

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Identificação das Propriedades Dinâmicas de Mancais
Segmentados Híbridos – Teoria e Experimento

Autor: Fábio Hildebrand Russo
Orientador: Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos

EST. DA UNICAMP CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Fábio Hildebrand
RUSSE E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 19/08/1999

Ilmar Ferreira Santos
ORIENTADOR

83/00

9416100020

UNIDADE	30
N.º CHAMADA:	T/Unicomp
	0923i
V.	Ex
TOMBO BC/	43259
PROC.	16-278100
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$11,00
DATA	19/12/100
N.º CPD	

CM-00154339-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R921i

Russo, Fábio Hildebrand

Identificação das propriedades dinâmicas de mancais segmentados híbridos – teoria e experimento. / Fábio Hildebrand Russo.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Ilmar Ferreira Santos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mancais. 2. Identificação de sistemas. 3. Lubrificação. 4. Hidrodinâmica. I. Santos, Ilmar Ferreira. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

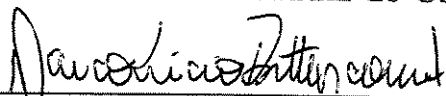
Identificação das Propriedades Dinâmicas de Mancais
Segmentados Híbridos – Teoria e Experimento

Autor: Fábio Hildebrand Russo

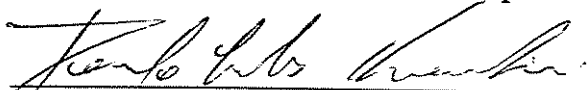
Orientador: Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos



Prof.Dr. Ilmar Ferreira Santos, Presidente
Universidade Estadual de Campinas



Prof.Dr. Marco Lúcio Bittencourt
Universidade Estadual de Campinas



Prof.Dr. Paulo Carlos Kaminski
Universidade Estadual de São Paulo

Campinas, 19 de agosto de 1999.

Dedicatória

Este trabalho eu dedico aos meus pais, que sempre me incentivaram e me apoiaram.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao Prof.Dr. Ilmar Ferreira Santos que sempre me incentivou, se mostrou preocupado com minha formação, e por não ter sido apenas um orientador, mas um amigo.

Devo agradecer também a todos os funcionários do Departamento de Projeto Mecânico que ajudaram na realização deste trabalho, e em especial aos técnicos mecânicos Eli Paulino, Maurício S. de Oliveira e Gastão Bosco responsáveis pela construção e montagem da bancada de teste e os técnicos em eletrônica Rosângelo W. Ap. Ferreira e Mauro Romero que auxiliaram nas medições experimentais.

Aos colegas de trabalho Alexandre Scalabrin, Rodrigo Nicoletti, Cláudio A. de Carvalho Silva, Cristina M. Saracho, Alberto C. Nogueira Jr., Gustavo Campos Padovese e Maurício Borges que sempre colaboraram em várias discussões sobre o trabalho e também ajudaram na realização de fotos e figuras.

Ao Departamento de Projeto Mecânico que cedeu seus computadores, além de seu espaço físico para a construção da bancada de teste.

À FAPESP que foi responsável por financiar todo o projeto, concedendo a bolsa de estudos e ainda possibilitando a construção da bancada de teste.

Ainda gostaria de agradecer a Sabine que esteve sempre presente durante toda a realização deste trabalho me incentivando e ajudando.

Não somos o que deveríamos ser; não somos o que queríamos ser; não somos o que iremos ser; mas graças a Deus, não somos o que éramos.

Martim Luther King

A razão cardeal de toda a superioridade humana é sem dúvida a vontade. O poder nasce do querer. Sempre que o homem aplique a veemência e a perseverante energia de sua alma a um fim, ela vencerá os obstáculos, e se não atingir o alvo, fará pelo menos coisas admiráveis.

José de Alencar

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Descrição do Trabalho	2
2	Revisão Bibliográfica e Histórico	4
2.1	Introdução	4
2.2	Evolução dos Mancais Hidrodinâmicos	5
2.3	Determinação Teórica de Coeficientes Dinâmicos de Rigidez e Amorteci- mento em Mancais	10
2.4	Métodos de Identificação de Coeficientes de Rigidez e Amortecimento em Sistemas Mecânicos	11
3	Modelagem Matemática de Mancais Segmentados Híbridos	20
3.1	Introdução	20
3.2	Hipóteses	21
3.3	Equação de Reynolds	22
3.4	Equação de Reynolds Modificada	29
3.5	Espessura do filme de óleo ($h(\bar{y}, t)$)	36
3.6	Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada	40
3.6.1	Método das Diferenças Finitas (MDF)	40
3.6.2	Método dos Volumes Finitos (MVF)	45
3.6.3	Comparação entre os Métodos de Resolução Numérica	47
3.7	Condições de contorno para a distribuição de pressão no filme de óleo . .	49
3.8	Determinação do ponto de operação do sistema rotor-mancal	50
3.9	Resultados Teóricos	54

nal bearings. In this work an identification procedure is also implemented for obtaining its damping and stiffness coefficients. Theoretical and experimental results regarding to such coefficients are compared. It can be concluded that it is possible to change stiffness properties of bearings while hybridly lubricated. Related to damping properties further theoretical investigations should be carried out in order to explain the discrepancies between theory and experiment.

Keywords

Hydrodynamic Bearings, Identification of Parameters.

Lista de Figuras

2.1	<i>Mancais hidrodinâmicos cilíndricos.</i>	5
2.2	<i>Mancais hidrodinâmicos lobulares.</i>	6
2.3	<i>Mancais hidrodinâmicos segmentados.</i>	6
2.4	<i>Mancal híbrido ativo com sapatas móveis conectadas à câmaras hidráulicas.</i>	8
2.5	<i>Mancal hidrodinâmico híbrido.</i>	9
2.6	<i>Representação de um sistema a ser estudado em função das relações entre as variáveis de entrada e saída.</i>	11
3.1	<i>Sistemas de referência.</i>	23
3.2	<i>Continuidade do escoamento de um fluido numa coluna.</i>	24
3.3	<i>Forças atuantes na direção \bar{y} num elemento de fluido.</i>	26
3.4	<i>Perfil de velocidades sobre uma das sapatas de um mancal com lubrificação híbrida.</i>	30
3.5	<i>Injeção de filme de óleo na folga radial.</i>	31
3.6	<i>Volume de controle anelar utilizado para estudar o escoamento do filme de óleo ao longo dos orifícios das sapatas do mancal.</i>	32
3.7	<i>Representação da função $\mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z})$ numa das sapatas do mancal, com discretização de 48 pontos em cada uma das direções.</i>	35
3.8	<i>Cinemática do subsistema rotor-sapata.</i>	37
3.9	<i>Malha com incrementos finitos de $\Delta\bar{y}$ e $\Delta\bar{z}$.</i>	41
3.10	<i>Malha de discretização de uma das sapatas do mancal.</i>	43
3.11	<i>Comparação entre as convergências dos métodos das diferenças finitas e volumes finitos em função do refinamento na malha de discretização das sapatas do mancal.</i>	48
3.12	<i>Comparação entre os tempos que cada um dos métodos numéricos necessitam para resolver uma iteração no processo iterativo de Newton-Raphson.</i>	49

3.13	<i>Distribuições de pressão nas quatro sapatas de um mancal com lubrificação tradicional.</i>	55
3.14	<i>Distribuições de pressão nas quatro sapatas de um mancal com lubrificação híbrida, para uma pressão de injeção na folga radial de 4,745 bar.</i>	57
3.15	<i>Variação da força sobre a segunda e quarta sapata de um mancal hidrodinâmico híbrido, em função da pressão de injeção do óleo na folga radial.</i>	59
3.16	<i>Variação das forças sobre as sapatas 2 e 4 para mancais com lubrificação tradicional e híbrida, em função da rotação do rotor.</i>	61
3.17	<i>Variação da distribuição de pressão em função do fator de pré-carga c: (a), (b) e (c) mancal com lubrificação tradicional; (d), (e) e (f) mancal com lubrificação híbrida cuja pressão de injeção nas sapatas permanece igual a 4,745 bar.</i>	63
3.18	<i>Variação da força sobre as sapatas 2 e 4 em mancais de lubrificação convencional e de lubrificação híbrida, em função do fator de pré-carga. Pressão de injeção nas sapatas igual a 4,745 bar.</i>	65
3.19	<i>Posicionamento do rotor em função da variação da pressão de injeção nas sapatas localizadas na direção do carregamento externo, ou seja, direção Y.</i>	66
3.20	<i>Variação da força sobre as sapatas 2 e 4 em mancais de lubrificação híbrida, em função da variação da pressão de injeção nas sapatas localizadas na direção do carregamento externo, ou seja, direção Y.</i>	67
4.1	<i>Comparação dos coeficientes de rigidez principais adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.</i>	81
4.2	<i>Comparação dos coeficientes de rigidez secundários adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.</i>	81
4.3	<i>Coefficientes de rigidez para o mancal com lubrificação tradicional em função do número de Sommerfeld.</i>	82
4.4	<i>Comparação dos coeficientes de amortecimento principais adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.</i>	83

4.5	<i>Comparação dos coeficientes de amortecimento principais na forma dimensional calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.</i>	84
4.6	<i>Comparação dos coeficientes de amortecimento secundários adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.</i>	85
4.7	<i>Comparação dos coeficientes de amortecimento secundários na forma dimensional calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.</i>	85
4.8	<i>Coefficientes de amortecimento adimensionais de um mancal com lubrificação tradicional em função do número de Sommerfeld.</i>	86
4.9	<i>Coefficientes adimensionais de rigidez para mancais híbridos em função da pressão de injeção na sapata de número 2.</i>	87
4.10	<i>Coefficientes adimensionais de amortecimento para mancais híbridos em função da pressão de injeção na sapata de número 2.</i>	88
4.11	<i>Coefficientes de rigidez adimensionais do mancal hidrodinâmico com lubrificação híbrida em função do número de Sommerfeld.</i>	89
4.12	<i>Comparação entre os coeficientes de rigidez de um mancal com lubrificação tradicional e outro com lubrificação mista, cuja pressão de injeção nas sapatas se mantiveram constantes e iguais a 3,5 bar.</i>	90
4.13	<i>Coefficientes de amortecimento do mancal hidrodinâmico com lubrificação híbrida, na forma dimensional, em função do número de Sommerfeld.</i>	90
4.14	<i>Coefficientes de amortecimento do mancal com lubrificação híbrida na forma adimensional.</i>	91
4.15	<i>Comparação entre os coeficientes de amortecimento de um mancal com lubrificação tradicional e outro com lubrificação mista.</i>	92
5.1	<i>Bancada de testes desenvolvida para o estudo do mancal hidrodinâmico híbrido.</i>	93
5.2	<i>Bancada de testes onde será montado o mancal hidrodinâmico híbrido.</i>	94
5.3	<i>Modelo mecânico construído para representar a bancada de testes, sem o mancal hidrodinâmico híbrido.</i>	95
5.4	<i>Rotação em torno do eixo Y.</i>	96

5.5	<i>Rotação em torno do eixo X.</i>	96
5.6	<i>Relações geométricas no plano XZ.</i>	105
5.7	<i>Relações geométricas no plano YZ.</i>	106
5.8	<i>Transferência dos esforços realizados em A e B para o centro de massa.</i>	107
5.9	<i>Suporte formado por lâminas flexíveis para o apoio do rotor rígido.</i>	111
5.10	<i>Elemento de viga utilizado para o desenvolvimento do cálculo de rigidez equivalente.</i>	112
5.11	<i>Aplicação de uma força de 1 N numa das extremidades de uma viga totalmente engastada.</i>	113
5.12	<i>Foto da bancada de testes com o mancal hidrodinâmico híbrido.</i>	116
5.13	<i>Modelo mecânico do rotor com o mancal hidrodinâmico híbrido.</i>	117
6.1	<i>Comportamento do sistema no plano horizontal.</i>	128
6.2	<i>Comportamento do sistema no plano vertical.</i>	129
6.3	<i>Validação dos parâmetros obtidos para o sistema no plano horizontal.</i>	131
6.4	<i>Validação dos parâmetros obtidos para o sistema no plano vertical.</i>	132
7.1	<i>Excitação da bancada de testes no apoio B na direção X.</i>	140
7.2	<i>Funções de resposta em frequência no plano horizontal para uma rotação de 1.800 rpm e pressão de injeção nas sapatas igual a 1,0 bar.</i>	141
7.3	<i>Funções de resposta em frequência no plano vertical para uma rotação de 1.800 rpm e pressão de injeção nas sapatas igual a 1,0 bar.</i>	142
7.4	<i>Resultados do coeficiente de rigidez k_{xx} para uma rotação de 1.800 rpm, e pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 bar.</i>	145
7.5	<i>Resultados do coeficiente de amortecimento d_{xx} para uma rotação de 1.800 rpm, e pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 bar.</i>	145
7.6	<i>Comparação entre os coeficientes de rigidez obtidos para o sistema operando com rotações de 600 e 1.800 rpm. As pressões de injeção nas sapatas foram mantidas iguais a 1,0 bar – Resultados Experimentais.</i>	146
7.7	<i>Comparação entre os coeficientes de amortecimento obtidos para o sistema operando com rotações de 600 e 1.800 rpm. As pressões de injeção nas sapatas foram mantidas iguais a 1,0 bar – Resultados Experimentais.</i>	147
7.8	<i>Comparação entre os coeficientes de rigidez obtidos para pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 e 2,0 bar. A rotação do rotor foi mantida igual a 1.800 rpm – Resultados Experimentais.</i>	148

7.9	<i>Comparação entre os coeficientes de amortecimento obtidos para pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 e 2,0 bar. A rotação do rotor foi mantida igual a 1.800 rpm – Resultados Experimentais.</i>	148
A.1	<i>Função da variação da frequência de excitação descrita por uma função dente de serra.</i>	160
A.2	<i>Função da variação da frequência de excitação ao longo do tempo descrita por uma função parabólica.</i>	162
A.3	<i>Função do sinal de excitação do sistema.</i>	164
C.1	<i>Bancada de testes sem o manal hidrodinâmico.</i>	167
C.2	<i>Suporte flexível do rotor.</i>	168
E.1	<i>Fluxograma do Programa Computacional.</i>	170
F.1	<i>Sistema físico com 3 graus de liberdade em série e o respectivo modelo mecânico.</i>	172
F.2	<i>Viga engastada-engastada</i>	173
F.3	<i>Funções de resposta em frequência do sistema de três graus de liberdade obtidas para uma excitação na massa 1.</i>	179
F.4	<i>Coerência do sistema de três graus de liberdade obtidas para uma das medições realizadas para uma excitação na massa 1.</i>	180
F.5	<i>Rigidez equivalente da lâmina 1 no domínio da frequência.</i>	181
F.6	<i>Rigidez equivalente da lâmina 2 no domínio da frequência.</i>	182
F.7	<i>Rigidez equivalente da lâmina 3 no domínio da frequência.</i>	182

Lista de Tabelas

3.1	<i>Resultados do posicionamento de um sistema rotor-mancal para várias pressões de injeção na sapata, e comparação com os resultados obtidos para um sistema operando com lubrificação tradicional.</i>	58
3.2	<i>Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação convencional, em função da rotação no rotor.</i>	60
3.3	<i>Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação híbrida, em função da rotação no rotor.</i>	60
3.4	<i>Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação tradicional, em função da variação do fator de pré-carga.</i>	62
3.5	<i>Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação híbrida, em função da variação do fator de pré-carga.</i>	64
4.1	<i>Pressões de injeção utilizadas nas sapatas na primeira análise realizada para o mancal hidrodinâmico híbrido.</i>	87
5.1	<i>Parâmetros obtidos da bancada de testes.</i>	111
6.1	<i>Medições dos deslocamentos horizontais das extremidades do rotor em função do carregamento nos apoios.</i>	127
6.2	<i>Medições dos deslocamentos verticais das extremidades do rotor em função do carregamento nos apoios.</i>	127
6.3	<i>Valores dos fatores de amortecimento da bancada de testes.</i>	130
7.1	<i>Comparação dos resultados teóricos e experimentais obtidos para o mancal hidrodinâmico, para rotação de 30 Hz e pressão de injeção nas sapatas de 1,0 bar.</i>	144
B.1	<i>Dados geométricos e de operação utilizados nas simulações dos capítulos 3 e 4.</i>	166

C.1	<i>Características da bancada de teste.</i>	167
C.2	<i>Características dos suportes do rotor.</i>	168
D.1	<i>Dados geométricos e de operação utilizados nas análises experimentais do mancal hidrodinâmico.</i>	169

Nomenclatura

Letras latinas

B	largura do segmento	[m]
B_j	sistema de referência auxiliar da j -ésima sapata	
B_j'	sistema de referência móvel da j -ésima sapata	
\bar{B}_j	sistema de referência móvel curvilíneo da j -ésima sapata	
c	fator de pré-carga	
d_0	diâmetro dos orifícios das sapatas	[m]
$d_{xx}, d_{xy}, d_{yx}, d_{yy}$	amortecimento adimensional do mancal hidrodinâmico no sistema de referência inercial I	[$N.s/m$]
d_{Ax}, d_{Ay}	amortecimento do suporte A nas direções X e Y	[$N.s/m$]
d_{Bx}, d_{By}	amortecimento do suporte B nas direções X e Y	[$N.s/m$]
$F_j(X_R, Y_R, \alpha_j)$	força hidrodinâmica de interação entre o rotor e a j -ésima sapata	[N]
F_X, F_Y	forças externas aplicadas nas direções X e Y	[N]
$\mathcal{F}_i(\bar{y}, \bar{z})$	função de forma do fluido injetado no orifício i	
$h(\bar{y}, t)$	espessura do filme de óleo entre o rotor e as sapatas	[μm]
h_0	folga radial do mancal	[μm]
h_S	espessura do segmento	[m]
I	sistema de referência inercial, definido pelos vetores unitários X, Y, Z	
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	momentos de inércia principais da bancada de teste	[$kg.m^2$]
$k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$	rigidez adimensional do mancal hidrodinâmico no sistema de referência inercial I	[N/m]
k_{Ax}, k_{Ay}	rigidez do suporte A nas direções X e Y	[N/m]
k_{Bx}, k_{By}	rigidez do suporte B nas direções X e Y	[N/m]
l	distância entre a posição do mancal e o centro de massa do rotor	[m]
l_0	comprimento dos orifícios das sapatas	[m]
L	comprimento total do rotor ($L = L_1 + L_2$)	[m]
L_1	distância do centro de massa do rotor ao apoio B	[m]
L_2	distância do centro de massa do rotor ao apoio A	[m]

m_x, m_y, m_z	massa da bancada de teste que se desloca nas direções X, Y e Z	[kg]
N	número total de segmentos	
$p_j(\bar{y}, \bar{z}, t)$	distribuição de pressão sobre a superfície da j -ésima sapata	[bar]
\bar{P}_{inj_j}	pressão de injeção do fluido através dos orifícios na j -ésima sapata	[bar]
$q_{\bar{x}}, q_{\bar{y}}, q_{\bar{z}}$	vazão do fluido por unidade de comprimento nas direções $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	[m ² /s]
$Q_{\bar{x}}, Q_{\bar{y}}, Q_{\bar{z}}$	vazão do fluido nas direções $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	[m ³ /s]
R	raio do rotor	[m]
R_S	raio da sapata	[m]
s	número total de orifícios em cada sapata	
So	número de Sommerfeld	
t	tempo	[s]
U	velocidade da superfície do rotor	[m/s]
$v_{\bar{x}}, v_{\bar{y}}, v_{\bar{z}}$	velocidade do fluido nas direções $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	[m/s]
V	velocidade relativa entre o rotor e a sapata	[m/s]
V_{inj_j}	velocidade de injeção do fluido através das sapatas	[m/s]
X, Y, Z	coordenadas cartesianas da base I	
x_j, y_j, z_j	coordenadas cartesianas da base B_j	
x'_j, y'_j, z'_j	coordenadas cartesianas da base B'_j	
$\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j$	coordenadas cartesianas da base \bar{B}_j	
x_A, y_A	posicionamento do suporte A escrito no sistema de referência inercial I	[m]
x_B, y_B	posicionamento do suporte B escrito no sistema de referência inercial I	[m]
X_R, Y_R	deslocamento do rotor medido no sistema de coordenadas inercial I	[m]
x_R, y_R	posicionamento do rotor escrito no sistema de coordenadas auxiliar B_j	[m]
x_{CG}, y_{CG}	posicionamento do centro de massa do rotor	[m]

Letras gregas

α_j	ângulo de rotação da j -ésima sapata	[rad]
β_0	ângulo de abrangência da sapata	[rad]
ϕ_j	ângulo de posicionamento dos segmentos medido no sentido anti-horário a partir do eixo X	[rad]
μ	viscosidade dinâmica do óleo lubrificante	[N.s/m ²]
Ω	velocidade de rotação do rotor	[rad/s]
ρ	densidade do óleo lubrificante	[kgf/m ³]
$\tau_{\bar{x}}, \tau_{\bar{y}}, \tau_{\bar{z}}$	tensão de cisalhamento do fluido nas direções $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	[N/m ²]

Subscritos

- $()_{AB}$ parâmetros escritos em função dos graus de liberdade dos suportes A e B
 $()_{CG}$ parâmetros escritos em função dos graus do centro de massa do rotor
 $()_{m,n}$ coordenadas de um nó da malha de refinamento da superfície da sapata, nas direções \bar{y} e \bar{z}
 $()_i$ número do orifício $i = 1 \dots s$
 $()_j$ número da sapata $j = 1 \dots 4$

Vetores e matrizes

- vetor letra em negrito e minúscula
 $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ vetor das reações dos suportes A e B
 \mathbf{r}_{MH} vetor das reações do mancal hidrodinâmico sobre o rotor
 $\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B$ vetor de deslocamentos dos suportes A e B
 \mathbf{s}_{MH} vetor de deslocamentos do rotor no ponto onde o mancal está montado
 \mathbf{x} vetor das posições de equilíbrio do sistema rotor-mancal $\mathbf{x} = \{X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}^T$
- matriz letra em negrito e maiúscula
 \mathbf{D} matriz de amortecimento do mancal escrita no sistema de referência inercial I
 \mathbf{D}_{AB} matriz de amortecimento dos suportes A e B escrita em função dos graus de liberdade dos suportes A e B
 \mathbf{D}_{CG} matriz de amortecimento dos suportes A e B escrita em função dos graus de liberdade do rotor
 \mathbf{G}_{AB} matriz giroscópica do rotor escrita em função dos graus de liberdade dos suportes A e B
 \mathbf{G}_{CG} matriz giroscópica do rotor escrita em função dos graus de liberdade do rotor
 \mathbf{M}_{AB} matriz de massa da bancada de teste escrita em função dos graus de liberdade dos suportes A e B
 \mathbf{M}_{CG} matriz de massa da bancada de teste escrita em função dos graus de liberdade do rotor
 \mathbf{T}_Γ matriz de transformação da base I para a base B_j
 \mathbf{T}_β matriz de transformação da base B_j para a base B'_j
 \mathbf{T}_ϕ matriz de transformação da base B'_j para a base \bar{B}_j
 \mathbf{K} matriz de rigidez do mancal escrita no sistema de referência inercial I
 \mathbf{K}_{AB} matriz de rigidez dos suportes A e B escrita em função dos graus de liberdade dos suportes A e B
 \mathbf{K}_{CG} matriz de rigidez dos suportes A e B escrita em função dos graus de liberdade do rotor

Capítulo 1

Introdução

O estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas é ainda hoje um tema de grande interesse na engenharia. Isto acontece devido ao constante aumento das exigências destes equipamentos quanto ao seu desempenho, mesmo em condições desfavoráveis de operação como alta temperatura, alta velocidade de rotação, grandes esforços, entre outras. Além disso, tem-se ainda que o controle de vibrações em sistemas rotativos é de extrema importância principalmente com relação a aspectos de segurança e de vida útil do equipamento.

Neste contexto, os elementos de mancais, sendo na grande maioria mancais hidrodinâmicos, aparecem como peças importantes na caracterização do comportamento de sistemas mecânicos. Vários estudos teóricos e experimentais vêm sendo realizados na direção de controlar os movimentos do rotor através da atuação direta dos próprios mancais sobre este. Entre eles estão os mancais hidrodinâmicos ativos e inteligentes, os quais utilizam sistemas hidráulicos de controle.

É com esta intenção que está sendo desenvolvido, no Departamento de Projeto Mecânico da UNICAMP, um novo tipo de mancal hidrodinâmico segmentado [50], o qual possui um sistema de injeção de óleo na folga radial, chamada de lubrificação ativa. Esta injeção ocorre por intermédio de pequenos orifícios distribuídos ao longo das sapatas do mancal e é controlada pela atuação de duas servoválvulas. Através da alteração das características do escoamento existente entre o rotor e as superfícies das sapatas do mancal, busca-se um aumento da estabilidade do sistema. Outras vantagens deste novo modelo de mancal hidrodinâmico são: o aumento de sua capacidade de carga em baixas rotações, ou mesmo em rotação nula, e a diminuição do torque necessário para o acionamento do

sistema, devido à redução do atrito entre as partes girantes e não girantes obtida com a injeção de óleo na folga radial.

A investigação teórico-experimental dos coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento deste mancal segmentado híbrido (hidrostático + hidrodinâmico) como é conhecido na literatura, é o tema principal desta dissertação de mestrado.

1.1 Descrição do Trabalho

A fim de situar o trabalho desenvolvido nesta pesquisa é importante introduzir inicialmente um pequeno histórico sobre os avanços ocorridos em mancais hidrodinâmicos ao longo do tempo. Desta forma, no capítulo 2 é apresentado um breve histórico sobre a evolução deste tipo de mancal. Esta revisão bibliográfica ainda compreende o estudo de métodos desenvolvidos para a determinação teórica e de maneiras de identificar experimentalmente os coeficientes dinâmicos destes mancais.

Para o desenvolvimento deste novo modelo de mancal hidrodinâmico é necessário desenvolver um modelo matemático capaz de representar as alterações resultantes da injeção do filme de óleo na folga radial. A partir desta modelagem é, então, possível conhecer a distribuição de pressão sobre cada uma das sapatas e conseqüentemente determinar a posição de equilíbrio do sistema rotor-mancal. A modelagem matemática e alguns resultados teóricos são apresentados no capítulo 3.

Já no capítulo 4 é apresentado o método das pequenas perturbações utilizado na determinação dos coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento do mancal. Através da análise e comparação destes coeficientes com os obtidos em mancais hidrodinâmicos tradicionais é possível observar se sistemas mais estáveis são alcançados com a utilização do mancal hidrodinâmico híbrido.

O estudo da bancada de testes, onde serão realizadas as identificações experimentais do mancal hidrodinâmico, inicia-se no capítulo 5. Neste capítulo é desenvolvido a modelagem matemática da bancada, sendo esta realizada em duas etapas. Primeiramente sem o mancal de teste e em seguida com a introdução deste no sistema.

No capítulo 6, realizam-se as primeiras medições da bancada de testes, mas ainda

sem a influência do mancal hidrodinâmico. Nesta etapa são observadas as características dos apoios do rotor, possibilitando identificar posteriormente os efeitos provenientes exclusivamente do mancal de teste.

O capítulo 7 é, então, destinado a determinação experimental dos coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal hidrodinâmico. Estes resultados são apresentados para algumas condições de operação do sistema e diferentes pressões de injeção na folga radial.

Ressalta-se aqui, que o estudo do comportamento ativo do mancal, ou seja, com as servoválvulas sendo realimentadas com sinais de controle é objetivo de uma outra tese de mestrado. Este trabalho restringe-se aos estudos de diferentes pressões estáticas de controle.



Capítulo 2

Revisão Bibliográfica e Histórico

2.1 Introdução

Grande parte dos sistemas mecânicos presentes no cotidiano do homem é formada por componentes que apresentam movimentos relativos entre eles. Tem-se que a conexão das partes que estão em movimento com as que permanecem estáticas deve ser feita com o mínimo de atrito. O elemento de máquina (estático) responsável por suportar componentes rotativos (eixos) é chamado de *mancal*.

Alguns estudos apontam sua origem como sendo no século *XVI*, sendo um dos seus precursores o inventor italiano Leonardo da Vinci. Porém, a construção do primeiro mancal só veio a acontecer no século *XVIII* e sua expansão industrial no século *XIX*, com o desenvolvimento das bicicletas (JUVINALL & MARSHEK [30]).

A classificação dos mancais é feita de acordo com o tipo de interação existente entre a sua parte fixa (anel externo) e a parte em movimento do sistema mecânico (rotor). A classe de mancais mais conhecida é a de rolamentos, onde esta interação é dada através de elementos sólidos que podem ser esferas ou rolos. Uma outra classe utiliza na interface rotor-mancal um fluido lubrificante e são chamados de mancais de escorregamento, podendo ser mancais hidrostáticos ou hidrodinâmicos. Estes são capazes de suportar maiores carregamentos e possuem menor perda de energia. Isto ocorre devido à redução do atrito entre os elementos com velocidades relativas resultando, assim, numa vida útil

maior. Porém, são de custos mais elevados. Um terceiro tipo de mancal compreende os mancais magnéticos, os quais utilizam um campo magnético para suportar o rotor. Estes são considerados de melhor performance: suportam carregamentos menores, mas possuem atrito praticamente nulo entre rotor-mancal, levando a uma vida útil do conjunto próxima ao "infinito". Mas, o custo destes mancais é muitas vezes maior que o de qualquer outro tipo de mancal, restringindo o seu uso para casos específicos como, por exemplo, em ultracentrífugas, as quais são responsáveis pelo enriquecimento de urânio e operam em altíssimas velocidades, e equipamentos aero-espaciais (JUVINALL & MARSHEK [30]).

Com o intuito de situar o novo tipo de mancal apresentado neste trabalho é importante introduzir um pequeno histórico dos avanços dos mancais hidrodinâmicos ao longo do tempo.

2.2 Evolução dos Mancais Hidrodinâmicos

O primeiro tipo de mancal hidrodinâmico, conhecido como mancal hidrodinâmico cilíndrico, é composto apenas pelo anel externo e pelo fluido lubrificante, o qual suporta o rotor e não permite o seu contato com a estrutura do mancal. Um desenho esquemático deste tipo de mancal é apresentado na Figura 2.1

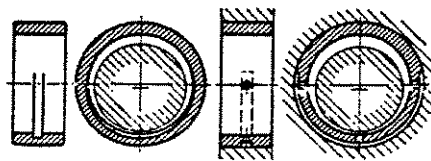


Figura 2.1: Mancais hidrodinâmicos cilíndricos.

Porém, quando o sistema mecânico opera em rotações mais altas, estes mancais causam problemas de vibrações nos rotores, ou seja, torna-os instáveis. Isto é conhecido na literatura como "oil whirl" (LUND & SAIBEL [34]).

Dessa forma, muitos estudos vem sendo realizados a fim de aumentar a estabilidade destes mancais em rotações mais elevadas e diminuir sua temperatura interna. A primeira modificação realizada foi com relação ao formato do anel externo do mancal, o qual passou

de cilíndrico para elíptico, vindo a ser chamado de mancal hidrodinâmico bi-lobular. Logo em seguida surgiu também o tri-lobular. Porém, poucas melhorias foram alcançadas com estas modificações. Na Figura 2.2 tem-se a representação de dois tipos de mancais lobulares.

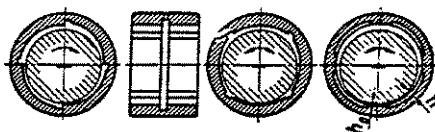


Figura 2.2: *Mancais hidrodinâmicos lobulares.*

A grande evolução foi dada com a introdução dos mancais hidrodinâmicos segmentados. Nestes mancais o anel externo foi dividido em segmentos, passando a ser descontínuo, sendo, então, formado por vários elementos denominados sapatas, as quais possuem liberdade de rotação, como é apresentado na Figura 2.3.

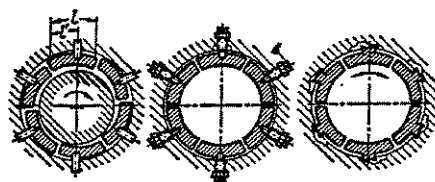


Figura 2.3: *Mancais hidrodinâmicos segmentados.*

Trabalhos publicados por LUND & SAIBEL [34] e BOYD & RAIMONDI [7] (que pesquisou a capacidade de carga e as perdas de torque por atrito para mancais com 4, 6, 8 e 12 segmentos operando em condições estáticas), apresentaram resultados que indicam um aumento da velocidade de operação em máquinas rotativas, que antes trabalhavam em 6000 *rpm*, para mais de 10000 *rpm* sem que houvessem problemas de estabilidade do sistema mecânico. Graças às propriedades dinâmicas destes mancais tem-se hoje a utilização dos mancais hidrodinâmicos segmentados na maioria das máquinas que operam em alta velocidade. Por exemplo, tem-se a aplicação destes em turbogeradores, compressores, turbinas Francis (SPRINGER [57]), turbinas a gás com problemas de instabilidade provenientes de efeitos aerodinâmicos (FLACK & ZUCK [18]), entre outras.

A característica mais importante de rotores suportados por mancais segmentados é o desacoplamento, ou independência, do movimento do rotor nas suas direções ortogo-

nais, o que não é observado em outros tipos de mancais. Este desacoplamento tem como justificativa a capacidade de rotação das sapatas, que se ajustam para as mais diferentes condições de carregamento. Este desacoplamento foi mostrado tanto teoricamente como experimentalmente por vários autores, entre eles, LUND [33], que foi o primeiro pesquisador a desenvolver a equação de Reynolds (a qual descreve o comportamento do filme de óleo na folga radial) para mancais segmentados, GLIENICKE [21], SOMEYA [55], que apresenta em seu livro uma comparação dos comportamentos dos vários tipos de mancais, e BROCKWELL & DMOCHOWSKI [8].

Até então, acreditava-se que os mancais hidrodinâmicos segmentados fossem incondicionalmente estáveis. Porém, em pesquisas realizadas por FLACK [18] em dois rotores flexíveis, comprovou-se que para certas condições de operação ainda é possível ter sistemas instáveis. As causas são deformações, excitações, ou ainda variações da viscosidade do óleo lubrificante. Esta conclusão também foi observada por LIE et al. [32] ao realizarem cálculos numéricos e experimentais sobre um mancal com sapatas rotativas em duas condições diferentes de carregamento: entre sapatas, e sobre sapatas. Em ambos os casos foram observadas instabilidades no sistema.

Para aumentar ainda mais a faixa de estabilidade destes mancais é necessário um aumento da sua reserva de amortecimento, o que é possível utilizando-se sistemas hidráulicos de controle. As primeiras idéias teóricas sobre mancais segmentados com controle foram apresentadas por ULBRICH & ALTHAUS [59]. Neste caso, os segmentos do mancal foram construídos sobre atuadores piezoelétricos ou atuadores hidráulicos. As primeiras análises teórico-experimentais foram realizadas por SANTOS & ULBRICH [46] e SANTOS [47], num mancal composto por quatro segmentos móveis, dois na direção vertical e dois na direção horizontal, sendo estes controlados dois a dois. O par de segmentos na direção vertical foi, então, montado sobre um par de câmaras hidráulicas (composta por uma membrana flexível) conectado a uma servoválvula e uma válvula proporcional, como é apresentado na Figura 2.4.

No caso de um controle ativo, as pressões nas câmaras são alteradas através de sinais elétricos enviados para a servoválvula, sinais estes obtidos através dos sensores

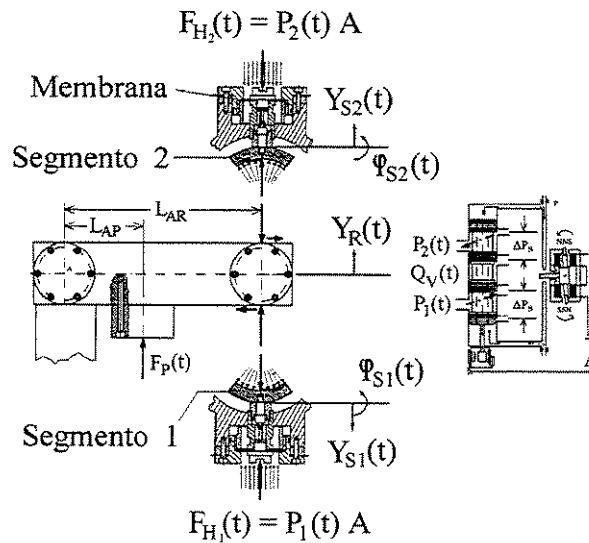
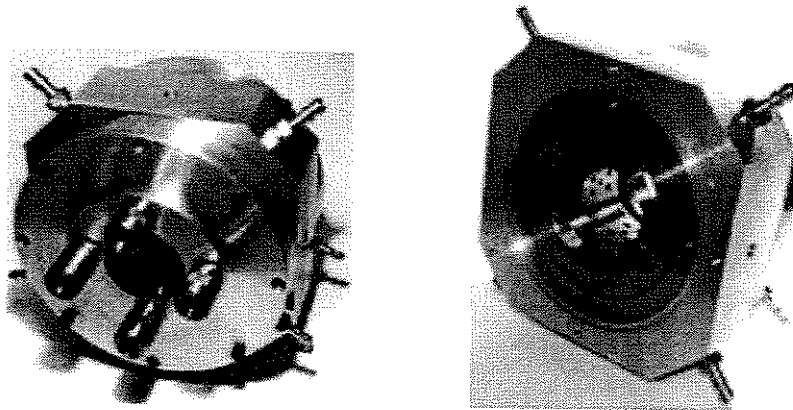


Figura 2.4: Mancal híbrido ativo com sapatas móveis conectadas à câmaras hidráulicas.

de pressão e dos sensores de deslocamento. Sabe-se que os coeficientes dinâmicos do mancal (coeficientes de rigidez e amortecimento), os quais descrevem a sua estabilidade, dependem fortemente da folga radial existente entre o rotor e a superfície das sapatas. A modificação, ou ajuste, destes parâmetros é, então, realizada pela diferença da pressão hidráulica na entrada da servoválvula com o auxílio de uma válvula proporcional. O aumento do amortecimento e diminuição da rigidez, o que caracteriza um aumento da estabilidade do sistema, foi obtido sem a aplicação de conceitos de controle ativo, e sim, explorando-se somente as propriedades e características não lineares do mancal, como a dependência de seus coeficientes dinâmicos em relação à folga radial. No entanto, um fator limitante deste tipo de mancal é a tensão limite na membrana do sistema de câmaras, como é apresentado em SANTOS [49].

Uma das possibilidades encontradas, também por este autor (SANTOS [48]), para a solução deste problema, foi a atuação direta sobre o comportamento do escoamento do fluido lubrificante através da injeção de filme de óleo diretamente na folga radial. Para isso, foram construídos segmentos constituídos de vários orifícios ao longo de sua superfície, que são conectados com servoválvulas e válvulas proporcionais de pressão. Este tipo de lubrificação é denominado aqui de lubrificação híbrida. Fotos deste modelo de mancal são apresentadas na Figura 2.5.



(a) Foto do mancal hidrodinâmico híbrido.

(b) Foto do interior do mancal com detalhe para os orifícios na superfície das sapatas.

Figura 2.5: *Mancal hidrodinâmico híbrido.*

Através da alteração das características do escoamento provocada pela injeção eletrônica de óleo na folga radial, procura-se controlar os movimentos do rotor e/ou modificar a rigidez e o amortecimento do filme de óleo, visando atingir sistemas rotativos mais estáveis, e sem problemas de vibrações auto-excitadas. A análise das modificações dos coeficientes de rigidez e amortecimento obtidas através deste tipo de mancal é o objetivo principal deste trabalho.

Nas primeiras investigações teóricas realizadas por SANTOS & RUSSO [50] e [51], observa-se a viabilidade de se modificar as forças hidrodinâmicas com este novo tipo de mancal. Nestes trabalhos foi desenvolvido um modelo matemático para este mancal, obtendo-se os primeiros resultados teóricos sobre a possibilidade de uma atuação híbrida. Ressalta-se aqui que também é observado para os mancais segmentados híbridos o desacoplamento das propriedades dinâmicas do rotor nas direções ortogonais.

2.3 Determinação Teórica de Coeficientes Dinâmicos de Rigidez e Amortecimento em Mancais

O controle das vibrações em sistemas rotativos por intermédio de mancais baseia-se na alteração de quatro coeficientes de velocidade, conhecidos por coeficientes de amortecimento, e outros quatro de deslocamento, denominados coeficientes de rigidez, como é apresentado por LUND [33].

Neste trabalho estuda-se a viabilidade de modificar estes oito coeficientes utilizando um mancal segmentado híbrido. Para o cálculo teórico destes parâmetros que descrevem a estabilidade de sistemas rotativos, é necessário ter o conhecimento da distribuição de pressão ao longo da superfície do mancal, ou seja, da força hidrodinâmica que atua sobre ele. Para isso, precisa-se resolver a equação que descreve o comportamento do filme de óleo na folga radial, conhecida como equação de Reynolds. Devido à sua complexidade, a solução é realizada de forma numérica. Um dos métodos numéricos mais utilizados é o Método das Diferenças Finitas (MDF), o qual é bem descrito por JONES & MARTIN [28] e WENDT [61]. Um outro método, utilizado por SPRINGER [56], é o da aproximação da distribuição de pressão ao longo da superfície do mancal pelo polinômio de Tchebyscheff. Porém, não é aconselhável a utilização deste método para mancais hidrodinâmicos segmentados com lubrificação híbrida, uma vez que este tipo de lubrificação apresenta uma distribuição de pressão descontínua devido à injeção do filme de óleo. Desta forma, torna-se difícil a sua aproximação por um polinômio.

Um dos primeiros autores a resolver a equação de Reynolds objetivando a determinação dos coeficientes de rigidez e amortecimento para mancais hidrodinâmicos segmentados foi LUND [33]. Neste trabalho é possível observar a principal característica deste tipo de mancal, que é o desacoplamento do comportamento dinâmico nas direções ortogonais. Tem-se que os valores encontrados para os coeficientes dinâmicos cruzados (que relacionam uma direção com a outra) foram praticamente nulos. Porém, no modelo matemático utilizado neste cálculo só foram considerados os graus de liberdade do rotor, assumindo um sincronismo entre o seu movimento e o de cada uma das sapatas.

Sabe-se, entretanto, que os movimentos de todos os elementos que compõem os mancais hidrodinâmicos segmentados estão acoplados. Neste sentido, ALLAIRE et al. [1] desenvolveram um novo modelo teórico na determinação dos seus coeficientes dinâmicos no

qual também foram considerados os deslocamentos e as velocidades angulares das sapatas. A vantagem deste método em relação ao apresentado por Lund está na determinação de uma matriz com as características dinâmicas completas do sistema.

Os efeitos de distorção térmica e elástica das sapatas, assim como as expansões térmicas do rotor, das sapatas e dos outros elementos do mancal, não foram considerados em nenhuma destas análises teóricas anteriores. O primeiro estudo nesta direção foi realizado por ETTLES [17]. Porém, estes efeitos não serão abordados nesta pesquisa, uma vez que uma das hipóteses a ser adotada é a de temperatura constante no interior do mancal. Isto facilita a solução da equação de Reynolds pois as propriedades do óleo lubrificante podem ser consideradas constantes ao longo do tempo.

A simulação teórica de sistemas mecânicos tornou-se, com o avanço das técnicas computacionais, uma das principais ferramentas para a avaliação de seus comportamentos dinâmicos. Porém, em sistemas físicos complexos, onde se tem diferentes tipos de conexões, ou havendo interação entre fluido e estrutura, como é o caso de mancais hidrodinâmicos, é difícil a obtenção de alguns parâmetros. Desta forma, a identificação experimental ainda é de extrema importância. Além disso, os testes experimentais também permitem uma comparação com os resultados obtidos em cálculos teóricos, a fim de se validar o modelo matemático desenvolvido.

2.4 Métodos de Identificação de Coeficientes de Rigidez e Amortecimento em Sistemas Mecânicos

O principal objetivo das técnicas de identificação é determinar as características do sistema, baseado em relações entrada-saída, ou seja, resposta a uma dada excitação. Estes métodos não se aplicam exclusivamente a sistemas mecânicos, mas a qualquer outro tipo de sistema, como por exemplo sistemas biológicos, econômicos, etc.

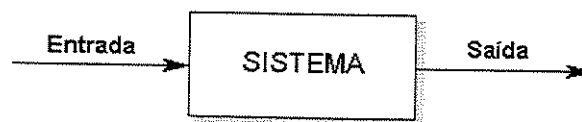


Figura 2.6: Representação de um sistema a ser estudado em função das relações entre as variáveis de entrada e saída.

A primeira etapa num processo de identificação é a escolha do modelo matemático do sistema. Em muitos casos, este modelo é resultante da aplicação de leis físicas, como leis de Newton, leis de Maxwell, leis de Kirchoff, balanço de massa, balanço de energia, balanço de calor ou balanço de entropia. A aplicação destas leis depende do sistema em estudo: mecânico, elétrico ou termodinâmico. A partir destas leis, obtém-se equações diferenciais ordinárias ou parciais que irão relacionar as variáveis do problema.

Escolha do modelo matemático

A modelagem matemática de um sistema rotor-mancal pode ser feita de duas formas [9] [12]:

1. através do estudo dos esforços realizados sobre o rotor. Para este caso, o mancal permanece em repouso e as vibrações são analisadas pelo movimento do rotor [23];
2. através da análise da vibração do sistema pelos movimentos do mancal. Segundo GLIENICKE [20] este modelo parece ser o mais conveniente.

Em ambos os modelos, a força exercida pelo filme de óleo sobre o rotor ou sobre a superfície do mancal é escrita em função dos coeficientes de rigidez $[K]$, amortecimento $[D]$ e massa $[\bar{M}]$ do filme de óleo:

$$-\begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

sendo que Δx e Δy se referem ao movimento relativo entre o mancal e o rotor; e f_{bx} , f_{by} são as forças de reação do filme de óleo atuantes sobre o rotor. Para muitos casos, pode-se desprezar os efeitos de inércia do filme de óleo, não sendo necessário o cálculo da matriz de massa $[\bar{M}]$, principalmente se o escoamento for laminar e não houver cavitação no interior do mancal. Assim, a equação (2.1) pode ser escrita como:

$$-\{f_b\} = [K] \{q(t)\} + [D] \{\dot{q}(t)\} \quad (2.2)$$

Conhecida a força exercida pelo filme de óleo, o modelo matemático que descreve o

comportamento dinâmico do sistema é obtido pela segunda Lei de Newton:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{forças externas} \\ \text{aplicadas} \end{pmatrix}}_{\{f(t)\}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \text{forças do} \\ \text{filme de óleo} \end{pmatrix}}_{\{f_b\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{massa do} \\ \text{sistema} \end{pmatrix}}_{[M]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \text{acel. do} \\ \text{sistema} \end{pmatrix}}_{\{\ddot{q}(t)\}}$$

A massa do sistema indicada nesta equação será igual a da caixa do mancal ou do rotor dependendo do tipo de modelagem adotada. Assim, é definida uma equação diferencial de segunda ordem do tipo:

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [D] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.3)$$

Classificação das perturbações

A identificação das características dinâmicas de máquinas rotativas é realizada através de perturbações no sistema. As maneiras de se realizar estas perturbações são classificadas, segundo MUSZYNSKA & BENTLY [38], em:

- perturbação *não síncrona*: a energia de perturbação de um sistema independe da sua energia de rotação. Esta excitação deve ser predominante à proveniente do desbalanço do rotor que, neste caso, não é conhecida.
- perturbação do *sistema rotativo em repouso*, ou seja, sem a energia de rotação, comportando-se como uma estrutura passiva;
- perturbação *síncrona*: a única energia do sistema é proveniente da sua rotação, sendo a perturbação dada através de uma força de desbalanço conhecida. Este tipo de excitação dificilmente é utilizada na determinação dos parâmetros de sistemas, dada a dificuldade em conhecê-la.

Os dois últimos casos de perturbação são muito limitados não sendo possível extrair do sistema todas as informações desejáveis. A partir da perturbação com o sistema em repouso, por exemplo, não se obtém as características do sistema ao longo de suas

velocidades de operação. Já no terceiro tipo de perturbação, as equações que descrevem o seu comportamento estão acopladas, possibilitando apenas o cálculo de quatro dos oito coeficientes dinâmicos dos mancais [44]. Devido à interação entre os meios sólido (rotor) e líquido em mancais hidrodinâmicos (rigidez e amortecimento equivalentes), surgem alguns modos de vibrar do sistema que são identificados apenas através de perturbações não síncronas, por exemplo os modos de vibração retrógrados.

Tipos de perturbações

Alguns dos tipos de perturbações que podem ser dadas ao sistema são:

- transitórias

impulsivas [39]: para este tipo de perturbação a faixa de frequência a ser excitada, a força realizada sobre o sistema e a duração do pulso de excitação, são caracterizados pelo tipo de ponta, massa e velocidade de impacto do martelo sobre a estrutura. Devido à facilidade de sua aplicação muitas análises em máquinas rotativas *in situ*, ou seja, no local de trabalho, utilizam este tipo de excitação.

deformações estáticas : o sistema é deslocado de sua posição de equilíbrio sendo dado uma condição inicial de deslocamento.

- vibratórias

senoidal : neste tipo de excitação é utilizado um sinal senoidal puro. A utilização desta perturbação pode evitar problemas de *leakage* caso seja utilizado números inteiros do período do sinal.

periódicas de frequência variada : varredura senoidal (*swept-sine* ou *periodic chirp*) [38]. Este tipo de excitação não apresenta problemas de *leakage* se também for utilizado um número inteiro de períodos do sinal. Maiores detalhes sobre este tipo de sinal estão apresentadas no apêndice A.

aleatórias : para este tipo de excitação é necessário a utilização de janelas, e fazer médias de várias medições a fim de evitar problemas de *leakage*.

sequências binárias pseudo aleatórias (PRBS): sinal periódico de alto conteúdo frequencial [54] e de pequena amplitude, validando a hipótese de linearidade

dos coeficientes dinâmicos [15]. Este tipo de excitação também não apresenta problemas de *leakage*.

Uma das principais vantagens das excitações transitórias sobre as vibratórias é o custo dos equipamentos. Porém, a escolha do tipo de excitação é feita com base na qualidade dos dados obtidos. Comparações realizadas por CHILDS & HALE [13] mostravam que para obter bons resultados com excitações impulsivas é necessário realizar muitas medições e fazer uma média dos resultados no domínio do tempo. Porém, resultados obtidos com uma média de mais de 200 medições ainda não apresentaram melhor qualidade que os obtidos com uma excitação vibratória.

Apesar do sistema de identificação ser linear, os resultados encontrados por cada uma destas excitações não são iguais. Isto deve-se às características de cada uma delas, que apresentam vantagens e desvantagens de acordo com o próprio sistema e com o tipo de análise a ser realizada. Para se obter estimações consistentes e de mínima variância deve-se utilizar perturbações convenientes ao sistema. A dispersão dos resultados pode ser diminuída através do aumento da amplitude da força de atuação no sistema. Porém, devido às análises serem linearizadas, não se deve permitir que a espessura do filme de óleo se torne inferior a um terço da folga radial (h_0). PARKINS apresenta em [41] um critério para analisar se um sistema pode ou não ser linearizado. Este compreende em observar se os parâmetros a serem determinados variam mais do que 50% com a máxima razão de excentricidade do mancal. Não sendo possível utilizar forças de maior amplitude, uma das alternativas para melhorar os resultados é aumentar o número de testes.

