

CARLOS HENRIQUE DAROS ✓

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Carlos Henrique
Daros E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 04 04 95.

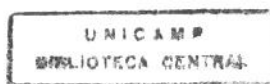
Costa Junior
ORIENTADOR

**SOLUÇÃO TRANSIENTE DA EQUAÇÃO DA ONDA
ESCALAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO : INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Campinas, abril de 1995

Publicação
FEM 09/95



C m.00077103-1

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	UNICAMP
D251s	
V.	
PREÇO	25740
PROD	433,95
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/09/95
N.º CPD	

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA UNICAMP

D251s Daros, Carlos Henrique
Solução transiente da equação da onda escalar pelo método dos elementos de contorno: integração direta no tempo / Carlos Henrique Daros.-- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Transitórios (Dinâmica). 3. Equações - Soluções numéricas. 4. Equações integrais. I. Mesquita Neto, Euclides de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Tese de : Mestrado

Título da Tese : “SOLUÇÃO TRANSIENTE DA EQUAÇÃO DA ONDA ESCALAR
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO :
INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO”

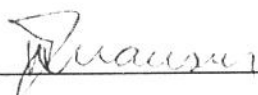
Autor : Carlos Henrique Daros

Orientador : Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

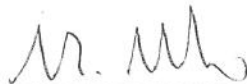
Aprovada por



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente



Prof. Dr. Webe João Mansur



Prof. Dr. Paulo Sollero

Campinas, 4 de Abril de 1995

Aos meus pais, Delrio e Loraine.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Euclides de Mesquita Neto, pelo apoio e incentivo durante o período de orientação deste trabalho.

Aos professores, colegas e funcionários da FEM-UNICAMP que contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos colegas do DMC pela amizade e apoio, em especial ao Renato Marques de Barros e aos professores Bento Rodrigues de Pontes Júnior, Edivaldo Romanini e Edson Rodrigues Carvalho.

Ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

SOLUÇÃO TRANSIENTE DA EQUAÇÃO DA ONDA ESCALAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO : INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	VII
LISTA DE SÍMBOLOS	X
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DA ONDA ESCALAR	3
I.1 A equação da onda e as propriedades da função de Green	3
I.1.1 - Translação no Tempo	4
I.1.2 - Relação de causalidade	4
I.1.2 - Relação de reciprocidade	5
I.2 A forma da função de Green.....	8
I.3 A função de Green para o caso bidimensional.....	11
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DO MEC PARA PROBLEMAS TRANSIENTES GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO DA ONDA ESCALAR	14
II.1 Método dos resíduos ponderados aplicado à equação da onda	14
II.2 A formulação tridimensional.	16
II.3 A formulação bidimensional	20
II.3.1 - A Expressão do Kernel da Derivada de u^*	21
II.3.2 - O Termo da Integral de Domínio	22
CAPÍTULO III - IMPLEMENTAÇÃO DO MEC PARA PROBLEMAS ESCALARES BIDIMENSIONAIS	26
III.1 Formulação	26
III.2 Avaliação das integrais no tempo	31
III.3 Avaliação das integrais no espaço	36
III.4 Avaliação das integrais singulares	37
III.4.1 - H_{ii}^{nn}	37
III.4.2 - G_{ii}^{nn}	37
III.5 Pontos internos	40
III.6 O programa FLUBEM	41

CAPÍTULO IV - INTEGRAÇÃO DE DOMÍNIO 45

**CAPÍTULO V - REGULARIZAÇÃO DOS KERNELS DA EQUAÇÃO DA ONDA
ESCALAR 53**

V.1 Introdução..... 53

V.2 A “Parte Finita” de uma integral singular 54

 V.2.1 Definição 54

 V.2.2 A Parte Finita como uma distribuição singular..... 56

 V.2.3 A Interpretação da Parte Finita 57

 V.2.4 A Parte Finita e a Regularização da Integral Hipersingular 60

V.3 Regularização - “Parte Finita” X integração-por-partes 61

 V.3.1 Introdução 61

 V.3.2 Equação Integral 61

 V.3.3 Regularização da Expressão do Kernel da Derivada de u^* 62

 V.3.4 O Conceito da Parte Finita de Hadamard 65

 V.3.5 Os Kernels integrados no tempo 66

 V.3.6 Conclusão 72

V.4 Obtenção dos kernels “h” 73

CAPÍTULO VI - RESULTADOS NUMÉRICOS 77

VI.1 - Exemplo 1 77

 VI.1.1 - Combinação 1 X Combinação 2 79

 VI.1.2 - Análise de erros das combinações 1 e 2 84

 VI.1.3 - Combinações 3 e 4 88

 VI.1.4 - Estudo da malha 92

 VI.1.5 - Derivada do deslocamento para pontos internos 94

 VI.1.6 - Precisão da solução numérica para tempos longos 95

VI.2 - Exemplo 2 96

VI.3 - Exemplo 3 99

VI.4 - Exemplo 4 102

CONCLUSÕES E SUGESTÕES 107

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 108

RESUMO

Nesta dissertação de mestrado estuda-se a solução numérica da equação da onda escalar em duas dimensões, usando a chamada representação integral de Volterra. O Método dos Elementos de Contorno é empregado na obtenção da solução transiente, incluindo-se neste trabalho condições iniciais de deslocamento e velocidade no domínio. Vários kernels, oriundos da integração analítica no tempo, são analisados. Uma discussão sobre a regularização de integrais hipersingulares, através da integração-por-partes ou da “parte finita de Hadamard”, é também efetuada no presente texto. Exemplos são apresentados e os resultados da análise numérica são discutidos.

ABSTRACT

This Master of Science dissertation focus on the numerical solution of the 2D scalar wave equation, making use of the so called Volterra's integral representation. The Boundary Element Method is applied to obtain a transient solution. The formulation presented includes the initial conditions of displacement and velocity throughout the domain. Several kernel expressions, obtained when analytical time integration is carried out, are analysed. The use of two techniques, Hadamard's finite part concept and integration-by-parts, to regularize hypersingular integrals is also investigated in this work. Numerical examples are presented and analysed in the text.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁG.
1.1 - Definições para a equação da onda	3
1.2 - Solução fundamental bidimensional u^*	12
1.3 - Vista de um plano XZ obtida pela secção de uma fonte tridimensional.....	13
2.1 - Definição do vetor ξ	16
2.2 - Domínio aumentado de um hemisfério de raio ε cujo centro é o ponto ξ no contorno	18
2.3 - Contorno para o caso 2-D, aumentado de um pequeno semicírculo.....	20
2.4 - Contorno aumentado de um domínio esférico	21
2.5 - Sistema polar de coordenadas	23
3.1 - Esboço da estrutura matricial	30
3.2 - Interpolação constante para q	31
3.3 - Ilustração para o caso 2	32
3.4 - Interpolação linear para q	33
3.5 - Interpolação constante para u	34
3.6 - Interpolação linear para u	35
4.1a- Discretização do domínio Ω em células triangulares	46
4.1b- Áreas para a definição das coordenadas triangulares	46
4.2 - Coordenadas polares com origem no ponto no ponto fonte ξ_i	48
4.3 - Domínios usados para a integração sobre uma célula	48
4.4 - Definições para a integração da célula	49
5.1a- Aproximação heurística	58
5.1b- Aproximação heurística	59
5.2 - $\partial u(x, \tau) / \partial \tau$ contínua por partes	65
5.3 - funções de interpolação linear	67
5.4 - Caso 1	68
5.5 - Caso 2	69
5.6 - Caso 3	70
6.1 - Condições de contorno e definições geométricas para barra unidimensional submetida a uma função de força tipo Heaviside	78
6.2 - Discretização do contorno para barra unidimensional.....	78
6.3 - Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (combinação 1)	79
6.4 - Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (combinação 2)	80
6.5 - Deslocamentos nos pontos internos E,F e G para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (combinação 1)	80
6.6 - Deslocamentos nos pontos internos E,F e G para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (combinação 2)	81

6.7 - Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 1</i>)..	81
6.8 - Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>)..	82
6.9 - Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.4$ (<i>combinação 2</i>)..	83
6.10- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.5$ (<i>combinação 2</i>)..	83
6.11- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.8$ (<i>combinação 2</i>)..	84
6.12- Erro porcentual do deslocamento em A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 1</i>).....	85
6.13- Erro porcentual do deslocamento em A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>).....	85
6.14- “Zoom” do Erro porcentual do deslocamento em A	86
6.15- Erro porcentual da derivada do deslocamento em D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 1</i>).....	86
6.16- Erro porcentual da derivada do deslocamento em D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>).....	87
6.17- Erro porcentual da derivada do deslocamento em D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.5$ (<i>combinação 2</i>).....	87
6.18- Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 3</i>).....	88
6.19- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 3</i>)..	89
6.20- Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.4$ (<i>combinação 3</i>).....	89
6.21- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.4$ (<i>combinação 3</i>)..	90
6.22- Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.5$ (<i>combinação 4</i>)	90
6.23- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.5$ (<i>combinação 4</i>)..	91
6.24- Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=1.0$ (<i>combinação 4</i>)	91
6.25- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=1.0$ (<i>combinação 4</i>)..	92
6.26- Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>)	93
6.27- Erro porcentual do deslocamento em A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>).....	93

6.28- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>)...	94
6.29- Derivada espacial do deslocamento no ponto F para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>)	95
6.30- Deslocamentos nos ponto de contorno A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. Tempos longos (<i>Combinação 2</i>).....	95
6.31- Condições de contorno e definições geométricas para a barra unidimensional com condição inicial prescrita	96
6.32- Discretização do domínio e contorno para a barra unidimensional com condições iniciais prescritas	96
6.33- Deslocamentos no ponto de contorno A e nos pontos internos I e H para barra unidimensional com condições iniciais prescritas submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>)	97
6.34- Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. $\beta=0.6$ (<i>combinação 2</i>)..	98
6.35- Definições geométricas e condições iniciais e de contorno para análise da membrana	99
6.36- Membrana discretizada em 32 elementos lineares e quatro células.....	99
6.37- Deslocamento no ponto A(L/2,L/2). 32 elementos lineares.....	100
6.38- Derivada normal do deslocamento no ponto B(L,L/2). 32 elementos lineares....	100
6.39- Animação do exemplo 3	102
6.40- Animação do modo numérico 2,2. $\beta=0.6$	104
6.41- Ponto $x=1,y=1$ da membrana submetida ao modo próprio 2,2.t = 0	105
6.42- Modos teórico e numérico para membrana quadrada no ponto $x=1, y=1$	105
6.43- Erro porcentual entre os modos teórico e numérico para membrana quadrada no ponto $x=1, y=1$	106

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- Área da célula
A^n	- Matriz
B^n	- Vetor de domínio no passo de tempo n
c_i	- Termo de contribuição geométrica para o nó i
c	- Velocidade de propagação da onda
E	- Módulo de Young
F_i^n	- Elemento do vetor com condições iniciais
${}_1g_{ii}^{nn}, {}_2g_{ii}^{nn}$	- Elementos interpolados linearmente da matriz singular G^{nn}
G_{ij}^{nm}	- Elemento da matriz G^{nm}
G^{nm}	- Matriz
h, h^l	- Kernel da derivada de u^*
H_{ij}^{nm}	- Elemento da matriz H^{nm}
H^{nm}	- Matriz
H	- Função Heaviside
I_Ω	- Termos de domínio
i	- Nó
j	- Elemento de contorno
J	- Número total de elementos de contorno
k	- Ponto de Gauss
l_j	- Tamanho do elemento de malha
$\log$	- Logaritmo neperiano
L	- Comprimento da barra
N	- Número total de passos de tempo
$\mathbf{n}$	- Vetor normal
O_l	- Célula l
P	- Amplitude da força
PF	- Parte finita
Psf	- Pseudo-função
q	- Derivada do potencial
q^*	- Derivada da solução fundamental
Q^{nm}	- Kernel da integral no tempo da derivada da solução fundamental
r	- Vetor raio (2-D)
R	- Vetor raio (3-D)
S_i^n	- Elemento do vetor fonte
t	- Tempo
t_n	- Tempo de observação
t_m	- Tempo de geração
u	- Pontencial / deslocamento
$u_{0\alpha}$	- Deslocamento inicial em um nó α da célula
u^*	- Solução fundamental / função de Green

u_{3D}^*	- Solução fundamental 3-D
U^{nm}	- Kernel da integral no tempo da solução fundamental
v	- Velocidade de partícula
$v_{0\alpha}$	- Velocidade inicial em um nó α da célula
x	- Ponto campo no domínio
X	- Ponto campo no contorno
X^n	- Vetor incógnita no passo n
W_k	- Peso de Gauss
α	- Ângulo interno
θ	- Ângulo
ϑ	- Ângulo
β	- Parâmetro adimensional
δ	- Distribuição Delta de Dirac
Δt	- Intervalo de tempo
ϕ	- Ângulo
ϕ_1, ϕ_2	- Funções de interpolação linear no espaço
ϕ_I, ϕ_F	- Funções de interpolação linear no tempo
$\phi^m(\tau), \theta^m(\tau)$	- Funções de interpolação no tempo
γ	- Termo fonte
Γ	- Contorno
Ω	- Domínio
$\eta_j(X), v_j(X)$	- Funções de interpolação no espaço
τ	- Tempo de geração
μ_α	- Coordenada triangular
ξ_i	- Ponto fonte
ξ	- Coordenada adimensional
Ξ	- Ponto fonte no contorno
$\langle \quad \rangle$	- Funcional

INTRODUÇÃO

Os problemas de propagação de ondas escalares são encontrados em várias disciplinas da engenharia. A propagação de ondas acústicas, em fluidos, eletromagnéticas, etc. é governada pela equação da onda escalar.

Com o avanço tecnológico e o consequente aparecimento de problemas com maior grau de complexidade, métodos numéricos tornam-se cada vez mais necessários para a modelagem de fenômenos físicos. Fenômenos estes como os governados pela equação da onda escalar.

O método numérico mais utilizado atualmente para problemas de engenharia é, sem dúvida, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este se aplica eficientemente a problemas de propagação de ondas, especialmente em domínios limitados. Para problemas realistas, com geometrias complexas ou mesmo para análises tridimensionais os custos destes trabalhos pelo MEF podem ser bastante altos, especialmente a fase de preparação de dados. Um método alternativo é fornecido pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC). Embora o último não seja a solução numérica definitiva, ele, em algumas situações, apresenta vantagens sobre o MEF. O MEC somente requer a discretização do contorno da região em questão e satisfaz automaticamente a condição de radiação de Sommerfeld. Tal condição torna o MEC especialmente útil na análise de domínios ilimitados, ideais para o caso escalar acústico (por exemplo).

Diversas alternativas têm sido empregadas para se analisar propagação de ondas com o MEC. Quando o fenômeno é transiente e é governado pela equação da onda escalar a equação integral de Kirchhoff [13] é o ponto de partida para a análise numérica no domínio do tempo.

Kirchhoff [13] em 1883 foi o primeiro a formular a equação integral para problemas de onda escalar em termos de potenciais desconhecidos. Entretanto, as soluções de tais problemas iniciaram-se somente no início dos anos 60 com o trabalho pioneiro de Friedman e Shaw [14]. Estes resolveram um caso particular de dispersão de ondas acústicas transientes 2-D considerando-as como ondas cilíndricas 3-D, com um eixo de comprimento arbitrário e usando um esquema de avanço no tempo. Para problemas bidimensionais (caso escalar ou/ elastodinâmico), os trabalhos de Cole et al. em 1978 [16] e Niwa et al. [17] em 1980 são provavelmente os primeiros (contemplando uma formulação geral de elementos de contorno). Niwa et al. derivaram as equações integro-diferenciais bidimensionais de contorno diretamente da forma tridimensional da identidade integral de Love. Cole et al. implementaram um algoritmo para problemas transientes escalares no MEC usando elementos constantes. O algoritmo provou-se instável, sendo entretanto uma importante contribuição para a formulação 2-D do MEC no domínio do tempo. Para o caso elastodinâmico o trabalho de Cole restringiu-se ao caso anti-plano. Groenenbonn [34] aplicou em 1981 a formulação do MEC para a propagação transiente de ondas escalares 3-D. Em 1982, Mansur apresentou a formulação geral do MEC no domínio do tempo para ondas escalares e para a elastodinâmica [2],[3] e [5]. Qualquer discretização de espaço e

tempo pode ser utilizada na formulação de Mansur. Antes (1985) adicionou à formulação de Mansur, para problemas da elastodinâmica plana transiente, condições iniciais arbitrárias. Seguindo o trabalho de Mansur, outros autores contribuíram para a implementação numérica da técnica de avanço no tempo assim como no desenvolvimento de soluções numéricas. Dentre eles destacam-se, no período de 1985 a 1994, autores como Antes e Estorff [9], Israil e Banerjee [8], Gallego e Domínguez [7], Demirel e Wang [10], Wang e Takemiya [18], Mansur e Carrer [23]. Israil e Banerjee obtiveram em 1990 o que chamaram de “uma nova formulação transiente para o MEC”. Tal formulação é completamente inconsistente, embora as fórmulas finais sejam idênticas àsquelas obtidas por Mansur. Mais recentemente (1993), Mansur e Carrer apresentaram o conceito da “parte finita” de uma integral aplicado aos kernels do problema escalar transiente.

Comparado ao domínio da frequência, o número de publicações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) no domínio do tempo é bem menor. Uma das razões para a escassez de artigos deve-se à formulação mais elaborada que a pesquisa no domínio do tempo exige. Contudo, a formulação no domínio do tempo é a melhor aproximação para resolver alguns problemas de engenharia como por exemplo : geometrias que se modificam ao longo do tempo e comportamentos não-lineares.

O objetivo desta dissertação é a formulação e implementação do MEC para tratamento de problemas escalares transientes bidimensionais. Problemas estes que descrevem situações relevantes em engenharia. Um exemplo da potencialidade do assunto aqui tratado é o estudo de barreiras sonoras [35] para o controle do ruído provocado por fontes móveis, tais como automóveis ou aviões próximos a zonas residenciais.

A dissertação encontra-se dividida em seis capítulos. O primeiro capítulo trata da chamada “solução fundamental” que governa a equação escalar da onda, bem como a descrição de suas principais propriedades. O segundo capítulo trata da formulação do MEC para problemas transientes, bi e tridimensionais. Ele se inicia pela aplicação do método dos resíduos ponderados ao operador em questão, passa pelas formulações 2-D e 3-D, discute a derivada da solução fundamental e finaliza com uma discussão sobre a integração de domínio. O terceiro capítulo descreve a implementação numérica, incluindo as integrações de espaço, tempo e das singularidades existentes, a obtenção de valores internos no domínio e um fluxograma computacional. O quarto capítulo descreve o tratamento das integrais que resultam das condições iniciais distribuídas ao longo do domínio. A regularização das integrais singulares via integração por partes ou via o conceito da “parte finita de Hadamard” pode ser encontrada no quinto capítulo. Os resultados numéricos estão concentrados no sexto e último capítulo. A implementação efetuada incluiu problemas com condições iniciais prescritas nos contornos, e também no domínio, tanto em termos de deslocamentos como de velocidades iniciais. Os exemplos utilizados procuraram explorar as diversas possibilidades da formulação escalar transiente do MEC.

Capítulo I - Função de Green para a Equação da Onda Escalar

I.1 - A equação da onda e as propriedades da função de Green

A equação da onda escalar pode ser escrita em termos de um potencial u como :

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\gamma \quad (1.1)$$

Onde c é a velocidade de propagação da onda, t é o tempo, γ é uma função que descreve a distribuição da intensidade da fonte e a sua dependência no tempo em cada ponto do domínio.

Além da equação (1.1) devem-se conhecer as condições de contorno e iniciais para se obter uma solução única de (1.1). A condição na superfície do contorno pode ser ou de Dirichlet ou Neumann ou uma combinação linear de ambas. As condições na dimensão do tempo devem ser de Cauchy, i.e. especificação de u e du/dt em $t = 0$ em todos os pontos do domínio.

Para efeito de análise considerar-se-á neste texto as seguintes definições. Ω é o domínio para o qual se deseja a solução de (1.1). Ω possui um contorno Γ do tipo de Kellogg [5]. A normal unitária externa a Γ é um vetor $\vec{n}$. As condições iniciais $u(x, t)$ e $\partial u(x, t) / \partial t$ em $t = 0$ são especificadas em todos os pontos x interiores ao domínio Ω . Além disso $u(x, t)$ e $\partial u(x, t) / \partial n$ satisfazem condições de contorno prescritas ($u = \bar{u}$) em Γ_1 e $(\partial u / \partial n = \partial \bar{u} / \partial n)$ em Γ_2 respectivamente ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$).

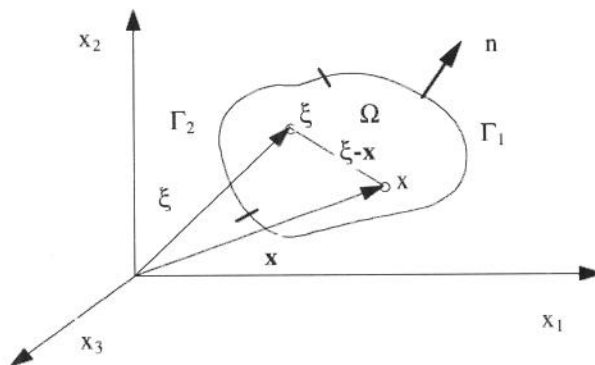


Figura 1.1 Definições para a equação da onda

A função de Green para o problema acima descrito é a solução da equação (1.1) para um domínio ilimitado e uma fonte concentrada particular, i. e.

$$\gamma = 4\pi\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \quad (1.2)$$

Onde δ é a função delta de Dirac.

A equação (1.1) pode ser agora escrita como :

$$\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = -4\pi\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \quad (1.3)$$

Note-se que esta função de Green foi chamada de $u^*(x, t|\xi, \tau)$ para indicar o seu caráter ilimitado. Portanto u^* é o efeito de uma fonte representada por um impulso em $t = \tau$ localizada em $x = \xi$. x e ξ são geralmente referidos na literatura como pontos de observação (ou campo) e fonte respectivamente.

Em [1] demonstra-se que u^* satisfaz a forma homogênea das condições de contorno (e.g. $u = 0$ em Γ_1) satisfeitas por u no contorno. Para as condições iniciais é plausível assumir-se que u^* e $\partial u^* / \partial t$ devam ser zero para $t < \tau$. A última afirmação significa que se um impulso ocorre em τ nenhum efeito deste deve ser sentido em um tempo anterior. Para prosseguir-se o estudo da função de Green, faz-se necessário a definição de suas propriedades.

I.1.1 - Translação no Tempo

A função de Green não se altera ao transladar-se o tempo da mesma medida para a fonte e o observador. Ou seja :

$$u^*(x, t + t_1 | \xi, \tau + t_1) = u^*(x, t | \xi, \tau) \quad (1.4)$$

I.1.2 - Relação de Causalidade

$$u(x, t | \xi, \tau) = 0 \quad (1.5)$$

Sempre que $c(t - \tau) < |x - \xi|$. Ou seja nenhum efeito ocorre em $t < \tau$.

I.1.3 - Relação de Reciprocidade

O Princípio da reciprocidade afirma que a mudança de fonte e observador não altera o valor da função de Green. O potencial em um ponto (x,y) causado pela carga em (ξ,η) iguala-se ao potencial em (ξ,η) causado pela mesma carga em (x,y) . Assim $u^*(x|\xi) = u^*(\xi|x)$.

A condição de causalidade definida anteriormente implica que a generalização da relação de reciprocidade, $u^*(x|\xi) = u^*(\xi|x)$, ao incluir-se o tempo não é $u^*(x,t|\xi,\tau) = u^*(\xi,\tau|x,t)$. De fato, se $t > \tau$ o termo à direita da igualdade anterior é zero. A fim de se obter a relação de reciprocidade é necessário reverter-se a direção do fluxo do tempo. Desta forma a relação de reciprocidade fica :

$$u^*(x,t|\xi,\tau) = u^*(\xi,-\tau|x,-t) \quad (1.6)$$

A fim de se interpretar (1.6) é conveniente colocar-se $\tau = 0$. Desta forma $u^*(x,t|\xi,0) = u^*(\xi,0|x,-t)$. Vê-se que o efeito, em x em um tempo t após um impulso iniciado em ξ , iguala-se ao efeito, em ξ em um tempo 0 , de um impulso iniciado em x em um tempo $-t$. Onde $-t$ significa um tempo anterior.

Para provar-se (1.6) escrevem-se as equações satisfeitas por ambas as funções de Green:

$$\nabla^2 u^*(x,t|\xi,\tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*(x,t|\xi,\tau)}{\partial t^2} = -4\pi\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 u^*(x,-t|x_1,-t_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*(x,-t|x_1,-t_1)}{\partial t^2} = -4\pi\delta(x-x_1)\delta(t-t_1) \quad (1.8)$$

Multiplicando-se (1.7) por $u^*(x,-t|x_1,-t_1)$ e (1.8) por $u^*(x,t|\xi,\tau)$, subtraindo-se e integrando-se sobre a região em investigação e sobre o tempo t de $-\infty$ a t' (onde $t' > \tau$ e $t' > t_1$) tem-se :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t'} dt \int d\Omega \left\{ u^*(x,t|\xi,\tau) \nabla^2 u^*(x,-t|x_1,-t_1) - u^*(x,-t|x_1,-t_1) \nabla^2 u^*(x,t|\xi,\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} u^*(x,t|\xi,\tau) \frac{\partial^2 u^*(x,-t|x_1,-t_1)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} u^*(x,-t|x_1,-t_1) \frac{\partial^2 u^*(x,t|\xi,\tau)}{\partial t^2} \right\} = \\ & = 4\pi \left\{ u^*(\xi,-\tau|x_1,-t_1) - u^*(x_1,t_1|\xi,\tau) \right\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

O lado esquerdo da equação acima pode ser transformado pelo uso do teorema de Green e pela identidade :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[u^*(x, t | \xi, \tau) \frac{\partial u^*(x, -t | x_1, -t_1)}{\partial t} - u^*(x, -t | x_1, -t_1) \frac{\partial u^*(x, t | \xi, \tau)}{\partial t} \right] = \\ & = u^*(x, t | \xi, \tau) \frac{\partial^2 u^*(x, -t | x_1, -t_1)}{\partial t^2} - u^*(x, -t | x_1, -t_1) \frac{\partial^2 u^*(x, t | \xi, \tau)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Obtem-se para o lado esquerdo :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t'} dt \int d\vec{\Gamma} \cdot \left\{ u^*(x, t | \xi, \tau) \nabla u^*(x, -t | x_1, -t_1) - u^*(x, -t | x_1, -t_1) \nabla u^*(x, t | \xi, \tau) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \int d\Omega \left[u^*(x, t | \xi, \tau) \frac{\partial u^*(x, -t | x_1, -t_1)}{\partial t} - u^*(x, -t | x_1, -t_1) \frac{\partial u^*(x, t | \xi, \tau)}{\partial t} \right] \right\}_{t=-\infty}^{t=t'} \end{aligned} \quad (1.11)$$

A primeira destas integrais desaparece pois ambas as funções de Green satisfazem as mesmas condições de contorno homogêneas em Γ . A segunda também desaparece como ver-se-á agora. No limite inferior ambas $u^*(x, -\infty | \xi, \tau)$ e sua derivada no tempo desaparecem em virtude da condição de causalidade. No tempo $t = t'$, $u^*(x, -t' | x_1, -t_1)$ e sua derivada no tempo desaparecem, uma vez que $-t'$ é anterior a $-t_1$. Portanto o lado esquerdo de (1.9) é zero demonstrando o teorema da reciprocidade.

Com a propriedade da reciprocidade podem-se obter relações interessantes. Demonstrar-se-á que é possível expressar-se a solução (incluindo as condições iniciais) do problema não homogêneo para a equação escalar da onda em termos de conhecidas não homogeneidades na função de Green. Para tanto usar-se-á duas equações :

$$\nabla^2 u(\xi, \tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -4\pi q(\xi, \tau) \quad (1.12)$$

e

$$\nabla^2 u^*(x, t | \xi, \tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*(x, t | \xi, \tau)}{\partial \tau^2} = -4\pi \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (1.13)$$

A equação (1.12) tem a mesma interpretação de (1.1). q representa uma função que descreve a intensidade da fonte. Além disso a equação é função agora de ξ e τ . Já a equação (1.13) advém de (1.7) através do uso da relação de reciprocidade¹. Esta permite que a variável no tempo seja τ no lugar de t . Tendo-se as duas equações multiplica-se a primeira por u^* e a segunda por u efetuando-se então uma subtração. Integra-se sobre o domínio de interesse e sobre τ de 0 até t^+ . O símbolo t^+ representa $t + \varepsilon$, onde ε é arbitrariamente pequeno. Este limite é aplicado a fim de se evitar o término da integração exatamente no pico da função delta de Dirac. Obtém-se então :

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} d\tau \int d\Omega \left\{ u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^* + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} u - u^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right] \right\} = \\ = 4\pi \left\{ u(x, t) - \int_0^{t^+} d\tau \int d\Omega q(\xi, \tau) u^* \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Aplicando-se o teorema de Green, tem-se :

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} d\tau \oint d\vec{\Gamma} \cdot (u^* \nabla u - u \nabla u^*) + \frac{1}{c^2} \int d\Omega \left[\frac{\partial u^*}{\partial \tau} u - u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} \right]_{\tau=0}^{\tau=t^+} + \\ + 4\pi \int_0^{t^+} d\tau \int d\Omega q(\xi, \tau) u^* = 4\pi u(x, t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Onde $d\vec{\Gamma} = \vec{n} d\Gamma$, $\partial u / \partial n = \nabla u \cdot \vec{n}$ e $\partial u^* / \partial n = \nabla u^* \cdot \vec{n}$

O integrando na primeira integral em (1.15) é especificado pelas condições de contorno. Na segunda integral, o integrando desaparece quando $\tau = t^+$ devido ao princípio da causalidade que rege u^* e sua derivada. O limite remanescente (i.e $\tau = 0$) envolve somente condições iniciais. Assim :

$$\begin{aligned} 4\pi u(x, t) = 4\pi \int_0^{t^+} d\tau \int d\Omega q(\xi, \tau) u^*(x, t | \xi, \tau) + \\ + \int_0^{t^+} d\tau \oint d\vec{\Gamma} \cdot (u^* \nabla u - u \nabla u^*) - \\ - \frac{1}{c^2} \int d\Omega \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} u(\xi) - u^*_{\tau=0} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

¹ De acordo com [1]

Onde $u(\xi)$ e $\partial u(\xi) / \partial \tau$ são os valores iniciais do potencial e sua derivada.

A equação (1.16) fornece a solução completa do problema não homogêneo incluindo a satisfação das condições iniciais. A primeira integral em (1.16) representa o efeito das fontes; a segunda o efeito das condições de contorno nos contornos espaciais. O último termo envolve as condições iniciais.

1.2 - A forma da função de Green

A obtenção da expressão de u^* se faz pela análise do grau relativo das singularidades nas funções $\nabla^2 u^*$ e $\partial^2 u^* / \partial t^2$ na equação :

$$\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = -4\pi\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \quad (1.17)$$

Em [1] encontra-se que a solução da equação de Poisson,

$$\nabla^2 u^* = -4\pi\delta(x - \xi) \quad (1.18)$$

com condição homogênea de Dirichlet ($u^* = 0$ em Γ) é uma função que vai ao infinito como $u^* = 1/|x - \xi|$ para x perto do ponto ξ (fonte).

Pode-se assumir (de forma não rigorosa) que $\nabla^2 u^*$ é mais singular que $\partial^2 u^* / \partial t^2$, uma vez que a primeira envolve a segunda derivada de uma distribuição Delta de Dirac tridimensional, $\delta(\bar{x} - \bar{x}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$. Sendo assim negligenciar-se-á a derivada no tempo nesta análise².

Integram-se ambos os lados da equação (1.17) sobre uma pequena esfera de raio ε com centro em ξ . Define-se ainda $R = x - \xi$. Faz-se então o limite com $\varepsilon \rightarrow 0$ (i.e. $R \rightarrow 0$) e assume-se que o integrando $\nabla^2 u^*$ predomina. Assim obtem-se :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint \nabla^2 u^*(R) dV = -4\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint \delta(x - \xi)\delta(t - \tau) dV = -4\pi\delta(t - \tau) \quad (1.19)$$

Onde as coordenadas para integração sobre o volume esférico são R, ϑ, ϕ e o elemento de volume $dV = R^2 dR \sin\vartheta d\vartheta d\phi$. Valeu-se ainda da propriedade do Delta de Dirac para o termo direito da igualdade. Lembrando-se do teorema de Gauss :

² Uma discussão com uma justificativa matemática rigorosa pode ser encontrada em [1]

$$\iiint \nabla^2 u^*(R) dV = \oint \left[\text{grad } u^*(R) \right] \cdot d\vec{A} \quad (1.20)$$

Assim :

$$\oint \left[\text{grad } u^*(R) \right] \cdot d\vec{A} \rightarrow -4\pi\delta(t - \tau) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.21)$$

Uma vez que u^* depende espacialmente só de R , a coordenada radial da pequena esfera, o $\text{grad}(u^*)$ é em todo lugar na direção radial paralelo a $d\vec{A}$. Além disso sua magnitude é a mesma em qualquer lugar na superfície. Portanto, a integral de superfície é igual, no limite, a du^*/dR , em $R = \varepsilon$, vezes a área da esfera, $4\pi\varepsilon^2$. Chega-se portanto a :

$$\left[(du^*/dR)_{R=\varepsilon} \right] (4\pi\varepsilon^2) \rightarrow -4\pi\delta(t - \tau) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.22)$$

Ou, da mesma forma :

$$(d/dR)u^*(R) \rightarrow -\delta(t - \tau)/R^2 \quad \text{quando } R \rightarrow 0 \quad (1.23)$$

Portanto finalmente obtem-se $u^*(R) \rightarrow \delta(t - \tau)/R$, ou :

$$u^*(x, t|\xi, \tau) \rightarrow \delta(t - \tau)/R \quad \text{quando } R = |x - \xi| \rightarrow 0 \quad (1.24)$$

Procura-se agora encontrar uma solução da equação homogênea de (1.17) que satisfaça (1.24). Fica claro que a u^* encontrada em (1.24) satisfaz :

$$\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = 0 \quad (1.25)$$

para R e $t - \tau$ diferentes de zero.

