Antonio Carlos Sanches Grijota Piragibe Carneiro

Análise de Estabilidade em Sistemas Rotativos

53/2014

CAMPINAS

2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Antonio Carlos Sanches Grijota Piragibe Carneiro

Análise de Estabilidade em Sistemas Rotativos

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini
Coorientador: Dr. Gregory Bregion Daniel

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSAO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ANTONIO CARLOS SANCHES GRIJOTA PIRAGIBE CARNEIRO, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. KATIA LUCCHESI CAVALCA DEDINI

Katia Lucchesi Cavalca
ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

	Carneiro, Antonio Carlos Sanches Grijota Piragibe, 1989-
C215a	Análise de estabilidade em sistemas rotativos / Antonio Carlos Sanches Grijota Piragibe Carneiro. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.
	Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini. Coorientador: Gregory Bregion Daniel. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Rotores - Dinâmica. 2. Mancais. 3. Máquinas. I. Cavalca, Katia Lucchesi,1963-. II. Daniel, Gregory Bregion. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Stability analysis in rotating systems
Palavras-chave em inglês:
Rotordynamics
Bearings
Machines
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora:
Katia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]
Marco Lúcio Bittencourt
Zilda de Castro Silveira
Data de defesa: 06-06-2014
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise de Estabilidade em Sistemas Rotativos

Autor: Antonio Carlos Sanches Grijota Piragibe Carneiro
Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini
Coorientador: Dr. Gregory Bregion Daniel

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Katia Lucchesi Cavalca.

Profa. Dra. Katia Luchessi Cavalca Dedini
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Profa. Dra. Zilda de Castro Silveira
Universidade de São Paulo – USP/EESC

Campinas, 06 de Junho de 2014

Dedico este trabalho aos meus pais, José Manoel e Nice, pelo apoio incondicional em todas as escolhas e etapas da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradecer a todos que me ajudaram é uma tarefa impossível; às vezes uma palavra ou um rápido encontro significou muito para mim, e, de alguma forma, me ajudou neste trabalho. Em especial, devo agradecer:

À minha família: meus pais, a quem já dediquei o trabalho, mas também meus irmãos, Gustavo e Leandro e minhas tias e tios. Em especial, minhas tias Aracy e Araide, que sempre foram figuras muito importantes na minha vida.

À minha namorada, Larissa, por insistir que eu começasse uma iniciação científica e por todo apoio, carinho e companheirismo durante este trabalho.

A todos os colegas do LAMAR, que fazem o melhor ambiente de trabalho possível e pela paciência na hora de ajudar.

Agradeço à professora Katia Lucchesi Cavalca pela disposição para me orientar, paciência e capacidade de me fazer exceder meus limites e crescer, pessoal e profissionalmente.

Finalmente, agradeço ao meu coorientador Gregory Bregion Daniel, pela enorme paciência para me ensinar e ajudar, mesmo com outros compromissos a cumprir. Um dos melhores professores que me ensinou, e ainda tive o privilégio de vê-lo tornar-se doutor e professor.

Agradeço à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro durante a iniciação científica e o mestrado.

"I have not failed. I've just found
10000 ways that won't work"
Thomas A. Edison

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a análise dinâmica de sistemas rotativos sujeitos a diferentes tipos de elementos instabilizadores. Os elementos abordados neste estudo são os mancais lubrificados, os selos de fluxo mecânicos e o amortecimento interno do eixo, cujas interações dinâmicas, em condições operacionais pode conduzir o sistema à instabilidade. Os mancais segmentados foram também incluídos no estudo, cujo comportamento é considerado inerentemente estável. O eixo foi modelado por meio do método dos elementos finitos, pela sua robustez, facilidade de implementação e resolução das equações envolvidas. Desse modo, os elementos instabilizadores analisados foram modelados de forma a permitirem sua adição no modelo do eixo, por meio de coeficientes dinâmicos equivalentes. Os mancais segmentados permitem duas modelagens para os seus coeficientes: a reduzida e a completa, com a última exibindo explicitamente os graus de liberdade do segmento, sendo necessárias modificações no modelo de elementos finitos para adiciona-los. A avaliação do limiar de estabilidade foi realizada por meio do método do decremento logarítmico, obtido através da solução do problema de autovalor da equação de movimento do rotor. Analisaram-se, separadamente, os efeitos da adição de diferentes mancais, selos e níveis de amortecimento interno, para visualizar a influência de cada componente na dinâmica de um mesmo eixo. As análises envolvendo o mancal segmentado incluíram ambos os modelos de coeficientes (reduzido e completo). Em seguida, foram combinados, em um mesmo eixo, diferentes tipos de mancais, selos e amortecimentos internos, em diversas análises para determinar as interações existentes entre os componentes envolvidos. A partir destes resultados, procurou-se, em todas as análises, observar os efeitos na rigidez do sistema, no nível de amortecimento e a variação do limiar de estabilidade.

Palavras-chave: Instabilidade de Sistemas Rotativos, Análise de Autovalor, Mancais Lubrificados, Selos de Fluxo, Amortecimento Interno.

ABSTRACT

The work's goal is to analyze the dynamics of rotating systems, considering different kinds of instabilizing elements or factors. The factors accounted in this thesis are the hydrodynamic bearings, flow seals, and internal damping of the shaft, whose dynamic interactions occurring during the system's operation may cause instable behavior. Besides, the tilting-pad journal bearing were studied, which behavior is considered to be inherently stable. The shaft was modeled through the finite element method, due to its robustness, ease to implement and solution of the involved equations. Hence, the instabilizing elements were modeled in order to allow their addition in the shaft's model, through equivalent dynamic coefficients. The tilting-pad journal bearings allow two different coefficient models: reduced and full, with the last one explicitly exhibiting the degrees of freedom of the pads, being necessary modifications to the finite elements model to contain them. The evaluation of the stability threshold was performed through the logarithmic decrement method, obtained from the solution of the eigenvalue problem of the equation of motion of the system. The effects of the addition of different bearings, seals and levels of internal damping were analyzed separately in order to visualize the influence of each component on the dynamic of the same shaft. The models with tilting-pad bearing were analyzed twice, with each one considering a different coefficients model (reduced and full). Finally, different kinds of bearings, seals and internal damping were combined in the same shaft, allowing the definition of the interactions between the involved components. From this work, the effects in the system's stiffness, damping level and changes in the stability threshold were observed in all analyses.

Keywords: Instability on Rotating Systems, Eigenvalue Analysis, Hydrodynamic Bearings, Fluid Seals, Internal Damping.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

$[M]$	Matriz global de massa
$[C]$	Matriz global de amortecimento
$[G]$	Matriz global de efeito giroscópico
$[K]$	Matriz global de rigidez
$\{q\}$	Vetor de deslocamento
$\{F\}$	Vetor de forças externas
$[M_D]$	Matriz de massa do disco
$[G_D]$	Matriz de efeito giroscópico do disco
m_D	Massa do disco
I_d	Momento de inércia com relação ao eixo coordenado
d_o	Diâmetro externo do disco
d_i	Diâmetro interno do disco
L_D	Espessura do disco
P	Distribuição de pressão no filme de óleo
X, Z	Coordenadas retangulares do mancal
R	Raio do rotor
h	Espessura do filme de óleo
t	Tempo
R_S	Raio do segmento
h_S	Espessura do segmento
h_0, C_r	Folga radial do mancal
x_R, y_R	Coordenadas de posição do eixo
N	Número de segmentos do mancal
F_x, F_y	Forças hidrodinâmicas do mancal/selo
$k_{\_,\_}$	Coeficiente local de rigidez
$c_{\_,\_}$	Coeficiente local de amortecimento
m_E	Massa equivalente do eixo

Js	Momento de inércia de cada segmento
x_c, y_c	Coordenadas da posição do eixo
M	Termo de massa do selo
C, c	Termos de amortecimento direto e cruzado do selo
K, k	Termos de rigidez direto e cruzado do selo
H	Função da folga radial ao longo do comprimento
Z, θ	Coordenadas polares do selo
U, W	Componentes circunferencial e axial da velocidade
f_r, f_θ	Forças adimensionais do selo
r	Raio de movimento do *whirl*
R_R	Força hidrodinâmica radial
R_T	Força hidrodinâmica tangencial
F_k	Força restauradora elástica
F_θ	Força tangencial instabilizadora
$[H_m]$	Matriz de impedância mecânica

Letras Gregas

Ω	Velocidade de rotação do sistema
$\bar{\alpha}$	Coeficiente de proporcionalidade com a matriz de massa
$\bar{\beta}$	Coeficiente de proporcionalidade com a matriz de rigidez
μ	Viscosidade absoluta
ω	Velocidade de rotação do rotor
α	Deslocamento angular do segmento
β	Coordenada angular do segmento
$\Delta\_$	Perturbação de deslocamento/velocidade
λ	Frequência de excitação amortecida
τ	tensão de cisalhamento
ρ	Densidade do fluido

$m\varepsilon$	Momento de desbalanceamento do rotor
η	Coeficiente de amortecimento interno
υ	Coeficiente de amortecimento externo equivalente
$\dot{\phi}$	Frequência de *whirl* do sistema
ω_0, ω_n	Frequência natural do sistema
λ_k	Autovalores do sistema
ξ_k	Fator de amortecimento
δ_k	Decremento logarítmico
$[\Lambda]$	Vetor dos autovalores
$[\Psi]$	Matriz dos autovetores
Ω_{REF}	Velocidade de referência do gradiente de pressão

Sobrescritos

$'$	Indicador do sistema de referência móvel, no segmento
$\_$	Indicador de coeficientes adimensionalizados
r	Indicador da superfície do rotor
s	Indicador da superfície do estator

Subscritos

j	Número do segmento
g	Indicador de matriz global
k	Indicador de modo natural

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A atual conjuntura da matriz energética brasileira exige constantes investimentos para atender à crescente demanda de energia. Portanto, a expansão da capacidade de geração do país requer um cuidadoso planejamento. O Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) elabora os Planos Decenais de Expansão de Energia (PDE), que constituem um dos principais mecanismos para a tomada de decisões acerca da expansão energética brasileira.

O Plano Decenal de Expansão de Energia (PDE 2022) apresenta alguns dados relevantes sobre situação da matriz energética brasileira. Ao final de 2012, 66% da energia gerada no Brasil são provenientes de usinas hidrelétricas, 14% de usinas térmicas e 13% são produzidas por outras fontes renováveis (eólica, térmica de biomassa e pequenas centrais hidrelétricas). O PDE também destaca que atualmente o sistema energético brasileiro está sofrendo uma interligação completa, para formar o Sistema Integrado Nacional (SIN), que visa agregar todas as capitais do país na mesma malha energética.

O SIN viabiliza a descentralização da produção de energia, permitindo o melhor aproveitamento de bacias hídricas pouco utilizadas. Neste contexto, o PDE 2022 prevê, para o horizonte de 2018, a entrada em operação de 15 centrais hidrelétricas, sendo 9 usinas somente na região Norte. Para o ano de 2022, projetam-se, além destas mencionadas, 20 outras usinas, totalizando um aumento de 20000 MW na capacidade de produção de energia do Brasil. Mesmo com esta expansão das fontes hidrelétricas, o PDE 2022 ainda destaca que esta fonte ainda apresenta grande potencial de exploração, suficiente para mantê-la como a predominante no país por muitos anos.

Outro ponto destacado pelo PDE 2022 é a expansão do uso das energias renováveis, como eólica, biomassa e pequenas centrais hidrelétricas (PCH). Observa-se, atualmente, um crescimento anual do uso das fontes renováveis de 10%, impulsionadas pelo aumento de competitividade das usinas eólicas. Ao final de 2022, estima-se que estas fontes serão responsáveis por 21% da energia produzida no país.

Todas as fontes de energia mencionadas são dependentes da utilização de máquinas rotativas, possuindo grande representatividade na indústria de geração de energia. As máquinas rotativas são a maior e mais importante classe de maquinário, pois, além da geração de energia, estas podem ser utilizadas no transporte de meios fluidos, na usinagem de materiais, na propulsão de navios e aviões, entre outras aplicações.

O livro *Rotordynamics of Turbomachinery*, de Vance (1988), destaca que as máquinas rotativas têm uma ampla gama de aplicações pois a quantidade de energia, ou fluxos de fluidos, com a qual estes equipamentos lidam é muito elevada, em relação ao seu tamanho. Esta característica está relacionada à possibilidade de operação em altas velocidades de rotação, deslocando fluxos maiores e gerando mais energia. Entretanto, a sua utilização implica na determinação de parâmetros e resolução de problemas específicos da área. A complexidade aumenta quando se considera que uma simulação dinâmica correta deve avaliar, além do comportamento dinâmico do rotor, sua interação com outros componentes do mesmo sistema.

Vance (1988) lista os objetivos a serem cumpridos em uma análise de máquinas rotativas, de modo a minimizar os problemas de projeto e operação. Os cinco primeiros objetivos relacionam-se à determinação da frequência natural e alterações relacionadas a estas, além da determinação da resposta às excitações síncronas. Os dois últimos objetivos, entretanto, são os mais desafiadores, segundo o autor: identificação e supressão das instabilidades dinâmicas de um sistema rotativo.

As instabilidades dinâmicas em uma máquina rotativa surgem do próprio movimento do sistema durante sua operação, na forma de vibrações assíncronas com a velocidade de rotação. O livro *Handbook of Rotordynamics*, de Ehrich (1992), denomina tais vibrações como autoinduzidas, ou autoexcitadas, pois estes tipos de vibrações não possuem nenhuma excitação externa que as causem. As principais fontes de vibrações autoinduzidas são os mancais lubrificados, os selos de fluxo, o amortecimento interno do eixo, entre outras.

Os mancais são, simultaneamente, componentes responsáveis pelo suporte da carga estática do eixo e, como resultado da dinâmica do movimento, fonte do amortecimento e rigidez. Em um sistema rotor-mancal-fundação, a vibração aplicada pelo rotor aos mancais é transferida, através destes componentes, à estrutura de suporte que, por sua vez, interage com os mancais, retransmitindo o movimento vibratório ao rotor. Os selos, em contrapartida, não suportam carga, como os mancais, mas apresentam uma componente muito elevada de rigidez, elevando a mesma do conjunto girante.

Dessa forma, a presente dissertação de mestrado tem como objetivo analisar a dinâmica de um rotor sujeito a três tipos de fontes de vibrações autoinduzidas: os mancais hidrodinâmicos, os selos de fluxo e o amortecimento interno do eixo. As análises realizadas visam determinar a faixa de estabilidade do eixo com os elementos mencionados, de modo a compreender o fenômeno das vibrações autoinduzidas e avaliar o grau de sensibilidade dos parâmetros de projeto envolvidos neste fenômeno. Neste contexto, este trabalho também visa avaliar a influência dos mancais segmentados na dinâmica do eixo. Os mancais segmentados, também conhecidos como mancais de sapatas oscilantes, são os únicos, do ponto de vista prático, que podem ser utilizados em rotores industriais flexíveis, operando em altas velocidades, pois são considerados imunes às vibrações autoinduzidas relacionadas ao filme de óleo do mancal.

O comportamento dinâmico dos componentes em análise deve ser inserido no modelo matemático do sistema completo, sendo realizado através da determinação das forças geradas nestes elementos e linearizadas em coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento. Os mancais de geometria fixa e os selos de fluxo são representados através de coeficientes relacionados às coordenadas de translação (x,y) do eixo.

Os mancais segmentados, entretanto, possuem duas abordagens para os seus coeficientes. A primeira abordagem baseia-se no modelo completo das forças hidrodinâmicas, no qual são considerados os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento relativos aos deslocamentos angulares dos segmentos (α), além dos tradicionais coeficientes de rigidez e amortecimento relativos aos movimentos de translação (x,y) do eixo no interior do mancal. A segunda abordagem utiliza os coeficientes equivalentes reduzidos, ou seja, é realizada uma redução do modelo dinâmico do mancal, resultando em coeficientes relacionados apenas com a translação do eixo. Um dos objetivos deste trabalho é verificar se existe diferença no limiar de estabilidade entre os dois modelos. Desse modo, é necessária a adequação do modelo de eixo com os coeficientes completos do mancal segmentado, expandindo os graus de liberdade nos respectivos nós dos mancais.

O capítulo 2 traz a revisão da literatura existente sobre os assuntos abordados. A primeira seção aborda a evolução dos estudos envolvendo os mancais hidrodinâmicos, das tentativas iniciais de quantificar os efeitos dinâmicos destes componentes ao desenvolvimento de ferramentas modernas de simulação dos mesmos. As seções seguintes abordam o histórico do desenvolvimento dos selos de fluxo mecânicos e do amortecimento interno. A última seção revisa as metodologias desenvolvidas para avaliar o limiar de estabilidade de um sistema rotativo.

O capítulo 3 apresenta as metodologias utilizadas neste trabalho. A modelagem por elementos finitos é descrita, assim como as modificações realizadas para acomodar os coeficientes completos do mancal segmentado. A metodologia do cálculo dos coeficientes dos mancais também é abordada na seção seguinte, com destaque para as diferenças entre os mancais segmentados e os cilíndricos. O processo de obtenção dos coeficientes dos selos de fluxo também é destacado neste capítulo, assim como o método utilizado para a introdução do amortecimento interno no eixo.

A seção 3.5 deste capítulo esclarece o processo envolvido no surgimento das forças desestabilizadoras devido ao mancal (*whirl-whip*), ao selo e ao amortecimento interno (*whirl* por histerese), ressaltando o caráter autoinduzido destas forças. Por fim, a última seção detalha as ferramentas utilizadas para a análise da estabilidade do sistema.

O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos, separados em seções que contemplam as análises com somente mancais, selos e amortecimento interno. Por fim, apresentam-se os resultados para as combinações realizadas. Finalmente, o capítulo 5 traz as conclusões feitas e sugestões para os trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise de estabilidade de máquinas rotativas se baseia no correto entendimento e modelagem de todos os componentes destes equipamentos, de modo a prever, com o desejado grau de precisão, as fontes de instabilidades durante a sua operação. Entretanto, além da simples compreensão dos componentes envolvidos, devem ser levados em consideração, no contexto de seu estudo, os efeitos que tais elementos causam na estabilidade do sistema.

Desse modo, optou-se por separar a revisão bibliográfica em quatro seções: os mancais hidrodinâmicos, os selos mecânicos de fluxo, o amortecimento interno do eixo e os métodos de avaliação do limiar de estabilidade. A primeira seção contempla o histórico do desenvolvimento dos mancais, que ocorre paralelamente ao desenvolvimento da dinâmica de rotores, englobando eventos como as primeiras observações sobre *whirl-whip*, os primeiros esforços para a minimização desta instabilidade até o surgimento dos mancais *tilting-pad*, considerados não suscetíveis às vibrações autoinduzidas.

A segunda seção dedica-se à investigação do histórico do desenvolvimento dos selos de fluxo, pois a abordagem de seu estudo é diferente da apresentada nos mancais. Com o foco nos selos planos cilíndricos, a revisão bibliográfica mostra as primeiras tentativas de quantificar os efeitos do selo aos desenvolvimentos mais recentes, e como estes componentes afetam a dinâmica do rotor.

A terceira seção investiga a inclusão do amortecimento interno no modelo de eixo. As primeiras observações de instabilidades atribuídas a este efeito na década de 1920 são apresentadas. Em seguida, discutem-se as duas modelagens matemáticas distintas (amortecimento do tipo viscoso e do tipo histerético) e como estas influenciaram os trabalhos seguintes.

Por fim, a última seção retrata a evolução dos métodos de avaliação do limiar de estabilidade de um sistema rotativo. Apresenta-se a forma matemática mais direta de avaliação do limiar: a determinação dos autovalores da equação de movimento e a subsequente análise do decremento logarítmico. Entretanto, os recursos computacionais limitados forçaram a criação de métodos mais simples, para a solução deste problema tornar-se factível. Esta seção também contempla alguns aspectos do desenvolvimento do método dos elementos finitos.

2.1. Mancais Hidrodinâmicos

O estudo do comportamento dinâmico dos mancais possui suas bases matemáticas fundamentadas em estudos realizados no final do século XVIII. O maior avanço desta época foi a dedução da equação básica da lubrificação em 1886, por Reynolds, baseada em estudos realizados por Tower (1883) e Petroff (1883). Estes, realizando seus experimentos separadamente, chegaram à mesma conclusão: que o movimento relativo entre duas superfícies, separadas por um filme de fluido, gera um campo de pressão, cujo valor médio é a razão da carga pela área de lubrificação. Este campo de pressão, por sua vez, gera uma força hidrodinâmica suficiente para a sustentação do eixo (NORTON, 2006).

A partir destas observações, Reynolds propôs que o escoamento poderia ser tratado como laminar e que a viscosidade seria constante, algo relativamente razoável, dadas as condições de operação dos mancais existentes à época. Também assumiu que o filme de óleo era fino na direção radial, se comparado com as direções axial e circunferencial. Assim, desprezou-se o gradiente de pressão radial através da espessura do filme de fluido. Com tais hipóteses, era possível, a partir das equações de Navier-Stokes, obter-se uma equação para o campo de pressão gerado pelo filme de óleo (CAMERON, 1971).

Desta forma, Reynolds foi capaz de encontrar algumas soluções em série para a sua equação, supondo o mancal infinitamente longo. Entretanto, a primeira solução analítica para este caso foi encontrada por Sommerfeld (1904). A aproximação de mancal infinitamente longo anula o termo de pressão na direção do comprimento do mancal, eliminando, assim, alguns termos da equação original de Reynolds, facilitando sua solução. Na prática, o termo anulado significa que não existem perdas de óleo na extremidade do mancal (NORTON, 2006). A Figura 1 apresenta uma representação esquemática de um mancal cilíndrico.

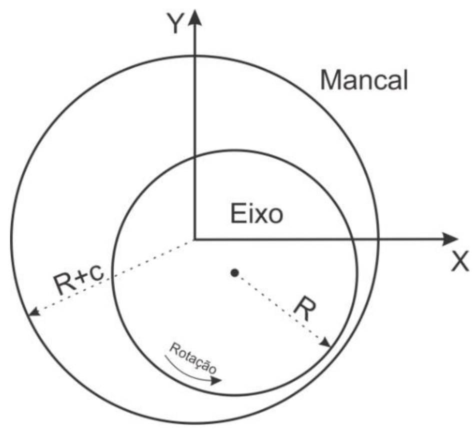


Figura 1 – Desenho Esquemático de um Mancal

As soluções providas por Reynolds e Sommerfeld foram de grande auxílio ao desenvolvimento da teoria envolvendo os mancais. Contudo, a abordagem na época considerava que a carga do eixo era rigidamente suportada pelos mancais, não existindo nenhuma interação dinâmica causada pelo filme de óleo. Com o avanço no desenvolvimento e na teoria dos mancais, observaram-se efeitos de rigidez e amortecimento induzidos no eixo, causados pelo óleo lubrificante. Assim, adotou-se a representação por meio de coeficientes equivalentes, conforme esquematizado na Figura 2, para estimar os efeitos de amortecimento e rigidez na teoria, de modo a elevar a precisão no cálculo. Tal representação foi proposta por Stodola (1925) e Hummel (1926) (DIMOND *et al.*, 2011).

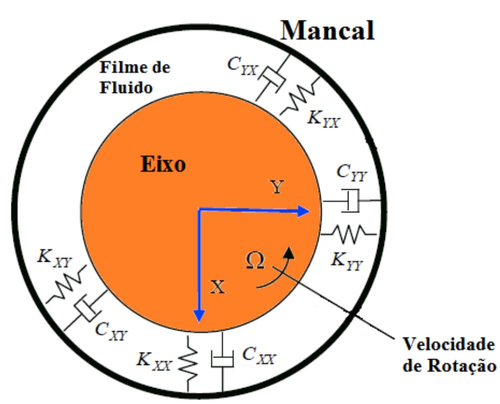


Figura 2 – Esquematização dos Coeficientes Dinâmicos Equivalentes (SAN ANDRÉS, 2010)

No mesmo ano do trabalho de Stodola, Newkirk e Taylor (1925) concluíram que a vibração em um mancal hidrodinâmico poderia ser induzida pelo próprio fluido, ao invés de ser causada pelo desbalanceamento ou atrito interno. Anos depois, Newkirk e Lewis (1956) observaram claramente dois tipos distintos de vibrações fluido-induzidas: o *oil-whirl* e o *oil-whip* (CHAUVIN, 2003).

O primeiro efeito, *oil-whirl*, foi caracterizado como uma vibração não violenta e autoinduzida. Este efeito é descrito por Singhal e Khonasari (2005) como "independente do desbalanceamento ou desalinhamento do rotor". Este fenômeno é causado por forças geradas no filme de óleo lubrificante devido à sua ação hidrodinâmica, e, durante tal evento, o rotor orbita nos seus mancais em uma frequência de aproximadamente metade a da frequência de rotação. Mais precisamente, como cita Cameron (1971), quase todos os casos de *oil-whirl* em mancais cilíndricos ocorrem com razões entre 0,47-0,48.

Já o segundo fenômeno, o *oil-whip*, foi também definido como uma vibração autoinduzida, porém a frequência de vibração do eixo nos mancais é igual à frequência natural do eixo. Esta instabilidade é observada quando a rotação do rotor, suportado por mancais cilíndricos, atinge o dobro da frequência natural do eixo. Desse modo, a amplitude de vibração cresce indefinida e violentamente, tendendo ao valor da folga radial do mancal, existindo um grande risco de contato do eixo com as paredes deste. Este efeito gera uma instabilidade com grande potencial destrutivo nas máquinas rotativas, sendo necessário evita-lo.

Ambos os fenômenos foram, e ainda são, extensivamente estudados para melhor compreensão do seu mecanismo de formação e controle. Atualmente, conclui-se que o *oil-whirl* é dependente das características do fluido e, assim sendo, da velocidade de rotação do eixo. Já o *oil-whip* é função das características do sistema, dependendo da frequência natural do conjunto (MENDES, 2011).

O desenvolvimento da teoria dos mancais prosseguiu e obteve grandes avanços com o advento do computador. A solução da equação de Reynolds, que antes era de difícil avaliação, tornou-se, em meio computacional, facilitada, impulsionando novas descobertas. Uma grande limitação na teoria dos mancais foi superada em 1952, por Ocvirk. Do mesmo modo que Sommerfeld aproximou o campo de pressão na direção do comprimento axial do mancal como constante, se este for infinitamente longo, Ocvirk (1952) fez o inverso. O mancal, sendo infinitamente curto, tem o termo de pressão na direção circunferencial negligenciado, restando apenas os termos de perdas nas extremidades do mancal (CAMERON, 1971).

O trabalho de Ocvirk (1952) possibilitou o estudo de mancais com grande aplicação industrial prática, pois a utilização de mancais longos possuía algumas limitações, como a redução da folga radial a zero, devido a desalinhamentos ou deflexões no eixo. A solução de Ocvirk ainda pôde ser manipulada, tornando-se válida para razões entre comprimento e diâmetro do mancal menores que 1/2. O método de Ocvirk tornou-se conveniente, devido à sua facilidade de cálculo e ao fato de que as geometrias dos mancais modernos possuem razão comprimento/diâmetro próximas dos valores nos quais esta solução é valida (NORTON, 2006).

Durante os anos de 1956, 1958 e 1959, Pinkus desenvolveu uma solução computacional para problemas de lubrificação hidrodinâmica. Com uma nova abordagem, comparada com as existentes à época, Pinkus utilizou o método de diferenças finitas para modelar as pressões de sustentação em um mancal hidrodinâmico. Desse modo, abriu-se caminho para a avaliação computacional de mancais com diferentes geometrias. Pinkus também investigou, juntamente com Sternlich (1959), a estabilidade dos rotores suportados por mancais planos, entretanto sua solução foi apresentada em coordenadas polares, dificultando comparações diretas com os efeitos de vibração nos rotores (DIMOND *el al.*, 2011).

A possibilidade de utilização de meios computacionais para a solução da equação de Reynolds possibilitou o emprego de métodos de maior complexidade na solução das equações envolvidas. Efeitos térmicos no filme lubrificante puderam ser adicionados às análises numéricas, de modo a estimar com maior precisão as distribuições de pressão e temperatura. Destaca-se o trabalho de Singhal (1981), que utilizou o método das diferenças finitas para resolver a equação de Reynolds com efeito da temperatura, em duas dimensões.

O desenvolvimento de novas geometrias de mancais foi impulsionado pela demanda por maior estabilidade para estes componentes. Apesar de seu uso extensivo ter ocorrido apenas a partir dos anos 60, os mancais segmentados já haviam sido empregados no início do século XX. Entretanto, os mancais de geometria fixa tinham custo reduzido e o comportamento dinâmico era melhor conhecido do que os dos mancais segmentados existentes à época. Pelo mesmo motivo, as alterações na geometria dos mancais radiais, como os elípticos, os excêntricos e os multilobulares, desenvolveram-se anteriormente aos segmentados. Nas Figuras 3 e 4 encontram-se exemplos de um mancal elíptico e de um trilobular, respectivamente.

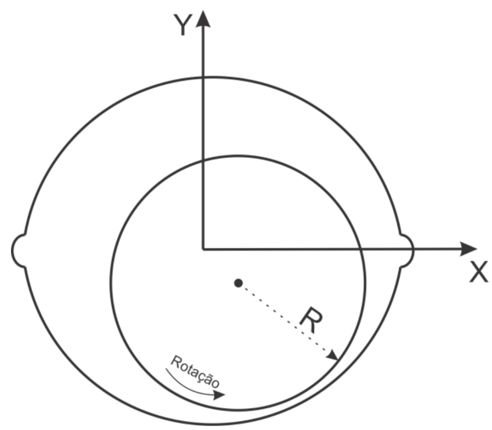


Figura 3 – Esquema de um Mancal Elíptico (ou *Lemon-Bore*)

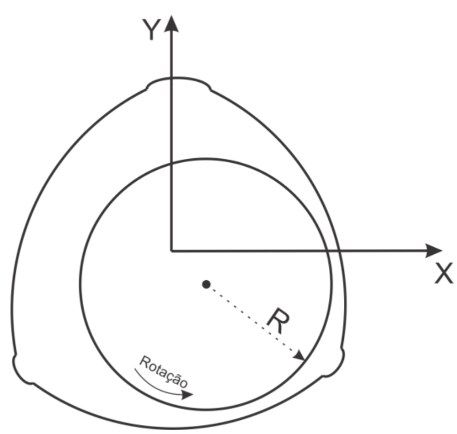


Figura 4 – Esquema de um Mancal Trilobular

De acordo com San Andrés (2000), estas alterações na geometria dos mancais, que poderiam incluir até ranhuras no interior do mancal para direcionar o escoamento do óleo, eram feitas para aumentar a pré-carga do mancal sobre o eixo. Tal pré-carga resultava em uma elevação da rigidez direta do mancal, que, por sua vez, afetava o início da instabilidade fluido-induzida durante a sua operação. Contudo, apesar das melhorias nos mancais de geometria fixa, as crescentes velocidades de operação geravam forças de desbalanceamento muito altas para serem absorvidas de forma segura pelos mancais.

A situação da teoria envolvendo os mancais segmentados, no início da década de 60, não representava o avanço que ocorreria em alguns anos. Antes da publicação do trabalho escrito por Lund em 1964, as análises envolvendo este tipo de mancal limitavam-se a avaliações de seu comportamento em regime permanente, simplesmente para determinar, em condições operacionais, a capacidade de carga e a perda de potência por estes causada (NICHOLAS, 2003).

A única referência existente, de Boyd e Raimondi (1953), podia ser utilizada para aproximação de um caso específico, sem pré-carga. Nicholas (2003) complementa a precariedade do artigo em questão: "[...] sem nenhum conhecimento sobre os coeficientes dinâmicos, concluíram que os mancais segmentados 'não ofereciam maiores vantagens (em seu uso), se comparados aos mancais cilíndricos planos... '[...]". Lund (1964) alterou esse panorama, com a publicação do primeiro artigo a tratar os coeficientes dinâmicos dos mancais segmentados, que também influenciou o método de cálculo dos coeficientes dos mancais de geometria fixa.

Conforme Lund (1964), se a velocidade de operação for alta o suficiente ou o se mancal estiver levemente carregado, o *whirl-whip* ocorre. Em tais condições, o uso de mancais segmentados resulta na eliminação desse efeito, devido ao fato de que a carga de cada segmento passa através do centro do mancal. San Andrés (2000) exemplifica esse fenômeno: durante a sua operação, os segmentos ajustam-se de modo que a reação das forças hidrodinâmicas passe pelo ponto de pivotamento. Tal ajuste elimina o surgimento de coeficientes cruzados, reduzindo o potencial da ocorrência da instabilidade fluido-induzida, tornando os mancais segmentados inerentemente estáveis, para aplicações nas quais a ocorrência de instabilidade fluido-induzida era inevitável. Os segmentos, ou sapatas, podem ser visualizados na esquematização do mancal segmentado, representado na Figura 5.

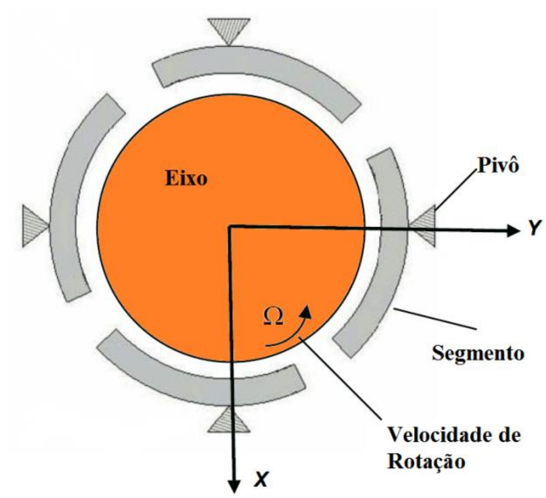


Figura 5 – Esquematização de um Mancal Segmentado (SAN ANDRÉS, 2010)

O mesmo artigo de Lund (1964) apresenta uma metodologia geral de cálculo, até então inédita, para a determinação matemática dos coeficientes dinâmicos linearizados, sendo possível sua aplicação em mancais de geometria fixa ou variável. O método utiliza pequenas perturbações ao redor do ponto de equilíbrio do eixo, em uma determinada velocidade de rotação, para a obtenção dos coeficientes dinâmicos. Em mancais de geometria fixa, essa metodologia fornece diretamente os coeficientes relacionados às coordenadas de translação do eixo.

Nos mancais segmentados, a presença dos segmentos exige uma simplificação matemática. Assume-se que o movimento angular dos segmentos é síncrono, ou seja, possui a mesma frequência de rotação do eixo. Em seguida, determinam-se os coeficientes dinâmicos em função das coordenadas de translação apenas, englobando, assim, a influência dos segmentos em tais coeficientes. Os resultados são apresentados para mancais de quatro, cinco, seis e 12 segmentos, na forma de gráficos dos coeficientes versus o número de Sommerfeld do mancal.

Em contrapartida à crença de estabilidade inerente dos mancais segmentados, uma das conclusões de Lund (1964) foi de que, sob certas condições, os termos de rigidez e amortecimento cruzados tornam-se significativos, em relação aos coeficientes diretos. Tais coeficientes são uma fonte de instabilidade na operação do conjunto eixo-mancal, portanto, o mancal segmentado perde a característica de inerente estabilidade. Os resultados de Lund indicam que o aumento dos coeficientes cruzados é diretamente proporcional ao aumento da velocidade de rotação do eixo, bem como está relacionado à inércia do segmento.

O trabalho realizado por Lund (1964) abriu precedentes para o desenvolvimento e aumento da utilização dos mancais segmentados. Conforme descreve Nicholas (2003), em 1967, Orcutt incluiu os efeitos de turbulência no trabalho de Lund, estendendo-o. A análise de Orcutt também indicou que um mancal segmentado simétrico resulta em coeficientes simétricos, ou isotrópicos. Posteriormente, concluiu-se que esta conclusão é parcialmente correta, já que resultados experimentais e modelos teóricos mais completos de mancais simétricos indicam que existem diferenças entre os coeficientes. Apenas pode-se afirmar que, em casos muito específicos, os mancais podem ser considerados como quase isotrópicos. Orcutt também concluiu que seria possível operar acima da primeira velocidade crítica do eixo com os mancais segmentados, algo evitado à época devido às instabilidades.

Diversas análises se seguiram, com variações na pré-carga, nas posições iniciais dos segmentos e na orientação de carga do pivô, para mancais com diferentes números de segmentos. Todos os trabalhos seguiam o modelo de redução proposto por Lund, que foi largamente utilizado na teoria até o final dos anos 70. Além disso, apesar das evoluções que se seguiram, o método de Lund foi, por sua conveniência no cálculo, responsável por guiar o desenho e projeto dos mancais segmentados até os anos 90, (NICHOLAS, 2003).

A redução síncrona dos coeficientes, entretanto, foi apontada pelo próprio Lund como sendo matematicamente incorreta para a análise de estabilidade de um sistema, durante a apresentação do trabalho de Nicholas, *et al.* (1978). Apesar de seu modelo também permitir a inclusão de frequências não síncronas nos segmentos, a investigação da dependência dos coeficientes em relação à frequência de vibração destes era necessária e prossegue até os dias atuais.

Uma significante evolução no modelo de Lund leva em conta uma particularidade existente nos mancais segmentados. De acordo com Shapiro e Colsher (1977) e Allaire, Parsell e Barrett (1981), estes mancais possuem graus de liberdade adicionais, referentes ao deslocamento angular de cada segmento, além dos de translação do eixo. Shapiro e Colsher (1977) foram os primeiros a discutir tal fato, concluindo que as matrizes de rigidez e amortecimento possuiriam mais termos do que era considerado na época. Também concluíram que tais matrizes poderiam ser reduzidas para englobar apenas os efeitos de translação, caso fosse assumida uma frequência de excitação nos segmentos, resultando nos coeficientes de redução síncrona.

Allaire, Parsell e Barrett (1981) estenderam a análise e publicaram um método para a determinação dos coeficientes completos, por meio de pequenas perturbações na posição de equilíbrio do eixo. Antes deste método, apenas um procedimento duplamente iterativo, denominado pelos autores de "método de força bruta" para determinar a posição de equilíbrio do segmento, estava disponível. O método é uma evolução em relação ao de Lund (1964), pois este último assume um movimento síncrono e depois são obtidos os coeficientes. Já o proposto por Allaire, Parsell e Barrett (1981) primeiramente determina os coeficientes completos para, apenas se necessário, realizar a hipótese de sincronia entre os segmentos e o eixo, e então obterem-se os coeficientes de redução síncrona.

A possibilidade de obtenção dos coeficientes completos alterou o panorama da análise dos mancais segmentados. Com tais efeitos inclusos na análise dos mancais, pode-se determinar o comportamento da vibração dos segmentos em função da frequência do eixo, resultando em cálculos de estabilidade com valores distintos aos encontrados com o modelo reduzido de coeficientes. Entretanto, a utilização dos coeficientes completos é, até hoje, motivo de discussão.

Novos estudos para a determinação da relação entre o movimento dos segmentos e a rotação do eixo foram realizados. Parsell, Allaire e Barrett (1983) referem-se aos métodos de redução síncrona como aceitáveis do ponto de vista da engenharia, apesar da sua simplificação na descrição do movimento, do ponto de vista matemático. Mesmo considerados aceitáveis, os coeficientes síncronos estimavam, de modo pouco conservador, a estabilidade do sistema. Neste mesmo trabalho, concluiu-se que a dependência dos coeficientes com a frequência era relativamente baixa em baixos números de Sommerfeld e altas cargas. Novos trabalhos se seguiram, visando obter o comportamento do segmento em função da frequência de rotação. Assim, incluíram-se novos fatores, como a influência da rigidez do pivô sobre o qual o segmento do mancal está apoiado.

Rouch (1983), Lund e Pedersen (1987), Kirk e Reedy (1988), entre outros, estudaram o efeito da rigidez do pivô do segmento do mancal. Em geral, quanto maior a carga dos mancais, mais os coeficientes dinâmicos são superestimados, se calculados sem o efeito do pivô. Rouch (1983) conclui que a rigidez do pivô é função da carga estática atuando nos mancais. Também apontou que a utilização de coeficientes não síncronos resultava em análises de estabilidade mais conservadoras.

Lund e Pedersen (1987) apresentaram um método para a inclusão de efeitos de deformações e de flexibilidade do mancal no modelo de análise dinâmica. A deformação do segmento foi aproximada como uma viga sobre carga de pressão e o pivô foi modelado por meio da teoria de contato Hertziana. Demonstrou-se que as reduções dos coeficientes, devido aos efeitos de flexibilidade, eram de até 50%. De acordo com Dimond (2011), outros trabalhos atingiram valores semelhantes de redução. Kirk e Reedy (1988) concluem que a inclusão do efeito da flexibilidade do pivô nos coeficientes dos mancais pode causar a redução dos coeficientes de amortecimento, da ordem de 70%, (SAN ANDRÉS, 2010).

Paralelamente a estes estudos, os mancais de geometria fixa também tiveram evoluções na sua modelagem. Hasimoto *et al.* (1987) analisaram mancais curtos considerando os efeitos da turbulência no filme de óleo. Capone (1991) determinou uma solução numérica para as equações de movimento, incluindo efeitos não lineares das forças hidrodinâmicas. Capone *el al.* (1991) incluíram nas suas análises os efeitos da turbulência e inércia do filme de óleo nas características dinâmicas do mancal.

Recentemente, Machado (2009) aplicou, em sua tese de mestrado, o método dos volumes finitos para determinar o campo de pressão do fluido, as forças e os coeficientes dinâmicos linearizados do mancal. Machado (2009) apresenta uma metodologia de calculo destes coeficientes para três geometrias de mancais: cilíndrico, elíptico e trilobular.

Os coeficientes dinâmicos do mancal segmentado, entretanto, serão obtidos conforme a metodologia desenvolvida em Daniel (2011, 2012a, 2012b). Daniel (2012a) elaborou um modelo termohidrodinâmico dos mancais segmentados, obtendo os seus coeficientes equivalentes de amortecimento e rigidez. Estes coeficientes foram, então, comparados aos de um modelo hidrodinâmico, de modo a avaliar a influência da temperatura nos coeficientes.

Assim, como este trabalho propõe estudar diversos tipos de instabilidades, é necessária a modelagem correta dos coeficientes dinâmicos dos mancais utilizados. Desse modo, os coeficientes dos mancais de geometria fixa utilizarão a metodologia de Machado (2009) para a sua determinação. Similarmente, a utilização dos mancais segmentados exige uma metodologia de cálculo a ser utilizada. O modelo hidrodinâmico dos mancais segmentados desenvolvido por Daniel (2012a) é utilizado para este fim.

2.2. Selos Mecânicos

Os estudos envolvendo o comportamento dinâmico dos selos mecânicos iniciaram-se como uma derivação direta da teoria aplicada aos mancais hidrodinâmicos, aplicando-se os mesmos conceitos e teorias desenvolvidas originalmente para estes componentes. Entretanto, a utilização da equação de Reynolds requer, entre outros fatores, que o escoamento modelado seja laminar e incompressível. As condições de operação dos selos de fluxo (elevadas velocidade axial, folga radial e perda de carga) violam a hipótese de escoamento laminar do fluido.

Consequentemente, novos equacionamentos fizeram-se necessários, de modo a modelar corretamente os efeitos provocados pelos selos na dinâmica das máquinas rotativas. Destaca-se o trabalho de Lomakin (1958), que estudou as forças de restituição nos selos, obtendo a rigidez direta (rigidez direta de Lomakin) devido ao salto de pressão entre a entrada e a saída do selo. No mesmo ano, Tao (1958) aproximou o problema da lubrificação turbulenta por meio da formulação de fluxo expandido, evitando a formulação por meio da representação física do mecanismo de transporte turbulento.

O modelo empregado atualmente na análise de selos teve início no trabalho desenvolvido em 1969 por Black, no qual se considerou que o deslocamento do eixo não acontece ao redor do ponto de equilíbrio. Desse modo, as forças de restituição são compostas por termos de inércia e amortecimento, juntamente com os termos de rigidez; já levados em consideração em modelos anteriores. No mesmo trabalho, Black (1969) desenvolveu um modelo linear para a obtenção das forças em selos curtos.

Black e Jensen (1970 e 1971) analisaram o selo para pequenos deslocamentos ao redor da posição centrada. Obtiveram as forças de reação por meio da integração da pressão, que, por sua vez, era obtida através da integração das equações de conservação de massa e quantidade de movimento do fluido no selo. Os efeitos da componente radial da pressão, em selos longos, também foram investigados.

Childs (1982) baseou-se nas equações de Hirs, na qual a turbulência da entrada é considerada no desenvolvimento do fluxo circunferencial do selo, para propor um método de cálculo. Anos mais tarde, em 1993, Childs dedicou um capítulo do seu livro para o desenvolvimento da teoria envolvida na determinação dos coeficientes equivalentes do selo de fluxo. Os coeficientes de inércia, amortecimento e rigidez eram obtidos através de um modelo analítico, com solução obtida pelo método das perturbações. Este é o método mais utilizado no cálculo de selos de fluxo cilíndricos.

Além dos selos cilíndricos, outras geometrias de selo foram objetos de diversos estudos. Os selos planos cônicos foram analisados por Childs e Dressman (1985) e Nelson (1985). Ambos os trabalhos utilizaram a formulação de Hirs, porém com divergências nos resultados encontrados, devido às simplificações empregadas no primeiro: a conicidade do selo é considerada muito pequena e a velocidade axial não sofre perturbação.

A influência do selo no rotor foi mais profundamente estudada em trabalhos recentes. Pode-se destacar o trabalho de Kwanka (2000), no qual se concluiu que a força desestabilizadora do selo é causada pelos termos cruzados de rigidez. Esta força é balanceada pelo termo direto de amortecimento, sendo, portanto, essencial levar-se em consideração o amortecimento nos selos de fluxo.

Kwanka (2000) observa também que os coeficientes do selo podem ser divididos em dois grupos: termos conservativos e não conservativos. O primeiro grupo engloba os coeficientes diretos de rigidez e cruzados de amortecimento, sendo responsável pela influência nas frequências vibracionais do sistema. O grupo não conservativos é formado pelos termos cruzados de rigidez e diretos de amortecimento, influenciando o limite de estabilidade do sistema.

Tomando como base o trabalho de Childs (1993), Brol (2011) publicou um trabalho na qual caracterizou os tipos de selos mecânicos existentes e também realizou a implementação da metodologia de calculo dos coeficientes, para um selo plano cilíndrico. Como resultados, Brol (2011) obteve os coeficientes dinâmicos de um selo pré-existente, comparando-os com a literatura de referência.

Galera (2013) implementou a solução para os selos cônico e escalonado, também realizando a comparação com o trabalho de Childs (1993). Galera (2013) também verificou como os parâmetros operacionais e geométricos influenciam os coeficientes dinâmicos dos selos. Por fim, Galera (2013) adicionou os coeficientes dinâmicos em um rotor modelado por elementos finitos, visualizando a sua influência no comportamento do sistema rotativo completo.

Os coeficientes dinâmicos de selos necessários a este trabalho serão obtidos, portanto, segundo o trabalho de Galera (2013) e adicionados em um modelo de simulação por elementos finitos, de modo a verificar a sua influência isoladamente e em conjunto com outras fontes de instabilidade.

2.3. Amortecimento Interno

Denomina-se amortecimento interno o amortecimento associado à dissipação de energia devido ao atrito existente no interior do material, quando este rotaciona em flexão. Em contrapartida, o termo “amortecimento externo” é utilizado neste trabalho para denominar os demais tipos de amortecimentos presentes no sistema, tal como o amortecimento estrutural proporcional do material do eixo.

O amortecimento externo apresenta, em linhas gerais, um caráter estabilizador das vibrações em um sistema; ao passo que o amortecimento interno tem um papel relevante na instabilização do sistema. Isso ocorre porque o amortecimento interno acopla o movimento rotacional com a vibração, transferindo a energia de rotação para a translação do eixo, (RASTOGI *et al.*, 2011).

O efeito do amortecimento interno na instabilização de sistemas rotativos é conhecido desde meados da década de 1920. Newkirk (1924) observou a ocorrência de *whirl* não síncrono, ou seja, com a frequência de vibração diferente da frequência (ou velocidade) de rotação, em bombas operando em condições supercríticas. Neste estudo, Newkirk (1924) atribuiu tal fenômeno à fricção interna do material. Kimball (1924) também percebeu a importância do amortecimento interno no fenômeno de *whirl-whip*, realizando a primeira definição analítica do fenômeno.

As primeiras tentativas de quantificar o amortecimento interno eram realizadas relacionando-o com o amortecimento externo, pois, enquanto o primeiro induz forças instabilizadoras, o segundo induz forças de caráter estabilizador. Ehrich (1964) deixa claro essa oposição dos dois efeitos, determinando que a razão entre os fatores de amortecimento interno e de amortecimento externo influencia a velocidade de instabilização do sistema. Além disso, Ehrich (1964) conclui que o efeito estabilizador do amortecimento externo no sistema permite a ocorrência de *whirl* em qualquer modo natural do rotor.

Outro aspecto a ser destacado no estudo do amortecimento interno é sua forma de modelagem. Existem dois modelos: o modelo de amortecimento viscoso e o modelo de amortecimento por histerese. Entretanto, devido a um erro de interpretação do estudo realizado por Dimentberg (1961), diversos trabalhos trataram os dois modelos como se existissem diferenças entre os efeitos observados na estabilidade do rotor.

Dimentberg (1961) estudou ambas as formas de modelagem do amortecimento interno, concluindo que o amortecimento interno era fonte de instabilidade após a primeira velocidade crítica. Entretanto, a maioria dos trabalhos que o referencia conclui incorretamente que houve distinção entre os efeitos dos modelos: ao passo que o amortecimento viscoso comportava-se como descrito anteriormente, o amortecimento por histerese seria fonte de instabilidade em qualquer velocidade de operação.

Gunter publicou trabalhos em 1966 e 1967, modelando o amortecimento interno como viscoso. Nestes trabalhos, Gunter mostrou que o efeito desestabilizador deste tipo de amortecimento ocorre apenas após a primeira frequência natural, tal como Dimentberg (1961) concluiu. Entretanto, outro trabalho de Gunter, publicado em 1972, que incluía os dois modelos de amortecimento interno, já continha o erro de interpretação citado, concluindo que o amortecimento por histerese era instabilizante em qualquer velocidade.

Lund (1974) analisa a estabilidade de um rotor flexível com mancais lubrificados e com efeitos de amortecimento interno e forças aerodinâmicas desestabilizadoras. Neste trabalho, é apresentada uma dedução das equações do modelo de viga para a utilização dos dois efeitos de amortecimento, porém é aplicada nas análises apenas a forma histerética, justificando que esta seria uma forma mais válida da representação do amortecimento interno. Mesmo assim, Lund (1974) destaca que o assunto ainda não era muito bem compreendido.

Vance e Lee (1974) também investigaram a estabilidade em rotores operando em altas velocidades. Destacaram as observações de Newkirk (1924) e observaram que o aumento da flexibilidade dos mancais e do amortecimento externo tende a elevar o limiar de estabilidade de um sistema sujeito à instabilidade devido ao amortecimento interno. Também destacaram a relação entre o limiar de estabilidade e a razão dos amortecimentos externo e interno.

Vance e Lee (1974) também concluíram que, quando os fatores de amortecimento interno e externo são aproximadamente iguais, o limiar da estabilidade localiza-se no dobro da frequência natural. Outra observação feita é que, à medida que o valor do amortecimento interno aumenta, o limiar de estabilidade aproxima-se da frequência natural. Outros estudos da década de 1970 investigaram modelos lineares e não lineares de amortecimento interno, (RASTOGI *et al.*, 2011).

Zorzi e Nelson (1977) incluíram ambos os modelos de amortecimento interno nas matrizes de elementos finitos, desenvolvidas por Nelson e McVaugh (1976). Utilizando um modelo linear de amortecimento, Zorzi e Nelson (1977) deduziram novas matrizes de elementos finitos para acomodar o efeito do amortecimento interno. Entretanto, os resultados apresentados indicaram que o amortecimento por histerese instabiliza o sistema rotativo em todas as velocidades de rotação, seguindo o erro de interpretação já citado.

Edney *et al.* (1990) incluíram os efeitos de cisalhamento e amortecimento interno na representação por elementos finitos, ao utilizar o modelo de viga de Timoshenko. Levaram em consideração, também, as influências do torque e de carga axial nas matrizes. Baseados, entretanto, no modelo desenvolvido por Zorzi e Nelson (1977), pode-se concluir que a influência do amortecimento por histerese está adicionada incorretamente.

Apenas com o trabalho de Genta (2004) esclareceu-se que o amortecimento por histerese não instabiliza em toda velocidade de rotação, mesmo em condições subcríticas. Genta (2004) também destaca que, do ponto de vista da análise de estabilidade, não existe diferença na modelagem do amortecimento interno como histerético ou como viscoso. Por fim, Genta (2004) conclui que o amortecimento interno, seja modelado como histerético ou viscoso, tem caráter estabilizador em condições subcríticas e caráter instabilizador em velocidades supercríticas.

2.4. Avaliação do Limiar de Estabilidade

A modelagem matemática envolvida para determinar se um sistema sujeito à vibração é estável ou instável é um procedimento direto: determina-se a equação de movimento do sistema, encontram-se as soluções desta equação, também chamados de autovalores, que são representados por números complexos. Cada autovalor tem, portanto, termos reais (associados à modulação – ou decaimento – da resposta temporal) e termos imaginários (associados ao caráter oscilatório da resposta).

A análise de estabilidade de um sistema foca-se no termo responsável pelo decaimento da resposta com o tempo, ou seja, o termo real do autovalor. A resposta decai com o tempo se a parte real for negativa, o que constitui um autovalor com caráter estável. Em contrapartida, a resposta cresce continuamente com o tempo se a parte real for positiva, indicando a ocorrência de instabilidade. Portanto, a análise de estabilidade de um sistema pode ser avaliada com a determinação de seus autovalores.

Entretanto, a validade das soluções encontradas depende da modelagem correta dos componentes envolvidos e do entendimento dos efeitos e interações presentes nos rotores, mancais e selos. A evolução ocorrida ao longo do desenvolvimento das teorias e métodos de modelagem satisfaziam as necessidades e limitações existentes na época em que foram propostos, resultando nos procedimentos atualmente utilizados.

O desenvolvimento das ferramentas para análise da estabilidade de um sistema rotativo muitas vezes confunde-se com os estudos realizados para a identificação das fontes de desestabilização. Em seu livro, Vance (1988) descreve o processo de identificação da origem de problemas de estabilidade, realizado nos anos 1920, pela GE, quando novos compressores apresentaram tais problemas. Vários anos foram necessários para determinar que a montagem do rotor resultava em fricção interna, levando-o à instabilidade. No processo de determinação da origem dessa instabilidade autoexcitada ou autoinduzida, também foi identificado o fenômeno de *oil-whirl,* associado aos mancais lubrificados, também autoinduzido.

No mesmo processo de identificação uma importante ferramenta foi criada. Campbell (1924) utilizou diagramas de frequência de vibração em função da rotação do eixo, para observar a vibração axial. O diagrama de frequência-rotação, mais conhecido como diagrama de Campbell, tem como objetivo determinar as frequências naturais de vibração do sistema, determinando-se graficamente quais frequências coincidem com a frequência de rotação. Desde então, o diagrama de Campbell é continuamente utilizado na dinâmica de rotores. Atualmente, pode-se obtê-lo analiticamente através do cálculo dos autovalores do sistema, para cada velocidade de rotação.

Conforme já discutido anteriormente, tais descobertas foram objeto de vários estudos (Newkirk (1924), Kimball (1924), Newkirk e Taylor (1925) e Newkirk e Lewis (1956)), detalhados nas suas respectivas seções. Entretanto, até meados dos anos 1960, os problemas de instabilidade autoinduzida em máquinas rotativas eram pouco frequentes: os projetistas evitavam condições supercríticas, mesmo com conhecimento das vantagens desse tipo de operação. Gunter (1966) cita que Jeffcott (1919) já havia enumerado as vantagens da utilização de rotores operando em velocidades supercríticas envolvendo motores de aviões.

As condições de operação supercríticas produziam, sem afetar o peso e as dimensões de uma máquina rotativa, um aumento do fluxo de gás ou fluido, melhorando o rendimento do sistema rotativo. Segundo Vance e Lee (1974), isso produzia dois problemas: a necessidade de passar pela primeira frequência natural para atingir condições supercríticas e o aumento da ocorrência de instabilidades autoinduzidas. Vance (1988) também destaca que, durante o crescimento do uso das máquinas rotativas nos anos 1960, os problemas de instabilidade eram cada vez mais frequentes, com custos de reparação exorbitantes. Por diversas vezes, os resultados eram falhas catastróficas durante a operação.

Desse modo, tornou-se essencial ao projeto das máquinas rotativas a correta determinação da sua estabilidade dinâmica, levando em consideração os tipos de instabilidade presentes e sua faixa de estabilidade. Entretanto, as limitações computacionais da época em que estes estudos foram realizados produziram abordagens simplificadas, adequadas à sua época, para a verificação do limite de estabilidade de um sistema rotativo.

A modelagem de um eixo evoluiu de um método gráfico para a determinação de suas velocidades críticas, introduzido por Stodola (1910), para o método da matriz de transferência, desenvolvido por Myklestad (1944) e Prohl (1945). Archer (1963) elaborou o método dos elementos finitos aplicado a sistemas rotativos, tornando-se a norma para o estudo do comportamento dinâmico de tais sistemas. Entretanto, as limitações computacionais da época exigiram muita criatividade dos pesquisadores.

A norma 684 da API (2005) traz um histórico breve sobre o desenvolvimento de métodos para o cálculo da estabilidade, com auxílio computacional, em máquinas rotativas. Lund (1965) fez uma primeira tentativa, um código descrito como "difícil de usar" e no qual era necessário saber a resposta aproximada para haver convergência. A API (2005) também cita Gunter (1966 e 1967), já abordado na seção de amortecimento interno.

