \quad H(\dot{y}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \dot{y} < 0, \\ +\frac{1}{2}, & \dot{y} > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Note que, expressa desta forma, a função $\text{Sgn}(\dot{y})$ dá um salto unitário em $\dot{y} = 0$. A derivada de $H(\dot{y})$ é conhecida e dada pelo delta de Dirac $\delta(\dot{y})$ ⁵, cuja definição pode ser dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)g(x)dx = g(a) \quad (1.6)$$

onde o parâmetro a é dado pela abcissa onde ocorre um impulso (no nosso problema representado pelo salto da função $\text{Sgn}(\dot{y})$, que ocorre em $\dot{y} = 0$) e $g(x)$ é uma função qualquer suficientemente suave para garantir a integração.

Pensando desta forma a derivada da função $\text{Sgn}(\dot{y})$ é

$$\frac{d}{d\dot{y}} \text{Sgn}(\dot{y}) = 2\delta(\dot{y}) \quad (1.7)$$

Podemos então escrever

⁴O capítulo 5 desta referência trata exatamente do problema de descontinuidade via teoria da distribuição.

⁵Este resultado também vem da teoria da distribuição.

$$\frac{d}{d(\dot{y}_0 + \Delta y)} \text{Sgn}(\dot{y}_0 + \Delta y) = 2\delta(\dot{y}_0 + \Delta y) \quad (1.8)$$

Tomando a expansão de Taylor de $\text{Sgn}(\dot{y}_0 + \Delta y)$ em torno de \dot{y}_0 e levando em conta a série apenas até o termo de primeira ordem, temos

$$\text{Sgn}(\dot{y}_0 + \Delta \dot{y}) = \text{Sgn}(\dot{y}_0) + 2\delta(\dot{y}_0)\Delta \dot{y} \quad (1.9)$$

Este resultado um tanto estranho provém da própria natureza da função Delta de Dirac. Kanwal [Kanwal-83] comenta rapidamente⁶ sobre o comportamento da função Delta, enfatizando que, embora usada com sucesso nas ciências aplicadas, “a linguagem da matemática clássica é inadequada para justificar tal função”. Assim, embora o resultado expresso em 1.9 não seja inteligível à luz da formulação matemática convencional, não deve ser encarado como conceitualmente errado.

Substituindo as equações 1.4 e 1.9 em 1.3 e ignorando os termos que envolvem relações não lineares entre os incrementos, obtemos a seguinte equação linearizada:

$$\eta_0^2 \ddot{\Delta y} + [2\xi\eta_0 + 2\delta(\dot{y}_0)] \dot{\Delta y} + \Delta y = R + Q\Delta\eta + \cos\theta\Delta F \quad (1.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} R &= -[\eta_0^2 \ddot{y}_0 + 2\xi\eta_0 \dot{y}_0 + y_0 + \text{Sgn}(\dot{y}_0) - F_0 \cos(\theta)] \\ Q &= [-2\eta_0 \ddot{y}_0 - 2\xi \dot{y}_0] \end{aligned} \quad (1.11)$$

À medida que y_0 se aproxima da solução exata de 1.3 o termo R torna-se cada vez menor. Recordando que $f(\theta)$ é periódica e aplicando o procedimento de Galerkin para obtermos uma solução aproximada de 1.3, escrevemos a solução periódica y_0 e seus incrementos como:

$$\begin{aligned} y_0(\theta) &= \sum_{n=1}^N [a_n \sin(n\theta) + b_n \cos(n\theta)] \\ \Delta y(\theta) &= \sum_{n=1}^N [\Delta a_n \sin(n\theta) + \Delta b_n \cos(n\theta)] \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde N é o número de harmônicos considerados na computação da resposta.

⁶página 5 da referência.

Seguindo o procedimento de Galerkin, escrevemos as igualdades entre os membros esquerdo e direito de 1.10 para cada harmônico, tanto para os senos quanto para os cossenos. Consideramos Δa_n e Δb_n ($n = 1..N$) como coordenadas generalizadas. Expressando isto em 1.10 e integrando ambos os membros no intervalo $[0, 2\pi]$ temos:

$$\int_0^{2\pi} [\eta_0^2 \ddot{\Delta y} + [2\xi\eta_0 + 2\delta(\dot{y}_0)] \dot{\Delta y} + \Delta y] \delta(\Delta y) d\theta = \int_0^{2\pi} [R + F\Delta\eta + \Delta F \cos(\theta)] \delta(\Delta y) d\theta \quad (1.13)$$

onde $\delta(\Delta y) = [\sin(\theta), \sin(2\theta), \dots, \sin(N\theta), \cos(\theta), \cos(2\theta), \dots, \cos(N\theta)]^T$.

Definindo o vetor das amplitudes da resposta e de seus incrementos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N]^T \\ \Delta \mathbf{A} &= [\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_N, \Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_N]^T \end{aligned} \quad (1.14)$$

podemos reescrever equação 1.10 como um sistema de $2N$ equações na seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \mathbf{C}\{\Delta \mathbf{A}\} = \{\mathbf{R}\} + \Delta\eta\{\mathbf{Q}\} + \{\Delta \mathbf{F}\}\mathbf{P} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{(2N,2N)} \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{(2N,1)} \end{array} \quad (1.15)$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{C}_{ab} \\ \mathbf{C}_{ba} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \\ \mathbf{R}_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a \\ \mathbf{Q}_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

com suas expressões em termos dos parâmetros do sistema e da excitação dadas pelas expressões 1.17 a 1.24, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e os índices i e j variam de 1 até N :

$$[\mathbf{C}_{aa}]_{ij} = \pi(1 - j^2\eta_0^2)\delta_{ij} + \int_0^{2\pi} [2\delta(\dot{y}_0)j \cos(j\theta) \sin(i\theta)] d\theta \quad (1.17)$$

$$[\mathbf{C}_{ab}]_{ij} = -2\pi\xi\eta_0j\delta_{ij} - \int_0^{2\pi} [2\delta(\dot{y}_0)j \sin(j\theta) \sin(i\theta)] d\theta \quad (1.18)$$

$$[\mathbf{C}_{ba}]_{ij} = -2\pi\xi\eta_0j\delta_{ij} - \int_0^{2\pi} [2\delta(\dot{y}_0)j \cos(j\theta) \cos(i\theta)] d\theta \quad (1.19)$$

$$[\mathbf{C}_{bb}]_{ij} = \pi(1 - j^2\eta_0^2)\delta_{ij} + \int_0^{2\pi} [2\delta(\dot{y}_0)j \sin(j\theta) \cos(i\theta)] d\theta \quad (1.20)$$

$$\mathbf{R}_{ai} = -\pi \left[(1 - i^2 \eta_0^2) a_i - i 2 \xi \eta_0 b_i \right] - \int_0^{2\pi} [\text{Sgn}(\dot{y}_0) \sin(j\theta)] d\theta \quad (1.21)$$

$$\mathbf{R}_{bi} = -\pi \left[(1 - i^2 \eta_0^2) b_i + i 2 \xi \eta_0 a_i \right] - \int_0^{2\pi} [\text{Sgn}(\dot{y}_0) \cos(j\theta)] d\theta \quad (1.22)$$

$$\mathbf{Q}_{ai} = 2\pi i (i \eta_0 a_i + \xi b_i) \quad \mathbf{Q}_{bi} = 2\pi i (i \eta_0 b_i - \xi a_i) \quad (1.23)$$

$$\mathbf{P}_{ai} = 0 \quad \mathbf{P}_{bi} = \pi \delta_{1i} \quad (1.24)$$

O trabalho maior surge devido aos termos não lineares presentes nos integrandos das equações anteriores, pois sua resolução exige o conhecimento de zeros de funções transcendentais. Um algoritmo pode ser usado para a localização destes zeros dentro do período de integração⁷. Diferentemente da solução exata no domínio do tempo, não é necessária aqui a solução durante longo intervalo de tempo para que o estado estacionário seja alcançado.

Algumas opções são possíveis para a obtenção da curva de resposta em frequência, a saber:

- Manter F_0 constante, incrementar η e obter o vetor das amplitudes
- Manter F_0 constante, fixar a amplitude e obter a frequência correspondente. A amplitude será incrementada.

A primeira escolha é em geral preferida. Neste caso temos $\Delta\eta = 0$ e $\Delta F = 0$ e o sistema a ser resolvido a cada passo é:

$$\mathbf{C}\{\Delta\mathbf{A}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (1.25)$$

Podemos obter o vetor de amplitudes aplicando o seguinte procedimento iterativo até que $\{\Delta\mathbf{A}\}^{k+1}$ seja menor que a tolerância estabelecida:

$$\mathbf{C}^k \{\Delta\mathbf{A}\}^{k+1} = \mathbf{R}^k \quad \{\mathbf{A}\}^{k+1} = \{\mathbf{A}\}^k + \{\Delta\mathbf{A}\}^{k+1} \quad (1.26)$$

Algumas observações sobre o cálculo dos termos não lineares são importantes. Se N harmônicos são considerados para a computação da resposta, o número máximo de raízes de \dot{y} que existirão num período será $2(2N - 1)$ [Pierre-85]. Representando estas raízes por $[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{M+1}]$ e por s_{m+1} o sinal de \dot{y} nos intervalos $\{[\theta_0, \theta_1], \dots, [\theta_M, \theta_{M+1}]\}$, onde $\theta_0 = 0$ e $\theta_{M+1} = 2\pi$, os termos não lineares das equações 1.21 e 1.22, representadas pelas integrais

⁷Os métodos da bissetão e da secante tem sido aplicados.

nelas presentes, podem ser escritos como (note que em cada intervalo a função $\text{Sgn}(\dot{y})$ é conhecida):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ai}^{NL} &= \sum_{m=0}^M s_{m+1} \frac{1}{i} [\cos(i\theta_{m+1}) - \cos(i\theta_m)] \\ \mathbf{R}_{bi}^{NL} &= \sum_{m=0}^M s_{m+1} \frac{1}{i} [\sin(i\theta_m) - \sin(i\theta_{m+1})] \end{aligned} \quad (1.27)$$

Devido à função delta de Dirac, os termos não lineares das equações 1.17 a 1.20 podem ser simplificados. Vejamos que apenas os instantes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ contribuirão para a integral. Podemos escrevê-los como (o superscrito NL indica não linear):

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{au}]_{ij}^{NL} &= \sum_{m=1}^M [2j \cos(j\theta) \sin(i\theta)] \frac{1}{|\ddot{y}(\theta_m)|} \\ [\mathbf{C}_{ab}]_{ij}^{NL} &= \sum_{m=1}^M [2j \sin(j\theta) \sin(i\theta)] \frac{1}{|\ddot{y}(\theta_m)|} \\ [\mathbf{C}_{ba}]_{ij}^{NL} &= \sum_{m=1}^M [2j \cos(j\theta) \cos(i\theta)] \frac{1}{|\ddot{y}(\theta_m)|} \\ [\mathbf{C}_{bb}]_{ij}^{NL} &= \sum_{m=1}^M [2j \sin(j\theta) \cos(i\theta)] \frac{1}{|\ddot{y}(\theta_m)|} \end{aligned} \quad (1.28)$$

As vantagens do método do balanço harmônico incremental são:

- Se a resposta do sistema é periódica ou quase periódica, uma boa aproximação pode ser sempre obtida pela consideração de vários harmônicos na equação 1.12. Dados experimentais podem sugerir ou confirmar a periodicidade da resposta.
- O acoplamento com o método de Galerkin, que em geral é utilizado, faz com que apenas um período seja estudado, evitando a integração ao longo de um grande intervalo de tempo. Trabalha-se com a resposta estacionária. Isto é muito importante para análises no domínio da frequência.
- Em se tratando de sistemas amortecidos com atrito seco, este tem sido o único método que tem apresentado, não obstante o trabalho computacional que possa envolver, um procedimento para a obtenção da resposta sem o trabalho de obtê-la exata no domínio do tempo.

Como desvantagens relacionamos:

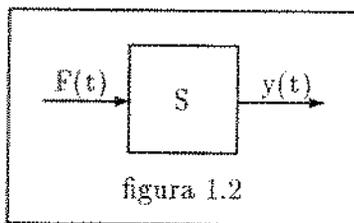
- Quando o número de harmônicos considerados cresce, o trabalho computacional envolvido é muito grande.
- O trabalho computacional eleva-se muito mais se o número de graus de liberdade cresce. Em geral, resolver um sistema de 2 graus de liberdade levando em conta N harmônicos

corresponde computacional e matematicamente à resolução de um sistema de 1 grau de liberdade com $2N$ harmônicos, a menos da precisão obtida, que será maior no sistema de um grau, pois a aproximação é melhor.

- Em se tratando de problemas envolvendo atrito seco, a necessidade de encontrar raízes de funções transcendentais eleva muito o trabalho computacional.
- Em se tratando de sistemas com atrito seco, o procedimento não é sistemático, isto é, tem de ser adaptado para a configuração particular do sistema mecânico em estudo, de acordo com atuação da força de atrito.

1.3.2 Operadores de Volterra

Relembrando o conceito dado na introdução, consideremos um sistema genérico S em cuja entrada atua a excitação $F(t)$ e cuja saída é a resposta $y(t)$ (figura 1.2).



Se o sistema S é invariante no tempo satisfazendo a determinadas restrições, mostra-se que a relação entre a saída $y(t)$ e a entrada $F(t)$ pode ser expressa pela seguinte série [Schetzen-89]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) F(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) F(t - \tau_1) F(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) F(t - \tau_1) F(t - \tau_2) \dots F(t - \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (1.29)$$

que, numa forma mais compacta, torna-se

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n[F(t)] \quad (1.30)$$

$$H_n[F(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) F(t - \tau_1) F(t - \tau_2) \dots F(t - \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$$

onde $H_n[F(t)]$ representa o operador de Volterra de n -ésima ordem. Em 1.29, $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ representa o núcleo de Volterra de n -ésima ordem.

Sempre é interessante verificar o comportamento do sistema no domínio da frequência, razão pela qual é importante analisar os operadores $H[e^{j\omega t}]$ ⁸. Para este tipo de excitação

⁸ j é a unidade complexa.

temos que

$$H_n[Ae^{j\omega t}] = A^n e^{jn\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) e^{-j\tau_1} e^{-j\tau_2} \dots e^{-j\tau_n} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (1.31)$$

A integral da equação 1.31 depende apenas da frequência, da ordem do operador e das características do sistema. Representando-a por $H_n(jn\omega)$ temos

$$H_n[Ae^{j\omega t}] = A_n H_n(jn\omega) e^{jn\omega t} \quad (1.32)$$

Outra propriedade interessante dos operadores de Volterra é que eles não operam isoladamente sobre cada entrada, exceto o operador de primeira ordem.

Além da invariância no tempo, destacamos duas restrições a serem satisfeitas pelo sistema para que a resposta deste possa ser representada pela série de Volterra, a saber:

- os coeficientes das equações que regem o sistema devem ser funções analíticas de seus parâmetros [Brockert-76] [Lesiak-81].
- a resposta do sistema, e conseqüentemente a excitação, deve ser limitada [Lawrence-78].

A primeira das restrições aqui relacionadas exclui os sistemas amortecidos por atrito seco da classe de sistemas que podem ser estudados via série de Volterra. A idéia de estudar as equações lineares em cada intervalo também encontra restrições devido ao fato de a série da equação 1.29 representar a resposta do sistema com condições iniciais nulas, o que não ocorre quando há mudança de intervalo.

A grande vantagem dos operadores de Volterra é que, uma vez que eles possam ser sintetizados⁹, eles fornecem muitas informações sobre o sistema. Detalhes, limitações, aplicações e dificuldades no uso dos operadores de Volterra são discutidos em [Schetzen-89].

1.3.3 Método das Formas Normais

A existência de modos normais na solução de sistemas de equações diferenciais lineares é assunto extensivamente conhecido. Sabe-se que a resposta de um sistema mecânico linear a uma entrada periódica é dada pela superposição de todos os modos de vibrar do sistema em questão, os quais são, na verdade, características do sistema livre.

⁹Entende-se por sintetização de um operador a obtenção de uma relação entre o operador e os parâmetros do sistema.

A existência de modos normais não lineares tem sido investigada por diversos autores [Jezequel-91][Hsu-83][Beek-89]. Não nos estenderemos sobre este método. A conclusão sobre sua aplicabilidade a sistemas com atrito seco é direta a partir do teorema de Poincaré, pela exigência de analiticidade das funções. Não se conhece uma extensão deste teorema para o caso de funções não analíticas.

Teorema de Poincaré

Seja o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_i = \phi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$$

onde ϕ_i são funções analíticas das coordenadas do vetor \mathbf{x} . Se

- Todos os autovalores λ_i ($i = 1 \dots N$, onde N é a ordem do sistema) da parte linear do sistema forem distintos,
 - Existir uma linha que passa pela origem do plano complexo tal que todos os λ_i estejam do mesmo lado desta linha e
 - A parte linear do sistema for diagonalizável, isto é, exista uma transformação linear que, quando aplicada sobre o sistema, resulte numa parte linear diagonal,
- então existe uma transformação $x_i = \zeta_i(\mathbf{y})$ analítica em $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, com $x_i(0) = 0$, que leva o sistema para

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum_{\Lambda Q} G_{i\Lambda} y^\Lambda$$

1.3.4 Comentários Gerais sobre Sistemas Amortecidos com Atrito Seco

A ausência de um método sistemático que possa ser aplicado ao estudo de sistemas equacionados por intervalos é, sem dúvida, a principal dificuldade enfrentada na análise destes sistemas.

Não é sem motivo que a literatura tem apresentado soluções para a curva de resposta em frequência apenas para casos de poucos graus de liberdade (até 2). A apresentação de soluções analíticas restringe-se, até hoje, a um sistema particular de 1 grau de liberdade (vide figura 1.3-a) [Hartog-31], a este mesmo sistema excitado pela base [Marui-84] e à solução de Yeh [Yeh-66] para um sistema particular de 2 graus de liberdade. Mesmo assim, as soluções obtidas têm sua validade restrita a uma faixa de frequência apenas, onde não ocorrem movimentos sem aderência.

A aplicabilidade dos operadores de Volterra e da teoria das formas normais, discutida nas subseções 1.3.2 e 1.3.3, pode ser estendida a outros métodos mais tradicionais, tais como [Hess-86][Nayfeh-73][Schmidt-86]:

- método da média
- métodos das expansões assintóticas
- método das múltiplas escalas de tempo.

A dificuldade no desenvolvimento de soluções analíticas pode ser vista pela comparação dos dois sistemas da figura 1.3. A figura 1.3-a corresponde ao sistema estudado por Den Hartog e a solução para sua curva de resposta em frequência é apresentada no próximo capítulo. A presença de mais uma rigidez não tem permitido a obtenção de uma solução semelhante.

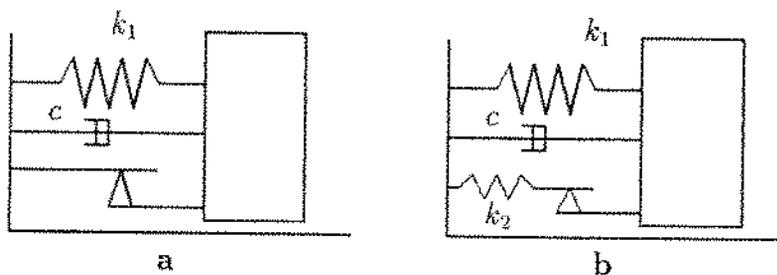


Figura 1.3[a - b] - Configurações de sistemas de 1 grau de liberdade

Além das dificuldades no estudo analítico, a implementação de métodos computacionais tem enfrentado o problema do tempo de processamento. A solução exata no domínio do tempo para posterior obtenção da curva de resposta em frequência envolve tempos de processamento excessivamente grandes, sobretudo se o número de graus de liberdade cresce. Métodos de balanço harmônico, como o apresentado na subseção 1.3.1 têm sido empregados para a obtenção da curva de resposta em frequência para sistemas com poucos graus de liberdade [Pierre-85] [Ferri-88] e soluções aproximadas para sistemas contínuos particulares [Wang-91] [Ferri-92].

Somam-se às dificuldades citadas outros fatores também importantes no modelamento dos problemas que envolvem atrito seco, tais como:

- A natureza das forças de contato.
- A repetibilidade dos fenômenos (que, em geral, é pequena)
- A maneira como um elemento não linear age no sistema é de muita importância para sua resposta. Em se tratando de atrito seco, Ferri [Ferri-92] apresenta como a localização da força de atrito altera a resposta do sistema.
- A reversibilidade ou irreversibilidade da força de atrito com relação à velocidade. Uma

discussão sobre esta questão é encontrada em [Powell-92].

Experimentos têm mostrado que a natureza das forças de contato é de natureza não linear, dependendo, entre outros parâmetros, das rigidezes dos corpos envolvidos. A não existência de solução para determinados problemas é discutida em [Klarbring-90]. A menos que avançados meios de sensoramento sejam empregados, é possível que a resposta medida seja de muito pouco valor para o estudo de alguns problemas envolvendo atrito seco [Stelzer-90]. Movimentos caóticos são previstos quando se considera a natureza não linear do coeficiente de atrito [Stelzer-90] [Narayanan-91].

A identificação de parâmetros é, sem dúvida, um campo ainda pouco explorado face à inexistência de uma metodologia para o estudo destes sistemas, tanto no domínio do tempo como, principalmente, no domínio da frequência. Uma discussão sobre o uso dos operadores de Volterra para este fim é iniciada em [Tomlinson-91]. Observadores de estado podem ser utilizados para facilitar a exploração de determinadas características das equações que regem o sistema (tais como linearidade e analiticidade) em cada intervalo [Chen-84] [Stelzer-90]. No caso de identificação, entretanto, o uso de excitação randômica, pode resultar procedimentos que sejam mais adequados aos sistemas equacionados por intervalos [Schetzen-89].

Capítulo 2

Sistemas de 1 e 2 Graus de Liberdade com Atrito Viscoso/Coulomb

2.1 Sistema de 1 grau de liberdade - Discussão de Resultados

Vários autores apresentam estudos sobre sistemas amortecidos por atrito seco com 1 ou poucos graus de liberdade para análise dos fenômenos que ocorrem em escoamento de fluidos, guias de máquinas, usinagem, atrito em estruturas, etc. . . ([Anderson-90][Cheng-89][Dowell-85][Dweib-90][Ferri-85][Kato-74][Marui-84][Oertel-89][Pratt-81][Wang-91]). Nesta seção pretendemos discutir apenas alguns resultados já estabelecidos para sistemas de 1 grau de liberdade e que servirão de apoio ao estudo de outros sistemas mais complexos. O sistema em vibração livre não será analisado aqui. O apêndice A apresenta as principais características da vibração livre do sistema de 1 grau de liberdade com amortecimento de Coulomb [Magnus-65], que podem servir como introdução para algumas características observadas no sistema forçado, tais como a região de aderência e o período de movimento.

O sistema em estudo está representado na figura 2.1 e a equação diferencial que rege seu movimento é ($x' = dx/dt$):

$$\begin{aligned} mx'' + cx' + kx + \mu_d N \text{Sgn}(x') &= F_0 \cos(\omega t) \\ |F_0 \cos(\omega t) - kx| &\geq \mu_s N \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\text{Sgn}(x') = \pm 1$ é a função sinal dependente da velocidade, se positiva ou negativa, respectivamente. μ_s e μ_d são os coeficientes de atrito estático e dinâmico.

É interessante discutir a restrição apresentada na equação 2.1. Em primeiro lugar devemos reparar que a equação 2.1 é válida apenas quando a velocidade é diferente de zero.

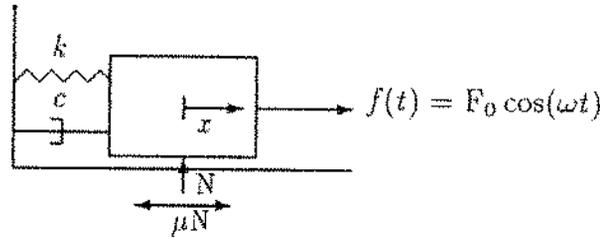


Figura 2.1: Sistema de 1 grau de liberdade com atrito viscoso/coulomb

Caso contrário a força de atrito não é dada por $\mu_d N \text{Sgn}(x')$. Deve-se notar que, quando a velocidade é nula, a tendência primeira da força de atrito ao ser aplicada uma força externa é crescer em magnitude de forma que a força resultante sobre a massa m seja nula. Isto ocorre até certo limite, determinado pelo coeficiente de atrito estático μ_s e pela força normal N . Somente após atingir este limite é que existe força resultante para acelerar o corpo. Consideremos, por exemplo, um instante t_0 em que o corpo passa pela velocidade zero a partir de uma velocidade positiva. Sejam t_0^- e t_0^+ os instantes imediatamente antes e após t_0 . A força resultante F_r que atua sobre a massa m em cada um dos instantes é:

$$F_r^- = F_0 \cos(\omega t_0^-) - kx^- - \mu_d N$$

$$F_r^+ = F_0 \cos(\omega t_0^+) - kx^+ + F_{atr}$$

onde F_{atr} representa a força de atrito que age no instante t_0^+ . Devemos notar que, se $|F_0 \cos(\omega t_0^+) - kx^+| > |\mu_s N|$, então $F_{atr} = \mu_d N$. Neste caso, haverá uma força resultante sobre m capaz de acelerá-la. Caso contrário, ela permanecerá parada até que a força externa $F_0 \cos(\omega t)$ faça resultar F_r não nula. Notemos que a força de inércia não participa da restrição devido ao fato de esta força ser resultado da atuação das outras forças, resultado este consequência da força resultante F_r .

Identifica-se, portanto, no espaço onde se desenvolve o movimento, uma região na qual, passando por ela o sistema, não haverá condições para que o movimento continue sem uma interrupção. A esta região, que será identificada de maneira mais formal a seguir, chamamos região de aderência.

Trabalharemos com a equação 2.1 adimensionalizada. Definindo:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \eta = \frac{w}{w_0}, \quad y = \frac{k}{\mu_s N} x, \quad \beta = \frac{F_0}{\mu_s N}, \quad \mu = \mu_d / \mu_s \quad (2.2)$$

podemos escrever a equação 2.1 na seguinte forma ($\dot{y} = dy/d\tau$):

$$\ddot{y} + 2\xi\dot{y} + y + \mu\text{Sgn}(\dot{y}) = \beta \cos(\eta\tau) \quad (2.3)$$

onde $\text{Sgn}(\dot{y}) = \pm 1$, conforme $\text{Sgn}(x')$. Note-se que o sistema linear adimensionalizado de forma equivalente a esta possui frequência natural unitária.

A equação 2.1 é válida somente se $|F_0 \cos(\omega t) - kx| \geq \mu_s N$, o que implica que a equação 2.3 é válida somente para a região do espaço solução onde $|\beta \cos(\eta\tau) - y| \geq 1$. Fora desta região a velocidade e a aceleração serão nulas, até que $\cos(\eta\tau)$ tenha um valor tal que $|\beta \cos(\eta\tau) - y| \geq 1$. A região de aderência, análoga àquela definida para a equação não adimensional, pode ser definida formalmente como uma secção de Poincaré [Shaw-86][Holmes-90] dada por:

$$\Sigma = \{(y, \dot{y}, \tau) \mid \dot{y} = 0, |\beta \cos(\eta\tau) - y| < 1\} \in \mathbf{R} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{R} é o espaço solução do problema. A figura 2.2 mostra a secção de Poincaré Σ para dois movimentos, o segundo deles passando pela região de aderência. Nos gráficos apresentados nesta figura, a região de aderência apresenta-se hachurada, limitada pelas curvas $y = \beta \cos(\eta\tau) - 1$ e $y = \beta \cos(\eta\tau) + 1$. Note que para o movimento da figura à esquerda a velocidade nula é alcançada numa posição tal que a força elástica atuante logo após a mudança do sinal da velocidade é capaz de acelerar o sistema ($|\beta \cos(\eta\tau) - y| \geq 1$), o que não ocorre com o movimento da figura à direita.

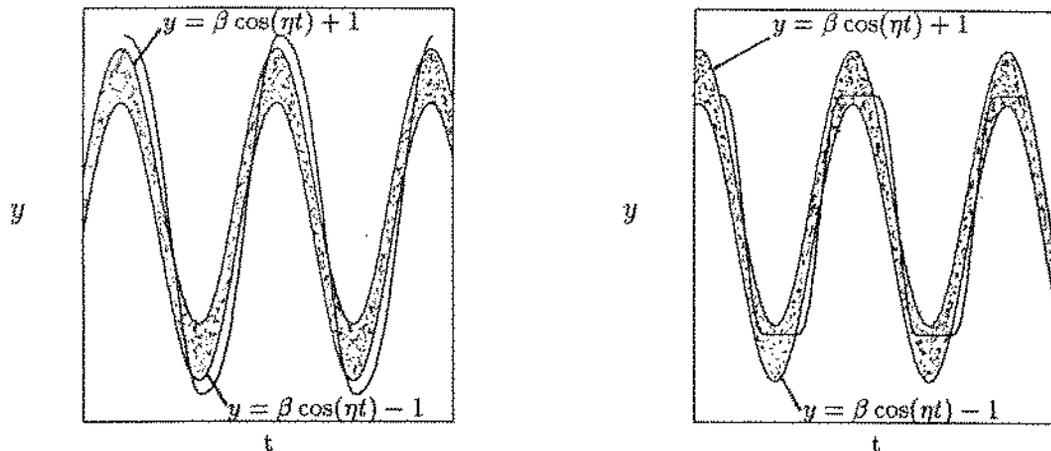


Figura 2.2: Região de aderência e dois tipos de movimento, um que passa por Σ e outro que não passa por Σ

É também importante introduzir alguns termos utilizados quando estudamos o sistema:

Parada ou Aderência: Ocorre quando o movimento passa pela região de aderência, isto é,

quando o sistema passa um intervalo finito de tempo estacionado numa posição até que a força externa crie condições para que ele se desloque.

Parada Permanente ou *Aderência Permanente*: Ocorre quando o sistema passa pela região de aderência e a força externa não consegue mais criar condições para que a força de atrito seja superada. No sistema em estudo, isto é possível quando $\beta \leq 1$.

Ponto de Retorno: Uma posição onde a velocidade passa de positiva para negativa ou vice-versa, independente de ter ou não o sistema passado pela região de aderência. Isto é equivalente a dizer que o sistema teve seu sentido de movimento invertido.

Pontos de Retorno Consecutivos: Duas posições consecutivas em que a velocidade nula foi atingida e que houve inversão no sentido do movimento, independente de o sistema ter ou não passado pela região de aderência. O termo consecutivo está associado ao tempo. Devemos reparar que entre dois pontos de retorno podem ocorrer pontos de velocidade nula, sem contudo ocorrer inversão do sentido de movimento.

Ponto de Retorno de Amplitude Máxima: Uma posição onde a velocidade passa de positiva para negativa ou vice-versa, independente de ter ou não o sistema passado pela região de aderência e que caracterize o máximo deslocamento (positivo ou negativo) do sistema, antes que ele passe novamente pela posição zero. Entre dois pontos de retorno de amplitude máxima pode ocorrer mais de um ponto de parada, inclusive pontos de retorno.

Estado Estacionário: A noção de estado estacionário está relacionada com a idéia de sistema assintoticamente estável. A simulação do sistema em estudo mostra que, para $\xi > 0$, ele é assintoticamente estável, isto é, a amplitude de seu movimento tende a um valor fixo. Além disto, o intervalo de tempo gasto entre dois pontos de retorno de amplitude máxima também tende a um valor fixo, que denominamos período do movimento, o qual, para o sistema aqui apresentado, é exatamente o valor do período da excitação. Quando não há alteração da amplitude dos pontos de retorno de amplitude máxima e o intervalo de tempo entre estes dois pontos de não se altera, está configurado o estado estacionário ou estado permanente de movimento.

Ciclo de Movimento: A noção de ciclo de movimento está relacionada com a noção de ponto de retorno e de estado estacionário. Um ciclo de movimento corresponde à trajetória do sistema durante um período, quando o estado estacionário já foi alcançado.

Uma vez dadas as definições, passamos à análise da equação 2.3. A solução exata de 2.3 num intervalo de tempo τ_i a τ_{i+1} escolhido de tal forma que $\dot{y}_i = \dot{y}(\tau_i) = 0$ é dada por [Shaw-86]:

$$y(\tau) = e^{[-\xi(\tau-\tau_i)]} \left\{ P_c \cos[\Omega(\tau - \tau_i)] + P_s \frac{\sin[\Omega(\tau - \tau_i)]}{\Omega} \right\} + \frac{\beta}{q} \cos[\eta\tau - \varepsilon] - \mu \text{Sgn}(\dot{y}) \quad (2.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} P_c &= y_i + \mu \text{Sgn}(\dot{y}) - \frac{\beta}{q} C_0 & P_s &= \xi y_i + \xi \mu \text{Sgn}(\dot{y}) + \frac{\beta}{q} \eta S_0 - \xi C_0 \\ C_0 &= \cos(\eta\tau_i - \varepsilon) & S_0 &= \sin(\eta\tau_i - \varepsilon) & \Omega^2 &= 1 - \xi^2 \\ q &= \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} & \tan(\varepsilon) &= \frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2} \end{aligned}$$

A simulação do sistema mostra que o movimento é periódico de mesma frequência da excitação quando o estado estacionário é alcançado. Consideremos inicialmente os movimentos que não passam pela região de aderência, isto é, movimentos que não permanecem na velocidade zero um intervalo finito de tempo. Den Hartog mostrou em [Hartog-31] que existe, quando se toma μ constante, uma solução fechada para a curva de resposta em frequência e Shaw [Shaw-86] estendeu esta solução ao caso de haver coeficientes de atrito estático e dinâmico diferentes. Denominaremos \bar{y} a amplitude do deslocamento y do sistema normalizado. A solução fechada da curva de resposta em frequência apresentada em [Hartog-31] [Shaw-86] e reproduzida no apêndice **B** mostra que a amplitude adimensional do deslocamento como função da frequência adimensional de excitação η , da amplitude adimensional da excitação β e dos parâmetros do sistema (ξ , Ω , μ) é dada por

$$\bar{y} = (-\mu\gamma_1) + [(\beta/q)^2 - (\mu\gamma_2)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\sinh(\xi\pi/\eta) - (\xi/\Omega) \sin(\pi\Omega/\eta)}{\cosh(\xi\pi/\eta) + \sin(\pi\Omega/\eta)} \quad \gamma_2 = \frac{\sin(\pi\Omega/\eta)}{\eta\Omega[\cosh(\xi\pi/\eta) + \sin(\pi\Omega/\eta)]} \quad (2.7)$$

A expressão 2.6 foi obtida pela imposição de que dois pontos de retorno consecutivos τ_i e τ_{i+1} têm entre si um intervalo de tempo de π/η e que $\dot{y} \neq 0$ neste intervalo. Isto implica que $y(\tau_i)$ e $y(\tau_{i+1})$ não podem estar na região de aderência, pois isto violaria a suposição anterior. Então deve ser observada, para que 2.6 seja aplicável, a condição $|\beta \cos(\eta\tau) - \bar{y}| \geq 1$, que pode ser reescrita como (veja Apêndice **B**):

$$\bar{y} \geq \frac{1 + (1 - \eta^2)\mu\gamma_1 + 2\xi\eta\mu\gamma_2}{\eta^2} \quad (2.8)$$

Um outro ponto importante a observar refere-se ao radicando da expressão 2.6, o qual pode assumir valores negativos em determinadas frequências. Isto ocorrerá somente fora da faixa de frequências para a qual a validade da expressão está garantida pelas restrições de natureza física presentes em 2.8 (também mostrado no apêndice B).

As figuras 2.3 e 2.4 apresentam, em linhas contínuas, curvas obtidas simulando o sistema para vários valores de β . O teste para a verificar se o estado estacionário foi estabelecido é feito pela comparação de dois pontos de retorno sucessivos. Neste caso, para a garantia desta condição, tomamos uma diferença inferior a 10^{-12} entre os módulos das posições nos dois instantes e exigimos que esta diferença se mantenha inferior ao valor estabelecido por 20 pontos de retorno consecutivos (9.5 ciclos de movimento). A figura 2.3 apresenta ainda, nas curvas pontuadas, os valores obtidos para a amplitude do movimento calculados pela expressão 2.6. Notam-se valores consoantes entre a simulação e a expressão 2.6. É interessante observar o desvio que ocorre entre os valores simulados e calculados para $\beta = 10/7$ e $\eta > 1.25$. Deve-se reparar que a condição de movimentos sem aderência, expressa pela curva LMA (Representação usada para Limite de Movimentos com Aderência), não é satisfeita nestes casos. A curva LMA refere-se à expressão 2.8 tomada com a igualdade e é a linha limite entre as regiões, no plano da curva de resposta em frequência, de movimentos com e sem aderência.

Detalhe importante que deve ser comentado refere-se à escala utilizada nas ordenadas dos gráficos das figuras 2.3 a 2.7. Veja que plotamos nestes gráficos curvas normalizadas pelo fator $1/\beta$, isto é, $(\bar{y}/\beta) \times \eta$, ou, correspondentemente, $(\bar{y}/\beta) \times \eta$ ou $(\bar{y}/\beta) \times \eta$. Preferimos representar desta forma, devido ao fato de a adimensionalização realizada gerar uma indeterminação para o parâmetro β quando o coeficiente de atrito é zero. Neste caso β tende ao infinito. Entretanto, a razão y/β e suas correspondentes tendem a um valor finito. Lembremos que realizar este reescalonamento pelo fator $1/\beta$ corresponde, na ausência de atrito, a uma adimensionalização dada pela definição de $y = (k/F_0)x^1$. Esta normalização é mais comum na prática. Entretanto, quando se considera a possibilidade de $\mu_s \neq \mu_d$, consideramos melhor a normalização aplicada neste estudo.

Na figura 2.4 cada pico da curva $\bar{y} \times \eta$ corresponde a movimentos com 2,4,6... paradas por ciclo, em geral, sendo maior o número de paradas quando a frequência diminui. Como veremos um pouco mais à frente, existem casos, ainda que poucos detectados durante a simulação, em que esta "regra" é quebrada.

¹Esta normalização ainda é vantajosa quando não se considera a possibilidade $\mu_s \neq \mu_d$.

