

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Diogo Stuan  
Alves..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 18/02/2011  
Katia Lucchesi Cavalca  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Autor: Diogo Stuan Alves

**Investigação do Efeito Térmico no  
Comportamento Dinâmico de Mancais  
Hidrodinâmicos**

Campinas, 2011.

Diogo Stuani Alves

# **Investigação do Efeito Térmico no Comportamento Dinâmico de Mancais Hidrodinâmicos**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Katia Lucchesi Cavalca Dedini

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

AL87i Alves, Diogo Stuani  
Investigação do efeito térmico no comportamento  
dinâmico de mancais hidrodinâmicos / Diogo Stuani  
Alves. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mancais. 2. Lubrificação. 3. Diferenças finitas. I.  
Dedini, Katia Lucchesi Cavalca. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia  
Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Investigation of the thermal effect in dynamic behavior of  
hydrodynamic bearings

Palavras-chave em Inglês: Bearings, Lubrication, Finite difference

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Renato Pavanello, Rodrigo Nicoletti

Data da defesa: 18/02/2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

**Investigação do Efeito Térmico no  
Comportamento Dinâmico de Mancais  
Hidrodinâmicos**

Autor: Diogo Stuani Alves

Orientador: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Katia Lucchesi Cavalca Dedini

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr<sup>a</sup> Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas – Unicamp - FEM

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Renato Pavanello  
Universidade Estadual de Campinas – Unicamp - FEM

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti  
Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos – USP - DEM

Campinas, 18 de Fevereiro de 2011.

Dedico este trabalho à minha família.

## ***Agradecimentos***

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais, Marcus e Ivoni, pelo apoio e amor incondicionais, sempre.

À professora e amiga Katia, pela orientação e conselhos, prestados ao longo destes anos.

Aos grandes amigos que fiz nessa jornada e com quem dividi parte da minha vida, Alexandre, Claudio, Edson, Pedro, Renato, Thiago e Vinícius.

Aos colegas do LAMAR, Denise, Fábio, Felipe, Gregory, Hélio, Keila, Kellen, Leonardo, Lucas, Matheus, Pedro, Robert, Ricardo e Tiago pela ajuda prestada durante a pesquisa e pela amizade.

À ThyssenKrupp Metalúrgica Campo Limpo Ltda., pelo apoio financeiro e técnico, possibilitando a realização deste trabalho.

*“A mente que se abre a uma nova idéia  
jamais voltará ao seu tamanho original.”*

Albert Einstein.

## **Resumo**

Alves, Diogo Stuani, *Investigação do Efeito Térmico no Comportamento Dinâmico de Mancais Hidrodinâmicos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2011. 144 p. Dissertação (Mestrado).

Os mancais lubrificados hidrodinamicamente estão presentes em muitas aplicações modernas, especialmente em máquinas rotativas que necessitam de operações mais precisas. Nestes casos, a lubrificação é essencial para a máquina, pois, diminui o atrito entre as peças internas e previne o contato metal-metal, além de agir como elemento de vínculo dinâmico para as pistas do mancal. Devido ao cisalhamento do lubrificante durante a operação, tem-se o aquecimento do fluido e com isso uma modificação nas condições de lubrificação, já que a viscosidade, parâmetro que caracteriza as particularidades do escoamento, diminui com o aumento da temperatura. A diminuição da viscosidade causa diminuição do atrito viscoso, o que acarreta em diminuição da capacidade de carga, gerando efeitos negativos nos coeficientes equivalentes e sendo possível, em alguns casos, a observação de contato direto entre as partes metálicas. Sendo assim, o estudo do atrito e das condições de lubrificação durante a operação de máquinas é de extrema importância em problemas como manutenção, durabilidade e confiabilidade de máquinas. Utilizando o método das diferenças finitas, é possível resolver simultaneamente as equações de Reynolds e da energia, que são responsáveis pelas distribuições de pressão e temperatura, respectivamente. Com isso, é possível analisar as diferenças de pressão, disposição do eixo no interior do mancal e coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, de um modelo em que se usa viscosidade variante com a temperatura (termohidrodinâmico) e de um modelo que não apresenta esse fenômeno (isotérmico). Finalmente, utilizando um software de dinâmica de rotores, foi obtida a resposta dinâmica de um sistema mancal-rotor para turbo-compressores.

*Palavras Chave:* Mancais Hidrodinâmicos; Lubrificação Termohidrodinâmica; Método das Diferenças Finitas; Coeficiente de Rigidez; Coeficiente de Amortecimento.

## **Abstract**

ALVES. Diogo Stuani, *Investigation of the Thermal Effect in Dynamic Behavior of Hydrodynamic Bearings*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2011. **144** p. Dissertação (Mestrado).

The hydrodynamic lubricated bearings are present in modern applications, especially in rotational machines that need precisely operations. In those cases, the lubrication is essential for the machine, because it reduces the wear between the internal parts and prevents the metallic contact, and also, acts like an element of dynamic link for the bearing. Due to the lubricant shear, the fluid heats up and modifications on the lubrication conditions occurs, since the viscosity, parameter that characterize the flow, decreases with the increase of the temperature. The decrease of viscosity causes a decrease in the viscous friction, which entails in a decrease of the load sustaining capacity, negative effects in the equivalent coefficients and possible observation of metallic contact. So, the study of friction and lubrication conditions during the machine operation is extremely important on maintenance, durability and reliability of machines. Using the finite difference method it is possible to solve, simultaneously, the Reynolds and the energy equations that are responsible for the pressure and temperature distribution, respectively. Therewith, it is possible to analyze the differences in pressure, shaft position in the bearing and equivalent stiffness and damping coefficients, for a model that uses changes in viscosity with the temperature (thermohydrodynamic) and for a model that does not take it in account (isothermal). Finally, using a rotordynamic software (ROTORTTEST), the dynamic response of a turbocharger bearing-rotor system was obtained and analyzed.

*Key Words:* Hydrodynamic Bearings; Thermohydrodynamic Lubrication; Finite Difference Method; Stiffness Coefficient; Damping Coefficient.

## Lista de Figuras

Figura 3.1: Mancal Radial (KHONSARI, 1996).	14
Figura 3.2: Distribuição de pressão (NORTON, 2004).	14
Figura 3.3: Carta de viscosidade (SANTOS, 1997).	15
Figura 3.4: Ilustração física do postulado de Newton (HAMROCK, 1994).	17
Figura 3.5: Volume de controle geral no qual há escoamento de fluido (BURMEISTER, 1983).	20
Figura 3.6: Forças de superfície e de campo agindo em um volume de controle estacionário com coordenadas retangulares (BURMEISTER, 1983).	28
Figura 3.7: Trabalho realizado pela superfície e forças de campo em um volume de controle estacionário com coordenadas retangulares (BURMEISTER, 1983).	37
Figura 3.8: Sistema de coordenadas (DOWSON, 1962).	45
Figura 3.9: Modelo Massa-Mola-Amortecedor para o Filme Fluido.	55
Figura 3.10: Sistema de Coordenadas (LUND, 1987).	56
Figura 3.11: Perturbação em Torno da Posição de Equilíbrio (PEDREIRA, 2006).	59
Figura 3.12: Geometria de uma ranhura axial (HESHMAT, 1986).	60
Figura 3.13: Mecanismo de entrada de óleo (HESHMAT, 1986).	61
Figura 3.14: Volume de controle sobre o fluido da região de mistura – balanço de energia (NICOLETTI, 1999).	61
Figura 3.15: Malha de discretização para o plano $(y, z)$ (NICOLETTI, 1999).	64
Figura 4.1: Malha computacional unidimensional (THOMAS, 1995).	70
Figura 4.2: Malha computacional bidimensional (THOMAS, 1995).	70
Figura 4.3: Malha computacional bidimensional (PINKUS, 1956).	75
Figura 4.4: a) Plano Físico. b) Plano computacional (MALISKA, 2004).	79
Figura 4.5: Sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas (MALISKA, 2004).	79
Figura 4.6: Sistema de coordenadas curvilíneas $(\xi, \eta, \gamma)$ (MALISKA, 2004).	80
Figura 5.1: Esquema do mancal radial utilizado na simulação (KHONSARI, 1996).	104
Figura 5.1: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	107

Figura 5.2: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	108
Figura 5.3: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	109
Figura 5.4: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	112
Figura 5.5: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	113
Figura 5.6: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	114
Figura 5.7: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	116
Figura 5.8: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	117
Figura 5.9: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.	118
Figura 5.10: Locus para os modelos HD e THD: Mancal da bancada de testes.	119
Figura 5.11: Locus para os modelos HD e THD: Mancal de turbo-compressor com carregamento de $0.7472N$ .	119
Figura 5.12: Locus para os modelos HD e THD: Mancal de turbo-compressor com carregamento de $0.9714N$ .	120
Figura 5.13: Isotérmicas: (a) Obtidas na literatura (KHONSARI, 1996). (b) Obtidas nesse trabalho.	124
Figura 5.14: Isotérmicas obtidas na literatura: (a) Experimentais. (b) Teóricas. (KHONSARI, 1996).	125
Figura 5.15: Isotérmicas teóricas obtidas nesse trabalho.	126
Figura 5.16: Coeficientes de rigidez para o mancal da bancada: (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes cruzados.	127
Figura 5.17: Coeficientes de amortecimento para o mancal da bancada: (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes cruzados.	127

Figura 5.18: Coeficientes de rigidez do mancal de turbo-compressor (0.7472 N): (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes cruzados.	128
Figura 5.19: Coeficientes de amortecimento do mancal de turbo-compressor (0.7472 N): (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes diretos com aproximação. (c) Coeficientes cruzados. (d) Coeficientes cruzados com aproximação.	129
Figura 5.20: Coeficientes de rigidez do mancal de tubo-compressor (0.9714 N): (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes cruzados.	129
Figura 5.19: Coeficientes de amortecimento do mancal de turbo-compressor (0.9714 N): (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes diretos com aproximação. (c) Coeficientes cruzados. (d) Coeficientes cruzados com aproximação.	130
Figura 5.20: Esquema de um turbo-compressor.	132
Figura 5.21: Rotor discretizado utilizado na simulação.	132
Figura 5.22: Resposta ao desbalanceamento no mancal 1 (nó 10): Amplitude. a) Modelo HD. b) Modelo THD.	133
Figura 5.23: Resposta ao desbalanceamento no mancal 1 (nó 10): Fase. a) Modelo HD. b) Modelo THD	133
Figura 5.24: Resposta ao desbalanceamento no mancal 2 (nó 15): Amplitude. a) Modelo HD. b) Modelo THD.	134
Figura 5.25: Resposta ao desbalanceamento no mancal 2 (nó 15): Fase. a) Modelo HD. b) Modelo THD	134
Figura 5.26: Deformada dos nós a 39 Hz: a) Modelo HD. b) Modelo THD.	135
Figura 5.27: Deformada dos nós a 65 Hz: a) Modelo HD. b) Modelo THD.	136
Figura A1: Fluxograma do programa computacional.	143

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Constantes para as propriedades de lubrificantes (LARSSON, 2000).	68
Tabela 5.1: Condições de Operação.	105
Tabela 5.2: Resultados Numéricos.	106
Tabela 5.3: Condições de Operação.	110
Tabela 5.4: Resultados Numéricos.	111
Tabela 5.5: Condições de Operação.	114
Tabela 5.6: Resultados Numéricos.	115
Tabela 5.6: Condições de Operação.	121
Tabela 5.7: Dados obtidos por Khonsari (1996).	122
Tabela 5.8: Dados obtidos nesse trabalho.	122
Tabela 5.9: Condições de Operação.	124

# Sumário

1. Introdução	1
2. Revisão Bibliográfica	5
3. Modelagem Matemática	13
3.1. Descrição do Problema	13
3.2. Viscosidade	16
3.3 Equações de Conservação	18
3.3.1. Conservação de Massa	19
3.3.2. Conservação da Quantidade de Movimento	23
3.3.3. Conservação da Energia	32
3.4. Equação de Reynolds	43
3.4.1. Simplificações da Equação de Reynolds	52
3.5. Conceito de Coeficientes Dinâmicos para Mancais Hidrodinâmicos	55
3.6. Temperatura de Mistura.	59
3.7. Resolução do Problema Termohidrodinâmico	66
4. Modelagem Computacional	69
4.1. Expansão em Série de Taylor	69
4.2. Resolução da Equação de Reynolds por Diferenças Finitas	73
4.2.1. O Caso Dinâmico	73
4.2.2. O Caso Estático	77
4.3. Resolução da Equação da Energia por Diferenças Finitas	78
4.4. Solução do Sistema Linear de Equações	100
5. Simulações e Resultados	104
5.1. Validação dos Resultados.	121
5.2. Análise dos Coeficientes de Rigidez e Amortecimento e Resposta ao Desbalanceamento de um Turbo-Compressor.	126
6. Conclusões e Desdobramentos do Trabalho	137
6.1. Conclusões	137
6.2. Desdobramento do Trabalho	138

7. Referências Bibliográficas	139
ANEXO A – Algoritmo	143

# 1. Introdução

Desde a pré-história, se tem conhecimento das dificuldades enfrentadas pelos seres humanos para realizar tarefas simples, como, transporte de objetos, coleta de alimentos e rápidas locomoções. Assim, a partir da utilização de toras de madeiras como método de transportar blocos de pedras, nas construções das pirâmides no Egito antigo, a engenhosidade humana começou a aflorar, e elementos que apresentavam movimentos de rotação em relação a uma parte estática, tais como roldanas e eixos, começaram a surgir. Porém, devido à baixa complexidade dessas atividades, poucas melhoras eram realizadas nesses equipamentos.

Com o passar do tempo, esses elementos foram perdendo sua funcionalidade, já que era preciso desempenhos melhores, sendo, uma das causas dessa limitação, o grande atrito existente em sua operação. Portanto, uma onda de esforços foi designada para reduzir a perda de eficiência mecânica devido ao contato direto entre as superfícies em movimento, que geralmente ocorre com liberação de calor, causada pelo atrito. Em um desses esforços, o pintor italiano, e também inventor, Leonardo da Vinci, a serviço do Duque de Milão, foi incumbido de estudar o problema do atrito e criou o precursor dos mancais de esferas rolantes.

No entanto, os esforços não cessaram e muitos estudos foram realizados no intuito de se introduzir fluidos entre as partes com movimento relativo. Esse fato já era observado com os primeiros mancais, que eram feitos de uma madeira bem oleosa (*Lignum Vitae*), nativa da Índia, e eram utilizadas em aplicações em que existia abundância de água, como rodas e bombas d'água, além do fato de serem lubrificadas com gorduras animais. Apesar de experimentalmente observar a redução do atrito a partir da introdução de um fluido nesses elementos, pouco sabia-se sobre a teoria que estava por trás disso, então, no século XX, surgiu a Tribologia.

A Tribologia, que é a ciência focada no estudo sobre atrito, é relativamente nova, sendo que havia pouco conhecimento científico sobre o assunto até o ano de 1886, quando Osborne Reynolds publicou seu famoso artigo sobre lubrificação hidrodinâmica. A equação de Reynolds se transformou na base da teoria moderna sobre o assunto. Lubrificação é a aplicação de um filme fino de alguma substância, geralmente um fluido lubrificante, para separar as duas superfícies em contato, e tem como princípio diminuir o atrito entre as partes sólidas, além de reduzir consideravelmente a temperatura dos acoplamentos, atuar inibindo a corrosão e como

amortecedor para choques ou variações bruscas de carga. Interações de superfície, em uma interface tribológicas são altamente complexas, e sua compreensão exige conhecimentos de várias disciplinas, incluindo a física, química, matemática aplicada, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, termodinâmica, transferência de calor, ciência dos materiais, reologia, lubrificação, projeto de máquinas, desempenho e confiabilidade.

Com o desenvolvimento dos estudos tribológicos, pôde-se obter melhoras no desempenho de diversos componentes, sendo que um dos mais influenciados foram os mancais. Um mancal é um elemento de máquina que, normalmente, é usado para separar peças rígidas, em movimento relativo, evitando o contato entre elas. Se o mancal for do tipo hidrodinâmico, então, ele possuirá um fluido lubrificante inserido entre as peças rígidas, no qual, a finalidade é de substituir o atrito seco entre as partes pelo atrito viscoso, diminuindo assim, a temperatura de funcionamento, o atrito e o desgaste das superfícies. Os mancais hidrodinâmicos são usados para suportar eixos e para sustentar carregamentos radiais com o mínimo de perda de carga e atrito. Dentre as aplicações de mancais hidrodinâmicos, tem-se os motores de combustão interna, turbo-compressores, turbo-geradores, entre outros. Estes podem ser representados por superfícies curvas, sendo a mais comum a cilíndrica, alojando o eixo em seu interior. O lubrificante é suprido em algum ponto conveniente do mancal através de rasgos ou furos.

Mancais são dependentes do movimento do eixo para gerar pressões no filme de fluido que suportem a carga aplicada. Fisicamente, isso ocorre devido à velocidade não nula entre o eixo e o mancal. No entanto, o eixo, normalmente, não gira concêntrico com o mancal. O deslocamento do centro do eixo relativo ao centro do mancal, conhecido como excentricidade, permite que a rotação do eixo mova as partículas de fluido de uma região de maior volume para uma de menor volume, gerando assim, um gradiente de pressões. A posição de excentricidade do eixo, assim como a folga do mancal, é influenciada pela carga que esta sendo suportada. A excentricidade é auto-ajustada até que a carga seja balanceada pela pressão gerada no filme de fluido convergente.

A lubrificação de mancais tem sido representada ao longo do tempo por duas propriedades básicas, amortecimento e rigidez. Para a obtenção dos coeficientes que representam essas propriedades é necessário a obtenção das forças hidrodinâmicas, que possuem não linearidades quanto à variação da posição do rotor no interior do mancal. No entanto, por a vibração do eixo ao redor do ponto de equilíbrio possuir pequenas amplitudes, é possível utilizar métodos, geralmente expansão em séries, que linearizam essas expressões, e assim, é possível computar

tais propriedades teoricamente. A seleção correta desses coeficientes pode ter como consequência a diminuição das forças dinâmicas transmitidas através dos mancais para a estrutura fixa da máquina, prolongando, assim, a vida útil dos equipamentos mecânicos.

A viscosidade de um líquido é devida, praticamente na totalidade, por forças interatômicas. Devido ao cisalhamento do lubrificante durante a operação, tem-se o aquecimento do fluido e, conseqüentemente, uma expansão do líquido, assim, as moléculas se separam e as forças intermoleculares decrescem, resultando em decaimento da viscosidade. Com a redução da viscosidade, tem-se perdas importantes nas características do mancal, como redução da capacidade de sustentação do mancal, que deve buscar novo ponto de equilíbrio, mais próximo a parede do mancal, podendo causar contato metálico entre eixo e mancal, caso a espessura de filme não mais seja suficiente para garantir a separação completa entre as superfícies.

Portanto, como o desempenho de mancais é fortemente dependente da lubrificação viscosa, e como a viscosidade de lubrificantes comuns é função da temperatura, os resultados da teoria clássica, que consideram a viscosidade e a distribuição de temperaturas constantes ao longo do mancal, podem não ser acurados na predição do comportamento dinâmico de máquinas rotativas. Desta maneira, as considerações térmicas possuem um papel importante na análise e projeto de mancais, uma vez que o estudo do atrito e das condições de lubrificação, durante a operação de máquinas, é de extrema importância em problemas como manutenção, durabilidade e confiabilidade de máquinas.

Sendo assim, a proposta desse trabalho é analisar a influência da temperatura no comportamento de mancais hidrodinâmicos. Uma vez tendo as características do fluido lubrificante, e resolvendo simultaneamente a equação da energia e a equação de Reynolds modificada, pode-se determinar a distribuição de temperatura no filme de óleo. Com isso, viabiliza-se a predição das temperaturas de operação e sua influência nos demais parâmetros de interesse do mancal, e sua repercussão na resposta dinâmica do sistema.

O modelo numérico foi implementado em um algoritmo na linguagem Fortran, sendo que as equações diferenciais foram resolvidas através do método das diferenças finitas, uma vez que esse método é simples e possui uma boa precisão para o problema.

O trabalho apresenta a análise de um mancal cilíndrico com realimentação de óleo em condições de operação semelhantes ao utilizado na bancada de teste do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR). A análise leva em conta as mudanças causadas pelo efeito térmico na

distribuição de pressão, no lugar geométrico do eixo e nos coeficientes de rigidez e amortecimento. Também será analisado um caso de mancal utilizado em turbo-compressores automotivos, pois esses possuem velocidade de rotação muito alta e, portanto, altas temperaturas.

Primeiramente, o trabalho apresentará uma revisão bibliográfica no qual foram reunidos textos que mostram a evolução do estudo em mancais hidrodinâmicos desde sua descoberta com Osborne Reynolds até os tempos modernos.

Segue-se então para o Capítulo 3 no qual um panorama geral sobre a descrição do problema será dada, além de ser mostrada a modelagem matemática e as principais equações utilizadas na resolução do problema, como a Equação de Reynolds e a Equação da Energia, assim como suas deduções.

O Capítulo 4 apresenta a modelagem computacional, no qual será desenvolvido o método das diferenças finitas e a transformação de coordenadas do modelo físico para o numérico da Equação da Energia.

De posse de todas as ferramentas necessárias para solucionar o problema, o Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos na simulação numérica e a discussão sobre tais resultados.

Por fim no Capítulo 6 têm-se as conclusões e os desdobramentos do trabalho.

## 2. Revisão Bibliográfica

Durante a segunda metade do século XVIII, ocorria, na Inglaterra, o fim da transição entre feudalismo e capitalismo, culminado pela Revolução Industrial. Durante esse período, houve a troca das ferramentas pela máquinas, da energia humana pela energia motriz e do modo de produção doméstico pelo fabril. Essa transformação foi possível devido a alguns fatores, como, por exemplo, o liberalismo econômico, a acumulação de capital e a uma série de invenções, nos quais existiam inúmeros elementos de máquina. Um desses elementos, que perdura até os tempos modernos, é o mancal, sendo que esse é um elemento que faz a interface entre superfícies que possuem movimento relativo entre si, podendo ser esse movimento tanto de rotação quanto de translação (NORTON, 2004).

Porém, o grande problema encontrado nos mancais era o atrito, que acarretava em aumento da temperatura de trabalho dos mancais e em perda de eficiência nas máquinas. Para se resolver tal fato, um dos meios propostos foi a introdução de lubrificação entre as partes móvel e estática. Sendo assim, três homens, independentemente uns dos outros, descobriram e formularam o mecanismo da lubrificação hidrodinâmica colocando-a como um dos ramos da engenharia. Foram eles Petrov, Tower e Reynolds.

Segundo Pinkus (1987), esse processo começou com o russo Nicolai Petrov, cujo principal interesse era na área sobre atrito. Ele postulou, em 1883, que a principal propriedade de um fluido, para o atrito, não era a densidade e sim a viscosidade, e que a natureza do atrito em um mancal não era resultado do contato entre duas superfícies, mas sim do cisalhamento viscoso do fluido na interface. Ou seja, Petrov propôs a natureza hidrodinâmica do atrito em mancais. No entanto, Petrov falhou em expandir sua visão da natureza do atrito para a da capacidade de carga em mancais. Esse fundamento foi descoberto por Beauchamp Tower.

Muitas publicações sobre atrito foram publicadas após Petrov. Nesse sentido, Tower conduziu uma série de experimentos sobre atrito em mancais ferroviários. Essa famosa série de experimentos, que ocorreram em 1883 e 1884, foi responsável pela descoberta da presença da pressão hidrodinâmica no filme de lubrificante (PINKUS, 1987).

O mancal utilizado por Tower possuía um furo no centro do mancal na parte superior, para entrada de óleo. No entanto, quando o eixo começou a rodar, Tower observou que o óleo era

bombeado para fora do mancal. Para acabar com esse vazamento, uma rolha foi inserida no orifício, porém, ela foi ejetada do furo. Assim, foi percebido que o filme de lubrificante, que separava o eixo do alojamento, possuía altas pressões. Dessa maneira, nasceu o conceito de lubrificação hidrodinâmica.

Ambos, Petrov e Tower, obtiveram seus conceitos através de resultados experimentais, mas, era preciso dar às comprovações uma sólida base teórica. Esse feito foi atingido por Osborne Reynolds quase que simultaneamente com os outros dois pesquisadores, no entanto, Reynolds desenvolveu sua teoria sem o conhecimento dos experimentos de Tower (PINKUS, 1987). A equação diferencial de Reynolds prevê as bases matemática e física da ciência tribológica de uma maneira tão abrangente, que essa equação se manteve uma ferramenta essencial até os dias atuais. O novo conceito que emergiu dessa formulação, é que a ação hidrodinâmica necessita de uma cunha geométrica de seção convergente para a formação das pressões.

A equação de Reynolds é uma equação diferencial parcial não homogênea, com coeficientes variáveis e de difícil solução analítica, no qual muitos esforços foram direcionados para sua solução. Uma tentativa para a solução dessa equação consiste em considerar o mancal como infinitamente longo, sendo que essa consideração foi feita pelo próprio Reynolds, porém sem sucesso na solução (PINKUS, 1987). Assim, em 1904, Sommerfeld utilizou a simplificação para mancais infinitamente longos e, diferentemente de Reynolds, obteve a expressão analítica explícita para a distribuição de pressão, carregamento, lugar geométrico do eixo e coeficiente de atrito.

No entanto, a solução para mancais infinitamente longos apresentavam problemas como distribuição de pressão anti-simétrica e com isso aumento da capacidade de carga do mancal e ângulo de equilíbrio sempre igual a  $90^\circ$ . Então, para se tentar sanar esses problemas, investigou-se a solução para um mancal infinitamente curto. Desde 1929, essa idéia já era considerada, porém, ela só ganhou projeção em 1952 quando Ocvirk forneceu uma solução completa e detalhada para o problema de mancais curtos. Segundo Pinkus (1987), essa solução era mais simples, compacta e elegante que a solução para mancais longos.

Com os avanços científicos produzidos, sobretudo devido às guerras mundiais, foram criados os computadores, e tal fato ajudou muito no estudo de mancais hidrodinâmicos finitos, sendo que Pinkus (1956) foi o primeiro a utilizar os computadores para resolver a equação de

Reynolds completa, com as condições de contorno adequadas. Ele obteve a solução não só para mancais circulares, mas também para mancais elípticos (PINKUS, 1956) e trilobados (PINKUS, 1958).

Com o passar do tempo, a idéia, introduzida por Pinkus, de aplicar métodos numéricos na análise de mancais hidrodinâmicos passou a ser expandida, o que permitiu avaliar outros efeitos de interesse nos mancais, além da distribuição de pressão e forças hidrodinâmicas. Diante disso, começaram a ser estudados os efeitos térmicos nos mancais, através de análises termohidrodinâmicas (THD).

Cope (1949) foi um dos primeiros a considerar a variação de temperatura no lubrificante através da resolução da equação da energia, alterando, assim, sua viscosidade. Sua consideração foi muito simplificada, considerando temperatura constante na direção radial e ausência de condução através do filme de óleo e nas partes sólidas.

A partir do trabalho de Cope, um dos trabalhos com grande destaque foi o de Hunter e Zienkiewicz (1960). Naquele trabalho, os efeitos da variação de temperatura na espessura do filme de óleo, que garantem as variações de viscosidade, foram estudados para o caso clássico de um segmento inclinado infinitamente longo. A solução numérica para mancais típicos foi obtida para diferentes condições de contorno térmicas (adiabático e isotérmico) e uma comparação com os resultados da análise clássica foi feita. Dessa análise se concluiu que a troca de calor através da direção radial podia ser desprezada, assim, nenhuma variação de viscosidade ocorreria nessa direção. Porém, através de trabalhos mais recentes, descobriu-se que essa conclusão estava equivocada.

Nos anos anteriores o estudo da lubrificação ficou debilitado, uma vez que vários novos mecanismos de geração de pressão, associados com a variação das propriedades do fluido no filme, foram sugeridos, o que resultou em muitas simplificações para a equação de Reynolds, sendo que cada simplificação era utilizada somente para uma determinada aplicação. Por esse motivo, a equação de Reynolds começou a ser encontrada em diversas formas, aplicada cada uma a um determinado caso. Sendo assim, Dowson (1962) deduziu uma equação de Reynolds geral que permitia a variação de quantidades relevantes, como viscosidade e densidade, tanto através do filme de óleo como ao longo do mesmo. Essa equação era derivada das equações fundamentais da hidrodinâmica com o mínimo de hipóteses restritivas.

Esse mesmo Dowson, agora na companhia de March (1966), desenvolveu uma análise termohidrodinâmica baseada em análises experimentais. A análise considerava uma solução compatível das equações de Reynolds, energia e da condução térmica nos sólidos, para condições bi-dimensionais. Os resultados mostraram que a solução estava de acordo com os experimentos. A equação de Reynolds e da energia levavam em conta a variação das propriedades do lubrificante nas coordenadas circunferencial e radial. Além disso, foi comprovado experimentalmente que o eixo, devido ao seu movimento de rotação, podia ter sua temperatura considerada constante por toda extensão do mancal e que os gradientes axiais de temperatura na parede do mancal são desprezíveis.

Devido ao fato de a solução simultânea da Equação de Reynolds e da equação da energia demandar um tempo computacional considerável, McCallion, Yousif e Lloyd (1970), investigaram a precisão das magnitudes dos parâmetros de operação avaliados a partir de um método simplificado que desacopla essas duas equações no filme lubrificante, negligenciando todos os termos de pressão da equação da energia. O mancal estudado era de comprimento finito sob ação de um carregamento constante e os efeitos térmicos eram para dois modelos: o isotérmico e o adiabático. O resultado encontrado foi comparado com resultados experimentais e, segundo os autores, a simplificação foi eficiente e razoavelmente precisa para prever o comportamento do mancal.

Em 1979, Mitsui (1979) e Yamada fizeram uma investigação sobre o efeito da influência das características térmicas do lubrificante e das condições de operação do mancal no comportamento do mesmo. Para tal, utilizaram uma equação da energia que basicamente levava em conta o termo difusivo na direção radial do fluido e o termo convectivo na direção circunferencial, além da dissipação viscosa. Também existia troca de calor entre o fluido e o mancal. Descobriram que as tanto as características térmicas do lubrificante quando a velocidade de rotação do eixo, possuem grande influência nas distribuições de temperatura e pressão e na capacidade de sustentação do mancal.

Alguns anos mais tarde, Mitsui (1982) continuou esse estudo e publicou um artigo mostrando a influência de modificações geométricas no comportamento do mancal e os resultados mostraram que a máxima temperatura e sua localização variam com a mudança da folga radial. Também, nesse mesmo ano, dando seqüência a suas análises, Mitsui (1982) deu ênfase à análise dinâmica em mancais radiais, obtendo os coeficientes equivalentes de rigidez e

amortecimento, considerando a variação da viscosidade no filme de óleo e as comparou com dados experimentais, tendo uma boa aproximação.

Esses coeficientes visam à melhora do cálculo da velocidade crítica do rotor pois insere a flexibilidade do filme de óleo. Contudo, esses coeficientes são obtidos, usualmente através de análises experimentais. Sendo assim, Lund (1987) fez uma revisão de como se calcular teoricamente esses coeficientes.

Era necessário, no entanto, melhorar o modelo tornando-o mais complexo. Nesse intuito, Ferron, Frene e Boncompain (1983) estudaram o problema da temperatura em um mancal de comprimento finito, cujas análises realizadas levaram em conta a transferência de calor entre o filme de óleo, a parede do mancal e o eixo, considerando a cavitação e a recirculação do lubrificante. A distribuição de pressão e o campo de temperatura foram obtidos através da solução numérica da equação de Reynolds e da equação da energia pelo método das diferenças finitas. Os resultados obtidos através das simulações computacionais foram comparados aos resultados experimentais, apresentando uma boa concordância.

As análises termohidrodinâmicas em mancais forneciam resultados significativos, que intensificaram ainda mais a importância de estudar a distribuição da temperatura em mancais hidrodinâmicos. Os métodos aplicados nessas análises são robustos e eficientes, entretanto, exigem um tempo computacional considerável por basearem na solução numérica completa da equação de energia na forma tridimensional, acoplada com a equação de transferência de calor. Dentro desse contexto, e visando acelerar a obtenção de resultados, Lund e Hansen (1984), propuseram um novo método para analisar as condições de temperatura em mancais. A diferença básica do método proposto é a aproximação do perfil de temperatura, através da espessura de filme, por um polinômio de quarta ordem, enquanto a variação da temperatura circunferencial é expressa em termos da expansão em séries de Fourier. Essas considerações simplificaram a solução da equação de energia, juntamente com a equação de transferência de calor, o que possibilitou a obtenção da solução na forma fechada, resultando, assim, em um método mais rápido em termos de tempo computacional.

Apesar da desvantagem do alto “custo” computacional, houve uma tendência em realizar os estudos e as análises em lubrificação termohidrodinâmica através da solução numérica da equação de energia, acoplada a equação de transferência de calor, na forma tridimensional. Essa tendência ocorreu basicamente devido a dois motivos: a precisão dos resultados obtidos através

desse método e por acreditar-se que, no futuro, com o desenvolvimento de novos computadores e o aprimoramento dos métodos computacionais, o problema do tempo computacional seria minimizado. Desta forma, Boncompain, Fillon e Frene (1986) realizaram novas análises termohidrodinâmicas em mancais, aprimorando a forma de resolução e adicionando novos efeitos, como o escoamento reverso na entrada do lubrificante e a recirculação do fluxo de calor ao longo da zona inativa (região cujo gradiente de pressão é nulo). Os métodos de diferenças finitas e Gauss-Seidel foram aplicados para solucionar as equações diferenciais envolvidas nesse trabalho. Para resolução, inicialmente, determinam-se as viscosidades do fluido em cada ponto, a partir de um campo de temperatura inicial. Em seguida, calcula-se a distribuição de pressão e a velocidade do fluido em todos os pontos. Finalmente, são solucionadas, simultaneamente, a equação de energia e a de transferência de calor, obtendo-se um novo campo de temperatura. Esse processo de solução iterativo é realizado sucessivamente até atingir uma diferença pontual inferior a 0,1 %.

Além do problema do custo computacional, existiam outros. A mistura de lubrificante quente e frio na reposição de óleo do mancal continuava sendo um problema crítico na determinação do desempenho do mancal. Com isso, Heshmat e Pinkus (1986) apresentaram uma investigação conceitual e experimental dos mecanismos de mistura na entrada de óleo em termos de fluxos e temperaturas mais relevantes. Além das equações teóricas para a temperatura de mistura, os resultados obtidos em uma série de experimentos visaram à medição da temperatura de mistura como uma função dos parâmetros do mancal. Também, equações empíricas, baseadas nas correlações experimentais para a determinação da temperatura de mistura, foram apresentadas para mancais radiais e axiais.

Rajalingham e Prabhu (1987) também investigaram a influência da temperatura em mancais hidrodinâmicos. Entretanto, Rajalingham e Prabhu enfatizaram a importância dos efeitos térmicos nas características do mancal, ressaltando os erros envolvidos na estimação da temperatura efetiva do filme lubrificante, através da teoria de mancal isoviscoso. As análises mostraram que, para um dado carregamento e velocidade, a dependência da viscosidade à temperatura aumenta a razão de excentricidade e a taxa de escoamento, sendo que, em contra partida, reduz o ângulo de atitude e o atrito viscoso no mancal.