Ruhl (1970) e Ruhl e Booker (1972) apresentaram modelos do rotor pelo método de elementos finitos e pelo método utilizando matrizes de transferência. Sua principal conclusão foi que, em sistemas altamente amortecidos, as matrizes de transferência indicavam modos incorretos. Lund (1974) detalhou o processo de solução por meio de matrizes de transferência, que obtinham, com grande eficiência, os primeiros 10 modos vibracionais do conjunto rotativo estudado. Como a natureza das vibrações autoexcitadas é de afetar o modo mais básico, ou seja, a primeira frequência natural, o método proposto por Lund (1974) foi de grande importância na determinação do comportamento dinâmico do rotor.

Em 1975 e 1976, dois trabalhos expandiram os conceitos utilizados por Lund (1974). Bansal e Kirk (1975) alteraram certos detalhes do método, baseando-se em Ruhl e Booker (1972), mas resultava na mesma solução proposta por Lund (1974). Barrett *et al.* (1976) desenvolveram um código computacional também baseado no trabalho de Lund (1974). Entretanto, em simulações com suportes assimétricos, tais métodos ocasionalmente falhavam, pulando modos.

A representação por elementos finitos, por sua vez, extrai corretamente todos os modos do sistema. Ruhl (1970) e Ruhl e Booker (1972) foram os primeiros a utilizá-lo, conforme mencionado anteriormente. O método incluía energia de flexão elástica e cinética de translação. Diamaragonas (1975) formulou um elemento com efeitos de inércias translacional e rotacional, momentos giroscópicos, flexão e amortecimento interno. Gasch (1976) incluiu no modelo de Diamaragonas (1975) os efeitos de excentricidade distribuída.

Nelson e McVaugh (1976) basearam-se nas matrizes deduzidas por Ruhl (1970) e Ruhl e Booker (1972), para apresentar um modelo mais completo de elementos finitos. Nelson e McVaugh (1976) incluíram os efeitos de inércia rotacional, efeito giroscópico e carregamento axial no modelo de elementos finitos. Ainda são citados os efeitos de torque axial e cisalhamento transversal, ausentes no trabalho de 1976.

Zorzi e Nelson (1977) adicionaram os efeitos de amortecimento interno, conforme mencionado anteriormente. Zorzi e Nelson (1980) incorporaram o torque axial no modelo e Nelson (1980) adicionou o efeito de cisalhamento transversal ao utilizar a viga de Timoshenko para suas matrizes de elementos finitos. Rouch e Kao (1979) desenvolveram um modelo de viga de Timoshenko linearmente cônica, resultando em um elemento com 6 graus de liberdade por nó.

Edney *et al.* (1990) também apresentaram um modelo de viga de Timoshenko cônica, considerando aproximações lineares nas propriedades geométricas. Os autores incluíram os efeitos de inércia translacional e rotacional, cisalhamento, efeito giroscópico, torque axial, amortecimentos interno viscoso e histerético.

Pode-se observar que a modelagem por elementos finitos tornou-se, ao longo dos anos, foco de diversos estudos e pode-se dizer que se tornou o padrão para a representação de eixos nas análises dinâmicas de rotores. Apesar da quantidade de variáveis envolvidas aumentarem muito com o aumento da discretização do eixo, elevando o custo computacional, os cálculos utilizando elementos finitos são muito robustos e não "perdem" autovalores, ou modos da análise. As vantagens na utilização justificam a procura por métodos de otimização do cálculo e extração mais eficiente dos autovalores relevantes.

A revisão bibliográfica apresentada teve como objetivo cobrir o desenvolvimento das modelagens dos componentes envolvidos, bem como a evolução das ferramentas a serem utilizadas nas análises pertinentes a este trabalho. Neste contexto, a avaliação do limiar de estabilidade do conjunto rotativo será realizada através da análise dos autovalores e do decremento logarítmico do sistema. A modelagem do rotor, para a determinação da equação de movimento do sistema, será realizada por meio do Método dos Elementos Finitos, com base nas matrizes apresentadas em Nelson e McVaugh (1976) e em Nelson (1980), seguindo implementação apresentada em Tuckmantel (2010).

A modelagem dos mancais e selos a serem adicionados ao rotor deve ser adequada ao modelo de eixo escolhido. Desse modo, optou-se por utilizar os coeficientes dinâmicos equivalentes destes componentes, de fácil adição ao modelo de elementos finitos do eixo. Os mancais de geometria fixa seguem a metodologia proposta por Machado (2009) e os mancais de geometria variável, a metodologia de Daniel (2012a). Os selos mecânicos adotam o modelo proposto por Galera (2013). Estes trabalhos condensam os efeitos dinâmicos dos mancais e selos em coeficientes equivalentes.

Por fim, baseado na revisão bibliográfica feita, este trabalho utiliza o trabalho de Zorzi e Nelson (1974) para a adição do efeito de amortecimento interno nas matrizes de elementos finitos, atentando-se para as observações feitas anteriormente. Optou-se, com base nas observações apontadas por Genta (2004), por utilizar exclusivamente o modelo de amortecimento interno viscoso, de implementação mais direta nas matrizes de elementos finitos. No próximo capítulo são apresentados os modelos utilizados na simulação numérica das análises realizadas.

3. METODOLOGIA

3.1. Simulação por Elementos Finitos

A simulação do comportamento dinâmico foi obtida através do método dos elementos finitos. Neste método, um sistema contínuo é discretizado em vários elementos, assim, o deslocamento de qualquer ponto do sistema é expresso em função dos deslocamentos de um conjunto finito de nós, relacionados entre si por meio de matrizes equivalentes de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica. Desta forma, a equação de movimento resultante está mostrada na Equação 1 (KRAMER, 1993).

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] - \Omega[G])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \tag{1}$$

Onde *[M]*, *[C]*, *[K]* e *[G]* são as matrizes globais de massa, amortecimento, rigidez e efeito giroscópico, respectivamente. O vetor *{F}* contém as forças externas, neste caso, a força de desbalanceamento e a força peso, Ω é a velocidade de rotação do sistema. A matriz *[C]*, que representa o amortecimento estrutural do rotor, poder ser considerada proporcional às matrizes de massa e de rigidez:

$$[C] = \bar{\alpha}[M] + \bar{\beta}[K] \tag{2}$$

Neste trabalho, foram utilizadas as matrizes apresentadas em Nelson e McVaugh (1976) e em Nelson (1980), nas quais é realizado o desenvolvimento da viga de Timoshenko, seguindo a modelagem apresentada em Tuckmantel (2010).

As matrizes de cada elemento são agrupadas em matrizes globais, que contém todos os graus de liberdade do modelo, sendo utilizadas na equação de movimento do sistema rotativo. Uma esquematização da montagem, adaptada de Castro (2007), está apresentada na Figura 6.

Na modelagem por elementos finitos, os graus de liberdade dos nós são determinados pelo tipo de elemento utilizado no modelo do sistema. A composição das equações de todos os nós da malha fornece a equação global do modelo. Em um nó no qual há um mancal posicionado, devem-se levar em consideração os coeficientes de amortecimento e rigidez do mancal. Assim sendo, os coeficientes dinâmicos equivalentes, previamente calculados, devem ser introduzidos nos respectivos graus de liberdade do equacionamento, nos nós de posicionamento dos mancais.

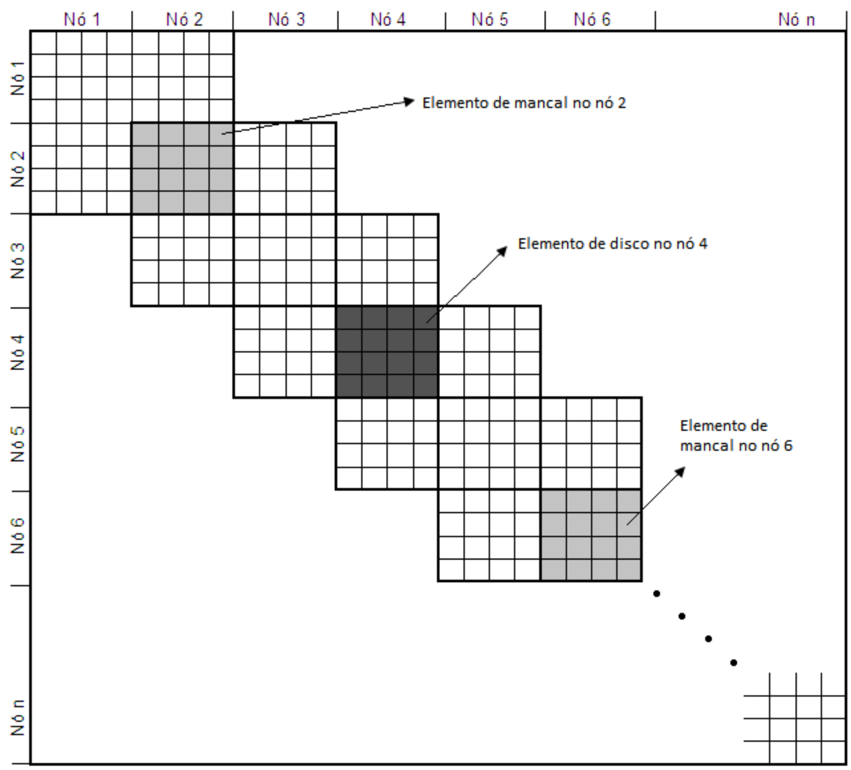


Figura 6 – Esquematização da Montagem das Matrizes de Elementos Finitos

Deve-se destacar que a adição do elemento de disco é realizada após a montagem da matriz global descrita na Figura 6. O elemento de disco é modelado de forma à contemplar apenas os efeitos de inércia e giroscópico, portanto a soma é realizada nos graus de liberdade correspondentes. Novamente, segundo Nelson e McVaugh (1976), Nelson (1980) e conforme a implementação realizada em Tuckmantel (2010), as matrizes do disco são dadas pelas Equações 3 e 4.

$$M_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$G_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dx} \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

No qual os termos de inércia podem ser determinados pelas Equações 5 e 6:

$$I_{dy} = I_{dz} = \frac{m_D}{12}\left[\frac{3}{4}(d_o^2 + d_i^2) + L_D^2\right] \tag{5}$$

$$I_{dx} = \frac{m_D}{8}(d_o^2 + d_i^2) \tag{6}$$

Sendo m_D a massa do disco, d_o e d_i são, respectivamente, os diâmetros externo e interno do disco e L_D é a espessura do disco.

3.1.1. Implementação do Modelo Reduzido do Mancal Segmentado

A implementação do modelo reduzido deu-se de forma direta, conforme foi descrito no item anterior. O programa foi escrito de modo que a quantidade de nós para a discretização fosse um dado de entrada, bem como as dimensões de cada elemento e do disco, a posição do disco e a localização dos mancais.

3.1.2. Implementação do Modelo Completo do Mancal Segmentado

A implementação do modelo completo exigiu uma programação mais cuidadosa, pois, ao contrário do modelo condensado, cujos coeficientes dos mancais são adicionados sobre graus de liberdade já existentes nas matrizes, esta modelagem requer graus de liberdade extras, que devem ser alocados no programa durante a montagem das matrizes do eixo.

A Figura 7 exemplifica o procedimento a ser adotado na montagem das matrizes levando-se em consideração os graus de liberdade de rotação dos segmentos. Esta figura representa os 5 primeiros nós de um eixo modelado por elementos finitos, com cada célula indicando um grau de liberdade. Para efeito de simplificação, considerou-se que existe um mancal no terceiro nó, com 4 segmentos, adicionando, portanto, mais 4 graus de liberdade no nó em questão.

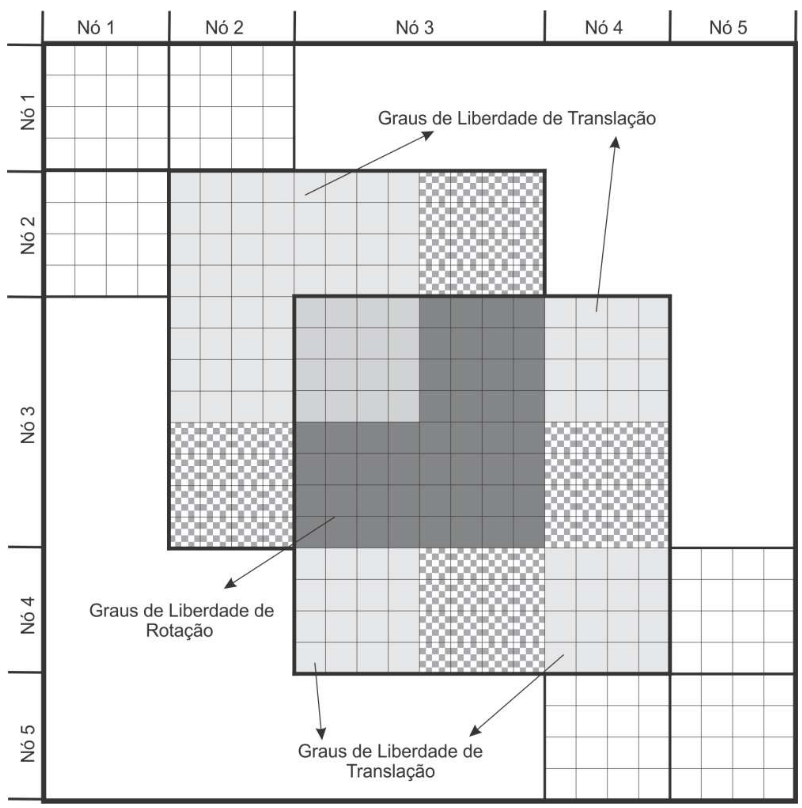


Figura 7 – Esquematização da Expansão dos Coeficientes em uma Matriz de Elementos Finitos

Em destaque na Figura 7, encontra-se a região de ligação do nó 3 com os nós anterior e o posterior. A região em cinza claro indica as coordenadas de translação dos nós dos elementos finitos. Observa-se que a conexão ocorre da mesma forma que no modelo reduzido.

Entretanto, por existirem graus de liberdade extras, é necessária a inclusão destes graus de liberdade no nó em que se encontra um mancal. Esta expansão dos graus de liberdade altera a matriz que representa os elementos 2 e 3, compostos, respectivamente, pelos pares de nós 2-3 e 3-4, para uma matriz com maior quantidade de termos. Pode-se observar também que os graus de translação na matriz do elemento 3, destacados em cinza claro, foram 'separados', não sendo mais contíguos como antes. Isto torna a soma dos coeficientes de translação e rotação dos mancais na matriz global uma operação que requer maiores cuidados para não interferir nos graus de liberdade de translação do eixo.

Deve-se destacar, também, que a região indicada em cinza escuro, denominada de graus de liberdade de rotação, só depende das coordenadas de translação e rotação localizadas no próprio nó a esta relacionado. Isto ocorre porque o movimento angular dos segmentos não tem relação com os graus dos nós 2 e 4. Esta ausência de relações está destacada em quadriculado na Figura 7: todos os termos nesta região devem ser nulos.

3.2. Metodologia de Cálculo dos Coeficientes Dinâmicos do Mancal

O cálculo dos coeficientes dinâmicos do mancal possui um elevado grau de complexidade, exigindo especial atenção no tratamento das variáveis envolvidas. Além disso, a determinação de tais coeficientes envolve a união de métodos de cálculo provenientes da mecânica dos fluidos e da mecânica dos sólidos. O procedimento será estudado nesta seção para melhor compreensão das interações causadas pelo filme de fluido, da origem de tais coeficientes e do comportamento dinâmico do mancal.

Esta seção apresenta o procedimento de cálculo para a determinação dos coeficientes dos mancais de geometria fixa (mancais cilíndrico, elíptico e trilobular), conforme desenvolvido por Machado (2011) e para mancais de geometria variável (mancal segmentado), conforme desenvolvido por Daniel (2012a). A metodologia será descrita tomando-se como base o mancal segmentado, que possui muitas particularidades na determinação dos seus coeficientes. A seção seguinte destaca as diferenças para o cálculo dos coeficientes do mancal cilíndrico, de determinação mais simples.

3.2.1. Mancais Segmentados

A base do cálculo dos coeficientes reside na solução da equação de Reynolds (Equação 7), que relaciona a espessura do filme de fluido do mancal com o campo de pressão gerado pelo movimento rotativo. A Equação 7 é uma equação diferencial parcial não homogênea, cuja resolução analítica é demasiadamente complexa, exceto para condições muito específicas. Por esse motivo, métodos numéricos para a sua resolução são comumente empregados.

$$\frac{\partial}{\partial X} \cdot \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \cdot \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = 6 \cdot \omega \cdot R \cdot \frac{\partial h}{\partial X} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \tag{7}$$

No qual *P(X,Z)* é a distribuição de pressão no filme de óleo, *X* e *Z* são as coordenadas retangulares, μ é a viscosidade absoluta, *R* é o raio do rotor, *h* é a espessura de filme de óleo e ω é a velocidade de rotação do rotor.

Na presente aplicação, o Método dos Volumes Finitos (MVF) é utilizado para a sua integração e consequente obtenção da distribuição de pressão (Patankar, 1980; Maliska, 2004). Desse modo, a análise se inicia com a geração de uma malha de volumes finitos na superfície de todos os segmentos que compõem o mancal segmentado, determinando as posições dos centros e das fronteiras dos volumes.

A partir da malha gerada, procede-se ao cálculo para cada velocidade de rotação desejada. Inicialmente, deve-se determinar a posição de equilíbrio do eixo para a velocidade em análise. Para isto, a distribuição de pressão em cada segmento é calculada, a partir de uma estimativa inicial. Prossegue-se calculando a espessura de filme de óleo (ilustradas pela Equação 8 e pela Figura 8) no segmento, seguindo a malha previamente determinada. Com isso, o campo de pressão é determinado pelo Método dos Volumes Finitos, calculando-se os coeficientes de pressão dos volumes vizinhos para determinar-se a pressão em um determinado volume, (DANIEL, 2011).

$$h_j(\beta) = R_s - R - \left\{\sin(\beta)\left[y_R + \alpha_j(R_S + h_S)\right] + \cos(\beta)\,(x_R + R_s - R - h_0)\right\} \tag{8}$$

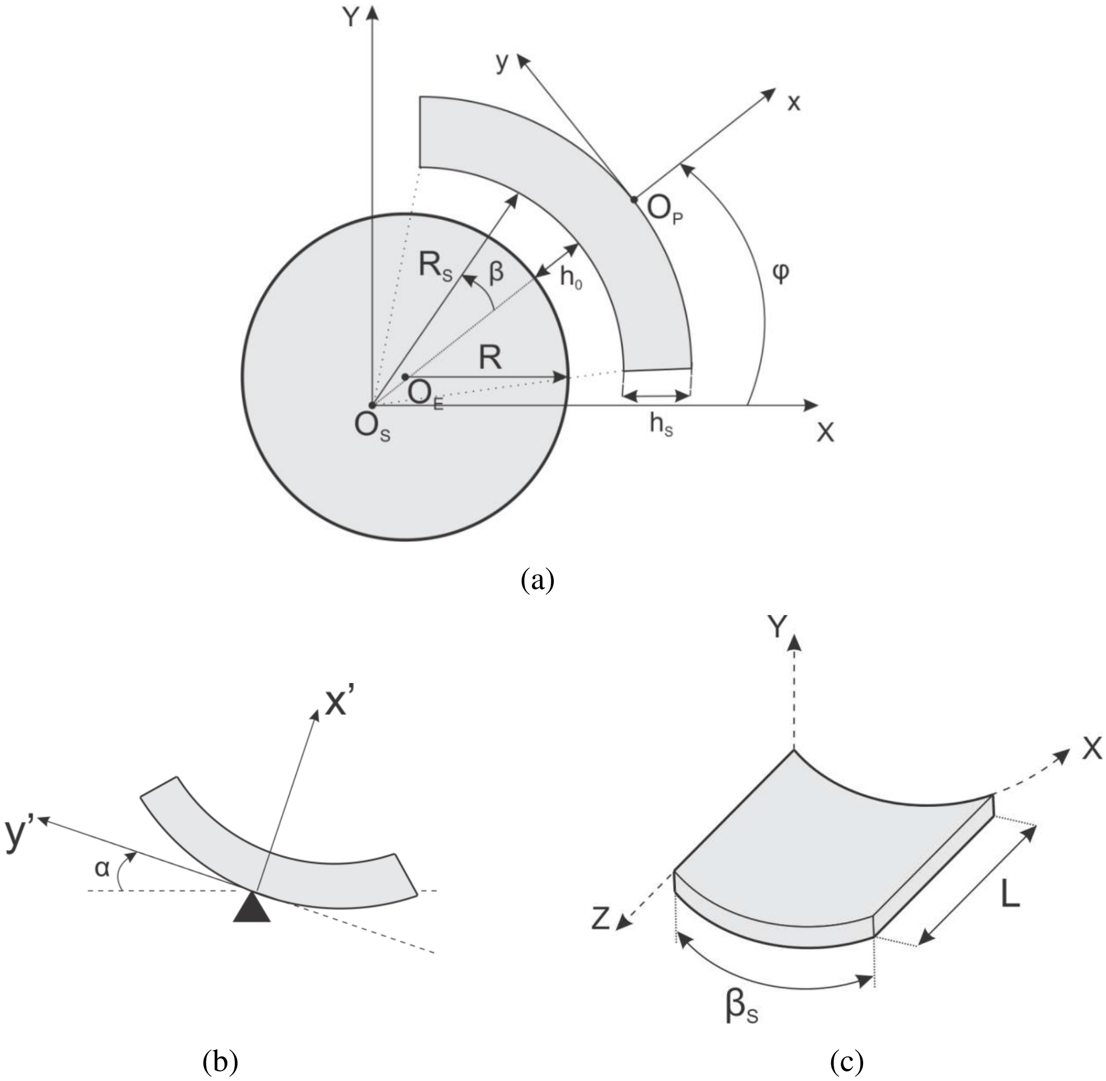


Figura 8 – Representação Esquemática; (a) Cinemática do sistema Rotor-Segmento; (b) Vista Frontal do Segmento; (c) Vista em Perspectiva do Segmento (DANIEL, 2012a).

No qual β é a coordenada angular no segmento, R_S é o raio do segmento, h_S é a espessura do segmento, h_0 é a folga radial do mancal, α é o deslocamento angular do segmento e, tendo como referencia o sistema de coordenadas posicionado no segmento (Referencial O_p na Figura 8), x_R e y_R são as coordenadas da posição do eixo.

Após o cálculo da distribuição das pressões em toda a malha, verifica-se o módulo do erro e o critério de parada desejado para pressão. Caso não seja atingido, inicia uma nova iteração com os valores anteriormente calculados. Por fim, utiliza-se a distribuição de pressão para calcular as forças e realiza-se o balanço destas em cada segmento (Equação 9).

$$
\begin{aligned}
&F = \int P(Z,X) \cdot dA = \\
&F_{x'_j} = \int_0^X \int_0^Z P_j(Z,X) \cdot \cos(\beta_j) \cdot dZ \cdot dX = \sum_0^X \sum_0^Z P_j(Z,X) \cdot \cos(\beta_j) \cdot \Delta Z_j \cdot \Delta X_j \\
&F_{y'_j} = \int_0^X \int_0^Z P_j(Z,X) \cdot \sin(\beta_j) \cdot dZ \cdot dX = \sum_0^X \sum_0^Z P_j(Z,X) \cdot \sin(\beta_j) \cdot \Delta Z_j \cdot \Delta X_j
\end{aligned}
\tag{9}
$$

No qual *(X,Z)* são as coordenadas retangulares do segmento, *(x,z)* é o sistema de referência inercial, *(x',z')* é o sistema de referência móvel localizado no segmento e o sub-índice j refere-se ao número do segmento, sendo que j vai de 1 até N ($j = 1, 2,..., N$) e N representa o número máximo de segmentos. Vale ressaltar que o apóstrofo ($'$) refere-se ao sistema de referência móvel localizado no segmento.

O cálculo da pressão está inserido na rotina de busca do ponto de equilíbrio, através do método de Newton-Raphson. Tal rotina inicia-se por meio de uma estimativa inicial, e calcula-se a pressão resultante desta configuração. Com isso, repete-se o procedimento para uma perturbação nesta mesma estimativa; assim pode-se calcular a matriz Jacobiana, necessária à determinação das novas posições de equilíbrio.

Por fim, com a nova estimativa da posição de equilíbrio, calcula-se mais uma vez a distribuição de pressão e, com as novas resultantes de força, verifica-se o critério de parada desejado da função. Como o eixo está em uma posição de equilíbrio, sua resultante de forças deve ser zero; assim sendo, o critério de parada é o maior módulo admissível para esta força.

$$F_x = \sum_{j=1}^{N} F_{x'_j} \cdot \cos(\varphi_j + \alpha_j)$$
$$F_y = \sum_{j=1}^{N} F_{x'_j} \cdot \operatorname{sen}(\varphi_j + \alpha_j) \tag{10}$$

As forças hidrodinâmicas F_x e F_y são utilizadas no balanço de forças do mancal, juntamente com o balanço de momento, de modo a obter a posição de equilíbrio do eixo no mancal. Para obtenção da posição de equilíbrio, os momentos nos segmentos devem ser nulos, e, visto que a alavanca $R_s + h_s$ não é nula, as forças $F_{y'_j}$ devem obrigatoriamente ser nulas. Por esse motivo, a decomposição de forças, realizada anteriormente (Equação 10), não leva em consideração as forças $F_{y'_j}$.

Determinada a posição de equilíbrio, procede-se à solução dinâmica, na qual os coeficientes dinâmicos podem ser determinados. Para isso, são utilizadas pequenas perturbações no deslocamento e na velocidade, em cada grau de liberdade associado ao mancal/eixo (Equação 11). Esta pequena perturbação consiste em um mínimo deslocamento sobre o ponto de equilíbrio previamente determinado; em seguida determina-se o campo de pressão gerado por esta perturbação e a força decorrente (Equação 12). Deste modo, podem-se determinar os coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes do mancal.

$$F_{x'j} = F_{x0'j} + k_{x'x'}\Delta x' + k_{x'y'}\Delta y' + k_{x'\alpha_j}\Delta\alpha_j + c_{x'x'}\Delta\dot{x}' + c_{x'y'}\Delta\dot{y}' + c_{x'\alpha_j}\Delta\dot{\alpha}_j$$
$$F_{y'j} = F_{y0'j} + k_{y'x'}\Delta x' + k_{y'y'}\Delta y' + k_{y'\alpha_j}\Delta\alpha_j + c_{y'x'}\Delta\dot{x}' + c_{y'y'}\Delta\dot{y}' + c_{y'\alpha_j}\Delta\dot{\alpha}_j \tag{11}$$
$$M_j = M_{0j} + k_{\alpha_j x'}\Delta x' + k_{\alpha_j y'}\Delta y' + k_{\alpha_j\alpha_j}\Delta\alpha_j + c_{\alpha_j x'}\Delta\dot{x}' + c_{\alpha_j y'}\Delta\dot{y}' + c_{\alpha_j\alpha_j}\Delta\dot{\alpha}_j$$

Sendo que $\Delta x'$, $\Delta y'$ e $\Delta\alpha$ representam, respectivamente, as perturbações de deslocamento em *x'*, *y'* e α, as variáveis $\Delta\dot{x}'$, $\Delta\dot{y}'$, $\Delta\dot{\alpha}$, representam, respectivamente, as perturbações de velocidade em *x'*, *y'* e α.

$$k_{x'x'} = \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta x'}$$

$$k_{y'x'} = \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x'} \tag{12}$$

$$k_{\alpha_j x'} = \frac{\Delta M_j}{\Delta x'} = \frac{-(R_S + h_S) \cdot \Delta F_{y'}}{\Delta x'}$$

Os demais coeficientes são obtidos por meio de procedimento análogo. Assim, agrupando os coeficientes de rigidez para cada segmento *j* do mancal, em uma matriz, tem-se:

$$K'_j = \begin{bmatrix} k_{x'x'} & k_{y'x'} & k_{\alpha_j x'} \\ k_{x'y'} & k_{y'y'} & k_{\alpha_j y'} \\ k_{x'\alpha_j} & k_{y'\alpha_j} & k_{\alpha_j \alpha_j} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Analogamente, aplicando perturbações de velocidade em torno do ponto de equilíbrio, obtém-se a matriz de coeficientes de amortecimento:

$$C'_j = \begin{bmatrix} c_{x'x'} & c_{y'x'} & c_{\alpha_j x'} \\ c_{x'y'} & c_{y'y'} & c_{\alpha_j y'} \\ c_{x'\alpha_j} & c_{y'\alpha_j} & c_{\alpha_j \alpha_j} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento para cada segmento são obtidos no sistema de referência local (coordenadas *x'y'*), localizado no segmento. Sendo assim, uma vez determinados os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento de cada segmento, deve-se realizar a transformação de coordenadas, obtendo-se, então, os coeficientes equivalentes no sistema de referência inercial.

A transformação de coordenadas pode ser realizada de acordo com as Equações 15a e 15b, conforme Russo (1999).

$$K_j = T_R(\varphi_j + \alpha_j)^T \cdot K'_j \cdot T_R(\varphi_j + \alpha_j) \tag{15a}$$

$$T_R(\varphi_j + \alpha_j) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_j + \varphi_j) & \sin(\alpha_j + \varphi_j) & 0 \\ -\sin(\alpha_j + \varphi_j) & \cos(\alpha_j + \varphi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15b}$$

Nestas equações, φ_j e α_j são, respectivamente, a posição angular do pivô no segmento j e o deslocamento angular do segmento j. A transformação dos coeficientes de amortecimento é realizada de forma análoga.

Desse modo, por meio das Equações 13 e 14 obtidas para cada segmento, aplicadas juntamente com a transformação apresentada nas Equações 15a e 15b, pode-se determinar os coeficientes equivalentes na forma completa, mostrados explicitamente nas Equações 16 e 17.

$$K_{global} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} k_{xx_j} & \sum_{j=1}^{N} k_{xy_j} & k_{x\alpha_1} & k_{x\alpha_2} & \cdots & k_{x\alpha_N} \\ \sum_{j=1}^{N} k_{yx_j} & \sum_{j=1}^{N} k_{yy_j} & k_{y\alpha_1} & k_{y\alpha_2} & \cdots & k_{y\alpha_N} \\ k_{\alpha_1 x} & k_{\alpha_1 y} & k_{\alpha_1\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{\alpha_2 x} & k_{\alpha_2 y} & 0 & k_{\alpha_2\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{\alpha_N x} & k_{\alpha_N y} & 0 & 0 & \cdots & k_{\alpha_N\alpha_N} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$C_{global} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} c_{xx_j} & \sum_{j=1}^{N} c_{xy_j} & c_{x\alpha_1} & c_{x\alpha_2} & \cdots & c_{x\alpha_N} \\ \sum_{j=1}^{N} c_{yx_j} & \sum_{j=1}^{N} c_{yy_j} & c_{y\alpha_1} & c_{y\alpha_2} & \cdots & c_{y\alpha_N} \\ c_{\alpha_1 x} & c_{\alpha_1 y} & c_{\alpha_1\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{\alpha_2 x} & c_{\alpha_2 y} & 0 & c_{\alpha_2\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\alpha_N x} & c_{\alpha_N y} & 0 & 0 & \cdots & c_{\alpha_N\alpha_N} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Tais coeficientes são, por sua vez, adicionados na malha de elementos finitos do conjunto eixo-mancal nas posições adequadas. Entretanto, a presença dos graus de liberdade de rotação dos segmentos inviabiliza a sua inserção direta em um modelo de elementos finitos, que contempla apenas os graus de liberdade de translação do eixo.

Para solucionar esta incompatibilidade, os coeficientes são reduzidos de forma síncrona, condensando os graus de liberdade referentes ao deslocamento angular do segmento nos graus de liberdade de translação. Assim, obtêm-se apenas coeficientes dinâmicos nos graus de liberdade de translação do eixo. De forma detalhada, conforme a metodologia empregada por Daniel (2012b), a redução síncrona inicia-se com a equação de movimento que descreve o comportamento dinâmico do sistema rotor-segmento (Equação 18).

$$\begin{bmatrix} m_E & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_E & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{S_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{S_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{S_N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\alpha}_N \end{Bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} c_{xx_j} & \sum_{j=1}^{N} c_{xy_j} & c_{x\alpha_1} & c_{x\alpha_2} & \cdots & c_{x\alpha_N} \\ \sum_{j=1}^{N} c_{yx_j} & \sum_{j=1}^{N} c_{yy_j} & c_{y\alpha_1} & c_{y\alpha_2} & \cdots & c_{y\alpha_N} \\ c_{\alpha_1 x} & c_{\alpha_1 y} & c_{\alpha_1\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{\alpha_2 x} & c_{\alpha_2 y} & 0 & c_{\alpha_2\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\alpha_N x} & c_{\alpha_N y} & 0 & 0 & \cdots & c_{\alpha_N\alpha_N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_N \end{Bmatrix} \tag{18}$$
$$+ \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} k_{xx_j} & \sum_{j=1}^{N} k_{xy_j} & k_{x\alpha_1} & k_{x\alpha_2} & \cdots & k_{x\alpha_N} \\ \sum_{j=1}^{N} k_{yx_j} & \sum_{j=1}^{N} k_{yy_j} & k_{y\alpha_1} & k_{y\alpha_2} & \cdots & k_{y\alpha_N} \\ k_{\alpha_1 x} & k_{\alpha_1 y} & k_{\alpha_1\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{\alpha_2 x} & k_{\alpha_2 y} & 0 & k_{\alpha_2\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{\alpha_N x} & k_{\alpha_N y} & 0 & 0 & \cdots & k_{\alpha_N\alpha_N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sendo m_E a massa equivalente do eixo ou carregamento no mancal, J_{Sj} é o momento de inércia de cada segmento *j*. Separando os termos referentes ao eixo e aos segmentos, a Equação 18 pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} [M_E] & 0 \\ 0 & [J_S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{uu}] & [C_{u\alpha}] \\ [C_{\alpha u}] & [C_{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\alpha}] \\ [K_{\alpha u}] & [K_{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_E \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

$$u = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \text{ e } \alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{Bmatrix} \tag{20}$$

Separando as equações em 19, obtém-se:

$$\begin{gathered} [M_E]\{\ddot{u}\} + [C_{uu}]\{\dot{u}\} + [C_{u\alpha}]\{\dot{\alpha}\} + [K_{uu}]\{u\} + [K_{u\alpha}]\{\alpha\} = \{f_E\} \\ [J_S]\{\ddot{\alpha}\} + [C_{\alpha u}]\{\dot{u}\} + [C_{\alpha\alpha}]\{\dot{\alpha}\} + [K_{\alpha u}]\{u\} + [K_{\alpha\alpha}]\{\alpha\} = \{0\} \end{gathered} \tag{21}$$

A redução dinâmica dos coeficientes é realizada no domínio da frequência. Para tanto, assume-se uma solução na forma:

$$\begin{gathered} u = U \cdot e^{\lambda t} \\ \alpha = \Phi \cdot e^{\lambda t} \\ f_E = F_E \cdot e^{\lambda t} \end{gathered} \tag{22}$$

Na qual o autovalor é um número complexo:

$$\lambda = \gamma + i\omega \tag{23}$$

A Equação 23 é a frequência de excitação amortecida. Geralmente, trata-se de uma frequência não síncrona, exceto em resposta ao desbalanceamento. Substituindo a Equação 22 e suas derivadas na Equação 21, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda C_{uu} + K_{uu})U + (\lambda C_{u\alpha} + K_{u\alpha})\Phi = F_E - \lambda^2 M_E U \\
&(\lambda C_{\alpha u} + K_{\alpha u})U + (\lambda^2 J_s + \lambda C_{\alpha\alpha} + K_{\alpha\alpha})\Phi = 0
\end{aligned} \tag{24}
$$

Resolvendo a segunda equação, encontra-se:

$$\Phi = -(\lambda^2 J_s + \lambda C_{\alpha\alpha} + K_{\alpha\alpha})^{-1} \cdot (\lambda C_{\alpha u} + K_{\alpha u})U \tag{25}$$

Substituindo a Equação 25 na primeira das Equações 24, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda C_{uu} + K_{uu})U - (\lambda C_{u\alpha} + K_{u\alpha}) \cdot (\lambda^2 J_s + \lambda C_{\alpha\alpha} + K_{\alpha\alpha})^{-1} \cdot (\lambda C_{\alpha u} + K_{\alpha u})U \\
&\qquad = F_E - \lambda^2 M_E U \\
&[(\lambda C_{uu} + K_{uu}) - (\lambda C_{u\alpha} + K_{u\alpha}) \cdot (\lambda^2 J_s + \lambda C_{\alpha\alpha} + K_{\alpha\alpha})^{-1} \cdot (\lambda C_{\alpha u} + K_{\alpha u})]U \\
&\qquad = F_E - \lambda^2 M_E U \\
&[(\lambda C_{uu} + K_{uu}) - G_{uu}]U = F_E - \lambda^2 M_E U
\end{aligned} \tag{26}
$$

Definindo-se:

$$G_{uu} = (\lambda C_{u\alpha} + K_{u\alpha}) \cdot (\lambda^2 J_s + \lambda C_{\alpha\alpha} + K_{\alpha\alpha})^{-1} \cdot (\lambda C_{\alpha u} + K_{\alpha u}) \tag{27}$$

Desta forma, a Equação 26 pode ser reescrita em relação às coordenadas de translação (x,y) do eixo no mancal:

$$[S(\lambda)_{2x2}] \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x - \lambda^2 M_E X \\ f_y - \lambda^2 M_E Y \end{Bmatrix} \tag{28}$$

Por fim, os termos da matriz S serão também complexos e podem ser associados a coeficientes equivalentes, relacionados apenas aos graus de liberdade de translação, como:

$$K(\lambda) = real\{S(\lambda)_{2x2}\} \tag{29}$$

$$C(\lambda) = imaginário\left\{\frac{1}{\lambda}S(\lambda)_{2x2}\right\} \tag{30}$$

3.2.2. Mancais Cilíndricos

Esta seção aponta as diferenças no cálculo dos coeficientes para o mancal cilíndrico. O procedimento é análogo, existindo diferenças apenas na expressão da espessura do filme de óleo e no balanço de forças de perturbações, não existindo o balanço dos momentos. A expressão da espessura do filme de óleo é dada para toda a circunferência do mancal, mostrada na Equação 31. A malha de volumes finitos é, portanto, única para todo o mancal.

$$h(\theta) = C_r + x_c \sin\theta + y_c \cos\theta \tag{31}$$

Nesta equação C_r é a folga radial, x_c e y_c são as coordenadas da posição do eixo, em relação ao centro do mancal, conforme mostrado na Figura 9.

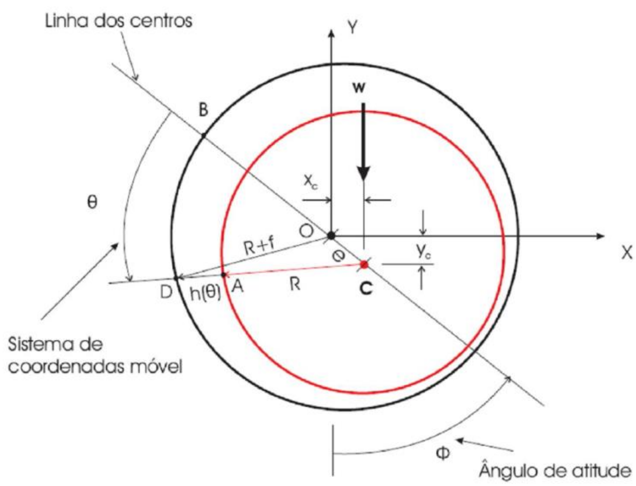


Figura 9 - Geometria do Mancal Cilíndrico (MACHADO e CAVALCA, 2009)

O procedimento do balanço de forças do mancal é realizado apenas nos graus de liberdade de translação, não sendo necessário o balanço de momento, conforme indicado na Equação 32.

$$
\begin{aligned}
F_x &= F_{x0} + K_{xx}\Delta x + K_{xy}\Delta y + C_{xx}\Delta\dot{x} + C_{xy}\Delta\dot{y} \\
F_y &= F_{y0} + K_{yx}\Delta x + K_{yy}\Delta y + C_{yx}\Delta\dot{x} + C_{yy}\Delta\dot{y}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Os coeficientes são obtidos por meio das derivadas parciais, analogamente aos mancais segmentados. Estes coeficientes, entretanto, já estão escritos no referencial global, prontos para a adição no modelo de elementos finitos do rotor.

3.3. Selos Mecânicos

O procedimento para a obtenção dos coeficientes dos selos de fluxo difere do realizado para os mancais. A equação de Reynolds, conforme mencionado na seção 2.2, pode ser aplicada somente em escoamentos laminares e incompressíveis. Já os selos operam com grande perda de carga e alta velocidade axial, e sua folga radial é mais elevada do que a dos mancais, caracterizando um escoamento de caráter turbulento, impedindo a utilização da equação de Reynolds.

Desse modo, recorre-se às equações de continuidade, de quantidade de movimento axial e circunferencial, provenientes da mecânica dos fluidos, para a solução da pressão ao longo do selo. A metodologia descrita foi proposta por Childs (1993) e implementada por Galera (2013) para selos planos cilíndricos, cônicos e escalonados.

Os coeficientes dinâmicos dos selos são determinados a partir das forças de reação nos selos mecânicos, que, por sua vez, são obtidos através da integração da distribuição de pressão ao longo do selo. As forças podem ser linearizadas para pequenos deslocamentos do eixo, podendo ser escritas conforme indica a Equação 33.

$$
-\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{33}
$$

A Equação 33 mostra os termos de inércia (*M*), os termos direto (*C*) e cruzado (c) do amortecimento e os termos direto (*K*) e cruzado (*k*) de rigidez. As forças F_x e F_y são as reações obtidas através da integração do campo de pressão do selo, em coordenadas retangulares.

A distribuição de pressão é determinada a partir das equações de continuidade (Equação 34), quantidade de movimento axial (Equação 35) e quantidade de movimento circunferencial (Equação 36), resolvidas considerando o selo centrado e, depois, com uma pequena perturbação no deslocamento. A pressão é obtida através do método dos volumes finitos.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial (HU)}{\partial \theta} + \frac{\partial (HW)}{\partial Z} = 0 \tag{34}$$

$$-H\frac{\partial P}{\partial Z} = \tau_Z^r + \tau_Z^s + \rho H\left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{U}{R}\frac{\partial W}{\partial \theta} + W\frac{\partial W}{\partial Z}\right) \tag{35}$$

$$-\frac{H}{R}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \tau_\theta^r + \tau_\theta^s + \rho H\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta} + W\frac{\partial U}{\partial Z}\right) \tag{36}$$

No qual τ é a tensão de cisalhamento, calculada por meio do modelo de fricção Moody, e os sobrescritos *r* e *s* referem-se, respectivamente, às superfícies do rotor e do estator; *H* é a função que descreve a folga radial do selo ao longo do seu comprimento e *R* é o raio do eixo. As equações estão escritas em coordenadas polares *Z* e θ, e as variáveis *U* e *W* são as componentes circunferencial e axial da velocidade, *t* representa o tempo, ρ a densidade e *P* a pressão. Destaca-se que a tensão de cisalhamento é a componente que impede a simplificação destas equações, como realizado para os mancais hidrodinâmicos.

A função da folga radial do selo, *H*, é dependente de cada tipo de selo estudado. Entretanto, como mostra a Figura 10, essa função é constante e tem valor igual à folga radial, para um selo plano cilíndrico.

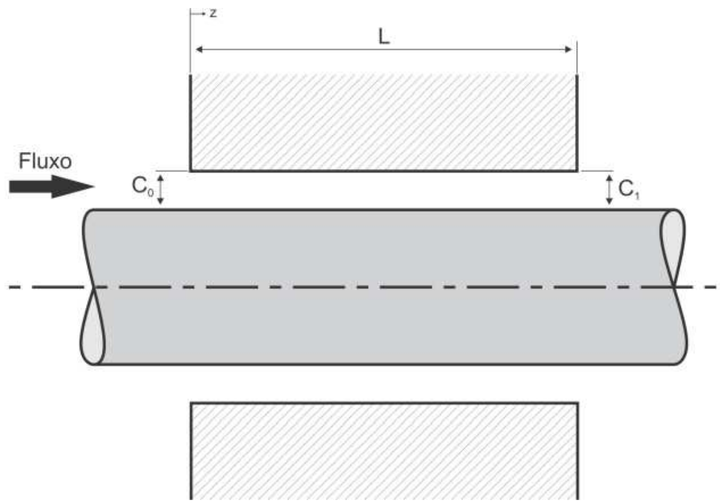


Figura 10 - Selo de Fluxo Plano Cilíndrico (GALERA, 2013)

Obtidas as distribuições de pressão para o selo nas condições de eixo centrado e perturbado, é possível determinar as forças de reação, integrando numericamente a pressão ao longo do selo. As forças adimensionais radial (f_r) e tangencial (f_θ), resultantes da integração, são mostradas na Equação (37), em função dos coeficientes dinâmicos e da frequência, ambos também adimensionalizados.

$$\begin{aligned} f_r(f) &= -(\bar{K} + f\bar{c} - f^2\bar{M}) \\ f_\theta(f) &= \bar{k} - f\bar{C} \end{aligned} \tag{37}$$

As forças são calculadas em uma faixa de frequências e podem ser ajustadas por uma função quadrática, para a força radial, e por uma função linear, para a força tangencial. Desse modo, o ajuste de mínimos quadrados é feito para obterem-se os coeficientes adimensionalizados de rigidez ($\bar{K}$ e $\bar{k}$), amortecimento ($\bar{C}$ e $\bar{c}$) e inércia ($\bar{M}$). Por fim, transformam-se os coeficientes para a forma dimensional, no formato mostrado na Equação 33.

3.4. Amortecimento Interno

O efeito do amortecimento interno no eixo pode ser melhor compreendido estudando, inicialmente, a sua inclusão em um modelo de dois graus de liberdade de um rotor Laval. Posteriormente, a sua adição no modelo de elementos finitos é realizada.

A adição do efeito de amortecimento interno é realizada partindo-se da equação de movimento, mostrada na Equação (38), de um rotor Laval, no qual a variável X_0 é composta pelas direções z e y, $m\varepsilon$ é o momento de desbalanceamento do rotor e Ω é a velocidade de rotação do eixo.

$$m\ddot{X}_0 + c\dot{X}_0 + kX_0 = m\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t} \tag{38}$$

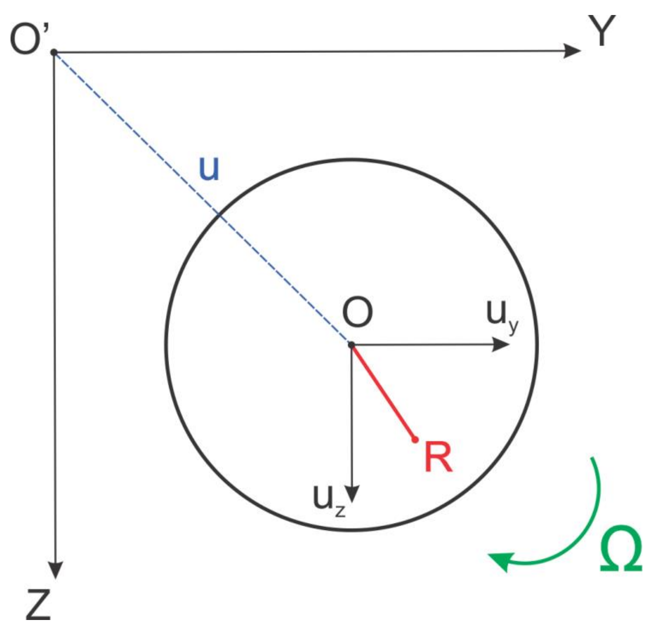


Figura 11 – Rotor Laval com Amortecimento Interno

Uma visão esquemática do rotor é mostrada na Figura 11, no qual O' é o referencial inercial, o referencial O, composto pelas direções u_y e u_z, rotaciona com velocidade Ω, a distância O'O é dada pela variável u e o ponto R indica o centro de massa do rotor. O amortecimento interno é dado pela adição do coeficiente c_i, que indica a variação com relação à velocidade da distância u. Entretanto, esta adição deve ser feita no referencial O, desse modo escreve-se a variável X_0 em função da variável u, conforme indicado pela Equação 39.

$$\begin{aligned} X_0 &= ue^{i\Omega t} \\ \dot{X}_0 &= \dot{u}e^{i\Omega t} + i\Omega ue^{i\Omega t} \end{aligned} \tag{39}$$

$$\ddot{X}_0 = \ddot{u}e^{i\Omega t} + 2i\Omega\dot{u}e^{i\Omega t} - \Omega^2 u e^{i\Omega t}$$

Substituindo a Equação 39 na Equação 38, temos:

$$m\ddot{u} + (2im\Omega + c)\dot{u} + (k + ic\Omega - m\Omega^2)u = m\varepsilon\Omega^2 \tag{40}$$

Definindo:

$$\upsilon = \frac{c}{m} \qquad \eta = \frac{c_i}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{41}$$

Adicionando o amortecimento interno c_i, e adotando as relações indicadas pela Equação 41, temos:

$$\ddot{u} + (2i\Omega + \eta + \upsilon)\dot{u} + (\omega_0^2 - \Omega^2 + i\upsilon\Omega)u = \varepsilon\Omega^2 \tag{42}$$

A Equação 42 está escrita no referencial que rotaciona com o eixo, fazendo-se necessária uma nova transformação de coordenadas para escrevê-la no referencial inercial O'. Adotando a relação escrita na Equação 39 ($u = X_0 e^{-i\Omega t}$), temos que a equação de movimento com a inclusão do amortecimento interno é dada na Equação 41.

$$\ddot{X}_0 + (\eta + \upsilon)\dot{X}_0 + (\omega_0^2 - i\eta\Omega)X_0 = \varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t} \tag{43}$$

Reescrevendo a Equação 43 na forma matricial, separando a variável X_0 nas suas componentes Z e Y, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_0 \\ \ddot{Y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (\upsilon + \eta) & 0 \\ 0 & (\upsilon + \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 & \eta\Omega \\ -\eta\Omega & \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} = \varepsilon\Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos\Omega t \\ \sin\Omega t \end{Bmatrix} \tag{44}$$

Observa-se que o amortecimento interno *(η)* é somado ao efeito do amortecimento externo *(υ)* nas variáveis de velocidade. Entretanto, nas variáveis de deslocamento, o amortecimento interno causa o acoplamento das duas direções, e torna a matriz antissimétrica, indicando o caráter desestabilizador do amortecimento interno. Pode-se reescrever a Equação 44 separando os efeitos relacionados ao amortecimento interno dos demais efeitos:

$$[M]\begin{Bmatrix}\ddot{Z}_0\\ \ddot{Y}_0\end{Bmatrix} + \left([C] + [C_\eta]\right)\begin{Bmatrix}\dot{Z}_0\\ \dot{Y}_0\end{Bmatrix} + \left([K] + [K_\eta]\right)\begin{Bmatrix}Z_0\\ Y_0\end{Bmatrix} = \varepsilon\Omega^2\begin{Bmatrix}\cos\Omega t\\ \sin\Omega t\end{Bmatrix} \tag{45}$$

No qual:

$$[C_\eta] = \begin{bmatrix}\eta & 0\\ 0 & \eta\end{bmatrix} \qquad [K_\eta] = \begin{bmatrix}0 & \eta\Omega\\ -\eta\Omega & 0\end{bmatrix} \tag{46}$$

As Equações 45 e 46 podem ser comparadas às referencias existentes (Zorzi e Nelson, 1977; Edney *et al.*,1990; Ku, 1998) sobre a inclusão deste efeito nas matrizes de elementos finitos. Nestas referências, o efeito do amortecimento interno do tipo viscoso é diretamente adicionado nas respectivas coordenadas de translação dos nós do elemento finito. Deste modo, os termos da Equação 46 podem ser incluídos na matriz elementar do modelo de elementos finitos utilizado.

Outro recurso muito importante existente na análise de amortecimento interno é a possibilidade de cálculo do limiar de estabilidade, baseado na razão entre os amortecimentos interno e externo do sistema. Segundo Vance (1988), pode-se realizar o seguinte balanço de forças, no limiar da instabilidade do sistema:

$$F_\phi = c_i(\Omega - \dot{\phi})r \tag{47}$$

No qual *r* é o raio do movimento de *whirl* e $\dot{\phi}$ é a frequência de *whirl* do sistema, que tende ser igual à frequência natural do sistema, ω_0. Em um estado de equilíbrio dinâmico, esta força tem que ser igual à força de amortecimento externo:

$$c_i(\Omega - \omega_0)r = c\omega_0 r \tag{48}$$

Rearranjando:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 1 + \frac{c}{c_i} = \frac{\upsilon + \eta}{\eta} \tag{49}$$

A Equação 49 relaciona a razão dos amortecimentos interno e externo com a razão entre a velocidade de instabilização e a frequência natural do sistema. Para velocidades de rotação mais altas do que a determinada pela Equação 49, o sistema comporta-se de maneira instável. Em velocidades mais baixas, o sistema tende à estabilidade.

A Equação 49 também está de acordo com o determinado por Vance e Lee (1974): para valores de amortecimentos interno e externo iguais, a frequência de instabilização encontra-se no dobro da frequência natural. Outra observação relevante é que a elevação do amortecimento externo do sistema eleva o limiar de estabilidade, para valores constantes de amortecimento interno; comportamento também relatado em trabalhos revisados no Capítulo 2.

3.5. Teoria de Instabilidade e Vibrações Autoinduzidas

O objetivo primário do projeto das máquinas rotativas é minimizar e controlar a resposta às vibrações forçadas neste sistema, em particular o desbalanceamento rotativo. Vance (1988) e Ehrich (1992), entre outros autores, destacam que a avaliação da resposta ao desbalanceamento é o foco mais básico de uma análise em dinâmica de rotores. Entretanto, a ocorrência de vibrações autoexcitadas exige um estudo mais profundo do comportamento destes equipamentos.

As vibrações autoexcitadas, ou autoinduzidas, também podem ser referidas como vibrações não síncronas, oscilando abaixo (subsíncronas) ou acima (supersíncronas) da velocidade de rotação da máquina. Tais vibrações são, em geral, vibrações laterais, ou tangenciais. Ehrich (1992) esclarece que a energia que supre este tipo de vibração é obtida de uma fonte associada ao sistema (a rotação do eixo), que, através de um mecanismo inerente ao sistema, origina este movimento lateral oscilatório. Muszynska (1986) define que este mecanismo interno transfere parte da energia de rotação para o surgimento de uma força com direção oposta à força de amortecimento, ou seja, desestabilizadora. A transferência de energia é o que define o caráter autoinduzido da vibração: não existe nenhuma força excitadora externa presente; o próprio sistema alimenta a vibração.

As vibrações autoinduzidas são possíveis fontes de instabilidades, conforme revisto no Capítulo 2. Vance (1988) destaca três fontes principais de vibrações não síncronas, sendo as duas primeiras de fácil resolução durante a operação: o desalinhamento do rotor resultando em vibrações supersíncronas e instabilidades paramétricas que resultam em vibrações abaixo ou acima da velocidade de rotação do sistema.

O foco da análise de instabilidade encontra-se na terceira fonte, também chamada de *whirl-whip*, definida por Vance (1988) como um movimento de *whirl* subsíncrono que se torna instável ao ultrapassar uma determinada velocidade limite. Ao cruzar o limiar de estabilidade, o *whirl* torna-se *whip*, uma vibração violenta cuja amplitude tende à folga dos mancais, tendo, portanto, alto potencial destrutivo. Uma excelente referência sobre as características qualitativas do *whirl* e sua evolução em *whip* encontra-se em Muszynska (1986).

A descrição de Muszynska (1986) traz um caso crítico de um rotor, com baixo carregamento e sustentado por mancais cilíndricos. Em velocidades mais baixas do que a frequência natural do eixo, além da resposta ao desbalanceamento (síncrona com a velocidade de rotação), observa-se uma vibração precessional lateral subsíncrona ao redor do centro do mancal, vibrando à aproximadamente metade da frequência de rotação. Esta é a própria definição de *oil-whirl*, cujas amplitudes são mais altas do que as das vibrações síncronas, porém são limitadas pelas características do mancal cilíndrico. O aumento da velocidade até velocidades próximas da frequência natural implica no aumento da frequência subsíncrona do *whirl*, seguindo o padrão de metade da velocidade de rotação. Nesta configuração, o rotor comporta-se como um corpo rígido e os efeitos do mancal predominam nas características dinâmicas do sistema.

Aproximando-se da primeira frequência natural, as vibrações forçadas dominam, suprimindo os efeitos do *whirl*. As características dinâmicas dominantes são as do rotor, sendo proporcionais à massa e à rigidez do eixo. Após a velocidade de rotação aumentar, a influência da vibração relacionada à frequência natural volta a ser suprimida pelas características dinâmicas do mancal, surgindo novamente o *whirl* à metade da velocidade de rotação.

À medida que a velocidade de rotação aproxima-se do dobro da frequência natural, a frequência de *whirl*, que vibra à metade da velocidade de rotação, aproxima-se da primeira frequência natural. Desse modo, o *whirl* é substituído pelo *whip*, uma vibração lateral subsíncrona do rotor. Ao contrário do *whirl*, o *whip* possui frequência constante: mesmo com um aumento da velocidade de rotação, a frequência do *whip* permanece vibrando na mesma frequência que a natural do rotor. O comportamento dinâmico do rotor é considerado como flexível, sendo altamente dependente das interações rotor-mancal. Como o *whip* excita a frequência natural do sistema, a amplitude de vibração torna-se muito elevada.

O fenômeno do *whirl-whip* pode emergir de diversas fontes: dos mancais (*oil-whirl*), dos selos, do amortecimento interno do rotor (*whirl* por histerese), do fluido preso em rotores, entre outros. Conforme mencionado anteriormente, todas essas fontes geram uma força tangencial. Isto é refletido, na modelagem matemática, no componente cruzado dos coeficientes dinâmicos, que possuem magnitude maior do que os coeficientes diretos nos elementos onde o *whirl-whip* se instala.