Estimação dos parâmetros

Processando os sinais de entrada e saída do sistema, obtém-se a sua função de transferência. Através desta é possível identificar os parâmetros que descrevem o seu comportamento dinâmico. Porém, muitos erros podem estar presentes nas medições, provenientes de: (i) não inclusão de variáveis desconhecidas ao modelo; (ii) processo aleatório de operação do sistema; (iii) erros de observação; entre outras. Quando os parâmetros a serem determinados estão correlacionados com estes erros pode-se, então, ter o efeito de polarização (tendência do resultado convergir para um valor que não corresponde ao valor correto).

O processo de identificação pode ser feito tanto no domínio do tempo como no da frequência, conhecido também por método de *Fourier*. A análise no domínio da frequência é atualmente a mais usual para identificações dinâmicas em estruturas de engenharia, devido à facilidade em se aplicar a *FFT* (*Fast Fourier Transform*) nos sinais, e dos resultados serem menos influenciados pelos efeitos de ruídos e de polarização [10]. Para este método é necessário que o sistema seja excitado ao longo de uma grande faixa de frequência, utilizando-se sinais multifrequenciais e que este seja periódico [10]. Portanto, o estudo no domínio da frequência não é conveniente quando se desconhece o tipo de excitação que está sendo aplicado como, por exemplo, em estruturas que são excitadas pelo vento, ou fenômenos de turbulência em fluido (altos valores de Reynolds) [3]. Desta forma, algumas identificações são ainda resolvidas preferencialmente no domínio do tempo, principalmente se a identificação for feita nas condições de operação do sistema, onde há um grande número de excitações aleatórias.

Muitos autores, como SAHINKAYA & BURROWS [44] [10], realizaram várias comparações entre as estimações no domínio do tempo e no domínio da frequência. Observou-se que as análises no domínio do tempo, ao utilizar um sinal multifrequencial e um estimador de mínimos quadrados, são conceitualmente superiores. Porém, na prática, devido aos erros de medições e a transformação de um sinal contínuo em um sinal discreto no tempo, surgem grandes erros nas análises numéricas. Desta forma, o sinal no domínio da frequência atinge melhores resultados, principalmente se forem utilizados filtros que eliminem as altas frequências, onde estão presentes a maioria dos ruídos.

A fim de ajustar as várias medições de identificação de um sistema, são aplicados alguns algoritmos estatísticos aos parâmetros identificados. Entre eles tem-se:

- *Método dos mínimos quadrados*: os parâmetros de interesse são obtidos a partir da minimização da soma dos quadrados dos resíduos, ou erros, obtidos em cada identificação. Assim, escrevendo as equações que descrevem o sistema na forma:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b} \tag{2.4}$$

sendo \mathbf{p} o vetor dos parâmetros a serem determinados, \mathbf{A} a matriz formada pelos termos que multiplicam os parâmetros de \mathbf{p} , e \mathbf{b} o vetor formado pelos termos

que independem de \mathbf{p} , a determinação dos parâmetros do sistema pelo método dos mínimos quadrados é dada por:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{mq} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{p}_{mq} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \quad (2.6)$$

Este método resulta em estimações tendenciosas (efeito de polarização), principalmente na presença de altos índices de ruídos [5], a não ser que estes sejam tratados anteriormente utilizando-se, por exemplo, um filtro de *Kalman* [43].

- *Método das variáveis instrumentais*: este é uma versão sofisticada do método dos mínimos quadrados. Ao invés de se fazer a estimação pela minimização da soma dos quadrados dos erros, minimiza-se uma soma ponderada por coeficientes denominados *variáveis instrumentais*. Desta forma, tenta-se reduzir o efeito de polarização nos parâmetros estimados, quando as respostas estão poluídas por ruídos. Este é um método iterativo, onde os valores iniciais das variáveis instrumentais são calculadas a partir do método dos mínimos quadrados. Destes valores, determina-se uma matriz auxiliar \mathbf{W} , análoga a matriz \mathbf{A} . Assim, os parâmetros do vetor \mathbf{p} são dados pela equação:

$$\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{vi} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{b} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{p}_{vi} = (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{b} \quad (2.8)$$

Calculado o vetor \mathbf{q}_{vi} , recalcula-se a matriz \mathbf{W} e uma nova estimação para os parâmetros do sistema é realizado. Este processo deve se repetir até que a solução convirja para valores estáveis.

Segundo OLIVEIRA & ARRUDA [40] e YOUNG [63], este método foi, provavelmente, proposto pela primeira vez por JOSEPH, LEWIS & TOU [29] para estimação de parâmetros no domínio do tempo. Porém, os autores deste trabalho não se referem de forma explícita a este método. Em seguida, ANDEEN & SHIPLEY [2] propuseram uma versão modificada da apresentada em [29], com aplicação teórica em um sistema de controle de vôo adaptativo digital em um veículo aeroespacial. Pouco tempo depois, LEVADI [31] descreveu, pelo método das variáveis

instrumentais, um mecanismo puramente analógico para identificar um processo dinâmico linear descrito por uma equação diferencial. Apenas nos anos 80, foi, então, formulado por FRITZEN [19], a estimação de parâmetros no domínio da frequência [40].

Comparações entre os métodos dos mínimos quadrados e das variáveis instrumentais são apresentadas em vários trabalhos [5] [22], onde se determinam os coeficientes de rigidez e amortecimento de mancais hidrodinâmicos. O método das variáveis instrumentais sempre apresentou uma maior consistência nos resultados, mostrando-se ser mais adequado em todas as situações.

- *Método da máxima probabilidade* [37] [14]: é o método que mais utiliza as propriedades estatísticas, apresentando a melhor estimação dos parâmetros. Porém, é extremamente complexo computacionalmente para ser aplicado em sistemas dinâmicos. Este ainda requer informações da função de densidade probabilística dos ruídos.
- *Método de Prony* [14] [25]: ajusta a resposta do sistema por uma soma de exponenciais complexas. A sensibilidade deste método a ruídos pode ser diminuída com o aumento da ordem do modelo.
- *Método no domínio do tempo de Ibrahim (ITD)* [26]: este método analisa as respostas livres do sistema. Os seus parâmetros podem ser obtidos através da manipulação das equações de estado do movimento [26], como pelo ajuste dos dados medidos por séries exponenciais complexas [27]. Este método, quando aplicado em sistemas de vários graus de liberdade, possui a vantagem de apresentar uma formulação computacional mais simples que a de outros métodos. Porém, a estimação dos parâmetros pode ser afetada pela presença de ruídos nas medições.
- *Método no domínio do tempo para estruturas de vários graus de liberdade*: é apresentado por HAC & SPANOS em [22], como um método de baixa sensibilidade aos ruídos de medições. Sua principal característica consiste em melhorar a qualidade dos dados de medição através de um filtro adaptativo de *Kalman*. Devido à necessidade do conhecimento dos parâmetros do sistema para a utilização deste filtro, realiza-se um processo iterativo. A estimação inicial dos parâmetros do sistema é feita, por exemplo, com o método *ITD*. Os erros dos parâmetros são compensados durante a filtragem dos sinais, adicionando-se pseudo-ruídos às equações do

sistema. A intensidade deste ruído é estimada com base na discrepância entre os dados medidos e os estimados.

Utilizando algum destes métodos de estimação, pode-se, então, determinar os parâmetros de um mancal hidrodinâmico. Estes servem de ajuste para o modelo matemático desenvolvido para este sistema, tornando-o coerente com o modelo físico. Uma vez determinado o modelo matemático capaz de representar de maneira fiel o comportamento do sistema, muitas conclusões podem ser obtidas apenas através de simulações matemáticas. Algumas das características do sistema que podem ser previstas através destas simulações são:

- frequências de ressonância;
- condições estáveis de operação;
- comportamento do sistema após alteração de parte de seu projeto;
- diagnosticar uma suposta falha do equipamento;
- otimizar protótipos de projeto;
- respostas do sistema em casos extremos de solicitação;
- determinação das forças aplicadas ao sistema a partir do conhecimento de seu comportamento.

Capítulo 3

Modelagem Matemática de Mancais Segmentados Híbridos

3.1 Introdução

O modelo matemático de mancais hidrodinâmicos tem como ponto de partida a equação de fluidos lubrificantes conhecida como *equação de Reynolds*. Esta é definida com o auxílio das equações de Navier-Stokes e da continuidade. No caso específico desta pesquisa determina-se uma nova equação, chamada aqui de *equação de Reynolds Modificada*, a qual leva em consideração a injeção do filme de óleo na folga radial.

Estas duas equações dependem das propriedades do fluido lubrificante (ρ -densidade e μ -viscosidade dinâmica), da velocidade relativa entre o rotor e o mancal (V), e ainda da folga radial entre o rotor e os segmentos ($h(\bar{y}, t)$). A Equação de Reynolds Modificada é função ainda da velocidade e pressão de injeção do fluido lubrificante.

Mancais com dimensões finitas não possuem uma solução analítica exata para a Equação de Reynolds/Modificada, sendo necessário a utilização de métodos numéricos. Os mais comuns são o Método das Diferenças Finitas (MDF) [55], Método dos Elementos Finitos (MEF) [24], e métodos que utilizam séries finitas para descrever a distribuição de pressão ao longo da superfície do mancal [16] [42]. Neste capítulo é apresentado o método de Diferenças Finitas e ainda um outro método conhecido por método dos Volumes Finitos.

Uma vez resolvida a equação de Reynolds Modificada, tem-se, então, a distribuição de pressão ao longo de cada um dos segmentos. Integrando estes valores, determinam-se as forças hidrodinâmicas nas folgas radiais, as quais serão utilizadas na determinação do ponto de equilíbrio dos segmentos do mancal e do próprio rotor.

3.2 Hipóteses

Antes de desenvolver as Equações de Reynolds e Reynolds Modificada é necessário assumir algumas hipóteses. A seguir estão indicadas as condições que foram adotadas neste modelo:

- considera-se nula a ação de forças de campo sobre o filme de óleo, ou seja, desprezam-se as forças devido ao campo gravitacional da Terra.
- a pressão no filme de óleo é considerada constante ao longo da direção \bar{x} , o que é válido para folgas radiais da ordem de μm ;
- o fluido que está em contato com alguma das superfícies, seja do rotor ou da sapata, possui a mesma velocidade que esta;
- o fluido é considerado Newtoniano, ou seja, a tensão de cisalhamento do fluido é proporcional à sua taxa de deformação;
- a temperatura e a viscosidade do lubrificante são consideradas constantes ao longo do tempo;
- o escoamento do filme de óleo é considerado laminar, ou seja, não existe vórtice ou turbulência no interior do mancal;
- a inércia do fluido é desprezada uma vez que o fluxo de óleo está em regime laminar;

3.3 Equação de Reynolds

Para o desenvolvimento analítico da Equação de Reynolds e Reynolds Modificada, utiliza-se 4 sistemas de referência. O primeiro deles é posicionado no centro do mancal, sendo denominado sistema inercial - $I(X, Y, Z)$, como mostrado na Figura 3.1-(a). O segundo sistema indica o posicionamento da j -ésima sapata no mancal, denominado sistema auxiliar - $B_j(x_j, y_j, z_j)$, e está indicado na Figura 3.1-(b). Cada sapata, por sua vez, possui um sistema auxiliar próprio denominado sistema móvel - $B'_j(x'_j, y'_j, z'_j)$, mostrado na Figura 3.1-(c). O quarto, e último sistema, acompanha a superfície interna da sapata, sendo chamado de sistema de referência móvel curvilíneo - $\bar{B}_j(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$, Figura 3.1-(d).

O equacionamento do fluido ao longo da folga radial é realizado através da equação da continuidade. Considerando uma coluna de fluido de altura h , e base $d\bar{y}$, $d\bar{z}$ (Figura 3.2), a vazão de fluido que está entrando à esquerda da coluna (direção \bar{y}) é dada por:

$$Q_{\bar{y}} = v_{\bar{y}} \cdot (d\bar{z} \cdot h) \quad (3.1)$$

onde $v_{\bar{y}}$ é a velocidade do fluido na direção \bar{y} . Escrevendo a vazão por unidade de comprimento, tem-se:

$$q_{\bar{y}} = \frac{Q_{\bar{y}}}{d\bar{z}} = v_{\bar{y}} \cdot h \quad (3.2)$$

A vazão do fluido na saída da coluna nesta mesma direção é dada por:

$$Q_{\bar{y}} + \frac{\partial Q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = \left(q_{\bar{y}} + \frac{\partial q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} \right) d\bar{z} \quad (3.3)$$

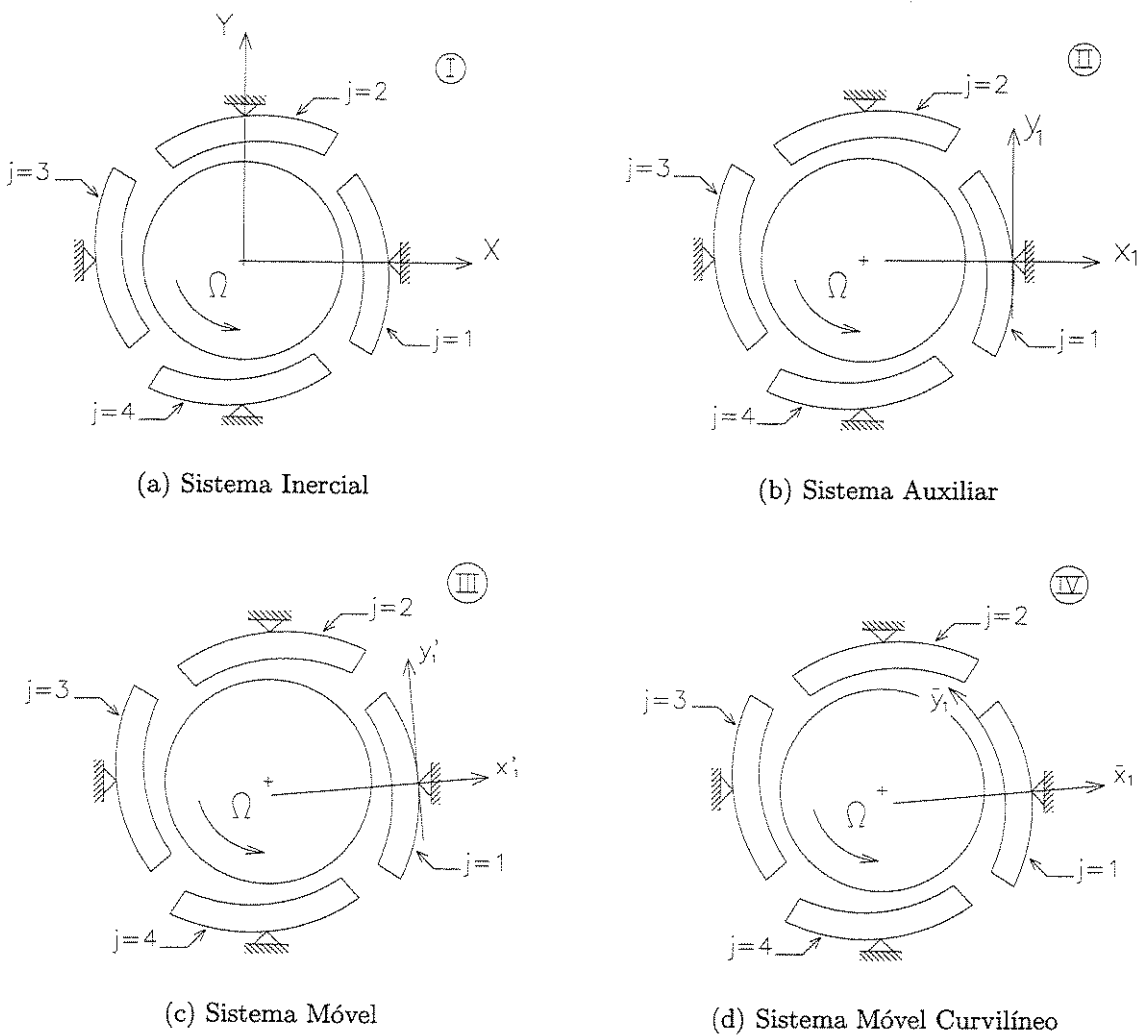


Figura 3.1: *Sistemas de referência.*

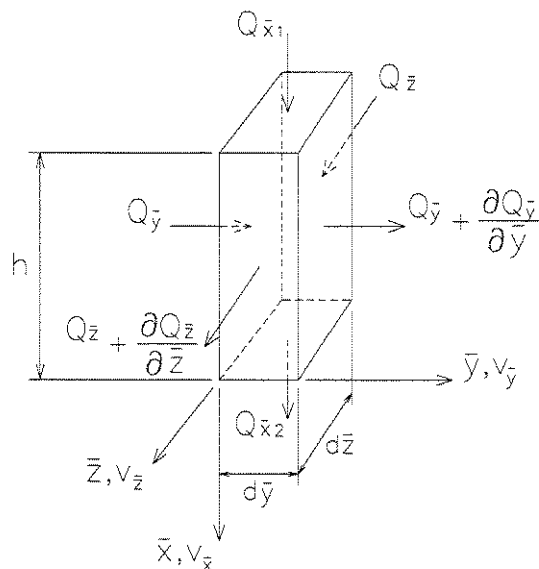


Figura 3.2: Continuidade do escoamento de um fluido numa coluna.

Este mesmo equacionamento pode ser feito para a direção \bar{z} , onde se obtém na entrada:

$$Q_{\bar{z}} = v_{\bar{z}} \cdot (d\bar{y} \cdot h) = q_{\bar{z}} \cdot d\bar{y} \quad (3.4)$$

tendo $v_{\bar{z}}$ como sendo a velocidade do fluido na direção \bar{z} . Na saída a vazão do fluido será de:

$$Q_{\bar{z}} + \frac{\partial Q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \left(q_{\bar{z}} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) d\bar{y} \quad (3.5)$$

O estudo deste elemento de fluido na direção vertical, direção \bar{x} , é um pouco diferente. O escoamento para o interior do elemento nesta direção é resultante dos movimentos do rotor e da sapata. Se o rotor estiver se deslocando para baixo a uma velocidade v_1 , a vazão de entrada será de:

$$(Q_{\bar{x}})_{\text{entrada}} = v_{1\bar{x}} d\bar{y} d\bar{z} \quad (3.6)$$

Assumindo que a sapata também está se movimentando para baixo, porém a uma

velocidade v_2 , a vazão de fluido na saída do elemento será de:

$$(Q_{\bar{x}})_{saída} = v_{2\bar{x}} d\bar{y} d\bar{z} \quad (3.7)$$

Considerando a continuidade do escoamento em todas as direções, e sabendo que a densidade do mesmo deve ser mantida constante, tem-se que a mesma vazão mássica que está entrando no elemento deve estar saindo. Assim,

$$(Q_{\bar{x}} + Q_{\bar{y}} + Q_{\bar{z}})_{entrada} = (Q_{\bar{x}} + Q_{\bar{y}} + Q_{\bar{z}})_{saída} \quad (3.8)$$

$$v_{1\bar{x}} d\bar{y} d\bar{z} + q_{\bar{y}}.d\bar{z} + q_{\bar{z}}.d\bar{y} = v_{2\bar{x}} d\bar{y} d\bar{z} + \left(q_{\bar{y}} + \frac{\partial q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} \right) d\bar{z} + \left(q_{\bar{z}} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) d\bar{y} \quad (3.9)$$

logo, tem-se que:

$$\frac{\partial q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} d\bar{z} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{y} d\bar{z} + \underbrace{(v_{2\bar{x}} - v_{1\bar{x}})}_V d\bar{y} d\bar{z} = 0 \quad (3.10)$$

Sendo v_1 e v_2 apenas dependentes dos movimentos do rotor e da sapata, pode-se entender que a diferença entre estas velocidades ($V = v_{2\bar{x}} - v_{1\bar{x}}$) é função da variação da folga radial no tempo. Ou seja, da derivada de h em relação ao tempo. Sabendo que a folga radial é medida a partir da sapata, tem-se que valores positivos de V correspondem a derivadas negativas de h , ou seja, $V = -\partial h / \partial t$.

Desta forma, a equação da continuidade do escoamento pode ser escrita como:

$$\frac{\partial q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.11)$$

Obtida a equação da continuidade realiza-se o balanço das forças que agem sobre um elemento de fluido. Iniciando novamente pela direção \bar{y} , observa-se que as forças presentes neste elemento correspondem às que estão indicadas na Figura 3.3.

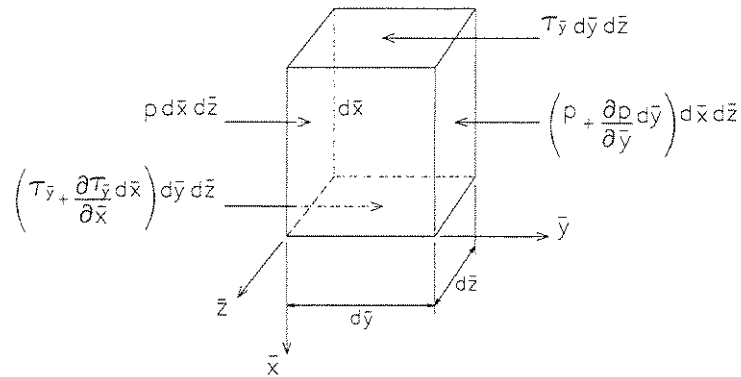


Figura 3.3: Forças atuantes na direção \bar{y} num elemento de fluido.

Estando o elemento em equilíbrio, tem-se:

$$p d\bar{x} d\bar{z} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} d\bar{y} \right) d\bar{x} d\bar{z} - \tau_{\bar{y}} d\bar{y} d\bar{z} + \left(\tau_{\bar{y}} + \frac{\partial \tau_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right) d\bar{y} d\bar{z} = 0 \quad (3.12)$$

Simplificando a equação anterior chega-se a:

$$-\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} + \frac{\partial \tau_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \quad (3.14)$$

Uma das hipóteses adotadas foi considerar o fluido como sendo Newtoniano, ou seja, a tensão de cisalhamento do fluido é proporcional à sua taxa de deformação. Desta forma, pode-se escrever que:

$$\tau_{\bar{y}} = \mu \cdot \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} \quad (3.15)$$

sendo μ a viscosidade dinâmica do filme de óleo.

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.14) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\mu \cdot \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \quad (3.16)$$

Integrando a equação (3.16) em relação a \bar{x} chega-se a:

$$\mu \cdot \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} = C_1 + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \bar{x} \quad (3.17)$$

Considerando a viscosidade constante, e integrando novamente em relação a \bar{x} tem-se:

$$\mu \cdot v_{\bar{y}} = C_2 + C_1 \cdot \bar{x} + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \frac{\bar{x}^2}{2} \quad (3.18)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições de contorno, dadas pela velocidade do escoamento na direção \bar{y} ao longo da direção \bar{x} :

$$\begin{aligned} \bar{x} = 0 & \rightarrow v_{\bar{y}}(0, \bar{y}, \bar{z}) = 0 & \text{(velocidade da superfície da sapata)} \\ \bar{x} = -h & \rightarrow v_{\bar{y}}(-h, \bar{y}, \bar{z}) = U & \text{(velocidade da superfície do rotor)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituído estas condições na equação (3.18) tem-se:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= -\mu \frac{U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assim, a velocidade $v_{\bar{y}}$ ao longo da folga radial é dada por:

$$v_{\bar{y}} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} (\bar{x}h + \bar{x}^2) - \frac{U}{h} \bar{x} \quad (3.21)$$

Sendo $q_{\bar{y}}$ igual a $\int_0^{-h} v_{\bar{y}} d\bar{x}$ tem-se:

$$\begin{aligned} q_{\bar{y}} &= \int_0^{-h} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} (\bar{x}h + \bar{x}^2) - \frac{U}{h} \bar{x} \right] d\bar{x} = \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{x}^2}{2} h + \frac{\bar{x}^3}{3} \right) - \frac{U}{h} \frac{\bar{x}^2}{2} \right] \Big|_0^{-h} = \\ &= \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} - U \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Logo, $\partial q_{\bar{y}}/\partial \bar{y}$ é dado por:

$$\frac{\partial q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} - U \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \quad (3.23)$$

Realizando o mesmo balanço de forças sobre este elemento, agora para a direção \bar{z} , chega-se a uma equação similar à equação (3.14):

$$\frac{\partial \tau_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \quad (3.24)$$

Novamente, por ser um fluido Newtoniano sabe-se que a tensão de cisalhamento é proporcional à sua taxa de deformação, chegando-se a:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\mu \cdot \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \quad (3.25)$$

Integrando a equação (3.25) em relação a \bar{x} tem-se:

$$\mu \cdot \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} = C_1 + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \bar{x} \quad (3.26)$$

Tendo a viscosidade constante, e integrando a equação (3.26) em relação a \bar{x} , obtém-se:

$$\mu \cdot v_{\bar{z}} = \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \frac{\bar{x}^2}{2} + C_1 \cdot \bar{x} + C_2 \quad (3.27)$$

As condições de contorno na direção \bar{z} são dadas pela variação de $v_{\bar{z}}$ ao longo da direção \bar{x} :

$$\begin{aligned} \bar{x} = 0 & \Rightarrow v_{\bar{z}}(0, \bar{y}, \bar{z}) = 0 \\ \bar{x} = -h & \Rightarrow v_{\bar{z}}(-h, \bar{y}, \bar{z}) = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Logo, as constantes de integração C_1 e C_2 são iguais a:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, a velocidade $v_{\bar{z}}$ ao longo da folga radial é dada por:

$$v_{\bar{z}} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} (\bar{x}h + \bar{x}^2) \quad (3.30)$$

Sendo $q_{\bar{z}}$ igual a $\int_0^{-h} v_{\bar{z}} d\bar{x}$ tem-se:

$$q_{\bar{z}} = \int_0^{-h} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} (\bar{x}h + \bar{x}^2) \right] d\bar{x} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{x}^2}{2}h + \frac{\bar{x}^3}{3} \right) \Big|_0^{-h} = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \quad (3.31)$$

Desta forma, $\partial q_{\bar{z}}/\partial \bar{z}$ é dado por:

$$\frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) \quad (3.32)$$

Substituindo as equações (3.23) e (3.32) na equação da continuidade (equação (3.11)), chega-se a:

$$\frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.33)$$

Rearranjando a equação (3.33) obtém-se, então, a *Equação de Reynolds*:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.34)$$

3.4 Equação de Reynolds Modificada

Para o mancal hidrodinâmico híbrido abordado nesta pesquisa um novo termo deve ser acrescentado à equação (3.34). Este é resultante da injeção de filme de óleo na folga radial (Figura 3.4). Analisando novamente o elemento de fluido mostrado na Figura 3.2, tem-se agora que $v_{2\bar{x}}$ representa tanto a velocidade de movimentação da sapata como também a velocidade de injeção do fluido lubrificante através dos orifícios (V_{inj}):

$$v_{2\bar{x}} = v_{sapata} - V_{inj} \quad (3.35)$$

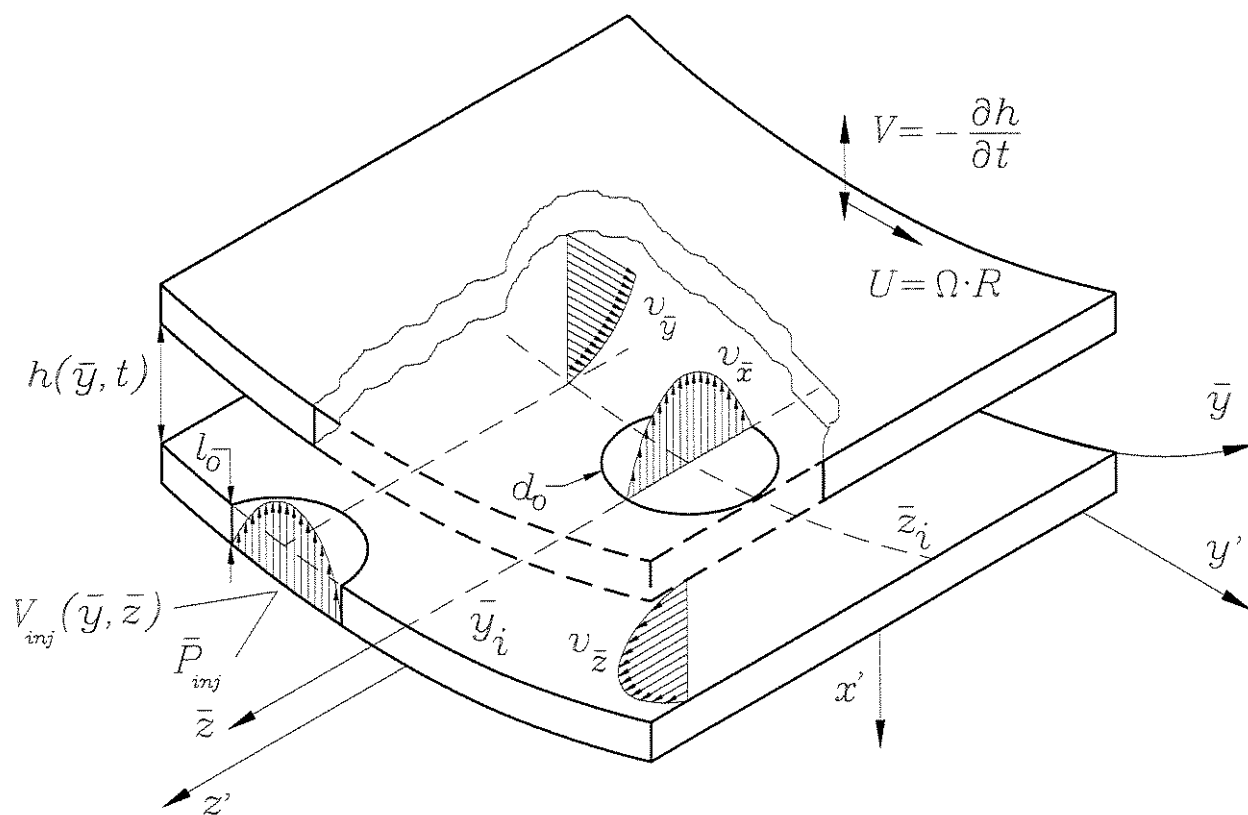


Figura 3.4: Perfil de velocidades sobre uma das sapatas de um mancal com lubrificação híbrida.

Substituindo este novo valor de $v_{z\bar{x}}$ na equação (3.10) tem-se:

$$\frac{\partial q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} d\bar{y}d\bar{z} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{y}d\bar{z} + (v_{sapata} - V_{inj} - v_{1\bar{x}})d\bar{y}d\bar{z} = 0 \quad (3.36)$$

Porém, sabe-se que $(V = v_{sapata} - v_{1\bar{x}})$ representa a variação da espessura do filme de óleo ao longo do tempo, podendo escrever:

$$\frac{\partial q_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} = 0 \quad (3.37)$$

Para o cálculo da velocidade de injeção do fluido lubrificante (V_{inj}) é considerado um escoamento laminar completamente desenvolvido no interior de cada um dos orifícios das sapatas do mancal, como mostrado na Figura 3.5.

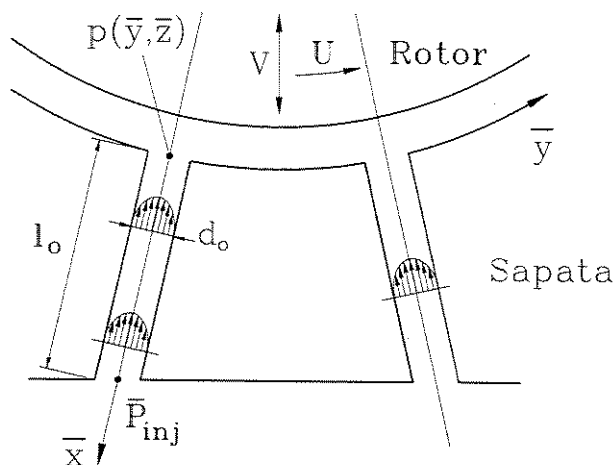


Figura 3.5: Injeção de filme de óleo na folga radial.

A fim de se estudar este escoamento analisa-se um volume de controle anelar diferencial de comprimento $d\bar{x}$ e espessura dr , como indicado na Figura 3.6.

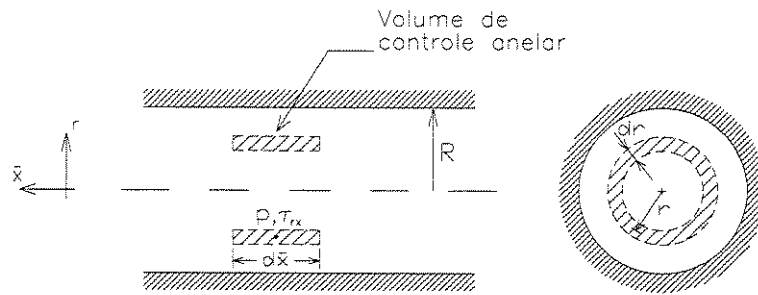


Figura 3.6: Volume de controle anelar utilizado para estudar o escoamento do filme de óleo ao longo dos orifícios das sapatas do mancal.

Sendo o escoamento permanente e completamente desenvolvido, tem-se que a força resultante no volume de controle deve ser nula. Portanto, realiza-se um balanço de forças sobre este elemento de fluido. As forças atuantes na direção \bar{x} são forças de pressão. Assim, para uma pressão no centro do volume de controle igual a p , as forças atuantes nas faces da esquerda e direita do volume de controle são dadas por:

$$F_{esq} = - \left(p - \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{2} \right) 2\pi r dr \quad (3.38)$$

$$F_{dir} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{2} \right) 2\pi r dr$$

Analisando agora as forças tangenciais, e considerado τ_{rx} como sendo a tensão tangencial no centro do volume de controle, as forças resultantes nas superfícies externa e interna do cilindro serão iguais a:

$$F_{ext} = - \left(\tau_{rx} + \frac{d\tau_{rx}}{dr} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\bar{x} \quad (3.39)$$

$$F_{int} = \left(\tau_{rx} - \frac{d\tau_{rx}}{dr} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\bar{x}$$

Realizando o equilíbrio estático destas forças tem-se:

$$F_{dir} + F_{esq} + F_{int} + F_{ext} = 0 \quad (3.40)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \left(p + \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{2} \right) 2\pi r dr - \left(p - \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{2} \right) 2\pi r dr + \\ & + \left(\tau_{r\bar{x}} - \frac{d\tau_{r\bar{x}}}{dr} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\bar{x} - \left(\tau_{r\bar{x}} + \frac{d\tau_{r\bar{x}}}{dr} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Resolvendo a equação acima chega-se a:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} = \frac{d\tau_{r\bar{x}}}{dr} + \frac{\tau_{r\bar{x}}}{r} = \frac{1}{r} \frac{d(r \cdot \tau_{r\bar{x}})}{dr} \quad (3.42)$$

$$\frac{d(r \cdot \tau_{r\bar{x}})}{dr} = r \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \quad (3.43)$$

Integrando a equação (3.43) em função de r , chega-se a:

$$\tau_{r\bar{x}} = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \frac{C_1}{r} \quad (3.44)$$

Sabendo que o fluido é considerado Newtoniano pode-se escrever que:

$$\tau_{r\bar{x}} = \mu \frac{dV_{inj}}{dr} \quad (3.45)$$

Substituindo a equação (3.44) em (3.45), chega-se a:

$$\mu \frac{dV_{inj}}{dr} = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \frac{C_1}{r} \quad (3.46)$$

Integrando novamente em relação a r , tem-se:

$$V_{inj} = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \frac{C_1}{\mu} \ln(r) + C_2 \quad (3.47)$$

As constantes de integração, C_1 e C_2 , podem ser avaliadas de acordo com as condições de contorno do problema. Porém, a única condição de fronteira é a velocidade do fluido na parede do tubo, ou seja, $V_{inj} = 0$ para $r = R$. Mas, sabe-se através de considerações físicas, que a velocidade deve ser finita para $r = 0$. Logo, para que isto seja verdade é necessário que o valor de C_1 seja nulo. Assim, tem-se que:

$$V_{inj} = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + C_2 \quad (3.48)$$

Fazendo $r = R$ e $V_{inj} = 0$, tem-se:

$$0 = \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + C_2 \quad (3.49)$$

$$C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}}$$

Desta forma obtém-se:

$$V_{inj} = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} (r^2 - R^2) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} (R^2 - r^2) \quad (3.50)$$

Reescrevendo V_{inj} em função das coordenadas da base móvel curvilínea (\bar{B}_j) , encontra-se:

$$V_{inj} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \left[\frac{d_0^2}{4} - (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_i)^2 \right] \quad (3.51)$$

sendo \bar{y}_i e \bar{z}_i as coordenadas de centro do orifício i da sapata.

Considerando todos os orifícios ($i = 1, \dots, s$), tem-se que a velocidade de injeção do fluido na folga radial será dada por:

$$V_{inj} = -\frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^s \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \left[\frac{d_0^2}{4} - (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_i)^2 \right] \quad (3.52)$$

Considerando-se a variação da pressão de injeção ao longo do orifício linear, pode-se escrever ainda que:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \approx \frac{\bar{P}_{inj}(t) - p(\bar{y}, \bar{z}, t)}{l_0} \quad (3.53)$$

onde l_0 é o comprimento do orifício (Figura 3.5). Desta forma V_{inj} é igual a:

$$V_{inj} = -\frac{1}{4\mu l_0} \sum_{i=1}^s (\bar{P}_{inj}(t) - p(\bar{y}, \bar{z}, t)) \mathcal{F}_i(\bar{y}, \bar{z}) \quad (3.54)$$

$\mathcal{F}_i(\bar{y}, \bar{z})$ é a função de forma, que indica o posicionamento dos pontos de injeção de óleo, sendo igual a:

$$\mathcal{F}_i(\bar{y}, \bar{z}) = \begin{cases} \frac{d_0^2}{4} - (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_i)^2 & , \text{ se } (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_i)^2 \leq \frac{d_0^2}{4} \\ 0 & , \text{ se } (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_i)^2 \geq \frac{d_0^2}{4} \end{cases} \quad (3.55)$$

Na Figura 3.7 tem-se a representação desta função em uma das sapatas do mancal, a qual possui 5 orifícios.

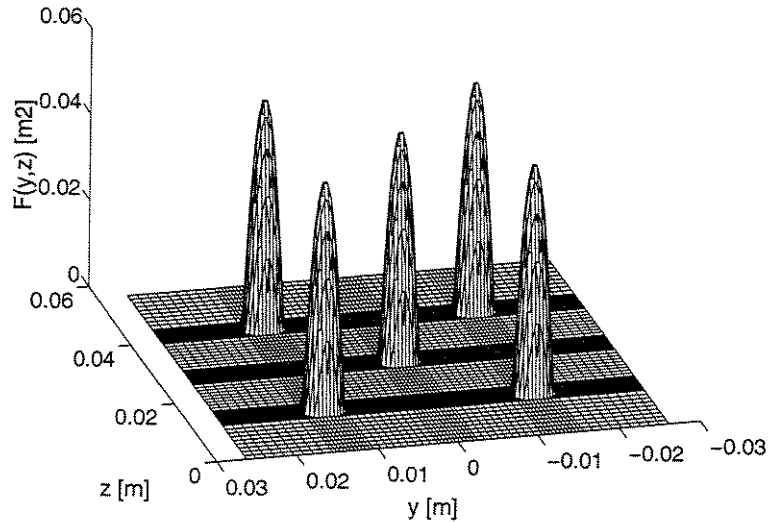


Figura 3.7: Representação da função $\mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z})$ numa das sapatas do mancal, com discretização de 48 pontos em cada uma das direções.

Substituindo os valores de $\partial q_{\bar{y}}/\partial \bar{y}$ e $\partial q_{\bar{z}}/\partial \bar{z}$ obtidos nas equações (3.23) e (3.32), e de V_{inj} (equação (3.54)), na equação da continuidade apresentada em (3.37), obtem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{3}{\mu l_0} \sum_{i=1}^s p(\bar{y}, \bar{z}, t) \mathcal{F}_i(\bar{y}, \bar{z}) = 6U \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{3}{\mu l_0} \sum_{i=1}^s \bar{P}_{inj}(t) \mathcal{F}_i(\bar{y}, \bar{z}) \quad (3.56)$$

Esta equação descreve o comportamento do escoamento ao longo da sapata em mancais que apresentam injeção de filme de óleo na folga radial, sendo denominada aqui de *Equação de Reynolds Modificada*. Observa-se que esta equação é descrita no último sistema de coordenadas (sistema de coordenadas móvel curvilíneo), fazendo com que a velocidade do fluido de injeção permaneça constante quanto à direção, variando somente em termos de amplitude.

É importante lembrar que para a solução da Equação de Reynolds, e Equação de Reynolds Modificada, é necessário ter o conhecimento da função da espessura do filme de óleo, a qual varia com a coordenada \bar{y} , com as posições do rotor e das sapatas, e com o tempo. Apresenta-se a seguir o método utilizado na determinação desta variável ao longo de todas as sapatas.

3.5 Espessura do filme de óleo ($h(\bar{y}, t)$)

A determinação da espessura do filme de óleo pode ser feita vetorialmente como é mostrado na Figura 3.8. O ponto A indica uma posição genérica da superfície do segmento onde se deseja determinar a espessura do filme de óleo; o ponto B é o ponto de apoio e de rotação da sapata; e o ponto O é o centro do segmento. Os pontos A' , B' , O' correspondem aos pontos A , B e O em instantes de tempo diferentes.

Ressalta-se que para facilidade dos cálculos considerou-se o deslocamento relativo entre o rotor e sapata como sendo apenas da sapata, estando o rotor parado.

A partir da Figura 3.8 pode-se escrever a seguinte equação vetorial:

$$B_j \mathbf{r}_{OD} + B_j \mathbf{r}_{DE} + B_j \mathbf{r}_{EO'} + B_j \mathbf{r}_{O'C'} + B_j \mathbf{r}_{C'F} + B_j \mathbf{r}_{FO} = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

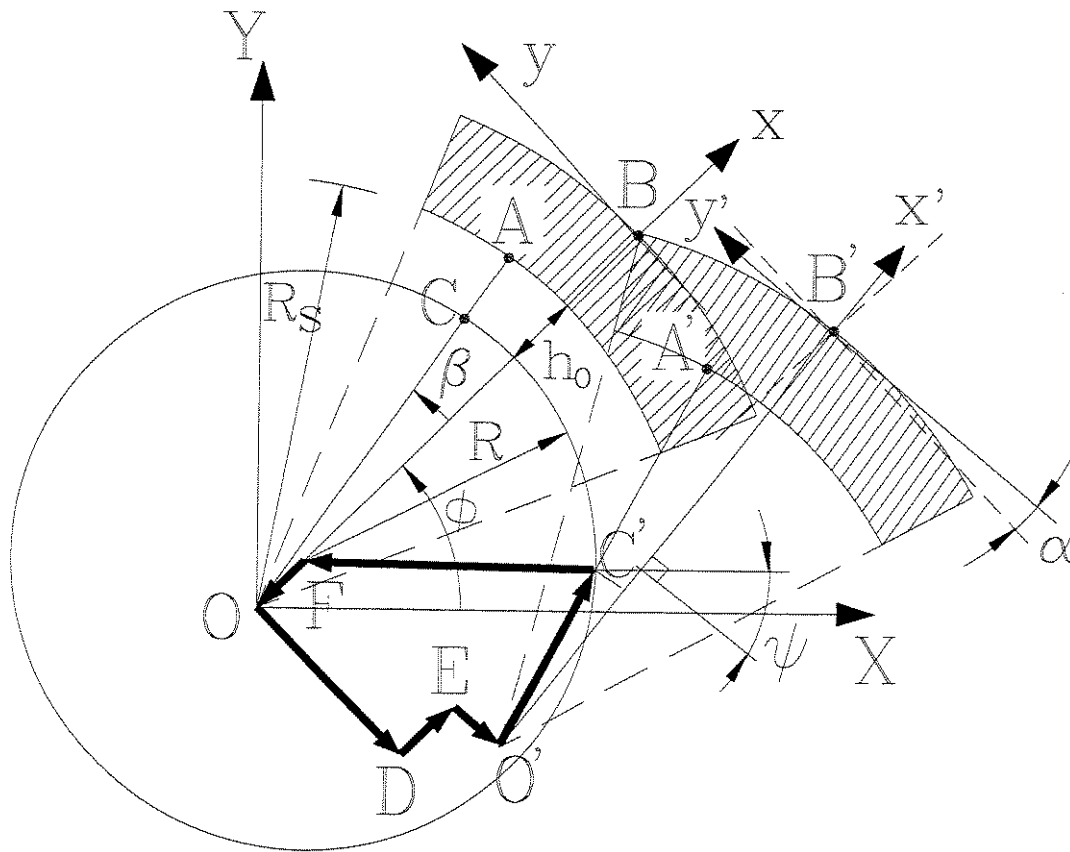


Figura 3.8: Cinemática do subsistema rotor-sapata.

Para poder efetuar a soma dos vetores da equação (3.57) é necessário que todos estejam representados no mesmo sistema de coordenadas. Adota-se como base para estes vetores a do sistema auxiliar B_j .

O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{OD}$ é descrito em função da distância entre a origem do raio do segmento e o deslocamento da sapata na direção y_j . O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{DE}$ é função da distância entre o ponto D e E , obtido quando a sapata é transladada na direção x_j . A soma destes dois vetores é dada por:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{OD} + {}_{B_j}\mathbf{r}_{DE} = {}_{B_j}\mathbf{r}_{OE} = \begin{Bmatrix} x_R \\ -y_R \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Além da translação, existe a rotação da sapata em torno do ponto B . O ângulo de rotação α é pequeno e o segmento de arco percorrido pelo ponto O pode ser aproximado por uma reta. Então, pode-se escrever:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{EO'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(R_s + h_s) * \alpha_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Já o vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{O'C'}$, descrito em função da distância entre o ponto O' e o ponto de intersecção formado pela linha $O'A'$ com a superfície do rotor, é dado por:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{O'C'} = \begin{Bmatrix} r_{O'C'} * \cos\beta \\ r_{O'C'} * \sen\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

sendo o mesmo descrito na base móvel B_j' .

Passando-o para a base B_j , através de uma matriz de transformação, tem-se:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{O'C'} = \begin{Bmatrix} r_{O'C'} * \cos\beta - \alpha_j * r_{O'C'} * \sen\beta \\ \alpha_j * r_{O'C'} * \cos\beta + r_{O'C'} * \sen\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{C'F}$ descrito em função da distância entre o ponto C' , encontrado ante-

riormente, e o centro do rotor, é dado por:

$${}_{B_j'}\mathbf{r}_{C'F} = \begin{Bmatrix} -R * \text{sen}\psi \\ R * \text{cos}\psi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Passando para a base B_j , tem-se:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{C'F} = \begin{Bmatrix} -R * \text{sen}\psi - R * \alpha_j * \text{cos}\psi \\ -R * \alpha_j * \text{sen}\psi + R * \text{cos}\psi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{FO}$ é descrito em função da diferença dos raios do rotor e do segmento, e da espessura inicial do filme de óleo h_0 , medido na direção x :

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{FO} = \begin{Bmatrix} -(R_s - R - h_0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

Substituindo as equações de (3.58) à (3.64) na equação (3.57), chega-se a duas equações:

$$R(\text{sen}\psi + \alpha_j * \text{cos}\psi) = x_R + r_{O'C'}(\text{cos}\beta - \alpha_j * \text{sen}\beta) - \Delta r \quad (3.65)$$

e

$$R(\alpha_j * \text{sen}\psi - \text{cos}\psi) = -y_R - (R_s + h_s) * \alpha_j + r_{O'C'}(\alpha_j * \text{cos}\beta + \text{sen}\beta) \quad (3.66)$$

Fazendo a subtração dos quadrados das equações (3.65) e (3.66), e desprezando-se os termos de segunda ordem, chega-se em:

$$r_{O'C'} = \text{sen}\beta(y_R + \alpha_j * R_s) + \text{cos}\beta(x_R - \Delta r) + R \quad (3.67)$$

A espessura do filme de óleo, medida no sistema de referência móvel fixo à sapata,

3.6. Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada 40

é dada então por:

$$h(\beta) = R_s - r_{O'C'} \quad (3.68)$$

ou seja,

$$h(\beta) = R_s - R - \{ \text{sen}\beta[y_R + \alpha_j * (R_s + h_s)] + \text{cos}\beta(x_R + R_s - R - h_0) \} \quad (3.69)$$

Uma vez conhecida a espessura do filme de óleo, resolve-se a equação de Reynolds de forma iterativa através de algum método numérico, obtendo-se a distribuição de pressão em função da posição do rotor e das sapatas.

3.6 Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada

A distribuição de pressão ao longo das superfícies das sapatas do mancal é obtida através da resolução da Equação de Reynolds (3.34), ou Equação de Reynolds Modificada (3.56). Estas equações não possuem solução analítica exata sendo necessário a utilização de métodos numéricos. Os métodos apresentados neste trabalho são o das Diferenças Finitas (MDF) e o dos Volumes Finitos (MVF). Após o estudo destes métodos é realizado uma comparação entre eles.

3.6.1 Método das Diferenças Finitas (MDF)

O Método das Diferenças Finitas transforma um sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas onde o número de equações depende do refinamento da malha utilizada na análise. Existem várias maneiras de se resolver o mesmo problema utilizando-se o Método das Diferenças Finitas. No método utilizado aqui, conhecido como modelo não conservativo, o cálculo do gradiente de uma variável qualquer E , numa superfície discretizada pelos incrementos finitos $\Delta\bar{y}$ e $\Delta\bar{z}$ (Figura 3.9), pode ser aproximado por:

3.6. Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada 41

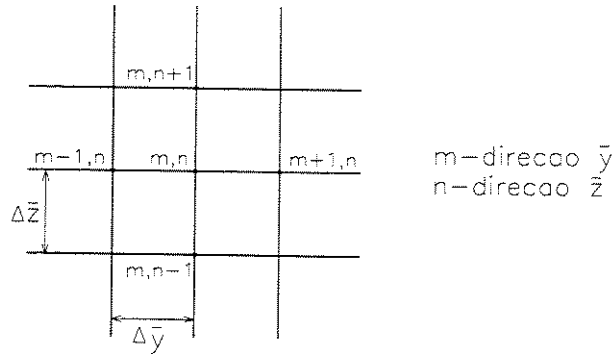


Figura 3.9: Malha com incrementos finitos de $\Delta\bar{y}$ e $\Delta\bar{z}$.

