

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Estudo Comparativo entre Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise Dinâmica de Placas e Cascas.

Autor: **Amarildo Tabone Paschoalini**
Orientador: **Loir Afonso Moreira**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Amarildo
J. Paschoalini E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 21/12/96.

Loir Afonso Moreira
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Estudo Comparativo entre Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise Dinâmica de Placas e Cascas.

Autor: Amarildo Tabone Paschoalini
Orientador: Loir Afonso Moreira

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1995
SP-Brasil



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	TJUNICAMP
	P262e
V.	Ex
TOMBO BC/	26776
PROC.	067/96
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,50
DATA	12/3/96
N.º CPD	C11.000.84609-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P262e

Paschoalini, Amarildo Tabone

Estudo comparativo entre elementos finitos isoparamétricos das famílias Serendipity e Lagrangeana para análise dinâmica de placas e cascas / Amarildo Tabone Paschoalini.-- Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Loir Afonso Moreira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Integração numérica. 3. Análise estrutural (Engenharia). 4. Cascas (Engenharia). 5. Placas (Engenharia). I. Moreira, Loir Afonso. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

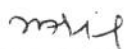
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo Comparativo entre Elementos Finitos
Isoparamétricos das Famílias Serendipity e
Lagrangeana para Análise Dinâmica de
Placas e Cascas.**

Autor: **Amarildo Tabone Paschoalini**

Orientador: **Loir Afonso Moreira**



**Prof. Dr. Loir Afonso Moreira
Instituição UNICAMP**



**Prof. Dr. Isaias Vizotto
Instituição UNICAMP**



**Prof. Dr. Robson Pederiva
Instituição UNICAMP**

Campinas, 21 de dezembro de 1995.

*À Silmara,
pelo amor, incentivo e dedicação.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Loir Afonso Moreira por todo apoio e paciência, que contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Ao amigo Marcelo de Almeida Pierossi pela ajuda na elaboração da parte inicial do programa computacional.

Aos amigos do Departamento de Projeto Mecânico e Departamento de Mecânica Computacional pelo incentivo.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Ilha Solteira, que contribuíram de maneira decisiva na realização deste trabalho, especialmente ao amigo Prof. Dr. Vicente Lopes Jr., pelo total apoio.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	CAMPO DE DESLOCAMENTO DO ELEMENTO DE CASCA	6
2.1	Introdução	6
2.2	Determinação dos pontos situados sobre a superfície média	7
2.2	Determinação dos pontos situados fora da superfície média	9
2.3	Determinação do campo de deslocamento do elemento de casca	11
3	ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA	19
3.1	Introdução	19
3.2	Estado de deformação específica com relação ao sistema de referência local (x' , y' , z').	24
4	FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE CASCA	33
4.1	Introdução	33
4.2	Formulação das características do elemento	36
4.3	Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca	42
4.3.1	Determinação da submatriz $[K_{ij}]$	43
4.4	Determinação da matriz de massa do elemento de casca	54
4.4.1	Determinação da submatriz $[M_{ij}]$	55
5	FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA	60
5.1	Introdução	60
5.2	Determinação das matrizes de rigidez e de massa globais	61
5.3	Problema de autovalor generalizado	63
5.4	Resolução do sistema de equações	64
5.4.1	Método da iteração no subespaço	64
5.4.2	Método de Jacobi generalizado	67
5.5	Programa computacional	69
6	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	72
6.1	Introdução	72
6.2	Placas retangulares	73
6.2.1	Malha de discretização regular	75
6.2.1.1	Placa quadrada S-E-S-L ($a/b = 1.0$)	75
6.2.1.2	Placa quadrada S-E-S-S ($a/b = 1.0$)	84
6.2.1.3	Placa quadrada E-E-E-E ($a/b = 1.0$)	93
6.2.1.4	Placa retangular S-E-S-E ($a/b = 1.5$)	102
6.2.1.5	Placa retangular E-E-E-L ($a/b = 1.5$)	111
6.2.2	Malha de discretização distorcida	120
6.2.2.1	Placa quadrada S-E-S-S ($a/b = 1.0$)	120
6.2.2.2	Placa quadrada S-E-S-L ($a/b = 1.0$)	128
6.2.2.3	Placa quadrada E-E-E-E ($a/b = 1.0$)	136
6.2.2.4	Placa retangular S-E-S-E ($a/b = 1.5$)	144
6.2.2.5	Placa retangular E-E-E-L ($a/b = 1.5$)	152

6.3	Casca cilíndrica	160
6.3.1	Malha de discretização regular	161
6.3.1.1	Casca cilíndrica E-L-L-L	161
6.3.1.2	Casca cilíndrica E-E-E-E	167
6.3.2	Malha de discretização distorcida	173
6.3.2.1	Casca cilíndrica E-L-L-L	173
6.3.2.2	Casca cilíndrica E-E-E-E	178
6.4	Viga engastada	183
7	CONCLUSÕES	186
	BIBLIOGRAFIA	188
A	DETERMINAÇÃO DOS VETORES E VERSORES	191
A.1	Determinação dos vetores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$	191
A.2	Determinação dos versores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$	193
B	FUNÇÕES DE FORMA	198
B.1	Introdução	198
B.2	Funções de forma da família Serendipity	198
B.3	Derivadas das funções de forma da família Serendipity	203
B.4	Funções de forma da família Lagrangeana	204
B.5	Derivadas das funções de forma da família Lagrangeana	210
C	ELEMENTOS DAS MATRIZES	212
C.1	Elementos da matriz $[A(\xi, \eta)]$	212
C.2	Derivadas dos deslocamentos locais (u' , v' e w') com relação às coordenadas locais (x' , y' e z')	213
C.3	Elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$	214
C.4	Elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$	216

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Estrutura de casca discretizada através de elementos finitos quadrilaterais.	2
Figura 1.2	(a) Elemento sólido tridimensional; (b) elemento de casca, obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional.	3
Figura 1.3	Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	4
Figura 1.4	Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	5
Figura 2.1	Elemento de casca, sua superfície média e os nós i associados a ela: (a) elemento da família Serendipity, (b) elemento da família Lagrangeana.	7
Figura 2.2	Vetor $\vec{R}$, que define a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento de casca.	8
Figura 2.3	Espessura t_i da casca no nó i e os vetores $\vec{m}_i$ e $\vec{m}$, que definem, respectivamente, os pontos P e Q, fora da superfície média.	10
Figura 2.4	Sistemas, locais, de referência (x', y', z') , associado ao ponto O e ao nó i e seus respectivos versores.	11
Figura 2.5	Deslocamento $\vec{\delta}_i$, apresentado pelo nó i , genérico, da superfície média do elemento de casca.	12
Figura 2.6	Deslocamento $\vec{\Delta}_i$, apresentado pelo ponto P.	13
Figura 2.7	Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Serendipity.	16
Figura 2.8	Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Lagrangeana.	16
Figura 3.1	Vetor $\vec{R}$, que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca.	20
Figura 3.2	Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.	24
Figura 4.1	Estado de tensão no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.	34
Figura 5.1	Fluxograma do programa computacional para a análise dinâmica de placas e cascas.	71
Figura 6.1	Placa retangular S-E-S-L com convenção de coordenadas.	73
Figura 6.2	Malha de discretização regular: 2x2 (linhas principais) e 4x4 (linhas secundárias).	75
Figura 6.3	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	79
Figura 6.4	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	80

Figura 6.5	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	81
Figura 6.6	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	82
Figura 6.7	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa quadrada S-E-S-L, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	83
Figura 6.8	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	88
Figura 6.9	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	89
Figura 6.10	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	90
Figura 6.11	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	91
Figura 6.12	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa quadrada S-E-S-S, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	92
Figura 6.13	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	97
Figura 6.14	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	98
Figura 6.15	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	99

Figura 6.16	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	100
Figura 6.17	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa quadrada E-E-E-E, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	101
Figura 6.18	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	106
Figura 6.19	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	107
Figura 6.20	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	108
Figura 6.21	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	109
Figura 6.22	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa retangular S-E-S-E, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	110
Figura 6.23	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	115
Figura 6.24	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	116
Figura 6.25	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	117
Figura 6.26	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	118

Figura 6.27	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa retangular E-E-E-L, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	119
Figura 6.28	Malha de discretização distorcida: 2x2 (linhas principais) e 4x4 (linhas secundárias).	120
Figura 6.29	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	124
Figura 6.30	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	125
Figura 6.31	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	126
Figura 6.32	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	127
Figura 6.33	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	132
Figura 6.34	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	133
Figura 6.35	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	134
Figura 6.36	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	135
Figura 6.37	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	140
Figura 6.38	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	141

Figura 6.39	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	142
Figura 6.40	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	143
Figura 6.41	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	148
Figura 6.42	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	149
Figura 6.43	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	150
Figura 6.44	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	151
Figura 6.45	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	156
Figura 6.46	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	157
Figura 6.47	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	158
Figura 6.48	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	159
Figura 6.49	Casca cilíndrica E-L-L-L com convenção de coordenadas	160
Figura 6.50	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	164

Figura 6.51	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.	165
Figura 6.52	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da casca cilíndrica E-L-L-L, com malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	166
Figura 6.53	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	170
Figura 6.54	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.	171
Figura 6.55	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da casca cilíndrica E-E-E-E, com malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	172
Figura 6.56	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	176
Figura 6.57	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.	177
Figura 6.58	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.	181
Figura 6.59	Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.	182
Figura 6.60	Viga engastada em uma de suas extremidades.	183
Figura 6.61	Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e), sexto (f), sétimo (g), oitavo (h), nono (i), décimo (j), décimo primeiro (k) e décimo segundo (l) modos de vibrar da viga engastada com malha de discretização de 10x2 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.	185
Figura 7.1	Expansão polinomial correspondente ao refinamento hierárquico de 3º e 4º grau.	187
Figura A.1	Vetor $\vec{r}_3$, normal à superfície média e vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes a ela.	192
Figura A.2	Sistema, local, de referência (x' , y' , z'), associado ao ponto O e versor $\vec{i}$, associado à direção X do sistema de referência global.	194
Figura A.3	Sistema, local, de referência (x' , y' , z'), associado ao nó i .	197
Figura B.1	Função de forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	199

Figura B.2	Função de forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	200
Figura B.3	Função de forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	200
Figura B.4	Função de forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	201
Figura B.5	Função de forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	201
Figura B.6	Função de forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	202
Figura B.7	Função de forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	202
Figura B.8	Função de forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	203
Figura B.9	Função de forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	205
Figura B.10	Função de forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	206
Figura B.11	Função de forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	206
Figura B.12	Função de forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	207
Figura B.13	Função de forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	207
Figura B.14	Função de forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	208
Figura B.15	Função de forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	208
Figura B.16	Função de forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	209
Figura B.17	Função de forma $N_9(\xi, \eta)$, associada ao nó 9 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	209

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 6.1	Teoria e literatura utilizadas na comparação dos resultados obtidos pelos dois elementos em análise, para cada relação t/a , entre espessura e dimensão característica da placa.	74
Tabela 6.2	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.	76
Tabela 6.3	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.	76
Tabela 6.4	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.	77
Tabela 6.5	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.	77
Tabela 6.6	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.	78
Tabela 6.7	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.	78
Tabela 6.8	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.	85
Tabela 6.9	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.	85
Tabela 6.10	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.	86
Tabela 6.11	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.	86
Tabela 6.12	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.	87
Tabela 6.13	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.	87

Tabela 6.14	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.	94
Tabela 6.15	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.	94
Tabela 6.16	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.	95
Tabela 6.17	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.	95
Tabela 6.18	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.	96
Tabela 6.19	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.	96
Tabela 6.20	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.	103
Tabela 6.21	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.	103
Tabela 6.22	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.	104
Tabela 6.23	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.	104
Tabela 6.24	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.	105
Tabela 6.25	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.	105
Tabela 6.26	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.	112
Tabela 6.27	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.	112
Tabela 6.28	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.	113

Tabela 6.29	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.	113
Tabela 6.30	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.	114
Tabela 6.31	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.	114
Tabela 6.32	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.	12
Tabela 6.33	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.	121
Tabela 6.34	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.	122
Tabela 6.35	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.	122
Tabela 6.36	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.	123
Tabela 6.37	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.	123
Tabela 6.38	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.	129
Tabela 6.39	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.	129
Tabela 6.40	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.	130
Tabela 6.41	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.	130
Tabela 6.42	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.	131
Tabela 6.43	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.	131

Tabela 6.44	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.	137
Tabela 6.45	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.	137
Tabela 6.46	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.	138
Tabela 6.47	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.	138
Tabela 6.48	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.	139
Tabela 6.49	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.	139
Tabela 6.50	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.	145
Tabela 6.51	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.	145
Tabela 6.52	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.	146
Tabela 6.53	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.	146
Tabela 6.54	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.	147
Tabela 6.55	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.	147
Tabela 6.56	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.	153
Tabela 6.57	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.	153
Tabela 6.58	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.	154

Tabela 6.59	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.	154
Tabela 6.60	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.	155
Tabela 6.61	Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.	155
Tabela 6.62	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização regulares de (2x2), (3x3) e (4x4).	162
Tabela 6.63	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização regulares de (5x5), (6x6) e (7x7).	163
Tabela 6.64	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização regulares de (2x2), (3x3) e (4x4).	168
Tabela 6.65	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização regulares de (5x5), (6x6) e (7x7).	169
Tabela 6.66	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização distorcidas de (2x2), (3x3) e (4x4).	174
Tabela 6.67	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização distorcidas de (5x5), (6x6) e (7x7).	175
Tabela 6.68	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização distorcidas de (2x2), (3x3) e (4x4).	179
Tabela 6.69	Frequências naturais [s^{-1}] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização distorcidas de (5x5), (6x6) e (7x7).	180
Tabela 6.70	Frequências naturais [s^{-1}] para a viga engastada com malhas de discretização regulares de (5x1) e (10x2) elementos.	184

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS DAS FAMÍLIAS SERENDIPITY E LAGRANGEANA PARA ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS E CASCAS.

RESUMO

Em 1970, *Ahmad* apresentou uma formulação, para análise de placas e cascas, baseada na degeneração de um elemento tridimensional, através da redução de sua dimensão na direção da espessura. O campo de deslocamento era, então, interpolado a partir das funções de forma da família Serendipity e, para a obtenção das características do elemento, utilizava-se *integração numérica consistente*. Os resultados obtidos por esse elemento foram excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, atendendo, portanto, à teoria de *Mindlin-Reissner*; contudo, com a redução da espessura, o elemento tornava-se, excessivamente, rígido e os resultados não tendiam, como era de se esperar, àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas. O objetivo deste trabalho é o estudo comparativo, na análise dinâmica de placas e cascas, entre o desempenho, utilizando-se *integração numérica consistente*, do elemento finito isoparamétrico, quadrilateral, quadrático, da família Serendipity e do elemento finito isoparamétrico, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana, obtidos, ambos, a partir da formulação de *Ahmad*; pretende-se estabelecer, dentre os dois elementos, qual é o mais adequado para iniciar o desenvolvimento de um *elemento finito subparamétrico do tipo hierárquico*, baseado no conceito da aproximação p , visando retirar a característica de rigidez excessiva do elemento de *Ahmad*, para situações de placas e cascas finas.

COMPARATIVE STUDY OF ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS OF THE SERENDIPITY AND LAGRANGEAN FAMILIES IN THE DYNAMIC ANALYSIS OF PLATES AND SHELLS.

ABSTRACT

In 1970, *Ahmad* presented a formulation for the analysis of plates and shells, based on the degeneration of three-dimensional solid element, by reducing its dimension in the thickness direction. The displacement field was then interpolated through the shape functions of Serendipity family and, in order to achieve the element characteristics, *consistent numerical integration* was used. The obtained results were excellent for moderately thick plates and shells applications, being in accordance with the *Mindlin-Reissner's* theory; however, with the reduction of the thickness, the element became excessively rigid and the results did not tend to those of the *Kirchhoff's* theory for thin plates and shells. The purpose of this work is the comparative study in the dynamic analysis of plates and shells concerning the performance, considering *consistent numerical integration*, of the isoparametric, quadrilateral, quadratic finite element of Serendipity family and of the isoparametric, quadrilateral, quadratic finite element of Lagrangean family, achieved, both, from the *Ahmad's* formulation; one intends to establish, between both elements, which is the most adequate to start the development of a *subparametric hierarchical element*, based on the p approximation concept, objectifying to remove the characteristic of excessive rigidity of the *Ahmad's* element for the situations of thin plates and shells.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos tem sido uma das técnicas numéricas mais utilizadas para a solução de problemas de engenharia. O sucesso do método é baseado em grande parte no processo básico usado: formulação do problema, discretização da estrutura analisada e solução efetiva das equações resultantes. Esses passos básicos são os mesmos qualquer que seja o problema considerado e, com o uso do computador digital, fornecem uma aproximação para os problemas de engenharia. O resultado final é um sistema numérico completo implementado no computador digital.

Embora a análise de estruturas compostas por placas e cascas pelo Método dos Elementos Finitos, como mostra a Figura 1.1, já se estenda por mais de duas décadas, o estabelecimento de um modelo para análise estática e dinâmica, que seja confiável, eficiente e aplicável a qualquer situação (placas e cascas finas ou placas e cascas moderadamente grossas), ainda, continua a ser objeto de estudo de muitos autores.

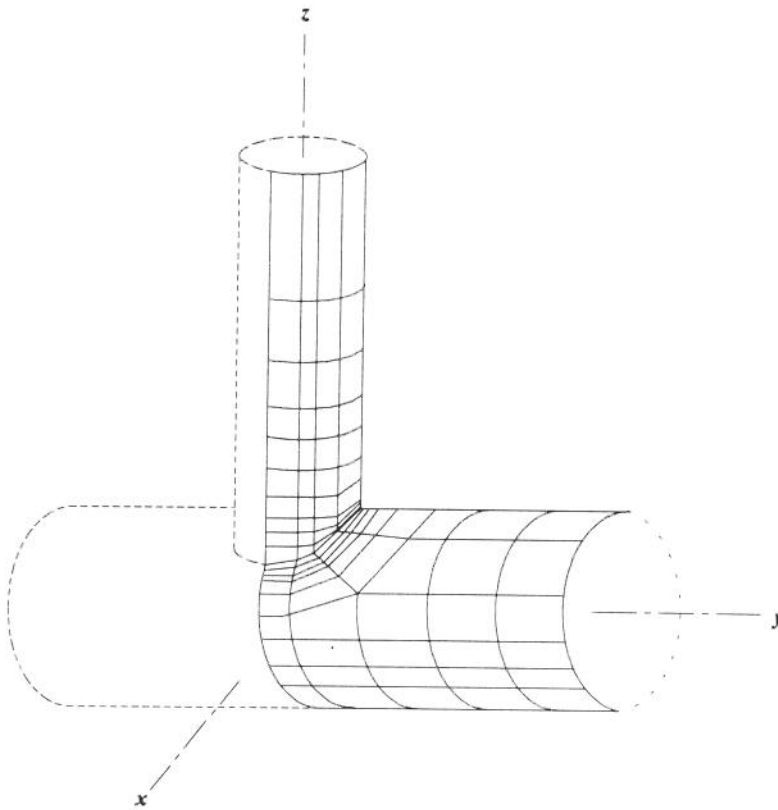


Figura 1.1 Estrutura de casca discretizada através de elementos finitos quadrilaterais.

As placas e as cascas são componentes estruturais, respectivamente, planos e curvos, que apresentam sua espessura muito menor que suas outras dimensões; encontram grande aplicação na indústria moderna, especialmente, mecânica, naval, aeronáutica, petroquímica, aeroespacial, nuclear e, também, na construção civil. A espessura é medida na direção perpendicular a sua superfície média e, quando comparada às outras dimensões, determina seu comportamento. Assim, pode-se estabelecer a seguinte classificação [1]:

(a) Se a relação entre a espessura, t e uma dimensão característica, a , de sua superfície média é menor do que $1/20$ ($t/a < 0,05$), tem-se o caso de *placa e casca finas* [2], que se caracterizam por seguir as hipóteses de *Kirchhoff* [3]:

- Um elemento reto da placa ou casca, normal a sua superfície média, após a deformação, permanece perpendicular àquela superfície e mantém seu comprimento inicial; esta hipótese é equivalente a desconsiderar as tensões de cisalhamento atuantes na direção da espessura, bem como, a deformação específica na direção perpendicular à superfície média.

(b) Se a relação entre a espessura, t e uma dimensão característica, a , da superfície média é maior ou igual a $1/20$ ($t/a \geq 0,05$), as tensões de cisalhamento na direção da espessura tornam-se importantes e não podem mais ser desprezadas; neste caso, se um elemento reto da placa ou casca é normal a sua superfície média, após a deformação, ele permanece reto, mantém seu comprimento inicial, porém, não é mais perpendicular àquela superfície. Esta é a hipótese básica de *Mindlin-Reissner* [4], que caracteriza *placa ou casca moderadamente grossas*.

Em 1970, *Ahmad* [5] apresentou uma formulação baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional, através da redução de sua dimensão na direção da espessura (Figura 1.2); nesta formulação, considera-se que as normais à superfície média permanecem retas, após a deformação, sem, contudo, continuarem normais a ela; este fato, possibilita que sejam levadas em conta as tensões de cisalhamento na direção da espessura.

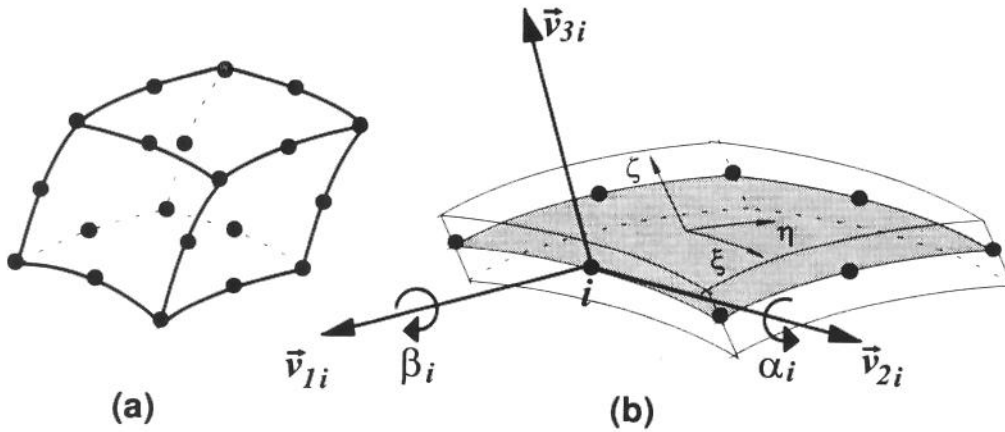


Figura 1.2 (a) Elemento sólido tridimensional; (b) elemento de casca, obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional.

A geometria do elemento é descrita pelas coordenadas dos nós, i , situados na superfície média e por vetores nodais $\vec{v}_{3i}$ (Figura 1.2), que definem os pontos, que estão fora desta superfície. Em cada nó, consideram-se cinco graus de liberdade, sendo três deslocamentos globais (u_i, v_i, w_i) e duas rotações locais (α_i e β_i) do vetor $\vec{v}_{3i}$ em torno de dois outros vetores: $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$, normais a ele (Figura 1.2).

A matriz de rigidez do elemento é obtida da maneira usual, a partir da integração numérica da expressão:

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (1.1)$$

através da utilização de 2 pontos de integração na direção ζ (direção ao longo da espessura) e, para o caso de elemento quadrático, (3×3) pontos de integração na superfície média (ξ e η); caracterizando, assim, uma *integração numérica consistente*, uma vez que este é o número de pontos necessário para integrar exatamente aquela expressão [6]. As funções de forma utilizadas para a obtenção da matriz $[B]$ da equação anterior são aquelas da família Serendipity, que, para o caso de elemento quadrático, consideram oito nós na superfície média (Figura 1.3).

Os resultados obtidos por este elemento foram excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, atendendo, portanto, à teoria de *Mindlin-Reissner*. Entretanto, com a redução da espessura, os resultados não tendiam, como era de se esperar, àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas.

A partir de então, um grande número de autores tem estudado este elemento e feito suas propostas para melhorar seu comportamento. Com a introdução da *Técnica de Integração Reduzida*, proposta em [7] (elemento de *Zienkiewicz*), conseguiu-se uma melhora considerável no desempenho do elemento para as aplicações de placas e cascas finas. Neste caso, para a obtenção da matriz de rigidez (Equação. 1.1), ao invés de (3×3), utilizam-se (2×2) pontos de integração na superfície média, caracterizando, desta forma, o que se convencionou chamar de *integração reduzida*. A *integração totalmente reduzida* mostrou resultados notáveis [7] para as situações de placas e cascas finas. Para o elemento de *Zienkiewicz*, consideram-se, também, as funções de forma da família Serendipity com 8 nós na superfície média, conforme mostra a Figura 1.3.

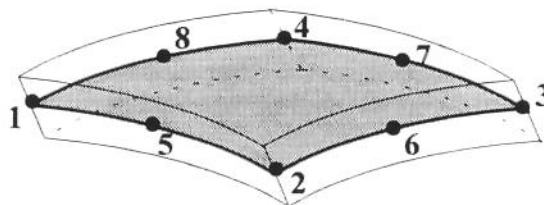


Figura 1.3 Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

O objetivo deste trabalho é o estudo comparativo, na análise dinâmica de placas e cascas, entre os desempenhos do elemento finito isoparamétrico, quadrilateral, quadrático, da

família Serendipity e do elemento isoparamétrico, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana, obtido, também, da degeneração do elemento sólido tridimensional (formulação de *Ahmad*), mas que considera 9 nós na superfície média, como mostra a Figura 1.4.

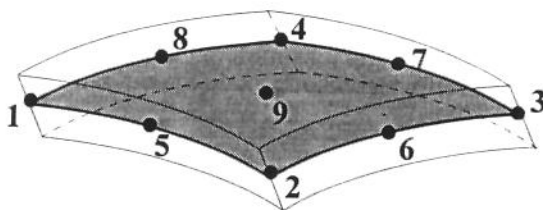


Figura 1.4 Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

Comparam-se os desempenhos destes elementos, considerando-se diversas relações, t/a , entre a espessura, t e a dimensão característica, a , da superfície média, abordando, portanto, desde aplicações de placas e cascas finas até placas e cascas moderadamente grossas; comparam-se, também, os desempenhos destes elementos, considerando-se malha de discretização regular e distorcida. Pretende-se, com este trabalho, estabelecer qual dentre os dois elementos (da família Serendipity ou da família Lagrangeana) é o mais adequado para iniciar o desenvolvimento de um elemento finito subparamétrico, quadrilateral, do tipo hierárquico, para a análise dinâmica de placas e cascas; a finalidade deste *elemento hierárquico* será, então, o de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento apresentado por *Ahmad*, para situações de placas e cascas finas. Pretende-se, portanto, futuramente, obter um *novo elemento*, que, mesmo considerando *integração consistente*, refine a solução obtida a partir do elemento de *Ahmad*, através de uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito da aproximação p (o número e a distribuição de elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos e o número e o grau das funções de interpolação, que deverão complementar a expansão polinomial anterior de maneira a obter polinômios completos de ordem p , são aumentados progressivamente; consegue-se, assim, refinar a solução sem que haja a necessidade de alterar a malha de discretização). A natureza hierárquica da formulação a ser proposta, futuramente, apresenta a vantagem de que as matrizes produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrem e não precisam ser recalculadas, evidenciando, assim, um ganho de caráter computacional.

Capítulo 2

CAMPO DE DESLOCAMENTO DO ELEMENTO DE CASCA

2.1 Introdução

Considere-se, como mostra a Figura 2.1, um elemento de casca, onde as secções ao longo da espessura são geradas por linhas retas. Na superfície média do elemento, considerem-se os nós i , de 1 a 8 para o elemento da família Serendipity e de 1 a 9 para o elemento da família Lagrangeana, dispostos de acordo com a representação da Figura 2.1. Considere-se, ainda, o sistema de referência local, constituído das coordenadas curvilíneas ξ e η na superfície média e da coordenada linear ζ na direcção da espessura do elemento (Figura 2.1). Estas coordenadas devem variar entre -1 e 1 , de tal forma que $\xi = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$ definam as faces laterais e $\zeta = \pm 1$, as faces externas do elemento.

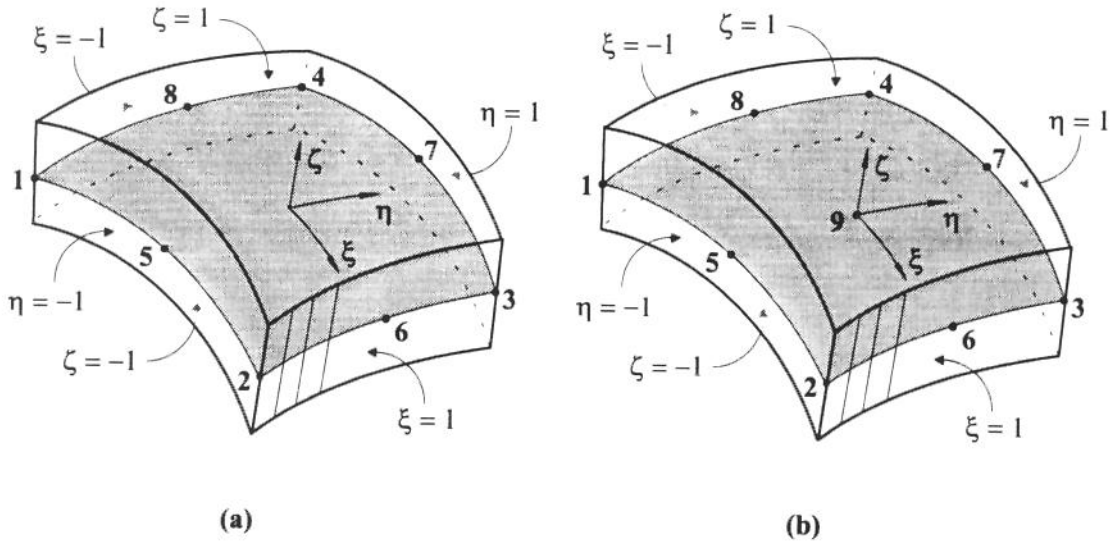


Figura 2.1 Elemento de casca, sua superfície média e os nós i associados a ela: (a) elemento da família Serendipity, (b) elemento da família Lagrangeana.

2.2 Determinação dos pontos situados sobre a superfície média

De acordo com a Figura 2.2, quando se associa ao elemento de casca um sistema cartesiano de referência (X, Y, Z) , denominado global, a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento será dada pelo vetor $\vec{r}$ e a posição de um nó i , genérico, da superfície média, será dada pelo vetor $\vec{r}_i$ (Figura 2.2), que tem as componentes x_i , y_i e z_i segundo os eixos X , Y , e Z , respectivamente. Assim,

$$\vec{r}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

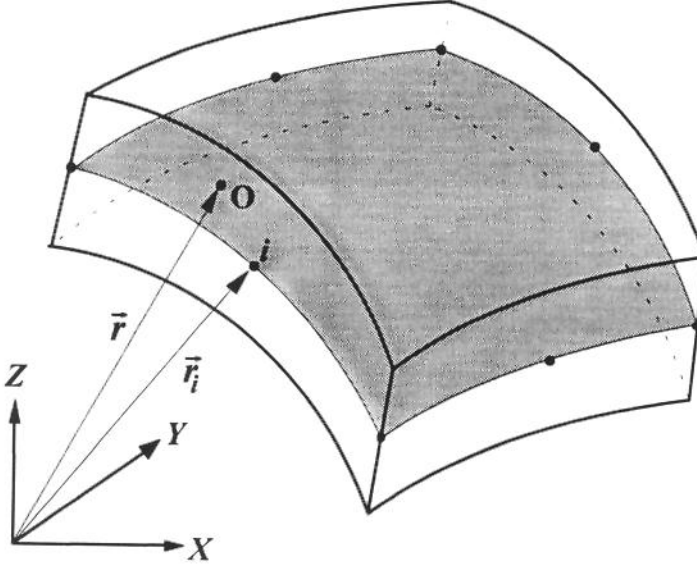


Figura 2.2 Vetor $\vec{r}$, que define a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento de casca.

O vetor $\vec{r}$, que define a posição de qualquer ponto O da superfície média, pode, então, ser interpolado a partir dos vetores nodais $\vec{r}_i$ e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ associadas a cada um dos nós da superfície média [8] e [9]:

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i \quad (2.2)$$

onde, para o elemento da família Serendipity, n é igual a 8 e as funções de forma, dadas por [10]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad \text{para os nós } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.3)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{para os nós } i = 5 \text{ e } 7 \quad (2.4)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{para os nós } i = 6 \text{ e } 8 \quad (2.5)$$

e, para o elemento da família Lagrangeana, n é igual a 9 e as funções de forma, dadas por [10]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi_i \eta_i \xi \eta (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad \text{para os nós } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.6)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta_i (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i) \quad \text{para os nós } i = 5 \text{ e } 7 \quad (2.7)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi_i (1 + \xi \xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{para os nós } i = 6 \text{ e } 8 \quad (2.8)$$

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad \text{para o nó } i = 9 \quad (2.9)$$

sendo que ξ_i e η_i são as coordenadas curvilíneas correspondentes a cada nó i .

Os gráficos das funções de forma, para cada nó da superfície média, são apresentados no Apêndice B.

2.3 Determinação dos pontos situados fora da superfície média

De acordo com a Figura 2.3, se t_i é a espessura da casca no nó i , qualquer ponto P, ao longo desta espessura, será dado pelo vetor $\vec{m}_i$, obtido da seguinte maneira:

$$\vec{m}_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (2.10)$$

onde $\vec{v}_{3i}$ é um versor, normal à superfície média no nó i , cujas componentes segundo o sistema de referência global são calculadas no Apêndice A a partir das Equações (A.15), (A.16), (A.17), (A.38), (A.39) e (A.40).

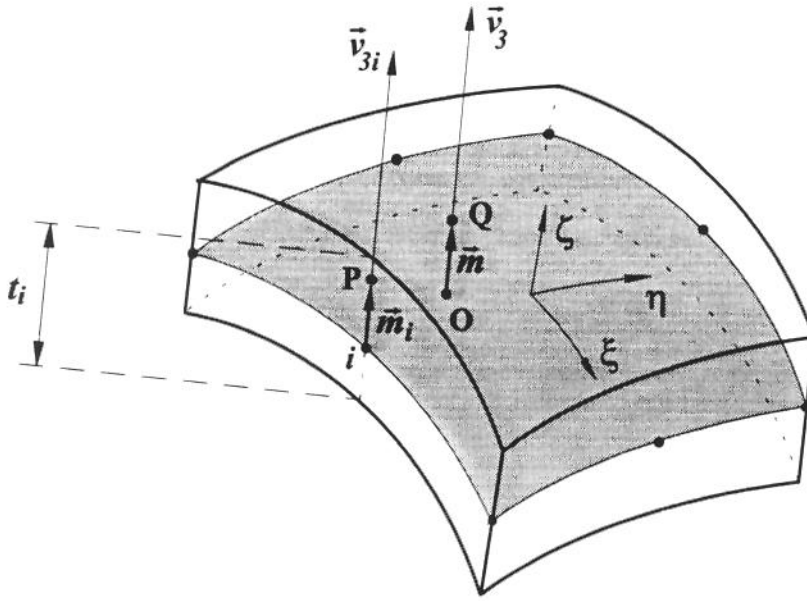


Figura 2.3 Espessura t_i da casca no nó i e os vetores $\vec{m}_i$ e $\vec{m}$, que definem, respectivamente, os pontos P e Q, fora da superfície média.

Desta forma, o vetor $\vec{m}$ (Figura 2.3), que define a posição de qualquer ponto Q, fora da superfície média, pode, então, ser interpolado a partir dos vetores $\vec{m}_i$ e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ de cada nó da superfície média. Portanto,

$$\vec{m}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{m}_i \quad (2.11)$$

ou ainda, tendo-se em conta a Equação (2.10),

$$\vec{m}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (2.12)$$

2.3 Determinação do campo de deslocamento do elemento de casca

No ponto O, genérico, da superfície média do elemento de casca, considere-se a definição de um sistema cartesiano, local, de referência, constituído dos eixos x', y' e z' , cujos versores são, respectivamente, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$, conforme mostra a Figura 2.4. Quando se considera o nó i , genérico, da superfície média, o sistema local de referência (x', y', z') , a ele associado, será definido pelos versores $\bar{v}_{1i}$, $\bar{v}_{2i}$ e $\bar{v}_{3i}$, conforme mostra a Figura 2.4. Os versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$ são tangentes à superfície média e os versores $\bar{v}_3$ e $\bar{v}_{3i}$ normais à ela. As componentes destes versores, segundo o sistema de referência global, são determinadas no Apêndice A.

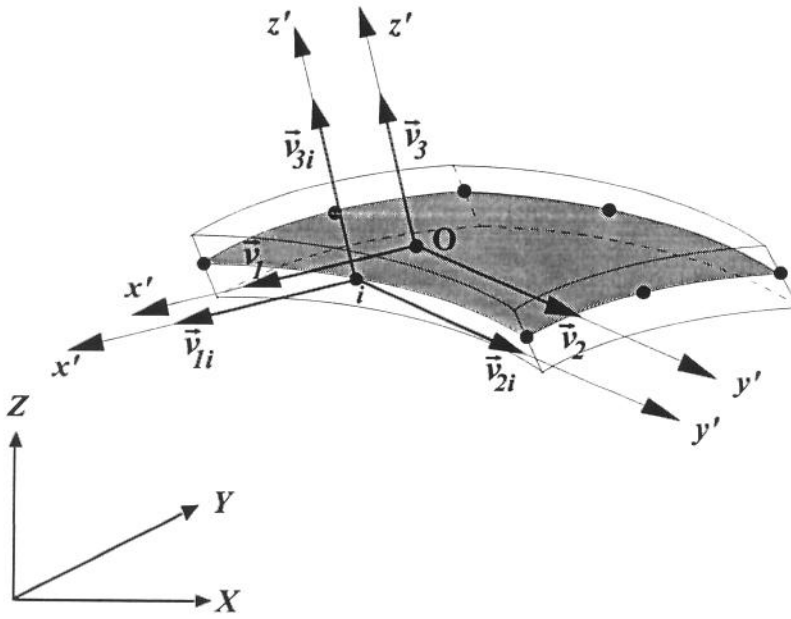


Figura 2.4 Sistemas, locais, de referência (x', y', z') , associados ao ponto O e ao nó i e seus respectivos versores.

Se, em função de sua solicitação, o elemento de casca é deformado, o nó i , genérico, de sua superfície média, vai apresentar um deslocamento $\bar{\delta}_i$ (Figura 2.5), cujas componentes nas direções X, Y e Z do sistema de referência global são, respectivamente: u_i , v_i e w_i .

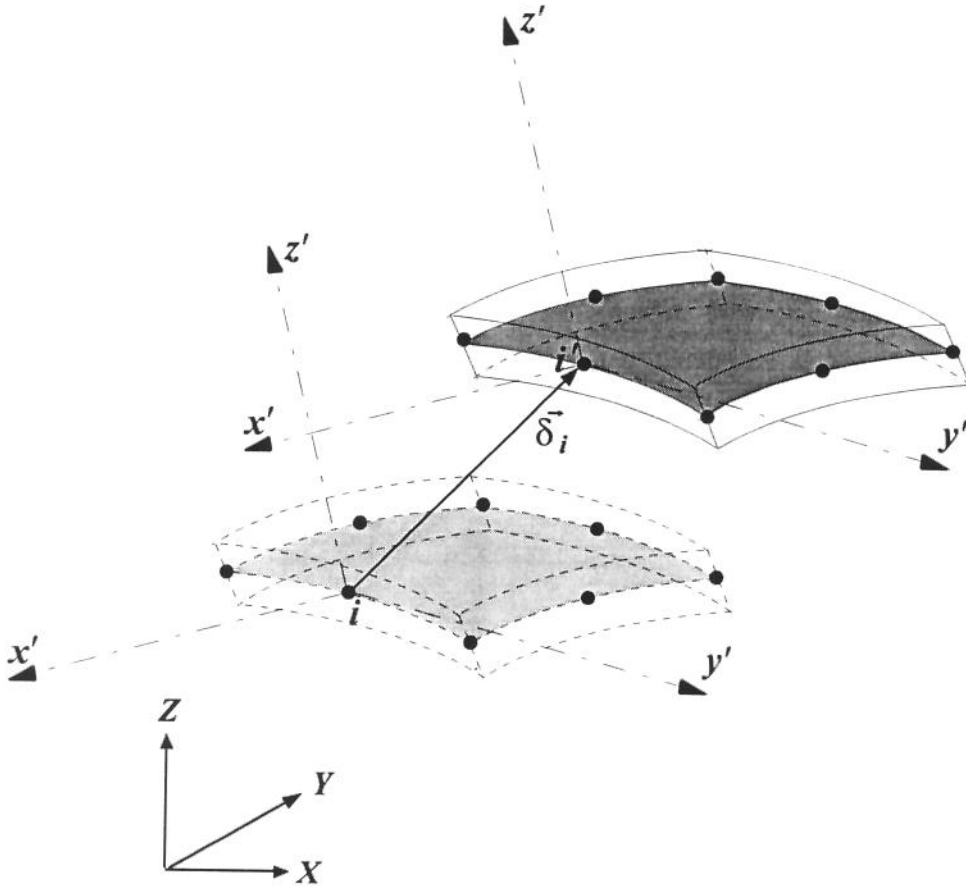


Figura 2.5 Deslocamento $\tilde{\delta}_i$, apresentado pelo nó i , genérico, da superfície média do elemento de casca.

De acordo com o modelo cinemático de *Mindlin-Reissner*, que possibilita considerar, também, as tensões de cisalhamento ao longo da espessura, se um elemento reto da casca é normal a sua superfície média, após a deformação, ele permanece reto, mantém seu comprimento inicial ($\epsilon_z = 0$), porém, não é mais normal à superfície média. Assim, o estado de deformação específica do elemento de casca, com relação ao sistema de referência local (x', y', z') , deverá conter as seguintes componentes: $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$.

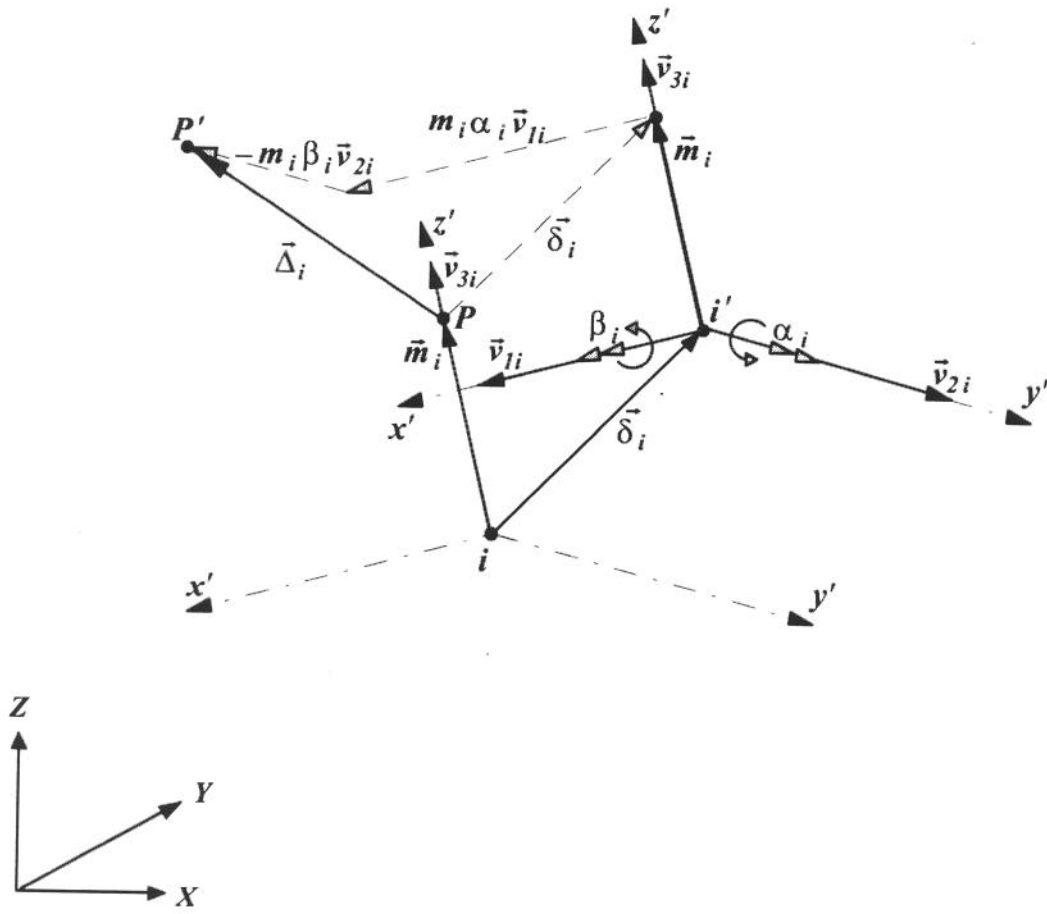


Figura 2.6 Deslocamento $\bar{\Delta}_i$, apresentado pelo ponto P.

Em função do exposto, quando se considera o vetor $\bar{m}_i$ (Figura 2.3), normal à superfície média e que define o ponto P fora desta superfície, após a deformação, ele deverá continuar reto, não mais perpendicular àquela superfície e manter seu comprimento inicial. Portanto, no caso mais geral de solicitação, deverá apresentar duas rotações (Figura 2.6): α_i e β_i , em torno dos eixos y' e x' , respectivamente. O ponto P assume, então, a posição P', apresentando, conseqüentemente, um deslocamento $\bar{\Delta}_i$, que, de acordo com a Figura 2.6 e admitindo-se a hipótese de deslocamentos e deformações pequenos, será dado por:

$$\bar{\Delta}_i = \bar{\delta}_i + m_i \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - m_i \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \quad (2.13)$$

onde $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$ são os versores tangentes à superfície média no nó i , dados, respectivamente, pelas Equações (A.29) e (A.30) do Apêndice A; m_i é o módulo do vetor $\bar{m}_i$ que, de acordo com a Equação (2.10), é dado por:

$$m_i = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \quad (2.14)$$

Substituindo-se este valor na Equação (2.13), tem-se que:

$$\bar{\Delta}_i(\zeta) = \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \quad (2.15)$$

Esta expressão possibilita determinar o deslocamento apresentado por qualquer ponto P ao longo da espessura t_i no nó i . Pode-se, agora, interpolar o deslocamento de qualquer ponto Q (Figura 2.3) do elemento de casca a partir dos deslocamentos $\bar{\Delta}_i$ e das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$ de cada nó da superfície média [10]:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N'_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (2.16)$$

onde n é o número de nós da superfície média. Se o elemento é do tipo *isoparamétrico* [11], as funções de forma são iguais àsquelas utilizadas para interpolar a geometria e dadas através das Equações (2.3), (2.4) e (2.5), para o elemento da família Serendipity e (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), para o elemento da família Lagrangeana. Portanto,

$$N'_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \quad (2.17)$$

e a Equação (2.16) pode ser reescrita como:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (2.18)$$

Substituindo-se $\bar{\Delta}_i$ pelo seu valor, dado a partir da Equação (2.15), tem-se que:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i\end{aligned}\quad (2.19)$$

Se u, v e w são, respectivamente, as componentes do deslocamento $\bar{\Delta}$ nas direções X, Y e Z do sistema de referência global, u_i, v_i e w_i , as componentes do deslocamento $\bar{\delta}_i, v_{11i}, v_{12i}$ e v_{13i} (Apêndice A), as componentes do versor $\bar{v}_{1i}$ e v_{21i}, v_{22i} e v_{23i} (Apêndice A), as componentes do versor $\bar{v}_{2i}$, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = & \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \cdot \beta_i\end{aligned}\quad (2.20)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}u(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i\end{aligned}\quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}v(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\
 & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i
 \end{aligned}
 \quad (2.23)$$

A expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma quadráticas da família Serendipity, é mostrada na Figura 2.7 e a expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma quadráticas da família Lagrangeana, na Figura 2.8.

$$\begin{array}{lll}
 1 & \cdots & \text{cte} \\
 \xi \quad \eta & \cdots & 1^\circ \text{ grau} \\
 \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 & \cdots & 2^\circ \text{ grau} \\
 \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 & &
 \end{array}$$

Figura 2.7 Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Serendipity.

$$\begin{array}{lll}
 1 & \cdots & \text{cte} \\
 \xi \quad \eta & \cdots & 1^\circ \text{ grau} \\
 \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 & \cdots & 2^\circ \text{ grau} \\
 \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 & & \\
 \xi^2\eta^2 & &
 \end{array}$$

Figura 2.8 Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Lagrangeana.

As Equações (2.21), (2.22) e (2.23) podem ser escritas na forma que se apresenta a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \{a_i\} \quad (2.24)$$

onde $[N_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (3×5) , constituída das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ e dos parâmetros (espessura t_i e componentes dos versores $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$) referentes ao nó i :

$$[N_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{11i} & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{21i} \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{12i} & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{22i} \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{13i} & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{23i} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

e $\{a_i\}$ é uma matriz coluna (5×1) , constituída dos deslocamentos e rotações relativos ao nó i :

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Desta maneira, a Equação (2.24) pode ser apresentada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)] & [N_2(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [N_i(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & [N_n(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_n\} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Verifica-se, portanto, que a cada nó i da superfície média do elemento de casca estão associados cinco graus de liberdade: três translações (u_i, v_i e w_i) e duas rotações (α_i e β_i). De uma maneira compacta, a Equação anterior pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (2.28)$$

onde $\{u\}$ é uma matriz coluna (3×1) , constituída dos deslocamentos $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ e $w(\xi, \eta, \zeta)$, $[N]$ é uma matriz (3×40) , para o elemento da família Serendipity e (3×45) , para o elemento da família Lagrangeana, constituída das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ e $\{a\}$ é uma matriz coluna (40×1) , para o elemento da família Serendipity e (45×1) , para o elemento da família Lagrangeana, constituída dos deslocamentos nodais. A matriz $[N]$, que relaciona o campo de deslocamento com os deslocamentos nodais, é dada, então, por:

$$[N(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)] & [N_2(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [N_i(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [N_n(\xi, \eta, \zeta)] \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Capítulo 3

ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA

3.1 Introdução

De acordo com a Figura 3.1, a posição de qualquer ponto Q do elemento será dada pelo vetor $\vec{R}$, que é determinado pela soma de dois outros vetores: o vetor $\vec{r}$, que define a posição de qualquer ponto O da superfície média e o vetor $\vec{m}$, que define a posição de qualquer ponto Q, fora desta superfície. Assim,

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{m} \quad (3.1)$$

Tendo-se em conta as Equações (2.2) e (2.12), o vetor $\vec{R}$ pode, então, ser dado por:

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (3.2)$$

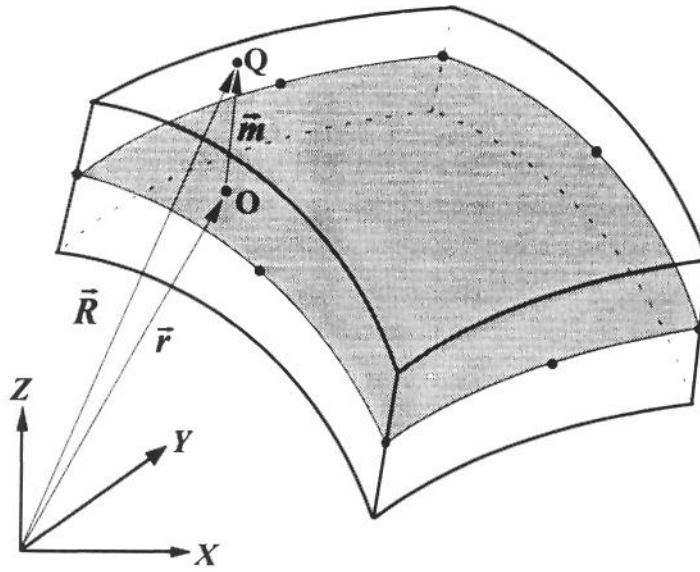


Figura 3.1 Vetor $\bar{R}$, que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca.

Se x , y e z são as componentes do vetor $\bar{R}$, segundo o sistema de referência global, a Equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{R}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

ou ainda,

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (3.4)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (3.5)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot z_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (3.6)$$

Estas equações fornecem, então, as coordenadas x , y e z de qualquer ponto do elemento de casca.

O estado de deformação específica no ponto Q (Figura 3.1), do elemento de casca, segundo o sistema de referência global (X, Y, Z), no caso geral de solicitação, será dado por [12]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \quad (3.11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \quad (3.12)$$

onde $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ são os deslocamentos apresentados pelo ponto Q, com relação àquele sistema de referência. Por outro lado, como mostram as Equações de (2.21) a (2.23), os deslocamentos u , v e w são funções das coordenadas curvilíneas ξ e η e da coordenada linear ζ , assim como, as coordenadas x , y e z do ponto Q, também o são, de acordo com as Equações de (3.4) a (3.6). Portanto, as derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas globais, x , y e z , podem ser obtidas a partir de suas derivadas com relação às coordenadas curvilíneas e coordenada linear, através da seguinte equação matricial [13]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde $[J]$ é a *matriz Jacobiano da transformação* e é dada por [13]:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Como x , y e z são as componentes do vetor $\vec{R}$ (Figura 3.1), segundo o sistema de referência global e, ainda, uma vez que este vetor é dado pela Equação (3.1), pode-se escrever que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\vec{r} + \vec{m})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\vec{r} + \vec{m})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial(\vec{r} + \vec{m})}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Tendo-se, agora, em conta que:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \xi} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial \eta} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial \zeta} = \vec{0} \quad (3.16)$$

a Equação anterior torna-se:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ou ainda,

$$[J] = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vetores tangentes à superfície média, obtidos através das Equações (A.4) e (A.5) do Apêndice A, e $\vec{V}_3$ é um vetor normal àquela superfície, obtido a partir da derivação com relação a ζ da Equação (2.12), assim,

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (3.19)$$

Se V_{31} , V_{32} e V_{33} são as componentes do vetor $\vec{V}_3$, segundo o sistema de referência global, pode-se escrever que:

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} V_{31}(\xi, \eta) \\ V_{32}(\xi, \eta) \\ V_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i}(\xi, \eta) \\ v_{32i}(\xi, \eta) \\ v_{33i}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Portanto,

$$V_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i}(\xi, \eta) \quad (3.21)$$

$$V_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i}(\xi, \eta) \quad (3.22)$$

$$V_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i}(\xi, \eta) \quad (3.23)$$

Tendo sido obtida a *matriz Jacobiano da transformação*, $[J]$, pode-se determinar, agora, sua inversa, $[J]^{-1}$, através da seguinte Equação [13]:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3 & \vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1 & \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiano, obtido como se segue [13]:

$$|J| = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3) \quad (3.25)$$

Resolvendo-se a Equação anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned} |J(\xi, \eta)| &= r_{11}(\xi, \eta) \cdot [r_{22}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta)] \\ &\quad - r_{12}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \\ &\quad + r_{13}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo que as componentes dos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são dadas através das Equações (A.6) e (A.7) do Apêndice A e as do vetor $\vec{V}_3$, pelas Equações de (3.21) a (3.23).

