

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
Como Requisito Parcial à Obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
COM MALHA TRIANGULAR EM SIMULAÇÃO DE  
RESERVATÓRIOS**

Autor : Luiz Carlos Nascimento Amado  
Orientador : Oswaldo Antunes Pedrosa Jr.

novembro de 1990

52/90

*Este exemplar corresponde à redação final da  
tese defendida pelo Eng.º Luiz Carlos Nascimento Amado  
e aprovada pela Comissão Julgadora em 26/11/1990.*

*Oswaldo A. Pedrosa Jr.*  
(Prof. Dr. Oswaldo Antunes Pedrosa Jr.)

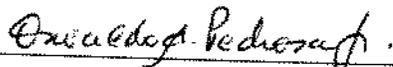


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A dissertação "Aplicação do Método das Diferenças Finitas com Malha Triangular em Simulação de Reservatórios", elaborada por Luiz Carlos Nascimento Amado e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pela Sub-Comissão de Pós Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 26 de novembro de 1990

Banca Examinadora



\_\_\_\_\_  
Oswaldo Antunes Pedrosa Jr., Ph. D.  
(Orientador)



\_\_\_\_\_  
Sydney Stunckenbruck, Ph. D.



\_\_\_\_\_  
Fernando Rodríguez de la Garza, Ph. D.

## AGRADECIMENTOS ESPECIAIS

*À minha esposa Simone, por sua paciência, compreensão, incentivo, apoio e carinho durante o desenvolvimento deste trabalho, sempre ao meu lado em todos os momentos.*

*Aos meus pais, pela minha formação educacional, carinho e estímulo durante o curso,  
o meu muito obrigado.*

## AGRADECIMENTOS

*Ao Dr. Oswaldo A. Pedrosa Jr., pela interesse em orientar esse trabalho, pela definição de diretrizes e objetivos a serem alcançados, pela experiência e conhecimentos científicos transmitidos e pela amizade e constante boa vontade durante o desenvolvimento dos trabalhos ,*

*Aos professores do curso, indistintamente, abnegados na arte de ensinar e do aperfeiçoamento científico ,*

*Aos funcionários da Unicamp, pela cooperação e atenção em todos os momentos.*

*À Petrobrás, pelo suporte financeiro e técnico em todas as etapas.*

*Aos colegas de curso , pela amizade , consideração e descontração com que sempre me trataram, reservo um profundo agradecimento.*

## Sumário

Este trabalho tem a finalidade de apresentar o sistema de malha triangular como uma alternativa viável para utilização em simulação numérica de reservatórios e a sua aplicação a reservatórios com geometrias complexas e descontinuidades internas, como falhas ou formações heterogêneas.

A vantagem da malha composta de triângulos se prende à sua flexibilidade na modelagem de contornos curvilíneos irregulares, facilitando assim o tratamento das condições de contorno das equações diferenciais de escoamento. Além disso, pela forma de construção dos blocos de malha, através do método das mediatrizes, conseguem-se células hexagonais que reproduzem melhor a configuração do escoamento e contribuem assim para a redução do efeito de orientação de malha, muito comum nas malhas de coordenadas cartesianas.

Para a geração da malha triangular, foi desenvolvido um algoritmo numérico que se adapta simultaneamente às fronteiras externas do reservatório e aos contornos de regiões heterogêneas, porventura existentes.

O modelo matemático é desenvolvido a partir da formulação integral das equações de balanço de massa, integrando-se em relação ao volume de cada bloco de malha e discretizando-se as equações resultantes através do método das diferenças finitas, considerando-se a malha triangular gerada. Um simulador "black-oil" bidimensional foi implementado, segundo esse modelo, para o estudo do escoamento bifásico de óleo e água e foi aplicado para a simulação de dois reservatórios anisotrópicos, onde é vantajosa a utilização da malha triangular.

Os resultados obtidos foram validados para os casos mais simples, através de comparação com soluções analíticas. Os casos mais complexos, que não apresentam soluções analíticas, são comparados com os resultados de um simulador comercial que utiliza malha cartesiana convencional.

## Abstract

The main purpose of this work is to show that the triangular grid system is a feasible one for the numerical simulation of reservoirs with complex geometry and with discontinuities such as fractures and heterogeneous formations.

The advantage of the triangular grid is due to the modelling flexibility when dealing with irregular curvilinear boundaries and the associated differential equation boundary conditions. Moreover, in the assembling process of the grid blocks, by the " Perpendicular Bisector method ", it is possible to build hexagonal cells that reproduces a better flow configuration and with a reduced mesh orientation effect, a very usual behaviour presented by Cartesian coordinates grids.

A numerical algorithm was developed for the triangular mesh generation. The proposed scheme takes into account the external reservoir boundaries and the boundaries of heterogeneous internal domains.

The mathematical model is developed using an integral equation formulation for the mass balance in each triangular grid block and a finite difference scheme was applied to the resulting differential equations. A two dimensional " black - oil " simulator was implemented in order to study the oil-water two-phase flow and applied in the simulation of two different anisotropic reservoirs where it is shown the advantages of the triangular grid scheme.

Examples of problems with analytical solutions were simulated in order to validate the computer program. Simulations of more complex problems with no available analytical solutions were compared with the results obtained with a commercial simulator that uses a classical Cartesian grid scheme.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Identificação do Problema . . . . .	1
1.2	Discussão das Limitações dos Principais Métodos Utilizados em Simulação de Reservatórios . . . . .	3
1.3	Descrição Sucinta do Método e Características mais Relevantes	5
<b>2</b>	<b>Modelo Numérico</b>	<b>7</b>
2.1	Formulação Integral das Equações de Escoamento . . . . .	7
2.2	Construção dos Blocos de Malha . . . . .	10
2.2.1	Construção segundo o Método das Mediatrizes . . . . .	11
2.2.2	Construção segundo o Método das Medianas . . . . .	12
2.3	Discretização das Equações - Método das Mediatrizes . . . . .	13
2.3.1	Discretização do termo de fluxo . . . . .	13
2.3.2	Discretização do termo de acumulação . . . . .	15
2.4	Equações de Balanço de Massa . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Solução do Modelo</b>	<b>17</b>
3.1	Características do Simulador . . . . .	17
3.2	Resolução pelo Método Iterativo de Newton . . . . .	19
3.3	Aproximação para o modelo de poço . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Construção Numérica da Malha Triangular</b>	<b>29</b>

4.1	Desenvolvimento Matemático . . . . .	30
4.2	Exemplos para a Utilização do Algoritmo . . . . .	34
4.2.1	Região irregular com fronteira interna . . . . .	34
4.2.2	Região irregular sem fronteira interna . . . . .	36
4.2.3	Região irregular com muitas fronteiras internas . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Análise, Aplicação e Discussão dos Resultados</b>	<b>39</b>
5.1	Validação do Modelo . . . . .	39
5.1.1	Validação utilizando solução analítica . . . . .	39
5.2	Aplicações - Problemas Típicos . . . . .	47
5.2.1	Reservatório com grandes contrastes de permeabilidade	47
5.2.2	Reservatório com Falha Selante e sujeito a Influxo de Água . . . . .	50
5.3	Comparação com Simulador Comercial . . . . .	53
5.4	Análise e Discussão dos resultados . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Conclusões e Recomendações</b>	<b>68</b>
<b>7</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>70</b>

## Lista de Figuras

1	Rede assimétrica de triângulos . . . . .	10
2	Bloco triangularização pelo método das mediatrizes . . . . .	11
3	Bloco triangularização pelo método das medianas . . . . .	12
4	Modelo de poço . . . . .	26
5	Plano físico e plano transformado . . . . .	30
6	Plano transformado com linhas $\chi$ e $\psi$ . . . . .	33
7	Região irregular sem fronteira interna . . . . .	37
8	Reservatório Hexagonal - contorno selado - poço central . . . . .	40
9	Reservatório Quadrado - contorno selado - poço central . . . . .	41
10	Reservatório Quadrado - Pressão no poço x Tempo - Validação por Solução Analítica . . . . .	44
11	Reservatório Quadrado - Pressão no vértice x Tempo - Validação por Solução Analítica . . . . .	45
12	Reservatório Hexagonal - Pressão no poço x Tempo - Validação por Solução Analítica . . . . .	46
13	Caso 1 : Reservatório com Canal interno de permeabilidade elevada . . . . .	48
14	Malha de simulação para o caso 1 . . . . .	50
15	Caso 2 - Reservatório com Falha Selante sujeito a Influxo de Água . . . . .	51
16	Malha de simulação para o caso 2 . . . . .	52
17	Caso 1 - Malha cartesiana utilizada pelo simulador comercial . . . . .	54
18	Caso 2 - Malha cartesiana paralela à falha geológica . . . . .	55
19	Caso 2 - Malha cartesiana paralela às fronteiras . . . . .	56
20	Estudo comparativo - pressão no poço 1 . . . . .	57
21	Estudo comparativo - pressão no poço 2 . . . . .	57

22	Estudo comparativo - pressão no poço 3 . . . . .	58
23	Estudo comparativo - pressão no poço 4 . . . . .	58
24	Estudo comparativo - pressão no poço 5 . . . . .	59
25	Estudo comparativo - pressão no poço 1 . . . . .	61
26	Estudo comparativo - raio no poço 1 . . . . .	62
27	Estudo comparativo - pressão no poço 2 . . . . .	62
28	Estudo comparativo - raio no poço 2 . . . . .	63
29	Estudo comparativo - pressão no poço 3 . . . . .	63
30	Estudo comparativo - raio no poço 3 . . . . .	64
31	Estudo comparativo - pressão no poço 4 . . . . .	64
32	Estudo comparativo - raio no poço 4 . . . . .	65
33	Estudo comparativo - pressão no poço 5 . . . . .	65
34	Estudo comparativo - raio no poço 5 . . . . .	66
35	Mapa de Saturação - Malha Triangular . . . . .	66
36	Mapa de Saturação - Malha Cartesiana paralela à falha . . . . .	67
37	Mapa de Saturação - Malha Cartesiana paralela ao contorno . . . . .	67

## Lista de Tabelas

1	Propriedades P V T . . . . .	41
2	Reservatório Quadrado - Pressão no poço - Validação por Solução Analítica . . . . .	42
3	Reservatório Quadrado - Pressão no vértice - Validação por Solução Analítica . . . . .	43
4	Reservatório Hexagonal - Pressão no poço - Validação por Solução Analítica . . . . .	43
5	Propriedades P V T - óleo e água . . . . .	53
6	Permeabilidades Relativas - óleo e água . . . . .	53

## Nomenclatura

A	área do reservatório, $m^2$
$B_o$	fator volume de formação do óleo, $\frac{m^3}{m^3}$
$B_n$	fator volume de formação do água, $\frac{m^3}{m^3}$
D	profundidade, $m$
$d_j$	distância entre blocos de malha, $m$
fg	fator geométrico, $m^3$
h	espessura do reservatório, $m$
k	permeabilidade absoluta, $m^2$
$k_{ro}$	permeabilidade relativa ao óleo
$k_{ra}$	permeabilidade relativa a água
J	índice de produtividade do aquífero, $\frac{m^3}{Pa.s}$
$l_j$	lado comum a dois blocos de malha, $m$
P	pressão, $Pa$
$P_d$	pressão adimensional
$P_{wf}$	pressão de fluxo no poço, $Pa$
$P_s$	pressão de saturação, $Pa$
q	vazão volumétrica por unidade de área, $m^3/d/m^2$
Q	vazão volumétrica, $m^3/d$
$r_w$	raio do poço, $m$
$r_o$	raio equivalente de drenagem, $m$
$S_a$	saturação de água
$S_o$	saturação de óleo
$S_{oi}$	saturação de água irreducível
$T_{da}$	tempo adimensional
T	transmissibilidade, $m^3/(Pa.s)$
t	tempo, <i>dias</i>
u	velocidade, $m/s$
V	volume do bloco de malha, $m^3$
x	coordenada do ponto de malha (plano real), $m$
y	coordenada do ponto de malha (plano real), $m$

## Letras Gregas

$\lambda$	mobilidade
$\mu$	viscosidade, $Pa.s$
$\rho$	massa específica, $kg/m^3$
$\phi$	porosidade
$\psi$	coordenada do ponto de malha (plano transformado), $m$
$\chi$	coordenada do ponto de malha (plano transformado), $m$
$\Phi$	potencial de fluxo, $Pa$

## Subscritos

f	fase (óleo ou água)
a	água
i	índice do ponto de malha de um determinado bloco
j	índice dos pontos de malha vizinhos a um determinado bloco
o	óleo
X	incógnitas (P ou $S_2$ )

# 1 Introdução

## 1.1 Identificação do Problema

Os modelos numéricos de simulação, largamente utilizados na engenharia de reservatórios, fazem uso do método das diferenças finitas para a discretização das equações diferenciais de escoamento de fluidos em meios porosos, considerando, com frequência, uma malha de coordenadas cartesianas disposta sobre o domínio do reservatório.

Os reservatórios de petróleo, na realidade, possuem geometrias altamente complexas e, em geral, apresentam uma série de heterogeneidades resultantes da evolução geológica pela qual passaram no decorrer do tempo.

A malha de coordenadas cartesianas é uma malha retangular, de grande simplicidade de construção e tem uso consagrado em estudos de simulação de reservatórios. No entanto, para o caso de geometrias irregulares, apresenta pouca flexibilidade, pois não se adapta muito bem, geometricamente falando, às fronteiras curvilíneas, representando-as incorretamente, necessitando-se assim de esquemas muito refinados, com um número elevado de pontos de malha, para a simulação de reservatórios que apresentem essas características.

Ocorre ainda, para o caso de simulação com malhas cartesianas, o chamado efeito de orientação de malha, que conduz a resultados distintos, dependendo da direção em que se aplica a malha de simulação sobre o reservatório. Esse efeito é mais pronunciado na determinação da distribuição de

saturações , principalmente quando se tem altas razões de mobilidade.

Assim, o estudo das malhas mais flexíveis representa uma significativa contribuição , dentre outras, para o aperfeiçoamento das potencialidades dos atuais simuladores.

O presente trabalho tem como finalidade apresentar a malha triangular como uma alternativa viável e de grande atratividade para a utilização em simulação de reservatórios.

A malha composta de triângulos é especialmente indicada para os reservatórios que apresentem geometria complexa ou irregular, ou ainda , aqueles que porventura venham a exibir anisotropias internas, tais como falhas selantes, formações heterogêneas ou impermeáveis, canais com elevadas permeabilidades ou outras particularidades geomorfológicas. Além disso, pela própria forma como são construídos, os esquemas triangulares permitem reduzir significativamente os efeitos de orientação de malha, comuns na malha de coordenadas cartesianas, pois é possível considerar um maior número de direções de escoamento, devido à geometria hexagonal dos blocos de malha formados, conseguindo-se assim uma configuração mais real, sem direções preferenciais de escoamento.

Deste modo, pode-se então construir sobre o domínio do reservatório, uma malha triangular que se uniformiza com os contornos externos e também internos, conseguindo-se assim, modelar com muito mais flexibilidade as características geométricas e geológicas do reservatório em exame. Além disso, a malha triangular apresenta, como vantagem adicional, a possibilidade de utilização de um número de células bem inferior ao empregado no

caso de malhas cartesianas, quando se objetiva a simulação de reservatórios heterogêneos.

## 1.2 Discussão das Limitações dos Principais Métodos Utilizados em Simulação de Reservatórios

A simulação eficiente e precisa do escoamento de fluidos em reservatórios é dependente da escolha do tipo e forma da malha sobre a qual são discretizadas as equações diferenciais de escoamento.

Conforme mencionado anteriormente, embora o sistema rígido de coordenadas cartesianas não reproduza fielmente a geometria real do reservatório e nem a configuração correta de escoamento, essa técnica vem sendo aplicada correntemente nos estudos de simulação em engenharia de petróleo, devido à facilidade na construção da malha.

Como principais limitações e desvantagens desta técnica estão:

- Inflexibilidade na descrição da geometria, falhas, acunhamentos e descontinuidades nos parâmetros do reservatório, a não ser que haja coincidência com as direções dos eixos coordenados.
- Dificuldade na representação do poço como condição de contorno.
- Influência do efeito de orientação de malha.

Para aumentar a resolução em determinadas regiões do reservatório, diversos autores ( [15], [14] ) desenvolveram técnicas de refinamento localizado de malha em sistemas de coordenadas cartesianas. Pedrosa e Aziz

[12] introduziram o conceito de malha híbrida para melhorar o tratamento de poços em simuladores de reservatórios.

Apesar de terem contribuído para dar maior flexibilidade aos modelos clássicos de diferenças finitas, as técnicas de refinamento localizado de malha ainda sofrem limitações quanto ao tratamento adequado do fluxo nas interfaces das malhas refinadas e grosseiras.

A minimização do efeito de orientação de malha foi conseguida através do emprego de esquemas de discretização de ordem superior ou de nove pontos. Essa técnica foi inicialmente introduzida por Yanosik e McCracken [21] para malhas cartesianas regulares e posteriormente melhoradas por outros autores, dentre eles, Coats e Modine [3] e Bertiger e Padmanabhan [2].

Embora contribuam efetivamente para reduzir o efeito de orientação de malha, os esquemas de diferenças finitas de nove pontos tornam mais difícil o tratamento dos contornos e também das heterogeneidades, além do aumento do esforço computacional.

A utilização de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais foi proposta por Hirasaki e O'Dell [18] e investigada por Sonnier e Chaumet [17], Robertson e Woo [16] e também por Fleming [4], com o objetivo de aperfeiçoar a técnica de simulação, reduzindo as principais desvantagens introduzidas pela malha cartesiana.

A utilização de malhas curvilíneas se baseia em uma transformação de coordenadas e posterior discretização das equações transformadas. As

relações de transformação são obtidas através da solução da equação de Laplace, aplicada ao escoamento monofásico em reservatórios fechados. Em outras palavras, as linhas de fluxo e as linhas equipotenciais obtidas formam um sistema ortogonal de coordenadas .

Esta técnica contribuiu bastante para um melhor modelamento da geometria do fluxo de fluidos em reservatórios, contudo, esses sistemas estritamente ortogonais não são flexíveis o bastante para descrever reservatórios de formato complexo, porque a obrigatoriedade imposta pela ortogonalidade da malha pode dificultar o ajuste com as fronteiras, tanto do reservatório, quanto das heterogeneidades. A ausência de ortogonalidade nesses sistemas de coordenadas introduz termos com derivadas cruzadas, o que altera estrutura das equações matriciais, exigindo a utilização de rotinas específicas para a resolução dos sistemas de equações lineares. Por essa razão, a utilização de malhas curvilíneas tem se concentrado na solução de problemas com sistemas padronizados de arranjos de poços ( “ five-spot ”, “ nine-spot ” e outros).

### **1.3 Descrição Sucinta do Método e Características mais Relevantes**

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um modelo numérico bifásico, bidimensional, utilizando o clássico método das diferenças finitas acoplado a uma malha triangular, para aplicação em simulação de reservatórios.

O método combina as vantagens de uma melhor adequação da malha triangular à geometrias irregulares, com a discretização das equações

pelo método das diferenças finitas. A partir de um algoritmo de triangulação, que posteriormente será detalhado, é investigado um esquema de bloco triangularização, conhecido como método das mediatrizes ou "Perpendicular Bisector Method". Este método foi introduzido na engenharia de reservatórios por Heinemann et al. [6] em 1989, contudo, a utilização do método das diferenças finitas com malhas triangulares foi inicialmente apresentado por Mc Neal, em 1952, para a resolução de problemas magnetostáticos em circuitos elétricos. Heinrich [7], em 1987, deu importante contribuição ao método de diferenças finitas, ao assegurar a convergência e estabilidade desta técnica em redes irregulares de triângulos e quadriláteros.

A geração automática da malha triangular e a relativa simplicidade da construção dos blocos de malha pelo método das mediatrizes, fornecem as características mais relevantes da técnica em estudo, ou seja:

- Flexibilidade no tratamento de geometria irregulares de reservatórios;
- Facilidade para o refinamento localizado em qualquer região desejada;
- Flexibilidade para a modelagem de macros heterogeneidades internas ;
- Significativa redução do efeito de orientação de malha.

A partir da construção dos blocos de malha, o método usa a formulação integral das equações de escoamento multifásico para obter, através de integração numérica sobre o domínio de cada bloco de malha, um conjunto de equações de balanço de materiais. Estas equações são fortemente não lineares e podem ser discretizadas termo a termo, por intermédio de diferenças finitas, sendo resolvidas numericamente pelo método de Newton.

## 2 Modelo Numérico

### 2.1 Formulação Integral das Equações de Escoamento

O modelo matemático utilizado é obtido através da formulação das equações de escoamento de fluidos em meios porosos, na forma integral, partindo-se da equação de conservação da massa, combinada com a equação de Darcy, que representa a lei de conservação da quantidade de movimento.