Vance (1988) define que os componentes cruzados com sinal negativo são responsáveis pela desestabilização do eixo, em particular o amortecimento negativo. O sinal negativo dos coeficientes significa que, durante a operação do rotor, a força de reação causada por estes têm a mesma direção que os deslocamentos e velocidades instantâneos, levando, eventualmente, a um aumento descontrolado da amplitude de movimento. O acoplamento das coordenadas, por outro lado, implica na transferência de energia do movimento em uma direção para a outra. Conforme visto nas seções anteriores, os selos possuem termos negativos cruzados tanto em amortecimento quanto em rigidez, combinando os efeitos descritos. O amortecimento interno possui termos cruzados negativos na rigidez apenas; além de serem proporcionais à velocidade de rotação do eixo.

A Figura 12 apresenta uma representação esquemática simplificada da ocorrência do *whirl* nos mancais, tomadas como referências as descrições existentes em Ehrich (1992) e na norma API

684 (2005). A distribuição de pressão no mancal causa forças radiais, indicada por R_R, e forças tangenciais, representada por R_T. A sustentação proveniente do mancal é a resultante destas duas forças, omitida na Figura 12. A análise da figura permite visualizar que a força tangencial é a responsável pelo movimento de *whirl*, eventualmente instabilizando o sistema. O processo de instabilização ocorrido nos selos é semelhante, observando-se que a resultante de forças exerce grande influência no comportamento dinâmico do rotor, já que o selo não sustenta carga.

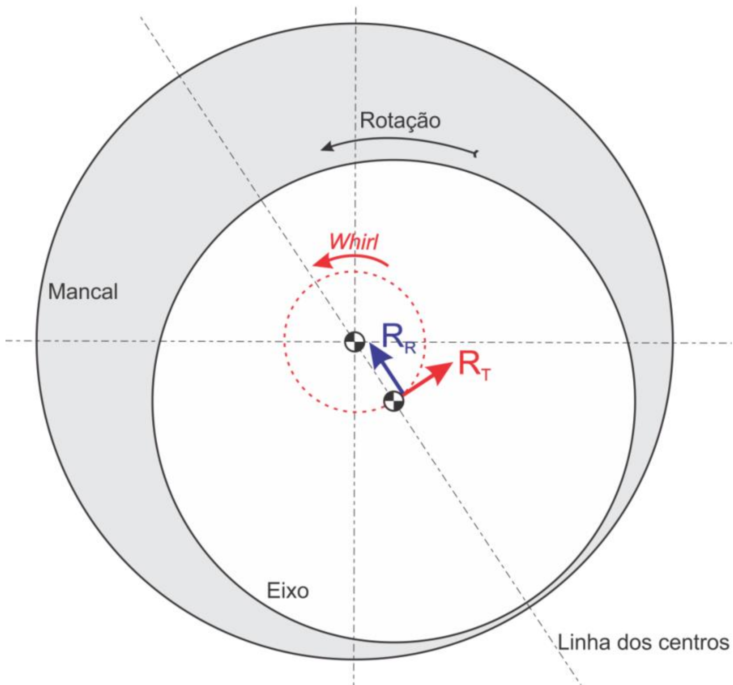


Figura 12 – Representação esquemática do *whirl* em mancais (EHRICH,1992)

A Figura 13 ilustra a distribuição de pressão existente em um mancal cilíndrico quando operando com baixa carga e em alta velocidade (Figura 13a) e em alta carga e baixa velocidade (Figura 13b). Observa-se na primeira figura que o ângulo da linha dos centros em relação ao eixo Y aproxima-se de 90°, o que significa que uma carga, representada por *W*, na direção –Y é suportada por um deslocamento na direção X. Desse modo, o movimento vertical alimenta uma resposta na direção horizontal, que, por sua vez, produz uma resposta vertical, e assim sucessivamente. Este é, portanto, o mecanismo interno de transferência de energia, existente em vibrações autoinduzidas, mencionado no início desta seção, para os mancais hidrodinâmicos. Isto resulta, na modelagem matemática, em altos coeficientes cruzados, em relação aos coeficientes diretos, caracterizando uma operação com alto potencial para a existência de instabilidades.

A Figura 13b, entretanto, apresenta o caso no qual o ângulo da linha dos centros em relação ao eixo Y é quase nulo. A carga *W* é sustentada por deslocamentos no eixo Y, minimizando a componente horizontal das forças de reação. Desse modo, os componentes cruzados das forças têm módulo baixo, quando comparados com os diretos, caracterizando uma operação estável.

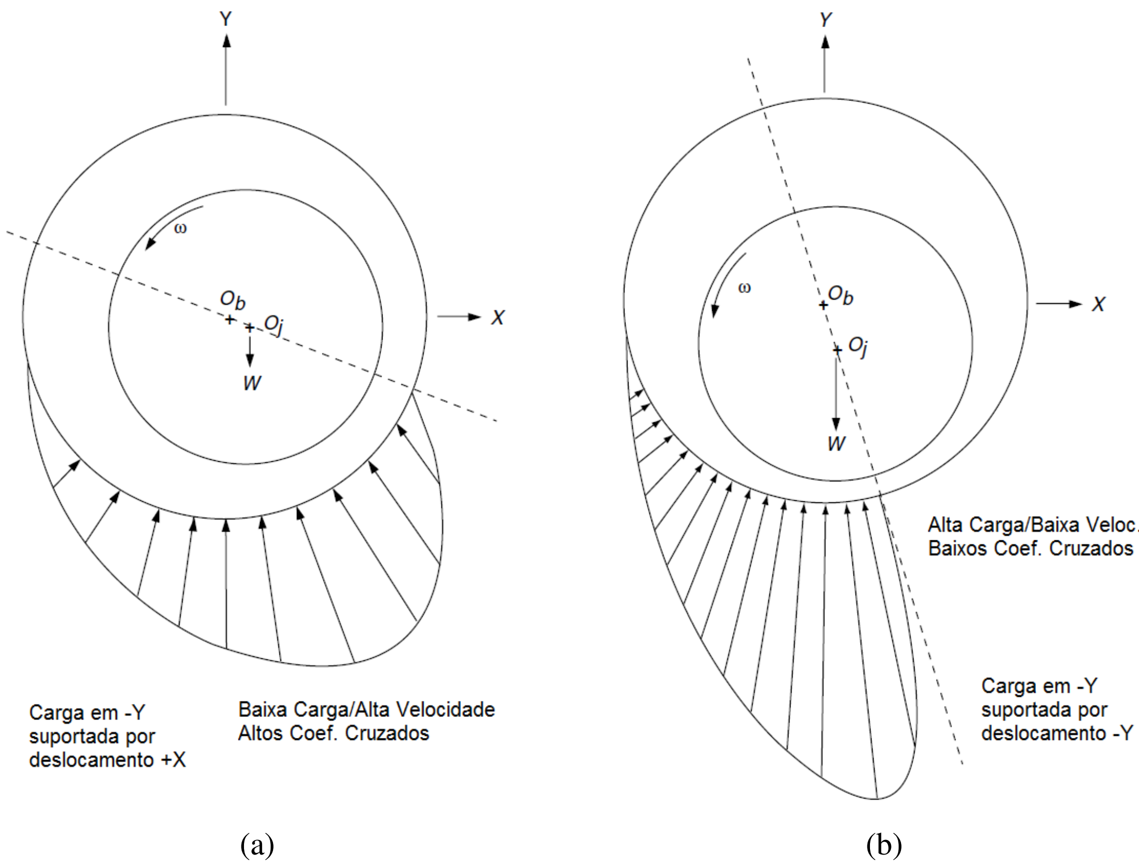


Figura 13 – Distribuição de pressão em um mancal cilíndrico instável (a) e estável (b) (API, 2005)

O mecanismo de formação do *whirl* devido à histerese é ligeiramente diferente do ocorrido para os selos e mancais, pois o *whirl* destes últimos é causado pelas forças fluidodinâmicas existentes nestes componentes. Já o amortecimento interno, ou amortecimento histerético, surge pelas tensões internas do material. A Figura 14 apresenta um eixo rotacionando sob a influência do amortecimento interno.

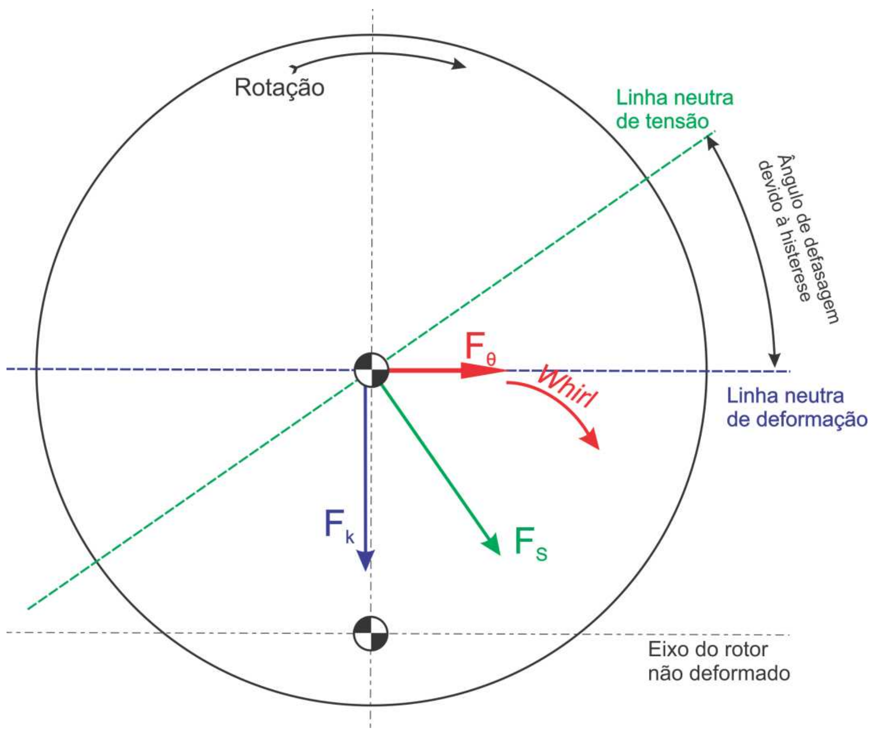


Figura 14 – Representação esquemática do eixo com amortecimento interno (EHRICH, 1992)

Durante a operação de uma máquina rotativa o eixo é fletido, o que resulta em uma linha neutra de deformação, normal à direção da flexão sofrida. Sem a influência do amortecimento interno, o eixo de neutralidade da tensão que emerge desta deformação é coincidente ao eixo neutro de deformação. Desse modo, a força que emerge da tensão interna do material tem caráter elástico e restaurador, é perpendicular ao eixo neutro e em oposição à deflexão do eixo.

O amortecimento interno em máquinas rotativas causa uma defasagem do ângulo da tensão, devido à rotação das fibras dentro do material, como se observa na Figura 14. A força, indicada por F_S, continua sendo perpendicular à linha neutra de tensão, porém agora não age puramente em oposição à deflexão, podendo ser decomposta em duas componentes: F_k e F_θ. A primeira força é perpendicular à linha neutra de deformação, sendo a componente restauradora elástica. Já a força F_θ é a componente tangencial, que induz um movimento de *whirl* cuja direção da rotação é a mesma do eixo, constituindo uma força potencialmente desestabilizadora no eixo. O movimento de *whirl* aumenta a deflexão do eixo, aumentando a tensão interna do material, que, por sua vez, aumenta a magnitude da força tangencial instabilizadora. Este é o mecanismo interno de alimentação da vibração (ou transferência de energia), mencionado no início desta seção, para o amortecimento interno.

3.6. Ferramentas de Análise da Estabilidade

As seções anteriores descreveram a modelagem de cada elemento individualmente. As análises descritas nesta seção, entretanto, requerem que todos os modelos obtidos sejam combinados para formar a representação matemática de um conjunto rotativo completo, com mancais, selos e amortecimento interno. Assim, as matrizes descritas nesta seção são do sistema completo, com todos os elementos individuais já adicionados ao eixo.

A análise da estabilidade engloba diversas ferramentas para a verificação das condições operacionais do sistema rotativo em foco. As análises utilizadas neste trabalho são complementares entre si e servem para a melhor compreensão dos fenômenos envolvidos. Empregaram-se, neste trabalho, as análises de Função de Resposta em Frequência (FRF), a análise dos diagramas de Campbell e de Decremento Logarítmico e integração numérica para a visualização das órbitas.

3.6.1. Função Resposta em Frequência (FRF) – Resposta Forçada na Frequência

A função resposta em frequência (*FRF – Frequency Response Function*) permite a visualização da resposta de um sistema sob a ação de uma força de excitação harmônica. Sabe-se que os sistemas lineares respondem às vibrações forçadas na mesma frequência de excitação, porém com amplitude e fase distintas. Portanto, a FRF consiste na resolução da solução particular da equação de movimento do sistema, sob a ação de uma vibração forçada (MENDES, 2011).

Em sistemas rotativos, essa força harmônica surge, usualmente, devido à massa desbalanceada do rotor, que o excita na mesma velocidade de rotação. A FRF, então, fornece dados sobre a amplitude e fase, ou seja, o comportamento do rotor, em função da sua velocidade de rotação. Conforme mostrado anteriormente, após serem adicionados todos os elementos de mancal, selo ou os efeitos de amortecimento interno desejados nas matrizes de elementos finitos (indicadas pelo subscrito *g*, de *global*), a equação de movimento do sistema pode ser escrita como se segue:

$$[M_g]\{\ddot{q}\} + ([C_g] - \Omega[G_g])\{\dot{q}\} + [K_g]\{q\} = \{F\} \tag{50}$$

As matrizes $[M_g]$, $[K_g]$, $[C_g]$ e $[G_g]$ são, respectivamente, as matrizes globais de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, $\{F\}$ indica o vetor de forças externas, ou de excitações. A força de excitação, como mencionado anteriormente, é harmônica, com a mesma frequência que a velocidade de rotação do eixo e proporcional à massa desbalanceada do mesmo. Portanto, a força de excitação pode ser escrita:

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{j\Omega t} = me\Omega \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ j \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} \tag{51}$$

Destaca-se que Ω é a velocidade de rotação do eixo, e é a excentricidade da massa desbalanceada, denominada m. O vetor é composto de zeros, exceção feita às coordenadas X e Y nas quais a excitação está presente. Assim, propõe-se a solução particular abaixo, bem como as suas derivadas:

$$\{q(t)\} = \{Q\}e^{j\Omega t} \tag{52}$$

$$\{\dot{q}(t)\} = j\Omega\{Q\}e^{j\Omega t} \tag{53}$$

$$\{\ddot{q}(t)\} = -\Omega^2\{Q\}e^{j\Omega t} \tag{54}$$

Destaca-se que o vetor $\{Q\}$ é um vetor complexo, sendo composto pelas amplitudes e fases de cada nó da malha de elementos finitos. Substituindo as Equações 52 a 54 na Equação 50, temos:

$$\left(-\Omega^2[M_g] + j\Omega\left([C_g] - \Omega[G_g]\right) + [K_g]\right) \cdot \{Q\}e^{j\Omega t} = \{F\}e^{j\Omega t} \tag{55}$$

Sabendo que os termos exponenciais da Equação 55 são não nulos, pode-se escrever que:

$$\left(-\Omega^2[M_g] + j\Omega\left([C_g] - \Omega[G_g]\right) + [K_g]\right) \cdot \{Q\} = \{F\} \tag{56}$$

Os termos que multiplicam o vetor *{Q}* podem ser agrupados em uma única variável, denominada impedância mecânica $[H_m]$. Desse modo:

$$\{Q\} = [H_m]^{-1}\{F\} \tag{57}$$

Onde:

$$[H_m] = \left(-\Omega^2[M_g] + j\Omega\left([C_g] - \Omega[G_g]\right) + [K_g]\right) \tag{58}$$

Resolvendo a Equação 57, obtêm-se as amplitudes de deslocamento de cada nó, assim como a correspondente fase do movimento. Repetindo-se a solução para cada velocidade estudada, podem-se representar as amplitudes em função da faixa de velocidades consideradas, constituindo o gráfico da FRF.

3.6.2. Diagrama de Campbell e Decremento Logarítmico – Resposta Livre

Uma importante ferramenta de análise da estabilidade de um sistema rotativo é o diagrama de Campbell. A análise de diagrama de Campbell permite a visualização das frequências naturais do rotor em função da sua velocidade de rotação, permitindo, assim, a avaliação das frequências naturais de cada modo do rotor, bem como as frequências excitadas pelos diversos componentes do conjunto, como a fundação, os selos ou os mancais.

A partir do diagrama de Campbell é possível obter-se o fator de amortecimento, ou o decremento logarítmico dos modos do eixo. Com o gráfico de decremento logarítmico pode-se verificar o nível de amortecimento de cada modo e se determinado modo é estável ou não.

Os dois gráficos citados podem ser obtidos pela análise da resposta livre da equação de movimento do sistema. Optou-se, pela facilidade de resolução computacional, representar a Equação 45 em espaço de estados, conforme mostrado na Equação 59.

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_g]^{-1}[K_g] & -[M_g]^{-1}([C_g] - \Omega[G_g]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M_g]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \tag{59}$$

Novamente, as matrizes *$[M_g]$*, *$[K_g]$*, *$[C_g]$* e *$[G_g]$* são, respectivamente, as matrizes globais de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, e *$\{F\}$* é o vetor de forças de excitação.

Para a análise do diagrama de Campbell deve-se considerar apenas a resposta livre do sistema, portanto considera-se o vetor de forças nulo. Fazendo essa consideração na Equação 59 e rearranjando, temos:

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_g]^{-1}[K_g] & -[M_g]^{-1}([C_g] - \Omega[G_g]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{60}$$

Pode-se definir como matriz dinâmica do sistema:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_g]^{-1}[K_g] & -[M_g]^{-1}([C_g] - \Omega[G_g]) \end{bmatrix} \tag{61}$$

Substituindo a Equação 61 na Equação 60, tem-se que:

$$[A] \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{62}$$

Pode-se observar que a solução da Equação 62, necessária para a determinação da resposta livre do sistema, torna-se uma análise de problema de autovalor. Assim, propõe-se uma solução da forma:

$$\{Q_h\} = \{\Phi\} \cdot e^{\lambda t} \tag{63}$$

Substituindo a Equação 63 na Equação 62, obtém-se:

$$([A] - \lambda[I])\{\Phi\} \cdot e^{\lambda t} = \{0\} \tag{64}$$

Sabendo que o termo exponencial é sempre não-nulo, é valido assumir que:

$$([A] - \lambda[I])\{\Phi\} = \{0\} \tag{65}$$

A Equação 65 compõe um problema de autovalor generalizado. Assim, para prosseguir com sua solução, deve-se procurar a solução diferente da trivial, ou seja, *{Φ}* deve ser diferente do valor nulo. Desse modo:

$$det([A] - \lambda[I]) = \{0\} \tag{66}$$

A expansão do determinante da Equação 66 resulta na equação característica, um polinômio de grau *2N* (onde N é o número de graus de liberdade do sistema), cuja solução resulta nos autovalores do sistema *(λ_k)*. A partir dos autovalores obtidos, podem-se determinar as frequências naturais *(ω_{nk})*, os fatores de amortecimento *(ξ_k)* e os decrementos logarítmicos *(δ_k)* de cada modo (indicado pelo subscrito *k*), tal como mostrado nas Equações 67 a 70.

$$\lambda_k, \overline{\lambda_k} = -\xi_k \omega_{nk} \pm j\omega_{nk}\sqrt{1 - \xi_k^2} \tag{67}$$

$$\omega_{nk} = |\lambda_k| \tag{68}$$

$$\xi_k = \frac{Re(\lambda_k)}{\omega_{nk}} \tag{69}$$

$$\delta_k = \frac{-2\pi Re(\lambda_k)}{|Im(\lambda_k)|} = \frac{2\pi\xi_k}{\sqrt{1-\xi_k^2}} \tag{70}$$

Pode-se observar, na Equação 67, que os autovalores são mostrados como complexos conjugados, no qual a sua parte real está associada ao decaimento temporal da resposta e a parte imaginária refere-se ao caráter oscilatório da resposta. Destaca-se que a estabilidade do sistema está ligada ao sinal da parte real dos autovalores: caso este valor seja negativo, a resposta decai com o tempo, configurando uma operação estável; caso o valor seja maior que zero, a resposta aumenta continuamente com o tempo, levando o sistema à instabilidade. As Equações 69 e 70 são empregadas para este propósito, de avaliar o sinal de cada modo do sistema, e, consequentemente, a sua estabilidade.

Ainda há, no entanto, um aspecto a ser destacado na Equação 67. Segundo Kramer (1993), entre os *2N* autovalores do sistema, certos apresentam um valor negativo e puramente real, de elevado módulo. Estes autovalores descrevem movimentos sem caráter oscilatório, por não conterem parte imaginária, e altamente amortecido. Pode-se concluir, então, que tais autovalores não apresentam significado físico, frequências naturais ou modos de vibrar associados.

Cada autovalor possui um autovetor associado, do qual se podem obter os modos de vibrar do sistema. Isso pode ser feito substituindo o autovalor da Equação 67 na Equação 65, obtendo-se, assim, a matriz *{Q}*. Computacionalmente essa operação é facilitada, já que a solução do problema de autovalor generalizado gera, usualmente, um vetor e uma matriz. O vetor, que pode também ser representado por uma matriz diagonal e denominado de matriz espectral, contém todos os autovalores obtidos (Equação 71). A matriz, por sua vez, contém todos os autovetores do sistema e é denominada de matriz modal (Equação 72).

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{2N} \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$[\Psi] = [\{\varphi_1\} \quad \{\varphi_2\} \quad \cdots \quad \{\varphi_{2N}\}] \tag{72}$$

A Equação 71 permite a montagem do diagrama de Campbell, quando calculada para diversas velocidades de rotação do eixo. Como a variação da rotação do sistema altera as matrizes que compõem a equação de movimento do sistema, especialmente por influência da matriz giroscópica, os autovalores resultantes mudam, e, consequentemente, as frequências naturais do sistema são alteradas. Assim, o diagrama de Campbell consiste na plotagem das frequências naturais do sistema em função da velocidade de rotação do sistema.

Costuma-se plotar no diagrama de Campbell uma reta na qual os valores da velocidade de rotação são iguais aos valores das frequências naturais. Esta reta, chamada de linha 1X ou linha de rotação, facilita a determinação dos pontos onde a velocidade de rotação coincide com as frequências naturais do sistema. As velocidades críticas, como são chamados esses pontos, são fundamentais para a correta observação e interpretação do diagrama de Campbell, pois indica a velocidade na qual determinada frequência natural está sendo excitada.

Aplicando a Equação 70 no vetor representado na Equação 71, para cada velocidade de rotação, pode-se plotar um gráfico análogo ao diagrama de Campbell: o gráfico do decremento logarítmico. O decremento logarítmico reflete a variação da parte real do autovalor, que indica o caráter de decaimento, ou aumento, da resposta ao longo do tempo, caracterizando uma resposta estável, ou instável, respectivamente. Assim, para modos do sistema cujo decremento logarítmico tem valor menor que zero, pode-se concluir que tais modos são instáveis.

3.6.3. Órbitas

As órbitas do movimento do rotor são de grande importância na análise e visualização do comportamento dinâmico do sistema rotativo. Diferentemente das análises de FRF e do diagrama de Campbell, as orbitas contemplam a combinação das respostas livre e forçada do sistema, visualizadas ao longo de um período de tempo definido. Entretanto, por envolverem um número muito elevado de variáveis, as soluções analíticas não são um caminho viável, sendo necessário, portanto, recorrer à integração numérica da equação de movimento apresentada na Equação 50.

Apesar de serem calculadas para uma velocidade de rotação por vez, com elevado custo computacional, fornecem fácil visualização do caráter estável ou instável do sistema. Desse modo, optou-se por calcular as orbitas de movimento do eixo durante a sua operação apenas em velocidades de rotação de interesse, determinadas pela análise do diagrama de Campbell e do gráfico do decremento logarítmico.

4. RESULTADOS

Este capítulo é dividido em quatro seções que apresentam, separadamente, as simulações realizadas para os diferentes tipos de mancal, de selo, de amortecimento interno e as combinações escolhidas. O modelo em Elementos Finitos do eixo encontra-se na Figura 15 e as dimensões deste encontram-se na Tabela 1.

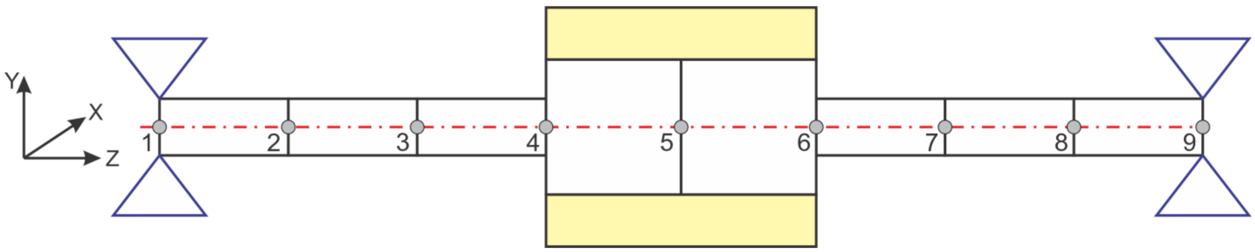


Figura 15 – Modelo em Elementos Finitos do Eixo Simulado

Tabela 1 – Dimensões dos Elementos do Eixo

Elemento	Comprimento (mm)	Diâmetro Interno (mm)	Diâmetro Externo (mm)
1	124,0	0,0	50,0
2	123,0	0,0	50,0
3	123,0	0,0	50,0
4	130,0	0,0	130,0
Disco	260,0	130,0	200,0
5	130,0	0,0	130,0
6	123,0	0,0	50,0
7	123,0	0,0	50,0
8	124,0	0,0	50,0

Em todas as análises realizadas os mancais são posicionados nas extremidades do eixo, nós 1 e 9, e os selos, quando presentes, são adicionados nos nós 4 e 6. A inclusão do amortecimento interno, conforme explicado anteriormente, consiste na modificação das matrizes de cada elemento de viga do modelo, portanto todos os elementos são alterados na montagem da matriz global. Considera-se, para as análises de movimento forçado, que a excitação de massa desbalanceada localiza-se no nó 5, com magnitude de $1{,}5.10^{-4}$ kg.m.

O estudo do comportamento dinâmico do sistema rotativo inicia-se com a análise do mesmo suportado por mancais rígidos, para a identificação dos modos vibracionais do eixo. A utilização de mancais rígidos, ou mancais ideais, pressupõe que os nós dos mancais apenas rotacionam, não apresentando movimento de translação nestes nós. Apresentam-se para este caso o diagrama de Campbell na Figura 16 e o gráfico do decremento logarítmico na Figura 17.

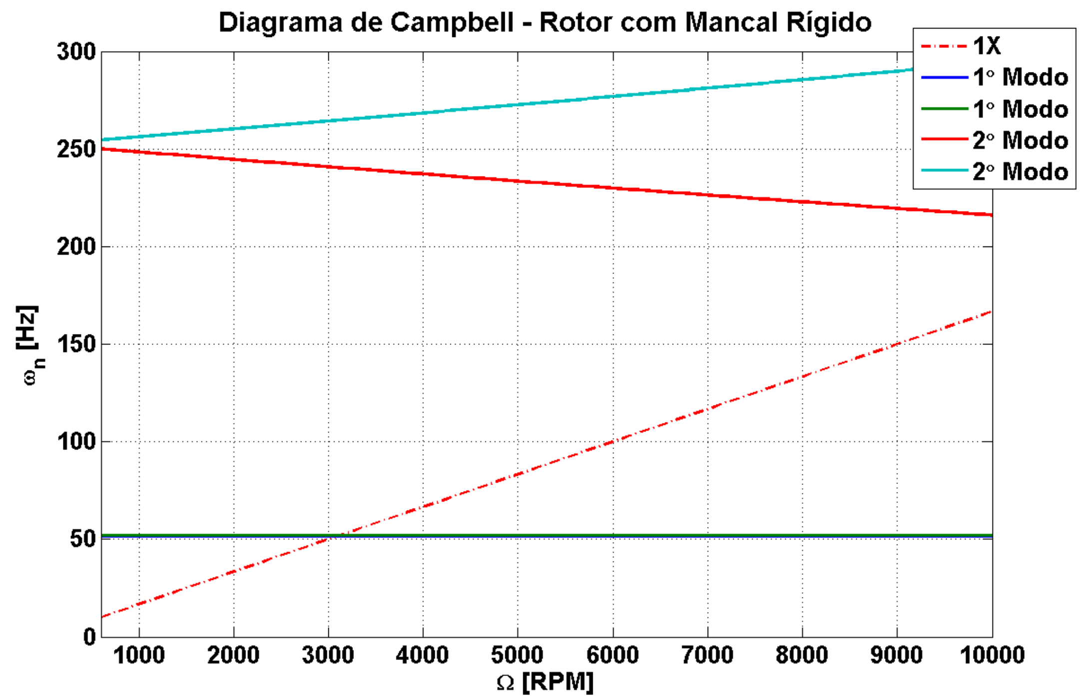


Figura 16 – Diagrama de Campbell – Mancal Rígido

A Figura 16 identifica os dois primeiros modos do eixo. O primeiro modo tem precessão direta e retrógrada sobrepostas, conforme esperado. O segundo modo, entretanto, exibe diferenças entre os modos precessionais, resultado da influencia do efeito giroscópico do disco, que é proporcional à velocidade de rotação. A frequência natural do rotor encontra-se em 3060 RPM, indicada pelo cruzamento das frequências do primeiro modo com a linha de rotação, ou linha 1X, representada em vermelho tracejado.

A Figura 17 mostra o comportamento do decremento logarítmico de cada modo mostrado no diagrama de Campbell, ao longo da faixa de rotações estudada. O valor mais baixo corresponde ao decremento do primeiro modo, com duas curvas sobrepostas, referentes às precessões direta e retrógrada. Também sobrepostos estão os decrementos correspondentes ao segundo modo. Observa-se que não existem variações observáveis nos valores de decremento para o primeiro modo e para o segundo modo, o que indica que há baixa alteração no nível de amortecimento do sistema em função da velocidade. Por fim, a ausência de valores negativos no gráfico do decremento permite afirmar que o rotor opera de modo estável.

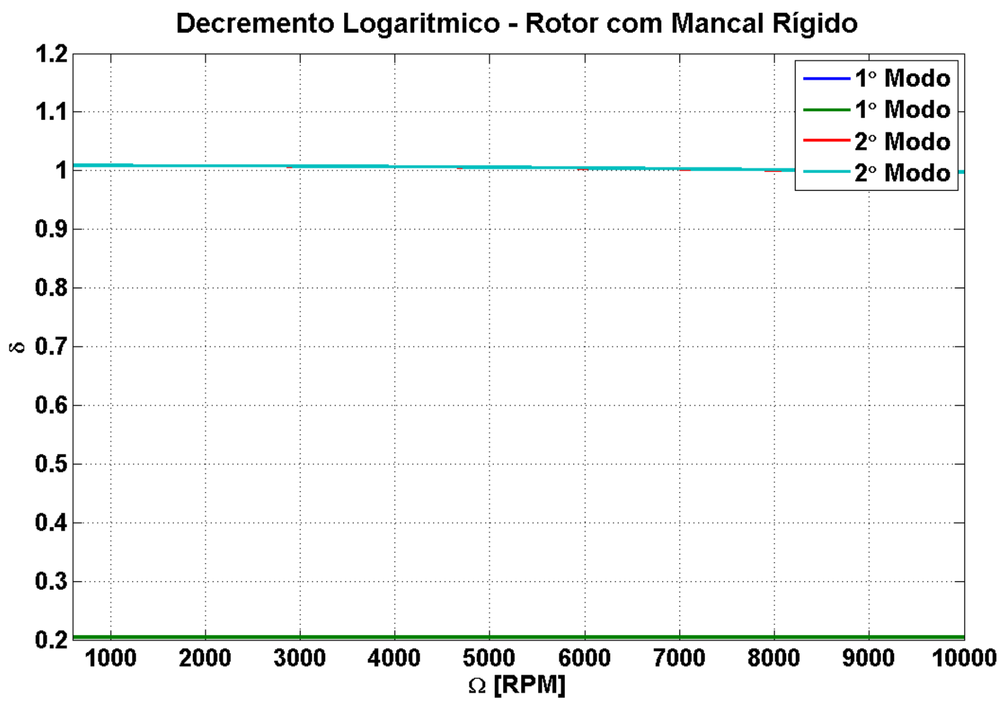


Figura 17 – Decremento Logarítmico – Mancal Rígido

4.1. Mancais

Os resultados apresentados para os mancais são divididos em mancais de geometria fixa e mancais de geometria variável. Na primeira parte, cinco mancais dos tipos cilíndrico, elíptico e trilobular serão avaliados. Na segunda parte, apenas um mancal segmentado será utilizado, porém comparando-se as modelagens reduzida e completa dos seus coeficientes.

4.1.1. Mancais de Geometria Fixa

Os dados dos cinco mancais de geometria fixa utilizados estão identificados na Tabela 2.

Tabela 2 – Dados dos Mancais de Geometria Fixa

Mancal	**Cilíndrico**	**Elíptico 1**	**Elíptico 2**	**Trilobular 1**	**Trilobular 2**
Diâmetro (mm)	50	50	50	50	50
Largura (mm)	50	50	50	50	50
Nº Lóbulos	1	2	2	3	3
Folga Radial (μm)	110	110	110	110	70
Ângulo Separaçao (°)	–	15	15	15	15
Pré-Carga	–	0,3	0,4	0,3	0,3

A Figura 18 apresenta o diagrama de Campbell para o rotor suportado pelo mancal cilíndrico considerado. A Figura 20 apresenta o gráfico do decremento logarítmico desta configuração.

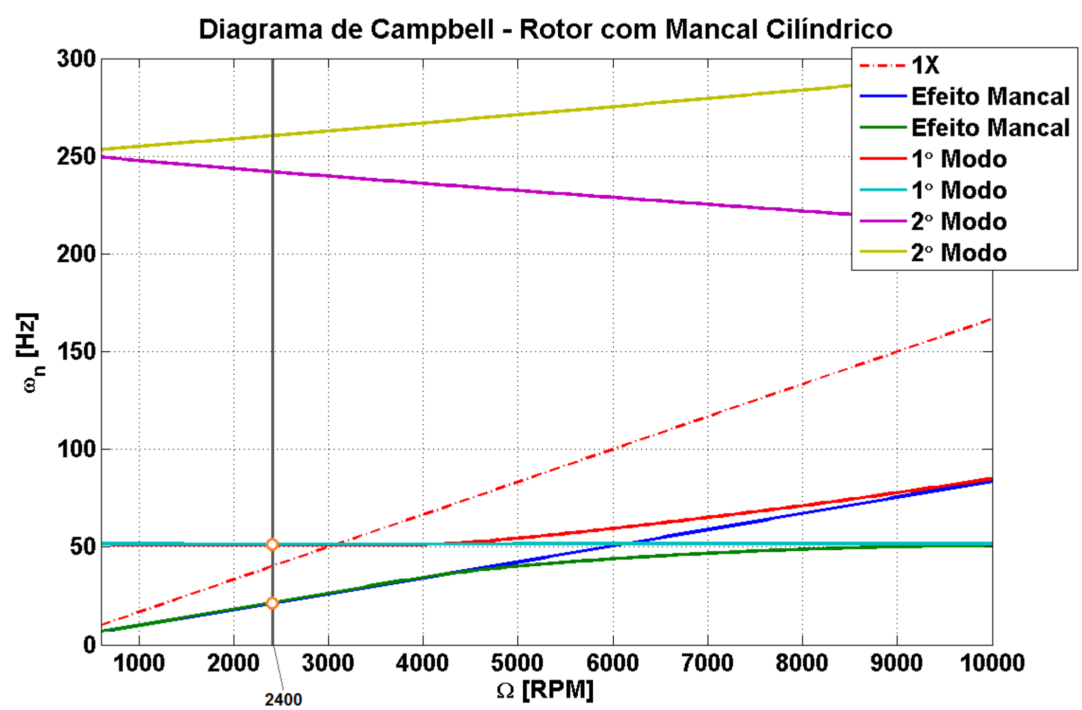


Figura 18 – Diagrama de Campbell – Mancal Cilíndrico

A Figura 18 mostra, tal como na Figura 16, as curvas referentes aos dois primeiros modos do eixo. Observa-se que a frequência natural não foi alterada, permanecendo em 3060 RPM. Entretanto, ocorre o surgimento de duas novas curvas, indicando as frequências dos mancais, adicionados ao conjunto. Os modos naturais, calculados para a velocidade de 2400 RPM, como destacado na Figura 18, permitem a identificação dos modos correspondentes ao mancal e ao eixo. Os dois primeiros modos, mostrados nas Figuras 19a e 19b, que correspondem aos modos do mancal, exibem comportamento de corpo rígido. Os dois segundos modos, mostrados nas Figuras 19c e 19d, correspondem aos primeiros modos próprios do eixo e exibem comportamento flexível, como esperado para o rotor analisado.

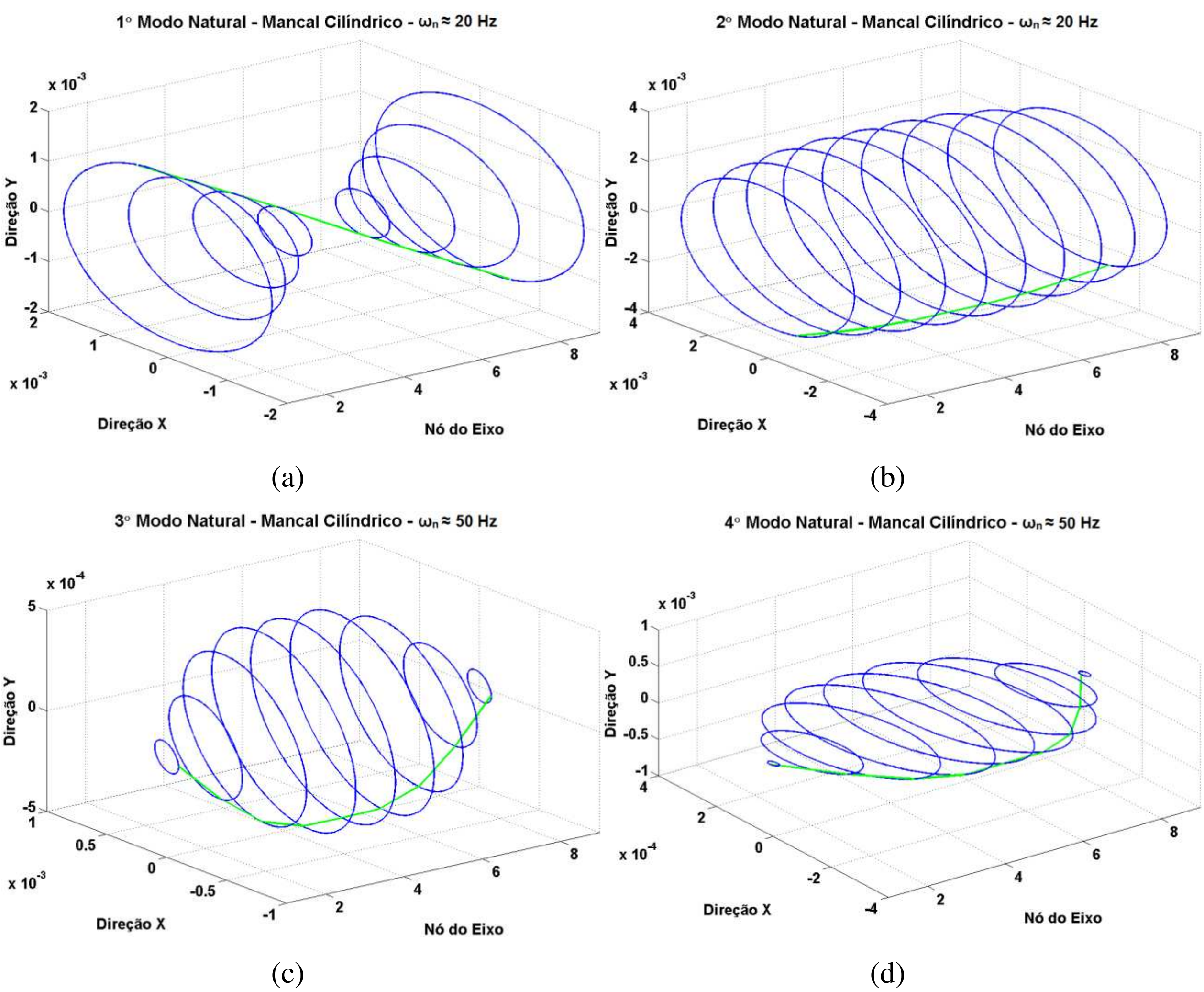


Figura 19 – Modos Naturais do Eixo a 2400 RPM– Mancal Cilíndrico – As figuras possuem indicação das correspondências com as frequências naturais (ω_n) do diagrama de Cambpell

Retomando a análise do diagrama de Campbell da Figura 18, observa-se que o cruzamento das frequências dos mancais com as frequências do primeiro modo ocorre próximo a 6000 RPM. Sabe-se que esta interseção indica a ocorrência do *oil-whip*, pois a frequência induzida pelo filme de óleo está excitando o primeiro modo do rotor. Conforme descrito na teoria, o cruzamento ocorre aproximadamente no dobro da frequência natural nos rotores com mancais cilíndricos. Deve-se ressaltar, porém, que tal cruzamento é apenas um indício da ocorrência do *oil-whip*, sendo necessária a análise do decremento logarítmico para a verificação da sua influência na estabilidade do rotor.

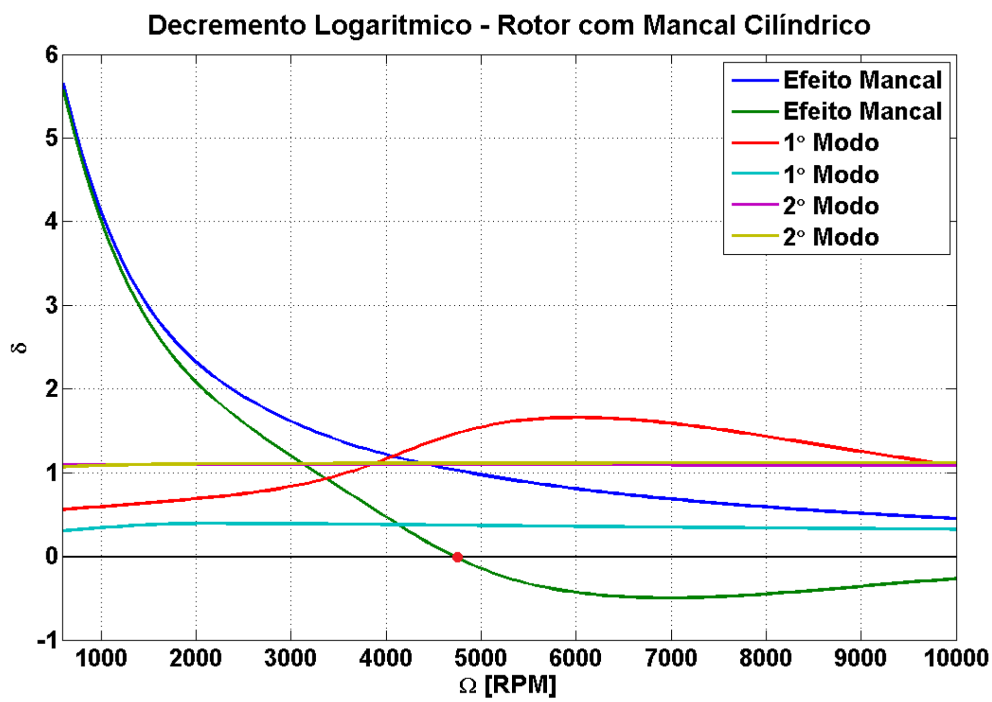
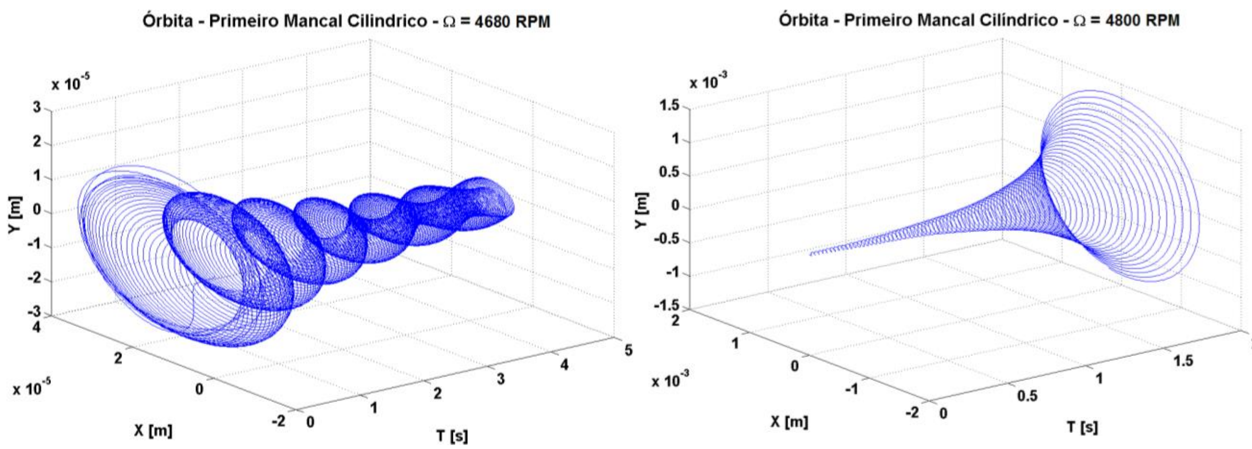


Figura 20 – Decremento Logarítmico – Mancal Cilíndrico

A Figura 20 apresenta o gráfico do decremento logarítmico para o rotor, onde estão representadas as curvas referentes aos dois primeiros modos livres do eixo e aquelas correspondentes aos mancais. Observa-se que os valores do decremento logarítmico correspondentes ao segundo modo vibracional do sistema não sofrem grandes variações, ao contrário das existentes nas curvas relacionadas ao primeiro modo. Este comportamento é esperado segundo a teoria, pois a instabilização de um sistema, sob o efeito do *whirl/whip* induzido por mancais hidrodinâmicos, afeta o modo mais básico do rotor.

No início da faixa de frequências, visualiza-se uma queda pronunciada das duas frequências dos mancais, sendo que uma destas, mostrada em verde, assume valores negativos a partir da velocidade de 4740 RPM, constituindo o limiar de estabilidade deste sistema. Para a verificação desse comportamento, optou-se por integrar a equação de movimento em velocidades antes e depois do limiar de estabilidade, conforme mostrado na Figura 21.



(a) (b)

Figura 21 – Órbitas do Eixo antes (a) e depois (b) do limiar de estabilidade – Mancal Cilíndrico

A Figura 21a mostra a órbita descrita pelo eixo no nó do mancal, operando na velocidade de 4680 RPM, antes do limiar de estabilidade determinado pela análise do decremento do sistema. Nota-se que a órbita do movimento decresce de amplitude com o tempo, caracterizando uma operação estável, conforme previsto. Entretanto, a proximidade do limiar de estabilidade altera o formato da órbita descrita, emergindo desta outra frequência além da excitadora, modulando o movimento do eixo. A Figura 21b mostra a órbita descrita no mesmo nó da análise anterior, porém acima do limiar de estabilidade, na velocidade de 4800 RPM. Observa-se que a amplitude do movimento cresce continuamente com o tempo, caracterizando uma operação instável.

A composição de frequências observada na Figura 21a é investigada pela transformada de Fourier, apresentadas na Figura 22. Observa-se que existem dois picos de amplitudes em frequências diferentes: um a 78 Hz (4680 RPM) e outro a 38,6 Hz (2316 RPM). O pico na velocidade mais elevada corresponde à resposta ao desbalanceamento, pois se trata de uma excitação com frequência igual à velocidade de rotação. O pico de menor frequência, subsíncrona em relação à velocidade de rotação, encontra-se aproximadamente à metade desta.

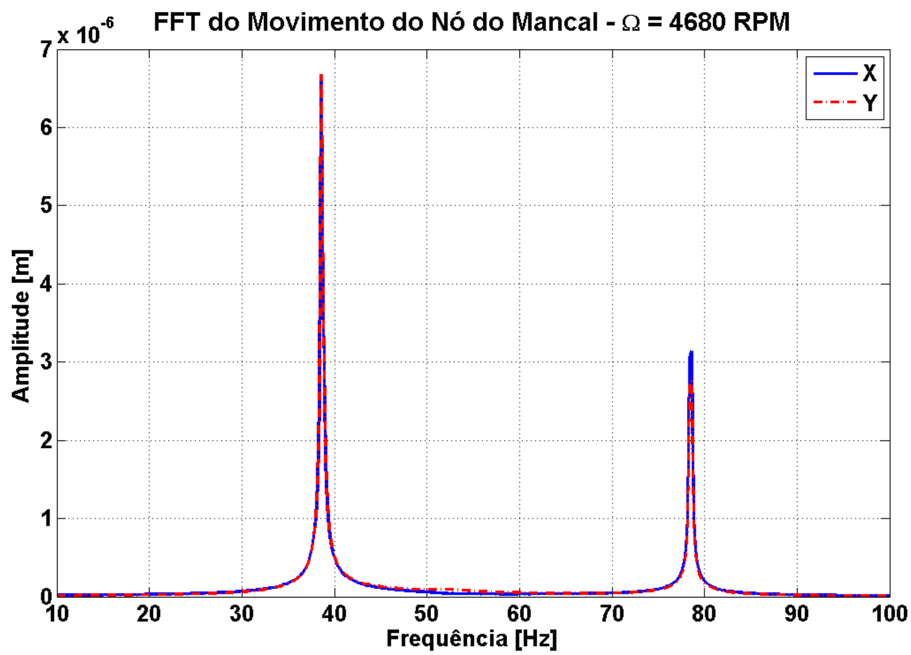


Figura 22 – FFT do Movimento do Mancal Cilíndrico – Ω = 4680 RPM

Conforme detalhado na Seção 3.5, não existe outra força excitadora, externa ao sistema, que poderia causar uma vibração com esta frequência. Portanto, tais vibrações só podem se originar da influência do mancal. Outro indício é que a frequência de vibração deste movimento é aproximadamente igual à metade da velocidade de rotação do eixo, característica do *oil-whirl*. Nota-se, ainda, que o valor das amplitudes subsíncronas é mais elevado do que o correspondente para a frequência síncrona, sendo este o motivo pelo qual se observam duas frequências distintas na Figura 21a.

Por fim, a última análise realizada é o diagrama em cascata. O diagrama em cascata é composto de várias transformadas de Fourier, em velocidades de rotação diferentes, de modo a determinar o comportamento das frequências envolvidas na composição do movimento, tomando-se como base para o seu cálculo o deslocamento do nó do mancal. Dois diagramas em Cascata foram plotados, para melhor observação das interações existentes no inicio e ao fim da faixa de velocidades, sendo o primeiro diagrama mostrado na Figura 23.

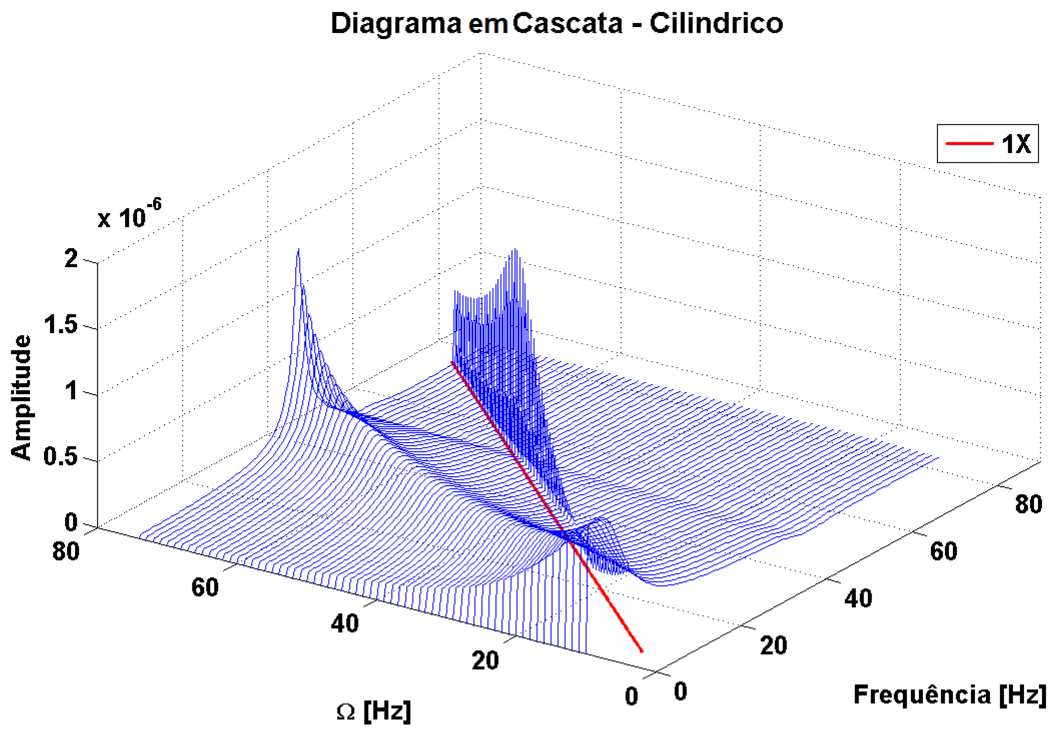


Figura 23 – Diagrama em Cascata no Início da Faixa de Velocidades – Mancal Cilíndrico

Analisando a Figura 23, verifica-se que o movimento do eixo no mancal é composto por duas frequências distintas: uma síncrona com a velocidade de rotação, indicada pela linha 1X, e outra com caráter subsíncrono. As amplitudes excitadas ao longo da linha 1X correspondem ao efeito causado pelo desbalanceamento, cuja frequência de vibração é igual à velocidade de rotação do sistema. Nota-se que a amplitude sobe continuamente ao aproximar-se da frequência natural (51 Hz), no qual ocorre o valor máximo de amplitude deste tipo de excitação.

A análise da Figura 22 identifica que as frequências subsíncronas presentes no sinal temporal são relacionadas com o *oil-whirl* do mancal. Os picos de frequências subsíncronas observados na Figura 23 têm a mesma origem e mantêm a mesma proporção. Observa-se que o *whirl* possui três comportamentos distintos, com a variação das velocidades de rotação no diagrama em cascata. Em baixas velocidades, a amplitude de *whirl* se sobrepõe às amplitudes do movimento síncrono. Com o aumento da velocidade de rotação, ocorre a transição para a segunda região, na qual a vibração síncrona se sobrepõe à subsíncrona, devido à proximidade da frequência natural do rotor. Por fim, após a frequência natural, as amplitudes de *whirl* tornam-se continuamente crescentes com o aumento da velocidade de rotação, tendendo a instabilizar o sistema.

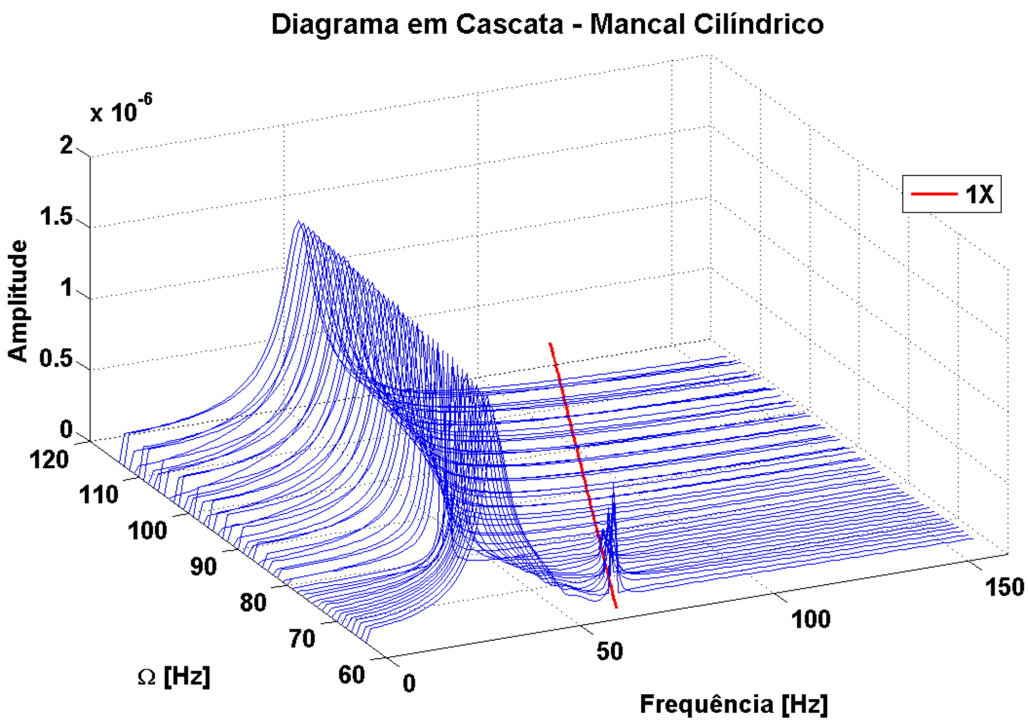


Figura 24 – Diagrama em Cascata ao Final da Faixa de Velocidades – Mancal Cilíndrico

A Figura 24 mostra o diagrama em Cascata para a faixa final de velocidades analisada. Deve-se destacar que as amplitudes dos movimentos foram limitadas para um valor máximo, de $1,5.10^{-6}$, para melhor visualizar os efeitos envolvidos. Observa-se que as amplitudes síncronas tornam-se cada vez menos influentes no sistema em relação às subsíncronas, com o aumento da velocidade de rotação. As frequências subsíncronas mantêm a sua proporção com a velocidade de rotação até aproximadamente Ω = 100 Hz, valor a partir do qual o aumento da velocidade de rotação não resulta em um aumento da frequência subsíncrona. As frequências subsíncronas, portanto, assumem o valor do *whip*, pois permanecem iguais à frequência natural do eixo.

As análises realizadas até este ponto servem para definir as bases do comportamento dinâmico do rotor, observando e determinando o comportamento esperado para os modos livres e o efeito do mancal cilíndrico. As análises seguintes utilizarão os resultados obtidos anteriormente para comparar as semelhanças e diferenças nos novos mancais adicionados, evitando a repetição de algumas observações. Os casos analisados a seguir são os dos mancais de geometria elíptica, detalhados na Tabela 2. Destaca-se que a única diferença entre as características dos dois mancais é a sua pré-carga.

