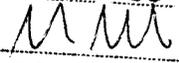


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR FREDERICO AUGUSTO  
GERVATOSKI LOURENÇO E APROVADA PELÀ  
COMISSÃO JULGADORA EM 23 / 08 / 00  
  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Análise de Reparos de Trincas**  
**Através do Método dos Elementos de Contorno**

Autor: **Frederico Augusto Gervatoski Lourenço**  
Orientador: **Paulo Sollero**



99/2000

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Análise de Reparos de Trincas  
Através do Método dos Elementos de Contorno**

**Autor: Frederico Augusto Gervatoski Lourenço  
Orientador: Paulo Sollero**

**Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica Computacional**

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2000  
S.P . - Brasil**

2427072



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

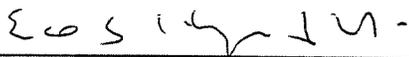
**Análise de Reparos de Trincas  
Através do Método dos Elementos de Contorno**

**Autor: Frederico Augusto Gervatoski Lourenço  
Orientador: Paulo Sollero**



---

**Prof. Dr. Paulo Sollero, Orientador  
Universidade Estadual de Campinas**



---

**Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto  
Universidade Estadual de Campinas**



---

**Prof. Dr. Nelson Salgado  
Empresa Brasileira de Aeronáutica**

Campinas, 13 de julho de 2000

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L934a Lourenço, Frederico Augusto Gervatoski  
Análise de reparos de trincas através do método dos  
elementos de contorno / Frederico Augusto Gervatoski  
Lourenço. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Paulo Sollero.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. I. Sollero,  
Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer:

Ao CNPq, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento desse trabalho, em forma de bolsa de pesquisa.

Ao professor Sollero pela orientação e pela amizade nesses dois anos de convivência.

Aos professores do Departamento de Mecânica Computacional que de alguma forma contribuíram com a elaboração desse trabalho.

Ao Dr. Nelson Salgado, pelo apoio em momentos críticos do desenvolvimento desse trabalho.

Aos colegas do nosso departamento, em especial ao Éder, ao Pedro e ao William, pelas horas de discussões enriquecedoras.

Aos meus pais, por terem me dado o dom da vida, mas principalmente por terem me ensinado a vivê-la com dignidade.

À minha esposa Renata, por tudo, e pela Laura.

*Não nos fixemos nas coisas que se vêem  
mas sim nas que não se vêem,  
pois as coisas que se vêem são temporais  
e as que não se vêem são ETERNAS.*

*(2 COR. 4,18)*

## SUMÁRIO

1. Introdução	1
1.1. Introdução	1
1.2. Revisão bibliográfica	6
2. Mecânica da Fratura Elástica Linear	9
2.1. Introdução	9
2.2. A abordagem de campo de Irwin	11
2.3. Modos de fratura	13
2.4. Campos de tensões ao redor da trinca	14
3. Método dos Elementos de Contorno	17
3.1. Introdução	17
3.2. Formulação básica do método dos Elementos de Contorno	18
3.2.1. Equações básicas da elasticidade	18
3.2.2. Soluções fundamentais para elasticidade bidimensional	19
3.2.3. O teorema de Betti e a identidade de Somigliana	19
3.3. Elemento de contorno quadrático contínuo	21
3.4. Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno	23
4. Método dos Elementos de Contorno de Dupla Reciprocidade	33
4.1. Introdução	33
4.2. Formulação do método da dupla reciprocidade	34
4.2.1. Nós internos	37

4.2.2. O vetor alfa ( $\alpha$ )	37
4.2.3. Função de aproximação $f$	38
4.2.4. A função $f = 1 - r$	39
4.2.5. Obtenção de resultados em nós internos	41
4.3. Implementação computacional do método da dupla reciprocidade	41
5. Elemento de Contorno para Mecânica da Fratura	49
5.1. Introdução	49
5.2. Elemento de contorno com nó a um quarto isoparamétrico	51
5.3. Elemento de contorno com nó a um quarto e singularidade nas forças de superfície	53
5.4. Cálculo dos fatores de intensidade de tensão	56
5.4.1. Fórmula dos deslocamentos em dois pontos	57
5.4.2. Fórmula de forças de superfície	58
5.5. Implementação computacional dos elementos com nó a um quarto	60
5.6. Resultados numéricos obtidos com os elementos com nó a um quarto	62
6. Análise de Placas Trincadas com Reparo Colado	67
6.1. Formulação para placa com reparo colado	67
6.2. Transformação das integrais de domínio para integrais de contorno	69
6.3. Sistema de equações para placa com o reparo colado	72
6.4. Implementação computacional para análise da placa com o reparo colado	78
6.5. Resultados obtidos para placa intacta	79
7. Conclusões	83
8. Trabalhos Futuros	85
9. Referências Bibliográficas	87

## Resumo

A técnica de reparo de trincas, que consiste na aplicação de uma lâmina de material colada sobre a região trincada de um componente, vem sendo bastante utilizada em aplicações aeronáuticas para conter a propagação de trincas e prolongar a vida útil de componentes trincados.

Neste trabalho, o método dos elementos de contorno é utilizado para análise de problemas de reparos de trincas no contexto bidimensional. Esse tipo de problema requer a utilização de técnicas que permitam a consideração de forças de corpo, uma vez que as forças exercidas pelo reparo sobre a placa são forças aplicadas no interior do domínio da placa.

O método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade juntamente com o método da compatibilidade de deslocamentos são utilizados para a modelagem dessas forças de corpo trocadas entre a placa e o reparo.

Os resultados numéricos obtidos pelo método dos elementos de contorno para a descrição do acoplamento entre a placa e o reparo são comparados com solução analítica existente para problemas de acoplamento com geometrias simples, para comprovar a eficiência desse método na análise de reparos de trincas.

Palavras-chaves:

Reparos de trincas, método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade, método da compatibilidade de deslocamentos

## **Abstract**

The bonded patch repair technique, which is the application of a layer attached on a cracked region of a structure, has been used in many aeronautical applications to reduce crack propagation and increase cracked structures life.

In this work, the boundary element method is used to analyse patch repairs in a two dimensional approach. This sort of problem requires the use of techniques which allow the domain forces consideration, once forces of interaction between the plate and the patch repair must be considered as domain forces.

The dual reciprocity boundary element method and the displacement compatibility method are used to model these forces between plate and patch repair.

Numerical results obtained considering compatibility between plate and patch repair are compared with analytical solutions in order to check the efficiency of this method in the analysis of patch repairs.

Key-words:

Crack patch repair, dual reciprocity boundary element method, displacement compatibility method.

## Lista de Figuras

Figura 1.1. (a) Reparos rebitados e (b) reparos colados. _____	4
Figura 2.1. Sistema de coordenada para estudo da distribuição de tensões. _____	11
Figura 2.2 Modos de fratura _____	13
Figura 3.1. Elemento de contorno quadrático isoparamétrico. _____	22
Figura 3.2. Fluxograma do programa <b>Elast_qua</b> . _____	25
Figura 3.3. Modelo de placa quadrada com tração uniaxial. _____	28
Figura 3.4. Geometria deformada para o problema de placa quadrada. _____	29
Figura 3.5. Erro em função da discretização utilizada. _____	30
Figura 3.6. Mapa de cor dos deslocamento em y. _____	31
Figura 3.7. Modelo de viga com furo retangular. _____	31
Figura 3.8. Modelo de placa em L. _____	31
Figura 4.1. Nós do contorno e internos _____	35
Figura 4.2. Representação das distâncias entre um nó fixo e todos os nós do problema _____	40
Figura 4.3. Fluxograma do programa <b>Elast_qua_DRM</b> . _____	42
Figura 4.4. (a) modelo de um quarto de placa rotativa, (b) geometria deformada. _____	44
Figura 4.5. Erro percentual em função do número de elementos em cada linha. _____	45
Figura 4.6. Erro percentual em função do número de nós internos. _____	47
Figura 4.7 Erro percentual em função do número de elementos e do número de nós internos. _____	48
Figura 5.1 Elemento de contorno quadrático padrão e com nó a um quarto. _____	51
Figura 5.2. Geometria do elemento para cálculo do $K_I$ . _____	57
Figura 5.3. Placa com trinca central e modelo simétrico. _____	62
Figura 5.4. Erro percentual de $K_I$ em função de $\ell/a$ . _____	63
Figura 5.5. Comparação de resultados entre trabalho atual e de referência. _____	64
Figura 5.6. Erro de $K_I$ em função da discretização vizinha. _____	65

Figura 6.1. Placa com reparo colado por meio de adesivo. _____	67
Figura 6.2. Modelo de placa com reparo discretizado por elementos constantes. _____	72
Figura 6.3. Representação do sistema de equações para a placa. _____	75
Figura 6.4. Representação do sistema de equações para o reparo. _____	76
Figura 6.5. Representação do sistema de equações da placa acoplada com o reparo. ____	77
Figura 6.6. Modelo de placa quadrada com reparo circular colado. _____	79
Figura 6.7. Geometria deformada da placa intacta com reparo colado. _____	80
Figura 6.8. Comparação entre resultados numéricos e solução analítica para 37 nós internos. _____	81
Figura 6.9. Comparação entre resultados numéricos e solução analítica para 69 nós internos. _____	77
Figura 6.10. Comparação entre resultados numéricos e solução analítica para 121 nós internos. _____	82

# Capítulo 1

## Introdução

A presença de trincas em componentes mecânicos ou estruturais reduz a resistência mecânica e a resistência à fadiga desses componentes, uma vez que ocorre um expressivo aumento nas tensões e deformações do material nas proximidades da ponta das trincas.

A preocupação com o estudo de estruturas trincadas, aumentou consideravelmente com o desenvolvimento das indústrias aeronáutica, aeroespacial, automotiva, e naval, nas quais existe a necessidade da realização de projetos bastante otimizados, com baixo peso e alta resistência. A incerteza existente devido à presença de trincas implica na necessidade de utilização de altos fatores de segurança, resultando num projeto com maior peso e maior custo.

A fabricação de componentes que não apresentem defeitos, como vazios ou microtrincas, é inviável. Além dos defeitos formados nos processos de fabricação, a própria matéria-prima das indústrias já apresenta inúmeros defeitos. Depois que os componentes mecânicos são colocados em funcionamento, esses defeitos podem crescer e se propagar pela estrutura do componente, comprometendo sua utilização.

Com novos métodos de análise e novas tecnologias, ainda no projeto do componente tornou-se possível prever qual o tamanho máximo admissível para um defeito do tipo trinca, dada a geometria do componente e as cargas aplicadas, ou então definir a geometria do componente dadas as cargas aplicadas e o tamanho de uma trinca. Esse tipo de estudo, que considera o comportamento de estruturas trincadas é realizado pela Mecânica da Fratura, que terá alguns aspectos apresentados no capítulo 2 desse trabalho.

Com a determinação do tamanho crítico de uma trinca, pode-se obter o tempo que a trinca levaria para chegar ao tamanho crítico. Uma vez determinado esse tempo no projeto da estrutura, define-se a frequência de inspeções periódicas que devem ser realizadas na estrutura em funcionamento, a fim de não haver o risco da trinca crescer e atingir um tamanho crítico antes que uma inspeção tenha sido feita.

Inspeções periódicas utilizando técnicas não-destrutivas, como o ultra-som, possibilitam a detecção, medição do tamanho e da taxa de crescimento de trincas ao longo da história de utilização de um componente. Quando o tamanho da trinca se aproxima do tamanho crítico calculado, é dito que a vida útil do componente mecânico está chegando ao fim, e existem, basicamente, duas alternativas para evitar a ocorrência de uma falha estrutural. A primeira alternativa consiste na troca desse componente por um novo, isento de trincas com proporções similares. A outra alternativa é o reparo desse componente condenado, a fim de prolongar a sua vida útil através da eliminação da ponta da trinca, que é o grande concentrador de tensões e da diminuição da abertura da trinca.

Deve-se ressaltar que embora muitos estudos estejam sendo feitos sobre o reparo de trincas sem a prévia eliminação da ponta da trinca, o procedimento adotado pela indústria aeronáutica atualmente consiste na eliminação da ponta da trinca, através de uma furação. Após essa furação eliminando a ponta da trinca, o reparo é aplicado sobre esse furo que contém em sua periferia o que restou da trinca. Assim, a indústria aeronáutica segue uma regra que é a não convivência com trincas que já tenham sido detectadas.

A utilização de reparos de estruturas ou componentes trincados é uma alternativa que apresenta custo muito mais baixo que a simples reposição, uma vez que não há gasto imediato com um componente novo e o tempo de parada para a aplicação de um reparo é geralmente menor que o tempo de parada para uma substituição. Esta técnica vem sendo largamente utilizada em aplicações aeronáuticas.

O surgimento de trincas em estruturas aeronáuticas é relacionado em geral com três fatores, que são:

- o defeito de fabricação;
- a solicitação em serviço;
- a presença de um meio corrosivo.

Um defeito de fabricação pode trazer como resultado componentes ou estruturas que apresentam propriedades piores que aquelas requeridas no projeto, além de poder apresentar defeitos como vazios ou inclusões que são nucleadores potenciais de trincas.

A solicitação em serviço não deve ultrapassar a solicitação prevista no projeto do componente estrutural para que não existam falhas inesperadas. Em aeronaves, essa solicitação é caracterizada por cargas cíclicas, que induzem o processo de fadiga em seus componentes.

A presença de um meio corrosivo ocasiona uma diminuição nas propriedades de tenacidade à fratura do material, acelerando o crescimento de trinca. Esse mecanismo de fratura é conhecido como fratura assistida pelo meio.

Existem casos em que apenas um fator citado acima apresenta uma influência considerável sobre o comportamento da fratura. Em outros casos, dois ou três desses fatores podem estar agindo em conjunto, de uma forma sinérgica.

As regiões mais propensas a apresentarem iniciação e posterior propagação de trincas, em estruturas aeronáuticas, são as proximidades de concentradores de tensão como, por exemplo, furos para pinos ou rebites de fixação. Essa propensão é devida à concentração de tensões em regiões bem definidas ao redor de furos em estruturas solicitadas. Outro fator que aumenta a probabilidade de falha nessas regiões é a corrosão galvânica entre o material da estrutura e o material do pino ou rebite.

O papel mais importante do reparo aeronáutico em estruturas trincadas é realizar um desvio no carregamento, absorvendo uma apreciável quantidade da energia que era suportada pela estrutura e, conseqüentemente, diminuindo o fator de intensidade de tensões nas vizinhanças da ponta da trinca.

Quando o componente a ser reparado apresenta uma trinca passante (geralmente estruturas finas, como chapas) e existe fácil acesso aos dois lados da estrutura, podem ser usados dois reparos, um de cada lado do componente (“*double-patching*”). Esse tipo de reparo também serve como um vedante da trinca contra agentes corrosivos do meio.

O projeto da aplicação de reparos deve considerar que os mesmos não podem falhar e nem apresentar descolamento parcial da estrutura reparada (falha do material adesivo).

Existem basicamente dois tipos de reparos aeronáuticos, os reparos rebitados e os reparos colados, que podem ser vistos, esquematicamente, na figura 1.1.

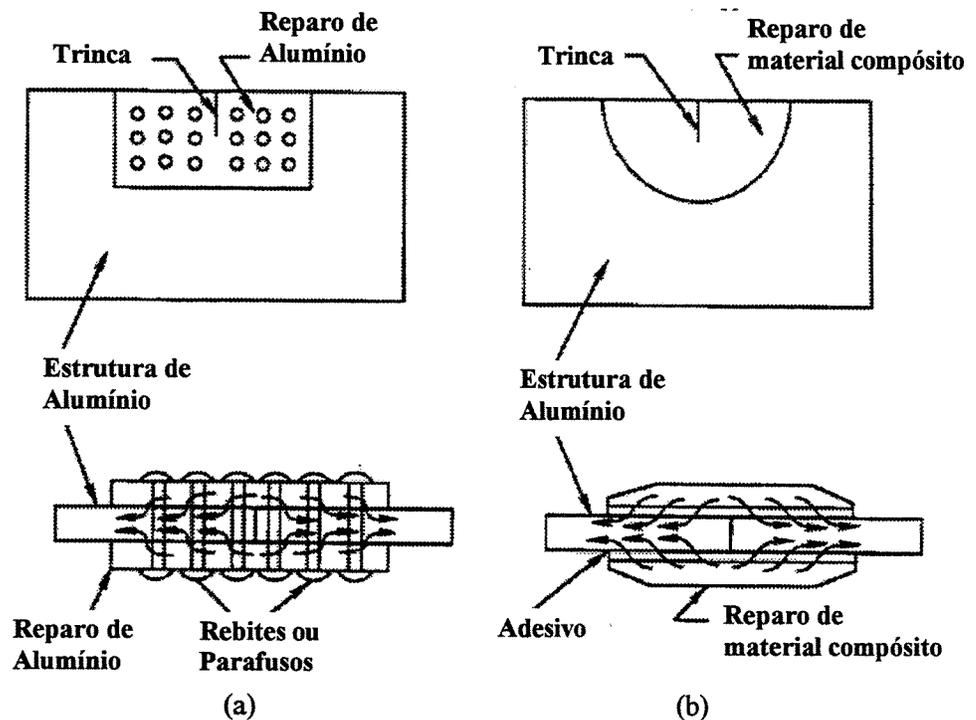


Figura 1.1. (a) Reparos rebitados e (b) reparos colados.

Os reparos rebitados geralmente são feitos com o uso de placas de alumínio ou do mesmo material que compõe a estrutura reparada, enquanto os reparos colados admitem o uso de materiais mais vantajosos como os materiais compósitos.

A área de transferência de carga nos reparos colados é bem maior que nos reparos rebitados, realizando uma melhor absorção da energia da estrutura trincada, como também pode ser visto na figura 1.1. Além disso, nos reparos rebitados pode surgir uma concentração adicional de tensão ao redor dos furos para rebites, resultando em uma redução da vida em fadiga.

A espessura da placa metálica nos reparos rebitados pode causar alguns problemas aerodinâmicos, esses problemas são bem menores com o uso da placa de material compósito colada que apresenta uma espessura bem menor. No caso de reparo em ambos os lados do componente, o reparo colado apresenta uma vedação muito mais eficiente contra agentes corrosivos em relação aos reparos rebitados.

Dessa forma, os reparos colados mostram grande vantagem em comparação aos rebitados. Assim, o desenvolvimento tecnológico atual de reparos aeronáuticos está for-

temente voltado para o reparo do tipo colado e, por esse motivo, este trabalho apresentará estudos envolvendo apenas os reparos do tipo colado.

Deve-se ressaltar que a tecnologia de reparos seria em vão se não existisse a inspeção não-destrutiva para detecção de defeitos e trincas ou regiões potenciais de falha em aeronaves. Essas inspeções são feitas periodicamente, sejam aeronaves comerciais ou militares, para que possíveis defeitos possam ser detectados e reparados antes que cresçam de maneira a causar uma falha estrutural.

A análise de estruturas trincadas através da mecânica da fratura envolve a aplicação de métodos numéricos, uma vez que soluções analíticas existem apenas para problemas com geometria e carregamento muito simples, que não correspondem à realidade dos projetos de engenharia.

Os dois métodos numéricos mais utilizados na atualidade são o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno. Uma diferença básica entre esses métodos, é que enquanto o método dos elementos finitos requer a discretização e integração numérica em todo o domínio em estudo, o método dos elementos de contorno requer apenas a discretização e integração no contorno da estrutura ou componente em estudo.

O método numérico utilizado neste trabalho é o método dos elementos de contorno, cuja formulação bidimensional será apresentada no capítulo 3. No contexto bidimensional, as forças de interação entre placa e reparo devem ser consideradas como forças de corpo, uma vez que atuam sobre o domínio. O capítulo 4 apresentará o método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade, necessário para consideração dessas forças de corpo na placa, geradas pela presença do reparo. Esse enfoque é necessário pois o método dos elementos de contorno simples não possibilita a consideração de forças aplicadas diretamente no interior do domínio em estudo.

O capítulo 5 apresenta a formulação para um elemento de contorno especial, que modela, de forma representativa, o comportamento de trincas e que pode ser utilizado no estudo do reparo de trincas.

O capítulo 6 apresenta o equacionamento necessário para análise do comportamento de uma placa com um reparo colado.

## Revisão Bibliográfica

O comportamento de estruturas trincadas com a aplicação de reparos colados tem sido estudado por vários pesquisadores. Em geral, a placa, o reparo e o adesivo são considerados com pequena espessura, de forma que o sistema como um todo não apresenta flexão fora do plano, e assim, a teoria da elasticidade bidimensional pode ser utilizada para estudar este problema.

Ratawani (1979), e Erdogan e Arin (1972) estudaram um reparo infinito, colado em uma placa infinita contendo uma trinca reta. Eles usaram soluções analíticas existentes para a deformação da placa trincada e do reparo, e impuseram compatibilidade de deslocamento entre a placa e o reparo.

Dowrick, Cartwright e Rooke (1990) estudaram o efeito de um reparo sobre uma placa infinita contendo uma trinca reta e com carregamento uniaxial. O reparo foi representado por uma série de tiras acopladas de maneira discreta com a placa, de forma perpendicular à trinca. Eles realizaram uma série de estudos paramétricos para avaliar a influência do tamanho do reparo, da flexibilidade do acoplamento e da espessura da lâmina do reparo no fator de intensidade de tensão.

Young, Cartwright e Rooke (1984) utilizaram o mesmo modelo para estudar a influência do chanframento dos cantos do reparo sobre as forças de acoplamento.

Mitchell, Wooley e Chwiruth (1975) utilizaram o método dos elementos finitos para estudar o reforço pela aplicação de reparos. Eles adotaram elementos constantes bidimensionais e assumiram que a placa e o reparo eram acoplados entre si através dos pontos nodais. Compatibilidade de deslocamentos foi imposta nesses pontos. Foi considerada também, a presença de uma trinca reta na placa. No entanto, nenhuma consideração foi feita em relação à singularidade de tensões na ponta da trinca e os fatores de intensidade de tensão não foram considerados.

De forma similar, Jones e Callinan (1977, 1979 e 1981) usaram o método dos elementos de contorno para a análise de placa metálicas reparadas com uma camada de material compósito. Eles propuseram uma matriz de rigidez para o par adesivo-camada de compósito que foi utilizada em conjunto com elementos finitos padrão para a placa, exceto na ponta da trinca, onde elementos especiais foram adotados. Eles realizaram estudos

paramétricos, investigando a influência da flexibilidade do adesivo e da rigidez do reparo nos fatores de intensidade de tensão.

Tarn e Shek (1991) modelaram o reparo pelo método dos elementos finitos. No entanto, usaram o método dos elementos de contorno para modelar a placa trincada. As tensões de cisalhamento no adesivo foram modeladas como forças de corpo agindo sobre a placa.

Young, Cartwright e Rooke (1987) e Young, Rooke e Cartwright (1988) usaram o método dos elementos de contorno tanto para a placa trincada como para o reparo. Eles modelaram a tensão de cisalhamento no adesivo como forças de corpo agindo sobre a placa e sobre o reparo. A presença da trinca foi considerada através do uso de uma função de Green para domínios com trinca. Essa estratégia evita a discretização da trinca mas tem o uso restrito para problemas com trincas retas.

Nos trabalho de Young, Rooke e Cartwright (1992) e nos trabalhos já citados de Tarn e Shek (1991) e Young, Cartwright e Rooke (1987) o reparo e a região colada da placa foram discretizados em células internas. A discretização do domínio foi utilizada para modelar as forças de corpo trocadas entre a placa e o reparo, na região de acoplamento.

Salgado (1997) utilizou o método duplo de elementos de contorno para modelar a placa trincada, enquanto utilizou o método dos elementos de contorno padrão para modelar o reparo. As forças de corpo trocadas entre a placa e o reparo foram consideradas através do método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade, que evita a discretização do domínio em células internas.

Este trabalho tem como objetivo estudar o problema da placa com reparo colado, utilizando o método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade associado ao método da compatibilidade de deslocamentos para modelar as forças de corpo trocadas entre placa e reparo.

## **Capítulo 2**

# **Mecânica da Fratura Elástica Linear**

### **2.1 Introdução**

A presença de trincas em componentes estruturais não pode ser evitada, uma vez que já na matéria-prima da indústria são encontrados inúmeros defeitos, tais como vazios e microtrincas. Além disso, os processos de fabricação também são responsáveis pelo surgimento de mais trincas nos componentes, uma vez que o material é sujeito a grandes solicitações mecânicas e gradientes térmicos para adquirirem suas formas de produto final. E por fim, durante a vida útil do componente, pode haver surgimento e crescimento de trincas, devido às cargas que o componente suporta durante seu funcionamento.

A utilização de fatores de segurança é uma primeira tentativa de evitar falhas provocadas pela presença de trincas. No entanto, uma necessidade dos projetos atuais é apresentar os menores custos possíveis, para que o produto possa ser competitivo. Além disso, as indústrias de transportes, como as indústrias automotiva, aeroespacial e naval, têm a constante preocupação em minimizar o peso de seus componentes.

As reduções no custo, ou no peso, implicam na redução de material utilizado no componente, e requerem que os projetistas trabalhem com fatores de segurança reduzidos. Essa exigência implica em um conhecimento melhor da influência das trincas sobre as estruturas ou componentes, ou seja, é necessário o uso de técnicas para determinação da tolerância dos componentes às trincas.

Com o objetivo de se resolver tais problemas, vem sendo desenvolvida, há várias décadas, a Mecânica da Fratura, que é a tecnologia responsável pela descrição do comportamento de componentes trincados, submetidos a solicitações mecânicas.

A forma e o tamanho de trincas presentes em um componente mecânico podem ser determinados com precisão através de ensaios não destrutivos, tais como, ultra-som e líquidos penetrantes. Então, torna-se interessante saber qual o tamanho máximo admissível da trinca no componente analisado para que o mesmo não apresente falha por fratura durante o funcionamento. Além disso, é importante determinar a taxa com que a trinca se propaga.

Uma vez determinado esse tamanho crítico da trinca, e também a taxa de propagação, podem ser programadas inspeções com técnicas não destrutivas de forma a se realizar pelo menos uma inspeção antes que a trinca tenha tempo para atingir um tamanho crítico.

No item 2.2 desse capítulo será apresentada a abordagem de campo de tensões desenvolvida por Irwin (1957), introduzindo o conceito de fator de intensidade de tensão. Essa abordagem é largamente utilizada na atualidade, e será considerada no capítulo 5 desse trabalho no desenvolvimento de elementos de contorno para aplicações em Mecânica da Fratura.

No item 2.3 serão apresentados os modos de fratura existentes em um componente mecânico trincado, assim como a correlação entre esses modos de fratura e componentes do fator de intensidade de tensão.

A descrição matemática do campo de tensões e de deslocamentos ao redor da ponta de uma trinca será apresentada no item 2.4.

## 2.2 A abordagem de campo de Irwin

Irwin (1957) estudou o problema do campo de tensões ao redor da ponta de uma trinca, usando a teoria da elasticidade linear. Modificando métodos analíticos desenvolvidos por Westgaard (1939), publicou soluções para essa distribuição de tensões.

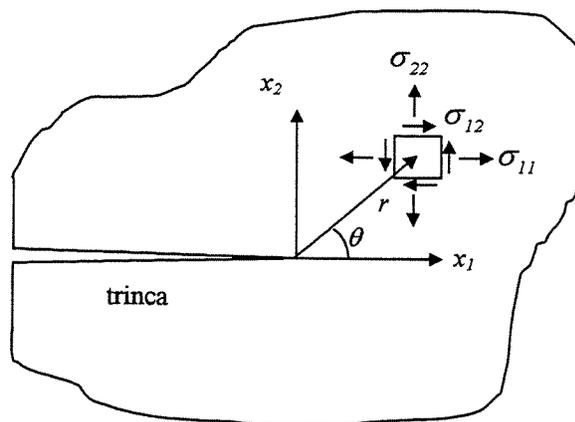


Figura 2.1. Sistema de coordenada para estudo da distribuição de tensões.

Considerando uma placa de tamanho e forma arbitrários, carregada arbitrariamente no plano da placa e contendo uma trinca de um tamanho qualquer, como mostrado na figura 2.1, o campo de tensões ao redor da ponta da trinca pode sempre ser expresso por uma expansão da forma:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}(r, \theta) + \text{outros termos} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2) \quad (2.1)$$

Nessa equação,  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões em um elemento de material posicionado à distância  $r$  da ponta da trinca e a um ângulo  $\theta$  a partir do plano da trinca, e  $f_{ij}$  são funções trigonométricas conhecidas.

À medida que a distância  $r$  se aproxima de zero, o primeiro termo torna-se dominante e a contribuição dos outros termos da série pode ser desprezada. A constante  $K$  no primeiro termo da série é conhecida como fator de intensidade de tensão (FIT).

Uma consequência importante da equação (2.1) é que essa descrição da distribuição de tensões ao redor da ponta de uma trinca é similar para qualquer estrutura e depende apenas dos parâmetros  $r$  e  $\theta$ . A diferença entre os campos de tensões em diferentes trincas depende do fator de intensidade de tensão.

Assim, o fator de intensidade de tensão serve como um fator de escala para definir a magnitude das tensões ao redor da ponta de uma trinca. Esse fator é função do tamanho da trinca, do tipo de carregamento e da configuração geométrica da estrutura ou componente mecânico trincado.

A hipótese fundamental da Mecânica da Fratura Elástica Linear, conhecida como princípio da similitude, considera que o comportamento da trinca é determinado estritamente pelos fatores de intensidade de tensão.

O valor de  $K$  é utilizado na engenharia para caracterizar a resistência à fratura de um componente trincado. Um critério de falha por fratura baseado no fator de intensidade de tensão pode ser escrito como:

$$K < K_c \tag{2.2}$$

sendo  $K_c$  um valor crítico chamado “tenacidade à fratura”, que apenas pode ser determinado através de ensaios da mecânica da fratura, uma vez que é uma propriedade do material associada à geometria (espessura) e forma de carregamento.

Segundo esse critério, enquanto o valor do fator de intensidade de tensão for menor que  $K_c$ , não ocorre propagação instável da trinca da trinca.

No caso de  $K \geq K_c$ , ocorre propagação instável da trinca, isto é, o material falha por fratura com uma trinca que se propaga em altíssima velocidade.

Vale a pena ressaltar que a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) deve ser utilizada para materiais que apresentam fratura frágil, resultando em propagação instável da trinca.

No caso de estruturas aeronáuticas, que geralmente apresentam espessuras finas, a utilização da mecânica da fratura elástica linear representa uma abordagem conservadora, um vez que a estrutura se encontra em estado plano de tensão (espessura fina) e a

tenacidade à fratura nesse caso é maior que a tenacidade à fratura e estado plano de deformação ( $K_c$ ).

## 2.3 Modos de Fratura

Os modos de fratura em uma estrutura trincada são caracterizados pelo deslocamento relativo das faces da trinca. Os três modos de fratura existentes são apresentados na figura 2.2.

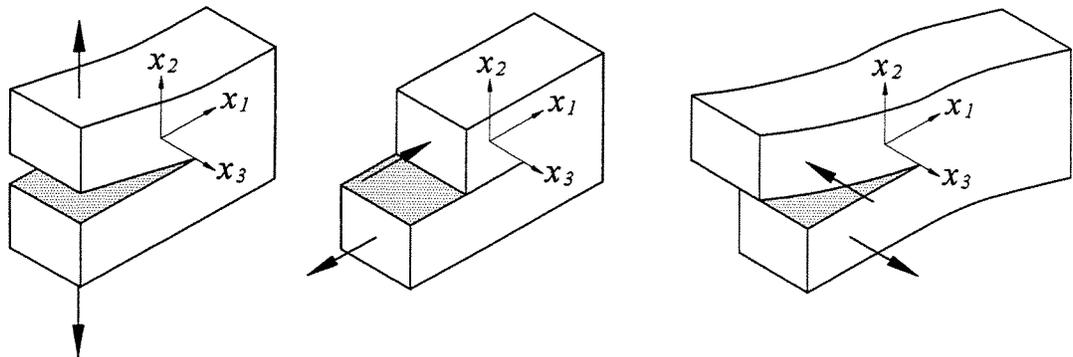


Figura 2.2 Modos de fratura

O modo I é o modo de abertura, no qual as superfícies da trinca se afastam uma em relação à outra. O modo II é o modo de escorregamento, no qual as superfícies escorregam uma sobre a outra no plano da placa. Já o modo III, chamado de modo de rasgamento, consiste na movimentação das faces da trinca, uma oposta à outra, para fora do plano da placa.