Assim, a lei de conservação da massa pode ser escrita na forma integral como:

$$-\int_V \nabla \cdot (\rho_p \vec{u}_p) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_p S_p) dV + \int_V (\rho_p q_p) dV. \quad p = o, a \quad (1)$$

onde:

$\rho_p$  é a massa específica da fase p,

$\vec{u}_p$  a velocidade de fluxo da fase p,

$\phi$  a porosidade da formação ,

$q_p$  a vazão mássica da fase p,

$S_p$  a saturação da fase p e

V o volume de controle.

Esta equação representa um balanço de massa em um determinado volume de controle V, considerando-se um modelo “ black oil ”, sem transferência de massa entre as fases. O fluxo líquido de massa que atravessa as fronteiras do volume de controle V deve ser igual a taxa de variação de

massa mais a vazão mássica produzida ou injetada no interior desse mesmo volume, para cada uma das fases existentes.

Aplicando o teorema da divergência, transforma-se a integral de volume do fluxo de massa no lado esquerdo da equação 1, em uma integral superfície. Essa equação torna-se, então:

$$-\int_A \rho_p(\vec{u}_p \cdot \vec{n}) dA = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_p S_p) dV + \int_V (\rho_p q_p) dV, \quad p = o, a \quad (2)$$

onde:

A é a área da superfície de contorno do volume de controle V e

$\vec{n}$  é o vetor normal a esta superfície.

Da lei de Darcy, o vetor velocidade  $\vec{u}_p$  pode ser expresso como :

$$\vec{u}_p = -k \cdot \frac{k_{rp}}{\mu_p} \nabla \Phi_p, \quad p = o, a \quad (3)$$

onde:

K é a permeabilidade absoluta do meio poroso e

$\nabla \Phi_p$  é o gradiente do potencial de fluxo, definido como:

$$\nabla \Phi_p = \nabla P_p - \rho_p \cdot g \cdot \nabla D, \quad p = o, a \quad (4)$$

Efetuando-se a substituição da equação 3 em 2, obtém -se :

$$\int_A k \rho_p \frac{k_{rp}}{\mu_p} (\nabla \Phi_p \cdot \vec{n}) dA = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_p S_p) dV + \int_V (\rho_p q_p) dV, \quad p = o, a \quad (5)$$

Nesta equação , o lado esquerdo representa a vazão mássica de fluxo da fase p que atravessa a superfície de contorno do volume de controle V, podendo ser indicada por :

$$Q_p = \int_{A_b} k \lambda_p (\nabla \Phi_p \cdot \vec{n}) dA, \quad p = o, a \quad (6)$$

onde a mobilidade  $\lambda_p$  da fase  $p$  é definida por:  $\lambda_p = \rho_p \frac{k_{rp}}{\mu_p}$ .

Na equação 5, a primeira parcela do lado direito representa o termo de acumulação, enquanto que a segunda parcela corresponde ao termo fonte.

Na engenharia de reservatórios, é comum se expressar a equação de balanço de materiais em termos de volume em condições padronizadas. Para isso, divide-se todos os termos da equação 5 por  $\rho_p = \rho_{pstd}$  (massa específica nas condições padronizadas ou de superfície) e aplica-se diretamente a definição do fator volume de formação,  $B_p = \frac{\rho_p}{\rho_{pstd}}$ , obtendo-se, assim, a seguinte equação :

$$\int_A k \frac{k_{rp}}{\mu_p B_p} (\nabla \Phi_p \cdot \vec{n}) dA = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_p}{B_p} \right) dV + \int_V \left( \frac{q_p}{B_p} \right) dV, \quad p = o, a \quad (7)$$

Esta equação representa o modelo matemático para o escoamento de fluidos em reservatórios e será resolvida, neste trabalho, através de um modelo numérico de discretização que utiliza diferenças finitas em uma malha triangular, em um sistema bidimensional bifásico (óleo - água).

## 2.2 Construção dos Blocos de Malha

Como afirmado antes, as malhas triangulares fornecem uma maneira muito atrativa para se obter altas resoluções em áreas particulares do reservatório e para simular o escoamento em geometrias irregulares e interfaces complicadas.

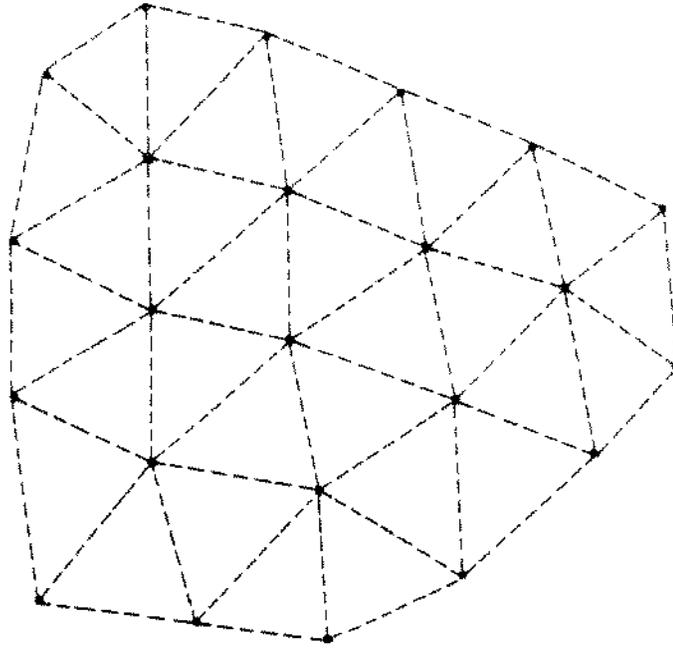


Figura 1: Rede assimétrica de triângulos

A figura 1 ilustra uma rede assimétrica de triângulos, gerada por um algoritmo qualquer de triangularização .

Cada ponto dessa malha precisa ser associado a um bloco de malha. Para isso, regras especiais devem ser seguidas para se construir as fronteiras (faces) desses blocos. Diferentes métodos podem ser usados, resultando com isso diferentes expressões para o cálculo dos coeficientes de fluxos entre

blocos (transmissibilidades). Dentre esses métodos, destacaremos, a seguir, os dois principais, relacionados com determinadas cevianas do triângulo.

### 2.2.1 Construção segundo o Método das Mediatrizes

Em linhas gerais, o método das mediatrizes é simplesmente uma diretriz de como se construir, para cada ponto da malha triangular, os blocos de malha correspondentes, através das mediatrizes dos lados dos triângulos gerados. Dessa forma, as linhas de malha atravessam ortogonalmente os lados dos blocos, formando uma linha de escoamento para cada um dos seis lados do bloco hexagonal formado.

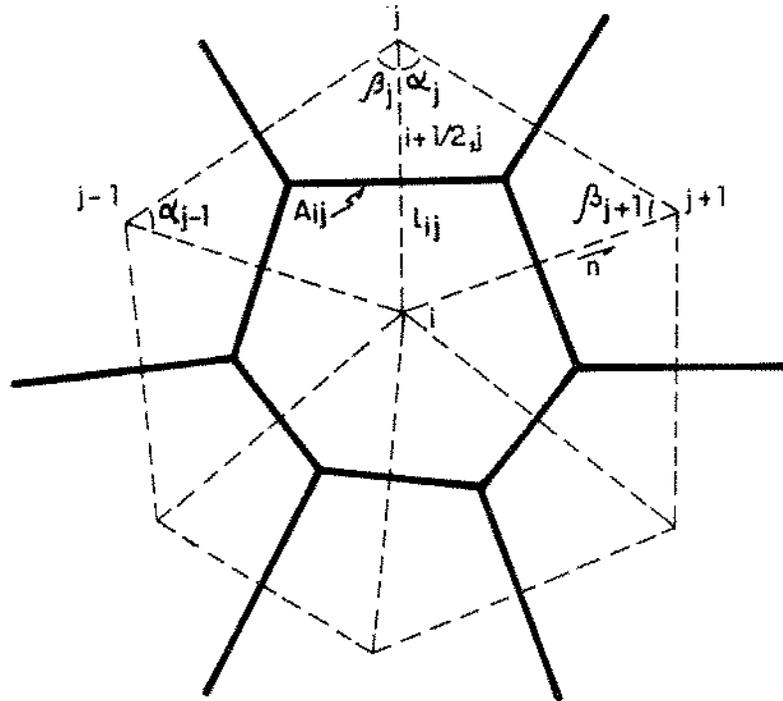


Figura 2: Bloco triangularização pelo método das mediatrizes

Para cada triângulo da malha, forma-se o bloco a partir das me-

mediatrizes dos lados dos triângulos. A linha poligonal formada por essas mediatrizes, ao redor de cada ponto de malha, são os contornos dos blocos de malha, sendo os circuncentros dos triângulos adjacentes (ponto de encontro das mediatrizes de cada lado) os vértices do bloco. Dessa forma, cria-se um bloco hexagonal, cujos lados ficam ortogonais às linhas de malha que o atravessam. Neste trabalho, será adotado o método de bloco triangularização, ilustrado na figura 2.

### 2.2.2 Construção segundo o Método das Medianas

Neste outro método, os contornos dos blocos de malha são as

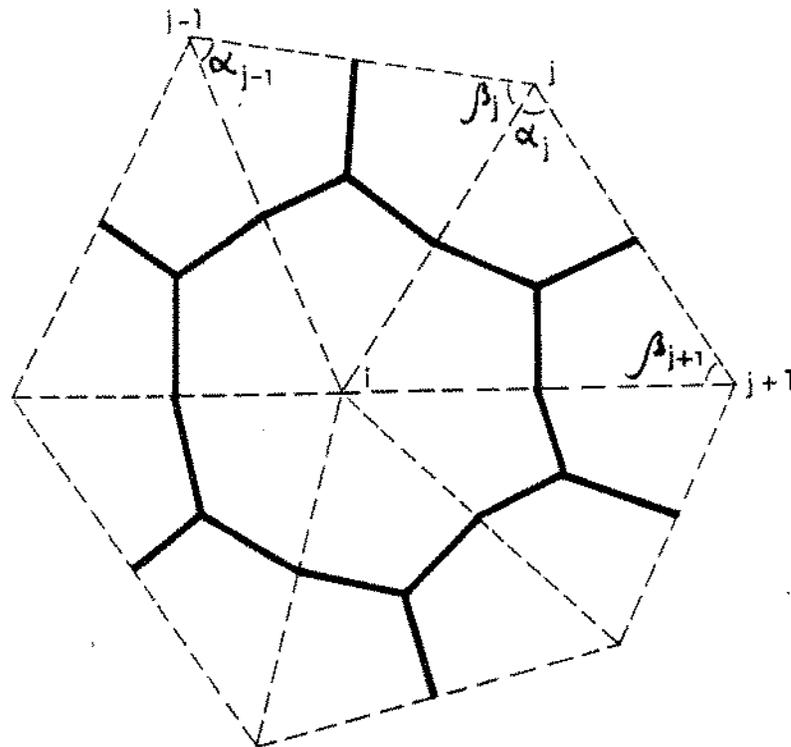


Figura 3: Bloco triangularização pelo método das medianas

linhas que unem os baricentros e os pontos médios dos lados dos triângulos,

como mostra a figura 3 . Este método foi apresentado inicialmente por Wislow, em 1967, para a resolução de problemas magnetostáticos .

Uma vez construídas as células da malha (blocos), as equações numéricas de balanço de materiais podem ser obtidas, usando-se integrações numéricas e aproximação por diferenças finitas para as equações integrais de escoamento, anteriormente desenvolvidas.

### 2.3 Discretização das Equações - Método das Mediatrizes

Considerando-se os blocos de malha formados através do método das mediatrizes, as discretizações dos termos de fluxo e do termo de acumulação da equação integral do modelo matemático é feita a seguir, conforme o procedimento sugerido por Pedrosa [12].

#### 2.3.1 Discretização do termo de fluxo

A vazão mássica através do contorno de um determinado bloco  $i$  pode ser expressa como:

$$\sum_{j=1}^6 Q_{p_{i+\frac{1}{2},j}}, \quad p = o, a \quad (8)$$

onde  $j = 1, 2, \dots, 6$  representa os pontos de malha vizinhos ao ponto de malha  $i$  considerado.

A vazão mássica de uma determinada fase  $p$  que atravessa a face  $i + \frac{1}{2}, j$  de um bloco de malha , como visto anteriormente, pode ser expressa

como:

$$Q_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = \int_{A_{i+\frac{1}{2},j}} \mathbf{k} \lambda_p (\nabla \Phi_p \cdot \vec{n}) dA, \quad p = o, a \quad (9)$$

A equação 9 pode ser discretizada através de dois passos de integração. Primeiro, integra-se numericamente ao longo da área perpendicular ao escoamento, no ponto  $i + \frac{1}{2}$ .

Para a primeira integração, utiliza-se a regra de quadratura Gaussiana de um ponto, transformando-se a equação 9 em:

$$Q_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = [\mathbf{k} \lambda_p (\nabla \Phi_p \cdot \vec{n})]_{i+\frac{1}{2},j} A_{i+\frac{1}{2},j} + O(l_{i,j}^{1+\alpha}) \quad (10)$$

onde, segundo Heinemann [6],  $\alpha = 1$ , se o ponto de malha  $i + \frac{1}{2}, j$  está no meio do lado do bloco  $l_{i,j}$  ou então  $\alpha = 0$ , se de outro modo.

Substituindo  $\nabla \Phi_p \cdot \vec{n}$  por  $\frac{\partial \Phi_p}{\partial s}$ , onde  $s$  é a variável espacial ao longo da linha  $i$ - $j$ , encontra-se:

$$Q_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = \lambda_{p_{i+\frac{1}{2},j}} \left( \mathbf{k} \frac{\partial \Phi_p}{\partial s} \right)_{i+\frac{1}{2},j} A_{i+\frac{1}{2},j} \quad (11)$$

Integrando-se agora ao longo da linha de malha  $i$ - $j$ , a equação 11 fica:

$$Q_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = \lambda_{p_{i+\frac{1}{2},j}} A_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\int_i^j d\Phi_p}{\int_i^j \frac{1}{k} ds} \quad (12)$$

ou ainda:

$$Q_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = \lambda_{p_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{2 \cdot A_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta s_{i,j} \left( \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_j} \right)} (\Phi_{pj} - \Phi_{pi}), \quad (13)$$

onde  $\Delta s_{i,j}$  é o tamanho da linha de malha compreendido entre os pontos de malha  $i$  e  $j$ .

Pode-se também obter a equação 13 diretamente da equação 11, substituindo-se a derivada primeira  $\frac{\partial \Phi_p}{\partial s}$  por uma aproximação através de derivadas centrais e empregando-se uma média harmônica para o termo  $k_{i+\frac{1}{2},j}$ .

A discretização do termo de fluxo pode ser finalmente expressa pelo produto de uma transmissibilidade por uma diferença de potencial, ou seja:

$$Q_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = T_{p_{i+\frac{1}{2},j}} \Delta \Phi_{p_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (14)$$

onde  $T_{p_{i+\frac{1}{2},j}}$  é a transmissibilidade da fase  $p$  através da interface  $i + \frac{1}{2}, j$  do bloco  $i$ , e é expressa por  $T_p = fg \cdot \lambda_p$ , ou

$$T_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = \left[ \frac{2A_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta s_{i,j} \left( \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_j} \right)} \right] \lambda_{p_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (15)$$

onde o termo entre colchetes é conhecido como o fator geométrico de transmissibilidades  $Fg$ . Para cada método de bloco triangularização, uma expressão diferente para o fator geométrico é conseguida.

### 2.3.2 Discretização do termo de acumulação

A derivada temporal do termo de acumulação é aproximada através de diferenças finitas em atraso, nos passos de tempo  $n+1$  e  $n$ , como a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_p}{B_p} \right) = \frac{1}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_p}{B_p} \right) + O(\Delta t), \quad p = o, a \quad (16)$$

Substituindo-se a aproximação da derivada temporal da equação 16 na integral de volume correspondente ao termo de acumulação da equação

2, e efetuando-se a integração sobre o volume  $V_i$  do bloco (considerado como o volume de controle), obtém-se:

$$\int_{V_i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_p}{B_p} \right) dV = \frac{V_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_p}{B_p} \right)_i, \quad p = o, a \quad (17)$$

## 2.4 Equações de Balanço de Massa

A discretização das equações integrais anteriores conduzem à um conjunto de equações de balanço de massa para cada um dos blocos da malha triangular. Desse modo, substituindo-se na equação 5 as expressões discretizadas e integradas, relativas às parcelas de escoamento, acumulação e fonte, encontra-se a equação representativa do modelo numérico correspondente ao modelo matemático proposto.

Este conjunto de equações não lineares pode ser expresso então como:

$$\sum_j T_{p_{i+\frac{1}{2},j}} \Delta \Phi_{p_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{V_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_p}{B_p} \right)_i + Q_{p_i}, \quad p = o, a \quad (18)$$

onde o último termo,  $Q_{p_i}$ , representa a vazão volumétrica da fase p, produzida ou injetada no bloco de malha, em condições de superfície, resultante da integração , sobre o volume de controle  $V_i$ , da parcela correspondente ao termo fonte  $\int_V \frac{Q_{p_i}}{B_p}$ .

## 3 Solução do Modelo

### 3.1 Características do Simulador

As equações de balanço de massa, desenvolvidas anteriormente, são aqui aplicadas para o desenvolvimento de um simulador, considerando-se um modelo de reservatório formulado com as seguintes características:

- Escoamento bifásico com dois componentes: óleo e água, sem transferência de massa entre as fases.
- Sistema bidimensional, com uma malha triangular disposta sobre o domínio do reservatório.
- Sistema de equações discretizadas resolvido implicitamente através do método de Newton.
- Efeitos gravitacionais e capilares desprezíveis.
- Fronteiras externas do reservatório totalmente seladas ou com possibilidade de consideração de influxo proveniente de aquífero, atuando em regime permanente de escoamento.
- Aplicabilidade do modelo à reservatórios com formas irregulares, apresentando algumas anisotropias internas, tais como falhas selantes e regiões com contrastes de permeabilidade.

- Condições de produção : poços produtores produzindo com vazão total constante (óleo + água) até atingirem uma pressão de fluxo no poço mínima.

Considerando o modelo de reservatório com essas características, as equações numéricas anteriores podem ser escritas também através de :

Para a fase óleo:

$$\sum_{\forall j} T_{o_{i+\frac{1}{2},j}} (\Phi_{o_i} - \Phi_{o_j}) = \frac{V_i}{\Delta t} \Delta t \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) + Q_o \quad (19)$$

Para a fase água:

$$\sum_{\forall j} T_{a_{i+\frac{1}{2},j}} (\Phi_{a_i} - \Phi_{a_j}) = \frac{V_i}{\Delta t} \Delta t \left( \frac{\phi S_a}{B_a} \right) + Q_a \quad (20)$$

sendo que  $j$  expressa *cada um dos seis blocos vizinhos ao bloco  $i$* .

Além das equações de escoamento, existem ainda relações adicionais:

- $S_o + S_a = 1.0$  (Sistema bifásico óleo - água)
- $P_{coa} = P_o - P_a = 0.0$  (sem pressão capilar)
- $\Phi_o = \Phi_a = P_o = P_a = P$  (sem efeitos gravitacionais)

As propriedades P. V. T. dos fluidos e as curvas de permeabilidade relativa para o sistema óleo - água estão relacionadas com as variáveis pressão e saturação e são introduzidas da forma usual em simulação , através de tabelas de análise experimental, ou seja:

- $B_o = f(P)$
- $B_a = f(P)$
- $\mu_o = f(P)$
- $\mu_a = f(P)$
- $k_{ro} = f(S_a)$
- $k_{ra} = f(S_a)$

Considerando-se a malha triangular, com a bloco triangularização efetuada por intermédio do método das mediatrizes, e as relações anteriores, as equações 19 e 20 podem ser expandidas como:

$$\sum_j T_{o_{i+\frac{1}{2},j}} (P_j - P_i) = \frac{V_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi(1 - S_a)}{B_o} \right)_i + Q_o \quad (21)$$

e

$$\sum_j T_{a_{i+\frac{1}{2},j}} (P_j - P_i) = \frac{V_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_a}{B_a} \right)_i + Q_a \quad (22)$$

Pelas equações anteriores, verifica-se que, para cada bloco  $i$  dessa malha, surge um conjunto de duas equações não lineares, com sete grupos de incógnitas no total:  $(P, S_a)_i, (P, S_a)_j$  com  $j = 1, \dots, 6$ .

### 3.2 Resolução pelo Método Iterativo de Newton

O conjunto de equações anteriores, em razão da não linearidade, deve ser resolvido por um método numerico iterativo. Neste trabalho, optou-se pelo tratamento totalmente implícito, empregando-se o método de Newton, que será descrito a seguir.

Expressando-se os termos das equações 21 e 22 no passo de tempo  $n+1$ , pode-se escrevê-las na forma residual, como se segue.