3.2 Estado de deformação específica com relação ao sistema de referência local (x', y', z')

O estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O (Figura 3.2), será dado por:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (3.27)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \quad (3.28)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (3.29)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (3.30)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \quad (3.31)$$

sendo u' , v' e w' os deslocamentos apresentados pelo ponto Q, segundo o sistema de referência local.

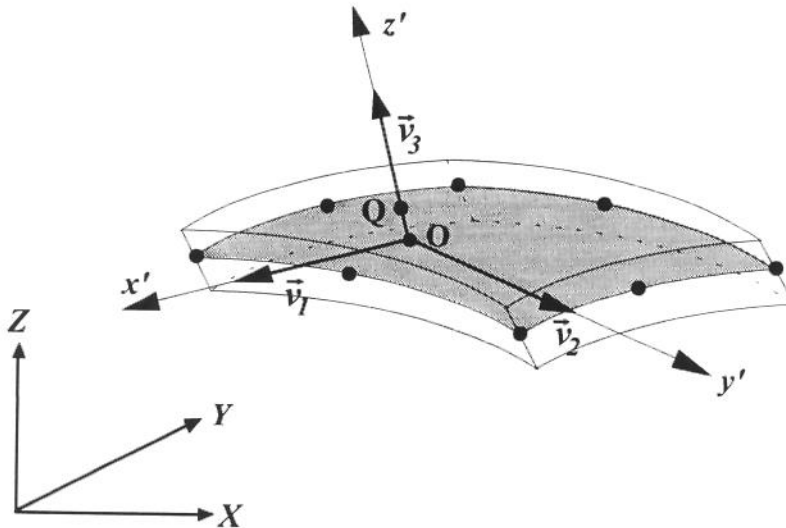


Figura 3.2 Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.

Nota-se, portanto, que para a determinação deste estado de deformação específica, necessita-se obter as derivadas dos deslocamentos locais (u' , v' e w') com relação às

coordenadas locais (x', y', z'); estas derivadas podem ser obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos globais (u, v e w) com relação às coordenadas globais (x, y e z), através da seguinte operação de transformação [14]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (3.32)$$

onde $[\theta]$ é uma matriz quadrada constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global, assim,

$$[\theta] = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] \quad (3.33)$$

sendo que os versores $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$ são dados, respectivamente, pelas Equações (A.18), (A.19) e (A.12) do Apêndice A.

Substituindo-se na Equação (3.32) a Equação (3.13), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (3.34)$$

Tendo-se, agora, em conta as Equações (3.33) e (3.24), pode-se escrever que:

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3 & \bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1 & \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

ou ainda,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Uma vez que $(\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3)$ e $(\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1)$ são vetores tangentes à superfície média e $(\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2)$ é um vetor normal a ela, segue-se que:

$$\vec{v}_3 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{v}_3 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1) = \vec{v}_1 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \vec{v}_2 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = 0 \quad (3.37)$$

Portanto,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

onde

$$A_{11}(\xi, \eta) = \vec{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\vec{r}_2(\xi, \eta) \wedge \vec{V}_3(\xi, \eta)) \quad (3.39)$$

$$A_{21}(\xi, \eta) = \vec{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\vec{r}_2(\xi, \eta) \wedge \vec{V}_3(\xi, \eta)) \quad (3.40)$$

$$A_{12}(\xi, \eta) = \vec{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\vec{V}_3(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_1(\xi, \eta)) \quad (3.41)$$

$$A_{22}(\xi, \eta) = \vec{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\vec{V}_3(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_1(\xi, \eta)) \quad (3.42)$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = \vec{v}_3(\xi, \eta) \cdot (\vec{r}_1(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_2(\xi, \eta)) = \vec{v}_3(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_3(\xi, \eta) \quad (3.43)$$

Os resultados dos produtos, vetorial e escalar, especificados nas equações anteriores, são apresentados no Apêndice C.

Desta forma, a Equação (3.34) pode ser reescrita como se segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Resolvendo-se os produtos matriciais indicados na equação anterior, pode-se obter, então, as derivadas necessárias para a definição do estado de deformação específica do ponto Q, com relação ao sistema de referência local, mostradas no Item C.2 do Apêndice C. Substituindo-se estas equações nas Equações de (3.27) a (3.31), tem-se que:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{11} & A_{11}v_{12} & A_{11}v_{13} & A_{12}v_{11} & A_{12}v_{12} & A_{12}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{21} & A_{21}v_{22} & A_{21}v_{23} & A_{22}v_{21} & A_{22}v_{22} & A_{22}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (3.46)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (A_{21}v_{11} + A_{11}v_{21}) & (A_{21}v_{12} + A_{11}v_{22}) & (A_{21}v_{13} + A_{11}v_{23}) \\ (A_{22}v_{11} + A_{12}v_{21}) & (A_{22}v_{12} + A_{12}v_{22}) & (A_{22}v_{13} + A_{12}v_{23}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{31} & A_{11}v_{32} & A_{11}v_{33} & A_{12}v_{31} & A_{12}v_{32} & A_{12}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T + \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{11} & A_{33}v_{12} & A_{33}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (3.48)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{31} & A_{21}v_{32} & A_{21}v_{33} & A_{22}v_{31} & A_{22}v_{32} & A_{22}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T + \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{21} & A_{33}v_{22} & A_{33}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (3.49)$$

Estas equações podem, ainda, ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T \quad (3.50)$$

onde

$$[d(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} & d_{49} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} & d_{59} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

sendo que os elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$ são apresentados no Item C.3 do Apêndice C.

Finalmente, para a determinação do estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema de referência local, basta, agora, obter as derivadas dos deslocamentos globais u , v e w com relação as coordenadas ξ , η e ζ . Tendo-se em conta as Equações de (2.21) a (2.23), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (3.60)$$

As equações anteriores podem ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{array} \right\} \quad (3.61)$$

sendo que $[G_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (9×5) , dada por:

$$[G_i(\xi, \eta, \zeta)] = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{array} \right] \quad (3.62)$$

Substituindo-se a Equação (3.61) na Equação (3.50), segue-se que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

ou ainda,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

onde $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (5×5), dada por:

$$[B_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{12i} & B_{13i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} \\ B_{21i} & B_{22i} & B_{23i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} \\ B_{31i} & B_{32i} & B_{33i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} \\ B_{41i} & B_{42i} & B_{43i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \\ B_{51i} & B_{52i} & B_{53i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{54i} + \frac{t_i}{2} C_{54i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{55i} + \frac{t_i}{2} C_{55i} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Os elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ são apresentados no Item C.4 do Apêndice C e as expressões das derivadas das funções de forma, no Apêndice B.

A Equação (3.64) pode, ainda, ser dada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)] & [B_2(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_i(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_n\} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (3.67)$$

onde $\{\epsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1) , constituída das deformações específicas e distorções no ponto Q, segundo o sistema de referência local, $[B]$ é uma matriz (5×40) , para o elemento da família Serendipity e (5×45) , para o elemento da família Lagrangeana, constituída das derivadas das funções de forma e $\{a\}$ é uma matriz coluna (40×1) , para o elemento da família Serendipity e (45×1) , para o elemento da família Lagrangeana, constituída dos deslocamentos nodais. A matriz $[B]$, que relaciona o estado de deformação específica com os deslocamentos nodais, é dada, então, por:

$$[B(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)] & [B_2(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_i(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_n(\xi, \eta, \zeta)] \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Capítulo 4

FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE CASCA

4.1 Introdução

O estado de tensão no ponto Q, genérico, do elemento de casca, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O (Figura 3.2), é o representado na Figura 4.1.

Neste estado de tensão, de acordo com as hipóteses básicas de *Mindlin-Reissner* [4], desconsidera-se a tensão normal na direção perpendicular à superfície média, por ser pequena comparativamente às outras tensões. Assim,

$$\sigma_{z'z'} = 0 \quad (4.1)$$

Admitindo-se que o material do elemento de casca seja homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico e linear [15], o estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , é dado pela *Lei de Hooke Generalizada* [16]:

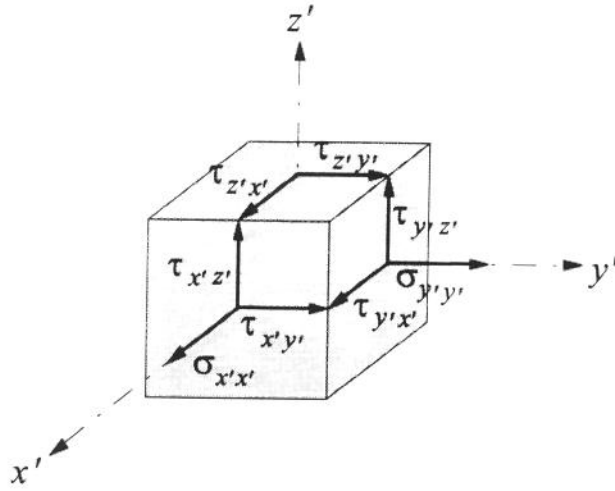


Figura 4.1 Estado de tensão no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{x'x'} - \nu \cdot \sigma_{y'y'}) \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'y'} - \nu \cdot \sigma_{x'x'}) \quad (4.3)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'y'} \quad (4.4)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'z'} \quad (4.5)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{y'z'} \quad (4.6)$$

sendo E o *Módulo de Elasticidade Longitudinal* e ν o *Coefficiente de Poisson* do material. As equações anteriores podem, ainda, ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{\varepsilon'\} = [\phi'] \cdot \{\sigma'\} \quad (4.8)$$

onde $[\phi']$ é uma matriz quadrada (5×5), simétrica, constituída das constantes elásticas do material e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das tensões atuantes no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z'). Resolvendo-se a equação anterior para as tensões, tem-se que:

$$\{\sigma'\} = [\phi']^{-1} \cdot \{\varepsilon'\} \quad (4.9)$$

ou ainda,

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot \{\varepsilon'\} \quad (4.10)$$

sendo que $[D']$ é a inversa da matriz $[\phi']$ e é dada por:

$$[D'] = [\phi']^{-1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Tendo-se em conta que a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da espessura do elemento de casca não é uniforme, porém, aproximadamente, parabólica [17], introduz-se um fator k de valor igual a $6/5$ nos termos de $[D']$, relacionados com as tensões de cisalhamento $\tau_{x'z'}$ e $\tau_{y'z'}$. Portanto,

$$[D'] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Substituindo-se, agora, a Equação (3.67) na Equação (4.10), obtém-se que:

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \quad (4.13)$$

Esta equação fornece, então, as tensões atuantes em um ponto genérico do elemento de casca em função dos deslocamentos nodais.

4.2 Formulação das características do elemento

Considere-se o elemento de casca submetido a forças de superfície $\bar{q}$, cujas componentes, com relação aos eixos x', y' e z' do sistema de referência local sejam, respectivamente, $q_{x'}, q_{y'}$ e $q_{z'}$, e, ainda, a forças de corpo $\bar{b}$, cujas componentes, segundo aquele sistema, sejam $b_{x'}, b_{y'}$ e $b_{z'}$. Se os deslocamentos u', v' e w' , apresentados pelos pontos do elemento, em consequência do carregamento atuante, sofrerem, respectivamente, os incrementos $\delta u', \delta v'$ e $\delta w'$, denominados *deslocamentos virtuais*, o estado de deformação específica nestes pontos, de acordo com as Equações de (3.27) a (3.31), vai apresentar os seguintes incrementos:

$$\delta \epsilon_{x'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} \quad (4.14)$$

$$\delta \epsilon_{y'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial y'} \quad (4.15)$$

$$\delta \gamma_{x'y'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial y'} + \frac{\partial \delta v'}{\partial x'} \quad (4.16)$$

$$\delta \gamma_{x'z'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial x'} \quad (4.17)$$

$$\delta \gamma_{y'z'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial y'} \quad (4.18)$$

denominados *deformações específicas virtuais*. Desta forma, o *trabalho virtual*, δW , executado pelo carregamento externo (forças de superfície e forças de corpo), em consequência dos deslocamentos virtuais, será dado por [12]:

$$\delta W = \int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV \quad (4.19)$$

onde $\{\delta u'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída dos deslocamentos virtuais:

$$\{\delta u'\} = \begin{Bmatrix} \delta u' \\ \delta v' \\ \delta w' \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$\{q'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de superfície:

$$\{q'\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

e $\{b'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de corpo:

$$\{b'\} = \begin{Bmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

A *energia de deformação virtual*, δU , armazenada no elemento de casca, como consequência do estado de tensão em seus pontos e do estado de deformação específica virtual, correspondente, será dada por [12]:

$$\delta U = \int_V \{\delta \epsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (4.23)$$

onde $\{\delta \epsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas virtuais:

$$\{\delta \epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{x'} \\ \delta \epsilon_{y'} \\ \delta \gamma_{x'y'} \\ \delta \gamma_{x'z'} \\ \delta \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

e $\{\sigma\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das tensões atuantes nos pontos do elemento, segundo o sistema de referência local:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Aplicando-se, agora, o *princípio dos trabalhos virtuais* [12], pode-se escrever que:

$$\delta W = \delta U \quad (4.26)$$

ou ainda,

$$\int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV = \int_V \{\delta \epsilon'\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV \quad (4.27)$$

A Equação (2.28) fornece os deslocamentos, $\{u\}$, dos pontos do elemento de casca, com relação ao sistema de referência global; necessita-se, entretanto, dos deslocamentos, $\{u'\}$, com relação ao sistema de referência local. Estes deslocamentos podem ser obtidos através da seguinte transformação:

$$\{u'\} = [\theta]^T \cdot \{u\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (4.28)$$

onde $[\theta]$, já foi definido, anteriormente, através da Equação (3.33). Da mesma forma, pode-se escrever que:

$$\{q'\} = [\theta]^T \cdot \{q\} \quad (4.29)$$

e

$$\{b'\} = [\theta]^T \cdot \{b\} \quad (4.30)$$

sendo que $\{q\}$ e $\{b\}$ são, respectivamente, as forças de superfície e as forças de corpo, de acordo com o sistema de referência global. Assim,

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

e

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Tendo-se em conta as Equações (4.28) e (3.67), os deslocamentos virtuais, $\{\delta u'\}$ e as deformações específicas virtuais, $\{\delta \epsilon'\}$, podem ser dados por [10]:

$$\{\delta u'\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{\delta a\} \quad (4.33)$$

e

$$\{\delta \epsilon'\} = [B] \cdot \{\delta a\} \quad (4.34)$$

onde $\{\delta a\}$ é a matriz coluna, constituída dos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais.

Substituindo-se, agora, as Equações (4.13) e (4.34) na Equação (4.27), tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{b\} \cdot dV = \\ \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como $[\theta]$ é uma matriz quadrada e ortonormal, isto é, suas colunas são ortonormais, pode-se escrever que:

$$[\theta] \cdot [\theta]^T = [I] \quad (4.36)$$

sendo $[I]$ a matriz identidade. Assim, a Equação (4.35) torna-se:

$$\int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV = \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \quad (4.37)$$

ou ainda, uma vez que $\{\delta a\}^T$ e $\{a\}$ são constantes para as integrações na área e no volume:

$$\{\delta a\}^T \left(\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV \right) = \{\delta a\}^T \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (4.38)$$

Como a equação anterior é válida quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais $\{\delta a\}$, pode-se escrever que:

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (4.39)$$

Nesta equação,

$$\int_A [N]^T \{q\} dA = \{f_q^e\} \quad (4.40)$$

é uma matriz coluna de ordem (40×1) , para o elemento da família Serendipity e (45×1) , para o elemento da família Lagrangeana, que corresponde às forças de superfície,

$$\int_V [N]^T \{b\} dV = \{f_b^e\} \quad (4.41)$$

é uma matriz coluna de ordem (40×1) , para o elemento da família Serendipity e (45×1) , para o elemento da família Lagrangeana, que corresponde às forças de corpo e

$$\int_V [B]^T [D'] [B] dV = [K^e] \quad (4.42)$$

é uma matriz quadrada, simétrica, de ordem (40×40) , para o elemento da família Serendipity e (45×45) , para o elemento da família Lagrangeana, denominada *matriz de rigidez* do elemento de casca. Desta forma, a Equação (4.39) pode ser reescrita como se segue:

$$[K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} \quad (4.43)$$

A Equação (4.43) representa o equilíbrio estático, e aplicando-se o “Princípio de D'Alembert”, pode-se simplificar a obtenção da equação do equilíbrio dinâmico, com a inclusão da força de inércia como uma parte das forças de corpo [18] e [19]. A força de corpo total, então, será dada por:

$$\{b_i\} = \{b\} - \rho [N] \{\ddot{a}\} \quad (4.44)$$

onde ρ é densidade de massa por unidade de volume do elemento e $\{\ddot{a}\}$ é uma matriz coluna (40×1), para o elemento da família Serendipity e (45×1), para o elemento da família Lagrangeana, constituída das acelerações nodais: $\ddot{u}_i, \ddot{v}_i, \ddot{w}_i, \ddot{\alpha}_i$ e $\ddot{\beta}_i$ (derivada segunda em relação ao tempo dos deslocamentos nodais).

Pode-se, então, reescrever a Equação (4.39):

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T (\{b\} - \rho [N] \{\ddot{a}\}) dV = \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (4.45)$$

ou ainda,

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \cdot \{\ddot{a}\} + \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (4.46)$$

Nesta equação,

$$\int_V \rho [N]^T [N] dV = [M^e] \quad (4.47)$$

é uma matriz (40×40), para o elemento da família Serendipity e (45×45) para o elemento da família Lagrangeana, denominada *matriz de massa* do elemento. Desta forma a Equação (4.46) pode ser reescrita como se apresenta a seguir:

$$[M^e] \cdot \{\ddot{a}\} + [K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} = \{f^e\} \quad (4.48)$$

que é a equação que representa o equilíbrio dinâmico do elemento, onde $\{a\}$, $\{f_q^e\}$ e $\{f_b^e\}$ dependem do tempo. A matriz coluna $\{f^e\}$ representa o vetor de carga do elemento correspondente às forças de superfície e de corpo.

4.3 Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca

Na Equação (4.42), que possibilita determinar a matriz de rigidez do elemento, o diferencial de volume é dado com relação ao sistema de referência global. Portanto,

$$dV = dx dy dz \quad (4.49)$$

Como os termos de $[B]$ são funções das coordenadas curvilíneas ξ e η e da coordenada linear ζ , o diferencial de volume deve ser dado segundo este sistema de referência; para efetuar esta transformação, será utilizado um procedimento padrão, que envolve o determinante, $|J(\xi, \eta)|$, da matriz Jacobiano, dado através da Equação (3.26). Assim [13],

$$dV = |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.50)$$

e a Equação (4.42) pode ser rescrita como se segue:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D'] [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.51)$$

ou ainda, pela substituição da matriz $[B]$, dada a partir da Equação (3.68), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 [K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [B_2(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_n(\xi, \eta, \zeta)]^T \end{bmatrix} [D'] \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)] & [B_2(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots \\ [B_j(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_n(\xi, \eta, \zeta)] \end{bmatrix} |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
 \end{aligned}
 \tag{4.52}$$

Esta equação, uma vez resolvida, levará à matriz de rigidez do elemento, que será dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \cdots & [K_{1j}] & \cdots & [K_{1n}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \cdots & [K_{2j}] & \cdots & [K_{2n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{i1}] & [K_{i2}] & \cdots & [K_{ij}] & \cdots & [K_{in}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{n1}] & [K_{n2}] & \cdots & [K_{nj}] & \cdots & [K_{nn}] \end{bmatrix}
 \tag{4.53}$$

4.3.1 Determinação da submatriz $[K_{ij}]$

De acordo com a Equação (4.52), a submatriz $[K_{ij}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T [D'] [B_j(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
 \tag{4.54}$$

ou ainda, tendo-se em conta as Equações (3.65) e (4.12):

$$\begin{aligned}
[K_{ij}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \end{bmatrix} \\
&\cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11j} & B_{12j} \\ B_{21j} & B_{22j} \\ B_{31j} & B_{32j} \\ B_{41j} & B_{42j} \\ B_{51j} & B_{52j} \end{bmatrix} \\
&\cdot \begin{bmatrix} B_{13j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{14j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{15j} \\ B_{23j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{24j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{25j} \\ B_{33j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{34j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{35j} \\ B_{43j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{44j} + \frac{t_j}{2} C_{44j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{45j} + \frac{t_j}{2} C_{45j} \\ B_{53j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{54j} + \frac{t_j}{2} C_{54j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{55j} + \frac{t_j}{2} C_{55j} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{11} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{21j} + \right. \\
&\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{41j} + B_{51i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot \\
&\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.57)
\end{aligned}$$

$$k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{21j} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{41j} + B_{52i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.58)$$

$$k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{21j} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{41j} + B_{53i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.59)$$

$$k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{21j} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{41j} + B_{54i} \cdot B_{51j}) + \right. \\ \left. (C_{44i} \cdot B_{41j} + C_{54i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.60)$$

$$k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{21j} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{41j} + B_{55i} \cdot B_{51j}) + \right. \\ \left. (C_{45i} \cdot B_{41j} + C_{55i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.61)$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{22j} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{42j} + B_{51i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.62)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{22j} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{42j} + B_{52i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.63)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{22j} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{42j} + B_{53i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{22j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{42j} + B_{54i} \cdot B_{52j}) + \right. \\
\left. (C_{44i} \cdot B_{42j} + C_{54i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{22j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{42j} + B_{55i} \cdot B_{52j}) + \right. \\
\left. (C_{45i} \cdot B_{42j} + C_{55i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{43j} + B_{51i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{43j} + B_{52i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{43j} + B_{53i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{43j} + B_{54i} \cdot B_{53j}) + \right. \\
\left. (C_{44i} \cdot B_{43j} + C_{54i} \cdot B_{53j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{43j} + B_{55i} \cdot B_{53j}) + \right. \\
\left. (C_{45i} \cdot B_{43j} + C_{55i} \cdot B_{53j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{14} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{41i} \cdot B_{44j} + B_{51i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
\left. (B_{41i} \cdot C_{44j} + B_{51i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{24} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{42i} \cdot B_{44j} + B_{52i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
\left. (B_{42i} \cdot C_{44j} + B_{52i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{34} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{43i} \cdot B_{44j} + B_{53i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
\left. (B_{43i} \cdot C_{44j} + B_{53i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{44} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{44j} + B_{54i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
\left. \zeta(B_{44i} \cdot C_{44j} + B_{54i} \cdot C_{54j}) + (C_{44i} \cdot C_{44j} + C_{54i} \cdot C_{54j})] + \right. \\
\left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{44i} \cdot B_{44j} + C_{54i} \cdot B_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{54} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{44j} + B_{55i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
\left. \zeta(B_{45i} \cdot C_{44j} + B_{55i} \cdot C_{54j}) + (C_{45i} \cdot C_{44j} + C_{55i} \cdot C_{54j})] + \right. \\
\left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{45i} \cdot B_{44j} + C_{55i} \cdot B_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{15} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{25j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{41i} \cdot B_{45j} + B_{51i} \cdot B_{55j}) + \right. \\
\left. (B_{41i} \cdot C_{45j} + B_{51i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{25} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{25j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{42i} \cdot B_{45j} + B_{52i} \cdot B_{55j}) + \right. \\
\left. (B_{42i} \cdot C_{45j} + B_{52i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{35} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{25j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{43i} \cdot B_{45j} + B_{53i} \cdot B_{55j}) + \right. \\
\left. (B_{43i} \cdot C_{45j} + B_{53i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{45} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{25j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{45j} + B_{54i} \cdot B_{55j}) + \right. \\
\left. \zeta(B_{44i} \cdot C_{45j} + B_{54i} \cdot C_{55j}) + (C_{44i} \cdot C_{45j} + C_{54i} \cdot C_{55j})] + \right. \\
\left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{44i} \cdot B_{45j} + C_{54i} \cdot B_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{55} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{25j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{45j} + B_{55i} \cdot B_{55j}) + \right. \\
\left. \zeta(B_{45i} \cdot C_{45j} + B_{55i} \cdot C_{55j}) + (C_{45i} \cdot C_{45j} + C_{55i} \cdot C_{55j})] + \right. \\
\left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{45i} \cdot B_{45j} + C_{55i} \cdot B_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.81)
\end{aligned}$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração na direção ζ será feita analiticamente, enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *quadratura de Gauss* [10]. Portanto, tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 d\zeta &= 2 \\
\int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta &= 0 \\
\int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta &= \frac{2}{3}
\end{aligned} \quad (4.82)$$

e ainda, considerando-se que ξ_p e η_p sejam as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se [10]:

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \\
 B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned}
 k_{41} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$k_{51} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (4.87)$$

$$k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (4.88)$$

$$k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (4.89)$$

$$k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (4.90)$$

$$k_{42} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (4.91)$$

$$k_{52} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \right. \\
\left. B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
\left. B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \right. \\
\left. B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
\left. B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \right. \\
\left. B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
\left. B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned}
k_{14} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (4.98)$$

$$k_{24} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.99)$$

$$k_{34} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.100)$$

$$k_{44} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.101)$$

$$k_{54} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.102)$$

$$k_{15} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.103)$$

$$k_{25} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.104)$$

$$k_{35} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.105)$$

$$k_{45} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.106)$$

$$k_{55} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot J(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (4.107)$$

4.4 Determinação da matriz de massa do elemento de casca

Na Equação (4.47), que possibilita determinar a matriz de massa do elemento, o diferencial de volume é dado pela Equação (4.50). Portanto,

$$[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.108)$$

ou ainda, pela substituição da matriz $[N]$, dada a partir da Equação (2.29), tem-se que:

$$[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [N_2(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_n(\xi, \eta, \zeta)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)] & [N_2(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots \\ [N_j(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [N_n(\xi, \eta, \zeta)] \end{bmatrix} |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.109)$$

Esta equação, uma vez resolvida, levará à matriz de massa do elemento, que será dada por:

$$[M^e] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & \cdots & [M_{1j}] & \cdots & [M_{1n}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] & \cdots & [M_{2j}] & \cdots & [M_{2n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{i1}] & [M_{i2}] & \cdots & [M_{ij}] & \cdots & [M_{in}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{n1}] & [M_{n2}] & \cdots & [M_{nj}] & \cdots & [M_{nn}] \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

4.4.1 Determinação da submatriz $[M_{ij}]$

De acordo com a Equação (4.109), a submatriz $[M_{ij}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot [N_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \cdot [N_j(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.111)$$

ou, ainda, tendo-se em conta a Equação (2.25):

$$[M_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) \\ \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \\ -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & \zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{11j} & -\zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{21j} \\ 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & \zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{12j} & -\zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{22j} \\ 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) & \zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{13j} & -\zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{23j} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.112)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

onde

$$m_{11} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.114)$$

$$m_{12} = m_{13} = 0 \quad (4.115)$$

$$m_{14} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot \nu_{11j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.116)$$

$$m_{15} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot \nu_{21j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.117)$$

$$m_{21} = 0 \quad (4.118)$$

$$m_{22} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.119)$$

$$m_{23} = 0 \quad (4.120)$$

$$m_{24} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot \nu_{12j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.121)$$

$$m_{25} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot \nu_{22j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.122)$$

$$m_{31} = 0 \quad (4.123)$$

$$m_{32} = 0 \quad (4.124)$$

$$m_{33} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.125)$$

$$m_{34} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot \nu_{13j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.126)$$

$$m_{35} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot \nu_{23j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.127)$$

$$m_{41} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.128)$$

$$m_{42} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.129)$$

$$m_{43} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.130)$$

$$m_{44} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot (v_{11i} \cdot v_{11j} + v_{12i} \cdot v_{12j} + v_{13i} \cdot v_{13j}) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.131)$$

$$m_{45} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot (v_{11i} \cdot v_{21j} + v_{12i} \cdot v_{22j} + v_{13i} \cdot v_{23j}) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.132)$$

$$m_{51} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.133)$$

$$m_{52} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.134)$$

$$m_{53} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.135)$$

$$m_{54} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot (v_{11j} \cdot v_{21i} + v_{12j} \cdot v_{22i} + v_{13j} \cdot v_{23i}) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.136)$$

$$m_{55} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot (v_{21i} \cdot v_{21j} + v_{22i} \cdot v_{22j} + v_{23i} \cdot v_{23j}) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.137)$$

Na obtenção da matriz de massa, a integração na direção ζ será feita analiticamente, Equação (4.82), enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *quadratura de Gauss* [10]; desta forma, considerando-se que ξ_p e η_p sejam as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$m_{11} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m (N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p) \quad (4.138)$$

$$m_{12} = m_{13} = m_{14} = m_{15} = 0 \quad (4.139)$$

$$m_{22} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m (N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p) \quad (4.140)$$

$$m_{21} = m_{23} = m_{24} = m_{25} = 0 \quad (4.141)$$

$$m_{33} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m (N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p) \quad (4.142)$$

$$m_{31} = m_{32} = m_{34} = m_{35} = 0 \quad (4.143)$$

$$m_{44} = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{ N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot [v_{11i} \cdot v_{11j} + v_{12i} \cdot v_{12j} + v_{13i} \cdot v_{13j}] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \} \quad (4.144)$$

$$\begin{aligned}
m_{45} = & -\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
& [v_{11i} \cdot v_{21j} + v_{12i} \cdot v_{22j} + v_{13i} \cdot v_{23j}] \cdot \\
& |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p\}
\end{aligned} \tag{4.145}$$

$$m_{41} = m_{42} = m_{43} = 0 \tag{4.146}$$

$$\begin{aligned}
m_{54} = & -\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
& [v_{11j} \cdot v_{21i} + v_{12j} \cdot v_{22i} + v_{13j} \cdot v_{23i}] \cdot \\
& |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p\}
\end{aligned} \tag{4.147}$$

$$\begin{aligned}
m_{55} = & \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
& [v_{21i} \cdot v_{21j} + v_{22i} \cdot v_{22j} + v_{23i} \cdot v_{23j}] \cdot \\
& |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p\}
\end{aligned} \tag{4.148}$$

$$m_{51} = m_{52} = m_{53} = 0 \tag{4.149}$$

Capítulo 5

FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

5.1 Introdução

Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações, que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações é baseado na necessidade de que o *equilíbrio dinâmico* se verifique por todo o sistema. Como as condições de equilíbrio já foram impostas dentro de cada elemento, necessita-se, agora, estabelecer as condições para que cada nó do sistema discretizado esteja em equilíbrio. Para tanto, é estabelecido um esquema de numeração global, que identifica cada nó do sistema discretizado; em seguida é criada a *topologia*, que especifica quais nós do sistema pertencem a quais elementos, ou seja, especifica a correspondência entre os nós do sistema discretizado e os nós dos elementos. Esta topologia, dada como entrada do programa computacional, serve para definir a *conectividade* da malha de elementos.

5.2 Determinação das matrizes de rigidez e de massa globais

Para que um nó k , genérico, do sistema esteja em equilíbrio, as componentes do vetor de carga $\{f_k\}$, nele atuantes, devem ser iguais à soma das componentes das forças $\{f_k^e\}$ de cada elemento, que concorre para o nó k . Portanto,

$$f_k = \sum_{e=1}^{n_e} \{f_k^e\} \quad (5.1)$$

onde n_e é o número total de elementos, que compõem o sistema estrutural discretizado.

Considerando-se a Equação (4.48) e conhecendo a correspondência entre os nós dos elementos e os nós do sistema, pode-se escrever a seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{f_1^e\} \\ \vdots \\ \{f_k^e\} \\ \vdots \\ \{f_s^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{11}^e] & \cdots & [M_{1k}^e] & \cdots & [M_{1s}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{k1}^e] & \cdots & [M_{kk}^e] & \cdots & [M_{ks}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{s1}^e] & \cdots & [M_{sk}^e] & \cdots & [M_{ss}^e] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{a}_1\} \\ \vdots \\ \{\ddot{a}_k\} \\ \vdots \\ \{\ddot{a}_s\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{11}^e] & \cdots & [K_{1k}^e] & \cdots & [K_{1s}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{k1}^e] & \cdots & [K_{kk}^e] & \cdots & [K_{ks}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{s1}^e] & \cdots & [K_{sk}^e] & \cdots & [K_{ss}^e] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_k\} \\ \vdots \\ \{a_s\} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

onde s é o número total de nós do sistema discretizado, $\{\ddot{a}_1\}, \dots, \{\ddot{a}_k\}, \dots, \{\ddot{a}_s\}$ são as acelerações nodais, $\{a_1\}, \dots, \{a_k\}, \dots, \{a_s\}$ são os deslocamentos nodais, $\{f_1^e\}, \dots, \{f_k^e\}, \dots, \{f_s^e\}$ as forças relativas ao elemento e , atuantes em cada nó do sistema e $[M_{11}^e], \dots, [M_{kk}^e], \dots, [M_{ss}^e]$ e $[K_{11}^e], \dots, [K_{kk}^e], \dots, [K_{ss}^e]$, as submatrizes das matrizes de massa e rigidez do elemento e , respectivamente, relacionadas com os nós do sistema discretizado.

Resolvendo a Equação (5.2) para as forças nos nós e substituindo o resultado na Equação (5.1) para cada nó do sistema discretizado, notando que os deslocamentos e acelerações nodais do sistema dependem apenas dos nós e não dos elementos, pode-se escrever de forma compacta que:

$$\{f\} = [M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} \quad (5.3)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa global do sistema estrutural discretizado,

$$[M] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{11}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{1k}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{1s}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{k1}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{kk}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{ks}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{s1}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{sk}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [M_{ss}^e] \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$[K]$ a matriz de rigidez global do sistema estrutural discretizado,

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{11}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{1k}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{1s}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{k1}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{kk}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{ks}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{s1}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{sk}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n\rho} [K_{ss}^e] \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$\{f\}$ o vetor de carga global, $\{\ddot{a}\}$ e $\{a\}$, as acelerações e os deslocamentos nodais do sistema discretizado, respectivamente.

O algoritmo desenvolvido neste trabalho, possibilita que tão logo seja encontrado um coeficiente da matriz de rigidez ou da matriz de massa, que são as matrizes de interesse na análise dinâmica, ele possa ser colocado, imediatamente, na posição apropriada das respectivas matrizes.

5.3 Problema de autovalor generalizado

Encontradas as características do sistema estrutural discretizado (matrizes de massa e de rigidez globais), deve-se, a seguir, resolver o problema dinâmico de autovalor generalizado [6].

A Equação (5.3) representa o caso geral de vibração forçada para sistemas não amortecidos e, se não existem forças atuantes no sistema, tem-se o caso de vibração livre:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} = \{0\} \quad (5.6)$$

Admitindo-se movimento harmônico, uma solução para esta equação pode ser escrita como [10]:

$$\{a\} = \{\phi\} \cdot e^{i\omega t} \quad (5.7)$$

onde $e^{i\omega t} \equiv \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, $\{\phi\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e ω a frequência angular.

A Equação (5.6) pode, então, ser reescrita na seguinte forma:

$$([K] - \lambda \cdot [M]) \cdot \{\phi\} = \{0\} \quad (5.8)$$

onde $[K]$ e $[M]$ são as matrizes de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, e λ o quadrado da frequência angular. Entretanto, este problema só pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Este procedimento é efetuado por ocasião da determinação das matrizes de rigidez e de massa globais, onde, para cada condição de contorno (vínculo), são eliminados das matrizes de rigidez e massa globais a linha e a coluna correspondentes. Finalmente, o sistema de equações resultante pode, então, ser resolvido através de diversos métodos numéricos.

5.4 Resolução do sistema de equações

Para a resolução do sistema de equações do tipo dado pela Equação (5.8), utilizou-se, neste trabalho, o *método da iteração no subespaço* e, como uma subrotina deste, o *método de Jacobi generalizado*. Esses dois métodos, em conjunto, por serem considerados bastante eficientes, são usados extensivamente em vários programas de elementos finitos para cálculo de autovalores e autovetores [6]. Enquanto muitos métodos determinam todos os autovalores e autovetores simultaneamente, o que torna excessivo o “custo computacional”, o método da iteração no subespaço determina apenas os autovalores e os correspondentes autovetores no intervalo de frequência de interesse, o que faz deste método, um dos mais eficientes na análise de grandes sistemas (matrizes de rigidez e de massa globais de ordem elevada).

5.4.1 Método da iteração no subespaço

O objetivo básico do método da iteração no subespaço é encontrar os p menores autovalores e seus correspondentes autovetores, satisfazendo

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Lambda] \quad (5.9)$$

onde $[K]$ e $[M]$ são as matrizes $(n \times n)$ de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, $[\Lambda]$ a matriz diagonal $(p \times p)$ que contém os autovalores λ_i e $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_i\}, \dots, \{\phi_p\}]$ a matriz $(n \times p)$ que contém os autovetores $\{\phi_i\}$.

Em adição à Equação (5.9), os autovetores também devem satisfazer as condições de ortogonalidade [6]:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] &= [\Lambda] \\ [\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] &= [I] \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. É importante notar que a Equação (5.9) é uma condição necessária e suficiente para que os vetores em $[\Phi]$ sejam autovetores, porém as condições de ortogonalidade, Equação (5.10), são necessárias, mas não suficientes.

A idéia essencial do método da iteração no subespaço usa o fato de que os autovetores formam uma base M-ortonormal do subespaço p -dimensional dos operadores $[K]$ e $[M]$, ou simplesmente E_∞ . Na solução da iteração com p vetores linearmente independentes pode-se, portanto, considerar uma iteração como um subespaço. Os vetores da primeira iteração varrem E_1 e as iterações continuam até alcançarem a precisão suficiente.

O primeiro passo no método da iteração no subespaço é selecionar os vetores de partida da iteração, em $[X_1]$. Os vetores de partida devem ser elaborados para excitar aqueles graus de liberdade com os quais estão associados uma grande massa e uma pequena rigidez. Com base nessa observação usa-se o seguinte algoritmo para selecionar os vetores de partida da iteração [6]:

- A primeira coluna em $[X_1]$ é simplesmente a diagonal de $[M]$, o que garante que todos os graus de liberdade de massa são excitados;
- As outras colunas em $[X_1]$ são vetores com valor +1 na posição com a menor razão (k_{ii}/m_{ii}) e valor 0 nas demais posições.

O seguinte algoritmo, chamado de iteração no subespaço, procura uma base ortogonal de vetores em E_{k+1} , preservando, assim, a estabilidade numérica na iteração e calculando os autovetores quando E_{k+1} convergir para E_∞ . Para $k=1,2,\dots$, a iteração de E_k até E_{k+1} será:

$$[K] \cdot [\bar{X}_{k+1}] = [M] \cdot [X_k] \quad (5.11)$$

e as projeções dos operadores $[K]$ e $[M]$ em E_{k+1} :

$$[K_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}]^T \cdot [K] \cdot [\bar{X}_{k+1}] \quad (5.12)$$

$$[M_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}]^T \cdot [M] \cdot [\bar{X}_{k+1}] \quad (5.13)$$

Resolvendo o problema de autovalor dos operadores projetados

$$[K_{k+1}] \cdot [Q_{k+1}] = [M_{k+1}] \cdot [Q_{k+1}] \cdot [\Lambda_{k+1}] \quad (5.14)$$

encontramos uma melhor aproximação para os autovetores

$$[X_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}] \cdot [Q_{k+1}] \quad (5.15)$$

Então, quando $k \longrightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} [\Lambda_{k+1}] &\longrightarrow [\Lambda] \\ [X_{k+1}] &\longrightarrow [\Phi] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Na iteração do subespaço, os autovalores convergem para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, e são armazenados em ordem crescente e os vetores convergem para $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots$ e $\{\phi_p\}$ e são armazenados na primeira, segunda, ... e p -ésima coluna de $[X_{k+1}]$, depois de serem devidamente ordenados, de acordo com o seu correspondente autovalor.

A convergência do método possui uma característica importante. Assumindo que na iteração os vetores em $[X_{k+1}]$ são ordenados de tal maneira que o i -ésimo elemento da diagonal de $[\Lambda_{k+1}]$ é maior que o $(i-1)$ -ésimo elemento, para $i = 2, 3, \dots, p$, então a i -ésima coluna de $[X_{k+1}]$ converge linearmente para $\{\phi_i\}$ e a taxa de convergência é $(\lambda_1/\lambda_{p+1})$ [20]. Portanto, pode-se conseguir uma taxa de convergência mais alta usando q vetores na iteração, com $q > p$. Porém, usando-se mais vetores aumenta, também, o esforço computacional para cada iteração. Na prática se utiliza o valor $q = \text{mínimo}(2p, p+8)$, que tem mostrado ser muito eficiente [6].

Na iteração do subespaço é necessário medir a convergência para se estabelecer um critério de parada nas iterações. Assumindo que nas iterações $(k-1)$ e k , foram calculados os autovalores aproximados $\lambda_i^{(k)}$ e $\lambda_i^{(k+1)}$, $i = 1, 2, \dots, p$, respectivamente, pode-se definir o seguinte critério de parada [6]:

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leq tol \quad (5.17)$$

5.4.2 Método de Jacobi generalizado

Esse método de transformação usado na solução de problemas de autovalor emprega as propriedades básicas dos autovetores, Equação (5.10).

Desde que a matriz $[\Phi]$, de ordem $n \times n$, que diagonaliza $[K]$ e $[M]$ através da Equação (5.10), é única, pode-se, através de iterações, obtê-la. O esquema básico é reduzir $[K]$ e $[M]$, na forma diagonal, usando sucessivamente pré e pós-multiplicação pelas matrizes $[P_k]^T$ e $[P_k]$, respectivamente, onde $k = 1, 2, \dots$. Definindo $[K_1] = [K]$ e $[M_1] = [M]$, tem-se que:

$$\begin{aligned} [K_2] &= [P_1]^T \cdot [K_1] \cdot [P_1] \\ [K_3] &= [P_2]^T \cdot [K_2] \cdot [P_2] \\ &\vdots \\ [K_{k+1}] &= [P_k]^T \cdot [K_k] \cdot [P_k] \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} [M_2] &= [P_1]^T \cdot [M_1] \cdot [P_1] \\ [M_3] &= [P_2]^T \cdot [M_2] \cdot [P_2] \\ &\vdots \\ [M_{k+1}] &= [P_k]^T \cdot [M_k] \cdot [P_k] \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde as matrizes $[P_k]$ são seleccionadas para transformar $[K_k]$ e $[M_k]$ na forma diagonal. Usa-se a seguinte matriz $[P_k]$ no método de Jacobi generalizado:

$$[P_k] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & \\ & & \gamma & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{--- } i\text{-ésima coluna} \\ \text{--- } j\text{-ésima coluna} \\ \text{--- } i\text{-ésima linha} \\ \text{--- } j\text{-ésima linha} \end{array} \tag{5.20}$$

onde as constantes α e γ são seleccionadas de maneira a reduzir simultaneamente a zero os elementos (i,j) em $[K_k]$ e $[M_k]$ Portanto, os valores de α e γ são uma função dos elementos $k_{ij}^{(k)}, k_{ii}^{(k)}, k_{jj}^{(k)}, m_{ij}^{(k)}, m_{ii}^{(k)}$ e $m_{jj}^{(k)}$, onde o sobrescrito (k) indica que é considerada a k -ésima iteração. Efetuando as multiplicações $[P_k]^T \cdot [K_k] \cdot [P_k]$ e $[P_k]^T \cdot [M_k] \cdot [P_k]$ e usando a condição que $k_{ij}^{(k)}$ e $m_{ij}^{(k)}$ deveriam ser zero, pode-se escrever as seguintes equações para α e γ :

$$\alpha k_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha\gamma)k_{ij}^{(k)} + \gamma k_{jj}^{(k)} = 0 \quad (5.21)$$

$$\alpha m_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha\gamma)m_{ij}^{(k)} + \gamma m_{jj}^{(k)} = 0 \quad (5.22)$$

e para obter a solução para α e γ , define-se:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{ii}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}_{jj}^{(k)} &= k_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ii}^{(k)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x} \\ \gamma &= \frac{\bar{k}_{ii}^{(k)}}{x} \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde o valor de x é dado por:

$$x = \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} + \text{sign}(\bar{k}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)}} \quad (5.25)$$

Então, após sucessivas iterações, quando $k \longrightarrow \infty$, as matrizes $[K]$ e $[M]$ convergem, respectivamente, para a forma diagonal $[K_r]$ e $[M_r]$:

$$\begin{aligned} [K_{k+1}] &\longrightarrow [K_r] \\ [M_{k+1}] &\longrightarrow [M_r] \end{aligned} \quad (5.26)$$

e supondo que l indica a última iteração, os autovalores e autovetores serão:

$$[\Lambda] = \text{diag} \left(\frac{[K_r^{(l+1)}]}{[M_r^{(l+1)}]} \right) \quad (5.27)$$

$$[\Phi] = [P_1] \cdot [P_2] \cdots [P_l] \cdot \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{[M_r^{(l+1)}]}} \right) \quad (5.28)$$

A convergência do método é medida comparando os autovalores da iteração atual com os autovalores da iteração anterior, então, a última iteração é concluída se,

$$\frac{|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leq \text{tol}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(l)} &= \frac{K_{ii}^{(l)}}{M_{ii}^{(l)}} \\ \lambda_i^{(l+1)} &= \frac{K_{ii}^{(l+1)}}{M_{ii}^{(l+1)}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.5 Programa computacional

A partir das equações estabelecidas nos capítulos anteriores, considerando os elementos da família Serendipity e Lagrangeana, desenvolveu-se um programa computacional em *Linguagem C* para a análise dinâmica de placas e cascas. O programa, devido à portabilidade da linguagem utilizada, pode ser executado em qualquer microcomputador PC com sistema operacional DOS e também, em estações de trabalho com sistema operacional UNIX, desde que, sejam feitos, no programa computacional, alguns pequenos ajustes para cada equipamento utilizado. O microcomputador utilizado neste trabalho foi um Proceda 5370-CAD com processador Motorola-MC68020 da Silicon Valley Software.

O programa computacional foi desenvolvido de forma que as rotinas fossem divididas em subrotinas, manipuladas por um programa principal. Utilizou-se, também, o sistema de alocação dinâmica de memória, onde a variável é alocada, no tamanho necessário e, após a

sua utilização, a mesma é desalocada, deixando este espaço de memória RAM livre para utilização posterior [21]. Todas as matrizes utilizadas foram alocadas como vetores e, para as matrizes simétricas, alocou-se apenas o triângulo superior, economizando-se, desta forma, memória RAM. As matrizes de massa e de rigidez dos elementos, depois de calculadas, eram armazenadas em disco para sua utilização posterior na montagem das matrizes globais do sistema e as demais variáveis, armazenadas na memória RAM para sua utilização com uma velocidade maior.

O fluxograma, que resume o funcionamento do programa computacional, encontra-se na Figura 5.1. O primeiro passo realizado pelo programa é a leitura dos dados de entrada do sistema em análise (coordenadas nodais, espessura, incidência nodal, propriedades do material e condições de contorno); com essas informações, efetua-se a montagem das matrizes de massa e de rigidez dos elementos, dentro de um ciclo, que realiza, também, o cálculo das seguintes variáveis para cada elemento:

- cálculo das funções de forma para os nós e pontos de integração;
- cálculo dos vetores e dos versores nos nós e para os pontos de integração;
- cálculo do Jacobiano, da matriz $[A]$ e da matriz $[d]$ para cada ponto de integração;
- cálculo da matriz $[B]$ para os pontos de integração;

Após o cálculo das matrizes de massa e de rigidez dos elementos para todos elementos do sistema, efetua-se a montagem das matrizes de massa e de rigidez globais, levando-se em conta as condições de contorno. Devido à presença de vários zeros nas matrizes globais, elas tomam a forma conhecida como “skyline” [22] e podem ser armazenadas de forma compacta. É conveniente, também, armazenar somente a parte superior ou inferior das matrizes globais, a partir dos elementos da diagonal, já que as matrizes são simétricas. O método utilizado para montar as matrizes globais [23] calcula a altura das colunas das matrizes a partir da conectividade dos nós e das condições de contorno do sistema.

Finalmente, implementou-se o método da iteração no subespaço para a solução do problema de autovalor generalizado dado pela Equação (5.8) e, também, o método de Jacobi generalizado, como uma subrotina do primeiro, para resolver o problema de autovalor dos operadores projetados. As tolerâncias utilizadas no programa computacional para esses dois métodos iterativos (Itens 5.4.1 e 5.4.2), que têm mostrado muita eficiência [6], foram as seguintes:

- $tol = 1.0 \times 10^{-6}$ para o método da iteração no subespaço, na Equação (5.17);
- $tol = 1.0 \times 10^{-12}$ para o método de Jacobi generalizado, na Equação (5.29).

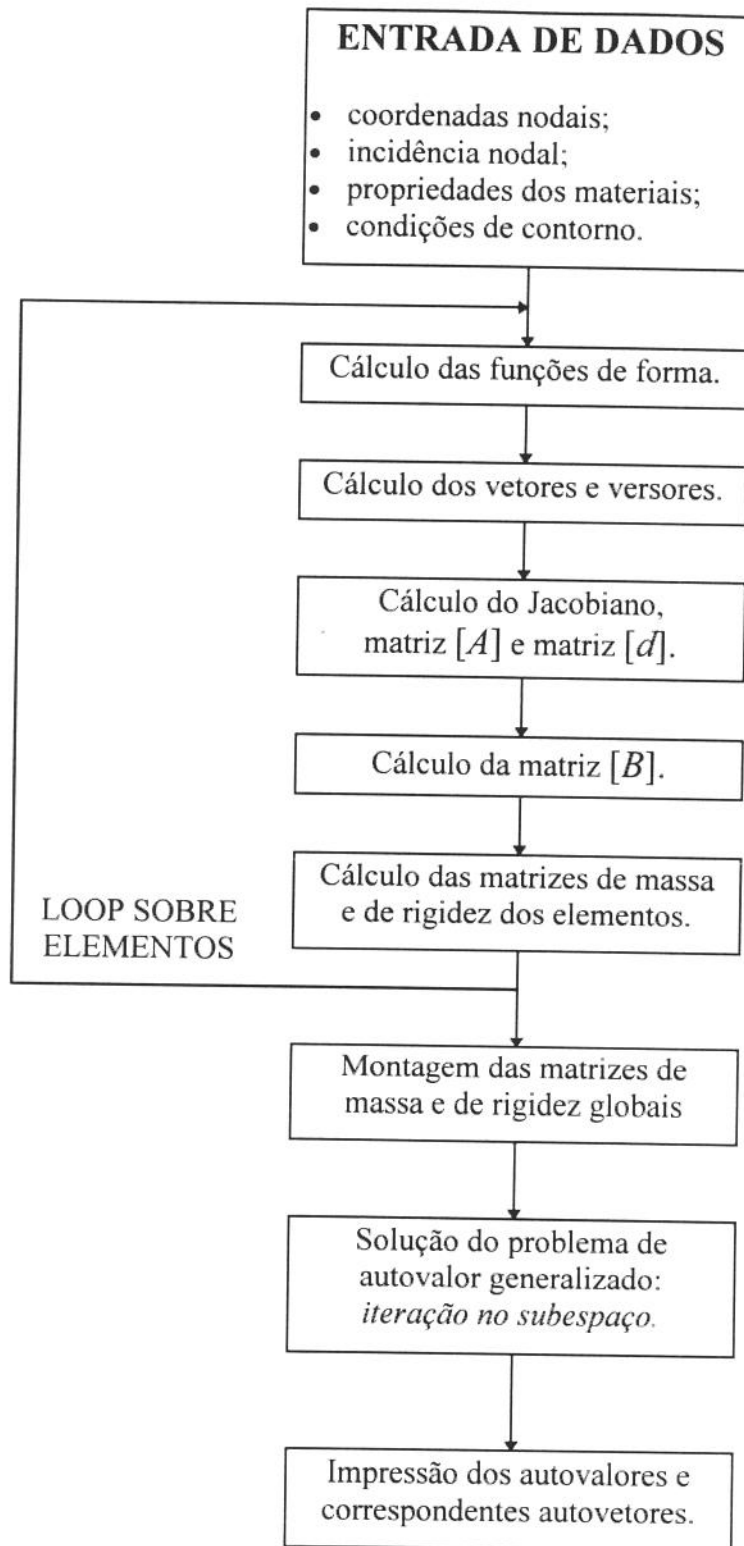


Figura 5.1 Fluxograma do programa computacional para a análise dinâmica de placas e cascas.

Capítulo 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1 Introdução

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir dos elementos isoparamétricos, quadrilaterais, quadráticos, das famílias Serendipity (8 nós) e Lagrangeana (9 nós) com integração numérica consistente, isto é 3×3 ($m=9$) pontos de integração na superfície média, para placas e cascas com diversas configurações de condições de contorno e relações entre espessura e dimensão característica. Procurou-se avaliar, também, as características destes elementos quanto à sensibilidade à distorção da malha e a convergência com o seu refinamento.

Faz-se, ainda, além da comparação dos resultados obtidos entre estes dois elementos, a comparação com os resultados obtidos, experimentalmente, disponíveis na literatura, além do que, com os resultados de soluções analíticas, também, disponíveis na literatura.

6.2 Placas retangulares

Existem, para placas retangulares, 21 casos distintos que envolvem todas as combinações de condições de contorno clássicas (engastada, simplesmente apoiada ou livre); serão apresentados, a seguir, os resultados obtidos para alguns desses casos.

Para facilitar a visualização dos resultados foi estabelecida uma simbologia; considerando-se a placa de dimensões a e b (Figura 6.1), a notação S-E-S-L identifica uma placa retangular com os lados $y=0$, $x=b$, $y=a$ e $x=0$ com as condições de contorno simplesmente apoiada, engastada, simplesmente apoiada e livre, respectivamente.

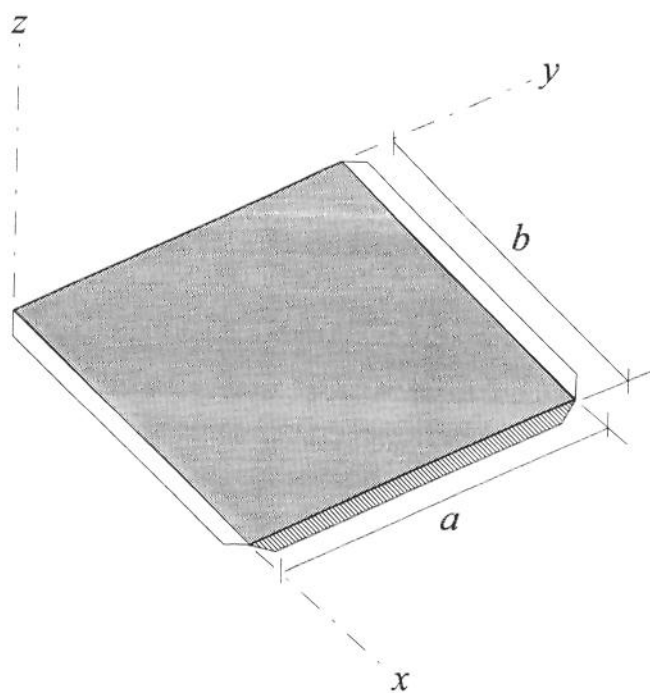


Figura 6.1 Placa retangular S-E-S-L com convenção de coordenadas.

