

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO CONTROLE ATIVO DE
VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

Número de publicação FEM: 47/93.

por Roberto Jordan

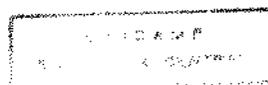
orientador Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Roberto Jordan
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 09/11/93.

J. Arruda
ORIENTADOR

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

novembro de 1993



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado

Título da Tese: CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO CONTROLE ATIVO
DE VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Autor: Roberto Jordan

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

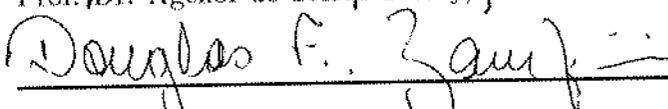
Aprovado por



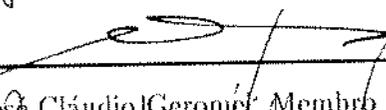
Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente



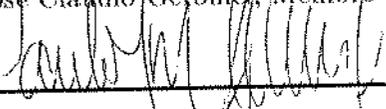
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury, Membro



Prof. Dr. Douglas Eduardo Zanetti, Membro



Prof. Dr. José Cláudio Gerome, Membro



Prof. Dr. Paulo Tadeu de Mello Lourenção, Membro

Campinas, 04 de novembro de 1993.

A meus filhos Luís Fernando, Otávio, Frederico e Conrado, com os quais pretendo manter um relacionamento mais próximo uma vez terminada mais esta fase de minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a concretização do trabalho aqui descrito.

Em especial ao Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, pela orientação sempre atenciosa dispensada ao longo de sua realização.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	i
CONTEÚDO	ii
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
NOMENCLATURA	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 OBTENÇÃO DAS COORDENADAS MODAIS	4
2.1 Conceito de Coordenada Modal	4
2.2 Filtragem Temporal	7
2.3 Filtragem Modal (Espacial)	8
2.3.1 Obtenção direta	8
2.3.2 Através da Integração Espacial	9
2.3.3 Através do Uso de Vetores Recíprocos	14
2.3.4 Observações Finais sobre os Filtros Modais	20
2.4 Uso de Observador	21

3	TEORIAS DE CONTROLE MODAL	27
3.1	Controle Conjunto	27
3.2	Controle Independente	29
3.3	Controle Conjunto com Amortecimento Não Diagonalizável	31
3.4	Controle Através de Cargas Internas	35
3.5	Controle a Tempo Discreto (Digital)	35
3.6	Observações Finais sobre as Teorias de Controle	38
4	PROGRAMAS COMPUTACIONAIS	40
4.1	Descrição Geral	40
4.2	Apresentação dos Dados	46
4.3	Cálculo das Respostas Propriamente Ditas	47
4.4	Cálculo dos Vetores de Diagonalização	49
4.5	Cálculo dos Ganhos de Realimentação	51
4.6	Cálculo de Energias	51
4.7	Programas Auxiliares	51
4.8	Listagem dos Programas FORTRAN	53
5	DETERMINAÇÃO DO INTERVALO DE AMOSTRAGEM	54
5.1	Equacionamento	54
5.2	Programa	55
5.3	Resultados da aplicação do programa	56
5.4	Análise dos resultados	58
5.5	Estabelecimento de critério	59
6	APLICAÇÃO DO CONTROLE - ANÁLISE DE IMPERFEIÇÕES DE MODELAGEM FÍSICA OU MODAL	60
6.1	Modelo Físico	61
6.2	Análise da influência de variações em parâmetros físicos da estrutura no desempenho do controle	67

6.3	Análise da influência de variações em parâmetros modais no desempenho do controle	73
7	APLICAÇÃO DO CONTROLE - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO NÃO DIAGONALIZÁVEL	75
7.1	Modelo Físico	75
7.2	Geração das Matrizes de Amortecimento	78
7.3	Aplicação dos Testes	79
7.4	Apresentação e Análise dos Resultados	80
8	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE	86
	BIBLIOGRAFIA	89
A	Seleção Automática de Posicionamento de Sensores	93
A.1	Teoria	93
A.2	Exemplo de Aplicação	95
A.3	Conclusões	97
B	Controle Ótimo - Problema Linear-Quadrático	99
B.1	Formulação geral a tempo contínuo	99
B.2	Formulação a tempo contínuo com parâmetros constantes e horizonte de tempo infinito	100
B.3	Formulação geral a tempo discreto	101
B.4	Formulação a tempo discreto com parâmetros constantes e horizonte de tempo infinito	102
C	Programa para Análise da Influência do Intervalo Temporal no Desempenho do Controle	103
C.1	Programa principal - CRLC1GL.M	103
C.2	Função GASIDINF.M	105
D	Programa para Geração de Matrizes de Massa e de Rigidez de Estrutura Plana	108
D.1	Programa principal - TREDINA.M	109
D.2	Função FRAMMS.M	111

D.3	Função FRAMEL.M	112
D.4	Função ADDMAT.M	113
D.5	Função RMVSM.M	114
E	Programas para Controle de Sistemas com Amortecimento Diagonalizável ou Não	115
E.1	Programa principal - CONMIMCK.M	115
E.2	Programa principal - CONTMCK.M	126
E.3	Função TN.M	136
E.4	Função ORDPARCO.M	138
E.5	Função ORDVLVT.M	139

Lista de Figuras

4.1	Fluxograma do programa para cálculo das respostas livre e controlada.	43
5.1	Número de iterações n_i em GASIDINF em função de Δt	57
5.2	Energias totais finais E_n em função de Δt	57
5.3	Funcionais “normalizados” \bar{J}_r em função de Δt	58
6.1	Estrutura original.	62
6.2	Linhas de ação dos atuadores.	66
6.3	Respostas da estrutura segundo a coordenada 127.	68
6.4	Respostas da estrutura segundo a coordenada 128.	68
6.5	Respostas da estrutura segundo a coordenada 129.	69
7.1	Estrutura plana.	76
7.2	Linhas de ação dos atuadores.	77
7.3	Respostas segundo a coordenada 29, matriz de amortecimento CP1.	84
7.4	Respostas segundo a coordenada 29, matriz de amortecimento CP100.	84
A.1	Estrutura plana do exemplo. As setas indicam graus de liberdade não redundantes.	96
A.2	Resultados usando ADPR: (a) sem remoção dos graus de liberdade redundantes; (b) com remoção. As setas indicam os graus de liberdade finais.	96
A.3	Resultados usando redução de Guyan: (a) sem remoção dos graus de liberdade redundantes; (b) com remoção. As setas indicam os graus de liberdade finais.	97

Lista de Tabelas

6.1	Incidência das coordenadas nos nós segundo as várias direções.	61
6.2	Incidência dos nós nos elementos.	63
6.3	Tabela das frequências naturais mais baixas.	64
6.4	Deslocamentos x e y ao longo de uma linha vertical de nós para os seis primeiros modos.	65
6.5	Frequências naturais médias e desvios padrão (ambos em Hz) após aplicação de desvios.	70
6.6	Energias finais, valores médios e desvios padrão (ambos em Nm), para o sistema original e após aplicação de desvios.	70
6.7	Valores originais G_{r_1} e valores médios \bar{G}_{r_1} mais desvios padrão σ_G para a estrutura após a aplicação de desvios em I.	71
6.8	Valores originais G_{r_2} e valores médios \bar{G}_{r_2} mais desvios padrão σ_G para a estrutura após a aplicação de desvios em I.	71
6.9	Valores originais de G_{r_1} e de G_{r_2} , acompanhados de valores médios e desvios padrão após a aplicação de desvios nos parâmetros modais.	74
7.1	Incidência das coordenadas nos nós segundo as várias direções.	76
7.2	Incidência dos nós nos elementos.	77
7.3	Coefficientes adimensionais de amortecimento dos modos sob controle.	79
7.4	Energias totais (Nm) do sistema.	81
7.5	Valores do funcional minimizado (Nm).	82
7.6	Matriz dos ganhos de realimentação, uma linha para cada modo, usando a matriz CPI e o programa CONMIMCK.M.	82
7.7	Matriz global dos ganhos de realimentação, usando a matriz CPI e o programa CONTMCK.M.	82

7.8	Matriz dos ganhos de realimentação, uma linha para cada modo, usando a matriz CP100 e o programa CONMIMCK.M.	83
7.9	Matriz global dos ganhos de realimentação, usando a matriz CP100 e o programa CONTMCK.M.	83

Resumo

Neste trabalho visa-se basicamente analisar a influência de imperfeições no modelamento de uma estrutura flexível no seu controle ativo de vibrações. Inicialmente se dá atenção especial aos métodos de obtenção das coordenadas modais as quais, em poucas palavras, são variáveis que refletem o comportamento temporal individual dos modos. São portanto essenciais ao controle modal, o qual se preocupa em agir somente sobre alguns modos. A seguir são descritas várias teorias de controle, seja ele conjunto (aplicado conjuntamente a um certo número de modos) ou individual (aplicado a cada modo individualmente). Uma nova formulação é apresentada, a qual permite aplicar o controle conjunto a estruturas com amortecimento não diagonalizável (não proporcional). Uma nova opção de controle através de cargas internas (atuadores internos à estrutura) também é obtida, a partir do equacionamento já desenvolvido. Descreve-se ainda a transformação dos esquemas de controle a tempo contínuo em esquemas a tempo discreto, visando à posterior aplicação de computadores digitais. Estabelece-se a seguir um critério para a determinação do maior incremento temporal Δt que pode ser usado no controle digital, de forma que o desempenho do controle não se deteriore demasiadamente. O passo seguinte é a descrição do programa computacional montado para simular a aplicação do controle modal individual a tempo discreto. Este programa, que calcula as respostas livre e controlada da estrutura a um conjunto de condições iniciais, é então utilizado para a análise da interferência de alguns tipos de desvios de modelagem da estrutura no desempenho do controle que lhe é aplicado. Finalmente são apresentadas as conclusões, bem como propostas de continuidade ao presente estudo. Como principal conclusão pode-se apontar a insensibilidade do controle às alterações que foram aplicadas através dos testes realizados. De fato, aplicados desvios nos modelos físico ou modal, o desempenho do controle se manteve praticamente inalterado. Nem mesmo a presença de amortecimento do tipo não diagonalizável, quando do uso da teoria que não o prevê, provocou alterações significativas nos resultados.

Abstract

The main objective of this study is to analyze the influence of model imperfections upon the performance of the active vibration control of continuous structures. Special attention is initially given to the determination of the modal coordinates, a necessary step when going from the physical to the modal model. Modal coordinates are essential, therefore, when modal control is concerned. Various control theories are presented in the sequence. These theories provide the control of the modes both individually and in group. A new formulation is proposed that can be applied to systems with non-proportional damping, in which case a set of modes is controlled in group. Continuous-time formulations are converted to discrete-time ones. Since the control is expected to be applied with the use of computers, digitizing of the signals is a natural consequence. The use of "internal forces" (forces provided by exciters positioned between points on the structure) is shown to be an extension of the theory originally designed to deal with "external forces" (when the exciters are placed, for instance, between the structure and external fixed points). It follows a study about the length of the time interval Δt to be used when digitizing of the signals, which, if too large, may affect the performance of the control system. The following step is the description of the developed computer program that furnishes the free and controlled time responses of the structure to a set of initial conditions. This program applies individual modal control to a structure with proportional damping. The analysis of the influence of some model imperfections upon the performance of the control scheme is then investigated. Finally, the overall conclusions and suggestions for continuity of this study are presented. The main conclusion is that the applied control theory showed to be almost insensitive to the deviations present in the tests. The performance of the control did not change significantly when deviations in the physical model or in the modal model were applied. Not even the presence of some amount of non-diagonalizable damping, when using the theory that does not take it into account, did change the results substantially.

Nomenclatura

De uma forma geral as grandezas escalares são letras romanas ou gregas minúsculas escritas com intensidade normal. Os vetores se diferenciam das grandezas escalares basicamente por se apresentarem em negrito. Já as matrizes são geralmente representadas por letras romanas ou gregas maiúsculas escritas em negrito, ou alternativamente letras maiúsculas em forma caligráfica. Qualquer grandeza que apresentar o subscrito r está referenciada ao r -ésimo modo de vibração genérico.

Letras Romanas

- | | |
|---|---|
| a | - desvio provocado no espectro de autovalores em função da substituição da matriz \mathbf{K} por $\mathbf{K} + a \mathbf{M}$; |
| $\mathbf{a}(t)$ | - vetor que reúne as coordenadas modais que multiplicam as u funções admissíveis $\psi_s(P)$; |
| $a_s(t)$ | - s -ésimo elemento do vetor $\mathbf{a}(t)$; |
| A | - área da seção transversal de um elemento; |
| \mathbf{A} | - matriz de sistema relacionada ao vetor de estado genérico $\delta(t)$; aparece também como matriz genérica do problema tradicional de autovalores/autovetores: $(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}) \phi_r = \mathbf{0}$; |
| A e A_r | - matrizes semelhantes a \mathbf{A} , relacionadas respectivamente aos vetores de estado a tempo discreto $\delta(k)$ e $\delta_r(k)$; |
| $\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_q, \mathbf{A}_{nd}, \mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s$ e \mathbf{A}_∞ | - matrizes de sistema semelhantes a \mathbf{A} , relacionadas respectivamente aos vetores $\delta_m(t), \delta_q(t), \delta_{ndm}(t), \delta_r(t), \delta_s(t)$ e $\delta_\infty(t)$; |
| \mathbf{B} | - matriz de distribuição relacionada ao vetor de estado genérico $\delta(t)$; |
| \mathbf{B} e \mathbf{B}_r | - matrizes semelhantes a \mathbf{B} , relacionadas respectivamente aos vetores de estado a tempo discreto $\delta(k)$ e $\delta_r(k)$; |
| B_j | - cada uma das p condições de contorno associadas ao operador diferencial L ; |
| $\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_q, \mathbf{B}_{nd}, \mathbf{B}_r, \mathbf{B}_s$ e \mathbf{B}_∞ | - matrizes semelhantes a \mathbf{B} , relacionadas respectivamente aos vetores $\delta_m(t), \delta_q(t), \delta_{ndm}(t), \delta_r(t), \delta_s(t)$ e $\delta_\infty(t)$; |
| c | - coeficiente de amortecimento viscoso de um sistema de um grau de liberdade; |

C	- matriz real e simétrica de amortecimento viscoso;
\hat{C}	- matriz que relaciona $\hat{\eta}(t)$ com $y(t)$;
C_m, C_s e C_∞	- matrizes de observação relacionadas respectivamente aos vetores de estado $\delta_m(t)$, $\delta_s(t)$ e $\delta_\infty(t)$;
C_m^u e C_s^u	- matrizes que ajudam a compor as matrizes C_m e C_s ;
dD	- infinitésimo de D ;
D	- domínio de integração das funções distribuídas espacialmente;
D	- matriz que distribui as cargas físicas pelas coordenadas da estrutura;
\hat{D}	- matriz que relaciona $y(t)$ com $a(t)$;
$e_m(t)$	- vetor erro de observação dos modos controlados: $e_m(t) = \delta_m(t) - \hat{\delta}_m(t)$;
$e_s(t)$	- vetor erro de observação dos modos residuais: $e_s(t) = \delta_s(t) - \hat{\delta}_s(t)$;
E	- módulo de elasticidade transversal do material;
$E_n(t)$ e $E_m(t)$	- energia total (potencial e cinética) num dado instante t , considerando respectivamente todos os n modos e apenas os m modos a controlar;
$f(k)$	- valor de $f(t)$ no instante $k \Delta t$;
$f(t)$	- força aplicada a um sistema de um grau de liberdade;
$f(k)$	- valor de $f(t)$ num dado instante $k \Delta t$, resultante da digitalização dos sinais;
$f(t)$	- vetor que reúne as cargas físicas (forças e/ou momentos) aplicadas ao sistema;
$f(P, t)$	- função que descreve o carregamento espacialmente continuamente distribuído aplicado ao sistema;
f_a	- vetor contendo as amplitudes das cargas (forças e/ou momentos) físicas aplicadas ao sistema, sob uma mesma frequência de excitação;
f_e	- vetor contendo as amplitudes das cargas estáticas (forças e/ou momentos) aplicadas ao sistema para gerar uma condição inicial de deslocamentos;
$f_{g_m}(t)$	- vetor coluna contendo as m forças modais $f_{g_r}(t)$;
$f_{g_r}(k)$	- força modal no instante $k \Delta t$;
$f_{g_r}(t)$	- força modal;
$f_{inf}(t)$	- vetor que reúne o conjunto inferior das forças modais obtidas com o auxílio da matriz T ;
$f_{inf_m}(t)$	- partição de $f_{inf}(t)$ relacionada aos m modos controlados;
$f_r(t)$	- cada uma das cargas físicas aplicadas ao sistema;
$f_{sup}(t)$	- vetor que reúne o conjunto superior das forças modais obtidas com o auxílio da matriz T ;
$f_{sup_m}(t)$	- partição de $f_{sup}(t)$ relacionada aos m modos controlados;
$f_v(k)$	- valor de $f_v(t)$ no instante $k \Delta t$;
$f_v(t)$	- vetor coluna que reúne as v cargas físicas (forças e/ou momentos) aplicadas ao sistema (obtido de $f(t)$ retirando-se os elementos nulos);
$F_j(t)$	- amplitude da força pontual aplicada no ponto P_j ;
g_r	- fator de escala complexo usado na composição do vetor $H_l(\omega)$ (sempre acompanhado do conjugado-complexo g_r^*);
G	- módulo de elasticidade transversal do material;

\mathcal{G}	- matriz de ganhos de realimentação para controle conjunto de m modos, a tempo discreto;
\mathbf{G}_m e \mathbf{G}_r	- matrizes de ganhos de realimentação, considerando respectivamente o controle conjunto de m modos e de um modo individualmente;
\mathbf{G}_{nd}	- matriz de ganhos de realimentação: $\mathbf{f}_{sup_m}(t) = \mathbf{G}_{nd} \boldsymbol{\eta}_{nd_m}(t)$;
\mathbf{G}_{vm}	- matriz de ganhos de realimentação que permite calcular as v cargas efetivamente aplicadas a partir do vetor de estado relativo aos m modos controlados;
\mathcal{G}_r	- matriz de ganhos de realimentação para um único modo, a tempo discreto;
\mathbf{G}_{r_1} e \mathbf{G}_{r_2}	- elementos de \mathcal{G}_r , $\mathcal{G}_r = [\mathbf{G}_{r_1} \mathbf{G}_{r_2}]$;
\mathbf{H}	- matriz composta do vetor de funções resposta em frequência $\mathbf{H}_l(\omega)$ avaliado sob várias frequências distintas;
$\mathbf{H}_l(\omega)$	- vetor coluna de funções resposta em frequência na posição P_l numa dada frequência angular ω ;
i	- unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$);
I	- momento de inércia da seção;
\mathbf{I}_j	- matriz identidade de ordem j ;
J	- momento polar de inércia da seção;
J, J_m, J_{nd} e J_r	- funcionais quadráticos a serem minimizados em problemas de otimização;
k	- coeficiente de rigidez de um sistema de um grau de liberdade; identifica também o instante $k \Delta t$ de uma função digitalizada;
\mathbf{K}	- matriz real e simétrica de rigidez;
\mathbf{K}_C	- decomposição de Cholesky da matriz \mathbf{K} : $\mathbf{K} = \mathbf{K}'_C \mathbf{K}_C$;
\mathbf{K}_m e \mathbf{K}_s	- matrizes de realimentação usadas na definição do Observador de Luenberger, respectivamente para os modos controlados e para os residuais;
L	- operador diferencial linear auto-adjunto de ordem $2p$ aplicado à função deslocamento espacialmente distribuída, relacionado à energia potencial do sistema;
m	- número de modos controlados;
m	- massa de um sistema de um grau de liberdade;
\mathbf{M}	- matriz real e simétrica de massa;
$M(P)$	- distribuição de massa como função contínua de P ;
n	- ordem dos sistema;
\mathbf{O}, \mathbf{P} e \mathbf{S}	- matrizes que aparecem como coeficientes de uma equação diferencial matricial de primeira ordem na forma: $\mathbf{O} \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{P} \mathbf{z}(t) = \mathbf{S} \mathbf{f}(t)$;
p	- metade da ordem do operador diferencial L ;
P	- variável de localização espacial em um sistema contínuo;
\mathbf{P}	- ver definição conjunta em \mathbf{O} ;
$\mathbf{P}(k)$	- matriz auxiliar utilizada no processo iterativo de determinação da matriz de ganho para o controle a tempo discreto com horizonte infinito;
P_j	- j -ésimo ponto de localização sobre o sistema;
q	- número genérico de elementos (modos, frequências, etc.) agrupados em um determinado conjunto;

- Q, Q_m, Q_{nd} e Q_r - matrizes que aparecem na composição dos funcionais quadráticos J, J_m, J_{nd} e J_r dos problemas de otimização, relacionadas ao cálculo das energias potencial e cinética;
- \bar{Q} - matriz que permite o cálculo da energia total do sistema: $E_n(t) = (1/2) \delta'(t) \bar{Q} \delta(t)$;
- \bar{Q}_m - matriz que permite o cálculo da soma das energias potencial e cinética, utilizada na montagem do funcional J_m ;
- r - designação genérica de um único modo;
- r_r - r -ésima ponderação de controle, utilizada na composição da matriz R_{nd} ;
- R, R_u, R_{nd} e R_r - matrizes e escalar que aparecem na composição dos funcionais quadráticos J, J_m, J_{nd} e J_r dos problemas de otimização, relacionados ao cálculo da energia dispendida no controle;
- s - número de modos modelados mas não controlados (residuais);
- S - ver definição conjunta em O ;
- t - variável temporal;
- T - matriz real construída a partir de autovalores e autovetores complexos, usada para definir novo conjunto de coordenadas modais;
- T_{11}, T_{12}, T_{21} e T_{22} - sub-matrizes de T , obtidas pela sua divisão em quatro parcelas de mesmas dimensões;
- T_{11_m} e T_{12_m} - matrizes respectivamente com as m colunas de T_{11} e T_{12} relativas aos modos controlados;
- u - número de sensores aplicados à estrutura (também o número de funções admissíveis usadas na determinação de $\hat{x}(P, t)$);
- v - número de atuadores aplicados à estrutura;
- W_m - matriz de ponderação que permite relacionar as matrizes Q_m e \bar{Q}_m ;
- $x(k)$ - valor de $x(t)$ num dado instante $k \Delta t$, resultante da digitalização dos sinais;
- $x(t)$ - deslocamento de um sistema de um grau de liberdade;
- $x(t)$ - vetor coluna que reúne as coordenadas físicas do sistema;
- $x(P, t)$ - função deslocamento continuamente distribuída no espaço, ao longo da estrutura;
- $\hat{x}(P, t)$ - aproximação de $x(P, t)$, considerando uma composição finita de funções admissíveis;
- $x_m(t)$ e $x_s(t)$ - contribuições respectivamente dos m modos controlados e dos s modos residuais ao vetor $x(t)$;
- $X(\omega)$ - vetor resposta em frequência numa dada frequência ω ;
- $y(t)$ - vetor coluna que reúne as coordenadas físicas monitoradas (saídas) do sistema;
- $\hat{y}(t)$ - vetor de saídas aproximado, obtido pela superposição de um número limitado de funções admissíveis ou através do Observador de Luenberger;
- $z(t)$ - vetor de estado completo, de dupla ordem, que é composto por $x(t)$ e sua primeira derivada temporal: $z(t) = [x(t)' \dot{x}(t)']'$.

Números

- $\mathbf{0}$ - vetor coluna nulo de dimensão compatível ao contexto;
 $\mathbf{0}_j$ - matriz nula de dimensão $j \times j$;

Letras Gregas

- α_r e $\bar{\alpha}_r$ - vetores utilizados na determinação dos vetores recíprocos;
 γ_{C_r} - amplitude da coordenada modal $\eta_{C_r}(t)$ sob vibração em uma determinada frequência;
 Γ_m - partição $m \times m$ de Γ_n relacionada aos modos controlados;
 Γ_n - matriz diagonal $n \times n$ obtida a partir da transformação da matriz \mathbf{P} em blocos diagonais com o auxílio da matriz \mathbf{T} ;
 $\delta(P - P_j)$ - delta de Dirac, igual a 0 se $P \neq P_j$, igual a ∞ se $P = P_j$, e com as propriedades de integração $\int_D \delta(P - P_j) dD = 1$ e $\int_D f(P) \delta(P - P_j) dD = f(P_j)$;
 $\delta(k)$ - valor de $\delta(t)$ no instante $k \Delta t$;
 $\delta(t)$ - vetor de estado genérico que envolve coordenadas modais e suas derivadas temporais;
 $\delta_m(t)$, $\delta_q(t)$ e $\delta_s(t)$ - vetores de estado semelhantes a $\delta_r(t)$, porém contendo inicialmente respectivamente m , q e s coordenadas modais e a seguir igual número de derivadas temporais das mesmas;
 $\hat{\delta}_m(t)$ - estimativa de $\delta_m(t)$ gerada pelo Observador de Luenberger;
 $\delta_r(k)$ - valor de $\delta_r(t)$ no instante $k \Delta t$;
 $\delta_r(t)$ - vetor de estado do modo: $\delta_r(t) = [\eta_r(t), \dot{\eta}_r(t)]'$;
 δ_{rs} - delta de Kronecker, igual a 1 se $r = s$ e igual a 0 se $r \neq s$;
 $\delta_\infty(t)$ - vetor de estado semelhante a $\delta_m(t)$, envolvendo todos os modos não modelados;
 Δt - intervalo temporal entre dois instantes de uma função digitalizada;
 ϵ_r - vetor composto por propriedades modais utilizado na determinação dos vetores recíprocos;
 $\eta(k)$ - valor de $\eta(t)$ num dado instante $k \Delta t$, resultante da digitalização dos sinais;
 $\eta(t)$ - vetor coluna composto pelas n coordenadas modais reais;
 $\eta_C(t)$ - vetor composto por todas as coordenadas modais complexas: $\eta_C(t) = [\eta_{C_1}(t), \eta_{C_2}(t), \dots, \eta_{C_n}(t), \eta_{C_1}^*(t), \eta_{C_2}^*(t), \dots, \eta_{C_n}^*(t)]'$;
 $\eta_{C_r}(t)$ - cada uma das coordenadas modais complexas;
 $\eta_{inf}(t)$ - metade inferior de $\eta_{nd}(t)$;
 $\eta_{inf_m}(t)$ - partição de $\eta_{inf}(t)$ relacionada aos m modos controlados;

$\eta_{inf_r}(t)$	- elemento genérico de $\eta_{inf}(t)$;
$\eta_m(t)$ e $\eta_s(t)$	- vetores que contêm respectivamente as coordenadas modais reais dos m modos controlados e dos s modos residuais;
$\eta_{nd}(t)$	- vetor de coordenadas modais obtidas com o auxílio da matriz \mathbf{T} ;
$\eta_{nd_m}(t)$	- vetor obtido pela superposição de $\eta_{sup_m}(t)$ a $\eta_{inf_m}(t)$;
$\eta_r(t)$	- cada uma das coordenadas modais reais;
$\eta_{sup}(t)$	- metade superior de $\eta_{nd}(t)$;
$\eta_{sup_m}(t)$	- partição de $\eta_{sup}(t)$ relacionada aos m modos controlados;
$\eta_{sup_r}(t)$	- elemento genérico de $\eta_{sup}(t)$;
λ_{C_r}	- autovalor complexo (sempre acompanhado de seu conjugado-complexo $\lambda_{C_r}^*$);
λ_r	- autovalor;
λ_{tr}	- autovalor relativo a problema modificado, podendo pertencer a espectro deslocado;
Λ_C	- matriz diagonal dos autovalores complexos (não incluídos os conjugados-complexos);
ξ_r	- coeficiente adimensional de amortecimento viscoso;
Ξ_n	- matriz diagonal resultante da diagonalização da matriz de amortecimento viscoso; $\Xi_n = \text{diag}[2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_n\omega_n]$;
Ξ_q	- semelhante a Ξ_n , considerando apenas q termos;
ρ	- massa específica do material;
σ_G	- desvio padrão de G_{r_1} ou de G_{r_2} ;
Υ_m	- partição $m \times m$ de Υ_n relacionada aos modos controlados;
Υ_n	- matriz diagonal $n \times n$ obtida a partir da transformação da matriz \mathbf{O} em blocos diagonais com o auxílio da matriz \mathbf{T} ;
ϕ_{C_r}	- autovetor complexo (sempre acompanhado de seu conjugado-complexo $\phi_{C_r}^*$);
ϕ_{lr}	- l -ésimo elemento do r -ésimo autovetor;
ϕ_r	- autovetor;
ϕ_{tr}	- autovetor relativo a problema modificado;
$\phi_r(P)$	- autofunção, definida continuamente sobre os pontos P do sistema;
Φ	- matriz quadrada $n \times n$ cujas colunas são os autovetores reais de ordem simples;
Φ_C	- matriz quadrada $2n \times 2n$ cujas colunas são os autovetores complexos de dupla ordem;
Φ_m, Φ_q e Φ_s	- matrizes cujas colunas são respectivamente m, q e s autovetores reais de ordem simples;
Φ_{mu}	- matriz extraída de Φ_m , considerando-se apenas as linhas correspondentes às coordenadas onde há atuadores aplicados;
ω ou $\omega(j)$	- frequência angular de vibração do sistema;
ω_r	- frequência natural angular não-amortecida;
Ω_m e Ω_q	- semelhantes a Ω_n , considerando respectivamente apenas m e q termos;
Ω_n	- matriz diagonal com os quadrados das frequências naturais angulares não amortecidas: $\Omega_n = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2]$;

- ψ_r - vetor recíproco;
 $\psi_a(P)$ - função admissível utilizada na composição de $\hat{x}(P, t)$.

Superescritos

- ' - primeira derivada temporal;
'' - segunda derivada temporal;
* - conjugado-complexo de escalar, vetor ou matriz;
' - transposta de vetor ou matriz;
 H - transposta do conjugado-complexo de vetor ou matriz;
 -1 - inversa de matriz.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O objetivo desta tese é, inicialmente, procurar estabelecer, através do estudo das várias técnicas de controle de estruturas flexíveis, uma teoria adequada para o projeto e implantação de um sistema de controle modal a partir das informações fornecidas sobre tais estruturas. Na seqüência, esta teoria, traduzida em programa computacional, permite simular o efeito de várias deficiências do modelo modal, seja teórica ou experimental, no desempenho do controle.

O projeto do controle ativo de uma estrutura flexível normalmente tem início em dois campos distintos; teoricamente, busca-se um modelo discretizado (usualmente através do método dos elementos finitos, seja diretamente ou via sub-estruturação) e, experimentalmente, é realizado um teste modal. Um sério problema se apresenta então na comparação dos modelos teórico e experimental: o método dos elementos finitos pode manipular atualmente até algumas dezenas de milhares de graus de liberdade (ou coordenadas), ao passo que na análise modal experimental poucas centenas deles é o limite prático atual (excetuando-se os métodos óticos de medição, hoje em desenvolvimento, que permitem uma elevada resolução espacial [1]).

Tal problema de desequilíbrio de dimensões de modelos é em geral resolvido pela redução do modelo teórico à dimensão do modelo experimental, visando à posterior confrontação entre eles. Alguns dos mais conhecidos métodos de redução podem ser aqui citados: Guyan [2], IRS [3], modal [4], híbrido [5] e SEREP [6]. Comparações entre tais métodos podem ser vistas em [7], [8] e [9].

Uma solução alternativa na comparação dos modelos teórico e experimental é a expansão dos dados modais referentes a este último modelo. Em [10], Lieven e Ewins comparam, por exemplo, três métodos que permitem simular graus de liberdade em adição àqueles analisados experimentalmente.

Acertadas as dimensões dos modelos, a comparação entre os resultados das análises teórica e experimental pode ser efetuada através de alguns critérios, como por exemplo: MAC ("Modal Assurance Criterion") [11], COC ("Cross-Orthogonality Check" - teste simples de ortogonalidade entre autovetores teóricos e experimentais com relação à matriz de massa), POC

("Pseudo-Orthogonality Check") [12], COMAC ("Coordinate Modal Assurance Criterion") [13], com o auxílio de vetores modais recíprocos [14].

Admitindo que se tenha em mãos um modelo realista da estrutura a controlar, cujo comportamento dinâmico pode ser convenientemente representado por um número razoável de graus de liberdade, passa-se realmente a dar atenção ao controle ativo das vibrações do sistema. O controle que se pretende aplicar é do tipo modal, ou seja, aquele cuja ação se dá sobre apenas alguns modos de vibração da estrutura, especialmente os de mais baixas frequências naturais. Estes modos podem ser manipulados em bloco ou individualmente. A cada modo é designada uma coordenada modal que reflita o comportamento temporal daquele modo (uma descrição detalhada do conceito de coordenada modal é dada no início do capítulo 2).

A determinação das coordenadas modais pode ser efetuada por vários métodos. Podem ser usados filtros temporais que isolem as frequências naturais (Meirovitch e Baruh [15] apresentam alguns comentários e referências acerca desta opção), observadores [16] [17] e filtros modais. Estes últimos foram estudados por Balas [18] em 1978. Posteriormente, uma detalhada formalização do seu uso no controle de estruturas foi fornecida em 1985 por Meirovitch e Baruh [15]. Métodos alternativos de cálculo de filtros modais foram apresentados por Zhang, Allemang e Brown em 1990 [19] e Shelley e Allemang em 1992 [20], os quais consistem na determinação de "vetores recíprocos".

Voltando ao controle modal, uma estratégia para aplicá-lo em bloco sobre um conjunto de modos foi estudada em 1978 por Balas, envolvendo a realimentação de vetores de deslocamentos e de velocidades. O estudo envolveu a análise de sistemas a tempo contínuo [21], bem como posteriormente, em 1984, a tempo discreto [22].

Em 1982 Meirovitch e Baruh [23] propuseram o Controle Independente no Espaço Modal (IMSC), técnica em que cada modo recebe o controle ótimo individualmente. Em outro trabalho Meirovitch, Baruh e Öz [24] compararam tal técnica com a técnica de controle acoplada, ou seja, o controle conjunto dos modos escolhidos, verificando-se que o IMSC admite otimização mais apurada, com redução da energia gasta no controle.

Um passo importante e muitas vezes necessário é o ajuste do modelo teórico, tendo em vista a adequação de suas características dinâmicas àquelas apresentadas pelo modelo experimental. Esta é uma tarefa que tem merecido a atenção de inúmeros pesquisadores, sendo no momento difícil a citação segura de tendências e/ou trabalhos de referência. Em [25] Baker relaciona alguns métodos de atualização de modelos e em [26] Natke apresenta um levantamento de tais métodos que operam no domínio da frequência.

A seguir são descritos os conteúdos dos demais capítulos que compõem este trabalho, lembrando que previamente a este capítulo inicial foi apresentada a nomenclatura.

O capítulo 2 apresenta métodos de obtenção das coordenadas modais, após apresentá-las formalmente.

No capítulo 3 são apresentadas as bases teóricas de várias abordagens de controle de

estruturas, seja ele aplicado de forma conjunta ou individualmente sobre os modos de vibração.

O capítulo 4 tem por objetivo a descrição dos programas computacionais que permitem chegar às respostas temporais do sistema, os quais foram utilizados ao longo do trabalho. São apresentados o programa principal, suas subrotinas, bem como programas auxiliares que promovem, por exemplo, a preparação de dados de entrada ao programa principal.

No capítulo 5 estabelece-se um critério para a determinação da menor taxa de amostragem de digitalização dos sinais, tendo em vista a aplicação de controle a tempo discreto a uma estrutura. Esta taxa vai definir o maior incremento temporal Δt que pode ser aplicado de forma que o desempenho do controle não se deteriore significativamente.

Ao capítulo 6 está reservada inicialmente a apresentação da estrutura física sobre a qual são realizados os testes. A seguir são descritos estes testes, que visam estabelecer correlações entre deficiências na modelagem do sistema a controlar e a conseqüente queda de desempenho do controle.

O capítulo 7 visa comparar os resultados que são obtidos pelas teorias que tratam ou não do amortecimento do tipo não diagonalizável, quando este se faz presente. através da aplicação do controle a uma estrutura plana que é apresentada logo ao seu início.

O último capítulo, de número 8, apresenta as conclusões pertinentes a todo o trabalho desenvolvido, indicando ainda caminhos que podem vir a ser trilhados no sentido da sua continuação.

A seguir é descrito um novo procedimento, que visa auxiliar os métodos de seleção automática de posicionamento de sensores, no apêndice A.

O apêndice B apresenta a formalização do problema de controle ótimo, tanto a tempo contínuo como a tempo discreto, apresentando as respectivas soluções.

Nos apêndices C, D e E encontram-se listagens de programas redigidos com comandos do ambiente MATLAB¹. No apêndice C, são apresentadas as listagens do programa e da função que permitiram realizar a análise descrita no capítulo 5, usado para analisar alterações de desempenho do controle a tempo discreto em decorrência de variações no intervalo de amostragem. No apêndice D, estão listados o programa e as funções que fornecem as matrizes de massa e de rigidez de um certo conjunto de estruturas planas, com base no método dos elementos finitos. Este programa foi utilizado para análise da estrutura exemplo utilizada no capítulo 7. Finalmente, no apêndice E, encontram-se as listagens dos programas e das funções necessários ao estudo da presença de amortecimento não diagonalizável, desenvolvido no capítulo 7.

¹MATLAB é um programa da The Mathworks Inc. para análise numérica matricial incluindo linguagem interpretada de alto nível

Capítulo 2

OBTENÇÃO DAS COORDENADAS MODAIS

Neste capítulo é apresentado inicialmente o conceito de coordenada modal. Em seguida são descritos vários métodos de obtenção de coordenadas modais, as quais são necessárias ao cálculo das forças de realimentação utilizadas no controle modal, qual seja, o controle que se aplica a apenas alguns modos do sistema mecânico.

A determinação das coordenadas modais, como se poderá observar na seqüência, se faz a partir de sinais de vibração provenientes de sensores posicionados na própria estrutura. Com relação ao posicionamento destes sensores, um estudo comparativo sobre métodos automáticos de seleção de posições pode ser visto em [27]. No apêndice A apresenta-se um procedimento a ser aplicado previamente aos métodos de seleção automática, visando eliminar pontos de medição que forneceriam sinais semelhantes (basicamente com as mesmas composições dos modos sob estudo), ou seja, pontos redundantes.

2.1 Conceito de Coordenada Modal

Para o entendimento mais preciso do conceito de coordenada modal é necessário analisar o comportamento dinâmico de um sistema mecânico contínuo, discretizado com n graus de liberdade. A equação que rege a dinâmica de um sistema linear, invariante no tempo, auto-adjunto e com modelo de amortecimento viscoso é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes $n \times n$ simétricas e reais de massa, de amortecimento e de rigidez, o vetor coluna $\mathbf{x}(t)$ reúne as n coordenadas físicas que definem o posicionamento da estrutura e o vetor coluna $\mathbf{f}(t)$ as n forças (e/ou momentos) aplicados à mesma.

Considera-se neste instante que a matriz de amortecimento \mathbf{C} seja diagonalizável, sendo que a condição geral que confirma esta hipótese é dada por $\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ (ver [28]), onde o expoente -1 indica a inversa da matriz. Pode-se facilmente verificar que o caso não amortecido ($\mathbf{C} = \mathbf{0}_n$) é abrangido por esta condição.

Tomando-se a equação (2.1) na forma homogênea ($\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$) e desconsiderando-se o amortecimento, tem-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

cujo problema de autovalores associado é dado por:

$$(\mathbf{M} \lambda_r + \mathbf{K}) \phi_r = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

onde λ_r é o autovalor ($\lambda_r = -\omega_r^2$, sendo ω_r a frequência natural angular não-amortecida) e ϕ_r o autovetor (forma de vibrar) correspondentes ao r -ésimo modo de vibração.