Para a fase óleo:

$$F_{o_i}^{n+1} = \sum_{\forall j} T_{o_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} (P_i - P_j)^{n+1} - \frac{V_i}{\Delta t} \phi \Delta t \left[ \left( \frac{1 - S_a}{B_o} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - S_a}{B_o} \right)^n \right]_i - Q_o^{n+1} = 0 \quad (23)$$

Para a fase água:

$$F_{a_i}^{n+1} = \sum_{\forall j} T_{a_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} (P_i - P_j)^{n+1} - \frac{V_i^n}{\Delta t} \phi \Delta t \left[ \left( \frac{S_a}{B_a} \right)^{n+1} - \left( \frac{S_a}{B_a} \right)^n \right]_i - Q_a^{n+1} = 0 \quad (24)$$

As funções de resíduos  $F_n$  devem ser aproximadas iterativamente,  $F_n^{\nu+1}$ , onde  $\nu$  representa o nível de iteração. Isto pode ser obtido utilizando-se uma série de Taylor truncada ao redor de  $\nu$ , do seguinte modo:

$$F_n^{\nu+1} = F_n^\nu + \sum_{\forall X} \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)^\nu \delta X = 0 \quad (25)$$

com  $n = o, a$ ,

$$\delta X = X^{(\nu+1)} - X^{(\nu)} \text{ e}$$

$X$  representando as incógnitas  $P$  e  $S_a$  no bloco  $i$  e nos vizinhos  $j$ .

Então, substituindo-se a equação 25 na equação 23 e na equação 24, encontra-se uma aproximação iterativa para  $F_o$  e  $F_a$ , respectivamente, dada através de:

Para a função resíduo do óleo :

$$F_{o_i}^{(\nu+1)} = F_{o_i}^{(\nu)} + \left( \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_i} \right)^{(\nu)} \delta P_i + \left( \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{a_i}} \right)^{(\nu)} \delta S_{a_i} + \sum_{\forall j} \left[ \left( \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_j} \right)^{(\nu)} \delta P_j + \left( \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{a_j}} \right)^{(\nu)} \delta S_{a_j} \right] \quad (26)$$

ou ainda:

$$\left(\frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_i}\right)^{(\nu)} \delta P_i + \left(\frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{a_i}}\right)^{(\nu)} \delta S_{a_i} + \sum_{\forall j} \left[ \left(\frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_j}\right)^{(\nu)} \delta P_j + \left(\frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{a_j}}\right)^{(\nu)} \delta S_{a_j} \right] = -F_{o_i}^{(\nu)} \quad (27)$$

E similarmente para a função resíduo da água:

$$F_{a_i}^{(\nu+1)} = F_{a_i}^{(\nu)} + \left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial P_i}\right)^{(\nu)} \delta P_i + \left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial S_{a_i}}\right)^{(\nu)} \delta S_{a_i} + \sum_{\forall j} \left[ \left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial P_j}\right)^{(\nu)} \delta P_j + \left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial S_{a_j}}\right)^{(\nu)} \delta S_{a_j} \right] \quad (28)$$

ou ainda:

$$\left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial P_i}\right)^{(\nu)} \delta P_i + \left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial S_{a_i}}\right)^{(\nu)} \delta S_{a_i} + \sum_{\forall j} \left[ \left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial P_j}\right)^{(\nu)} \delta P_j + \left(\frac{\partial F_{a_i}}{\partial S_{a_j}}\right)^{(\nu)} \delta S_{a_j} \right] = -F_{a_i}^{(\nu)} \quad (29)$$

O conjunto de equações anteriores pode também ser expresso em notação matricial como:

$$\mathbf{J}^{(\nu)} \delta \vec{X} = -\vec{F}^{(\nu)}$$

com  $\vec{X} = [(P_1, S_{a_1}), \dots, (P_i, S_{a_i}), \dots, (P_n, S_{a_n})]^T$ ,

$\vec{F} = [(F_{o_i}, F_{a_i}), \dots, (F_{o_i}, F_{a_i}), \dots, (F_{o_n}, F_{a_n})]^T$  e

$\mathbf{J}$  uma matriz *heptadiagonal* por blocos  $2 \times 2$ , denominada Jacobiano, cuja estrutura é representada por:



Derivadas em relação à saturação :

$$\frac{\partial F_o}{\partial S_{a_j}} = \frac{\partial T_{o_{i+\frac{1}{2},j}}}{\partial S_{a_j}} (P_j - P_i) \quad (33)$$

$$\frac{\partial F_o}{\partial S_{a_i}} = \sum_j \left[ \frac{\partial T_{o_{i+\frac{1}{2},j}}}{\partial S_{a_i}} (P_j - P_i) - \frac{V_i \phi}{\Delta t} \left( -\frac{1}{B_o} \right) - \frac{\partial Q_o}{\partial S_{a_i}} \right] \quad (34)$$

As derivadas anteriores  $\frac{\partial T_{o_{i+\frac{1}{2},j}}}{\partial S_{a_k}}$  , para  $k = i, j$  , são dadas por:

$$\frac{\partial T_{o_{i+\frac{1}{2},j}}}{\partial S_{a_k}} = - \left[ \frac{f_j}{\mu_o B_o} \frac{\partial k_{roa}}{\partial S_{a_k}} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (35)$$

Analogamente se definem os termos correspondentes às derivadas da função resíduo da fase água.

Para o cálculo das transmissibilidades e respectivas derivadas que ocorrem no ponto de interface  $i + \frac{1}{2}$  é adotada a ponderação de um ponto a frente ( " single point upstream " ), definida como:

Se o sentido de escoamento for do ponto  $j$  para o ponto  $i$ , as propriedades no ponto  $i + \frac{1}{2}$  são avaliadas em  $j$ .

Se o sentido de escoamento for do ponto de malha  $i$  para o ponto  $j=1,2, \dots$  ou  $6$ , as propriedades no ponto  $i + \frac{1}{2}$  são avaliadas em  $i$ .

Dessa forma, dependendo do sentido de escoamento, algumas das derivadas dos termos de transmissibilidade se anularão, caso se derive em relação a uma variável atuante no ponto  $j$  e se avalie a função em um outro ponto, como por exemplo, em  $i$ .

Outra consideração importante que deve ser mencionada é que o cálculo das derivadas correspondentes aos termos que apresentam parâmetros P.V.T. ou permeabilidades relativas, tais como  $\partial K_{ro}, \partial K_{ra}, \partial B_o, \partial B_a, \partial \mu_o$  e  $\partial \mu_a$ , é feito numericamente, utilizando-se a tabela de propriedades P.V.T. e as curvas de permeabilidades relativas, através de rotinas comuns de interpolação.

Para a inicialização do processo iterativo de solução das incógnitas  $P^{n+1}, S_a^{n+1}$  é necessário uma estimativa inicial para essas incógnitas. É recomendável que se adote  $P^0 = P^n$  e  $S_a^0 = S_a^n$ , ou seja, atribui-se o valor no tempo  $n=0$  como estimativa inicial. Dessa forma, inicializa-se o processo com os valores da pressão inicial no reservatório e da saturação de água inicial em todos os pontos de malha. Com isso, se calculam as derivadas da matriz Jacobiano  $[J]^0$  e as funções de resíduos  $F^0$ . Resolvendo-se o sistema de equações formado, obtém-se  $\delta x^1$  e conseqüentemente  $x^1 = x^0 + \delta x^1$ . O processo iterativo se repete até que  $|\delta x_{\nabla x}^{\nu+1}| \leq \text{tolerância especificada}$  ou  $|F_{\nabla F}^{\nu+1}| \leq \text{tolerância especificada}$ .

Todas as etapas descritas anteriormente foram seguidas no desenvolvimento do simulador em questão.

### 3.3 Aproximação para o modelo de poço

Na modelagem de um reservatório através de métodos numéricos, a utilização de blocos de malha com dimensões muito superiores ao diâmetro do poço, faz com que a pressão calculada para o bloco produtor, seja diferente

da pressão de fluxo no poço.

É através do modelo de poço que se consegue, então, a relação entre essas duas pressões, acoplando-se o bloco de produção com o poço produtor.

Em virtude das características peculiares da malha triangular e do método de bloco triangularização, faz-se necessário o desenvolvimento adicional de um modelo de poço específico para esse tipo de malha, que leve em consideração principalmente:

- a geometria dos blocos de malha hexagonais formados;
- a posição relativa do poço nesse sistema;
- as particularidades do escoamento na região ao redor do poço.

O modelo proposto se baseia na derivação analítica feita por Peaceman [10]. Esse modelo considera que a pressão em blocos adajacentes ao bloco produtor satisfaz aproximadamente a equação para escoamento radial no regime permanente, dada por:

$$P = P_o + \frac{QB\mu}{2\pi Kh} \ln \frac{r}{r_o} \quad (36)$$

Em outras palavras, admite-se um perfil logarítmico para a queda de pressão na região em torno do poço, caracterizando um escoamento radial nessa região, como de fato ocorre. O termo  $r_o$  é conhecido como o raio equivalente do bloco produtor e é definido como o ponto no qual a pressão

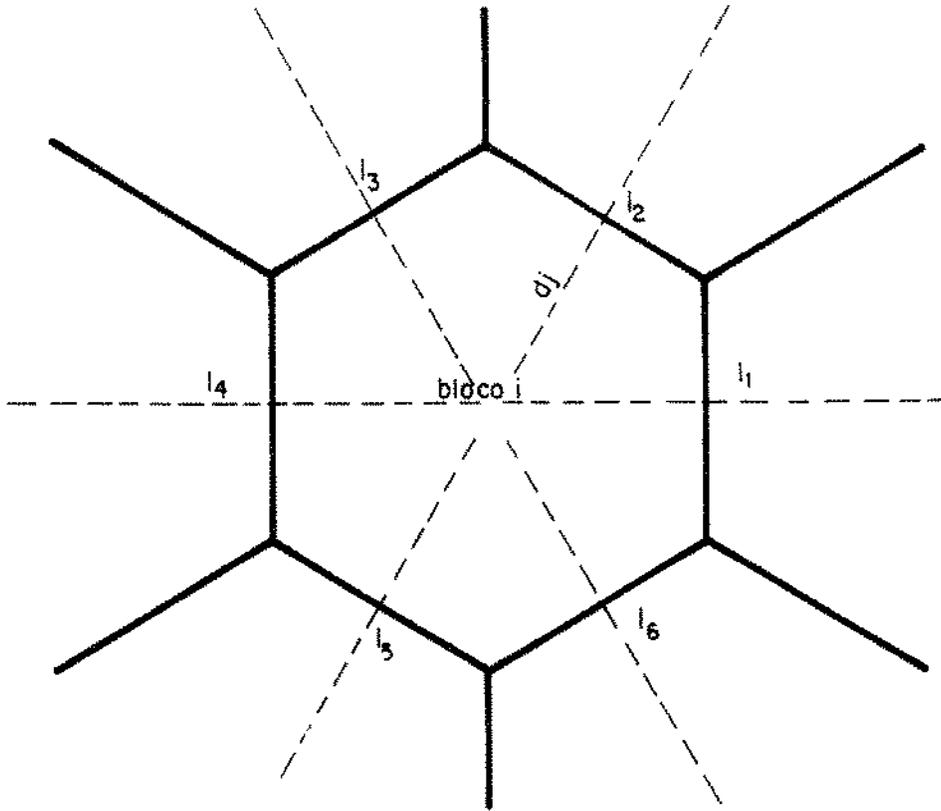


Figura 4: Modelo de poço

do bloco produtor, fornecida pelo simulador, se iguala à pressão dada pela distribuição radial em regime permanente.

O modelo consiste em se determinar uma expressão para  $r_o$ , considerando o formato geométrico dos blocos de malha, a posição do poço no bloco e o perfil logarítmico de pressões.

A figura 4 ilustra o problema.

Assim, partindo-se de um perfil logarítmico de pressões na região em torno do poço, tem-se:

$$(P_1 - P_o) = \frac{Q \cdot B \mu}{2\pi K h} \ln \frac{d_1}{r_o} \quad (37)$$

$$(P_2 - P_o) = \frac{Q \cdot B \mu}{2\pi K h} \ln \frac{d_2}{r_o} \quad (38)$$

$$(P_3 - P_o) = \frac{Q \cdot B \mu}{2\pi K h} \ln \frac{d_3}{r_o} \quad (39)$$

$$(P_4 - P_o) = \frac{Q \cdot B \mu}{2\pi K h} \ln \frac{d_4}{r_o} \quad (40)$$

$$(P_5 - P_o) = \frac{Q \cdot B \mu}{2\pi K h} \ln \frac{d_5}{r_o} \quad (41)$$

$$(P_6 - P_o) = \frac{Q \cdot B \mu}{2\pi K h} \ln \frac{d_6}{r_o} \quad (42)$$

onde  $d_1, d_2, \dots, d_6$  são as distâncias entre o ponto  $o$  situado no centro do bloco produtor e os pontos de malha dos blocos vizinhos.

Por outro lado, a equação de diferenças finitas, em regime permanente, para o bloco que contém o poço, pode ser expressa por:

$$Q = \sum_{j=1}^6 T_j (P_j - P_o) \quad (43)$$

Substituindo-se as equações 37 a 42 em 43, encontra-se:

$$Q = \frac{QB\mu}{2\pi Kh} \left[ T_1 \ln \frac{d_1}{r_o} + \dots + T_6 \ln \frac{d_6}{r_o} \right] \quad (44)$$

ou

$$Q = \frac{QB\mu}{2\pi Kh} \sum_{j=1}^6 T_j \ln \frac{d_j}{r_o} \quad (45)$$

Como  $T_j = \frac{Kh}{B\mu} \cdot \frac{l_j}{d_j}$ , sendo  $l_j$  o lado comum entre os blocos  $o$  e  $j$ , tem-se:

$$Q = \frac{QB\mu}{2\pi Kh} \sum_{j=1}^6 \frac{Kh}{\mu B} \cdot \frac{l_j}{d_j} \cdot \ln \frac{d_j}{r_o} \quad (46)$$

Eliminando-se os termos semelhantes na equação 46, e resolvendo para  $r_o$ , obtém-se:

$$r_o = \exp \left[ \frac{\sum_{j=1}^6 \frac{l_j}{d_j} \ln d_j - 2\pi}{\sum_{j=1}^6 \frac{l_j}{d_j}} \right] \quad (47)$$

Para malha regular e uniforme, tem-se que  $\frac{l_j}{d_j} = \frac{l}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\forall j$ .

$$r_o = \exp \left( \frac{-\sqrt{3}}{3} \pi \right) \cdot d \quad (48)$$

ou

$$r_o = 0.163 d \quad (49)$$

A pressão de fluxo no poço é obtida através de:

$$P_{wf} = P_o - \frac{QB\mu}{2\pi Kh} \ln \frac{r_o}{r_w} \quad (50)$$

## 4 Construção Numérica da Malha Triangular

Neste capítulo, são comentadas as diretrizes que nortearam o desenvolvimento do algoritmo numérico de geração da malha triangular e o escopo básico de sua formulação matemática. Um estudo mais detalhado a respeito do assunto pode ser encontrado em Thompson [19] ou Winslow [20], que serviram de literatura básica para este desenvolvimento.

Uma malha não uniforme de triângulos para um contorno poligonal arbitrário, composto de regiões com formatos variados, é mais facilmente construída através de algoritmos numéricos.

O algoritmo de geração da malha triangular, aqui utilizado, tem como objetivos principais:

- Construir uma rede de triângulos sobre o domínio do reservatório e que acompanhe simultaneamente o contorno externo e o contorno de regiões que apresentam macro heterogeneidades específicas.
- Permitir refinamentos localizados.
- Permitir geração parcial da malha para o caso de reservatórios com múltiplas regiões ou muito complexos.

O método utilizado se baseia na formulação de um problema potencial, a partir da solução numérica da equação de Laplace em um campo transformado retangular, conforme descrito por Winslow em [20] .

## 4.1 Desenvolvimento Matemático

Trabalha-se em um campo retangular transformado de coordenadas  $\chi$  e  $\psi$ , com a configuração dada pela figura 5.

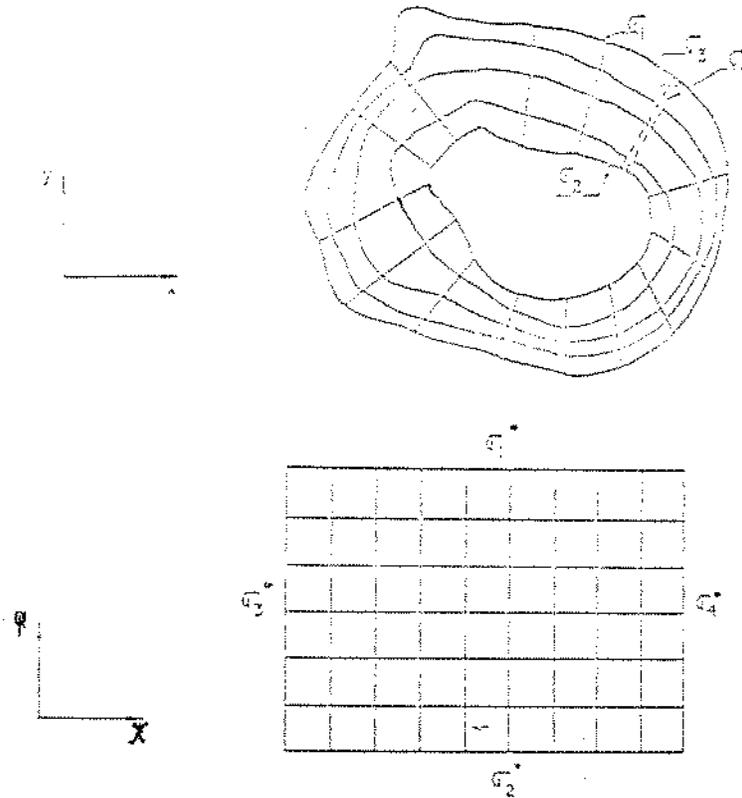


Figura 5: Plano físico e plano transformado

Passando-se do plano físico para o plano transformado consegue-se uma ordenação para as variáveis no sistema matricial e uma simplificação, através de uma retificação, para os contornos curvilíneos reais, facilitando o tratamento das condições de fronteira. Os triângulos no plano transformado são formados a partir das diagonais dos quadriláteros formados neste plano.

Associa-se a cada  $\chi = \text{constante}$  e  $\psi = \text{constante}$  desse campo um contorno curvilíneo do campo real, através de uma função  $\chi(x, y)$  e outra

$\psi(x, y)$ , as quais satisfazem as seguintes equações de Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 \chi = 0 \\ \nabla^2 \psi = 0 \end{cases} \quad (51)$$

Estipulando-se valores arbitrários de  $\chi$  e  $\psi$  nos contornos, e resolvendo as equações 51, as soluções  $\chi = \text{constante}$  e  $\psi = \text{constante}$  definem uma malha não cartesiana, de formato coerente com as fronteiras ou heterogeneidades.

Para a resolução do sistema dado pelas equações 51, um procedimento teórico de transformação de coordenadas deve ser utilizado. Assim, invertendo e escrevendo as equações em termos de  $x(\chi, \psi)$  e  $y(\chi, \psi)$ , obtém-se :

$$\chi_x = -\frac{1}{J}\psi_y \text{ e } \psi_x = \frac{1}{J}\chi_y$$

$$\chi_y = \frac{1}{J}\psi_x \text{ e } \psi_y = -\frac{1}{J}\chi_x \text{ onde o jacobiano } J \text{ é dado por :}$$

$$J = x_\psi y_\chi - x_\chi y_\psi$$

Usando as relações acima, o sistema mencionado se transforma no que se poderia chamar de equações de Laplace inversas, sendo expressas por:

$$\begin{cases} \alpha x - 2\beta x_{\chi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} = 0 \\ \alpha y - 2\beta y_{\chi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} = 0 \end{cases} \quad (52)$$

onde os termos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são chamados de funções quadráticas e definidos como :

$$\alpha = x_\psi^2 + y_\psi^2$$

$$\beta = x_\chi x_\psi + y_\chi y_\psi$$

$$\gamma = x_{\chi}^2 + y_{\chi}^2$$

As soluções do novo sistema representado pelas equações 52 fornecem diretamente as coordenadas  $(x,y)$  das linhas de malha. As coordenadas  $(x,y)$  nas fronteiras definem as condições de contorno do problema.

Para a solução desse sistema se faz necessário ainda uma discretização por diferenças finitas para os termos correspondentes às derivadas primeira e segunda, ou seja,  $x, x_{\chi\psi}, x_{\psi\psi}$  e  $y, y_{\chi\psi}, y_{\psi\psi}$ .