No início da década de 90, Han e Paranjpe (1990) realizaram uma análise termohidrodinâmica para avaliar o desempenho de mancais hidrodinâmicos. Entretanto,

diferentemente dos trabalhos anteriores, foi utilizado o método dos volumes finitos para a resolução das equações envolvidas no problema. Segundo Han e Paranjpe, o método dos volumes finitos, além de facilitar a implementação das equações, permite obter resultados mais precisos e estáveis, por ser baseado na equação da continuidade. De acordo com os resultados obtidos, pode-se verificar que a pressão de alimentação e a configuração da ranhura de alimentação influenciam a distribuição de temperatura no mancal, afetando consideravelmente a capacidade de carga e a perda de pressão. Além disso, observou-se que a escolha das condições de contorno de temperatura influencia fortemente a solução, por isso deve-se tomar um cuidado especial nessa estimativa, especificando valores realísticos. Por fim, Han e Paranjpe afirmam a importância em realizar a análise termohidrodinâmica utilizando o método dos volumes finitos, destacando a facilidade em averiguar diversos casos, incluindo efeitos de fluxo reverso, cavitação e recirculação.

Fitzgerald e Neal (1992) investigaram a distribuição de temperatura e transferência de calor em mancais hidrodinâmicos, considerando como parâmetros de análise a folga radial, a largura do mancal e o carregamento aplicado. O objetivo deste trabalho foi avaliar a influência destes parâmetros na distribuição de temperatura e na transferência de calor. Por esse motivo, foi realizada uma série de testes experimentais em mancais hidrodinâmicos, o que permitiu obter um banco de resultados sobre o comportamento térmico em mancais.

Neste período, apesar do grande conhecimento em relação às condições termohidrodinâmicas em mancais sob regime permanente, o comportamento termohidrodinâmico em mancais em regime transiente ainda era incerto. Devido à necessidade em conhecer as distribuições térmicas nos mancais, antes de atingir a condição de equilíbrio, Paranjpe e Han (1995) analisaram as condições termohidrodinâmicas em mancais durante o regime transiente. Essa análise sob regime transiente foi realizada considerando um carregamento dinâmico no mancal (carregamento senoidal). Desta forma, diferentemente das análises anteriores, para cada instante de tempo, obtém-se um novo balanço de força que resultará uma nova excentricidade, assim, depois de conhecida a posição do eixo no mancal, realiza-se a avaliação termohidrodinâmica no mesmo. Os resultados obtidos nesse trabalho permitiram concluir que o mancal atua como um reservatório de calor, absorvendo e liberando uma grande fração do calor total gerado (acima de 40%), sendo que apenas uma pequena fração (10%) do calor total gerado é

transmitida às bordas. Além disso, pode-se verificar, também, que a temperatura no filme de óleo varia consideravelmente no tempo.

Com o passar do tempo, os modelos matemáticos começaram a ficar mais complexos e reais, e com isso também surgiu a necessidade de se inserir realmente os elementos de vínculo no comportamento das máquinas rotativas. Nesse sentido, foram desenvolvidos muitos trabalhos de análise, especialmente de vibrações e estabilidade em rotores. Num desses trabalhos, Morton (2008) faz uma revisão das investigações sobre vibrações síncronas instáveis em máquinas rotativas. Esse comportamento era causado devido a modificações térmicas pela diferença de temperatura através do eixo nas regiões dos mancais e selos. Seguindo pela mesma linha de raciocínio, Daniel, Alves e Cavalca (2010) estudaram o comportamento de um rotor Laval com fundação rígida e suportada por mancais cilíndricos. O rotor foi discretizado a partir do método dos elementos finitos e o mancal possuía comportamento termohidrodinâmico. Pôde-se observar que, devido ao aumento de temperatura causado pelo cisalhamento viscoso, houve uma mudança na frequência natural do sistema. No entanto, essa mudança só é expressiva em máquinas com altas velocidades de rotação.

Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo analisar a influência do aquecimento do filme de lubrificante, devido ao cisalhamento viscoso, no comportamento de um mancal radial cilíndrico e o seu conseqüente impacto nos coeficientes dinâmicos equivalentes do filme de lubrificante. Para isso será analisada, para o modelo termohidrodinâmico, a distribuição de pressão e temperatura no filme, os coeficientes dinâmicos equivalentes de rigidez e amortecimento assim como a resposta ao desbalanceamento para um rotor suportado por mancais hidrodinâmicos. Esses resultados serão comparados com os resultados obtidos a partir do modelo hidrodinâmico clássico.

## **3. Modelagem Matemática**

A distribuição de temperaturas no interior do filme de óleo de um mancal depende de muitos fatores, dentre os quais se destacam a viscosidade do fluido, a distribuição de pressões presente, as eventuais trocas de calor do óleo com as partes sólidas e a mistura do óleo presente no mancal com o óleo de reposição. Assim, deve-se escolher cuidadosamente e criteriosamente as hipóteses do modelo matemático a ser adotado na determinação teórica dos valores de temperatura do mancal. Levando isso em consideração, neste capítulo, serão apresentados o modelo matemático do mancal em estudo e suas respectivas hipóteses para a determinação da distribuição de temperatura no filme de óleo.

### **3.1. Descrição do Problema**

Os mancais radiais são usados para suportar eixos e para sustentar carga radial com o mínimo de perda de carga e atrito. São dependentes do movimento do eixo para gerar pressões no filme de fluido que suportem a carga aplicada. A geometria mais comum para um mancal radial é mostrada na Figura 3.1. O eixo, normalmente, não gira concêntrico com o mancal. O deslocamento do centro do eixo relativo ao centro do mancal é conhecido como excentricidade. A posição de excentricidade do eixo, assim como a folga do mancal, são influenciadas pela carga que esta sendo suportada. A excentricidade é auto-ajustada até que a carga seja balanceada pela pressão gerada no filme de fluido convergente. A pressão gerada e a capacidade de suportar cargas, geralmente dependem da excentricidade do eixo, da velocidade angular, do efeito de viscosidade do lubrificante, e das dimensões do mancal e sua folga. Essa pressão é representada matematicamente pela equação de Reynolds.

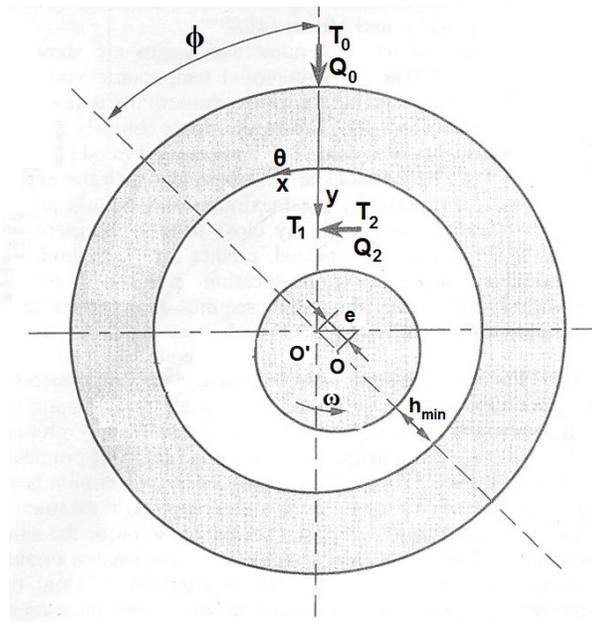


Figura 3.1: Mancal Radial (KHONSARI, 1996).

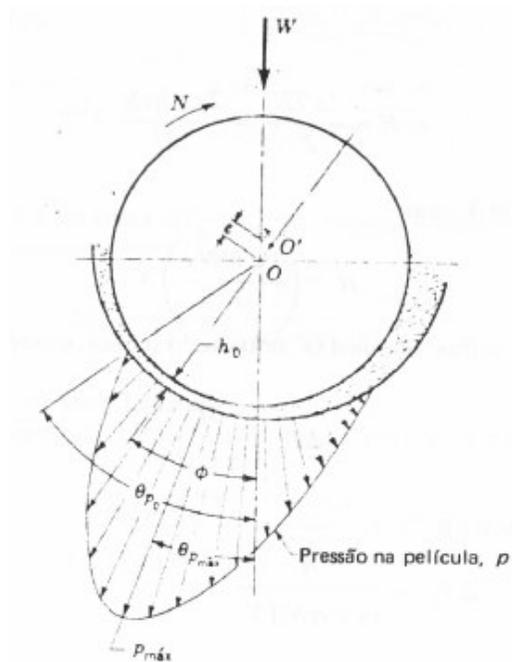


Figura 3.2: Distribui\~ao de press\~ao (NORTON, 2004).

A forma isoviscosa da equa\~ao de Reynolds \u00e9 comumente usada como base para an\~alise de desempenho de mancais. Como o desempenho de tais elementos de m\~aquina \u00e9 fortemente

dependente da lubrificação viscosa, e como a viscosidade de lubrificantes comuns é função da temperatura, os resultados da teoria clássica podem ser utilizados somente em casos em que o aumento da temperatura do lubrificante seja desprezível. Assim, é necessária a obtenção do campo de temperatura, que é obtido a partir da equação da energia, para a determinação da viscosidade real do sistema.

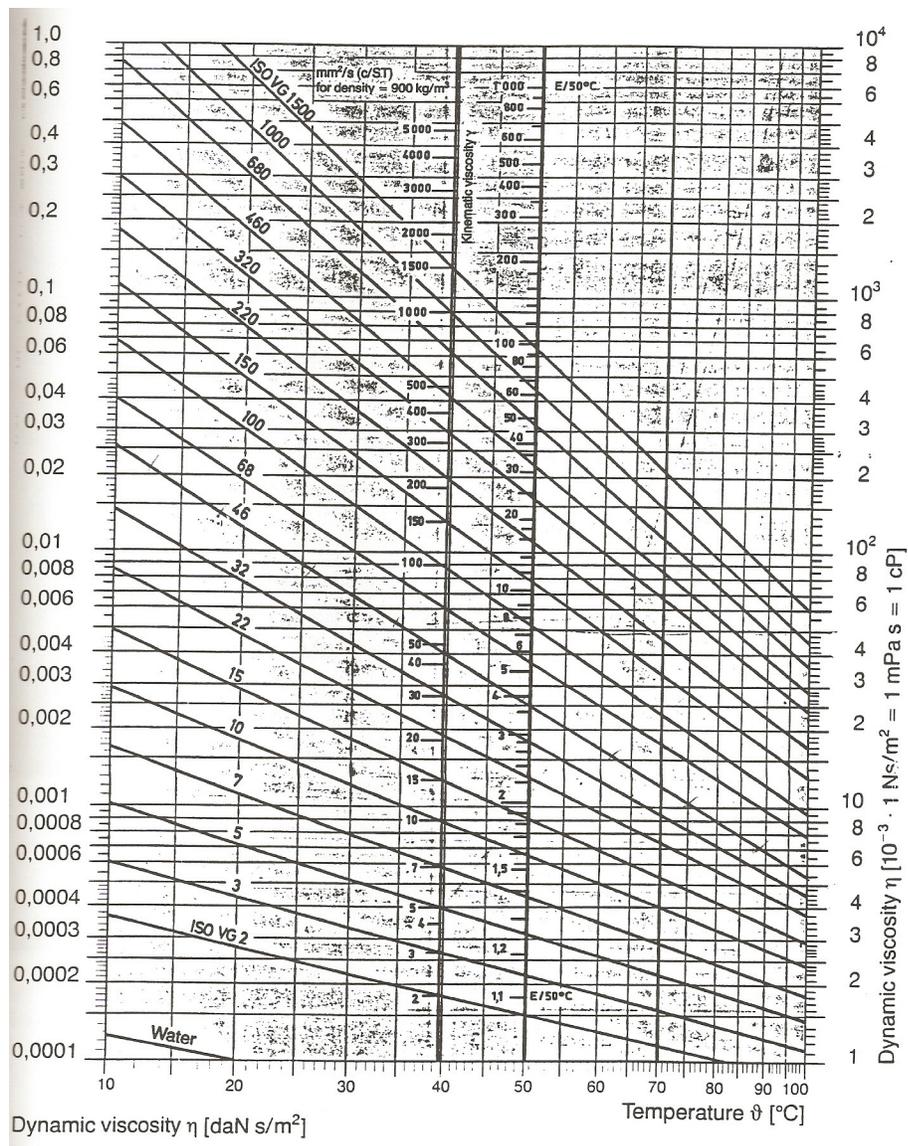


Figura 3.3: Carta de viscosidade (SANTOS, 1997).

Inúmeras fórmulas empíricas têm sido propostas para se obter a viscosidade a partir da temperatura e, geralmente, eram descritas em cartas de viscosidade como a da Figura 3.3. Mas, atualmente, com o advento de aparelhos reológicos, é possível obter equações precisas.

Com essa análise é possível obter a posição de equilíbrio do eixo no interior do mancal, que acontece quando a força vertical no mancal é igual ao carregamento imposto e as forças horizontais se anulam. A partir da posição de equilíbrio tem-se a análise dos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento do mancal, que são obtidos a partir de pequenos deslocamentos impostos ao eixo em torno da posição de equilíbrio deste no interior do mancal.

Pode-se, então, utilizar esses dados na obtenção do comportamento da máquina rotativa.

## 3.2. Viscosidade

A fricção, entre duas superfícies que se encontram completamente separadas, se dá somente pelo atrito interno do líquido que as separam, e recebe o nome de viscosidade. Newton, em 1687, descobriu que a viscosidade absoluta de um líquido pode ser definida como:

$$\mu = \frac{\tau}{s} \quad (3.1),$$

no qual  $\tau$  é a tensão de cisalhamento,  $s$  é a taxa de deformação por cisalhamento, e  $\mu$  viscosidade absoluta.

Os fluidos que possuem tensão de cisalhamento diretamente proporcional à taxa de deformação são denominados de fluidos Newtonianos e, a relação entre estes, de viscosidade.

Portanto, viscosidade pode ser definida como a resistência à deformação dos fluidos em movimento, sendo que ela não se manifesta se o fluido se encontrar em repouso (HAMROCK, 1994). A ação da viscosidade representa uma forma de atrito interno, exercendo-se entre partículas adjacentes que se deslocam a diferentes velocidades. A viscosidade é uma propriedade termodinâmica (dependente da temperatura e da pressão).

Observando a equação (3.1) e a Figura 3.4, pode-se entender melhor o conceito de viscosidade. Na figura abaixo, temos o plano superior movendo-se com velocidade constante  $u$  e o plano inferior estacionário.

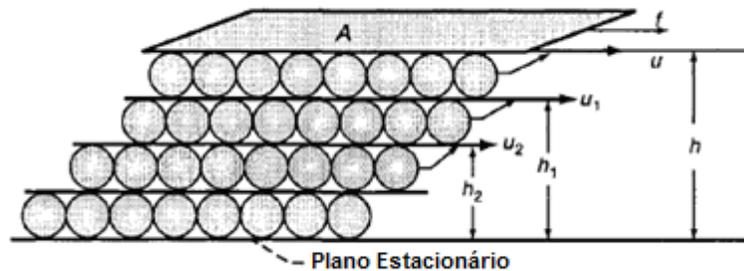


Figura 3.4: Ilustração física do postulado de Newton (HAMROCK, 1994).

As moléculas de fluido podem ser visualizadas como esferas que rolam através dos planos. Como o fluido irá molhar e aderir às superfícies, as esferas inferiores não se moverão, enquanto que as esferas superiores se moverão com velocidade igual ao do plano superior. As esferas intermediárias se moverão com uma velocidade diretamente proporcional entre os dois planos. Esse tipo de movimento entre camadas paralelas é conhecido como escoamento viscoso.

Então, Newton definiu:

$$s = \text{taxa de deformação por cisalhamento} = \frac{u}{h} = \frac{u_1}{h_1} = \frac{u_2}{h_2} = \dots$$

no qual:  $u_n$  é a velocidade do n-ésimo plano e  $h_n$  é a distância entre o n-ésimo plano e o plano inferior.

Newton corretamente deduziu que a força necessária para manter constante a velocidade  $u$  do plano superior é proporcional a área  $A$  e ao gradiente de velocidade ou taxa de deformação cisalhante ( $s$ ). Assim:

$$f = \mu \cdot A \cdot \frac{u}{h} \quad (3.2),$$

onde  $f$  é a força para se manter constante a velocidade e  $A$  a área.

Rearranjando a equação (3.2) temos:

$$\mu = \frac{f/A}{u/h} \quad (3.3),$$

no qual  $f/A$  é a tensão de cisalhamento e  $u/h$  a taxa de deformação por cisalhamento.

Alguns outros aspectos importantes sobre a viscosidade são:

1. A resistência viscosa do fluido aumenta com a taxa de deformação. A força requerida quando o fluxo é rápido é maior que a força quando o fluxo é lento.
2. A viscosidade diminui com o aumento da temperatura. A maior energia térmica permite que as moléculas se desprendam, ou seja, menores forças externas são necessárias pra romper as ligações.
3. A viscosidade de um líquido geralmente aumenta com o aumento da pressão. A viscosidade deve aumentar em várias ordens de magnitude. Isto implica que quanto mais se tenta “apertar” o lubrificante, maior será a viscosidade e maior será sua resistência a extrusão. No entanto, essa variação é bem menor que o decréscimo da viscosidade devido ao aumento da temperatura.

### 3.3 Equações de Conservação

As relações básicas para uma análise de transporte convectivo podem ser baseadas na complexidade do problema a ser resolvido. Tais relações podem ser divididas em duas categorias: princípios de conservação e equações de taxa.

Os princípios de conservação são fundamentais para qualquer estudo de fenômenos físicos. Quantidades físicas conservativas são: massa, energia, espécie de massa (na ausência de reações químicas), e carga elétrica.

É necessário ser capaz de prever a taxa na qual a quantidade pode ser difundida relativamente ao meio que atravessa. As equações que descrevem tal comportamento são

chamadas de equações de taxa, ou de relações fenomenológicas, devido a uma pertencer ao fenômeno da condução de calor, uma ao fenômeno da condução elétrica e assim por diante.

### 3.3.1. Conservação de Massa

O princípio da conservação de massa é aplicado, primeiramente, ao volume de controle mostrado na Figura 3.5. Esse princípio diz que a massa de um sistema de identidade fixa (sistema sempre composto das mesmas partículas de massa) é constante. O sistema será contido pela linha pontilhada. Conforme o fluido escoar e distorcer o sistema, a linha pontilhada também se move e distorce de maneira a manter em seu interior as mesmas partículas de fluido. A linha cheia denota um volume de controle arbitrário, no qual o sistema inicialmente era contido. No tempo  $t$  o sistema ocupava as regiões 1 e 3; no tempo posterior  $t + \Delta t$ , ocupa as regiões 1 e 2. É pressuposto que o tempo  $\Delta t$  seja suficientemente pequeno para que a região 1 ocupe uma parte do volume de controle. Assim:

$$m_1(t) + m_3(t) = m_1(t + \Delta t) + m_2(t + \Delta t),$$

no qual  $m_n(t)$  é a massa da região  $n$  no instante  $t$  e  $m_n(t + \Delta t)$  é a massa da região  $n$  no instante  $t + \Delta t$ .

Rearranjando:

$$m_1(t + \Delta t) - m_1(t) = m_3(t) - m_2(t + \Delta t).$$

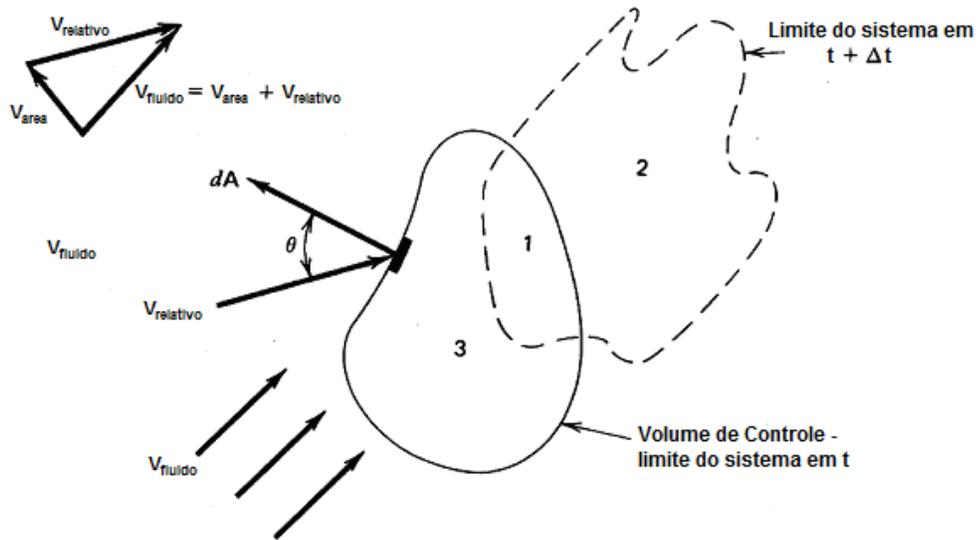


Figura 3.5: Volume de controle geral no qual há escoamento de fluido (BURMEISTER, 1983).

Dividindo por  $\Delta t$  temos:

$$\frac{m_1(t + \Delta t) - m_1(t)}{\Delta t} = \frac{m_3(t)}{\Delta t} - \frac{m_2(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.4).$$

No limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , a região 1 coincide com o volume de controle. No entanto, é permitido interpretar as partes da equação (3.4). A parte esquerda da equação representa a taxa na qual a massa é mantida no volume de controle. O primeiro termo do lado direito representa a taxa no qual a massa entra no volume de controle, desde que a massa  $m_3(t)$ , inicialmente ocupando a região 3, seja substituída se o fluido for contínuo. O segundo termo do lado direito representa a taxa no qual a massa deixa o volume de controle, desde que a massa  $m_2(t + \Delta t)$  na região 2 estivesse inicialmente dentro do volume de controle. O princípio de conservação de massa para o volume de controle pode ser então escrito como:

$$\dot{\Sigma m}_{armazenado} = \dot{\Sigma m}_{entra} - \dot{\Sigma m}_{sai} \quad (3.5),$$

no qual a notação pontual significa taxa com relação ao tempo.

Essa equação pode ser reformulada na forma integral como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \rho \cdot dV \right] = - \int_A \rho \cdot \left( \vec{V}_{rel} \cdot d\vec{A} \right) \quad (3.6),$$

desde que a massa, em qualquer volume infinitesimal  $dV$ , seja  $\rho \cdot dV$ , onde  $\rho$  é a densidade do fluido, e a taxa líquida na qual o fluxo de massa, através de uma área infinitesimal  $dA$ , seja  $\rho \cdot (Vol_{fluido} - Vol_{area}) \cdot \cos\theta \cdot dA$  ou  $\rho \cdot \vec{V}_{rel} \cdot d\vec{A}$ , onde  $\vec{V}_{rel}$  é o vetor velocidade relativa, assumindo que a normal da superfície aponta para fora do volume de controle.

Utilizando o teorema do divergente, que relaciona integral de volume com integral de superfície de acordo com:

$$\int_A \vec{X} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \left( \vec{X} \right) \cdot dV,$$

no qual  $\nabla \left( \vec{X} \right)$  é o divergente do vetor  $\vec{X}$ . Pode-se manipular a equação (3.6) para uma forma

mais conveniente. Reconhecendo que  $\vec{X} = \rho \cdot \vec{V}_{rel}$  temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho \cdot dV \right) + \int_V \text{div} \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) \cdot dV = 0 \quad (3.7).$$

A equação (3.7) é aplicada a um volume de controle que pode ser distorcido. Quando o volume possui formato fixo (caso de maior interesse particular) a derivada no tempo pode ser incluída no integral:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) \right] \cdot dV = 0 \quad (3.8).$$

Focando a atenção para um volume de controle infinitesimal (sobre o qual não há alteração significativa das propriedades), a equação (3.8) pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}_{rel}) = 0 \quad (3.9).$$

e pode ser chamada de uma forma de lei-de-conservação.

Se o volume de controle for considerado imóvel,  $\vec{V}_{area} = 0$  e então  $\vec{V}_{rel} = \vec{V}_{fluido}$ .

Denotando  $\vec{V}_{rel}$  por somente  $\vec{V}$  temos (BURMEISTER, 1983):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (3.10).$$

A equação (3.10) é chamada de Equação da Continuidade e consiste no princípio de conservação de massa mais útil para volume de controle infinitesimal.

Considerando  $\vec{V} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k}$  e o operador  $\text{div} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$ , a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0 \quad (3.11).$$

No estado estacionário  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , e para densidade constante temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.12).$$

### 3.3.2. Conservação da Quantidade de Movimento

O movimento de uma partícula de fluido deve ser influenciado por forças externas agindo sobre a massa, um fato que pode ser levado em conta pelo uso da segunda lei de Newton. A segunda lei de Newton para um sistema de coordenadas inercial e de identidade fixa é:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left( m \cdot \vec{V} \right) \quad (3.13).$$

A quantidade de movimento do sistema  $m \cdot V$  muda com o tempo devido à ação de forças externas. No entanto, a variação na quantidade de movimento é armazenada no sistema e pode ser dito que:

$$\vec{F} = \dot{\vec{Q}}_{\text{armazenado}},$$

onde  $\dot{\vec{Q}}$  é a taxa de quantidade de movimento no tempo, e  $\vec{F}$  age como um termo gerador da quantidade de movimento.

Como é impraticável identificar permanentemente um sistema de identidade fixa em um fluido em movimento, a segunda lei de Newton na forma da equação (3.13) não é diretamente aplicável. Portanto, deve-se encontrar uma forma apropriada para o volume de controle através do qual escoo fluido nas superfícies. Para esse fim, um sistema de identidade fixa é definido e seguido por um curto período de tempo  $\Delta t$ . Referindo-se a Figura 3.5, é visto que a quantidade de movimento inicial do sistema é:

$$m_1 \cdot \vec{V}_1(t) + m_3 \cdot \vec{V}_3(t),$$

e a final:

$$m_1 \cdot \vec{V}_1(t + \Delta t) + m_2 \cdot \vec{V}_2(t + \Delta t).$$

onde  $\vec{V}_n(t)$  é o vetor velocidade da massa  $n$  no instante  $t$  e  $\vec{V}_n(t + \Delta t)$  é o vetor velocidade da massa  $n$  no instante  $t + \Delta t$ . A variação na quantidade de movimento é:

$$\Delta m \cdot \vec{V} = m_1 \cdot \vec{V}_1(t + \Delta t) - m_1 \cdot \vec{V}_1(t) + m_2 \cdot \vec{V}_2(t + \Delta t) - m_3 \cdot \vec{V}_3(t).$$

Dividindo por  $\Delta t$  e substituindo na equação (3.13):

$$\vec{F} = \frac{m_1 \cdot \vec{V}_1(t + \Delta t) - m_1 \cdot \vec{V}_1(t)}{\Delta t} + \frac{m_2 \cdot \vec{V}_2(t + \Delta t)}{\Delta t} - \frac{m_3 \cdot \vec{V}_3(t)}{\Delta t} \quad (3.14).$$

No limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , a região 1, da Figura 3.5, coincide com o volume de controle. Os termos da equação acima podem ser interpretados da mesma maneira que na equação da continuidade, já que esses termos têm forma idêntica. Assim, a equação (3.14) pode ser escrito como:

$$\vec{F} + \dot{\vec{Q}}_{entra} - \dot{\vec{Q}}_{sai} = \dot{\vec{Q}}_{armazenado} \quad (3.15).$$

no qual  $\vec{Q}$  designa o vetor quantidade de movimento.

A equação (3.15) é a forma geral mais conveniente da segunda lei de Newton. Deve ser lembrado que essa é uma equação vetorial, havendo 3 componentes.

Pode-se novamente escrever a equação anterior na forma integral como:

$$\vec{F} - \int_A \vec{V} \cdot \rho \cdot \vec{V}_{rel} \cdot dA = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \rho \cdot \vec{V} \cdot dV \right] \quad (3.16).$$

O segundo termo do lado esquerdo é o fluxo líquido de quantidade de movimento, que é quantidade de movimento por unidade de massa  $\times$  taxa de massa escoada. O vetor identidade  $\int_A \vec{y} \cdot \left( \vec{x} \cdot d\vec{A} \right) = \int_V \left[ \vec{y} \cdot \text{div}(\vec{x}) + \left( \vec{x} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{y} \right] \cdot dV$  permite que uma integral de superfície seja expressa como integral sobre o volume envolto pela superfície. Assim, a equação (3.16) se torna:

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \rho \cdot \vec{V} \cdot dV \right] + \int_V \left[ \vec{V} \cdot \text{div} \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) + \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{V} \right] \cdot dV \quad (3.17).$$

Se o volume de controle for de formato fixo:

$$\vec{F} = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \cdot \vec{V} \right) + \vec{V} \cdot \text{div} \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) + \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{V} \right] \cdot dV.$$

Se o volume de controle for de tamanho infinitesimal, de forma que não haja nenhuma variação de propriedades em sua extensão, a relação é aproximada por:

$$\frac{\vec{F}}{dV} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \cdot \vec{V} \right) + \vec{V} \cdot \text{div} \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) + \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{V}.$$

que é uma forma de lei-de-conservação. Essa equação pode ser rearranjada como:

$$\frac{\vec{F}}{dV} = \vec{V} \cdot \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) \right] + \rho \cdot \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V}_{rel} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{V} \right].$$

Devido à equação da continuidade o primeiro termo do lado direito é igual a zero, então, a segunda lei de Newton aplicada a um volume de controle infinitesimal de formato fixo é:

$$\frac{\vec{F}}{dV} = \rho \cdot \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V}_{rel} \bullet \nabla \right) \cdot \vec{V} \right] \quad (3.18).$$

A notação em derivada total nos dá uma forma mais compacta:

$$\frac{\vec{F}}{dV} = \rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (3.19).$$

O significado da derivada total pode ser visto a seguir: considere somente a componente  $x$  de velocidade,  $u$ .

$$u = f(x, y, z, t)$$

A mudança em  $u$  que ocorre no tempo  $dt$  é:

$$Du = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz$$

No limite quando  $dt \rightarrow 0$ ,  $dx/dt = u$ ,  $dy/dt = v$  e  $dz/dt = w$ . Assim, dividindo a equação anterior por  $dt$ , a derivada total para a componente  $u$  pode ser escrita como:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w$$

Analogamente, para as componentes  $v$  e  $w$  da velocidade:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot w$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w$$

Fazendo algumas manipulações matemáticas, podemos chegar a um modelo alternativo da derivada total:

$$\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{V}_{rel} \cdot \nabla(\ )$$

onde  $\vec{V}_{rel}$  é o vetor velocidade relativa.

No caso em que o volume de controle é estacionário,  $\vec{V}_{area} = 0$ , então  $\vec{V}_{rel} = \vec{V}_{fluido}$ .

Eliminando o subíndice,  $\vec{V}$  representa a velocidade do fluido e a equação (4.18) passa a ser (BURMEISTER, 1983):

$$\frac{\vec{F}}{dV} = \rho \cdot \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{V} \right] \quad (3.20).$$

Em coordenadas retangulares no qual  $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$  e  $\vec{V} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k}$  tem-se:

$$\frac{\vec{F}_x}{dx \cdot dy \cdot dz} = \rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.21a);$$

$$\frac{\vec{F}_y}{dx \cdot dy \cdot dz} = \rho \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.21b);$$

$$\frac{\vec{F}_z}{dx \cdot dy \cdot dz} = \rho \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.21c).$$

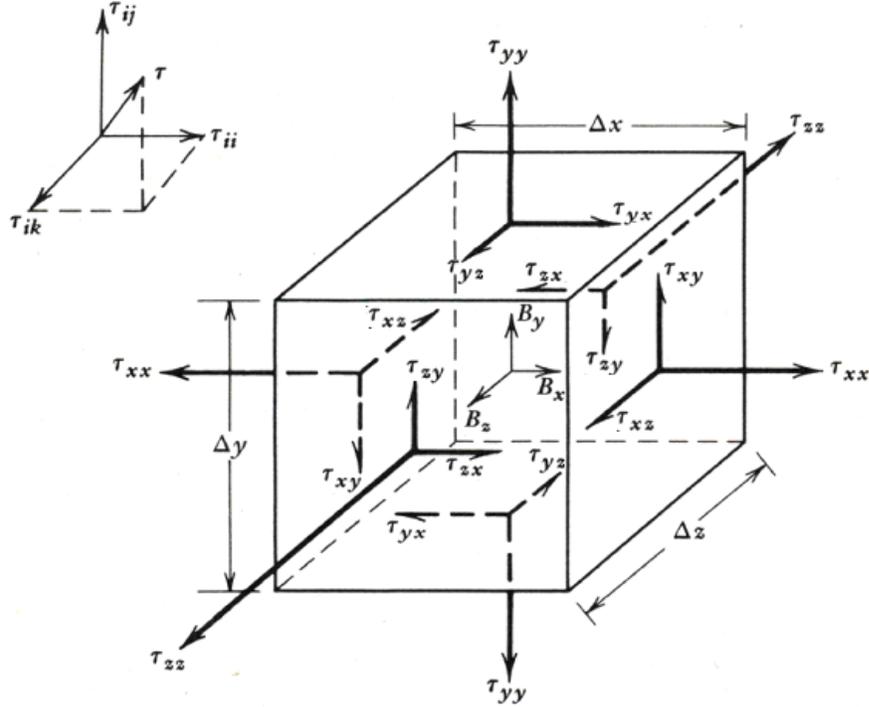


Figura 3.6: Forças de superfície e de campo agindo em um volume de controle estacionário com coordenadas retangulares (BURMEISTER, 1983).

As forças externas agindo sobre um volume de controle influenciam fortemente o movimento do fluido. Essas forças também agem na superfície do volume de controle e são chamadas forças de superfície, ou ainda, agem em toda massa distribuída no volume controle e são chamadas forças de corpo. A Figura 3.6, mostra um volume de controle sobre a ação de forças de superfície (tensões  $\tau_{ij}$ ) e sobre a força de campo denotada por  $B$ . Assim, a componente  $x$  da força vale:

$$\vec{F}_x = \left( \tau_{xx, x+\frac{\Delta x}{2}, y, z, t_{med}} - \tau_{xx, x-\frac{\Delta x}{2}, y, z, t_{med}} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \left( \tau_{yx, x, y+\frac{\Delta y}{2}, z, t_{med}} - \tau_{yx, x, y-\frac{\Delta y}{2}, z, t_{med}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z +$$

$$+ \left( \tau_{zx, x, y, z + \frac{\Delta z}{2}, t_{med}} - \tau_{zx, x, y, z - \frac{\Delta z}{2}, t_{med}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + B_{x, x, y, z, t_{med}} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z .$$

Dividindo por  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  e tomando o limite tendendo a zero de todas as quantidades diferenciais, obtêm-se:

$$\frac{F_x}{dV} = B_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (3.22),$$

onde,  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ . Substituindo a equação (3.22) na equação (3.21a):

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = B_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (3.23a).$$

De forma similar:

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = B_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (3.23b);$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = B_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (3.23c).$$

Observa-se que tensão em sólidos é relacionada com deformação, enquanto tensão em líquidos é relacionada com velocidade (taxa na qual ocorre deslocamento).