Os modos I e II são muito mais comuns em problemas de engenharia que o modo III.

O fator de intensidade de tensão definido na equação (2.1), pode ser decomposto em componentes que são relacionados aos três modos de fratura. A notação para um fator de intensidade de tensão geralmente inclui um sub-índice que denota o modo de fratura

associado. Como exemplo,  $K_I$  é o fator de intensidade de tensão associado ao modo I de fratura.

## 2.4 Campo de tensões ao redor da ponta da trinca

Como comentado no item 2.2, para valores de  $r$  próximos de zero, apenas o primeiro termo da expansão em série da equação (2.1) precisa ser considerado. Assim, o comportamento da trinca pode ser descrito somente pelo fator de intensidade de tensão, e as tensões próximas à ponta da trinca podem ser escritas como:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3}{2} \theta \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3}{2} \theta \right) \quad (2.3)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3}{2} \theta + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3}{2} \theta \right) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3}{2} \theta \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3}{2} \theta \quad (2.5)$$

e os deslocamentos associados  $u_i$  são dados por:

$$u_1 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\left( \frac{r}{2\pi} \right)} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\left( \frac{r}{2\pi} \right)} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.6)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\left( \frac{r}{2\pi} \right)} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\left( \frac{r}{2\pi} \right)} \cos \frac{\theta}{2} \left( 2\nu - 1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.7)$$

Nessas equações,  $G = E/(2(1+\nu))$  é o módulo de elasticidade transversal,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Na descrição matemática dada para o campo de tensões pelas equações (2.3), (2.4) e (2.5), verifica-se que para  $r = 0$ , isto é, exatamente na ponta da trinca, as tensões apresentam uma singularidade, assumindo valores infinitos. Esse comportamento, que obviamente não ocorre na realidade, existe devido à hipótese da Mecânica da Fratura Elástica Linear de que a ponta da trinca é aguda, tendo seu raio tendendo a zero. Na realidade, mesmo os materiais mais frágeis apresentam um pequeno arredondamento na ponta da trinca, limitando o valor das tensões.

Mesmo com essa diferença, as equações de campo de tensões e de deslocamentos podem ser utilizadas para uma determinação precisa dos fatores de intensidade de tensão e, por conseqüência, do comportamento da trinca.

O desenvolvimento matemático para obtenção dessas equações, a partir da teoria da elasticidade linear, pode ser encontrado em Kaninnem e Popelar (1985).

## Capítulo 3

### Método dos Elementos de Contorno

#### 3.1 Introdução

O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido há várias décadas e apresentando-se como uma poderosa ferramenta de análise computacional em várias disciplinas de engenharia.

Este capítulo apresenta a formulação básica do método dos elementos de contorno para problemas de elasticidade linear estática em meios isotrópicos, assim como a implementação computacional desse método realizada neste trabalho.

No item 3.2 é apresentada a equação integral básica para aplicação do método dos elementos de contorno. Essa equação é obtida a partir das equações básicas da teoria da elasticidade, do teorema de Betti e da utilização de soluções fundamentais para problemas de elasticidade.

No item 3.3 são apresentadas algumas características do elemento de contorno quadrático contínuo, que será utilizado nesse trabalho.

O item 3.4 apresenta aspectos da implementação computacional do método dos elementos de contorno com a utilização do programa MatLab<sup>®</sup>, assim como alguns resultados obtidos.

## 3.2 Formulação básica do método dos Elementos de Contorno

Neste item, a formulação básica do método dos elementos de contorno é apresentada, de forma sucinta, tendo como referência Kane (1993) e Brebbia e Domínguez (1989).

### 3.2.1 Equações básicas da elasticidade

O objetivo da elasticidade linear é encontrar três componentes de deslocamentos, seis componentes de deformação e seis componentes de tensão, dado um corpo específico, forças de superfície e deslocamentos da superfície. Assim, as 15 incógnitas (três deslocamentos, seis deformações e seis tensões) são descritas por 15 equações, sendo seis equações da relação deformação-deslocamento (3.1), seis equações da relação tensão-deformação (3.2) e três equações de equilíbrio (3.3). Essas equações básicas da teoria da elasticidade linear para meios isotrópicos são dadas por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu \cdot e_{ij} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (3.3)$$

onde  $e_{ij}$  é o tensor de deformações,  $u_i$  é o vetor de deslocamentos e  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões. A formulação necessária e a dedução matemática para obtenção dessas equações pode ser encontrada em Timoshenko (1970).

### 3.2.2 Soluções fundamentais para elasticidade bidimensional

A formulação de equações integrais de contorno para elasticidade linear a ser apresentada requer o conhecimento de soluções para problemas especiais de elasticidade. Nesses problemas as propriedades do material consideradas são as mesmas do componente que se quer analisar, mas correspondente a um domínio infinito carregado com uma carga pontual unitária. Essas soluções são chamadas de solução fundamental da elastostática, ou solução de Kelvin, e consistem em soluções para deslocamento e para forças de superfície.

As soluções fundamentais para deslocamentos e forças de superfície são apresentadas nas equações (3.4) e (3.5).

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_i r_{,j} \right] \quad (3.4)$$

$$t_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,k} \right] + (1-2\nu) (n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (3.5)$$

A dedução dessas soluções podem ser encontradas em Kane (1993) e Brebbia e Domínguez (1989).

### 3.2.3 O teorema de Betti e a identidade de Somigliana

O objetivo do método dos elementos de contorno é a solução de uma equação integral de contorno. A identidade de Somigliana é um método de formulação de equações integrais de contorno obtida a partir do teorema de Betti para problemas de elasticidade (Kane,

1993). O teorema de Betti declara que o trabalho que um conjunto de forças de superfície  $t_i$  e forças de corpo, em equilíbrio, aplicadas em um sistema, exerce nos deslocamentos de um segundo sistema  $u_i^*$ , é igual ao trabalho que as forças de superfície  $t_i^*$  e forças de corpo deste segundo sistema exerce nos deslocamentos  $u_i$  do primeiro. O símbolo (\*) denota o segundo sistema. A dedução do teorema de Betti pode ser vista em Kane (1993).

A representação matemática do Teorema de Betti, ou teorema da reciprocidade, é dada por:

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega \quad (3.6)$$

A identidade de Somigliana, como já foi comentado, é um método de formulação de equações integrais de contorno obtida a partir do teorema de Betti para problemas de elasticidade dada por:

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{d}) u_i d\Omega \quad (3.7)$$

O primeiro sistema será tomado como aquele a ser resolvido e o segundo será aquele associado à solução fundamental, isto é um meio infinito sujeito à uma carga pontual unitária. A utilização das soluções fundamentais possibilita o desaparecimento da integral de domínio, resultando na equação (3.8).

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_i d\Gamma + c_{ij} u_i(\mathbf{d}) \quad (3.8)$$

onde  $c_{ij}$  é 1 para pontos internos ao domínio, 0 para pontos externos,  $1/2$  para pontos sobre um contorno suave e uma função de ângulos para contornos não suaves.

A equação (3.8) apenas apresenta solução analítica para problemas com geometrias e cargas muito simples. Para se resolver problemas mais complicados, que representam estruturas reais, é necessário utilizar um método numérico. Com esse propósito, o contorno

do problema é dividido em  $n$  elementos de contorno e a equação (3.8) pode ser escrita de forma discretizada, por enquanto desconsiderando as forças de corpo, como:

$$c_{ij}u_i(\mathbf{d}) + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_i d\Gamma_e = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} t_i u_{ik}^* d\Gamma_e \quad (3.9)$$

A equação (3.9) é aplicada em cada um dos nós do elemento de tal forma que a equação integral de contorno é transformada em um sistema linear de equações algébricas:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \quad (3.10)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  contém as integrais das soluções fundamentais de forças de superfície  $t_{ij}$  e de deslocamentos  $u_{ij}$ , e os vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$  contém todas as forças de superfícies e deslocamentos conhecidos ou não. Através de algumas manipulações algébricas podemos isolar as incógnitas em um vetor  $\mathbf{f}$  de forma que o sistema (3.10) possa ser representado por

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.11)$$

onde uma solução única pode ser obtida.

### 3.3 Elemento de contorno quadrático contínuo

O tipo de elemento de contorno utilizado nesse trabalho é o elemento quadrático contínuo, que é o elemento mais indicado para problemas de elasticidade. Os vetores de forças de superfície e deslocamentos nodais,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente, para um elemento quadrático contínuo podem ser dados por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & \phi^2 & 0 & \phi^3 & 0 \\ 0 & \phi^1 & 0 & \phi^2 & 0 & \phi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

e

$$t = \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & \phi^2 & 0 & \phi^3 & 0 \\ 0 & \phi^1 & 0 & \phi^2 & 0 & \phi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ t_2^2 \\ t_1^3 \\ t_2^3 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

O elemento de contorno quadrático contínuo, mostrado na figura 4.2, tem todos os valores associados a ele, simbolizados por  $v$ . Esses valores incluem coordenadas geométricas  $x_i$ , as seis componentes dos deslocamentos nodais  $u_i$  e as seis componentes das forças de superfícies  $t_i$ .

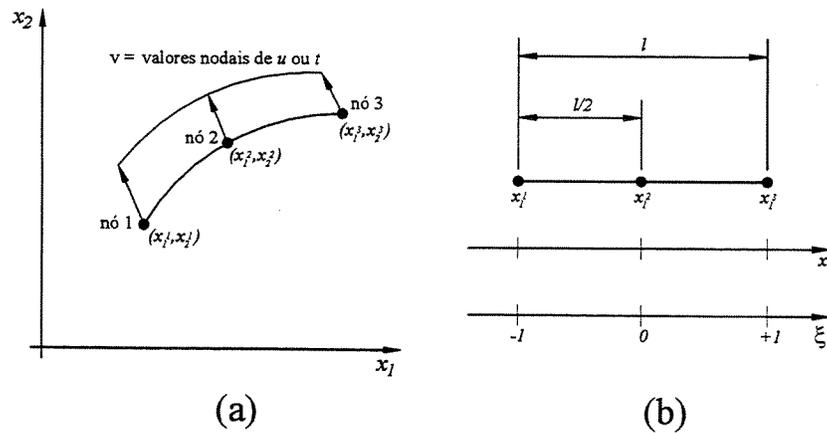


Figura 3.1. Elemento de contorno quadrático isoparamétrico.

A variação da resposta entre os nós é descrita usando-se funções de interpolações polinomiais simples, dadas por

$$\phi_1 = \frac{l}{2} \xi (\xi - 1) \quad (3.14)$$

$$\phi_2 = 1 - \xi^2 \quad (3.15)$$

$$\phi_3 = \frac{l}{2} \xi (\xi + 1) \quad (3.16)$$

onde  $\xi$  é a coordenada homogênea ao longo do elemento (figura 3.1).

A avaliação das integrais ao longo da equação de contorno (3.9) requer o uso de um jacobiano dado por

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \frac{\partial \Gamma_e}{\partial \xi} \quad (3.17)$$

assim,

$$\partial \Gamma_e = J(\xi) \partial \xi \quad (3.18)$$

A integração sobre os elementos para geração das matrizes H e G requer a utilização das funções de forma dadas pelas equações (3.14), (3.15) e (3.16), das soluções fundamentais dadas por (3.4) e (3.5) e do Jacobiano dado por (3.17).

### 3.4 Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno

A implementação computacional do método dos elementos de contorno nesse trabalho foi realizada através do programa MatLab<sup>®</sup>. O programa de elementos de contorno desenvolvido, chamado **Elast\_qua** (Análise de **Elasticidade** com elementos **quadráticos**) é constituído de etapas básicas como:

- definição de dados do problema a ser analisado, como geometria, propriedades do material, condições de contorno e discretização;
- visualização de características do problema que será analisado, como geometria, malha de elementos de contorno, forças aplicadas e restrições de deslocamento;
- construção das matrizes H e G de influência de elementos de contorno;
- montagem do sistema linear de equações  $A \cdot x = b$  através da aplicação das condições de contorno;
- resolução do sistema linear, obtendo-se o vetor de soluções;
- visualização dos resultados obtidos, através de geometrias deformadas e mapas de cores para grandezas como deslocamentos e tensões;

O conjunto de funções implementadas é mostrado no fluxograma da figura 3.2

Todas as funções apresentadas nesse fluxograma encontram-se no apêndice A desse trabalho. Na seqüência é feita uma descrição dessas funções, que constituem o programa **Elast\_qua**.

**dad\_elq#.m** – é o arquivo de dados para definição de um problema de elasticidade bidimensional. A geometria é definida pela matriz PONTOS, que contém as coordenadas de todos os pontos básicos, e pela matriz LINHA, que define as linhas da geometria a partir dos pontos já definidos. A discretização é definida na matriz DISCRE, que contém o número de elementos em cada linha. As condições de contorno de deslocamento prescrito

são definidas pela matriz DESLOC enquanto as condições de contorno de forças de superfície são definidas pela matriz TRAC. As propriedades do material utilizado para a análise são definidas pelas variáveis E, para o módulo de elasticidade e ni, para o coeficiente de Poisson.

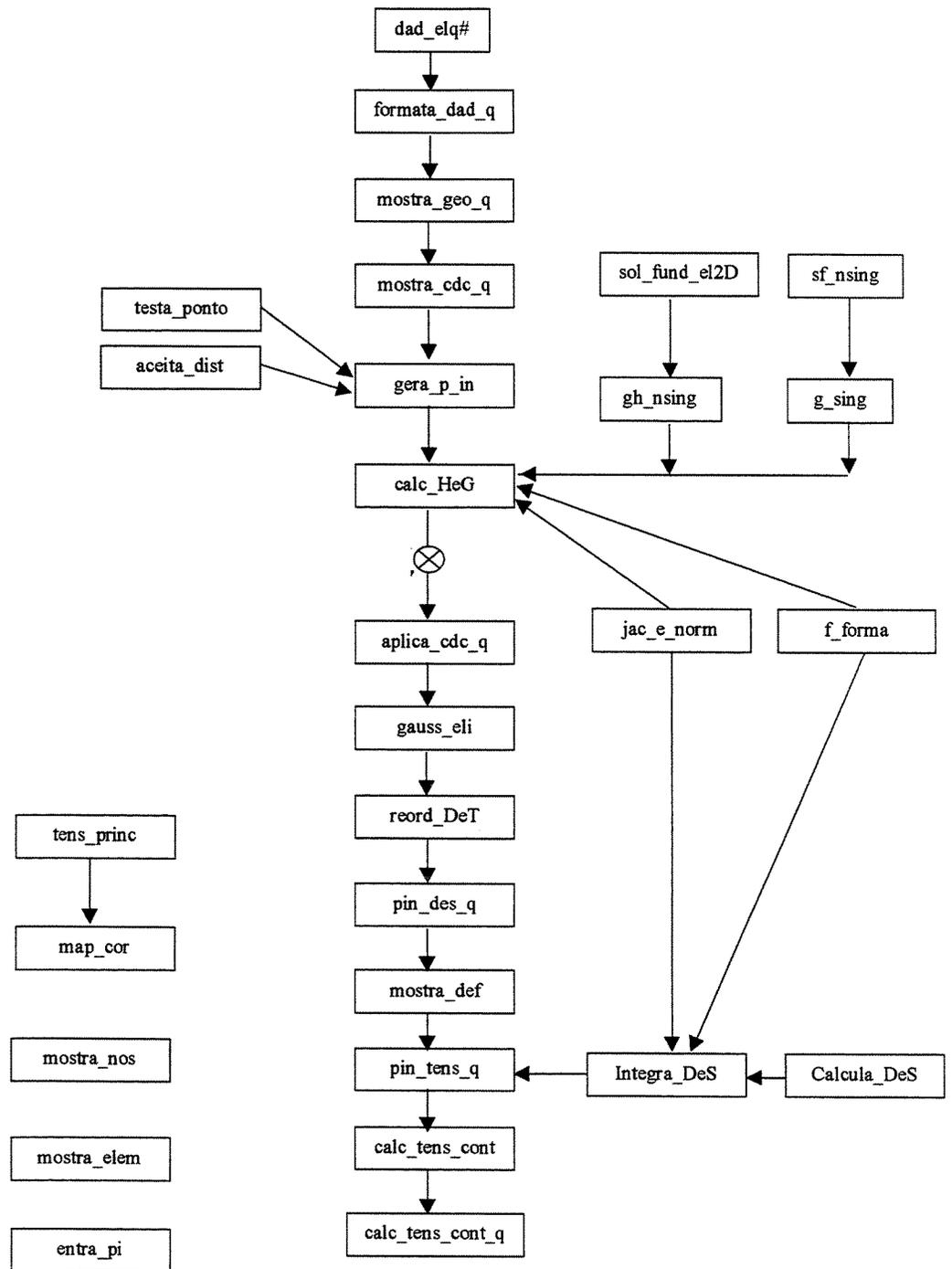


Figura 3.2. Fluxograma do programa **Elast\_qua**.

**formata\_dad\_q** – essa função é responsável pela transcrição dos dados de entrada do problema em um conjunto de dados que pode ser utilizado de forma mais eficiente durante a análise. Assim, o conjunto de dados inicial, que tem forma amigável para um usuário é transformado num conjunto de dados que pode ser lido de forma mais rápida pelo programa. Essa função cria as matrizes NOS (coordenadas nodais), ELEM (conectividade dos elementos) e CDC (condições de contorno por elemento).

**mostra\_geo\_q** – essa função mostra geometria do problema e a malha de elementos de contorno, através de funções gráficas do MatLab®.

**mostra\_cdc\_q** – essa função mostra as condições de contorno do problema, utilizando o símbolo de seta para forças de superfície aplicadas e o símbolo de triângulo para deslocamentos restritos.

**gera\_p\_in** – essa função gera de forma automática um conjunto de pontos internos ao domínio do problema em estudo. De início, é criada uma rede regular de pontos sobre a geometria, e depois cada ponto criado é testado por um algoritmo que verifica se o ponto é interno ou externo ao domínio. Caso o ponto seja interno, este é adicionado em uma matriz chamada PONTOS\_INT, que contém as coordenadas dos pontos internos. O algoritmo de verificação é baseado na contagem do número de interseções entre o contorno do problema e um semi-reta que tem origem em um pontos interno e é traçada na direção vertical. Caso o número de interseções seja ímpar, o ponto é interno, caso contrário, é externo.

**Calcula\_HeG** – essa é a função mais importante do programa **Elast\_qua**, uma vez que é responsável pela construção das matrizes de influência H e G, que descrevem o comportamento do problema em estudo. É utilizada a técnica RISP (Reusable Intrinsic Sample Point) que consiste na construção das matrizes H e G por colunas, isto é, um elemento é fixado e todos os pontos fontes são percorridos. Essa técnica permite uma análise mais rápida do problema, quando comparada com a técnica padrão que fixa um ponto fonte e percorre os elementos, uma vez que não é necessário recalcular o valor do

Jacobiano, dos pontos campo e do vetor normal ao elemento em cada iteração. A integração é feita numericamente utilizando-se 10 pontos de Gauss

Essa função faz chamada das funções **f\_forma\_q**, **Jac\_e\_norm**, **gh\_nsing** e **g\_sing**.

**f\_forma\_q** – é a função responsável pelo cálculo das 3 funções de forma para o elemento de contorno quadrático contínuo. Tem como entrada o valor da variável intrínseca do elemento e como saída, as três funções de forma para essa coordenada intrínseca.

**Jac\_e\_norm** – calcula, para uma coordenada intrínseca dada como entrada, o Jacobiano do elemento e o vetor normal, ambos avaliados sobre o ponto campo correspondente à coordenada intrínseca.

**gh\_nsing** – é a função responsável pelo cálculo das integrais h e g, correspondentes ao produto entre funções de forma, Jacobianos e soluções fundamentais, quando não existe singularidade, isto é, quando o ponto fonte não se encontra sobre o elemento sobre o qual a integração está sendo feita. A integração é realizada com 10 pontos de Gauss. Essa função faz chamada da função **sol\_fund2D**.

**g\_sing** – é a função responsável pelo cálculo da integral singular, que ocorre quando o ponto fonte da solução fundamental coincide com um dos nós do elemento em que está sendo feita a integração. A integração é feita através da divisão da solução fundamental e uma parte não singular, que pode ser calculada pelo método de Gauss padrão, e em outra parte, com singular logarítmica, que pode ser calculada pelo método de Gauss logarítmico. Essa função faz chamada das função **sf\_nsing**, responsável pela parte não singular da solução fundamental.

**sol\_fund2D** – dados um ponto fonte e um ponto campo, essa função retorna o valor das soluções fundamentais de deslocamento e de forças de superfície para o caso de elasticidade bidimensional.

**aplica\_cdc** – essa função faz a aplicação das condições de contorno do problema através da permutação de colunas entre as matrizes H e G. Como saída, essa função apresenta a matriz A e o vetor b do sistema linear que representa o comportamento do problema em estudo.

**gauss\_eli** – essa função resolve o sistema linear através do método da eliminação de Gauss, que consiste na transformação da matriz A em uma matriz triangular superior.

**reord\_DeT** – a solução obtida é reordenada em um vetor com os deslocamentos nodais e outro com as forças de superfície em cada elemento.

**pin\_des\_q** – essa função calcula os deslocamentos em cada ponto interno do problema, aplicando a equação (3.9), já apresentada nesse capítulo. Os pontos fontes são aplicados sobre os pontos internos e é realizada a integração por todos os elementos do contorno, resultando em matrizes H e G para os pontos internos. Essas matrizes são multiplicadas pelos vetores de deslocamento e forças de superfície já calculados, obtendo os deslocamentos dos pontos internos.

**mostra\_def** – essa função apresenta a geometria deformada obtida pela análise de elementos de contorno. Os deslocamentos nodais, multiplicados por um fator de ampliação, são somados às coordenadas nodais iniciais do problema, resultando na posição nodal final a ser visualizada.

**pin\_tens\_q** – função para cálculo do tensor de tensões em cada ponto interno do problema. Para esse cálculo é utilizado como referência Domínguez (1989) que apresenta a formulação para tensão em pontos internos, baseando-se na derivação da equação para deslocamentos em pontos internos e na equação constitutiva do material elástico linear.

**calc\_tens\_cont** – função para cálculo das tensões em nós do contorno com base em Kane (1993). As forças de superfície calculadas em cada nó são decompostas em um sistema de coordenadas tangente ao contorno do problema, resultando em duas componentes do tensor de tensões, que são a tensão normal à superfície e a tensão de cisalhamento. A outra

componente, a tensão tangente ao contorno é calculada a partir da derivada dos deslocamentos tangenciais nodais do elemento, que resulta na deformação tangencial dentro do elemento, e da equação constitutiva para o material em estudo. Depois de obtidas as tensões nesse sistema tangente, é feita uma transformação para o sistema inicial.

**map\_cor** – essa rotina constrói o mapa de cor para grandezas como componentes dos deslocamentos ou componentes do tensor de tensões. Também pode ser visualizado o mapa de cor para deslocamento total da estrutura, tensões principais e tensão de Von Mises.

Para validação da análise, foi considerado o modelo de uma placa quadrada, tracionada em uma direção. Esse problema tem solução analítica, possibilitando a comparação entre essa solução e a solução numérica obtida, para vários refinamentos de malha.

O modelo considerado pode ser visto na figura 3.3, consistindo em uma placa quadrada com tração unidirecional de 100 Pa. O lado da placa mede 1 m e as propriedades do material são  $E = 1000$  e  $\nu = 0$ . Foi definido um ponto internos no centro da placa para verificação da precisão do cálculo do deslocamento em pontos internos.

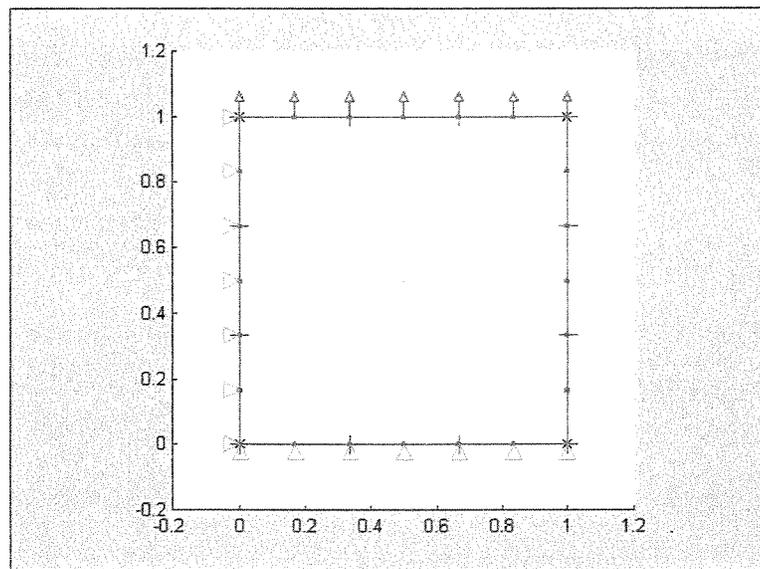


Figura 3.3. Modelo de placa quadrada com tração uniaxial

A geometria deformada obtida após a análise é apresentada na figura 3.4, onde a geometria original aparece em cor azul e a geometria deformada em cor vermelha.

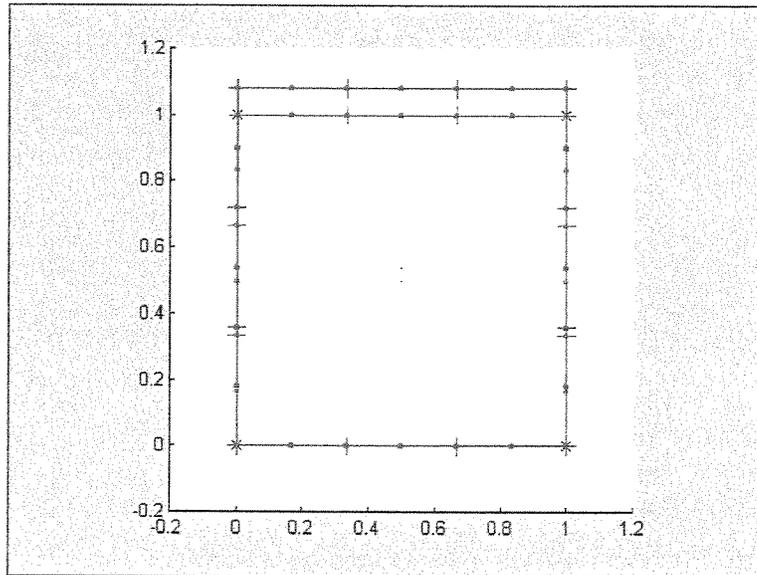


Figura 3.4. Geometria deformada para o problema de placa quadrada.

Verifica-se que não existe contração da placa, uma vez que o coeficiente de Poisson é nulo. A solução analítica para barras tracionadas com força concentrada na extremidade pode ser utilizada para determinar o erro da solução numérica. A solução analítica do deslocamento, para esse caso é  $d = 0,1$  m.

A figura 3.5 apresenta em forma de gráfico o erro obtido em função da malha utilizada. É verificado o deslocamento do nó que se encontra na metade da parte superior da placa e também o deslocamento do ponto interno.

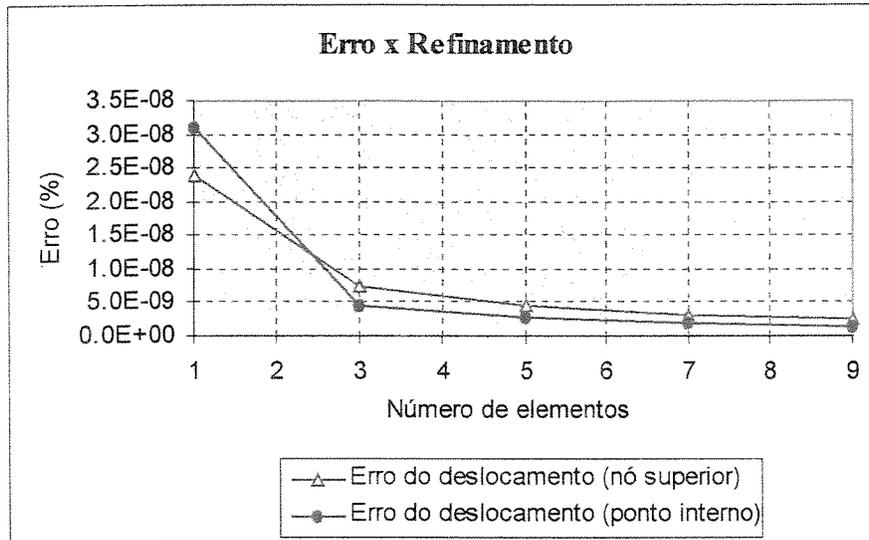


Figura 3.5. Erro em função da discretização utilizada.

Verifica-se que ocorre uma redução de erro dos resultados a medida que é utilizado um maior número de pontos internos, comprovando assim, a convergência dos resultados com o refinamento da malha utilizada. O pequeno valor do erro é relacionado com o tipo de problema analisado. O deslocamento ao longo da placa tem uma variação linear, enquanto estão sendo utilizados elementos quadráticos. Assim, mesmo com um elemento de contorno em cada lado da geometria, obtém-se um ótima precisão.

O mapa de cor para deslocamentos na direção  $y$  pode ser visualizado na figura 3.6.

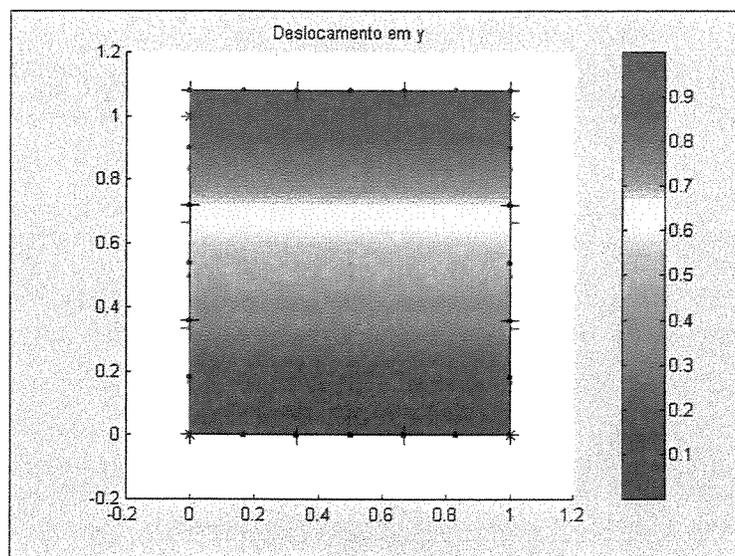


Figura 3.6. Mapa de cor dos deslocamento em  $y$ .

O programa **Elast\_qua** permite a criação rápida de novos modelos, uma vez que o arquivos de dados é bastante amigável. Nas figuras 3.7 e 3.8 são mostrados exemplos de modelos que podem ser analisados.

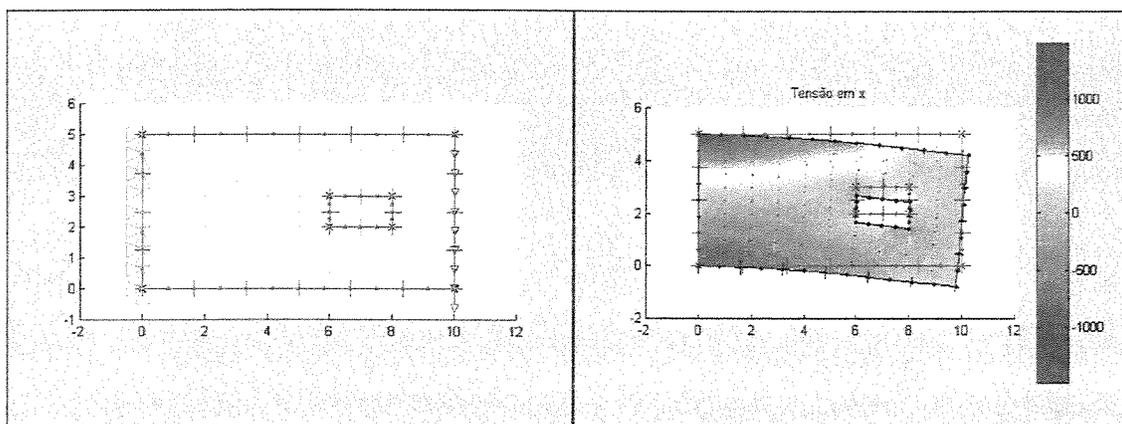


Figura 3.7. Modelo de viga com furo retangular.

