

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia de Campinas
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

GVZ

ESTUDO DA COLUNA DE PERFURAÇÃO
ATRAVÉS DA IMPLEMENTAÇÃO DO
ELEMENTO FINITO DE VIGA-COLUNA

*Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida pelo Eng.º Jose Leo Guz e
aprovada pela comissão julgadora em 13/12/90.
Victor Prodonoff*

Autor : Jose Leo Guz

Orientador : Victor Prodonoff†

Co-orientador : Celso Kazuyuki Morooka†

66/90

Dezembro, 1990

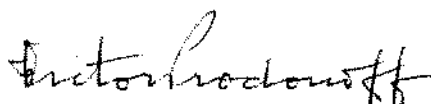
06/09/103797

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

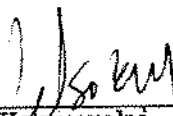
A dissertação "Estudo da Coluna de Perfuração Através da Implementação do Elemento Finito de Viga-Coluna", elaborada por Jose Leo Guz e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 13 de dezembro de 1990.

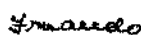
Banca Examinadora



Victor Prodonoff, Ph. D.



Celso Kazuyuki Morooka, Ph. D.



Fernando Iguti, Ph. D.

Dedico este trabalho à minha esposa Kadja,
... minhas filhas, Priscila e Ithefanie,
...às lembranças saudosas de meu sogro, Antônio Elyseu Saldanha
e meu avô, Majer Haker,
...meus irmãos Abel, Maurício, e meus pais, Aron e Estela Guz.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Victor Prodonoff, pela sugestão do tema deste trabalho e pela dedicada orientação e apoio que propiciaram a sua realização.

À Petrobrás S/A, pela oportunidade de participar do Curso de Mestrado em Engenharia de Petróleo.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Petróleo da Unicamp, extensivos a todos que colaboram para a realização deste curso.

Aos colegas de turma, que proporcionaram um sadio e agradável convívio durante este período.

Ao Prof. Celso K. Morooka, pela participação.

Ao Prof. Dr. Fernando Iguti, do Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp, pela intensa participação e ensinamentos transmitidos durante a elaboração deste trabalho, bem como pela revisão para as correções do texto.

RESUMO

Objetiva-se nesta dissertação implantar um método computacional que permita a análise estática estrutural de uma coluna de perfuração sob as mais diversas condições, como em poços verticais ou com grandes inclinações.

Desenvolve-se o estudo do elemento finito de viga-coluna, associado ao efeito de contato ou de restrição à movimentação lateral, como o que ocorre com uma coluna de perfuração confinada pelas paredes de um poço de petróleo.

Utiliza-se a metodologia da análise estrutural não-linear e o Método dos Elementos Finitos. Procura-se demonstrar com este estudo a viabilidade de sua aplicação à solução de outros tipos de problemas com não-linearidade geométrica, como os problemas de estruturas não sujeitas a restrições.

Visa-se utilizar os programas de computador desenvolvidos em sistemas de pequeno e médio porte, para propiciar a descentralização e a aplicação do trabalho em áreas remotas, ou próximas das operações de campo.

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to describe the implementation of a computational method for static structural analysis of bottom-hole assemblies under several configuration such as vertical holes or holes with significant inclination.

A simple beam-column finite element was developped, taking into account contact effects or transversal constraints, such as those which occurs with collars inside a drilled hole. Well known classical methodologies of nonlinear structural analysis and finite element method were used. This study shows the feasibility of the chosen approach to be applied to other problems involving geometric nonlinearity without constraints.

A program developped for small and medium size computer systems was adapted. This program allows an easy processing decentralization and use of the program in remote or near field operations.

SUMÁRIO

	Página
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Nomenclatura	xiii
Símbolos	xiv
 CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	 1
1.1 Objetivos	1
1.2 O Método dos Elementos Finitos (MEF) na Engenharia de Perfuração	 3
 CAPÍTULO 2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) E AS MODELAGENS DO ELEMENTO DE VIGA-COLUNA E DO EFEITO DE CONTATO	 7
2.1 Introdução	7
2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)	7
2.3 Modelagem da viga-coluna	12
2.4 Modelagem do Contato ou Restrição	17
2.5 Flambagem de vigas-coluna	19

CAPÍTULO 3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO	24
3.1 Introdução	24
3.2 Método Incremental-Iterativo - Newton-Raphson.	24
3.3 Atualização da Geometria e Recuperação das Forças Internas	30
3.4 Otimização e Critério de Convergência	37
 CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	40
4.1 Introdução	40
4.2 Descrição do Programa	41
4.3 Interpretação dos Resultados	45
4.4 Programas Desenvolvidos	47
 CAPÍTULO 5 - EXEMPLOS E RESULTADOS OBTIDOS	49
5.1 Introdução	49
5.2 Análise Linear	50
5.3 Análise Não-Linear	52
5.4 Análise de Estabilidade	56
5.5 Efeito de Contato ou Restrição	57
5.6 Problemas de Colunas de Perfuração	58
 CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	70
6.1 Considerações Finais	70
6.2 Conclusões	71
6.3 Sugestões	72

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
APÊNDICE - MATRIZES UTILIZADAS NO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS	78
ANEXO - EXEMPLOS DE ARQUIVOS DE ENTRADA E SAÍDA DOS PROGRAMAS	87

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Idealização Estrutural e graus de liberdade	11
Figura 2.2	Viga sujeita a carga lateral e axial	14
Figura 2.3	Elemento de viga entre 2 seções transversais ...	14
Figura 2.4	Molas Bilineares	18
Figura 2.5	Flambagem de vigas	20
Figura 3.1	Processo puramente incremental	27
Figura 3.2	Processo incremental iterativo(Newton-Raphson) ..	29
Figura 3.3	Sistemas de coordenadas global e local para o caso tridimensional	31
Figura 3.4	Sistemas de coordenadas global e local para o caso plano	31
Figura 3.5	Configurações de referência	34
Figura 4.1	Esquema básico do programa de elementos finitos.	43
Figura 5.1	Viga em balanço a 30 graus	50
Figura 5.2	Pórtico plano com cargas concentradas	51
Figura 5.3	Treliça plana com carga concentrada	52
Figura 5.4	Viga em balanço com carga na extremidade	54
Figura 5.5	Viga com imperfeição geométrica	55
Figura 5.6	Viga biapoiada com balanço e restrição	57

Figura 5.7	Modelagem da coluna de perfuração	59
Figura 5.8	Deslocamentos da coluna de perfuração (14.32% do PSB)	63
Figura 5.9	Forças de reação (14.32% do PSB)	63
Figura 5.10	Deslocamentos da coluna de perfuração (100% do PSB)	64
Figura 5.11	Forças de reação (100% do PSB)	64
Figura 5.12	Comparação com programa ADEP/BHOLE	66
Figura A.1	Elementos para a montagem das matrizes de rigidez	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Efeito da otimização unidimensional	53
Tabela 5.2	Comparação para cargas críticas	56
Tabela 5.3	Resultados para o efeito de contato	58
Tabela 5.4	Dados para o exemplo 5.6.1	60
Tabela 5.5	Comparação de resultados - ref.[3] x Programa ..	61
Tabela 5.6	Comparação de resultados - ref.[3] x Programa ..	62
Tabela 5.7	Comparação - Bhole x Programa	66
Tabela 5.8	Comparação - Solução analítica x Programa	68

NOMENCLATURA

Romanos

A	área
K ou k	rigidez
u, v	deslocamentos
x, y, z	coordenadas
F	força
M	momento fletor
V	força cortante
q, p	carga distribuída
E	módulo de elasticidade
I	momento de inércia
$\mathcal{L}$	operador diferencial
f	função
g	gradiente
N	função interpoladora
FD	força desbalanceada

Gregos

α	fator escalar
ϕ	função
Φ	constante de interpolação
ϵ	quantidade pequena
ϵ_x	deformação axial
θ	ângulo de rotação
λ	fator escalar
Δ	variação

SUBSCRITOS E SUPERESCRITOS

TOT	total	E	elástica	D	domínio
TG	tangente	INC	incremento	cr	crítico
MOL	mola	IT	iteração	T	transposto
G	geométrica	gl	global	e	elemento

SÍMBOLOS

$[\]$	matriz
$ \ $	determinante de uma matriz
$\{ \ }$	vetor
$\sum$	somatória ou superposição
$\int$	integral
$\ \ \ $	norma euclideana
$\underline{\Delta}$	apoio fixo
$\underline{\underline{\Delta}}$	apoio móvel
$\vdash$	engaste
$\underline{\pm}$	mola

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS

Grandes e poderosos programas de computador utilizando o Método dos Elementos Finitos têm sido elaborados nos últimos anos com a finalidade de abranger a maioria dos problemas em engenharia, tanto na área da mecânica do contínuo quanto como em outras aplicações.

Como consequências desta generalização tem-se que:

- * tais programas geralmente só funcionam bem em sistemas de grande porte;
- * há dificuldades para o usuário em selecionar os elementos convenientes a serem utilizados em cada problema;
- * há também dificuldades quanto à elaboração dos dados de entrada, assim como na interpretação dos dados de saída.

Neste trabalho, mostra-se a implementação de um elemento finito de viga-coluna, sujeito à restrição quanto ao deslocamento lateral, com a finalidade de se efetuar análises estáticas não-lineares aplicadas à Engenharia de Petróleo, no caso, de alguns dos problemas em Engenharia de Perfuração.

Tal implementação será feita em um código computacional já existente, com características de versatilidade para sistemas computacionais de menor porte, e

que tem um caráter de auxílio à solução de uma grande gama de problemas estruturais, tanto estáticos como dinâmicos.

A coluna de perfuração é parte integrante de todos os três grandes sistemas que compõem a operação de perfuração de poços de petróleo, que são os sistemas de Suspensão, de Rotação, e de Circulação. Consiste de elementos tubulares de aço com vários tipos de material e dimensões de modo a satisfazer as seguintes necessidades básicas: levar a broca de perfuração às profundidades desejadas; impor um peso sobre a mesma, e imprimir rotação; bombear o fluido de perfuração pelo interior da coluna, fluido este que cumpre funções vitais na operação de perfuração. Existem inúmeros outros acessórios que completam a composição da coluna de perfuração. Utilizados para os mais diversos fins, tornam o comportamento deste sistema estrutural bastante complexo. A sua abrangência é bastante ampla, uma vez que existem efeitos associados a:

- * variedade de elementos compondo a coluna;
- * distribuição de carregamento estático (peso próprio) em função da geometria do poço;
- * efeitos dinâmicos devido à rotação e torques desenvolvidos;
- * efeitos hidrodinâmicos, devido à interação fluido-coluna;
- * interação da coluna com formações rochosas dos mais variados tipos;
- * situações limite de sollicitação, em relação às propriedades estruturais.

O presente trabalho se restringe ao equacionamento

estático e para aplicações bidimensionais do elemento finito de viga-coluna. Procurar-se-á ainda descrever a base teórica comum a problemas tridimensionais e até mesmo dinâmicos.

É objetivo deste trabalho, portanto, um estudo razoavelmente aprofundado na metodologia da análise não-linear para sistemas estruturais reticulados, com o uso da técnica dos elementos finitos, de modo a compatibilizar tal estudo com algumas das reais necessidades do Engenheiro de Perfuração. Tal assunto tem sido intensamente investigado por pesquisadores nas áreas de engenharia estrutural. Nota-se uma clara tendência da utilização desses métodos na elaboração de projetos, em substituição à tradicional análise linear, dado ao maior realismo de representação de um problema. A versatilidade e generalidade do Método dos Elementos Finitos ampliam o alcance de aplicações, no que se refere às diferentes configurações e composições estruturais.

1.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

NA ENGENHARIA DE PERFURAÇÃO

A maior parte dos artigos pesquisados neste trabalho referem-se à coluna de perfuração, principalmente no que diz respeito ao controle de trajetória de poços, lembrando porém, que outros importantes problemas também têm sido tratados utilizando-se o MEF, como por exemplo no trabalho de Ribeiro [1] .

Nicholson [2] utilizou o MEF em 1972 para analisar problemas de influência da composição de fundo na trajetória de um poço. Entende-se por composição de fundo aqueles componentes da coluna de perfuração que são dimensionados para a transmissão dos esforços axiais de compressão, assim como os acessórios necessários para se interferir na obtenção da trajetória desejada de um poço direcional ou mesmo de um poço vertical. Dentre estes acessórios, desempenham importante papel os chamados Estabilizadores de Coluna. Este estudo se limita à análise de trechos retos inclinados de poços, destacando-se que a simulação da restrição imposta à coluna pelas paredes do poço ou de seu revestimento, é modelada com o uso do método das funções de penalidade.

Milheim [3,4] iniciou em 1977 uma série de artigos abordando a análise da tendência de trajetória da coluna de perfuração, através do uso de um programa de elementos finitos comercialmente disponível, evoluindo da análise estática à incorporação dos efeitos dinâmicos. É dada ênfase nestes trabalhos à teoria básica do método, incluindo a formulação da não-linearidade geométrica devido a grandes deslocamentos. A restrição imposta pelas paredes do poço é modelada como um elemento de barra, disponível no programa usado, sendo também sugerido o uso de molas bilineares para esta modelagem.

Os resultados apresentados nestes e em outros trabalhos podem ser comparados com os de conhecidos autores como Lubinski [5] e outros, que para alguns casos obtiveram soluções

analíticas na determinação de forças laterais, pontos de tangência e flambagem de coluna de perfuração.

Nota-se, a partir de então, uma tendência das grandes empresas e seus pesquisadores de desenvolver programas próprios de elementos finitos visando uma otimização, com o objetivo de acoplar tais programas a outros fatores que influenciam em problemas de trajetória de poços. Alguns destes programas de análise de trajetória usam modelos bidimensionais como o que será descrito neste trabalho, de modo a possibilitar uma utilização computacionalmente viável no campo, isto é, diretamente na plataforma de perfuração [5] (1987).

Burguess [6], mais recentemente, (1987) aplicou os resultados obtidos de análises estáticas bidimensionais não-lineares como ponto de partida para o estudo da vibração transversal de colunas de perfuração, obtendo importantes resultados na prevenção de ruptura de colunas de perfuração em pontos críticos pré-determinados.

Seguindo esta linha de trabalho, vemos que a obtenção de forças de reação sobre a broca, estabilisadores e pontos da coluna de perfuração, via diferentes programas de elementos finitos, tem sido utilizado para diversos fins [7,8] .

Outras aplicações ainda não tão exploradas de tais programas são: a análise do desgaste de componentes da coluna de perfuração e revestimento de poços, influência da força lateral no desmoronamento de formações em poço aberto, estudo do arraste da coluna para diagnóstico de poços, e outros.

A metodologia estudada permitirá também a inclusão da

análise do comportamento de estruturas tubulares livres de restrições laterais, como por exemplo o "riser" de perfuração em plataformas flutuantes (estrutura tubular que liga o fundo do mar à plataforma), ou oleodutos.

Os capítulos subsequentes deste trabalho procurarão descrever primeiramente o Método dos Elementos Finitos, seguido da formulação do elemento de viga-coluna, da modelagem do contato ou restrição, e a análise de estabilidade estrutural. Examinam-se então as características fundamentais da análise não-linear, através da descrição do método de solução utilizado, abordando problemas referentes a questões como: sistemas de coordenadas, critérios de convergência, e outros. É focalizada então a implementação computacional da teoria mostrada, seguida dos exemplos e resultados obtidos, para finalmente chegar-se às conclusões e sugestões pertinentes ao trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) E AS MODELAGENS DO ELEMENTO DE VIGA-COLUNA E DO EFEITO DE CONTATO

2.1 INTRODUÇÃO

Inicia-se este capítulo com a descrição dos conceitos básicos do MEF e a terminologia necessária à compreensão de sua aplicação. Parte-se então para a modelagem de um elemento de viga-coluna, a partir da equação diferencial derivada da teoria da elasticidade. A obtenção das matrizes de rigidez elástica e geométrica é feita pelo Método de Galerkin, que pertence à classe dos chamados Métodos de Resíduos Ponderados, uma das inúmeras formulações possíveis na aplicação do Método dos Elementos Finitos. Segue-se a inclusão do efeito de contato entre os nós do elemento viga-coluna com outro meio elástico. Finalmente é formulado o problema de flambagem e discutidos os conceitos de cargas críticas e respectivos modos de flambagem.

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

O Método dos Elementos Finitos é um procedimento matemático para resolver numericamente problemas de Mecânica do

Continuo com precisão adequada à Engenharia. Tem sua origem a partir de pesquisadores das áreas de matemática aplicada, física e engenharia, tendo tido grande avanço inicial através de trabalhos feitos principalmente por engenheiros. Importantes contribuições originais surgiram em artigos dos autores Turner et al, Argyris e Kelsey, conforme Bathe [9,10], e a designação de "Elementos Finitos" foi dada pela primeira vez em um artigo de Clough, onde tal técnica foi utilizada para análise de problemas de estado plano de tensão. Obteve-se grande avanço através da sua utilização na indústria aeroespacial a partir dos anos 50 e naturalmente tornou-se cada vez mais viável com a evolução dos computadores digitais. Ampliou-se sua aplicação em outros campos, a partir de sua formulação formal teórica inicial baseada nos princípios variacionais.

Métodos clássicos descrevem os problemas estruturais através de equações diferenciais. Porém, à medida em que a configuração geométrica e o tipo de carregamento a que é submetido um sistema estrutural tornam-se mais complexos, fica quase impossível a obtenção de soluções completas ou fechadas para essas equações. No MEF é feita uma discretização do meio contínuo, através da separação em elementos finitos que se unem em pontos nodais, e que modelam o problema real através da compatibilidade de esforços, deslocamentos, condições de contorno e demais parâmetros pertinentes ao problema em estudo. Exemplificando, uma chapa de aço pode ser discretizada por elementos triangulares ou quadrilaterais planos, assim como um

corpo em três dimensões pode ser representado por elementos tetraédricos ou hexaédricos. Grandes estruturas podem conter vários tipos de elementos para propiciar análises convenientes.

Resumindo, o MEF tem como diretrizes básicas:

- * discretização de uma região ou um domínio em pontos nodais, que definem a divisão desta região em elementos adequados a cada tipo de estudo;
- * aproximação da função contínua que descreve o fenômeno físico através de funções interpoladoras, geralmente funções polinomiais, que satisfaçam todas as condições de continuidade e compatibilidade necessárias e que são de mais fácil manuseio quando restritas a subdomínios que nada mais são que os elementos propriamente ditos;
- * combinação dos resultados obtidos para um elemento, a partir do Método de Ritz ou dos Resíduos Ponderados, de forma a se montar o problema global através de superposição dos mesmos;
- * aplicação das condições de contorno pertinentes ao problema em particular.

As etapas acima descritas, quando referidas a problemas de equilíbrio levam-nos a um sistema de equações algébricas. As incógnitas são os valores nodais da aproximação discreta feita para as variáveis que descrevem o fenômeno físico no meio contínuo. Os valores não nodais são obtidos diretamente com o uso das funções interpoladoras adotadas.

No caso da análise estrutural linear por exemplo, pode-se chegar a um sistema de equações do tipo:

$$[K] \{ u \} = \{ F \} \quad (2.2.1)$$

onde: $[K]$ = matriz de rigidez elástica da estrutura
 $\{ u \}$ = vetor de deslocamentos nodais (inclui rotações)
 $\{ F \}$ = vetor de carregamento (inclui momentos aplicados).

Neste caso temos como incógnita o vetor de deslocamentos. Pode-se tomar, contrariamente, o vetor de carregamento como incógnita, de onde se origina a formulação baseada na chamada matriz de flexibilidade.