A matriz Φ é agora composta tomando-se como suas colunas todos os autovetores ϕ_r . Esta matriz é ainda normalizada em relação à matriz de massa, de forma que se tenha:

$$\Phi' \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}_n, \quad (2.4)$$

onde o sobrescrito ' indica transposição de matriz (ou de vetor) e \mathbf{I}_n é a matriz identidade de ordem n . Conseqüentemente, com a hipótese de matriz de amortecimento diagonalizável, tem-se:

$$\Phi' \mathbf{C} \Phi = \text{diag} [2 \xi_1 \omega_1, 2 \xi_2 \omega_2, \dots, 2 \xi_n \omega_n] = \Xi_n, \quad (2.5)$$

$$\Phi' \mathbf{K} \Phi = \text{diag} [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2] = \Omega_n,$$

onde ξ_r é o coeficiente adimensional de amortecimento do r -ésimo modo.

A matriz Φ permite a seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \boldsymbol{\eta}(t), \quad (2.6)$$

sendo $\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)]'$ o vetor que reúne as n coordenadas modais. A equação (2.6) pode ser re-escrita na forma:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n \phi_r \eta_r(t). \quad (2.7)$$

Pode-se agora comentar o significado físico das coordenadas modais. A cada instante t o vetor $\mathbf{x}(t)$ é uma combinação linear dos autovetores ϕ_r , sendo que os coeficientes de multiplicação são as coordenadas modais. Em outras palavras, as coordenadas modais são funções que indicam as contribuições dos modos de vibração na composição do vetor $\mathbf{x}(t)$ ao longo do tempo.

Assim como o vetor $\mathbf{x}(t)$ pode ser escrito em termos de coordenadas modais, através das equações (2.6) e (2.7), também o vetor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ pode ser escrito em função das coordenadas modais de velocidade $\dot{\eta}(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi \dot{\eta}(t) = \sum_{r=1}^n \phi_r \dot{\eta}_r(t). \quad (2.8)$$

A equação (2.6), que é escrita considerando-se $\mathbf{x}(t)$ e $\eta(t)$ funções contínuas de t , apresenta uma versão equivalente se forem consideradas funções discretizadas no tempo. Neste caso os valores destes vetores seriam conhecidos apenas em certos instantes, considerados aqui igualmente espaçados por um intervalo temporal Δt (o uso de intervalos de duração variável não é comum), ou seja, quando $t = k \Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Denominando simplesmente por $\mathbf{x}(k)$ e $\eta(k)$ os valores dos vetores no instante $t = k \Delta t$, a equação (2.6) torna-se:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi \eta(k). \quad (2.9)$$

Novamente existe uma equação semelhante à (2.9) em termos de velocidades:

$$\dot{\mathbf{x}}(k) = \Phi \dot{\eta}(k). \quad (2.10)$$

Introduzindo-se a equação (2.6) na equação (2.1), pré-multiplicando-se ainda esta última por Φ' , obtém-se:

$$\Phi' M \Phi \ddot{\eta}(t) + \Phi' C \Phi \dot{\eta}(t) + \Phi' K \Phi \eta(t) = \Phi' \mathbf{f}(t). \quad (2.11)$$

Tendo em vista a diagonalização das matrizes M , C e K que aparecem na equação (2.11), pode-se escrever uma equação para cada r -ésimo modo de vibração na forma:

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = \phi_r' \mathbf{f}(t). \quad (2.12)$$

Conclui-se portanto que, no caso da matriz de amortecimento se apresentar diagonalizável, é viável, através da transformação de coordenadas realizada com o auxílio da matriz real Φ , transformar a equação diferencial (2.1) envolvendo n coordenadas físicas em um conjunto de n equações diferenciais desacopladas (2.12) com apenas uma coordenada modal cada. Desta forma pode-se analisar o comportamento dinâmico de cada modo individualmente.

Serão agora analisados na seqüência vários métodos que permitem extrair as coordenadas modais das medições realizadas sobre a estrutura. Estes métodos serão comentados acerca da presença do “spillover de observação”, que é o fenômeno pelo qual as medições que visam acompanhar o comportamento dinâmico de um ou mais modos são contaminadas por outros modos.

2.2 Filtragem Temporal

As coordenadas modais podem ser extraídas das respostas temporais de pontos da estrutura através da filtragem temporal [15]. Elas podem ser obtidas até mesmo de um único ponto da estrutura, desde que o correspondente sinal seja filtrado (analógica ou digitalmente) por filtros passa-banda sintonizados nas freqüências naturais dos modos de interesse. Deve-se certificar de que todos estes modos estejam representados no sinal, ou seja, de que os elementos dos autovetores correspondentes na posição onde está posicionado o sensor não sejam nulos (de uma forma mais clara, devem ser evitados os “nós” nas formas de vibrar dos modos visados). No caso de se extraírem várias coordenadas modais, conseqüentemente, a curva de resposta do conjunto de filtros passa a se apresentar na forma de “pente”, uma banda de filtro para cada freqüência natural.

Deve-se atentar para o fato de que os filtros passa-banda apresentam em suas curvas de resposta em freqüência não só uma banda central de passagem de largura finita e aproximadamente plana, mas também “saias” laterais com inclinação tanto maior quanto melhores eles forem. Desta forma não permitem a passagem exclusiva da freqüência natural visada, mas também de freqüências adjacentes; portanto pode ser difícil ou quase impossível a sua aplicação quando dois modos apresentarem freqüências naturais muito próximas. A este problema de “spillover” de observação se soma a dificuldade em aplicar os filtros nos casos de modos superiores [15].

Apesar de não ser o método mais adequado para a determinação das coordenadas modais, a filtragem temporal pode ser usada de forma auxiliar. Assim, nos procedimentos descritos a seguir, podem ser utilizados filtros passa-baixas que atenuem as altas freqüências, minimizando o “spillover” de observação dos modos de mais altas freqüências naturais sobre os modos visados, em geral de freqüências naturais mais baixas. É conveniente lembrar que, de qualquer forma, um filtro passa-baixas é sempre utilizado quando se pretende aplicar o controle com base em sinais digitalizados, no intuito de eliminar o “aliasing”.

Deve-se atentar finalmente para o fato de que a aplicação de filtros (analógicos ou digitais) a funções temporais provoca defasagens nas mesmas, o que pode trazer sérias conseqüências ao controle por realimentação. Alguns procedimentos de correção destas defasagens foram comparados por McGreevy et al. [29].

2.3 Filtragem Modal (Espacial)

A "filtragem modal", como normalmente ela é denominada, consiste na obtenção das coordenadas modais a partir da resposta da estrutura em vários de seus pontos. Ela se baseia em propriedades de ortogonalidade dos autovetores do problema, daí ser considerada uma filtragem espacial, ao contrário daquela apresentada na seção anterior.

Uma grande vantagem dos filtros modais é a de que eles não provocam defasagem visto que, por princípio, permitem obter as coordenadas modais num dado instante t atuando apenas sobre as informações de movimento do sistema naquele mesmo instante. Não se pode esquecer, contudo, que é comum ser necessária a restrição do número de modos nos sinais, via aplicação de filtro passa-baixas, o que pode vir novamente a criar alguma defasagem.

A seguir são descritas três formas alternativas de aplicação dos filtros modais. A primeira forma, aqui denominada obtenção direta, requer o conhecimento do conjunto de autovetores ou de alguns autovetores mais a matriz de massa. A segunda, teórica, envolve a integração espacial de algumas funções distribuídas continuamente pelo volume da estrutura sob análise (funções de massa e autofunções, por exemplo). A terceira se baseia na manipulação de dados provenientes de funções resposta em frequência obtidas experimentalmente (dois métodos ligeiramente distintos são apresentados neste último caso).

2.3.1 Obtenção direta

Se as coordenadas físicas $\mathbf{x}(t)$ estão todas disponíveis, as coordenadas modais $\boldsymbol{\eta}(t)$ podem ser facilmente calculadas invertendo-se a equação (2.6), a qual é aplicável quando a matriz de amortecimento é diagonalizável:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}(t), \quad (2.13)$$

ou, com o auxílio da normalização definida na equação (2.4):

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{M} \mathbf{x}(t). \quad (2.14)$$

Tendo em vista a equação anterior, para o r -ésimo modo tem-se a determinação da coordenada modal através de:

$$\eta_r(t) = \phi_r' \mathbf{M} \mathbf{x}(t). \quad (2.15)$$

Pela análise da equação (2.15) percebe-se que não é necessária a determinação de todos os autovetores do problema, mas apenas aqueles dos modos cujas coordenadas modais se pretendem

determinar. Por outro lado, deve-se lembrar que é exigido o conhecimento completo do vetor $\mathbf{x}(t)$, o que implica na medição de todas as coordenadas nas quais o sistema foi discretizado, condição inviável do ponto de vista prático na maioria das aplicações reais.

Poder-se-á verificar, ao final da apresentação das outras teorias de filtragem modal a seguir, que a “filtragem modal” vai sempre resultar na aplicação de uma equação semelhante à equação (2.15), ou seja, para um determinado r -ésimo modo a sua coordenada modal num dado instante t é obtida pelo produto escalar de um vetor de coeficientes (invariante no tempo e correspondente àquele modo) pelo vetor que reúne as medições disponíveis de deslocamento da estrutura, naquele mesmo instante. Caso várias coordenadas modais necessitem ser determinadas, todo o processo de determinação vai representar apenas a multiplicação de uma matriz de coeficientes pelo vetor de medições. É portanto um procedimento simples e extremamente atraente, visto que esta operação pode ser realizada de forma imediata pelo processador uma vez que os sinais das medições estejam digitalizados.

Uma alternativa viável aos autovetores são os vetores de Ritz [30] e de Lanczos [31]. Na verdade estes vetores são combinações lineares de autovetores, não sendo permitida a participação de um mesmo autovetor em mais de uma combinação. Desta forma tais vetores permitem a diagonalização das matrizes de massa e de rigidez (também a matriz de amortecimento, mantida a hipótese anteriormente formulada sobre o mesmo). Uma vantagem no uso dos vetores de Ritz e de Lanczos é a existência de algoritmos que permitem a determinação de alguns destes vetores de uma forma mais rápida do que aqueles que calculam (mesmo parcialmente) os autovetores. Uma comparação no uso dos três tipos de vetores pode ser vista em [32] e [33].

Deve-se finalmente lembrar que o vetor $\phi_r' M$ é ortogonal a todos os vetores ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $j \neq r$. Portanto garante-se, uma vez que o produto $\phi_r' M$ seja suficientemente preciso, que a coordenada modal $\eta_r(t)$ está livre da influência dos demais $n - 1$ modos, obtidos a partir de um modelo n -dimensional da estrutura. Como a estrutura, contínua, é na verdade um sistema com infinitos modos, há a possibilidade de haver “spillover” a partir dos modos não modelados, isto é, dos modos que não podem ser representados pelo nível de discretização adotado. Este “spillover” de observação pode ter maior ou menor importância dependendo do número de coordenadas modais de interesse, da dimensão n do modelo, e mesmo da relação entre tais valores.

2.3.2 Através da Integração Espacial

A equação (2.1), que rege a dinâmica da estrutura, havia sido escrita com base num modelo espacial discretizado da mesma, com n graus de liberdade, sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor que reunia as variáveis correspondentes. Vai-se agora escrever uma equação semelhante, porém evitando a discretização espacial. A função que define os deslocamentos da estrutura é $x(P, t)$, uma função contínua em P , a variável que identifica os pontos da estrutura [34]. Da mesma forma admite-se agora que a massa da estrutura $M(P)$ e a excitação externa $f(P, t)$ sejam funções contínuas desta variável. Conseqüentemente tem-se:

$$Lx(P,t) + M(P) \frac{\partial^2 x(P,t)}{\partial t^2} = f(P,t), \quad (2.16)$$

onde ainda L é um operador diferencial linear auto-adjunto de ordem $2p$. Tem-se ainda que o deslocamento $x(P,t)$ é sujeito às condições de contorno $B_j x(P,t) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$), onde B_j são operadores diferenciais lineares.

A solução do problema de autovalores associado à equação (2.16) fornece um conjunto infinito de autovalores $\lambda_r = \omega_r^2$ (onde ω_r são as frequências naturais do sistema) e correspondentes autofunções $\phi_r(P)$ ($r = 1, 2, \dots$), estas também funções contínuas de P . Como o operador L é auto-adjunto, as autofunções apresentam a propriedade de ortogonalidade e podem ser normalizadas tais que:

$$\int_D M(P) \phi_r(P) \phi_s(P) dD = \delta_{rs}, \quad (2.17)$$

$$\int_D \phi_r(P) L \phi_s(P) dD = \lambda_r \delta_{rs},$$

onde D é o domínio equivalente à estrutura (todos os possíveis pontos P) e dD um seu infinitésimo. Nestas últimas equações, ainda, δ_{rs} é o delta de Kronecker.

Usando o teorema da expansão [34], obtém-se uma equação equivalente à equação (2.6):

$$x(P,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(P) \eta_r(t), \quad (2.18)$$

onde novamente $\eta_r(t)$ são as coordenadas modais.

Através da utilização das equações (2.17) e (2.18), a equação (2.16) pode ser transformada no conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias:

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = f_{gr}(t), \quad r = 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

onde a força modal $f_{gr}(t)$ é dada por:

$$f_{gr}(t) = \int_D \phi_r(P) f(P,t) dD, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

Os atuadores (dispositivos que aplicam as forças e/ou momentos de controle sobre a estrutura) serão aqui considerados como possuindo atuação pontual, que é a forma tradicional de aplicação. Atualmente, através de outras técnicas e com o advento dos materiais inteligentes,

já se pode prever o uso corrente num futuro próximo de atuadores com atuação espacialmente distribuída sobre a estrutura [35]. Considerando a atuação pontual de v atuadores, aplicando forças e/ou momentos com amplitudes $F_j(t)$ nos pontos P_j , pode-se então representá-los através da seguinte função distribuída:

$$f(P, t) = \sum_{j=1}^v F_j(t) \delta(P - P_j), \quad (2.21)$$

onde δ é o delta de Dirac.

Introduzindo a equação (2.21) na equação (2.20), obtém-se:

$$f_{gr}(t) = \sum_{j=1}^v \phi_r(P_j) F_j(t), \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

A obtenção das coordenadas modais pelo uso dos filtros modais passa a ser uma simples decorrência da segunda parte do teorema da expansão, a qual estabelece que:

$$\eta_r(t) = \int_D M(P) \phi_r(P) x(P, t) dD, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

$$\dot{\eta}_r(t) = \int_D M(P) \phi_r(P) \dot{x}(P, t) dD, \quad r = 1, 2, \dots,$$

onde $\dot{\eta}_r(t)$ é a coordenada modal em termos de velocidade. Pode-se observar que a primeira das equações (2.23) é a versão espacialmente distribuída da equação (2.15).

Analisando-se as equações (2.23) percebe-se que a determinação das coordenadas modais passa pelo conhecimento do deslocamento $x(P, t)$ e da velocidade $\dot{x}(P, t)$ em todos os pontos P da estrutura, o que evidentemente é inviável do ponto de vista prático. Isto porque normalmente há a possibilidade de se realizar a medição dos movimentos da estrutura em apenas alguns de seus pontos, onde estão localizados os sensores de vibração. Uma solução, segundo Meirovitch [15], é a interpolação das medidas discretas proporcionadas pelos sensores de forma a se obterem distribuições contínuas de deslocamentos e de velocidades, propiciando então a aplicação das equações (2.23).

Embora a interpolação das medições possa vir a fornecer as funções $x(P, t)$ e $\dot{x}(P, t)$ que aparecem nas equações (2.23), uma grande dificuldade que ainda resta é a formulação das funções de massa $M(P)$ e das autofunções $\phi_r(P)$ como funções contínuas da posição P . Esta é uma tarefa que pode ser resolvida analiticamente apenas quando a estrutura apresenta uma simplicidade de forma extremamente elevada. Com relação às autofunções, acredita-se que ainda poderia ser tentada uma

solução semelhante àquela utilizada para os deslocamentos e velocidades, ou seja, uma interpolação dos modos discretos obtidos experimentalmente. Uma proposta neste sentido, de interpolação de dados experimentais, pode ser apreciada, por exemplo, no trabalho de Arruda [36].

Tendo em vista a implementação prática dos filtros modais acima descritos, serão apresentados na seqüência alguns desenvolvimentos matemáticos que esclarecem a situação. Vai-se inicialmente considerar uma distribuição aproximada de deslocamentos através do método de Rayleigh-Ritz [37]. Assim, a função aproximada $\hat{x}(P, t)$ é dada por uma série finita (número de termos igual a u) de coordenadas modais $a_s(t)$ multiplicadas por funções admissíveis $\psi_s(P)$:

$$\hat{x}(P, t) = \sum_{s=1}^u a_s(t) \psi_s(P) . \quad (2.24)$$

As funções admissíveis $\psi_s(P)$ devem satisfazer certas condições de diferenciabilidade e as condições de contorno físicas. Elas na verdade funcionam como funções de interpolação.

Pela observação da equação (2.24) percebe-se que o deslocamento aproximado percebido por um sensor num determinado ponto P_j é dado por:

$$\hat{x}(P_j, t) = \sum_{s=1}^u a_s(t) \psi_s(P_j) . \quad (2.25)$$

Admite-se agora que haja u sensores distribuídos pela estrutura (a igualdade entre o número de funções admissíveis e o número de sensores foi admitida por uma razão que ficará clara logo à frente). Se as respostas destes sensores forem armazenadas no vetor $\mathbf{y}(t) = [\hat{x}(P_1, t), \hat{x}(P_2, t), \dots, \hat{x}(P_u, t)]'$, as coordenadas modais no vetor $\mathbf{a}(t) = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_u(t)]'$ e se ainda for formada a matriz $\hat{\mathbf{D}} = [\hat{D}_{js}] = [\psi_s(P_j)]$, ($j, s = 1, 2, \dots, u$), obtém-se a equação:

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{D}} \mathbf{a}(t) . \quad (2.26)$$

Invertendo-se a equação (2.26) tem-se as coordenadas modais em função dos sinais obtidos pelos sensores:

$$\mathbf{a}(t) = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{y}(t) . \quad (2.27)$$

A matriz $\hat{\mathbf{D}}$ só é quadrada (e portanto passível de sofrer uma inversão perfeita) se o número de funções admissíveis for igual ao número de sensores [37]; daí esta condição ter sido considerada anteriormente. A não-singularidade de $\hat{\mathbf{D}}$, condição também necessária à sua inversão, se não for obtida a princípio pode ser alcançada alterando-se um ou mais pontos de resposta P_i , $i = 1, 2, \dots, u$.

Introduzindo a equação (2.27) na equação (2.24), lembrando ainda da definição de $y(t)$, consegue-se:

$$\hat{x}(P, t) = \sum_{s=1}^u \psi_s(P) \sum_{j=1}^u (\hat{D}^{-1})_{sj} \hat{x}(P_j, t). \quad (2.28)$$

Lembrando da primeira das equações (2.23), as coordenadas modais aproximadas são dadas por:

$$\hat{\eta}_r(t) = \int_D M(P) \phi_r(P) \sum_{j=1}^u \sum_{s=1}^u \psi_s(P) (\hat{D}^{-1})_{sj} \hat{x}(P_j, t) dD, \quad (2.29)$$

ou

$$\hat{\eta}_r(t) = \sum_{j=1}^u \hat{C}_{rj} \hat{x}(P_j, t), \quad (2.30)$$

onde

$$\hat{C}_{rj} = \sum_{s=1}^u (\hat{D}^{-1})_{sj} \int_D M(P) \phi_r(P) \psi_s(P) dD. \quad (2.31)$$

As integrações envolvidas na determinação dos coeficientes \hat{C}_{rj} podem ser efetuadas previamente ("off-line"), de forma que o cálculo das coordenadas modais possa se desenvolver em tempo real na forma de uma simples multiplicação de uma matriz pelo vetor de medições. A equação que descreve esta multiplicação é obtida agrupando-se as coordenadas $\hat{\eta}_r(t)$ no vetor $\hat{\eta}(t)$ e usando-se repetidamente a equação (2.30):

$$\hat{\eta}(t) = \hat{C} y(t), \quad (2.32)$$

onde \hat{C} é a matriz composta pelos coeficientes \hat{C}_{rj} .

É interessante verificar que, no caso de se tomarem as autofunções como funções admissíveis, a equação (2.31) se reduz a:

$$\hat{C}_{rj} = (\hat{D}^{-1})_{rj}, \quad (2.33)$$

ou, simplesmente,

$$\hat{C} = \hat{D}^{-1}. \quad (2.34)$$

Inserindo-se este resultado na equação (2.32) obtém-se uma forma truncada da equação (2.13). Truncada porque se está trabalhando com um modelo reduzido de dimensão igual ao número de sensores, visando-se determinar igual número de coordenadas modais, sendo que normalmente um modelo só consegue reproduzir com boa precisão uma quantidade de modos bastante inferior à sua dimensão (de uma forma geral se verifica que cerca de no máximo metade do total de modos possíveis de serem determinados a partir do modelo discretizado se aproximam com boa precisão dos modos exatos, do sistema contínuo).

A possibilidade do aparecimento do "spillover" de observação, neste caso, está inicialmente vinculada à precisão obtida na determinação das funções necessárias aos processos de integração aqui apresentados. Mesmo que se obtivesse uma precisão absoluta naquela determinação, restaria o problema, semelhante ao citado no item anterior, quanto à dimensão finita do problema formulado.

2.3.3 Através do Uso de Vetores Recíprocos

É aqui apresentado inicialmente o desenvolvimento matemático que vai permitir, no devido momento, a conceituação de vetor recíproco. Na seqüência são apresentados dois procedimentos semelhantes que permitem a determinação deste tipo de vetor.

A equação (2.1) que define a inércia de um sistema de n graus de liberdade, mais uma equação trivial, permitem compor a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0_n \\ 0_n & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_n \end{bmatrix} f(t). \quad (2.35)$$

A equação anterior pode ser escrita em forma simplificada:

$$O \dot{z}(t) + P z(t) = S f(t), \quad (2.36)$$

onde

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

e onde ainda

$$O = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} K & 0_n \\ 0_n & -M \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_n \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

A equação (2.36), na forma homogênea, fornece o seguinte problema de autovalores:

$$(\lambda_{C_r} \mathbf{O} + \mathbf{P}) \phi_{C_r} = 0, \quad (2.39)$$

onde λ_{C_r} e ϕ_{C_r} são respectivamente os r -ésimos autovalor e autovetor do problema acima, o qual apresenta agora dimensão dupla ($2n$).

Havendo amortecimento ($\mathbf{C} \neq \mathbf{0}_n$), o autovalor apresentar-se-á na forma complexa. Deve-se lembrar que o conjugado-complexo do autovalor, designado por $\lambda_{C_r}^*$, também é autovalor do mesmo problema, correspondendo-lhe o autovetor $\phi_{C_r}^*$, completando assim os seus $2n$ autovalores e autovetores. O sobrescrito * será sempre usado, daqui para a frente neste texto, para indicar o conjugado-complexo de um escalar, vetor ou matriz.

Se a matriz de amortecimento \mathbf{C} é do tipo diagonalizável, admitindo-se modos sub-amortecidos, verifica-se a seguinte relação de λ_{C_r} com os parâmetros que aparecem nas equações (2.5):

$$\lambda_{C_r} = -\xi_r \omega_r + i \sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (2.40)$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Pode-se agora montar a matriz Φ_C cujas colunas são os autovetores. Assim, sem perda de generalidade, pode-se agrupar na metade esquerda da matriz Φ_C um grupo de n autovetores e na outra metade, à direita, os correspondentes conjugado-complexos. Esta matriz apresenta a seguinte estrutura, para qualquer tipo de amortecimento viscoso:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Phi \Lambda_C & \Phi^* \Lambda_C^* \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

onde a matriz Λ_C é dada por:

$$\Lambda_C = \text{diag} [\lambda_{C_1}, \lambda_{C_2}, \dots, \lambda_{C_n}]. \quad (2.42)$$

Se o amortecimento é do tipo diagonalizável (ver definição anterior), a matriz Φ que aparece na equação (2.41) é a matriz real dos autovetores obtidos a partir da equação (2.3).

A matriz Φ_C , devidamente normalizada, permite estabelecer as seguintes relações:

$$\Phi_C' \mathbf{O} \Phi_C = \mathbf{I}_{2n} \quad \text{e} \quad \Phi_C' \mathbf{P} \Phi_C = - \begin{bmatrix} \Lambda_C & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \Lambda_C^* \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

A exemplo do que foi feito anteriormente, o vetor $\mathbf{z}(t)$ pode ser expresso em termos de coordenadas modais, estas agora em número $2n$, aos pares conjugado-complexos:

$$z(t) = \Phi_C \eta_C(t), \quad (2.44)$$

onde $\eta_C(t)$ reúne as coordenadas modais da seguinte forma:

$$\eta_C(t) = [\eta_{C_1}(t), \eta_{C_2}(t), \dots, \eta_{C_n}(t), \eta_{C_1}^*(t), \eta_{C_2}^*(t), \dots, \eta_{C_n}^*(t)]'. \quad (2.45)$$

Introduzindo-se a equação (2.44) na equação (2.36) e pré-multiplicando esta última por Φ'_C , obtém-se:

$$\Phi'_C \mathbf{O} \Phi_C \dot{\eta}_C(t) + \Phi'_C \mathbf{P} \Phi_C \eta_C(t) = \Phi'_C \mathbf{S} f(t), \quad (2.46)$$

ou, tendo em vista as equações (2.43) e a definição de \mathbf{S} :

$$\dot{\eta}_C(t) - \begin{bmatrix} \Lambda_C & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \Lambda_C^* \end{bmatrix} \eta_C(t) = \begin{bmatrix} \Phi' \\ \Phi^H \end{bmatrix} f(t), \quad (2.47)$$

onde o sobrescrito H indicará, daqui para a frente neste texto, a transposta do conjugado-complexo de um vetor ou matriz, substituindo portanto o duplo sobrescrito * .

Isolando a r -ésima coordenada modal, pode-se escrever:

$$\dot{\eta}_{C_r}(t) - \lambda_{C_r} \eta_{C_r}(t) = \phi'_r f(t). \quad (2.48)$$

Vale notar que a equação acima tem seu par conjugado-complexo, escrita em função de $\eta_{C_r}^*(t)$, $\lambda_{C_r}^*$ e ϕ_r^H .

Admite-se agora que se vá analisar o comportamento em regime permanente do sistema sob um conjunto de forças harmônicas de mesma frequência angular ω . Então tem-se a força na forma:

$$f(t) = \mathbf{f}_a e^{i\omega t} \quad (2.49)$$

e a coordenada modal com a mesma frequência (propriedade de todo sistema linear):

$$\eta_{C_r}(t) = \gamma_{C_r} e^{i\omega t}. \quad (2.50)$$

Introduzindo as equações (2.49) e (2.50) na equação (2.48), obtém-se:

$$(i\omega - \lambda_{C_r}) \gamma_{C_r} = \phi'_r \mathbf{f}_a, \quad (2.51)$$

ou, isolando-se γ_{C_r} :

$$\gamma_{C_r} = \frac{\phi_r' \mathbf{f}_a}{(i\omega - \lambda_{C_r})}. \quad (2.52)$$

Voltando um pouco atrás e observando as equações (2.37) e (2.41), é possível escrever:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n [\eta_{C_r}(t) \phi_r + \eta_{C_r}^*(t) \phi_r^*]. \quad (2.53)$$

A resposta $\mathbf{x}(t)$ também será harmônica de mesma frequência ω :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\omega) e^{i\omega t}. \quad (2.54)$$

Usando as equações (2.50), (2.52) e (2.54), eliminando-se o fator $e^{i\omega t}$, a equação (2.53) se transforma em:

$$\mathbf{X}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\phi_r' \mathbf{f}_a}{(i\omega - \lambda_{C_r})} \phi_r + \frac{\phi_r^H \mathbf{f}_a}{(i\omega - \lambda_{C_r}^*)} \phi_r^* \right]. \quad (2.55)$$

Um vetor de funções resposta em frequência com relação a uma referência p (isto é, o valor de $\mathbf{X}(\omega)$ admitindo-se que haja um único valor não nulo e unitário no vetor \mathbf{f}_a , na posição l), é dado por:

$$\mathbf{H}_l(\omega) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\phi_{lr}}{(i\omega - \lambda_{C_r})} \phi_r + \frac{\phi_{lr}^*}{(i\omega - \lambda_{C_r}^*)} \phi_r^* \right], \quad (2.56)$$

onde ϕ_{pr} é o l -ésimo elemento do r -ésimo autovetor.

Visto que nem sempre se dispõe de autovetores devidamente normalizados, a equação (2.56) pode ser re-escrita na forma:

$$\mathbf{H}_l(\omega) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{g_r \phi_{lr}}{(i\omega - \lambda_{C_r})} \phi_r + \frac{g_r^* \phi_{lr}^*}{(i\omega - \lambda_{C_r}^*)} \phi_r^* \right], \quad (2.57)$$

onde g_r e g_r^* são fatores modais de escala.

Os vetores recíprocos são agora definidos. O vetor ψ_r é dito recíproco se ele satisfaz a seguinte condição de ortogonalidade em relação aos autovetores ϕ_k :

$$\psi_r' \phi_k = \delta_{rk}. \quad (2.58)$$

Os filtros modais discretos consistem nos vetores recíprocos definidos acima [19]. A propriedade de ortogonalidade permite que o r -ésimo vetor recíproco elimine (filtre) do vetor de medições efetuadas com sensores localizados (discretos) a contribuição de todos os modos, com exceção daquela relativa ao r -ésimo modo.

Pós-multiplicando-se a transposta da equação (2.57) por ψ_r e tomando-se $g_r = g_r^* = 1$, obtém-se:

$$\mathbf{H}_l^T(\omega) \psi_r = \frac{\phi_{lr}}{(i\omega - \lambda_{Cr})} + \frac{\phi_{lr}^*}{(i\omega - \lambda_{Cr}^*)} \phi_r^H \psi_r. \quad (2.59)$$

O procedimento de cálculo dos vetores recíprocos segundo Zhang, Allemang e Brown [19] é agora apresentado. Admite-se que o vetor $\mathbf{H}_l(\omega)$ seja conhecido em um conjunto de q frequências angulares ω situadas na faixa compreendida entre $\omega(1)$ e $\omega(q)$ (isto é, $\omega(1) \leq \omega \leq \omega(q)$). Aplicando-se então repetidamente a equação (2.59) para cada frequência, é possível escrever:

$$\mathbf{H} \psi_r = \alpha_r + \bar{\alpha}_r \phi_r^H \psi_r, \quad (2.60)$$

onde

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_l(\omega(1)), \mathbf{H}_l(\omega(2)), \dots, \mathbf{H}_l(\omega(q))]'$$

$$\alpha_r = \left[\frac{\phi_{lr}}{(i\omega(1) - \lambda_{Cr})}, \frac{\phi_{lr}}{(i\omega(2) - \lambda_{Cr})}, \dots, \frac{\phi_{lr}}{(i\omega(q) - \lambda_{Cr})} \right]' \quad \text{e} \quad (2.61)$$

$$\bar{\alpha}_r = \left[\frac{\phi_{lr}^*}{(i\omega(1) - \lambda_{Cr}^*)}, \frac{\phi_{lr}^*}{(i\omega(2) - \lambda_{Cr}^*)}, \dots, \frac{\phi_{lr}^*}{(i\omega(q) - \lambda_{Cr}^*)} \right]'$$

Admite-se que o número de frequências q seja superior à dimensão do vetor recíproco ψ_r , de forma que este pode ser obtido através da equação (2.60) com o auxílio, por exemplo, do método dos mínimos quadrados. Deve-se observar que para este cálculo é necessário o conhecimento, além da matriz \mathbf{H} , do autovalor e do autovetor correspondentes ao modo sob investigação.

Um outro procedimento, semelhante, utilizado para cálculo de vetores recíprocos é apresentado por Shelley e Allemang [20]. Adotam-se agora fatores modais de escala g_r tais que:

$$g_r \phi_{lr} \phi_r' \psi_r = -i. \quad (2.62)$$

Como consequência, a equação (2.59) passa a se apresentar na seguinte forma:

$$\mathbf{H}'(\omega) \psi_r = \frac{-i}{i\omega - \lambda_{C_r}} + \frac{i}{i\omega - \lambda_{C_r}^*} \quad (2.63)$$

A exemplo do que foi feito no procedimento anterior, aplicando-se a equação (2.63) sob várias frequências, obtém-se o seguinte conjunto linear de equações:

$$\mathbf{H} \psi_r = \epsilon_r, \quad (2.64)$$

onde a matriz \mathbf{H} continua com a definição já apresentada e ainda onde:

$$\epsilon_r = \begin{bmatrix} \frac{-i}{i\omega(1) - \lambda_{C_r}} + \frac{i}{i\omega(1) - \lambda_{C_r}^*} \\ \frac{-i}{i\omega(2) - \lambda_{C_r}} + \frac{i}{i\omega(2) - \lambda_{C_r}^*} \\ \vdots \\ \frac{-i}{i\omega(q) - \lambda_{C_r}} + \frac{i}{i\omega(q) - \lambda_{C_r}^*} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

A determinação de ψ_r a partir da equação (2.64) pode ser igualmente efetuada através de mínimos quadrados. A vantagem deste procedimento em relação ao anterior é a necessidade de se dispor apenas da estimativa do autovalor correspondente ao vetor recíproco que se quer determinar, além da matriz \mathbf{H} .

Alguns comentários podem ser adicionalmente feitos com relação aos filtros modais baseados em vetores recíprocos [19]:

- o vetor recíproco ψ_r mantém a ortogonalidade definida pela equação (2.58), dentro da faixa de frequências utilizada na sua determinação, o que é garantido pelas equações (2.60) e (2.64);
- como não há, nas equações utilizadas para o cálculo de ψ_r , qualquer restrição quanto ao tipo de amortecimento, este pode se apresentar de qualquer forma;
- no caso de amortecimento proporcional, tem-se simplesmente $\psi_r = \mathbf{M} \phi_r$, admitida a normalização $\phi_r' \mathbf{M} \phi_r = 1$;
- em ambos os procedimentos o vetor recíproco foi calculado a partir de dados experimentais; portanto os filtros modais não são afetados por deficiências de modelagem do sistema. Deve-se entretanto cuidar para que os dados experimentais (funções resposta em frequência, autovalores e autovetores) sejam obtidos de forma bastante precisa, procurando-se evitar ao máximo os problemas relativos à própria medição (ruídos, por exemplo) bem como ao processo de identificação de parâmetros modais;
- a equação (2.60) mostra que os elementos de ψ_r alteram os seus valores de acordo com o número de sensores para garantir a ortogonalidade definida em (2.58), o que significa que

os filtros modais baseados na sua determinação são pouco afetados pelo “aliasing” espacial. O número mínimo de sensores requerido para calcular e implantar os filtros modais é, em geral, igual ou maior que o número de modos na faixa de interesse. Se esta condição não for viável, a localização dos sensores deve ser cuidadosamente estudada.

Como comentado imediatamente acima, a ortogonalidade que garante a ausência de “spillover” em relação aos demais modos modelados (o número total de modos modelados é igual ao de sensores dispostos sobre a estrutura) vai depender da qualidade dos dados experimentais à disposição. Novamente persiste o problema inerente à quantidade finita dos mesmos, como já discutido anteriormente.

2.3.4 Observações Finais sobre os Filtros Modais

Uma grande vantagem dos filtros modais é a de que eles não provocam defasagem visto que, por princípio, permitem obter as coordenadas modais num dado instante t atuando apenas sobre as informações de movimento do sistema naquele mesmo instante.

Outra vantagem dos filtros modais é que eles podem ser aplicados para isolar coordenadas modais de modos com frequências naturais idênticas (problemas de autovalores com multiplicidade algébrica), desde que os autovetores sejam distintos (sem ocorrência de multiplicidade geométrica) [15].

Para a aplicação dos filtros modais deve-se atentar ao número de modos contidos nos sinais provenientes da estrutura. Admite-se que o vetor $\mathbf{y}(t)$ reúna u respostas, de forma semelhante à apresentada na equação (2.26). Pode-se admitir, além disto, que o modelo da estrutura seja reduzido, de forma a apresentar como coordenadas apenas aquelas representadas no vetor $\mathbf{y}(t)$. Desta forma seria possível obter u autovetores de dimensão u ortogonais entre si (com relação à matriz de massa, por exemplo). Em consequência, pode-se determinar um vetor de dimensão u que seja perpendicular a todos os autovetores, com exceção do autovetor correspondente a um determinado modo. O vetor com estas características, ao multiplicar o vetor $\mathbf{y}(t)$, vai extrair a coordenada modal deste modo em particular. A discussão até agora partiu do pressuposto de que $\mathbf{y}(t)$ fosse composto por contribuições apenas dos modos contidos no modelo reduzido. Se isto não for verdade, ou seja, se os sinais provenientes de u sensores possuírem contribuições de um número de modos superior a u , não se pode garantir topograficamente a ortogonalidade a todos os modos menos um. Assim aparece o que se poderia chamar de “aliasing espacial”, pois modos de frequências superiores vão interferir na determinação das coordenadas modais de modos de frequências mais baixas. Para evitar esta interferência podem ser aplicados filtros temporais passa-baixas, de modo que no máximo o número de modos nos sinais seja igual ao número de sensores que obtém estes sinais. Estes filtros, não se pode esquecer, podem vir a provocar indesejáveis defasagens nestes mesmos sinais, obrigando novamente a utilização de procedimentos de correção [29].

2.4 Uso de Observador

A equação (2.12) que reflete o comportamento dinâmico de um modo de vibração de um sistema com amortecimento proporcional, representado por sua coordenada modal $\eta_r(t)$, pode ser assim re-escrita:

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_r(t) \\ \ddot{\eta}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_r^2 & -2\xi_r\omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r(t) \\ \dot{\eta}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_r' \end{bmatrix} \mathbf{f}(t). \quad (2.66)$$

Uma equação semelhante à (2.66) pode ser construída para um grupo de q modos:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_q(t) = \mathbf{A}_q \boldsymbol{\delta}_q(t) + \mathbf{B}_q \mathbf{f}(t), \quad (2.67)$$

onde

$$\boldsymbol{\delta}_q(t) = [\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_q(t), \dot{\eta}_1(t), \dot{\eta}_2(t), \dots, \dot{\eta}_q(t)]',$$

$$\mathbf{A}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{I}_q \\ -\boldsymbol{\Omega}_q & -\boldsymbol{\Xi}_q \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_q = \text{diag} [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_q^2], \\ \boldsymbol{\Xi}_q = \text{diag} [2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_q\omega_q], \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_q \\ \boldsymbol{\Phi}_q' \end{bmatrix}, \quad \text{onde finalmente} \quad \boldsymbol{\Phi}_q = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q].$$

A equação (2.7) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{r=1}^m \phi_r \eta_r(t) + \sum_{r=m+1}^n \phi_r \eta_r(t) \\ &= \boldsymbol{\Phi}_m \boldsymbol{\eta}_m(t) + \boldsymbol{\Phi}_s \boldsymbol{\eta}_s(t) = \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{x}_s(t), \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde $\boldsymbol{\Phi}_m = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$ e $\boldsymbol{\Phi}_s = [\phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \dots, \phi_n]$, sendo m o número de coordenadas modais a serem monitoradas. Os vetores $\boldsymbol{\eta}_m(t)$ e $\boldsymbol{\eta}_s(t)$ contêm respectivamente as m coordenadas modais reais a observar e as s residuais. Portanto o vetor $\mathbf{x}(t)$ é dividido em duas parcelas: a primeira, $\mathbf{x}_m(t)$, contém as contribuições dos modos sob análise; a segunda, $\mathbf{x}_s(t)$, as contribuições dos modos restantes.