Para alguns fluidos, existe uma relação linear entre tensão e velocidade, tais fluidos são chamados de fluidos newtonianos. Para um fluido newtoniano, tais relações podem ser escritas matematicamente como:

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx} \quad (3.24a);$$

$$\tau_{yz} = \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \quad (3.24b);$$

$$\tau_{xz} = \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{zx} \quad (3.24c);$$

$$\tau_{xx} = -p + \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \quad (3.24d);$$

$$\tau_{yy} = -p + \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \quad (3.24e);$$

$$\tau_{zz} = -p + \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \quad (3.24f).$$

A tensão normal a superfície  $\tau_{ii}$  é composta da soma da pressão hidrostática  $p$  e a tensão viscosa, onde  $p = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}$ .

Assim, introduzindo as relações (3.24) nas equações (3.23) de movimento que seguem da segunda lei de Newton, obtêm-se:

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (3.25a);$$

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (3.25b);$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \right] \quad (3.25c).$$

As equações (3.25) também são conhecidas como equações de Navier-Stokes. Quando a viscosidade é constante e expandindo as derivadas temos:

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial \nabla \vec{V}}{\partial x} \right\}$$

O segundo colchete dentro da chave é reconhecido por ser simplesmente  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \nabla \vec{V} \right)$  se a ordem de diferenciação é trocada em cada termo. Então, a equação de movimento na direção x é:

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial \nabla \vec{V}}{\partial x} \right) \quad (3.26).$$

As equações de movimento para as outras duas direções são da mesma forma. No caso geral, com viscosidade constante, a equação pode ser expressa como (BURMEISTER, 1983):

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{B} - \nabla p + \mu \cdot \left[ \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \cdot \nabla \left( \nabla \vec{V} \right) \right].$$

Se a densidade também for constante, a equação (3.10) da continuidade mostra que  $\nabla \vec{V} = 0$ . Então, as equações de movimento são:

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.27a);$$

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.27b);$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.27c).$$

Essas equações podem ser descritas por uma equação vetorial da forma:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{B} - \nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (3.28).$$

### 3.3.3. Conservação da Energia

O princípio da conservação de energia é muito familiar na forma aplicada a um sistema de identidade fixa. Também se sabe que a primeira lei da termodinâmica é expressa em termos matemáticos por:

$$Q_{entra} = \Delta E + W_{sai} \quad (3.29),$$

no qual,  $Q_{entra}$  é o calor transferido para o sistema a partir da vizinhança,  $W_{sai}$  é o trabalho realizado pelo sistema na vizinhança, e  $\Delta E$  é a variação na energia interna do sistema. Deve ser lembrado que a massa do sistema pode armazenar energia internamente, então, a energia interna é:

$$E = E_{cinética} + E_{potencial} + E_{tensão\ sup\ erficial} + E_{eletromagnética} + E_{térmica}.$$

Para o desenvolvimento desta seção, as possíveis contribuições das tensões superficiais, eletromagnéticas, e outras formas, são tomadas como inalteradas pelo processo físico, sendo

desprezados. Também a energia potencial devido à localização do corpo em um campo de força é considerada ser resultado do trabalho feito pela força de campo. Com essas premissas:

$$E = E_{cinética} + E_{térmica}.$$

Para direcionar o princípio da conservação da energia na forma necessária para a aplicação em um volume de controle no qual escoo fluido, a equação (3.29) é aplicada no sistema da Figura 3.5 por um curto período de tempo  $\Delta t$ . Durante esse intervalo de tempo a variação na energia interna no sistema é:

$$\Delta E = [E_1(t + \Delta t) + E_2(t + \Delta t)] - [E_1(t) + E_3(t)],$$

onde  $E_n(t)$  é a energia interna da região  $n$  no instante  $t$  e  $E_n(t + \Delta t)$  a energia interna da região  $n$  no instante  $t + \Delta t$ . Inserindo esse resultado na equação (3.29) e dividindo por  $\Delta t$  temos:

$$\frac{Q_{entra}}{\Delta t} - \frac{W_{sai}}{\Delta t} = \frac{E_1(t + \Delta t) - E_1(t)}{\Delta t} + \frac{E_2(t + \Delta t)}{\Delta t} - \frac{E_3(t)}{\Delta t}.$$

No limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  os termos no lado direito da equação acima, podem ser interpretados como a taxa de energia interna entrando e saindo, respectivamente, como dito anteriormente. Então o princípio de conservação de energia para um volume de controle pode ser expresso por:

$$\dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai} = \dot{E}_{armazenada} - \dot{E}_{entra} + \dot{E}_{sai} \quad (3.30).$$

Pode-se escrever essa equação na forma integral como:

$$\dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai} = \frac{d}{dt} \left[ \int_V e \cdot \rho \cdot dV \right] + \int_A e \cdot \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \cdot d\vec{A} \right),$$

no qual,  $e$  representa a energia interna por unidade de massa. O teorema do divergente permite que uma integral de área seja transformada em uma integral de volume, gerando:

$$\dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai} = \frac{d}{dt} \left[ \int_V e \cdot \rho \cdot dV \right] + \int_V \nabla \left( e \cdot \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) dV .$$

Para um volume de controle com formato fixo, a ordem de integração e diferenciação pode ser invertida. Assim:

$$\dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai} = \int_V \left[ \frac{d}{dt} (e \cdot \rho) + \nabla \left( e \cdot \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) \right] \cdot dV .$$

Para um volume de controle infinitesimal, essa relação se torna:

$$\frac{d}{dt} (e \cdot \rho) + \nabla \left( e \cdot \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) = \frac{\dot{Q}_{entra}}{dV} - \frac{\dot{W}_{sai}}{dV} \quad (3.31),$$

que é uma forma de lei-de-conservação. A equação (3.31) pode ser rearranjada:

$$e \cdot \left[ \frac{d\rho}{dt} + \nabla \left( \rho \cdot \vec{V}_{rel} \right) \right] + \rho \cdot \left[ \frac{de}{dt} + \nabla \left( \vec{V}_{rel} \bullet \nabla e \right) \right] = \frac{\dot{Q}_{entra}}{dV} - \frac{\dot{W}_{sai}}{dV} .$$

O primeiro termo entre colchetes é igual a zero devido à equação da continuidade, e o segundo termo entre colchetes pode ser escrito como  $\frac{De}{Dt}$ . Assim, a equação (3.31) se torna:

$$\rho \cdot \frac{De}{Dt} = \frac{\dot{Q}_{entra}}{dV} - \frac{\dot{W}_{sai}}{dV} \quad (3.32).$$

Os dois termos do lado direito devem ser avaliados. O termo  $\dot{Q}_{entra}$  será tratado primeiro. Calor entra no volume de controle por difusão relativa ao escoamento total e devido ao movimento randômico das moléculas. Também é possível que algumas energias que entrem no volume de controle nas formas química, atômica, ou eletromagnética, sejam convertidas em energia térmica, agindo como fonte interna de calor distribuído. Então:

$$\dot{Q}_{entra} = -\int_A \vec{q} \cdot d\vec{A} + \int_V q''' \cdot dV \quad (3.32a),$$

no qual,  $q$  é o fluxo difusivo de calor e  $q'''$  é a taxa na qual a energia térmica é liberada por unidade de volume. Usando mais uma vez o teorema do divergente, tem-se:

$$\dot{Q}_{entra} = \int_V \left[ q''' - \nabla \cdot \left( \vec{q} \right) \right] \cdot dV \quad (3.32b).$$

Para um volume de controle infinitesimal:

$$\frac{\dot{Q}_{entra}}{dV} = q''' - \nabla \cdot \left( \vec{q} \right) \quad (3.32c).$$

Inserindo o resultado da expressão (3.32a) na equação (3.32), tem-se a equação da energia para um volume de controle infinitesimal e rígido, que é (BURMEISTER, 1983):

$$\rho \cdot \frac{De}{Dt} + \nabla \cdot \left( \vec{q} \right) - q''' = -\frac{\dot{W}_{sai}}{dV} \quad (3.33).$$

Expandindo para coordenadas retangulares:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) - q''' = \frac{-\dot{W}_{sai}}{dx \cdot dy \cdot dz} \quad (3.34).$$

A equação (3.33) é a equação da conservação da energia mais geral e independente de qualquer sistema de coordenadas, ela representa:

Fluxo de energia total = convecção total + difusão relativa ao movimento total.

Sabe-se que:

$$-\dot{W}_{sai} = -\dot{W}_{entra}$$

que é o trabalho realizado pelo meio na massa dentro do volume de controle. A taxa de trabalho é o produto escalar da força exercida pelo meio e da velocidade da partícula exercendo a força. Desde que a partícula exercendo a força esteja tocando o volume de controle, sua velocidade será a velocidade do fluido na superfície do volume de controle. A Figura 3.7 mostra  $\dot{W}_{entra}$  em umas das superfícies do volume de controle. Termos similares aparecem nas outras faces. A força de campo é mostrada realizando trabalho. Isso é permissível no domínio físico, apesar de significar que a energia potencial devido à posição no campo de força não pode ser também considerada parte da energia interna da massa no volume de controle. Coletando os termos, dividindo-os por  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ , e tomando o limite tendendo a zero das quantidades diferenciais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{W}_{sai}}{dV} = & \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx} \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} \cdot u) + B_x \cdot u + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy} \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy} \cdot v) + B_y \cdot v + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz} \cdot w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz} \cdot w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz} \cdot w) + B_z \cdot w \end{aligned} \quad (3.35)$$

A expansão do termo, levando em conta a equação (3.23):

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{W}_{sai}}{dV} = & u \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x \right) + v \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y \right) + \\ & + w \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + B_z \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \end{aligned}$$

$$+ \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

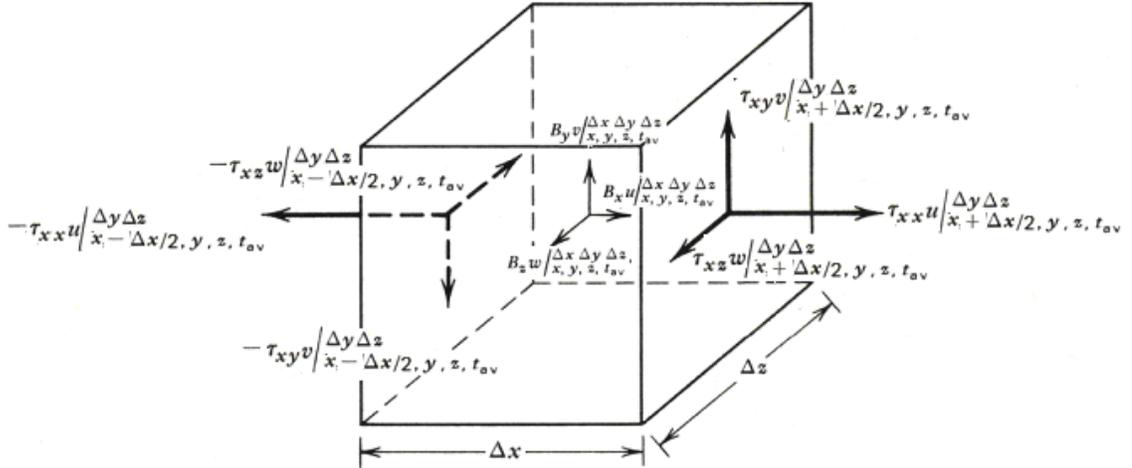


Figura 3.7: Trabalho realizado pela superfície e forças de campo em um volume de controle estacionário com coordenadas retangulares (BURMEISTER, 1983).

De outra maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{-W}_{sai}}{dV} = & u \cdot \rho \cdot \frac{Du}{Dt} + v \cdot \rho \cdot \frac{Dv}{Dt} + w \cdot \rho \cdot \frac{Dw}{Dt} + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \\ & + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.36).$$

Os primeiros três termos da equação (3.36) constituem  $\rho \cdot \frac{D}{Dt} \cdot \left( \frac{E_{cinética}}{massa} \right)$  como pode ser

visto somando-os:

$$\rho \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{|V|^2}{2} \right) = \rho \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) = \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{Du^2}{Dt} + \frac{Dv^2}{Dt} + \frac{Dw^2}{Dt} \right) = \rho \cdot \left( u \cdot \frac{Du}{Dt} + v \cdot \frac{Dv}{Dt} + w \cdot \frac{Dw}{Dt} \right)$$

Introduzindo a expressão precedente para  $-\frac{\dot{W}}{dV}$  na equação (3.33) e fazendo a energia interna por unidade de massa devido à temperatura ser  $I = e - E_{cinética}$  (por unidade de massa) =  $e - \frac{|V|^2}{2}$ , encontra-se:

$$\rho \cdot \frac{DI}{Dt} + \nabla \left( \vec{q} \right) - q''' = \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.37)$$

É importante notar que tanto a energia cinética quanto a energia potencial foram consideradas e foi mostrado estarem fora da equação da “energia”. Como se encontra, a equação (3.37) é aplicado a todos os fluidos e sólidos, mas não é uma verdadeira equação da energia (BURMEISTER, 1983).

Tensões superficiais  $\tau_{ij}$  raramente são especificadas diretamente, então é necessário relacioná-las com velocidades, que são especificadas mais comumente. Para um fluido newtoniano, as equações (3.24) geram as relações necessárias para um volume de controle de coordenadas retangulares. Introduzindo-as na equação (3.37) temos:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{DI}{Dt} + \nabla \left( \vec{q} \right) - q''' = & -p \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \cdot \left\{ \left[ 2 \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \nabla \vec{V} \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + \\ & + \mu \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \left[ 2 \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \nabla \vec{V} \right] + \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \\ & + \mu \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \left[ 2 \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \nabla \vec{V} \right] \right\}. \end{aligned}$$

onde  $p$  é a pressão. Essa equação pode ser escrita em uma forma geral mais compacta como:

$$\rho \cdot \frac{DI}{Dt} + \nabla \left( \vec{q} \right) - q''' = -p \cdot \nabla \vec{V} + \mu \cdot \Phi \quad (3.38).$$

Aqui,  $\Phi$  é definido em coordenadas cartesianas como:

$$\Phi = 2 \cdot \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \cdot \left( \nabla \vec{V} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (3.39).$$

e é chamada de função de dissipação, e representa a conversão irreversível de formas de energia mecânica em energia térmica. Os termos ao quadrado mostram a irreversibilidade desde que  $\Phi \geq 0$  e sempre agem como fonte de energia térmica. Em contraste  $p \cdot \nabla \vec{V}$  representa o trabalho reversível no meio pela expansão da massa dentro do volume de controle.

A equação da “energia” na forma da equação (3.38) apresenta formas de energia térmica no lado esquerdo e formas de energia mecânica no lado direito. Apesar de correta, é mais conveniente apresentar somente formas térmicas de energia. Isso pode ser satisfeito introduzindo entalpia por unidade de massa ( $H$ ) como forma de substituir a energia interna por unidade de massa ( $I$ ). Como sabe-se a entalpia representa a medida de energia que está disponível na forma de calor, assim, por definição:

$$H = I + \frac{p}{\rho}.$$

Então:

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{DH}{Dt} - \rho^{-1} \cdot \frac{Dp}{Dt} + p \cdot \rho^{-2} \cdot \frac{D\rho}{Dt} \quad (3.40).$$

A equação da continuidade (3.10) mostra que o ultimo termo dessa relação é igual a  $-p \cdot \rho^{-1} \cdot \text{div} \vec{V}$ . Incorporando esta relação na equação (3.40) e substituindo o resultado na equação (3.38) é possível obter:

$$\rho \cdot \frac{DH}{Dt} + \text{div} \left( \vec{q} \right) - q''' = \frac{Dp}{Dt} + \eta \cdot \Phi \quad (3.41).$$

Como para um fluido é comum passar por um processo próximo de pressão constante, então  $\frac{Dp}{Dt} \approx 0$ .

Para uma substância pura na ausência de movimento, tensão superficial e efeitos eletromagnéticos, existem apenas duas propriedades independentes,  $H = H(p, T)$ , onde  $T$  é a temperatura de equilíbrio termodinâmico, por exemplo. Então:

$$DH = \frac{\partial H}{\partial T}_{p=const} \cdot DT + \frac{\partial H}{\partial p}_{T=const} \cdot Dp \quad (3.42).$$

Da termodinâmica, com  $s = \text{entropia}$ , que é uma grandeza associada ao grau de desordem, que mede a parte de energia que não pode ser transformada em trabalho, tem-se:

$$DH = T \cdot Ds + \frac{Dp}{\rho},$$

que pode ser rearranjada como:

$$\frac{DH}{Dp} = T \cdot \frac{Ds}{Dp} + \frac{1}{\rho} \quad (3.43).$$

Essa ultima relação deve ser aplicada para um processo infinitesimal no equilíbrio termodinâmico. Sendo que equilíbrio termodinâmico implica em temperatura constante, a equação (3.43) gera:

$$\frac{\partial H}{\partial p}_{T=const} = T \cdot \frac{\partial s}{\partial p}_{T=const} + \frac{1}{\rho} \quad (3.44).$$

A energia livre de Gibb, dada por  $G = I + \frac{P}{\rho} - T \cdot s$ , será aplicada na obtenção das relações de Maxwell. Sua variação é dada por:

$$dG = [dI + p \cdot (d\rho^{-1}) - T \cdot ds] + \rho^{-1} \cdot dp - s \cdot dT.$$

O termo em colchetes é nulo de acordo com a primeira lei da termodinâmica. Então:

$$dG = \rho^{-1} \cdot dp - s \cdot dT.$$

A comparação da equação anterior com a regra da cadeia  $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right) \cdot dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) \cdot dT$  mostra que:

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \rho^{-1} \text{ e } \frac{\partial G}{\partial T} = -s.$$

Tomando a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} = -\rho^{-2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}_{p=const} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T} = -\frac{\partial s}{\partial p}_{T=const}.$$

Assim, a relação de Maxwell é:

$$\frac{\partial s}{\partial p}_{T=const} = \rho^{-2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}_{p=const}.$$

A relação, quando substituída na equação (3.44) gera:

$$\frac{\partial H}{\partial p}_{T=const} = T \cdot \rho^{-2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}_{p=const} + \frac{1}{\rho} = \rho^{-1} \cdot \left[ 1 + T \cdot \rho^{-1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}_{p=const} \right] \quad (3.45).$$

Lembrando que calor específico a pressão constante é definido como:

$$Cp = \frac{\partial H}{\partial T}_{p=const} \quad (3.46),$$

e o coeficiente de expansão térmica é definido como:

$$\beta = -\rho^{-1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}_{p=const} \quad (3.47).$$

Inserindo as equações (3.45) à (3.47) na equação (3.42), tem-se:

$$DH = Cp \cdot DT + \rho^{-1} \cdot (1 - \beta \cdot T) \cdot Dp \quad (3.48).$$

A equação da energia, substituindo a equação (3.48) na equação (3.41), tem a forma (BURMEISTER, 1983):

$$\rho \cdot Cp \cdot \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \left( \vec{q} \right) + q''' + \beta \cdot T \cdot \frac{Dp}{Dt} + \mu \cdot \Phi \quad (3.49).$$

A relação de fluxo de calor condutivo para temperatura é completado pela lei de Fourier  $\vec{q} = -k \cdot \nabla T$ , onde  $k$  é a constante de condutividade térmica. A equação da energia é então:

$$\rho \cdot Cp \cdot \frac{DT}{Dt} = \nabla(k \cdot \nabla T) + q''' + \beta \cdot T \cdot \frac{Dp}{Dt} + \mu \cdot \Phi \quad (3.50).$$

Para densidade constante,  $\beta = 0$ . Assim, para o caso de condutividade térmica constante e a ausência de geração de calor ( $q''' = 0$ ), a equação (3.50) se torna, em coordenadas cartesianas, para um volume de controle estacionário:

$$\rho \cdot C_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \cdot \Phi \quad (3.50a).$$

### 3.4. Equação de Reynolds

A equação de Reynolds é a base da teoria moderna da lubrificação hidrodinâmica. Essa equação é obtida pelo uso conjunto das equações de conservação de quantidade de movimento e da conservação da massa para um fluido viscoso. Ao ser aplicada no estudo do filme de óleo de mancais, a solução desta equação fornece a distribuição de pressão no óleo. Este campo de pressão é a informação necessária para a resolução da maioria dos problemas básicos na análise de mancais hidrodinâmicos.

Osborne Reynolds publicou essa equação pela primeira vez em seu artigo em 1886, trabalho este que continha, além da equação diferencial básica de lubrificação com filme de óleo, comparações entre suas previsões teóricas e os resultados experimentais obtidos por Tower em 1883.

Como dito, a derivação de uma equação diferencial que governa a distribuição de pressão num mancal hidrodinâmico, é baseada nas equações de quantidade de movimento e na equação da continuidade. Nas formas mais gerais, as equações de conservação da quantidade de movimento para um fluido Newtoniano podem ser expressas em coordenadas cartesianas como as equações (3.25) e repetidas aqui:

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \right]$$

Nesse caso as forças de campo podem ser escritas em função de suas acelerações, pois  $f = m \cdot a$  e  $m = \rho \cdot V$ . Assim,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são as componentes de aceleração nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e:

$$B_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = X \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

E a equação da conservação da massa, que é a equação da continuidade dada pela equação (3.11).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w) = 0$$

Segundo Dowson (1962), para se obter a equação de Reynolds é preciso adotar-se hipóteses simplificadoras para as equações de quantidade de movimento. Assim, a primeira hipótese a ser adotada é que o raio da curvatura dos sólidos no contorno do filme lubrificante é muito grande se comparado com a espessura do filme. Essa hipótese, que foi adotada por Reynolds em trabalhos passados, permite que qualquer efeito devido à curvatura do filme de óleo seja desprezado. O filme de óleo pode, então, ser aberto em uma das superfícies, representada pelo plano  $y = 0$ . A outra condição de contorno será separada do plano anterior por uma distância  $h$  que pode ser uma função de  $x$ ,  $z$  e  $t$ . A geometria e o sistema de coordenadas são mostrados na Figura 3.8. Sufixos 1 e 2 serão usados para denotar as condições nas superfícies  $y = 0$  e  $y = h$ , respectivamente.

A próxima hipótese é de que os termos de inércia e de forças de corpo na equação da conservação da quantidade de movimento são pequenas se comparadas com os termos de pressão

e viscosidade. Essa suposição, que implica no equilíbrio entre a pressão e as forças viscosas em um fluido, é sensata para a maioria das situações encontradas em mancais.

Quando essas simplificações são inseridas nas equações de Navier-Stokes, tem-se para a equação em  $x$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (3.51).$$

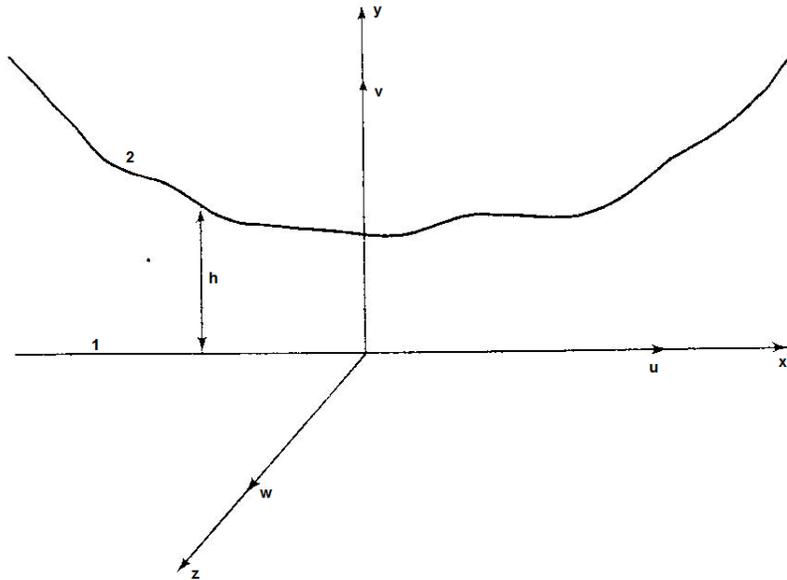


Figura 3.8: Sistema de coordenadas (DOWSON, 1962).

Expressões similares são obtidas para as componentes  $y$  e  $z$ . A ordem de magnitude dos termos viscosos nas equações de quantidade de movimento pode ser investigada, definindo os seguintes termos adimensionais:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{X} & \bar{y} &= \frac{y}{h} & \bar{z} &= \frac{z}{Z} & \bar{u} &= \frac{u}{U} & \bar{v} &= \frac{v}{V} \\ \bar{w} &= \frac{w}{W} & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0} & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} & \bar{p} &= \frac{p}{p_0} & \bar{t} &= \frac{t}{T} \end{aligned} \quad (3.52),$$

no qual os valores básicos  $U$ ,  $X$ ,  $\rho_0$ , etc., foram selecionados de forma que os termos  $\bar{u}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{\rho}$ , etc., sejam menores ou iguais a unidade. Com essas definições, a primeira equação de movimento pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{X \cdot p_0}{\mu_0 \cdot U} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = & \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) + \left( \frac{X}{h} \right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + \left( \frac{X}{Z} \right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) + \\ & + \left( \frac{X}{h} \right) \cdot \left( \frac{V}{U} \right) \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right] + \left( \frac{X}{Z} \right) \cdot \left( \frac{W}{U} \right) \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Normalmente,  $X$  e  $Z$  tem magnitudes similares e ambos são várias ordens maior que  $h$ . Além disso, para mancais abrangidos por essas especificações gerais, o valor de  $U$  irá ultrapassar o de  $W$  e de  $V$ , e conseqüentemente  $\left( \frac{X}{h} \right)^2$  será muito maior que  $\left( \frac{X}{Z} \right)^2$ ,  $\left( \frac{X}{Z} \right) \cdot \left( \frac{W}{U} \right)$ ,  $\left( \frac{X}{h} \right) \cdot \left( \frac{V}{U} \right)$  e unidade. Assim, o segundo termo do lado direito da equação (3.53) surge como efeito viscoso predominante, e, portanto, mantendo somente o esse termo, a análise fica limitada a mancais cujo comprimento é comparável a espessura do filme de óleo.

A hipótese básica envolvida nesse estágio é, devido à geometria do filme lubrificante, que os gradientes de velocidade  $\frac{\partial u}{\partial y}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y}$  são grandes se comparados com todos os outros gradientes de velocidade. As diferencias do produto da viscosidade e essas primeiras derivadas com respeito à  $y$ , então, dominam os termos viscosos. Assim, as equações de movimento nas direções  $x$  e  $z$  podem ser reduzidas à:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.54),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.55).$$

Uma análise similar de ordem de grandeza, através dos parâmetros adimensionais, mostra que mais de um termo viscoso deve ser mantido na equação de movimento na direção  $y$ . Dessa maneira, a equação se torna:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (3.56).$$

Comparando os termos do lado direito das equações (3.55), (3.56) e (3.57) tem-se que o gradiente de pressão através do filme é  $\frac{h}{L}$  vezes a ordem de grandeza do gradiente de pressão ao longo do filme. Uma vez que  $h \ll L$ , a variação de pressão através do filme lubrificante é desprezível. Integrando a equação (3.57) é obtida a seguinte equação para a pressão:

$$p = \alpha(x, y, z) + A(x, y) \quad (3.57),$$

no qual:

$$\alpha = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \int \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} dy \quad (3.58),$$

e  $A$  é a constante de integração.

Integrando novamente com respeito a  $y$  e considerando os limites de integração  $y = 0$  a  $y = h$  tem-se:

$$A(x, y) = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h p dy - \frac{1}{h} \cdot \int \alpha(x, y, z) dy = \bar{p} - \bar{\alpha} \quad (3.59),$$

onde a barra sobre o símbolo indica o valor médio da função através do filme. Então, substituindo a equação (3.59) na (3.57), a expressão para  $p$  se torna:

$$p = \bar{p} + \alpha(x, y, z) - \bar{\alpha}(x, z) \quad (3.60).$$

Diferenciando agora (3.60) em relação a  $x$  e substituindo em (3.54) obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha - \bar{\alpha})$$

Quando as expressões completas de  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  são introduzidas na equação acima, pode ser visto que o segundo termo do lado direito é  $\left(\frac{h}{L}\right)^2$  vezes o primeiro termo. Então, com o mesmo grau de aproximação que foi utilizado para as equações (3.54) e (3.55) tem-se (DOWSON, 1962):

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.61),$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.62),$$

no qual a pressão média através do filme de óleo  $\bar{p}$  é substituída por  $p$ .

Os gradientes dos componentes  $u$  e  $w$  da velocidade através do filme lubrificante pode ser encontrado integrando-se as equações (3.61) e (3.62):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{C_1(x, z)}{\mu} \quad (3.63),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{C_2(x, z)}{\mu} \quad (3.64),$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. Integrando novamente e introduzindo as condições de contorno,

$$\begin{aligned}
y = 0, & & u = U_1, & & w = W_1, \\
y = h, & & u = U_2, & & w = W_2,
\end{aligned}$$

as seguintes expressões são obtidas para as componentes da velocidade:

$$u = U_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \cdot \int_0^y \frac{y}{\mu} dy + \left( \frac{U_2 - U_1}{F_0} - \bar{y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \cdot \int_0^y \frac{dy}{\mu} \quad (3.65),$$

$$w = W_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cdot \int_0^y \frac{y}{\mu} dy + \left( \frac{W_2 - W_1}{F_0} - \bar{y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \cdot \int_0^y \frac{dy}{\mu} \quad (3.66).$$

no qual:

$$F_0 = \int_0^h \frac{dy}{\mu}, \quad F_1 = \int_0^h \frac{y}{\mu} dy = \bar{y} \cdot F_0.$$

As velocidades citadas nas condições de contorno são, normalmente, interpretadas como as velocidades superficiais das partes sólidas. Isso implica que não existe escorregamento entre o lubrificante e os sólidos no contato.

Retornando agora à equação da continuidade, e, integrando-a em relação à  $y$  entre o intervalo de 0 a  $h$  tem-se:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dy + \int_0^h \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) \right] dy + [\rho \cdot v]_0^h + \int_0^h \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w) \right] dy = 0 \quad (3.67).$$

Essa equação pode ser expandida de acordo com uma regra geral do cálculo integral que diz que:

$$\int_{h_1}^{h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, z)] \right\} dy = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{h_1}^{h_2} [f(x, y, z)] dy \right) - f(x, h_2, z) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x} + f(x, h_1, z) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (3.68),$$

e isso gera:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^h (\rho \cdot u) dy \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_0^h (\rho \cdot w) dy \right] - (\rho \cdot U)_2 \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - (\rho \cdot W)_2 \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + [\rho \cdot v]_0^h = 0$$

As integrais de  $(\rho \cdot u)$  e  $(\rho \cdot w)$  podem ser obtidas através de integração por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dy + h \cdot \left[ \frac{\partial(\rho \cdot U)_2}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot W)_2}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h \left[ \rho \cdot y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + y \cdot u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] dy \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_0^h \left[ \rho \cdot y \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + y \cdot w \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] dy \right) + [\rho \cdot v]_0^h = 0 \end{aligned}$$

As expressões para  $u$  e  $w$ , e suas derivadas, podem agora ser introduzidas na equação acima a partir das equações (4.63), (4.64), (4.65) e (4.66). Assim (DOWSON, 1962),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (F_2 + G_1) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (F_2 + G_1) \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = h \cdot \left[ \frac{\partial(\rho \cdot U)_2}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot W)_2}{\partial z} \right] + \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(U_2 - U_1) \cdot (F_3 + G_2)}{F_0} + U_1 \cdot G_3 \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{(W_2 - W_1) \cdot (F_3 + G_2)}{F_0} + W_1 \cdot G_3 \right] + \\ + \int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dy + (\rho \cdot v)_2 + (\rho \cdot v)_1 \end{aligned} \quad (3.69),$$

Onde:

$$F_0 = \int_0^h \frac{dy}{\mu}$$

$$F_1 = \int_0^h \frac{y}{\mu} dy = \bar{y} \cdot F_0$$

$$F_2 = \int_0^h \frac{\rho \cdot y}{\mu} \cdot (y - \bar{y}) dy$$

$$F_3 = \int_0^h \frac{\rho \cdot y}{\mu} dy$$

$$G_1 = \int_0^h \left[ y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \left( \int_0^y \frac{y}{\mu} dy - \bar{y} \cdot \int_0^y \frac{dy}{\mu} \right) \right] dy$$

$$G_2 = \int_0^h \left[ y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \left( \int_0^y \frac{dy}{\mu} \right) \right] dy$$

$$G_3 = \int_0^h y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} dy$$

A equação (3.69) representa a forma geral da equação básica da lubrificação de filmes finos e foi obtida por Dowson em 1962. Isso permite a variação das propriedades do fluido nas coordenadas circunferencial e radial do lubrificante. Pode ser notado que essa equação é escrita em termos de dois grupos de função,  $F$  e  $G$ . Todas as funções  $G$  contem o termo  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ , e sabendo que a densidade é praticamente constante através do filme na grande maioria das condições de lubrificação, estas podem ser desprezadas. No entanto, são mantidas na equação (3.69) para generalizar o caso. A relação funcional entre  $\rho$ ,  $\mu$  e  $y$  deve ser conhecida antes de as integrais serem computadas. Quando a variação de  $\rho$  e  $\mu$  ao longo de  $y$  for desprezível, as integrais podem ser avaliadas analiticamente, gerando a conhecida forma da equação de Reynolds. Em outros casos, as integrais devem ser avaliadas numericamente e, em várias situações, a variação das propriedades do fluido através do filme pode ser um fator dominante na geração de pressão. Em tais casos, a solução da equação geral (3.69), que combina a equação da conservação da massa e da conservação do momento, deve ser resolvida simultaneamente com a equação da energia. Antes de obter as simplificações para equação (3.69), um resumo das hipóteses adotadas para sua obtenção será apresentada abaixo:

1. O raio de curvatura do mancal é muito maior que a espessura do filme.
2. O lubrificante é um fluido Newtoniano.
3. Termos de inércia e de força de corpo são pequenos se comparados com os termos viscosos e de pressão nas equações de movimento.
4. Devido à geometria do filme de óleo as derivadas de  $u$  e  $w$  com respeito à  $y$  são elevadas se comparadas com os outros gradientes de velocidade.
5. Não existe escorregamento entre o fluido e as partes sólidas.