Sabe-se até aqui que quando $R = 0$ a condição (1.24) deve ser empregada. Uma vez que se está trabalhando com fontes pontuais num meio infinito, u^* é uma função de R ao invés de ser de x ou ξ separadamente. Portanto :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial u^*}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou,} \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial^2 (u^* R)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (u^* R)}{\partial t^2} = 0$$

A solução para esta equação é do tipo :

$$u^* = \frac{h[(R/c) - (t - \tau)] + k[(R/c) + (t - \tau)]}{R} \quad (1.27)$$

Onde h e k são quaisquer funções. Comparando-se com a condição (1.24) vê-se que duas possibilidades (ou qualquer combinação linear) ocorrem, $\delta[(R/c) - (t - \tau)]/R$ ou $\delta[(R/c) + (t - \tau)]/R$. A segunda destas deve ser eliminada pois pela causalidade o efeito de um impulso num tempo τ deve ser sentido a uma distância R num tempo $t > \tau$. Portanto :

$$u^* = \frac{\delta[(R/c) - (t - \tau)]}{R}; \quad R, t - \tau > 0 \quad (1.28)$$

Onde (1.28) representa uma casca esférica ao redor da fonte, expandindo-se com uma velocidade radial c .

1.3 - A função de Green para o caso bidimensional

Se uma distribuição de fonte é independente de z num sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) tem-se um problema bidimensional; ou seja, u^* depende somente de x e y . A "fonte pontual bidimensional" para tal problema é uma fonte linha, uma fonte uniforme estendendo-se de $z_0 = -\infty$ a $z_0 = +\infty$ ao longo de uma linha paralela ao eixo z passando através de (x_0, y_0) . A função de Green para problemas bidimensionais pode ser encontrada integrando-se a fonte pontual tridimensional da equação (1.28) no intervalo de $z_0 = -\infty$ a $z_0 = +\infty$.

$$u^*(x, t | \xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta[(R/c) - (t - \tau)]}{R} dz_0 \quad (1.29)$$

Define-se :

$$\rho = z_0 - z, \quad R^2 = \rho^2 + r^2 \quad \text{e} \quad \partial \rho / \partial R = R / \rho \quad (1.30)$$

Onde r é o vetor raio no plano xy , usado para o caso bidimensional no lugar de R (caso tridimensional).

Desta forma a expressão (1.29) pode ser reescrita como :

$$\begin{aligned} u^*(x, t | \xi, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta[(R/c) - (t - \tau)]}{R} d\rho = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\delta[(R/c) - (t - \tau)]}{\sqrt{R^2 - r^2}} dR = \\ &= \frac{2}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \int_0^{+\infty} \delta[(R/c) - (t - \tau)] dR \end{aligned} \quad (1.31)$$

Note-se que R foi substituído por $c(t - \tau)$ em (1.31). Isto advém de uma propriedade do Delta de Dirac. A integral restante em (1.31) merece uma interpretação mais detalhada. Ao se operar com o Delta de Dirac é válida a igualdade :

$$\delta[(R/c) - (t - \tau)] = c \delta[R - c(t - \tau)] \quad (1.32)$$

Assim a integral em (1.31) pode ser escrita como :

$$\int_0^{\infty} \delta[(R/c) - (t - \tau)] dR = c \int_{-\infty}^0 \delta[c(t - \tau) - R] dR \quad (1.33)$$

Esta é uma função particular do Delta de Dirac chamada de função Degrau Unitária ou Heaviside. É definida de modo que :

$$H[c(t - \tau) - r] = c \int_{-\infty}^0 \delta[c(t - \tau) - R] dR = \begin{cases} 0 & \text{se } c(t - \tau) - r < 0 \\ 1 & \text{se } c(t - \tau) - r > 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Desta forma a função de Green para a equação escalar bidimensional da onda é :

$$u^*(x, t | \xi, \tau) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} H[c(t - \tau) - r] \quad (1.35)$$

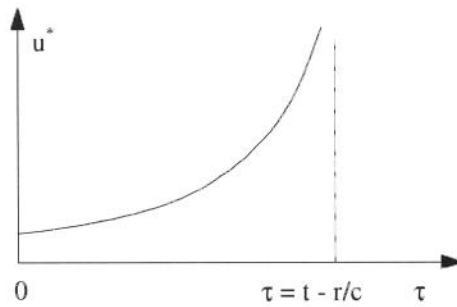


Figura 1.2 Solução fundamental bidimensional u^*

Pode-se notar, pela equação (1.35), uma marcante diferença entre os casos bidimensional e tridimensional. Em três dimensões, o efeito de um impulso, após passado um tempo $t - \tau$, estará concentrado em uma esfera de raio $R = c(t - \tau)$ cujo centro é a fonte pontual (em ξ). Isto é uma característica da função $\delta[(R/c) - (t - \tau)]$ que ocorre em (1.28). Em duas dimensões, o efeito em um tempo $t - \tau$ devido a uma fonte impulsiva é difundido sobre uma região inteira $r < c(t - \tau)$. A explicação para tal diferença pode ser facilmente vista examinando-se a fonte linha em três dimensões. Os efeitos, após um tempo $t - \tau$ decorrido, de cada fonte pontual que constitui a fonte linha são encontrados numa região diferente do plano xy . Portanto infere-se que uma fonte linha impulsiva não emite uma onda na forma de uma casca cilíndrica com a perturbação presente somente na superfície da onda, $r = c(t - \tau)$. O que existe, pelo contrário, é uma "esteira" que segue atrás desta superfície de onda. Este efeito esteira é característico de problemas bidimensionais e não é encontrado em problemas uni ou tridimensionais. Uma outra representação do efeito "esteira" pode ser visto na figura (1.3).

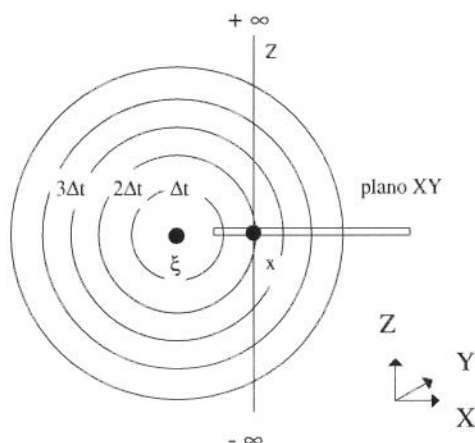


Figura 1.3 Vista de um plano XZ obtido pela secção de uma fonte tridimensional

Nota-se na figura 1.3 que a fonte, depois de ter atingido o observador em x , continua ainda perturbando o eixo de integração Z .

Capítulo II - Formulação do MEC para Problemas Transientes Governados pela Equação Escalar da Onda

II.1 - Método dos Resíduos Ponderados aplicado à Equação da Onda

No capítulo I apresentou-se a expressão da equação escalar da onda como :

$$\nabla^2 u(x, \tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} = -\gamma(x, \tau) \quad (2.1)$$

Para o caso de uma fonte concentrada particular estabeleceu-se a função de Green como solução de (2.1). Como já visto, a propriedade da reciprocidade permite escrever:

$$\nabla^2 u^*(x, t | \xi, \tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*(x, t | \xi, \tau)}{\partial \tau^2} = -4\pi \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (2.2)$$

Será conveniente na análise a seguir uma notação diferente para os pontos fonte e campo quando estes estiverem no contorno. Assim, os pontos fonte e campo, quando localizados em Γ , serão denotados por Ξ e X respectivamente.

Aplica-se agora o Método dos Resíduos Ponderados à expressão (2.1), ou seja :

$$\int_0^+ \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \gamma \right] u^* d\Omega d\tau = \int_0^+ \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) u^* d\Gamma d\tau - \int_0^+ \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma d\tau \quad (2.3)$$

Onde a função de Green u^* é usada como função ponderadora e as variáveis conhecidas nos contornos Γ_1 e Γ_2 , ver capítulo 1, são acompanhadas do símbolo “-” ([11] fornece uma descrição detalhada do método dos resíduos ponderados). Integrando-se o Laplaceano ($\nabla^2 u$) por partes duas vezes com relação ao espaço e integrando-se a derivada ($\partial^2 u / \partial \tau^2$) duas vezes em relação ao tempo chega-se a :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma d\tau + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right] u d\Omega d\tau + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^* \gamma d\Omega d\tau + \\
& + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u^*}{\partial \tau} u - \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \right]_0^{t^+} d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Levando-se em consideração a equação (2.2) e que devido à propriedade da causalidade :

$$\left| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} u \right|_{t^+} = 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \right|_{t^+} = 0 \quad \text{pois} \quad u^*(x, t|\xi, t^+) = 0$$

A equação (2.4) pode ser escrita como :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Omega} 4\pi \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) u d\Omega d\tau + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^* \gamma d\Omega d\tau + \\
& + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right)_0 u_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_0 u_0^* \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Onde o sub-índice "0" indica o valor da função no instante inicial $\tau = 0$.

As propriedades do Delta de Dirac podem ser aplicadas ao segundo termo da equação (2.5) a fim de se obter a expressão integral final :

$$\begin{aligned}
4\pi u(\xi, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \left[u^*(X, t|\xi, \tau) \frac{\partial u}{\partial n}(X, \tau) - u(X, \tau) \frac{\partial u^*}{\partial n}(X, t|\xi, \tau) \right] d\Gamma(X) d\tau - \\
&- \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau}(x, t|\xi) \right)_0 u_0(x) - \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}(x) \right)_0 u_0^*(x, t|\xi) \right] d\Omega(x) + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^*(x, t|\xi, \tau) \gamma(x, \tau) d\Omega(x) d\tau
\end{aligned} \tag{2.6}$$

II.2 - A Formulação Tridimensional

Como visto no capítulo anterior a solução fundamental para a equação da onda no caso tridimensional é :

$$u^*(x, t | \xi, \tau) = \frac{\delta[(r/c) - (t - \tau)]}{r} = \frac{c}{r} \delta[r - c(t - \tau)] \quad (2.7)$$

Onde $r = r(x, \xi) = |\vec{x} - \vec{\xi}|$ é definido na figura 2.1. Substituindo-se (2.7) em (2.6) o primeiro termo do lado direito de (2.6) torna-se, levando em conta a propriedade do Delta Dirac :

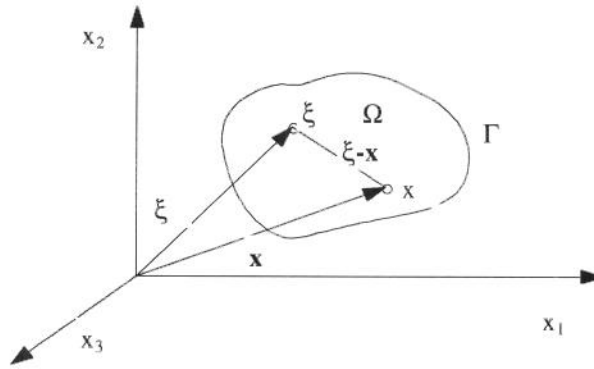


figura 2.1 Definição do vetor $\xi-x$ (ref [5])

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} \int_{\Gamma} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma d\tau &= \int_{\Gamma} \int_0^{t^*} \delta[(r/c) - (t - \tau)] \frac{\partial u}{\partial n}(X, \tau) d\tau d\Gamma = \int_{\Gamma} \int_0^{t^*} \delta[\tau - t_r] \frac{\partial u}{\partial n}(X, \tau) d\tau d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}(X, t_r) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.8)$$

Onde $t_r = t - R/c$

A derivada da solução fundamental pode ser obtida de

$$\frac{\partial u^*(X, t | \xi, \tau)}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u^*}{\partial r} \quad (2.9)$$

As derivadas indicadas na equação (2.9) referem-se a pontos do contorno X. Usando-se (2.7) a expressão (2.9) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial n} \left(-\frac{1}{r^2} \delta[(r/c) - (t - \tau)] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \delta[(r/c) - (t - \tau)] \right) = \\ &= \frac{\partial r}{\partial n} \left(-\frac{1}{r^2} \delta(\tau - t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(\tau - t_r)] \right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

Levando-se em consideração (2.10) o segundo termo à direita de (2.6) pode ser escrito

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} \int_r \frac{\partial u^*}{\partial n} u d\Gamma d\tau &= \int_r \frac{\partial r}{\partial n} \int_0^{t^*} \left(-\frac{1}{r^2} \delta(\tau - t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(\tau - t_r)] \right) u d\tau d\Gamma = \\ &= \int_r \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{1}{r^2} u(X, t_r) + \frac{1}{cr} \left[\frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t_r} \right) d\Gamma\end{aligned}\quad (2.11)$$

Onde utilizou-se na expressão acima as propriedades do Delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(x - a) f(x) dx = (-1)^k f^{(k)}(a) \quad (2.12)$$

A integral envolvendo a densidade de fonte em (2.6) pode ser transformada em

$$\int_0^{t^*} \int_{\Omega} u^* \gamma d\Omega d\tau = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \int_0^{t^*} \gamma(x, \tau) \delta(\tau - t_r) d\tau d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \gamma(x, t_r) d\Omega \quad (2.13)$$

As propriedades do Delta de Dirac também podem ser aplicadas aos termos que envolvem condições iniciais [5] na equação (2.6). A equação integral final tem a seguinte forma [5].

$$\begin{aligned}u(\xi, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_r \frac{1}{r(\xi, X)} \frac{\partial u(X, t_r)}{\partial n} d\Gamma(X) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_r \frac{\partial r(\xi, X)}{\partial n(X)} \left(\frac{1}{r^2(\xi, X)} u(X, t_r) + \frac{1}{cr(\xi, X)} \left[\frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t_r} \right) d\Gamma(X) + \\ &+ tN_0 + \frac{\partial}{\partial t} (tM_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r(\xi, x)} \gamma(x, t_r) d\Omega(x)\end{aligned}\quad (2.14)$$

Onde M_0 e N_0 são respectivamente o valor médio de u_0 e $\partial u_0 / \partial \tau$ sobre uma superfície esférica com centro em ξ e com raio variável ct . Deve-se notar que quando $t_r < 0$ os termos à direita da equação (2.14) não contribuem para $u(\xi, t)$. Esta equação é conhecida como a representação integral de Kirchhoff.

Tal representação pode ser utilizada para calcular-se u para pontos internos do domínio em termos de u , $\partial u / \partial n$ e $\partial u / \partial \tau$, no contorno Γ , e em termos de densidade de fonte e condições iniciais. Entretanto, em um problema bem colocado u e $\partial u / \partial n$ não são conhecidos inteiramente em Γ . Assim, o resultado de (2.14) apenas não representa a solução completa do problema de valor inicial com condições de contorno descrito no item **I.I**. Uma equação integral de contorno, na qual as incógnitas no contorno podem ser encontradas, obtém-se de (2.14) escrevendo-se esta para o contorno Γ . A equação integral obtida, ao contrário da representação de Kirchhoff, tem integrais de contorno de funções singulares que devem ser computadas no sentido do valor principal de Cauchy.

Quando o contorno Γ é suave, o domínio Ω pode ser aumentado de um pequeno hemisfério de raio ϵ , cujo centro é o ponto fonte Ξ (ver figura 2.2). O raio ϵ é levado a zero tornando-se Ξ um ponto do contorno Γ . Feito isto obtém-se a expressão especializada de (2.14) para um ponto em Γ .

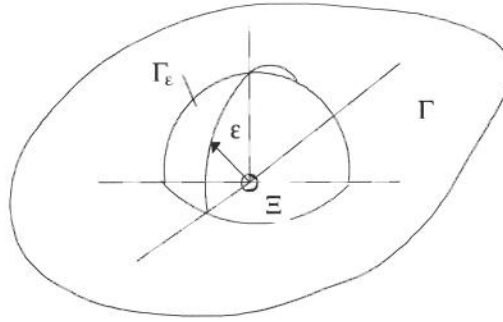


figura 2.2 Domínio aumentado de um hemisfério de raio ϵ cujo centro é o ponto Ξ no contorno (ref [5])

Há três tipos de integrais de contorno em (2.14) segundo [5]. O primeiro é

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial u(X, t_r)}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon}} \frac{1}{r} \frac{\partial u(X, t_r)}{\partial n} d\Gamma \right\} + \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{1}{r} \frac{\partial u(X, t_r)}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad (2.15)$$

A primeira parte simplesmente torna-se uma integral em todo o contorno no sentido do valor principal de Cauchy quando $\epsilon \rightarrow 0$. A segunda parte

$$\frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{1}{r} \frac{\partial u(X, t_r)}{\partial n} d\Gamma \right\} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial u(\Xi, t_r)}{\partial n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} d\Gamma = 0 \quad (2.16)$$

O segundo tipo de integral sobre o hemisfério resulta

$$\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{1}{\varepsilon^2} u(X, t_r) d\Gamma = u(\Xi, t - r/c) \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{1}{\varepsilon^2} d\Gamma = \frac{1}{2} u(\Xi, t) \quad (2.17)$$

e o terceiro tipo

$$\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon c} \left[\frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t_r} d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial u(\Xi, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t_r} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon c} d\Gamma = 0 \quad (2.18)$$

Portanto, para pontos no contorno ($\Xi = \xi_i$), (2.14) transforma-se em

$$\begin{aligned} c_i u(\xi_i, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r(\xi_i, X)} \frac{\partial u(X, t_r)}{\partial n} d\Gamma(X) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r(\xi_i, X)}{\partial n(X)} \left(\frac{1}{r^2(\xi_i, X)} u(X, t_r) + \frac{1}{cr(\xi_i, X)} \left[\frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t_r} \right) d\Gamma(X) + \\ &+ tN_0 + \frac{\partial}{\partial t}(tM_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r(\xi_i, x)} \gamma(x, t_r) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ou ainda, na forma primitiva (i.e. sem realizar as integrações no tempo)

$$\begin{aligned} 4\pi c_i u(\xi_i, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma} \left[u^*(X, t|\xi_i, \tau) \frac{\partial u}{\partial n}(X, \tau) - u(X, \tau) \frac{\partial u^*}{\partial n}(X, t|\xi_i, \tau) \right] d\Gamma(X) d\tau - \\ &- \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau}(x, t|\xi_i) \right) u_0(x) - \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}(x) \right) u_0^*(x, t|\xi_i) d\Omega(x) + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} u^*(x, t|\xi_i, \tau) \gamma(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \end{aligned} \quad (2.20)$$

Onde as integrais são calculadas no sentido do valor principal de Cauchy e $c_i = 1/2$ quando Γ é suave em “i”. Quando “i” é um ponto num contorno não suave a integral em (2.17) fornece um valor diferente. Em tal caso c_i é o valor $1/4\pi$ vezes o ângulo sólido interno definido por Γ em “i”.

É importante notar-se que a análise no domínio do tempo da onda escalar tridimensional não requer integração no tempo (equação (2.19)). Tal fato não ocorre para o caso bidimensional, como será visto a seguir.

II.3 - A Formulação Bidimensional

A representação integral para um ponto interno, obtido por resíduos ponderados, dada pela equação (2.6) é também válida para o caso bidimensional. Usa-se entretanto uma outra solução fundamental. Como visto no capítulo anterior, a função de Green para a equação escalar da onda bidimensional é :

$$u^*(x, t | \xi, \tau) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} H[c(t-\tau) - r] \quad (2.21)$$

Esta função leva a diferentes kernels nas integrais em função do tempo. O mesmo raciocínio usado no caso 3-D pode ser usado para avaliar as integrais quando o ponto de colocação (fonte) é levado ao contorno. Assumindo-se que o contorno é suave em “i” o domínio é aumentado de semicírculo de raio ε como mostrado na figura 2.3.

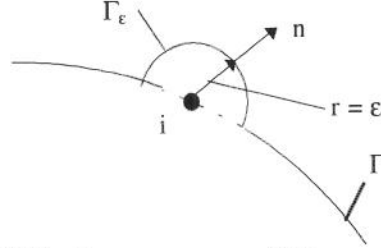


figura 2.3 Contorno para o caso 2-D, aumentado de um pequeno semicírculo

O raio ε é levado a zero. Mas, diversamente do caso 3-D, o cálculo das integrais ao longo de τ e sobre Γ_ε requer uma análise mais extensa. Por este motivo, é muito mais simples [5] derivar-se a representação integral para os pontos no contorno seguindo-se um procedimento diferente.

O procedimento para o caso bidimensional é fazer-se todas as variáveis independentes de uma coordenada, e.g. x_3 . Neste caso, o domínio em estudo pode ser considerado como um cilindro cujo eixo tem um comprimento infinito e é paralelo à direção x_3 . O domínio bidimensional Ω e o seu contorno Γ são definidos pela intersecção do cilindro com o plano x_1x_2 . A representação integral para pontos internos ou no contorno do caso tridimensional pode ser expressa, como visto, por

$$4\pi c_i u(\xi_i, t) = \int_0^{t^*} \int_\Gamma \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma d\tau - \frac{1}{c^2} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right)_0 u_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_0 u_0^* \right] d\Omega + \int_0^{t^*} \int_\Omega u^* \gamma d\Omega d\tau \quad (2.22)$$

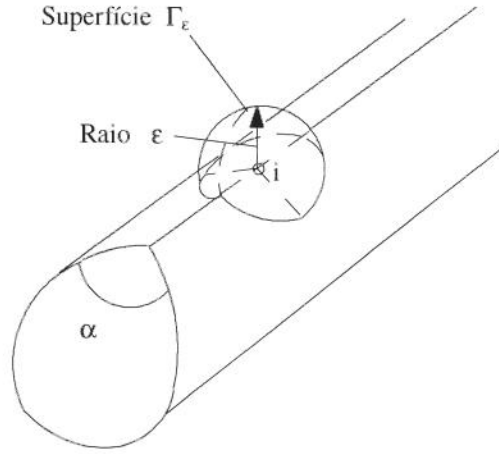


figura 2.4 Contorno aumentado de um domínio esférico. (ref [5])

Para o caso particular de um cilindro, as integrais do lado direito podem ser operadas da seguinte forma

$$\int_0^{t^*} \int_{\Gamma} u_{3D}^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma d\tau = \int_0^{t^*} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_{3D}^* dx_3 \right] d\Gamma_{2D} d\tau = \int_0^{t^*} \int_{\Gamma_{2D}} \frac{\partial u}{\partial n} u_{2D}^* d\Gamma_{2D} d\tau \quad (2.23)$$

Onde u_{2D}^* representa a solução fundamental bidimensional (2.21) obtida da integração da solução tridimensional, como visto no capítulo anterior.

As mesmas operações podem ser feitas no resto das integrais na equação (2.22) para se obter uma representação integral no contorno para o caso 2-D, onde Ω e Γ representam agora o domínio e contorno bidimensional. As integrais são calculadas no sentido do valor principal de Cauchy. Assim, o termo c_i para duas dimensões pode ser obtido da integração da solução fundamental tridimensional como em (2.17), sobre uma superfície esférica Γ_ϵ usada para aumentar o cilindro infinito no ponto "i".

Portanto, no caso bidimensional os pontos onde o contorno é suave c_i também é $1/2$ e para pontos não suaves (figura 2.4) este pode ser computado usando (2.17) o que resulta $c_i = \alpha / 2\pi$, com α representando o ângulo interno em "i".

II.3.1 - A Expressão do Kernel da Derivada de u^*

Considerando-se o segundo termo do contorno no lado direito da equação (2.22) escreve-se :

$$H = \int_0^{t^*} \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma(X) d\tau = \int_{\Gamma} \int_0^{t^*} \frac{\partial r}{\partial n} u \frac{\partial u^*}{\partial r} d\tau d\Gamma(X) \quad (2.24)$$

Substituindo-se (2.21) em (2.24) tem-se :

$$H = \int_r \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \int_0^{t^*} u(X, \tau) \frac{2c\tau}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} H[c(t-\tau) - r] d\tau + \int_0^{t^*} u(X, \tau) \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} * \right. \\ \left. * \frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau) - r] d\tau \right\} d\Gamma(X) \quad (2.25)$$

A expressão (2.25) representa um problema pois esta contém uma derivada da função Heaviside (que é a distribuição Delta de Dirac) tornando o kernel acima hipersingular. O capítulo 5 dedica-se exclusivamente à regularização desta expressão. Em tal capítulo (ver ítem **V.3.I**) demonstra-se que uma integração por partes na variável τ fornece a expressão regularizada de (2.25) :

$$\int_0^{t^*} \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma d\tau = - \int_0^{t^*} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left[u(x, \tau) \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} + \frac{2(\partial u / \partial \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right] * \\ * H[c(t-\tau) - r] d\Gamma d\tau - \int_r \frac{\partial r}{\partial n} \frac{2u_0}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] d\Gamma \quad (2.26)$$

II.3.2 - O Termo da Integral de Domínio

Estuda-se agora o terceiro termo na equação (2.22) :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right)_0 u_0 d\Omega \quad (2.27)$$

para o qual necessita-se da seguinte propriedade da função de Heaviside :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} H[c(t-\tau) - r] = c \frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau) - r] \quad (2.28)$$

Tomando-se em consideração a expressão (2.21) pode-se escrever :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right)_0 u_0 d\Omega = \int_{\Omega} u_0 \frac{2c^3 t}{\sqrt{[c^2 t^2 - r^2]^3}} H[ct - r] d\Omega + \int_{\Omega} u_0 \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial r} (H[ct - r]) d\Omega \quad (2.29)$$

Pode-se agora investigar o segundo termo no lado direito da expressão (2.29) o qual por simplicidade será chamado de I_2 . Considerando-se o sistema de coordenadas polares (figura 2.5) com a origem no ponto ξ da fonte, pode-se escrever :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{r=r_r(\theta)} r u_0 \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial r} (H[ct - r]) dr d\theta \quad (2.30)$$

Onde $r_r(\theta) = |\xi - X|$, $d\Omega = r dr d\theta$ e X é um ponto do contorno Γ (ver figura 2.5).

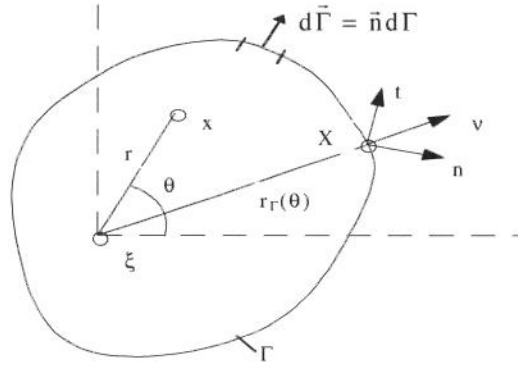


Figura 2.5 Sistema polar de coordenadas. (ref [5])

Integrando-se por partes a expressão (2.30) em relação a r obtém-se (no intervalo de integração $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 2\pi$) :

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[r u_0 \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] \right]_0^{r_r(\theta)} d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=0}^{r=r_r(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} \left[r u_0 \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right] H[ct - r] dr d\theta = \\
& \int_{\theta_1}^{\theta_2} u_0[r_r(\theta), 0] \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r_r^2(\theta)}} H[ct - r_r(\theta)] r_r(\theta) d\theta - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{2c^2 u_0}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial r} \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] d\Omega - \int_{\Omega} u_0 \frac{2c^2 r}{\sqrt{[c^2 t^2 - r^2]^3}} H[ct - r] d\Omega
\end{aligned} \tag{2.31}$$

A primeira integral na segunda linha de (2.31) pode ser transformada aplicando-se a seguinte fórmula :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f[r_r(\theta)] r_r(\theta) d\theta = \int_{\Gamma} f(r_{\Gamma}) r_{\Gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma} f(r_{\Gamma}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma} f(r_{\Gamma}) \frac{\partial r_{\Gamma}}{\partial n} d\Gamma \tag{2.32}$$

Onde $\vec{v}$ é igual a $\xi \vec{X} / |\xi \vec{X}|$. Assim pode-se escrever :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} u_0[r_r(\theta), 0] \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r_r^2(\theta)}} H[ct - r_r(\theta)] r_r(\theta) d\theta = \int_{\Gamma} \frac{\partial r_{\Gamma}}{\partial n} \frac{2c^2 u_0}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r_{\Gamma}] d\Gamma \tag{2.33}$$

Onde $d\Gamma = dr_{\Gamma}$. Levando-se em consideração as equações (2.29), (2.31) e (2.33) pode-se escrever :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right) u_0 d\Omega = & - \int_{\Omega} \left\{ u_0 \left[\frac{2c^2(r - ct)}{\sqrt{[c^2 t^2 - r^2]^3}} + \frac{2c^2}{r \sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right] + \frac{\partial u_0}{\partial r} \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right\} * \\
& * H[ct - r] d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} u_0 \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Os últimos termos nas equações (2.26) e (2.34) cancelam-se um ao outro na fórmula (2.22) para se chegar à formulação integral final (conhecida como representação de Volterra regularizada no caso 2-D) :

$$\begin{aligned}
4\pi c_i u(\xi_i, t) = & \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} H[c(t-\tau) - r] d\Gamma d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ u \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} + \right. \\
& + \frac{2(\partial u / \partial \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \left. \right\} H[c(t-\tau) - r] d\Gamma d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_0 \frac{2c}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} + u_0 \frac{2c^2(r - ct)}{\sqrt{[c^2 t^2 - r^2]^3}} + \right. \\
& + \frac{\partial u_0}{\partial r} \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} + u_0 \frac{2c^2}{r\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \left. \right\} H[ct - r] d\Omega + \int_0^t \int_{\Omega} \gamma \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} H[c(t-\tau) - r] d\Omega d\tau
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Quando a densidade de fonte γ for representada por uma função Delta de Dirac, ou seja, $\gamma(r, \tau) = f(\tau)\delta(r - r_s)$ o último termo em (2.35) é escrito como :

$$\int_0^t f(\tau) \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r_s^2}} H[c(t-\tau) - r_s] d\tau \tag{2.36}$$

Dois tipos distintos de singularidades ocorrem nos integrandos de (2.35). A primeira ocorre nas integrais de domínio quando $r = 0$ ou nas integrais de contorno quando r e $c(t - \tau)$ são simultaneamente nulos. O segundo tipo de singularidade ocorre para pontos localizados no fronte de onda representado pela função de Green, ou seja, nas integrais de contorno quando $r = c(t - \tau)$ ou nas integrais de domínio quando $r = ct$. Entretanto, como será visto a seguir, a integração numérica de (2.35) não apresenta uma notória dificuldade.

Capítulo III - Implementação do MEC para Problemas Escalares Bidimensionais

III.1 - Formulação

No capítulo anterior obteve-se a equação integral para a propagação da onda escalar bidimensional como :

$$\begin{aligned} 4\pi c_i u(\xi_i, t) = & \int_0^t \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left(B^* u + u^* \frac{v}{c} \right) d\Gamma d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_0^* v_0 d\Omega + \\ & + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(-B_0^* u_0 + u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0^* \frac{u_0}{r} \right) d\Omega + \int_0^t \int_{\Omega} \gamma u^* d\Omega d\tau \end{aligned} \quad (3.1)$$

Onde

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad q = \frac{\partial u}{\partial n}; \quad u^*(X, t; \xi, \tau) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} H[c(t-\tau) - r]; \quad (3.2)$$

$$u_0^* = |u^*|_{\tau=0}; \quad B^* = B^*(X, t; \xi, \tau) = \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} H[c(t-\tau) - r]; \quad (3.3)$$

$$B_0^* = B_0^*(X, t; \xi) = B^*(X, t; \xi, 0) \quad (3.4)$$

e v indica a velocidade dada por

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.5)$$

A Equação (3.1) é uma representação exata do problema transiente uma vez que nenhuma aproximação foi introduzida ainda. Entretanto, para a solução de problemas práticos, aproximações convenientes são necessárias para ambas as variações espacial e temporal das variáveis de campo. As funções em relação ao tempo são explícitas e simples o suficiente para uma integração no tempo analítica. Contudo, técnicas numéricas são necessárias para a integração espacial.