Para cada conjunto de coordenadas modais, $\boldsymbol{\delta}_m(t)$ e $\boldsymbol{\delta}_s(t)$, pode ser escrita uma equação semelhante à (2.67):

$$\begin{cases} \dot{\delta}_m(t) = \mathbf{A}_m \delta_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{f}(t), \\ \dot{\delta}_s(t) = \mathbf{A}_s \delta_s(t) + \mathbf{B}_s \mathbf{f}(t). \end{cases} \quad (2.70)$$

Quando se deseja acompanhar o movimento do sistema são colocados sensores no mesmo. Supondo que sejam u sensores que fornecem medidas de deslocamento ou velocidade nos pontos $P_l, l = 1, 2, \dots, u$, tem-se:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_m \delta_m(t) + \mathbf{C}_s \delta_s(t), \quad (2.71)$$

onde as matrizes \mathbf{C}_m e \mathbf{C}_s são dadas por:

$$\text{- supondo medições de deslocamento: } \begin{cases} \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m^u \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s^u \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.72)$$

$$\text{- supondo medições de velocidade: } \begin{cases} \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_m^u \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_s^u \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.73)$$

onde ainda:

$$\mathbf{C}_m^u = \begin{bmatrix} \phi_1(P_1) & \cdots & \phi_m(P_1) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \phi_1(P_u) & \cdots & \phi_m(P_u) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_s^u = \begin{bmatrix} \phi_{m+1}(P_1) & \cdots & \phi_n(P_1) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \phi_{m+1}(P_u) & \cdots & \phi_n(P_u) \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

A definição do observador é agora estabelecida. Admite-se que $\hat{\delta}_m(t)$ seja uma estimativa das coordenadas modais dos modos de interesse, para a qual se tem a equação diferencial:

$$\dot{\hat{\delta}}_m(t) = \mathbf{A}_m \hat{\delta}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{f}(t) + \mathbf{K}_m [\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)], \quad (2.75)$$

com uma condição inicial estimada $\hat{\delta}_m(0)$ ou, na falta desta, com

$$\hat{\delta}_m(0) = \mathbf{0}, \quad (2.76)$$

sendo ainda $\hat{y}(t)$ a saída estimada:

$$\hat{y}(t) = \mathbf{C}_m \hat{\delta}_m(t) . \quad (2.77)$$

As equações (2.75), (2.76) e (2.77) definem um observador, ou seja, o sistema dinâmico assim formulado fornece um vetor $\hat{\delta}_m(t)$ que paulatinamente se aproxima de $\delta_m(t)$, passando a acompanhá-lo muito proximamente após um período inicial de transição devido à diferença entre a condição inicial nula assumida (ver equação (2.76)) e a condição inicial real. De fato, visando analisar o comportamento da função erro $e_m(t)$, definida como a diferença entre $\hat{\delta}_m(t)$ e $\delta_m(t)$, toma-se inicialmente a equação (2.75) menos a primeira das equações (2.70), obtendo-se:

$$\dot{\hat{\delta}}_m(t) - \dot{\delta}_m(t) = \mathbf{A}_m [\hat{\delta}_m(t) - \delta_m(t)] + \mathbf{K}_m [y(t) - \hat{y}(t)] . \quad (2.78)$$

O vetor saída real $y(t)$ contém na verdade contribuições de todos os modos, ou seja:

$$y(t) = \mathbf{C}_m \delta_m(t) + \mathbf{C}_s \delta_s(t) . \quad (2.79)$$

Introduzindo as equações (2.77) e (2.79) na (2.78), obtém-se:

$$\dot{\hat{\delta}}_m(t) - \dot{\delta}_m(t) = (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_m \mathbf{C}_m) [\hat{\delta}_m(t) - \delta_m(t)] + \mathbf{K}_m \mathbf{C}_s \delta_s(t) , \quad (2.80)$$

ou, assumindo-se que se possa desprezar a última parcela [21], tem-se:

$$\dot{e}_m(t) = (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_m \mathbf{C}_m) e_m(t) . \quad (2.81)$$

Pela análise da equação (2.81), tendo em conta que há total liberdade na determinação da matriz \mathbf{K}_m , percebe-se que há a possibilidade de se forçar um comportamento estável para $e_m(t)$, de forma que o erro tenda assintoticamente a zero. Não se pode esquecer que uma mudança na localização dos sensores sempre pode ser experimentada, se houver dificuldade em determinar a matriz \mathbf{K}_m na busca da estabilidade. Logicamente deve-se tentar (através de alocação de polos, por exemplo) que esta tendência seja acentuada, de forma que as coordenadas modais estimadas $\hat{\delta}_m(t)$ se aproximem das reais $\delta_m(t)$ em um tempo adequado.

A utilização do Observador de Luenberger, como descrita acima, é viável nos casos em que o ruído incluído nas medições não seja excessivamente elevado. Caso esta condição não seja satisfeita, recomenda-se o uso de Filtro de Kalman no lugar do observador [21] (esta possibilidade não será aqui investigada). Em ambos os casos a observabilidade do sistema definido pelo par de matrizes $[\mathbf{A}_m, \mathbf{C}_m]$ que aparecem nas equações (2.70) e (2.71) é uma condição necessária.

O "spillover" de observação, neste caso, é estudado pela mesma abordagem proposta por Meirovitch [38], embora a disposição de algumas variáveis e a inclusão de amortecimento do tipo proporcional representem alguma diferença.

Considerando que um sistema distribuído possui dimensão infinita, ele vai agora ser subdividido em três parcelas: os m modos controlados, os s modos residuais ($m + s = n$, dimensão do modelo) e os ∞ modos não modelados. Denominando de $\delta_{\infty}(t)$ o vetor:

$$\delta_{\infty}(t) = [\eta'_{\infty}(t), \dot{\eta}'_{\infty}(t)]', \quad (2.82)$$

onde $\eta'_{\infty}(t) = [\eta_{m+1}(t), \eta_{m+2}(t), \dots, \eta_{\infty}(t)]'$, pode-se escrever uma equação semelhante à equação (2.67):

$$\dot{\delta}'_{\infty}(t) = A_{\infty} \delta'_{\infty}(t) + B_{\infty} f(t), \quad (2.83)$$

onde as matrizes A_{∞} e B_{∞} são montadas da forma indicada nas equações (2.68), considerando os modos não modelados de $n + 1$ até ∞ .

O vetor de saídas real, neste caso, é dado por:

$$y(t) = C_m \delta_m(t) + C_s \delta_s(t) + C_{\infty} \delta_{\infty}(t), \quad (2.84)$$

onde a matriz C_{∞} é montada da mesma forma que C_m e C_s , considerando-se os modos não modelados.

O observador neste caso vai fornecer uma estimativa tanto de $\delta_m(t)$ como de $\delta_s(t)$, obedecendo a equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\delta}}_m(t) \\ \dot{\hat{\delta}}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_m(t) \\ \hat{\delta}_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_s \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} K_m \\ K_s \end{bmatrix} [y(t) - \hat{y}(t)], \quad (2.85)$$

onde

$$\hat{y}(t) = C_m \hat{\delta}_m(t) + C_s \hat{\delta}_s(t), \quad (2.86)$$

é um vetor de saída aproximado.

A força de realimentação é normalmente calculada com base nas coordenadas modais dos modos a controlar:

$$f(t) = G_m \delta_m(t). \quad (2.87)$$

Supondo que só se disponha da estimativa $\hat{\delta}_m(t)$, tem-se então:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{G}_m \hat{\delta}_m(t) . \quad (2.88)$$

Define-se agora um vetor erro envolvendo tanto as grandezas relacionadas aos modos controlados como aos modos residuais:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m(t) \\ \mathbf{e}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_m(t) \\ \hat{\delta}_s(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_m(t) \\ \delta_s(t) \end{bmatrix} . \quad (2.89)$$

Introduzindo as equações (2.88) e (2.89) nas equações (2.70) e na equação (2.82), obtém-se o conjunto:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_m(t) &= (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{G}_m) \delta_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{G}_m \mathbf{e}_m(t) , \\ \dot{\delta}_s(t) &= \mathbf{A}_s \delta_s(t) + \mathbf{B}_s \mathbf{G}_m \delta_m(t) + \mathbf{B}_s \mathbf{G}_m \mathbf{e}_m(t) \quad \text{e} \\ \dot{\delta}_\infty(t) &= \mathbf{A}_\infty \delta_\infty(t) + \mathbf{B}_\infty \mathbf{G}_m \delta_m(t) + \mathbf{B}_\infty \mathbf{G}_m \mathbf{e}_m(t) . \end{aligned} \quad (2.90)$$

Diferenciando a equação (2.89) em relação ao tempo e usando as equações (2.85) e as duas primeiras equações (2.90), obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_m(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_s(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\hat{\delta}}_m(t) \\ \dot{\hat{\delta}}_s(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\delta}_m(t) \\ \dot{\delta}_s(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_m(t) \\ \hat{\delta}_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m \\ \mathbf{K}_s \end{bmatrix} [\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)] \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_m(t) \\ \delta_s(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) . \end{aligned} \quad (2.91)$$

Introduzindo as equações (2.84) e (2.86) na equação (2.91), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_m(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m - \mathbf{K}_m \mathbf{C}_m & -\mathbf{K}_m \mathbf{C}_m \\ \mathbf{K}_s \mathbf{C}_m & \mathbf{A}_s - \mathbf{K}_s \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m(t) \\ \mathbf{e}_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m \mathbf{C}_\infty \\ \mathbf{K}_s \mathbf{C}_\infty \end{bmatrix} \delta_\infty(t) . \quad (2.92)$$

Unindo as equações (2.90) e (2.92) chega-se à seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_m(t) \\ \dot{e}_m(t) \\ \dot{\delta}_s(t) \\ \dot{e}_s(t) \\ \dot{\delta}_\infty(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m + B_m G_m & B_m G_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_m - K_m C_m & 0 & -K_m C_s & K_m C_\infty \\ B_s G_m & B_s G_m & A_s & 0 & 0 \\ 0 & -K_s C_m & 0 & A_s - K_s C_s & K_s C_\infty \\ B_\infty G_m & B_\infty G_m & 0 & 0 & A_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_m(t) \\ e_m(t) \\ \delta_s(t) \\ e_s(t) \\ \delta_\infty(t) \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

Ignorando os modos não modelados e rearranjando os termos da equação (2.93):

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_m(t) \\ \dot{\delta}_s(t) \\ \dot{e}_m(t) \\ \dot{e}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m + B_m G_m & 0 & B_m G_m & 0 \\ B_s G_m & A_s & B_s G_m & 0 \\ 0 & 0 & A_m - K_m C_m & -K_m C_s \\ 0 & 0 & -K_s C_m & A_s - K_s C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_m(t) \\ \delta_s(t) \\ e_m(t) \\ e_s(t) \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

A equação (2.94) mostra que ocorre o "spillover" de observação, pois o termo $B_m G_m$ (na primeira linha da matriz) estabelece que a dinâmica de $\delta_m(t)$ é influenciada pelos erros $e_m(t)$ dos modos controlados, sendo que estes estão diretamente vinculados aos erros $e_s(t)$ dos modos residuais. A ligação entre $e_m(t)$ e $e_s(t)$ pode ser observada na mesma equação (2.94), através dos termos não nulos das linhas três e quatro da matriz ali apresentada. Este fenômeno, entretanto, não afeta os polos em malha fechada dos modos modelados. Para confirmar esta afirmação, divide-se inicialmente a matriz da equação (2.94) em quatro sub-matrizes de dois termos por dois termos (todos justapostos). A sub-matriz inferior à esquerda é nula, portanto os polos do sistema são os polos das sub-matrizes diagonais consideradas isoladamente (os polos de uma matriz blocotriangular são os polos dos blocos da diagonal principal). A sub-matriz esquerda superior, por sua vez, também é triangular, portanto os polos relativos a $\delta_m(t)$ são os polos de $A_m + B_m G_m$ e os polos relativos a $\delta_s(t)$ são os polos de A_s , como afirmado.

Um cuidado adicional que se deve ter é com os ganhos do observador (matrizes K_m e K_s da equação (2.85)); se eles não forem devidamente escolhidos o observador pode divergir, desestabilizando os modos controlados e residuais.

Nas simulações computacionais apresentadas nos capítulos seguintes não se utilizarão observadores na determinação das coordenadas modais. A inclusão dos mesmos se deu apenas no sentido de lembrar a existência de mais esta possibilidade e apresentar a teoria básica relativa a eles.

Capítulo 3

TEORIAS DE CONTROLE MODAL

Neste capítulo são desenvolvidas as bases teóricas de alguns métodos de controle modal, tanto aqueles que atuam sobre os modos individualmente como em grupo.

O objetivo é estabelecer os equacionamentos que permitem aplicar tais métodos, ressaltando-se ainda as características de cada um deles (aplicabilidade, vantagens, etc.).

Como contribuição, apresenta-se uma forma de aplicar o controle a sistemas com amortecimento não diagonalizável. Neste caso os autovalores e autovetores conjugado-complexos são combinados de forma que, na fase final, a aplicação do controle se dê através da manipulação de apenas grandezas reais.

3.1 Controle Conjunto

Será agora apresentada uma teoria simples de controle que atua sobre um certo número de modos de forma conjunta. Tendo em vista que normalmente o número v de cargas (forças e/ou momentos) aplicadas à estrutura é bem inferior ao número n de graus de liberdade, substitui-se na primeira das equações (2.70) o vetor $\mathbf{f}(t)$ pelo produto $\mathbf{D} \mathbf{f}_v(t)$, obtendo-se:

$$\dot{\delta}_m(t) = \mathbf{A}_m \delta_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{D} \mathbf{f}_v(t), \quad (3.1)$$

sendo $\mathbf{f}_v(t)$ o vetor que reúne as cargas realmente aplicadas à estrutura (retira-se de $\mathbf{f}(t)$ os elementos nulos) e \mathbf{D} a matriz que distribui tais cargas pelas coordenadas físicas da estrutura.

Pode-se imaginar neste momento que o vetor $\delta_m(t)$, que envolve as coordenadas modais e correspondentes derivadas temporais dos m modos a controlar, possa ser determinado, de forma que as forças $\mathbf{f}_v(t)$ que aparecem na equação acima possam ser determinadas por realimentação de $\delta_m(t)$ (de forma semelhante àquela apresentada na equação (2.87)):

$$\mathbf{f}_v(t) = \mathbf{G}_{vm} \delta_m(t) . \quad (3.2)$$

Para a aplicação das técnicas de controle ótimo, é adicionalmente necessário definir um funcional a ser minimizado. O funcional, neste caso, costuma envolver as energias potencial e cinética dos modos a controlar, bem como as forças de controle $\mathbf{f}_v(t)$.

Na continuação é então conveniente escrever a soma total das energias potencial e cinética do sistema num dado instante t :

$$E_n(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}'(t) \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}'(t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(t)] , \quad (3.3)$$

ou, considerando que a matriz de amortecimento é diagonalizável e adotando a transformação $\mathbf{x}(t) = \Phi \eta(t)$, tem-se:

$$E_n(t) = \frac{1}{2} [\eta'(t) \Omega_n \eta(t) + \dot{\eta}'(t) \dot{\eta}(t)] = \frac{1}{2} \delta'(t) \bar{\mathbf{Q}} \delta(t) , \quad (3.4)$$

onde portanto:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \Omega_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} . \quad (3.5)$$

Em conseqüência, a soma das energias potencial e cinética apenas dos m modos a controlar é dada por:

$$E_m(t) = \frac{1}{2} \delta'_m(t) \bar{\mathbf{Q}}_m \delta_m(t) , \quad (3.6)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{Q}}_m = \begin{bmatrix} \Omega_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} , \quad (3.7)$$

e onde $\Omega_m = \text{diag} [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2]$.

Tendo em vista a exposição acima, pode-se definir o funcional da seguinte maneira:

$$J_m = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\delta'_m(t) \mathbf{Q}_m \delta_m(t) + \mathbf{f}'_v(t) \mathbf{R}_v \mathbf{f}_v(t)] dt , \quad (3.8)$$

onde as matrizes \mathbf{Q}_m e \mathbf{R}_v são semi-positiva e positiva definidas, respectivamente. Uma opção natural é tomar $\mathbf{Q}_m = \bar{\mathbf{Q}}_m$, porém pode-se optar pela atribuição de pesos aos modos, fazendo:

$$\mathbf{Q}_m = \mathbf{W}'_m \bar{\mathbf{Q}}_m \mathbf{W}_m , \quad (3.9)$$

onde \mathbf{W}_m é uma matriz de ponderação. A matriz \mathbf{R}_v é uma matriz que, por sua vez, pondera as entradas de energia no sistema provocadas pelas forças (e/ou momentos) $\mathbf{f}_v(t)$, sendo normalmente uma matriz diagonal. Quanto mais elevados forem os valores dos elementos de \mathbf{R}_v , maior é a importância que se dá à energia gasta no controle, e conseqüentemente menos rapidamente se dá a queda das vibrações.

As modernas teorias de controle ótimo permitem (ver apêndice B), a partir das equações de estado (3.1) e de estabelecimento do funcional (3.8), definir o ganho ótimo de realimentação \mathbf{G}_{vm} , permitindo o cálculo das forças de controle através da equação (3.2).

3.2 Controle Independente

O controle neste caso, como o próprio nome sugere, é aplicado individualmente a cada um dos modos visados. Esta forma de aplicação de controle foi proposta por Meirovitch [23], sendo descrita abaixo. Com relação àquela proposta original de Meirovitch, a apresentação abaixo difere por incluir amortecimento (do tipo cuja matriz é diagonalizável) e por utilizar uma montagem de forma levemente distinta do vetor que fornece o estado de cada modo do sistema.

Tendo em vista o exposto acima, a equação (2.66) pode ser re-escrita em forma reduzida:

$$\dot{\delta}_r(t) = \mathbf{A}_r \delta_r(t) + \mathbf{B}_r f_{gr}(t), \quad (3.10)$$

onde as forças modais $f_{gr}(t)$, efetuando-se novamente a substituição de $\mathbf{f}(t)$ por $\mathbf{D} \mathbf{f}_v(t)$, são dadas por:

$$f_{gr}(t) = \phi_r' \mathbf{D} \mathbf{f}_v(t), \quad (3.11)$$

e onde ainda:

$$\delta_r(t) = \begin{bmatrix} \eta_r(t) \\ \dot{\eta}_r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_r^2 & -2\xi_r \omega_r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Da mesma forma que (3.10), que é a equação de estado relativa ao r -ésimo modo, neste caso o funcional a minimizar também diz respeito apenas a este modo, sendo uma versão reduzida da equação (3.8):

$$J_r = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\delta_r'(t) \mathbf{Q}_r \delta_r(t) + R_r f_{gr}^2(t) \right] dt, \quad (3.13)$$

onde, a menos de se estabelecer um fator de ponderação por modo, semelhante ao que foi feito na equação (3.9) através da matriz \mathbf{W}_m , tem-se:

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \omega_r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e onde, finalmente, R_r é um escalar que pondera a r -ésima força modal $f_{g_r}(t)$.

Neste caso as técnicas de controle ótimo (ver apêndice B) podem ser aplicadas às equações (3.10) e (3.13), de forma que a força modal possa ser calculada como realimentação do vetor de estado $\delta_r(t)$:

$$f_{g_r}(t) = \mathbf{G}_r \delta_r(t) . \quad (3.15)$$

É importante notar que as forças modais $f_{g_r}(t)$ não são forças reais, ou seja, elas não podem ser diretamente aplicadas ao sistema. Elas são relacionadas às forças reais $\mathbf{f}_v(t)$ pela equação (3.11). Repetindo-se esta equação para cada um dos m modos a controlar, elas podem ser agrupadas na seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{g_m}(t) = \Phi'_m \mathbf{D} \mathbf{f}_v(t) , \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{f}_{g_m}(t) = [f_{g_1}(t), f_{g_2}(t), \dots, f_{g_m}(t)]' . \quad (3.17)$$

A teoria de controle aplicada individualmente aos modos vai fornecer as forças modais que compõem o vetor $\mathbf{f}_{g_m}(t)$. Para a determinação das forças reais $\mathbf{f}_v(t)$ torna-se necessária a inversão da equação (3.16). Esta inversão só é perfeita, garantindo que as forças modais (decorrentes das físicas) realmente aplicadas sejam idênticas às forças modais projetadas, quando a matriz resultado do produto $\Phi'_m \mathbf{D}$ é quadrada e não singular. Tal matriz só será quadrada quando $m = v$, ou seja, o controle independente só tem seu desempenho garantido quando o número de atuadores (aplicadores de forças e/ou momentos) é igual ao número de modos a controlar [23]. A não singularidade, se não obtida de início, pode ser conseguida alterando-se o posicionamento dos sensores.

Em [24] Meirovitch mostra que o controle aplicado desta forma, individual, permite uma otimização global mais efetiva, tendo em vista que cada funcional J_r é minimizado em separado. Além disso, verificou que no controle individual a energia gasta no controle não depende do posicionamento dos atuadores, responsáveis pelas forças (e/ou momentos) realmente aplicados ao sistema.

3.3 Controle Conjunto com Amortecimento Não Diagonalizável

Estabelece-se neste item uma nova abordagem de controle para um sistema que apresenta amortecimento não diagonalizável. Em função do acoplamento existente entre os modos, não se torna viável o controle individual dos mesmos; portanto o controle é aplicado de forma conjunta aos modos visados.

É agora aqui reproduzida a equação (2.36), apenas substituindo-se o vetor $\mathbf{f}(t)$ pelo produto $\mathbf{D}\mathbf{f}_v(t)$, a exemplo do que se fez nas seções anteriores:

$$\mathbf{O}\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{z}(t) = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{f}_v(t). \quad (3.18)$$

A seguinte transformação de coordenadas é agora efetuada:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\boldsymbol{\eta}_{nd}(t), \quad (3.19)$$

onde \mathbf{T} é uma matriz real $2n \times 2n$ obtida a partir dos autovalores λ_{C_r} e autovetores ϕ_{C_r} complexos. Para o vetor de coordenadas modais $\boldsymbol{\eta}_{nd}(t)$ adota-se agora a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{nd}(t) &= [\eta_{sup_1}(t), \eta_{sup_2}(t), \dots, \eta_{sup_n}(t), \eta_{inf_1}(t), \eta_{inf_2}(t), \dots, \eta_{inf_n}(t)]' \\ &= [\boldsymbol{\eta}_{sup}(t)' \quad \boldsymbol{\eta}_{inf}(t)']'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

As primeiras n colunas de \mathbf{T} são preenchidas com os vetores resultantes do cálculo de $Re \left[(1+i)\lambda_{C_r}^* \phi_{C_r} / \sqrt{\|Im(\lambda_{C_r})\|} \right]$, $r = 1, 2, \dots, n$, e as últimas n colunas com os vetores resultantes de $Re \left[-(1-i)\phi_{C_r}^* / \sqrt{\|Im(\lambda_{C_r})\|} \right]$, $r = 1, 2, \dots, n$. $Re()$, $Im()$, e $\| \|$ indicam, respectivamente, as partes real e imaginária e o módulo de uma quantidade complexa.

Introduzindo-se a equação (3.19) na equação (3.18), pré-multiplicando ainda o resultado por \mathbf{T}' , obtém-se:

$$\mathbf{T}'\mathbf{O}\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{nd}(t) + \mathbf{T}'\mathbf{P}\mathbf{T}\boldsymbol{\eta}_{nd}(t) = \mathbf{T}'\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{f}_v(t). \quad (3.21)$$

Pode-se verificar que:

$$\mathbf{T}'\mathbf{O}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}'\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

onde:

$$\Upsilon_n = -diag[2Re(\lambda_{C_1}), 2Re(\lambda_{C_2}), \dots, 2Re(\lambda_{C_n})] \quad (3.23)$$

$$e \quad \Gamma_n = diag[\|\lambda_{C_1}\|^2, \|\lambda_{C_2}\|^2, \dots, \|\lambda_{C_n}\|^2] .$$

A matriz \mathbf{T} pode, além disso, ser subdividida em quatro partes de mesmas dimensões na forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} , \quad (3.24)$$

Introduzindo as equações (3.22) e (3.24) na equação (3.21), lembrando ainda da definição de \mathbf{S} , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \dot{\eta}_{nd}(t) + \begin{bmatrix} \Gamma_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \eta_{nd}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{11} \\ \mathbf{T}'_{12} \end{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{f}_v(t) . \quad (3.25)$$

É agora assumido que o vetor resultante do produto do lado direito da equação (3.25) apresenta a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{sup}(t) \\ \mathbf{f}_{inf}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{11} \\ \mathbf{T}'_{12} \end{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{f}_v(t) \\ &= [f_{sup_1}(t), f_{sup_2}(t), \dots, f_{sup_n}(t), f_{inf_1}(t), f_{inf_2}(t), \dots, f_{inf_n}(t)]' . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Levando em consideração as equações (3.25) e (3.26), é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_{sup}(t) \\ \dot{\eta}_{inf}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{sup}(t) \\ \eta_{inf}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{sup}(t) \\ \mathbf{f}_{inf}(t) \end{bmatrix} . \quad (3.27)$$

A equação para o r -ésimo modo pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_{sup_r}(t) \\ \dot{\eta}_{inf_r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\|\lambda_{C_r}\|^2 & 2Re(\lambda_{C_r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{sup_r}(t) \\ \eta_{inf_r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2Re(\lambda_{C_r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sup_r}(t) \\ f_{inf_r}(t) \end{bmatrix} . \quad (3.28)$$

Para amortecimento diagonalizável pode-se mostrar que $\mathbf{f}_{inf}(t) = \mathbf{0}$, e portanto neste caso a equação (3.28) se reduz à equação (3.10), admitindo-se que $\eta_{inf_r}(t) = \dot{\eta}_{sup_r}(t)$ e que $\lambda_{C_r} = -\xi_r \omega_r + i \sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r$.

Tomando da equação (3.27) os m modos a controlar, é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_m & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{L}_m & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{sup_m}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_{inf_m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{sup_m}(t) \\ \boldsymbol{\eta}_{inf_m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{sup_m}(t) \\ \mathbf{f}_{inf_m}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde o subscrito m indica que apenas os m (ou $m \times m$) termos do vetor (ou matriz) correspondentes aos modos a controlar estão sendo considerados.

Considerando uma força externa $f_r(t)$ para cada modo controlado ($v = m$) e escolhendo-se adequadamente a matriz \mathbf{D} , é possível obter como resultado do produto de matrizes $\mathbf{T}'_{11_m} \mathbf{D}$ (\mathbf{T}_{11_m} e \mathbf{T}_{12_m} contêm m colunas de \mathbf{T}_{11} e \mathbf{T}_{12} , respectivamente) uma matriz quadrada e inversível. Então, em decorrência da equação (3.26), pode-se escrever:

$$\mathbf{f}_{inf_m}(t) = \mathbf{T}'_{12_m} \mathbf{D} (\mathbf{T}'_{11_m} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{f}_{sup_m}(t). \quad (3.30)$$

Quando se admite amortecimento diagonalizável, desde que se estabeleça a igualdade entre o número de forças modais (ou seja, de modos a controlar) e o número de forças físicas aplicadas, é possível estabelecer uma relação unívoca entre tais conjuntos (um adequado posicionamento dos atuadores pode garantir esta relação). Assim, pode-se especificar um comportamento independente para cada uma das forças modais, que sempre haverá a possibilidade de determinar forças físicas que permitam a sua reprodução. No caso do amortecimento não diagonalizável, um procedimento semelhante exigiria que fossem utilizadas duas forças físicas por modo, já que cada um deles apresenta duas forças modais. Como consequência, não poderiam ser controlados todos os modos, visto que a aplicação de forças (ou momentos) modais segundo todos os graus de liberdade permitiria que fossem controlados apenas a metade dos modos da estrutura. Neste sentido, a adoção da relação entre $\mathbf{f}_{inf_m}(t)$ e $\mathbf{f}_{sup_m}(t)$ estabelecida pela equação (3.30) reduz o número de forças modais independentes a uma por modo, permitindo novamente o controle de todos os modos. Entretanto, deve-se observar que a equação (3.30) é uma relação entre dois conjuntos de forças modais de todos os modos controlados, estabelecendo portanto o acoplamento entre eles.

Introduzindo a equação (3.30) na equação (3.29) e re-arranjando esta última, obtém-se:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{nd_m}(t) = \mathbf{A}_{nd} \boldsymbol{\eta}_{nd_m}(t) + \mathbf{B}_{nd} \mathbf{f}_{sup_m}(t), \quad (3.31)$$

onde:

$$\eta_{nd_m}(t) = \begin{bmatrix} \eta_{sup_m}(t) \\ \eta_{inf_m}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{nd} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{\Gamma}_m & -\mathbf{\Upsilon}_m \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\text{e } \mathbf{B}_{nd} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{12_m} \mathbf{D} (\mathbf{T}'_{11_m} \mathbf{D})^{-1} \\ \mathbf{I}_m - \mathbf{\Upsilon}_m \mathbf{T}'_{12_m} \mathbf{D} (\mathbf{T}'_{11_m} \mathbf{D})^{-1} \end{bmatrix}.$$

A equação (3.28) é semelhante à equação apresentada por Meirovitch em [24]. Como conseqüência, o funcional que representa as energias cinética e potencial do sistema, mais a energia gasta no controle, pode também ser tomado daquela referência:

$$J_{nd} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\eta'_{nd_m}(t) \mathbf{Q}_{nd} \eta_{nd_m}(t) + \mathbf{f}'_{sup_m}(t) \mathbf{R}_{nd} \mathbf{f}_{sup_m}(t) \right] dt, \quad (3.33)$$

onde as matrizes \mathbf{Q}_{nd} and \mathbf{R}_{nd} são definidas como:

$$\mathbf{Q}_{nd} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{nd} = \text{diag}[r_1, r_2, \dots, r_m]. \quad (3.34)$$

Na equação (3.34) os elementos r_r são os parâmetros que definem a maior ou menor capacidade de consumo de energia por modo do sistema de controle.

O produto $(1/2) \eta'_{nd_m}(t) \mathbf{Q}_{nd} \eta_{nd_m}(t)$, na equação (3.33), procura aproximar a soma das energias potencial e cinética dos m modos a controlar. Como os modos, neste caso, estão acoplados, não seria possível calcular a energia de um conjunto de modos sem levar em conta os outros modos, e muito menos \mathbf{Q}_{nd} seria diagonal, pelo mesmo motivo. Considerando-se todos os modos, a energia total seria dada por:

$$E_n(t) = (1/2) \mathbf{z}'(t) \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) = (1/2) \eta'_{nd}(t) \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{T} \eta_{nd}(t), \quad (3.35)$$

podendo-se verificar válida a aproximação:

$$\mathbf{T}' \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{T} \cong \begin{bmatrix} \mathbf{\Upsilon}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

As equações (3.31) e (3.33) constituem um problema de controle ótimo, cuja solução (ver apêndice B) fornece uma matriz de ganho de realimentação \mathbf{G}_{nd} tal que $\mathbf{f}_{sup_m}(t) = \mathbf{G}_{nd} \eta_{nd_m}(t)$. Portanto, a partir do conhecimento do vetor $\eta_{nd_m}(t)$ é possível o cálculo das forças $\mathbf{f}_{sup_m}(t)$, e com estas podem ser calculadas as forças reais de controle:

$$\mathbf{f}_v(t) = (\mathbf{T}'_{11_m} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{f}_{sup_m}(t). \quad (3.37)$$

O controle assim aplicado é uma alternativa viável quando o amortecimento presente é do tipo não diagonalizável, obrigando entretanto que ele seja aplicado de forma conjunta, exigindo ainda uma força externa para cada modo a controlar. Uma característica importante é que o controle é aplicado sem se manusear valores complexos a partir do momento que se disponha da matriz real \mathbf{T} . Um exemplo de aplicação deste tipo de controle pode ser visto em [39].

3.4 Controle Através de Cargas Internas

Na equação (3.1) foi apresentada a matriz \mathbf{D} , que distribui as cargas reais pelas coordenadas físicas da estrutura. Se fossem aplicadas cargas (forças ou momentos) individualmente ao longo de todas as coordenadas da estrutura, obviamente ter-se-ia $\mathbf{D} = \mathbf{I}_n$. Havendo coincidência entre a direção de aplicação de uma carga num determinado ponto com a direção de uma coordenada física aí definida, a coluna da matriz \mathbf{D} correspondente a esta carga possuiria apenas um elemento não nulo. Não ocorrendo tal coincidência, sendo portanto necessária a decomposição da carga segundo as direções das coordenadas físicas disponíveis, mais de um elemento nulo irá aparecer.

As "cargas internas" aqui tratadas são aquelas produzidas, por exemplo, por um atuador que foi fixado a dois pontos da estrutura. Então, pelo princípio da ação e da reação, a mesma carga real $f_r(t)$ gerada pelo atuador estaria sendo aplicada ao longo de pelo menos duas coordenadas, ou seja, a r -ésima coluna da matriz \mathbf{D} possuiria dois ou mais elementos não nulos. Do ponto de vista matemático esta nova situação é perfeitamente abrangida pela abordagem apresentada nas seções anteriores, não havendo necessidade de reformulação das bases teóricas desenvolvidas. Deve-se apenas tomar o devido cuidado na montagem da matriz \mathbf{D} , especialmente no que concerne ao sentido das cargas aplicadas. Além dos exemplos de aplicação constantes deste trabalho, um outro exemplo de controle por forças internas pode ser visto em [40].

As cargas internas são uma solução viável quando não podem ser aplicadas cargas externas, estas produzidas por exemplo por excitadores fixados a pontos externos à estrutura, por excitadores que geram forças reativas através do movimento de inércias (sem ponto externo de fixação) e por descargas de gases nas aplicações aeroespaciais.

3.5 Controle a Tempo Discreto (Digital)

Em seções anteriores o controle foi aplicado considerando-se que as grandezas manipuladas (deslocamentos, forças, etc.) eram funções contínuas do tempo. Além disso, o horizonte de

tempo admitido era infinito, isto é, não se fixou um estado final a ser alcançado em um tempo finito. Será agora apresentada a transformação do problema assim formulado num problema a tempo discreto (esta transformação é necessária quando se pretende aplicar o controle via computador, quando os sinais são digitalizados).

Em primeiro lugar analisa-se a equação de estado. Nos casos já estudados ela se apresentava na forma de uma equação diferencial (ver por exemplo as equações (3.1) e (3.10)), cuja forma geral é:

$$\dot{\delta}(t) = \mathbf{A} \delta(t) + \mathbf{B} f(t). \quad (3.38)$$

Se a equação (3.38) for integrada sobre um curto espaço de tempo Δt , de forma que as cargas $f(t)$ possam ser consideradas constantes ao longo do mesmo, obtém-se a equação:

$$\delta(t + \Delta t) = \mathcal{A} \delta(t) + \mathcal{B} f(t), \quad (3.39)$$

onde:

$$\mathcal{A} = e^{\mathbf{A} \Delta t} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \mathbf{A}^{-1} [e^{\mathbf{A} \Delta t} - \mathbf{I}] \mathbf{B}. \quad (3.40)$$

Para os modos de corpo rígido, ou seja, aqueles que apresentam frequências naturais nulas (presentes, por exemplo, em estruturas de aplicação aeroespacial), a matriz \mathbf{A} se torna singular (ver a sua definição na equação (2.68)). Portanto o cálculo de \mathcal{B} se torna inviável. A formulação representada pela equação (3.38) se revela então inadequada. Isto não impede que para estas estruturas se aplique a teoria de controle aqui apresentada sobre os seus modos flexíveis. Em termos de simulação, neste caso, deve-se tomar cuidado com os movimentos relacionados aos modos de corpo rígido, os quais podem divergir (uma possível solução seria a exclusão destes modos com o auxílio da filtragem modal).

Se é admitido que as grandezas foram digitalizadas usando um período de amostragem constante Δt , a equação (3.39) pode ser transformada na seguinte equação a diferenças:

$$\delta(k + 1) = \mathcal{A} \delta(k) + \mathcal{B} f(k), \quad (3.41)$$

onde k e $k + 1$ representam dois estados sucessivos separados pelo intervalo Δt .

A segunda equação a ser alterada é aquela que define o funcional a ser minimizado. Neste caso simplesmente transforma-se a integral que aparece no funcional em somatório de termos, novamente com horizonte de tempo infinito. Os funcionais já apresentados (ver por exemplo as equações (3.8) e (3.13)) podem então ser levados à seguinte forma geral:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [\delta'(k) \mathbf{Q} \delta(k) + \mathbf{f}'(k) \mathbf{R} \mathbf{f}(k)] , \quad (3.42)$$

onde as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são iguais às utilizadas a tempo contínuo.

Neste caso a solução do problema leva a um ganho constante (invariante no tempo) \mathcal{G} , tal que as cargas de realimentação são dadas por:

$$\mathbf{f}(k) = \mathcal{G} \delta(k) . \quad (3.43)$$

O cálculo do ganho \mathcal{G} é baseado num processo regressivo (ver apêndice B), que parte de uma condição infinita e que progressivamente se aproxima de uma condição estável, mediante a aplicação recursiva das equações:

$$\mathcal{G}(\infty - k) = - [\mathbf{R} + \mathbf{B}' \mathbf{P}(k-1) \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{P}(k-1) \mathbf{A} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) = & [\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathcal{G}(\infty - k)]' \mathbf{P}(k-1) [\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathcal{G}(\infty - k)] \\ & + \mathcal{G}'(\infty - k) \mathbf{R} \mathcal{G}(\infty - k) + \mathbf{Q} , \end{aligned}$$

usando-se $k = 1, 2, \dots$, e iniciando-se o processo com $\mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$.

O processo é então conduzido até que duas matrizes consecutivas $\mathcal{G}(\infty - k)$ e $\mathcal{G}(\infty - k - 1)$ praticamente se igualem, sendo esta matriz tomada como a matriz constante \mathcal{G} a ser aplicada em (3.43).

O equacionamento acima prevê a aplicação do controle conjunto dos modos. Para a aplicação do controle individual, tendo em vista as equações (3.10) e (3.12), pode-se escrever uma equação semelhante à (3.41) para cada modo:

$$\delta_r(k+1) = \mathbf{A}_r \delta_r(k) + \mathbf{B}_r f_{g_r}(k) , \quad (3.45)$$

onde

$$\mathbf{A}_r = e^{\mathbf{A}_r \Delta t} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{A}_r^{-1} (e^{\mathbf{A}_r \Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_r . \quad (3.46)$$

Define-se ainda um funcional por modo tal qual o apresentado na equação (3.13), porém a tempo discreto como aquele da equação (3.42):

$$J_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta_r(k)' \mathbf{Q}_r \delta_r(k) + R_r f_{g_r}^2(k) \right]. \quad (3.47)$$

onde \mathbf{Q}_r e R_r são definidos de forma igual àquela apresentada no caso a tempo contínuo (ver equações (3.13) e (3.14)).

O processo recursivo baseado nas equações (3.44) é adaptado ao controle individual e aplicado então a todos os modos a controlar, de forma a se obter um ganho de realimentação \mathcal{G}_r para cada um deles. Assim, a força modal de controle de cada modo é dada por:

$$f_{g_r}(k) = \mathcal{G}_r \delta_r(k). \quad (3.48)$$

De posse do ganho \mathcal{G} (controle conjunto) ou dos ganhos \mathcal{G}_r (controle independente) e das coordenadas modais relativas aos modos a controlar é possível então o cálculo (direto ou indireto) das forças de realimentação que permitem o controle do sistema.

3.6 Observações Finais sobre as Teorias de Controle

Deve-se observar que todas as teorias de controle modal apresentadas implicam na realimentação de coordenadas modais e suas derivadas temporais (ou de grandezas equivalentes, obtidas de forma semelhante, no caso em que se trabalha com amortecimento não diagonalizável). Caso não se utilize um observador para obter tais grandezas, os filtros modais devem ser conseqüentemente aplicados sobre sinais de deslocamento e de velocidade. Portanto, há em geral a necessidade de se aplicar pelo menos uma vez a integração ou a derivação sobre os sinais provenientes dos sensores, previamente à aplicação de tais filtros.

Não se pode esquecer que, previamente à aplicação das teorias de controle, deve-se sempre garantir a controlabilidade do sistema. Técnicas já tradicionais permitem verificá-la, a partir das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da equação (3.38) ou das matrizes \mathcal{A} e \mathcal{B} da equação (3.41).

Neste trabalho adotou-se como base o método de controle individual (IMSC), que foi adaptado para tratar estruturas com amortecimento não diagonalizável. Com esta adaptação o controle deixa de ser individual, porém preserva a igualdade entre o número de atuadores e o número de modos controlados.