As frequências naturais angulares ω , obtidas, foram normalizadas com relação ao fator $a^2 \sqrt{\rho/D}$ (onde a é o lado maior da placa, ρ , sua densidade de massa por unidade de área e D , sua rigidez), de modo a obter um parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$. A rigidez da placa é dada por [1]:

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \tag{6.1}$$

onde, t é a espessura da placa, E o seu módulo de elasticidade longitudinal e ν o seu coeficiente de Poisson.

Uma solução exata para a vibração livre de placas retangulares simplesmente apoiadas foi obtida por *Levinson* [24] através da teoria da elasticidade tridimensional. *Levinson* comparou seus resultados com os da teoria clássica de placa e da teoria de placa de Mindlin, através de exemplos numéricos, utilizando uma placa retangular simplesmente apoiada.

Analisando-se os resultados obtidos por *Levinson*, nota-se que as três teorias apresentam praticamente os mesmos resultados para $t/a \leq 0.05$ e a partir deste valor somente as teorias da elasticidade e de Mindlin apresentam resultados bastante próximos.

Como os exemplos utilizados neste trabalho, abrangem desde placas finas até placas moderadamente grossas, os resultados obtidos pelos elementos da família Serendipity e da família Lagrangeana foram comparados com os obtidos analiticamente através da teoria clássica e a teoria de Mindlin, uma vez que, na literatura, o número de exemplos, que abrange essas duas teorias é maior. Assim, com base nos resultados, obtidos por *Levinson* [24], de acordo com a relação t/a utilizada neste trabalho, montou-se a Tabela 6.1.

relação t/a	teoria	literatura
0.005	Clássica	<i>Leissa</i> [25]
0.01	Clássica	<i>Leissa</i> [25]
0.05	Clássica	<i>Leissa</i> [25]
0.1	Mindlin	<i>Dawe e Roufaeil</i> [26]

Tabela 6.1 Teoria e literatura utilizadas na comparação dos resultados obtidos pelos dois elementos em análise, para cada relação t/a , entre a espessura e a dimensão característica da placa.

6.2.1 Malha de discretização regular

Como a geometria das placas retangulares é bem simples, a malha de discretização mais indicada para a sua modelagem é a malha de discretização regular (Figura 6.2), que consiste na divisão de seus lados em partes iguais, de maneira que cada elemento tenha a relação entre seus lados próxima à unidade, obtendo-se malhas de $N \times M$ elementos com área, aproximadamente iguais.

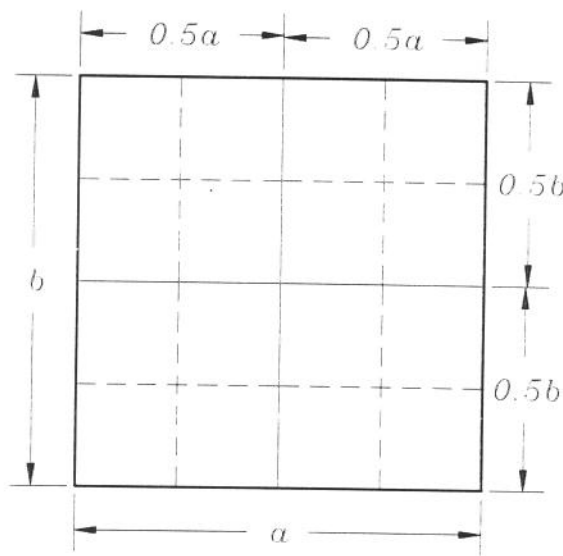


Figura 6.2 Malha de discretização regular: 2x2 (linhas principais) e 4x4 (linhas secundárias) elementos.

6.2.1.1 Placa quadrada S-E-S-L ($a/b = 1.0$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.3 a 6.6), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25] para $t/a=0.005$, $t/a=0.01$ e $t/a=0.05$ e os obtidos por *Dawe e Roufaeil* [26] para $t/a=0.1$, como mostram as Tabelas 6.2 a 6.7. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos nas referências [25] e [26] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	49.3659	289.1%	14.0128	10.4%
	2	33.0651	190.8054	477.1%	46.6997	41.2%
	3	41.7019	335.8047	705.3%	49.8057	19.4%
	4	63.0148	1144.8263	1716.8%	84.4357	34.0%
	5	72.3976	1297.3463	1692.0%	983.9776	1259.1%
	6	90.6114	1630.0579	1699.0%	986.3052	988.5%
0.01	1	12.6874	27.5229	116.9%	14.0008	10.4%
	2	33.0651	103.3895	212.7%	46.6547	41.1%
	3	41.7019	171.8217	312.0%	49.5878	18.9%
	4	63.0148	575.6340	813.5%	84.0213	33.3%
	5	72.3976	650.4631	798.5%	495.3501	584.2%
	6	90.6114	815.0289	799.5%	499.9716	451.8%
0.05	1	12.6874	14.4285	13.7%	13.6734	7.8%
	2	33.0651	48.6714	47.2%	44.1374	33.5%
	3	41.7019	51.1479	22.7%	48.0405	15.2%
	4	63.0148	133.2950	111.5%	74.3564	18.0%
	5	72.3976	140.5337	94.1%	118.5282	63.7%
	6	90.6114	163.0058	79.9%	136.7521	50.9%
0.1	1	12.3636	13.1736	6.6%	13.0142	5.3%
	2	30.6462	37.5737	22.6%	36.3937	18.8%
	3	38.9354	43.3216	11.3%	42.4634	9.1%
	4	56.2317	81.5029	44.9%	62.4554	11.1%
	5	62.9714	82.2568	30.6%	79.2346	25.8%
	6	79.0108	84.9900	7.6%	80.4219	1.8%

Tabela 6.2 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	17.6340	39.0%	13.2567	4.5%
	2	33.0651	78.5887	137.7%	37.0845	12.2%
	3	41.7019	91.3790	119.1%	48.0823	15.3%
	4	63.0148	161.0477	155.6%	73.1123	16.0%
	5	72.3976	306.2672	323.0%	100.7955	39.2%
	6	90.6114	407.7078	350.0%	118.6366	30.9%
0.01	1	12.6874	14.6377	15.4%	13.2461	4.4%
	2	33.0651	56.4058	70.6%	36.9991	11.9%
	3	41.7019	58.3344	39.9%	47.7487	14.5%
	4	63.0148	118.7873	88.5%	72.8647	15.6%
	5	72.3976	182.0747	151.5%	100.6319	39.0%
	6	90.6114	212.4413	134.5%	117.7674	30.0%
0.05	1	12.6874	13.0515	2.9%	12.9798	2.3%
	2	33.0651	35.8490	8.4%	34.9793	5.8%
	3	41.7019	46.9192	12.5%	46.4070	11.3%
	4	63.0148	76.0595	20.7%	67.3016	6.8%
	5	72.3976	97.1010	34.1%	95.9955	32.6%
	6	90.6114	107.3745	18.5%	127.9432	14.2%
0.1	1	12.3636	12.5160	1.2%	12.5004	1.1%
	2	30.6462	31.9671	4.3%	31.7935	3.7%
	3	38.9354	41.8701	7.5%	41.7450	7.2%
	4	56.2317	61.0160	8.5%	59.1122	5.1%
	5	62.9714	73.7863	17.2%	73.4520	16.6%
	6	79.0108	79.6853	0.9%	79.2077	0.2%

Tabela 6.3 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	13.9105	9.6%	13.0037	2.5%
	2	33.0651	46.5547	40.8%	35.1358	6.3%
	3	41.7019	51.2537	22.9%	46.0520	10.4%
	4	63.0148	127.7956	102.8%	68.2529	8.3%
	5	72.3976	135.8761	87.7%	87.5475	20.9%
	6	90.6114	160.3295	76.9%	112.4307	24.1%
0.01	1	12.6874	13.2692	4.6%	12.9934	2.4%
	2	33.0651	38.3693	16.0%	35.0626	6.0%
	3	41.7019	47.6568	14.3%	45.9280	10.1%
	4	63.0148	100.0066	58.7%	68.0484	8.0%
	5	72.3976	101.7855	40.6%	87.0380	20.2%
	6	90.6114	116.2958	28.3%	111.8289	23.4%
0.05	1	12.6874	12.7706	0.7%	12.7591	0.6%
	2	33.0651	33.5953	1.6%	33.4725	1.2%
	3	41.7019	43.4941	4.3%	43.3775	4.0%
	4	63.0148	65.1709	3.4%	63.7213	1.1%
	5	72.3976	77.8214	7.5%	77.3248	6.8%
	6	90.6114	100.1565	10.5%	99.7761	10.1%
0.1	1	12.3636	12.3623	0.0%	12.3598	0.0%
	2	30.6462	31.0035	1.2%	30.9770	1.1%
	3	38.9354	39.8916	2.5%	39.8674	2.4%
	4	56.2317	57.4573	2.2%	57.1580	1.6%
	5	62.9714	66.0984	5.0%	65.9945	4.8%
	6	79.0108	79.1341	0.2%	78.9314	-0.1%

Tabela 6.4 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	13.1471	3.6%	12.8880	1.6%
	2	33.0651	37.2506	12.7%	34.3422	3.9%
	3	41.7019	46.0035	10.3%	44.4158	6.5%
	4	63.0148	93.0272	47.6%	66.2376	5.1%
	5	72.3976	93.2572	28.8%	81.0118	11.9%
	6	90.6114	108.9074	20.2%	104.8140	15.7%
0.01	1	12.6874	12.9483	2.1%	12.8778	1.5%
	2	33.0651	35.0392	6.0%	34.2735	3.7%
	3	41.7019	44.8901	7.6%	44.2989	6.2%
	4	63.0148	74.3134	17.9%	66.0501	4.8%
	5	72.3976	83.8236	15.8%	80.5900	11.3%
	6	90.6114	105.7088	16.7%	104.1980	15.0%
0.05	1	12.6874	12.6689	-0.1%	12.6661	-0.2%
	2	33.0651	32.9259	-0.4%	32.8983	-0.5%
	3	41.7019	42.1817	1.2%	42.1509	1.1%
	4	63.0148	62.6557	-0.6%	62.3311	-1.1%
	5	72.3976	73.3554	1.3%	73.2474	1.2%
	6	90.6114	93.8261	3.5%	93.7003	3.4%
0.1	1	12.3636	12.3079	-0.5%	12.3073	-0.5%
	2	30.6462	30.7006	0.2%	30.6943	0.2%
	3	38.9354	39.2229	0.7%	39.2165	0.7%
	4	56.2317	56.5411	0.6%	56.4774	0.4%
	5	62.9714	64.2265	2.0%	62.9752	0.0%
	6	79.0108	78.9906	0.0%	81.5272	3.2%

Tabela 6.5 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	12.9120	1.8%	12.8254	1.1%
	2	33.0651	34.8435	5.4%	33.9318	2.6%
	3	41.7019	44.2325	6.1%	43.5530	4.4%
	4	63.0148	74.3438	18.0%	65.2002	3.5%
	5	72.3976	81.6571	12.8%	78.0361	7.8%
	6	90.6114	101.9393	12.5%	100.2394	10.6%
0.01	1	12.6874	12.8376	1.2%	12.8152	1.0%
	2	33.0651	34.0969	3.1%	33.8653	2.4%
	3	41.7019	43.6695	4.7%	43.4407	4.2%
	4	63.0148	67.6779	7.4%	65.0214	3.2%
	5	72.3976	78.5701	8.5%	77.6557	7.3%
	6	90.6114	100.3776	10.8%	99.6583	10%
0.05	1	12.6874	12.6212	-0.5%	12.6203	-0.5%
	2	33.0651	32.6359	-1.3%	32.6274	-1.3%
	3	41.7019	41.5866	-0.3%	41.5767	-0.3%
	4	63.0148	61.7745	-2.0%	61.6780	-2.1%
	5	72.3976	71.5678	-1.1%	71.5362	-1.2%
	6	90.6114	90.7999	0.2%	90.7528	0.2%
0.1	1	12.3636	12.2835	-0.6%	12.2833	-0.6%
	2	30.6462	30.5731	-0.2%	30.5711	-0.2%
	3	38.9354	38.9472	0.0%	38.9450	0.0%
	4	56.2317	56.1992	-0.1%	56.1780	-0.1%
	5	62.9714	63.5092	0.9%	63.5008	0.8%
	6	79.0108	79.4141	0.5%	79.1684	0.2%

Tabela 6.6 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	12.8209	1.1%	12.7877	0.8%
	2	33.0651	34.0295	2.9%	33.6903	1.9%
	3	41.7019	43.3590	4.0%	43.0424	3.2%
	4	63.0148	68.2328	8.3%	64.5913	2.5%
	5	72.3976	77.6764	7.3%	76.3904	5.5%
	6	90.6114	98.4520	8.7%	97.5309	7.6%
0.01	1	12.6874	12.7859	0.8%	12.7775	0.7%
	2	33.0651	33.7103	2.0%	33.6253	1.7%
	3	41.7019	43.0281	3.2%	42.9335	3.0%
	4	63.0148	65.4165	3.8%	64.4180	2.2%
	5	72.3976	76.3550	5.5%	76.0344	5.0%
	6	90.6114	97.3431	7.4%	96.9789	7.0%
0.05	1	12.6874	12.5955	-0.7%	12.5952	-0.7%
	2	33.0651	32.4863	-1.8%	32.4832	-1.8%
	3	41.7019	41.2819	-1.0%	41.2781	-1.0%
	4	63.0148	61.3683	-2.6%	61.3330	-2.7%
	5	72.3976	70.6951	-2.4%	70.6834	-2.4%
	6	90.6114	89.2535	-1.5%	89.2337	-1.5%
0.1	1	12.3636	12.2709	-0.7%	12.2708	-0.8%
	2	30.6462	30.5097	-0.4%	30.5090	-0.4%
	3	38.9354	38.8164	-0.3%	38.8155	-0.3%
	4	56.2317	56.0401	-0.3%	56.0311	-0.4%
	5	62.9714	63.1753	0.3%	63.1730	0.3%
	6	79.0108	79.3714	0.5%	78.9854	0.0%

Tabela 6.7 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos nas referências [25] e [26] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

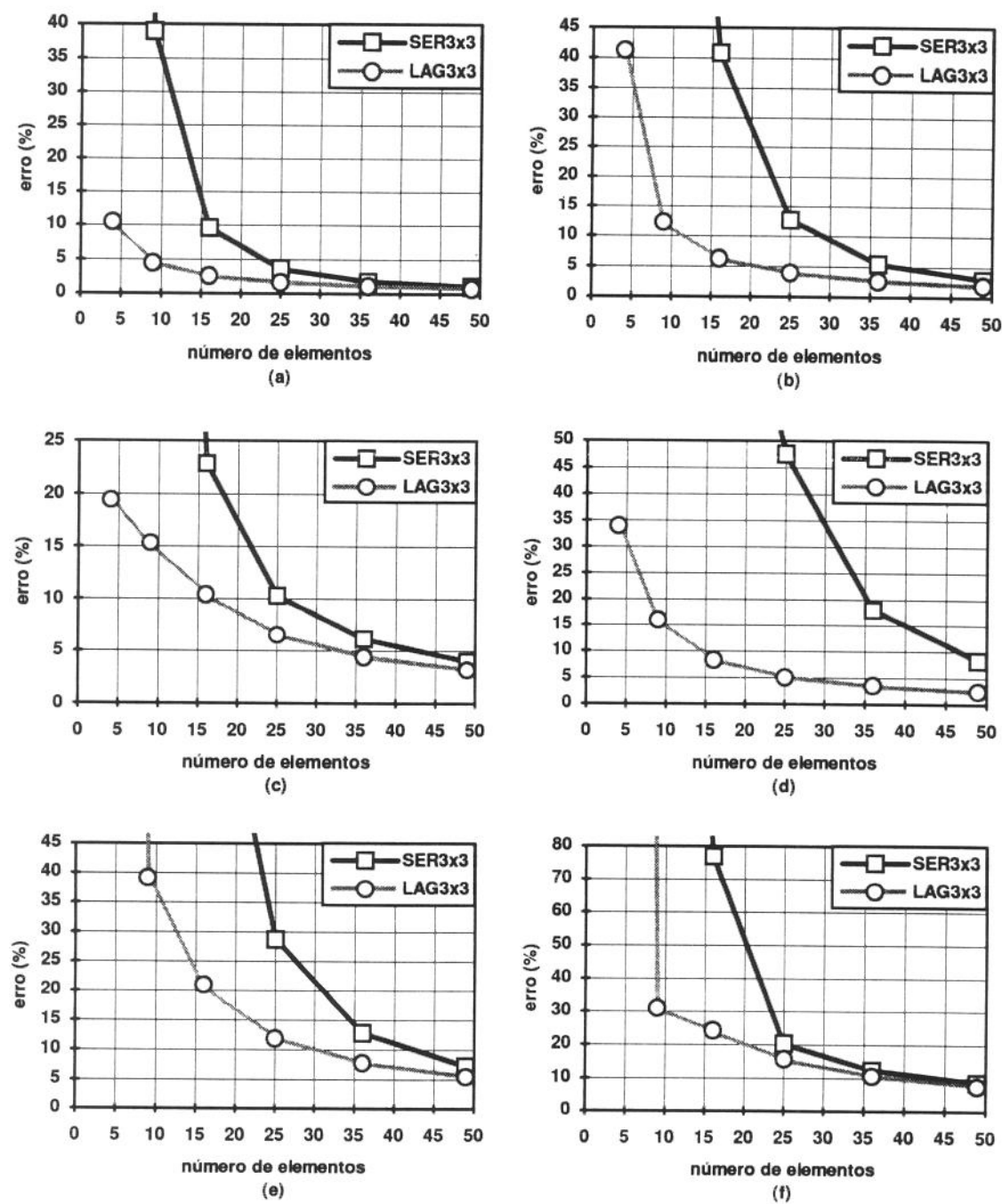


Figura 6.3 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

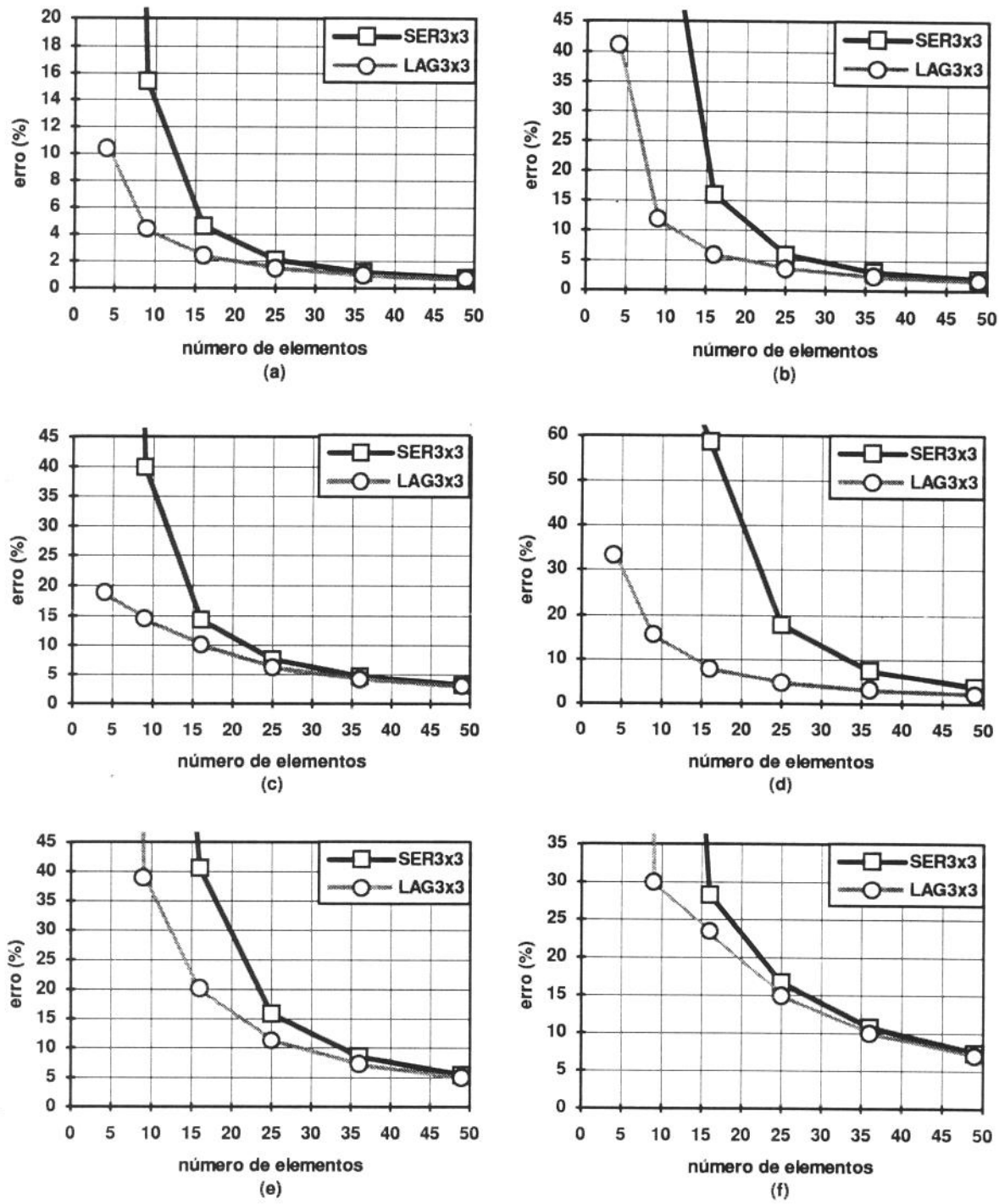


Figura 6.4 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

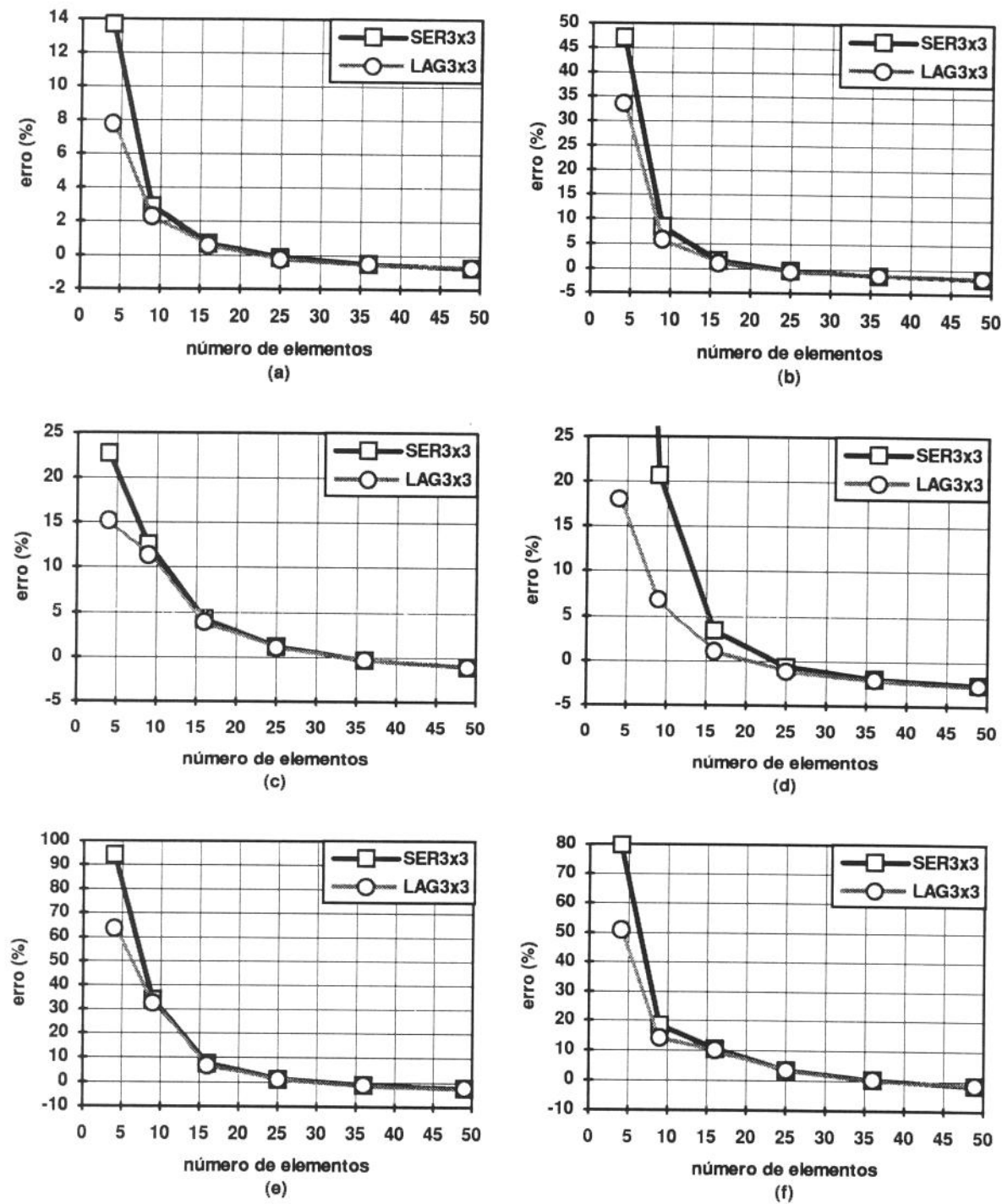


Figura 6.5 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

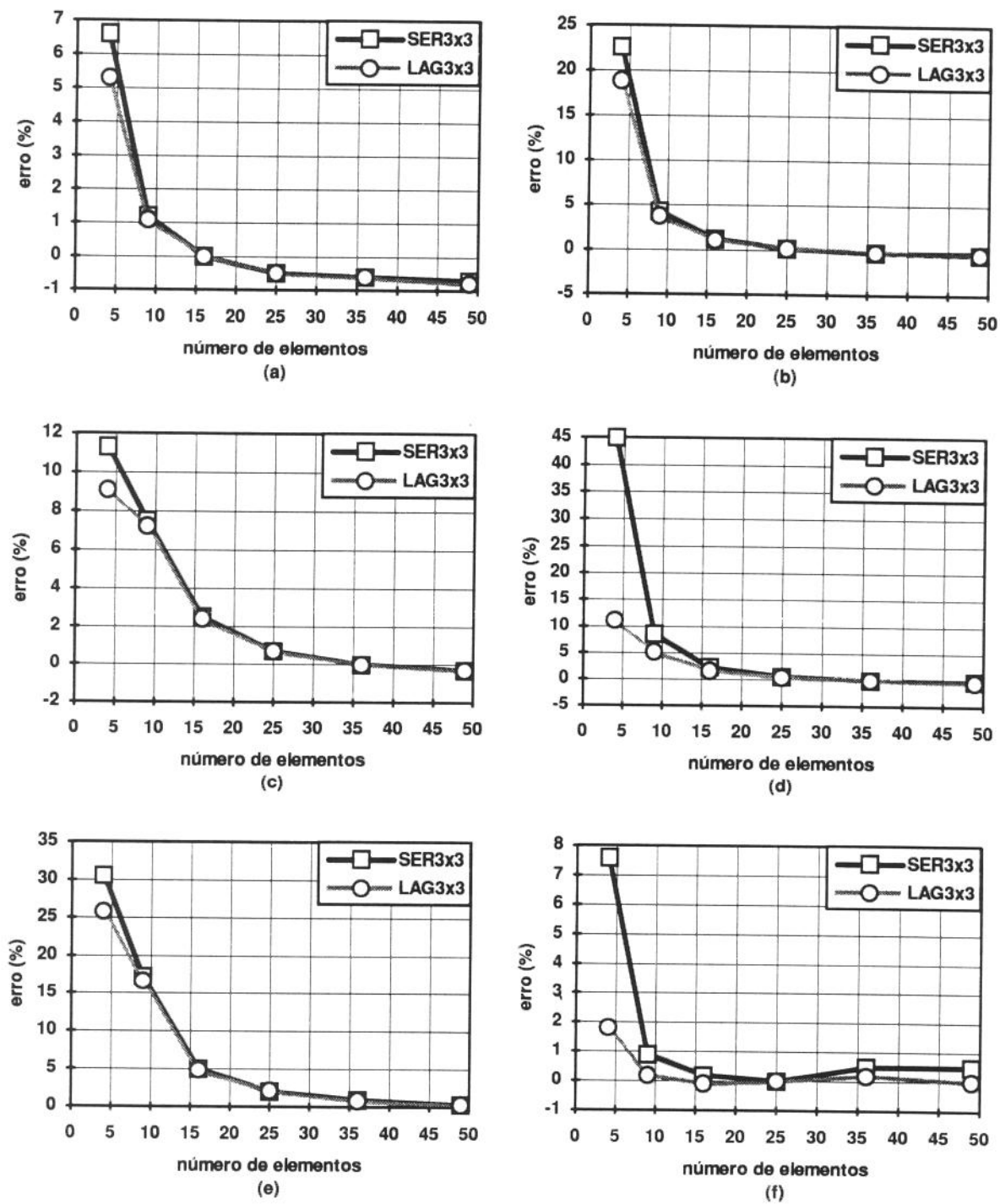


Figura 6.6 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

A Figura 6.7 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da placa quadrada S-E-S-L, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de (7×7) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

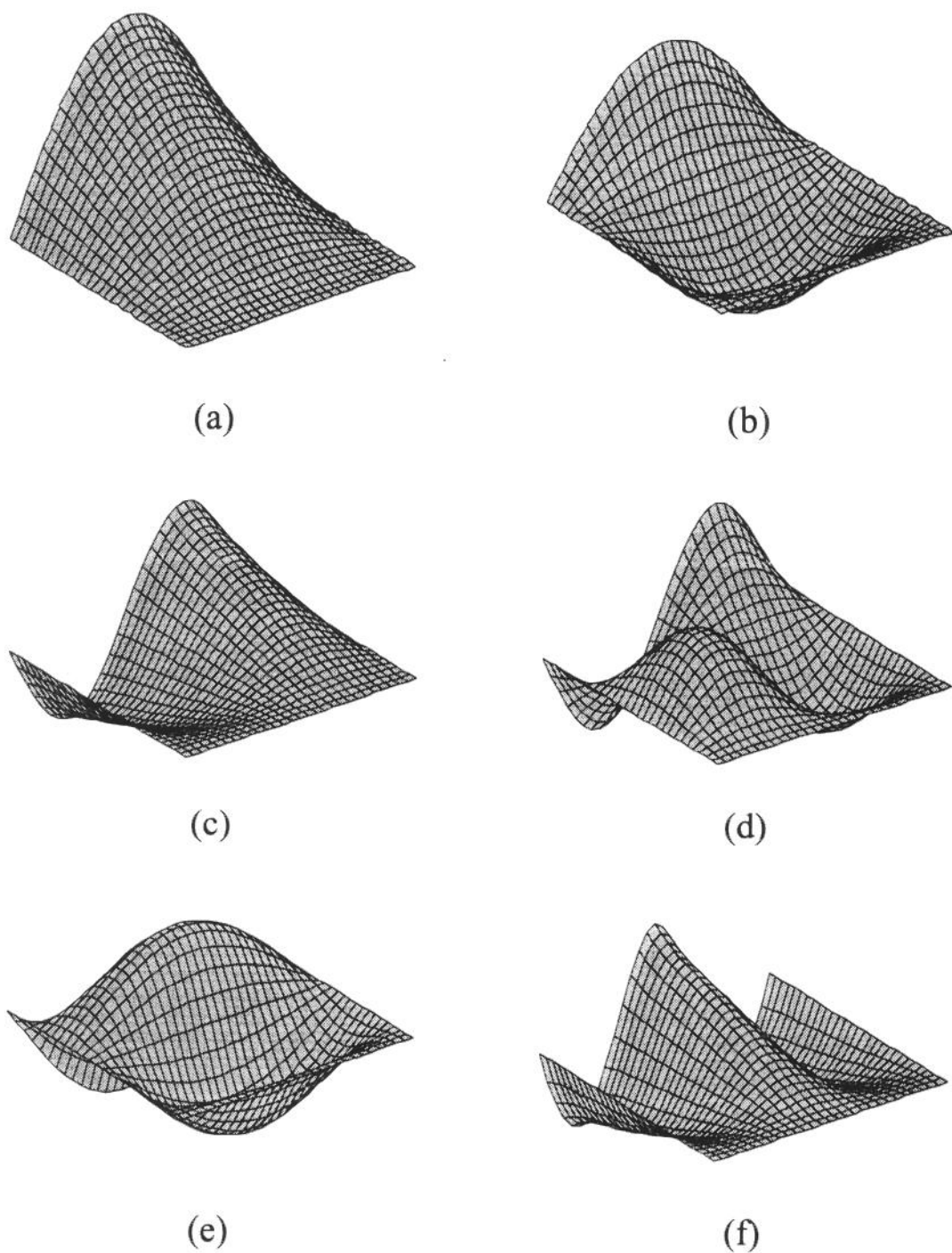


Figura 6.7 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa quadrada S-E-S-L, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7×7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.2 a 6.7 e das Figuras 6.3 a 6.6, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity para todas as relações t/a utilizadas, principalmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$).

6.2.1.2 Placa quadrada S-E-S-S ($a/b = 1.0$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.8 a 6.11), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25] para $t/a=0.005$, $t/a=0.01$ e $t/a=0.05$ e os obtidos por *Dawe e Roufaeil* [26] para $t/a=0.1$, como mostram as Tabelas 6.8 a 6.13. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos nas referências [25] e [26] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	287.2956	1115.0%	30.3055	28.2%
	2	51.6743	981.0457	1798.5%	60.6153	17.3%
	3	58.6464	1094.0009	1765.4%	916.7982	1463.3%
	4	86.1345	2542.7319	2852.0%	918.7980	966.7%
	5	100.2698	2542.7373	2435.9%	2490.5247	2383.8%
	6	113.2281	2985.7153	2536.9%	2500.5259	2108.4%
0.01	1	23.6463	145.3223	514.6%	30.2284	27.8%
	2	51.6743	492.3890	852.9%	60.4742	17.0%
	3	58.6464	549.1066	836.3%	460.7741	685.7%
	4	86.1345	1271.3661	1376.0%	464.7347	439.5%
	5	100.2698	1271.3690	1167.9%	1245.2552	1141.9%
	6	113.2281	1495.0903	1220.4%	1250.2633	1004.2%
0.05	1	23.6463	37.7100	59.5%	28.2610	19.5%
	2	51.6743	109.2610	111.4%	57.0224	10.3%
	3	58.6464	121.8179	107.7%	105.6799	80.2%
	4	86.1345	254.2731	195.2%	120.8822	40.3%
	5	100.2698	254.2731	153.6%	249.0383	148.4%
	6	113.2281	305.9412	170.2%	249.1315	120.0%
0.1	1	22.3759	27.0016	20.7%	25.0698	12.0%
	2	47.1033	66.7745	41.8%	51.3106	8.9%
	3	52.1096	73.7363	41.5%	67.1147	28.8%
	4	74.1048	127.1366	71.6%	85.2632	15.1%
	5	85.8021	127.1366	48.2%	124.5192	45.1%
	6	93.1032	152.9706	64.3%	124.5658	33.8%

Tabela 6.8 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	66.0865	179.5%	25.8653	9.4%
	2	51.6743	287.7585	456.9%	58.9087	14.0%
	3	58.6464	300.7115	412.8%	80.7124	37.6%
	4	86.1345	618.7673	618.4%	110.7788	28.6%
	5	100.2698	1026.9355	924.2%	131.5540	31.2%
	6	113.2281	1272.4373	1023.8%	171.4273	51.4%
0.01	1	23.6463	39.8238	68.4%	25.8203	9.2%
	2	51.6743	158.1622	206.1%	57.8752	12.0%
	3	58.6464	158.7168	170.6%	80.3073	36.9%
	4	86.1345	323.0050	275.0%	110.5489	28.3%
	5	100.2698	518.4262	417.0%	125.6381	25.3%
	6	113.2281	642.2883	467.3%	159.6093	41.0%
0.05	1	23.6463	25.3594	7.2%	24.7579	4.7%
	2	51.6743	61.3881	18.8%	54.8264	6.1%
	3	58.6464	74.0586	26.3%	70.7346	20.6%
	4	86.1345	119.0037	38.2%	97.0029	12.6%
	5	100.2698	129.5565	29.2%	120.5243	20.2%
	6	113.2281	161.3451	42.5%	140.7968	24.3%
0.1	1	22.3759	23.1916	3.6%	23.0694	3.1%
	2	47.1033	51.0342	8.3%	49.9394	6.0%
	3	52.1096	58.8671	13.0%	58.2641	11.8%
	4	74.1048	88.0555	18.8%	80.0712	8.1%
	5	85.8021	95.6437	11.5%	93.8675	9.4%
	6	93.1032	109.4624	17.6%	107.9354	15.9%

Tabela 6.9 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	32.5428	37.6%	24.7881	4.8%
	2	51.6743	111.9305	116.6%	56.0211	8.4%
	3	58.6464	116.5572	98.7%	69.4556	18.4%
	4	86.1345	279.9788	225.0%	97.8714	13.6%
	5	100.2698	300.8858	200.1%	121.4278	21.1%
	6	113.2281	413.4458	265.1%	156.0506	37.8%
0.01	1	23.6463	26.9381	13.9%	24.7504	4.7%
	2	51.6743	75.6483	46.4%	55.8753	8.1%
	3	58.6464	81.6273	39.2%	69.0951	17.8%
	4	86.1345	182.1859	111.5%	97.3889	13.1%
	5	100.2698	193.0598	92.5%	118.8197	18.5%
	6	113.2281	221.1979	95.4%	150.4801	32.9%
0.05	1	23.6463	24.0166	1.6%	23.9350	1.2%
	2	51.6743	53.5853	3.7%	52.8010	2.2%
	3	58.6464	62.6959	6.9%	62.2722	6.2%
	4	86.1345	93.9315	9.1%	88.1258	2.3%
	5	100.2698	110.3033	10.0%	107.9121	7.6%
	6	113.2281	132.0536	16.6%	130.8596	15.6%
0.1	1	22.3759	22.6609	1.3%	22.6432	1.2%
	2	47.1033	48.3446	2.6%	48.1897	2.3%
	3	52.1096	54.3838	4.4%	54.2950	4.2%
	4	74.1048	77.4732	4.5%	76.2506	2.9%
	5	85.8021	92.1190	7.4%	91.6525	6.8%
	6	93.1032	102.8971	10.5%	102.6574	10.3%

Tabela 6.10 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	26.2706	11.1%	24.3470	3.0%
	2	51.6743	70.4886	36.4%	54.3442	5.2%
	3	58.6464	74.8375	27.6%	64.9136	10.7%
	4	86.1345	166.7364	93.6%	92.8351	7.8%
	5	100.2698	172.1428	71.7%	113.7760	13.5%
	6	113.2281	192.9947	70.4%	141.2232	24.7%
0.01	1	23.6463	24.8153	4.9%	24.3124	2.8%
	2	51.6743	58.8352	13.9%	54.2104	4.9%
	3	58.6464	67.2090	14.6%	64.6140	10.2%
	4	86.1345	124.7541	44.8%	92.4424	7.3%
	5	100.2698	128.4613	28.1%	113.1410	12.8%
	6	113.2281	148.0016	30.7%	139.8534	23.5%
0.05	1	23.6463	23.6446	0.0%	23.6262	-0.1%
	2	51.6743	51.7875	0.2%	51.6149	-0.1%
	3	58.6464	59.5408	1.5%	59.4530	1.4%
	4	86.1345	86.3968	0.3%	85.2295	-1.1%
	5	100.2698	102.6678	2.4%	102.1266	1.9%
	6	113.2281	118.5823	4.7%	118.3446	4.5%
0.1	1	22.3759	22.5084	0.6%	22.5042	0.6%
	2	47.1033	47.6359	1.1%	47.6009	1.1%
	3	52.1096	53.1256	1.9%	53.1058	1.9%
	4	74.1048	75.3250	1.6%	75.0702	1.3%
	5	85.8021	88.6703	3.3%	88.5658	3.2%
	6	93.1032	97.4035	4.6%	97.3732	4.6%

Tabela 6.11 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	24.7222	4.5%	24.1205	2.0%
	2	51.6743	58.6309	13.5%	53.4806	3.5%
	3	58.6464	65.6495	11.9%	62.7588	7.0%
	4	86.1345	124.0293	44.0%	90.5027	5.1%
	5	100.2698	125.7795	25.4%	109.3320	9.0%
	6	113.2281	139.8002	23.5%	131.2659	15.9%
0.01	1	23.6463	24.2402	2.5%	24.0876	1.9%
	2	51.6743	54.7795	6.0%	53.3538	3.3%
	3	58.6464	63.2196	7.8%	62.4905	6.6%
	4	86.1345	99.5632	15.6%	90.1515	4.7%
	5	100.2698	113.3124	13.0%	108.7427	8.5%
	6	113.2281	132.2067	16.8%	130.0661	14.9%
0.05	1	23.6463	23.4911	-0.7%	23.4855	-0.7%
	2	51.6743	51.1224	-1.1%	51.0709	-1.2%
	3	58.6464	58.2665	-0.6%	58.2410	-0.7%
	4	86.1345	84.3079	-2.1%	83.9848	-2.5%
	5	100.2698	99.5329	-0.7%	99.3704	-0.9%
	6	113.2281	113.1545	-0.1%	113.0855	-0.1%
0.1	1	22.3759	22.4496	0.3%	22.4483	0.3%
	2	47.1033	47.3718	0.6%	47.3612	0.5%
	3	52.1096	52.6445	1.0%	52.6385	1.0%
	4	74.1048	74.6749	0.8%	74.6018	0.7%
	5	85.8021	87.3072	1.8%	87.2765	1.7%
	6	93.1032	95.3598	2.4%	95.3429	2.4%

Tabela 6.12 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	24.2123	2.4%	23.9880	1.4%
	2	51.6743	54.9550	6.3%	52.9756	2.5%
	3	58.6464	62.5840	6.7%	61.5577	5.0%
	4	86.1345	101.6571	18.0%	89.2147	3.6%
	5	100.2698	112.7976	12.5%	106.7420	6.5%
	6	113.2281	128.6200	13.6%	125.7941	11.1%
0.01	1	23.6463	24.0125	1.5%	23.9563	1.3%
	2	51.6743	53.3849	3.3%	52.8537	2.3%
	3	58.6464	61.5645	5.0%	61.3085	4.5%
	4	86.1345	92.1657	7.0%	88.8876	3.2%
	5	100.2698	107.8944	7.6%	106.1868	5.9%
	6	113.2281	125.3989	10.7%	124.7178	10.1%
0.05	1	23.6463	23.4159	-1.0%	23.4138	-1.0%
	2	51.6743	50.8114	-1.7%	50.7925	-1.7%
	3	58.6464	57.6492	-1.7%	57.6400	-1.7%
	4	86.1345	83.4799	-3.1%	83.3670	-3.2%
	5	100.2698	98.0254	-2.2%	97.9644	-2.3%
	6	113.2281	110.5796	-2.3%	110.5423	-2.4%
0.1	1	22.3759	22.4229	0.2%	22.4224	0.2%
	2	47.1033	47.2536	0.3%	47.2496	0.3%
	3	52.1096	52.4267	0.6%	52.4246	0.6%
	4	74.1048	74.4123	0.4%	74.3861	0.4%
	5	85.8021	86.6842	1.0%	86.6715	1.0%
	6	93.1032	94.4296	1.4%	94.4269	1.4%

Tabela 6.13 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos nas referências [25] e [26] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

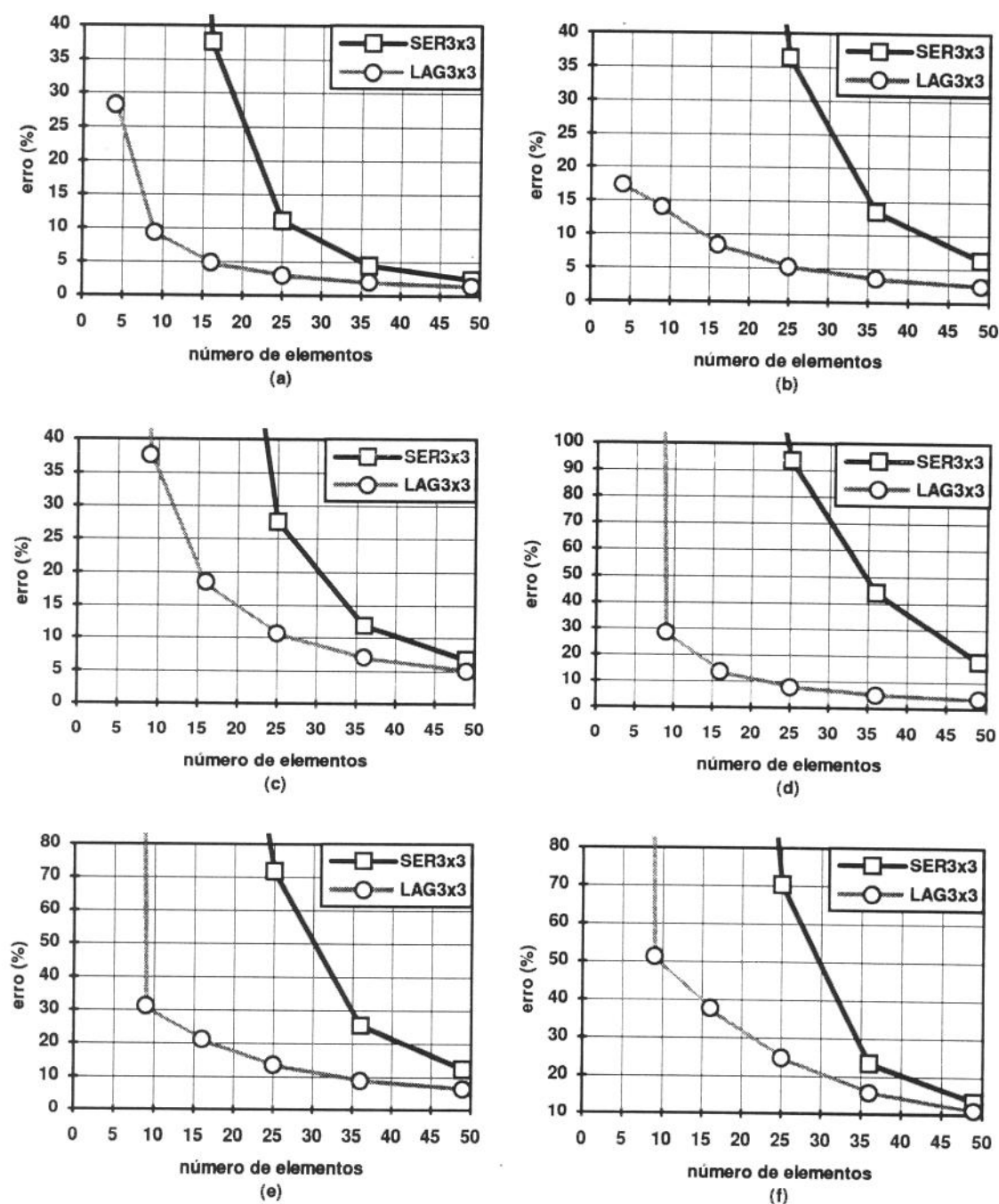


Figura 6.8 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

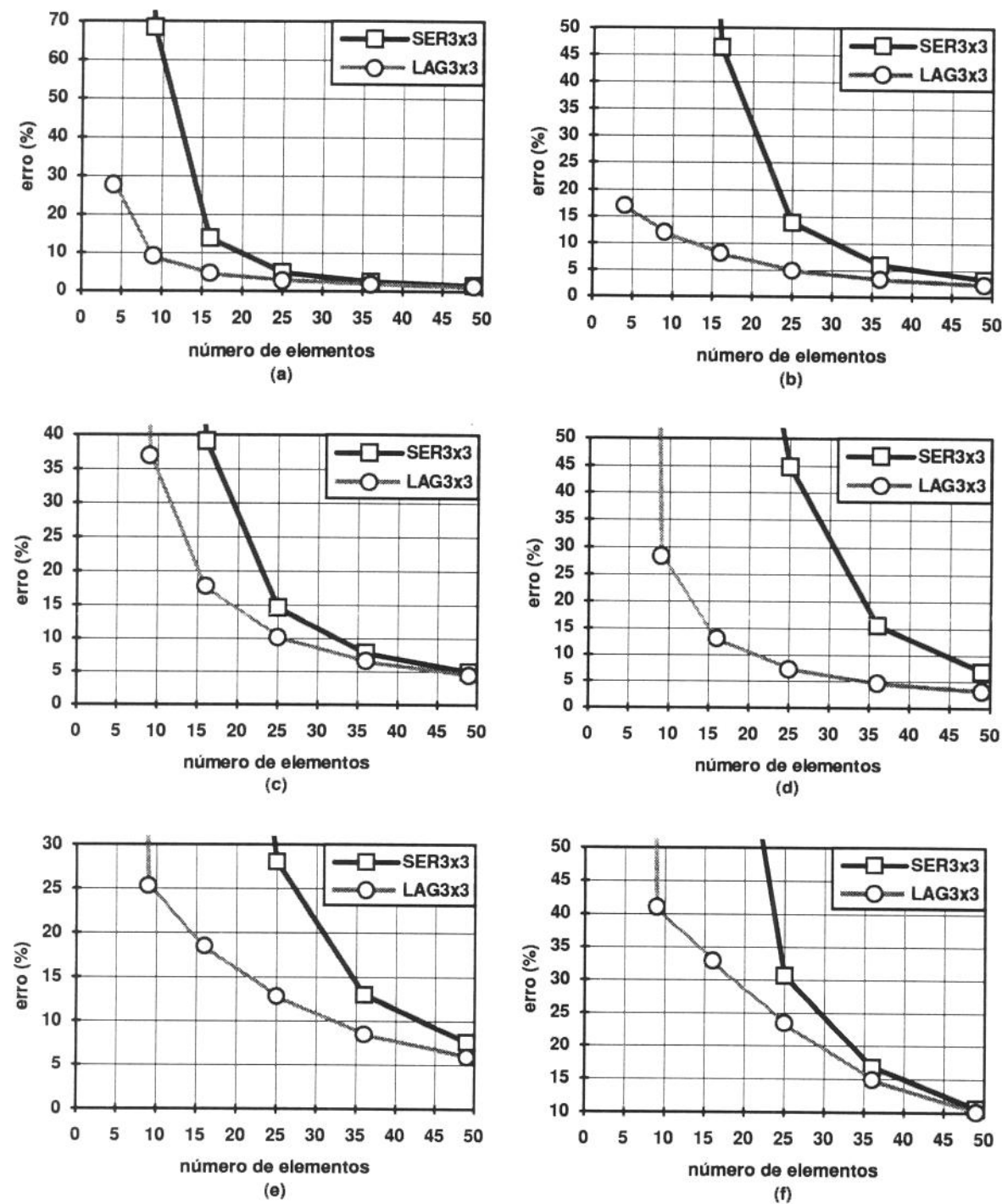


Figura 6.9 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

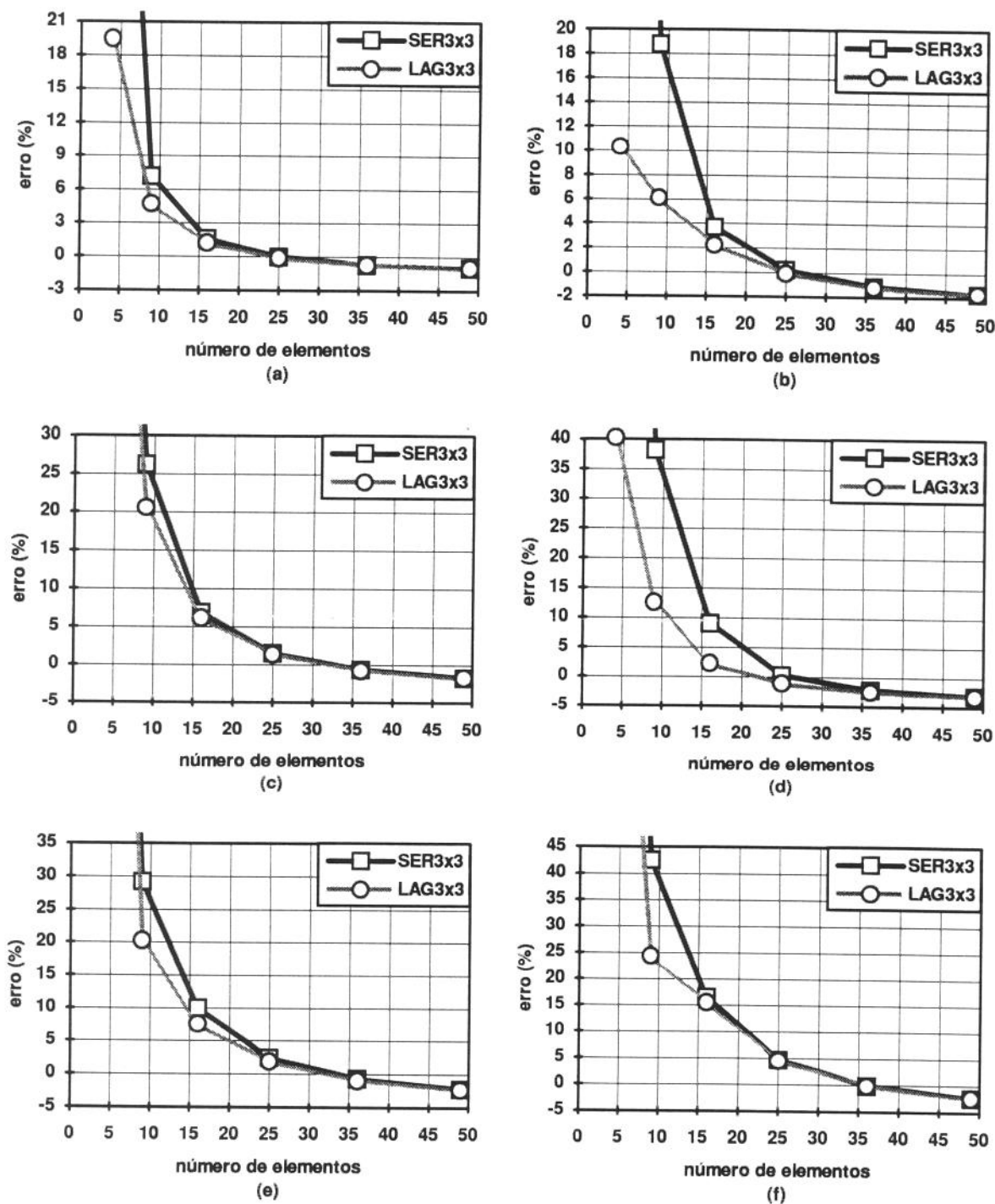


Figura 6.10 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

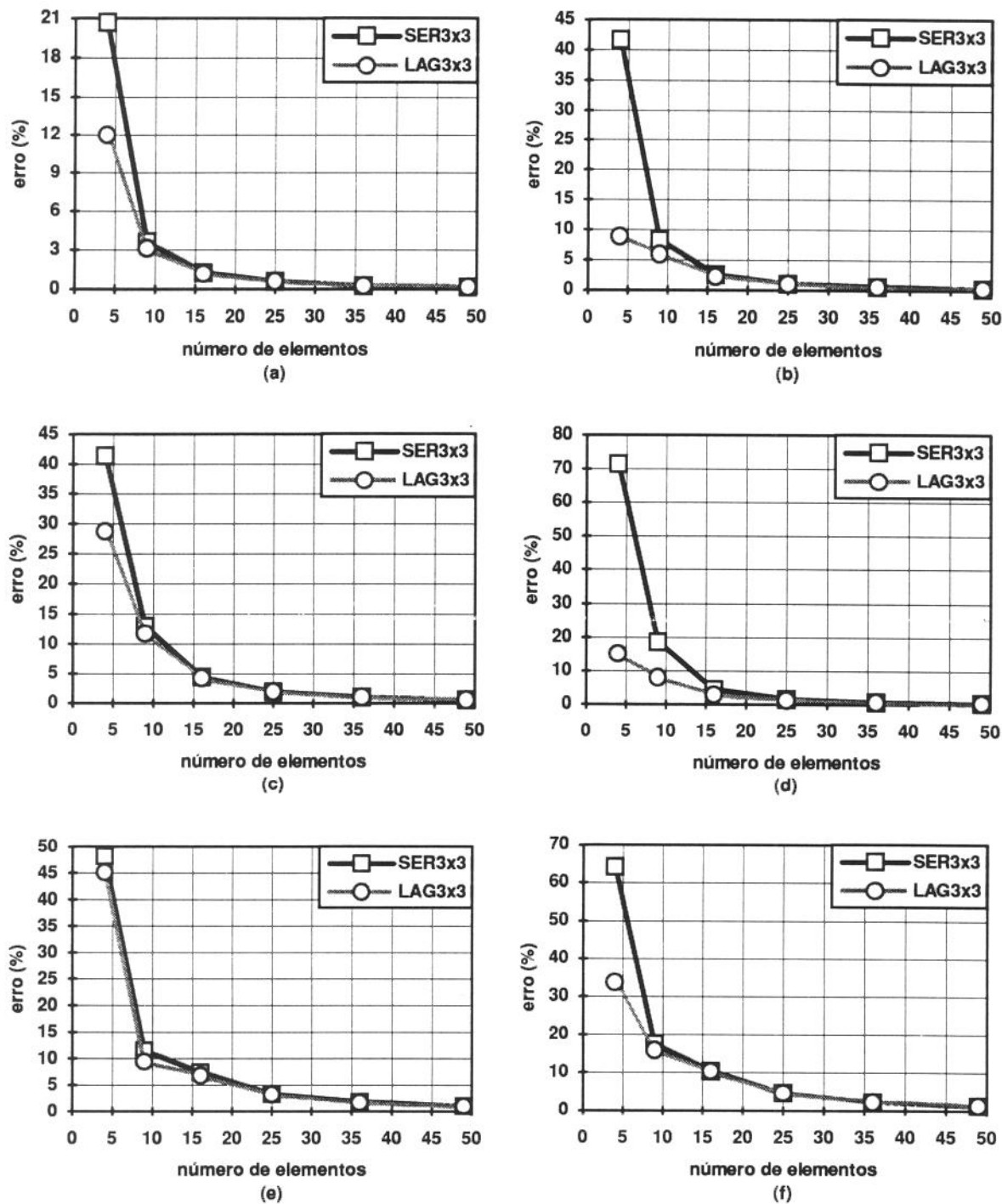


Figura 6.11 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

A Figura 6.12 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da placa quadrada S-E-S-S, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de (7×7) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

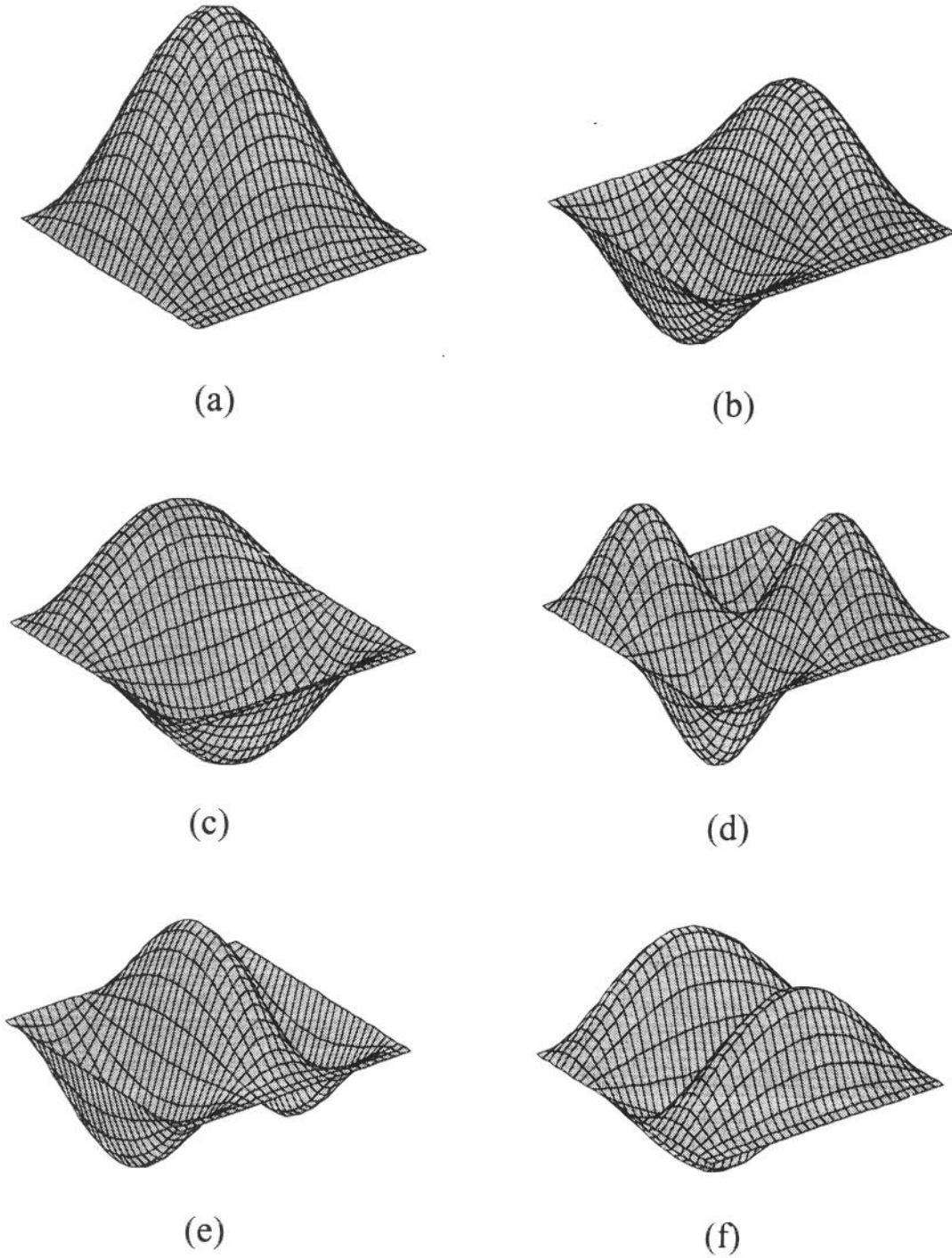


Figura 6.12 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa quadrada S-E-S-S, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7×7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.8 a 6.13 e das Figuras 6.8 a 6.11, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity para todas as relações t/a utilizadas, principalmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$).