### 3.4.1. Simplificações da Equação de Reynolds

Para diversos casos, a forma básica da equação da lubrificação hidrodinâmica encontrada nas análises de mancais pode ser encontrada a partir da equação generalizada de Reynolds.

$$(i) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \text{ (Incompressível).}$$

Em muitos casos, o gradiente de densidade através por todo o filme é desprezível. Com  $\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$  todas as funções  $G$  tornam-se nulas. Sendo assim, a equação (3.69) se torna:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{F_3}{F_0} \cdot (U_2 - U_1) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{F_3}{F_0} \cdot (W_2 - W_1) \right] + \int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dy + (\rho \cdot v)_2 + (\rho \cdot v)_1$$

Expandindo o termo da integral, segundo a regra expressa pela expressão (3.68), a equação acima se torna (DOWSON, 1962):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{F_3}{F_0} \cdot (U_2 - U_1) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{F_3}{F_0} \cdot (W_2 - W_1) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dy - \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + (\rho \cdot v)_2 + (\rho \cdot v)_1 \quad (3.70).$$

$$(ii) \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \text{ (Isoviscoso e incompressível).}$$

Com a simplificação de lubrificante isoviscozo e incompressível a equação (3.69) é reduzida para a forma desenvolvida por Reynolds em seu trabalho clássico. Para valores constantes das propriedades do fluido tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = 12 \cdot \mu \cdot h \cdot \left[ \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial z} \right] - 6 \cdot \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} [h \cdot (U_2 - U_1)] + \\ - 6 \cdot \mu \cdot \frac{\partial}{\partial z} [h \cdot (W_2 - W_1)] + 12 \cdot \mu \cdot (W_2 - W_1) + \int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dy \end{aligned}$$

Se for considerado apenas movimento tangencial entre as superfícies e não for considerado movimento normal, a velocidade do fluido na superfície inferior na direção  $y$  será nula, ou seja,  $V_1 = 0$ , enquanto a velocidade do fluido próximo à superfície superior na direção  $y$  será dependente da variação da espessura do filme de fluido em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , ou seja,  $V_2 = U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z}$ . Também, assume-se que a velocidade de fluido, no contato com os sólidos, na direção  $z$  é nula, visto que o movimento é puramente por escorregamento. Assim,  $W_1 = W_2 = 0$ . Portanto, as condições de contorno utilizadas por Reynolds foram:

$$\begin{aligned} y = 0, & & U_1 = 0, & & W_1 = 0, & & V_1 = 0 \\ y = h, & & U_2 = U, & & W_2 = 0, & & V_2 = U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = 6 \cdot \mu \cdot \left( U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dy - \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.71).$$

Além disso, a densidade e a espessura do filme de óleo não variam no tempo assim (DOWSON, 1962):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = 6 \cdot \mu \cdot \left( U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3.72).$$

A equação acima é a Equação de Reynolds obtida em 1866.

Agora, utilizando as condições de contorno de Reynolds na equação do caso (i) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{F_3}{F_0} \cdot U \right] + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dy - \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Se a densidade for constante então:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ h - \frac{F_1}{F_0} \right] - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.73),$$

onde:

$$F_2' = \int_0^h \frac{y}{\mu} \cdot \left( y - \frac{F_1}{F_0} \right) dy.$$

Essa equação de Reynolds leva em consideração a mudança da viscosidade tanto através como ao longo do lubrificante, e, portanto, será a equação utilizada nesse trabalho.

### 3.5. Conceito de Coeficientes Dinâmicos para Mancais Hidrodinâmicos

Basicamente, procura-se modelar os mancais hidrodinâmicos através de seu filme de óleo, considerando o carregamento devido ao peso do rotor e as características geométricas do mancal, que definem a expressão para a espessura do filme de lubrificante responsável, por sua vez, pelo campo de pressões e forças hidrodinâmicas de sustentação geradas.

O lubrificante será discretizado num modelo mola-amortecedor, conforme mostrado na Figura 3.9, e caracterizado por coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento  $K$  e  $B$ , respectivamente.

A caracterização dos mancais hidrodinâmicos através do seu filme de lubrificante, tem como objetivo, avaliar as forças transmitidas por esses componentes em máquinas rotativas. Essas forças podem ser causadas pelo peso do rotor, por um desbalanceamento rotativo presente no mesmo, ou ainda, por alguma força de excitação externa ao sistema. Essa caracterização é feita para se conhecer o comportamento do sistema rotativo em questão, que nesse trabalho, se trata de um rotor suportado por mancais hidrodinâmicos, assim como seus modos vibracionais (suas frequências naturais), prevenindo então, quebras na máquina ou acidentes graves, causados pelo excesso de vibrações a uma dada velocidade de rotação.

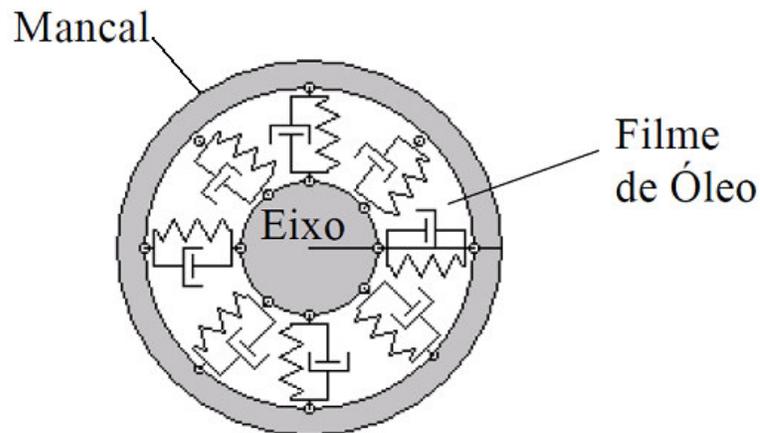


Figura 3.9: Modelo Massa-Mola-Amortecedor para o Filme Fluido.

A equivalência entre o filme de óleo e conjuntos de molas e amortecedores equivalentes faz uso de equações linearizadas simples, cujas respostas obtidas coincidem, em um número expressivo de casos, com sistemas reais estudados.

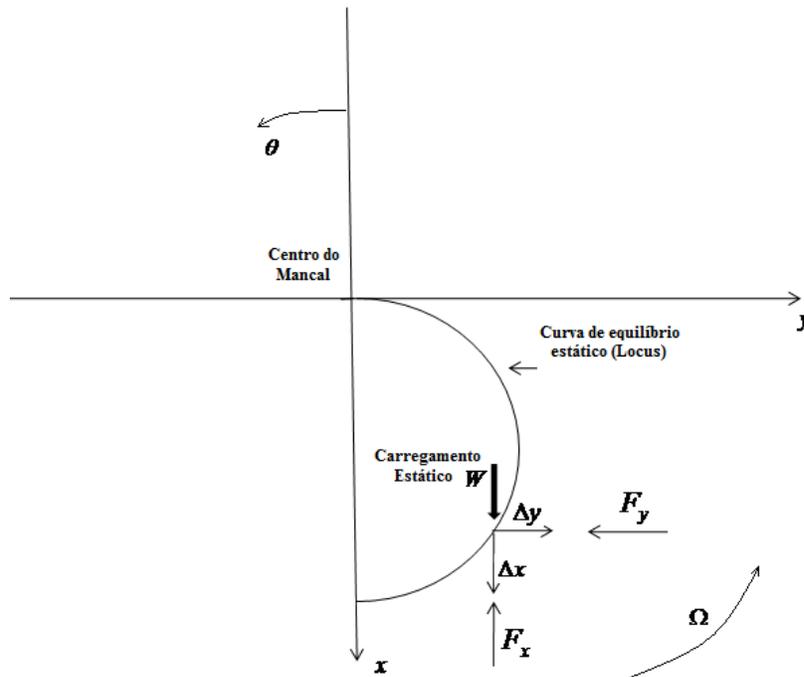


Figura 3.10: Sistema de Coordenadas (LUND, 1987).

Em um sistema de coordenadas  $x-y$  com origem no centro do mancal, e o eixo  $x$  sendo a direção em que a carga estática está sendo aplicada, Figura 3.10, as forças de reação originadas do filme de óleo lubrificante são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \cdot \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \quad (3.74),$$

no qual  $p$  é a pressão gerada no interior do filme de óleo,  $R$  é o raio do mancal,  $L$  é o comprimento axial do mancal,  $z$  é a coordenada axial e  $\theta$  é a coordenada circunferencial angular originada no sentido anti-horário do eixo  $x$ . A extensão do filme de óleo vai de  $\theta_1$  até  $\theta_2$ , no qual ambos os ângulos podem ser funções de  $z$ .

Como já dito, a equação diferencial que governa a distribuição de pressão no filme lubrificante, é a equação de Reynolds, deduzida anteriormente, aqui repetida por comodidade:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ h - \frac{F_1}{F_0} \right] - \frac{\partial h}{\partial t}$$

no qual  $t$  denota o tempo,  $x$  e  $z$  as coordenadas cartesianas,  $U$  a velocidade do rotor e  $h$  a espessura do filme de óleo (LUND, 1987):

$$h = Cr + x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \quad (3.75),$$

onde,  $Cr$  é a folga radial, e  $x$ – $y$  são as coordenada do centro do mancal.

Pode-se notar que as forças de reação são funções das coordenadas  $x$  e  $y$ , e da velocidade instantânea do centro do eixo,  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  (“ponto” indica a derivada no tempo). Portanto, para pequenas amplitudes de deslocamentos,  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , medidos a partir da posição de equilíbrio estático ( $x_0$  e  $y_0$ ), uma expansão em série de Taylor de primeira ordem gera:

$$F_x = F_{x0} + K_{xx} \cdot \Delta x + K_{xy} \cdot \Delta y + B_{xx} \cdot \Delta \dot{x} + B_{xy} \cdot \Delta \dot{y} \quad (3.76a);$$

$$F_y = F_{y0} + K_{yx} \cdot \Delta x + K_{yy} \cdot \Delta y + B_{yx} \cdot \Delta \dot{x} + B_{yy} \cdot \Delta \dot{y} \quad (3.76b),$$

no qual os coeficientes são as derivadas parciais avaliadas na posição de equilíbrio:

$$K_{xy} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_0 \quad B_{xy} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_0 \quad (3.77).$$

Os termos  $K_{xx}$  e  $K_{yy}$  assim como  $B_{xx}$  e  $B_{yy}$  são chamados de coeficientes diretos de rigidez e amortecimento respectivamente, enquanto que os termos  $K_{xy}$  e  $K_{yx}$  assim como  $B_{xy}$  e  $B_{yx}$  são chamados de coeficientes acoplados ou cruzados.

Como  $(x_0, y_0)$  é a posição de equilíbrio, então  $F_{y0} = 0$  enquanto  $F_{x0}$  é igual à carga estática  $W$ , aplicada na direção do eixo  $x$  para baixo.

Segundo Lund (1987), um método que possui pouca imprecisão numérica, para o cálculo dos coeficientes equivalentes, é o método no qual se emprega uma solução oriunda de pequenas perturbações, como pode ser visto na Figura 3.11. Assim, a equação (3.75) pode ser escrita como:

$$h = h_0 + \Delta h \quad (3.78),$$

no qual:

$$h_0 = Cr + x_0 \cdot \cos \theta + y_0 \cdot \text{sen} \theta \quad (3.79);$$

$$\Delta h = \Delta x \cdot \cos \theta + \Delta y \cdot \text{sen} \theta \quad (3.80);$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta \dot{x} \cdot \cos \theta + \Delta \dot{y} \cdot \text{sen} \theta \quad (3.81).$$

A perturbação na espessura do filme de óleo da origem a uma perturbação similar na pressão:

$$p = p_0 + \Delta p \quad (3.82),$$

onde:

$$\Delta p = p_x \cdot \Delta x + p_y \cdot \Delta y + p'_x \cdot \Delta \dot{x} + p'_y \cdot \Delta \dot{y} \quad (3.83).$$

Combinando as equações (3.74), (3.76), (3.82) e (3.83), encontra-se (LUND, 1987):

$$\begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yx} \end{Bmatrix} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_x \cdot \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{Bmatrix} \cdot R d\theta dz \quad (3.84).$$

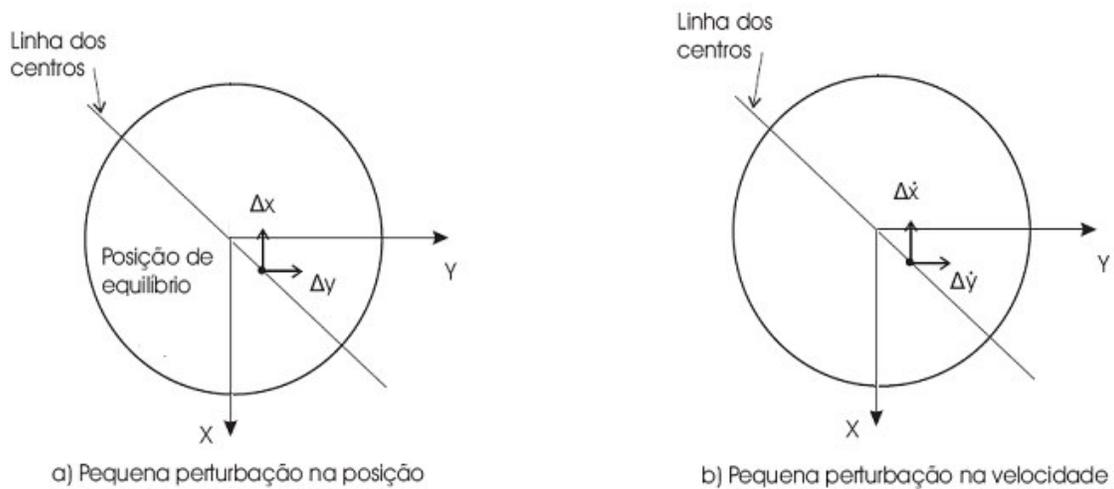


Figura 3.11: Perturbação em Torno da Posição de Equilíbrio (PEDREIRA, 2006).

### 3.6. Temperatura de Mistura.

Da termodinâmica e da transferência de calor, quando um fluido entra em contato com outro com uma temperatura diferente ocorre uma troca de calor que possui um papel proeminente no desempenho de muitos dispositivos de interesse prático, dentre os quais estão inseridos os mancais. Essa troca de calor acarreta em uma nova temperatura, conhecida como temperatura de mistura, atuando como condição de contorno pra a equação da energia.

A maioria dos mancais hidrodinâmicos tem o lubrificante suprido através de um orifício e uma ranhura, dispostos na geometria mostrada na Figura 3.12. Óleo é bombeado através desse orifício de alimentação normal ao eixo do rotor, de onde se espalha axialmente ao longo de uma ranhura axial que se estende até quase o fim do mancal. Nas duas extremidades são, usualmente, localizados pequenos chanfros que permitem que um pouco de lubrificante na ranhura escape para fora do mancal, sendo o propósito disso remover quaisquer detritos presentes no óleo. O lubrificante contido na ranhura, que é composto do fluxo de fornecimento  $Q_0$  e do fluxo  $Q_2$ , constituem a piscina cujo eixo extrai o fluxo necessário  $Q_1$  para repor o óleo do mancal, ou lubrificar o próximo segmento.

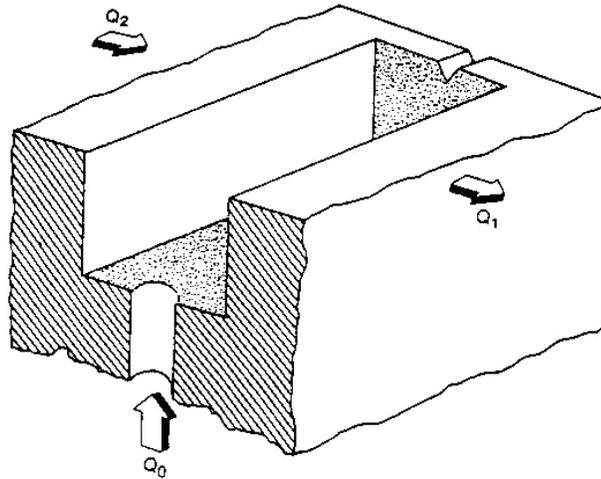


Figura 3.12: Geometria de uma ranhura axial (HESHMAT, 1986).

A essência do problema é retratada esquematicamente no Figura 3.13. Óleo quente a uma temperatura  $T_2$  emerge de um segmento anterior e mistura com o óleo frio, admitido na entrada de óleo a uma temperatura  $T_0$ . Essa mistura determina, então, a temperatura  $T_1$  que será a temperatura de entrada do segmento posterior, que claramente é maior que a temperatura de entrada  $T_0$ .

Portanto, haverá uma mistura significativa entre os fluxos frio e quente, e a temperatura de entrada do mancal,  $T_1$ , seria uma função das porções relativas às correntes quente e fria entrando no mancal. Essa mistura relativa como uma função das condições operacionais do mancal, e a temperatura  $T_1$  resultante dessa mistura, é apresentada nessa seção.

Para se calcular a temperatura de mistura, foram propostas algumas maneiras, ao longo dos anos, que podem ser vistas na literatura. No entanto a maioria desses métodos pecava por possuir um parâmetro de troca de calor que era de obtenção experimental, sendo que para cada caso era necessário um valor diferente para tal, o que conduzia a resultados teóricos com moderado sucesso, uma vez que esses métodos tinham grandes possibilidades de não serem concordantes com os resultados experimentais. Assim, foi desenvolvido a teoria da mistura em ranhuras, que apresentava a vantagem de não possuir nenhum coeficiente experimental e também gerava resultados teóricos muito próximos dos experimentais. Essa teoria nada mais é que a criação de um volume de controle nas extremidades da ranhura para a realização de um balanço de energia.

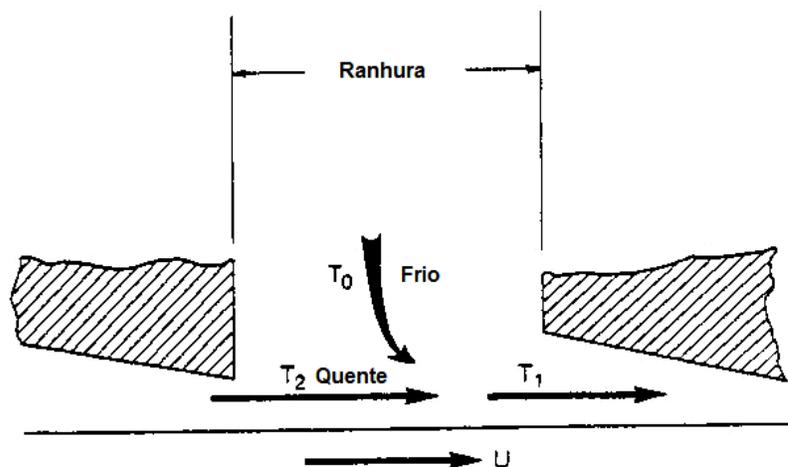


Figura 3.13: Mecanismo de entrada de óleo (HESHMAT, 1986).

Esse balanço de energia, como será observado a seguir, será definido como uma média das temperaturas, ponderadas pelas respectivas vazões do fluido.

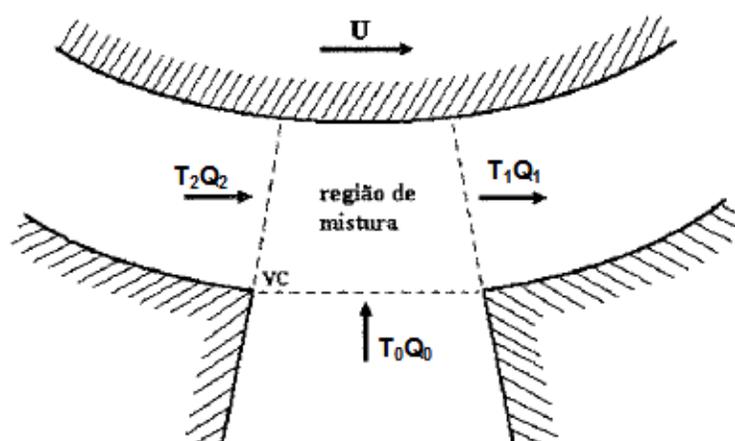


Figura 3.14: Volume de controle sobre o fluido da região de mistura – balanço de energia (NICOLETTI, 1999).

Assim, aplicando o balanço de energia sobre o volume de controle da Figura 3.14, que respeita a conservação da energia, encontra-se:

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_0 + \dot{q}_2 \quad (3.85),$$

sendo,  $\dot{q}_0$  a energia interna do fluido de reposição do mancal,  $\dot{q}_2$  a energia interna do fluido recirculante do mancal, e que ambas adentram o volume de controle, e  $\dot{q}_1$  é a energia interna do fluido proveniente da mistura dos fluidos anteriores e que sai do volume de controle e entra novamente no mancal.

As energias internas do fluido que atravessam as fronteiras do volume de controle podem ser expandidas:

$$\dot{q} = \dot{m} \cdot c \cdot \Delta T = \rho \cdot Q \cdot c \cdot (T - T_R) \quad (3.86),$$

no qual,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $c$  é o calor específico do fluido incompressível,  $T$  é a temperatura,  $Q$  é a vazão volumétrica do fluido e  $T_R$  é uma temperatura de referência.

Inserindo, agora, a equação (3.86) na equação (3.85), obtém-se:

$$\rho \cdot c \cdot Q_1 \cdot (T_1 - T_R) = \rho \cdot c \cdot Q_0 \cdot (T_0 - T_R) + \rho \cdot c \cdot Q_2 \cdot (T_2 - T_R) \quad (3.87).$$

Sabe-se através de um balanço de massa, que:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_0 + \dot{m}_2 \Rightarrow \rho \cdot Q_1 = \rho \cdot (Q_0 + Q_2) \quad (3.88).$$

Assim, substituindo a equação (3.88) e fazendo a suposição que a densidade e a capacidade térmica do fluido são constantes, é possível rearranjar a equação (3.87) da seguinte forma:

$$T_1 = \frac{T_0 \cdot Q_0 + T_2 \cdot Q_2}{Q_0 + Q_2} \quad (3.89),$$

no qual  $Q = \int_A v dA$ .

Como se pode perceber, a temperatura de mistura é simplesmente uma média ponderada das temperaturas de recirculação do mancal (quente) e da temperatura de reposição do mancal (frio) por suas vazões.

Sabe-se que, na realidade, devido a problemas de cavitação e outros fatores, nem todo o fluido presente no mancal entra em contato com o fluido de reposição, fazendo com que devesse existir um fator de mistura na equação (3.89) que representasse a porcentagem do fluxo quente que trocava calor com o fluido frio (HESHMAT, 1986). No entanto, no presente trabalho, não será adotada essa medida. Uma vez que se foi utilizada a hipótese de que o eixo está sempre imerso em lubrificante, será suposto que todo o fluido que entra no mancal pela realimentação entrará em contato com todo o fluido presente no interior do mancal e desta forma eles trocarão calor de acordo com a expressão (3.89).

Uma vez que foi considerado que todo o fluido entra em contato, é preciso calcular a vazão. Segundo Nicoletti (1999), se a vazão for calculada como mostrada anteriormente ( $Q = \int_A v dA$ ), será obtido uma única temperatura  $T_1$  média para toda entrada do novo segmento, já que uma integral gera um valor médio. No entanto, não é plausível fisicamente supor que a essa temperatura seja uma constante para toda entrada, já que existe um gradiente de temperaturas no filme lubrificante. Assim, como serão utilizados métodos numéricos para a resolução do problema, e com isso o domínio de estudo deverá necessariamente ser discretizado em uma malha com  $n$  pontos, é possível utilizar um volume de controle em torno de cada ponto da malha e calcular a vazão em torno dessa área infinitesimal e assim sanar o problema de uma única temperatura de saída, uma vez que para cada ponto será especificado uma temperatura correspondente, gerando assim uma temperatura de saída para cada ponto da malha de discretização.

Portanto, os parâmetros utilizados por Nicoletti (1999) e necessários para a análise em um determinado ponto de discretização, são da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i,j,k} = T(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}) \\ \mu_{i,j,k} = \mu(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}) \\ h_i = h(x_{i,j,k}) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x,k} = \frac{\partial p}{\partial x}(x_{i,j,k}, z_{i,j,k}) \end{array} \right. ,$$

no qual os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  indicam o ponto de discretização e  $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$  são as coordenadas desse ponto como mostrado na Figura 3.15.

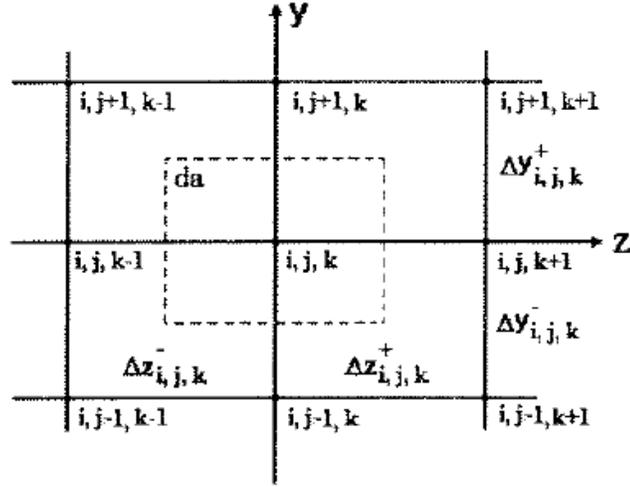


Figura 3.15: Malha de discretização para o plano  $(y, z)$  (NICOLETTI, 1999).

A expressão do perfil de velocidade na direção circunferencial  $x$  é dada pela equação (3.65). Utilizando essa equação para um determinado ponto da malha de discretização:

$$u = \left( \int_0^{y_{i,j,k}} \frac{y}{\mu} dy - \frac{F_{1i,j,k}}{F_{0i,j,k}} \cdot \int_0^{y_{i,j,k}} \frac{dy}{\mu} \right) \cdot \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i,k} + \frac{U}{F_{0i,j,k}} \cdot \int_0^{y_{i,j,k}} \frac{dy}{\mu} \quad (3.90).$$

Substituindo essa equação na equação da vazão e integrando-se para uma área infinitesimal  $da$  como é indicado na Figura 3.15 é possível obter:

$$Q_{i,j,k} = \int_A u_{i,j,k} dA \Rightarrow Q_{i,j,k} = \int_{\frac{1}{2}(z_{i,j,k}+z_{i,j,k-1})}^{\frac{1}{2}(z_{i,j,k}+z_{i,j,k+1})} \int_{\frac{1}{2}(y_{i,j,k}+y_{i,j-1,k})}^{\frac{1}{2}(y_{i,j,k}+y_{i,j+1,k})} u_{i,j,k} dy dz \quad (3.91).$$

no qual a vazão passa pela área formada pelo plano  $(y, z)$  na saída do segmento.

Uma vez que foi encontrada a vazão que passa por cada ponto da malha, é possível aplicar a equação (3.89) para o mesmo domínio de interesse (NICOLETTI, 1999), gerando:

$$T_1 = T_{E,j,k} = \frac{T_{S,j,k} \cdot Q_{S,j,k} + T_0 \cdot Q_{0S,j,k}}{Q_{S,j,k} + Q_{0S,j,k}} \quad (3.92)$$

no qual o sub-índice  $E$  refere-se à entrada do segmento posterior ao volume de controle (limite direito) e o sub-índice  $S$  refere-se a saída do segmento anterior ao volume de controle (limite esquerdo).

Tanto a temperatura do fluido de reposição,  $T_0$ , como a vazão de reposição,  $Q_0$ , são parâmetros operacionais do mancal. No caso da vazão de reposição, ela deve ser igual ao vazamento lateral de óleo, cuja a expressão é:

$$Q_0 = \int_{x_1}^{x_2} 2 \cdot \frac{h^3}{12 \cdot \mu} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \Big|_{L/2} dx \quad (3.93),$$

no qual  $x_1$  e  $x_2$  são as posições inicial e final do segmento, respectivamente. Porém, a vazão de reposição é a vazão total inserida no mancal para repor a lubrificação hidrodinâmica, enquanto a vazão  $Q_{i,j,k}$  é a vazão de óleo que passa apenas na área em torno do ponto de discretização que está sendo analisado no momento. Portanto, é necessário se obter uma aproximação para a vazão de reposição que seja possível somar os fluxos em cada ponto da malha. Assim, é preciso encontrar uma expressão para  $Q_{0i,j,k}$ , que leve em conta a relação entre as áreas total do limite do volume de controle ( $A$ ) e a área infinitesimal  $da_{i,j,k}$  ao redor do ponto de discretização. Com isso é possível obter tal expressão, que é da forma:

$$Q_{0i,j,k} = \frac{da_{i,j,k}}{A} \cdot Q_0 \Rightarrow Q_{0i,j,k} = \frac{\Delta y_{I,j,k} \cdot \Delta z_{I,j,k}}{h_s \cdot L} \cdot Q_0 \quad (3.94),$$

no qual  $h_s$  representa a espessura do filme de lubrificante na saída do segmento anterior ao volume de controle.

### 3.7. Resolução do Problema Termohidrodinâmico

A solução teórica de problemas reais requer a determinação do campo de pressão, assim como a determinação da variação da temperatura no filme de lubrificante. Para isso, primeiramente, assume-se o campo de temperatura constante no sistema, assim como o de viscosidade, e resolve-se a equação de Reynolds dada pela equação (3.74):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ h - \frac{F_1}{F_0} \right] - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.73).$$

Essa equação determina o campo de pressão hidrodinâmica atuante, e a partir da integração dessa pressão encontram-se as forças hidrodinâmicas.

Em seguida, inclui-se a teoria termohidrodinâmica, ou seja, o estudo das características do mancal considerando a variação da temperatura. Inicialmente, determina-se o campo de velocidade do fluido,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , e suas derivadas, que serão utilizadas posteriormente na equação da energia. As velocidades  $u$  e  $w$  já foram deduzidas e são dadas pelas equações (3.65) e (3.66) na forma:

$$u = U_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \cdot \int_0^y \frac{y}{\mu} dy + \left( \frac{U_2 - U_1}{F_0} - \bar{y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \cdot \int_0^y \frac{dy}{\mu} \quad (3.65);$$

$$w = W_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cdot \int_0^y \frac{y}{\mu} dy + \left( \frac{W_2 - W_1}{F_0} - \bar{y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \cdot \int_0^y \frac{dy}{\mu} \quad (3.66).$$

Para encontrar a velocidade  $v$  basta substituir as velocidades anteriores na equação da continuidade (equação (3.12)). Com isso obtêm-se:

$$v = - \int_0^h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.95).$$

A seguir, resolve-se a equação da energia para o fluido. A equação da energia dada pela equação (3.50) pode ser simplificada. Primeiramente, como a densidade do fluido é considerada constante, o termo  $\beta$  é nulo. Também são considerados constantes o calor específico  $C_p$  e a condutividade térmica  $k$ . Qualquer condução de calor através da coordenada axial não foi considerada, isso porque tal condução é considerada pequena em comparação as demais, sendo a condução através do filme a maior. Assim, a equação da energia é dada pela seguinte expressão:

$$\rho \cdot C_p \cdot \left( u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \cdot \Phi \quad (3.96);$$

$$\Phi = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (3.97),$$

no qual esses gradientes de velocidade são muito maiores que os outros, por isso eles predominam no cisalhamento viscoso.

Conhecido o campo de temperatura, determina-se o campo de viscosidade no sistema, a qual será utilizada na equação de Reynolds. Como relação para a viscosidade, em função da temperatura e também da pressão, foi utilizada a equação descrita por Roelands (LARSSON, 2000):

$$\mu(p, T) = \mu_0(T) \cdot \exp\left\{ \left[ \ln[\mu_0(T)] + 9.67 \right] \cdot \left[ -1 + \left( 1 + 5.1 \times 10^{-9} \cdot p \right)^{Z(T)} \right] \right\} \quad (3.98),$$

no qual  $\mu_0(T)$  é a viscosidade dinâmica à pressão atmosférica, que pode ser obtida como a seguir:

$$\log[\log(\mu_0) + 4.2] = -S_0 \cdot \log\left( 1 + \frac{T}{135} \right) + \log(G_0) \quad (3.99),$$

e  $Z(T)$  é definido como:

$$Z(T) = D_z + C_z \cdot \log\left(1 + \frac{T}{135}\right) \quad (3.100).$$

Os parâmetros  $S_0$ ,  $G_0$ ,  $D_z$  e  $C_z$  são constantes que caracterizam o lubrificante, e alguns de seus valores podem ser observados na figura abaixo.

Tabela 3.1: Constantes para as propriedades de lubrificantes (LARSSON, 2000).

Lubricant	$S_0$	$G_0$	$C_z$	$D_z$
Naphthenic mineral	1.60	5.13	-1.01	0.881
Paraffinic mineral	1.31	4.76	0.229	0.541
Naphthenic-paraffinic VG32	1.58	3.98	-0.014	0.727
Naphthenic-paraffinic VG68	1.68	4.49	0.010	0.692
Naphthenic-paraffinic VG150	1.50	4.96	-0.443	0.711
PAO A	1.37	4.62	0.275	0.447
PAO B	1.25	4.57	-0.071	0.500
Polyglycol	1.06	4.39	-0.586	0.592

Essa seqüência é repetida até que se alcance o regime permanente, que se dá quando a diferença entre a viscosidade em um ponto entre duas passagens consecutivas seja menor que o erro estipulado.

Uma vez encontrado o ponto de equilíbrio do mancal para uma determinada carga e rotação com o método acima, utiliza-se o método de pequenas perturbações, descrito anteriormente, para calcular os coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal, no qual:

$$K_{xy} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_0 \quad B_{xy} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_0.$$

No entanto, essa solução é complexa para se obter analiticamente, por isso, é necessária a introdução de métodos numéricos. Um dos métodos mais utilizados é o das diferenças finitas, que será visto a seguir.

## 4. Modelagem Computacional

O modelo matemático descrito na seção precedente é descrito por equações diferenciais parciais. No entanto, como essas equações apresentam não linearidades em suas formulações, a obtenção de uma solução analítica se torna muito difícil. Assim, é necessário um método numérico que contorne esse problema, sendo o Método das Diferenças Finitas um dos métodos numéricos que são largamente utilizados na literatura.

O método das diferenças finitas é uma das várias técnicas utilizadas para a diferenciação de uma função discreta, isto é, um conjunto discreto de valores da variável dependente em pontos conhecidos da variável independente.

Pelo método das diferenças finitas, um sistema de equações diferenciais parciais é transformado em um sistema de equações algébricas, onde o número de equações depende da malha utilizada na análise. Sendo assim, o primeiro passo para a obtenção das equações aproximadas é promover a discretização do domínio de interesse, ou seja, dividi-lo em células elementares.

### 4.1. Expansão em Série de Taylor

Seja  $\phi(x)$  uma função definida no intervalo  $a \leq x \leq b$ , e suponha que o intervalo  $[a, b]$  contém o conjunto  $x_0 = a, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{N+1}, b$ . A representação discreta  $\phi(x)$  é  $[\phi_i] = [\phi(a), \phi(x_1), \dots, \phi(x_i), \dots, \phi(b)]$  onde o valor de  $\phi(x_i)$  se representa por  $\phi_i$ . O valor de  $x_{i+1} - x_i$ , representa o espaçamento da malha e, para uma malha uniforme,  $x_i = a + i \cdot \Delta x$  com  $i = 0, \dots, N+1$  e  $\Delta x = \frac{b-a}{N+1}$ . A Figura 4.1 representa uma malha computacional para um problema unidimensional e a Figura 4.2 uma malha estruturada cartesiana ortogonal para um

problema bidimensional. Qualquer ponto  $(x_i, y_i)$  fica representado na malha por  $(i, j)$  e os vizinhos, relativamente a esse ponto, vêm representados por  $(i \pm 1, j \pm 1)$ .

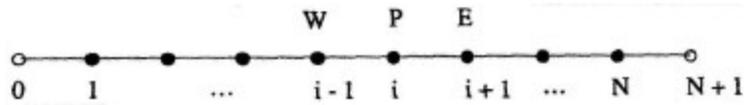


Figura 4.1: Malha computacional unidimensional (THOMAS, 1995).