A adoção do controle individual se deveu ao fato de que a sua teoria fornece uma abordagem bastante clara sobre a forma modal de aplicação do controle. Esta é uma característica desejada, visto que uma bateria de testes que será realizada visa justamente analisar deficiências no modelo modal. Além disso, como já comentado neste capítulo, a minimização individual dos funcionais modais permite uma minimização global mais apurada. Entretanto, para que o controle desfrute desta vantagem deve-se dispor de um atuador para cada modo controlado (forças modais

e físicas perfeitamente relacionadas), o que pode torná-lo inviável do ponto de vista prático, devido ao alto custo.

Capítulo 4

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

É descrito inicialmente de forma geral o programa (denominado CEXPMCPK) que permite o cálculo das respostas livre e controlada de um sistema mecânico, ambas em relação ao mesmo conjunto de condições iniciais.

Na seqüência são fornecidas informações mais detalhadas sobre a forma de armazenar os dados e sobre alguns dos processos envolvidos no programa acima citado.

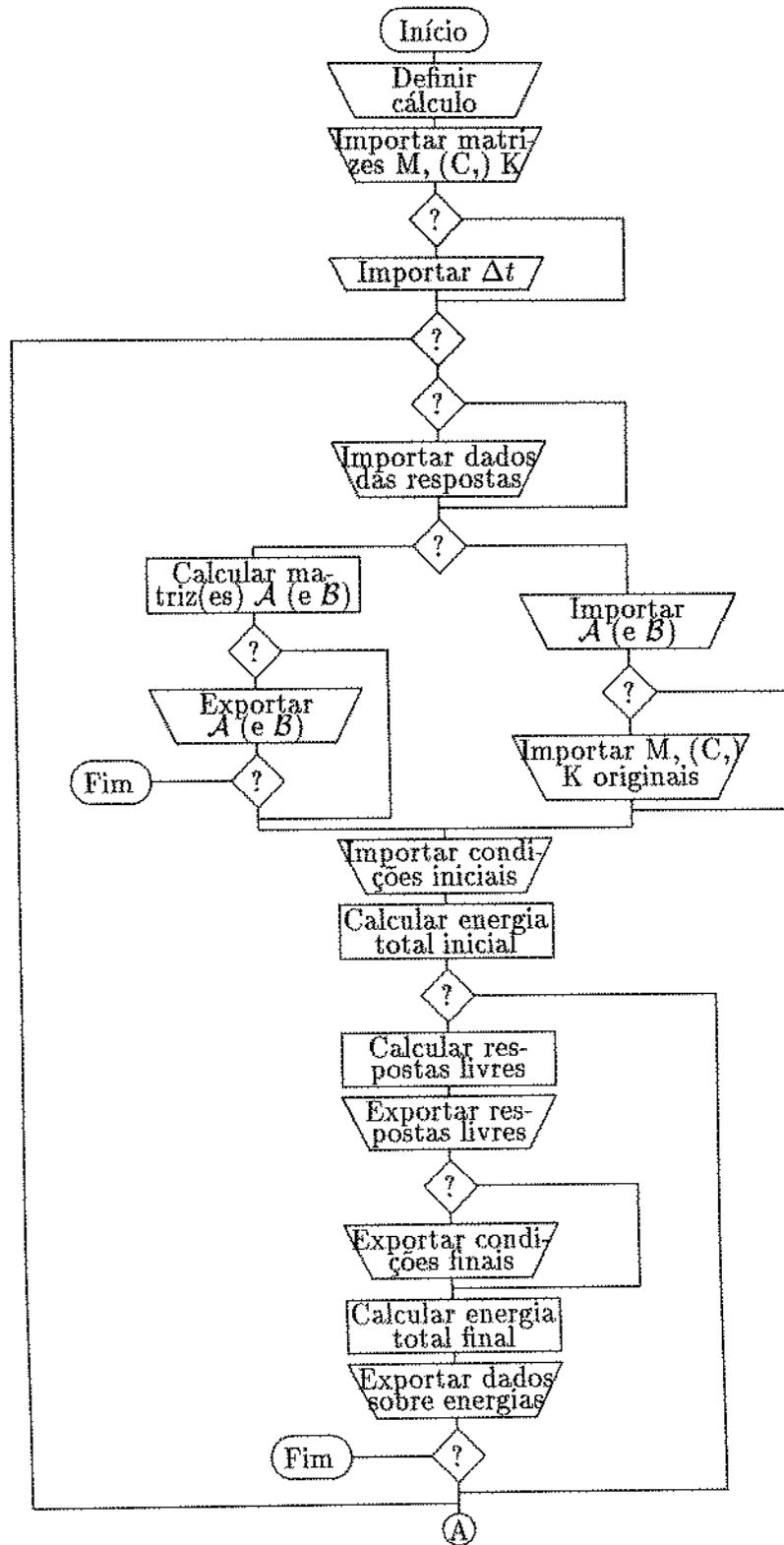
Finalmente são descritos alguns programas auxiliares que visam principalmente à geração e manipulação de arquivos de dados.

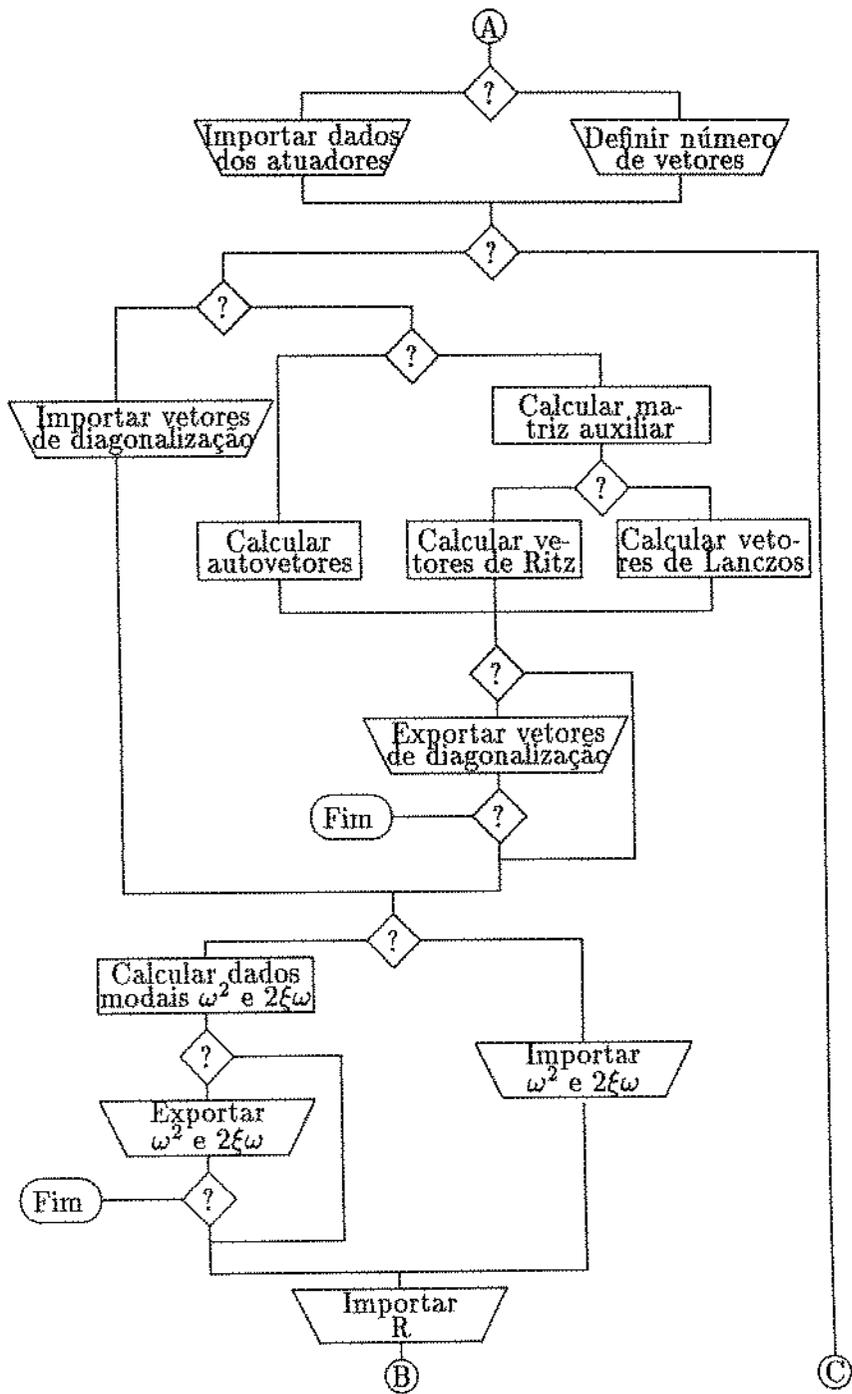
4.1 Descrição Geral

O programa CEXPMCPK, escrito em linguagem FORTRAN, opera aplicando o controle individual no espaço modal (IMSC), a tempo discreto, considerando amortecimento do tipo diagonalizável (que inclui o caso do amortecimento nulo). O fluxograma geral do programa é mostrado na figura 4.1.

Ao início do programa fornece-se o valor de ICALC, que o direciona de acordo com oito possibilidades de cálculo, as quais permitem fornecer como resultados:

- os vetores de diagonalização (ICALC = 1);
- os valores (ω^2 e $2\xi\omega$, correspondentes aos modos a controlar) resultantes da diagonalização das matrizes de rigidez e de amortecimento, esta se houver (ICALC = 2);
- os dois conjuntos de itens acima (ICALC = 3);
- os ganhos de realimentação e as matrizes auxiliares que permitem o manuseio das coordenadas modais (ICALC = 4);





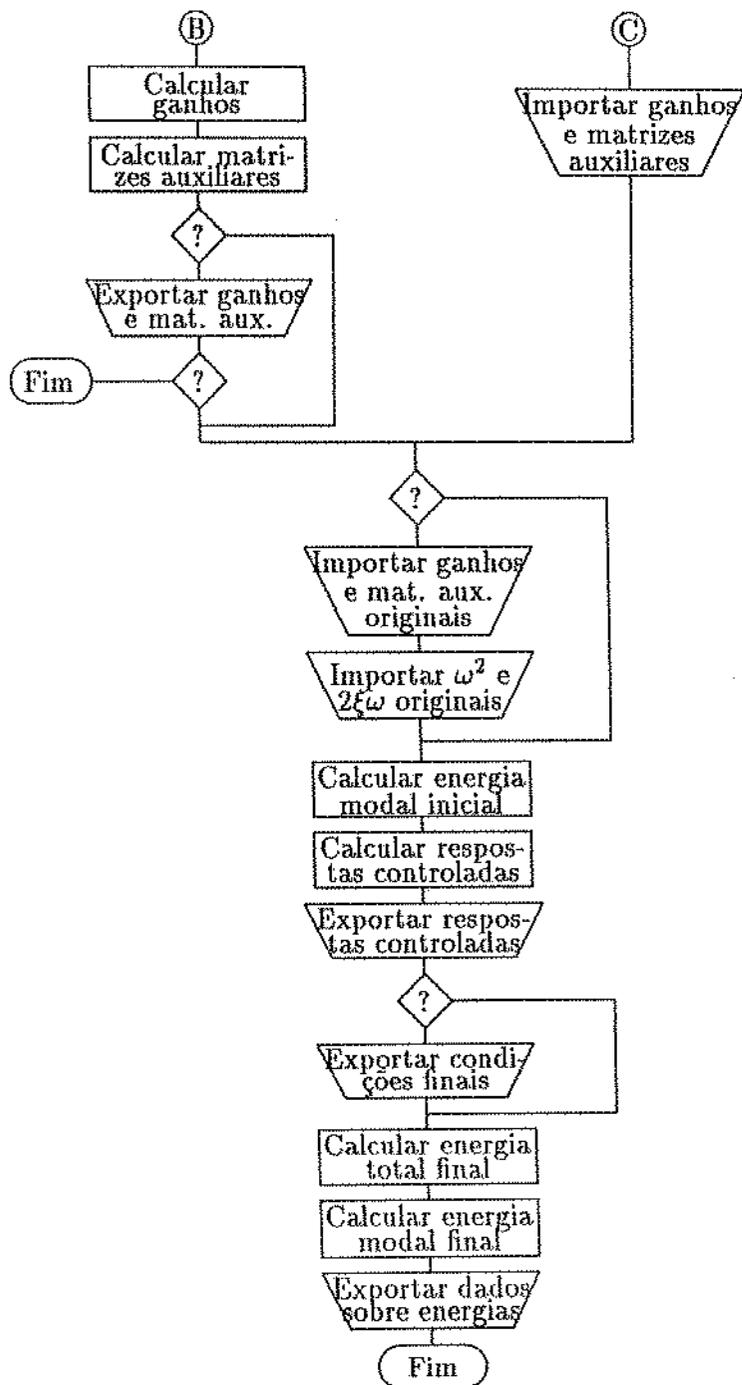


Figura 4.1: Fluxograma do programa para cálculo das respostas livre e controlada.

- a(s) matriz(es) \mathcal{A} (e \mathcal{B} , se houver necessidade), ver equação (3.41) (ICALC = 5);
- a resposta livre do sistema (ICALC = 6);
- a resposta controlada (ICALC = 7);
- ambas as respostas, livre e controlada (ICALC = 8).

O grande número de saídas parciais de resultados vem permitir que sejam alcançados dois objetivos. O primeiro deles é a economia de tempo de processamento. Variáveis de demorada determinação (como por exemplo as matrizes \mathcal{A} e \mathcal{B} citadas acima) podem ser armazenadas em arquivo, de forma que no caso de posterior utilização não seja necessário recalculá-las. O outro objetivo é a alteração de parâmetros visando simular a presença de, por exemplo, erros de modelagem. Assim, um conjunto de variáveis pode ser gerado e armazenado em arquivo, em seguida ter seus valores alterados, e ser novamente adquirido pelo programa na forma de arquivo de entrada de dados. Em ambos os casos, a cada saída de dados corresponde uma entrada que permite readquirí-los, na forma original ou modificada.

Na seqüência são fornecidas ao programa as matrizes de massa, de amortecimento (se houver) e de rigidez. Estas matrizes são admitidas simétricas e de banda M_B , isto é, possuem M_B diagonais secundárias não nulas de cada lado da diagonal principal. Tais matrizes têm armazenadas portanto apenas a diagonal principal mais as diagonais secundárias úteis inferiores, com leitura por coluna, no vetor \mathbf{X} que é utilizado para o armazenamento de praticamente todas as variáveis em uso, via alocação dinâmica.

O parâmetro Δt deve agora ser fornecido via teclado se o seu valor for necessário mais à frente e não houver a importação posterior de dados relativos às respostas (ICALC = 4 ou 5).

O programa admite neste momento um desvio que permite evitar um grande volume de operações, caso o objetivo seja determinar apenas algumas variáveis (situações definidas por ICALC = 1, 2, 3 ou 4). Se é desejado, por outro lado, determinar a(s) matriz(es) \mathcal{A} (e \mathcal{B}), a resposta livre ou a resposta controlada, toma-se o caminho descrito a seguir.

Em primeiro lugar, se se deseja calcular qualquer uma das respostas é necessário ler um arquivo com informações com relação à forma de apresentação das respostas temporais que serão calculadas (intervalo Δt entre pontos e número dos mesmos) bem como de identificação das coordenadas que serão registradas (em virtude do grande número de coordenadas dos problemas reais, não é possível armazenar as respostas relativas a todas as coordenadas).

Na continuação, deve-se optar em determinar a(s) matriz(es) \mathcal{A} (e \mathcal{B}) ou importá-la(s). Caso se opte pelo cálculo, o resultado pode ser armazenado em arquivo. Havendo o armazenamento, e tendo-se admitido ICALC = 5, o processamento termina aqui.

Existindo a determinação de se calcular qualquer das respostas temporais (livre ou controlada), é lido neste instante o arquivo com as condições iniciais de deslocamentos e de velocidades,

a partir das quais ambas as respostas se desenvolvem. Estes dados permitem calcular a energia total (cinética mais potencial) inicial.

Os cálculos subseqüentes permitem determinar a resposta livre (se ICALC = 6 ou 8), o que é feito com o auxílio da matriz A (matriz de transição de estado). As respostas livres são então armazenadas em arquivo para posterior análise. Por opção, igualmente são armazenadas em arquivo as condições finais das respostas livres, caso se deseje manter aberta a possibilidade de se calcular a resposta livre para um período adicional de tempo. Tais condições finais, de qualquer forma, permitem calcular a energia total ao final do período de análise da resposta livre. As energias totais inicial e final são neste ponto armazenadas em arquivo.

Na seqüência há duas opções alternativas. Pela primeira são adquiridos de um arquivo os dados referentes aos atuadores (número, posicionamento, etc.). A segunda opção, utilizada apenas quando tais dados não são necessários, ou seja, quando o único objetivo em rodar o programa é a determinação de um certo número de autovetores (uma das situações abrangidas por ICALC = 1), implica no fornecimento do número de vetores a calcular via teclado.

Para se chegar ao cálculo da resposta controlada (ICALC = 7 ou 8) há agora dois caminhos bem distintos. O mais imediato e que não admite interrupção é aquele que simplesmente realiza a importação dos ganhos de realimentação e de algumas matrizes auxiliares utilizadas na manipulação das coordenadas modais.

O outro caminho passa pela importação ou cálculo dos vetores de diagonalização (autovetores, vetores de Ritz ou de Lanczos), pela importação ou cálculo de dados (ω^2 e $2\xi\omega$) correspondentes aos modos a controlar, pela informação via teclado do parâmetro R e finalmente pelo cálculo dos ganhos de realimentação e das matrizes auxiliares. Este último caminho pode ser truncado, de forma que se calculem apenas algumas das grandezas listadas acima, neste parágrafo, sem se chegar efetivamente à resposta controlada. Assim, o programa pode ser interrompido após o cálculo e armazenamento dos vetores (ICALC = 1), após o cálculo e armazenamento dos dados modais (ICALC = 2 ou 3) ou após o cálculo e armazenamento dos ganhos e matrizes (ICALC = 4).

Se o objetivo terminal é realmente o cálculo da resposta controlada, o último passo antes da sua efetivação é o cálculo das energias iniciais (cinética mais potencial) dos modos controlados. Após calculada, a resposta controlada é armazenada em arquivo. Se desejado, de forma semelhante ao que foi feito após o cálculo da resposta livre, são armazenadas em arquivo as condições finais de deslocamentos e velocidades. Efetua-se então o cálculo da energia total final e das energias finais dos modos controlados. Todos os valores de energia citados neste parágrafo são finalmente levados a um arquivo específico, encerrando a execução do programa.

4.2 Apresentação dos Dados

O arquivo que contém as matrizes de massa, de amortecimento (opcional) e de rigidez apresenta em sua primeira linha dois valores inteiros que indicam a ordem das matrizes e a dimensão de sua banda (quantas diagonais não nulas existem de cada lado da diagonal principal). A seguir são fornecidas três (ou duas) séries de valores reais contendo os elementos das matrizes em forma vetorial, resultantes da leitura das diagonais principais mais as diagonais inferiores úteis por coluna.

As informações necessárias ao cálculo das respostas vêm em outro arquivo, cuja primeira linha apresenta três valores, um inteiro que indica quantos pontos existirão em cada série temporal de resposta, um real que fornece o espaçamento temporal (Δt) entre dois pontos consecutivos de cada resposta e finalmente um inteiro que quantifica o número de coordenadas cujas respostas serão armazenadas. A seguir, neste arquivo, é fornecida uma série de valores reais contendo a identificação das coordenadas, pelas respectivas posições no vetor de estado, cujas respostas serão armazenadas.

A(s) matriz(es) \mathcal{A} (e \mathcal{B}) aparece(m) em um arquivo cuja primeira linha apresenta um inteiro N_2 que fornece a dimensão da matriz quadrada \mathcal{A} e também um real que indica o intervalo temporal Δt usado na determinação de \mathcal{A} . Nas linhas seguintes se apresentam $N_2 \times N_2$ valores reais provenientes da leitura da matriz \mathcal{A} por colunas. A matriz \mathcal{B} , se presente, contribui a seguir com mais $N_2 \times N_2/2$ valores reais.

O arquivo de condições iniciais contém em sua primeira linha o inteiro que define a dimensão dos vetores e nas linhas seguintes duas séries de valores reais respectivamente com as condições iniciais de deslocamento e de velocidade. Os arquivos de condições finais apresentam exatamente a mesma estrutura.

Os arquivos de saída das respostas, tanto livres como controladas, são compostos por colunas de valores reais. A primeira coluna apresenta um vetor de abscissas, por assim dizer, contendo os valores dos tempos nos quais as respostas foram calculadas. As colunas seguintes apresentam as séries temporais correspondentes às coordenadas previamente determinadas.

As informações que dizem respeito às energias do sistema são armazenadas em arquivo em forma redigida, sem previsão de reutilização por qualquer programa. Caso seja calculada apenas a resposta livre, o arquivo vai conter as energias totais ao início e ao final do período de análise. Se é calculada apenas a resposta controlada, são arquivadas as energias totais e as energias (cinética mais potencial) dos modos controlados também no início e no final do correspondente período. Se ambas as respostas são calculadas, um único arquivo vai conter todos os valores das energias citadas acima. Além das energias, quando há o cálculo da resposta controlada o arquivo vai conter, para todos os modos controlados, os valores finais dos funcionais que foram objeto de minimização, bem como a soma dos mesmos.

Optando-se pelo cálculo das respostas controladas (ou ainda dos vetores de Ritz ou de

Lanczos), é necessário o fornecimento de informações sobre os atuadores, o que é feito através de outro arquivo. Este contém em sua primeira linha dois inteiros que quantificam o número de cargas independentes que serão aplicadas e o número de coordenadas pelas quais as cargas distribuir-se-ão. Cada linha a seguir vai conter três valores reais: o primeiro identifica a carga; o segundo a coordenada sobre a qual a carga será projetada e o terceiro o co-seno diretor da carga em relação ao eixo que sustenta a coordenada. Uma única carga pode, portanto, gerar três linhas neste arquivo (três co-senos diretores). Assim, por exemplo, se a força 5 é aplicada em um plano definido pelas coordenadas de translação 36 e 37 (perpendiculares entre si), sob um ângulo de 45° com cada uma destas coordenadas, as linhas correspondentes apresentariam os valores: [5. 36. 0.707] e [5. 37. 0.707]. Com estas informações é possível montar a matriz **D** (ver capítulo anterior).

Caso necessário o armazenamento dos vetores de diagonalização (autovetores, vetores de Ritz ou vetores de Lanczos), eles são levados a arquivos cujas primeiras linhas possuem dois valores inteiros: o primeiro indica o número de tais vetores e o segundo a sua dimensão. Nas linhas seguintes vêm as séries de valores reais representando os vetores.

No armazenamento dos dados modais, o arquivo contém na primeira linha o número N_F de modos representados. A seguir aparecem duas séries consecutivas de N_F valores reais, respectivamente com os valores de ω^2 e de $2\xi\omega$.

O arquivo destinado a receber os ganhos de realimentação e as matrizes auxiliares apresenta em sua primeira linhas dois valores inteiros (o número N_F de modos controlados e o número total N de coordenadas do problema) e um valor real (a ponderação da variável de controle no funcional a minimizar no problema de controle ótimo, aqui considerada constante para todos os modos). A seguir aparecem conjunta e seqüencialmente os N_F pares de ganhos de realimentação, um para cada modo controlado. Os $N_F \times N$ valores reais seguintes apresentam o produto da matriz de massa pelos N_F vetores de diagonalização, com leitura por coluna. Logo após vêm os $N_F \times N_F$ valores reais resultantes da leitura, por coluna, da matriz obtida pela decomposição LU do produto da transposta da matriz que contém os vetores de diagonalização pela matriz de distribuição **D** de forças na estrutura. Os últimos N_F valores reais que aparecem são valores auxiliares necessários à utilização desta decomposição LU de matriz.

4.3 Cálculo das Respostas Propriamente Ditas

A primeira tentativa de cálculo das respostas foi a utilização de integração numérica, pela aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem [41]. Este método permite calcular uma resposta aproximada do sistema como um todo, sendo o mesmo representado pelas suas matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento (esta se houver). Portanto, para que a resposta calculada reproduza com razoável aproximação a resposta real, o intervalo de tempo Δt entre pontos de integração deve ser muito pequeno, pois de outra forma não se conseguem reproduzir as mais altas freqüências naturais do sistema e há divergência nos resultados. Verificou-se, na prática, ser

necessário um intervalo Δt da ordem de um quarto do período da mais alta frequência natural.

Em termos de simulação este intervalo se mostra extremamente reduzido, obrigando um número muito elevado de pontos de integração para a análise de um tempo total correspondente a poucos períodos das frequências naturais mais baixas. Como exemplo, para a estrutura de 156 graus de liberdade a ser apresentada no próximo capítulo, a relação entre a maior e a menor frequências naturais apresenta valor aproximadamente igual a 850, ou seja, se for desejada a análise de um tempo correspondente a três períodos da frequência natural mais baixa são necessários em torno de 10.200 ($850 \times 4 \times 3$) pontos de integração.

Além disto, tal integração se efetua a partir da equação diferencial que rege a dinâmica do sistema, o que de certa forma contraria a idéia de se simular um controle digital do mesmo.

Pelas razões acima, optou-se então pelo cálculo das respostas através da aplicação da equação a diferenças (3.41), o que é realizado pela subrotina CALRES. A matriz \mathcal{A} , como se pode observar pela análise da equação (3.40), resulta do cálculo de uma exponencial de matriz. Nesta mesma equação verifica-se que \mathcal{B} resulta de uma manipulação de várias matrizes, dentre elas \mathcal{A} . No caso da resposta livre (aplicação da equação (3.41) com $\mathbf{f}(k) = \mathbf{0}$), quando se utiliza somente a matriz \mathcal{A} , o intervalo de tempo Δt não interfere no comportamento da resposta, visto que a exponencial da matriz é a solução perfeita da equação diferencial original. Variando-se Δt apenas se obtêm respostas temporais com mais ou menos pontos para o mesmo intervalo de tempo total. Para a resposta controlada a situação não se repete, pois para se chegar à equação (3.41) admitiu-se que as cargas de controle se mantinham constantes ao longo do intervalo Δt . Conseqüentemente, para valores de Δt menores as cargas de controle podem ser atualizadas mais rapidamente, o que significa um efeito benéfico no desempenho do controle. Em conseqüência, também, Δt passa a ser determinado em função das frequências naturais dos modos a controlar, normalmente mais baixas. Assim sendo, valores bem mais altos de Δt podem ser admitidos.

As matrizes \mathcal{A} e \mathcal{B} são calculadas pela subrotina MATDIG, sendo a exponencial de matriz efetuada de acordo com algoritmo encontrado em [42]. A matriz a exponenciar não é efetivamente calculada, neste caso, mas sim simulada. Procura-se tomar partido da sua estrutura particular (ela é definida a partir das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento, que no caso são matrizes de banda) para evitar o armazenamento de dados e a execução de operações excessivos.

Quando se calculam as respostas controladas, é necessária a determinação das cargas reais de controle $\mathbf{f}(k)$. Neste sentido, em primeiro lugar são determinadas as coordenadas modais de acordo com as equações:

$$\begin{aligned} \eta_m(k) &= \Phi'_m \mathbf{M} \mathbf{x}(k) \\ \dot{\eta}_m(k) &= \Phi'_m \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

que são semelhantes à equação (2.14), após esta sofrer redução para considerar apenas os modos controlados.

Esta forma de extrair as coordenadas modais não pode, via de regra, ser aplicada na prática, visto que implica em medir todos os componentes de $\mathbf{x}(k)$ e de $\dot{\mathbf{x}}(k)$. Para obter as coordenadas modais pela simples multiplicação por uma matriz de coeficientes, tal qual ocorre nas equações (4.1), o vetor que contém as informações de movimento do sistema deve ter, no mínimo, um número de elementos igual ao número m de coordenadas a determinar. Para este número mínimo, a matriz de coeficientes se torna quadrada. Cada linha da matriz extrai, então, uma coordenada modal, possuindo propriedades de ortogonalidade em relação aos outros modos. Porém, do ponto de vista geométrico, cada linha só pode ser ortogonal a $m - 1$ linhas de dimensão m , daí a necessidade já comentada da filtragem dos sinais para que o número de modos que eles contenham não seja superior a m . As coordenadas modais assim obtidas (multiplicação de um vetor contendo sinais filtrados por uma matriz reduzida de coeficientes) se igualam àquelas obtidas pela equação (4.1), sendo esta a razão da utilização desta equação no programa, visto que lá $\mathbf{x}(k)$ e $\dot{\mathbf{x}}(k)$ estão disponíveis.

De posse dos ganhos por modo G_r calculados previamente, são avaliadas em seguida as cargas de controle modais $f_{g_r}(k)$ através da equação (3.48). A estratégia de cálculo destes ganhos é apresentada em item a seguir.

A relação entre as cargas reais $f_v(k)$ e as cargas modais citadas acima é obtida pela inversa da equação (3.16), na versão a tempo discreto:

$$\mathbf{f}_v(k) = (\Phi'_m D)^{-1} \mathbf{f}_{g_m}(k). \quad (4.2)$$

A matriz $\Phi'_m M$ que aparece na equação (4.1) e a decomposição LU da matriz $\Phi'_m D$ da equação imediatamente acima são determinadas pela subrotina MATAUX. A decomposição LU é efetuada com o auxílio da subrotina LUDCMP. A subrotina LUBKSB permite, a partir de tal decomposição, efetuar a multiplicação pela inversa da matriz $\Phi'_m D$, via resolução de sistema de equações. LUDCMP e LUBKSB foram retiradas de [43].

A aplicação das equações (4.1), (3.48) e (4.2) é efetuada pela subrotina FORREA, chamada por CALRES a cada novo Δt . A subrotina FORREA calcula ainda, para cada Δt e para cada modo controlado, o valor da parcela que aparece no somatório da equação (3.47) que define o funcional a minimizar por modo. A totalização das parcelas por modo e a soma geral destes totais parciais são realizadas por CALRES.

4.4 Cálculo dos Vetores de Diagonalização

Existem neste caso três opções, autovetores, vetores de Ritz e vetores de Lanczos.

A subrotina AVBS utilizada para cálculo de um número reduzido de autovalores e autovetores segue o esquema descrito em [44], o qual se baseia na subrotina RITZIT ali apresentada,

tendo havido a tradução do ALGOL ao FORTRAN.

Os autovetores são reais, tendo em vista que o amortecimento é do tipo diagonalizável, sendo que o problema de autovalores/autovetores se baseia portanto apenas nas matrizes de massa e de rigidez: $(\mathbf{K} + \lambda_r \mathbf{M}) \phi_r = \mathbf{0}$. Este problema é entretanto modificado, para se apresentar na forma tradicional $(\mathbf{A} - \lambda_{tr} \mathbf{I}) \phi_{tr} = \mathbf{0}$, tomando-se $\mathbf{A} = -(\mathbf{K}'_C)^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{K}_C)^{-1}$, onde \mathbf{K}_C é resultante da decomposição de Cholesky da matriz \mathbf{K} ($\mathbf{K} = \mathbf{K}'_C \mathbf{K}_C$). A matriz \mathbf{A} não é efetivamente calculada, pois quando o programa de cálculo de autovalores e autovetores necessita da multiplicação de um vetor pela matriz \mathbf{A} , ele realiza o conjunto de multiplicações decorrentes da definição acima apresentada de \mathbf{A} . Este trabalho é realizado pela subrotina OP [44], com base na subrotina CHOLBD [45]; esta, além de realizar a decomposição de Cholesky, permite a multiplicação de um vetor por $(\mathbf{K}'_C)^{-1}$ ou por $(\mathbf{K}_C)^{-1}$ (indiretamente, através da solução de sistemas de equações). Os autovalores λ_{tr} assim calculados são na verdade os inversos dos autovalores originais λ_r ($\lambda_r = 1/\lambda_{tr}$), tendo em vista que normalmente se desejam calcular os autovalores de menores módulos, e a subrotina RITZIT realiza exatamente o contrário, ou seja, calcula os maiores autovalores. A relação entre os autovetores é: $\phi_{tr} = \mathbf{K}_C \phi_r$. Caso a matriz \mathbf{K} seja singular (isto ocorre quando à estrutura são permitidos movimentos de corpo rígido, correspondendo-lhes autovalores nulos), a decomposição de Cholesky não é viável. Deve-se aplicar então o deslocamento do espectro de autovalores, tomando \mathbf{K}_C como a decomposição da soma $\mathbf{K} + a \mathbf{M}$, sendo a um valor positivo. Admitiu-se que a matriz de massa \mathbf{M} é definida-positiva, o que normalmente ocorre na prática. Neste caso, então: $\mathbf{K} + a \mathbf{M} = \mathbf{K}'_C \mathbf{K}_C$. Mantida a nomenclatura apresentada acima na equação que define o problema tradicional de autovalores, os autovalores originais são agora calculados através de: $\lambda_r = (1/\lambda_{tr}) - a$.

No desenvolvimento da subrotina RITZIT foram ainda adaptadas ou criadas algumas subrotinas e funções auxiliares. JACOBI (adaptação a partir de [44]) permite o cálculo de todos os autovalores e autovetores de uma matriz simétrica, sendo que ORDEM foi criada para promover a ordenação em ordem crescente dos autovalores reais resultantes (reordenando coerentemente os correspondentes autovetores). PRODMV, PRODVV e PRODIN fornecem produtos entre matriz e vetor ou entre vetores. IAP e IAPCS estabelecem relações entre os índices de localização das várias formas de armazenar as matrizes. RANDOM permite gerar vetores com valores aleatórios enquanto ORTHOG efetua a ortogonalização de um conjunto de vetores, ambas adaptadas de [44].

Os vetores de Ritz e de Lanczos são obtidos pelas subrotinas GRITZ e GLANCZ, baseadas respectivamente nos algoritmos encontrados em [30] e [31]. Estas subrotinas utilizam a subrotina MKJACO, que determina todos os autovalores e autovetores do problema $(\mathbf{K} + \lambda_r \mathbf{M}) \phi_r = \mathbf{0}$, sendo baseada na subrotina JACOBI já apresentada anteriormente.

4.5 Cálculo dos Ganhos de Realimentação

O cálculo dos ganhos de realimentação é desenvolvido pela subrotina GARM22, com base nas equações (3.45), (3.46), (3.47) e (3.44). Os m valores resultantes da diagonalização parcial da matriz de rigidez (termos do tipo ω^2) pelos vetores de diagonalização dos modos controlados, bem como os equivalentes m valores resultantes da diagonalização da possível matriz de amortecimento (termos do tipo $2\xi\omega$), são calculados pela subrotina DIAG para aplicação em GARM22.

A exponencial de matriz que aparece nas equações (3.46) é efetuada pela subrotina EXPM22, que calcula a exponencial de matriz de dimensões 2×2 através de série de potências. Não se utiliza aqui a subrotina MATDIG para cálculo da exponencial da matriz 2×2 , pois tal subrotina admite que a matriz operando seja definida em função das matrizes de massa, de amortecimento (se houver) e de rigidez.

A aplicação recursiva das equações (3.44) para cada modo é efetuada pela subrotina GINFMO, calculando assim um ganho de realimentação G_r por modo.

4.6 Cálculo de Energias

A energia total do sistema (potencial mais cinética) é avaliada antes e depois do cálculo das respostas livre e controlada pela subrotina ENETOT, com base nas matrizes de massa e de rigidez e nos vetores de deslocamentos e de velocidades.

Também são avaliadas, antes e depois do cálculo da resposta controlada, a soma das energias potencial e cinética para cada modo a controlar, com base nos valores resultantes da diagonalização da matriz de rigidez (ω^2) e nas correspondentes coordenadas modais e suas derivadas temporais. Isto através da subrotina ENEMOD.

4.7 Programas Auxiliares

O programa ISMISV3D é uma adaptação, em FORTRAN, do programa de elementos finitos ISMIS, desenvolvido por Becker e Craig [46]. Este programa gera as matrizes de massa e de rigidez de uma estrutura espacial composta por vigas rigidamente conectadas entre si, sendo que a forma adotada de armazenamento de tais matrizes é aquela apresentada na seção 1.2. O arquivo que contém estas matrizes apresenta inicialmente a ordem e a banda das mesmas, em seguida os vetores que contém informações sobre as matrizes de massa e de rigidez, nesta seqüência. Com esta estrutura, o arquivo está apto a ser lido pelo programa de controle CEXPMCPK. Os resultados deste programa foram checados, para uma estrutura plana de 54 graus de liberdade, através do

programa de elementos finitos COSMOS ¹, tendo ocorrido uma diferença de apenas 0,1% na resultante frequência natural mais baixa.

Uma versão mais específica do programa ISMIS (dirigida a gerar matrizes de massa e de rigidez de um certo tipo de estrutura), redigida para ser rodada no ambiente MATLAB, pode ser vista no apêndice D. Neste mesmo apêndice aparecem também as funções auxiliares na versão MATLAB, funções estas que para o programa ISMISV3D estão redigidas em linguagem FORTRAN.

O programa GERACP permite a geração de uma matriz de amortecimento proporcional, de acordo com a equação:

$$C = \alpha M + \beta K, \quad (4.3)$$

sendo que os escalares α e β são requisitados pelo programa. Vale lembrar que o amortecimento proporcional é um dos casos de amortecimento diagonalizável.

O arquivo de entrada deve apresentar uma linha de dados e em seguida os vetores relativos às matrizes de massa e de rigidez, na mesma forma que os arquivos resultantes do programa ISMISV3D. O arquivo de saída repete esta estrutura, porém interpondo o vetor relativo à matriz de amortecimento entre os vetores relativos às matrizes de massa e de rigidez. Tal arquivo de saída também pode ser usado como entrada ao programa CEXPMCPK.

O programa GERAX0V0 permite a geração de condições iniciais de deslocamentos e de velocidades. A forma mais simples de geração é a composição direta destes vetores, informando-se os valores (e correspondentes posições) dos elementos que os compõem. Em seguida, caso desejado, cada um dos vetores (deslocamentos ou velocidades) pode ser multiplicado pelas matrizes de massa ou de rigidez ou ainda pelas inversas destas matrizes. Assim, por exemplo, pode-se especificar um vetor de deslocamentos com um único elemento não nulo, na posição de aplicação de uma dada força. Multiplicando-se este vetor pela inversa da matriz de rigidez obtém-se então uma condição inicial de deslocamentos que, combinada com uma condição inicial nula de velocidades, permite simular a deformação estática decorrente da aplicação daquela força. Cada um dos vetores de condições iniciais pode ser normalizado, antes ou depois da multiplicação por matriz, de forma a resultar com norma euclidiana unitária. Os arquivos resultantes apresentam na primeira linha a dimensão dos vetores e em seguida os vetores de deslocamentos e de velocidades, forma adequada à leitura pelo programa CEXPMCPK.

Para a aplicação de variações aleatórias a certas grandezas foram criados alguns programas, também em linguagem FORTRAN. A função ALEAUN gera números reais pseudo-aleatórios, com distribuição uniforme, entre $-x$ e $+x$, sendo x um valor fornecido. Tal função foi desenvolvida de acordo com algoritmo fornecido por Kunt [47]. A subrotina ALEANO gera um conjunto de números com distribuição próxima à normal, obtidos pela superposição de 15 conjuntos de números obtidos por ALEAUN. Estes números são normalizados de forma a apresentarem média

¹COSMOS é um produto da Structural Research and Analysis Corporation, Santa Monica, CA, USA.

nula e variância 0,25. Na realidade são gerados alguns números adicionais, de forma que possam ser descartados todos os valores que não caem na faixa $[-1,+1]$ (ou seja, mais ou menos dois desvios padrão). Assim aplica-se uma restrição importante, que visa controlar os valores absolutos máximos dos desvios, visto que na prática desvios absurdos não são verificados. O programa ERRALI utiliza a subrotina ALEANO para aplicar desvios aos momentos de inércia das vigas que compõem a estrutura sob análise. Na utilização deste programa escolhem-se o percentual de desvio máximo a ser aplicado aos momentos de inércia e o número de arquivos modificados a serem gerados a partir do arquivo de dados original. O programa ERALPM atua de forma semelhante a ERRALI, permitindo que se apliquem desvios percentuais independentes às grandezas modais. Neste caso existem dois arquivos de dados originais relativos aos modos controlados, um que contém valores resultantes da diagonalização das matrizes de rigidez e de amortecimento (termos do tipo ω^2 e $2\xi\omega$) e outro com os autovetores (ϕ_r). Devem ser fornecidos os desvios percentuais máximos para cada conjunto de grandezas, bem como o número de pares de arquivos modificados a gerar.