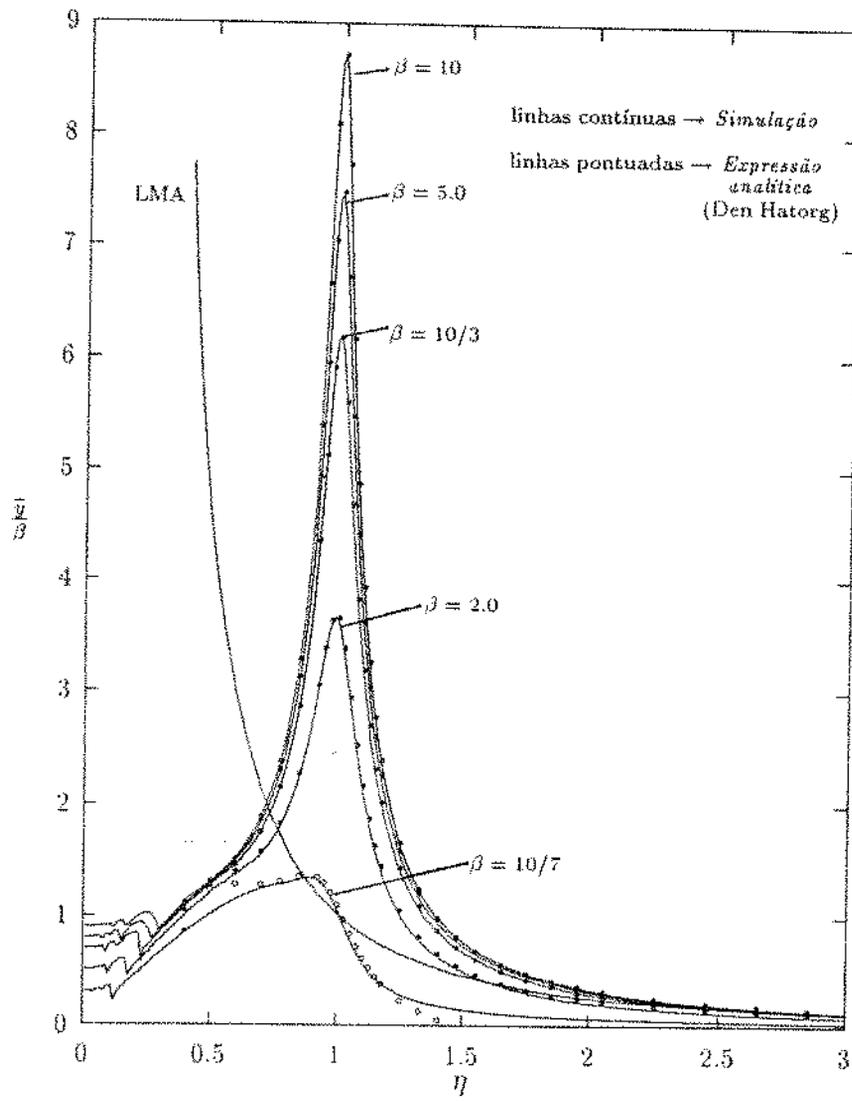


Figura 2.3: $(\bar{y}/\beta) \times \eta$ para diversos valores β . $\xi = 0.05$, $\mu = 1$

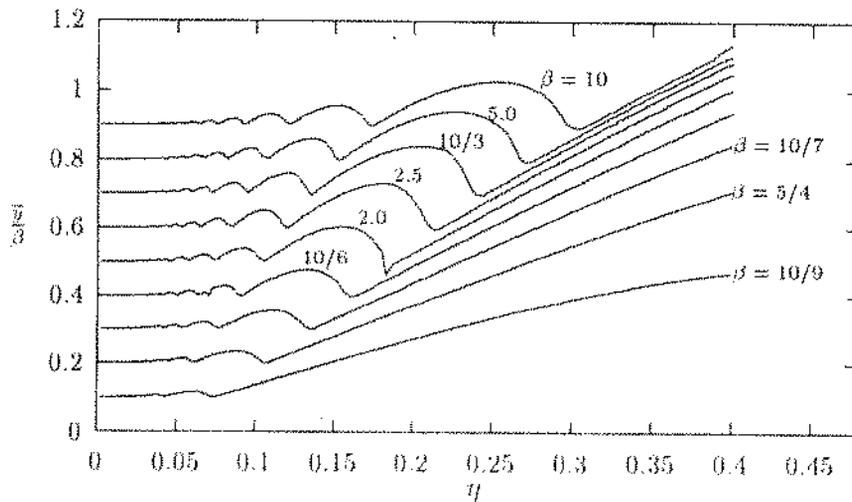


Figura 2.4: Idem figura 2.3 para $\eta \leq 0.4$

Marui & Kato [Marui-84] e Pratt & Williams [Pratt-81] concluíram, no estudo realizado com seus sistemas, que o número de paradas cresce quando a frequência da excitação decresce. Movimentos com determinadas frequências que apresentam número de paradas inferior ao de movimentos de frequência mais alta têm sido encontrados neste estudo, como apresentam as figuras 2.5 e 2.6. Notemos que a frequência de excitação é maior para o caso plotado em 2.5 (4 paradas por ciclo). Devemos recordar que a frequência da resposta, quando o estado estacionário é alcançado, é a mesma da excitação. Baseados nos resultados da simulação, podemos admitir, contudo, que a conclusão apresentada por aqueles autores é, de forma geral, verdadeira.

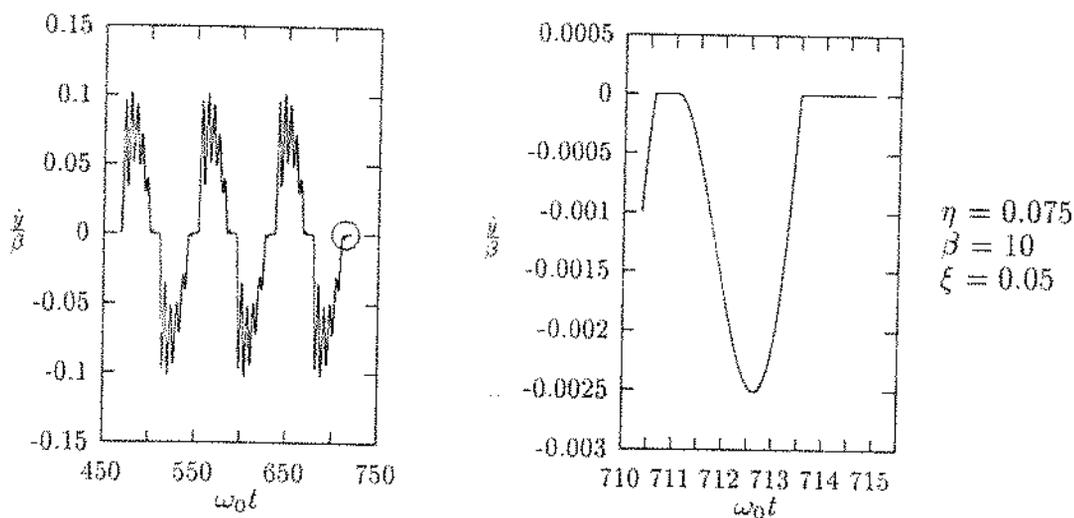


Figura 2.5: a - Movimento com 4 paradas por ciclo b - Ampliação da região marcada

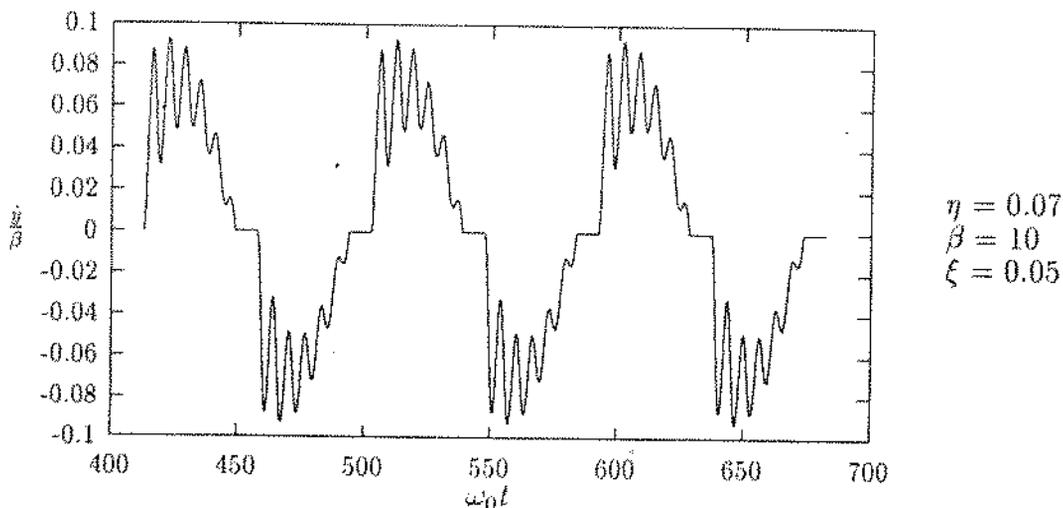


Figura 2.6: Movimento com 2 paradas por ciclo - \dot{y}/β

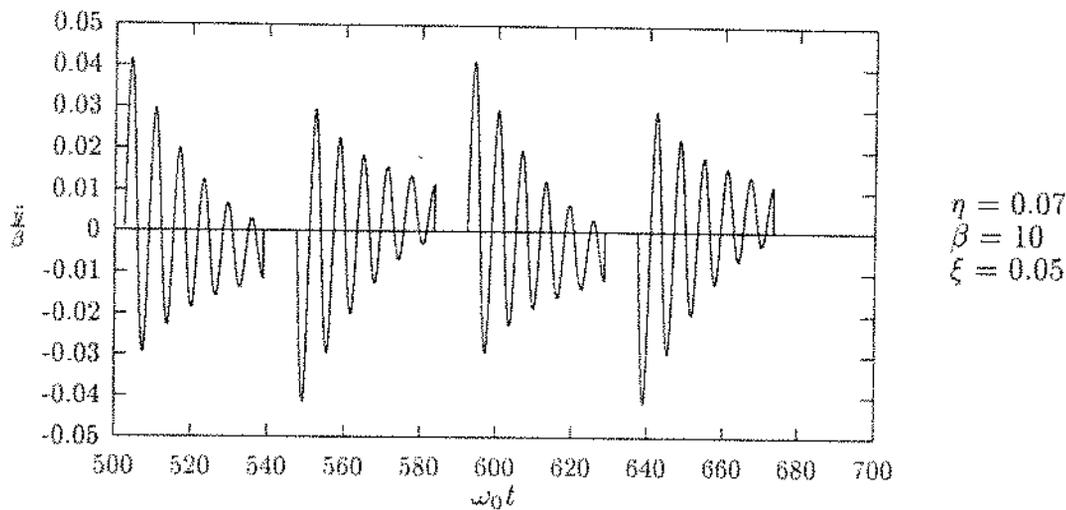


Figura 2.7: Movimento com 2 paradas por ciclo - \ddot{y}/β

A figura 2.7 mostra o comportamento da aceleração do sistema para as mesmas condições apresentadas na figura 2.6. A descontinuidade que ocorre na aceleração deve-se à subita inversão do sentido da força de atrito quando o sistema tenta passar da velocidade positiva para negativa e vice-versa. Note que, embora a aceleração seja diferente de zero quando o sistema se aproxima de um estado em que a velocidade é nula, a mudança de sentido da força de atrito provoca o surgimento instantâneo de uma nova resultante de magnitude finitamente diferente da resultante que havia num estado imediatamente anterior. Isto sempre ocorre quando o sistema passa pela velocidade zero. Não podemos esquecer, todavia, a natureza da força de atrito. A força de atrito só é igual a $\mu_d N$ se a resultante criada pelas forças externa e elástica for maior que $\mu_s N$. No caso do movimento apresentado na figura 2.6 isto não ocorre logo após o sistema alcançar a velocidade nula. Neste caso, a força de atrito será igual em módulo e de sentido oposto à resultante criada pelas forças externa e elástica, fenômeno que persistirá até que estas forças possam gerar uma resultante que ultrapasse, em módulo, a força de atrito estática. É por isto que, na região de aderência temos velocidade e aceleração nulas.

O sistema é estável em todas as frequências para $\xi > 0$. Movimentos instáveis podem ocorrer quando $\xi < 0$, levando à existência de movimentos aperiódicos, dependendo da combinação de parâmetros ξ , β e η [Shaw-86]. Estes movimentos não são analisados aqui. Ressalta-se que a existência destes movimentos não pode ser detectada por nenhuma expressão no domínio da frequência.

Dois tipos de instabilidade podem ocorrer. Note, por exemplo, que, para $\xi = 0$, o termo β/q das expressões 2.1 ou 2.1 tende ao infinito quando η tende à unidade. Neste caso, o sistema é levado, teoricamente, à destruição. Outro tipo de instabilidade refere-se a

ocorrência de bifurcações quando os parâmetro ξ e μ são variados, levando à existência de mais de uma amplitude para o movimento [Shaw-86]. Na prática, não se poderia determinar, *a priori*, com que amplitude o sistema vibraria. Isto, no entanto, só ocorre para $\xi < 0$. Deve-se observar também o fato de o termo γ_2 tender ao infinito quando $\xi = 0$ e $\eta \rightarrow 2/3$. Ressalva-se, todavia, que para este conjunto de parâmetros o sistema possui movimento com aderência, de forma que a expressão 2.6 não pode ser usada na computação da amplitude \bar{y} . O sistema é estável nestas condições.

2.2 Sistema de 2 Graus de Liberdade

Nesta seção estudamos sistemas de dois graus de liberdade. Também aqui, a exemplo do que ocorreu na primeira seção, procuramos estudar o sistema em termos de parâmetros adimensionais. Como falamos na introdução, sistemas não lineares não têm ainda estabelecida uma teoria geral e completa. Por isto mesmo, na grande maioria das vezes, tomam-se casos particulares para análise e, a partir destes casos, tenta-se inferir características de determinadas classes de sistemas. Este estudo não é uma excessão. A fim de não aumentar a quantidade de parâmetros adimensionais no problema, temos estudado apenas os sistemas cujo amortecimento viscoso é do tipo proporcional. isto é, a matriz amortecimento é proporcional às matrizes massa e rigidez. Além disto, as matrizes massa e rigidez aqui utilizadas possuem a configuração particular de um sistema desacoplado inercialmente, que é uma característica dos sistemas com parâmetros concentrados (isto não é, de fato, uma particularização) e cuja restituição elástica é dada apenas por duas molas particularmente posicionadas (figuras 2.12 e 2.18). Ainda assim, as simulações são feitas para casos particulares de determinados parâmetros. Sabe-se, todavia, que a topologia do sistema não é afetada pela variação destes parâmetros.

Dois modelos são apresentados nesta seção, cada um deles correspondendo às subseções 2.2.2 e 2.2.3. A subseção 2.2.1 não se refere ao assunto atrito seco, mas é usada para introduzir algumas relações que serão utilizadas nas subseções seguintes. Assim, o leitor não deve estranhar uma pequena quebra na sequência do assunto, pois os resultados obtidos em 2.2.1 serão oportunamente utilizados, e isto não vai tardar.

A utilização dos dois modelos apresentados em 2.2.2 e 2.2.3 visa à análise de como o “*modo de atuação*” do atrito no sistema influencia sua resposta em frequência. Estamos cientes de que os casos são particulares, mas estamos igualmente cientes de que os modelos podem ser usados para representar (aproximadamente) sistemas reais.

2.2.1 Sistema Linear como um Absorvedor de Vibrações

O objetivo desta subseção é apresentar, de forma sucinta, alguns desenvolvimentos analíticos referentes aos absorvedores dinâmicos de vibração. Fazemos isso agora porque utilizaremos os resultados desta subseção para justificar as relações entre parâmetros do sistema linear usados nas simulações das próximas subseções. Não é difícil enxergar que o sistema linear de dois graus de liberdade pode ser utilizado como modelo para um absorvedor dinâmico de vibrações. Como sabemos, os absorvedores dinâmicos funcionam bem apenas em torno de determinada frequência, a qual depende das relações entre os parâmetros de massa e rigidez do sistema utilizado. Den Hartog [Hartog-72] desenvolveu expressões analíticas que dizem respeito às características dos absorvedores dinâmicos, e os modelos por ele analisados serão comparados com os modelos estudados nas duas próximas subseções para que possamos fazer uma comparação do sistemas de 2 graus de liberdade com atrito seco e estes absorvedores.

A figuras 2.8 apresenta os modelos que serão analisados nas subseções seguintes e a figura 2.9 apresenta os modelos utilizados por [Hartog-72] para o estudo dos absorvedores dinâmicos.

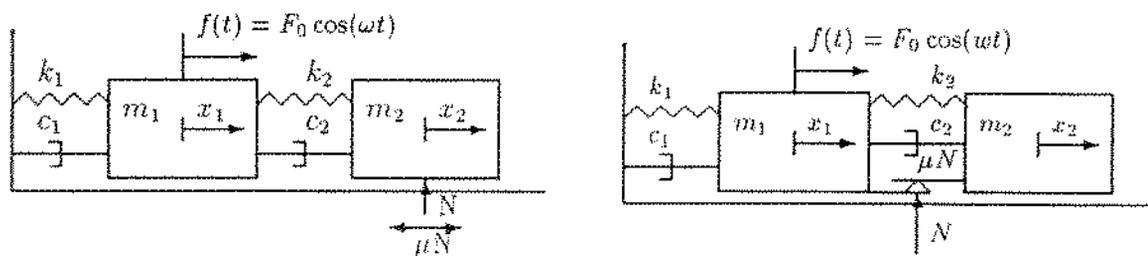


Figura 2.8: Sistemas de 2 gl analisados em 2.2.2 e 2.2.3

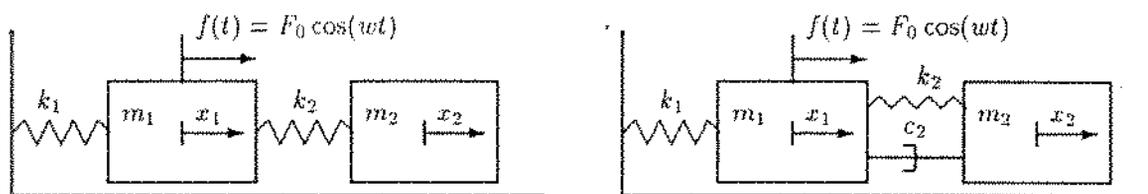


Figura 2.9: Sistemas de 2 gl analisados em [Hartog-72]

Podemos notar que a única diferença entre os modelos que serão analisados e os modelos apresentados em [Hartog-72] é a presença do amortecedor que atua apenas na coordenada x_1 . Utilizaremos um procedimento semelhante ao de Den Hartog para encontrar relações entre os parâmetros da parte linear do sistema de 2 graus de liberdade de 2.8 que

minimizem a amplitude de vibração da coordenada x_1 , uma vez que estaremos interessados em comparar nosso sistema não linear com o absorvedor.

Embora não sigamos a mesma simbologia de Den Hartog, apresentamos a seguir um conjunto de definições por ele utilizados:

- Sistema principal: Sistema formado pela massa m_1 , pela mola k_1 e, nos sistemas deste trabalho, pelo amortecedor c_1 .
- Sistema secundário: Sistema formado pela massa m_2 , pela mola k_2 e pelo amortecedor c_2 .
- Frequência natural do sistema principal: $\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1}$.
- Frequência natural do sistema secundário: $\omega_s = \sqrt{k_2/m_2}$.
- Razão de massas: $\epsilon_m = m_2/m_1$.
- Razão de rigidezes: $\epsilon_k = k_2/k_1$.
- Razão de amortecimentos: $\epsilon_c = c_2/c_1$. Esta relação só é válida porque supomos amortecimento proporcional.

Tomando a parte linear dos sistemas apresentados na figura 2.8 e escrevendo as equações de movimentos das massa m_1 e m_2 como ($x' = dx/dt$):

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + (c_1 + c_2)x_1' - c_2 x_2' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= f(t) = F_0 \cos(\omega t) \\ m_2 x_2'' - c_2 x_1' + c_2 x_2' - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podemos escrever as equações 2.9 numa forma adimensional. Definimos

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \xi_0 = \frac{c}{2\sqrt{k_1 m_1}}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{k}{F_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Desta maneira as equações 2.9 podem ser reformuladas para ($\dot{y} = dy/d\tau$):

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\xi_0(1 + \epsilon_k)\dot{y}_1 - 2\epsilon_k\xi_0\dot{y}_2 + (1 + \epsilon_k)y_1 - \epsilon_k y_2 &= f(\tau) = \cos(\eta\tau) \\ \epsilon_m \ddot{y}_2 - 2\xi_0\epsilon_k\dot{y}_1 + 2\xi_0\epsilon_k\dot{y}_2 - \epsilon_k y_1 + \epsilon_k y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

A adimensionalização realizada nas subseções seguintes é diferente da realizada aqui. Isto ocorre porque a adimensionalização com que trabalhamos nos sistemas com atrito seco não é aplicável quando se considera o sistema sem atrito seco. Todavia este detalhe não muda as conclusões que tiramos daqui.

Considerando movimento harmônico, podemos escrever os deslocamentos y_1 e y_2 como quantidades complexas e obter equações correspondentes no domínio da frequência, a saber:

$$\begin{aligned} [-\eta^2 + 2\xi_0(1 + \epsilon_k)\eta J + (1 + \epsilon_k)]y_1 + [-2\epsilon_k\xi_0\eta J - \epsilon_k]y_2 &= 1 \\ [-2\xi_0\epsilon_k\eta J - \epsilon_k]y_1 + [-\epsilon_m\eta^2 + 2\xi_0\epsilon_k\eta J + \epsilon_k]y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Deve-se reparar que o fato de escrevermos as respostas y_1 e y_2 no domínio da frequência apresentando apenas uma frequência para as duas coordenadas é consequência de haver apenas uma frequência na excitação $f(\tau)$. Podemos obter, a partir 2.12 uma expressão para as amplitudes das coordenadas y_1 e y_2 em função dos parâmetros η , ϵ_m , ϵ_k e ξ_0 . Para y_1 podemos escrever:

$$y_1 = \frac{[\epsilon_k - \epsilon_m\eta^2] + J[2\epsilon_k\xi_0\eta]}{[-(\epsilon_k + \epsilon_m + \epsilon_k\epsilon_m)\eta^2 + \epsilon_m\eta^2(\eta^2 - 4\epsilon_k\xi_0^2) + \epsilon_k] + J[-(2\epsilon_k + 2\epsilon_m + 2\epsilon_k\epsilon_m)\eta^3\xi_0 + 4\epsilon_k\eta\xi_0]} \quad (2.13)$$

Computando a amplitude de y_1 , que chamaremos \bar{y}_1 , temos:

$$\bar{y}_1^2 = \frac{[\epsilon_k - \epsilon_m\eta^2]^2 + [2\epsilon_k\xi_0\eta]^2}{[(4\epsilon_k\xi_0^2\eta^2 + \epsilon_m\epsilon_k\eta^2) - (1 - \eta^2)(\epsilon_k - \epsilon_m\eta^2)]^2 + [2\xi_0\eta(2\epsilon_k - \epsilon_k\eta^2 - \epsilon_m\eta^2 - \epsilon_m\epsilon_k\eta^2)]^2} \quad (2.14)$$

Podemos escrever a frequência natural do absorvedor no sistema adimensionalizado como $\omega_a = \sqrt{\epsilon_k/\epsilon_m}$ e então reescrevemos 2.14 na forma:

$$\bar{y}_1^2 = \frac{[1 - (\eta/\omega_a)^2]^2 + [2\xi_0\eta]^2}{[(4\xi_0^2\eta^2 + \epsilon_m\eta^2) - (1 - \eta^2)(1 - (\eta/\omega_a)^2)]^2 + [2\xi_0\eta(2 - \eta^2 - (\eta/\omega_a)^2 - \epsilon_m\eta^2)]^2} \quad (2.15)$$

A figura 2.10 apresenta curvas para \bar{y}_1 em $\eta = [1 - \xi_0^2]^{(1/2)}$ para vários valores de ξ_0 . O valor de ϵ_m usado é 0.1. Podemos notar que a amplitude mínima ocorre quando a frequência natural do absorvedor está próxima da frequência natural do sistema principal (neste caso, $\epsilon_k = 0.1$). Podemos seguramente tomar $\epsilon_k = 0.1$ para o nosso estudo. É possível, contudo, apresentar uma expressão fechada para a frequência ω_a que minimiza a amplitude \bar{y}_1 em termos de ϵ_m e ξ_0 .

Consideremos a expressão 2.15. Tomando a derivada com relação a ω_a temos:

$$\frac{d}{d\omega_a} [\bar{y}_1^2] = \frac{f_1(\omega_a)}{f_2(\omega_a)} \quad (2.16)$$

onde

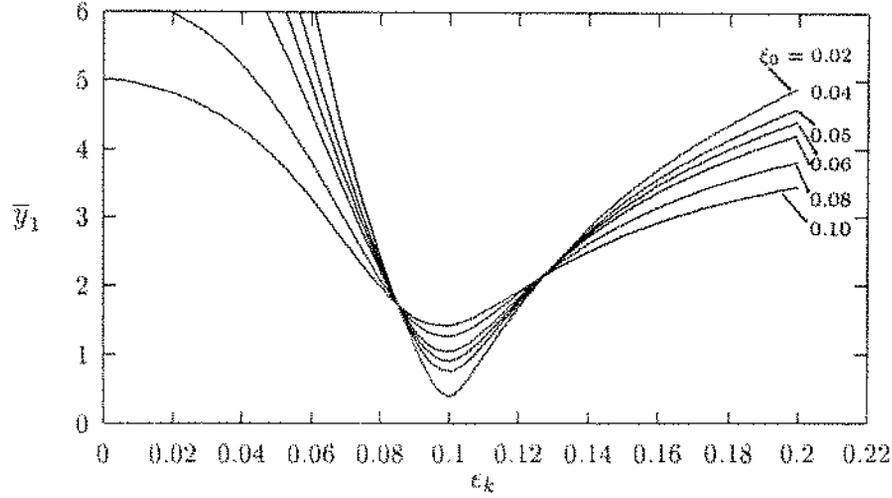


Figura 2.10: \bar{y}_1 versus ϵ_k em $\eta = [1 - \xi_0^2]^{(1/2)}$, $\epsilon_m = 0.1$.

$$\begin{aligned}
 f_1(\omega_a) = & 4\epsilon_m\eta^4 [-\eta^4 + \eta^6 + 2\eta^2\omega_a^2 - 2\eta^4\omega_a^2 - \omega_a^4 + \eta^2\omega_a^4 + \\
 & \epsilon_m\eta^2\omega_a^4 - 4\eta^6\xi_0^2 + 8\eta^4\omega_a^2\xi_0^2 - 8\eta^6\omega_a^2\xi_0^2 - 4\epsilon_m\eta^6\omega_a^2\xi_0^2 + \\
 & + 4\eta^4\omega_a^4\xi_0^2 + 4\epsilon_m\eta^4\omega_a^4\xi_0^2 + 16\eta^4\omega_a^4\xi_0^4]
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
 f_2(\omega_a) = & [\eta^4 - 2\eta^6 + \eta^8 - 2\eta^2\omega_a^2 + 4\eta^4\omega_a^2 + 2\epsilon_m\eta^4\omega_a^2 - 2\eta^6\omega_a^2 - 2\epsilon_m\eta^6\omega_a^2 + \\
 & + \omega_a^4 - 2\eta^2\omega_a^4 - 2\epsilon_m\eta^2\omega_a^4 + \eta^4\omega_a^4 + 2\epsilon_m\eta^4\omega_a^4 + \epsilon_m^2\eta^4\omega_a^4 + 4\eta^6\xi_0^2 - \\
 & - 8\eta^4\omega_a^2\xi_0^2 + 8\epsilon_m\eta^6\omega_a^2\xi_0^2 + 8\eta^2\omega_a^4\xi_0^2 - 8\eta^4\omega_a^4\xi_0^2 - 8\epsilon_m\eta^4\omega_a^4\xi_0^2 + \\
 & + 4\eta^6\omega_a^4\xi_0^2 + 8\epsilon_m\eta^6\omega_a^4\xi_0^2 + 4\epsilon_m^2\eta^6\omega_a^4\xi_0^2 + 16\eta^4\omega_a^4\xi_0^4]^2
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

O numerador de 2.16 é um polinômio de grau 5 em ω_a que possui uma raiz nula e quatro outras simétricas aos pares em torno de $\omega_a = 0$, sendo que um dos pares pode assumir valores complexos, dependendo ϵ_m , quando ξ_0 é nulo e η é unitário. Devemos reparar que a frequência natural do sistema principal escrito na forma adimensional é 1. Se ξ_0 é nulo, temos exatamente o absorvedor não amortecido e sabemos que, neste caso, a frequência natural do sistema secundário que resulta amplitude mínima (neste caso particular, nula) para a coordenada y_1 deve ser exatamente a do sistema principal, ou seja 1. Assim sendo, a dependência de ϵ_m e a obtenção de valores complexos indicam que este par de raízes não interessa para o caso real. Resta então apenas uma raiz a considerar, sendo esta a raiz positiva do outro par, que é

$$\omega_a = \frac{\eta \sqrt{2 - 2\eta^2 - \epsilon_m \eta^2 + 8\eta^2 \xi_0^2 - 4\epsilon_m \eta^4 \xi_0^2 - G_1 \eta \sqrt{1 + 4\eta^2 \xi_0^2}}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + 4\eta^2 \xi_0^2} \sqrt{1 - \eta^2 - \epsilon_m \eta^2 - 4\eta^2 \xi_0^2}} \quad (2.19)$$

onde

$$G_1 = \sqrt{\epsilon_m^2 \eta^2 + 16\xi_0^2 - 32\eta^2 \xi_0^2 + 16\eta^4 \xi_0^2 + 16\epsilon_m \eta^4 \xi_0^2 + 4\epsilon_m^2 \eta^4 \xi_0^4 + 64\eta^2 \xi_0^4}$$

Tomando $\eta = \sqrt{1 - \xi_0^2} = \omega_d$ temos

$$\omega_a = \frac{\omega_d \sqrt{-\epsilon_m + 2\xi_0^2 - 3\epsilon_m \xi_0^2 + 8\epsilon_m \xi_0^4 - 8\xi_0^6 - 4\epsilon_m \xi_0^6 - G_2 \omega_d \sqrt{1 + 4\omega_d^2 \xi_0^2}}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + 4\omega_d^2 \xi_0^2} \sqrt{-\epsilon_m - 3\xi_0^2 + \epsilon_m \xi_0^2 + 4\xi_0^4}} \quad (2.20)$$

onde

$$G_2 = \sqrt{\epsilon_m^2 + 16\epsilon_m \xi_0^2 + 3\epsilon_m^2 \xi_0^2 + 64\xi_0^4 - 32\epsilon_m \xi_0^4 - 8\epsilon_m^2 \xi_0^4 - 48\xi_0^6 + 16\epsilon_m \xi_0^6 + 4\epsilon_m^2 \xi_0^6}$$

A figura 2.11 apresenta o valor de ω_a versus ξ_0 para vários valores de ϵ_m . Vemos que ela confirma que, para amortecimento baixo, a frequência ótima para o sistema secundário é praticamente igual a do sistema principal.

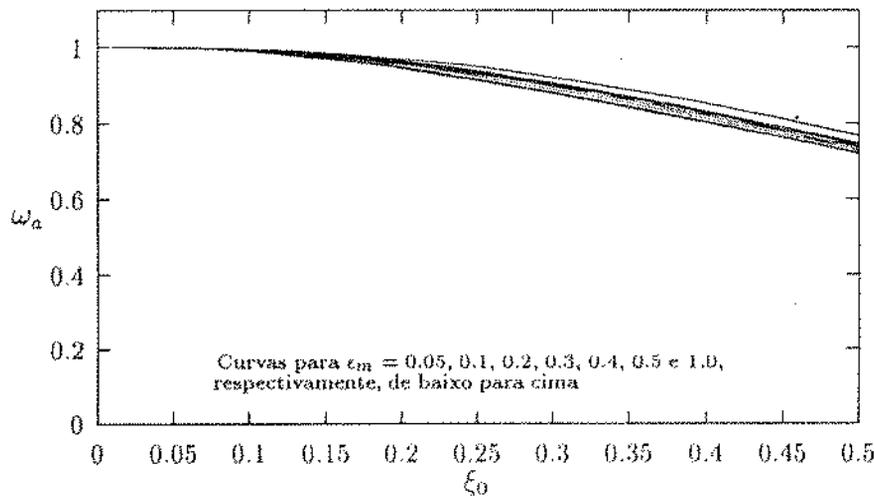


Figura 2.11: Frequência do sistema secundário para \bar{y}_1 mínimo em $\eta = [1 - \xi_0^2]^{(1/2)}$.

2.2.2 Sistema 1 - Atrito Atuando em uma coordenada

O sistema em estudo está representado na figura 2.12. Consideramos o caso de amortecimento proporcional, de forma que a equação do movimento pode ser escrita como ($x' = dx/dt$):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{x}'' + \mathbf{C}\mathbf{x}' + \mathbf{K}\mathbf{x} &= -\mathbf{v}_a + \mathbf{f}(t) \\ |k_2(x_1 - x_2) + c_2x_1'| &\geq \mu_s N \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_d N \text{Sgn}(\dot{x}_2) \end{bmatrix} & \mathbf{f}(t) &= \begin{bmatrix} F_0 \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K} \\ & & & & \mathbf{x} &= [x_1 \ x_2]^T \end{aligned}$$

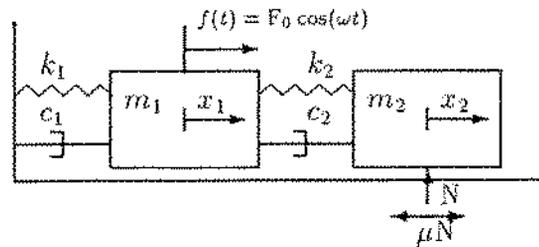


Figura 2.12: Sistema de 2 graus de liberdade com atrito viscoso/coulomb

Para $|k_2(x_1 - x_2) + c_2x_1'| < \mu_s N$, o sistema pode ser representado por um único grau de liberdade pela equação $m_1x'' + (c_1 + c_2)x' + k_1x + k_2(x - x_s) = F(t)$, onde x_s é a posição em que a massa 2 alcançou o estado de equilíbrio, isto é, aceleração e velocidade nulas.

A única não linearidade presente na equação 2.21 aparece no vetor de atrito \mathbf{v}_a . O primeiro membro da equação 2.21 pode ser desacoplado pela decomposição modal, tal como em sistemas lineares. Entretanto, mesmo estudando o problema em termos das coordenadas modais, a coordenada física x_2 estará presente em $\text{Sgn}(x_2')$, uma vez que a velocidade deverá ser verificada para o conhecimento do sentido da força de atrito. Seja $k_1 = k$, $k_2 = \epsilon_k k$, $m_1 = m$ e $m_2 = \epsilon_m m$. Não é difícil mostrar que, para este sistema particular, a exigência de

²O subscrito *s* lembra o termo em inglês *sticking*.

que a matriz amortecimento seja proporcional às matrizes massa e rigidez implica que, na verdade ela seja proporcional à matriz rigidez apenas, isto é, o coeficiente α_1 da expressão que fornece a matriz amortecimento na equação 2.21 é nulo. Assim sendo, podemos, desde já, fixar que $c_1 = c$ e $c_2 = \epsilon_k c$. Definindo, então:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \xi_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{k}{\mu_s N} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

podemos reescrever a equação na seguinte forma ($\dot{y} = dy/d\tau$):

$$\frac{1}{k} \left[\omega_0^2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \omega_0 \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} \right] = -\mathbf{v}'_a + \mathbf{f}(\tau) \quad (2.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{k} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_m \end{bmatrix} & \frac{\omega_0}{k} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2(1 + \epsilon_k)\xi_0 & -2\epsilon_k\xi_0 \\ -2\epsilon_k\xi_0 & 2\epsilon_k\xi_0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{k} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} (1 + \epsilon_k) & -\epsilon_k \\ -\epsilon_k & \epsilon_k \end{bmatrix} & \mathbf{f}(\tau) &= \begin{bmatrix} \beta \cos(\eta\tau) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}'_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \text{Sgn}(\dot{y}_2) \end{bmatrix} & \beta &= F_0/\mu_s N \\ & & \mu &= \mu_d/\mu_s \end{aligned}$$

Sejam λ_j ($j = 1, 2$) os autovalores do sistema linear não amortecido representado por $(\omega_0^2/k)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (1/k)\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e Φ_j os autovetores correspondentes normalizados pela matriz $(\omega_0^2/k)\mathbf{M}^3$. Seja $\Psi = [\Phi_1 \ \Phi_2]$ a matriz modal. Sendo simétricas as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos obter um sistema desacoplado no primeiro membro quando expresso em termos das coordenadas modais. Seja $\mathbf{y} = \Psi \mathbf{z}$ com $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T$. Deve-se notar que as relações entre as massas e rigidezes estão ligadas com a normalização anterior, embora valores numéricos não sejam usados de imediato.

Procedendo à decomposição modal de 2.23 ([Ewins-86][Newland-89]), podemos escrevê-la, na forma desacoplada, como:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 &= -\mu_1 \text{Sgn}(\dot{y}_2) + \beta_1 \cos(\eta\tau) \\ \ddot{z}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 &= -\mu_2 \text{Sgn}(\dot{y}_2) + \beta_2 \cos(\eta\tau) \end{aligned} \quad (2.24)$$

³Isto significa que os autovetores são tomados de forma que: $\Phi_j^T [(\omega_0^2/k)\mathbf{M}] \Phi_j = 1$.

onde

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= \Phi_1^T [(1/k)\mathbf{K}] \Phi_1 & \omega_2^2 &= \Phi_2^T [(1/k)\mathbf{K}] \Phi_2 \\
 \xi_1 &= \frac{\Phi_1^T [(\omega_0^2/k)\mathbf{C}] \Phi_1}{2\omega_1} & \xi_2 &= \frac{\Phi_2^T [(\omega_0^2/k)\mathbf{C}] \Phi_2}{2\omega_2} \\
 \mu_1 &= \Phi_{12}\mu & \mu_2 &= \Phi_{22}\mu \\
 \beta_1 &= \Phi_{11}\beta & \beta_2 &= \Phi_{21}\beta
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Deve-se ter em mente que a coordenada y_2 depende da computação das próprias coordenadas modais. As coordenadas físicas são dadas por

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \Phi_{11}z_1 + \Phi_{21}z_2 \\
 y_2 &= \Phi_{12}z_1 + \Phi_{22}z_2
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

As frequências naturais e autovetores do sistema normalizado são funções apenas de ϵ_m e ϵ_k . Não as apresentamos aqui por serem expressões relativamente grandes e complexas e por julgarmos que não acrescentariam nada ao entendimento do texto. Deve-se ter em mente que a normalização visa apenas a abstração de valores dimensionais e a concentração do estudo em relações adimensionais. Não se pode esquecer, portanto, que os valores de ϵ_m e ϵ_k estão “escondidos” nos termos das equações 2.25. Outro aspecto que deve ser observado na normalização realizada em 2.22 é que a frequência natural do sistema formado pela massa m_1 e pela mola k_1 é unitária quando calculada para o sistema normalizado. Como veremos mais adiante, este subsistema pode ser considerado como um sistema ao qual é conectado um absorvedor dinâmico de vibrações.