As principais vantagens do MEF destacadas pela literatura pesquisada são:

- * materiais e a dimensão de elementos adjacentes podem ser diferentes;
- * contornos de qualquer forma podem ser bem aproximados por maior discretização na fronteira ou uso de elementos com lados retos ou curvos;
- * carregamentos descontínuos são facilmente tratados no método;
- * sistemas de equações algébricas com características que favorecem soluções estáveis e rápidas.

No presente trabalho é mostrada a implementação de um elemento unidimensional de viga-coluna de 2 nós por elemento,

com acoplamento de esforço axial. A formulação da relação entre esforços e deslocamentos para um elemento é obtida da equação diferencial de uma viga-coluna, chegando-se às matrizes de rigidez elástica e geométrica através do Método de Galerkin.

Para o estabelecimento das condições de compatibilidade, equilíbrio, e relação entre forças e deslocamentos em um sistema estrutural idealizado, é necessária a adoção de uma sistemática que identifique tais parâmetros nos pontos nodais da discretização. A figura 2.1 mostra que as informações necessárias para uma completa descrição deste sistema se referem às setas numeradas de 1 a 12, onde se poderá prescrever tanto o vetor de forças atuantes $\{ F \}$, como o vetor de deslocamentos $\{ u \}$. As setas indicam, portanto, os chamados graus de liberdade da estrutura.

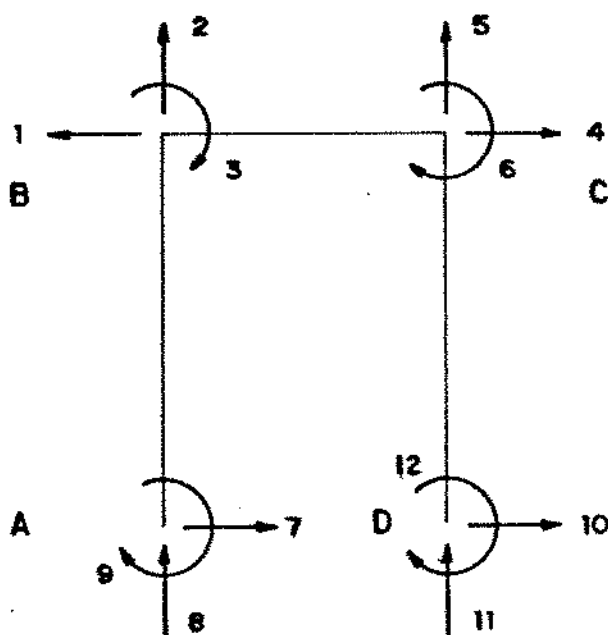


FIG 2.1 - IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL E GRAUS DE LIBERDADE

2.3 MODELAGEM DA VIGA-COLUNA

Na teoria linear da flexão de vigas, considera-se que os deslocamentos da estrutura não afetam a linha de ação das cargas aplicadas. Assim, é possível calcular os deslocamentos, tensões, momentos e demais dados de interesse baseados tanto na configuração inicial da estrutura (configuração não deformada), como na configuração final. Se o material utilizado obedece à Lei de Hooke, pode-se também aplicar o princípio da superposição.

Quando se tem cargas transversais e axiais agindo simultaneamente em uma viga, os momentos de flexão, forças cisalhantes, deslocamentos e tensões não mais serão proporcionais à magnitude da carga externa aplicada, mas dependerão da magnitude dos deslocamentos desenvolvidos durante o carregamento. Vigas sujeitas a esforços axiais e transversais com efeitos acoplados são denominadas vigas-coluna.

Continuam válidas para esta dedução as seguintes hipóteses:

- * seções planas permanecem planas após ocorrer a deformação;
- * o material da viga tem comportamento linearmente elástico, sendo portanto sua relação constitutiva dada pela Lei de Hooke;
- * é aplicável a teoria para pequenas deformações.

A equação diferencial de uma viga-coluna submetida a um

carregamento q transversal distribuído e a uma carga axial de compressão F , como mostra a figura 2.2, é obtida a partir do equilíbrio de um elemento diferencial dx , na configuração deformada (fig. 2.3). Para este elemento diferencial a carga q é considerada constante, e obtêm-se as seguintes relações entre força cortante V , momento M , carga q e força axial F :

Do equilíbrio de forças na direção y , $\implies$

$$q = - \frac{dV}{dx} \quad (2.3.1)$$

Do equilíbrio de momentos obtém-se $\implies$

$$V = \frac{dM}{dx} - F \frac{dv}{dx} \quad (2.3.2)$$

Baseado na teoria de pequenas deformações, a equação que relaciona a curvatura de uma viga com o momento fletor que nela atua, é dada por:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = - M \quad (2.3.3)$$

Combinando-se as três equações acima descritas, chega-se a duas formas de equações diferenciais para a viga-coluna:

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} + F \frac{dv}{dx} = - V \quad (2.3.4)$$

e

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} + F \frac{d^2v}{dx^2} = q \quad (2.3.5)$$

As equações 2.3.1 a 2.3.5 são as equações diferenciais básicas para a flexão de vigas-coluna.

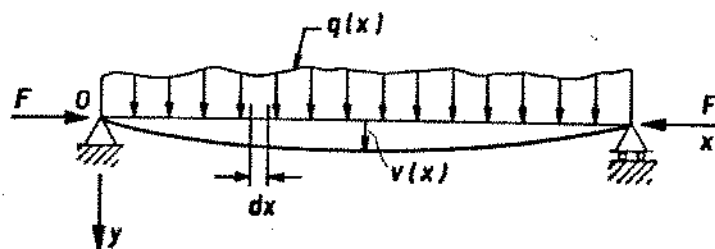


FIG. 2.2 VIGA SUJEITA A CARGA AXIAL E LATERAL

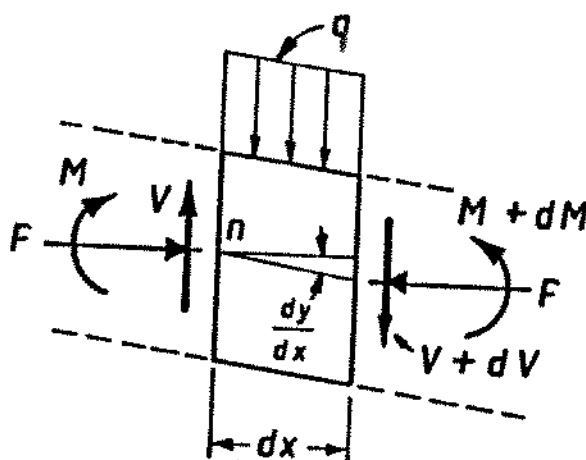


FIG.2.3 ELEMENTO DE VIGA ENTRE DUAS SEÇÕES TRANSVERSAIS

A partir das equações diferenciais acima mostradas, pode-se chegar à matriz de rigidez elástica de uma estrutura, que depende das propriedades elásticas do material, e à matriz de rigidez geométrica, que dá conta do efeito do acoplamento dos esforços axiais devido aos esforços laterais.

O método de Galerkin foi introduzido em 1915 como método de se obter soluções aproximadas para problemas de valor de

contorno. Tem a vantagem de utilizar as equações diferenciais estabelecidas para um problema e assim eliminar a necessidade de uma formulação variacional alternativa. Combinado com as funções de interpolação do Método dos Elementos Finitos, o método de Galerkin se torna um procedimento útil para a solução tanto de equações diferenciais parciais do tipo elíptico, como parabólico ou hiperbólico. Tal método visa, portanto, a obtenção aproximada da solução de uma equação diferencial. Isto é conseguido requerendo-se que a função erro gerada por uma solução aproximada seja ortogonal às próprias funções usadas na aproximação, funções essas que devem ainda satisfazer condições de admissibilidade e diferenciabilidade, além da garantia da satisfação das condições de contorno essenciais do problema.

Partindo-se de uma equação diferencial na forma:

$$\mathcal{L} [\phi(x,y,z)] - f(x,y,z) = 0 \quad (2.3.6)$$

onde: $\mathcal{L}$ = operador diferencial

$f(x,y,z)$ = constante ou uma função de 1 ou mais variáveis

$\phi(x,y,z)$ = função solução exata do problema.

Aproximamos uma solução dada por:

$$\bar{\phi}(x,y,z) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y,z) \Phi_i \quad (2.3.7)$$

onde: $N_i(x,y,z)$ = função de interpolação

Φ_i = constantes de interpolação

$\bar{\phi}$ = função solução aproximada do problema.

Se aplicarmos o operador diferencial a $\bar{\phi}$ resulta em:

$$\mathcal{L} [\bar{\phi}(x,y,z)] - f(x,y,z) = \varepsilon(x,y,z) \quad (2.3.8)$$

onde: $\varepsilon(x,y,z)$ = função resíduo ou erro que desejamos minimizar.

Uma maneira de se conseguir esse objetivo é requerer a minimização ponderada do erro, dada pela integral:

$$\int_D N_i \varepsilon \, dD = 0 \quad (2.3.9)$$

onde: $i = 1, 2, \dots, n$ (varia para cada uma das funções interpoladoras).

D = região do domínio da função.

Esta integral declara matematicamente que cada função de base N_i é ortogonal à função erro ou resíduo no domínio considerado.

A função $\bar{\phi}$ desconhecida, é aproximada por:

$$\bar{\phi} = [N_1, N_2, N_3, \dots] \{ \Phi_i \} \quad (2.3.10)$$

onde: Φ_i = valores da função $\bar{\phi}$ nos pontos nodais discretizados.

Não existe limite quanto à ordem $2m$ da maior derivada que pode estar contida na equação diferencial representada pelo operador $\mathcal{L}(\phi)$, ($2m$ é um parâmetro que representa a ordem da maior derivada da equação diferencial). Pode-se, no entanto, usar funções de interpolação que sejam diferenciáveis até a

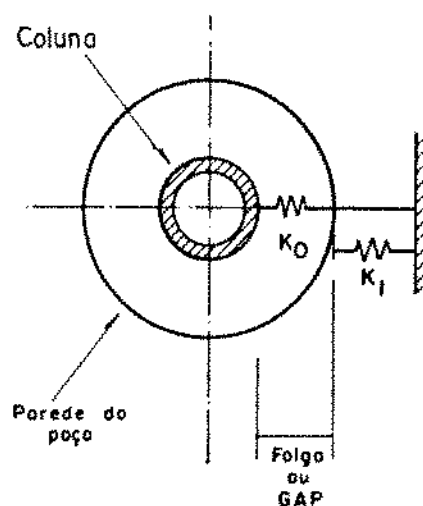
ordem $2m$ do operador $\mathcal{L}$ (), não sendo necessariamente contínuas nesta ordem. Este procedimento permite a introdução da chamada relaxação das condições de continuidade para o cálculo da integral 2.3.9, onde através de integração por partes faz-se com que se abaixe a ordem das derivadas presentes no operador diferencial até que estas tenham a mesma ordem das derivadas das funções de interpolação. A ilustração deste procedimento, bem como a derivação das matrizes de rigidez elástica e geométrica, pelo método de Galerkin acima exposto, encontram-se no apêndice deste trabalho.

2.4 MODELAGEM DO CONTATO OU RESTRIÇÃO

A modelagem do contato entre um ponto da coluna de perfuração e a parede do poço faz-se através da inclusão de uma mola de grande rigidez associada ao movimento do nó na direção perpendicular ao elemento finito de viga-coluna. Supõe-se que a coluna de perfuração e a parede do poço sejam paralelos na condição de início do carregamento aplicado à mesma.

É permitido variar-se o espaçamento entre a coluna e o ponto a partir do qual ela toca na parede do poço, que é o chamado "gap". Neste intervalo inicial, os deslocamentos podem ocorrer associados a uma mola de pequena rigidez. Caracteriza-se assim a não-linearidade geométrica introduzida no sistema estrutural por molas bilineares, como ilustrado na figura 2.4 .

Até o valor limite do "gap", apenas a fraca rigidez K_0 atua; além deste valor, a forte rigidez K_1 prevalece.



$$K_0 \ll K_1 \Rightarrow K_I \approx K_1 + K_0$$

FIG. 2.4 MOLAS BILINEARES

Assim, devido à natureza incremental-iterativa da solução do problema, que será detalhada adiante, quando um deslocamento de um dado nó ultrapassar os limites pré-estabelecidos, incorpora-se à matriz de rigidez global do sistema a rigidez imputada pela mola de grande rigidez, fazendo com que no passo seguinte de procura do equilíbrio este deslocamento varie pouco, seja na direção de maior ou menor penetração da área limitada. A partir desse instante o deslocamento transversal do nó deixa de ser significativo pois a mola passa a agir como um apoio semi-rígido. Esta variação de comprimento multiplicada pela rigidez da mola nos dá a reação de apoio daquele ponto de contato. Da mesma forma, se o

deslocamento corrente durante o processo de resolução do problema for menor que o "gap" especificado, fica somente considerada a mola de pequena rigidez no respectivo grau de liberdade de movimento transversal, isto é, "desliga-se" a mola de grande rigidez. Para o cálculo das reações de apoio de broca e estabilizadores da coluna de perfuração pode-se considerar já associado ao elemento finito discretizado a mola de grande rigidez com a folga ou "gap" igual a zero. Uma forma alternativa possível é a consideração de rigidez de mola "zero" enquanto os pontos nodais movem-se livremente dentro do intervalo determinado pelo "gap".

Resulta destas considerações, a inclusão na formulação global, que será vista adiante, de uma matriz de rigidez de mola, apresentada no apêndice deste trabalho. Deve-se ressaltar que esta técnica é geralmente citada na literatura, porém de forma bastante superficial, não se entrando em detalhes no que diz respeito à implementação computacional.

2.5 FLAMBAGEM DE VIGAS-COLUNA

Forças que agem axialmente em uma estrutura podem, à medida que aumentam de intensidade, causar a desestabilização da mesma a qualquer pequena perturbação lateral que lhe é introduzida. Isto ocorre quando a energia de deformação acumulada pela estrutura transforma-se em energia de

dobramento, isto é, grandes deslocamentos são necessários para se obter uma nova configuração de equilíbrio.

A figura 2.5 mostra uma estrutura sem imperfeições, submetida a carga axial F , perfeitamente centrada na linha neutra e dentro do limite proporcional de elasticidade. Se a carga F fosse menor que a chamada Carga Crítica de Flambagem e impuséssemos uma pequena perturbação δ dada por uma força lateral, ao retirar essa força, a estrutura voltaria à posição inicial. Se a carga F é aumentada de forma tal que a estrutura não mais retorna à posição inicial, tem-se um equilíbrio instável. A Carga Crítica de Flambagem é portanto aquela em que dado o deslocamento δ , a estrutura permanece na configuração deformada como mostrado na referida figura.

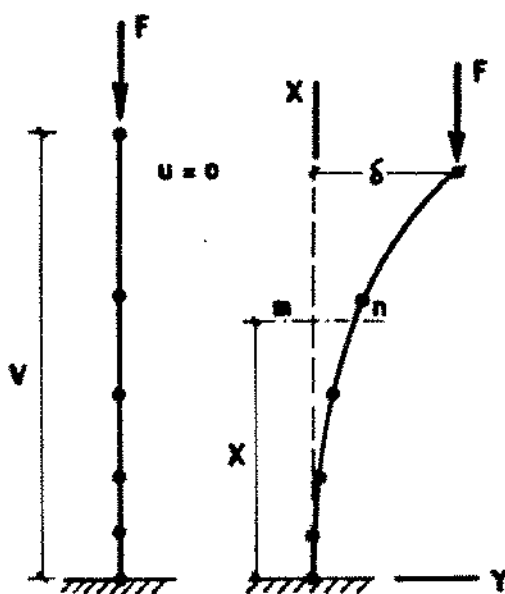


FIG.2.5 FLAMBAGEM DE VIGAS

Utilizando-se a equação 2.3.3, e notando-se que o momento fletor na seção *mn* (fig.2.5) é dado por: $M = - F (\delta - y)$, chega-se a equação diferencial do problema de flambagem dada por:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = F (\delta - y) \quad (2.5.1)$$

Analiticamente, resolve-se esta equação diferencial, sendo que para cada tipo de condições de contorno, isto é, para cada tipo de apoio estrutural nas extremidades, é possível obter-se tanto a primeira carga crítica, chamada carga crítica de Euler, como as demais, que representam cargas para modos superiores de flambagem, caso a estrutura fosse impedida de flambar no modo anteriormente calculado. Em termos práticos necessitamos da carga crítica de Euler para estabelecer a condição de instabilidade estrutural.

Para se estudar a flambagem utilizando o Método dos Elementos Finitos, tem-se que montar a matriz de rigidez geométrica, que quantifica a parcela da energia de deformação devido à associação dos deslocamentos nodais transversais com a força axial interna do elemento. É a matriz que dá conta do fato que uma viga lateralmente carregada deflete mais quando forças compressivas atuam sobre a mesma. A questão que se quer responder é: dada a distribuição de um estado de tensão fixo em uma estrutura, qual deve ser sua intensidade de forma que a configuração de flambagem seja mais uma configuração de

equilíbrio?

Seja λ uma quantidade escalar arbitrária e $\{ \bar{u} \}$ um vetor de deslocamentos infinitesimais. Podemos expressar as configurações acima descritas da seguinte forma:

$$\text{Configuração (1)} \quad ([K_E] + \lambda [K_G]) \{ u \} = \{ F \} \quad (2.5.2)$$

$$\text{Configuração (2)} \quad ([K_E] + \lambda [K_G]) \{ u + \bar{u} \} = \{ F \} \quad (2.5.3)$$

onde: $[K_E]$ = matriz de rigidez elástica

$[K_G]$ = matriz de rigidez geométrica (depende de $\{ u \}$,
de onde se calcula a força axial por elemento)

$\{ u \}$ = vetor de deslocamentos nodais

$\{ F \}$ = vetor de carregamento externo.

Subtraindo-se 2.5.3 de 2.5.2 chegamos:

$$([K_E] + \lambda [K_G]) \{ \bar{u} \} = \{ 0 \} \quad (2.5.4)$$

Como o vetor de deslocamentos infinitesimais é não nulo, a equação 2.5.4 define um problema de autovalores e autovetores algébricos, dado por:

$$| [K_E] + \lambda [K_G] | = 0 \quad (2.5.5)$$

onde: $| \quad |$ = determinante de uma matriz.

A solução do problema representado pela equação 2.5.5 nos leva aos autovalores λ_i ($i = 1, \dots, n$), onde n é a ordem do sistema de equações algébricas. A carga crítica de flambagem é dada então por:

$$\{ F_{CR_i} \} = \lambda_i \{ F \} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{sendo } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \end{array} \right. \quad (2.5.6)$$

A carga crítica de Euler é dada pela substituição do valor de λ_1 na equação 2.5.6 e o autovetor correspondente nos dá a primeira configuração de flambagem. Para cada autovalor subsequente, os respectivos autovetores nos fornecem as configurações superiores de flambagem. Os exemplos do capítulo 5 ilustram a implementação computacional da teoria acima descrita.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO

Mostra-se, neste capítulo, o método utilizado na solução do sistema de equações não-lineares resultante das modelagens descritas anteriormente. O procedimento de atualização da geometria da estrutura e da recuperação das forças internas nos leva à discussão dos sistemas de coordenadas e das formulações possíveis para o tratamento da não-linearidade devido a grandes deslocamentos. Estabelece-se o critério de convergência adotado, válido para outros métodos numéricos. Descreve-se a otimização sem restrição unidimensional, aplicável ao método de Newton-Raphson.