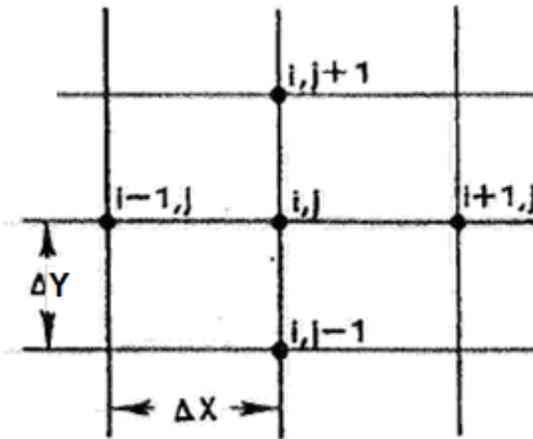


Figura 4.2: Malha computacional bidimensional (THOMAS, 1995).

A formulação por diferenças finitas pode ser obtida através do desenvolvimento em série de Taylor. Por exemplo, para aproximar  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  no ponto  $(x_i, y_i)$  por uma diferença, discreta para um valor finito  $\Delta x$ , expande-se em série de Taylor:

$$\phi(x_i + \Delta x, y_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta x)^m}{m!} \cdot \frac{\partial^m \phi(x_i, y_i)}{\partial x^m} \quad (4.1),$$

que para as equações à direita e a esquerda do ponto  $(x_i, y_i)$  são:

$$\phi(x_i + \Delta x, y_i) = \phi(x_i, y_i) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_i \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (4.2);$$

$$\phi(x_i - \Delta x, y_i) = \phi(x_i, y_i) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_i \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (4.3).$$

Se for pretendido obter no ponto  $(i, j)$  a primeira derivada através de diferenças à jusante, ou progressiva tem-se, pela equação (4.2):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} + e \left( \Delta x, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \quad (4.4),$$

ou através de diferenças a montante ou regressiva, pela equação (4.3):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} + e \left( \Delta x, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \quad (4.5).$$

Para obter uma formulação por diferenças centrais, subtrai-se a equação (4.3) da equação (4.2) e trunca-se a série resultando em:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} + e \left( \Delta x^2, \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) \quad (4.6).$$

Logo há um erro induzido pelo truncamento da série e expresso pela função  $e \left( \Delta x^n, \frac{\partial^m \phi}{\partial x^m} \right)$ .

Se mais termos da série de Taylor fossem considerados, seria necessário aproximar  $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}, \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5}, \dots, etc, \dots$  o que levaria a considerar mais pontos e mais séries de Taylor.

Nota-se, que diferenças a jusante ou montante são aproximações de primeira ordem, pois, pelas equações (4.4) e (4.5) vemos que  $e\left(\Delta x^n, \frac{\partial^m \phi}{\partial x^m}\right)$  para  $n=1$  e  $m=2$  é proporcional a  $\Delta x$ , que é a aproximação exata para  $\phi = a + b \cdot x$ , ou seja, a aproximação é linear. Da análise do erro de truncamento para diferenças centrais, vemos que  $n=2$  e  $m=3$  é a solução exata para  $\phi = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ , ou seja, uma aproximação parabólica. Assim, pode-se designar a ordem do operador  $\Delta x^n$ , por ordem  $n$ , ou da derivada  $\frac{\partial^m \phi}{\partial x^m}$ , por ordem  $m-1$ .

Analogamente, é possível obter a aproximação da segunda derivada  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  somando-se os fatores das equações (4.2) e (4.3), obtendo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2 \cdot \phi_{i,j}}{\Delta x^2} + e\left(\Delta x^2, \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right) \quad (4.7),$$

que é de segunda ordem de precisão no operador  $\Delta x$  e de quarta ordem na derivada. Para ilustrar o uso da expansão em série de Taylor para expressões com derivadas parciais cruzadas, considerar-se-á  $\frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y}$ . As expansões em série de Taylor para as duas variáveis  $x$  e  $y$  são:

$$\begin{aligned} \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) = & \phi(x, y) + \Delta x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \\ & + 2 \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \cdot \partial y} + e\left[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3\right] \end{aligned} \quad (4.8);$$

$$\begin{aligned} \phi_{i+1,j+1} = & \phi_{i,j} + \Delta x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \\ & + \frac{\Delta y^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + e\left[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3\right] \end{aligned} \quad (4.9);$$

Expressões análogas podem ser obtidas para  $\phi_{i-1,j-1}$ ;  $\phi_{i+1,j-1}$ ;  $\phi_{i-1,j+1}$  gerando:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} + e[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (4.10).$$

## 4.2. Resolução da Equação de Reynolds por Diferenças Finitas

Desde a dedução da equação diferencial de Reynolds para lubrificação hidrodinâmica, muitas pesquisas foram realizadas para solucionar a equação diferencial parcial e não homogênea para mancais radiais. No entanto, as soluções analíticas se limitavam a casos especiais como a solução para mancais infinitamente longos e a Solução de Sommerfeld, que estavam em desacordo com os fatos conhecidos e a observação experimental. Sendo assim, como o aperfeiçoamento da computação, métodos numéricos foram melhores desenvolvidos, facilitando a resolução desse tipo de equações.

### 4.2.1. O Caso Dinâmico

A equação de Reynolds para o caso dinâmico, é aquela descrita pela equação (3.74) e repetida aqui por comodidade:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = r \cdot \omega \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ h - \frac{F_1}{F_0} \right] - \frac{\partial h}{\partial t}$$

Para se utilizar o método numérico das diferenças finitas na equação de Reynolds tem como procedimento padrão, primeiro, reduzir o número de variáveis em grupos adimensionais. Tais grupos são da forma:

$$\bar{x} = \frac{x}{r} \quad (4.11a);$$

$$\bar{z} = \frac{z}{r} \quad (4.11b);$$

$$\bar{h} = \frac{h}{C} = 1 + \varepsilon \cdot \cos \theta \quad (4.11c);$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (4.11d);$$

$$\bar{t} = t \cdot \omega \quad (4.11e);$$

$$\bar{p} = \frac{p}{6 \cdot \mu_0 \cdot \omega \cdot \left(\frac{r_e}{C}\right)^2} \quad (4.11f),$$

$$\bar{F}_0 = \frac{\bar{h} \cdot C}{\mu_0} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\bar{\mu}} d\eta \quad (4.11g),$$

$$\bar{F}_1 = \frac{\bar{h}^2 \cdot C^2}{\mu_0} \cdot \int_0^1 \frac{\eta}{\bar{\mu}} d\eta \quad (4.11h),$$

$$\bar{F}_2 = \frac{\bar{h}^3 \cdot C^3}{\mu_0} \cdot \int_0^1 \frac{\eta}{\bar{\mu}} \cdot \left( \eta - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \right) d\eta \quad (4.11i),$$

onde  $x$  é a coordenada circunferencial,  $z$  a coordenada axial,  $r$  o raio do mancal,  $h$  a espessura do filme de óleo,  $C$  a folga radial do mancal,  $\varepsilon$  a razão de excentricidade,  $\mu$  a viscosidade,  $\mu_0$  viscosidade média,  $p$  a pressão,  $\omega$  velocidade angular do eixo e  $\eta$  é a coordenada radial adimensional, que será melhor explicada mais a frente. Substituindo o conjunto de equações

(4.11) na equação de Reynolds, e fazendo algumas manipulações matemáticas, chegamos à equação de Reynolds adimensional:

$$\begin{aligned}
 & 6 \cdot \left[ \left( \bar{h}^3 \cdot \frac{\partial \bar{F}_2'}{\partial \bar{x}} + 3 \cdot \bar{h}^2 \cdot \bar{F}_2' \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{h}^3 \cdot \bar{F}_2' \cdot \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} \right] + 6 \cdot \left( \bar{h}^3 \cdot \frac{\partial \bar{F}_2'}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \bar{h}^3 \cdot \bar{F}_2' \cdot \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} \right) = \\
 & = \left( 1 - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \right) \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \bar{h} \cdot \left( \frac{1}{\bar{F}_0} \cdot \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0^2} \cdot \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}}
 \end{aligned} \tag{4.12}.$$

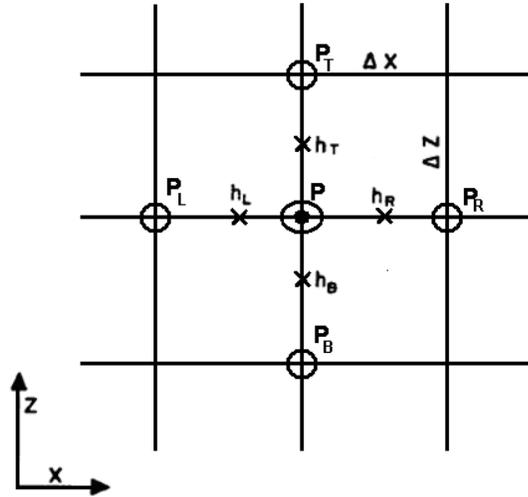


Figura 4.3: Malha computacional bidimensional (PINKUS, 1956).

Tomando como referencia a malha da Figura 4.3 e adotando a nomenclatura nela descrita, podemos discretizar as derivadas parciais da equação acima utilizando as diferenças finitas:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{p_R - p_L}{2 \cdot \Delta x} \tag{4.13};$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{p_T - p_B}{2 \cdot \Delta z} \tag{4.14};$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{p_R + p_L - 2 \cdot p_N}{\Delta x^2} \quad (4.15);$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{p_T + p_B - 2 \cdot p_N}{\Delta z^2} \quad (4.16);$$

Agora substituindo as expressões (4.13) à (4.16) na equação (4.12) e isolando o elemento central  $p_N$  temos:

$$\begin{aligned} p_N = & \frac{6 \cdot \left[ \frac{\bar{h}^3}{2 \cdot \Delta z} \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right] \cdot p_T + 6 \cdot \left[ \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \bar{h}^3 \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}} + 3 \cdot \bar{h}^2 \cdot \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} \right] \cdot p_R}{12 \cdot \left( \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right)} + \\ & + \frac{6 \cdot \left[ -\frac{\bar{h}^3}{2 \cdot \Delta z} \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right] \cdot p_B + 6 \cdot \left[ -\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \bar{h}^3 \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}} + 3 \cdot \bar{h}^2 \cdot \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} \right] \cdot p_L}{12 \cdot \left( \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right)} + \\ & + \frac{\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \cdot \left( 1 - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \right) - \bar{h} \cdot \left( \frac{1}{\bar{F}_0} \cdot \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0^2} \cdot \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}}{12 \cdot \left( \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right)} \quad (4.17), \end{aligned}$$

na qual as derivadas que não foram transformadas através das diferenças finitas podem ser resolvidas através de diferenças centrais e  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \Delta \dot{x} \cdot \cos \theta + \Delta \dot{y} \cdot \sin \theta$ .

A equação anterior tem a forma:

$$p_N = c_0 + c_1 \cdot p_T + c_2 \cdot p_R + c_3 \cdot p_B + c_4 \cdot p_L,$$

no qual  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são constantes. Dessa forma em uma malha de  $N$  pontos teremos  $N$  equações algébricas que podem ser resolvidas por qualquer método de resolução de sistemas lineares.

Com os valores de pressão adquiridos é possível avaliar as forças resultantes no filme de lubrificante. Para isso, basta integrar numericamente essa pressão, obtendo as forças vertical e horizontal respectivamente:

$$F_v = \sum_{n=1}^n p_N \cdot \cos \theta_N \cdot (\Delta x) \cdot (\Delta z) \quad (4.18);$$

$$F_h = \sum_{n=1}^n p_N \cdot \sin \theta_N \cdot (\Delta x) \cdot (\Delta z) \quad (4.19).$$

#### 4.2.2. O Caso Estático

A equação de Reynolds, para o caso de carregamento estático, ou seja, no qual não há variação da carga ou da rotação em função do tempo, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ F_2' \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] = r \cdot \omega \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ h - \frac{F_1}{F_0} \right] \quad (4.20).$$

O método de resolução para o caso estático é muito semelhante ao caso dinâmico, sendo que a diferença reside na ausência do termo referente à velocidade ou variação temporal da espessura de filme  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$ . Sendo assim, a equação de diferenças finitas para essa equação de Reynolds é:

$$\begin{aligned}
p_N = & \frac{6 \cdot \left[ \frac{\bar{h}^3}{2 \cdot \Delta z} \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right] \cdot p_T + 6 \cdot \left[ \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \bar{h}^3 \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}} + 3 \cdot \bar{h}^2 \cdot \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} \right] \cdot p_R}{12 \cdot \left( \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right)} + \\
& + \frac{6 \cdot \left[ -\frac{\bar{h}^3}{2 \cdot \Delta z} \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right] \cdot p_B + 6 \cdot \left[ -\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \bar{h}^3 \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}} + 3 \cdot \bar{h}^2 \cdot \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} \right] \cdot p_L}{12 \cdot \left( \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right)} + \\
& + \frac{\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \cdot \left( 1 - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \right) - \bar{h} \cdot \left( \frac{1}{\bar{F}_0} \cdot \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0^2} \cdot \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{x}} \right)}{12 \cdot \left( \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta x^2} + \frac{\bar{F}_2 \cdot \bar{h}^3}{\Delta z^2} \right)} \quad (4.21).
\end{aligned}$$

Na qual as forças de sustentação são obtidas através do mesmo procedimento.

### 4.3. Resolução da Equação da Energia por Diferenças Finitas

Como a equação de Reynolds, a equação da energia tem a forma diferencial e, portanto, é de difícil resolução, sendo necessário recorrer a métodos numéricos como o das diferenças finitas.

Uma dificuldade maior ocorre nesse caso, já que a malha utilizada no problema térmico não é uniforme devido ao problema da variação da espessura do filme de fluido ao longo do comprimento circunferencial.

Para resolver essa questão, é recomendado recorrer á uma transformação de coordenadas, que tem como princípio transformar uma malha não uniforme em uma malha uniforme e, assim, passá-la para o plano computacional, servindo também como um método adimensionalizador para a coordenada que possui a não uniformidade. A figura abaixo exemplifica o caso em questão.

Como proposto por Maliska (2004), será considerado, primeiramente, o caso em que todos os elementos são formados pelas linhas do sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas

(Figura 4.5a), com respeito ao respectivo plano transformado, ou computacional (Figura 4.5b). Nota-se que o elemento 1234 faz parte de um sistema global de coordenadas e está definido pelas linhas  $\xi = 3$  e  $\xi = 4$  e pelas linhas  $\eta = 2$  e  $\eta = 3$ .

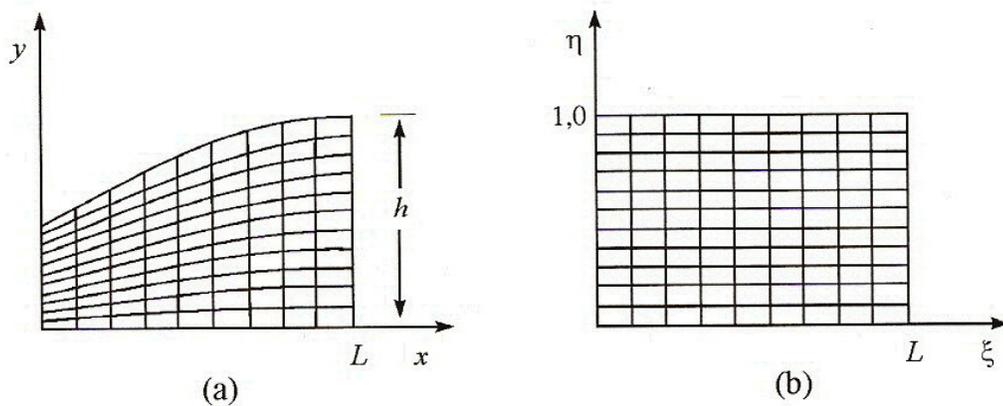


Figura 4.4: a) Plano Físico. b) Plano computacional (MALISKA, 2004).

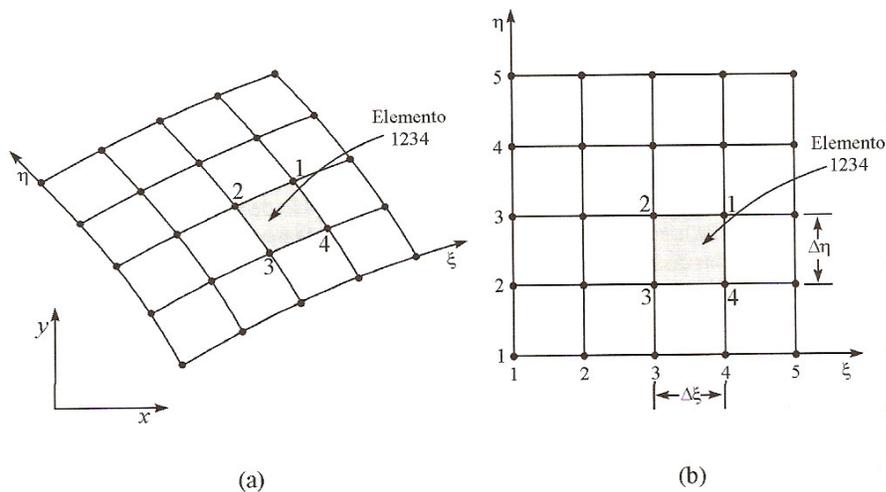


Figura 4.5: Sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas (MALISKA, 2004).

Em três dimensões, as superfícies dos volumes de controle são chamadas de superfícies coordenadas. A Figura 4.6 mostra um sistema de coordenadas curvilíneas  $(\xi, \eta, \gamma)$  referidas ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$  com o ponto A sobre o eixo coordenado  $\xi$ . As coordenadas não

uniformes de um ponto são relacionadas ao sistema cartesiano pelas equações de transformação do tipo:

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad (4.21);$$

$$\eta = \eta(x, y, z) \quad (4.22);$$

$$\gamma = \gamma(x, y, z) \quad (4.23).$$

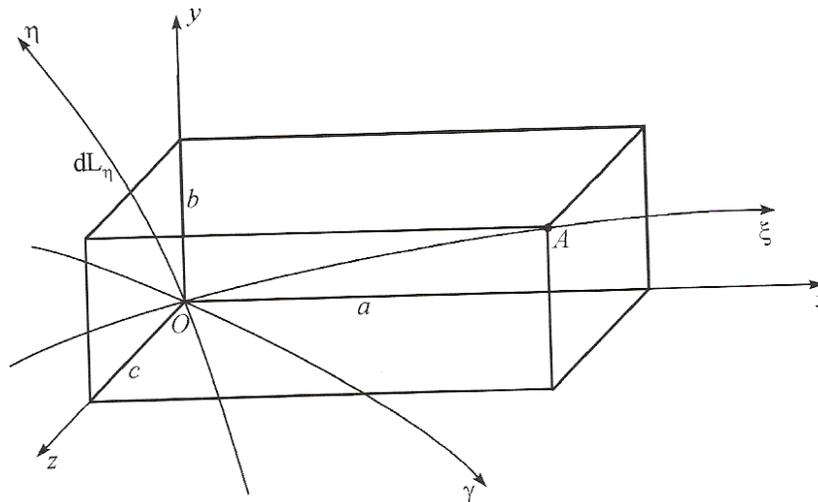


Figura 4.6: Sistema de coordenadas curvilíneas  $(\xi, \eta, \gamma)$  (MALISKA, 2004).

Os diferenciais em cada eixo coordenado no domínio transformado são dados por:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot dz \quad (4.24);$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cdot dz \quad (4.25);$$

$$d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \cdot dz \quad (4.26),$$

ou na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (4.27),$$

ou, ainda:

$$\{d_T\} = [A] \cdot \{d_F\} \quad (4.28),$$

no qual  $d_T$  e  $d_F$  são os diferenciais no domínio transformado e físico, respectivamente. Por sua vez, os diferenciais no plano físico são dados por:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot d\eta + \frac{\partial x}{\partial \gamma} \cdot d\gamma \quad (4.29);$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot d\eta + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \cdot d\gamma \quad (4.30);$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot d\eta + \frac{\partial z}{\partial \gamma} \cdot d\gamma \quad (4.31).$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{bmatrix} \quad (4.32),$$

ou:

$$\{d_F\} = [B] \cdot \{d_T\} \quad (4.33).$$

Assim, pode-se perceber que  $[A] = [B]^{-1}$ . Então:

$$[B]^{-1} = J \cdot \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) & - \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) & \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \\ - \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) & \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) & - \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \\ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) & - \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) & \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix},$$

no qual:

$$J = \left[ \frac{dx}{d\xi} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) - \frac{dx}{d\eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) + \frac{dx}{d\gamma} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right],$$

é o jacobiano da transformação.

Comparando  $[A]$  com  $[B]^{-1}$ , elemento por elemento das matrizes tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) & - \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) & \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \\ - \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) & \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) & - \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \\ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) & - \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) & \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = J \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) \quad (4.34a);$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \quad (4.34b);$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \quad (4.34c);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -J \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) \quad (4.34d);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \quad (4.34e);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \quad (4.34f);$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = J \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (4.34g);$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = -J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad (4.34h);$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad (4.34i).$$

Conforme comentado, a equação governante será transformada com o intuito de obtê-la, no plano computacional, mantendo a sua forma conservativa, ou divergente. Seja a seguinte equação de conservação escrita na forma vetorial (MALISKA, 2004):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = S \quad (4.35),$$

ou na forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} = S \quad (4.36),$$

em que:

$$\vec{F} = E \cdot \vec{i} + F \cdot \vec{j} + G \cdot \vec{k} \quad (4.37);$$

$$Q = \rho \cdot \phi \quad (4.38);$$

$$E = \rho \cdot u \cdot \phi - \Gamma^\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.39);$$

$$F = \rho \cdot v \cdot \phi - \Gamma^\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.40);$$

$$G = \rho \cdot w \cdot \phi - \Gamma^\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4.41),$$

em que  $\phi$  é um escalar genérico que representa as propriedades conservadoras como massa, quantidade de movimento, energia, entre outros, e  $\Gamma^\phi$  representa o coeficiente de transporte. As componentes  $E$ ,  $F$  e  $G$  representam as componentes cartesianas do fluxo advectivo mais o difusivo da propriedade genérica  $\phi$ .

A transformação de coordenadas necessária para a solução de problemas tridimensionais e transientes é dada por:

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \quad (4.42a);$$

$$\eta = \eta(x, y, z, t) \quad (4.42b);$$

$$\gamma = \gamma(x, y, z, t) \quad (4.42c);$$

$$\tau = \tau(t) \quad (4.42d),$$

no qual o jacobiano e as expressões da transformação são obtidas como anteriormente, adicionados das seguintes relações que envolvem a coordenada tempo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \quad (4.43);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \quad (4.44);$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \quad (4.45).$$

A idéia é transformar a equação (4.36) para o sistema  $(\xi, \eta, \gamma)$ . Usando a regra da cadeia, as derivadas das componentes do fluxo resultam em:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (4.46);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4.47);$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (4.48);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (4.49),$$

no qual, o ultimo termo das equações (4.46) a (4.48) é igual a zero, uma vez que  $\tau$  não é função de  $x, y, z$ , e  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$ .

Introduzindo as equações (4.46) a (4.49) na equação de conservação (4.35) temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial E}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} = S \end{aligned} \quad (4.50).$$

Dividindo agora por  $J$ , aparecerão termos do tipo  $\frac{\partial E}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right)$ ,

etc. Para que as métricas e o jacobiano fiquem dentro do sinal da derivada, procurando assim uma forma conservativa para as equações, fazem-se várias manipulações algébricas somando-se e

subtraindo-se termos do tipo  $E \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$ ,  $F \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)$ ,  $G \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$ ,

$Q \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)$ , etc, que recuperam a derivada do produto. A equação resulta, então, na forma

conservativa, como:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot Q + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot E + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot F + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot G}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot Q + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot E + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot F + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cdot G}{J} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial t} \cdot Q + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot E + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot F + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \cdot G}{J} \right) - Q \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial t}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) \right] + \\
& - E \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{J} \right) \right] - F \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\frac{\partial \eta}{\partial y}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial y}}{J} \right) \right] + \\
& - G \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{\partial \xi}{\partial z}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\frac{\partial \eta}{\partial z}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial z}}{J} \right) \right] = \frac{S}{J} \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Utilizando as expressões de transformação é possível observar que os quatro últimos termos entre colchetes, no lado esquerdo da equação acima, são iguais a zero, encontrando-se a equação transformada na forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{Q}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{Q}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{E}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{F}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{G}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{Q}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{E}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{F}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{G}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{Q}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{E}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{F}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{G}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = \frac{S}{J} \tag{4.52}.
\end{aligned}$$

Definindo:

$$\hat{Q} = \frac{Q}{J} \tag{4.53a};$$

$$\hat{E} = \frac{Q}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{E}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{F}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{G}{J} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \tag{4.53b};$$

$$\hat{F} = \frac{Q}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{E}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{F}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{G}{J} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (4.53c);$$

$$\hat{G} = \frac{Q}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{E}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{F}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{G}{J} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} \quad (4.53d);$$

$$\hat{S} = \frac{S}{J} \quad (4.53e),$$

encontra-se a equação na forma conservativa como (MALISKA, 2004):

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \gamma} = \hat{S} \quad (4.54).$$

Substituindo na equação (4.52) as expressões das componentes  $E$ ,  $F$  e  $G$ , encontra-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho \cdot \phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \cdot \rho \cdot \phi \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \cdot \rho \cdot \phi \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \cdot \rho \cdot \phi \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \frac{S}{J} \end{aligned} \quad (4.55).$$

Nomeando algumas expressões e usando a regra da cadeia para expandir as derivadas da função  $\phi$  em  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho \cdot \phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \cdot \tilde{U} \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho \cdot \tilde{V} \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho \cdot \tilde{W} \cdot \phi) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( a \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + d \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + e \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( d \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + b \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( e \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \frac{S}{J} \quad (4.56), \end{aligned}$$

no qual:

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (4.57a);$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \quad (4.57b);$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \quad (4.57c);$$

$$a = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \quad (4.57d);$$

$$b = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \quad (4.57e);$$

$$c = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)^2 \quad (4.57f);$$

$$d = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (4.57g);$$

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} \quad (4.57h);$$

$$f = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} \quad (4.57i).$$

Agora, para uma situação na qual não há variação no tempo a equação, se torna:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \cdot \tilde{U} \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho \cdot \tilde{V} \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho \cdot \tilde{W} \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( a \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + d \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + e \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( d \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + b \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( e \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\Gamma^\phi}{J} \right] + \frac{S}{J} \end{aligned} \quad (4.58),$$

no qual:

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} \cdot \left( u \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (4.59a);$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{J} \cdot \left( u \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \quad (4.59b);$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{J} \cdot \left( u \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \quad (4.59c);$$

Utilizando as equações métricas de transformação, dadas pelas equações (4.34), nas equações (4.57) e (4.59):

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} \cdot \left[ u \cdot J \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) - v \cdot J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) + w \cdot J \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right]$$

$$\tilde{U} = \left[ u \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) - v \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) + w \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right] \quad (4.60a);$$



$$\begin{aligned} \varepsilon = J^2 \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + J^2 \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \\ + J^2 \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (4.60h);$$

$$\begin{aligned} \lambda = -J^2 \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - J^2 \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \\ + J^2 \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (4.60i).$$

Rearranjando a equação (4.58) tem-se :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \cdot \tilde{U}) \cdot \phi + \rho \cdot \tilde{U} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho \cdot \tilde{V}) \cdot \phi + \rho \cdot \tilde{V} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho \cdot \tilde{W}) \cdot \phi + \rho \cdot \tilde{W} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \Delta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \Gamma^\phi \cdot J \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \Delta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \beta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \Gamma^\phi \cdot J \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( \varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \chi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \Gamma^\phi \cdot J \right] + \frac{S}{J} \end{aligned} \quad (4.61);$$

$$\begin{aligned} \phi \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \cdot \tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho \cdot \tilde{V}) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho \cdot \tilde{W}) \right] + \rho \cdot \tilde{U} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \rho \cdot \tilde{V} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \rho \cdot \tilde{W} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \Gamma^\phi \cdot \left\{ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \Delta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} \right) \cdot J + \left( \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \Delta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\partial J}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \Delta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \beta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \cdot \partial \gamma} \right) \cdot J + \left( \Delta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \beta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\partial J}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \cdot \partial \gamma} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \cdot \partial \gamma} + \frac{\partial \chi}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \chi \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} \right) \cdot J + \right. \\ \left. + \left( \varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \chi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \cdot \frac{\partial J}{\partial \gamma} \right\} + \frac{S}{J} \end{aligned} \quad (4.61a),$$

na qual o primeiro termo dessa expressão, pela equação da continuidade, é nulo.

Agora derivando os termos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$ ,  $\Delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  e  $J$ , e utilizando a transformação  $y = h(x) \cdot \eta$ ,  $x = \xi$  e  $z = \gamma$ , obtêm-se:

$$\tilde{U} = u \cdot h \quad (4.62a);$$

$$\tilde{V} = v - u \cdot \eta \cdot \frac{dh}{d\xi} \quad (4.62b);$$

$$\tilde{W} = w \cdot h \quad (4.62c);$$

$$\alpha = h^2 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = 2 \cdot h \cdot \frac{dh}{d\xi} \quad (4.62d);$$

$$\beta = \eta^2 \cdot \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial \eta} = 2 \cdot \eta \cdot \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 \quad (4.62e);$$

$$\chi = h^2 \Rightarrow \frac{\partial \chi}{\partial \gamma} = 0 \quad (4.62f);$$

$$\Delta = - \left( h \cdot \eta \cdot \frac{dh}{d\xi} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} = - \left[ \eta \cdot \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 + h \cdot \eta \cdot \frac{d^2 h}{d\xi^2} \right] \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} = - \left( h \cdot \frac{dh}{d\xi} \right) \end{cases} \quad (4.62g);$$

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.62h);$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.62i);$$

$$J = \frac{1}{h} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \xi} = -\left(\frac{dh}{d\xi}\right) \cdot \left(\frac{1}{h}\right)^2 \\ \frac{\partial J}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.62j);$$

Substituindo o conjunto de expressões (4.62) na equação (4.61a) tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho \cdot u \cdot h \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \rho \cdot \left( v - u \cdot \eta \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \rho \cdot w \cdot h \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \Gamma^\phi \cdot \left\{ \frac{1}{h} \cdot \left[ 2 \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + h^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \eta \cdot \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 + h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right] \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - h \cdot \eta \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \cdot \partial \eta} \right] - \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \left( h^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - h \cdot \eta \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{h} \cdot \left[ -h \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - h \cdot \eta \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + 2 \cdot \eta \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \cdot \eta^2 + 1 \right] \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{h} \cdot \left( h^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} \right) \right\} + \frac{S}{J} \end{aligned} \quad (4.63),$$

Fazendo algumas manipulações algébricas chega-se à:

$$\begin{aligned} & \rho \cdot u \cdot h \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \rho \cdot \left( v - u \cdot \eta \cdot \frac{dh}{d\xi} \right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \rho \cdot w \cdot h \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \Gamma^\phi \cdot \left\{ h \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \left[ 2 \cdot \frac{\eta}{h} \cdot \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 - \eta \cdot \frac{d^2 h}{d\xi^2} \right] \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \right. \\ & \left. - 2 \cdot \eta \cdot \frac{dh}{d\xi} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{h} \cdot \left[ \eta^2 \cdot \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 + 1 \right] \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + h \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} \right\} + \frac{S}{J} \end{aligned} \quad (4.64).$$

Os termos genéricos são dados por  $\phi = T$ ,  $\Gamma^\phi = \frac{k}{c_p}$ ,  $S = \frac{\mu}{c_p} \cdot \Phi$ , onde o termo  $\Phi$  é a dissipação viscosa dada por  $\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ .

Fazendo a transformação dos termos de velocidade obtêm-se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial \gamma} = J \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (4.65a);$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial \gamma} = J \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (4.65b);$$

Substituindo as expressões (4.65) na equação da dissipação viscosa:

$$\Phi = J^2 \cdot \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 \right] \quad (4.66).$$

Assim como na equação de Reynolds, para a resolução da equação da energia, tem-se como procedimento padrão, primeiro adimensionalizar a equação. Para isso foram utilizados os grupos adimensionais a seguir:

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{r} \quad (4.67a);$$

$$\bar{z} = \frac{z}{r} \quad (4.67b);$$

$$\bar{h} = \frac{h}{C} = 1 + \varepsilon \cdot \cos \theta \quad (4.67c);$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (4.67d);$$

$$\bar{F}_0 = \frac{\bar{h} \cdot C}{\mu_0} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\bar{\mu}} d\eta \quad (4.67e),$$

$$\bar{F}_1 = \frac{\bar{h}^2 \cdot C^2}{\mu_0} \cdot \int_0^1 \frac{\eta}{\bar{\mu}} d\eta \quad (4.67f),$$

$$\bar{u} = \frac{u}{r \cdot \omega} = 6 \cdot \bar{h}^2 \cdot \left( \int_0^\eta \frac{\eta}{\bar{\mu}} d\eta - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \cdot \int_0^\eta \frac{d\eta}{\bar{\mu}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{1}{\bar{F}_0} \cdot \int_0^\eta \frac{d\eta}{\bar{\mu}} \quad (4.67g);$$

$$\bar{v} = \frac{v}{r \cdot \omega} = \int_0^\eta \left[ \eta \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\xi}} \cdot \frac{C}{r} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \bar{h} \cdot \frac{C}{r} \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\gamma}} \right) \right] d\eta \quad (4.67h);$$

$$\bar{w} = \frac{w}{r \cdot \omega} = 6 \cdot \bar{h}^2 \cdot \left( \int_0^\eta \frac{\eta}{\bar{\mu}} d\eta - \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \cdot \int_0^\eta \frac{d\eta}{\bar{\mu}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\gamma}} \quad (4.67i).$$

Inserindo esse grupo de funções na equação (4.64), assim como substituindo os termos genéricos e rearranjando-os:

$$\begin{aligned} u \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{\xi}} + \left\{ \frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \left( \frac{C}{r} \right)^2 \cdot \left[ \bar{h} \cdot \eta \cdot \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{\xi}^2} - 2 \cdot \eta \cdot \left( \frac{d\bar{h}}{d\bar{\xi}} \right)^2 \right] + \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{r}{C} \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \eta \cdot \frac{d\bar{h}}{d\bar{\xi}} \right) \right\} \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} + \bar{w} \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{\gamma}} = \\ = \frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \left\{ \left( \frac{C}{r} \right)^2 \cdot \bar{h}^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{\xi}^2} - 2 \cdot \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \bar{h} \cdot \eta \cdot \frac{d\bar{h}}{d\bar{\xi}} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{\xi} \partial \eta} + \left[ \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \eta^2 \cdot \left( \frac{d\bar{h}}{d\bar{\xi}} \right)^2 + 1 \right] \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{C}{r} \right)^2 \cdot \bar{h}^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{\gamma}^2} \right\} + T_f \cdot \frac{\bar{\mu}}{\bar{h}^2} \cdot \bar{\Phi} \quad (4.68), \end{aligned}$$

onde,

$$\bar{\Phi} = \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 \quad (4.69),$$

$$e: \quad Pe^* = \frac{k}{\rho \cdot c_p \cdot \omega \cdot C^2}; \quad T_f = \frac{\mu_0 \cdot \omega}{\rho \cdot c_p} \cdot \left( \frac{r}{C} \right)^2.$$

Simplificando essa expressão para um problema bidimensional tem-se a equação:

$$\begin{aligned} & u \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi} + \left\{ \frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \left( \frac{C}{r} \right)^2 \cdot \left[ \bar{h} \cdot \eta \cdot \frac{d^2 \bar{h}}{d\xi^2} - 2 \cdot \eta \cdot \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)^2 \right] + \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{r}{C} \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \eta \cdot \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right) \right\} \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} = \\ & = \frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \left\{ \left( \frac{C}{r} \right)^2 \cdot \bar{h}^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \bar{h} \cdot \eta \cdot \frac{d\bar{h}}{d\xi} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + \left[ \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \eta^2 \cdot \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)^2 + 1 \right] \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right\} + T_f \cdot \frac{\bar{\mu}}{\bar{h}^2} \cdot \bar{\Phi} \end{aligned} \quad (4.70),$$

Finalmente, podemos aplicar a discretização pelo método das diferenças finitas. Porém, segundo Patankar (1980) no caso da equação da energia não será possível utilizar a aproximação por diferenças centrais, uma vez que tal aproximação, para os termos convectivos, gera problemas de convergência da solução numérica oriunda de métodos iterativos ponto a ponto, que serão descritos na subseção seguinte. O problema de convergência, em questão, são oscilações numéricas que acarretam em respostas não realistas.