A equação 2.21 é válida apenas para $k_2(x_1 - c_2x_1') \geq \mu_s N$, estabelecendo uma região de aderência que se manifesta nas coordenadas modais através dos valores de μ_1 e μ_2 . Uma questão que pode ser levantada diz respeito à ocorrência de uma aderência modal permanente⁴, isto é, embora o sistema possua dois graus de liberdade, ele possuiria um único modo de vibração, pois o outro modo teria toda a sua energia absorvida pelo atrito. A ocorrência deste fenômeno, entretanto, está descartada no sistema em estudo. Observe que as equações 2.24 não são independentes. Quando ocorre aderência da massa m_2 , os valores das coordenadas modais alteram-se ao longo do tempo, pois a coordenada x_1 continua em movimento.

As equações 2.24 são idênticas a 2.3 e a solução num intervalo de tempo τ_i a τ_{i+1} escolhido de forma que $\dot{y}_2(\tau_i) = 0$ é:

⁴Esta questão está relacionada com a razão entre os valores de μ e f nas equações 2.24.

$$z_j(\tau) = e^{[-\xi_j \omega_j (\tau - \tau_i)]} \left\{ P_{\varepsilon_j} \cos[\Omega_j (\tau - \tau_i)] + P_{s_j} \frac{\sin[\Omega_j (\tau - \tau_i)]}{\Omega_j} \right\} + \frac{\beta_j}{q_j} \cos(\eta \tau - \varepsilon_j) + \frac{\mu_j}{\omega_j^2} \text{Sgn}(\dot{y}_2) \quad (2.27)$$

onde:

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_j} &= z_j(\tau_i) + \left(\frac{\mu_j}{\omega_j^2} \right) \text{Sgn}(\dot{y}_2) - \frac{\beta_j}{q_j} C_{0j} \\ P_{s_j} &= \dot{z}_j(\tau_i) + \xi_j \omega_j z_j(\tau_i) + \left(\frac{\xi_j \mu_j}{\omega_j} \right) \text{Sgn}(\dot{y}_2) + \frac{\beta_j}{q_j} (\eta S_{0j} - \xi_j \omega_j C_{0j}) \\ C_{0j} &= \cos(\eta_j \tau_i - \varepsilon_j) \quad S_{0j} = \sin(\eta_j \tau_i - \varepsilon_j) \\ \Omega_j^2 &= \omega_j^2 (1 - \xi_j^2) \quad \tan(\varepsilon_j) = \frac{2\xi_j \omega_j \eta}{(\omega_j^2 - \omega^2)} \quad q_j = \sqrt{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} \end{aligned}$$

A solução exata do problema pode ser obtida mediante a computação das coordenadas modais quando a massa m_2 desliza. Como a computação da coordenada y_2 envolve ambas as coordenadas modais, o sistema não pode ser resolvido independentemente.

Para fazermos um paralelo com o absorvedor dinâmico de vibrações, é interessante que trabalhemos com parâmetros tais que o absorvedor trabalhe próximo do seu ponto ótimo, isto é, as relações entre os parâmetros do sistema sejam tais que a coordenada y_1 tenha amplitude mínima na ressonância do sistema formado pela massa m_1 , pelo amortecedor c_1 e pela mola k_1 (recordar subseção anterior), ou seja, quando a frequência de excitação tende a 1.

De acordo o resultado da subseção 2.2.1, se o amortecimento for pequeno, a frequência natural ω_a do sistema secundário (neste caso formado por m_2 , c_2 e k_2) que resulta amplitude mínima para a coordenada y_1 na frequência de ressonância do sistema principal é praticamente igual à frequência natural deste sistema. Considerando a figura 2.11, vemos que para $\xi_0 \leq 0.1$, ω_a é praticamente 1. Não é difícil verificar que o fato de a adimensionalização realizada nesta subseção e na subseção anterior não serem exatamente iguais não altera a conclusão de que, para baixos amortecimentos, ω_a tende a 1 para o sistema adimensionalizado. Então devemos tomar $\varepsilon_k \approx \varepsilon_m$.

Consideremos o caso particular em que $\varepsilon_m = 0.1$. Notemos que o valor de 10% da massa principal para a massa secundária é um valor mais ou menos prático para o absorvedor dinâmico. Deve-se notar que o fato de a matriz amortecimento ser proporcional à matriz rigidez implica, neste caso particular, que os fatores de amortecimento do sistema principal e do absorvedor sejam iguais. Tomemos $\xi_0 = 0.05$. Assim pelo resultado de 2.2.1 podemos

tomar $\epsilon_k = 0.1$ para realizarmos a comparação com o observador dinâmico. Para estes valores de ϵ_m , ϵ_k e ξ_0 temos:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0.854 & \omega_2 &= 1.170 \\ \Phi_1 &= [0.6495 \quad 2.4043]^T \\ \Phi_2 &= [0.7603 \quad -2.0540]^T \\ \xi_1 &= 0.043 & \xi_2 &= 0.059\end{aligned}\tag{2.28}$$

A figura 2.16 apresenta as curvas de resposta em frequência para as coordenadas físicas considerando os valores de $\epsilon_m = \epsilon_k = 0.1$ e $\xi_0 = 0.05$. As curvas são plotadas para vários valores de β e para todas elas $\mu = 1$. A curva $\bar{y}_1 \times \eta$ para $\beta = \infty$ foi obtida pela expressão 2.14. Expressão equivalente foi utilizada para $\bar{y}_2 \times \eta$. A linha pontilhada em 2.16-a corresponde à curva de resposta em frequência do sistema principal sem absorvedor.

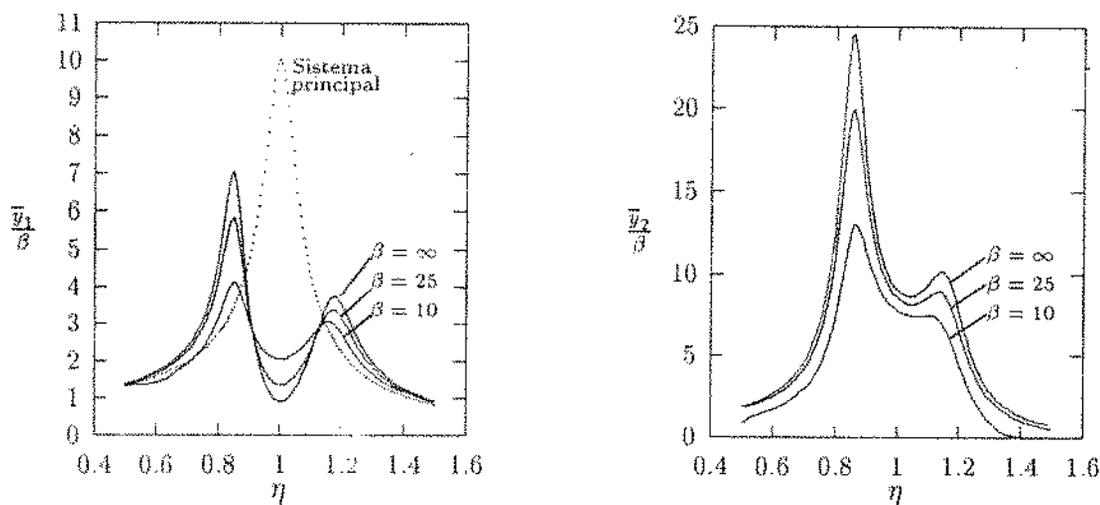


Figura 2.13: a - $\bar{y}_1 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.05$.

b - $\bar{y}_2 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.05$.

Nota-se na figura 2.13-a' que é possível obter considerável redução da amplitude de vibração da massa principal na primeira ressonância do sistema com absorvedor (até 40%, para $\beta = 10$)⁵, diminuindo-se, em contrapartida, o rendimento do absorvedor na ressonância do sistema principal. Devemos ter em mente que, em geral, estuda-se o atrito seco porque ele está presente em muitos sistemas, e não com o objetivo de introduzi-lo nos sistemas. Entretanto, uma vez que presente, é interessante saber quais suas consequências (efeitos), como minimizá-los ou ainda, como utilizá-lo, se possível for. Vê-se que há uma tendência, quando β diminui, de que os picos de ressonâncias ocorram em frequências mais próximas da

⁵Uma visão mais clara destas reduções é dada na tabela 2.1, página 42, quando comparamos o sistema aqui estudado com o sistema estudado na subseção seguinte.

frequência natural do sistema principal. Para a massa do absorvedor ocorre idêntica redução da amplitude de vibração na primeira ressonância. Observe-se que o pico da segunda ressonância do absorvedor tende a desaparecer quando β diminui, ocorrendo nesta ressonância redução de vibração pouco mais acentuada que na primeira. Mais à frente tiraremos mais conclusões sobre a presença do atrito seco, nos sistemas de dois graus de liberdade.

É importante lembrar que o valor de β possui um limite inferior, abaixo do qual ocorre aderência permanente da massa m_2 . Consideremos que a massa m_2 entre num estado de velocidade nula na posição $x_2 = 0$. Neste caso, passamos a ter um sistema vibrante de 1 grau de liberdade cuja equação de movimento, para o sistema normalizado, é (não é difícil mostrar):

$$\ddot{y}_s + 2(1 + \epsilon_k)\xi_0\dot{y}_s + (1 + \epsilon_k)y_s = \beta \cos(\eta t) \quad (2.29)$$

onde o subscrito s (*sticking*) faz alusão à aderência.

A amplitude de y_s , que chamaremos \bar{y}_s , é dada por

$$\bar{y}_s = \frac{\beta}{\epsilon_k \sqrt{\left(1 - \frac{\eta}{\eta_{s0}}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\eta}{\eta_{s0}}\right)^2}} \quad \eta_{s0} = \sqrt{1 + \epsilon_k} \quad \xi_s = 2(1 + \epsilon_k)\xi_0 \quad (2.30)$$

Para os valores de $\epsilon_k = 0.1$ e $\xi_0 = 0.05$ temos que, para $\eta = 1$, $\bar{y}_s = 3.43\beta$. Então, como $\epsilon_k = 0.1$, a força transmitida para a massa m_2 é 0.343β , de forma que o valor limite inferior de β para que ocorra aderência permanente na frequência $\eta = 1$ está em torno de $1/0.343 = 2.91$ (devemos observar a condição de aderência expressa em 2.21). Notemos que este valor não é exato, pois a massa m_2 não alcança, em geral, a velocidade nula na posição zero. Além disto a velocidade e a posição da massa m_1 quando a massa m_2 tem velocidade zero podem fazer com que a coordenada y_s assumam um valor maior que \bar{y}_s antes que o estado permanente seja alcançado. Entretanto, experiências numéricas têm mostrado que o valor calculado em 2.30 não está longe do valor limite procurado. Devemos lembrar que um valor limite tão baixo para β , como o apresentado pouco antes, só ocorrem para frequências próximas das ressonâncias. No caso de tomarmos frequências afastados da ressonância os valores sobem muito. Consideremos, por exemplo o valor $\eta = 0.6$ (início da faixa de frequências plotada na figura 2.13. Neste caso, o valor limite inferior para β está próximo de 8.7.

Quando ocorre aderência permanente passamos a ter um sistema de 1 grau de liberdade com frequência natural normalizada $(1 + \epsilon_k)^{1/2}$ e coeficiente de amortecimento dado

por $\xi_0(1 + \epsilon_k)^{1/2}$, como mostra a expressão 2.30. Ressalta-se que, sendo ϵ_k e ξ_0 pequenos, a amplitude de vibração, tanto na nova frequência de ressonância quanto na frequência de ressonância do sistema principal, serão tão altas quanto as do sistema sem absorvedor.

Temos analisado o efeito do atrito para sistemas cujas frequências naturais do respectivos subsistemas de 1 grau de liberdade (sistema principal e secundário) são próximas. Como esta influência na curva de resposta em frequência varia de acordo com a configuração do sistema?

Consideremos, por exemplo, o caso em que $\epsilon_m = 0.1$ e $\epsilon_k = 1$. Deixemos $\xi_0 = 0.05$, como no caso anterior. Com estes valores, as frequências naturais do sistema normalizado, seus autovetores e fatores de amortecimento são

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0.945 & \omega_2 &= 3.330 \\ \Phi_1 &= [0.9446 & 1.0381]^T \\ \Phi_2 &= [0.3283 & -2.9870]^T \\ \xi_1 &= 0.047 & \xi_2 &= 0.170\end{aligned}\tag{2.31}$$

A figura 2.14 apresenta as curvas de resposta em frequência para as coordenadas físicas. A figura 2.15 apresenta as mesmas curvas para as coordenadas modais. Vários valores de β são utilizados na geração destas curvas. As curvas para $\beta = \infty$ correspondem, na verdade, ao caso $\mu = 0$. Para este caso, a formulação escrita anteriormente não funciona e o problema deve ser reescrito de forma a evitar o aparecimento de um termo infinito durante o equacionamento do problema. Ainda quanto às figuras 2.14 e 2.15, nota-se que as curvas para os diversos valores de β são praticamente coincidentes. Apenas para o caso da coordenada modal z_2 a diferença é perceptível.

É importante discutir a interpretação da figura 2.14. Consideremos, por exemplo, duas curvas distintas $(\bar{y}_{1a}/\beta_a)x\eta$ e $(\bar{y}_{1b}/\beta_b)x\eta$. Praticamente, o que a figura 2.14-a diz é que $(\bar{y}_{1a}/\beta_a) = (\bar{y}_{1b}/\beta_b)$. Levando em conta a normalização expressa em 2.22 concluímos que $(\bar{x}_{1a}/F_{0a}) = (\bar{x}_{1b}/F_{0b})$, o que mostra que a influência do atrito na amplitude \bar{x}_1 é praticamente nenhuma para $\beta \geq 10$. Isto mostra a ineficácia do atrito na massa m_2 como um meio de redução da amplitude de vibração da massa m_1 para os valores de ϵ_m e ϵ_k utilizados. Reforçamos que esta conclusão é válida para estas relações ϵ_m e ϵ_k . Mais importante do que a ineficiência da absorção de energia do sistema principal é o fato, apresentado nas figuras 2.14 e 2.15, de como o atrito pode ser imperceptível através da curva de resposta em frequência. A tomarmos por este lado, podemos ser tentados a imaginar que esta não linearidade pouco importa, ao menos neste caso, ao tratar do sistema. Qual será, entretanto, a influência do atrito, mesmo nestas condições, na identificação do sistema? Há muito que

se considerar sobre sistemas com atrito seco, embora neste trabalho não nos entretamos com muitas delas.

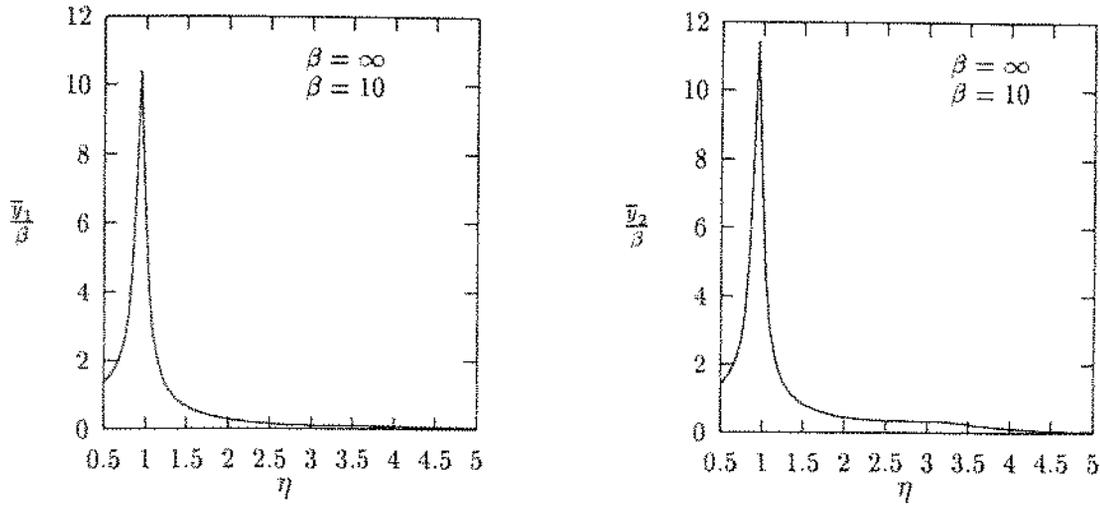


Figura 2.14: a - $\bar{y}_1 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.05$.

b - $\bar{y}_2 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.05$:

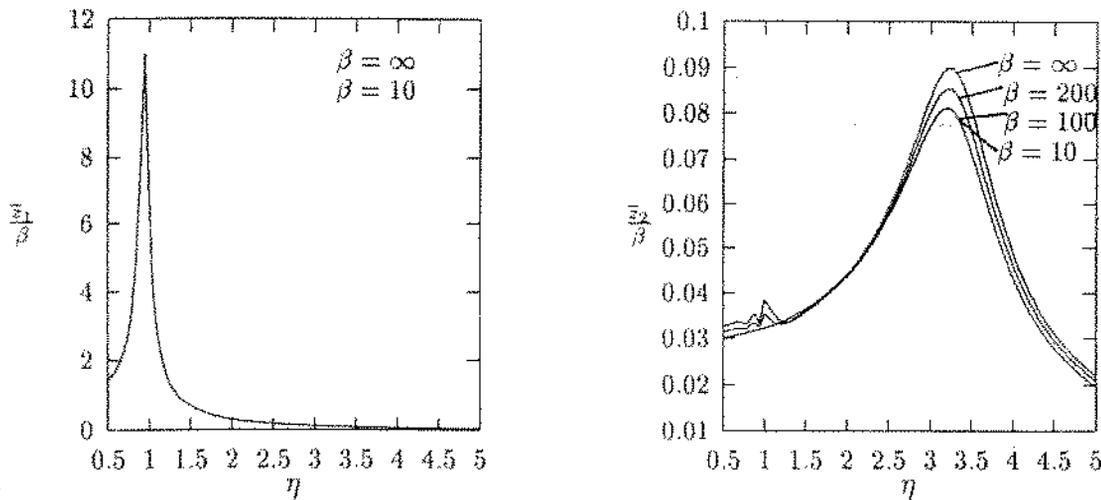


Figura 2.15: a - $\bar{z}_1 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.05$.

b - $\bar{z}_2 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi_0 = 0.05$.

O fato de a coordenada modal z_2 ser muito menor que a coordenada modal z_1 deve-se principalmente à ausência de excitação na coordenada x_2 . Os valores de β_1 e β_2 das equações 2.24 podem ser calculados pela expressão 2.31. Não é difícil concluir que, além de β_2 ser consideravelmente menor que β_1 , o segundo modo é mais amortecido que o primeiro.

É importante analisar qual a sensibilidade do rendimento do absorvedor na frequência de ressonância do sistema principal com relação ao amortecimento viscoso e ao atrito seco, bem como a sensibilidade dos picos de ressonância que ocorrem em ω_1 e ω_2 àqueles mesmos parâmetros. A figura 2.16 apresenta curvas de amplitude *versus* frequência para

vários valores de β , mantendo constante o fator de amortecimento ξ_0 , tanto para a coordenada y_1 como para y_2 . Não tomamos o caso $\xi_0 = 0$ para evitar uma "amplitude infinita" nas frequências de ressonância. A figura 2.17 apresenta curvas da mesma natureza para vários valores de ξ_0 para o sistema sem atrito seco.

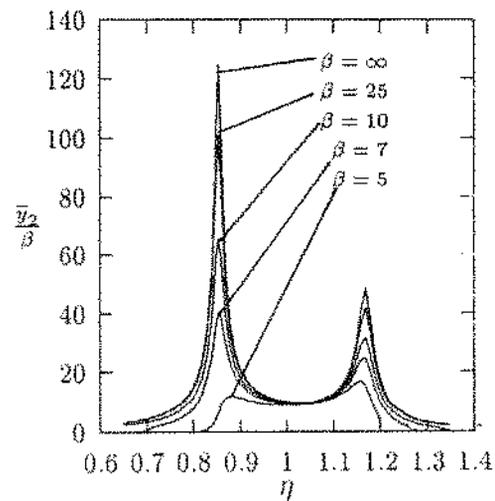
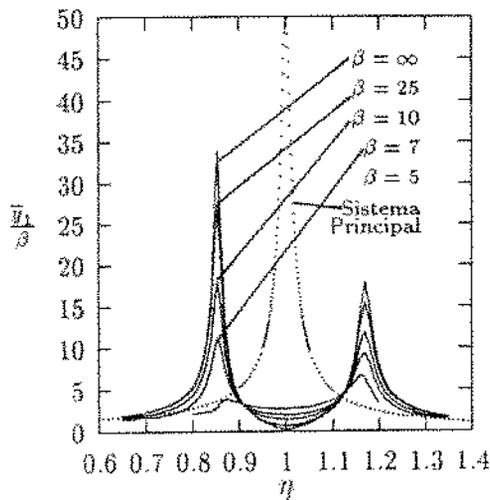


Figura 2.16: a - $\bar{y}_1 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.01$.

b - $\bar{y}_2 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.01$.

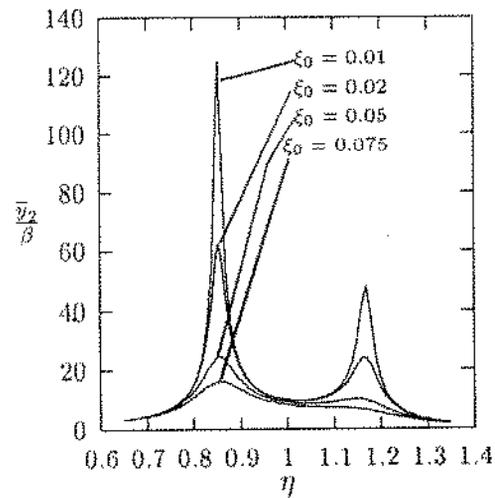
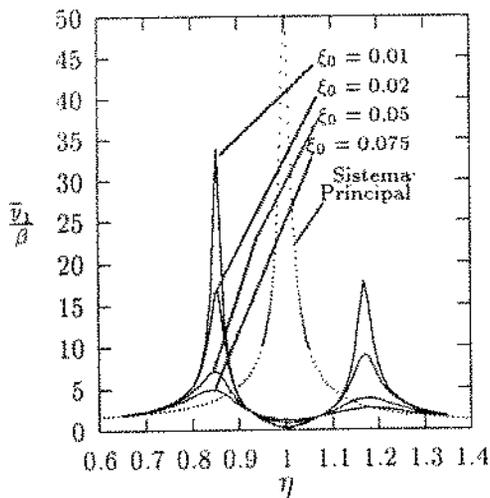


Figura 2.17: a - $\bar{y}_1 \times \eta$. $\mu = 1$, $\beta = \infty$.

b - $\bar{y}_2 \times \eta$. $\mu = 1$, $\beta = \infty$.

Reparamos que o amortecimento viscoso (figura 2.17) pode reduzir drasticamente os picos de ressonância do sistema de 2 graus de liberdade. A redução do parâmetro β também tem este efeito. Lembramos que, em se tratando da figura 2.16-a, o valor de $\beta = 5$ está próximo do limite em que ocorrerá aderência permanente para frequências em torno de

0.8 e 1.2. Em primeira análise, a redução dos picos de ressonância do sistema de 2 graus de liberdade é muito mais sensível ao amortecimento viscoso. Além disto, o amortecimento viscoso diminui menos o rendimento do absorvedor na frequência de ressonância do sistema principal. Este fato é interessante, pois era de se esperar, mantida uma comparação com o efeito do amortecimento viscoso, que uma atuação pior nos picos de ressonância fosse de certa forma compensada por uma atuação melhor no rendimento do absorvedor. Uma análise prática é, contudo, interessante.

Outro fato interessante é que existe uma frequência na qual a amplitude da coordenada y_1 independe do valor de β , tal como ocorre, resultado já conhecido, para o amortecimento viscoso.

2.2.3 Sistema 2 - Atrito atuando entre coordenadas

Nesta seção estudamos um sistema de 2 graus de liberdade com uma configuração diferente da seção anterior, sistema este apresentado na figura 2.18. Lembramos que este modelo é perfeitamente factível. Ele pode representar, por exemplo, um corpo que desliza sobre outro, acoplado a este por mola e amortecedor, tendo entre a superfície deslizante de ambos a força normal N e coeficientes de atrito estático e dinâmico μ_s e μ_d , respectivamente. A aplicação da força excitadora $f(t)$ não interfere diretamente no modelo em si, mas é apenas uma particularidade da matriz de entrada do sistema.

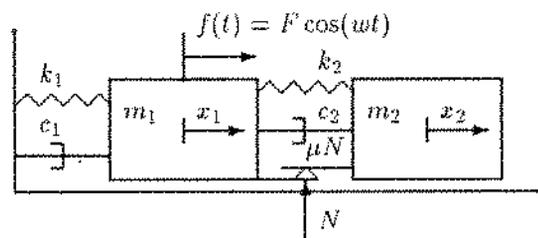


Figura 2.18: Sistema de 2 graus de liberdade com atrito viscoso/coulomb

O equacionamento do equilíbrio entre as forças que agem no sistema conduz a ($x' = dx/dt$):

$$\begin{aligned}
 M\mathbf{x}'' + C\mathbf{x}' + K\mathbf{x} &= -\mathbf{v}_a + \mathbf{f}(t) \\
 (\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') &\notin \Sigma
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

onde Σ indica a região de aderência.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} -\mu_d N \text{Sgn}(x'_1 - x'_2) \\ \mu_d N \text{Sgn}(x'_1 - x'_2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K}$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$$

A identificação da região de aderência deve ser discutida. Deve-se reparar que, quando as velocidades das massas m_1 e m_2 são iguais e $|k_2(x_1 - x_2)| < \mu_s N$, ocorre aderência. Esta desigualdade, entretanto, fornece apenas a condição para que o sistema entre na região de aderência. Quando o sistema em estudo entra em um estado de aderência, ele passa a se comportar como um sistema de apenas um grau de liberdade cuja equação de movimento é

$$(m_1 + m_2)x'' + c_1 x' + k_1 x = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.33)$$

onde a nova coordenada x (não x_1 , nem x_2) é usada por simplicidade. Neste caso, enquanto durar a aderência, as acelerações das massas m_1 e m_2 serão iguais. Mas quem realmente acelera a massa m_2 é a força de atrito e a força elástica realizada pela mola k_2 . Assim, embora a aceleração do sistema como um todo seja determinada pela força externa $F_0 \cos(\omega t)$ e pelas forças realizadas pelo amortecedor c_1 e mola k_1 , a aceleração nunca poderá ultrapassar, mantendo a aderência, determinada magnitude, a qual, não é difícil demonstrar, é limitada por

$$|mx''| \leq |k_2(x_1 - x_2) + \mu_s N \text{Sgn}(\dot{x}')|$$

Assim não conseguimos escrever uma expressão para a região de aderência baseada explicitamente apenas no vetor posição das massas que compõem o sistema.

Realizando uma adimensionalização do sistema tal como na subseção anterior, isto é, aplicando as condições expressas em 2.22 mais as definições de ϵ_m , ϵ_c e ϵ_k , podemos reescrever 2.32 na forma ($\dot{y} = dy/d\tau$):

$$\frac{1}{k} [\omega_0^2 \mathbf{M} \ddot{y} + \omega_0 \mathbf{C} \dot{y} + \mathbf{K} y] = -\mathbf{v}'_a + \mathbf{v}(\tau) \quad (2.34)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{k} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_m \end{bmatrix} & \frac{\omega_0}{k} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2(1 + \epsilon_k)\xi_0 & -2\epsilon_k\xi_0 \\ -2\epsilon_k\xi_0 & 2\epsilon_k\xi_0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{k} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} (1 + \epsilon_k) & -\epsilon_k \\ -\epsilon_k & \epsilon_k \end{bmatrix} & \mathbf{f}(\tau) &= \begin{bmatrix} \beta \cos(\eta\tau) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_a' &= \begin{bmatrix} \mu \text{Sgn}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \\ -\mu \text{Sgn}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{bmatrix} & \xi_0 &= c/2\sqrt{km} \\ & & \beta &= F_0/\mu_s \\ & & \mu &= \mu_d/\mu_s \end{aligned}$$

Fazendo as mesmas considerações da subseção 2.2.2 para os autovalores λ e autovetores Φ do sistema linear normalizado não amortecido correspondente à parte linear do nosso problema (veja página 35) podemos escrever uma equação equivalente a 2.24 para as coordenadas modais z_1 e z_2 (definidas também na página 35) fornecendo

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 &= -\mu_1 \text{Sgn}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \beta_1 \cos(\eta\tau) \\ \ddot{z}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 &= -\mu_2 \text{Sgn}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \beta_2 \cos(\eta\tau) \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \Phi_1^T [(1/k)\mathbf{K}] \Phi_1 & \omega_2^2 &= \Phi_2^T [(1/k)\mathbf{K}] \Phi_2 \\ \xi_1 &= \frac{\Phi_1^T [(\omega_0^2/k)\mathbf{C}] \Phi_1}{2\omega_1} & \xi_2 &= \frac{\Phi_2^T [(\omega_0^2/k)\mathbf{C}] \Phi_2}{2\omega_2} \\ \mu_1 &= (\Phi_{11} - \Phi_{12})\mu & \mu_2 &= (\Phi_{21} - \Phi_{22})\mu \\ \beta_1 &= \Phi_{11}\beta & \beta_2 &= \Phi_{21}\beta \end{aligned} \quad (2.36)$$

sendo Φ_1, Φ_2 os autovetores do sistema linear não amortecido $(\omega_0^2/k)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (1/k)\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, normalizados pela matriz $(\omega_0^2/k)\mathbf{M}$.

A solução de 2.35 num intervalo de tempo τ_i a τ_{i+1} escolhido de forma que $\dot{y}_2(\tau_i) = 0$ é (tal como 2.26):

$$\begin{aligned} z_j(\tau) &= e^{[-\xi_j\omega_j(\tau-\tau_i)]} \left\{ P_{cj} \cos[\Omega_j(\tau - \tau_i)] + P_{sj} \frac{\sin[\Omega_j(\tau - \tau_i)]}{\Omega_j} \right\} + \\ &+ \frac{\beta_j}{\omega_j} \cos(\eta\tau - \varepsilon_j) + \frac{\mu_j}{\omega_j} \text{Sgn}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 P_{c_j} &= z_j(\tau_i) + \left(\frac{\beta_j}{\omega_j^2}\right) \text{Sgn}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - \frac{\beta_j}{q_j} C_{0j} \\
 P_{s_j} &= \dot{z}_j(\tau_i) + \xi_j \omega_j z_j(\tau_i) + \left(\frac{\xi_j \mu_j}{\omega_j}\right) \text{Sgn}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \frac{\beta_j}{q_j} (\eta S_{0j} - \xi_j \omega_j C_{0j}) \\
 C_{0j} &= \cos(\eta_j \tau_i - \varepsilon_j) \quad S_{0j} = \sin(\eta_j \tau_i - \varepsilon_j) \\
 \Omega_j^2 &= \omega_j^2 (1 - \xi_j^2) \quad \tan(\varepsilon_j) = \frac{2\xi_j \omega_j \eta}{(\omega_j^2 - \omega^2)} \quad q_j = \sqrt{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2}
 \end{aligned}$$

A solução exata do problema pode ser obtida mediante a computação das coordenadas modais quando as velocidades \dot{y}_1 e \dot{y}_2 são diferentes. Como a computação da coordenada y_2 envolve ambas as coordenadas modais, o sistema não pode ser resolvido independentemente.

Consideramos o caso particular em que $\epsilon_m = \epsilon_k = 0.1$ e $\xi_1 = 0.05$. Neste caso as frequências naturais não amortecidas, os autovetores do sistema expresso nas coordenadas y e os fatores de amortecimento são os mesmos expressos em 2.30. A figura 2.19 apresenta as curvas de resposta em frequência para as coordenadas y_1 e y_2 levando em conta estes valores de ϵ_m e ϵ_k .

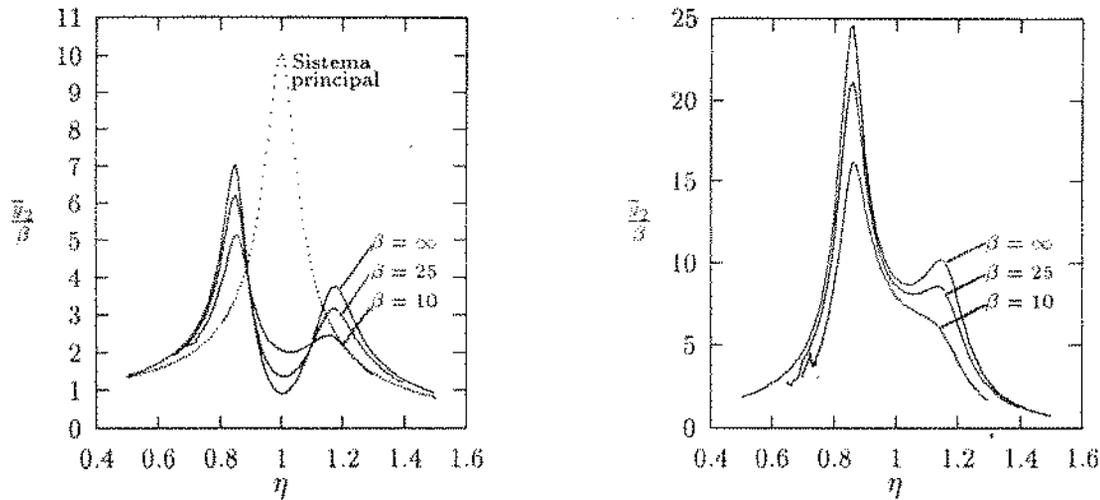


Figura 2.19: a - $\bar{y}_1 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.05$. b - $\bar{y}_2 \times \eta$. $\mu = 1$, $\xi = 0.05$.

Nota-se que a redução da vibração na frequência de ressonância do sistema principal é praticamente igual ao do sistema da subseção anterior (aqui denominado sistema 1), o que pode ser visto pelos valores da tabela 2.1. Além disto a massa auxiliar vibra mais no sistema 2 (desta subseção) que no sistema 1 na referida frequência. Ainda podemos notar que a amplitude da vibração na primeira ressonância do sistema de dois graus de liberdade é maior no sistema 2, tanto para a massa principal quanto para a massa auxiliar. Entretanto,

a amplitude de vibração na segunda ressonância sofre considerável redução no sistema 2 quando comparada com o sistema 1.

	$\beta = 25$		$\beta = 10$	
	Sistema 1	Sistema 2	Sistema 1	Sistema 2
$\bar{y}_{1\beta}/\bar{y}_{1\infty} \quad \eta = \omega_1$	0.828	0.884	0.585	0.727
$\bar{y}_{1\beta}/\bar{y}_{1\infty} \quad \eta = \sqrt{1 - \xi_0^2}$	15.07	15.09	22.58	22.71
$\bar{y}_{1\beta}/\bar{y}_{1\infty} \quad \eta = \omega_2$	0.906	0.843	0.810	0.654
$\bar{y}_{2\beta}/\bar{y}_{2\infty} \quad \eta = \omega_1$	0.811	0.862	0.527	0.657
$\bar{y}_{2\beta}/\bar{y}_{2\infty} \quad \eta = \sqrt{1 - \xi_0^2}$	0.946	0.952	0.857	0.883
$\bar{y}_{2\beta}/\bar{y}_{2\infty} \quad \eta = \omega_2$	0.855	0.831	0.630	0.537

$\bar{y}_{i\beta}/\bar{y}_{i\infty} \rightarrow$ razão entre as amplitudes do sistema (i-ésima coordenada) com atrito seco (β finito) e sem atrito seco ($\beta = \infty$)

Tabela 3.1 - Redução de amplitude nas ressonâncias dos sistemas de 2gl e do sistema principal

Capítulo 3

Sistemas Contínuos e Sistemas de Vários Graus de Liberdade

Neste capítulo introduzimos os sistemas de vários graus de liberdade. Não seguiremos a linha da simulação de sistemas, como o capítulo anterior. Aqui estamos introduzindo algumas questões referentes ao problema da representação discreta de sistemas contínuos nos quais atua atrito seco. Apresentamos técnicas utilizadas para a discretização de um sistema contínuo, as quais servirão para a obtenção de um modelo discreto do dispositivo experimental que será apresentado no próximo capítulo. Discussões sobre os problemas a serem resolvidos são feitas a cada seção. Ressalta-se que a técnica aqui utilizada não segue a idéia da discretização convencional (Lumped Mass Systems), mas procuramos satisfazer algumas propriedades modais do sistema original.

Alertamos para o fato de não fazermos nenhuma identificação de parâmetros modais a partir de medidas, pois isto não é escopo deste trabalho. O modelo estudado pode ser equacionado e resolvido analiticamente e é a partir deste equacionamento analítico que fazemos nossa discretização. Embora a grande maioria dos sistemas mecânicos não possam ser tratados por via analítica como o estudado aqui, não há nenhuma perda de generalidade do processo utilizado para representar (de alguma forma) o modelo contínuo por um discreto equivalente. Lembramos que a estimação de energia cinética, distribuição de massa ou restituição elástica terá de passar pelo uso de alguma ferramenta (análise modal, por exemplo). Com esta ferramenta não nos ocupamos neste trabalho. Sabemos, todavia, que é possível obter uma estimativa das quantidades (grandezas) necessárias.

3.1 Sistema Contínuo em Estudo

O sistema contínuo que será analisado neste capítulo está apresentado na figura 3.1 e consiste de uma viga engastada com algumas massas localizadas em alguns pontos ao longo de sua direção longitudinal. As massas são fixadas à viga através da pressão exercida por parafusos e a forma como se encaixam é apresentada em corte na figura. Na extremidade da viga atua uma força de atrito que realiza trabalho na direção transversal da mesma. O garfo apresentado em 3.1b é utilizado para a aplicação da força normal na superfície de atrito. Os LVDTs são usados para sensorar a força normal aplicada. Como veremos no próximo capítulo, nosso dispositivo experimental será representado por um sistema igual a este. A análise teórica será feita considerando vários modelos partindo de uma representação contínua e testando modelos que utilizam massas concentradas para representar as massas colocadas ao longo da viga. Na verdade, estas massas não são concentradas e introduzem rigidez no sistema. Supomos, todavia, que a influência desta rigidez adicional não altere consideravelmente o sistema, e apenas a influência de sua inércia é considerada aqui. A maneira mais simples de levar em conta a rigidez das massas localizadas é considerá-las como seguimentos de viga. Entretanto esta consideração não conduz a bons resultados quando comparados com os resultados experimentais. Voltaremos a falar sobre este assunto na próxima seção, quando apresentarmos as frequências naturais do sistema.