3.2 MÉTODO INCREMENTAL ITERATIVO – NEWTON-RAPHSON

O processo de discretização através do Método dos Elementos Finitos utilizando elementos de viga-coluna, considerado o efeito da matriz de rigidez devido à mola, resulta em um sistema do tipo:

$$[K_{TOT}(\{u\})] \{u\} = \{F\} \quad (3.2.1)$$

sendo: $[K_{TOT} (\{ u \})] = [K_{TG} (\{ u \})] + [K_{MOL} (\{ u \})]$

e: $[K_{TG} (\{ u \})] = [K_E (\{ u \})] + [K_G (\{ u \})]$

onde: $[K_{TOT} (\{ u \})]$ = matriz de rigidez total da estrutura

$[K_{TG} (\{ u \})]$ = matriz de rigidez tangente

$[K_E (\{ u \})]$ = matriz de rigidez elástica

$[K_G (\{ u \})]$ = matriz de rigidez geométrica

$[K_{MOL} (\{ u \})]$ = matriz de rigidez devido a mola

$\{ u \}$ = vetor de deslocamentos nodais

$\{ F \}$ = vetor de carregamentos externos.

Na apresentação das próximas equações é omitido o termo entre parênteses na representação das matrizes de rigidez, para simplicidade de leitura.

Na análise estrutural não-linear, tem-se que encontrar o estado de equilíbrio correspondente às cargas externas aplicadas. Devido à consideração da influência do esforço axial na deformação da viga coluna, a configuração deformada final é função do próprio vetor de deslocamentos, isto é, a matriz de rigidez tangente é dependente dos deslocamentos ocasionados pelo carregamento externo, assim como a matriz de rigidez de mola, devido ao efeito de restrição lateral à viga, varia dependendo do vetor de deslocamentos.

A base para a solução numérica do problema está em se aplicar o carregamento externo de forma incremental. Tendo-se a solução para a configuração de deslocamentos em um dado nível de carga fica possível se determinar uma nova matriz de rigidez

total para a configuração dada por esta solução, e partir-se então para um novo incremento de carga.

Para um processo puramente incremental, tem-se o seguinte equacionamento:

$$[K_{TOT}]^{INC-1} \{ \Delta u \}^{INC} = \lambda^{INC} \{ F \} \quad (3.2.2)$$

onde: λ^{INC} = quantidade escalar que representa a parcela de carga aplicada no passo "INC" de carregamento.

A configuração deformada da estrutura é obtida de:

$$\{ u \}^{INC} = \{ u \}^{INC-1} + \{ \Delta u \}^{INC} \quad (3.2.3)$$

onde: $\{ u \}^{INC}$ = vetor de deslocamentos total ao final do incremento.

$\{ u \}^{INC-1}$ = vetor de deslocamentos total ao final do incremento anterior.

$\{ \Delta u \}^{INC}$ = vetor da variação de deslocamentos, obtido da equação 3.2.2.

A figura 3.1 representa um processo puramente incremental para um modelo com um grau de liberdade.

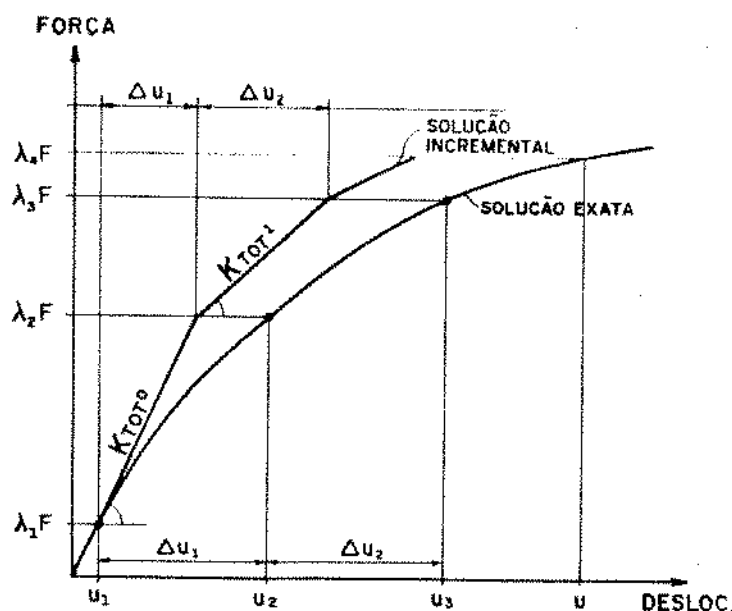


FIG. 3.1 PROCESSO PURAMENTE INCREMENTAL

O processo acima descrito tem a vantagem de sua simplicidade, apresentando porém a desvantagem fundamental de não satisfazer o equilíbrio estrutural a cada passo de carregamento. Para se efetuar esta verificação é necessário introduzir-se uma forma de avaliar a condição de equilíbrio, que consiste no processo iterativo dentro do incremento de carregamento. Destas considerações resulta um novo equacionamento matricial dado por:

$$[K_{TOT}]_{INC}^{IT-1} \{ \Delta u \}_{INC}^{IT} = \{ FD \}_{INC}^{IT} \quad (3.2.4)$$

onde: $\{ FD \}_{INC}^{IT}$ = vetor de forças desbalanceadas ou vetor de resíduo, calculado através da equação:

$$\{ FD \}_{INC}^{IT} = \lambda_{INC} \{ F \} - \sum [\bar{K}_{TOT}(\bar{u})]_{INC}^{IT-1} \{ \bar{u} \}_{INC}^{IT-1} \quad (3.2.5)$$

onde: Σ = representa a superposição da matriz de cada elemento

de forma a se montar a matriz de rigidez global do sistema estrutural.

II = iteração de equilíbrio

A barra sobre a matriz de rigidez do elemento e vetor de deslocamentos, representa-os no sistema local de coordenadas.

O segundo termo do lado direito da equação 3.2.5 é denominado vetor de forças internas ou de forças restauradoras. Detalhando-se esta equação com a inclusão do efeito de contato, chega-se à seguinte equação, escrita para as matrizes globais:

$$[K_{TOT}] \{ u \} = [K_{TOT}] \{ u \} - [K_{MOL}] \{ \Delta_{GAP} \} \quad (3.2.6)$$

onde: $\{ \Delta_{GAP} \}$ = vetor que inclui o "gap" especificado para cada grau de liberdade.

A equação 3.2.3 da acumulação dos deslocamentos fica modificada para:

$$\{ u \}_{INC}^{II} = \{ u \}_{INC}^{II-1} + \{ \Delta u \}^{II} \quad (3.2.7)$$

Isto significa que dentro de cada passo de carregamento são realizadas iterações de equilíbrio, que é verificado através da adoção de um critério de convergência, que é explicado adiante. Obtida a resposta do equilíbrio estrutural procurado, pode-se partir para um novo incremento de carga, com o reinício do processo iterativo, sendo contínuo o processo de acumulação de deslocamentos.

As equações 3.2.4 e 3.2.7 constituem o método incremental iterativo de Newton-Raphson, cuja representação gráfica para um sistema com um grau de liberdade é mostrada na figura 3.2. Uma forma alternativa de se utilizar este método é manter a mesma matriz de rigidez tangente durante o incremento de carregamento, que constitui o método de Newton-Raphson modificado. A diferença entre um e outro método reside no tempo computacional dispendido para a atualização e decomposição da matriz $[K_{TOT}]$ durante as iterações. Assim, dependendo do tipo de problema e ambiente computacional pode-se ter uma maior eficiência, aumentando-se o número de iterações, porém efetuando-se os cálculos mais rapidamente. A adequação do número de incrementos escolhido para um dado problema poderá também ser balizada pelo número de iterações necessárias a cada passo de carregamento.

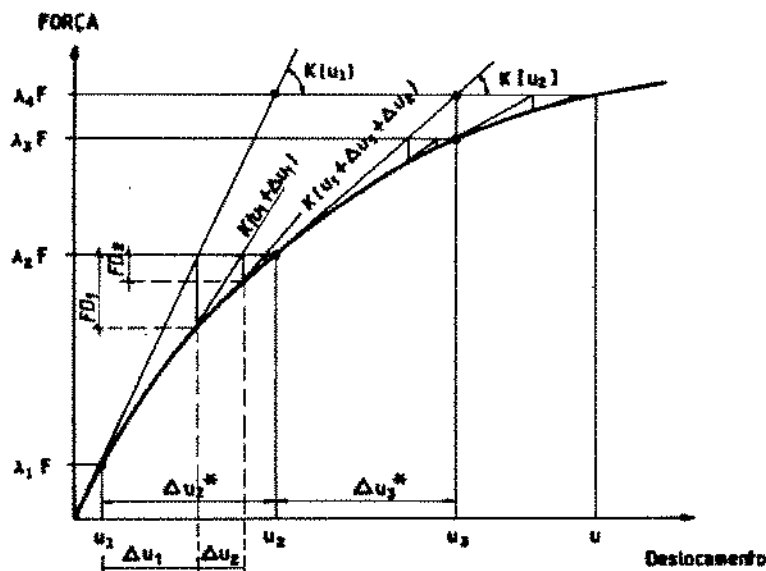


FIG.3.2 PROCESSO INCREMENTAL ITERATIVO (NEWTON-RAPHSON)

3.3 ATUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA E RECUPERAÇÃO DAS FORÇAS INTERNAS

A dependência implícita da matriz de rigidez total em relação ao vetor de deslocamentos acumulados durante o processo incremental iterativo é introduzida através do cálculo da força axial em cada elemento e de uma transformação de coordenadas. A figura 3.3 mostra dois sistemas de coordenadas ilustrados no problema de coluna de perfuração. O primeiro sistema (x,y,z) tem o eixo z no plano vertical, podendo o eixo x estar alinhado, por exemplo, com a direção Leste ou o azimuth de projeto do poço direcional. Esse sistema é chamado de global. No sistema de eixos $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ nota-se o alinhamento do eixo $\bar{x}$ com o eixo longitudinal de um elemento finito discretizado. Para definição dos eixos $\bar{y}$ e $\bar{z}$, pode-se, por exemplo, tomar o produto vetorial entre $\bar{x}$ (local) e z (global) para gerar $\bar{y}$ e o produto vetorial $\bar{x} \times \bar{y}$ para gerar os cossenos diretores de $\bar{z}$ (caso tridimensional). Para o caso plano, a figura 3.4 mostra os sistemas de coordenadas global e local, sendo apresentada a seguir a matriz de rotação que relaciona um ponto do sistema global para o sistema local.

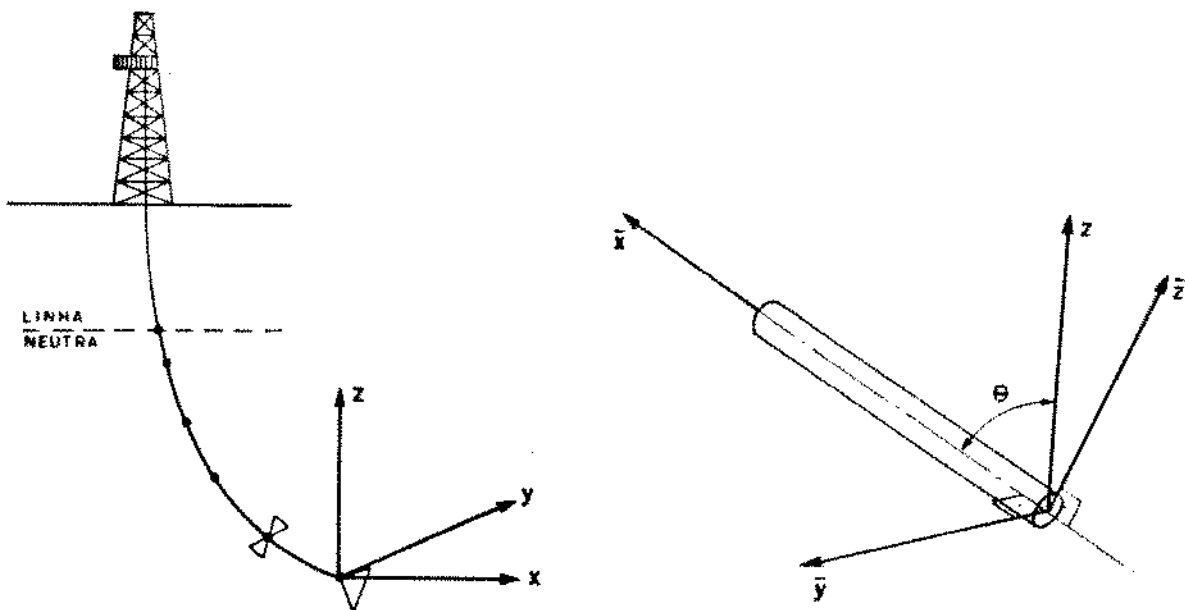


FIG. 3.3 SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAL E LOCAL PARA O CASO TRIDIMENSIONAL

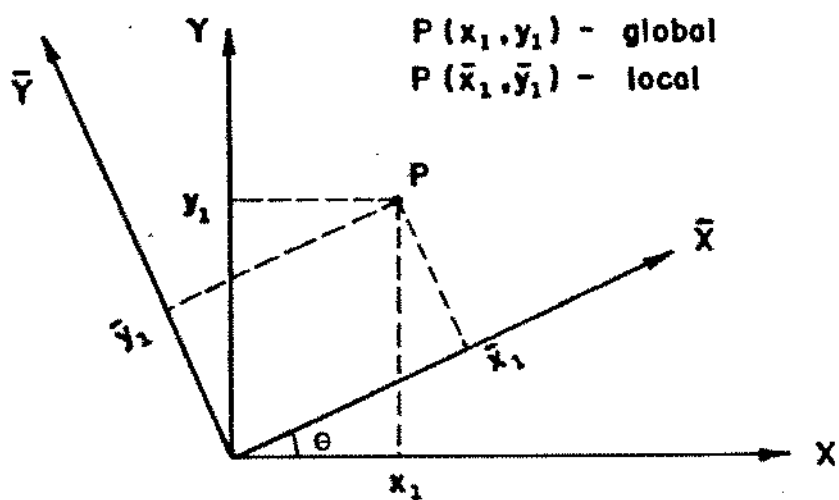


FIG. 3.4 SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAL E LOCAL PARA O CASO PLANO

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta \end{Bmatrix}$$

onde: $\begin{bmatrix} \uparrow \\ t \end{bmatrix}$ = matriz de rotação.

Está demonstrado no apêndice, que a integração dos termos da equação diferencial do elemento da viga-coluna gera as matrizes de rigidez elástica e geométrica para um sistema de eixos local, isto é, eixo $\bar{x}$ alinhado com o elemento reto de viga-coluna. Isto significa que na equação do processo incremental iterativo tem-se que, para cada elemento, calcular os termos das matrizes no sistema local e transformá-los para o sistema global, uma vez que o carregamento externo $\{ F \}$ normalmente é referido ao sistema global, assim como o vetor dos deslocamentos finais $\{ u \}$.

A transformação que leva a matriz de rigidez de um elemento nas coordenadas locais $[\bar{K}_e]$ para a compatibilização em relação aos deslocamentos e forças no sistema global é dada por :

$$[\bar{K}_e]_{gt} = [T]^T [\bar{K}_e] [T] \quad (3.3.1)$$

$$\text{onde : } [T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} t = \text{transposta de} \\ \quad \text{uma matriz} \\ e = \text{elemento} \\ gt = \text{global} \end{array}$$

Para o acompanhamento da configuração deformada de um

elemento discretizado, necessita-se ainda definir em relação a que configuração é feita a transformação de coordenadas dentro do processo incremental iterativo. A figura 3.5 mostra um corpo sólido em 3 diferentes situações: indeformado; no incremento "J", considerado anterior; no incremento "J+1", que se deseja calcular. Dentre as formulações possíveis para a descrição da deformação deste corpo elástico, situam-se no contexto deste trabalho:

a) Formulação Lagrangeana Total (FLT), onde a configuração inicial ou indeformada sempre é tomada como referência para a aplicação da equação 3.3.1.

b) Formulação Lagrangeana Atualizada (FLA), onde se utiliza a configuração do incremento anterior como referência para a transformação de coordenadas dada por 3.3.1, isto é, a cada passo de carregamento atualiza-se a posição da estrutura, que é tomada como nova referência.

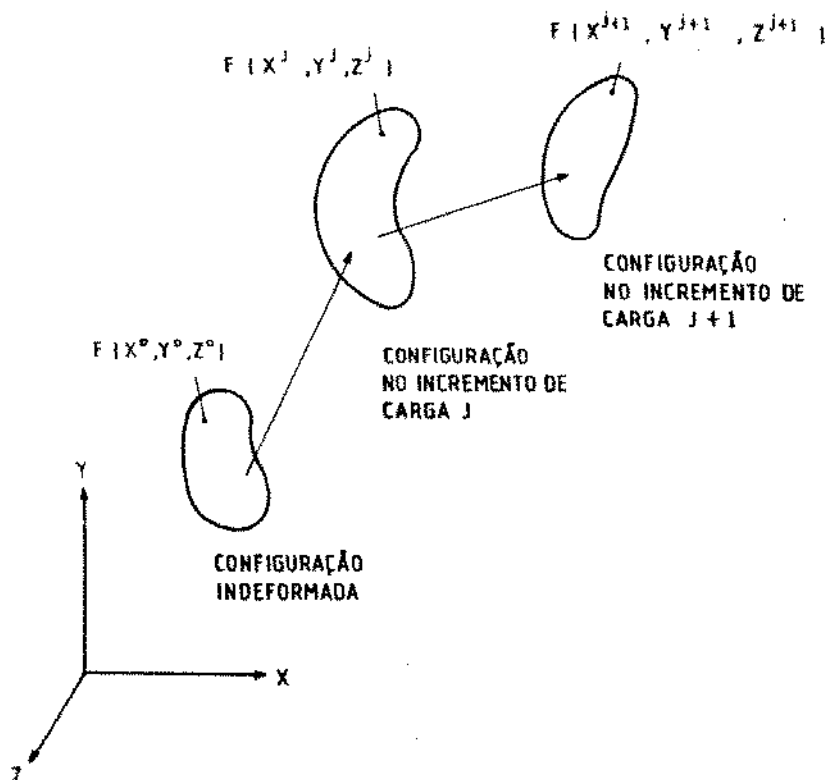


FIG. 3.5 CONFIGURAÇÕES DE REFERÊNCIA

Em vista das definições acima descritas, podemos distinguir que a equação 3.2.5 para a força desbalanceada está escrita para a FLT. Para a FLA teríamos a seguinte equação:

$$\{ FD \}^{IT} = \Delta \lambda^{INC} \{ F \} - \sum [k(\hat{u})]^{IT-1} \{ \hat{u} \}^{IT-1} \quad (3.3.2)$$

onde: $\Delta \lambda^{INC} \{ F \}$ = variação de carga entre dois incrementos

$\{ \hat{u} \}$ = é o deslocamento total acumulado dentro do passo de carregamento, isto é durante o processo iterativo

A equação análoga à eq. 3.2.7, para a FLA fica dada por:

$$\{ u \}_{INC} = \{ u \}_{INC-1} + \{ \hat{u} \} \quad (3.3.3)$$

Neste caso, a atualização da geometria feita através da soma de coordenadas e cálculo do novo ângulo entre o elemento na configuração anterior e atual só é feita na passagem para o próximo incremento de carga.

Existe alguma controvérsia entre os autores no que diz respeito à FLA com relação a uma terceira possível formulação, denominada Euleriana, onde o sistema de eixos local deforma-se juntamente com o elemento, que envolveria o uso de coordenadas convexas. De modo geral é reconhecido que a FLA apresenta maior simplicidade do que a FLT para a análise de problemas de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Ambas fornecem resultados idênticos nas análises não-lineares, desde que corretamente empregadas [11] .