4.8 Listagem dos Programas FORTRAN

O conjunto central de instruções FORTRAN que permite calcular as respostas livre e controlada de um sistema com amortecimento do tipo diagonalizável resultou relativamente extenso, sendo dividido em cinco arquivos, descritos a seguir:

- CEXPMCPK.FOR - contém o programa principal (dimensão: 26,8 KB);
- CFOR.FOR - contém as subrotinas CALRES, MATDIG, FORREA, MATAUX, LUDCMP, LUBKSB, ENETOT e ENEMOD (29,8 KB);
- CVET.FOR - contém as subrotinas GRITZ, GLANCZ e MKJACO (12,4 KB);
- CGAN.FOR - contém as subrotinas DIAG, GARM22, EXPM22 e GINFMO (11,7 KB);
- CAUT.FOR - contém as subrotinas AVBS, RITZIT, JACOBI, ORDEM, ORTHOG, RANDOM, OP, CHOLBD e PRODMV e as funções PRODIN, IAP, IAPCS e PRODVV (45,2 KB).

Como o volume total de páginas de listagem é muito grande, as listagem dos arquivos acima não foram aqui incluídas, podendo entretanto ser obtidas (ou mesmo cópias em disquete) junto ao autor, ou seu orientador. Alguns dos programas descritos neste capítulo foram também desenvolvidos em comandos próprios do ambiente MATLAB, cujas listagens apresentam-se nos apêndices D e E (devido a uma série de funções internas presentes no programa MATLAB, o volume de instruções torna-se menor, permitindo a sua apresentação). É importante lembrar que utilizou-se, em boa parte das subrotinas redigidas em linguagem FORTRAN, uma forma especial de armazenamento das matrizes, descrita na seção 4.2.

Capítulo 5

DETERMINAÇÃO DO INTERVALO DE AMOSTRAGEM

Neste capítulo é avaliada a influência do tamanho do intervalo de amostragem Δt no desempenho do controle a tempo discreto (digital).

Para tanto é simulada a aplicação do controle a tempo discreto a um sistema de um grau de liberdade, procurando-se analisar a deterioração do desempenho do controle à medida que o intervalo Δt é progressivamente aumentado. Alterações significativas em parâmetros de avaliação de desempenho vão permitir a concepção de um critério empírico para a seleção de Δt .

A análise de um sistema de um grau de liberdade pode parecer, à primeira vista, muito simplista. Não se pode esquecer, entretanto, que na maior parte dos casos o controle é aplicado de forma independente, cada modo sendo manipulado isoladamente como um sistema de um grau de liberdade.

5.1 Equacionamento

Seja um sistema de um grau de liberdade composto de uma massa m , suspensa por uma mola com coeficiente de rigidez k e por um amortecedor viscoso com coeficiente de amortecimento c . Se o movimento da massa é representado pela variável $x(t)$ e a força aplicada à mesma representada por $f(t)$, tem-se a equação do movimento:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t) . \quad (5.1)$$

A equação acima, mais uma equação trivial, permitem escrever:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\ddot{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f(t). \quad (5.2)$$

Tendo em vista a semelhança da equação (5.2) com a equação (3.10), o controle a tempo discreto desenvolvido para ser aplicado a apenas um modo é utilizável neste caso, desde que aplicadas as seguintes substituições nas grandezas que aparecem nas equações (3.45), (3.46) e (3.47):

$$\delta_r(k) = [x(k) \ \dot{x}(k)]', \quad f_{gr}(k) = f(k), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad R_r = R. \quad (5.4)$$

5.2 Programa

Para a simulação da aplicação do controle foi desenvolvido um programa computacional redigido com comandos próprios do ambiente MATLAB, cuja listagem apresenta-se no apêndice C, sendo descrito a seguir.

Inicialmente são fornecidos ao programa os dados: massa m , coeficiente de amortecimento c , coeficiente de rigidez k , intervalo temporal Δt , número de intervalos em cada resposta temporal, deslocamento e velocidade iniciais da massa e valor da ponderação de controle R .

São então montadas e/ou calculadas as matrizes \mathbf{A}_r , \mathbf{B}_r , \mathcal{A}_r , \mathcal{B}_r e \mathbf{Q}_r .

O passo seguinte é calcular o ganho de realimentação \mathcal{G}_r , o que é realizado pela função GASIDINF, também listada no apêndice C. Esta função baseia-se na aplicação recursiva das equações (3.44). Na chamada desta função devem constar os valores máximos admitidos do erro percentual e do número de iterações no processo recursivo. O erro percentual, no caso, é aquele calculado entre elementos similares de matrizes \mathcal{G}_r relativas a iterações consecutivas. O número de iterações ao final do processo é fornecido na tela quando do retorno da função GASIDINF.

A seguir são inicializadas as respostas livre e controlada, bem como calculada a energia total (cinética mais potencial) inicial.

Chega o momento do cálculo das respostas. A resposta livre é calculada através da aplicação recursiva da equação:

$$\delta_r(k+1) = \mathcal{A}_r \delta_r(k), \quad (5.5)$$

ao passo que, de forma semelhante, a resposta controlada é obtida pela equação:

$$\delta_r(k+1) = \mathcal{A}_r \delta_r(k) + \mathcal{B}_r f(k), \quad (5.6)$$

onde:

$$f(k) = \mathcal{G}_r \delta_r(k). \quad (5.7)$$

Paralelamente ao cálculo das respostas é avaliado também o funcional J_r (ver equação (3.47)) com base na resposta controlada. Como o valor deste funcional é obtido através de um somatório calculado sobre todos os pontos de resposta (com exceção do primeiro), só é possível compará-lo para diferentes valores de Δt se ele for "normalizado", isto é, se ele for dividido em cada caso pelo correspondente número de intervalos na resposta.

Finalmente o programa calcula a energia total final para ambas as respostas (livre e controlada), e passa a apresentar gráficos que permitem comparar tais respostas (inicialmente em termos de deslocamentos e após em termos de velocidades).

5.3 Resultados da aplicação do programa

O programa foi aplicado a um sistema cujos parâmetros apresentavam os seguintes valores: $m = 10 \text{ kg}$, $c = 10 \text{ Ns/m}$ e $k = 10.000 \text{ N/m}$. A conseqüente freqüência natural não amortecida é de $5,03 \text{ Hz}$, o que fornece um período em torno de $0,2 \text{ s}$. O coeficiente adimensional de amortecimento resultante apresenta o valor $0,0158$. As condições iniciais foram assumidas unitárias: deslocamento igual a 1 m e velocidade 1 m/s . A ponderação de controle assumida foi de $R = 0,01$. Foi tomado sempre um período total de resposta igual a 1 s , dividido nos seguintes números de intervalos: 1000, 500, 200, 100, 80, 60, 50, 30, 25, 20, 15, 12 e 10. Resultaram, respectivamente, intervalos temporais Δt com os seguintes valores: 0,001, 0,002, 0,005, 0,01, 0,0125, 0,0167, 0,02, 0,0333, 0,04, 0,05, 0,0667, 0,0833 e $0,1 \text{ s}$.

A figura 5.1 mostra o número n_i de iterações requeridas pela subrotina GASIDINF para atingir a convergência da matriz de ganhos em função dos intervalos temporais Δt .

A energia total inicial do sistema foi de 5.005 Nm e a energia total final para o sistema livre foi de 1.853 Nm . As energias totais finais E_n para o sistema controlado estão mostradas na figura 5.2, em função dos intervalos temporais Δt .

A figura 5.3 mostra, a seguir, os valores \bar{J}_r do funcional "normalizado" (isto é, os valores de J_r divididos pelo número de intervalos temporais na resposta), também em função dos valores de Δt .

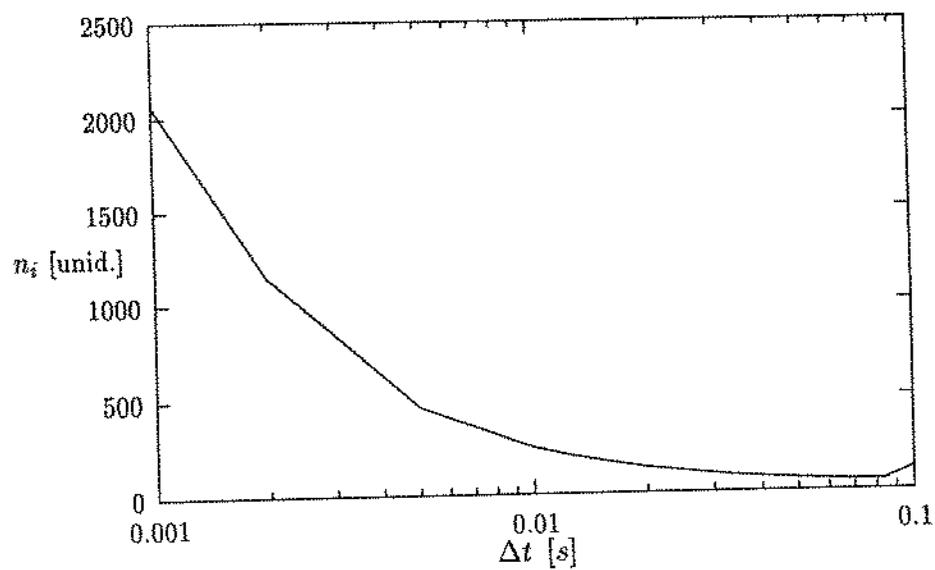


Figura 5.1: Número de iterações n_i em GASIDINF em função de Δt .

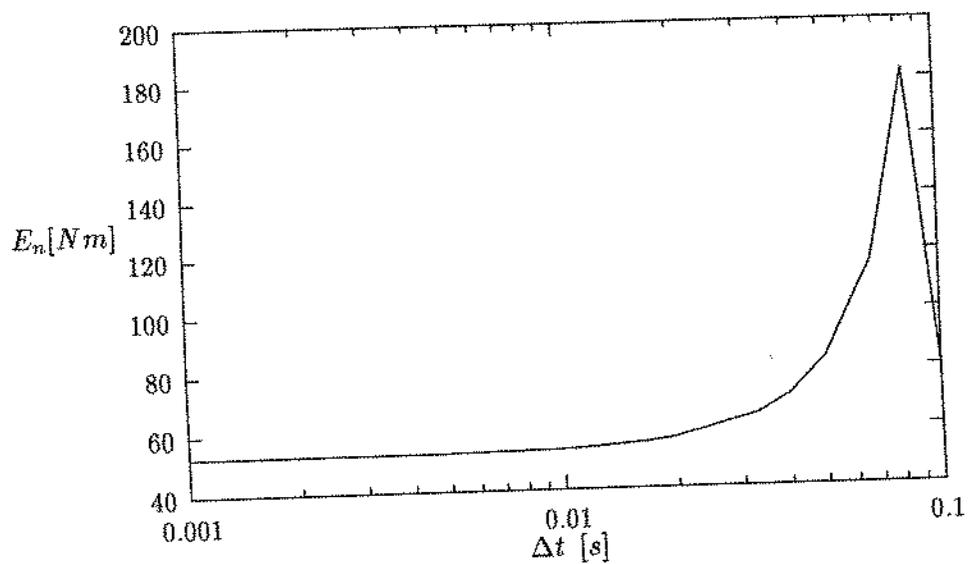


Figura 5.2: Energias totais finais E_n em função de Δt .

5.5 Estabelecimento de critério

O valor $\Delta t = 0,02 s$ aparece como uma solução de compromisso, no caso acima analisado, em que o período natural é de $0,2 s$. Pode-se então tomar como critério empírico a relação de um para dez entre tais valores. Isto significa, na prática, que a frequência de amostragem deve ser dez vezes maior que a maior frequência natural dos modos sob controle.

Capítulo 6

APLICAÇÃO DO CONTROLE - ANÁLISE DE IMPERFEIÇÕES DE MODELAGEM FÍSICA OU MODAL

O presente capítulo descreve em primeiro lugar o modelo físico (estrutura tridimensional) ao qual o controle será aplicado.

Na seqüência é descrita a aplicação do controle ao modelo sob um grande conjunto de situações distintas, procurando-se averiguar a influência de alguns fatores no desempenho do controle.

Deve ficar claro que não se está aqui analisando a robustez quanto à estabilidade do sistema, mas sim a alteração de desempenho do controle (algumas vezes chamada de robustez quanto ao desempenho). A análise da robustez de estabilidade, assim definida por alguns autores [48], implicaria na investigação da estabilidade do sistema controlado na presença de erros de modelagem, variações de parâmetros e outros problemas do tipo. Outra análise de robustez diria respeito ao comportamento do sistema controlado quando da falha parcial do sistema de controle (quebra de sensor, atuador, etc.), o que também não foi investigado aqui.

Nas respostas temporais obtidas neste capítulo é respeitada a dinâmica do sistema original, através da consideração das matrizes A e B que lhe correspondem (ver equação (3.41)). As alterações são aplicadas ao sistema para o qual é calculado o controle, provocando desvios nos ganhos de realimentação. Uma outra abordagem, que levaria a resultados equivalentes, consistiria em manter os ganhos calculados para o sistema original e aplicá-los ao controle dos sistemas perturbados.

6.1 Modelo Físico

A estrutura utilizada para aplicação dos testes está mostrada na figura 6.1. Ela é composta por segmentos de tubo de aço soldados entre si, apresentando altura total de 1,5 m (0,3 m para cada vão). As outras dimensões externas são de 0,4 e 0,6 m, nas direções x e y , respectivamente. A seção transversal dos tubos apresenta diâmetros externo e interno com dimensões 13,1 e 10,5 mm, respectivamente. Em consequência, as propriedades geométricas desta seção são: área transversal $A = 4,82 \times 10^{-5} m^2$, momento de inércia $I = 8,49 \times 10^{-10} m^4$ e momento polar de inércia $J = 1,70 \times 10^{-9} m^4$. As propriedades admitidas para o material foram: densidade $\rho = 7,8 \times 10^3 kg/m^3$, módulo de elasticidade $E = 2,07 \times 10^{11} N/m^2$ e módulo de elasticidade transversal $G = 0,79 \times 10^{11} N/m^2$.

De acordo com a figura 6.1, após descontados os nós fixos da base (de números 1 a 4), o modelo de elementos finitos da estrutura apresenta vinte e seis nós com movimentos livres (vinte uniões entre vigas e seis pontos intermediários de vigas). Considerando que há seis graus de liberdade por nó, tem-se consequentemente um total de cento e cinquenta e seis graus de liberdade.

A incidência das coordenadas nos nós está dada na tabela 6.1. O uso de numeração negativa se dá para as coordenadas que serão bloqueadas, as quais são então automaticamente desconsideradas no programa ISMISV3D na montagem das matrizes de massa e de rigidez.

Nó	Números das coordenadas					
	x	y	z	θ_x	θ_y	θ_z
1	-1	-2	-3	-4	-5	-6
2	-7	-8	-9	-10	-11	-12
3	-13	-14	-15	-16	-17	-18
4	-19	-20	-21	-22	-23	-24
5	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12
7	13	14	15	16	17	18
8	19	20	21	22	23	24
9	25	26	27	28	29	30
10	31	32	33	34	35	36
11	37	38	39	40	41	42
12	43	44	45	46	47	48
13	49	50	51	52	53	54
14	55	56	57	58	59	60
15	61	62	63	64	65	66

Nó	Números das coordenadas					
	x	y	z	θ_x	θ_y	θ_z
16	67	68	69	70	71	72
17	73	74	75	76	77	78
18	79	80	81	82	83	84
19	85	86	87	88	89	90
20	91	92	93	94	95	96
21	97	98	99	100	101	102
22	103	104	105	106	107	108
23	109	110	111	112	113	114
24	115	116	117	118	119	120
25	121	122	123	124	125	126
26	127	128	129	130	131	132
27	133	134	135	136	137	138
28	139	140	141	142	143	144
29	145	146	147	148	149	150
30	151	152	153	154	155	156

Tabela 6.1: Incidência das coordenadas nos nós segundo as várias direções.

A incidência dos nós nos elementos é fornecida na tabela 6.2.

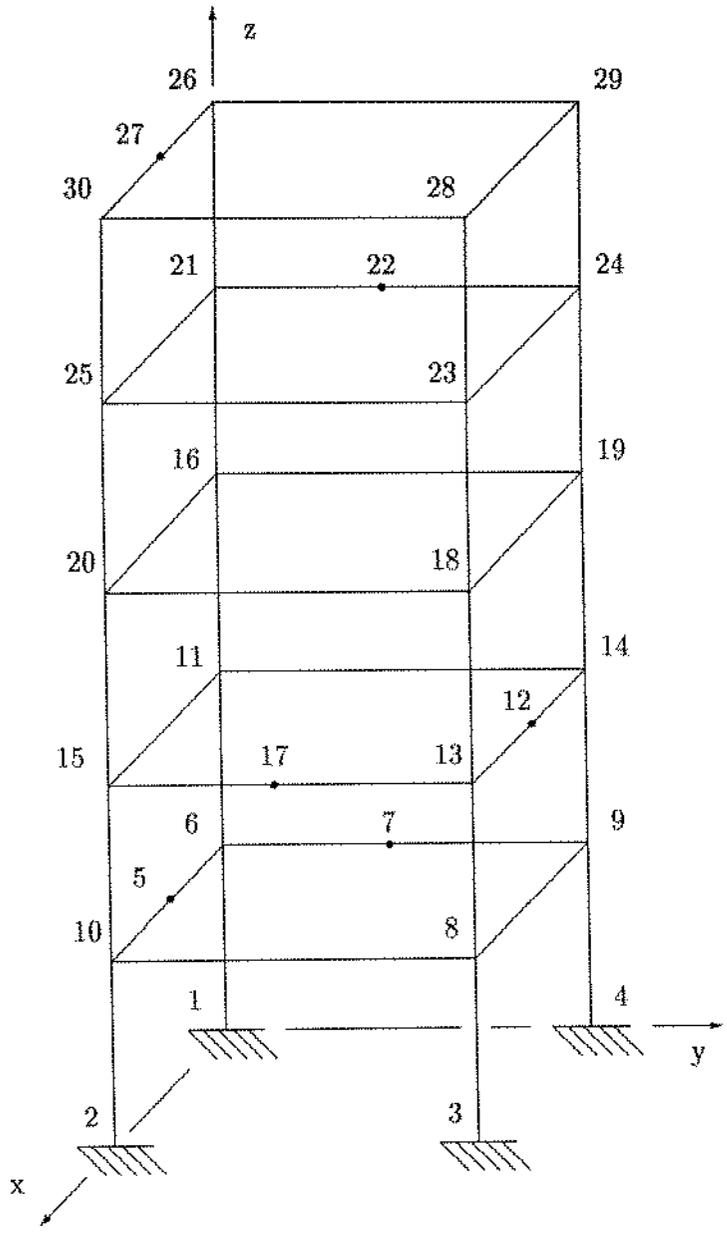


Figura 6.1: Estrutura original.

Elemento	Números dos nós		Elemento	Números dos nós		Elemento	Números dos nós	
1	1	6	17	17	13	33	21	25
2	2	10	18	12	13	34	25	23
3	3	8	19	14	12	35	24	23
4	4	9	20	11	14	36	22	24
5	6	5	21	11	16	37	21	22
6	5	10	22	15	20	38	21	26
7	10	8	23	13	18	39	25	30
8	9	8	24	14	19	40	23	28
9	7	9	25	16	20	41	24	29
10	6	7	26	20	18	42	26	27
11	6	11	27	19	18	43	27	30
12	10	15	28	16	19	44	30	28
13	8	13	29	16	21	45	29	28
14	9	14	30	20	25	46	26	29
15	11	15	31	18	23			
16	15	17	32	19	24			

Tabela 6.2: Incidência dos nós nos elementos.

As matrizes de massa e de rigidez da estrutura foram geradas pelo programa ISMISV3D, permitindo o cálculo das freqüências naturais não amortecidas mais baixas e mais altas com o auxílio da subrotina AVBSD. As seis freqüências naturais mais baixas estão apresentadas na tabela 6.3, onde ainda se descreve o tipo de modo de vibração. Quando o modo é dito de “flexão”, entende-se que a estrutura se comporta de forma semelhante a uma viga engastada-livre sob flexão. De forma análoga define-se o modo dito de “torção”. A maior freqüência natural resultou em 10.472 Hz.

A matriz de amortecimento foi gerada pelo programa GERACP, tomando-se $\alpha = 0,7694$ e $\beta = 0$ (ver equação (4.3)). Com isto o amortecimento adimensional do primeiro modo resulta $\xi_1 = 0,005$. Como, para $\beta = 0$, os valores de ξ_r são inversamente proporcionais à freqüência natural dos modos, os próximos modos irão apresentar valores decrescentes deste parâmetro.

Ordem	Freqüência Natural [Hz]	Modo de Vibrar
1	12,24	1ª Flexão na direção y
2	13,87	1ª Flexão na direção x
3	17,42	1ª Torção
4	39,89	2ª Flexão na direção y
5	44,09	2ª Flexão na direção x
6	54,76	2ª Torção

Tabela 6.3: Tabela das freqüências naturais mais baixas.

Na determinação do posicionamento dos atuadores é conveniente a análise das formas dos modos de vibração (ou seja, dos autovetores reais também determinados pela subrotina AVBSD). Na tabela 6.4 estão apresentados os deslocamentos nas direções x e y de uma linha vertical de nós (nós junto ao eixo z , de números 6, 11, 16, 21 e 26, ver figura 6.1) para os seis primeiros modos.

Os atuadores serão aplicados internamente, entre dois nós da estrutura. No sentido de tornar mais sucinta a análise que segue, define-se aqui “patamar”, que passa a ser cada um dos cinco planos horizontais que contêm vigas horizontais, enumerados de um a cinco de baixo para cima.

São agora analisados os dois modos de flexão na direção y (modos de números 1 e 4). Para o modo 1, de acordo com a tabela 6.4, os patamares contíguos que apresentam maior movimento relativo na direção y são os de números 1 e 2, o que portanto provocou a colocação do atuador de número II (ver figura 6.2). De forma semelhante, para o modo 4 o maior movimento relativo é entre os patamares 3 e 4. Contudo, visando a economia de nós, bem como uma distribuição dos mesmos que permitisse um aumento mínimo da banda das matrizes de massa e de rigidez, foi aplicado o atuador de número V entre os patamares de números 2 e 5. Desta forma, no patamar 2 aproveita-se um nó já existente e evita-se colocar muitos nós no patamar 4, o que provocaria um

Direção	Coordenada	Modo de Vibração					
		1	2	3	4	5	6
x	7	0,0	0,110	0,111	0,0	0,324	0,320
	37	0,0	0,276	0,270	0,0	0,561	0,535
	67	0,0	0,424	0,408	0,0	0,356	0,318
	97	0,0	0,531	0,506	0,0	-0,145	-0,167
	127	0,0	0,589	0,555	0,0	-0,563	-0,545
y	8	0,102	0,0	-0,074	0,309	0,0	-0,218
	38	0,269	0,0	-0,181	0,563	0,0	-0,368
	68	0,421	0,0	-0,273	0,377	0,0	-0,219
	98	0,533	0,0	-0,338	-0,127	0,0	0,114
	128	0,595	0,0	-0,371	-0,577	0,0	0,376

Tabela 6.4: Deslocamentos x e y ao longo de uma linha vertical de nós para os seis primeiros modos.

aumento maior da banda das matrizes. Para explicar esta última afirmativa, deve-se lembrar que alguns nós de patamares vizinhos se comunicam entre si; assim, colocando-se muitos nós em um mesmo patamar as diferenças entre as numerações das coordenadas destes nós resultariam maiores, ampliando tal banda. Para os modos de flexão na direção x (de números 2 e 5), as conclusões são completamente semelhantes, recomendando a colocação de atuadores entre os patamares 1 e 2 e entre 3 e 4. A primeira recomendação foi obedecida, com a conseqüente colocação do atuador III. Igualmente tendo em vista a economia de nós, o segundo atuador (de número IV), foi colocado entre os patamares 2 e 4. No caso dos dois modos de torção (de números 3 e 6), os maiores movimentos relativos foram respectivamente entre os patamares contíguos 1 e 2 e entre 3 e 4. Optou-se então em colocar atuadores entre tais patamares. Para controlar o modo 3 foram colocados os atuadores I e I', que respondem de forma idêntica, usando a disposição indicada na figura 6.2 para criar uma simetria que evite a excitação excessiva dos outros modos. Semelhantemente, para controlar o modo 6 foram considerados os atuadores VI e VI', também em disposição simétrica.

Tendo em vista a maior frequência natural (em torno de 10.000 Hz), quando da tentativa do uso método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem tentou-se inicialmente um $\Delta t = 0,00005$ s, que corresponde a uma frequência de amostragem de 20.000 Hz. Tendo ocorrido divergência no processo de integração, passou-se a $\Delta t = 0,000025$ s (40.000 Hz), o que resolveu o problema. Na substituição da integração numérica pelo uso da matriz de transição de estado, no intuito de controlar os seis primeiros modos de vibração, o critério do capítulo anterior sugere uma frequência de amostragem de 547,6 Hz (dez vezes a maior frequência natural a controlar, ver tabela 6.3). Preferiu-se entretanto tomar um valor redondo superior, qual seja, 1.000 Hz. Para um mesmo tempo total de duração das respostas (0,25 s, equivalente a três períodos da frequência natural mais baixa), a mudança do método de cálculo da resposta permitiu portanto uma grande

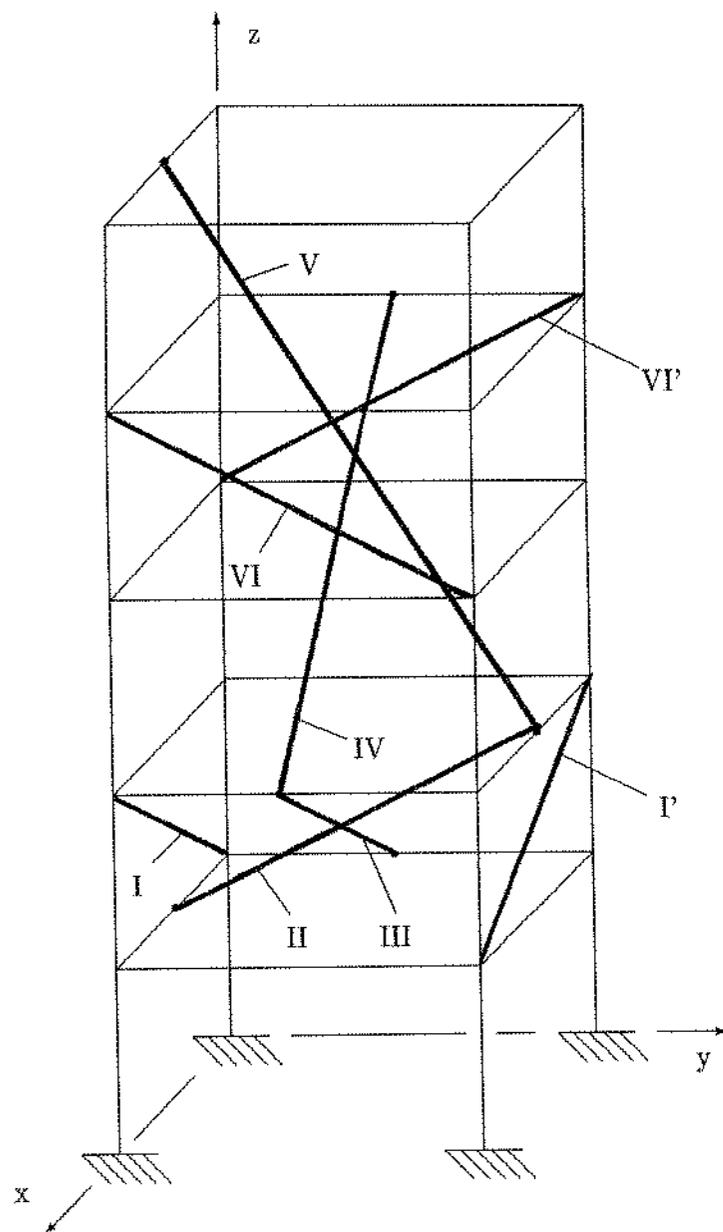


Figura 6.2: Linhas de ação dos atuadores.

diminuição no número de pontos em cada resposta: de 10.000 para 250.

As condições iniciais de deslocamentos e de velocidades foram obtidas considerando-se que a estrutura está deformada em função da aplicação de um conjunto de forças estáticas \mathbf{f}_e que instantaneamente deixam de atuar. As velocidades iniciais são portanto todas nulas, e o vetor de deslocamentos originais foi conseqüentemente igualado às deformações estáticas calculadas pelo produto $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_e$. O vetor de forças \mathbf{f}_e foi montado considerando-se a aplicação de forças com amplitude de $100N$ ao longo das coordenadas 56 e 151 e forças de $-100N$ nas coordenadas 61 e 146. Esta distribuição de forças favorece a excitação dos primeiros modos que se pretendem controlar.

No sentido de permitir uma visualização clara da atuação do controle na diminuição dos níveis de vibração da estrutura foram gerados três pares de respostas temporais (cada par contém uma resposta livre e outra controlada). As figuras 6.3 a 6.5 mostram então cada uma um par, correspondendo respectivamente aos movimentos do nó 26 nas direções x (coordenada 127), y (coordenada 128) e z (coordenada 129). Todas as curvas apresentam 250 pontos afastados por $\Delta t = 0,001 s$. Para as respostas controladas, o valor da ponderação de controle foi tomado igual para todos os modos, $R_r = 0,001$.

Percebe-se através das figuras 6.3 e 6.4 que as respostas livres nas direções x e y apresentavam componentes principais de baixas frequências, correspondentes aos modos controlados, os quais foram rapidamente atenuados pelo controle. A figura 6.5 apresenta curvas com níveis bem inferiores. Através da análise destas duas últimas curvas verifica-se que os componentes de baixas frequências foram novamente atenuados pelo controle, subsistindo aqueles de frequências mais elevadas.

6.2 Análise da influência de variações em parâmetros físicos da estrutura no desempenho do controle

Nesta seção introduzem-se variações aleatórias em parâmetros físicos da estrutura, visando quantificar a decorrente degradação do desempenho do controle aplicado à mesma. A intenção é simular as diferenças que naturalmente aparecem entre a estrutura real e o correspondente modelo matemático, este último criado a partir das especificações dimensionais e das propriedades dos materiais dos elementos que a compõem.

Como as variações aleatórias visaram atingir em especial a flexão dos elementos da estrutura, optou-se em fazê-las atuar sobre os seus momentos de inércia I . Foram criados conjuntos de valores com distribuição aproximadamente normal, com média nula e desvio padrão 0,5. Cada um destes conjuntos envolveu a superposição de 15 conjuntos de valores aleatórios com distribuição uniforme, estes criados segundo algoritmo sugerido por Kunt [47]. Com o valor de desvio padrão adotado dever-se-ia esperar que 95,4% dos valores caíssem na faixa $[-1; 1]$. Contudo, tendo em vista que as variações das dimensões físicas, na prática, não são excessivamente elevadas, os valores

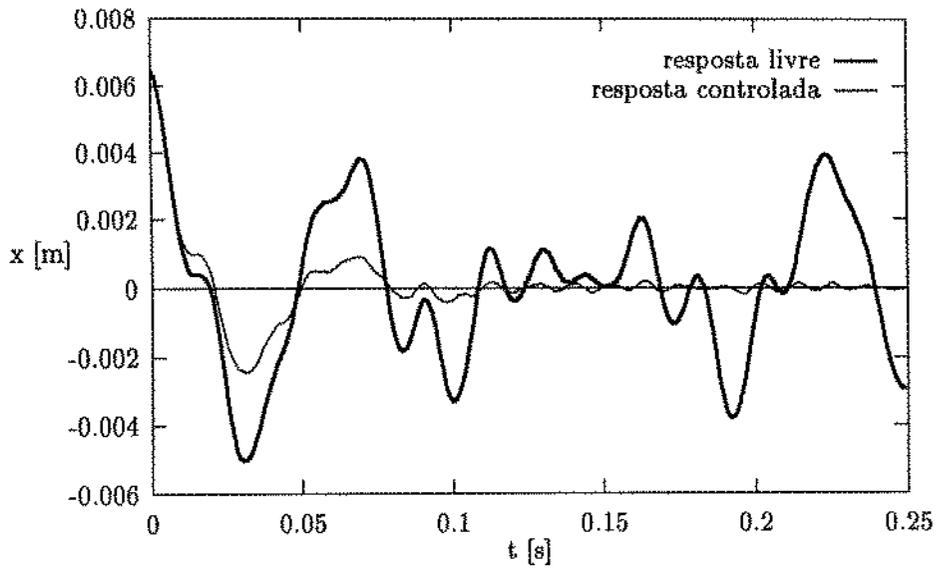


Figura 6.3: Respostas da estrutura segundo a coordenada 127.

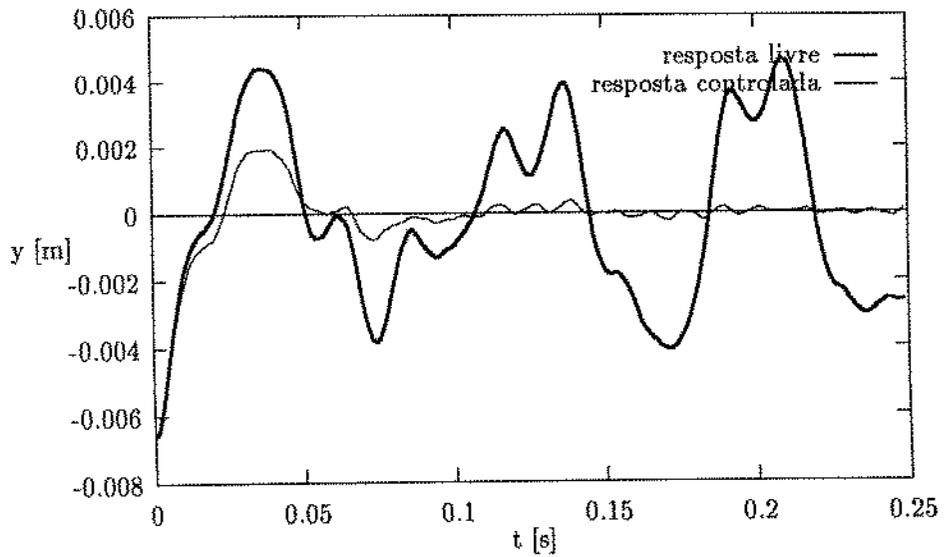


Figura 6.4: Respostas da estrutura segundo a coordenada 128.

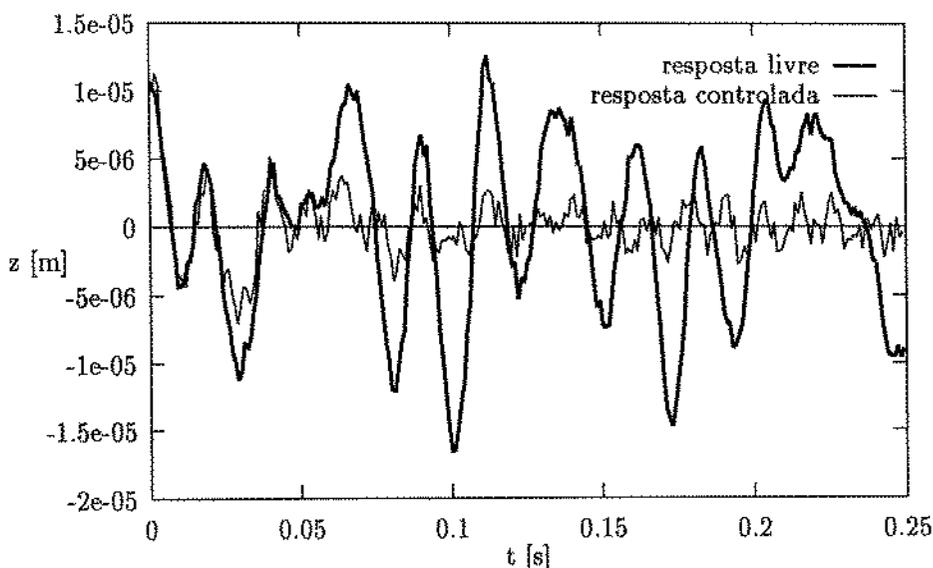


Figura 6.5: Respostas da estrutura segundo a coordenada 129.

que se situaram fora da faixa citada imediatamente acima foram descartados e substituídos por pontos adicionalmente gerados que recaem dentro da mesma. Os valores aleatórios finais serviram então de multiplicadores para os desvios máximos desejados nos valores de I : 5%, 10% e 20%. Para cada um destes percentuais foram criados 10 arquivos modificados a partir do arquivo referente à estrutura original. A tabela 6.5 apresenta as frequências naturais médias e os desvios padrão para as estruturas modificadas.

Analisando os instantes inicial e final da resposta livre da estrutura original, com relação ao período de 0,25s, verifica-se que a sua energia total foi reduzida de $0,592Nm$ para $0,489Nm$. No caso da resposta controlada tem-se a mesma energia total inicial, sendo que a parcela devida aos seis primeiros modos controlados é de $0,574Nm$ (os modos restantes são responsáveis por $0,0183Nm$). Após o mesmo período de 0,25s, a energia total se reduziu a $0,0198Nm$, da qual uma parcela quase insignificante ($8,98 \times 10^{-6}Nm$) se devia aos modos sob controle. Houve portanto uma ação efetiva do controle sobre os modos visados, embora através do “spillover” de controle tenha acontecido até mesmo um leve acréscimo na energia total dos modos não controlados. A tabela 6.6 mostra as alterações nos valores de energias finais para os sistemas que foram gerados pela adição de desvios.

Uma investigação interessante é também aquela que diz respeito às matrizes de ganhos de realimentação por modo \mathcal{G}_r (que na verdade neste caso são matrizes 1×2 na forma $\mathcal{G}_r = [G_{r1} \ G_{r2}]$, sendo G_{r1} o elemento que multiplica a r -ésima coordenada modal e G_{r2} aquele que multiplica a derivada temporal desta coordenada). Nas tabelas 6.7 e 6.8 estão mostrados respectivamente os valores médios e desvios padrão de G_{r1} e de G_{r2} para as estruturas original e com

Modo	Desvios máximos em I					
	5 %		10 %		20 %	
	$\bar{\omega}_n$	σ_ω	$\bar{\omega}_n$	σ_ω	$\bar{\omega}_n$	σ_ω
1	12,23	0,030	12,23	0,056	12,22	0,113
2	13,86	0,033	13,85	0,064	13,83	0,130
3	17,42	0,020	17,41	0,040	17,40	0,081
4	39,90	0,048	39,90	0,097	39,85	0,195
5	44,10	0,099	44,09	0,199	44,05	0,399
6	54,76	0,079	54,75	0,159	54,69	0,321

Tabela 6.5: Frequências naturais médias e desvios padrão (ambos em Hz) após aplicação de desvios.

Desvios máximos em I	Energia final total		Energia final dos modos controlados	
	\bar{x}	σ	\bar{x}	σ
0 %	$1,978 \times 10^{-2}$	-	$8,98 \times 10^{-6}$	-
5 %	$1,976 \times 10^{-2}$	$1,10 \times 10^{-4}$	$9,06 \times 10^{-6}$	$2,48 \times 10^{-7}$
10 %	$1,973 \times 10^{-2}$	$2,20 \times 10^{-4}$	$9,14 \times 10^{-6}$	$5,05 \times 10^{-7}$
20 %	$1,970 \times 10^{-2}$	$4,51 \times 10^{-4}$	$9,35 \times 10^{-6}$	$10,49 \times 10^{-7}$

Tabela 6.6: Energias finais, valores médios e desvios padrão (ambos em Nm), para o sistema original e após aplicação de desvios.

desvios.