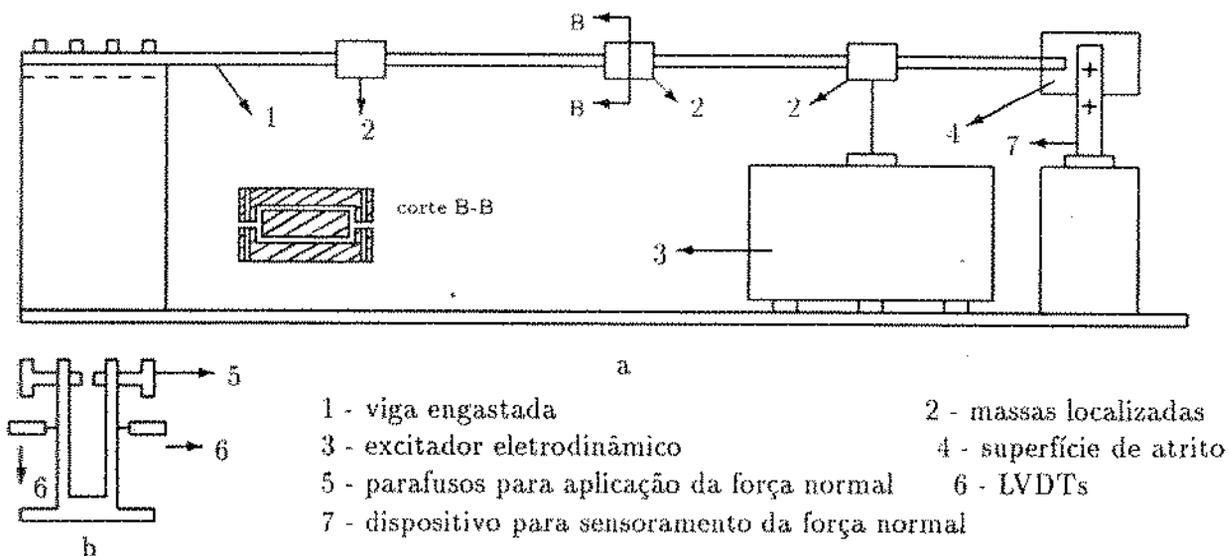


Figura 3.1: Sistema sob análise. a: Esquema geral. b: Sensoramento da força normal

A tabela 3.1 apresenta as principais características do sistema apresentado na figura 3.1.

massa específica do aço utilizado (SAE 1020)	7684 Kg/m^3
módulo de elasticidade do material utilizado	$2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
comprimento total da viga	0.356 m
seção transversal da viga (base x altura)	$0.025 \times 0.005 \text{ m}$
distância entre as massas localizadas (centro a centro)	0.089 m
comprimento das massas localizadas (sentido longitudinal da viga)	0.025 m
seção transversal das massas localizadas (base x altura)	$0.040 \times 0.015 \text{ m}$

Tabela 3.1: Dados de projeto do Dispositivo da figura 3.1

3.2 Equacionamento do Sistema Contínuo

Considerando que as massas localizadas são concentradas, podemos representar o sistema apresentado na figura 3.1 pelo modelo apresentado na figura 3.2. A tabela 3.2 fornece as características consideradas para este modelo. Chamamos a atenção para os valores das massas m_1 a m_4 , alertando que os valores expressos na tabela levam em conta outras massas que não apenas as massas localizadas da figura 3.1. Isto ocorre porque resolvemos, já neste capítulo, considerar o sistema de nosso dispositivo experimental (veja capítulo 4), o qual tem sobre as massas localizadas as massas dos sensores utilizados e outras massas que auxiliam a fixação destes sensores. Assim, não devemos estranhar os valores bem diferentes para as diversas “massas concentradas” apresentadas na tabela 3.2.

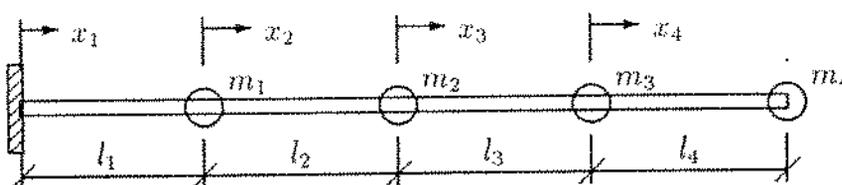


Figura 3.2: Modelo utilizado para o sistema da figura 3.1

No estudo do sistema contínuo da figura 3.2, considerando o modelo de Euler para a viga em vibração livre e equacionando o equilíbrio entre as forças de restauração elástica e as forças de inércia temos [Gormam-75]

$$-\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 V(x,t)}{\partial x^4} \quad (3.1)$$

onde:

comprimento total da viga	0.356 m
seção transversal da viga (base x altura)	0.025 x 0.005 m
distância entre as massas concentradas	0.089 m
massa m_1	0.0694 Kg
massa m_2	0.0881 Kg
massa m_3	0.1049 Kg
massa m_4	0.0909 Kg

Tabela 3.2: Dados do modelo da figura 3.2

E: módulo de elasticidade do material I: momento de inércia da seção transversal.
 ρ : massa específica do material A: área da seção transversal da viga.
 x : posição no sentido longitudinal da viga V: esforço cortante

É possível realizar uma separação de variáveis na equação 3.1. Seja $V(x, t) = p(t)r(x)$ e, então, podemos obter

$$\frac{-1}{p(t)} \frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{EI}{\rho A} \frac{1}{r(x)} \frac{d^4 r(x)}{dx^4} \quad (3.2)$$

donde podemos escrever duas equações diferenciais distintas, a saber:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \omega_0^2 p(t) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{d^4 r(x)}{dx^4} - \beta^4 r(x) = 0 \quad \beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (3.4)$$

cujas respectivas soluções são

$$r(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \sinh(\beta x) + D \cosh(\beta x) \quad (3.5)$$

$$p(t) = \cos(\omega t - \phi) \quad (3.6)$$

A determinação dos coeficientes A, B, C e D é feita de maneira a obedecer as condições de contorno do problema. Para o caso da figura 3.2 podemos escrever

$$r_i(x_i) = A_i \sin(\beta x_i) + B_i \cos(\beta x_i) + C_i \sinh(\beta x_i) + D_i \cosh(\beta x_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.7)$$

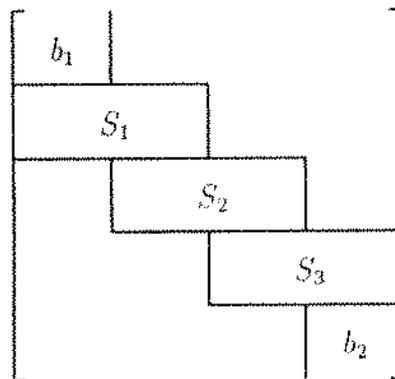
e as condições de contorno a serem satisfeitas para cada r_i , no caso de vibração livre, são

$$\begin{aligned}
 r_1(0) &= \frac{dr_1}{dx_1}(0) = 0 \\
 r_i(l_i) &= r_{i+1}(0) \quad (i = 1, 2, 3) \\
 \frac{dr_i}{dx_i}(l_i) &= \frac{dr_{i+1}}{dx_{i+1}}(0) \quad (i = 1, 2, 3) \\
 \frac{d^2 r_i}{dx_i^2}(l_i) &= \frac{d^2 r_{i+1}}{dx_{i+1}^2}(0) \quad (i = 1, 2, 3) \\
 \frac{d^3 r_i}{dx_i^3}(l_i) - \frac{d^3 r_{i+1}}{dx_{i+1}^3}(0) &= \frac{-m_i}{\rho A} \beta^4 r_{i+1}(0) \quad (i = 1, 2, 3) \\
 \frac{d^2 r_4}{dx_4^2}(l_4) &= 0 \\
 \frac{d^3 r_4}{dx_4^3}(l_4) &= \frac{-m_4}{\rho A} \beta^4 r_4(l_4)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Estas condições de contorno incorporam o efeito das massas supostas concentradas na extremidade da seção analisada. As equações 3.8 podem ser expressas na forma

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{X} = [A_1 \dots D_1 \dots A_4 \dots D_4]^T \tag{3.9}$$

onde a matriz \mathbf{R} (16x16) tem a seguinte formação:



com

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -s_4 & -c_4 & sh_4 & ch_4 \\ -c_4 + \frac{m_4\beta}{\rho A} s_4 & s_4 + \frac{m_4\beta}{\rho A} c_4 & ch_4 + \frac{m_4\beta}{\rho A} sh_4 & sh_4 + \frac{m_4\beta}{\rho A} ch_4 \end{bmatrix}$$

$$S_i = \begin{bmatrix} s_i & c_i & sh_i & ch_i & 0 & -1 & 0 & -1 \\ c_i & -s_i & ch_i & sh_i & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -s_i & -c_i & sh_i & ch_i & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -c_i & s_i & ch_i & sh_i & 1 & \frac{m_i\beta}{\rho A} & -1 & \frac{m_i\beta}{\rho A} \end{bmatrix}$$

e $s_i = \sin(\beta l_i)$, $c_i = \cos(\beta l_i)$, $sh_i = \sinh(\beta l_i)$ e $ch_i = \cosh(\beta l_i)$.

As frequências naturais podem ser obtidas através dos valores de ω ($\beta^4 = \rho A \omega^2 / EI$) que satisfazem a equação 3.9 e para tanto devemos ter $Det(\mathbf{R}) = 0$. As quatro primeiras frequências naturais são:

$$f_1 = 20.18 \text{ Hz} \quad f_2 = 128.82 \text{ Hz} \quad f_3 = 360.85 \text{ Hz} \quad f_4 = 686.18 \text{ Hz} \quad (3.10)$$

Estes valores foram obtidos através de um programa de computador utilizando o software MATHEMATICA. O valor de ω é incrementado e o determinante calculado a cada passo. Para a obtenção do vetor \mathbf{x} da equação 3.9 é realizada uma decomposição de Gauss da matriz \mathbf{R} que resulta em uma matriz 16×16 com uma linha nula. Uma das coordenadas do vetor \mathbf{x} é arbitrada para a solução do sistema e depois esta solução é renormalizada de forma a obter um valor unitário para $r(x)$ na extremidade da viga.

É importante comentar agora sobre a adoção de outro modelo, que não o que supõe as massas como concentradas. Como falamos na seção 3.1, a maneira mais simples de levar em conta a rigidez introduzida pelas massas localizadas é considerá-las como seguimentos de viga. Fazendo assim com as massas m_1 , m_2 e m_3 , considerando a massa m_4 como concentrada e aplicando procedimento idêntico ao realizado para o modelo da figura 3.2, chegaremos a um sistema 28×28 . As frequências naturais para este modelo, que identificaremos com o suprescrito ', são:

$$f'_1 = 27.15 \text{ Hz} \quad f'_2 = 201.16 \text{ Hz} \quad f'_3 = 601.47 \text{ Hz} \quad f'_4 = 1223.50 \text{ Hz} \quad (3.11)$$

Como veremos no capítulo 4, estas frequências estão muito afastadas dos valores experimentais, muito mais que aquelas obtidas com o modelo anterior, razão porque preferimos o modelo de massas concentradas.

A figura 3.3 apresenta os quatro primeiros modos de vibrar do sistema da figura 3.2 obtidos pela aplicação da teoria de vibração em vigas, levando em consideração todas as condições de contorno que devem ser satisfeitas.

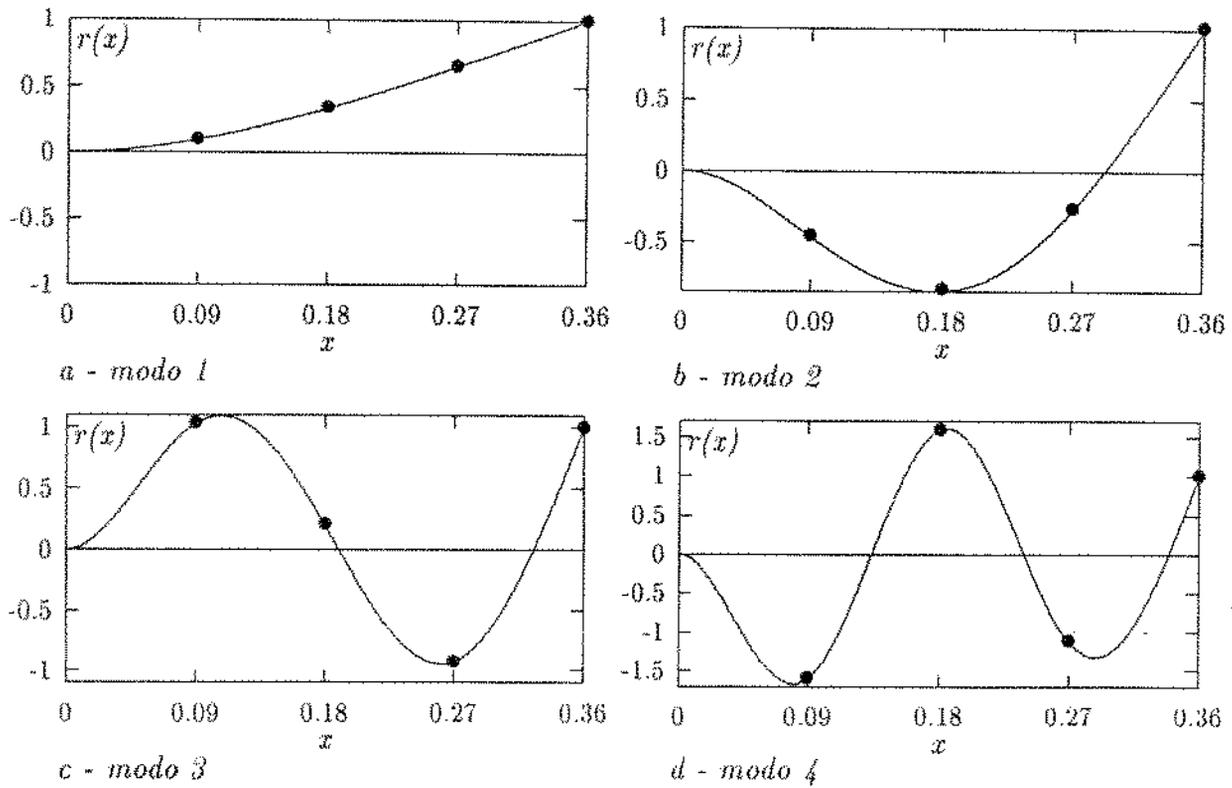


Figura 3.3: Modos de vibrar do sistema da figura 3.2

Os valores das constantes A_i , B_i , C_i e D_i para cada modo de vibrar são apresentados a seguir.

$A_1 = 5.76158 \cdot 10^{-1}$	$B_1 = -6.85014 \cdot 10^{-1}$	$C_1 = -5.76158 \cdot 10^{-1}$	$D_1 = 6.85014 \cdot 10^{-1}$
$A_2 = 7.81743 \cdot 10^{-1}$	$B_2 = -4.09324 \cdot 10^{-1}$	$C_2 = -3.28957 \cdot 10^{-1}$	$D_2 = 5.05073 \cdot 10^{-1}$
$A_3 = 8.29087 \cdot 10^{-1}$	$B_3 = -7.56226 \cdot 10^{-2}$	$C_3 = -9.94971 \cdot 10^{-2}$	$D_3 = 4.11415 \cdot 10^{-1}$
$A_4 = 6.96380 \cdot 10^{-1}$	$B_4 = 2.50469 \cdot 10^{-1}$	$C_4 = 1.57609 \cdot 10^{-1}$	$D_4 = 4.03691 \cdot 10^{-1}$

Tabela 3.3: Coeficientes da função $r_i(x_i)$ em $\omega_1 = 2\pi \cdot 20.18 \text{ Rad/s}$

$A_1 = -9.13564 \cdot 10^{-1}$	$B_1 = 7.81335 \cdot 10^{-1}$	$C_1 = 9.13563 \cdot 10^{-1}$	$D_1 = -7.81335 \cdot 10^{-1}$
$A_2 = -9.84774 \cdot 10^{-1}$	$B_2 = -3.25728 \cdot 10^{-1}$	$C_2 = 3.21572 \cdot 10^{-1}$	$D_2 = -1.40942 \cdot 10^{-1}$
$A_3 = 3.61453 \cdot 10^{-2}$	$B_3 = -9.99826 \cdot 10^{-1}$	$C_3 = 1.54934 \cdot 10^{-2}$	$D_3 = 1.54479 \cdot 10^{-1}$
$A_4 = 9.52098 \cdot 10^{-1}$	$B_4 = -5.25262 \cdot 10^{-1}$	$C_4 = 1.00254 \cdot 10^{-1}$	$D_4 = 2.52912 \cdot 10^{-1}$

Tabela 3.4: Coeficientes da função $r_i(x_i)$ em $\omega_2 = 2\pi \cdot 128.82 \text{ Rad/s}$

$A_1 = 1.08871 \cdot 10^{+0}$	$B_1 = -9.65736 \cdot 10^{-1}$	$C_1 = -1.08871 \cdot 10^{+0}$	$D_1 = 9.65736 \cdot 10^{-1}$
$A_2 = 2.73996 \cdot 10^{-1}$	$B_2 = 1.14050 \cdot 10^{+0}$	$C_2 = 1.15323 \cdot 10^{-1}$	$D_2 = -1.10600 \cdot 10^{-1}$
$A_3 = -1.27640 \cdot 10^{+0}$	$B_3 = 2.10442 \cdot 10^{-1}$	$C_3 = 1.56708 \cdot 10^{-1}$	$D_3 = -1.02085 \cdot 10^{-2}$
$A_4 = 4.29465 \cdot 10^{-1}$	$B_4 = -1.28609 \cdot 10^{+0}$	$C_4 = -1.80078 \cdot 10^{-1}$	$D_4 = 3.56020 \cdot 10^{-1}$

Tabela 3.5: Coeficientes da função $r_i(x_i)$ em $\omega_3 = 2\pi \cdot 360.85 \text{ Rad/s}$

$A_1 = -1.51670 \cdot 10^{+0}$	$B_1 = 1.38535 \cdot 10^{+0}$	$C_1 = 1.51670 \cdot 10^{+0}$	$D_1 = -1.38535 \cdot 10^{+0}$
$A_2 = 1.13526 \cdot 10^{+0}$	$B_2 = -2.04450 \cdot 10^{+0}$	$C_2 = -5.74521 \cdot 10^{-1}$	$D_2 = 4.42532 \cdot 10^{-1}$
$A_3 = -3.65896 \cdot 10^{-1}$	$B_3 = 2.13462 \cdot 10^{+0}$	$C_3 = 6.61430 \cdot 10^{-1}$	$D_3 = -5.48435 \cdot 10^{-1}$
$A_4 = -5.54175 \cdot 10^{-1}$	$B_4 = -1.57304 \cdot 10^{+0}$	$C_4 = -3.51292 \cdot 10^{-1}$	$D_4 = 4.50977 \cdot 10^{-1}$

Tabela 3.6: Coeficientes da função $r_i(x_i)$ em $\omega_4 = 2\pi \cdot 686.18 \text{ Rad/s}$

3.3 Obtenção de um Modelo Discreto Equivalente para o Sistema Contínuo

3.3.1 Considerações Iniciais

Tomando as posições das massas m_1 a m_4 em cada modo de vibrar do sistema da figura 3.2, correspondentes a cada valor de $\omega_i = 2\pi f_i$, podemos representar a relação entre as posições das massas nos diversos modos de vibrar pelos seguintes vetores Φ_i (o índice i indica o modo respectivo):

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.09431 \\ 0.33251 \\ 0.65127 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.52954 \\ -1.01115 \\ -0.43363 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 1.38957 \\ 0.50526 \\ -1.26119 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \Phi_4 = \begin{bmatrix} -3.12664 \\ 2.60252 \\ -1.54066 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Estes são resultados discretos (em 4 pontos do sistema contínuo). A aproximação feita em concentrar as massas experimentais em alguns pontos não deve alterar muito os resultados (veja capítulo 4). Utilizaremos um modelo de 4 graus de liberdade para uma representação discreta do sistema contínuo. Como coordenadas deste sistema discreto tomaremos o estado (deslocamento-velocidade) do sistema contínuo nos 4 pontos de transição

das condições de contorno. Três considerações foram feitas para a computação das matrizes massa e rigidez do sistema discreto:

- As frequências naturais do sistema discreto são exatamente as quatro primeiras frequências naturais do sistema contínuo.
- Os autovetores do sistema discreto têm entre suas coordenadas as mesmas relações dos vetores Φ da expressão 3.12, isto é, os vetores Φ são autovetores do sistema discreto.
- A energia cinética presente em cada modo de vibrar do sistema discreto é exatamente a mesma do sistema contínuo em cada um de seus quatro primeiros modos.

Ressalta-se que estas considerações são as mesmas feitas por Santos [Santos-88]. Nas duas subseções seguintes apresentamos a metodologia seguida por Santos, devidamente escrita para o nosso problema, uma vez que o sistema aqui tratado pode ser considerado como misto, isto é, possui uma parte que é realmente contínua e outra que é suposta concentrada.

3.3.2 Considerações sobre a energia cinética e Computação da matriz massa

Sejam r_1, r_2, r_3 e r_4 os deslocamentos nos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4 , correspondentes às posições das massas m_1, m_2, m_3 e m_4 , respectivamente. Sejam m_{r1}, m_{r2}, m_{r3} e m_{r4} as massas do modelo discreto que serão consideradas para as coordenadas x_1, x_2, x_3 e x_4 , respectivamente.

A energia cinética presente no sistema discreto é sempre dada por ($\dot{r} = dr/dt$):

$$E_d = \frac{1}{2} \dot{r}^T M \dot{r} \quad (3.13)$$

onde M é a matriz massa do sistema discreto e r é o vetor dos deslocamentos transversais da viga nos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4 .

A energia cinética presente no sistema contínuo pode ser decomposta em duas parcelas, a energia das massas concentradas e a energia cinética da viga engastada, as quais são computadas respectivamente por:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} [m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2 + m_3 \dot{r}_3^2 + m_4 \dot{r}_4^2] \quad (3.14)$$

$$E_{c2} = \frac{\rho A}{2} \left[\int_0^l \dot{r}^2(x_1) dx_1 + \int_0^l \dot{r}^2(x_2) dx_2 + \int_0^l \dot{r}^2(x_3) dx_3 + \int_0^l \dot{r}^2(x_4) dx_4 \right] \quad (3.15)$$

Tomaremos uma energia cinética normalizada. Considerando que o movimento é harmônico, a velocidade nos pontos x_1 , x_2 , x_3 e x_4 seguem a mesma relação que o deslocamento. Fixaremos que a velocidade na extremidade é unitária. Logo, a velocidade nos pontos onde estão localizadas as massas concentradas serão dadas, em cada modo, pelas coordenadas correspondentes dos respectivos vetores Φ . Esta mesma normalização será usada no sistema contínuo. A curva $r(x)$ faz o mesmo papel no sistema contínuo que os autovetores no sistema discreto. Os coeficientes $A_i \dots D_i$ para cada modo de vibrar foram apresentados ao final da seção 3.2, nas tabelas 3.3 a 3.6. Como aqueles coeficientes são tais que o valor de $r(x)$ na extremidade da viga é unitário, podemos calcular uma velocidade normalizada, e conseqüentemente uma energia cinética normalizada, ao longo de toda a viga através da curva $r(x)$. Esta normalização é correspondente à utilizada para as massas concentradas. Expressando isto matematicamente temos:

$$E_{c1i}^N = \frac{\omega_i^2}{2} [m_1 \Phi_{i1}^2 + m_2 \Phi_{i2}^2 + m_3 \Phi_{i3}^2 + m_4 \Phi_{i4}^2] \quad (3.16)$$

$$E_{c2i}^N = \frac{\rho A \omega_i^2}{2} \left[\int_0^l r_{i1}^2(x_1) dx_1 + \int_0^l r_{i2}^2(x_2) dx_2 + \int_0^l r_{i3}^2(x_3) dx_3 + \int_0^l r_{i4}^2(x_4) dx_4 \right] \quad (3.17)$$

onde $r_{ij}(x_j) = A_{ij} \sin(\beta x_j) + B_{ij} \cos(\beta x_j) + C_{ij} \sinh(\beta x_j) + D_{ij} \cosh(\beta x_j)$ e o índice N indica a normalização. O índice i indica o modo respectivo e o índice j indica o intervalo da viga em questão.

Exigindo que os vetores Φ sejam autovetores do sistema discreto, a energia normalizada presente no sistema discreto pode ser escrita como¹

$$E_{di}^N = \frac{\omega_i^2}{2} \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i \quad (3.18)$$

As equações 3.16, 3.17 e 3.18 devem ser escritas para cada modo. Escrevendo numa forma compacta uma equação para todos os modos temos

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \text{Diag}(\omega_i^2) \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (3.19)$$

onde os termos as matrizes \mathbf{E} e \mathbf{U} tem as seguintes composições:

¹Estamos desprezando a energia de rotação.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{d1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{d3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{d4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

é $\text{Diag}(\omega_i^2)$ é uma matriz diagonal que contém as frequências naturais do sistema contínuo. A matriz que contém as energias cinéticas pode ser escrita como o seguinte produto:

$$\mathbf{E} = \text{Diag}(\omega_i^2)\mathbf{\Upsilon} \quad \text{ou} \quad \mathbf{\Upsilon} = \text{Diag}(\omega_i^2)^{-1}\mathbf{E} \quad (3.21)$$

Então temos

$$\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (3.22)$$

e concluímos que

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}^{-T} \mathbf{\Upsilon} \mathbf{U}^{-1} \quad (3.23)$$

É interessante reparar que a matriz $\mathbf{\Upsilon}$ pode ser considerada uma matriz de normalização para os autovetores, de forma que a matriz massa independe da normalização inicial dos vetores Φ . Na verdade ela é uma matriz de renormalização daqueles vetores, uma vez que eles já possuem em si uma normalização inicial.

3.3.3 Computação da Matriz Rigidez

De posse da matriz massa \mathbf{M} , dos autovetores Φ e da exigência de que as frequências naturais do sistema discreto sejam exatamente as mesmas do sistema contínuo podemos computar uma matriz rigidez \mathbf{K} para o sistema discreto. O problema de autovalor/autovetor fornece $\omega_i^2 \mathbf{M} \Phi_i = \mathbf{K} \Phi_i$, o que permite escrever $\omega_i^2 \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = \Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i$. Escrevendo esta condição para cada modo e expressando numa forma compacta temos:

$$\text{Diag}(\omega^2) \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (3.24)$$

Sabendo que $\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{\Upsilon}$ temos que

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}^{-T} \text{Diag}(\omega^2) \mathbf{\Upsilon} \mathbf{U}^{-1} \quad (3.25)$$

3.3.4 Resultados

Considerando a exposição das duas subseções anteriores, levando em conta os vetores Φ da equação 3.12, tomando os coeficientes da curva $r_i(x_i)$ expressos nas tabelas 3.3 a 3.6 e finalizando nas expressões 3.21 e 3.25 computamos as seguintes matrizes massa e rigidez (os valores correspondem a grandezas do Sistema Internacional de Unidades):

$$M = \begin{bmatrix} 0.142196 & 0.008708 & -0.004382 & 0.002980 \\ 0.008708 & 0.165186 & 0.005537 & -0.005825 \\ -0.004383 & 0.005537 & 0.185661 & 0.013827 \\ 0.002980 & -0.005825 & 0.013827 & 0.114508 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.480862 \cdot 10^6 & -9.333789 \cdot 10^5 & 3.529541 \cdot 10^5 & -5.890423 \cdot 10^4 \\ -9.333789 \cdot 10^5 & 1.128620 \cdot 10^6 & -7.522060 \cdot 10^5 & 2.046330 \cdot 10^5 \\ 3.529541 \cdot 10^5 & -7.522060 \cdot 10^5 & 7.733413 \cdot 10^5 & -2.846320 \cdot 10^5 \\ -5.890423 \cdot 10^4 & 2.034956 \cdot 10^5 & -2.846320 \cdot 10^5 & 1.252211 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Se quisermos renormalizar os vetores Φ_i da equação 3.12 de forma que a matriz de normalização Υ seja a matriz identidade, podemos tomar a normalização daqueles vetores com relação à matriz massa expressa em 3.26. Fazendo assim, as energias cinéticas de cada modo no sistema contínuo (soma das expressões 3.17 e 3.18) será numericamente igual ao quadrado da respectiva frequência natural. Os vetores Φ normalizados desta forma são:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.17763 \\ 0.62627 \\ 1.22664 \\ 1.88348 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.70766 \\ -0.70766 \\ -0.57918 \\ 1.33624 \end{bmatrix} \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 1.33624 \\ 0.49016 \\ -1.22386 \\ 0.97034 \end{bmatrix} \quad \Phi_4 = \begin{bmatrix} -1.56100 \\ 1.29893 \\ -0.76900 \\ 0.49917 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.4 Atuação da Força de Atrito no Sistema Equivalente

As matrizes massa e rigidez apresentadas nas equações 3.26 e 3.27 representam um sistema discreto acoplado inercialmente. Isto significa que este sistema não é representável fisicamente, pois o equacionamento de sistemas discretos desta natureza sempre conduzem a

matrizes massa diagonais. Para reforçar o argumento de que este sistema discreto não é *real*, consideremos um sistema discreto de 4 graus de liberdade como o apresentado na figura 3.4:

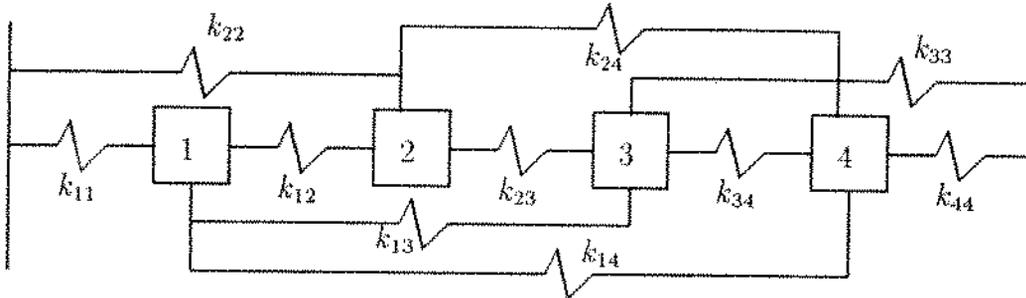


Figura 3.4: Representação “física” de um sistema discreto de 4 gl

O equacionamento do sistema apresentado na figura 3.4 nos leva à seguinte matriz rigidez ($k_{ij} = k_{ji}$):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^4 k_{1j} & -k_{12} & -k_{13} & -k_{14} \\ -k_{12} & \sum_{j=1}^4 k_{2j} & -k_{23} & -k_{24} \\ -k_{13} & -k_{23} & \sum_{j=1}^4 k_{3j} & -k_{34} \\ -k_{14} & -k_{24} & -k_{34} & \sum_{j=1}^4 k_{4j} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

O ajuste dos valores k_{ij} à matriz rigidez da equação 3.27 resulta:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 8.462297 \cdot 10^5 & k_{12} &= 9.380016 \cdot 10^5 \\ k_{13} &= -3.543204 \cdot 10^5 & k_{14} &= 5.901454 \cdot 10^4 \\ k_{22} &= -3.547299 \cdot 10^5 & k_{23} &= 7.571830 \cdot 10^5 \\ k_{24} &= -2.048613 \cdot 10^5 & k_{33} &= 8.939656 \cdot 10^4 \\ k_{34} &= 2.868341 \cdot 10^5 & k_{44} &= -1.475872 \cdot 10^4 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Observamos coeficientes de mola negativos para o sistema, o que indica que este sistema não é real. Lembramos, todavia, que o aparecimento de “*molas negativas*” quando aproximamos sistemas contínuos por sistemas discretos da natureza do sistema apresentado na figura 3.4 não é fato raro. Mesmo quando ajustamos uma matriz rigidez pelos coeficientes de influência para uma viga engastada, por exemplo, levando em conta apenas o perfil do primeiro modo de vibração, é comum aparecerem coeficientes de mola negativos. Isto ocorre porque os elementos envolvidos no problema não são realmente molas, no sentido real deste

elemento, mas apenas uma forma equivalente de representar sua ação. Assim, todos os valores obtidos para os k_{ij} da equação 3.30 não devem ser interpretados como molas verdadeiras, mas apenas como supostas molas que teriam uma ação equivalente à apresentada pelo sistema. Reparemos que nosso modelo considera a existência de uma “mola” que “liga” as massas m_1 e m_3 sem passar por m_2 , o que não corresponde à realidade. Entretanto, para o modelo físico, isto não traz nenhuma complicação, pois o que se procura é um modelo linear que represente o sistema e, no sentido de sua definição, o modelo encontrado é satisfatório e factível, respeitadas suas limitações. No entanto, estamos mais preocupados com outro aspecto do modelo discreto, que discutimos a seguir.

Como falamos no início do capítulo, o dispositivo experimental sofrerá a ação de uma força de atrito, a qual será aplicada à massa “concentrada” m_4 . O fato de a matriz massa não ser diagonal nos conduz a duas questões:

- Onde atua, neste sistema discreto sem correspondente real, a força de atrito?
- Não sendo realizável a matriz rigidez (uma vez que a matriz massa não o é), qual a condição de equilíbrio a ser testada para verificar a condição de aderência no movimento do sistema?

Seria razoável considerar que o atrito atua na coordenada x_4 se o sistema fosse desacoplado inercialmente. Para o sistema com acoplamento inercial não podemos garantir que a força de atrito age apenas nesta coordenada, uma vez que em um problema físico real as inércias são desacopláveis. Quanto à segunda questão, não podemos garantir que esta matriz rigidez fornece os coeficientes de restituição elástica que devem ser usados na verificação da ocorrência ou não de aderência. A única forma de contornar este problema é encontrar um sistema desacoplado inercialmente que seja, de alguma forma equivalente ao dispositivo experimental. Deste assunto nos ocupamos a seguir.

3.5 Obtenção de um Modelo Discreto Desacoplado Inercialmente para o Sistema Contínuo

3.5.1 Considerações Iniciais

Uma vez determinado que devemos obter um sistema discreto equivalente, de certa forma, ao sistema contínuo, e que seja desacoplado inercialmente, passamos a tratar deste problema especificamente. Fazemos a seguir várias considerações para obtermos um sistema desacoplado inercialmente e procuramos abordar as dificuldades que isto pode acarretar. Lembramos que o problema de otimização de estruturas via “modelos discretos equivalentes”

é um campo onde os problemas têm resultado sistemas de equações muito mal condicionados. Nesta seção mostramos como estes problemas são de tratamento numérico difícil e propomos um meio para uma solução que satisfaça um conjunto de restrições dentro de determinada faixa de frequência.

3.5.2 Desacoplamento Inercial - Matriz Rigidez Assimétrica

Devemos lembrar que a matriz de normalização \mathbf{Y} da seção 3.3 faz uso das propriedades de simetria das matrizes massa e rigidez. A exigência da propriedade de simetria está embutida no equacionamento quando escrevemos, por exemplo, a expressão 3.19. É possível obter um sistema desacoplado inercialmente sem nenhuma transformação de coordenadas, desde que se retire a exigência de que a matriz rigidez seja simétrica.

Consideremos o sistema $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cujo problema de autovalor/autovetor é $\lambda\mathbf{M}\Phi + \mathbf{K}\Phi = \mathbf{0}$. As duas equações anteriores podem ser pré-multiplicadas por uma matriz \mathbf{P} sem que as igualdades sejam alteradas. Esta matriz \mathbf{P} pode ser escrita como $\mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}$ onde \mathbf{M}' é uma matriz cujos elementos da diagonal são as massas do sistema discreto desacoplado inercialmente e \mathbf{M} é a matriz massa do sistema discreto obtido na seção 3.3. A matriz \mathbf{M}' pode ser ajustada de forma a satisfazer as exigências sobre a energia cinética em cada modo. Os autovalores e autovetores não são alterados pela pré-multiplicação. Entretanto, a matriz rigidez resultante desta operação não é necessariamente simétrica.

Trabalhar com matrizes assimétricas é tarefa das mais complicadas, devido ao fato da decomposição modal ser seriamente prejudicada, se for possível de ser realizada [Gasch-87]. No entanto, no que se refere às condições do equilíbrio de forças para a verificação da ocorrência de movimentos com aderência não haveria nenhuma dificuldade adicional. Não levaremos este raciocínio adiante.

3.5.3 Desacoplamento Inercial - Matriz Rigidez Simétrica - 20 Restrições

Pode-se mostrar que as matrizes massa e rigidez computadas na seção 3.3 satisfazem um sistema de 20 equações e 20 incógnitas, sendo estas os dez elementos da matriz simétrica massa e os dez da matriz, também simétrica, de rigidez, o que pode ser interpretado como a imposição de 20 restrições a serem satisfeitas por estes elementos. Se impusermos que a matriz massa seja diagonal, o sistema resultante (20x14) deve ser resolvido pelo critério dos mínimos quadrados. Consideremos um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ onde o vetor de incógnitas \mathbf{x} é composto pelos elementos k_{ij} da matriz rigidez \mathbf{K} e pelas massas m_1 a m_4 . A matriz \mathbf{A} e o vetor \mathbf{b} contém os coeficientes das equações que representam as restrições impostas sobre os

valores de \mathbf{x} .

A redução do número de incógnitas resulta um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ extremamente mal condicionado, a ponto de nem as mais recentes técnicas para a solução de sistemas desta natureza apresentarem solução satisfatória. É interessante lembrar que, ao restringir a matriz massa à sua diagonal, a obtenção de uma matriz de normalização, tal como feita por Santos [Santos-88] e aplicada para a construção das matrizes massa e rigidez obtidas na seção 3.3, não é possível. Devemos reparar que, em se exigindo matriz massa diagonal, não podemos escrever a expressão 3.19, dizendo que o produto $\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$ fornece uma matriz cuja diagonal são as energias cinéticas. Vejamos que esta expressão não faz nenhuma exigência de diagonalidade, mas tão somente de simetria. Por isto trabalha-se com o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde as restrições envolvendo autovalores, autovetores e energia são equacionadas uma a uma. Ressalta-se que a construção destas matrizes são apenas trabalhosas. Entretanto, este trabalho pode ser reduzido grandemente se dispusermos de um "software" que permita boa manipulação de matrizes, o que ocorre, no nosso entender, com o MATHEMATICA e MATLAB².