Devido à inclusão do efeito de contato, e em vista da equação 3.2.6 referir-se a deslocamentos totais, foi implementada a FLT para se efetuar as análises de colunas de perfuração.

Um último e fundamental ponto a ser analisado neste item é o chamado processo de recuperação das forças internas. A subdivisão de um vetor de carregamentos em incrementos visa diminuir o grau de não-linearidade de um problema. Mesmo assim, quando a maior parcela da variação de configuração de um elemento finito é devida ao movimento de corpo rígido, sem haver grande variação no estado de deformação, o processo

anteriormente descrito incorre em uma variação artificial das forças internas no elemento. No caso do elemento finito implementado neste trabalho, estamos nos referindo principalmente à força axial presente na matriz de rigidez geométrica, e ao cálculo do vetor de forças desbalanceadas. O problema é bastante mais complexo no caso tridimensional, onde há movimentos de rotação em torno dos 3 eixos cartesianos.

No caso plano, utiliza-se uma correção na componente axial do vetor das forças internas, dada por:

$$\epsilon_x = \frac{L^{II} - L^{II-1}}{L^{II-1}} \quad (3.3.4)$$

onde ϵ_x = deformação axial no sistema local

L = comprimento do elemento finito

Consequentemente, a força axial no vetor de forças internas é dada por:

$$F_e = E A \epsilon_x \quad (3.3.5)$$

onde F_e = força axial no elemento finito.

Para maiores esclarecimentos sobre este assunto destacamos as refs. [12,13] .

3.4 OTIMIZAÇÃO E CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

A procura do equilíbrio estrutural pode ser avaliada de vários modos, dependendo do critério de convergência utilizado. Além disso, esta procura pode ser otimizada através do uso de métodos matemáticos de otimização aplicados a estes métodos iterativos.

No nosso caso, temos como objetivo minimizar o vetor de forças desbalanceadas ou vetor resíduo (eq.3.2.5). Há que se avaliar portanto, se ao final de cada iteração, a solução encontrada convergiu dentro de tolerâncias admissíveis, ou se está divergindo. Tolerâncias muito altas podem levar a resultados imprecisos, assim como se muito baixas levam a um esforço computacional dispendioso e despropositado. Um critério de convergência inadequado ou ineficiente pode interromper um processo iterativo durante um encaminhamento para uma solução correta, assim como pode forçar a busca de uma solução inatingível.

Deve-se salientar que geralmente os métodos de solução existentes não garantem estabilidade de convergência, nem mesmo a precisão e a veracidade de uma solução, principalmente em situações limites. Alguns critérios de convergência são discutidos na referência [14] deste trabalho.

O critério adotado no desenvolvimento do programa de computador com o objetivo de, entre outros, ser utilizado para análise da coluna de perfuração, é traduzido pela equação:

$$\frac{|| \{ FD \} ||}{|| \Delta \lambda \{ F \} ||} \leq \epsilon \quad (3.4.1)$$

onde: $|| \quad ||$ = norma euclidiana do vetor a que se aplica.

obs: demais variáveis já especificadas anteriormente.

A equação 3.4.1 pode ser aplicada a qualquer uma das formulações vistas, seja aos sistemas Lagrangeano Atualizado ou Total. No Total pode-se utilizar λ ao invés de $\Delta \lambda$ no seu denominador. Esta equação nos dá uma medida da força desequilibrada em relação à parcela de carregamento aplicado naquele passo de iteração corrente. Comentários adicionais sobre a especificação da tolerância, bem como a questão do número de incrementos associado ao comportamento do número de iterações, são vistos no capítulo de exemplos de aplicação do programa. Para a otimização do processo iterativo foi utilizado um método da classe dos métodos de gradiente, onde basicamente se modifica a equação 3.2.7 para:

$$\{ u \}_{INC}^{II} = \{ u \}_{INC}^{II-1} + \alpha \{ \Delta u \}^{II} \quad (3.4.2)$$

onde: α = um fator escalar que multiplicado pelo vetor $\{ \Delta u \}^{II}$ aproxima mais rapidamente a solução correta de $\{ u \}_{INC}^{II}$, o que equivale a um tipo de minimização do vetor resíduo $\{ FD \}$.

Estabelece-se um intervalo de valores máximo e mínimo

para o valor de α que pode ser modificado em função do tipo do problema ou pode ser automaticamente variado. Tem-se, então a cada iteração, a geração de uma função dependente de α que deve ser minimizada. Para tanto, calcula-se o gradiente desta função, que nada mais é que o valor de $-\{FD\}$ em função da equação (3.4.2), no caso da formulação pelo Método dos Elementos Finitos. Chega-se a uma função de $f(\alpha)$ definida por:

$$f(\alpha) = \left\{ q \left[\left(u \right)_{INC}^{IT-1} + \alpha \left(\Delta u \right)^{IT} \right] \right\}^T \left\{ \Delta u \right\}^{IT} \quad (3.4.3)$$

onde: f = função ; q = gradiente ; T = transposta do vetor.

A primeira expressão do lado direito de 3.4.3 equivale

ao cálculo do vetor: $\left\{ -FD \left[\left(u \right)_{INC}^{IT-1} + \alpha \left(\Delta u \right)^{IT} \right] \right\}$

Encontrando-se o valor de α que satisfaça $f(\alpha) = 0$ dentro do intervalo especificado, via algum método de calcular raízes de funções, como por exemplo o método da secante, determina-se o parâmetro que otimiza o processo iterativo.

Geometricamente, a procura do α ótimo é interpretada como a busca de um mínimo de uma função, cuja direção de procura tem sentido contrário ao do vetor gradiente desta função no ponto considerado. Para maiores detalhes, pode-se consultar as refs. [15,16] .

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 INTRODUÇÃO

A principal vantagem que o MEF tem em relação a outras técnicas de análise é sua grande generalidade e versatilidade. Com a discretização em um número crescente de elementos é possível aproximar um problema com as mais complicadas condições de carregamento e contorno para se chegar a resultados mais e mais precisos. As limitações do processo são devidas aos custos decorrentes do tempo computacional, capacidade de memória do ambiente computacional, e erros de arredondamento e truncamento inerentes a qualquer processo numérico. A meta é então utilizar elementos finitos e algoritmos eficientes de modo a se aproveitar ao máximo o que um sistema de processamento e a linguagem utilizada possam oferecer.

A implementação do elemento de viga-coluna foi feita, como mencionado anteriormente, em um programa de computador já existente. Procura-se destacar os aspectos mais interessantes deste programa, como por exemplo, a alocação automática de memória, e detalhar, da melhor forma possível, as modificações necessárias para a execução de análises não-lineares.

4.2 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

O programa existente é uma ferramenta para análise geral de estruturas complexas, estática ou dinâmica, com a utilização do Método dos Elementos Finitos. Representa muitos anos de experiência em pesquisa e desenvolvimento em sistemas estruturais lineares. Tem origem no extenso programa iniciado na University of Califórnia, Berkeley, EUA, do qual resultaram os códigos SAP IV, NONSAP, e SOLID SAP. Prosseguiu no Brasil com a contribuição do Instituto Militar de Engenharia, e complementação pelo grupo do Centro de Pesquisas da Petrobrás (CENPES).

A principal característica do programa é a de ser facilmente modificado, estendido e sofrer manutenção. Deste programa podem ser montados outros menores de aplicação especial, usando o núcleo central e as respectivas rotinas necessárias. Quanto à biblioteca de elementos, encontram-se implementado no programa os elementos estruturais: quadrilátero plano de 4 nós, para análise de estado plano de tensão/deformação; barra e viga de 2 nós. Este último, com 2 graus de liberdade por nó, permite somente o cálculo de deslocamentos e esforços devidos à flexão da viga no âmbito da teoria linear.

A capacidade do programa fica apenas condicionada ao computador usado, "não havendo" restrição quanto ao número de elementos ou o número de casos de carregamentos especificados.

A estrutura de entrada e saída de dados corresponde a uma viga espacial, isto é, cada ponto nodal tem 6 graus de liberdade, que são acionados ou não por um código binário. As matrizes de rigidez são armazenadas sob forma condensada, vetorialmente na configuração "sky-line", que elimina zeros na montagem da matriz global decorrentes da superposição das matrizes dos elementos. O sistema de equações é resolvido pelo método da decomposição triangular de Gauss, adaptado para o tipo de condensação de matriz utilizada. A base do programa pode ser encontrada nas refs. [9,10] .

A figura 4.1 mostra o esquema geral do programa de elementos finitos, já inserido o processo incremental iterativo decorrente da análise não-linear. Podemos observar as fases básicas de:

- a) Leitura de dados nodais, coordenadas e condições de contorno ,para o estabelecimento do número de equações do sistema;
- b) Leitura e cálculo do vetor de carregamento;
- c) Leitura de dados dos elementos e suas características;
- d) Montagem da matriz global do sistema, efetuada a partir da superposição das matrizes dos elementos;
- e) Solução do sistema de equações, obtendo-se o vetor de deslocamentos dos pontos nodais;
- f) Verificação de convergência dentro do processo iterativo;
- g) Verificação de término do carregamento total;

h) Cálculo dos esforços resultantes, e saída de dados.

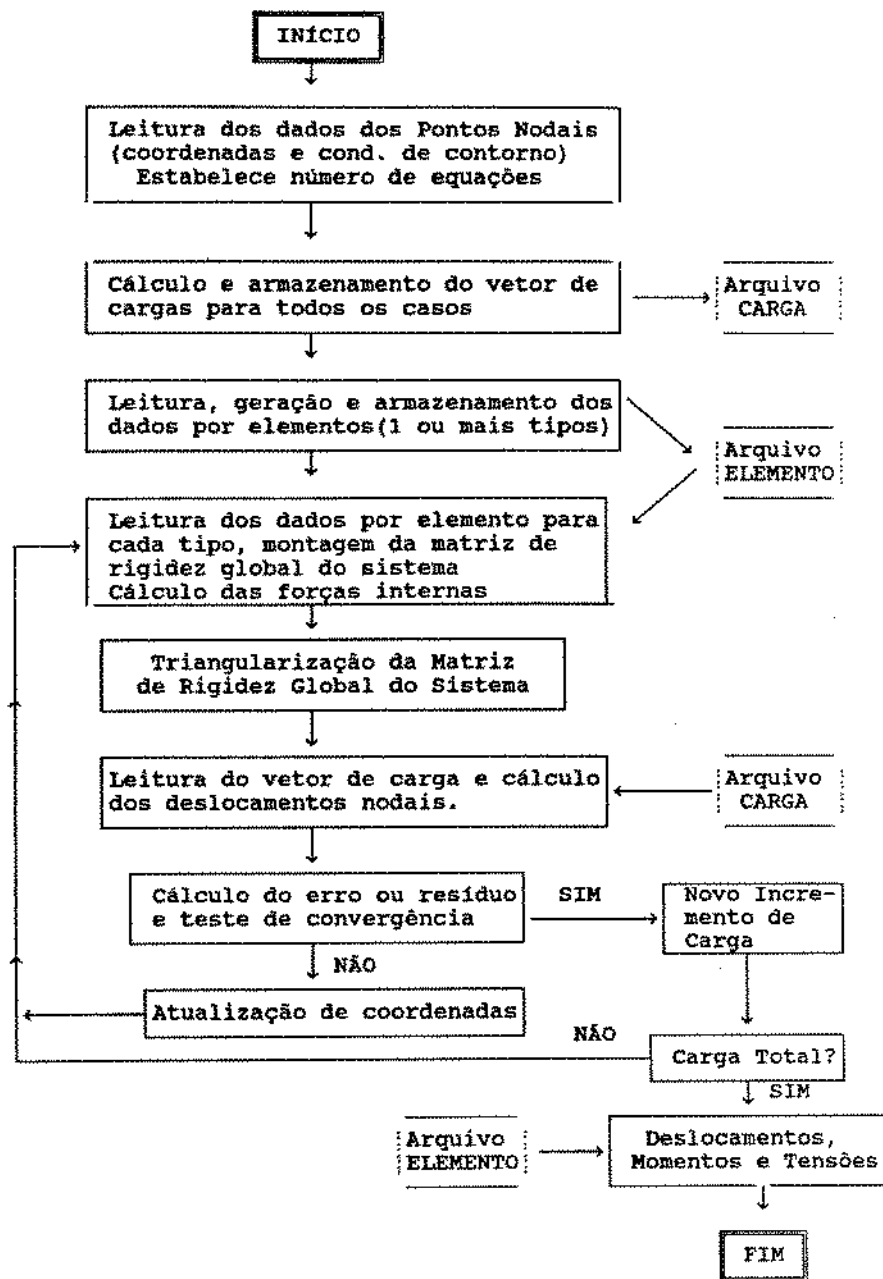


FIG. 4.1 ESQUEMA BÁSICO DO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

A linguagem utilizada é o FORTRAN 77, com o recurso de alocação automática de memória. Consiste em armazenar em único vetor e em ordem sequencial, todos os vetores e matrizes de forma a haver um dimensionamento justo e correto para cada variável indexada. Usam-se "apontadores", que demarcam, por exemplo, que da posição 1 até a posição 10 do vetor único estão guardadas as coordenadas "x" de cada elemento, da posição 11 a 40 a matriz de rigidez da estrutura, e assim por diante. Com isso se otimiza o acesso à memória e o desperdício de dimensionamento, muito comum no uso dessa linguagem.

Para se possibilitar uma análise não-linear, implementada com o elemento finito de viga-coluna necessitam-se dos seguintes dados adicionais de entrada: o número de incrementos em que se divide o carregamento da estrutura; o número máximo de iterações permitidas dentro de um incremento (a fim de se obter a convergência do equilíbrio estrutural naquele passo de carregamento); o valor da tolerância para a convergência, conforme explicado no item 3.4., capítulo 3.

Devido ao efeito de restrição lateral da viga também implementado, deve-se entrar com o valor da distância transversal de livre movimentação para cada nó de um dado elemento. Seja qual for a geometria de um poço de petróleo ou a posição do sistema de coordenadas global, esta distância ou "gap" é interpretada a nível de sistema local de coordenadas, isto é, como se o elemento discretizado da coluna de perfuração e o poço fossem paralelos.

Quanto ao carregamento, no programa base só se permite entrar com carregamento concentrado por nó. Para maior facilidade de entrada destes dados, criou-se uma rotina que utiliza como dado de entrada o peso distribuído linearmente no elemento discretizado, dado fundamental na especificação de colunas de perfuração. Este carregamento distribuído é transformado em carga nodal estaticamente equivalente, de acordo com a solução dada por Przemieniecki [17], sendo mais preciso devido à consideração dos momentos nodais equivalentes que variam de elemento para elemento, quando variam seus comprimentos ou a direção de seus eixos longitudinais.

4.3 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Como dados de saída, além dos deslocamentos referidos ao sistema de coordenadas global, foram acrescentadas as forças de reação nos pontos de contato da estrutura quando há restrição imposta. As forças obtidas são referidas aos sistemas de coordenadas local e global para a escolha mais conveniente. No caso da coluna de perfuração, as reações de apoio de broca e estabilisadores em vários trabalhos são obtidas modelando-se como apoios sem movimento transversal; neste trabalho utiliza-se uma folga ou "gap" igual a zero para obtenção das forças reativas. A questão da grande ou pequena rigidez de mola é representada pela inclusão da matriz de rigidez de mola, como

foi explicado, cujos coeficientes são dados por um número de alto valor em relação aos termos da matriz de rigidez tangente, ou um número de baixo valor, sendo testada também rigidez zero enquanto não há contato. Deve-se tomar cuidado, portanto, com o sistema de unidades utilizado, a fim de que no caso da grande rigidez, este número não seja tão alto de modo a causar instabilidade numérica na resolução do sistema de equações.

Uma vez que se tenha os deslocamentos da estrutura, pode-se calcular os momentos de flexão da seguinte forma: transforma-se os deslocamentos globais por elemento em deslocamentos locais, e aplica-se a equação 2.3.3, cap. 2, que na forma matricial para o Método dos Elementos Finitos é dado por:

$$\begin{matrix} \{ M \} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = EI \begin{matrix} [N_{\beta}'''] \\ 2 \times 4 \end{matrix} \begin{matrix} \{ \bar{u} \} \\ 4 \times 1 \end{matrix} \quad (4.3.1)$$

onde: $\{ M \}$ = momentos nos nós i e j

$[N_{\beta}''']$ = derivada segunda da função interpoladora cúbica de flexão em $x=0$ e $x=L$ (L =comprimento do elemento) β variando de 1 a 4 .

$\{ \bar{u} \}$ = vetor contendo somente os deslocamentos transversais e rotações a nível local.

Para cada geometria particular do elemento, uma vez calculados os momentos nos nós, pode-se calcular as tensões máximas e mínimas, superpondo com as tensões devidas às forças axiais que são facilmente calculáveis, já que o programa

calcula normalmente as forças axiais por elemento para a montagem da matriz de rigidez geométrica local.

4.4 PROGRAMAS DESENVOLVIDOS

Como resultados dos estudos desenvolvidos, deseja-se ressaltar as seguintes contribuições em relação ao programa base:

- 1) Expansão da rotina de viga linear de 2 graus de liberdade por nó para viga linear com 3 graus de liberdade por nó, com efeito desacoplado de esforço axial. Implementação da matriz de rotação, que equivale à extensão para a resolução de outros problemas lineares planos, como por exemplo, pórticos.
- 2) Implementação de algoritmo utilizando a Formulação Lagrangeana Atualizada sem efeito de restrição lateral, para a resolução de problemas de grande não - linearidade geométrica envolvendo grandes rotações.
- 3) Implementação de algoritmo utilizando a Formulação Lagrangeana Total, com efeito de restrição lateral, para a simulação de casos como a coluna de perfuração ou estruturas sob fundação elástica, envolvendo pequenas e médias rotações.

4) Programa para cálculo de cargas críticas em estruturas, para propiciar análises de estabilidade. Foi feita uma adaptação, para o caso estático, da rotina de resolução de problemas de autovalor usada nos problemas dinâmicos, uma vez que matriz de rigidez geométrica no caso estático pode ser não positiva-definida, contrariamente às matrizes de massa da análise dinâmica.

A técnica numérica de otimização, descrita no capítulo anterior, foi testada em alguns casos e sua eficiência foi comprovada na redução do número de iterações em vários exemplos. Necessita-se porém melhorar a sua implementação, para que o tempo necessário para o cálculo do alfa ótimo diminua (ver equação 3.4.2). Testes com valores de alfa fixos e menores que 1.0 tornaram a convergência, para os casos de coluna de perfuração, monotônica decrescente em casos em que a variação do resíduo ou erro oscilava muito devido à entrada ou saída da rigidez de mola no processo, chegando às vezes à divergência. Para estes casos, notou-se também que poucos passos de carregamento foram suficientes para a obtenção das soluções procuradas. Estas observações são ilustradas no capítulo seguinte de exemplos e resultados.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS E RESULTADOS OBTIDOS

5.1 INTRODUÇÃO

Os exemplos que são apresentados objetivam validar a implementação computacional descrita no capítulo anterior de forma gradual. Constam das etapas de implementação da matriz de rotação do sistema juntamente com a matriz de rigidez elástica para o caso linear, seguidos da matriz de rigidez geométrica e o processo incremental iterativo, inicialmente testado para uma treliça. Seguem-se, então, exemplos utilizando as matrizes de viga-coluna. Os resultados obtidos são comparados com aqueles de trabalhos conhecidos e com resultados analíticos. Finalmente, a implementação da modelagem do contato é apresentada. Todo o conjunto de análise de não-linearidade geométrica é então utilizado para os casos de coluna de perfuração e vigas sob fundação elástica. A análise de flambagem é testada com casos clássicos de cálculos de carga crítica de Euler para diversas condições de contorno.