6.2.1.3 Placa quadrada E-E-E-E ($a/b = 1.0$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.13 a 6.16), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25] para $t/a=0.005$, $t/a=0.01$ e $t/a=0.05$ e os obtidos por *Dawe e Roufaeil* [26] para $t/a=0.1$, como mostram as Tabelas 6.14 a 6.19. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos nas referências [25] e [26] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	738.3297	1951.4%	737.3223	1948.6%
	2	73.4130	1883.9348	2466.2%	1463.3643	1893.3%
	3	73.4130	1883.9348	2466.2%	1463.3643	1893.3%
	4	108.2700	2542.7322	2248.5%	1933.8678	1686.2%
	5	131.6400	2542.7380	1831.6%	2490.5142	1791.9%
	6	132.2400	3059.4116	2213.5%	2571.4700	1844.5%
0.01	1	35.9920	370.1116	928.3%	369.5922	926.9%
	2	73.4130	942.9757	1184.5%	733.4187	899.0%
	3	73.4130	942.9757	1184.5%	733.4187	899.0%
	4	108.2700	1271.3661	1074.3%	969.4443	795.4%
	5	131.6400	1271.3690	865.8%	1245.2571	846.0%
	6	132.2400	1529.7058	1056.8%	1285.7350	872.3%
0.05	1	35.9920	79.6074	121.2%	79.3917	120.6%
	2	73.4130	194.4098	164.8%	156.5044	113.2%
	3	73.4130	194.4098	164.8%	156.5044	113.2%
	4	108.2700	254.2731	134.9%	207.8218	91.9%
	5	131.6400	254.2731	93.2%	249.0384	89.2%
	6	132.2400	305.9412	131.4%	249.5131	88.7%
0.1	1	32.6735	46.4239	42.1%	46.1296	41.2%
	2	62.4451	103.5581	65.8%	88.4839	41.7%
	3	62.4451	103.5581	65.8%	88.4839	41.7%
	4	87.8719	127.1366	44.7%	117.6789	33.9%
	5	103.2321	127.1366	23.2%	124.5192	20.6%
	6	104.8865	152.9706	45.8%	124.7566	18.9%

Tabela 6.14 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	307.9138	755.5%	47.8856	33.0%
	2	73.4130	1048.6754	1328.5%	971.0023	1222.7%
	3	73.4130	1048.6754	1328.5%	971.0023	1222.7%
	4	108.2700	1421.7906	1213.2%	1372.7174	1167.9%
	5	131.6400	1742.6550	1223.8%	1577.1250	1098.1%
	6	132.2400	1831.6458	1285.1%	1577.7217	1093.1%
0.01	1	35.9920	157.5759	337.8%	47.5877	32.2%
	2	73.4130	527.2624	618.2%	489.3605	566.6%
	3	73.4130	527.2624	618.2%	489.3605	566.6%
	4	108.2700	715.9395	561.3%	691.1179	538.3%
	5	131.6400	877.2186	566.4%	795.4949	504.3%
	6	132.2400	921.4426	596.8%	796.6385	502.4%
0.05	1	35.9920	47.4826	31.9%	41.7110	15.9%
	2	73.4130	121.3787	65.3%	116.9316	59.3%
	3	73.4130	121.3787	65.3%	116.9316	59.3%
	4	108.2700	169.3848	56.4%	162.9426	50.5%
	5	131.6400	205.1118	55.8%	193.1175	46.7%
	6	132.2400	212.9571	61.0%	195.4927	47.8%
0.1	1	32.6735	35.9859	10.1%	35.2141	7.8%
	2	62.4451	76.0294	21.8%	74.8692	19.9%
	3	62.4451	76.0294	21.8%	74.8692	19.9%
	4	87.8719	107.1898	22.0%	102.8774	17.1%
	5	103.2321	123.8924	20.0%	122.3761	18.5%
	6	104.8865	126.0857	20.2%	123.4943	17.7%

Tabela 6.15 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	117.6402	226.9%	41.4418	15.1%
	2	73.4130	351.3865	378.6%	100.2746	36.6%
	3	73.4130	351.3865	378.6%	100.2746	36.6%
	4	108.2700	901.1738	732.3%	152.6713	41.0%
	5	131.6400	1442.4381	995.7%	1415.1094	975.0%
	6	132.2400	1460.2998	1004.3%	1419.2153	973.2%
0.01	1	35.9920	68.1791	89.4%	41.2533	14.6%
	2	73.4130	192.3818	162.1%	99.2170	35.1%
	3	73.4130	192.3818	162.1%	99.2170	35.1%
	4	108.2700	459.3094	324.2%	150.4129	38.9%
	5	131.6400	728.4667	453.4%	715.3196	443.4%
	6	132.2400	737.4244	457.6%	719.5808	444.1%
0.05	1	35.9920	38.5726	7.2%	37.6974	4.7%
	2	73.4130	84.6037	15.2%	81.6884	11.3%
	3	73.4130	84.6037	15.2%	81.6884	11.3%
	4	108.2700	131.2755	21.2%	117.8893	8.9%
	5	131.6400	181.0609	37.5%	179.5286	36.4%
	6	132.2400	183.1736	38.5%	180.9274	36.8%
0.1	1	32.6735	33.6105	2.9%	33.4995	2.5%
	2	62.4451	66.3321	6.2%	65.9582	5.6%
	3	62.4451	66.3321	6.2%	65.9582	5.6%
	4	87.8719	94.1042	7.1%	92.0034	4.7%
	5	103.2321	117.6105	13.9%	117.2169	13.5%
	6	104.8865	119.2243	13.7%	118.5949	13.1%

Tabela 6.16 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	62.5503	73.8%	39.2018	8.9%
	2	73.4130	174.1455	137.2%	87.9015	19.7%
	3	73.4130	174.1455	137.2%	87.9015	19.7%
	4	108.2700	375.2649	246.6%	131.1659	21.1%
	5	131.6400	378.4735	187.5%	185.6891	41.1%
	6	132.2400	461.1196	248.7%	185.9465	40.6%
0.01	1	35.9920	45.8919	27.5%	39.0453	8.5%
	2	73.4130	114.0726	55.4%	87.1371	18.7%
	3	73.4130	114.0726	55.4%	87.1371	18.7%
	4	108.2700	242.0210	123.5%	129.7361	19.8%
	5	131.6400	242.8462	84.5%	182.8253	38.9%
	6	132.2400	251.4594	90.2%	183.1166	38.5%
0.05	1	35.9920	36.5249	1.5%	36.3334	0.9%
	2	73.4130	76.1042	3.7%	75.4063	2.7%
	3	73.4130	76.1042	3.7%	75.4063	2.7%
	4	108.2700	112.6138	4.0%	108.9752	0.7%
	5	131.6400	142.2999	8.1%	140.9862	7.1%
	6	132.2400	143.1431	8.2%	141.8000	7.2%
0.1	1	32.6735	32.9883	1.0%	32.9640	0.9%
	2	62.4451	63.8462	2.2%	63.7572	2.1%
	3	62.4451	63.8462	2.2%	63.7572	2.1%
	4	87.8719	89.7069	2.1%	89.1834	1.5%
	5	103.2321	108.4554	5.1%	108.2886	4.9%
	6	104.8865	109.5478	4.4%	109.3562	4.3%

Tabela 6.17 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	45.7784	27.2%	38.1216	5.9%
	2	73.4130	112.6619	53.5%	82.6012	12.5%
	3	73.4130	112.6619	53.5%	82.6012	12.5%
	4	108.2700	233.7449	115.9%	122.5488	13.2%
	5	131.6400	238.2466	81.0%	165.0656	25.4%
	6	132.2400	259.1400	96.0%	165.4772	25.1%
0.01	1	35.9920	40.0302	11.2%	37.9804	5.5%
	2	73.4130	90.2704	23.0%	81.9665	11.7%
	3	73.4130	90.2704	23.0%	81.9665	11.7%
	4	108.2700	164.6820	52.1%	121.4135	12.1%
	5	131.6400	181.9323	38.2%	162.6305	23.5%
	6	132.2400	182.6663	38.1%	163.0705	23.3%
0.05	1	35.9920	35.7898	-0.6%	35.7336	-0.7%
	2	73.4130	73.0811	-0.5%	72.8731	-0.7%
	3	73.4130	73.0811	-0.5%	72.8731	-0.7%
	4	108.2700	106.4670	-1.7%	105.3940	-2.7%
	5	131.6400	132.2405	0.5%	131.8049	0.1%
	6	132.2400	133.0296	0.6%	132.5911	0.3%
0.1	1	32.6735	32.7581	0.3%	32.7510	0.2%
	2	62.4451	62.9411	0.8%	62.9147	0.8%
	3	62.4451	62.9411	0.8%	62.9147	0.8%
	4	87.8719	88.2523	0.4%	88.1006	0.3%
	5	103.2321	105.4371	2.1%	105.3795	2.1%
	6	104.8865	106.4762	1.5%	106.4599	1.5%

Tabela 6.18 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	40.3737	12.2%	37.5094	4.2%
	2	73.4130	91.1050	24.1%	79.7986	8.7%
	3	73.4130	91.1050	24.1%	79.7986	8.7%
	4	108.2700	174.7032	61.4%	118.1074	9.1%
	5	131.6400	180.7460	37.3%	154.1700	17.1%
	6	132.2400	181.9831	37.6%	154.6485	16.9%
0.01	1	35.9920	38.1147	5.9%	37.3776	3.8%
	2	73.4130	82.2244	12.0%	79.2335	7.9%
	3	73.4130	82.2244	12.0%	79.2335	7.9%
	4	108.2700	133.0374	22.9%	117.1171	8.2%
	5	131.6400	159.1888	20.9%	152.1109	15.6%
	6	132.2400	159.6578	20.7%	152.6097	15.4%
0.05	1	35.9920	35.4527	-1.5%	35.4324	-1.6%
	2	73.4130	71.7220	-2.3%	71.6472	-2.4%
	3	73.4130	71.7220	-2.3%	71.6472	-2.4%
	4	108.2700	104.0397	-3.9%	103.6618	-4.3%
	5	131.6400	127.7676	-2.9%	127.6040	-3.1%
	6	132.2400	128.5427	-2.8%	128.3781	-2.9%
0.1	1	32.6735	32.6553	-0.1%	32.6528	-0.1%
	2	62.4451	62.5413	0.2%	62.5317	0.1%
	3	62.4451	62.5413	0.2%	62.5317	0.1%
	4	87.8719	87.6591	-0.2%	87.6030	-0.3%
	5	103.2321	104.1204	0.9%	104.0909	0.8%
	6	104.8865	105.1514	0.3%	105.1232	0.2%

Tabela 6.19 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos nas referências [25] e [26] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

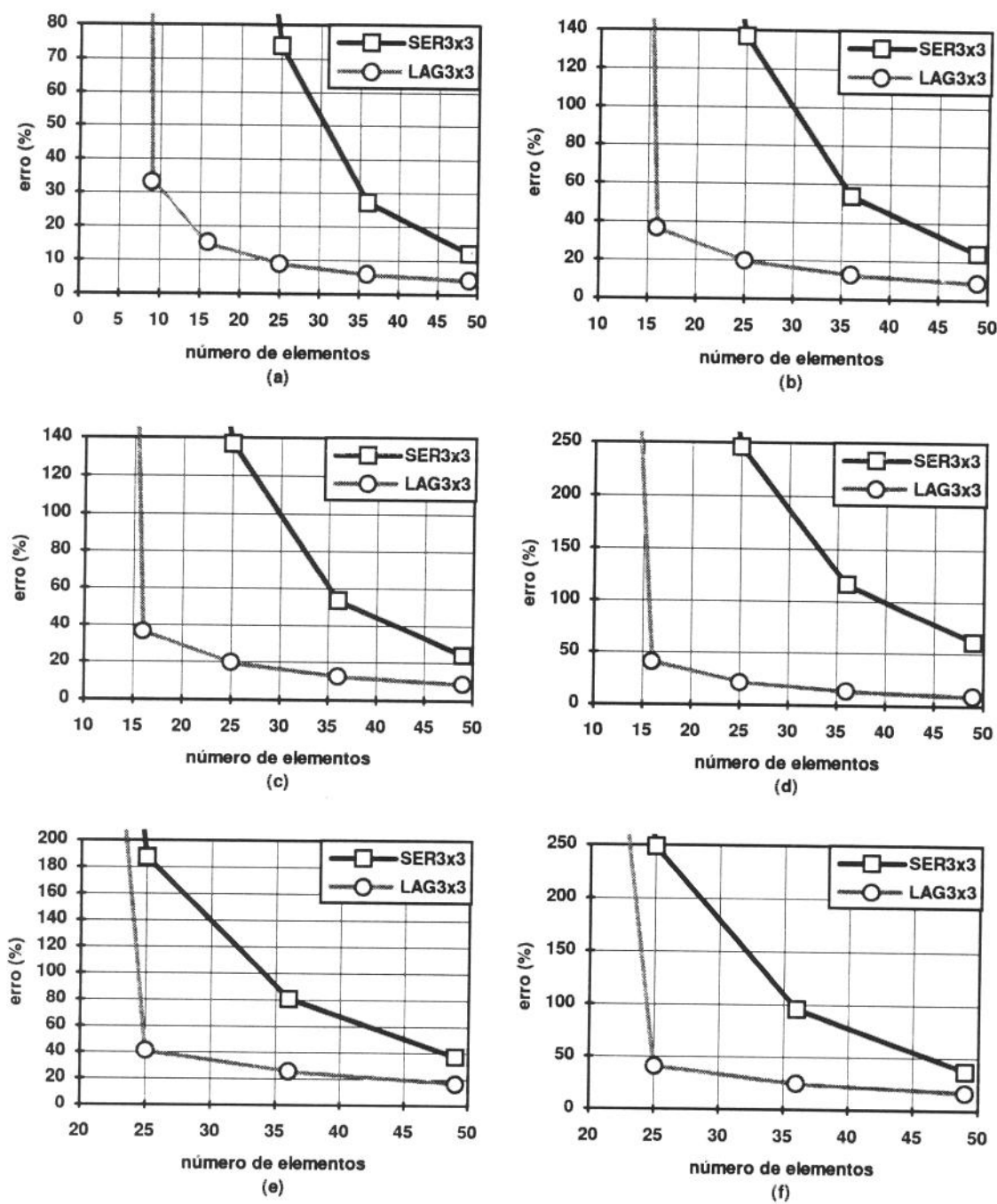


Figura 6.13 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

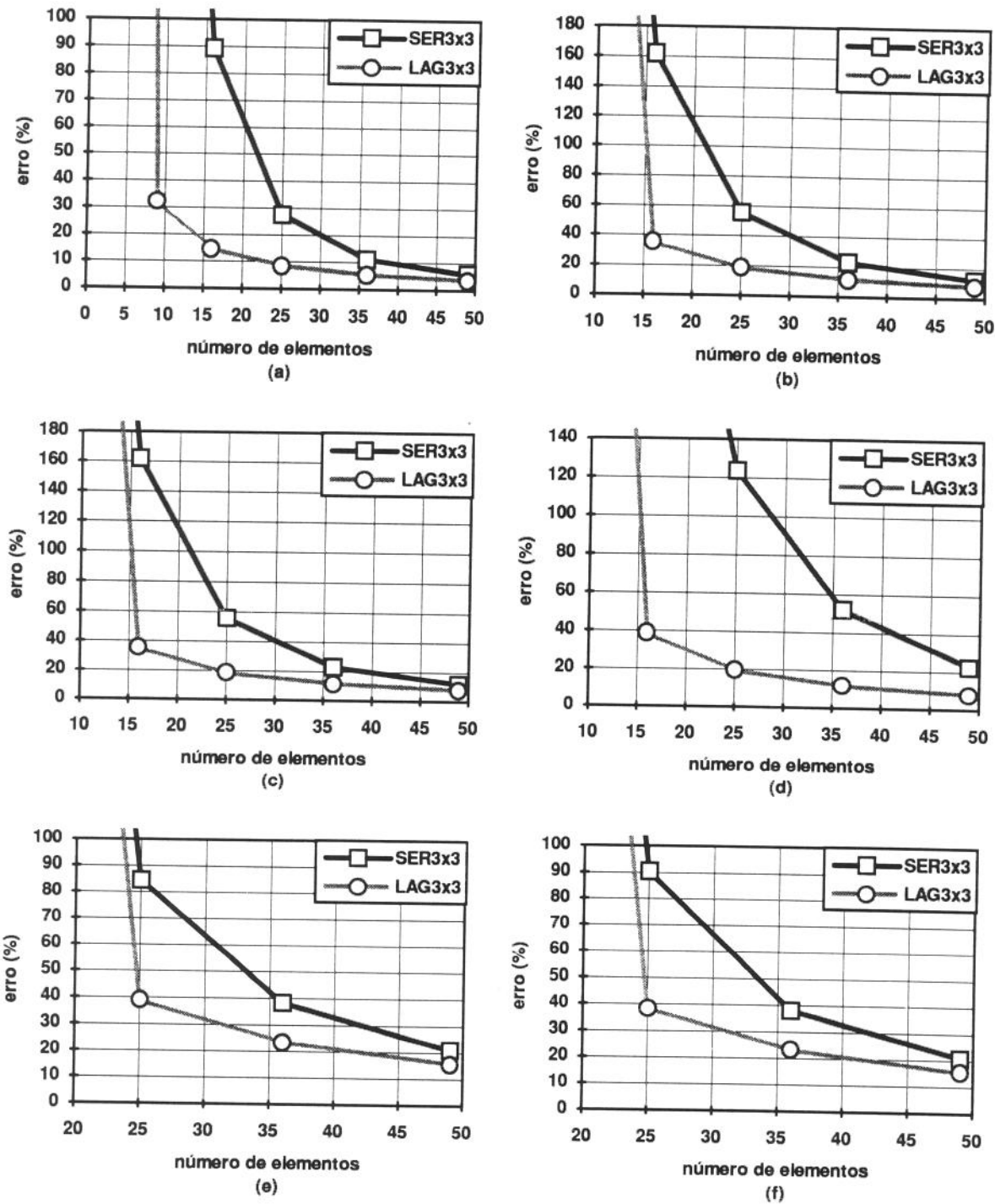


Figura 6.14 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

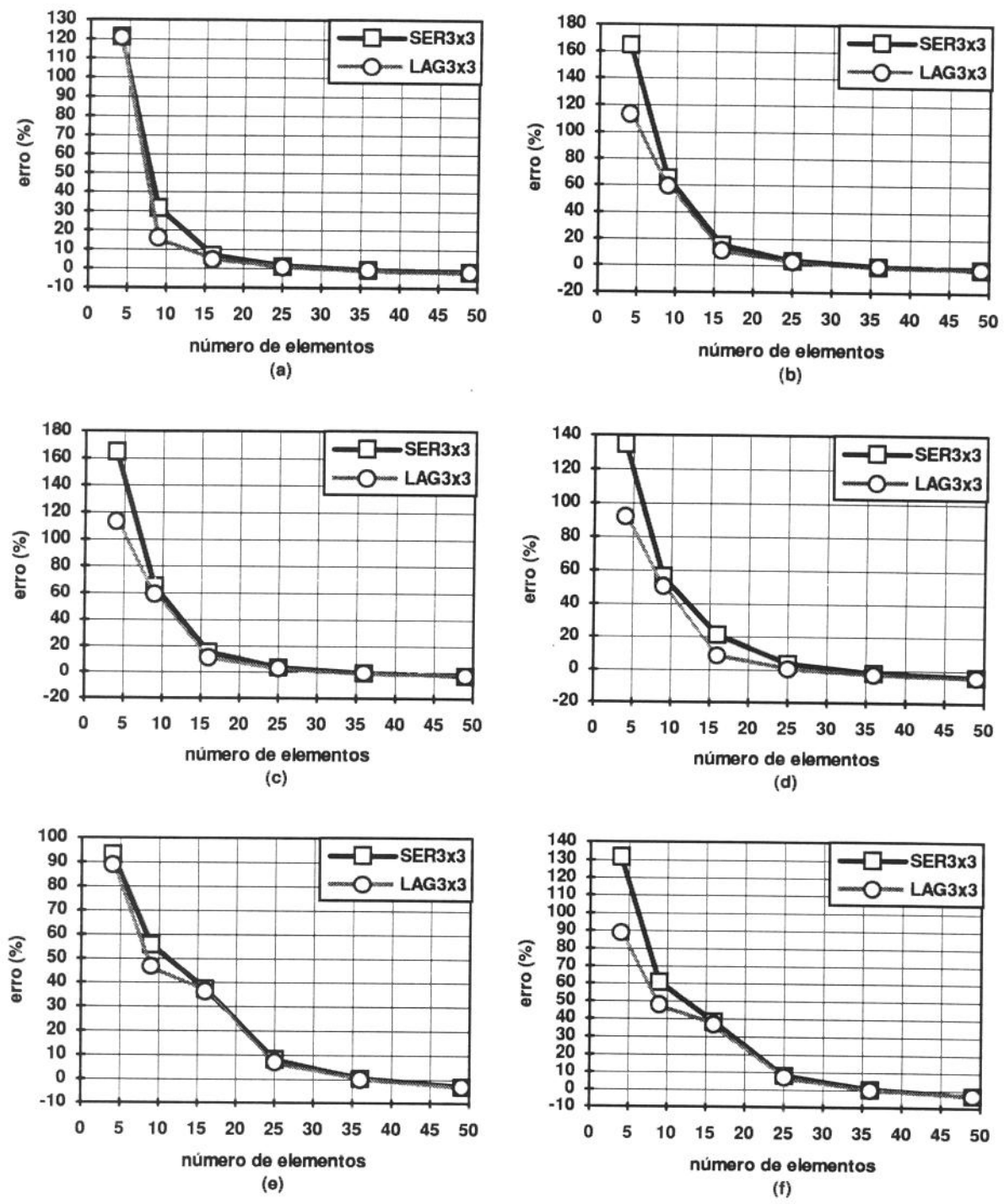


Figura 6.15 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

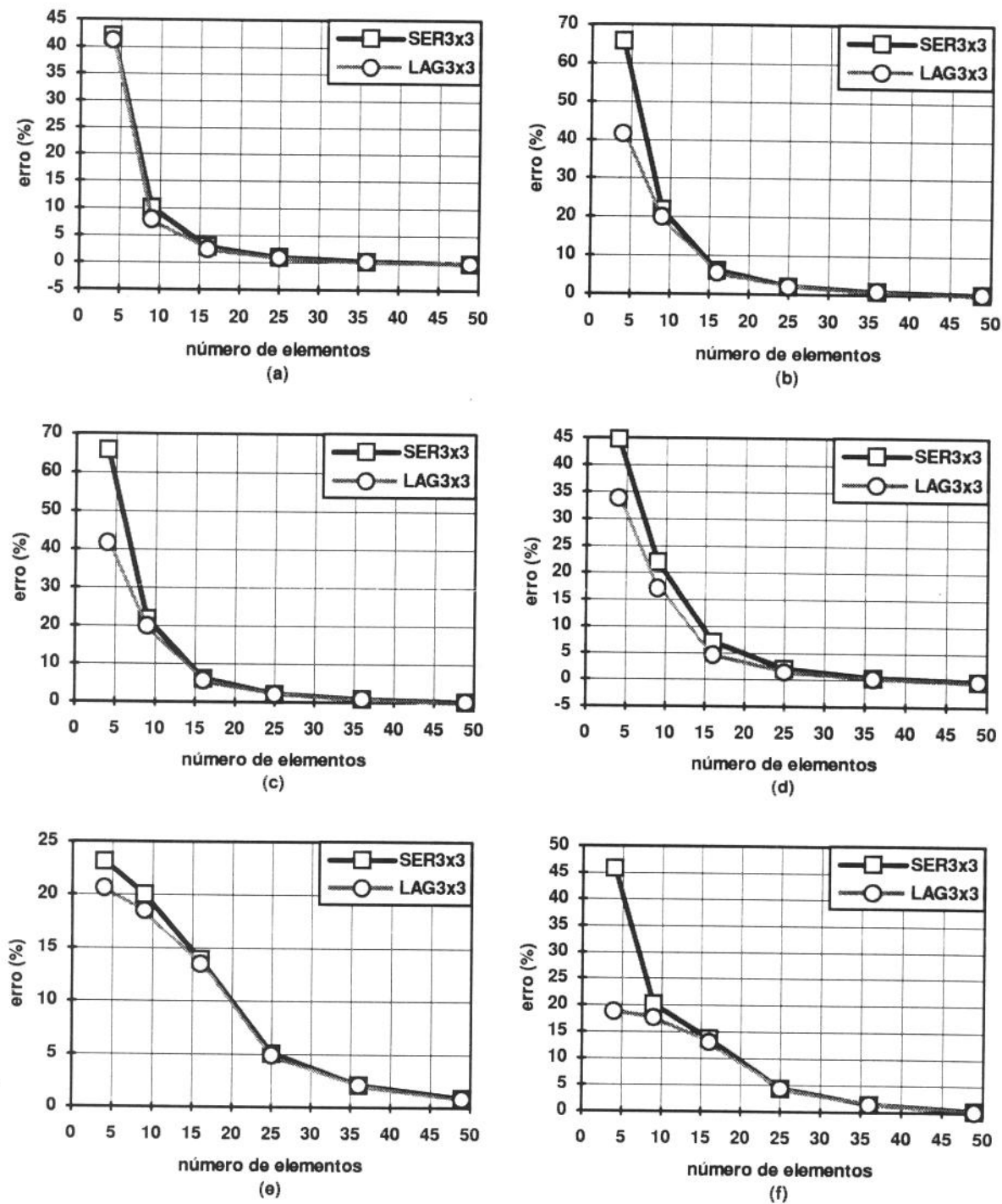
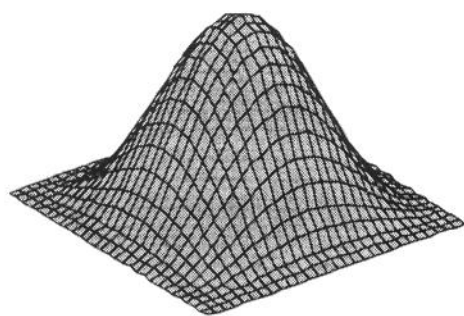
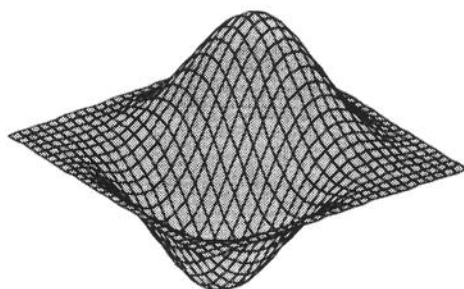


Figura 6.16 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

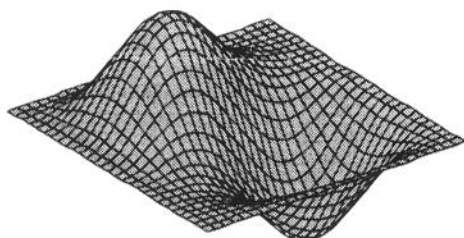
A Figura 6.17 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da placa quadrada E-E-E-E, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de (7×7) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.



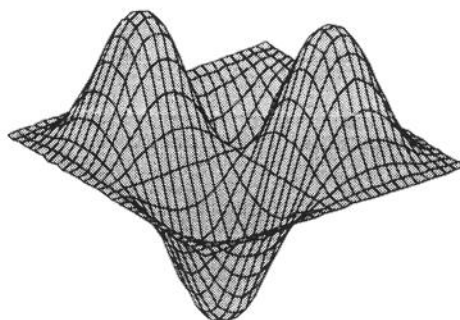
(a)



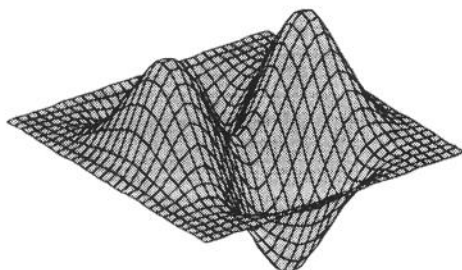
(b)



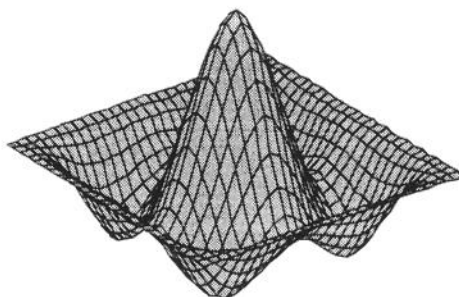
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.17 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa quadrada E-E-E-E, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7×7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.14 a 6.19 e das Figuras 6.13 a 6.16, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity para todas as relações t/a utilizadas, principalmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$).

6.2.1.4 Placa retangular S-E-S-E ($a/b = 1.5$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.18 a 6.21), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25], como mostram as Tabelas 6.20 a 6.25. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos na referência [25] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	816.4217	1348.9%	782.9330	1289.5%
	2	78.9836	1944.7322	2362.2%	784.8921	893.7%
	3	123.1719	2152.6683	1647.7%	2052.8301	1566.6%
	4	146.2677	2925.9771	1900.4%	2054.1551	1304.4%
	5	170.1112	3420.4031	1910.7%	2894.3771	1601.5%
	6	189.1219	3528.4675	1765.7%	2930.5335	1449.5%
0.01	1	56.3481	410.3833	628.3%	393.7669	598.8%
	2	78.9836	973.1288	1132.1%	397.6353	403.4%
	3	123.1719	1081.1509	777.8%	1031.5120	737.5%
	4	146.2677	1462.9875	900.2%	1034.1303	607.0%
	5	170.1112	1711.9945	906.4%	1447.1886	750.7%
	6	189.1219	1764.2191	832.8%	1468.5761	676.5%
0.05	1	56.3481	94.0061	66.8%	91.2847	62.0%
	2	78.9836	199.2406	152.3%	105.4042	33.5%
	3	123.1719	240.4133	95.2%	231.7408	88.1%
	4	146.2677	292.5975	100.0%	241.3975	65.0%
	5	170.1112	352.7241	107.3%	288.1772	69.4%
	6	189.1219	352.8438	86.6%	311.8957	64.9%
0.1	1	56.3481	58.7230	4.2%	57.7658	2.5%
	2	78.9836	105.5193	33.6%	74.3649	-5.8%
	3	123.1719	138.8743	12.7%	135.3011	9.8%
	4	146.2677	146.2988	0.0%	144.0886	-1.5%
	5	170.1112	176.4219	3.7%	146.7262	-13.7%
	6	189.1219	187.6710	-0.8%	173.6233	-8.2%

Tabela 6.20 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	146.4772	160.0%	72.5963	28.8%
	2	78.9836	606.0561	667.3%	98.5419	24.8%
	3	123.1719	1309.3467	963.0%	143.9061	16.8%
	4	146.2677	1468.1209	903.7%	1458.3121	897.0%
	5	170.1112	1695.2522	896.6%	1460.8996	758.8%
	6	189.1219	2401.6099	1169.9%	1466.2834	675.3%
0.01	1	56.3481	95.2498	69.0%	71.8436	27.5%
	2	78.9836	310.5915	293.2%	97.6068	23.6%
	3	123.1719	662.2606	437.7%	142.8061	15.9%
	4	146.2677	742.4565	407.6%	737.6113	404.3%
	5	170.1112	858.1160	404.4%	742.6618	336.6%
	6	189.1219	1221.1026	545.7%	753.1188	298.2%
0.05	1	56.3481	61.0555	8.4%	60.3051	7.0%
	2	78.9836	95.1970	20.5%	83.2524	5.4%
	3	123.1719	170.2350	38.2%	138.0757	12.1%
	4	146.2677	188.1459	28.6%	187.3940	28.1%
	5	170.1112	219.7887	29.2%	202.3398	18.9%
	6	189.1219	287.9984	52.3%	231.3446	22.3%
0.1	1	56.3481	50.2598	-10.8%	50.1196	-11.1%
	2	78.9836	71.6001	-9.3%	69.4190	-12.1%
	3	123.1719	115.9442	-5.9%	110.7315	-10.1%
	4	146.2677	122.1296	-16.5%	121.8501	-16.7%
	5	170.1112	142.6229	-16.2%	136.2319	-19.9%
	6	189.1219	143.9992	-23.9%	143.6133	-24.1%

Tabela 6.21 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	77.0984	36.8%	63.8643	13.3%
	2	78.9836	228.2326	189.0%	88.1295	11.6%
	3	123.1719	249.2207	102.3%	140.6623	14.2%
	4	146.2677	590.5426	303.7%	202.9399	38.7%
	5	170.1112	696.0165	309.2%	209.6392	23.2%
	6	189.1219	975.0906	415.6%	226.9931	20.0%
0.01	1	56.3481	66.8398	18.6%	63.3567	12.4%
	2	78.9836	135.5849	71.7%	87.5149	10.8%
	3	123.1719	210.5385	70.9%	139.5538	13.3%
	4	146.2677	316.9180	116.7%	198.5689	35.8%
	5	170.1112	388.4229	128.3%	208.4888	22.6%
	6	189.1219	516.2522	173.0%	241.1304	27.5%
0.05	1	56.3481	56.3913	0.1%	56.2817	-0.1%
	2	78.9836	79.9379	1.2%	78.2761	-0.9%
	3	123.1719	133.8625	8.7%	126.8864	3.0%
	4	146.2677	148.8032	1.7%	148.4934	1.5%
	5	170.1112	173.7648	2.1%	168.0201	-1.2%
	6	189.1219	203.8785	7.8%	202.7387	7.2%
0.1	1	56.3481	48.8691	-13.3%	48.8471	-13.3%
	2	78.9836	67.7598	-14.2%	67.4639	-14.6%
	3	123.1719	106.2731	-13.7%	105.1072	-14.7%
	4	146.2677	113.3458	-22.5%	113.2792	-22.6%
	5	170.1112	130.0007	-23.6%	128.7605	-24.3%
	6	189.1219	143.1218	-24.3%	142.9898	-24.4%

Tabela 6.22 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	63.7912	13.2%	60.7611	7.8%
	2	78.9836	124.0263	57.0%	84.3801	6.8%
	3	123.1719	187.4121	52.2%	137.7132	11.8%
	4	146.2677	286.1993	95.7%	176.8557	20.9%
	5	170.1112	346.6687	103.8%	200.2268	17.7%
	6	189.1219	422.0389	123.2%	230.1137	21.7%
0.01	1	56.3481	61.0963	8.4%	60.3373	7.1%
	2	78.9836	95.0907	20.4%	83.8668	6.2%
	3	123.1719	176.2534	43.1%	136.7137	11.0%
	4	146.2677	183.9409	25.8%	173.6536	18.7%
	5	170.1112	240.0828	41.1%	196.8247	15.7%
	6	189.1219	343.9831	81.9%	227.9226	20.5%
0.05	1	56.3481	55.0152	-2.4%	54.9901	-2.4%
	2	78.9836	76.9078	-2.6%	76.5602	-3.1%
	3	123.1719	122.6609	-0.4%	121.2431	-1.6%
	4	146.2677	140.1909	-4.2%	140.1150	-4.2%
	5	170.1112	161.4971	-5.1%	160.1938	-5.8%
	6	189.1219	195.9432	3.6%	192.3911	1.7%
0.1	1	56.3481	48.4749	-14.0%	48.4696	-14.0%
	2	78.9836	66.9008	-15.3%	66.8359	-15.4%
	3	123.1719	102.5431	-16.7%	102.3035	-16.9%
	4	146.2677	111.0482	-24.1%	111.0317	-24.1%
	5	170.1112	126.9970	-25.3%	126.7180	-25.5%
	6	189.1219	143.0085	-24.4%	142.9223	-24.4%

Tabela 6.23 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	60.1672	6.8%	59.2584	5.2%
	2	78.9836	94.9695	20.2%	82.5539	4.5%
	3	123.1719	168.5788	36.9%	132.7895	7.8%
	4	146.2677	182.5007	24.8%	165.5564	13.2%
	5	170.1112	236.3079	38.9%	188.9393	11.1%
	6	189.1219	345.6982	82.8%	218.6706	15.6%
0.01	1	56.3481	59.1048	4.9%	58.8797	4.5%
	2	78.9836	85.3180	8.0%	82.0925	3.9%
	3	123.1719	145.6136	18.2%	131.8903	7.1%
	4	146.2677	163.6618	11.9%	162.9245	11.4%
	5	170.1112	198.6006	16.7%	186.1741	9.4%
	6	189.1219	252.8848	33.7%	216.4122	14.4%
0.05	1	56.3481	54.4679	-3.3%	54.4601	-3.4%
	2	78.9836	75.9241	-3.9%	75.8231	-4.0%
	3	123.1719	119.0305	-3.4%	118.6399	-3.7%
	4	146.2677	136.8928	-6.4%	136.8694	-6.4%
	5	170.1112	157.5232	-7.4%	157.1473	-7.6%
	6	189.1219	185.2969	-2.0%	184.3355	-2.5%
0.1	1	56.3481	48.3273	-14.2%	48.3256	-14.2%
	2	78.9836	66.6050	-15.7%	66.5855	-15.7%
	3	123.1719	101.2107	-17.8%	101.1426	-17.9%
	4	146.2677	110.1945	-24.7%	110.1893	-24.7%
	5	170.1112	126.0263	-25.9%	125.9439	-26.0%
	6	189.1219	142.7305	-24.5%	142.7465	-24.5%

Tabela 6.24 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	58.7378	4.2%	58.4064	3.7%
	2	78.9836	86.0256	8.9%	81.5144	3.2%
	3	123.1719	148.0799	20.2%	129.9826	5.5%
	4	146.2677	160.6344	9.8%	159.5704	9.1%
	5	170.1112	200.0119	17.6%	183.0312	7.6%
	6	189.1219	257.1956	36.0%	210.1556	11.1%
0.01	1	56.3481	58.1405	3.2%	58.0586	3.0%
	2	78.9836	82.2214	4.1%	81.0874	2.7%
	3	123.1719	133.8593	8.7%	129.1484	4.9%
	4	146.2677	157.5272	7.7%	157.2677	7.5%
	5	170.1112	184.8690	8.7%	180.6199	6.2%
	6	189.1219	220.5074	16.6%	208.0516	10.0%
0.05	1	56.3481	54.2128	-3.8%	54.2099	-3.8%
	2	78.9836	75.4987	-4.4%	75.4623	-4.5%
	3	123.1719	117.4658	-4.6%	117.3303	-4.7%
	4	146.2677	135.3782	-7.4%	135.3695	-7.5%
	5	170.1112	155.8675	-8.4%	155.7338	-8.5%
	6	189.1219	180.3086	-4.7%	179.9924	-4.8%
0.1	1	56.3481	48.2619	-14.4%	48.2613	-14.4%
	2	78.9836	66.4774	-15.8%	66.4702	-15.8%
	3	123.1719	100.6239	-18.3%	100.5997	-18.3%
	4	146.2677	109.8168	-24.9%	109.8158	-24.9%
	5	170.1112	125.6274	-26.1%	125.6369	-26.1%
	6	189.1219	142.7086	-24.5%	143.4997	-24.1%

Tabela 6.25 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [25] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

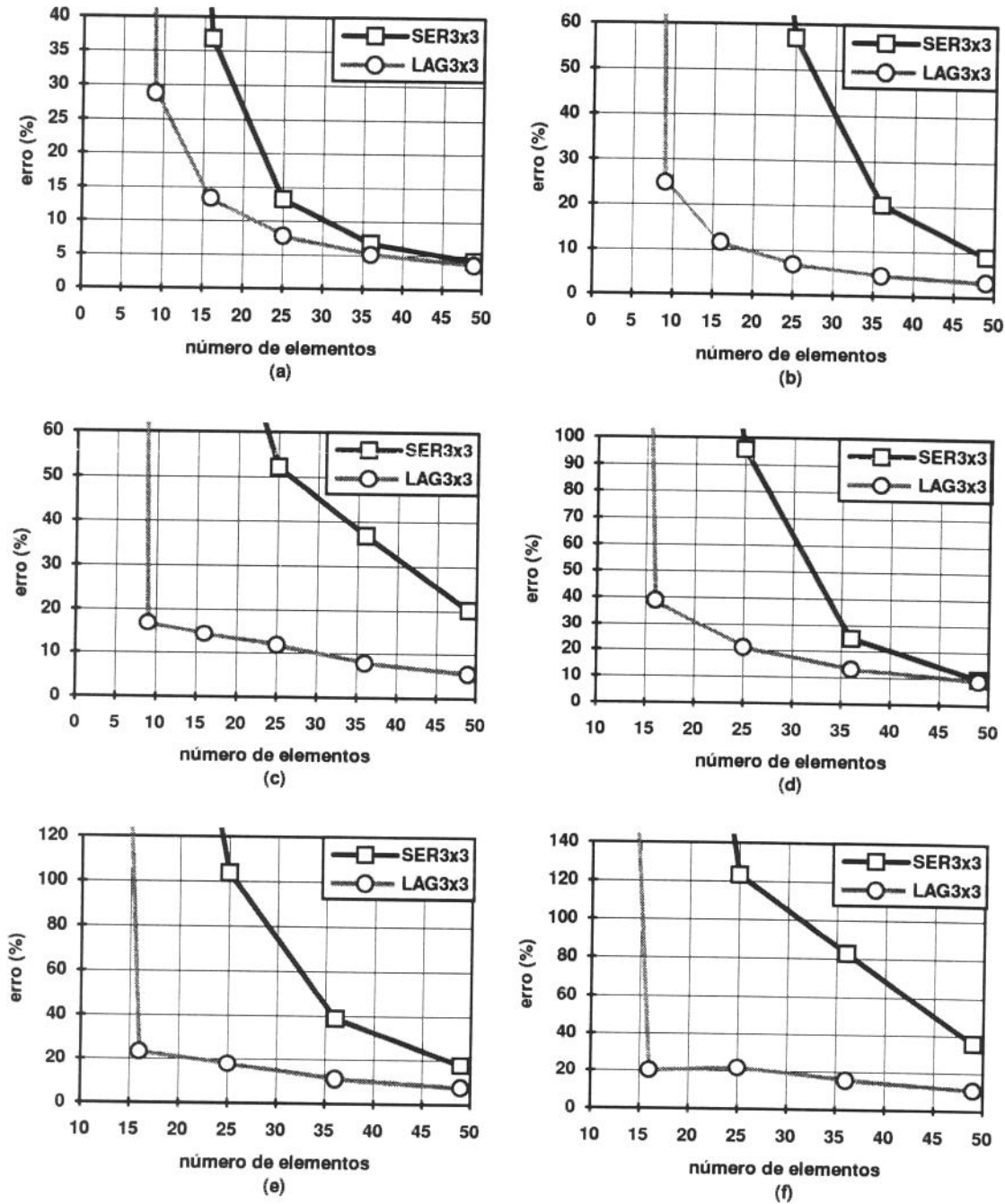


Figura 6.18 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

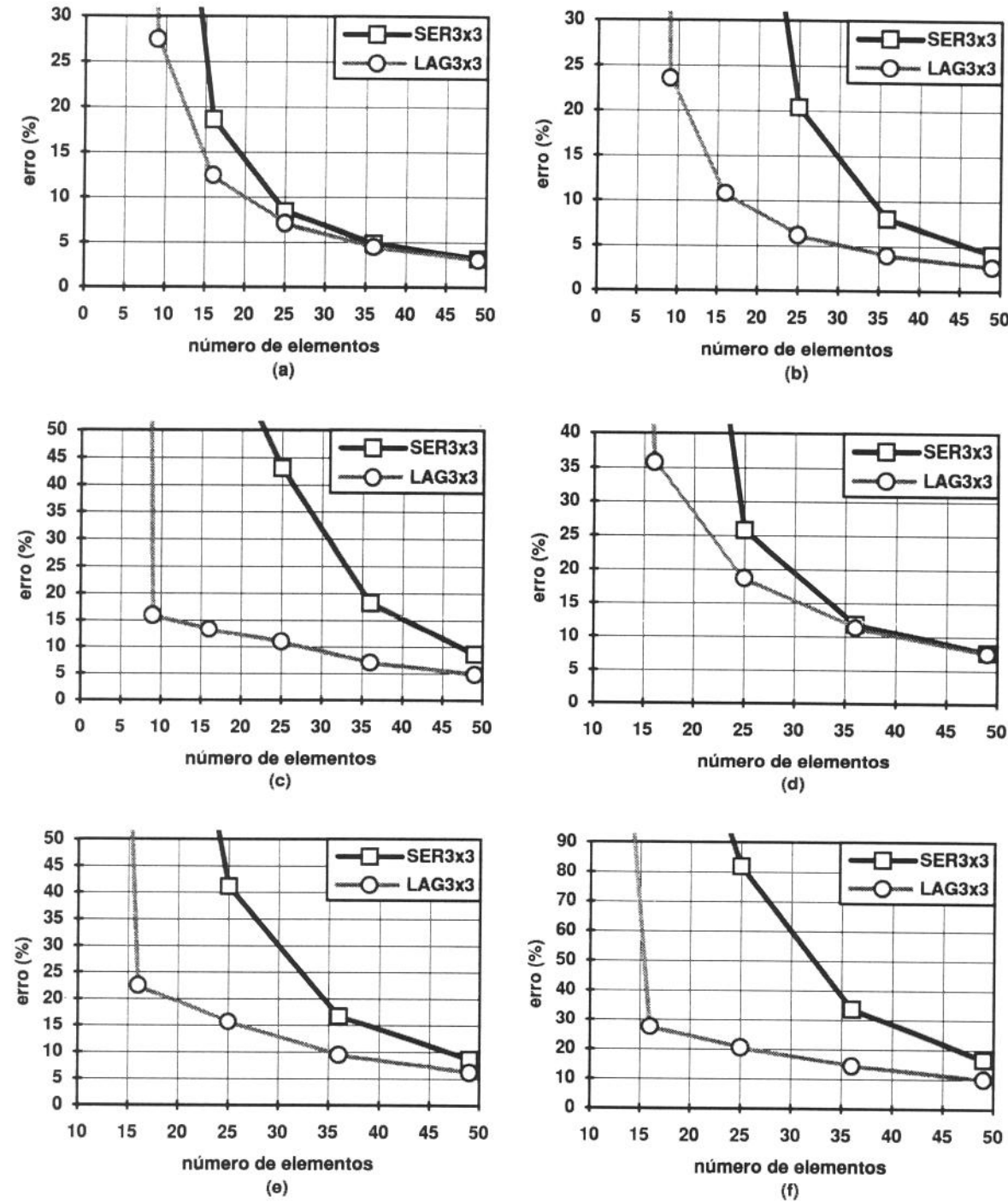


Figura 6.19 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) freqüências naturais.