As 20 equações que as matrizes massa e rigidez devem satisfazer são:

$$\begin{aligned}
 [-\omega_1^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \Phi_1 &= \mathbf{0}, & \text{gera 4 equações} \\
 [-\omega_2^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \Phi_2 &= \mathbf{0}, & \text{idem} \\
 [-\omega_3^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \Phi_3 &= \mathbf{0}, & \text{idem} \\
 [-\omega_4^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \Phi_4 &= \mathbf{0}, & \text{idem} \\
 \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i &= \frac{2Ec_i}{\omega_i^2}, (i = 1..4), & \text{restrições sobre a energia cinética de cada modo } (Ec_i)
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Escrevendo as restrições acima na forma do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e utilizando os autovalores, autovetores e energias cinéticas da seção 3.3 obtemos a seguinte composição para a matriz \mathbf{A} :

²Temos utilizado o MATHEMATICA

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
l_1	1.7762864E-01	6.2627241E-01	1.2266430E+00	1.8834818E+00	0	0	0
l_2	0	1.7762864E-01	0	0	6.2627241E-01	1.2266430E+00	1.8834819E+00
l_3	0	0	1.7762864E-01	0	0	6.2627241E-01	0
l_4	0	0	0	1.7762864E-01	0	0	6.2627241E-01
l_5	-7.0766327E-01	-1.3517623E+00	-5.7918212E+00	1.3362337E+00	0	0	0
l_6	0	-7.0766327E-01	0	0	-1.3517623E+00	-5.7918212E-01	1.3362337E+00
l_7	0	0	-7.0766327E-01	0	0	-1.3517623E+00	0
l_8	0	0	0	-7.0766327E-01	0	0	-1.3517623E+00
l_9	1.3484354E+00	4.9016063E-01	-1.2238580E+00	9.7034252E-01	0	0	0
l_{10}	0	1.3484354E+00	0	0	4.9016063E-01	-1.2238580E+00	9.7034252E-01
l_{11}	0	0	1.3484354E+00	0	0	4.9016063E-01	0
l_{12}	0	0	0	1.3484354E+00	0	0	4.9016063E-01
l_{13}	-1.5600966E+00	1.2989282E+00	-7.6900117E-01	4.9916848E-01	0	0	0
l_{14}	0	-1.5600966E+00	0	0	1.2989282E-00	-7.6900117E-01	4.9916848E-01
l_{15}	0	0	-1.5600966E+00	0	0	1.2989282E+00	0
l_{16}	0	0	0	-1.5600966E+00	0	0	1.2989282E+00
l_{17}	0	0	0	0	0	0	0
l_{18}	0	0	0	0	0	0	0
l_{19}	0	0	0	0	0	0	0
l_{20}	0	0	0	0	0	0	0

3.32

Matriz A 20x14 - 7 primeiras colunas

	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
f_1	0	0	0	-2.855753E+03	0	0	0
f_2	1.8834819E+00	0	0	0	0	-1.0068851E+04	0
f_3	1.2266430E+00	1.8834819E+00	0	0	0	-1.9720875E+04	0
f_4	0	1.226643E+00	1.8834819E+00	0	0	0	-3.0280946E+04
f_5	0	0	0	4.6362701E+05	0	0	0
f_6	0	0	0	0	8.8560979E+05	0	0
f_7	-5.7918212E-01	1.3362357E+00	0	0	0	3.7945233E+05	0
f_8	0	-5.7918212E-01	1.3362357E+00	0	0	0	-8.7543751E+05
f_9	0	0	0	-6.9316202E+06	0	0	0
f_{10}	0	0	0	0	-2.5196663E+06	0	0
f_{11}	-1.223858E+00	9.7034252E-01	0	0	0	6.391231E+06	0
f_{12}	0	-1.223858	9.7034252E-01	0	0	0	-4.988037E+06
f_{13}	0	0	0	2.899926E+07	0	0	0
f_{14}	0	0	0	0	-2.4144631E+07	0	0
f_{15}	-7.6900117E-01	4.9916848E-01	0	0	0	1.4294285E+07	0
f_{16}	0	-7.6900117E-01	4.9916848E-01	0	0	0	-9.2786039E+06
f_{17}	0	0	0	3.1551835E-02	3.9221713E-01	1.5046532E+00	3.5475041E+00
f_{18}	0	0	0	5.0078731E-01	1.8272614E+00	3.3545193E-01	1.7855259E+00
f_{19}	0	0	0	1.8182781E+00	2.4025745E-01	1.4978284E+00	9.4156461E-01
f_{20}	0	0	0	2.4339014E+00	1.6872145E+00	5.9138280E-01	2.4916917E-01

3.32

Matriz A 20x14 - 7 últimas colunas

O vetor \mathbf{x} tem a seguinte configuração³:

$$\mathbf{x} = \left[k_{11} \ k_{12} \ k_{13} \ k_{14} \ k_{22} \ k_{23} \ k_{24} \ k_{33} \ k_{34} \ k_{44} \ m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4 \right]^T \quad (3.33)$$

As posições não nulas do vetor \mathbf{b} são as posições que correspondem às restrições sobre a energia cinética, a saber:

$$b_{17} = b_{18} = b_{19} = b_{20} = 1.0 \quad (3.34)$$

Os valores singulares σ da matriz \mathbf{A} são expressos em 3.35.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 3.609146 \cdot 10^7 & \sigma_2 &= 2.938406 \cdot 10^7 & \sigma_3 &= 1.891823 \cdot 10^7 \\ \sigma_4 &= 1.280857 \cdot 10^7 & \sigma_5 &= 3.936631 \cdot 10^0 & \sigma_6 &= 3.756172 \cdot 10^0 \\ \sigma_7 &= 3.413328 \cdot 10^0 & \sigma_8 &= 3.251316 \cdot 10^0 & \sigma_9 &= 3.221426 \cdot 10^0 \\ \sigma_{10} &= 2.888638 \cdot 10^0 & \sigma_{11} &= 2.412458 \cdot 10^0 & \sigma_{12} &= 1.658145 \cdot 10^0 \\ \sigma_{13} &= 1.658145 \cdot 10^0 & \sigma_{14} &= 2.920650 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

O número de condição $k(\mathbf{A})$ da matriz \mathbf{A} (indicativo do grau de mal condicionamento do sistema), calculado pela razão entre o maior e o menor valor singular, é $k(\mathbf{A}) = 1.24 \cdot 10^9$. Notemos que, embora a magnitude do número de condição não seja tão alta, os valores singulares possuem, além de uma variância muito grande, uma falta de concentração dos valores apenas em magnitudes mais altas, originando, por isto mesmo, um mal condicionamento difícil de ser tratado. Destaca-se que a solução por mínimos quadrados aplicando-se a pré-multiplicação de ambos os membros do sistema pela transposta de \mathbf{A} é, neste caso, desaconselhável. Alerta-se que, em geral, $k(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) > k^2(\mathbf{A})$. Para o presente caso temos $k(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 1.53 \cdot 10^{18}$, possuindo a matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ valores singulares da ordem de 10^{15} até 10^{-5} .

A mais recente técnica para solução de sistemas lineares mal-condicionados consiste em “expurgar o mal condicionamento” através de uma reconstrução da matriz \mathbf{A} com apenas alguns valores singulares [Björck-87] [Hansen-90]. A matriz \mathbf{A} poder ser escrita pela série finita

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (3.36)$$

onde n é o número de colunas (menor ou igual que o número de linhas) da matriz \mathbf{A} . A matriz $\mathbf{\Sigma}$ contém em sua diagonal os valores singulares. As matrizes \mathbf{U} e \mathbf{V} , que são normais, contém

³Esta é a configuração usada neste texto.

em suas colunas os vetores \mathbf{u}_i e \mathbf{v}_i que compõem a série. Então a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é dada pela série

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}_i}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (3.37)$$

A técnica consiste exatamente em compor a solução com apenas alguns valores e vetores na soma da equação 3.37, expurgando dela os valores singulares pequenos. Alia-se a esta técnica um pré-condicionamento da matriz \mathbf{A} , de forma que as normas de seus vetores coluna tenham menor variância. Pode-se notar que, no presente problema, as normas das 4 colunas mais à direita da matriz \mathbf{A} são muito maiores que as normas das colunas mais à esquerda. Para o pré-condicionamento dividimos os elementos de cada coluna da matriz pela norma 2 da respectiva coluna, o que resulta uma variância menor entre os elementos da matriz pré-condicionada, que chamaremos \mathbf{A}' . Os valores singulares da matriz pré-condicionada são dados pela equação 3.38.

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = 1.454203 \cdot 10^0 & \sigma_2 = 1.391034 \cdot 10^0 & \sigma_3 = 1.343008 \cdot 10^0 \\ \sigma_4 = 1.314804 \cdot 10^0 & \sigma_5 = 1.012462 \cdot 10^0 & \sigma_6 = 9.985092 \cdot 10^{-1} \\ \sigma_7 = 9.773269 \cdot 10^{-1} & \sigma_8 = 5.487973 \cdot 10^{-1} & \sigma_9 = 9.609248 \cdot 10^{-1} \\ \sigma_{10} = 9.548668 \cdot 10^{-1} & \sigma_{11} = 5.487973 \cdot 10^{-1} & \sigma_{12} = 4.825305 \cdot 10^{-1} \\ \sigma_{13} = 3.597430 \cdot 10^{-1} & \sigma_{14} = 6.943823 \cdot 10^{-3} & \end{array} \quad (3.38)$$

O número de condição da matriz condicionada é $k(\mathbf{A}') = 2.094 \cdot 10^2$. Notemos que, também aqui, não existe uma concentração de valores singulares maiores e uns poucos bem menores, o que dificulta a solução do problema. Neste caso, se a desconsideração do último valor singular, que é razoavelmente bem menor que os demais, não resultar em uma boa solução, dificilmente a desconsideração de mais alguns outros resolverá o problema, visto serem eles da mesma ordem de grandeza. É exatamente isto que ocorre. A tabela 3.7 apresenta características do resíduo $\mathbf{R} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ para algumas técnicas empregadas no cálculo da solução \mathbf{x} . Nesta tabela, estão plotados a coordenada de maior valor absoluto entre as coordenadas R_1 a R_{16} , indicado por d_{max} , os desvios R_{17} a R_{20} e a norma do vetor \mathbf{R} . A solução *LinearSolve* refere-se à solução do *software* MATHEMATICA para o sistema $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

Nota-se que as equações fornecem os maiores desvios são as que representam restrições sobre a energia cinética do sistema discreto, as quais correspondem à parte inferior da matriz \mathbf{A} . Lembramos que foram usados para a montagem do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ os vetores da expressão 3.28 (não os da expressão 3.12). Neste caso a energia cinética normalizada tem o mesmo valor numérico do quadrado da frequência natural. Entretanto, como as equações

	d_{max}	R_{17}	R_{18}	R_{19}	R_{20}	Norma(\mathbf{R})
LinearSolve	$-2.89 \cdot 10^{-5}$	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	2.0
SVD(\mathbf{A}) - 14 valores	$-2.89 \cdot 10^{-4}$	-1.0	-1.0	-1.0	1.0	2.0
SVD(\mathbf{A}) - 13 valores	$-4.07 \cdot 10^{-7}$	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	2.0
SVD(\mathbf{A}') - 13 valores	$-3.54 \cdot 10^{-7}$	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	2.0
d_{max} : maior desvio entre as coordenadas R_1 a R_{16}						

Tabela 3.7: Resíduos da solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (20x14).

que envolvem restrições sobre a energia cinética foram divididas pelas frequências naturais dos respectivos modos, o lado direito das respectivas equações torna-se 1. A tabela 3.7 mostra então que o membro da esquerda das equações envolvendo as energias foi praticamente nulo, o que indica que os valores obtidos para as massas foram muito pequenos, a mesma coisa ocorrendo com as rigidezes.

Não temos conseguido, vê-se, uma solução apropriada para o problema colocado da forma apresentada nesta subseção. A aplicação de soluções de alta precisão por produtos escalares ótimos [Ludyk-90] não foi realizada neste trabalho. Deve-se notar que o problema proposto desta forma é, de fato, de difícil solução. Uma discussão sobre este aspecto é apresentada na seção 3.6.

3.5.4 Desacoplamento Inercial - Matriz Rigidez Simétrica - Menos Restrições

Uma vez que não é possível encontrar um sistema desacoplado inercialmente que satisfaça, pelo critério de mínimos quadrados, as 20 restrições impostas sobre as matrizes massa e rigidez deste sistema, podemos pensar em reduzir o número de restrições, de forma a encontrar um sistema que satisfaça parcialmente as restrições necessárias às matrizes massa e rigidez do sistema desejado. As restrições a serem satisfeitas devem ser as de maior interesse do usuário. Para início retiramos seis restrições do conjunto inicial, de forma que temos que tratar um problema determinado 14x14. O conjunto das restrições escolhidas, expresso em três considerações, é o seguinte:

- As 3 primeiras frequências naturais do sistema discreto são exatamente as 3 primeiras frequências naturais do sistema contínuo.
- Os 3 primeiros autovetores do sistema discreto têm entre suas coordenadas as mesmas relações dos 3 primeiros vetores Φ da expressão 3.12 (ou 3.28), isto é, estes vetores Φ são autovetores do sistema discreto.
- A energia cinética presente nos 2 primeiros modos de vibrar do sistema discreto é exata-

mente a mesma do sistema contínuo em cada um de seus 2 primeiros modos.

Estas considerações resultam num sistema linear 14x14, cuja matriz **A** (veja subseção anterior) é composta pelas linhas 1 a 12 e 16 a 17 da matriz apresentada **A** referida na subseção 3.3.1. Ressalta-se que este sistema também é mal condicionado, tendo a matriz **A**, neste caso, um número de condição $k(\mathbf{A}) = 3.09 \cdot 10^{22}$ e matriz pré-condicionada **A'**, $k(\mathbf{A}') = 4.59 \cdot 10^{22}$. Os valores singulares da matriz **A** e da matriz **A'** são mostrados na equação 3.39.

A	A'	
$\sigma_1 = 8.469712 \cdot 10^6$	$\sigma_1 = 1.613212 \cdot 10^0$	
$\sigma_2 = 7.683922 \cdot 10^6$	$\sigma_2 = 1.495517 \cdot 10^0$	
$\sigma_3 = 6.176726 \cdot 10^6$	$\sigma_3 = 1.495517 \cdot 10^0$	
$\sigma_4 = 3.261524 \cdot 10^6$	$\sigma_4 = 1.348121 \cdot 10^0$	
$\sigma_5 = 3.716385 \cdot 10^0$	$\sigma_5 = 1.166371 \cdot 10^0$	
$\sigma_6 = 3.298781 \cdot 10^0$	$\sigma_6 = 1.078399 \cdot 10^0$	
$\sigma_7 = 3.008614 \cdot 10^0$	$\sigma_7 = 9.958140 \cdot 10^{-1}$	(3.39)
$\sigma_8 = 2.276326 \cdot 10^0$	$\sigma_8 = 8.843115 \cdot 10^{-1}$	
$\sigma_9 = 2.190370 \cdot 10^0$	$\sigma_9 = 8.016767 \cdot 10^{-1}$	
$\sigma_{10} = 1.544075 \cdot 10^0$	$\sigma_{10} = 5.570523 \cdot 10^{-1}$	
$\sigma_{11} = 6.940703 \cdot 10^0$	$\sigma_{11} = 5.570523 \cdot 10^{-1}$	
$\sigma_{12} = 6.940703 \cdot 10^{-2}$	$\sigma_{12} = 2.329889 \cdot 10^{-2}$	
$\sigma_{13} = 1.660657 \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{13} = 4.198992 \cdot 10^{-7}$	
$\sigma_{14} = 3.423205 \cdot 10^{-16}$	$\sigma_{14} = 0$	

Note que, neste caso, a variância do conjunto de valores singulares da matriz **A** é grande, mas existem uns poucos valores de magnitude bem menor que a dos demais. Para a matriz pré-condicionada, de maneira mais clara ainda, existem poucos valores singulares cuja magnitude é muito menor que a dos demais. Note que a matriz **A'** é singular para a precisão numérica utilizada. Logo não fará sentido utilizar as solução com 14 valores singulares para **A'**. A tabela 3.8 apresenta características do resíduo $\mathbf{R} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ para algumas técnicas empregadas no cálculo da solução **x**. Aqui, diferente da tabela 3.7, temos verificado o máximo resíduo sobre as restrições envolvendo os autovalores e autovetores e o desvio máximo sobre as restrições envolvendo a energia cinética, d_{1max} e d_{2max} , respectivamente. A opção *LinearSolve* refere-se à solução do algoritmo interno do *software* MATHEMATICA para o sistema.

Nota-se que a melhor valor solução ocorre quando se tomam 13 valores singulares. O pré-condicionamento da matriz **A** não melhora a solução devido ao fato do seu último

	d_{max}	d_{max}	Norma(R)
LinearSolve	$1.71 \cdot 10^4$	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$4.46 \cdot 10^4$
SVD(A) - 14 valores	$1.25 \cdot 10^5$	$7.56 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^5$
SVD(A) - 13 valores	$4.18 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$
SVD(A) - 12 valores	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$-1.00 \cdot 10^0$	$1.41 \cdot 10^0$
SVD(A') - 13 valores	$5.10 \cdot 10^{-8}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$
SVD(A') - 12 valores	$1.50 \cdot 10^{-5}$	$-1.00 \cdot 10^0$	$1.41 \cdot 10^0$
d_{1max} : maior desvio entre as restrições sobre autovalor/autovetor			
d_{2max} : maior desvio entre as restrições sobre energia cinética			

Tabela 3.8: Resíduos da solução do sistema $Ax = b$ (14x14) para os 3 primeiros autovalores/autovetores e duas primeiras energias cinéticas.

valor singular ser nulo para a precisão numérica com que o computador utilizado trabalha. Reparamos que, de modo geral, as equações referentes aos autovalores e autovetores, como no sistema 20x14, são melhores satisfeitas que aquelas referentes à energia cinética. Trabalharemos com a solução cujo resíduo possui menor norma.

Outra opção que temos é trabalhar com a solução de mínimos quadrados em um sistema intermediário entre os dois estudados até aqui. Consideramos basicamente 3 opções:

- Satisfazer a condição sobre 3 autovalores/autovetores (modos consecutivos) e sobre 2 energias (entre os modos considerados).
- Satisfazer a condição sobre 3 autovalores/autovetores (modos consecutivos) e sobre 3 energias (entre os modos considerados).
- Satisfazer a condição sobre 3 autovalores/autovetores (modos consecutivos) e sobre 4 energias.

A exigência de modos consecutivos deve-se ao fato de não fazer sentido ajustar o sistema para uma faixa de frequências desconsiderando um modo interno desta faixa. Resta então considerar os 3 primeiros ou os 3 últimos modos. Não consideramos as opções de satisfazer parcialmente as restrições sobre autovalor/autovetor. Exigir, por exemplo, que apenas o i -ésimo autovalor do sistema discreto seja igual ao correspondente do sistema contínuo nos forçaria considerar uma equação não linear, dada pela condição de que este autovalor é raiz do polinômio que caracteriza os autovalores do sistema discreto. Mesmo problema teríamos se quiséssemos satisfazer apenas a restrição sobre o autovetor. Vamos nos interessar pelos 3 primeiros modos e tentar ajustá-los por 3 tentativas, satisfazendo as seguintes restrições:

- 1 - 3 primeiros autovalores/autovetores e duas primeiras energias (já realizado).
- 2 - 3 primeiros autovalores/autovetores, segunda e terceira energias.
- 4 - 3 primeiros autovalores/autovetores, primeira, segunda e terceira energias.

A tabela 3.9 apresenta um resumo a respeito de todos os sistemas considerados nesta seção. Ressalta-se que todas estas soluções correspondem àquelas que apresentaram o resíduo de menor norma entre todas a técnicas utilizadas. Neste caso, a melhor solução para todos os problemas considerados foi obtida considerando 13 valores singulares sobre a matriz pré-condicionada \mathbf{A}' . A tabela apresenta, em ordem, a norma do resíduo da solução apresentada, todas obtidas pela consideração de apenas 13 valores singulares sobre a matriz pré-condicionada \mathbf{A}' , os desvios percentuais entre as frequências naturais do sistema discreto obtido e do sistema contínuo e os desvios percentuais entre as energias cinéticas de cada modo do sistema discreto e do sistema contínuo. A ordem numérica que aparece na tabela refere-se exatamente à ordem em que aparecem na relação anterior:

	Norma(R)	d_{f1} %	d_{f2} %	d_{f3} %	d_{f4} %	d_{E1} %	d_{E2} %	d_{E3} %	d_{E4} %
1	$1.51 \cdot 10^{-2}$	0.00	0.00	0.00	?	-1.08	1.06	27.56	135.85 (?)
2	$1.77 \cdot 10^{-1}$	0.00	0.00	0.00	?	-10.67	-8.74	15.19	112.99 (?)
3	$1.63 \cdot 10^{-1}$	0.00	0.00	0.00	?	-16.33	-14.52	7.89	99.49 (?)
d_{fi} : desvio entre as frequências naturais dos sistemas contínuo e do discreto.									
d_{Ei} : desvio entre as energias cinéticas dos sistemas contínuo discreto.									

Tabela 3.9: Aproximação do sistema contínuo por sistemas desacoplados inercialmente

As interrogações que aparecem para d_{f4} devem-se ao fato de, no cálculo das frequências naturais, obtermos um valor complexo ($1.792j$) para a quarta raiz da equação polinomial $Det[-w^2\mathbf{M} + \mathbf{K}] = 0$. Isto mostra que estes sistemas não são fisicamente representáveis.

Concluimos, pois, que a utilização de mínimos quadrados sobre o conjunto de restrições (total ou parcial) não conduz a uma solução adequada do problema (ao menos do ponto de vista físico). Continuando o estudo, passaremos a uma aproximação que, embora utilize o sentido dos mínimos quadrados, é operacionalmente diferente.

3.6 Matriz de Rank Deficiente no Problema de Discretização

3.6.1 Considerações Iniciais

A solução proposta por Santos [Santos-88] pode ser expressa, como já dissemos, por um sistema 20×20 . Devemos reparar que, uma vez que não há, naquele método, a restrição de que a matriz massa seja diagonal, o sistema formado pelas equações de restrição sobre os autovalores e autovetores resultam um sistema que permite infinitas soluções, pois possui mais equações que incógnitas (16×20), deixando 4 variáveis livres para arbítrio. Santos completa esta lacuna exatamente com as restrições sobre a energia cinética, acrescentando mais 4 equações ao sistema. Devemos notar, todavia, que, se restringimos nossa matriz massa a uma matriz diagonal, as restrições sobre autovalores e autovetores conduzem, neste nosso caso, a um sistema 16×14 , que é homogêneo pela própria natureza das equações que relacionam autovalores e autovetores. Não se pode esquecer, portanto, que o referido sistema só admitirá uma solução não trivial se o rank da matriz resultante for inferior a 14. Isto não ocorre no nosso caso particular, de forma que, tentar ajustar autovalores/autovetores e energia cinética é, para o problema colocado desta forma, tentar ajustar duas coisas, em princípio, antagônicas.

Consideremos inicialmente as restrições sobre os autovalores e autovetores apenas. Como vimos, a exigência de que a matriz rigidez seja diagonal conduz a um sistema 16×14 homogêneo. Vimos também na subseção 3.5.2 que, uma vez encontrados os autovalores e autovetores do problema, podemos pré-multiplicar a equação resultante por uma matriz qualquer de mesma ordem e os autovalores/autovetores não serão alterados. Isto equivale a dizer que, uma vez fixados os autovalores e autovetores do problema, existirão infinitas matrizes massa e rigidez que estarão em condições de satisfazê-los. O que Santos [Santos-88] faz é tomar aquelas matrizes que satisfazem as restrições sobre as energias cinéticas de cada modo.

Pode ocorrer, todavia (e este é o nosso caso), que o sistema resultante quando se exige que a matriz massa seja diagonal tenha rank completo. Neste caso, as equações que representam restrições sobre os autovalores e autovetores só admitem a solução trivial. Como sabemos que, ao final, devem existir infinitas matrizes satisfazendo nosso problema de autovalor/autovetor, concluímos que os autovalores e/ou autovetores originais devem sofrer alguma mudança para permitirem isto. Esta mudança tem que ocorrer pela própria natureza do problema de autovalor/autovetor (sobre isto falaremos mais adiante) e pode surgir pela própria aproximação da matriz resultante por outra de rank deficiente. Entretanto, um

processo iterativo e/ou interativo pode ser necessário. Interativo porque pode necessitar de vários passos até que determinado critério de convergência seja satisfeito. Interativo porque pode ser necessária uma interferência do usuário durante o processo de ajuste das matrizes.

Para melhor colocar o problema, consideremos nosso sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ original (20x14). Este sistema pode ser subdividido em outros dois, como ilustrado a seguir

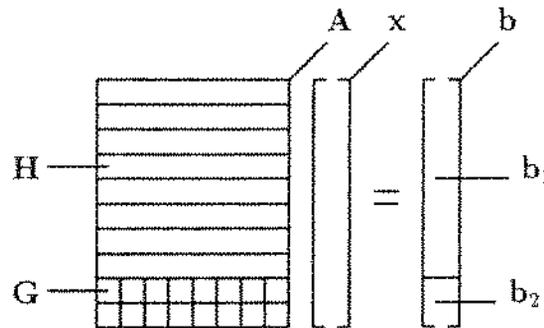


Figura 3.5: Composição do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 20x14

Podemos então escrever ($\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{Hx} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Gx} &= \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como comentado um pouco antes, é fácil ver que para termos uma solução não trivial do sistema $\mathbf{Hx} = \mathbf{0}$, o rank de \mathbf{H} deve ser menor que 14. Como o rank de \mathbf{H} é 14, queremos aproximá-la por uma matriz de rank 13. Poderíamos aproximá-la por uma matriz de rank menor, mas experiências nos tem mostrado que isto não é vantajoso, sobretudo se um processo iterativo for necessário. Matematicamente falando temos o seguinte problema a resolver: Encontrar a melhor matriz de rank 13 que aproxime a matriz original de rank 14. Para tanto utilizaremos uma decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{H} , tal como apresentado na seção 3.5. Recordando a decomposição em valores singulares, podemos escrever a matriz \mathbf{H} na forma :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{14} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (3.41)$$

Se tomarmos n valores valores singulares ($n \leq 14$) na série, teremos a melhor matriz de rank n que aproxima a matriz \mathbf{H} pelo critério dos mínimos quadrados [Björck-87] [Hansen-90]. Porém a matriz resultante não possuirá, na maioria das vezes, a mesma

estrutura⁴ da matriz original, pois aparecem elementos não nulos em posições cujos elementos são nulos na matriz original. A estrutura da matriz \mathbf{H} pode ser representada, no caso presente, por um conjunto de 4 blocos 4x4 com a seguinte estrutura:

Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}							$w_i^2 \Phi_{i1}$			
	Φ_{i1}			Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}					$w_i^2 \Phi_{i2}$		
		Φ_{i1}			Φ_{i2}		Φ_{i3}	Φ_{i4}				$w_i^2 \Phi_{i3}$	
			Φ_{i1}			Φ_{i2}		Φ_{i3}	Φ_{i4}				$w_i^2 \Phi_{i4}$

onde o subscrito i indica o modo correspondente do autovalor/autovetor e os subscritos 1..4 indicam a correspondente coordenada dos autovetores.

É também importante lembrar que as restrições sobre as energias cinéticas não serão rigorosamente satisfeitas. No entanto, as condições que devem ser mais rigorosamente satisfeitas podem ser discutidas pelo especialista. Com o problema colocado da forma apresentada aqui, podemos discutir dois pontos principais, a saber:

- Satisfazer as restrições sobre os autovalores e autovetores.
- Satisfazer as restrições sobre a energia cinética de cada modo.

Não é difícil ver que uma solução acurada para ambas as restrições não é tarefa das mais fáceis. Apenas para se ter uma idéia do problema, consideremos o método proposto por Santos em [Santos-88], que resulta nas matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} das equações 3.24 e 3.25. Suponhamos que queiramos agora obter um sistema formado por matrizes \mathbf{M}' e \mathbf{K}' desacoplado inercialmente que aproxime o sistema representado pelas matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} . Se quisermos satisfazer exatamente as restrições sobre a energia cinética de cada modo, temos a seguinte equação matricial a resolver:

$$\text{Diag}(\omega_i'^2) \mathbf{Q}^T \mathbf{M}' \mathbf{Q} = \text{Diag}(\omega_i^2) \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}, \quad (3.42)$$

onde as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} são as matrizes dos autovetores do sistema original e adaptado, respectivamente.

Suponhamos que queiramos satisfazer exatamente as igualdades entre as frequências naturais. Então queremos $\text{Diag}(\omega_i'^2) = \text{Diag}(\omega_i^2)$. Neste caso, a seguinte igualdade deve ser satisfeita:

⁴A estrutura da matriz compreende as relações entre os seus elementos. Assim uma matriz simétrica possui uma estrutura definida. Toda matriz com estrutura fixa pode ser obtida pela matrizes que formam a base do referido espaço matricial, tal qual todos os vetores de um espaço vetorial podem ser obtidos pela base deste espaço.

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-T} \mathbf{Q}^T \mathbf{M}' \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \quad (3.43)$$

Se fizermos uma decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{M} temos

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (3.44)$$

Se exigimos \mathbf{M}' digonal, ela pode ser escrita como $\mathbf{M}' = \mathbf{D} \mathbf{\Sigma} = \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{\Sigma} \sqrt{\mathbf{D}}$, onde a matriz \mathbf{D} também é diagonal, de forma que podemos reescrever a equação 3.43 como

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-T} \mathbf{Q}^T \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{\Sigma} \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \quad (3.45)$$

Comparando as equações 3.44 e 3.45 concluímos que

$$\sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}^T \quad (3.46)$$

donde vem

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{P}^{-1} \quad (3.47)$$

Note que não há nenhuma aproximação no resultado. A matriz \mathbf{M}' pode ser ajustada de forma a satisfazer as restrições sobre energia a cinética de cada modo, através de um sistema 4x4. Entretanto os autovetores obtidos são muito diferentes do sistema original. Na subseção seguinte analisamos o problema através de dois casos particulares.

3.6.2 Estudo de casos para o Procedimento da Subseção 3.6.1

3.6.2.1 Caso 1 - Sistema Contínuo da Seção 3.2

Como primeiro caso, consideremos a matriz massa \mathbf{M} da equação 3.26 e os autovetores da equação 3.28, que são os autovetores normalizados pela massa do sistema formado pelas matrizes massa e rigidez das equações 3.26 e 3.27. Se queremos obter um sistema desacoplado inercialmente (matriz massa \mathbf{M}') que tenha as mesmas frequências naturais deste sistema e as mesmas energias cinéticas em cada modo, temos que satisfazer a relação 3.40.

Realizando a decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{M} temos $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$, onde

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.248579 & -0.257814 & -0.930420 & -0.077834 \\ 0.193034 & -0.915343 & 0.288087 & 0.204671 \\ -0.948279 & -0.261146 & -0.179206 & -0.021311 \\ -0.041383 & 0.165774 & -0.138596 & 0.975499 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.257002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.252560 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.204136 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.150708 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Para computar a matriz diagonal \mathbf{M}' através das restrições sobre as energias cinéticas podemos montar o seguinte sistema 4x4:

$$\begin{bmatrix} 0.031551 & 0.392217 & 1.504653 & 3.547504 \\ 0.500787 & 1.827261 & 0.335452 & 1.785526 \\ 1.818278 & 0.240257 & 1.497828 & 0.941565 \\ 2.433901 & 1.687214 & 0.591363 & 0.249169 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

que resulta

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} -0.266072 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.649627 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.026609 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.222999 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Devemos notar que a matriz que opera sobre as massas m_1 a m_4 na equação 3.50 corresponde exatamente às 4 colunas mais à direita da matriz \mathbf{G} da equação 3.40, que é obtida pelas 4 últimas relações expressas em 3.31. Neste ponto já podemos detectar a grande dificuldade de satisfazer a diagonalidade da matriz massa e a igualdade de energias cinéticas e dos autovetores pela presença massas negativas no sistema equivalente. Poderíamos desistir do raciocínio por aqui, mas vamos continuá-lo para mostrar que o problema não pára nos sinais dos valores das massas. Aliás, lembramos que os valores são apenas de um caso particular. Podemos obter uma matriz massa diagonal com todos os valores positivos para outros casos. Devemos observar, contudo, que a própria magnitude dos valores é incompatível com

o sistema original. Veja que obtemos para uma das massas mais de 1 quilo, e a massa total do sistema real é inferior a 600 gramas. Não computaremos a matriz \mathbf{Q} porque obteremos valores complexos que serão originados quando computarmos a matriz $\sqrt{\mathbf{D}}$.

3.6.2.2 Caso 2 - Viga Biapoiada Modelada com 2 Graus de Liberdade

Consideremos uma viga biapoiada da qual conhecemos o movimento em $x = 5l/12$ e $x = 9l/12$, conforme mostra a figura 3.6.

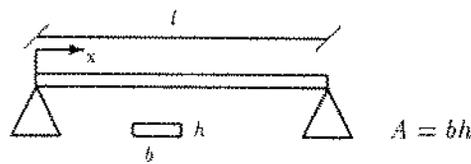


Figura 3.6: Viga biapoiada de comprimento l .

Equacionando o movimento de vibração livre deste sistema, tal como na seção 3.3, encontramos que a equação para o deslocamento $r(x)$ é [Gorman-75]

$$r(x) = \alpha_i \sin(\beta x) \quad \beta = \frac{\rho A \omega_i^2}{EI} \quad (3.52)$$

onde ρ é a massa específica, A é a área da seção transversal da viga, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia de área, ω é a frequência natural do i -ésimo modo e α_i é uma contante que depende das condições iniciais. As frequências naturais deste sistema, obtidas através das condições de contorno a serem satisfeitas, são dadas por

$$\sin(\beta l) = 0 \Rightarrow \beta_i = i \frac{\pi}{l} \Rightarrow \omega_i^2 = i \frac{\pi EI}{\rho Al}$$

Os vetores Φ (fazer analogia com a seção 3.3) para este sistema são

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\sqrt{\rho Al}} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \frac{1}{2\sqrt{\rho Al}} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

A matriz massa para o sistema de 2 graus de liberdade computada usando o procedimento proposto por Santos [Santos-88] é

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Al}{7 + 4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 6 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Fazendo a decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{M} temos $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, onde

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.909575 & 0.415540 \\ 0.415540 & -0.909575 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Sigma} = \frac{\rho Al}{7 + 4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 6.334438 & 0 \\ 0 & 4.397613 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Para computarmos a matriz massa \mathbf{M}' diagonal através das restrições sobre a energia cinética de cada modo temos que resolver o seguinte sistema

$$\frac{1}{4\rho Al} \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{3})^2 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}' = \frac{\rho Al}{3 + 2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Notemos que, embora a massa total do sistema desacoplado seja consideravelmente menor que a massa do sistema real ($0.732\rho Al$), não existe nenhum absurdo, como ocorreu no caso anterior. O fato de a massa total do sistema discreto ser menor que a massa do sistema contínuo deve-se à aproximação por apenas dois graus de liberdade. Entretanto, Santos mostra que, quando o número de graus de liberdade considerados para a discretização aumenta, os valores das massas totais dos dois sistemas ficam mais próximos.

Se quisermos escrever $\mathbf{M}' = \mathbf{D}\mathbf{\Sigma} = \sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{\Sigma}\sqrt{\mathbf{D}}$ temos que a matriz \mathbf{D} deve ser

$$\mathbf{D} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0.315734 & 0 \\ 0 & 0.621258 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Computando a matriz \mathbf{Q} dos autovetores do sistema desacoplado temos

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\rho Al}\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}} \begin{bmatrix} -2.943440 & -4.380932 \\ 3.748324 & -2.518406 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Nota-se grande discrepância entre os vetores \mathbf{Q} do sistema desacoplado inercialmente e os vetores \mathbf{P} do sistema acoplado. Algumas observações são importantes, a saber:

- Devemos observar que, para a computação da matriz massa diagonal \mathbf{M}' através das restrições sobre a energia cinética, tomamos os próprios autovetores do sistema acoplado. Devemos reparar que o primeiro membro da equação 3.56 corresponde exatamente a $\mathbf{P}^T\mathbf{M}'\mathbf{P}$, com $\mathbf{P} = [\Phi_1\Phi_2]$. Pode-se argumentar que estamos querendo encontrar uma matriz \mathbf{Q} de autovetores para o sistema desacoplado sendo que, de antemão, já usamos para a computação daquela matriz, uma outra que considera os autovetores do sistema acoplado. Lembramos

que a matriz M' pode ser computada por outros critérios que não apenas as restrições sobre a energia cinética. É razoável, porém que a tomemos de forma que os autovetores considerados estejam o mais próximo possível dos autovetores do sistema acoplado, pois é isto que desejamos. Era, portanto, de se esperar que, computando a matriz M' com os próprios autovetores do sistema acoplado, a matriz Q estivesse próxima de P . Se isto ocorresse, poderíamos retornar e computar uma nova matriz M' com os vetores Q e repetir o processo até que a matriz M' , e conseqüentemente a matriz Q se estabilizassem. No entanto, a grande sensibilidade dos autovetores ao desacoplamento (com as hipóteses consideradas) faz o processo divergir e as matrizes Q estarão, a cada passo, mais distantes da matriz P .

- Devemos observar que o fato de tomarmos os autovetores do sistema acoplado inercialmente e montarmos um sistema de equações de forma que as energias de cada modo do sistema desacoplado sejam iguais às respectivas energias do sistema acoplado não implica que estejamos exigindo $P^T M P = P^T M' P$. Se observarmos o sistema da equação 3.55, vemos que as duas equações ali expressas correspondem $P_1^T M' P_1 = P_1^T M P_1$ e $P_2^T M' P_2 = P_2^T M P_2$. Entretanto, não estejamos exigindo que $P_1^T M' P_2 = P_2^T M' P_1 = 0$, de forma que escrever 3.55 não é exigir $P^T M P = P^T M' P$.