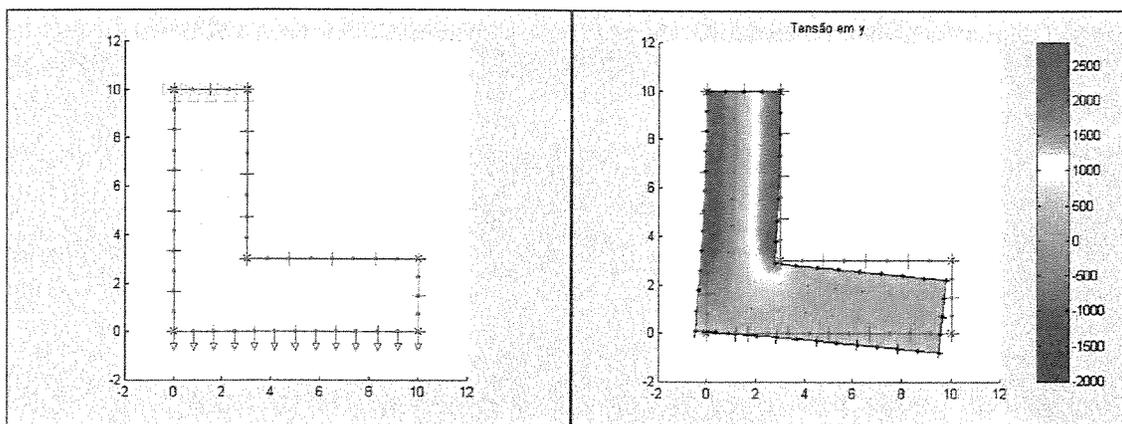


Figura 3.8. Modelo de placa em L.

Dessa forma, o programa **Elast\_qua** apresenta-se como uma boa ferramenta para análise de elasticidade bidimensional pelo método dos elementos de contorno. Esse programa foi

utilizado como base para a criação do programa responsável pela análise de reparos de trincas desenvolvido nesse trabalho.

## Capítulo 4

# Método dos Elementos de Contorno de Dupla Reciprocidade

### 4.1 Introdução

A solução da equação integral de contorno (3.8), apresentada no capítulo anterior, implica no cálculo da integral de domínio  $\int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega$ , na qual  $b_k$  representa a força de corpo que age sobre o componente analisado.

A forma mais comum de calcular essas integrais de domínio, bastante utilizada quando se iniciou o uso dos elementos de contorno para problemas com carga no domínio, é discretizar a região em um conjunto de células internas e usar um método de integração, como o método de Gauss, para realizar a integração dentro de cada célula. No entanto, a discretização e integração em células internas faz com que o método dos elementos de contorno perca seu atrativo principal, que é a solução de problemas da mecânica do contínuo através da discretização e integração apenas no contorno do problema.

Neste capítulo, o Método dos Elementos de Contorno de Dupla Reciprocidade (MECDR) será apresentado como uma alternativa para a solução de problemas cuja formulação envolva integrais de domínio, tal como a análise elástica de corpos sob a ação de forças de corpo.

O MECDR foi introduzido por Brebbia e Nardini (1982) para problemas elastodinâmicos e tem sido usado por vários autores para resolver uma grande variedade de problemas da mecânica do contínuo.

O item 4.1 apresenta, de forma sucinta, a formulação do Método da Dupla Reciprocidade, baseando-se em Partridge, Brebbia e Wrobel (1992) e em Domínguez (1993).

No item 4.2, a implementação computacional desse método é discutida e alguns resultados obtidos neste trabalho são apresentados.

## 4.2 Formulação do Método da Dupla Reciprocidade

O método da dupla reciprocidade pode ser utilizado em problemas de elasticidade estática para transformar integrais de domínio, resultantes da consideração de forças de corpo, em integrais de contorno equivalentes.

Assumindo a presença de forças de corpo, a equação integral de contorno a ser resolvida tem a forma da equação (3.8). A seguinte aproximação pode ser proposta para a força de corpo  $b_k$  ( $k = 1, 2$ ):

$$b_k = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha_k^j \quad (4.1)$$

Nessa equação, os termos  $\alpha_k^{(j)}$  são um conjunto de coeficientes a serem determinados (inicialmente desconhecidos) e os termos  $f^j$  são funções de aproximação, que dependem apenas da geometria do problema.

Uma solução particular  $\hat{u}_{mk}^{(j)}$  pode ser encontrada para satisfazer a equação de Navier como em Kane (1992):

$$G \cdot \hat{u}_{mk, \parallel}^j + \frac{G}{1-2\nu} \cdot \hat{u}_{lk, lm}^j = \delta_{mk} f^j \quad (4.2)$$

O número de soluções  $\hat{u}_{mk}^{(j)}$  utilizado deve ser igual ao número total de nós do problema. Se existirem N nós do contorno e L nós do domínio (nós internos), como pode ser visto na figura (4.1), existirão (N+L) valores de  $\hat{u}_j$ .

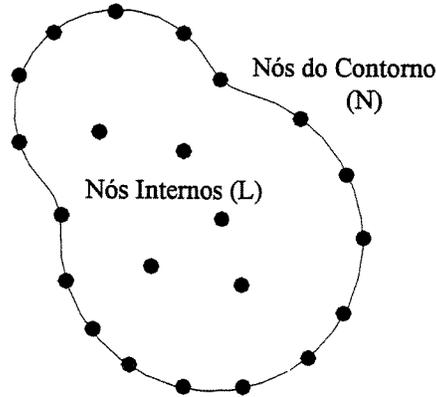


Figura 4.1. Nós do contorno e internos

Substituindo as equações (4.1) e (4.2) na equação (3.8) e aplicando o princípio da reciprocidade para a integral de domínio resultante, obtém-se:

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left( c_{lk}^i \hat{u}_{mk}^{ij} + \int_{\Gamma} t_{lk}^* \hat{u}_{mk}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^* \hat{t}_{mk}^j d\Gamma \right) \quad (4.3)$$

sendo  $\hat{t}_{mk}^j$  as forças de superfície correspondentes às soluções particulares de deslocamento  $\hat{u}_{mk}^j$ .

Note que, após a aplicação desse procedimento, a equação (4.3) não apresenta mais nenhuma integral de domínio. Esse é o procedimento que dá nome ao Método da Dupla Reciprocidade, pois o princípio de reciprocidade foi aplicado em ambos os lados da equação (4.3), a fim de se levar todas as integrais para o contorno. A equação (4.3) pode ser escrita de forma matricial, ao invés de forma indicial, resultando em:

$$c^i u^i = \int_{\Gamma} \hat{u}^i t d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{t}^i u d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left( c^i \hat{u}^{ij} + \int_{\Gamma} \hat{t}^i \hat{u}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{u}^i \hat{t}^j d\Gamma \right) \quad (4.4)$$

Após a discretização e aproximação das variações de  $u$ ,  $\hat{u}$ ,  $t$  e  $\hat{t}$  sobre cada elemento de contorno, usando valores nodais e o mesmo conjunto de funções de forma das equações (3.14), (3.15) e (3.16) a equação (4.4) torna-se:

$$c^i u^i + \sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} t_k = \sum_{j=1}^{N+L} \left( c^i \hat{u}^{ij} + \sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} \hat{u}_k^j - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{t}_k^j \right) \cdot \alpha^j \quad (4.5)$$

Deve-se notar que uma vez que  $\hat{u}$  e  $\hat{t}$  são funções conhecidas, que dependem apenas da geometria dos elementos e dos nós internos, não há necessidade de aproximar suas variações dentro de cada elemento usando funções de interpolação local e valores nodais, como é feito para  $u$  e  $t$ . No entanto, a utilização dessa aproximação implica em que as mesmas matrizes H e G possam ser usadas em ambos os lados da equação.

Esse procedimento introduz uma aproximação no cálculo dos termos do lado direito da equação (4.5). No entanto, como comentado por Partridge, Brebbia e Wrobel (1992), pode ser mostrado que o erro é pequeno e a eficiência do método aumenta consideravelmente.

Finalmente, aplicando a equação (4.5) para todos os nós do contorno, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$H \cdot u - G \cdot t = (H \cdot \hat{U} - G \cdot \hat{T}) \cdot \alpha \quad (4.6)$$

ou, substituindo  $\alpha = F^{-1} b$

$$H \cdot u - G \cdot t = (H \cdot \hat{U} - G \cdot \hat{T}) \cdot F^{-1} \cdot b \quad (4.7)$$

A equação (4.7) é a base para a aplicação do método do elementos de contorno de dupla reciprocidade e envolve apenas discretização e integração no contorno.

### 4.2.1 Nós internos

Os nós internos não fazem parte de nenhum elemento, e apenas suas coordenadas são necessárias como dado de entrada. A forma de obter a solução em nós internos será discutida em próximos itens.

A definição de nós internos geralmente não é uma condição necessária para obter a solução no contorno. No entanto, a solução será mais precisa se uma determinada quantidade de nós internos for utilizada. A importância de nós internos na precisão da solução por elementos de contorno será discutida no item 4.3.

### 4.2.2 O vetor alfa ( $\alpha$ )

O vetor  $\alpha$  foi considerado na equação (4.3) como

$$b_k = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha_k^j \quad (4.8)$$

Tomando o valor de  $\mathbf{b}$  em  $(N+L)$  pontos diferentes, um conjunto de equações do tipo (4.8) pode ser obtido. Expressando essas equações em forma matricial, tem-se

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\alpha \quad (4.9)$$

na qual cada coluna de  $\mathbf{F}$  consiste num vetor  $f_j$  que contém os valores da função  $f$  nos  $(N+L)$  pontos de colocação do método da dupla reciprocidade.

Como  $b_k$  é uma função conhecida da posição, a equação (4.9) pode ser multiplicada por  $\mathbf{F}^{-1}$  para a obtenção direta do vetor  $\alpha$ .

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.10)$$

Dessa forma, o lado direito da equação (4.7) é um vetor  $\mathbf{d}$   $[2(N+L),1]$  de valores conhecidos

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{t} = \mathbf{d} \quad (4.11)$$

com

$$\mathbf{d} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{T}})\boldsymbol{\alpha} \quad (4.12)$$

O vetor  $\mathbf{d}$ , que introduz a influência das forças de corpo (carga no domínio) é obtido pela multiplicação de matrizes e vetores conhecidos.

Aplicando as condições de contorno, através da permutação de colunas entre as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , chega-se ao sistema de equações lineares na forma

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (4.13)$$

no qual  $\mathbf{x}$  contém  $N$  valores de incógnitas do contorno, que podem ser deslocamentos  $\mathbf{u}$  ou forças de superfície  $\mathbf{t}$ .

### 4.2.3 Função de aproximação $f$

A função de aproximação  $f$  e as soluções particulares  $\hat{u}$  e  $\hat{t}$  usadas no método da dupla reciprocidade (MDR) não são limitadas pela formulação. A única restrição é que a matriz  $\mathbf{F}$  da equação (4.9) não seja singular.

No intuito de definir essas funções, é de costume propor uma expressão para  $f$  e então calcular  $\hat{u}$  e  $\hat{t}$  usando a equação (4.2).

Existem várias propostas para o tipo de função  $f$ , tais como as séries trigonométricas, os elementos do triângulo de Pascal e a distância  $r$  utilizada na definição da solução fundamental.

Nesse trabalho, será utilizada a função do tipo  $r$ , que foi primeiramente adotada por Nardini e Brebbia (1982) e depois pela maioria dos pesquisadores desse método por ser a alternativa mais simples e mais precisa. Essa função é baseada na série:

$$f = 1 \pm r \pm r^2 \pm \dots \pm r^m \quad (4.14)$$

Em princípio, qualquer combinação dos termos dessa série pode ser escolhida. Na aplicação do MDR nesse trabalho, a função  $f(r)$  adotada será  $f = 1 - r$ , adotada por Domínguez (1993) e apresentando resultados precisos.

#### 4.2.4 A função $f = 1 - r$

A presença da constante unitária garante que os elementos da diagonal de  $\mathbf{F}$  não sejam nulos, resultando numa matriz não singular. Com a matriz  $\mathbf{F}$  calculada, a equação (4.15) pode ser resolvida pelo método da eliminação de Gauss para a determinação do vetor  $\alpha$ . A construção da matriz  $\mathbf{F}$  ( $(N+L) \times (N+L)$ ), nesse caso, consiste em calcular a distância  $r$  entre todos os nós, internos e de contorno, do problema e adicionar a constante 1 a esses valores de distância. A diagonal principal de  $\mathbf{F}$  terá todos elementos iguais a 1, pois a distância de um nó até ele mesmo é nula.

A figura 4.2 mostra, de forma esquemática, as distâncias a serem calculadas considerando um nó fixo e percorrendo todos os outros.

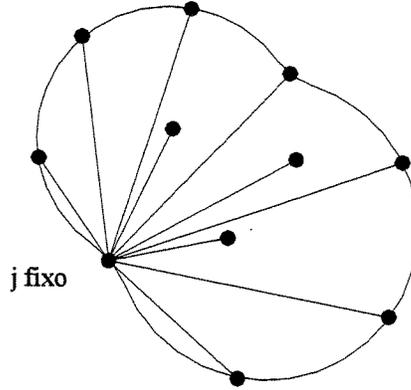


Figura 4.2. Representação das distâncias entre um nó fixo e todos os nós do problema.

Para o caso de  $f = 1 - r$ , as funções  $\hat{u}$  e  $\hat{t}$  são dadas por:

$$\hat{u}_{kn} = \frac{1}{G} \cdot \left\{ \left[ \frac{1-2\nu}{5-4\nu} + \frac{r}{30 \cdot (1-\nu)} \right] \cdot r^2 r_{,k} r_{,n} - \frac{9-10\nu}{90 \cdot (1-\nu)} \delta_{kn} r^3 \right\} \quad (4.15)$$

$$\hat{t}_{kn} = \left\{ \frac{2\nu}{1-2\nu} \cdot (3A \cdot r + 4B \cdot r^2 + 3D \cdot r^2) \cdot r_{,n} \delta_{kj} + \left[ 2 \cdot (A \cdot r + B \cdot r^2) \cdot r_{,n} \delta_{kj} + \right. \right. \quad (4.16)$$

$$\left. \left. + (A \cdot r + B \cdot r^2 + 3D \cdot r^2) \cdot (r_{,k} \delta_{nj} + r_{,j} \delta_{kn}) + 2B \cdot r^2 r_{,k} r_{,n} r_{,j} \right] \cdot n_j \right.$$

sendo:  $A = \frac{1-2\nu}{5-4\nu}$ ;  $B = \frac{1}{30 \cdot (1-\nu)}$ ;  $D = \frac{10\nu-9}{90 \cdot (1-\nu)}$ ,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e

$\nu$  o coeficiente de Poisson.

Como já havia sido comentado a solução  $\hat{u}$  é obtida a partir da equação (4.2) e a solução  $\hat{t}$  é obtida através da derivação da solução  $\hat{u}$ .

## 4.2.5 Obtenção de resultados em nós internos

Após a solução da equação (4.13), pode-se calcular o valor do deslocamento em cada nó interno a partir da equação (4.5), através da multiplicação de matrizes e vetores conhecidos.

Para o ponto fonte da solução fundamental colocado no domínio, o valor de  $c$  é igual a 1, e a equação (4.5) torna-se:

$$u^i = -\sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} u_k + \sum_{k=1}^N G_{ik} t_k + \sum_{j=1}^{N+L} \left( c^i \hat{u}^{ij} + \sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} \hat{u}_k^j - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{t}_k^j \right) \cdot \alpha^j \quad (4.17)$$

Nesse ponto, o desenvolvimento matemático do método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade para consideração de forças de corpo está concluído. Na seqüência serão discutidos detalhes da implementação computacional desse método.

## 4.3 Implementação computacional do método da dupla reciprocidade

O método da dupla reciprocidade foi implementado através da inclusão de algumas funções ao programa **Elast\_qua**, apresentado no capítulo 3, resultando no programa **Elast\_qua\_DRM**. Inicialmente esse programa considera a análise de corpos rotativos, isto é, a força de corpo considerada é aquela provocada pela aceleração centrífuga.

A figura 4.3 apresenta o fluxograma do programa **Elast\_qua\_DRM**:

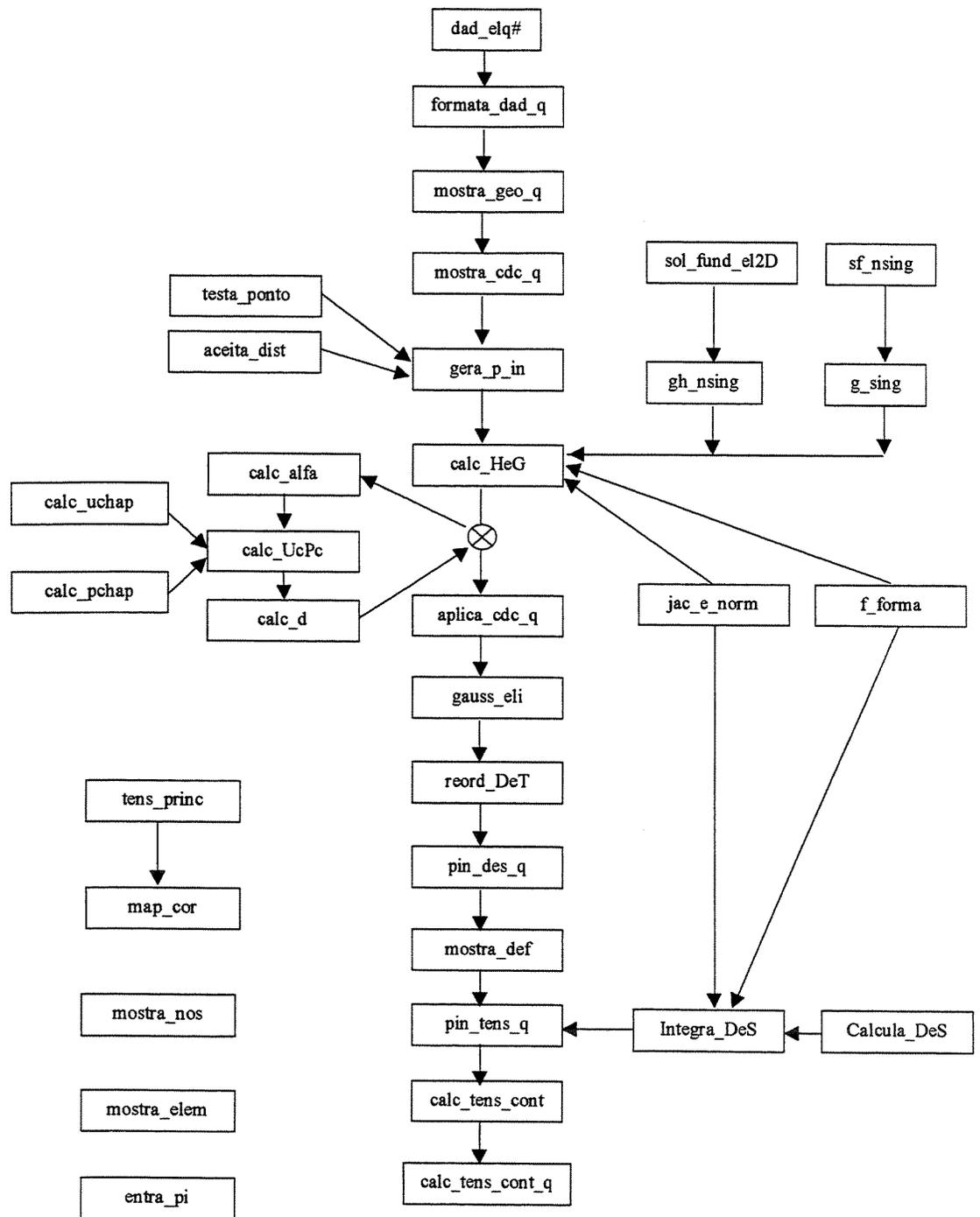


Figura 4.3. Fluxograma do programa **Elast\_qua\_DRM**.

As funções que permitem a aplicação do método da dupla reciprocidade são:

A função **calc\_alfa** é responsável pelo cálculo do vetor  $\alpha$ . Inicialmente são calculadas as forças de corpo em cada ponto de aplicação do método da dupla reciprocidade. As forças de corpo  $b_1$  e  $b_2$ , são relativas à aceleração centrífuga em um ponto de coordenada  $x_p, y_p$ , devida à rotação em torno de um ponto  $x_0, y_0$ , e são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \rho \cdot \omega^2 \cdot \begin{Bmatrix} x_p - x_0 \\ y_p - y_0 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

sendo  $\rho$  a densidade do material e  $\omega$  a velocidade angular. Após o cálculo da forças de corpo é construída a matriz das funções de aproximação  $F$ , utilizando a função do tipo  $f = 1 - r$ . Uma vez calculados o vetor  $b$  e a matriz  $F$ , o vetor  $\alpha$  é determinado pelo método de eliminação de Gauss, baseado na equação (4.10).

A função **calc\_UcPc** realiza a montagem das matrizes das soluções particulares de deslocamento e forças de superfície. Essa função faz a chamada das funções **calc\_uchap** e **calc\_pchap**, que são responsáveis pelo cálculo das soluções particulares dadas pelas equações (4.15) e (4.16).

A função **calc\_d** calcula o vetor  $d$ , que considera o efeito das forças de corpo, considerando a equação (4.12). Esse vetor deve ser somado ao vetor das condições de contorno  $b$ , antes da solução do sistema de equações para obtenção da solução no contorno.

O problema de uma placa circular em rotação ao redor de seu centro foi modelado para verificação da precisão do método implementado. Esse problema tem solução analítica para o deslocamento radial  $u_r$  dada por Timoshenko (1970), como:

$$u_r = \frac{1}{E} \cdot \left[ \frac{1-\nu}{4} (\rho \omega^2 r^3) \right] \quad (4.18)$$

sendo,  $E$  o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $\rho$  a densidade,  $\omega$  a velocidade angular e  $r$  o raio da placa circular.

Uma vez que o problema é simétrico, pode-se modelar apenas um quarto da placa, como visto na figura 4.4, que traz o modelo discretizado e a apresentação da solução de deslocamentos através da geometria deformada.

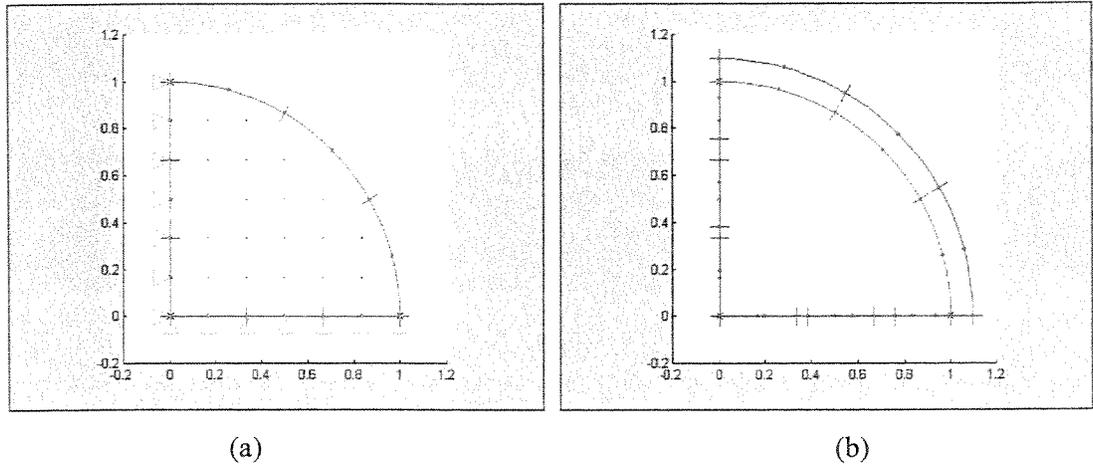


Figura 4.4. (a) modelo de um quarto de placa rotativa, (b) geometria deformada.

Utilizou-se o módulo de elasticidade  $E = 10.000 \text{ MPa}$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e a densidade do material  $\rho = 8.000 \text{ kg/m}^3$ . O raio da placa circular é de 3 m e a velocidade de rotação  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ . Com esses dados, a solução analítica para o deslocamento radial, segundo a equação (4.18), é de  $u_r = 0,58 \text{ m}$ .

Para verificação da convergência do método e da importância do uso de pontos internos, foram realizadas várias análises, considerando discretizações diferentes.

O primeiro estudo considerou o modelo sem nós internos. O número de elementos de contorno foi variado de um até 13 elementos em cada lado do quarto de circunferência. A tabela 4.1 apresenta os erros percentuais no cálculo do deslocamento radial para cada malha utilizada:

Tabela 4.1. Erro percentual em função do número de elementos utilizado

Número de Elementos	Erro Percentual
1	-17,566
2	-14,146
3	-11,102
4	-10,275
5	-9,986
6	-9,864
7	-9,805
8	-9,777
9	-9,761
10	-9,750
11	-9,745
12	-9,741
13	-9,739

Os resultados dessa tabela podem ser visualizados no gráfico da figura 4.5.

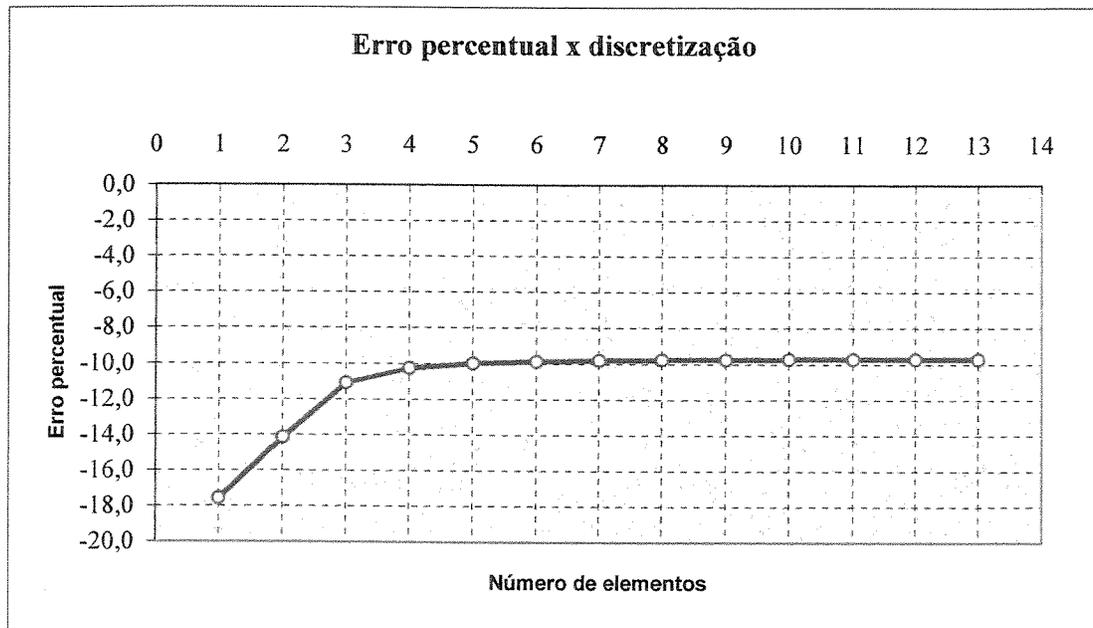


Figura 4.5. Erro percentual em função do número de elementos em cada linha.

Esse resultado mostra que, sem o uso de nós internos, o menor erro que pode ser obtido, para essa solução, é de 10%, que é considerado um erro muito grande para aplicações de métodos numéricos.

O segundo estudo realizado considerou a malha com quatro elementos em cada lado da placa e o número de nós internos foi variado, de forma a construir a tabela 4.2 e o gráfico da figura 4.6, que consideram o erro percentual para cada conjunto de nós internos.

Tabela 4.2. Erro percentual em função do número de nós internos

Número de nós internos	Erro Percentual
0	-10,275
1	-8,070
3	-5,430
8	-3,759
13	-2,795
19	-2,186
28	-1,805
37	-1,546
47	-1,364
60	-1,227
73	-1,127

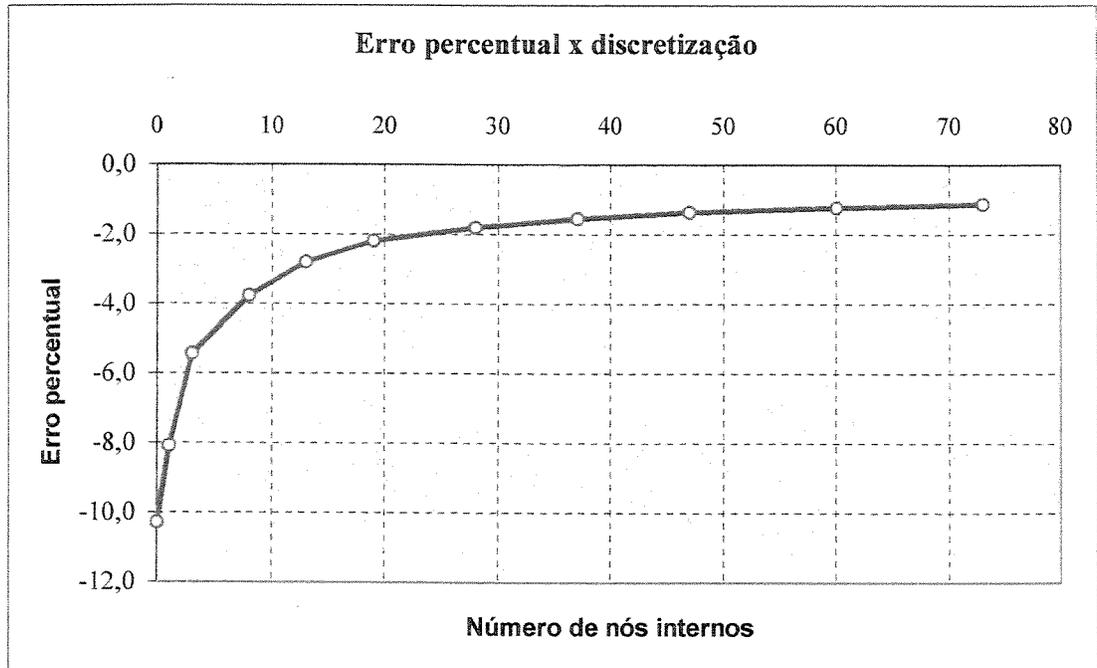


Figura 4.6. Erro percentual em função do número de nós internos.

Com o uso de nós internos, foi possível obter erros bastante pequenos, da ordem de 1%, que poderiam ser ainda mais reduzido com a utilização de um número maior de nós internos.

O terceiro e último estudo considerou as duas variações da discretização, isto é, para várias malhas de elementos de contorno, foi feita a variação do número de nós internos, permitindo a construção do gráfico da figura 4.6, para o erro percentual do deslocamento radial da placa.