As expressões de diferenças finitas para essas derivadas podem ser obtidas pelo método da linha integral usando o teorema de Gauss. Dessa forma, consegue-se uma aproximação para as derivadas em um ponto de malha qualquer em função dos pontos de malha vizinhos. Atribuindo-se, no plano transformado, valores para  $\chi$  e  $\psi$  em incrementos unitários em linhas adjacentes, e que variam linearmente com a posição no espaço  $(\chi, \psi)$ , conforme ilustrado na figura 6, consegue-se obter:

$$\begin{cases} x_{\chi} = \frac{1}{6}[(x_2 + 2x_1 + x_6) - (x_3 + 2x_4 + x_5)] \\ x_{\psi} = \frac{1}{6}[(x_1 + 2x_6 + x_5) - (x_2 + 2x_3 + x_4)] \\ x = x_1 + 2x + x_4 \\ x_{\psi\psi} = \frac{1}{2}[(x_1 + x_6 + x_3 + x_4) - (x_2 + x_5 + 2x)] \\ x_{\psi\psi} = x_6 - 2x + x_3 \end{cases} \quad (53)$$

Analogamente, são definidas as derivadas da coordenada  $y$ . Os valores calculados para  $x$  e  $y$  dão as coordenadas do ponto de malha situado no bloco e  $x_1, \dots, x_6$  e  $y_1, \dots, y_6$  definem as coordenadas dos pontos de malha vizinhos.

Substituindo o conjunto de equações 53 nas equações de Laplace

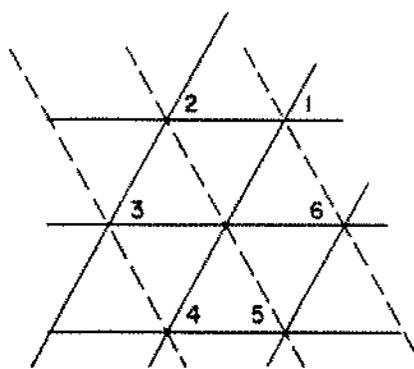


Figura 6: Plano transformado com linhas  $\chi$  e  $\psi$

inversas, dado pelo sistema 52, obtém-se um conjunto de equações, dado por:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i(x_i - x) = 0 \\ \sum_{i=1}^6 c_i(y_i - y) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

onde  $c_1 = c_4 = \alpha - \beta$ ,  $c_2 = c_5 = \beta$  e  $c_3 = c_6 = \gamma - \beta$ .

Explicitando o valor de  $x$  e  $y$  no sistema de equações acima, tem-se:

$$\begin{cases} x = \frac{\sum_{i=1}^6 c_i x_i}{\sum_{i=1}^6 c_i} \\ y = \frac{\sum_{i=1}^6 c_i y_i}{\sum_{i=1}^6 c_i} \end{cases} \quad (55)$$

Esse conjunto de equações forma um sistema de equações não lineares, pois cada  $c_i$  depende dos valores  $x_i$  e  $y_i$  dos pontos vizinhos, mas não dos valores  $x$  e  $y$  do ponto central. Para a resolução desse sistema, é

utilizado o processo iterativo de Gauss - Seidel, de acordo com as seguintes etapas:

- Consideração de uma estimativa inicial para as coordenadas  $x$  e  $y$  de todos os pontos de malha.
- A partir dos valores iniciais, calculam-se os termos  $c_i$  correspondentes para cada ponto de malha, a partir das coordenadas dos pontos vizinhos.
- Com os valores de  $c_i$  e as equações 55, acham-se os novos valores de  $x$  e  $y$  para cada um dos pontos de malha.
- Comparam-se os valores novos com os anteriores.
- Repete-se o processo até se obter convergência.

Como estimativa inicial para o processo iterativo, as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos interiores são consideradas nulas, procedimento sugerido por Winslow [20], o que resultou em boa convergência para todos os casos estudados.

## 4.2 Exemplos para a Utilização do Algoritmo

### 4.2.1 Região irregular com fronteira interna

Uma região bidimensional apresentando fronteira externa arbitrária e uma fronteira interna qualquer (por ex: um corpo impermeável)

pode ser transformada em um retângulo no campo transformado, conforme mostrado anteriormente na figura 6.

A transformação básica faz com que o contorno externo e o contorno mais interno sejam transformados, respectivamente, em duas linhas com  $\chi = \text{constante}$ , formando o lado superior e inferior do retângulo transformado ou vice-versa. Cada linha de malha situada entre esses dois contornos (externo e interno) se transforma em uma linha com  $\chi = \text{constante}$  no plano transformado, situando-se entre os lados superior e inferior do retângulo do campo transformado. Assim é formada uma família de linhas paralelas a esses dois lados.

Do mesmo modo, os outros dois lados do retângulo no campo transformado (esquerdo e direito) corresponderão a duas linhas coincidentes que unem os dois contornos externo e interno, mencionados anteriormente. Cada uma das linhas de malha paralela a essa linha de ligação se transforma em uma linha intermediária, paralela aos lados esquerdo e direito do retângulo.

Assim, o algoritmo necessita apenas que sejam fornecidas as coordenadas de pontos distribuídos ao longo dos contornos externo e interno e também ao longo de uma linha qualquer unindo esses dois contornos. De acordo com o espaçamento entre os pontos ao longo do contorno, serão geradas linhas de malha com espaçamentos variados, mais próximas umas das outras, em determinadas regiões, e mais distantes em outras, acarretando, assim, grande flexibilidade para o refinamento localizado da malha. Para os pontos ao longo dos contornos onde se deseja refinar, o espaçamento deve ser

bem pequeno e vice - versa nas regiões onde não seja necessário o refinamento.

Na distribuição dos pontos, deve-se observar uma correspondência entre os pontos dos contornos externo e interno, no intuito de se manter uma única linha de malha ligando um ponto de um contorno com um ponto de outro, gerando-se, com isso, uma malha mais uniforme.

Com as coordenadas fornecidas como dados de entrada para o algoritmo, é obtido um conjunto de linhas de malha de formato coincidente com as fronteiras e um outro conjunto de linhas de malha que acompanhará o formato da linha de ligação entre as duas fronteiras. cujas coordenadas também foram fornecidas como dados de entrada. Assim, formam-se quadriláteros irregulares sobre o domínio do reservatório. Dividindo-se esses quadriláteros por intermédio de uma de suas diagonais, obtém-se a triangularização desejada.

Este caso de geração de malha é exemplificado no capítulo das aplicações para a confecção da malha triangular em um reservatório irregular, que apresenta uma fronteira interna (falha geológica).

#### **4.2.2 Região irregular sem fronteira interna**

Esse é o caso mais simples e está esquematizado na figura 7. Se não existe fronteira interna não há necessidade de se criar uma linha de malha unindo as duas fronteiras. Para a geração da malha, é necessário apenas que se divida o contorno externo (único) em 4 segmentos da forma desejada.

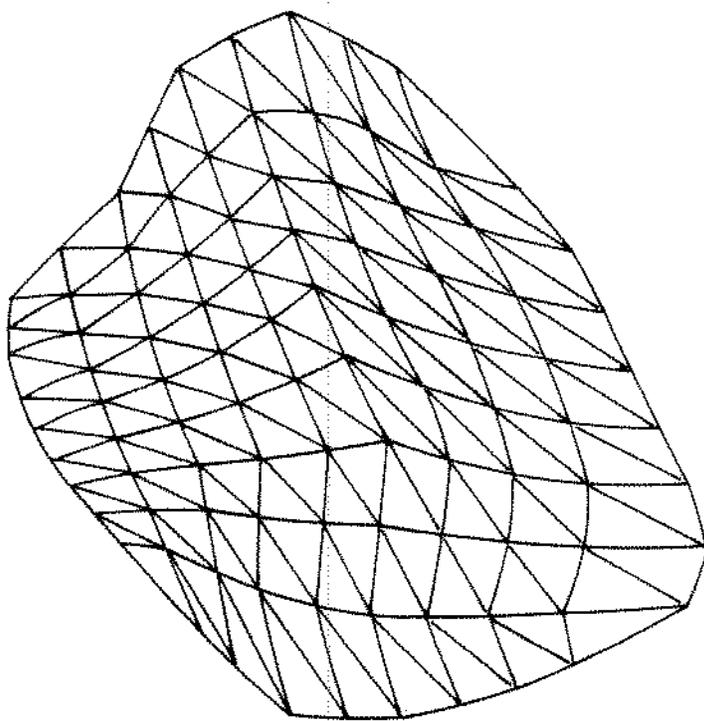


Figura 7: Região irregular sem fronteira interna

Cada segmento se transforma em um dos lados do retângulo no campo transformado. A malha gerada, neste caso, tem o formato dos segmentos em que foi dividido o contorno externo. Um grupo de linhas de malha apresenta a forma aproximada de dois dos segmentos (como se ambos representassem duas fronteiras) e um outro grupo de linhas se aproxima da forma dos outros dois segmentos (como se ambos definissem duas novas fronteiras).

#### **4.2.3 Região irregular com muitas fronteiras internas**

Este é o caso mais complicado. O sistema deve ser gerado por partes, dividindo-se o reservatório por regiões simples (sem fronteiras internas) e por regiões com apenas um ou dois corpos (fronteiras) internas. Aplica-se o algoritmo por partes em cada uma dessas regiões e constroem-se as malhas final pela superposição das malhas anteriores geradas. Este foi o procedimento adotado para a geração da malha de um reservatório composto a ser estudado neste trabalho, no capítulo referente às aplicações.

## **5 Análise, Aplicação e Discussão dos Resultados**

Neste capítulo, é apresentada a validação para o modelo numérico desenvolvido e a sua aplicação a problemas típicos em que seja vantajosa a utilização de uma malha triangular, analisando-se a eficiência, funcionalidade e operacionalidade de um simulador desse tipo aos estudos realizados em engenharia de reservatórios.

### **5.1 Validação do Modelo**

Para a sua validação, o modelo numérico é empregado para se obter a solução de um problema monofásico, cuja solução analítica é conhecida, tornando possível a comparação dos resultados numéricos obtidos com os fornecidos por essa solução analítica.

Uma outra forma possível para a validação do modelo consistiria em se realizar um teste de fluxo para um determinado reservatório e, partir dos resultados obtidos, inferir parâmetros que tornassem possível a caracterização de determinadas propriedades, conhecidas “ a priori ” .

Neste trabalho utilizou-se validação através de soluções analíticas.

#### **5.1.1 Validação utilizando solução analítica**

Foram consideradas as soluções analíticas correspondentes a dois tipos de reservatórios:

- Reservatório de geometria hexagonal. com fronteiras seladas e produzindo através de um poço central com vazão constante, conforme ilustrado pela figura 8.
- Reservatório de geometria quadrada. com fronteiras seladas e produzindo através de um poço central com vazão constante, conforme ilustrado pela figura 9.

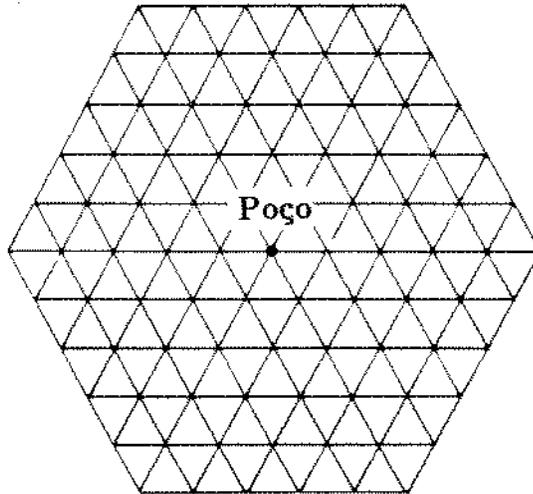


Figura 8: Reservatório Hexagonal - contorno selado - poço central

Nas figuras 8 e 9, pode ser observada também a malha triangular de simulação. No reservatório hexagonal foi aplicada uma malha com um total de 91 blocos (cada ponto pertence a um bloco) enquanto que no reservatório quadrado a malha apresenta um total de 100 blocos.

A utilização de modelo bifásico (óleo - água) para um problema monofásico é conseguida através das seguintes modificações nos dados de entrada:

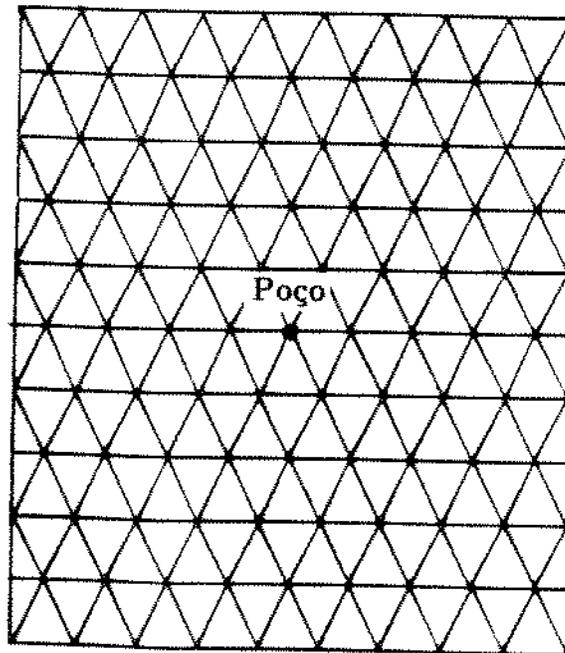


Figura 9: Reservatório Quadrado - contorno selado - poço central

- Curvas de permeabilidade relativa dadas por  $k_{rw} = S_w$  e  $k_{ro} = 1 - S_w$ .
- Propriedades físicas iguais para óleo e água.

Nos problemas estudados, as propriedades P.V.T. do óleo são dadas pela 1.

Pressão P (MPa)	Viscosidade $\mu(Pa.s)$	F. V. F. B ( $m^3/m^3$ )
0.0	$1.0400 \cdot 10^{-3}$	1.0620
1.724	$0.9750 \cdot 10^{-3}$	1.1500
3.447	$0.9100 \cdot 10^{-3}$	1.2070
6.895	$0.8300 \cdot 10^{-3}$	1.2950
13,790	$0.6950 \cdot 10^{-3}$	1.4350
17,237	$0.6410 \cdot 10^{-3}$	1.5000
18,960	$0.6175 \cdot 10^{-3}$	1.5325
20,684	$0.6290 \cdot 10^{-3}$	1.5267
27,579	$0.6750 \cdot 10^{-3}$	1.5035

Tabela 1: Propriedades P V T

As tabelas 2, 3 e 4 apresentam os resultados numéricos da simulação para os dois tipos de reservatórios e as respectivas soluções analíticas, obtidas da literatura clássica, como por exemplo em Ramey - Gas Well Test Analysis Under Water Drive Conditions.

Os parâmetros de comparação são os seguintes:

- Para o reservatório hexagonal: pressão no poço ao longo do tempo.
- Para o reservatório quadrado : pressão no poço e em um dos vértices (fronteira) ao longo do tempo.

Tda	$Pd_w$ (analítico)	$Pd_w$ (numérico)
0.0700	6.6888	6.651
0.1000	6.9063	6.935
0.2000	7.5468	7.599
0.3000	8.1753	8.226
0.4000	8.8036	8.853
0.5000	9.4320	9.480
0.6000	10.0603	10.108
0.8000	11.3169	11.365
1.0000	12.5735	12.625
2.0000	18.8667	18.856
4.0000	31.4230	31.395
8.0000	56.5557	56.107
10.000	69.1220	68.484

Tabela 2: Reservatório Quadrado - Pressão no poço - Validação por Solução Analítica

Os resultados da validação são também apresentados nos gráficos 10, 11 e 12, logo a seguir. Pode-se observar que o modelo desenvolvido apresentou uma concordância muito boa com as soluções analíticas empregadas, para os casos estudados.

Tda	Pd (analítico)	Pd (numérico)
0.0700	0.1321	0.1319
0.1000	0.2939	0.2965
0.2000	0.9103	0.9141
0.3000	1.5384	1.5371
0.4000	2.1667	2.1610
0.5000	2.7950	2.7960
0.6000	3.4233	3.4212
0.8000	4.6800	4.6310
1.0000	5.9366	5.9900
2.0000	12.2198	12.1970
4.0000	24.7861	24.6850
8.0000	49.9188	49.5200
10.000	62.4851	61.8490

Tabela 3: Reservatório Quadrado - Pressão no vértice - Validação por Solução Analítica

Tda	$Pd_w$ (analítico)	$Pd_w$ (numérico)
0.0025	5.0097	4.546
0.0050	5.3562	5.058
0.0080	5.5912	5.387
0.0150	5.9055	5.773
0.0300	6,2521	6.211
0.0600	6,6030	6.580
0.0900	6,8316	6.820
0.2000	7,5363	7.530
0.4000	8,7930	8.780
0.7000	10.6780	10.650
1.0000	12.5630	12.540
2.5000	21.9870	21.900
5.0000	37.6950	37.500
8.0000	56.5450	56.210
9.0000	62.8200	62.457

Tabela 4: Reservatório Hexagonal - Pressão no poço - Validação por Solução Analítica

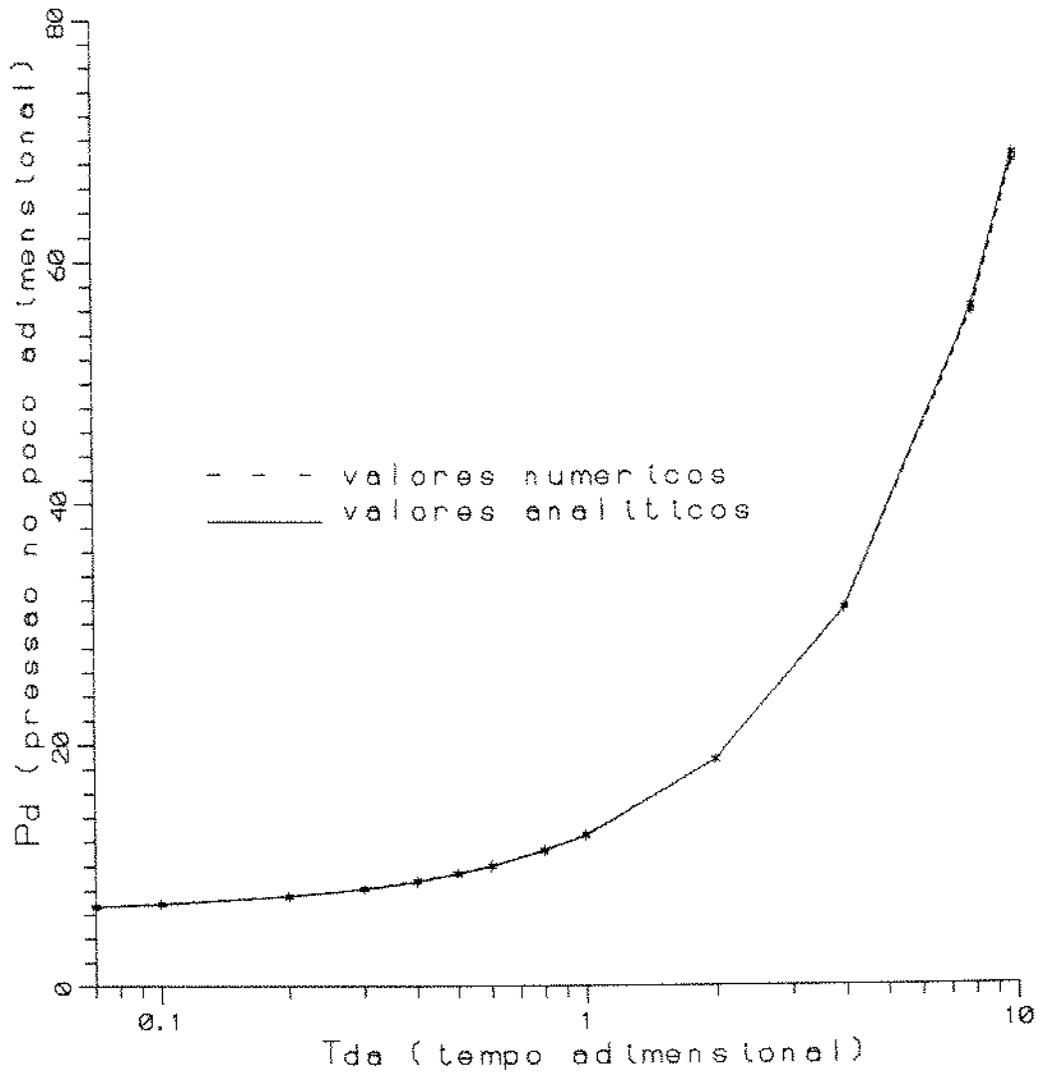


Figura 10: Reservatório Quadrado - Pressão no poço x Tempo - Validação por Solução Analítica