A fim de se implementar um esquema numérico para (3.1) é necessário considerar-se um conjunto de pontos discretos (nós) X_j , $j=1,\dots,J$ no contorno Γ . Também o tempo é dividido em N intervalos iguais Δt . $u(X,\tau)$, $v(X,\tau)$ e $q(X,\tau)$ podem ser aproximados [5] usando-se um conjunto de funções interpoladoras tal que

$$\begin{aligned} u(X,\tau) &= \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^N \phi^m(\tau) \eta_j(X) u_j^m \\ v(X,\tau) &= \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^N \frac{\partial \phi^m(\tau)}{\partial t} \eta_j(X) u_j^m \\ q(X,\tau) &= \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^N \theta^m(\tau) v_j(X) q_j^m \end{aligned} \quad (3.6)$$

Onde m e j referem-se ao tempo e espaço respectivamente. Onde u_j^m e q_j^m representam o potencial e o fluxo, respectivamente, do nó j num tempo $t_m = m\Delta t$. As funções $\eta_j(X)$ e $v_j(X)$ são funções de interpolação no espaço. As funções $\phi^m(\tau)$ e $\theta^m(\tau)$ são funções de interpolação em cada passo de tempo.

Se a equação (3.1) for escrita para todo nó “ i ” e para o passo de tempo n , e u, v e q forem substituídos pelas suas aproximações dadas em (3.6), o seguinte sistema algébrico de equações surge

$$c_i u_i^n + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^J \hat{H}_{ij}^{nm} u_j^m = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^J G_{ij}^{nm} q_j^m + F_i^n + S_i^n \quad (3.7)$$

onde

$$\hat{H}_{ij}^{nm} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial r(\xi_i, X)}{\partial n(X)} \eta_j(X) \int_{t_{m-1}}^{t_n} \left[\phi^m(\tau) B^*(X, t_n; \xi_i, \tau) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi^m(\tau)}{\partial \tau} u^*(X, t_n; \xi_i, \tau) \right] d\tau d\Gamma(X) \quad (3.8)$$

$$G_{ij}^{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} v_j(X) \int_{t_{m-1}}^{t_n} [\theta^m(\tau) u^*(X, t_n; \xi_i, \tau)] d\tau d\Gamma(X) \quad (3.9)$$

$$F_i^n = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_0^*(x, t_n; \xi_i) v_0(x) d\Omega(x) + \frac{1}{c} \int_{\Omega} u_0^*(x, t_n; \xi_i) \frac{\partial u_0(x)}{\partial r(\xi_i, x)} d\Omega(x) + \right. \\ \left. + t_n \int_{\Omega} \frac{1}{r(\xi_i, x)} B_0^*(x, t_n; \xi_i) u_0(x) d\Omega(x) \right\} \quad (3.10)$$

$$S_i^n = \frac{1}{4\pi} \int_{t_{m-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_j} u^*(x, t_n; \xi_i, \tau) \gamma(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \quad (3.11)$$

A equação (3.7) para um ponto “i” e o passo de tempo “n” pode ser escrita como

$$c^i u_i^n + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} Q^{nm} \eta_j d\Gamma \right] u_j^m = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} U^{nm} v_j d\Gamma \right] q_j^m + F_i^n + S_i^n \quad (3.12)$$

com

$$U^{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{t_{m-1}}^{t_n} [\theta^m(\tau) u^*(X, t_n; \xi_i, \tau)] d\tau \quad (3.13)$$

$$Q^{nm} = -\frac{1}{4\pi} \int_{t_{m-1}}^{t_n} \frac{\partial r(\xi_i, X)}{\partial n(X)} \left[\phi^m(\tau) B^*(X, t_n; \xi_i, \tau) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi^m(\tau)}{\partial \tau} u^*(X, t_n; \xi_i, \tau) \right] d\tau \quad (3.14)$$

Chamando-se

$$H_{ij}^{nm} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}^{nm} & \text{quando } i \neq j \text{ ou } n \neq m \\ \hat{H}_{ij}^{nm} + c_i & \text{quando } i = j \text{ e } n = m \end{cases} \quad (3.15)$$

a equação (3.7) para um ponto “i” e o passo de tempo “n” pode ser escrita como

$$\sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^J H_{ij}^{nm} u_j^m = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^J G_{ij}^{nm} q_j^m + F_i^n + S_i^n \quad (3.16)$$

O sistema de equações para todos os nós do contorno pode ser expresso na forma matricial seguinte

$$\sum_{m=1}^N \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^N \mathbf{G}^{nm} \mathbf{q}^m + \mathbf{B}^n \quad (3.17)$$

Onde $\mathbf{H}^{nm}$ e $\mathbf{G}^{nm}$ são matrizes cujos elementos são obtidos pela integração, sobre os elementos de contorno ao longo do intervalo de tempo m , quando um ponto fonte é aplicado a um nó de colocação com um diferença de tempo $n - m$. $\mathbf{B}^n$ representa o vetor que contém as integrações de domínio.

O sistema de equações (3.17) é resolvido passo a passo. Uma vez que $\mathbf{u}^m$ e $\mathbf{q}^m$ são conhecidos para $m = 1, 2, \dots, N-1$, a solução para o passo de tempo n é obtida de

$$\mathbf{H}^{nn} \mathbf{u}^n = \mathbf{G}^{nn} \mathbf{q}^n + \sum_{m=1}^{n-1} [\mathbf{G}^{nm} \mathbf{q}^m - \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m] + \mathbf{B}^n \quad (3.18)$$

As colunas de $\mathbf{H}^{nn}$ e $\mathbf{G}^{nn}$ são reorganizadas de acordo com as condições de contorno. Colocando-se todas as incógnitas para o passo de tempo n ao lado esquerdo, o sistema de equações se torna

$$\mathbf{A}^n \mathbf{X}^n = \mathbf{F}^n \quad (3.19)$$

Onde o vetor conhecido $\mathbf{F}^n$ contém: $\mathbf{B}^n$, o penúltimo termo de (3.18) (correspondente aos passos anteriores) e o produto de uma matriz reordenada com as condições conhecidas para o passo de tempo n .

Um aspecto importante está ligado às matrizes dependentes do tempo. As matrizes globais $\mathbf{H}^{nn}$ e $\mathbf{G}^{nn}$ formam um sistema com uma estrutura triangular inferior (figura 3.1). Isto se deve à propriedade da causalidade. Além disso, se o intervalo de tempo Δt se mantiver constante na discretização do tempo, as matrizes localizadas numa mesma diagonal são idênticas enquanto que aquelas pertencentes a uma mesma linha horizontal são diferentes. Assim somente a primeira linha vertical deve ser calculada e armazenada. A justificativa para esta igualdade das matrizes encontra-se na propriedade de translação do tempo da função de Green (capítulo 1), ou seja :

$$u^*(r, t | \xi, \tau) = u^*(r, t + \Delta t | \xi, \tau + \Delta t) \quad (3.20)$$

Assim, por exemplo :

$$H^{2,1} = H^{2+1,1+1} = H^{2+1+1,1+1+1} \quad (3.21)$$

	m = 1	m = 2	m = 3	.	m = N
n = 1	$[H^{11}]$				
n = 2	$[H^{21}]$	$[H^{22}]$			0
n = 3	$[H^{31}]$	$[H^{32}]$	$[H^{33}]$		
.	.	.	.		
n = N	$[H^{N1}]$	.	.	.	$[H^{NN}]$

Figura 3.1 Esboço da estrutura matricial. Ref [10]

Se o tipo da condição de contorno (potencial ou fluxo) em cada nó do contorno não mudar com o tempo mas somente o valor da variável, as matrizes $H^{nn} = H^{11} = H^{22} \dots$ e $G^{nn} = G^{11} = G^{22} \dots$ têm de ser ordenadas apenas uma vez. Assim a matriz $A^n = A$ será sempre a mesma, tendo de ser invertida apenas uma vez. O vetor de incógnitas é computado para cada passo de tempo como

$$X^n = A^{-1}F^n \quad (3.22)$$

Na Implementação numérica de problemas transientes para o Método dos Elementos de Contorno há dois esquemas de avanço no tempo, conhecidos como procedimento I e procedimento II. O procedimento I, o mais tradicional, trata cada passo de tempo como um novo problema. Mais precisamente, no final de cada passo de tempo os valores de u são computados em um número suficiente de pontos internos para usá-los como valores pseudo-iniciais para o próximo passo de tempo. No procedimento II, no entanto, o processo de integração no tempo sempre começa do tempo inicial. Portanto, apesar do número maior de passos intermediários com o progresso do tempo, os valores de u não precisam ser computados em pontos internos. O procedimento II é geralmente preferido a fim de se evitar as integrais de domínio, sendo este o utilizado até agora neste texto.

Nesta implementação as variáveis do contorno $u(X, \tau)$ e $\partial u(X, \tau) / \partial n = q$ serão aproximadas por elementos constantes e lineares em relação ao espaço, onde assumir-se-á $\eta_j(X) = v_j(X)$. Quanto à discretização em relação ao tempo aplicar-se-ão formulações constantes e lineares para $\phi^m(\tau)$ e $\theta^m(\tau)$.

III.2 - Avaliação das integrais no tempo

Várias integrais devem ser avaliadas para se obter os termos das matrizes **H** e **G**. Usando-se interpolações lineares e constantes nas variáveis em relação ao tempo obtêm-se os seguintes casos :

- **Interpolação constante para a derivada do potencial**

$$\theta^m(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{quando } t_{m-1} < \tau < t_m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.23)$$

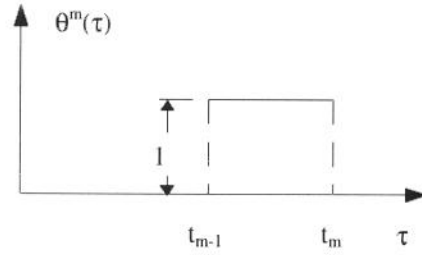


Figura 3.2 Interpolação constante para q

$$U^{nm} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{cH[c(t_n - \tau) - r]}{2\pi[c^2(t_n - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} d\tau \quad (3.24)$$

Na equação (3.24) está se integrando o efeito em X quando $t = t_n$ de uma perturbação aplicada em ξ_i entre t_{m-1} e t_m . Três situações diversas podem ocorrer :

Situação 1 : $r < c(t_n - t_m)$

Toda a perturbação produzida entre t_{m-1} e t_m chegou em X.

Definindo-se :

$$a_0 = \frac{c(t_n - t_{m-1})}{r} \quad a_1 = \frac{c(t_n - t_m)}{r} \quad (3.25)$$

$$U^{nm} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{cH[c(t_n - \tau) - r]}{2\pi[c^2(t_n - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} d\tau = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}} \quad (3.26)$$

Situação 2 : $c(t_n - t_m) \leq r < c(t_n - t_{m-1})$

O efeito de parte da perturbação chegou em X, mas parte da perturbação produzida por τ tal que $r > c(t_n - \tau)$ não chegou ainda em X.

$$U^{nm} = \int_{t_{m-1}}^{\tau=t_n-r/c} \frac{cH[c(t_n - \tau) - r]}{2\pi[c^2(t_n - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} d\tau = \frac{1}{2\pi} \ln[a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}] \quad (3.27)$$

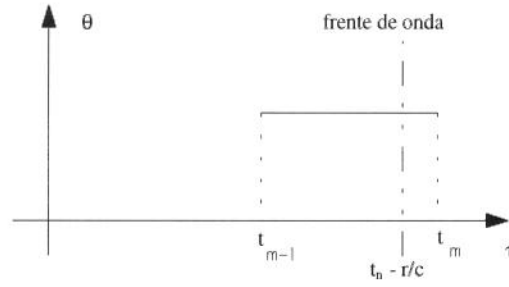


Figura 3.3 Ilustração do caso 2

Situação 3 : $c(t_n - t_{m-1}) \leq r$

O efeito da perturbação não chegou ainda em X.

$$U^{nm} = 0 \quad (3.28)$$

• **Interpolação linear para a derivada do potencial**

A interpolação no tempo para q é assumida como linear. Portanto, o fluxo para o tempo $t_m = m\Delta t$ para qualquer nó j contribui para as integrais de t_{m-1} a t_m e de t_m a t_{m+1} . A função $\theta^m(\tau)$ é (escrita aqui com dois intervalos Δt para isolar-se a contribuição em t_m)

$$\theta^m(\tau) = \begin{cases} (\tau - t_{m-1})/\Delta t & \text{quando } t_{m-1} \leq \tau \leq t_m \\ (t_{m+1} - \tau)/\Delta t & \text{quando } t_m \leq \tau \leq t_{m+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.29)$$

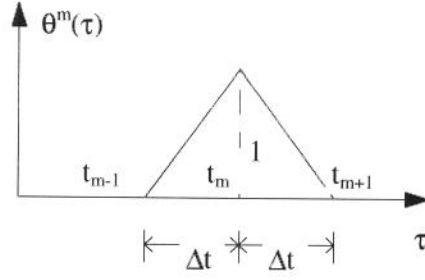


Figura 3.4 Interpolação linear para q

$$U^{nm} = \int_{t_{m-1}}^{t_{m+1}} \theta^m(\tau) \frac{cH[c(t_n - \tau) - r]}{2\pi[c^2(t_n - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} d\tau \quad (3.30)$$

Definindo-se $a_2 = c(t_n - t_{m+1})/r$ quatro situações podem ocorrer

Situação 1 : $r < c(t_n - t_{m+1})$

$$U^{nm} = \frac{1}{2\pi\Delta t} \left\{ (t_n - t_{m-1}) \ln \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}} - \frac{r}{c} [\sqrt{a_0^2 - 1} - \sqrt{a_1^2 - 1}] + (t_{m+1} - t_n) \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}}{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 1}} + \frac{r}{c} [\sqrt{a_1^2 - 1} - \sqrt{a_2^2 - 1}] \right\} \quad (3.31)$$

Situação 2 : $c(t_n - t_{m+1}) \leq r < c(t_n - t_m)$

$$U^{nm} = \frac{1}{2\pi\Delta t} \left\{ (t_n - t_{m-1}) \ln \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}} - \frac{r}{c} [\sqrt{a_0^2 - 1} - \sqrt{a_1^2 - 1}] + (t_{m+1} - t_n) \ln [a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}] + \frac{r}{c} [\sqrt{a_1^2 - 1}] \right\} \quad (3.32)$$

Situação 3 : $c(t_n - t_m) \leq r < c(t_n - t_{m-1})$

$$U^{nm} = \frac{1}{2\pi\Delta t} \left\{ (t_n - t_{m-1}) \ln [a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}] - \frac{r}{c} [\sqrt{a_0^2 - 1}] \right\} \quad (3.33)$$

Situação 4 : $c(t_n - t_{m-1}) \leq r$

$$U^{nm} = 0 \quad (3.34)$$

- *Interpolação constante para o potencial*

$$\phi^m(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{quando } t_{m-1} < \tau < t_m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.35)$$

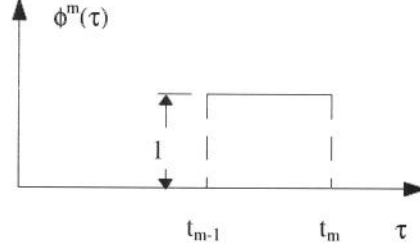


Figura 3.5 Interpolação constante para u

$$Q^{nm} = -\frac{1}{4\pi} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{\partial r(\xi_i, X)}{\partial n(X)} \left[\phi^m(\tau) B^*(X, t_n; \xi_i, \tau) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi^m(\tau)}{\partial \tau} u^*(X, t_n; \xi_i, \tau) \right] d\tau \quad (3.36)$$

Onde

$$\frac{\partial \phi^m(\tau)}{\partial \tau} = \delta(\tau - t_{m-1}) - \delta(\tau - t_m) \quad (3.37)$$

Situação 1 : $r < c(t_n - t_m)$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi r} \left\{ \frac{\sqrt{a_0^2 - 1}}{a_0 + 1} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 1}}{a_1 + 1} + \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 1}} \right\} \quad (3.38)$$

Situação 2 : $c(t_n - t_m) \leq r < c(t_n - t_{m-1})$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi r} \left\{ \frac{\sqrt{a_0^2 - 1}}{a_0 + 1} + \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \right\} \quad (3.39)$$

Situação 3 : $c(t_n - t_{m-1}) \leq r$

$$Q^{nm} = 0 \quad (3.40)$$

• *Interpolação linear para o potencial*

$$\phi^m(\tau) = \begin{cases} (\tau - t_{m-1})/\Delta t & \text{quando } t_{m-1} \leq \tau \leq t_m \\ (t_{m+1} - \tau)/\Delta t & \text{quando } t_m \leq \tau \leq t_{m+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.41)$$

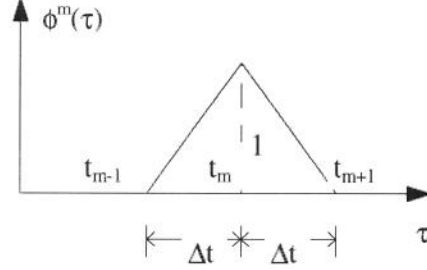


Figura 3.6 Interpolação linear para u

Levando em conta (3.41) a integral no tempo (3.36) torna-se

$$Q^{nm} = -\frac{1}{4\pi} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{(\tau - t_{m-1})}{\Delta t} B^* + \frac{1}{c} \frac{1}{\Delta t} u^* \right] d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{(t_{m+1} - \tau)}{\Delta t} B^* - \frac{1}{c} \frac{1}{\Delta t} u^* \right] d\tau \quad (3.42)$$

Quatro situações podem ocorrer em (3.42) :

Situação 1 : $r < c(t_n - t_{m+1})$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi c \Delta t} \left(\sqrt{a_0^2 - 1} - 2\sqrt{a_1^2 - 1} + \sqrt{a_2^2 - 1} \right) \quad (3.43)$$

Situação 2 : $c(t_n - t_{m+1}) \leq r < c(t_n - t_m)$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi c \Delta t} \left(\sqrt{a_0^2 - 1} - 2\sqrt{a_1^2 - 1} \right) \quad (3.44)$$

Situação 3 : $c(t_n - t_m) \leq r < c(t_n - t_{m-1})$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi c \Delta t} \left(\sqrt{a_0^2 - 1} \right) \quad (3.45)$$

Situação 4 : $c(t_n - t_{m-1}) \leq r$

$$Q^{nm} = 0 \quad (3.46)$$

III.3 - Avaliação das integrais no espaço

A fim de realizar numericamente as integrações sobre Γ , este deve ser substituído por um contorno aproximado como um somatório de elementos Γ_j como indicado em (3.8) e (3.9). Duas aproximações serão utilizadas neste trabalho : aproximação constante e linear.

Na aproximação constante o contorno é dividido em e_j elementos de comprimento l_j com um nó no centro do elemento e normal $\mathbf{n}_j$ (figura (3.7))

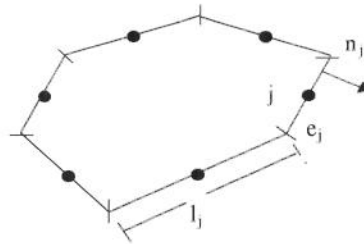


Figura 3.7 Posição dos nós para aproximação constante do contorno

Para a aproximação constante as funções de interpolação do espaço $\eta_j(X)$ e $v_j(X)$ tornam-se

$$\eta_j(X) = v_j(X) = \begin{cases} 1 & \text{quando } X \in e_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.47)$$

Para o caso linear de dois elementos e_p e e_q com um nó em comum j , as funções de interpolação $\eta_j(X)$ e $v_j(X)$ podem ser expressas pelo uso da coordenada adimensional ξ . (ver figura 3.8)

$$\eta_j(\xi) = v_j(\xi) = \begin{cases} (\xi_p + 1)/2, & X \in e_p \\ -(\xi_q - 1)/2, & X \in e_q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.48)$$

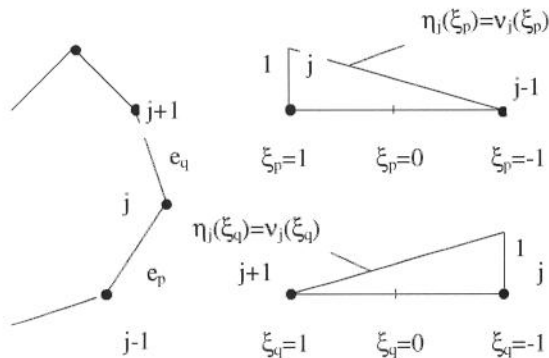


Figura 3.8 Interpolação linear no espaço para u e q no contorno

III.4 - Avaliação das integrais singulares

As integrais expressas por (3.8) e (3.9) apresentam singularidades somente quando $t_n = t_m$ e $r = 0$ (ponto de colocação pertence ao elemento de integração). Estas singularidades são do mesmo tipo do problema estático. Todas as integrais no espaço quando $t_n \neq t_m$ ou $r \neq 0$ podem ser realizadas por procedimentos numéricos comuns. Mas quando $t_n = t_m$ e $r \rightarrow 0$ usa-se uma integração analítica ou fórmulas especiais de integração. Para o caso de elementos (na aproximação espacial) constantes e lineares as integrações analíticas são simples como será visto a seguir

III.4.1 - H_{ij}^{nn}

Os coeficiente H são funções da derivada da solução fundamental como já visto. A derivada de u^* , chamada de q^* , pode ser expressa por :

$$q^* = \nabla u^* \cdot \vec{n} \quad (3.49)$$

Assim de forma genérica :

$$\hat{H}_{ij}^{nn} = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \nabla u^* \cdot \vec{n} \cdot d\vec{\Gamma}(X) d\tau \quad (3.50)$$

Mas, no caso de $j = i$, $d\Gamma$ é próprio vetor dr . Assim, para o caso dos elementos constante e linear, o vetor normal $\mathbf{n}_j$ é perpendicular a $d\mathbf{r}$. Portanto o produto escalar entre $\mathbf{n}$ e $d\mathbf{r}$ é nulo, o que justifica :

$$\hat{H}_{ii}^{nn} = 0 \quad (3.51)$$

Para interpolações de ordem superior as considerações acima não podem ser usadas pela perda de ortogonalidade entre $\mathbf{n}_j$ e Γ . Devem-se usar outras estratégias [6].

III.4.2 - G_{ii}^{nn}

Os coeficientes G_{ii}^{nn} contém integrais com uma singularidade do tipo $\ln r$. Para se obter uma melhor precisão, estes coeficientes são calculados fazendo-se uma integração analítica no espaço.

- *interpolação constante no tempo e no espaço para q*

G_{ii}^{nn} é obtida da Situação 2 (equação : $c(t_n - t_m) \leq r < c(t_n - t_{m-1})$ fazendo-se $m=n$

$$G_{ii}^{nn} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \ln \left[\frac{c(t_n - t_{n-1})}{r} + \sqrt{\left[\frac{c(t_n - t_{n-1})}{r} \right]^2 - 1} \right] H \left[\frac{c(t_n - t_{n-1})}{r} - 1 \right] d\Gamma(r) \quad (3.52)$$

onde $t_n = n \Delta t$.

No caso do elemento constante, r coincide com Γ . Faz-se então uma integração sobre o elemento constante j .

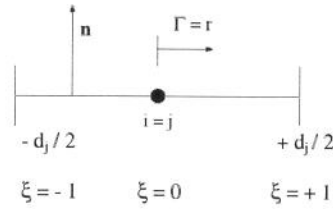


Figura 3.9 Integração analítica no elemento j

Onde d_j representa o tamanho do elemento constante com o nó localizado no centro. ξ representa a coordenada adimensional, de modo que

$$r = \xi \frac{d_j}{2} \quad (3.53)$$

Realizando-se a substituição de coordenadas e integrando-se (3.52) chega-se a :

$$G_{ii}^{nn} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \left[d_j / (2c\Delta t) \right]^2}}{d_j / (2c\Delta t)} + 2c\Delta t \arcsen \left[d_j / (2c\Delta t) \right] \right\} & \text{para } d_j < (2c\Delta t) \\ c\Delta t / 2 & \text{para } d_j > (2c\Delta t) \end{cases} \quad (3.54)$$

- *interpolação constante no tempo e linear no espaço para q*

G_{ii}^{nn} é obtida considerando-se as duas funções ponderadoras usadas na aproximação linear no espaço.

$$\phi_1 = \frac{(1-\xi)}{2} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{(1+\xi)}{2} \quad (3.55)$$

gerando :

$${}_1g_{ii}^{nn} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \phi_1 \ln \left[c(t_n - t_{n-1})/r + \sqrt{[c(t_n - t_{n-1})/r]^2 - 1} \right] d\Gamma(r) \quad (3.56)$$

$${}_1g_{ii}^{nn} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{d_j}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2}}{d_j / (c\Delta t)} + c\Delta t \arcsen[d_j / (c\Delta t)] + \right. \\ \left. + \frac{c^2 \Delta t^2}{2d_j} \left(\sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2} - 1 \right) \right\} \text{para } d_j < (c\Delta t) \\ \frac{1}{2\pi} \left\{ c\Delta t \frac{\pi}{2} - \frac{c^2 \Delta t^2}{2d_j} \right\} \text{para } d_j > (c\Delta t) \end{cases} \quad (3.57)$$

e de maneira semelhante para ϕ_2 .

$${}_2g_{ii}^{nn} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{d_j}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2}}{d_j / (c\Delta t)} - \frac{c^2 \Delta t^2}{2d_j} \left(\sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2} - 1 \right) \right\} \text{para } d_j < (c\Delta t) \\ \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{c^2 \Delta t^2}{2d_j} \right\} \text{para } d_j > (c\Delta t) \end{cases} \quad (3.58)$$

- *interpolação linear no tempo e no espaço para q*

$${}_1g_{ii}^{nn} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{d_j}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2}}{d_j / (c\Delta t)} + \frac{c\Delta t}{2} \arcsen[d_j / (c\Delta t)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{c^2 \Delta t^2}{d_j} - d_j \right) \left(\sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2} \right) - \frac{c^2 \Delta t^2}{6d_j} \right\} \text{ para } d_j < (c\Delta t) \\ \frac{1}{2\pi} \left\{ c\Delta t \frac{\pi}{4} - \frac{c^2 \Delta t^2}{6d_j} \right\} \text{ para } d_j > (c\Delta t) \end{cases} \quad (3.59)$$

$${}_2g_{ii}^{nn} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{d_j}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2}}{d_j / (c\Delta t)} - \frac{1}{6} \left(\frac{c^2 \Delta t^2}{d_j} + 2d_j \right) \left(\sqrt{1 - [d_j / (c\Delta t)]^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{c^2 \Delta t^2}{6d_j} \right\} \text{ para } d_j < (c\Delta t) \\ \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{c^2 \Delta t^2}{6d_j} \right\} \text{ para } d_j > (c\Delta t) \end{cases} \quad (3.60)$$

III.5 - Pontos Internos

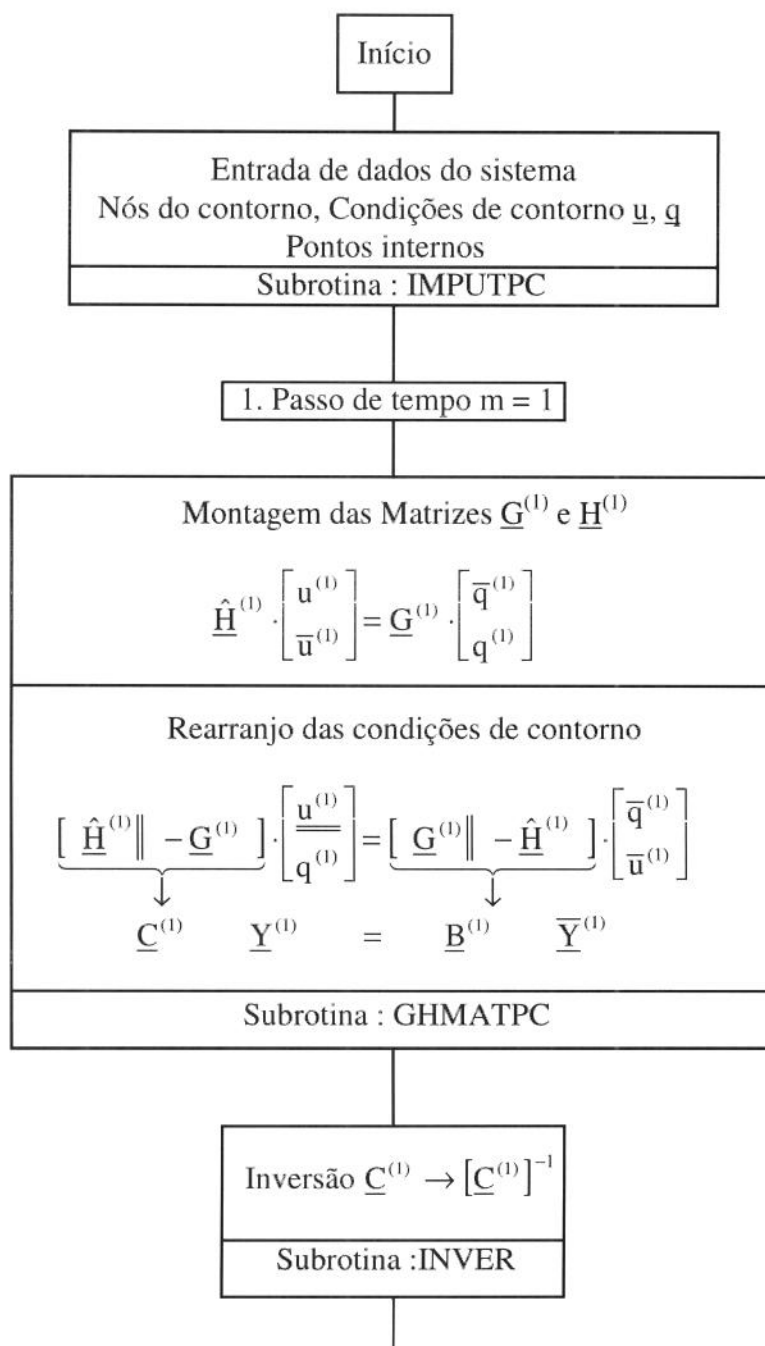
O potencial u para qualquer ponto interno é facilmente obtido para o tempo $t_n = n \Delta t$. Uma vez conhecidos os valores de u e q para $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$, a representação integral para o ponto interno é escrita com a mesma discretização para as integrais no contorno (sendo agora $c_i = 1$)

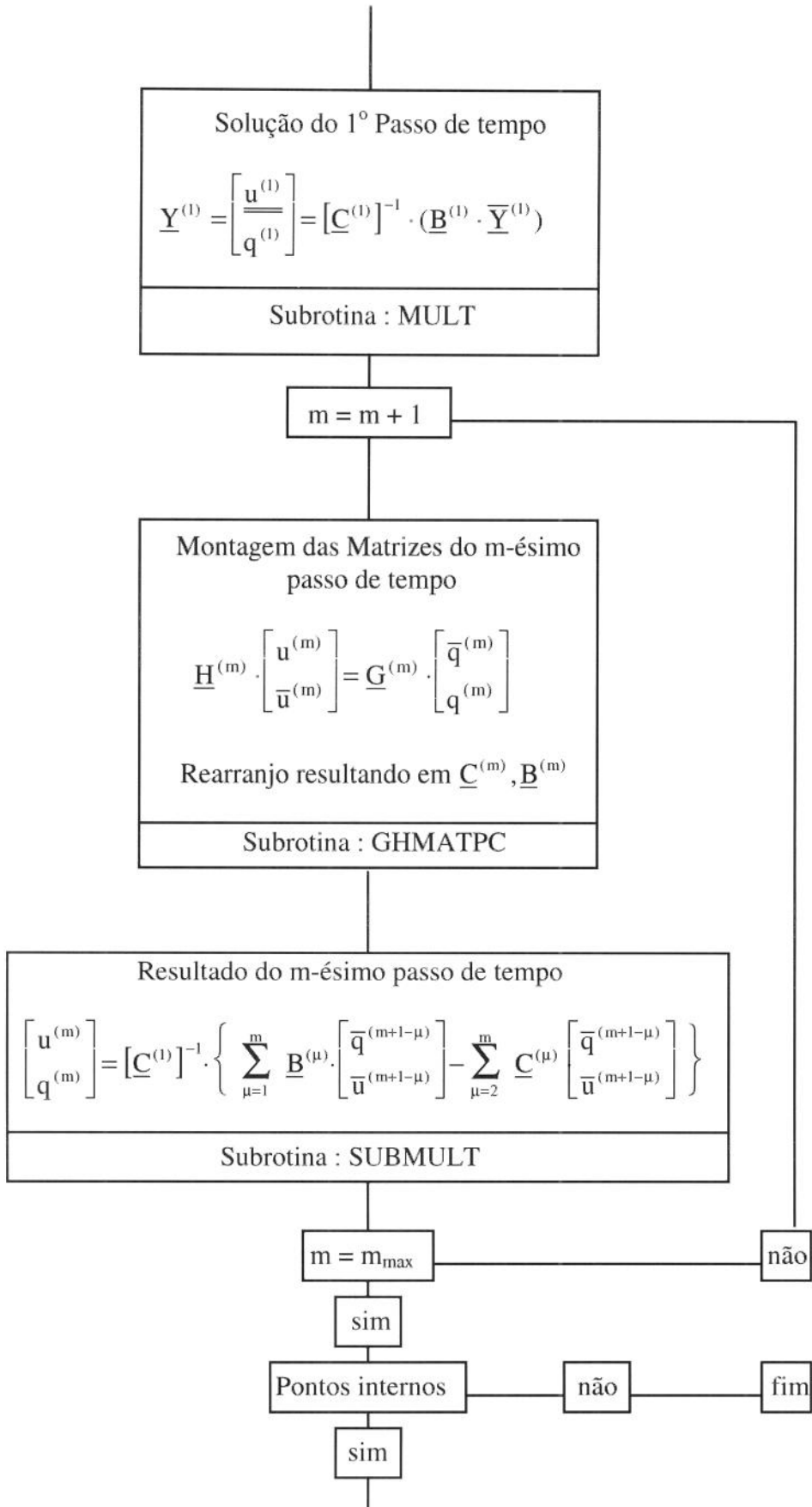
$$u_i^n = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^J \left[G_{ij}^{nm} q_j^m - \hat{H}_{ij}^{nm} u_j^m \right] + F_i^n + S_i^n \quad (3.61)$$

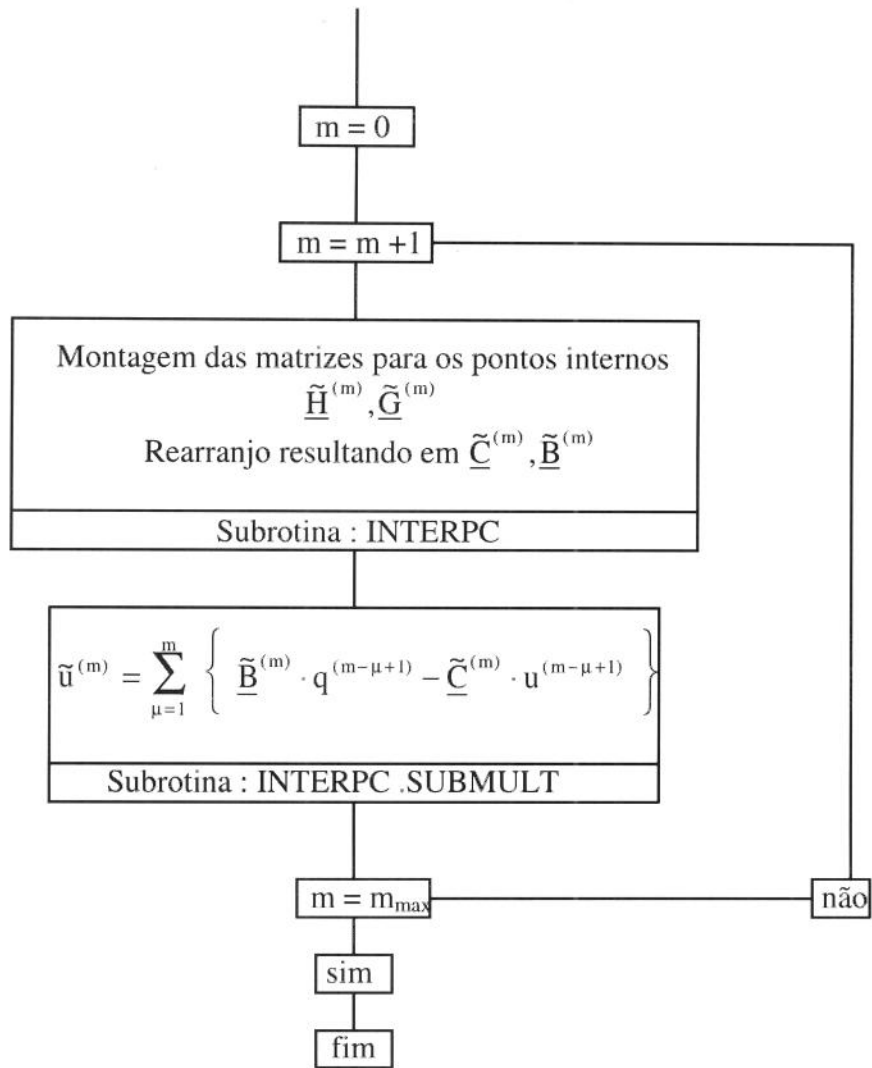
Os coeficientes G_{ij}^{nm} , $\hat{H}_{ij}^{nm}$ e o termo $F_i^n + S_i^n$ são calculados numericamente para cada ponto interno distinto. Como no caso do contorno as matrizes no tempo dos pontos internos também formam uma estrutura triangular inferior, usando-se assim a mesma análise já discutida.