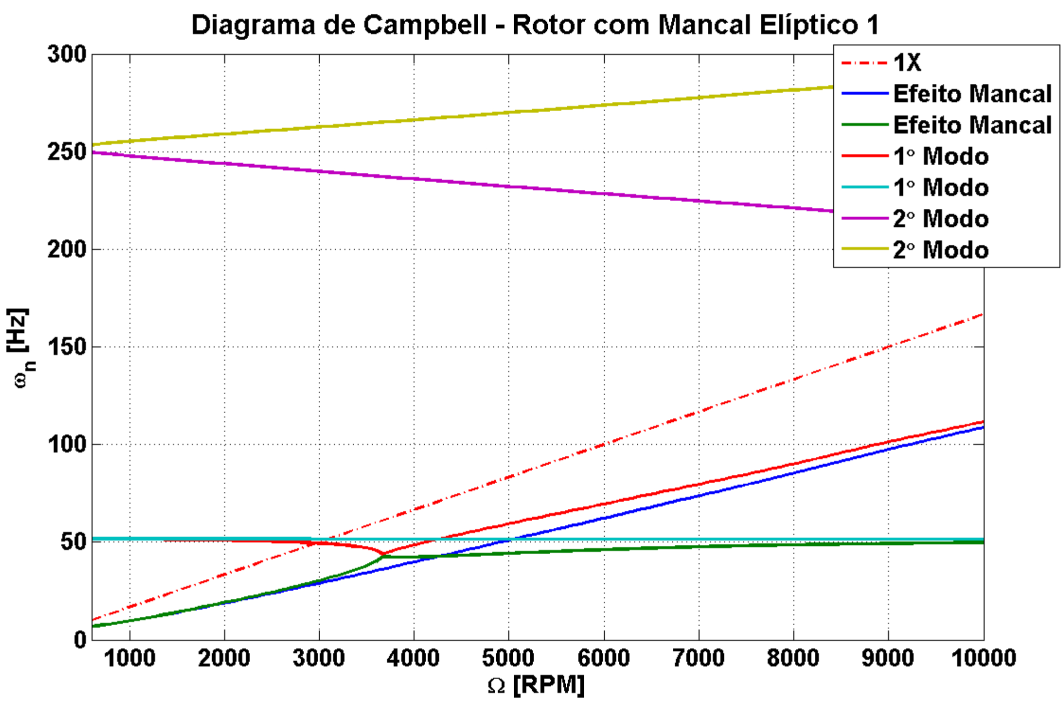


Figura 25 – Diagrama de Campbell – Mancal Elíptico 1

A Figura 25 mostra o diagrama de Campbell para o eixo suportado pelo mancal Elíptico 1, conforme identificado na Tabela 2. Observa-se que os modos naturais sofreram poucas alterações, em relação ao rotor com mancal rígido, tal como ocorrido com a adição do mancal cilíndrico. A frequência natural do eixo não se altera, também conforme esperado. Entretanto, as curvas relativas às frequências dos mancais sofreram um deslocamento, no qual o cruzamento com as frequências naturais ocorre na região de 4500 RPM, e não à velocidade de 6000 RPM como no mancal cilíndrico. Isto denota um enrijecimento do mancal elíptico em relação ao cilíndrico, pois, para uma mesma velocidade de rotação, a frequência do mancal Elíptico 1 é mais elevada. Novamente, para a correta determinação da região de estabilidade do rotor, é necessária a análise do gráfico do decremento logarítmico.

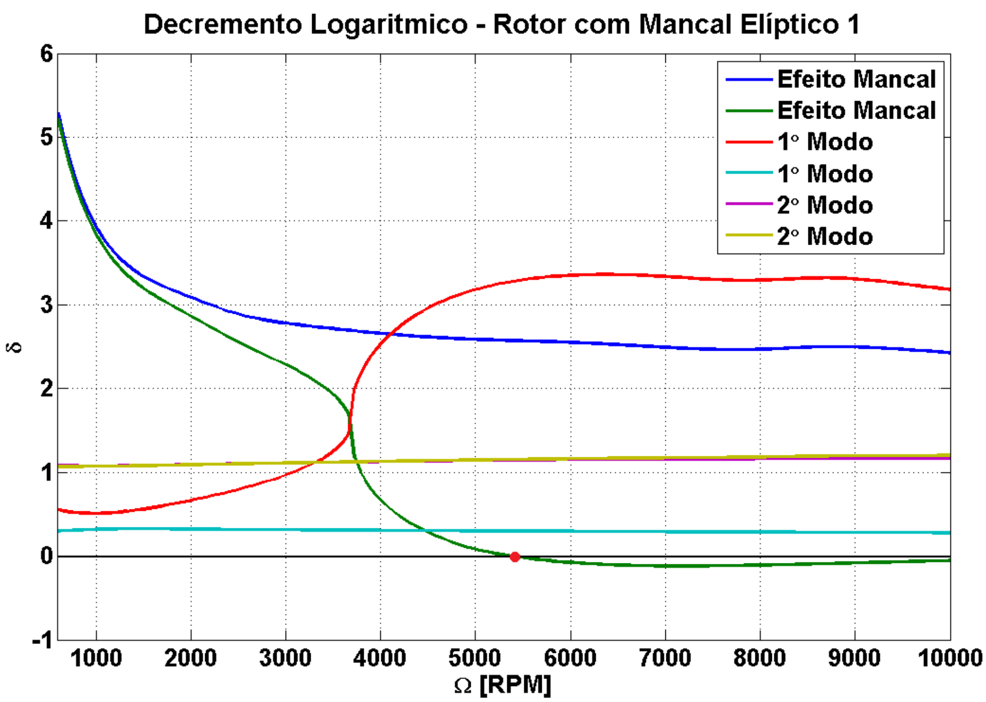


Figura 26 – Decremento Logarítmico – Mancal Elíptico 1

As diferenças entre o eixo com mancal Elíptico 1 e com mancal cilíndrico são mais evidentes na análise da Figura 26. Apesar do decremento para o segundo modo manter-se inalterado, observam-se comportamentos distintos para os decrementos do primeiro modo e das frequências dos mancais. As curvas relativas aos mancais exibem um comportamento decrescente no início da faixa de velocidades, entretanto, uma delas estabiliza-se por volta de $\delta = 2{,}5$, enquanto que a outra curva prossegue até atingir valores negativos a partir de 5340 RPM. A curva dos valores de decremento para o primeiro modo eleva-se acima de $\delta = 3{,}0$, enquanto que, para o rotor com mancal cilíndrico, este valor não superava $\delta = 2{,}0$. Tais alterações nos valores do decremento logarítmico são um indicativo da alteração dos níveis de rigidez e amortecimento do mancal. Essa alteração se deve parcialmente à possibilidade de aplicação de pré-carga no mancal de geometria elíptica, o que eleva a rigidez direta do mancal. Porém, o nível de pré-carga utilizado não foi suficiente para evitar a desestabilização do eixo.

O diagrama de Campbell para o eixo suportado pelo mancal Elíptico 2 encontra-se na Figura 27.

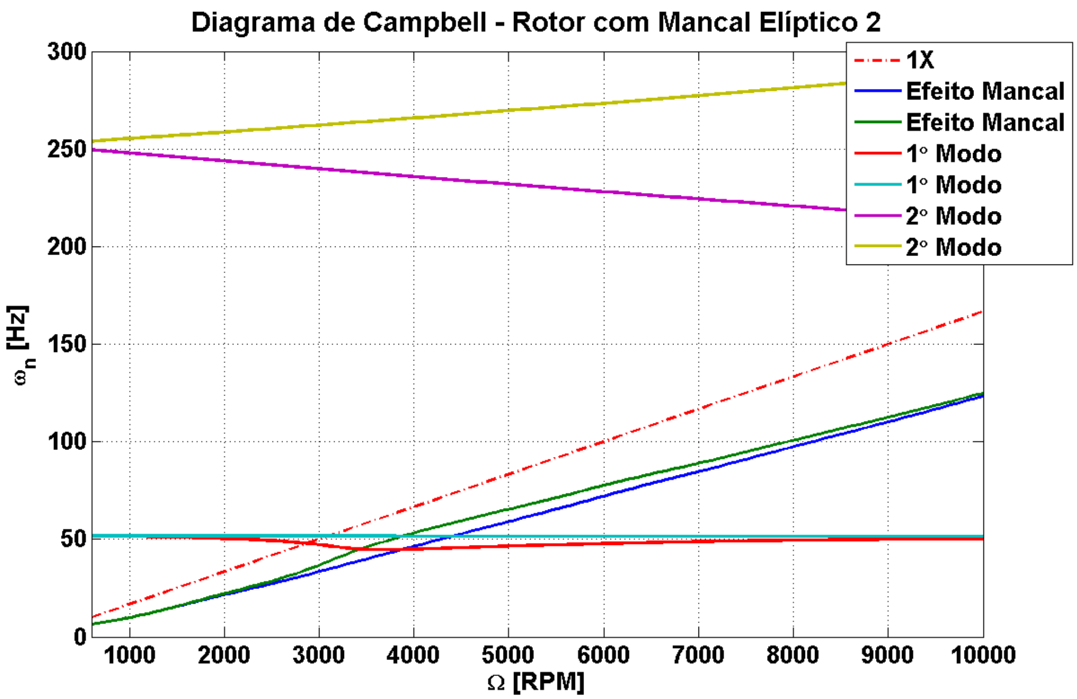


Figura 27 – Diagrama de Campbell – Mancal Elíptico 2

Os modos naturais não se alteram em relação às análises anteriores, assim como a frequência natural, ao analisar-se a Figura 27. As curvas das frequências do mancal são deslocadas em relação às do mancal Elíptico 1, indicando um enrijecimento maior do mancal Elíptico 2 em relação ao primeiro. Este resultado era esperado para a configuração utilizada, pois o segundo mancal elíptico possui uma pré-carga mais elevada do que o primeiro. O cruzamento das curvas dos efeitos dos mancais com as frequências do primeiro modo encontra-se na velocidade de 3800 RPM.

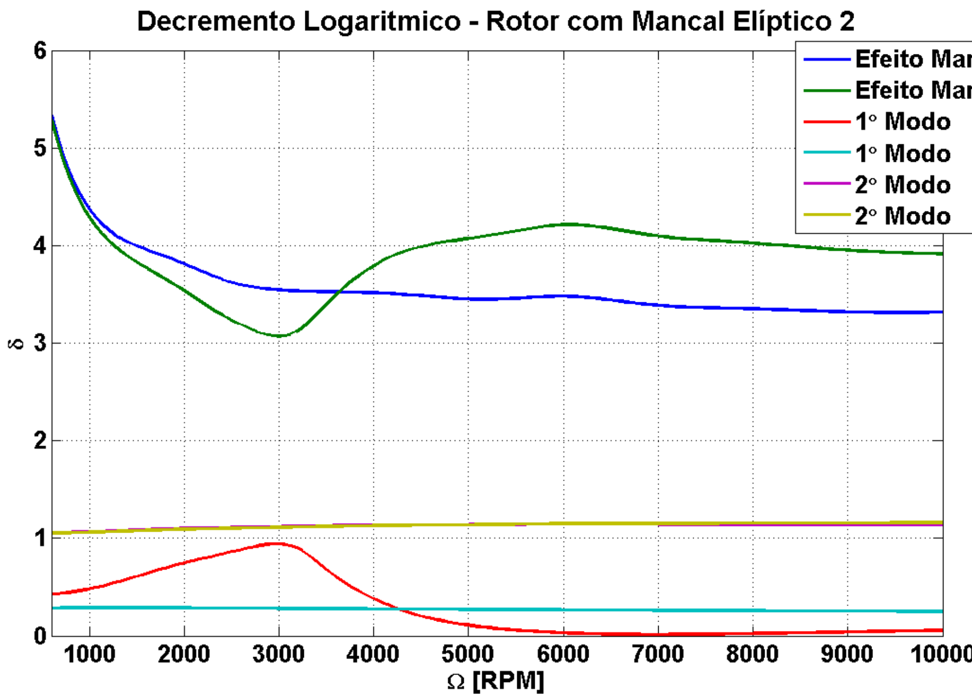


Figura 28 – Decremento Logarítmico – Mancal Elíptico 2

O gráfico do decremento logarítmico é mostrado na Figura 28 e observa-se que não ocorrem valores negativos de decremento para nenhuma curva, determinando um comportamento estável do rotor suportado pelo mancal Elíptico 2. Comparando-se com a Figura 26, observa-se que a curva do mancal que levava o sistema à instabilidade no primeiro caso, permanece na região estável no segundo. Uma das direções precessionais do primeiro modo mantém-se inalterada, entretanto a outra direção do mesmo modo sofre variações significantes na magnitude do decremento, ao longo da faixa analisada. Podem-se atribuir as diferenças encontradas à elevação da rigidez do mancal Elíptico 2, em relação ao primeiro mancal desta geometria, o que altera o comportamento dinâmico do conjunto, de modo a estabilizar a operação do rotor.

Analisados os mancais elípticos, pode-se prosseguir para os mancais de três lóbulos, ou trilobulares. Novamente, os dados dos mancais encontram-se na Tabela 2, destacando-se que a única diferença entre os mancais com essa geometria é a sua folga radial, mais elevada no Trilobular 1.

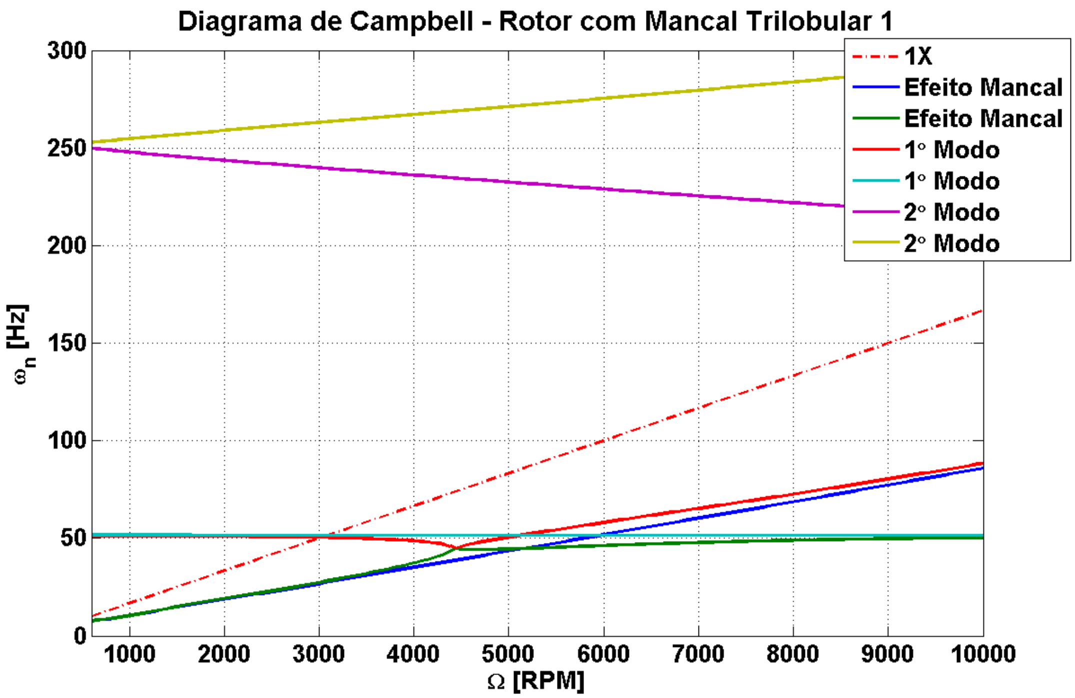


Figura 29 – Diagrama de Campbell – Mancal Trilobular 1

A Figura 29 mostra o diagrama de Campbell do rotor sustentado pelo mancal Trilobular 1. Observa-se que, como em todas as análises anteriores, os modos e as frequências naturais não sofrem alterações significativas. As curvas dos efeitos dos mancais são alteradas, pois refletem as características dinâmicas destes e as suas interações com a dinâmica do eixo. Destaca-se que a pré-carga aplicada tem influência menor na rigidez deste tipo de mancal, em relação à influência que este parâmetro exerce no mancal elíptico. Desse modo, a comparação direta com os efeitos dos mancais de outras geometrias pode não refletir a real influência destes na dinâmica do rotor, sendo necessária a comparação dos decrementos logarítmicos.

A análise da Figura 30, referente ao gráfico do decremento logarítmico, inicia-se com as semelhanças encontradas entre os mancais anteriormente analisados. O segundo modo novamente permanece com baixa variação nos valores de decremento, tal como uma das direções precessionais do primeiro modo. As curvas dos efeitos dos mancais sofrem uma queda acentuada no inicio da faixa, com uma destas tendendo à estabilidade no valor de δ = 2,0, para o caso aqui estudado.

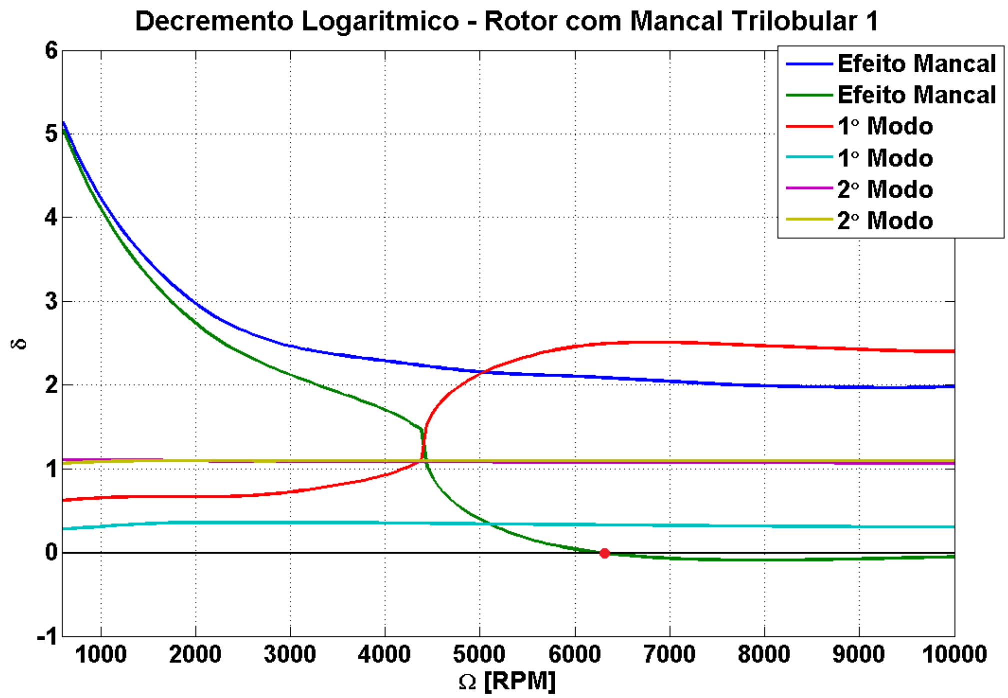


Figura 30 – Decremento Logarítmico – Mancal Trilobular 1

Como nos casos precedentes analisados (mancais Cilíndrico e Elíptico 1), outra vez ocorre a queda de uma das curvas do mancal para valores negativos de decremento, ao passo que uma direção precessional do primeiro modo assume valores continuamente crescentes, até atingir δ = 2,5. A introdução do mancal Trilobular 1 no eixo alterou o limiar de estabilidade para um valor mais elevado em relação aos precedentes, ou seja, a operação é instável para velocidades maiores do que 6180 RPM.

A última análise dos mancais de geometria fixa é realizada no eixo sustentado pelo mancal Trilobular 2. O diagrama de Campbell encontra-se na Figura 31 e o gráfico do decremento logarítmico na Figura 32. A adição do mancal, novamente, não altera os parâmetros anteriormente destacados: modos vibracionais e a primeira frequência natural. A curva relativa aos efeitos do mancal modifica-se, refletindo a alteração do mancal. Nota-se que a atual é bem distinta da encontrada para o mancal Trilobular 1, com o cruzamento com as curvas do primeiro modo bem definido, na velocidade de 6000 RPM.

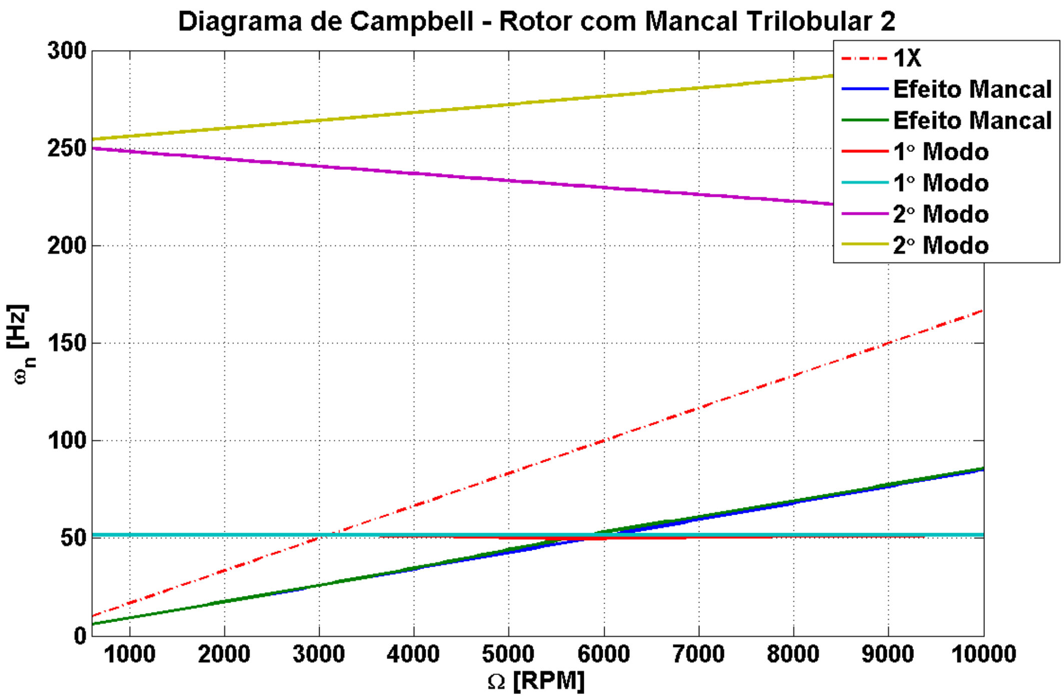


Figura 31 – Diagrama de Campbell – Mancal Trilobular 2

O gráfico do decremento logarítmico também apresenta características em comum com as análises realizadas anteriormente. O segundo modo do eixo não se altera e uma direção precessional do primeiro modo, neste caso, é pouco afetada. As curvas dos efeitos do mancal são típicas de uma operação estável, apresentando uma queda no início da faixa de velocidades e estabilizando-se em δ = 2,0. Os outros modos também não apresentam valores de decremento negativos, portanto o sistema é estável. A estabilidade na operação pode ser atribuída à redução da folga radial do mancal Trilobular 2 em relação ao Trilobular 1. A redução da folga eleva a rigidez direta equivalente do mancal, contribuindo para a estabilização da operação.

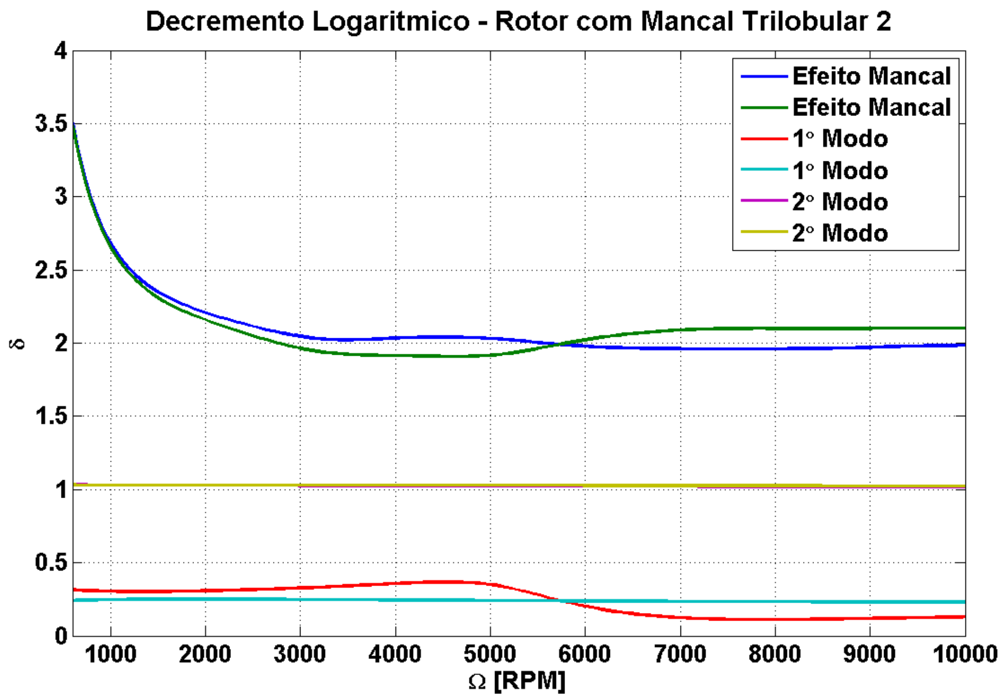


Figura 32 – Decremento Logarítmico – Mancal Trilobular 2

A Tabela 3 apresenta um resumo das análises dos mancais de geometria fixa, com os dados das frequências naturais e de instabilização encontradas para cada caso analisado. Observa-se que cada mancal possui uma razão de frequência de instabilização pela frequência natural diferente, uma vez que este dado é determinado pelas características geométricas dos mancais utilizados.

Tabela 3 – Resumo das Análises dos Mancais de Geometria Fixa

Análise	**ω_n (RPM)**	**Ω_{inst} (RPM)**	**Ω_{inst}/ω_n**
Cilíndrico	3060	4740	1,549
Elíptico 1	3060	5340	1,745
Elíptico 2	3060	Estável	–
Trilobular 1	3060	6180	2,020
Trilobular 2	3060	Estável	–

4.1.2. Mancal de Geometria Variável

As análises para o mancal de geometria variável, ou mancal segmentado, são realizadas para apenas um tipo de mancal. A diferença nas análises encontra-se no uso do modelo reduzido ou completo de coeficientes, conforme abordado na Seção 3.1. A Tabela 4 apresenta os dados geométricos utilizados para o cálculo dos coeficientes do mancal segmentado. Além da comparação entre os dois modelos de coeficientes, o mancal segmentado proporciona a visualização do comportamento dinâmico de um mancal considerado inerentemente estável.

Tabela 4 – Dados do Mancal Segmentado

Quantidade de Segmentos	4
Diâmetro do Mancal (mm)	50
Largura do Mancal (mm)	50
Folga Radial (µm)	110
Espessura do Segmento (mm)	13,5
Ângulo do Segmento (°)	75
Ângulo de Separação (°)	15
Posição do 1º Segmento (°)	0
Pré-Carga	0,5
Característica da Carga	sobre o segmento
Viscosidade do Lubrificante (Pa.s)	$5{,}01.10^{-2}$

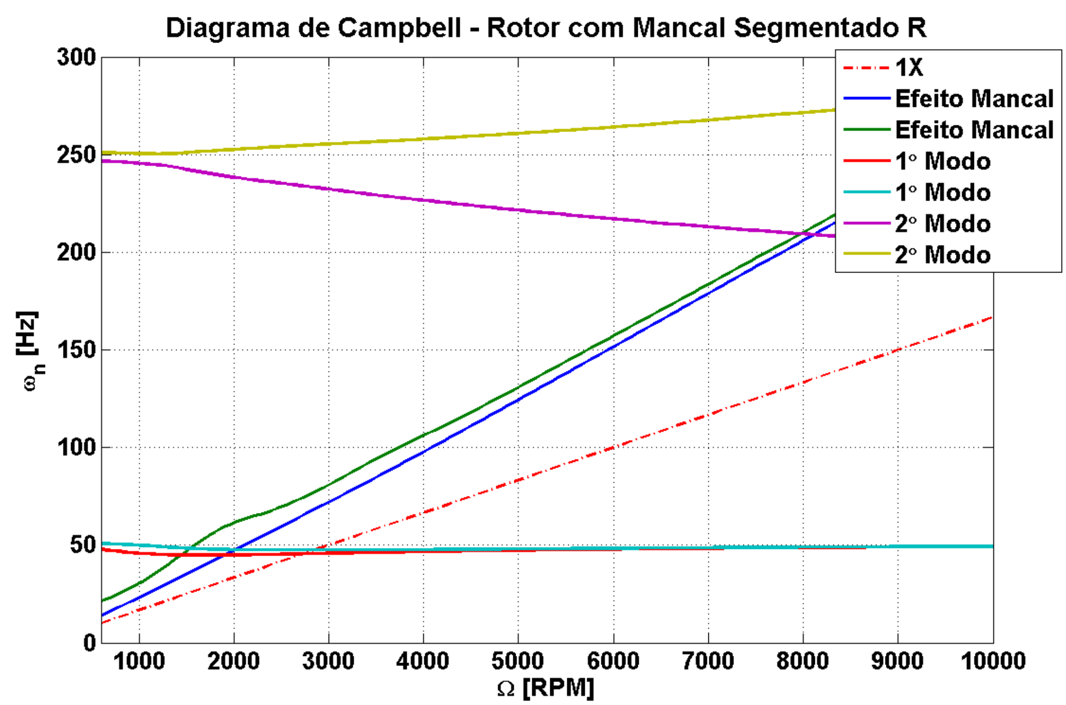


Figura 33 –Diagrama de Campbell – Mancal Segmentado (Modelo Reduzido)

A Figura 33 mostra a primeira análise do diagrama de Campbell para o mancal segmentado, considerando o modelo reduzido. Observa-se uma pequena alteração nas frequências do primeiro e segundo modos, no início da faixa de velocidades, em relação às análises de mancais com geometria fixa. Esta variação é suficiente para alterar a frequência natural para 2700 RPM, conforme pode ser visto pelo cruzamento da linha de rotações com o primeiro modo.

As variações ocorridas nos modos livres do rotor podem ser atribuídas às alterações do nível de rigidez e amortecimento do sistema, com a introdução do mancal segmentado. Segundo Daniel (2012a), os mancais segmentados possuem coeficientes diretos muito elevados, tanto de rigidez quanto de amortecimento, se comparados com os cruzados. Em contrapartida, os resultados apresentados por Machado (2009) indicam que os coeficientes obtidos para mancais de geometria fixa exibem, em geral, relação inversa: os cruzados são mais elevados dos que os diretos. Sabe-se, da teoria revisada na Seção 3.5, que os coeficientes cruzados estão diretamente relacionados com a instabilização do sistema. Os coeficientes diretos, entretanto, são responsáveis pela sustentação do eixo e estabilização da operação; portanto, se elevados o suficiente, em relação aos cruzados, estes coeficientes podem resultar em alterações na dinâmica do rotor, como visto na Figura 33.

Nota-se que as curvas referentes às frequências dos mancais também surgem com os mancais segmentados, tal como ocorrido nas análises anteriores. Entretanto, as curvas cruzam o primeiro modo antes da primeira frequência natural. Em mancais de geometria fixa, suas respectivas curvas podem ser entendidas como a frequência equivalente do filme de óleo, ou frequência de *whirl*. Conforme discutido na análise do mancal cilíndrico, a frequência de *whirl* se manifesta como um sinal subsíncrono em um diagrama em cascata, visualizado na Figura 23. A Figura 34 mostra o diagrama em cascata para o rotor com mancais segmentados. Observa-se que a única frequência que compõe o sinal da resposta é síncrona com a velocidade de rotação, causada pela resposta ao desbalanceamento do rotor. Portanto, pode-se concluir que o mancal segmentado não induz frequências subsíncronas na resposta, ao contrário do observado em mancais cilíndricos.

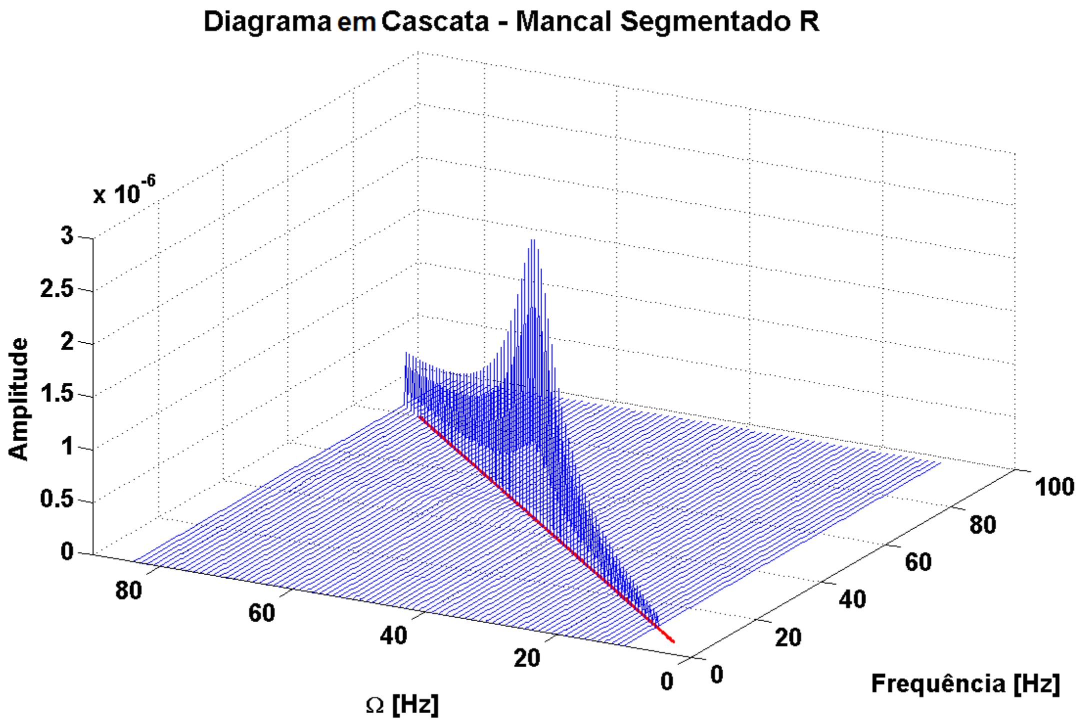


Figura 34 – Diagrama em Cascata – Mancal Segmentado (Modelo Reduzido)

As alterações nos níveis de amortecimento do primeiro e segundo modos são facilmente percebidas pela análise do gráfico do decremento logarítmico, mostrado na Figura 35. Observa-se que as duas direções do primeiro modo têm valores elevados de decremento no início da faixa de velocidades, decrescendo continuamente para o valor de $\delta = 0{,}25$ ao final da faixa. Comparando com o gráfico do decremento da Figura 17, com mancais rígidos, observa-se que o nível para o primeiro modo é ligeiramente superior a $\delta = 0{,}2$, constante durante toda a faixa e igual para ambas as direções precessionais. Portanto, em relação às análises com o mancal rígido, pode-se afirmar que a adição dos mancais segmentados elevou o amortecimento do sistema. O segundo modo também conta com uma elevação dos valores do decremento: de $\delta \approx 1{,}0$ para o mancal rígido, para valores entre $\delta = 1{,}1$ e $\delta = 1{,}5$. Não se observam valores negativos de decremento logarítmico, portanto, o rotor opera em condições estáveis.

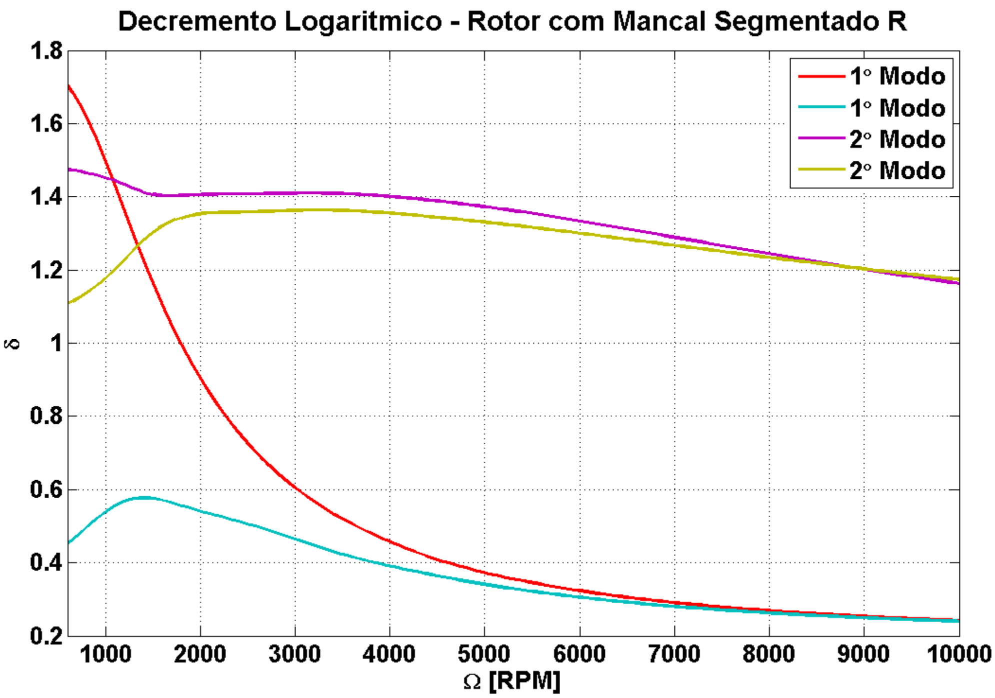


Figura 35 – Decremento Logarítmico – Mancal Segmentado (Modelo Reduzido)

As alterações nos níveis de amortecimento do sistema não são as únicas conclusões relevantes na análise da Figura 35. Nota-se que, ao contrário do ocorrido nas análises dos mancais de geometria fixa, os valores de decremento logarítmico correspondentes ao efeito do mancal segmentado estão ausentes deste gráfico. Esta ausência se deve ao fato destes autovalores serem puramente reais, possuindo, portanto, parte imaginária nula. Observando as Equações 67 a 70, a componente imaginária de um autovalor só é nula quando o seu fator de amortecimento (ξ) for igual à unidade. A consequência física deste fato é que os modos correspondentes aos efeitos dos mancais são superamortecidos.

As observações corroboram o conceito da estabilidade inerente de um mancal segmentado. O diagrama em cascata da Figura 34 mostra que não existem frequências subsíncronas, responsáveis pela instabilidade fluido-induzida em mancais de geometria fixa. A análise do gráfico do decremento logarítmico permite visualizar que os modos dos efeitos dos mancais são superamortecidos, não apresentando comportamento oscilatório e, portanto, tendência à instabilização.

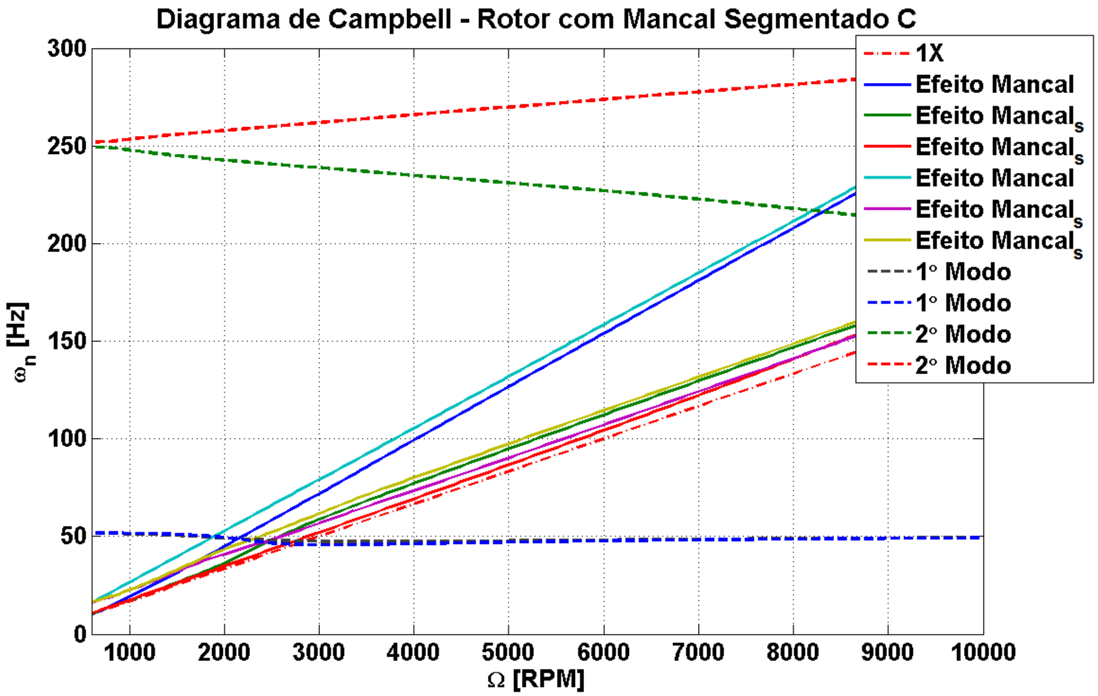


Figura 36 – Diagrama de Campbell – Mancal Segmentado (Modelo Completo)

A análise do modelo de coeficientes completos do mancal inicia-se com o diagrama de Campbell desta configuração, mostrado na Figura 36. Nota-se o surgimento de quatro novas curvas de efeitos do mancal, identificadas pelo subscrito S, além das duas já observadas no modelo reduzido. O modelo completo de coeficientes considera explicitamente os graus de liberdade dos segmentos, portanto, podem-se associar tais curvas à oscilação de cada segmento do mancal. Comparando-se com o diagrama de Campbell do modelo reduzido, os modos e as frequências naturais não se alteram.

A Figura 37 apresenta o gráfico do decremento logarítmico para o modelo de coeficientes completos do mancal segmentado. Observa-se que as quatro curvas observadas na Figura 36, associadas aos efeitos dos segmentos do mancal, também aparecem neste gráfico com magnitude bem elevada, em comparação com os decrementos dos modos naturais. Seus valores de decremento variam entre $\delta = 4{,}5$ e $\delta = 8{,}5$. Destaca-se que as duas curvas dos efeitos do mancal, associadas aos graus de liberdade de translação, não estão presentes neste gráfico, também por serem modos superamortecidos, como analisado na Figura 35. Devido à escala da Figura 37, a observação detalhada do primeiro e segundo modos é dificultada, entretanto o seu comportamento é semelhante ao observado na análise do modelo reduzido de coeficientes.

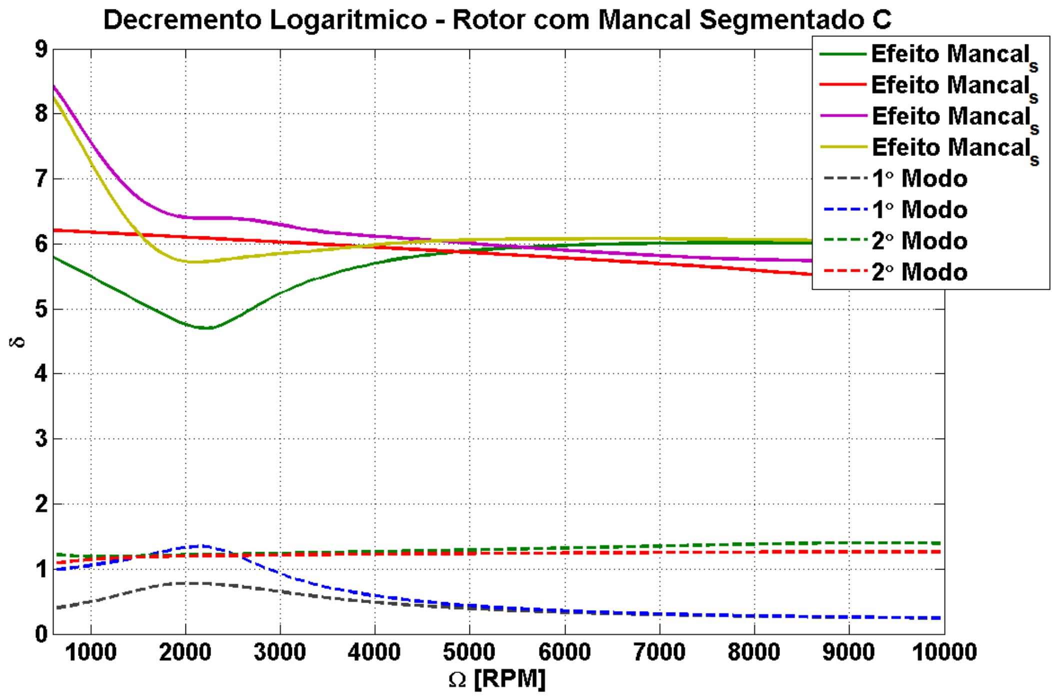


Figura 37 – Decremento Logarítmico – Mancal Segmentado (Modelo Completo)

O modelo de coeficientes completos permite a visualização do movimento dos segmentos durante a operação, o que constitui um ganho em comparação com o modelo reduzido. Os graus de liberdade extras também afetam a quantidade de curvas existentes no diagrama de Campbell e no gráfico do decremento logarítmico, permitindo a visualização do nível de amortecimento dos segmentos. Isto implica em uma estimativa mais precisa do comportamento dinâmico e do limiar de estabilidade do sistema, caso existam fatores desestabilizadores.

Similarmente ao realizado para a análise do modelo reduzido, pode-se verificar, com o auxílio do diagrama em cascata da Figura 38, as frequências envolvidas no movimento calculado pela simulação do modelo completo. Esta investigação é necessária porque a modelagem dos coeficientes calcula explicitamente o movimento dos segmentos, portanto o movimento destes pode afetar a resposta do conjunto.

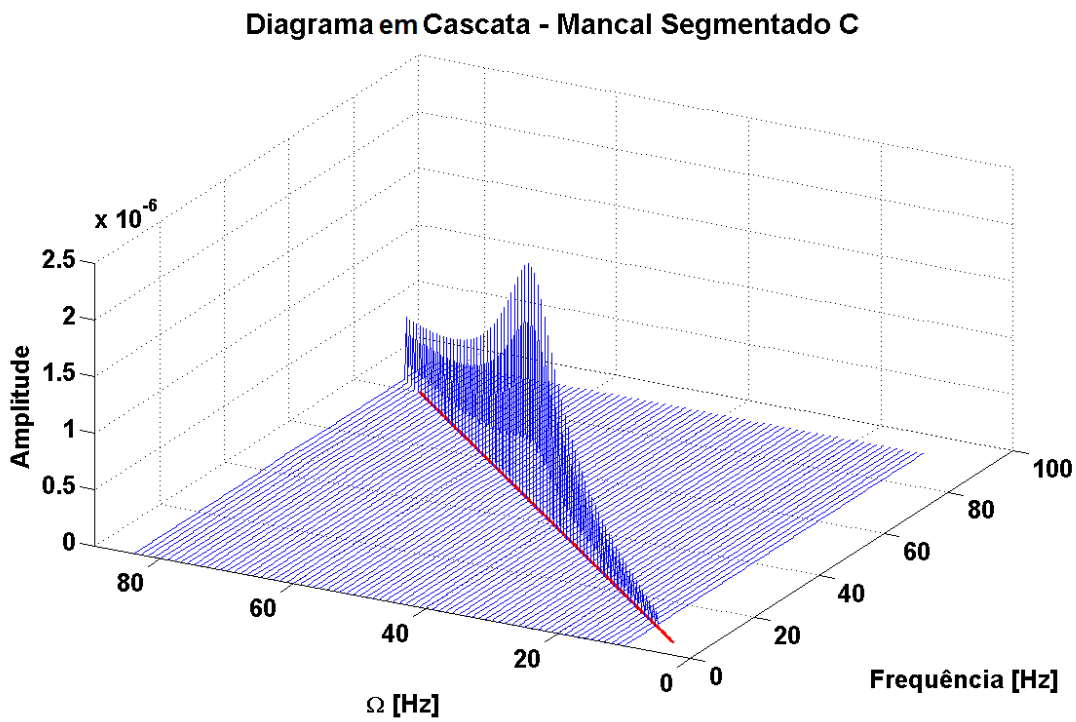


Figura 38 – Diagrama em Cascata – Mancal Segmentado (Modelo Completo)

Observam-se, pela análise do diagrama em cascata da Figura 38, que não são detectadas frequências subsíncronas na resposta do mancal. Consequentemente, o movimento oscilatório dos segmentos dos mancais não exerce influência detectável no movimento do eixo, tal como observado pela análise do modelo reduzido.

4.2. Selos

A análise da influência dos selos de fluxo cilíndricos é realizada comparando-se os efeitos causados pela adição de quatro selos distintos, cujos dados estão mostrados na Tabela 5. Os dados presentes na Tabela 5 foram extraídos do trabalho de Nordmann e Diewald (1989), com exceção do parâmetro referente à velocidade de referência do cálculo do gradiente de pressão, variado entre os quatro selos. Este parâmetro está relacionado com a velocidade axial do fluido de trabalho no selo, que, por sua vez, está relacionado com a rigidez direta de Lomakin. O eixo é o mesmo utilizado nas análises dos mancais, mostrado na Figura 15, com os selos adicionados nos nós 4 e 6. Deve-se ressaltar que, para as análises desta seção, mancais rígidos foram posicionados nas extremidades do eixo, para se visualizar apenas a influência do selo na dinâmica do rotor.

Tabela 5 – Dados dos Selos de Fluxo Cilíndricos

Selo	**Selo1**	**Selo 2**	**Selo 3**	**Selo 4**
Velocidade de Referência de ΔP (RPM) – Ω_{REF}	2000	3000	3500	4000
Gradiente de Pressão ΔP (bar)	10			
Folga Radial (μm)	200			
Largura do Selo (mm)	10			
Raio do Selo (mm)	100			
Fluido de Trabalho	Água			
Viscosidade Absoluta do Fluido (Pa.s)	$0{,}7977.10^{-3}$			
Densidade do Fluido (kg/m^3)	998			

A Figura 39 ilustra o diagrama de Campbell obtido para a análise do rotor sustentado por mancais rígidos e com os selos posicionados nos seus respectivos nós. A comparação deste caso deve ser feita com a simulação do eixo somente com mancais rígidos, mostrado na Figura 16. Observam-se expressivas alterações no primeiro e no segundo modos livres do rotor, com as frequências naturais assumindo valores crescentes com o aumento da velocidade de rotação. Nota-se que a linha de rotações não cruza, na faixa analisada, com o primeiro modo do rotor com o Selo 1. A presença do selo no sistema causou um enrijecimento elevado no sistema, a ponto de não existir velocidade de rotação na qual alguma frequência natural seja excitada pela velocidade de rotação, devido à rigidez direta de Lomakin.

Outra característica encontrada na análise do diagrama de Campbell é que a adição de um selo não resulta no aparecimento de curvas referentes aos seus efeitos, tal como ocorre para os mancais. Isto ocorre porque o selo não sustenta a carga exercida pelo peso do eixo, ao contrário de um mancal, alterando as características das interações dinâmicas ocorridas entre o eixo e o selo. Além disso, a quantidade de fluido presente no selo é maior do que a existente em um mancal, resultando em valores distintos de rigidez e amortecimento, o que, por sua vez, afeta a dinâmica do rotor. Também se pode considerar o fato de que o fluido do selo encontra-se em regime turbulento e que a variação de pressão predominante é na direção axial, alterando o comportamento dinâmico destes componentes.

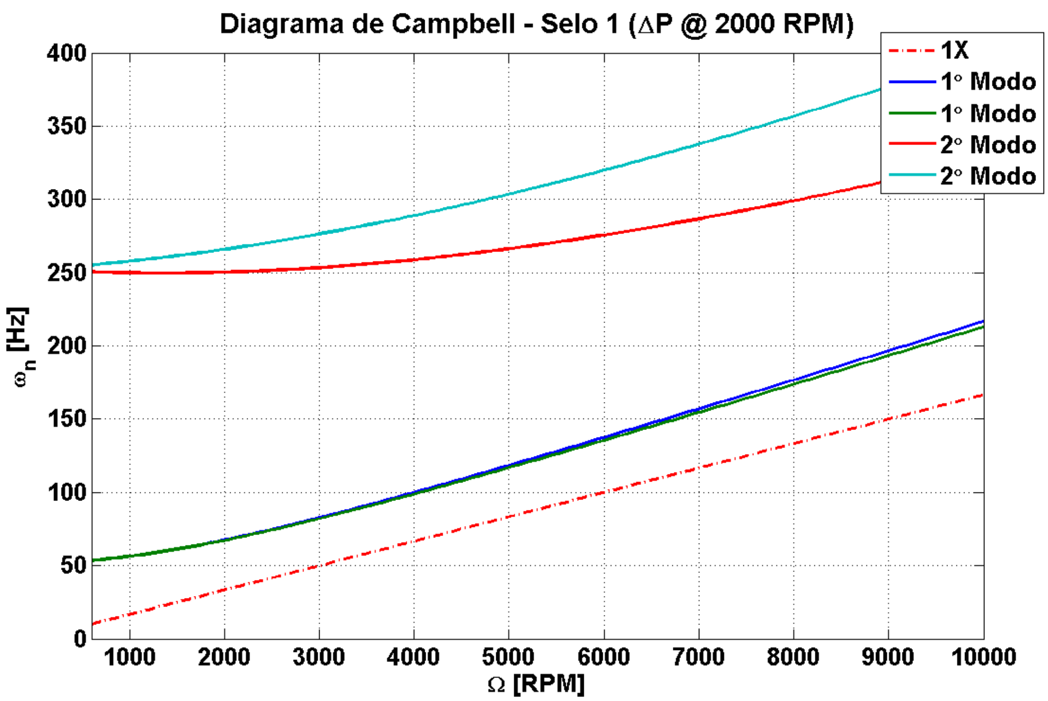


Figura 39 – Diagrama de Campbell – Selo 1

A Figura 40 apresenta o gráfico do decremento logarítmico. Observa-se, comparando com o gráfico da Figura 17, que ambos os modos mostrados sofrem variações na sua magnitude, em função da velocidade. Pode-se concluir que o selo influencia, além das frequências naturais do sistema, o nível de amortecimento de cada modo do eixo. Comparando com as análises dos mancais, nota-se que o selo altera os modos do eixo, em ambas as direções de precessão. Por fim, a ausência de valores negativos para o decremento logarítmico caracteriza uma operação estável do rotor.

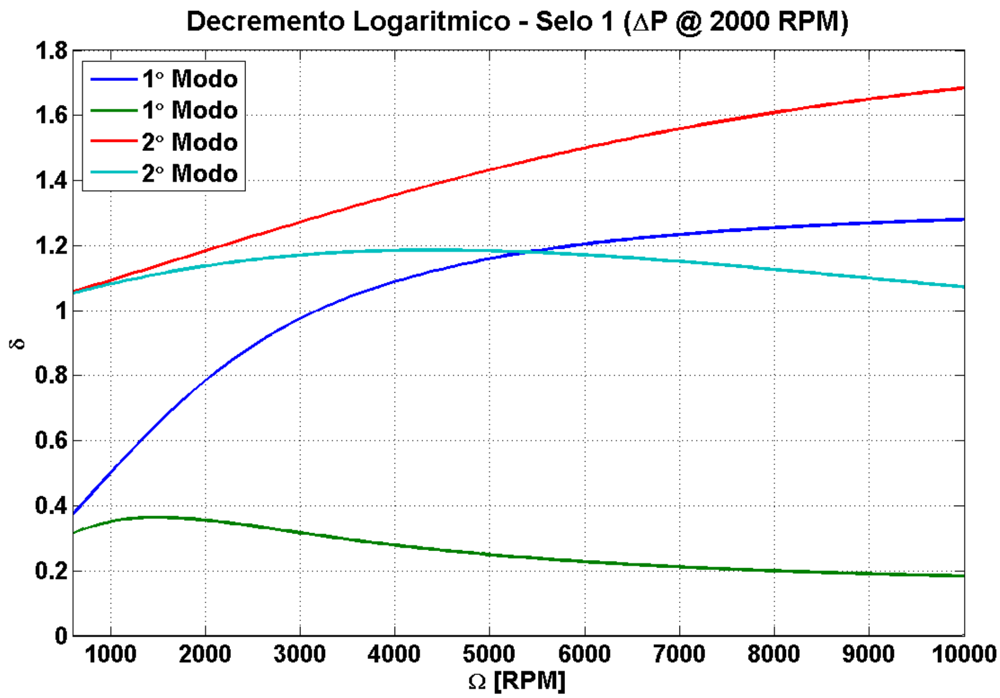


Figura 40 – Decremento Logarítmico – Selo 1

A Figura 41 mostra o diagrama de Campbell para a análise utilizando o Selo 2. Nota-se que o Selo 2 também enrijece o sistema, se compararmos com a análise do mancal rígido. Porém, em relação ao efeito do Selo 1, o selo em questão afeta o comportamento dinâmico em menor grau, podendo ser considerado mais flexível do que o primeiro. Destaca-se também que, ao contrário do Selo 1, nesta análise é possível determinar a primeira velocidade crítica do sistema, localizada a 6000 RPM. A Figura 42 apresenta o gráfico do decremento logarítmico do rotor. Verificam-se alterações nos valores do decremento, principalmente para o primeiro modo, em relação à Figura 40, mas compatíveis com o nível de rigidez adicionado pelo Selo 2. Observa-se também que o selo resulta na instabilização de uma direção precessional do primeiro modo, com o limiar de estabilidade, para este caso, localizado na velocidade de 8460 RPM.