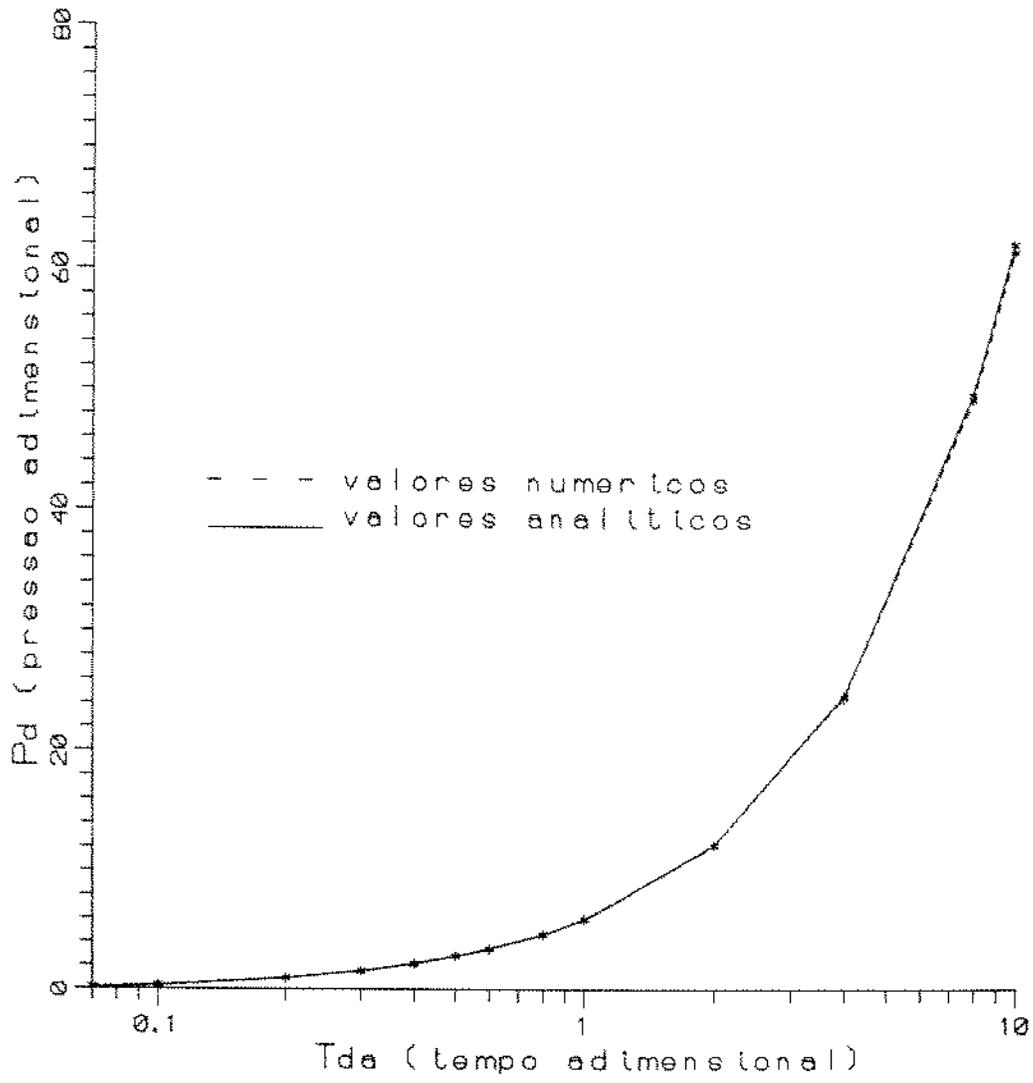


Figura 11: Reservatório Quadrado - Pressão no vértice x Tempo - Validação por Solução Analítica

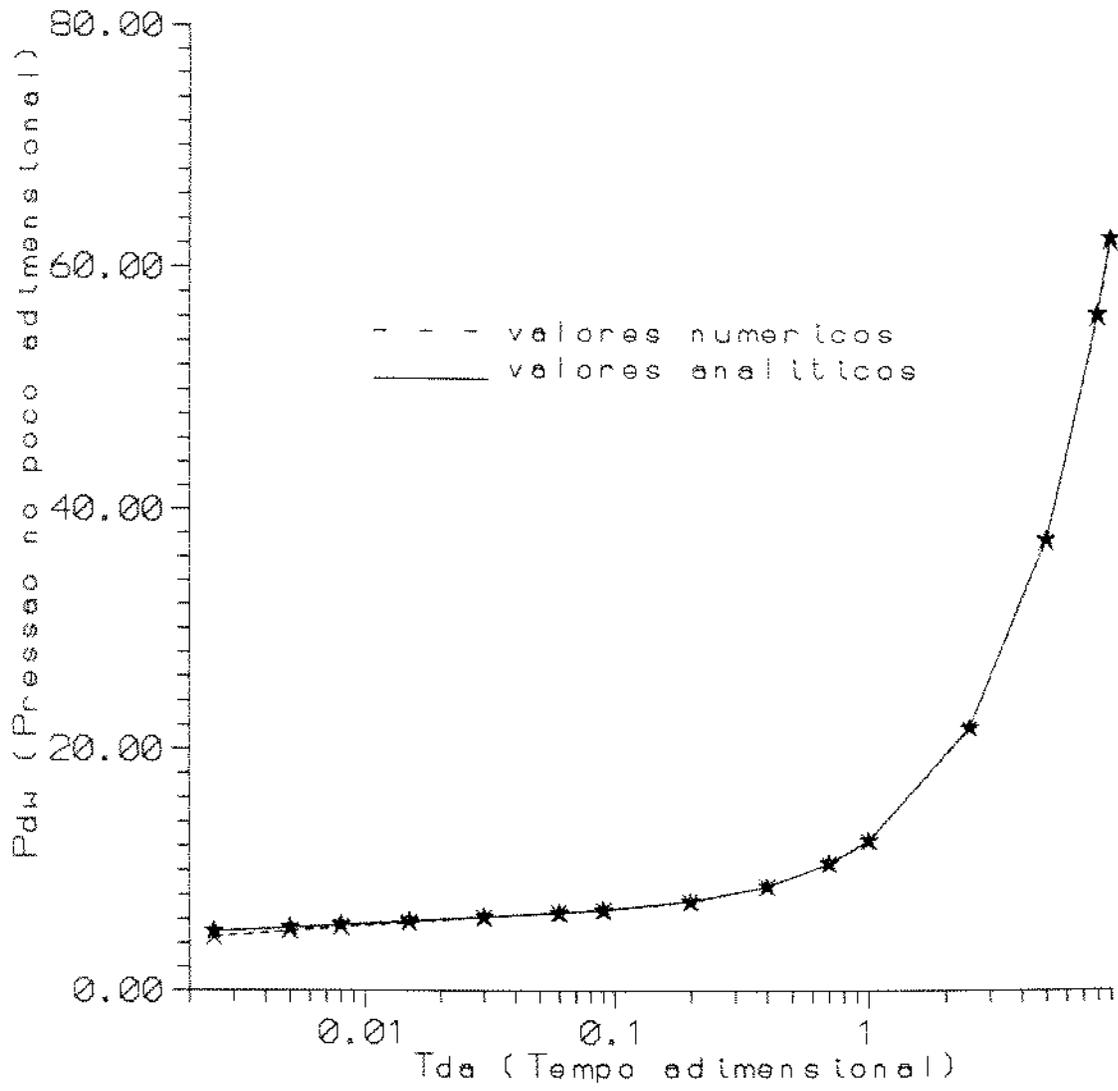


Figura 12: Reservatório Hexagonal - Pressão no poço x Tempo - Validação por Solução Analítica

Foram utilizadas para a validação variáveis adimensionais  $P_d$  e  $T_{da}$ , definidas como:

$$P_d = \frac{Kh}{141.3QB\mu}(P_I - P_{r,y,t}) \quad (56)$$

e

$$T_{da} = \frac{0.000264Kt}{\phi\mu c_t A} \quad (57)$$

Em ambos os casos, foi considerada ainda uma relação entre a área do reservatório e o raio do poço produtor, dada por:  $\frac{\sqrt{A}}{r_w} = 2000$ .

## 5.2 Aplicações - Problemas Típicos

As aplicações aqui apresentadas foram escolhidas com o objetivo de representar reservatórios em que é vantajosa a utilização da malha triangular, ou seja, aqueles que apresentam geometrias irregulares e macro-heterogeneidades internas, como, por exemplo, falhas selantes ou canais com elevada permeabilidade.

Em todos os casos estudados, posteriormente, foi feita uma comparação dos resultados com os obtidos através de um simulador comercial, que utiliza malha cartesiana convencional.

### 5.2.1 Reservatório com grandes contrastes de permeabilidade

Este caso consiste de um reservatório com geometria irregular,

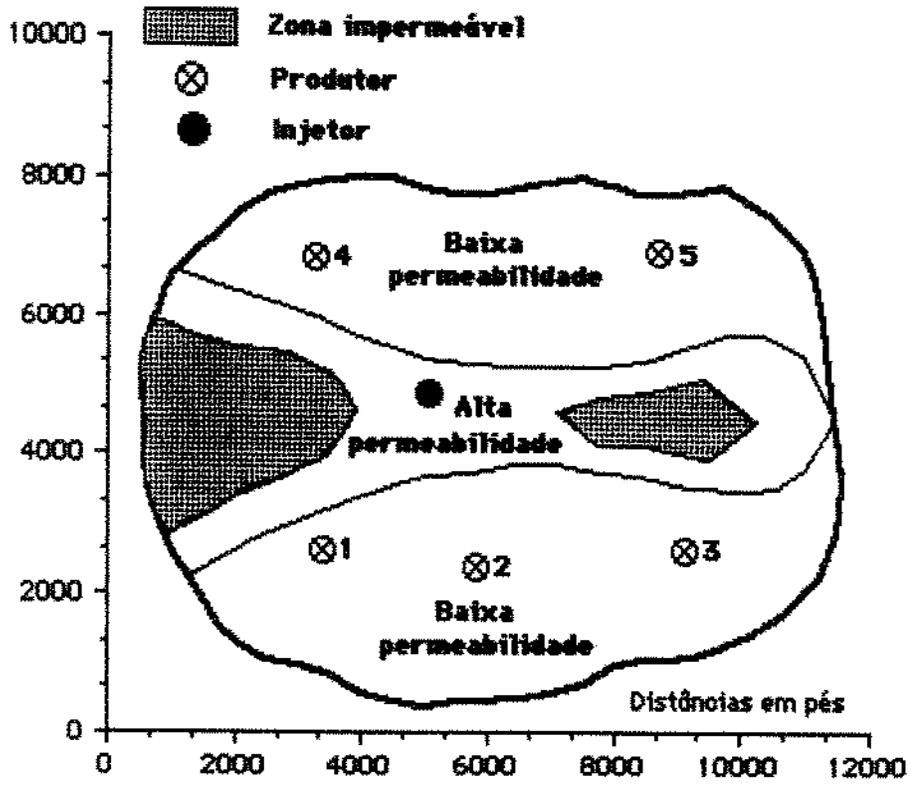


Figura 13: Caso 1 : Reservatório com Canal interno de permeabilidade elevada

cuja área tem dimensões aproximadas de 3500,00 m por 2440,00 m, apresentando duas zonas com grandes contrastes de permeabilidades. Procurou-se caracterizar um modelo deposicional deltáico formado por dois corpos internos impermeáveis, circundados por uma região com forma de canal, apresentando permeabilidade de 1000 mD, e uma outra região mais externa, com uma permeabilidade de 100 mD, conforme apresentado na figura 13.

Neste reservatório foram alocados 5 poços produtores, cada um produzindo com uma vazão total de líquido constante e igual à  $63,60m^3$  por dia e um poço injetor de água, com vazão de  $318,00m^3$  por dia.

A finalidade desta aplicação foi de estudar a resposta de pressão dada pelo simulador bifásico desenvolvido neste reservatório altamente heterogêneo, para uma posterior comparação com a resposta fornecido por um simulador comercial convencional (malha cartesiana).

A malha de simulação utilizada foi uma malha triangular composta por 13 x 15 blocos de malha. A malha foi gerada em conformidade com os contornos geométricos externos e internos, como apresentado na figura 14.

Os resultados do simulador desenvolvido serão apresentados posteriormente, juntamente com aqueles obtidos por um simulador comercial.

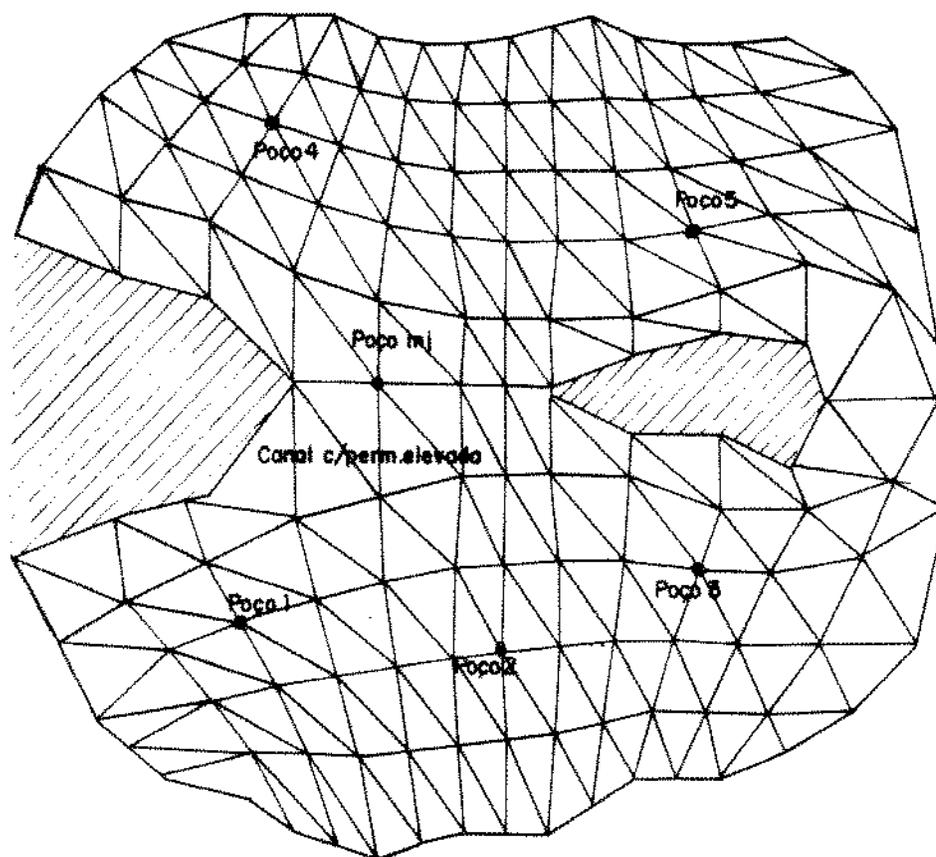


Figura 14: Malha de simulação para o caso 1

### 5.2.2 Reservatório com Falha Selante e sujeito a Influxo de Água

Neste caso é considerado um reservatório com geometria irregular, com dimensões máximas de 2134,00 m x 914,00 m, apresentando falha selante interna. O reservatório apresenta ainda permeabilidade constante e igual a 100 mD, com influxo de água proveniente de um aquífero adjacente a uma das fronteiras.

Foram distribuídos ao longo do reservatório um total de 5 poços produtores produzindo com vazões totais constantes e indicadas na figura 15

A finalidade desta aplicação foi a de verificar, principalmente, o efeito de orientação de malha, comparando-se os resultados desta desta

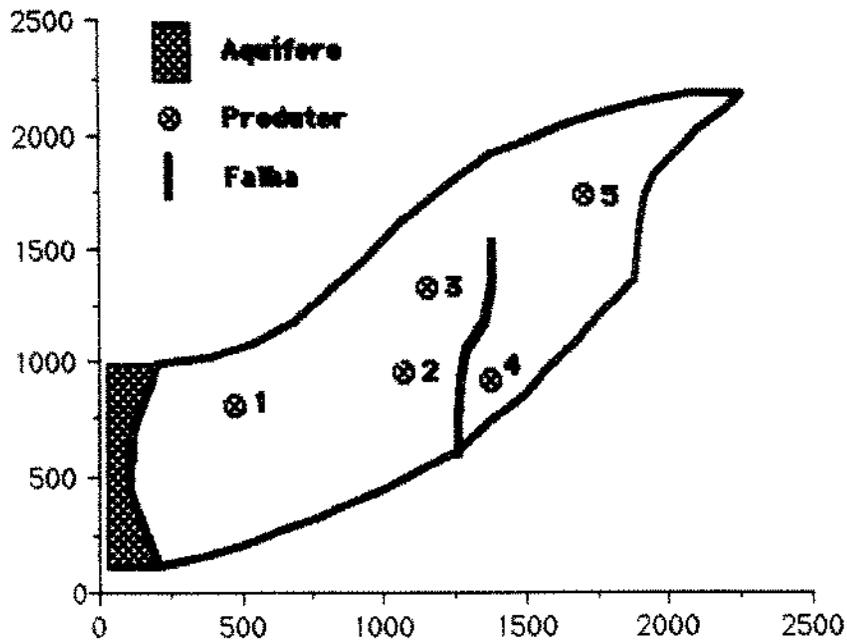


Figura 15: Caso 2 - Reservatório com Falha Selante sujeito a Influxo de Água  
simulação com os obtidos utilizando-se um simulador comercial com malha  
cartesiana , onde esse efeito é mais pronunciado.

A malha utilizada neste caso foi composta de 15 x 8 blocos, acompanhando a geometria externa e a da falha (internamente), conforme pode ser observado na figura 16.

Os resultados da simulação são apresentados da seguinte forma:

- gráficos de pressão no poço x tempo (para os 5 poços).
- gráficos de raso no poço x tempo (para os 5 poços).
- mapa de saturação de água ao longo do reservatório para o tempo de 1000 dias.

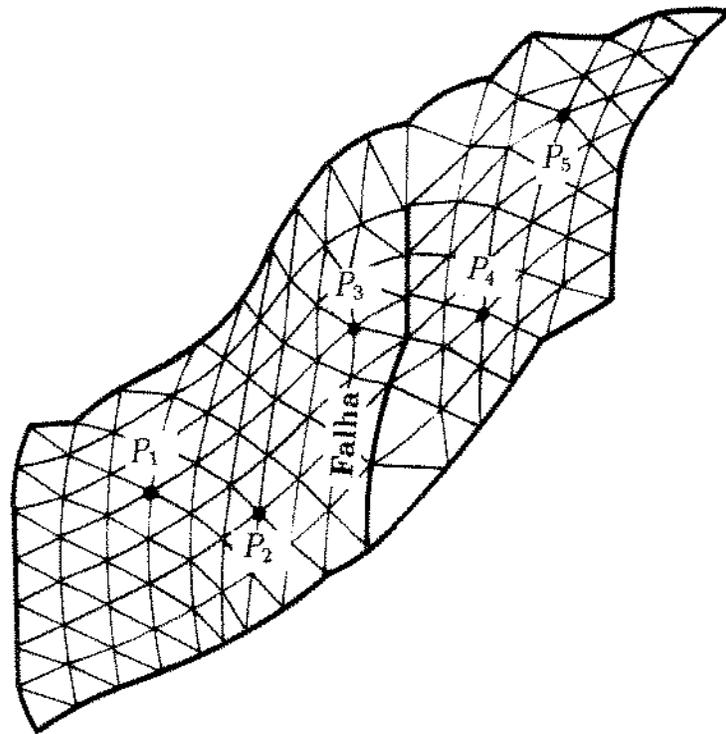


Figura 16: Malha de simulação para o caso 2

Esses resultados são apresentados e discutidos na seção seguinte juntamente com aqueles fornecidos pelo simulador comercial para esse caso.

Em ambos os casos, foram considerados os seguintes parâmetros adicionais utilizados na simulação :

- Pressão inicial do reservatório  $P = 24,00$  MPa.
- saturação de água inicial  $S_{qi} = 0.22$  .
- porosidade constante da formação  $\phi = 0.30$  .
- Modelo bifásico - bidimensional com espessura constante  $h = 15.0$  m.
- Pressão de saturação  $P_s = 19,00$  MPa .

- Propriedades P. V. T. dadas pela tabela 5 .
- Curvas de permeabilidades relativas dadas pela tabela 6.

P (MPa)	$\mu_o(Pa.s)$	$B_o(m^3/m^3)$	$\mu_w(Pa.s)$	$B_w(m^3/m^3)$
0.0	$52.000 \cdot 10^{-3}$	1.0620	$0.500 \cdot 10^{-3}$	1.019
1,724	$48.750 \cdot 10^{-3}$	1.1500	$0.501 \cdot 10^{-3}$	1.019
3,447	$45.500 \cdot 10^{-3}$	1.2070	$0.501 \cdot 10^{-3}$	1.019
6,895	$41.500 \cdot 10^{-3}$	1.2950	$0.501 \cdot 10^{-3}$	1.016
13,790	$34.750 \cdot 10^{-3}$	1.4350	$0.502 \cdot 10^{-3}$	1.013
17,237	$32.050 \cdot 10^{-3}$	1.5000	$0.502 \cdot 10^{-3}$	1.013
18,961	$30.880 \cdot 10^{-3}$	1.5325	$0.502 \cdot 10^{-3}$	1.013
20,684	$31.450 \cdot 10^{-3}$	1.5267	$0.502 \cdot 10^{-3}$	1.013
27,579	$33.750 \cdot 10^{-3}$	1.5035	$0.505 \cdot 10^{-3}$	1.007

Tabela 5: Propriedades P V T - óleo e água

$S_W$	$k_{raw}$	$k_{rw}$
0.000	1.000	0.00
0.220	1.000	0.00
0.300	0.100	0.07
0.400	0.031	0.15
0.500	0.015	0.24
0.600	0.001	0.33
0.800	0.000	0.65
0.900	0.000	0.83
1.000	0.000	1.00

Tabela 6: Permeabilidades Relativas - óleo e água

### 5.3 Comparação com Simulador Comercial

Com a finalidade de se realizar um estudo comparativo, os dois casos anteriormente estudados foram novamente simulados por intermédio de um simulador comercial, com malha cartesiana convencional.