III.6 - O Programa FLUBEM

Neste item apresenta-se um fluxograma de um programa ilustrativo do MEC no domínio do tempo. O fluxograma, aqui reproduzido, foi elaborado por Antes [9] para o programa denominado FLUBEM.







Onde os valores conhecidos são acompanhados de uma barra em cima ou embaixo.

Capítulo IV - Integração de Domínio

Como demonstrado no capítulo 2, a formulação do MEC para o problema transiente (sem fonte interna) governado pela equação da onda escalar é :

$$\begin{aligned}
 4\pi c_i u(\xi_i, t) = & \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} H[c(t-\tau) - r] d\Gamma d\tau + \\
 & + \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ u(x, \tau) \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} + \frac{2(\partial u / \partial \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} H[c(t-\tau) - r] d\Gamma d\tau + \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 \frac{2c}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} + u_0 \frac{2c^2(r - ct)}{\sqrt{[c^2 t^2 - r^2]^3}} + \frac{\partial u_0}{\partial r} \frac{2c^2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} + u_0 \frac{2c^2}{r\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right\} * \\
 & * H[ct - r] d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ou de uma forma mais concisa

$$\begin{aligned}
 4\pi c_i u(\xi_i, t) = & \int_0^t \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left(B^* u + u^* \frac{v}{c} \right) d\Gamma d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_0^* v_0 d\Omega + \\
 & + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(-B_0^* u_0 + u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0^* \frac{u_0}{r} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Onde

$$u^*(x, t; \xi_i, \tau) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} H[c(t-\tau) - r] \tag{4.3}$$

$$u_0^* = |u^*|_{\tau=0} \tag{4.4}$$

$$B^* = B^*(x, t; \xi_i, \tau) = \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} H[c(t-\tau) - r], \tag{4.5}$$

$$B_0^* = B_0^*(x, t; \xi_i) = B^*(x, t; \xi_i, 0) \tag{4.6}$$

e v indica a velocidade dada por

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.7)$$

Como visto no capítulo 3, o vetor (para cada nó i e tempo t_n) que contém os termos de domínio é escrito como :

$$F_i^n = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_{0i}^{*n} v_0(x) d\Omega(x) + \frac{1}{c} \int_{\Omega} u_{0i}^{*n} \frac{\partial u_0(x)}{\partial r(\xi_i, x)} d\Omega(x) + t_n \int_{\Omega} \frac{1}{r(\xi_i, x)} B_{0i}^{*n} u_0(x) d\Omega(x) \quad (4.8)$$

Com $u_{0i}^{*n} = u_0^*(x, t_n; \xi_i)$ e $B_{0i}^{*n} = B_0^*(x, t_n; \xi_i)$

Onde o terceiro termo à direita de (4.8) é a soma do primeiro e terceiro termos do integrando da quarta integral à direita da igualdade expressa pela equação (4.2).

O procedimento ilustrado a seguir foi implementado por Mansur [5].

A fim de realizarem-se as integrações indicadas em (4.8) o domínio Ω é dividido em “L” subdomínios triangulares, O_l (células). (como indicado na figura 4.1a).

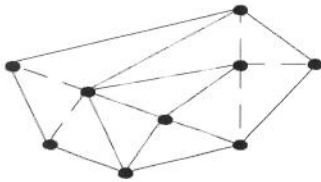


figura 4.1a Discretização do domínio Ω em células triangulares

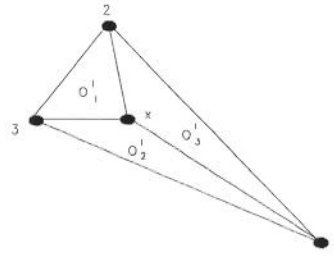


figura 4.1b Áreas para a definição das coordenadas triangulares

Assim, a expressão (4.8) pode ser escrita :

$$F_i^n = \sum_{l=1}^L \left(\frac{1}{c^2} \int_{O_l} u_{0i}^{*n} v_0 d\Omega(x) + \frac{1}{c} \int_{O_l} u_{0i}^{*n} \frac{\partial u_0}{\partial r} d\Omega(x) + t_n \int_{O_l} \frac{1}{r} B_{0i}^{*n} u_0 d\Omega(x) \right) \quad (4.9)$$

A posição de um ponto “x”, dentro de uma célula, pode ser convenientemente definida por coordenadas triangulares [5] , i.e.

$$\mu_1 = \frac{A_1}{A} \quad \mu_2 = \frac{A_2}{A} \quad \mu_3 = \frac{A_3}{A} \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \quad (4.10)$$

Onde A_1 , A_2 e A_3 são respectivamente as áreas dos triângulos O_1^I , O_2^I e O_3^I mostradas na figura 4.1b. $A = A_1 + A_2 + A_3$ é a área da célula O_1 .

Quando u_0 e v_0 são interpolados linearmente dentro de cada célula a seguinte expressão pode ser escrita :

$$u_0 = \sum_{\alpha=1}^3 u_{0\alpha} \mu_{\alpha} \quad v_0 = \sum_{\alpha=1}^3 v_{0\alpha} \mu_{\alpha} \quad (4.11)$$

Onde $u_{0\alpha}$ e $v_{0\alpha}$ são respectivamente o deslocamento inicial e a velocidade inicial em um nó α da célula O_1 . $\partial u_0 / \partial r$ pode ser calculado de (4.11), originando

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = \sum_{\alpha=1}^3 u_{0\alpha} \frac{\partial \mu_{\alpha}}{\partial r} \quad (4.12)$$

Coordenadas triangulares podem ser relacionadas a coordenadas retangulares da seguinte forma

$$\mu_{\alpha} = \frac{A_{\alpha}^0}{A} + \frac{1}{2A} (b_{\alpha} x + a_{\alpha} y) \quad (4.13)$$

Onde

$$\begin{aligned} a_{\alpha} &= x^{\gamma} - x^{\beta} \\ b_{\alpha} &= y^{\beta} - y^{\gamma} \\ 2A_{\alpha}^0 &= x^{\beta} y^{\gamma} - x^{\gamma} y^{\beta} \\ A &= \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Na expressão (4.14) $\alpha = 1,2,3$ para $\beta = 2,3,1$ e $\gamma = 3,1,2$.

Considerando-se um sistema de coordenadas (r, θ) com origem no ponto fonte ξ_i (ver figura 4.2) a expressão (4.13) torna-se

$$\mu_{\alpha} = C_{\alpha} + D_{\alpha}(\theta) r \quad (4.15)$$

Onde

$$C_{\alpha} = \frac{A_{\alpha}^0}{A} \quad D_{\alpha} = \frac{1}{2A} (b_{\alpha} \cos \theta + a_{\alpha} \sin \theta) \quad (4.16)$$

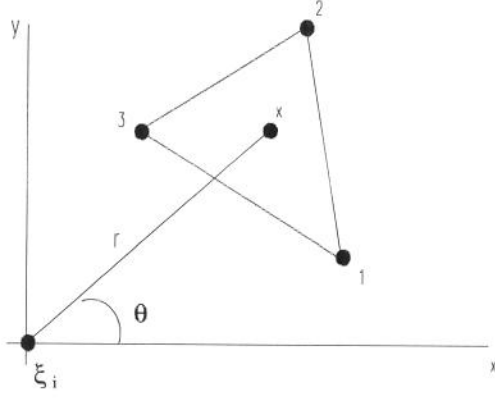


figura 4.2 Coordenadas polares com origem no ponto fonte ξ_i (ref [5])

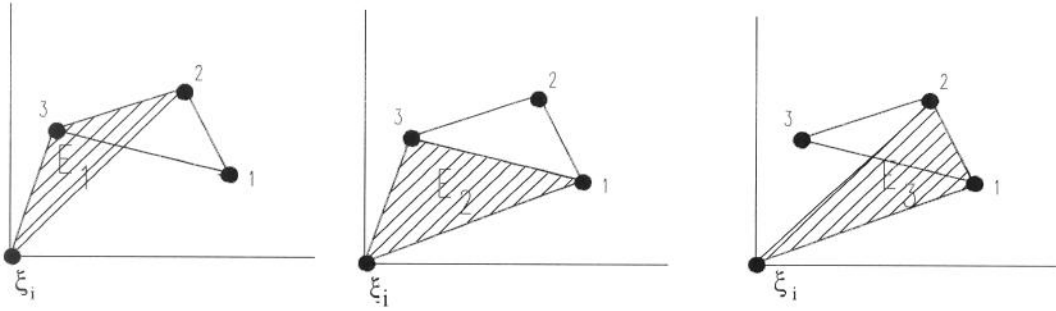


figura 4.3 Domínios usados para a integração sobre uma célula (ref [5])

Levando-se em conta as fórmulas (4.11), (4.12) e (4.15), u_0 , v_0 e $\partial u_0 / \partial r$ podem ser expressos como

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{\alpha=1}^3 u_{0\alpha} [C_{\alpha} + D_{\alpha}(\theta)r] \\ v_0 &= \sum_{\alpha=1}^3 v_{0\alpha} [C_{\alpha} + D_{\alpha}(\theta)r] \\ \frac{\partial u_0}{\partial r} &= \sum_{\alpha=1}^3 u_{0\alpha} D_{\alpha}(\theta) \end{aligned} \quad (4.17)$$

A integração sobre uma célula pode agora ser feita usando-se coordenadas polares. Um procedimento conveniente é obter-se a integração da célula através da soma e subtração de 3 integrais sobre os domínios E_1 , E_2 e E_3 tal como indicado na figura 4.3.

Usando-se as relações (4.17), a primeira integral ao lado direito da expressão (4.9) pode ser escrita como

$$\int_{O_1} u_{0i}^{*n} v_0 d\Omega = \sum_{\alpha=1}^3 v_{0\alpha} \sum_{t=1}^3 \int_{\theta_u}^{\theta_v} \int_0^{g_t^i(\theta)} u_{0i}^{*n} [C_\alpha + D_\alpha(\theta)r] r dr d\theta \quad (4.18)$$

Na expressão (4.18), $t = 1, 2, 3$ para $u = 2, 3, 1$ e $v = 3, 1, 2$

$$g_t^i(\theta) = \begin{cases} r_t^i(\theta) & \text{quando } r_t^i(\theta) < c(t_n - 0) \\ ct_n & \text{quando } r_t^i(\theta) > c(t_n - 0) \end{cases} \quad (4.19)$$

Onde o raio de varredura $r_t^i(\theta)$ (ver figura 4.4), quando a frente de onda for maior que este, é expresso por

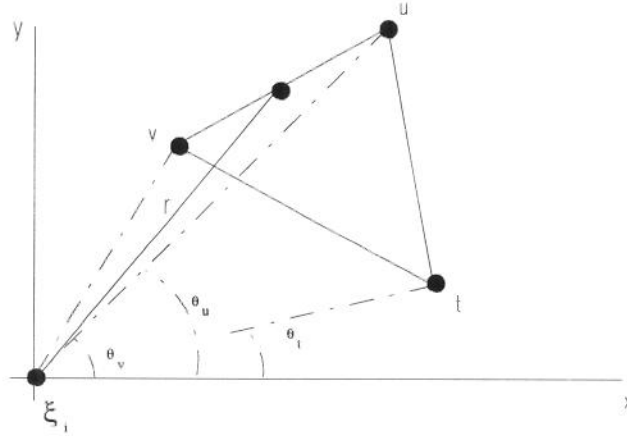


figura 4.4 Definições para a integração da célula (ref[5])

$$r_t^i(\theta) = \frac{-2A_{\alpha=t}^0}{b_t \cos\theta + a_t \sin\theta} \quad (4.20)$$

A expressão (4.18) é integrada analiticamente em relação a “r”. Posteriormente faz-se uma mudança de coordenadas, como indicado em (4.21), resultando numa quadratura gaussiana unidimensional usada para integrar (4.18) numericamente em relação a θ .

$$\theta = \frac{\xi}{2}(\theta_v - \theta_u) + \frac{1}{2}(\theta_v + \theta_u) \quad (4.21)$$

Após a integração analítica em relação a r e a explicitação da integração gaussiana em função de ξ chega-se a

$$\begin{aligned} \int_{O_i} u_{0i}^{*n} v_0 d\Omega = \sum_{\alpha=1}^3 v_{0\alpha} \sum_{t=1}^3 \int_{-1}^{+1} \left\{ 2C_\alpha c^2 t_n \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n} \right)^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{c^3 t_n^2}{2A} (b_\alpha \cos \theta(\xi) + a_\alpha \sin \theta(\xi)) \left[\arcsen \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n} \right) - \frac{g_t^i(\xi)}{ct_n} \sqrt{1 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n} \right)^2} \right] \right\} \frac{\theta_v - \theta_u}{2} d\xi \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{O_i} u_{0i}^{*n} \frac{\partial u_0}{\partial r} d\Omega = \sum_{\alpha=1}^3 u_{0\alpha} \sum_{t=1}^3 \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{c^2 t_n}{A} (b_\alpha \cos \theta(\xi) + a_\alpha \sin \theta(\xi)) * \right. \\ \left. * \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n} \right)^2} \right] \right\} \frac{\theta_v - \theta_u}{2} d\xi \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
\int_{O_1} \frac{1}{r} B_{0i}^{*n} u_0 d\Omega &= \sum_{\alpha=1}^3 v_{0\alpha} \sum_{i=1}^3 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{2C_\alpha}{t_n} \left[\frac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^2\right)^3}}{-1 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right) + \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^2 + \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^3} + 1 \right] + \right. \\
&+ \frac{c}{A} (b_\alpha \cos\theta(\xi) + a_\alpha \sin\theta(\xi)) \left[\frac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^2\right)^3}}{1 + \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right) - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^2 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^3} + \right. \\
&\left. \left. + \arctan \left(\frac{\left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right) \sqrt{\left(1 - \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^2\right)^3}}{\left(-1 + \left(\frac{g_t^i(\xi)}{ct_n}\right)^2\right)^2} \right) - 1 \right] \right\} \frac{\theta_v - \theta_u}{2} d\xi
\end{aligned} \tag{4.24}$$

A expressão (4.24) apresenta singularidades quando $g_t^i(\xi) = ct_n$. Mas, estas singularidades são removíveis, i.e. têm um limite definido. Chamando-se de $k = g_t^i(\xi) / ct_n$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sqrt{(1-k^2)^3}}{-1-k+k^2+k^3} \right\} = 0 \tag{4.25}$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sqrt{(1-k^2)^3}}{1+k-k^2-k^3} + \arctan \left(\frac{k\sqrt{(1-k^2)^3}}{(-1+k^2)^2} \right) \right\} = \frac{\pi}{2} \tag{4.26}$$

Vê-se, portanto, que (4.24) tem definição para $g_t^i(\xi) = ct_n$.

Juntando-se as expressões (4.22), (4.23) e (4.24) chega-se a :

$$\begin{aligned}
F_i^n = \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha=1}^3 v_{0\alpha} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^N \left\{ 2C_\alpha c^2 t_n \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2} \right] + \frac{c^3 t_n^2}{2A} * \right. \right. \\
* (b_\alpha \cos\theta(\xi_k) + a_\alpha \sin\theta(\xi_k)) \left[\arcsen\left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n}\right) - \frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \sqrt{1 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2} \right] \left. \right\} \frac{\theta_v - \theta_u}{2} W_k + \\
+ \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^3 u_{0\alpha} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{c^2 t_n}{A} (b_\alpha \cos\theta(\xi_k) + a_\alpha \sin\theta(\xi_k)) \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2} \right] \right\} \frac{\theta_v - \theta_u}{2} W_k + \\
+ t_n \sum_{\alpha=1}^3 v_{0\alpha} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{2C_\alpha}{t_n} \left[\frac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2 \right)^3}}{-1 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right) + \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2 + \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^3} + 1 \right] + \right. \\
+ \frac{c}{A} (b_\alpha \cos\theta(\xi_k) + a_\alpha \sin\theta(\xi_k)) \left[\frac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2 \right)^3}}{1 + \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right) - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^3} + \right. \\
\left. \left. + \arctan \left[\frac{\left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right) \sqrt{\left(1 - \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2 \right)^3}}{\left(-1 + \left(\frac{g_t^i(\xi_k)}{ct_n} \right)^2 \right)^2} \right] - 1 \right] \right\} \frac{\theta_v - \theta_u}{2} W_k \left. \right\} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Onde as integrações da variável ξ de -1 a 1 foram substituídas por um somatório discreto com “N” pontos (ξ_k) e “N” pesos (W_k) de Gauss.

Capítulo V - Regularização dos Kernels da Equação da Onda Escalar

V.1 - Introdução

O desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem gerado, ao longo das últimas décadas, uma crescente necessidade de se avaliar integrais impróprias e singulares. Tais integrais tornam-se, muitas vezes, obstáculos ao desenvolvimento do MEC. Sendo assim, a avaliação destas singularidades é vital para realizar-se uma análise eficiente e precisa com o MEC.

Um fato bem estabelecido [26] é o reconhecimento da existência de três tipos básicos de integrais singulares no MEC, gerando por sua vez kernels singulares. Estas são : singularidade fraca, singularidade no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC) e integrais hipersingulares.

As Equações integrais de contorno com kernels hipersingulares aparecem sempre que o gradiente (ou a derivada normal, e.g.) de uma equação integral de contorno clássica é aplicado. De fato, tais equações envolvem a derivada de kernels já fortemente singulares. A avaliação das Equações Integrais de Contorno Hipersingulares (EICH) é um campo fértil para pesquisa, fato este facilmente comprovável pelo grande número de artigos dedicados à avaliação das EICH. Dentre as várias técnicas desenvolvidas destacam-se duas : a integração-por-partes e a parte finita de uma integral singular.

A integração-por-partes tem sido uma técnica de regularização amplamente usada (e.g. Sládek e Sládek (1984), Bonnet (1986,1989), Polch et al. (1987), Nishimura e Kobayashi (1989)). As integrais de contorno são regularizadas fazendo-se um “shift” do operador diferencial , baixando-se assim a ordem da singularidade. Assim como a integração por partes as aplicações dos teoremas de Gauss e Stokes, para outros casos, levam à mesma formulação.

Já, o conceito da parte finita de uma integral e suas propriedades foram introduzidos por Hadamard [19] no início do século. Tal conceito constituiu-se numa adequada formulação matemática para a manipulação de integrais singulares. A partir dos anos 70, com o trabalho pioneiro de Kutt [25] , a parte finita tornou-se uma técnica amplamente utilizada na avaliação de integrais singulares. Kutt desenvolveu um método de quadratura gaussiana para avaliar a parte finita de uma integral singular desconsiderando a parte divergente. Cada problema físico recomenda uma análise desta parte divergente a fim de conseguir-se a sua eliminação.

A bibliografia envolvendo estudos na aplicação numérica da parte finita é extensa. Como exemplo, podem-se citar os trabalhos de Ioakimidis & Pita [27] , Lee & Advani [28], Hildenbrand & Kuhn [29] e Guiggiani et al. [30] dentre vários autores.

Este capítulo propõe-se a comparar as duas técnicas de avaliação de integrais hipersingulares para o caso da Equação da Onda Escalar. Para tanto, ilustra-se brevemente o conceito da “parte finita” e em seguida demonstram-se os resultados obtidos por Mansur [23] na regularização dos kernels do problema da onda escalar transiente bidimensional.

V.2 - A “Parte Finita” de uma Integral Singular

V.2.1 Definição

Assuma-se que uma função $f(t)$ seja localmente integrável exceto na vizinhança do ponto $t=a$ e que tenda a “ ∞ ” quando “ t ” tende a “ a ”. Assuma-se, ainda, que $\phi(t)$ é contínua no intervalo utilizado.

Desta forma a integral,

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(t)\phi(t)dt \quad b>a, \quad \varepsilon>0 \quad (5.1)$$

é uma integral geralmente divergente quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Assuma-se, ainda, que é possível subtrair-se desta função $f(t)$ uma combinação linear finita de potências negativas de ε e positivas de $\log \varepsilon$ tal que a função remanescente de ε se aproxime de um limite finito independente do método pelo qual este é obtido. Este limite é definido como a “parte finita” de uma integral.

Considere-se o exemplo da integral geralmente divergente :

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-k} \phi(t)dt \quad a<b \quad (5.2)$$

Onde $\phi(t)$ é contínua no intervalo de integração, k é um inteiro positivo, e $-1<\alpha<0$. Para extrair-se a parte finita da integral, expande-se $\phi(t)$ usando-se a fórmula de Taylor com resíduo.

$$\phi(t) = \phi(a) + \frac{\phi^{(1)}(a)}{1!}(t-a) + \dots + \frac{\phi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{k-1} + (t-a)^k \psi(t) \quad (5.3)$$

$\psi(t)$ é contínua para todo “ t ” e é dada por :

$$\psi(t) = \frac{\int_a^t \phi^{(k)}(\tau)(t-\tau)^{k-1} d\tau}{(k-1)!(t-a)^k} \quad (5.4)$$

Widder [22] demonstra a validade da expressão (5.3)

A substituição de (5.3) em

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b (t-a)^{\alpha-k} \phi(t) dt \quad (5.5)$$

fornece

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [I(\varepsilon) + H(\varepsilon)] \quad (5.6)$$

Onde

$$I(\varepsilon) = - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\phi^{(v)}(a) \varepsilon^{\alpha-k+1+v}}{v!(\alpha-k+1+v)} \quad (5.7)$$

e

$$H(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b (t-a)^{\alpha} \psi(t) dt + \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\phi^{(v)}(a)(b-a)^{\alpha-k+1+v}}{v!(\alpha-k+1+v)} \quad (5.8)$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0+$, $I(\varepsilon)$ diverge em geral, enquanto que $H(\varepsilon)$ sempre converge. A parte finita da integral geralmente divergente (5.2) é definida como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\varepsilon)$. Representa-se a parte finita como :

$$\text{PF} \int_a^b (t-a)^{\alpha-k} \phi(t) dt \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} H(\varepsilon) = H(0) \quad a < b \quad (5.9)$$

A expansão da função $\phi(t)$, através da série de Taylor, é realizada até a potência “k” antes que se obtenha uma integral ordinária $(t-a)^k$ no integrando de (5.2).

Rigorosamente, a parte finita de Hadamard define uma distribuição singular, como por exemplo o delta de Dirac. Assim, a parte finita é uma função generalizada, com um ferramental matemático mais amplo do que as funções tradicionais. No próximo ítem definem-se alguns conceitos da teoria das distribuições.

V.2.2 A Parte Finita como uma distribuição singular

A compreensão da parte finita como uma função generalizada é importante visto que operações realizadas nesta (e.g. derivação) são condicionadas a regras de manipulação próprias de funções generalizadas.

O Espaço $\mathcal{D}$

Chamado de espaço das funções teste, é formado pelas funções complexas $\phi(t)$ que são infinitamente contínuas e zero fora de algum intervalo especificado. Onde a definição *infinitamente contínua* aplica-se às funções $\phi(t)$ que têm derivadas de todas as ordens contínuas, em todos os pontos de um certo intervalo.

Funcional

Um funcional é uma regra que atribui um certo número para todo membro de um certo conjunto de funções. Neste texto, o conjunto de funções será aquele formado pelo espaço $\mathcal{D}$. Denotando o funcional pelo símbolo f , designa-se o número que f atribui a uma função teste ϕ por $\langle f, \phi \rangle$.

Distribuição

Distribuições são funcionais no espaço $\mathcal{D}$ que possuem duas propriedades essenciais. A primeira é a de **linearidade** e a segunda é a de **continuidade**. Um funcional f em $\mathcal{D}$ é dito contínuo se, para qualquer seqüência de funções teste $\{\phi_v(t)\}_{v=1}^{\infty}$ que converge em $\mathcal{D}$ para $\phi(t)$, a seqüência de números $\{\langle f, \phi_v \rangle\}_{v=1}^{\infty}$ convergir para o número $\langle f, \phi \rangle$ no sentido ordinário. Se f for linear a definição de continuidade pode ser simplificada. Neste caso, f será contínua se a seqüência numérica $\{\langle f, \phi_v \rangle\}_{v=1}^{\infty}$ convergir para zero sempre que a seqüência $\{\phi_v\}_{v=1}^{\infty}$ convergir em $\mathcal{D}$ para zero.

Portanto, estabelece-se a seguinte definição para uma distribuição definida sobre o espaço euclidiano real unidimensional R :

Um funcional linear contínuo no espaço $\mathcal{D}$ é uma distribuição.

Uma maneira de gerar-se distribuições é a seguinte. Assume-se que $f(t)$ seja uma função localmente integrável. Correspondendo a $f(t)$ pode-se definir a distribuição f através da integral convergente

$$\langle f, \phi \rangle = \langle f(t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)dt \quad (5.10)$$

Pode-se mostrar [20] que (5.10) é um funcional linear.

Distribuições que podem ser geradas usando-se (5.10) com funções localmente integráveis são chamadas de **distribuições regulares**. Já as distribuições que não podem ser obtidas de funções localmente integráveis, com o uso de (5.10), são chamadas de **distribuições singulares**. A função generalizada delta de Dirac e a parte finita de Hadamard são exemplos de distribuições singulares.

V.2.3 A Interpretação da Parte Finita

O seguinte exemplo fornece uma visão mais clara do conceito da parte finita. Dada a integral divergente

$$\int_0^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt \quad \phi \in \mathcal{D} \quad (5.11)$$

Seguindo-se a técnica sugerida por Hadamard [19] extrai-se a parte finita da integral acima como ilustrado em V.2.1 . Primeiramente desenvolve-se a série de Taylor com os dois primeiros termos para $\phi(t)$ em torno de zero (ponto singular):

$$\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t) \quad (5.12)$$

Como $\phi(t)$ pertence a $\mathcal{D}$ esta é infinitamente contínua. $\psi(t)$, o resíduo, pode ser assumido como contínuo inclusive em $t=0$ (Widder [22]). Se b é um número real grande o suficiente para que $\phi(t) = 0$ para $t > b$, (5.11) pode ser escrita como uma distribuição na forma :

$$\langle \frac{1_+(t)}{t}, \phi(t) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^b \frac{\phi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\phi(0) \log b - \phi(0) \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^b \psi(t) dt \right] \quad (5.13)$$

Onde o símbolo $1_+(t)$ representa o funcional avaliado no eixo positivo. Se $\phi(0) \neq 0$, o segundo termo de (5.13) diverge quando $\varepsilon \rightarrow 0+$, enquanto que o terceiro termo permanece finito pois $\psi(t)$ é contínuo em $t = 0$. O próximo passo é apenas desconsiderar-se a parte divergente e o resultado é a parte finita de Hadamard.

$$PF \int_0^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt = \int_0^b \psi(t) dt + \phi(0) \log b \quad (5.14)$$

Assim, a parte finita define uma distribuição singular. Esta distribuição é denotada por

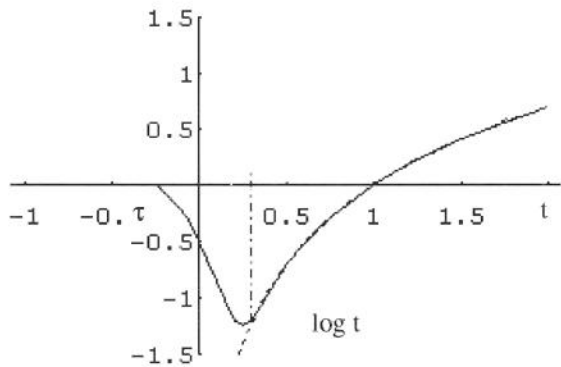
$$\text{Psf} \frac{1_+(t)}{t} \tag{5.15}$$

E significa que (5.15) atribui o valor (5.14) para cada ϕ em $\mathcal{D}$. É costume designar-se (5.15) como uma **pseudofunção** com a notação Psf. Esta pseudofunção pode ser reescrita ,sabendo-se que $\int_0^b \psi(t)dt = \int_0^b \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt$ e que $\int_\epsilon^b \frac{\phi(0)}{t} dt = \phi(0)[\log b - \log \epsilon]$,da seguinte forma :

$$\langle \text{Psf} \frac{1_+(t)}{t}, \phi(t) \rangle \stackrel{\Delta}{=} \text{PF} \int_0^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_\epsilon^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt + \phi(0) \log \epsilon \right\} \tag{5.16}$$

Para se obter o comportamento desta pseudofunção contrói-se uma aproximação de $\text{Psf} \frac{1_+(t)}{t}$ de uma forma heurística (Zemanian [20]) . É fato que esta pseudofunção é a derivada distribucional da distribuição regular $1_+(t) \log t$. Portanto, se se construir uma aproximação contínua para $1_+(t) \log t$ e então plotar-se a derivada, espera-se obter uma aproximação para a $\text{Psf} \frac{1_+(t)}{t}$

A aproximação heurística é indicada na figura 5.1.