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \bar{y}} \right|_{m+\frac{1}{2},n} \cong \frac{E_{m+1,n} - E_{m,n}}{\Delta\bar{y}} \quad ; \quad \left. \frac{\partial E}{\partial \bar{y}} \right|_{m-\frac{1}{2},n} \cong \frac{E_{m,n} - E_{m-1,n}}{\Delta\bar{y}} \quad (3.70)$$

$$\left. \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{y}^2} \right|_{m,n} \cong \frac{E_{m+1,n} + E_{m-1,n} - 2E_{m,n}}{\Delta\bar{y}^2} \quad (3.71)$$

Utilizando esta técnica para resolver a Equação de Reynolds e Reynolds Modificada, pode-se determinar a distribuição de pressão ao longo dos segmentos do mancal. O método apresentado a seguir refere-se apenas a solução da equação de Reynolds, utilizada em mancais com lubrificação tradicional:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right)}_{\text{termo-1}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right)}_{\text{termo-2}} = \underbrace{6U \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}}_{\text{termo-3}} \quad (\text{Equação de Reynolds}) \quad (3.72)$$

Desenvolvendo cada um dos termos separadamente, chega-se às seguintes expressões:

• termo - 1

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(h_{m,n}^3 \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \left. \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \right|_{m,n} \cdot \left(\frac{p_{m+1,n} - p_{m-1,n}}{2\Delta\bar{y}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu} \left(\frac{p_{m+1,n} + p_{m-1,n} - 2p_{m,n}}{\Delta\bar{y}^2} \right) \quad (3.73)$$

• termo - 2

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_{m,n}^3 \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \left. \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right|_{m,n} \cdot \left(\frac{p_{m,n+1} - p_{m,n-1}}{2\Delta\bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu} \left(\frac{p_{m,n+1} + p_{m,n-1} - 2p_{m,n}}{\Delta\bar{z}^2} \right) \quad (3.74)$$

3.6. Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada 42

Logo, a expressão para a pressão em qualquer ponto nodal da malha será:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{y}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{y}^2} \right] p_{m+1,n} + \left[-\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{y}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{y}^2} \right] p_{m-1,n} + \\
 & + \left[\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n+1} + \left[-\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n-1} - \\
 & - \left[\frac{2h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{y}^2} + \frac{2h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n} = 6U \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \Big|_{m,n} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo este equacionamento para todos os pontos da malha pode-se definir: uma matriz **A**, dada pelos coeficientes da equação (3.75) que multiplicam os termos das pressões; um vetor **b** correspondente ao termo - 3 da equação (3.72); e um vetor **P** constituído pelas pressões em cada um dos nós da malha de discretização da superfície, as quais devem ser determinadas. Assim, o sistema de equações a ser resolvido é representado por:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{b} \quad (3.76)$$

Observa-se que a matriz **A** depende dos parâmetros $\Delta \bar{y}$, $\Delta \bar{z}$, $\frac{\partial h}{\partial \bar{y}}$ e $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$, e o vetor **b** da velocidade da superfície do rotor U , e das derivadas $\frac{\partial h}{\partial t}$ e $\frac{\partial h}{\partial \bar{y}}$

Para ilustrar a principal característica da matriz **A**, que é a forma com que esta é construída, define-se a seguir uma malha de discretização sobre a superfície da sapata com 4 pontos na direção \bar{y} , e 6 pontos em \bar{z} . Devido à simetria da sapata na direção \bar{z} , apenas metade desta é discretizada, como é apresentado na Figura 3.10.

3.6. Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada 44

Tem-se que esta matriz é em banda e, neste caso de dimensão 12 x 12, uma vez que estão sendo analisados 12 pontos na malha. Cada linha da matriz **A** corresponde à análise de um ponto nodal.

Uma vez resolvida a equação (3.76) encontra-se a distribuição de pressão ao longo de toda a superfície da sapata. A partir destes resultados pode-se, então, encontrar a força que está sendo realizada sobre cada uma delas.

Para o mancal com lubrificação híbrida, a determinação da distribuição de pressão é realizada de forma análoga, apenas sendo necessário acrescentar no equacionamento os termos associados à injeção do fluido lubrificante, como observado na equação (3.56).

Portanto, as únicas modificações são dadas pela adição do termo $-\sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z})$, no coeficiente que multiplica a pressão do ponto nodal em análise, e de $-\sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \bar{P}_{inj}(t) \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z})$ no elemento do vetor **b** correspondente, uma vez que este independe da pressão na sapata. Assim, quando se tem injeção de óleo na folga radial, o cálculo da pressão em qualquer ponto nodal da malha é dado por esta nova expressão:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{y}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{y}^2} \right] p_{m+1,n} + \left[-\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{y}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{y}^2} \right] p_{m-1,n} + \\ & + \left[\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n+1} + \left[-\frac{3h_{m,n}^2}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n-1} - \\ & - \left[\frac{2h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{y}^2} + \frac{2h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} + \sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z}) \right] p_{m,n} = 6U \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \Big|_{m,n} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} - \sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \bar{P}_{inj}(t) \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z}) \quad (3.77) \end{aligned}$$

Desenvolvendo esta expressão para cada um dos pontos nodais chega-se à nova matriz **A** e novo vetor **b**, que irão determinar a distribuição de pressão ao longo da sapata para o mancal com lubrificação híbrida. Conhecido estes valores pode-se, da mesma forma que para o caso com lubrificação tradicional, encontrar a força exercida sobre cada uma das sapatas.

3.6.2 Método dos Volumes Finitos (MVF)

O método dos Volumes Finitos consiste em integrar a equação a ser solucionada ao longo da superfície em que está descrita. Iniciando novamente com a Equação de Reynolds (3.34), que descreve a distribuição de pressão em mancais com lubrificação passiva, tem-se:

$$\int_{\bar{y}_{m-1/2,n}}^{\bar{y}_{m+1/2,n}} \int_{\bar{z}_{m-1/2,n}}^{\bar{z}_{m+1/2,n}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) \right] d\bar{z} d\bar{y} =$$

$$\int_{\bar{y}_{m-1/2,n}}^{\bar{y}_{m+1/2,n}} \int_{\bar{z}_{m-1/2,n}}^{\bar{z}_{m+1/2,n}} \left[6U \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} - 12 \frac{\partial h}{\partial t} \right] d\bar{z} d\bar{y} \quad (3.78)$$

Desenvolvendo a equação (3.78), e supondo que $(\partial p / \partial \bar{y})$ independe de \bar{z} , e $(\partial p / \partial \bar{z})$ independe de \bar{y} , tem-se:

$$\int_{\bar{y}_{m-1/2,n}}^{\bar{y}_{m+1/2,n}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) \cdot (\bar{z}_{m,n+1/2} - \bar{z}_{m,n-1/2}) d\bar{y} + \int_{\bar{z}_{m-1/2,n}}^{\bar{z}_{m+1/2,n}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) \cdot$$

$$\cdot (\bar{y}_{m+1/2,n} - \bar{y}_{m-1/2,n}) d\bar{z} = \int_{\bar{y}_{m-1/2,n}}^{\bar{y}_{m+1/2,n}} \int_{\bar{z}_{m-1/2,n}}^{\bar{z}_{m+1/2,n}} \left[6U \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \right] d\bar{z} d\bar{y} \quad (3.79)$$

Resolvendo estas integrais chega-se a:

$$\left[\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) \Big|_{m+1/2,n} - \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) \Big|_{m-1/2,n} \right] \cdot (\bar{z}_{m,n+1/2} - \bar{z}_{m,n-1/2}) + \left[\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) \Big|_{m,n+1/2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) \Big|_{m,n-1/2} \right] \cdot (\bar{y}_{m+1/2,n} - \bar{y}_{m-1/2,n}) = 6U \cdot (h_{m+1/2,n} - h_{m-1/2,n}) \cdot$$

$$\cdot (\bar{z}_{m,n+1/2} - \bar{z}_{m,n-1/2}) + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \cdot (\bar{z}_{m,n+1/2} - \bar{z}_{m,n-1/2}) \cdot (\bar{y}_{m+1/2,n} - \bar{y}_{m-1/2,n}) \quad (3.80)$$

3.6. Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada 46

As derivadas da pressão em relação às direções \bar{y} e \bar{z} são, então, aproximadas por discretizações bilaterais, resultando em:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{h_{m+1/2,n}^3}{\mu} \frac{p_{m+1,n} - p_{m,n}}{\bar{y}_{m+1,n} - \bar{y}_{m,n}} \right) - \left(\frac{h_{m-1/2,n}^3}{\mu} \frac{p_{m,n} - p_{m-1,n}}{\bar{y}_{m,n} - \bar{y}_{m-1,n}} \right) \right] \cdot (\bar{z}_{m,n+1/2} - \bar{z}_{m,n-1/2}) + \\
 & + \left[\left(\frac{h_{m,n+1/2}^3}{\mu} \frac{p_{m,n+1} - p_{m,n}}{\bar{z}_{m,n+1} - \bar{z}_{m,n}} \right) - \left(\frac{h_{m,n-1/2}^3}{\mu} \frac{p_{m,n} - p_{m,n-1}}{\bar{z}_{m,n} - \bar{z}_{m,n-1}} \right) \right] \cdot (\bar{y}_{m+1/2,n} - \bar{y}_{m-1/2,n}) = \\
 & = 6U \cdot (h_{m+1/2,n} - h_{m-1/2,n}) \cdot (\bar{z}_{m,n+1/2} - \bar{z}_{m,n-1/2}) - 12 \frac{\partial h}{\partial t} \cdot (\bar{z}_{m,n+1/2} - \bar{z}_{m,n-1/2}) \cdot \\
 & \cdot (\bar{y}_{m+1/2,n} - \bar{y}_{m-1/2,n}) \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

Tem-se que os termos \bar{y} , \bar{z} e a folga radial $(h(\bar{y}, t))$, são conhecidos ao longo de toda a superfície da sapata, não existindo problemas em obtê-los fora dos pontos nodais, ou seja, nos pontos $(m + \frac{1}{2}, n)$, $(m - \frac{1}{2}, n)$, $(m, n + \frac{1}{2})$ e $(m, n - \frac{1}{2})$.

Através da equação (3.81) tem-se que a expressão responsável por determinar a pressão em qualquer ponto da malha é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{h_{m+1/2,n}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta \bar{y}} \right] p_{m+1,n} + \left[\frac{h_{m-1/2,n}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta \bar{y}} \right] p_{m-1,n} + \left[\frac{h_{m,n+1/2}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{z}} \right] p_{m,n+1} + \\
 & + \left[\frac{h_{m,n-1/2}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{z}} \right] p_{m,n-1} - \left[\left(\frac{h_{m+1/2,n}^3}{\mu} + \frac{h_{m-1/2,n}^3}{\mu} \right) \cdot \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta \bar{y}} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{h_{m,n+1/2}^3}{\mu} + \frac{h_{m,n-1/2}^3}{\mu} \right) \cdot \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{z}} \right] p_{m,n} = 6U (h_{m+1/2} - h_{m-1/2}) \Delta \bar{z} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \Delta \bar{z} \cdot \Delta \bar{y} \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

3.6. Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada 47

Observa-se que apesar dos termos da matriz \mathbf{A} serem diferentes dos apresentados no método da Diferenças Finitas, a sua formação continua sendo em banda. Assim, após ter sido obtido a matriz \mathbf{A} , o processo de solução do sistema de equações para a determinação da distribuição de pressão ao longo da sapata não se altera.

Para o caso da solução da equação de Reynolds Modificada, novamente só deve ser adicionado o termo $-\sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z})$, no coeficiente que multiplica a pressão no ponto nodal em análise, e $-\sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \bar{P}_{inj}(t) \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z})$ no elemento correspondente do vetor \mathbf{b} . Desta forma, a expressão para a determinação da pressão em cada um dos nós que discretiza a sapata é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{h_{m+1/2,n}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta \bar{y}} \right] p_{m+1,n} + \left[\frac{h_{m-1/2,n}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta \bar{y}} \right] p_{m-1,n} + \left[\frac{h_{m,n+1/2}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{z}} \right] p_{m,n+1} + \\
 & + \left[\frac{h_{m,n-1/2}^3}{\mu} \cdot \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{z}} \right] p_{m,n-1} - \left[\left(\frac{h_{m+1/2,n}^3}{\mu} + \frac{h_{m-1/2,n}^3}{\mu} \right) \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta \bar{y}} + \left(\frac{h_{m,n+1/2}^3}{\mu} + \frac{h_{m,n-1/2}^3}{\mu} \right) \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{z}} + \right. \\
 & + \left. \sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \Delta \bar{y} \cdot \Delta \bar{z} \cdot \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z}) \right] p_{m,n} = 6U (h_{m+1/2} - h_{m-1/2}) \Delta \bar{z} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \Delta \bar{z} \cdot \Delta \bar{y} - \\
 & - \sum_{i=1}^s \frac{3}{\mu l_0} \bar{P}_{inj}(t) \mathcal{F}(\bar{y}, \bar{z}) \cdot \Delta \bar{z} \cdot \Delta \bar{y} \tag{3.83}
 \end{aligned}$$

3.6.3 Comparação entre os Métodos de Resolução Numérica

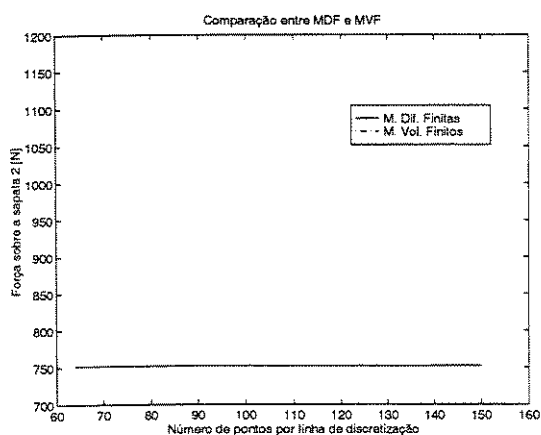
A comparação entre os dois métodos de resolução numérica das Equações de Reynolds e Reynolds Modificada foi feita através da análise dos resultados e do tempo de convergência de cada um deles para diferentes malhas de discretização das sapatas do mancal.

O caso em estudo foi o de um mancal hidrodinâmico tradicional com um carrega-

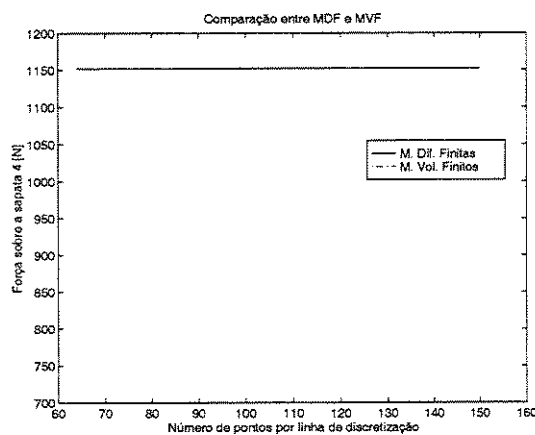
3.6. Resolução Numérica da Equação de Reynolds / Reynolds Modificada 48

mento estático de 400 N na direção vertical para baixo e a uma rotação constante de 50 Hz , ou 3.000 rpm . As malhas utilizadas para descrever a distribuição de pressão em cada um dos segmentos do mancal possuíam o mesmo número de pontos nas direções \bar{y} e \bar{z} . Outros parâmetros do mancal utilizados para estas simulações estão apresentadas na Tabela B.1 do apêndice B.

A comparação entre os métodos foi realizada estudando-se inicialmente a convergência das forças hidrodinâmicas sofridas pelas sapatas 2 e 4, que são as que sofrem menor e maior solitação, respectivamente, devido a presença da força externa no sentido negativo da direção Y . Os gráficos da Figura 3.11 apresentam a convergência destas forças hidrodinâmicas para os dois métodos em função do número de pontos presentes em cada linha da malha.



(a) Força hidrodinâmica sobre a sapata 2



(b) Força hidrodinâmica sobre a sapata 4

Figura 3.11: Comparação entre as convergências dos métodos das diferenças finitas e volumes finitos em função do refinamento na malha de discretização das sapatas do mancal.

Através dos gráficos apresentados na Figura 3.11 pode-se notar que ambos os métodos possuem uma mesma convergência para diferentes malhas de discretização, não havendo aparentemente vantagens de um em relação ao outro. Porém, esta mesma igualdade entre os métodos não é observada se for estudado o tempo que cada um deles demora para realizar o processamento computacional de cada uma das iterações do método de Newton-Raphson. Utilizando-se malhas variando de 64 a 104 pontos em cada direção,

3.7. Condições de contorno para a distribuição de pressão no filme de óleo

encontrou-se os resultados apresentados na Figura 3.12.

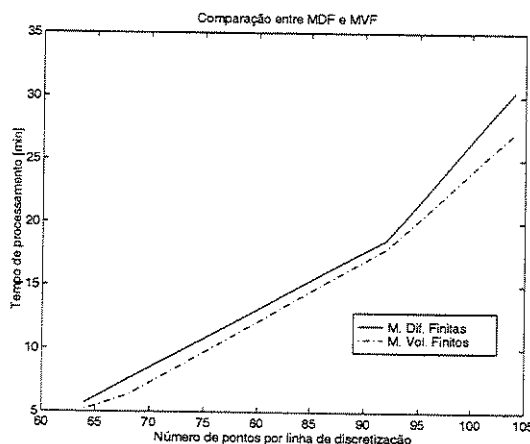


Figura 3.12: Comparação entre os tempos que cada um dos métodos numéricos necessitam para resolver uma iteração no processo iterativo de Newton-Raphson.

Observa-se que o tempo de processamento computacional utilizado por estes dois métodos são diferentes, havendo uma pequena vantagem para o métodos dos volumes finitos. Uma das explicações sobre esta vantagem pode ser obtida ao se comparar as equações (3.75) e (3.82). Observa-se que para o método das diferenças finitas, equação (3.75), é necessário calcular, além do valor da espessura do filme de óleo, a suas derivadas em relação à direção \bar{y} , para cada um dos pontos nodais. Já para o método dos volumes finitos, equação (3.82), este cálculo não é necessário, precisando-se apenas conhecer os valores de $h(\bar{y}, t)$, que são facilmente obtidos inclusive entre os pontos nodais. Logo, o tempo de se calcular as derivadas de $h(\bar{y}, t)$ é maior que o de se obter diretamente o valor de $h(\bar{y}, t)$, dado pela equação (3.69). O método dos volumes finitos foi, então, adotado para a maioria das simulações teóricas apresentadas neste trabalho.

3.7 Condições de contorno para a distribuição de pressão no filme de óleo

A distribuição de pressão ao longo da superfície do mancal é resultante da variação da espessura do filme de óleo. Se no sentido do escoamento do fluido esta espessura for decrescente, tem-se a formação de uma distribuição de pressão positiva. Caso contrário

esta torna-se negativa.

Porém, fluidos lubrificantes não suportam pressões muito inferiores à atmosférica, ocorrendo sua cavitação. Estes casos são facilmente encontrados em mancais circulares completos, e mancais segmentados que apresentam grandes rotações das sapatas (mancais com folga radial alta). Desta forma, deve-se encontrar meios de descrever este comportamento no modelo matemático do mancal.

Uma maneira simples de contornar este problema é desprezar todas as pressões negativas, assumindo valor igual à atmosférica. Esta condição é conhecida como condição de *Gümbel*, ou *Metade de Sommerfeld*. Sua aplicação não é fisicamente possível pois não satisfaz as equações da continuidade [11], mas assim mesmo é amplamente utilizada devido a sua simplicidade, sendo esta a que foi utilizada neste trabalho. A fim de diminuir o problema desta aproximação pode-se utilizar a condição de contorno de *Reynolds*. Neste caso é imposto que o gradiente de pressão deve se igualar a zero no ponto onde a pressão do filme de óleo se anula. Desta forma, ameniza-se a queda da distribuição de pressão até o momento em que esta torna-se zero.

3.8 Determinação do ponto de operação do sistema rotor-mancal

O ponto de equilíbrio do sistema rotor-mancal é determinado em função das forças existentes entre as sapatas e o rotor, e do momento resultante em torno dos apoios de cada um dos segmentos. Logo, tem-se um sistema com seis equações, duas referentes à somatória das forças atuantes sobre o rotor (nas direções X e Y - sistema inercial), e quatro devido ao momento em cada um dos segmentos, uma vez que está sendo estudado um mancal composto por quatro sapatas.

O equilíbrio estático do rotor é obtido através do equacionamento das forças de interação entre ele e cada um dos segmentos. A força F_j ($j = 1, 2, 3, 4$) indica a força hidrodinâmica de interação entre o rotor e o j -ésimo segmento, a qual passa pelo ponto O , origem do raio do segmento (R_s), e pelo ponto de apoio B . Estas forças dependem da posição do rotor X_R , Y_R e da posição angular dos segmentos α_j , ou seja, $F_j(X_R, Y_R, \alpha_j)$. Adotando F_X e F_Y como sendo as forças externas nas direções X e Y , respectivamente,

e aplicando a terceira *Lei de Newton* sobre o rotor, chega-se a:

$$F_X - \sum_{j=1}^4 F_j(X_R, Y_R, \alpha_j) \cdot \cos(\phi_j + \alpha_j) = 0 \quad (3.84)$$

$$F_Y - \sum_{j=1}^4 F_j(X_R, Y_R, \alpha_j) \cdot \sin(\phi_j + \alpha_j) = 0 \quad (3.85)$$

Com relação às equações de momento para os segmentos num caso estático, tem-se:

$$F_{\bar{y}_j} \cdot (R_s + h_s) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.86)$$

sendo $F_{\bar{y}_j}$ a componente da força F_j na direção \bar{y} do j -ésimo segmento, e h_s a espessura do segmento. A somatória de momento sobre cada uma das sapatas pode ser descrita em qualquer um dos sistemas de referência.

A partir das equações (3.84), (3.85) e (5.49) define-se um sistema de equações não lineares, que descreve o equilíbrio estático do conjunto rotor-segmento. Este sistema é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = F_X - F_1 \cos(\phi_1 + \alpha_1) - F_2 \cos(\phi_2 + \alpha_2) - \\ \quad - F_3 \cos(\phi_3 + \alpha_3) - F_4 \cos(\phi_4 + \alpha_4) = 0 \\ g_2(X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = F_Y - F_1 \sin(\phi_1 + \alpha_1) - F_2 \sin(\phi_2 + \alpha_2) - \\ \quad - F_3 \sin(\phi_3 + \alpha_3) - F_4 \sin(\phi_4 + \alpha_4) = 0 \\ g_3(X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = F_{\bar{y}_1} \cdot (R_s + h_s) = 0 \\ g_4(X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = F_{\bar{y}_2} \cdot (R_s + h_s) = 0 \\ g_5(X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = F_{\bar{y}_3} \cdot (R_s + h_s) = 0 \\ g_6(X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = F_{\bar{y}_4} \cdot (R_s + h_s) = 0 \end{array} \right. \quad (3.87)$$

ou seja

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.88)$$

sendo $\mathbf{x} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}\} = \{X_R, Y_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

O método de Newton-Raphson foi o escolhido para resolver o sistema $\mathcal{G}(\mathbf{x})$. Este é um método iterativo que consiste em transformar o sistema de equações não lineares em um sistema de equações equivalentes obtidas pela expansão da série de Taylor, dada por:

$$g_a(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = g_a(\mathbf{x}) + \sum_{b=1}^{N=6} \frac{\partial g_a(\mathbf{x})}{\partial x_b} \delta x_b \quad (3.89)$$

sendo:

a - indica a equação, $a = 1, 2, \dots, 6$.

b - indica a incógnita, $b = 1, 2, \dots, 6$.

Tem-se que $\delta\mathbf{x}$ é a diferença entre os resultados de x nas iterações k e $(k+1)$. Assim, sabendo que:

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \quad \text{ou seja,} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x} \quad (3.90)$$

pode-se escrever que:

$$g_a(\mathbf{x}_{k+1}) = g_a(\mathbf{x}_k) + \sum_{b=1}^{N=6} \frac{\partial g_a(\mathbf{x}_k)}{\partial x_k^{(b)}} [x_{k+1}^{(b)} - x_k^{(b)}] \quad (3.91)$$

Como $\mathcal{G}(\mathbf{x}_{k+1}) = 0$, ou seja, $g_a(\mathbf{x}_{k+1}) = 0$ a equação (3.91) pode ser reescrita na forma:

$$\sum_{b=1}^{N=6} \frac{\partial g_a(\mathbf{x}_k)}{\partial x_k^{(b)}} \cdot [x_{k+1}^{(b)} - x_k^{(b)}] = -g_a(\mathbf{x}_k) \quad (3.92)$$

Desenvolvendo o primeiro termo da equação (3.92) para todos os valores de a e b ,

chega-se a matriz $\mathcal{G}'(\mathbf{x})$, conhecida por *Jacobiano* do sistema $\mathcal{G}(\mathbf{x})$, dada por:

$$\mathcal{G}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_4} & \frac{\partial g_1}{\partial x_5} & \frac{\partial g_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2}{\partial x_4} & \frac{\partial g_2}{\partial x_5} & \frac{\partial g_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} & \frac{\partial g_3}{\partial x_4} & \frac{\partial g_3}{\partial x_5} & \frac{\partial g_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial g_4}{\partial x_1} & \frac{\partial g_4}{\partial x_2} & \frac{\partial g_4}{\partial x_3} & \frac{\partial g_4}{\partial x_4} & \frac{\partial g_4}{\partial x_5} & \frac{\partial g_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial g_5}{\partial x_1} & \frac{\partial g_5}{\partial x_2} & \frac{\partial g_5}{\partial x_3} & \frac{\partial g_5}{\partial x_4} & \frac{\partial g_5}{\partial x_5} & \frac{\partial g_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial g_6}{\partial x_1} & \frac{\partial g_6}{\partial x_2} & \frac{\partial g_6}{\partial x_3} & \frac{\partial g_6}{\partial x_4} & \frac{\partial g_6}{\partial x_5} & \frac{\partial g_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Portanto, tem-se:

$$\mathcal{G}'(\mathbf{x}_k) \cdot [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k] = -\mathcal{G}(\mathbf{x}_k) \quad (3.94)$$

Sendo,

$$[\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k] = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} - x_k^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} - x_k^{(2)} \\ x_{k+1}^{(3)} - x_k^{(3)} \\ x_{k+1}^{(4)} - x_k^{(4)} \\ x_{k+1}^{(5)} - x_k^{(5)} \\ x_{k+1}^{(6)} - x_k^{(6)} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Assim, a função de iteração é dada por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\mathcal{G}(\mathbf{x}_k)}{\mathcal{G}'(\mathbf{x}_k)} = \mathbf{x}_k - \mathcal{G}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{x}_k) \quad (3.96)$$

Para a solução deste problema é necessário ter um valor inicial para \mathbf{x}_k , ou seja, valores para $\mathbf{x}_0 = \{X_{R_0}, Y_{R_0}, \alpha_{1_0}, \alpha_{2_0}, \alpha_{3_0}, \alpha_{4_0}\}^T$. A partir destes valores resolve-se a equação (3.96) obtendo-se \mathbf{x}_{k+1} , que serão os novos \mathbf{x}_k . Este processo deve ser repetido até que seja alcançado:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \epsilon \text{ é a precisão desejada para os valores de } \mathbf{x}. \quad (3.97)$$

A utilização deste método permite uma convergência rápida, diminuindo a quan-

tidade de cálculos a serem efetuados e, conseqüentemente, o tempo de determinação do ponto de operação ou de equilíbrio do sistema rotor-mancal. No entanto, a velocidade da convergência para a resposta e a convergência propriamente dita, dependem fortemente do valor inicial dado para $\mathbf{x}_0 = \{X_{R_0}, Y_{R_0}, \alpha_{1_0}, \alpha_{2_0}, \alpha_{3_0}, \alpha_{4_0}\}^T$.

3.9 Resultados Teóricos

A partir das modelagens matemáticas desenvolvidas para mancais com lubrificação tradicional ou com lubrificação híbrida, foi elaborado um programa computacional em ambiente MATLAB. Um fluxograma deste programa é apresentado no Apêndice E.

Através do programa computacional pode-se realizar várias simulações, e conseqüentemente, comparações entre estes dois modelos de mancais hidrodinâmicos. A primeira análise realizada apresenta a influência da pressão de injeção no posicionamento do rotor e nas forças hidrodinâmicas exercidas sobre cada uma das sapatas. Através deste estudo é possível identificar como a injeção do filme de óleo na folga radial interfere no comportamento do sistema rotor-mancal.

Além desta análise é também importante conhecer qual é o comportamento deste novo tipo de mancal em função de outros parâmetros como por exemplo da rotação do rotor, do fator de pré-carga e mesmo quando as pressões de injeção nas sapatas são diferentes.

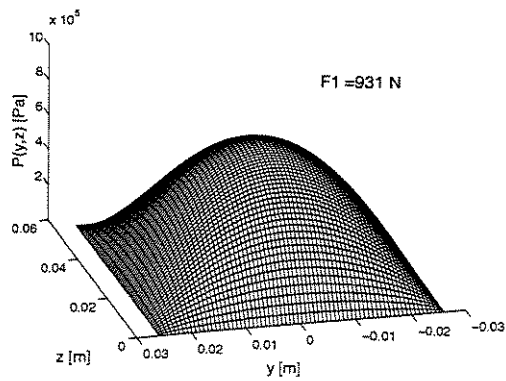
Os dados dimensionais dos mancais e as condições de operação utilizadas nas simulações que se seguem estão apresentadas na Tabela B.1 do Apêndice B. Havendo a modificação de algum destes parâmetros para a realização de uma determinada análise esta será indicada no texto.

Influência da pressão de injeção em mancais hidrodinâmicos híbridos e comparação com mancais hidrodinâmicos tradicionais

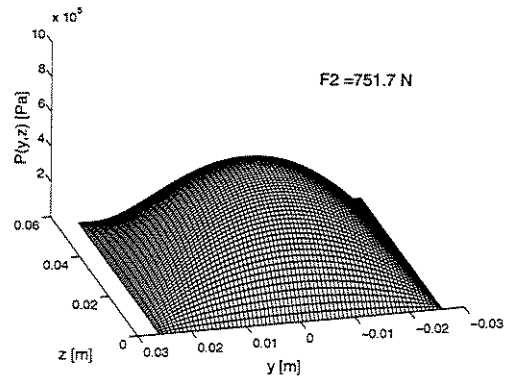
Nesta primeira análise variou-se a pressão de injeção nas sapatas entre *zero bar* (simulando uma falha no sistema de controle) e *10 bar*. Todas elas, neste caso, possuíam

a mesma pressão de injeção. Os resultados destas simulações foram comparados com os obtidos para um mancal com lubrificação tradicional.

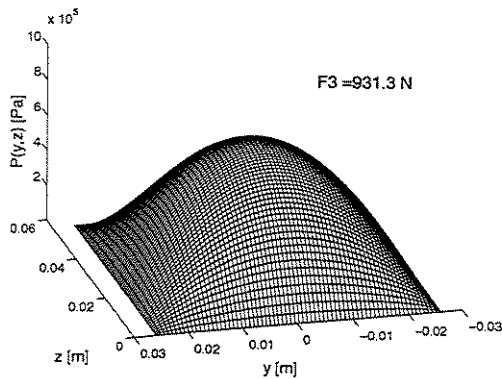
Para as condições de operação indicadas na Tabela B.1 do Apêndice B, as distribuições de pressão encontradas ao longo das quatro sapatas para o mancal tradicional são apresentadas na Figura 3.13.



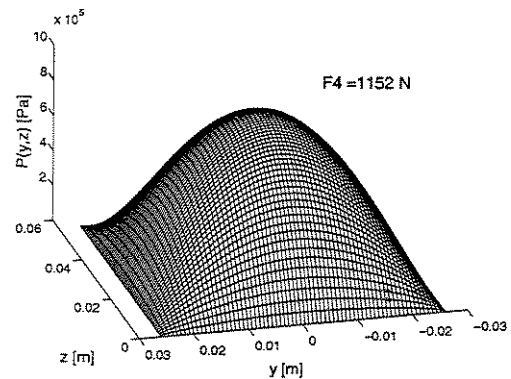
(a) sapata 1



(b) sapata 2



(c) sapata 3



(d) sapata 4

Figura 3.13: Distribuições de pressão nas quatro sapatas de um mancal com lubrificação tradicional.

A posição de equilíbrio do sistema rotor-mancal e as forças exercidas sobre cada uma das sapatas para esta condição de operação são iguais a:

Posição de Equilíbrio
$X_R = 0,0 \text{ m}$
$Y_R = -6,91 \text{ } \mu\text{m}$
$\alpha_1 = 0,000663 \text{ rad}$
$\alpha_2 = 0,000532 \text{ rad}$
$\alpha_3 = 0,000457 \text{ rad}$
$\alpha_4 = 0,000583 \text{ rad}$

Força Exercida sobre as Sapatas
$F_1 = 931 \text{ N}$
$F_2 = 752 \text{ N}$
$F_3 = 931 \text{ N}$
$F_4 = 1152 \text{ N}$

Observa-se que a quarta sapata apresenta os maiores valores de pressão enquanto que a segunda é a menos solicitada. Isto ocorre devido à existência de um carregamento de 400 N no sentido negativo da direção Y . Já as sapatas de número 1 e 3, posicionadas na direção X , possuem distribuições de pressão intermediárias. E, dado o desacoplamento das direções ortogonais, característica de mancais hidrodinâmicos segmentados, estas possuem o mesmo comportamento. Desta forma, sendo que todas as análises aqui realizadas terão um carregamento na direção Y , basta ser estudado o comportamento das sapatas posicionadas nesta direção, ou seja, sapatas 2 e 4.

As distribuições de pressão nas sapatas de um mancal com lubrificação híbrida, cuja pressão de injeção é de $4,745 \text{ bar}$ em todas elas, são apresentadas na Figura 3.14. Esta pressão de injeção foi escolhida a fim de que as forças hidrodinâmicas sobre as sapatas fossem valores próximos dos encontrados para o mancal com lubrificação tradicional.

A posição de equilíbrio do sistema e as forças que agem sobre cada uma das sapatas são:

Posição de Equilíbrio
$X_R = 0,0 \text{ m}$
$Y_R = -17,52 \text{ } \mu\text{m}$
$\alpha_1 = 0,000860 \text{ rad}$
$\alpha_2 = 0,000469 \text{ rad}$
$\alpha_3 = 0,000337 \text{ rad}$
$\alpha_4 = 0,000684 \text{ rad}$

Força Exercida sobre as Sapatas
$F_1 = 931 \text{ N}$
$F_2 = 786 \text{ N}$
$F_3 = 931 \text{ N}$
$F_4 = 1186 \text{ N}$

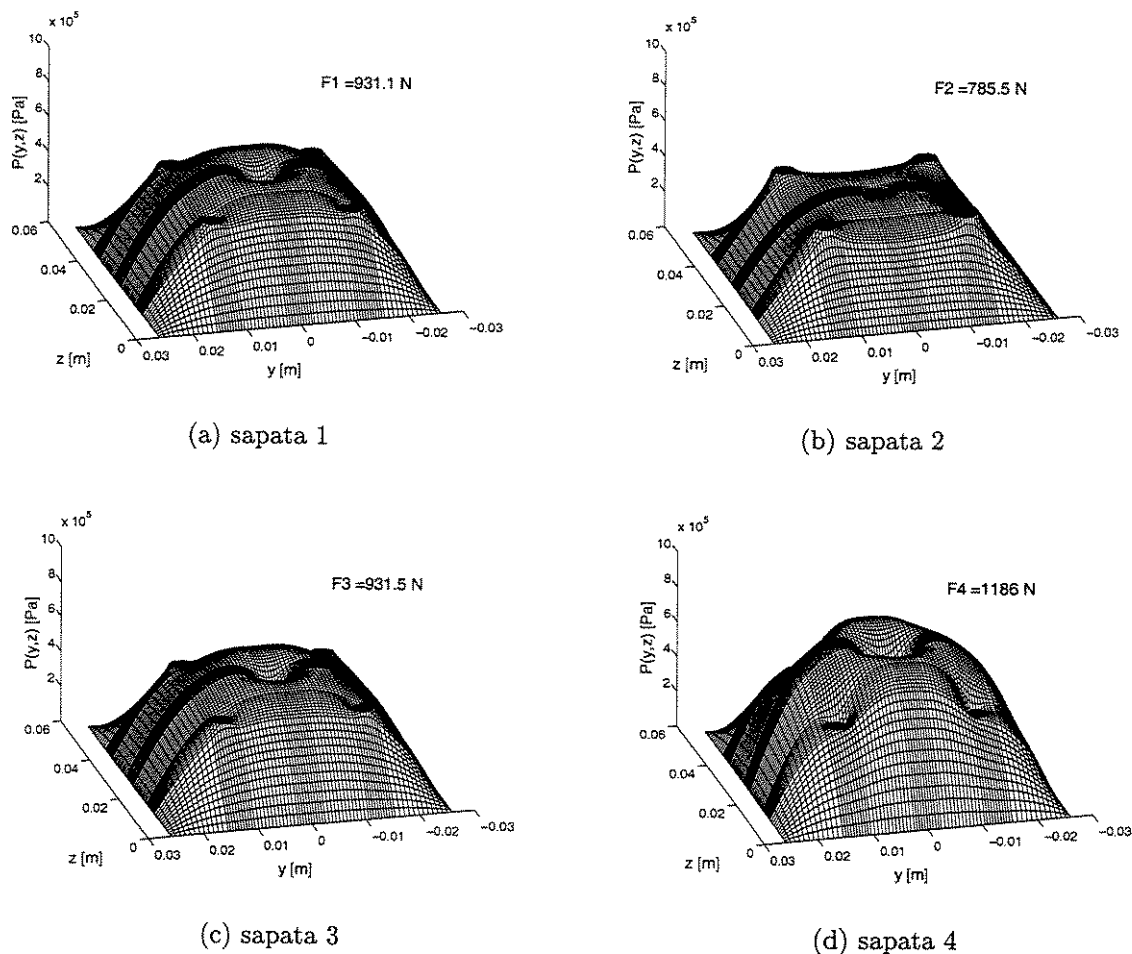


Figura 3.14: Distribuições de pressão nas quatro sapatas de um mancal com lubrificação híbrida, para uma pressão de injeção na folga radial de 4,745 bar.

Novamente pode-se observar que as sapatas 2 e 4 são as de menor e maior solicitação, respectivamente, enquanto que a primeira e a terceira sapatas não sofrem os efeitos da força externa aplicada na direção Y . Assim, apenas as sapatas da direção Y serão consideradas nas análises a serem realizadas neste trabalho.

A Tabela 3.1 apresenta o comportamento do sistema rotor-mancal quando a pressão de injeção na folga radial varia de 0,0 a 10,0 bar. Estes resultados são ainda comparados com a resposta obtida para um mancal que possui apenas a lubrificação hidrodinâmica.

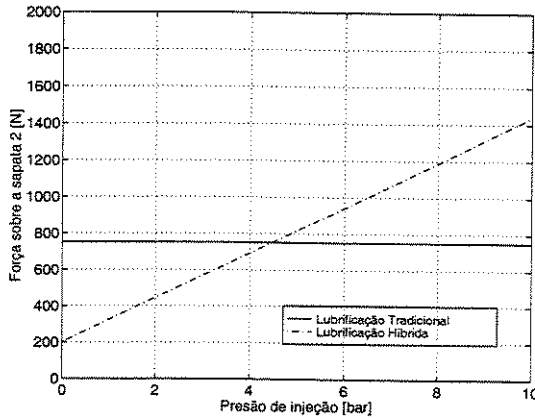
	Lubr. Trad.	Lubr. Híbrida - P_{inj} [bar] (iguais em todas as sapatas)					
		0,0	3,5	4,475	7,0	9,0	10,0
$X_R [\times 10^{-6} m] =$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$Y_R [\times 10^{-6} m] =$	-6,91	-17,15	-17,41	-17,52	-17,77	-18,03	-18,18
$\alpha_1 [\times 10^{-3} rad] =$	0,663	0,919	0,874	0,860	0,834	0,814	0,804
$\alpha_2 [\times 10^{-3} rad] =$	0,532	0,568	0,494	0,469	0,428	0,394	0,378
$\alpha_3 [\times 10^{-3} rad] =$	0,457	0,408	0,355	0,337	0,304	0,276	0,262
$\alpha_4 [\times 10^{-3} rad] =$	0,583	0,723	0,694	0,684	0,667	0,652	0,645

Tabela 3.1: Resultados do posicionamento de um sistema rotor-mancal para várias pressões de injeção na sapata, e comparação com os resultados obtidos para um sistema operando com lubrificação tradicional.

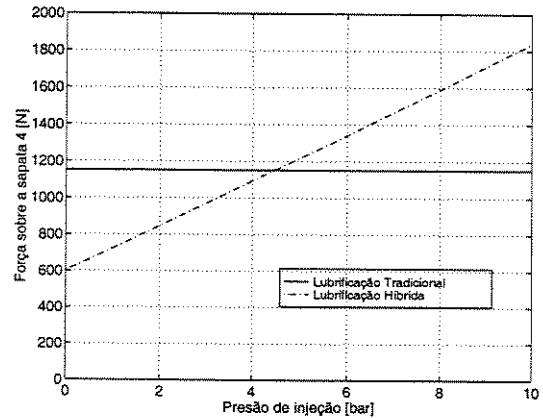
Observa-se que com a injeção do filme de óleo, sendo a pressão de injeção igual em todas as sapatas, o deslocamento do rotor na direção do carregamento torna-se mais significativo. E este é ainda maior a medida que a pressão de injeção aumenta. Para baixas pressões de injeção ocorre a perda de pressão nas regiões onde estão localizadas os orifícios das sapatas, resultando numa perda de sustentação do rotor e, conseqüentemente, este sofre uma maior influência das forças externas do que os mancais com lubrificação tradicional. Com o aumento da pressão de injeção nos orifícios a pressão hidrostática passa a sobrepor a pressão hidrodinâmica, fazendo com que a força proveniente da injeção aumente a capacidade de carga do mancal. Porém, neste caso, todas as sapatas possuem a mesma pressão de injeção. Desta forma, a força realizada por uma sapata passa a ser anulada pela força proveniente da sapata colocada no sentido oposto a esta, e o rotor continua sujeito a sofrer maiores efeitos da força externa do que em mancais tradicionais.

O posicionamento das sapatas também são alterados com a injeção radial de óleo. Esta passa a ser maior do que quando se tem a lubrificação tradicional. Porém, a rotação decai com o aumento da pressão de injeção nas sapatas. Isto ocorre porque com o aumento da pressão hidrostática a pressão hidrodinâmica do mancal influencia menos no comportamento do mancal. Como esta é responsável pela rotação de cada uma das sapatas, tem-se que este efeito será, conseqüentemente, diminuído.

Uma análise da variação da força exercida sobre as sapatas 2 e 4, resultante da modificação da pressão de injeção, pode ser realizada a partir dos gráficos da Figura 3.15.



(a) Força sobre a sapata 2



(b) Força sobre a sapata 4

Figura 3.15: *Variação da força sobre a segunda e quarta sapata de um mancal hidrodinâmico híbrido, em função da pressão de injeção do óleo na folga radial.*

Através destes dois gráficos é possível observar que para pressões de injeção baixas a solicitação das sapatas é menor. Este efeito é resultante da perda de pressão sobre as sapatas nos pontos de injeção. A medida que a pressão de injeção aumenta o volume de óleo na folga radial, e conseqüentemente, a pressão hidrostática também aumentam. Isto resulta num aumento da força sobre as sapatas. É importante verificar também, que esta variação da força em função da pressão de injeção ocorre de forma linear.

Comparação entre os mancais com lubrificação tradicional e híbrida em função da rotação do rotor

Nesta análise variou-se a rotação do rotor de 10 a 150 Hz , ou seja, de 600 a 9000 rpm . A pressão de injeção utilizada para o mancal com lubrificação híbrida foi, novamente, a mesma em todas as sapatas e igual a 4,745 bar . Para esta pressão, a uma rotação de 50 Hz (3000 rpm), as forças sobre as sapatas são próximas das obtidas para um mancal

com lubrificação convencional operando nestas mesmas condições.

A Tabela 3.2 apresenta o comportamento do sistema rotor-mancal em função da variação da rotação para um mancal com apenas lubrificação hidrodinâmica.

$\Omega [Hz]$	10, 0	30, 0	50, 0	70, 0	100, 0	120, 0	150, 0
$X_R [\times 10^{-6} m] =$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$Y_R [\times 10^{-6} m] =$	-29,17	-11,33	-6,91	-4,96	-3,48	-2,90	-2,32
$\alpha_1 [\times 10^{-3} rad] =$	0,995	0,729	0,663	0,634	0,612	0,603	0,595
$\alpha_2 [\times 10^{-3} rad] =$	0,396	0,512	0,532	0,541	0,547	0,549	0,551
$\alpha_3 [\times 10^{-3} rad] =$	0,125	0,391	0,457	0,486	0,508	0,517	0,525
$\alpha_4 [\times 10^{-3} rad] =$	0,630	0,596	0,583	0,577	0,572	0,570	0,568

Tabela 3.2: Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação convencional, em função da rotação no rotor.

Observa-se nesta tabela um aumento da capacidade de carga do mancal a medida que a rotação do sistema também se eleva. Isto ocorre devido ao aumento da pressão hidrodinâmica ao longo de todo o mancal, a qual resulta num aumento da sustentação do rotor e, conseqüentemente, diminui os efeitos da força externa de 400 N existente no sentido negativo da direção Y. Para um mancal com lubrificação híbrida, ou seja, hidrostática e hidrodinâmica, os resultados são apresentados na Tabela 3.3.

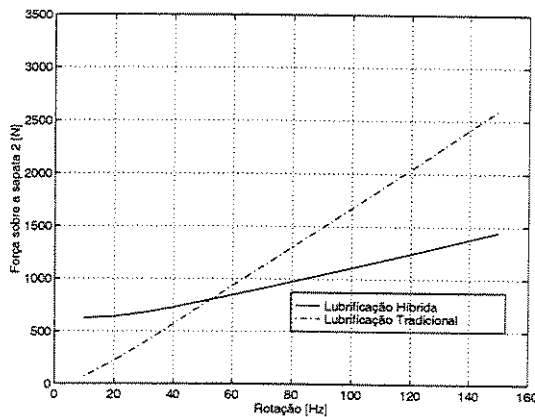
$\Omega [Hz]$	10, 0	30, 0	50, 0	70, 0	100, 0	120, 0	150, 0
$X_R [\times 10^{-6} m] =$	-0,18	-0,03	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
$Y_R [\times 10^{-6} m] =$	-53,22	-27,10	-17,52	-12,81	-9,08	-7,59	-6,09
$\alpha_1 [\times 10^{-3} rad] =$	1,191	0,962	0,860	0,808	0,766	0,749	0,732
$\alpha_2 [\times 10^{-3} rad] =$	-0,021	0,317	0,470	0,533	0,577	0,593	0,608
$\alpha_3 [\times 10^{-3} rad] =$	-0,393	0,154	0,337	0,425	0,495	0,523	0,550
$\alpha_4 [\times 10^{-3} rad] =$	0,720	0,697	0,684	0,678	0,673	0,671	0,669

Tabela 3.3: Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação híbrida, em função da rotação no rotor.

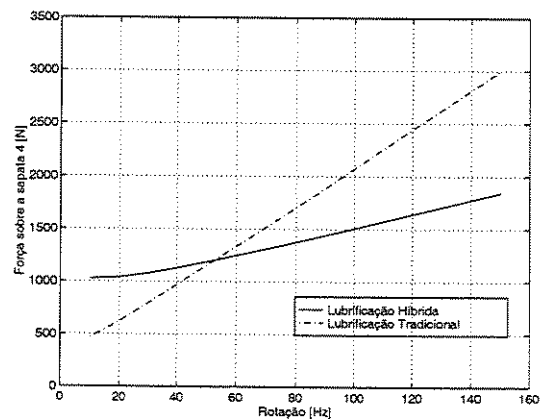
Analisando esta tabela, tem-se que o deslocamento do rotor em relação ao centro do mancal é maior do que em mancais com lubrificação tradicional. Isto ocorre devido à pressão de injeção nas sapatas serem iguais. Este efeito já foi analisado quando se estudou

a influência da pressão hidrostática no comportamento do sistema. Mas mesmo com a injeção de óleo na folga radial observa-se que o aumento da rotação, e por conseguinte, da pressão hidrodinâmica, consegue-se diminuir a influência da força externa aplicada ao sistema.

Devido a este aumento da pressão interna no mancal é de se esperar que as forças atuantes sobre as sapatas também aumente. Na Figura 3.16 tem-se o comportamento destas forças sobre as sapatas 2 e 4, para os casos com lubrificação tradicional e híbrida.



(a) Força sobre a sapata 2



(b) Força sobre a sapata 4

Figura 3.16: *Variação das forças sobre as sapatas 2 e 4 para mancais com lubrificação tradicional e híbrida, em função da rotação do rotor.*

Analisando estes dois gráficos pode-se observar que para rotações mais baixas a força sobre as sapatas do mancal com lubrificação híbrida é maior. Isto ocorre pois para estas rotações a pressão hidrostática é maior que a pressão hidrodinâmica fazendo com que a força resultante sobre as sapatas fique maior do que no caso onde se tem apenas a lubrificação tradicional. Porém, com o aumento da rotação a pressão devido à injeção de óleo torna-se menor que a pressão hidrodinâmica. Sendo que nos mancais híbridos a pressão nos orifícios de injeção é sempre mantida constante, o aumento da pressão hidrodinâmica faz com que o óleo lubrificante saia da folga radial através destes orifícios. Desta forma, como há um alívio de pressão na folga radial, os esforços sobre as sapatas dos mancais híbridos tornam-se menores que os exercidos sobre as sapatas dos mancais convencionais.

Comparação entre os mancais com lubrificação tradicional e híbrida em função do fator de pré-carga

O fator de pré-carga indica a excentricidade dos segmentos do mancal com relação ao rotor. Seu cálculo é dado pela equação (3.98):

$$c = 1 - \frac{h_0}{R_s - R} \quad (3.98)$$

O valor do fator de pré-carga pode, então, variar dentre 0, quando os segmentos e o rotor são concêntricos, e 1, quando o raio do segmento tende ao "infinito". Assim, ao estudar a influência do fator de pré-carga no comportamento do sistema rotor-mancal, está sendo realizado uma análise da importância do não paralelismo das superfícies do rotor e das sapatas.

Variando o valor de R_s entre 0,04951 m e 0,04967 m, a faixa do fator de pré-carga estudado é de 0,214 a 0,633. Na Tabela 3.4 estão indicados os resultados obtidos para o mancal com lubrificação tradicional.

c	0,214	0,267	0,389	0,476	0,542	0,593	0,633
$X_R [\times 10^{-6} m] =$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$Y_R [\times 10^{-6} m] =$	-7,09	-7,03	-6,67	-6,36	-6,14	-5,98	-5,87
$\alpha_1 [\times 10^{-3} rad] =$	0,533	0,602	0,772	0,916	1,047	1,170	1,289
$\alpha_2 [\times 10^{-3} rad] =$	0,383	0,463	0,654	0,810	0,950	1,080	1,202
$\alpha_3 [\times 10^{-3} rad] =$	0,322	0,393	0,573	0,726	0,834	0,992	1,114
$\alpha_4 [\times 10^{-3} rad] =$	0,463	0,526	0,688	0,829	0,960	1,082	1,200

Tabela 3.4: Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação tradicional, em função da variação do fator de pré-carga.

A partir da tabela anterior pode-se dizer que o aumento do fator de pré-carga resulta num aumento da capacidade de carga do mancal. Este efeito é resultante da maior distribuição de pressão sobre as sapatas a medida que sua curvatura aumenta. Quanto ao posicionamento das sapatas tem-se que estas possuem um maior ângulo de rotação com o aumento do fator de pré-carga. A razão deste comportamento é explicado pelo fato da pressão na saída da sapata se elevar enquanto na entrada esta passa a ser cada vez menor (podendo ocorrer até mesmo a cavitação do óleo lubrificante). Na Figura 3.17 pode-se observar nos gráficos (a), (b) e (c) a variação das distribuições de pressão sobre a quarta sapata de um mancal convencional, em função dos fatores de pré-carga, que neste caso são iguais a 0,154, 0,353 e 0,542, respectivamente.