Calculando-se o número de Peclet do escoamento no interior do mancal, percebeu-se que esse número era alto ( $\cong 20000$ ), e, como o número de Peclet diz respeito à razão entre o escoamento convectivo e o escoamento difusivo, tem-se que o escoamento é predominantemente convectivo, ou seja, os termos convectivos são muito maiores que os termos difusivos. Assim, tomando como exemplo um caso ideal, no qual os termos difusivos são zero, utilizando diferenças centrais o coeficiente que multiplicaria o termo  $T_N$  seria igual a zero e não seria possível resolver a equação. No caso em questão, os termos difusivos não são zero, mas são bem pequenos, gerando dificuldades na resolução (imprecisões numéricas), pois, a matriz dos

coeficientes apresenta fraca preponderância diagonal. Esse fato é contornado utilizando as diferenças a montante.

Porém, as diferenças a montante são menos precisas que as diferenças centrais, já que o erro de truncamento da expansão por série de Fourier é da ordem de  $(\Delta x^2)$  para as diferenças centrais e da ordem de  $(\Delta x)$  para as diferenças a montante. Mas é possível corrigir essa imprecisão aumentando o número de pontos da malha computacional. A aproximação por diferenças a montante é dada pela equação (4.5).

Porém, é importante notar que, para o caso em questão, a equação (4.5) deve ser uma aproximação a montante do escoamento. Assim, é necessário saber o sentido do escoamento para cada ponto da malha computacional. No nosso caso bidimensional, todos os escoamentos envolvidos na equação da energia possuem apenas uma direção, já que não é considerado refluxo no mancal, e, portanto, pode-se utilizar a equação (4.5) em sua forma normal.

Utilizando diferenças à montante para as derivadas de primeira ordem e diferenças centrais para as derivadas de segunda ordem, obtemos que as derivadas parciais valem:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{T_N - T_L}{\Delta x} \quad (4.70a);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{T_N - T_B}{2 \cdot \Delta y} \quad (4.70b);$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{T_R + T_L - 2 \cdot T_N}{\Delta x^2} \quad (4.70c);$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{T_T + T_B - 2 \cdot T_N}{\Delta y^2} \quad (4.70d);$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \frac{T_{RT} - T_{RB}}{2 \cdot \Delta y} - \frac{T_{LT} - T_{LB}}{2 \cdot \Delta y} \right) \quad (4.70e).$$

Introduzindo essas expressões na equação de energia adimensionalizada, tem-se:

$$T_N = \frac{C_1 \cdot T_T + C_2 \cdot T_R + C_3 \cdot T_B + C_4 \cdot T_L + C_5 \cdot (T_{RT} - T_{RB} - T_{LT} + T_{LB}) + C_6}{C_7} \quad (4.71),$$

no qual:

$$C_1 = \frac{\frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \left[ \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \eta^2 \cdot \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)^2 + 1 \right]}{\Delta y^2} \quad (4.72a);$$

$$C_2 = \frac{\frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \bar{h}^2 \cdot \left( \frac{C}{r_e} \right)^2}{\Delta x^2} \quad (4.72b);$$

$$C_3 = \frac{\frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \left[ \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \eta^2 \cdot \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)^2 + 1 \right]}{\Delta y^2} + \frac{\frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \left[ \bar{h} \cdot \eta \cdot \frac{d^2\bar{h}}{d\xi^2} - 2 \cdot \eta \cdot \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)^2 \right] + \frac{1}{\bar{h}} \cdot \left( \frac{r}{C} \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \eta \cdot \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)}{\Delta y} \quad (4.72c);$$

$$C_4 = \frac{\frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \bar{h}^2 \cdot \left( \frac{C}{r_e} \right)^2}{\Delta x^2} + \frac{\bar{u}}{\Delta x} \quad (4.72d);$$

$$C_5 = -\frac{\frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot 2 \cdot \left( \frac{C}{r_e} \right)^2 \cdot \bar{h} \cdot \eta \cdot \frac{d\bar{h}}{d\xi}}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \quad (4.72e);$$

$$C_6 = T_f \cdot \frac{\bar{\mu}}{\bar{h}^2} \cdot \bar{\Phi} \quad (4.72f);$$

$$C_7 = 2 \cdot \left\{ \frac{\frac{Pe^*}{\bar{h}^2} \cdot \bar{h}^2 \cdot \left(\frac{C}{r_e}\right)^2}{\Delta x^2} + \frac{\frac{Pe^*}{h^2} \cdot \left[\left(\frac{C}{r_e}\right)^2 \cdot \eta^2 \cdot \left(\frac{d\bar{h}}{d\xi}\right)^2 + 1\right]}{\Delta y^2} \right\} + \frac{u}{\Delta x} + \frac{\frac{Pe^*}{h^2} \cdot \left(\frac{C}{r_e}\right)^2 \cdot \left[\bar{h} \cdot \eta \cdot \frac{d^2\bar{h}}{d\xi^2} - 2 \cdot \eta \cdot \left(\frac{d\bar{h}}{d\xi}\right)^2\right]}{\Delta y} + \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{r}{C}\right) \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \eta \cdot \frac{d\bar{h}}{d\xi} \quad (4.72g).$$

Novamente, para uma malha de  $n$  pontos, teremos  $n$  equações algébricas dessa forma, que podem ser resolvidas por qualquer método de resolução de sistemas de equações lineares. Para o campo de velocidade, que se encontra na dissipação viscosa, usa-se como método de resolução as diferenças centrais para derivadas de primeira ordem, que é descrita pela equação (4.6).

#### 4.4. Solução do Sistema Linear de Equações

Após ter sido apresentado o método das diferenças finitas para a aproximação de equações diferenciais parciais, deve-se descrever algum método para a solução do sistema de equações algébricas lineares, originado da aplicação do método numérico.

Os métodos de solução de sistemas lineares podem ser divididos em duas classificações: diretos e iterativos.

Os métodos diretos são todos aqueles que trabalham com a matriz completa e necessitam, de uma forma ou de outra, de processos equivalentes à inversão da matriz completa. Por serem diretos, esses métodos não necessitam, logicamente, de uma estimativa inicial das variáveis para obter a solução.

Entre os métodos diretos, de acordo com Maliska (2004), se destacam a eliminação de Gauss e a decomposição LU. A eliminação de Gauss é adequada para matrizes cheias e não-estruturadas. Esse método tem a tarefa de reduzir a matriz  $A$  dos coeficientes, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

em uma matriz diagonal superior  $U$  :

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

tal que a solução possa ser determinada por um processo de substituições sucessivas. As operações para zerar a diagonal inferior da matriz são feitas, tomando-se a segunda linha como exemplo, multiplicando-se a primeira linha por  $\frac{a_{21}}{a_{11}}$  e subtraindo-se o resultado da segunda linha, e assim sucessivamente para as outras linhas. Vale ressaltar que a operação descrita anteriormente, que substitui o termo  $a_{21}$  por zero, também altera o termo independente daquela linha. Obtida a matriz  $U$ , a determinação da primeira incógnita é feita utilizando-se a última linha da matriz e o correspondente termo do vetor independente. Esse processo é conhecido na literatura como *back substitution*, pois, em um processo de trás para frente, em substituições sucessivas, vai-se determinando o valor de todas as incógnitas.

O método de eliminação de Gauss, quando aplicado a matrizes cheias, acumula erros em função das sucessivas operações. Uma forma de minimizar esse problema é a pivotação, cuja a tarefa é deixar na diagonal os elementos de mais valor.

A decomposição LU é uma variação do método de eliminação de Gauss, no qual, em princípio, a matriz  $U$  é obtida com o mesmo algoritmo realizado no método de eliminação de Gauss. O atraente no processo é a construção de  $L$ , cujos elementos são os fatores multiplicativos usados no processo de obtenção da matriz  $U$ . O sistema linear:

$$[A] \cdot [X] = [L] \cdot [U] \cdot [X] = [B] \quad (4.73),$$

pode então ser resolvido, definindo-se:

$$[U] \cdot [X] = [D] \quad (4.74),$$

e

$$[L] \cdot [D] = [B] \quad (4.75).$$

Resolvendo-se o sistema linear (4.75) obtém-se  $D$  e com  $D$  em (4.74) determina-se  $X$ , a incógnita desejada.

Como dito anteriormente, os métodos acima são utilizados quando se possui uma matriz cheia e não-estruturada. No entanto, as matrizes obtidas com a aplicação de métodos numéricos são bastante esparsas, e, por serem também de grande tamanho, as operações realizadas no processo de inversão trabalham, fundamentalmente, com os elementos zeros da matriz. O esforço computacional é, portanto, muito grande e essa classe de métodos não é utilizada nos problemas de mancais hidrodinâmicos. Além disso, por se estar tratando de equações diferenciais não-lineares, a matriz de coeficientes do sistema linear algébrico deve ser atualizada ao longo do processo, e, portanto, não tem sentido resolver diretamente um sistema linear cujos coeficientes não são corretos. Assim, deve-se usar métodos iterativos para a solução do sistema linear.

Os métodos iterativos são aqueles que requerem uma estimativa inicial para dar prosseguimento ao processo de solução. Entre esses métodos existem o método de Jacobi, o de Gauss-Seidel e o das Sobre-relaxações Sucessivas.

O método de Jacobi pertence a classe dos métodos ponto a ponto, que resolve o sistema linear visitando equação por equação, iterativamente, usando os valores das variáveis do nível iterativo anterior. O método de Gauss-Seidel é essencialmente igual ao anterior, com a diferença de fazer uso, durante um mesmo ciclo iterativo, de valores das variáveis já calculadas nesse ciclo. Isso acelera a convergência em relação ao método de Jacobi. O método das Sobre-relaxações Sucessivas, procura acelerar, ainda mais, o processo de convergência dos métodos anteriores. Isso é feito aplicando-se uma sobre-relaxação nos valores obtidos com o método de Gauss-Seidel. O ciclo iterativo tem a seguinte estrutura (MALISKA, 2004):

$$X_N^{K+1} = w \cdot X_N^{K+1} \Big|_{GS} + (1-w) \cdot X_N^K \quad (4.76).$$

Na equação (4.76), o termo  $X_N^{K+1}|_{GS}$  representa o valor calculado com o método de Gauss-Seidel e  $w$ , o coeficiente de relaxação. O coeficiente de relaxação serve para avançar mais rapidamente a solução, quando o processo está lento, ou “segurar” a variável, quando a mesma está avançando em demasia e pode causar divergência. Segundo Patankar (1980), não existem regras para se escolher o melhor valor para  $w$ , uma vez que, o valor ótimo, depende de vários fatores, como, por exemplo, a natureza do problema, o número de pontos utilizados na malha e o procedimento iterativo utilizado. Valores menores do que 1 sub-relaxam a solução.



Para completar a simulação numérica, algumas aproximações para as condições de contorno do eixo e do mancal foram realizadas. Em 1966, Dowson *et al.* (1966) demonstrou experimentalmente que o eixo possui uma pequena flutuação de temperatura devido ao seu movimento de rotação. Esse estudo permite utilizar uma aproximação isotérmica para o eixo sem que haja perdas expressivas de informação. De acordo com Cameron (1951), a maior parte do calor presente no fluido de trabalho é transferida através do eixo, e Fitzgerald *et al.* (1992) concluiu que a condução através do mancal pode ser desprezada sem sérios problemas de superestimação na predição da temperatura de operação do mancal. Então, uma condição adiabática foi adotada para o mancal. Na direção circunferencial foi utilizada a condição de circularidade para a temperatura.

Para as condições de contorno da pressão foram utilizadas as condições de contorno de Reynolds que expressam:

$$p = 0, \text{ se } p < 0 \text{ ou seja, onde ocorre a cavitação.}$$

$$p = P_s, \text{ onde ocorre realimentação de lubrificante.}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \text{ em } x = 0^\circ = 360^\circ. \text{ Condição de circularidade.}$$

Uma vez que é difícil determinar precisamente a viscosidade média no filme de lubrificante, a temperatura do lubrificante de reposição é adotada para se calcular a viscosidade do lubrificante na análise isotérmica.

Sendo assim, para o primeiro caso, temos as seguintes condições de operação do mancal mostradas na tabela (5.1):

Tabela 5.1: Condições de Operação.

Diâmetro do Mancal	D = 30 mm
Largura do Mancal	L = 20 mm
Folga Radial	C = 90 $\mu$ m
Força de Reação Aplicada no Mancal	W = 15 N
Densidade do Lubrificante	$\rho$ = 860 Kg/m <sup>3</sup>
Condutividade Térmica do Lubrificante	k = 0.131 W/m.°C

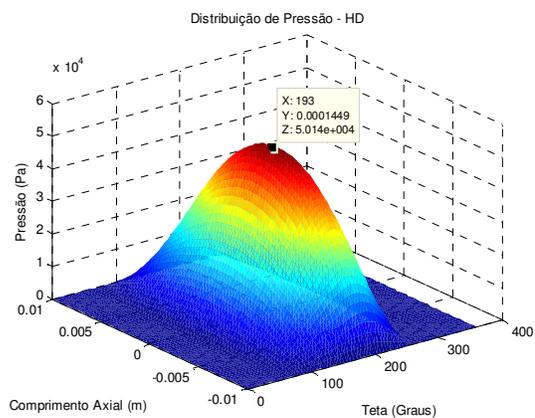
Condutividade Térmica do Eixo	$k_s = 50 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$
Viscosidade de Referência	$\mu_i = 0.08018 \text{ Pa.s}$
Temperatura de Referência	$T_i = 23 \text{ }^\circ\text{C}$
Temperatura do Eixo	$T_e = 26 \text{ }^\circ\text{C}$

Com esses dados pode-se obter o conjunto de resultados abaixo:

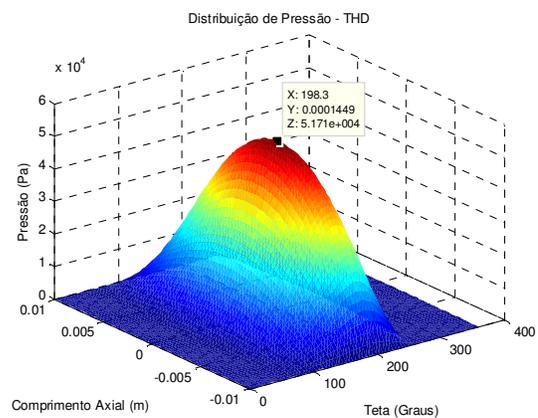
Tabela 5.2: Resultados Numéricos.

Velocidade de Rotação (RPM)	Modelo THD		Modelo HD	
	$\varepsilon$	$\varphi$ (graus)	$\varepsilon$	$\varphi$ (graus)
600	0.318	68.66	0.259	72.61
2500	0.102	83.79	0.069	85.32
5000	0.063	87.64	0.035	88.23

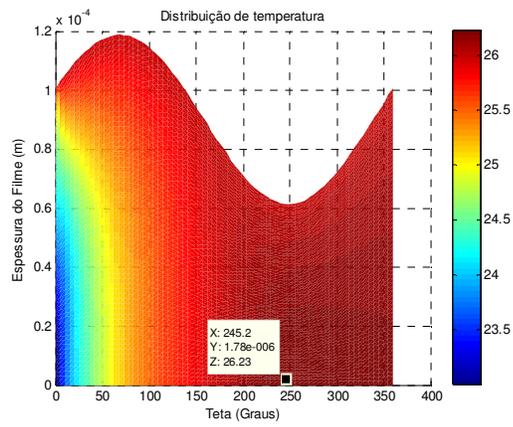
• Para 600 RPM:



(a)



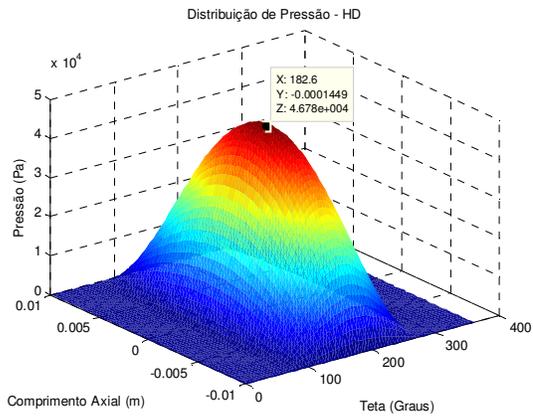
(b)



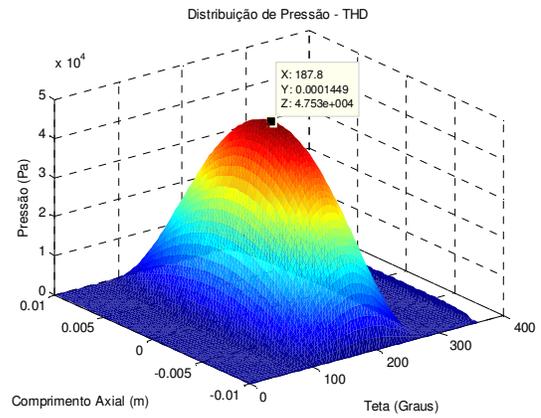
(c)

Figura 5.1: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

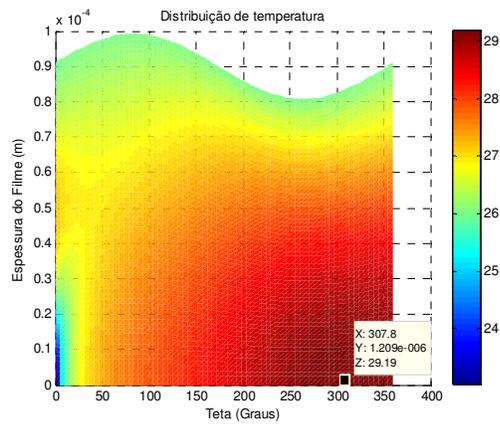
• Para 2500 RPM:



(a)



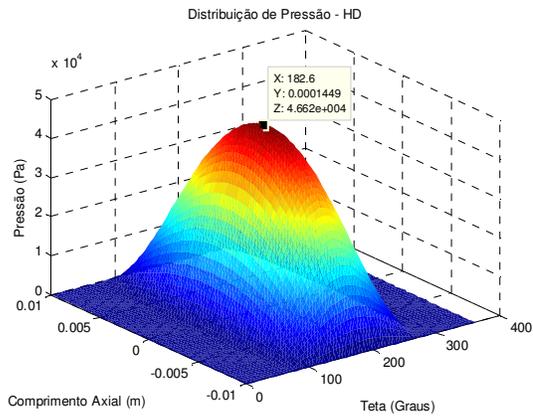
(b)



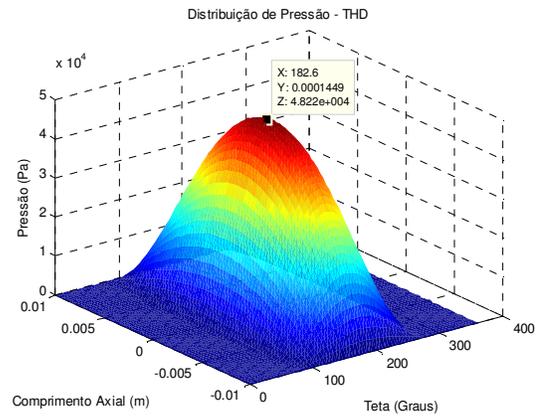
(c)

Figura 5.2: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

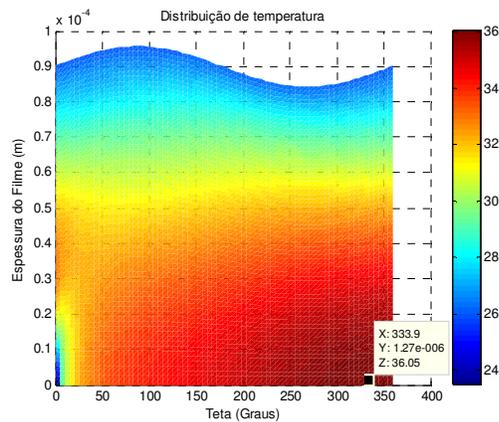
• Para 5000 RPM:



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

Considerando os gráficos apresentados juntamente com as tabelas do resultado numérico, podemos notar que o aumento da velocidade de rotação está diretamente relacionado a um aumento da capacidade de sustentação no mancal. Também é observado que, como esperado, em baixas velocidades, a excentricidade do mancal é elevada e vai diminuindo gradativamente conforme aumenta-se a rotação do eixo. Esse fenômeno é justificado pelo fato de que o eixo tende a centrar-se com o mancal em altas rotações. No que se refere ao ângulo de equilíbrio, tem-se um aumento do mesmo a medida que a velocidade aumenta. Isso ocorre porque em baixas excentricidades (alta rotação) a distribuição é mais homogênea.

Como foi visto, a resistência viscosa do fluido aumenta com a taxa de deformação, isto é, a força requerida para um fluxo rápido é maior que a para um fluxo lento, e também que, a viscosidade diminui com o aumento da temperatura, pois maiores energias térmicas permitem as moléculas se quebrarem, ou seja, menores forças externas são necessárias para separar as ligações moleculares. Dessa maneira, observando os resultados obtidos para o modelo THD e HD, pode-se notar facilmente que a razão de excentricidade adimensional é maior e o ângulo de atitude é menor no modelo THD para compensar a baixa viscosidade, resultando na mesma força de sustentação, ou seja, o eixo encontra um novo equilíbrio estático para gerar as mesmas forças. De acordo com as Tabela 5.2, é possível verificar que essa tendência é mais significativa em elevadas velocidades de rotação.

O óleo aquece quando o eixo começa a girar dentro do mancal. Nessa situação, partículas de fluido, que estão em contato com o eixo, possuem a mesma velocidade tangencial, enquanto que as partículas de fluido que estão em contato com o mancal, estão estáticas. Sendo assim, existe deslocamento relativo entre os planos atômicos, ou seja, cisalhamento do lubrificante, que rompe as ligações químicas e libera energia na forma de calor. Portanto, em velocidades maiores, o cisalhamento do fluido é maior e, conseqüentemente, a energia liberada também é maior, resultando em uma maior geração de calor. Pode ser verificado, também, que as maiores temperaturas se encontram na parede do mancal e as menores, próximas à entrada do óleo de reposição. Isso ocorre devido à condição de contorno imposta ao problema, que considera que o mancal é modelado como adiabático, e também ao fato de ocorrer mistura de óleo frio com óleo previamente aquecido, oriundo da recirculação do mesmo no mancal.

Alem disso, pode-se perceber que a maior temperatura se encontra próxima da onde a espessura do filme é mínima. Isso ocorre porque o cisalhamento é inversamente proporcional à variação da espessura do filme. Conseqüentemente, para a mesma variação de velocidade, a redução da espessura do filme resulta em um aumento do cisalhamento nessa região.

Os próximos mancais estudados são aplicados em turbo-compressores de automóveis, sendo assim, possuem altas temperaturas, pequenas dimensões e altas rotações. As Tabelas 5.3 e 5.5 mostram as condições de operação dos mancais para diferentes carregamentos.

Tabela 5.3: Condições de Operação.

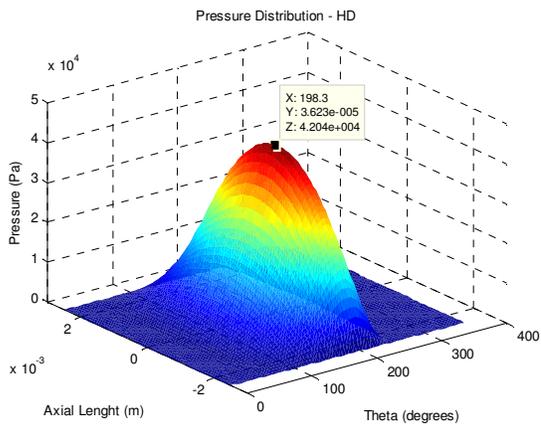
Diâmetro do Mancal	$D = 8.62 \text{ mm}$
Comprimento do Mancal	$L = 5 \text{ mm}$
Folga Radial	$C = 70 \text{ }\mu\text{m}$
Carregamento	$W = 0.7472 \text{ KN}$
Densidade do Lubrificante	$\rho = 860 \text{ Kg/m}^3$
Condutividade Térmica do Lubrificante	$k = 0.13 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$
Condutividade Térmica do Eixo	$k_s = 50 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$
Viscosidade de Referência	$\eta_i = 0.04541 \text{ Pa.s}$
Temperatura de Referência	$T_i = 60 \text{ }^\circ\text{C}$
Temperatura do Eixo	$T_e = 120 \text{ }^\circ\text{C}$

Assim:

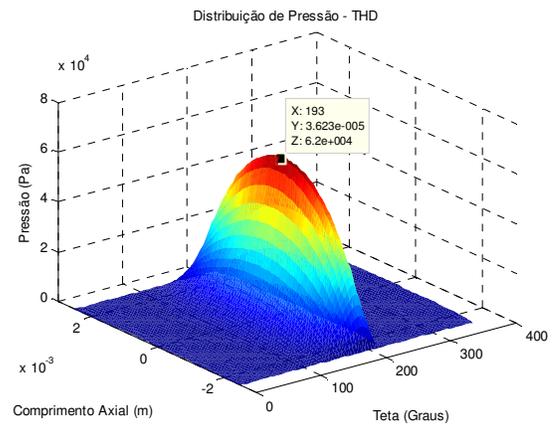
Tabela 5.4: Resultados Numéricos.

Velocidade de Rotação (RPM)	Modelo THD		Modelo HD	
	$\varepsilon$	$\varphi$ (graus)	$\varepsilon$	$\varphi$ (graus)
2400	0.852	32.83	0.501	55.76
35000	0.316	56.38	0.058	86.06
70000	0.233	70.96	0.029	88.04

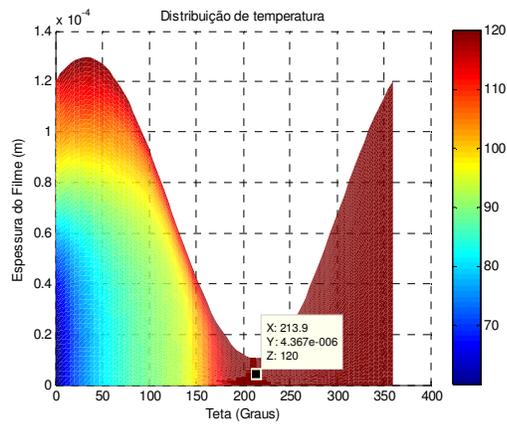
• Para 2400 RPM



(a)



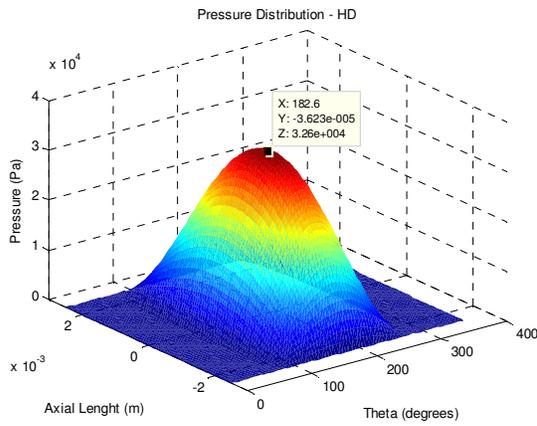
(b)



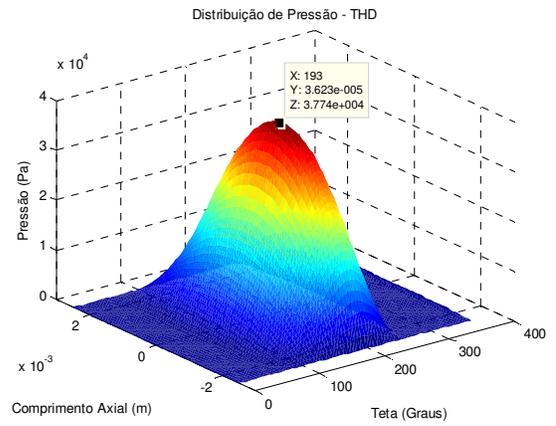
(c)

Figura 5.4: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

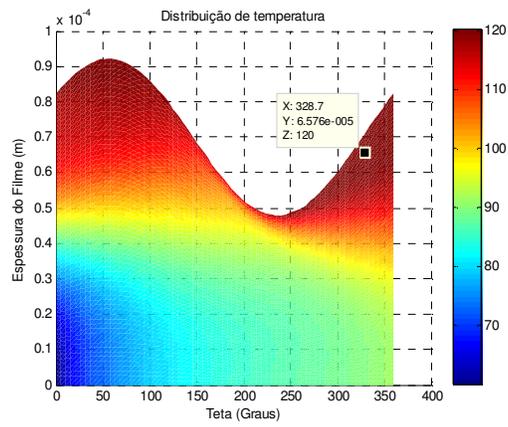
• Para 35000 RPM:



(a)



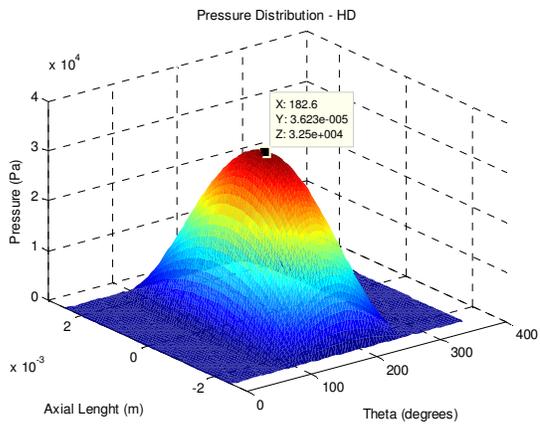
(b)



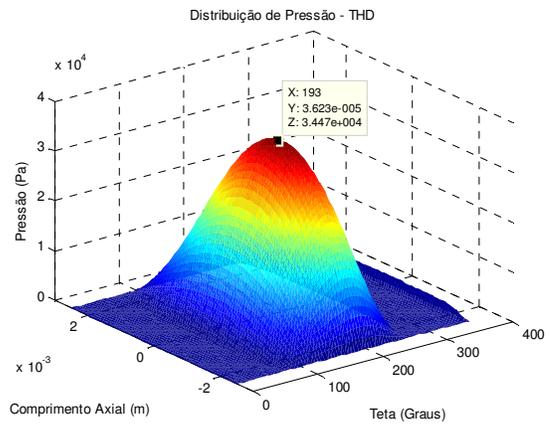
(c)

Figura 5.5: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

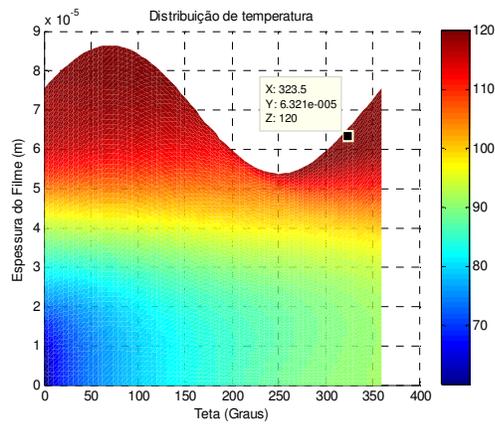
• Para 70000 RPM:



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

Tabela 5.5: Condições de Operação.

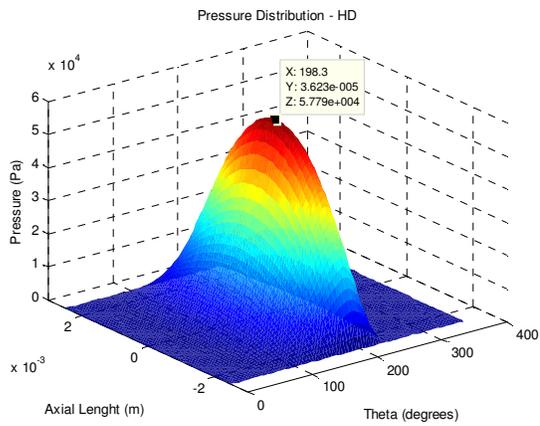
Diâmetro do Mancal	$D = 8.62 \text{ mm}$
Comprimento do Mancal	$L = 5 \text{ mm}$
Folga Radial	$C = 70 \text{ }\mu\text{m}$
Carregamento	$W = 0.9714 \text{ KN}$
Densidade do Lubrificante	$\rho = 860 \text{ Kg/m}^3$
Condutividade Térmica do Lubrificante	$k = 0.13 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$
Condutividade Térmica do Eixo	$k_s = 50 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$
Viscosidade de Referência	$\eta_i = 0.04541 \text{ Pa.s}$
Temperatura de Referência	$T_i = 60 \text{ }^\circ\text{C}$
Temperatura do Eixo	$T_e = 120 \text{ }^\circ\text{C}$

Assim:

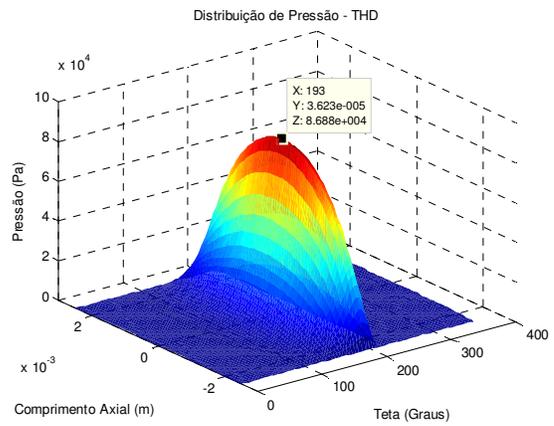
Tabela 5.6: Resultados Numéricos.