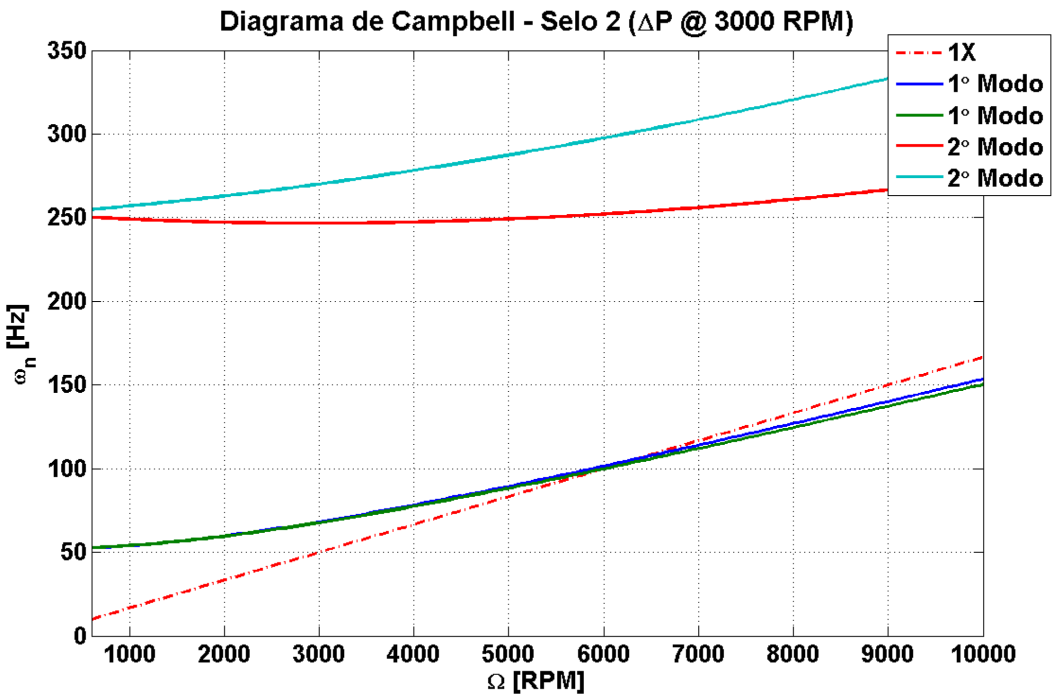


Figura 41 – Diagrama de Campbell – Selo 2

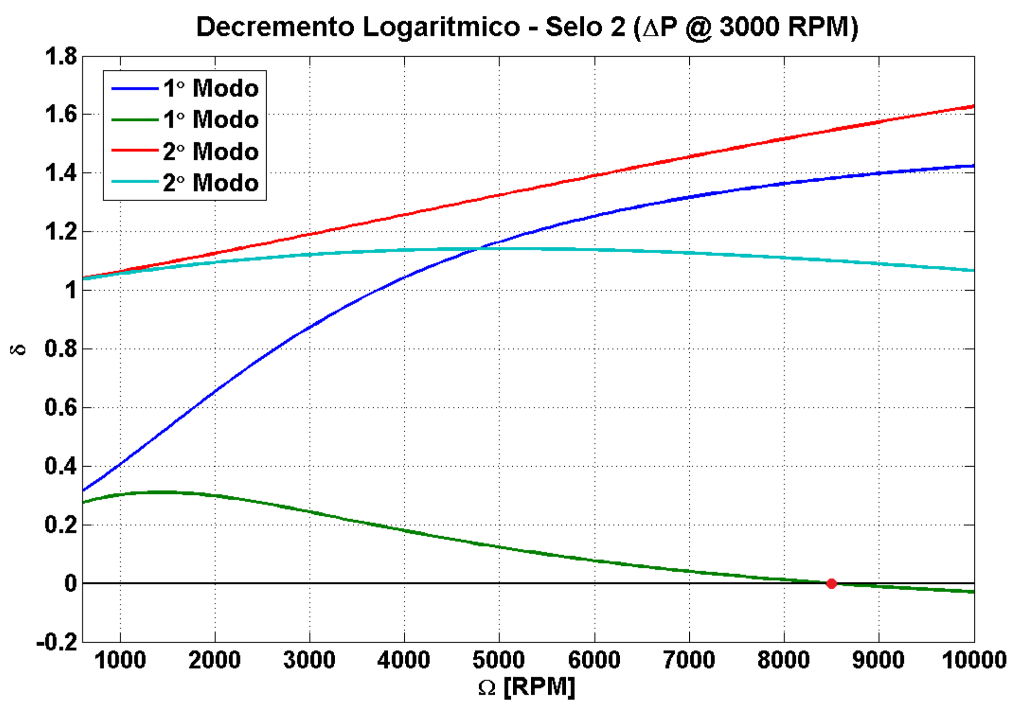


Figura 42 – Decremento Logarítmico – Selo 2

As Figuras 43 a 46 apresentam os diagramas de Campbell e os gráficos de decremento logarítmico para os Selos 3 e 4. Analisando o diagrama de Campbell da Figura 43, observa-se que a rigidez do sistema com o Selo 3 decresce, em relação ao Selo 2. O mesmo comportamento é verificado no Selo 4, em relação ao Selo 3, ao analisar a Figura 45. Comparando todos os quatro casos, pode-se concluir que o nível de rigidez adicionada ao sistema pelo selo diminui em função do aumento da rotação de referência.

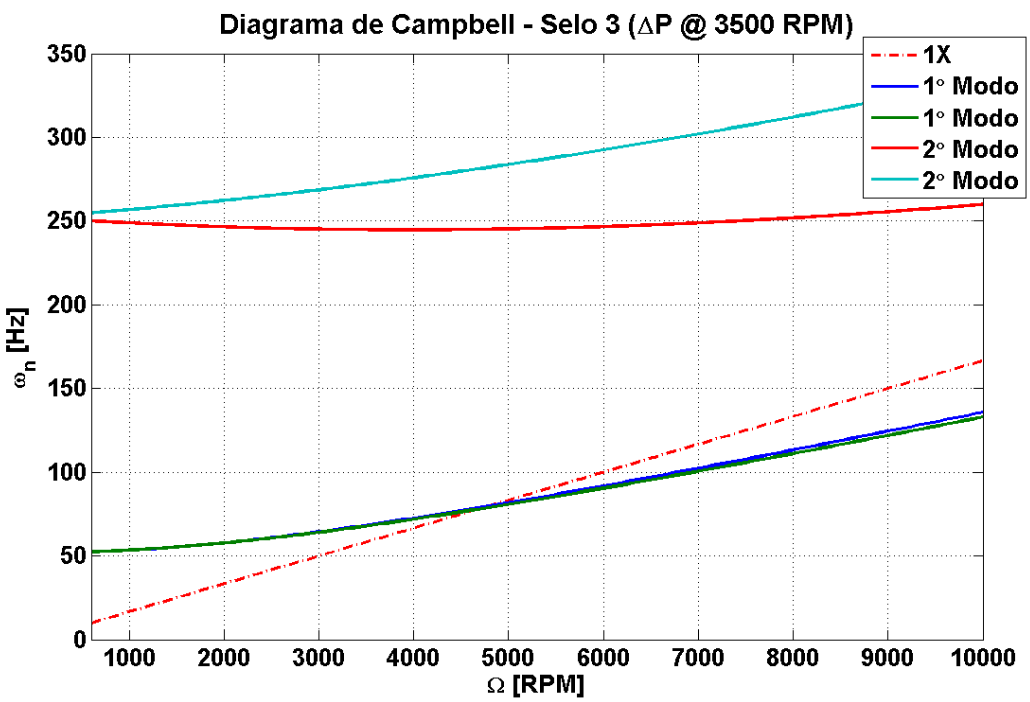


Figura 43 – Diagrama de Campbell – Selo 3

A queda no nível de rigidez, refletida na sucessiva diminuição da primeira frequência natural dos sistemas com os selos 1 a 4, também afeta o limiar de estabilidade, previsto nos gráficos de decremento logarítmico. As Figuras 44 e 46 mostram que o limiar de estabilidade para o Selo 3 encontra-se na velocidade de 6540 RPM e, para o Selo 4, o limiar encontra-se em 5880 RPM. Observa-se que o aumento de Ω_{REF}, relacionado ao nível de rigidez do selo adicionado ao sistema, resulta na diminuição do limiar de estabilidade do sistema,

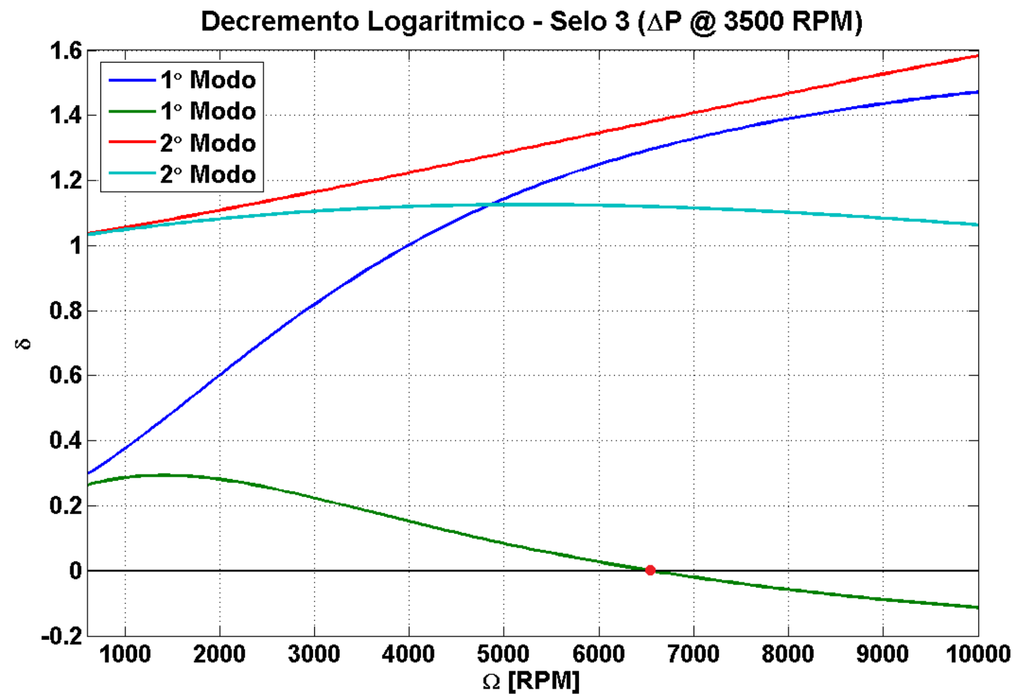


Figura 44 – Decremento Logarítmico – Selo 3

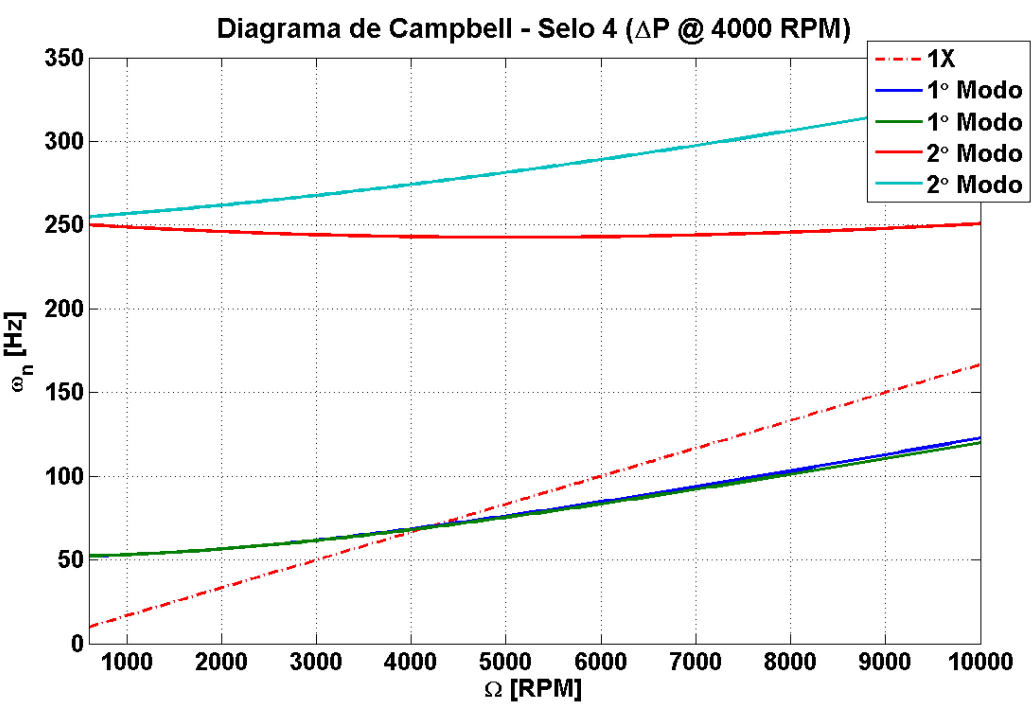


Figura 45 – Diagrama de Campbell – Selo 4

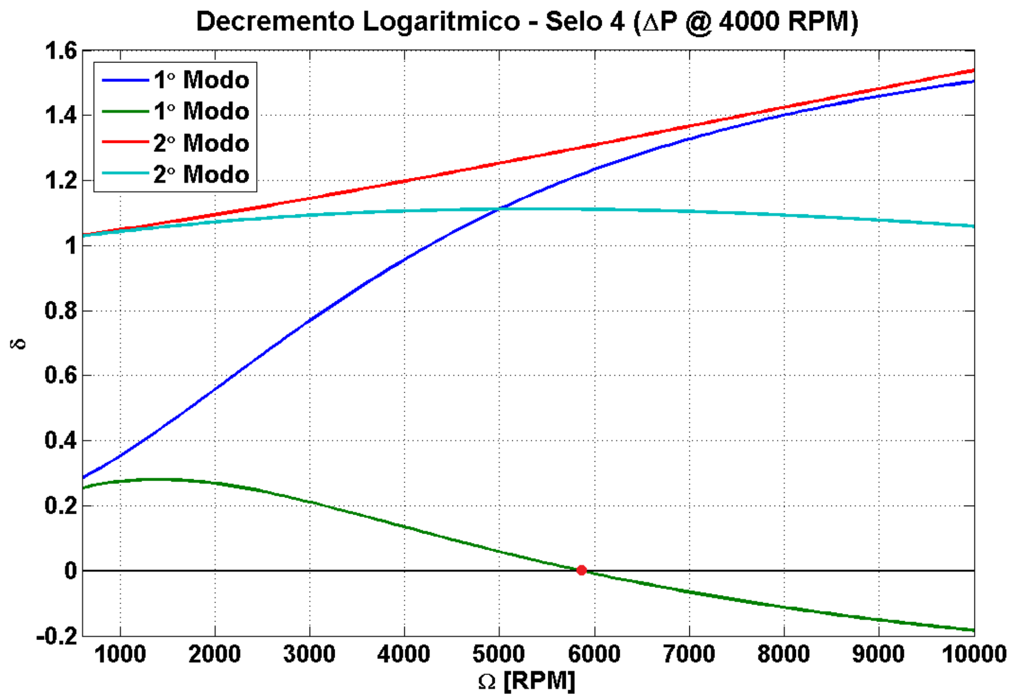


Figura 46 – Decremento Logarítmico – Selo 4

Por fim, a Tabela 6 resume os dados relevantes encontrados nas análises anteriores para as quatro configurações de selos. Os selos, ao contrário dos mancais, influenciam o primeiro e segundo modos naturais do eixo, alterando o nível de rigidez e de amortecimento destes, afetando, também, a frequência natural do sistema.

Tabela 6 – Resumo das Análises dos Selos

Análise	**ω_n (RPM)**	**Ω_{inst} (RPM)**	**Ω_{inst}/ω_n**
Selo 1	–	Estável	–
Selo 2	6000	8460	1,410
Selo 3	4650	6540	1,406
Selo 4	4140	5880	1,420

A Tabela 6 também permite visualizar a razão entre a velocidade do limiar de estabilidade pela frequência natural. Observa-se que esta razão é muito próxima entre os selos instáveis analisados e não é influenciada pela variação no nível de rigidez causada pelo selo ao sistema.

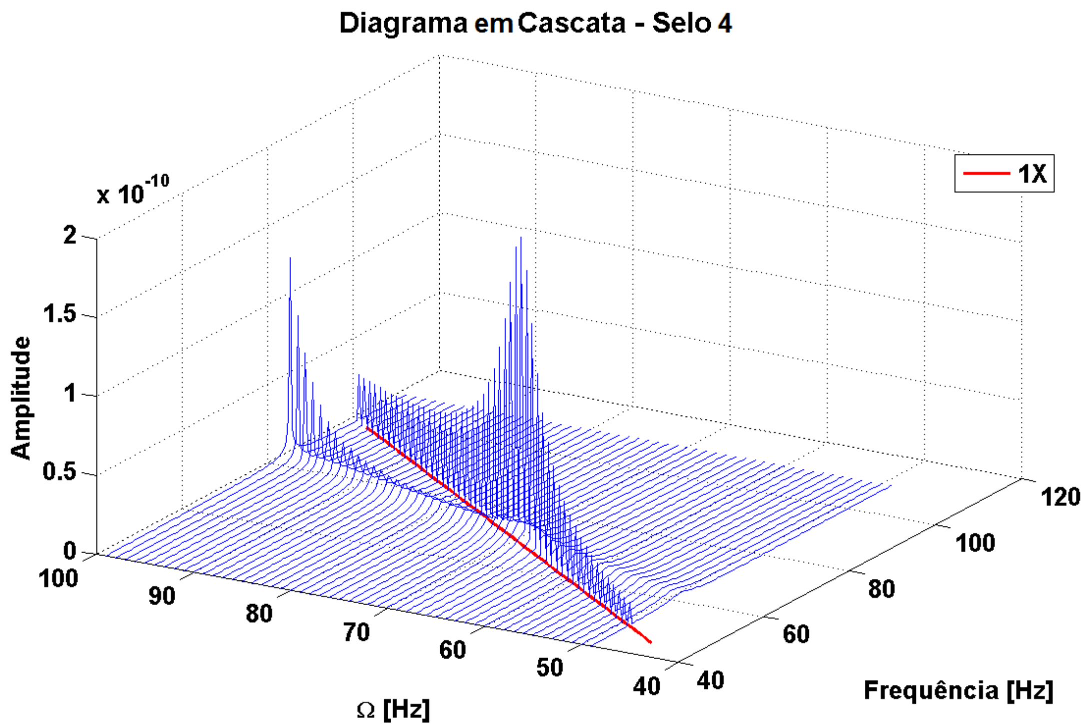


Figura 47 – Diagrama em Cascata – Selo 4

Por fim, apresenta-se o diagrama em cascata do rotor simulado com o Selo 4, pois sua frequência natural é a mais baixa dentre os selos analisados. Observam-se as frequências síncronas, características da resposta ao desbalanceamento, além de uma frequência assíncrona. Similarmente ao ocorrido na análise do mancal cilíndrico, sabe-se que não existe força excitadora externa com frequência igual às assíncronas observadas, portanto tais frequências são resultado da influência dos selos na dinâmica do sistema.

Ao contrário do visualizado para os mancais cilíndricos, as vibrações assíncronas são constituídas de duas regiões distintas: a primeira com amplitude menor do que as amplitudes causadas pela resposta ao desbalanceamento, e a segunda com amplitudes maiores. A partir de 95 Hz, as vibrações subsíncronas superam a amplitude das síncronas, levando o sistema à instabilidade, cujo limiar encontra-se à velocidade de 98 Hz (5880 RPM). Observa-se também que as frequências assíncronas causadas pelo selo não seguem a mesma relação de proporcionalidade com a velocidade de rotação observada nos mancais cilíndricos.

4.3. Amortecimento Interno

As análises da influência do amortecimento interno na dinâmica do eixo são realizadas com base no nível de amortecimento externo equivalente observado no eixo, suportado por mancais rígidos. Conforme detalhado na Seção 3.4, o amortecimento interno foi adicionado como um dado de entrada no modelo de elementos finitos do eixo. Embora haja um ganho na flexibilidade da avaliação de várias intensidades de amortecimento interno, perde-se no processo necessário para a obtenção de um nível de referência, tal que influencie a dinâmica do rotor.

Desse modo, deve-se determinar o valor do amortecimento externo equivalente do eixo, para estabelecer-se uma referência nas análises de amortecimento interno. O valor obtido nesse processo é uma aproximação, feita com base na observação de vários níveis de amortecimento interno no limiar de estabilidade do rotor. O processo de determinação do valor equivalente de amortecimento externo é detalhado no Apêndice A. Obtido o valor equivalente de amortecimento externo, procede-se às análises da influência de três níveis de amortecimento interno.

A Figura 48 mostra o diagrama de Campbell para o eixo com amortecimento interno igual ao amortecimento externo equivalente. Observa-se que a frequência natural encontra-se em 3120 RPM, próximo ao determinado para o rotor com mancais rígidos. Também semelhantes são os comportamentos das frequências dos modos naturais. Segundo as teorias das Seções 3.4 e 3.5, isso era esperado, pois o amortecimento interno causa uma defasagem angular na linha neutra de tensão, não exercendo significativa influência nas primeiras e segundas frequências naturais do eixo. Na modelagem matemática, isso se reflete na componente puramente instabilizadora da rigidez adicionada pelo amortecimento.

O gráfico do decremento logarítmico encontra-se na Figura 49. A influência do amortecimento interno é claramente observada na análise deste gráfico. Os decrementos correspondentes a ambos os modos são alterados, entretanto o primeiro modo sofre alterações significativas, levando o sistema à instabilidade. O limiar de estabilidade encontra-se na velocidade de 6240 RPM, exatamente no dobro da primeira frequência natural, como previsto pela Equação 49.

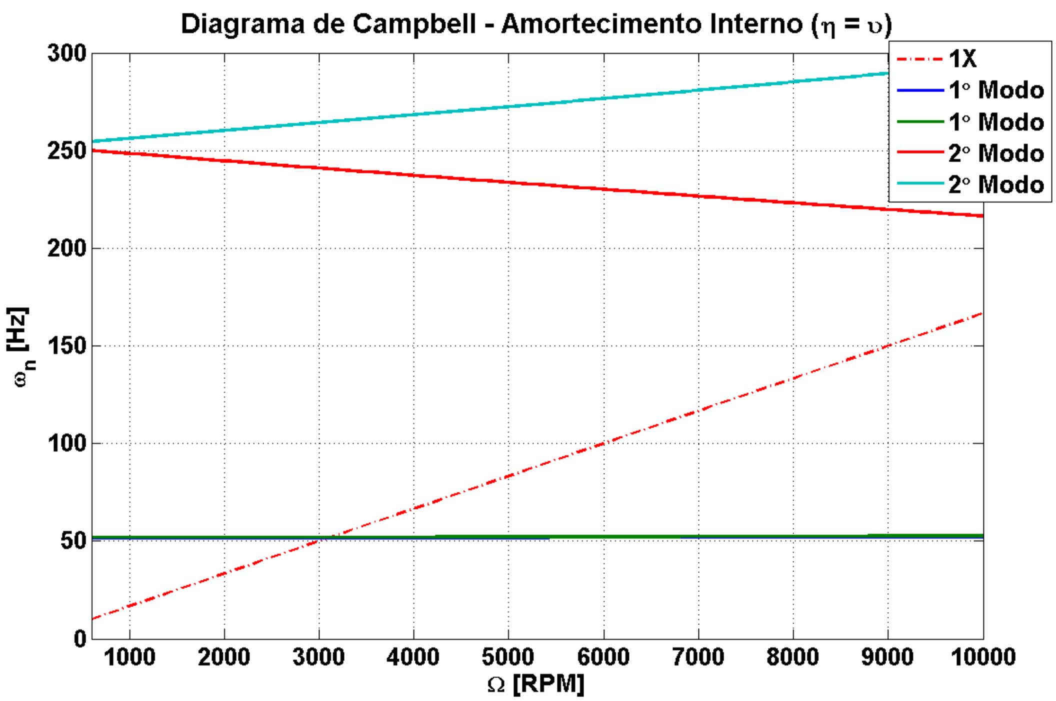


Figura 48 – Diagrama de Campbell – Amortecimento Interno (η = υ)

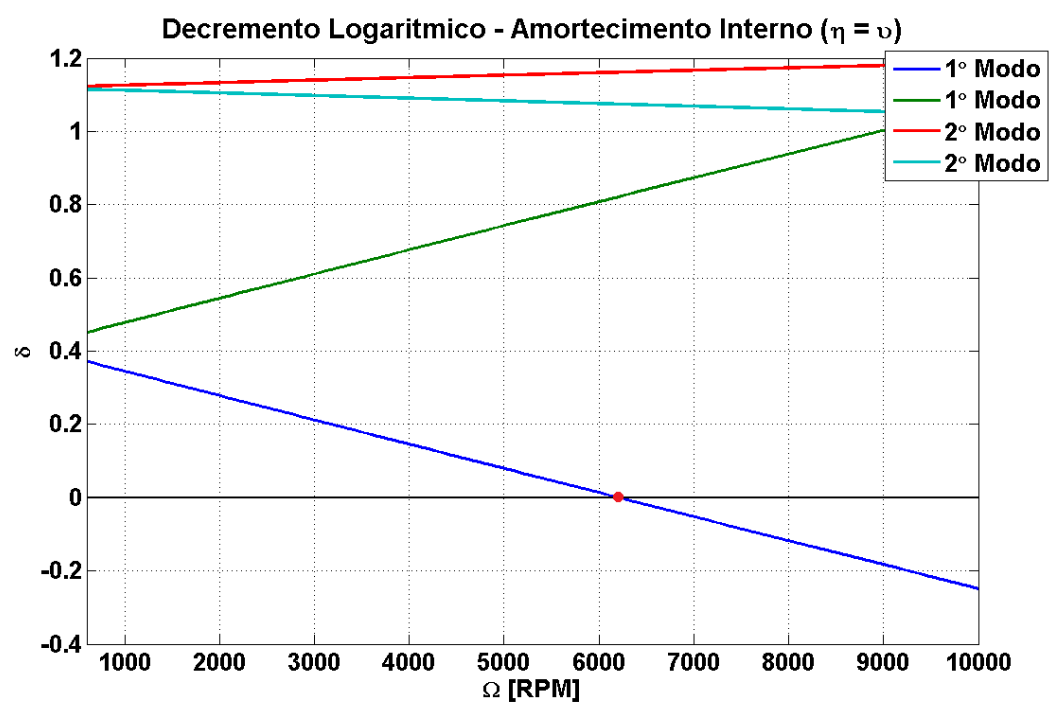


Figura 49 – Decremento Logarítmico – Amortecimento Interno (η = υ)

Ainda analisando a Figura 49, as curvas de precessões direta e retrógrada do primeiro modo possuem um comportamento linear com o aumento da velocidade de rotação. A teoria exposta na Seção 3.4 mostra que a rigidez causada pelo amortecimento interno é proporcional à velocidade de rotação do eixo. Portanto, o comportamento observado para o decremento logarítmico é compatível com o esperado.

As Figuras 50 a 53 mostram os dois outros casos simulados, com o amortecimento interno sendo igual à metade do externo (Figuras 50 e 51) e igual ao dobro do externo (Figuras 52 e 53). Novamente observa-se baixo efeito do amortecimento interno nos diagramas de Campbell (Figuras 50 e 52).

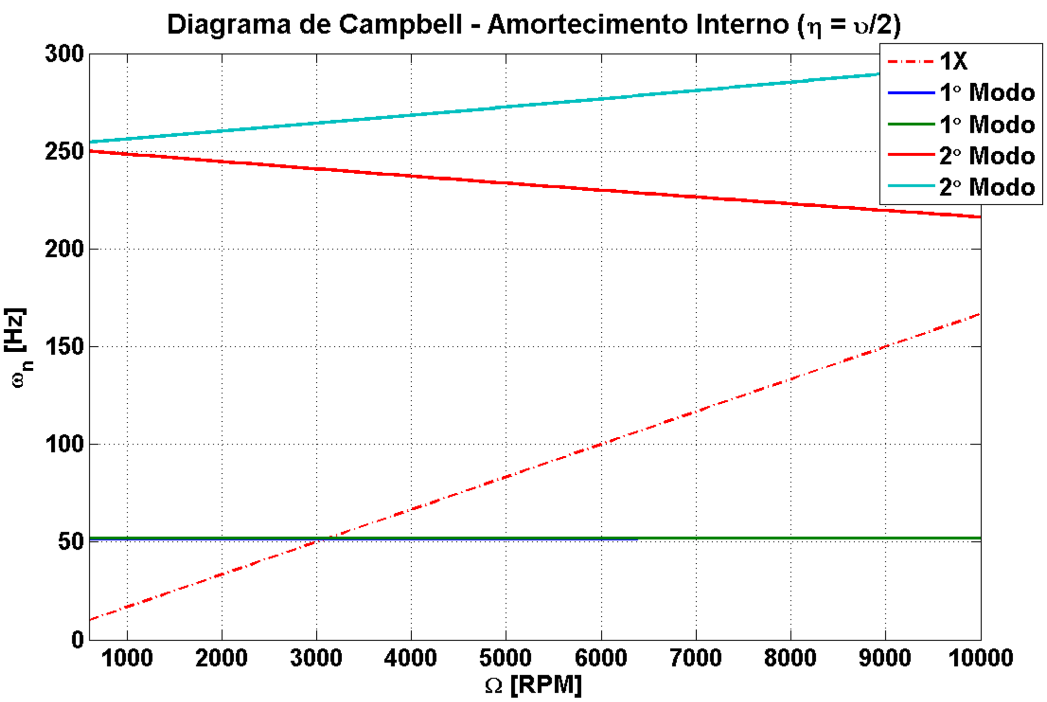


Figura 50 – Diagrama de Campbell – Amortecimento Interno ($\eta = \upsilon/2$)

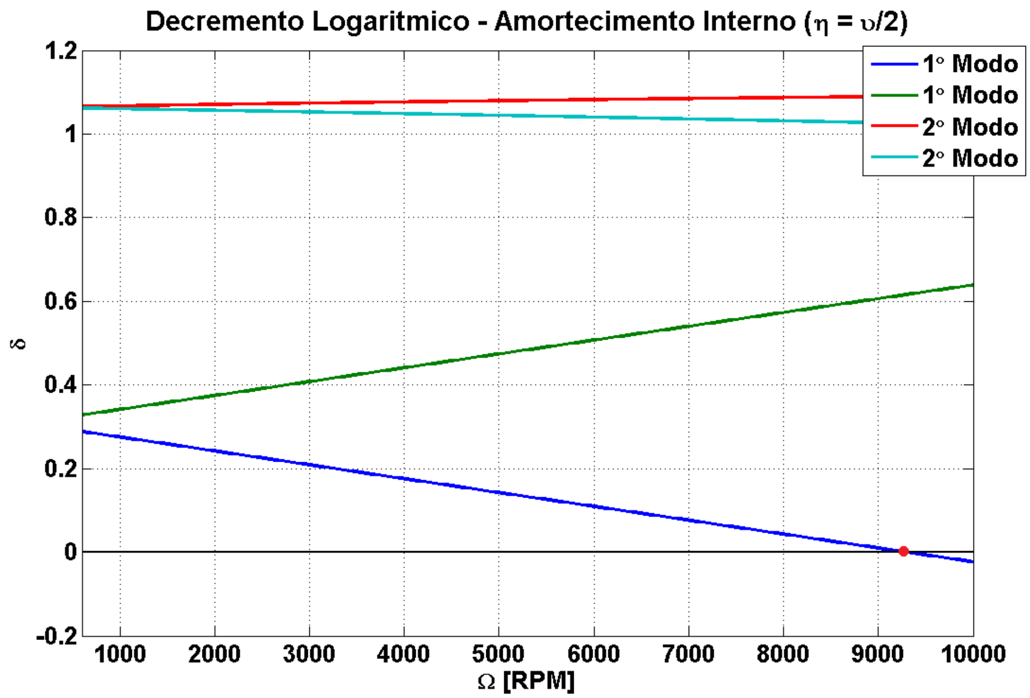


Figura 51 – Decremento Logarítmico – Amortecimento Interno ($\eta = \upsilon/2$)

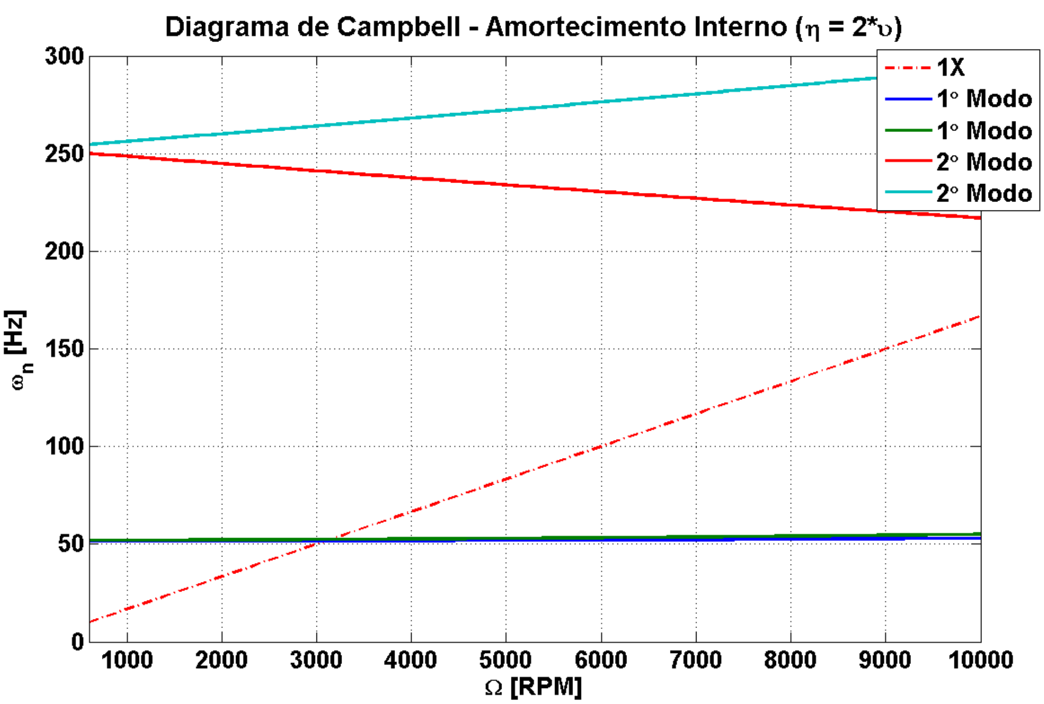


Figura 52 – Diagrama de Campbell – Amortecimento Interno ($\eta = 2\upsilon$)

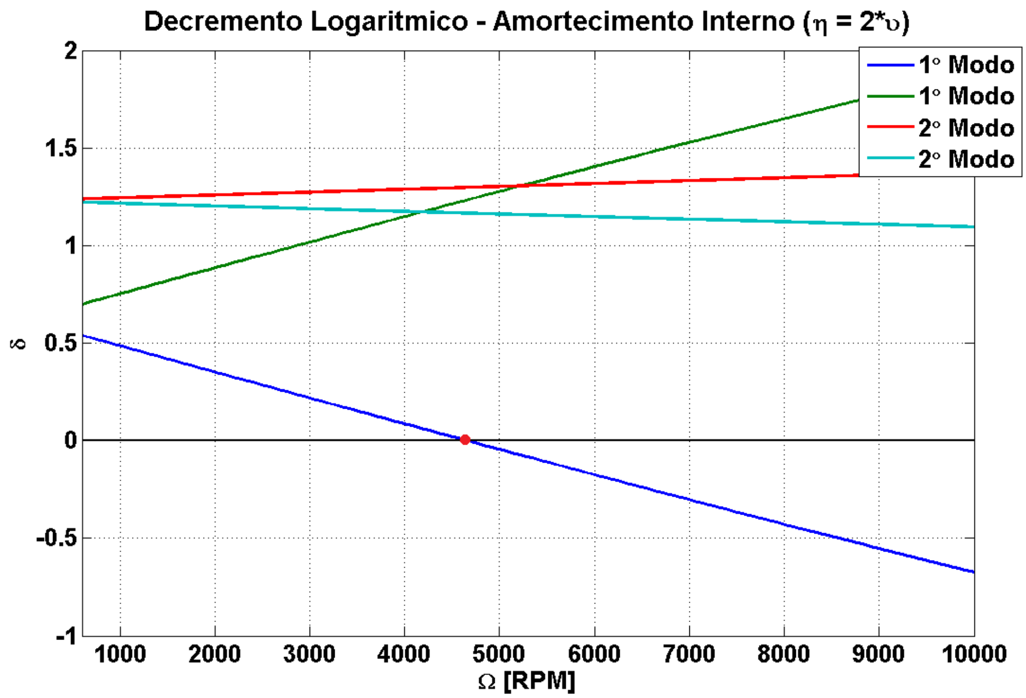


Figura 53 – Decremento Logarítmico – Amortecimento Interno (η = 2υ)

Os gráficos do decremento logarítmico do sistema (Figuras 51 e 53) mostram comportamento análogo ao observado na primeira análise: ambos os modos afetados, com influência maior no primeiro. Uma das direções do primeiro modo têm valores de decremento crescentes, ao passo que a outra decresce até valores negativos, levando o sistema à instabilidade.

Ambos os gráficos do decremento logarítmico preveem limiares de estabilidade distintos, porém compatíveis com o previsto pela Equação 49. O gráfico da Figura 51 tem seu limiar em 9300 RPM, enquanto que a Figura 53 apresenta um limiar de estabilidade na velocidade de 4680 RPM.

A Tabela 7 apresenta um resumo dos limiares de estabilidade encontrados, assim como as frequências naturais observadas. São mostradas, também, as razões do limiar de estabilidade pela frequência natural observadas nas simulações e previstas pela Equação 49. Analisando a Tabela 7, observa-se grande concordância entre os valores previstos e observados nas simulações.

Tabela 7 – Resumo das Análises de Amortecimento Interno

Análise	**ω_n (RPM)**	**Ω_{INS} (RPM)**	**Ω_{INS}/ω_n**	**$(\upsilon+\eta)/\eta$**
$\eta = \upsilon$	3120	6240	2,0	2,0
$\eta = \upsilon/2$	3120	9300	2,98	3,0
$\eta = 2\upsilon$	3120	4680	1,5	1,5

4.4. Combinações de Diferentes Fontes de Instabilidade

A presente seção dedica-se a estudar as combinações entre alguns dos fatores analisados anteriormente. As seções anteriores dedicaram-se em analisar isoladamente cada elemento e sua influência na dinâmica do eixo. Tais informações são de grande importância na avaliação dos efeitos combinados, facilitando a determinação de como tais elementos interagem entre si e afetam a dinâmica do sistema.

Esta seção é dividida em três partes para facilitar as comparações dos casos analisados. Na primeira seção, são estudados os efeitos combinados entre os mancais e os selos, para quatro arranjos distintos. A segunda seção dedica-se a analisar as interações entre os mancais e o amortecimento interno, para três cenários diferentes. A última seção combina todos os efeitos analisados em três casos críticos, de modo a simular um caso mais próximo da realidade. Paralelamente à avaliação das interações e influências dos elementos analisados, é feita a comparação entre os modelos de coeficientes do mancal segmentado, visando determinar as diferenças no limiar de estabilidade determinado pelo modelo reduzido e pelo modelo completo.

4.4.1. Mancais e Selos

O estudo dos efeitos combinados de um mancal e um selo, em um mesmo rotor, é feito por meio de quatro análises distintas. A primeira leva em consideração o mancal cilíndrico utilizado na Seção 4.1.1, cujos dados encontram-se na Tabela 2. Simula-se este mancal com um selo com comportamento instável, de modo a observar as interações entre estes componentes. O selo escolhido para a análise é o Selo 4, detalhado na Tabela 5. A segunda simulação é feita com o mesmo mancal cilíndrico, combinado com um selo estável, o Selo 1, também descrito na Tabela 5. Nestas análises deseja-se visualizar a interação da instabilidade resultante do selo com a instabilidade fluido-induzida do mancal cilíndrico, na primeira combinação. O segundo arranjo visa avaliar se a estabilidade causada pelo selo é sobreposta pelos efeitos do mancal cilíndrico.

As duas análises finais combinam o Selo 4, de comportamento instável, com o mancal segmentado utilizado na Seção 4.1.2. Estas análises visam observar a interação de um mancal de estabilidade elevada com um selo com grande efeito instabilizador. Além disso, serão simuladas ambas as modelagens de coeficientes para o mancal segmentado, de modo a comparar as informações provenientes do modelo de coeficientes reduzidos e completos.

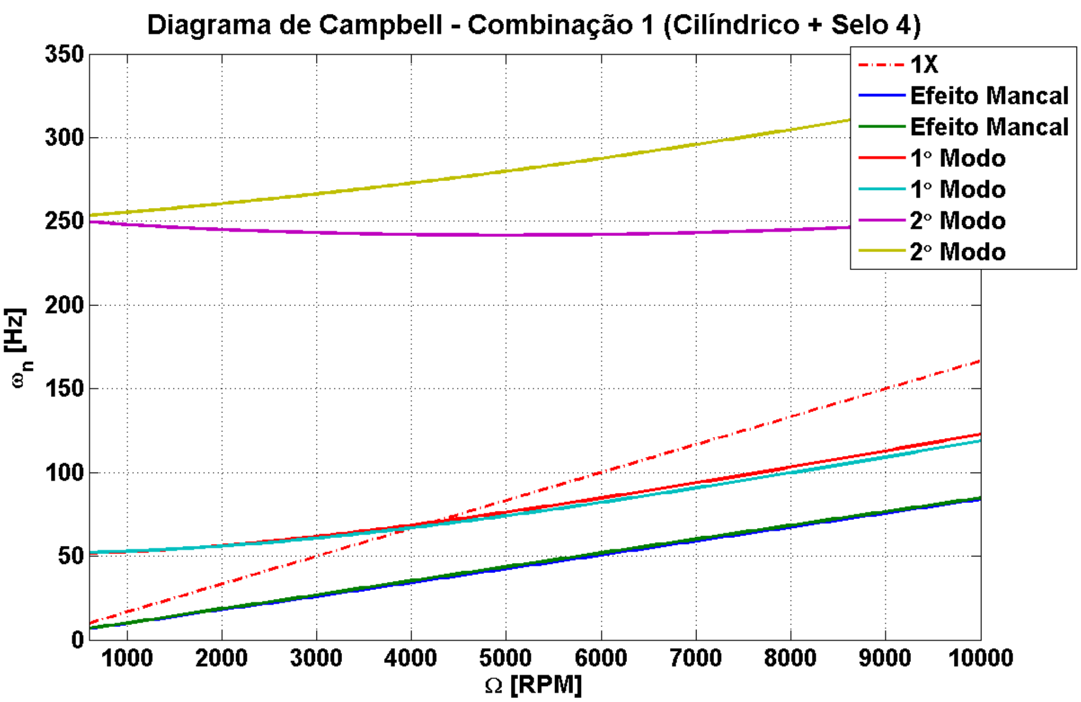


Figura 54 – Diagrama de Campbell – Combinação 1

A primeira combinação analisada encontra-se na Figura 54. O cruzamento do primeiro modo do eixo com a linha de rotações indica que a primeira frequência natural encontra-se em 4020 RPM. Observa-se que ocorreu um enrijecimento em ambos os modos naturais mostrados na Figura 54. Analisando os comportamentos isolados do Selo 4 e do mancal cilíndrico, pode-se concluir que o enrijecimento do sistema se deve à adição do selo. Ambos os modos da Figura 54 são similares aos observados na análise isolada do Selo 4 e a frequência natural encontra-se próxima ao valor determinado por esta análise. Os mancais alteram o diagrama de Campbell apenas com o surgimento das curvas relativas às suas frequências. Observa-se que não houve alteração nestas frequências, em comparação com o mancal cilíndrico isolado, conforme esperado, pois estas curvas são características específicas de cada mancal.

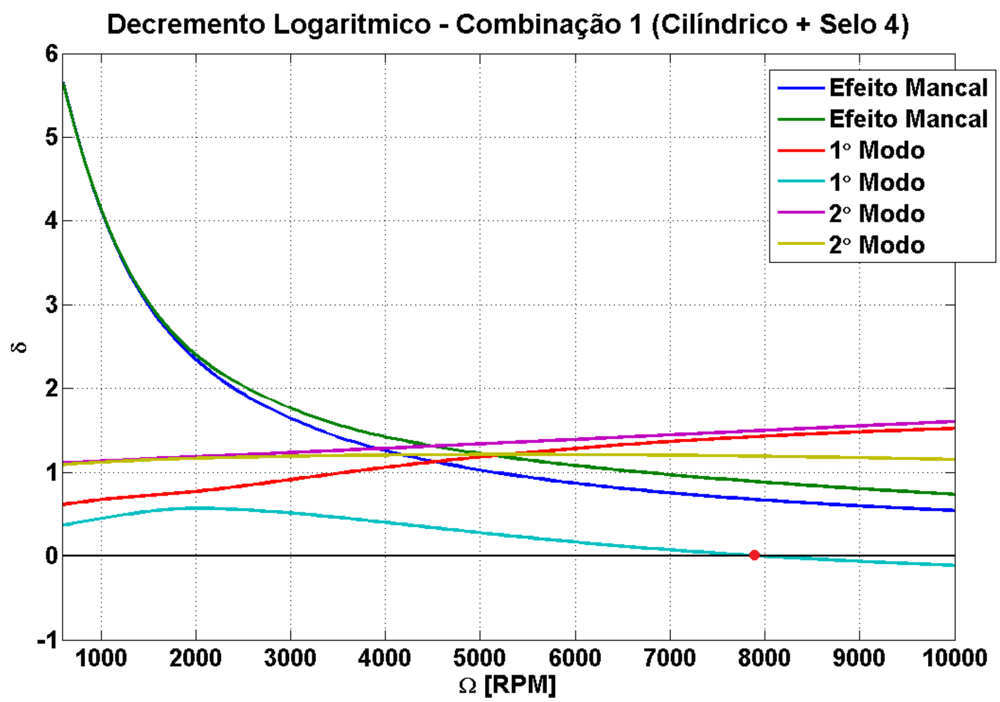


Figura 55 – Decremento Logarítmico – Combinação 1

A Figura 55 mostra o gráfico do decremento logarítmico da Combinação 1. Nota-se que as curvas referentes aos efeitos dos mancais comportam-se como na análise do mancal cilíndrico, na Figura 20, com uma abrupta queda na sua magnitude no início da faixa de velocidades estudada, até a estabilização dos valores ao fim da faixa. Entretanto, a instabilidade no caso do mancal isolado era induzida por estes modos, o que não é observado na análise da Figura 55.

Ambos os modos naturais do eixo sofrem alterações compatíveis com a adição do selo no eixo, com a instabilidade ocorrendo em uma direção precessional do primeiro modo, na velocidade de 7980 RPM. O modo instável é o mesmo observado na análise isolada do Selo 4, portanto pode-se concluir que o sistema combinado teve sua instabilidade causada pelos efeitos do selo na dinâmica do rotor. Entretanto, observam-se diferenças nos valores dos decrementos do primeiro modo, ao comparar a Figura 55 com a Figura 46, sendo adequado afirmar que a adição do mancal cilíndrico alterou o comportamento do decremento dos modos naturais do rotor. A Tabela 8 mostra os resultados encontrados para elementos isolados e a combinação destes.

Tabela 8 – Comparação entre as análises isoladas e a Combinação 1

Análise	**ω_n (RPM)**	**Ω_{inst} (RPM)**	**Ω_{inst}/ω_n**
Cilíndrico	3060	4740	1,549
Selo 4	4140	5880	1,420
Combinação 1	4020	7980	1,985

Analisando a Tabela 8, observa-se que a Combinação 1 teve seu limiar de estabilidade aumentado, em relação ao limiar dos componentes sozinhos. O mancal cilíndrico tem seus efeitos de instabilidade suprimidos pelo aumento de rigidez do selo, pois as curvas do decremento dos mancais não assumiram valores negativos. Entretanto, o selo também tem sua influência instabilizadora afetada pelo mancal cilíndrico, notada pela alteração da razão Ω_{inst}/ω_n. Conclui-se que o amortecimento e a rigidez adicionados ao sistema pelo mancal cilíndrico contrabalançaram os efeitos desestabilizadores do selo, aumentando o limiar de estabilidade do eixo, não evitando, porém, a instabilidade.

A segunda análise desta seção consiste na combinação do mancal cilíndrico com o Selo 1, de comportamento estável. O diagrama de Campbell encontra-se na Figura 56, no qual se observa que, assim como ocorrido na análise isolada do mesmo selo, a rigidez adicionada por este é muito elevada, a ponto de não ser possível determinar a primeira velocidade crítica do sistema. Nota-se que as curvas das frequências dos mancais mantêm-se iguais às observadas isoladamente, como esperado.

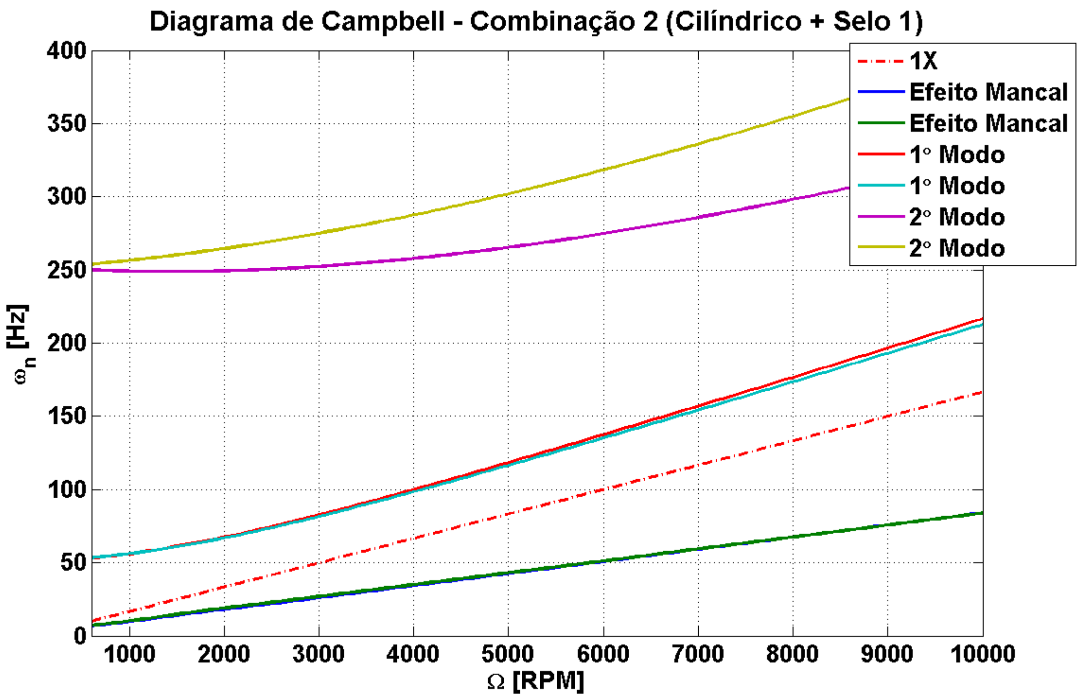


Figura 56 – Diagrama de Campbell – Combinação 2

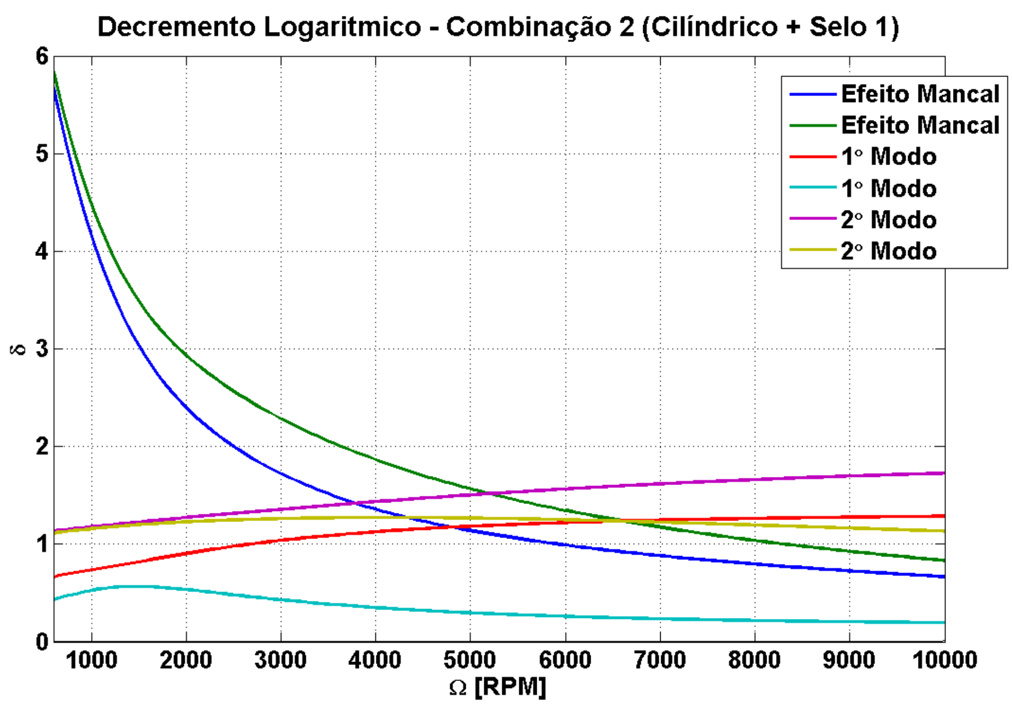


Figura 57 – Decremento Logarítmico – Combinação 2

O decremento logarítmico mostrado na Figura 57 apresenta comportamento similar ao observado na Figura 55. Observa-se que as curvas do decremento do mancal apresentam o comportamento característico destes elementos: queda no início da faixa e estabilização ao fim. A rigidez adicionada pelo selo ao sistema é suficiente para elevar o decremento dos modos relativos aos mancais, evitando, assim, a instabilidade por influencia deste componente, na faixa de velocidades mostrada. Outra semelhança é a influência da rigidez do selo na magnitude do decremento dos dois modos naturais do eixo. Não se observam decrementos negativos, portanto a Combinação 2 mantém a estabilidade observada na análise isolada do Selo 1.

Observa-se em ambos os casos apresentados que o selo preserva sua característica de elevar a rigidez do sistema, mesmo quando influenciado por um mancal cilíndrico. Este, por sua vez, é fortemente afetado pela presença do selo, que altera as suas interações com o eixo a ponto de evitar a instabilidade por influência do mancal. Os dois próximos casos utilizam o Selo 4 com o mancal segmentado, para fazer a comparação dos modelos de coeficientes existentes.

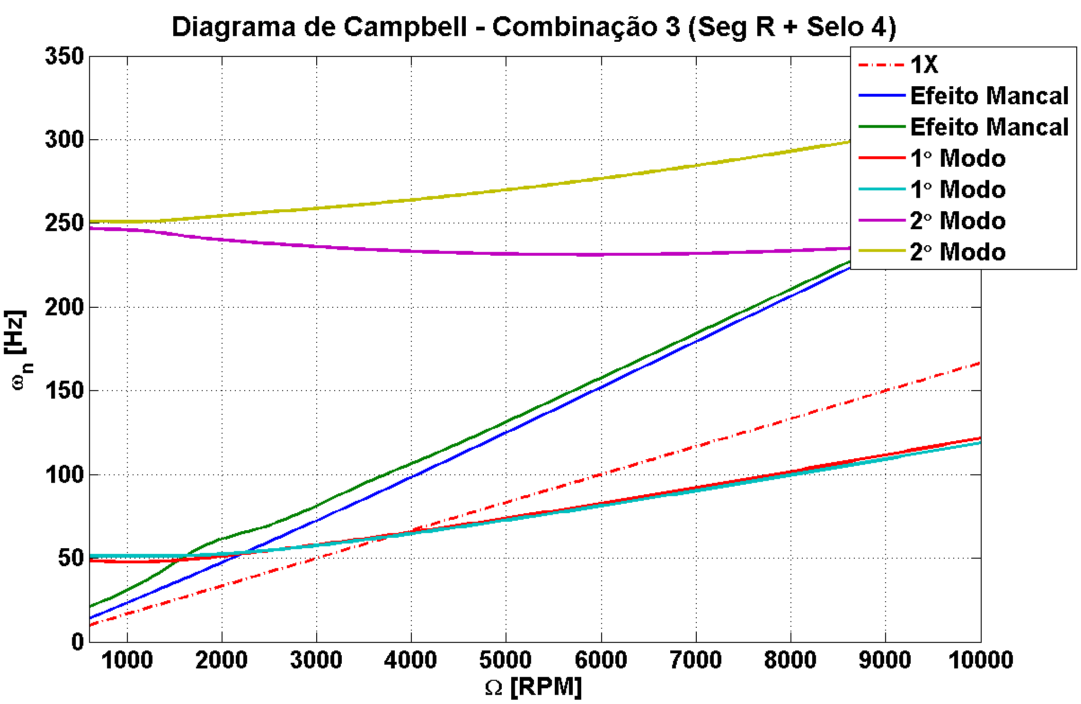


Figura 58 – Diagrama de Campbell – Combinação 3

A Figura 58 apresenta o diagrama de Campbell da Combinação 3. Observa-se que o diagrama desta combinação é, aproximadamente, uma composição dos diagramas dos efeitos isolados do Selo 4 e do mancal segmentado de coeficientes reduzidos. Os modos são enrijecidos e têm características similares aos observados na análise do Selo 4; as curvas dos efeitos dos mancais também são iguais às obtidas para o mancal segmentado. O cruzamento da linha de rotações indica a primeira velocidade crítica do sistema: 3780 RPM.