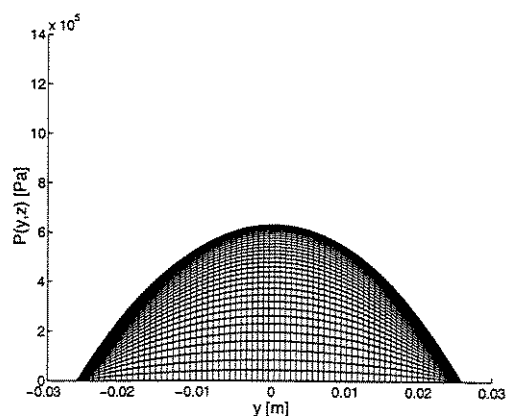
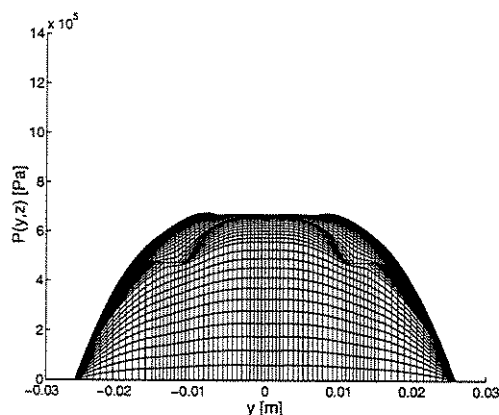
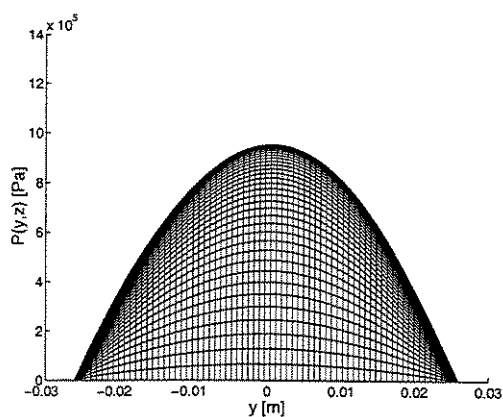
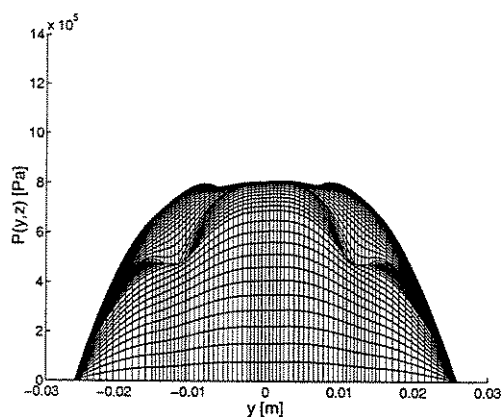
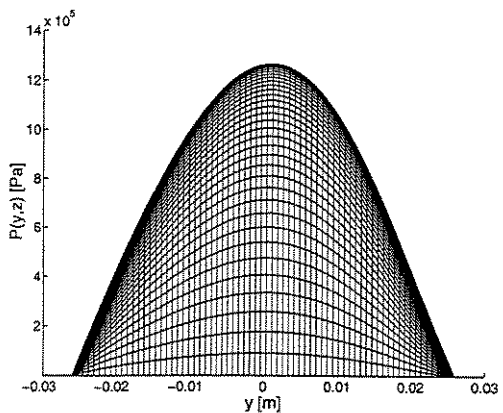
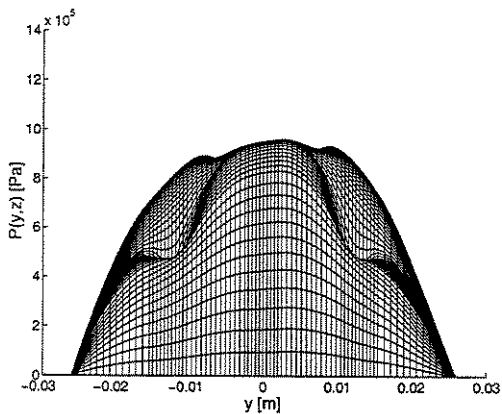
(a) Fator de pré-carga: $c = 0,154$ (d) Fator de pré-carga: $c = 0,154$ (b) Fator de pré-carga: $c = 0,353$ (e) Fator de pré-carga: $c = 0,353$ (c) Fator de pré-carga: $c = 0,542$ (f) Fator de pré-carga: $c = 0,542$

Figura 3.17: Variação da distribuição de pressão em função do fator de pré-carga c : (a), (b) e (c) mancal com lubrificação tradicional; (d), (e) e (f) mancal com lubrificação híbrida cuja pressão de injeção nas sapatas permanece igual a

Na Tabela 3.5 tem-se a influência do fator de pré-carga em mancais híbridos, onde foi considerado novamente uma pressão de injeção igual a 4,745 bar em todas as sapatas.

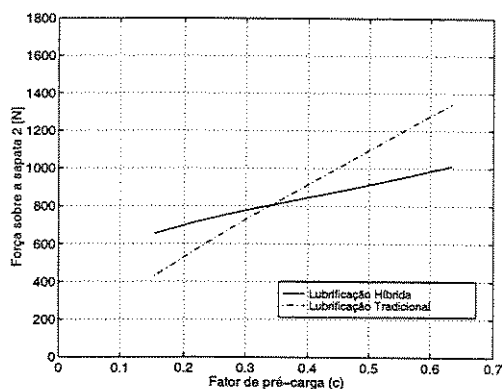
c	0,214	0,267	0,389	0,476	0,542	0,593	0,633
$X_R [\times 10^{-6} m] =$	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$Y_R [\times 10^{-6} m] =$	-18,09	-17,87	-16,77	-15,80	-15,03	-14,41	-13,90
$\alpha_1 [\times 10^{-3} rad] =$	0,713	0,791	0,981	1,142	1,290	1,431	1,568
$\alpha_2 [\times 10^{-3} rad] =$	0,249	0,370	0,634	0,838	1,014	1,176	1,328
$\alpha_3 [\times 10^{-3} rad] =$	0,173	0,258	0,481	0,671	0,842	1,002	1,154
$\alpha_4 [\times 10^{-3} rad] =$	0,560	0,624	0,796	0,953	1,101	1,243	1,382

Tabela 3.5: Posicionamento do rotor e das sapatas do mancal com lubrificação híbrida, em função da variação do fator de pré-carga.

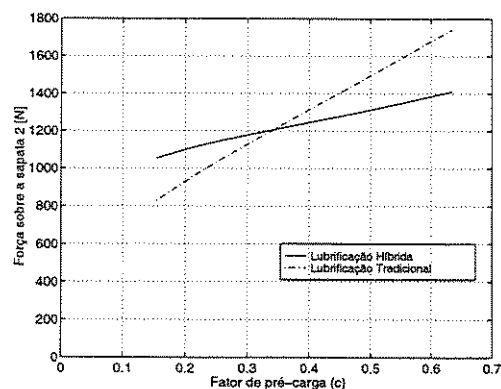
O comportamento observado para o sistema com mancal hidrodinâmico híbrido é o mesmo do mancal tradicional. Ou seja, o aumento do fator de pré-carga resulta numa maior capacidade de carga e as sapatas sofrem uma maior rotação devido ao aumento da diferença de pressão entre a entrada e saída de cada uma delas. Nos gráficos (d), (e) e (f) da Figura 3.17 tem-se a distribuição de pressão sobre a sapata de número 4 de um mancal híbrido para fatores de pré-carga iguais a 0,154, 0,353 e 0,542, respectivamente. É fácil observar nestes gráficos o aumento da distribuição e da diferença de pressão ao longo da sapata com o aumento do valor do fator de pré-carga.

A variação das forças sobre as sapatas posicionadas na direção do carregamento são apresentadas nos gráficos da Figura 3.18.

Observa-se que para os dois tipos de mancais a força resultante sobre as sapatas aumenta com o fator de pré-carga. Este efeito é consequência da maior distribuição de pressão sobre as sapatas a medida que sua curvatura aumenta, ou seja, a medida que o fator de pré-carga aumenta, como pode ser observado nos gráficos da Figura 3.17. Porém, nota-se que para valores menores de fator de pré-carga a força exercida sobre as sapatas em mancais tradicionais é inferior aos valores encontrados para os mancais com lubrificação híbrida. Isto porque nestes casos a pressão exercida pela injeção de óleo na folga radial é mais significativa que a pressão hidrodinâmica. Mas, com o aumento do fator de pré-carga, consequentemente da pressão hidrodinâmica, as forças exercidas sobre as sapatas dos mancais tradicionais tornam-se superiores às realizadas sobre as sapatas de mancais hidrodinâmicos híbridos. A razão é a mesma observada na análise da variação



(a) Força sobre a sapata 2



(b) Força sobre a sapata 4

Figura 3.18: *Variação da força sobre as sapatas 2 e 4 em mancais de lubrificação convencional e de lubrificação híbrida, em função do fator de pré-carga. Pressão de injeção nas sapatas igual a 4,745 bar.*

da rotação de operação do rotor, ou seja, os orifícios nas sapatas dos mancais híbridos servem de alívio de pressão resultando numa diminuição da distribuição de pressão, e conseqüentemente, de força sobre as sapatas. Este fato pode também ser observado nos gráficos da Figura 3.17.

Mancal hidrodinâmico híbrido com pressões de injeção diferentes em cada sapata

Nas análises realizadas até o momento as pressões de injeção nas sapatas do mancal hidrodinâmico híbrido foram sempre mantidas iguais. Porém, com esta condição de operação os mancais tradicionais sempre apresentaram melhores resultados, ou seja, a introdução da injeção de óleo na direção radial do sistema resultou em maiores esforços nas sapatas e maior descentralização do rotor. Então, a maneira de melhorar o comportamento do sistema através de mancais com lubrificações hidrodinâmica e hidrostática, é controlar o sistema de injeção de óleo fazendo com que as sapatas trabalhem com pressões de injeção diferentes. Desta forma, pode-se fazer com que a sapata mais solicitada tenha uma pressão de injeção maior enquanto a pressão na sapata posicionada no sentido oposto a esta, que conseqüentemente é a menos solicitada, seja menor.

Este trabalho não abrange a parte de controle do mancal. Apesar da pressão de injeção poder ser diferente de uma sapata para outra, as condições em estudo se restringem a condições de regime permanente, ou seja, quando o sistema já se encontra na posição de equilíbrio. Assim, apenas são analisadas as modificações de comportamento do mancal para várias configurações da pressão de injeção nas sapatas. Para analisar a influência deste parâmetro no comportamento do rotor e das sapatas, variou-se a pressão de injeção nas sapatas 2 e 4 de *zero* a *9,50 bar*, para um mancal hidrodinâmico híbrido operando nas mesmas condições apresentadas na Tabela B.1 do Apêndice B.

É importante salientar que o sistema de injeção é formado por duas servoválvulas que são responsáveis por determinar a pressão de injeção nas sapatas. Cada servoválvula controla a pressão de injeção em duas sapatas, sendo uma para as sapatas posicionadas na vertical e a outra para as da horizontal. O sistema que regula a pressão de injeção em cada um dos pares de sapatas trabalha de forma diferencial, ou seja, a partir de um nível de pressão médio, o aumento da pressão em uma sapata acarreta na diminuição na outra. Assim, na análise que será realizada a seguir, ao variar a pressão de injeção na sapata 2 de *zero* a *9,50 bar* a pressão na sapata 4 estará, conseqüentemente, variando de *9,50* a *zero bar*.

Na Figura 3.19 observa-se um gráfico da variação do posicionamento do rotor em relação ao centro do mancal quando se tem pressões diferentes de injeção nas sapatas. Estes valores são comparados com o resultado obtido para o sistema operando com um mancal hidrodinâmico tradicional.

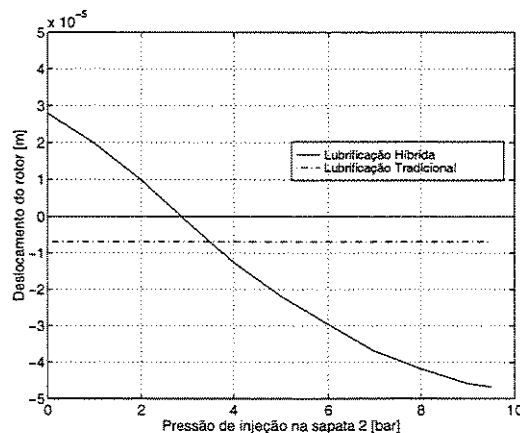
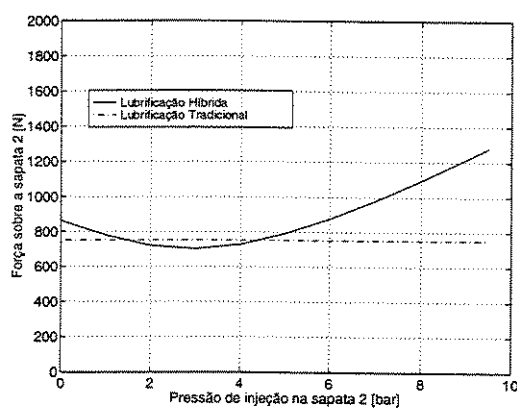


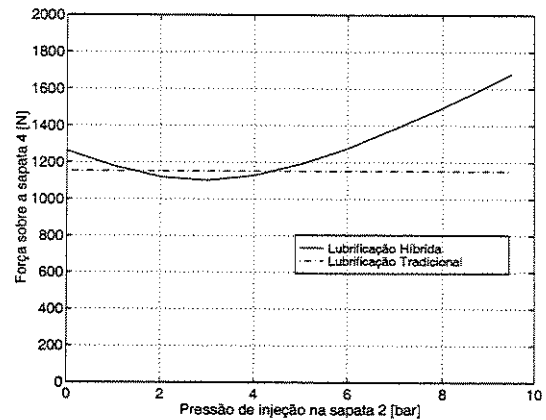
Figura 3.19: Posicionamento do rotor em função da variação da pressão de injeção nas sapatas localizadas na direção do carregamento externo, ou seja, direção *Y*.

Analisando o gráfico da Figura 3.19 pode-se observar que para uma pressão igual a zero *bar* na sapata 2, e 9,50 *bar* na sapata 4, há um deslocamento do rotor no sentido positivo de *Y*. Ou seja, a pressão de injeção de 9,50 *bar* na sapata inferior é capaz de anular a força externa de 400 *N* e ainda deslocar o rotor pra cima. A medida que a pressão na sapata 2 começa a aumentar, e conseqüentemente a da sapata 4 a diminuir, o deslocamento do rotor diminui, até atingir o centro do mancal. Nesta situação, a pressão de injeção na sapata 4 está sendo responsável por anular o carregamento externo e a pressão de injeção na sapata 2. As pressões de injeção neste caso são próximas a 2,95 *bar* na sapata 2, e 6,55 *bar* na sapata 4. As sapatas da horizontal permanecem sempre com uma pressão de injeção igual a 4,745 *bar*. Aumentando o nível de pressão na sapata 2, a força exercida sobre o rotor no sentido negativo de *Y* não é mais anulada pela injeção de óleo na sapata 4, e o deslocamento do rotor passa a ser negativo. É importante observar que para uma pressão de injeção entre 2,5 e 3,5 *bar* na sapata 2 o deslocamento do rotor é menor que o ocorrido quando se tem um mancal tradicional. Logo, conclui-se que um melhor posicionamento do sistema pode ser obtido com a utilização de pressões de injeção diferentes entre uma sapata e outra.

Na Figura 3.20 são apresentados gráficos dos esforços sobre as sapatas 2 e 4.



(a) Força sobre a sapata 2



(b) Força sobre a sapata 4

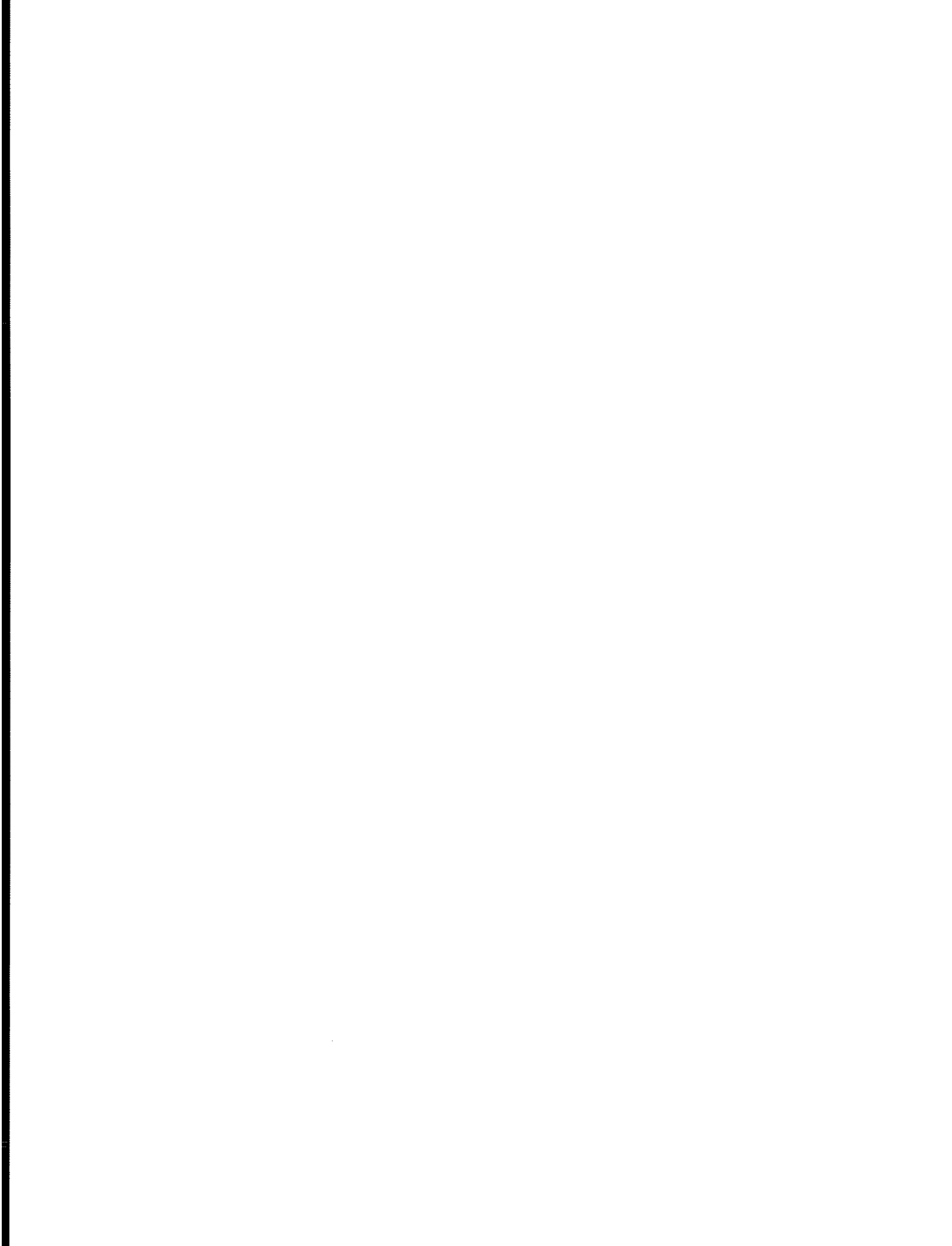
Figura 3.20: *Variação da força sobre as sapatas 2 e 4 em mancais de lubrificação híbrida, em função da variação da pressão de injeção nas sapatas localizadas na direção do carregamento externo, ou seja, direção *Y*.*

Através destas duas curvas é fácil observar que o ponto de menor esforço ocorre quando o rotor se encontra no centro do mancal, ou seja, quando a pressão na sapata 2

é próxima a 2,95 *bar*. Neste caso, as forças de injeção e externa se anulam e apenas as forças hidrodinâmicas continuam a atuar sobre as sapatas. Havendo um deslocamento do rotor, seja este no sentido negativo ou positivo de Y , os esforços sobre as sapatas 2 e 4 passam a ser maiores.

Tem-se que estes esforços são resultantes da combinação das pressões hidrodinâmica e hidrostática. A variação da pressão hidrodinâmica ocorre de acordo com o posicionamento do rotor em relação às sapatas. Quanto mais perto o rotor estiver da sapata maior será o esforço exercido sobre ela. Já a variação da pressão hidrostática ocorre com o nível de pressão de injeção nas sapatas. Quanto maior a pressão de injeção, maior será o esforço sobre a sapata. Desta forma, tem-se que inicialmente a sapata 2 sofre apenas os efeitos pressão hidrodinâmica, e a medida que a pressão hidrostática aumenta, a hidrodinâmica diminui devido ao deslocamento do rotor no sentido negativo. Sendo a decaimento da pressão hidrodinâmica maior que o aumento da pressão hidrostática ocorre uma diminuição dos esforços sobre a sapata até o rotor atingir o centro do mancal. Quando o rotor passa a se deslocar no sentido negativo de Y , a pressão hidrostática passa a ser maior e a força sobre a sapata 2 passa a aumentar novamente. Com relação ao esforço resultante na sapata 4, o mesmo raciocínio pode ser realizado, ou seja, inicialmente esta possui a máxima pressão hidrostática e a medida que a pressão de injeção diminui os esforços sobre a sapata também diminuem. Porém, quando o rotor passa a se movimentar em sua direção, há um aumento da pressão hidrodinâmica que faz com que o carregamento sobre ela volte a aumentar, mesmo havendo a diminuição da pressão de injeção.

Mas, pode-se observar nestes gráficos, que é possível obter esforços até inferiores aos encontrados para mancais tradicionais, se for utilizado pressões de injeção diferentes nas sapatas. E, conjuntamente, aumenta-se a capacidade de carga do sistema. Logo, pode-se concluir que se estes mancais tornam-se mais eficazes se forem utilizados com um sistema de controle adaptado.



Capítulo 4

Determinação dos coeficientes dinâmicos do mancal

4.1 Introdução

Os mancais segmentados são amplamente utilizados em máquinas rotativas que operam em altas velocidades, as quais apresentam muitos problemas relacionados com vibrações auto-excitadas. O conhecimento das propriedades dinâmicas do mancal, neste caso, passam a ser de extrema importância uma vez que estão diretamente relacionadas com a estabilidade do sistema. Deste modo, investiga-se o comportamento estático e dinâmico destes mancais desde 1953 [7], observando a influência dos seus coeficientes de rigidez e amortecimento.

Lund [33] foi um dos primeiros autores a resolver a equação de Reynolds para o cálculo teórico dos coeficientes dinâmicos de um mancal segmentado. A aplicação desta teoria a mancais hidrodinâmicos com injeção de filme de óleo na folga radial, está sendo desenvolvida neste projeto baseada nos estudos teóricos e experimentais realizados por Santos [49].

Para o cálculo teórico da rigidez e amortecimento do mancal é necessário calcular as forças hidrodinâmicas do filme de óleo, as quais variam não linearmente com a posição de operação do rotor. Estas forças são obtidas a partir dos coeficientes de rigidez e amortecimento que devem ser calculadas em função do ponto de operação do sistema

rotor-mancal e da pressão de injeção radial. Sendo pequena a amplitude de vibração do rotor em torno do ponto de equilíbrio é possível realizar a linearização destas forças e representá-las por elementos de mola e amortecedor.

O principal objetivo desta pesquisa é avaliar as possibilidades de se ajustar os coeficientes dinâmicos de um mancal segmentado através da injeção radial de óleo, e assim obter um aumento da reserva de amortecimento e/ou de rigidez. Desta forma, busca-se uma redução significativa nas amplitudes de vibração do sistema rotor-mancal, chegando-se a sistemas rotativos mais estáveis.

4.2 Cálculo das matrizes de rigidez e amortecimento

A força de reação do rotor para um efeito vibratório de baixa amplitude pode ser linearizada e representada em função da amplitude e velocidade da vibração do rotor. Desta forma, o cálculo dos coeficientes de rigidez são realizados através da aplicação de perturbações de deslocamento ($\Delta x'_R$ e $\Delta y'_R$) sobre o rotor, e de rotação ($\Delta\alpha$) sobre as sapatas, enquanto que para os coeficientes de amortecimento deve-se dar perturbações de velocidade linear ($\Delta \dot{x}'_R$ e $\Delta \dot{y}'_R$) e velocidade angular ($\Delta \dot{\alpha}$) no sistema que se encontra inicialmente numa posição de equilíbrio.

Porém, a formulação matemática será realizada sobre as sapatas, e por isso os deslocamentos e velocidades lineares realizados sobre o rotor, são transferidos para as sapatas, passando a ser representados apenas por $\Delta x'_R$ e $\Delta y'_R$, e suas respectivas derivadas. Assim, considera-se que o rotor permanece sempre no centro do sistema enquanto a sapata sofre os efeitos de rotação e translação nos eixos x' e y'

Estas perturbações acarretam, então, em variação de força e momento sobre cada uma das sapatas. Estudando-se as reações sobre uma delas, tem-se que estas podem ser expandidas em série de Taylor. Desprezando-se os termos de segunda ordem, e ordem

superiores, chega-se a:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \Delta F_{x'} \\ \Delta F_{y'} \\ \Delta M \end{array} \right\}}_{\Delta f_j}^{B'_i(j)} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\alpha} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\alpha} \\ k_{\alpha x} & k_{\alpha y} & k_{\alpha\alpha} \end{array} \right]}_{\mathbf{K}_j} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta \alpha \end{array} \right\}}_{\Delta z_j}^{B'_i(j)} + \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} d_{xx} & d_{xy} & d_{x\alpha} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{y\alpha} \\ d_{\alpha x} & d_{\alpha y} & d_{\alpha\alpha} \end{array} \right]}_{\mathbf{D}_j} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \Delta \dot{x}' \\ \Delta \dot{y}' \\ \Delta \dot{\alpha} \end{array} \right\}}_{\Delta \dot{z}_j}^{B'_i(j)} \quad (4.1)$$

sendo $j = 1, 2, 3$ ou 4 , indicando cada uma das sapatas do mancal.

Os termos da matriz \mathbf{K}_j , que relacionam os esforços sobre a j -ésima sapata com sua rotação e deslocamentos, correspondem aos valores de rigidez, enquanto que a matriz \mathbf{D}_j indicam os valores de amortecimento.

Uma vez conhecida as variações de forças, momentos e perturbações, pode-se resolver este sistema de equações.

Vê-se que o vetor da variação de força e momento, assim como as perturbações, são escritas na base \mathbf{B}'_i (Sistema Móvel), ou seja, no sistema solidário à sapata (x' , y' e z') antes deste ter sofrido os efeitos das perturbações. Cada uma das perturbações são dadas isoladamente, o que permite a fácil determinação de cada coeficiente.

Porém, tem-se que a perturbação de deslocamento do rotor na direção y' ($\Delta y'$) pode ser interpretada como sendo uma perturbação de rotação ($\Delta \alpha$), quando a análise é feita sobre o ponto de vista da sapata. A relação entre estas perturbações pode ser obtida estudando a geometria do sistema apresentada na Figura 3.8.

Admitindo que a sapata sofreu uma rotação em torno do ponto B , ponto de apoio da sapata, o deslocamento $\Delta y'_R$ é dado pela distância entre a nova posição do centro da sapata O' , e do ponto O . Como para uma rotação positiva da sapata, o caminho percorrido pelo seu centro é no sentido negativo de y' , este deslocamento é escrito da seguinte forma:

$$\Delta y'_R = -(R_s + h_s) \cdot \Delta \alpha \quad (4.2)$$

Observa-se que a distância $\Delta y'_R$ foi aproximada por um segmento de arco, o que é possível uma vez que a amplitude de $\Delta \alpha$ é pequena.

Assim, conclui-se que as perturbações de deslocamento na direção y' e de rotação estão relacionadas, e na determinação dos coeficientes dinâmicos basta utilizar uma delas. Se for feito o estudo com base no rotor, utiliza-se as perturbações de deslocamento $\Delta x'$ e $\Delta y'$, enquanto que se for feito com base na sapata, as perturbações serão $\Delta x'$ (significando um deslocamento da sapata sobre o rotor) e $\Delta \alpha$.

O estudo aqui realizado levou-se em consideração que as perturbações foram realizadas sobre as sapatas. Logo, a determinação dos coeficientes relacionados com a direção y' ($k_{x'y'}$, $k_{y'x'}$, $k_{y'y'}$, $k_{y'\alpha}$, $k_{\alpha y'}$, $d_{y'y'}$, $d_{y'x'}$, ...) será realizada em função da equação (4.2).

Para obter $\Delta \dot{y}'$, utilizado no cálculo da matriz de amortecimento, basta derivar a expressão (4.2) em relação ao tempo:

$$\Delta \dot{y}' = -\Delta \dot{\alpha} \cdot (R_s + h_s) \quad (4.3)$$

Da mesma forma que a perturbação na direção y' está relacionada com a rotação $\Delta \alpha$, pode-se escrever a variação da força $F_{y'}$ em função do momento sobre o ponto de apoio da sapata. Esta relação é dada pela seguinte equação:

$$\Delta M = -(R_s + \Delta s) \cdot \Delta F_{y'} \quad \Rightarrow \quad \Delta F_{y'} = -\frac{\Delta M}{(R_s + \Delta s)} \quad (4.4)$$

Sabendo que só serão dadas as perturbações de deslocamento $\Delta x'$, de rotação $\Delta \alpha$, de velocidade linear $\Delta \dot{x}'$ e angular $\Delta \dot{\alpha}$, a equação (4.1) é reduzida a:

$${}_{B'_j} \left\{ \begin{array}{c} \Delta F_{x'} \\ \Delta M \end{array} \right\}_{(j)} = \begin{bmatrix} k_{x'x'} & k_{x'\alpha} \\ k_{\alpha x'} & k_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}_{(j)} \cdot {}_{B'_j} \left\{ \begin{array}{c} \Delta x' \\ \Delta \alpha \end{array} \right\}_{(j)} + \begin{bmatrix} d_{x'x'} & d_{x'\alpha} \\ d_{\alpha x'} & d_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}_{(j)} \cdot {}_{B'_j} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \dot{x}' \\ \Delta \dot{\alpha} \end{array} \right\}_{(j)} \quad (4.5)$$

O sistema (4.5) é resolvido dando cada uma das perturbações separadamente. Inicialmente será determinado os coeficientes de rigidez, fazendo-se $\Delta \dot{x}'$ e $\Delta \dot{\alpha}$ iguais a zero.

- (1) Perturbação na direção x' : $\Delta x'$ ($\Delta \alpha = 0$)

pelas equações do sistema (4.5) tem-se:

$$\Delta F_{x'} = k_{x'x'} \cdot \Delta x' \Rightarrow k_{x'x'} = \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta x'} \quad (4.6)$$

$$\Delta M = k_{\alpha x'} \cdot \Delta x' \Rightarrow k_{\alpha x'} = \frac{\Delta M}{\Delta x'} = \frac{-(R_s + \Delta s)\Delta F_{y'}}{\Delta x'} \quad (4.7)$$

- (2) Perturbação angular α : $\Delta\alpha$ ($\Delta x' = 0$)

pelas equações de (4.5) tem-se:

$$\Delta F_{x'} = k_{x'\alpha} \cdot \Delta\alpha \Rightarrow k_{x'\alpha} = \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta\alpha} \quad (4.8)$$

$$\Delta M = k_{\alpha\alpha} \cdot \Delta\alpha \Rightarrow k_{\alpha\alpha} = \frac{\Delta M}{\Delta\alpha} = \frac{-(R_s + \Delta s)\Delta F_{y'}}{\Delta\alpha} \quad (4.9)$$

A partir da equação (4.1) os termos da rigidez dependentes do deslocamento $\Delta y'$ podem ser obtidos em função dos coeficientes que foram determinados acima:

$$\Delta F_{y'} = k_{y'x'} \cdot \Delta x' \Rightarrow k_{y'x'} = \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x'} = \frac{-\frac{\Delta M}{(R_s + \Delta s)}}{\Delta x'} = -\frac{k_{\alpha x'}}{(R_s + \Delta s)} \quad (4.10)$$

$$\Delta F_{x'} = k_{x'y'} \cdot \Delta y' \Rightarrow k_{x'y'} = \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta y'} = \frac{\Delta F_{x'}}{-(R_s + \Delta s) \cdot \Delta\alpha} = -\frac{k_{x'\alpha}}{(R_s + \Delta s)} \quad (4.11)$$

$$\Delta F_{y'} = k_{y'y'} \cdot \Delta y' \Rightarrow k_{y'y'} = \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta y'} = \frac{-\frac{\Delta M}{(R_s + \Delta s)}}{-(R_s + \Delta s) \cdot \Delta\alpha} = \frac{k_{\alpha\alpha}}{(R_s + \Delta s)^2} \quad (4.12)$$

$$\Delta F_{y'} = k_{y'\alpha} \cdot \Delta\alpha \Rightarrow k_{y'\alpha} = \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta\alpha} = \frac{-\frac{\Delta M}{(R_s + \Delta s)}}{\Delta\alpha} = -\frac{k_{\alpha\alpha}}{(R_s + \Delta s)} \quad (4.13)$$

$$\Delta M = k_{\alpha y'} \cdot \Delta y' \Rightarrow k_{\alpha y'} = \frac{\Delta M}{\Delta y'} = \frac{\Delta M}{-(R_s + \Delta s) \cdot \Delta\alpha} = -\frac{k_{\alpha\alpha}}{(R_s + \Delta s)} \quad (4.14)$$

Assim, a matriz de rigidez fica determinada como sendo igual a:

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} k_{x'x'} & -\frac{k_{x'\alpha}}{(R_s+\Delta s)} & k_{x'\alpha} \\ -\frac{k_{\alpha x'}}{(R_s+\Delta s)} & \frac{k_{\alpha\alpha}}{(R_s+\Delta s)^2} & -\frac{k_{\alpha\alpha}}{(R_s+\Delta s)} \\ k_{\alpha x'} & -\frac{k_{\alpha\alpha}}{(R_s+\Delta s)} & k_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}_{(j)} \quad (4.15)$$

De maneira análoga pode-se obter a matriz de amortecimento D , tendo-se apenas que igualar as perturbações $\Delta x'$ e $\Delta \alpha$ a zero, e aplicar separadamente as perturbações de velocidade. A matriz a ser determinada será equivalente à encontrada para a rigidez, e é dada por:

$$\mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} d_{x'x'} & -\frac{d_{x'\alpha}}{(R_s+\Delta s)} & d_{x'\alpha} \\ -\frac{d_{\alpha x'}}{(R_s+\Delta s)} & \frac{d_{\alpha\alpha}}{(R_s+\Delta s)^2} & -\frac{d_{\alpha\alpha}}{(R_s+\Delta s)} \\ d_{\alpha x'} & -\frac{d_{\alpha\alpha}}{(R_s+\Delta s)} & d_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}_{(j)} \quad (4.16)$$

Sendo as forças de perturbação que atuam sobre o sub-sistema (rotor e a j -ésima sapata) $\Delta \mathbf{f}_j$ harmônicas de frequência ω , tem-se que a relação entre as amplitudes das forças de perturbação, representada por $\Delta \bar{\mathbf{f}}_j$, e das amplitudes dos movimentos do sub-sistema, esta indicada por $\Delta \bar{\mathbf{z}}_j$, é dada pela matriz de rigidez complexa \mathbf{S}'_j , a qual é determinada da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{f}_j = \Delta \bar{\mathbf{f}}_j \cdot e^{i\omega t} \quad (4.17)$$

$$\Delta \mathbf{z}_j = \Delta \bar{\mathbf{z}}_j \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (4.18)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{z}}_j = i\omega \Delta \bar{\mathbf{z}}_j \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (4.19)$$

sendo φ o ângulo de defasagem entre a força atuante sobre a sapata e sua resposta.

Substituindo as equações (4.17), (4.18), e (4.19) em (4.1), tem-se:

$$\Delta \bar{\mathbf{f}}_j e^{i\omega t} = (\mathbf{K}_j + i\omega \mathbf{D}) \Delta \bar{\mathbf{z}}_j e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (4.20)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{f}}_j = \mathbf{S}'_j(\omega) \Delta \bar{\mathbf{z}}_j e^{-i\varphi} \quad (4.21)$$

sendo

$$\mathbf{S}'_j(\omega) = (\mathbf{K}_j + i\omega\mathbf{D}_j) \quad (4.22)$$

A partir da matriz complexa \mathbf{S}'_j , a determinação dos coeficientes de rigidez e amortecimento pode ser feita de duas maneiras. A primeira delas, apresentada por Springer [58], realiza-se inicialmente a redução da matriz \mathbf{S}'_j para uma matriz \mathbf{S}_j de dimensão 2×2 . Esta nova matriz é, então, transformada para o sistema de coordenadas inercial \mathbf{I} (X , Y e Z), e realiza-se a soma das matrizes referentes a cada uma das sapatas, chegando-se à matriz global. O segundo método, apresentado por Allaire [1], a matriz \mathbf{S}'_j é primeiramente escrita no sistema de coordenadas inerciais, determina-se a matriz global, para então realizar sua condensação.

Pelo método apresentado por Springer, a matriz \mathbf{S}'_j é subdividida em quatro submatrizes: $\mathbf{A}_j(\omega)_{(2 \times 2)}$, $\mathbf{H}_j(\omega)_{(2 \times 1)}$, $\mathbf{V}_j(\omega)_{(1 \times 2)}$ e $\mathbf{B}_j(\omega)_{(1 \times 1)}$, ou seja:

$$\mathbf{S}'_j(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j(\omega) & \mathbf{H}_j(\omega) \\ \mathbf{V}_j(\omega) & \mathbf{B}_j(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Supondo que as perturbações atuantes no sub-sistema são introduzidas sempre pelo rotor, e transferindo estes esforços para cada uma das sapatas como sendo forças nas direções x' e y' , e tendo momento aplicado à sapata igual a zero, define-se o vetor \mathbf{f}^* como sendo:

$$\mathbf{f}_j^* = \begin{Bmatrix} \Delta F_{x'} \\ \Delta F_{y'} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

e representando por \mathbf{z}_j^* o vetor formado somente pelos deslocamentos da j -ésima sapata nas direções x' e y'

$$\mathbf{z}_j^* = \begin{Bmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

tem-se que a condensação da matriz de rigidez dinâmica $\mathbf{S}'_j(\omega)$ pode ser realizada através da eliminação das coordenadas que descrevem os movimentos de rotação do j -ésimo seg-

mento.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{f}_j^*(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j(\omega) & \mathbf{H}_j(\omega) \\ \mathbf{V}_j(\omega) & \mathbf{B}_j(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{z}_j^*(\omega) \\ \Delta \alpha_j(\omega) \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{z}_j^* + \mathbf{B}_j \cdot \Delta \alpha_j = 0 \quad (4.27)$$

$$\Delta \alpha_j = -\mathbf{B}_j^{-1} \cdot \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{z}_j^* \quad (4.28)$$

$$\Delta \mathbf{f}_j^* = \mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{z}_j^* + \mathbf{H}_j \cdot \Delta \alpha_j \quad (4.29)$$

$$\Delta \mathbf{f}_j^* = \mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{z}_j^* - \mathbf{H}_j \cdot \mathbf{B}_j^{-1} \cdot \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{z}_j^* \quad (4.30)$$

$$\Delta \mathbf{f}_j^* = (\mathbf{A}_j - \mathbf{H}_j \cdot \mathbf{B}_j^{-1} \cdot \mathbf{V}_j) \Delta \mathbf{z}_j^* \quad (4.31)$$

$$\Delta \mathbf{f}_j^*(\omega) = \mathbf{S}_j(\omega) \cdot \Delta \mathbf{z}_j^*(\omega) \quad (4.32)$$

Assim, a matriz \mathbf{S}_j , de ordem 2×2 , que é dada por:

$$\mathbf{S}_j(\omega) = \mathbf{A}_j(\omega) - \mathbf{H}_j(\omega) \mathbf{B}_j^{-1}(\omega) \mathbf{V}_j(\omega) \quad (4.33)$$

relaciona as amplitudes de vibração do rotor acoplado com o sub-sistema j , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{x'} \\ \Delta F_{y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_j(\omega) \cdot \begin{Bmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

A mudança do sistema de coordenadas móvel $x'-y'$ do j -ésimo sub-sistema para o sistema de coordenadas inercial $X-Y$ é feita através da matriz de transformação de coordenadas $[\mathbf{T}_{(\phi_j + \alpha_j)}]$:

$$\mathbf{T}_{(\phi_j + \alpha_j)} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_j + \alpha_j) & \text{sen}(\phi_j + \alpha_j) & 0 \\ -\text{sen}(\phi_j + \alpha_j) & \cos(\phi_j + \alpha_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Uma vez realizada a transformação de coordenadas e superpondo todos os N subsistemas, obtém-se finalmente a matriz de rigidez dinâmica condensada do mancal:

$$\mathbf{S}(\omega) = \sum_{j=1}^N \mathbf{T}_{(\phi_j + \alpha_j)}^T \mathbf{S}_j(\omega) \mathbf{T}_{(\phi_j + \alpha_j)} \quad (4.36)$$

a qual relaciona a amplitude de vibração do rotor com as N sapatas quando as perturbações atuam diretamente sobre o rotor, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(\omega) \cdot \begin{Bmatrix} \Delta X_R \\ \Delta Y_R \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

A matriz de rigidez $\mathbf{K}(\omega)$ e de amortecimento $\mathbf{D}(\omega)$ do mancal segmentado é, então, obtida por:

$$\mathbf{K}(\omega) = \text{Real}\{\mathbf{S}(\omega)\} = \begin{bmatrix} k_{xx}(\omega) & k_{xy}(\omega) \\ k_{yx}(\omega) & k_{yy}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \frac{1}{\omega} \text{Imag}\{\mathbf{S}(i\omega)\} = \begin{bmatrix} d_{xx}(\omega) & d_{xy}(\omega) \\ d_{yx}(\omega) & d_{yy}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

No segundo método, apresentado por Allaire, a matriz \mathbf{S}'_j é escrita no sistema de coordenadas inercial I (X , Y e Z), através da sua multiplicação pela mesma matriz de transformação de coordenadas $[\mathbf{T}_{(\phi_j + \alpha_j)}]$ indicada na equação (4.35).

$${}_I \mathbf{S}'_j(\omega) = \mathbf{T}_{(\phi_j + \alpha_j)}^T {}_{B_i} \mathbf{S}'_j(\omega) \mathbf{T}_{(\phi_j + \alpha_j)} \quad (4.40)$$

A partir das matrizes ${}_I \mathbf{S}'_j$ obtida na perturbação de cada sapata, define-se uma

matriz global do sistema dada por:

$${}_I\mathbf{S}'_{global}(\omega) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n {}_I S'_{xxj} & \sum_{j=1}^n {}_I S'_{xyj} & {}_I S'_{x\alpha 1j} & {}_I S'_{x\alpha 2j} & {}_I S'_{x\alpha 3j} & {}_I S'_{x\alpha 4j} \\ \sum_{j=1}^n {}_I S'_{yxj} & \sum_{j=1}^n {}_I S'_{yyj} & {}_I S'_{y\alpha 1j} & {}_I S'_{y\alpha 2j} & {}_I S'_{y\alpha 3j} & {}_I S'_{y\alpha 4j} \\ {}_I S'_{\alpha 1xj} & {}_I S'_{\alpha 1yj} & {}_I S'_{\alpha 1\alpha 1j} & 0 & 0 & 0 \\ {}_I S'_{\alpha 2xj} & {}_I S'_{\alpha 2yj} & 0 & {}_I S'_{\alpha 2\alpha 2j} & 0 & 0 \\ {}_I S'_{\alpha 3xj} & {}_I S'_{\alpha 3yj} & 0 & 0 & {}_I S'_{\alpha 3\alpha 3j} & 0 \\ {}_I S'_{\alpha 4xj} & {}_I S'_{\alpha 4yj} & 0 & 0 & 0 & {}_I S'_{\alpha 4\alpha 4j} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Obtida esta matriz faz-se, então, a sua compactação da mesma forma que foi apresentada no método anterior, com a diferença de que agora as quatro sub-matrizes serão de ordem: $\mathbf{A}(\omega)_{(2 \times 2)}$, $\mathbf{H}(\omega)_{(2 \times 4)}$, $\mathbf{V}(\omega)_{(4 \times 2)}$ e $\mathbf{B}(\omega)_{(4 \times 4)}$.

E assim, define-se a matriz ${}_I\mathbf{S}$ de ordem (2×2) :

$${}_I\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{A}(\omega) - \mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{B}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{V}(\omega) \quad (4.42)$$

As matrizes de rigidez $\mathbf{K}(\omega)$ e amortecimento $\mathbf{D}(\omega)$ do mancal são então definidas da mesma maneira, ou seja:

$$\mathbf{K}(\omega) = \text{Real}\{\mathbf{S}(\omega)\} = \begin{bmatrix} k_{xx}(\omega) & k_{xy}(\omega) \\ k_{yx}(\omega) & k_{yy}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \frac{1}{\omega} \text{Imag}\{\mathbf{S}(\omega)\} = \begin{bmatrix} d_{xx}(\omega) & d_{xy}(\omega) \\ d_{yx}(\omega) & d_{yy}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

4.3 Resultados Teóricos

Dos métodos apresentados anteriormente, utilizou-se no programa computacional para simular o comportamento dos coeficientes dinâmicos do mancal o modelo de Al-laire. Os resultados apresentados a seguir estão em função do número de Sommerfeld. É realizado também uma comparação entre os coeficientes encontrados para mancais com lubrificação tradicional e os de lubrificação híbrida.

Os parâmetros de geometria e condições de operação do mancal consideradas nas simulações apresentadas neste capítulo estão indicados na Tabela B.1 do apêndice B.

4.3.1 Mancais com Lubrificação Tradicional

São apresentados aqui alguns resultados obtidos para os coeficientes dinâmicos em sistemas que utilizam mancais com lubrificação tradicional. Os valores encontrados pelo programa computacional foram comparados com os obtidos na literatura [55], e outros provenientes de um segundo programa computacional. Este segundo programa foi desenvolvido na Alemanha, na Universidade Técnica de Munique, apenas para a simulação de mancais com lubrificação tradicional [49]. Neste programa a determinação da distribuição de pressão sobre as sapatas é feita através de polinômios de Tschebystcheff, e os coeficientes dinâmicos são calculados com base no modelo de Springer [56] [58].

Estes coeficientes serão apresentados na forma adimensional, permitindo a sua comparação com coeficientes de mancais semelhantes. A adimensionalização dos coeficientes de rigidez é dada por:

$$k_{ij} = \bar{k}_{ij} \frac{h_0}{\|_I F\|} \quad (4.45)$$

sendo :

\bar{k}_{ij} - termo da rigidez na forma dimensional [N/m];

h_0 - folga radial do mancal [m]; e

$\|_I F\|$ - módulo da força exercida sobre o mancal [N].

Já a forma adimensional dos coeficientes de amortecimento é dada por:

$$d_{ij} = \bar{d}_{ij} \frac{h_0 \cdot \Omega}{\|_I F\|} \quad (4.46)$$

sendo :

\bar{d}_{ij} - termo do amortecimento na forma dimensional [$N.s/m$]; e

Ω - rotação do rotor [rad/s].

Os gráficos serão representados em função do número de Sommerfeld, o qual também é adimensional, e é dado pela equação:

$$S_o = \frac{2 \cdot \mu \cdot \Omega \cdot R_s \cdot \beta_0}{\|IF\|} \cdot \frac{(R + h_0)^2}{(R_s - R)} \quad (4.47)$$

sendo :

μ - viscosidade dinâmica do filme de óleo [$N.s/m^2$];

β_0 - ângulo de abrangência da sapata [rad];

R - raio do rotor [m]; e

R_s - raio da sapata [m].

As análises ao longo do número de Sommerfeld serão realizadas apenas através da modificação das velocidades de rotação do rotor, que irão variar de 5 a 200 Hz , ou seja, o número de Sommerfeld estará entre 0,035 e 1,396. Nas comparações que se seguem os resultados referentes aos coeficientes calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa são indicados por um apóstrofo ('). Os resultados utilizados para comparação são representados por dois apóstrofos (").

Primeiramente é realizado a comparação dos resultados de rigidez do filme de óleo. Na Figura 4.1 tem-se o comportamento dos coeficientes de rigidez principais (k_{xx} e k_{yy}).

Observa-se que os coeficientes de rigidez principais crescem de forma praticamente linear com o aumento do número de Sommerfeld. Tem-se também que há uma grande coerência entre os resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido nesta

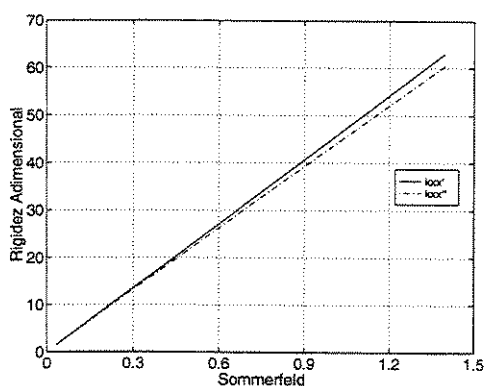
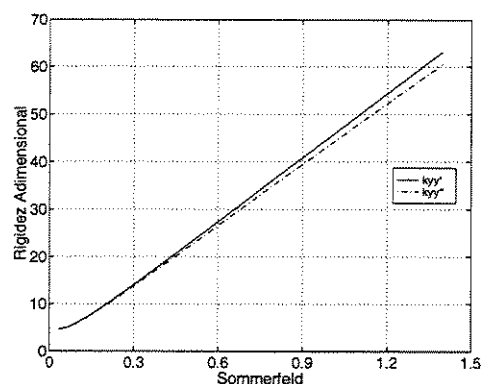
(a) Rigidez adimensional k_{xx} (b) Rigidez adimensional k_{yy}

Figura 4.1: Comparação dos coeficientes de rigidez principais adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.

pesquisa, e os coeficientes obtidos através do programa da Universidade Técnica de Munique. Na Figura 4.2 são representados os coeficientes secundários (k_{xy} e k_{yx}):

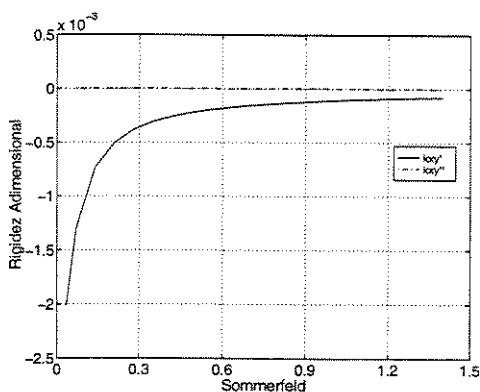
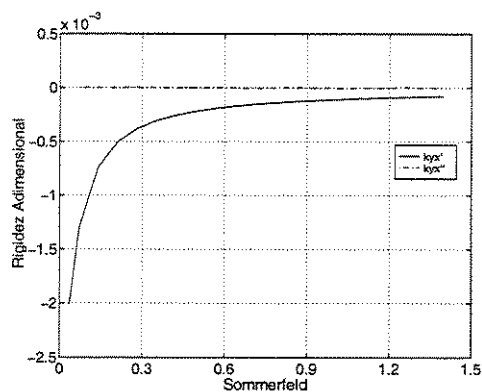
(a) Rigidez adimensional k_{xy} (b) Rigidez adimensional k_{yx}

Figura 4.2: Comparação dos coeficientes de rigidez secundários adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.

Analisando a Figura 4.2 nota-se uma grande divergência dos resultados para baixos valores de Sommerfeld, vindo os mesmos a convergir para valores de Sommerfeld maiores. Logo, observa-se uma maior precisão dos resultados quanto maior for o número de Sommerfeld. Mas, todos os resultados estão coerentes com a teoria, pois ao comparar a grandeza destes valores com relação aos coeficientes da diagonal principal, nota-se que estes são muito inferiores, como indicado na Figura 4.3.

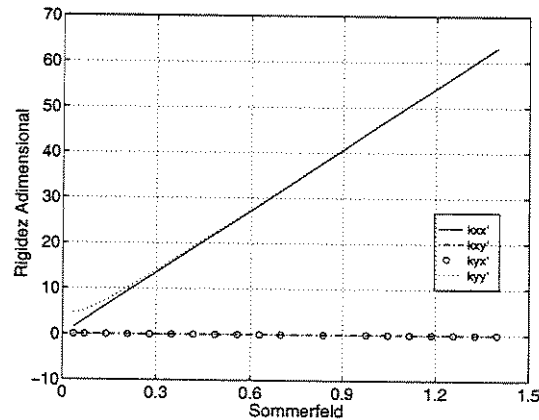


Figura 4.3: Coeficientes de rigidez para o mancal com lubrificação tradicional em função do número de Sommerfeld.