Velocidade de Rotação (RPM)	Modelo THD		Modelo HD	
	$\epsilon$	$\phi$ (graus)	$\epsilon$	$\phi$ (graus)
2400	0.877	30.40	0.560	51.63
35000	0.357	53.55	0.075	84.91
70000	0.272	67.68	0.038	87.43

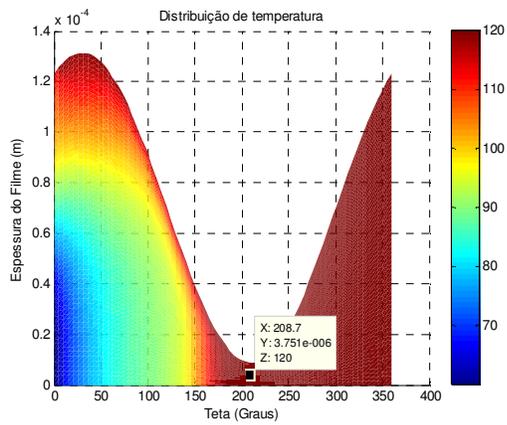
• Para 2400 RPM



(a)



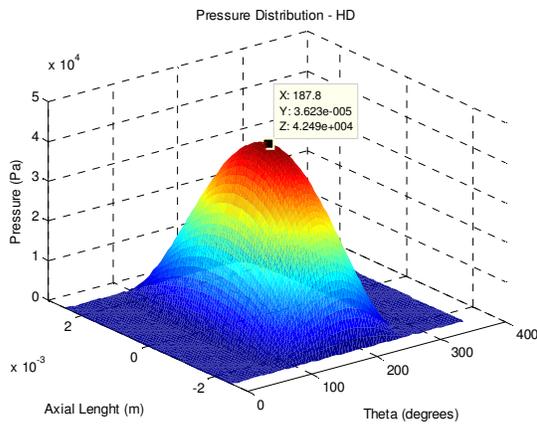
(b)



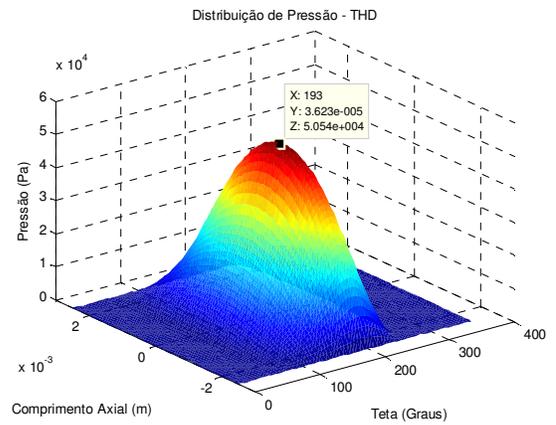
(c)

Figura 5.7: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

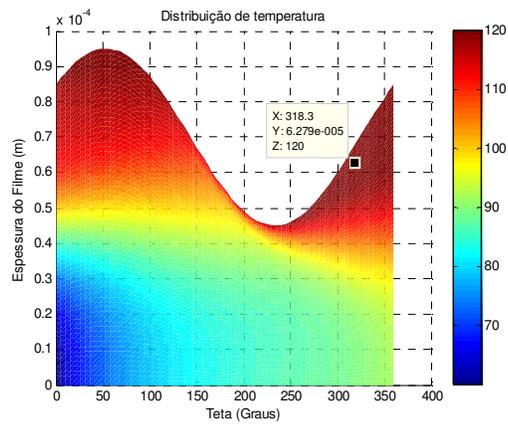
• Para 35000 RPM:



(a)



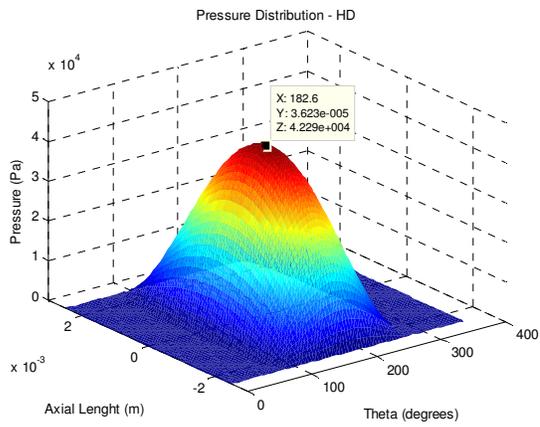
(b)



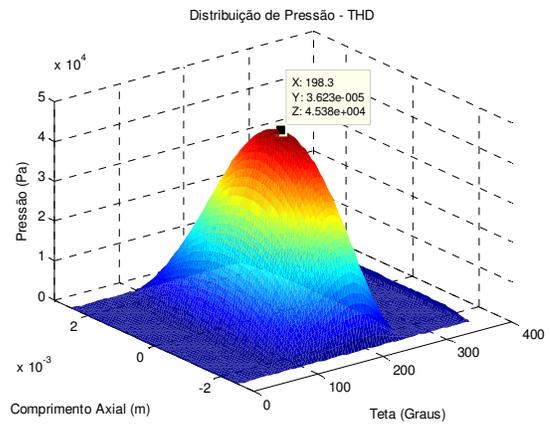
(c)

Figura 5.8: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

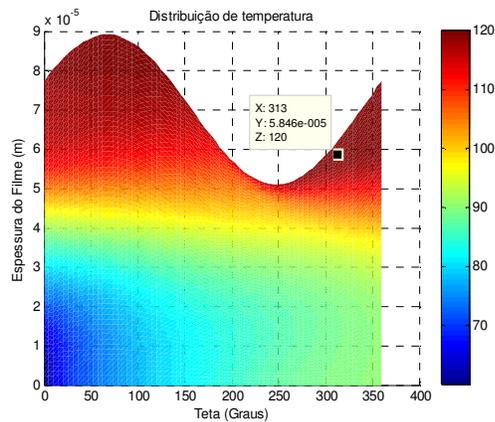
• Para 70000 RPM:



(a)



(b)



(c)

Figura 5.9: (a) Distribuição de pressão para o modelo HD. (b) Distribuição de pressão para o modelo THD. (c) Distribuição de temperatura para o plano axial central.

Esse mancal trabalha em altas temperaturas, como se pode notar pelas condições de operação do mesmo. Nas figuras que mostram a distribuição de temperatura para 2400 RPM, nota-se que a temperatura é homogênea fora da região onde se tem entrada de lubrificante, isso ocorre devido à temperatura do eixo ser muito alta. A troca de calor do fluido com o eixo acaba sendo maior que o aumento de temperatura devido ao cisalhamento do fluido, devido à baixa viscosidade do fluido para altas temperaturas. Conforme o eixo se centraliza no mancal, e a distancia deste para o mancal aumenta, nota-se um gradiente de temperatura no mancal devido ao óleo de reposição. Também, por esse motivo, as maiores temperaturas se encontram nas proximidades do eixo.

Agora serão apresentados os lugares geométricos (lócus) do eixo para os casos estudados. A Figura (5.10) mostra o lócus para a configuração de mancal da bancada de testes dentro de uma faixa de rotações de 60 a 6000 RPM, a Figura 5.11 mostra o lócus para a configuração de mancal de turbo-compressor com carregamento de  $0.7472N$  dentro de uma faixa de rotações de 60 a 100000 RPM, a Figura 5.12 mostra o lócus para a configuração de mancal de torbo-compressor com carregamento de  $0.9714N$  também para a faixa de rotações de 60 a 100000 RPM.

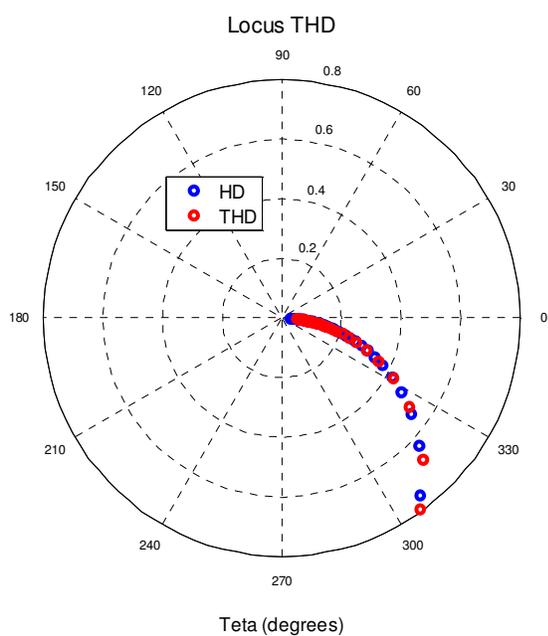


Figura 5.10: Locus para os modelos HD e THD: Mancal da bancada de testes.

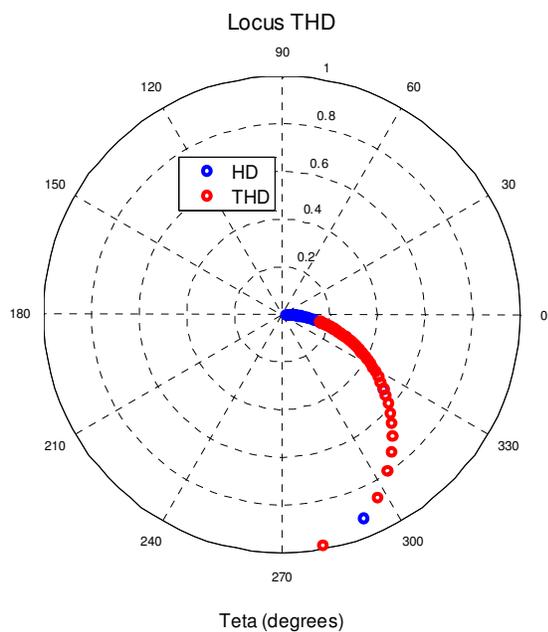


Figura 5.11: Locus para os modelos HD e THD: Mancal de turbo-compressor com carregamento de  $0.7472N$ .

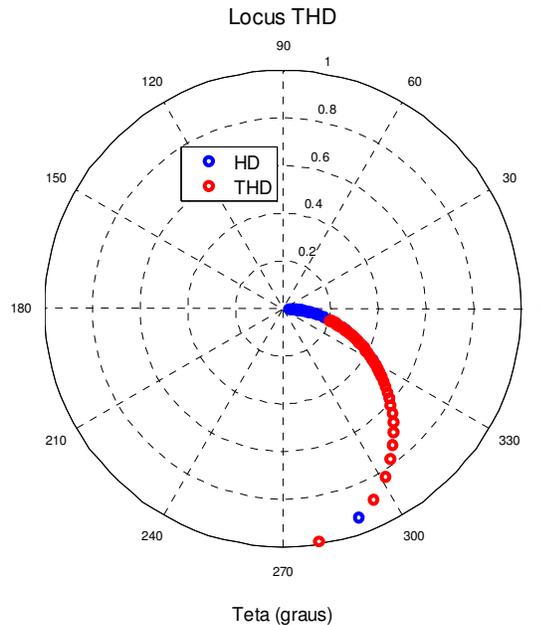


Figura 5.12: Locus para os modelos HD e THD: Mancal de turbo-compressor com carregamento de  $0.9714N$ .

A variação da excentricidade e do ângulo de atitude ocorre com a variação da velocidade de rotação do eixo. Em todos os casos,  $e$ , em ambos os modelos, há um aumento do ângulo de atitude e uma diminuição da excentricidade adimensional com o aumento da velocidade. Esse é o resultado da tendência do eixo em centrar-se com o mancal em altas rotações. No entanto, é claro que no THD a excentricidade é maior e o ângulo de atitude é menor que no modelo HD, devido às menores forças de sustentação para maiores temperaturas. Isso significa que o efeito de centralização do eixo pode ser corrigido no modelo THD.

Em baixas rotações é importante verificar se espessura mínima de filme,  $h_{\min} = C \cdot (1 - \varepsilon)$ , é igual ou superior a  $4Ra_m$  ( $Ra_m$  é a rugosidade média entre as superfícies do eixo e do mancal) de forma a garantir que o modelo hidrodinâmico é atendido pela separação completa das superfícies.

## 5.1. Validação dos Resultados.

É importante saber, no entanto, se o modelo em questão gera resultados que sejam confiáveis. Para isso, utilizam-se resultados conhecidos na literatura para se calibrar o modelo. Assim, foi utilizado o trabalho publicado por Khonsari *et. al.* em 1996, o qual utiliza dados experimentais e teóricos e os compara. A primeira comparação se dará em forma de tabela, onde as condições de operação do mancal são:

Tabela 5.6: Condições de Operação.

Diâmetro do Mancal	D = 101.6 mm
Largura do Mancal	L = 76.2 mm
Folga Radial	C = 63.5 $\mu$ m
Força de Reação Aplicada no Mancal	W = 11000 N
Densidade do Lubrificante	$\rho$ = 860 Kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Viscosidade	$\beta$ = 0.0414 1/°C
Condutividade Térmica do Lubrificante	k = 0.131 W/m.°C
Condutividade Térmica do Eixo	ks = 50 W/m.°C
Viscosidade de Referência	$\eta_i$ = 0.03 Pa.s
Temperatura de Referência	Ti = 36.8 °C
Temperatura do Eixo	Te = 47.5°C
Pressão de Realimentação	Ps = 280 KPa

Vale ressaltar que, nesse caso, a viscosidade possui uma fórmula diferente da utilizada nesse trabalho. A expressão utilizada por Khonsari (1996) para viscosidade é:

$$\mu = \mu_i \cdot \exp[-\beta \cdot (T - T_i)]$$

Para realizar as simulações apresentadas a seguir, e para efeito de comparação, foi utilizada a mesma equação para a viscosidade.

Dessa forma, os resultados encontrados por Khonsari (1996) foram:

Tabela 5.7: Dados obtidos por Khonsari (1996).

Parameter [units]	Experimental data	THD solution	ISOADI solution	Isothermal solution at 50.81°C
$\epsilon$		0.574	0.588	0.586
Load, $W$ [N]	11000	11000	11000	11000
$P_{\max}$ [MPa]	3.25	3.62	3.66	3.72
$T_{\max}$ [°C]	51.5	51.61	53.69	—
$T_{\max}$ location, $\theta_{\max}$ [°]		236	239	—
$T_{\text{shift}}$ [°C]	47.5			
Attitude angle, $\phi$ [°]	57	53.10	52.10	51.31

Enquanto que os encontrados pelo algoritmo que foi desenvolvido nesse trabalho:

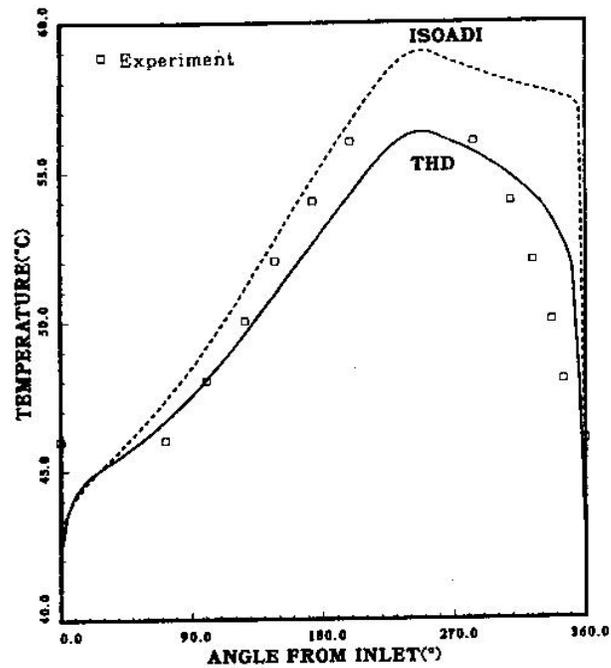
Tabela 5.8: Dados obtidos nesse trabalho.

Parâmetros [unidade]	Solução ISOADI	Solução Isotérmica a 50.81 °C
Excentricidade	0.585	0.582
Carga [N]	11000	11000
$P_{\max}$ [MPa]	3.53	3.62
$T_{\max}$ [°C]	52.87	-----
Localização $T_{\max}$ [°]	235	-----
Ângulo de Atitude [°]	52.37	51.31

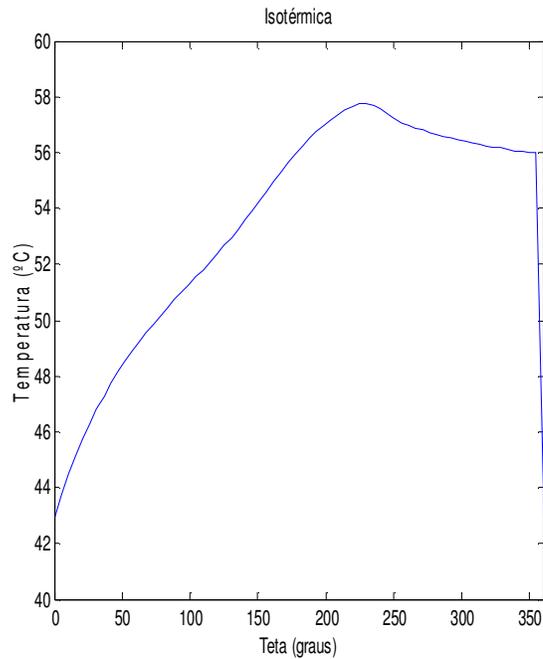
É possível observar que na tabela obtida por Khonsari (1996) (Tabela 5.7), existe uma coluna “*THD SOLUTION*” (SOLUÇÃO THD), que não foi simulada nesse trabalho, uma vez que a solução THD indicada na tabela utiliza condições de contorno, com troca de calor entre o fluido e a parede do mancal.

Assim, conforme apresentado nas Tabelas 5.7 e 5.8, os resultados estão bem próximos, sendo que pequenas diferenças ocorrem devido a diferenças nos métodos numéricos utilizados, assim como no tamanho da malha utilizada.

Também, da mesma maneira que Khonsari (1996) foram obtidas curvas isotérmicas para o plano axial central do mancal descrito pela Tabela 5.6, exceto, a temperatura do eixo, que aqui tem valor de 53.7°C.



a)



b)

Figura 5.13: Isotérmicas: (a) Obtidas na literatura (KHONSARI, 1996). (b) Obtidas nesse trabalho.

Também, foram obtidas as curvas isotérmicas para o mancal descrito pela Tabela 5.9:

Tabela 5.9: Condições de Operação.

Diâmetro do Mancal	$D = 100.0 \text{ mm}$
Largura do Mancal	$L = 70.0 \text{ mm}$
Força de Reação Aplicada no Mancal	$W = 3920 \text{ N}$
Densidade do Lubrificante	$\rho = 860 \text{ Kg/m}^3$
Coefficiente de Viscosidade	$\beta = 0.029 \text{ 1/}^\circ\text{C}$
Condutividade Térmica do Lubrificante	$k = 0.131 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$
Condutividade Térmica do Eixo	$k_s = 50 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$
Viscosidade de Referência	$\eta_i = 0.0192 \text{ Pa.s}$
Temperatura de Referência	$T_i = 40.0 \text{ }^\circ\text{C}$

Temperatura do Eixo	Te = 51°C
Pressão de Realimentação	Ps = 98 KPa

Os resultados obtidos por Khonsari (1996) e nesse trabalho são dados, respectivamente, pelas Figuras (5.14) e (5.15).

Pode-se perceber na Figura (5.13) que as curvas para o modelo descrito como ISOADI (eixo isotérmico e mancal adiabático) apresentam o mesmo padrão e a temperatura máxima atingida por ambas são equivalentes. Observa-se também, que as curvas obtidas nas Figuras (5.14) e (5.15) apresentam semelhanças com as curvas obtidas por Khonsari (1996), no entanto as da Figura (5.15) se assemelham mais aos resultados experimentais obtidos por ele, no entanto como as condições de contorno são de eixo isotérmico e mancal adiabático, as temperaturas são maiores que as obtidas no modelo experimental, mas, mesmo assim, são compatíveis com as temperaturas obtidas nas curvas da Figura (5.14b).

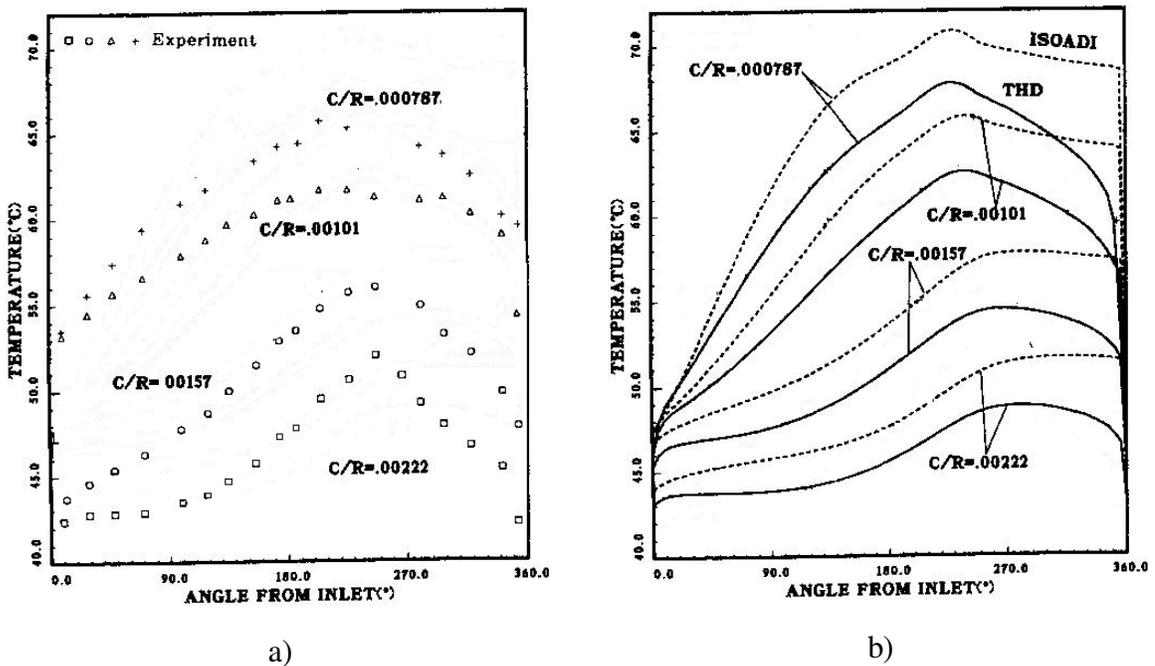


Figura 5.14: Isotérmicas obtidas na literatura: (a) Experimentais. (b) Teóricas. (KHONSARI, 1996).

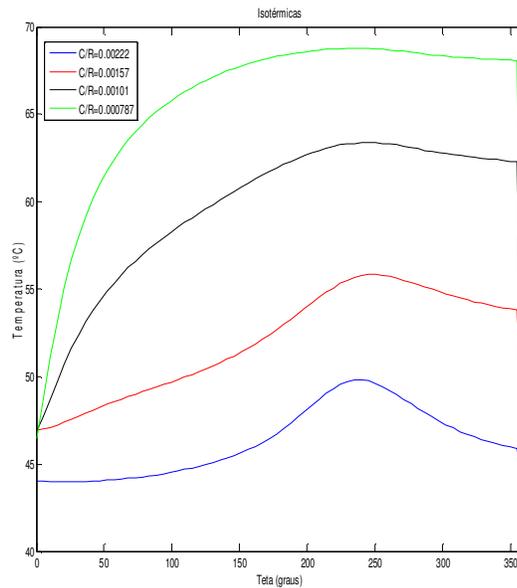
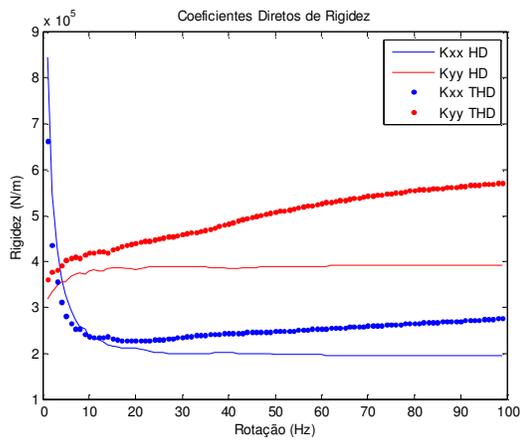


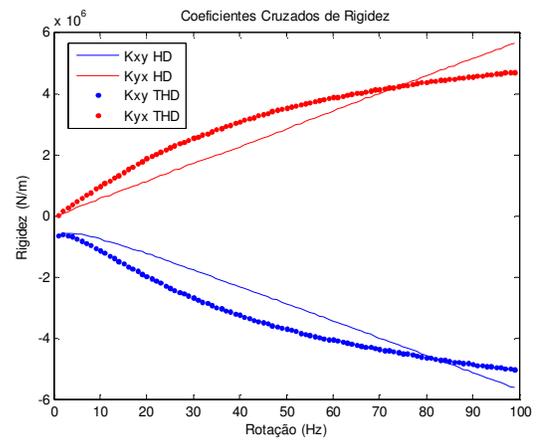
Figura 5.15: Isotérmicas teóricas obtidas nesse trabalho.

## 5.2. Análise dos Coeficientes de Rigidez e Amortecimento e Resposta ao Desbalanceamento de um Turbo-Compressor.

Essa seção se dedica a análise dos coeficientes equivalentes obtidos nesse trabalho e também à análise da resposta ao desbalanceamento de um tubo-compressor. Sendo assim, as figuras a seguir representam os coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento equivalentes do mancal. As Figuras (5.16) e (5.17) dizem respeito ao mancal dado pela Tabela (5.1). As Figuras (5.18) e (5.19) são os coeficientes obtidos a partir do mancal da Tabela (5.3). Finalmente as Figuras (5.20) e (5.21) são sobre o mancal da Tabela (5.5).

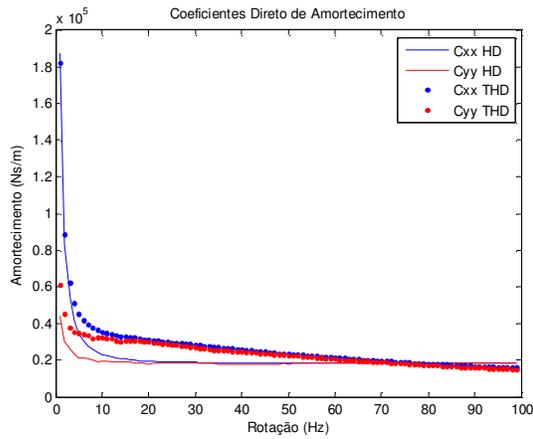


a)

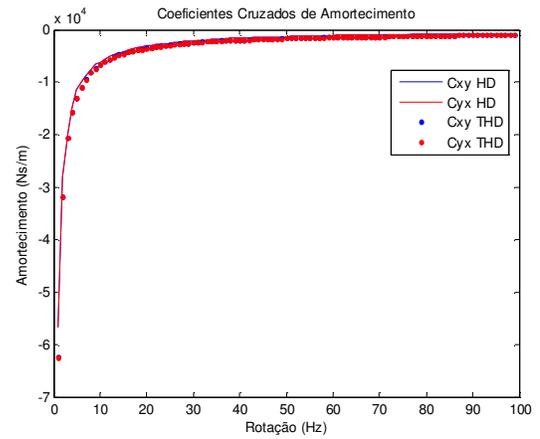


b)

Figura 5.16: Coeficientes de rigidez para o mancal da bancada: (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes cruzados.

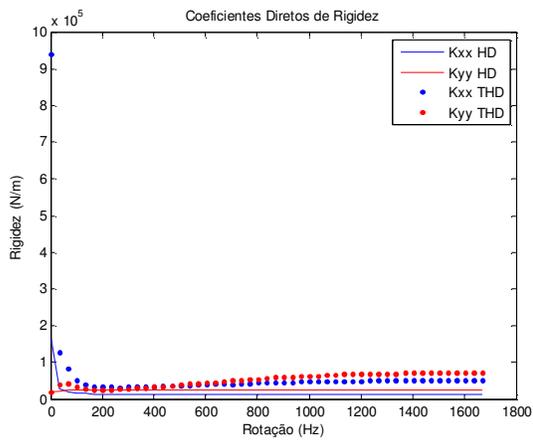


a)

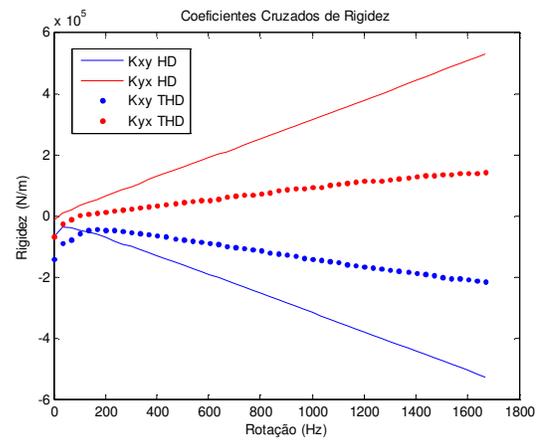


b)

Figura 5.17: Coeficientes de amortecimento para o mancal da bancada: (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes cruzados.

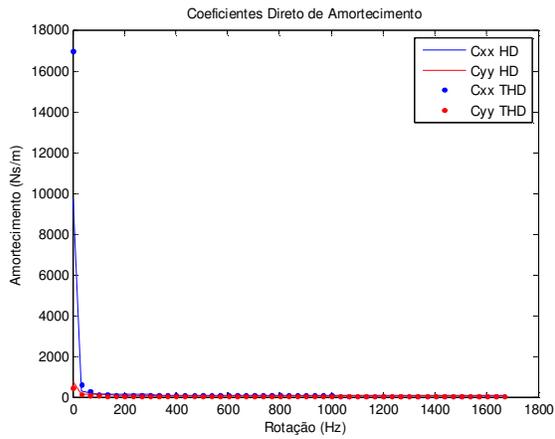


a)

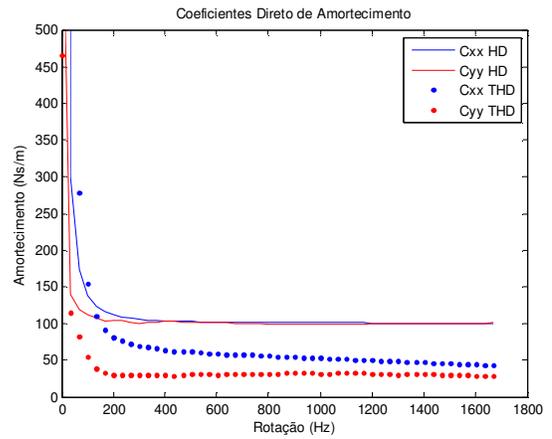


b)

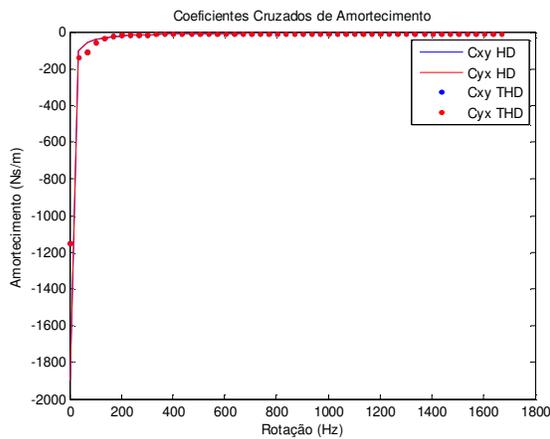
Figura 5.18: Coeficientes de rigidez do mancal de turbo-compressor (0.7472 N): (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes cruzados.



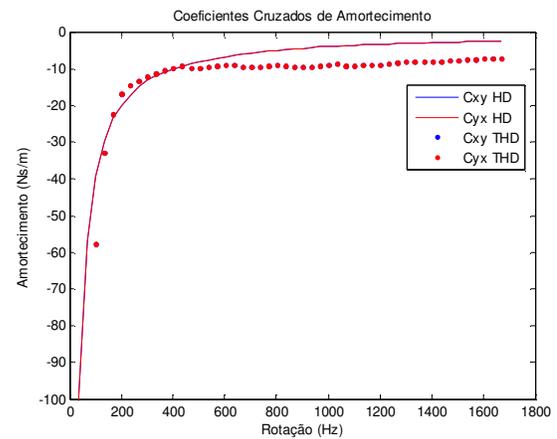
a)



b)

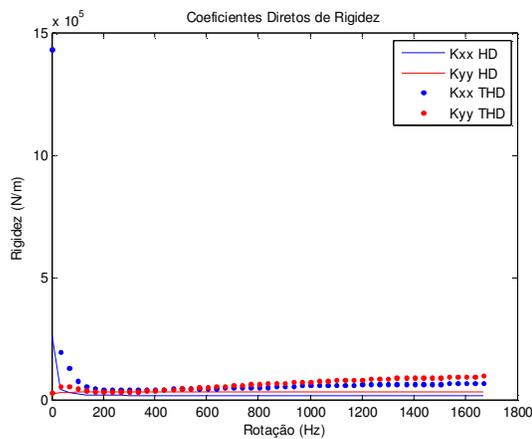


c)

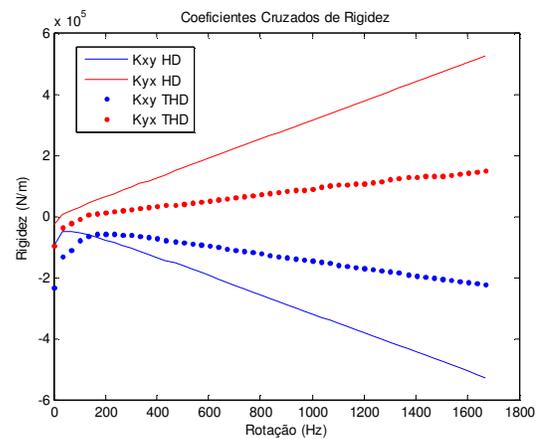


d)

Figura 5.19: Coeficientes de amortecimento do mancal de turbo-compressor (0.7472 N):  
 (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes diretos com aproximação. (c) Coeficientes cruzados. (d)  
 Coeficientes cruzados com aproximação.

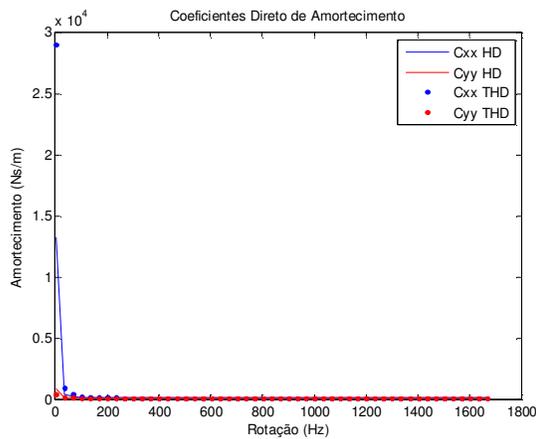


a)

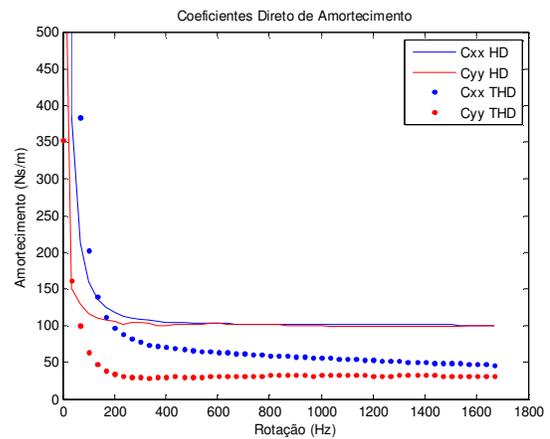


b)

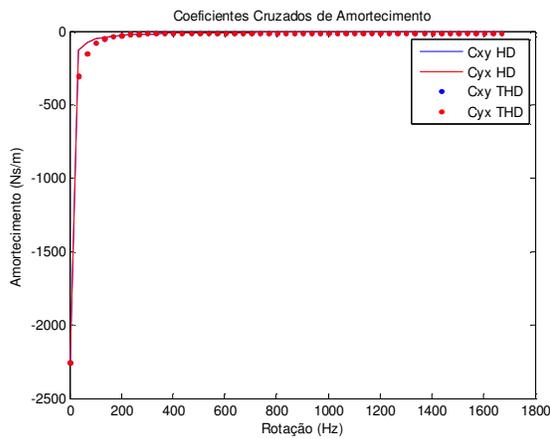
Figura 5.20: Coeficientes de rigidez do mancal de tubo-compressor (0.9714 N): (a) Coeficientes  
 diretos. (b) Coeficientes cruzados.