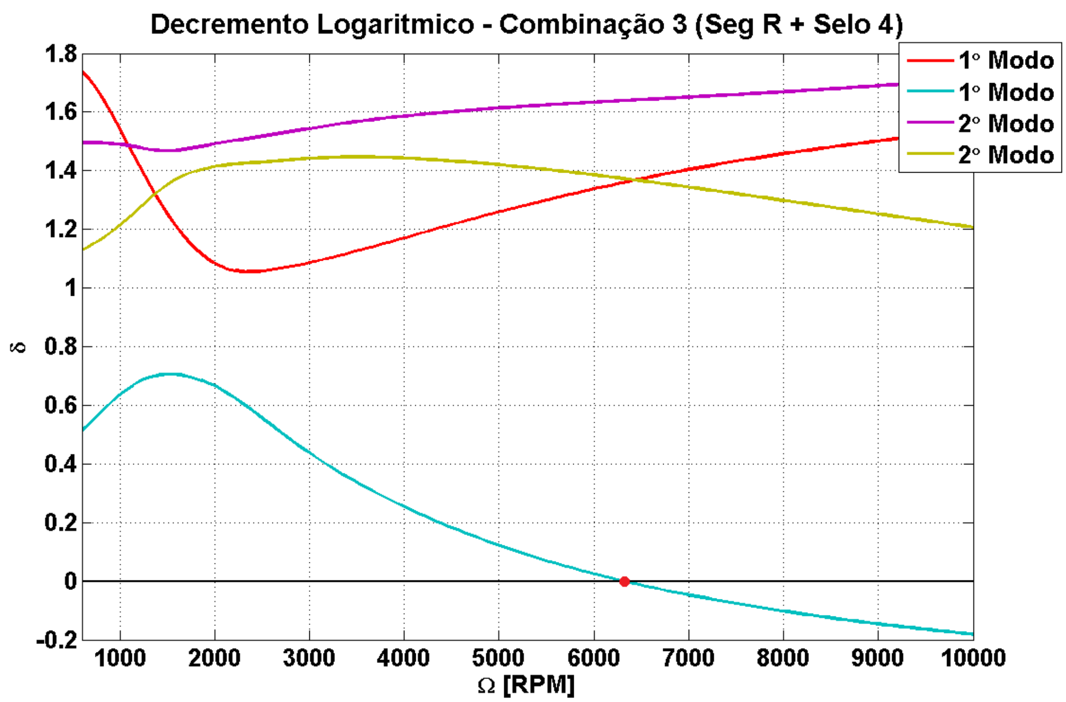


Figura 59 – Decremento Logarítmico – Combinação 3

A Figura 59 apresenta alterações profundas nos valores observados para o decremento, em relação aos obtidos com os elementos isolados. Em comparação com o Selo 4, todos os valores dos decrementos foram aumentados, sendo que as duas direções precessionais do primeiro modo são as de maior mudança. O mancal segmentado isolado não previu um comportamento instável, portanto pode-se afirmar que o selo influencia a dinâmica do conjunto suficientemente para levar à instabilização deste, na velocidade de 6300 RPM.

Retomando as análises isoladas, sabe-se que o primeiro modo apresenta as duas curvas das precessões com decremento decrescente, quando simulado somente com mancais segmentados. Quando analisado somente com o Selo 4, as precessões do primeiro modo tem comportamentos opostos: uma direção possui valores crescentes de decremento, ao passo que a outra direção decresce até a instabilidade.

O decremento logarítmico da combinação apresenta um comportamento misto, com estes valores sendo uma conjugação dos decrementos logarítmicos encontrados nas análises isoladas. Estas interações ocorrem, pois a grandeza do decremento observado no mancal segmentado isolado é próxima da observada para o Selo 4 isolado, ao contrário dos níveis envolvidos no mancal cilíndrico. As curvas dos efeitos dos mancais conservam as características observadas na análise isolada, pois ainda constituem modos criticamente amortecidos, não sendo apresentados no gráfico.

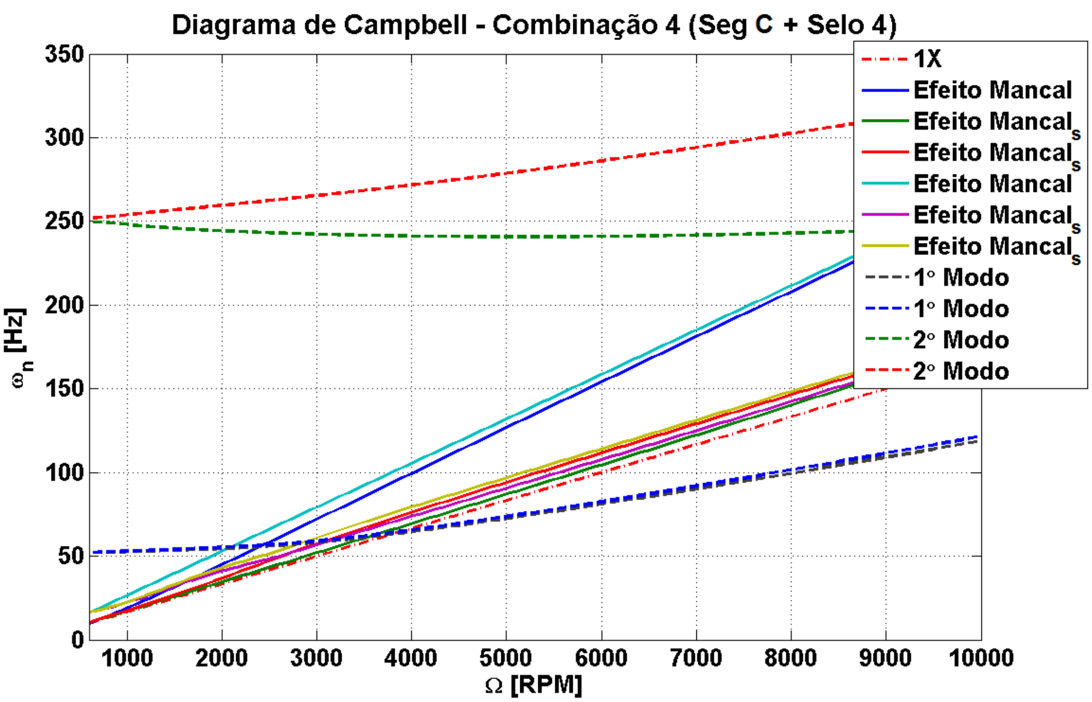


Figura 60 – Diagrama de Campbell – Combinação 4

A Combinação 4 consiste na mesma simulação realizada anteriormente, porém é utilizado o modelo completo de coeficientes do mancal segmentado. A Figura 60 apresenta o diagrama de

Campbell dessa configuração. No diagrama, observa-se o aparecimento de quatro curvas novas, de efeito do mancal, associados aos graus de liberdade do segmento. Tal como observado para o modelo reduzido, na Figura 58, o diagrama de Campbell pode ser encarado como uma combinação dos diagramas isolados dos elementos. A primeira velocidade crítica do sistema encontra-se em 3780 RPM, não ocorrendo diferença entre esta e a determinada pelo modelo de coeficientes reduzidos.

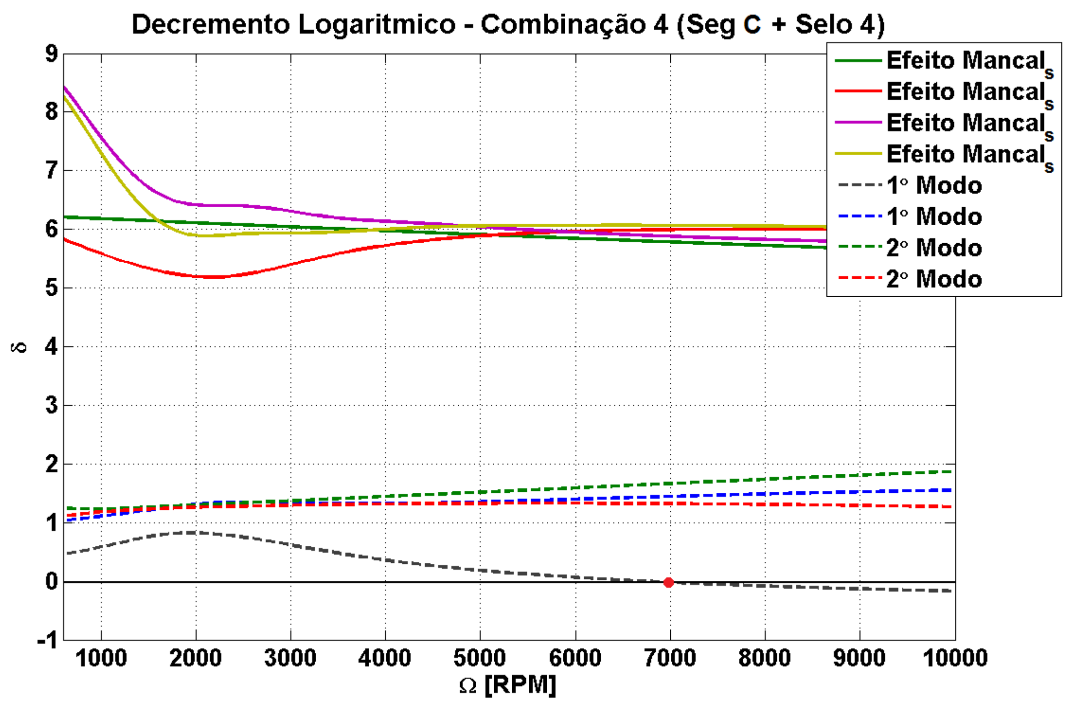


Figura 61 – Decremento Logarítmico – Combinação 4

O gráfico do decremento logarítmico, visualizado na Figura 61, mostra as quatro curvas relacionadas ao movimento dos segmentos, como analisado na Seção 4.1.2. Novamente, as curvas dos efeitos de translação dos mancais estão ausentes por tratar-se de modos criticamente amortecidos. A visualização do comportamento dos dois primeiros modos é dificultada por causa da escala da figura, porém o comportamento das curvas é análogo ao observado no modelo reduzido. Entretanto, os valores apresentados têm diferenças entre si, pois o limiar de estabilidade determinado pelo modelo de coeficientes completos é diferente do obtido pelo modelo reduzido. Enquanto o modelo reduzido estima o limiar em 6300 RPM, o modelo completo indica que o sistema se torna instável a 6720 RPM. Desse modo, observa-se que o modelo de coeficientes completos prevê um limiar mais elevado do que o limiar previsto pelo modelo reduzido.

A diferença entre os modelos de coeficientes completos e reduzidos, na avaliação do limiar de estabilidade, encontra-se, respectivamente, na presença ou ausência das curvas relativas aos efeitos da rotação dos segmentos do mancal. O modelo de coeficientes reduzidos assume que os segmentos dos mancais vibram de maneira síncrona com a velocidade de rotação, viabilizando a redução da sua influência nas coordenadas translacionais do mancal. Neste processo, devido à supressão dos graus de liberdade dos segmentos, o comportamento dinâmico do sistema e a previsão do limiar de estabilidade de um rotor instável são alterados. A Tabela 9 mostra a comparação dos casos isolados do mancal segmentado e do Selo 4 com a combinação destes elementos. Também é mostrada a diferença entre as análises realizadas por meio dos modelos reduzido e completo.

Tabela 9 – Comparação entre análises isoladas e Combinações 3 e 4

Análise	**ω_n (RPM)**	**Ω_{inst} (RPM)**	**Ω_{inst}/ω_n**
Mancal Segmentado	2700	Estável	–
Selo 4	4140	5880	1,420
C3 – Seg. Reduzido e Selo 4	3780	6300	1,667
C4 – Seg. Completo e Selo 4	3780	6720	1,778

4.4.2. Mancais e Amortecimento Interno

Nesta seção comparam-se as análises considerando as interações entre os mancais e o amortecimento interno do eixo. Serão avaliadas três combinações: o primeiro caso é simulado com o mancal cilíndrico, o segundo com o mancal segmentado de coeficientes reduzidos e o terceiro com coeficientes completos. As três análises utilizam o mesmo nível de amortecimento interno, considerado igual ao externo equivalente ($\eta = \upsilon$).

A primeira análise, a Combinação 5, simula o rotor com amortecimento interno, suportado pelos mancais cilíndricos analisados na Seção 4.1.1. O diagrama de Campbell dessa configuração encontra-se na Figura 62. Pode-se notar que este gráfico apresenta o comportamento típico de um eixo com amortecimento interno, no qual as frequências naturais dos modos são pouco afetadas por este efeito, como descrito na Seção 4.3. Portanto, observa-se um comportamento similar ao visto para o mancal cilíndrico isolado, com os modos naturais e as frequências oriundas dos efeitos dos mancais iguais aos observados na análise realizada para o mancal cilíndrico. A primeira velocidade crítica do sistema encontra-se em 3060 RPM, também igual àquela análise.

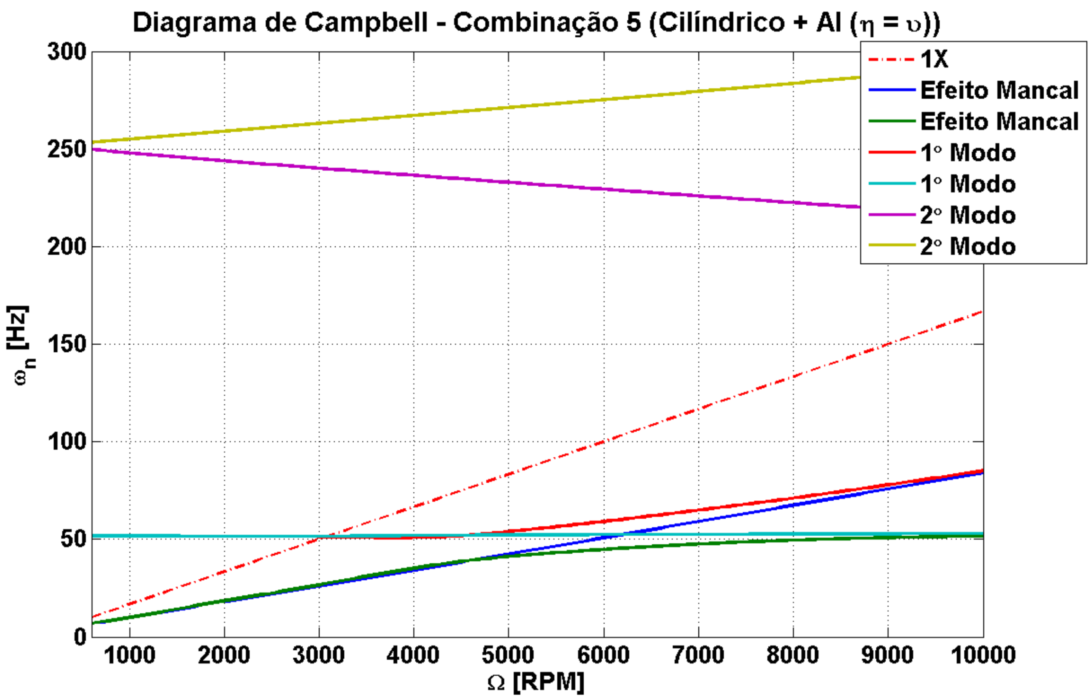


Figura 62 – Diagrama de Campbell – Combinação 5

A Figura 63 mostra o decremento logarítmico para a Combinação 5. Em relação ao gráfico do decremento levando em consideração apenas o amortecimento interno, mostrado na Figura 49, nota-se que houve profundas alterações no seu comportamento. Não se observa mais o comportamento linear na variação do decremento, característico deste efeito no eixo. O limiar de estabilidade também foi drasticamente reduzido, de 6240 RPM para 4500 RPM. A redução, portanto, deve-se à influência do mancal cilíndrico no eixo.

As diferenças entre os valores do decremento do caso isolado do mancal e os observados na Figura 63 são menos pronunciadas: as curvas dos mancais apresentam o comportamento esperado para o mancal adicionado. Entretanto, os modos próprios sofreram alterações, mais evidentes ao se analisar o primeiro modo flexional do eixo. Observa-se que uma das direções precessionais do primeiro modo, representada em azul claro na Figura 63, tem seu valor elevado de $\delta \approx 0{,}4$ no início da faixa de velocidades para $\delta \approx 1{,}2$ ao fim da mesma. No decremento mostrado na Figura 20, referente à análise do mancal, este valor é praticamente constante em $\delta \approx 0{,}4$. Ou seja, o amortecimento interno afeta os modos naturais do rotor, de modo a causar uma diminuição do limiar de estabilidade do sistema, em relação a análise do mancal isolado, de 4740 RPM para 4500 RPM.

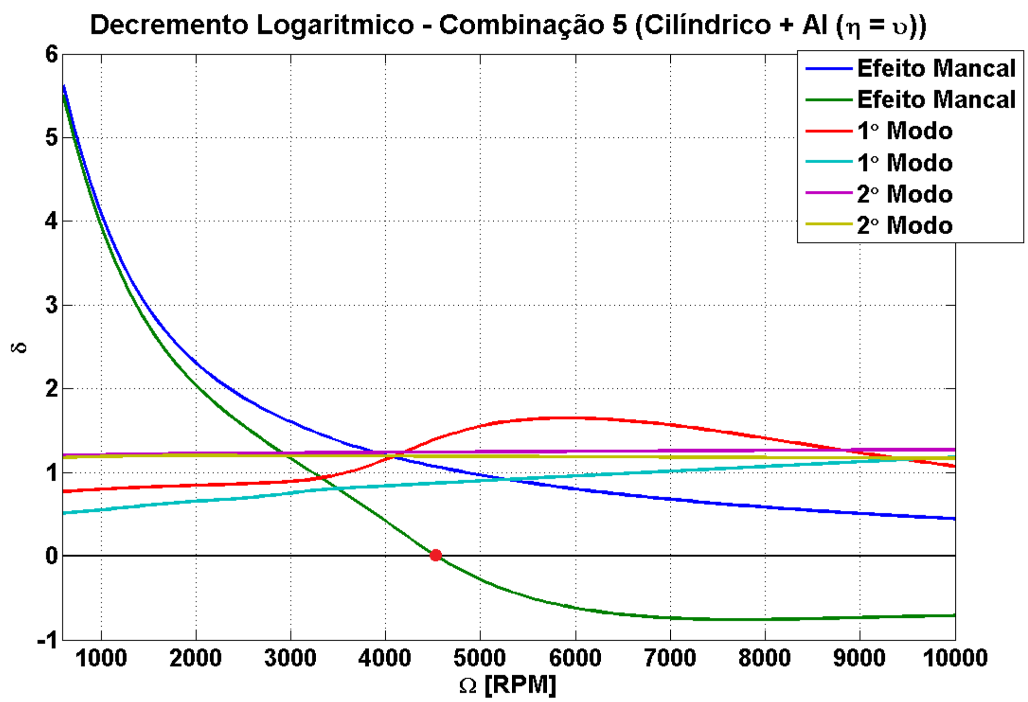


Figura 63 –Decremento Logarítmico – Combinação 5

A Figura 64 apresenta o diagrama de Campbell da Combinação 6, que une o mancal segmentado, modelado com coeficientes reduzidos, com o amortecimento interno igual ao externo equivalente. Observa-se novamente que o amortecimento interno não alterou significativamente as frequências do eixo, resultando em um diagrama com grande semelhança ao observado para o mancal segmentado de coeficientes reduzidos, com as curvas dos efeitos dos mancais sendo iguais em ambos os casos. A primeira frequência natural do sistema encontra-se em 2820 RPM, ligeiramente superior à determinada na análise isolada deste mancal, indicando que o amortecimento interno exerce uma pequena influência nas frequências.

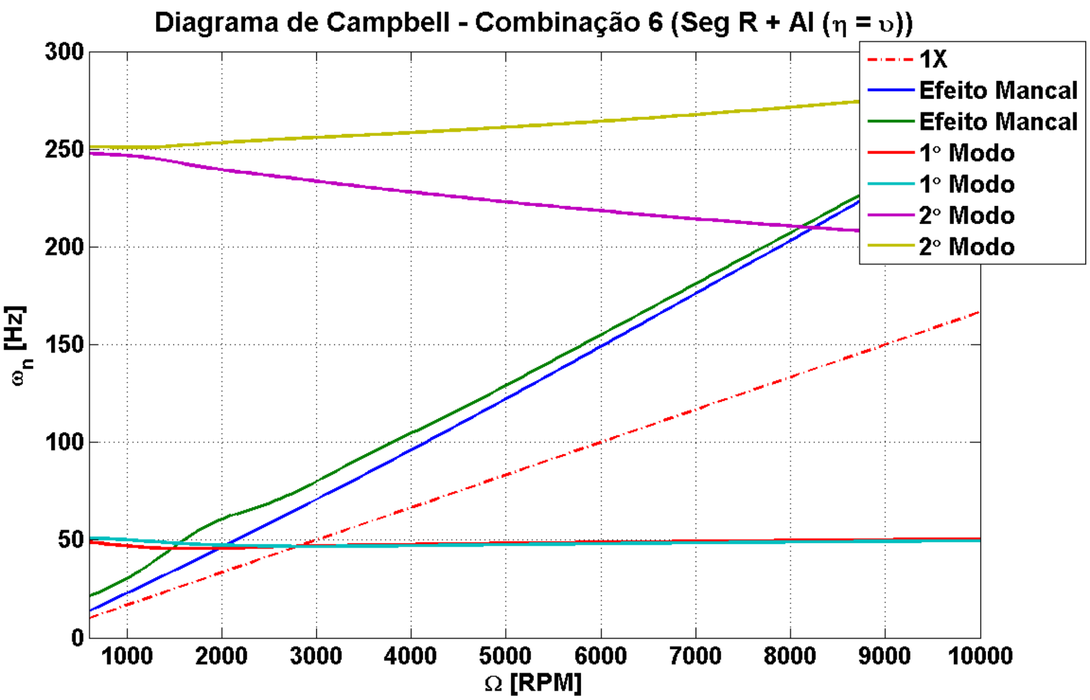


Figura 64 – Diagrama de Campbell – Combinação 6

O decremento logarítmico da Combinação 6 encontra-se na Figura 65. O comportamento das curvas é o mesmo observado na análise da Combinação 5: o nível de amortecimento adicionado pelo amortecimento interno ao sistema é relativamente baixo, se comparado com as variações induzidas pelo mancal segmentado. Isso resulta em um nível de decremento similar ao observado para o mancal segmentado isolado, porém influenciado pelo amortecimento interno.

Observa-se que nesta combinação o eixo não é estável em toda a faixa de velocidades, o limiar de estabilidade encontra-se em 6660 RPM. O valor é superior ao determinado pela análise isolada do amortecimento interno, no qual esta foi estimada em 6240 RPM. Entretanto, a análise isolada do mancal segmentado previu que o sistema é estável em toda a faixa; portanto o amortecimento interno levou o primeiro modo do sistema à instabilidade. Destaca-se ainda que as curvas dos mancais apresentam-se superamortecidas, não sendo exibidas no decremento.

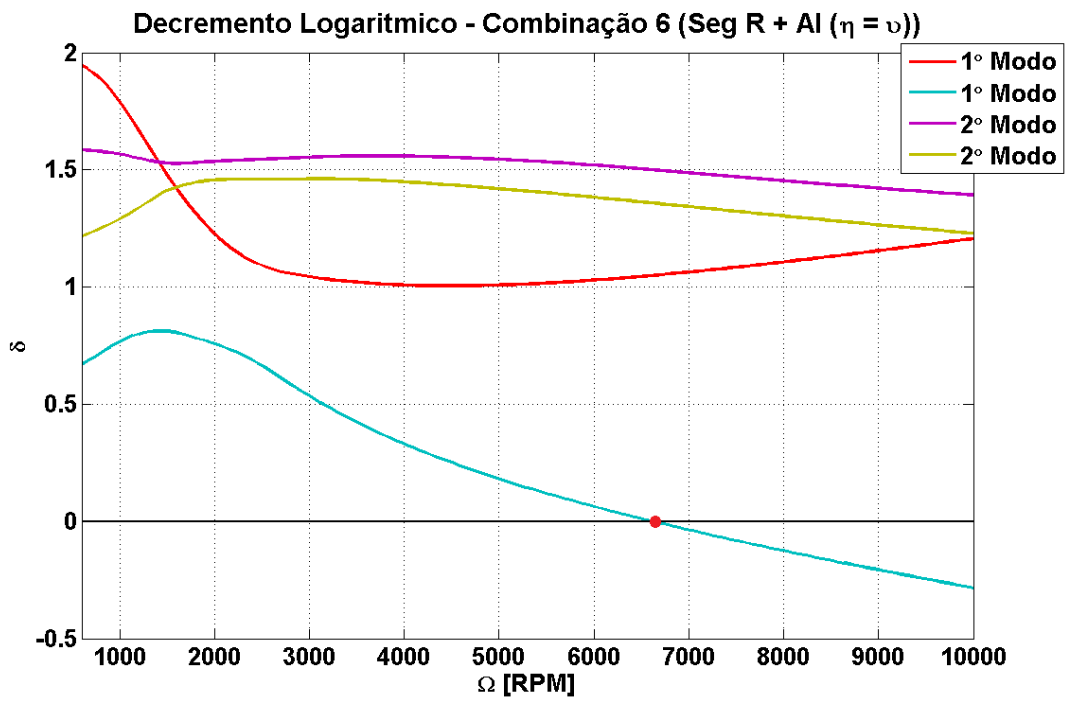


Figura 65 – Decremento Logarítmico – Combinação 6

A Combinação 7 consiste na alteração do modelo de coeficientes para o modelo completo, mantendo-se o amortecimento interno utilizado. A Figura 66 mostra o diagrama de Campbell para esta análise. Observa-se que as curvas relativas aos dois modos livres do eixo comportam-se como na análise anterior, considerando o modelo reduzido. O cruzamento da linha de rotações indica que a primeira frequência natural do sistema se encontra em 2820 RPM, tal como ocorrido para o modelo de coeficientes reduzidos. As curvas do mancal relacionadas aos graus de liberdade de translação também não se alteram. Como esperado, o modelo completo adiciona novas curvas, relacionadas aos graus de liberdade de rotação do segmento, indicadas pelo subscrito S. Estas também mantêm o comportamento esperado, sendo semelhantes às observadas na análise precedente para este modelo de mancal. Tais semelhanças com o modelo reduzido se devem à baixa influencia do amortecimento interno nas frequências naturais do sistema, como mencionado anteriormente.

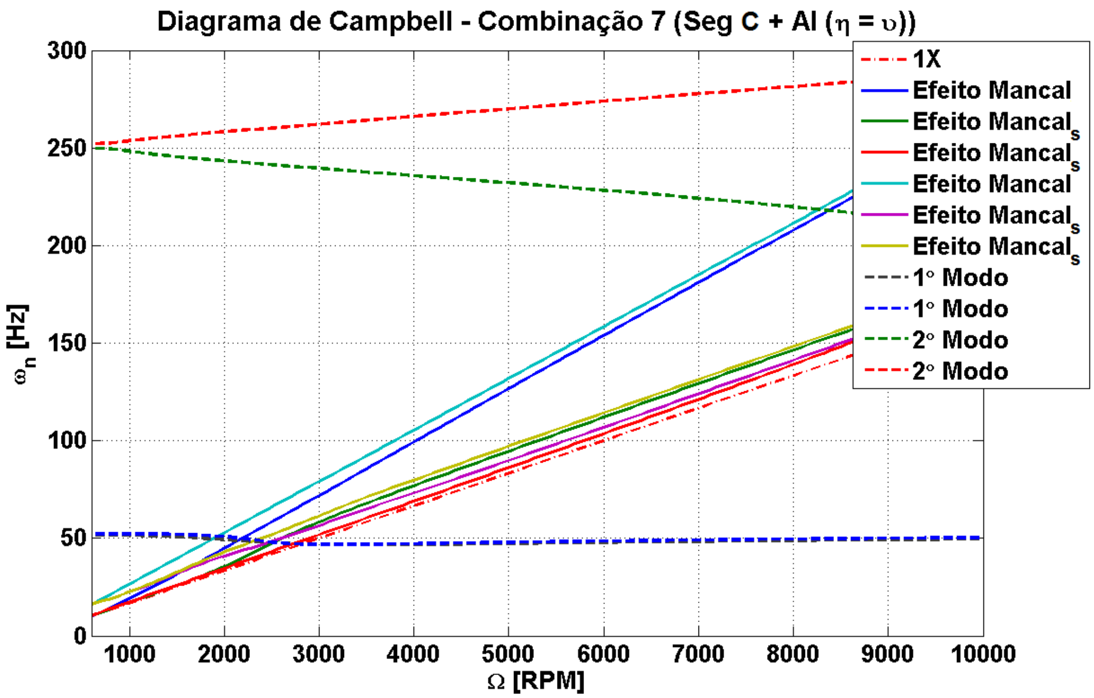


Figura 66 – Diagrama de Campbell – Combinação 7

A Figura 67, referente ao gráfico do decremento logarítmico para a Combinação 7, mostra que o amortecimento interno afeta consideravelmente os níveis de amortecimento dos modos e, consequentemente, a dinâmica do sistema. Observam-se alterações no decremento dos modos naturais do eixo, em relação à análise isolada do mancal segmentado completo. Em particular, para o primeiro modo, ambas as direções precessionais convergiam para o mesmo valor na análise da Figura 37, ao passo que, no caso analisado, as curvas divergem para valores distintos. Uma destas direções assume valores negativos a partir de 6840 RPM, constituindo o limiar de estabilidade do sistema.

As curvas relativas aos efeitos dos mancais segmentados apresentam o comportamento esperado. As duas curvas dos efeitos translacionais são modos superamortecidos e, portanto, não aparecem no gráfico da Figura 67. Nota-se, também, que as curvas relativas aos decrementos dos graus de liberdade do segmento, indicadas pelo subscrito S, não são afetadas pelo amortecimento interno, tendo comportamento semelhante ao observado na análise isolada do mancal segmentado.

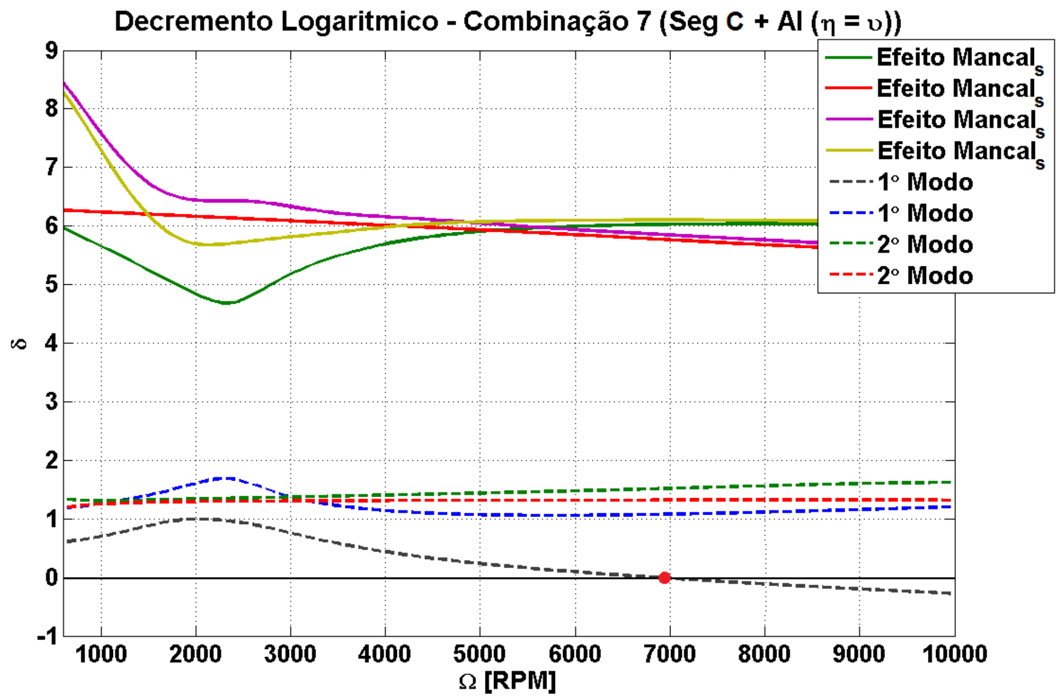


Figura 67 – Decremento Logarítmico – Combinação 7

Pode-se concluir, tal como mencionado na análise do modelo reduzido, que o limiar de estabilidade é estendido com a adição do mancal segmentado, em relação a um sistema com apenas amortecimento interno. Observa-se, também, que os modelos de coeficientes reduzidos e completos determinaram limiares de estabilidade distintos, como ocorrido na análise da Seção 4.4.1. O modelo completo estima um limiar ligeiramente mais elevado, a 6840 RPM, do que o modelo reduzido, que o estima a 6660 RPM. Entretanto, o mancal segmentado, em qualquer modelagem utilizada, não é suficientemente estável para evitar a instabilidade do sistema sob o efeito do amortecimento interno.

A Tabela 10 resume as análises desta seção. Nota-se que a estabilidade dinâmica do sistema da Combinação 5 é muito influenciada pelo mancal cilíndrico, pois os limiares de estabilidade são próximos e o modo instabilizado é principalmente relacionado ao efeito do mancal. Entretanto, esta combinação tem o limiar inferior ao que foi determinado para as análises isoladas do mancal cilíndrico e de amortecimento interno. Para os casos envolvendo o mancal segmentado, Combinações 6 e 7, o limiar de estabilidade do sistema foi mais elevado do que o encontrado para o amortecimento interno isolado. Entretanto, o comportamento estável visto na análise específica deste mancal, não é mais observado. Nota-se, por fim, a diferença nos limiares de estabilidade obtidos pelos modelos de coeficientes completos e reduzidos, já discutidos anteriormente.

Tabela 10 – Comparação entre os casos isolados e as combinações Mancal/AI

Análise	ω_n (RPM)	Ω_{inst} (RPM)	Ω_{inst}/ω_n
Cilíndrico	3060	4740	1,549
Segmentado	2700	Estável	–
Amortecimento Interno ($\eta = \upsilon$)	3120	6240	2,0
C5 – Cilíndrico e AI	3060	4500	1,470
C6 – Seg. Reduzido e AI	2820	6660	2,362
C7 – Seg. Completo e AI	2820	6840	2,425

4.4.3. Mancais, Selos e Amortecimento Interno

As duas seções anteriores dedicaram-se a analisar as combinações dos elementos instabilizadores dois a dois, para determinar as influências dominantes na dinâmica do sistema. A Seção 4.4.1 estabelece que o selo eleva a rigidez do sistema e altera o nível de amortecimento dos modos, prevenindo a instabilidade por efeito de *whirl-whip* dos mancais cilíndricos. Entretanto, além da rigidez direta, o selo é o responsável pela instabilização de uma direção do primeiro modo, quando combinado com qualquer mancal.

As análises da Seção 4.4.2 concluem que o amortecimento interno reduz o limiar de estabilidade de um sistema já instável, no caso do mancal cilíndrico. Nos mancais segmentados, entretanto, o limiar de estabilidade foi elevado, em relação à análise com o amortecimento interno isolado. Porém, o efeito instabilizador ocorre em uma direção precessional do primeiro modo, sendo este o modo instabilizado por influência do amortecimento interno.

Percebe-se que existem muitas interações e efeitos dinâmicos associados entre si, causados pelos componentes analisados, sendo necessária a análise combinada de todos os efeitos para corretamente avaliar a influência real destes elementos na dinâmica do sistema. Esta seção dedica-se às análises dos efeitos dinâmicos em um eixo com mancal, selo e amortecimento interno. O mancal utilizado nas análises é a única variante, pois três tipos serão simulados: o mancal cilíndrico, o segmentado de coeficientes reduzidos e o segmentado de coeficientes completos. Os demais parâmetros não se alteram entre as análises: o selo estudado é o Selo 4, de comportamento instável, e o amortecimento interno é considerado com o mesmo nível que o amortecimento externo equivalente.

A Combinação 8, a primeira a ser analisada nesta seção, é visualizada por meio do seu diagrama de Campbell, Figura 68, e por meio do gráfico do decremento logarítmico, Figura 69.

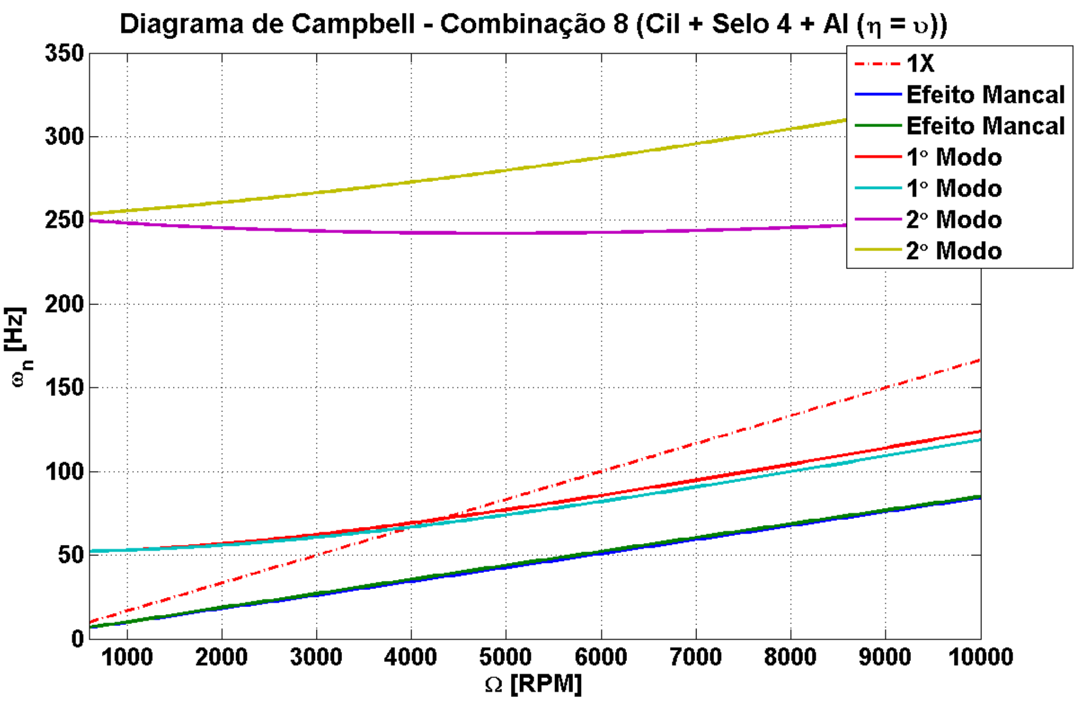


Figura 68 – Diagrama de Campbell – Combinação 8

Analisando o diagrama de Campbell, observa-se grande semelhança com a Combinação 1, que considera apenas o mancal e o selo. Isso era esperado, pois o amortecimento interno tem baixa influência nas frequências naturais do eixo. Os modos do eixo apresentam o comportamento enrijecido, devido ao selo, e as curvas relativas aos efeitos do mancal são consistentes com o observado em análises anteriores. O cruzamento da linha de rotações determina a primeira frequência natural na velocidade de 4020 RPM.

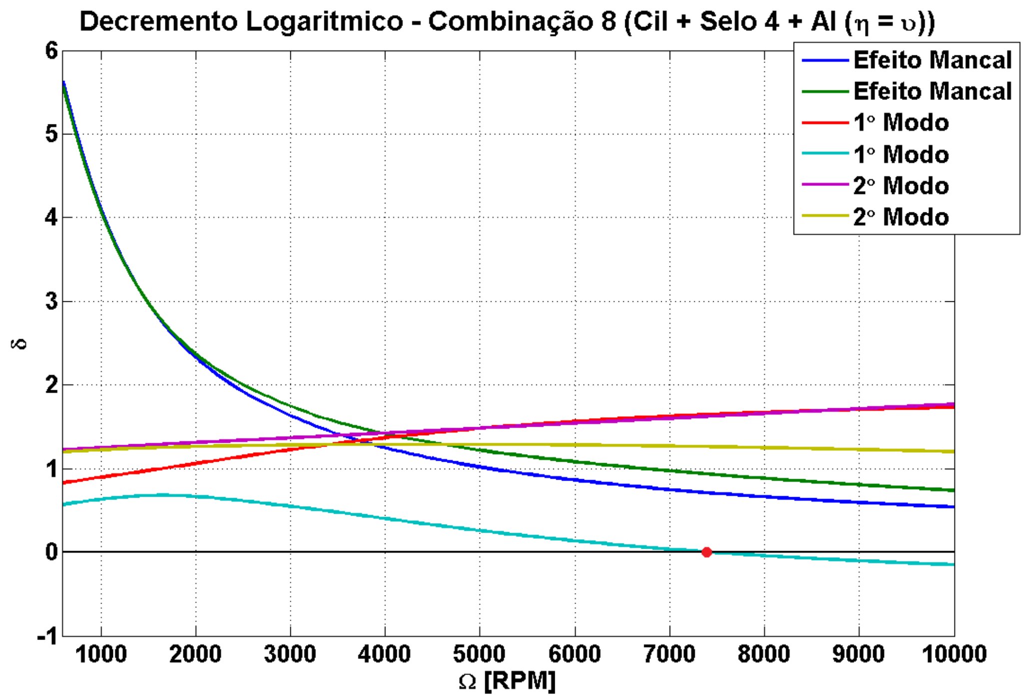


Figura 69 – Decremento Logarítmico – Combinação 8

A Figura 69 mostra o gráfico do decremento logarítmico para a Combinação 8. São mostradas as duas direções precessionais do primeiro e segundo modos, assim como as duas curvas relativas aos efeitos do mancal cilíndrico no sistema. Observa-se que o gráfico apresenta semelhanças com o decremento da Combinação 1. O efeito estabilizador do selo sobre o mancal cilíndrico é observado nas curvas dos efeitos dos mancais, que apresentam o comportamento característico e convergem para um valor positivo. Entretanto, o limiar de estabilidade determinado pela análise da Figura 69 encontra-se na velocidade de 7440 RPM, mais baixo do que o encontrado na análise da Figura 55. Portanto, pode-se dizer que o amortecimento interno contribuiu com a instabilização do eixo, levando a direção precessional do primeiro modo à instabilidade em uma velocidade menor do que a encontrada nas análises anteriores.

A Tabela 11 facilita a comparação de todos os casos analisados envolvendo o mancal cilíndrico. Nota-se que o maior limiar de estabilidade, em valores absolutos, encontra-se na Combinação 1. A queda de desempenho na Combinação 5 se deve à influência do amortecimento interno nos modos instáveis do sistema. A Combinação 8 também tem o seu limiar reduzido em relação à Combinação 1 devido à influência do amortecimento interno no sistema.

Tabela 11 – Comparação entre os casos isolados e as combinações Mancal/Selo/AI

Análise	ω_n (RPM)	Ω_{inst} (RPM)	Ω_{inst}/ω_n
Cilíndrico	3060	4740	1,549
Selo 4	4140	5880	1,420
Amortecimento Interno ($\eta = \upsilon$)	3120	6240	2,0
C1 – Cilíndrico e Selo 4	4020	7980	1,985
C5 – Cilíndrico e AI	3060	4500	1,470
C8 – Cilíndrico, Selo 4 e AI	4020	7440	1,851

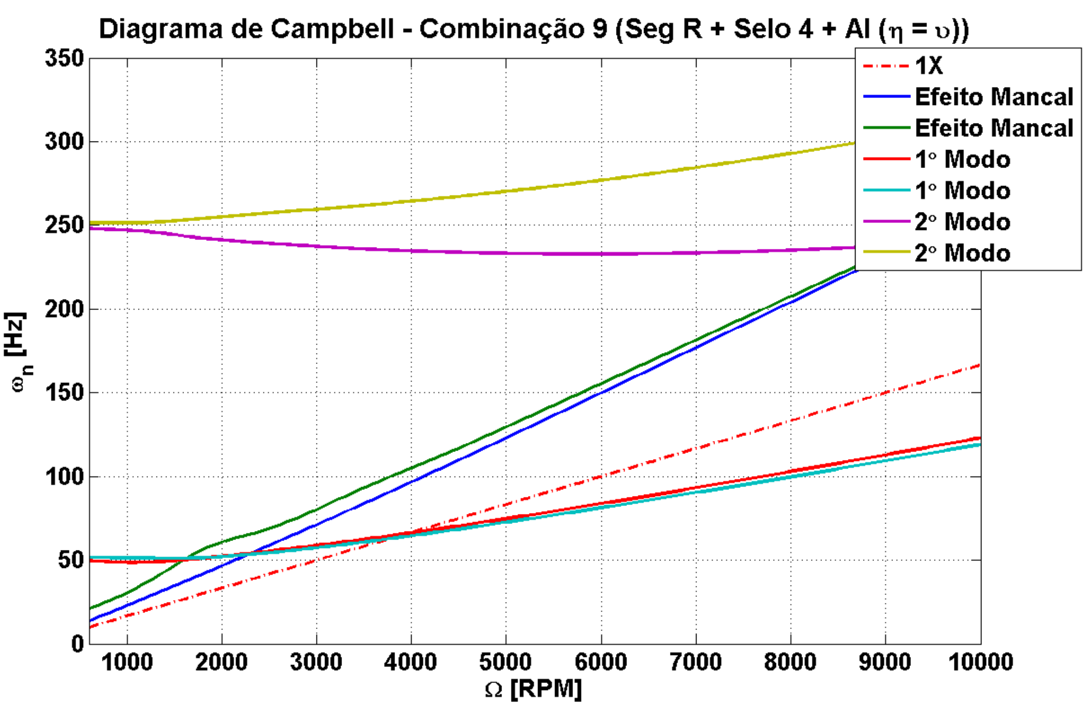


Figura 70 – Diagrama de Campbell – Combinação 9

A Figura 70 mostra o diagrama de Campbell para a Combinação 9. Assim como visto anteriormente, as frequências naturais dos modos e as curvas relativas aos efeitos dos mancais sofrem poucas alterações, quando comparados com a Combinação 3, sem amortecimento interno. Ambos os modos naturais apresentam o enrijecimento devido à introdução do selo no sistema. O comportamento das curvas do mancal segmentado é característico deste tipo de mancal, conforme observado nas análises com este elemento. A primeira frequência fundamental do sistema encontra-se em 3780 RPM.

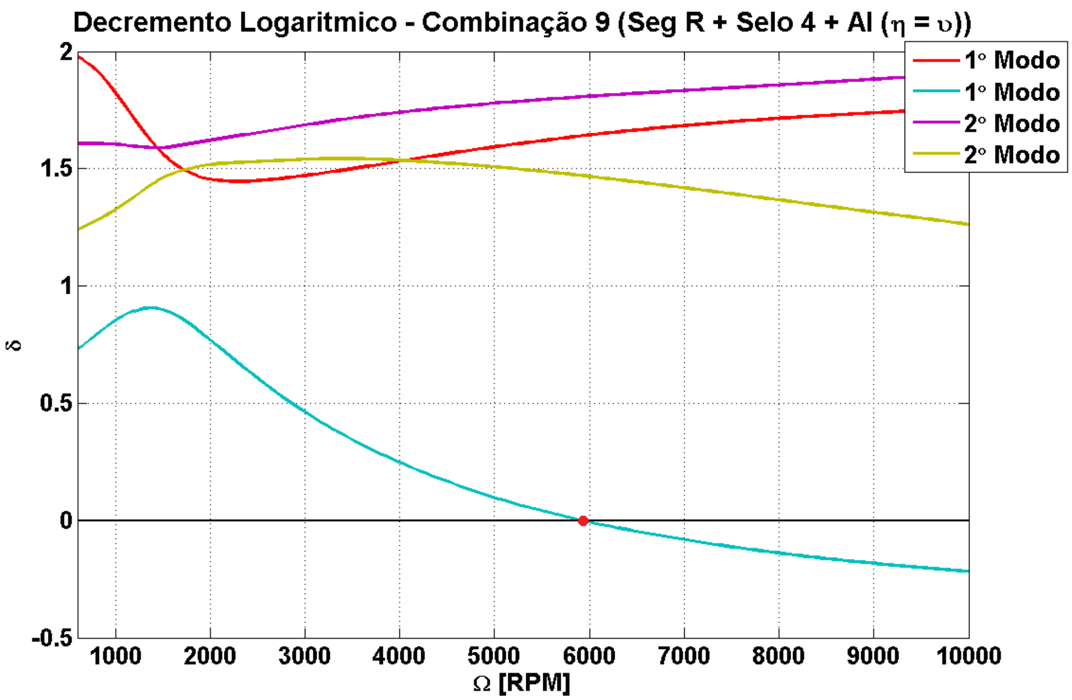


Figura 71 – Decremento Logarítmico – Combinação 9

A Figura 71 mostra o comportamento do decremento logarítmico da Combinação 9. Novamente pode-se dizer que este decremento possui valores similares aos encontrados na Combinação 3, porém com uma influência do amortecimento interno. Esta é suficiente para reduzir o limiar de estabilidade do sistema para 5940 RPM, ao contrário do encontrado para a Combinação 3, a 6300 RPM. Os modos apresentam comportamentos similares com os observados na análise sem o amortecimento interno. Destaca-se ainda que os modos relativos aos efeitos do mancal segmentado são, como esperado, superamortecidos e, portanto, não representados no gráfico.

A última combinação considerada consiste na simulação do eixo suportado por mancais segmentados, modelados com coeficientes completos, com o Selo 4 adicionado e considerando o amortecimento interno igual ao externo equivalente. O diagrama de Campbell da Combinação 10 encontra-se na Figura 72. A primeira frequência natural deste sistema é 3780 RPM, indicada pelo cruzamento da linha de rotações com o primeiro modo flexional do eixo. Observa-se o enrijecimento característico da introdução do selo de fluxo, alterando o primeiro e o segundo modos do eixo. As curvas dos mancais têm seu comportamento igual ao observado nas análises isoladas. São exibidas mais curvas relacionadas aos efeitos do mancal, indicadas pelo subscrito S, pois são relacionadas aos graus de liberdade de rotação do segmento. Finalmente, tal como ocorrido nas análises anteriores, o amortecimento interno não resulta em alterações visíveis no diagrama de Campbell do sistema.

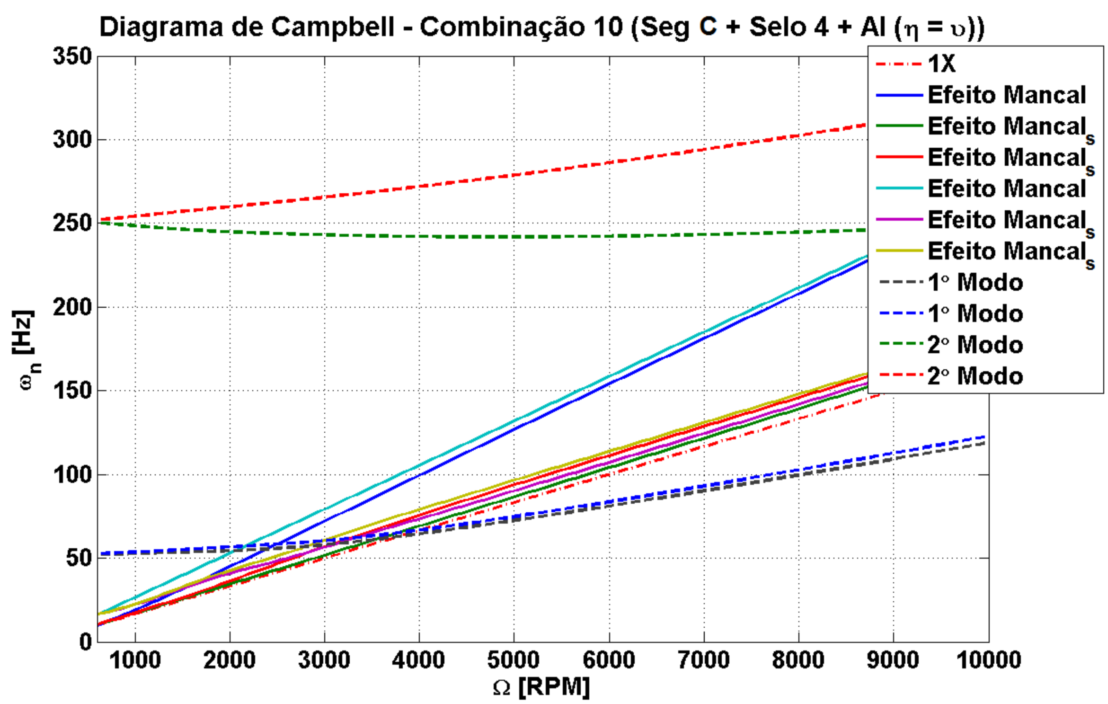


Figura 72 – Diagrama de Campbell – Combinação 10

O decremento logarítmico da Combinação 10, mostrado na Figura 73, também mantém as semelhanças encontradas com as análises anteriores. As curvas relacionadas aos efeitos de translação dos mancais ainda são modos superamortecidos, portanto não aparecem no gráfico. O nível elevado de amortecimento das curvas dos efeitos dos mancais não permite observar diferenças resultantes da adição do selo ou por influência do amortecimento interno. Tal como nas outras análises do modelo completo, o comportamento dos modos naturais tem sua observação dificultada pela escala da figura; entretanto estes modos comportam-se de forma similar ao observado no decremento do modelo reduzido correspondente, neste caso, mostrado na Figura 71.

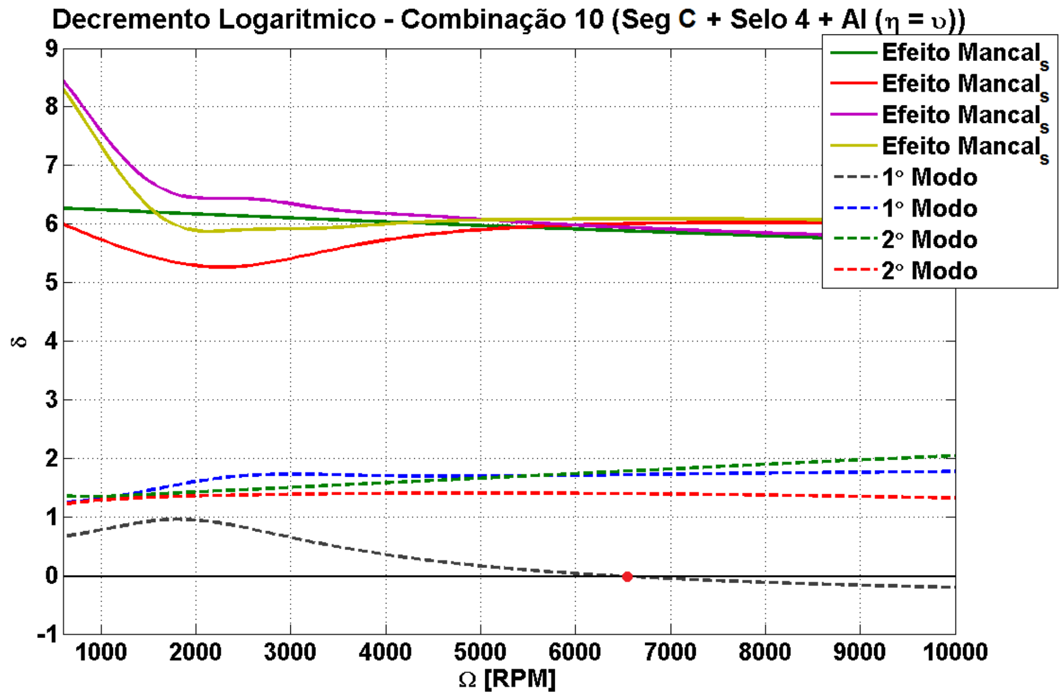


Figura 73 – Decremento Logarítmico – Combinação 10

Entretanto, o modelo completo prevê um limiar de estabilidade diferente do previsto pelo modelo reduzido. A Combinação 9 estima que o rotor é estável até a velocidade de 5940 RPM. A Figura 73, relativa ao decremento do modelo completo, estima o mesmo limiar em 6300 RPM. Novamente, atribui-se essa diferença ao processo de redução dos coeficientes, dado que no modelo reduzido não é possível visualizar os graus de liberdade dos segmentos. A Tabela 12 mostra que o limiar de estabilidade obtido por meio do modelo completo é ligeiramente maior do que o obtido pelo modelo reduzido em todas as análises realizadas neste trabalho.

Tabela 12 – Comparação entre os modelos de coeficientes reduzidos e completos

Análise	ω_n (RPM)	Ω_{inst} (RPM)	Ω_{inst}/ω_n
C3 – Seg. Reduzido e Selo 4	3780	6300	1,667
C4 – Seg. Completo e Selo 4		6720	1,778
C6 – Seg. Reduzido e AI	2820	6660	2,362
C7 – Seg. Completo e AI		6840	2,425
C9 – Seg. Reduzido, Selo 4 e AI	3780	5940	1,571
C10 – Seg. Completo, Selo 4 e AI		6300	1,667

Retomando as análises desta seção, observa-se que o nível de influência do selo na dinâmica do sistema é considerável, equiparando-se com a rigidez e o amortecimento do eixo e do mancal. O selo instabiliza o primeiro modo flexional do eixo, em todos os casos observados e é o elemento que domina a análise de estabilidade do sistema. Os mancais cilíndricos são muito afetados pela variação de rigidez do selo, tornando os seus modos estáveis. Em contrapartida, estes também interagem com os selos no sistema, sendo necessária a avaliação cuidadosa das relações entre os mesmos.

O amortecimento interno influencia o sistema de maneira menos marcante do que o selo ou os mancais. No entanto, mesmo com essa característica, o amortecimento interno afeta a dinâmica do sistema, alterando o limiar de estabilidade nos casos analisados. Sua influência é observada em todos os modos flexionais do eixo, em especial o primeiro.

Por fim, observou-se que o método do decremento logarítmico foi bem sucedido na detecção dos diferentes mecanismos de instabilização analisados. Observaram-se diferenças compatíveis com a teoria revista nos modos instabilizados por cada efeito, assim como o efeito instabilizador predominante na dinâmica do rotor, quando combinados vários elementos. Desse modo, podem-se avaliar as diferenças entre as instabilidades resultantes do efeito do *whirl/whip* dos mancais, dos selos de fluxo e pelo amortecimento interno do eixo.

5. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

A hipótese inicial do trabalho consiste na possiblidade de análise de estabilidade de sistemas rotativos através observação da variação do decremento logarítmico (ou fator de amortecimento) associado a cada modo de vibrar, em função da velocidade de rotação da máquina.

As análises dinâmicas realizadas neste trabalho possibilitaram a visualização de diversos comportamentos relacionados às interações dinâmicas decorrentes da adição dos mancais, selos e intensidades de amortecimento interno, em um modelo de eixo. Foi tomado como base de comparação o comportamento observado nos diagramas de Campbell e nos gráficos dos decrementos logarítmicos.

A primeira análise tem seu foco no comportamento básico do eixo, identificando os seus dois primeiros modos naturais. As análises dos mancais, por sua vez, permitiram a conclusão de que o decremento logarítmico é um método matematicamente preciso na avaliação do limiar de estabilidade, sem a necessidade da integração numérica para visualização das órbitas. Também foi visualizado que, neste sistema rotativo analisado, os mancais não alteraram as frequências naturais do eixo, mostradas no diagrama de Campbell; entretanto, os valores do decremento podem sofrer grandes alterações.