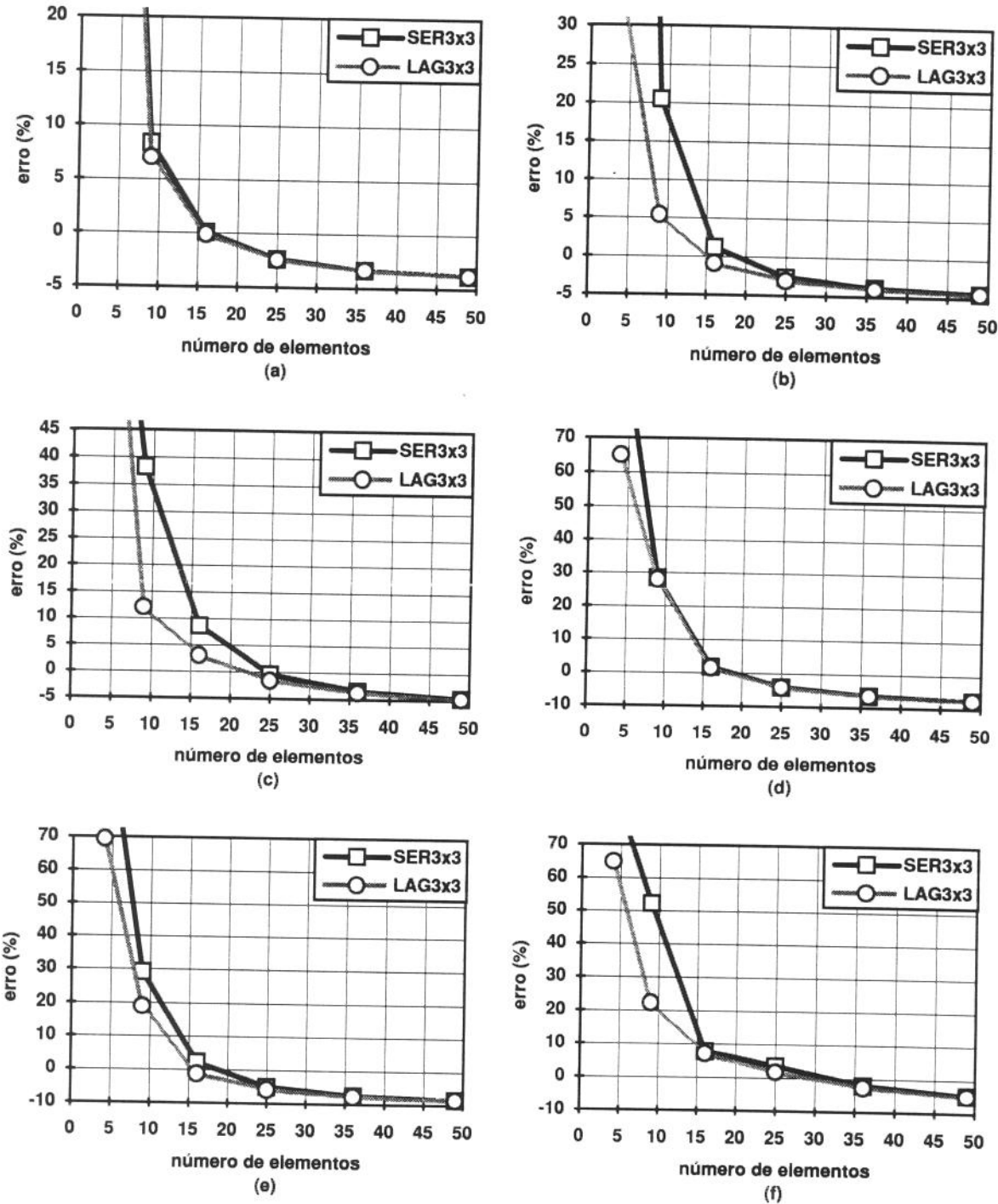


Figura 6.20 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

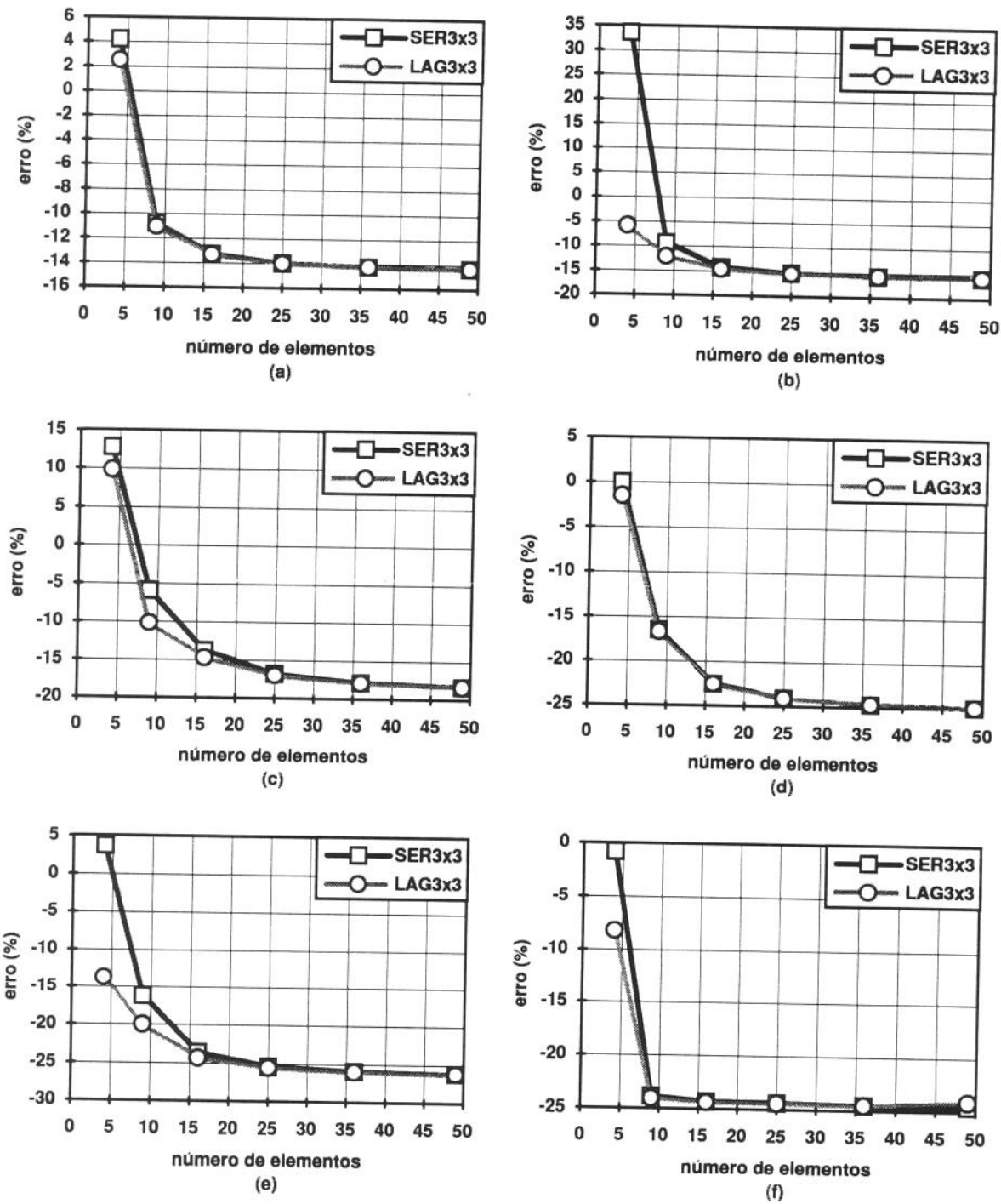
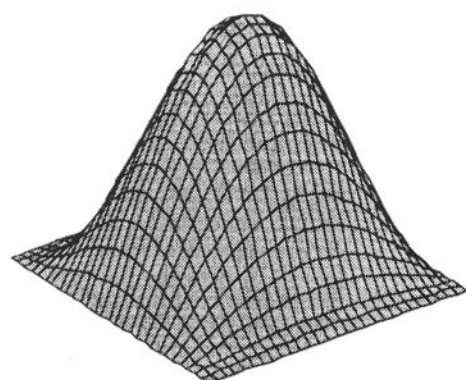
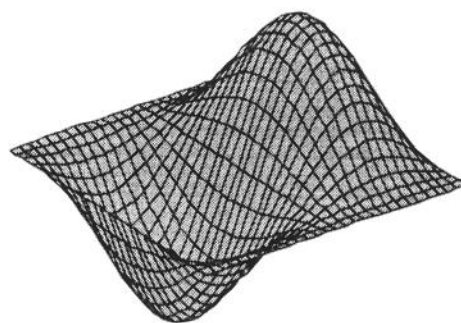


Figura 6.21 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

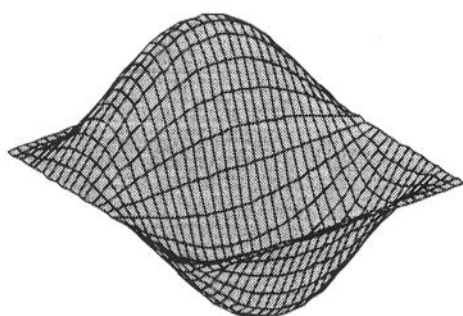
A Figura 6.22 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da placa retangular S-E-S-E, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de (7×7) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.



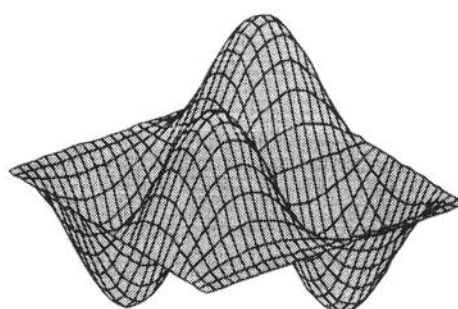
(a)



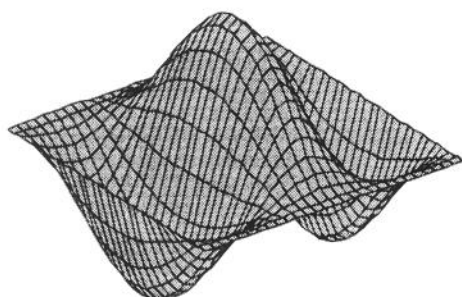
(b)



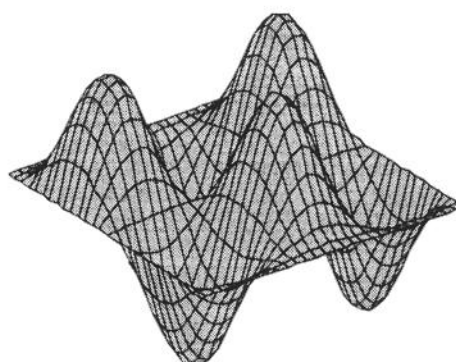
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.22 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa retangular S-E-S-E, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7×7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.20 a 6.25 e das Figuras 6.18 a 6.21, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$). Deve-se notar, também, que o aumento do erro com o refinamento da malha, para o caso das placas moderadamente grossas ($t/a = 0.05$ e $t/a = 0.1$), se dá devido ao fato de se estar comparando os resultados obtidos com aqueles da teoria clássica [25]; infelizmente, não se tem na literatura os resultados obtidos a partir da teoria de Mindlin [26].

6.2.1.5 Placa retangular E-E-E-L ($a/b = 1.5$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.23 a 6.26), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25], como mostram as Tabelas 6.26 a 6.31. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos na referência [25] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER 3×3 e LAG 3×3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	525.2730	1865.0%	521.4753	1850.8%
	2	65.9160	727.8226	1004.2%	529.9631	704.0%
	3	66.2190	1395.2353	2007.0%	1367.3494	1964.9%
	4	106.8000	1906.6838	1685.3%	1371.8954	1184.5%
	5	125.4000	1992.9745	1489.3%	1568.2194	1150.6%
	6	152.4800	2340.4056	1434.9%	1977.8657	1197.1%
0.01	1	26.7310	263.4839	885.7%	261.5591	878.5%
	2	65.9160	369.2802	460.2%	277.7784	321.4%
	3	66.2190	699.1537	955.8%	685.2986	934.9%
	4	106.8000	961.2516	800.0%	694.1299	549.9%
	5	125.4000	996.4872	694.6%	793.3509	532.7%
	6	152.4800	1170.2028	667.4%	988.9328	548.6%
0.05	1	26.7310	57.4273	114.8%	57.0501	113.4%
	2	65.9160	97.7370	48.3%	94.0811	42.7%
	3	66.2190	148.5293	124.3%	146.1458	120.7%
	4	106.8000	199.2974	86.6%	170.0056	59.2%
	5	125.4000	232.0139	85.0%	197.7866	57.7%
	6	152.4800	234.0406	53.5%	206.6781	35.5%
0.1	1	26.7310	34.1312	27.7%	33.9647	27.1%
	2	65.9160	66.8014	1.3%	66.1767	0.4%
	3	66.2190	83.3413	25.9%	82.4181	24.5%
	4	106.8000	99.6487	-6.7%	98.8933	-7.4%
	5	125.4000	117.0203	-6.7%	105.0274	-16.2%
	6	152.4800	132.7962	-12.9%	139.5397	-8.5%

Tabela 6.26 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	67.4350	152.3%	34.0174	27.3%
	2	65.9160	335.4686	408.9%	80.5835	22.3%
	3	66.2190	707.8818	969.0%	260.0171	292.7%
	4	106.8000	971.8464	810.0%	970.6378	808.8%
	5	125.4000	1049.6852	737.1%	976.2033	678.5%
	6	152.4800	1586.8917	940.7%	1015.4917	566.0%
0.01	1	26.7310	44.4963	66.5%	33.8421	26.6%
	2	65.9160	179.4820	172.3%	79.9700	21.3%
	3	66.2190	406.0605	513.2%	255.3358	285.6%
	4	106.8000	488.6568	357.5%	487.7595	356.7%
	5	125.4000	532.7190	324.8%	495.7702	295.4%
	6	152.4800	799.7301	424.5%	560.5878	267.6%
0.05	1	26.7310	30.7093	14.9%	30.3105	13.4%
	2	65.9160	73.0481	10.8%	69.4154	5.3%
	3	66.2190	112.1450	69.4%	111.9521	69.1%
	4	106.8000	140.9303	32.0%	136.2940	27.6%
	5	125.4000	182.6191	45.6%	179.7028	43.3%
	6	152.4800	191.3126	25.5%	190.3227	24.8%
0.1	1	26.7310	26.2855	-1.7%	26.1958	-2.0%
	2	65.9160	58.8331	-10.7%	58.3199	-11.5%
	3	66.2190	69.9014	5.6%	69.8110	5.4%
	4	106.8000	96.1355	-10.0%	94.3154	-11.7%
	5	125.4000	98.1057	-21.8%	97.7361	-22.1%
	6	152.4800	119.9413	-21.3%	119.5088	-21.6%

Tabela 6.27 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	35.9278	34.4%	30.0930	12.6%
	2	65.9160	115.6049	75.4%	73.1223	10.9%
	3	66.2190	144.9687	118.9%	91.6465	38.4%
	4	106.8000	375.4722	251.6%	135.4497	26.8%
	5	125.4000	448.0647	257.3%	189.1870	50.9%
	6	152.4800	719.5053	371.9%	245.4846	61.0%
0.01	1	26.7310	31.5942	18.2%	29.9653	12.1%
	2	65.9160	95.2454	44.5%	72.6722	10.2%
	3	66.2190	97.4990	47.2%	90.6890	37.0%
	4	106.8000	245.2157	129.6%	133.8281	25.3%
	5	125.4000	247.4357	97.3%	186.5940	48.8%
	6	152.4800	505.4573	231.5%	241.1886	58.2%
0.05	1	26.7310	27.7884	4.0%	27.7015	3.6%
	2	65.9160	66.0552	0.2%	65.4433	-0.7%
	3	66.2190	74.9818	13.2%	74.6632	12.8%
	4	106.8000	112.8936	5.7%	109.6832	2.7%
	5	125.4000	153.5620	22.5%	152.1743	21.4%
	6	152.4800	176.2137	15.6%	176.1102	15.5%
0.1	1	26.7310	25.0484	-6.3%	25.0171	-6.4%
	2	65.9160	56.9494	-13.6%	56.8489	-13.8%
	3	66.2190	60.3245	-8.9%	60.2418	-9.0%
	4	106.8000	88.6937	-17.0%	88.1352	-17.5%
	5	125.4000	97.6376	-22.1%	97.1777	-22.5%
	6	152.4800	113.8992	-25.3%	113.8220	-25.4%

Tabela 6.28 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	30.1207	12.7%	28.6920	7.3%
	2	65.9160	85.5554	29.8%	70.2674	6.6%
	3	66.2190	89.9251	35.8%	79.9182	20.7%
	4	106.8000	192.8401	80.6%	121.9133	14.2%
	5	125.4000	220.6249	75.9%	173.4336	38.3%
	6	152.4800	237.5102	55.8%	178.2328	16.9%
0.01	1	26.7310	28.9748	8.4%	28.5788	6.9%
	2	65.9160	75.3157	14.3%	69.8748	6.0%
	3	66.2190	80.9328	22.2%	79.1924	19.6%
	4	106.8000	150.8462	41.2%	120.7647	13.1%
	5	125.4000	179.9374	43.5%	171.3351	36.6%
	6	152.4800	188.8926	23.9%	175.5149	15.1%
0.05	1	26.7310	26.8473	0.4%	26.8103	0.3%
	2	65.9160	64.1857	-2.6%	64.0320	-2.9%
	3	66.2190	68.4971	3.4%	68.3734	3.3%
	4	106.8000	104.8773	-1.8%	104.1049	-2.5%
	5	125.4000	135.7689	8.3%	135.5060	8.1%
	6	152.4800	146.1610	-4.1%	145.6982	-4.4%
0.1	1	26.7310	24.6613	-7.7%	24.6446	-7.8%
	2	65.9160	56.3981	-14.4%	56.3672	-14.5%
	3	66.2190	57.9768	-12.4%	57.9352	-12.5%
	4	106.8000	86.5782	-18.9%	86.4209	-19.1%
	5	125.4000	97.4845	-22.3%	97.0973	-22.6%
	6	152.4800	104.2474	-31.6%	104.1785	-31.7%

Tabela 6.29 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	28.4668	6.5%	28.0091	4.8%
	2	65.9160	75.1573	14.0%	68.8261	4.4%
	3	66.2190	76.7381	15.9%	74.8303	13.0%
	4	106.8000	148.9660	39.5%	116.3009	8.9%
	5	125.4000	162.8732	29.9%	158.1368	26.1%
	6	152.4800	187.5581	23.0%	166.1625	9.0%
0.01	1	26.7310	28.0328	4.9%	27.9026	4.4%
	2	65.9160	70.1580	6.4%	68.4635	3.9%
	3	66.2190	74.8268	13.0%	74.2145	12.1%
	4	106.8000	124.3460	16.4%	115.3367	8.0%
	5	125.4000	157.4351	25.5%	155.7622	24.2%
	6	152.4800	170.0410	11.5%	164.3153	7.8%
0.05	1	26.7310	26.4369	-1.1%	26.4152	-1.2%
	2	65.9160	63.4545	-3.7%	63.4023	-3.8%
	3	66.2190	65.9049	-0.5%	65.8398	-0.6%
	4	106.8000	102.0759	-4.4%	101.8336	-4.7%
	5	125.4000	126.2240	0.7%	126.0836	0.5%
	6	152.4800	143.2216	-6.1%	143.0610	-6.2%
0.1	1	26.7310	24.5036	-8.3%	24.4933	-8.4%
	2	65.9160	56.1806	-14.8%	56.1679	-14.8%
	3	66.2190	57.0742	-13.8%	57.0499	-13.8%
	4	106.8000	85.7968	-19.7%	85.7395	-19.7%
	5	125.4000	97.1089	-22.6%	97.3579	-22.4%
	6	152.4800	101.1254	-33.7%	101.0848	-33.7%

Tabela 6.30 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	27.7961	4.0%	27.6185	3.3%
	2	65.9160	70.4254	6.8%	67.9866	3.1%
	3	66.2190	72.9254	10.1%	72.1292	8.9%
	4	106.8000	125.6128	17.6%	113.3522	6.1%
	5	125.4000	149.4492	19.2%	147.3801	17.5%
	6	152.4800	170.3201	11.7%	162.1071	6.3%
0.01	1	26.7310	27.5717	3.1%	27.5166	2.9%
	2	65.9160	68.2782	3.6%	67.6441	2.6%
	3	66.2190	71.8290	8.5%	71.5735	8.1%
	4	106.8000	115.6947	8.3%	112.4822	5.3%
	5	125.4000	146.1004	16.5%	145.3442	15.9%
	6	152.4800	162.6638	6.7%	160.4198	5.2%
0.05	1	26.7310	26.2292	-1.9%	26.2145	-1.9%
	2	65.9160	63.1045	-4.3%	63.0820	-4.3%
	3	66.2190	64.6529	-2.4%	64.6121	-2.4%
	4	106.8000	100.8163	-5.6%	100.7198	-5.7%
	5	125.4000	121.8449	-2.8%	121.7637	-2.9%
	6	152.4800	142.0453	-6.8%	141.8330	-7.0%
0.1	1	26.7310	24.4288	-8.6%	24.5123	-8.3%
	2	65.9160	56.0787	-14.9%	56.0723	-14.9%
	3	66.2190	56.6605	-14.4%	56.6449	-14.5%
	4	106.8000	85.4457	-20.0%	85.4193	-20.0%
	5	125.4000	97.3759	-22.3%	97.0408	-22.6%
	6	152.4800	99.7290	-34.6%	99.7030	-34.6%

Tabela 6.31 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização regular de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [25] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

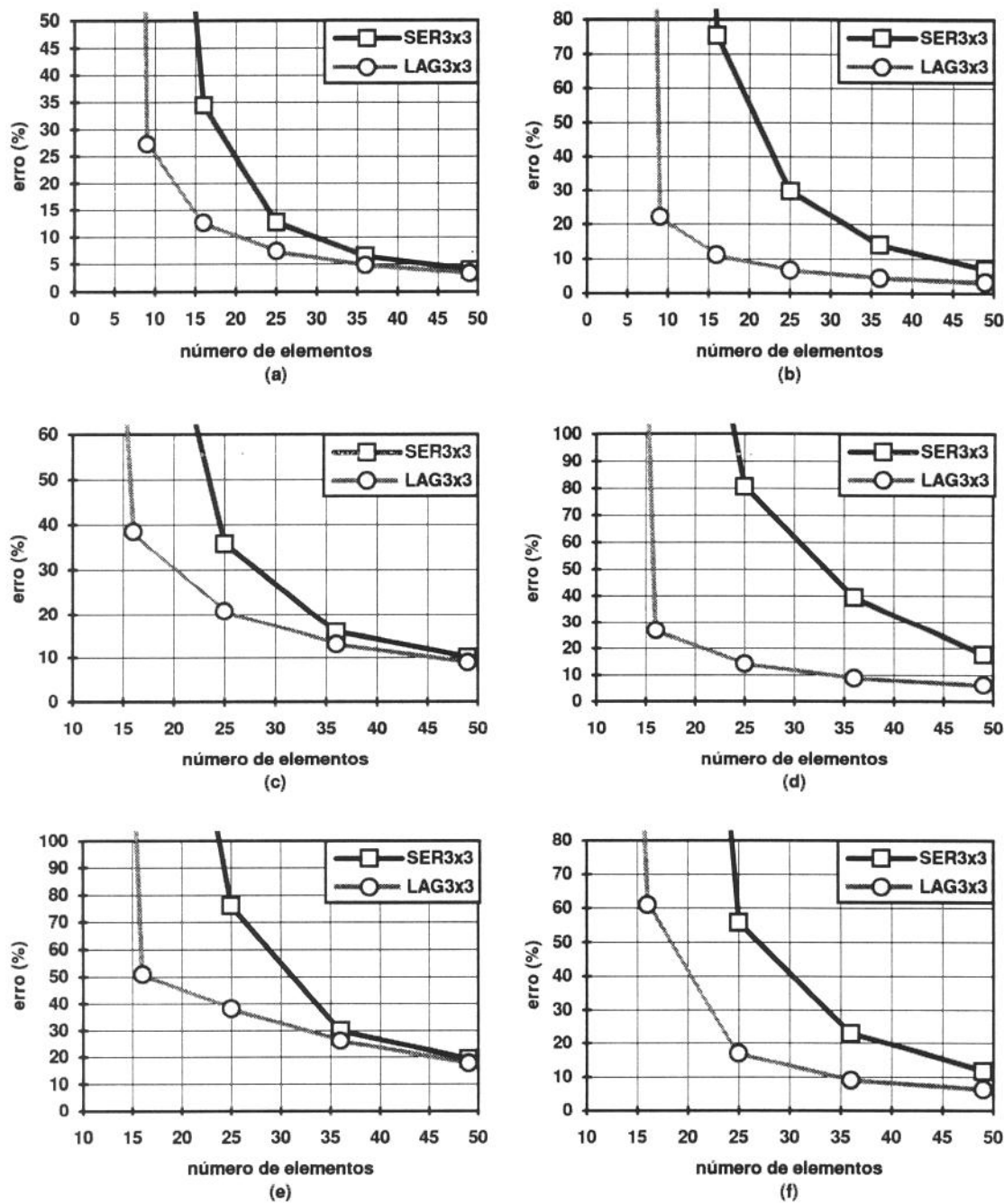


Figura 6.23 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

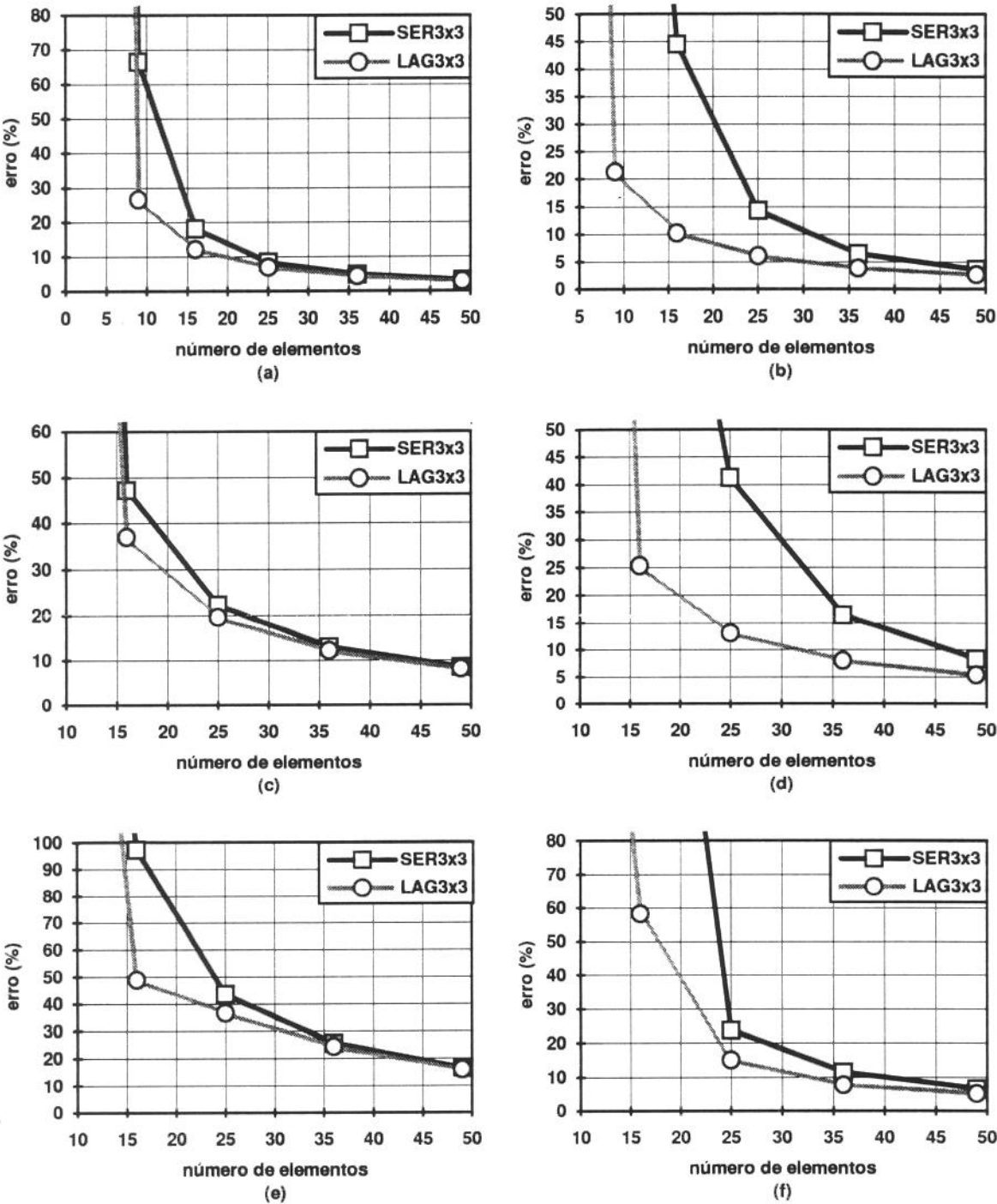


Figura 6.24 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

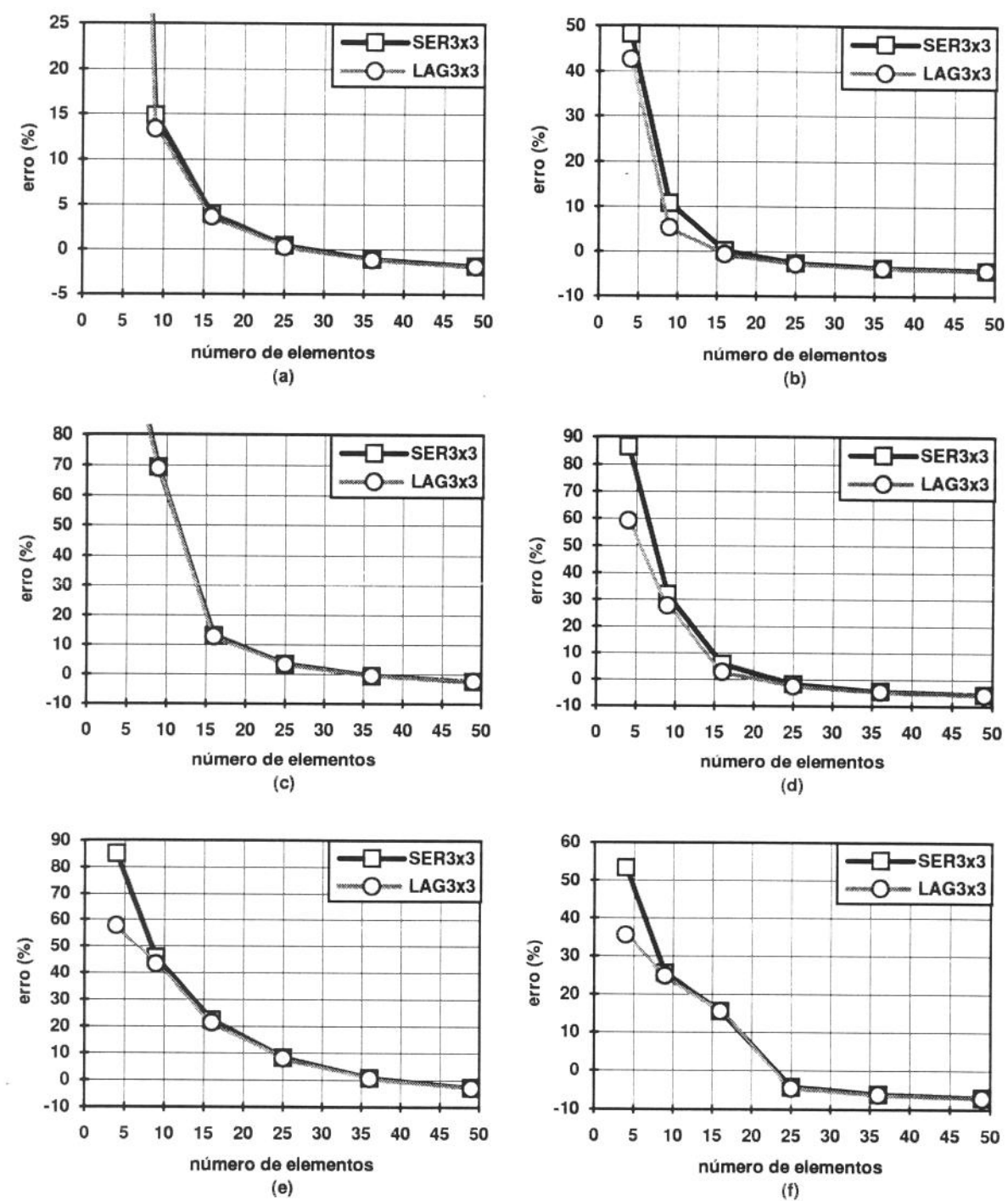


Figura 6.25 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

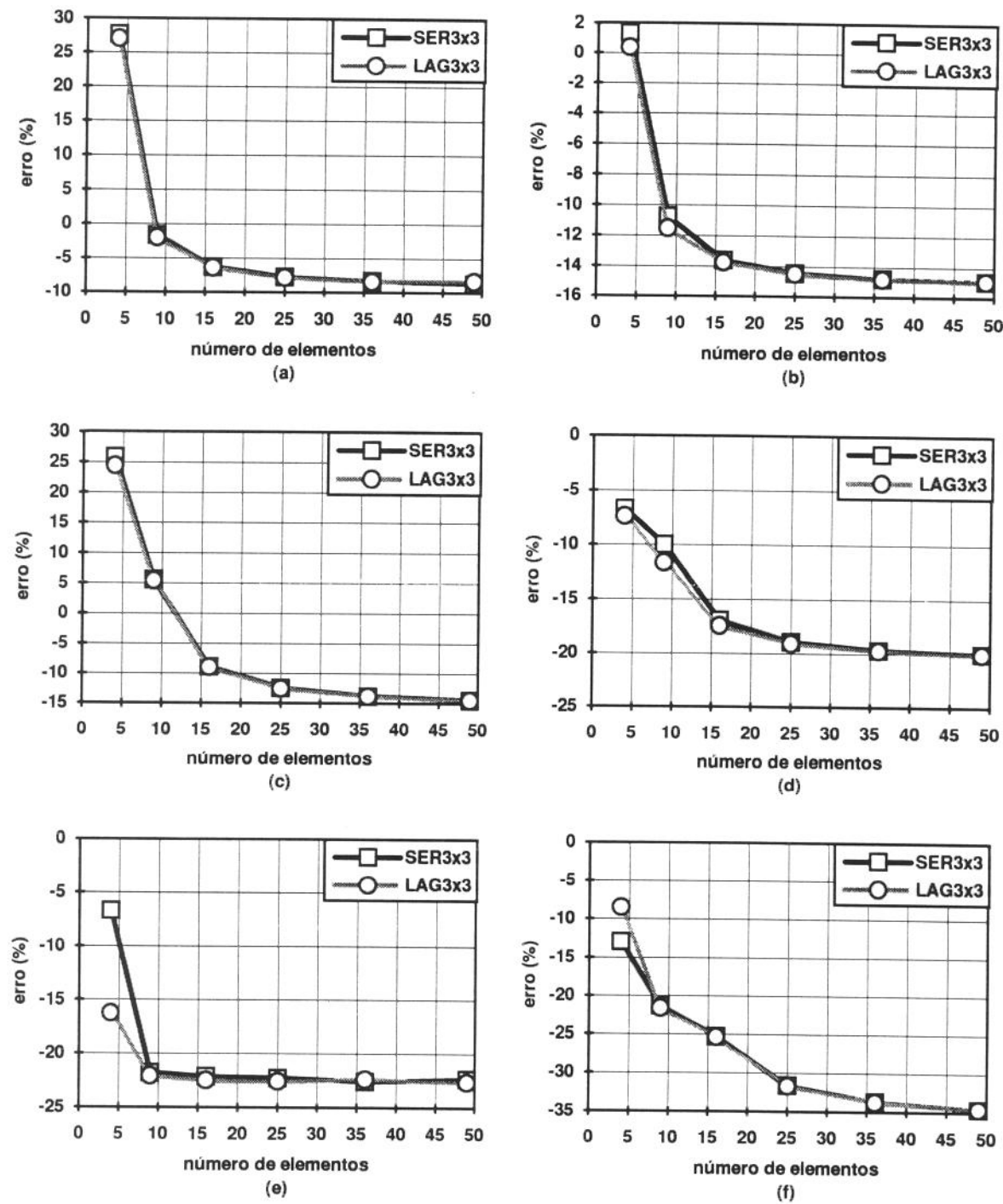


Figura 6.26 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

A Figura 6.27 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da placa retangular E-E-E-L, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de (7×7) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

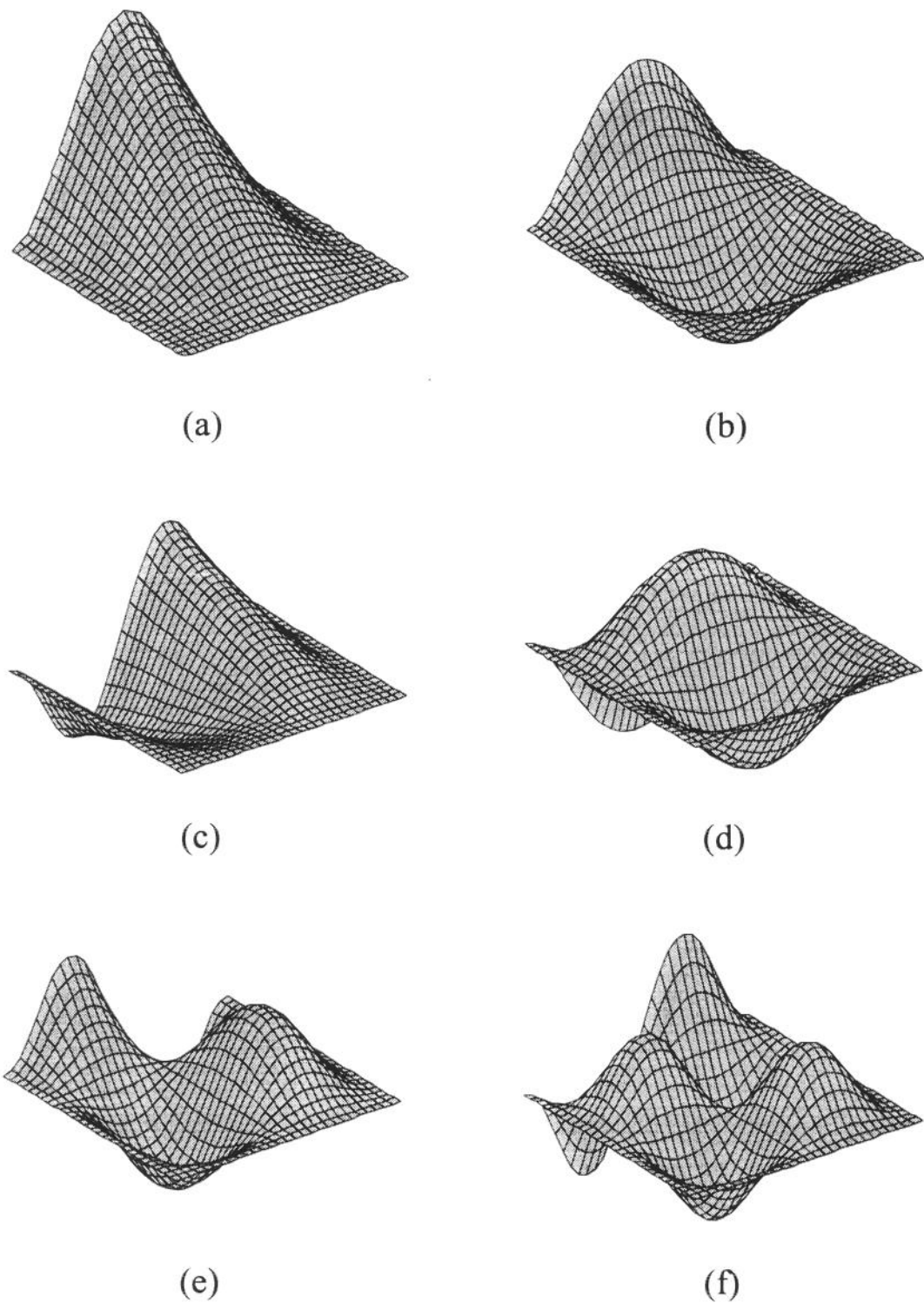


Figura 6.27 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da placa retangular E-E-E-L, com $t/a=0.005$ e malha de discretização de 7×7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.26 a 6.31 e das Figuras 6.23 a 6.26, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$). Deve-se notar, também, que o aumento do erro com o refinamento da malha, para o caso das placas moderadamente grossas ($t/a = 0.05$ e $t/a = 0.1$), se dá devido ao fato de se estar comparando os resultados obtidos com aqueles da teoria clássica [25]; infelizmente, não se tem na literatura os resultados obtidos a partir da teoria de Mindlin [26].

6.2.2 Malha de discretização distorcida

Na prática raramente se encontram malhas “bem comportadas” e para avaliar as características dos elementos em análise quanto à sensibilidade à distorção de malha, foi usada uma malha de discretização distorcida (Figura 6.28) adaptada da proposta na referência [27].

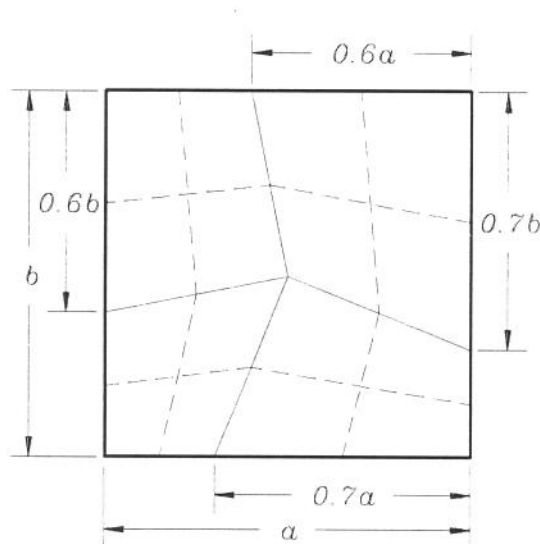


Figura 6.28 Malha de discretização distorcida: 2x2 (linhas principais) e 4x4 (linhas secundárias).

6.2.2.1 Placa quadrada S-E-S-S ($a/b = 1.0$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.29 a 6.32), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25] para $t/a=0.005$, $t/a=0.01$ e $t/a=0.05$ e os obtidos por *Dawe e Roufaeil* [26] para $t/a=0.1$, como mostram as Tabelas 6.32 a 6.37. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos nas referências [25] e [26] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	389.2301	1546.1%	45.1607	91.0%
	2	51.6743	1067.9742	1966.7%	135.0803	161.4%
	3	58.6464	1179.2567	1910.8%	904.0479	1441.5%
	4	86.1345	2544.8711	2854.5%	1023.5677	1088.3%
	5	100.2698	2582.8164	2475.9%	2503.8438	2397.1%
	6	113.2281	3164.7764	2695.0%	2591.0210	2188.3%
0.01	1	23.6463	195.8379	728.2%	33.9816	43.7%
	2	51.6743	536.0280	937.3%	85.6966	65.8%
	3	58.6464	591.4204	908.5%	456.4256	678.3%
	4	86.1345	1272.3982	1377.2%	516.0227	499.1%
	5	100.2698	1291.4082	1187.9%	1251.9219	1148.6%
	6	113.2281	1582.3882	1297.5%	1295.5105	1044.2%
0.05	1	23.6463	45.9475	94.3%	27.8717	17.9%
	2	51.6743	118.5878	129.5%	58.7703	13.7%
	3	58.6464	128.8865	119.8%	109.2927	86.4%
	4	86.1345	254.4544	195.4%	130.3228	51.3%
	5	100.2698	258.2812	157.6%	250.3742	149.7%
	6	113.2281	316.4760	179.5%	253.7546	124.1%
0.1	1	22.3759	30.1120	34.6%	24.9319	11.4%
	2	47.1033	71.2807	51.3%	52.2428	10.9%
	3	52.1096	76.6302	47.1%	69.3713	33.1%
	4	74.1048	127.2272	71.7%	90.9098	22.7%
	5	85.8021	129.1406	50.5%	125.1871	45.9%
	6	93.1032	158.2380	70.0%	126.8773	36.3%

Tabela 6.32 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	68.2401	188.6%	31.2399	32.1%
	2	51.6743	342.6465	563.1%	73.5990	42.4%
	3	58.6464	356.0693	507.1%	117.9850	101.2%
	4	86.1345	635.3542	637.6%	145.7112	69.2%
	5	100.2698	1105.3414	1002.4%	171.9998	71.5%
	6	113.2281	1233.7344	989.6%	243.0614	114.7%
0.01	1	23.6463	42.4080	79.3%	29.3787	24.2%
	2	51.6743	179.8205	248.0%	64.7142	25.2%
	3	58.6464	198.9545	239.2%	109.6361	86.9%
	4	86.1345	335.7092	289.7%	133.2099	54.7%
	5	100.2698	558.1980	456.7%	146.5927	46.2%
	6	113.2281	623.7441	450.9%	204.4597	80.6%
0.05	1	23.6463	27.6538	16.9%	26.7730	13.2%
	2	51.6743	63.9433	23.7%	56.1243	8.6%
	3	58.6464	87.8648	49.8%	83.9856	43.2%
	4	86.1345	133.6515	55.2%	104.6899	21.5%
	5	100.2698	139.8457	39.5%	121.8110	21.5%
	6	113.2281	163.8803	44.7%	156.9750	38.6%
0.1	1	22.3759	24.4456	9.2%	24.1955	8.1%
	2	47.1033	51.9189	10.2%	50.1587	6.5%
	3	52.1096	63.2429	21.4%	62.3399	19.6%
	4	74.1048	93.6311	26.3%	82.6234	11.5%
	5	85.8021	105.7030	23.2%	101.6321	18.4%
	6	93.1032	114.5403	23.0%	111.9079	20.2%

Tabela 6.33 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	34.2797	45.0%	25.2580	6.8%
	2	51.6743	117.5897	127.6%	59.6171	15.4%
	3	58.6464	126.4312	115.6%	73.8125	25.9%
	4	86.1345	308.1337	257.7%	105.5304	22.5%
	5	100.2698	359.4975	258.5%	128.4952	28.1%
	6	113.2281	409.5425	261.7%	155.8225	37.6%
0.01	1	23.6463	28.1097	18.9%	24.9044	5.3%
	2	51.6743	79.2323	53.3%	57.6722	11.6%
	3	58.6464	86.8400	48.1%	70.6626	20.5%
	4	86.1345	193.5499	124.7%	101.9616	18.4%
	5	100.2698	215.2411	114.7%	123.1404	22.8%
	6	113.2281	225.5686	99.2%	148.0512	30.8%
0.05	1	23.6463	24.1595	2.2%	23.9388	1.2%
	2	51.6743	54.5031	5.5%	53.4148	3.4%
	3	58.6464	63.6673	8.6%	62.5139	6.6%
	4	86.1345	96.9090	12.5%	89.9541	4.4%
	5	100.2698	112.8927	12.6%	108.2324	7.9%
	6	113.2281	129.2592	14.2%	125.0904	10.5%
0.1	1	22.3759	22.7066	1.5%	22.6472	1.2%
	2	47.1033	48.7818	3.6%	48.4850	2.9%
	3	52.1096	54.8464	5.3%	54.4759	4.5%
	4	74.1048	79.2237	6.9%	77.2164	4.2%
	5	85.8021	93.1596	8.6%	91.8693	7.1%
	6	93.1032	102.3577	9.9%	101.1799	8.7%

Tabela 6.34 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	27.0829	14.5%	24.7896	4.8%
	2	51.6743	75.1654	45.5%	56.0718	8.5%
	3	58.6464	79.5476	35.6%	67.3542	14.8%
	4	86.1345	176.0223	104.4%	97.0834	12.7%
	5	100.2698	202.4524	101.9%	120.0275	19.7%
	6	113.2281	206.5001	82.4%	114.1394	27.3%
0.01	1	23.6463	25.3709	7.3%	24.6230	4.1%
	2	51.6743	61.2916	18.6%	55.3127	7.0%
	3	58.6464	69.7540	18.9%	65.9895	12.5%
	4	86.1345	130.7455	51.8%	95.6746	11.1%
	5	100.2698	135.8188	35.5%	117.4151	17.1%
	6	113.2281	165.1058	45.8%	139.1573	22.9%
0.05	1	23.6463	23.8253	0.8%	23.7802	0.6%
	2	51.6743	52.3606	1.3%	52.0652	0.8%
	3	58.6464	60.2492	2.7%	60.0015	2.3%
	4	86.1345	88.3094	2.5%	86.5525	0.5%
	5	100.2698	105.0298	4.7%	103.9377	3.7%
	6	113.2281	119.9086	5.9%	119.1160	5.2%
0.1	1	22.3759	22.5795	0.9%	22.5685	0.9%
	2	47.1033	47.8734	1.6%	47.7931	1.5%
	3	52.1096	53.4027	2.5%	53.3382	2.4%
	4	74.1048	76.0647	2.6%	75.5953	2.0%
	5	85.8021	89.6665	4.5%	89.3593	4.1%
	6	93.1032	99.0833	6.4%	98.8547	6.2%

Tabela 6.35 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	25.3470	7.2%	24.1932	2.3%
	2	51.6743	60.7460	17.6%	54.2571	5.0%
	3	58.6464	68.5569	16.9%	63.4295	8.2%
	4	86.1345	127.1887	47.7%	92.5009	7.4%
	5	100.2698	135.4531	35.1%	112.1164	11.8%
	6	113.2281	152.4397	34.6%	133.5358	17.9%
0.01	1	23.6463	24.4987	3.6%	24.1162	2.0%
	2	51.6743	55.8771	8.1%	53.8790	4.3%
	3	58.6464	64.6752	10.3%	62.7896	7.1%
	4	86.1345	102.7582	19.3%	91.6760	6.4%
	5	100.2698	117.7355	17.4%	110.2792	10%
	6	113.2281	136.8785	20.9%	130.8329	15.5%
0.05	1	23.6463	23.5017	-0.6%	23.4835	-0.7%
	2	51.6743	51.3479	-0.6%	51.2507	-0.8%
	3	58.6464	58.4309	-0.4%	58.3082	-0.6%
	4	86.1345	85.2256	-1.1%	84.5443	-1.8%
	5	100.2698	100.1528	-0.1%	99.7788	-0.5%
	6	113.2281	113.5206	0.3%	113.1766	0.0%
0.1	1	22.3759	22.4532	0.3%	22.4487	0.3%
	2	47.1033	47.4578	0.8%	47.4329	0.7%
	3	52.1096	52.7161	1.2%	52.6842	1.1%
	4	74.1048	75.0332	1.3%	74.8456	1.0%
	5	85.8021	87.5469	2.0%	87.4514	1.9%
	6	93.1032	95.5727	2.7%	95.4715	2.5%

Tabela 6.36 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S (a/b=1.0) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	23.6463	24.5135	3.7%	24.0983	1.9%
	2	51.6743	56.1338	8.6%	53.5009	3.5%
	3	58.6464	64.0431	9.2%	62.0790	5.9%
	4	86.1345	104.7207	21.6%	90.7272	5.3%
	5	100.2698	117.6115	17.3%	108.7373	8.4%
	6	113.2281	135.1221	19.3%	128.5060	13.5%
0.01	1	23.6463	24.1710	2.2%	24.0403	1.7%
	2	51.6743	54.0445	4.6%	53.2502	3.0%
	3	58.6464	62.3160	6.3%	61.6467	5.1%
	4	86.1345	94.4430	9.6%	90.1374	4.6%
	5	100.2698	110.5648	10.3%	107.5328	7.2%
	6	113.2281	128.7822	13.7%	126.5325	11.8%
0.05	1	23.6463	23.4486	-0.8%	23.4432	-0.9%
	2	51.6743	50.9522	-1.4%	50.9178	-1.5%
	3	58.6464	57.7711	-1.5%	57.7408	-1.5%
	4	86.1345	83.9639	-2.5%	83.7616	-2.8%
	5	100.2698	98.4888	-1.8%	98.3470	-1.9%
	6	113.2281	111.1705	-1.8%	111.0607	-1.9%
0.1	1	22.3759	22.4338	0.3%	22.4325	0.3%
	2	47.1033	47.3013	0.4%	47.2926	0.4%
	3	52.1096	52.4696	0.7%	52.4620	0.7%
	4	74.1048	74.5750	0.6%	74.5225	0.6%
	5	85.8021	86.8446	1.2%	86.8088	1.2%
	6	93.1032	94.6205	1.6%	94.5911	1.6%

Tabela 6.37 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-S (a/b=1.0) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos nas referências [25] e [26] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