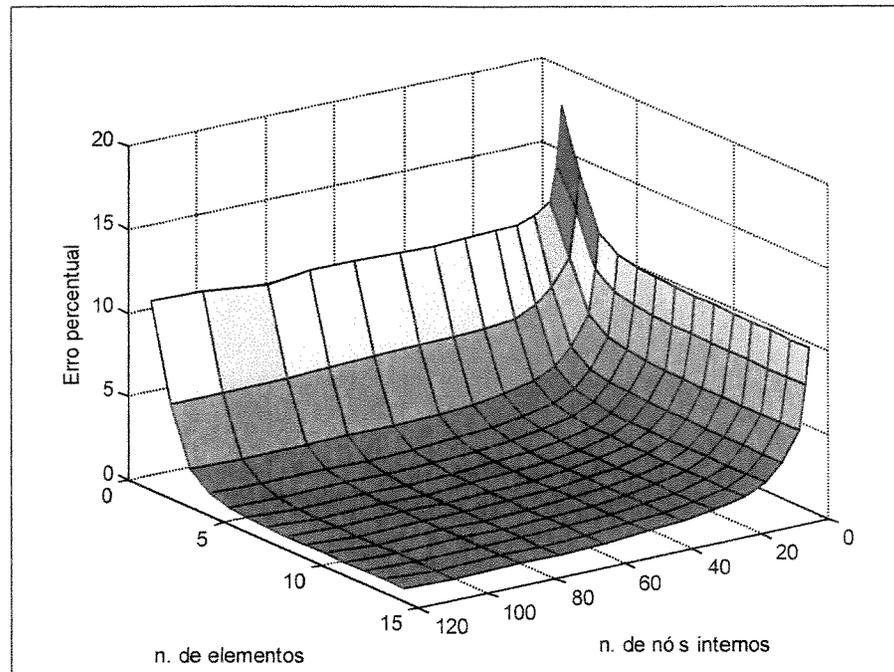


Figura 4.7 Erro percentual em função do número de elementos e do número de nós internos.

Verifica-se que é necessário o uso de nós internos, pois, mesmo com o uso de uma malha muito refinada, não é possível obter um resultado preciso sem eles. Por outro lado, com uma malha muito grosseira também não se obtêm resultados precisos, mesmo com o uso de um grande número de nós internos.

Assim, a melhor discretização a ser realizada implica no uso de uma malha representativa do modelo e de uma quantidade de nós internos que possa considerar, de forma adequada, as forças de corpo. Essa discretização é relacionada com os resultados da região de cor azul escuro no gráfico da figura 4.7, na qual os erros são baixos.

Esses estudos fornecem dados para uma análise representativa da placa trincada com reparo colado, a ser realizada no capítulo 6 desse trabalho.

## Capítulo 5

### Elemento de Contorno para Mecânica da Fratura

#### 5.1 Introdução

A aplicação de um método numérico, no caso deste trabalho, o método dos elementos de contorno, na análise de problemas com trincas, requer a utilização de técnicas apropriadas que considerem a presença da trinca e os efeitos que essa trinca pode causar ao seu redor.

A abordagem de campo desenvolvida por Irwin (1958), e já discutida no capítulo 2, mostra que o campo de deslocamentos de um material próximo à ponta de uma trinca tem o comportamento proporcional a  $\sqrt{r}$ , sendo  $r$  a distância percorrida a partir da ponta da trinca, como já foi apresentado nas equações (2.16), e (2.17).

A fim de obter uma boa aproximação para o campo de deslocamentos próximo à ponta de uma trinca, sem necessidade de um grande número de elementos de contorno, seria muito interessante utilizar elementos com funções de forma proporcionais a  $\sqrt{r}$  para interpolar esses deslocamentos. A utilização dessa nova função de forma possibilitaria o uso de um número menor de elementos do que seria necessário usando funções de forma quadráticas padrão. Blandford (1981) propôs o uso de um elemento de contorno chamado de "elemento de contorno com nó a um quarto" ou "*quarter point boundary element*".

Esse novo elemento é baseado no elemento de contorno quadrático padrão e seu nome é devido à característica de o nó central ser posicionado a um quarto do comprimento

do elemento. Essa simples mudança na posição do nó central faz com que a função de forma passe a ter o comportamento apropriado, isto é, proporcional a  $\sqrt{r}$ . Essa técnica já vinha sendo utilizada com o método dos elementos finitos, em trabalhos como os de Henshell e Shaw (1975), e Barsoum (1976).

Também, pode-se verificar nas equações (2.13), (2.14) e (2.15), que a distribuição de tensões nas proximidades da ponta de uma trinca tem o comportamento proporcional a  $\sqrt{I/r}$ , fazendo com que o valor teórico das tensões tenha uma singularidade quando  $r$  tende a zero, isto é, exatamente quando se chega na ponta da trinca.

Esse comportamento singular das tensões pode ser considerado através da implementação de um outro tipo especial de elemento de contorno que leva em conta a singularidade de forças de superfície. Esse novo elemento, baseado no elemento de contorno com nó a um quarto, é chamado de elemento de contorno com nó a um quarto com singularidade de forças de superfície, ou “*traction singular quarter point boundary element*”.

No item 5.2, é apresentado o desenvolvimento matemático para o elemento de contorno com nó a um quarto padrão (isoparamétrico), demonstrando a transformação da função de forma quadrática para função proporcional a  $\sqrt{r}$  quando se desloca o nó central a um quarto do comprimento do elemento.

No item 5.3, é apresentado o desenvolvimento matemático para o elemento de contorno com nó a um quarto com singularidade de forças de superfície, o qual requer uma pequena alteração nas funções de forma originais.

Esses equacionamentos são baseados em Blandford (1981), Martínez e Domínguez (1984) e Aliabadi (1991).

No item 5.4, dois métodos utilizados para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão,  $K_I$  e  $K_{II}$  são apresentados.

O item 5.5 considera a implementação computacional dos dois tipos de elemento de contorno com nó a um quarto apresentados.

Alguns resultados numéricos são mostrados no item 5.6, possibilitando algumas comparações entre os dois tipos de elemento utilizados.

## 5.2 Elemento de contorno com nó a um quarto isoparamétrico

O elemento de contorno com nó a um quarto é baseado no elemento quadrático isoparamétrico contínuo, e assim, tem a interpolação de variáveis dada por:

$$v_i(a) = \phi^{(1)}(a) \cdot v_i^{(1)} + \phi^{(2)}(a) \cdot v_i^{(2)} + \phi^{(3)}(a) \cdot v_i^{(3)} \quad (5.1)$$

Como já foi citado no capítulo 3,  $v_i(a)$  representa o valor interpolado para deslocamentos, forças de superfície ou coordenadas geométricas ao longo do elemento ( $-1 < a < 1$ ),  $i$  é a direção 1 ou 2,  $v_i^{(1)}$ ,  $v_i^{(2)}$  e  $v_i^{(3)}$  são os valores nodais de deslocamento, forças de superfície ou geometria na direção  $i$ , e  $\phi^{(1)}$ ,  $\phi^{(2)}$  e  $\phi^{(3)}$  são as funções de forma quadráticas já apresentadas nas equações (3.14), (3.15) e (3.16).

O caso particular de um elemento quadrático, de geometria reta, com o nó central colocado a um quarto do seu comprimento é mostrado na figura 5.1. Para esse caso, pode-se encontrar uma relação simples entre a coordenada intrínseca  $a$  e a variável  $r$ , com o uso da equação 5.1:

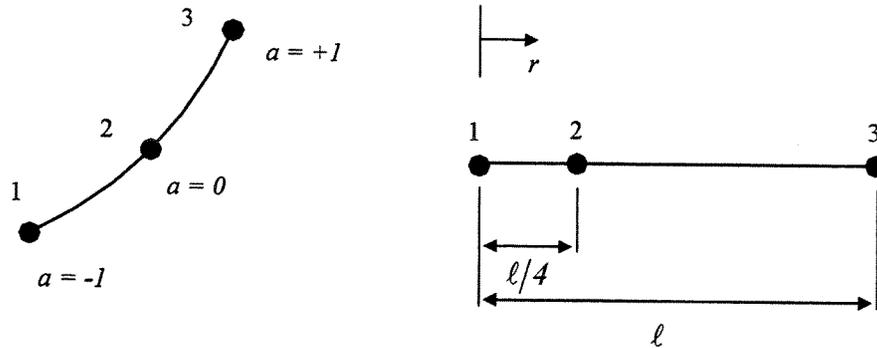


Figura 5.1 Elemento de contorno quadrático padrão e com nó a um quarto.

$$r(a) = \phi^{(1)}(a) \cdot r^{(1)} + \phi^{(2)}(a) \cdot r^{(2)} + \phi^{(3)}(a) \cdot r^{(3)} \quad (5.2)$$

Os valores nodais da distância  $r$  sobre o elemento são:

$$r^{(1)} = 0 \quad (5.3)$$

$$r^{(2)} = \ell/4 \quad (5.4)$$

$$r^{(3)} = \ell \quad (5.5)$$

Substituindo os valores nodais de  $r$  das equações (5.3), (5.4) e (5.5) e as três funções de forma  $\phi^{(1)}$ ,  $\phi^{(2)}$  e  $\phi^{(3)}$ , na equação (5.2), tem-se:

$$r(a) = \frac{a}{2} \cdot (a-1) \cdot 0 + (1-a^2) \cdot \frac{\ell}{4} + \frac{a}{2} \cdot (a+1) \cdot \ell \quad (5.6)$$

Que depois de simplificada, resulta em:

$$\frac{r}{\ell} = \frac{(1+a^2)}{4} \quad (5.7)$$

Escrevendo  $a$  como função de  $r/\ell$  obtém-se:

$$a = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} - 1 \quad (5.8)$$

Mas pode-se descartar uma das soluções, sendo que a transformação  $a[-1,1] \rightarrow r[0, \ell]$  é satisfeita somente se:

$$a = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} - 1 \quad (5.9)$$

Substituindo (5.9) nas funções de forma  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ , tem-se:

$$\phi_1(r) = 2 \cdot \frac{r}{\ell} - 3 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} + 1 \quad (5.10)$$

$$\phi_2(r) = -4 \cdot \frac{r}{\ell} + 4 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.11)$$

$$\phi_3(r) = 2 \cdot \frac{r}{\ell} - \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.12)$$

A substituição dessas funções de forma, escritas como funções da variável  $r$ , na equação (5.1), escrita para interpolação dos deslocamentos, e o reagrupamento dos termos que multiplicam  $r/\ell$  e  $\sqrt{r/\ell}$ , resultam na seguinte equação:

$$u_i(r) = u_i^{(1)} + (-3u_i^{(1)} + 4u_i^{(2)} - u_i^{(3)}) \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} + (2u_i^{(1)} - 4u_i^{(2)} + 2u_i^{(3)}) \cdot \frac{r}{\ell} \quad (5.13)$$

Pode-se mostrar que o termo que multiplica  $r/\ell$  é nulo, através da substituição dos valores de  $u_i^{(1)}$ ,  $u_i^{(2)}$  e  $u_i^{(3)}$  na equação (5.13) pelos valores teóricos de  $u_i(r=0)$ ,  $u_i(r=\ell/4)$  e  $u_i(r=\ell)$ , dados pelas equações (2.16) e (2.17).

Dessa forma, conclui-se que com o posicionamento do nó central a um quarto do comprimento do elemento, o comportamento proporcional a  $\sqrt{r}$  dos deslocamentos próximos à ponta da trinca é reproduzido pelo elemento de contorno.

### 5.3 Elemento de contorno com nó a um quarto e singularidade nas forças de superfície

O elemento de contorno com nó a um quarto, desenvolvido no item anterior, representa de maneira correta os deslocamentos próximos à ponta da trinca, mas não

considera corretamente as tensões, que nas proximidades da ponta da trinca, têm o comportamento proporcional a  $\sqrt{l/r}$ , como visto nas equações (2.13), (2.14) e (2.15).

Com a intenção de criar um elemento que considere essa singularidade das tensões, pode-se utilizar a equação (5.1) para interpolação das forças de superfície sobre o elemento:

$$t_i(a) = \phi^{(1)}(a) \cdot t_i^{(1)} + \phi^{(2)}(a) \cdot t_i^{(2)} + \phi^{(3)}(a) \cdot t_i^{(3)} \quad (5.14)$$

Multiplicando o lado direito dessa equação por  $\sqrt{l/r}$ , obtém-se:

$$t_i(a) = \phi^{(1)}(a) \cdot \bar{t}_i^{(1)} \cdot \sqrt{\frac{l}{r}} + \phi^{(2)}(a) \cdot \bar{t}_i^{(2)} \cdot \sqrt{\frac{l}{r}} + \phi^{(3)}(a) \cdot \bar{t}_i^{(3)} \cdot \sqrt{\frac{l}{r}} \quad (5.15)$$

A equação (5.15) pode ser escrita como:

$$t_i(a) = \bar{\phi}^{(1)}(a) \cdot \bar{t}_i^{(1)} + \bar{\phi}^{(2)}(a) \cdot \bar{t}_i^{(2)} + \bar{\phi}^{(3)}(a) \cdot \bar{t}_i^{(3)} \quad (5.16)$$

Sendo que,  $\bar{\phi}^{(j)} = \phi^{(j)} \cdot \sqrt{\frac{l}{r}}$  é uma nova função de forma que leva em consideração a singularidade de  $r^{-1/2}$ .

Reescrevendo a equação (5.15), com as funções de forma, escritas em função da variável  $r$ , dadas pelas equações (5.10), (5.11) e (5.12), obtém-se:

$$t_i(a) = \left( 2 \cdot \frac{r}{\ell} - 3 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} + 1 \right) \cdot \bar{t}_i^{(1)} \cdot \sqrt{\frac{l}{r}} + \left( -4 \cdot \frac{r}{\ell} + 4 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \right) \cdot \bar{t}_i^{(2)} \cdot \sqrt{\frac{l}{r}} + \left( 2 \cdot \frac{r}{\ell} - \sqrt{\frac{r}{\ell}} \right) \cdot \bar{t}_i^{(3)} \cdot \sqrt{\frac{l}{r}} \quad (5.17)$$

Realizando os produtos necessários e reagrupando os termos que multiplicam  $\sqrt{l/r}$  e  $\sqrt{r/\ell}$ , tem-se:

$$t_i(a) = (\bar{t}_i^{(1)}) \cdot \sqrt{\frac{\ell}{r}} + (-3\bar{t}_i^{(1)} + 4\bar{t}_i^{(2)} - \bar{t}_i^{(3)}) + (2\bar{t}_i^{(1)} - 4\bar{t}_i^{(2)} + 2\bar{t}_i^{(3)}) \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.18)$$

Essa equação mostra que o elemento de contorno com nó a um quarto com singularidade de forças de superfície descreve de maneira adequada as tensões próximas à ponta de uma trinca.

A presença do termo  $\sqrt{r/\ell}$  na equação (5.18) não representa problemas, pois para pequenos valores de  $r$ , o termo  $\sqrt{\ell/r}$  é muito maior que o termo  $\sqrt{r/\ell}$ , e assim, este último pode ser desprezado.

Pode-se encontrar a relação entre as forças de superfície  $t_i^{(j)}$ , calculadas pelo elemento com nó a um quarto, e as  $\bar{t}_i^{(j)}$ , calculadas pelo elemento de contorno com nó a um quarto com singularidade nas forças de superfície, através de:

$$\bar{t}_i^{(j)} = \frac{t_i^{(j)}}{\phi^{(j)}} = \frac{t_i^{(j)}}{\phi^{(j)} \cdot \sqrt{\frac{\ell}{r}}} \quad (5.19)$$

Aplicando essa equação para os nós  $j = 1, 2$  e  $3$ , têm-se:

$$\bar{t}_i^{(3)} = \frac{t_i^{(3)}}{\phi^{(3)}} = \frac{t_i^{(3)}}{\left[ \left( 2 \cdot \frac{r}{\ell} - \sqrt{\frac{r}{\ell}} \right) \cdot \sqrt{\frac{\ell}{r}} \right]_{r=\ell}} = \frac{t_i^{(3)}}{1 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{\ell}}} = t_i^{(3)} \quad (5.20)$$

$$\bar{t}_i^{(2)} = \frac{t_i^{(2)}}{\phi^{(2)}} = \frac{t_i^{(2)}}{\left[ \left( -4 \cdot \frac{r}{\ell} + 4 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \right) \cdot \sqrt{\frac{\ell}{r}} \right]_{r=\ell/4}} = \frac{t_i^{(2)}}{1 \cdot \sqrt{\frac{4\ell}{\ell}}} = \frac{t_i^{(2)}}{2} \quad (5.21)$$

$$\bar{t}_i^{(1)} = \frac{t_i^{(1)}}{\phi^{(1)}} = \frac{t_i^{(1)}}{\left[ \left( 2 \cdot \frac{r}{\ell} - 3 \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} + 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{\ell}{r}} \right]_{r=0}} = \lim_{r \rightarrow 0} t_i^{(1)} \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.22)$$

Essas relações serão utilizadas no cálculo dos fatores de intensidade de tensão ( $K_I$  e  $K_{II}$ ), no próximo item.

Considerando que o Jacobiano da transformação da coordenada intrínseca  $a$  para a variável  $r$  é  $J(a) = \sqrt{l \cdot r}$ , obtido através da derivação da equação da equação (5.9) em relação a  $r$ , é importante notar que na integração do produto de funções de forma, soluções fundamentais e Jacobiano para o elemento com nó a um quarto com singularidade nas forças de superfície, o Jacobiano  $\sqrt{l \cdot r}$  cancela a singularidade de  $\sqrt{\ell/r}$  nas funções de forma. Assim, não é necessário nenhum tipo de tratamento especial para a integração sobre esse elemento.

Para que a relação entre a coordenada intrínseca  $a$  e a variável  $r$ , apresentada na equação (5.9), possa ser utilizada, a geometria do elemento deve ser reta.

No caso de elementos curvos, o posicionamento do nó a um quarto do elemento não mais resulta no comportamento desejado de  $\sqrt{r}$  para interpolação dos deslocamentos, sendo necessária a utilização de funções de forma especiais, conforme mostrado por Smith (1988)

## 5.4 Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão

Os fatores de intensidade de tensão ( $K_I$  e  $K_{II}$ ) podem ser calculados de várias formas quando são utilizados os elementos de contorno com nó a um quarto.

As formas de obtenção desses fatores consistem na comparação entre as soluções de elementos de contorno e as expressões teóricas para deslocamentos e tensões, dadas pelas equações de (2.3) a (2.7).

Nesse trabalho serão apresentados dois métodos para a obtenção dos fatores de intensidade de tensão. Esses métodos são: fórmula dos deslocamentos de dois pontos, para o elemento com nó a um quarto isoparamétrico, e a fórmula das forças de superfície, para o

elemento com nó a um quarto singular. Como discutido em Martínez e Domínguez (1984) e Aliabadi (1991), esses dois métodos são os que apresentam maior precisão, cada um para o tipo de elemento considerado.

Uma vez que esse trabalho considera análises de problemas simétricos de fratura, o método para cálculo dos fatores de intensidade de tensão serão apresentados de forma simplificada, considerando condições de simetria. Para problemas que podem ser modelados com simetria, o fator de intensidade de tensão em modo  $II$  é nulo. Assim, o fator de intensidade de tensão que será considerado é o de modo  $I$  ou modo de abertura,  $K_I$ .

### 5.4.1 Fórmula dos deslocamentos em dois pontos

Considerando a equação teórica (2.7), para deslocamentos próximos à ponta da trinca, com  $r \rightarrow 0$ ,  $i = 2$  (componente do deslocamento em  $x_2$ ) e  $\theta = 180^\circ$  (pontos sobre a trinca), tem-se:

$$u_2 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot 2 \cdot (1-\nu) ; \text{ para } r \rightarrow 0 \quad (5.23)$$

A figura 5.2 mostra um elemento de contorno com nó a um quarto, alinhado com o eixo  $x_1$ , e com o nó 1 representando a ponta da trinca.

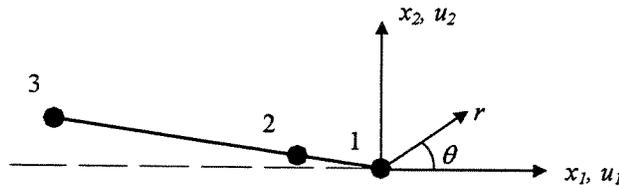


Figura 5.2. Geometria do elemento para cálculo do  $K_I$ .

A equação (5.13) pode ser reescrita para interpolar o deslocamento  $u_2$  sobre o elemento, considerando  $u_2^{(1)} = 0$ , e o termo que multiplica  $r/\ell$  também nulo, como comentado no item 5.2, obtendo-se:

$$u_2 = (4u_2^{(2)} - u_2^{(3)}) \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.24)$$

O coeficiente que multiplica  $\sqrt{r}$  na equação (5.24) pode ser igualado com o termo que multiplica  $\sqrt{r}$  em (5.23), para se obter:

$$(4u_2^{(2)} - u_2^{(3)}) \cdot \sqrt{\frac{I}{\ell}} = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{I}{2\pi}} \cdot 2 \cdot (1-\nu) \quad (5.25)$$

Rearranjando essa equação para isolar  $K_I$ , tem-se:

$$K_I = \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\ell}} (4u_2^{(2)} - u_2^{(3)}) \quad (5.26)$$

Assim, a equação (5.26) permite o cálculo do valor do fator de intensidade de tensão  $K_I$ , baseado nos deslocamentos dos nós do elemento de contorno com nó a um quarto.

#### 5.4.2 Fórmula de forças de superfície

Esse método para cálculo de  $K_I$ , foi proposto por Martínez e Domínguez (1984) e é baseado no valor nodal das forças de superfície na ponta da trinca, podendo somente ser aplicado com o uso do elemento com nó a um quarto singular.

Usando as equações (2.3), (2.4) e (2.5), pode-se escrever a distribuição de tensão à frente da ponta da trinca para  $\theta = 0^\circ$ , como:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.27)$$

para as tensões normais e

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.28)$$

para as tensões de cisalhamento.

Como mostrado na equação (5.22), a força de superfície no nó da ponta da trinca pode ser escrita como:

$$\bar{t}_i^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} t_i^{(1)} \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.29)$$

Com a utilização da relação de Cauchy, ( $t_i = \sigma_{ij}n_j$ ), escreve-se:

$$\bar{t}_1^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2) \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.30)$$

$$\bar{t}_2^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2) \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}} \quad (5.31)$$

Nessas equações,  $n_i$  são as componentes do vetor normal à trinca.

Substituindo os valores das tensões  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , e  $\sigma_{12}$  pelos valores teóricos dados pelas equações (5.27) e (5.28), obtêm-se:

$$\bar{t}_1^{(1)} = \frac{I}{\sqrt{2\pi\ell}} \cdot (K_I n_1 + K_{II} n_2) \quad (5.32)$$

$$\bar{t}_2^{(1)} = \frac{I}{\sqrt{2\pi\ell}} \cdot (K_{II} n_1 + K_I n_2) \quad (5.33)$$

Sendo o sistema de coordenadas fixo à ponta da trinca, com a trinca paralela ao eixo  $x$ , as componentes do vetor normal são  $n_1 = 0$  e  $n_2 = 1$ , e os fatores de intensidade de tensão são obtidos por:

$$K_I = \bar{t}_2^{(1)} \sqrt{2\pi\ell} \quad (5.34)$$

$$K_{II} = \bar{t}_1^{(1)} \sqrt{2\pi\ell} \quad (5.35)$$

Assim, o valor dos fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  são proporcionais às componentes  $\bar{t}_1^{(1)}$  e  $\bar{t}_2^{(1)}$  da força de superfície no nó da ponta da trinca. A constante de proporcionalidade, como visto nas equações (5.34) e (5.35) é a raiz do comprimento do elemento com nó a um quarto multiplicado por  $\sqrt{2\pi}$ .

Como já discutido, para problemas simétricos, o valor de  $K_{II}$  é nulo, e então somente interessa o valor de  $K_I$ .

É importante lembrar que o elemento com ponto a um quarto singular, que está à frente da trinca, deve estar alinhado com o elemento sobre a trinca para que possam valer as equações (5.27) e (5.28) com  $\theta = 0^\circ$ .

## 5.5 Implementação computacional dos elementos com nó a um quarto

O programa `Elast_qua`, apresentado no capítulo 3, foi utilizado para a implementação dos dois tipos de elementos com nó a um quarto, apresentados nos itens 5.2 e 5.3.

Como já discutido, a implementação do elemento com nó a um quarto isoparamétrico não requer alterações no programa de elementos de contorno. A única alteração necessária é a mudança das coordenadas dos nós centrais dos elementos adjacentes à ponta da trinca.

Essa alteração foi introduzida por uma nova função, chamada `cria_qtp.m` (cria “quarter point”), na qual deve ser informado o número do ponto da geometria que contém a ponta da trinca.

Com essa informação, a função identifica os nós que devem ter suas posições alteradas, de forma automática, e realiza essa alteração, criando os elementos com nó a um quarto. A alteração da posição desses nós é realizada com o uso das funções de forma, uma vez que o nó deve se deslocar sobre o elemento.

Após o fim da análise, a função `calc_KI2p.m` calcula o fator de intensidade de tensão  $K_I$ , através da fórmula do deslocamento de dois pontos, apresentada no item 5.4.1.

As funções **cria\_qtp.m** e **calc\_KI2p.m** são apresentadas no apêndice C desse trabalho.

Já o elemento com nó a um quarto com singularidade de forças de superfície requer algumas alterações no programa de elementos de contorno, que neste trabalho, também foram implementadas no programa **Elast\_qua**.

A mesma função **cria\_qtp.m** deve ser utilizada para o posicionamento correto dos nós centrais dos elementos adjacentes à ponta da trinca.

A alteração adicional deve ser realizada na função **calc\_HeG.m**, que calcula as matrizes  $H$  e  $G$  e já foi apresentada no capítulo 3.

Como discutido no item 5.3, para o elemento com nó a um quarto singular, existe um cancelamento da singularidade  $\sqrt{\ell/r}$  das funções de forma pelo Jacobiano  $\sqrt{l \cdot r}$ , durante o processo de integração. Dessa forma não é necessário alterar as funções de forma padrão utilizadas no programa **Elast\_qua**, sendo necessário apenas substituir o valor do Jacobiano, pelo resultado da simplificação da singularidade, isto é, o comprimento do elemento ( $\ell$ ).

Assim, as alterações realizadas foram:

- Identificar se o elemento tem o nó a um quarto;
- Caso afirmativo, alterar o valor do Jacobiano para  $\ell$ ;
- Utilizar esse valor do Jacobiano para as integrações dos componentes da matriz  $G$ .

As integrações dos componentes da matriz  $H$  não devem utilizar esse novo Jacobiano, pois a matriz  $H$  multiplica os deslocamentos nodais, e deslocamentos são interpolados pelo elemento com ponto a um quarto isoparamétrico.

Para o cálculo de  $K_I$ , foi implementada a função **calc\_KIfs.m**, que utiliza a fórmula das forças de superfície, apresentada no item 5.4.2. Essa função também é apresentada no apêndice C.

## 5.6 Resultados numéricos obtidos com os elementos com nó a um quarto

Para verificação da validade dos elementos com nó a um quarto implementados, foi considerado o problema de uma placa finita com uma trinca central, submetida a tração em uma direção. A placa tem comprimento  $12a$  e largura  $4a$ , sendo o valor  $a$  a metade do comprimento da trinca, as propriedades do material utilizado são  $E = 5250$  MPa e  $\nu = 0,3$ , e o carregamento é feito com  $\sigma = 1$  MPa.

Esse problema pode ser representado por um modelo simétrico, como mostrado na figura 5.3.

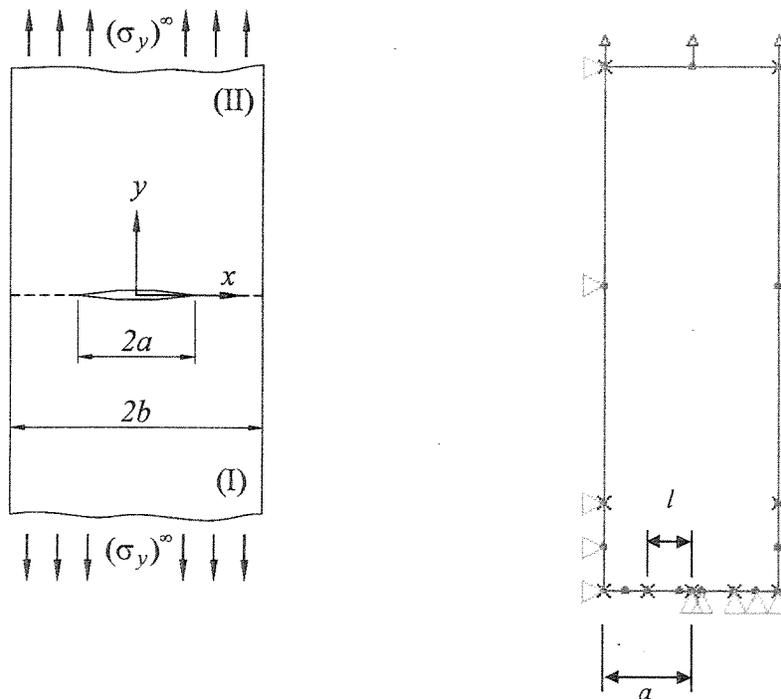


Figura 5.3. Placa com trinca central e modelo simétrico.

A malha apresentada na figura 5.3 foi utilizada por Martínez e Domínguez (1981) para o estudo da precisão dos elementos com nó a um quarto. Essa mesma malha, com nove

elementos, será considerada nesse trabalho e os resultados obtidos serão comparados com aqueles obtidos pelos mesmos autores.

Um fator que tem grande influência sobre a precisão do cálculo de  $K_I$ , quando se utiliza o elemento com nó a um quarto, é a relação entre o tamanho desse elemento ( $\ell$ ) e o tamanho da trinca ( $a$ ). Dessa forma, o principal estudo de precisão do elemento com nó a um quarto é a verificação do erro percentual de  $K_I$  em função da relação  $\ell/a$ . Como referência, para as comparações realizadas, foi utilizado o valor de  $K_I = 2,8298$ , com 1% de erro sugerido por Bowie (1964).

A figura 5.4 mostra o gráfico obtido para os dois tipos de elemento com nó a um quarto (isoparamétrico e com singularidade de forças de superfície).

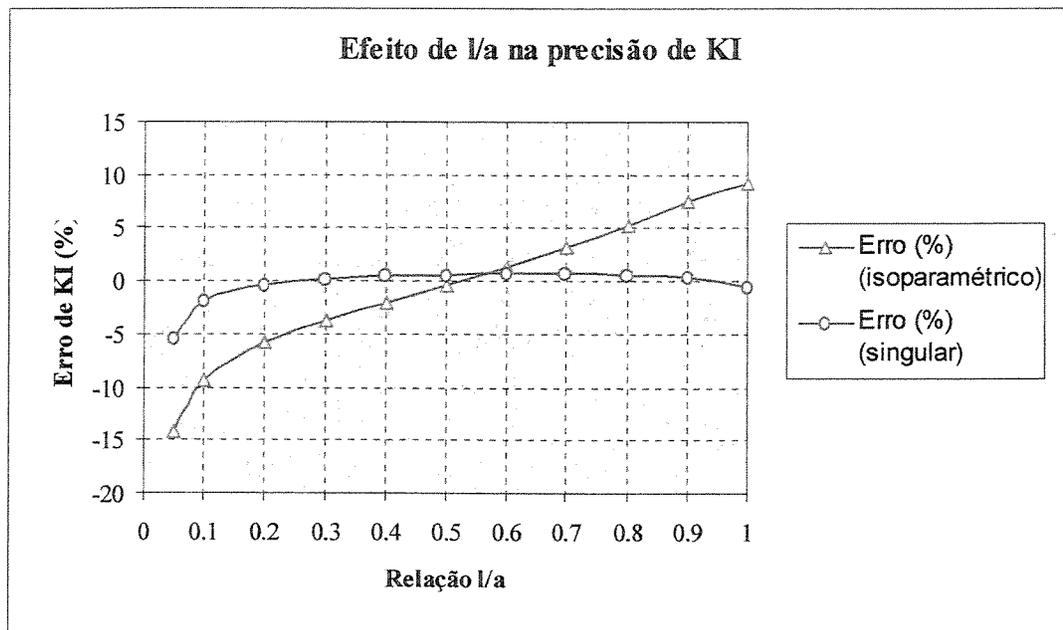


Figura 5.4. Erro percentual de  $K_I$  em função de  $\ell/a$ .