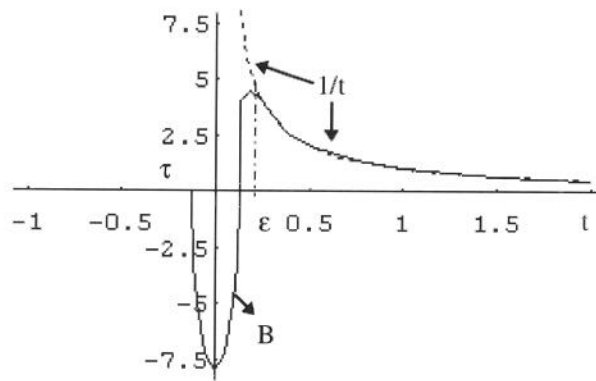


figura 5.1 (b)

Na parte *a* da figura a linha sólida **A** representa a aproximação contínua da função $1_+(t) \log t$, a qual é indicada pela linha tracejada. A curva **A** substitui a descontinuidade em $1_+(t) \log t$ por uma transição contínua que deixa o eixo t em $t = \tau$ e junta-se à curva $1_+(t) \log t$ em $t = \epsilon$. As derivadas correspondentes são indicadas na parte *b* da figura. Note-se que a aproximação **B** para a pseudofunção $\text{Psf } 1_+(t)/t$ segue a função exceto próxima da origem, onde **B** possui um pulso negativo abrupto.

A presença deste pulso negativo pode ser relacionada à expressão (5.16) da seguinte forma. A área total abaixo da curva **B** sobre o intervalo $\tau \leq t \leq \epsilon$ é a quantidade negativa $\log \epsilon$, uma vez que este é o incremento total na curva **A** para este intervalo. Aplica-se agora **B** como uma distribuição regular para algumas funções teste $\phi(t)$ em $\mathcal{D}$. Se ϵ e τ têm magnitudes excessivamente pequenas, então, sobre $\tau \leq t \leq \epsilon$, $\phi(t)$ é essencialmente constante de valor $\phi(0)$. Portanto, a porção de transição da curva **B** fornecerá aproximadamente o número

$$\phi(0) \log \epsilon \quad (5.17)$$

para $\langle B, \phi \rangle$. Isto corresponde ao segundo termo da última parte de (5.16). O primeiro termo,

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt \quad (5.18)$$

é produzido pela porção da curva **B** à direita de $t = \epsilon$. Assumindo-se que $\phi(t)$ é positiva para todo t e que $\phi(0) > 0$, vê-se que (5.17) aproxima-se de $-\infty$, enquanto que (5.18) aproxima-se de $+\infty$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Entretanto, (5.17) e (5.18) divergem de tal forma que a soma algébrica das duas permanece finita.

V.2.4 A Parte Finita e a Regularização da Integral Hipersingular

Para se obter a parte finita no caso do exemplo anterior usou-se a série de Taylor com resíduo. Assim, se se levar em conta que

$$\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t) \quad \text{e} \quad \int_0^b \psi(t)dt = \int_0^b \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt \quad (5.19)$$

Pode-se escrever

$$\int_0^b \frac{\phi(t)}{t} dt = \underbrace{\int_0^b \frac{\phi(0)}{t} dt}_{\downarrow} + \underbrace{\int_0^b \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt}_{\downarrow} \quad (5.20)$$

$$\int_0^b \frac{\phi(t)}{t} dt = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(0) \log \epsilon + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^b \frac{\phi(t)}{t} dt + \phi(0) \log \epsilon \right\} \quad (5.21)$$

Como [21] observa, a soma e a subtração do termo $\phi(0)$ faz com que a segunda parcela em (5.20) conduza a uma regularização da integral. Esta segunda parcela, chamada de parte finita, corresponde a uma integral avaliada no sentido do valor principal de Cauchy. Como visto, no exemplo heurístico anterior, duas partes divergem, mas quando somadas conduzem a um valor finito. Já a primeira parcela em (5.20) conduz a um termo divergente. Assim, mesmo as integrais que não podem ser avaliadas diretamente no sentido do valor principal de Cauchy ainda podem ser “regularizadas” (i.e. fornecer uma parte finita)¹.

Dado o exemplo numérico :

$$\text{PF} \int_0^x \frac{1}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^x \frac{1}{t} dt + \log \epsilon \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \log x - \log \epsilon + \log \epsilon \} = \log x$$

Vê-se que a parte finita regulariza a integral no ponto singular removendo-se, neste exemplo, o infinitésimo de ordem logarítmica.

¹ Uma discussão abrangente é fornecida em [21]

V.3 - Regularização - “Parte Finita” X Integração-por-Partes

V.3.1 Introdução

Mansur [2] em 1982 aplicou o MEC, em análise bi-dimensional, à equação da onda escalar transiente (EOET). Tal trabalho, realizado com a representação integral de Volterra, originou kernels hipersingulares na integração analítica no tempo. Como será mostrado a seguir, Mansur regularizou tais kernels realizando uma integração por partes no tempo.

Entretanto, no início do século, Hadamard [19] foi o primeiro a dedicar-se ao cálculo das integrais no tempo de kernels singulares. Estes aparecem na equação integral para a EOET. Hadamard, evitando o uso de variáveis complexas, resolveu tais kernels. Este não apenas resolveu o problema como generalizou os procedimentos requeridos para a avaliação destas integrais no tempo. Esta generalização deu origem a um novo conceito matemático : a parte finita de uma integral.

Apesar do trabalho de Hadamard, a pesquisa realizada na última década do MEC aplicado a EOET não seguiu suas idéias. Aplicou-se, entretanto, a regularização feita por Mansur como acima citado. Foi somente em 1993 que Mansur [23] voltou-se ao uso da parte finita como alternativa à sua regularização até então utilizada. O uso da parte finita não altera, como demonstrar-se-á, os kernels obtidos em 1983 por Mansur. Contudo, o conceito matemático da parte finita torna o desenvolvimento dos núcleos mais claros. Tal clareza torna-se importante na obtenção de outros resultados (e.g. a derivada espacial na análise transiente do MEC). Os estudos para o caso elastodinâmico estão ainda em processo de obtenção, o que revela a atualidade do assunto aqui abordado.

V.3.2 Equação Integral

A equação integral de contorno correspondendo à equação da onda escalar, como já visto em capítulos anteriores, pode ser escrita como

$$4\pi c_1 u(\xi_i, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} u^*(X, t; \xi_i, \tau) q(X, \tau) d\Gamma(X) d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma} q^*(X, t; \xi_i, \tau) u(X, \tau) d\Gamma(X) d\tau + I_{\Omega} \quad (5.22)$$

Onde

$$u^*(X, t; \xi_i, \tau) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} H[c(t-\tau) - r] \quad (5.23)$$

$$q^*(X, t; \xi_i, \tau) = \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} H[c(t-\tau) - r] + \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} * \right. \\ \left. * \frac{\partial}{\partial n} H[c(t-\tau) - r] \right\} \quad (5.24)$$

e I_Ω representa as integrais de domínio.

A avaliação numérica da primeira integral no lado direito de (5.22) não apresenta dificuldades. Contudo, o mesmo não ocorre com a segunda integral. Levando-se em conta a equação (5.24), esta segunda integral pode ser escrita como

$$H = \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \int_0^t u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} H[c(t-\tau) - r] d\tau + \int_0^t u(X, \tau) \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} * \right. \\ \left. * \frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau) - r] d\tau \right\} d\Gamma(X) \quad (5.25)$$

As integrais no tempo indicadas na equação (5.25) conduzem a singularidades, o que as torna sem significado (Hadamard [19]). Entretanto, H existe uma vez que representa a contribuição do potencial $u(X, \tau)$ ($X \in \Gamma$) para $u(\xi_i, t)$. Há duas possibilidades para contornar-se o problema gerado por (5.25) : usar-se uma regularização no kernel (via integração-por-partes) ou avaliar o mesmo com o conceito da parte finita de Hadamard.

V.3.3 Regularização da Expressão do Kernel da Derivada de u^*

De acordo com Mansur [2] , a seguinte expressão :

$$\frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau) - r] = -\delta[-r - c(t-\tau)] = -\delta[c\tau - (ct - r)] \quad (5.26)$$

pode ser usada para escrever

$$H = \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \int_0^{t^+} u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} H[c(t-\tau) - r] d\tau + \int_0^{t^+} u(X, \tau) \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} * \right. \\ \left. * \frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau) - r] d\tau \right\} d\Gamma(X)$$

como :

$$H = \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} h^1 d\Gamma \quad (5.27)$$

com

$$h^1 = \int_0^{t-r/c} u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} H[c(t-\tau) - r] d\tau - u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \Big|_{c\tau = ct - r} \quad (5.28)$$

pois

$$\int_0^{t^+} u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \delta[c\tau - (ct - r)] d(c\tau) = u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \Big|_{c\tau = ct - r} \quad (5.29)$$

Vê-se por (5.28) que h^1 não faz sentido, tem-se uma integral divergente no primeiro termo (o limite superior é a posição da frente de onda $\tau = t - r/c$) e o segundo tende ao infinito. Uma solução para tal problema é, como indicou [6], fazer-se uma integração por partes no segundo termo de (5.25). Desta forma o operador de derivação atuando na função Heaviside é transferido para $u(x, \tau)u^*(x, t; \xi, \tau)$. Denominando-se, primeiramente:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \int_0^{t^+} u(X, \tau) \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau) - r] d\tau \right\} d\Gamma(X) \quad (5.30)$$

e levando-se em conta que

$$\frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau) - r] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} H[c(t-\tau) - r] \quad (5.31)$$

pode-se escrever

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \int_0^{t^+} u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} H[c(t-\tau) - r] d\tau \right\} d\Gamma(X) \quad (5.32)$$

O qual pode ser integrado por partes com relação a τ .

$$\begin{aligned} I = & - \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \int_0^{t^+} u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} H[c(t-\tau) - r] d\tau d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \int_0^{t^+} u(X, \tau) \frac{2c^2(t-\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} u(X, \tau) H[c(t-\tau) - r] d\tau d\Gamma - \frac{2u(X, 0)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Onde $H[c(t - t^+) - r] = 0$.

Assim h^1 pode ser reescrito como :

$$\begin{aligned} h^1 = & - \int_0^{t^+} \left\{ u(X, \tau) \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} + \frac{2(\partial u / \partial \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} H[c(t-\tau) - r] d\tau \\ & - \frac{2u_0}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ao substituir-se (5.34) na equação (5.27) obtem-se a versão regularizada da equação (5.25). Desta forma (5.25) pode ser integrada analiticamente ou numericamente no tempo.

A equação (5.34) foi obtida assumindo-se que $\partial u(X, \tau) / \partial \tau$ é contínua no tempo. Entretanto, quando $\partial u(X, \tau) / \partial \tau$ é contínua por partes a equação (5.34) ainda é válida.

Tomando-se como exemplo a figura 5.2 e que

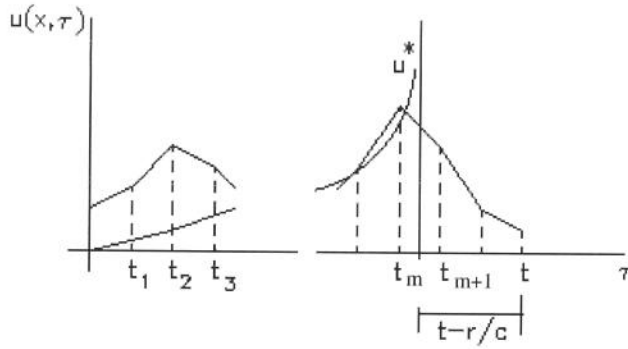


figura 5.2 $\partial u(X, \tau)/\partial \tau$ contínua por partes

$$\int_0^{t_m} \left\{ u(X, \tau) \frac{2c[c(t-\tau)]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} + \frac{2(\partial u / \partial \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} H[c(t-\tau) - r] d\tau =$$

$$u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \Big|_{\tau=t_m} - \frac{2u_0}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} H[ct - r] \quad (5.35)$$

pois

$$\int_{t_i}^{t_j} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} = f(\tau) \Big|_{t_j} - f(\tau) \Big|_{t_i} \quad (5.36)$$

pode-se escrever (5.34) como

$$h^1 = \int_0^{t_m} u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left\{ u(X, \tau) \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} \right.$$

$$\left. + \frac{2(\partial u / \partial \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} H[c(t-\tau) - r] d\tau - u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \Big|_{\tau=t_m} \quad (5.37)$$

V.3.4 O Conceito da Parte Finita de Hadamard

Como Hadamard indicou [19], apesar da equação (5.28) não ter sentido, o seguinte limite tem

$$h^1 = \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left\{ \int_0^{\tau} u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau - u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} \quad (5.38)$$

Quando $u(X, \tau)$ possuir uma primeira derivada temporal contínua por partes (ver fig 5.2) a equação (5.38) escreve-se

$$h^1 = \int_0^{t_m} u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau + \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left\{ \int_{t_m}^{\tau} u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau - u(X, \tau) \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} \quad (5.39)$$

Concisamente as equações (5.38) ou (5.39) podem ser escritas

$$h^1 = PF \int_0^{t-r/c} u(X, \tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau \quad (5.40)$$

Onde PF simboliza a parte finita de uma integral. É importante notar-se que a não presença da função Heaviside não significa que esta foi desprezada. Tal função está implicitamente considerada no conceito de Hadamard de regularizar integrais por meio da expansão de séries de Taylor.

V.3.5 Os *Kernels* integrados no tempo

Até o momento obtiveram-se várias equações, (5.34), (5.37), (5.38) a (5.40), para expressar-se o kernel h^1 . Tais expressões devem conduzir aos mesmos resultados quando realizar-se a integração no tempo e forçar-se a continuidade de $u(x, \tau)$.

A equação (5.34), na forma em que foi escrita, apresenta os efeitos especiais da frente de onda afetando todos os intervalos de tempo. Embora as equações (5.34) e (5.39) pareçam diferentes, as duas conduzem a resultados idênticos como será visto a seguir.

Para obterem-se expressões do kernel h^1 , integrado analiticamente, considera-se uma aproximação linear no tempo para $u(x, \tau)$. Assim

$$u(X, \tau) = \phi_I(\tau) u^m(X) + \phi_F(\tau) u^{m+1}(X) \quad (5.41)$$

Onde as funções de forma ϕ_I e ϕ_F , ilustradas na fig. 5.3, são dadas por :

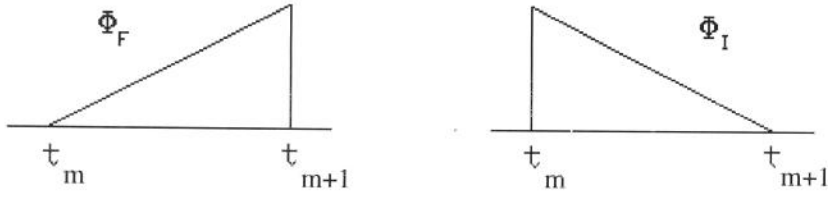


figura 5.3 funções de interpolação linear

$$\phi_I = \frac{t_{m+1} - \tau}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \phi_F = \frac{\tau - t_m}{\Delta t} \quad \text{com} \quad t_m < \tau < t_{m+1} \quad (5.42)$$

Utilizar-se-á aqui duas formas de se obter o kernel h^1 . Estas são :

Regularização via integração-por-partes

$$h_I^1 = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left\{ \phi_I(\tau) \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} + \frac{2(\partial\phi_I / \partial\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} \partial\tau \quad (5.43)$$

$$h_F^1 = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left\{ \phi_F(\tau) \frac{2c[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} + \frac{2(\partial\phi_F / \partial\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\} \partial\tau \quad (5.44)$$

Parte Finita de Hadamard

$$h_I^1 = \text{PF} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \phi_I(\tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau \quad (5.45)$$

$$h_F^1 = \text{PF} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \phi_F(\tau) \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau \quad (5.46)$$

A fim de simplificar-se os resultados a seguir, adota-se [23] a notação :

$$t_m = a; \quad t_{m+1} = b; \quad t_r = t - r/c; \quad A_1 = \sqrt{c(t-a)-r}; \quad A_2 = \sqrt{c(t-a)+r};$$

$$A_3 = \sqrt{c(t-b)-r}; \quad A_4 = \sqrt{c(t-b)+r}; \quad A_5 = c(t-a); \quad A_6 = c(t-b);$$

$$A_7 = A_5 A_6 - r^2;$$

As expressões finais para os kernels integrados no tempo dependem da posição da frente de onda. Há três casos a considerar:

Caso 1 ($b = t$, $a < t_r < b$)

Corresponde ao caso ilustrado na figura 5.4. (Um esboço das deduções encontra-se no item V.4)

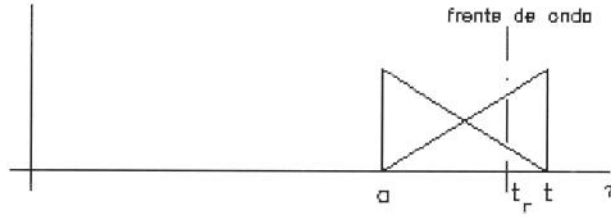


figura 5.4

Regularização via integração-por-partes

$$h_1^1 \Delta t = \frac{2A_1}{cA_2} \quad (5.47)$$

$$h_F^1 \Delta t = -\frac{2A_1 A_2}{cr} \quad (5.48)$$

Parte Finita de Hadamard

$$h_1^1 \Delta t = \frac{2A_1}{cA_2} - \frac{2\Delta t}{A_1 A_2} \quad (5.49)$$

$$h_F^1 \Delta t = -\frac{2A_1 A_2}{cr} \quad (5.50)$$

Caso 2 ($b < t$, $a < t_r < b$)

Corresponde ao caso ilustrado na figura 5.5.

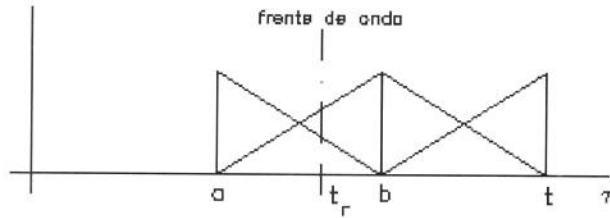


figura 5.5

Regularização via integração-por-partes

$$h_I^1 \Delta t = \frac{2A_1(A_4)^2}{cA_2r} \quad (5.51)$$

$$h_F^1 \Delta t = -\frac{2A_1A_2}{cr} \quad (5.52)$$

Parte Finita de Hadamard

$$h_I^1 \Delta t = \frac{2A_1(A_4)^2}{cA_2r} - \frac{2\Delta t}{A_1A_2} \quad (5.53)$$

$$h_F^1 \Delta t = -\frac{2A_1A_2}{cr} \quad (5.54)$$

Caso 3 ($b < t_r$)

Corresponde ao caso ilustrado na figura 5.6. Neste caso as integrais representadas por (5.45) e (5.46) podem ser consideradas ordinárias, calculadas no sentido de Riemann.

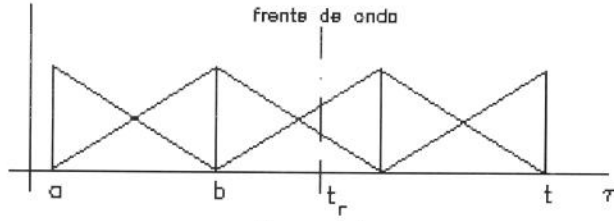


figura 5.6

Regularização via integração-por-partes

$$h_I^I \Delta t = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_1 A_2} - A_3 A_4 \right] + \frac{2 \Delta t}{A_1 A_2} \quad (5.55)$$

$$h_F^I \Delta t = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_3 A_4} - A_1 A_2 \right] - \frac{2 \Delta t}{A_3 A_4} \quad (5.56)$$

Parte Finita de Hadamard

$$h_I^I \Delta t = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_1 A_2} - A_3 A_4 \right] \quad (5.57)$$

$$h_F^I \Delta t = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_3 A_4} - A_1 A_2 \right] \quad (5.58)$$

Os kernels obtidos pelas duas técnicas, por exemplo (5.47) e (5.49), são aparentemente diferentes. Esta falsa impressão ocorre quando as expressões são consideradas para apenas um intervalo de tempo. Quando se força a continuidade de $u(x, \tau)$, i.e. junção dos intervalos de tempo, os coeficientes h^I tornam-se idênticos para as duas técnicas acima utilizadas. O exemplo a seguir demonstra esta igualdade.

Montando-se a equação (5.22), usando-se para h^1 (5.34) e (5.39) para a integração-por-partes e a parte finita respectivamente, tem-se (onde h^1_i e h^1_f são expressos por (5.43) a (5.46)) :

primeiro passo de tempo ($t = t_1$ e $t_1 = b$)

De acordo com o **caso 1**.

Regularização via integração-por-partes

$$4\pi c_i u(\xi_i, t) = \int_{\Gamma_0}^{t_1} u^*(X, t; \xi_i, \tau) q(X, \tau) d\tau d\Gamma(X) -$$

$$- \int_{\Gamma} \left\{ \left[\frac{2A_1}{cA_2} \right]_{a=0} u^0(X) - \left[\frac{2A_1 A_2}{cr} \right]_{a=0} u^1(X) - \left[\frac{2\Delta t}{A_1 A_2} \right]_{a=0} u^0(X) \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(X) + I_{\Omega}$$

(5.59)

Regularização via parte-finita

$$4\pi c_i u(\xi_i, t) = \int_{\Gamma_0}^{t_1} u^*(X, t; \xi_i, \tau) q(X, \tau) d\tau d\Gamma(X) -$$

$$- \int_{\Gamma} \left\{ \left[\frac{2A_1}{cA_2} - \frac{2\Delta t}{A_1 A_2} \right]_{a=0} u^0(X) - \left[\frac{2A_1 A_2}{cr} \right]_{a=0} u^1(X) \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(X) + I_{\Omega}$$

(5.60)

Comparando-se (5.59) e (5.60) vê-se que o último termo de (5.34) aparece naturalmente na formulação da parte finita. Supondo-se, agora, um segundo passo de tempo tal que :

segundo passo de tempo ($t = t_2$)

De acordo com os **casos 1 e 3**.(supondo uma transição sem o caso 2, a fim de simplificar-se o exemplo)

Regularização via integração-por-partes

$$\begin{aligned}
 4\pi c_1 u(\xi_i, t) = & \int_{\Gamma} \int_0^{t_2} u^*(X, t; \xi_i, \tau) q(X, \tau) d\tau d\Gamma(X) - \\
 & - \int_{\Gamma} \left\{ \left[\frac{2}{cr} \left(\frac{A_7}{A_1 A_2} - A_3 A_4 \right) + \frac{2\Delta t}{A_1 A_2} \right]_{a=0}^{b=t_1} u^0(X) - \left[\frac{2}{cr} \left(\frac{A_7}{A_3 A_4} - A_1 A_2 \right) - \frac{2\Delta t}{A_3 A_4} \right]_{a=0}^{b=t_1} \right. \\
 & \left. * u^1(X) + \left[\frac{2A_1}{cA_2} \right]_{a=t_1} u^1(X) - \left[\frac{2A_1 A_2}{cr} \right]_{a=t_1} u^2(X) - \left[\frac{2\Delta t}{A_1 A_2} \right]_{a=0} u^0(X) \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(X) + I_{\Omega}
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Regularização via parte-finita

$$\begin{aligned}
 4\pi c_1 u(\xi_i, t) = & \int_{\Gamma} \int_0^{t_2} u^*(X, t; \xi_i, \tau) q(X, \tau) d\tau d\Gamma(X) - \\
 & - \int_{\Gamma} \left\{ \left[\frac{2}{cr} \left(\frac{A_7}{A_1 A_2} - A_3 A_4 \right) \right]_{a=0}^{b=t_1} u^0(X) - \left[\frac{2}{cr} \left(\frac{A_7}{A_3 A_4} - A_1 A_2 \right) \right]_{a=0}^{b=t_1} u^1(X) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{2A_1}{cA_2} - \frac{2\Delta t}{A_1 A_2} \right]_{a=t_1} u^1(X) - \left[\frac{2A_1 A_2}{cr} \right]_{a=t_1} u^2(X) \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(X) + I_{\Omega}
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Mas

$$\left[\frac{2\Delta t}{A_1 A_2} \right]_{a=t_1} = \left[\frac{2\Delta t}{A_3 A_4} \right]_{b=t_1} \tag{5.63}$$

Logo (5.61) e (5.62) são idênticas.

V.3.6 Conclusão

Como demonstrado no exemplo acima, as duas metodologias utilizadas na regularização dos kernels h^1 fornecem o mesmo resultado. Segundo Mansur e Carrer [24], a técnica da parte finita conduz a kernels mais simples (e.g. obtenção das derivadas espaciais). Entretanto, ao se manipular a parte finita deve-se ater às regras de manipulação que regem as funções generalizadas. A não observação de tais regras pode conduzir a kernels sem significado matemático, pondo em risco todo o trabalho executado.

Neste trabalho os kernels foram obtidos fazendo-se uma integração analítica no tempo. Caso se optasse por uma integração numérica, as equações (5.34) e (5.39) possuíam tratamentos numéricos distintos. A primeira poderia ser integrada numericamente, usando-se regras de quadratura (e.g. Gauss), pois é regular. Já a segunda requeria, para o último intervalo de tempo, regras especiais de quadratura (Kutt [25]).

V.4 - Obtenção dos kernels “h”

Demonstram-se neste ítem esboços das deduções dos kernels h. Tais esboços ajudam na compreensão do mecanismo de regularização das integrais hipersingulares ,e.g. parte finita.

V.4.1 *Integração-por-partes*

Iniciando-se com o caso 3 da regularização de h via integração por partes

$$h_I^I = - \int_{t_{mI}}^{t_{m+I}} \left\{ \frac{t_{m+I} - \tau}{\Delta t} \frac{2c[c(t - \tau) - r]}{\sqrt{[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^3}} - \frac{1}{\Delta t} \frac{2}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \right\} \partial \tau \quad (5.64)$$

Após um trabalho analítico, chega-se a :

$$h_I^I = - \left\{ \frac{2c(t - t_{m+I})}{cr} \left[\frac{[c(t - \tau) - r]}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \right]_{t_m}^{t_{m+I}} + \frac{2}{c} \left[\frac{[c(t - \tau) - r]}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \right]_{t_m}^{t_{m+I}} \right\} \quad (5.65)$$

O que resulta em :

$$h_I^I \Delta t = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_1 A_2} - A_3 A_4 \right] + \frac{2 \Delta t}{A_1 A_2} \quad (5.66)$$

De maneira semelhante chega-se a :

$$h_F^I \Delta t = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_3 A_4} - A_1 A_2 \right] - \frac{2 \Delta t}{A_3 A_4} \quad (5.67)$$

O **caso 1** pode ser obtido de (5.65) fazendo-se $t_{m+I} = t$ e o limite superior igual a $t-r/c$ (pois integra-se somente até a frente de onda). Assim

$$h_1^l \Delta t = - \left\{ \frac{2}{c} \left[\frac{[c(t-\tau)-r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right]_{t_m}^{t-r/c} \right\} \quad (5.68)$$

$$h_1^l \Delta t = - \frac{2}{c} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left[\frac{[c(t-\tau)-r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right] - \left[\frac{[c(t-t_m)-r]}{\sqrt{c^2(t-t_m)^2 - r^2}} \right] \right\} = \frac{2A_1}{cA_2} \quad (5.69)$$

Onde o primeiro termo em (5.69) é nulo ao aplicar-se o limite. De forma semelhante

$$h_F^l \Delta t = - \frac{2A_1 A_2}{cr} \quad (5.70)$$

Para o **caso 2** utiliza-se novamente (5.65)

$$\begin{aligned} h_1^l \Delta t = & - \frac{2c(t-t_{m+1})}{cr} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left[\frac{[c(t-\tau)-r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right] - \left[\frac{[c(t-t_m)-r]}{\sqrt{c^2(t-t_m)^2 - r^2}} \right] \right\} - \\ & - \frac{2}{c} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left[\frac{[c(t-\tau)-r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right] - \left[\frac{[c(t-t_m)-r]}{\sqrt{c^2(t-t_m)^2 - r^2}} \right] \right\} = \frac{2A_1(A_4)^2}{cA_2 r} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Onde os dois termos em (5.71) subtidos a limites tendem a zero. De forma semelhante

$$h_F^l \Delta t = - \frac{2A_1 A_2}{cr} \quad (5.72)$$

V.4.2 Parte finita

Começa-se novamente com o **caso 3**. Para o caso 3 a integral é ordinária, podendo portanto ser calculada no sentido de Riemann. Assim

$$\begin{aligned} h_1^l \Delta t = & \text{PF} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{t_{m+1}-\tau}{\Delta t} \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{t_{m+1}-\tau}{\Delta t} \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^3}} d\tau = \\ & = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_1 A_2} - A_3 A_4 \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

De forma semelhante

$$h_F^I \Delta t = \frac{2}{cr} \left[\frac{A_7}{A_3 A_4} - A_1 A_2 \right] \quad (5.74)$$

Considerando-se, agora, o **caso 2**. Neste caso tem-se uma integral hipersingular avaliada com o conceito da parte finita.

$$h_I^I \Delta t = \Delta t \text{PF} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{t_{m+1} - \tau}{\Delta t} \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^3}} d\tau \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left\{ \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{t_{m+1} - \tau}{\Delta t} \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^3}} d\tau - \frac{t_{m+1} - \tau}{\Delta t} \frac{2}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \right\} \Delta t \quad (5.75)$$

Sabe-se, primeiramente, que

$$\int_{t_m}^{\tau} \frac{t_{m+1} - \tau}{\Delta t} \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^3}} d\tau = \left[\frac{t_{m+1} - t_n}{\Delta t} \frac{2c(t - \tau)}{r\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \right]_{t_m}^{\tau} + \left[\frac{1}{c\Delta t} \frac{2r}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \right]_{t_m}^{\tau} \quad (5.76)$$

Logo (5.75) pode ser escrita :

$$h_I^I \Delta t = \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left[\frac{t_{m+1} - t}{1} \frac{2c(t - \tau)}{r\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} + \frac{1}{c} \frac{2r}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} - \frac{t_{m+1} - \tau}{1} \frac{2}{r\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \right] - \left[\frac{t_{m+1} - t}{1} \frac{2c(t - t_m)}{r\sqrt{c^2(t - t_m)^2 - r^2}} + \frac{1}{c} \frac{2r}{\sqrt{c^2(t - t_m)^2 - r^2}} \right] \quad (5.77)$$

Onde na equação acima o termo levado ao limite se anula. Assim

$$h_1^l \Delta t = \frac{2A_1(A_4)^2}{cA_2r} - \frac{2\Delta t}{A_1A_2} \quad (5.78)$$

Procedendo de maneira semelhante chega-se a :

$$h_F^l \Delta t = -\frac{2A_1A_2}{cr} \quad (5.79)$$

O **caso 1** é bastante semelhante ao 2. Basta levar em conta que $t = t_{m+1}$, o que anula o primeiro termo da igualdade à direita em (5.76). Assim, chega-se a :

$$h_1^l \Delta t = \frac{2A_1}{cA_2} - \frac{2\Delta t}{A_1A_2} \quad (5.80)$$

$$h_F^l \Delta t = -\frac{2A_1A_2}{cr} \quad (5.81)$$

Capítulo VI - Resultados Numéricos

No capítulo 3 chegou-se à equação integral para a propagação da onda escalar bidimensional (3.1) com os termos de domínio e contorno explicitados.

A escolha da discretização do domínio (capítulo 4), quando da resolução de um problema, é simples pois u_0 e v_0 são funções conhecidas. Entretanto, a discretização do contorno e o intervalo de tempo Δt dependem do problema em consideração. Por este motivo, em muitos problemas, análises numéricas devem ser conduzidas nas quais a discretização do contorno e o intervalo de tempo são sucessivamente refinados. Ao se estudar a propagação de ondas deve-se atentar para a escolha do intervalo de tempo e a discretização do contorno a fim de se evitar a violação da propriedade da causalidade. Assim, para nós longes uns dos outros a onda não deve se propagar entre estes num intervalo de tempo. Há também certas precauções que devem ser levadas em conta quando se escolhe o parâmetro β que relaciona o tamanho do elemento com o passo de tempo, dado por

$$\beta = \frac{c\Delta t}{l_j} \quad (6.1)$$

Em elementos finitos ou em diferenças finitas parâmetros similares são importantes para se obter uma análise válida de cada problema. Embora para elementos finitos e diferenças finitas existam regras para a escolha de parâmetros como β , em elementos de contorno o estudo conclusivo deste parâmetro ainda é um campo de pesquisa a ser aprofundado [5].

VI.1 - Exemplo 1

Os resultados obtidos usando-se o MEC ou BEM (Boundary Element Method) foram comparados com resultados analíticos de uma barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. A solução pelo MEC considerou um domínio retangular com lados de comprimento L e b ($b=L/2$) como mostrado na figura 6.1. Os deslocamentos u foram assumidos zero em $x=L$ e suas derivadas normais q também foram consideradas nulas para $y=0$ e $y=b$ para todo o tempo 't'. Em $x=0$ e $t=0$ um carregamento Eq foi repentinamente aplicado e mantido durante toda a análise (E módulo de Young). Devido à topologia e condições de contorno [5] o problema é na verdade unidimensional e sua solução analítica pode ser achada por exemplo em [31]. E relaciona a taxa de deformação (neste exemplo unidimensional $\epsilon = \partial u / \partial n = \partial u / \partial x$) à força P aplicada à barra.