É importante salientar que apesar destes resultados serem adimensionais, o comportamento destes na forma dimensional é idêntico, uma vez que são independentes do único parâmetro que está sofrendo alteração que é a velocidade de rotação do rotor (Ω). Assim, observa-se que com o aumento da rotação, e conseqüentemente da pressão hidrodinâmica, a rigidez do filme de óleo nas direções principais tornam-se maiores.

A diferença de grandeza dos coeficientes de rigidez principais e secundários vem confirmar a principal característica dos mancais hidrodinâmicos segmentados, que é o desacoplamento das direções X e Y . Este desacoplamento é resultante da liberdade de rotação das sapatas do mancal.

O comportamento dos coeficientes de amortecimento em função do número de Sommerfeld são analisados a seguir. Na Figura 4.4 tem-se a variação dos coeficientes principais de amortecimento (d_{xx} e d_{yy}), também na forma adimensional.

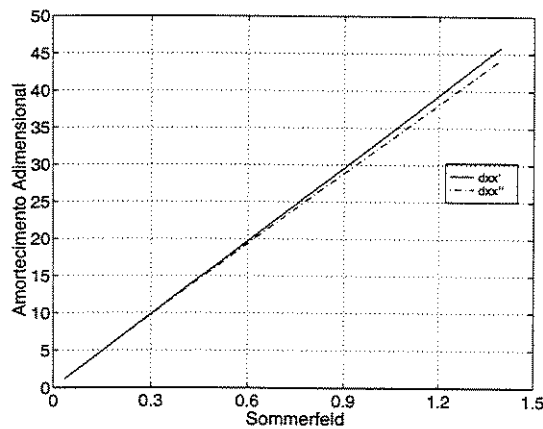
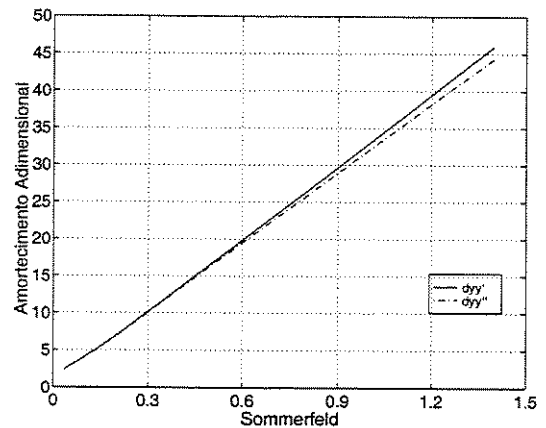
(a) Amortecimento adimensional d_{xx} (b) Amortecimento adimensional d_{yy}

Figura 4.4: Comparação dos coeficientes de amortecimento principais adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.

Novamente observa-se na Figura 4.4 uma grande coerência entre os coeficientes de amortecimento calculados pelos dois programas computacionais, comprovando a validade dos resultados obtidos. Porém, estas curvas podem ser interpretadas de forma equivocada se for considerado que ocorre um aumento do nível de amortecimento ao longo do número de Sommerfeld. Se for analisado estas mesmas curvas na forma dimensional, observa-se que o amortecimento d_{xx} permanece praticamente constante com o aumento do número de Sommerfeld, enquanto o valor de d_{yy} decresce. É importante lembrar que estes coeficientes só estão sendo representados na forma adimensional a fim de permitir a comparação de seus resultados com os de outros mancais. A representação dos coeficientes d_{xx} e d_{yy} na forma dimensional é feita na Figura 4.5.

Devido ao carregamento externo ter sido dado na direção Y , os resultados em X não são influenciados. Porém, poucas modificações são observadas mesmo na direção Y . Apenas para baixos valores de Sommerfeld, ou de rotação (entre 5 e 70 Hz), pode-se notar uma queda do amortecimento do sistema. Isto porque neste intervalo o efeito da força externa ainda é relevante frente à pressão hidrodinâmica no interior do mancal. A medida que a rotação aumenta, esta pressão tende a anular os efeitos do carregamento externo

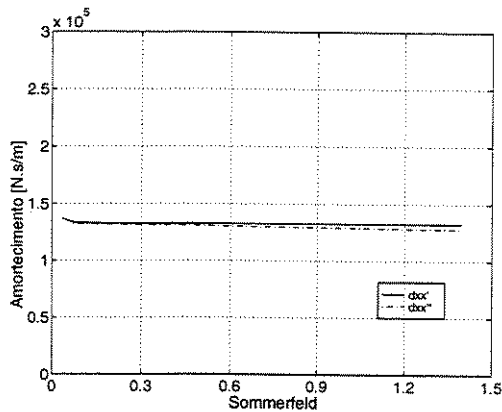
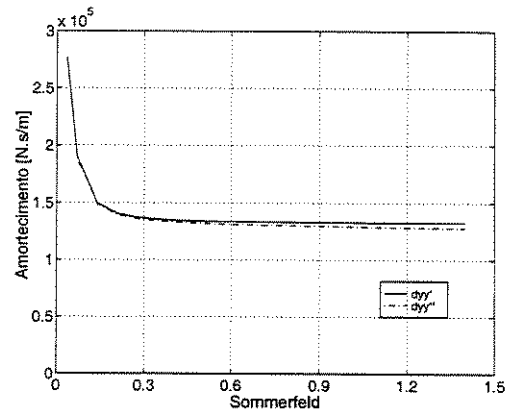
(a) Amortecimento d_{xx} em $[N.s/m]$ (b) Amortecimento d_{yy} em $[N.s/m]$

Figura 4.5: Comparação dos coeficientes de amortecimento principais na forma dimensional calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.

e este passa a não influenciar mais nos coeficientes de amortecimento. A partir deste ponto o amortecimento na direção Y passa a ser próximo do encontrado na direção X , e pode-se observar que o simples aumento da pressão hidrodinâmica não interfere de forma significativa os coeficientes de amortecimento.

Esta característica não é vantajosa para a estabilidade do sistema. O novo tipo de mancal com lubrificação mista, proposto neste trabalho, tem a finalidade de aumentar a reserva de amortecimento do sistema tornando-o mais estável em condições de operação desfavoráveis. Na Figura 4.6 tem-se a comparação dos coeficientes de amortecimento secundários adimensionais (d_{xy} e d_{yx}).

Para ambos os coeficientes observa-se que em baixos valores de Sommerfeld tem-se uma maior diferença entre os resultados dos modelos em comparação. Porém, com o aumento do número de Sommerfeld tem-se uma tendência de ambos os resultados convergirem para valores próximos a zero. Novamente tem-se, então, uma maior compatibilidade

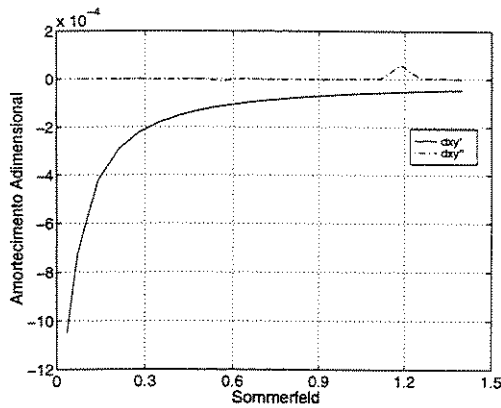
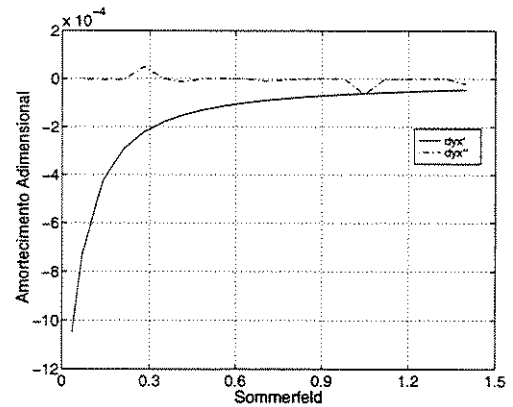
(a) Amortecimento adimensional d_{xy} (b) Amortecimento adimensional d_{yx}

Figura 4.6: Comparação dos coeficientes de amortecimento secundários adimensionais calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.

entre os programas computacionais quanto maior for o número de Sommerfeld. Na Figura 4.7 os mesmos coeficientes de amortecimento da Figura 4.6 estão representadas na forma dimensional.

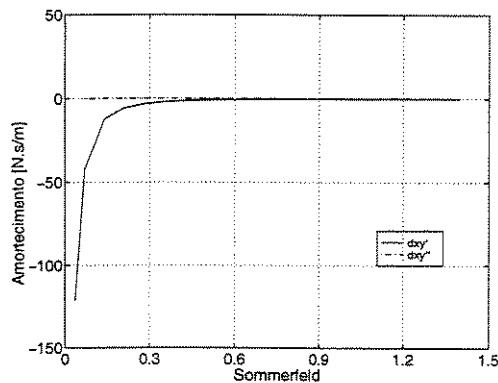
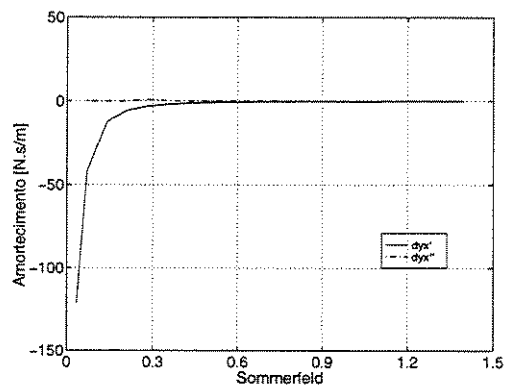
(a) Amortecimento d_{xy} em $[N.s/m]$ (b) Amortecimento d_{yx} em $[N.s/m]$

Figura 4.7: Comparação dos coeficientes de amortecimento secundários na forma dimensional calculados pelo programa desenvolvido nesta pesquisa e os calculados via programa desenvolvido na Alemanha. Resultados apresentados em função do número de Sommerfeld.

Na Figura 4.8 são apresentados os quatro coeficientes de amortecimento em um mesmo gráfico a fim de comparar suas grandezas. Pode-se observar que os coeficientes principais novamente são muito superiores aos secundários, o que representa o desacoplamento das direções X e Y . Este desacoplamento já era esperado uma vez que o mancal em estudo é formado por segmentos que possuem liberdade de rotação.

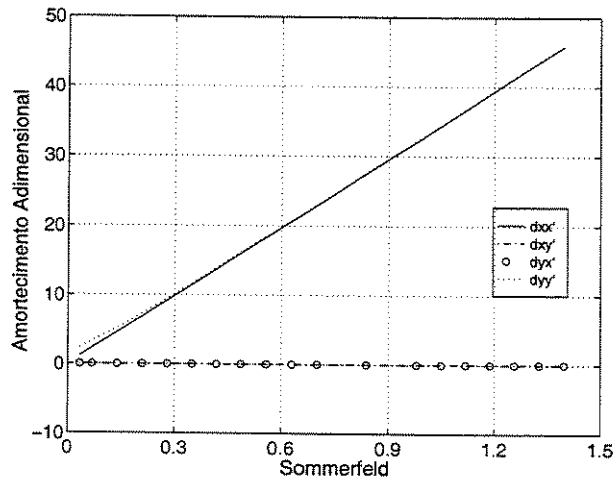


Figura 4.8: *Coefficientes de amortecimento adimensionais de um mancal com lubrificação tradicional em função do número de Sommerfeld.*

A seguir são realizadas as análises dos coeficientes dinâmicos para o mancal hidrodinâmico com lubrificação mista (lubrificação hidrodinâmica e hidrostática), com o qual se busca um aumento do nível de amortecimento do sistema.

4.3.2 Lubrificação Híbrida

A análise dos coeficientes dinâmicos dos mancais com lubrificação híbrida será realizada de duas formas. Na primeira delas estuda-se o comportamento destes parâmetros para um número de Sommerfeld fixo, e variam-se as pressões de injeção nas sapatas. Em uma segunda instância é analisado o comportamento destes em função do número de Sommerfeld, para pressões de injeção constantes.

No primeiro caso estudado fixou-se as pressões das sapatas 1 e 3 em 3, 5 bar enquanto as pressões das sapatas posicionadas na direção do carregamento externo, ou seja, da

segunda e quarta sapatas, variaram de zero a 7,0 bar. É importante lembrar que a pressão de injeção total em uma direção é sempre constante. Assim, as pressões nas sapatas 2 e 4 devem variar de forma a manter uma pressão de injeção total sempre igual a 7 bar.

A Tabela 4.1 apresenta algumas condições de operação e parâmetros do sistema utilizados para esta primeira etapa de simulações. Os parâmetros que não estão indicados abaixo são iguais aos da Tabela B.1 do apêndice B.

Pressão de injeção (P_{inj})	Sapatas 1 e 3	3, 5bar
	Sapatas 2 e 4	0, 0 a 7, 0bar

Tabela 4.1: Pressões de injeção utilizadas nas sapatas na primeira análise realizada para o mancal hidrodinâmico híbrido.

A Figura 4.9 apresenta a variação dos coeficientes de rigidez na forma adimensional, em função da pressão de injeção na segunda sapata.

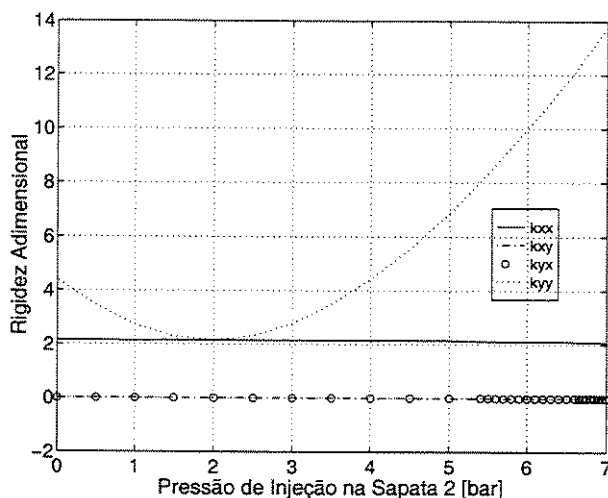


Figura 4.9: Coeficientes adimensionais de rigidez para mancais híbridos em função da pressão de injeção na sapata de número 2.

Observa-se que os coeficientes k_{xx} , k_{xy} e k_{yx} permanecem praticamente constantes com a variação da pressão de injeção na direção Y. Este comportamento era de se esperar devido ao próprio desacoplamento das direções principais do mancal, característica inerente aos mancais hidrodinâmicos segmentados. Já o coeficiente k_{yy} se comporta de

forma semelhante aos resultados obtidos para os esforços realizados sobre as sapatas 2 e 4, apresentados na Figura 3.20, quando se tem uma variação da pressão de injeção na folga radial. Ou seja, inicialmente, quando a pressão de injeção na sapata 4 é máxima e na sapata 2 é nula, o rotor está deslocado no sentido contrário ao carregamento externo, e há uma grande pressão hidrostática produzida pela sapata 4. Com o aumento da pressão de injeção em 2 o rotor se desloca para o centro do mancal. Assim, os efeitos da pressão hidrostática diminuem, e por conseguinte a rigidez desta direção também decresce. Porém, quando a pressão de injeção na sapata 4 torna-se insuficiente para suportar a força resultante do carregamento externo e da injeção da sapata 2, o rotor se desloca do centro do mancal no sentido negativo de Y , voltando a aumentar a rigidez do filme de óleo nesta direção.

Na Figura 4.10 tem-se o comportamento dos coeficientes adimensionais de amortecimento em função da pressão de injeção na sapata 2.

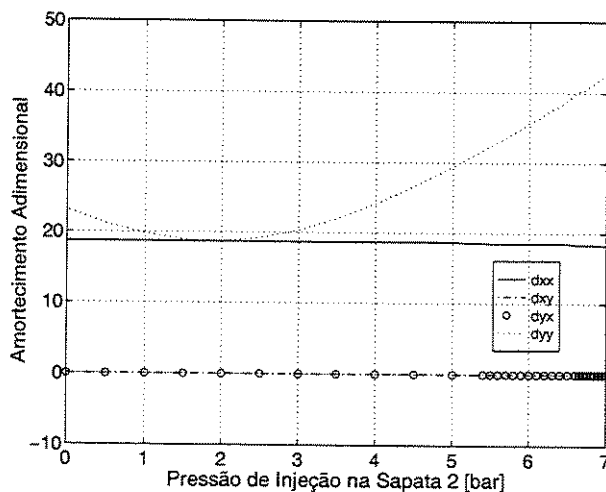


Figura 4.10: Coeficientes adimensionais de amortecimento para mancais híbridos em função da pressão de injeção na sapata de número 2.

Novamente observa-se apenas uma variação no coeficiente de amortecimento d_{yy} , devido à independência entre as direções X e Y . A variação deste parâmetro ocorre da mesma forma que a do coeficiente de rigidez, ou seja, sofre uma leve queda para baixas pressões de injeção na sapata 2, até o momento em que o rotor se posiciona no centro do mancal. Mas este volta a crescer quando a pressão de injeção na sapata 4 não é mais

suficiente para suportar os esforços provenientes do carregamento externo e da pressão de injeção na sapata 2, o que faz com que o rotor se desloque do centro do mancal.

Uma vez que a rotação do rotor (Ω), a folga radial (h_0), e as forças externas (F_X e F_Y) foram mantidas constantes nesta primeira análise, o comportamento dos coeficientes dinâmicos do mancal apresentados na forma adimensional são idênticos se estes tivessem sido dados na forma dimensional. Dos dois gráficos anteriores conclui-se, então, que com o aumento da pressão de injeção no sentido contrário ao carregamento, consegue-se elevar o amortecimento do sistema. Porém, ocorre nesta mesma direção um aumento simultâneo da rigidez.

Na segunda análise fixou-se as pressões de injeção nas sapatas em 3, 5 bar, e variou-se o número de Sommerfeld. A Figura 4.11 apresenta o comportamento dos coeficientes de rigidez na forma adimensional.

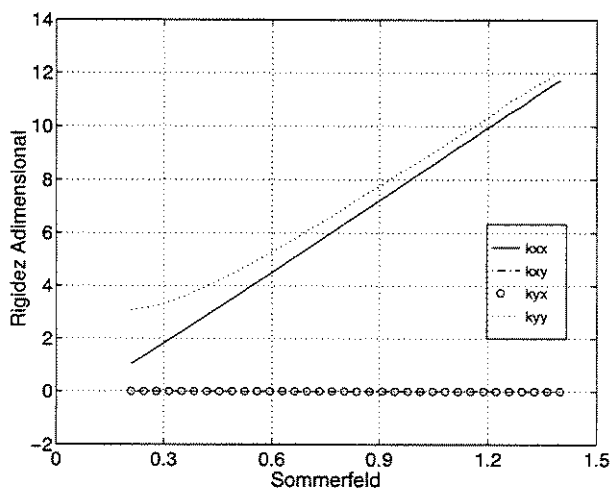


Figura 4.11: Coeficientes de rigidez adimensionais do mancal hidrodinâmico com lubrificação híbrida em função do número de Sommerfeld.

Pode-se notar que os coeficientes de rigidez se comportam de forma semelhante ao que foi observado para o caso com lubrificação tradicional. Ou seja, os coeficientes de rigidez principais (k_{xx} e k_{yy}) crescem de maneira praticamente linear com o aumento do número de Sommerfeld, enquanto que os coeficientes que acoplam estas direções (k_{xy} e k_{yx}) permanecem próximos a zero. Comparando estes resultados com os obtidos com lubrificação tradicional (Figura 4.12), observa-se que já se alcançou uma diminuição na

rigidez do filme de óleo através da lubrificação híbrida, o que facilita uma intervenção no filme de óleo a fim de modificar suas características.

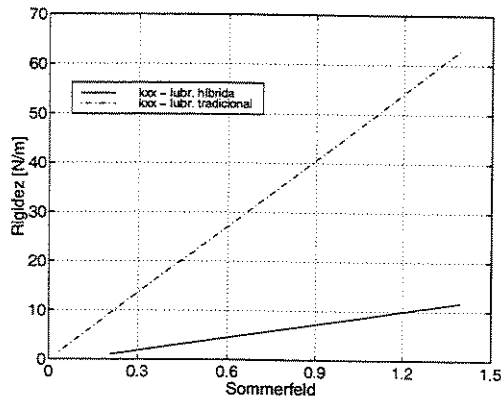
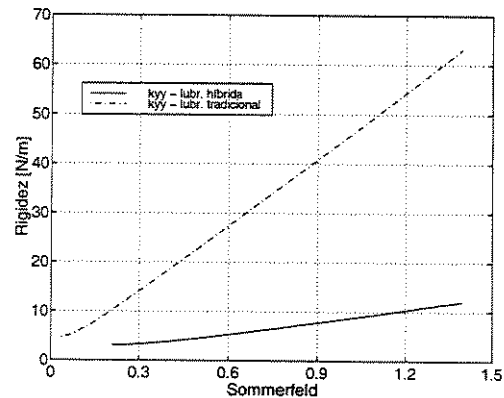
(a) Rigidez k_{xx} em $[N/m]$ (b) Rigidez k_{yy} em $[N/m]$

Figura 4.12: Comparação entre os coeficientes de rigidez de um mancal com lubrificação tradicional e outro com lubrificação mista, cuja pressão de injeção nas sapatas se mantiveram constantes e iguais a 3,5 bar.

Mas o mais importante é analisar a influência da injeção do filme de óleo na alteração dos coeficientes de amortecimento. Na Figura 4.13 é apresentada a variação destes coeficientes em função do número de Sommerfeld na forma dimensional a fim de facilitar suas análises.

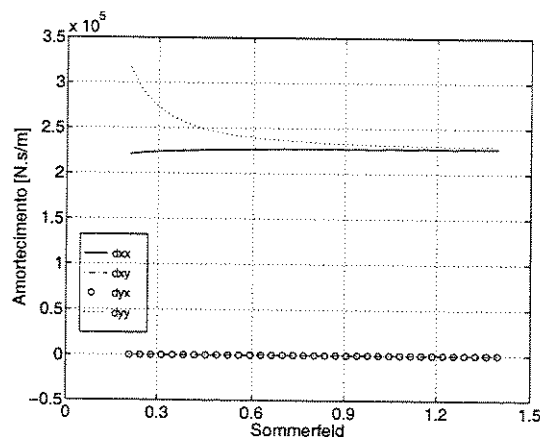


Figura 4.13: Coeficientes de amortecimento do mancal hidrodinâmico com lubrificação híbrida, na forma dimensional, em função do número de Sommerfeld.

Observa-se que para baixos valores de Sommerfeld, ou seja, para rotações entre 5 e 70 Hz , o valor de d_{yy} é maior que d_{xx} devido ao carregamento externo na direção Y . Porém, com o aumento da rotação a influência deste carregamento é eliminada e os parâmetros convergem para um mesmo valor, que neste caso foi aproximadamente $2,3 N.s/m$. Já os coeficientes cruzados, ou seja, d_{xy} e d_{yx} , permanecem próximos a zero, o que caracteriza o desacoplamento das direções X e Y .

A seguir é apresentada a mesma curva anterior, porém na forma adimensional, para que seja possível realizar comparações destes resultados com os de outros mancais.

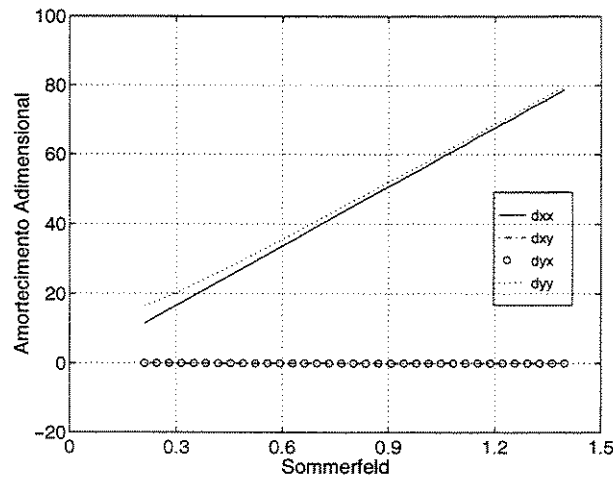


Figura 4.14: Coeficientes de amortecimento do mancal com lubrificação híbrida na forma adimensional.

Comparando os valores dos coeficientes de amortecimento com os obtidos na lubrificação tradicional, observa-se que houve um grande aumento do nível de amortecimento do sistema rotor-mancal com a introdução da injeção de óleo na folga radial. Na Figura 4.15 tem-se as curvas dos coeficientes de amortecimento principais d_{xx} e d_{yy} , para os dois tipos de lubrificação.

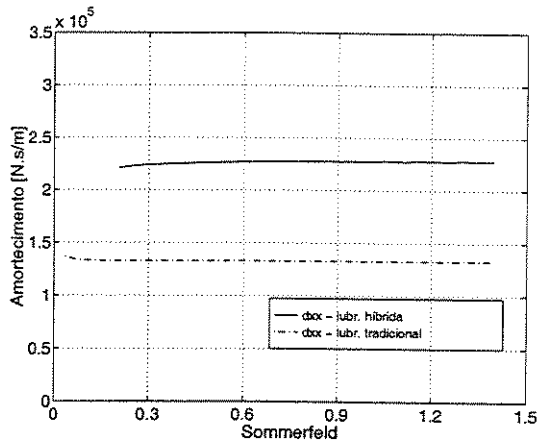
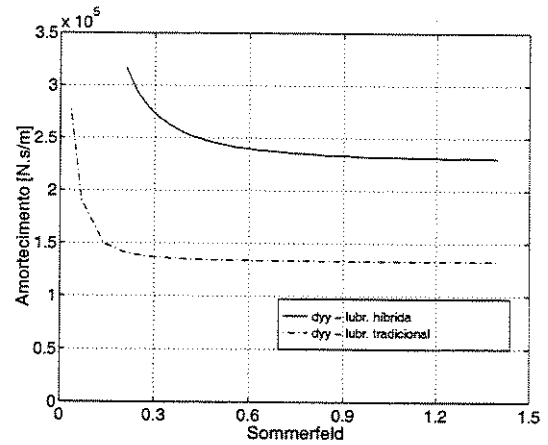
(a) Amortecimento d_{xx} em $[N.s/m]$ (b) Amortecimento d_{yy} em $[N.s/m]$

Figura 4.15: Comparação entre os coeficientes de amortecimento de um mancal com lubrificação tradicional e outro com lubrificação mista.

Analisando estas curvas observa-se que tanto o coeficiente de amortecimento da direção X como o da direção Y assumem valores maiores ao utilizar a lubrificação híbrida.

Assim, observa-se nos gráficos das Figuras 4.12 e 4.15, que houve uma melhora na estabilidade do sistema através da utilização do novo modelo de mancal hidrodinâmico, dada a diminuição dos coeficientes de rigidez e aumento dos coeficientes de amortecimento.

Capítulo 5

Modelagem Matemática da Bancada de Testes

5.1 Introdução

Neste capítulo realiza-se a modelagem matemática da bancada de testes utilizada para estudar o mancal hidrodinâmico híbrido. Uma foto desta bancada é mostrada na Figura 5.1.

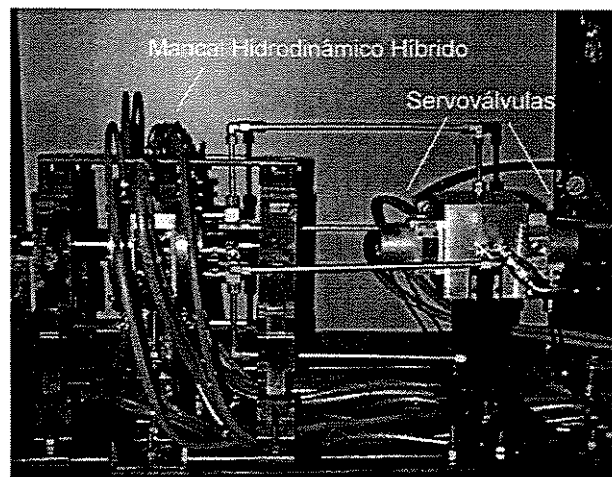


Figura 5.1: Bancada de testes desenvolvida para o estudo do mancal hidrodinâmico híbrido.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 94

O modelo matemático desenvolvido é responsável por relacionar os movimentos das extremidades do rotor com os coeficientes dinâmicos do mancal híbrido. Porém, antes de estudar o sistema com o mancal é necessário conhecer o comportamento do rotor devido somente às influências dos seus apoios. Desta forma, é possível determinar posteriormente os efeitos provenientes exclusivamente do mancal de teste. Desenvolve-se primeiramente um modelo matemático da bancada de testes sem o mancal hidrodinâmico e, em seguida, o seu modelo com a introdução do mancal.

5.2 Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido

A bancada de testes onde o mancal hidrodinâmico híbrido será testado é mostrado na Figura 5.2. Nesta foto pode-se observar os dois suportes flexíveis (mancais de rolos cônicos fixados numa estrutura de lâminas flexíveis), designados por *A* e *B*, e o rotor rígido.

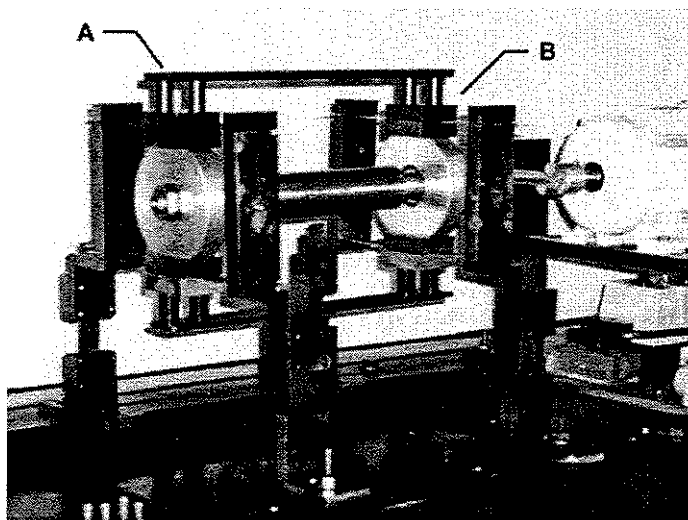


Figura 5.2: Bancada de testes onde será montado o mancal hidrodinâmico híbrido.

Para estudar o comportamento do rotor no sistema é necessário definir um modelo mecânico responsável por descrever as interações entre ele e os apoios flexíveis. Este é

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 95

representado na Figura 5.3, onde as reações dos apoios sobre o rotor foram substituídas por elementos de mola e amortecedor.

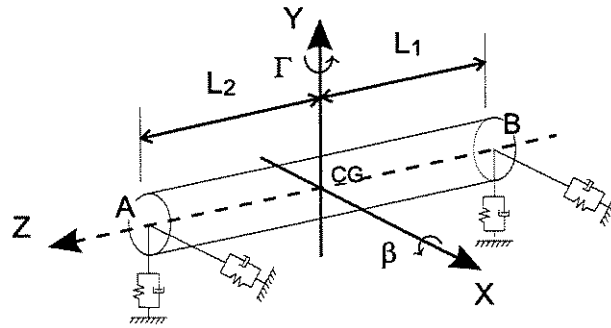


Figura 5.3: Modelo mecânico construído para representar a bancada de testes, sem o mancal hidrodinâmico híbrido.

Os movimentos do rotor são descritos no sistema de coordenadas inercial ($X Y Z$) posicionado no seu centro de massa. Este possui quatro graus de liberdade, sendo dois de translação (direções X e Y), e dois de rotação, realizadas em torno dos eixos X_1 ¹ (rotação β) e Y (rotação Γ). A sua translação em Z , e a rotação em torno deste eixo, conhecida por *spin*, não são consideradas graus de liberdade, uma vez que a rotação de operação do rotor Ω é sempre conhecida, e o seu deslocamento na direção Z é restringido devido à alta rigidez dos suportes A e B .

A fim de prever os movimentos descritos pelo rotor rígido é necessário obter suas equações de movimento. A dedução destas equações são apresentadas no próximo item.

5.2.1 Determinação das Equações de Movimento do Rotor Rígido

As equações de movimento do rotor são obtidas a partir do seu estudo cinemático e dinâmico. Para isso define-se inicialmente os sistemas de coordenadas que irão auxiliar na descrição do movimento. O primeiro deles, conhecido como sistema inercial (SI), é formado pelos eixos X , Y e Z . Este é posicionado no centro de massa do rotor, como mostrado na Figura 5.3, e não sofre nenhum tipo de rotação ou translação. O segundo sistema de coordenadas, chamado de sistema móvel 1 ($SM1$), acompanha a rotação do

¹O sub-índice 1 indica que a rotação é no eixo X da base móvel 1, que será apresentada no item seguinte.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 96

rotor em torno do eixo Y , ou seja, sofre a rotação Γ . Este sistema é designado pelas coordenadas X_1 , Y_1 e Z_1 , como mostrado na Figura 5.4. A matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}_Γ responsável por passar a representação de um vetor na base inercial SI , para a base $SM1$, está indicada a seguir.

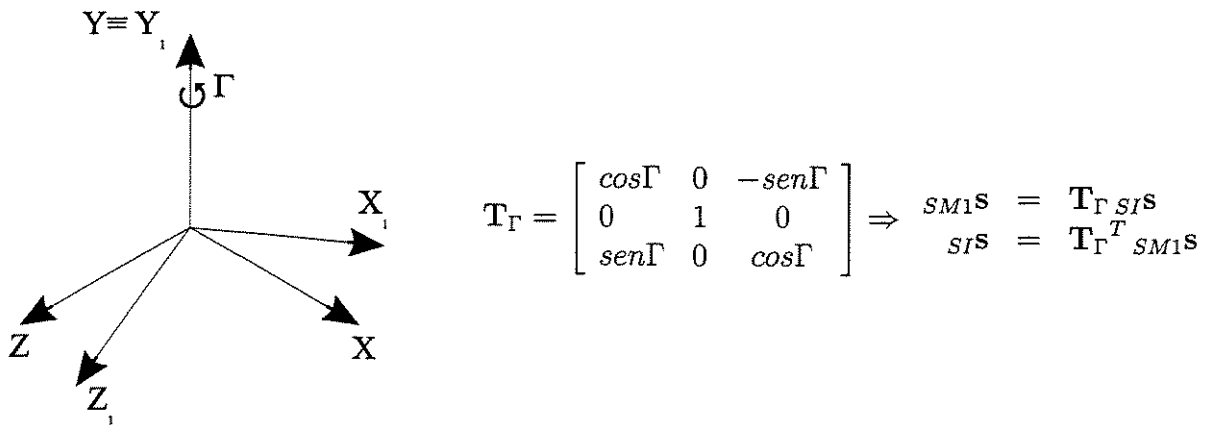


Figura 5.4: Rotação em torno do eixo Y .

Após o sistema móvel 1, define-se o sistema móvel 2 ($SM2$) que possui, além da rotação em torno do eixo Y , a rotação β em torno de X_1 . Este sistema é formado pelas coordenadas X_2 , Y_2 e Z_2 , como mostrado na Figura 5.5. A matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}_β , responsável por passar da base $SM1$ para a base $SM2$, está indicada abaixo.

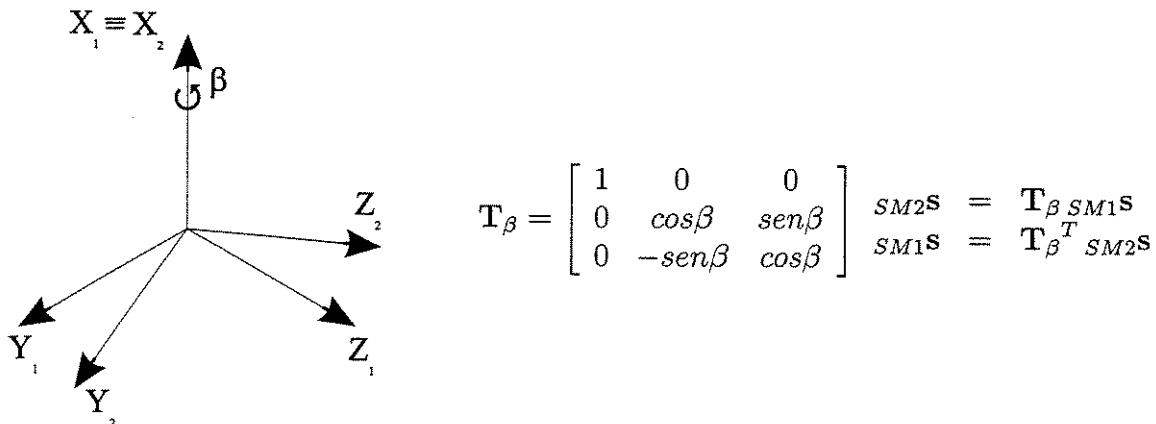


Figura 5.5: Rotação em torno do eixo X .

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 97

As matrizes de transformação utilizadas para passar a representação de um vetor do sistema inercial (SI), para o sistema móvel 2 ($SM2$), e a transformação inversa são dadas pelas matrizes $\mathbf{T}_{\beta\Gamma}$ e $\mathbf{T}_{\Gamma\beta}$, respectivamente:

$$\mathbf{T}_{\beta\Gamma} = \mathbf{T}_{\beta} \cdot \mathbf{T}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} \cos\Gamma & 0 & -\text{sen}\Gamma \\ \text{sen}\Gamma\text{sen}\beta & \cos\beta & \cos\Gamma\text{sen}\beta \\ \text{sen}\Gamma\cos\beta & -\text{sen}\beta & \cos\Gamma\cos\beta \end{bmatrix} \quad {}_{SM2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta\Gamma} {}_{SI}\mathbf{s} \quad \text{e,}$$

$$\mathbf{T}_{\Gamma\beta} = \mathbf{T}_{\Gamma}^T \cdot \mathbf{T}_{\beta}^T = \begin{bmatrix} \cos\Gamma & \text{sen}\Gamma\text{sen}\beta & \text{sen}\Gamma\cos\beta \\ 0 & \cos\beta & -\text{sen}\beta \\ -\text{sen}\Gamma & \cos\Gamma\text{sen}\beta & \cos\Gamma\cos\beta \end{bmatrix} \quad {}_{SI}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\Gamma\beta} {}_{SM2}\mathbf{s}$$

Conhecidos os sistemas de referência e suas matrizes de transformação, inicia-se o cálculo vetorial das grandezas cinemáticas (vetores de posição, velocidade e aceleração) que serão utilizadas nas equações de movimento do rotor:

- velocidade de rotação em torno do eixo Y^2

$${}_{SI}\dot{\Gamma} = \{ 0 \quad \dot{\Gamma} \quad 0 \}^T \quad (5.1)$$

- velocidade de rotação em torno do eixo X_1

$${}_{SM1}\dot{\beta} = \{ \dot{\beta} \quad 0 \quad 0 \}^T \quad (5.2)$$

- velocidade angular absoluta do sistema móvel 2

$${}_{SM2}\phi = \mathbf{T}_{\beta\Gamma} \cdot {}_{SI}\dot{\Gamma} + \mathbf{T}_{\beta} \cdot {}_{SM1}\dot{\beta} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma}\cos\beta \\ -\dot{\Gamma}\text{sen}\beta \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

²Os sub-índices mostrados à esquerda da entidade indicam o sistema de coordenadas em que esta é escrita.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 98

- velocidade de rotação em torno do eixo Z_2 (*spin*)

$${}_{SM2}\boldsymbol{\Omega} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & \Omega \end{matrix} \right\}^T \quad (5.4)$$

- velocidade angular absoluta do rotor, escrita na base $SM2$

$${}_{SM2}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}_{\beta\Gamma} \cdot {}_{SI}\dot{\Gamma} + \mathbf{T}_{\beta} \cdot {}_{SM1}\dot{\beta} + {}_{SM2}\boldsymbol{\Omega} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma}\cos\beta \\ \Omega - \dot{\Gamma}\sin\beta \end{matrix} \right\} \quad (5.5)$$

- derivada da velocidade angular absoluta do rotor

$$\frac{d({}_{SM2}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \left\{ \begin{matrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\Gamma}\cos\beta - \dot{\Gamma}\dot{\beta}\sin\beta \\ \dot{\Omega} - \ddot{\Gamma}\sin\beta - \dot{\Gamma}\dot{\beta}\cos\beta \end{matrix} \right\} \quad (5.6)$$

- aceleração absoluta do centro de massa do rotor ${}_{SI}\ddot{\mathbf{s}}_{CG}$

$${}_{SI}\ddot{\mathbf{s}}_{CG} = \left\{ \begin{matrix} \ddot{x}_{CG} \\ \ddot{y}_{CG} \\ \ddot{z}_{CG} \end{matrix} \right\} \quad (5.7)$$

- tensor de inércia em relação ao centro de massa do rotor

$${}_{SM2}\mathbf{I}_{CG} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

O tensor de inércia é escrito no sistema $SM2$, pois nesta base este se torna invariante no tempo.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 99

Terminada a análise cinemática determina-se as grandezas dinâmicas. O primeiro a ser considerado é a força peso dada pelo vetor ${}_{SI}\mathbf{P}$:

$${}_{SI}\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_{rotor} \cdot g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

sendo m_{rotor} a massa do rotor e g a constante gravitacional. Os outros esforços realizados sobre o rotor são resultantes das reações nos apoios A e B . Estes são dados por:

$${}_{SI}\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} r_{Ax} \\ r_{Ay} \\ r_{Az} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{SI}\mathbf{r}_B = \begin{Bmatrix} r_{Bx} \\ r_{By} \\ r_{Bz} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Reescrevendo estas forças no sistema móvel 2 ($SM2$) chega-se a:

$$\begin{aligned} {}_{SM2}\mathbf{r}_A &= \begin{Bmatrix} r_{Ax}\cos\Gamma - r_{Az}\sin\Gamma \\ r_{Ax}\sin\Gamma\sin\beta + r_{Ay}\cos\beta + r_{Az}\cos\Gamma\sin\beta \\ r_{Ax}\sin\Gamma\cos\beta - r_{Ay}\sin\beta + r_{Az}\cos\Gamma\cos\beta \end{Bmatrix} \quad \text{e,} \\ {}_{SM2}\mathbf{r}_B &= \begin{Bmatrix} r_{Bx}\cos\Gamma - r_{Bz}\sin\Gamma \\ r_{Bx}\sin\Gamma\sin\beta + r_{By}\cos\beta + r_{Bz}\cos\Gamma\sin\beta \\ r_{Bx}\sin\Gamma\cos\beta - r_{By}\sin\beta + r_{Bz}\cos\Gamma\cos\beta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

As forças de reações entre o rotor e os apoios flexíveis podem ser escritas em função das constantes de mola e amortecedor que caracterizam estes apoios, como foi mostrado na Figura 5.3. Analisando o apoio A, e escrevendo sua força de reação em função dos coeficientes de rigidez e amortecimento, chega-se a:

$${}_{SI}\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} r_{Ax} \\ r_{Ay} \\ r_{Az} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & k_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & k_{Az} \end{bmatrix} \Delta_{SI}\mathbf{s}_A - \begin{bmatrix} d_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & d_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & d_{Az} \end{bmatrix} \Delta_{SI}\dot{\mathbf{s}}_A \quad (5.12)$$

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 100

Desenvolvendo o sistema (5.12) e linearizando suas equações chega-se nas seguintes reações do apoio A :

$$\begin{aligned} r_{Ax} &= -k_{Ax}(x_{CG} + L_1\Gamma) - d_{Ax}(\dot{x}_{CG} + L_1\dot{\Gamma}) \\ r_{Ay} &= -k_{Ay}(y_{CG} - L_1\beta) - d_{Ay}(\dot{y}_{CG} - L_1\dot{\beta}) \\ r_{Az} &= -k_{Az}z_{CG} - d_{Az}\dot{z}_{CG} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Analogamente, as reações no apoio B escritas em função das constantes de mola e amortecedor do suporte, são dadas por:

$${}_{SI}\mathbf{r}_B = \begin{Bmatrix} r_{Bx} \\ r_{By} \\ r_{Bz} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{By} & 0 \\ 0 & 0 & k_{Bz} \end{bmatrix} \Delta_{SI}\mathbf{s}_B - \begin{bmatrix} d_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & d_{By} & 0 \\ 0 & 0 & d_{Bz} \end{bmatrix} \Delta_{SI}\dot{\mathbf{s}}_B \quad (5.14)$$

Resolvendo o sistema de equações (5.14) e linearizando-as, determina-se r_{Bx} , r_{By} e r_{Bz} :

$$\begin{aligned} r_{Bx} &= -k_{Bx}(x_{CG} - L_2\Gamma) - d_{Bx}(\dot{x}_{CG} - L_2\dot{\Gamma}) \\ r_{By} &= -k_{By}(y_{CG} - L_2\beta) - d_{By}(\dot{y}_{CG} - L_2\dot{\beta}) \\ r_{Bz} &= -k_{Bz}z_{CG} - d_{Bz}\dot{z}_{CG} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para o equacionamento deste sistema são utilizadas as equações de Newton e Euler, ou seja, somatória de forças e momentos. Fazendo inicialmente a somatória de forças sobre o rotor, tem-se:

$$\sum_{SI}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix} \cdot_{SI}\ddot{\mathbf{s}}_{CG} \quad (5.16)$$

$${}_{SI}\mathbf{P} + {}_{SI}\mathbf{r}_A + {}_{SI}\mathbf{r}_B + {}_{SI}\mathbf{f}_{ext} = \sum_{SI}\mathbf{F} \quad (5.17)$$

sendo m_x m_y m_z as massas do sistema que se deslocam nas direções X , Y e Z , res-

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 101

pectivamente. f_{ext} representa as forças externas aplicadas no centro de massa do rotor. Expandindo-se, tem-se:

$$SI \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_{rotor} \cdot g \\ 0 \end{Bmatrix} + SI \begin{Bmatrix} r_{Ax} \\ r_{Ay} \\ r_{Az} \end{Bmatrix} + SI \begin{Bmatrix} r_{Bx} \\ r_{By} \\ r_{Bz} \end{Bmatrix} + SI \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{Bmatrix} = SI \begin{Bmatrix} m_x \ddot{x}_{CG} \\ m_y \ddot{y}_{CG} \\ m_z \ddot{z}_{CG} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Considerando que a força peso está sendo anulada por uma deformação estática dos apoios A e B , esta não precisa entrar no equacionamento quando se deseja as variações em torno da posição de equilíbrio.

Tem-se, que para pequenas rotações do rotor em torno dos eixos Y (Γ) e X_1 (β), os deslocamentos dos apoios A e B na direção Z podem ser desprezados. Desta forma, a translação do rotor nesta direção está desacoplada dos outros movimentos por ele realizado podendo ser analisada separadamente. Porém, o mancal híbrido que será posteriormente acrescentado ao sistema, não apresenta vínculos à direção Z , não havendo a necessidade de ser estudada.

Analisando as equações do sistema (5.18) apenas as direções X e Y são funções dos coeficientes dinâmicos dos suportes flexíveis e dos quatro graus de liberdade. Reescrevendo estas duas direções na forma matricial e substituindo $SI r_{Ax}$, $SI r_{Ay}$, $SI r_{Bx}$ e $SI r_{By}$ pelas equações obtidas em (5.13) e (5.15), chega-se a:

$$\begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{CG} \\ \ddot{y}_{CG} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{Ax} + d_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & d_{Ay} + d_{By} & -d_{Ay}L_1 + d_{By}L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{CG} \\ \dot{y}_{CG} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{Ax} + k_{Bx} & 0 \\ 0 & k_{Ay} + k_{By} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ \beta \\ \Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 102

Tem-se que o problema é formado por quatro graus de liberdade necessitando de outras duas equações para sua resolução. Estas são obtidas através da equação de Euler, ou seja, da somatória de momentos sobre o centro de massa do rotor:

$$\sum_{SM2} \mathbf{Mo}_{CG} = {}_{SM2} \mathbf{I}_{CG} \frac{d({}_{SM2} \boldsymbol{\omega})}{dt} + {}_{SM2} \boldsymbol{\phi} \times ({}_{CG} \cdot {}_{SM2} \boldsymbol{\omega}) \quad (5.20)$$

Após a linearização das equações, chega-se a:

$$\sum_{SM2} \mathbf{Mo}_{CG} = \begin{Bmatrix} I_{xx} \ddot{\beta} \\ I_{yy} \ddot{\Gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} - \Omega \begin{Bmatrix} -I_{zz} \dot{\Gamma} \\ I_{zz} \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

A somatória de momentos sobre o centro de massa do rotor, considerando as forças exercidas pelos apoios A e B e esforços de momentos externos aplicados no centro de massa do rotor, é igual a:

$$\sum_{SM2} \mathbf{Mo}_{CG} = {}_{SM2} \mathbf{s}_A \times {}_{SM2} \mathbf{r}_A + {}_{SM2} \mathbf{s}_B \times {}_{SM2} \mathbf{r}_B + {}_{SM2} \mathbf{Mo}_{ext} \quad (5.22)$$

Resolvendo os produtos vetoriais da equação (5.22) e linearizando-as, chega-se a:

$$\begin{aligned} \sum_{SM2} \mathbf{Mo}_{CG} = & \begin{Bmatrix} L_1 k_{Ay} (y_{CG} - L_1 \beta) + L_1 d_{Ay} (\dot{y}_{CG} - L_1 \dot{\beta}) \\ -L_1 k_{Ax} (x_{CG} + L_1 \Gamma) - L_1 d_{Ax} (\dot{x}_{CG} + L_1 \dot{\Gamma}) \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ & \begin{Bmatrix} -L_2 k_{By} (y_{CG} + L_2 \beta) - L_2 d_{By} (\dot{y}_{CG} - L_2 \dot{\beta}) \\ L_2 k_{Bx} (x_{CG} - L_2 \Gamma) + L_2 d_{Bx} (\dot{x}_{CG} - L_2 \dot{\Gamma}) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Mo_{\beta} \\ Mo_{\Gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 103

Assim, através das equações (5.21) e (5.23) pode-se escrever matricialmente que:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{CG} \\ \ddot{y}_{CG} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \left(-\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I_{zz} \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -d_{Ay}L_1 + d_{By}L_2 \\ d_{Ax}L_1 - d_{Bx}L_2 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} d_{Ay}L_1^2 + d_{By}L_2^2 & 0 \\ 0 & d_{Ax}L_1^2 + d_{Bx}L_2^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{x}_{CG} \\ \dot{y}_{CG} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k_{Ay}L_1 + k_{By}L_2 \\ k_{Ax}L_1 - k_{Bx}L_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} k_{Ay}L_1^2 + k_{By}L_2^2 & 0 \\ 0 & k_{Ax}L_1^2 + k_{Bx}L_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ \beta \\ \Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Mo_{\beta} \\ Mo_{\Gamma} \end{Bmatrix} \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

As equações (5.19) e (5.24) definem um sistema de quatro equações formado pelas matrizes de massa, giroscópica, de amortecimento e de rigidez, representadas por ³:

$$\mathbf{M}_{CG} \ddot{\mathbf{q}}_{CG} + (-\Omega \mathbf{G}_{CG} + \mathbf{D}_{CG}) \dot{\mathbf{q}}_{CG} + \mathbf{K}_{CG} \mathbf{q}_{CG} = \mathbf{f}_{CG} \quad (5.25)$$

sendo,

- vetor de acelerações:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{CG} = \left\{ \ddot{x}_{CG} \quad \ddot{y}_{CG} \quad \ddot{\beta} \quad \ddot{\Gamma} \right\}$$

- vetor de velocidades:

$$\dot{\mathbf{q}}_{CG} = \left\{ \dot{x}_{CG} \quad \dot{y}_{CG} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\Gamma} \right\}$$

³O índice *CG* indica que as equações de movimento foram escritas em função dos deslocamentos e rotações do centro de massa do rotor.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido104

- vetor de deslocamentos:

$$q_{CG} = \left\{ x_{CG} \quad y_{CG} \quad \beta \quad \Gamma \right\}$$

- matriz de massa:

$$M_{CG} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix}$$

- matriz giroscópica:

$$G_{CG} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{zz} \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 \end{bmatrix}$$

- matriz de amortecimento:

$$D_{CG} = \begin{bmatrix} d_{Ax} + d_{Bx} & 0 & 0 & d_{Ax}L_1 - d_{Bx}L_2 \\ 0 & d_{Ay} + d_{By} & -d_{Ay}L_1 + d_{By}L_2 & 0 \\ 0 & -d_{Ay}L_1 + d_{By}L_2 & d_{Ay}L_1^2 + d_{By}L_2^2 & 0 \\ d_{Ax}L_1 - d_{Bx}L_2 & 0 & 0 & d_{Ax}L_1^2 + d_{Bx}L_2^2 \end{bmatrix}$$

- matriz de rigidez:

$$K_{CG} = \begin{bmatrix} k_{Ax} + k_{Bx} & 0 & 0 & k_{Ax}L_1 - k_{Bx}L_2 \\ 0 & k_{Ay} + k_{By} & -k_{Ay}L_1 + k_{By}L_2 & 0 \\ 0 & -k_{Ay}L_1 + k_{By}L_2 & k_{Ay}L_1^2 + k_{By}L_2^2 & 0 \\ k_{Ax}L_1 - k_{Bx}L_2 & 0 & 0 & k_{Ax}L_1^2 + k_{Bx}L_2^2 \end{bmatrix}$$

- esforços externos aplicados no rotor:

$$f_{CG} = \left\{ \begin{array}{c} f_x \\ f_y \\ Mo_x \\ Mo_y \end{array} \right\}$$

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 105

Observa-se que o sistema de equações está escrito em função das coordenadas de translação e rotação do centro de massa do rotor. Porém, para a identificação dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos suportes, e posteriormente dos coeficientes dinâmicos do mancal híbrido, é aconselhável que estas equações sejam escritas em função dos deslocamentos dos apoios A e B . Isto porque, estando o sistema em função dos graus de liberdade do rotor devem ser dadas perturbações de forças e momentos no seu centro de massa. Já com as coordenadas escritas em função dos deslocamentos do rotor nas suas extremidades A e B , estas perturbações correspondem apenas à aplicação de forças nas direções X e Y nestes dois apoios, o que é mais prático. Desta forma as matrizes de rigidez e amortecimento, como serão mostradas a seguir, tornam-se diagonais.