A curva para o elemento isoparamétrico apresenta grande coerência com aquela apresentada por Martínez e Domínguez (1981), o que valida a implementação desse elemento.

Existe uma faixa ótima para uso desse tipo de elemento em  $0,5 < \ell/a < 0,6$ , na qual o erro percentual está abaixo de 1,5%.

A curva para o elemento com ponto a um quarto singular apresentou um comportamento um pouco diferente daquela dada por Martínez e Domínguez (1981), como pode ser visto na figura 5.5, que traz as curvas de erro de  $K_I$  em função de  $\ell/a$  para o elemento singular implementado nesse trabalho e para o mesmo elemento implementado por Martínez e Domínguez (1981).

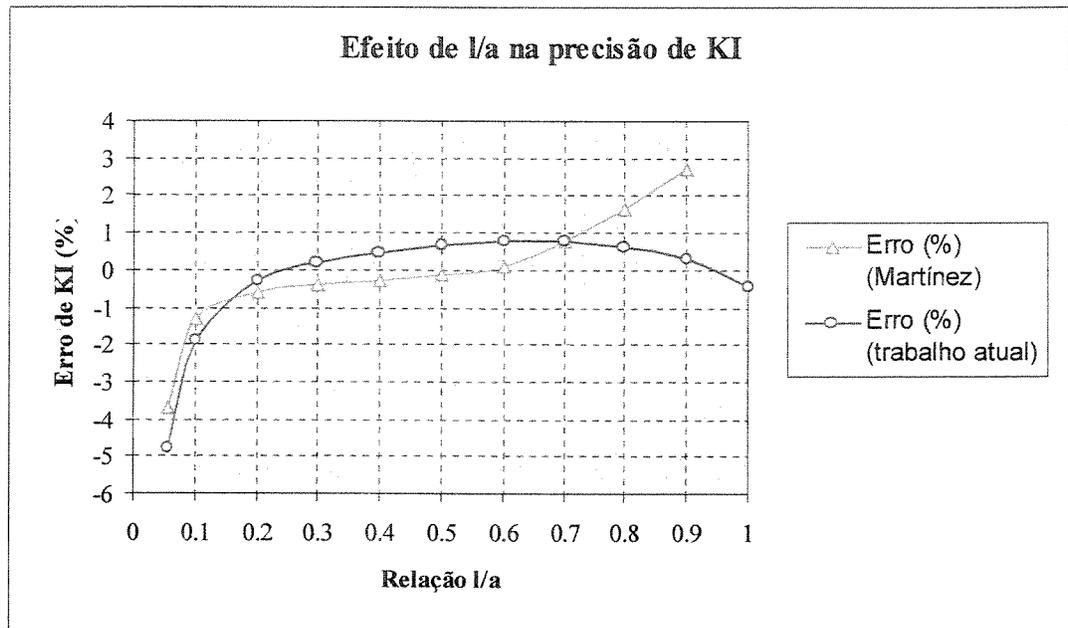


Figura 5.5. Comparação de resultados entre trabalho atual e de referência.

Enquanto Martínez e Domínguez (1981) apresentavam uma faixa ótima para  $\ell/a$  entre 0,1 e 0,8, onde o erro percentual é menor que 1,5%, o trabalho atual apresenta uma faixa para  $\ell/a$  entre 0,2 e 1,0, com erro percentual menor que 1%.

As razões para a diferença apresentada entre essas curvas, não foram claramente determinadas, uma vez que os autores do trabalho de referência não apresentam detalhes sobre a implementação dos elementos singulares. No entanto, Smith (1988), que fez o mesmo tipo de gráfico para estudo semelhante, utilizando uma integração com 6 pontos de Gauss e precisão numérica de 8 casas decimais, obteve curvas muito parecidas com as de Martínez e Domínguez (1981). Dessa forma, uma possível razão para a diferença apresentada pode estar no método de integração e na precisão numérica, uma vez que o programa do trabalho atual utilizou uma integração com 10 pontos de Gauss e precisão

numérica de 18 casas decimais. Outra razão poderia ser um tratamento diferente da singularidade presente nas funções de forma, com relação ao que foi considerado nesse trabalho.

Uma outra consideração a ser feita sobre as curvas apresentadas na figura 5.4, é o tipo de discretização utilizada, na qual o número de elementos é constante. Dessa forma, para relações  $\ell/a$  pequenas, os elementos vizinhos aos elementos de contorno com nó a um quarto são grandes, e essa diferença de tamanhos pode gerar problemas na precisão da integração desses elementos.

A figura 5.6 apresenta a influência do tamanho dos elementos vizinhos ao elemento com nó a um quarto sobre a precisão do cálculo de  $K_I$ . Foi fixada uma relação  $\ell/a$  de 0,2 e a malha no restante da trinca foi refinada.

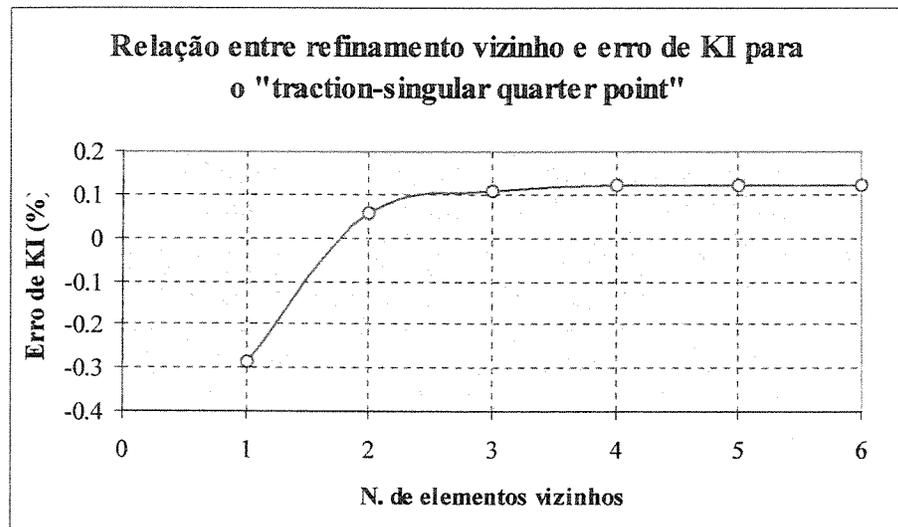


Figura 5.6. Erro de  $K_I$  em função da discretização vizinha.

O gráfico da figura 5.6 mostra que a relação de tamanho entre o elemento com nó a um quarto e os elementos vizinhos tem uma grande influência na precisão de  $K_I$ . Assim além de usar um tamanho de elemento com nó a um quarto que ofereça pequeno erro em  $K_I$ , também é importante utilizar elementos vizinhos com tamanhos proporcionais a esse elemento.

Finalmente, depois de discutida a validade dos elementos com nó a um quarto implementados, deve-se observar, através da figura 5.4, que o elemento com nó a um

quarto singular apresenta resultados bem mais precisos para o cálculo de  $K_I$ , que o elemento de nó a um quarto isoparamétrico.

Assim, no caso de análises de trincas pelo método dos elementos de contorno é importante a utilização do elemento de contorno com nó a um quarto com singularidade de forças de superfície, que embora implique em um trabalho adicional de implementação, garante resultados mais precisos.

## Capítulo 6

### Análise de placas trincadas com reparo colado

#### 6.1 Formulação para placa com reparo colado

A figura 6.1 mostra, de forma esquemática, uma placa com um reparo colado. O contorno da placa é denominado  $\Gamma$ , enquanto o contorno do reparo é denominado  $\Gamma_R$ . Entre a placa e o reparo, existe uma camada de adesivo.

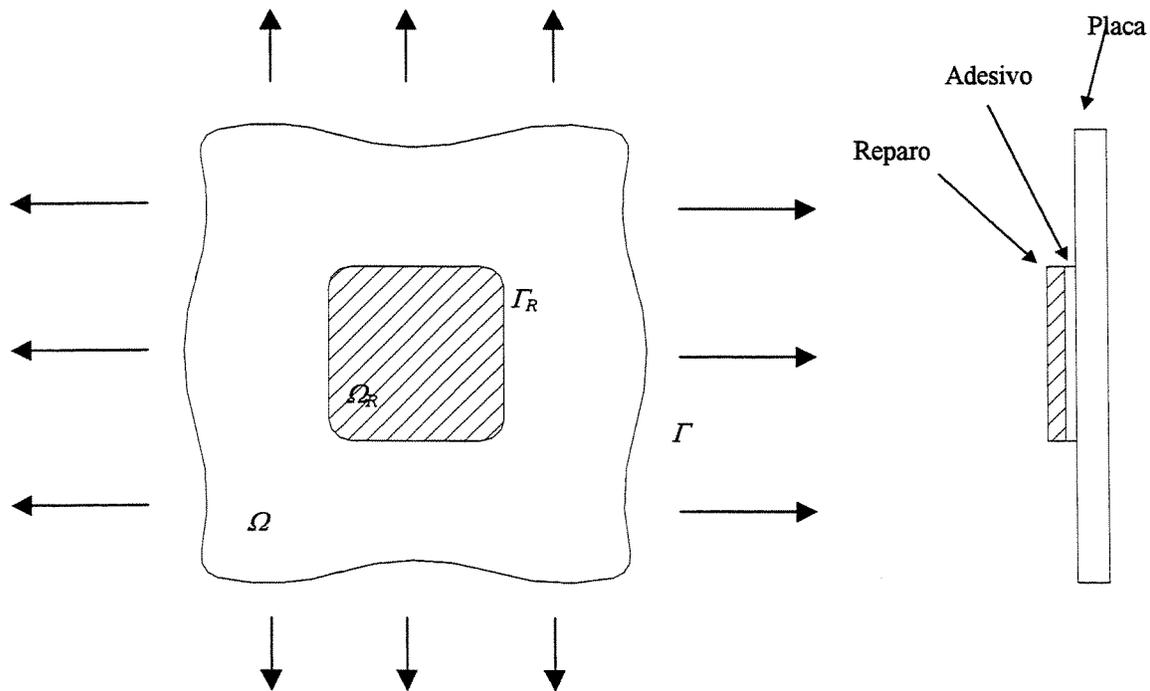


Figura 6.1. Placa com reparo colado por meio de adesivo.

Quando a placa se deforma sob a ação de forças aplicadas ao seu contorno, forças de interação, ou acoplamento, surgem entre a placa e o reparo. Considerando que a estrutura

permanece plana após a deformação, a teoria da elasticidade bidimensional pode ser utilizada para o estudo desse problema. Nesse caso, as forças de acoplamento entre a placa e o reparo, que ocorrem através do adesivo, podem ser tratadas como forças de corpo desconhecidas (par ação-reação). Os deslocamentos entre a placa e o reparo devem ser compatíveis com as deformações de cisalhamento da camada de adesivo que os acopla.

Considerando a configuração da figura 6.1, a equação integral de contorno para o deslocamento de um ponto fonte  $x'$  na placa é dada por:

$$c_{ij}^*(x') \cdot u_j(x') = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x', x) \cdot t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x', x) \cdot u_j(x) d\Gamma - \frac{1}{h} \cdot \int_{\Omega_R} u_{ij}^*(x', x) \cdot b_j(x) d\Omega_R \quad (6.1)$$

sendo  $b_j$  a representação das forças de acoplamento trocadas entre placa e reparo na região do reparo,  $\Omega_R$ , e  $h$  a espessura da placa. De forma similar, o deslocamento de um ponto  $x'$  no reparo é dado por:

$$c_{ij}^R(x') \cdot u_j^R(x') = \int_{\Gamma_R} u_{ij}^{*R}(x', x) \cdot t_j^R(x) d\Gamma_R - \int_{\Gamma_R} t_{ij}^{*R}(x', x) \cdot u_j^R(x) d\Gamma_R + \frac{1}{h_R} \cdot \int_{\Omega_R} u_{ij}^*(x', x) \cdot b_j(x) d\Omega_R \quad (6.2)$$

Na equação (6.2),  $u_j^R$  e  $t_j^R$  são deslocamentos e forças de superfície no reparo,  $h_R$  é a espessura do reparo e  $c_{ij}^R$  é um coeficiente que depende da posição que o ponto fonte se encontra em relação ao contorno do reparo  $\Gamma_R$ .

Os deslocamentos dos pontos  $x'$  ( $x' \in \Omega_R$ ) na placa e no reparo devem apresentar compatibilidade com as deformações de cisalhamento no adesivo. Considerando a deformação de cisalhamento uniforme ao longo da espessura do adesivo, conforme Salgado (1997) e desprezando a deformação de cisalhamento na placa e no reparo, a diferença  $\Delta u_j$  entre os deslocamentos  $u_j$  de um ponto  $x'$  ( $x' \in \Omega_R$ ) da placa e  $u_j^R$  de um ponto correspondente no reparo, pode ser escrita como:

$$\Delta u_j^R(x') = [u_j(x') - u_j^R(x')] = \frac{h_A}{G_A} \cdot \tau_j(x') \quad (6.3)$$

sendo  $h_A$  a espessura da camada de adesivo,  $G_A$  o módulo de elasticidade transversal (resistência ao cisalhamento) do material adesivo,  $\tau_j$  é a tensão de cisalhamento no adesivo, que é igual ao valor as forças de acoplamento  $b_j$ . Assim, a equação de compatibilidade pode ser escrita em função das forças de corpo  $b_j$ , como:

$$u_j(x') - u_j^R(x') = \frac{h_A}{G_A} \cdot b_j(x') \quad (6.4)$$

O modelo definido para a determinação das tensões de cisalhamento no adesivo considera não considera deformações de cisalhamento na placa nem no reparo, apresentando deformações de cisalhamento apenas o adesivo. Segundo Salgado (1997), esse é o modelo mais adequado para representação do sistema placa-adesivo-reparo real.

Dessa forma, a força de acoplamento é proporcional à diferença de deslocamentos de pontos correspondentes (mesma posição inicial) da placa e do reparo.

## 6.2 Transformação das integrais de domínio para integrais de contorno

As equações (6.1) e (6.2) apresentadas no item anterior implicam no cálculo de integrais de domínio. O método da dupla reciprocidade, apresentado no capítulo 4 será utilizado para transformar essa integrais de domínio em integrais de contorno.

As forças de acoplamento são forças inicialmente desconhecidas agindo na região de acoplamento  $\Omega_R$ . Essas forças, que podem ser consideradas, no contexto bidimensional, como forças de corpo, podem ser aproximadas como uma soma de coeficientes desconhecidos  $\alpha^d$  multiplicados por funções de aproximação  $f^d(x^d, x)$ , como:

$$b_j(x) = \sum_{d=1}^D \alpha_j^d \cdot f^d(x^d, x) \quad (6.5)$$

Os pontos  $x^d$  são os pontos utilizados para a aproximação pelo método da dupla reciprocidade e são chamados de pontos de colocação do método da dupla reciprocidade. A função de aproximação utilizada nesse trabalho é  $f^d(x^d, x) = l - r$ , sendo  $r$  a distância entre o ponto de colocação  $x^d$  e o ponto campo  $x$ .

Substituindo as forças de corpo na equação (6.1) pelo lado direito da equação (6.5) e usando o teorema da reciprocidade, a equação de deslocamento para um ponto fonte  $x'$  na placa pode ser reescrita como:

$$c_{ij}(x') \cdot u_j(x') = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x', x) \cdot t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{t}_{ij}^*(x', x) \cdot u_j(x) d\Gamma - \frac{I}{h} \cdot \sum_{d=1}^D \alpha_k \cdot \left[ c_{ij}(x') \cdot \hat{u}_{kj}^d(x') + \int_{\Gamma_R} \hat{t}_{ij}^*(x', x) \cdot \hat{u}_{kj}^d(x) d\Gamma_R - \int_{\Gamma_R} u_{ij}^*(x', x) \cdot \hat{t}_{kj}^d(x) d\Gamma_R \right] \quad (6.6)$$

sendo  $\hat{u}_{kj}^d$  e  $\hat{t}_{kj}^d$  soluções particulares de deslocamento e força de superfície, que correspondem à função  $f^d = l - r$ , como comentado no capítulo 4.

Após a discretização e aproximação das variações de  $u$ ,  $t$ ,  $\hat{u}$  e  $\hat{t}$  sobre cada elemento, usando valores nodais e o mesmo conjunto de funções de forma das equação (3.14), (3.15) e (3.16) e aplicando essa equação para todos os nós do contorno, a equação (6.6) pode ser escrita da seguinte forma matricial:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{H}_{PR} \cdot \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}_{PR} \cdot \hat{\mathbf{T}}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (6.7)$$

sendo  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  as matrizes de influência de elementos de contorno,  $\mathbf{u}$  o vetor de deslocamentos dos nós da placa e  $\mathbf{t}$  o vetor de forças de superfície nos nós da placa. As matrizes  $\hat{\mathbf{U}}$  e  $\hat{\mathbf{T}}$  consideram as soluções particulares de deslocamento e de força de superfície. O vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  representa o conjunto de coeficientes a determinar, que são relacionados às forças de acoplamento pela equação (6.5).

Deve-se notar que, embora as matrizes  $H_{PR}$  e  $G_{PR}$  sejam calculadas utilizando os mesmos pontos fonte utilizados para o cálculo de  $H$  e  $G$ , os pontos campo para integração dos elementos de  $H_{PR}$  e  $G_{PR}$  estão sobre os elementos do reparo, fazendo com que essas matrizes sejam totalmente diferentes de  $H$  e  $G$ . Essas matrizes apenas são iguais em problemas em que a força de corpo age sobre todo o domínio em estudo.

De forma análoga àquela feita para a equação (6.6), o deslocamento de um ponto  $x'$  no reparo pode ser reescrito como:

$$c_{ij}^R(x') \cdot u_j^R(x') + \int_{\Gamma_R} t_{ij}^{*P}(x', x) \cdot u_j^R(x) d\Gamma_R - \int_{\Gamma_R} u_{ij}^*(x', x) \cdot t_j^R(x) d\Gamma_R =$$

$$- \frac{1}{h_R} \cdot \sum_{d=1}^D \alpha_k \cdot \left[ c_{ij}(x') \cdot \hat{u}_{kj}^d(x') + \int_{\Gamma_R} t_{ij}^*(x', x) \cdot \hat{u}_{kj}^d(x) d\Gamma_R - \int_{\Gamma_R} u_{ij}^*(x', x) \cdot \hat{t}_{kj}^d(x) d\Gamma_R \right]$$
(6.8)

A representação matricial da equação (6.8), após discretização e aproximação das variações de  $u^R$ ,  $t^R$ ,  $\hat{u}$  e  $\hat{t}$  sobre cada elemento, e aplicação dessa equação para cada nó do reparo, pode ser escrita como:

$$H_R \cdot u^R - G_R \cdot t^R = (H_R \cdot \hat{U} - G_R \cdot \hat{T}) \cdot \alpha \quad (6.9)$$

Na equação (6.9),  $u^R$  é o vetor de deslocamentos dos nós do reparo e  $t^R$  é o vetor de forças de superfície em nós do reparo. As matrizes de influência  $H_R$  e  $G_R$  são iguais dos dois lados da equação, uma vez que as forças de corpo agem por todo o domínio do reparo.

As equações (6.6) e (6.7) são escritas em termos dos coeficientes  $\alpha_j^d$  do método da dupla reciprocidade, ao invés das forças de interação  $b_j^d$ . Os coeficientes  $\alpha_j^d$  não têm significado físico, mas são relacionados com as forças de interação pela equação (6.5)

A equação de compatibilidade (6.4) pode também ser escrita em função dos coeficientes  $\alpha_j^d$ , como:

$$u_j(x') - u_j^R(x') = \frac{h_A}{G_A} \cdot \sum_{d=1}^D \alpha_j^d \cdot f^{Ad}(x^d, x) \quad (6.10)$$

As equações (6.6), (6.8) e (6.10) constituem a base para a análise de problemas de placas trincadas com reparos colados através do método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade.

### 6.3 Sistema de equações para a placa com o reparo colado

Para o estudo da montagem do sistema de equações para análise da placa com reparo colado, será considerado o problema da figura 6.2 que, por simplicidade, apresenta uma malha de elementos constantes.

A placa e o reparo são apresentados acoplados, à esquerda, e desacoplados à direita. O índice <sup>R</sup> significa nó do reparo.

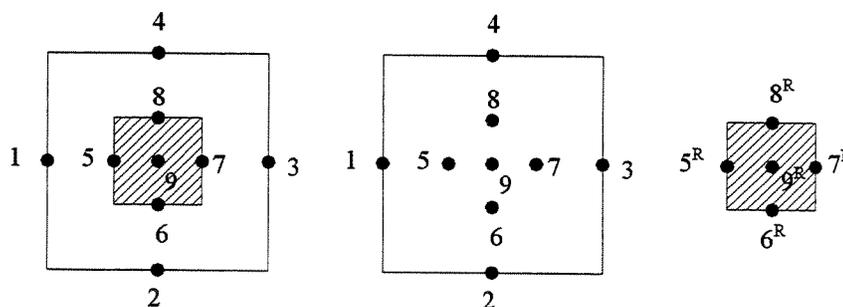


Figura 6.2. Modelo de placa com reparo discretizado por elementos constantes.

Os nós 1, 2, 3 e 4 pertencem ao contorno  $\Gamma$  da placa, enquanto os nós 5, 6, 7, 8 e 9 são nós internos à placa. Os nós  $5^R$ ,  $6^R$ ,  $7^R$  e  $8^R$  pertencem ao contorno do reparo, e o nó  $9^R$  é um nó interno ao reparo.

A equação (6.7) pode ser escrita considerando os nós do contorno da placa, resultando em:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{Bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} H_{15} & H_{16} & H_{17} & H_{18} \\ H_{25} & H_{26} & H_{27} & H_{28} \\ H_{35} & H_{36} & H_{37} & H_{38} \\ H_{45} & H_{46} & H_{47} & H_{48} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_{55} & \hat{u}_{56} & \hat{u}_{57} & \hat{u}_{58} & \hat{u}_{59} \\ \hat{u}_{65} & \hat{u}_{66} & \hat{u}_{67} & \hat{u}_{68} & \hat{u}_{69} \\ \hat{u}_{75} & \hat{u}_{76} & \hat{u}_{77} & \hat{u}_{78} & \hat{u}_{79} \\ \hat{u}_{85} & \hat{u}_{86} & \hat{u}_{87} & \hat{u}_{88} & \hat{u}_{89} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{15} & G_{16} & G_{17} & G_{18} \\ G_{25} & G_{26} & G_{27} & G_{28} \\ G_{35} & G_{36} & G_{37} & G_{38} \\ G_{45} & G_{46} & G_{47} & G_{48} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{t}_{55} & \hat{t}_{56} & \hat{t}_{57} & \hat{t}_{58} & \hat{t}_{59} \\ \hat{t}_{65} & \hat{t}_{66} & \hat{t}_{67} & \hat{t}_{68} & \hat{t}_{69} \\ \hat{t}_{75} & \hat{t}_{76} & \hat{t}_{77} & \hat{t}_{78} & \hat{t}_{79} \\ \hat{t}_{85} & \hat{t}_{86} & \hat{t}_{87} & \hat{t}_{88} & \hat{t}_{89} \end{Bmatrix} \left. \begin{matrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{matrix} \right\} \quad (6.11)$$

Para os nós internos da placa, utilizando a mesma equação (6.7), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} \\ H_{71} & H_{72} & H_{73} & H_{74} \\ H_{81} & H_{82} & H_{83} & H_{84} \\ H_{91} & H_{92} & H_{93} & H_{94} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} \\ G_{71} & G_{72} & G_{73} & G_{74} \\ G_{81} & G_{82} & G_{83} & G_{84} \\ G_{91} & G_{92} & G_{93} & G_{94} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{Bmatrix} + \\
- \begin{bmatrix} H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \\ H_{95} & H_{96} & H_{97} & H_{98} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_{55} & \hat{u}_{56} & \hat{u}_{57} & \hat{u}_{58} & \hat{u}_{59} \\ \hat{u}_{65} & \hat{u}_{66} & \hat{u}_{67} & \hat{u}_{68} & \hat{u}_{69} \\ \hat{u}_{75} & \hat{u}_{76} & \hat{u}_{77} & \hat{u}_{78} & \hat{u}_{79} \\ \hat{u}_{85} & \hat{u}_{86} & \hat{u}_{87} & \hat{u}_{88} & \hat{u}_{89} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \\ G_{95} & G_{96} & G_{97} & G_{98} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{t}_{55} & \hat{t}_{56} & \hat{t}_{57} & \hat{t}_{58} & \hat{t}_{59} \\ \hat{t}_{65} & \hat{t}_{66} & \hat{t}_{67} & \hat{t}_{68} & \hat{t}_{69} \\ \hat{t}_{75} & \hat{t}_{76} & \hat{t}_{77} & \hat{t}_{78} & \hat{t}_{79} \\ \hat{t}_{85} & \hat{t}_{86} & \hat{t}_{87} & \hat{t}_{88} & \hat{t}_{89} \end{Bmatrix} \left. \begin{matrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{matrix} \right\} \quad (6.12)$$

A equação (6.9) considerada para os nós do contorno do reparo resulta em:

$$\begin{bmatrix} H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_5^p \\ u_6^p \\ u_7^p \\ u_8^p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_5^p \\ t_6^p \\ t_7^p \\ t_8^p \end{Bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_{55} & \hat{u}_{56} & \hat{u}_{57} & \hat{u}_{58} & \hat{u}_{59} \\ \hat{u}_{65} & \hat{u}_{66} & \hat{u}_{67} & \hat{u}_{68} & \hat{u}_{69} \\ \hat{u}_{75} & \hat{u}_{76} & \hat{u}_{77} & \hat{u}_{78} & \hat{u}_{79} \\ \hat{u}_{85} & \hat{u}_{86} & \hat{u}_{87} & \hat{u}_{88} & \hat{u}_{89} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{t}_{55} & \hat{t}_{56} & \hat{t}_{57} & \hat{t}_{58} & \hat{t}_{59} \\ \hat{t}_{65} & \hat{t}_{66} & \hat{t}_{67} & \hat{t}_{68} & \hat{t}_{69} \\ \hat{t}_{75} & \hat{t}_{76} & \hat{t}_{77} & \hat{t}_{78} & \hat{t}_{79} \\ \hat{t}_{85} & \hat{t}_{86} & \hat{t}_{87} & \hat{t}_{88} & \hat{t}_{89} \end{Bmatrix} \left. \begin{matrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{matrix} \right\} \quad (6.13)$$

E equação (6.9) para o ponto interno ao reparo fica:

$$\{u^R\} = -[H_{95} \ H_{96} \ H_{97} \ H_{98}] \cdot \begin{Bmatrix} u_5^R \\ u_6^R \\ u_7^R \\ u_8^R \end{Bmatrix} + [G_{95} \ G_{96} \ G_{97} \ G_{98}] \cdot \begin{Bmatrix} t_5^R \\ t_6^R \\ t_7^R \\ t_8^R \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

$$- \left[ [H_{95} \ H_{96} \ H_{97} \ H_{98}] \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_{55} & \hat{u}_{56} & \hat{u}_{57} & \hat{u}_{58} & \hat{u}_{59} \\ \hat{u}_{65} & \hat{u}_{66} & \hat{u}_{67} & \hat{u}_{68} & \hat{u}_{69} \\ \hat{u}_{75} & \hat{u}_{76} & \hat{u}_{77} & \hat{u}_{78} & \hat{u}_{79} \\ \hat{u}_{85} & \hat{u}_{86} & \hat{u}_{87} & \hat{u}_{88} & \hat{u}_{89} \end{bmatrix} - [H_{95} \ H_{96} \ H_{97} \ H_{98}] \cdot \begin{bmatrix} \hat{t}_{55} & \hat{t}_{56} & \hat{t}_{57} & \hat{t}_{58} & \hat{t}_{59} \\ \hat{t}_{65} & \hat{t}_{66} & \hat{t}_{67} & \hat{t}_{68} & \hat{t}_{69} \\ \hat{t}_{75} & \hat{t}_{76} & \hat{t}_{77} & \hat{t}_{78} & \hat{t}_{79} \\ \hat{t}_{85} & \hat{t}_{86} & \hat{t}_{87} & \hat{t}_{88} & \hat{t}_{89} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{Bmatrix}$$

A equação de compatibilidade de deslocamentos em função dos termos do método da dupla reciprocidade (6.10) pode ser reescrita de forma matricial, como:

$$\{u - u^R\} = \frac{h_A}{G_A} \cdot F \cdot \alpha \quad (6.15)$$

Nessa equação,  $\{u - u^R\}$  é o vetor de diferença entre os deslocamentos de nós correspondentes entre a placa e o reparo. Isolando o vetor  $\alpha$ , e aplicando a equação para os pontos de colocação do método da dupla reciprocidade, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{Bmatrix} = \frac{G_A}{h_A} \cdot \begin{bmatrix} f_{55} & f_{56} & f_{57} & f_{58} & f_{59} \\ f_{65} & f_{66} & f_{67} & f_{68} & f_{69} \\ f_{75} & f_{76} & f_{77} & f_{78} & f_{79} \\ f_{85} & f_{86} & f_{87} & f_{88} & f_{89} \\ f_{95} & f_{96} & f_{97} & f_{98} & f_{99} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_5 - u_5^P \\ u_6 - u_6^P \\ u_7 - u_7^P \\ u_8 - u_8^P \\ u_9 - u_9^P \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

Deve-se verificar que nas equações (6.11), (6.12), (6.13) e (6.14) está presente o vetor  $\alpha$ , que implica em um conjunto de incógnitas a mais, além dos deslocamentos  $u$  ou  $u^R$  e  $t$  ou  $t^R$ . O vetor  $\alpha$  pode ser substituído nessas quatro equações pelo lado direito da equação (6.16), resultando em um sistema determinado, com incógnitas apenas em  $u$  ou  $u^R$  e  $t$  ou  $t^R$ .

Em aplicações de elementos de contorno, é comum calcular, primeiramente, a solução no contorno. Em seguida, com essas soluções, é calculada a solução em pontos internos ao domínio. No entanto, no estudo de problemas de placas acopladas com reparos, é necessária a solução simultânea dos nós do contorno e do domínio, uma vez que a solução

no contorno depende de uma condição aplicada no domínio, a qual, por sua vez, também depende do resultado no contorno.

O sistema de equações para consideração dos pontos internos e do contorno da placa é apresentado, esquematicamente, na figura 6.3. Esse sistema é construído a partir das equações (6.11) e (6.12).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline N_P \times N_P & 0 \\ \hline L_P \times N_P & I \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline N_P \\ \hline L_P \\ \hline \end{array} & - & \begin{array}{|c|c|} \hline N_P \times N_P & 0 \\ \hline L_P \times N_P & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline N_P \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} & = & \\
 \mathbf{H}_P & \mathbf{u} & \mathbf{G}_P & \mathbf{t} & & & \\
 \\
 \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline N_P \times N_R & 0 \\ \hline L_P \times N_R & I \\ \hline \end{array} \right. & \begin{array}{|c|} \hline N_R \times (N_R + L_R) \\ \hline L_R \times (N_R + L_R) \\ \hline \end{array} & - & \begin{array}{|c|c|} \hline N_P \times N_R & 0 \\ \hline L_P \times N_R & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline N_R \times (N_R + L_R) \\ \hline L_R \times (N_R + L_R) \\ \hline \end{array} & \left. \begin{array}{|c|} \hline N_R \\ \hline L_R \\ \hline \end{array} \right] & \mathbf{\alpha} \\
 \mathbf{H}_{DRM} & \hat{\mathbf{U}}_P & \mathbf{G}_{DRM} & \hat{\mathbf{T}}_P & & & 
 \end{array}$$

Figura 6.3. Representação do sistema de equações para a placa.