Nos casos não-lineares, sem o efeito de restrição, foi utilizada a Formulação Lagrangeana Atualizada, e nos restantes, a FL Total. Encontram-se no anexo deste trabalho alguns exemplos de arquivos de entrada e saída dos problemas abaixo descritos.

5.2 ANÁLISE LINEAR

Destacamos dois exemplos para a demonstração da implementação da matriz de rotação e expansão do elemento de viga linear de 2 para 3 graus de liberdade por nó.

Exemplo 5.2.1) A viga em balanço da figura 5.1 está a 30 graus com relação ao sistema global de eixos. Uma carga unitária perpendicular à viga é aplicada, desejando-se saber os deslocamentos vertical e horizontal referidos ao sistema global. A solução analítica é bastante conhecida. É o valor da flecha dada pela equação $FL^3/3EI$ projetada nas respectivas direções globais. Em unidades compatíveis obtivemos os seguintes resultados:

	Δv	Δh	θ
solução analítica	0.2889	0.1667	-0.5000
programa	0.2888	0.1667	-0.5002

Dados : $E = I = F = L = 1.0$

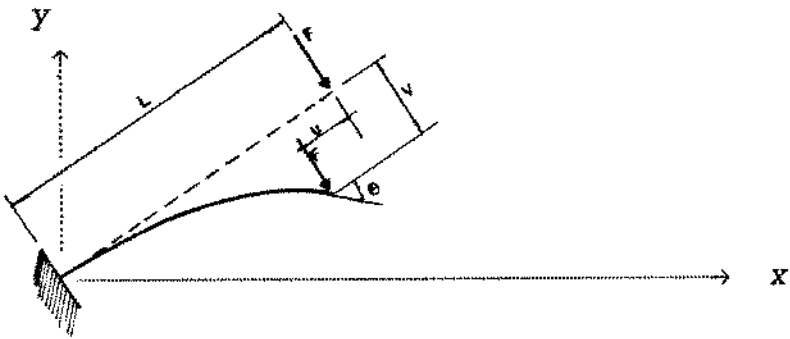


FIG. 5.1 VIGA EM BALANÇO A 30 GRAUS

A discretização foi feita com 4 elementos. O carregamento foi obtido pela decomposição da carga unitária nas direções x e y .

Exemplo 5.2.2) O pórtico plano da figura 5.2 com 2 cargas concentradas tem solução analítica que pode ser encontrada na ref. [18], onde se deseja saber o deslocamento horizontal do ponto "E". A solução analítica resultou, para os dados de entrada constantes na figura, em 1,58 polegadas (4.01 cm). A solução dada pelo programa resultou em 1.59 polegadas (4.04 cm). A discretização foi feita com 7 nós, portanto 6 elementos, notando-se sempre a existência do nó onde se é aplicado o carregamento.

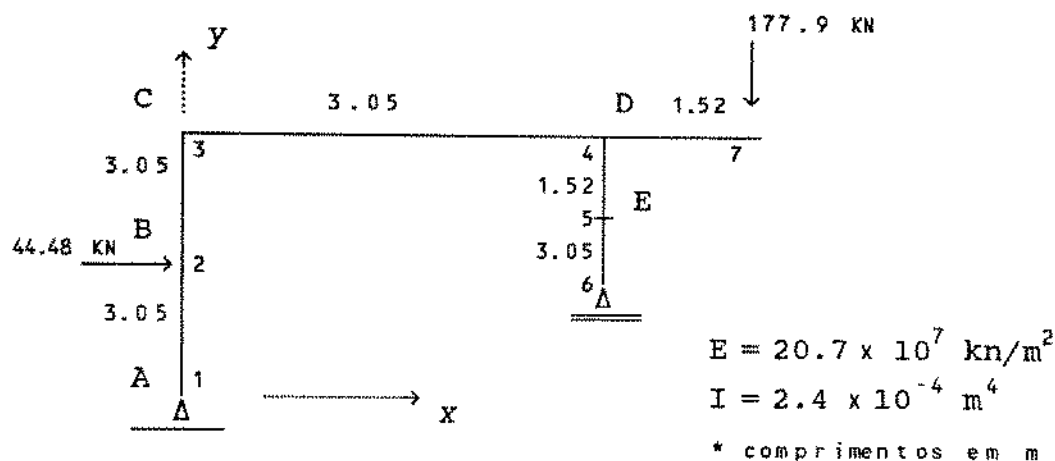


FIG. 5.2 PÓRTICO PLANO COM CARGAS CONCENTRADAS

5.3 ANÁLISE NÃO-LINEAR

Exemplo 5.3.1) A treliça plana da figura 5.3, com carga no eixo de simetria tem solução não-linear analítica dada por Bathe [9,10]. Deseja-se saber o comportamento do deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga em função do aumento gradual da mesma. O gráfico da figura abaixo mostra uma comparação feita com um programa de elementos finitos do Departamento de Mecânica Computacional da Universidade de Campinas [19].

Dados: $E=1000$; $A=1$; $F=3$ em unidades consistentes.

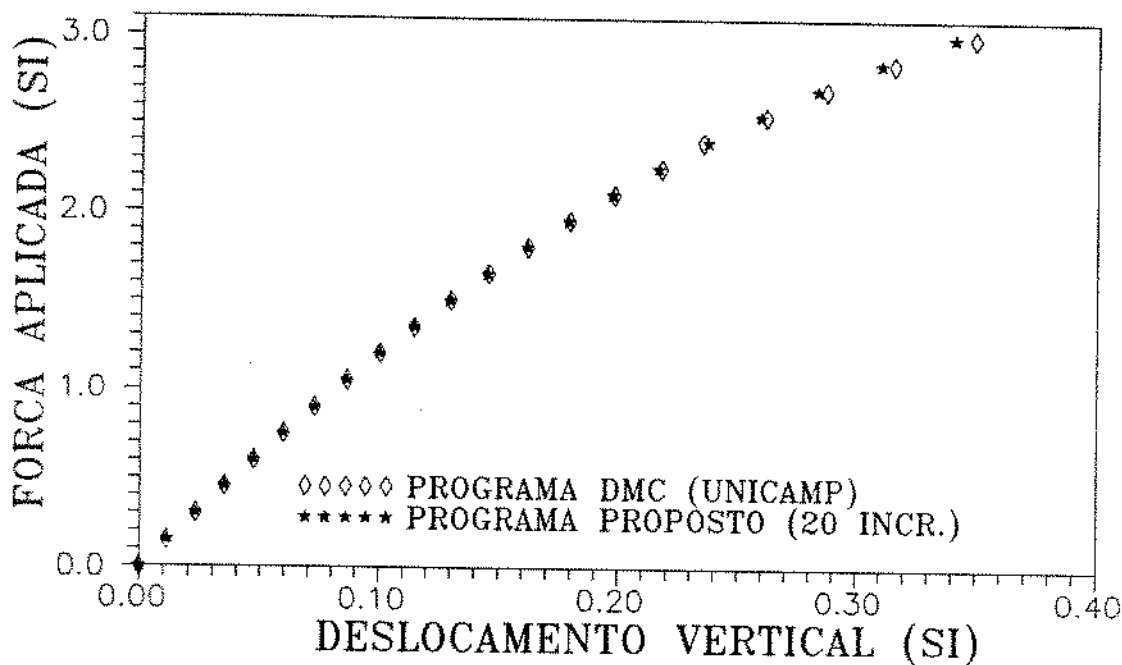
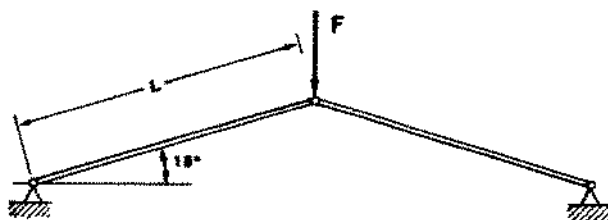


FIG. 5.3 TRELIÇA PLANA COM CARGA CONCENTRADA

O efeito da otimização unidimensional pode ser observado com a redução do número de iterações, conforme mostrado na tabela 5.1.

TABELA 5.1-EFEITO DA OTIMIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL

INCREMENTO	NÚMERO DE ITERAÇÕES	
	SEM OTIMIZAÇÃO	COM OTIMIZAÇÃO
1	5	4
2	6	4
3	6	4
4	6	4
5	7	4
6	7	4
7	9	4
8	8	4
9	8	5
10	9	6
11	10	5
12	10	6
13	10	6
14	12	6
15	12	6
16	13	7
17	14	8
18	15	8
19	17	9
20	20	10

Exemplo 5.3.2) A viga em balanço com carga na extremidade, mostrada na figura 5.4, tem solução não-linear para a variação dos deslocamentos transversais e axiais calculada através do uso de integrais elípticas, demonstrada por Mattiasson [20]. O gráfico compara estes resultados com os do programa de Elementos Finitos, demonstrando uma excelente concordância para

o número de elementos utilizados. Usa-se um grupamento adimensional para o eixo y e o valor do deslocamento dividido pelo comprimento da viga para o eixo x.

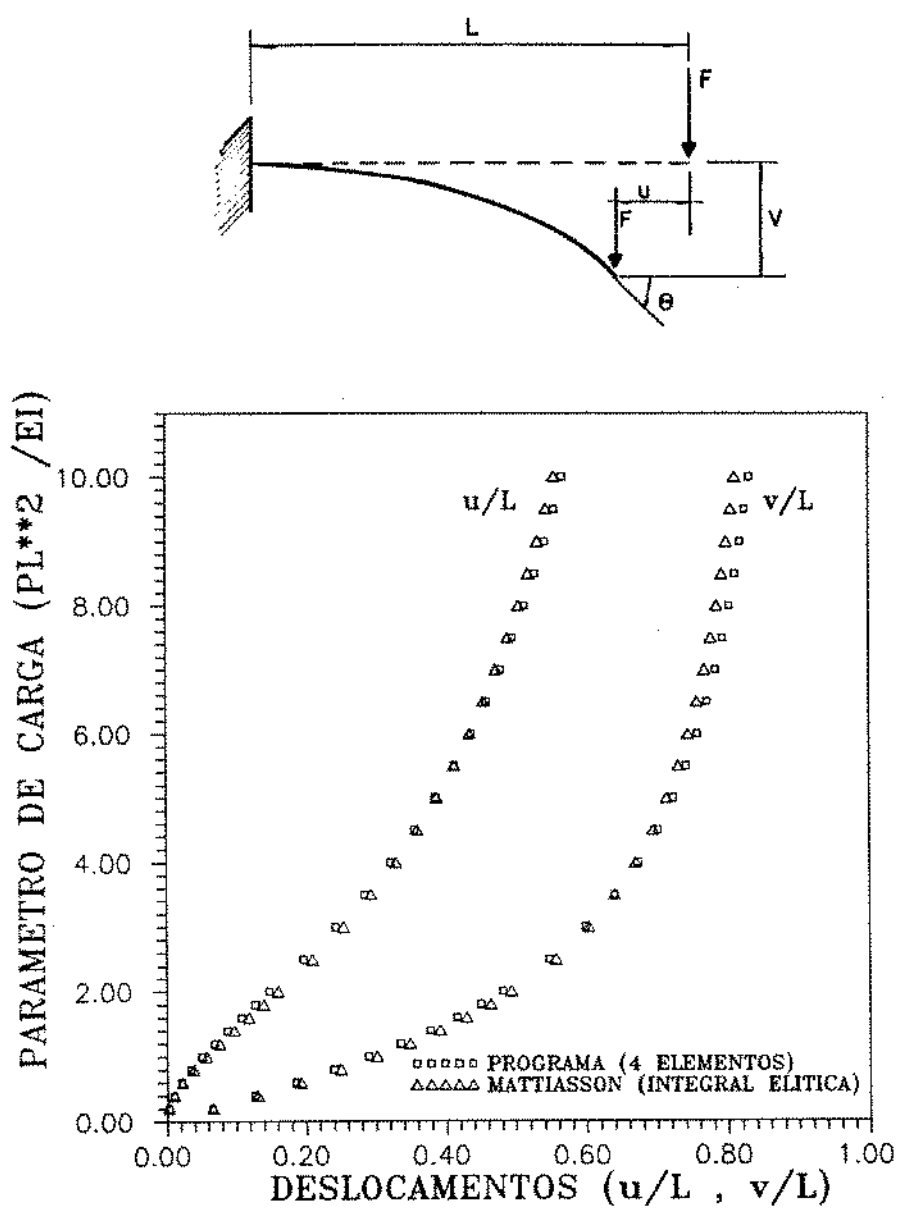


FIG. 5.4 VIGA EM BALANÇO COM CARGA NA EXTREMIDADE

Exemplo 5.3.3) A viga com imperfeição geométrica, sujeita à carga axial, mostrada na figura 5.5, tem solução analítica dada por Timoshenko & Gere [21] . Para os parâmetros usados, a carga crítica teórica de flambagem é de 66324 lbf (295 KN).

Outros dados: $L = 12.70 \text{ m}$
 $a = 12,70 \text{ cm}$ (flecha inicial no centro)
 $I = 2331 \text{ cm}^4$
 $F = 0 \text{ a } 80000 \text{ lbf}$ (0 a 355.8 KN)

Nota-se na figura a limitação do programa quando o valor da carga aplicada se aproxima do valor da carga crítica teórica. Entretanto existe um bom acompanhamento da solução numérica em relação à teórica até certo ponto, quando começa a haver diferenças mais significativas.

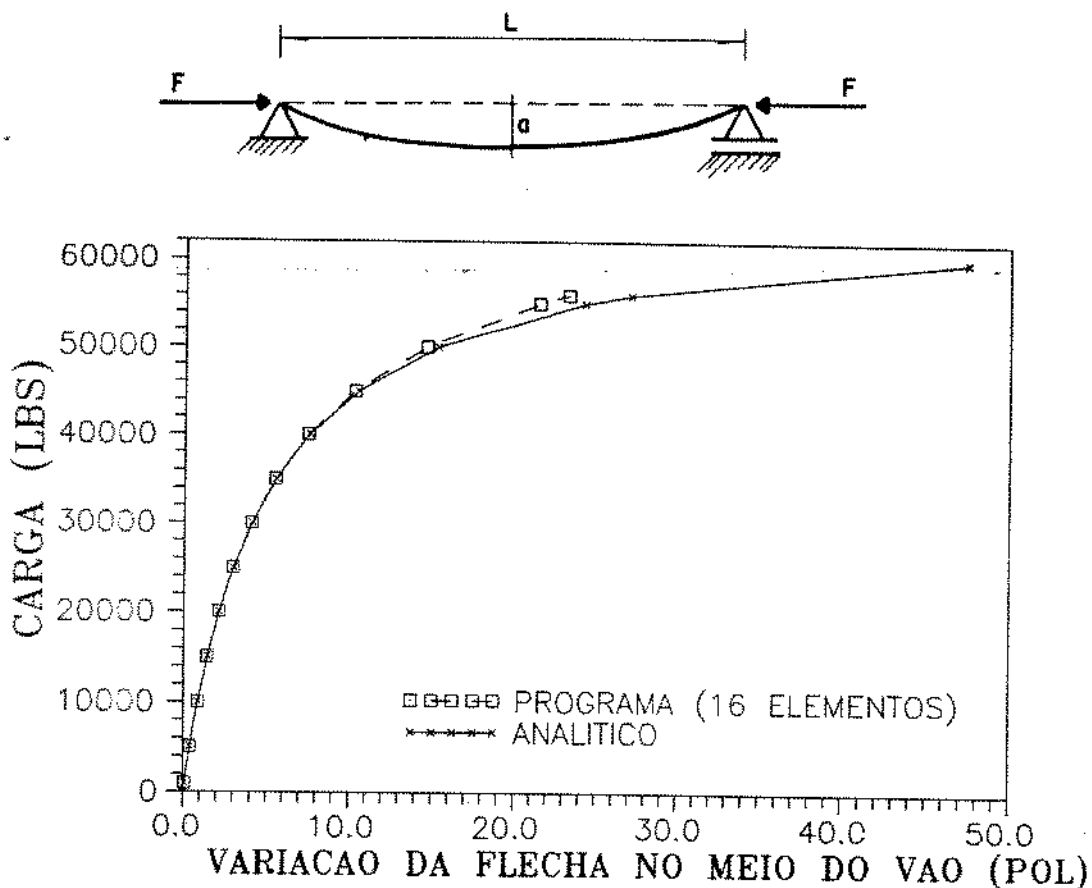


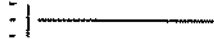
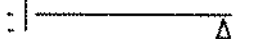
FIG. 5.5 VIGA COM IMPERFEIÇÃO GEOMÉTRICA

5.4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Um programa em separado foi montado para a análise de estabilidade, como foi explicado no capítulo 4. Os exemplos a seguir foram comparados com os resultados analíticos clássicos encontrados na literatura sobre este assunto, conforme resumido na tabela 5.2. Para todo os casos, $E=I=L=1.0$

Exemplo 5.4.1) Cargas críticas de flambagem.

TABELA 5.2 COMPARAÇÃO PARA CARGAS CRÍTICAS

CASO	CARGA CRÍTICA (P_{CR})		
	MODO	SOL. ANALÍTICA	PROGRAMA
VIGA EM BALANÇO		$(2n-1)^2 \cdot \pi^2 EI / 4L^2$	
	1	2.4674	2.4664
	2	22.2067	22.2521
VIGA BIAPOIADA		$n^2 \pi^2 EI / L^2$	
	1	9.8696	9.8702
	2	39.4784	39.7574
VIGA BIENGASTADA		$4\pi^2 EI / L^2$ e $8.18\pi^2 EI / L^2$	
	1	39.4784	39.7575
	2	80.7334	82.7979
VIGA ENGASTADA E APOIADA		$20.187 EI / L^2$ e $60.608 EI / L^2$	
	1	20.187	20.223
	2	60.608	59.676

Obs: Discretização feita com 4 elementos em todos os casos.

5.5 EFEITO DE CONTATO OU RESTRIÇÃO

Exemplo 5.5.1) A viga biapoiada com balanço mostrada na figura 5.6 foi utilizada para testar o efeito da inclusão de mola. Primeiramente calculou-se o resultado dos deslocamentos nos pontos A e B sem restrição, colocando-se a seguir uma restrição equivalente a um número menor do que os deslocamentos obtidos. Como resultados, devemos obter em A e B deslocamentos até os limites impostos e as respectivas forças de reação nestes pontos. Testa-se a validação destes resultados aplicando a carga original subtraída da reação de contato encontrada; deixa-se a estrutura livre e verifica-se então se os deslocamentos correspondem aos mesmos obtidos com a carga total e a estrutura com a restrição. Dados $E = I = 1.0$

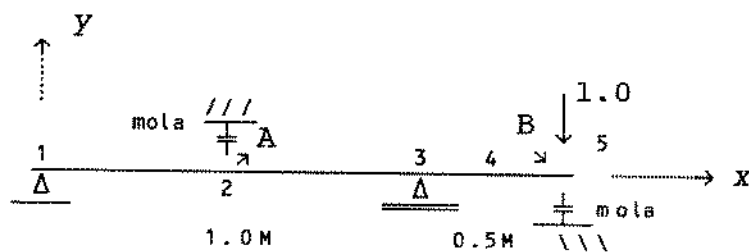


FIG. 5.6 VIGA BIAPOIADA COM BALANÇO E RESTRIÇÃO

TABELA 5.3 - RESULTADOS PARA O EFEITO DE CONTATO

CASO	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL	
	PONTO A	PONTO B
DESLOCAMENTO LIVRE	0.02790	-0.1116
DESLOCAMENTO RESTRITO	0.01018	-0.05300
A = 0.01	FR = -0.23592	FR = 0.482
B = 0.05	FR = FORÇA DE REAÇÃO	
DESLOCAMENTO LIVRE C/ CARGAS	0.01022	-0.05300
F _A = -0.235		
F _B = -0.518		

5.6 PROBLEMAS DE COLUNAS DE PERFURAÇÃO

Após a validação do elemento de viga-coluna e do programa, necessários para a simulação da coluna de perfuração partiu-se para a comparação com resultados conhecidos. Milheim [3] apresenta em seu primeiro artigo de uma série em perfuração direcional, resultados sob forma de tabelas para 4 tipos de composição de fundo (BHA), utilizando o Método dos Elementos Finitos e o processo incremental iterativo. As análises apresentadas são para composições de fundo ou BHAs em trechos retos inclinados, obtendo-se como resposta os pontos de tangência da coluna com respectivas forças laterais, assim como as reações de apoio de broca e estabilisadores, modelados como

apoios rígidos. Utilizou-se o programa com a rotina de viga-coluna implementada, modelando-se broca e estabilizador como apoio sobre mola de grande rigidez e folga ou "gap" igual a zero, como mostrado na figura 5.7 .