- Por conta da observação anterior deve-se procurar qual a implicação do fato de não exigirmos $P_1^T M' P_2 = P_2^T M' P_1 = 0$ em 3.55. Quando fazemos isto, estamos exigindo que algo no sistema tenha de mudar para manter a ortogonalidade dos modos. Lembramos, todavia, que esta mudança ocorre quando computamos a matriz Q e que o fato de tomarmos a própria matriz P em 3.55 é apenas um "chute" inicial.

- Lembramos ainda que, quando escrevemos $P^T M P = Q^T M' Q$, não estamos fazendo nenhuma restrição sobre a energia cinética, pois isto não implica que as energias cinéticas dos sistemas acoplado e desacoplado em cada modo sejam iguais. Esta condição só aparecerá quando computarmos a matriz rigidez. Notemos, na expressão 3.25, que a computação da matriz rigidez utiliza tanto a matriz Y quanto a matriz $\text{Diag}(\omega^2)$, além da matriz de autovetores. Computando a matriz rigidez (que chamaremos K') com a matriz $\text{Diag}(\omega^2)$, com a matriz Q e com a matriz Y devidamente recalculada para os novos autovetores (Q), estaremos garantindo que o sistema $M'\ddot{x} + K'x = 0$ tem frequências naturais iguais ao do sistema $M\ddot{x} + Kx = 0$, as mesmas energias cinéticas em cada modo e autovetores dados pelas colunas da matriz Q .

3.6.3 Proposição de um Método para a Obtenção do Sistema Desacoplado

Do exposto na subseção anterior concluímos ser praticamente impossível satisfazer a igualdade de frequências naturais, autovetores e energias cinéticas entre os sistemas acoplado e desacoplado inercialmente. Uma vez descartada a hipótese de satisfazer rigorosamente estas exigências, passemos a uma interessante aproximação do sistema contínuo por um discreto equivalente inercialmente desacoplado.

Consideremos as restrições sobre autovalores e autovetores e o sistema da equação 3.40. Seja \mathbf{H}' a matriz de rank 13 que aproxima \mathbf{H} no sentido de mínimos quadrados e seja \mathbf{v} um vetor no espaço nulo de \mathbf{H}' . Reparemos que existem infinitos vetores no espaço nulo de \mathbf{H}' , que são múltiplos de \mathbf{v} . Destes vetores, procuramos aquele que melhor satisfaz as restrições sobre as energias cinéticas. Seja $c\mathbf{v}$ esta vetor. Recordemos que as restrições sobre as energias cinéticas podem ser expressas pelo sistema

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \quad (3.59)$$

Levando em conta que a solução procurada deve estar no espaço nulo de \mathbf{H}' podemos escrever

$$\mathbf{G}\mathbf{v}c = \mathbf{b}_2 \quad (3.60)$$

Vejamos que nossa incógnita agora é o escalar c . Devemos tomar a solução de mínimos quadrados que é

$$c = \frac{(\mathbf{G}\mathbf{v})^T \mathbf{b}_2}{(\mathbf{G}\mathbf{v})^T (\mathbf{G}\mathbf{v})} \quad (3.61)$$

Este método tem a característica de satisfazer muito melhor as restrições sobre autovalores/autovetores que aquelas sobre as energias cinéticas. Além disto, o fato de não mantermos a estrutura da matriz \mathbf{H} quando computamos a matriz \mathbf{H}' faz com que incorramos num erro em alguns autovalores/autovetores. Entretanto, é possível ajustar muito bem os autovetores/autovetores dentro de determinada faixa de frequência, deixando quase todo o erro numa faixa que não é de interesse. Também temos verificado que o fato de refinarmos o ajuste dentro da faixa de frequências de interesse não torna descontrolado o erro fora desta faixa, isto é, o erro cometido não ultrapassa certo limite.

Como exemplo, consideremos nosso sistema contínuo apresentado na seção 3.2. A solução do problema leva à concentração de erros nos modos mais baixos. Isto acontece porque as equações que regem os modos mais altos têm termos de magnitude muito maior que aqueles envolvidos nas equações dos modos mais baixos, fazendo com que estas equações sejam mais "rígidas". Para ajustarmos os modos mais baixos, damos a eles um peso maior na solução do problema.

A matriz \mathbf{H} do sistema $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é apresentada na equação 3.32, correspondendo às 16 primeiras linhas daquela matriz. As matrizes \mathbf{M}' e \mathbf{K}' apresentadas em 3.62 e 3.63 são um modelo adaptado para os três modos mais baixos do nosso sistema original. As diferenças absolutas entre as frequências naturais e autovetores com relação ao sistema original são apresentadas em 3.64, onde o superscrito O indica o sistema original e a ausência de superscrito indica o sistema adaptado. A equação 3.64 apresenta ainda as variações percentuais das energias cinéticas em cada modo entre os sistemas original e adaptado.

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} 0.1835493 & & & \\ & 0.1245941 & & \\ & & 0.1781724 & \\ & & & 0.1013586 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.800291 \cdot 10^6 & -1.136044 \cdot 10^6 & 4.312282 \cdot 10^5 & -7.260434 \cdot 10^4 \\ -1.136044 \cdot 10^5 & 1.254960 \cdot 10^5 & -8.249292 \cdot 10^5 & 2.277671 \cdot 10^5 \\ 4.312282 \cdot 10^5 & -8.249292 \cdot 10^5 & 2.277671 \cdot 10^5 & -3.002027 \cdot 10^5 \\ -1.282537 \cdot 10^4 & 2.277671 \cdot 10^5 & -3.002027 \cdot 10^5 & 1.025459 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} |f_1^O - f_1| &= 1.8 \cdot 10^{-8} & |f_2^O - f_2| &= 2.0 \cdot 10^{-7} \\ |f_3^O - f_3| &= 3.0 \cdot 10^{-7} & |f_3^O - f_3| &= 2.5 \cdot 10^{+1} \\ \|\Phi_1^O - \Phi_1\| &= 1.1 \cdot 10^{-8} & \|\Phi_2^O - \Phi_2\| &= 2.8 \cdot 10^{-8} \\ \|\Phi_3^O - \Phi_3\| &= 13.9 \cdot 10^{-8} & \|\Phi_4^O - \Phi_4\| &= 1.2 \cdot 10^0 \\ d_{E1} &= 16.33\% & d_{E2} &= 14.52\% \\ d_{E3} &= 7.89\% & d_{E4} &= 114.1\% \end{aligned} \quad (3.64)$$

É importante lembrar que estes valores foram obtidos dando um peso de 10^6 para o primeiro modo, $5 \cdot 10^5$ para o segundo, 10^5 para o terceiro e unitário para o quarto. Ressalta-se que uma divisão dos pesos dados aos três primeiros modos por 1000 aumentaria os erros

nas frequências destes modos para a ordem de 10^{-2} . Para os erros nos respectivos autovetores o erro também iria para a ordem de 10^{-2} . Para o quarto modo, todavia, o erro não cai na proporção inversa, ficando 20.8 para a frequência e 1.17 para o autovetor. Isto indica que o erro que se comete fora da faixa de ajuste não se torna descontrolado quando refinamos o ajuste no interior da faixa.

Um método de ajuste para todos os modos, levando em conta tanto o rank quanto a estrutura da matriz \mathbf{H} encontra-se em desenvolvimento e as conclusões sobre este método devem aparecer em trabalhos futuros.

Capítulo 4

Estudo Experimental

4.1 Dispositivo Experimental

O dispositivo experimental, apresentado na figura 4.1, consiste de uma viga engastada (1) com massas localizadas (2) submetida à ação de um excitador eletrodinâmico (3) e da força de atrito na extremidade. O atrito sólido ocorre entre uma superfície de aço comum (4) e pastilhas de freio e a força normal aplicada pode ser controlada através dos parafusos (5). O sensoramento da força normal é feito com a utilização de LVDTs (6) através da medição da deformação do garfo (7). A força de excitação é medida através de um sensor de força piezoelétrico. A força de atrito não é medida.

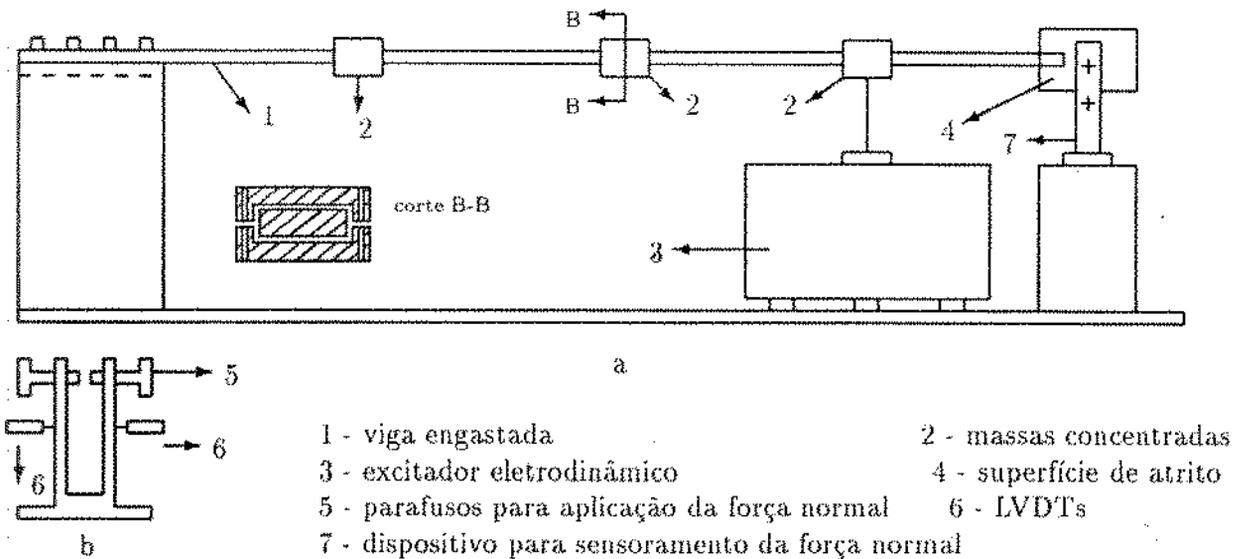


Figura 4.1: Dispositivo experimental. a: Esquema geral. b: Sensoramento da força normal

A calibração do sensor construído para a medição da força normal é apresentada no apêndice D.

O modelo utilizado para “representar” o sistema foi apresentado na seção 3.2 e o problema enfrentado para a obtenção de um modelo discreto equivalente foi discutido ao longo do capítulo 3.

4.2 Procedimentos

O excitador eletrodinâmico foi conectado a uma das massas concentradas do dispositivo (identificada na seção 3.2 como massa m_3). A força de excitação aplicada pelo excitador foi medida através de um sensor de força piezoelétrico. A força normal foi variada em 4 níveis, a saber: nula, 5.8 N, 12.9 N e 17.5 N.

As acelerações nas posições das massas concentradas foram medidas por acelerômetros. A frequência de excitação foi variada através de um gerador de sinais (onda senoidal). Para o registro dos dados foi utilizado o equipamento de aquisição AE-200 da SOMA INSTRUMENTAÇÃO. O sistema foi mantido em movimento durante 15 minutos antes de iniciarmos cada conjunto de aquisições a fim de que a temperatura na região de contato fosse o mais estável possível durante o processo de medição.

As figuras 4.2 a 4.6 apresentam o dispositivo experimental. Em 4.2 temos uma visão geral da experiência montada com os equipamentos e instrumentos utilizados. Em 4.3 temos uma visão mais clara do dispositivo experimental propriamente dito, além dos condicionadores de sinais utilizados na aquisição de dados. Em 4.4 destacamos as “massas concentradas” e os acelerômetros, bem como o sensor de força, instalado sob a viga, na conexão com excitador. A figura 4.5 destaca o posicionamento dos LVDTs, que são utilizados para detectar a deformação do garfo, que fornecerá, com as devidas transformações, a força normal aplicada pelos parafusos (de bronze) à superfície de aço, que também aparece em destaque. Em 4.6, por fim, apresentamos em destaque o mecanismo utilizado para a ação do atrito. Pode-se notar os dois pinos (de pastilha de freio) que ficam em contato com a superfície de aço.

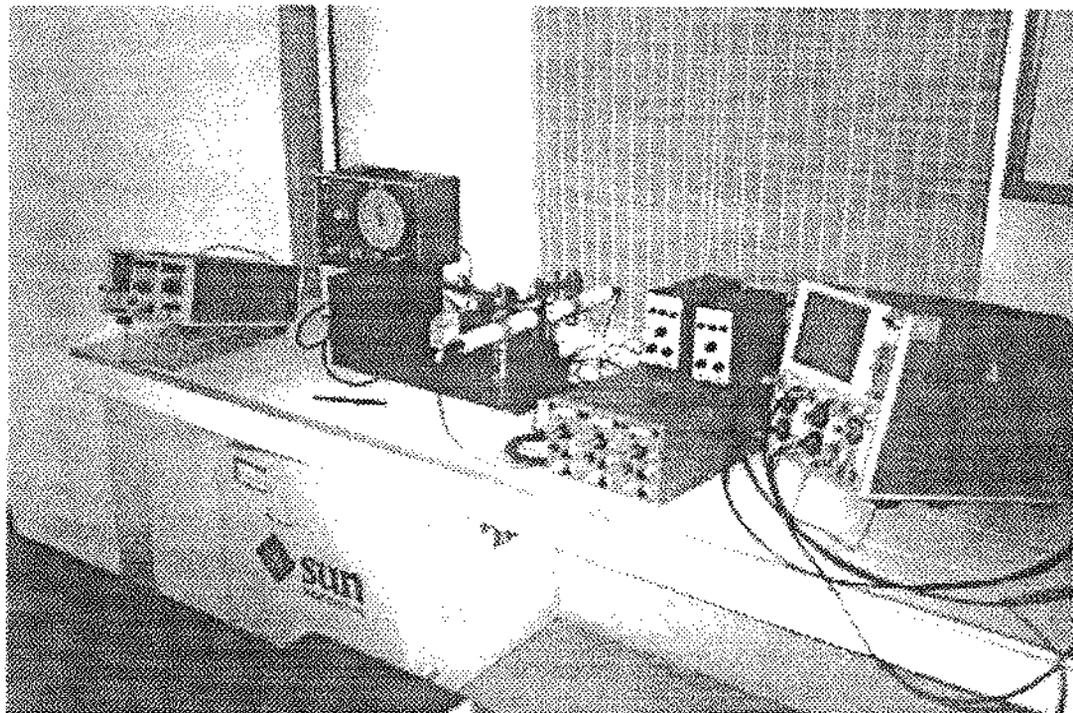


figura 4.2 - Vista geral dos equipamentos usados na experiência

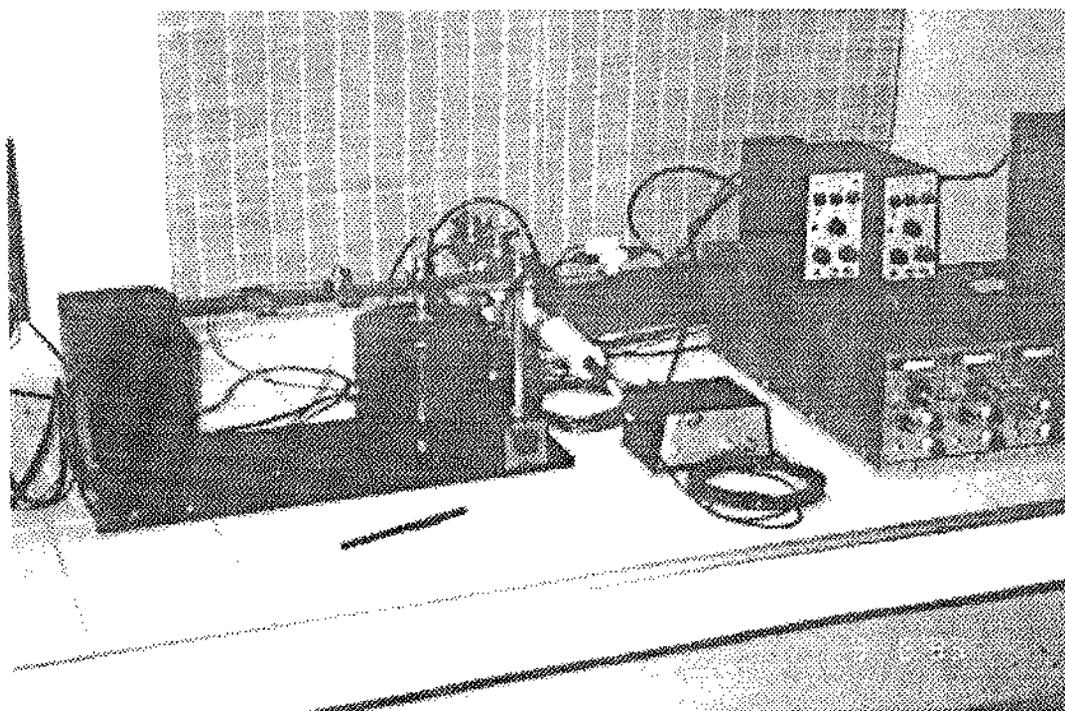


figura 4.3 - Visão geral do dispositivo experimental

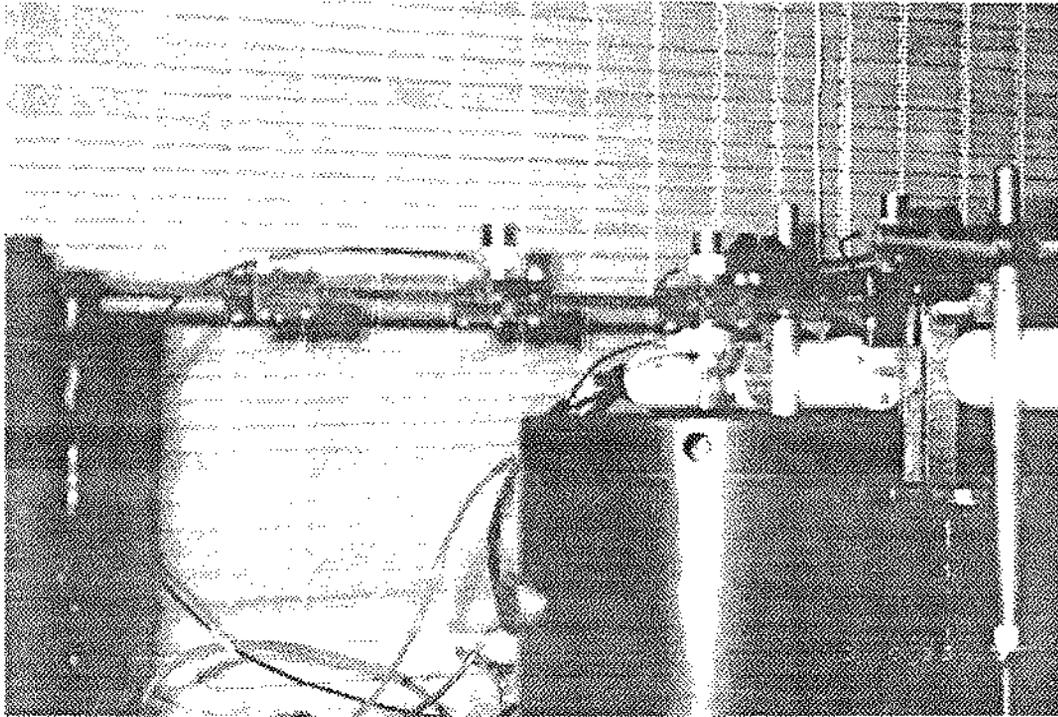


figura 4.4 - Destaque das massas localizadas, acelerômetros e sensor de força

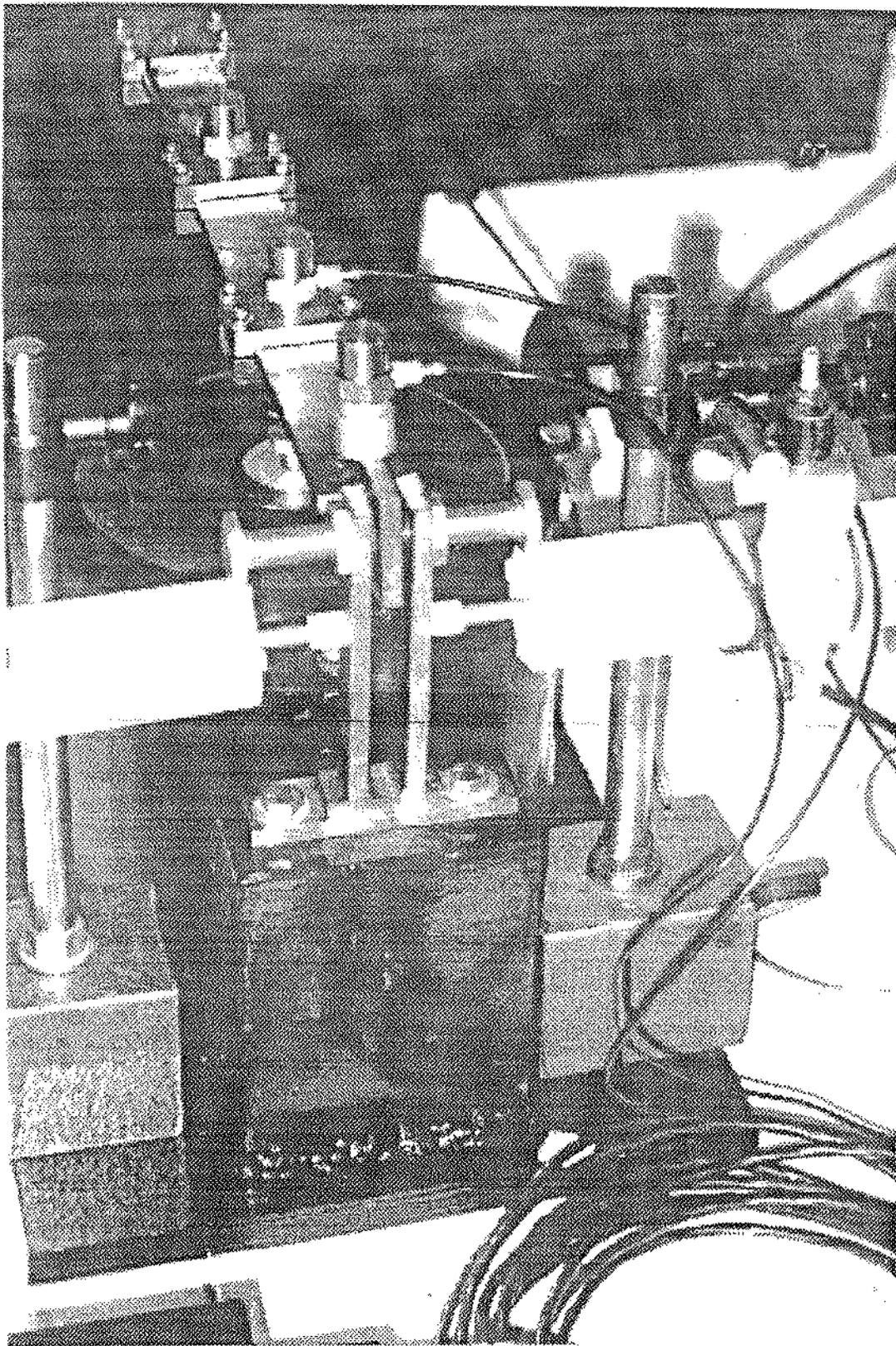


figura 4.5 - Destaque dos LVDTs e do sensor da força normal

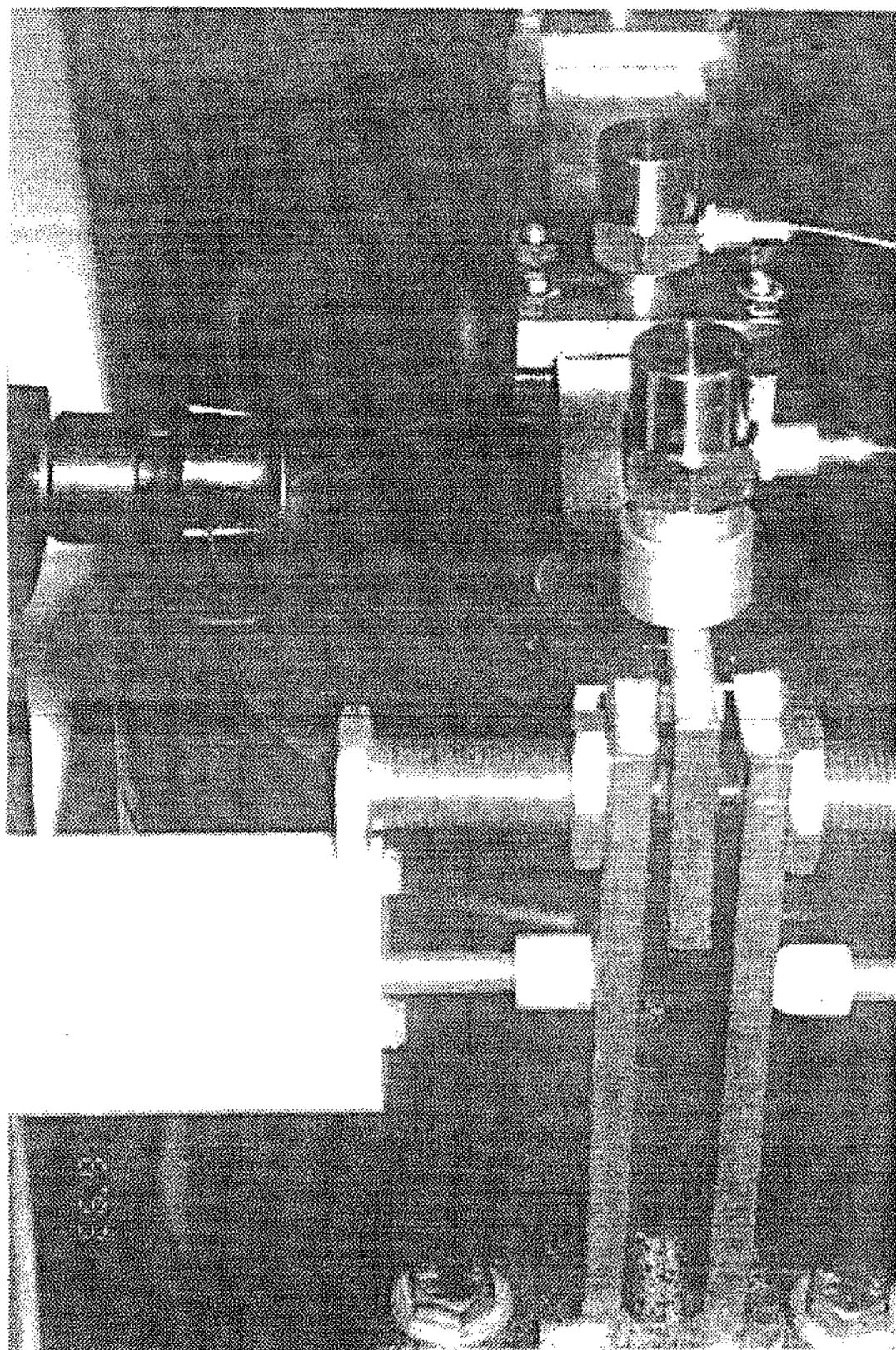


figura 4.6 - Destaque do dispositivo de atrito

As características de projeto do dispositivo experimental são as apresentadas na tabela 4.1 a saber:

massa específica do aço utilizado (SAE 1020)	7684 Kg/m^3
módulo de elasticidade do material utilizado	$2.1 \cdot 10^{11} N/m^2$
comprimento total da viga	0.36 m
seção transversal da viga (base x altura)	0.025 x 0.005 m
distância entre as massas concentradas	0.089 m
massa concentrada 1*	0.0694 Kg
massa concentrada 2	0.0881 Kg
massa concentrada 3	0.1049 Kg
massa concentrada 4	0.0909 Kg
* da esquerda para a direita	

Tabela 4.1: Dados de projeto do Dispositivo Experimental

4.3 Resultados

Nesta seção apresentamos resultados obtidos experimentalmente e resultados obtidos pela simulação numérica do movimento do sistema equivalente obtido através do método desenvolvido no capítulo 3.

Primeiramente comparemos as frequências naturais aproximadas que foram verificadas durante a experiência com aquelas obtidas no capítulo 3, considerando o sistema contínuo. Falamos em frequências naturais aproximadas pelo fato de não ter havido identificação destas frequências, mas tão somente uma observação com base no comportamento da amplitude de vibração do sistema durante uma varredura da frequência de excitação. A tabela 4.2 apresenta os resultados.

Teórica	Experimental	Desvio
20.18	20.0	+0.90%
128.82	132.0	-2.40%
360.85	352.0	+2.50%
685.18	670.0	+2.27%

Tabela 4.2: Frequências "naturais", teóricas e experimentais

Não podemos esquecer que a análise teórica não levou em conta a massa do núcleo do excitador, o que contribui para obtermos frequências naturais teóricas diferentes das experimentais.

As figuras 4.7 e 4.8 apresentam o deslocamento da extremidade da viga para uma frequência de excitação de 20 Hz e amplitude de 15N, tanto para os dados experimentais, quanto para a simulação. A figura 4.7 apresenta um caso em que o sistema não estava sob o efeito do atrito, o que não ocorre em 4.8.

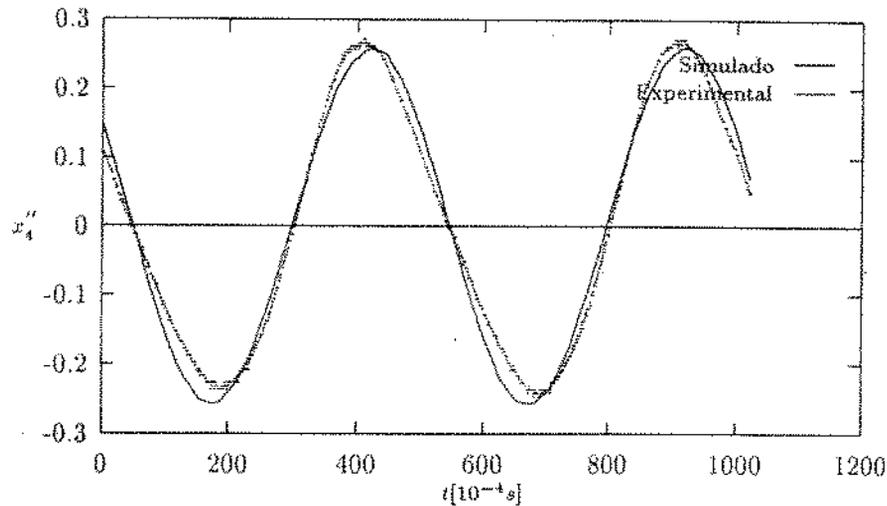


Figura 4.2: $x_4'' \times t$ experimental e simulado. Sistema sem atrito seco

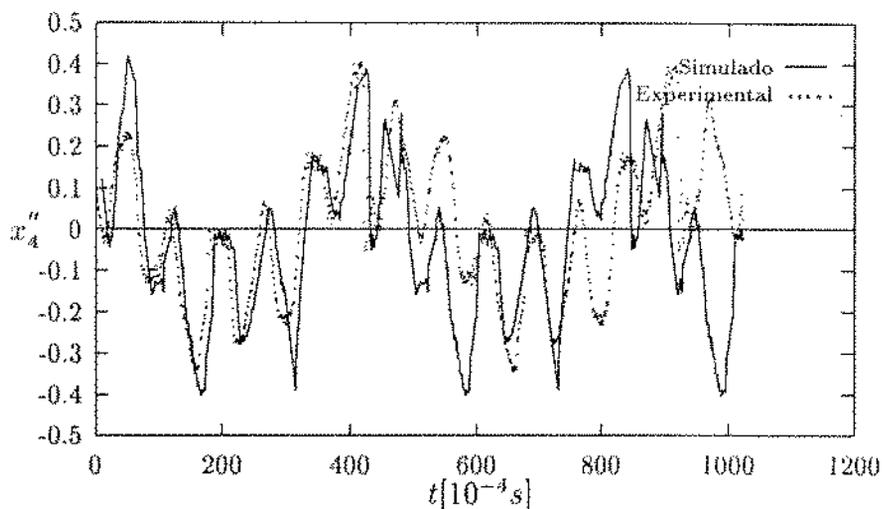


Figura 4.3: $x_4'' \times t$ experimental e simulado. Sistema com atrito seco

É importante comentar os resultados das figura 4.7 e 4.8. Simulamos primeiro

um sistema de 4 graus de liberdade sem atrito seco e sem amortecimento viscoso, levando em conta as matrizes massa e rigidez obtidas no capítulo 3. A amplitude da aceleração foi muito alta. Testamos, então, modelos de amortecimento proporcional até reduzir o nível da amplitude da aceleração para próximo do medido. A matriz amortecimento C que dá o resultado mostrado em 4.7 é

$$C = 50M + 10^{-3}K$$

onde as matrizes M e K são as matrizes massa e rigidez obtidas no capítulo 3.

Esta matriz amortecimento foi utilizada na simulação do sistema com atrito seco e os resultados, como já dissemos, estão apresentados na figura 4.3. Para uma estimativa da força de atrito consideramos a força normal medida e um coeficiente de atrito estimado conforme a literatura didática sobre o assunto [Shigley-86]. O coeficiente considerado foi de 0.3, para superfícies de aço e material impregnado de asbesto.

Nota-se boa concordância entre os respostas medida e simulada. Neste ponto é importante comentar os problemas enfrentados por Stelter [Stelter-90], referentes ao problema de ruído, sobretudo quando a frequência de excitação cresce. Isto deve estar relacionado a dois fatores:

- Quando a frequência de excitação cresce, a mudança de coeficiente de atrito de estático para dinâmico e vice-versa ocorre com maior frequência. Esta mudança envolve uma dinâmica difícil de equacionar (geralmente não modelada por causa de sua complexidade) e a instrumentação pode não permitir sua captação (distingui-la do ruído propriamente dito).
- A dinâmica envolvida na mudança de coeficientes de atrito altera a própria dinâmica do sistema como um todo. Desta forma, se a frequência com que o coeficiente de atrito muda é aumentada, aumenta sua influência sobre a parte que é considerada linear, deslocando o modelo real do modelo idealizado.

Além disto, os problemas numéricos a serem contornados durante a simulação de problemas não lineares não é pequeno. Sendo a precisão numérica limitada e considerando que a cada intervalo em que o coeficiente de atrito não se altera a resposta depende das condições iniciais do próprio intervalo, pode-se inferir que as aproximações feitas nas condições iniciais vão conduzir a erros cumulativos nos intervalos posteriores. Como exemplo, lembramos que, em alguns casos, a velocidade mudou de sinal mais de 500 vezes até que o movimento pudesse ser considerado em estado permanente.

Um aspecto importante refere-se ao conteúdo de frequência da resposta do sistema. A figura 4.9 apresenta os resultados da FFT (transformada rápida de Fourier) da resposta

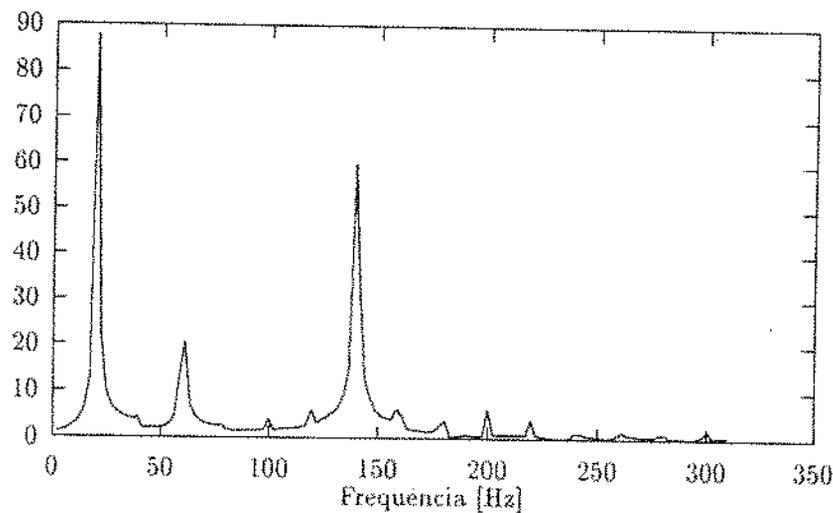


Figura 4.4: FFT da resposta medida para a extremidade da viga a 20 Hz

medida apresentada em 4.8. Observam-se harmônicos múltiplos de 20 Hz e um espectro bem “limpo”. Este resultado confirma a hipótese usada quando se aplica o método do balanço harmônico incremental. Entretanto, o fato de o sétimo harmônico apresentar uma amplitude muito alta nos leva a levantar algumas hipóteses, a saber:

- Existe uma contribuição do segundo modo no sinal (frequência de 132 Hz), responsável pela grande amplitude do harmônico em 140 Hz.
- A entrada possui harmônicos em múltiplos de 20 Hz e alguns destes harmônicos podem estar com a amplitude alta, alterando a saída.

Para que estas questões sejam discutidas apresentamos nas figuras 4.10 a 4.18 a FFT das entradas (força) e saídas (aceleração na extremidade da viga) para os diversos níveis da força de atrito, nas frequências de excitação de 20 e 40 Hz. Para os títulos das figuras 4.10 a 4.18 considere a seguinte simbologia:

- F_0 → Amplitude do forçamento aplicado à massa m_2 .
- F_{atr} → Magnitude da força de atrito aplicada.
- f → frequência de excitação.

Chamamos a atenção para a escala vertical dos espectros apresentados. A diferença de magnitude de um gráfico para o outro deve-se ao fato de a FFT ter sido realizada sobre os valores em milivolts (não Newtons), os quais dependem dos fatores de multiplicação usados na experiências e variados durante a mesma. Nota-se também a variação da força F_0 , não mantida constante de um experimento para o outro.

Podemos notar que, embora não tenha havido controle da força de excitação, o espectro das entradas é bem limpo, no sentido de que qualquer conteúdo em frequências que não a de interesse é muito menor que a amplitude do harmônico na frequência desejada. Particularmente para as figuras 4.10 a 4.13 (níveis de atrito mais baixos), os espectros das entradas são muito limpos, destacando-se que também os espectros das saídas para o sistema sem atrito (figuras 4.10 e 4.11) apresentam praticamente só o pico correspondente à frequência de excitação. Rigorosamente, na figura 4.10, notam-se pequenos componentes do segundo e terceiro harmônicos da frequência de excitação, mas isto deve-se aos respectivos componentes da entrada, o mesmo acontecendo na figura 4.11. Estas observações praticamente excluem a participação do segundo modo nas saídas do sistema linear. Entretanto, não excluem a participação do segundo modo no sistema não linear. Isto pode ocorrer pelo fato do atrito influenciar toda a dinâmica do sistema, sobretudo quando a força de atrito cresce.