Com relação às instabilidades fluido-induzidas, as frequências subsíncronas por estas induzidas, ou frequências de *whirl*, podem ser claramente visualizadas por meio dos diagramas em cascata. Também se observou que, em mancais que apresentaram instabilidades, os modos relacionados aos mancais foram àqueles cujo decremento assume valores negativos. Por outro lado, uma das direções precessionais do primeiro modo do eixo tem seu nível de amortecimento alterado pelo mancal, como observado nos gráficos de decremento. Por fim, a adição do mancal praticamente não altera os comportamentos observados do segundo modo nos diagramas de Campbell e nos gráficos de decremento logarítmico, confirmando a tendência da instabilidade fluido-induzida afetar o primeiro modo fundamental do eixo.

Os mancais multilobulares analisados apresentaram interações dinâmicas semelhantes às encontradas para o mancal cilíndrico. Entretanto, deve-se ressaltar que a alteração da geometria do mancal não é garantia de operação estável, sendo necessário analisar criteriosamente a folga utilizada e as pré-cargas aplicadas no mancal. Os mancais multilobulares com características similares aos mancais cilíndricos, com baixa pré-carga e alta folga, têm características dinâmicas suficientes para alterar o limiar de estabilidade, mas podem não garantir o melhor desempenho.

A segunda seção de análise dos mancais estudou os mancais segmentados, com geometria variável. O mancal segmentado estudado possui comportamento estável, para ambos os modelos de coeficientes analisados. Tal característica foi visualizada nos diagramas em cascata, devido à ausência de frequências subsíncronas neste gráfico. Este mancal também possui características dinâmicas que alteram ligeiramente as frequências naturais do eixo deste sistema rotativo analisado.

A comparação entre os modelos de coeficientes reduzidos e completos resumiu-se, na análise isolada do mancal segmentado, na comparação das curvas referentes aos seus efeitos. O modelo reduzido mostra as duas curvas de efeitos do mancal em condição superamortecida, sendo mais um indício da estabilidade deste tipo de mancal. O modelo completo, conforme esperado, apresenta os graus de liberdade dos segmentos explicitamente. Portanto, os diagramas de Campbell e os decrementos logarítmicos obtidos por meio deste modelo refletem essa característica na forma de curvas adicionais, relacionadas aos efeitos dos segmentos na dinâmica do eixo.

As análises dos selos revelaram a grande influência deste componente na dinâmica do sistema, mesmo em uma análise com mancais rígidos. Os selos enrijecem o sistema, alterando profundamente as frequências naturais dos modos observados e o nível dos seus respectivos decrementos. Pode-se concluir, pelas análises realizadas, que o grau de enrijecimento causado pelo selo está relacionado com a rigidez direta de Lomakin.

O limiar de estabilidade, observado nos selos instáveis, está fortemente relacionado com a frequência natural, portanto a rigidez de Lomakin também influência o limiar de estabilidade do selo. Entretanto, manteve-se a razão entre a velocidade do limiar pela frequência natural do eixo para estes selos. Ao contrário do ocorrido para os mancais, os selos analisados causaram a instabilização do primeiro modo do eixo, em uma de suas direções precessionais.

A adição do efeito do amortecimento interno no eixo não alterou significativamente as frequências naturais observadas no diagrama de Campbell. Entretanto, este efeito altera o nível do decremento logarítmico de todos os modos do eixo, levando o primeiro modo vibracional do sistema à instabilidade. A relação entre a primeira frequência natural e a velocidade de instabilização depende da magnitude do amortecimento interno utilizado e a relação entre os níveis de amortecimento interno e externo equivalente.

As combinações dos efeitos previamente descritos resultaram em diferentes condições de estabilidade e influenciaram o limiar de estabilidade, conforme as tendências anteriormente descritas. Ou seja, os efeitos se sobrepuseram de diferentes formas, dependendo dos parâmetros de projeto associados aos principais fatores aqui estudados (mancais, selos e amortecimento interno do eixo). Contudo, o método aplicado sempre permitiu a identificação do limiar de estabilidade do sistema para os diferentes casos. Assim sendo, conclui-se que é válida a informação obtida a partir do decremento logarítmico, associados aos modos do diagrama de Campbell, e sua tendência de acordo com a velocidade de rotação do sistema, sendo a técnica promissora para aplicação em casos práticos de avaliação de estabilidade.

5.1. Sugestões para Trabalhos Futuros

- Estudo de técnicas experimentais para validação dos resultados;
- Aplicação de modelos mais elaborados para o amortecimento interno;
- Estudo da influência de uma estrutura flexível na análise de estabilidade.

6. REFERÊNCIAS

ALLAIRE, P., PARSELL, J., BARRET, L., *A Pad Perturbation Method for the Dynamic Coefficients of Tilting-Pad Journal Bearings.* Wear, 72, pp. 29-44, 1981.

API Technical Publication 684. *Tutorial on Rotordynamic: Lateral Critical Speeds, Unbalance Response, Stability, Train Torsionals, and Rotor Balancing*, 2nd Edition Draft, 2005.

ARHCER, J. S., *Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 89, ST4, pp. 161, 1963.

BANSAL, P. N., KIRK, R. G., *Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems*, ASME Journal of Engineering of Industry, Series B, Vol. 97, pp. 1325-1332, 1975.

BARRETT, L. E., GUNTER, E. J., ALLAIRE, P. E., *The Stability of Rotor-Bearing Systems Using Linear Transfer Functions – A Manual for Computer Program ROTSTB*. Report No. UVA/643092/MAE81/124, School of Engineering and Applied Science, University of Virginia, Charlottesville, Virginia, 1976.

BLACK, H. F. *Effects of hydraulic forces in anular pressure seals on the vibrations of centrifugal pump rotors*, Journal of Mechanical Engineering Science, v. 11, n. 2, pp. 206-213, 1969.

BLACK, H. F.; JENSEN, D. N. *Dynamic hybrid properties of annular pressure seals*, Proc. Mechanical Engineering, v. 184, pp. 92-100, 1970.

BLACK, H. F.; JENSEN, D. N. *Effects of high pressure ring seals on pump rotor vibrations*, ASME Paper, n. 71-WA/FF-38, 1971.

BOYD, J., RAIMONDI, A. A., *An analysis of the pivoted-pad journal bearing*. Mechanical Engineering, vol. 75, no. 5, pp. 380-386, 1953.

BROL, K. B. *Modelagem e Análise de Selos de Fluxo Aplicados a Máquinas Rotativas*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

CAMERON, A., *Basic lubrication theory.* London: Longman, 1971.

CAMPBELL, W. E. *The protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration*. Trans. ASME, pp. 31–160, 1924.

CASTRO, H. F., *Análise de Mancais Hidrodinâmicos em Rotores sob Instabilidade Fluido-Induzida*. 176p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, Brasil, 2007.

CAPONE, G., *Descrizione analítica del campo di forze fluidodinâmico nei cuscinetti cilindrici lubrificati*, L'Energia Elettrica, n. 3, pp. 105-110, 1991.

CAPONE, G.; RUSSO, M.; RUSSO, R.; *Inertia and Turbulence Effects on Dynamic Characteristics and Stability of Rotor-Bearing Systems*, Journal of Tribology, Vol.113, pp. 58-64, January, 1991.

CHAUVIN Jr., D., *An Experimental Investigation of Whirl Instability Including Effects of Lubricant Temperature in Plain Circular Journal Bearings*. 109p. Dissertação (Mestrado). – Louisiana State University, Agricultural and Mechanical College, 2003.

CHILDS, D. W. *Dynamic analysis of turbulent annular seals based on Hirs lubrication equation.* Journal of Lubrication Technology, Transactions of ASME, 1982.

CHILDS, D. W. *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Anaysis*; John Wiley & Sons, New York, 1993.

CHILDS, D. W., DRESSMAN, J. B., *Convergent-Tapered Annular Seals: Analysis and Testing for Rotordynamic Coefficients*, J. Tribology, Vol. 107, pp. 307-316, 1985.

CLOUD, C. H., MASLEN, E. H., BARRETT, L. E., *Damping Ratio Estimation Techniques for Rotordynamic Stability Mearsurments*. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 131, Jan. 2009.

CLOUD, C. H., MASLEN, E. H., BARRETT, L. E., *Rotor Stability estimation with competing tilting pad bearing models.* Mechanical Systems and Signal Processing 29, 2012.

DANIEL, G. B., CAVALCA, K. L., *Comparative Analysis of the Equivalent Coefficients of Stiffness and Damping obtained from Multilobule and Tilting Pad Journal Bearing.* In: 21st International Congress of Mechanical Engineering, Natal-RN. Proceedings of the COBEM 2011. Rio de Janeiro : ABCM, v. 1. pp. 1-10, 2011.

DANIEL, G. B., CAVALCA, K. L. (orient.), *Desenvolvimento de um Modelo Termohidrodinâmico para Análise em Mancais Segmentados*. Dissertação (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP. 236p, 2012a.

DANIEL, G. B., CAVALCA, K. L., *Investigation of the Influence of Thermal Effects in the Dynamic Coefficients of a Tilting Pad Journal Bearing.* In: Tenth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery (VIRM10), Institution of Mechanical Engineers (IMECH-E), September 2012b, London.

DIAMARAGONAS, A. D., *A General Method for Stability Analysis of Rotating Shafts*, Ingenieur-Archiv, Vol. 44, pp. 9-20, 1975.

DIMENTBERG, F. M., *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*, Butterworth and Co., Ltd., London, 1961.

DIMOND, T., YOUNAN, A., ALLAIRE, P., *Comparison of tilting-pad journal bearing dynamic full coefficient and reduced order models using modal analysis.* J.Vib. Acoust., 132:051009, 2010.

DIMOND, T., YOUNAN, A., ALLAIRE, P., *A Review of Tilting-Pad Bearing Theory.* International Journal of Rotating Machinery, 2011.

DIMOND, T., YOUNAN, A., ALLAIRE, P., *The effect of Tilting Pad Journal Bearing Dynamic Models on the Linear Stability Analysis of an 8-Stage Compressor.* J. of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 134, May 2012.

EDNEY, S. L., FOX, C. H. J., WILLIAMS, E. J., *Tapered Timoshenko Finite Elements for Rotor Dynamics Analysis*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 137, 1990.

EHRICH, F. F., *Shaft Whirl Induced by Rotor Internal Damping*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 23, pp. 109-115. 1964.

EHRICH, F. F., *Handbook of Rotordynamics.* McGraw-Hill, 1992.

GALERA, L, CAVALCA, K. L. (orient.), *Análise da Influência das Características Geométricas de Selos de Fluxo aplicados a Rotores*. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP. 208p, 2013.

GASCH, R., *Vibration of large turborotors in fluid-film bearing on an elastic foundation,* Journal Sound Vibr., Vol. 47, pp. 53-73, 1976.

GENTA, G., *On a Persistent Misunderstanding of the Role of Hysteretic Damping in Rotordynamics.* Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 126, pp. 459-461, 2004.

GUNTER, E. J., *Dynamic Stabilty of Rotor-Bearing Systems*, NASA SP-113, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1966.

GUNTER, E. J., *The Influence of Internal Friction on the Stability of High-Speed Rotors*., Journal of Engineering for Industry, pp. 683-688. Nov. 1967.

GUNTER, E. J., *Rotor-bearing stability*, Proceedings of the First Turbomachinery Symposium, pp. 119-141, 1972.

HASHIMOTO H.; WADA S.; ITO J., *An application of Short Bearing Theory to Dynamic Characteristics Problems of Turbulent Journal Bearings*, Transactions of the ASME – Journal of Tribology, Vol. 109, pp. 307-314, 1987.

HUMMEL, C., *Kritische drehzahlen als folge der nachgiebigkeit des schmiermittels im lager,* Ph.D. Thesis, Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, 1926.

JEFFCOTT, H. H., *The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed – The Effect of Want of Balance*. Philosophical Magazine, n.37, p.431-458, 1919.

KRÄMER, E., *Dynamics of Rotors and Foundations.* New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 383p, 1993.

KIMBALL, A. L., *Internal Friction Theory of Shaft Whirling,* General Electric Review, Vol. 27, pp. 244-251, 1924.

KIRK, R. G., REEDY, S. W., *Evaluation of Pivot Stiffness for Typical Tilting-Pad Journal Bearing Designs.* ASME J. Vib. Acoust. Stress, 110(2):165-171, 1988.

KU, D. M., *Finite Element Analysis of Whirl Speeds for Rotor-Bearing Systems With Internal Damping*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 12, pp. 599-610, 1998.

KWANKA, K. *Dynamic coefficients of stepped labyrinth gas seals.* Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, v. 122, pp. 473-477, July 2000.

LOMAKIN, A. A., *Calculation of critical speeds and securing of the dynamic stability of hydraulic high-pressure machines with reference of the forces arising in the gap seals* Energomashinostroenie, 4.1, 1958.

LUND, J. W., *Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing.* ASME Transactions, n.7, p.342-352, 1964.

LUND, J. W., *Rotor Bearing Dynamics Design Technology, Part V*, AFAPL-TR-65-45, Aero Propulsion Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1965.

LUND, J. W., *Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid Film Bearings*, ASME J. Eng. Ind., 96(2), pp. 509-571, 1974.

LUND, J. W., PEDERSEN, L. B., *The Influence of Pad Flexibility on the Dynamic Coefficients of a Tilting Pad Journal Bearing*. J. Tribol., 109(1):65-70, 1987.

MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L., *Evaluation of dynamic coefficients for fluid journal bearings with different geometries.,* Proceedings of the 20th International Congress of Mechanical Engineering, Gramado-RS, 2009.

MALISKA, C. R., *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*; Editora LTC, 2º edição, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.

MENDES, R. U., CAVALCA, K. L. (orient.), *Desenvolvimento de um Sistema de Atuação Magnética para Excitação de Sistemas Rotativos.* Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP. 140p, 2011.

MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA, Empresa de Pesquisa Energética, *Plano Decenal de Expansão de Energia 2022*. Brasília, 2013.

MUSZYNSKA, A., *Whirl and Whip – Rotor/Bearing Stability Problems*., Journal of Sound and Vibration, v.110, n.3, p.443-462, 1986.

MYKLESTAD, N. O., *A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibrations of Airplane Wings and other Types of Beams.,* Journal of Aeronautical Science, v.11, p.153-162, 1944.

NELSON, C., *Rotordynamic Coefficients for Compressible Flow in Tapered Annular Seals*, Journal of Tribology, Vol. 107, pp. 318-325, 1985.

NELSON, H. D., *A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory.,* ASME Journal of Mechanical Design, v. 102, n. 4, p. 793-803, 1980.

NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M., *The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements*. Journal of Engineering for Industry, p.593-600, May 1976.

NEWKIRK, B. L., *Shaft Whipping*, General Electric Review, Vol. 27, p. 169, 1924.

NEWKIRK, B. L., LEWIS, J. F., *Oil Film Whirl-An Investigation of Disturbances Due to Oil Films in Journal Bearings*. Trans. ASME, Vol 78: 21-27, 1956.

NEWKIRK, B. L., TAYLOR, H. D, *Shaft Whipping due to Oil Action in Journal Bearings*, General Electric Review, Vol. 28, n. 8, pp. 559-568, 1925.

NICHOLAS, J. C., GUNTER, E. J., BARRETT, L. E., *The influence of tilting pad bearing characteristics on the stability of high speed rotor-bearing systems.* In Proc. of the Design Engineering Conference, Topics in fluid film bearing and rotor bearing system design and optimization, pp. 55-78, Apr. 1978.

NICHOLAS, J. C., *Lund's Tilting-Pad Journal Bearing Pad Assembly Method,* Transactions of ASME, Vol. 125, pp. 448-454, October 2003.

NORDMANN, R., DIEWALD, W., *Dynamic Analysis of Centrifugal Pump Rotors With Fluid-Mechanical Interactions.*, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Desing, Vol. 111, pp. 370-387, 1989.

NORTON, R. L., *Projeto de Máquinas.* 2ª Edição. São Paulo: Bookman, 2006.

OCVIRK, F.W., *Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings*, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) TN 2808, 1952.

ORCUTT, F. K., *The Steady-State and Dynamic Characteristics of the Tilting-Pad Journal Bearing in Laminar and Turbulent Flow Regimes,* ASME J. Lubrication Technology, 89 (3), pp. 392-404, 1967.

PARSELL, J. K., ALLAIRE, P. E., BARRETT, L. E., *Frequency Effects in Tilting-Pad Journal Bearing Dynamic Coefficients.* ASLE Trans., 26(2):222-227, 1983.

PATANKAR, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*; McGraw-Hill, New York, 1980.

PETROFF, N. P., *Friction in Machines and the Effect of Lubricant*, Inzenernii Zhurnal, St. Petersburg, Vol. 1, pp. 71-140, Vol. 2, pp. 228-279, Vol. 3, pp. 377-436, Vol. 4, 1883, pp. 535-564. (em Russo).

PINKUS O, *Analysis of Eliptical Bearings*, Transactions of ASME, vol.78, pp.965-973, 1956.

PINKUS O, *Solution of Reynolds Equation for Finite Journal Bearings*, Transactions of ASME, Vol.80, pp.858-864, 1958.

PINKUS O, *Analysis and Characteristics of Three-lobe Bearings*, Journal of Basic Engineering, pp.49-55, 1959.

PROHL, M. A., *A General Method of Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors*., Journal of Applied Mechanics, v.67, p.142-146, 1945.

RASTOGI, V., *et al.*, *Dynamic Modeling of Rotor Shaft With Internal Damping Driven Through a Dissipative Coupling*, International Journal of Modeling, Simulation and Scientific Computing, Vol. 2, pp. 105-129, 2011.

REYNOLDS, O., *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil*, Philos. Trans. R. Soc. London, Series A, Vol. 177, Part 1, pp.157-234, 1886.

ROUCH., K. E., *Dynamics of Pivoted-Pad Journal Bearings, Including Pad Translation and Rotation Effects.* ASLE Trans., 26(1):102-109, 1983.

ROUCH, K. E., KAO, J. S., *A Tapered Beam Finite Element for Rotor Dynamics Analysis.*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, pp. 119-140, 1979.

RUHL, R. L., *Dynamics of Distributed Parameter Rotor Systems: Transfer Matrix and Finite Element Techniques*. Doctoral dissertation, Cornell University, Ithaca, NY, 1970.

RUHL, R. L., BOOKER, J. F., *A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems*. Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, pp. 128-132, 1972.

RUSSO, F. H., SANTOS, I. F. (orient.)., *Identificação das Propriedades Dinâmicas de Mancais Segmentados Híbridos – Teoria e Experimento*, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

SAN ANDRÉS, L., *Notes 07 - An Overview of Tilting-Pad Journal Bearings*, Class Notes for ME543, Univ. of Virginia, 2000.

SAN ANDRÉS, L., *Notes 16 – Static and Dynamic Forced Performance of Tilting Pad Bearings: Analysis Includin Pivot Stiffness.* Univ. of Virginia, August 2010.

SHAPIRO, W., COLSHER, R., *Dynamic Characteristics of Fluid Film Bearings*, Proceedings of the Sixth Turbomachinery Symposium, Texas A&M University, College Station, Texas, pp. 39-53, 1977.

SINGHAL, G. C., *Computation Methods for hydrodynamic problems (Reynold´s Equation)*, Cumputer-Aided Design, Vol. 13, n. 3, pp. 151-154, 1981.

SINGHAL, S., KHONASARI, M. M., *A simplified thermohydrodynamic stability analysis of journal bearings*, J. Engineering Tribology, Vol. 219, pp. 225-234, 2005.

SOMMERFELD, A, "*Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung*", Zs. Math. and Phys., Vol. 50, No.1, 1904, pp.97-155.

STERNLICH, B., *Elastic and damping properties of partial porous journal bearings*. Journal of Basic Engineering, vol. 81, pp. 101-108, 1959.

STODOLA, A., *Dampf-und Gasturbinen.* Berlin Springer, 1910.

STODOLA, A., *Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager*, Schweizerische Bauzeitung, Vol. 85/86, pp. 265-266, 1925.

TAO, L. N. *A theory of lubrication in short journal bearings with turbulent flow*. Transactions of ASME, p. 1734, 1958.

TOWER, B., *First report on friction experiments, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1883, pp. 632-659.

TUCKMANTEL, F. W., CAVALCA, K. L. (orient.)., *Integração de sistemas rotor-mancais hidrodinâmicos-estrutura de suporte para resolução numérica.* Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP, 159p, 2010.

VANCE, J. M., LEE, J., *Stability of High Speed Rotors With Internal Friction.*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, pp 960-968, August, 1974.

VANCE, J. M., *Rotordynamics of Turbomachinery*; John Wiley & Sons, New York, 1988.

YAN, Z. et al., *An analytical model for complete dynamical coefficients of a tilting-pad journal bearing*, Tribology International, Vol. 43, pp 7-15, 2010.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D., *Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping.,* Journal of Engineering for Power, p.71-76, January 1977.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D., *The Dynamics of Rotor-Bearing Systems with Axial Torque – A Finite Element Approach.,* Journal of Mechanical Design, v.102, p.158-161, January 1980.

APÊNDICE A – Determinação do Nível de Amortecimento Externo do Eixo

A aplicação e avaliação do efeito do amortecimento interno na dinâmica de um eixo exige a determinação do seu nível de amortecimento externo equivalente (υ), pois a modelagem utilizada dificulta a determinação direta de um valor de amortecimento interno (η) tal que influencie o comportamento do eixo. Reescrevendo a Equação 49, mostrada como Equação A1, observa-se que existe uma proporção definida entre a frequência natural e a frequência de instabilização.

$$\frac{\Omega_{INS}}{\omega_0} = \frac{\upsilon + \eta}{\eta} \tag{A1}$$

Portanto, introduzindo um valor conhecido de η ao rotor e avaliando-se sua frequência natural e limiar de estabilidade, pode-se estimar o amortecimento externo equivalente (υ). Desse modo, introduziram-se ao sistema quatro valores distintos de amortecimento externo (50, 100, 150 e 200 Ns/m) e avaliou-se a sua resposta dinâmica, sustentado por mancais rígidos.

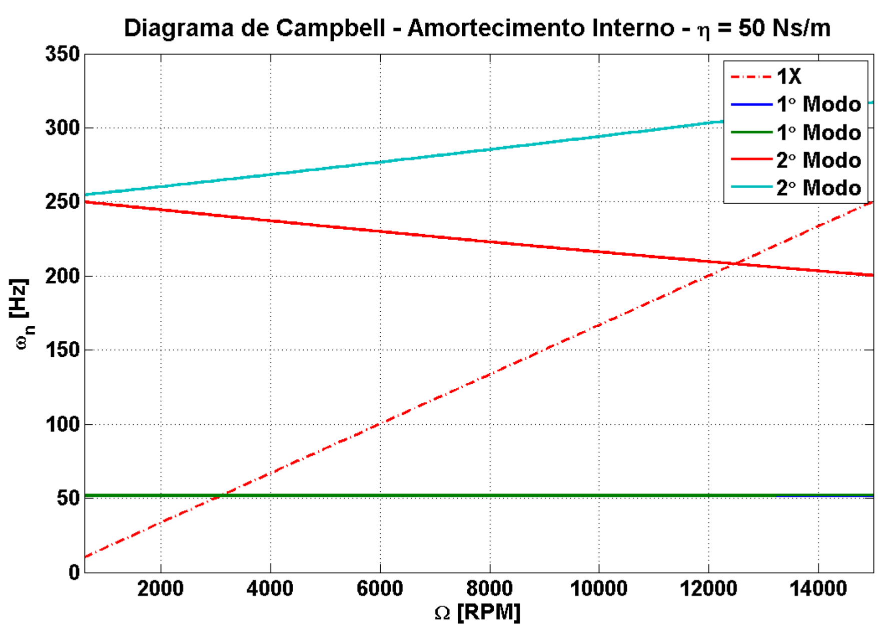


Figura A1 – Diagrama de Campbell – Amortecimento Interno

A Figura A1 mostra o diagrama de Campbell para o primeiro caso estudado, com η = 50 N.s/m. Observa-se que o diagrama de Campbell não apresenta diferenças relevantes, comparado ao caso com mancais rígidos. Ambos os modos mostram frequências iguais às obtidas anteriormente e a primeira frequência natural encontra-se em 3060 RPM, indicado pelo cruzamento da linha de rotações com o primeiro modo, tal como na análise de mancal rígido.

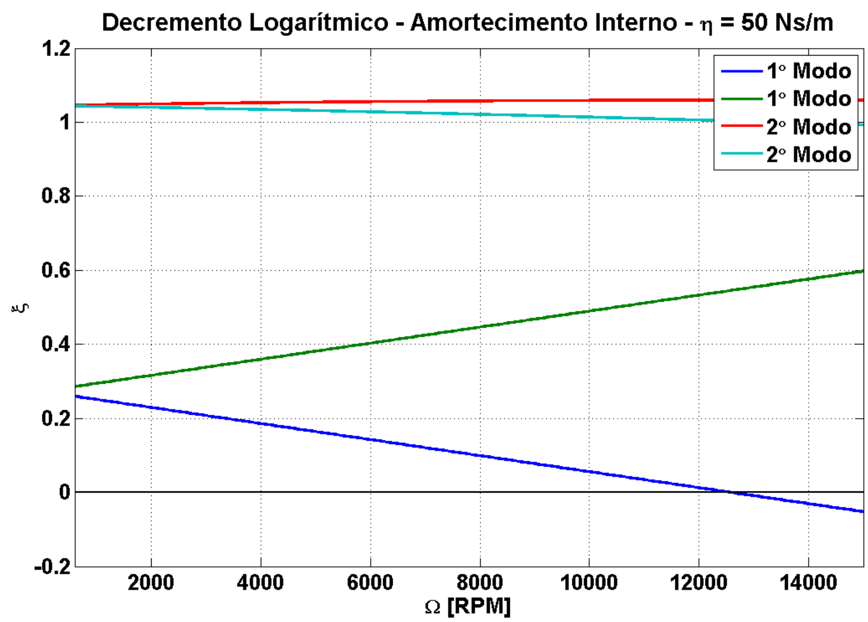


Figura A2 – Decremento Logarítmico – Amortecimento Interno

A Figura A2 mostra o decremento logarítmico encontrado para a análise com amortecimento interno de η = 50 N.s/m. Observa-se que, ao contrário do ocorrido para o diagrama de Campbell, notam-se diferenças nos valores deste decrementos e o encontrado para os mancais rígidos. Ambos os modos são afetados, entretanto a diferença maior encontra-se nas duas direções precessionais do primeiro modo: ao passo que o decremento cresce continuamente em uma direção, indicada em verde, a outra direção precessional decresce até a instabilidade, ilustrada em azul. O limiar de estabilidade para esta configuração encontra-se em 12600 RPM.

As análises com novos níveis de amortecimento interno resultaram em diagramas de Campbell iguais e valores de limiar de estabilidade diferentes. Podem-se resumir as análises na

Figura A3, que mostra apenas as curvas de decremento logarítmico do modo instável, variados entre os níveis escolhidos de amortecimento interno.

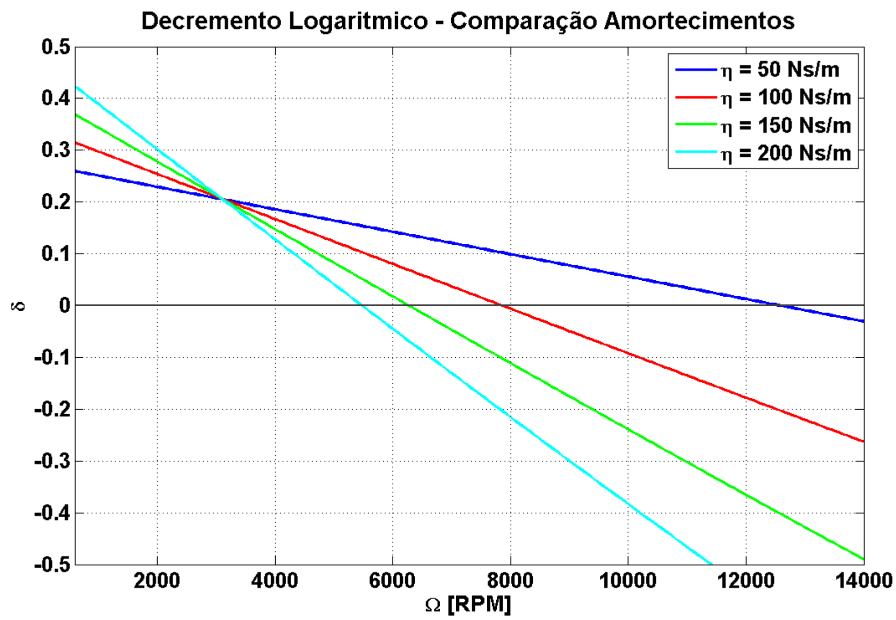


Figura A3 – Comparação de decrementos logarítmicos para os níveis de amortecimento interno

Nota-se que o aumento do nível de amortecimento interno resulta na diminuição do limiar de estabilidade do sistema, em conformidade com o determinado pela Equação A1. A Tabela A1 resume os dados encontrados nas análises realizadas e o valor de υ.

Tabela A1 – Resumo das Análises de Amortecimento Interno

η (Ns/m)	**ω_n (RPM)**	**Ω_{INS} (RPM)**	**υ (Ns/m)**
50	3120	12600	151,92
100	3120	7860	151,92
150	3120	6300	151,88
200	3120	5520	153,84
Amortecimento Externo Equivalente (υ_{MED})			152,39

Observa-se consistência entre os valores de amortecimento externo equivalente (υ), como esperado. Desse modo, pode-se assumir, para o propósito das análises dinâmicas envolvendo o amortecimento interno, o valor médio encontrado nas quatro analises mostradas na Tabela A1 como o valor de amortecimento externo do eixo.

APÊNDICE B – Artigos Publicados

22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)
November 3-7, 2013, Ribeirão Preto, SP, Brazil

DYNAMIC ANALYSIS AND STABILITY CONDITIONS IN ROTATING SYSTEMS WITH TILTING PAD JOURNAL BEARING

Antonio Carlos Carneiro, acarneiro@fem.unicamp.br
Gregory Bregion Daniel, gbdaniel@fem.unicamp.br
Katia Lucchesi Cavalca, katia@fem.unicamp.br

Abstract. *The dynamic analysis of rotating machines involves an elevated degree of complexity. In the analysis, the dynamic behavior of the rotor should be analyzed considering its interaction with other components of the same system. In a rotor-bearing-foundation system, the vibration applied by the rotor is transferred through the bearings to the supporting structure, in which interacts with the bearings retransmitting the vibration to the rotor. In this way, the bearings have an important role in this system, because this component is responsible to transmit forces between the rotor and the support structure. For this reason, the dynamic behavior of the bearings must be considered in the mathematical model of the complete system. This work aims to evaluate the tilting pad bearings' stability condition, because the dynamics characteristics of these bearings allow its application on machines with high rotation speed and low load, which can lead to fluid-induced instability in journal bearings with fixed geometry. In face of that, the stiffness and damping coefficients of a tilting pad journal bearing are determined and applied in the dynamic analysis of rotating systems supported by these components to evaluate the stability condition of the complete system. The first analysis is accomplished to a cylindrical journal bearing with similar dimensions of the tilting-pad bearing. The second analysis uses the reduced equivalent coefficients, in which a reduction of the dynamic model of the bearing is accomplished in order to obtain equivalent coefficients represented only by the translational coordinates. In both approaches, the stability analysis aims to understand and evaluate the sensitivity degree of the design parameters involved in this phenomena.*

Keywords: *tilting-pad journal bearings, rotordynamics, hydrodynamic lubrication, stability*

1. INTRODUCTION

The dynamic analysis of rotating machinery involves an elevated number of variables, which require a careful treatment and great attention, in order to reach high accuracy and representative solution of the real behavior of the machine. This is more evident when the analysis has to represent the interaction with others components and elements, for instance, a rotor-bearing system. The bearings play an important role in the dynamic analysis of rotating systems, in which they can be represented by dynamic coefficients that must be accurately determined and carefully added to the rotor model.

There are numerous kinds of bearings, but one of the most commonly used in rotating machines is the hydrodynamic, due its high life cycle and load capacity. Among the lubricated bearings, the tilting-pad journal bearings stands out, because it can be used in critical operation conditions, i.e. high rotational speed and low load, without to become susceptible to fluid-induced instabilities (oil-whirl and oil-whip). Prior to the development of tilting-pads, due to critical operational conditions, design engineers used to focus on geometry changes applied to cylindrical bearings, resulting in multilobe and elliptical designs. Still, even those bearings configurations are likely to present the whirl-whip phenomenon, which partially explains the development of tilting-pad journal bearings.

The development of the theory for hydrodynamic bearings started with Reynolds (1886), who first created the mathematical model for the hydrodynamic lubrication. The Reynolds' Equation relates the pressure field caused by two surfaces separated by a fluid film. Along with the analytical solution for long bearings, as proposed by Sommerfeld (1904), these two events initiated the theoretical development of the hydrodynamic bearings. In the years that succeeded, it can be highlighted the works of Stodola (1925) and Hummel (1926), that proposed the equivalent stiffness and damping coefficients in order to represent the effects caused by the fluid film.

Another important observation was made by Newkirk and Taylor (1925), who published that the vibration on a hydrodynamic bearing could not be due by unbalancing forces or internal friction, but induced by the fluid itself. These fluid-induced instabilities were, and still are, widely studied to predict the behavior of the shaft, to improve the machine's and bearings' designs, and to prevent serious operational failures. Presently, it is well established that oil-whirl is related to the lubricant fluid characteristics, and oil-whip is relative to the system's natural frequencies.

Therefore, most of the bearings used in the real applications were short bearing and there was not an analytical solution to describe the behavior of this kind of bearing. Thus, Ocvirk (1952) accomplished a highlighted work in which presented a solution to the problem for a short bearing.

The development of computational systems had great influence on the evolution of bearings' theory. From that period, Pinkus (1956, 1958, 1959) used the finite differences method to model the pressure inside a bearing, resulting on great advances on the research's field.

The tilting-pad journal bearings only became relevant in the industry when the cylindrical bearings were not able to operate safely with the growing needs of rotational speeds. The groundbreaking work on the subject was published by Lund (1964), where a methodology was presented to obtain the dynamic coefficients of a tilting-pad journal bearing. It's important to highlight that Lund's method compress the influence of the pads' tilting motion into shaft translation degrees of freedom, by assuming that the frequency of the pads' motions are synchronous with the shaft rotation speed. Lund's work opened a new path in bearings' research, allowing a large expansion in the usage of tilting-pad journal bearings.

Another advance was made by Allaire, *et al.* (1981), which were able to obtain coefficients that explicitly represented the tilt motion, through a pad-perturbation method, resulting in full dynamic coefficients. Afterwards, those coefficients could be synchronously reduced, if necessary, in order to obtain equivalent coefficients related only with the translational degrees of freedom.

Through the 1980's and 1990's more effects were investigated in analyses made by several authors, such as pivot elasticity, pad deformation, oil temperature; all aiming to a more precise representation of the bearing and system behavior.

This work goal is to compare the stability margin of a Laval rotor supported by two different kinds of bearings: a cylindrical bearing, and a 5-pad tilting-pad journal bearing, in order to evaluate the stability region of both rotors configurations.

2. METHODOLOGY

The dynamic analysis of a rotating system has to join different kinds of analyses, such as the determination of damping and stiffness coefficients or modeling of the shaft. Moreover, one must know that these distinct analyses depend on each other; for instance, to obtain the coefficients it's necessary to know the static load that the shaft exerts on the bearings.

An analysis starts with the obtaining of the static load of the bearing. After that, bearing's stiffness and damping coefficients were obtained and finally the finite element modeling of the shaft is made. The shaft's global matrixes (Mass, Damping, Stiffness, and Gyroscopic Effect) are assembled, altogether with the bearings' and discs' representations being added into their corresponding nodes' positions, in the matrixes.

Finally, there are many ways to observe and analyze the system's dynamic behavior: applying the concept of mechanical impedance into the equation of motion, one can obtain the frequency response of the system and, therefore, to verify the amplitude and phase of the shaft's circular motion. Also, the system's equation of motion can be written in state-space representation, which allows the integration of the equation in time domain; in this way, one can observe the orbits of the shaft inside the bearing. The state-space representation also permits the obtaining of the Campbell's diagram and the free vibrational modes, through the solution of an eigenvalue and eigenvector problem.

2.1 Determination of Dynamic Coefficients

The determination of the dynamic coefficients of a bearing is a procedure that has to combine knowledge from fluid mechanics, when evaluating the Reynolds' Equation, and solid mechanics, when using the concept of equivalent dynamic coefficients.

The stiffness and damping coefficients of a journal bearing are obtained through the solution of the Reynolds' Equation, shown in Eq. (1). Equation (1) relates the pressure field, which arises from the relative motion inside the bearing, with the bearing's internal oil-film thickness and velocity of the relative motion. Therefore, it's possible to determine the pressure field and, hence, the hydrodynamic forces and dynamic coefficients. However, Reynolds's Equation has limited analytical solutions available; so its solution tends to be obtained through mathematical methods, such as the finite volume method.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\right)=6\cdot\omega\cdot R\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+12\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1}$$

Where $P(x,z)$ is the pressure distribution in the oil film, x and z are the rectangular coordinates, μ is the absolute viscosity, R is the radius of the shaft, h is the thickness of the oil film, ω is the rotational speed and t is the time.

The solution starts with the search for the equilibrium position of the shaft inside the bearing through a Newton-Raphson method, for each rotational speed. Afterwards, a small perturbation around the equilibrium is applied separately to every degree of freedom, which induces a perturbed pressure profile; then the pressure can be integrated to give the perturbed forces, as described by Lund (1964, 1979, and 1987). The perturbed forces can be represented through a first order Taylor series expansion, as showed in Eq. (2).

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x0} + K_{xx}\Delta x + K_{xy}\Delta y + B_{xx}\Delta\dot{x} + B_{xy}\Delta\dot{y} \\ F_y &= F_{y0} + K_{yx}\Delta x + K_{yy}\Delta y + B_{yx}\Delta\dot{x} + B_{yy}\Delta\dot{y} \end{aligned} \tag{2}$$

Equation (2) relates the perturbed forces, indicated by F_x and F_y, with the perturbations applied on each degree of freedom (Δx, Δy, $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$). Therefore, the coefficients can be evaluated as partial derivatives at the equilibrium position (Lund, 1987), as showed exemplified in Eq. (3). The remaining coefficients are similarly obtained.

$$K_{xy}=\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0 \qquad B_{xy}=\left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right)_0 \tag{3}$$

This paper compares the dynamic behavior of a rotating shaft, under the same operational conditions, but firstly supported by cylindrical bearings and secondly by tilting-pad journal bearings. It must be highlighted that in the cylindrical case, the perturbations are applied in the displacement and velocity of the shaft, exactly as shown in Eqs. (2) and (3). This procedure results in four stiffness and four damping coefficients (Machado, 2009).

However, in the tilting-pad journal bearing, in addition to the perturbations applied to the shaft's translational degrees of freedom, the perturbations in displacement and velocity must be done to every pad's tilting degree of freedom (α_1, α_2 to α_N, in a tilting-pad bearing with N pads). The presence of extra degrees of freedom results in more coefficients than the eight previously mentioned; in a journal bearing with 5 pads, for instance, 18 coefficients are obtained (Daniel, 2012).

To overcome this excess of coefficients, it is usual to reduce the equivalents coefficients related to pads' motions, leading to the coefficients with translational coordinates only, giving, like the cylindrical ones, eight coefficients. However, the coefficient's reduction procedure depends on the vibration frequency that must be assumed to the pads' vibration. In this paper, the frequency of the pad's motion is assumed to be synchronized with the shaft rotational speed, giving "synchronously reduced" coefficients.

2.2 Finite Element Representation

The mathematical model of the shaft is obtained by the finite element method, which turn possible the representation of a continuum object into discrete elements. Regarding the rotordynamics, a discretization based on a two-node finite element is adequate to represent the shaft's dynamic behavior. The matrixes used in this work were presented in Nelson and McVaugh (1976) and Nelson (1980), where the Timoshenko's beam theory is employed, as implemented by Tuckmantel (2010). Each element's matrixes are combined together to form global matrixes, containing all the degrees of freedom of the shaft's model. These global mass ($[M]$), stiffness ($[K]$), damping ($[C]$), and gyroscopic ($[G]$) matrixes are used in the equation of motion of the rotating system, as showed by Eq. (4), where the vector $\{F\}$ contains the external forces and Ω is the shaft's rotational speed.

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] - \Omega[G])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (4)$$

The damping matrix, which represents the structural damping of the rotor, is considered proportional with the mass and stiffness matrixes, as indicated by Eq. (5).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5)$$

In this work, the damping matrix is considered to be proportional only with the stiffness matrix; hence, $\beta = 0.0002$.

After the assembly of the global shaft's matrixes, the shaft's external elements, such as rigid discs and the bearings, must be added on their corresponding nodes. The disc presents effects that must be added into the mass and gyroscopic effect matrixes; the bearings have stiffness and damping terms, as described in section 2.1.

2.3 Dynamic Analyses

The dynamic analyses of a rotating system have to observe several effects and phenomena, resulting from the shaft's motion, in order to correctly characterize the rotor behavior. In particular, there are some interactions that are only detected through studying the free vibration of the system, which is the homogeneous solution of the equation of motion. For this reason, it is possible to sort the different analyses into two types: the free response, or free vibration of the system, and the forced response, or vibration, of the system (Mendes, 2011).

2.3.1 Free Response

The free response analysis is useful to observe and estimate the natural frequencies of the system, and the free vibrational modes. This analysis is accomplished by rewriting Eq. (4) in a state-space form, as showed by Eq. (6). Since is a free response analysis, only the system's dynamic matrix, defined by Eq. (7), is accounted in the solution. Then, an eigenvalue and eigenvector problem is applied to the dynamic matrix to determine the natural frequencies of the system.

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}([C] - \Omega[G]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}([C] - \Omega[G]) \end{bmatrix} \tag{7}$$

The resulting eigenvalues of the dynamic matrix are complex numbers, where the real part is related to the amplitude's decaying of the response, and the imaginary term gives the oscillatory feature of the response. The absolute value of the eigenvalue is the natural frequency of the system, and the damping ratio is the ratio between the real part of the eigenvalue and its modulus. For the purpose of stability analysis, the real part must be observed: if the signal is negative, the function decays with time, giving a stable system. However, if the real part of the eigenvalue is positive, the function increases continuously with time, leading the system to instability condition.

With the solution of the eigenvalue problem, it is possible to elaborate the Campbell's diagram and observe the damping ratio of the system. The Campbell's diagram shows the variation of the natural frequencies of the system, versus the rotational speed of the shaft. The same can be done to the damping ratio. From the variation of the real portion of the eigenvalue, it is possible to observe the onset of instabilities, by observing the signal of the real part of the eigenvalue.

2.3.2 Forced Response

The forced response analysis is required for the dynamic analysis of a rotating system because a rotor is not perfectly balanced, having a residual mass located offset to the shaft's geometric center. This residual mass excites the rotor in the same frequency as its rotational speed, so, to observe the full system response, it is necessary to evaluate the particular solution of the equation of motion, given by the forced vibration of the shaft.

When the shaft is excited by a harmonic force, the system vibrates in the same frequency, but with different amplitude and phase. The frequency response function (FRF) provides a complex result, which can be graphically represented by module and phase, giving an overview of the system's response with the excitation frequency.

Since the force's and the response's frequencies are the same, the FRF can be evaluated using the mechanical impedance concept. The resulting equation, after manipulating Eq. (4), is shown in Eq. (8), where *{F}* is the vector of unbalancing forces, *{Q}* is the vector of amplitudes, and the mechanical impedance matrix is represented by Eq. (9).

$$\{Q\} = \left[-\Omega^2[M] + j\Omega([C] - \Omega[G]) + [K]\right]^{-1}\{F\} \tag{8}$$

$$[H] = \left[-\Omega^2[M] + j\Omega([C] - \Omega[G]) + [K]\right] \tag{9}$$

The second approach that is usually used is the evaluation of operational modes, or forced modes, of the shaft. The forced mode is a linear combination between all the natural modes existing within the shaft. This procedure allows the visualization of the displacement of the shaft and deformed shape of the mechanical system, under an external force.

3. RESULTS

The dynamic analysis is based on the Laval rotor, shown in Fig. 1. Table 1 presents the dimensions considered for the rotor, where the disc's data has to account for the inner and outer diameters. Excitation is considered as unbalanced mass, and is positioned at node 11, on the disc, with a magnitude of 5.10^{-5} kg.m. The dynamic coefficients of the bearings are calculated from 600 RPM to 24000 RPM. The parameters for both bearings are in Tab. 2 and Tab. 3.

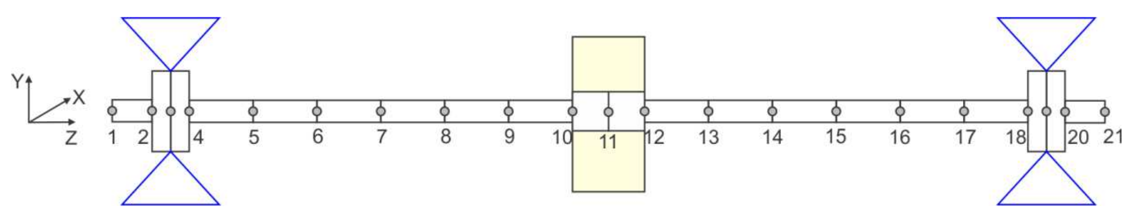


Figure 1. Schematic representation of the Laval rotor.

Table 1. Dimensions of the shaft

Element	Element Type	Length (10^3 m)	Radius (10^3 m)	Element	Element Type	Length (10^3 m)	Radius (10^3 m)
1	Beam	25.0	15.0	11	Disc	47.0	outer = 95.0 inner = 25.0
2	Beam	12.5	50.0	12	Beam	23.5	25.0
3	Beam	12.5	50.0	13	Beam	40.0	15.0
4	Beam	40.0	15.0	14	Beam	40.0	15.0
5	Beam	40.0	15.0	15	Beam	40.0	15.0
6	Beam	40.0	15.0	16	Beam	40.0	15.0
7	Beam	40.0	15.0	17	Beam	40.0	15.0
8	Beam	40.0	15.0	18	Beam	40.0	15.0
9	Beam	40.0	15.0	19	Beam	12.5	50.0
10	Beam	23.5	25.0	20	Beam	12.5	50.0
				21	Beam	25.0	15.0

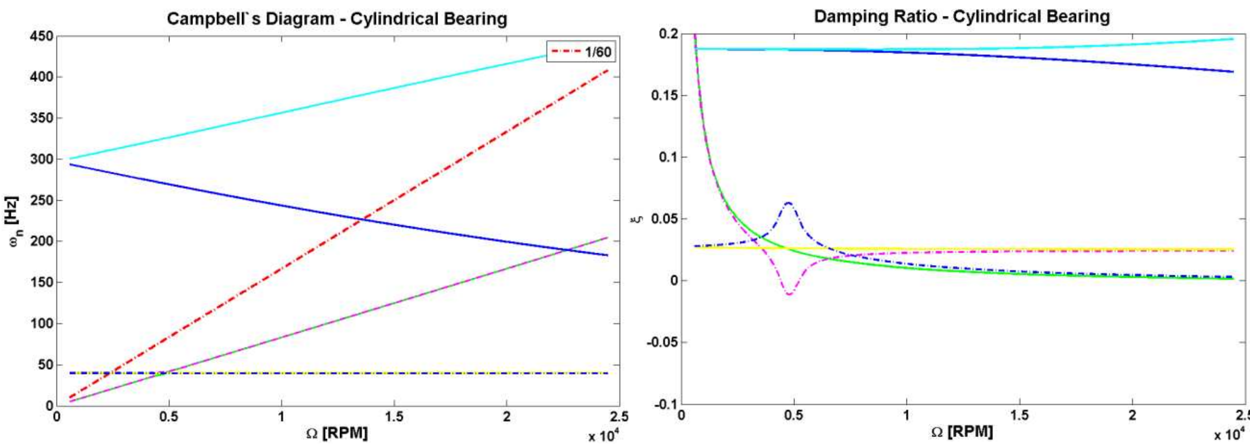
Table 2. Parameters for the cylindrical bearing

Diameter of the Shaft	0.050 m
Width of the Bearing	0.025 m
Radial Clearance	70 μm
Lubricant Viscosity	$5{,}01.10^{-2}$ Pa.s (ISO-VG 32)

Table 3. Parameters for the tilting-pad bearing

Diameter of the Shaft	0.050 m
Width of the Bearing	0.025 m
Radial Clearance	70 μm
Lubricant Viscosity	$5{,}01.10^{-2}$ Pa.s (ISO-VG 32)
Pad Radius	0.0254575 m
Pad Thickness	0.0135 m
Pad Angle	63.5 °
Angle Between Pads	8.5 °
Pre-Load	0.847
Load Characteristic	On Pad

There are two analyses being considered: in the first, the shaft is assembled with cylindrical bearings; and in the second, the same simulation is made with a 5-pad tilting-pad journal bearing. For the cylindrical case, the Campbell's diagram and damping ratio graphic are shown in Fig. 2.



(a) (b)

Figure 2. Free response for cylindrical bearing case: (a) Campbell's diagram; (b) Damping ratio.

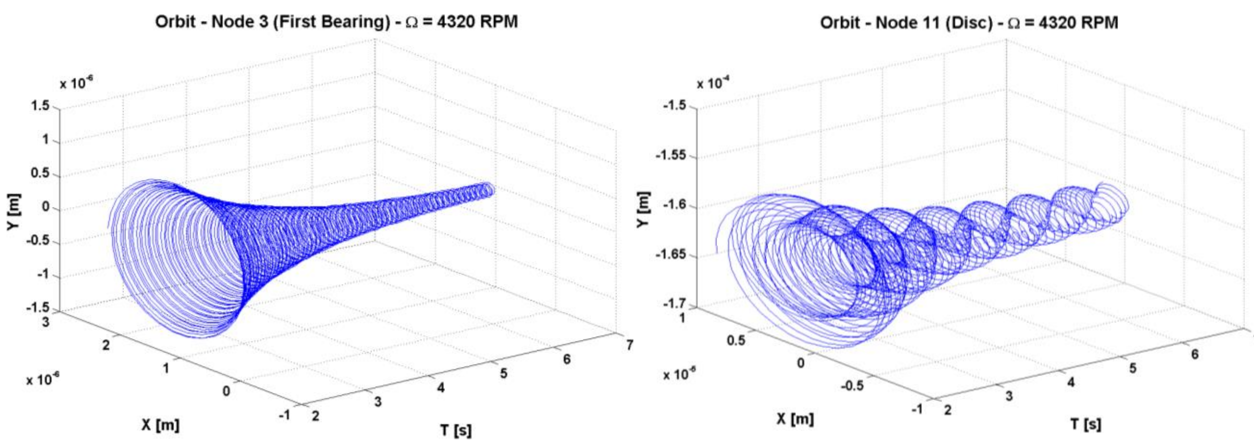
Figure 2(a) shows the shaft's natural frequencies curves, the bearings' frequencies curve, and the dashed line is the rotation line (1/60 line), that indicates where the shaft rotational speed is equal to the natural frequencies. When the 1/60 line crosses one of the shaft's natural frequencies curves, the rotational speed is equal to a natural frequency. Thus, this crossing point is called critical speed, and in this case, it is close to 2400 RPM as in Fig. 2(a).

Another information is where the bearings' frequencies line crosses the shaft's frequencies. From the literature, this crossing point indicates the onset of fluid-induced instabilities (oil whip) and, for the cylindrical bearings case, is about to 2 times the shaft's first critical speed. This point is located on the rotational speed of 4800 RPM. For this reason, it is expected that instabilities occur, starting from this rotational speed.

Figure 2(b) shows the damping ratios related to the natural frequencies presented in Fig. 2(a). As discussed on the methodology, the damping ratio gives information about the threshold of instability, observing the point where the damping ratio becomes negative. As a result, it is possible to observe that around 4800 RPM the damping ratio is negative, indicating the imminence of an instable operational condition.

As expected, both graphics of Fig. 2 show consistent and coherent results, in agreement with the instable operation of the shaft observed around 4800 RPM.

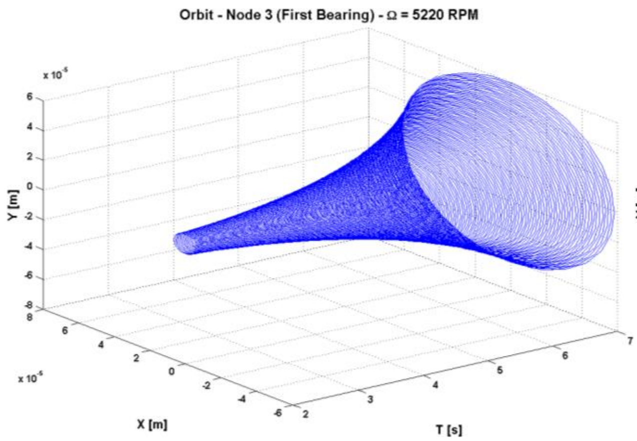
Fig. 3 shows the orbits found through the response in time domain at a rotational speed of 4320 RPM, i.e. before the evaluated threshold of instability. A decreasing behavior for the orbits can be noticed over the time, for both Fig. 3(a) and (b), which indicates that the shaft have a stable operation in this rotational speed.

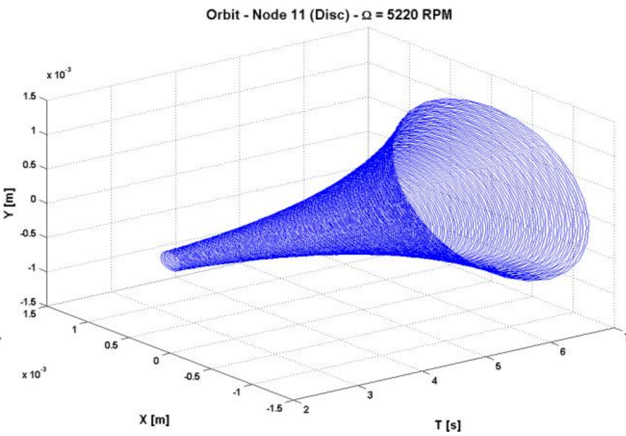


(a) (b)

Figure 3. Orbits at 4320 RPM for cylindrical bearing case: (a) First bearing's node; (b) Disc's node

However, when simulating a rotational speed after the instability threshold, the system presents a different behavior, as in Fig. 4. At the speed of 5220 RPM, the orbits amplitude increases over time, for both bearing and disc nodes, characterizing an unstable operation.





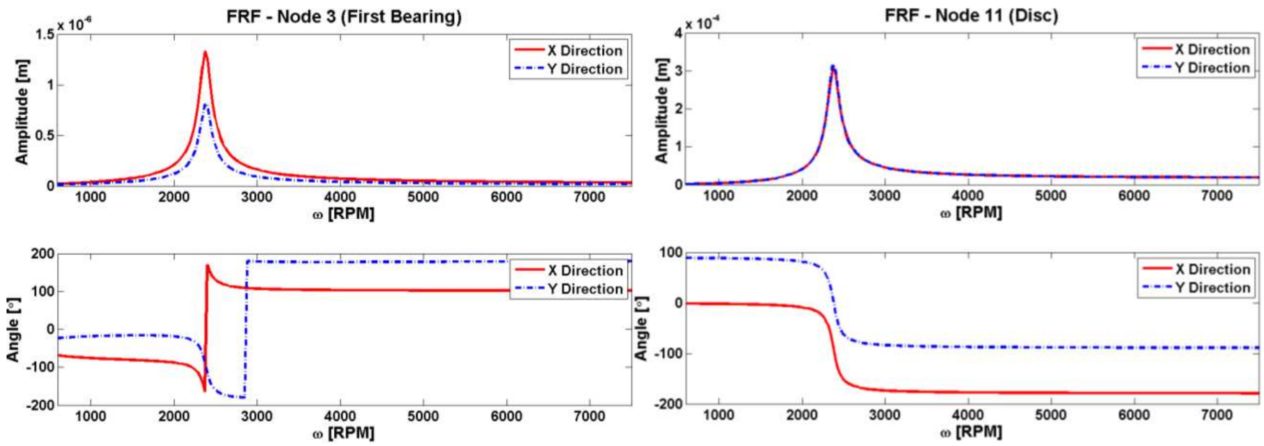
(a) (b)

Figure 4. Orbits at 5220 RPM for cylindrical bearing case: (a) First bearing's node; (b) Disc's node

Figure 5 presents the frequency response function (FRF) of the first bearing and disc nodes. The range of the rotational speeds is limited to a maximum of 7500 RPM, to help the graphic's visualization.

Figure 5(a) indicates the amplitudes for both X and Y directions, described by the shaft inside the bearing. It can be seen that the amplitude in the X direction is greater than in the Y direction, which is characteristic of a cylindrical bearings that have anisotropic coefficients. From the phase graphic, it can be seen that there is a variation of 180° (around 2400 RPM), indicating the critical speed of the mechanical system.

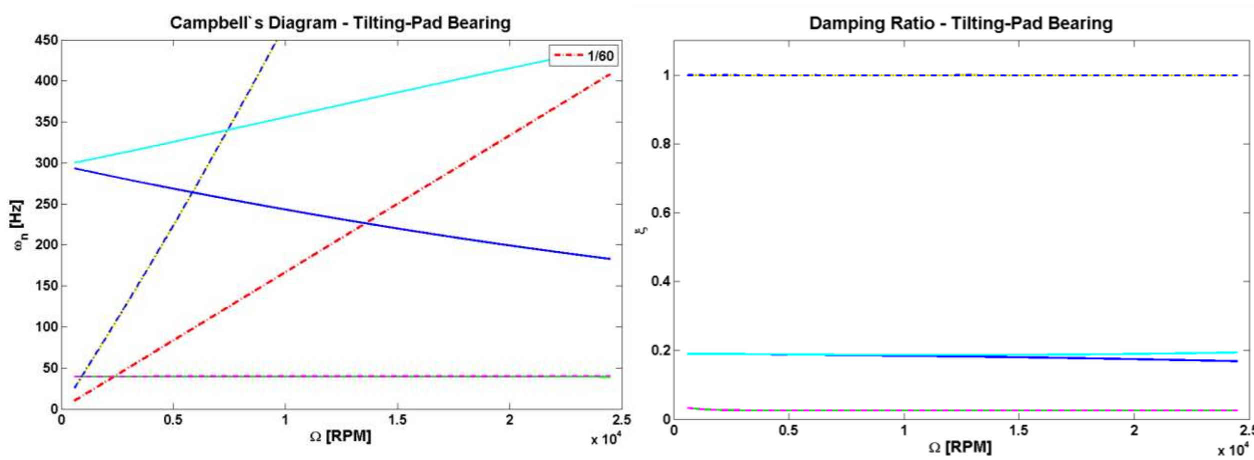
Figure 5(b) shows the same behavior regarding the natural frequency. However, the flexibility of the shaft overcomes the effects of anisotropy of the bearing, resulting in overlapping curves for the X and Y displacements.