No primeiro caso, para o perfeito modelamento do reservatório foi necessária uma malha cartesiana composta de 993 blocos. Esse número foi utilizado para se conseguir acompanhar a geometria e o contorno das heterogeneidades, conforme apresentado na figura 17.

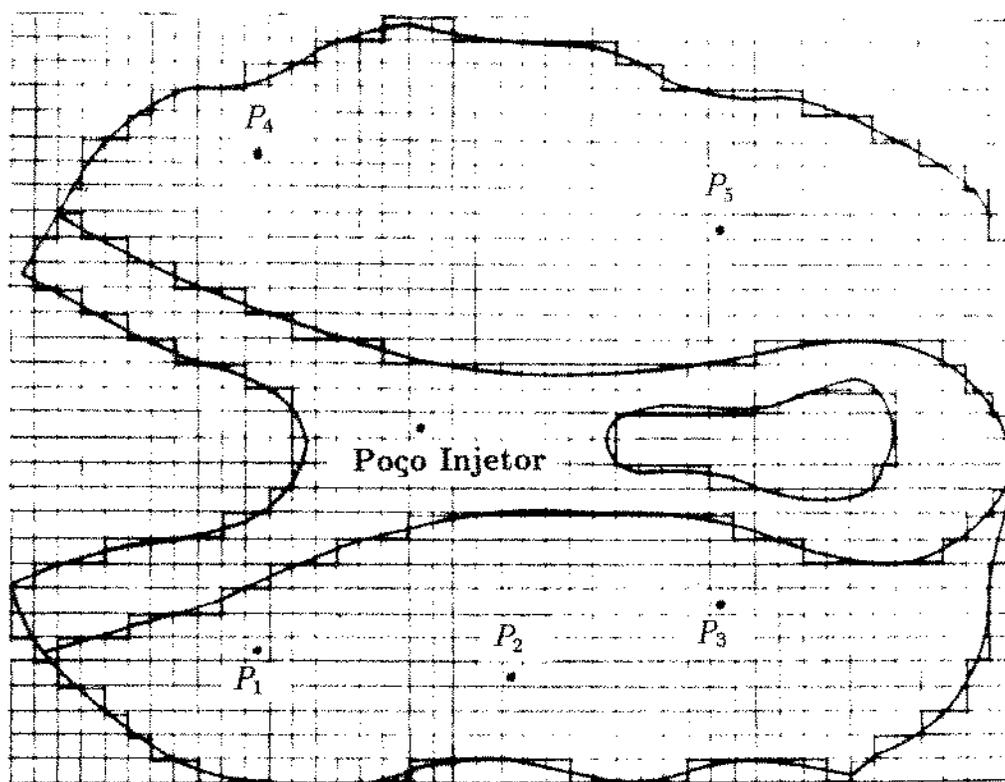


Figura 17: Caso 1 - Malha cartesiana utilizada pelo simulador comercial

Para o segundo caso, foi efetuada uma simulação com uma malha cartesiana composta de 120 blocos e disposta em duas direções, com o objetivo principal de se estudar o efeito de orientação de malha e comparar com o resultado fornecido pela malha triangular.

Assim, uma primeira malha foi lançada em uma direção paralela à direção da falha selante e inclinada em relação às fronteiras externas,

conforme exemplificado na figura 18.

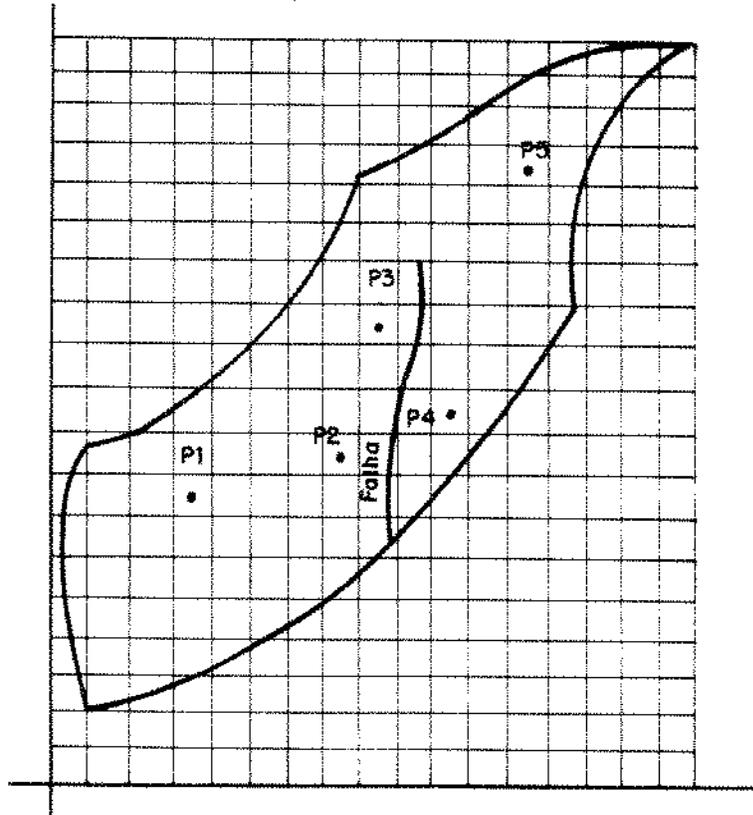


Figura 18: Caso 2 - Malha cartesiana paralela à falha geológica

A segunda malha foi lançada em uma direção mais concordante com as fronteiras externas e conseqüentemente inclinada em relação à falha, conforme apresentado na figura 19.

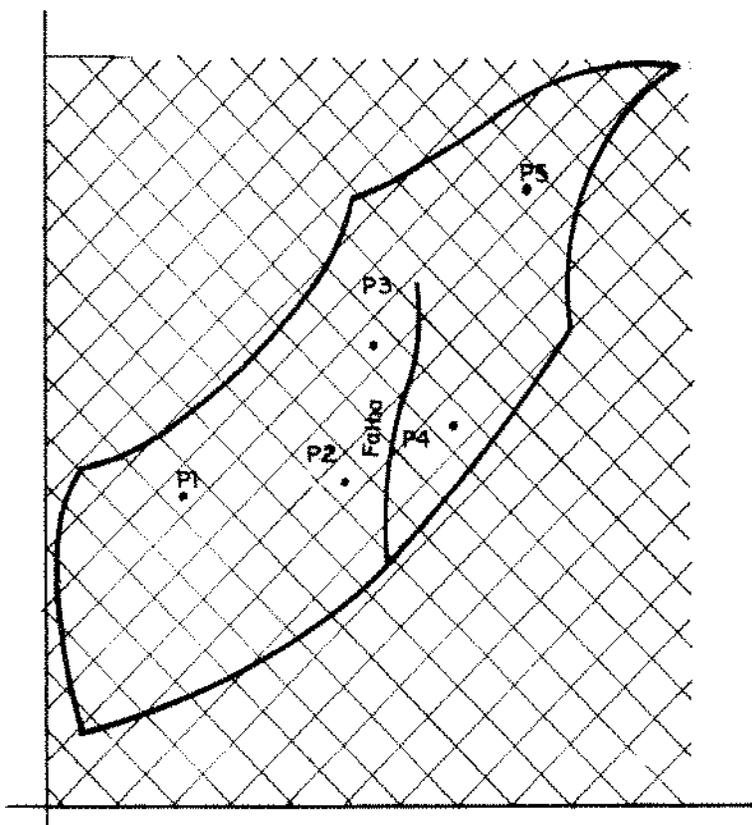


Figura 19: Caso 2 - Malha cartesiana paralela às fronteiras

#### 5.4 Análise e Discussão dos resultados

A seguir são apresentados os resultados do estudo comparativo entre os dois simuladores, para os dois casos estudados.

Para o primeiro problema tipo pode-se constatar pela análise dos gráficos anteriores que o simulador desenvolvido apresenta resultados praticamente idênticos aos fornecidos pelo simulador comercial para todos os poços produtores.

A utilização da malha triangular permitiu um modelamento com um número de blocos bem menor (195 blocos contra 993 do simulador comercial) de todo o reservatório e um tratamento mais adequado para as heterogeneidades internas, acompanhando a sua geometria irregular. Além

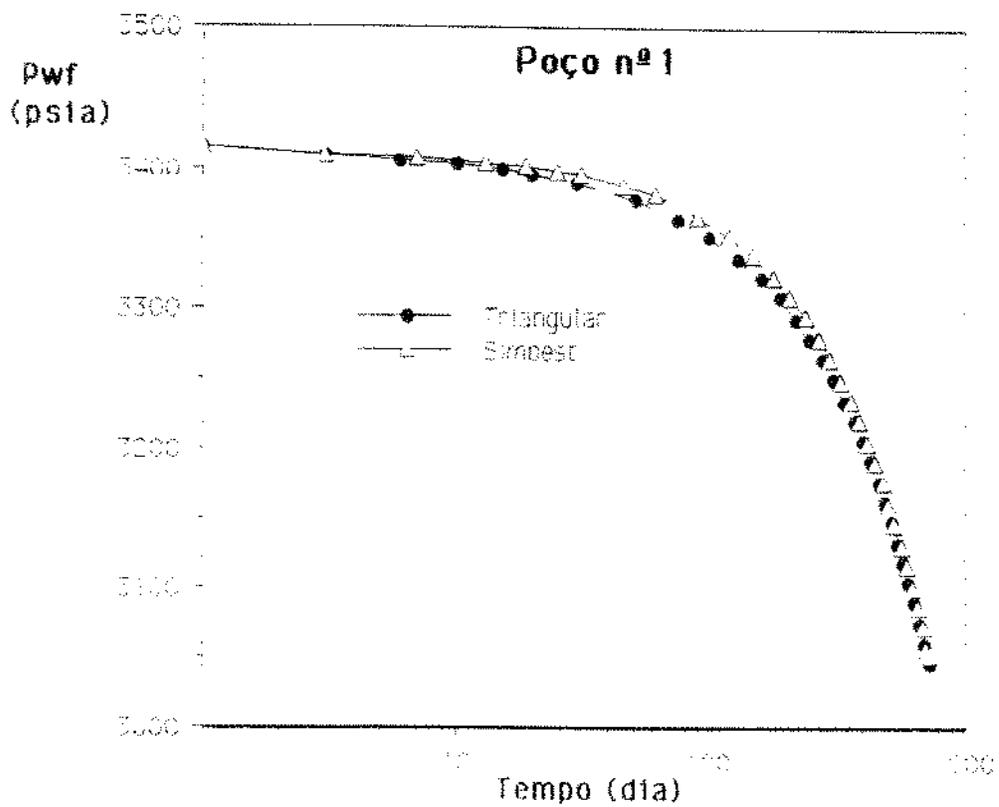


Figura 20: Estudo comparativo - pressão no poço 1

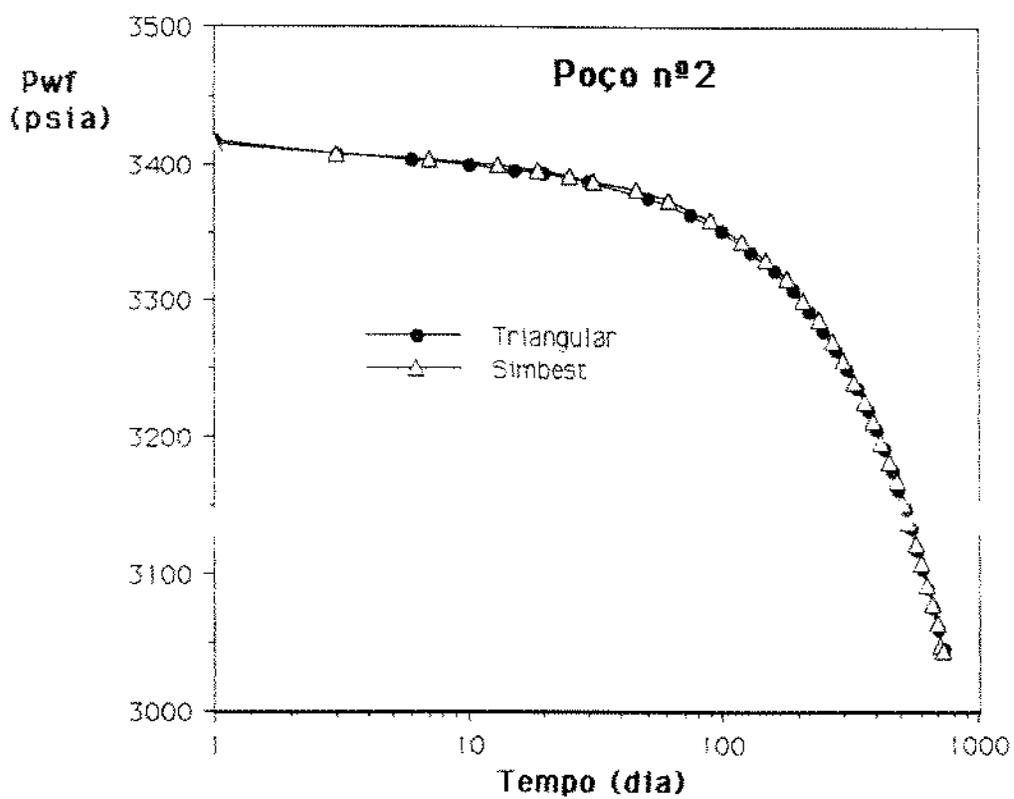


Figura 21: Estudo comparativo - pressão no poço 2

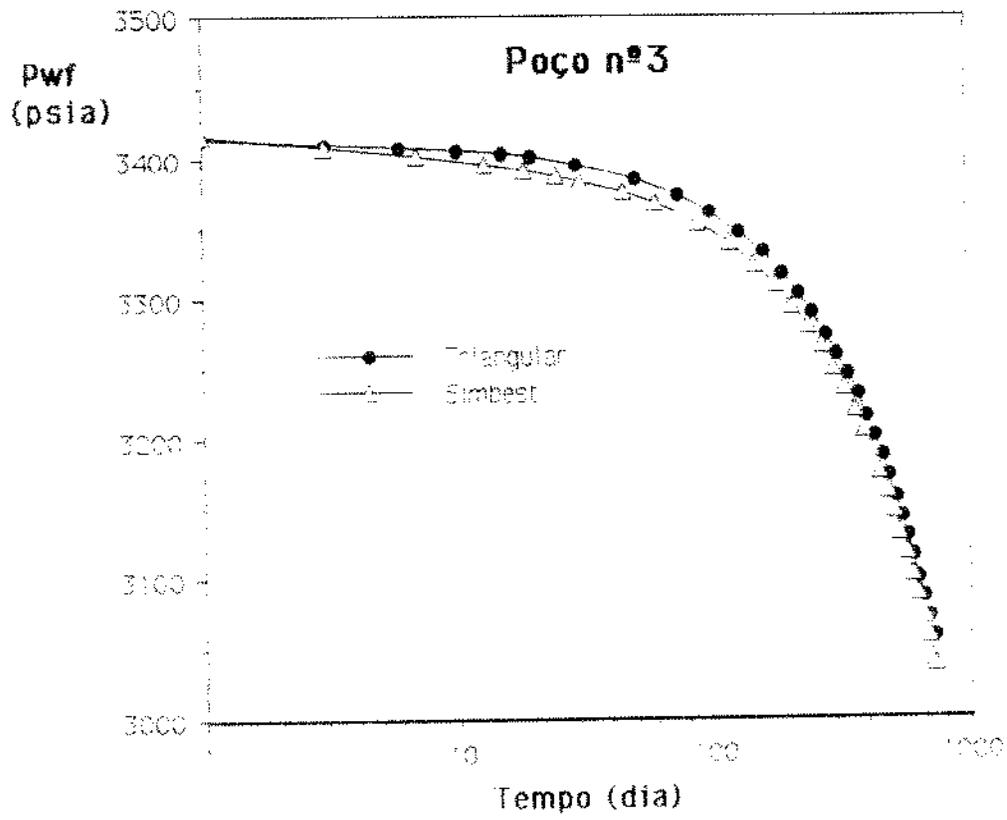


Figura 22: Estudo comparativo - pressão no poço 3

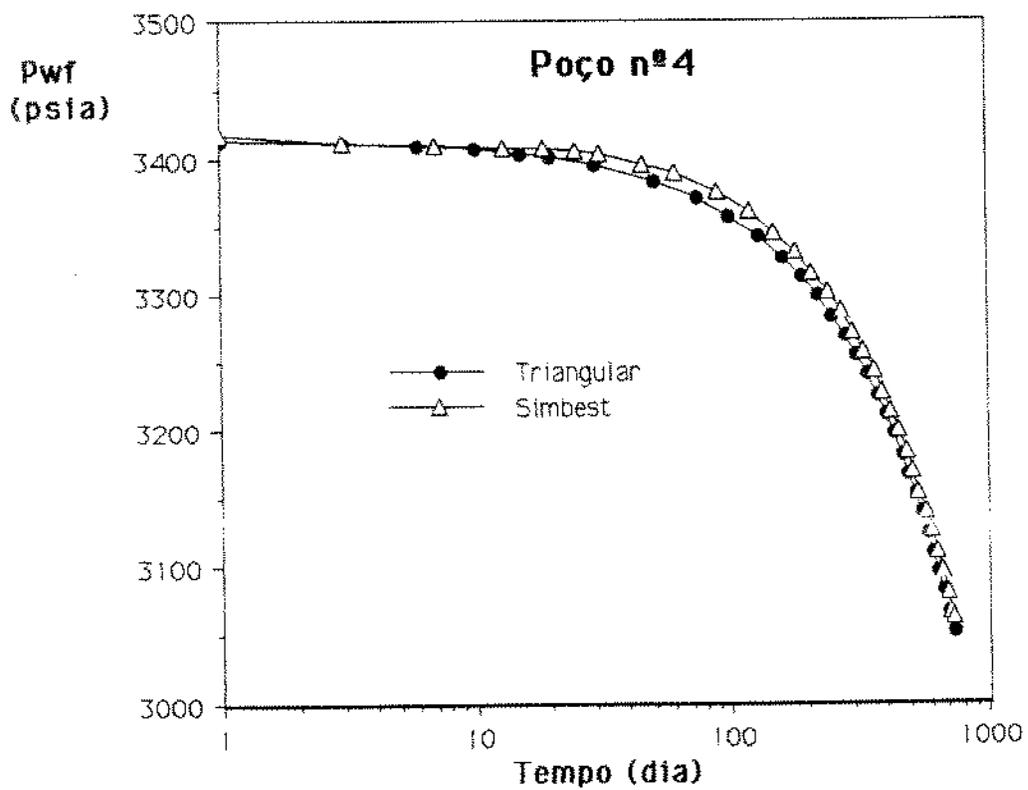


Figura 23: Estudo comparativo - pressão no poço 4

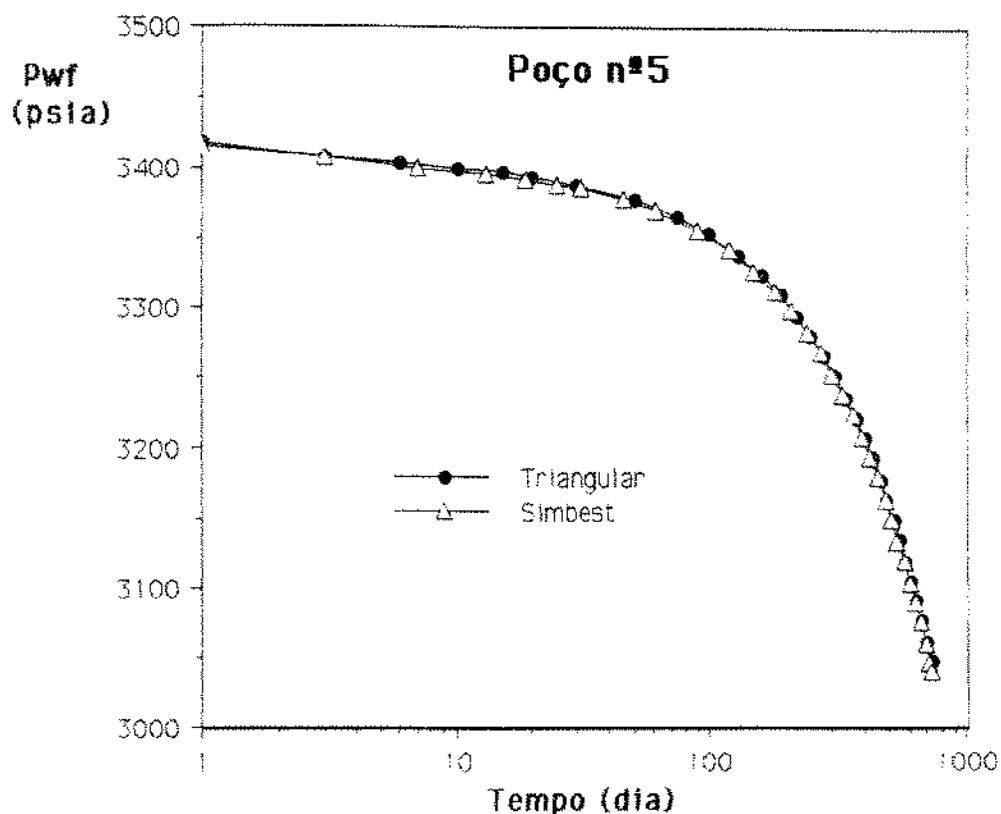


Figura 24: Estudo comparativo - pressão no poço 5

disso, pela própria forma de geração da malha, os únicos dados requisitados foram as coordenadas de pontos quaisquer dos contornos curvilíneos.