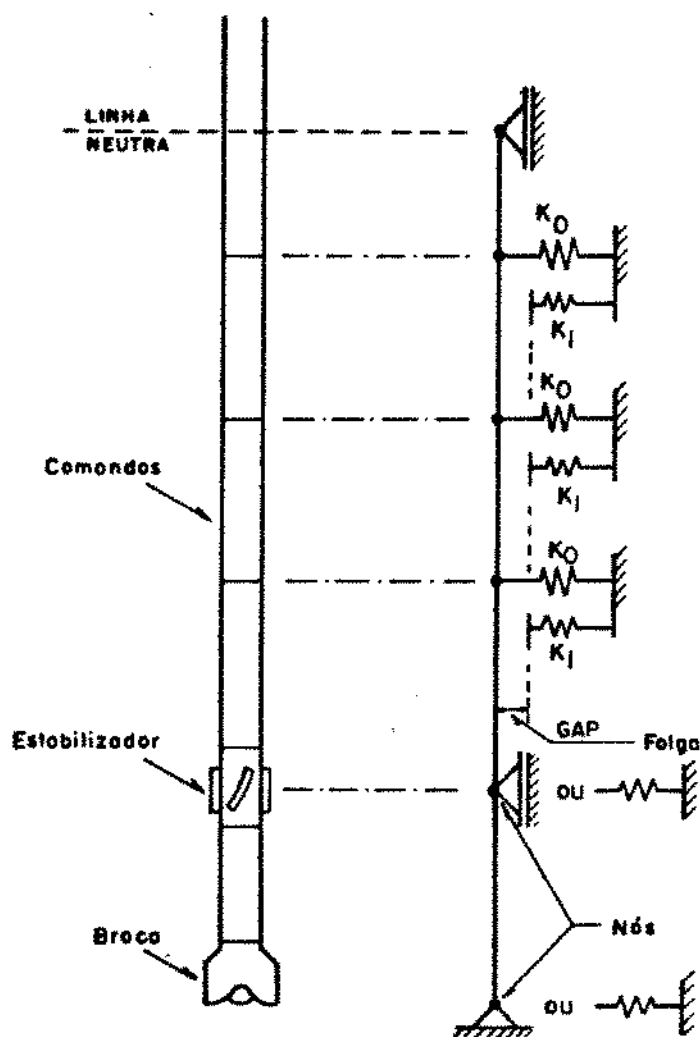


FIG. 5.7 MODELAGEM DA COLUNA DE PERFURAÇÃO

Exemplo 5.6.1) As tabelas 5.5 e 5.6 comparam os resultados obtidos para os incrementos de carga correspondentes a 14.32% e a 100% da carga total aplicada, que representa o peso sobre broca (PSB). Os pontos das citadas tabelas são mostrados nas

figuras 5.8 a 5.11 . Demais dados de interesse estão listados na tabela abaixo.

TABELA 5.4 - DADOS PARA O EXEMPLO 5.6.1

PESO DE LAMA	10 LB/GAL (1.2 G/CM ³)
COMANDOS: OD	8 POL (20.32 CM)
ID	2 POL (5.08 CM)
INCLINAÇÃO DO POÇO	10 GRAUS
AZIMUTE DO POÇO	0 GRAUS
PESO ESPECÍFICO DO AÇO	...489 LB/PÉ ³ (7.83 G/CM ³)
MÓD. DE ELASTIC.	29.10 ⁶ LB/POL ² (20.10 ³ KN/M ²)
COMP. TOTAL DO BHA	500 PÉS (152.4 M)
COMP. DISCRETIZADO	180 PÉS (54.86 M)

OBS: Comandos são os tubos de maior peso utilizados para suportar as cargas de compressão.

OD = diâmetro externo

ID = diâmetro interno

Coluna com um estabilizador a 30 pés. (9.144 m)

Nota-se através dos resultados apresentados o "fechamento" de 4 pontos nodais para a carga parcial aplicada, aumentando para 9 pontos para todo o peso sobre broca (PSB).

TABELA 5.5 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS - Ref.[3] X Programa

Distância da Broca (pés)	Ponto Nodal	Deslocamentos (14.32% do PSB)		Forças de Reação	
		Ref.[3]	Programa	Ref.[3]	Programa
		(pol)	(pol)	(lbs)	(lbs)
0	1	0.(broca)	0.	51.73	48.00
10	2	0.0348	0.0353	0.371	0.378
20	3	0.0463	0.0473	0.494	0.501
30	4	0.(stb)	0.	-253	-376
43	5	-0.1853	-0.1899	-1.977	-2.033
56	6	-0.4339	-0.4448	-4.628	-4.759
69	7	-0.6640	-0.6783	-7.083	-7.258
82	8	-0.8288	-0.8408	-8.840	-8.997
95	9	-0.9142	-0.9197	-9.751	-9.841
108	10	-0.93751	-0.937512	-69.76	-125.80
121	11	-0.93751	-0.937507	-79.10	-68.92
134	12	-0.93752	-0.937504	-34.39	-43.55
147	13	-0.93751	-0.937504	-46.28	-44.14
160	14	-0.93752	-0.937505	-54.91	-49.62
180	15	-0.93769	-0.93762	-1105.	-1145.

TABELA 5.6 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS - Ref.[3] X Programa

Distância da Broca (pés)	Ponto Nodal	Deslocamentos (100% do PSB)		Forças de Reação	
		Ref.[3]	Programa	Ref.[3]	Programa
		(pol)	(pol)	(lbs)	(lbs)
10	1	0. (broca)	0.	-128	- 87
20	2	0.0428	0.0659	0.4	0.7
20	3	0.07135	0.0947	0.8	1.
30	4	0. (stb)	0.	-1280.	-1136.
43	5	-0.3756	-0.3877	-4.	-4.
56	6	-0.7623	-0.7737	-8.	-8.
69	7	-0.93752	-0.93748	-51.	-196.
82	8	-0.93756	-0.93758	-691.	-765.
95	9	-0.93751	-0.93752	-203.	-183.
108	10	-0.93751	-0.93753	-334.	-340.
121	11	-0.93752	-0.93753	-299.	-298.
134	12	-0.93752	-0.93753	-308.	-309.
147	13	-0.93751	-0.93753	-305.	-304.
160	14	-0.93753	-0.93754	-386.	-388.
180	15	-0.93776	-0.93830	-7721.	-8000.

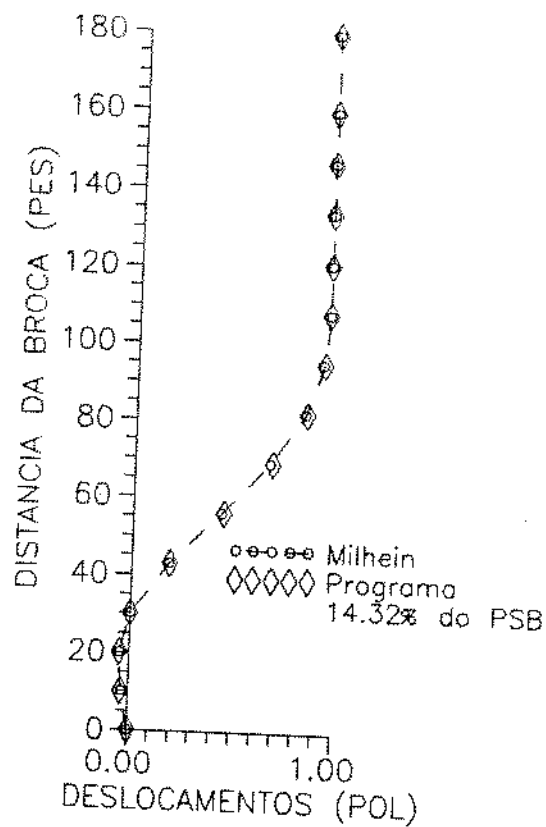


FIG. 5.8 DESLOCAMENTOS DA COLUNA DE PERFURAÇÃO (14.32% DO PSB)

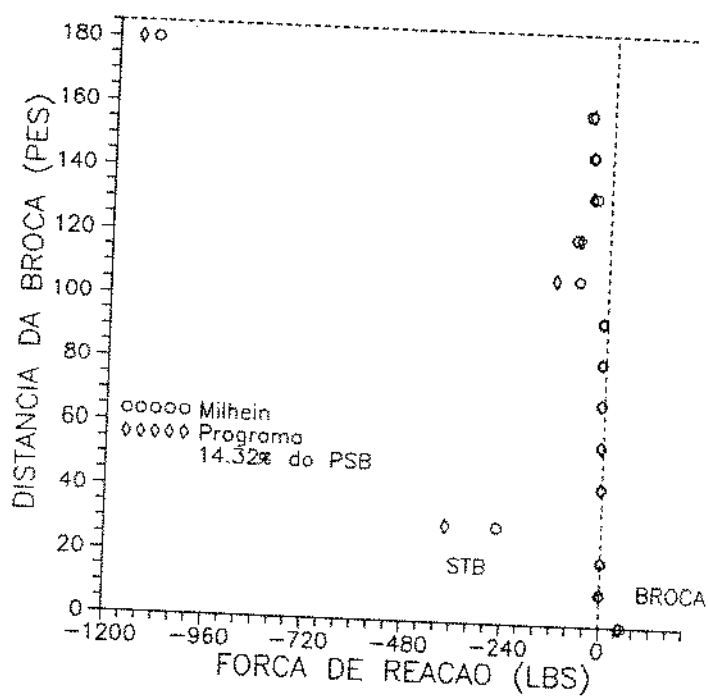


FIG. 5.9 FORÇAS DE REAÇÃO (14.32 % DO PSB)

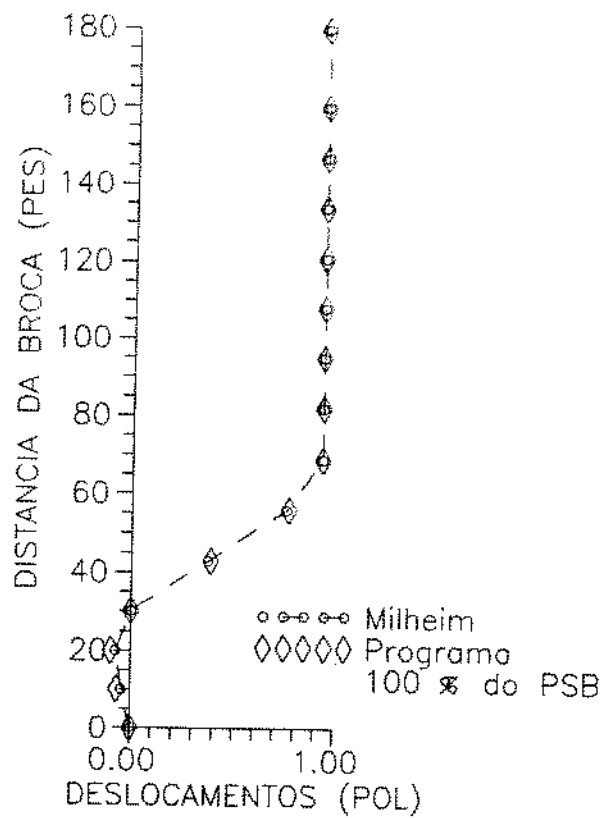


FIG. 5.10 DESLOCAMENTOS DA COLUNA DE PERFURAÇÃO (100% DO PSB)

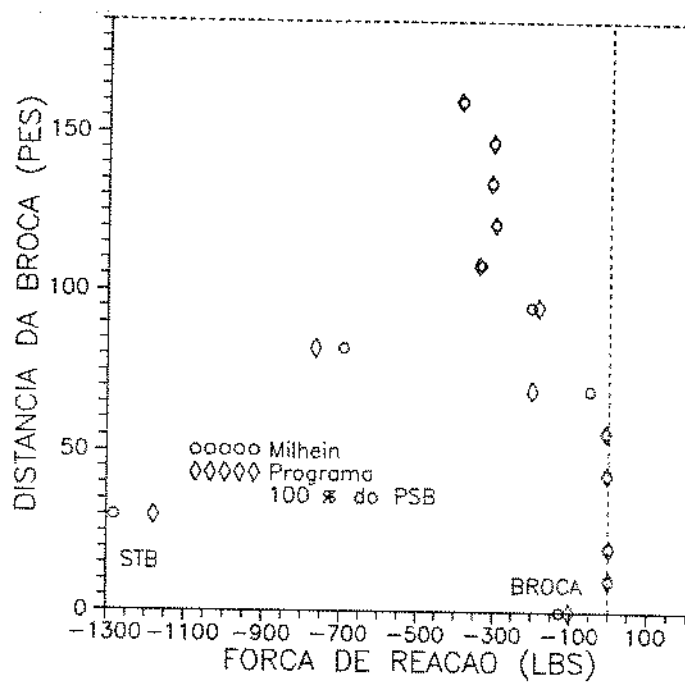


FIG. 5.11 FORÇAS DE REAÇÃO (100% DO PSB)

Exemplo 5.6.2) Bonafé [7] utilizou em seu trabalho um sub-sistema do programa ADEP, desenvolvido para cálculo de estruturas fixas, pelo MEF. Com este programa, denominado B.HOLE, efetuou inúmeras análises de coluna de perfuração, variando parâmetros como quantidade de estabilizadores, distância dos mesmos à broca, peso sobre broca, inclinação e curvatura de poços direcionais. Todas as análises são baseadas a partir da resposta de força lateral sobre a broca de perfuração. Neste exemplo, reproduz-se uma das tabelas de dados utilizadas, para os seguintes dados de entrada:

Peso de fluido 10 lbm/gal (1.2 g/cm^3)

Dimensões dos comandos = $8 \times 2\frac{13}{16}$ pol ($20.32 \times 7.14 \text{ cm}$)

Ângulo de inclinação do poço = 40 graus

Diâmetro do poço = $12 \frac{1}{4}$ pol (31.12 cm)

1 Estabilizador (STB) a distância variável

1 Estabilizador (STB) a 28.5 metros distante da broca.

$E = 2.1 \times 10^{10} \text{ Kgf / m}^2$

Peso sobre broca = 20000 Kgf

Foi feita a simulação com e sem a inclusão da matriz de rigidez geométrica [KG] , para se tentar avaliar a diferença de resultados quando se efetua o acoplamento ou não dos esforços laterais com os axiais. A discretização foi feita com 21 elementos, modificando-se os espaçamentos conforme a posição do estabilizador variável. Foram usados dois passos de carregamento, isto é, 2 incrementos, e a convergência ocorria

em média para 20 a 25 iterações no primeiro incremento e de 7 a 10 iterações no segundo e último incremento.O gráfico da figura 5.12 mostra os resultados obtidos referidos à tabela 5.7.

TABELA 5.7 COMPARAÇÃO - B.HOLE x PROGRAMA

Distância do STB Variável à BROCA (M)	FORÇA LATERAL (KN)		
	B.HOLE	PROGRAMA	
		COM Kg	SEM Kg
1.0	47.9	35.1	33.3
3.5	9.6	8.8	9.0
6.0	2.5	3.0	2.0
8.5	-2.2	-1.0	-1.3
11.0	-5.7	-3.1	-3.2
13.5	-8.2	-3.7	-3.8
16.0	-10.1	-5.2	-5.4
21.0	-7.2	-3.7	-4.9
26.0	-6.7	-3.7	-4.5
28.5	-8.1	-3.4	-4.3

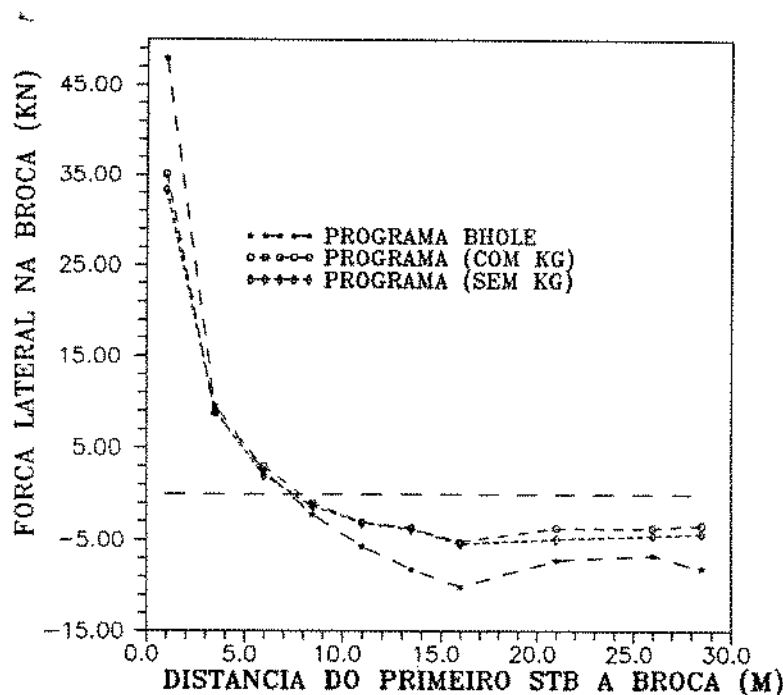


FIG. 5.12 COMPARAÇÃO COM PROGRAMA ADEP/BHOLE

Após comparações feitas com outros programas de elementos finitos vistos anteriormente , os dois próximos exemplos que se seguem comparam as soluções analíticas dadas por Bourgoyne [22] com as dadas pelo programa.

Exemplo 5.6.3) Cálculo da força de reação na broca para uma coluna de perfuração "lisa" (sem estabilizadores).

Dados: Peso de fluido = 9 lbm/gal (1.08 g/cm^3)

Dimensões dos comandos = 63/4x3 pol (17.15x7.62 cm)

Ângulo de inclinação do poço = 4 graus

Ponto de tangência = 25 pés (7.62 m)

Diâmetro do poço = 8 1/2 pol (21.6 cm)

Uma vez que é dado o ponto de tangência para a coluna lisa, a solução analítica é facilmente encontrada. Modelou-se a coluna de perfuração com elementos finitos de 5 pés (1.52 m), decompondo-se a carga linear só na direção transversal, já que nesta solução simplificada não é considerado o esforço axial.

Testaram-se 2 hipóteses para a modelagem:

A) Gap = zero no ponto de tangência

B) Último elemento com o nó posterior junto à parede do poço.