Comentemos sobre a possibilidade de um harmônico cujo pico é alto na entrada manifestar-se na saída. Exceto para os níveis mais altos da força de atrito (especialmente para $F_{atr} = 17.5N$), o espectro do forçamento pode ser considerado praticamente limpo. Pode ser, todavia, que, como uma entrada excita várias frequências na saída, uma combinação das saídas de alguns harmônicos poderia gerar uma saída “alta” no sétimo harmônico na figura 4.12. Vejamos que não necessariamente o sétimo harmônico é alto, o que se comprova pela figura 4.13. Embora os níveis de atrito mais alto (sobretudo $F_{atr} = 17.5N$) exijam cautela em conclusões mais gerais, os espectros apresentados nos fazem crer que o caso apresentado em 4.12 é um caso isolado, particular.

Não acreditamos na hipótese de que os harmônicos de entrada em 4.12 sejam os principais responsáveis pela magnitude do pico apresentado em 140 Hz na saída. Uma parcela vem sabidamente da excitação em 20 Hz. Embora acreditemos que a magnitude do pico do sétimo harmônico deva ser necessariamente menor que a magnitude dos harmônicos precedentes (comparação com os sistemas lineares), não encontramos nenhuma prova rigorosa para isto. O que nos leva a acreditar nesta hipótese é a incompatibilidade entre alta frequência e alta amplitude em vibrações de sistemas mecânicos e sugestão dada por Pierre [Pierre-85] de que a consideração de harmônicos até ordem 7 fornece, em geral, boa precisão na computação da resposta. Devemos notar que o próprio Pierre deve partir da suposição de que os harmônicos de ordem superior devem ter participação menor que os precedentes. Alertamos, todavia, que esta conclusão está baseada em testes realizados com sistemas particulares de até dois graus de liberdade.

É provável que a parcela extra (se assim o for, além da participação do sétimo harmônico da entrada de 20 Hz), seja devida a uma participação do segundo modo na

resposta. Embora a frequência de ressonância do sistema linear seja 132 Hz para o segundo modo, o atrito pode aumentá-la, de forma que esteja mais próxima a 140 Hz. Apesar de um aprofundamento desta questão ser necessário, acreditamos na hipótese de o atrito poder “*enrijecer*” o sistema, fazendo com que os picos de ressonância ocorram em frequências superiores às correspondentes no sistema linear. A figura 2.15-a mostra um leve deslocamento dos picos de ressonância para a direita quando o nível da força de atrito cresce em relação à excitação.

Outro fator que nos leva a acreditar na participação do segundo modo é a semelhança entre as respostas simulada e medida. O fato de o sistema simulado ser, de certa forma, equivalente ao sistema contínuo, garante que, em havendo participação do segundo modo na resposta do sistema contínuo, também esta participação aparecerá, de alguma forma na resposta do sistema discreto.

Muitas outras medições em diversas frequências foram realizadas para um estudo mais profundo do sistema. Entretanto, a análise de muitos fenômenos é tarefa das mais complexas e consideramos satisfatório o resultado parcial alcançado até este ponto.

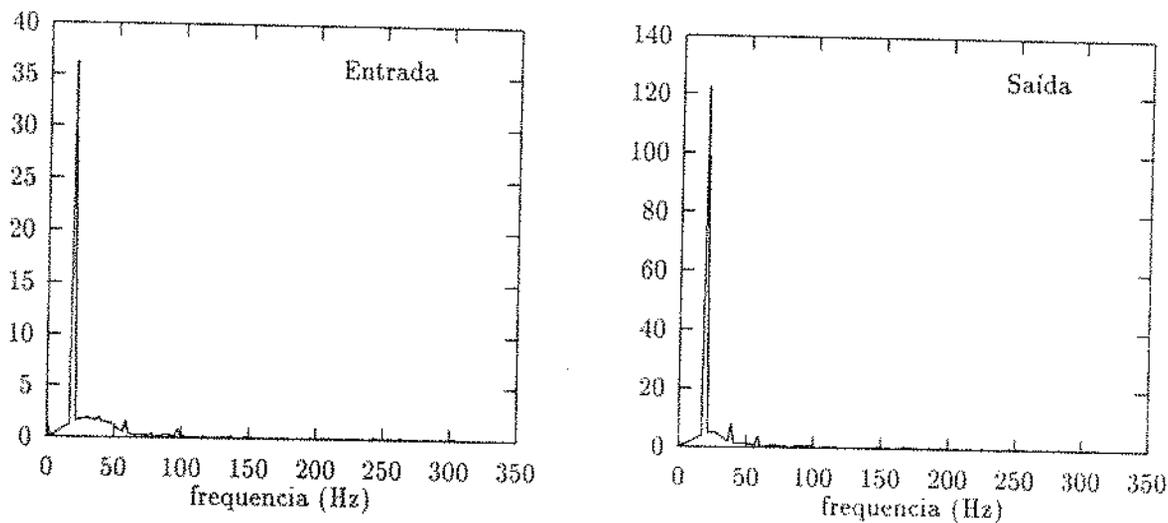


Figura 4.5: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 10.0N$, $F_{atr} = 0$ e $f = 20Hz$.

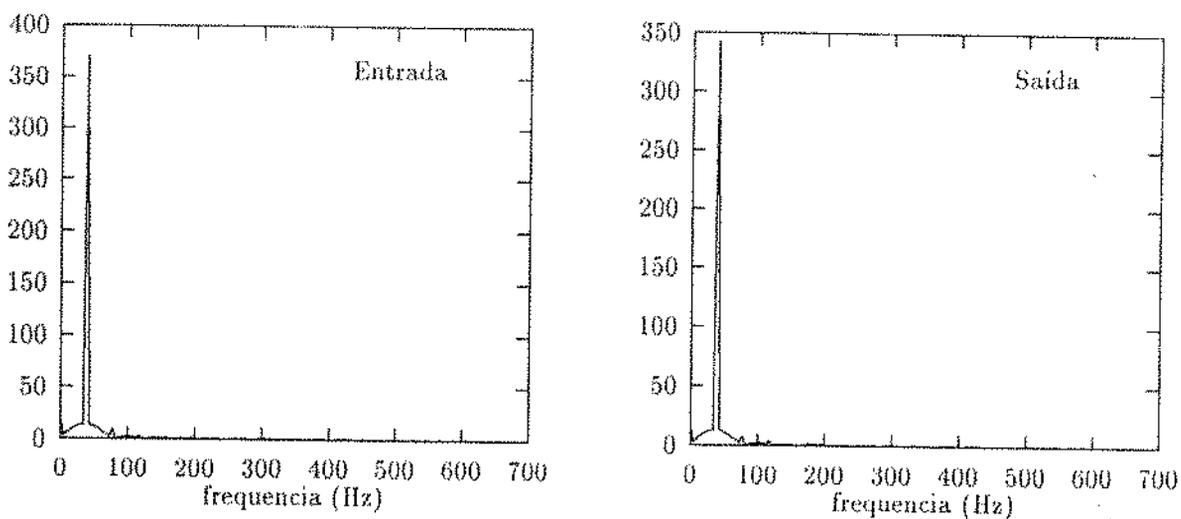


Figura 4.6: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 10.3N$, $F_{atr} = 0$ e $f = 40Hz$.

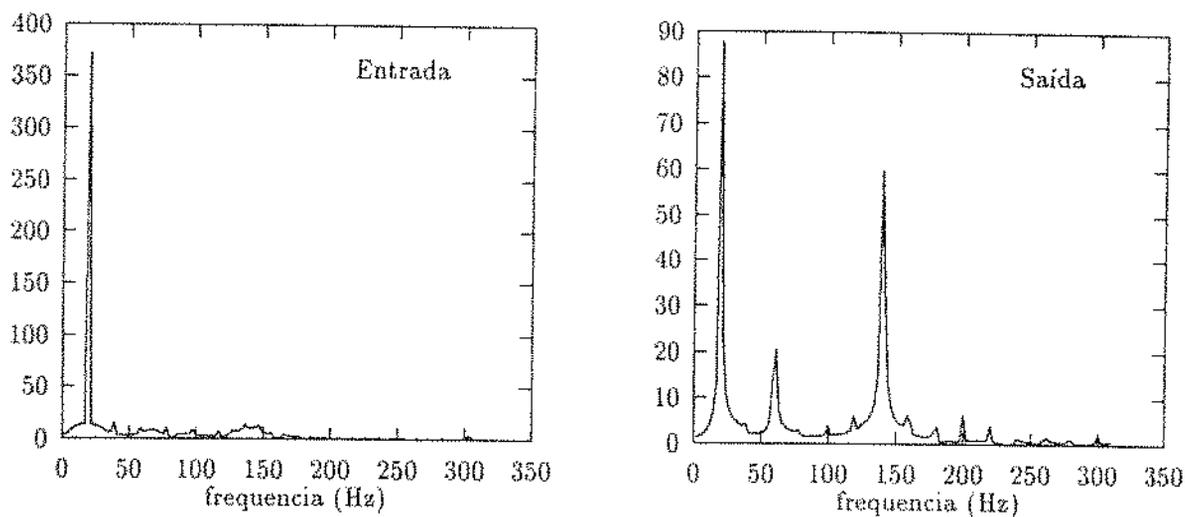


Figura 4.7: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 17.6N$, $F_{atr} = 5.17$ e $f = 20Hz$.

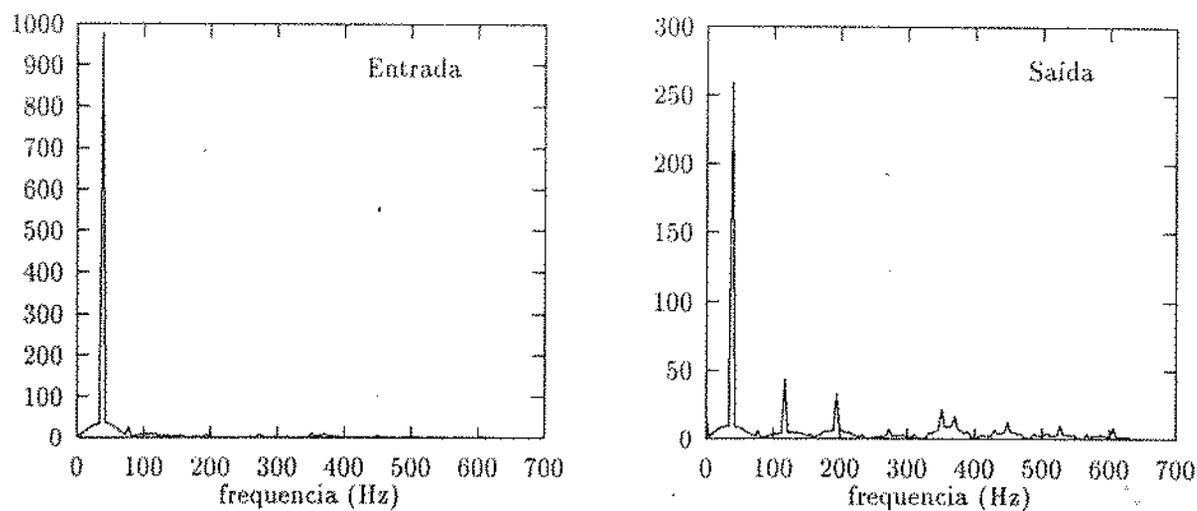


Figura 4.8: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 14.9N$, $F_{atr} = 5.17$ e $f = 40Hz$.

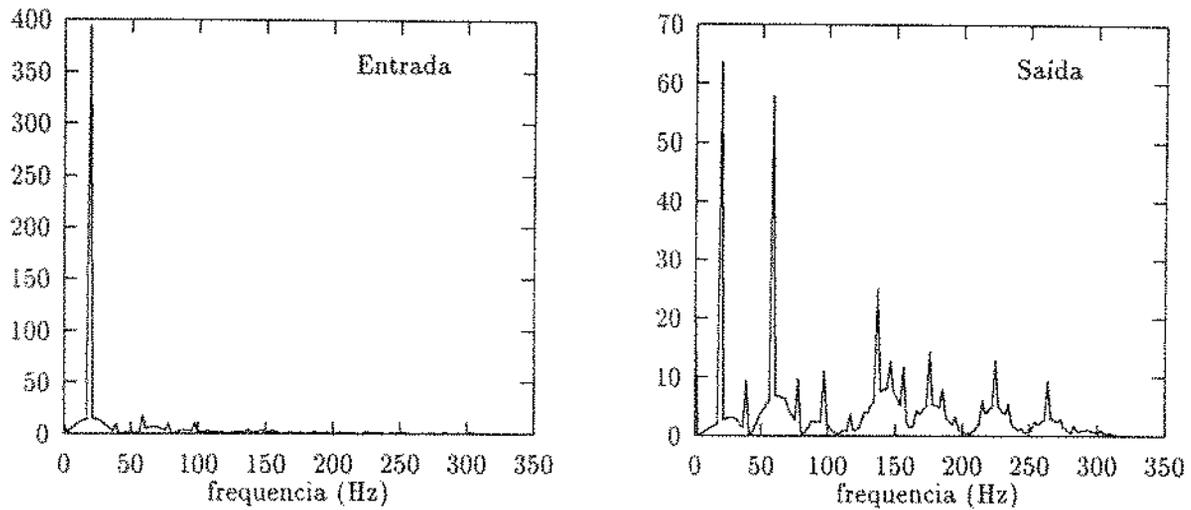


Figura 4.9: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 17.0N$, $F_{atr} = 12.9$ e $f = 20Hz$.

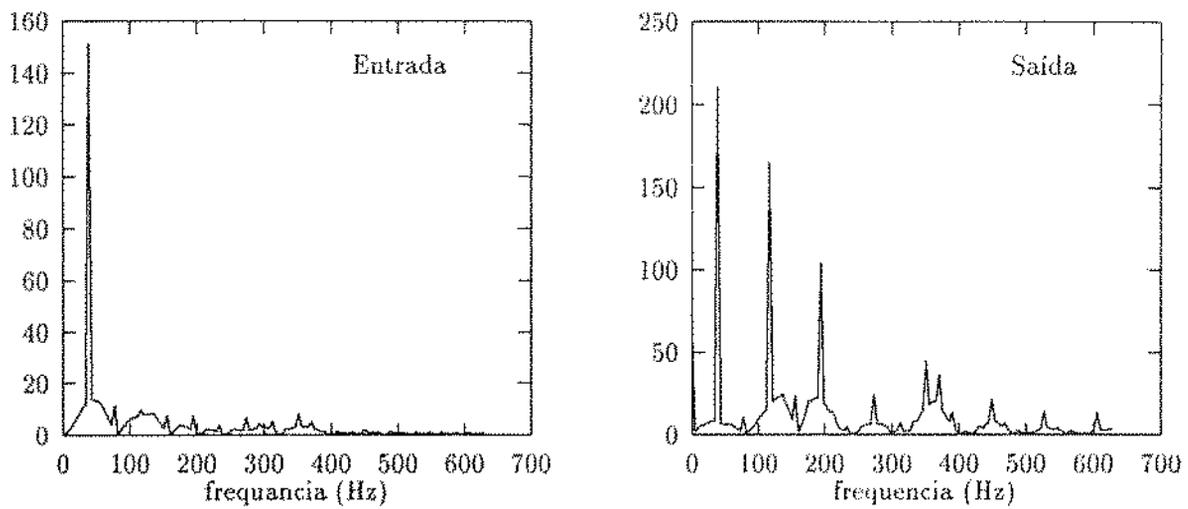


Figura 4.10: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 17.5N$, $F_{atr} = 12.9$ e $f = 40Hz$.

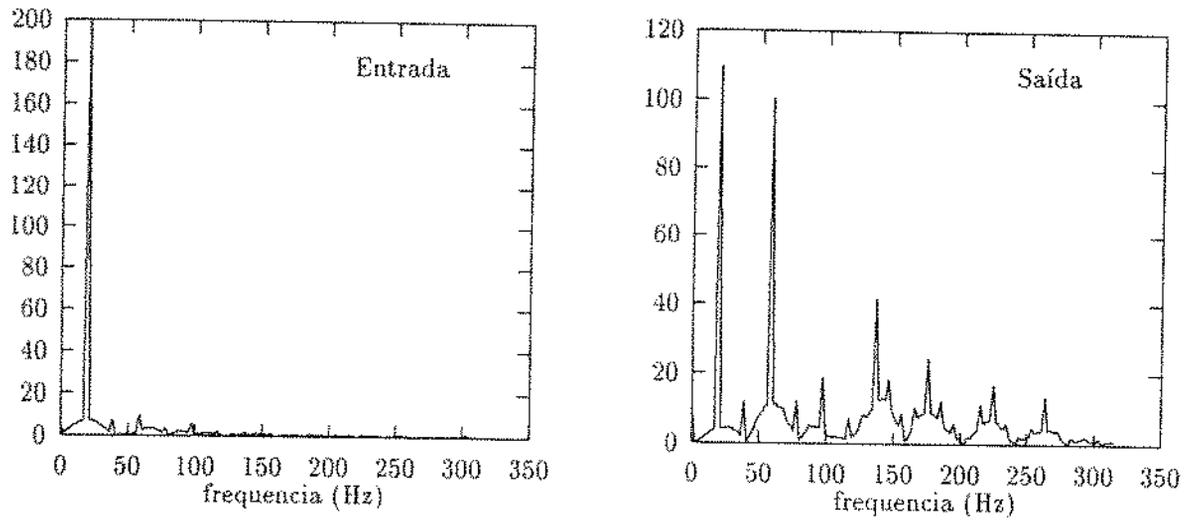


Figura 4.11: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 18.5N$, $F_{atr} = 17.5$ e $f = 20Hz$.

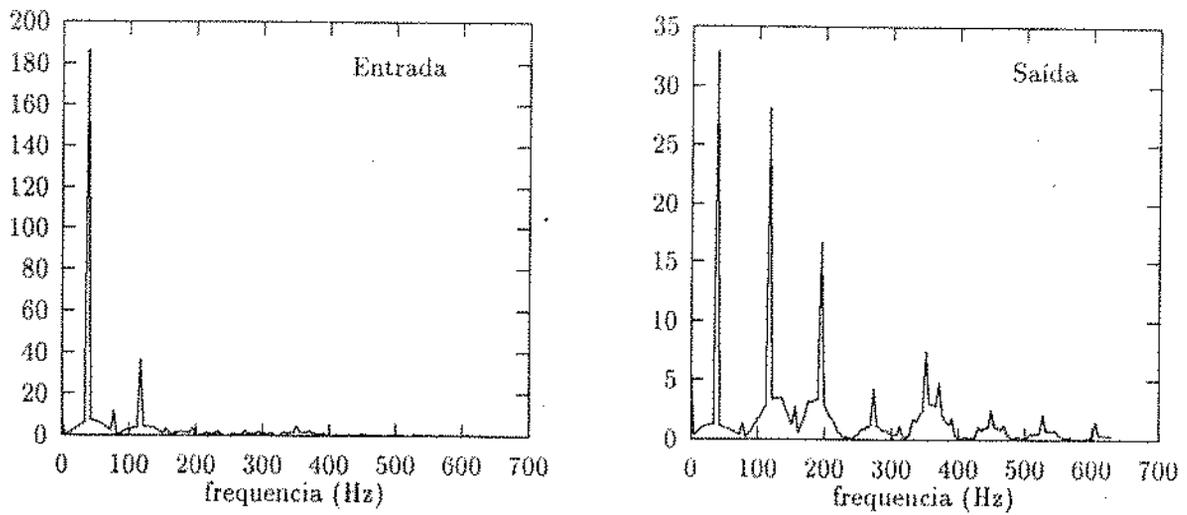


Figura 4.12: Espectros da entrada e da saída para $F_0 = 19.1N$, $F_{atr} = 17.5$ e $f = 40Hz$.

Capítulo 5

Análise e Conclusões

Para finalizar o trabalho, passamos a analisar alguns aspectos importantes levantados ao longo do mesmo e, a partir deles, tirar algumas conclusões e sugestões:

a) Métodos para análise de sistemas não lineares

Os principais métodos para análise de sistemas não lineares, excluídos procedimentos aplicados particularmente a sistemas com 1 grau de liberdade, foram apresentados. Os procedimentos a que nos referimos dizem respeito a transformações algébricas, linearização em torno de um ponto de equilíbrio, expansão da resposta em série de Fourier com apenas um ou dois harmônicos, etc. . . Estes procedimentos englobam um a série de “*artifícios*” pelos quais analisam-se algumas equações diferenciais não lineares, tais como a equação de Duffing, Van der Pol, Rayleigh e outras.

Saindo destes poucos casos, temos mostrado que os métodos mais gerais para a análise de sistemas não lineares mostram-se, no estágio atual, inadequados ao estudo de sistemas com atrito seco. Excessão feita ao método do balanço harmônico incremental, os demais, tais como o método das formas normais, os operadores de Volterra, expansões assintóticas, múltiplas escalas de tempo, etc. . . , ainda necessitam de uma extensão/relaxação para serem aplicáveis aos sistemas com descontinuidades. Quanto ao balanço harmônico tradicional, alertamos que, em geral, chega-se apenas ao harmônico até segunda ordem. A partir daí é complexo obter relações para a curva de resposta em frequência, para o que, geralmente, ele é aplicado. Em sistemas amortecidos com atrito seco, a consideração de somente dois harmônicos é muitas vezes inconveniente. Além disto, se o objetivo é uma expressão analítica, o procedimento funciona bem apenas para o sistema de 1 grau de liberdade.

b) Influência do atrito seco na curva de resposta em frequência

Embora as curvas de resposta em frequência tenham um aspecto qualitativo igual

ao dos sistemas lineares, a diferença é diretamente notada se tomarmos a relação entre a amplitude da resposta e o forçamento adimensional nas figuras 2.3, 2.14 e 2.17. A relação não linear entre a saída e a entrada fica evidenciada. Assim sendo, não se pode usar apenas o aspecto da curva de resposta em frequência para inferir se a não linearidade atrito seco é forte ou fraca.

Baseados nos resultados das figuras 2.14 e 2.15, notamos que a influência do amortecimento viscoso sobre a curva de resposta em frequência é bem maior que a influência do atrito seco. A influência do atrito seco não é, todavia, desprezível, sobretudo se a força de atrito não for muito pequena em relação à excitação.

c) Modelo de Coulomb

Para os casos em que a frequência de excitação não for alta (inferior a 100 Hz, na maioria das vezes), o modelo de Coulomb apresenta bons resultados. A análise do sistema real deve levar em conta, todavia, problemas relacionados à medição. Já comentamos um pouco sobre isto no capítulo 4. Não entraremos na complexidade deste problema, mas queremos frisar que, quando a frequência de excitação cresce, a dinâmica presente quando há atrito pode conduzir a fenômenos, se não caóticos [Stelter-90], ao menos com uma ordem complexa. O que se quer dizer com isto é que, em certo sentido, a “lei de formação” da resposta é complexa e, embora o sistema siga uma dinâmica estabelecida, esta dinâmica não é simples de determinar. Isto se deve principalmente à natureza das forças de atrito. Stelter mostra que existe um modelo mais apropriado que o modelo de Coulomb para o coeficiente de atrito em certos casos, embora trabalhe, quando da identificação do sistema como um todo, com o modelo linear por intervalos. Quando tratamos de problemas com ordem complexa (“grande entropia”), é importante que o sistema de medição seja capaz de permitir a detecção desta ordem nos dados coletados. É neste sentido que falamos em problemas relacionados à medição. É também por isto que consideramos bons os resultados simulados no capítulo 4.

d) Solução exata no domínio do tempo

A escolha da solução exata no domínio do tempo provém do fato de outros métodos não serem aplicáveis a sistemas com atrito seco. Embora o tempo computacional seja elevado, acreditamos ser a solução exata a melhor forma, atualmente, de estudar sistemas amortecidos com atrito seco (modelo Coulomb) com maior número de graus de liberdade.

Lembramos que estudar o sistema de 4 graus de liberdade aplicando o método do balanço harmônico incremental considerando, por exemplo, harmônicos até ordem 5, não deve apresentar nenhuma vantagem com relação à solução exata [Pierre-85]. Lembramos ainda que, em aplicando o método do balanço harmônico incremental, as variáveis que representam

os deslocamentos devem ser redefinidas de forma a evitar o aparecimento de uma força que mude de sinal de acordo com uma diferença de velocidades¹. No caso da solução exata isto não é necessário.

e) Identificação das matrizes massa e rigidez

A importância da identificação das matrizes massa e rigidez foi estabelecida e as dificuldades enfrentadas foram apresentadas. Lembramos que estamos interessados em um modelo simples, de não muitos graus de liberdade, que represente bem certas propriedades do sistema contínuo. Assim sendo, a adoção de modelos com muitos graus de liberdade, tais como um modelo por elementos finitos, está fora do objetivo deste trabalho. Também é claro que o nosso objetivo é estudar os efeitos “macroscópicos” do atrito e não os fenômenos “microscópicos”, que são objetivo da mecânica do contato. Não dizemos com isto que o relacionamento entre ambos não é importante. Muito contrariamente, o consideramos interessante.

Quanto ao número de restrições levadas em conta no processo de identificação, lembramos que o método proposto pode incorporar outras restrições, tais como a exigência de igualdade entre as massas totais dos modelos discreto e contínuo, igualdade dos centros de massas do dois sistemas, etc... Estas propriedades não são contempladas no procedimento original proposto por Santos, nem na discretização convencional *Lumped Mass System*.

f) Grau de ordem do sistema

Embora o grau de ordem do sistema tenda a diminuir quando a frequência de excitação cresce, as medições realizadas indicam ausência de movimento caótico no sistema real estudado.

g) Sugestões para trabalhos futuros

- O desenvolvimento do método de identificação proposto no capítulo 3,
- A utilização de observadores de estado para a identificação do coeficiente de atrito a partir da resposta medida,
- Desenvolvimento do algoritmo/programa contruído para a solução exata dos sistemas no domínio do tempo,
- A influência do atrito seco na identificação de parâmetros do sistema quando ele está presente mas é desconsiderado no processo de identificação.

¹Esta não é uma exigência irremediável, mas a não redefinição pode aumentar ainda mais o trabalho computacional, além de complicar o algoritmo de solução.

Bibliografia

- [Anderson-90] Anderson, J. R.; Ferri, A. A.; *Behavior of a Single-Degree-of-Freedom System With a Generalized Friction Law*; Journal of Sound and Vibration **147**, 1990, 287-304.
- [Beek-89] Van der Beek, C. G. A.; *Normal Forms and Periodic Solutions in the Theory of Non-Linear Oscillations. Existence and Asymptotic Theory*; International Journal of Non-Linear Mechanics **24**, 1989, 263-279.
- [Björck-87] Björck, A.; *Least Square Methods*; Working paper. Department of Mathematics - Linköping University. 1987. 192 pag. Published in Handbook of Numerical Analysis - Vol 1: Solutions of Equations in R^n .
- [Brockett-76] Brockett, R. W.; *Volterra Series and Geometric Control*; Automatica **12**, 1976, 167-176.
- [Chen-84] Chen, Chi-Tsong; *Linear System Theory and Design*; Holt, Rinehart and Winston. New York. 1984.
- [Cheng-89] Cheng, S. P.; Perkins, N. C.; *The Vibration and Stability of a Friction-Guided. Translating String*; Journal of Sound and Vibration **144**, 1989, 281-292.
- [Hartog-31] Den Hartog, J. P.; *Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous Friction*; Transactions of the American Society of Mechanical Engineers **53**, 1931, 107-115.
- [Hartog-72] Den Hartog, J. P.; *Vibrações nos Sistemas Mecânicos*; Edgar Blücher, EDUSP, São Paulo, Brasil, 1972.
- [Dowell-85] Dowell, E. H.; *The behavior of a Linear, Damped Modal System With a Non-Linear Spring-Mass-Dry Friction Damper System Attached*; Journal of Sound and Vibration **101**, 1985, 54-74.
- [Dweib-90] Dweib, A. H.; D'Souza, A. F.; *Self-Excited Vibrations Induced by Dry Friction, Part 1: Experimental Study*; Journal of Sound and Vibration **137**, 1990, 163-175.

- [Ewins-86] Ewins, D. J.; *Modal Testing: Theory and Practice*; Research Studies Press; Letchworth, England, 1986.
- [Ferri-85] Ferri, A. A.; Dowell, E. H.; *The behavior of a Linear, Damped Modal System With a Non-Linear Spring-Mass-Dry Friction Damper System Attached, Part II*; Journal of Sound and Vibration **101**, 1985, 54-74.
- [Ferri-88] Ferri, A. A.; Dowell, E. H.; *Frequency Domain Solution To Multi-Degree-Of-Freedom, Dry Friction Damped Systems*; Journal of Sound and Vibration **124**, 1988, 207-224.
- [Ferri-92] Ferri, A. A.; Dowell, E. H.; *Damping Vibration of Beams With Various Types of Frictional Support Conditions*; Journal of Vibration and Acoustics **114**, 1992, 207-224.
- [Gasch-87] Gasch, R., Knothe, K.; *Strukturdynamik - Band 1: Diskrete systeme*; Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Gormam-75] Gormam, D. J.; *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*; John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [Hamdam-92] Hamdam, M. N.; Burton, T. D. *Normal Vibrations and Friction at a Hertzian Contact Under Random Excitation; Theory and Experiments*; Journal of Sound and Vibration **110**, 1992, 226-232.
- [Hansen-90] Hansen, C.; *Truncated Singular Value Decomposition Solutions To Discrete Ill-Posed Problems With Ill-Determined Numerical Rank*; Society for Industrial and Applied Mathematics **11(3)**, 1990, 503-518.
- [Hess-86] Hess, D. P.; Soom, A. and Kim, C. H.; *Analysis of Forced Non-linear Undamped Oscillators by a Time Transformation Method*; Journal of Sound and Vibration **153**, 1986, 491-508.
- [Holmes-90] Holmes, P. Guckenheimer, G.; *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*; Applied Mathematical Sciences 42; Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Hsu-83] Hsu, L.; *Analysis of a Critical and Post-Critical Behaviour of Non-Linear Dynamical Systems by the Normal Form Method, Part 1: Normalization Formulae*; Journal of Sound and Vibration **89**, 1983, 169-181.
- [Jezequel-91] Jezequel, L.; Lamarque, C. H.; *Analysis of Non-Linear Dynamical Systems by Normal Form Theory*; Journal of Sound and Vibration **149**, 1991, 429-459.
- [Kanwal-83] Kanwal, R. P.; *Generalized Functions: Theory and Technique*; Mathematics in Science and Engineering vol 171; Academic Press; New York, 1983.

- [Karnopp-83] Karnopp, D.; *Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems*; Journal of Dynamic systems, Measurement, and Control **107**, 1983, 65-84.
- [Kato-74] Kato, S.; Yamaguchi, K.; Matsubayashi, T.; *Stick-Slip Motions of Machine Tool Slideway*; Journal of Engineering for Industry, **50**, 1974, 557-566.
- [Klarbring-90] Klarbring, A. *Examples of Non-Uniqueness and Non-existence of Solutions to quasistatic contact with friction*; Ingenieur-Archiv **60**, 1990, 529-541.
- [Lau-82] Lau, S. L.; Cheung, Y. K.; Wu, S. Y. *A Variable Parameter Incremental Method for Dynamic Instability of Linear and Nonlinear Elastic Systems*; Journal of Applied Mechanics **49**, 1982, 849-853.
- [Lawrence-78] Lawrence, P. J.; *Estimation of the Volterra functional series of a nonlinear system using frequency-response data* IEE Proc **AC-23**, 1978, 1090-1095.
- [Lesiak-81] Lesiak, C.; Krener, A. J.; *The existence and Uniqueness of Volterra Series for Nonlinear Systems*; IEEE Transactions on Automatic Control **128**, 1981, 206-210.
- [Ludyk-90] Ludyk, G.; *CAE von Dynamischen Systemen - Analyse, Simulation, Entwurf von Regelungssystemen*; Springer Verlag; Berlin, 1990.
- [Marui-84] Marui, E.; Kato, S.; *Forced Vibration of a Base-Excited Single-Degree-of-Freedom System With Coulomb Friction*; Journal of Dynamic systems, Measurement, and Control **106**, 1984, 280-285.
- [Magnus-65] Magnus, K.; *Vibrations*; Blackie & Son Limited; London, 1965.
- [Narayanan-91] Narayanan, S.; Jayaraman, K.; *Chaotic Vibration in a Non-Linear Oscillator With Coulomb Friction*; Journal of Sound and Vibration **149**, 1991, 429-459.
- [Nayfeh-73] Nayfeh, A. ; *Perturbation Methods*; John Wiley; USA, 1973.
- [Newland-89] Newland, D. E.; *Mechanical Vibration - analysis and computation*; Longman Scientific and Technical; England, 1989.
- [Oertel-89] Oertel, Ch.; *On the integration of the equation of motion of an oscillator with dry friction and two degrees of freedom*; Ingenieur-Archiv **60**, 1989, 10-.
- [Pierre-85] Pierre, C.; Ferri, A. A.; Dowell, E. H.; *Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems Using an Incremental Harmonic Balance Method*; Journal of Applied Mechanics **52**, 1985, 958-964.

- [Powell-92] Powell, J. A.; Wieceguroch, M.; *Influence of Non-reversible Coulomb Characteristics on the Response of a Harmonically Excited Linear Oscillator*; Machine Vibration **1**, 1992, 94-104.
- [Pratt-81] Pratt, T. K.; Willians, R.; *Non-Linear Analysis of Stick/Slip Motion*; Journal of Sound and Vibration **74**, 1981, 531-542.
- [Santos-88] Santos, I. F. *Modelos Matemáticos Reduzidos para Sistemas Mecânicos Contínuos*; Tese de Mestrado, FEM-UNICAMP, 1988.
- [Schetzen-89] Schetzen, M. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*; Robert E. Krieger Publishing Company, Flórida, 1989.
- [Schmidt-86] Schmidt, G.; Tondl, A. *Non-Linear Vibrations*; Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [Shaw-86] Shaw, S. W.; *On the Dynamic Response of a System with Dry Friction*; Journal of Sound and Vibration **108**, 1986, 305-325.
- [Wang-91] Wang, J. H.; Shie, W. L.; *The Influence of a Variable Friction Coefficient on the Behavior of a Blade With a Friction Damper*; Journal of Sound and Vibration **149**, 1991, 137-145.
- [Shigley-86] Shigley, J. E.; *Mechanical Engineering Design*; McGraw-Hill, Singapore, 1986.
- [Stelter-90] Stelter, P. *Nichtlineare Schwingungen reibunserregter Strukturen* VDI Verlag, Nr 137; Hannover. 1990.
- [Tomlinson-91] Tomlinson, G. R.; Chen, Q.; *Higher Order Spectra in Non-Linear System Identification*; Symposium EUROMECH 280; Analysis and Identification of Nonlinear Systems; École Centrale de Lyon; October 1991;
- [Wiggins-90] Wiggins, S.; *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*; Texts in Applied Mathematics 2; Springer-Verlag, 1990.
- [Wong-91] Wong, C. W.; Zhang, W. S.; Lau, S. L. *Periodic Forced Vibration Of Unsymmetrical Piecewise-linear Systems by Incremental Harmonic Balance Method*; Journal of Sound and Vibration **149**, 1991, 91-105.
- [Yeh-66] Yeh, G. C. K. ; *Forced Vibration of a Two-Degree-Of-Freedom System With a Combined Coulomb and Viscous Damping*; J. Acoustical Soc. of America, Vol 39, 1966, 14-24.

Apêndice A

Sistema de 1 Grau de Liberdade com Atrito Seco

A equação de movimento do sistema livre com atrito de Coulomb pode ser escrita como (veja figura 2.1):

$$\begin{aligned} mx'' + kx + \mu_d N \text{Sgn}(x') &= 0 \\ |kx| &> \mu_s N \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\text{Sgn}(x') = \pm 1$ é a função sinal dependente da velocidade, se positiva ou negativa, respectivamente. μ_s e μ_d são os coeficientes de atrito estático e dinâmico.

Realizando a uma adimensionalização equivalente a expressa na equação 2.2, isto é,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \eta = \frac{w}{\omega_0}, \quad y = \frac{k}{\mu_s N} x, \quad \mu = \mu_d / \mu_s \quad (2)$$

podemos escrever a equação 1 na seguinte forma ($\dot{y} = dy/d\tau$):

$$\ddot{y} + y + \mu \text{Sgn}(\dot{y}) = 0 \quad (3)$$

onde $\text{Sgn}(\dot{y}) = \pm 1$, conforme $\text{Sgn}(x')$. Note-se que o sistema linear adimensionalizado de forma equivalente a esta possui frequência natural unitária.

É importante reparar que a equação 3 pode ser interpretada como de um sistema de um grau de liberdade com massa e mola unitárias e coeficiente de atrito μ , de forma que, equivalente a 1, a equação 3 só é válida para $|y| > 1$.

Multiplicando 3 por \dot{y} e integrando com relação ao tempo temos

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} y^2 = E_0 - \mu y \text{Sgn}(\dot{y}) \quad (4)$$

Os termos da equação 4 podem ser interpretados, respectivamente, como a energia cinética do sistema, a energia potencial do sistema, a energia inicial (no limite inferior da integração) e o trabalho realizado pela força de atrito do instante inicial até o instante considerado. Notemos que, na ausência de atrito, a energia total do sistema se conserva. Entretanto, aqui, esta energia varia com o deslocamento devido ao trabalho da força de atrito. Se plotarmos a energia potencial como função da posição y , podemos visualizar graficamente a queda da amplitude de vibração. A figura 1 mostra o comportamento do sistema. A

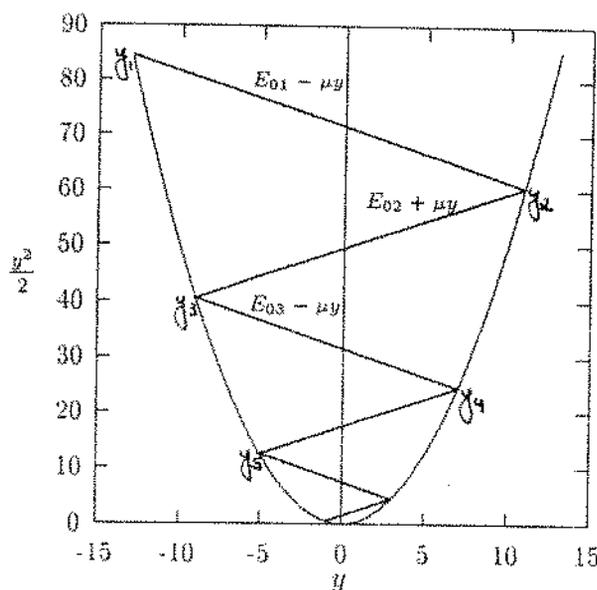


Figura 1: Queda de amplitude no sistema livre de 1 GL com atrito seco

energia cinética em determinada posição y é dada sempre por um ponto sobre a parábola. O complemento até a energia total (linhas inclinadas) fornece a energia cinética. Notemos que a inclinação das “linhas de energia total” depende unicamente da força de atrito, aqui convenientemente indicada na forma adimensional por μ . Para $\mu = 0$ teríamos uma linha horizontal, indicativa de que a energia total presente no sistema é constante neste caso. Os pontos y_1, y_2, \dots, y_n são pontos de energia cinética nula, isto é, pontos de reversão, ou retorno. Quando um ponto de retorno é alcançado, a força de atrito muda de sinal, daí a mudança na inclinação das “linhas de energia total” em cada intervalo entre dois pontos de retorno. O movimento persiste até que um ponto de retorno seja alcançado e a força restauradora não seja capaz de vencer o atrito estático. Isto ocorrerá quando a inclinação da curva de energia potencial for menor que 1. Neste caso, o corpo entra numa “zona morta” e o movimento cessa imediatamente. Caracteriza-se o que, no texto, definimos como aderência permanente.