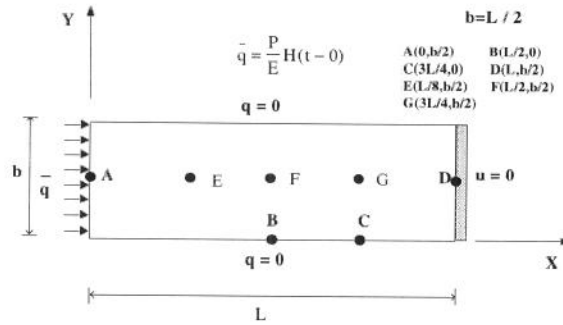


figura 6.1. Condições de contorno e definições geométricas para barra unidimensional submetida a uma função de força tipo Heaviside

Quatro diferentes combinações de funções de interpolação foram usadas nesta análise, dadas na tabela abaixo.

Combinação	Função de interpolação		
	$\eta_i(X)$ e $v_i(X)$	$\phi^m(t)$	$\theta^m(t)$
1	Constante	Linear	Constante
2	Linear	Linear	Constante
3	Linear	Constante	Constante
4	Linear	Linear	Linear

Tabela 6.1. Combinação das funções de interpolação

O contorno foi discretizado em 24 elementos constantes e lineares como mostrado na figura 6.2

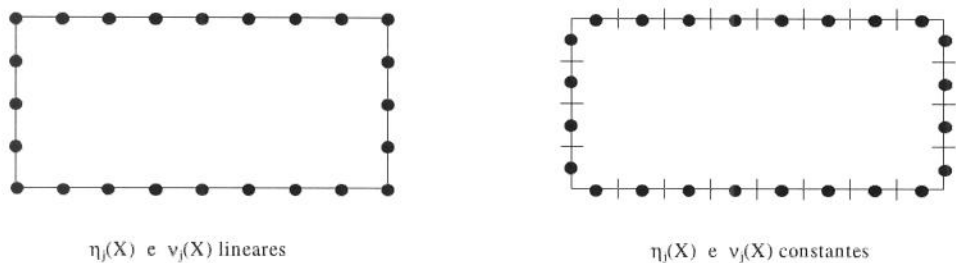


figura 6. 2. Discretização do contorno para barra unidimensional

Para o caso dos elementos lineares não se utilizou aqui o conceito de nó duplo. Tal conceito é necessário quando se tem como incógnitas dois fluxos diferentes num mesmo nó (caso dos cantos, pois estes definem duas normais). Os exemplos analisados não tornaram necessária a aplicação do nó duplo. Entretanto, de Mesquita e Daros [32] fornecem um estudo detalhado do tratamento de tal conceito.

A literatura disponível sobre resultados numéricos [3],[8] indica que as combinações 1 e 2 são as mais apropriadas para este exemplo. Tal indicação baseia-se na afirmação de que a combinação 4 (mais especificamente a interpolação linear de q no tempo) é ineficiente para a modelagem de q para o caso de um salto abrupto (e.g. condição de contorno do fluxo q dada como um degrau). Já a interpolação temporal 3 foi utilizada para o caso correspondente elastodinâmico [6], obtendo-se piores resultados em relação à interpolação temporal, presentes em 1 e 2.

VI.1.1 - Combinação 1 X Combinação 2

As combinações 1 e 2 foram usadas com $\beta = 0.6$ fornecendo bons resultados para o deslocamento u , figuras 6.3 ,6.4, 6.5 e 6.6. Por outro lado, as derivadas normais dos deslocamentos q , mostradas nas figuras 6.7 e 6.8, são muito mais sensíveis ao grau das funções de interpolação (e.g. no espaço), como esperado.

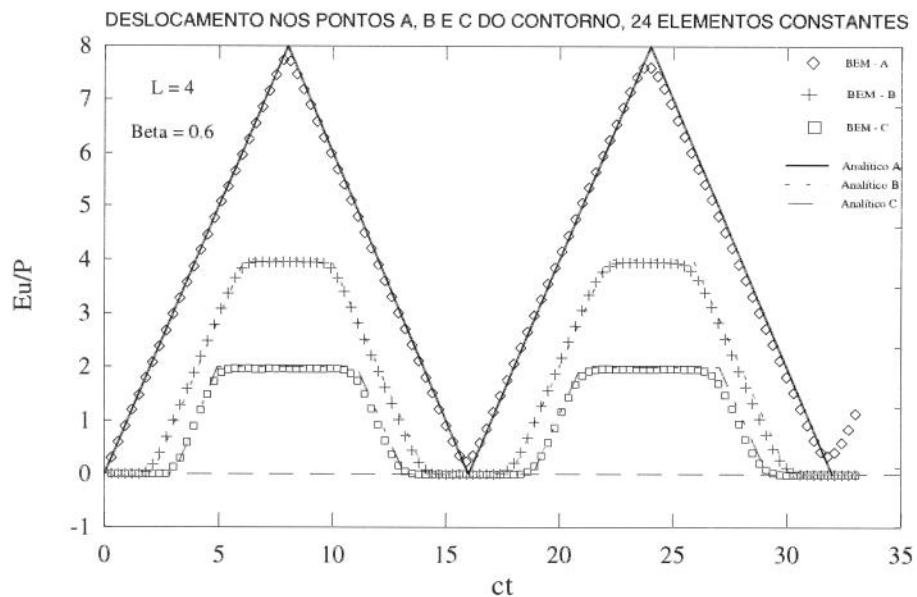


figura 6. 3. Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 1*).

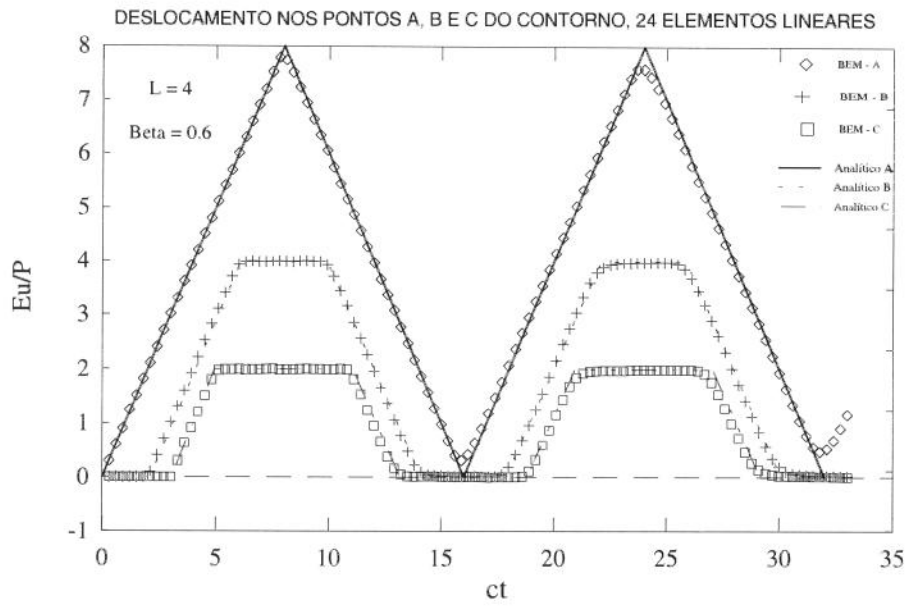


figura 6. 4. Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação 2)

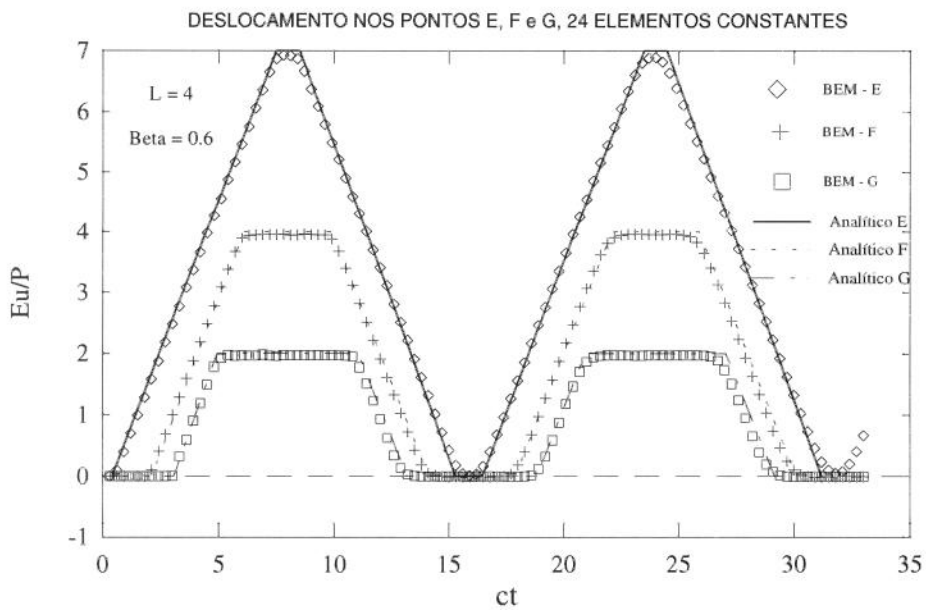


figura 6. 5. Deslocamentos nos pontos internos E,F e G para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação 1)

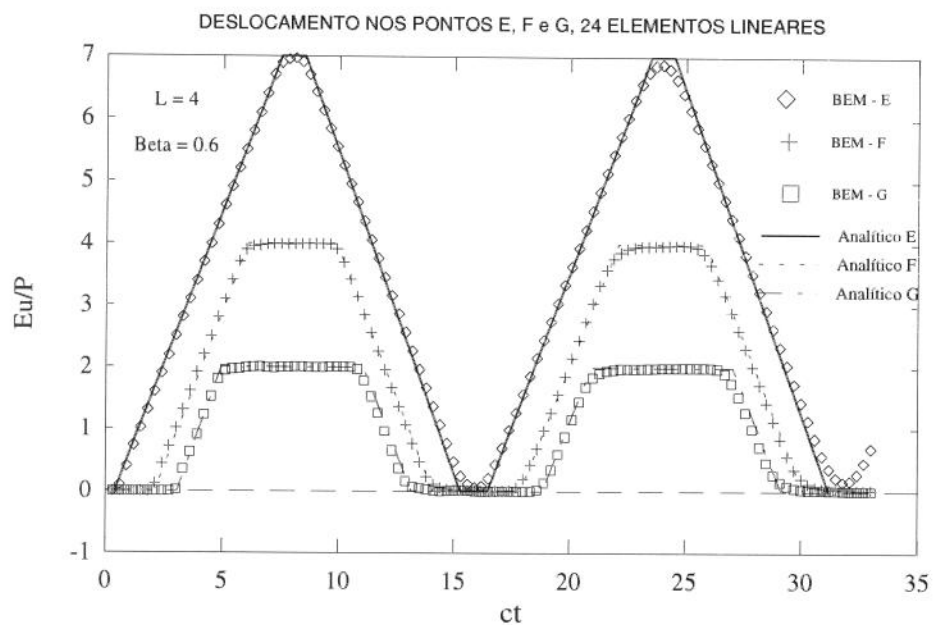


figura 6. 6. Deslocamentos nos pontos internos E,F e G para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

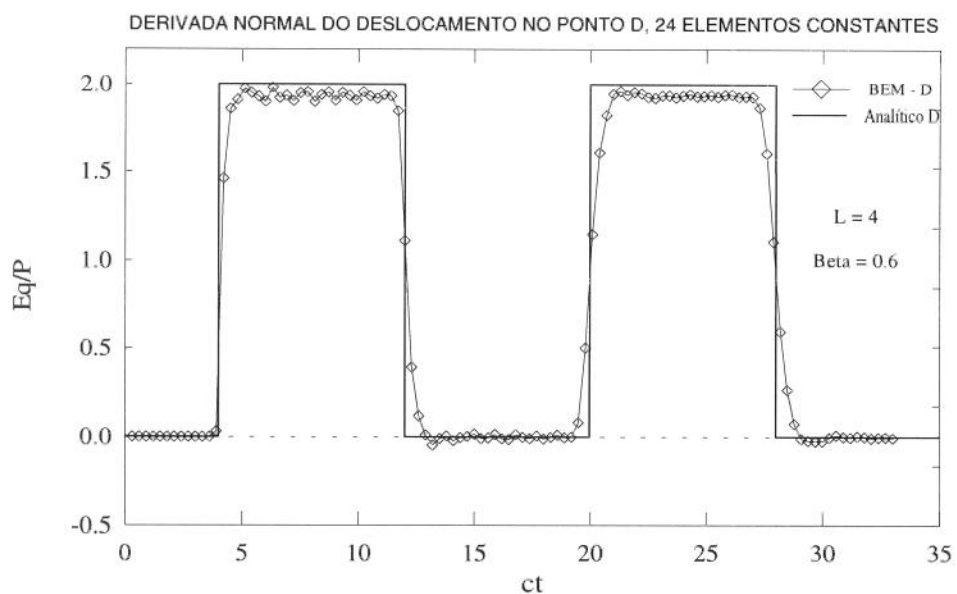


figura 6.7. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 1*)

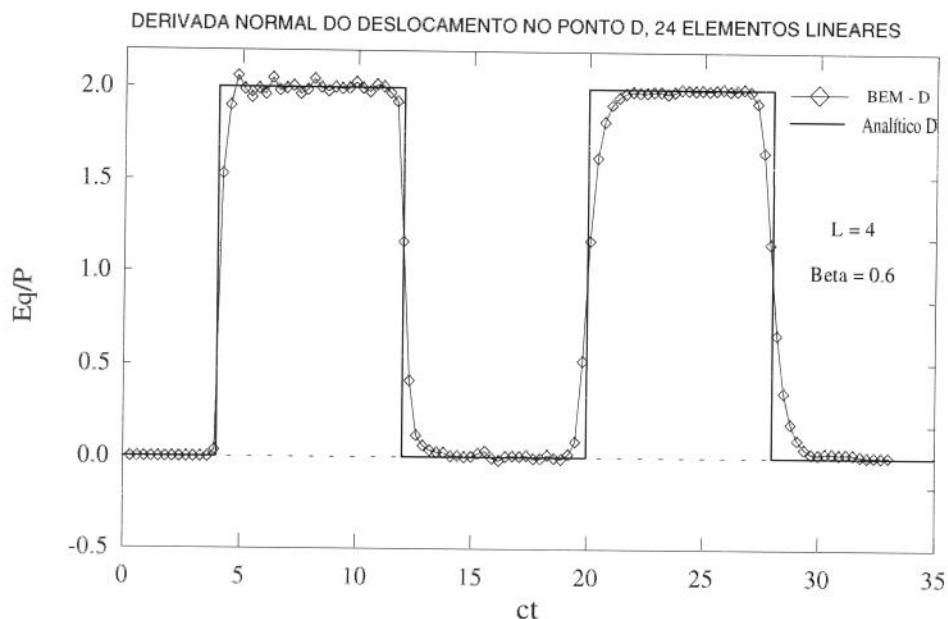


figura 6.8. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

Os gráficos anteriores comprovam os melhores resultados fornecidos pela combinação 2. Vê-se pelas figuras 6.3 a 6.6 que, apesar do pequeno ruído presente em 6.6, o MEC e a solução analítica apresentam boa concordância.

Deve-se tomar cuidado na escolha de β a fim de se evitar ruído numérico, o qual apesar de não ser crítico para os deslocamentos, pode ser excessivo para as derivadas (forças de superfície) [5]. A fim de se estudar o efeito do parâmetro variável β no nível de ruído 3 outros valores de β são investigados : 0.4, 0.5 e 0.8. Os resultados para q no ponto D são plotados nas figuras 6.9-6.11. Percebe-se um nível excessivo de ruído para $\beta < 0.6$. O valor $\beta = 0.6$ foi considerado o ótimo para este problema.

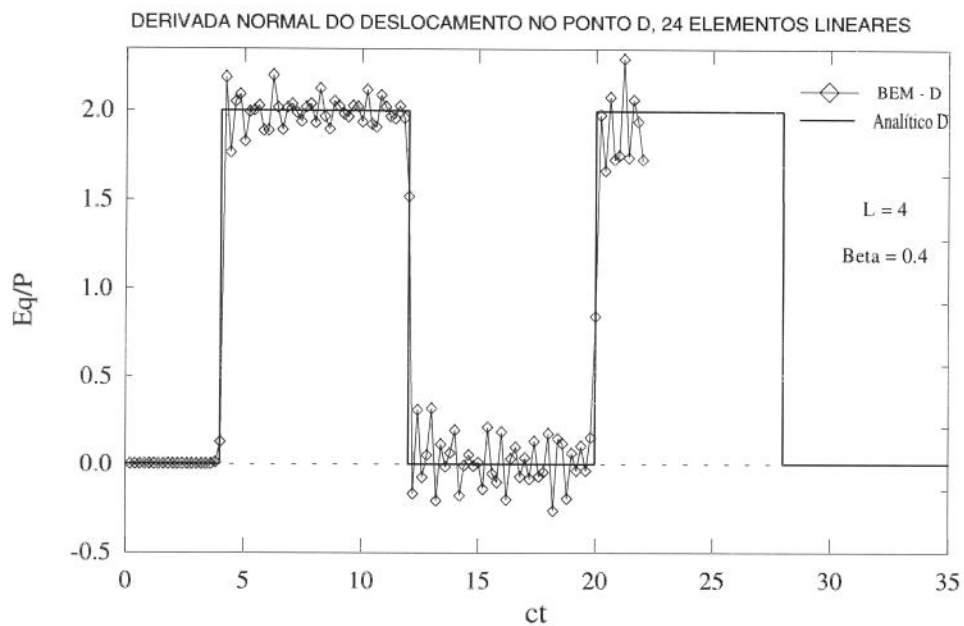


figura 6.9. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

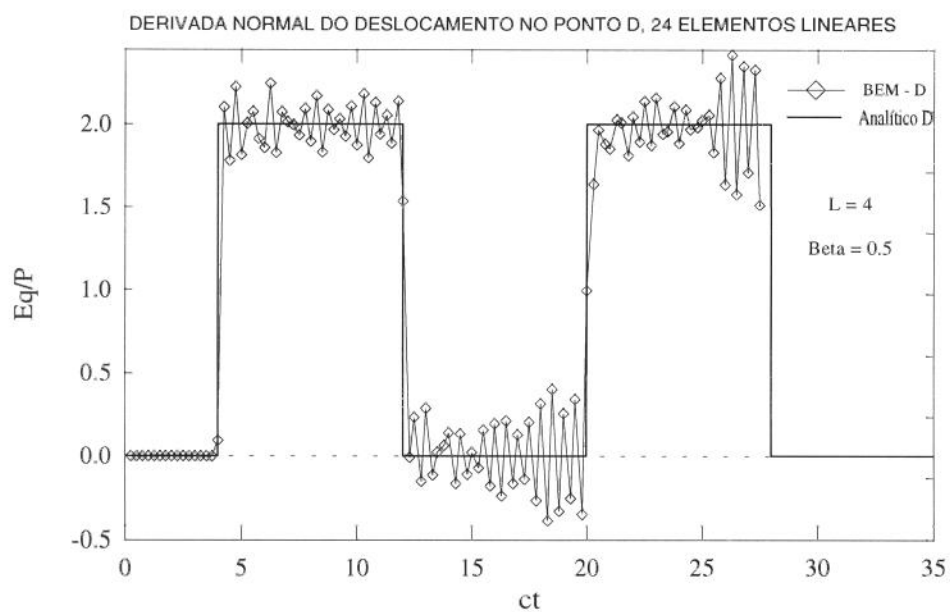


figura 6.10. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

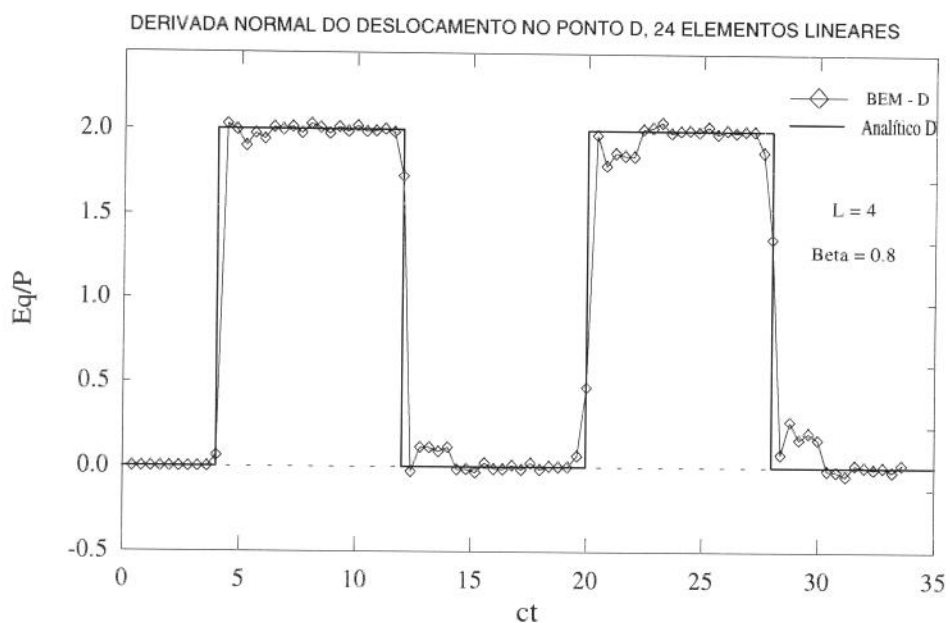


figura 6.11. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

VI.1.2 - Análise de erros das combinações 1 e 2

Os gráficos a seguir permitem uma comparação do nível de erro obtido na utilização das combinações 1 ou 2 para o deslocamento no ponto A e a derivada no ponto D. Como parâmetro de erro utilizou-se um erro relativo, normalizado com o máximo valor teórico de cada curva.

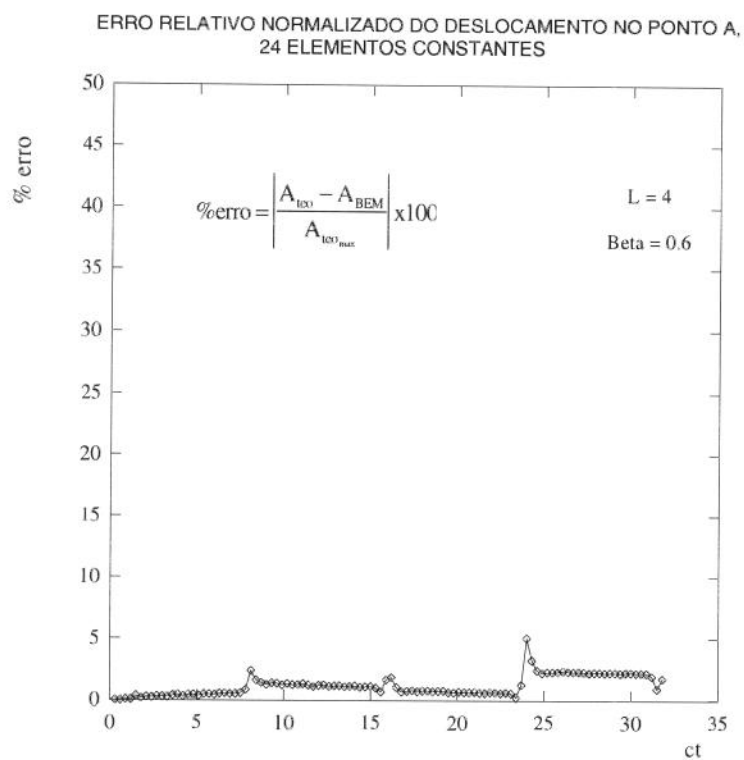


figura 6.12. Erro porcentual do deslocamento em A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação 1)

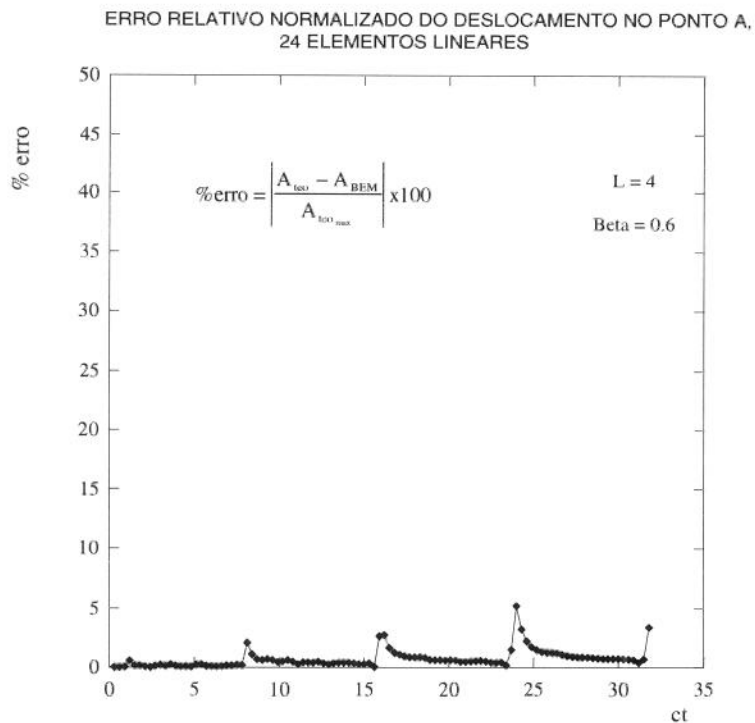
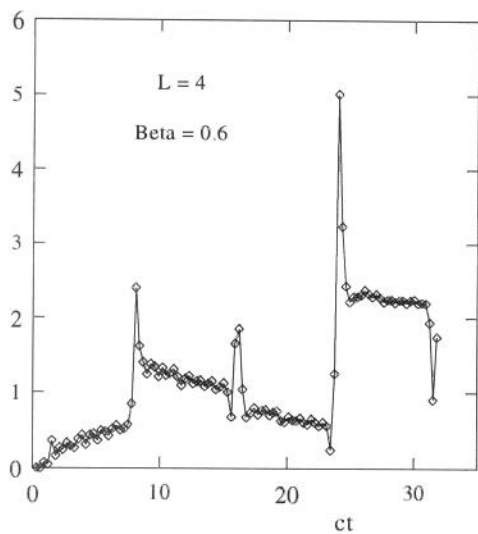


figura 6.13. Erro porcentual do deslocamento em A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação 2)

ERRO RELATIVO NORMALIZADO DO DESLOCAMENTO NO PONTO A,
24 ELEMENTOS CONSTANTES



ERRO RELATIVO NORMALIZADO DO DESLOCAMENTO NO PONTO A,
24 ELEMENTOS LINEARES

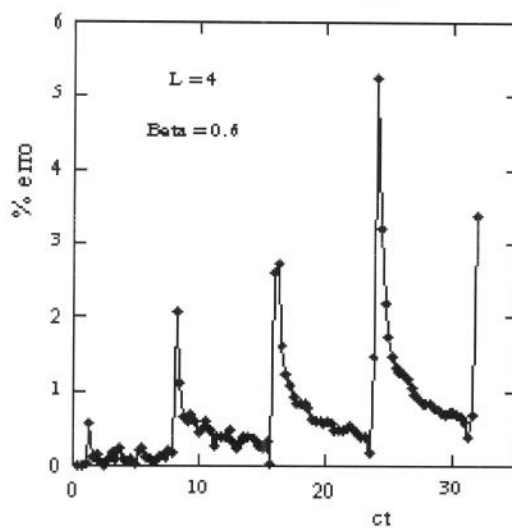


figura 6.14. “Zoom” do Erro porcentual do deslocamento em A

ERRO RELATIVO NORMALIZADO DA DERIVADA DO DESLOCAMENTO
NO PONTO D, 24 ELEMENTOS CONSTANTES

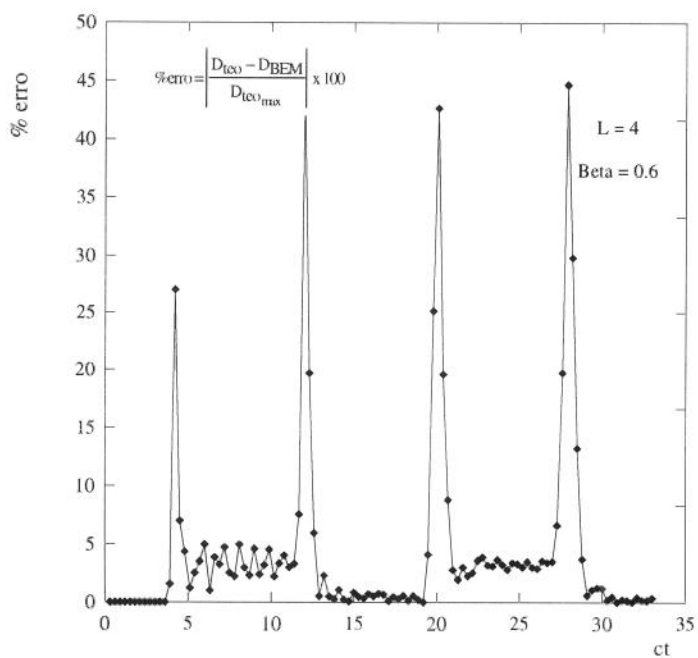


figura 6.15. Erro porcentual da derivada do deslocamento em D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação I)

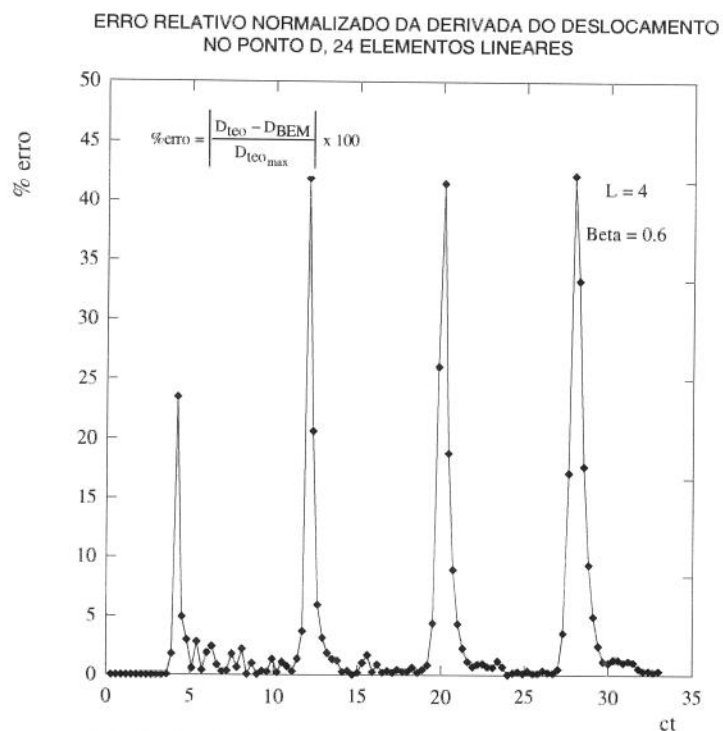


figura 6.16. Erro porcentual da derivada do deslocamento em D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

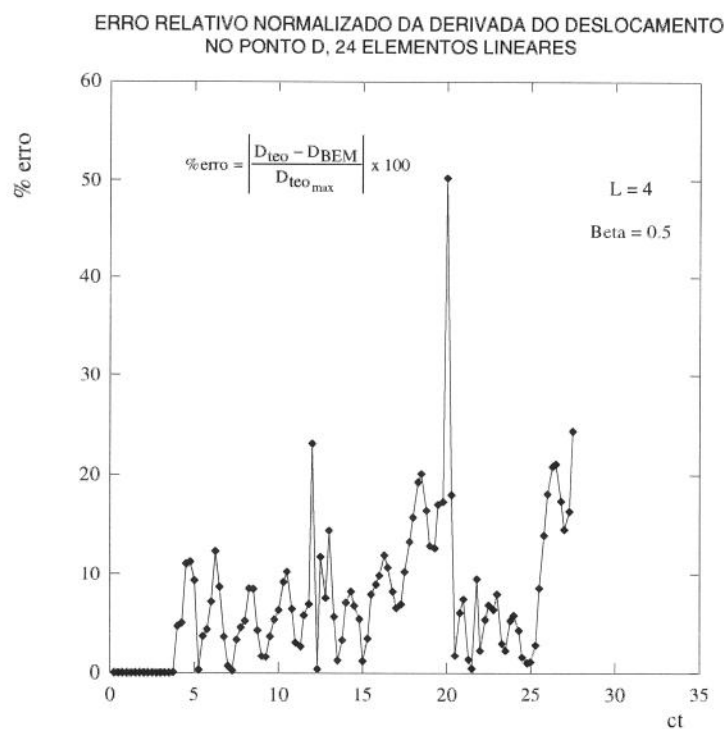


figura 6.17. Erro porcentual da derivada do deslocamento em D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

Como pode-se notar através das figuras 6.12, 6.13, 6.15 e 6.16, os erros relativos percentuais dos deslocamentos são bem menores comparados aos erros das derivadas. As últimas, como era de se esperar, apresentam um alto valor de erro nos saltos descontínuos. De maneira geral, o erro com a combinação 2 é menor ao da combinação 1, especialmente no caso da derivada (fora das regiões dos saltos descontínuos). A figura 6.17 revela, ainda, a alta sensibilidade da derivada do deslocamento em relação à escolha do parâmetro β .

VI.1.3 - Combinações 3 e 4

Os gráficos a seguir analisam o mesmo exemplo para as duas últimas combinações.