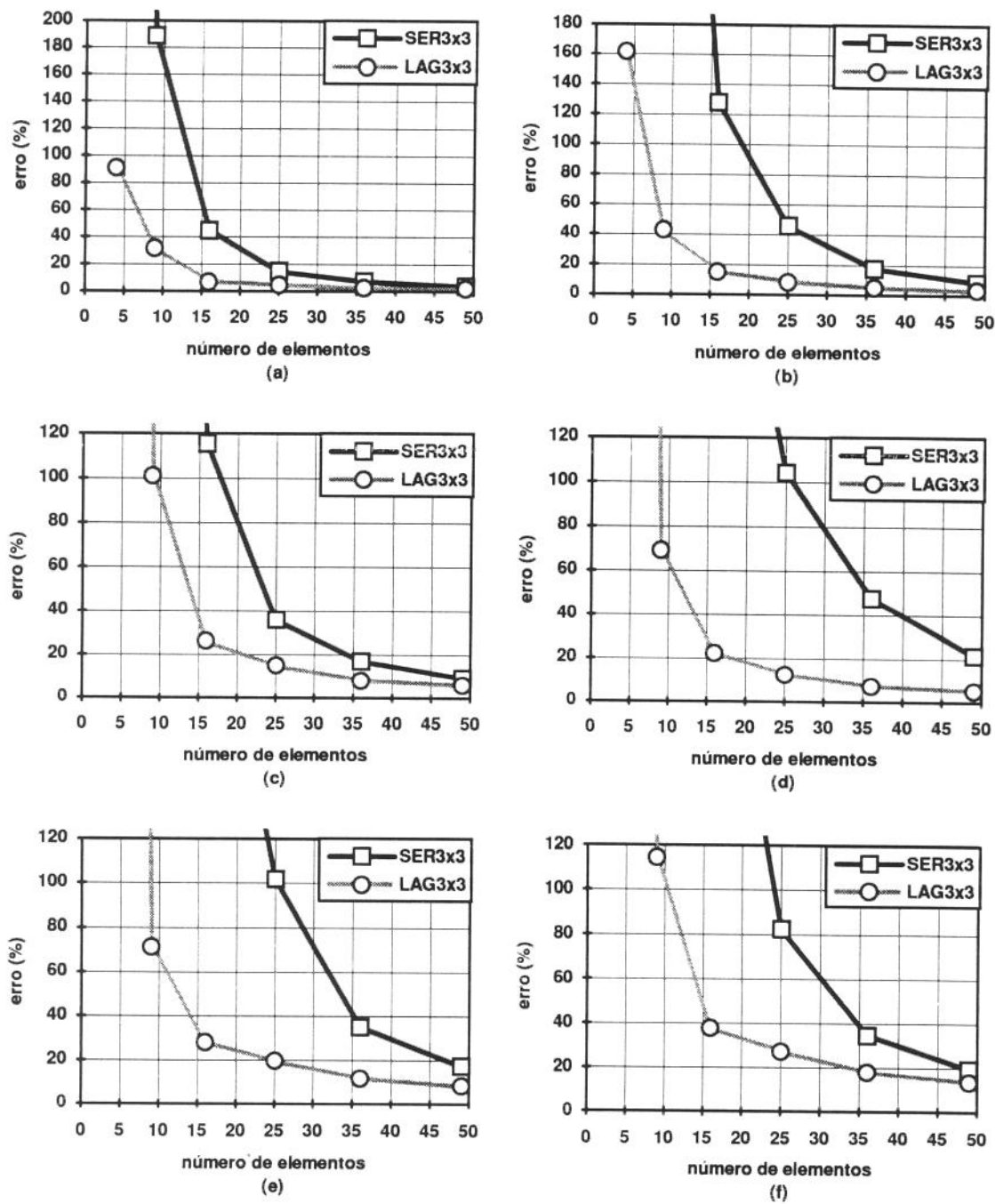


Figura 6.29 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

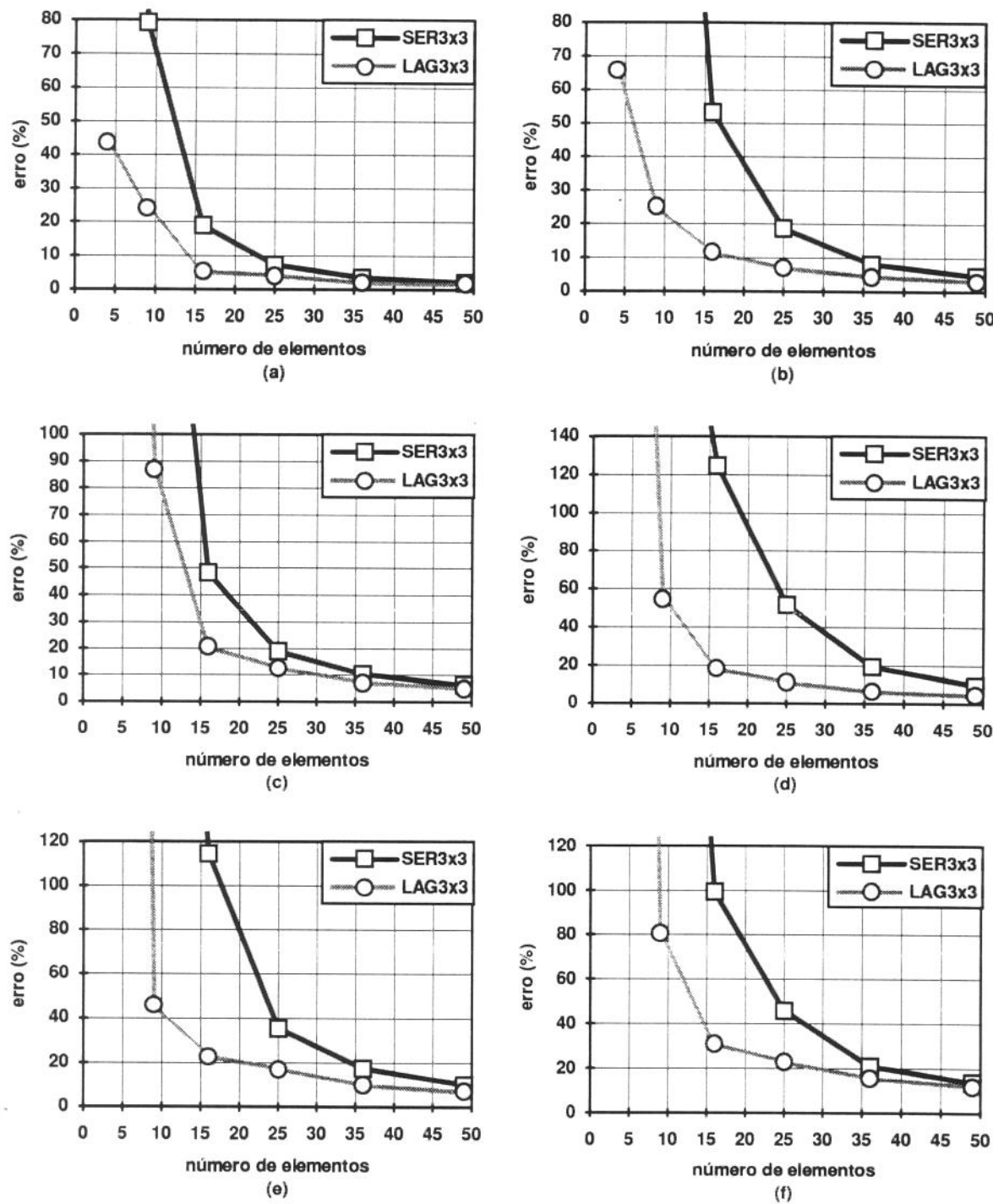


Figura 6.30 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

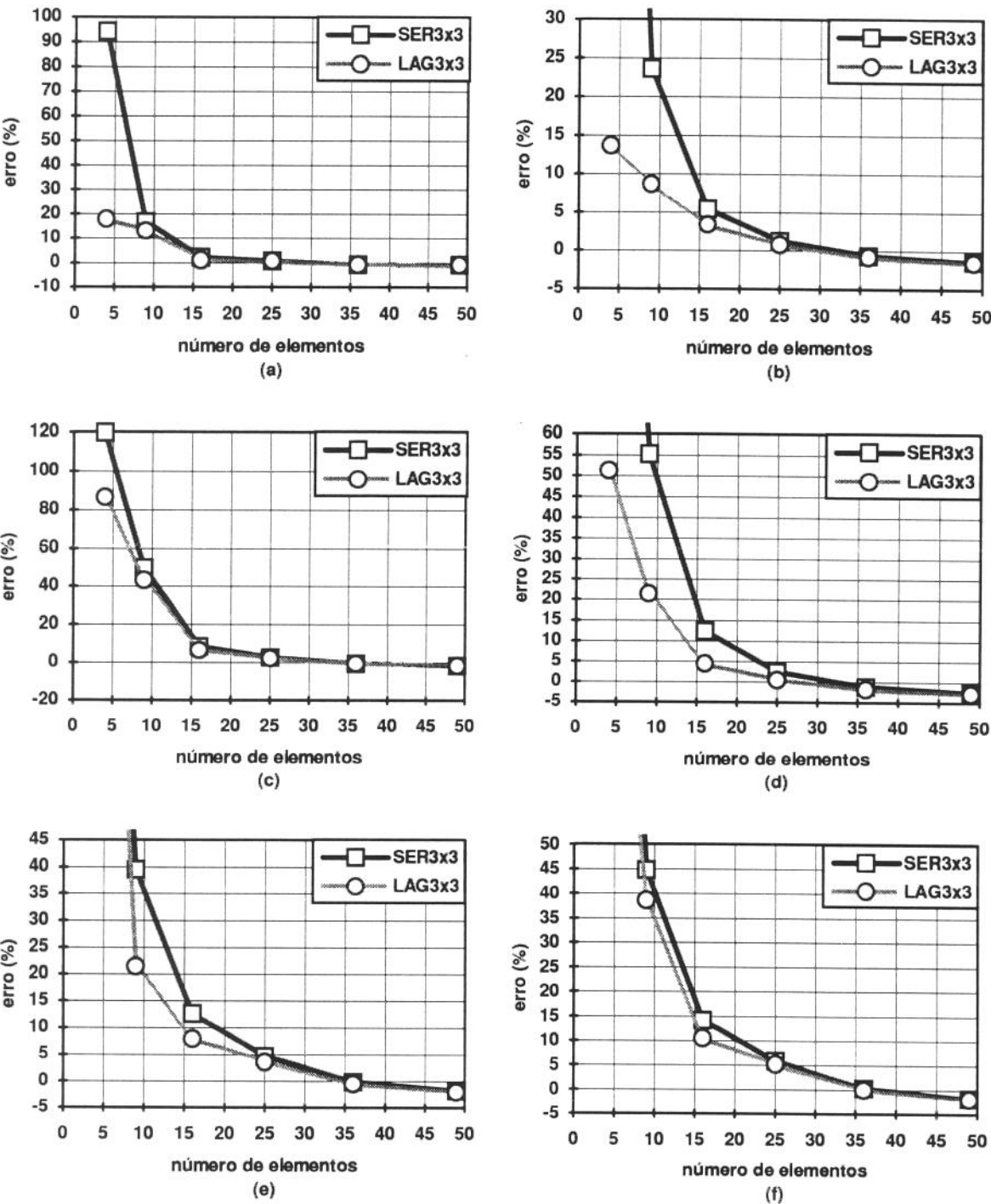


Figura 6.31 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

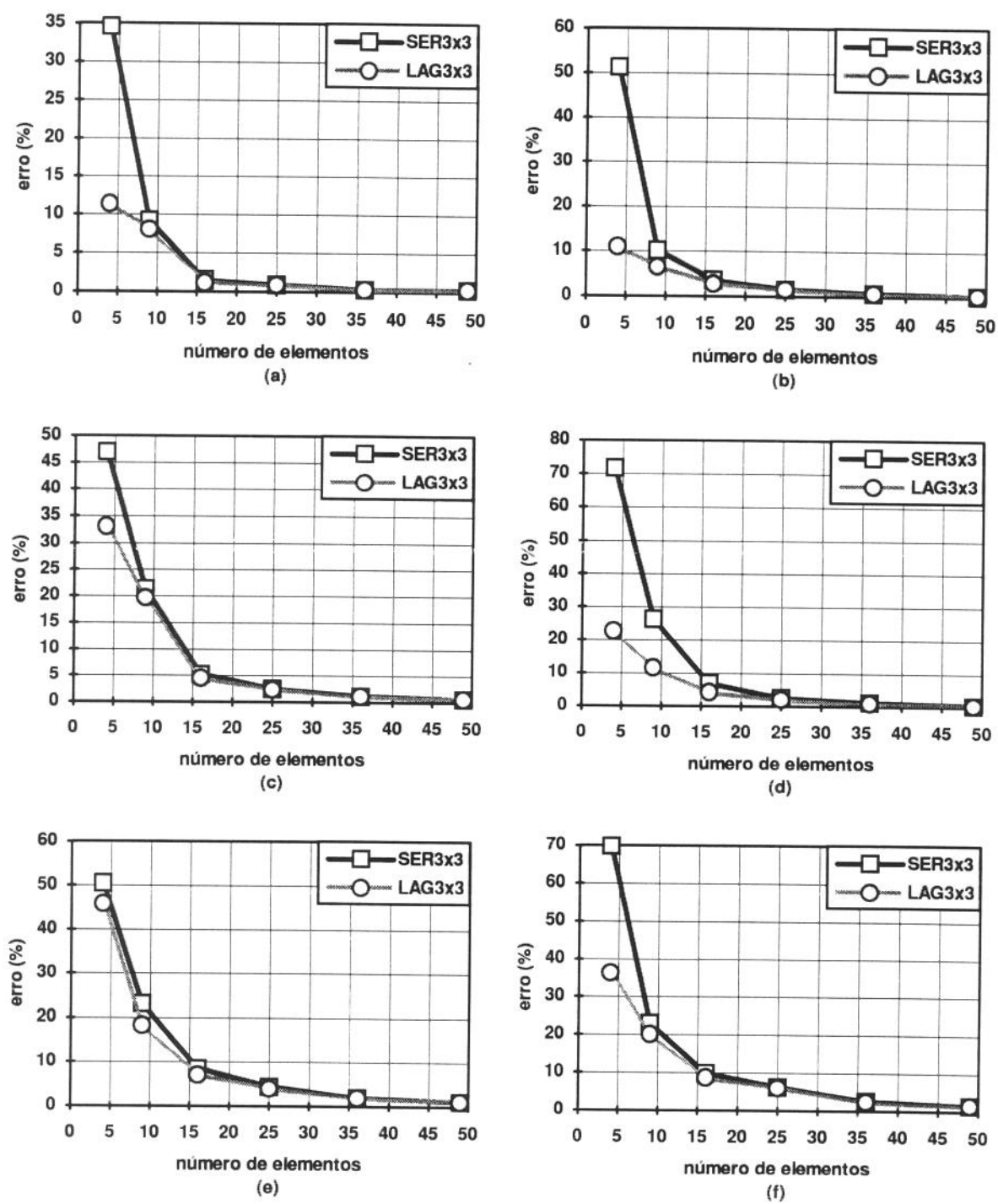


Figura 6.32 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-S ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.32 a 6.37 e das Figuras 6.29 a 6.32, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity para todas as relações t/a utilizadas, principalmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$). Nota-se, também, que a distorção na malha de discretização afeta proporcionalmente os dois elementos, em comparação com os resultados obtidos para a placa quadrada S-E-S-S com malha regular (Item 6.2.1.2), mas, mesmo assim, a convergência para a solução exata é mantida.

6.2.2.2 Placa quadrada S-E-S-L ($a/b = 1.0$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.33 a 6.36), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25] para $t/a=0.005$, $t/a=0.01$ e $t/a=0.05$ e os obtidos por *Dawe e Roufaeil* [26] para $t/a=0.1$, como mostram as Tabelas 6.38 a 6.43. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos nas referências [25] e [26] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	24.8413	95.8%	16.1623	27.4%
	2	33.0651	189.0562	471.8%	59.9488	81.3%
	3	41.7019	452.6202	985.4%	78.4148	88.0%
	4	63.0148	1183.0345	1777.4%	176.3630	179.9%
	5	72.3976	1392.3942	1823.3%	964.7357	1232.6%
	6	90.6114	1639.3894	1709.3%	1104.2782	1118.7%
0.01	1	12.6874	17.7871	40.2%	15.0199	18.4%
	2	33.0651	103.3215	212.5%	50.2122	51.9%
	3	41.7019	228.8022	448.7%	58.0579	39.2%
	4	63.0148	594.8350	844.0%	112.8908	79.1%
	5	72.3976	697.7896	863.8%	487.9037	573.9%
	6	90.6114	819.6946	804.6%	557.4483	515.2%
0.05	1	12.6874	14.3141	12.8%	14.0868	11.0%
	2	33.0651	50.2766	52.1%	42.4139	28.3%
	3	41.7019	58.2412	39.7%	47.6278	14.2%
	4	63.0148	137.3255	117.9%	75.5320	19.9%
	5	72.3976	148.9611	105.8%	121.2372	67.5%
	6	90.6114	163.9389	80.9%	145.3353	60.4%
0.1	1	12.3636	13.4156	8.5%	13.2896	7.5%
	2	30.6462	39.8460	30.0%	36.0358	17.6%
	3	38.9354	44.7749	15.0%	43.7558	12.4%
	4	56.2317	81.9694	45.8%	63.9383	13.7%
	5	62.9714	85.3619	35.6%	80.1325	27.3%
	6	79.0108	87.0546	10.2%	80.7917	2.3%

Tabela 6.38 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	17.8150	40.4%	14.1075	11.2%
	2	33.0651	99.8433	202.0%	45.7743	38.4%
	3	41.7019	103.4950	148.2%	55.6581	33.5%
	4	63.0148	207.0558	228.6%	94.9510	50.7%
	5	72.3976	386.3761	433.7%	121.2849	67.5%
	6	90.6114	452.3553	399.2%	168.3972	85.8%
0.01	1	12.6874	15.3176	20.7%	13.8255	9.0%
	2	33.0651	63.3703	91.7%	43.6984	32.2%
	3	41.7019	72.7815	74.5%	50.7498	21.7%
	4	63.0148	140.9849	123.7%	82.0678	30.2%
	5	72.3976	229.0141	216.3%	117.4438	62.2%
	6	90.6114	240.4624	165.4%	160.7401	77.4%
0.05	1	12.6874	13.5306	6.6%	13.3622	5.3%
	2	33.0651	40.2207	21.6%	39.0820	18.2%
	3	41.7019	47.4375	13.8%	45.4821	9.1%
	4	63.0148	79.2597	25.8%	69.7094	10.6%
	5	72.3976	107.9896	49.2%	106.5613	47.2%
	6	90.6114	111.5021	23.1%	109.0797	20.4%
0.1	1	12.3636	12.8030	3.6%	12.7377	3.0%
	2	30.6462	34.2040	11.6%	33.9074	10.6%
	3	38.9354	41.9557	7.8%	41.3573	6.2%
	4	56.2317	62.4134	11.0%	60.2153	7.1%
	5	62.9714	76.5573	21.6%	75.7119	20.2%
	6	79.0108	79.7245	0.9%	79.3571	0.4%

Tabela 6.39 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	13.8069	8.8%	13.1967	4.0%
	2	33.0651	46.9680	42.0%	35.6461	7.8%
	3	41.7019	52.1254	25.0%	47.9422	15.0%
	4	63.0148	123.5327	96.0%	72.5442	15.1%
	5	72.3976	145.7340	101.3%	95.8769	32.4%
	6	90.6114	165.3503	82.5%	112.5531	24.2%
0.01	1	12.6874	13.3686	5.4%	13.1152	3.4%
	2	33.0651	39.3447	19.0%	35.0986	6.1%
	3	41.7019	48.7556	16.9%	47.1376	13.0%
	4	63.0148	101.9265	61.8%	70.2368	11.5%
	5	72.3976	107.4178	48.4%	90.6320	25.2%
	6	90.6114	115.1196	27.0%	110.9197	22.4%
0.05	1	12.6874	12.8469	1.3%	12.8205	1.0%
	2	33.0651	33.7055	1.9%	33.3807	1.0%
	3	41.7019	44.1505	5.9%	43.9927	5.5%
	4	63.0148	66.3929	5.4%	64.5803	2.5%
	5	72.3976	78.9723	9.1%	77.9477	7.7%
	6	90.6114	99.9858	10.3%	99.2832	9.6%
0.1	1	12.3636	12.4029	0.3%	12.3953	0.3%
	2	30.6462	31.0757	1.4%	30.9851	1.1%
	3	38.9354	40.2439	3.4%	40.1954	3.2%
	4	56.2317	58.1536	3.4%	57.6465	2.5%
	5	62.9714	66.7016	5.9%	66.3799	5.4%
	6	79.0108	79.2744	0.3%	79.0225	0.0%

Tabela 6.40 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	13.3716	5.4%	13.0020	2.5%
	2	33.0651	38.3616	16.0%	35.0614	6.0%
	3	41.7019	48.0621	15.3%	45.0360	8.0%
	4	63.0148	97.1594	54.2%	68.5103	8.7%
	5	72.3976	101.2117	39.8%	85.1294	17.6%
	6	90.6114	114.6849	26.6%	108.3320	19.6%
0.01	1	12.6874	13.1057	3.3%	12.9658	2.2%
	2	33.0651	35.8566	8.4%	34.7751	5.2%
	3	41.7019	45.8583	10%	44.6808	7.1%
	4	63.0148	77.4333	22.9%	67.6503	7.4%
	5	72.3976	87.7832	21.3%	83.0077	14.7%
	6	90.6114	109.4427	20.8%	106.9874	18.1%
0.05	1	12.6874	12.7196	0.3%	12.7091	0.2%
	2	33.0651	33.2203	0.5%	33.1514	0.3%
	3	41.7019	42.3619	1.6%	42.2908	1.4%
	4	63.0148	63.5341	0.8%	63.0016	0.0%
	5	72.3976	74.5785	3.0%	74.2605	2.6%
	6	90.6114	95.2346	5.1%	94.9425	4.8%
0.1	1	12.3636	12.3281	-0.3%	12.3253	-0.3%
	2	30.6462	30.8194	0.6%	30.8018	0.5%
	3	38.9354	39.2953	0.9%	39.2767	0.9%
	4	56.2317	56.8913	1.2%	56.7404	0.9%
	5	62.9714	64.7221	2.8%	64.6347	2.6%
	6	79.0108	79.0898	0.1%	78.8856	-0.2%

Tabela 6.41 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	13.0138	2.6%	12.8806	1.5%
	2	33.0651	35.6207	7.7%	33.9737	2.7%
	3	41.7019	44.8772	7.6%	44.0202	5.6%
	4	63.0148	76.4088	21.3%	66.2553	5.1%
	5	72.3976	85.2746	17.8%	78.8920	9.0%
	6	90.6114	104.2482	15.0%	101.8059	12.4%
0.01	1	12.6874	12.9073	1.7%	12.8580	1.3%
	2	33.0651	34.4157	4.1%	33.8426	2.4%
	3	41.7019	44.1544	5.9%	43.8188	5.1%
	4	63.0148	69.0676	9.6%	65.7707	4.4%
	5	72.3976	80.2707	10.9%	77.9785	7.7%
	6	90.6114	101.9941	12.6%	100.7669	11.2%
0.05	1	12.6874	12.6440	-0.3%	12.6414	-0.4%
	2	33.0651	32.6441	-1.3%	32.6151	-1.4%
	3	41.7019	41.7884	0.2%	41.7681	0.2%
	4	63.0148	62.1437	-1.4%	61.9734	-1.7%
	5	72.3976	71.7579	-0.9%	71.6022	-1.1%
	6	90.6114	91.3573	0.8%	91.2442	0.7%
0.1	1	12.3636	12.2967	-0.5%	12.2961	-0.5%
	2	30.6462	30.5988	-0.2%	30.5915	-0.2%
	3	38.9354	39.0391	0.3%	39.0335	0.3%
	4	56.2317	56.3692	0.2%	56.3232	0.2%
	5	62.9714	63.6324	1.0%	63.5904	1.0%
	6	79.0108	79.0452	0.0%	78.8622	-0.2%

Tabela 6.42 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	12.6874	12.9022	1.7%	12.8272	1.1%
	2	33.0651	34.4601	4.2%	33.8478	2.4%
	3	41.7019	43.8046	5.0%	43.2388	3.7%
	4	63.0148	69.8281	10.8%	65.3641	3.7%
	5	72.3976	79.8610	10.3%	77.2926	6.8%
	6	90.6114	100.2229	10.6%	98.5310	8.7%
0.01	1	12.6874	12.8353	1.2%	12.8103	1.0%
	2	33.0651	33.9420	2.7%	33.7435	2.1%
	3	41.7019	43.2658	3.8%	43.0822	3.3%
	4	63.0148	66.4271	5.4%	65.0341	3.2%
	5	72.3976	77.5208	7.1%	76.6331	5.9%
	6	90.6114	98.4656	8.7%	97.7331	7.9%
0.05	1	12.6874	12.6085	-0.6%	12.6073	-0.6%
	2	33.0651	32.5404	-1.6%	32.5317	-1.6%
	3	41.7019	41.3322	-0.9%	41.3241	-0.9%
	4	63.0148	61.5967	-2.3%	61.5328	-2.4%
	5	72.3976	70.9215	-2.0%	70.8799	-2.1%
	6	90.6114	89.5092	-1.2%	89.4583	-1.3%
0.1	1	12.3636	12.2762	-0.7%	12.2759	-0.7%
	2	30.6462	30.5329	-0.4%	30.5308	-0.4%
	3	38.9354	38.8342	-0.3%	38.8320	-0.3%
	4	56.2317	56.1180	-0.2%	56.1014	-0.2%
	5	62.9714	63.2589	0.5%	63.2482	0.4%
	6	79.0108	78.9761	0.0%	78.8281	-0.2%

Tabela 6.43 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referências [25] e [26] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

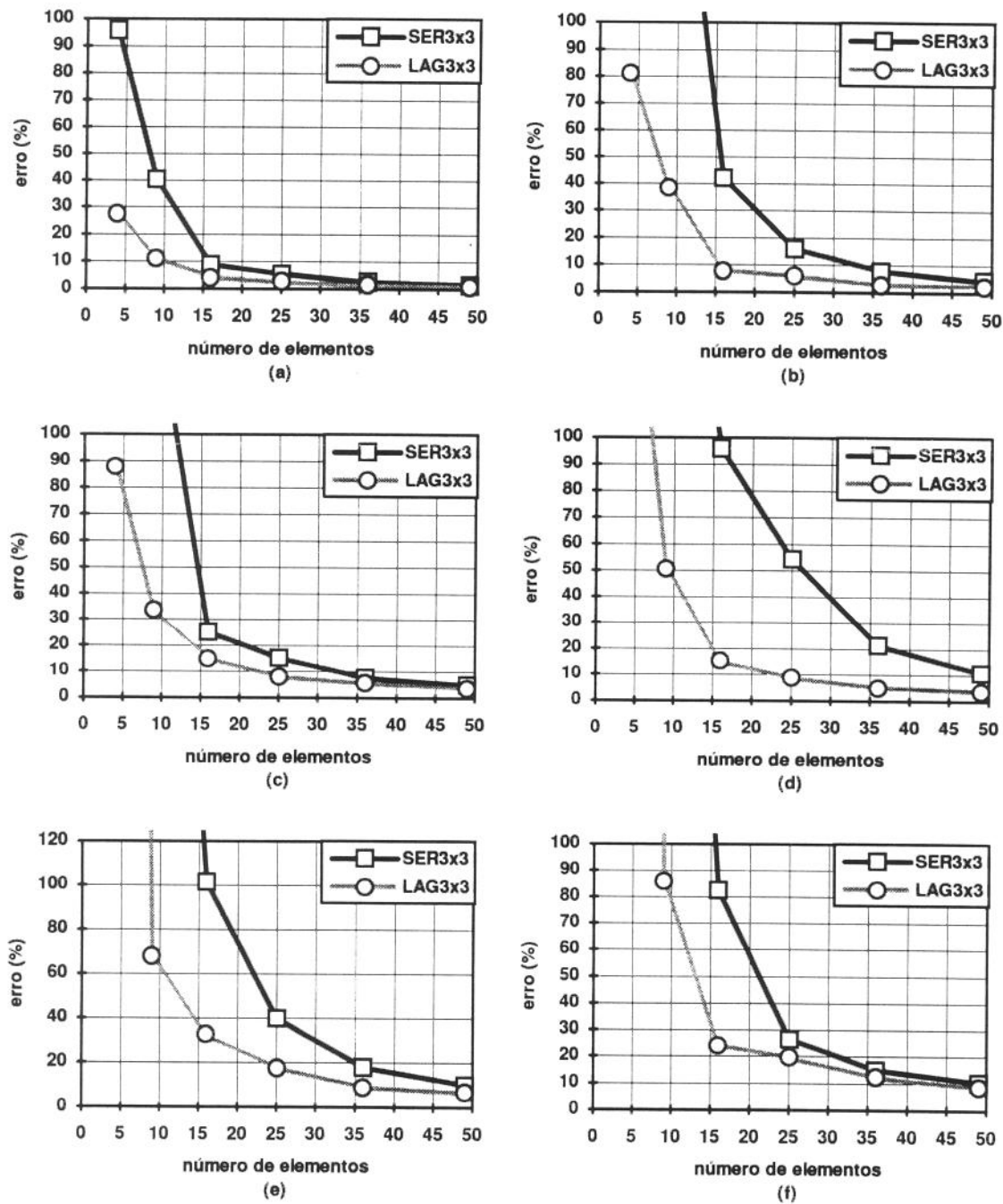


Figura 6.33 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

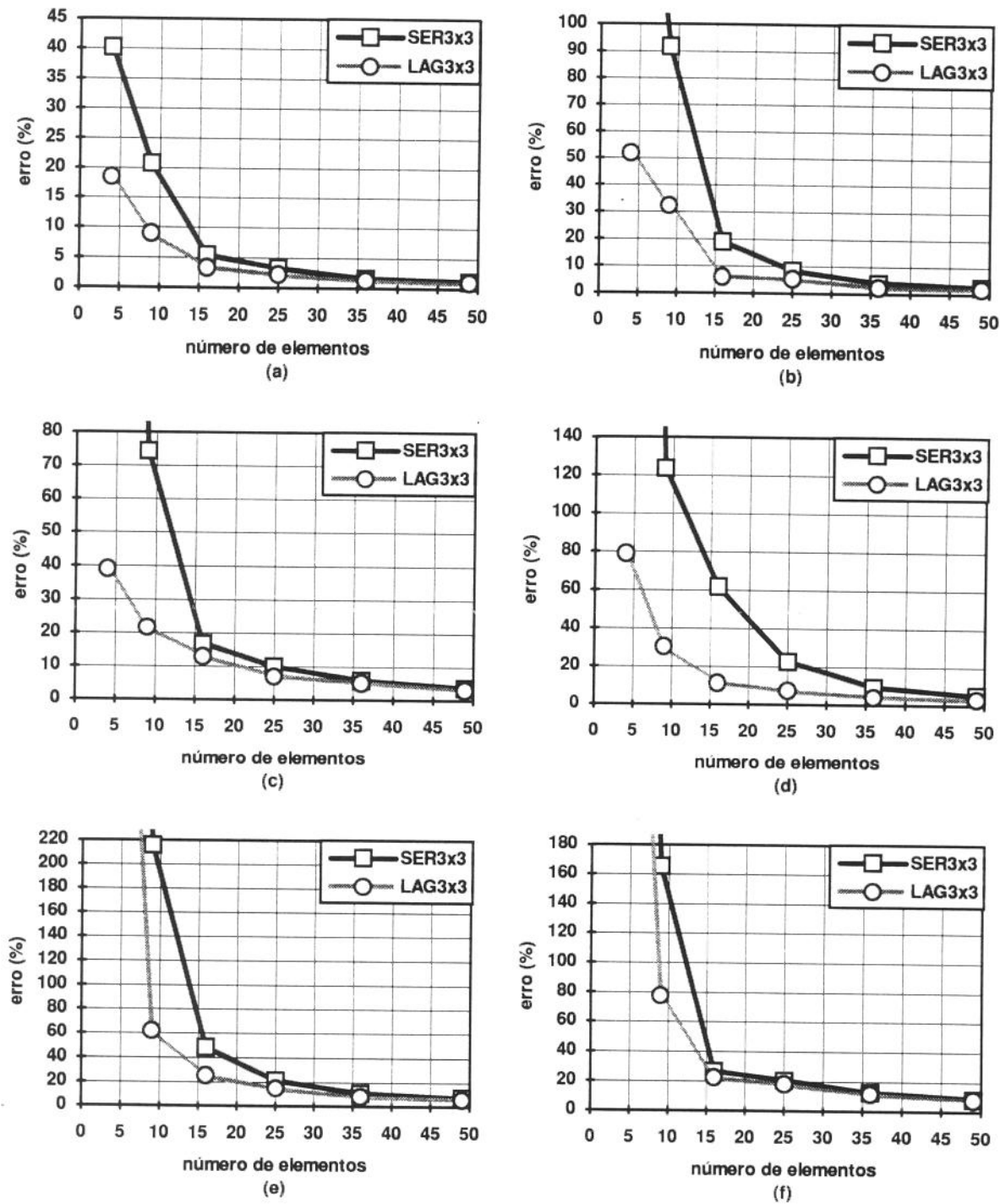


Figura 6.34 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

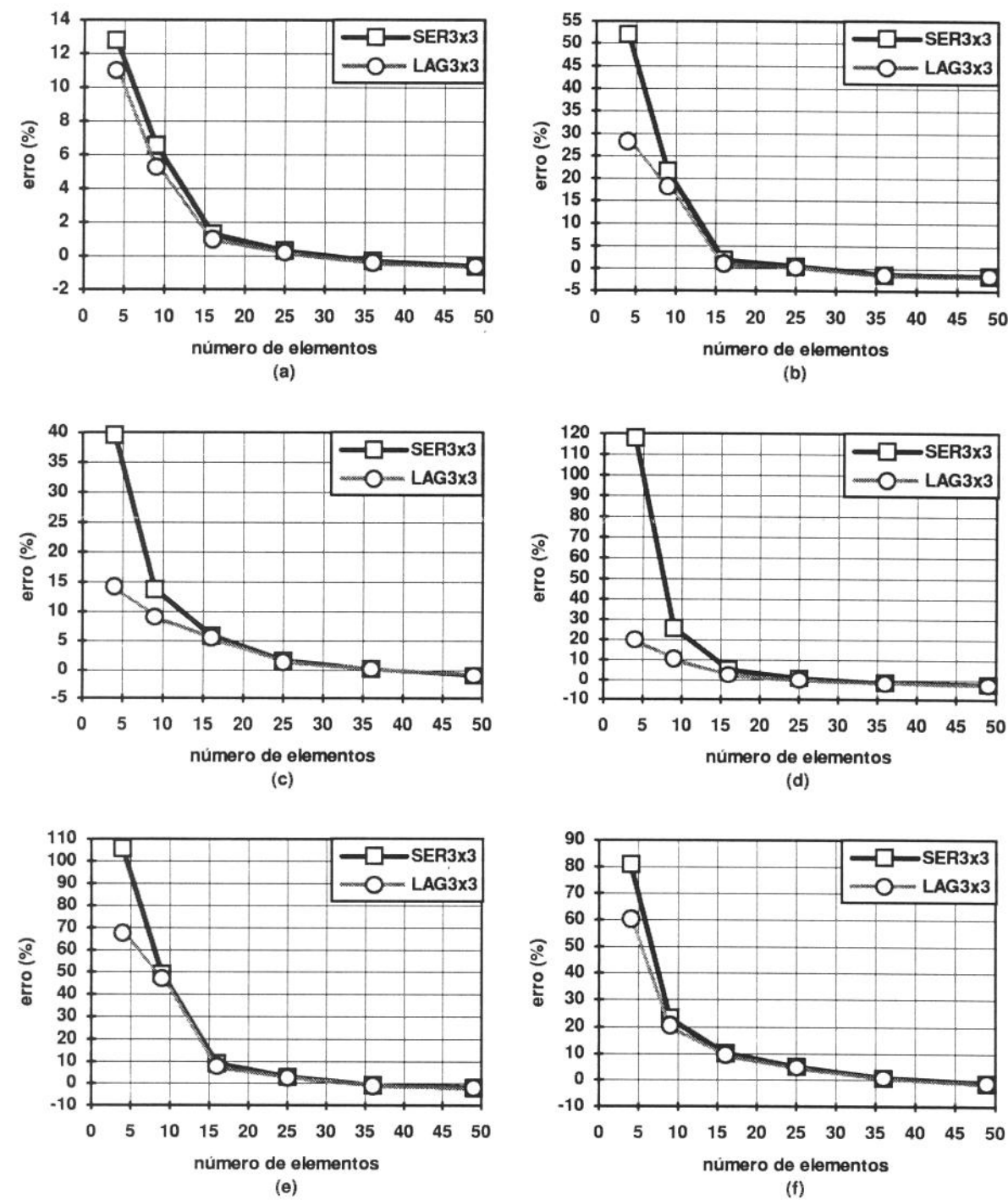


Figura 6.35 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

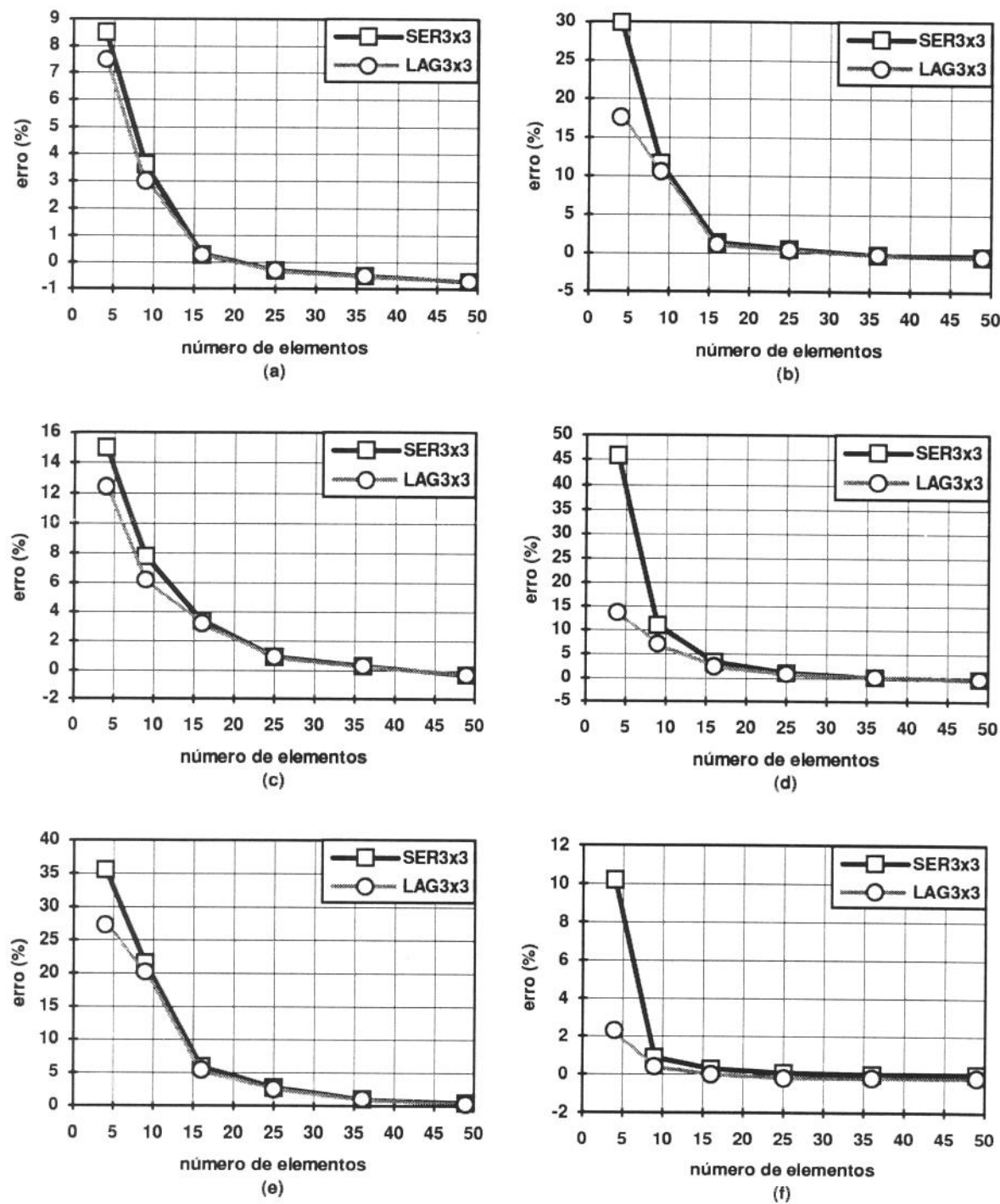


Figura 6.36 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada S-E-S-L ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.38 a 6.43 e das Figuras 6.33 a 6.36, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity para todas as relações t/a utilizadas, principalmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$). Nota-se, também, que a distorção na malha de discretização afeta proporcionalmente os dois elementos, em comparação com os resultados obtidos para a placa quadrada S-E-S-L com malha regular (Item 6.2.1.1), mas, mesmo assim, a convergência para a solução exata é mantida.

6.2.2.3 Placa quadrada E-E-E-E ($a/b = 1.0$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.37 a 6.40), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25] para $t/a=0.005$, $t/a=0.01$ e $t/a=0.05$ e os obtidos por *Dawe e Roufaeil* [26] para $t/a=0.1$, como mostram as Tabelas 6.44 a 6.49. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos nas referências [25] e [26] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	792.8143	2102.8%	766.8173	2030.5%
	2	73.4130	1927.0077	2524.9%	1470.4205	1902.9%
	3	73.4130	1947.0094	2552.1%	1471.1583	1903.9%
	4	108.2700	2544.8708	2250.5%	1944.7518	1696.2%
	5	131.6400	2582.8164	1862.0%	2503.8438	1802.0%
	6	132.2400	3164.7764	2293.2%	2591.0210	1859.3%
0.01	1	35.9920	397.3717	1004.1%	384.3359	967.8%
	2	73.4130	964.5966	1213.9%	737.2373	904.2%
	3	73.4130	974.4606	1227.4%	737.4391	904.5%
	4	108.2700	1272.3982	1075.2%	975.3876	800.9%
	5	131.6400	1291.4082	881.0%	1251.9219	851.0%
	6	132.2400	1582.3882	1096.6%	1295.5105	879.7%
0.05	1	35.9920	85.0976	136.4%	82.2816	128.6%
	2	73.4130	199.1764	171.3%	157.9417	115.1%
	3	73.4130	200.4227	173.0%	158.5060	115.9%
	4	108.2700	254.4544	135.0%	211.6194	95.5%
	5	131.6400	258.2812	96.2%	250.3742	90.2%
	6	132.2400	316.4760	139.3%	253.7546	91.9%
0.1	1	32.6735	49.0370	50.1%	47.4240	45.1%
	2	62.4451	106.0981	69.9%	89.6770	43.6%
	3	62.4451	106.4857	70.5%	90.0482	44.2%
	4	87.8719	127.2272	44.8%	121.5045	38.3%
	5	103.2321	129.1406	25.1%	125.1871	21.3%
	6	104.8865	158.2380	50.9%	126.8773	21.0%

Tabela 6.44 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	287.7484	699.5%	68.7411	91.0%
	2	73.4130	1050.4839	1330.9%	973.9124	1226.6%
	3	73.4130	1162.8929	1484.0%	1071.5272	1359.6%
	4	108.2700	1519.3826	1303.3%	1405.7144	1198.3%
	5	131.6400	1877.2288	1326.0%	1672.9030	1170.8%
	6	132.2400	1910.9851	1345.1%	1699.9575	1185.5%
0.01	1	35.9920	149.5536	315.5%	59.2999	64.8%
	2	73.4130	528.4101	619.8%	490.9208	568.7%
	3	73.4130	584.2874	695.9%	540.0519	635.6%
	4	108.2700	766.1851	607.7%	707.9666	553.9%
	5	131.6400	945.4026	618.2%	844.6250	541.6%
	6	132.2400	962.3123	627.7%	859.2462	549.8%
0.05	1	35.9920	50.6321	40.7%	46.8945	30.3%
	2	73.4130	122.5532	66.9%	117.6920	60.3%
	3	73.4130	131.9995	79.8%	126.5637	72.4%
	4	108.2700	184.1572	70.1%	167.2160	54.4%
	5	131.6400	222.4479	69.0%	206.6430	57.0%
	6	132.2400	225.7386	70.7%	212.4093	60.6%
0.1	1	32.6735	38.1848	16.9%	37.6858	15.3%
	2	62.4451	76.9385	23.2%	75.3901	20.7%
	3	62.4451	80.4215	28.8%	78.3537	25.5%
	4	87.8719	115.1390	31.0%	105.0438	19.5%
	5	103.2321	123.9597	20.1%	123.6371	19.8%
	6	104.8865	125.7654	19.9%	124.3954	18.6%

Tabela 6.45 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	119.7411	232.7%	44.3906	23.3%
	2	73.4130	347.6091	373.5%	112.4619	53.2%
	3	73.4130	401.0123	446.2%	128.4997	75.0%
	4	108.2700	899.6263	730.9%	182.7266	68.8%
	5	131.6400	1469.2773	1016.1%	1351.6497	926.8%
	6	132.2400	1482.0059	1020.7%	1408.7168	965.3%
0.01	1	35.9920	70.6481	96.3%	42.6163	18.4%
	2	73.4130	192.9567	162.8%	106.5893	45.2%
	3	73.4130	214.9694	192.8%	108.5107	47.8%
	4	108.2700	459.9245	324.8%	169.7176	56.8%
	5	131.6400	742.0884	463.7%	689.3367	423.7%
	6	132.2400	748.3882	465.9%	712.0766	438.5%
0.05	1	35.9920	39.2310	9.0%	38.0377	5.7%
	2	73.4130	86.6016	18.0%	83.0110	13.1%
	3	73.4130	87.0260	18.5%	84.0871	14.5%
	4	108.2700	134.5198	24.2%	123.5765	14.1%
	5	131.6400	184.1626	39.9%	178.6444	35.7%
	6	132.2400	185.4801	40.3%	181.6425	37.4%
0.1	1	32.6735	33.8246	3.5%	33.6327	2.9%
	2	62.4451	67.0947	7.4%	66.5281	6.5%
	3	62.4451	67.2887	7.8%	66.8015	7.0%
	4	87.8719	96.0933	9.4%	94.0814	7.1%
	5	103.2321	119.0111	15.3%	117.1111	13.4%
	6	104.8865	120.2634	14.7%	119.1461	13.6%

Tabela 6.46 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	64.7730	80.0%	40.4611	12.4%
	2	73.4130	177.9379	142.4%	92.7911	26.4%
	3	73.4130	192.9482	162.8%	94.5227	28.8%
	4	108.2700	399.8329	269.3%	140.6209	29.9%
	5	131.6400	468.8510	256.2%	214.4916	62.9%
	6	132.2400	487.1360	268.4%	231.7672	75.3%
0.01	1	35.9920	47.4120	31.7%	39.8569	10.7%
	2	73.4130	118.0899	60.9%	88.8791	21.1%
	3	73.4130	121.8383	66.0%	91.5710	24.7%
	4	108.2700	262.3163	142.3%	136.7671	26.3%
	5	131.6400	266.6962	102.6%	206.9406	57.2%
	6	132.2400	286.1208	116.4%	210.0067	58.8%
0.05	1	35.9920	36.9188	2.6%	36.6592	1.9%
	2	73.4130	76.5012	4.2%	75.5713	2.9%
	3	73.4130	78.1954	6.5%	77.2365	5.2%
	4	108.2700	115.4534	6.6%	111.1428	2.7%
	5	131.6400	148.6047	12.9%	146.7255	11.5%
	6	132.2400	150.9394	14.1%	149.0080	12.7%
0.1	1	32.6735	33.1304	1.4%	33.0898	1.3%
	2	62.4451	63.9972	2.5%	63.8609	2.3%
	3	62.4451	64.6267	3.5%	64.4272	3.2%
	4	87.8719	90.7387	3.3%	89.9397	2.4%
	5	103.2321	110.2500	6.8%	109.8991	6.5%
	6	104.8865	111.8626	6.7%	111.3552	6.2%

Tabela 6.47 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E (a/b=1.0) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	48.2169	34.0%	38.6077	7.3%
	2	73.4130	117.6189	60.2%	84.8748	15.6%
	3	73.4130	122.4183	66.8%	84.9878	15.8%
	4	108.2700	253.9694	134.6%	128.2019	18.4%
	5	131.6400	261.7519	98.8%	171.0670	30.0%
	6	132.2400	269.7124	104.0%	172.8914	30.7%
0.01	1	35.9920	41.2493	14.6%	38.2897	6.4%
	2	73.4130	93.8811	27.9%	83.1264	13.2%
	3	73.4130	94.3102	28.5%	83.7945	14.1%
	4	108.2700	171.6329	58.5%	126.0757	16.4%
	5	131.6400	191.8362	45.7%	165.1474	25.5%
	6	132.2400	194.6548	47.2%	167.0930	26.4%
0.05	1	35.9920	35.9271	-0.2%	35.8266	-0.5%
	2	73.4130	73.5094	0.1%	73.1834	-0.3%
	3	73.4130	73.8465	0.6%	73.4676	0.1%
	4	108.2700	108.3704	0.1%	106.8599	-1.3%
	5	131.6400	133.3131	1.3%	132.3239	0.5%
	6	132.2400	134.3160	1.6%	133.6199	1.0%
0.1	1	32.6735	32.7998	0.4%	32.7840	0.3%
	2	62.4451	63.0975	1.0%	63.0422	1.0%
	3	62.4451	63.1714	1.2%	63.1076	1.1%
	4	87.8719	88.8799	1.1%	88.5936	0.8%
	5	103.2321	105.8072	2.5%	105.6102	2.3%
	6	104.8865	106.9118	1.9%	106.7908	1.8%

Tabela 6.48 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.0 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	35.9920	41.2692	14.7%	37.8205	5.1%
	2	73.4130	94.1115	28.2%	80.6417	9.8%
	3	73.4130	94.4224	28.6%	81.4817	11.0%
	4	108.2700	180.2741	66.5%	121.2821	12.0%
	5	131.6400	191.1772	45.2%	157.8625	19.9%
	6	132.2400	193.8997	46.6%	159.9956	21.0%
0.01	1	35.9920	38.5738	7.2%	37.6028	4.5%
	2	73.4130	83.2272	13.4%	79.5534	8.4%
	3	73.4130	84.5018	15.1%	80.6275	9.8%
	4	108.2700	137.1632	26.7%	119.7243	10.6%
	5	131.6400	163.9526	24.5%	154.2702	17.2%
	6	132.2400	166.2304	25.7%	156.1456	18.1%
0.05	1	35.9920	35.5297	-1.3%	35.4997	-1.4%
	2	73.4130	71.7568	-2.3%	71.6568	-2.4%
	3	73.4130	72.2278	-1.6%	72.0999	-1.8%
	4	108.2700	104.8680	-3.1%	104.3408	-3.6%
	5	131.6400	128.4130	-2.5%	128.1223	-2.7%
	6	132.2400	129.5188	-2.1%	129.2021	-2.3%
0.1	1	32.6735	32.6790	0.0%	32.6743	0.0%
	2	62.4451	62.5594	0.2%	62.5435	0.2%
	3	62.4451	62.6912	0.4%	62.6685	0.4%
	4	87.8719	87.9050	0.0%	87.8078	-0.1%
	5	103.2321	104.3154	1.0%	104.2567	1.0%
	6	104.8865	105.3947	0.5%	105.3378	0.4%

Tabela 6.49 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos nas referências [25] e [26] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