Modo	Desvios máximos em I							
	0 %		5 %		10 %		20 %	
	G_{r_1}	\bar{G}_{r_1}	σ_G	\bar{G}_{r_1}	σ_G	\bar{G}_{r_1}	σ_G	
1	-342,8	-342,9	0,538	-342,9	1,015	-343,1	2,031	
2	-310,3	-310,5	0,710	-310,6	1,397	-311,2	2,818	
3	-220,3	-220,5	0,587	-220,5	1,157	-221,0	2,337	
4	873,6	873,7	3,29	873,4	6,60	870,7	13,23	
5	1174,	1174,	7,47	1174,	14,93	1171,	29,86	
6	2071,	2071,	7,36	2070,	14,79	2065,	29,78	

Tabela 6.7: Valores originais G_{r_1} e valores médios \bar{G}_{r_1} mais desvios padrão σ_G para a estrutura após a aplicação de desvios em I.

Modo	Desvios máximos em I							
	0 %		5 %		10 %		20 %	
	G_{r_2}	\bar{G}_{r_2}	σ_G ($\times 10^{-3}$)	\bar{G}_{r_2}	σ_G ($\times 10^{-3}$)	\bar{G}_{r_2}	σ_G ($\times 10^{-3}$)	
1	-42,77	-42,77	1,81	-42,77	3,41	-42,77	7,00	
2	-42,85	-42,85	1,32	-42,85	2,59	-42,85	5,23	
3	-42,95	-42,95	0,34	-42,94	0,68	-42,94	1,35	
4	-42,84	-42,84	0,73	-42,84	1,46	-42,84	2,92	
5	-42,77	-42,77	1,73	-42,77	3,45	-42,77	6,88	
6	-42,56	-42,56	1,80	-42,56	3,61	-42,56	7,26	

Tabela 6.8: Valores originais G_{r_2} e valores médios \bar{G}_{r_2} mais desvios padrão σ_G para a estrutura após a aplicação de desvios em I.

Pode-se verificar, através das tabelas 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8, que há uma relação praticamente linear entre os desvios máximos aplicados nos momentos de inércia I e os resultantes desvios padrão obtidos nas grandezas calculadas. Na comparação entre os modos, quando é o caso, verifica-se entretanto que o fator de proporcionalidade existente nestas relações se altera significativamente. Assim, analisando a tabela 6.5 por exemplo, o modo de número 3 (primeiro modo de torção) parece ser bem menos sensível que os demais às modificações introduzidas.

Com relação à tabela 6.5, verifica-se que há uma tendência de queda nas frequências naturais, o que se explica pelo fato de que estas grandezas são proporcionais às raízes quadradas

dos momentos de inércia I . Variações em I de +10% e -10% provocam, por exemplo, variações de +4,88% e -5,13% nas freqüências naturais. Tomando-se valores correspondentes a dois desvios padrão (a exemplo do que foi feito com as variações em I), verifica-se que no caso de desvio máximo de 10% em I obtém-se desvios máximos nas freqüências entre os valores 0,46% (3° modo) e 0,92% (1° modo).

A tabela 6.6 mostra que praticamente não há variação na energia total final do sistema controlado. Há contudo uma razoável variação na energia final dos modos controlados. Para desvio máximo de 10% em I , verifica-se um desvio máximo da ordem de 11% nesta grandeza. Este último desvio foi obtido pelo cálculo do percentual que dois desvios padrão representam em relação ao valor médio, denominado daqui para a frente de "critério 2σ ". Procura-se desta forma quantificar a variação nos resultados de maneira semelhante à aplicada quando da geração dos parâmetros físicos aleatórios.

As tabelas 6.7 e 6.8 mostram comportamentos globais diferentes para G_{r_1} e G_{r_2} ; o primeiro termo (associado aos deslocamentos) assume valores bastantes distintos para os vários modos enquanto o segundo (associado às velocidades) se mantém praticamente constante. Pelo critério 2σ as variações máximas de G_{r_1} se situam entre 0,59% (1° modo) e 2,54% (5° modo) para uma variação máxima de 10% em I . Nos mesmos termos, para G_{r_2} a variação se dá entre 0,00314% (3° modo) e 0,01695% (6° modo). Apesar de os valores de G_{r_2} pouco variarem entre os seis modos, é interessante verificar que os seus desvios padrão são maiores quanto mais os correspondentes valores de G_{r_1} se afastam da transição entre valores positivos e negativos (ver tabela 6.7).

As conclusões a seguir, salvo menção em contrário, estão baseadas em dados apresentados anteriormente sob a condição de desvio máximo de 10% para I .

A variação máxima das freqüências naturais (aproximadamente de 0,5% a 1,0%) mostra que os seus valores não se alteram significativamente, o que era de se esperar tendo em vista que a aplicação aleatória dos desvios aos elementos permite que de certa forma os efeitos se compensem mutuamente. Vale lembrar que estas freqüências são elementos importantes na composição das matrizes que permitem calcular os ganhos de realimentação.

Quanto às energias totais finais dos modos controlados (ver tabela 6.6), o aumento dos seus valores é um comportamento óbvio, pois um sistema de controle baseado em uma estrutura alterada não resulta tão "afinado", de forma que na estrutura original a energia de tais modos não será reduzida tão efetivamente.

Os ganhos de realimentação é que permitem, realmente, o cálculo das cargas de realimentação, sendo portanto muito importantes no processo de controle. Não garantem sozinhos, entretanto, a qualidade do processo, visto que existem duas transformações, uma antes do seu uso (passagem das coordenadas físicas para as coordenadas modais) e outra após (passagem das cargas modais para as cargas físicas) que também são importantes, e que normalmente dependem dos autovetores dos modos controlados. Em vista da importância dos ganhos, a tabela 6.8 apresenta valores muito otimistas com relação a G_{r_2} , pois estes apresentam desvios padrão bastante reduzidos

(o máximo desvio chegou a 0,01695%). Já o mesmo não se pode falar com respeito aos valores correspondentes a G_{r_1} (tabela 6.7), cujo desvio máximo chegou aos 2,54%, o qual entretanto não chega a comprometer os resultados. Prova disto é que, uma vez traçadas as curvas de resposta referentes aos sistemas que apresentaram maiores discrepâncias (no caso do desvio máximo de I igual a 20%), praticamente elas se sobrepuseram, sem apresentar diferenças visíveis.

6.3 Análise da influência de variações em parâmetros modais no desempenho do controle

Esta seção visa analisar as conseqüências da introdução de erros aleatórios em parâmetros modais da estrutura, quais sejam, as freqüências naturais (ω_r), os coeficientes adimensionais de amortecimento (ξ_r) e os autovetores (ϕ_r). Pretende-se com isto simular os desvios que surgem entre a estrutura real e o modelo modal, admitindo-se que este tenha sido obtido experimentalmente.

Para a aplicação dos erros, o primeiro passo foi a geração dos valores originais através do programa CEXPMCPK. Os valores originais referem-se aos seis primeiros modos da estrutura, aqueles que estão sendo controlados. Em um arquivo foram armazenados os valores resultantes da diagonalização das matrizes K e C , que são os valores de ω_r^2 e de $2\xi_r\omega_r$. Em outro arquivo foram armazenados os valores dos autovetores ϕ_r . Cada arquivo destes deu origem a trinta novos arquivos, através da aplicação de desvios aleatórios. Foram calculados os valores de ω_r , sobre os quais foram aplicados desvios de, no máximo, 1%. Aos valores de $2\xi_r\omega_r$ foram aplicados os desvios que seriam aplicados a ξ_r , de 20% no máximo. Finalmente aos valores que compõem os autovetores foram aplicados desvios aleatórios de, no máximo, 5%. Os percentuais de erro acima aplicados representam valores coerentes com os desvios normalmente obtidos naqueles parâmetros em experimentos de análise modal.

Os arquivos contendo os dados modais alterados foram utilizados para gerar respostas controladas pelo mesmo programa CEXPMCPK. A energia total final e a soma das energias totais finais dos modos controlados podem ser tomadas como parâmetros de avaliação do desempenho do controle. A energia total final média calculada com base nos trinta valores resultantes foi de $0,0205Nm$ (contra $0,0198Nm$ do sistema original) e o desvio padrão foi de $0,00122Nm$. Quanto à soma das energias totais finais dos modos controlados, o valor médio foi de $1,000 \times 10^{-5}Nm$ (contra $0,898 \times 10^{-5}Nm$ do sistema original) e o desvio padrão de $0,196 \times 10^{-5}Nm$.

A resposta dos ganhos de realimentação à introdução dos desvios nos parâmetros modais pode ser observada através da tabela 6.9.

Novamente os valores de G_{r_2} se mostraram semelhantes entre os modos. Verifica-se também que os valores médios se aproximam bastante dos valores obtidos para o sistema não controlado. Além disto, os desvios padrão são de pequena monta em relação às grandezas de referência, especialmente no caso de G_{r_2} . Em conseqüência a estas observações, lembrando ainda

Modo	G_{r_1}			G_{r_2}		
	Valor Original	Valor Médio	Desvio Padrão	Valor Original	Valor Médio	Desvio Padrão
1	-342,8	-343,2	0,897	-42,77	-42,76	0,0682
2	-310,3	-310,2	1,606	-42,85	-42,84	0,0665
3	-220,3	-220,3	2,060	-42,95	-42,96	0,0717
4	873,6	877,4	15,17	-42,84	-42,84	0,0719
5	1174,	1170,	17,24	-42,77	-42,75	0,0573
6	2071,	2066,	27,01	-42,56	-42,55	0,0639

Tabela 6.9: Valores originais de G_{r_1} e de G_{r_2} , acompanhados de valores médios e desvios padrão após a aplicação de desvios nos parâmetros modais.

que com relação às energias as variações foram igualmente baixas, pode-se dizer que o controle se mostrou bastante robusto quanto aos desvios aplicados nos parâmetros modais.

Capítulo 7

APLICAÇÃO DO CONTROLE - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO NÃO DIAGONALIZÁVEL

O presente capítulo visa analisar as conseqüências da presença de amortecimento não diagonalizável sobre o comportamento do sistema de controle ativo de vibrações de uma estrutura flexível.

Inicialmente é descrita a estrutura utilizada nas simulações de controle. A seguir descreve-se a aplicação de tais simulações e apresentam-se os resultados e sua análise. Nas simulações são comparados os desempenhos de dois sistemas de controle: controle individual dos modos, admitindo-se amortecimento diagonalizável, e controle conjunto dos modos, admitindo-se amortecimento não diagonalizável.

7.1 Modelo Físico

A estrutura neste caso é plana (ver figura 7.1), tendo sido tomada a lateral de menor largura da estrutura apresentada no capítulo anterior. As vibrações são admitidas no mesmo plano da estrutura. A altura total da estrutura é de 1,5 m e a largura 0,4 m. Propriedades geométricas e físicas dos elementos: área transversal $A = 4,82 \times 10^{-5} m^2$, momento de inércia $I = 8,49 \times 10^{-10} m^4$, densidade $\rho = 7,8 \times 10^3 kg/m^3$ e módulo de elasticidade $E = 2,07 \times 10^{11} N/m^2$.

Após descontados os nós fixos da base (de números 1 e 2), a estrutura foi modelada com dez nós com movimentos livres (uniões entre vigas). Considerando que há três graus de liberdade por nó, tem-se conseqüentemente um modelo com um total de trinta graus de liberdade.

Capítulo 7

APLICAÇÃO DO CONTROLE - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO NÃO DIAGONALIZÁVEL

O presente capítulo visa analisar as conseqüências da presença de amortecimento não diagonalizável sobre o comportamento do sistema de controle ativo de vibrações de uma estrutura flexível.

Inicialmente é descrita a estrutura utilizada nas simulações de controle. A seguir descreve-se a aplicação de tais simulações e apresentam-se os resultados e sua análise. Nas simulações são comparados os desempenhos de dois sistemas de controle: controle individual dos modos, admitindo-se amortecimento diagonalizável, e controle conjunto dos modos, admitindo-se amortecimento não diagonalizável.

7.1 Modelo Físico

A estrutura neste caso é plana (ver figura 7.1), tendo sido tomada a lateral de menor largura da estrutura apresentada no capítulo anterior. As vibrações são admitidas no mesmo plano da estrutura. A altura total da estrutura é de 1,5 m e a largura 0,4 m. Propriedades geométricas e físicas dos elementos: área transversal $A = 4,82 \times 10^{-5} m^2$, momento de inércia $I = 8,49 \times 10^{-10} m^4$, densidade $\rho = 7,8 \times 10^3 kg/m^3$ e módulo de elasticidade $E = 2,07 \times 10^{11} N/m^2$.

Após descontados os nós fixos da base (de números 1 e 2), a estrutura foi modelada com dez nós com movimentos livres (uniões entre vigas). Considerando que há três graus de liberdade por nó, tem-se conseqüentemente um modelo com um total de trinta graus de liberdade.

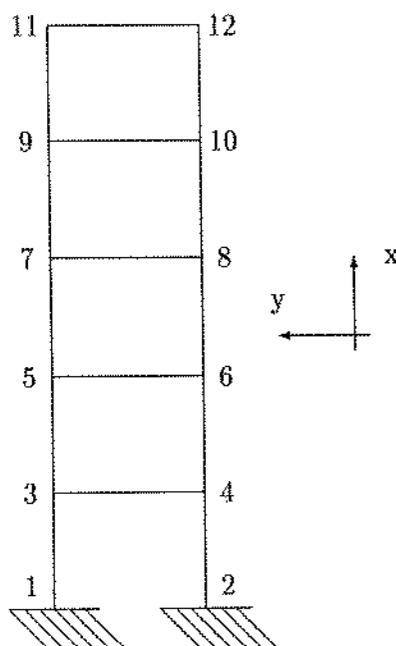


Figura 7.1: Estrutura plana.

A incidência das coordenadas nos nós está dada na tabela 7.1. O uso de numeração negativa se dá para as coordenadas que serão bloqueadas.

Nó	N ^{os} das coordenadas			Nó	N ^{os} das coordenadas		
	x	y	θ_z		x	y	θ_z
1	-1	-2	-3	7	13	14	15
2	-4	-5	-6	8	16	17	18
3	1	2	3	9	19	20	21
4	4	5	6	10	22	23	24
5	7	8	9	11	25	26	27
6	10	11	12	12	28	29	30

Tabela 7.1: Incidência das coordenadas nos nós segundo as várias direções.

A incidência dos nós nos quinze elementos da estrutura é fornecida na tabela 7.2.

As matrizes de massa e de rigidez da estrutura foram obtidas com o auxílio do programa TREDINA.M, escrito com comandos pertencentes ao ambiente MATLAB. Este programa utiliza as funções FRAMEL.M, FRAMMS.M, ADDMAT.M e RMVSM.M, escritas na mesma linguagem, adaptadas do programa de elementos finitos ISMIS [46]. O programa e as funções estão listados no Apêndice D.

Elemento	Números dos nós		Elemento	Números dos nós		Elemento	Números dos nós	
1	1	3	6	5	6	11	8	10
2	2	4	7	5	7	12	9	10
3	3	4	8	6	8	13	9	11
4	3	5	9	7	8	14	10	12
5	4	6	10	7	9	15	11	12

Tabela 7.2: Incidência dos nós nos elementos.

De posse das matrizes de massa e de rigidez foi possível determinar os autovalores e autovetores reais da estrutura não amortecida. Os cinco primeiros modos de vibração são de “flexão”, isto é, a estrutura vibra lateralmente de forma semelhante a uma viga engastada-livre. As frequências naturais não amortecidas destes modos são: 18,00; 57,88; 107,2; 165,5 e 221,5 *Hz*. A mais alta frequência natural resultou em 6.634 *Hz*.

Decidiu-se controlar os quatro primeiros modos, através dos atuadores I a IV cujas linhas de ação estão mostradas na figura 7.2, utilizando-se portanto forças “internas”.

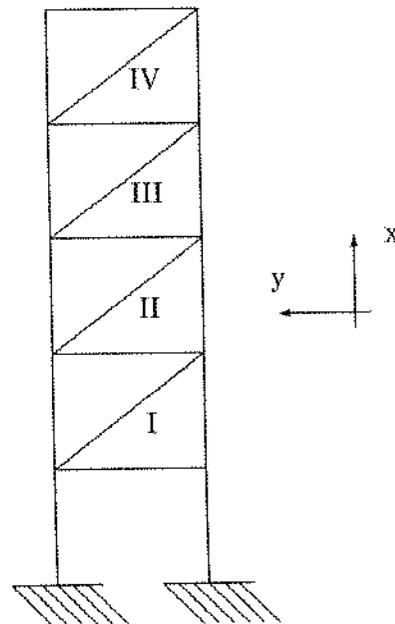


Figura 7.2: Linhas de ação dos atuadores.

A frequência de digitalização deve ser aproximadamente igual a dez vezes a mais alta frequência a controlar (cujo valor é 165,5 *Hz*), portanto em torno de 1.655 *Hz*. O correspon-

dente intervalo de amostragem seria então de aproximadamente 0,0006 s, o qual foi arredondado para 0,0005 s. No cálculo das respostas temporais foram tomados 300 pontos, o que fornece conseqüentemente um tempo total de resposta de 0,15 s, suficiente para serem observados em torno de três períodos da mais baixa freqüência natural (18,00 Hz).

Ainda com relação às respostas, elas têm início em condições iniciais estáticas, sendo os deslocamentos provocados por um conjunto de forças aplicados à estrutura. Tal conjunto permite uma participação equilibrada entre os quatro primeiros modos de vibração no início do movimento. As forças foram aplicadas horizontalmente nos nós livres que se situam à direita da estrutura (ver figura 7.1), portanto segundo as coordenadas 5, 11, 17, 23 e 29, com valores respectivamente de -800, -100, 1350, -1000 e 200 N.

7.2 Geração das Matrizes de Amortecimento

O amortecimento original da estrutura foi admitido como sendo do tipo proporcional, tomando-se a matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa $\mathbf{C} = 1,13 \mathbf{M}$. Com esta matriz de amortecimento obteve-se um coeficiente adimensional de amortecimento para o primeiro modo $\xi_1 = 0,005$. Para os outros modos tal coeficiente decresce, pois ele é inversamente proporcional à freqüência natural (ver tabela 7.3). A matriz assim obtida vai ser referida, daqui para a frente, como \mathbf{CP} .

Para tornar a matriz \mathbf{CP} não diagonalizável, foi gerada uma matriz de adição \mathbf{CP}_{dif} , cuja obtenção é descrita logo à frente.

Se um amortecedor viscoso transversal, de coeficiente c_t , é aplicado a um elemento cujas coordenadas transversais de suas extremidades são numeradas por n_1 e n_2 , a matriz de amortecimento global \mathbf{C} vai receber um acréscimo de c_t nas posições (n_1, n_1) e (n_2, n_2) ; e um decréscimo de mesmo valor nas posições (n_1, n_2) e (n_2, n_1) .

A matriz \mathbf{CP}_{dif} é obtida adicionando-se um amortecedor transversal aos elementos 4, 5, 10 e 11 da estrutura. A escolha deste tipo de amortecedor deveu-se à natureza dos quatro modos sob controle, que provocam flexão de tais elementos. Tendo em vista os elementos da estrutura que foram escolhidos, a matriz \mathbf{C} vai portanto ser alterada nas colunas e linhas correspondentes às coordenadas 2, 8, 5, 11, 14, 20, 17 e 23, ou seja, as coordenadas transversais dos mesmos, na direção y . Os elementos da diagonal principal de \mathbf{CP} , nas colunas recém citadas, possuem um valor médio 0,15, portanto este foi o valor adotado para c_t , para todos os quatro amortecedores. Tomando-se em conjunto as contribuições dos quatro amortecedores, obtém-se \mathbf{CP}_{dif} . Somando-se a matriz \mathbf{CP}_{dif} uma, dez ou cem vezes à matriz \mathbf{CP} , são obtidas respectivamente as matrizes $\mathbf{CP1}$, $\mathbf{CP10}$ e $\mathbf{CP100}$.

Diagonalizando-se a matriz \mathbf{CP} , dividindo-se os valores da diagonal por duas vezes a freqüência natural angular do modo correspondente, são obtidos os coeficientes adimensionais

de amortecimento dos modos ξ_r . As matrizes **CP1**, **CP10** e **CP100** não são diagonalizáveis, mas o procedimento que acabou de ser utilizado para **CP** é aplicado às mesmas, definindo-se um coeficiente “equivalente” $\hat{\xi}_r$. Estes valores são utilizados no cálculo dos ganhos de realimentação quando uma matriz de amortecimento não diagonalizável é aqui manipulada por um sistema de controle individual dos modos, que pressupõe que tal matriz seja diagonalizável. Os valores de ξ_r e $\hat{\xi}_r$, assim obtidos estão listados na tabela 7.3.

Matriz	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo
CP (ξ_r)	0,00500	0,00155	0,00084	0,00054
CP1 ($\hat{\xi}_r$)	0,00517	0,00200	0,00092	0,00124
CP10 ($\hat{\xi}_r$)	0,00673	0,00606	0,00161	0,00747
CP100 ($\hat{\xi}_r$)	0,02236	0,04567	0,00860	0,06980

Tabela 7.3: Coeficientes adimensionais de amortecimento dos modos sob controle.

Para se obter uma noção de quanto as matrizes **CP1**, **CP10** e **CP100** são não diagonalizáveis, as mesmas foram submetidas às multiplicações por autovetores que diagonalizariam a matriz **CP**. As matrizes resultado foram normalizadas de forma que as diagonais principais resultaram unitárias. Foram então determinados os maiores valores absolutos dos elementos fora das diagonais, que se apresentaram respectivamente da seguinte forma: 0,539, 0,916 e 0,986. Através da geração de algumas outras matrizes não diagonalizáveis, semelhantes às citadas neste parágrafo, verificou-se que existe uma tendência assintótica em direção ao valor unitário deste parâmetro quando aumenta a presença de amortecimento não diagonalizável.

7.3 Aplicação dos Testes

Para a aplicação dos teste foram desenvolvidos dois programas principais que são utilizados em ambiente MATLAB.

O primeiro programa, contido no arquivo CONMIMCK.M que se encontra listado no apêndice E, aplica o controle individual de vibração aos modos, a tempo discreto, com horizonte de tempo infinito (ver seção 3.5), admitindo que a matriz de amortecimento é diagonalizável. Se ao programa é fornecida uma matriz de amortecimento não diagonalizável, ela é respeitada quando se simula a dinâmica da estrutura. Entretanto, os cálculos dos ganhos de realimentação, das coordenadas modais, e conseqüentemente das forças modais e físicas (em resumo, a aplicação do controle), são realizados considerando-se que a matriz é diagonalizável. O programa CONMIMCK.M deve ser acompanhado das funções GASIDINF.M (já apresentada em capítulo anterior e listada no apêndice C) e ORDVLVT.M (que ordena autovalores e correspondentes autovetores, todos reais, listada no apêndice E).

O segundo programa, bastante semelhante, aplica o controle conjunto aos modos, também a tempo discreto e com horizonte de tempo infinito, admitindo que a matriz de amortecimento seja não diagonalizável. O arquivo correspondente é `CONTMCK.M`, listado no apêndice E. Requer novamente a função `GASIDINF.M`, bem como as funções `TN.M` (que gera a matriz **T**, ver seção 3.3) e `ORDPARCO.M` (semelhante a `ORDVLVT.M`, recentemente comentada, porém ordenando autovalores e autovetores complexos). Estas duas últimas funções também encontram-se listadas no apêndice E.

Ambos os programas principais vão requisitando as informações necessárias enquanto rodam. Inicialmente é definida a dimensão das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez e, a seguir, estas matrizes devem ser fornecidas. O próximo passo é informar dados sobre as respostas temporais que serão geradas: intervalo temporal, número de pontos e quais as coordenadas que terão as respostas armazenadas. Em seguida são necessárias informações sobre o controle: a forma de distribuição das cargas de controle (matriz **D**) e o valor da ponderação de controle R_r , constante para todos os modos. São então apresentados gráficos comparando as respostas livre e controlada para cada coordenada pré-selecionada. As respostas controladas podem ser recalculadas para outro valor de R_r , se desejado. Caso contrário o programa se encaminha para o fim, mostrando na tela informações sobre as energias ao início e final das respostas, bem como sobre o valor do funcional que foi minimizado.

As respostas foram calculadas inicialmente para amortecimento nulo e utilizando-se a matriz de amortecimento proporcional **CP**. Obviamente os resultados obtidos por ambos os programas (`CONMIMCK.M` e `CONTMCK.M`) nestes casos são idênticos, visto que as matrizes de amortecimento são diagonalizáveis. A seguir as respostas foram geradas por ambos os programas utilizando-se as matrizes **CP1**, **CP10** e **CP100**. Foram armazenadas e serão apresentadas as respostas apenas do deslocamento horizontal do nó 12, ou seja, da coordenada 29. A escolha recaiu sobre esta única coordenada em virtude da natureza dos modos controlados, que fazem com que a estrutura apresente basicamente movimentos horizontais, especialmente na sua parte superior.

7.4 Apresentação e Análise dos Resultados

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos admitindo-se a mesma ponderação de controle para todos os quatro modos: $R_r = 0,002$. Este valor permite que se observe uma razoável diferença entre as respostas livre e controlada, sem no entanto produzir um decaimento excessivo. É importante lembrar que R_r pondera, no funcional a ser minimizado, a parcela de energia gasta com o controle. Portanto, quanto menor o valor de R_r , menor é a participação desta energia no funcional, e conseqüentemente pode-se gastá-la mais livremente, permitindo uma redução mais rápida das vibrações.

A tabela 7.4 a seguir apresenta as energias totais do sistema ao início das respostas (no caso, só energia potencial) e ao final das respostas livres e controladas, calculada por ambos os

programas: CONMIMCK.M e CONTMCK.M. No caso do programa CONTMCK.M as energias totais são calculadas de duas formas, uma exata (usando as matrizes globais de massa e de rigidez) e outra aproximada (usando as propriedades modais, ver discussão acerca do funcional a minimizar na seção 3.3). Novamente nos casos em que o amortecimento é nulo ou proporcional não há diferenças entre os resultados dos dois programas.

Matriz de Amortecimento	Energia Inicial	Programa CONMIMCK.M		Programa CONTMCK.M			
		Energia Final		Energia Final Exata		Energia Final Aproximada	
		Livre	Controlada	Livre	Controlada	Livre	Controlada
Nula	6,382	6,382	0,923	6,382	0,923	6,382	0,923
CP	6,382	5,392	0,787	5,392	0,787	5,392	0,787
CP1	6,382	4,688	0,601	4,688	0,605	4,686	0,605
CP10	6,382	2,150	0,0992	2,150	0,1014	2,147	0,1011
CP100	6,382	0,4648	0,0225	0,4648	0,0227	0,4680	0,0229

Tabela 7.4: Energias totais (Nm) do sistema.

Com relação à tabela 7.4, obviamente o acréscimo de amortecimento reduziu as energias finais, tanto nas respostas livres como nas controladas. É interessante verificar, também, que o acréscimo de amortecimento alavanca a atuação do controle. De fato, no caso das respostas livres a relação entre as energias finais máxima e mínima se situa em torno de 13,7, ao passo que para as respostas controladas a relação é aproximadamente igual a 40,5. Este é um fenômeno que merece ser melhor estudado. A comparação entre as energias exata e aproximada mostra que a diferença entre elas é, na prática, desprezível (sempre inferior a 1%, mesmo no pior caso, no qual se usa CP100). Na comparação entre resultados dos programas CONMIMCK.M e CONTMCK.M verifica-se que os desvios são muito pequenos, chegando no máximo a quase 2%.

Já na tabela 7.5 são apresentados os valores dos funcionais que estão sujeitos à minimização. No caso do programa CONMIMCK.M o funcional inclui a energia exata dos modos controlados (se a matriz de amortecimento é realmente diagonalizável), ao passo que em CONTMCK.M utiliza-se a energia aproximada.

O funcional minimizado envolve o somatório, em todos os instantes, das energias potencial e cinética dos modos controlados, mais a energia gasta no controle. Daí, novamente, ser óbvio que a adição de amortecimento provoque a queda do seu valor. Entretanto, a maior diferença entre os valores dos funcionais obtidos através dos programas CONMIMCK.M e CONTMCK.M, ocorrida para CP100, não chega a atingir 1%.

As tabelas 7.6 e 7.7 apresentam ganhos de realimentação obtidos utilizando-se a matriz

Matriz de Amortecimento	Programa CONMIMCK.M	Programa CONTMCK.M
Nula	697,8	697,8
CP	673,3	673,3
CP1	656,0	656,0
CP10	533,9	534,2
CP100	259,4	261,4

Tabela 7.5: Valores do funcional minimizado (Nm).

de amortecimento não diagonalizável CP1. Na tabela 7.6 são agrupados os ganhos dos quatro modos sob controle, obtidos com o programa CONMIMCK.N, cada linha correspondendo a um modo. Já a tabela 7.7 apresenta a matriz global de ganhos dos quatro modos, obtida por CONTMCK.M.

-148,90	-30,209
745,03	-29,888
3.173,2	-29,797
7.510,5	-27,984

Tabela 7.6: Matriz dos ganhos de realimentação, uma linha para cada modo, usando a matriz CP1 e o programa CONMIMCK.M.

-148,12	8,86	-2,82	69,03	-30,21	0,00	0,00	0,02
-0,23	741,73	-5,84	-5,62	0,00	-29,89	0,00	0,00
0,16	4,04	3.172,57	34,12	0,00	0,00	-29,80	0,01
-0,09	-3,87	-7,60	7.501,31	0,00	0,00	0,00	-27,99

Tabela 7.7: Matriz global dos ganhos de realimentação, usando a matriz CP1 e o programa CONTMCK.M.

As tabelas 7.8 e 7.9 são semelhantes às tabelas 7.6 e 7.7, recaindo a diferença na matriz de amortecimento utilizada, no caso CP100.

No caso em que a presença de amortecimento não diagonalizável não é acentuada (uso de CP1), pode-se constatar que os valores da primeira coluna da tabela 7.6 são essencialmente iguais aos valores da diagonal principal da matriz formada pelas quatro primeiras colunas da matriz da tabela 7.7. Uma semelhança ainda maior ocorre entre a segunda coluna da tabela 7.6 e a diagonal principal das quatro últimas colunas da tabela 7.7. Verifica-se também, coluna por coluna, que os

-160,25	-26,729
161,37	-12,316
2.235,8	-21,620
649,72	-3,1912

Tabela 7.8: Matriz dos ganhos de realimentação, uma linha para cada modo, usando a matriz CP100 e o programa CONMIMCK.M.

-90,52	359,37	207,18	-793,24	-26,74	-0,03	0,04	-0,13
-19,78	26,66	425,23	61,08	-0,09	-12,29	0,08	0,01
-13,74	-165,93	2.187,85	389,74	-0,02	-0,05	-21,66	0,06
7,41	161,21	-571,61	532,68	0,02	0,02	-0,16	-3,21

Tabela 7.9: Matriz global dos ganhos de realimentação, usando a matriz CP100 e o programa CONTMCK.M.

valores da tabela 7.7 que não se situam nas diagonais citadas são bastante inferiores aos valores destas diagonais, especialmente para as últimas quatro colunas. Estas constatações vem mostrar que, neste caso, as soluções foram praticamente idênticas, o controle conjunto de CONTMCK.M sendo basicamente uma superposição dos controles individuais de CONMIMCK.M.

Transportando a análise do parágrafo anterior para as tabelas 7.8 e 7.9, verifica-se que já não se mantém a semelhança entre todos os termos da primeira coluna da tabela 7.8 e a diagonal principal das quatro primeiras colunas da tabela 7.9. Além disso, aparecem valores significativos fora da diagonal principal, para estas quatro primeiras colunas, demonstrando neste caso um forte acoplamento entre os modos quando se usa a matriz CP100.

Uma conclusão que vale para ambos os casos (uso de CP1 e CP100), quando se analisam os ganhos, é a de que a realimentação das derivadas temporais das coordenadas modais (e das grandezas semelhantes, no caso de CONTMCK.M) se mantém praticamente inalterada.

A figura 7.3 mostra duas curvas que representam as respostas livre e controlada, segundo a coordenada 29, com a utilização da matriz de amortecimento CP1, através do programa CONTMCK.M que prevê a utilização de amortecimento não diagonalizável, que é o caso. As curvas da figura 7.4 foram obtidas de forma semelhante às da figura 7.3, apenas trocando-se CP1 por CP100. Como as respostas obtidas pelo programa CONMIMCK.M, para os mesmos casos, diferem de forma muito leve, elas não são apresentadas.

Pela análise das figuras 7.3 e 7.4 pode-se observar que o controle efetivamente reduz as vibrações do sistema. Na figura 7.3 percebe-se que na resposta controlada há vibração residual

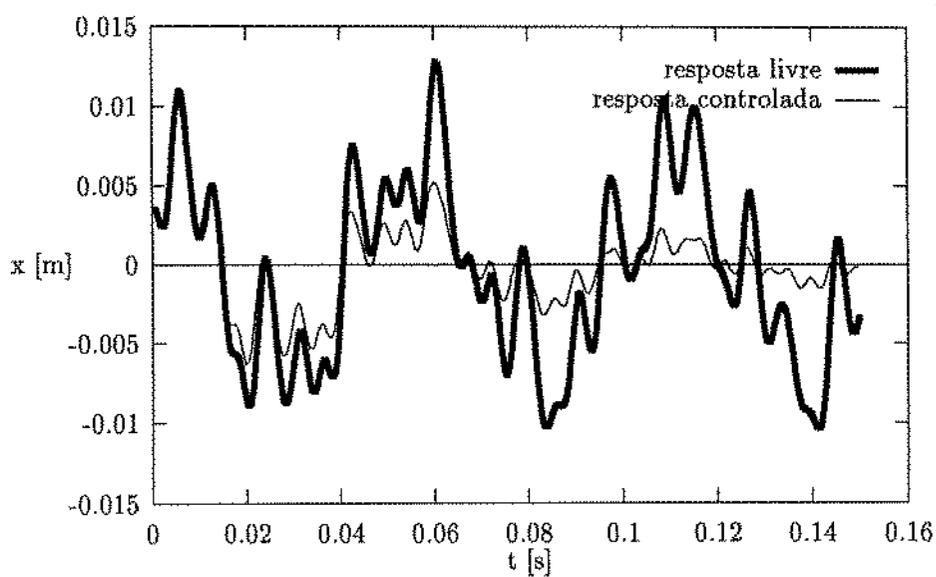


Figura 7.3: Respostas segundo a coordenada 29, matriz de amortecimento CP1.

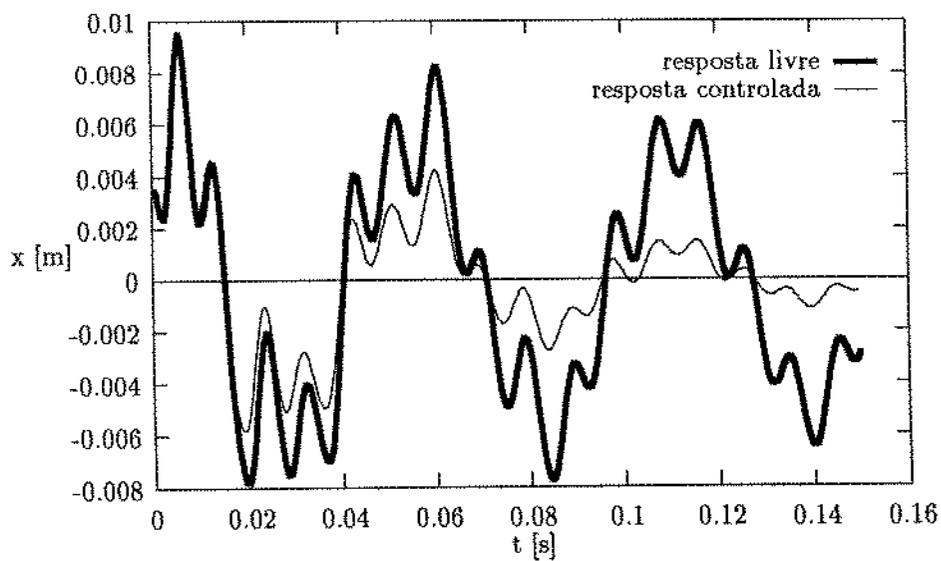


Figura 7.4: Respostas segundo a coordenada 29, matriz de amortecimento CP100.

a qual, através do cálculo aproximado da frequência, verifica-se ser relativa ao quinto modo, o primeiro dos não controlados. Este fato não se repete na figura 7.4, pois o amortecimento elevado reduz naturalmente as amplitudes de vibração do quinto modo. Nesta figura, entretanto, percebe-se claramente a presença do terceiro modo. Isto se explica pelo fato de que o terceiro modo, dentre os controlados, foi o que apresentou o menor aumento de amortecimento (ver tabela 7.3) com o acréscimo crescente de elementos não diagonalizáveis. Assim, para o terceiro modo, não ocorreu de forma tão acentuada a benéfica combinação de amortecimento elevado mais controle, e as suas vibrações não foram reduzidas de forma tão efetiva.

Tendo em vista todas as análises acima efetuadas, chega-se à conclusão de que a diferença entre os resultados obtidos, considerando que o amortecimento é diagonalizável ou não, é muito pequena. Pode-se admitir, então, que a teoria de controle independente dos modos, supondo que o amortecimento seja diagonalizável, possa ser utilizada em casos de amortecimento não diagonalizável, desde que se estabeleçam coeficientes de amortecimento modal equivalentes.

Capítulo 8

CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Analisa-se de início a obtenção das coordenadas modais. Descartada a hipótese da filtragem temporal, tendo em vista a série de problemas da qual ela normalmente vem acompanhada, sobram duas alternativas: a filtragem espacial e o uso de observador. A filtragem espacial se mostra, na prática, um processo extremamente atraente, pois as coordenadas modais podem ser obtidas por uma simples multiplicação de um vetor instantâneo de medições por uma matriz de coeficientes previamente definida, de forma semelhante à equação (2.32). É portanto um processo rápido, adequado à necessária utilização "on-line". Vale lembrar que a teoria dos vetores recíprocos já permite, atualmente, que a tal matriz de coeficientes possa ser diretamente gerada a partir das funções resposta em frequência obtidas experimentalmente. No caso do uso de observador, após a transformação da equação diferencial (2.75) em equação a diferenças, deve-se notar que a estimativa de novas coordenadas modais depende não só do vetor de medições, mas também das coordenadas modais estimadas do momento anterior, o que acarreta maior custo computacional. Uma outra desvantagem do observador, que entretanto pode ser minimizada através de uma apurada estabilização do mesmo (escolha da matriz K_m na equação (2.75)), é a existência de um período inicial (que pode ser bastante curto) em que as grandezas estimadas vão progressivamente convergindo às grandezas reais. Por outro lado o observador possui uma vantagem em especial, que é a possibilidade de estimar um número de coordenadas modais maior que o número de pontos de medição na estrutura, desde que estes tenham sido adequadamente escolhidos. Esta vantagem é ainda mais significativa quando se percebe que o observador pode ser aplicado diretamente sobre sinais de deslocamento ou de velocidade (ou ainda da mistura de deslocamento com velocidade), ao passo que para a utilização de filtros modais são exigidos sinais de deslocamento e velocidade, o que implica em geral na incômoda derivação ou integração dos sinais. Uma preocupação final é quanto às possíveis defasagens (retardos temporais) incorporadas às coordenadas modais durante o processo de sua obtenção, e que devem ser devidamente compensadas.

Quanto às teorias de controle, foram apresentadas as convencionais que permitem apli-

car o controle individual ou conjunto dos modos. A matriz de distribuição de forças reais D , introduzida através da equação (3.1), permite que sejam utilizadas forças internas de controle, visto que através de D uma mesma força real pode ser aplicada ao longo de mais de um grau de liberdade da estrutura. O controle modal individual permite que a minimização do funcional do problema de controle ótimo se dê sempre da forma mais efetiva, além de impor um custo computacional inferior por tratar os modos isoladamente (quando estão envolvidas manipulações de matrizes, de uma forma geral é mais eficiente, quando possível, tratar de m problemas de ordem 2 do que um problema de ordem $2m$). Contudo exige que o número de forças de controle seja igual ao número de modos controlados, ao passo que no controle conjunto o número de forças pode ser inferior. Sob este ângulo, a nova teoria proposta para tratar de sistemas com amortecimento não diagonalizável é mais restritiva, visto que obriga que se trabalhe com controle conjunto e, além disto, com um número de forças de controle igual ao número de modos controlados. Com respeito à passagem do problema de controle a tempo contínuo para controle a tempo discreto, deve-se lembrar que tal transformação é baseada na premissa de que as forças de controle se mantêm constantes ao longo do intervalo de amostragem Δt , o que na realidade acontece aproximadamente apenas para pequenos valores desta grandeza.