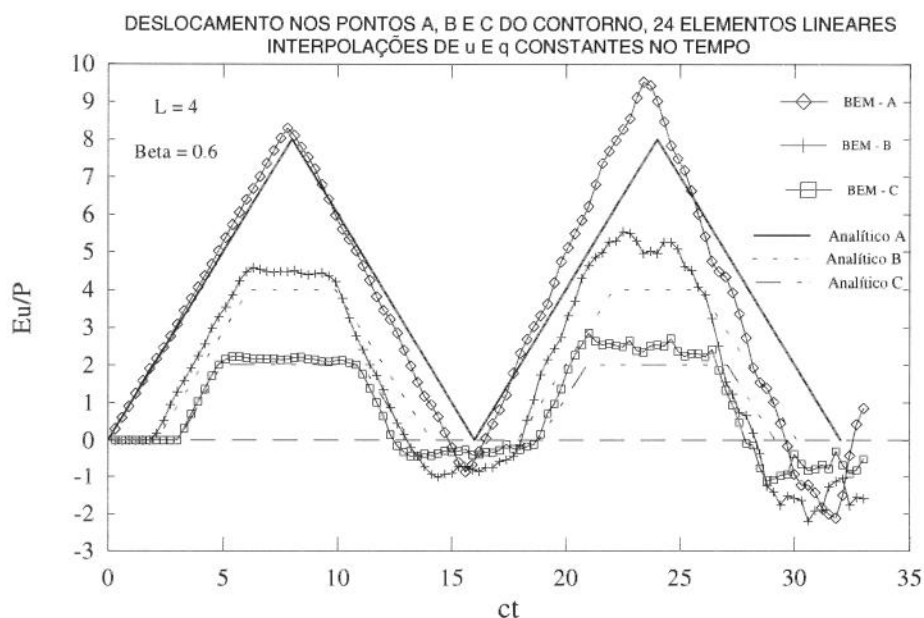


figura 6. 18. Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside.(Combinação 3)

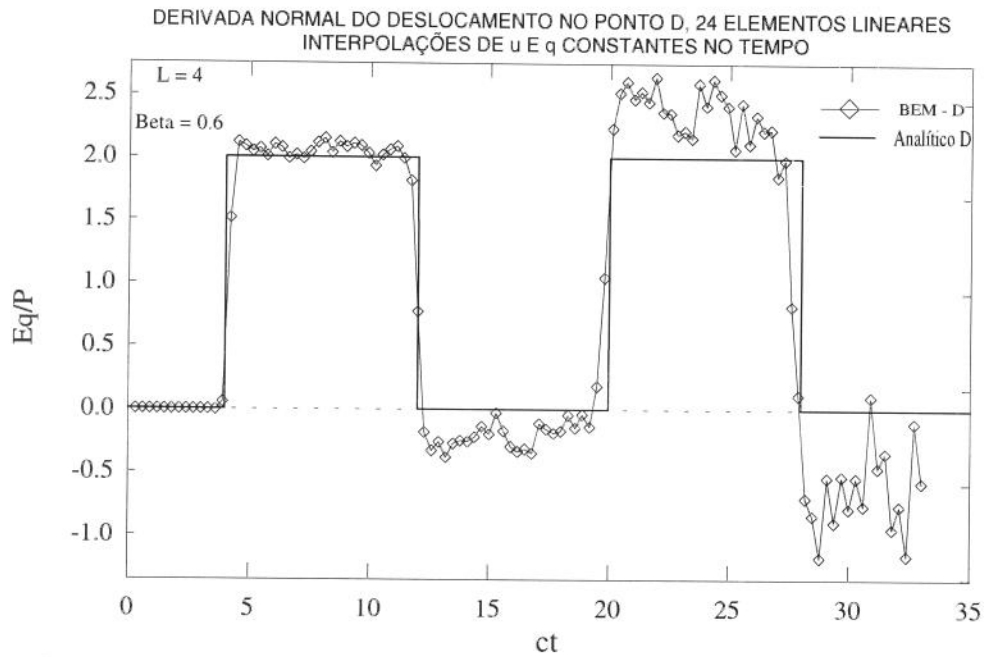


figura 6.19. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação 3)

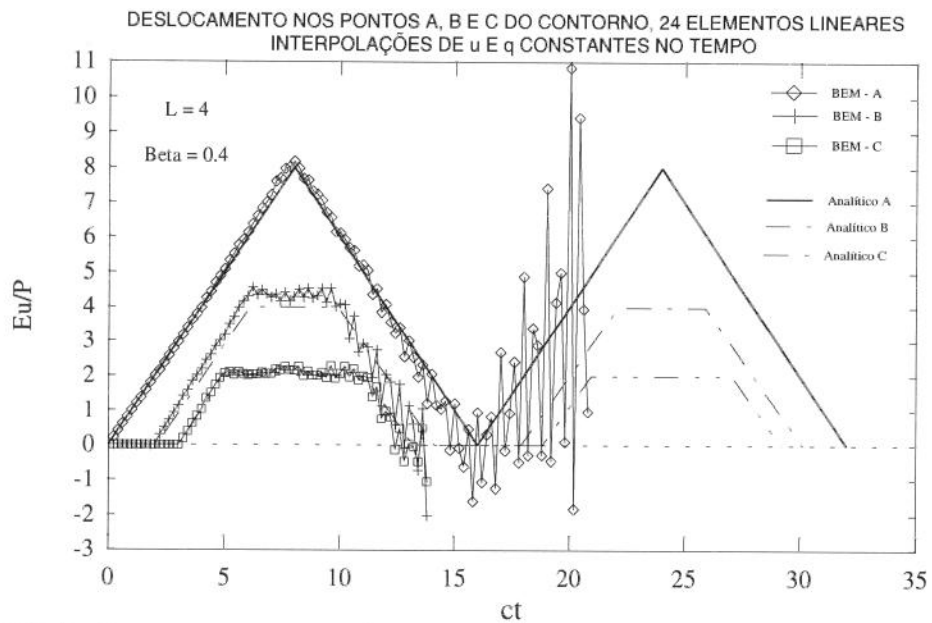


figura 6. 20. Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside.(Combinação 3)

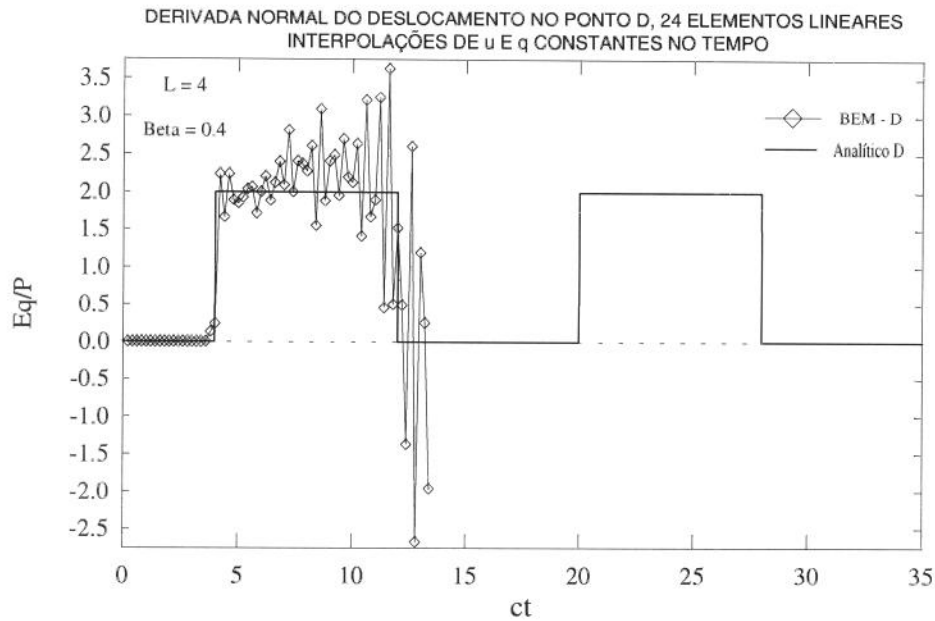


figura 6.21. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 3*)

As figuras 6.18 a 6.21 revelam a imprecisão da combinação 3 em relação aos resultados obtidos com as combinações anteriores. Mesmo tentando-se um refinamento no passo de tempo (através de β menor), para a interpolação constante de u no tempo aproximar-se da linear, o ruído atinge altos níveis já no primeiro ciclo.

Passando-se agora ao estudo da última combinação com as seguintes figuras :

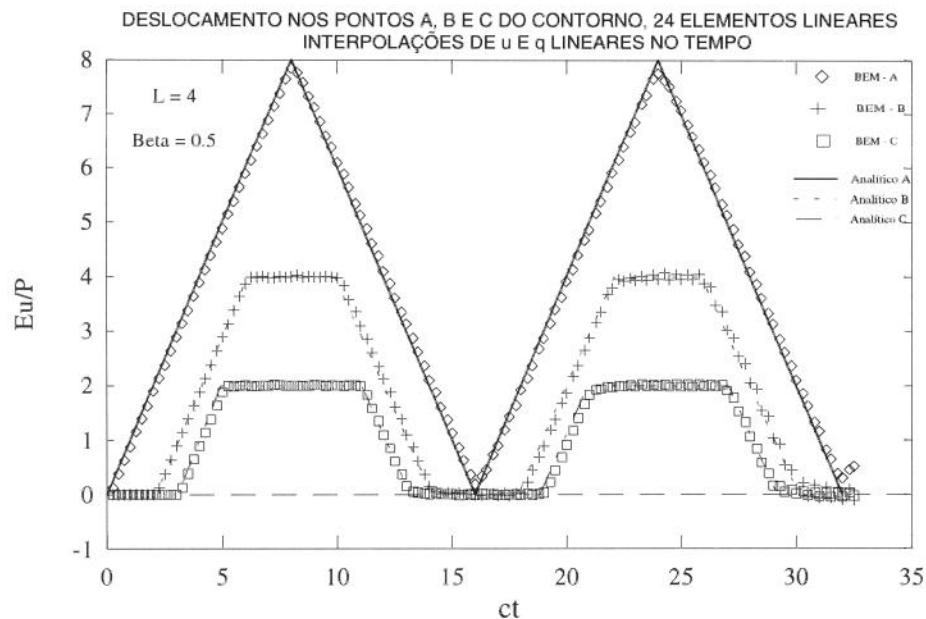


figura 6. 22. Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside.(*Combinação 4*)

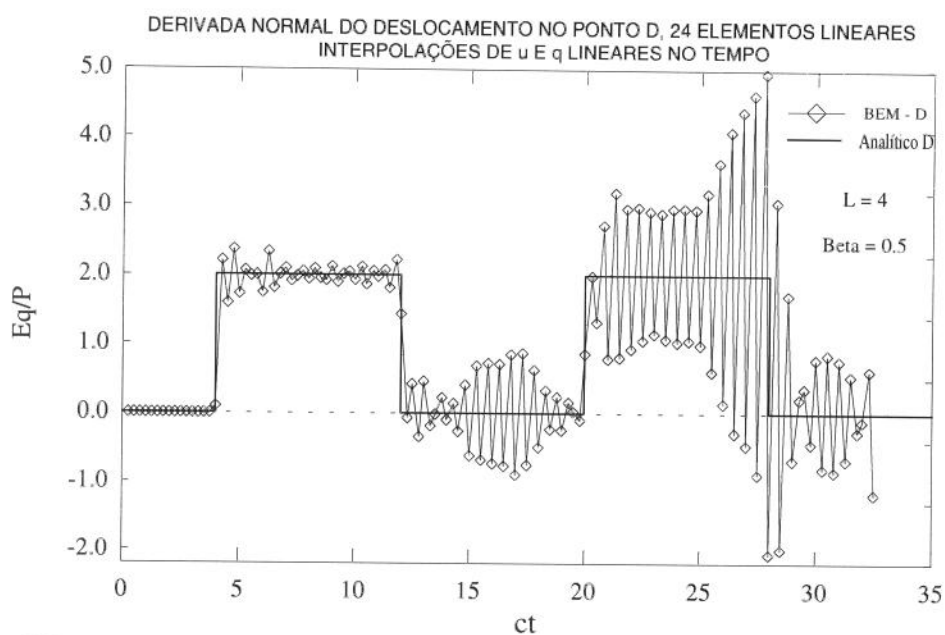


figura 6.23. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação 4)

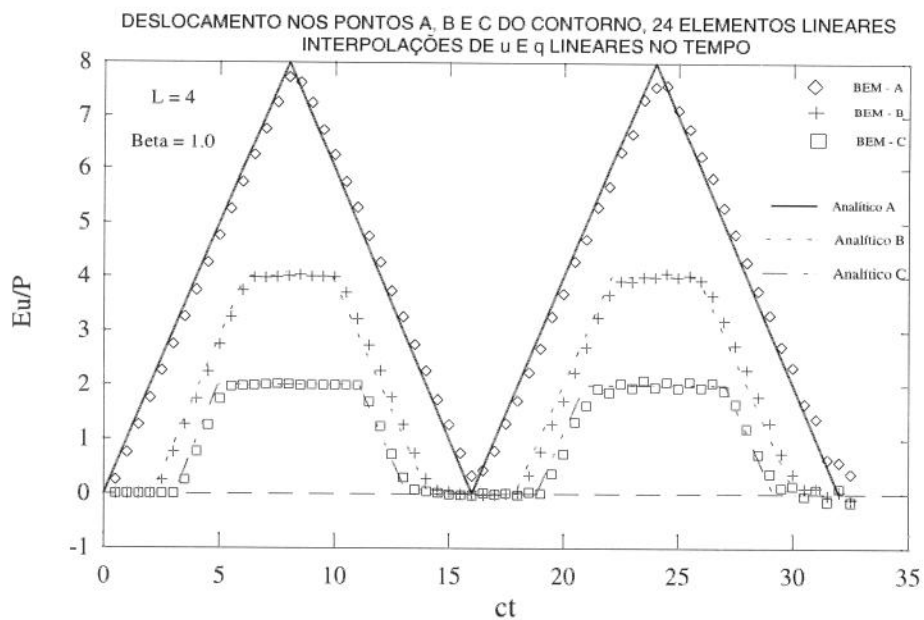


figura 6. 24. Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside.(Combinação 4)

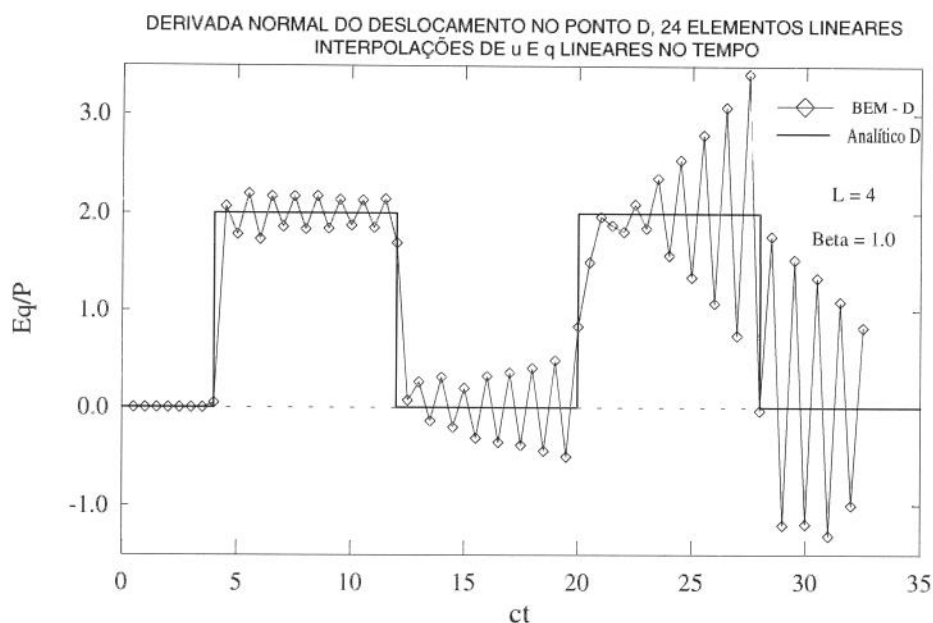


figura 6.25. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 4*)

Percebe-se através das figuras 6.22 a 6.25 que para o exemplo 1 os deslocamentos são satisfatoriamente aproximados enquanto que as derivadas apresentam um alto nível de ruído. A interpolação linear de q não é adequada para carregamentos abruptos, e.g. a força tipo Heaviside. Tal interpolação, forçando a continuidade de q no tempo, não consegue reproduzir os saltos abruptos das derivadas. Como indicam Mansur [5] e Banerjee [8] a combinação 4 produz melhores resultados quando substitui-se o degrau (Heaviside) por uma rampa suave e por outros tipos de excitação.

VI.1.4 - Estudo da malha

O parâmetro adimensional β relaciona o tamanho do elemento que compõe a malha com o passo de tempo. A fim de se manter β constante, o refinamento da malha implica um refinamento do passo de tempo. Estuda-se agora a consequência deste refinamento nos resultados até agora obtidos.

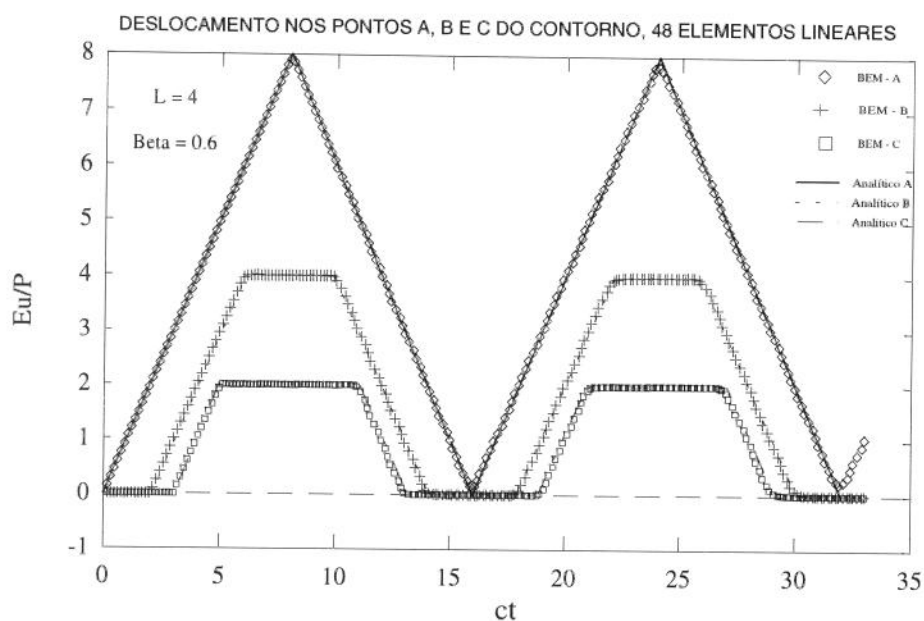


figura 6. 26. Deslocamentos nos pontos de contorno A,B e C para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside.(Combinação 2)

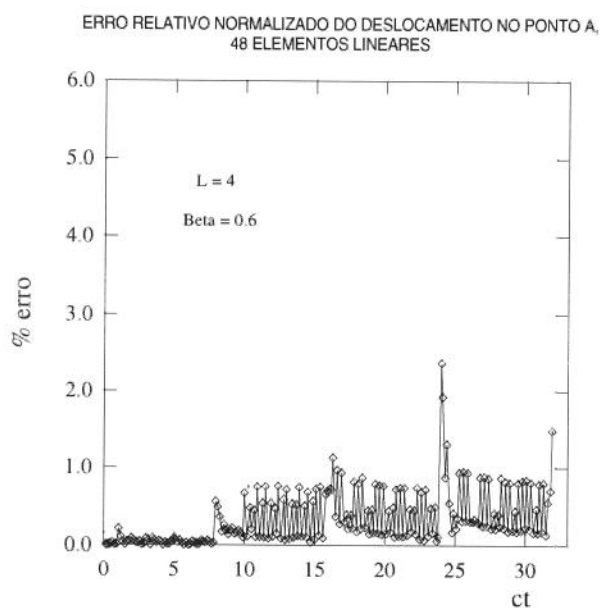


figura 6.27. Erro porcentual do deslocamento em A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (Combinação 2)

Comparando-se a segunda parte da figura 6.14 e a figura 6.27 percebe-se uma redução significativa no nível de erro. Resultado este que indica a convergência para a solução analítica ao refinar-se a malha e o passo de tempo.

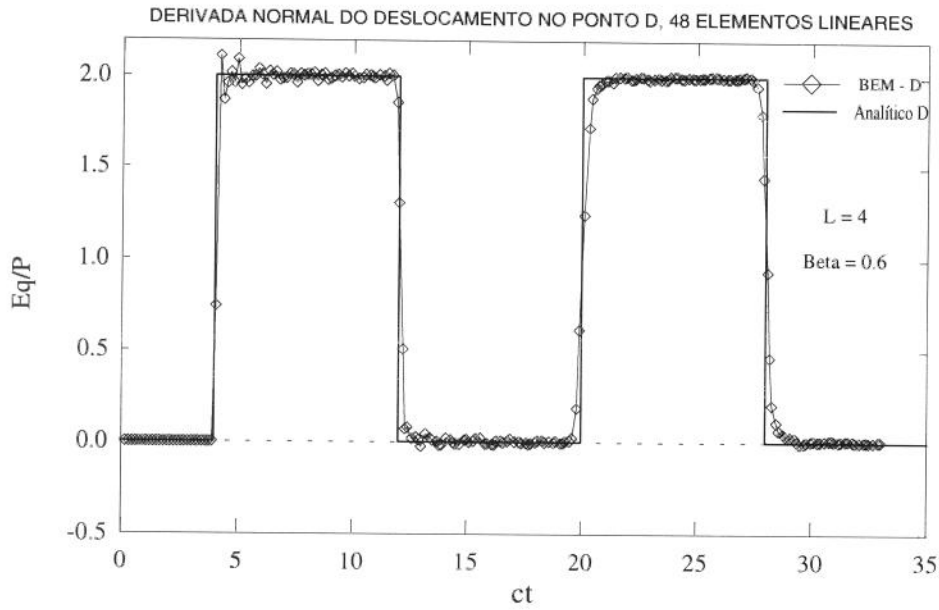


figura 6.28. Derivada normal do deslocamento no ponto de contorno D para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. (*Combinação 2*)

As três figuras anteriores demonstram a boa aproximação obtida com o refinamento da malha e do tempo, respeitando-se o valor $\beta=0.6$. Realizou-se um refinamento máximo, neste exemplo 1, de até 48 elementos lineares. Os resultados com $\beta=0.6$ mostraram-se estáveis e sempre convergentes com a solução analítica.

Um estudo detalhado do parâmetro β ótimo para as diversas malhas possíveis (e.g. com elementos de tamanhos diferentes) não foi realizado neste trabalho. Entretanto, Domínguez [6] apresenta estudos do exemplo aqui tratado para o caso da formulação elastodinâmica. Nestes estudos encontram-se diversas disposições de malhas e os respectivos parâmetros β utilizados em cada caso.

VI.1.5 - Derivada do deslocamento para pontos internos

Neste trabalho não foi desenvolvida a expressão para a derivada do deslocamento em pontos internos. Contudo, como demonstrar-se-á a seguir, a derivada numérica apresenta bons resultados (comparáveis àqueles obtidos por Mansur [24] através do conceito da parte finita).

O procedimento é bastante simples no caso da barra unidimensional, consistindo em aproximar-se $\partial u / \partial x$ por $\Delta u / \Delta x$. Na figura abaixo utilizaram-se dois pontos equidistantes do ponto central da barra F . Com Δx igual a distância entre ambos.

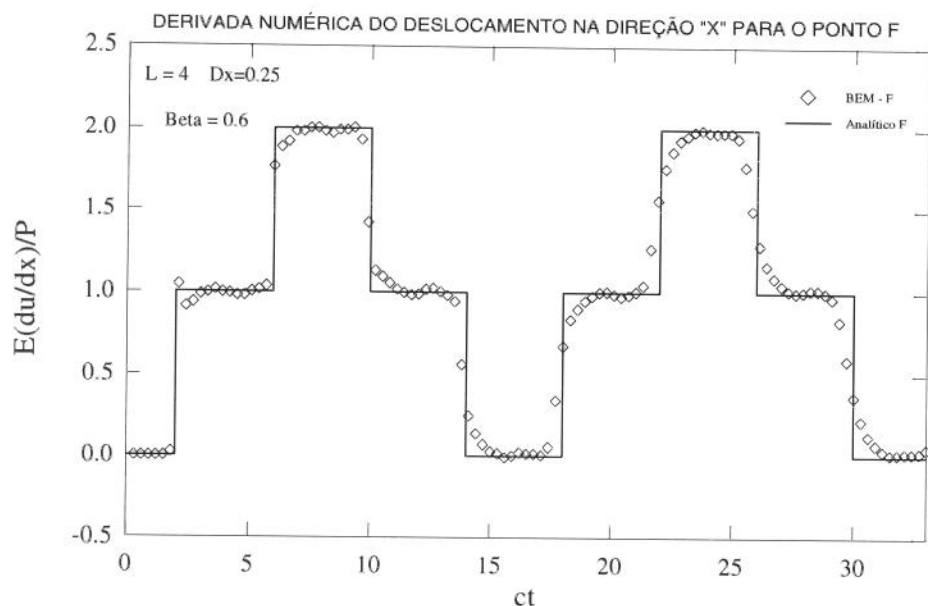


figura 6.29. Derivada espacial do deslocamento no ponto F para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside, 24 elementos lineares.(Combinação 2)

VI.1.6 - Precisão da solução numérica para tempos longos

Neste ítem procura-se investigar a precisão da solução obtida pelo BEM, com a combinação 2, para um elevado número de passos de tempo.

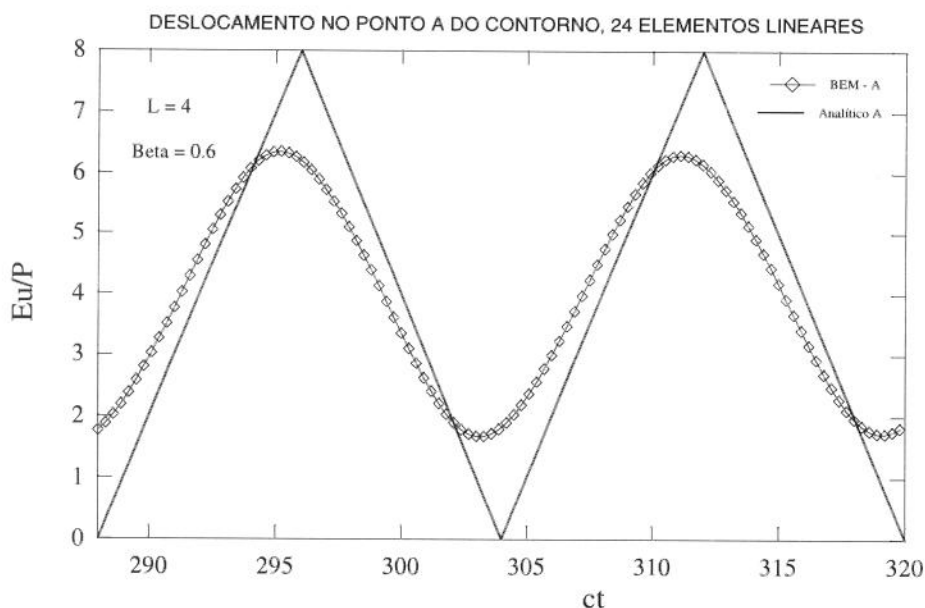


figura 6.30. Deslocamentos nos ponto de contorno A para a barra unidimensional submetida a uma força tipo Heaviside. Tempos longos (Combinação 2)

Como pode-se verificar, através da figura 6.30, a combinação 2 distancia-se da solução analítica à medida que se aumenta o número de passos de tempo. Segundo Domínguez [6], o amortecimento numérico deve-se à má performance dos kernels Q^{nm} , representados no capítulo 3 pelas equações (3.41) a (3.43). Tais kernels apresentam erros numéricos para um grande número de passos de tempo. De uma forma ou de outra qualquer método numérico deteriora à medida que se marcha no tempo. Loeffler e Mansur [36] fornecem uma interessante discussão para este exemplo usando o método da reciprocidade dual. Em tal trabalho utilizam-se esquemas de integração no tempo,

clássicos para o MEF. Esquemas como o de Houbolt ou Newmark também resultam em amortecimento numérico. O esquema de Houbolt, por exemplo, apresenta um amortecimento numérico bem maior ao obtido pela solução fundamental dependente do tempo, aqui implementada.

VI.2 - Exemplo 2

O segundo exemplo é o de uma barra unidimensional com condições prescritas de deslocamento e velocidade inicial. Para este problema a geometria e o contorno são idênticos ao exemplo anterior possuindo, além do primeiro, as condições iniciais sobre o domínio Ω_0 (figura 6.31) descritas por

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \frac{P}{E}\left(\frac{L}{4} - x\right) \\ v_0(x,y) &= \frac{Pc}{E} \end{aligned} \tag{5.2}$$

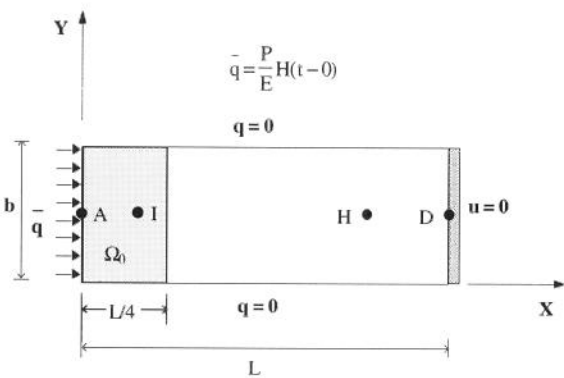


Figura 6.31. Condições de contorno e definições geométricas para a barra com condição inicial prescrita

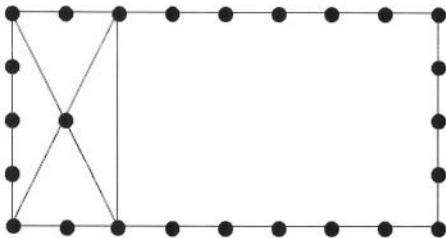


Figura 6.32. Discretização do domínio e contorno para a barra unidimensional com condições iniciais prescritas

A solução anilítica para este problema é a mesma do exemplo anterior mas com o tempo t defasado de $L/4c$ [5], i.e.

$$\begin{aligned} u'(X,t) &= u\left(x, t - \frac{L}{4c}\right) \\ q'(X,t) &= q\left(x, t - \frac{L}{4c}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Onde u' e q' referem-se ao problema estudado no exemplo anterior.

24 elementos lineares foram utilizados para discretizar-se o contorno e Ω_0 foi subdividido em 4 células triangulares como mostrado na figura 6.32. Os passos de tempo foram usados tal que $\beta = 0.6$

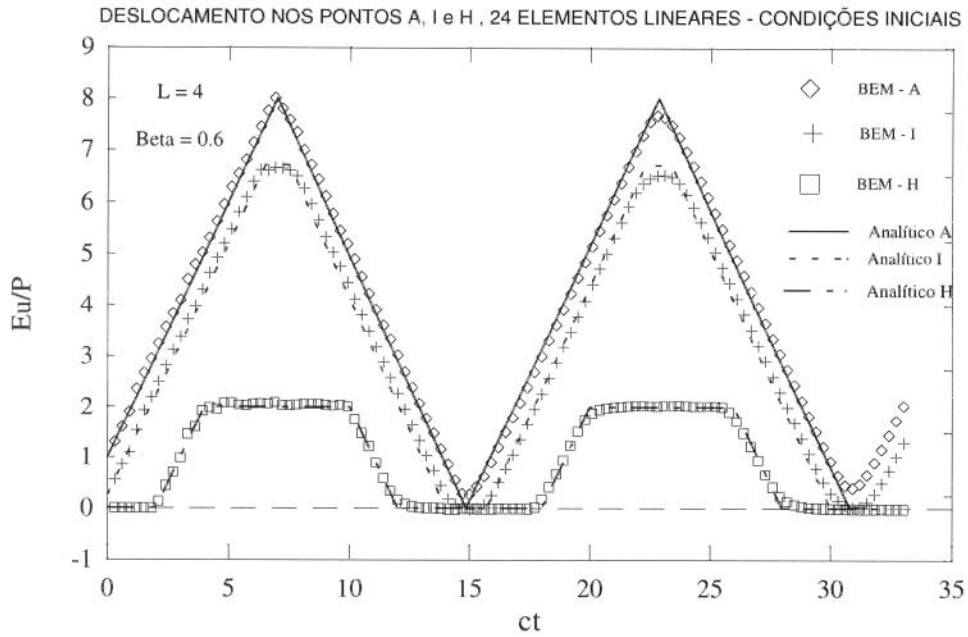


figura 6.33. Deslocamentos no ponto de contorno A e nos pontos internos I($3L/16, b/2$) e H($3L/4, b/2$) para a barra unidimensional com condições iniciais prescritas. (*Combinação 2*)

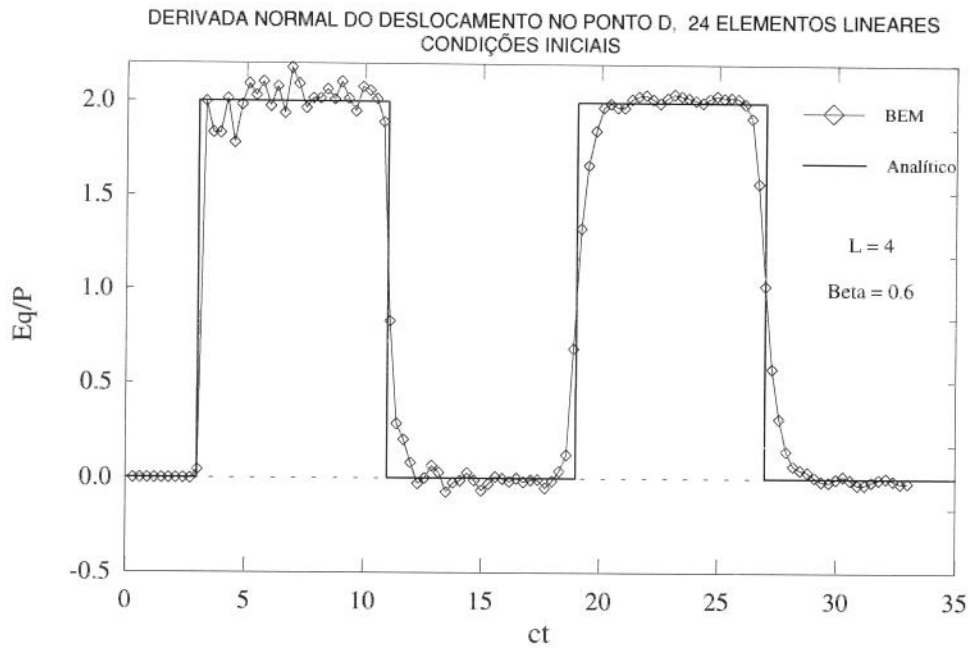


figura 6.34. Derivada normal do deslocamento no ponto D($L, b/2$) para a barra unidimensional com condições iniciais prescritas. (*Combinação 2*)

As figuras 6.33 e 6.34 demonstram a boa aproximação obtida com a combinação 2 e $\beta=0.6$. Os estudos numéricos realizados indicaram que um maior número de células não trouxe melhores resultados para este exemplo.