(a) (b)

Figure 5. FRF for cylindrical bearing case: (a) First bearing's node; (b) Disc's node

The results obtained for the tilting-pad bearing are analogously analyzed. As done for the cylindrical bearing, initially the Campbell's diagram and damping ratio graphic are discussed. After that, the orbits at the rotational speeds of 4320 and 5220 RPM are obtained and finally the FRF is showed.



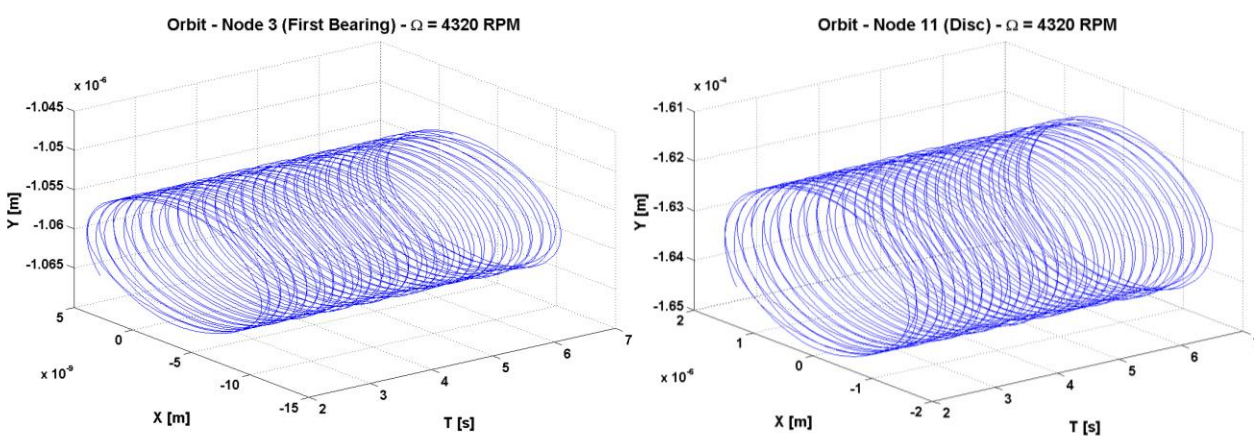
(a) (b)

Figure 6. Free response for tilting-pad bearing case: (a) Campbell's diagram; (b) Damping ratio.

Figure 6 shows the shaft's natural frequencies curves, the bearings' frequencies curve and the rotational curve. When comparing Fig. 6(a) with the Campbell's diagram for the cylindrical bearing (Fig. 2), the curve of the bearings' frequencies is differently positioned due to the kind of bearing, with different frequencies' characteristics. The crossing points between the shaft's curves and the bearings' curves are also changed, which indicates that the rotational speed where instabilities occur with the use of cylindrical bearings is now stable.

The remaining curves presented the same behavior as viewed in Fig. 2(a). This is consistent, as those curves are related to the shafts' frequencies and present an indicative of the shaft's characteristics, not suffering significant influence of the bearings. Therefore, the first critical speed is still at 2400 RPM.

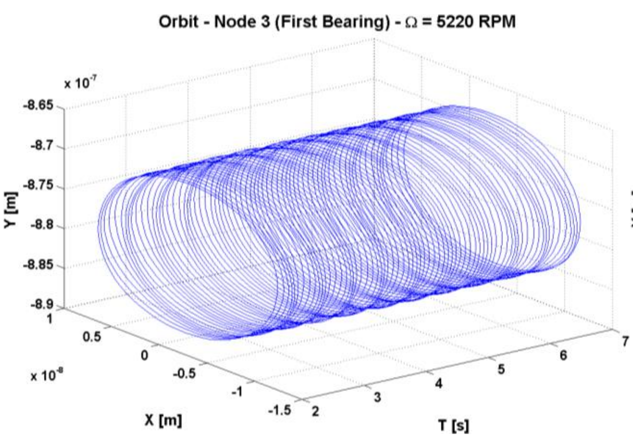
Figure 6(b) shows the damping ratio for the tilting-pad bearing case. As discussed before, the damping ratio value must be negative in order to be characterized as an unstable behavior. Analyzing the graphic on Fig. 6, values of negative damping ratio cannot be observed, indicating that the shaft is stable for the shaft's range of speed. This conclusion agrees with the analysis of the Campbell's diagram where no instability can be observed in the frequency range. Above all, no indication of instabilities at the rotational speed of 4800 RPM was found.



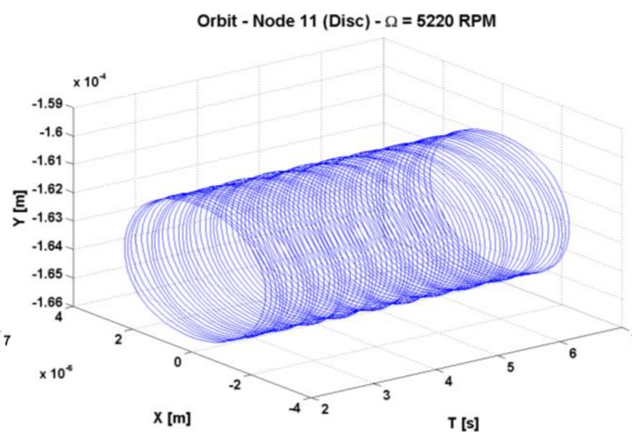
(a) (b)

Figure 7. Orbits at 4320 RPM for tilting-pad bearing case: (a) First bearing's node; (b) Disc's node

Nevertheless, Fig. 7 and 8 shows the orbits obtained in time domain, at the rotation speed of 4320 RPM (Figure 7) and 5220 RPM (Figure 8). Those orbits present a stable condition, not showing great variations in the displacements' amplitudes, as opposed as those found for the cylindrical bearing. From the analyses of the Campbell's diagram and damping ratio, it can be concluded that the Laval rotor supported by tilting-pad bearings does not present instabilities in the simulated frequency range.



(a)

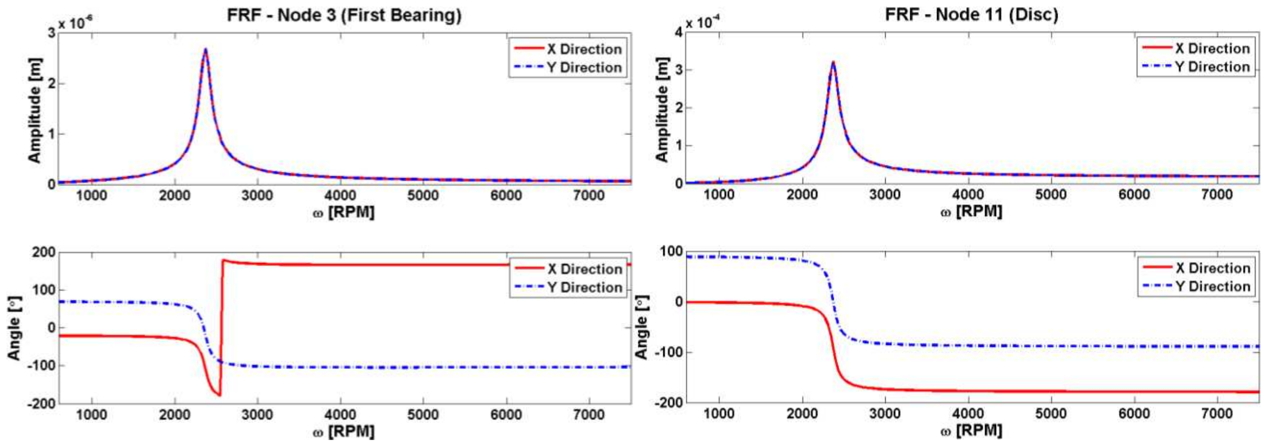


(b)

Figure 8. Orbits at 5220 RPM for tilting-pad bearing case: (a) First bearing's node; (b) Disc's node

At last, the FRFs for the tilting-tad bearing case are shown in Fig. 9. Figure 9(a) shows that the displacements X and Y are overlapped in the bearing node, so a circular trajectory can be expected, as opposed as the cylindrical case. This is characteristic of tilting-pad bearings that present direct coefficients approximately isotropic.

Both graphics on Fig. 9 present agreement regarding the critical velocity at 2400 RPM. This is a result that agrees with the previous analyses, as well. It can be observed that the graphic of Fig. 9(b), presents the same behavior as in Fig. 5(b), which means that the disc's amplitude is practically insensitive to the kind of bearing, because the shaft is more flexible than the bearings.



(a) (b)

Figure 9. FRF for tilting-pad bearing case: (a) First bearing's node; (b) Disc's node

4. CONCLUSIONS

The analyses accomplished in this paper verify the differences on the rotor's dynamic behavior when it is supported by a cylindrical or a tilting-pad bearing. The cylindrical bearing presents an instable behavior on a specific rotational speed (about at double of the shaft's natural frequency), in which a negative value of the damping ratio was observed from the crossing points in the Campbell's diagram.

In other hand, the tilting-pad bearing did not present any kind of instabilities on the simulated frequency range. The Campbell's diagram showed a variation between the cylindrical and the tilting-pad bearings' frequencies, which is consistent with the difference between the kind of bearings and, consequently, their coefficients. The damping ratio did not present any negative values within the frequency range. Also, at the velocities where the cylindrical bearing had an instable operation, the tilting-pad showed a stable behavior.

5. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank CNPq and FAPESP for the financial support of this research.

6. REFERENCES

Allaire, P., Parsell, J., Barret, L., *A Pad Perturbation Method for the Dynamic Coefficients of Tilting-Pad Journal Bearings.* Wear, 72, pp. 29-44, 1981.

Daniel, G. B., Cavalca, K. L. (orient.). *Desenvolvimento de um Modelo Termohidrodinâmico para Análise em Mancais Segmentados.* 2012. 236p. Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

Hummel, C., *Kritische drehzahlen als folge der nachgiebigkeit des schmiermittels im lager*, Ph.D. Thesis, Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, 1926.

Lund, J. W., *Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing.* ASME Transactions, n.7, p.342-352, 1964.

Lund, J. W., *Evaluation of Stiffness and Damping Coefficients for Fluid Bearings.* The Shock and Vibration Digest, Vol. 11, No. 1, pp. 5–10, 1979.

Lund, J. W.,Pedersen, L. B., *The Influence of Pad Flexibility on the Dynamic Coefficients of a Tilting Pad Journal Bearing.* J. Tribol., 109(1):65-70, 1987.

Machado, T. H., Cavalca, K. L., 2009, *Evaluation of Dynamic Coefficients for Fluid Journal Bearings with Different Geometries*, In: 20th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2009, Gramado-RS, Proceedings of the 20th International Congress of Mechanical Engineering. Rio de Janeiro : ABCM - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, v. 1. p. 1-11.

Mendes, R. U., Cavalca, K. L. (orient.), *Desenvolvimento de um Sistema de Atuação Magnética para Excitação de Sistemas Rotativos.* 2011. 140p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

Nelson, H. D., *A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory.* ASME Journal of Mechanical Design, v. 102, n. 4, p. 793-803, 1980.

Nelson, H. D.; McVaugh, J. M., *The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements.* Journal of Engineering for Industry, p.593-600, May 1976.

Newkirk, B. L., and Taylor, H. D, *Shaft Whipping due to Oil Action in Journal Bearings,* General Electric Review, Vol. 28, n. 8, 1925, pp. 559-568.

Ocvirk, F., 1952, *Short Bearing Approximation for Full Journal Bearing*, NACA TN 20808.

Pinkus, O., 1956, *Analysis of Elliptical Bearings*, Trans. ASME, v. 78, pp. 965-973.

Pinkus, O., 1958, *Solution of Reynolds Equation for Finite Journal Bearings*, Trans. ASME, v. 80, pp. 858-864.

Pinkus, O., 1959, *Analysis and Characteristics of Three-lobe Bearings*, Journal of Basic Engineering, pp. 49-55.

Reynolds, O., *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil.* Philos. Trans. R. Soc. London, Series A, Vol. 177, Part 1, 1886, pp.157-234.

Sommerfeld, A., *Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung.* Zs. Math. and Phys., Vol. 50, No.1, 1904, pp.97-155.

Stodola, A., *Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager*, Schweizerische Bauzeitung, Vol. 85/86, pp. 265-266, 1925.

Tuckmantel, F. W., Cavalca, K. L. (orient.)., *Integração de sistemas rotor-mancais hidrodinâmicos-estrutura de suporte para resolução numérica.* 2010. 159 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

7. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

VIII CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
UBERLÂNDIA - MG - BRASIL 10 A 15 DE AGOSTO DE 2014

ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM SISTEMAS ROTATIVOS

Antonio Carlos Carneiro, acarneiro@fem.unicamp.br
Gregory Bregion Daniel, gbdaniel@fem.unicamp.br
Katia Lucchesi Cavalca, katia@fem.unicamp.br

Resumo: *As máquinas rotativas são empregadas nas mais diversas áreas da engenharia e possuem um elevado grau de importância no contexto onde são utilizadas. Por isso, essas máquinas devem ser estudadas de modo a prever corretamente o seu comportamento durante a operação, visando otimizar o seu desempenho e evitar o surgimento de problemas operacionais. Um meio de estudo existente é a análise por decremento logarítmico, que permite visualizar o limiar de estabilidade do sistema, tornando possível a determinação da faixa na qual a máquina pode operar dentro dos limites de segurança impostos. Este trabalho tem como objetivo aplicar o método do decremento logarítmico para a detecção de três tipos distintos de instabilidade: instabilidade causada pelo amortecimento interno do sistema, instabilidade devido ao fenômeno de oil-whirl/oil-whip de mancais lubrificados e a instabilidade devido ao efeito dos selos de fluxo. O rotor é modelado por meio do método dos elementos finitos. O método é o mais comumente utilizado devido à sua robustez, facilidade de implementação e resolução das equações envolvidas. Desse modo, as fontes de instabilidades estudadas são modeladas de forma a permitirem a sua adição no modelo de elementos finitos: nos três casos estudados, os efeitos consistem em termos de rigidez e amortecimento (ou coeficientes dinâmicos) adicionados ao modelo completo do eixo. Os coeficientes necessários à introdução do efeito de amortecimento interno são obtidos diretamente das equações constitutivas do elemento de eixo, para que as matrizes elementares já possuam tal característica. Os três tipos de instabilidades serão primeiramente visualizados separadamente em um mesmo rotor, de modo a analisar o comportamento específico em cada caso e sua influência nos modos do rotor. Por fim, os três efeitos serão combinados para a verificação do grau de sensibilidade da análise por decremento logarítmico.*

Palavras-chave: *instabilidade, análise de autovalor, dinâmica de sistemas rotativos, mancais lubrificados, selos de fluxo*

1. INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de máquinas rotativas envolve um elevado número de variáveis, que requerem um cuidadoso tratamento e atenção na sua modelagem, de modo a atingir a precisão necessária para representar o comportamento real da máquina. Isto se torna mais evidente quando a análise deve considerar as interações com outros componentes e elementos, como os mancais lubrificados e selos mecânicos de fluxo. Tais componentes são importantes fontes de instabilidades autoinduzidas, mais especificamente, o *whirl-whip*.

A ocorrência de *whirl-whip* é conhecida desde meados da década de 20 (Newkirk, 1924; Kimball, 1924; Newkirk e Taylor, 1925). Ambos os fenômenos podem ser explicados separadamente, mas fazem parte de um mesmo mecanismo de instabilização. Sob certas condições operacionais este fenômeno ocorre: as forças atuantes nos elementos, como o mancal, são convertidas da direção radial para a tangencial, gerando uma vibração subsíncrona. Denominada de *whirl*, esta vibração possui frequência diferente da frequência (ou velocidade) de rotação do eixo e geralmente a ocorre em aproximadamente à metade da frequência de rotação do eixo.

À medida que a velocidade de rotação aproxima-se do dobro da frequência natural do eixo, a frequência de *whirl* aproxima-se da frequência natural do eixo. Nessas condições, o *whirl* é substituído pelo *whip*, pois a vibração subsíncrona está excitando a primeira frequência natural do eixo. O *whip* é uma ocorrência de grande potencial destrutivo, pois a amplitude de vibração está limitada à folga dos mancais, podendo haver contato e, consequentemente, danos aos componentes da máquina. Ao contrário do *whirl*, o *whip* possui frequência constante: à medida que a velocidade aumenta, a frequência de *whip* permanece excitando a frequência natural do eixo (Muszynska, 1986).

As fontes mais comuns de *whirl* são os mancais (*oil-whirl*), os selos e o amortecimento interno no rotor (*whirl* por histerese). Um breve histórico do desenvolvimento destas fontes de instabilidades em rotores é apresentado a seguir.

2. HISTÓRICO

O desenvolvimento de uma teoria para mancais hidrodinâmicos começou com Reynolds (1886), que foi o pioneiro na criação de um modelo matemático para a lubrificação hidrodinâmica. A equação de Reynolds relaciona o campo de pressão resultante de duas superfícies com movimento relativo entre si e separadas por um filme de fluido. Nos anos seguintes, os trabalhos de Stodola (1925) e Hummel (1926) se destacam por propor que os efeitos causados pelo filme de fluido podem ser mais bem representados por meio de coeficientes equivalentes de amortecimento e rigidez.

O desenvolvimento computacional impulsionou a teoria dos mancais: Pinkus (1956; 1958; 1959) utilizou o método das diferenças finitas para modelar a pressão no interior de um mancal. Outro trabalho de grande importância foi o de Lund (1964) que apresentou uma metodologia de cálculo de coeficientes linearizados. Desde então, as análises evoluem a fim de incluir mais efeitos, como a elasticidade do mancal, efeitos térmicos no filme de óleo, entre outros.

Os estudos envolvendo o comportamento dinâmico dos selos mecânicos iniciaram-se como uma derivação direta da teoria aplicada aos mancais hidrodinâmicos. Entretanto, a utilização da equação de Reynolds requer, entre outros fatores, que o escoamento modelado seja laminar e incompressível. As condições de operação dos selos de fluxo (elevadas velocidade axial, folga radial e perda de carga) violam o requerimento de escoamento laminar do fluido. Consequentemente, novos equacionamentos fizeram-se necessários.

Destaca-se o trabalho de Lomakin (1958), que estudou as forças de restituição nos selos, obtendo a rigidez direta (rigidez direta de Lomakin) devido ao salto de pressão entre a entrada e a saída do selo. No mesmo ano, Tao (1958) aproximou o problema da lubrificação turbulenta por meio da formulação de fluxo expandido, evitando a formulação por meio da representação física do mecanismo de transporte turbulento. Childs (1982) baseou-se nas equações de Hirs, na qual a turbulência da entrada é considerada no desenvolvimento do fluxo circunferencial do selo, para propor um método de cálculo. Anos mais tarde, Childs (1993) propôs um modelo analítico, com a solução sendo obtida pelo método das perturbações, para obtenção dos coeficientes de inércia, amortecimento e rigidez.

O efeito do amortecimento interno teve sua modelagem matemática iniciada por Dimentberg (1961), que considerou duas abordagens: amortecimento do tipo viscoso e do tipo histerético. Durante muitos anos, fez-se distinção entre os seus efeitos na estabilidade do rotor, porém Genta (2004) expôs que, do ponto de vista da análise da estabilidade, as duas modelagens são equivalentes. Destacam-se no desenvolvimento teórico o trabalho de Zorzi e Nelson (1977), que incluíram o amortecimento interno no modelo de elementos finitos, e o trabalho de Edney *et al.* (1990), que utilizou a viga de Timoshenko para a dedução das matrizes de elementos finitos.

O objetivo deste artigo é estudar o método do decremento logarítmico como forma de detecção de instabilidades autoinduzidas (ou autoexcitadas) provenientes de três fontes. A primeira fonte são os mancais lubrificados do tipo cilíndrico; a segunda são os selos mecânicos de fluxo, do tipo plano cilíndrico. Finalmente, a terceira fonte é o amortecimento interno presente no eixo. Os efeitos na dinâmica de um mesmo rotor serão estudados separadamente e depois combinados para visualização da sensibilidade do método.

3. METODOLOGIA

3.1. Representação pelo Método dos Elementos Finitos

A modelagem matemática do eixo utiliza o método dos elementos finitos, que possibilita a representação de um sistema mecânico ou meio contínuo em elementos discretizados. Para o propósito da dinâmica de rotores, a discretização baseada em um elemento finito com dois nós, cada um com quatro graus de liberdade (2 de rotação e 2 de translação), é adequada para representar o comportamento dinâmico do eixo. As matrizes empregadas neste trabalho foram apresentadas por Nelson e McVaugh (1976) e Nelson (1980). Cada uma das matrizes elementares é combinada para formar as matrizes globais do eixo, contendo todos os graus de liberdade do sistema rotativo. A equação de movimento do sistema é, então, escrita em função das matrizes globais de massa ($[M]$), rigidez ($[K]$), amortecimento ($[C]$) e efeito giroscópico ($[G]$), conforme indicado na Eq. (1). A Eq. (1) também apresenta o vetor $\{F\}$, que contém as forças externas, e a velocidade rotacional do eixo Ω (Tuckmantel, 2010).

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] - \Omega[G])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \tag{1}$$

A matriz de amortecimento do rotor neste caso é considerada estrutural proporcional, é representada pela Eq. (2).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{2}$$

Após a montagem das matrizes globais do eixo, os elementos externos, como os discos, mancais e selos devem ser adicionados em seus respectivos nós. O disco apresenta termos a serem adicionados nas matrizes de massa e efeito giroscópico. Os mancais e selos possuem apenas termos de rigidez e amortecimento, como será apresentado nas seções 3.2 e 3.3. A adição do amortecimento interno é descrita na seção 3.4.

3.2. Determinação dos Coeficientes do Mancal

Os coeficientes de rigidez e amortecimento de um mancal são obtidos através da solução da equação de Reynolds, mostrada na Eq. (3). A Eq. (3) relaciona o campo de pressão, originado do movimento relativo do fluido dentro do mancal. Desse modo, é possível determinar o campo de pressão e as forças hidrodinâmicas e, consequentemente, os coeficientes dinâmicos. Entretanto, a equação de Reynolds não apresenta uma solução analítica fechada; sua solução é mais comumente obtida através de métodos matemáticos, como o método dos volumes finitos.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 6 \cdot \Omega \cdot R \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + 12\frac{\partial h}{\partial t} \tag{3}$$

Onde $P(x,z)$ é a distribuição de pressão no filme de óleo, x e z são as coordenadas retangulares, μ é a viscosidade absoluta, R é o raio do eixo, h é a espessura do filme de óleo, Ω é a velocidade de rotação do eixo e t é o tempo.

A solução é iniciada com a busca pela posição de equilíbrio do eixo dentro do mancal, por meio do método de Newton-Raphson, para cada velocidade de rotação. Em seguida, uma pequena perturbação é aplicada, separadamente em cada grau de liberdade, ao redor do ponto de equilíbrio, o que induz um perfil de pressão perturbado. Assim, a pressão pode ser integrada para obter as forças perturbadas, conforme descreve Lund (1964; 1979; 1987). As forças podem ser representadas por meio de uma expansão de Taylor de primeira ordem, como mostrado na Eq. (4).

$$F_x = F_{x0} + K_{xx}\Delta x + K_{xy}\Delta y + B_{xx}\Delta\dot{x} + B_{xy}\Delta\dot{y}$$
$$F_y = F_{y0} + K_{yx}\Delta x + K_{yy}\Delta y + B_{yx}\Delta\dot{x} + B_{yy}\Delta\dot{y} \quad (4)$$

A Eq. (4) relaciona as forças perturbadas, indicadas por F_x e F_y, com as perturbações aplicadas em cada grau de liberdade (Δx, Δy, $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$). Desse modo, os coeficientes podem ser calculados por meio de derivadas parciais ao redor do ponto de equilíbrio (Lund, 1987), como exemplificado na Eq. (5). Os coeficientes restantes são obtidos de forma similar, resultando em quatro coeficientes de rigidez e quatro de amortecimento (Machado, 2009).

$$K_{xy} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0 \qquad B_{xy} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right)_0 \quad (5)$$

3.3. Determinação dos Coeficientes do Selo

A metodologia de cálculo dos coeficientes dos selos segue a proposta apresentada por Childs (1993) e implementada por Galera (2013). Os coeficientes de rigidez, amortecimento e inércia dos selos são obtidos a partir das forças de reação, que, por sua vez, são obtidas através da integração da distribuição de pressão ao longo do selo. Estas forças podem ser linearizadas para pequenos deslocamentos ao redor da posição de equilíbrio do eixo, podendo ser representadas como mostrado na Eq. (6).

$$-\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Onde M é o termo de inércia, K e C são, respectivamente, a rigidez e amortecimento diretos, k e c são, na ordem, os termos cruzados de rigidez e amortecimento, F_x e F_y são as forças de reação.

A determinação da distribuição de pressão ao longo do selo é iniciada por meio da resolução das equações da continuidade, de movimento axial e de movimento circunferencial, através do método dos volumes finitos. Os campos de pressão são obtidos assumindo duas configurações:

com o selo centrado e aplicando-se pequenas perturbações. Desse modo, os campos de pressão centrado e perturbado são integrados numericamente, obtendo-se, assim, as forças de reação.

As forças de reação são, então, reescritas em função das coordenadas radial (f_r) e tangencial (f_θ), conforme indicado na forma adimensional pela Eq. (7). As forças radiais assumem, em função da frequência, um comportamento quadrático e as forças radiais podem ser escritas linearmente. Desse modo, a Eq. (7) indica o resultado do ajuste por mínimos quadrados. Nesta equação, f é a frequência adimensionalizada, $\overline{K}$ e $\overline{k}$ são, respectivamente, as rigidezes direta e cruzada; $\overline{C}$ e $\overline{c}$ são os amortecimentos direto e cruzado e $\overline{M}$ é o termo de inércia, todos adimensionalizados.

$$\begin{aligned} f_r(f) &= -\left(\overline{K} + f\overline{c} - f^2\overline{M}\right) \\ f_\theta(f) &= \overline{k} - f\overline{C} \end{aligned} \tag{7}$$

Após a dimensionalização dos coeficientes de inércia, amortecimento e rigidez, estes são adicionados nos respectivos graus de liberdade, no modelo de elementos finitos do eixo.

3.4. Adição do Amortecimento Interno

O amortecimento interno no eixo é modelado segundo Zorzi e Nelson (1977). Entretanto, segundo estudos recentes (Genta, 2004) não existem diferenças entre as modelagens por amortecimento viscoso ou histerético, do ponto de vista da análise de instabilidades. Desse modo, as matrizes deduzidas por Zorzi e Nelson (1977) são utilizadas apenas com o efeito do amortecimento interno do tipo viscoso, como indicado na Eq. (8).

$$[M]\{\ddot{q}\} + \left([C] + [C_\eta] - \Omega[G]\right)\{\dot{q}\} + \left([K] + [K_\eta]\right)\{q\} = \{F\} \tag{8}$$

Os termos $[C_\eta]$ e $[K_\eta]$ são, respectivamente, a matriz de amortecimento e de rigidez devido ao amortecimento interno do eixo. Essas matrizes são apresentadas na Eq. (9) e seus termos são adicionados apenas aos graus de liberdade de translação do eixo. Deve-se destacar que a matriz

$[K_\eta]$ é antissimétrica e dependente da velocidade de rotação do eixo, o que traduz o caráter instabilizador do amortecimento interno.

$$[C_\eta] = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \qquad [K_\eta] = \begin{bmatrix} 0 & \eta\Omega \\ -\eta\Omega & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

O termo η é o coeficiente de amortecimento interno do eixo. Para as simulações deste trabalho, buscou-se um valor de η tal que este fosse igual ao coeficiente de amortecimento externo equivalente, de modo que a frequência de instabilização seja o dobro da frequência natural. Isso pode ser feito seguindo a Eq. (10), que relaciona a primeira frequência natural (ω_n), com a frequência de instabilização (ω_{ins}) e os coeficientes equivalentes de amortecimento externo (υ) e interno (η).

$$\frac{\omega_{ins}}{\omega_n} = \frac{\upsilon + \eta}{\eta} \tag{10}$$

3.5. Análise Dinâmica

A análise dinâmica de um sistema rotativo deve ser capaz de detectar diversos efeitos e fenômenos resultantes do movimento do eixo, de modo a caracterizar corretamente o comportamento do rotor. Em particular, certas interações são mais facilmente observadas ao estudar a vibração livre do sistema, que é a solução homogênea da equação de movimento (Eq. (1)). A seção 3.5.1 descreve a obtenção do decremento logarítmico por meio da análise de autovalor. A seção 3.5.2 apresenta as órbitas do movimento do eixo, provenientes da resposta completa da equação de movimento, para a observação e verificação do caráter estável ou instável observado pela análise de decremento logarítmico.

3.5.1. Análise de Decremento Logarítmico

A análise de decremento logarítmico origina-se na análise da resposta livre do sistema. Este tipo de análise também é útil para observar e estimar as frequências naturais do sistema e seus modos livres de vibração. A análise é realizada reescrevendo a Eq. (1) no formato de espaço de estados, conforme mostrado pela Eq. (11). Como se trata de uma análise de resposta livre, sem forças externas atuantes, a solução leva em consideração apenas a matriz dinâmica do sistema, mostrada pela Eq. (12). Assim, a solução da equação torna-se um problema de autovalores, sendo necessária a determinação das raízes do polinômio característico obtido pelo determinante da Eq. (12).

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}([C]-\Omega[G]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}([C]-\Omega[G]) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Os autovalores provenientes da matriz dinâmica são números complexos, relacionados a cada frequência natural do sistema. A Eq. (13) mostra um autovalor genérico λ e seu complexo conjugado, do modo vibracional k, em uma determinada velocidade de rotação Ω. Os termos ω_{nk} e ξ_k indicam, respectivamente, a frequência natural do modo e o fator de amortecimento deste. Resolvendo o problema de autovalor para cada velocidade de rotação Ω, obtém-se o diagrama de Campbell, que mostra a variação das frequências naturais em função da velocidade de rotação.

$$\lambda_k, \overline{\lambda_k} = \xi_k \omega_{nk} \pm j\omega_{nk}\sqrt{1\text{-}\xi_k^2} \tag{13}$$

Sabe-se que a parte real da Eq. (13) está relacionada ao decaimento da amplitude da resposta, ao passo que a parte imaginária relaciona-se ao caráter oscilatório desta. Portanto, o termo real deve ser observado para a determinação da estabilidade do sistema: se for negativo, a função decresce continuamente com o tempo, caracterizando uma operação estável. Entretanto, caso o sinal da parte real do autovalor seja positiva, tem-se que a amplitude da resposta cresce continuamente com o tempo, levando o sistema à instabilidade. Tal comportamento é mais facilmente visualizado utilizando o conceito de decremento logarítmico, que pode ser calculado como apresentado na Eq. (14).

$$\delta_k = \frac{-2\pi Re(\lambda_k)}{|Im(\lambda_k)|} = \frac{2\pi\xi_k}{\sqrt{1-\xi_k^2}} \tag{14}$$

Similarmente ao diagrama de Campbell, elabora-se o diagrama da variação dos fatores de amortecimento de cada modo vibracional *k*, em função da velocidade de rotação *Ω*. Observa-se, então, a faixa de velocidades na qual o eixo é estável, assim como a determinação do limite de estabilidade do sistema.

3.5.2. Órbitas de Movimento

As órbitas de movimento do eixo são uma importante ferramenta na análise de estabilidade do sistema. Ao contrário da análise de autovalores, as órbitas representam a solução completa da equação de movimento, combinando as respostas transiente e permanente. Entretanto, por envolverem um número muito elevado de variáveis, as soluções analíticas não são um caminho viável, sendo necessário, portanto, recorrer à integração numérica da equação.

A integração numérica também parte da solução da Eq. (11), a equação de movimento em representação de espaço de estados. O vetor de forças *{F}*, presente nesta análise, inclui o desbalanceamento do eixo. A integração numérica fornece outro desafio neste tipo de análise: seu custo computacional tende a ser elevado, quando comparado às análises de autovalor. Desse modo, optou-se por calcular as orbitas de movimento do eixo durante a sua operação apenas em velocidades de interesse (antes e depois do limiar de estabilidade), determinadas pela análise do diagrama de Campbell e do decremento logarítmico. As órbitas, então, são analisadas para visualizar o comportamento estável ou instável, e se estes resultados estão de acordo com aqueles encontrados previamente.

4. RESULTADOS

A Fig. 1 apresenta uma representação esquemática do sistema rotativo utilizado nas simulações computacionais.

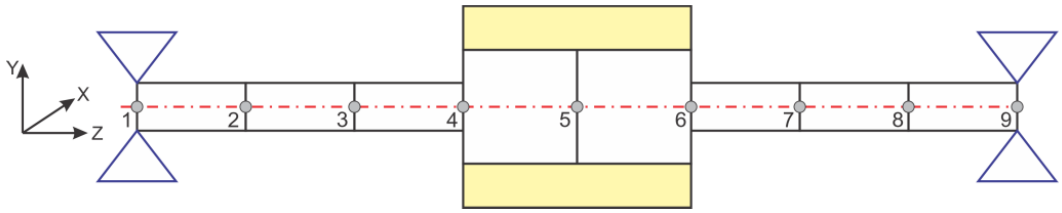


Figura1. Representação esquemática do eixo simulado

Tabela 1. Dimensões do eixo

Elemento	Comprimento (mm)	Diâmetro Interno (mm)	Diâmetro Externo (mm)	Elemento	Comprimento (mm)	Diâmetro Interno (mm)	Diâmetro Externo (mm)
1	124,0	0,0	50,0	5	130,0	0,0	130,0
2	123,0	0,0	50,0	6	123,0	0,0	50,0
3	123,0	0,0	50,0	7	123,0	0,0	50,0
4	130,0	0,0	130,0	8	124,0	0,0	50,0
Disco	260,0	50,0	200,0				

Tabela 2. Parâmetros do mancal cilíndrico

Diâmetro Nominal (mm)	50
Largura do Mancal (mm)	50
Folga Radial (μm)	110

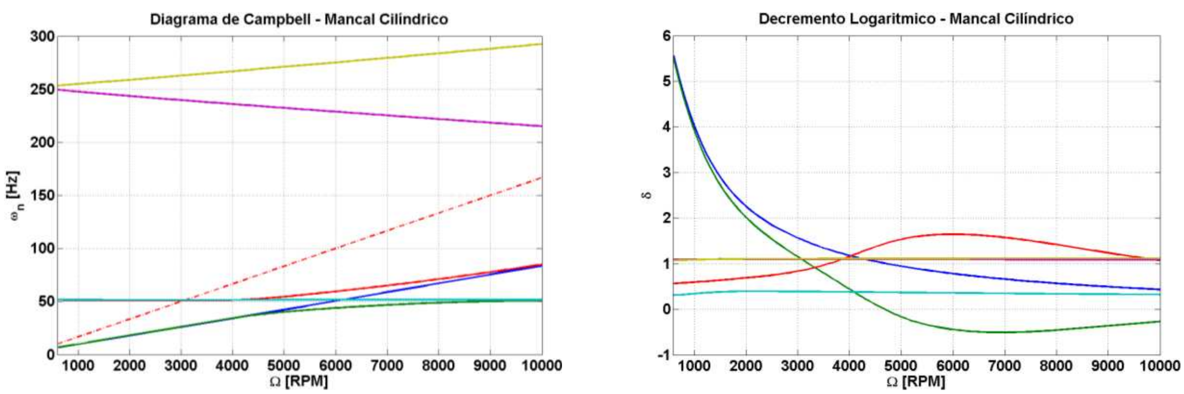
Tabela 3. Parâmetros do selo plano cilíndrico

Gradiente de Pressão ΔP (bar)	10
Velocidade de Referência de ΔP (RPM)	4000
Folga Radial (μm)	200
Largura do Selo (mm)	10
Raio do Selo (mm)	100
Fluido de Trabalho	Água
Viscosidade Absoluta do Fluido (Pa.s)	$0{,}7977.10^{-3}$
Densidade do Fluido (kg/m^3)	998

A Tab. 1 apresenta os parâmetros geométricos considerados para o rotor. A excitação utilizada é de massa desbalanceada, posicionada no nó 5, no disco, com magnitude de $1{,}5.10^{-3}$ kg.m. As simulações foram realizadas para uma faixa de velocidades de 600 RPM à 10000 RPM. Os parâmetros geométricos do mancal cilíndrico e do selo são apresentados na Tab. 2 e 3, respectivamente.

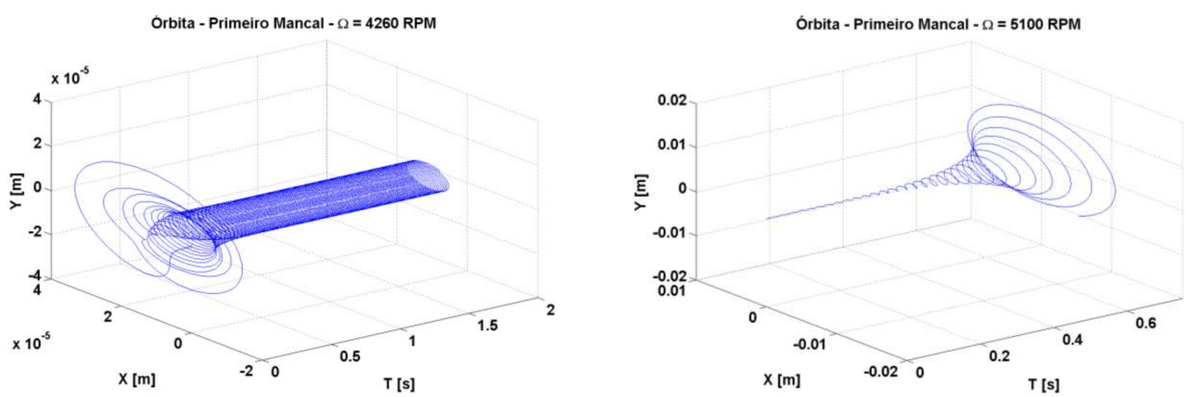
Inicialmente, simulou-se o rotor com o mancal cilíndrico, posicionado nos nós 1 e 9. O diagrama de Campbell e o gráfico do decremento logarítmico são apresentados na Fig. 2.

A análise da Fig. 2a permite concluir que a primeira frequência natural do eixo encontra-se em 3060 RPM. Como esperado, as curvas para os dois primeiros modos e as frequências do mancal estão representadas neste gráfico. O cruzamento das frequências do mancal com o primeiro modo do eixo ocorre por volta de 6000 RPM, aproximadamente 2 vezes a frequência natural, indicando a ocorrência do *whip*. A Fig. 2b nos permite visualizar que, na velocidade de 4680 RPM, o decremento logarítmico assume valor negativo, indicando uma antecipação do limiar de estabilidade. A Fig. 3 apresenta as órbitas antes, a 4260 RPM, e depois, a 5100 RPM, do limiar de estabilidade.



(a) **(b)**

Figura 2. Diagrama de Campbell (a) e decremento logarítmico (b) para o eixo com mancal cilíndrico

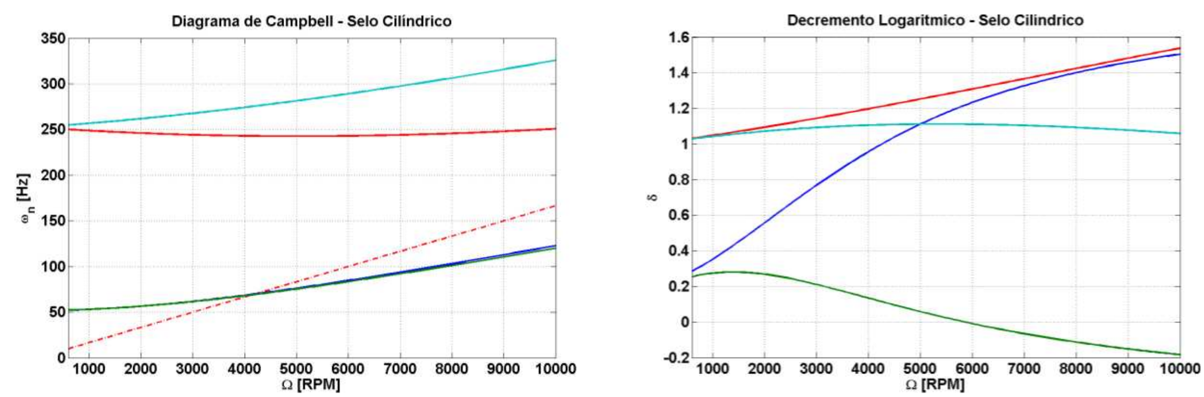


(a) **(b)**

Figura 3. Órbitas antes (a) e depois (b) do limiar de estabilidade para o eixo com mancal cilíndrico

Observa-se que as órbitas confirmam os resultados encontrados pela análise de decremento logarítmico. Na Fig. 3a, a órbita tende à estabilidade após decaimento do regime transiente. Já na Fig. 3b, depois do limiar, apresenta uma órbita que cresce continuamente com o tempo, caracterizando uma operação instável.

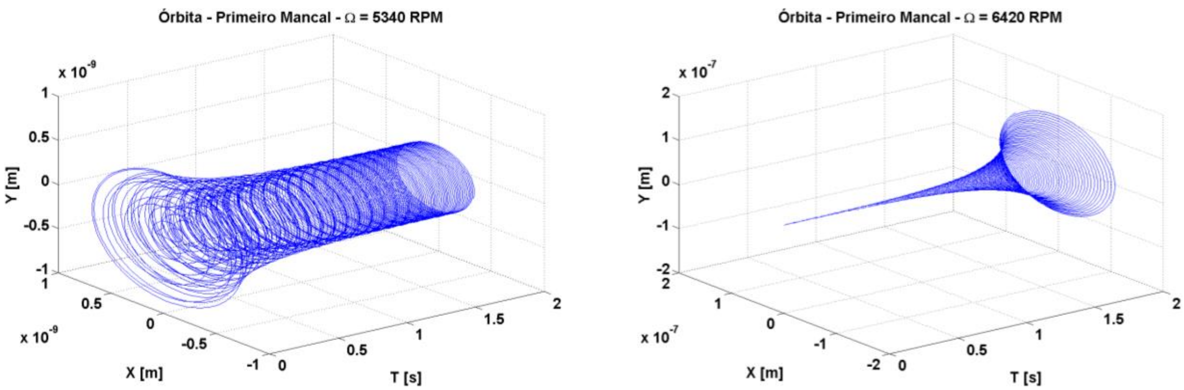
A análise dos selos é realizada substituindo-se os mancais cilíndricos por mancais rígidos, de modo a observar apenas a influencia dos selos. Estes componentes são adicionados aos nós 4 e 6. O diagrama de Campbell e o gráfico do decremento estão apresentados na Fig. 4.



(a) **(b)**

Figura 4. Diagrama de Campbell (a) e decremento logarítmico (b) para o eixo com selo plano

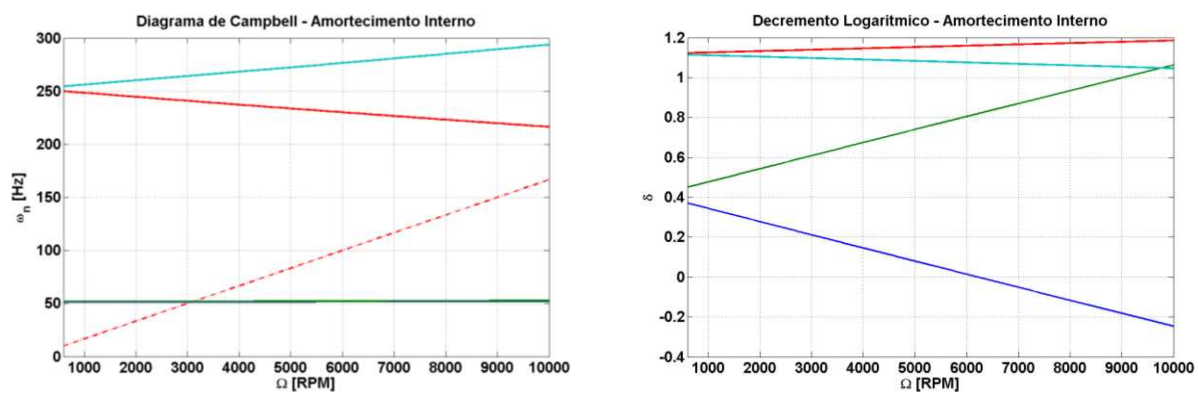
Observa-se que o selo enrijece o sistema, alterando a sua primeira frequência natural para 4000 RPM. As curvas da Fig. 4a correspondem aos primeiros dois modos vibracionais do rotor. A análise da Fig. 4b permite concluir que o limiar de estabilidade do sistema encontra-se em 5880 RPM, a partir do qual o decremento assume valores negativos. Similarmente ao caso anterior, apresentam-se as órbitas antes e depois do limiar na Fig. 5.



(a) **(b)**

Figura 5. Órbitas antes (a) e depois (b) do limiar de estabilidade para o eixo com selo plano

A análise da Fig. 5 permite concluir que o gráfico do decremento logarítmico previu corretamente o limiar de estabilidade do sistema. Antes do limiar, a 5340 RPM, o eixo descreve um movimento estável. Após o limiar, a 6420 RPM, o comportamento é instável.

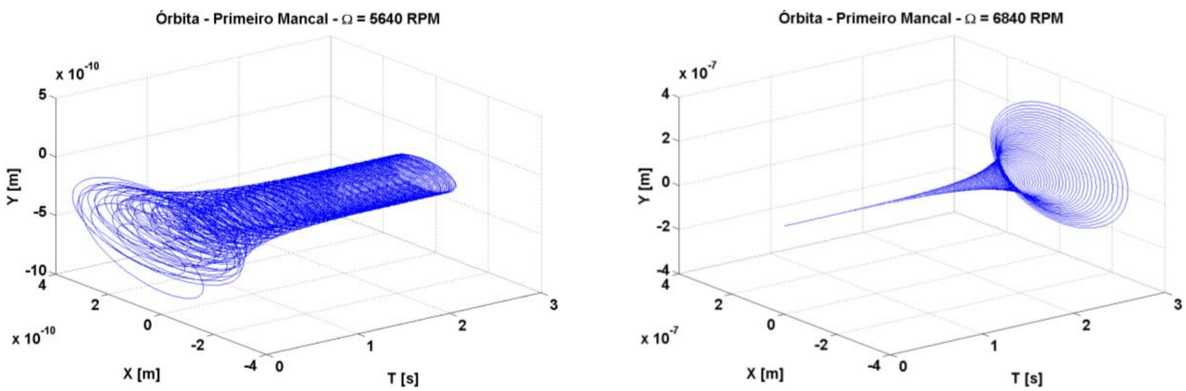


(a) **(b)**

Figura 6. Diagrama de Campbell (a) e decremento logarítmico (b) para o eixo com amortecimento interno

A análise da influência do amortecimento interno é realizada de forma análoga, sem a presença dos selos, com mancais rígidos nos nós 1 e 9. Os resultados são apresentados nas Fig. 6 e Fig. 7.

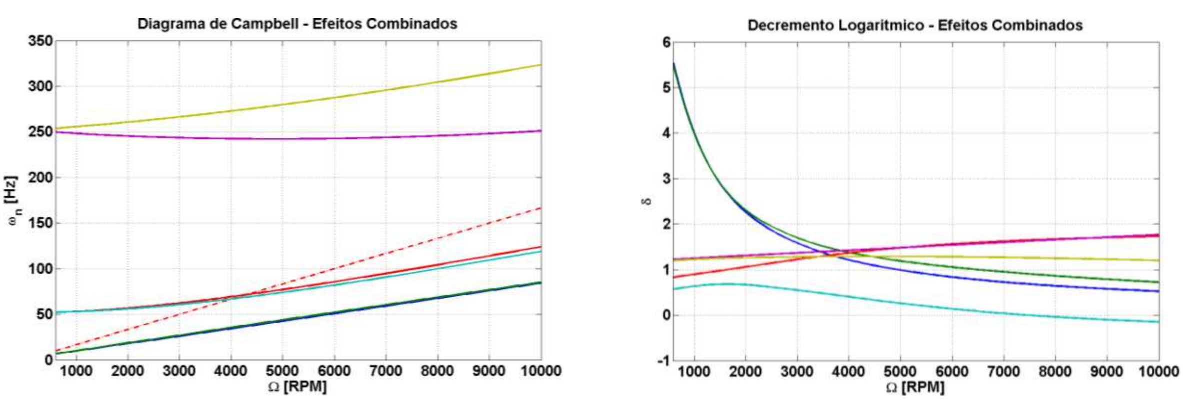
A Fig. 6a mostra os dois primeiros modos do rotor; observa-se a primeira frequência natural em 3060 RPM. Como já mencionado, o limiar de instabilidade deve se encontrar no dobro da frequência natural. Observando a Fig. 6b, isso é confirmado: o decremento torna-se negativo a partir de 6240 RPM. Também nota-se que o decremento logarítmico dos dois primeiros modos do rotor são afetados pelo amortecimento interno. As órbitas encontram-se na Fig. 7: antes do limiar, a 5640 RPM, o movimento tende à estabilidade. Após, a 6840 RPM, o movimento é instável, como estimado pelo gráfico do decremento logarítmico.



(a) **(b)**

Figura 7. Órbitas antes (a) e depois (b) do limiar de estabilidade para o eixo com amortecimento interno

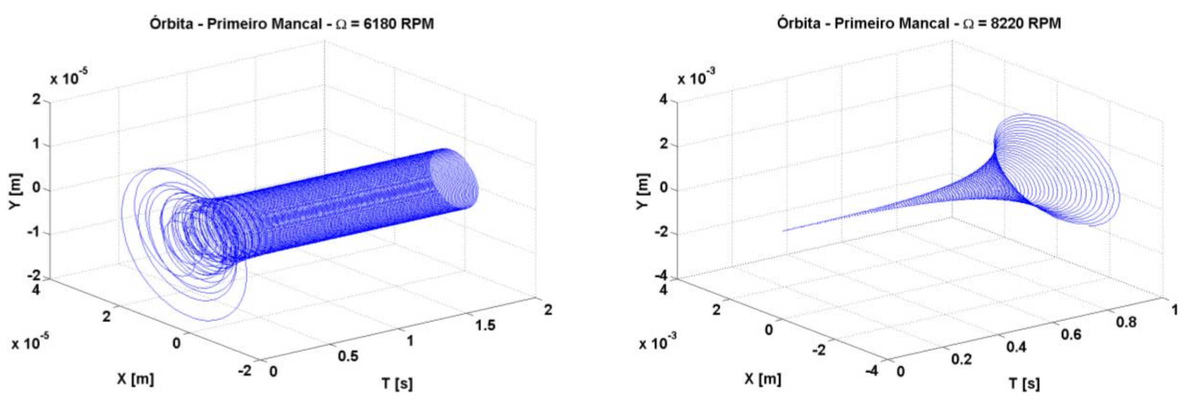
A última análise realizada foi a combinação de todos os efeitos simulados anteriormente: mancais cilíndricos adicionados aos nós 1 e 9; os selos cilíndricos, adicionados aos nós 4 e 6; e o efeito de amortecimento interno. As Fig. 8 e Fig. 9 apresentam os resultados obtidos.



(a) **(b)**

Figura 8. Diagrama de Campbell (a) e decremento logarítmico (b) para o eixo com todos os efeitos

A combinação dos mancais cilíndricos, dos selos cilíndricos e do amortecimento interno resulta no enrijecimento do sistema, devido ao selo, e no aparecimento das curvas dos mancais, conforme a análise da Fig. 8a. A primeira frequência natural encontra-se em 4000 RPM, a mesma encontrada na análise realizada somente com o selo. A Fig. 8b mostra que o limiar de estabilidade encontra-se em 7500 RPM, posterior ao encontrado nas análises isoladas. Observa-se, na mesma figura, que duas curvas têm comportamento decrescente, correspondentes aos mancais. A influência do mancal é, portanto, afetada pelo enrijecimento do sistema e seu decremento torna-se negativo em rotações mais elevadas. Outra observação a ser feita é que o amortecimento interno tem baixa influência no limiar de estabilidade neste caso: segundo a análise deste efeito isolado, a instabilidade deveria ocorrer apenas à velocidade de 8000 RPM. A Fig. 9 apresenta as órbitas antes, a 6180 RPM, e depois, a 8220 RPM.



(a) **(b)**

Figura 9. Órbitas antes (a) e depois (b) do limiar de estabilidade para o eixo com todos os efeitos

Novamente, o gráfico do decremento logarítmico previu corretamente o comportamento do eixo. Antes do limiar considerado a órbita tende à estabilidade; após o limiar, a tendência é de instabilidade.

5. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho permitem a conclusão de que o método do decremento logarítmico detecta com precisão as instabilidades causadas por mancais cilíndricos, selos planos cilíndricos e devido ao amortecimento interno do eixo. Cada instabilidade tem uma característica distinta, influenciando o comportamento do rotor de diferentes maneiras, o que confere ao método uma robustez na previsão do limiar de estabilidade do sistema.

O mancal cilíndrico apresentou o menor limiar de estabilidade, quando analisado isoladamente; o selo apresentou o maior limiar. O selo aumenta a frequência natural do sistema, devido a influência de sua rigidez. O amortecimento interno afeta os fatores de amortecimento dos primeiros modos do eixo. Combinando esses fatores, a influência da rigidez induzida pelo selo domina a dinâmica do rotor, sobrepondo-se aos efeitos do amortecimento interno e do mancal cilíndrico.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

Childs, D. W., *Dynamic analysis of turbulent annular seals based on Hirs lubrication equation;* Journal of Lubrication Technology, Transactions of ASME, 1982.

Childs, D. W., *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Anaysis*; John Wiley & Sons, New York, 1993.

Dimentberg, M, *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*, Butterworth, London, 1961.

Edney, S. L., Fox, C. H. J., Williams, E. J., *Tapered Timoshenko Finite Elements for Rotor Dynamics Analysis*, J. Sound Vibration, 137: 463-481, 1990.

Galera, G, Cavalca, K. L. (orient.)., *Numerical Analysis of Fluid Seals Applied to Rotating Machinery*, In: 22th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2013, Ribeirão Preto-RS

Genta, G., *On a persistent misunderstanding of the role of hysteretic damping in rotor dynamics*, J. Vibr. Acoustics, Trans. ASME 126: 459-461, 2004.

Hummel, C., *Kritische drehzahlen als folge der nachgiebigkeit des schmiermittels im lager*, Ph.D. Thesis, Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, 1926.

Kimball, A. L., *Internal Friction Theory of Shaft Whipping*, General Electric Review, vol. 17, p 244, 1924.

Lomakin, A. A. Calculation of critical speeds and securing of the dynamic stability of hydraulic high-pressure machines with reference of the forces arising in the gap seals. *Energomashinostroenie*, 4.1, 1958

Lund, J. W., *Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing.* ASME Transactions, n.7, p.342-352, 1964.

Lund, J. W., *Evaluation of Stiffness and Damping Coefficients for Fluid Bearings.* The Shock and Vibration Digest, Vol. 11, No. 1, pp. 5–10, 1979.

Lund, J. W.,Pedersen, L. B., *The Influence of Pad Flexibility on the Dynamic Coefficients of a Tilting Pad Journal Bearing.* J. Tribol., 109(1):65-70, 1987.

Machado, T. H., Cavalca, K. L., *Evaluation of Dynamic Coefficients for Fluid Journal Bearings with Different Geometries*, In: 20th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2009, Gramado-RS, Proceedings of the 20th International Congress of Mechanical Engineering. Rio de Janeiro : ABCM - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, v. 1. p. 1-11.

Muszynska, A., *Whirl and Whip-Rotor/Bearing Stability Problems*, ASME J. Vibr. Acoust. 110: 443-462, 1986

Nelson, H. D., *A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory.* ASME Journal of Mechanical Design, v. 102, n. 4, p. 793-803, 1980.

Nelson, H. D.; McVaugh, J. M., *The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements.* Journal of Engineering for Industry, p.593-600, May 1976.

Newkirk, B. L., *Shaft Whipping*, General Electric Review, vol. 27, p 169, 1924

Newkirk, B. L., and Taylor, H. D, *Shaft Whipping due to Oil Action in Journal Bearings,* General Electric Review, Vol. 28, n. 8, 1925, pp. 559-568.

Pinkus, O., 1956, *Analysis of Elliptical Bearings*, Trans. ASME, v. 78, pp. 965-973.

Pinkus, O., 1958, *Solution of Reynolds Equation for Finite Journal Bearings*, Trans. ASME, v. 80, pp. 858-864.

Pinkus, O., 1959, *Analysis and Characteristics of Three-lobe Bearings*, Journal of Basic Engineering, pp. 49-55.

Reynolds, O., *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil.* Philos. Trans. R. Soc. London, Series A, Vol. 177, Part 1, 1886, pp.157-234.

Stodola, A., *Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager*, Schweizerische Bauzeitung, Vol. 85/86, pp. 265-266, 1925.

Tao, L. N., *A theory of lubrication in short journal bearings with turbulent flow*; Transactions of ASME, p. 1734, 1958.

Tuckmantel, F. W., Cavalca, K. L. (orient.)., *Integração de sistemas rotor-mancais hidrodinâmicos-estrutura de suporte para resolução numérica.* 2010. 159 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

Zorzi, E. S., Nelson, H. D., *Finite element simulation of rotor bearing systems with internal damping*, J. Eng. Power, Trans. ASME 99: 71-76, 1977.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.