O sistema de equações para os nós do contorno e do domínio do reparo pode ser montado a partir das equações (6.13) e (6.14). A representação esquemática desse sistema é apresentada na figura 6.4.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline N_{R \times N_R} & 0 \\ \hline L_{R \times N_R} & I \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline N_R \\ \hline L_R \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline N_{R \times N_R} & 0 \\ \hline L_{R \times N_R} & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \\
 \mathbf{H}_R \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{G}_R \quad \mathbf{t} \\
 \\
 \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline N_{R \times N_R} & 0 \\ \hline L_{R \times N_R} & I \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline N_{R \times (N_R + L_R)} \\ \hline L_{R \times (N_R + L_R)} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline N_{R \times N_R} & 0 \\ \hline L_{R \times N_R} & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline N_{R \times (N_R + L_R)} \\ \hline L_{R \times (N_R + L_R)} \\ \hline \end{array} \right] \begin{array}{|c|} \hline N_R + L_R \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \\
 \mathbf{H}_{DRM} \quad \hat{\mathbf{U}}_R \quad \mathbf{G}_{DRM} \quad \hat{\mathbf{T}}_R
 \end{array}$$

Figura 6.4. Representação do sistema de equações para o reparo.

A montagem dos sistemas das figuras 6.3. e 6.4. em um único sistema para representação do comportamento de placa e reparo acoplados, é mostrado de forma esquemática na figura 6.5.

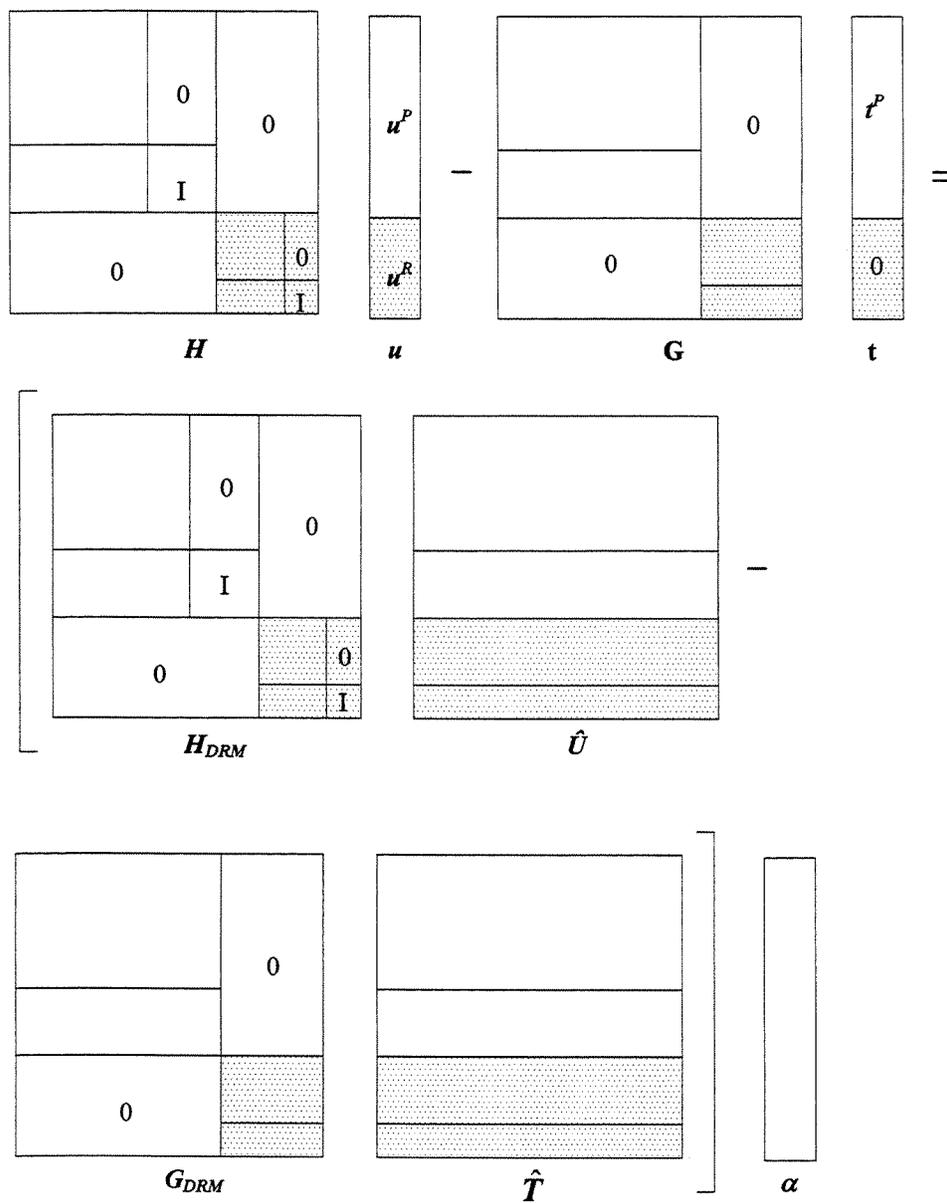


Figura 6.5. Representação do sistema de equações da placa acoplada com o reparo.

A última etapa para construção do sistema que descreve o comportamento da placa com o reparo acoplado consiste na substituição do vetor  $\alpha$  pelo lado direito da equação (6.16). Após essa substituição, obtém-se um sistema totalmente determinado, com incógnitas em  $u$  e  $t$ .

## 6.4 Implementação computacional para análise da placa com o reparo colado

O programa **Elast\_qua\_DRM**, apresentado no capítulo 4, foi utilizado para implementação do acoplamento entre o reparo e a placa, resultando no programa **Elast\_Patch**. O conjunto de funções utilizadas é bastante similar àquele apresentado no fluxograma da figura 4.3., sendo que as diferenças básicas entre as duas implementações consistem na retirada da função **calc\_alfa**, uma vez que as forças de corpo não são conhecidas, o que impede que o vetor  $\alpha$  seja obtido logo de início. Além disso, houve a inclusão das seguintes funções:

- **calc\_HeG\_sist**: Essa função é responsável pela montagem das matrizes  $H$ ,  $G$ ,  $H_{DRM}$  e  $G_{DRM}$  apresentadas no sistema esquemático da figura 6.5. Essa função faz uso de outras duas funções chamadas **calc\_HeGpi** e **calc\_HeGcont**, dependendo da localização dos pontos fonte em relação aos elementos de integração.
- **calc\_UcPc**: Essa função foi alterada para admitir a solução particular de deslocamento e de força de superfície para o material da placa e, na seqüência, para o material do reparo, podendo construir as matrizes de soluções particulares  $\hat{U}$  e  $\hat{T}$ . É importante verificar que as soluções particulares para placas são diferentes daquelas para o reparo, pois essas soluções dependem das propriedades do material.
- **calc\_F**: Essa função é responsável pelo cálculo do termo conhecido no lado direito do sistema de equações da figura 6.5. Esse termo, chamado  $F$ , é definido pelo produto 
$$F = (H_{DRM} \cdot \hat{U} - G_{DRM} \cdot \hat{T}) \cdot \frac{G_A}{h_A} \cdot F^{-1}.$$
- **aloca\_FemH**: O termo conhecido  $F$  multiplica os deslocamentos da placa e do reparo. A função **aloca\_FemH** é responsável pela movimentação de colunas da matriz  $F$  para a matriz  $H$ , de forma a considerar todos os deslocamentos do lado esquerdo da equação e permitir sua solução.

## 6.5 Resultados obtidos para placa intacta

O problema analisado considera o modelo de uma placa quadrada com lados medindo 200 mm e sujeita a tensões biaxiais de tração no valor de 1 GPa, apresentando um reparo circular de raio igual a 30 mm colado em seu centro. A placa e o reparo apresentam espessuras de 1,5 mm, enquanto a espessura do material adesivo entre eles é de 0,15 mm. O módulo de elasticidade da placa é de  $E = 70$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . O material do reparo foi considerado igual ao da placa, enquanto o material da camada adesiva apresenta um módulo de elasticidade transversal  $G_A = 0,6$  GPa.

O modelo para esse problema, visualizado na interface do programa **Elast\_Patch**, é apresentado na figura 6.6.

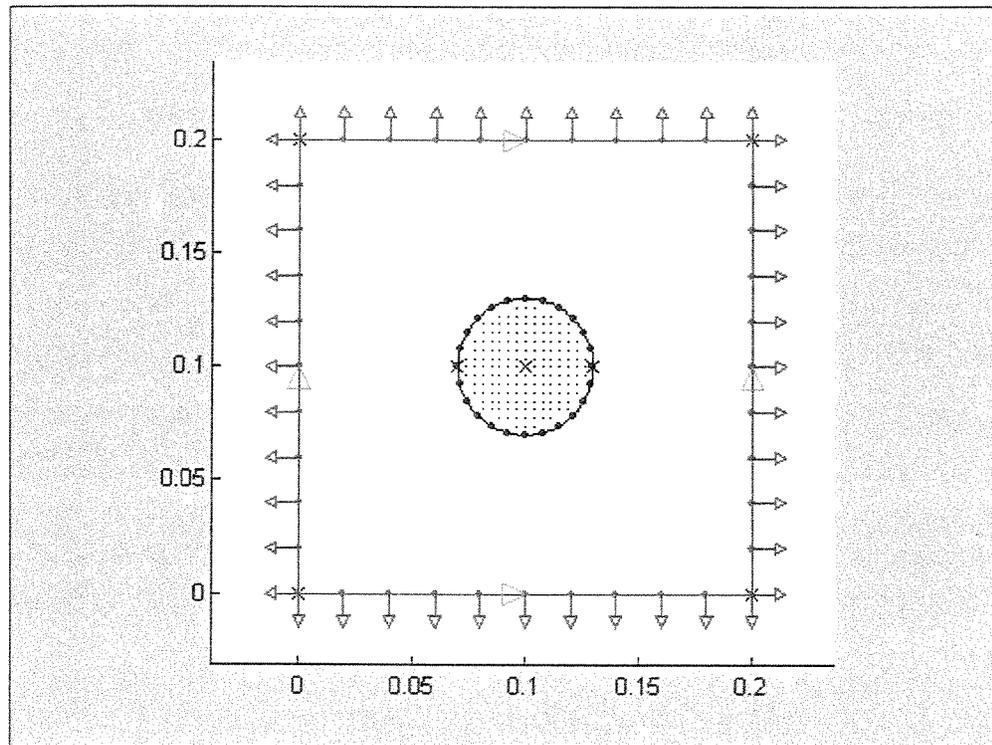


Figura 6.6. Modelo de placa quadrada com reparo circular colado.

A malha utilizada para a análise desse modelo, mostrado na figura 6.6., consiste em vinte e quatro elementos de contorno quadráticos, no contorno da placa, e outros vinte e quatro elementos de contorno quadráticos no contorno do reparo. Várias análises foram

realizadas utilizando diferentes quantidades de nós internos ao reparo, uniformemente distribuídos.

Os resultados de deslocamentos podem ser visualizados na geometria deformada, apresentada na figura 6.7.

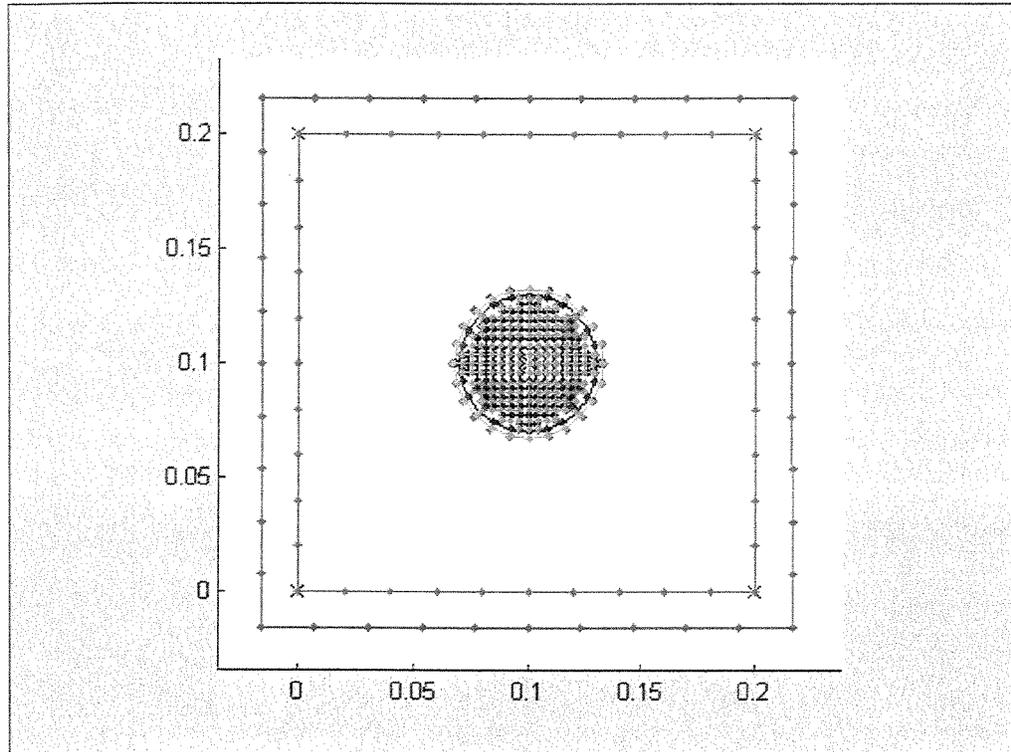


Figura 6.7. Geometria deformada da placa intacta com reparo colado.

A tensão de cisalhamento no adesivo foi calculada a partir dos resultados de deslocamento obtidos na análise, utilizando a equação (6.3). Esses resultados numéricos foram comparados com a solução analítica oferecida para esse problema por Young (1987). As figuras 6.8., 6.9. e 6.10. mostram gráficos com essa comparação para 37, 69 e 121 nós internos ao reparo.

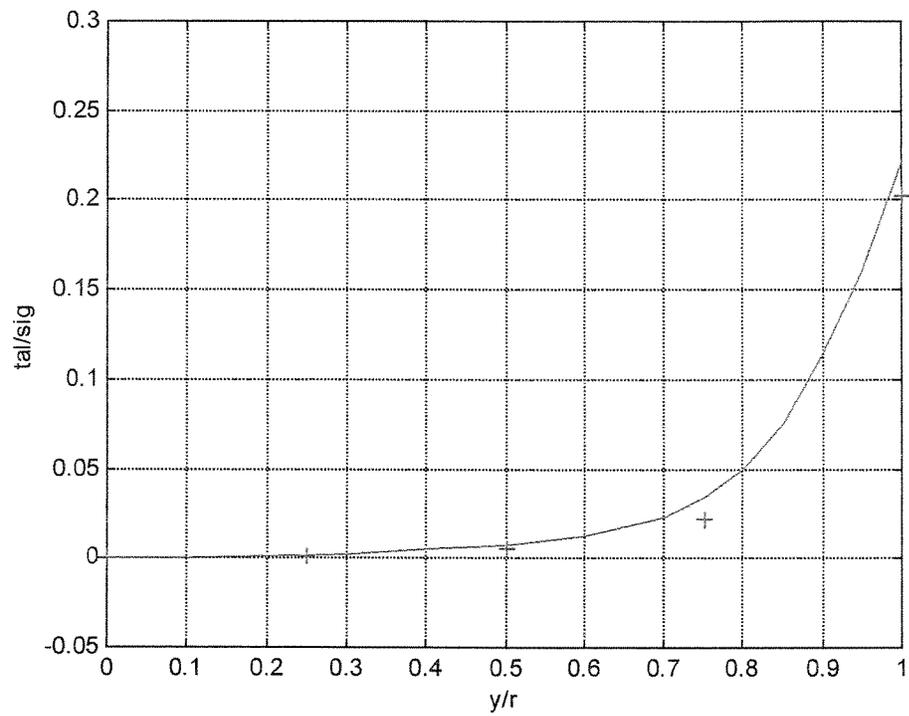


Figura 6.8. Comparação entre resultados numéricos e solução analítica para 37 nós internos.

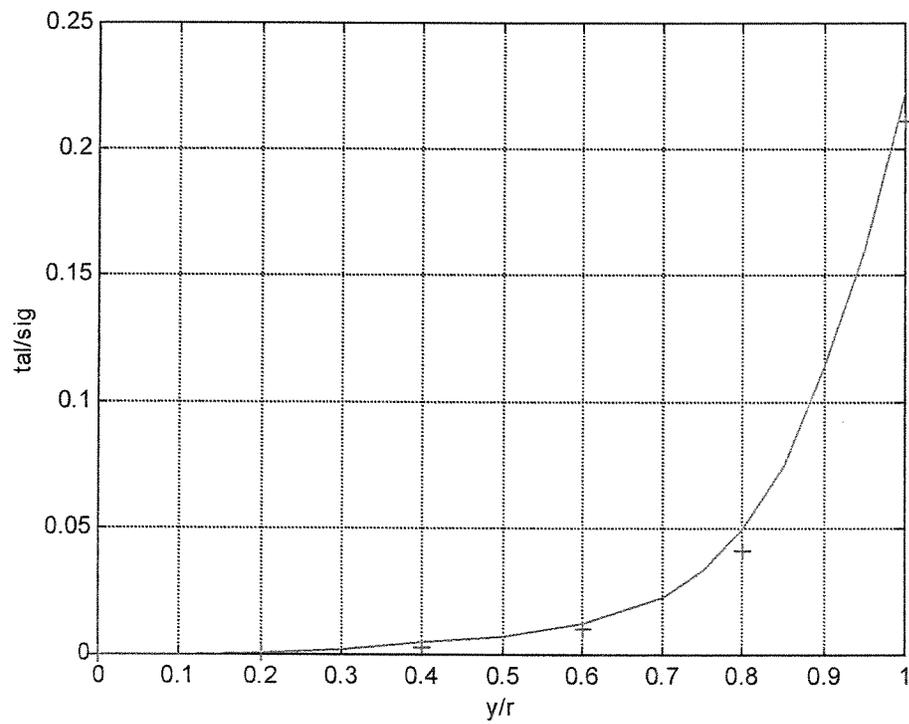


Figura 6.9. Comparação entre resultados numéricos e solução analítica para 69 nós internos.

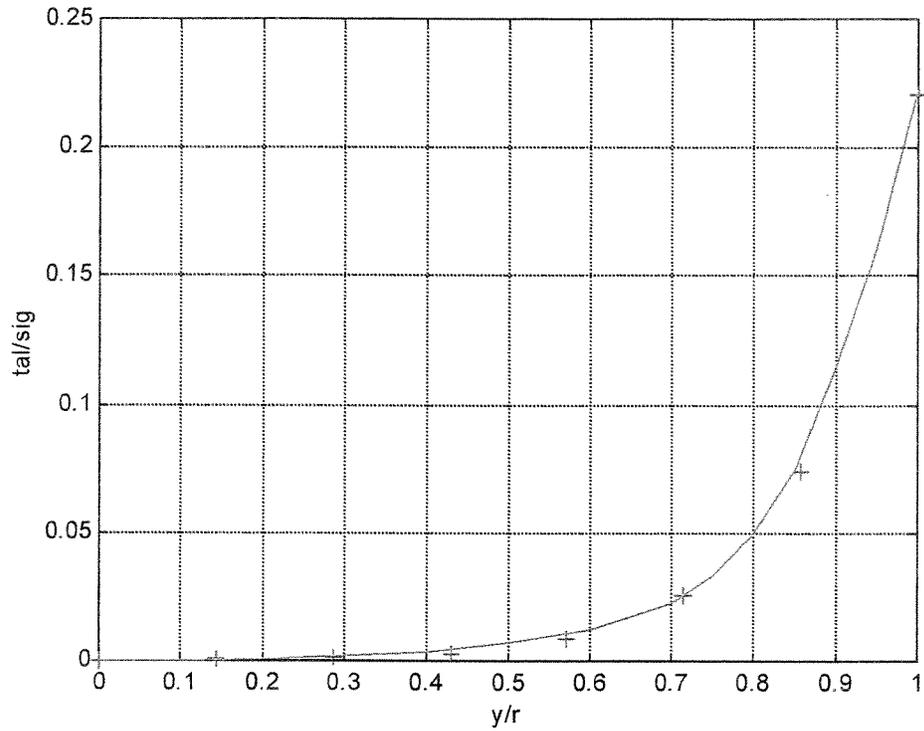


Figura 6.10. Comparação entre resultados numéricos e solução analítica para 121 nós internos.

Verifica-se que, para a obtenção de uma menor margem de erro na solução numérica, é necessária a utilização de um considerável número de nós internos, como já havia sido comentado no capítulo 4.

## Capítulo 7

### Conclusões

Como pode ser visto, o programa MatLab<sup>®</sup> apresentou-se como uma ferramenta bastante adequada para o desenvolvimento e implementação dos métodos numéricos apresentados nesse trabalho. As facilidades oferecidas podem ser resumidas na presença de funções pre-programadas, que facilitam operações matriciais e a visualização gráfica de resultados. No entanto, por apresentar programação interpretada, sua velocidade de processamento mostrou-se expressivamente menor que a de outras linguagens, tais como o Pascal<sup>®</sup> ou C++<sup>®</sup>.

O programa **Elast\_qua** mostrou-se eficiente na análise de problemas de elasticidade plana, apresentando um código claro, adequadamente comentado, facilitando a compreensão do funcionamento. Também possibilita uma entrada de dados amigável, sendo que a alteração de características de um problema, como a geometria ou a malha de elementos, pode ser feita de maneira bastante rápida. Além disso, o programa oferece ferramentas eficientes para visualização de resultados tais como a geometria deformada e mapas de cor para várias grandezas físicas.

O método de elementos de contorno de dupla reciprocidade foi apresentado como uma alternativa interessante para o tratamento de forças de corpo. O programa **Elast\_qua\_DRM** mostrou-se eficiente na análise de problemas bidimensionais sujeitos a forças de corpo como o efeito de rotação. Foi mostrado que, embora esse método descarte a necessidade de discretização e integração no domínio, é necessária a utilização de uma

determinada quantidade de nós internos ao domínio, a fim de representar de forma adequada as forças de corpo.

O elemento de contorno com nó a um quarto foi apresentado como uma maneira de melhor representar o comportamento do material nas proximidade da ponta de uma trinca. A implementação do elemento de contorno com nó a um quarto isoparamétrico e do elemento de contorno com nó a um quarto com singularidade de forças de superfície possibilitou a verificação da eficiência desses elementos, assim como a comparação entre a precisão oferecida por cada um. Isso permitiu concluir que o elemento de contorno com nó a um quarto e singularidade de forças de superfície é mais preciso e, por isso, foi utilizado nas aplicações numéricas desse trabalho.

O método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade aliado à técnica de compatibilidade de deslocamentos, mostrou-se adequado para a representação do comportamento de placas com reparo colado. Resultados numéricos obtidos foram comparados com soluções analíticas existentes, possibilitando a conclusão de que a análise foi efetiva, mostrando reduzidos valores de erro.

## Capítulo 8

### Trabalhos Futuros

Alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir desse trabalho de mestrado são:

- implementação do método duplo dos elementos de contorno para consideração de problemas com trinca que sejam não simétricos;
- consideração do reparo constituído de material anisotrópico;
- formulação de elementos de contorno para cascas aplicada a análises de problemas de cascas trincadas com reparos colados;
- análise de problemas de trincas tridimensionais, utilizando a formulação tridimensional de elementos de contorno para descrever a estrutura trincada e a formulação de casca de elementos de contorno para descrever o reparo colado;
- acoplamento entre os métodos de elementos finitos e elementos de contorno, para considerar um corpo tridimensional trincado através do método dos elementos de contorno e o reparo através do método dos elementos finitos, de forma a descrever o comportamento da estrutura completa.

Além disso, um trabalho interessante compreende a implementação dos códigos gerados nesse trabalho em uma linguagem que ofereça maior velocidade de processamento, como o C<sup>++</sup><sup>®</sup>.

## Referências Bibliográficas

- Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., “Numerical fracture mechanics”, *Computational Mechanics Publication*, 1991.
- Barsoum, R. Y., “On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 25-37, 1976.
- Blandford, G. E., “Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 387-404, 1981.
- Bowie, O. L., “Rectangular tensile sheet with symmetric edge cracks”, *Journal of Applied Mechanics*, 31, 208-212 1964.
- Brebbia, C. e Domínguez, J., “Boundary Elements – An Introductory Course”, Southampton, Computational Mechanics Publications, edition 1989.
- Domínguez, J., “Boundary elements in Dynamics”, *Computational Mechanics Publications*, 1993.
- Dowrick, G., Cartwright D. J. e Rooke D. P., “ Boundary effects for a reinforced cracked sheet using the boundary element method”, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 12, 251-260, 1990.

Erdogan, F. e Arin, K., "A sandwich plate with a part-through and debonding crack", *Engineering Fracture Mechanic*, Vol. 4, pp. 449-458 1972.

Henshell, R. D. e Shaw, K. G., "Crack tip finite elements are unnecessary", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 495-507, 1975.

Irwin, G. R., "Fracture", *Encyclopedia of Physics* (Ed. S. Flugge), vol. VI, Springer-Verlag, 1958.

Jones, R. e Callinan, R. J., "On the use of special crack tip elements in cracked elastic sheets", *International Journal of Fracture*, Vol. 13 (1), 51-64, 1977.

Jones, R. e Callinan, R. J., "Finite element analysis of patched cracks", *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 7 (2), 107-130, 1979.

Jones, R. e Callinan, R. J., "A design study in crack patching", *Fibre Science and Technology*, Vol. 14, 99-111, 1981.

Kane, J., "Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics", Prentice Hall, 1993.

Kaninnem, M. F. e Popelar, C. H. "Advanced fracture mechanics", New York, Oxford University Press, 1985.

Martínez, J. e Domínguez J., "On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1941-1950, 1984.

Mitchell, R. A., Wooley R. M. e Chwiruth D. J., "Analysis of composite reinforced cutouts and cracks" *AIAA Journal*, Vol. 13, N. 6, 744-749, 1975.

Nardini, D. e Brebbia, C. A., "A new approach to free vibration analysis using boundary elements" em *Boundary Element Methods in Engineering, Computational Mechanics Publications, Southampton*, 1982.

Ratawani, M. N., "Analysis of cracked adhesively bonded laminate structures", *AIAA Journal*, Vol. 17, 988-994, 1979.

Salgado, N. K., "Boundary Element Methods for Damage Tolerance Design of Aircraft Structures", PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, 1997.

Salgado, N. K. and Aliabadi, M. H. "A Dual Reciprocity Method for the Analysis of Adhesively Patched Sheets", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1996.

Smith, R. N L., "The solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method", *Engineering Analysis*, June 1984, Vol. 5, No. 2.

Tarn, J. e Shek, K., "Analysis of cracked plates with a bonded patch" *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 40, N. 6, 1055-1065, 1991.

Tymoshenko, S. P. e Goodier, J. N., "Theory of elasticity", 3.<sup>a</sup> edição, McGraw-Hill, Tokio, 1970.

Young, A., Cartwright D. J. e Rooke D. P., "Influence of tapering on the stresses in repair patches", *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Owen D. R. J. and Luxmoore A. R. (eds), 721-737, Swansea, UK, 1984.

Young, A., Cartwright D. J. e Rooke D. P., "The boundary element method for analysing repair patches on cracked finite sheets", *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Owen D. R. J. and Luxmoore A. R. (eds), 741-752, San Antonio, EUA, 1987.

Young, A., Rooke D. P., e Cartwright D. J., "Numerical study of balanced patch repairs to cracked sheets" *Aero. Journal*, Vol. 93, 327-334, 1988.

Young, A., Rooke D. P., e Cartwright D. J., "Analysis of patched and stiffened cracked panels using the boundary element method", *International Journal of Solid Structures*, Vol. 29, N. 17, 2201-2216, 1992.