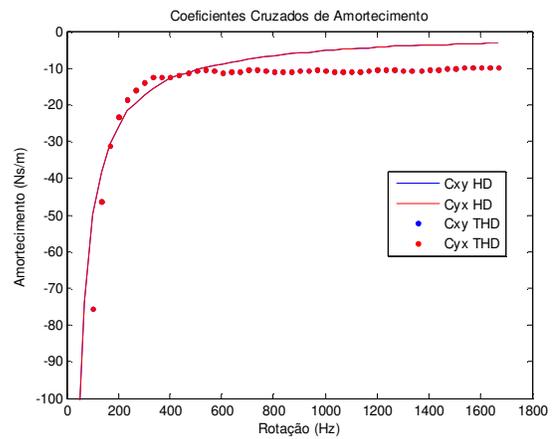
a)



b)



c)



d)

Figura 5.19: Coeficientes de amortecimento do mancal de turbo-compressor (0.9714 N):  
 (a) Coeficientes diretos. (b) Coeficientes diretos com aproximação. (c) Coeficientes cruzados. (d)  
 Coeficientes cruzados com aproximação.

Com os gráficos mostrados, pode-se perceber que tanto os coeficientes de rigidez quanto de amortecimento para todos os casos analisados apresentam o mesmo padrão. No entanto, é visível que o modelo HD e THD possuem curvas diferentes, pois a cada velocidade de rotação o eixo possui uma posição de equilíbrio diferente. Tanto os coeficientes diretos quanto cruzados de rigidez, para o modelo THD, apresentam valores maiores que os coeficientes do modelo HD devido ao aumento da temperatura. Nota-se também, que para rotações elevadas (a partir de 80

Hz), os coeficientes cruzados de rigidez para o modelo THD passam a ser menores que os coeficientes cruzados de rigidez para o modelo HD.

Assim pode-se estabelecer uma análise de cunho qualitativo sobre a estabilidade do mancal, uma vez que quanto maior for o módulo da diferença entre os coeficientes cruzados e diretos, mais estável será o mancal. Portanto, percebe-se claramente que a análise THD mostra mancais menos estáveis que a análise HD, o que resulta em projetos mais conservativos quanto aos critérios de falha.

Sobre os coeficientes de amortecimento, nota-se que ambos os modelos apresentam a mesma característica: os coeficientes diretos no modelo THD apresentam o mesmo comportamento dos coeficientes cruzados de rigidez, ou seja, são maiores e para rotações elevadas são menores que no modelo HD. Sobre os coeficientes cruzados, como dito anteriormente, por eles derivarem de um operador auto-adjunto, possuem o mesmo valor. Com isso, a matriz de amortecimento, será simétrica e com direções principais, ou seja, apresenta uma base ortonormal formada pelos autovetores. No entanto esse fato não pode ser observado na matriz de rigidez, por isso os coeficientes de rigidez cruzados são diferentes, e assim a matriz de rigidez será não-conservativa. Comparando os modelos THD e HD, é notável que os coeficientes cruzados THD possuem valores menores que os coeficientes HD.

No entanto, sabe-se que um turbo-compressor não é apenas composto de mancais, e sim de um conjunto de turbina, compressor e eixo, como é mostrado na Figura (5.20). Sendo assim, é importante considerar o comportamento de todo esse sistema. Para isso, o eixo, modelado a partir do método dos elementos finitos, é representado matematicamente por matrizes de massa, rigidez e amortecimento. O rotor é composto de 19 elementos de viga de secção circular. As massas dos elementos girantes, associados ao eixo, são introduzidas no modelo através de massas concentradas aplicadas a determinados nós, enquanto que os desbalanceamentos rotativos devido a localização das massas concentradas da turbina e do compressor são localizados nos nós 5 e 19 respectivamente. Os mancais hidrodinâmicos são inseridos nos nós 10 e 15. O sistema discreto pode ser observado na Figura (5.21). Porém, nesse trabalho não foi desenvolvido o algoritmo que resolve esse problema, mas foi utilizado um software desenvolvido no Laboratório de Maquinas Rotativas, no qual se modela o rotor utilizando os modelos de viga de Timoshenko. Os valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento calculados pelo algoritmo aqui desenvolvido são

inseridos neste programa, que gera as respostas em frequência para os nós do rotor. Para maiores informações sobre o conteúdo do software, consultar Tuckmantel (2010).

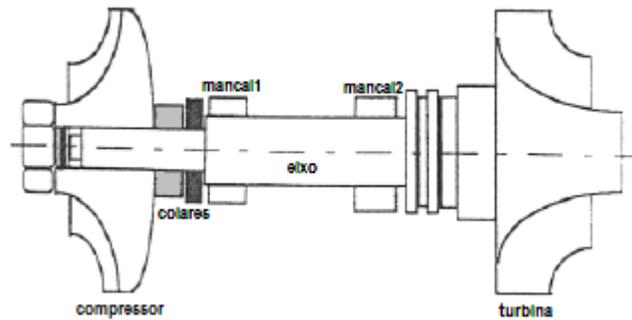


Figura 5.20: Esquema de um turbo-compressor.

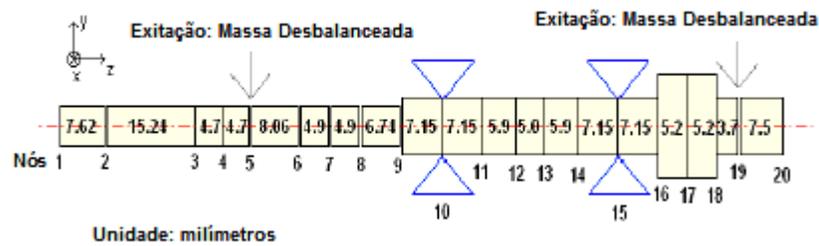
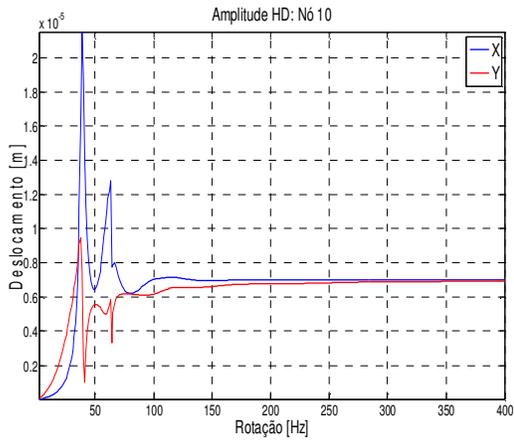
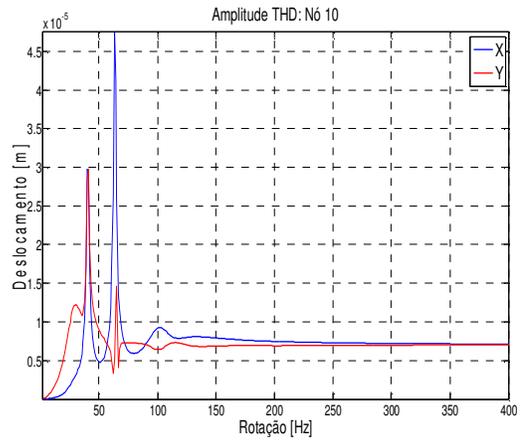


Figura 5.21: Rotor discretizado utilizado na simulação.

Assim, um conjunto de gráficos de amplitude e fase de vibrações pôde ser gerado:

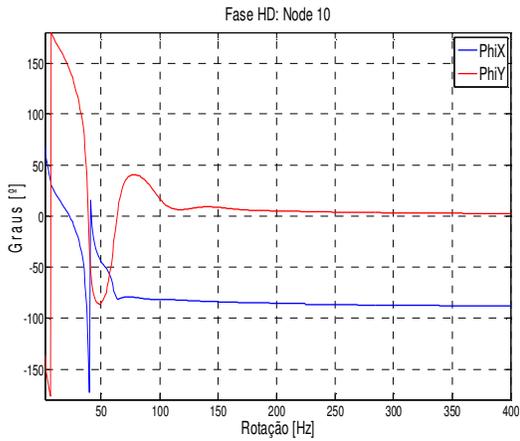


a)

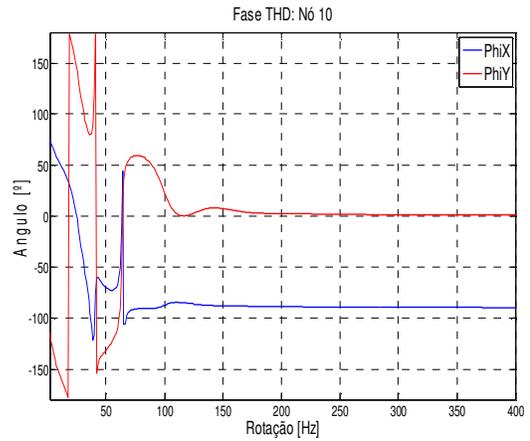


b)

Figura 5.22: Resposta ao desbalanceamento no mancal 1 (nó 10): Amplitude. a) Modelo HD. b) Modelo THD.

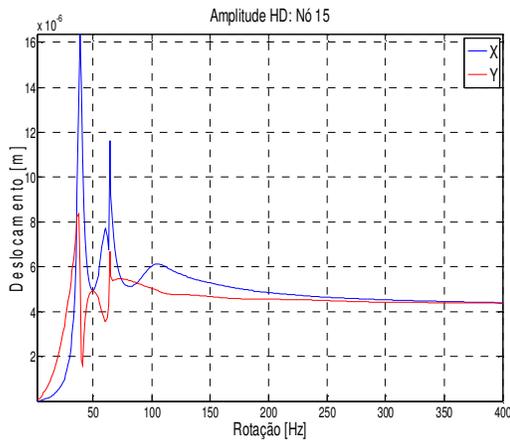


a)

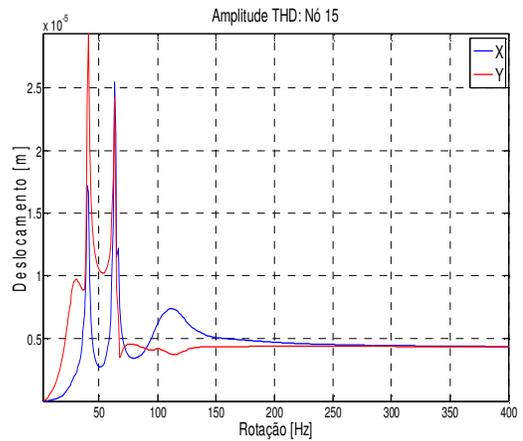


b)

Figura 5.23: Resposta ao desbalanceamento no mancal 1 (nó 10): Fase. a) Modelo HD. b) Modelo THD

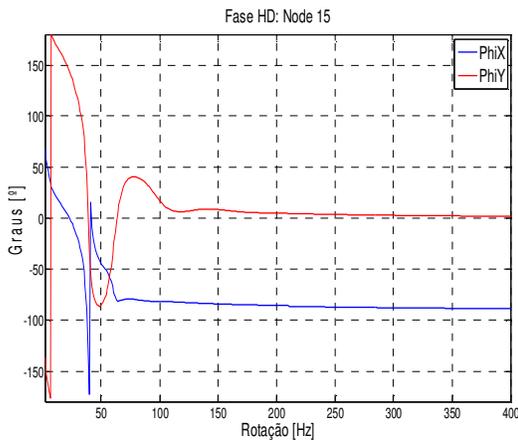


a)

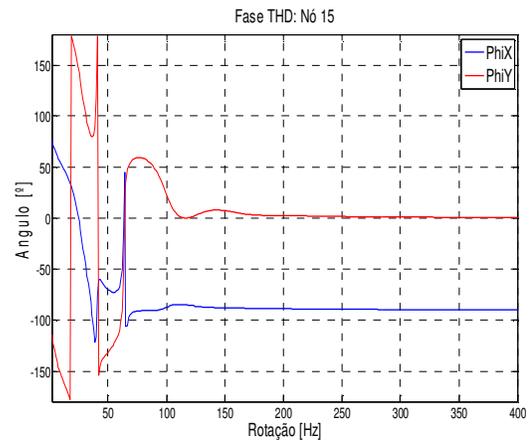


b)

Figura 5.24: Resposta ao desbalanceamento no mancal 2 (nó 15): Amplitude. a) Modelo HD. b) Modelo THD.



a)



b)

Figura 5.25: Resposta ao desbalanceamento no mancal 2 (nó 15): Fase. a) Modelo HD. b) Modelo THD

As Figuras (5.22) e (5.23) dizem respeito ao nó 10, que corresponde ao nó do mancal 1 descrito na tabela (5.3), cujo carregamento é de 0.7492N, enquanto que as Figuras (5.24) e (5.25) correspondem ao nó 15, nó esse, onde é localizado o mancal 2 descrito na tabela (5.5), 0.9714N. A resposta ao desbalanceamento foi obtida para uma faixa de rotações de 0 a 1667 Hz. Porém,

nos gráficos aqui apresentados, a faixa de rotações vai de 0 a 400 Hz, pois após essa velocidade de rotação, o sistema não apresenta variações expressivas em sua resposta dinâmica. Assim, analisando as figuras em questão, pode-se perceber que existem algumas velocidades críticas, onde a vibração é maior, que se encontram numa faixa inicial de velocidades. Pode-se perceber, também, que, no modelo THD, o pico de vibração se encontra em uma frequência diferente do encontrado no modelo HD, ou seja, no modelo THD temos um deslocamento da velocidade crítica para a direita (primeiro pico de vibração localizado em 38.67 Hz no modelo HD e 40.89 Hz no modelo THD, e o segundo pico de vibração localizado em 64.22 no modelo HD e 66.44 Hz no modelo THD) devido ao aumento da rigidez no modelo THD. Também é fácil notar que, devido à diminuição da viscosidade, a amplitude de vibração tende a aumentar no modelo THD, uma vez que o amortecimento do mancal diminui. As Figuras (5.26) e (5.27) mostram modos operacionais do rotor para os modelos HD e THD, para duas frequências diferentes, 39 Hz e 65 Hz. Nota-se que as amplitudes no modelo THD são maiores que no modelo HD devido à baixa viscosidade do óleo. No entanto, para ambos os modelos, os modos operacionais são de corpo rígido, o que é plausível uma vez que o rotor em questão é muito curto.

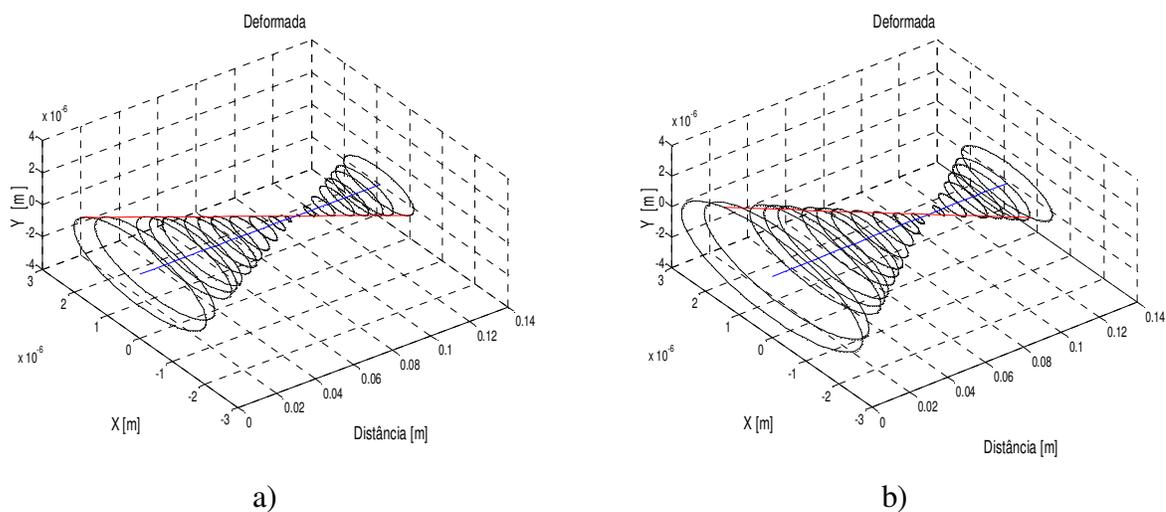


Figura 5.26: Deformada dos nós a 39 Hz: a) Modelo HD. b) Modelo THD.

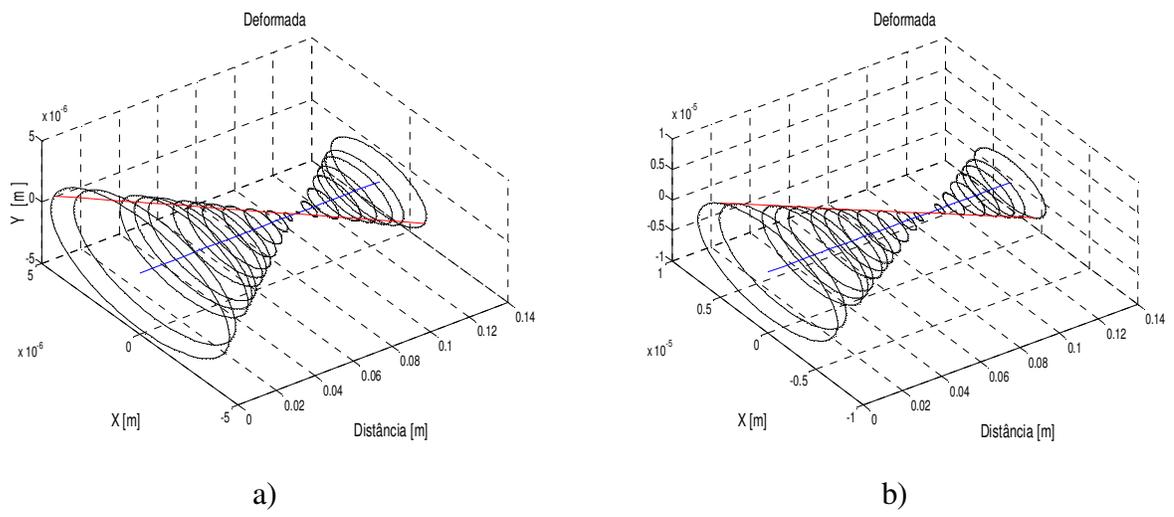


Figura 5.27: Deformada dos nós a 65 Hz: a) Modelo HD. b) Modelo THD.

## 6. Conclusões e Desdobramentos do Trabalho

### 6.1. Conclusões

Neste trabalho, o método das diferenças finitas foi proposto para resolver o modelo termohidrodinâmico de lubrificação para mancais radiais. O modelo utilizado, assim como o algoritmo implementado, contemplaram, com eficiência satisfatória, o objetivo principal do trabalho, a influência do efeito térmico no comportamento dinâmico do mancal e da análise dinâmica de uma máquina rotativa. A possibilidade de observar uma ampla gama de parâmetros envolvidos provou que, com as bases implementadas destes modelos, aplicações mais complexas podem ser analisadas.

No caso termohidrodinâmico, observa-se que, devido ao aumento da temperatura, houve uma mudança nas propriedades do lubrificante, deixando este menos viscoso. Com isso, o eixo tende a aumentar sua razão de excentricidade e diminuir o ângulo de atitude, gerando um novo equilíbrio capaz de gerar um novo campo de pressão para suportar a mesma carga. Conseqüentemente, a tendência de centralização do eixo ainda é presente, no entanto, fica debilitada, uma vez que quanto maior a velocidade maior será a temperatura e menor a viscosidade. Quanto à análise dos coeficientes, devido ao fato de a viscosidade ser menor, os coeficientes equivalentes sofrem alterações, sendo os coeficientes equivalentes de rigidez maiores e os coeficientes equivalentes de amortecimento menores que os do modelo hidrodinâmico, ocasionando um limite de estabilidade menor no modelo termohidrodinâmico, gerando assim, projetos mais conservativos.

Sobre a resposta em frequência do sistema rotor-mancais, a influência térmica causa uma mudança expressiva na localização do pico máximo de vibração, além de se obter valores maiores para esse pico.

De forma geral, conclui-se que o modelo numérico proposto é consistente, e certamente trará contribuições para pesquisas relacionadas ao comportamento termohidrodinâmico em mancais.

## **6.2. Desdobramento do Trabalho**

Primeiramente, as condições de contorno do problema poderiam ser alteradas para verificar outras condições de operação. A aplicação de condição adiabática para a parede do mancal, apesar de válida, é uma condição simplificada, portanto a troca de calor com o mancal pode ser acrescida na formulação da equação da energia. Também, apesar de não haver intensa troca de calor na direção axial, essa pode ser incluída, para que um estudo mais detalhado seja efetivado. Ou seja, a implementação da solução tridimensional do modelo.

Sabe-se também que, quando existem carregamentos muito elevados ou rotações baixas, o eixo gira em contato com o mancal. Para essas situações, é interessante analisar a deformação ocasionada no alojamento. Um modelo de análise utilizada nessas situações é o modelo elastohidrodinâmico. Assim, é interessante combinar os modelos elastohidrodinâmico e termohidrodinâmico para analisar o mancal a partir de uma perspectiva termoelastohidrodinâmica.

Por fim, os resultados obtidos poderão ser comparados entre si, possibilitando novas conclusões.

## 7. Referências Bibliográficas

- [1] BONCOMPAIN., R.; FILLON., M.; FRENE., J. Analysis of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings, *Journal of Tribology*, v.108, pp.219-224, 1986.
- [2] BURMEISTER., L. C., “*Convective Heat Transfer*”, John Wiley & Sons, New York, EUA, 1983.
- [3] CAMERON, A., 1951, Heat Transfer in Journal Bearings: A Preliminary Investigation, *Proceedings of the 1951 general Discussion on Heat Transfer*, Instn. Mech. Engrs., pp. 194-197.
- [4] COPE, W.F., A Hydrodynamic Theory of Film Lubrication, *Proc. Roy. Soc., Series A*, v.197, 1949, pp.201-217.
- [5] DANIEL, G. B., ALVES, D. S., CAVALCA, K. L., CRUZ, R. F., Temperature Influence on the Equivalent Coefficients Estimation for Journal Bearings, *ASME 2010*.
- [6] DOWSON, D. A Generalized Reynolds Equation for Fluid-film Lubrication, *Int. Journal of Mechanical Science*, v.4, pp.159-170, 1962.
- [7] DOWSON, D., MARCH, C. A Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings, *Proc. of IMechE*, v.181, n.3, pp.117-26, 1966
- [8] FITZGERALD., M. K.; NEAL., P. B. Temperature Distributions and Heat Transfer in Journal Bearings, *Transactions of the ASME*, v.114, pp.122-130, 1992.
- [9] FERRON., J.; FRENE., J.; BONCOMPAIN., R. A Study of the Thermohydrodynamic Performance of a Plain Journal Bearing Comparison Between Theory and Experiments, *Transactions of the ASME*, v.105, pp.422-428, 1983.
- [10] HAN., T.; PARANJPE., R. S. A Finite Volume Analysis of the Thermohydrodynamic Performance of Finite Journal Bearing, *Journal of Tribology*, v.112, pp.557-566, 1990.

- [11] HAMROCK, B. J.; SCHIMID, S. R., JACOBSON, B. O., “*Fundamentals of Machine Elements*”, McGraw Hill, 2<sup>nd</sup> ed., New York, EUA, 2005.
- [12] HESHMAT, H., PINKUS, O., Mixing Inlet Temperatures in Hydrodynamic Bearings, *Journal of Tribology*, v.108, pp.231-248, 1986.
- [13] HUNTER, W. B., ZIENKIEWICZ, O. C., Effect of Temperature Variations Across the Lubricant Films in the Theory of Hydrodynamic Lubrication, *Journal Mech. Eng. Sci.*, v.2, pp.52-58, 1960.
- [14] KHONSARI, M. M., JANG, J. Y., FILLON, M. On the Generalization of Thermohydrodynamic Analyses for Journal Bearings, *Journal of Tribology*, v.118, pp.571-578, 1996.
- [15] LARSSON, R., LARSSON, P. O., ERIKSSON, E., SJOBERG, M., HOGLUND, E., Lubricant Properties for Input to Hydrodynamic and Elastohydrodynamic Lubrication Analyses, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, v. 214, Part J, pp. 17-27, 2000.
- [16] LUND., J. W.; HANSEN., P. K. An Approximate Analysis of the Temperature Conditions in a Journal Bearing. Part I: Theory, *Transactions of the ASME*, v.106, pp.228-236, 1984.
- [17] LUND., J. W., Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings, *Journal of Tribology*, v.109, pp.37-41, 1987.
- [18] MALISKA, C. R., “*Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*”, LTC, 2<sup>a</sup> Edição, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- [19] MCCALLION, H., YOUSIF, F., LLOYD, T., The Analysis of Thermal Effects in a Full Journal Bearing, *Journal of Lubrication Technology*, pp.578-587, 1970.
- [20] MITSUI, J., YAMADA, T., A Study of the Lubricant Film Characteristics of Journal Bearings (Part 1, A Thermohydrodynamic Analysis with Particular Reference to the Viscosity Variation within Lubricant Film), *Bulletin of the JSME*, v.22, n.172, pp.1491-1498, 1979.
- [21] MITSUI, J., A Study of the Lubricant Film Characteristics of Journal Bearings (Part 2, Effects of Various Design Parameter on Thermal Characteristics of Journal Bearings), *Bulletin of the JSME*, v.25, n.210, pp.1982-2017, 1982.

[22] MITSUI, J., A Study of the Lubricant Film Characteristics of Journal Bearings (Part 3, Effects of the Film Viscosity Variation on the Dynamic Characteristics of Journal Bearings), *Bulletin of the JSME*, v.25, n.210, pp.2018-2029, 1982.

[23] MORTON, P. G., Unstable Shaft Vibrations Arising from Thermal Effects due to Oil Shearing Between Stationary and Rotating Elements, *IMechE*, pp.383-391, 2008.

[24] NICOLETTI, R., “*Efeitos Térmicos em Mancais Segmentados Híbridos – Teoria e Experimento*”, Campinas, SP: Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 1999, 162p. Dissertação de Mestrado.

[25] NORTON, R. L., “*Machine Design: An Integrated Approach*” (in Portuguese), Bookman, 2<sup>nd</sup> ed., Porto Alegre, Brazil, 2004.

[26] PARANJPE, R. S.; HAN., T. A Transient Thermohydrodynamic Analysis Including Mass Conserving Cavitation for Dynamically Loaded Journal Bearing, *Journal of Tribology*, v.117, pp.369-378, 1995.

[27] PEDREIRA, J. A., “*Dinâmica de máquinas rotativas em mancais hidrodinâmicos*”, Rio de Janeiro, RJ: Faculdade de Engenharia Mecânica, PUC-RIO, 2006, 110p. Dissertação de Mestrado.

[28] PATANKAR, S. V., “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, Hemisphere Publishing Corporation, 1<sup>st</sup> ed., 1980.

[29] PINKUS, O. Analysis of Elliptical Bearings, *Transactions of ASME*, v.78, pp.965-973, 1956.

[30] PINKUS., O. Solution of Reynolds Equation for Finite Journal Bearings, *Transactions of ASME*, v.80, pp.858-864, 1958.

[31] PINKUS., O. The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication, *Transactions of the ASME*, v.109, pp.2-20, 1987

[32] RAJALINGHAM, C., PRABHU, B. S., The Influence of Variation of Viscosity with Temperature on the Steady State Characteristics of Journal Bearings – Simplified Analysis, *Tribology International*, v.20, n.5, pp.261-266, 1987.

[33] SANTOS, M. F., “Efeitos Térmicos em Mancais Segmentados”, Campinas, SP: Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 1997, 79p. Dissertação de Mestrado.

[34] THOMAS, J.W., “*Numerical Partial Differential Equations – Finite Difference Methods*”, Springer Science+Business Media Inc., New York, 1995.

[35] TUCKMANTEL, F. W. S., “Integração do Sistema Rotor - Mancais Hidrodinâmicos – Estrutura de Suporte para Resolução Numérica.”, Campinas, SP: Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 2010, 159p. Dissertação de Mestrado.

## ANEXO A – Algoritmo

No presente trabalho, foi implementado um algoritmo computacional, na linguagem Fortran, para o cálculo da pressão hidrodinâmica, da temperatura de operação, do ponto de equilíbrio e dos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, em mancais radiais. O fluxograma é dado na Figura A1:

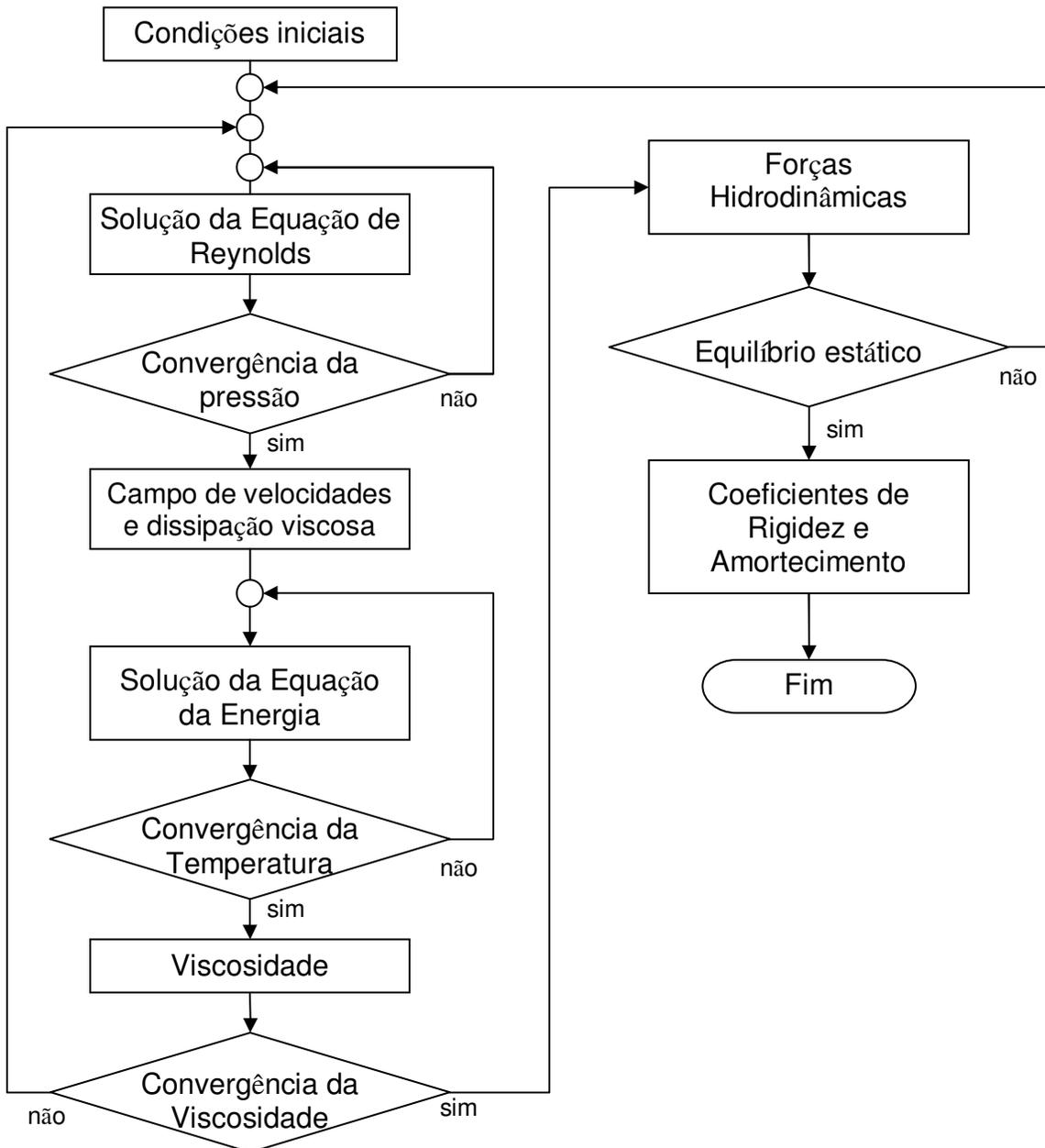


Figura A1: Fluxograma do programa computacional.

Para a solução, foi utilizada uma malha computacional quadrangular uniforme composta de 70 pontos em cada direção, ou seja, 70 pontos nas direções circunferencial ( $x$ ), 70 pontos na direção radial ( $y$ ) e 70 pontos na direção axial ( $z$ ). Em uma malha com quantidade maior de pontos, não foi obtido resultados significativamente diferentes dos obtidos com a malha utilizada nesse trabalho, no entanto, o tempo computacional aumentava em demasia. Assim, a malha utilizada aliou uma boa precisão com um tempo computacional razoável.

Primeiramente, entra-se com valores para as condições iniciais, tais condições são valores pré-estipulados de temperatura e viscosidade, assim como excentricidade e ângulo de equilíbrio. Com isso, resolve-se a equação de Reynolds, que é obtida quando a diferença entre duas pressões consecutivas, para um mesmo ponto for menor que um erro pré-determinado, que no caso do presente trabalho foi de  $10^{-8} Pa$ . A solução das equações diferenciais parciais, que são necessárias para a resolução do problema, foi encontrada utilizando-se o método das diferenças finitas, e para a solução do sistema linear de equações, resultante da aplicação do método das diferenças finitas, foi utilizado o método das Sobre-relaxações Sucessivas.

Depois de obtida as pressões, calculam-se as velocidades circunferencial, radial e axial, e em seguida a temperatura, essa última tem um processo de convergência que se encerra quando o erro é  $10^{-6} ^\circ C$ . Posteriormente calcula-se a viscosidade. Se o erro de  $10^{-6} Pa \cdot s$  não for atingido pela viscosidade, então os passos anteriores são repetidos até que tal valor seja encontrado.

Convergida a viscosidade, calcula-se as forças hidrodinâmicas, e é verificado se a posição de equilíbrio é atingida. A posição de equilíbrio do sistema é encontrada através do método de Newton-Raphson, também conhecido como método das tangentes, no qual o ponto de parada é um erro de  $10^{-6}$  para a razão de excentricidade e para o ângulo de equilíbrio. Finalmente, são calculados os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento a partir do método das pequenas perturbações.