A relação entre estes dois sistemas de coordenadas pode ser obtida através da geometria do problema (Figuras 5.6 e 5.7). Porém, como esta transformação não corresponde apenas a sequências de rotação e translação dos eixos, existe uma matriz de transformação que relaciona os deslocamentos e rotações do centro do rotor com os deslocamentos dos apoios A e B , e outra matriz de transformação responsável pela transferência das forças e momentos aplicados no seu centro para suas extremidades.

A matriz de transformação T_1 , obtida por relações geométricas, relaciona os deslocamentos e rotações do centro do rotor com os movimentos de suas extremidades:

- Plano XZ

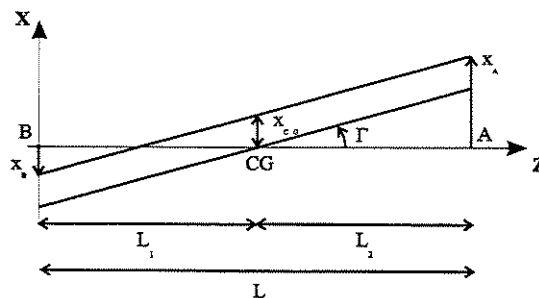


Figura 5.6: Relações geométricas no plano XZ .

$$\tan \Gamma = \frac{x_A - x_B}{L} \Rightarrow x_B = x_A - L \tan \Gamma \quad (5.26)$$

$$\tan \Gamma = \frac{x_A - x_{CG}}{L_2} \Rightarrow x_A = x_{CG} + L_2 \tan \Gamma \quad (5.27)$$

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 106

Linearizando as equações anteriores,

$$x_B = x_A - L\Gamma \quad (5.28)$$

$$x_A = x_{CG} + L_2\Gamma \quad (5.29)$$

Desenvolvendo as relações acima chega-se a:

$$\begin{cases} x_A = x_{CG} + L_2\Gamma \\ x_B = x_{CG} - L_1\Gamma \end{cases} \quad (5.30)$$

- Plano YZ

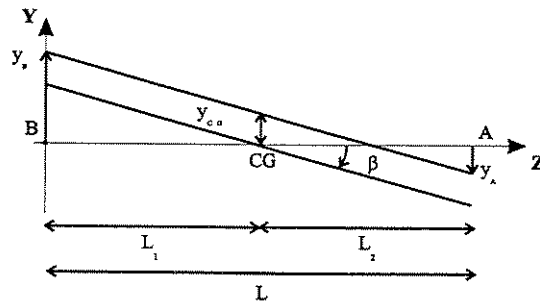


Figura 5.7: Relações geométricas no plano YZ.

$$\tan \beta = \frac{y_B - y_A}{L} \Rightarrow y_A = y_B - L \tan \beta \quad (5.31)$$

$$\tan \beta = \frac{y_B - y_{CG}}{L_1} \Rightarrow y_B = y_{CG} + L_1 \tan \beta \quad (5.32)$$

Linearizando as equações anteriores,

$$y_A = y_B - L\beta \quad (5.33)$$

$$y_B = y_{CG} + L_1\beta \quad (5.34)$$

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 107

Desenvolvendo estas relações chega-se a:

$$\begin{cases} y_A = y_{CG} - L_2\beta \\ y_B = y_{CG} + L_1\beta \end{cases} \quad (5.35)$$

Logo, a matriz de transformação de coordenadas T_1 fica sendo igual a:

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \\ y_A \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 1 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 1 & L_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ \beta \\ \Gamma \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_{AB} = \mathbf{T}_1 \mathbf{q}_{CG} \quad (5.36)$$

e

$$\begin{Bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ \beta \\ \Gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1/L & L_2/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1/L & L_2/L \\ 0 & 0 & -1/L & 1/L \\ 1/L & -1/L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \\ y_A \\ y_B \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_{CG} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{q}_{AB} \quad (5.37)$$

A matriz de transformação de coordenadas responsável por relacionar os esforços aplicados no centro do rotor com os realizados em suas extremidades (T_2), foi obtida aplicando-se forças nos apoios A e B (Figura 5.8), e transferindo-os para o centro de massa.

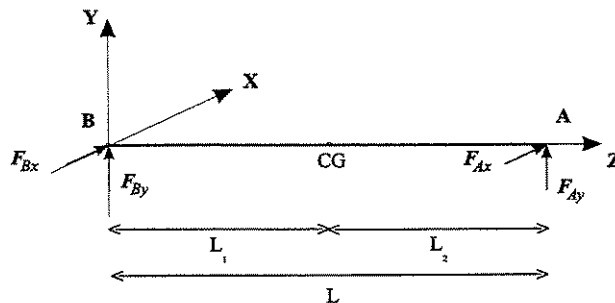


Figura 5.8: Transferência dos esforços realizados em A e B para o centro de massa.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 110

E, sendo $L_1 = L_2$ as matrizes de amortecimento e rigidez ficam iguais a:

- matriz de amortecimento:

$$\mathbf{D}_{AB} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{Ax} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{By} \end{bmatrix}$$

- matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_{AB} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{Ax} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{By} \end{bmatrix}$$

Observa-se que, enquanto o sistema estava escrito em função dos graus de liberdade do centro de massa do rotor, a matriz de massa (\mathbf{M}_{CG}) era diagonal. Agora, com o mesmo sistema sendo escrito em função dos graus de liberdade dos apoios A e B , onde estão sendo aplicadas as forças das molas e amortecedores dos apoios flexíveis, as matrizes de rigidez (\mathbf{K}_{AB}) e amortecimento (\mathbf{D}_{AB}) tornam-se diagonais.

Os parâmetros destas matrizes foram, então, obtidos da bancada de testes. Para a matriz de massa, pesou-se as massas do sistema que se movimentam nas direções X e Y , foram calculados os momentos de inércia de massa nestas mesmas direções, e mediu-se as distâncias L_1 e L_2 . Para a matriz giroscópica foi necessário apenas o cálculo do momento de inércia do rotor na direção Z , sendo este o único elemento da bancada que possui rotação em torno deste eixo (*spin*). Os valores encontrados para cada um destes parâmetros estão apresentados na Tabela 5.1.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 11

Parâmetro	Valor
m_x	21,87 [kg]
m_y	12,79 [kg]
I_{xx}	$264 \cdot 10^{-3}$ [kg.m ²]
I_{yy}	$658 \cdot 10^{-3}$ [kg.m ²]
I_{zz}	$1,28 \cdot 10^{-3}$ [kg.m ²]
L_1	0,170 [m]
L_2	0,170 [m]

Tabela 5.1: Parâmetros obtidos da bancada de testes.

A rigidez equivalente dos apoios *A* e *B* foi determinada primeiramente de forma teórica. O cálculo destes parâmetros está indicado no item a seguir.

5.2.2 Cálculo Teórico da Rigidez Equivalente dos Suportes do Rotor

Os suportes do rotor são formados basicamente por lâminas flexíveis, como pode ser observado na Figura 5.9.

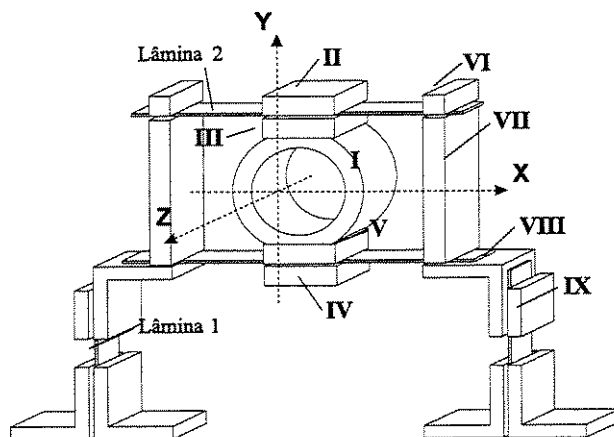


Figura 5.9: Suporte formado por lâminas flexíveis para o apoio do rotor rígido.

Tem-se que o amortecimento desta estrutura possui valores bem próximos a zero, podendo ser desprezados neste cálculo. Esta consideração será, no capítulo seguinte, comprovada experimentalmente. Outra hipótese adotada foi de que as lâminas estão totalmente engastadas.

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 14

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(0) = 0 & \text{deslocamento nulo na base da viga;} \\ EI \frac{du(0)}{dx^*} = 0 & \text{rotação nula em } x = 0 \text{ - (hipótese de viga engastada);} \\ EI \frac{du(L)}{dx^*} = 0 & \text{rotação nula em } x = L \text{ - (hipótese de viga engastada);} \\ EI \frac{d^3u(L)}{d(x^*)^3} = F = 1 & \text{força cortante no extremo da viga } (x = L). \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Conhecida as condições de contorno, resolve-se a equação (5.51):

$$t(x^*) = EI_{z^*} \frac{d^4u(x^*)}{d(x^*)^4} = 0$$

- 1ª integração: força cortante

$$EI_{z^*} \frac{d^3u(x^*)}{d(x^*)^3} = C_1$$

- 2ª integração: momento fletor

$$EI_{z^*} \frac{d^2u(x^*)}{d(x^*)^2} = M_{z^*}(x^*) = C_1x^* + C_2$$

- 3ª integração: rotação

$$EI_{z^*} \frac{du(x^*)}{dx^*} = C_1 \frac{(x^*)^2}{2} + C_2x^* + C_3$$

- 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_{z^*}u(x^*) = C_1 \frac{(x^*)^3}{6} + C_2 \frac{(x^*)^2}{2} + C_3x^* + C_4$$

A determinação das constantes de integração são obtidas a partir da substituição das condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} EI_{z^*}u(0) = C_1 \frac{(0)^3}{6} + C_2 \frac{(0)^2}{2} + C_3(0) + C_4 = 0 & \Rightarrow C_4 = 0 \\ EI_{z^*} \frac{du(0)}{dx^*} = C_1 \frac{(0)^2}{2} + C_2(0) + C_3 = 0 & \Rightarrow C_3 = 0 \\ EI_{z^*} \frac{d^3u(L)}{d(x^*)^3} = C_1 = F & \Rightarrow C_1 = F \\ EI_{z^*} \frac{du(L)}{dx^*} = C_1 \frac{L^2}{2} + C_2L + C_3 = 0 & \Rightarrow C_2 = -\frac{L}{2} \end{array} \right.$$

$$EI_{z^*}u(x^*) = \frac{(x^*)^3}{6} - \frac{L}{2} \cdot \frac{(x^*)^2}{2}$$

Conhecida as constantes de integração pode-se, então, determinar o deslocamento transversal da viga em $x^* = L$:

5.2. Modelo da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 15

$$EI_{z^*}u(L) = \frac{L^3}{6} - \frac{L}{2} \cdot \frac{L^2}{2} = -\frac{L^3}{12} \quad (5.54)$$

$$u(L) = -\frac{L^3}{12EI_{z^*}} \quad (5.55)$$

Assim, substituindo (5.55) em (5.52) define-se a rigidez de flexão da viga como sendo igual a:

$$k = \frac{12EI_{z^*}}{L^3} \quad (5.56)$$

Logo, a rigidez da estrutura flexível apresentada na Figura 5.9 será igual a:

- *Direção Horizontal*

$$k_x = 2 \cdot \underbrace{\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{l_1^3}}_{2 \text{ lâminas}} \quad (5.57)$$

- *Direção Vertical*

$$k_y = 4 \cdot \underbrace{\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{l_2^3}}_{4 \text{ lâminas}} \quad (5.58)$$

Medindo-se os comprimentos l_1 e l_2 das lâminas,

$$l_1 = 0,040 \text{ m} \quad \text{comprimento da lâmina 1;}$$

$$l_2 = 0,078 \text{ m} \quad \text{comprimento da lâmina 2.}$$

obtem-se os seguintes valores para a rigidez equivalente das vigas:

$$\begin{cases} k_{Ax} = k_{Bx} = 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{l_1^3} = 1,48 \cdot 10^5 \text{ N/m} \\ k_{Ay} = k_{By} = 4 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{l_2^3} = 4,00 \cdot 10^4 \text{ N/m} \end{cases} \quad (5.59)$$

A determinação experimental destes parâmetros é apresentada no Capítulo 6.

5.3 Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido

Uma vez conhecida as características dos apoios da bancada de testes é possível identificar os efeitos provenientes do mancal hidrodinâmico. A seguir são desenvolvidas as equações de movimento do sistema rotor-mancais visando a identificação dos coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento do mancal de teste.

5.3.1 Determinação das Equações de Movimento do Rotor Rígido com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido

É mostrado na Figura 5.12 a bancada de testes com o mancal hidrodinâmico híbrido, posicionado entre os apoios *A* e *B*.

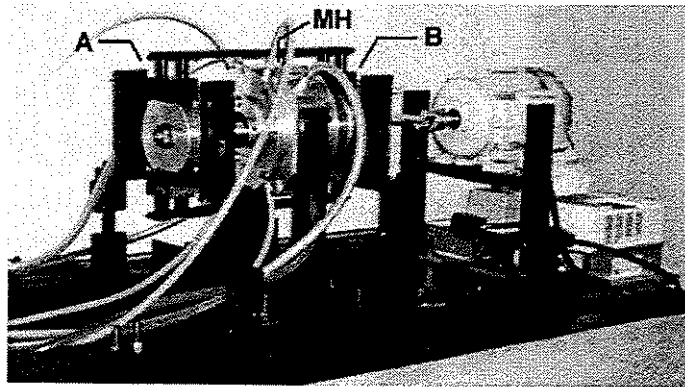


Figura 5.12: Foto da bancada de testes com o mancal hidrodinâmico híbrido.

O modelo matemático para este sistema é desenvolvido da mesma maneira apresentada para a bancada de testes sem o mancal hidrodinâmico, ou seja, através de suas análises cinemáticas e dinâmicas. Os sistemas de referência utilizados também coincidem com os aplicados na determinação das equações de movimento do rotor rígido sem o mancal hidrodinâmico. O modelo mecânico utilizado para representar este sistema é apresentado na Figura 5.13.

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 17

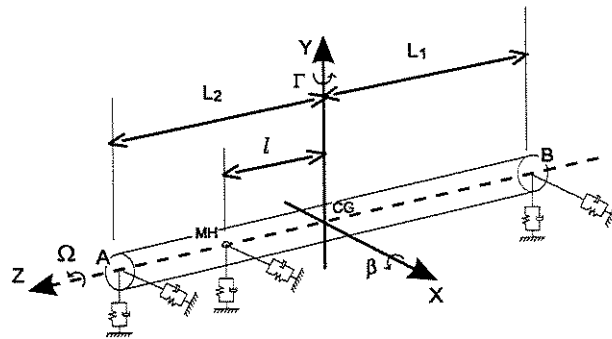


Figura 5.13: Modelo mecânico do rotor com o mancal hidrodinâmico híbrido.

A análise cinemática deste modelo não se diferencia muito da apresentada no modelo anterior. Ou seja, as equações para o cálculo da velocidade angular absoluta do sistema móvel 2 ($SM_2\dot{\phi}$) e do rotor ($SM_2\omega$), da aceleração absoluta do centro de massa do rotor \ddot{s}_{CG} e do tensor de inércia em relação ao seu centro de massa SM_2I_{CG} , são as mesmas. A única diferença nesta modelagem são os esforços realizados sobre o rotor que agora devem incluir os efeitos do mancal hidrodinâmico.

Adotando o ponto MH como sendo o ponto de posicionamento do mancal hidrodinâmico no rotor⁴, tem-se que as reações existentes entre o rotor e o mancal na base inercial (SI) é escrito como:

$$SI\mathbf{r}_{MH} = \begin{Bmatrix} r_{MHx} \\ r_{MHy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

Representando-as na base móvel 2 (SM_2) chega-se a:

$$SM_2\mathbf{r}_{MH} = \mathbf{T}_{\beta\Gamma} \cdot SI\mathbf{r}_{MH} = \begin{Bmatrix} r_{MHx}\cos\Gamma \\ r_{MHx}\sin\Gamma\sin\beta + r_{MHx}\cos\beta \\ r_{MHx}\sin\Gamma\cos\beta - r_{MHy}\sin\beta \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

As reações do mancal, assim como as dos apoios, podem ser escritas em função dos

⁴O ponto MH não deve coincidir com o centro de massa do rotor a fim de evitar o seu posicionamento no primeiro nó de vibração de corpo rígido do rotor.

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 18

coeficientes de rigidez e amortecimento, sendo escrita como:

$${}_{SI}\mathbf{r}_{MH} = \begin{Bmatrix} r_{MHx} \\ r_{MHy} \\ r_{MHz} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta_{SI}\mathbf{s}_{MH} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta_{SI}\dot{\mathbf{s}}_{MH} \quad (5.62)$$

Os vetores $\Delta_{SI}\mathbf{s}_{MH}$ e $\Delta_{SI}\dot{\mathbf{s}}_{MH}$ representam a variação da posição e velocidade do ponto no rotor onde está localizado o mancal. Assim, estes são determinados através da diferença entre as condições finais e iniciais, ou seja:

$$\Delta_{SI}\mathbf{s}_{MH} = {}_{SI}\mathbf{s}_{MH}(final) - {}_{SI}\mathbf{s}_{MH}(início) \quad (5.63)$$

$$\Delta_{SI}\dot{\mathbf{s}}_{MH} = {}_{SI}\dot{\mathbf{s}}_{MH}(final) - {}_{SI}\dot{\mathbf{s}}_{MH}(início) \quad (5.64)$$

O posicionamento do eixo no ponto MH nos instantes inicial (antes da variação) e final são dados por:

$${}_{SI}\mathbf{s}_{MH}(início) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{Bmatrix} \quad (5.65)$$

$${}_{SI}\mathbf{s}_{MH}(final) = {}_{SI}\mathbf{s}_{CG} + \mathbf{T}_{\Gamma\beta} \cdot {}_{SM2}\mathbf{s}_{MH} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} {}_{SI}\mathbf{s}_{MH}(final) &= \begin{Bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ z_{CG} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\Gamma & \text{sen}\Gamma\text{sen}\beta & \text{sen}\Gamma\cos\beta \\ 0 & \cos\beta & -\text{sen}\beta \\ -\text{sen}\Gamma & \cos\Gamma\text{sen}\beta & \cos\Gamma\cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} x_{CG} + l\text{sen}\Gamma\cos\beta \\ y_{CG} - l\text{sen}\beta \\ z_{CG} + l\cos\Gamma\cos\beta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.67)$$

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 19

Desta forma determina-se:

$$\Delta_{SI} \mathbf{s}_{MH} = {}_{SI} \mathbf{s}_{MH}(final) - {}_{SI} \mathbf{s}_{MH}(início) = \left\{ \begin{array}{c} x_{CG} + l \text{sen} \Gamma \cos \beta \\ y_{CG} - l \text{sen} \beta \\ z_{CG} + l(\cos \Gamma \cos \beta - 1) \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad (5.68)$$

$$\Delta_{SI} \dot{\mathbf{s}}_{MH} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_{CG} + l(\dot{\Gamma} \cos \Gamma \cos \beta - \dot{\beta} \text{sen} \Gamma \text{sen} \beta) \\ \dot{y}_{CG} - l \dot{\beta} \cos \beta \\ \dot{z}_{CG} + l(\dot{\Gamma} \text{sen} \Gamma \cos \beta + \dot{\beta} \cos \Gamma \text{sen} \beta) \end{array} \right\} \quad (5.69)$$

Substituindo as equações (5.68) e (5.69) no cálculo das reações ${}_{SI} \mathbf{r}_{MH}$, chega-se a:

$$\begin{aligned} r_{MHx} &= -k_{xx}(x_{CG} + l\Gamma) - k_{xy}(y_{CG} - l\beta) - d_{xx}[\dot{x}_{CG} + l\dot{\Gamma}] - d_{xy}(\dot{y}_{CG} - l\dot{\beta}) \\ r_{MHy} &= -k_{yx}(x_{CG} + l\Gamma) - k_{yy}(y_{CG} - l\beta) - d_{yx}[\dot{x}_{CG} + l\dot{\Gamma}] - d_{yy}(\dot{y}_{CG} - l\dot{\beta}) \\ r_{MHz} &= 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Novamente, para o equacionamento dinâmico deste sistema utilizou-se as equações de Newton e Euler. Iniciando-se com a somatória de forças realizadas sobre o rotor, tem-se:

$$\sum_{SI} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix} \cdot {}_{SI} \ddot{\mathbf{s}}_{CG} \quad (5.71)$$

$${}_{SI} \mathbf{P} + {}_{SI} \mathbf{r}_A + {}_{SI} \mathbf{r}_B + {}_{SI} \mathbf{r}_{MH} + {}_{SI} \mathbf{f}_{ext} = \sum_{SI} \mathbf{F} \quad (5.72)$$

sendo \mathbf{f}_{ext} as forças externas aplicadas sobre o rotor. Na forma matricial tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -m_{rotor} \cdot g \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} r_{Ax} \\ r_{Ay} \\ r_{Az} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} r_{Bx} \\ r_{By} \\ r_{Bz} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} r_{MHx} \\ r_{MHy} \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} f_x \\ f_y \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m_x \ddot{x}_{CG} \\ m_y \ddot{y}_{CG} \\ m_z \ddot{z}_{CG} \end{array} \right\} \quad (5.73)$$

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 20

Considerando que a força peso é anulada por uma deformação estática dos apoios, esta não precisa entrar no equacionamento.

Como foi observado anteriormente, o mancal híbrido em estudo não apresenta restrições na direção Z . Sendo assim, é necessário apenas a análise das direções X e Y . Estudando apenas estas duas direções do sistema de equações (5.73), e substituindo as reações dos apoios e do mancal pelos coeficientes de rigidez e amortecimento, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{CG} \\ \ddot{y}_{CG} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} d_{Ax} + d_{Bx} + d_{xx} & d_{xy} & -d_{xy}l & d_{Ax}L_1 - d_{Bx}L_2 + d_{xx}l \\ d_{yx} & d_{Ay} + d_{By} + d_{yy} & -d_{Ay}L_1 + d_{By}L_2 - d_{yy}l & d_{yx}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{CG} \\ \dot{y}_{CG} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} k_{Ax} + k_{Bx} + k_{xx} & k_{xy} & -k_{xy}l & k_{Ax}L_1 - k_{Bx}L_2 + k_{xx}l \\ k_{yx} & k_{Ay} + k_{By} + k_{yy} & -k_{Ay}L_1 + k_{By}L_2 - k_{yy}l & k_{yx}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ \beta \\ \Gamma \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \tag{5.74}
 \end{aligned}$$

Como foi realizado para o sistema sem o mancal hidrodinâmico, as duas outras equações necessárias para a resolução do problema são obtidas através da equação de Euler:

$$\sum_{SM_2} \mathbf{M}_{oCG} =_{SM_2} \mathbf{I}_{CG} \frac{d(SM_2 \boldsymbol{\omega})}{dt} +_{SM_2} \boldsymbol{\phi} \times (_{SM_2} \mathbf{I}_{CG} \cdot_{SM_2} \boldsymbol{\omega}) \tag{5.75}$$

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 21

Após a linearização das equações, chega-se a:

$$\sum_{SM2} \mathbf{Mo}_{CG} = \begin{Bmatrix} I_{xx}\ddot{\beta} \\ I_{yy}\ddot{\Gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} - \Omega \begin{Bmatrix} -I_{zz}\dot{\Gamma} \\ I_{zz}\dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.76)$$

A somatória de momentos sobre o centro de massa do rotor, considerando as forças exercidas pelos apoios A e B , pelo mancal hidrodinâmico e por carregamentos externos, é igual a:

$$\sum_{SM2} \mathbf{Mo}_{CG} = {}_{SM2} \mathbf{s}_A \times {}_{SM2} \mathbf{r}_A + {}_{SM2} \mathbf{s}_B \times {}_{SM2} \mathbf{r}_B + {}_{SM2} \mathbf{s}_{MH} \times {}_{SM2} \mathbf{r}_{MH} + {}_{SM2} \mathbf{Mo}_{ext} \quad (5.77)$$

Resolvendo os produtos vetoriais da equação (5.77), e linearizando-as, chega-se a:

$$\begin{aligned} \sum_{B2} \mathbf{Mo}_{CG} = & \begin{Bmatrix} L_1 k_{Ay}(y_{CG} - L_1\beta) + L_1 d_{Ay}(\dot{y}_{CG} - L_1\dot{\beta}) \\ -L_1 k_{Ax}(x_{CG} + L_1\Gamma) - L_1 d_{Ax}(\dot{x}_{CG} + L_1\dot{\Gamma}) \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} -L_2 k_{By}(y_{CG} + L_2\beta) - L_2 d_{By}(\dot{y}_{CG} - L_2\dot{\beta}) \\ L_2 k_{Bx}(x_{CG} - L_2\Gamma) + L_2 d_{Bx}(\dot{x}_{CG} - L_2\dot{\Gamma}) \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} l [k_{yx}(x_{CG} + l\Gamma) + k_{yy}(y_{CG} - l\beta) + d_{yx}[\dot{x}_{CG} + l\dot{\Gamma}] + d_{yy}(\dot{y}_{CG} - l\dot{\beta})] \\ l [-k_{xx}(x_{CG} + l\Gamma) - k_{xy}(y_{CG} - l\beta) - d_{xx}[\dot{x}_{CG} + l\dot{\Gamma}] - d_{xy}(\dot{y}_{CG} - l\dot{\beta})] \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} Mo_{\beta} \\ Mo_{\Gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.78) \end{aligned}$$

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 22

Assim, através das equações (5.76) e (5.78) pode-se escrever matricialmente que:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{CG} \\ \ddot{y}_{CG} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \left(-\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I_{zz} \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & -d_{yx}l \\ d_{Ax}L_1 - d_{Bx}L_2 + d_{xx}l & \end{bmatrix} \right. \\
 & + \left. \begin{bmatrix} -d_{Ay}L_1 + d_{By}L_2 - d_{yy}l & d_{Ay}L_1^2 + d_{By}L_2^2 + d_{yy}l^2 & & -d_{yx}l^2 \\ & d_{xx}l & & d_{Ax}L_1^2 + d_{Bx}L_2^2 + d_{xx}l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{x}_{CG} \\ \dot{y}_{CG} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} & -k_{yx}l & & \\ k_{Ax}L_1 - k_{Bx}L_2 + k_{xx}l & & -k_{Ay}L_1 + k_{By}L_2 - k_{yy}l & k_{Ay}L_1^2 + k_{By}L_2^2 + k_{yy}l^2 \\ & & k_{xy}l & -k_{xy}l^2 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} & & & \\ & -k_{yx}l^2 & & \\ k_{Ax}L_1^2 + k_{Bx}L_2^2 + k_{xx}l^2 & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ \beta \\ \Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{O\beta} \\ M_{O\Gamma} \end{Bmatrix} \quad (5.79)
 \end{aligned}$$

As equações (5.74) e (5.79) definem, então, um sistema de quatro equações formado pelas matrizes de massa, giroscópica, de amortecimento e de rigidez:

$$\mathbf{M}_{CG} \ddot{\mathbf{q}}_{CG} + (-\Omega \mathbf{G}_{CG} + \mathbf{D}_{CG}) \dot{\mathbf{q}}_{CG} + \mathbf{K}_{CG} \mathbf{q}_{CG} = \mathbf{f}_{CG} \quad (5.80)$$

Os vetores $\ddot{\mathbf{q}}_{CG}$, $\dot{\mathbf{q}}_{CG}$, \mathbf{q}_{CG} e \mathbf{f}_{CG} , e as matrizes \mathbf{M}_{CG} e \mathbf{G}_{CG} , são as mesmas calculadas para o sistema sem o mancal hidrodinâmico. As únicas modificações ficam, então, por conta das matrizes de amortecimento e rigidez, dadas por:

Matriz de amortecimento:

$$\mathbf{D}_{CG} = \begin{bmatrix} d_{Ax} + d_{Bx} + d_{xx} & & & & & \\ & d_{yx} & & & & \\ & -d_{yx}l & & & & \\ d_{Ax}L_1 - d_{Bx}L_2 + d_{xx}l & & & & & \\ & & d_{xy} & & & \\ & & d_{Ay} + d_{By} + d_{yy} & & & \\ & & -d_{Ay}L_1 + d_{By}L_2 - d_{yy}l & & & \\ & & d_{Ay}L_1^2 + d_{By}L_2^2 + d_{yy}l^2 & & & \\ & & & d_{xx}l & & \\ & & & -d_{yx}l^2 & & \\ & & & & d_{Ax}L_1^2 + d_{Bx}L_2^2 + d_{xx}l^2 & \end{bmatrix}$$

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 23

Matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_{CG} = \begin{bmatrix} k_{Ax} + k_{Bx} + k_{xx} & k_{xy} & -k_{xy}l & k_{Ax}L_1 - k_{Bx}L_2 + k_{xx}l \\ k_{yx} & k_{Ay} + k_{By} + k_{yy} & -k_{Ay}L_1 + k_{By}L_2 - k_{yy}l & k_{yx}l \\ -k_{yx}l & -k_{Ay}L_1 + k_{By}L_2 - k_{yy}l & k_{Ay}L_1^2 + k_{By}L_2^2 + k_{yy}l^2 & -k_{yx}l^2 \\ k_{Ax}L_1 - k_{Bx}L_2 + k_{xx}l & k_{yx}l & -k_{xy}l^2 & k_{Ax}L_1^2 + k_{Bx}L_2^2 + k_{xx}l^2 \end{bmatrix}$$

Tem-se que o sistema de equações está escrito em função das coordenadas de translação e rotação do centro de massa do rotor. Porém, como foi apresentado anteriormente, é aconselhável que estas equações sejam escritas em função dos deslocamentos dos apoios A e B . Aplicando a transformação de coordenadas para o sistema de equações (5.80) chega-se a:

$$\mathbf{T}_1^{-T} \mathbf{M}_{CG} \mathbf{T}_1^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_{AB} + \mathbf{T}_1^{-T} (-\Omega \mathbf{G}_{CG} + \mathbf{D}_{CG}) \mathbf{T}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_{AB} + \mathbf{T}_1^{-T} \mathbf{K}_{CG} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{q}_{AB} = \mathbf{T}_1^{-T} \mathbf{f}_{CG}$$

$$\mathbf{M}_{AB} \ddot{\mathbf{q}}_{AB} + (-\Omega \mathbf{G}_{AB} + \mathbf{D}_{AB}) \dot{\mathbf{q}}_{AB} + \mathbf{K}_{AB} \mathbf{q}_{AB} = \mathbf{f}_{AB} \quad (5.81)$$

As matrizes de massa (\mathbf{M}_{AB}) e giroscópica (\mathbf{G}_{AB}) são as mesmas encontradas para o sistema sem o mancal hidrodinâmico. Porém, as matrizes de amortecimento e rigidez são dadas por⁵:

Matriz de amortecimento:

$$\mathbf{D}_{AB} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 4L_1^2 d_{Ax} + (L_1 + l)^2 d_{xx} & (L_1^2 - l^2) d_{xx} & (L_1 + l)^2 d_{xy} & (L_1^2 - l^2) d_{xy} \\ (L_1^2 - l^2) d_{xx} & 4L_1^2 d_{Bx} + (L_1 - l)^2 d_{xx} & (L_1^2 - l^2) d_{xy} & (L_1 - l)^2 d_{xy} \\ (L_1 + l)^2 d_{yx} & (L_1^2 - l^2) d_{yx} & 4L_1^2 d_{Ay} + (L_1 + l)^2 d_{yy} & (L_1^2 - l^2) d_{yy} \\ (L_1^2 - l^2) d_{yx} & (L_1 - l)^2 d_{yx} & (L_1^2 - l^2) d_{yy} & 4L_1^2 d_{By} + (L_1 - l)^2 d_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

⁵Novamente é considerado $L_1 = L_2$

5.3. Modelo da Bancada de Testes com o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 24

Matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_{AB} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 4L_1^2 k_{Ax} + (L_1 + l)^2 k_{xx} & (L_1^2 - l^2) k_{xx} & (L_1 + l)^2 k_{xy} & (L_1^2 - l^2) k_{xy} \\ (L_1^2 - l^2) k_{xx} & 4L_1^2 k_{Bx} + (L_1 - l)^2 k_{xx} & (L_1^2 - l^2) k_{xy} & (L_1 - l)^2 k_{xy} \\ (L_1 + l)^2 k_{yx} & (L_1^2 - l^2) k_{yx} & 4L_1^2 k_{Ay} + (L_1 + l)^2 k_{yy} & (L_1^2 - l^2) k_{yy} \\ (L_1^2 - l^2) k_{yx} & (L_1 - l)^2 k_{yx} & (L_1^2 - l^2) k_{yy} & 4L_1^2 k_{By} + (L_1 - l)^2 k_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Tem-se que os termos de rigidez e amortecimento dos apoios (k_{Ay} , k_{Az} , k_{By} , k_{Bz} e d_{Ay} , d_{Az} , d_{By} , d_{Bz}) são conhecidos da análise da bancada de testes sem o mancal. Desta forma, a equação (5.83) pode ser escrita em função dos coeficientes do mancal hidrodinâmico (k_{xx} , k_{xy} , k_{yx} , k_{yy} e d_{xx} , d_{xy} , d_{yx} , d_{yy}), facilitando a determinação experimental destes parâmetros. No capítulo 7 é apresentado o método de identificação utilizado na determinação de cada um destes coeficientes dinâmicos do mancal.

Capítulo 6

Identificação Experimental da rigidez equivalente dos suportes do rotor

6.1 Introdução

A identificação experimental dos coeficientes de rigidez equivalentes a serem adotadas nas extremidades do rotor, foi realizada aplicando-se carregamentos estáticos previamente conhecidos em cada um dos apoios e medindo-se a deformação resultante. Já o nível de amortecimento do sistema foi caracterizado através do fator de amortecimento. Este foi obtido calculando-se o decremento logarítmico das curvas do comportamento do sistema após este ter sido excitado com uma força pulsativa.

Utilizando-se estes valores de rigidez e amortecimento identificados, foram calculadas as funções de resposta em frequência do sistema, sendo estes resultados comparados aos valores obtidos experimentalmente.

6.2 Identificação das características dos suportes do rotor

A caracterização dos coeficientes de rigidez dos suportes do rotor foi realizada aplicando-se forças conhecidas nas extremidades do suporte, sendo medidos os deslocamentos causados

pelos carregamentos. Por ser uma análise estática, a equação do sistema para cada um dos planos, XZ e YZ , é reduzida a:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \quad (6.1)$$

Estudando-se o plano XZ tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_{Ax} \\ f_{Bx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Aplicando-se o carregamento em A , a equação (6.2) é simplificada para:

$$\begin{Bmatrix} f_{Ax} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{AA} \\ X_{AB} \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Com o carregamento em B tem-se:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ f_{Bx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{BA} \\ X_{BB} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Através das equações (6.3) e (6.4) define-se o sistema de equações (6.5), com o qual encontra-se os valores de rigidez dos apoios do rotor na direção X . Com o mesmo procedimento é também possível encontrar os valores de rigidez na direção Y . É importante observar que os movimentos laterais das extremidades do rotor (apoios) estão acoplados estaticamente nos respectivos planos, mas que os movimentos nos planos ortogonais (vertical e horizontal) são desacopladas.

$$\begin{bmatrix} X_{AA}/f_A & X_{AB}/f_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{AA}/f_A & X_{AB}/f_A \\ X_{BA}/f_B & X_{BB}/f_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{BA}/f_B & X_{BB}/f_B \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_{AA} \\ k_{AB} \\ k_{BA} \\ k_{BB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Os valores medidos para os dois suportes do rotor estão indicados nas Tabelas 6.1 e 6.2.

Plano Horizontal

Força em A [N]	Desloc. em A mm	Desloc. em B [mm]
15,0	0,19	0,13
32,0	0,47	0,36
45,3	0,67	0,49
113,4	1,83	1,41
156,9	2,63	2,03

Força em B [N]	Desloc. em A mm	Desloc. em B [mm]
24,1	0,22	0,27
68,6	1,22	1,27
91,6	1,19	1,36
117,2	1,82	2,01
166,3	2,16	2,44

Tabela 6.1: *Medições dos deslocamentos horizontais das extremidades do rotor em função do carregamento nos apoios.*

Plano Vertical

Força em A [N]	Desloc. em A mm	Desloc. em B [mm]
10,0	0,15	0,80
20,0	0,31	0,18
30,0	0,46	0,26
50,0	0,78	0,43
70,0	1,10	0,58
90,0	1,45	0,84

Força em B [N]	Desloc. em A mm	Desloc. em B [mm]
10,0	0,08	0,13
20,0	0,18	0,27
30,0	0,27	0,42
50,0	0,45	0,71
70,0	0,63	0,99
90,0	0,82	1,30

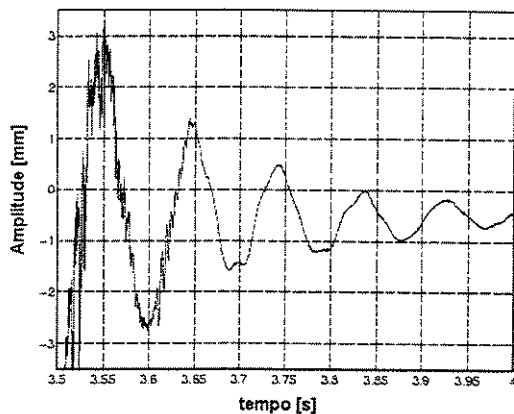
Tabela 6.2: *Medições dos deslocamentos verticais das extremidades do rotor em função do carregamento nos apoios.*

Os valores de rigidez da estrutura encontrados para estes planos foram:

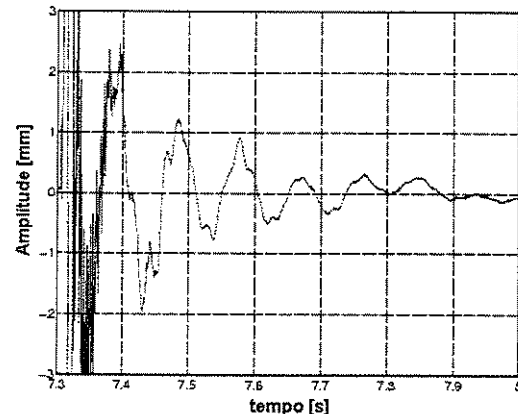
$$\mathbf{K}_{horizontal} = \begin{bmatrix} 1.82 & -1.63 \\ -1.63 & 2.13 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \text{ [N/m]} \quad \mathbf{K}_{vertical} = \begin{bmatrix} 9.77 & -6.27 \\ -6.38 & 11.03 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \text{ [N/m]} \quad (6.6)$$

Como havia sido calculado teoricamente no Capítulo 5, os valores de rigidez no plano horizontal são maiores que na vertical. Esta característica é devido ao comprimento das lâminas na base da estrutura serem mais curtas que as lâminas que esto no plano XZ .

Já a caracterização do nível de amortecimento da bancada ainda sem o mancal hidrodinâmico é observada através da determinação de seus fatores de amortecimento em cada um dos planos. Estes parâmetros foram determinados aplicando-se uma força pulsativa nos apoios e medindo-se sua resposta de aceleração no tempo. Nas Figuras 6.1 e 6.2 são apresentadas as curvas obtidas nos planos horizontal e vertical, respectivamente.



(a) Excitação e medição em A.

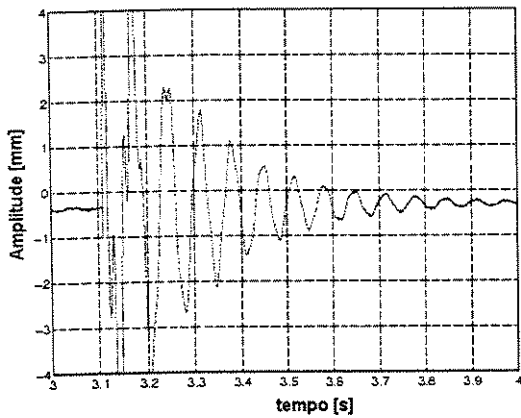


(b) Excitação e medição em B.

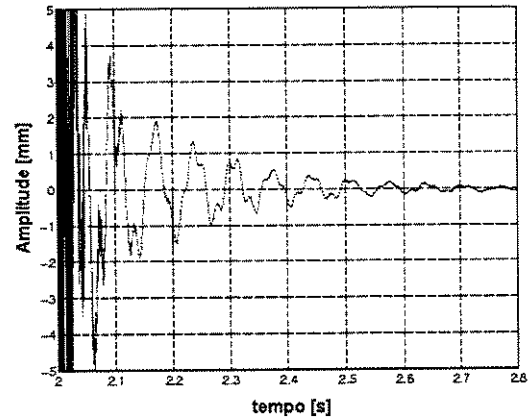
Figura 6.1: *Comportamento do sistema no plano horizontal.*

Analisando-se as Figuras 6.1 e 6.2, percebe-se que a bancada de testes apresenta baixo nível de amortecimento. O seu fator de amortecimento é calculado com o auxílio do decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot \ln \frac{x_i}{x_{(i+j)}} \quad (6.7)$$



(a) Excitação e medição em A.



(b) Excitação e medição em B.

Figura 6.2: *Comportamento do sistema no plano vertical.*

sendo

δ - decremento logarítmico;

N - é o número de ciclos entre x_i e $x_{(i+j)}$;

x_i - é a amplitude máxima do ciclo i e

$x_{(i+j)}$ - é a amplitude máxima do ciclo $(i + j)$.

E o fator de amortecimento é então obtido pela equação:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \quad (6.8)$$

O fator de amortecimento na direção X (plano horizontal) para o apoio A é, então, igual a:

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 4} \cdot \ln \frac{3,4}{0,4} = 0,085 \quad (6.9)$$

$$\xi_{XA} = \frac{0,085}{\sqrt{1 + 0,085^2}} = 0,085 \quad (6.10)$$

Da mesma forma, foram encontrados os valores dos fatores de amortecimento para a estrutura da bancada de testes. Estes estão indicados na Tabela 6.3:

	Plano Horizontal	Plano Vertical
apoio A	0,085	0,055
apoio B	0,055	0,060

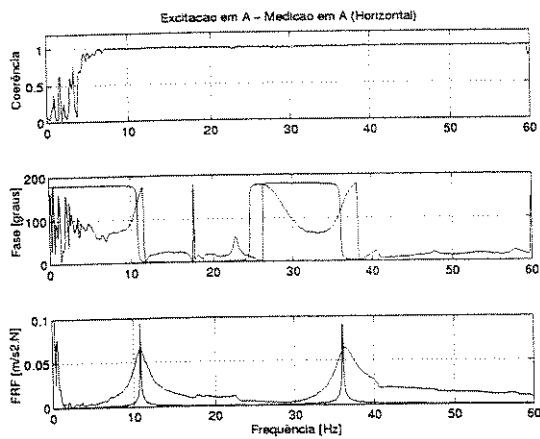
Tabela 6.3: Valores dos fatores de amortecimento da bancada de testes.

Estes valores de fator de amortecimento indicam que o sistema não possui índices de amortecimento consideráveis, e que devam ser considerados em sua formulação. Por isso, a matriz de amortecimento para a bancada ainda sem o mancal hidrodinâmico foi considerada desprezível.

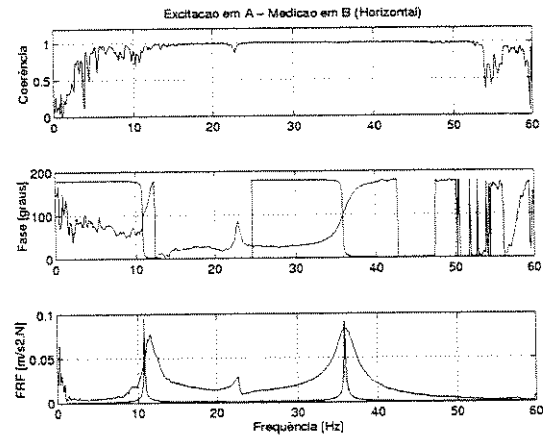
A validação dos valores de rigidez encontrados, e mesmo a consideração da matriz de amortecimento nula, foi realizada comparando-se as funções de resposta em frequência obtidas experimentalmente, com as calculadas pelos valores assumidos para as matrizes de rigidez e massa. Os valores utilizados para estas matrizes, escritas no sistema de coordenadas definido pelos deslocamentos dos apoios do rotor, foram então:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 11,16 & -0,22 & 0 & 0 \\ -0,22 & 11,16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,48 & 0,91 \\ 0 & 0 & 0,91 & 5,48 \end{bmatrix} [kg] \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,82 & -1,63 & 0 & 0 \\ -1,63 & 2,13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,98 & -0,63 \\ 0 & 0 & -0,64 & 1,10 \end{bmatrix} \cdot 10^5 [N/m]$$

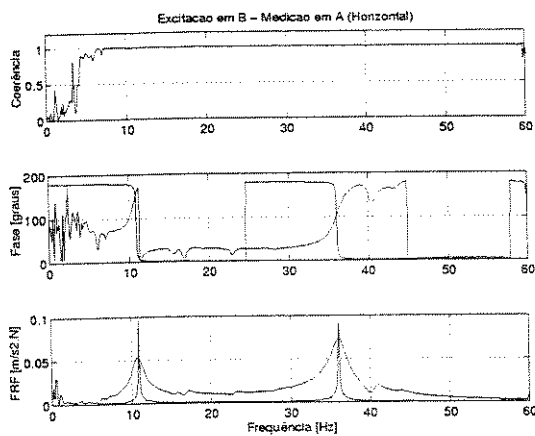
Na Figura 6.3 tem-se os resultados de coerência, diferença de fase e das funções de resposta em frequência para o plano horizontal.



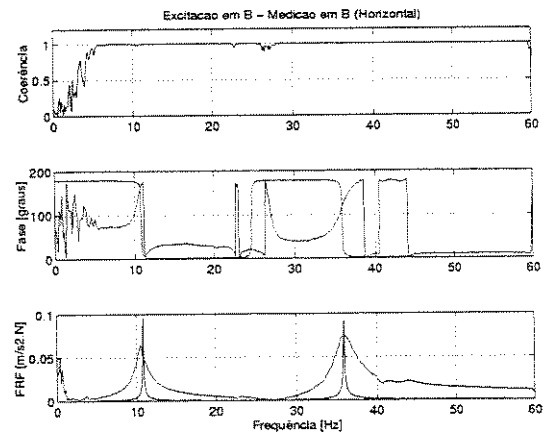
(a) Excitação e medição em A.



(b) Excitação em A e medição em B.



(c) Excitação em B e medição em A.



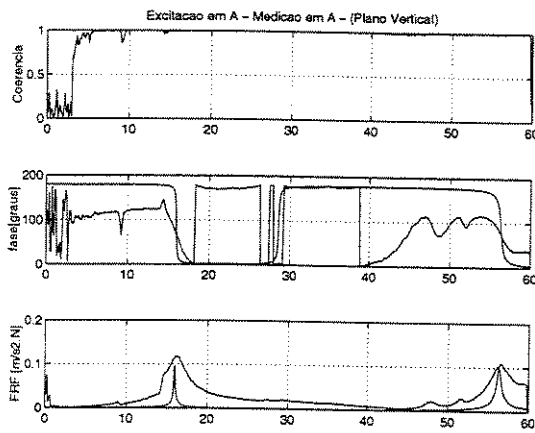
(d) Excitação e medição em B.

Figura 6.3: Validação dos parâmetros obtidos para o sistema no plano horizontal.

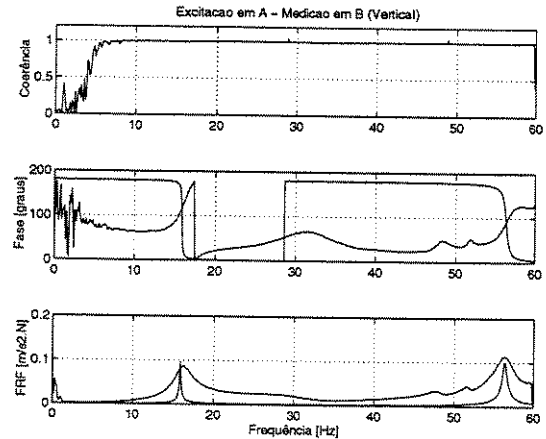
Analisando as curvas obtidas para o plano XZ, observa-se que os valores utilizados para os elementos de rigidez, massa e amortecimento do sistema estão sendo adequados para descrevê-lo. Comparando as curvas para cada uma das medições, nota-se que os pontos de ressonância estão sendo bem representados, assim como os de anti-ressonância. Os pontos de anti-ressonância surgem quando se realiza a excitação e a medição no mesmo

ponto do sistema. A primeira e segunda frequências naturais do sistema, que correspondem quando o sistema está em fase e oposição de fase, respectivamente, encontram-se em 11,0 e 36,5 Hz.