Westgaard, H. M., "Bearing pressures and cracks" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6a, 49-53, 1939

# Apêndice A

## Funções implementadas para aplicação do método dos elementos de contorno.

### **Elast\_qua.m**

```
% Programa para análise elástica bidimensional através do método
% dos Elementos de Contorno (utilizando elementos quadráticos).
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação janeiro de 2000
% Revisão 0.0

clear;

global ni GEL % Definição das constantes elásticas como variáveis globais

% Leitura de dados de geometria, discretização, condições de contorno,
% tipo de problema e propriedades do material
dad_elq_1

% Reformatação dos dados para utilização do programa
formata_dad_q

% Visualização da geometria, da malha e das condições de contorno
mostra_geo_q
mostra_cdc_q

% Geração dos pontos internos
fprintf('\nSituação da análise: \n\n');
fprintf('1. Gerando pontos internos \n');
gera_p_in6;

% Cálculo das matrizes H e G
fprintf('2. Construindo as matrizes H e G \n');
[H,G] = calc_HeG_q(ELEM,NOS);

% Aplicação das condições de contorno e geração do sistema Ax=b
fprintf('3. Permutando colunas de H e G (aplicação das condições de contorno) \n');
[A,b] = aplica_cdc_q(H,G,CDC,ELEM,no_ini);

% Resolve o sistema de equações
fprintf('4. Resolvendo o sistema de equações \n');
x = gauss_eli(A,b);

% Reordenação dos vetores de deslocamento e de tração
[desl,trac,De,T] = reord_det_q(x,CDC,ELEM);

% Cálculo dos deslocamentos em pontos internos
fprintf('5. Calculando deslocamentos em pontos internos \n');
[Di] = pin_des_q(PONTOS_INT,ELEM,NOS,desl,trac);

% Apresentação da estrutura deformada
mostra_def

% Cálculo das tensões em pontos internos
fprintf('6. Calculando as tensões em pontos internos ');
[tens_int] = pin_tens_q(PONTOS_INT,ELEM,NOS,De,trac);
```

```

% Cálculo das tensões em nós do contorno
fprintf('\n7. Calculando as tensões em nós do contorno \n');
calc_tens_contq

fprintf('\nFim da Análise \n\n');

formata_dad_q
% Rotina para formatação dos dados de entrada a serem
% utilizados na rotina de cálculo das matrizes H e G
% (elementos quadráticos).
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação dezembro de 1999
% Revisão 0.0
%
% Matriz NOS=[n. global do nó, x_no,y_no]
% Matriz ELEM=[n. no elemento, nó inicial, nó intermediário, nó final]

cont_no = 0; % Contador do n. de nós
cont_el = 0; % Contador do n. de elementos
num_lin = length(LINHA(:,1)); % Número de linhas no contorno
noi = 1;
no_ini(noi) = 1; % Nó inicial do 1o contorno
p_ini = LINHA(1,2);

for t = 1 : num_lin % Percorre todas as linhas

% Coordenadas do ponto inicial e final de cada linha
% (x11,y11,x21,y21)
p1 = LINHA(t,2);
p2 = LINHA(t,3);
x11 = PONTO(p1,2);
y11 = PONTO(p1,3);
x21 = PONTO(p2,2);
y21 = PONTO(p2,3);
% Variação da linha em x e y
delta_x = x21 - x11;
delta_y = y21 - y11;

% 1. Geração das matrizes NOS e ELEM
num_el_lin = DISCRE(t,2); % N. de elementos a linha t

for i = 0 : num_el_lin-1

x_i = x11 + delta_x/num_el_lin*i; % x inicial do elemento
y_i = y11 + delta_y/num_el_lin*i; % y inicial
x_m = x11 + delta_x/num_el_lin*(i+.5); % x médio do elemento
y_m = y11 + delta_y/num_el_lin*(i+.5); % y médio

% Atribuição das coordenadas à matriz dos nós
cont_no = cont_no + 1;
NOS(cont_no,:)=[cont_no,x_i,y_i];
cont_no = cont_no + 1;
NOS(cont_no,:)=[cont_no,x_m,y_m];

end;
for i = 1 : num_el_lin
cont_el = cont_el + 1;
ELEM(cont_el,:)=[cont_el,cont_el*2-1,cont_el*2,cont_el*2+1];
end;
if p2 == p_ini
ELEM(cont_el,4) = no_ini(noi);
if t < num_lin
noi = noi + 1;
no_ini(noi) = cont_el*2+1;
p_ini = LINHA(t+1,2);
end;
end;
end;

```

```

end;

% 2. Transformação das constantes elásticas para o caso de
% estado plano de tensão
if tipo_prob == 2      % (estado plano de tensão)
    ni = ni/(1+ni);
    E = (1-ni^2)*E;
end;
GEL = E/(2*(1+ni));

% 3. Geração da matriz das condições de contorno (CDC)

% Pré-definindo todas as superfícies livres de tração
for e = 1 : cont_el
    CDC(e,:) = [e,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0];
end;

% Início da geração da matriz CDC
cont_el2 = 0;
for l = 1 : num_lin      % Percorre as linhas
    n_el_lin = DISCRE(1,2); % N. de elementos na linha
    el_ini = cont_el2 + 1;
    el_fin = cont_el2 + n_el_lin;
    if size(DESLOC) > 0
        for de = 1 : length(DESLOC(:,1)) % Percorre as cdc de deslocamento
            if (DESLOC(de,1) == 1)
                cdc_de = DESLOC(de,2);
                dire = DESLOC(de,3);
                for el = el_ini : el_fin % Percorre os elementos da linha l
                    for noloc = 1 : 3
                        CDC(el,2*dire+4*(noloc-1)) = 0;
                        CDC(el,2*dire+1+4*(noloc-1)) = cdc_de;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
    for tr = 1 : length(TRAC(:,1)) % Percorre as cdc de tração
        if (TRAC(tr,1) == 1)
            cdc_tr = TRAC(tr,2);%/n_el_lin; % Tração total na linha
            dire = TRAC(tr,3); % dividida pelo n. de elementos
            for el = el_ini : el_fin
                for noloc = 1 : 3
                    CDC(el,2*dire+4*(noloc-1)) = 1;
                    CDC(el,2*dire+1+4*(noloc-1)) = cdc_tr;
                end;
            end;
        end;
    end;
    cont_el2 = cont_el2 + n_el_lin;
end;

% Nesse ponto já estão calculados:
% NO - Matriz com as coordenadas dos nós
% XY_IF - Matriz com os pontos iniciais e finais dos elementos
% CDC - Matriz com as condições de contorno em cada elemento

mostra_geo_q
% Programa de visualização de problemas de
% elementos de contorno para análise elastostática
% utilizando elementos quadráticos
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação dezembro de 1999
% Revisão 0.0

figure
axes('DataAspectRatio',[1,1,1]);

```

```

hold on

% Definição da maior linha do problema
max_dl = 0;
for lin = 1 : length(LINHA(:,1))
    p1 = LINHA(lin,2);
    p2 = LINHA(lin,3);
    xp1 = PONTO(p1,2);    yp1 = PONTO(p1,3);
    xp2 = PONTO(p2,2);    yp2 = PONTO(p2,3);
    dl = sqrt((xp1-xp2)^2+(yp1-yp2)^2);
    if dl > max_dl
        max_dl = dl;
    end;
end;

fat = .01*max_dl;    % Fator utilizado na construção da linha
                    % de divisão entre dois elementos

% Criação de dois pontos extremos da geometria com afastamento,
% que definem a área do gráfico
emin = min(PONTO(:,2))-1*max_dl;
dmax = max(PONTO(:,2))+1*max_dl;
imin = min(PONTO(:,3))-1*max_dl;
smax = max(PONTO(:,3))+1*max_dl;
plot(emin,imin,'w');    % Ponto inferior esquerdo
plot(dmax,smax,'w');    % Ponto superior direito

% Geração dos pontos extremos do contorno
for i = 1 : length(PONTO(:,1))
    plot(PONTO(i,2),PONTO(i,3),'blackx','markersize',8); % Faz um x preto ("black")
end;

% Pontos sobre elemento
ponti = -1 : .2 : 1;

% Cálculo das funções de forma
for p = 1 : 11
    FF(p,1:3) = f_forma_q(ponti(p)); % Matriz 10x3
end;

for el = 1 : cont_el

    % Numeração dos três nós do elemento i
    no1 = ELEM(el,2);
    no2 = ELEM(el,3);
    no3 = ELEM(el,4);

    % Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    x1 = NOS(no1,2); y1 = NOS(no1,3);
    x2 = NOS(no2,2); y2 = NOS(no2,3);
    x3 = NOS(no3,2); y3 = NOS(no3,3);

    % Cálculo dos pontos campo sobre o elemento
    x_el = [x1;x2;x3];
    y_el = [y1;y2;y3];
    XC = FF*x_el;    % Vetor 10x1 de x dos pontos campo
    YC = FF*y_el;    % Vetor 10x1 de y dos pontos campo

    % Geração do gráfico do elemento el
    plot(XC,YC,'color','blue')
    plot(x_el,y_el,'b.','markersize',6);    % Desenha os nós do elemento

end;

% Neste ponto está mostrada a geometria e a malha
% de elementos de contorno.

mostra_cdc_q
% Programa para visualização das condições de contorno em problemas

```

```

% elastostáticos 2-D com elementos quadráticos
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação dezembro de 1999
% Revisão 0.1

% Máximo valor de tração aplicada (em módulo)
maxt = max(abs(TRAC(:,2)));
el_ini = 1;
fat = 5*fat;

for el = 1 : length(CDC(:,1)); % Percorre os elementos
    for noloc = 1 : 3 % Percorre os nós locais
        noi = ELEM(el,1+noloc);
        x_no = NOS(noi,2);
        y_no = NOS(noi,3);

% Geração dos símbolos de condição de contorno

        %if (CDC(el,2)== 0) % cdc de deslocamento em x
        if (CDC(el,4*noloc-2)== 0) % cdc de deslocamento em x
            xc1 = x_no - fat;
            yc1 = y_no - 0.5*fat;
            yc2 = y_no + 0.5*fat;
            line([x_no xc1 xc1 x_no],[y_no yc1 yc2 y_no],'color','green');
        %elseif CDC(el,3) ~= 0
        elseif CDC(el,4*noloc-1) ~= 0
            fatt1 = CDC(el,4*noloc-1)/maxt;
            xc1 = x_no + fatt1*fat;
            line([x_no xc1],[y_no y_no],'color','red');
            xc2 = xc1 + sign(fatt1)*0.5*fat;
            yc3 = y_no + 0.25*fat;
            yc4 = y_no - 0.25*fat;
            line([xc1 xc2 xc1 xc1],[yc3 y_no yc4 yc3],'color','red');
        end;

        %if (CDC(el,4)==0) % cdc de deslocamento em x
        if (CDC(el,4*noloc)==0) % cdc de deslocamento em y
            xc1 = x_no - 0.5*fat;
            yc1 = y_no - fat;
            xc2 = x_no + 0.5*fat;
            line([x_no xc1 xc2 x_no],[y_no yc1 yc1 y_no],'color','green');
        %elseif CDC(el,5) ~= 0
        elseif CDC(el,4*noloc+1) ~= 0
            fatt2 = CDC(el,4*noloc+1)/maxt;
            yc1 = y_no + fatt2*fat;
            line([x_no x_no],[y_no yc1],'color','red');
            yc2 = yc1 + sign(fatt2)*0.5*fat;
            xc3 = x_no + 0.25*fat;
            xc4 = x_no - 0.25*fat;
            line([xc3 x_no xc4 xc3],[yc1 yc2 yc1 yc1],'color','red');
        end;
    end;
end;

fat = fat/5;

drawnow % Faz os gráficos pendentes

% Neste ponto, as condições de contorno já estão representadas
% graficamente

gera_p_in
% Programa para criação de pontos internos a uma geometria
% genérica formada por retas
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação setembro de 1999
% Revisão 0.0

```

```

% Definição da área máxima para criação de pontos internos
xmin = min(PONTO(:,2));
xmax = max(PONTO(:,2));
ymin = min(PONTO(:,3));
ymax = max(PONTO(:,3));
lx = xmax - xmin;      % Largura do retângulo que contém a geometria
ly = ymax - ymin;      % Altura do retângulo que contém a geometria
d_min = 0.03*max_dl;    % Distância mínima dos pontos internos ao contorno
npx = 2;                % N. de pontos na horizontal
npy = 2;                % N. de pontos na vertical

PONTOS_INT = [];
% Atribuição dos pontos finais e iniciais das linhas aos
% vetores x11, x12, y11 e y12
for t = 1 : num_lin      % Percorre todas as linhas
    x11(t) = PONTO(LINHA(t,2),2);
    x12(t) = PONTO(LINHA(t,3),2);
    y11(t) = PONTO(LINHA(t,2),3);
    y12(t) = PONTO(LINHA(t,3),3);
end;

npi = 0;                % Inicialização no n. de pontos internos

for i = 1 : npy
    % Criação do candidato a ponto interno (xpi,ypi)
    ypi = ymin + (ly/npy)*i; % y dentro do retângulo
    for j = 1 : npx
        xpi = xmin + (lx/npx)*j; % x dentro do retângulo

        % Início dos testes para validação do ponto interno

        % 1. Verificando se o ponto está dentro da geometria
        [xpi,ponto] = testa_ponto(xpi,ypi,x11,y11,x12,y12,lx);

        % 2. Verificando se o ponto está muito próximo do contorno
        if ponto == 'interno'
            aceita = aceita_dist(xpi,ypi,x11,y11,x12,y12,d_min);
        else
            aceita = 'não!';
        end;

        % Armazenando os dados do ponto interno
        if aceita == 'sim' % O ponto está dentro da geometria e
            npi = npi + 1; % e respeita a distância ao contorno
            PONTOS_INT(npi,:) = [npi,xpi,ypi];
            plot(xpi,ypi, '.', 'color',[0 .5 0], 'markersize',4);
        end;
    end;
end;
drawnow                % Realiza as operações gráficas pendentes

% Nesse ponto estão calculados os pontos internos

calc_HeG
% Função para cálculo das matrizes de influência H e G de elementos
% de contorno para análise elástica linear 2-D. O elemento de contorno
% considerado é o elemento quadrático contínuo.
% Os parâmetros de entrada são as matrizes de conectividade ELEM e a
% matriz das coordenadas nodais NOS
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação janeiro de 2000
% Revisão 0.0

function [H,G] = calc_HeG_q(ELEM,NOS);

n_el = length(ELEM(:,1)); % Número total de elementos
n_nos = length(NOS(:,1)); % Número total de nós

% Inicialização das matrizes H e G

```

```

H = zeros(2*n_nos,2*n_nos);
G = zeros(2*n_nos,6*n_el);

% Definição dos pontos e pesos de Gauss padrão (10 pontos)
pontG = [-0.97390652851717
         -0.86506336668898
         -0.67940956829902
         -0.43339539412925
         -0.14887433898163
         0.14887433898163
         0.43339539412925
         0.67940956829902
         0.86506336668898
         0.97390652851717];

pesoG = [ 0.06667134430868
          0.14945134915058
          0.21908636251598
          0.26926671931000
          0.29552422471475
          0.29552422471475
          0.26926671931000
          0.21908636251598
          0.14945134915058
          0.06667134430868];

% Definição dos pontos e pesos de Gauss logarítmico (10 pontos)
pontGl = [0.90425944e-2
          0.53971054e-1
          0.13531134
          0.24705169
          0.38021171
          0.52379159
          0.66577472
          0.79419019
          0.89816102
          0.96884798];

pesoGl = [0.12095474
          0.18636310
          0.19566066
          0.17357723
          0.13569597
          0.93647084e-1
          0.55787938e-1
          0.27159893e-1
          0.95151992e-2
          0.16381586e-2];

% Cálculo das funções de forma para os pontos de Gauss padrão
for pg = 1 : 10
    FF(pg,1:3) = f_forma_q(pontG(pg)); % Matriz 10x3
end;

% Cálculo das funções de forma para os pontos de Gauss logarítmico
% Função de forma para o ponto fonte no 1o nó do elemento
for pg = 1 : 10
    neta = pontGl(pg);
    a = 2*neta-1;
    FF11(pg,1:3) = f_forma_q(a);
end;

% Função de forma para o ponto fonte no 2o nó do elemento
for pg = 1 : 10
    neta = pontGl(pg);
    FF12p(pg,1:3) = f_forma_q(neta);
end;

% Função de forma para o ponto fonte no 3o nó do elemento
FF13 = zeros(10,3);
FF13(:,1) = FF11(:,3);

```

```

FFl3(:,2) = FF11(:,2);
FFl3(:,3) = FF11(:,1);

% Construção das matrizes H e G por colunas (método RISP(Reuseable Intrinsic
% Sample Points))
for i = 1 : n_el % Percorre os elementos

    % Numeração dos três nós do elemento i
    no1 = ELEM(i,2);
    no2 = ELEM(i,3);
    no3 = ELEM(i,4);

    % Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    x1 = NOS(no1,2); y1 = NOS(no1,3);
    x2 = NOS(no2,2); y2 = NOS(no2,3);
    x3 = NOS(no3,2); y3 = NOS(no3,3);

    % Cálculo dos pontos campo sobre o elemento para integração regular
    x_el = [x1;x2;x3];
    y_el = [y1;y2;y3];
    XC = FF*x_el; % Vetor 10x1 de x dos pontos campo
    YC = FF*y_el; % Vetor 10x1 de y dos pontos campo

    % Cálculo do Jacobiano e do vetor normal em cada ponto campo
    for pg = 1 : 10
        [jac,normal] = Jac_e_Norm(pontG(pg),x1,y1,x2,y2,x3,y3);
        J(pg) = jac;
        N(pg,:) = normal;
    end;

    % Cálculo do Jacobiano da transformação de dS para dneto utilizado
    % na integração singular

    for pg = 1 : 10
        neta = pontG1(pg);

        % Para o ponto fonte no 1o nó
        a = 2*neta-1;
        J11(pg) = jac_e_norm(a,x1,y1,x2,y2,x3,y3);

        % Para o ponto fonte no 2o nó
        J12p(pg) = jac_e_norm(neta,x1,y1,x2,y2,x3,y3);
        J12n(pg) = jac_e_norm(-neta,x1,y1,x2,y2,x3,y3);

        % Para o ponto fonte no 3o nó
        a = 1-2*neta;
        J13(pg) = jac_e_norm(a,x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    end;

    % Variação dos pontos fontes

    for j = 1 : n_nos % Percorre os pontos fontes

        % Coordenadas (xf,yf) dos pontos fontes
        xf = NOS(j,2); yf = NOS(j,3);

        % Cálculo das submatrizes h_el e g_el

        if ((j ~= no1) & (j ~= no2) & (j ~= no3)) % O nó j não pertence ao elemento i
            % Integração não singular
            [h_el,g_el] = gh_nsing_q(xf,yf,XC,YC,FF,J,N,pesoG);
        else % O nó j pertence ao elemento i

            switch j
                case no1
                    no_pf = 1;
                case no2
                    no_pf = 2;
                case no3
                    no_pf = 3;
            end
        end
    end
end

```

```

        end;
        [g_el] =
g_sing_q(xf,yf,XC,YC,FF,FF11,FF12p,FF13,J,J11,J12p,J12n,J13,no_pf,pontG,pesoG,pesoG1,x1,y1,x
2,y2,x3,y3);
        [h_el] = gh_nsing_q(xf,yf,XC,YC,FF,J,N,pesoG);

        end;

        % Armazenamento de h_el e g_el nas colunas Hcol e Gcol
        Hcol(2*j-1:2*j,:) = h_el;
        Gcol(2*j-1:2*j,:) = g_el;

        end;

        % Montagem das matrizes H e G

        for no = 1 : 3
            ind = 2*ELEM(i,no+1)-1 : 2*ELEM(i,no+1);
            H(:,ind) = H(:,ind) + Hcol(:,2*no-1:2*no);
        end;

        G(:,6*i-5:6*i) = G(:,6*i-5:6*i) + Gcol;

    end;

    % Cálculo dos termos da diagonal de H através da consideração de corpo rígido

    for m = 1 : n_nos
        H(2*m-1:2*m,2*m-1:2*m) = zeros(2,2);
        for n = 1 : n_nos
            if n ~= m
                H(2*m-1:2*m,2*m-1:2*m) = H(2*m-1:2*m,2*m-1:2*m) - H(2*m-1:2*m,2*n-1:2*n);
            end;
        end;
    end;

gh_nsing
% Função para cálculo das submatrizes h_el(2x6) e g_el(2x6)
% que relacionam um nó (xf,yf) com um elemento de contorno
% que não contém esse nó (integração não singular).
% A integração é feita numericamente com o uso de 10 pontos
% de Gauss.
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação dezembro de 1999
% Revisão 0.0

function [h_el,g_el] = gh_nsing_q(xf,yf,XC,YC,FF,J,N,PesoG);

% Inicialização da submatrizes
h_el = zeros(2,6);
g_el = zeros(2,6);

% Integração numérica sobre o elemento

for pg = 1 : 10 % Percorre os pontos de Gauss

    % Cálculo das soluções fundamentais para deslocamento e tração
    [u_est,p_est] = sol_fund_el2d(xf,yf,XC(pg),YC(pg),N(pg,1),N(pg,2));

    % Montagem da matriz das funções de forma
    ff = [FF(pg,1) 0 FF(pg,2) 0 FF(pg,3) 0;
          0 FF(pg,1) 0 FF(pg,2) 0 FF(pg,3)];

    % Iteração de soma da integração dos componentes h_el e g_el
    g_el = g_el + u_est*ff*J(pg)*PesoG(pg);
    h_el = h_el + p_est*ff*J(pg)*PesoG(pg);
end;

% Neste ponto estão calculadas as submatrizes h_el e g_el.

```

```

% Nesse ponto estão calculadas as matrizes H e G

g_sing
% Função para cálculo da submatriz de influência g_el que relaciona um nó (xf,yf)
% com um elemento de contorno que o contém. A integração singular é resolvida
% através da separação da solução fundamental em uma parte singular e outra parte
% não singular. A parte singular é integrada numericamente utilizando-se Gauss
% padrão, enquanto a parte singular é integrada com a regra de Gauss logarítmico.
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação janeiro de 2000
% Revisão 0.0

function [g_el] =
g_sing_q(xf,yf,XC,YC,FF,FF11,FF12p,FF13,J,J11,J12p,J12n,J13,no_pf,pontG,pesoG,pesoG1,x1,y1,x
2,y2,x3,y3);

global ni GEL

g_el_ns = zeros(2,6);
g_el_s = zeros(2,6);

for pg = 1 : 10
% Cálculo da parte não singular da solução fundamental de deslocamento
[u_est_ns] = sf_nsing(xf,yf,XC(pg),YC(pg),x1,y1,x2,y2,x3,y3,pontG(pg),no_pf);

% Montagem da matriz das funções de forma regulares
f1 = FF(pg,1);
f2 = FF(pg,2);
f3 = FF(pg,3);
ff = [f1 0 f2 0 f3 0;
      0 f1 0 f2 0 f3];

% Iteração de soma da integração não singular
g_el_ns = g_el_ns + u_est_ns*ff*J(pg)*pesoG(pg);

% Cálculo da parte singular da integração

% Montagem da matriz das funções de forma e do Jacobiano

if no_pf == 1; % ponto fonte no 1o nó
f11 = FF11(pg,1);
f21 = FF11(pg,2);
f31 = FF11(pg,3);
ff = [f11 0 f21 0 f31 0;
      0 f11 0 f21 0 f31];

% Módulo do Jacobiano da trafo de a para eta
Jeta_a = 2;

% Iteração de soma da integração singular para o ponto fonte no 1o nó
g_el_s = g_el_s + ff*J11(pg)*pesoG1(pg)*Jeta_a;

elseif no_pf == 2 % Ponto fonte no 2o nó
f11 = FF12p(pg,1);
f21 = FF12p(pg,2);
f31 = FF12p(pg,3);
fflp = [f11 0 f21 0 f31 0;
        0 f11 0 f21 0 f31];
ffln = [f31 0 f21 0 f11 0;
        0 f31 0 f21 0 f11];

% Módulo dos Jacobianos da trafo de a para eta
Jeta_ap = 1;
Jeta_an = 1;

% Iteração de soma da integração singular para o ponto fonte no 2o nó
g_el_s = g_el_s + (fflp*J12p(pg)*Jeta_ap + ffln*J12n(pg)*Jeta_an)*pesoG1(pg);

```

```

else % Ponto fonte no 3o nó
    f11 = FF13(pg,1);
    f21 = FF13(pg,2);
    f31 = FF13(pg,3);
    ff = [f11 0 f21 0 f31 0;
          0 f11 0 f21 0 f31];

    % Módulo do Jacobiano da trafo de a para eta
    Jeta_a = 2;

    % Iteração de soma da integração singular para o ponto fonte no 3o nó
    g_el_s = g_el_s + ff*J13(pg)*pesoG1(pg)*Jeta_a;;

end; %if
end; %for pg

% Cálculo final de g_el

g_el_s = ((3-4*ni)*g_el_s)/(8*pi*GEL*(1-ni));

g_el = g_el_ns + g_el_s;

% Nesse ponto está calculada a submatriz g_el para os dados de entrada.

f_forma_q
% Função para o cálculo das funções de forma do elemento
% de contorno quadrático contínuo.
% a é a variável intrínseca sobre o elemento: -1 <= a <= +1
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação dezembro de 1999
% Revisão 0.0

function [h] = f_forma_q(a);

h1 = 0.5*a*(a-1);
h2 = 1-a^2;
h3 = 0.5*a*(a+1);
h = [h1,h2,h3];

% Neste ponto estão calculadas as funções de forma para
% a variável a dada.

sol_fund_el2D
% Função para cálculo das soluções fundamentais de deslocamento
% e tração no caso de elasticidade 2-D.
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação outubro de 1999
% Revisão 0.0

function [u_est,p_est] = sol_fund_el2D(xf,yf,xcampo,ycampo,n1,n2);

global ni GEL

% Cálculo da distância do ponto fonte (xf,yf) ao ponto campo
r1 = xcampo - xf;
r2 = ycampo - yf;
r = sqrt(r1^2+r2^2);

% Cálculo do vetor unitário na direção da fonte ao campo
rd1 = r1/r;
rd2 = r2/r;

% Cálculo de fatores comuns que se repetem nas soluções
prod1 = 4*pi*(1-ni);
prod2 = (3-4*ni)*log(1/r);
prod3 = rd1*n1 + rd2*n2;

```

```

% Solução fundamental de deslocamento
u11 = (prod2 + rd1^2)/(2*prod1*GEL);
u22 = (prod2 + rd2^2)/(2*prod1*GEL);
u12 = (rd1*rd2)/(2*prod1*GEL);

% Solução fundamental de tração
p11 = -(prod3*((1-2*ni)+2*rd1^2))/(prod1*r);
p22 = -(prod3*((1-2*ni)+2*rd2^2))/(prod1*r);
p12 = -((prod3*2*rd1*rd2)-(1-2*ni)*(rd1*n2-rd2*n1))/(prod1*r);
p21 = -((prod3*2*rd1*rd2)-(1-2*ni)*(rd2*n1-rd1*n2))/(prod1*r);

% Atribuição de uij e pij às variáveis de saída u_est e p_est
u_est = [u11 u12
         u12 u22];

p_est = [p11 p12
         p21 p22];

% Nesse ponto estão calculadas as s.f. para os dados de entrada

aplica_cdc
% Função para aplicação das condições de contorno através da permutação de colunas
% entre as matrizes H e G e a geração do sistema linear [A]{x}={b}
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação fevereiro de 2000
% Revisão 0.0

function [A,b] = aplica_cdc_q(H,G,CDC,ELEM,no_ini);

global GEL;

n_el = length(CDC(:,1));

% Cálculo dos elementos iniciais e finais de cada contorno
n_contornos = length(no_ini);
for c = 1 : n_contornos % Percorre os contornos
    el_ini(c) = (no_ini(c)-1)/2+1;
    if c < n_contornos
        el_fin(c) = (no_ini(c+1)-1)/2;
    else
        el_fin(c) = n_el;
    end;
end;

% Reordenação das colunas de H e G para aplicação das condições de contorno
for c = 1 : n_contornos % Percorre os c contornos
    el_i = el_ini(c);
    el_f = el_fin(c);

    for el = el_i : el_f % Percorre os elementos do contorno c
        for no = 1 : 3 % Percorre os nós do elemento
            for gdl = 1 : 2 % Percorre os dois graus de liberdade x e y
                if CDC(el,4*(no-1)+2*gdl) == 0 % Cdc de deslocamento prescrita
                    if (el ~= el_f | no ~= 3)
                        indic = 6*(el-1)+2*(no-1)+gdl;
                        if (el == el_i | no == 2 | no == 3 | CDC(el-1,4*(no-1)+2*gdl) == 1)
                            troca = G(:,indic);
                            G(:,indic) = -H(2*(ELEM(el,no+1)-1)+gdl);
                            H(:,2*(ELEM(el,no+1)-1)+gdl) = -troca*GEL;
                        else
                            H(:,2*(ELEM(el,no+1)-1)+gdl) = H(:,2*(ELEM(el,no+1)-1)+gdl) -
                                G(:,indic)*GEL;
                            G(:,indic) = zeros(4*n_el,1);
                        end;
                    else % Terceiro nó do último elemento
                        if CDC(el_i,2*gdl) == 0 % Deslocamento prescrito no 1o elemento
                            H(:,2*(el_i-1)+gdl) = H(:,2*(el_i-1)+gdl) - G(:,6*el_f-2+gdl)*GEL;
                            G(:,6*el_f-2+gdl) = zeros(4*n_el,1);
                        else
                            troca = H(:,2*(el_i-1)+gdl);

```

```

        indic = 6*(el-1)+2*(no-1)+gdl;
        H(:,2*(el_i-1)+gdl) = -G(:,indic)*GEL;
        G(:,indic) = -troca;
    end;
end;
end;
end;
end;
end;
end;
end;

% Geração do sistema [A].{x} = {b}
A = H;
for el = 1 : n_el
    for no = 1 : 3
        for gdl = 1 : 2
            cdc_val(6*(el-1)+2*(no-1)+gdl,1) = CDC(el,2*gdl+1);
        end;
    end;
end;

b = G*cdc_val;          % vetor {b}

% Retorna a matriz [A] e o vetor {b}

gauss_eli
% Função para solução de sistemas lineares através do método
% da Eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação abril de 1999
% Revisão 0.0
%

function [b] = gauss_eli(a,b);

% 1a Etapa: Triangularização da matriz dos coeficientes

n = size(a,1);          % Atribuição do n. de linhas da matriz a

for k = 1 : n-1
    maior = a(k,k);      % Termo da diagonal é considerado o maior
    linha = k;           % Linha do termo da diagonal
    for i = k+1 : n      % Início da procura do maior termo da coluna k
        if (abs(a(i,k)) > abs(maior))
            maior = a(i,k);
            linha = i;   % Linha do maior termo
        end;
    end;                % Fim da procura
    if linha ~= k        % Condição da necessidade da troca de linhas
        s = zeros(1,n-k+1); % Vetor auxiliar na troca de linhas da matriz a
        bs = b(k);       % Início da troca de linhas do vetor b (bs=auxiliar)
        b(k) = b(linha);
        b(linha) = bs;   % Fim da troca de linhas do vetor
        for r = k : n    % Início da troca de linhas da matriz
            s(r) = a(k,r);
            a(k,r) = a(linha,r);
            a(linha,r) = s(r);
        end;            % Fim da troca de linhas da matriz
    end;

    for i = k+1 : n
        m = a(i,k)/a(k,k); % Cálculo do multiplicador m
        for j = k+1 : n
            a(i,j) = a(i,j) - m*a(k,j); % Cálculo dos novos elementos na linha i
        end;
        b(i) = b(i) - m*b(k); % Cálculo dos novos elementos do
    end;                    % vetor de termos independentes
end;

% 2a Etapa: Substituição inversa

```

```

b(n) = b(n)/a(n,n); % Cálculo do último elemento de x (gravado em b)
for k = n-1 : -1 : 1; % Percorre a matriz a de baixo para cima
    soma = 0;
    for j = k+1 : n
        soma = soma + a(k,j)*b(j); % Realiza a soma dos coeficientes
    end; % Multiplicados pelos x (vetor b) já determinados
    b(k) = (b(k)-soma)/a(k,k); % Calcula os componentes de x (grava em b)
end;

% Retorna em b o vetor de solução

```

#### **reord\_DeT**

```

% Função para reordenação dos resultados e das condições de contorno em
% resposta de deslocamento e tração nodal.
% Os vetores x e a matriz CDC são reordenados nas matrizes desl e trac
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação fevereiro de 2000
% Revisão 0.0

```

```
function [desl,trac,De,T] = reord_det_q(x,CDC,ELEM);
```

```
global GEL;
```

```
n_el = length(CDC(:,1));
n_nos = length(x)/2;
```

```
% Geração do vetor das condições de contorno
for el = 1 : n_el
    for no = 1 : 3
        for gdl = 1 : 2
            cdc_val(6*(el-1)+2*(no-1)+gdl,1) = CDC(el,2*gdl+1);
        end;
    end;
end;
```

```
% Reordenação de x e cdc_val em desl e trac
for el = 1 : n_el % Percorre os elementos
    for no = 1 : 3 % Percorre os nós do elemento
        for gdl = 1 : 2 % Percorre os dois graus de liberdade x e y
            if CDC(el,4*(no-1)+2*gdl) == 0 % Cdc de deslocamento prescrita
                indic = 6*(el-1)+2*(no-1)+gdl;
                if (el == 1 | no == 2 | no == 3 | CDC(el-1,4*(no-1)+2*gdl) == 1)
                    troca = cdc_val(indic);
                    cdc_val(indic) = x(2*(ELEM(el,no+1)-1)+gdl)*GEL;
                    x(2*(ELEM(el,no+1)-1)+gdl) = troca;
                else
                    x(2*(ELEM(el,no+1)-1)+gdl) = cdc_val(indic);
                    cdc_val(indic) = cdc_val(indic-2);
                end;
            end;
        end;
    end;
end;
```

```
% Atribuição dos valores aos vetores desl e trac e às matrizes D e T
desl = x;
trac = cdc_val;
```

```
for no = 1 : n_nos
    De(no,1) = no;
    De(no,2) = x(2*(no-1)+1);
    De(no,3) = x(2*no);
end;
for el = 1 : n_el
    T(el,1) = el;
    for no = 1 : 3
        for gdl = 1 : 2
            T(el,2*(no-1)+gdl+1) = cdc_val(6*(el-1)+2*(no-1)+gdl);
        end;
    end;
end;
```

```

end;
end;

%Retorna as atrizes desl e trac.

pin_des_q
% Função para cálculo dos deslocamentos em pontos internos.
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação fevereiro de 2000
% Revisão 0.0

function [Di] = pin_des_q(PONTOS_INT,ELEM,NOS,desl,trac);

n_el = length(ELEM(:,1)); % Número total de elementos
n_nos = length(NOS(:,1)); % Número total de nós
n_pi = length(PONTOS_INT(:,1)); % Número de pontos internos

% Inicialização das matrizes Hi e Gi
Hi = zeros(2*n_pi,2*n_nos);
Gi = zeros(2*n_pi,6*n_el);

% Definição dos pontos e pesos de Gauss padrão (10 pontos)
pontG = [-0.97390652851717
         -0.86506336668898
         -0.67940956829902
         -0.43339539412925
         -0.14887433898163
          0.14887433898163
          0.43339539412925
          0.67940956829902
          0.86506336668898
          0.97390652851717];

pesoG = [ 0.06667134430868
          0.14945134915058
          0.21908636251598
          0.26926671931000
          0.29552422471475
          0.29552422471475
          0.26926671931000
          0.21908636251598
          0.14945134915058
          0.06667134430868];

% Cálculo das funções de forma para os pontos de Gauss padrão
for pg = 1 : 10
    FF(pg,1:3) = f_forma_q(pontG(pg)); % Matriz 10x3
end;

% Construção das matrizes H e G por colunas (método RISP(Reuseable Intrinsic
% Sample Points))
for i = 1 : n_el % Percorre os elementos

    % Numeração dos três nós do elemento i
    no1 = ELEM(i,2);
    no2 = ELEM(i,3);
    no3 = ELEM(i,4);

    % Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    x1 = NOS(no1,2); y1 = NOS(no1,3);
    x2 = NOS(no2,2); y2 = NOS(no2,3);
    x3 = NOS(no3,2); y3 = NOS(no3,3);

    % Cálculo dos pontos campo sobre o elemento para integração regular
    x_el = [x1;x2;x3];
    y_el = [y1;y2;y3];
    XC = FF*x_el; % Vetor 10x1 de x dos pontos campo
    YC = FF*y_el; % Vetor 10x1 de y dos pontos campo