A utilização do simulador comercial exigiu um pré lançamento de uma malha cartesiana retangular ao longo de todo o reservatório, com escalonamentos nas regiões fronteiriças e com a utilização da técnica de células desativadas nas regiões impermeáveis ou fora da geometria do reservatório.

A malha triangular permitiu também uma grande flexibilidade na locação dos poços pois o algoritmo numérico de geração de malha fixa o ponto correspondente ao poço como um ponto de malha, rearranjando a malha gerada na região do poço, de tal forma que o poço fique situado no centro do bloco hexagonal.

A malha cartesiana convencional não permite uma flexibilidade tão grande para o tratamento dos poços, pois sempre se enfrenta o problema de se associar o poço (termo fonte) com a sua posição em relação ao bloco, necessitando-se assim da utilização de modelos de poços específicos de acordo com a locação de cada poço.

Dessa forma, este estudo comparativo mostrou que a malha triangular representa uma boa alternativa em simulação de reservatórios complexos, irregulares e anisotrópicos.

Para o segundo problema, pode-se constatar, através do estudo comparativo, o efeito de orientação de malha. Pelos gráficos de pressão no poço x tempo, observa-se uma diferença entre os resultados fornecidos pelos dois simuladores para os poços mais distantes em relação ao aquífero, ou seja, os poços 4 e 5. Nesses poços pode-se observar também que o crescimento de pressão ocorre em instantes diferentes dos fornecidos pelo simulador comercial, donde se conclui que o avanço da frente de saturação é mais rápida que o determinado através da malha cartesiana. Quanto ao poços 1,2 e 3 os efeitos são menores devido à proximidade do forte influxo de água.

Existe um avanço maior da frente de saturação na simulação com malha triangular, como observado também pelo mapa de saturação .

Para a malha cartesiana, as diferenças entre os dois tipos de malha (paralela e inclinada) são mais pronunciadas também para os poços mais distantes do aquífero.

Pela análise dos gráficos de Rao x tempo pode-se visualizar melhor

o que foi afirmado anteriormente, encontrando-se raios diferentes fornecidas pelos simuladores, evidenciando o efeito da orientação dos tipos de malha empregados, principalmente em poços situados em regiões particulares do reservatório, como por exemplo, ao lado de uma falha selante.

Este caso sugere que, utilizando-se uma malha do tipo triangular, é possível detectar uma configuração de escoamento diferente da fornecida pela malha convencional, talvez mais real, sem efeitos de orientação de malha, principalmente para reservatórios com fluidos apresentando razões de mobilidade alta e sob a influência de forte influxo de água.