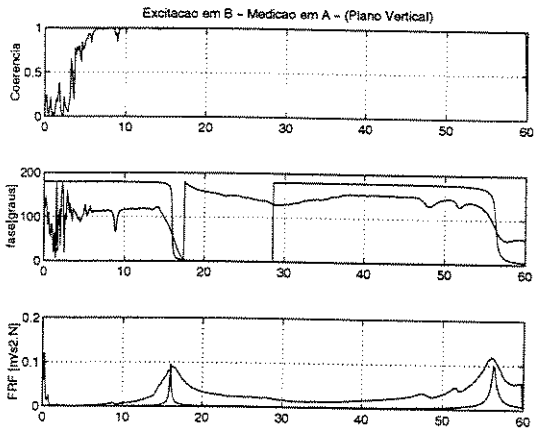
Os resultados obtidos para o plano vertical são apresentados na Figura 6.4.



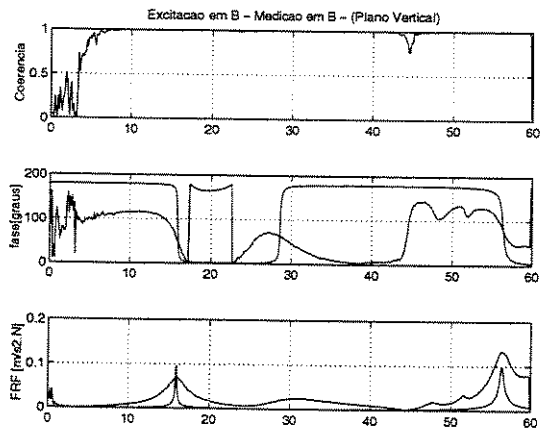
(a) Excitação e medição em A.



(b) Excitação em A e medição em B.



(c) Excitação em B e medição em A.



(d) Excitação e medição em B.

Figura 6.4: Validação dos parâmetros obtidos para o sistema no plano vertical.

Assim como os resultados obtidos para o plano horizontal, os valores dos elementos da matriz de rigidez e massa, e a consideração de amortecimento desprezível, estão razoavelmente adequados ao sistema. Observa-se que as frequências naturais para este plano

estão em 16 e 56 Hz , sendo que a primeira frequência refere-se ao modo onde os apoios se movimentam em fase, e a segunda quando estes estão em oposição de fase. É também importante notar, que não existe acoplamento entre os movimentos de um plano com o outro, uma vez que os modos de vibrar de um plano não são observadas ao se realizar as medições no outro plano.

Conhecida as características da bancada de testes pode-se iniciar a identificação das propriedades do mancal hidrodinâmico. Utilizando-se os valores de rigidez determinados neste capítulo, pode-se isolar a influência proveniente da introdução do mancal hidrodinâmico no sistema. No capítulo 7 são apresentados os resultados obtidos para o comportamento do mancal hidrodinâmico para algumas condições de operação. Estes resultados são ainda comparados com os valores obtidos teoricamente pelo programa computacional também desenvolvido ao longo desta pesquisa.



Capítulo 7

Identificação Experimental dos Coeficientes Dinâmicos do Mancal Hidrodinâmico Híbrido

7.1 Introdução

Com a introdução do mancal hidrodinâmico, e considerando os efeitos provenientes da rotação, tem-se o acoplamento das direções X e Y para o sistema rotor-mancal-suportes flexíveis. Logo, estas não podem mais ser estudadas separadamente, a exemplo do que foi realizado para a análise das características dos apoios da bancada de testes.

A formulação utilizada para a identificação dos coeficientes dinâmicos do mancal também utilizou as funções de resposta em frequência (FRF) do sistema. Mas, devido à algumas dificuldades encontradas para excitar o sistema com o *shaker* disponível no laboratório do departamento, somente foi possível realizar a identificação com excitação no plano XZ . Assim, foram identificados apenas os coeficientes k_{xx} , k_{xy} , d_{xx} e d_{xy} .

7.2 Identificação através das funções de resposta em frequência (FRF)

A fim de facilitar os cálculos dos coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal hidrodinâmico, adotou-se as seguintes constantes:

$$C_1 = \frac{(L_1 + l)^2}{L^2} \quad (7.1)$$

$$C_2 = \frac{(L_1^2 - l^2)}{L^2} \quad (7.2)$$

$$C_3 = \frac{(L_1 - l)^2}{L^2} \quad (7.3)$$

Os parâmetros L , L_1 e l estão apresentados na Figura 5.13, e indicam:

L - comprimento do rotor;

L_1 - distância do apoio A ao centro de massa do rotor;

l - posição do mancal hidrodinâmico, dado pela distância entre o centro do mancal e o centro de massa do rotor.

Substituindo as constantes C_1 , C_2 e C_3 , que são valores previamente conhecidos, nas matrizes de amortecimento (5.82) e rigidez (5.83), chega-se a:

- matriz de amortecimento:

$$D_{AB} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 4L_1^2 d_{Ax} + (L_1 + l)^2 d_{xx} & (L_1^2 - l^2) d_{xx} & (L_1 + l)^2 d_{xy} \\ (L_1^2 - l^2) d_{xx} & 4L_1^2 d_{Bx} + (L_1 - l)^2 d_{xx} & (L_1^2 - l^2) d_{xy} \\ (L_1 + l)^2 d_{yx} & (L_1^2 - l^2) d_{yx} & 4L_1^2 d_{Ay} + (L_1 + l)^2 d_{yy} \\ (L_1^2 - l^2) d_{yx} & (L_1 - l)^2 d_{yx} & (L_1^2 - l^2) d_{yy} \end{bmatrix}$$

7.2. Identificação através das funções de resposta em frequência (FRF) 136

$$\begin{bmatrix} (L_1^2 - l^2)d_{xy} \\ (L_1 - l)^2 d_{xy} \\ (L_1^2 - l^2)d_{yy} \\ 4L_1^2 d_{By} + (L_1 - l)^2 d_{yy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{Ax} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{By} \end{bmatrix}}_{\text{conhecido}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \cdot d_{xx} & C_2 \cdot d_{xx} & C_1 \cdot d_{xy} & C_2 \cdot d_{xy} \\ C_2 \cdot d_{xx} & C_3 \cdot d_{xx} & C_2 \cdot d_{xy} & C_3 \cdot d_{xy} \\ C_1 \cdot d_{yx} & C_2 \cdot d_{yx} & C_1 \cdot d_{yy} & C_2 \cdot d_{yy} \\ C_2 \cdot d_{yx} & C_3 \cdot d_{yx} & C_2 \cdot d_{yy} & C_3 \cdot d_{yy} \end{bmatrix}}_{\text{a ser calculado}} \quad (7.4)$$

• matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_{AB} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 4L_1^2 k_{Ax} + (L_1 + l)^2 k_{xx} & (L_1^2 - l^2) k_{xx} & (L_1 + l)^2 k_{xy} \\ (L_1^2 - l^2) k_{xx} & 4L_1^2 k_{Bx} + (L_1 - l)^2 k_{xx} & (L_1^2 - l^2) k_{xy} \\ (L_1 + l)^2 k_{yx} & (L_1^2 - l^2) k_{yx} & 4L_1^2 k_{Ay} + (L_1 + l)^2 k_{yy} \\ (L_1^2 - l^2) k_{yx} & (L_1 - l)^2 k_{yx} & (L_1^2 - l^2) k_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (L_1^2 - l^2) k_{xy} \\ (L_1 - l)^2 k_{xy} \\ (L_1^2 - l^2) k_{yy} \\ 4L_1^2 k_{By} + (L_1 - l)^2 k_{yy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{Ax} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{By} \end{bmatrix}}_{\text{conhecido}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \cdot k_{xx} & C_2 \cdot k_{xx} & C_1 \cdot k_{xy} & C_2 \cdot k_{xy} \\ C_2 \cdot k_{xx} & C_3 \cdot k_{xx} & C_2 \cdot k_{xy} & C_3 \cdot k_{xy} \\ C_1 \cdot k_{yx} & C_2 \cdot k_{yx} & C_1 \cdot k_{yy} & C_2 \cdot k_{yy} \\ C_2 \cdot k_{yx} & C_3 \cdot k_{yx} & C_2 \cdot k_{yy} & C_3 \cdot k_{yy} \end{bmatrix}}_{\text{a ser calculado}} \quad (7.5)$$

Este método de identificação, como foi apresentado na determinação das características da bancada de testes, é realizado no domínio da frequência. Assumindo um modelo linear a resposta do sistema tem a mesma forma da excitação, diferenciando-se apenas na amplitude e fase. Assim, a partir de uma força $f = Fe^{i\omega t}$ aplicada em um dos suportes, as respostas dos pontos A e B do rotor serão do tipo:

$$x_A(t) = |x_A| e^{i(\omega t + \psi_A)} = X_A e^{i\omega t} \quad (7.6)$$

$$x_B(t) = |x_B| e^{i(\omega t + \psi_B)} = X_B e^{i\omega t} \quad (7.7)$$

$$y_A(t) = |y_A| e^{i(\omega t + \varphi_A)} = Y_A e^{i\omega t} \quad (7.8)$$

$$y_B(t) = |y_B| e^{i(\omega t + \varphi_B)} = Y_B e^{i\omega t} \quad (7.9)$$

sendo ψ_A , ψ_B , φ_A e φ_B os ângulos de defasagem entre cada um dos sinais de deslocamento medidos e o sinal da força aplicada.

7.2. Identificação através das funções de resposta em frequência (FRF) 137

Substituindo na equação (5.81) os deslocamentos dos apoios do rotor indicados nas equações acima, e suas respectivas derivadas para os termos de velocidade e aceleração, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} + i\omega \left(-\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 0 & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{Ax} & 0 \\ 0 & d_{Bx} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ d_{Ay} & 0 \\ 0 & d_{By} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{Ax} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{By} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_1 \cdot d_{xx} & C_2 \cdot d_{xx} \\ C_2 \cdot d_{xx} & C_3 \cdot d_{xx} \\ C_1 \cdot d_{yx} & C_2 \cdot d_{yx} \\ C_2 \cdot d_{yx} & C_3 \cdot d_{yx} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} C_1 \cdot d_{xy} & C_2 \cdot d_{xy} \\ C_2 \cdot d_{xy} & C_3 \cdot d_{xy} \\ C_1 \cdot d_{yy} & C_2 \cdot d_{yy} \\ C_2 \cdot d_{yy} & C_3 \cdot d_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \cdot k_{xx} & C_2 \cdot k_{xx} & C_1 \cdot k_{xy} & C_2 \cdot k_{xy} \\ C_2 \cdot k_{xx} & C_3 \cdot k_{xx} & C_2 \cdot k_{xy} & C_3 \cdot k_{xy} \\ C_1 \cdot k_{yx} & C_2 \cdot k_{yx} & C_1 \cdot k_{yy} & C_2 \cdot k_{yy} \\ C_2 \cdot k_{yx} & C_3 \cdot k_{yx} & C_2 \cdot k_{yy} & C_3 \cdot k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Bx} \\ F_{Ay} \\ F_{By} \end{Bmatrix} \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

Tem-se que a matriz de massa, a matriz giroscópica, parte da matriz de amortecimento, e parte da matriz de rigidez são conhecidas. Multiplicando estas matrizes pelo vetor $\{X_A \ X_B \ Y_A \ Y_B\}^T$, tem-se um vetor de constantes indicados por: $\{C_{Ax} \ C_{Bx} \ C_{Ay} \ C_{By}\}^T$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} C_{Ax} \\ C_{Bx} \\ C_{Ay} \\ C_{By} \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} + i\omega \left(-\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 0 & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{Ax} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{By} \end{bmatrix} \right) \\
 & \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{Ax} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{Bx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{By} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

Assim, a equação (7.10) pode ser rearranjada de maneira a ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} C_1.k_{xx} + i\omega.C_1.d_{xx} & C_2.k_{xx} + i\omega.C_2.d_{xx} & C_1.k_{xy} + i\omega.C_1.d_{xy} \\ C_2.k_{xx} + i\omega.C_2.d_{xx} & C_3.k_{xx} + i\omega.C_3.d_{xx} & C_2.k_{xy} + i\omega.C_2.d_{xy} \\ C_1.k_{yx} + i\omega.C_1.d_{yx} & C_2.k_{yx} + i\omega.C_2.d_{yx} & C_1.k_{yy} + i\omega.C_1.d_{yy} \\ C_2.k_{yx} + i\omega.C_2.d_{yx} & C_3.k_{yx} + i\omega.C_3.d_{yx} & C_2.k_{yy} + i\omega.C_2.d_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{Ax} - C_{Ax} \\ F_{Bx} - C_{Bx} \\ F_{Ay} - C_{Ay} \\ F_{By} - C_{By} \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

Analisando o sistema de equações (7.12) observa-se que as duas primeiras equações relacionam quatro parâmetros do mancal (k_{xx} , k_{xy} , d_{xx} e d_{xy}), e as outras duas equações outros quatro parâmetros (k_{yx} , k_{yy} , d_{yx} e d_{yy}). Assim, excitando os pontos A e B apenas na direção X e medindo o comportamento do sistema nos planos XZ e YZ , é possível resolver as duas primeiras equações de (7.12) e identificar quatro parâmetros do mancal. Estudando este sistema para uma excitação no apoio A e na direção X , as duas primeiras equações escritas pelas funções de resposta em frequência são dadas por:

$$\begin{bmatrix} C_1.k_{xx} + i\omega.C_1.d_{xx} & C_2.k_{xx} + i\omega.C_2.d_{xx} & C_1.k_{xy} + i\omega.C_1.d_{xy} \\ C_2.k_{xx} + i\omega.C_2.d_{xx} & C_3.k_{xx} + i\omega.C_3.d_{xx} & C_2.k_{xy} + i\omega.C_2.d_{xy} \\ C_2.k_{xy} + i\omega.C_2.d_{xy} \\ C_3.k_{xy} + i\omega.C_3.d_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_{AxA} \\ H_{BxA} \\ H_{AyA} \\ H_{ByA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - C_{Ax}/F_{Ax} \\ -C_{Bx}/F_{Ax} \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

Reescrevendo estas equações de forma a isolar os termos de rigidez e amortecimento do mancal hidrodinâmico, chega-se a:

• primeira equação:

$$\underbrace{(C_1.H_{AxA} + C_2.H_{BxA})}_{C_I} \cdot k_{xx} + \underbrace{(C_1.H_{AyA} + C_2.H_{ByA})}_{C_{II}} \cdot k_{xy} + i\omega \left[\underbrace{(C_1.H_{AxA} + C_2.H_{BxA})}_{C_I} \cdot d_{xx} + \underbrace{(C_1.H_{AyA} + C_2.H_{ByA})}_{C_{II}} \cdot d_{xy} \right] = 1 - \frac{C_{Ax}}{F_{Ax}} \quad (7.14)$$

7.2. Identificação através das funções de resposta em frequência (FRF) 139

- segunda equação:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(C_2 \cdot H_{AxA} + C_3 \cdot H_{BxA})}_{C_{III}} \cdot k_{xx} + \underbrace{(C_2 \cdot H_{AyA} + C_3 \cdot H_{ByA})}_{C_{IV}} \cdot k_{xy} + i\omega \left[\underbrace{(C_2 \cdot H_{AxA} + C_3 \cdot H_{BxA})}_{C_{III}} \cdot d_{xx} + \right. \\ & \left. + \underbrace{(C_2 \cdot H_{AyA} + C_3 \cdot H_{ByA})}_{C_{IV}} \cdot d_{xy} \right] = -\frac{C_{Bx}}{F_{Ax}} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Os termos C_I , C_{II} , C_{III} e C_{IV} são conhecidos uma vez que as funções de resposta em frequência são todas determinadas experimentalmente. Através destas duas primeiras equações pode-se, então, determinar os coeficientes dinâmicos k_{xx} , k_{xy} , d_{xx} e d_{xy} . Estas equações, assim como as obtidas para descrever as características da bancada de testes, podem ser divididas em partes real e imaginária. Escrevendo-as de forma a separar suas partes real e imaginária, chega-se na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} -\omega \cdot \text{Im}(C_I) & -\omega \cdot \text{Im}(C_{II}) & \text{Re}(C_I) & \text{Re}(C_{II}) \\ -\omega \cdot \text{Im}(C_{III}) & -\omega \cdot \text{Im}(C_{IV}) & \text{Re}(C_{III}) & \text{Re}(C_{IV}) \\ \omega \cdot \text{Re}(C_I) & \omega \cdot \text{Re}(C_{II}) & \text{Im}(C_I) & \text{Im}(C_{II}) \\ \omega \cdot \text{Re}(C_{III}) & \omega \cdot \text{Re}(C_{IV}) & \text{Im}(C_{III}) & \text{Im}(C_{IV}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_{xx} \\ d_{xy} \\ k_{xx} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \text{Re}(C_{Ax}/F_{Ax}) \\ -\text{Re}(C_{Bx}/F_{Ax}) \\ -\text{Im}(C_{Ax}/F_{Ax}) \\ -\text{Im}(C_{Bx}/F_{Ax}) \end{Bmatrix} \quad (7.16)$$

A partir do sistema de equações (7.16) tem-se:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (7.17)$$

sendo,

\mathbf{A} - matriz de ordem $8n \times 4$ (n indica o número de medições realizadas) a qual é formada pelas funções de resposta em frequência;

\mathbf{q} - vetor de ordem 4×1 , formado pelos parâmetros do mancal a serem determinados;

\mathbf{b} - vetor de ordem $8n \times 1$, contendo os termos conhecidos das equações.

A estimação dos parâmetros do vetor \mathbf{q} é então realizada resolvendo-se o sistema de equações (7.17), como foi apresentado no capítulo 2. O método utilizado foi novamente o dos mínimos quadrados, ou seja,

$$\mathbf{q} = [(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T] \cdot \mathbf{b} \quad (7.18)$$

Os outros quatro coeficientes (k_{yy} , k_{yx} , d_{yy} e d_{yx}) podem ser determinados através da terceira e quarta equações do sistema (7.12), aplicando no sistema forças de excitação nos apoios A e B na direção Y

7.3 Resultados Experimentais para o Mancal Hidrodinâmico Híbrido

A determinação experimental dos coeficientes dinâmicos do mancal foi realizada apenas para o plano XZ . Na Figura 7.1 tem-se uma foto da bancada de testes já com o mancal hidrodinâmico montado, e o sistema sendo excitado no apoio B e na direção X .

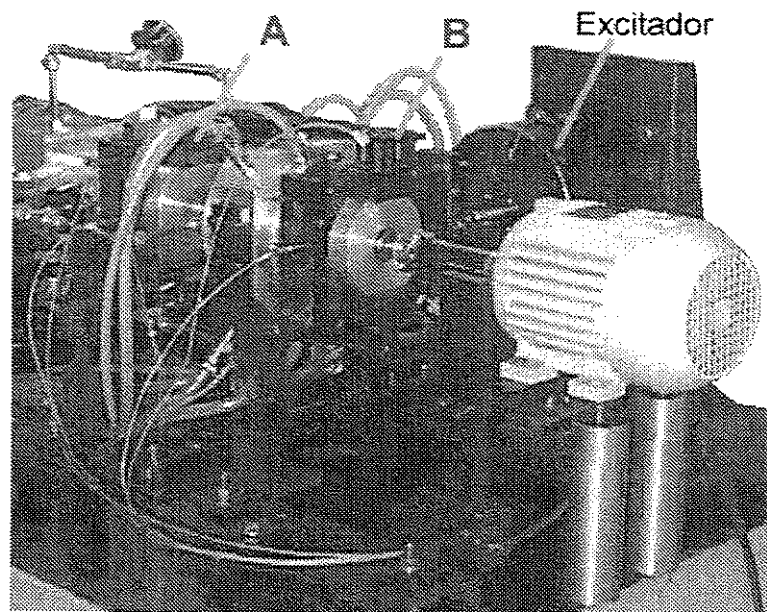


Figura 7.1: Excitação da bancada de testes no apoio B na direção X .

7.3. Resultados Experimentais para o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 141

Através de excitações neste plano é possível identificar os parâmetros k_{xx} , k_{xy} , d_{xx} e d_{xy} , como foi apresentado nas equação (7.16) do item anterior. Para a determinação dos outros quatro coeficientes dinâmicos do mancal, ou seja, $(k_{yx}$, k_{yy} , d_{yx} e $d_{yy})$, seria necessário excitar o sistema na direção vertical. Porém, estes testes não foram realizados aqui, devido à dificuldades em excitar o sistema no plano YZ com o *shaker* disponível no laboratório.

A faixa de frequência estudada para o sistema com o mancal hidrodinâmico foi de 0 a 60 Hz . Neste espectro é possível passar pelas quatro primeiras frequências naturais do sistema, correspondentes aos modos de translação nos planos vertical e horizontal, e rotação em torno dos eixos X e Y . Para a excitação desta faixa de frequência de interesse foi utilizado um sinal de frequência variada (*swept sine* ou *periodic chirp*), o qual propiciou uma boa relação de coerência entre os sinais de aceleração medidos nos apoios da bancada, e o sinal de força aplicada.

A primeira análise foi feita com o sistema a uma rotação de 30 Hz , ou 1.800 *rpm*, e uma pressão de injeção nas sapatas do mancal igual a 1,0 *bar*. A excitação foi feita no apoio B . Na Figura 7.2 tem-se as funções de resposta em frequência obtidas no próprio plano de excitação, ou seja, na horizontal. Os resultados experimentais apresentados nestas curvas são comparados com o comportamento da função de resposta em frequência esperado pela teoria. As curvas teóricas foram obtidas considerando-se os valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento iguais aos que foram determinados, para esta condição de operação, pelo programa computacional anteriormente apresentado.

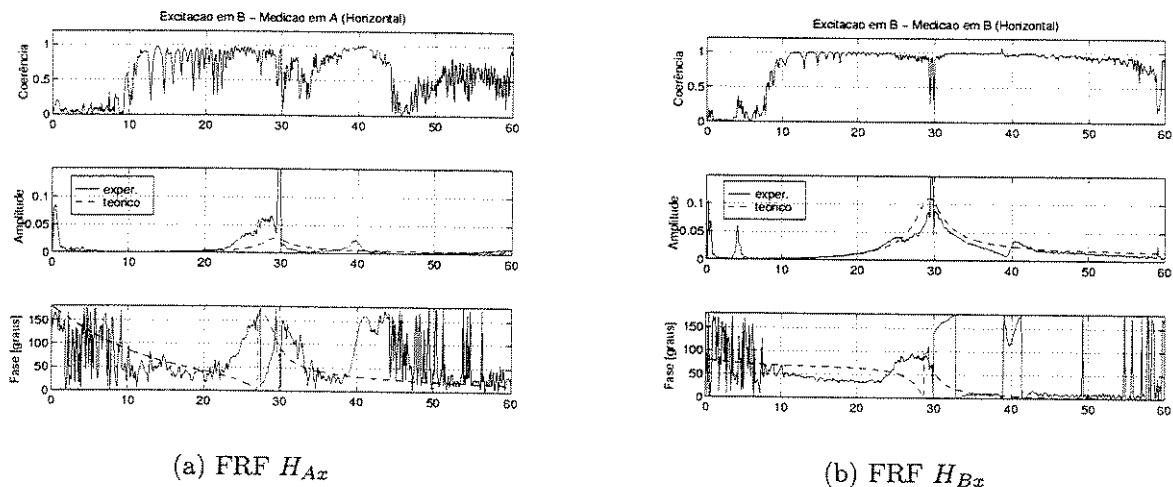


Figura 7.2: Funções de resposta em frequência no plano horizontal para uma rotação de 1.800 *rpm* e pressão de injeção nas sapatas igual a 1,0 *bar*.

Observa-se na Figura 7.2 que as curvas das funções de resposta em frequência possuem o mesmo comportamento, e estão bem próximas. Principalmente a resposta obtida para a medição e excitação no mesmo ponto. O nível de coerência obtido também foi satisfatório, sendo que em vários trechos do espectro estes permaneceram próximos a 1. Em relação a diferença de fase dos sinais de entrada e saída, percebe-se que houve uma melhor semelhança entre as curvas teóricas e experimentais no caso da excitação e medição no mesmo apoio. Porém, ainda pode-se perceber que para algumas faixas de frequência, como de 18,0 a 22,0 Hz , e 34,0 e 39,0 Hz , a diferença de fase obtida para a medição no apoio A foi um tanto que próxima da teórica. Tem-se que apenas estas faixas de frequência é que serão utilizadas para a determinação dos coeficientes dinâmicos do mancal, enquanto que as outras faixas não serão consideradas, mesmo que a coerência entre os sinais medidos esteja próxima a 1.

Na Figura 7.3 tem-se os resultados das medições realizadas para o plano vertical, ou seja, não mais no mesmo plano que o de excitação. E novamente as curvas obtidas experimentalmente estão comparadas com as teóricas.

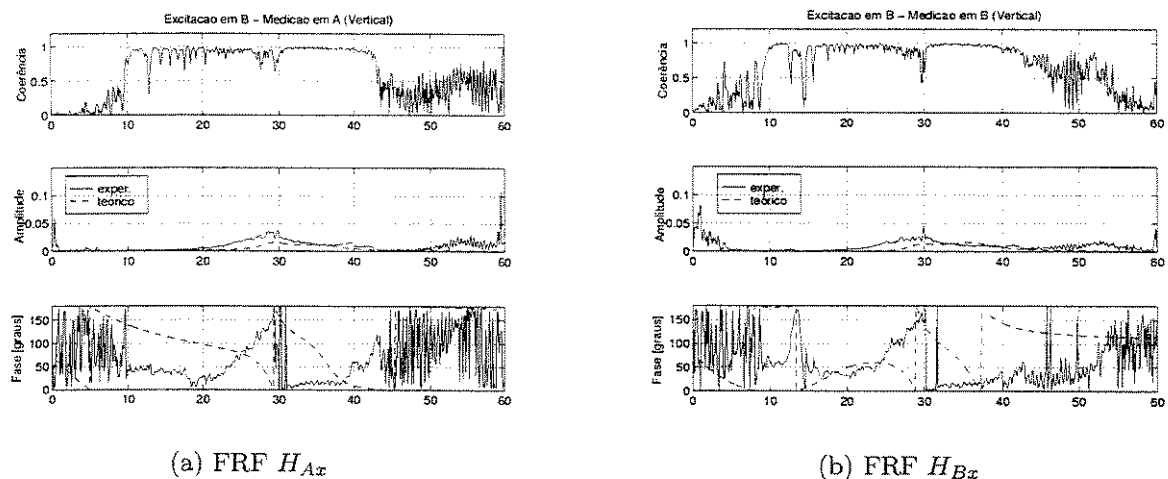


Figura 7.3: Funções de resposta em frequência no plano vertical para uma rotação de 1.800 rpm e pressão de injeção nas sapatas igual a 1,0 bar.

Observa-se que as funções de resposta em frequência permanecem com o mesmo comportamento das curvas obtidas teoricamente. Porém, nota-se que a amplitude destas diminuem consideravelmente em relação às que foram apresentadas na Figura 7.2. Esta

característica está fundamentalmente relacionada a uma das principais propriedades dos mancais hidrodinâmicos segmentados, que é o desacoplamento de seus movimentos laterais do rotor nos respectivos planos ortogonais, e que já havia sido observada anteriormente nas análises teóricas. Desta forma, ao ser analisado as curvas de diferença de fase para estas medições, observa-se que há uma certa discrepância entre os resultados teóricos e experimentais, apesar dos níveis de coerência terem permanecidos próximos a 1. Será observado a seguir, que estas diferenças afetam a identificação dos termos cruzados das matrizes de rigidez e amortecimento do mancal, que são responsáveis pelo acoplamento de movimento entre os planos.

Os coeficientes de rigidez e amortecimento são então identificados através da substituição dos valores das funções de resposta em frequência, apresentados nas Figuras 7.2 e 7.3, na equação (7.16). Desta forma, para cada frequência de excitação, define-se a matriz A da equação (7.17), a qual deve ser invertida para se resolver o sistema. A identificação foi realizada apenas para alguns pontos do espectro, contendo-se apenas aos valores onde a diferença de fase entre os sinais de entrada e saída para os casos teóricos e experimentais estavam próximos. Apenas para uma primeira análise são indicados a seguir os resultados obtidos para a rotação de 1800 *rpm* (30 *Hz*), pressão de injeção de 1,0 *bar*, na frequência de excitação de 30 *Hz*:

$$k_{xx} = 6,00 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$k_{xy} = 7,30 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

$$d_{xx} = 7,00 \cdot 10^3 \text{ N/(m/s)}$$

$$d_{xy} = -4,80 \cdot 10^5 \text{ N/(m/s)}$$

Analisando estes resultados observa-se que os termos referentes ao acoplamento das direções X e Y não conseguiram ser identificados com precisão, enquanto que os termos obtidos para a direção X , onde estão posicionadas 2 das 4 sapatas do mancal hidrodinâmico, atingiu-se bons resultados. A justificativa está no mau condicionamento da matriz A . Esta, devido aos baixos valores das FRF 's medidas fora do plano de excitação, possui colunas muito próximas a zero, enquanto que a primeira coluna, formada por FRF 's medidas no plano XZ , que é multiplicada pela frequência de excitação ao quadrado, possui valores 10^3 vezes maior que os da terceira e quarta coluna. Desta forma, esta matriz está próxima a ser uma matriz singular, o que dificulta a resolução do sistema linear. A maneira de se melhorar a solução está em realizar um recondicionamento da

7.3. Resultados Experimentais para o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 144

matriz A . O tipo de acondicionamento utilizado para esta matriz foi o de decomposição de valor singular o que significa reescrevê-la como:

$$A = U \cdot W \cdot V^t \quad (7.19)$$

sendo:

U e V - matrizes ortogonais

W - matriz diagonal

Desta forma é, então, possível identificar 2 dos 4 parâmetros que estão sendo calculados. Estes são justamente os valores de rigidez e amortecimento do mancal no plano de excitação. Na Tabela 7.1 estes resultados são comparados com os obtidos pelo programa computacional, ilustrando uma grande coerência entre os resultados:

	Teórico	Experimental	Erro[%]
k_{xx}	$5,80 \cdot 10^5$	$6,00 \cdot 10^5$	3,0
d_{xx}	$4,06 \cdot 10^3$	$7,00 \cdot 10^3$	72,0

Tabela 7.1: Comparação dos resultados teóricos e experimentais obtidos para o mancal hidrodinâmico, para rotação de 30 Hz e pressão de injeção nas sapatas de 1,0 bar.

A seguir são apresentados os gráficos dos coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo na direção X para várias frequências de excitação. Os valores das funções de resposta analisados foram os que apresentaram coerência entre os sinais de entrada e saída próxima a 1, e para as medições onde a fase estava coerente com a fase obtida teoricamente. Na Figura 7.4 tem-se os resultados obtidos experimentalmente para a rigidez do mancal, e estes valores foram ajustados por uma função de terceiro grau, a qual é utilizada para se estudar o comportamento deste coeficiente ao longo da frequência. Nesta mesma figura é ainda possível observar as curvas indicando os valores teóricos que seriam esperados para a rigidez. Estes valores calculados pelo programa computacional utilizando-se os parâmetros da bancada de testes e do mancal hidrodinâmico. De acordo com as tolerâncias dimensionais de alguns parâmetros geométricos do mancal, obteve-se um intervalo onde se esperava encontrar os resultados experimentais. Os parâmetros de maior influência nos resultados foram com relação às dimensões dos raios do rotor e das sapatas. Sendo assim, as simulações teóricas foram realizadas para um valor máximo do raio do rotor, e mínima para o raio da sapata, determinando uma menor folga radial, e para o valor mínimo do

raio do rotor e máximo para o raio da sapata, resultando numa folga radial máxima. Os parâmetros geométricos e de operação do mancal hidrodinâmico utilizado na bancada de testes estão apresentados na Tabela D.1 do Apêndice D.

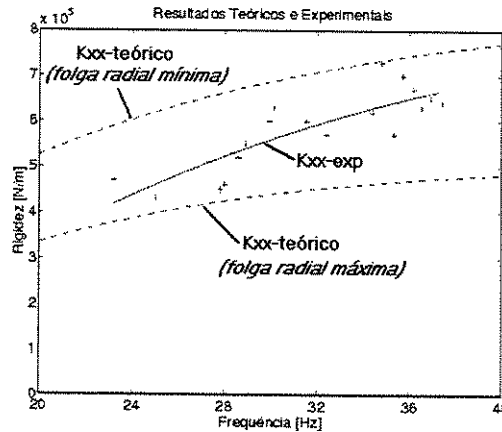


Figura 7.4: Resultados do coeficiente de rigidez k_{xx} para uma rotação de 1.800 rpm, e pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 bar.

Analisando os resultados da Figura 7.4, observa-se que a identificação dos coeficientes de rigidez estão condizentes com os resultados previstos pela teoria, estando entre os valores máximos e mínimos esperados. Com relação ao comportamento da rigidez, nota-se que este tende aumentar ao longo da frequência de excitação, devendo tornar-se estável em frequências mais altas.

Na Figura 7.5 analisam-se os resultados experimentais encontrados para os coeficientes de amortecimento.

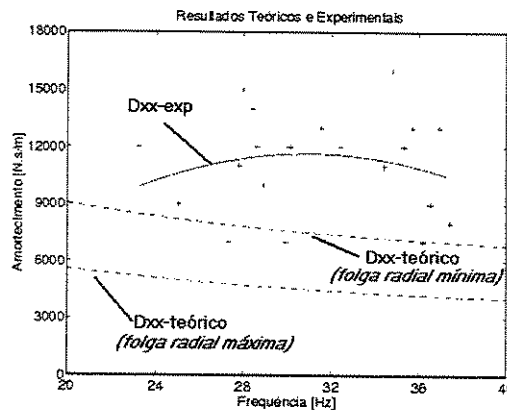


Figura 7.5: Resultados do coeficiente de amortecimento d_{xx} para uma rotação de 1.800 rpm, e pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 bar.

Os valores obtidos para o amortecimento ficaram um pouco acima dos limites que eram esperados segundo a teoria. Porém, estes resultados estão na mesma ordem de grandeza, o que já é de muita valia. Como é apresentado na literatura, estes coeficientes são de difícil identificação, uma vez que qualquer erro no processo de medição, seja este devido a ruídos ou problemas na excitação do sistema, já interfere nos resultados. Com relação ao seu comportamento, observa-se que este coeficiente, ao contrário do coeficiente de rigidez, decresce ao longo da frequência de excitação.

Para as medições experimentais é também importante se estudar a influência da variação da rotação do rotor. Para isso foi realizado uma comparação entre os resultados obtidos para rotações de 600 e 1.800 *rpm*. Ambos os casos com pressão de injeção nas sapatas igual a 1,0 bar. Na Figura 7.6 tem-se os gráficos de rigidez obtidos para estas duas condições de operação.

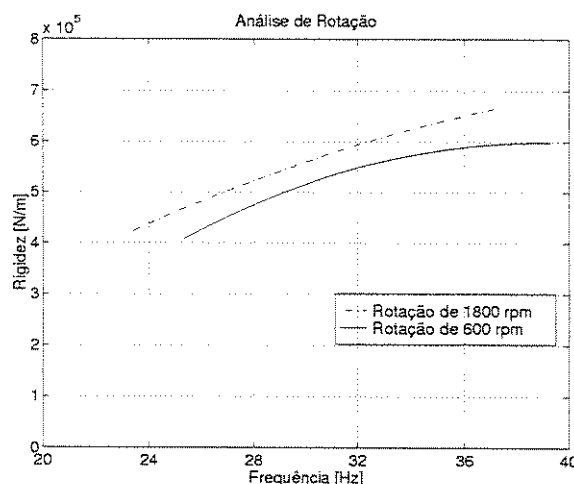


Figura 7.6: Comparação entre os coeficientes de rigidez obtidos para o sistema operando com rotações de 600 e 1.800 *rpm*. As pressões de injeção nas sapatas foram mantidas iguais a 1,0 bar – Resultados Experimentais.

Com a redução da velocidade de rotação do rotor, observa-se que ocorre uma diminuição nos valores dos coeficientes de rigidez k_{xx} do mancal. Este comportamento vem comprovar o que havia sido observado nas análises teóricas do mancal, apresentadas no capítulo 4. Este efeito ocorre devido a diminuição hidrodinâmica do mancal com a redução

da rotação. Já a influência da rotação nos coeficientes de amortecimento é apresentada na Figura 7.7

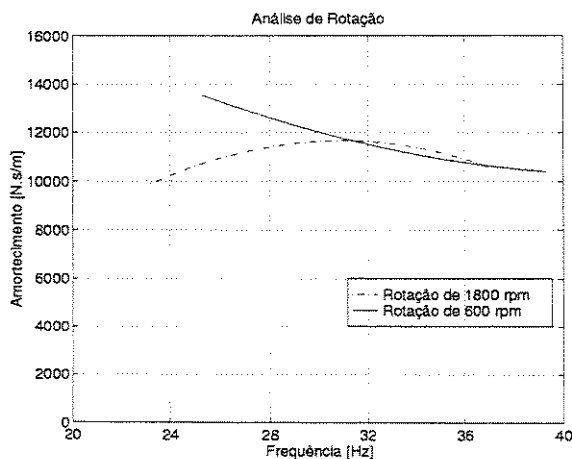


Figura 7.7: Comparação entre os coeficientes de amortecimento obtidos para o sistema operando com rotações de 600 e 1.800 rpm. As pressões de injeção nas sapatas foram mantidas iguais a 1,0 bar – Resultados Experimentais.

A influência observada nos coeficientes de amortecimento não foi tão significativa com a variação da rotação do rotor. Mas é importante observar que novamente foi possível identificar valores para os coeficientes de amortecimento na mesma ordem de grandeza esperada pela teoria.

Nas análises experimentais realizou-se também o estudo do comportamento do mancal com a variação da pressão de injeção nas sapatas do mancal. Comparou-se, então, o comportamento dos coeficientes dinâmicos do mancal para pressões de injeção iguais a 1,0 e 2,0 bar. É importante lembrar que as pressões de injeção em cada uma das sapatas foram mantidas iguais em todas elas. A rotação do rotor foi mantida constante e igual a 1.800 rpm. Na Figura 7.8 tem-se os gráficos dos coeficientes de rigidez para estes dois casos.

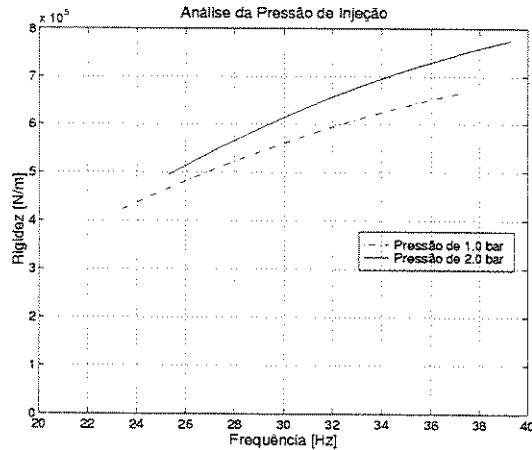


Figura 7.8: Comparação entre os coeficientes de rigidez obtidos para pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 e 2,0 bar. A rotação do rotor foi mantida igual a 1.800 rpm – Resultados Experimentais.

Observando as curvas dos coeficientes de rigidez do mancal para estes dois valores de pressão de injeção, tem-se que o coeficiente k_{xx} tem resultados mais elevados com o aumento da pressão de injeção. Este comportamento é resultante do aumento da pressão hidrostática do sistema. O coeficiente de amortecimento, por sua vez, se comporta segundo o gráfico da Figura 7.9

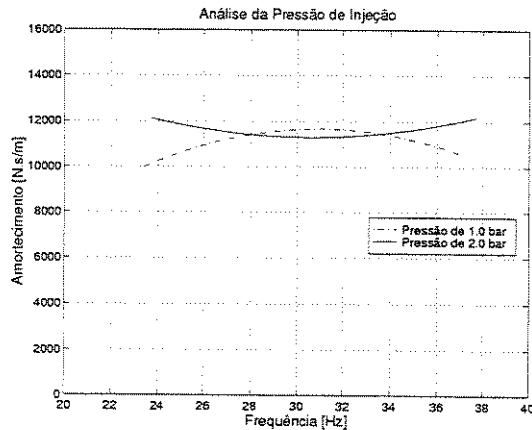


Figura 7.9: Comparação entre os coeficientes de amortecimento obtidos para pressões de injeção nas sapatas iguais a 1,0 e 2,0 bar. A rotação do rotor foi mantida igual a 1.800 rpm – Resultados Experimentais.

Observa-se que com o aumento da pressão de injeção o coeficiente de amortecimento tende a aumentar com a frequência de excitação. Porém, esta variação não é muito acen-

7.3. Resultados Experimentais para o Mancal Hidrodinâmico Híbrido 149

tuada. Desta forma, devido às incertezas já citadas para a identificação deste coeficiente, pode-se dizer que a influência da variação de pressão nas sapatas não é significativa.

Analisando os resultados experimentais obtidos, pode-se concluir que a identificação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo do mancal na direção da excitação foi satisfatória, mesmo sabendo que os valores de amortecimento O amortecimento de sistemas mecânicos é bastante discutido na literatura, inclusive para mancais segmentados (ETTLES [17], LUND [36], SANTOS [47] [49], WHITE [62]).

Capítulo 8

Conclusões

Este trabalho analisou um novo modelo de mancal hidrodinâmico segmentado, o qual utiliza um sistema de injeção eletrônica de óleo na folga radial, objetivando um aumento da estabilidade em sistemas rotativos.

Para este mancal foi desenvolvido, a partir das equações de Navier-Stokes e da continuidade, um modelo matemático capaz de descrever a distribuição de pressão nas superfícies de seus segmentos. A equação encontrada se assemelha à equação de Reynolds, equação esta desenvolvida para mancais hidrodinâmicos tradicionais, e por isso foi denominada de equação de Reynolds Modificada.

A resolução desta equação foi então realizada a partir de dois métodos numéricos: o método das Diferenças Finitas (MDF) e o de Volumes Finitos (MVF). Comparando os resultados obtidos por cada um deles, foi observado um ganho de tempo computacional ao se resolver pelo método dos Volumes Finitos, uma vez que para este caso não é necessário calcular a derivada da equação de espessura do filme de óleo.

Para estudar as características deste mancal com lubrificação híbrida, e compará-lo com os mancais hidrodinâmicos tradicionais, foi desenvolvido um programa computacional em ambiente MATLAB. Das várias simulações realizadas pode-se observar que com a utilização da injeção de filme de óleo diretamente na folga radial, consegue-se aumentar sua capacidade de carga, e conseqüentemente um melhor posicionamento do rotor.

Quanto à estabilidade do sistema, pode-se observar também, que é possível alterar

as características dinâmicas do filme de óleo através da lubrificação hidrostática. Foi verificado que com um sistema de controle adaptado ao mancal consegue-se um aumento do nível de amortecimento e ainda uma redução da rigidez do filme de óleo, o que propicia uma melhora da estabilidade no sistema rotativo.

Através de um programa de auxílio à pesquisa, foi financiado pela FAPESP a construção de uma bancada de testes. Esta foi projetada em um trabalho de iniciação científica [6], e utilizada nesta pesquisa para se realizar a identificação experimental das propriedades dinâmicas de um mancal com lubrificação híbrida. Inicialmente foi realizada medições com a bancada ainda sem o mancal hidrodinâmico, onde se estudou as propriedades dos apoios do rotor. Nesta análise observou-se que a rigidez equivalente das lâminas dos suportes se comportam de forma não linear e variam ao longo da frequência.

Conhecida as características da bancada de testes, iniciou-se a identificação das propriedades dinâmicas do mancal híbrido. Porém, esta ficou limitada apenas a determinação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal na direção da excitação, ou seja, direção X . Os resultados obtidos nos experimentos foram comparados com os teóricos onde pode-se observar que os valores identificados para a rigidez do filme de óleo foram satisfatórios, uma vez que estavam dentro dos limites esperados para este sistema. Da mesma forma, os coeficientes de amortecimento apesar de terem ficados ligeiramente acima dos valores teóricos, foram identificados na mesma ordem de grandeza. A diferença destes resultados experimentais para os teóricos pode ser explicada pelo fato de que a identificação dos parâmetros de amortecimento são facilmente afetados por qualquer irregularidade que ocorra durante as medições.

As análises experimentais realizadas abordaram a influência da variação da rotação do rotor e das pressões de injeção nas sapatas. No caso da variação da rotação do rotor se observou um aumento do nível de rigidez ao se elevar a rotação, comprovando o que havia sido obtido nas análise teóricas. Da mesma forma, na análise da variação das pressões de injeção nas sapatas, identificou-se um aumento da rigidez com o aumento da pressão de injeção, assim como havia sido calculado teoricamente. Já quanto ao comportamento do coeficiente de amortecimento para estas condições de operação, observa-se que houve uma pequena variação ao se estudar o sistema para diferentes rotações e pressão de injeção nas sapatas. Dada as incertezas já citadas para a identificação deste coeficiente, pode-se dizer que a influência destes parâmetros não foi significativa.

Como perspectiva futura deste projeto tem-se o estudo de um novo modelo para realizar a identificação dos parâmetros do sistema, uma vez que o utilizado nesta pesquisa não foi capaz de identificar os coeficientes que acoplam os movimentos do rotor nas direções X e Y . Tem-se ainda a necessidade de se calcular os coeficientes dinâmicos do mancal para a direção Y , realizando-se a excitação nos apoios do rotor no plano vertical.



Bibliografia

- [1] ALLAIRE, P.E., PARSELL, J.A., BARRET, L.E. A pad perturbation method for the dynamic coefficients of tilting pad journal bearing. *Wear*, v.72, p.29-44, 1981.
- [2] ANDEEN, R.E., SHIPLEY, P.P. Digital adaptive flight control system for aerospace vehicles. *AIAA Journal* n.1, p.1105-1110. 1963.
- [3] ARRUDA, J.R.F., OLIVEIRA, N.V. Frequency domain methods for structural parameters estimation. *Matériaux Mécanique Électricité*, n.416, 1986.
- [4] ARRUDA, J.R.F. OLIVEIRA, N.V. Identificação das características de rigidez e amortecimento de mancal hidrodinâmico. In: IX CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 1987, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1987, p.709-712.
- [5] ARRUDA, J.R.F. Identificação experimental dos coeficientes de rigidez e amortecimento de mancal hidrodinâmico. In: X CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 1989, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1989, p.371-374.
- [6] BOM, A.P. *Projeto e desenvolvimento de mancais segmentados com filme de óleo ativo assistido por computador*. Pesquisa de iniciação científica FAPESP, processo 95/3964-0, 1995.
- [7] BOYD, J., RAIMONDI, A.A. An analysis of the pivoted-pad journal bearing. *Mech. Eng.*, v.75, n.5, p.380-386, 1953.
- [8] BROCKWELL, K., DMOCHOWSKI, W. Experimental determination of the journal bearing oil film coefficients by the method of selective vibration orbits. In: 12TH BIENNIAL ASME CONFERENCE ON VIBRATION AND NOISE, 1989, Montreal. *Proceedings...* Montreal: 1989, p.251-259.

- [9] BROCKWELL, K. KLEINBUB Measurements of the steady operating characteristics of the five shoe tilting pad journal bearing. *Tribology Transactions*, v.32, n.2, p.267-275, 1989.
- [10] BURROWS, C.R., SAHINKAYA, M.N. Frequency-domain estimation of linearized oil-film coefficients. *Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology*, v.104, p.210-215, 1982.
- [11] CAMERON, A. *Basic lubrication theory*. London: Longman, 1970. 195p.
- [12] CHAN, S.H., WHITE, M.F. Experimental determination of dynamic characteristics of a full size gas turbine tilting-pad journal bearing by an impact test method. *Modal Analysis, Modeling, Diagnostics and Control - Analytical and Experimental - ASME*, v.38, p.291-298, 1991.
- [13] CHILDS, D., HALE, K. A test apparatus and facility to identify the rotordynamic coefficients of high-speed hydrostatic bearings, *ASME - Journal of Tribology*, v.116, p.337-344, 1994.
- [14] DAVIS, P., HAMMOND, L.K. A comparison of Fourier and parametric method for structural system identification. *ASME Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, v.106, n.1, p.40-48, 1984.
- [15] DOGAN, I.U., BURDESS, J.S., HEWIT, J.R. Identification of journal bearing coefficients using a pseudo-random binary sequence. *Proc. of Instn. Mech. Engrs.*, Parte C, v.292, p.277-281, 1980.
- [16] DONALDSON, R.R. A general solution of Reynolds' equation for a full finite journal bearing. *Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology*, p.203-210, Abril/1967.
- [17] ETTLES, C.M.McC. The analysis and performance of pivoted pad journal bearings considering thermal and elastic effects *Trans. ASME - Journal of Lubrication Technology* v.102, n.2, p.182-194, 1980.
- [18] FLACK, R.D., ZUCK, C. J. Experiments on the stability of two flexible rotor in tilting pad journal bearing. *Tribology Transactions*, v.31, n.2, p.251-257, 1988.

- [19] FRITZEN, C.P. Identification of mass, damping and stiffness of mechanical system, *10th ASME Conference Mechanical Vibration and Noise*, Cincinnati, USA, Setembro/1985.
- [20] GLIENICKE, J. Experimental investigation of the stiffness and damping coefficients of turbine bearings and their application to instability prediction. *Proc. Inst. Mech. Engr.*, London, 181(28), p. 116-129, 1967.
- [21] Glienicke, J. Stabilitätsprobleme bei Lagerung schnellaufender Wellen - Berechnung, Konstruktion und Verhalten von Mehrflächen - und Kippsegmentlagern, *Technische Akademie Wuppertal*, Sem-Nr 111107, 1987.
- [22] HAC, A., SPANOS, P.D., Time domain method for parameter system identification. *Transactions of the ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, v.112, p.281-287, Julho/1990.
- [23] HAGG, A.C., SANKEY, G.D. Elastic and damping properties of oil film journal bearing for application to unbalance vibration calculation. *ASME Appl. Mech.*, v.25, n.80, p.141-143, 1958.
- [24] HAYS, D.F. A variational approach to lubrication problems and the solution of the finite journal bearing. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, séries D*, v.81, p.13-23, 1959.
- [25] HILDEBRAND, F.B. *Introduction to numerical modelling and control*. Chapman and Hall, London, 1984.
- [26] IBRAHIM, S.R., MIKULCIK, E.C. A time domain modal vibration test technique. *The Shock and Vibration Bulletin*, v.43, n.4, p.21-37, 1973.
- [27] IBRAHIM, S.R., MIKULCIK, E.C. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. *The Shock and Vibration Bulletin*, v.47, n.4, p.183-196, 1977.
- [28] JONES, G.J., MARTIN, F.A. Geometry effects in tilting-pad journal bearings. *ASLE Transactions*, v.22, n.3, p.227-244, 1979.
- [29] JOSEPH, P., LEWIS, J., TOU, J. Plant identification in the presence of disturbances and application to digital adaptive systems, *AIEE Trans.*, Março/1961.