RESULTADOS (LBF/NEWTONS)

ANALÍTICO	HIPÓTESE A	HIPÓTESE B
74.1/329.7	73.9/328.8	74.1/329.7

Exemplo 5.6.4) Coluna de perfuração com um estabilizador.

Analiticamente, estima-se o ponto de tangência, efetuando-se vários cálculos trabalhosos para verificar iterativamente seu acerto. Encontrado este ponto, aplicam-se as equações deduzidas para o cálculo da força de reação na broca para 1 estabilizador.

Dados: Peso de fluido 10.5 lbm/gal (1.26 g/cm^3)

Dimensões dos comandos = $8 \times 2\frac{13}{16}$ pol (20.32x7.14 cm)

Ângulo de inclinação do poço = 10 graus

Diâmetro do poço = $12 \frac{1}{4}$ pol (31.12 cm)

Estabilizador (STB) a 5 pés (1.52 m).

Diâmetro do STB = 12.21875 pol (31.0356 cm)

A tabela 5.8 mostra a força lateral na broca dada pela solução analítica e a dada pelo programa, para valores de peso sobre broca variando de 10000 a 30000 lbs.(45 a 136 KN). Testou-se a retirada da matriz geométrica para observação do efeito do acoplamento de esforços.

TABELA 5.8 COMPARAÇÃO - SOLUÇÃO ANALÍTICA X PROGRAMA

PESO SOBRE BROCA (LBF)	FORÇA LATERAL (LBF)		
	ANALÍTICO	PROGRAMA	
		COM Kg	SEM Kg
10000	3030	3052	3032
20000	3044	3077	3047
30000	3058	3098	3059

Usou-se na modelagem elementos de 10 pés (3.05m) de comprimento, com exceção do elemento entre broca e estabilizador, onde se introduziu um nó entre os mesmos. Com a divisão em elementos efetuada, ficou difícil comparar os resultados dos pontos de tangência com os analíticos, que são bastante precisos, notando-se porém a ocorrência dos mesmos próximos dos obtidos pela solução exata. Observe que o estabilizador tem diâmetro menor que o do poço. Neste caso, a atuação da mola de pequena rigidez reduziu pela metade o número de iterações necessárias para a solução do problema, pois com mola de pequena rigidez igual a zero, na primeira iteração do primeiro passo de carregamento, a coluna não encontra nenhum tipo de restrição, atingindo valores altíssimos de deslocamentos.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Do estudo ora apresentado, pode-se descrever sucintamente seus maiores pontos de interesse e destaque:

- 1) Foi realizada uma investigação na área da análise não-linear para sistemas estruturais reticulados com algumas aplicações à Engenharia de Perfuração.
- 2) Deste estudo resultou a implementação de um elemento finito de viga-coluna, que automaticamente leva em conta o efeito de restrição dado pela parede de um poço de petróleo, obtido com molas perpendiculares ao eixo longitudinal do elemento finito, molas estas localizadas nos nós do elemento. Com isto foi possível simular o comportamento estático de colunas de perfuração.
- 3) Tal implementação computacional foi feita a partir de um programa existente do qual se pode aproveitar o seu núcleo e a organização da estrutura de dados. O programa foi adaptado de modo a operar em microcomputadores com desempenho de processamento aceitável.

6.2 CONCLUSÕES

- 1) O efeito da não-linearidade geométrica, devido a grandes deslocamentos, não afetou muito os resultados obtidos para as forças de reação laterais nos pontos de contato da coluna de perfuração com a parede do poço, nos casos estudados, devendo-se testar para outras geometrias de poços.
- 2) O processo de relaxação do método de Newton - Raphson, testado para alguns casos, pode influir na redução do tempo computacional através da redução do número de iterações, bem como atua também na melhora da convergência no caso da introdução de uma forte não - linearidade geométrica, como a dada pela mola de grande rigidez.
- 3) A validação do método de resolução implementado nos levou a estabelecer um algoritmo de razoável capacidade para o tratamento de estruturas livres de restrições geométricas, dentro das limitações de linearidade de material e teoria de pequenas deformações.
- 4) A consideração da matriz de rigidez geométrica, proveniente da análise não-linear, permite a obtenção numérica das cargas críticas de flambagem em estruturas complexas.

- 5) O método de solução empregado serve como subsídio para o estudo de problemas dinâmicos, uma vez que o processo incremental ou quase estático de carregamento de uma estrutura é um caso particular do processo de resolução de equações de equilíbrio dinâmico, restando naturalmente levar-se em conta os efeitos inerciais.

6.3 SUGESTÕES

- 1) Ampliação da análise bidimensional para a tridimensional, utilizando-se melhores técnicas para o processo de recuperação de forças, isto é, para a eliminação dos efeitos de movimentos de corpo rígido.
- 2) Acoplamento deste modelo com outros modelos que levem em conta fatores envolvidos com o problema real de estimativa de trajetória de poços.
- 3) Acoplamento deste modelo com os efeitos dinâmicos presentes na operação de perfuração, para estudos como os de vibrações laterais e variação da trajetória azimutal de um poço.
- 4) Ampliação do estudo do efeito de contato levando-se em conta o modelo de vigas sob fundação elástica, para aplicações como por exemplo no assentamento de plataformas

fixas e estruturas em solo de fundo de mar ou terra.

Estudo e teste de outras técnicas, tanto para o método de resolução como para a otimização ou relaxação do mesmo, visando maior robustez, precisão e rapidez na obtenção de resultados.

Acoplamento de interfaces gráficas para monitoramento de dados de entrada e saída do programa de elementos finitos, de modo a facilitar a visualização dos resultados. Adaptação do programa para "uso amigável", para aplicações de campo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) RIBEIRO, P.R.-"Estudo da Interação entre o Solo e a Cabeça de Poço pelo Método dos Elementos Finitos"
Tese de Mestrado, UNICAMP, 1989.
- 2) NICHOLSON, R.W.Jr. - "Analysis of Constrained Directional Drilling Assemblies". Tese de Doutorado,
The University of Tulsa, 1972.
- 3) MILHEIM, K.& JORDAN, S.& RITTER, C.J.-"Bottom-Hole Assembly Using the Finite-Element". SPE6057, agosto 1976.
- 4) MILHEIM, K.- "The Effect of BHA Dynamics on the Trajectory of a Bit". J.P.T., dezembro 1981.
- 5) LUBINSKY, A. & WILLIANSO, J.S. - "Predicting Bottom Hole Assembly Performance" SPE , 1987.
- 6) BURGUESS, T.M. & DAS, P.K.- "Improving BHA Reliability with Drill String Vibration Models: Field Experience and Limitations". SPE/IADC 16109, março 1987.
- 7) BONAFÉ, L.A.S. - "Método dos Elementos Finitos Aplicado à Análise de Colunas de Perfuração". Tese de Mestrado, UFOP/MG, 1986.
- 8) SAMPAIO JR, J.H.B.- "Previsão da Taxa de Variação Azimutal na Perfuração de Poços Direcionais".
Tese de Mestrado, UNICAMP, 1989.

- 9) KLAUS, J. BATHE & WILSON, E.L.-"Numerical Methods in Finite Element Analysis". Prentice Hall, 1976.
- 10) KLAUS, J. BATHE- "Finite Element Procedures in Engineering Analysis". Prentice Hall, 1982.
- 11) CONCI, A.-"Análise de Estruturas de Aço com Consideração de Empenamento e Não Linearidades Geométrica e Material". Tese de Doutorado, PUC/RJ, abril 1988.
- 12) COOK, R.D.- "Concepts and Applications of Finite Element Analysis". John Wiley & Sons, 1981.
- 13) GATTASS, M.-"Large Displacement, Iterative-Adaptive Dynamic Analysis of Frames". Tese de Doutorado, Cornell University, março 1982.
- 14) ROEHL, D.M.- "Uma Metodologia para a Análise Não Linear Geométrica de Pórticos Espaciais". Tese de Mestrado, PUC/RJ, setembro 1987.
- 15) RUBINSTEIN, M.F. - "Structural Systems Statics, Dynamics and Stability". Prentice Hall, 1970.
- 16) WESTLAKE, J.R. - "A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations". John Wiley & Sons, 1968.

- 17) PRZEMIENIECKI, J.S.- "Theory of Matrix Structural Analysis".
McGraw-Hill, 1968.
- 18) CHAJES, A. - "Structural Analysis". Prentice Hall, 1983.
- 19) SERPA, A.L. & FERREIRA, J.V. & IGUTI, F. - "Programa
ANAFIN - Manual do usuário. Departamento de
Mecânica Computacional - Unicamp, 1989
- 20) MATTIASSON, K. - "Numerical Results from Large Deflection
Beam and Frame Problems Analysed by Means of
Elliptic Integrals". Chalmers University of
Technology, Goteborg, Sweden
- 21) TIMOSHENKO, S.P & GERE, J.M. - "Theory of Elastic Stability"
McGraw-Hill, 1961.
- 22) BOURGOINE JR, A.T.- "Applied Drilling Engineering"
SPE Text Book, 1986.
- 23) ZIENKIEWICZ, O.C. & MORGAN, K. - "Finite Elements and
Approximation". John Wiley & Sons, 1983.
- 24) ZIENKIEWICZ, O.C.- "The Finite Element Method".
McGraw-Hill, 1977.
- 25) SEGERLIND, L.J. - "Applied Finite Element Analysis".
John Wiley & Sons, 1976.

- 26) RUBINSTEIN, M.F.- "Matrix Computer Analysis of Structures".
Prentice Hall, 1966.
- 27) CHEN, W.F. & ATSUTA, T.- "Theory of Beam-Columns".
Vols I e II. McGraw-Hill, 1976.
- 28) ODEN, J.T.- "Finite Elements of Nonlinear Continua".
McGraw-Hill, 1972.
- 29) CHANDRA, U.- "Basic Concepts in Static BHA Analysis for
Directional Drilling". SPE 15467, outubro 1986.
- 30) MOURELLE, M.M. & JACOB, B.P. & BENJAMIN, A.C.- "An Application
of the Finite Element Method in the Analysis of
Directional Drilling Wells". Conf. Int. CADMO, 1986.
- 31) RAFIE, S. & HO, H.S. & CHANDRA, U. - "Application of a
Bottom Hole Assembly Analysis Program in Directional
Drilling". SPE 14765, 1987.
- 32) PRODONOFF, V. & PLÁCIDO, J.C.- "Análise de Tensões em Coluna
de Perfuração Utilizando a Teoria dos Elementos
Finitos" Relatório, CENPES - PETROBRÁS, janeiro 1990.
- 33) MANUAL TEÓRICO ANSYS - Swanson Analysis Systems,
Houston, 1988.
- 34) IYENGAR, N.G.R.- "Structural Stability of Columns and
Plates" (cap.I). John Wiley & Sons.
- 35) HETÉNYI, M.- "Beams on Elastic Foundation" (cap.VI).
Ann Arbor: The University of Michigan Press.

APÊNDICE

MATRIZES UTILIZADAS NO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

1) MATRIZES DE RIGIDEZ ELÁSTICA E GEOMÉTRICA OBTIDAS PELA FORMA FRACA DO MÉTODO DE GALERKIN

Pelo método de Galerkin, explicado no capítulo 2, a minimização do erro ou resíduo dada pela integral 2.3.9 é feita utilizando-se as próprias funções interpoladoras adotadas na aproximação da solução de um problema.

A forma fraca do método de Galerkin é uma maneira de se relaxar, isto é, não se satisfazer certas condições de contorno em um problema, não se incorrendo porém em maiores erros.

Consiste na integração por partes de cada termo do resíduo calculado a partir de uma equação diferencial, de modo a se obter a mesma ordem de derivada entre a função interpoladora e o termo a que esta se aplica. Pode-se demonstrar que, com a forma fraca, uma equação diferencial de ordem $2m$ só precisa ter satisfeitas as condições de contorno de 1 a $m-1$, chamadas condições de contorno essenciais. Genericamente, introduz-se uma propriedade a mais para balizar a escolha da função interpoladora, porém simplificando sua forma devido à relaxação obtida pela integração por partes.

Para se montar as matrizes de rigidez elástica e geométrica, trata-se separadamente a equação diferencial da viga-coluna dada por 2.3.5, superpondo com a equação

diferencial dos deslocamentos devidos a esforços axiais, dada por:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = p(x) \quad (A.1)$$

onde u = deslocamento axial

p = carga genérica distribuída axialmente.

A figura A.1 mostra 2 elementos finitos com os graus de liberdade que representam as condições de contorno essenciais para o equacionamento do efeito de flexão da viga-coluna (fig.A1a) e o do efeito de sollicitação axial (fig.A1b).

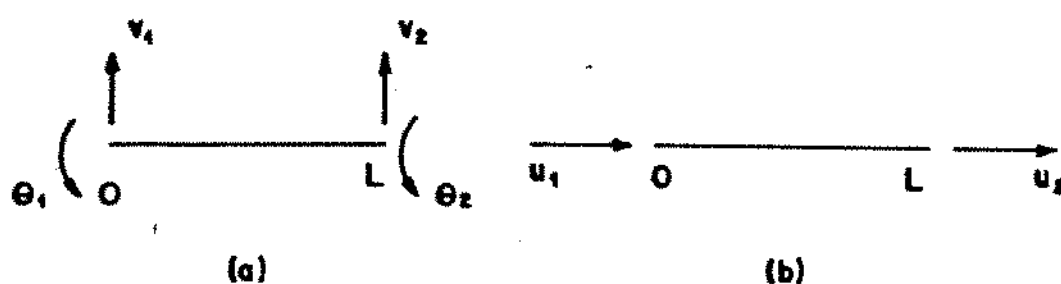


FIG. A.1 ELEMENTOS PARA MONTAGEM DAS MATRIZES DE RIGIDEZ

Tomando-se o primeiro termo da equação 2.3.5, e aplicando-se ao mesmo o cálculo do resíduo (eq. 2.3.9), resulta:

$$\int_0^L EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} N_i(x) dx = \quad (A.2)$$

Integrando-se (A.2) por partes duas vezes reduz-se a ordem de derivação para ordem 2 , restando para o termo no domínio, a integral:

$$\int_0^L \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \frac{d^2 N_i(x)}{dx^2} dx \quad (A.3)$$

A função $N(x)$ deve portanto ser pelo menos duas vezes diferenciável, e satisfazer as condições de contorno essenciais dadas por $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$, vistas na figura (A.1). Um polinômio cúbico de interpolação atende a essas condições, resultando no seguinte equacionamento:

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

Decorre da relação entre deslocamento transversal e de rotação que:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

Particularizando (A.4) e (A.5) para os nós do elemento:

$$\begin{bmatrix} v_1 = v(0) \\ \theta_1 = \theta(0) \\ v_2 = v(L) \\ \theta_2 = \theta(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

Escrevendo a equação matricial A.6 abreviadamente como:

$$\{ d \} = [A] \{ a \} \quad (A.7)$$

onde : $\{ d \}$ = vetor de deslocamentos

$\{ a \}$ = vetor de constantes de interpolação

Obtemos o vetor $\{ a \}$ de A.7 :

$$\{ a \} = [A]^{-1} \{ d \} \quad (A.8)$$

onde : $[A]^{-1}$ = inversa da matriz $[A]$.

Substituindo A.8 em A.4 chega-se às funções interpoladoras $N_i(x)$ e à equação que aproxima o deslocamento lateral, dada por:

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \{ d \} \quad (A.9)$$

onde: $N_1(x) = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3$

$$N_2(x) = x - 2x^2/L + x^3/L^2$$

$$N_3(x) = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3$$

$$N_4(x) = -x^2/L + x^3/L^2$$

Substituindo a equação A.9 na integral A.3, chega-se à expressão matricial para o termo do domínio:

$$E I \begin{bmatrix} \int (N_1'')^2 & \int N_2'' N_1'' & \int N_3'' N_1'' & \int N_4'' N_1'' \\ & \int (N_2'')^2 & \int N_3'' N_2'' & \int N_4'' N_2'' \\ & & \int (N_3'')^2 & \int N_4'' N_3'' \\ \text{simétrica} & & & \int (N_4'')^2 \end{bmatrix} dx \left\{ d \right\} \quad (A.10)$$

onde: N_i'' = derivada segunda da função interpoladora.

Efetuando-se as integrações dos termos de A.10, chega-se à matriz de rigidez elástica do elemento, dada por:

$$[K_E] = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & 4EI/L & -6EI/L & 2EI/L \\ & & 12EI/L^3 & -6EI/L \\ \text{simétrica} & & & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (A.11)$$

De forma análoga, utiliza-se o método de Galerkin para o termo de acoplamento dado pela equação 2.3.5, de onde se chega à matriz de rigidez geométrica.

Toma-se o termo da equação do resíduo dado por:

$$\int_0^L \frac{F}{dx^2} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} N_i(x) dx \quad (A.12)$$

Integra-se, neste caso, uma vez por partes, resultando para o termo do domínio em:

$$F \int_0^L \frac{dv(x)}{dx} \frac{dN_i(x)}{dx} dx \quad (A.13)$$

Uma vez já conhecidas as funções interpoladoras, sua substituição direta em A.13 resulta na forma matricial:

$$F \begin{bmatrix} \int (N_1')^2 & \int N_2' N_1' & \int N_3' N_1' & \int N_4' N_1' \\ & \int (N_2')^2 & \int N_3' N_2' & \int N_4' N_2' \\ & & \int (N_3')^2 & \int N_4' N_3' \\ \text{simétrica} & & & \int (N_4')^2 \end{bmatrix} dx \left\{ d \right\} \quad (A.14)$$

onde: N_i' = derivada primeira da função interpoladora.

Efetuando-se as integrações dos termos de A.14, chega-se à matriz de rigidez geométrica do elemento, dada por:

$$[K_g] = \begin{bmatrix} 6F/5L & F/10 & -6F/5L & F/10 \\ & 2FL/15L & -F/10 & -FL/30 \\ & & 6F/5L & -F/10 \\ \text{simétrica} & & & 2FL/15 \end{bmatrix} \quad (A.15)$$

Para a equação diferencial que representa o esforço axial, dado pela equação A.1, de ordem $2m = 2$, utiliza-se para se satisfazer as condições de contorno essenciais dadas por u_1 e

u_2 , funções interpoladoras lineares. Aplicando-se o método de Galerkin à eq. A.1, obtemos:

$$\int_0^L EA \frac{du(x)}{dx} \frac{dN_i(x)}{dx} \quad (A.16)$$

Onde agora $N_i(x)$ é obtido de :

$$u(x) = b_1 + b_2x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (A.17)$$

Impondo condições de contorno, resulta em:

$$\begin{Bmatrix} u_1 = u(0) \\ u_2 = u(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (A.18)$$

Expressando-se $\{ b \}$ em (A.18) e substituindo-se em (A.17), chega-se às funções interpoladoras:

$$u(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (A.19)$$

onde: $N_1(x) = 1 - x/L$

$N_2(x) = x/L$.

Substituindo A.19 em A.16 e integrando no domínio do elemento, isto é, de 0 a L, tem-se :

$$[K]_{\text{axial}} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Superpondo-se as matrizes acima obtidas, temos para o elemento finito de viga-coluna com 3 graus de liberdade por nó, as seguintes matrizes, de ordem 6 x 6:

MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA

$$\begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ & & & AE/L & 0 & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ & & & & & 4EI/L \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 6F/5L & F/10 & 0 & -6F/5L & F/10 \\
 & & 2FL/15 & 0 & -F/10 & -FL/30 \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 \text{SIMÉTRICA} & & & & 6F/5L & -F/10 \\
 & & & & & 2FL/15
 \end{bmatrix}$$

II) MATRIZ DE RIGIDEZ DE MOLA

A não-linearidade geométrica introduzida pelo efeito de contato é, neste trabalho, implementada através da superposição da matriz de coeficientes de mola dada por:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & K_0 \text{ ou } K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 \text{SIMÉTRICA} & & & & K_0 \text{ ou } K_1 & 0 \\
 & & & & & 0
 \end{bmatrix}$$

onde: K_0 = coeficiente de mola pouco rígida

K_1 = coeficiente de mola muito rígida.