No desenvolvimento do programa FORTRAN descrito no capítulo 4, para cálculo das respostas livre e controlada, foram testados dois caminhos. O primeiro, através de integração numérica, exige um intervalo temporal Δt muito pequeno, inversamente proporcional à maior frequência natural da estrutura, importando num volume de operações extremamente elevado, e conseqüentemente demorado, daí ter sido abandonado. A alternativa adotada utiliza-se de uma matriz de transição de estado, sendo Δt inversamente proporcional à maior frequência natural sob controle, podendo em conseqüência apresentar um valor bem mais elevado. A contrapartida para esta maior rapidez é o volume de dados a utilizar. A matriz de transição, por exemplo, apresenta $4n^2$ elementos, se as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez têm dimensão n . Assim, na estrutura tratada no capítulo 6, com 156 graus de liberdade, são 97.344 elementos em tal matriz.

Através do capítulo 5 pode-se analisar com detalhes a aplicação do controle a tempo discreto sobre um sistema de um grau de liberdade, o que permitiu o estabelecimento de um critério de especificação do intervalo de amostragem. O valor assim especificado não vai implicar em uma queda significativa de desempenho do sistema de controle. Na prática, este intervalo deve ser suficientemente longo de forma a permitir que todo um passo "on-line" de controle seja efetuado, ou seja, devem acontecer a aquisição dos sinais de vibração da estrutura, o cálculo das forças de controle e a aplicação de tais forças à estrutura.

Os testes desenvolvidos no capítulo 6, aplicando-se desvios em parâmetros físicos ou modais da estrutura exemplo, demonstram que o controle não apresenta alterações significativas no seu desempenho em conseqüência de tais desvios. Isto é corroborado pelas insignificantes discrepâncias observadas entre respostas e especialmente pelas pequenas variações observadas nos ganhos de realimentação, que em suma definem a aplicação do controle.

No capítulo 7 constatou-se que a adição de amortecimento favorece o controle da estrutura, visto que proporcionalmente a queda na energia final é mais pronunciada nas respostas controladas do que nas livres. Na comparação das teorias (controle individual, amortecimento diagonalizável \times controle conjunto, amortecimento não diagonalizável), a presença de amortecimento não diagonalizável não provocou um efeito significativo. Em consequência, não se justifica utilizar uma teoria mais complexa pois o controle independente dos modos, admitindo-se que o amortecimento é diagonalizável, fornece um resultado adequado (utilizam-se neste caso coeficientes adimensionais de amortecimento equivalentes, obtidos por exemplo através da tentativa de diagonalização da matriz de amortecimento). De qualquer maneira, visando estudos posteriores, seria conveniente o desenvolvimento de um algoritmo que pudesse gerar a matriz \mathbf{T} diretamente das matrizes \mathbf{O} e \mathbf{P} (ver controle de sistema com amortecimento não diagonalizável, seção 3.3), sem a necessidade de se passar pelos autovalores e autovetores complexos; desta forma todo o processo transcorreria manipulando-se sempre somente grandezas reais.

Como propostas de continuidade do presente trabalho, poder-se-ia colocar por um lado a implementação prática do controle sobre estruturas reais. Esta é uma tarefa que iria demandar uma quantidade razoável tanto de equipamento analógico (transdutores e atuadores e respectiva eletrônica) como digital (processador rápido, sistema de aquisição de dados com entrada e saída de sinais simultâneas), além de algum suporte em termos de "software". Testes práticos poderiam então ser efetuados, complementando as simulações computacionais aqui desenvolvidas.

Um fenômeno que merece, também, ser melhor estudado, é o efeito benéfico que o aumento do amortecimento próprio da estrutura causa sobre o desempenho do controle que lhe é aplicado. Este fenômeno pode ser observado nas simulações desenvolvidas no capítulo 7, analisando-se a relação entre as energias totais finais para o sistema não controlado e controlado. Tal relação se mostrou mais ampla para sistemas com maior amortecimento.

Neste trabalho os desvios considerados foram inerentes às próprias estruturas sob controle. Num momento foram aplicados desvios aleatórios a parâmetros conhecidos, noutra foram adicionados artificialmente à matriz de amortecimento termos não diagonalizáveis. Neste campo seria conveniente, então, o estudo de casos de análises modais experimentais, no sentido de se levantar as formas pelas quais estes desvios aparecem na prática, suas tendências, etc.

Finalmente a análise de outros desvios pode vir a ser efetuada, podendo ser aí incluídos aqueles inerentes à instrumentação, à determinação das coordenadas modais e mesmo à digitalização dos sinais (defasagens, atrasos, ruídos, etc.).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Agee, B. L; Zeng, X.; Mitchell, L. D. e Schiefer, M. I. - "An Automated Mechanical Mobility System for Acquiring Data for Experimental Modal Analysis", Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 211-218, 1992.
- [2] Guyan, R. J. - "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal, Vol. 3(2), pp. 380, 1965.
- [3] O'Callahan, J. - "A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model", Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 17-21, 1989.
- [4] Kammer, D. C. - "Test-Analysis Model Development Using an Exact Modal Reduction", The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, pp. 174-179, 1987.
- [5] Kammer, D. C. - "A Hybrid Approach to Test-Analysis-Model Development for Large Space Structures", Journal of Vibration and Acoustics, Transaction of the ASME, Vol. 113(3), pp. 325-332, Julho 1991.
- [6] O'Callahan, J.; Avitabile, P. e Riemer, R. - "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)", Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 29-37, 1989.
- [7] Freed, A. M. e Flanigan, C. C. - "A Comparison of Test-Analysis Model Reduction Methods", Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 1344-1351, 1990.
- [8] Avitabile, P.; O'Callahan, J. e Milani, J. - "Comparison of System Characteristics using various Model Reduction Techniques", Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 1109-1115, 1989.
- [9] Avitabile, P.; Pechinsky, F. e O'Callahan, J. - "Study of Modal Vector Correlation using various Techniques for Modal Reduction", Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 572-583, 1992.
- [10] Lieven, N. A. J. e Ewins, D. J. - "Expansion of Modal Data for Correlation", Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 605-609, 1990.
- [11] Allemang, R. J. e Brown, D. L. - "A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis", Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 110-116, 1982.

- [12] Avitabile, P.; O'Callahan, J. e Milani, J. - "Model Correlation and Orthogonality Criteria", Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 1039-1045, 1988.
- [13] Lieven, N. A. J. e Ewins, D. J. - "Spatial Correlation of Mode Shapes, the Coordinate Model Assurance Criterion (COMAC)", Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 690-695, 1988.
- [14] Wei, J. J. C. e Allemang, R. J. - "Model Correlation and Orthogonality Criteria based on Reciprocal Modal Vectors", Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 486-491, 1991.
- [15] Meirovitch, L. e Baruh, H. - "The Implementation of Modal Filters for Control of Structures", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8(6), pp. 707-716, 1985.
- [16] Kwakernaak, H. e Sivan, R. - "Linear Optimum Control Systems", John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [17] Brogan, W. L. - "Modern Control Theory", Quantum Publishers, New York, 1974.
- [18] Balas, M. - "Active Control of Flexible Systems", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 25(3), pp. 415-436, 1978.
- [19] Zhang, Q.; Allemang, R. J. e Brown, D. L. - "Modal Filter: Concept and Applications", Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 487-496, 1990.
- [20] Shelley, S. J. e Allemang, R. J. - "Calculation of Discrete Modal Filters using the Modified Reciprocal Modal Vector Method", Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 37-45, 1992.
- [21] Balas, M. J., "Feedback Control of Flexible Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23(4), pp. 673-679, 1978.
- [22] Balas, M. J., "The Structure of Discrete-Time Finite-Dimensional Control of Distributed Parameter Systems", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 102, pp. 519-538, 1984.
- [23] Meirovitch, L. e Baruh, H. - "Control of Self-Adjoint Systems", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5(1), pp. 60-66, 1982.
- [24] Meirovitch, L.; Baruh, H. e Öz, H. - "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6(4), pp. 302-310, 1983.
- [25] Baker, M., "Review of Test/Analysis Correlation Methods and Criteria for Validation of Finite Element Models for Dynamic Analysis", Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 985-991, 1992.
- [26] Natke, H. G. - "Updating Computational Models in the Frequency Domain Based on Measured Data: A Survey", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3(1), pp. 28-35, 1988.

- [27] Penny, J. E. T.; Friswell, M. I. e Garvey, S. D. - "The Automatic Choice of Measurement Locations for Dynamic Testing", Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 30-36, 1992.
- [28] Caughey, T. K. e O'Kelly, M. E. J. - "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, pp. 583-588, Setembro de 1965.
- [29] McGreevy, S.; Soong, T. T. e Reinhorn, A. M. - "An Experimental Study of Time Delay Compensation in Active Structural Control", Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 733-739, 1988.
- [30] Wilson, E. L.; Yuan, M. e Dickens, J. M. - "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors", Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 10, pp. 813-821, 1982.
- [31] Hughes, T. J. R. - "The Finite Element Method", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [32] Jordan, R. e Arruda, J. R. F. - "Reduced Order Models for the Active Control of Flexible Structures", 4^o Simpósio Internacional sobre Problemas Dinâmicos da Mecânica (4^o DINAME), Pouso Alto - MG, março de 1991.
- [33] Jordan, R. e Arruda, J. R. F. - "Modelos de Ordem Reduzida para o Controle Ativo de Estruturas Flexíveis", Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste (CEM-NNE/91), UFRN - Natal - RN, pp. 379-386, março de 1991.
- [34] Meirovitch, L. - "Analytical Methods in Vibrations", MacMillan Co., New York, 1967.
- [35] Dimitriadis, E. K.; Fuller, C. R. e Rogers, C. A. - "Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates", Journal of Vibrations and Acoustics, Vol. 113, pp. 100-107, Janeiro de 1991.
- [36] Arruda, J. R. F. - "Surface Smoothing and Partial Spatial Derivatives Computations Using a Regressive Discrete Fourier Series", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 6(1), pp. 41-50, 1992.
- [37] Meirovitch, L. - "Computational Methods in Structural Dynamics", Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands, 1980.
- [38] Meirovitch, L. e Baruh, H. - "On the Problem of Observation Spillover in Self-Adjoint Distributed-Parameter Systems", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 39(2), pp. 269-291, Fevereiro de 1983.
- [39] Jordan, R. e Arruda, J. R. F. - "Modal-Space Control of Non-Proportionally Damped Structures", Proceedings of the III Pan American Congress on Applied Mechanics (PACAM), São Paulo, pp. 564-567, Janeiro de 1993.
- [40] Jordan, R. e Arruda, J. R. F. - "Controle de Estruturas Flexíveis Através de Forças Internas", Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Vol. Mecânica Dura, São Paulo, pp. 205-208, Dezembro de 1991.

- [41] Meirovitch, L. - "Elements of Vibration Analysis", MacGraw-Hill Book Company, Singapore, Second Edition, 1986
- [42] Golub, G. H. e Van Loan, C. F. - "Matrix Computations", 2ª edição, John Hopkins University Press, 1990.
- [43] Press, W. H.; Flannery, B. P; Teukolski, S. A. e Vetterling, W. T. - "Numerical Recipes", Cambridge University Press, 1986.
- [44] Wilkinson, J. H. e Reinsch, C. - "Linear Algebra", Handbook for Automatic Computation, Vol. II, Editor Bauer, F. L., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
- [45] Rutishauser, H. - "Lineares Gleichungssystem mit Symmetrischer Positiv Definiten Bandmatrix nach Cholesky", Computing, Vol. 1, pp. 77-78, 1966.
- [46] Becker, E. B. e Craig Jr., R. R. - "Interactive Structures and Matrix Interpretive System (ISMIS) - User's Guide with Programmer's Guide", The University of Texas at Austin, Austin, Texas, 1974.
- [47] Kunt, M. - "Digital Signal Processing", Artech House Inc., Norwood, 1986.
- [48] Junkins, J. L. e Kim, Y. - "Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures", AIAA, Washington, DC, USA, 1993.
- [49] Jordan, R. e Arruda, J. R. F. - "A Contribution to the Automatic Selection of Sensor Locations", V Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME 93), Santo Amaro da Imperatriz - SC, pp. 7-9, março de 1993.
- [50] Kirk, D. E. - "Optimal Control Theory - An Introduction", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
- [51] Sage, A. P. e White III, C. C. - "Optimum Systems Control", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

Apêndice A

Seleção Automática de Posicionamento de Sensores

Neste apêndice encontra-se a descrição de um novo procedimento, a ser aplicado previamente aos métodos de seleção automática de posicionamento de sensores [49]. Este procedimento evita que sejam considerados pontos de medição redundantes, ou seja, pontos que forneçam sinais que apresentem basicamente as mesmas contribuições dos modos sob análise. Pontos considerados redundantes fornecem, em suma, as mesmas informações quanto aos modos que devem ser acompanhados, devendo-se portanto considerar apenas um deles.

Na prática, dois pontos resultarão redundantes se eles estiverem ligados por elementos de grande rigidez e apenas os modos de baixas frequências naturais forem considerados.

A.1 Teoria

Seja um sistema com amortecimento diagonalizável, definido por suas matrizes de massa M , de amortecimento C e de rigidez K . Se se deseja analisar o comportamento dinâmico de m modos deste sistema, pode-se repetir aqui a primeira das equações (2.70):

$$\dot{\delta}_m(t) = A_m \delta_m(t) + B_m f(t). \quad (A.1)$$

Admitindo-se que as saídas dos sensores se devam basicamente aos m modos acima considerados (os outros modos têm pequena participação ou foram eliminados por filtragem), a equação (2.71) se reduz a:

$$y(t) = C_m \delta_m(t). \quad (A.2)$$

Analisando-se as equações (2.72), (2.73) e (2.74), percebe-se que se dois pontos de medição apresentam as mesmas contribuições dos m modos, duas linhas de \mathbf{C}_m^u serão iguais, o mesmo acontecendo com \mathbf{C}_m .

A condição que garante a observabilidade dos m modos é portanto de que a matriz \mathbf{R} assim definida:

$$\mathbf{R} = \left[\mathbf{C}_m' (\mathbf{C}_m \mathbf{A}_m)' (\mathbf{C}_m \mathbf{A}_m^2)' \dots (\mathbf{C}_m \mathbf{A}_m^{2m-1})' \right] \quad (\text{A.3})$$

seja de "rank" $2m$.

O fato de que a matriz \mathbf{C}_m tenha duas linhas iguais não impede que se obtenha a completa observabilidade, mas cada matriz $(\mathbf{C}_m \mathbf{A}_m^{i-1})'$, $i = 1, \dots, 2m$, apresentará duas colunas iguais, sendo que a segunda delas não contribuirá para o "rank" da matriz \mathbf{R} . Portanto, os dois pontos de medição com conteúdo similar em termos dos modos de interesse representam um único ponto, e a observabilidade não é afetada pelo ponto de medição redundante.

A chave do procedimento a ser aqui proposto é então a maneira de comparar as linhas da matriz \mathbf{C}_m^u para verificar se algumas delas são semelhantes, o que caracterizaria a redundância. Isto é realizado através da matriz simétrica de fatores de correlação \mathbf{F} (obtida de forma semelhante à utilizada no cálculo do "modal assurance criterion - MAC" [11]), cujos elementos são calculados através da equação:

$$F_{ij} = \frac{\mathbf{C}_{m_i}^u \mathbf{C}_{m_j}^{u'}}{\sqrt{\mathbf{C}_{m_i}^u \mathbf{C}_{m_i}^{u'}} \sqrt{\mathbf{C}_{m_j}^u \mathbf{C}_{m_j}^{u'}}} \quad (\text{A.4})$$

onde $\mathbf{C}_{m_i}^u$ e $\mathbf{C}_{m_j}^u$ são respectivamente as i -ésima e a j -ésima linhas de \mathbf{C}_m^u .

Obviamente os elementos da diagonal ($i = j$) da matriz \mathbf{F} possuem valores unitários. Quando um elemento F_{ij} fora da diagonal possui valor próximo a ± 1 , isto significa que os pontos de medição i e j possuem conteúdo semelhante dos modos de interesse (em fase ou anti-fase), e que portanto um deles pode ser desconsiderado. Esta é a maneira pela qual os graus de liberdade redundantes são eliminados antes do início do processo automático de seleção.

Para testar este procedimento, são utilizados dois métodos de seleção automática apresentados por Penny, Friswell e Garvey [27].

O primeiro se baseia no cálculo do resíduo médio do ponto de excitação (em inglês, "average driving point residue - ADPR"). Este é um índice que classifica os possíveis pontos de medição. Quanto maior o valor de ADPR, mais apropriado é o ponto. Ele é calculado somando-se as contribuições dos m modos de interesse, sendo que o seu valor para o j -ésimo grau de liberdade é dado por:

$$ADPR_j = \sum_{i=1}^m \frac{\phi_{ji}^2}{\omega_i} \quad (\text{A.5})$$

onde ϕ_{ji} é o j -ésimo elemento do i -ésimo autovetor e ω_i a i -ésima frequência natural não amortecida.

Quando o procedimento de eliminação de redundância é aplicado, os valores de ADPR são calculados apenas para os graus de liberdade restantes após esta eliminação. Em qualquer caso, são escolhidos como pontos de medição aqueles que apresentam ao final os maiores valores de ADPR.

O segundo método envolve a redução progressiva das matrizes de massa e de rigidez pelo método de Guyan [2]. Neste método, reduções sucessivas removem um grau de liberdade por vez, sendo escolhido o de menor importância em termos de inércia. No fim do processo a estrutura apresenta apenas os graus de liberdade onde devem ser aplicados os sensores. Uma primeira redução envolvendo um conjunto de graus de liberdade é efetuada, quando são eliminados aqueles graus de liberdade que não se conseguem medir (rotações, por exemplo) e os graus de liberdade redundantes, quando o procedimento visando identificá-los é utilizado.

A.2 Exemplo de Aplicação

Os dois métodos de seleção automática de posicionamento de sensores, sem e com o procedimento de remoção de graus de liberdade redundantes, foram aplicados à estrutura mostrada na figura A.1. É uma estrutura plana composta por elementos de barra rigidamente ligados entre si. São considerados movimentos apenas no plano da própria estrutura, portanto devem ser considerados três graus de liberdade por nó. O modelo de elementos finitos da estrutura, a partir do qual se obtiveram as matrizes de massa e de rigidez [46], apresenta vinte e quatro nós com movimentos livres (situados nas uniões entre barras), fornecendo portanto um total de setenta e dois graus de liberdade. As propriedades da estrutura são: comprimento de cada segmento de barra $L = 0,5 \text{ m}$, área da seção transversal das barras $A = 2,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, momento de inércia da seção $I = 4,21875 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, densidade $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ e módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

A figura A.1 mostra ainda, através de setas, os graus de liberdade resultantes (em número de vinte e quatro) após a aplicação do procedimento de remoção dos graus de liberdade redundantes. As rotações foram desconsideradas a princípio. O i -ésimo grau de liberdade foi considerado redundante em relação ao j -ésimo quando o valor absoluto de F_{ij} difere da unidade por um valor inferior a $1,0 \times 10^{-5}$.

O método de seleção baseado no ADPR foi aplicado à estrutura sem e com a extração dos graus de liberdade redundantes. A figura A.2 mostra os resultados par ambos os casos. Foram considerados no processo os quatro primeiros modos de vibração.

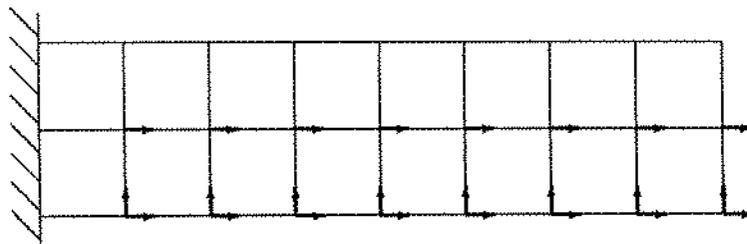


Figura A.1: Estrutura plana do exemplo. As setas indicam graus de liberdade não redundantes.

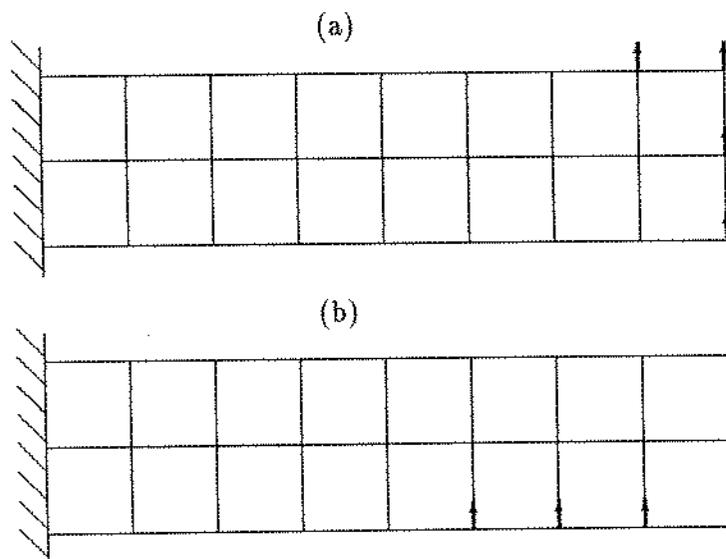


Figura A.2: Resultados usando ADPR: (a) sem remoção dos graus de liberdade redundantes; (b) com remoção. As setas indicam os graus de liberdade finais.

De forma semelhante, a figura A.3 mostra os resultados do método baseado na redução de Guyan.

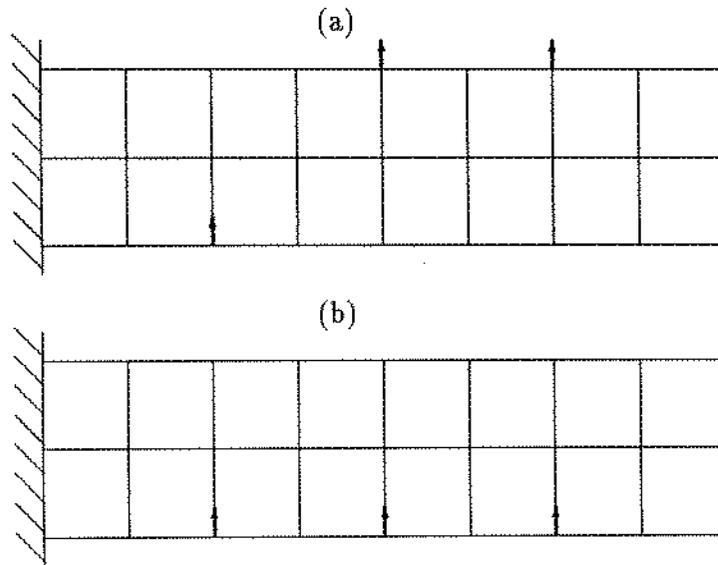


Figura A.3: Resultados usando redução de Guyan: (a) sem remoção dos graus de liberdade redundantes; (b) com remoção. As setas indicam os graus de liberdade finais.

A observação da figura A.2(a) mostra que o método baseado no ADPR, atuando isoladamente, escolhe os graus de liberdade que apresentam as maiores amplitudes de vibração (mais próximos à extremidade livre da estrutura), como esperado. Contudo entre eles há alguns redundantes. Na figura A.2(b) verifica-se que a redundância foi eliminada.

O processo que envolve a redução de Guyan não é praticamente afetado, pois os resultados apresentados nas figuras A.3(a) e A.3(b) são essencialmente os mesmos. Há apenas a troca entre graus de liberdade redundantes.

A.3 Conclusões

Os resultados acima apresentados foram obtidos através de programas desenvolvidos para rodar em ambiente MATLAB [49]. Em consequência houve facilidade em se contabilizar as operações de ponto flutuante (OPFs), cujos números são apresentados na seqüência como subsídio às conclusões.

Em primeiro lugar será comentado o método que utiliza o ADPR. O número original de graus de liberdade (setenta e dois) foi inicialmente reduzido para quarenta e oito pela eliminação dos graus de liberdade rotacionais. A eliminação dos graus de liberdade redundantes permitiu ainda

a redução deste valor para vinte e quatro. Com esta última redução, o número de OPFs envolvidas na seleção automática do posicionamento de sensores caiu de 2.200 para 979. Entretanto, apenas o procedimento de remoção de redundância exigiu 23.473 OPFs. É importante citar neste instante que na aplicação de função interna do ambiente MATLAB que calcula “todos” os 72 autovalores e correspondentes autovetores foram realizadas $40,9 \times 10^6$ OPFs; contudo para a aplicação do método baseado no ADPR foram necessários apenas os autovalores e autovetores de quatro modos. Concluindo, percebe-se que a remoção de redundância efetivamente aumentou o volume de OPFs, embora este aumento possa até ser considerado pequeno em comparação ao número e OPFs que seria necessário mesmo para calcular apenas quatro autovalores e correspondentes autovetores. A grande vantagem, neste caso, é a própria remoção da redundância em si mesma, visto que este método de escolha automática, sozinho, conduz com facilidade a que se escolham graus de liberdade redundantes (ver figura A.2(a)).

Quando se utilizou o método baseado em reduções de Guyan, a já comentada diminuição de quarenta e oito para vinte e quatro graus de liberdade, através da remoção de redundância, permitiu que o método de seleção efetuasse apenas $1,69 \times 10^6$ OPFs em lugar das anteriores $12,4 \times 10^6$. Como o método que utiliza reduções de Guyan originalmente não utiliza autovetores, tal redução no número de OPFs não pode ser contabilizada por completo. Ao valor de $1,69 \times 10^6$ OPFs deve ser acrescido o número de operações necessárias ao cálculo de autovetores. Se, contudo, forem calculados somente os autovetores que interessam, cujo número em geral é bastante reduzido, é provável que o procedimento de remoção de redundância permita uma redução global no número de OPFs.

Finalizando, quando se utiliza o método baseado no ADPR se perde em termos dos números de OPFs, mas há um ganho inequívoco ao serem evitados os graus de liberdade redundantes. Para o segundo método, baseado em reduções de Guyan, os resultados de posicionamento são equivalentes, mas pode-se esperar uma redução no número de OPFs se a remoção de redundância é aplicada previamente, procurando-se determinar apenas os autovetores que são necessários.

Apêndice B

Controle Ótimo - Problema Linear-Quadrático

Neste apêndice é enunciado o problema linear-quadrático, tanto na versão a tempo contínuo como a tempo discreto, e apresentada a sua solução. O desenvolvimento matemático completo pode ser obtido em [50]. Como auxílio pode-se também tomar a referência [51].

B.1 Formulação geral a tempo contínuo

O problema linear-quadrático a tempo contínuo recebe este nome por ser definido por uma equação linear que descreve o comportamento do sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estado e $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de controle; e o funcional quadrático a ser minimizado:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(t_f)\mathbf{H}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] dt, \quad (\text{B.2})$$

onde o tempo final t_f é fixo, sendo \mathbf{H} , $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ matrizes reais e simétricas. As matrizes \mathbf{H} e $\mathbf{Q}(t)$ são positivas semi-definidas e $\mathbf{R}(t)$ é positiva definida.

A solução global do problema de minimização acima formulado (obtida tanto através da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman como com o auxílio de programação dinâmica), fornece uma lei de controle ótimo dada por:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \quad (\text{B.3})$$

onde $\mathbf{K}(t)$ é a solução da equação diferencial matricial:

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}(t), \quad (\text{B.4})$$

com a condição de contorno $\mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H}$.

A equação (B.4) é conhecida como Equação de Riccati. É importante verificar que mesmo para um sistema invariante no tempo (matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} e \mathbf{R} constantes) esta equação fornece uma solução $\mathbf{K}(t)$ como função do tempo.

B.2 Formulação a tempo contínuo com parâmetros constantes e horizonte de tempo infinito

Admite-se agora que o sistema é invariante no tempo e que o horizonte de tempo é infinito ($t_f \rightarrow \infty$). Em consequência as equações (B.1) e (B.2) podem ser assim reescritas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.5})$$

e

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}'(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt. \quad (\text{B.6})$$

Nesta última equação, como se pode observar na comparação com a equação (B.2), $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ (o estado final, neste caso, não tem importância).

Se o sistema é completamente controlável, se $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ e se \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes constantes, é possível mostrar que:

$$\mathbf{K}(t) \rightarrow \mathbf{K} \text{ (uma matriz constante)} \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty,$$

onde $\mathbf{K}(t)$ é a solução da equação (B.4).

Para se chegar ao valor de \mathbf{K} pode-se integrar regressivamente a equação (B.4), a partir de $\mathbf{K}(\infty) = \mathbf{H} = \mathbf{0}$, até chegar a uma solução estacionária, ou resolver as equações algébricas não lineares:

$$\mathbf{0} = \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{A}' \mathbf{K} - \mathbf{Q}, \quad (\text{B.7})$$

obtida pela adoção de $\dot{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{0}$ na equação (B.4).

B.3 Formulação geral a tempo discreto

A tempo discreto, são as seguintes as equações equivalentes às equações (B.1) e (B.2):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \quad (\text{B.8})$$

e

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N) \mathbf{H} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k)], \quad (\text{B.9})$$

onde N é um inteiro fixo, maior que zero, sendo as matrizes \mathbf{H} , $\mathbf{Q}(k)$ e $\mathbf{R}(k)$ reais e simétricas. As matrizes \mathbf{H} e $\mathbf{Q}(k)$ são ainda positivas semi-definidas e $\mathbf{R}(k)$ positiva definida.

A solução do problema de minimização estabelecido pelas equações (B.8) e (B.9), através de programação dinâmica, fornece como lei de controle ótimo:

$$\mathbf{u}^*(N-K) = \mathbf{F}(N-K) \mathbf{x}(N-K), \quad (\text{B.10})$$

para $K = 1, \dots, N$, onde os valores de $\mathbf{F}(N-K)$ são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(N-K) = & - [\mathbf{R}(N-K) + \mathbf{B}'(N-K) \mathbf{P}(K-1) \mathbf{B}(N-K)]^{-1} \\ & \times \mathbf{B}'(N-K) \mathbf{P}(K-1) \mathbf{A}(N-K) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

e onde ainda:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(K) = & [\mathbf{A}(N-K) + \mathbf{B}(N-K) \mathbf{F}(N-K)]' \mathbf{P}(K-1) \\ & \times [\mathbf{A}(N-K) + \mathbf{B}(N-K) \mathbf{F}(N-K)] \\ & + \mathbf{F}'(N-K) \mathbf{R}(N-K) \mathbf{F}(N-K) + \mathbf{Q}(N-K) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

com $\mathbf{P}(0) = \mathbf{H}$.

B.4 Formulação a tempo discreto com parâmetros constantes e horizonte de tempo infinito

Se o sistema representado pela equação (B.8) é completamente controlável e invariante no tempo ($\mathbf{H} = \mathbf{0}$, \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes constantes), então a lei de controle ótimo é invariante para um horizonte de tempo infinito [50], isto é:

$$\mathbf{F}(N - K) \rightarrow \mathbf{F} \text{ (uma matriz constante)} \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty .$$

Do ponto de vista físico, isto significa que o controle ótimo pode ser implementado através de fatores de ganho fixos.

A matriz \mathbf{F} constante pode ser obtida pela aplicação recursiva das equações (B.11) e (B.12), admitindo-se $\mathbf{P}(0) = \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Aumenta-se então progressivamente K até que $\mathbf{F}(N - K)$ convirja a uma matriz constante.

Outra forma de obter a matriz \mathbf{F} passa pela solução em regime constante da equação de Riccati a tempo discreto. Este é o procedimento utilizado, por exemplo, pela função interna DLQR do "toolbox" de controle do programa MATLAB.

Apêndice C

Programa para Análise da Influência do Intervalo Temporal no Desempenho do Controle

Neste apêndice estão listados o programa principal CRLC1GLM e a função GASIDINF.M que permitem realizar a análise da influência do intervalo temporal Δt no desempenho do controle, os quais foram utilizados para a geração das informações apresentadas no capítulo 5. Todo o conjunto foi redigido com comandos próprios que o permitem operar dentro do ambiente MATLAB.

C.1 Programa principal - CRLC1GLM

Este programa calcula as respostas livre e controlada de um sistema de um grau de liberdade sujeito a condições iniciais de deslocamento e velocidade. A maneira pela qual ele opera está descrita no capítulo 5.

```
%  
%          Calculo das respostas livre e controlada  
%          de um sistema com 1 grau de liberdade.  
%  
  
% entrada de dados  
  
m=input(' massa do sistema, m = ');  
c=input(' amortecimento do sistema, c = ');
```

```

k=input(' rigidez do sistema, k = ');
dt=input(' intervalo temporal, dt = ');
np=input(' numero de intervalos em cada resposta, np = ');
x0=input(' deslocamento inicial, x0 = ');
v0=input(' velocidade inicial, v0 = ');
R=input(' ponderacao do controle, R = ');

% calculo das matrizes de estado e da matriz do funcional

AO=[0. m ; -k -c]/ m;
BO=[0. ; 1./m];
A=expm(AO*dt);
B=inv(AO)*(A - eye(A))*BO;
Q=[k 0 ; 0 m];

clc
fprintf(' \n ===== RESULTADOS ===== \n')

% calculo do ganho de realimentacao

err=1.0e-04;
imax=10000;
[G,i]=gasidinf(A,B,Q,R,err,imax);
fprintf(' \n Numero de iteracoes em GASIDINF = %g \n ',i)

% inicializacao das respostas

aux=[x0 ; v0];
r1=aux;
rc=r1;

% calculo da energia inicial

eni=aux'*Q*aux/2.;
fprintf(' \n Energia total inicial = %g \n',eni)

% calculo das respostas

J=0;
for i=2:np+1

```

```

    rl(1:2,i)=A*rl(1:2,i-1);
    aux=rc(1:2,i-1);
    f=G*aux;
    J=J+(aux'*Q*aux+R*f*f)/2.;
    rc(1:2,i)=A*aux+B*f;
end
fprintf(' \n Valor do funcional = %g \n',J)
Jn=J/np;
fprintf(' \n Valor normalizado do funcional = %g \n ',Jn)

% calculo das energias finais

fprintf(' \n Energia total final: \n')
aux=rl(1:2,np+1);
enfl=aux'*Q*aux/2.;
fprintf(' \n - para o sistema livre = %g \n ',enfl)
aux=rc(1:2,np+1);
enfc=aux'*Q*aux/2.;
fprintf(' \n - para o sistema controlado = %g \n ',enfc)

% apresentacao grafica das respostas temporais

nv=1:1:np+1;
nv=(nv-1)*dt;
xlbl=sprintf('tempo [s]');
ylbld=sprintf('amplitudes [m]');
ttld=sprintf('Deslocamentos: - - livre, --- controlado.');
```

```

plot(nv,rl(1,:), '--',nv,rc(1,:)),xlabel(xlbl),ylabel(ylbld),...
title(ttld)
pause
ylblv=sprintf('amplitudes [m/s]');
ttlvs=sprintf('Velocidades: - - livre, --- controlada.');
```

```

plot(nv,rl(2,:), '--',nv,rc(2,:)),xlabel(xlbl),ylabel(ylblv),...
title(ttlv)

```

C.2 Função GASIDINF.M

A função GASIDINF.M calcula a matriz de ganhos de realimentação que permitem o cálculo das cargas (forças e/ou momentos) que promovem o controle de um sistema. O controle no

caso é aplicado a tempo discreto, com horizonte infinito.

O cálculo efetuado se baseia na aplicação recursiva das equações (3.44).

```
function [F,i]=gasidinf(A,B,Q,R,err,imax)
%
%   function [F,i]= gasidinf(A,B,Q,R,err,imax)
%
%   Funcao para o calculo do ganho de realimentacao F (cons-
%   tante,  $u(k) = F * x(k)$  ) visando o controle otimo de um
%   sistema a tempo discreto com parametros estacionarios, com
%   tempo final infinito, regido pela equacao de estado
%
%            $x(k+1) = A x(k) + B u(k)$ 
%
%   e com a funcao objetivo
%
%    $J = 1/2$  somatorio(de 0 a infinito) [ $x'(k) Q x(k)$ 
%            $+ u'(k) R u(k)$ ].
%
%   O parametro "err" eh a tolerancia percentual maxima permi-
%   tida para diferencas entre valores de duas matrizes F ob-
%   tidas em iteracoes sucessivas, de forma a se definir a
%   convergencia do processo. O parametro "imax" define o nu-
%   mero maximo permitido de iteracoes. A saida "i" indica o
%   numero real de iteracoes.
%
[n,m]=size(B);
epsi=1.0e-06;

% inicio do processo iterativo

P=Q;
F=zeros(m,n);

for i=1:imax

    dp=0;
    FN=-inv(R+B'*P*B)*B'*P*A;
```

```
DF=FN-F;

for j=1:m
    for k=1:n
        if F(j,k)==0
            F(j,k)=epsi;
        end
        ep=abs(100*DF(j,k)/F(j,k));
        if ep>dp
            dp=ep;
        end
    end
end

if err>=dp
    return
end

V=A+B*FN;
p=V'*P*V+FN'*R*FN+Q;
F=FN;
end

% fim do processo iterativo

if i==imax
    % mensagem de nao convergencia
    fprintf('\n O ganho F nao convergiu apos "imax" iteracoes')
    fprintf('\n (funcao "gasidinf.m"); calculos continuam. \n')
end
```

Apêndice D

Programa para Geração de Matrizes de Massa e de Rigidez de Estrutura Plana

Este apêndice apresenta as listagens do programa principal e das funções auxiliares desenvolvidos para a geração das matrizes de massa e de rigidez de uma família de estruturas planas, semelhantes àquela apresentada como exemplo no capítulo 6. Os comandos utilizados na sua redação são aqueles adequados à utilização no ambiente MATLAB.

O programa principal, TREDINA.M, prepara informações que são utilizadas pelas funções auxiliares na montagem das referidas matrizes. Os dados geométricos e físicos necessários devem ser previamente armazenados no arquivo de dados TREDINA.MAT, próprio à utilização pelo MATLAB. A seguir uma relação das variáveis, com os nomes que lhe foram conferidos, que devem estar presentes em TREDINA.MAT: dimensão da célula da estrutura na direção x (DX); idem, na direção y (DY); seção transversal do elemento (AR); momento de inércia da seção (I); módulo de elasticidade do material (E) e densidade do material (RO).

As funções auxiliares foram traduzidas em comandos MATLAB a partir do programa de elementos finitos ISMIS [46]. São elas:

- FRAMMS.M - gera a matriz de massa de cada elemento da estrutura;
- FRAMEL.M - gera a matriz de rigidez de cada elemento da estrutura;
- ADDMAT.M - adiciona a matriz do elemento à matriz global;
- RMVSM.M - remove da matriz global a matriz útil, isto é, a matriz que não envolve os graus de liberdade que foram anulados.

D.1 Programa principal - TREDINA.M

Este programa monta inicialmente as matrizes ENDH e ENDV que fornecem as incidências das coordenadas nos elementos horizontais e verticais, sendo que dentro de cada um destes grupos os elementos devem ser iguais.

Em seguida são geradas as matrizes de rigidez dos elementos típicos, um horizontal e o outro vertical. Com a ajuda de ENDH e ENDV é então montada a matriz global de rigidez, da qual finalmente é retirada a matriz útil de rigidez.

Todo o processo descrito no parágrafo anterior é então repetido visando à construção da matriz útil de massa.

```

%          PROGRAMA      TREDINA.M
%
%          Programa para calculo das matrizes de rigidez KB e de massa MB
%          da estrutura plana abaixo.  Dados dos elementos de viga da estrutura
%          e dela propria a serem fornecidos atraves do arquivo "tredina.mat":
%
%          RO = densidade do material;          I = momento de inercia da secão;
%          E  = modulo de elasticidade;        DX = dimensao horizontal da celula;
%          AR = area da secão transversal;     DY = dimensao vertical da celula.
%
%          Espacialmente a estrutura se assemelha a uma viga na horizon-
%          tal, com a extremidade da esquerda engastada e a da direita livre,
%          composta de nc celulas retangulares de dimensoes DX por DY.
%
%          \|------+-----+---|...          ... |---+-----+
%          \|          |          |          ...          |          |
%          \|------+-----+---|...          ... |---+-----+
%          Vaos:      1          2          ...          nc
%
%          Obs.:  adicionar funcoes framel.m, framms.m, addmat.m, rmvsm.m e ar-
%          quivo tredina.mat.