- [30] JUVINALL, R.C., MARSHEK, K.M. *Fundamentals of machine component design*. Singapura: John Wiley & Sons, 1991. 804p.
- [31] LEVADI, V.S. Parameter estimation of linear systems in the presence of noise. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MICROWAVES, CIRCUIT THEORY, AND INFORMATION THEORY, Setembro 7-11, 1964, Tokyo, Japo.
- [32] LIE, Y., YOU-BAI, X., JUN, Z., DAMOU, Q. Experiments on the destabilizing factors in tilting pad bearings. *Tribology International*, v.22, n.5, p.329-334, 1989.
- [33] LUND, J.W. Spring and damping coefficients for the tilting pad journal bearings. *ASLE Transactions*, v.7, n.4, p.342-352, 1964.
- [34] LUND, J.W., SAIBEL, E. Oil whip whirl orbits of a rotor in sleeve bearings. *J. Eng. Ind.*, v.89, n.4, p.813-823, 1967.
- [35] LUND, J.W. Calculation of stiffness and damping properties of gas bearings. *ASLE Journal of Lubrication Technology*, v., n., p.793-803, Outubro/1968.
- [36] LUND, J.W., LARS BO PEDERSEN The influence of pad flexibility on the dynamic coefficients of a tilting pad journal bearing. *Transactions of the ASME - Journal of Tribology*, v.109, p.65-70, 1987.
- [37] MAYBECK, P.S. Stochastic models, estimation, and control. *Academic Press*, Nova Iorque, v.2, 1982.
- [38] MUSZYNSKA, A., BENTLY, D.E. Frequency-swept rotating input perturbation techniques and identification of the fluid force models in rotor/bearing/seal systems and fluid handling machines. *Journal of Sound and Vibration*, v.141, n.1, p.103-124, 1990.
- [39] NORDMANN, R., SCHOLLHORN, K. Identification of stiffness and damping coefficients of journal bearings by means of the impact method. I. Mech. E. Second Intl. Conf. Vibrations in Rotating Machinery, Cambridge, Paper: C285/80, p. 231-238, Setembro 2-4, 1980.
- [40] OLIVEIRA, N.V., ARRUDA, J.R.F. Identificação das características de rigidez e amortecimento de mancal hidrodinâmico, In: IX CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 1987, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1987, p.709-711.

- [41] PARKINS, D.W. Theoretical and experimental determination of the dynamic characteristics of a hydrodynamic journal bearing. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v.101, n.2, p.129-139, 1979.
- [42] RAIMONDI, A.A., BOYD, J. A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design, I, II, III. *ASLE Transactions*, v.1, p.159-209, 1958.
- [43] SAHINKAYA, M.N. Kalman filters applied to time-domain estimation of linearized oil-film coefficients. *Instn. Mech. Engrs.*, C287/84, p.109-118, 1984.
- [44] SAHINKAYA, M.N., BURROWS, C.R. Estimation of linearized oil-film parameters from the out-of-balance response. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, v.198C, n.8, p.131-135, 1984.
- [45] SANTOS, I.F. *Modelos matemáticos reduzidos para sistemas mecânicos contínuos*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1988. Tese (Mestrado).
- [46] SANTOS, I.F., ULBRICH H. Active tilting pad journal bearings - theory and experiment. In: EUROMECH 293 - EUROPEAN MECHANICS COLLOQUIUM 293 - DYNAMICS AND CONTROL OF ROTATING MACHINERY, 1992, Braunschweig. *Proceedings...* Braunschweig: EUROMECH 293, 1992, p.59-65.
- [47] SANTOS, I.F. *Aktive Kippsegmentlagerung*; Theorie und Experiment. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1993. 112p (Schwingungstechnik, 189).
- [48] SANTOS, I.F. Design and evaluation of two types of active tilting-pad journal bearings. In: IUTAM SYMPOSIUM ON ACTIVE CONTROL OF VIBRATION, 1994, Bath. *Proceedings...* Bath: IUTAM, 1994, p.79-87.
- [49] SANTOS, I.F. On the adjusting of the dynamic coefficients of tilting-pad journal bearings. *ASME/STLE Tribology Transactions*, v.38, n.3, p.700-706, 1995.
- [50] SANTOS, I.F., RUSSO, F.H. Modelagem de mancais hidrodinâmicos segmentados com injeção eletrônica. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 1995, Belo Horizonte.
- [51] SANTOS, I.F., RUSSO, F.H. Tilting-pad journal bearings with electronic radial oil injection. *ASME Journal of Tribology*, v.120, n.3, p.583-594, 1998.

- [52] SANTOS, I.F., RUSSO, F.H. Investigações teórico-experimentais sobre métodos para serem aplicados a mancais segmentados com lubrificação mista. In: V CONGRESSO NORTE-NORDESTE DE ENGENHARIA MECÂNICA, 1998, Fortaleza. *Anais...* Fortaleza: Out. 27-30, 1994, v.1, p.157-164.
- [53] SCHOUKENS, J., PINTELOON, R. *Identification of Linear Systems - A Practical Guideline to Accurate Modeling*. Pergamon Press, 1991, 332p.
- [54] SCHROEDER, M.R. Synthesis of low-peak-factor signals and binary sequences with low autocorrelation. *IEEE Transactions on Information Theory*, p.85-89, Janeiro/1970.
- [55] SOMEYA, T. *Journal bearing data book*. New York: Springer Verlag, 1989, 230p.
- [56] SPRINGER, H. Zur Berechnung hydrodynamischer Lager mit Hilfe von Tschebyscheff-Polynomen. *Forsch. Ing.-Wes*, v.44, n.4, p.119-132, 1978.
- [57] SPRINGER, H. Nichtlineare Schwingungen schwerer Rotoren mit vertikaler Welle und Kippsegmentradiallagern. *Forsch. Ing.-Wes*, v.45, n.4, p.119-132, 1979.
- [58] SPRINGER, H. Dynamische Eigenschaften von Gleitlagern mit beweglichen Segmenten. *VDI-Berichte*, n.381, p.177-184, 1980.
- [59] ULBRICH, H., ALTHAUS, J., Actuator design for rotor control. In: 12TH BIENNIAL ASME CONFERENCE ON VIBRATION AND NOISE, 1989, Montreal. *Proceedings... Montreal: American Society of Mechanical Engineering (ASME)*, 1989, p.17-22.
- [60] ULBRICH, H. *International journal of rotating machinery*; Comparison of different actuator concepts for applications in rotating machinery. Michigan: Gordon and Publishers, 1994, v.1, n.1, p.61-71.
- [61] WENDT, J.F., *Computational fluid dynamics*, Nova Iorque, Springer Verlag, 1992. 678p.
- [62] WHITE, M.F. *Machine Vibration*; A consideration of damping in rotors supported by tilting-pad bearings. London: Springer-Verlag, 1992, p.105-109.
- [63] YOUNG, P.C. An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, v.6, p.271-287, 1970.

Apêndice A

Sinal de excitação de varredura (*swept sine* ou *periodic chirp*)

Existem vários tipos de sinais que podem ser utilizados na excitação de estruturas mecânicas. Dentre estes sinais estão os sinais aleatórios, sinais impulsivos e os periódicos.

O sinal de excitação de varredura é periódico e consiste num seno de frequência variada, conhecido como *swept sine* ou *periodic chirp*. A variação da frequência deste sinal ocorre de acordo com uma função predeterminada, a qual sai de um valor mínimo, atinge seu valor máximo na metade de um período do sinal, e então decresce até alcançar o mesmo valor da frequência inicial. Utilizando-se números completos de ciclos de excitação, este tipo de sinal não irá apresentar problemas de *leakage*.

São apresentadas aqui dois exemplos de funções que podem ser utilizadas para descrever a variação da frequência de excitação. No primeiro caso tem-se uma função "dente de serra", a qual possui uma taxa de variação constante quando a excitação é crescente, assim como quando esta é decrescente. O segundo exemplo consiste em uma frequência variando de acordo com uma parábola.

- *Dente de Serra*

Para uma função *dente de serra* deve-se definir uma função linear crescente, que representa $w(t)$ até metade do período; e outra decrescente para a segunda parte. Sabe-se que as inclinações das retas crescente e decrescente possuem sinais contrários, ou seja:

$$w_{cresc.}(t) = at + b' \quad (\text{A.1})$$

$$w_{decresc.}(t) = -at + b'' \quad (\text{A.2})$$

A determinação dos coeficientes destas duas retas é facilitada ao se estudar o gráfico da Figura A.1.

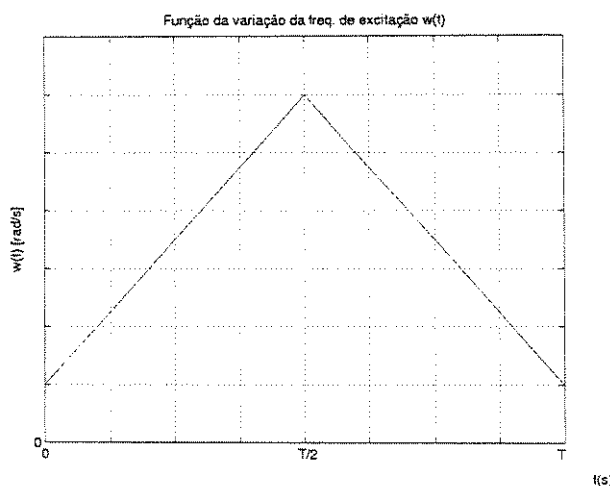


Figura A.1: Função da variação da frequência de excitação descrita por uma função dente de serra.

Estudando a reta crescente, ou seja, para t variando de 0 a $T/2$, sendo T o tempo de um período de excitação, tem-se:

$$w(0) = b' = w_{\min} \quad (\text{A.3})$$

e para $t = T/2$,

$$w(T/2) = a \cdot \frac{T}{2} + b' = w_{\max} \quad (\text{A.4})$$

ou seja,

$$a \cdot \frac{T}{2} + w_{\min} = w_{\max} \Rightarrow a = 2 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T} \right) \quad (\text{A.5})$$

Logo, a equação da reta crescente é dada por:

$$w_{\text{cresc.}}(t) = 2 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T} \right) t + w_{\min} \quad (\text{A.6})$$

Para a determinação de b'' basta substituir na equação (A.2) o valor de $w_{\text{decrec.}}$ para $t = T$:

$$w_{\text{decrec.}}(T) = -a \cdot T + b'' = w_{\min} \quad (\text{A.7})$$

ou seja,

$$-2 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T} \right) \cdot T + b'' = w_{\min} \Rightarrow b'' = 2 \cdot w_{\max} - w_{\min} \quad (\text{A.8})$$

Assim, a função de variação da frequência de excitação é dada por:

$$w(t) = \begin{cases} 2 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T} \right) \cdot t + w_{\min} & \text{para } 0 \leq t \leq T/2 \\ -2 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T} \right) \cdot t + 2w_{\max} - w_{\min} & \text{para } T/2 < t \leq T \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

A força de excitação é, então, uma função seno cuja frequência varia de acordo com $w(t)$:

$$f(t) = \text{sen}(w(t) \cdot t) \quad (\text{A.10})$$

- *Parábola*

Utilizando uma função parabólica para a variação da frequência de excitação, tem-se:

$$w(t) = at^2 + bt + c \quad (\text{A.11})$$

sendo w a frequência de excitação, t o tempo, e a , b e c os coeficientes da parábola, que são determinados de acordo com a faixa de frequência a ser estudada.

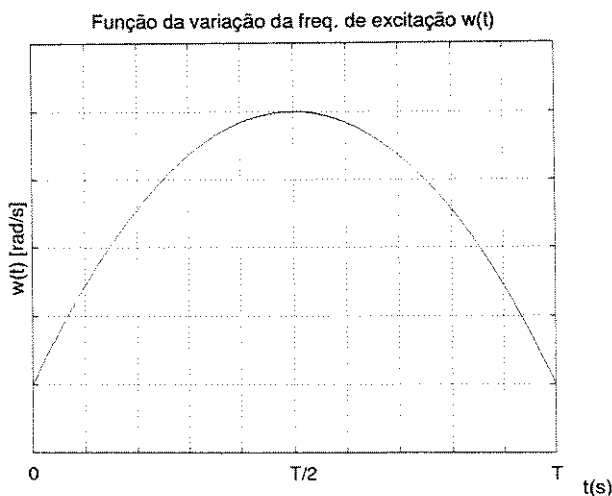


Figura A.2: Função da variação da frequência de excitação ao longo do tempo descrita por uma função parabólica.

Observando a Figura A.2, tem-se que a frequência de excitação inicial é igual a frequência mínima, e a frequência de excitação máxima ocorre em $t = T/2$, sendo T o período de um ciclo de excitação. Os coeficientes a , b e c são, então, determinados por:

$$w(0) = c = w_{\min} \quad (\text{A.12})$$

Tem-se que no ponto de máximo, $t_{\max} = T/2$, a derivada de $w(t)$ deve ser igual a

zero, ou seja:

$$\frac{dw(t)}{dt} = 2at + b = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = -\frac{b}{2a} = \frac{T}{2} \quad (\text{A.13})$$

$$b = -aT \quad (\text{A.14})$$

A determinação do coeficiente a é, então, obtida substituindo o valor de b que a frequência é máxima:

$$w(T/2) = w_{\max} = a\frac{T^2}{4} + b\frac{T}{2} + c = a\frac{T^2}{4} - a\frac{T^2}{2} + w_{\min} \quad (\text{A.15})$$

$$a = -4 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

Logo b é igual a:

$$b = 4 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T} \right) \quad (\text{A.17})$$

Assim, a função de variação da frequência é dada por:

$$w(t) = -4 \left(\frac{w_{\max} - w_{\min}}{T^2} \right) (t^2 - Tt) + w_{\min} \quad (\text{A.18})$$

A força de excitação é dada, então, por uma função cujo seno varia de acordo com $w(t)$:

$$f(t) = \text{sen}(w(t) \cdot t) \quad (\text{A.19})$$

Para uma frequência de excitação variando de 1 a 5 Hz , para um período de ciclo de excitação de 10 s, o sinal da força de excitação do sistema será igual ao representado na Figura A.3:

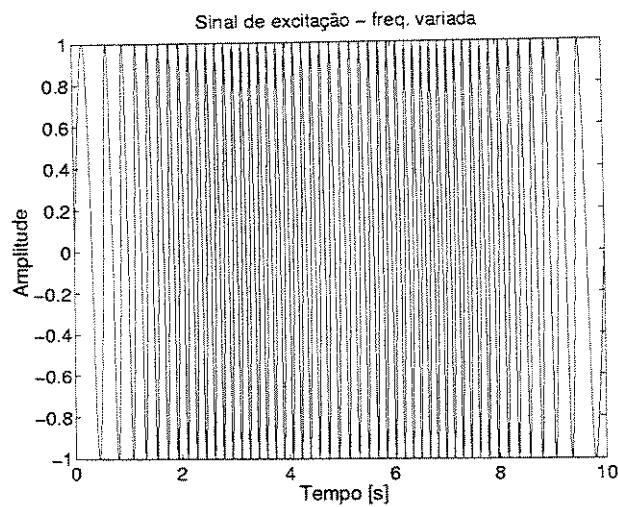


Figura A.3: *Função do sinal de excitação do sistema.*

Apêndice B

Dados Geométricos e de Operação do Mancal Hidrodinâmico Utilizados para as Simulações dos Capítulos 3 e 4

Os parâmetros indicados na Tabela B.1 se referem aos parâmetros utilizados nas simulações apresentadas nos capítulos 3 e 4.

Raio do rotor (R)	0,04937 <i>m</i>
Raio de curvatura dos segmentos (R_s)	0,049530 <i>m</i>
Rotação do rotor (Ω)	50 <i>Hz</i>
Viscosidade cinemática do óleo (μ)	0,070 <i>Ns/m²</i>
Densidade do óleo (ρ)	900 <i>kg/m³</i>
Número total de segmentos (N)	4
Largura do segmento (B)	0,056 <i>m</i>
Ângulo de abrangência dos segmentos (β_0)	60°
Espessura dos segmentos (h_s)	0,0175 <i>m</i>
Posicionamento dos segmentos (ϕ_j $j = 1, 2, 3, 4$)	0°, 90°, 180°, 270°

cont.

Ângulo de posicionamento do centro dos segmentos	0°
Folga radial do mancal (h_0)	110 μm
Número de pontos na direção \bar{y}	Mancal tradicional: 64 pontos
	Mancal híbrido: 71 pontos
Número de pontos na direção \bar{z}	Mancal tradicional: 64 pontos
	Mancal híbrido: 71 pontos
Número de orifícios	Mancal tradicional: zero
	Mancal híbrido: 5
Raio dos orifícios	2,5 mm
Força na direção X (F_X)	0 N
Força na direção Y (F_Y)	-400 N
Fator de pré-carga $\left(c = 1 - \frac{h_0}{R_s - R}\right)$	0,312
Número de Sommerfeld $\left(\frac{2\mu\Omega R_s \beta_0 (R+h_0)^2}{\ I\dot{F}\ (R_s - R)}\right)$	0,349

Tabela B.1: *Dados geométricos e de operação utilizados nas simulações dos capítulos 3 e 4.*

Apêndice C

Características da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico

- Características da Bancada de Testes sem o Mancal Hidrodinâmico

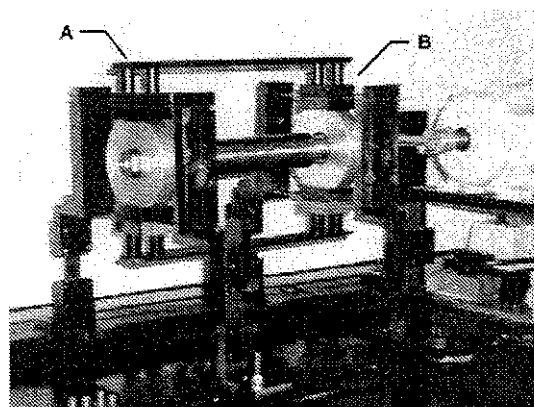


Figura C.1: Bancada de testes sem o mancal hidrodinâmico.

Bancada de Testes	
Massa que se desloca na direção X (m_x)	21,87 kg
Massa que se desloca na direção Y (m_y)	12,79 kg
Momento de inércia de área na direção X (I_{xx})	$264.10^{-3} \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia de área na direção Y (I_{yy})	$658.10^{-3} \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia de área polar (I_{zz})	$1,28.10^{-3} \text{ kg.m}^2$
Distância entre o suporte A e o centro de massa do rotor (L_2)	0,170 m
Distância entre o suporte B e o centro de massa do rotor (L_1)	0,170 m

Tabela C.1: Características da bancada de teste.

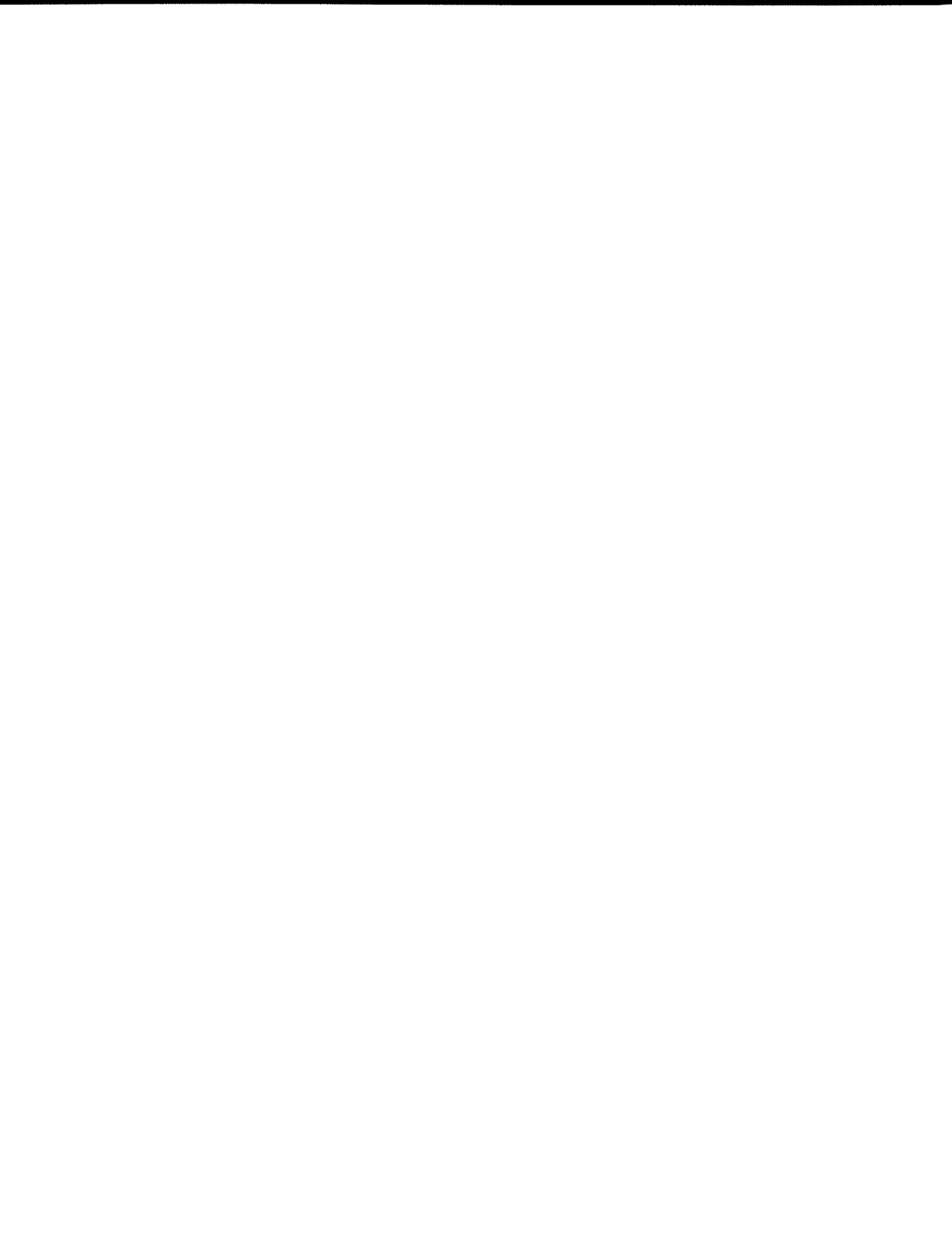


Apêndice D

Dados Geométricos e de Operação do Mancal Hidrodinâmico Utilizado nas Simulações Experimentais

Raio do rotor (R)	máximo : 0,02489 m
	mínimo : 0,02488 m
Raio de curvatura dos segmentos (R_s)	máximo : 0,02505 m
	mínimo : 0,02504 m
Rotação do rotor (Ω)	10 e 20 Hz
Viscosidade cinemática do óleo (μ)	0,0480 N s/m ²
Densidade do óleo (ρ)	840 kg/m ³
Número total de segmentos (N)	4
Largura do segmento (B)	0,0402 m
Ângulo de abrangência dos segmentos (β_0)	60°
Espessura dos segmentos (h_s)	0,0195 m
Posicionamento dos segmentos (ϕ_j $j = 1, 2, 3, 4$)	0°, 90°, 180°, 270°
Ângulo de posicionamento do centro dos segmentos	0°
Folga radial do mancal (h_0)	máxima: 127 μ m
	mínima: 105 μ m
Comprimento dos orifícios (l_0)	0,005 m
Número de pontos na direção \bar{y}	71 pontos
Número de pontos na direção \bar{z}	71 pontos
Número de orifícios	5
Raio dos orifícios	2,5 mm
Força na direção X (F_X)	0 N
Força na direção Y (F_Y)	0 N
Fator de pré-carga ($c = 1 - \frac{h_0}{R_s - R}$)	0,261

Tabela D.1: Dados geométricos e de operação utilizados nas análises experimentais do mancal hidrodinâmico.



Apêndice E

Fluxograma do Programa Computacional

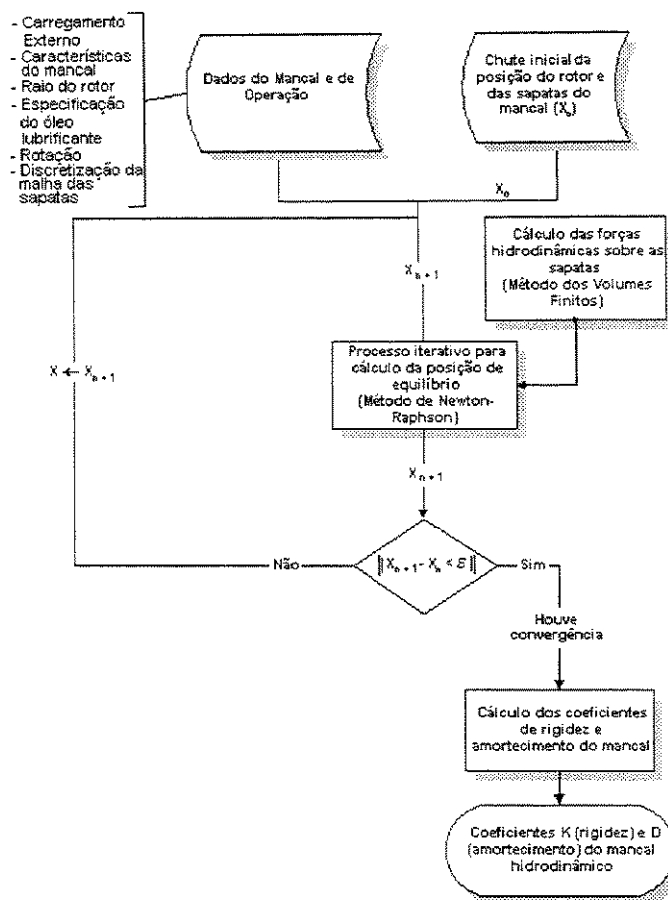


Figura E.1: Fluxograma do Programa Computacional.



Apêndice F

Método de Identificação aplicado a um Sistema com 3 Graus de Liberdade

Para analisar o comportamento da rigidez das lâminas flexíveis utilizadas nos suportes do rotor, foi estudado um sistema de três graus de liberdade como o apresentado na Figura F.1.

O cálculo teórico da rigidez das lâminas é realizado através da teoria de vigas, a qual é descrita pela equação diferencial de equilíbrio. Para o sistema representado na Figura F.1 tem-se que cada uma das lâminas está engastada nas duas extremidades. Assim, a determinação da rigidez equivalente de cada uma delas será calculada segundo o modelo apresentado na Figura F.2, onde se tem o exemplo de uma viga bi-engastada submetida a uma força externa F .

A equação diferencial de equilíbrio da viga ao longo da direção X é descrita por:

$$t(x) = EI_z \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0 \quad (\text{F.1})$$

sendo:

$t(x)$ - um carregamento distribuído na viga $[N/m]$;

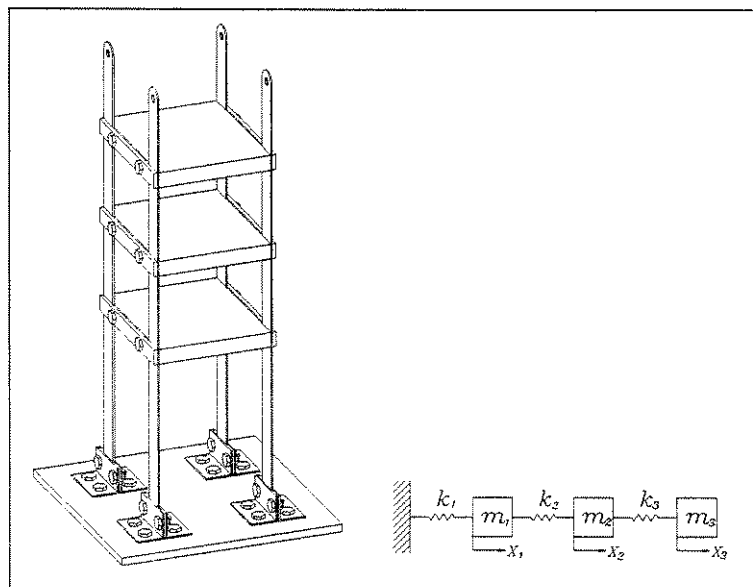


Figura F.1: Sistema físico com 3 graus de liberdade em série e o respectivo modelo mecânico

E - módulo de elasticidade do material da viga [N/m^2];

I_z - momento de inércia de área da viga [m^4];

$y(x)$ - deslocamento da viga na direção Y , ao longo de seu comprimento [m].

A deformação da lâmina ao longo de seu comprimento é obtida integrando quatro vezes a equação (F.1) na direção X :

- 1ª integração: força cortante

$$EI_z \frac{d^3 y(x)}{dx^3} = C_1 \quad (\text{F.2})$$

- 2ª integração: momento fletor

$$EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M_z(x) = C_1 x + C_2 \quad (\text{F.3})$$

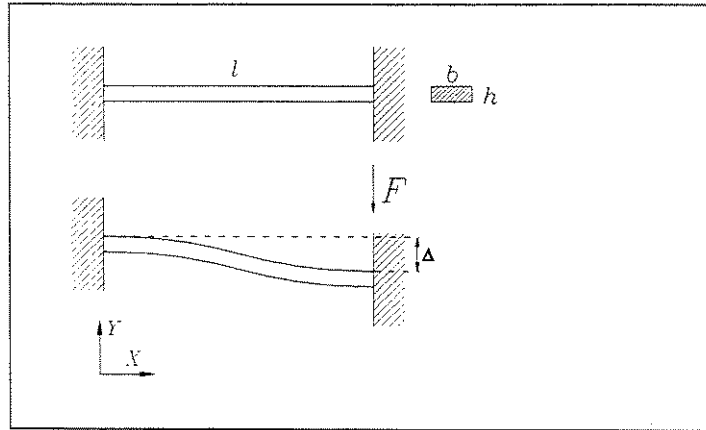


Figura F.2: Viga engastada-engastada

- 3ª integração: rotação

$$EI_z \frac{dy(x)}{dx} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (\text{F.4})$$

- 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z y(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (\text{F.5})$$

A partir da equação (F.5) define-se a equação de viga elástica:

$$y(x) = \frac{1}{EI_z} \left[C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right] \quad (\text{F.6})$$

A resolução da equação da linha elástica, para se obter $y(l)$, é definida a partir das condições de contorno do problema. Para o modelo representado na Figura F.1 tem-se as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y(0) = 0 & \text{deslocamento nulo na base da viga;} \\ EI \frac{dy(0)}{dx} = 0 & \text{rotação nula em } x = 0 \text{ - (hipótese de viga engastada);} \\ EI \frac{dy(l)}{dx} = 0 & \text{rotação nula em } x = l \text{ - (hipótese de viga engastada);} \\ EI \frac{d^3y(l)}{dx^3} = F & \text{força cortante no extremo da viga } (x = l). \end{array} \right. \quad (\text{F.7})$$

Resolvendo as equações de (F.2) a (F.5) para estas condições de contorno, determinam-se as seguintes constantes de integração:

$$\begin{cases} EI_z y(0) = C_1 \frac{(0)^3}{6} + C_2 \frac{(0)^2}{2} + C_3(0) + C_4 = 0 & \Rightarrow C_4 = 0 \\ EI_z \frac{dy(0)}{dx} = C_1 \frac{(0)^2}{2} + C_2(0) + C_3 = 0 & \Rightarrow C_3 = 0 \\ EI_z \frac{d^3 y(l)}{dx^3} = C_1 = F & \Rightarrow C_1 = F \\ EI_z \frac{dy(l)}{dx} = C_1 \frac{l^2}{2} + C_2 l + C_3 = 0 & \Rightarrow C_2 = -\frac{Fl}{2} \end{cases}$$

Substituindo estas constantes na equação da linha elástica, o deslocamento da viga na direção Y ao longo de seu comprimento será dado por:

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^3}{6} - \frac{Flx^2}{4} \right) \quad (\text{F.8})$$

Calculando o deslocamento para $x = l$, chega-se a:

$$y(l) = -\frac{Fl^3}{12EI} \quad (\text{F.9})$$

Sendo a constante de mola equivalente, k_f , calculada pela divisão entre a força aplicada à viga pela sua deformação, tem-se que:

$$k_f = -\frac{F}{y(l)} = \frac{12EI}{l^3} \quad [N/m] \quad (\text{F.10})$$

O módulo de elasticidade e o momento de inércia das lâminas utilizadas na bancada de testes são iguais a:

$$E = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,0291 \cdot 0,0011^3}{12} = 3,22 \cdot 10^{-12}$$

sendo b a largura da lâmina e h sua espessura.

Assim, a rigidez equivalente de cada uma das lâminas será obtida por:

$$k_f = \frac{12 \cdot 2,07 \cdot 3,22 \cdot 10^{-12}}{l^3} = \frac{8}{l^3} \quad (\text{F.11})$$

Observa-se que o cálculo de rigidez foi realizado apenas para uma lâmina. Porém, sabe-se que cada uma das massas do sistema de três graus de liberdade está conectada a quatro lâminas. Logo, a rigidez equivalente será obtida por:

$$k_{eq} = 4 \cdot k_f \quad (\text{F.12})$$

A rigidez das lâminas dependem, como é mostrado na equação (F.11), dos comprimentos das lâminas entre as massas. O comprimento de cada uma delas é de $0,105 \text{ m}$ entre a base e a massa inferior (m_1), de $0,146 \text{ m}$ entre a massa inferior (m_1) e a massa intermediária (m_2), e de $0,155 \text{ m}$ entre a massa m_2 e a massa m_3 . Assim, conforme o modelo mecânico utilizado para representar o sistema físico mostrado na Figura F.1, tem-se que:

$$k_1 = 4 \cdot \frac{8}{0,105^3} = 2,76 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (\text{F.13})$$

$$k_2 = 4 \cdot \frac{8}{0,146^3} = 1,02 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (\text{F.14})$$

$$k_3 = 4 \cdot \frac{8}{0,155^3} = 8,58 \cdot 10^3 \text{ N/m} \quad (\text{F.15})$$

Para a verificação experimental da rigidez equivalente das lâminas foram então aplicadas forças de excitação no sistema, e calculadas as funções de resposta em frequência correspondentes. Representando por f_1 , f_2 e f_3 as forças aplicadas sobre as massas 1, 2 e 3, respectivamente, tem-se que as equações de movimento para este sistema, obtidas através da 2ª Lei de Newton, são dadas por:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = f_1 - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = f_2 - k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) \\ m_3 \ddot{x}_3 = f_3 - k_3 (x_3 - x_2) \end{cases} \quad (\text{F.16})$$

Rearranjando estas equações chega-se a:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 = f_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = f_3 \end{cases} \quad (\text{F.17})$$

As forças aplicadas sobre as massas do sistema foram realizadas separadamente. Assumindo que o sistema é linear, tem-se que para uma força f de frequência ω aplicada sobre qualquer uma das três massas, os seus deslocamentos ocorrem a uma mesma frequência, apesar de defasadas no tempo. Ou seja,

$$f(t) = F e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = X_1 \cdot e^{i(\omega t - \phi_1)} \\ x_2(t) = X_2 \cdot e^{i(\omega t - \phi_2)} \\ x_3(t) = X_3 \cdot e^{i(\omega t - \phi_3)} \end{cases} \quad (\text{F.18})$$

Substituindo as equações de (F.18) em (F.17), para uma força aplicada na massa 1, chega-se a:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \cdot e^{-i\phi_1} \\ X_2 \cdot e^{-i\phi_2} \\ X_3 \cdot e^{-i\phi_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{F.19})$$

Escrevendo estas equações em termos das funções de resposta em frequência, tem-se que:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{F.20})$$

sendo H_{ij} a função de resposta em frequência correspondente ao deslocamento medido no ponto i e uma força aplicada em j . A equação (F.20) pode ser reescrita a fim de tê-la na forma:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b} \quad (\text{F.21})$$

sendo

\mathbf{A} - matriz formada pelas funções de resposta em frequência;

\mathbf{p} - vetor dos parâmetros a serem identificados;

\mathbf{b} - vetor dos parâmetros conhecidos da equação.

Assim, a equação (F.20) pode ser representada por:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & -(H_{21} - H_{11}) & 0 \\ 0 & (H_{21} - H_{11}) & -(H_{31} - H_{21}) \\ 0 & 0 & (H_{31} - H_{21}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \omega^2 m_1 H_{11} \\ \omega^2 m_2 H_{21} \\ \omega^2 m_3 H_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{F.22})$$

De forma análoga, os sistemas de equações obtidos para excitações realizadas nas massas 2 e 3, são dadas por:

- Força aplicada na massa 2

$$\begin{bmatrix} H_{12} & -(H_{22} - H_{12}) & 0 \\ 0 & (H_{22} - H_{12}) & -(H_{32} - H_{22}) \\ 0 & 0 & (H_{32} - H_{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega^2 m_1 H_{12} \\ 1 + \omega^2 m_2 H_{22} \\ \omega^2 m_3 H_{32} \end{Bmatrix} \quad (\text{F.23})$$

- Força aplicada na massa 3

$$\begin{bmatrix} H_{13} & -(H_{23} - H_{13}) & 0 \\ 0 & (H_{23} - H_{13}) & -(H_{33} - H_{23}) \\ 0 & 0 & (H_{33} - H_{23}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega^2 m_1 H_{13} \\ \omega^2 m_2 H_{23} \\ 1 + \omega^2 m_3 H_{33} \end{Bmatrix} \quad (\text{F.24})$$

Estudando apenas a parte real das equações (F.22), (F.23) e (F.24), define-se um sistema de 9 equações igual a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{Re}(H_{11}) & -\text{Re}(H_{21} - H_{11}) & 0 \\ 0 & \text{Re}(H_{21} - H_{11}) & -\text{Re}(H_{31} - H_{21}) \\ 0 & 0 & \text{Re}(H_{31} - H_{21}) \\ \text{Re}(H_{12}) & -\text{Re}(H_{22} - H_{12}) & 0 \\ 0 & \text{Re}(H_{22} - H_{12}) & -\text{Re}(H_{32} - H_{22}) \\ 0 & 0 & \text{Re}(H_{32} - H_{22}) \\ \text{Re}(H_{13}) & -\text{Re}(H_{23} - H_{13}) & 0 \\ 0 & \text{Re}(H_{23} - H_{13}) & -\text{Re}(H_{33} - H_{23}) \\ 0 & 0 & \text{Re}(H_{33} - H_{23}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{total}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 + \omega^2 m_1 \text{Re}(H_{11}) \\ \omega^2 m_2 \text{Re}(H_{21}) \\ \omega^2 m_3 \text{Re}(H_{31}) \\ \omega^2 m_1 \text{Re}(H_{12}) \\ 1 + \omega^2 m_2 \text{Re}(H_{22}) \\ \omega^2 m_3 \text{Re}(H_{32}) \\ \omega^2 m_1 \text{Re}(H_{13}) \\ \omega^2 m_2 \text{Re}(H_{23}) \\ 1 + \omega^2 m_3 \text{Re}(H_{33}) \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}_{total}} \quad (\text{F.25})$$

Aplicando o método dos mínimos quadrados resolve-se o sistema de equações (F.25).
Ou seja,

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}_{total}^T \mathbf{A}_{total})^{-1} \mathbf{A}_{total}^T \mathbf{b}_{total} \quad (\text{F.26})$$

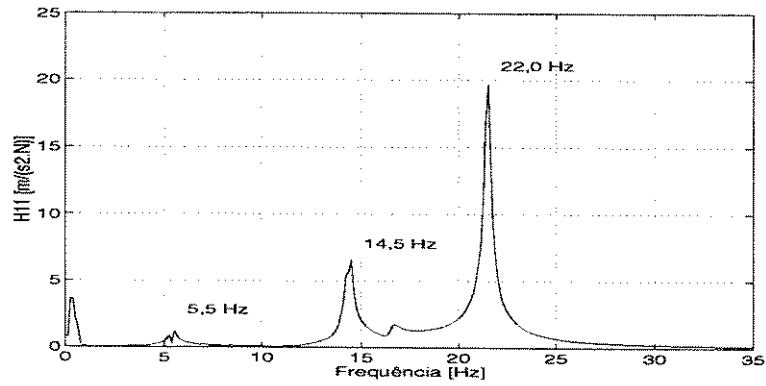
Os valores das massas m_1 , m_2 e m_3 são conhecidos, sendo iguais a:

$$\begin{cases} m_1 = 2,50 \text{ kg} \\ m_2 = 1,68 \text{ kg} \\ m_3 = 1,92 \text{ kg} \end{cases}$$

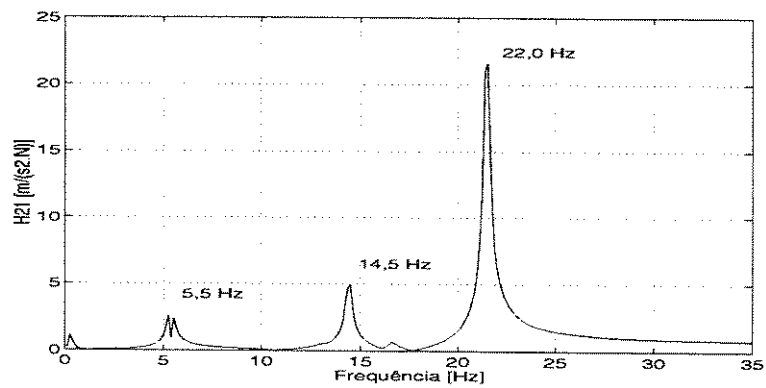
O sinal de excitação utilizado foi o de um ruído branco gerado na faixa de frequência de 0 a 2.000 Hz . Porém, o sistema só foi estudado até sua terceira frequência natural uma vez que o modelo mecânico utilizado para descrevê-lo assumia apenas três graus de liberdade. Na Figura F.3 tem-se os gráficos das funções de resposta em frequência obtidas para a excitação na massa 1, onde pode-se observar as três primeiras frequências naturais do sistema, que ocorrem nas frequências de 5,5 Hz , 14,5 Hz e 22,0 Hz .

A partir das funções de resposta em frequência realizou-se, então, o estudo da rigidez equivalente das lâminas do sistema, como indicado na equação (F.25). Esta análise foi realizada no domínio da frequência, mas limitando-se às com coerência entre o sinal de entrada (força de excitação) e o sinal de saída (deslocamento das massas) superior a 0,96. Na Figura F.4 tem-se os gráficos de coerência obtidos para excitações na massa 1 e medições nas massas 1, 2 e 3.

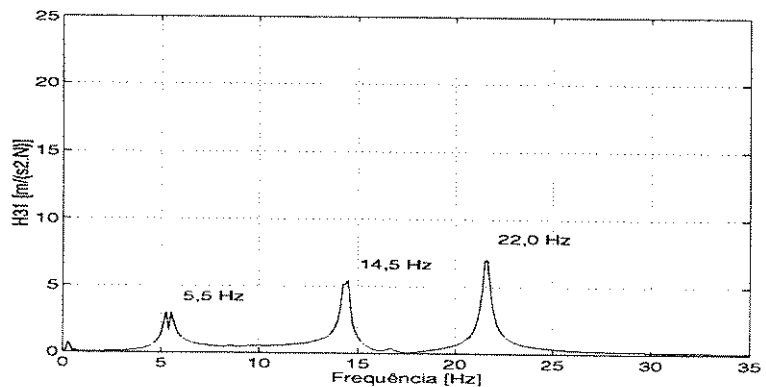
Observa-se na Figura F.4 que há uma queda nos valores de coerência nas frequências naturais do sistema e nas frequências de anti-ressonância.



(a) Função de resposta em frequência H_{11} .



(b) Função de resposta em frequência H_{21} .



(c) Função de resposta em frequência H_{31} .

Figura F.3: Funções de resposta em frequência do sistema de três graus de liberdade obtidas para uma excitação na massa 1.

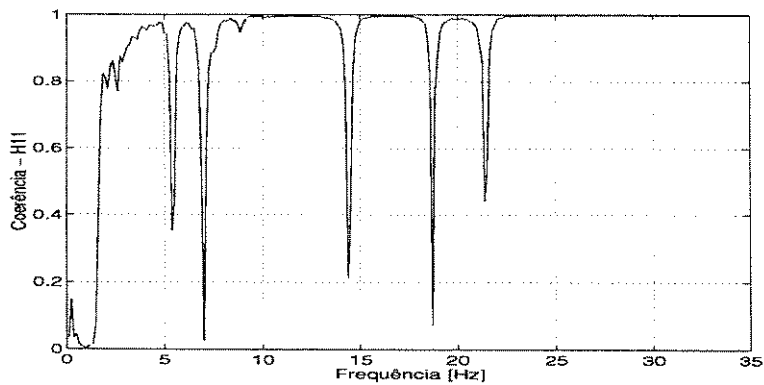
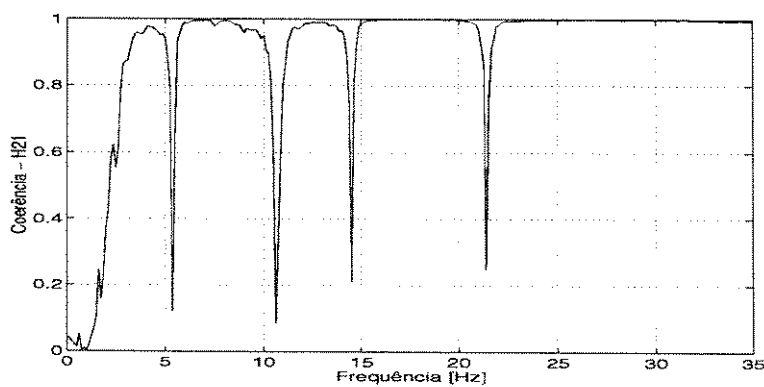
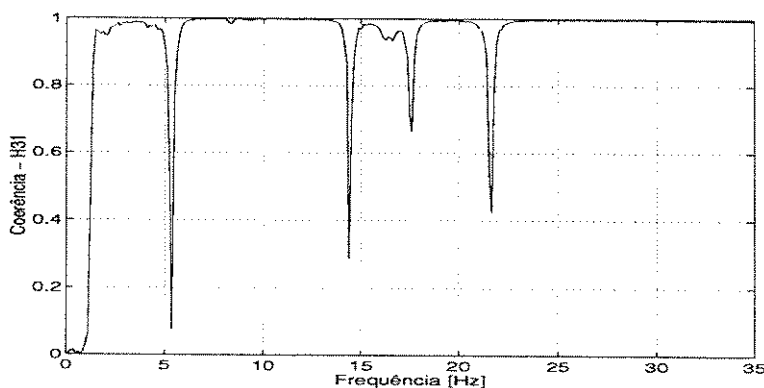
(a) Coerência para H_{11} .(b) Coerência para H_{21} .(c) Coerência para H_{31} .

Figura F.4: Coerência do sistema de três graus de liberdade obtidas obtidas para uma das medições realizadas para uma excitação na massa 1.

Os resultados obtidos para a rigidez equivalente das lâminas utilizando-se o modelo descrito neste apêndice estão apresentados a seguir. Na Figura F.5 tem-se o gráfico da rigidez equivalente para a lâmina entre a base e a massa 1, ou seja, k_1 .

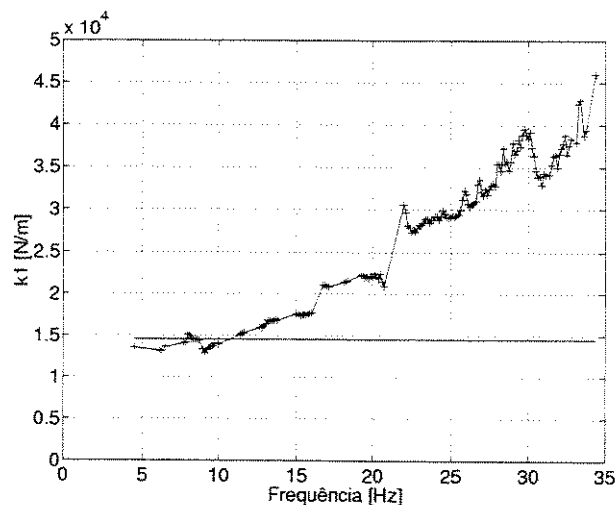


Figura F.5: Rigidez equivalente da lâmina 1 no domínio da frequência.

Observa-se que a rigidez equivalente das lâminas inferiores sofre um crescente aumento ao longo da frequência. A linha traçada na horizontal indica o valor esperado pela teoria, a qual indica, portanto, que este deveria permanecer constante ao longo de toda a faixa de frequências. Conclui-se, desta forma, que estas lâminas possuem comportamento dependente da frequência, ao contrário do que havia sido adotado para este sistema.

Já a rigidez equivalente para as lâminas posicionadas entre as massas 1 e 2 possui um comportamento diferente, como pode ser observado na Figura F.6.

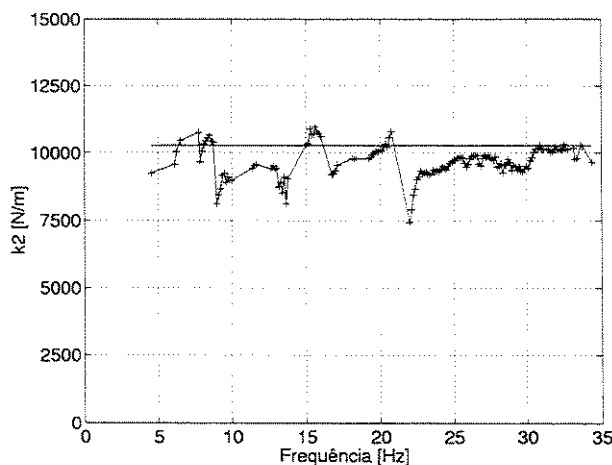


Figura F.6: Rigidez equivalente da lâmina 2 no domínio da frequência.

Nota-se que os valores obtidos experimentalmente permanecem praticamente constantes ao longo da frequência, e estão próximos ao resultado teórico, o qual é indicado pela linha horizontal contínua. Para as lâminas posicionadas entre a massa intermediária (m_2) e a superior (m_3) identificou-se os valores de rigidez mais próximos ainda dos previstos pela teoria de vigas. Estes são apresentados na Figura F.7.

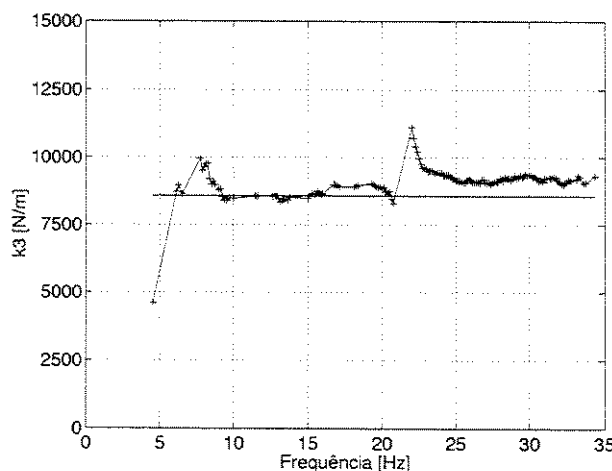


Figura F.7: Rigidez equivalente da lâmina 3 no domínio da frequência.

Novamente observa-se que a rigidez equivalente encontrada também pode ser considerado como sendo invariante na frequência, e com valores próximos do esperado pela teoria de viga.

Após uma enorme bateria de testes experimentais, chegou-se a conclusão que as lâminas engastadas na base tem uma deformação máxima maior que as outras lâminas que estão engastadas entre as massas do sistema, devido ao efeito de flambagem. Isto é mais pronunciado na lâmina inferior, depois na lâmina entre as massas 1 e 2, e quase não é detectado entre a massa 2 e 3, pois a massa 3 é relativamente leve comparada com a soma das respectivas massas. Desta forma, estas passam a ter um comportamento não linear levando a uma variação dos valores de rigidez ao longo da frequência.

Outros experimentos foram realizados, por exemplo, com um sistema de 2 graus de liberdade. Neste caso, as lâminas tinham comprimentos maiores que os utilizados no sistema de três graus de liberdade. Nestes resultados o comportamento observado para a rigidez das lâminas foram novamente do mesmo tipo. Ou seja, as lâminas inferiores, engastadas à base, possuíam uma rigidez equivalente variando na frequência enquanto as lâminas posicionadas entre as massas se comportaram de maneira praticamente constante.

Um tópico não investigado, mas que serve de perspectiva futura para um possível trabalho de iniciação científica, é influência das condições do engaste, ora utilizando-se alumínio, ora aço, na identificação destes coeficientes. Ressalta-se aqui, que o engaste da lâmina na parte inferior da estrutura de 2 e 3 graus de liberdade é feito com o auxílio de componentes de aço, enquanto que, entre as massas da estrutura, o engaste é realizado com chapas de alumínio. Na bancada de testes do mancal segmentado híbrido os engastes são realizados com elementos de aço.