Nota-se que se adiciona a rigidez de mola nos graus de liberdade transversais do elemento, sendo esta simplificação suficiente para se simular a coluna de perfuração.

ANEXO

Apresenta-se neste anexo alguns arquivos de entrada e saída dos programas utilizados, de modo a ilustrar a maneira como se trabalha neste programa de análise não-linear estrutural, pelo Método dos Elementos Finitos.

EXEMPLO I-1A- PORTICO ISOSTATICO C/ CARGAS CONCENTRADAS

7	1	0	1	0	1						
1	1	1	1	1	1	0	0.	0.	0.	0	
2	0	0	1	1	1	0	0.	120.0	0.	0	
3	0	0	1	1	1	0	0.	240.0	0.	0	
4	0	0	1	1	1	0	120.	240.0	0.	0	
5	0	0	1	1	1	0	120.	180.0	0.	0	
6	0	1	1	1	1	0	120.	60.0	0.	0	
7	0	0	1	1	1	0	180.	240.0	0.	0	
1	2										
2	1	10.									
7	2	-40.									
2	6	1	4								
1	30.E+3	1000E+009.1189.118									
1	1	2	1	1							
2	2	3	1	1							
3	3	4	1	1							
4	4	5	1	1							
5	5	6	1	1							
6	4	7	1								

***** FIM DE DADOS DO EXEMPLO I-1A - NUMERACAO NAO SEQUENCIAL **

IEJEMPLO 1-1A- PORTICO ISOSTATICO C/ CARGAS CONCENTRADAS

C O N T R O L I N F O R M A T I O N

NUMBER OF NODAL POINTS (NUMNP) = 7

NUMBER OF ELEMENT GROUPS (NUMEG) = 1

ANALYSIS MODE (IAMOD) = 0

EQ.0 STATIC ANALYSIS
EQ.1 DYNAMIC ANALYSIS

NUMBER OF LOAD CASES (NLCASE) = 1

FLAG FOR DYNAMIC EQUATION SOLUTION (IFSDE) = 0

EQ.1 DIRECT INTEGRATION - NEWMARK METHOD
EQ.2 MODE SUPERPOSITION - SUBSPACE METHOD - SOLUTION
EQ.3 MODE SUPERPOSITION - SUBSPACE METHOD - SOLVE FOR
EIGENPAIRS ONLY

SOLUTION MODE (NODEX) = 1

EQ.0 DATA CHECK
EQ.1 EXECUTION

I N O D A L P O I N T D A T A

INPUT NODAL DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES						NODAL POINT COORDINATES			MESH GENERATING CODE
	X	Y	Z	XR	YR	ZR	X	Y	Z	
1	1	1	1	1	1	0	.00000	.00000	.00000	0
2	0	0	1	1	1	0	.00000	120.00000	.00000	0
3	0	0	1	1	1	0	.00000	240.00000	.00000	0
4	0	0	1	1	1	0	120.00000	240.00000	.00000	0
5	0	0	1	1	1	0	120.00000	180.00000	.00000	0
6	0	1	1	1	1	0	120.00000	60.00000	.00000	0
7	0	0	1	1	1	0	180.00000	240.00000	.00000	0

GENERATED NODAL DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES						NODAL POINT COORDINATES			MESH GENERATING CODE
	X	Y	Z	XR	YR	ZR	X	Y	Z	KN
1	1	1	1	1	1	0	.00000	.00000	.00000	0
2	0	0	1	1	1	0	.00000	120.00000	.00000	0
3	0	0	1	1	1	0	.00000	240.00000	.00000	0
4	0	0	1	1	1	0	120.00000	240.00000	.00000	0
5	0	0	1	1	1	0	120.00000	180.00000	.00000	0
6	0	1	1	1	1	0	120.00000	60.00000	.00000	0
7	0	0	1	1	1	0	180.00000	240.00000	.00000	0

EQUATION NUMBERS

NODE NUMBER	DEGREE OF FREEDOM						
N	X	Y	Z	XR	YR	ZR	
1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	3	0	0	0	0	4
3	5	6	0	0	0	0	7
4	8	9	0	0	0	0	10
5	11	12	0	0	0	0	13
6	14	0	0	0	0	0	15
7	16	17	0	0	0	0	18

1 LOAD CASE DATA

LOAD CASE NUMBER = 1

NUMBER OF CONCENTRATED LOADS = 2

NODE NUMBER	DIRECTION	LOAD MAGNITUDE
0 2	1	.10000E+02
0 7	2	-.40000E+02

1 ELEMENT GROUP DATA

ELEMENT DEFINITION

ELEMENT TYPE (NPAR(1)) = 2

- EQ.1 TRUSS ELEMENTS
- EQ.2 BEAM ELEMENTS
- EQ.3 QUADRILATERAL ELEMENTS FOR PLANE
STRESS OR STRAIN CONDITIONS
- EQ.4 PLATE ELEMENT

NUMBER OF ELEMENTS (NPAR(2)) = 6

MATERIAL DEFINITION

NUMBER OF DIFFERENT SETS OF MATERIAL AND
AND CROSS-SECTIONAL CONSTANTS (NPAR(3)) = 1

CHARACTERISTICS OF BEAM BEAM ELEMENTS

BEAM ELEMENT TYPE (NPAR(4)) = 4
EQ.1 TWO NODE BEAM MODEL - SIMPLE BEAM
EQ.2 TWO NODE MODEL - RAYLEIGH BEAM
EQ.3 THREE NODE MODEL - TIMOSHENKO BEAM
EQ.4 VIGA COLUMA DE 2 NOS-DESACOPLODO-LINEAR

SET NUMBER	YOUNGS MODULUS E	MASS DENSITY RD	THICKNESS THIC	HEIGHT HEIG
1	.30000E+05	.10000E+01	.91180E+01	.91180E+01

ELEMENT INFORMATION

ELEMENT NUMBER-N	NODE I	NODE J	MATERIAL SET NUMBER
1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	1
4	4	5	1
5	5	6	1
6	4	7	1

1 TOTAL SYSTEM DATA

NUMBER OF EQUATIONS (NEQ) = 18
NUMBER OF STIFFNESS MATRIX ELEMENTS (NWK) = 94
MAXIMUM HALF BANDWIDTH (MK) = 11
MEAN HALF BANDWIDTH (MM) = 5
1LOAD CASE 1

DISPLACEMENTS

NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.125484E-01
2	.133927E+01	.144260E-02	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.038504E-02
3	.184601E+01	.288521E-02	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.616763E-04
4	.184601E+01	-.505067E-02	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.423505E-02
5	.159191E+01	-.336712E-02	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.423503E-02
6	.188370E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.423502E-02
7	.184601E+01	-.425822E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.840176E-02

BENDING MOMENTS FOR ELEMENT GROUP 1

ELEMENT NUMBER	BENDING MOMENT	FORCA AXIAL
1	.122304E-02	-.119903E+04
2	-.119903E+04	.299837E+02
3	-.119807E+04	.299837E+02
4	-.124334E-01	-.743311E-02
5	-.250003E-02	-.699837E+02
6	.240000E+04	-.699838E+02

COMPARACAO C/ SOLUCAO ANALITICA - BOURGOINE - PSE=10000 LE3

NUMBER OF SECTIONS ANALYSIS						DOORBELL - PSE-10000 LEF				
11	1	0	1	0	1					
1	1	0	1	1	1	0	0.	0.	0.	0
2	0	0	1	1	1	0	20.	0.	0.	0
3	0	0	1	1	1	0	40.	0.	0.	0
4	0	0	1	1	1	0	60.	0.	0.	0
5	0	0	1	1	1	0	100.	0.	0.	0
6	0	0	1	1	1	0	300.	0.	0.	0
7	0	0	1	1	1	0	420.	0.	0.	0
8	0	0	1	1	1	0	540.	0.	0.	0
9	0	0	1	1	1	0	660.	0.	0.	0
10	0	0	1	1	1	0	780.	0.	0.	0
11	0	0	1	1	1	0	900.	0.	0.	0

1	21									
1	2	- 18.33								
2	2	- 36.67								
3	2	- 36.67								
4	2	- 128.3								
5	2	- 220.0								
6	2	- 220.0								
7	2	- 220.0								
8	2	- 220.0								
9	2	- 220.0								
10	2	- 220.0								
11	2	- 220.0								
2	1	-208.00								
3	1	-208.00								
4	1	-748.00								
5	1	-1248.0								
6	1	-1248.0								
7	1	-1248.0								
8	1	-1248.0								
9	1	-1248.0								
10	1	-1248.0								
11	1	-1248.0								

2	10	1	4							
1	29.E+6	1000E+00	8.0	2.8	0.					
1	1	2	1	1	.0	2.125	0.			
2	2	3	1		12.1252.125	0.				
3	3	4	1		12.125.0156	0.				
4	4	5	1		1.01562.125	0.				
5	5	6	1		12.1252.125	0.				
6	6	7	1		12.1252.125	0.				
7	7	8	1		12.1252.125	0.				
8	8	9	1		12.1252.125	0.				
9	9	10	1		12.1252.125	0.				
10	10	11	1		12.1252.125	0.				
2.	50				.005					

***** FIM DE DADOS DE ENTRADA *****

CONTROL INFORMATION

NUMBER OF NODAL POINTS (NUMNP) = 11

NUMBER OF ELEMENT GROUPS (NUMEG) = 1

ANALYSIS MODE (IAMOD) = 0

EQ.0 STATIC ANALYSIS

EQ.1 DYNAMIC ANALYSIS

NUMBER OF LOAD CASES (NLCASE) = 1

FLAG FOR DYNAMIC EQUATION SOLUTION (IFSDE) = 0

EQ.1 DIRECT INTEGRATION - NEWMARK METHOD

EQ.2 MODE SUPERPOSITION - SUBSPACE METHOD - SOLUTION

EQ.3 MODE SUPERPOSITION - SUBSPACE METHOD - SOLVE FOR
EIGENPAIRS ONLY

SOLUTION MODE (MODEX) = 1

EQ.0 DATA CHECK

EQ.1 EXECUTION

INPUT NODAL POINT DATA

INPUT NODAL DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES						NODAL POINT COORDINATES			MESH GENERATING
	X	Y	Z	XR	YR	ZR	X	Y	Z	
1	1	0	1	1	1	0	.00000	.00000	.00000	0
2	0	0	1	1	1	0	20.00000	.00000	.00000	0
3	0	0	1	1	1	0	40.00000	.00000	.00000	0
4	0	0	1	1	1	0	60.00000	.00000	.00000	0
5	0	0	1	1	1	0	100.00000	.00000	.00000	0
6	0	0	1	1	1	0	300.00000	.00000	.00000	0
7	0	0	1	1	1	0	420.00000	.00000	.00000	0
8	0	0	1	1	1	0	540.00000	.00000	.00000	0
9	0	0	1	1	1	0	660.00000	.00000	.00000	0
10	0	0	1	1	1	0	780.00000	.00000	.00000	0
11	0	0	1	1	1	0	900.00000	.00000	.00000	0

GENERATED NODAL DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES						NODAL POINT COORDINATES			MESH GENERATING
	X	Y	Z	XR	YR	ZR	X	Y	Z	
1	1	0	1	1	1	0	.00000	.00000	.00000	0
2	0	0	1	1	1	0	20.00000	.00000	.00000	0
3	0	0	1	1	1	0	40.00000	.00000	.00000	0
4	0	0	1	1	1	0	60.00000	.00000	.00000	0
5	0	0	1	1	1	0	100.00000	.00000	.00000	0
6	0	0	1	1	1	0	300.00000	.00000	.00000	0
7	0	0	1	1	1	0	420.00000	.00000	.00000	0
8	0	0	1	1	1	0	540.00000	.00000	.00000	0
9	0	0	1	1	1	0	660.00000	.00000	.00000	0
10	0	0	1	1	1	0	780.00000	.00000	.00000	0
11	0	0	1	1	1	0	900.00000	.00000	.00000	0

EQUATION NUMBERS
 NODE
 NUMBER

DEGREE OF FREEDOM

N	X	Y	Z	XR	YR	ZR
1	0	1	0	0	0	2
2	3	4	0	0	0	5
3	6	7	0	0	0	8
4	9	10	0	0	0	11
5	12	13	0	0	0	14
6	15	16	0	0	0	17
7	18	19	0	0	0	20
8	21	22	0	0	0	23
9	24	25	0	0	0	26
10	27	28	0	0	0	29
11	30	31	0	0	0	32

1 L O A D C A S E D A T A

LOAD CASE NUMBER = 1
 NUMBER OF CONCENTRATED LOADS = 21

NODE NUMBER	DIRECTION	LOAD MAGNITUDE
0 1	2	-.18330E+02
0 2	2	-.36670E+02
0 3	2	-.36670E+02
0 4	2	-.12830E+03
0 5	2	-.22000E+03
0 6	2	-.22000E+03
0 7	2	-.22000E+03
0 8	2	-.22000E+03
0 9	2	-.22000E+03
0 10	2	-.22000E+03
0 11	2	-.22000E+03
0 2	1	-.20000E+03
0 3	1	-.20000E+03
0 4	1	-.74000E+03
0 5	1	-.12400E+04
0 6	1	-.12400E+04
0 7	1	-.12400E+04
0 8	1	-.12400E+04
0 9	1	-.12400E+04
0 10	1	-.12400E+04
0 11	1	-.12400E+04

1 E L E M E N T G R O U P D A T A
 E L E M E N T D E F I N I T I O N

ELEMENT TYPE (NPAR(1)) = 2
 EQ.1 TRUSS ELEMENTS
 EQ.2 BEAM ELEMENTS
 EQ.3 QUADRILATERAL ELEMENTS FOR PLANE
 STRESS OR STRAIN CONDITIONS
 EQ.4 PLATE ELEMENT

NUMBER OF ELEMENTS (NPAR(2)) = 10

M A T E R I A L D E F I N I T I O N

NUMBER OF DIFFERENT SETS OF MATERIAL AND
 AND CROSS-SECTIONAL CONSTANTS (NPAR(3)) = 1

CHARACTERISTICS OF BEAM BEAM ELEMENTS

BEAM ELEMENT TYPE (NPAR(4)) = 4
EQ.1 TWO NODE BEAM MODEL - SIMPLE BEAM
EQ.2 TWO NODE MODEL - RAYLEIGH BEAM
EQ.3 THREE NODE MODEL - TIMOSHENKO BEAM
EQ.4 VIGA COLUNA DE DOIS NOS

SET NUMBER	YOUNGS MODULUS E	MASS DENSITY RO	THICKNESS THIC	HEIGHT HEIG
---------------	------------------------	-----------------------	-------------------	----------------

1	.29000E+09	.10000E+01	.80000E+01	.20000E+01
---	------------	------------	------------	------------

1 ELEMENT INFORMATION

ELEMENT NUMBER-N	NODE I	NODE J	MATERIAL SET NUMBER
---------------------	-----------	-----------	------------------------

1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	1
4	4	5	1
5	5	6	1
6	6	7	1
7	7	8	1
8	8	9	1
9	9	10	1
10	10	11	1

1 TOTAL SYSTEM DATA

NUMBER OF EQUATIONS (NEQ) = 32
NUMBER OF STIFFNESS MATRIX ELEMENTS (NWK) = 150
MAXIMUM HALF BANDWIDTH (MK) = 6
MEAN HALF BANDWIDTH (MM) = 4

INCREMENTO = 1
NUMERO DE ITERACOES = 26

FORÇA AXIAL DE 1 = -9897.207000
 FORÇA DE REACAO LOCAL = -3031.830000
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 1 = -3031.830000
 DGAP GLOBAL DE 1= 0.000000E+00
 FORÇA DE REACAO LOCAL = 0.000000E+00
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 3= 0.000000E+00
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 4= 0.000000E+00
 DGAP GLOBAL DE 4= 2.125000
 DGAP GLOBAL DE 3= 0.000000E+00
 FORÇA AXIAL DE 2 = -9689.866000
 FORÇA DE REACAO LOCAL = 0.000000E+00
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 6= 0.000000E+00
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 7= 0.000000E+00
 DGAP GLOBAL DE 7= -2.125000
 DGAP GLOBAL DE 6= 0.000000E+00
 FORÇA AXIAL DE 3 = -9483.181000
 FORÇA DE REACAO LOCAL = 4093.582000
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 9= 2.570225
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 10= 4093.581000
 DGAP GLOBAL DE 10= -1.560000E-02
 DGAP GLOBAL DE 9= 0.000000E+00
 FORÇA AXIAL DE 4 = -8733.139000
 FORÇA DE REACAO LOCAL = 0.000000E+00
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 12= 0.000000E+00
 FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 13= 0.000000E+00
 DGAP GLOBAL DE 13= -2.125000
 DGAP GLOBAL DE 12= 0.000000E+00

FORÇA AXIAL DE 5 = -7483.781888

FORÇA DE REACAO LOCAL = 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 15= 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 16= 0.000000E+00

DGAP GLOBAL DE 16= -2.125000

DGAP GLOBAL DE 15= 0.000000E+00

FORÇA AXIAL DE 6 = -6237.336888

FORÇA DE REACAO LOCAL = 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 18= 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 19= 0.000000E+00

DGAP GLOBAL DE 19= -2.125000

DGAP GLOBAL DE 18= 0.000000E+00

FORÇA AXIAL DE 7 = -4991.580000

FORÇA DE REACAO LOCAL = 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 21= 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 22= 0.000000E+00

DGAP GLOBAL DE 22= -2.125000

DGAP GLOBAL DE 21= 0.000000E+00

FORÇA AXIAL DE 8 = -3744.562000

FORÇA DE REACAO LOCAL = 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 24= 0.000000E+00

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 25= 0.000000E+00

DGAP GLOBAL DE 25= -2.125000

DGAP GLOBAL DE 24= 0.000000E+00

FORÇA AXIAL DE 9 = -2496.275000

FORÇA DE REACAO LOCAL = 173.226888

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 27= 1.323368E-01

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 28= 173.226888

DGAP GLOBAL DE 28= -2.125000

DGAP GLOBAL DE 27= 0.000000E+00

FORÇA AXIAL DE 10 = -1247.989000

FORÇA DE REACAO LOCAL = 531.673500

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 30= 2.091553E-04

FORÇA DE REACAO GLOBAL DE 31= 531.673500

DSAP GLOBAL DE 31= -2.125000

DSAP GLOBAL DE 30= 0.000000E+00

INCREMENTO = 2

NUMERO DE ITERACOES = 8

D I S P L A C E M E N T S

NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
1	.000000E+00	.303183E-03	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.479750E-04
2	-.154752E-03	.554543E-03	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.582457E-04
3	-.307061E-03	-.345003E-02	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.378098E-03
4	-.463221E-03	-.160091E-01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.913923E-03
5	-.202427E-02	-.314355E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.369772E-02
6	-.491973E-02	-.027382E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.457979E-02
7	-.786205E-02	-.135922E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.410500E-02
8	-.981374E-02	-.170113E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.284300E-02
9	-.106951E-01	-.203333E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.137262E-02
10	-.109993E-01	-.212501E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	-.262844E-03
11	-.111164E-01	-.212505E+01	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.130067E-03