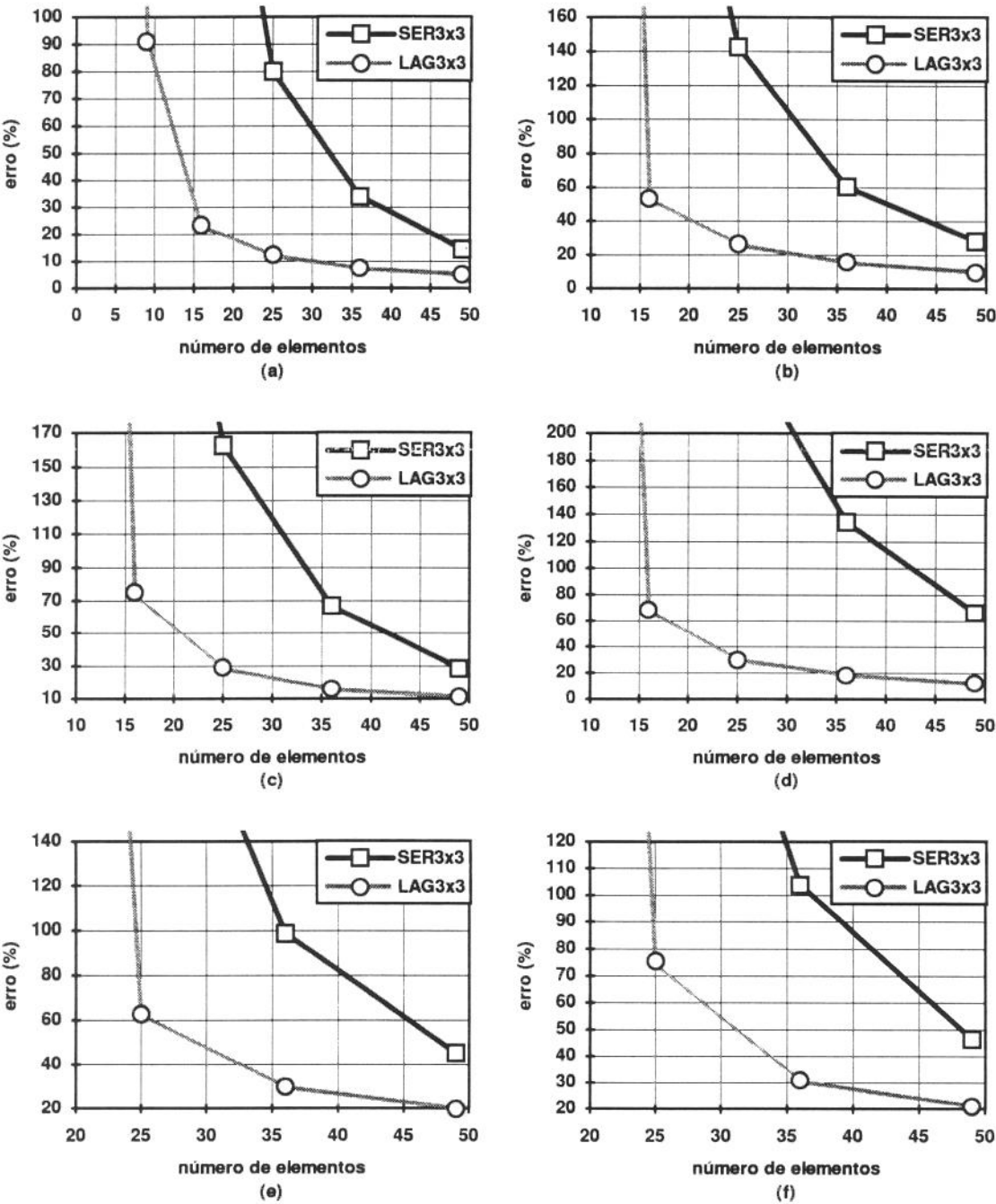


Figura 6.37 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

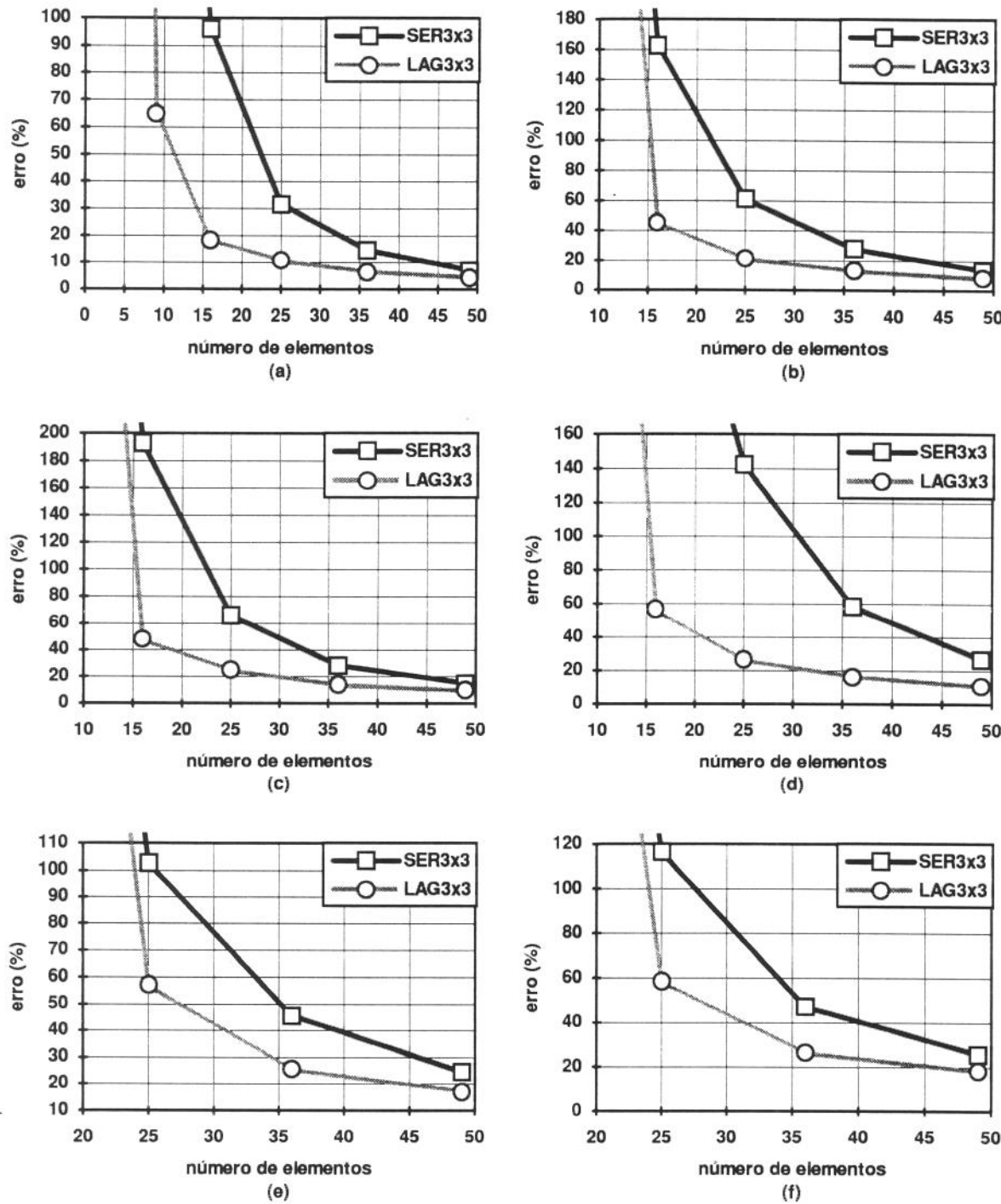


Figura 6.38 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

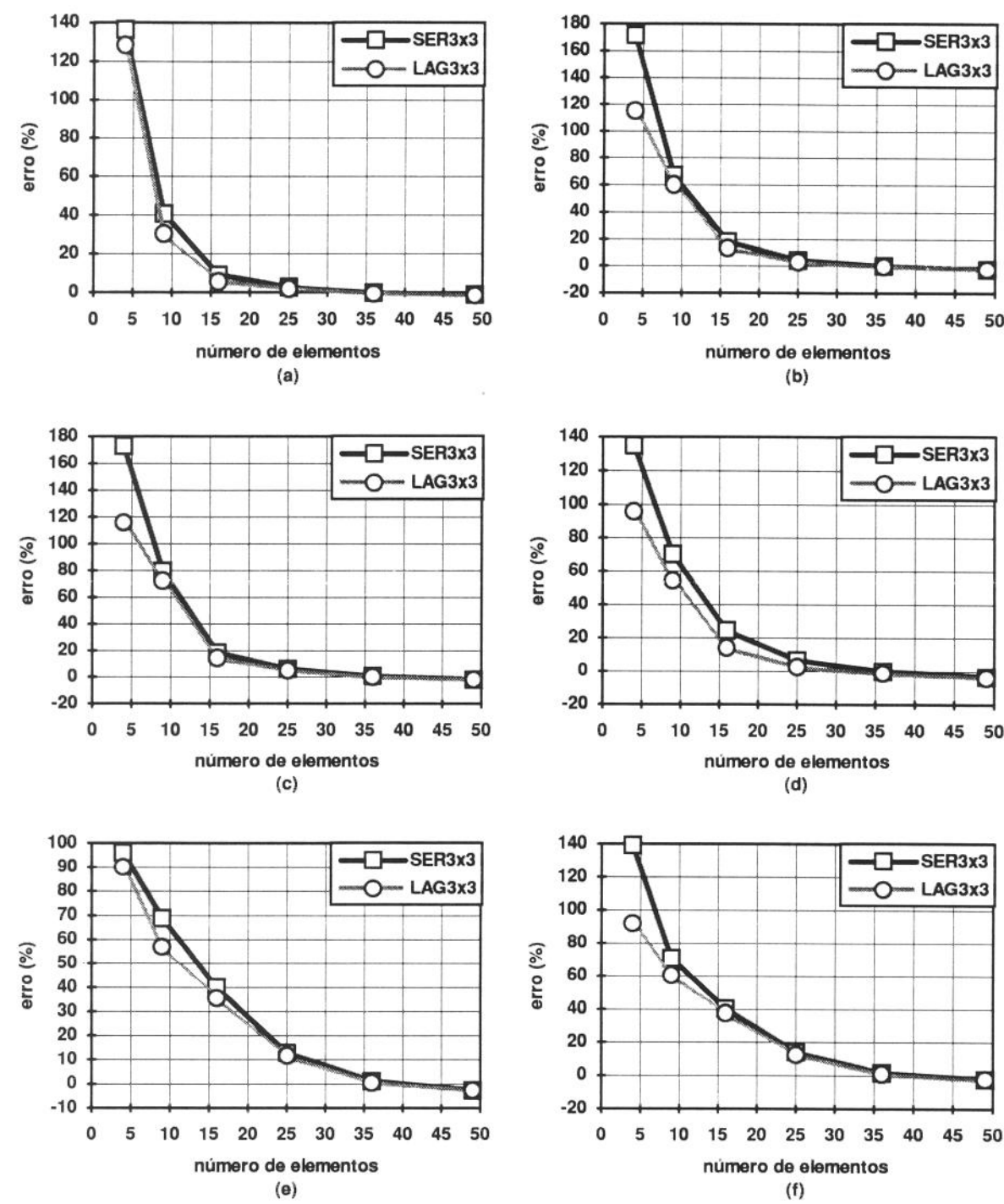


Figura 6.39 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

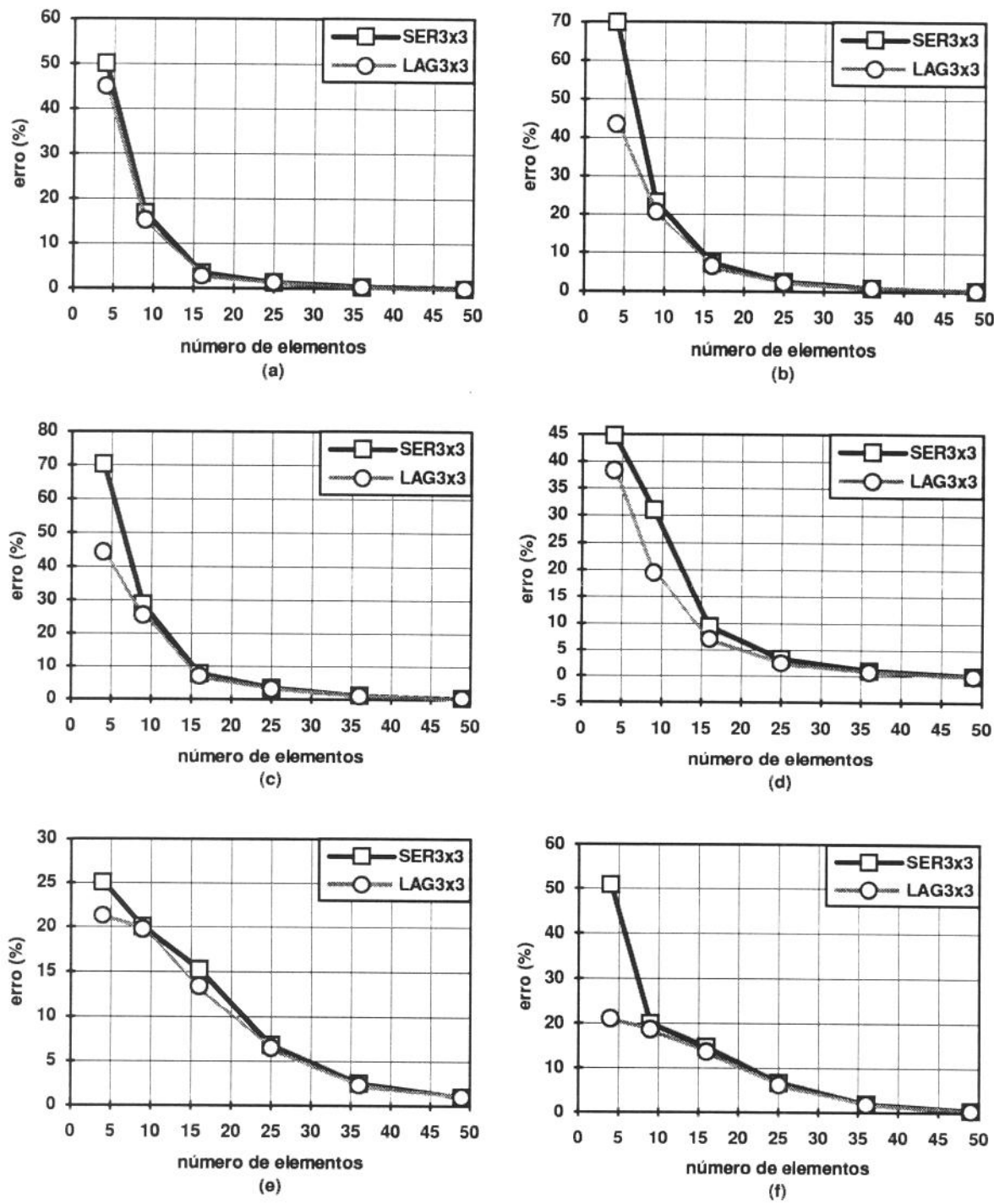


Figura 6.40 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa quadrada E-E-E-E ($a/b=1.0$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.44 a 6.49 e das Figuras 6.37 a 6.40, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity para todas as relações t/a utilizadas, principalmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$). Nota-se, também, que a distorção na malha de discretização afeta proporcionalmente os dois elementos, em comparação com os resultados obtidos para a placa retangular E-E-E-E com malha regular (Item 6.2.1.3), mas, mesmo assim, a convergência para a solução exata é mantida.

6.2.2.4 Placa retangular S-E-S-E ($a/b = 1.5$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.41 a 6.44), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25], como mostram as Tabelas 6.50 a 6.55. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos na referência [25] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	842.2138	1394.7%	797.8687	1316.0%
	2	78.9836	2003.3846	2436.5%	826.8291	946.8%
	3	123.1719	2237.9125	1716.9%	1960.5126	1491.7%
	4	146.2677	2950.8718	1917.4%	2142.1379	1364.5%
	5	170.1112	3551.9165	1988.0%	2900.2337	1604.9%
	6	189.1219	3804.1172	1911.5%	3146.9199	1564.0%
0.01	1	56.3481	423.3741	651.4%	401.3632	612.3%
	2	78.9836	1003.0934	1170.0%	418.7311	430.1%
	3	123.1719	1123.1891	811.9%	988.1122	702.2%
	4	146.2677	1475.4351	908.7%	1077.4815	636.7%
	5	170.1112	1775.9333	944.0%	1445.2462	749.6%
	6	189.1219	1903.7362	906.6%	1577.2238	734.0%
0.05	1	56.3481	96.9918	72.1%	93.0039	65.1%
	2	78.9836	206.9310	162.0%	110.0284	39.3%
	3	123.1719	247.3144	100.8%	231.1648	87.7%
	4	146.2677	295.0870	101.7%	250.2704	71.1%
	5	170.1112	355.1867	108.8%	289.0492	69.9%
	6	189.1219	390.3876	106.4%	335.2603	77.3%
0.1	1	56.3481	60.3831	7.2%	58.5628	3.9%
	2	78.9836	109.7224	38.9%	76.5644	-3.1%
	3	123.1719	141.9355	15.2%	136.5737	10.9%
	4	146.2677	147.5435	0.9%	144.5246	-1.2%
	5	170.1112	177.5933	4.4%	152.8981	-10.1%
	6	189.1219	204.0768	7.9%	174.7732	-7.6%

Tabela 6.50 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	162.3743	188.2%	87.1880	54.7%
	2	78.9836	669.2879	747.4%	130.3907	65.1%
	3	123.1719	1265.8648	927.7%	246.1773	99.9%
	4	146.2677	1511.5813	933.4%	1420.7376	871.3%
	5	170.1112	1847.8573	986.3%	1517.1676	791.9%
	6	189.1219	2539.3614	1242.7%	1560.4295	725.1%
0.01	1	56.3481	106.3540	88.7%	82.4410	46.3%
	2	78.9836	342.3849	333.5%	113.2374	43.4%
	3	123.1719	645.3743	424.0%	192.6896	56.4%
	4	146.2677	764.2731	422.5%	722.9042	394.2%
	5	170.1112	935.0302	449.7%	771.4360	353.5%
	6	189.1219	1293.1248	583.8%	800.0930	323.1%
0.05	1	56.3481	65.8822	16.9%	64.9585	15.3%
	2	78.9836	100.8907	27.7%	86.5250	9.5%
	3	123.1719	181.9666	47.7%	144.2891	17.1%
	4	146.2677	192.3658	31.5%	190.1231	30.0%
	5	170.1112	236.5786	39.1%	206.3801	21.3%
	6	189.1219	287.4903	52.0%	246.5623	30.4%
0.1	1	56.3481	52.1467	-7.5%	51.8871	-7.9%
	2	78.9836	73.7235	-6.7%	70.5188	-10.7%
	3	123.1719	123.7481	0.5%	115.4720	-6.3%
	4	146.2677	125.9124	-13.9%	123.0760	-15.9%
	5	170.1112	143.7403	-15.5%	138.6780	-18.5%
	6	189.1219	150.6950	-20.3%	143.3480	-24.2%

Tabela 6.51 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	83.8932	48.9%	65.1526	15.6%
	2	78.9836	237.1335	200.2%	95.4563	20.9%
	3	123.1719	287.2682	133.2%	163.2521	32.5%
	4	146.2677	567.7521	288.2%	217.0041	48.4%
	5	170.1112	712.9019	319.1%	251.4442	47.8%
	6	189.1219	1073.8506	467.8%	271.5863	43.6%
0.01	1	56.3481	70.2101	24.6%	64.0230	13.6%
	2	78.9836	143.0045	81.1%	92.0101	16.5%
	3	123.1719	225.2607	82.9%	152.8525	24.1%
	4	146.2677	315.2698	115.5%	206.6300	41.3%
	5	170.1112	401.9209	136.3%	233.2368	37.1%
	6	189.1219	564.2046	198.3%	245.3558	29.7%
0.05	1	56.3481	56.8421	0.9%	56.5262	0.3%
	2	78.9836	82.0546	3.9%	79.6828	0.9%
	3	123.1719	139.5634	13.3%	128.3734	4.2%
	4	146.2677	151.3889	3.5%	150.6429	3.0%
	5	170.1112	179.8733	5.7%	174.2079	2.4%
	6	189.1219	214.5119	13.4%	194.7840	3.0%
0.1	1	56.3481	49.0229	-13.0%	48.9466	-13.1%
	2	78.9836	68.5318	-13.2%	67.9741	-13.9%
	3	123.1719	108.4568	-11.9%	105.6907	-14.2%
	4	146.2677	114.2290	-21.9%	113.9869	-22.1%
	5	170.1112	132.4599	-22.1%	130.7279	-23.2%
	6	189.1219	143.2128	-24.3%	143.0346	-24.4%

Tabela 6.52 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	65.4316	16.1%	61.4777	9.1%
	2	78.9836	131.3628	66.3%	87.8491	11.2%
	3	123.1719	195.5891	58.8%	147.6152	19.8%
	4	146.2677	300.9945	105.8%	179.4169	22.7%
	5	170.1112	367.3663	116.0%	210.0278	23.5%
	6	189.1219	483.7245	155.8%	241.7403	27.8%
0.01	1	56.3481	62.0750	10.2%	60.8608	8.0%
	2	78.9836	99.3540	25.8%	86.4294	9.4%
	3	123.1719	179.5600	45.8%	143.2973	16.3%
	4	146.2677	194.1462	32.7%	174.7839	19.5%
	5	170.1112	253.0012	48.7%	204.5328	20.2%
	6	189.1219	343.6652	81.7%	228.1720	20.6%
0.05	1	56.3481	55.2543	-1.9%	55.1927	-2.1%
	2	78.9836	77.8952	-1.4%	77.3594	-2.1%
	3	123.1719	125.6327	2.0%	123.5059	0.3%
	4	146.2677	140.9509	-3.6%	140.7207	-3.8%
	5	170.1112	164.3399	-3.4%	162.3097	-4.6%
	6	189.1219	195.4096	3.3%	190.0915	0.5%
0.1	1	56.3481	48.5549	-13.8%	48.5403	-13.9%
	2	78.9836	67.2396	-14.9%	67.1040	-15.0%
	3	123.1719	103.7610	-15.8%	103.2240	-16.2%
	4	146.2677	111.3427	-23.9%	111.2854	-23.9%
	5	170.1112	127.9269	-24.8%	127.4146	-25.1%
	6	189.1219	143.0127	-24.4%	142.7605	-24.5%

Tabela 6.53 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	61.6590	9.4%	59.5350	5.7%
	2	78.9836	100.5490	27.3%	84.4544	6.9%
	3	123.1719	174.2134	41.4%	138.4098	12.4%
	4	146.2677	199.7644	36.6%	167.6445	14.6%
	5	170.1112	248.7041	46.2%	195.5508	15.0%
	6	189.1219	373.2196	97.3%	235.8115	24.7%
0.01	1	56.3481	59.7476	6.0%	59.0814	4.9%
	2	78.9836	88.4740	12.0%	83.5334	5.8%
	3	123.1719	155.5972	26.3%	135.3432	9.9%
	4	146.2677	166.6979	14.0%	164.4287	12.4%
	5	170.1112	207.5865	22.0%	191.7503	12.7%
	6	189.1219	274.9092	45.4%	227.6408	20.4%
0.05	1	56.3481	54.5609	-3.2%	54.5324	-3.2%
	2	78.9836	76.4214	-3.2%	76.2128	-3.5%
	3	123.1719	120.2239	-2.4%	119.3846	-3.1%
	4	146.2677	137.4668	-6.0%	137.3535	-6.1%
	5	170.1112	159.4169	-6.3%	158.6339	-6.7%
	6	189.1219	189.3546	0.1%	187.1853	-1.0%
0.1	1	56.3481	48.3564	-14.2%	48.3499	-14.2%
	2	78.9836	66.7542	-15.5%	66.7072	-15.5%
	3	123.1719	101.5882	-17.5%	101.3999	-17.7%
	4	146.2677	110.3706	-24.5%	110.3419	-24.6%
	5	170.1112	126.5945	-25.6%	126.3900	-25.7%
	6	189.1219	142.9502	-24.4%	142.7111	-24.5%

Tabela 6.54 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	56.3481	59.2498	5.1%	58.5817	4.0%
	2	78.9836	88.4241	12.0%	82.7514	4.8%
	3	123.1719	156.4955	27.1%	133.7080	8.6%
	4	146.2677	162.6807	11.2%	160.2272	9.5%
	5	170.1112	206.8549	21.6%	186.7095	9.8%
	6	189.1219	276.7022	46.3%	219.6692	16.2%
0.01	1	56.3481	58.3875	3.6%	58.1914	3.3%
	2	78.9836	83.6876	6.0%	82.0715	3.9%
	3	123.1719	138.5453	12.5%	131.7413	7.0%
	4	146.2677	158.4283	8.3%	157.6701	7.8%
	5	170.1112	189.4951	11.4%	183.6480	8.0%
	6	189.1219	231.1449	22.2%	214.0094	13.2%
0.05	1	56.3481	54.2523	-3.7%	54.2445	-3.7%
	2	78.9836	75.7453	-4.1%	75.6818	-4.2%
	3	123.1719	118.1566	-4.1%	117.8938	-4.3%
	4	146.2677	135.5208	-7.3%	135.4900	-7.4%
	5	170.1112	156.6057	-7.9%	156.3639	-8.1%
	6	189.1219	181.8990	-3.8%	181.1785	-4.2%
0.1	1	56.3481	48.2745	-14.3%	48.2727	-14.3%
	2	78.9836	66.5484	-15.7%	66.5336	-15.8%
	3	123.1719	100.8443	-18.1%	100.7824	-18.2%
	4	146.2677	109.8671	-24.9%	109.8597	-24.9%
	5	170.1112	125.8434	-26.0%	125.7837	-26.1%
	6	189.1219	142.9105	-24.4%	142.7016	-24.5%

Tabela 6.55 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular S-E-S-E (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [25] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

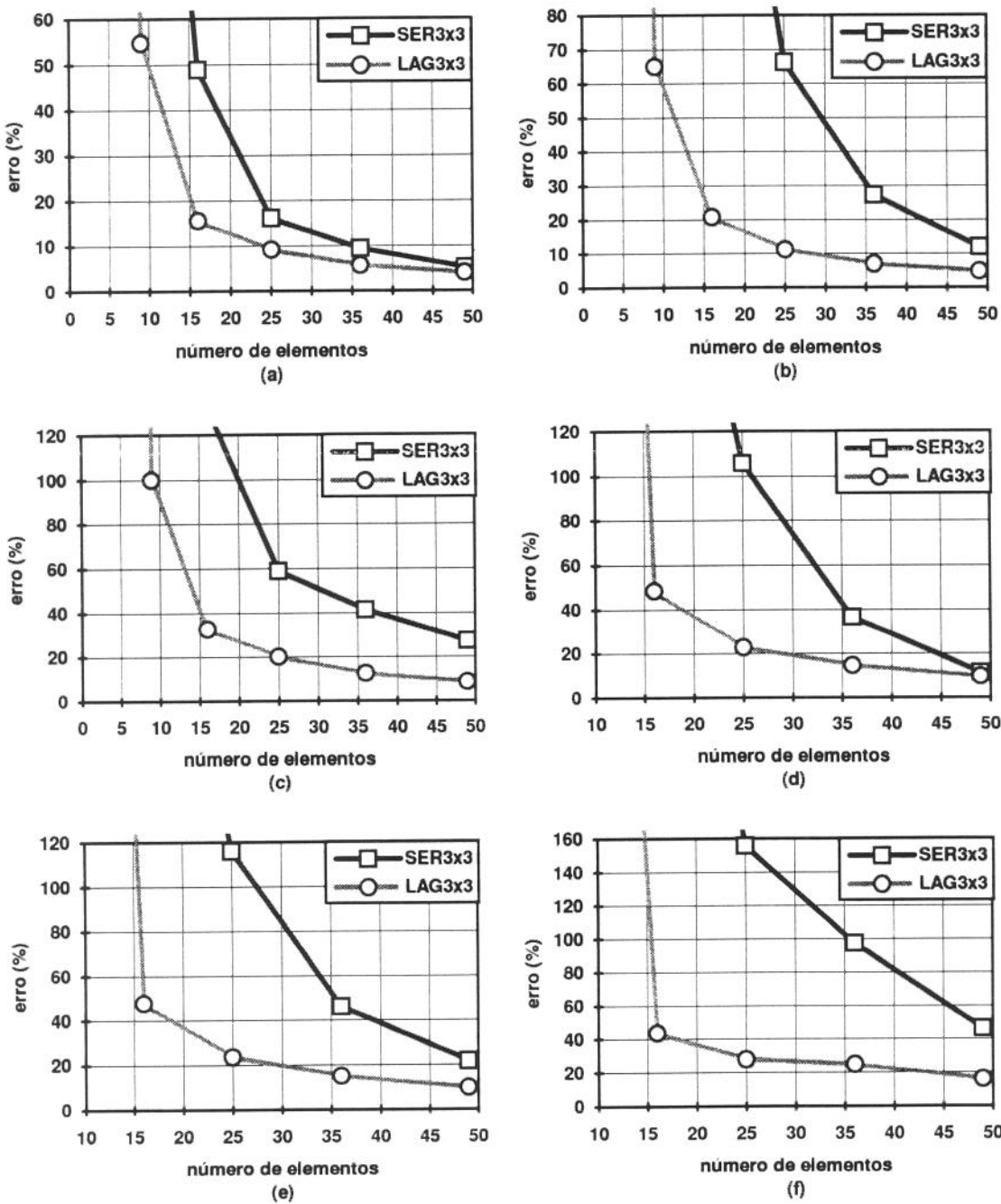


Figura 6.41 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

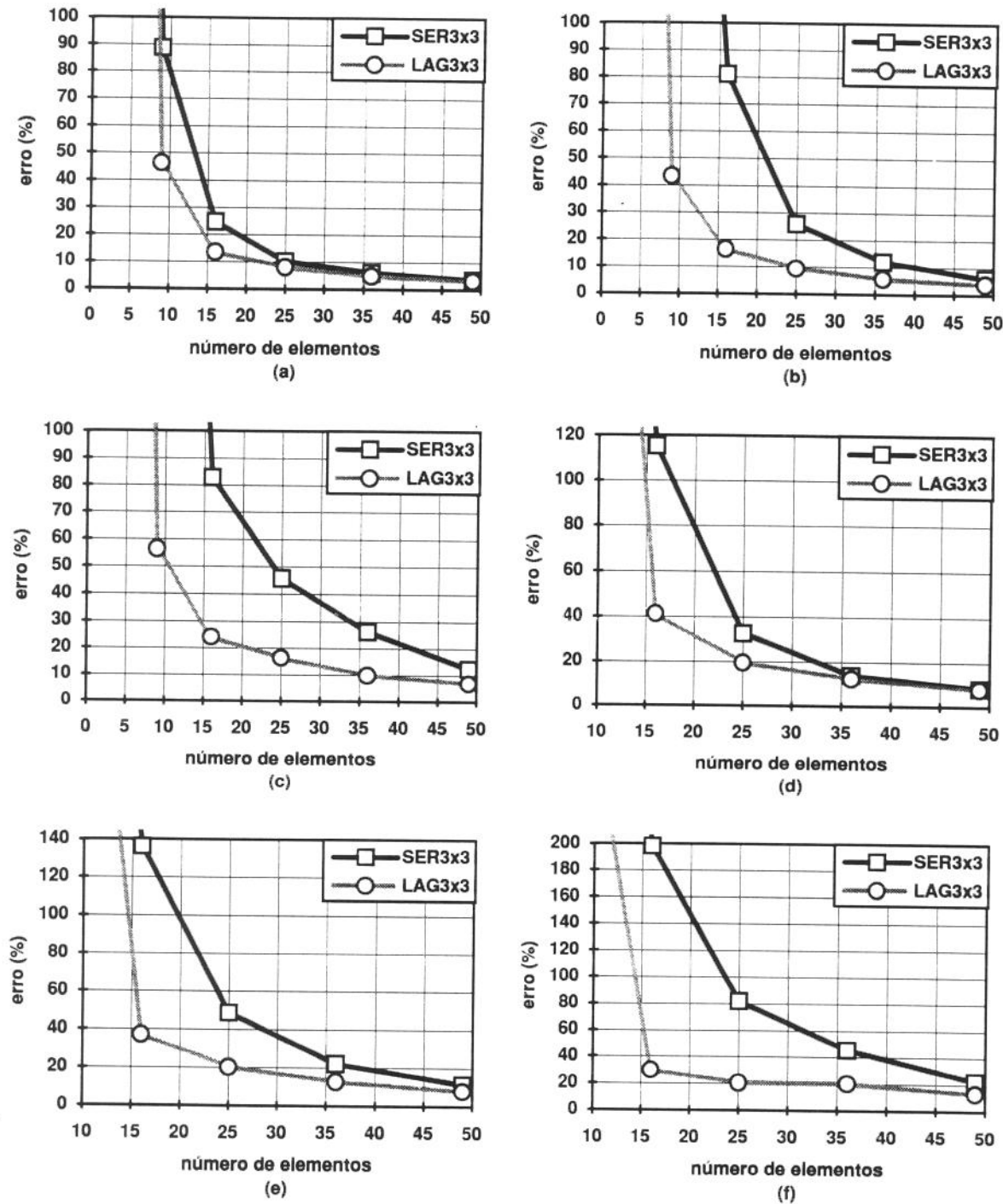


Figura 6.42 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

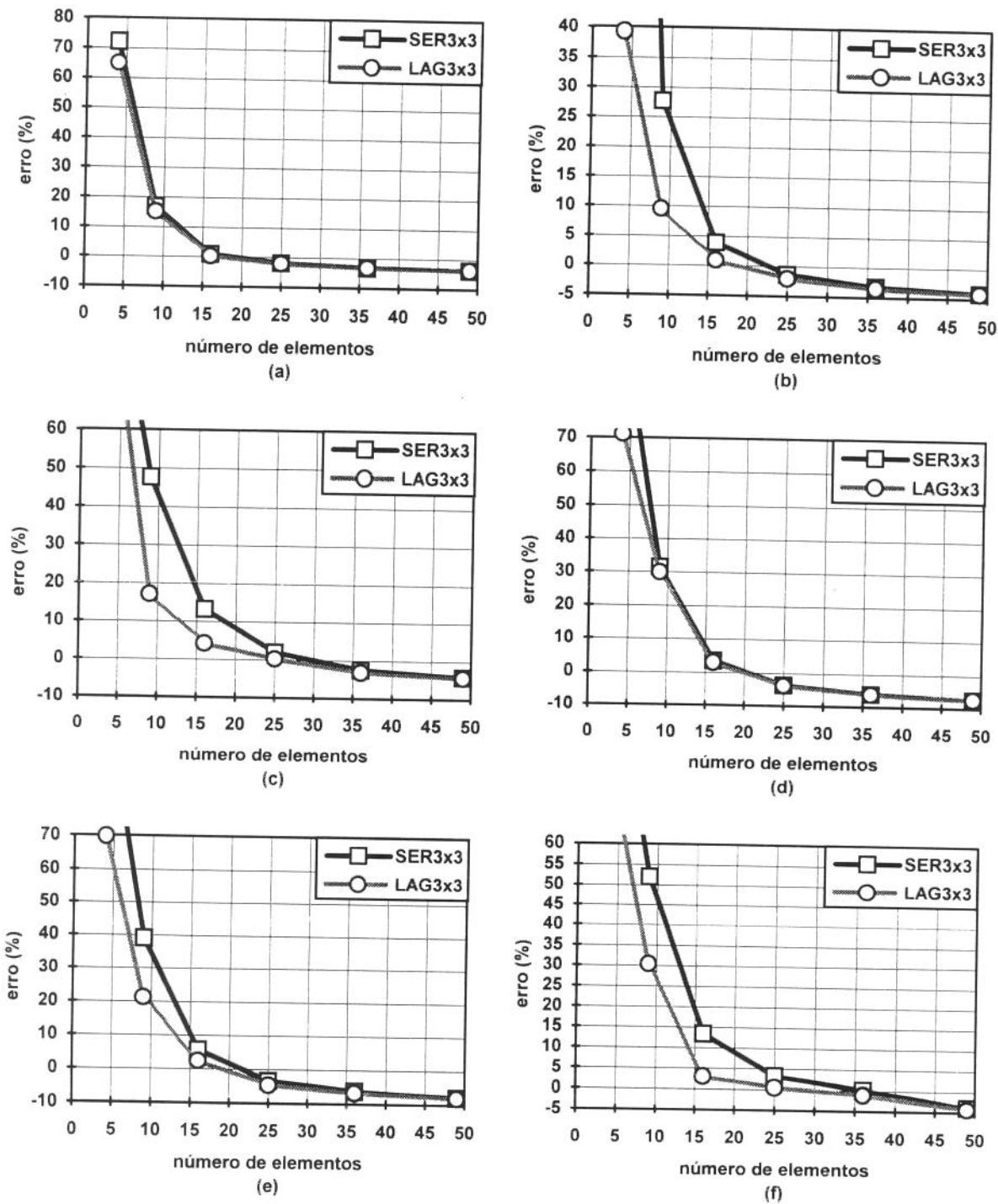


Figura 6.43 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

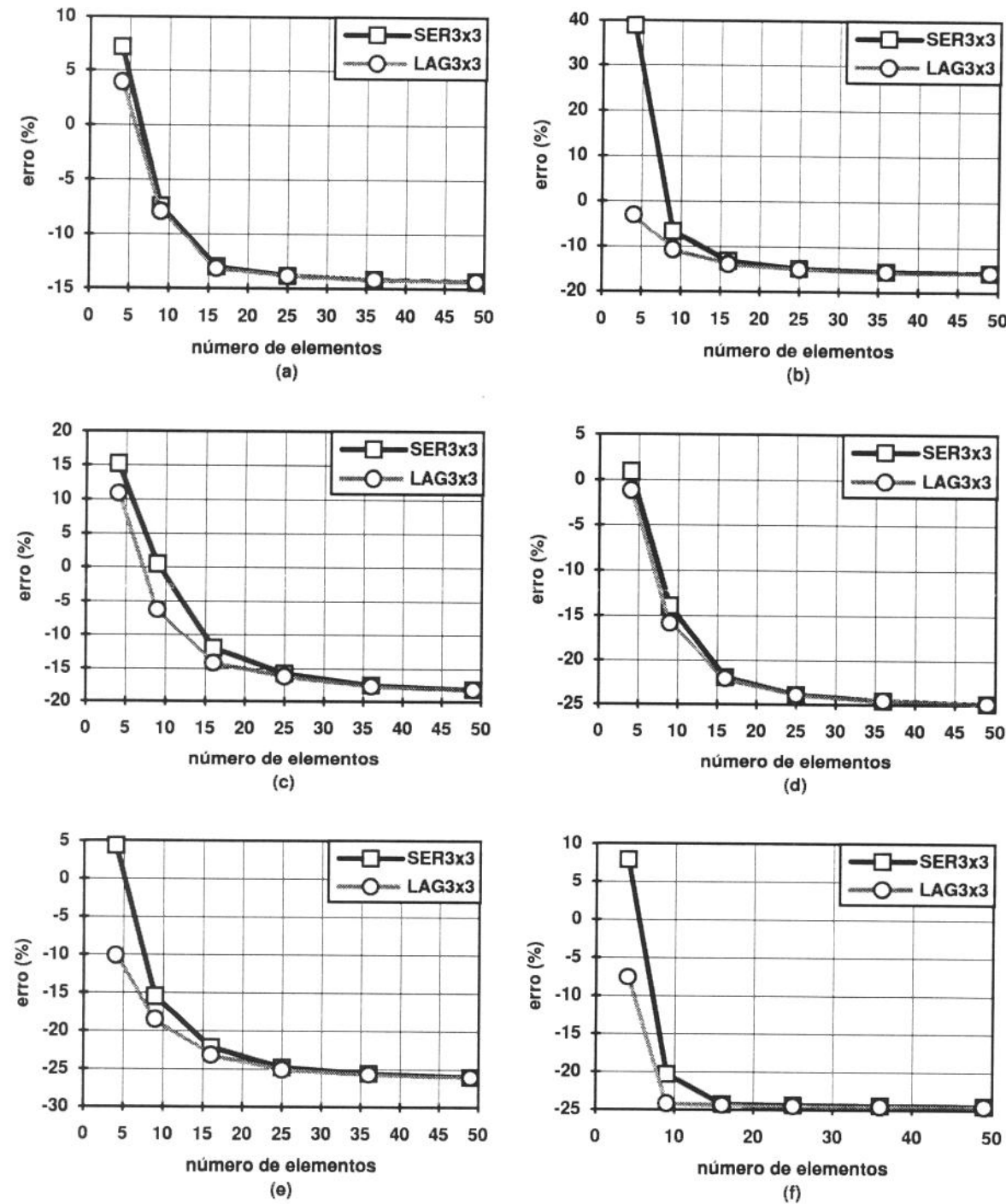


Figura 6.44 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular S-E-S-E ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.50 a 6.55 e das Figuras 6.41 a 6.44, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$). Nota-se, também, que a distorção na malha de discretização afeta proporcionalmente os dois elementos, em comparação com os resultados obtidos para a placa retangular S-E-S-E com malha regular (Item 6.2.1.4), mas, mesmo assim, a convergência para a solução exata é mantida. Deve-se notar, também, que o aumento do erro com o refinamento da malha, para o caso das placas moderadamente grossas ($t/a = 0.05$ e $t/a = 0.1$), se dá devido ao fato de se estar comparando os resultados obtidos com aqueles da teoria clássica [25]; infelizmente, não se tem na literatura os resultados obtidos a partir da teoria de Mindlin [26].

6.2.2.5 Placa retangular E-E-E-L ($a/b = 1.5$)

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.45 a 6.48), a placa foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos. Foram calculadas as seis primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, comparados com os obtidos analiticamente por *Leissa* [25], como mostram as Tabelas 6.56 a 6.61. Estas Tabelas apresentam, então, para cada relação t/a e para cada modo (de 1 a 6) os resultados analíticos, obtidos na referência [25] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER 3×3 e LAG 3×3) e seus respectivos erros.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 2 x 2)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	539.8802	1919.7%	535.7860	1904.4%
	2	65.9160	864.9066	1212.1%	557.9708	746.5%
	3	66.2190	1445.9019	2083.5%	1412.3098	2032.8%
	4	106.8000	1961.6407	1736.7%	1433.3516	1242.1%
	5	125.4000	2005.2566	1499.1%	1622.7162	1194.0%
	6	152.4800	2345.3996	1438.2%	1972.9963	1193.9%
0.01	1	26.7310	270.7971	913.0%	268.9392	906.1%
	2	65.9160	436.2111	561.8%	289.8898	339.8%
	3	66.2190	724.5348	994.1%	709.4838	971.4%
	4	106.8000	988.5887	825.6%	721.9072	575.9%
	5	125.4000	1002.6283	699.5%	820.1956	554.1%
	6	152.4800	1172.6998	669.1%	986.4981	547.0%
0.05	1	26.7310	59.0609	120.9%	58.7182	119.7%
	2	65.9160	106.0512	60.9%	94.2401	43.0%
	3	66.2190	153.7305	132.2%	151.3830	128.6%
	4	106.8000	200.5257	87.8%	172.5434	61.6%
	5	125.4000	234.5400	87.0%	197.2996	57.3%
	6	152.4800	236.6089	55.2%	210.1690	37.8%
0.1	1	26.7310	35.0672	31.2%	34.7927	30.2%
	2	65.9160	69.3468	5.2%	66.6686	1.1%
	3	66.2190	85.8729	29.7%	84.6816	27.9%
	4	106.8000	100.2628	-6.1%	98.6498	-7.6%
	5	125.4000	117.2700	-6.5%	106.9730	-14.7%
	6	152.4800	135.9110	-10.9%	116.6615	-23.5%

Tabela 6.56 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (2x2) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 3 x 3)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	89.5001	234.8%	45.8580	71.6%
	2	65.9160	326.6317	395.5%	104.9254	59.2%
	3	66.2190	784.6601	1084.9%	381.6739	476.4%
	4	106.8000	1016.4943	851.8%	1008.6188	844.4%
	5	125.4000	1129.3728	800.6%	1024.4973	717.0%
	6	152.4800	1676.5335	999.5%	1085.8939	612.2%
0.01	1	26.7310	55.1001	106.1%	40.0171	49.7%
	2	65.9160	179.2061	171.9%	96.8438	46.9%
	3	66.2190	475.1175	617.5%	355.0883	436.2%
	4	106.8000	511.8458	379.3%	507.7108	375.4%
	5	125.4000	575.3978	358.8%	524.0831	317.9%
	6	152.4800	855.6062	461.1%	626.3268	310.8%
0.05	1	26.7310	33.2752	24.5%	32.7336	22.5%
	2	65.9160	79.4676	20.6%	77.1137	17.0%
	3	66.2190	117.5259	77.5%	116.1041	75.3%
	4	106.8000	149.7620	40.2%	143.3731	34.2%
	5	125.4000	195.5424	55.9%	175.8108	40.2%
	6	152.4800	196.4407	28.8%	194.8672	27.8%
0.1	1	26.7310	27.5061	2.9%	27.3607	2.4%
	2	65.9160	61.7135	-6.4%	61.3009	-7.0%
	3	66.2190	72.3138	9.2%	71.4223	7.9%
	4	106.8000	97.7711	-8.5%	97.0006	-9.2%
	5	125.4000	99.7629	-20.4%	97.4163	-22.3%
	6	152.4800	117.6624	-22.8%	116.7416	-23.4%

Tabela 6.57 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (3x3) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 4 x 4)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	36.4630	36.4%	30.8433	15.4%
	2	65.9160	125.9931	91.1%	75.3254	14.3%
	3	66.2190	144.2515	117.8%	101.8350	53.8%
	4	106.8000	379.9023	255.7%	159.5963	49.4%
	5	125.4000	466.6663	272.1%	198.7271	58.5%
	6	152.4800	785.5232	415.2%	276.8824	81.6%
0.01	1	26.7310	32.1735	20.4%	30.3272	13.5%
	2	65.9160	96.9015	47.0%	73.6315	11.7%
	3	66.2190	103.7240	56.6%	96.7939	46.2%
	4	106.8000	243.2844	127.8%	146.5529	37.2%
	5	125.4000	262.2628	109.1%	189.8039	51.4%
	6	152.4800	501.4051	228.8%	263.1120	72.6%
0.05	1	26.7310	27.9880	4.7%	27.8266	4.1%
	2	65.9160	66.4005	0.7%	65.5574	-0.5%
	3	66.2190	76.9945	16.3%	76.6188	15.7%
	4	106.8000	115.5031	8.1%	112.3155	5.2%
	5	125.4000	154.5368	23.2%	152.6285	21.7%
	6	152.4800	177.6836	16.5%	176.4833	15.7%
0.1	1	26.7310	25.1469	-5.9%	25.0889	-6.1%
	2	65.9160	57.1223	-13.3%	56.9454	-13.6%
	3	66.2190	61.1446	-7.7%	61.0364	-7.8%
	4	106.8000	89.9105	-15.8%	89.0844	-16.6%
	5	125.4000	97.7608	-22.0%	97.5410	-22.2%
	6	152.4800	114.6843	-24.8%	114.1343	-25.1%

Tabela 6.58 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (4x4) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 5 x 5)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	31.8476	19.1%	29.0252	8.6%
	2	65.9160	91.5410	38.9%	72.0536	9.3%
	3	66.2190	94.4974	42.7%	82.4607	24.5%
	4	106.8000	214.1850	100.5%	131.0438	22.7%
	5	125.4000	230.1325	83.5%	178.5715	42.4%
	6	152.4800	255.7581	67.7%	195.7361	28.4%
0.01	1	26.7310	29.7697	11.4%	28.7911	7.7%
	2	65.9160	77.4388	17.5%	71.2649	8.1%
	3	66.2190	84.3309	27.4%	80.5987	21.7%
	4	106.8000	159.3495	49.2%	126.7344	18.7%
	5	125.4000	194.0389	54.7%	174.7883	39.4%
	6	152.4800	196.4505	28.8%	189.4487	24.2%
0.05	1	26.7310	26.9718	0.9%	26.8915	0.6%
	2	65.9160	64.7193	-1.8%	64.5139	-2.1%
	3	66.2190	68.9974	4.2%	68.7615	3.8%
	4	106.8000	106.8507	0.0%	105.7104	-1.0%
	5	125.4000	140.0560	11.7%	139.5777	11.3%
	6	152.4800	147.6286	-3.2%	147.0366	-3.6%
0.1	1	26.7310	24.7056	-7.6%	24.6774	-7.7%
	2	65.9160	56.5704	-14.2%	56.5225	-14.3%
	3	66.2190	58.1570	-12.2%	58.0875	-12.3%
	4	106.8000	87.2227	-18.3%	86.9220	-18.6%
	5	125.4000	97.2030	-22.5%	97.1126	-22.6%
	6	152.4800	105.5674	-30.8%	105.3855	-30.9%

Tabela 6.59 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L (a/b=1.5) e malha de discretização distorcida de (5x5) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 6 x 6)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	28.9074	8.1%	28.1519	5.3%
	2	65.9160	77.1864	17.1%	69.1602	4.9%
	3	66.2190	78.9441	19.2%	76.2210	15.1%
	4	106.8000	157.0522	47.1%	119.9022	12.3%
	5	125.4000	169.1770	34.9%	161.9255	29.1%
	6	152.4800	192.4339	26.2%	167.0770	9.6%
0.01	1	26.7310	28.2671	5.7%	27.9928	4.7%
	2	65.9160	71.1257	7.9%	68.6280	4.1%
	3	66.2190	76.3339	15.3%	75.2668	13.7%
	4	106.8000	129.4432	21.2%	117.8504	10.3%
	5	125.4000	161.3098	28.6%	158.2309	26.2%
	6	152.4800	172.1200	12.9%	164.6219	8.0%
0.05	1	26.7310	26.4935	-0.9%	26.4615	-1.0%
	2	65.9160	63.5443	-3.6%	63.4559	-3.7%
	3	66.2190	66.3915	0.3%	66.2885	0.1%
	4	106.8000	102.8936	-3.7%	102.4817	-4.0%
	5	125.4000	127.3220	1.5%	127.0558	1.3%
	6	152.4800	143.4277	-5.9%	143.1909	-6.1%
0.1	1	26.7310	24.5328	-8.2%	24.5170	-8.3%
	2	65.9160	56.2291	-14.7%	56.2055	-14.7%
	3	66.2190	57.2680	-13.5%	57.2287	-13.6%
	4	106.8000	86.0886	-19.4%	85.9739	-19.5%
	5	125.4000	97.1460	-22.5%	97.3772	-22.3%
	6	152.4800	101.5840	-33.4%	101.5123	-33.4%

Tabela 6.60 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (6x6) elementos.

t/a	modo	resultado analítico	a/b = 1.5 (malha 7 x 7)			
			SER3x3	erro	LAG3x3	erro
0.005	1	26.7310	28.1300	5.2%	27.6905	3.6%
	2	65.9160	71.3492	8.2%	68.4513	3.8%
	3	66.2190	74.5633	12.6%	72.6680	9.7%
	4	106.8000	130.4321	22.1%	115.7585	8.4%
	5	125.4000	154.2399	23.0%	150.0358	19.6%
	6	152.4800	173.6931	13.9%	163.4213	7.2%
0.01	1	26.7310	27.7080	3.7%	27.5637	3.1%
	2	65.9160	68.8210	4.4%	68.0111	3.2%
	3	66.2190	72.5615	9.6%	71.9323	8.6%
	4	106.8000	118.5162	11.0%	114.3135	7.0%
	5	125.4000	148.9858	18.8%	147.2300	17.4%
	6	152.4800	164.3525	7.8%	161.3955	5.8%
0.05	1	26.7310	26.2451	-1.8%	26.2254	-1.9%
	2	65.9160	63.2049	-4.1%	63.1741	-4.2%
	3	66.2190	64.7471	-2.2%	64.6892	-2.3%
	4	106.8000	101.2672	-5.2%	101.1125	-5.3%
	5	125.4000	122.3225	-2.5%	122.1767	-2.6%
	6	152.4800	142.1313	-6.8%	142.0618	-6.8%
0.1	1	26.7310	24.4351	-8.6%	24.4261	-8.6%
	2	65.9160	56.1112	-14.9%	56.1019	-14.9%
	3	66.2190	56.6919	-14.4%	56.6706	-14.4%
	4	106.8000	85.5777	-19.9%	85.5330	-19.9%
	5	125.4000	97.0819	-22.6%	97.0366	-22.6%
	6	152.4800	99.8755	-34.5%	99.8322	-34.5%

Tabela 6.61 Parâmetro adimensional de frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) e malha de discretização distorcida de (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) para as seis primeiras frequências naturais e as diversas relações t/a entre a espessura e dimensão característica; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [25] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

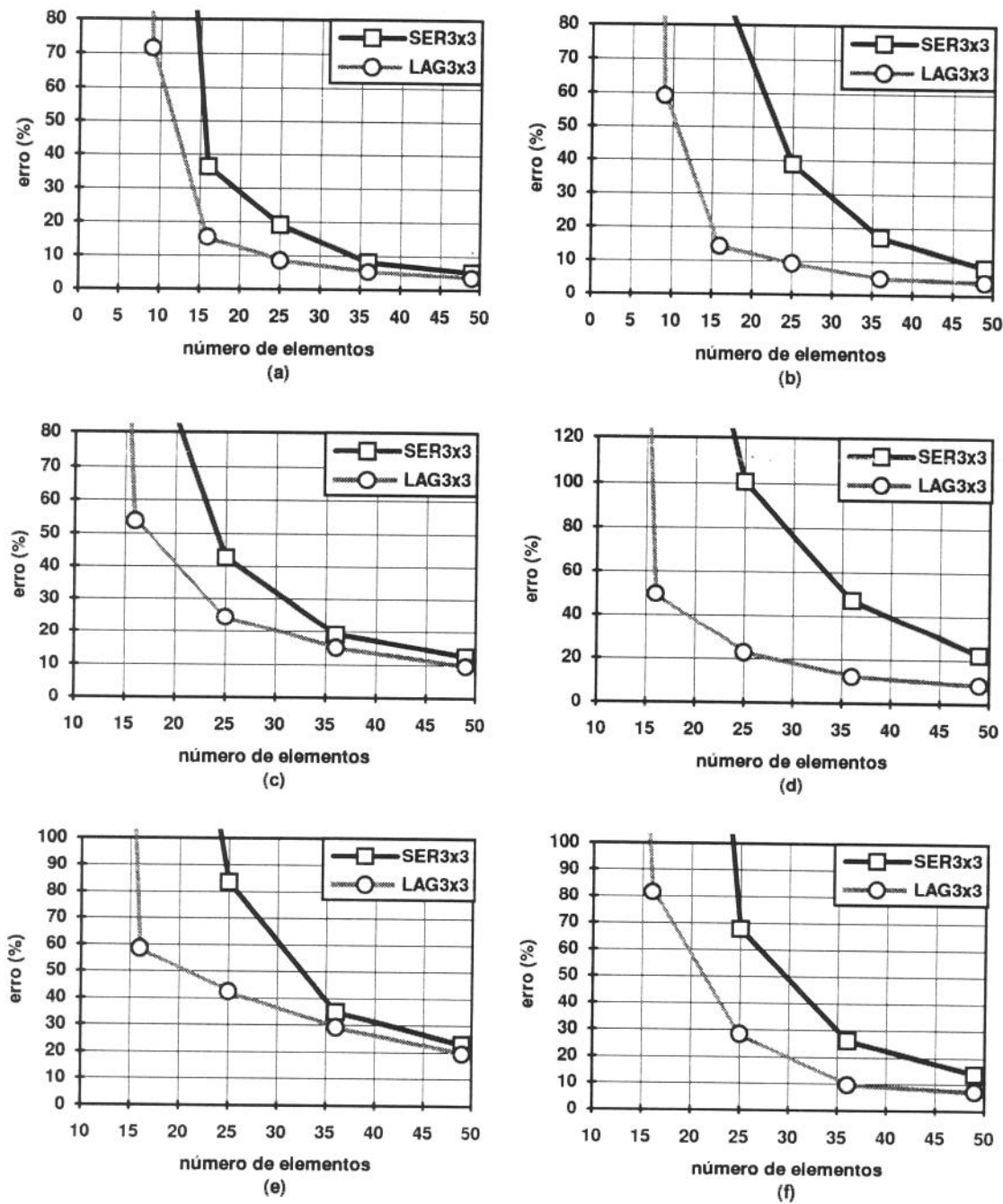


Figura 6.45 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.005$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

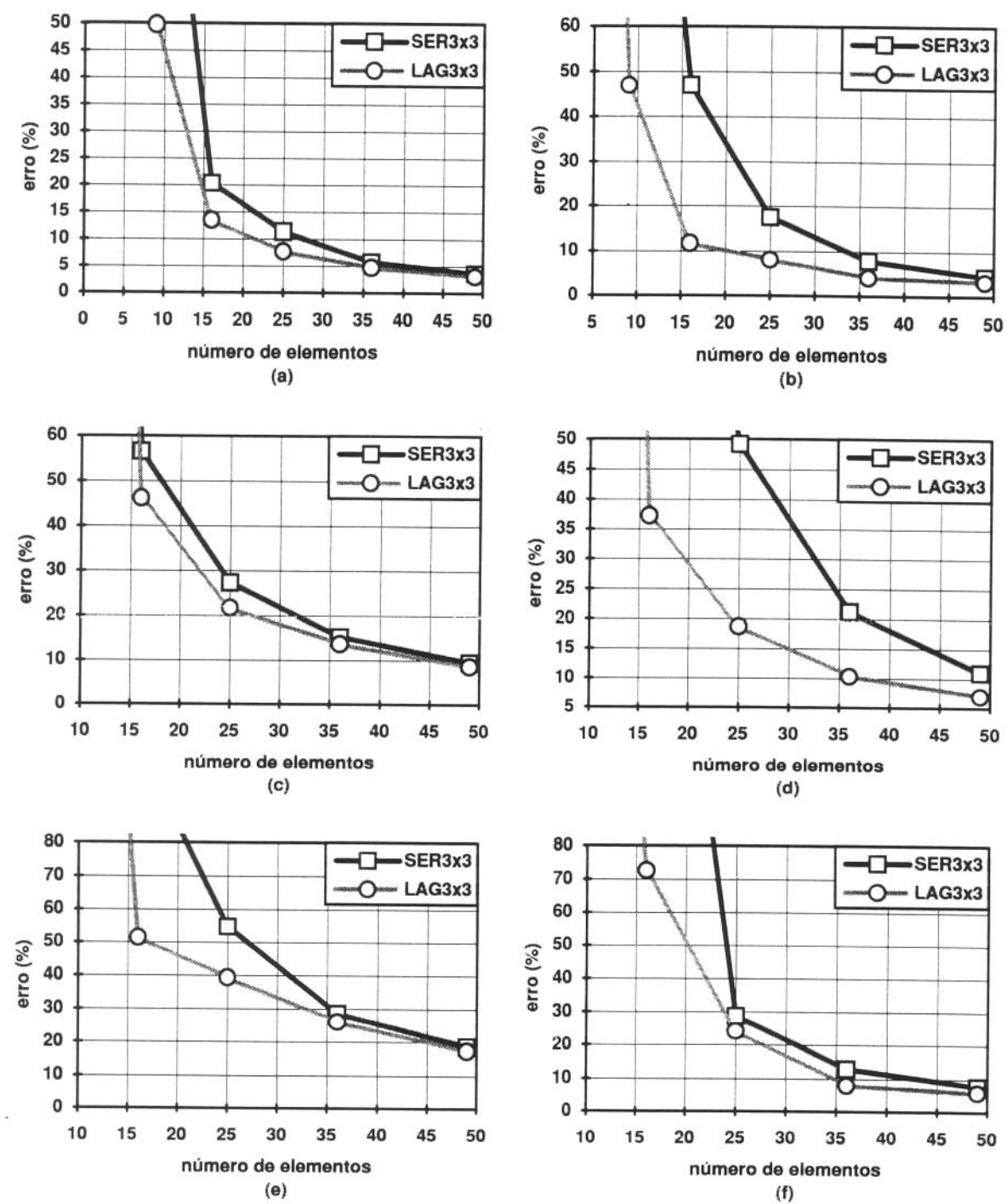


Figura 6.46 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.01$ (placa fina), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) freqüências naturais.