VI.3 - Exemplo 3

Neste exemplo estuda-se o movimento transversal de uma membrana quadrada com velocidade inicial $v_0 = c$ prescrita sobre o domínio Ω_0 , mostrado na figura 6.35, e deslocamento zero prescrito sobre todo o contorno.

O domínio foi discretizado em 32 elementos e Ω_0 foi dividido em 4 células como mostrado na figura 6.36. Resultados analíticos e obtidos pelo MEC [5] para os deslocamentos no ponto $(L/2, L/2)$ e a derivada normal dos deslocamentos em $(L, L/2)$ foram comparados.

Os valores de u e q para $\beta = 0.2$ são plotados nas figuras 6.37 e 6.38 respectivamente. Aparentemente, ao contrário da barra, $\beta < 0.6$ não introduz ruído nos resultados numéricos.

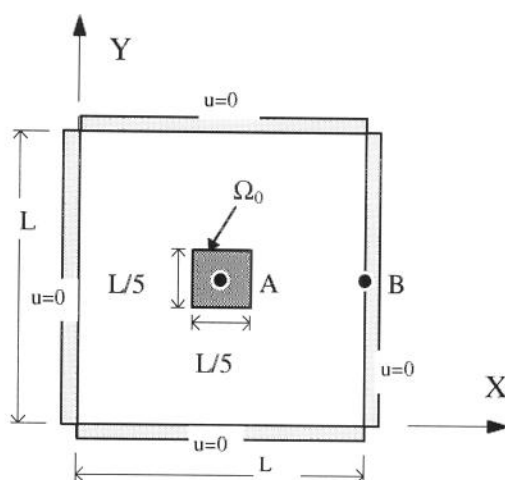


Figura 6.35 Definições geométricas e condições iniciais e de contorno para análise da membrana

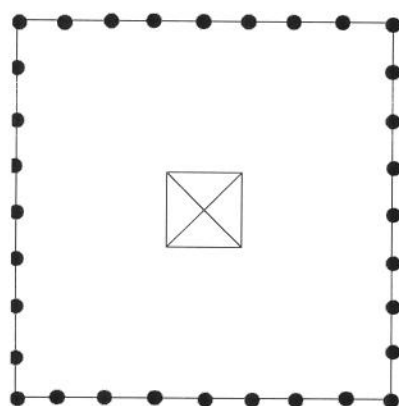


Figura 6.36. Membrana discretizada em 32 elementos lineares e quatro células

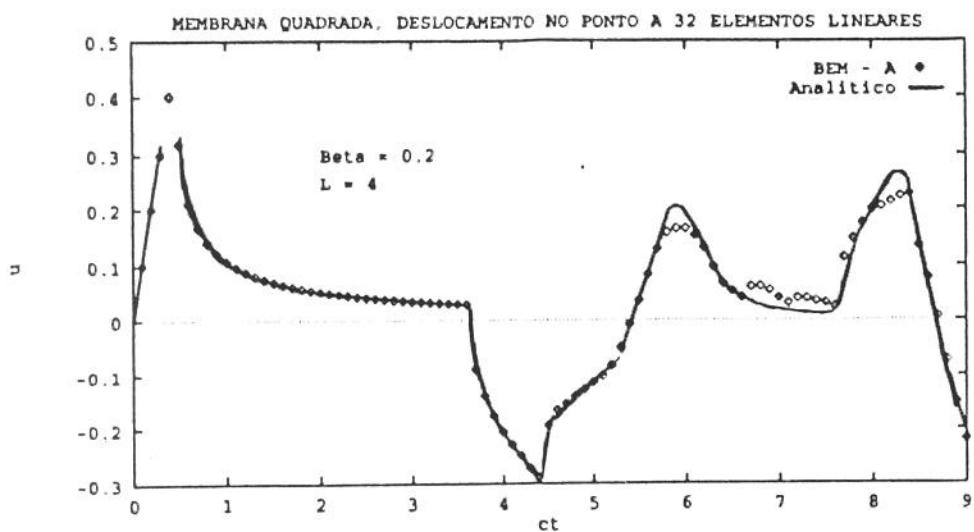


figura 6.37. Deslocamento no ponto A(L/2,L/2). 32 elementos lineares

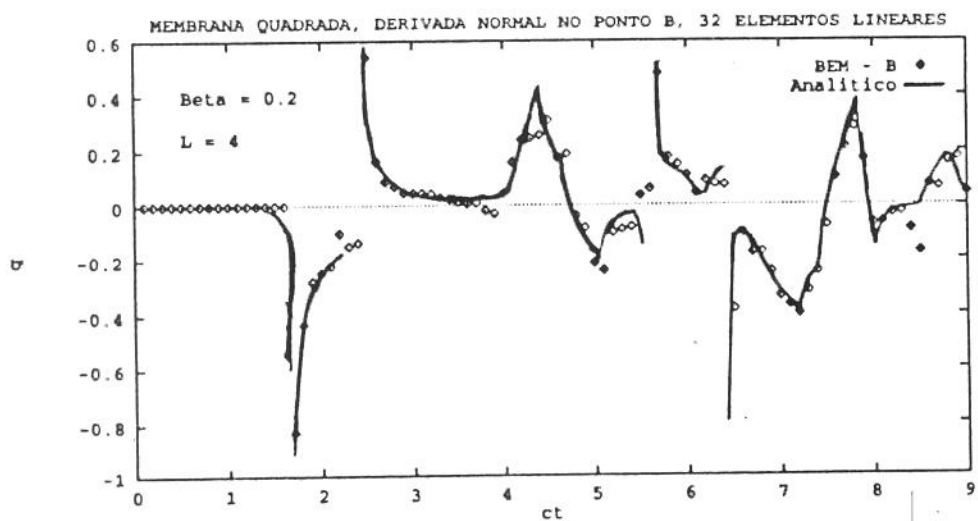
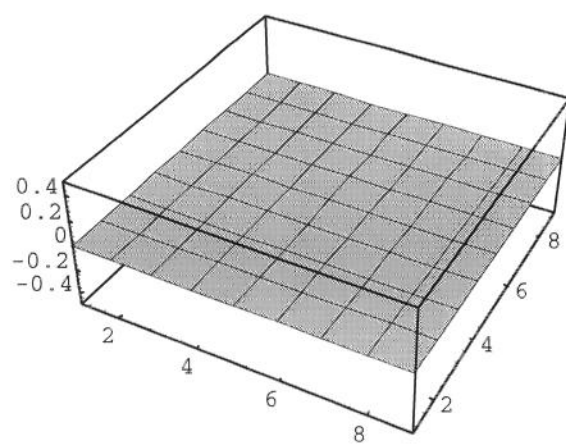
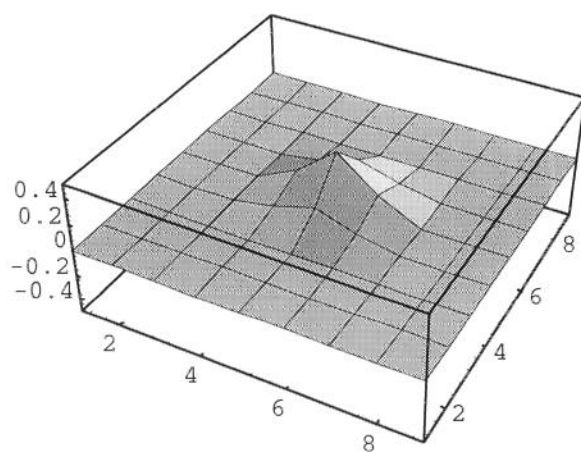


figura 6.38. Derivada normal do deslocamento no ponto B(L,L/2). 32 elementos lineares

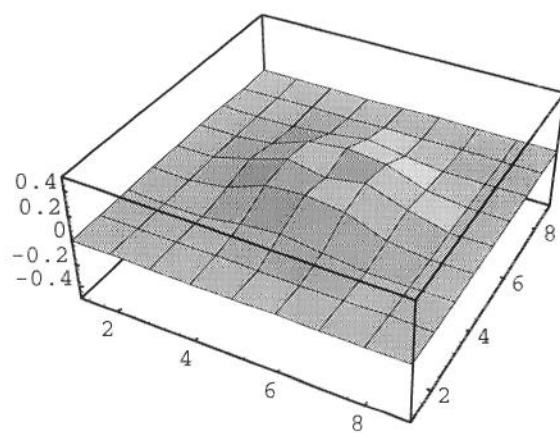
A fim de se obter uma visualização do fenômeno transiente o exemplo 3 foi animado usando-se o software Mathematica®. Para tanto usaram-se os resultados dos 32 nós do contorno mais 49 pontos internos. O passo de tempo foi de 0.1 resultando em $\beta = 0.2$. As figuras a seguir mostram vários instantes do deslocamento se propagando na placa com condição inicial de velocidade prescrita em Ω_0 ($v_0 = 1$). Os pontos de animação foram dispostos dividindo a membrana em 8 X 8 quadrados.



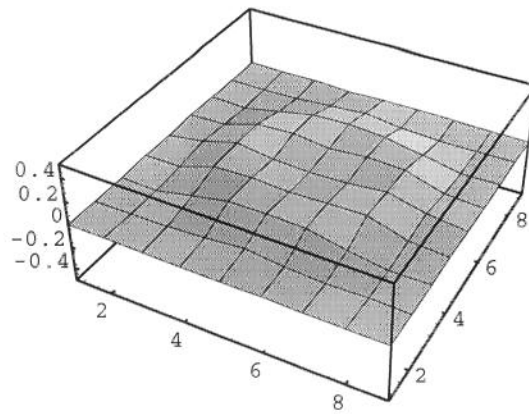
$t=0$



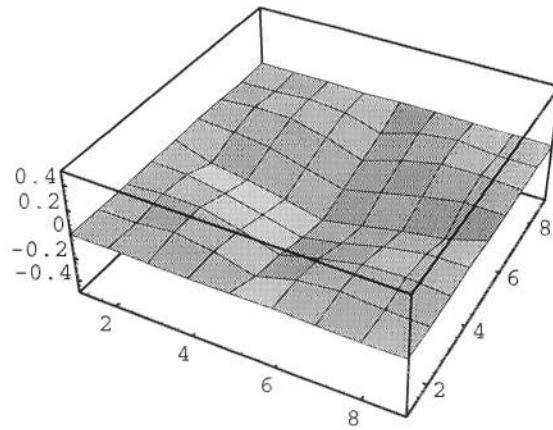
$t=0.4$



$t=0.8$



t=1.2



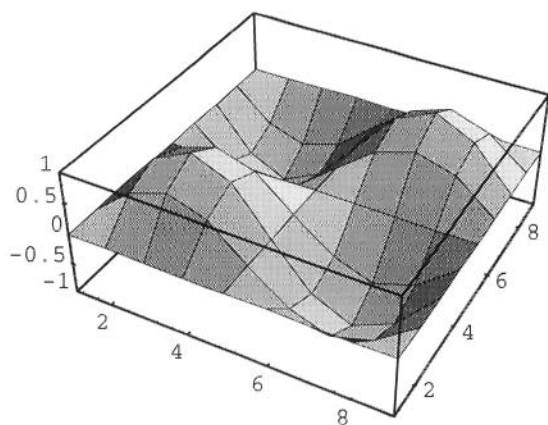
t=4.4

figura 6.39. Animação do exemplo 3

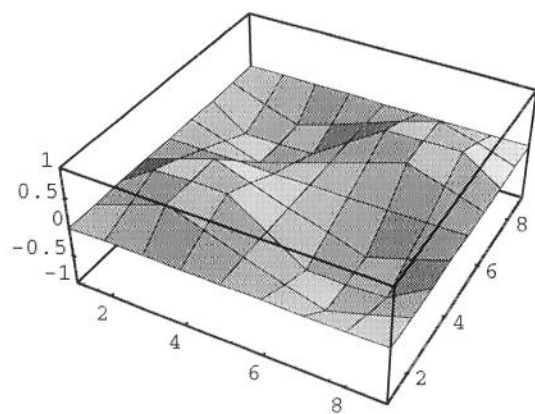
VI.4 - Exemplo 4

Estuda-se o exemplo anterior para o caso da membrana quadrada com condição inicial de deslocamento e contorno fixo. O domínio inteiro é discretizado usando-se 64 células e é dado como condição inicial um dos modos próprio da membrana. Tais modos têm soluções analíticas bem conhecidas, encontradas por exemplo em [33].

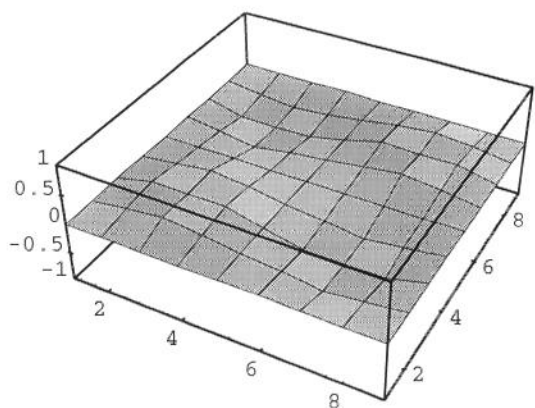
Como esperado a solução transiente reproduz o movimento da membrana oscilando no modo próprio. As figuras a seguir mostram os vários instante da membrana oscilando no modo próprio.



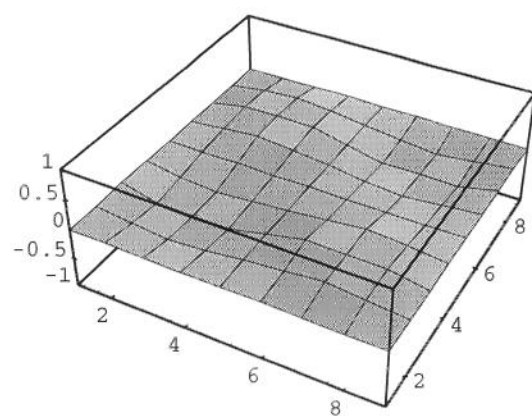
$t = 0$



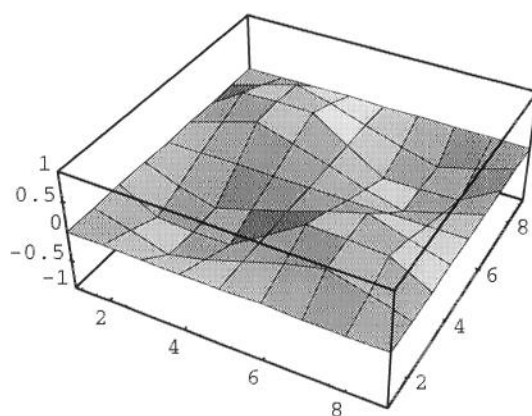
$t = 0.2$



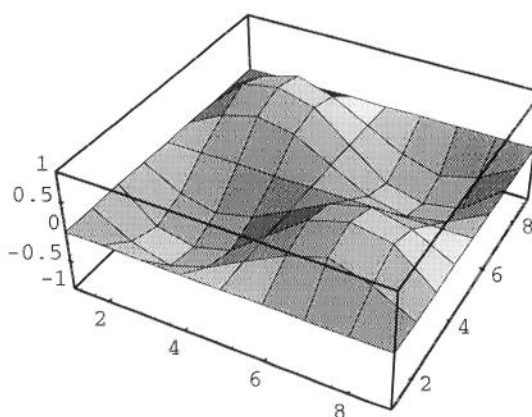
$t = 0.4$



t = 0.6



t = 0.8



t = 1.0

figura 6.40. Animação do modo numérico 2,2. $\beta=0.6$

A fim de se comparar a precisão do modo numérico com o analítico escolheu-se o ponto $(x=1,y=1)$ da placa. Plotou-se a solução analítica e numérica do último para diversos instantes de tempo.

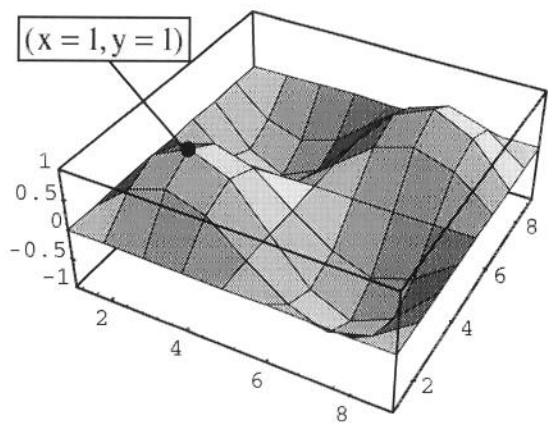


figura 6.41. Ponto $x=1,y=1$ da membrana submetida ao modo próprio 2,2. $t = 0$,

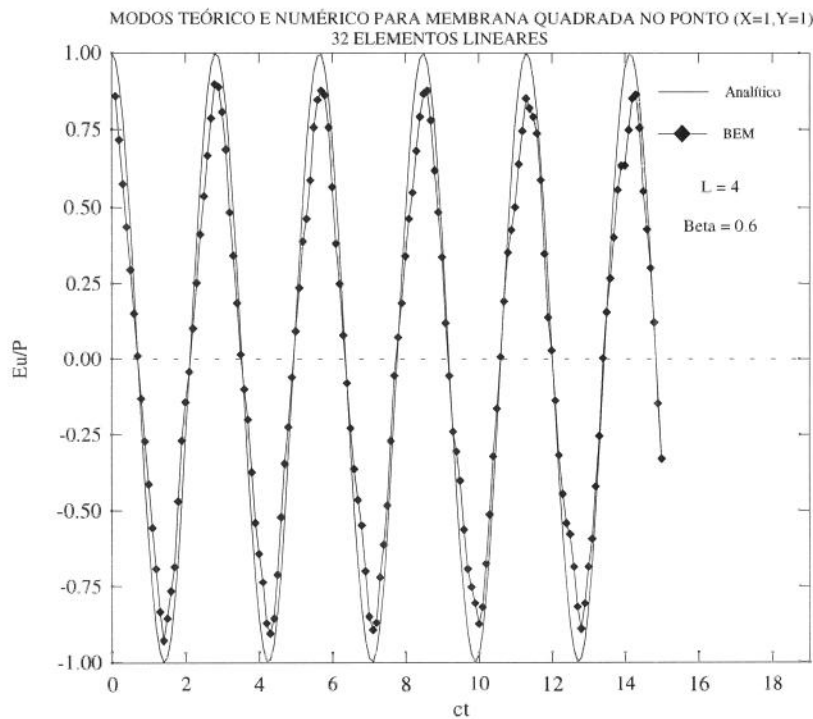


figura 6.42. Modos teórico e numérico para membrana quadrada no ponto $x=1, y=1$

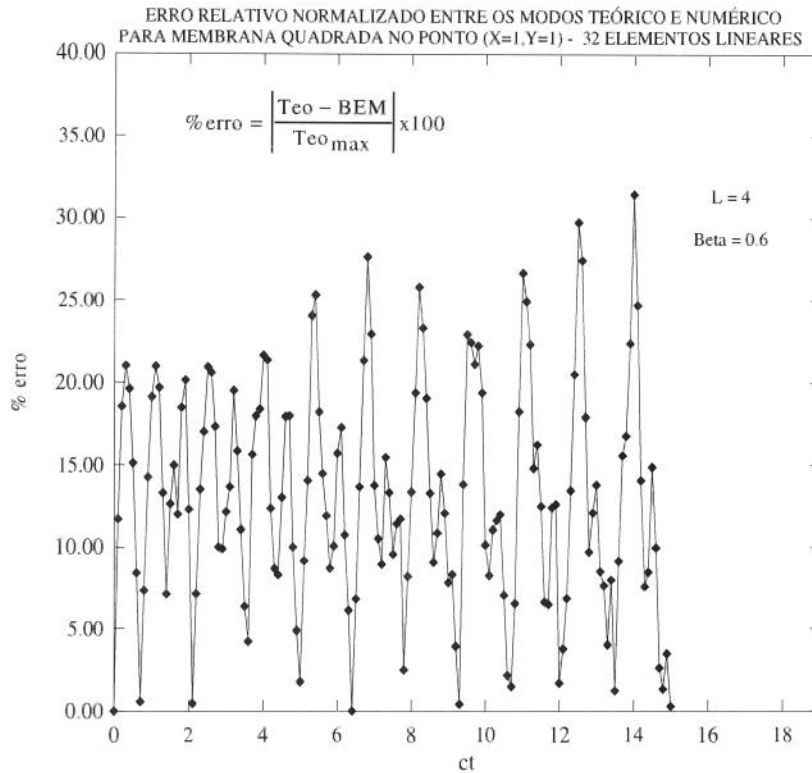


figura 6.43. Erro porcentual entre os modos teórico e numérico para membrana quadrada no ponto $x=1$, $y=1$

Pode-se notar pelas figuras anteriores que a frequência do modo numérico é próxima à frequência natural do modo próprio teórico. O erro nos primeiros 3 ciclos (com a configuração de 64 células) situou-se entre 0 e 25%, subindo com o avanço do número de passos de tempo. Entretanto, o parâmetro utilizado na figura 6.43 não é um estimador realista do nível de erro. Tal afirmação justifica-se uma vez que o erro relativo normalizado não leva em conta a defasagem da solução numérica no tempo. Assim, uma pequena defasagem da curva numérica na figura 6.42, em relação à curva teórica, proporciona um elevado nível de erro. Deve-se portanto, recorrer a um estimador de erros que leve em conta não apenas o erro na amplitude, mas também o comportamento da solução numérica ao longo do tempo.

Conclusões e Sugestões

Fazendo-se um retrospecto dos capítulos anteriores pode-se chegar a algumas conclusões.

A formulação do MEC 2-D para a equação da onda escalar revela-se trabalhosa. Os kernels (ou núcleos) das integrais no tempo exigem um trabalho analítico considerável. Trabalho este que aparece tanto na diversidade de opções (i.e. potencial e sua derivada assumidos constantes e/ou lineares no tempo) como pela manipulação da função Heaviside presente nos núcleos. Outra dificuldade no trabalho em questão refere-se ao kernel gerado pela derivada da solução fundamental. O tratamento deste núcleo hipersingular muitas vezes não é relatado em trabalhos anteriores, sendo entretanto essencial para o avanço na implementação computacional. Como demonstrou-se, as duas alternativas de regularização do núcleo hipersingular levaram a resultados idênticos. Entretanto, o conceito da parte finita como uma distribuição fornece um interessante “insight” do ferramental disponível para o tratamento de singularidades no MEC.

Quanto aos resultados numéricos, o exemplo 1 revela o número de possibilidades da implementação transiente em função das interpolações possíveis no espaço e no tempo. Como pôde-se constatar, a condição de carregamento impulsivo apresentou melhores resultados com a aproximação constante do fluxo e linear do potencial no tempo. Em relação à aproximação no espaço a interpolação linear é a recomendável. Tal interpolação apresenta melhores resultados com um esforço computacional semelhante à interpolação constante. A interpolação quadrática, uma alternativa lógica a ser seguida, não foi realizada neste trabalho. Entretanto, Domínguez [6] apresenta um código do MEC transiente contemplando tal interpolação no espaço.

A integração de domínio, usando-se o esquema adotado por Mansur [5], revela-se simples na conceituação, mas dispendiosa na implementação (especialmente a varredura de células). Uma alternativa seria o desenvolvimento de pontos e pesos (bidimensionais) para uma integração completamente numérica dos núcleos singulares, presentes às integrais de domínio.

O esforço computacional é outra característica da implementação transiente. A metodologia adotada exige um grande dispêndio computacional (em termos de tempo e memória) visto que todos os resultados em passos anteriores são necessários, devendo ser armazenados. A fim de se minorar os esforços computacionais técnicas de truncamento têm sido propostas, e. g. Demirel e Wang [10]. Tais técnicas proporcionam uma substancial redução no esforço computacional, característico da implementação transiente. Outra opção para a redução do esforço computacional, a ser investigada, é a utilização de condições pseudo-iniciais com a solução estática do problema.

Como alternativa à utilização de uma solução fundamental dependente do tempo, outro tratamento tem sido investigado na análise transiente com o MEC, o Método da Reciprocidade Dual. Tal método requer esforços analíticos e computacionais bem menores do que os aqui apresentados. Entretanto, os resultados são apenas razoáveis para o caso de cargas impulsivas [35],[36].

Uma vez consolidados os estudos dos parâmetros que relacionam o tamanho de malha ao passo de tempo, as perspectivas da pesquisa do MEC transiente são animadoras. Tal fato pode ser comprovado em aplicações de alto interesse como por exemplo : o estudo de barreiras sonoras [35] (visando o conforto acústico) e a possibilidade do estudo de problemas não-lineares [5].

Referências

- [1] MORSE, P. M. and FESHBACH, H.
Methods of theoretical physics,
Mcgraw-Hill, London, 1953.
- [2] MANSUR, W. J. and BREBBIA, C. A.
Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation,
Appl. Math. Modelling, Vol. 6, August 1982, pp. 307-311.
- [3] MANSUR, W. J. and BREBBIA, C. A.
Numerical implementation of the boundary element method for two dimensional transient scalar wave propagation problems,
Appl. Math. Modelling, Vol. 6, August 1982, pp. 299-306.
- [4] BREBBIA, C. A.
The boundary element method for engineers,
Pentech Press, London, 1984.
- [5] MANSUR, W. J.
A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method.
Ph. D. Dissertation, University of Southampton, U. K. (1983).
- [6] DOMÍNGUEZ, J.
Boundary Elements in Dynamics,
Computational Mechanics Publications with Elsevier Applied Science, 1993.
- [7] GALLEGO, R. and DOMÍNGUEZ, J.
A two dimensional boundary element code for time domain formulations using quadratic elements. I: potential problems,
Boundary Elements Communications, 1994, Vol. 5, pp. 117-125.
- [8] ISRAIL, A. S. M. and BANERJEE, P. K.
Advanced development of time-domain boundary element method for two dimensional scalar wave equation
Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 29, N. 5, Apr1990, pp. 1003-1020.

- [9] ANTES, H. and von ESTORFF, O.
Ausbreitung transienter akustischer Wellen-Untersuchungen mit einer Zeitschritt-Randelementmethode,
Ingenieur-Archiv, Vol. 59, 1989, pp. 17-31.
- [10] DEMIREL, V. and WANG, S.
Efficient boundary element method for two dimensional transient wave propagation problems
Appl. Math. Modelling, Vol. 11, N. 6, Dec. 1987, pp. 411-416.
- [11] DAROS, C. H.
Formulação e implementação de uma metodologia baseada no método dos elementos de contorno e seu acoplamento com o método dos elementos finitos para tratamento de problemas governados pelas equações de Laplace e Poisson em domínios bidimensionais,
Projeto financiado pelo SAE/UNICAMP na modalidade Bolsa de Pesquisa.
Orientador: Prof. Dr. Ing. Euclides de Mesquita Neto.
- [12] ANTES, H.
Time domain boundary element solutions of hyperbolic equations for 2-D transient wave propagation.
Proceedings 3. GAMM-Seminar : Panel methods in fluid mechanics with emphasis in aerodynamics Kiel, pp. 35-42.
Braunschweig: Vieweg 1987.
- [13] KIRCHOFF, G.
Zur Theorie de Lichtstrahlen,
Ann. Physik, vol. 18, 1883, pp. 663-695.
- [14] FRIEDMAN, M. B. and SHAW, R. P.
Diffraction of a plane shock wave by an arbitrary rigid cylindrical obstacle,
Journal Applied Mechanics, ASME, vol. 29, 1962, pp. 20-46.
- [15] BANAUGH, R. P. and GOLDSMITH, W.
Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape,
Journal Applied Mechanics, ASME, vol. 30, 1963, pp. 589-597.

- [16] COLE, D. M.; KOSLOFF, D. D. and MINSTER, J. B.
A numerical boundary integral equation method for elastodynamics,
Bull. Seism. Soc. Am., vol. 68, 1978, pp 1331-1357.
- [17] NIWA, Y. ; FUKUI, T. ; KATO, S. and FUJIKI, K.
An application of the integral equation method to two-dimensional elastodynamics,
Theor. Appl. Univ. Tokyo, Hiroshima 28, 1980, pp 281-290.
- [18] WANG, C. and TAKEMIYA, H.
Analytical elements of time domain BEM for two-dimensional scalar wave problems
Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 33, N. 8, Jun. 15, 1992, pp. 1737-1754.
- [19] HADAMARD, J.
Lecture on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations,
Dover Publications, New York, 1952.
- [20] ZEMANIAN, A. H.
Distribution Theory and Transform Analysis (An Introduction to Generalized Functions, with Applications),
Dover Publications, New York, 1965.
- [21] HACKBUSCH, W.
Integralgleichungen (Theorie und Numerik),
B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [22] WIDDER, D. V.
Advanced Calculus, 2d ed.,
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.
- [23] MANSUR, W. J. and CARRER, J. A. M.
Two-dimensional transient BEM analysis for the scalar wave equation: kernels,
Eng. Anal. with Boundary Elements, N. 12, 1993, pp 283-288.
- [24] CARRER, J. A. M. and MANSUR, W. J.
Space derivatives in the time domain BEM analysis for the scalar wave equation,
Eng. Anal. with Boundary Elements, N. 13, 1994, pp 67-74.

- [25] KUTT, H. R.
Quadrature formulae for finite part integral,
Report Wisk 178,
The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, 1975.
- [26] HUANG, Q. and CRUSE, T. A.
Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis,
Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, 1993, pp. 2643-2659.
- [27] IOAKIMIDIS, N. I. and PITTA, M. S.
Remarks on the gaussian quadrature rule for finite-part integrals with a second-order singularity,
Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng., Vol. 69, 1988, pp. 325-343.
- [28] LEE, T. S. ; ADVANI, S. H. and LEE, J. K.
Indirect finite element evaluation of two-dimensional finite part integral using fourier transformation,
Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, 1993, pp. 2981-2996.
- [29] HILDENBRAND J. and KUHN, G.
Non-linear co-ordinate transformation of finite part integral in two-dimensional boundary element analysis,
Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, 1993, pp. 2939-2954.
- [30] GUIGGIANI, M. et al.
A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations,
Transactions of the ASME, Vol. 59, September 1992, pp. 604-614.
- [31] MILES, J. W.
Modern Mathematics for the Engineer,
E. F. Beckenbach ed., pp. 82-84, McGraw-Hill, London, 1961.
- [32] MESQUITA, E.de and DAROS, C. H.
A comparison between two methodologies to treat 'double nodes' in the boundary element method,
12th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, pp 202-206, Brasília, Brazil, December 1993.

- [33] GRAFF, K. F.
Wave motion in elastic solids,
Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [34] GROENENBOON, P. H. L..
The Application of Boundary Elements to Steady and Unsteady Potential Flow Problems in Two and Three Dimensional Problems,
Boundary Element Methods (ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, Berlin, 1981.
- [35] CISKOWSKI, R. D., BREBBIA, C. A. (Eds.)
Boundary Element Methods in Acoustics.
Computational Mechanics Publications with Elsevier Applied Science,
Southampton, U.K. , 1991.
- [36] LOEFFLER, C. F., MANSUR, W. J.
Resposta Transiente em Problemas com Cargas Impulsivas Através do Método dos Elementos de Contorno,
9th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, pp 609-612, Florianópolis, Brazil, December 1987.
- [37] MANSUR, W. J. and BREBBIA, C. A.
Transient Elastodynamics, Chapter 5 in *Topics in Boundary Element Research. Vol.2 : Time-dependent and Vibration Problems*. (C. A. Brebbia, Ed.),
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1985.