```

```
load tredina.mat
```

```
clc
```

```
fprintf('\n\n PROGRAMA "TREDINA.M" - Calculo de matrizes de massa e de ri-\n')
fprintf(' gidez de estrutura plana, considerando as coordenadas uteis. \n\n')
```

```

% Definicao de dimensoes:

nc=input('Numero de celulas na estrutura, nc = ');
N=(nc+1)*6;
ni=7;
nu=N-6;

% Montagem das matrizes ENDH e ENDV:

ENDH(1,1:6)=[1 2 3 7 8 9];
aux=[3 3 3 3 3 3];
for i=2:2*nc
    ENDH(i,1:6)=ENDH(i-1,1:6)+aux;
end

ENDV(1,1:6)=[10 11 12 7 8 9];
for i=2:nc
    ENDV(i,1:6)=ENDV(i-1,1:6)+2*aux;
end

clear aux; clear i

% Montagem da matriz de rigidez:

k=zeros(N,N);

kh=framel(DX,O,E,I,AR);
kv=framel(O,DY,E,I,AR);

k=addmat(k,kh,ENDH);
k=addmat(k,kv,ENDV);

KB=rmvsm(k,ni,nu);
clear k;
pack;

% Montagem da matriz de massa:

m=zeros(N,N);

```

```

mh=framms(DX,0,RO,AR);
mv=framms(0,DY,RO,AR);

m=addmat(m,mh,ENDH);
m=addmat(m,mv,ENDV);

MB=rmvsm(m,ni,nu);
clear m;

% Limpeza de variaveis:

clear AR; clear DX; clear DY; clear E; clear ENDH; clear ENDV; clear I
clear N; clear RO; clear kh; clear kv; clear mh; clear mv; clear nc
clear ni; clear nu; clear mensagem
pack;

```

D.2 Função FRAMMS.M

Esta função gera a matriz de massa 6×6 de um elemento de barra obtida pelo método dos elementos finitos [46].

```

function M=FRAMMS(DX,DY,RO,AR)
%
%           function M=FRAMMS(DX,DY,RO,AR)
%
%           Calcula a matriz de massa M(6,6) de um elemento de viga plana
%           com as características:
%
%           DX = projecao horizontal do seu comprimento;
%           DY = projecao vertical do seu comprimento;
%           RO = densidade do seu material;
%           AR = area da secao transversal.
%
%
L=sqrt(DX*DX+DY*DY);
DXL=DX/L;
DYL=DY/L;
A=diag([DXL DXL 1 DXL DXL 1],0)+diag([DYL 0 0 DYL 0],1)+...
diag([-DYL 0 0 -DYL 0],-1);

```

```

QL2=4*L*L;
M=diag([140 156 QL2 140 156 QL2],0);
M(1,4)=70;
M(4,1)=70;
M(2,3)=22*L;
M(3,2)=M(2,3);
M(2,5)=54;
M(5,2)=54;
M(2,6)=-13*L;
M(6,2)=M(2,6);
M(3,5)=-M(2,6);
M(5,3)=M(3,5);
M(3,6)=-3*L*L;
M(6,3)=M(3,6);
M(5,6)=-M(2,3);
M(6,5)=M(5,6);
M=(R0*AR*L/420)*A'*M*A;

```

D.3 Função FRAMEL.M

Esta função gera a matriz de rigidez 6×6 de um elemento de barra obtida pelo método dos elementos finitos [46].

```

function K=FRAMEL(DX,DY,E,I,AR)
%
%           function K=FRAMEL(DX,DY,E,I,AR)
%
%           Calcula a matriz de rigidez K(6,6) de um elemento de viga plana
%           com as características:
%
%           DX = projecao horizontal do seu comprimento;
%           DY = projecao vertical do seu comprimento;
%           E  = modulo de elasticidade do seu material;
%           I  = momento de inercia da secao transversal;
%           AR = area da secao transversal.
%
L=sqrt(DX*DX+DY*DY);
DXL=DX/L;

```

```

DYL=DY/L;
A=diag([DXL DXL 1 DXL DXL 1],0)+diag([DYL 0 0 DYL 0],1)+...
diag([-DYL 0 0 -DYL 0],-1);
AE=AR*E;
EI2=2*E*I;
RAZ1=3*EI2/L;
RAZ2=6*EI2/(L*L);
K=diag([AE RAZ2 2*EI2 AE RAZ2 2*EI2],0);
K(2,3)=RAZ1;
K(3,2)=RAZ1;
K(1,4)=-AE;
K(4,1)=-AE;
K(2,5)=-RAZ2;
K(5,2)=-RAZ2;
K(2,6)=RAZ1;
K(6,2)=RAZ1;
K(3,5)=-RAZ1;
K(5,3)=-RAZ1;
K(3,6)=EI2;
K(6,3)=EI2;
K(5,6)=-RAZ1;
K(6,5)=-RAZ1;
K=A'*K*A/L;

```

D.4 Função ADDMAT.M

Esta função adiciona a matriz do elemento (seja de massa ou de rigidez) à correspondente matriz global.

```

function A=ADDMAT(A,B,END)
%
%           function A=ADDMAT(A,B,END)
%
%       Esta funcao adiciona a matriz quadrada "B" (uma ou mais vezes)
%       a matriz "A", de acordo com a matriz de enderecamento "END". Cada
%       linha de "END" indica em que posicoes de "A" (a cada adicao) devem
%       ser alocados os valores de "B". Portanto o numero de colunas de
%       "END" deve ser igual a dimensao de "B".
%

```

```

[ma,na]=size(A);
[mb,nb]=size(B);
[me,ne]=size(END);
mind=min(ma,na);
if mb =nb | mb>mind | ne =mb
    fprintf('\n ADDMAT - Problemas nas dimensoes das matrizes. \n')
    return
end
for k=1:me
    for i=1:mb
        for j=1:mb
            A(END(k,i),END(k,j))=A(END(k,i),END(k,j))+B(i,j);
        end
    end
end
end

```

D.5 Função RMVSM.M

Esta função remove a matriz útil (ou seja, elimina os graus de liberdade inviabilizados) da matriz global, seja esta de massa ou de rigidez.

```

function AP=RMVSM(A,m,n)
%
%           AP=RMVSM(A,m,n)
%
%   Esta funcao retira a sub-matriz quadrada "AP" de "A", sendo
%   que AP(1,1)=A(m,m) e que a dimensao de "AP" e "n".
%
[ma,na]=size(A);
mind=min(ma,na);
mr=m+n-1;
if mr>mind
    fprintf('\n RMVSM - A sub-matriz a ser retirada extrapola as ')
    fprintf('dimensoes da matriz original. \n')
    return
end
AP=A(m:mr,m:mr);

```

Apêndice E

Programas para Controle de Sistemas com Amortecimento Diagonalizável ou Não

Neste apêndice estão listados os programas principais e funções auxiliares desenvolvidos para aplicar o controle de vibrações a um sistema sob duas formas distintas: controle individual, na presença de amortecimento diagonalizável, ou controle conjunto, na presença de amortecimento não diagonalizável. A base teórica de ambos os casos é apresentada na seção 3.5. Os comandos utilizados na sua redação são aqueles adequados à utilização no ambiente MATLAB.

O primeiro programa principal, que aplica controle individual a sistema com amortecimento diagonalizável, denomina-se CONMIMCK.M. Deve ser acompanhado das funções ORDVLVT.M (que ordena os autovalores reais em ordem crescente, ordenando concomitantemente os correspondentes autovetores reais) e GASIDINF.M (esta calcula ganhos de realimentação, já listada no apêndice C). O segundo programa principal, denominado CONTMCK.M, deve ser acompanhado das funções TN.M e novamente GASIDINF.M. A função TN.M utiliza a função ORDPARCO.M, que ordena convenientemente pares complexos de autovalores (e correspondentes autovetores). São apresentadas então, a seguir, as listagens dos programas e funções.

E.1 Programa principal - CONMIMCK.M

Como já comentado acima, este programa aplica a teoria de controle individual dos modos, considerando amortecimento diagonalizável, descrita na seção 3.5. Fornece ao final gráficos que permitem a análise comparativa entre as respostas livre e controlada, para os graus de liberdade (coordenadas) previamente escolhidos. Também são fornecidos ao final do programa dados relativos às energias do sistema, tanto globais como particularmente aos modos controlados. Dados relativos ao funcional sob minimização igualmente são fornecidos. A listagem vem a seguir.


```

[j,nt]=size(Mass);
if nt==ne & j==ne,
    direc=1;
else
    fprintf('\n Matriz "Mass" de dimensoes incompativeis.\n\n')
end
end

direc=0;
while direc==0,
    clear Amort
    fprintf('\n Fornecer a matriz de amortecimento "Amort" (ne x ne)')
    fprintf(mens2)
    Amort=input(' Amort = ');
    [j,nt]=size(Amort);
    if nt==ne & j==ne,
        direc=1;
    else
        fprintf('\n Matriz "Amort" de dimensoes incompativeis.\n\n')
    end
end

direc=0;
while direc==0,
    clear Rigid
    fprintf('\n Fornecer a matriz de rigidez "Rigid" (ne x ne)')
    fprintf(mens2)
    Rigid=input(' Rigid = ');
    [j,nt]=size(Rigid);
    if nt==ne & j==ne,
        direc=1;
    else
        fprintf('\n Matriz "Rigid" de dimensoes incompativeis.\n\n')
    end
end

fprintf(mens1)

% solucao do problema de autovalores
% -----

```

```

[vt,vl]=eig(Rigid,Mass);

% ordenacao de autovalores (e correspondentes autovetores)
% -----

vto=zeros(ne,ne);
[vlo,vto]=ordvlt(vl,vt);
clear vl
for i=1:ne
    vl(i)=sqrt(vlo(i,i));
end
clear vlo

% normalizacao dos autovetores
% -----

clear vt
vt=conj(vto')*Mass*vto;
aux=diag(vt);
for i=1:ne
    aux(i)=1/sqrt(aux(i));
end
vt=vto*diag(aux,0);
clear vto; clear aux

% calculo do vetor linha "qsi" - amortecimentos modais equivalentes
% -----

clear qsi
for i=1:ne
    vlim(i)=1/(2*vl(i));
end
qsi=conj(vt')*Amort*vt*diag(vlim,0);
qsi=diag(qsi,0);
clear vlim

% entrada de dados necessarios ao calculo das respostas
% -----

```

```

dt=input(' Intervalo temporal entre os estados k e k+1, dt = ');
np=input(' Numero de pontos na resposta, np = ');

direc=0;
while direc==0,
    clear x0
    fprintf('\n Fornecer vetor coluna x0 com os')
    fprintf(' valores iniciais de deslocamento')
    fprintf(mens2)
    x0=input(' x0 = ');
    [nt,j]=size(x0);
    if nt==ne & j==1
        direc=1;
    else
        fprintf('\n Vetor x0 de dimensoes incompativeis.\n\n')
    end
end

direc=0;
while direc==0,
    clear v0
    fprintf('\n Fornecer vetor coluna v0 com os')
    fprintf(' valores iniciais de velocidade')
    fprintf(mens2)
    v0=input(' v0 = ');
    [nt,j]=size(v0);
    if nt==ne & j==1
        direc=1;
    else
        fprintf('\n Vetor v0 de dimensoes incompativeis.\n\n')
    end
end

% indicacao das posicoes das respostas a armazenar
% -----

it=input(' Devem ser armazenadas todas as posicoes da resposta? (s/n) ','s');
if it=='s'
    ind=1:1:ne;
    nia=ne;

```

```

else
    direc=0;
    while direc==0
        fprintf('\n\n Fornecer o vetor linha "ind" que indica as "nia"')
        fprintf('\n posicoes da resposta que devem ser armazenadas')
        fprintf(mens2)
        ind=input(' ind = ');
        [nft,nia]=size(ind);
        if nft==1
            direc=1;
        else
            fprintf('\n "ind" nao eh vetor linha.')
            fprintf('\n Eh necessario digita-lo novamente.')
        end
        clear nft
    end
end

% CALCULO DA RESPOSTA LIVRE
% -----

% inicializacao das coordenadas generalizadas e da matriz resposta
% -----

fprintf(mens1)

vtlM=conj(vt')*Mass;
netax=vtlM*x0;
netav=vtlM*v0;
for j=1:nia
    Xp(j,1)=x0(ind(j),1);
end

% calculo de energias iniciais
% -----

Eti=0.5*(x0'*Rigid*x0+v0'*Mass*v0);
for i=1:ne
    Emi(i)=0.5*(netax(i)*v1(i)*v1(i)+netax(i)+netav(i)*netav(i));
end

```

```

% calculo da resposta livre
% -----

XC=[x0 ; v0];
AA=[zeros(ne,ne) eye(ne) ; -inv(Mass)*Rigid -inv(Mass)*Amort];
eAAdt=expm(AA*dt);
for k=2:np
    XC=eAAdt*XC;
    for j=1:nia
        Xp(j,k)=XC(ind(j),1);
    end
end

% calculo de energias finais
% -----

X=XC(1:ne);
V=XC(ne+1:2*ne);
netax=vtlM*X;
netav=vtlM*V;
Etf1=0.5*(X'*Rigid*X+V'*Mass*V);
for i=1:ne
    Emf1(i)=0.5*(netax(i)*vl(i)*vl(i)+netav(i)*netav(i));
end

% CALCULO DA RESPOSTA CONTROLADA
% -----

% entrada dos dados relativos ao controle
% -----

it=input(' O controle eh simples, sobre todos os modos? (s/n) ','s');
if it=='s'
    D=eye(ne);
    nc=ne;
else
    direc=0;
    while direc==0,
        clear D
        fprintf('\n Fornecer a matriz D que distribui as "nc" forcas')
    end
end

```

```

    fprintf('\n externas aplicadas sobre os "n" pontos da barra')
    fprintf(mens2)
    D=input(' D = ');

    % definicao do numero de forcas externas independentes
    % -----

    [nt,nc]=size(D);
    if nt==ne
        direc=1;
    else
        fprintf('\n A matriz D nao possui dimensoes compati-')
        fprintf('\n veis. Eh necessario digita-la novamente. \n\n')
    end
end
end
clear nt; clear direc; clear mens2

Etic=0.0;
Etflc=0.0;
for i=1:nc
    Etic=Etic+Emi(i);
    Etflc=Etflc+Emfl(i);
end

% teste da inversibilidade
% -----

fprintf(mens1)

vtps=vt(:,1:nc);
vtpi=vt(:,nc+1:ne);
rel1=conj(vtps')*D;
rel2=conj(vtpi')*D;
if rank(rel1)<nc
    fprintf(' Nao ha relacao perfeita entre as forcas externas \n')
    fprintf(' e as forcas generalizadas dos modos controlados. \n\n')
    return
end
relinv=inv(rel1);

```

```

clear vtps; clear vtpi; clear rell

BB=inv(AA)*(eAAdt-eye(2*ne))*[zeros(ne,ne) ; inv(Mass)]*D;

it='s';
while it=='s',
    fprintf('\n Valor da ponderacao da variavel')
    R=input(' de controle para todos os modos, R = ');

    fprintf(mens1)

    % inicializacao
    % -----

    XC=[x0 ; v0];
    netax=vtlM*x0;
    netav=vtlM*v0;
    for j=1:nia
        Xpc(j,1)=x0(ind(j),1);
    end

    % determinacao dos ganhos de realimentacao
    % -----

    err=1.0e-4;
    imax=5000;

    for i=1:nc
        j=(2*i)-1;
        Ai=[0 1 ; -vl(i)*vl(i) -2*psi(i)*vl(i)];
        eAi=expm(Ai*dt);
        Bi=inv(Ai)*(eAi-eye(2))*[0 ; 1];
        Q=[vl(i)*vl(i) 0 ; 0 1];
        [F,ifim]=gasidinf(eAi,Bi,Q,R,err,imax);
        FC(i,1:2)=F;
    end
    clear err; clear imax; clear Q; clear F; clear ifim; clear Bi; clear eAi

    % calculo das respostas para o sistema controlado
    % -----

```

```

JC=0.0;
for k=2:np
    netax=vtlM*XC(1:ne);
    netav=vtlM*XC(ne+1:2*ne);
    for i=1:nc
        j=(2*i)-1;
        f2(i,1)=FC(i,1:2)*[netax(i,1) ; netav(i,1)];
    end
    f02=relinv*f2;
    XC=eAAdt*XC+BB*f02;
    for j=1:nia
        Xpc(j,k)=XC(ind(j),1);
    end
    for j=1:nc
        JC=JC+0.5*(netax(j)*vl(j)*vl(j)*netax(j)+...
            netav(j)*netav(j)+f2(j,1)*R*f2(j,1));
    end
end
clear vaux; clear FC; clear eAc; clear f2; clear f02; clear R

% calculo de energias finais
% -----

X=XC(1:ne);
V=XC(ne+1:2*ne);
netax=vtlM*X;
netav=vtlM*V;
Etfc=0.5*(X'*Rigid*X+V'*Mass*V);
Etfcc=0.0;
for i=1:nc
    Emfc(i)=0.5*(netax(i)*vl(i)*vl(i)*netax(i)+netav(i)*netav(i));
    Etfcc=Etfcc+Emfc(i);
end
clear X; clear V; clear netax; clear netav

% "plotagem" das respostas
% -----

fprintf('\n\n Tecla sucessivamente "ENTER" para obter os graficos')

```

```

pause

ns=0:dt:(np-1)*dt;
for i=1:nia
    tit=sprintf(' Deslocamentos na posicao %3.0f x tempo[s]',ind(i));
    plot(ns,Xp(i,1:np),ns,Xpc(i,1:np),'--'),grid,title(tit),...
    xlabel(xlbl),ylabel(ylbl)
    pause
end

fprintf('\n\n\n Recalcular respostas controladas com outro')
it=input(' valor de R (ponderacao de controle)? (s/n) ','s');
end

clc

fprintf(' INFORMACOES SOBRE AS ENERGIAS E O FUNCIONAL: \n\n');
fprintf(' ==> Instante inicial \n');
fprintf(' Energia total = %10.3e \n',Eti);
fprintf(' Energias dos modos a controlar: \n');
for i=1:nc
    fprintf(' %10.3e',Emi(i));
end
fprintf(' \n Soma das energias dos modos a controlar = %10.3e \n\n',Etic);
fprintf(' ==> Instante final - resposta livre \n');
fprintf(' Energia total = %10.3e \n',Etf1);
fprintf(' Energias dos modos a controlar: \n');
for i=1:nc
    fprintf(' %10.3e',Emf1(i));
end
fprintf(' \n Soma das energias dos modos a controlar = %10.3e \n\n',Etf1c);
fprintf(' ==> Instante final - resposta controlada \n');
fprintf(' Energia total = %10.3e \n',Etfc);
fprintf(' Energias dos modos controlados: \n');
for i=1:nc
    fprintf(' %10.3e',Emfc(i))
end
fprintf(' \n Soma das energias dos modos controlados = %10.3e \n\n',Etfcc);
fprintf(' Valor do funcional minimizado = %10.3e \n\n',JC);

```

```
clear i; clear j; clear k; clear np; clear dt; clear ind; clear nia; clear it
clear xlbl; clear ylbl; clear tit; clear Mass; clear Amort; clear Rigid
clear mens1; clear vt1M; clear x0; clear v0; clear ne; clear nc; clear qsi
clear vl; clear vt; clear relin; clear rel2; clear D; clear XC; clear Ai
clear AA; clear eAAdt; clear BB
```

E.2 Programa principal - CONTMCK.M

Este programa é semelhante ao programa CONTMCPK.M, inclusive na forma de apresentar resultados (gráficos das respostas e dados sobre as energias e o funcional). Difere basicamente na teoria aplicada, visto que agora o controle dos modos é conjunto e se prevê que o amortecimento seja do tipo não diagonalizável.

```
%
%
%          PROGRAMA CONTMCK.M
%
% Programa para calculo das respostas livres e controladas de uma
% estrutura flexivel, a qual e' apresentada atraves das matrizes de
% massa, de amortecimento (nao diagonalizavel) e de rigidez. O con-
% trole e' desenvolvido a tempo discreto, visando a implementacao
% via computador digital.
%
% Observacao: adicionar as funcoes "tn.m" e "gasidinf.m".
%

clc
fprintf('\n          PROGRAMA CONTMCK.M :')
fprintf('\n          ----- \n')
fprintf('\n PROGRAMA PARA CALCULO DE RESPOSTAS LIVRES E CONTRO-')
fprintf('\n LADAS, A TEMPO DISCRETO, DE UMA ESTRUTURA FLEXIVEL.')
fprintf('\n\n')

% definicao de algumas mensagens comuns

mens1=sprintf('\n\n          Aguarde, calculando.\n\n');
mens2=sprintf('\n (nome da variavel ou definicao com ajuda de [ e ]). \n');
ylbl=sprintf('Amplitude');
xlbl=sprintf('RESPOSTAS: LIVRE-continua, CONTROLADA-tracejada');
```

```

% ENTRADA DE DADOS
% -----

% entrada das matrizes de massa, amortecimento e rigidez
% -----

fprintf('\n Entrada das Matrizes do Sistema \n')
ne=input(' Ordem das matrizes, ne = ');
ned=2*ne;
direc=0;
while direc==0,
    clear Mass
    fprintf('\n Fornecer a matriz de massa "Mass" (ne x ne)')
    fprintf(mens2)
    Mass=input(' Mass = ');
    [j,nt]=size(Mass);
    if nt==ne & j==ne,
        direc=1;
    else
        fprintf('\n Matriz "Mass" de dimensoes incompativeis.\n\n')
    end
end

direc=0;
while direc==0,
    clear Amort
    fprintf('\n Fornecer a matriz de amortecimento "Amort" (ne x ne)')
    fprintf(mens2)
    Amort=input(' Amort = ');
    [j,nt]=size(Amort);
    if nt==ne & j==ne,
        direc=1;
    else
        fprintf('\n Matriz "Amort" de dimensoes incompativeis.\n\n')
    end
end

direc=0;
while direc==0,

```

```

clear Rigid
fprintf('\n Fornecer a matriz de rigidez "Rigid" (ne x ne)')
fprintf(mens2)
Rigid=input(' Rigid = ');
[j,nt]=size(Rigid);
if nt==ne & j==ne,
    direc=1;
else
    fprintf('\n Matriz "Rigid" de dimensoes incompativeis.\n\n')
end
end

% entrada de dados necessarios ao calculo das respostas
% -----

dt=input(' Intervalo temporal entre os estados k e k+1, dt = ');
np=input(' Numero de pontos na resposta, np = ');

direc=0;
while direc==0,
    clear x0
    fprintf('\n Fornecer vetor coluna x0 com os')
    fprintf(' valores iniciais de deslocamento')
    fprintf(mens2)
    x0=input(' x0 = ');
    [nt,j]=size(x0);
    if nt==ne & j==1
        direc=1;
    else
        fprintf('\n Vetor x0 de dimensoes incompativeis.\n\n')
    end
end

end

direc=0;
while direc==0,
    clear v0
    fprintf('\n Fornecer vetor coluna v0 com os')
    fprintf(' valores iniciais de velocidade')
    fprintf(mens2)
    v0=input(' v0 = ');

```

```

[nt,j]=size(v0);
if nt==ne & j==1
    direc=1;
else
    fprintf('\n Vetor v0 de dimensoes incompativeis.\n\n')
end
end

% indicacao das posicoes das respostas a armazenar
% -----

it=input(' Armazenar respostas de todas as posicoes? (s/n) ','s');
if it=='s'
    ind=1:1:ne;
    nia=ne;
else
    direc=0;
    while direc==0
        fprintf('\n\n Fornecer o vetor linha "ind" que indica as "nia"')
        fprintf('\n posicoes da resposta que devem ser armazenadas')
        fprintf(mens2)
        ind=input(' ind = ');
        [nft,nia]=size(ind);
        if nft==1
            direc=1;
        else
            fprintf('\n "ind" nao eh vetor linha.')
            fprintf('\n Eh necessario digita-lo novamente.')
        end
        clear nft
    end
end

end

fprintf(mens1)

% CALCULO DA MATRIZ T DE QUASE DIAGONALIZACAO
% -----

[O,P,T,v1,vt]=tn(Mass,Amort,Rigid);
TOT=T'*O*T;

```

```

[nt,j]=size(v0);
if nt==ne & j==1
    direc=1;
else
    fprintf('\n Vetor v0 de dimensoes incompativeis.\n\n')
end
end

% indicacao das posicoes das respostas a armazenar
% -----

it=input(' Armazenar respostas de todas as posicoes? (s/n) ','s');
if it=='s'
    ind=1:1:ne;
    nia=ne;
else
    direc=0;
    while direc==0
        fprintf('\n\n Fornecer o vetor linha "ind" que indica as "nia"')
        fprintf('\n posicoes da resposta que devem ser armazenadas')
        fprintf(mens2)
        ind=input(' ind = ');
        [nft,nia]=size(ind);
        if nft==1
            direc=1;
        else
            fprintf('\n "ind" nao eh vetor linha.')
            fprintf('\n Eh necessario digita-lo novamente.')
        end
        clear nft
    end
end

end

fprintf(mens1)

% CALCULO DA MATRIZ T DE QUASE DIAGONALIZACAO
% -----

[O,P,T,v1,vt]=tn(Mass,Amort,Rigid);
TOT=T'*O*T;

```

```

TPT=T'*P*T;
clear vl; clear vt; clear O; clear P

% CALCULO DA RESPOSTA LIVRE VIA SEPARACAO DOS MODOS
% -----

% inicializacao das coordenadas generalizadas e da matriz resposta livre
% -----

eta=inv(T)*[x0 ; v0];
etas=eta(1:ne);
etai=eta(ne+1:ned);
for j=1:nia
    Xp(j,1)=x0(ind(j),1);
end

% calculo de energias iniciais
% -----

Eti=0.5*(x0'*Rigid*x0+v0'*Mass*v0);
Eati=0.0;
for i=1:ne
    Eami(i)=0.5*(etas(i)*TPT(i,i)*etas(i)+etai(i)*etai(i));
    Eati=Eati+Eami(i);
end

% determinacao das exponenciais livres por modo
% -----

for i=1:ne
    j=(2*i)-1;
    Ai=[0 1 ; -TPT(i,i) -TOT(i,i)];
    eA(1:2,j:j+1)=expm(Ai*dt);
end
clear Ai

% calculo propriamente dito da resposta livre
% -----

for k=2:np

```

```

for i=1:ne
    j=(2*i)-1;
    etak=eA(1:2,j:j+1)*[etas(i,1) ; etai(i,1)];
    etas(i,1)=etak(1,1);
    etai(i,1)=etak(2,1);
end
X=T*[etas ; etai];
for j=1:nia
    Xp(j,k)=X(ind(j),1);
end
end

% calculo de energias finais
% -----

Etf1=0.5*(X(1:ne)'*Rigid*X(1:ne)+X(ne+1:ned)'*Mass*X(ne+1:ned));
Eatf1=0.0;
for i=1:ne
    Eamf1(i)=0.5*(etas(i)*TPT(i,i)*etas(i)+etai(i)*etai(i));
    Eatf1=Eatf1+Eamf1(i);
end

% CALCULO DA RESPOSTA CONTROLADA
% -----

% entrada dos dados relativos ao controle
% -----

it=input(' O controle eh simples, sobre todos os modos? (s/n) ','s');
if it=='s'
    D=eye(ne);
    nc=ne;
else
    direc=0;
    while direc==0,
        clear D
        fprintf('\n Fornecer a matriz D que distribui as "nc" forcas')
        fprintf('\n externas aplicadas sobre os "n" pontos da barra')
        fprintf(mens2)
        D=input(' D = ');
    end
end

```

```

% definicao do numero de forcas externas independentes
% -----

[nt,nc]=size(D);
if nt==ne
    direc=1;
else
    fprintf('\n A matriz D tem dimensoes incompativeis.')
    fprintf('\n Eh necessario digita-la novamente. \n\n')
end
end
end

Eatic=0.0;
Eatflc=0.0;
for i=1:nc
    Eatic=Eatic+Eami(i);
    Eatflc=Eatflc+Eamfl(i);
end

clear nt; clear direc; clear mens2

% teste da inversibilidade
% -----

fprintf(mens1)

rel1=T(1:ne,1:nc)*D;
rel=T(1:ne,ne+1:ne+nc)*D;
if rank(rel1)<nc
    fprintf(' Nao ha relacao perfeita entre as forcas externas \n')
    fprintf(' e as forcas generalizadas dos modos controlados. \n\n')
    return
end
relinv=inv(rel1);
clear rel1

% calculo de grandezas auxiliares
% -----

```

```

unc=TOT(1:nc,1:nc);
gnc=TPT(1:nc,1:nc);
Anc=[zeros(nc) eye(nc) ; -gnc -unc];
Bnc=[rel*relinv ; eye(nc)-unc*rel*relinv];
Qnc=[gnc zeros(nc) ; zeros(nc) eye(nc)];
AAnc=expm(Anc*dt);
BBnc=inv(Anc)*[AAnc-eye(2*nc)]*Bnc;
clear unc; clear gnc; clear Anc; clear Bnc; clear rel

% calculo das matrizes dos modos residuais
% -----

for i=nc+1:ne
    j=(2*i)-1;
    jd=j-2*nc;
    AII=(1/TPT(i,i))*[-TOT(i,i) -1 ; TPT(i,i) 0];
    Bi=[0 1 ; 1 -TOT(i,i)];
    BR(1:2,jd:jd+1)=AII*(eA(1:2,j:j+1)-eye(Bi))*Bi;
end
clear AII; clear Bi; clear TOT

it='s';
while it=='s',
    fprintf('\n Valor da ponderacao da variavel')
    R=input(' de controle para todos os modos, R = ');

    fprintf(mens1)

% calculo do ganho de realimentacao conjunto
% -----

Rnc=R*eye(nc);
err=1.0e-4;
imax=500;
[Gnc,ifim]=gasidinf(AAnc,BBnc,Qnc,Rnc,err,imax);
TRnc=AAnc+BBnc*Gnc;
clear ifim; clear Rnc

% calculo das respostas controladas propriamente ditas
% -----

```

```

JC=0.0;
Xpc(:,1)=Xp(:,1);
etas=eta(1:ne);
etai=eta(ne+1:ned);
etanc=[etas(1:nc,1) ; etai(1:nc,1)];
for i=2:np
    fsup=Gnc*etanc;
    for j=1:nc
        JC=JC+0.5*(etas(j)*TPT(j,j)*etas(j)+etai(j)*etai(j)+...
            fsup(j)*R*fsup(j));
    end
    fv=relinv*fsup;
    etanc=TRnc*etanc;
    etas(1:nc,1)=etanc(1:nc,1);
    etai(1:nc,1)=etanc(nc+1:2*nc,1);
    for k=nc+1:ne
        j=(2*k)-1;
        jd=j-2*nc;
        etak=[etas(k,1) ; etai(k,1)];
        fk=[T(1:ne,k)' ; T(1:ne,k+ne)']*D*fv;
        etak=eA(1:2,j:j+1)*etak+BR(1:2,jd:jd+1)*fk;
        etas(k,1)=etak(1,1);
        etai(k,1)=etak(2,1);
    end
    X=T*[etas ; etai];
    for j=1:nia
        Xpc(j,i)=X(ind(j),1);
    end
end
clear fv; clear fk; clear jd; clear etak; clear etanc; clear fsup

% calculo de energias finais
% -----
Etf=0.5*(X(1:ne) '*Rigid*X(1:ne)+X(ne+1:ned) '*Mass*X(ne+1:ned));
Eatf=0.0;
Eatfc=0.0;
for i=1:ne
    Eamf(i)=0.5*(etas(i)*TPT(i,i)*etas(i)+etai(i)*etai(i));

```

```

    Eatf=Eatf+Eamf(i);
    if i<=nc
        Eatfc=Eatfc+Eamf(i);
    end
end

% "plotagem" das respostas
% -----

fprintf('\n\n Tecle sucessivamente "ENTER" para obter os graficos')
pause

ns=0:dt:(np-1)*dt;
for i=1:nia
    tit=sprintf(' Deslocamentos na posicao %3.0f x tempo[s]',ind(i));
    plot(ns,Xp(i,1:np),ns,Xpc(i,1:np),'--'),grid,title(tit),...
        xlabel(xlbl),ylabel(ylbl)
    pause
end

fprintf('\n\n\n Recalcular respostas controladas com outro')
it=input(' valor de R (ponderacao de controle)? (s/n) ','s');
end

clear TPT; clear X; clear R

clc

fprintf(' INFORMACOES SOBRE AS ENERGIAS E O FUNCIONAL: \n\n');
fprintf(' ==> Instante inicial \n');
fprintf(' Energias totais, exata e')
fprintf(' aproximada = %10.3e , %10.3e \n',Eti,Eati);
fprintf(' Energias aproximadas dos modos a controlar: \n');
for i=1:nc
    fprintf(' %10.3e',Eami(i));
end
fprintf(' \n Soma das energias aproximadas');
fprintf(' dos modos a controlar = %10.3e \n\n',Eatic);
fprintf(' ==> Instante final - resposta livre \n');
fprintf(' Energias totais, exata e')

```

```

fprintf(' aproximada = %10.3e , %10.3e \n',Etf1,Eatf1);
fprintf(' Energias aproximadas dos modos a controlar: \n');
for i=1:nc
    fprintf(' %10.3e',Eamf1(i));
end
fprintf(' \n Soma das energias aproximadas');
fprintf(' dos modos a controlar = %10.3e \n\n',Eatflc);
fprintf(' ==> Instante final - resposta controlada \n');
fprintf(' Energias totais, exata e')
fprintf(' aproximada = %10.3e , %10.3e \n',Etf,Eatf);
fprintf(' Energias aproximadas dos modos controlados: \n');
for i=1:nc
    fprintf(' %10.3e',Eamf(i));
end
fprintf(' \n Soma das energias aproximadas');
fprintf(' dos modos controlados = %10.3e \n\n',Eatfc);
fprintf(' Valor do funcional minimizado = %10.3e \n\n',JC);

clear i; clear j; clear k; clear np; clear dt; clear nia; clear it
clear tit; clear xlbl; clear ylbl; clear Mass; clear Rigid; clear Amort
clear ind; clear mens1; clear x0; clear v0; clear relinv; clear ne
clear ned; clear nc; clear T; clear D; clear err; clear imax; clear eA
clear AAnc; clear BBnc; clear Qnc; clear Gnc; clear TRnc; clear BR
clear eta; clear etas; clear etai

```

E.3 Função TN.M

Esta função tem o objetivo básico de calcular a matriz T que é utilizada no controle de sistemas com amortecimento não diagonalizável. Deve ser alimentada com as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema. Calcula inicialmente os autovalores e autovetores complexos, os quais são ordenados pela função `ORDPARCO.M`. A partir destas grandezas a matriz T é então construída. Segue-se a sua listagem.

```

function [O,P,T,vl2,vt2]=tn(M,C,K)
%
%           function [O,P,T,vl2,vt2]=tn(M,C,K)
%
%   Funcao TN.M para geracao da matriz real T que quase diagona-
%   liza as matrizes duplas O e P obtidas a partir das matrizes

```

```
% de massa, de amortecimento e de rigidez. Fornece tambem or-
% denados os autovalores (vl2) e autovetores (vt2) do sistema
% composto pelas matrizes O e P. Os autovetores sao normaliza-
% dos em relacao 'a matriz O.
%
% Observacao: adicionar a funcao "ordparco.m".
%
```

```
% calculo de autovalores/autovetores
```

```
[n,n]=size(M);
O=[C M ; M zeros(M)];
P=[K zeros(M); zeros(M) -M];
[vt,vl]=eig(P,-O);
```

```
% ordenacao dos autovalores/autovetores
```

```
[vl2,vt1]=ordparco(vl,vt);
```

```
% normalizacao de autovetores evitando defa-
% sagem de 180 graus entre pares conjugados
```

```
aux=conj(vt1')*O*vt1;
for i=1:n
   iaux=2*i-1;
    vt2(:,iaux)=vt1(:,iaux)/sqrt(aux(iaux,iaux));
    vt2(:,iaux+1)=conj(vt2(:,iaux));
end
clear aux; clear vt1; cleariaux;
```

```
% calculo da matriz resultado T
```

```
im=sqrt(-1);
for i=1:n
   iaux=2*i;
    vli=vl2(iaux,iaux);
    aux1=1./sqrt(abs(imag(vli)));
    T(:,i)=real((1+im)*vli*aux1*vt2(:,iaux-1));
    T(:,i+n)=real(-(1-im)*aux1*vt2(:,iaux));
end
```

E.4 Função ORDPARCO.M

Esta função toma os autovetores e autovalores complexos, provenientes da função interna EIG do MATLAB, e os ordena aos pares, pelos valores crescentes dos módulos das partes imaginárias dos autovalores. No par de autovalores, aquele que apresenta a parte imaginária negativa aparece em primeiro lugar. Os autovetores são posicionados de acordo com a mesma ordem dos seus correspondentes autovalores.

```
function [vl,vt]=ordparco(vl,vt)
%
%           function [vl,vt]=ordparco(vl,vt)
%
%           Funcao para ordenar os autovalores e autovetores em pares,
%           por ordem crescente das partes imaginarias dos autovalores. Na
%           ordenacao dos pares de autovalores aparece primeiro o de valor
%           imaginario negativo.
%
[nd,nd]=size(vl);
n=nd/2;

for i=1:n
    ii=2*(n-i+1);

    % procura do maximo

    vmax=imag(vl(ii,ii));
    imax=ii;
    iim=ii-1;
    for j=1:iim
        vimag=imag(vl(j,j));
        if vimag>vmax
            vmax=vimag;
            imax=j;
        end
    end

    % troca pelo maximo

    if imax =ii
```

```

    vaux=vl(ii,ii);
    vvaux=vt(1:nd,ii);
    vl(ii,ii)=vl(imax,imax);
    vt(1:nd,ii)=vt(1:nd,imax);
    vl(imax,imax)=vvaux;
    vt(1:nd,imax)=vvvaux;
end

% procura do par complexo

for j=1:iim
    if abs((imag(vl(j,j))+vmax))<1.e-10
        imaxp=j;
    end
end

% troca pelo par complexo

if imaxp =iim
    vaux=vl(iim,iim);
    vvvaux=vt(1:nd,iim);
    vl(iim,iim)=vl(imaxp,imaxp);
    vt(1:nd,iim)=vt(1:nd,imaxp);
    vl(imaxp,imaxp)=vvaux;
    vt(1:nd,imaxp)=vvvaux;
end
end

```

E.5 Função ORDVLVT.M

Esta função toma os autovetores e autovalores reais, provenientes da função interna EIG do MATLAB, e os ordena pelos valores crescentes dos autovalores. Os autovetores são posicionados de acordo com a mesma ordem dos seus correspondentes autovalores.

```

function [vl,vt]=ordvlvt(vl,vt)
%
% function [vl,vt]= ordvlvt(vl,vt)
%
% Funcao para ordenacao de autovalores e autovetores. Os autova-

```

```
%   lores, fornecidos na diagonal da matriz vl, sao colocados em or-  
%   dem crescente. Os autovetores, ou seja, as colunas da matriz vt,  
%   sao ordenados correspondentemente.  
%
```

```
[m,n]=size(vt);
```

```
% inicio do processo de ordenacao
```

```
for j=1:n-1  
    ind=j;  
    min=vl(j,j);  
    for i=j+1:n  
        if vl(i,i)<min  
            min=vl(i,i);  
            ind=i;  
        end  
    end  
    if ind ~=j  
        vl(ind,ind)=vl(j,j);  
        vl(j,j)=min;  
        aux=vt(1:m,ind);  
        vt(1:m,ind)=vt(1:m,j);  
        vt(1:m,j)=aux;  
    end  
end
```