A queda de amplitude pode ser vista também através de uma transformação da equação 4, que pode reescrita como

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(y + \mu \text{Sgn}(\dot{y}))^2 = E_0 + \frac{\mu^2}{2} = E_0^* \quad (5)$$

ou ainda

$$\dot{y}^2 + (y + \mu \text{Sgn}(\dot{y}))^2 = 2E_0^* \quad (6)$$

Isto mostra que, para cada intervalo em que a velocidade não muda, as curvas do plano fase são circunferências de centro $(\mu \text{Sgn}(\dot{y}), 0)$ e raio dado pela raiz quadrada de $2E_0^*$,

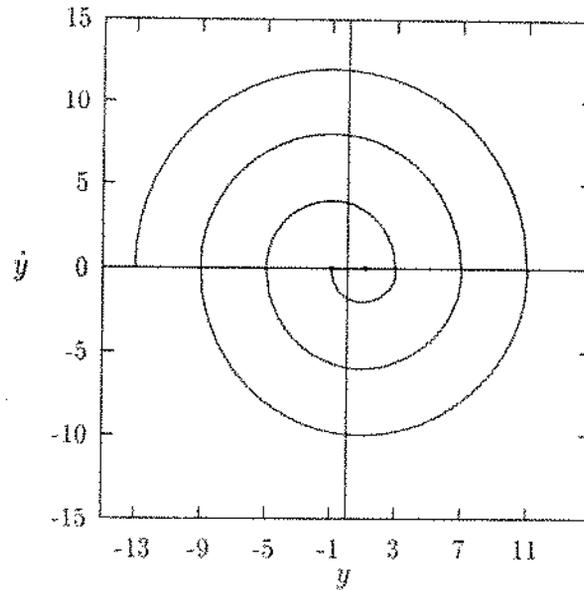


Figura 2: Plano fase do sistema livre de 1 GL com atrito seco

tal como mostra a figura 2.

Notemos que a amplitude de vibração sofre um decréscimo de

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i = 2\mu \tag{7}$$

a cada meio ciclo de oscilação, o que, devidamente transformado para o sistema não adimensionalizado, fornece uma queda de

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{2\mu_d}{k} \tag{8}$$

Isto significa que, se o período de oscilação for constante, como será mostrado, a amplitude decairá linearmente com o tempo.

Para calcular o período de oscilação, consideremos primeiro a velocidade em cada intervalo. Da equação 6 podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left[2E_0^* - (y + \mu)^2 \right]^{1/2} & \dot{y} > 0 \\ \dot{y} &= \left[2E_0^* - (y - \mu)^2 \right]^{1/2} & \dot{y} < 0 \end{aligned} \tag{9}$$

O tempo gasto em cada um dos intervalos é dado respectivamente por

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\left[2E_0^* - (y + \mu)^2\right]^{1/2}} \\
 T_2 &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\left[2E_0^* - (y - \mu)^2\right]^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Definindo $\varphi = y + \mu$ temos

$$T_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\left[2E_0^* - \varphi^2\right]^{1/2}} = \left\{ \arcsin \left[\frac{\varphi}{2\sqrt{E_0^*}} \right] \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \pi \tag{11}$$

onde

$$\varphi_1 = -\sqrt{E_0^*} \quad \varphi_2 = +\sqrt{E_0^*}$$

Nota-se que o tempo T_1 é independente da força de atrito. Logo, o tempo T_2 é igual a T_1 , uma vez que a mudança de sinal da força de atrito não tem nenhuma influência sobre ele. Assim o período de oscilação é dado por

$$T = T_1 + T_2 = 2\pi \tag{12}$$

que, expresso para o sistema não adimensionalizado fica

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{13}$$

Apêndice B

Curva de Resposta em Frequência para o Sistema de 1 Grau de Liberdade

A1 - Curva de Resposta em Frequência

A equação 2.5 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$y(\tau) = e^{[-\xi(\tau-\tau_i)]} \left\{ (y_i \pm \mu) \left[\cos[\Omega(\tau - \tau_i)] + \frac{\xi}{\Omega} \sin[\Omega(\tau - \tau_i)] \right] + \right. \\ \left. \frac{\beta}{q} \left[(\eta S_0 - \xi C_0) \frac{\sin[\Omega(\tau - \tau_i)]}{\Omega} - C_0 \cos[\Omega(\tau - \tau_i)] \right] \right\} + \frac{\beta}{q} \cos[\eta\tau - \varepsilon] \mp \mu \quad (1)$$

onde os sinais \pm estão de acordo com a velocidade no intervalo. Para a velocidade temos:

$$\dot{y}(\tau) = e^{[-\xi(\tau-\tau_i)]} \left\{ \frac{\partial \eta}{q} S_0 \cos[\Omega(\tau - \tau_i)] + \left[\frac{\partial}{q} (C_0 - \xi \eta S_0) - (y_i \pm \mu) \right] \frac{\sin[\Omega(\tau - \tau_i)]}{\Omega} \right\} \\ - \frac{\beta \eta}{q} \sin[\eta\tau - \varepsilon] \quad (2)$$

Impondo condições de periodicidade em meio ciclo para movimentos sem aderência, definimos

$$\begin{aligned} \tau_i &= \bar{\phi} & \tau_{i+1} &= \bar{\phi} + \pi/\eta \\ y_i &= \bar{y} & y_{i+1} &= -\bar{y} \\ C_0 &= \cos(\eta\tau_i - \varepsilon) = \cos(\eta\phi - \varepsilon) = \bar{c} \\ S_0 &= \sin(\eta\tau_i - \varepsilon) = \sin(\eta\phi - \varepsilon) = \bar{s} \\ \cos[\Omega(\tau_{i+1} - \tau_i)] &= \cos[\pi\Omega/\eta] = C \\ \sin[\Omega(\tau_{i+1} - \tau_i)] &= \sin[\pi\Omega/\eta] = S \end{aligned} \quad (3)$$

Considerando a posição e velocidade em τ_{i+1} , lembrando que $\cos[\eta\tau_{i+1} - \varepsilon] = -\bar{c}$, $\dot{y}(\tau_{i+1}) = 0$ e $\sin[\eta\tau_{i+1} - \varepsilon] = -\bar{s}$ temos

$$-\bar{y} = e^{[-\xi(\tau-\tau_i)]} \left\{ (y_i \pm \mu) \left[C + \frac{\xi}{\Omega} S \right] + \frac{\beta}{q} \left[(\eta\bar{s} - \xi\bar{c}) \frac{S}{\Omega} - C\bar{c} \right] \right\} - \frac{\beta}{q} \bar{c} \mp \mu \quad (4)$$

$$0 = e^{[-\xi(\tau-\tau_i)]} \left\{ \frac{\beta \eta}{q} \bar{s} C + \left[\frac{\beta}{q} (\bar{c} - \xi \eta \bar{s}) - (y_i \pm \mu) \right] \frac{S}{\Omega} \right\} - \frac{\beta \eta}{q} \bar{s} \quad (5)$$

As duas equações anteriores podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} A_1 \bar{c} + A_2 \bar{s} + A_3 &= 0 \\ B_1 \bar{c} + B_2 \bar{s} + B_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\beta}{q} e^{(-\xi\pi/\eta)} (C + \xi \frac{S}{\Omega}) & B_1 &= \frac{\beta}{q} e^{(-\xi\pi/\eta)} \frac{S}{\Omega} \\ A_2 &= \frac{\beta\eta}{q} e^{(-\xi\pi/\eta)} \frac{S}{\Omega} & B_2 &= e^{(-\xi\pi/\eta)} \left(\frac{\beta\eta}{q} C - \xi \frac{\beta\eta}{q} \frac{S}{\Omega} \right) + \frac{\beta\eta}{q} \\ A_3 &= e^{(-\xi\pi/\eta)} \left(C + \xi \frac{S}{\Omega} \right) (\bar{y} + \mu Sgn(\dot{y})) + (\bar{y} - \mu Sgn(\dot{y})) & B_3 &= -e^{(-\xi\pi/\eta)} (\bar{y} + \mu Sgn(\dot{y})) \frac{S}{\Omega} \end{aligned} \quad (7)$$

A solução do sistema 6 é dada por:

$$\bar{c} = \frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \quad \bar{s} = \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \quad (8)$$

Após várias simplificações podemos escrever

$$\begin{aligned} A_2 B_3 - A_3 B_2 &= -\frac{\beta\eta}{q} \bar{y} \left[e^{(-2\xi\pi/\eta)} + 2C e^{(-\xi\pi/\eta)} + 1 \right] + \frac{\beta\eta}{q} \mu Sgn(\dot{y}) \left[-e^{(-2\xi\pi/\eta)} - (2\xi/\Omega) e^{(-\xi\pi/\eta)} + 1 \right] \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 &= -\frac{\beta}{q} \mu Sgn(\dot{y}) \frac{S}{\Omega} 2e^{(-\xi\pi/\eta)} \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 &= -\frac{\beta^2\eta}{q} \left[e^{(-2\xi\pi/\eta)} + 2C e^{(-\xi\pi/\eta)} + 1 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

que ainda pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A_2 B_3 - A_3 B_2 &= -\frac{\beta\eta\bar{y}}{q e^{(-\xi\pi/\eta)}} [\cosh(\xi\pi/\eta) + C] + \frac{2\beta\eta\mu Sgn(\dot{y})}{q e^{(-\xi\pi/\eta)}} [\sinh(-2\xi\pi/\eta) - (\xi/\Omega)S] \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 &= -\frac{\beta}{q} \mu Sgn(\dot{y}) \frac{S}{\Omega} 2e^{(-\xi\pi/\eta)} \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 &= -\frac{2\beta^2\eta}{q e^{(-\xi\pi/\eta)}} [\cosh(\xi\pi/\eta) + C] \end{aligned} \quad (10)$$

e concluímos que:

$$\bar{c} = \frac{q}{\beta} [\bar{y} + \xi\gamma_1 Sgn(\dot{y})] \quad \bar{s} = \frac{q}{\beta} \mu\gamma_2 Sgn(\dot{y}) \quad (11)$$

com

$$\gamma_1 = \frac{\sinh(\xi\pi/\eta) - (\xi/\Omega) \sin(\pi\Omega/\eta)}{\cosh(\xi\pi/\eta) + \sin(\pi\Omega/\eta)} \quad \gamma_2 = \frac{\sin(\pi\Omega/\eta)}{\eta\Omega [\cosh(\xi\pi/\eta) + \sin(\pi\Omega/\eta)]} \quad (12)$$

de onde obtemos:

$$\bar{y} = (\xi\gamma_1)Sgn(\dot{y}) \pm [\beta^2 - (\xi\gamma_2)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Embora haja duas raízes para a equação 13, apenas uma tem significado físico. Tomando um intervalo de tempo $\tau_i - \tau_{i+1}$ em que $\dot{y} < 0$, devemos ter $\bar{y} > 0$, donde concluímos que a raiz positiva deve ser considerada. De modo análogo, a raiz negativa deve ser considerada se analisarmos um intervalo de tempo com velocidade positiva. Levando em conta que \bar{y} é tomado em valor absoluto temos:

$$\bar{y} = (-\mu\gamma_1) + [\beta^2 - (\mu\gamma_2)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Note que o radicando pode assumir, dependendo da frequência de excitação e dos parâmetros do sistema, valores negativos. Isto ocorrerá apenas fora da faixa de frequências para a qual a expressão 13 é válida. De fato, suponhamos que as restrições de movimento sem aderência sejam obedecidas. Então as expressões 11 devem valer. Logo temos que $[\mu\gamma_2 Sgn(\dot{y})]^2 = [\beta\bar{y}]^2$. Portanto, obter, nestas condições, $\beta^2 - (\xi\gamma_2)^2 < 0$ seria obter $\bar{y}^2 > 1$, o que não é possível.

A2 - Limite de Movimentos com Aderência

Quando da dedução da resposta do sistema da figura 2.1 temos definido que $\tan(\varepsilon) = 2\xi\eta/(1 - \eta^2)$. Na verdade, as duas condições que ε deve satisfazer são

$$\cos(\varepsilon) = \frac{(1 - \eta^2)}{q} \quad \sin(\varepsilon) = \frac{2\xi\eta}{q} \quad (15)$$

A equação 11 pode ser reescrita como ¹

$$\cos(\eta\tau - \varepsilon) = \frac{q}{\beta} [\bar{y} + \mu\gamma_1] \quad \sin(\eta\tau - \varepsilon) = -\frac{q}{\beta} \mu\gamma_2 \quad (16)$$

Sabendo que

$$\cos(\eta\tau) = \frac{\cos(\eta\tau - \varepsilon) - \sin(\eta\tau) \sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)} \quad \sin(\eta\tau) = \frac{\sin(\eta\tau - \varepsilon) + \cos(\eta\tau) \sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)} \quad (17)$$

temos

$$\cos(\eta\tau) = \frac{q}{(1 - \eta^2)} \cos(\eta\tau - \varepsilon) - \frac{2\xi\eta}{(1 - \eta^2)} \sin(\eta\tau) \quad (18)$$

¹Por simplicidade temos considerado um intervalo de velocidade negativa

$$\sin(\eta\tau) = \frac{q}{(1-\eta^2)} \sin(\eta\tau - \varepsilon) + \frac{2\xi\eta}{(1-\eta^2)} \cos(\eta\tau) \quad (19)$$

Substituindo 19 em 18 obtemos:

$$\cos(\eta\tau) = \frac{1}{1 + (2\xi\eta/1 - \eta^2)^2} \left[\frac{q}{\beta(1-\eta^2)} \cos(\eta\tau - \varepsilon) - \frac{2\xi\eta q}{(1-\eta^2)^2} \sin(\eta\tau - \varepsilon) \right] \quad (20)$$

que, após as devidas substituições e simplificações, pode ser escrita como:

$$\cos(\eta\tau) = \frac{q^2}{\beta[(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2]} \left[(1-\eta^2)^2 \bar{y} + (1-\eta^2)^2 \mu\gamma_1 + 2\xi\eta\mu\gamma_2 \right] \quad (21)$$

A condição para que não haja aderência em y_{i+1} é $|\beta \cos(\eta\tau_{i+1}) - y_{i+1}| \geq 1$. Fisicamente, para que y_{i+1} seja um ponto de retorno devemos ter $|y_{i+1} - \beta \cos(\eta\tau_{i+1})| \geq 1$. Então devemos ter ²:

$$- \left[(1-\eta^2)^2 \bar{y} + (1-\eta^2)^2 \mu\gamma_1 + 2\xi\eta\mu\gamma_2 \right] + \bar{y} \geq 1 \quad (22)$$

donde vem:

$$\bar{y} \geq \frac{1 + (1-\eta^2)\mu\gamma_1 + 2\xi\eta\mu\gamma_2}{\eta^2} \quad (23)$$

² $[(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2] = q^2$.

Apêndice C

Calibração do Sensor de Medição da Força Normal

A figura 1 mostra o sensor com seus principais dados de projeto. Da teoria da resistência dos materiais temos que a relação entre a força F aplicada a uma distância l da base do sensor e o deslocamento y correspondente medido a uma distância x da base é linear e dada por

$$y = \frac{F}{6EI} x^2(3l - x) \quad (1)$$

onde E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia da seção transversal de cada ramo do sensor.

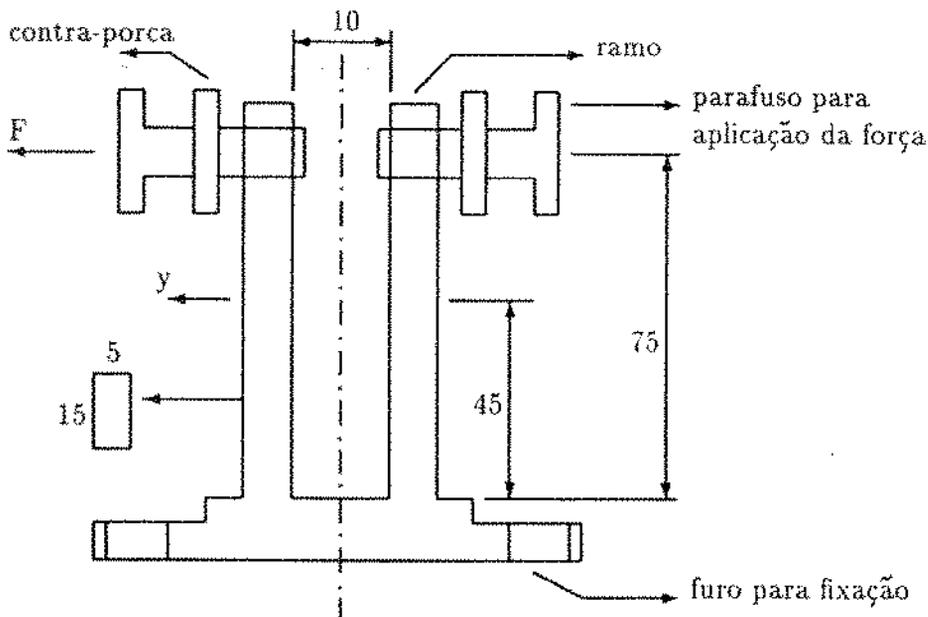


Figura 1: Principais dimensões do sensor utilizado na medição da força normal

Para a calibração temos correlacionado as grandezas força (F) e deslocamento y . A idéia é proceder a medida do deslocamento y e, a partir dela conhecer a força normal F . Durante a calibração, a medição do deslocamento foi obtida através de um LVDT e para a medição da força foi utilizada uma célula de carga, conforme mostra a figura 2. Tanto o LVDT quanto a célula de carga foram previamente calibrados. As figuras 3, 4 e 5 apresentam a correlação entre as entradas e saídas da célula de carga e dos dos 2 LVDT's que foram utilizados na verificação experimental.

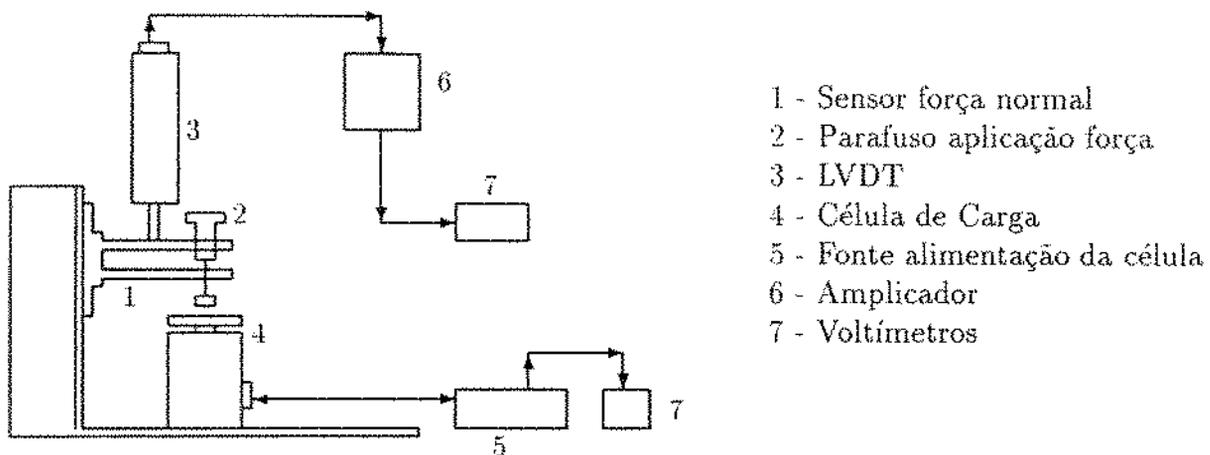


Figura 2: Esquema da montagem para a calibração do sensor da força normal.

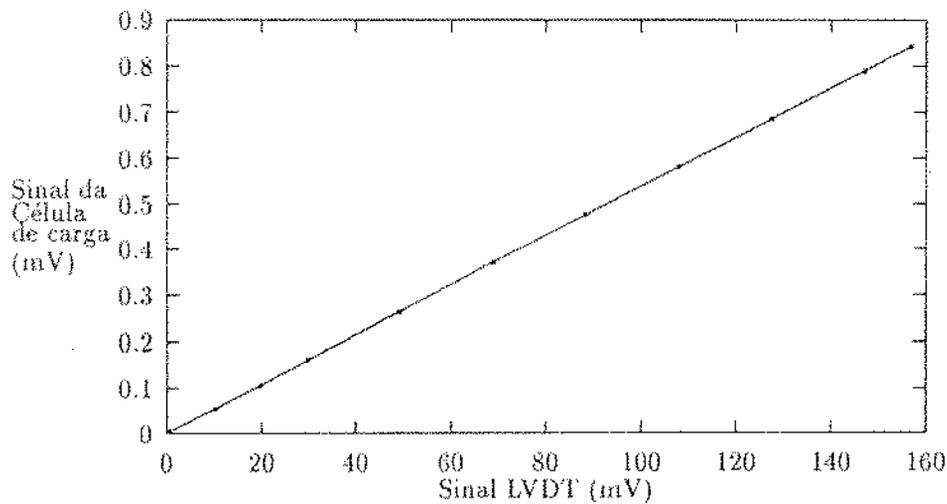


Figura 3: Correlação entre o sinal de saída e a força aplicada para a célula de carga. A reta traçada refere-se ao ajuste de mínimos quadrados sobre o conjunto de pontos.

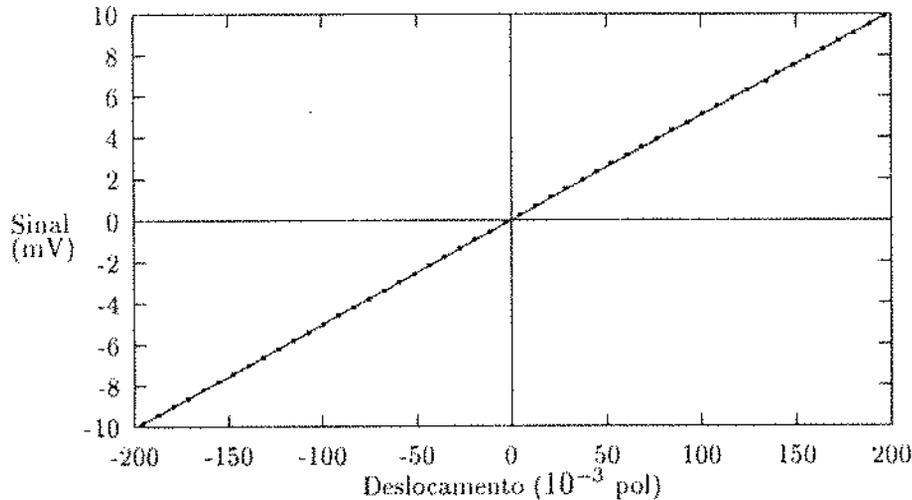


Figura 4: Correlação entre o sinal de saída e o deslocamento para o LVDT 1. A reta traçada refere-se ao ajuste de mínimos quadrados sobre o conjunto de pontos.

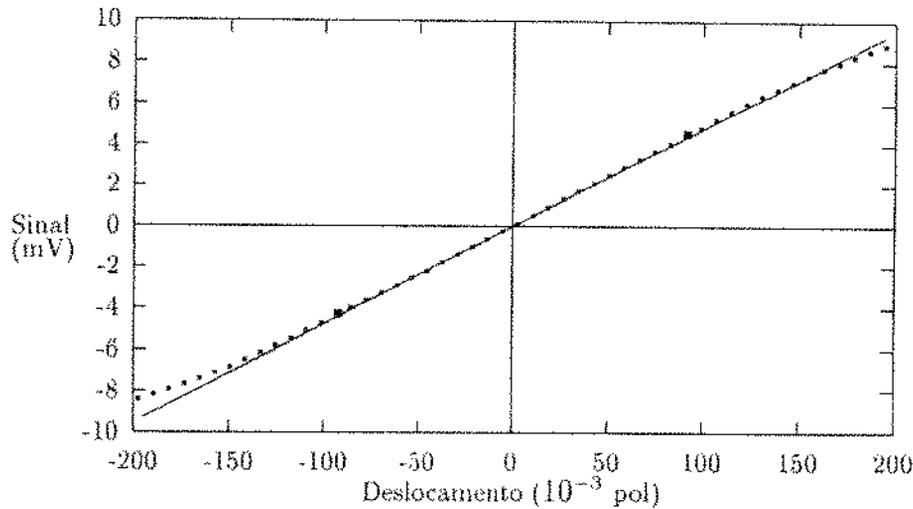


Figura 5: Correlação entre o sinal de saída e o deslocamento para o LVDT 2. A reta traçada refere-se ao ajuste de mínimos quadrados sobre os pontos centrais entre os dois pontos destacados, inclusive.

Observa-se que o LVDT 2 não mantém a linearidade para deslocamentos superiores a 100 milésimos de polegada, ou para saídas superiores a 4 mV. Entretanto, para as aplicações deste experimento, o deslocamento será inferior a 0.01", de forma que a linearidade está garantida.

Cada ramo do sensor foi calibrado independentemente porque a simetria não pode ser garantida em termos de resposta à força aplicada. Duas características importantes devem ser verificadas: a linearidade e a repetibilidade dos deslocamentos a uma força determinada, ou ainda a repetibilidade das forças a um deslocamento determinado. Para a verificação da repetibilidade foram realizadas 10 medições em deslocamentos fixos, conforme apresentam as tabelas 1 e 2. Nestas tabelas temos plotado os valores em mV das sinais do LVDT e da célula de carga. Uma vez estudadas a linearidade e a repetibilidade, procederemos o levantamento da relação em termos de força.

LVDT	Saída da célula de carga (mV)										\bar{x}	Erro%
0.010	0.011	0.011	0.011	0.012	0.011	0.011	0.012	0.011	0.011	0.011	0.0112	6.19
0.020	0.022	0.023	0.022	0.022	0.023	0.021	0.022	0.022	0.022	0.022	0.0221	4.97
0.030	0.033	0.033	0.032	0.033	0.033	0.034	0.034	0.033	0.033	0.032	0.0330	3.03
0.040	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.043	0.044	0.044	0.045	0.044	0.0440	2.72
0.050	0.054	0.055	0.054	0.055	0.055	0.054	0.055	0.054	0.055	0.055	0.0546	1.02
0.100	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.111	0.110	0.110	0.110	0.110	0.1101	0.82
0.200	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.219	0.220	0.219	0.220	0.220	0.2198	0.36
0.300	0.330	0.329	0.328	0.331	0.330	0.330	0.328	0.330	0.329	0.330	0.3295	0.45
0.400	0.440	0.439	0.441	0.439	0.438	0.440	0.440	0.440	0.440	0.439	0.4396	0.36
0.500	0.551	0.550	0.556	0.560	0.560	0.565	0.551	0.559	0.550	0.550	0.5552	1.77
0.600	0.690	0.680	0.684	0.679	0.676	0.672	0.688	0.684	0.688	0.679	0.6820	1.47

LVDT - Sinal do LVDT 1 (mV) \bar{x} - média Erro - erro máximo com relação à média

Tabela 1 - Repetibilidade entre os sinais dos sensores de força e deslocamento para o ramo 1 do sensor,

LVDT	Saída da célula de carga (mV)										\bar{x}	Erro%
	0.010	0.011	0.012	0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.019		
0.010	0.012	0.011	0.012	0.012	0.011	0.012	0.012	0.011	0.012	0.012	0.0117	4.34
0.020	0.023	0.024	0.024	0.023	0.025	0.024	0.024	0.023	0.025	0.025	0.0240	4.16
0.030	0.035	0.036	0.034	0.036	0.037	0.035	0.036	0.036	0.037	0.035	0.0358	3.35
0.040	0.046	0.048	0.047	0.049	0.049	0.048	0.048	0.046	0.049	0.047	0.0477	3.56
0.050	0.060	0.061	0.058	0.059	0.061	0.062	0.060	0.060	0.059	0.060	0.0600	3.33
0.100	0.112	0.113	0.113	0.112	0.112	0.111	0.111	0.112	0.114	0.112	0.1120	1.60
0.200	0.226	0.223	0.224	0.224	0.225	0.223	0.226	0.227	0.224	0.224	0.2246	1.06
0.300	0.337	0.336	0.338	0.335	0.335	0.337	0.339	0.335	0.337	0.338	0.3367	0.68
0.400	0.471	0.472	0.475	0.473	0.472	0.474	0.475	0.470	0.475	0.473	0.4730	0.63
0.500	0.544	0.547	0.543	0.552	0.537	0.546	0.543	0.551	0.536	0.554	0.5453	1.71
0.600	0.667	0.632	0.665	0.640	0.669	0.673	0.642	0.643	0.643	0.650	0.6524	3.16

LVDT - Sinal do LVDT 1 (mV) \bar{x} - média Erro - erro máximo com relação à média

Tabela 2 - *Repetibilidade entre os sinais dos sensores de força e deslocamento para o ramo 2 do sensor.*

Notam-se desvios maiores para pequenos deslocamentos do sensor. É importante observar que isto se deve à precisão do instrumento utilizado para a leitura da voltagem de saída da célula de carga, que permite leitura até à terceira casa decimal. Em se utilizando um instrumento mais preciso, pode-se contudo, aplicar a relação obtida nesta calibração com segurança, baseado na repetibilidade dos valores. Quanto a linearidade, podemos observar pelos gráficos das figuras 6 e 7 e pela tabela 3 que:

Para o ramo 1: Linearidade garantida com segurança até 0.400 mV de saída do LVDT utilizado,

Para o ramo 2: Linearidade garantida com segurança até 0.350 mV de saída do LVDT utilizado.

LVDT 1 (mV)	Celula de Carga (mV)		LVDT 1 (mV)	Celula de Carga (mV)	
	Ramo 1	Ramo 2		Ramo 1	Ramo 2
0.000	0.000	0.000	0.300	0.330	0.336
0.010	0.011	0.012	0.325	0.361	0.363
0.025	0.027	0.026	0.350	0.388	0.393
0.050	0.054	0.055	0.375	0.418	0.430
0.075	0.083	0.083	0.400	0.439	0.472
0.100	0.110	0.112	0.425	0.469	0.498
0.125	0.140	0.141	0.450	0.494	0.512
0.150	0.167	0.168	0.475	0.532	0.525
0.175	0.194	0.197	0.500	0.571	0.551
0.200	0.221	0.221	0.525	0.599	0.585
0.225	0.250	0.253	0.550	0.626	0.610
0.250	0.277	0.280	0.575	0.662	0.620
0.275	0.307	0.308	0.600	0.676	0.670

Tabela 3 - *Relação entre os sinais dos sensores de força e deslocamento para o sensor utilizado no dispositivo Experimental.*

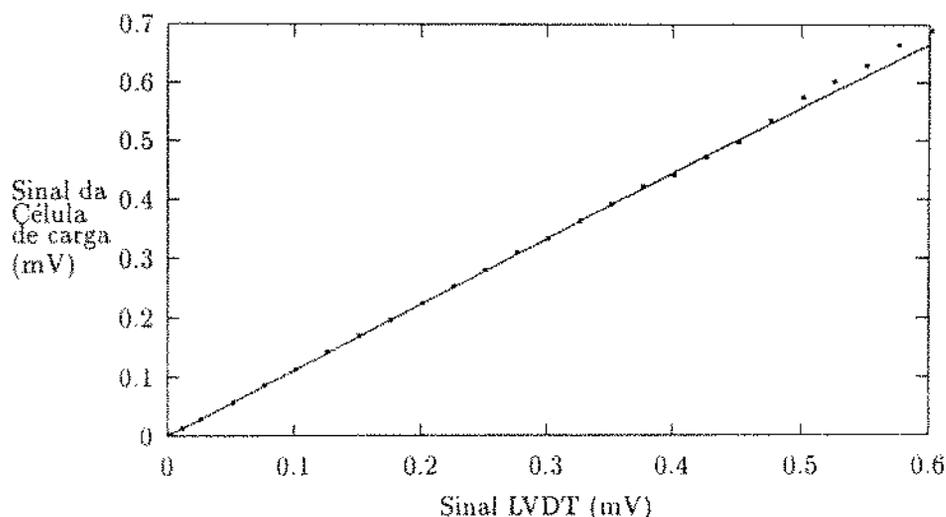


Figura 6: Correlação entre os sinais do LVDT e da Célula de Carga para o ramo 1. A reta refere-se ao ajuste por mínimos quadrados tomando os primeiros 18 pontos da tabela 3.

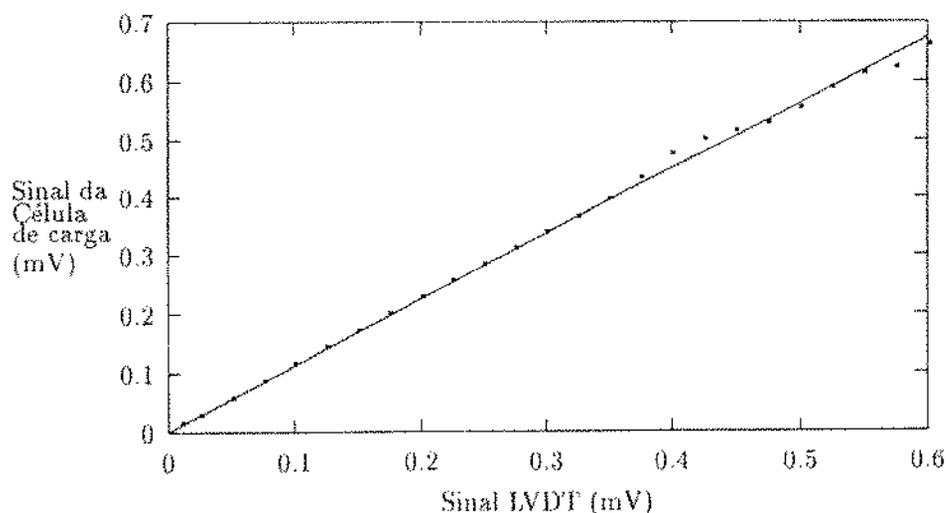


Figura 7: Correlação entre os sinais do LVDT e da Célula de Carga para o ramo 1. A reta refere-se ao ajuste por mínimos quadrados tomando os primeiros 16 pontos da tabela 3.

Considerando os resultados apresentados nos gráficos e tabelas anteriores, resumimos na tabela 4 ¹ todas as constantes de transformação dos sensores utilizados durante a calibração, inclusive a do sensor calibrado. Embora o LVDT 2 tenha de ser usado durante a verificação experimental, apenas o LVDT 1 foi aplicado durante esta calibração. A aferição

¹ Como referido nos gráficos, as retas traçadas referem-se ao ajuste por mínimos quadrados. Nesta tabela, as quatro primeiras constantes foram obtidas por estes ajustes. As demais podem ser calculadas por relações entre as 5 primeiras.

do LVDT 2 deve-se à necessidade do conhecimento de sua constante de transformação e de suas condições de uso.

Constante de transformação da Célula de Carga	0.00536629 mV/N
Constante de transformação do LVDT 1	0.05038993 mV/0.001"
Constante de transformação do LVDT 2	0.04775907 mV/0.001"
Relação sinal Célula de Carga / LVDT 1 - ramo 1	1.10995753 $\frac{mV (Célula\ Carga)}{mV\ LVDT}$
Relação sinal Célula de Carga / LVDT 1 - ramo 2	1.12225036 $\frac{mV (Célula\ Carga)}{mV\ LVDT}$
Relação sinal Célula de Carga / LVDT 2 - ramo 1	1.17110073 $\frac{mV (Célula\ Carga)}{mV\ LVDT}$
Relação sinal Célula de Carga / LVDT 2 - ramo 2	1.18407072 $\frac{mV (Célula\ Carga)}{mV\ LVDT}$
Relação força aplicada / sinal LVDT 1 - ramo 1	206.838893 N/mV
Relação força aplicada / sinal LVDT 1 - ramo 2	209.129643 N/mV
Relação força aplicada / sinal LVDT 2 - ramo 1	218.232835 N/mV
Relação força aplicada / sinal LVDT 2 - ramo 2	220.649773 N/mV
Relação força aplicada / deslocamento - ramo 1	10.4225978 N/0.001"
Relação força aplicada / deslocamento - ramo 2	10.5380285 N/0.001"

Tabela 4 - Constantes de transformação obtidas nesta calibração.

Por fim, cabem algumas observações sobre as condições em que os resultados acima foram obtidos e sobre a utilização do sensor:

- Os valores valores foram obtidos com a contra-porca apertada (veja figura 1), pois esta é a condição do sensor em uso.
- Para cada medida o sensor foi descarregado para nova carga, de forma que os resultados anteriores referem-se sempre ao sensor partindo de deslocamento zero até o valor desejado. Este aspecto é importante sobretudo quando o intervalo em que a linearidade existe é extrapolado. Neste caso, quando o sensor é descarregado até um um deslocamento não nulo, os valores apresentados não correspondem aos da relação linear. Entretanto, quando a carga é zerada e novo carregamento é feito, a relação é estabelecida. Este fenômeno ocorre devido a deformações residuais que se apresentam quando a deformação ultrapassa certos limites. Recomendamos que a cada medida o sensor tenha partida do deslocamento zero.
- Não foram encontrados problemas de variação dos valores apresentados quando o sensor sofre carga durante tempo longo dentro do intervalo da relação linear.
- Pelos resultados anteriores, recomendamos que a força aplicada não ultrapasse 75N. Este é o limite para a linearidade do ramo 2.