```

```

% Cálculo do Jacobiano e do vetor normal em cada ponto campo
for pg = 1 : 10
    [jac,normal] = Jac_e_Norm(pontG(pg),x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    J(pg) = jac;
    N(pg,:) = normal;
end;

% Variação dos pontos fontes (pontos internos)

for j = 1 : n_pi % Percorre os pontos fontes

    % Coordenadas (xf,yf) dos pontos fontes
    xf = PONTOS_INT(j,2); yf = PONTOS_INT(j,3);

    % Cálculo das submatrizes h_el e g_el

    % Integração não singular
    [h_el,g_el] = gh_nsing_q(xf,yf,XC,YC,FF,J,N,pesoG);

    % Armazenamento de h_el e g_el nas colunas Hcol e Gcol
    Hcol(2*j-1:2*j,:) = h_el;
    Gcol(2*j-1:2*j,:) = g_el;

end;

% Montagem das matrizes H e G

for no = 1 : 3
    ind = 2*ELEM(i,no+1)-1 : 2*ELEM(i,no+1);
    Hi(:,ind) = Hi(:,ind) + Hcol(:,2*no-1:2*no);
end;

Gi(:,6*i-5:6*i) = Gi(:,6*i-5:6*i) + Gcol;

end;

% Cálculo dos deslocamentos nos pontos internos
di = Gi*trac - Hi*desl;
for p_i = 1 : n_pi
    Di(p_i,1) = p_i;
    Di(p_i,2) = di(2*p_i-1);
    Di(p_i,3) = di(2*p_i);
end;

% Nesse ponto estão calculados os deslocamentos nos pontos internos

pin_tens_q
% Função para cálculo das tensões em pontos internos utilizando elementos quadráticos
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação fevereiro de 2000
% Revisão 0.0

function [tens_int] = pin_tens_elc(PONTOS_INT,ELEM,NOS,De,tra);

npi = length(PONTOS_INT(:,1)); % N. de pontos internos
nel = length(ELEM(:,1)); % N. de elementos
npc = npi/10;

for i = 1 : npi % Percorre os pontos internos

    % Coordenadas do ponto fonte (ponto interno i)
    x_f = PONTOS_INT(i,2);
    y_f = PONTOS_INT(i,3);

    % Plota um . para mostrar o andamento da análise
    if i > npc
        fprintf('.');
        npc = npc + npi/10;
    end;
end;

```

```

end;

% Inicialização dos componentes da tensão
sigx = 0;
sigy = 0;
sigxy = 0;

for j = 1 : nel % Percorre os elementos
    % Número global dos nós do elemento j
    no1 = ELEM(j,2);
    no2 = ELEM(j,3);
    no3 = ELEM(j,4);

    % Coordenadas dos nós
    xc1 = NOS(no1,2); yc1 = NOS(no1,3);
    xc2 = NOS(no2,2); yc2 = NOS(no2,3);
    xc3 = NOS(no3,2); yc3 = NOS(no3,3);

    % Deslocamentos e trações nos nós do elemento j
    de = [De(no1,2);De(no1,3);De(no2,2);De(no2,3);De(no3,2);De(no3,3)];
    tr = tra(6*(j-1)+1:6*j);

    % Cálculo da integral sobre um elemento
    [sx,sy,sxy] = integra_DeS(x_f,y_f,xc1,yc1,xc2,yc2,xc3,yc3,de,tr);

    sigx = sigx + sx;
    sigy = sigy + sy;
    sigxy = sigxy + sxy;

end;
tens_int(i,:) = [i,sigx,sigy,sigxy];
end;

% Neste ponto estão calculadas as tensões nos pontos
% internos

mostra_def
% Rotina para apresentação da geometria deformada

% Cálculo do valor de ampliação do deslocamento
max_des = max(abs(desl));
amplia = .08*max_dl/max_des;

% Mostra a geometria original
mostra_geo_q

% Pontos sobre elemento para visualização do deslocamento
ponti = -1 : .2 : 1;

% Cálculo das funções de forma
for p = 1 : 11
    FF(p,1:3) = f_forma_q(ponti(p)); % Matriz 10x3
end;

for el = 1 : cont_el

    % Numeração dos três nós do elemento i
    no1 = ELEM(el,2);
    no2 = ELEM(el,3);
    no3 = ELEM(el,4);

    % Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    x1 = NOS(no1,2); y1 = NOS(no1,3);
    x2 = NOS(no2,2); y2 = NOS(no2,3);
    x3 = NOS(no3,2); y3 = NOS(no3,3);

    % Deslocamentos dos três nós (dx1,dy1,dx2,dy2,dx3,dy3)
    dx1 = De(no1,2); dy1 = De(no1,3);
    dx2 = De(no2,2); dy2 = De(no2,3);
    dx3 = De(no3,2); dy3 = De(no3,3);

```

```

% Cálculo dos pontos campo sobre o elemento deformado
x_el = [x1+dx1*amplia;x2+dx2*amplia;x3+dx3*amplia];
y_el = [y1+dy1*amplia;y2+dy2*amplia;y3+dy3*amplia];
XC = FF*x_el; % Vetor 10x1 de x dos pontos campo
YC = FF*y_el; % Vetor 10x1 de y dos pontos campo

% Geração do gráfico do elemento el
plot(XC,YC,'color','red')
plot(x_el,y_el,'r.','markersize',6); % Desenha os nós do elemento

% Posição final dos pontos internos
pfpi = PONTOS_INT(:,2:3)+Di(:,2:3)*amplia;
plot(PONTOS_INT(:,2),PONTOS_INT(:,3),'b.','markersize',4); % Desenha os nós do elemento
plot(pfpi(:,1),pfpi(:,2),'r.','markersize',4); % Desenha os nós do elemento

end;

calc_tens_cont_q
% Rotina para cálculo dos componentes do tensor de tensões em
% nós do contorno
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação fevereiro de 2000
% Revisão 0.0

% Inicialização da matriz para os pontos internos
for no_g = 1 : cont_no
    tens_cont(no_g,:) = [no_g,0,0,0,0];
end;
cont = zeros(cont_no,1);

for el = 1 : cont_el % Percorre todos os elementos do contorno

    % Numeração dos três nós do elemento el
    no1 = ELEM(el,2);
    no2 = ELEM(el,3);
    no3 = ELEM(el,4);

    % Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    x1 = NOS(no1,2); y1 = NOS(no1,3);
    x2 = NOS(no2,2); y2 = NOS(no2,3);
    x3 = NOS(no3,2); y3 = NOS(no3,3);

    for no = 1 : 3 % Percorre os nós
        % Cálculo do vetor normal
        [jac,n] = Jac_e_Norm(no-2,x1,y1,x2,y2,x3,y3);

        % Matriz de transformação de coordenadas (de global para local)
        lij = [ n(1) n(2);
                -n(2) n(1)];

        % Cálculo das trações no sistema local (tangente ao contorno)
        tr_loc = lij*[trac(6*(el-1)+2*no-1);trac(6*(el-1)+2*no)];

        % Atribuição das trações no sistema local aos componentes s11 e s12 do
        % tensor de tensões
        s11 = tr_loc(1);
        s12 = tr_loc(2);

        % Deslocamentos nodais no sistema global
        uno1 = De(ELEM(el,2),2:3);
        uno2 = De(ELEM(el,3),2:3);
        uno3 = De(ELEM(el,4),2:3);

        % Deslocamentos nodais no sistema local
        v1 = lij*uno1'; v2 = lij*uno2'; v3 = lij*uno3';

        % Cálculo das derivadas das funções de forma e nó
        a = no - 2;

```

```

dh1 = a - .5;
dh2 = -2*a;
dh3 = a + .5;

% Cálculo da derivada do deslocamento em relação a a
dv2da = dh1*v1(2) + dh2*v2(2) + dh3*v3(2);

% Cálculo do componente tangencial de tensão (s22 - tensão de membrana)
e22 = dv2da/jac;
if tipo_prob == 2
    s22 = E*e22 + ni*s11;
else
    s22 = (E*e22 + ni*(1+ni)*s11)/(1-ni^2);
end;

% Cálculo dos componentes do tensor de tensões no sistema de coordenadas
% global
% Matriz de transformação de coordenadas (de local para global)
lji = [n(1) -n(2);
       n(2)  n(1)];

% Produto do tensor na base local pela matriz de transformação
s = [s11 s12
     s12 s22];

sigma = lji'*s*lji;

% Alocação na matriz tens_cont
no_g = ELEM(el,no+1);
tens_cont(no_g,2:5) = tens_cont(no_g,2:5)+[sigma(1,1),sigma(2,2),sigma(1,2),1];
end;
end;
for no_g = 1 : cont_no
    tens_cont(no_g,2:4) = tens_cont(no_g,2:4)/tens_cont(no_g,5);
end;

% Neste ponto estão calculados os componentes do tensor de tensão para
% os nós do contorno

map_cor
% Função para geração do mapa de cores em problemas
% elastostáticos
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação outubro de 1999
% Revisão 0.0

%function [op] = map_cor(NOS,PONTO,PONTOS_INT,LINHA,op,opno,oppi)

n_nos = length(NOS(:,1));          % N. de nós
[n_pi,lixo] = size(PONTOS_INT);    % Número de pontos internos
mostra_geo_q

% Construção do vetor val com a variável a ser visualizada

op = 'sy';          % Grandeza a ser mostrada no mapa de cor

switch op

case 'dx'
    val_no = De(:,2);
    val_pi = Di(:,2);

case 'dy'
    val_no = De(:,3);
    val_pi = Di(:,3);

case 'ds'
    for i = 1 : n_nos
        val_no(i,1) = sqrt(De(i,2)^2+De(i,3)^2);
    end;
end;

```

```

end;
for i = 1 : n_pi
    val_pi(i,1) = sqrt(Di(i,2)^2+Di(i,3)^2);
end;

case 'sx'
    val_pi = tens_int(:,2);
    val_no = tens_cont(:,2);

case 'sy'
    val_pi = tens_int(:,3);
    val_no = tens_cont(:,3);

case 'sxy'
    val_no = tens_cont(:,4);
    val_pi = tens_int(:,4);

case 's1'
    [tpi,tpn] = tens_princ(tens_cont,tens_int,n_nos,n_pi);
    val_no = tpn(:,2);
    val_pi = tpi(:,2);

case 's2'
    [tpi,tpn] = tens_princ(tens_cont,tens_int,n_nos,n_pi);
    val_no = tpn(:,1);
    val_pi = tpi(:,1);

case 'vm'
    [tpi,tpn] = tens_princ(tens_cont,tens_int,n_nos,n_pi);
    for i = 1 : n_nos
        s1 = tpn(i,2);
        s2 = tpn(i,1);
        val_no(i,1) = sqrt(0.5*((s1-s2)^2+s1^2+s2^2));
    end;
    for i = 1 : n_pi
        s1 = tpi(i,2);
        s2 = tpi(i,1);
        val_pi(i,1) = sqrt(0.5*((s1-s2)^2+s1^2+s2^2));
    end;

otherwise
    error('Erro no parâmetro op');
end

% Construção dos vetores com as coordenadas dos nós e pontos
% internos e do valor de interesse em cada posição
xi(1:n_nos,1) = NOS(:,2);%+ amplia*De(1:n_nos,2);
yi(1:n_nos,1) = NOS(:,3);%+ amplia*De(1:n_nos,3);
xi(n_nos+1:n_nos+n_pi,1) = PONTOS_INT(:,2);%+ amplia*Di(1:n_pi,2);
yi(n_nos+1:n_nos+n_pi,1) = PONTOS_INT(:,3);%+ amplia*Di(1:n_pi,3);
ci(1:n_nos,1) = val_no;
ci(n_nos+1:n_nos+n_pi,1) = val_pi;

% Chamada da função de triangularização (geração de malha
% na domínio para mostrar o mapa de cores)
tri = delaunay(xi,yi);

% Cálculo do pontos iniciais e finais de cada linha
n_linhas = length(LINHA(:,1));
for t = 1 : n_linhas % Percorre todas as linhas
    x11(t) = PONTO(LINHA(t,2),2);
    x12(t) = PONTO(LINHA(t,3),2);
    y11(t) = PONTO(LINHA(t,2),3);
    y12(t) = PONTO(LINHA(t,3),3);
end;
xmin = min(PONTO(:,2));
xmax = max(PONTO(:,2));
lx = xmax - xmin; % Largura do retângulo que contém a geometria
Dtot(1:n_nos,:) = De;

```

```

Dtot(n_nos+1:n_nos+n_pi,:) = Di;

% Geração de cada triângulo da malha com interpolação bilinear
% dos resultados obtidos
for t = 1 : length(tri) % Percorre todos os triângulos da malha

    x = [xi(tri(t,1));xi(tri(t,2));xi(tri(t,3))];
    y = [yi(tri(t,1));yi(tri(t,2));yi(tri(t,3))];
    c = [ci(tri(t,1));ci(tri(t,2));ci(tri(t,3))];

    % Verificando se o triângulo pertence ao domínio
    xm = (x(1)+x(2)+x(3))/3;
    ym = (y(1)+y(2)+y(3))/3;
    [xm,ponto] = testa_ponto(xm,ym,xl1,yl1,xl2,yl2,ix);

    if ponto == 'interno'
        % Aplicação dos deslocamentos nos triângulos
        xs1 = amplia*Dtot(tri(t,1),2);
        xs2 = amplia*Dtot(tri(t,2),2);
        xs3 = amplia*Dtot(tri(t,3),2);
        ys1 = amplia*Dtot(tri(t,1),3);
        ys2 = amplia*Dtot(tri(t,2),3);
        ys3 = amplia*Dtot(tri(t,3),3);

        x = [xi(tri(t,1))+xs1;xi(tri(t,2))+xs2;xi(tri(t,3))+xs3];
        y = [yi(tri(t,1))+ys1;yi(tri(t,2))+ys2;yi(tri(t,3))+ys3];
        c = [ci(tri(t,1));ci(tri(t,2));ci(tri(t,3))];
        patch(x,y,c)
    end;

end;
hold on
view(0,90)
colorbar % Cria a barra de cores

% Apresentação do título do mapa de cores
switch op

    case 'dx'
        title('Deslocamento em x');
    case 'dy'
        title('Deslocamento em y');
    case 'ds'
        title('Deslocamento total');
    case 'sx'
        title('Tensão em x');
    case 'sy'
        title('Tensão em y');
    case 'sxy'
        title('Tensão de cisalhamento (sxy)');
    case 's1'
        title('Tensão principal maior');
    case 's2'
        title('Tensão principal menor');
    case 'vm'
        title('Tensão de Von Mises');
    otherwise
        error('Erro no parâmetro op');
end
shading interp

% Mostrando a geometria deformada
% Pontos sobre elemento para visualização do deslocamento
ponti = -1 : .2 : 1;

% Cálculo das funções de forma
for p = 1 : 11
    FF(p,1:3) = f_forma_q(ponti(p)); % Matriz 10x3
end;

for el = 1 : cont_el

```

```

% Numeração dos três nós do elemento i
no1 = ELEM(el,2);
no2 = ELEM(el,3);
no3 = ELEM(el,4);

% Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
x1 = NOS(no1,2); y1 = NOS(no1,3);
x2 = NOS(no2,2); y2 = NOS(no2,3);
x3 = NOS(no3,2); y3 = NOS(no3,3);

% Deslocamentos dos três nós (dx1,dy1,dx2,dy2,dx3,dy3)
dx1 = De(no1,2); dy1 = De(no1,3);
dx2 = De(no2,2); dy2 = De(no2,3);
dx3 = De(no3,2); dy3 = De(no3,3);

% Cálculo dos pontos campo sobre o elemento deformado
x_el = [x1+dx1*amplia;x2+dx2*amplia;x3+dx3*amplia];
y_el = [y1+dy1*amplia;y2+dy2*amplia;y3+dy3*amplia];
XC = FF*x_el; % Vetor 10x1 de x dos pontos campo
YC = FF*y_el; % Vetor 10x1 de y dos pontos campo

% Geração do gráfico do elemento el
plot(XC,YC,'color','black')
plot(x_el,y_el,'black.','markersize',6); % Desenha os nós do elemento

% Posição final dos pontos internos
pfpi = PONTOS_INT(:,2:3)+Di(:,2:3)*amplia;
plot(PONTOS_INT(:,2),PONTOS_INT(:,3),'b.','markersize',4); % Desenha os nós do elemento
plot(pfpi(:,1),pfpi(:,2),'black.','markersize',4); % Desenha os nós do elemento

end;

hold off

```

## Apêndice B

Funções utilizadas para implementação do método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade.

```
calcula_alfa.m
% Função para o cálculo do vetor alfa para aplicação do método da
% dupla reciprocidade de elementos de contorno em problemas de elasticidade
% com forças de corpo.
% É utilizada a função de aproximação  $f = 1 + r$ .
% A função retorna também a matriz NOS_CeD que traz as coordenadas
% das de todos os nós do contorno e dos pontos internos, que pas-
% sam a ser chamados de nós internos.
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação março de 2000
% Revisão 0.0

function [alfa,NOS_CeD,F,b] = calc_alfa_el(NOS,PONTOS_INT,w,ro,xo,yo);

n_nos = length(NOS(:,1));           % Número de nós
[n_pi,lixo] = size(PONTOS_INT);    % Número de pontos internos
n_t = n_nos + n_pi;                % Número de nós (Contorno e Domínio)

% Geração da matriz NOS_CeD com as coordenadas de todos os nós
NOS_CeD = NOS;
if n_pi > 0
    NOS_CeD(n_nos+1:n_t,:) = PONTOS_INT;
    NOS_CeD(n_nos+1:n_t,1) = [n_nos+1:n_t]';
end;

% Inicialização da matriz de funções de interpolação
F = zeros(2*n_t,2*n_t);

% Cálculo da matriz [F] com  $f = 1 + r$ 
for i = 1 : n_t
    % Coordenadas do 1o nó
    xi = NOS_CeD(i,2);
    yi = NOS_CeD(i,3);
    % Carga no ponto i
    b(2*i-1,1) = -ro*w^2*(xi-xo); % Força de corpo devido à aceleração centrípeta.
    b(2*i,1) = -ro*w^2*(yi-yo); % Força de corpo devido à aceleração centrípeta.;
    for j = i : n_t
        % Coordenadas do 2o nó
        xj = NOS_CeD(j,2);
        yj = NOS_CeD(j,3);
        % Cálculo da distância entre os nós
        r = sqrt((xi-xj)^2+(yi-yj)^2);
        % Cálculo da função  $f = 1 + r$  que é atribuída à [F]
        F(2*i-1,2*j-1) = 1 - r;   F(2*j-1,2*i-1) = 1 - r;
        F(2*i,2*j) = 1 - r;      F(2*j,2*i) = 1 - r;
    end;
end;
%alfa = Gauss_eli(F,b);
alfa = inv(F)*b;
% Retorna o vetor alfa e a matriz NOS_CeD
```

### calc\_UcPc.m

```
% Função para o cálculo das matrizes [Ū] (Uchap) e [^P] (Pchap) para aplicação
% do método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade para problemas
% elásticos com forças de corpo
% As soluções particulares admitem uma função de aproximação  $f = 1 + r$ 
```

```
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação março de 2000
% Revisão 0.0
```

```
function [Uchap,Pchap] = calc_UcPc_el(ELEM,NOS_CeD);
```

```
n_el = length(ELEM(:,1)); % Número de elementos
n_nos = 2*n_el; % Número de nós do contorno
n_t = length(NOS_CeD(:,1)); % Número de nós (Contorno e Domínio)
```

```
% Inicializando as matrizes Uchap e Pchap
Uchap = zeros(2*n_nos,2*n_t);
Pchap = zeros(6*n_el,2*n_t);
```

```
% Cálculo da matriz [Ū] (Uchap)
for j = 1 : n_nos % Percorre os nós do contorno
    % Coordenadas do 1o nó
    xj = NOS_CeD(j,2);
    yj = NOS_CeD(j,3);
    for k = 1 : n_t % Percorre todos os nós
        % Coordenadas do 2o nó
        xk = NOS_CeD(k,2);
        yk = NOS_CeD(k,3);
        % Cálculo dos componentes da matriz [Ū]
        [uc] = calc_uchap2(xj,yj,xk,yk);
        % Alocação de uc (2x2) em Uchap
        Uchap(2*j-1:2*j,2*k-1:2*k) = uc;
    end;
end;
```

```
% Cálculo da matriz [^P] (Pchap)
```

```
for el = 1 : n_el % Percorre os elementos
    % Numeração dos três nós do elemento
    no(1) = ELEM(el,2);
    no(2) = ELEM(el,3);
    no(3) = ELEM(el,4);

    % Coordenadas dos três nós
    x(1) = NOS_CeD(no(1),2) ; y(1) = NOS_CeD(no(1),3);
    x(2) = NOS_CeD(no(2),2) ; y(2) = NOS_CeD(no(2),3);
    x(3) = NOS_CeD(no(3),2) ; y(3) = NOS_CeD(no(3),3);

    % Cálculo do vetor normal em cada nó do elemento
    for n = 1 : 3
        [jac,normal] = Jac_e_Norm(n-2,x(1),y(1),x(2),y(2),x(3),y(3));
        N(n,:) = normal;
    end;
```

```
for i = 1 : 3 % Percorre os três nós do elemento
    for j = 1 : n_t % Percorre todos os nós de contorno e domínio
        xj = NOS_CeD(j,2);
        yj = NOS_CeD(j,3);

        % Cálculo da solução particular de tração
        [pc] = calc_pchap2(xj,yj,x(i),y(i),N(i,1),N(i,2));

        % Alocação de pc na matriz Pchap
        Pchap(6*(el-1)+2*i-1:6*(el-1)+2*i,2*j-1:2*j) = pc;
    end;
end;
```

```
% Neste pontos estão calculadas as matrizes das soluções particulares
% Uchap e Pchap
```

**calc\_uchap2.m**

% Função para o cálculo da solução particular de deslocamento  $\hat{u}_{mk}$  (2x2)

% Autor: Frederico Lourenço  
% Data de criação março de 2000  
% Revisão 0.0

function [uc] = calc\_uchap(xj,yj,xk,yk);

global ni GEL

% Cálculo dos componentes em x e y da distância entre os pontos j e k  
r1 = (xk - xj);  
r2 = (yk - yj);

% Cálculo da distância r e de suas derivadas em relação a x e y  
r = sqrt(r1^2+r2^2);  
if r ~= 0  
rd1 = r1/r;  
rd2 = r2/r;  
else  
rd1 = 0;  
rd2 = 0;  
end;

% Constantes que se repetem na solução particular  $\hat{u}$   
c1 = (1-2\*ni)/((5-4\*ni)\*GEL);  
c2 = 1/(30\*GEL\*(1-ni));  
c3 = 3-10\*ni/3;

% Cálculo da solução particular  $\hat{u}$  (2x2)  
uc11 = c1\*rd1^2\*r^2 + c2\*(rd1^2-c3)\*r^3;  
uc22 = c1\*rd2^2\*r^2 + c2\*(rd2^2-c3)\*r^3;  
uc12 = c1\*rd1\*rd2\*r^2 + c2\*rd1\*rd2\*r^3;

uc = [uc11 uc12  
uc12 uc22];

% Retorna a solução particular  $\hat{u}$

**calc\_pchap2.m**

% Função para o cálculo da solução particular de tração  $\hat{p}_{mk}$  (2x2)

% Autor: Frederico Lourenço  
% Data de criação março de 2000  
% Revisão 0.0

function [pc] = calc\_pchap(xj,yj,xn,yn,n1,n2);

global ni GEL

% Cálculo dos componentes em x e y da distância entre os pontos j e n  
r1 = (xn - xj);  
r2 = (yn - yj);

% Cálculo da distância r e de suas derivadas em relação a x e y  
r = sqrt(r1^2+r2^2);  
if r ~= 0  
rd1 = r1/r;  
rd2 = r2/r;  
else  
rd1 = 0;  
rd2 = 0;  
end;

% Constantes que se repetem na solução particular  $\hat{u}$   
C = 1;  
A = (1-2\*ni)\*C/(5-4\*ni);

```

B = 1/(30*(1-ni));
D = (10*ni-9)/(90*(1-ni));
F = 2*ni/(1-2*ni);
drdn = rd1*n1+rd2*n2;

% Cálculo da solução particular  $\hat{u}$  (2x2)
f1 = 3*A*r+4*B*r^2+3*D*r^2;
f2 = 2*(A*r+B*r^2);
f3 = A*r+B*r^2+3*D*r^2;

pc11 = F*f1*rd1*n1 + f2*rd1*n1 + f3*(rd1*n1+drdn) + 2*(B*r^2*rd1^2*drdn);
pc22 = F*f1*rd2*n2 + f2*rd2*n2 + f3*(rd2*n2+drdn) + 2*(B*r^2*rd2^2*drdn);
pc12 = F*f1*rd2*n1 + f2*rd2*n1 + f3*(rd1*n2) + 2*(B*r^2*rd1*rd2*drdn);
pc21 = F*f1*rd1*n2 + f2*rd1*n2 + f3*(rd2*n1) + 2*(B*r^2*rd2*rd1*drdn);

pc = [pc11 pc12;
      pc21 pc22];

% Retorna a solução particular  $\hat{p}$ 

calcula_d
% Função para o cálculo do vetor {d} para aplicação do método
% da dupla reciprocidade de elementos de contorno.
% d = ([H].[ $\hat{U}$ ]-[G].[ $\hat{P}$ ]).alfa
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação março de 2000
% Revisão 0.0

function [d] = calcula_d(H,Uchap,G,Pchap,alfa);

d = (H*Uchap-G*Pchap)*alfa;

% Retorna o vetor {d}

```

## Apêndice C

Funções para consideração do elemento de contorno com nó a um quarto.

```
central_crack.m (arquivo de dados)
% Arquivo de dados para análise elastostática pelo
% método dos elementos de contorno (elemento quadrático)
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação outubro de 1999
% Revisão 0.0
%

% Matriz para definição de pontos da geometria

PONTO = [1  -1.8  0
         2   0    0
         3  1.8   0
         4  1.8  1.8
         5  1.8  10.8
         6 -1.8  10.8
         7 -1.8  1.8];

% Matriz para definição de linhas

LINHA = [1 1 2
        2 2 3
        3 3 4
        4 4 5
        5 5 6
        6 6 7
        7 7 1];

% Matriz para definição da malha

DISCRE = [1 1
          2 1
          3 1
          4 1
          5 1
          6 1
          7 1];

% Definição das condições de contorno

% Deslocamento
% DESLOC = [linha, valor , direção(x=1,y=2)]

DESLOC = [2  0  2
         6  0  1
         7  0  1];

% Tração em cada linha
% TRAC = [linha, valor, direção(x=1,y=2)]

TRAC = [5 1 2];

% Propriedades do material
```

```

% Módulo de elasticidade (módulo de Young)
E = 5250.0;      % [Pa]

% Coeficiente de Poisson

ni = 0.2;

% Tipo de problema (tipo_prob)
% 1. estado plano de deformação
% 2. estado plano de tensão

tipo_prob = 2;

cria_ec_qtp.m
% Rotina para alteração da posição dos nós dos elementos
% adjacentes à ponta da trinca

% Número do ponto da ponta da trinca
n_p_pta = 3;

% Cálculo do n. do nó que está na ponta da trinca
n_lin = length(LINHA(:,1));
for nl = 1 : n_lin
    if LINHA(nl,3) == n_p_pta
        lcrack = nl;
    end;
end;

% Contador do número de elementos até a ponta da trinca
n_elct = 0;

for nl = 1 : lcrack
    n_elct = n_elct + DISCRE(nl,2);
end;

if CDC(n_elct,2) == 0 | CDC(n_elct,4) == 0
    n_elcrack = n_elct+1;
    n_elfcrack = n_elct ;
else
    n_elcrack = n_elct;
    n_elfcrack = n_elct+1;
end;

% Cálculo da nova posição dos pontos intermediários
% Função de forma para a = 0.75
ff_075p = f_forma_q(0.5);
% Função de forma para a = -0.75
ff_075n = f_forma_q(-0.5);

if n_elcrack < n_elfcrack
    el1 = n_elcrack;
    el2 = n_elfcrack;
else
    el1 = n_elfcrack;
    el2 = n_elcrack;
end;

% Nova posição do nó do elemento el1
% Numeração dos três nós do elemento i
no1 = ELEM(el1,2);
no2 = ELEM(el1,3);
no3 = ELEM(el1,4);

% Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
x1 = NOS(no1,2);   y1 = NOS(no1,3);
x2 = NOS(no2,2);   y2 = NOS(no2,3);
x3 = NOS(no3,2);   y3 = NOS(no3,3);

```

```

x_el1 = [x1;x2;x3];
y_el1 = [y1;y2;y3];
xc1 = ff_075p*x_el1; % Vetor 10x1 de x dos pontos campo
yc1 = ff_075p*y_el1; % Vetor 10x1 de y dos pontos campo

% Nova posição do nó do elemento el2
% Numeração dos três nós do elemento i
no1 = ELEM(el2,2);
no2 = ELEM(el2,3);
no3 = ELEM(el2,4);

% Coordenadas dos três nós (x1,y1,x2,y2,x3,y3)
x1 = NOS(no1,2); y1 = NOS(no1,3);
x2 = NOS(no2,2); y2 = NOS(no2,3);
x3 = NOS(no3,2); y3 = NOS(no3,3);

x_el2 = [x1;x2;x3];
y_el2 = [y1;y2;y3];
xc2 = ff_075n*x_el2; % Vetor 10x1 de x dos pontos campo
yc2 = ff_075n*y_el2; % Vetor 10x1 de y dos pontos campo

% Neste ponto estão criados os elementos de nó a 1/4

no1 = 2*el1;
no2 = 2*el2;
NOS(no1,2) = xc1;
NOS(no1,3) = yc1;
NOS(no2,2) = xc2;
NOS(no2,3) = yc2;

calc_KI.m
Cálculo do fator de intensidade de tensão em modo I através
% do COD (Crack Opening Displacement) - Deslocamento de abertura da trinca

% Tamanho da trinca e do elemento
ltrinca = 1.8;
%l_elem = abs(NOS(5,2)-NOS(3,2));
noi = ELEM(n_elcrack,2);
nof = ELEM(n_elcrack,4);

l_elem = sqrt((NOS(nof,2)-NOS(noi,2))^2+(NOS(nof,3)-NOS(noi,3))^2);

% Tensão remota aplicada
sigr = 1;
% Fator de geometria
Fab = 1.006;
%a = ltrinca/2;
%b = 1.8;
%Fab = (1-0.025*(a/b)^2+0.06*(a/b)^4)*sqrt(sec((pi*a)/(2*b)));

% Recuperação dos valores para estado plano de tensão
%ni = .2;
%E = 5250;
%GEL = E/(2*(1+ni));

% Deslocamentos nos nós b e c do elemento sobre a trinca
nob = ELEM(n_elcrack,3);
noc = ELEM(n_elcrack,2);
vb = De(nob,3);
vc = De(noc,3);

% Cálculo do KI

KI = GEL/(2*(1-ni))*sqrt(2*pi/l_elem)*(4*vb-vc);

%KI_teor = sigr*sqrt(pi*ltrinca)*Fab;
KI_teor = 2.8298;

% Cálculo do erro entre KI calculado e KI da referência
erro = (-KI_teor+KI)/KI_teor*100;

```

```

resposta = [KI_teor;KI;erro]

% Relação entre os elementos da trinca e o quarter point
rel = ((1.8-l_elem)/DISCRE(1,2))/l_elem

calc_KI_ts.m
% cálculo do fator de intensidade de tensão K1

noi = ELEM(n_elcrack,2);
nof = ELEM(n_elcrack,4);

l_elem = sqrt((NOS(nof,2)-NOS(noi,2))^2+(NOS(nof,3)-NOS(noi,3))^2);

K1 = abs(T(n_elfcrack,3))*sqrt(2*pi*l_elem)

% Cálculo do erro de K1 com relação ao K1 da referência
K1_teor = 2.8298;

% Cálculo do erro entre KI calculado e KI da referência
erro = (-K1_teor+K1)/K1_teor*100;
result = [K1_teor;K1;erro]
rel = ((1.8-l_elem)/DISCRE(1,2))/l_elem

```