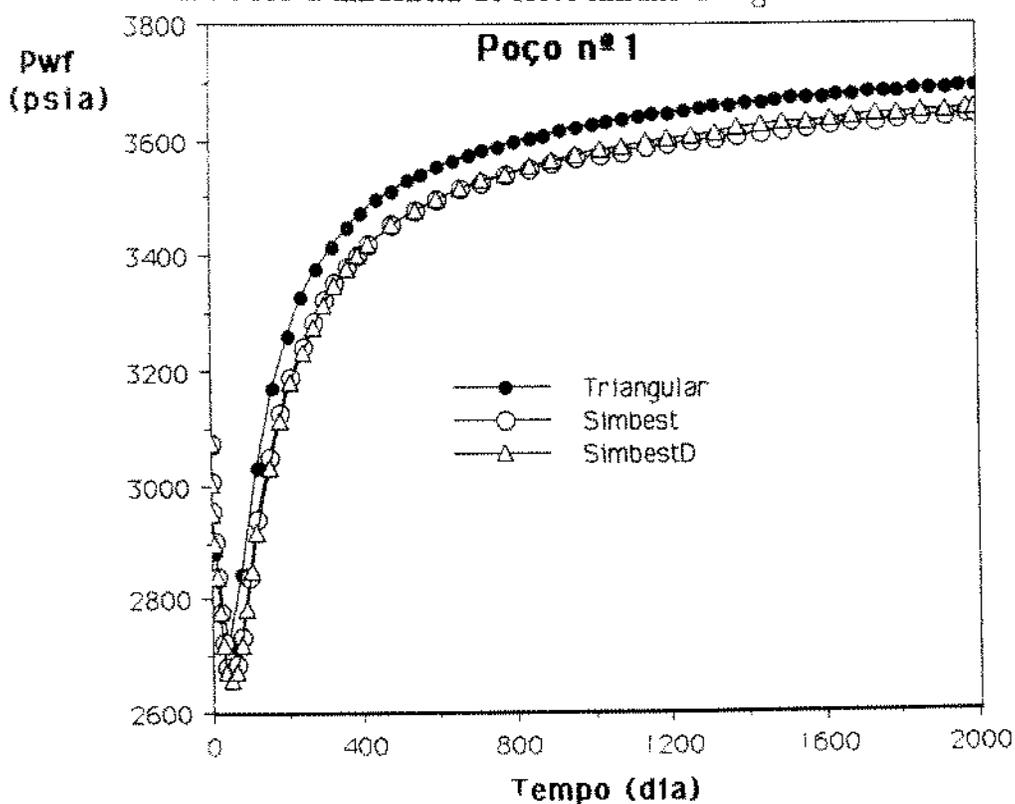


Figura 25: Estudo comparativo - pressão no poço 1

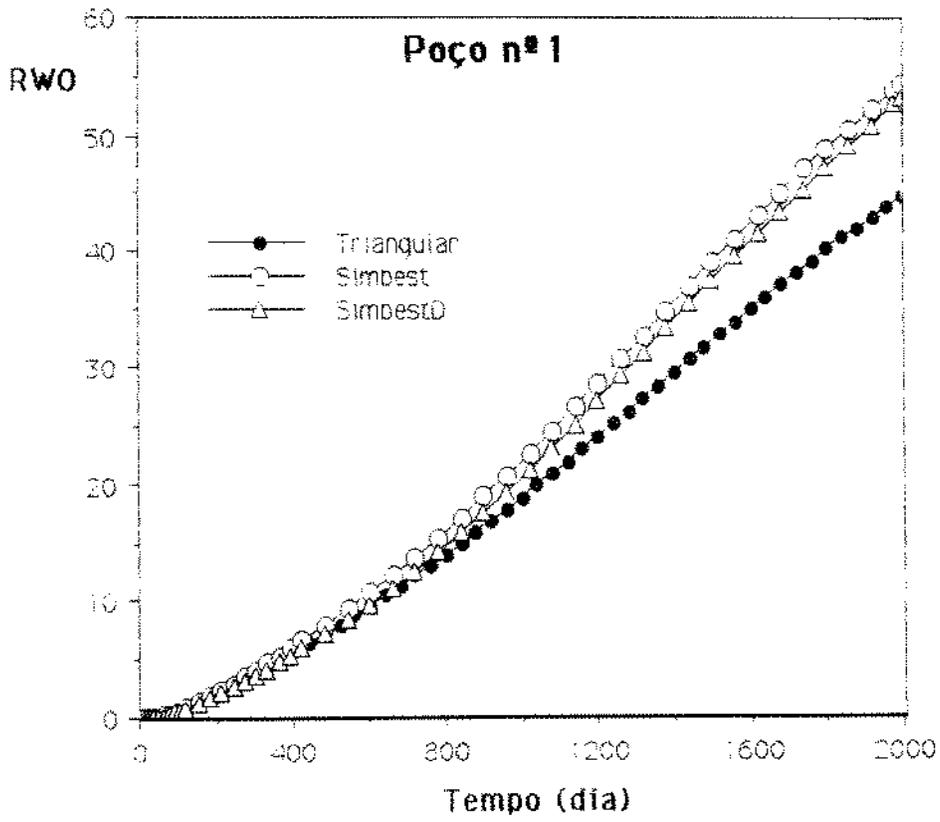


Figura 26: Estudo comparativo - rao no poço 1

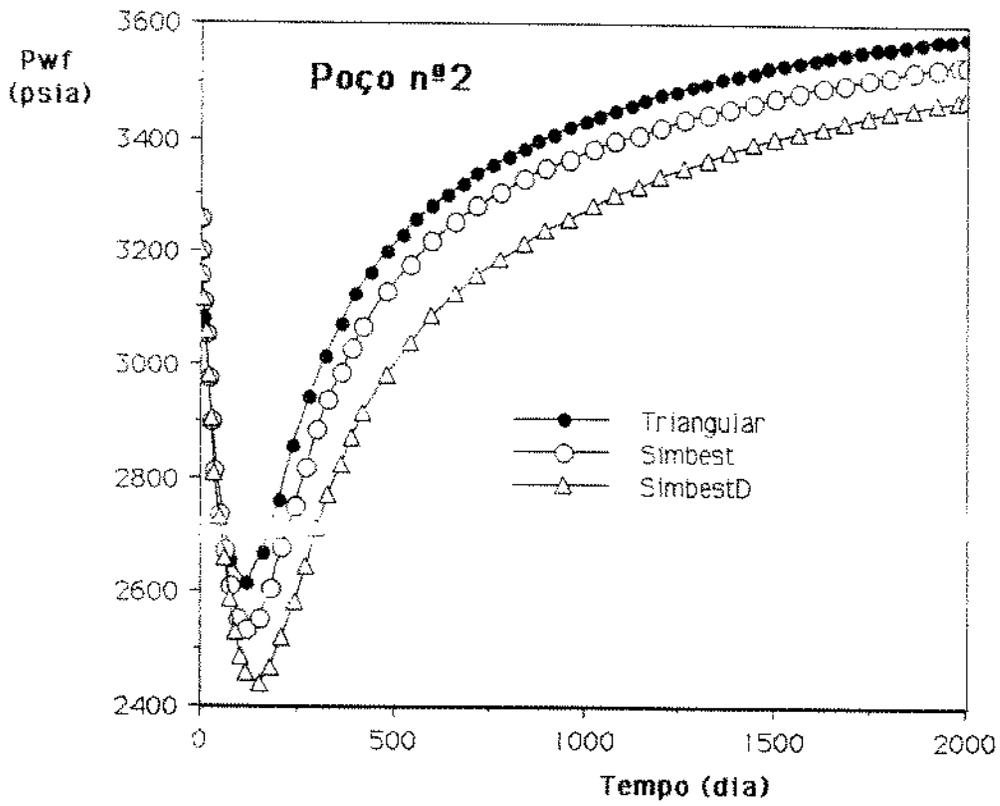


Figura 27: Estudo comparativo - pressão no poço 2

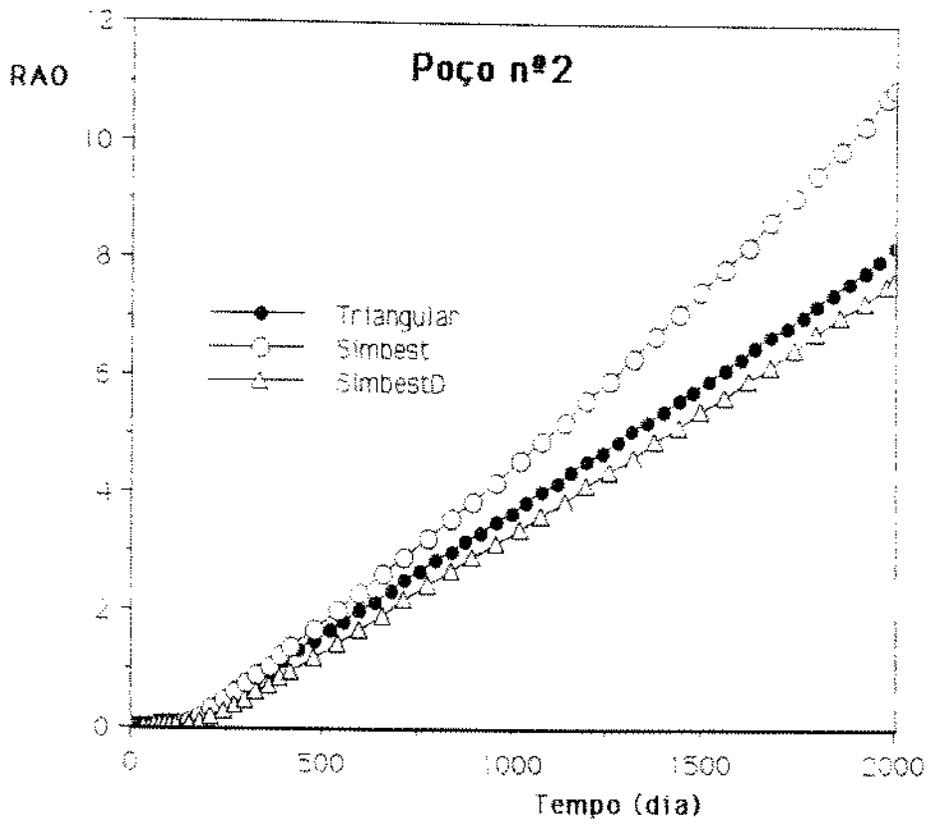


Figura 28: Estudo comparativo - rao no poço 2

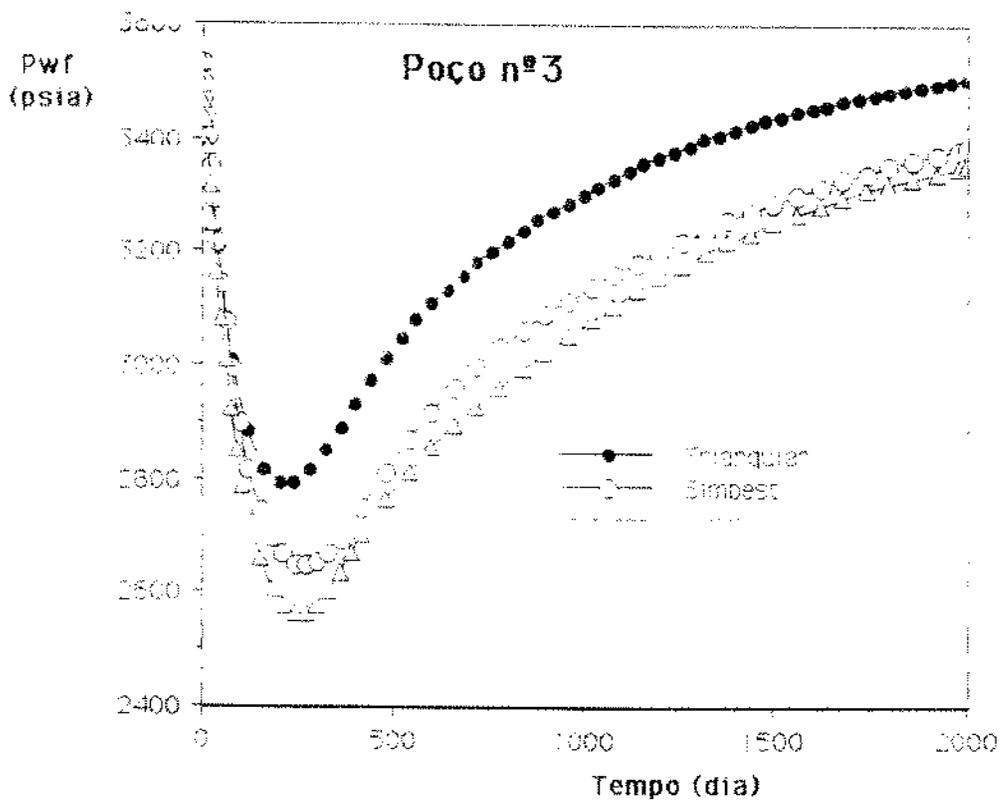


Figura 29: Estudo comparativo - pressão no poço 3

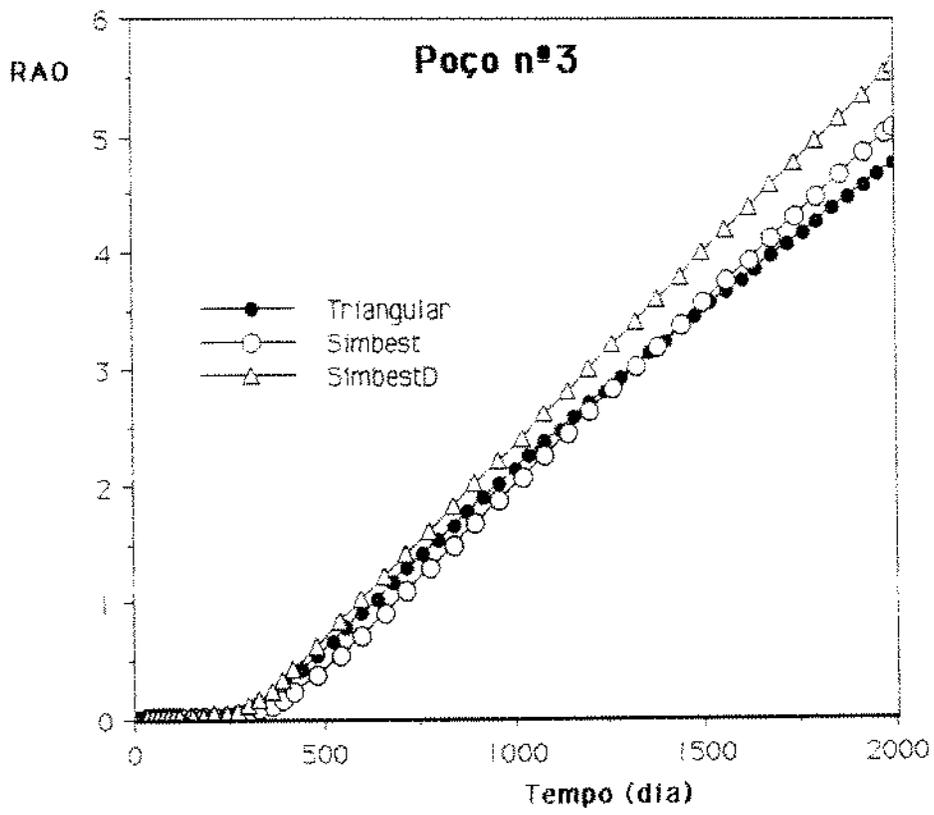


Figura 30: Estudo comparativo - rao no poço 3

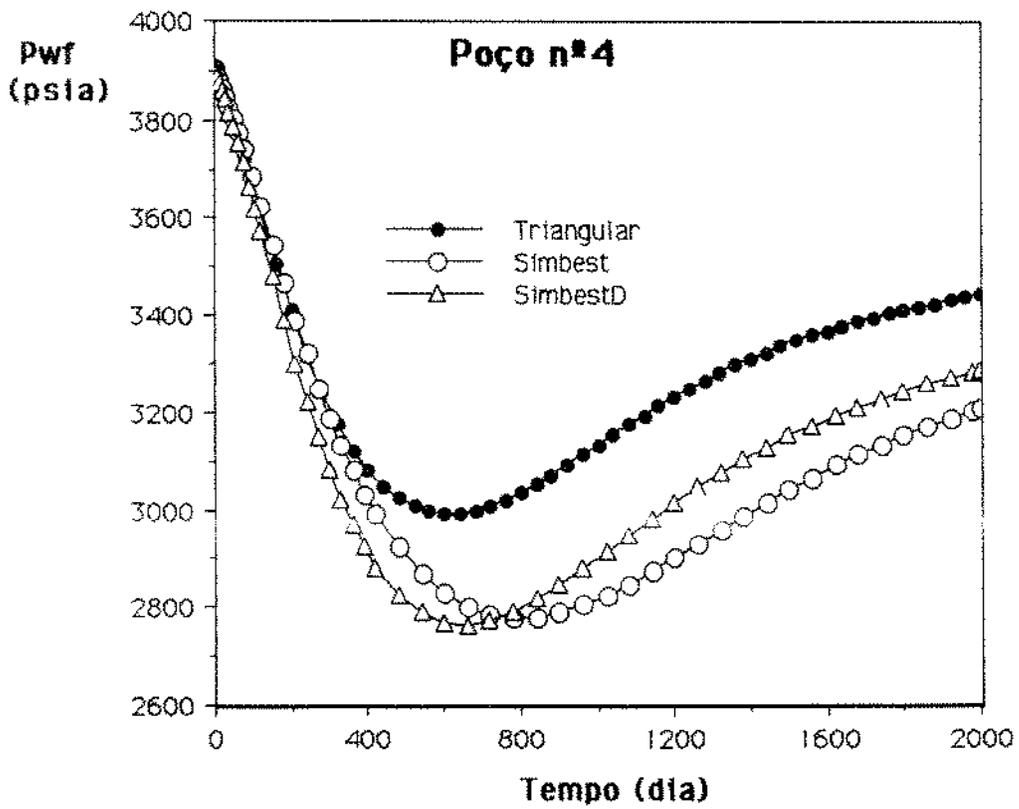


Figura 31: Estudo comparativo - pressão no poço 4

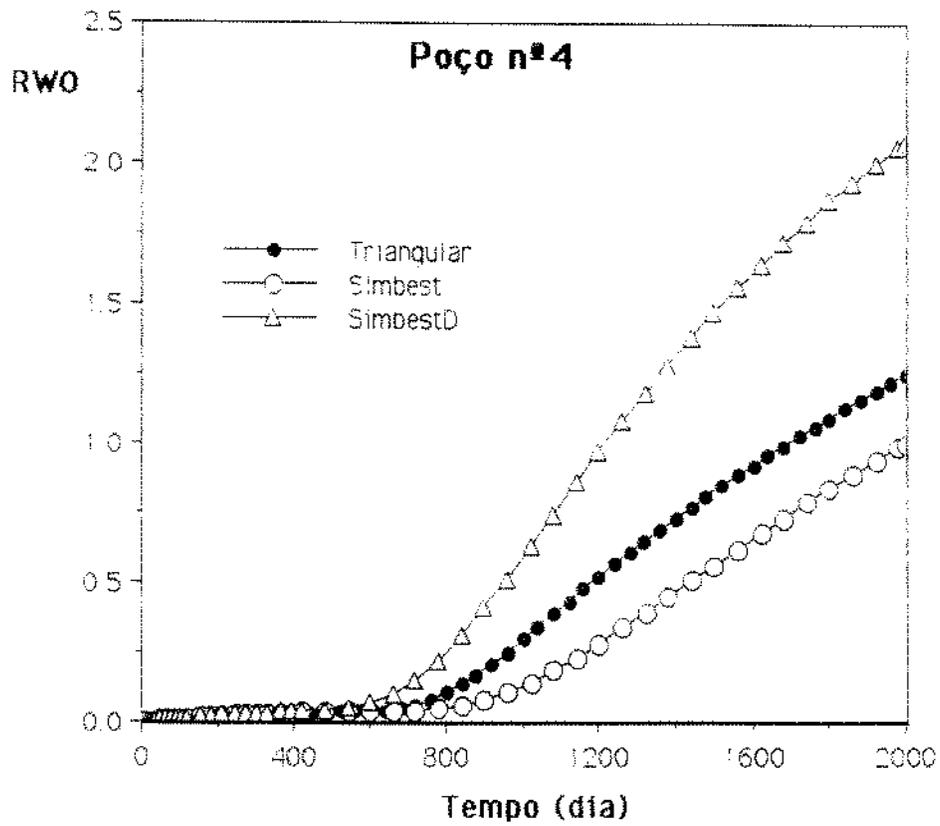


Figura 32: Estudo comparativo - rao no poço 4

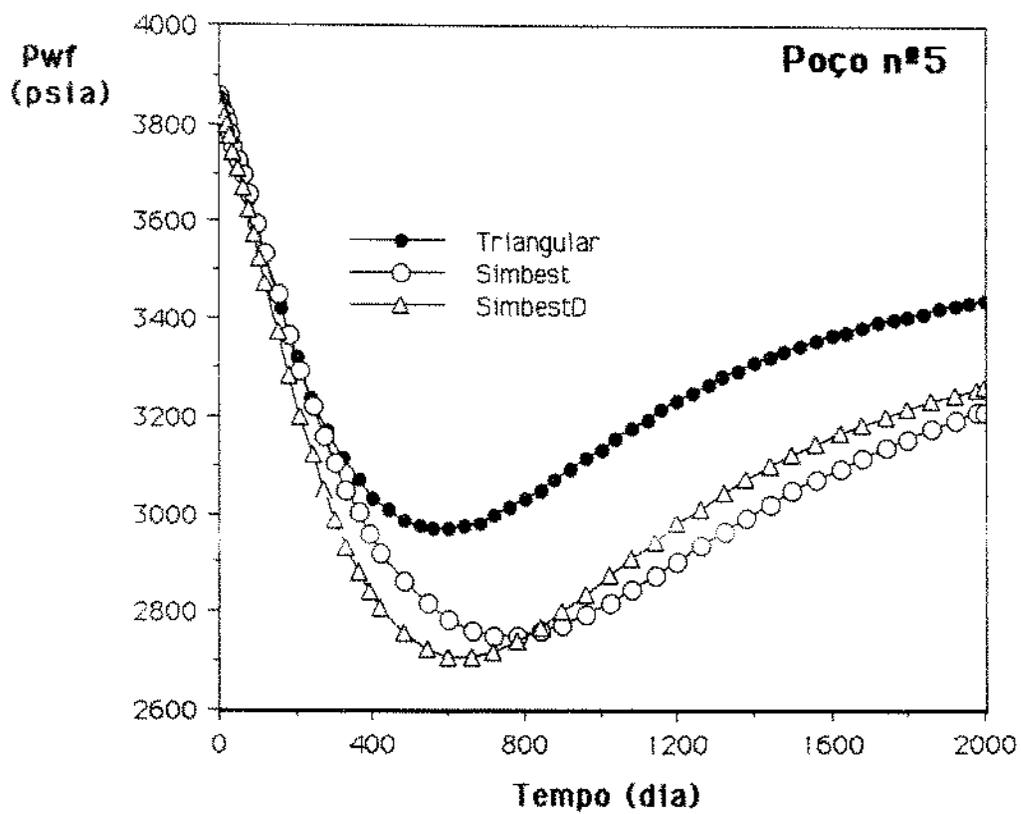


Figura 33: Estudo comparativo - pressão no poço 5

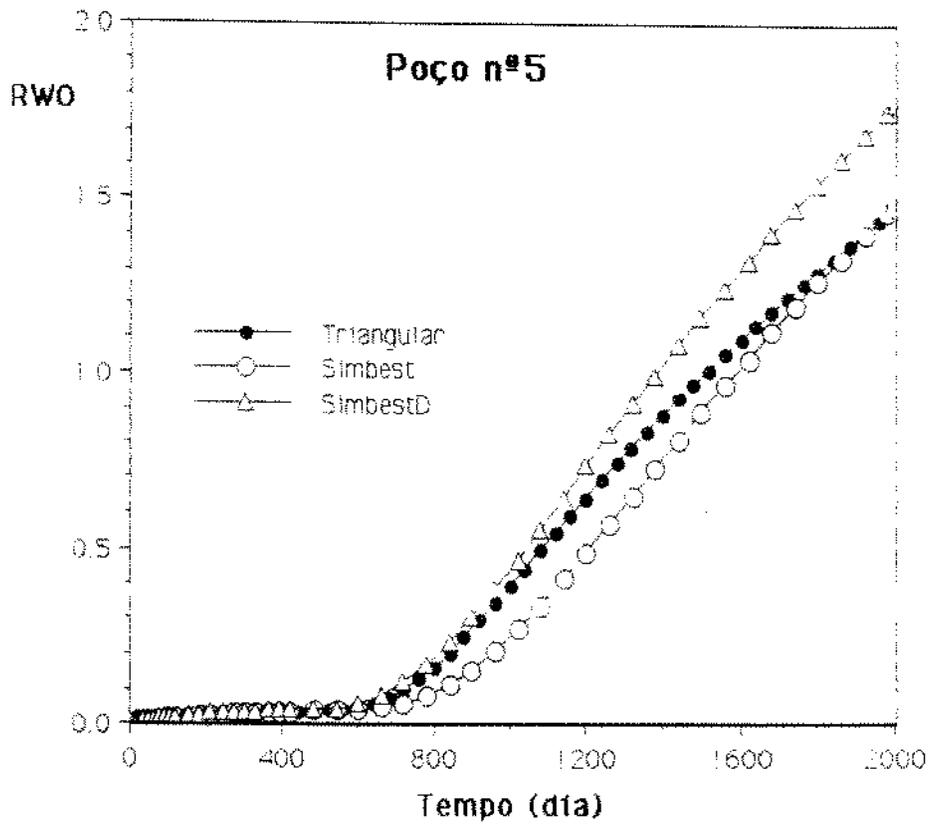


Figura 34: Estudo comparativo - rao no poço 5

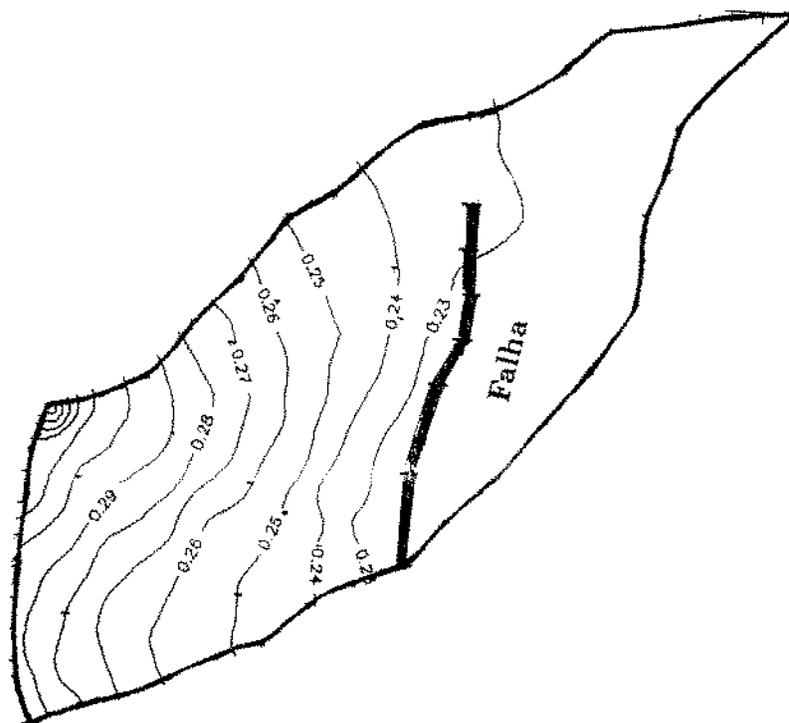


Figura 35: Mapa de Saturação - Malha Triangular

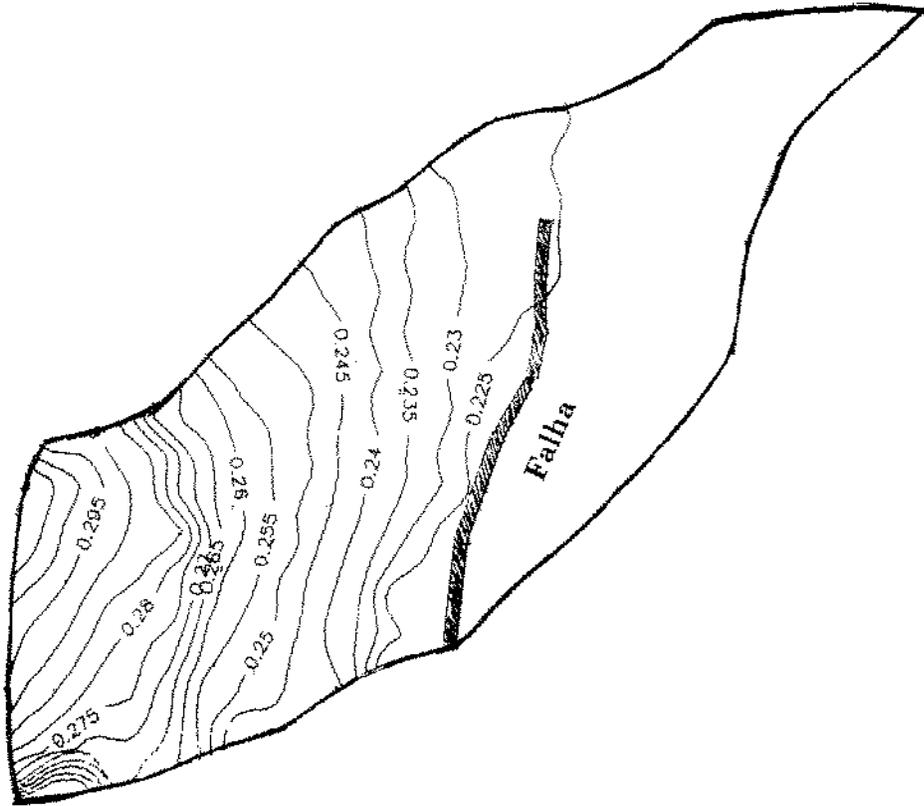


Figura 36: Mapa de Saturação - Malha Cartesiana paralela à falha

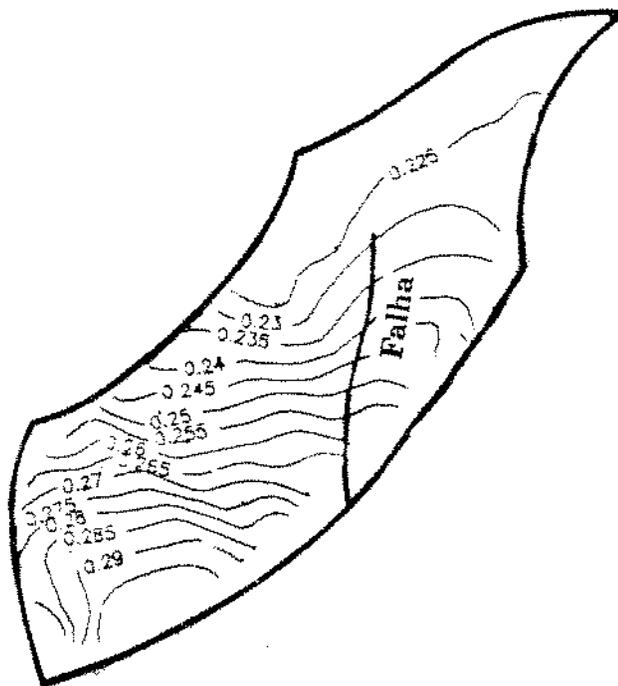


Figura 37: Mapa de Saturação - Malha Cartesiana paralela ao contorno

## 6 Conclusões e Recomendações

Foi desenvolvido um simulador numérico bifásico - bidimensional utilizando malha triangular, para análise de reservatórios com geometrias quaisquer e com heterogeneidades variadas.

A formulação do modelo matemático foi realizada a partir das equações integrais de balanço de massa, integradas sobre o volume de cada bloco da malha triangular e discretizada por diferenças finitas, considerando bloco triangularização pelo método das mediatrizes.

Um modelo de poço específico para essa malha também foi estudado, em função da geometria das células hexagonais.

Os resultados obtidos com o simulador desenvolvido foram validados através de comparações com soluções analíticas conhecidas para um problema monofásico em um reservatório com características bem definidas . O comportamento da queda de pressão reproduziu os valores teóricos em todos os pontos observados.

Objetivando-se estudar o comportamento de pressão e também o efeito da orientação de malha em casos mais complexos, o simulador foi aplicado a dois tipos de reservatórios com geometria irregular e anisotropias internas. Os resultados foram comparados com os fornecidos por um simulador comercial de malha cartesiana convencional.

Para problemas onde o efeito de orientação de malha é reduzido, como no caso 1 estudado, devido à grande extensão do reservatório e à baixa

vazão de injeção , o modelamento com malha triangular mostrou-se muito favorável, pois foi conseguido resultados idênticos aos fornecidos com o simulador comercial com uma redução muito grande considerando-se o número de blocos de malha empregado.

O efeito de orientação de malha pode ser bem detectado através do simulador com malhas triangulares, o qual apresentou um mapa de saturação intermediário entre os resultados obtidos com o simulador comercial para diferentes posições de malha.

Como uma extensão desse trabalho, é recomendável que se investigue bloco triangularização através do método das medianas e posteriormente se realize uma comparação entre esse método e o das mediatrizes para vários tipos de reservatórios.

Pode-se analisar também a extensão do método para modelos tridimensionais e escoamento trifásico e analisar o comportamento do modelo em comparação com os simuladores convencionais correspondentes.

## 7 Referências Bibliográficas

- [1] AZIZ, K., SETTARI, A. (1979). " *Petroleum Reservoir Simulation* ". Applied Science Publishers.
- [2] BERTINGER, W. I. e PADMANABHAN, L. (1983). " *Finite Difference Solutions to Orientation Problems Using Impes* ". Paper SPE 12250 apresentado no SPE - AIME, Simpósio de Simulação de Reservatório, São Francisco, Novembro 15-18 .
- [3] COATS, K. H. (1974). " *Reservoir Simulation State of Art* ". JPT, No. 8, p. 1633.
- [4] FLEMING, G. C. (1979). " *Modelling the Performance of Fractured Wells in Pattern Floods Using Orthogonal, Curvilinear Grids* ". Paper SPE 16973 apresentado na 62a. Conferência Técnica Anual, Dallas, Setembro 27-30.
- [5] HEINEMMN, Z., BRAND, C. (1988). " *Grid Construction for Reservoir Simulation* ". Trabalho apresentado no primeiro Forum Internacional de Simulação de Reservatórios, Alpbach, Austria, Setembro 12-16.
- [6] HEINEMMAN, Z., BRAND, C., MUNKA, M. e CHEN, Y. M. (1989). " *Modelling Reservoir Geometry with Irregular Grids* ". Paper SPE 18412 apresentado no 10a. Simpósio de Simulação de Reservatórios, Houston, Texas, Fevereiro.

- [7] HEINRICH, B. (1987). " *Finite Difference Methods on Irregular Networks* ". Birkhauser Verlag, Basel, Boston , Stuttgart.
- [8] McNEAL, R. H. (1953). " *An Asymmetrical Finite Difference Network* ". Quart. Appl. Math 11.
- [9] PEACEMAN, D. W. (1977). " *Fundamentals of Numerical Simulation* ". Developments in Petroleum Science 6.
- [10] PEACEMAN, D. W. (1982). " *Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation with Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability* ". Paper SPE 10528 apresentado no Simpósio SPE de Simulação de Reservatórios, Nova Orleans, Janeiro 31 - Fevereiro 3.
- [11] PEDROSA, O. A. (1986). " *Use of Hybrid Grid in Reservoir Simulation* ". Paper SPE 13507 - publicado no SPEJ ( Novembro).
- [12] PEDROSA, O. A. (1989). " *Notes on the Finite Difference Balance Approach Using Triangular Grid*. Stanford University.
- [13] PRUESS, K. e BODVARSSON, G. S. (1983). " *A Seven Point Finite Difference Method for Improved Grid Orientation Performance in Pattern Steamfloods* ". Paper SPE 12252 apresentado no Simpósio de Simulação de Reservatório, São Francisco, Novembro 15-18.
- [14] QUANDALLE, P. e BESSET, P. (1983). " *The Use of Flexible Gridding for Improved Reservoir Modelling* ". Paper SPE 12239 apresentado no 7o. Simpósio SPE de Simulação de Reservatório , São Francisco, Novembro.

- [15] ROSENBEQ von, D. U. (1982). " *Local Grid Refinement for Finite Difference Methods* ". Paper SPE 10974 apresentado na 57a. Conferência Técnica Anual, Nova Orleans, Setembro.
- [16] ROBERTSON, G. E. e WOO, P. T. (1976). " *Grid Orientation Effects and the Use of Orthogonal Curvilinear Coordinate in Reservoir Simulation* ". Paper SPE 6100 apresentado no 51a. Encontro Anual, Nova Orleans.
- [17] SONIER, F. e CHAUMET, P. (1974). " *A Fully Implicit Three Dimensional Model in Curvilinear Coordinates* ". Trans. SPE of AIME, 253, p. 361-370 SPE Journal.
- [18] TODD, M. R., O'DELL, P. M. e HIRASAKI, G. J. (1972). " *Method for Increased Accuracy in Numerical Reservoir Simulators* ". Trans. SPE of AIME, 253, p. 515-530 SPE Journal.
- [19] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C. e MASTIN, C. W. (1976). " *Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies* ". Mississippi State University and Nasa Langley Research Center.
- [20] WINSLOW, A. M. (1967). " *Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh* ". Journal Comp. Physics 2, p. 149-172.
- [21] YANOSIK, J. L. e Mc CRACKEN, T.A.(1979). " *A Nine point, Finite*

*Difference Reservoir Simulator for Realist Prediction of Adverse Mobility Ration Displacement* ". SPE Journal, p. 253-262.