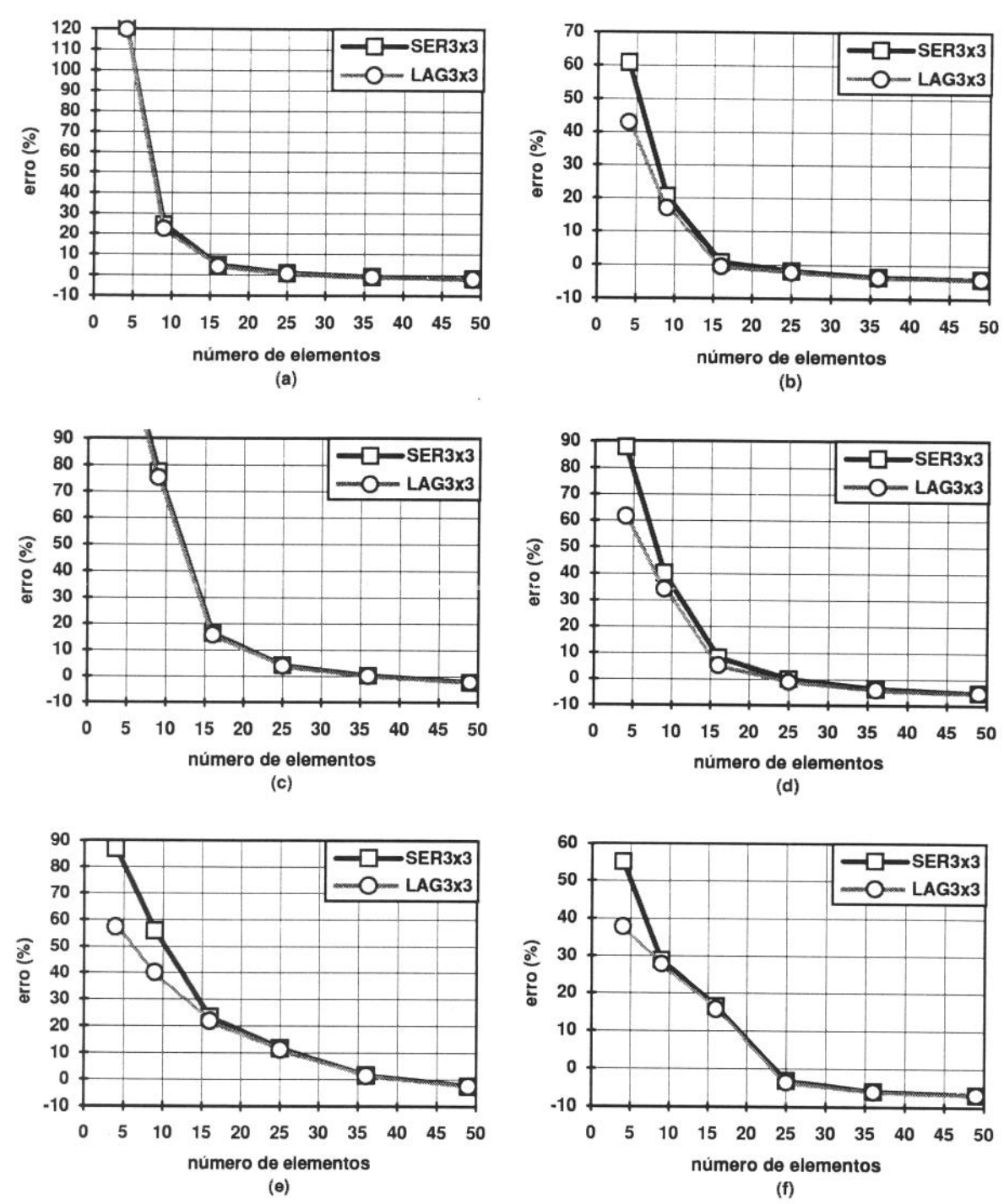


Figura 6.47 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.05$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

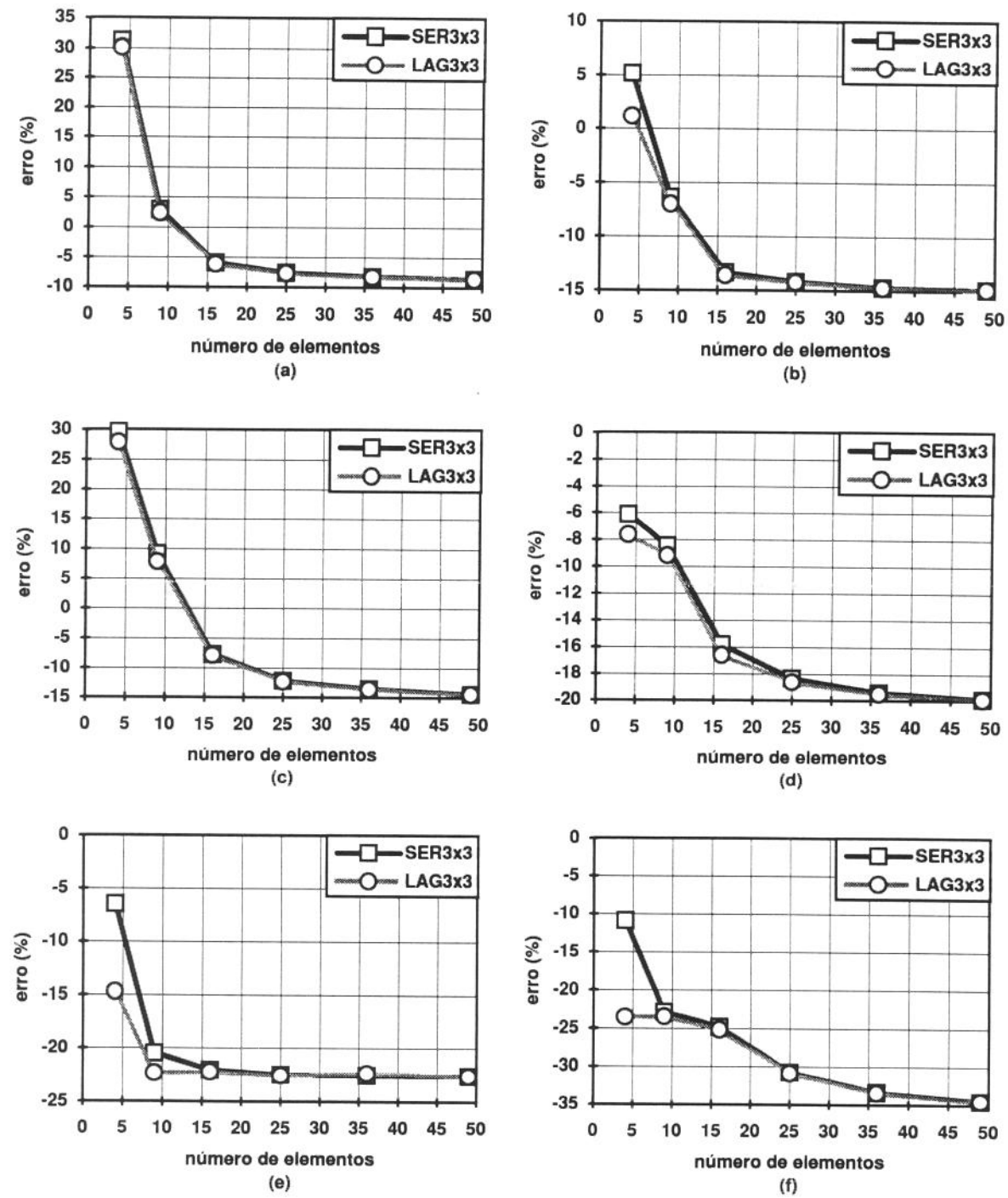


Figura 6.48 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a placa retangular E-E-E-L ($a/b=1.5$) com $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa), correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.56 a 6.61 e das Figuras 6.45 a 6.48, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0.05$). Nota-se, também, que a distorção na malha de discretização afeta proporcionalmente os dois elementos, em comparação com os resultados obtidos para a placa retangular E-E-E-L com malha regular (Item 6.2.1.5), mas, mesmo assim, a convergência para a solução exata é mantida. Deve-se notar, também, que o aumento do erro com o refinamento da malha, para o caso das placas moderadamente grossas ($t/a = 0.05$ e $t/a = 0.1$), se dá devido ao fato de se estar comparando os resultados obtidos com aqueles da teoria clássica [25]; infelizmente, não se tem na literatura os resultados obtidos a partir da teoria de Mindlin [26].

6.3 Cascas cilíndricas

A característica mais importante nos problemas que envolvem cascas cilíndricas é o fato de que estas possuem um raio de curvatura R , portanto, apresentam malha de discretização distorcida.

Aplicando a mesma simbologia usada para placas retangulares, tem-se para a casca cilíndrica de dimensões L e S e raio de curvatura R , que a notação E-L-L-L, identifica uma casca com o lado correspondente a $X=0$ engastado e os demais lados livres (Figura 6.49).

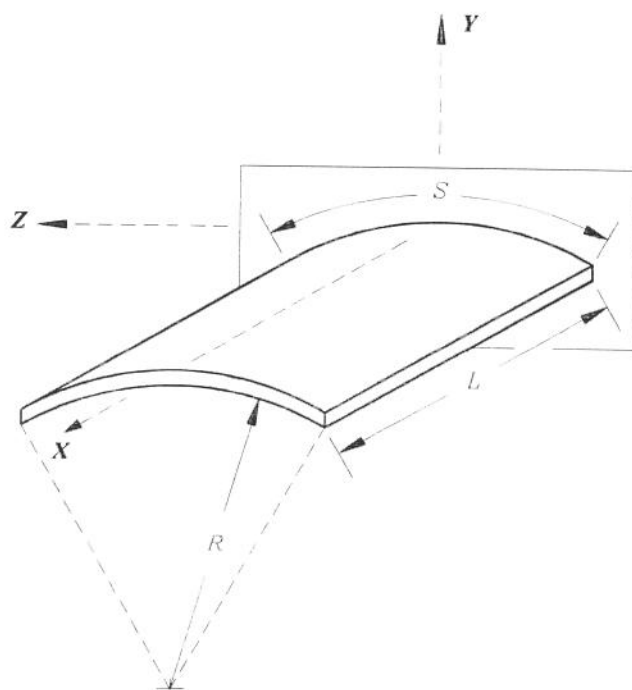


Figura 6.49 Casca cilíndrica E-L-L-L com convenção de coordenadas.

Para cascas cilíndricas, como para placas retangulares, também existem 21 casos distintos, que envolvem todas as combinações das condições de contorno clássicas (engastada, simplesmente apoiada ou livre). Serão apresentados, a seguir, os resultados obtidos para alguns desses casos.

6.3.1 Malha de discretização regular

Como foi visto, as cascas cilíndricas têm malha de discretização distorcida, devido ao seu raio de curvatura. Mas, levando-se em conta apenas sua superfície, pode-se modelar a casca cilíndrica com uma malha de discretização regular como para placas retangulares (Figura 6.2).

6.3.1.1 Casca cilíndrica E-L-L-L

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.50 e 6.51), a casca foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. Foram calculadas as doze primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e estes resultados, comparados com os obtidos, experimentalmente, por *Olson* e *Lindberg* [28] como mostram as Tabelas 6.62 e 6.63. Estas Tabelas apresentam, então, para cada malha de discretização e para cada modo (de 1 a 12) os resultados experimentais, obtidos na referência [28] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

As características da casca modelada são as seguintes:

$$S = L = 0.3048 \text{ m}$$

$$R = 0.6096 \text{ m}$$

$$t = 3.048 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$E = 2.068 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 7.80 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0.3$$

MALHA	MODO	RESULTADO EXPERIMENTAL	t/a = 0.01			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
2x2	1	85.6	126.7299	48.0%	109.3570	27.8%
	2	134.5	166.8321	24.0%	165.4197	23.0%
	3	259.0	767.5025	196.3%	602.2853	132.5%
	4	351.0	805.2481	129.4%	733.6633	109.0%
	5	395.0	850.4240	115.3%	762.6993	93.1%
	6	531.0	1802.0147	239.4%	1159.6240	118.4%
	7	743.0	2093.0967	181.7%	1781.1495	139.7%
	8	751.0	2341.6060	211.8%	1944.1459	158.9%
	9	790.0	4115.1449	420.9%	2201.6535	178.7%
	10	809.0	4133.2775	410.9%	4063.7841	402.3%
	11	997.0	4268.8433	328.2%	4086.4981	309.9%
	12	1216.0	4885.7278	301.8%	4175.6791	243.4%
3x3	1	85.6	95.5442	11.6%	92.9208	8.6%
	2	134.5	155.9197	15.9%	154.5459	14.9%
	3	259.0	396.7310	53.2%	372.9455	44.0%
	4	351.0	429.5765	22.4%	407.4218	16.1%
	5	395.0	616.3153	56.0%	491.8702	24.5%
	6	531.0	1080.8830	103.6%	837.6367	57.7%
	7	743.0	1216.1501	63.7%	1158.1157	55.9%
	8	751.0	1302.2588	73.4%	1212.8202	61.5%
	9	790.0	1359.5384	72.1%	1225.2602	55.1%
	10	809.0	1785.5856	120.7%	1403.4951	73.5%
	11	997.0	2068.6887	107.5%	1608.9024	61.4%
	12	1216.0	2336.9471	92.2%	1779.3246	46.3%
4x4	1	85.6	89.9350	5.1%	89.1904	4.2%
	2	134.5	148.4503	10.4%	147.5704	9.7%
	3	259.0	300.6097	16.1%	293.0989	13.2%
	4	351.0	379.1495	8.0%	373.1015	6.3%
	5	395.0	481.5567	21.9%	431.3893	9.2%
	6	531.0	761.4697	43.4%	744.6399	40.2%
	7	743.0	828.9455	11.6%	788.1789	6.1%
	8	751.0	915.3338	21.9%	877.0526	16.8%
	9	790.0	1053.4977	33.4%	899.5796	13.9%
	10	809.0	1328.9101	64.3%	987.3181	22.0%
	11	997.0	1587.3986	59.2%	1342.8356	34.7%
	12	1216.0	1779.1094	46.3%	1493.6326	22.8%

Tabela 6.62 Freqüências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização regulares de (2x2), (3x3) e (4x4) elementos.

MALHA	MODOS	RESULTADO EXPERIMENTAL	$\nu/a = 0.01$			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
5x5	1	85.6	88.1884	3.0%	87.9001	2.7%
	2	134.5	144.0757	7.1%	143.6100	6.8%
	3	259.0	270.8342	4.6%	268.3435	3.6%
	4	351.0	362.7732	3.4%	360.1636	2.6%
	5	395.0	425.6885	7.8%	410.6889	4.0%
	6	531.0	637.4464	20.0%	631.3047	18.9%
	7	743.0	784.5889	5.6%	769.4676	3.6%
	8	751.0	833.0619	10.9%	808.8101	7.7%
	9	790.0	889.3472	12.6%	835.0669	5.7%
	10	809.0	996.9796	23.2%	893.6133	10.5%
	11	997.0	1328.9762	33.3%	1295.6287	30.0%
	12	1216.0	1345.5333	10.7%	1316.6950	8.3%
6x6	1	85.6	87.4610	2.2%	87.3247	2.0%
	2	134.5	141.8568	5.5%	141.5962	5.3%
	3	259.0	259.7689	0.3%	258.8530	-0.1%
	4	351.0	355.1562	1.2%	353.9556	0.8%
	5	395.0	406.7772	3.0%	401.5795	1.7%
	6	531.0	589.1365	10.9%	586.5152	10.5%
	7	743.0	766.8626	3.2%	758.9264	2.1%
	8	751.0	793.1297	5.6%	778.7115	3.7%
	9	790.0	823.9575	4.3%	808.7468	2.4%
	10	809.0	889.8159	10%	856.7469	5.9%
	11	997.0	1185.8174	18.9%	1180.4217	18.4%
	12	1216.0	1289.0288	6.0%	1275.3468	4.9%
7x7	1	85.6	87.0999	1.8%	87.0215	1.7%
	2	134.5	140.7138	4.6%	140.5492	4.5%
	3	259.0	254.9203	-1.6%	254.5376	-1.7%
	4	351.0	351.1515	0.0%	350.5436	-0.1%
	5	395.0	398.9902	1.0%	396.8331	0.5%
	6	531.0	566.5572	6.7%	565.3097	6.5%
	7	743.0	755.9515	1.7%	751.8858	1.2%
	8	751.0	769.9224	2.5%	762.7186	1.6%
	9	790.0	800.9981	1.4%	795.9824	0.8%
	10	809.0	851.0003	5.2%	838.5670	3.7%
	11	997.0	1117.9131	12.1%	1114.8180	11.8%
	12	1216.0	1269.8905	4.4%	1264.4742	4.0%

Tabela 6.63 Frequências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização regulares de (5x5), (6x6) e (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a casca E-L-L-L para as doze primeiras frequências naturais; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [28] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

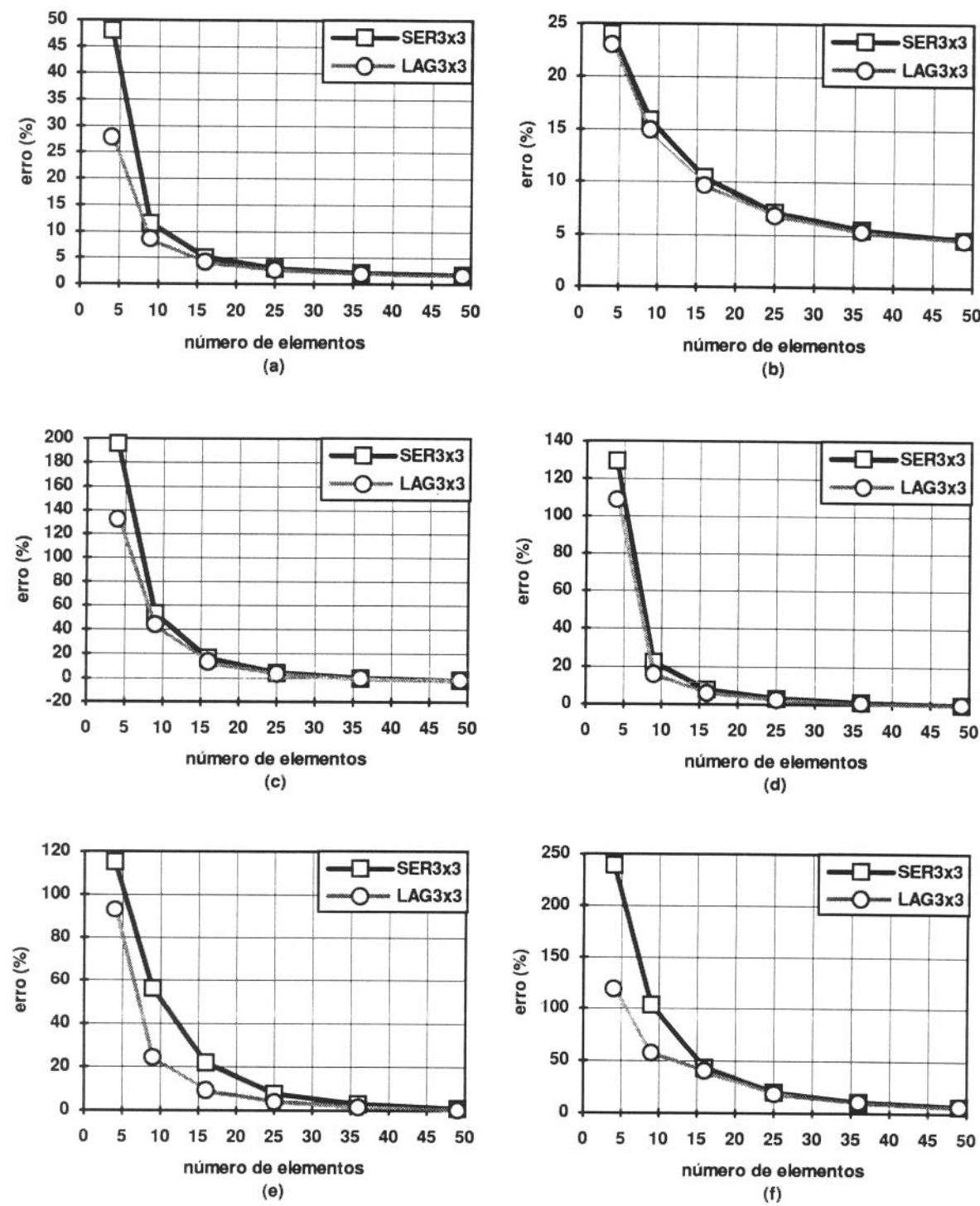


Figura 6.50 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

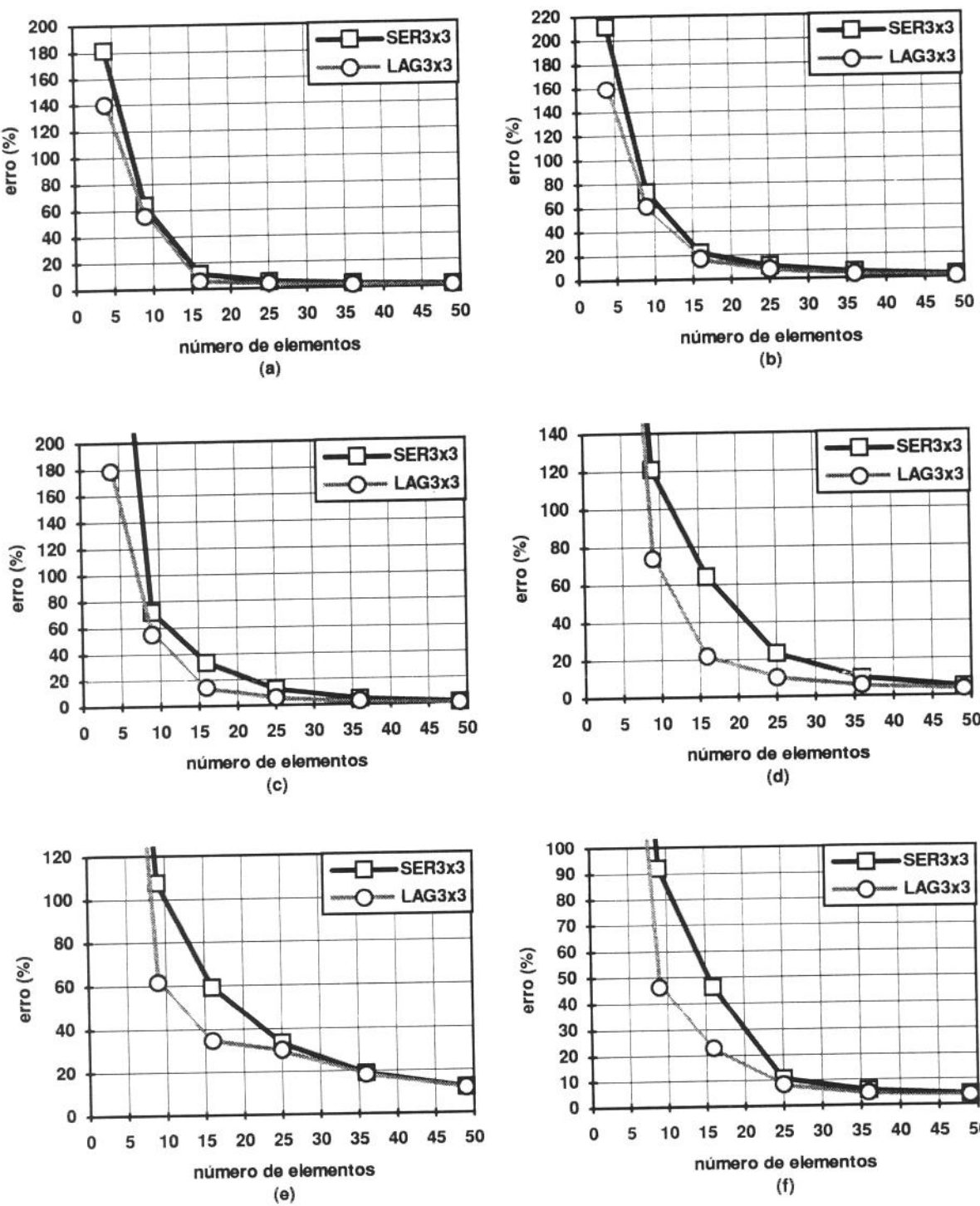


Figura 6.51 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.

A Figura 6.52 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da casca cilíndrica E-L-L-L, com malha de discretização de (7x7) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

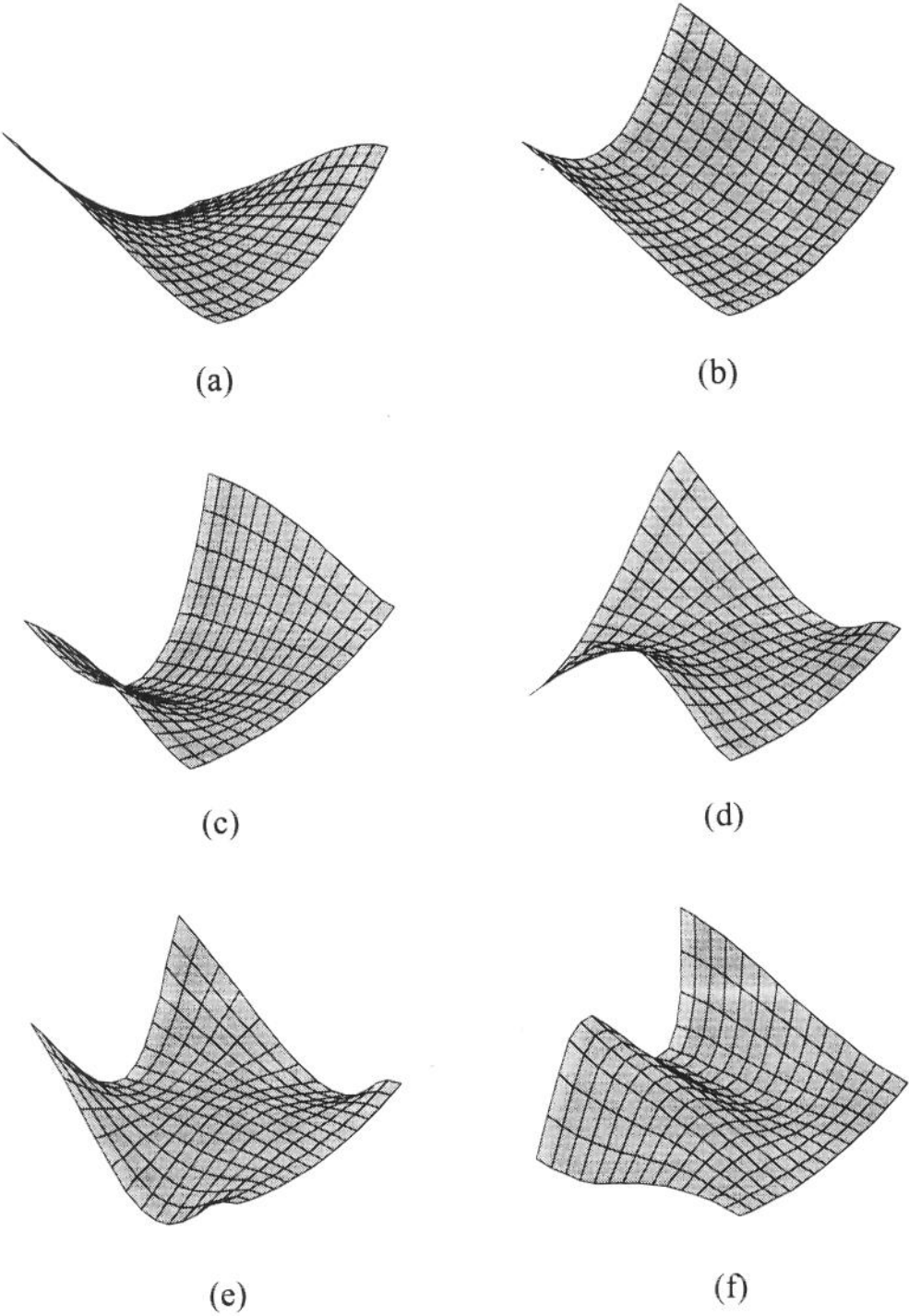


Figura 6.52 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da casca cilíndrica E-L-L-L, com malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.62 e 6.63 e das Figuras 6.50 e 6.51, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity.

6.3.1.2 Casca cilíndrica E-E-E-E

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.53 e 6.54), a casca foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. Foram calculadas as doze primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e estes resultados, comparados com os obtidos, experimentalmente, por Deb Nath [29] como mostram as Tabelas 6.64 e 6.65. Estas Tabelas apresentam, então, para cada malha de discretização e para cada modo (de 1 a 12) os resultados experimentais, obtidos na referência [29] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

As características da casca modelada são as seguintes:

$$S = 101.6 \text{ mm}$$

$$L = 76.2 \text{ mm}$$

$$R = 762.0 \text{ mm}$$

$$t = 0.33 \text{ mm}$$

$$E = 6.89 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2.66 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0.33$$

MALHA	MODO	RESULTADO EXPERIMENTAL	$l/a = 0.00325$			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
2x2	1	814.0	10420.9697	1180.2%	10406.9621	1178.5%
	2	940.0	26276.4355	2695.4%	18311.0922	1848.0%
	3	1260.0	26697.6523	2018.9%	22630.5186	1696.1%
	4	1306.0	33722.0977	2482.1%	27198.5860	1982.6%
	5	1452.0	38772.7969	2570.3%	33065.4390	2177.2%
	6	1735.0	43382.0117	2307.4%	37862.7566	2082.3%
	7	1802.0	51025.4323	2831.6%	42664.1387	2267.6%
	8	2100.0	56273.7215	2679.7%	47504.1820	2162.1%
	9	2225.0	60780.3251	2731.7%	51594.4048	2218.8%
	10	2280.0	62145.9621	2725.7%	52027.7560	2181.9%
	11	2518.0	63594.6084	2525.6%	55418.1651	2100.9%
	12	2622.0	75778.4221	2890.1%	60674.8115	2214.1%
3x3	1	814.0	4333.8703	432.4%	1092.4076	34.2%
	2	940.0	13028.8463	1286.0%	11583.7959	1132.3%
	3	1260.0	16297.2248	1193.4%	15454.7070	1126.6%
	4	1306.0	20046.0100	1434.9%	18815.5251	1340.7%
	5	1452.0	23044.2494	1487.1%	19293.2686	1228.7%
	6	1735.0	27141.7961	1464.4%	24331.8023	1302.4%
	7	1802.0	32881.8685	1724.7%	25080.3003	1291.8%
	8	2100.0	37647.2926	1692.7%	27613.6295	1214.9%
	9	2225.0	39640.5712	1681.6%	31350.0832	1309.0%
	10	2280.0	42050.6631	1744.3%	32996.9574	1347.2%
	11	2518.0	45303.8211	1699.2%	39856.9337	1482.9%
	12	2622.0	48951.0352	1766.9%	46944.3497	1690.4%
4x4	1	814.0	1864.2881	129.0%	1049.9720	29.0%
	2	940.0	4649.0103	394.6%	1122.4164	19.4%
	3	1260.0	5079.5256	303.1%	1650.8058	31.0%
	4	1306.0	12123.8212	828.3%	1919.4845	47.0%
	5	1452.0	17459.7162	1102.5%	16856.7537	1060.9%
	6	1735.0	21402.0717	1133.5%	16932.0010	875.9%
	7	1802.0	22893.5915	1170.5%	21904.1068	1115.5%
	8	2100.0	23637.7683	1025.6%	21979.5641	946.6%
	9	2225.0	25198.8606	1032.5%	22499.6890	911.2%
	10	2280.0	30044.3627	1217.7%	22526.6352	888.0%
	11	2518.0	30565.1819	1113.9%	28117.7824	1016.7%
	12	2622.0	33278.2893	1169.2%	29247.8377	1015.5%

Tabela 6.64 Freqüências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização regulares de (2x2), (3x3) e (4x4) elementos.

MALHA	MODOS	RESULTADO EXPERIMENTAL	$t/a = 0.01$			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
5x5	1	814.0	1241.7611	52.6%	985.1116	21.0%
	2	940.0	2383.9717	153.6%	1028.7850	9.4%
	3	1260.0	2529.1339	100.7%	1512.2073	20.0%
	4	1306.0	4946.6259	278.8%	1669.1699	27.8%
	5	1452.0	5290.8493	264.4%	1717.2689	18.3%
	6	1735.0	6318.2547	264.2%	2316.0308	33.5%
	7	1802.0	12073.4284	570.0%	2740.9392	52.1%
	8	2100.0	13133.8353	525.4%	2986.3314	42.2%
	9	2225.0	21783.9946	879.1%	3628.7693	63.1%
	10	2280.0	22385.5589	881.8%	22280.8995	877.2%
	11	2518.0	24795.2851	884.7%	22587.9913	797.1%
	12	2622.0	26402.7358	907.0%	22760.6441	768.1%
6x6	1	814.0	1086.5799	33.5%	935.5416	14.9%
	2	940.0	1438.0911	53.0%	1011.8294	7.6%
	3	1260.0	1793.8747	42.4%	1455.6729	15.5%
	4	1306.0	2914.6743	123.2%	1522.5077	16.6%
	5	1452.0	3322.7715	128.8%	1576.2525	8.6%
	6	1735.0	3555.3202	104.9%	2072.3920	19.4%
	7	1802.0	5384.7053	198.8%	2475.0956	37.4%
	8	2100.0	5701.8975	171.5%	2549.4624	21.4%
	9	2225.0	6990.2569	214.2%	2677.7305	20.3%
	10	2280.0	7327.9115	221.4%	3082.2603	35.2%
	11	2518.0	11737.7239	366.2%	3168.0894	25.8%
	12	2622.0	13382.2693	410.4%	4132.3451	57.6%
7x7	1	814.0	1038.1790	27.5%	912.2986	12.1%
	2	940.0	1102.7297	17.3%	998.9744	6.3%
	3	1260.0	1546.6594	22.8%	1426.5643	13.2%
	4	1306.0	1979.1987	51.5%	1432.6979	9.7%
	5	1452.0	2361.8189	62.7%	1530.8700	5.4%
	6	1735.0	2662.1394	53.4%	1958.4911	12.9%
	7	1802.0	3492.4000	93.8%	2296.0346	27.4%
	8	2100.0	4414.0985	110.2%	2336.1042	11.2%
	9	2225.0	4516.0421	103.0%	2522.4584	13.4%
	10	2280.0	4524.0986	98.4%	2809.1118	23.2%
	11	2518.0	5692.0965	126.1%	2952.7882	17.3%
	12	2622.0	7064.2100	169.4%	3620.8178	38.1%

Tabela 6.65 Frequências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização regulares de (5x5), (6x6) e (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a casca E-E-E-E para as doze primeiras frequências naturais; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [29] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

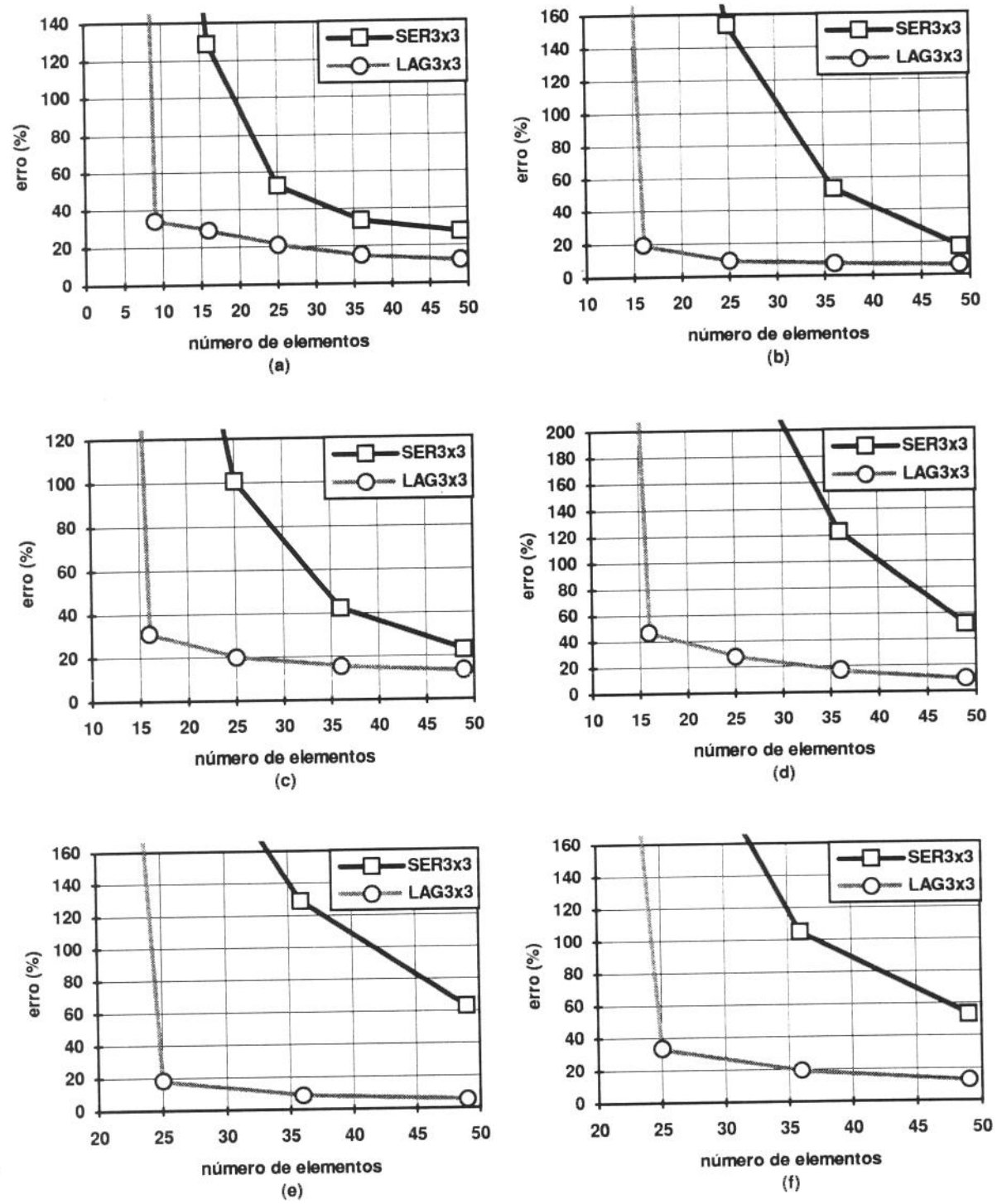


Figura 6.53 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

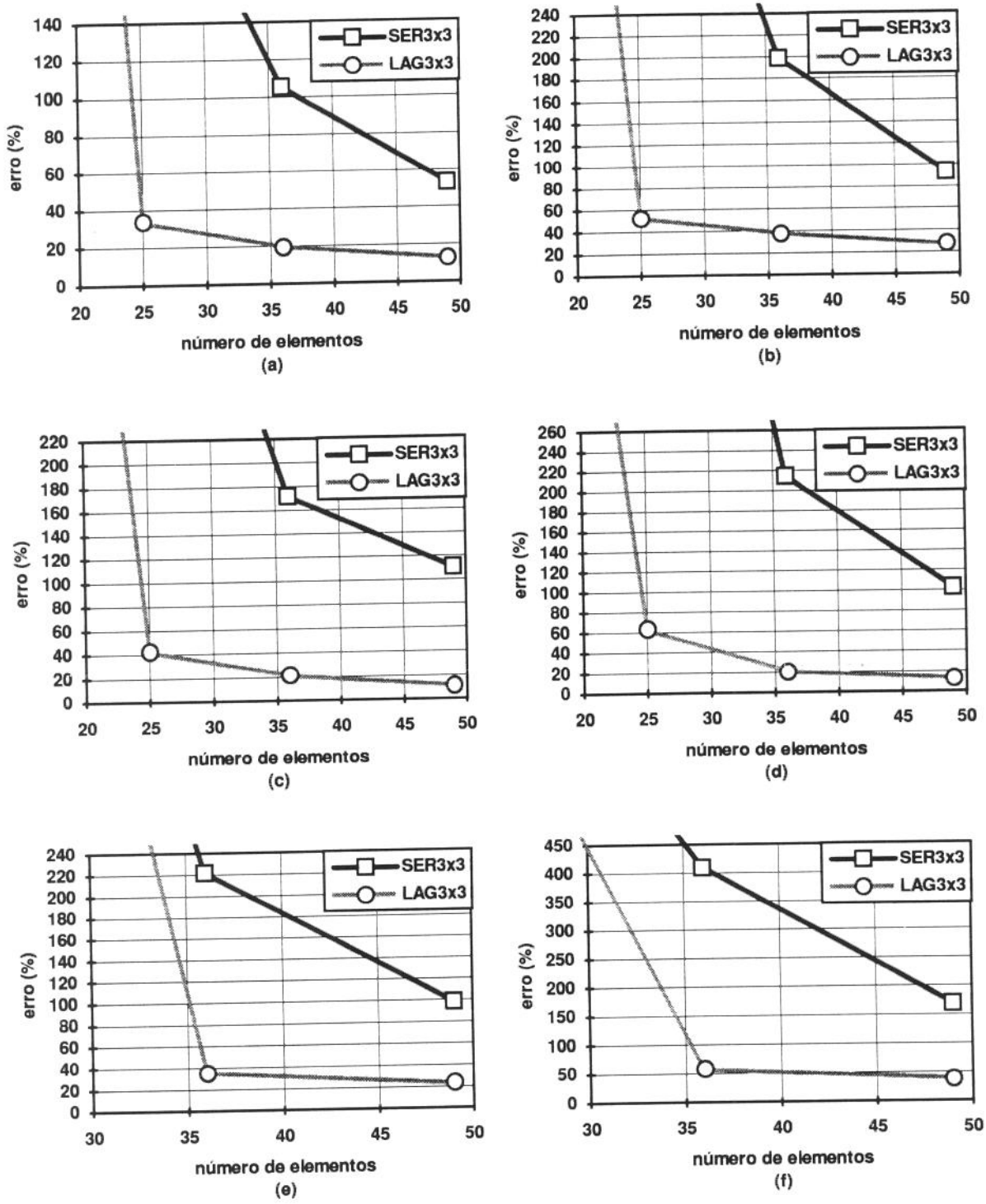


Figura 6.54 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.

A Figura 6.55 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da casca cilíndrica E-E-E-E, com malha de discretização de (7x7) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

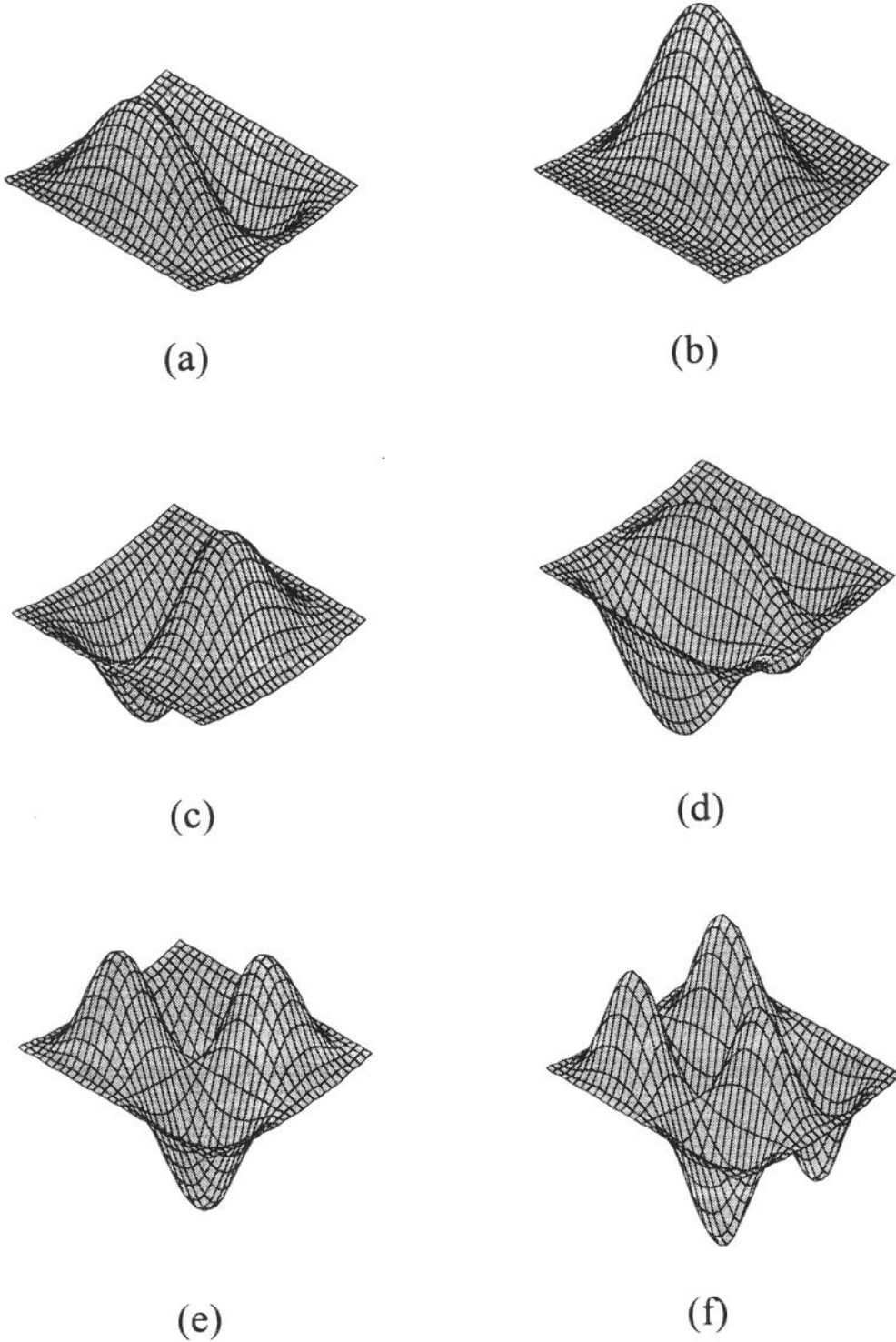


Figura 6.55 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e) e sexto (f) modos de vibrar da casca cilíndrica E-E-E-E, com malha de discretização de 7x7 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.64 e 6.65 e das Figuras 6.53 e 6.54, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity.

6.3.2 Malha de discretização distorcida

Pode-se modelar a casca cilíndrica com uma malha de discretização distorcida como para placas retangulares (Figura 6.28), levando-se em conta apenas a sua superfície. Portanto a casca cilíndrica ficaria com uma malha de discretização duplamente distorcida, em relação ao seu raio de curvatura e a sua superfície.

6.3.2.1 Casca cilíndrica E-L-L-L

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.56 e 6.57), a casca foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. Foram calculadas as doze primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e estes resultados, comparados com os obtidos, experimentalmente, por *Olson e Lindberg* [28] como mostram as Tabelas 6.66 e 6.67. Estas Tabelas apresentam, então, para cada malha de discretização e para cada modo (de 1 a 12) os resultados experimentais, obtidos na referência [28] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

As características da casca modelada são as seguintes:

$$S = L = 0.3048 \text{ m}$$

$$R = 0.6096 \text{ m}$$

$$t = 3.048 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$E = 2.068 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 7.80 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0.3$$

MALHA	MODO	RESULTADO EXPERIMENTAL	$t/a = 0.01$			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
2x2	1	85.6	145.2961	69.7%	114.5995	33.9%
	2	134.5	169.1734	25.8%	163.6602	21.7%
	3	259.0	697.3276	169.2%	539.8826	108.4%
	4	351.0	781.8416	122.7%	712.9892	103.1%
	5	395.0	803.5950	103.4%	737.2413	86.6%
	6	531.0	1792.5852	237.6%	1156.5084	117.8%
	7	743.0	2136.9581	187.6%	1782.3887	139.9%
	8	751.0	2647.5404	252.5%	1998.3804	166.1%
	9	790.0	4086.2863	417.3%	2279.4631	188.5%
	10	809.0	4260.3500	426.6%	3928.0856	385.5%
	11	997.0	4644.3019	365.8%	4234.6112	324.7%
	12	1216.0	4882.8446	301.5%	4270.9282	251.2%
3x3	1	85.6	114.7197	34.0%	101.9238	19.1%
	2	134.5	160.6093	19.4%	156.9302	16.7%
	3	259.0	381.1994	47.2%	358.3102	38.3%
	4	351.0	478.7880	36.4%	430.6023	22.7%
	5	395.0	660.6516	67.3%	549.1398	39.0%
	6	531.0	1113.5065	109.7%	899.5493	69.4%
	7	743.0	1349.2651	81.6%	1200.6006	61.6%
	8	751.0	1400.4369	86.5%	1318.0590	75.5%
	9	790.0	1568.7868	98.6%	1452.5581	83.9%
	10	809.0	1785.5687	120.7%	1586.0719	96.1%
	11	997.0	2264.5275	127.1%	1780.8224	78.6%
	12	1216.0	2534.0893	108.4%	1922.7142	58.1%
4x4	1	85.6	91.3932	6.8%	90.0482	5.2%
	2	134.5	148.7602	10.6%	148.0333	10.1%
	3	259.0	305.0188	17.8%	298.1595	15.1%
	4	351.0	384.1817	9.5%	373.2139	6.3%
	5	395.0	488.9070	23.8%	434.8386	10.1%
	6	531.0	783.8350	47.6%	763.9169	43.9%
	7	743.0	823.5242	10.8%	789.0261	6.2%
	8	751.0	962.6861	28.2%	916.1826	22.0%
	9	790.0	1078.7481	36.6%	958.3788	21.3%
	10	809.0	1355.3654	67.5%	1021.8843	26.3%
	11	997.0	1591.7197	59.7%	1365.7403	37.0%
	12	1216.0	1664.3854	36.9%	1522.3997	25.2%

Tabela 6.66 Freqüências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização distorcidas de (2x2), (3x3) e (4x4) elementos.

MALHA	MODO	RESULTADO EXPERIMENTAL	$t/a = 0.01$			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
5x5	1	85.6	89.5016	4.6%	88.7634	3.7%
	2	134.5	144.5191	7.4%	143.8423	6.9%
	3	259.0	273.2427	5.5%	269.3584	4.0%
	4	351.0	369.5270	5.3%	364.1492	3.7%
	5	395.0	433.8169	9.8%	415.9925	5.3%
	6	531.0	653.1346	23.0%	640.8494	20.7%
	7	743.0	791.9400	6.6%	775.6133	4.4%
	8	751.0	851.7765	13.4%	816.9104	8.8%
	9	790.0	911.2607	15.3%	855.9967	8.4%
	10	809.0	1037.0395	28.2%	918.6032	13.5%
	11	997.0	1371.8455	37.6%	1314.6320	31.9%
	12	1216.0	1381.8292	13.6%	1362.0638	12.0%
6x6	1	85.6	87.7772	2.5%	87.5521	2.3%
	2	134.5	142.2918	5.8%	141.9988	5.6%
	3	259.0	262.0790	1.2%	260.7004	0.7%
	4	351.0	356.4052	1.5%	353.5811	0.7%
	5	395.0	411.7276	4.2%	402.8022	2.0%
	6	531.0	599.0373	12.8%	594.6886	12.0%
	7	743.0	768.0456	3.4%	759.4893	2.2%
	8	751.0	801.6728	6.7%	783.8889	4.4%
	9	790.0	844.7015	6.9%	813.6852	3.0%
	10	809.0	908.3695	12.3%	867.5574	7.2%
	11	997.0	1215.7443	21.9%	1202.8019	20.6%
	12	1216.0	1297.9826	6.7%	1278.4378	5.1%
7x7	1	85.6	87.3600	2.1%	87.2336	1.9%
	2	134.5	140.8639	4.7%	140.6529	4.6%
	3	259.0	255.7965	-1.2%	254.9974	-1.5%
	4	351.0	352.4010	0.4%	351.1652	0.0%
	5	395.0	401.4860	1.6%	397.9197	0.7%
	6	531.0	570.3875	7.4%	567.7741	6.9%
	7	743.0	759.9555	2.3%	753.3408	1.4%
	8	751.0	777.0973	3.5%	766.7588	2.1%
	9	790.0	807.5994	2.2%	798.7213	1.1%
	10	809.0	864.2077	6.8%	846.2728	4.6%
	11	997.0	1131.5688	13.5%	1123.6681	12.7%
	12	1216.0	1277.1331	5.0%	1267.9359	4.3%

Tabela 6.67 Freqüências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-L-L-L e malhas de discretização distorcidas de (5x5), (6x6) e (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a casca E-L-L-L para as doze primeiras freqüências naturais; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [28] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

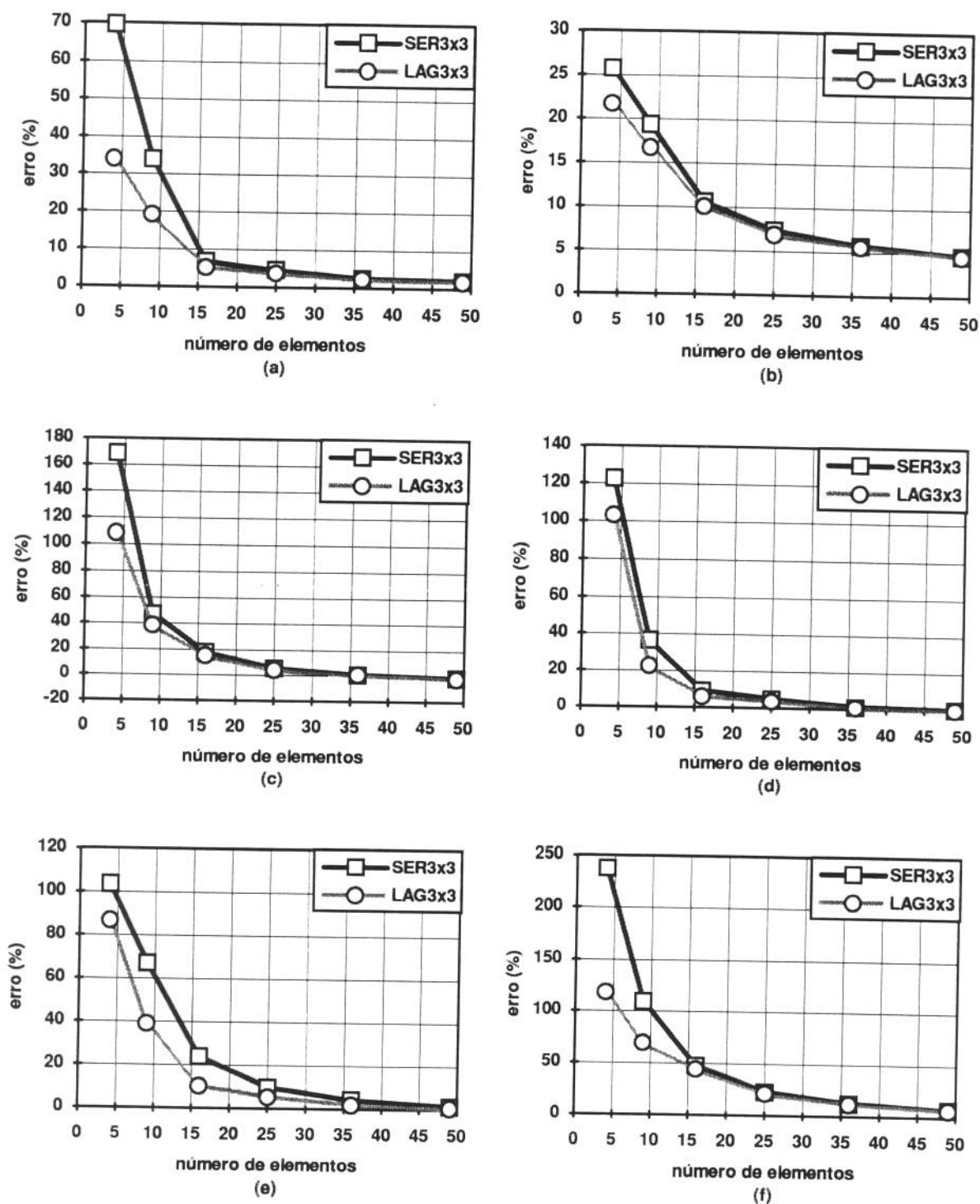


Figura 6.56 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

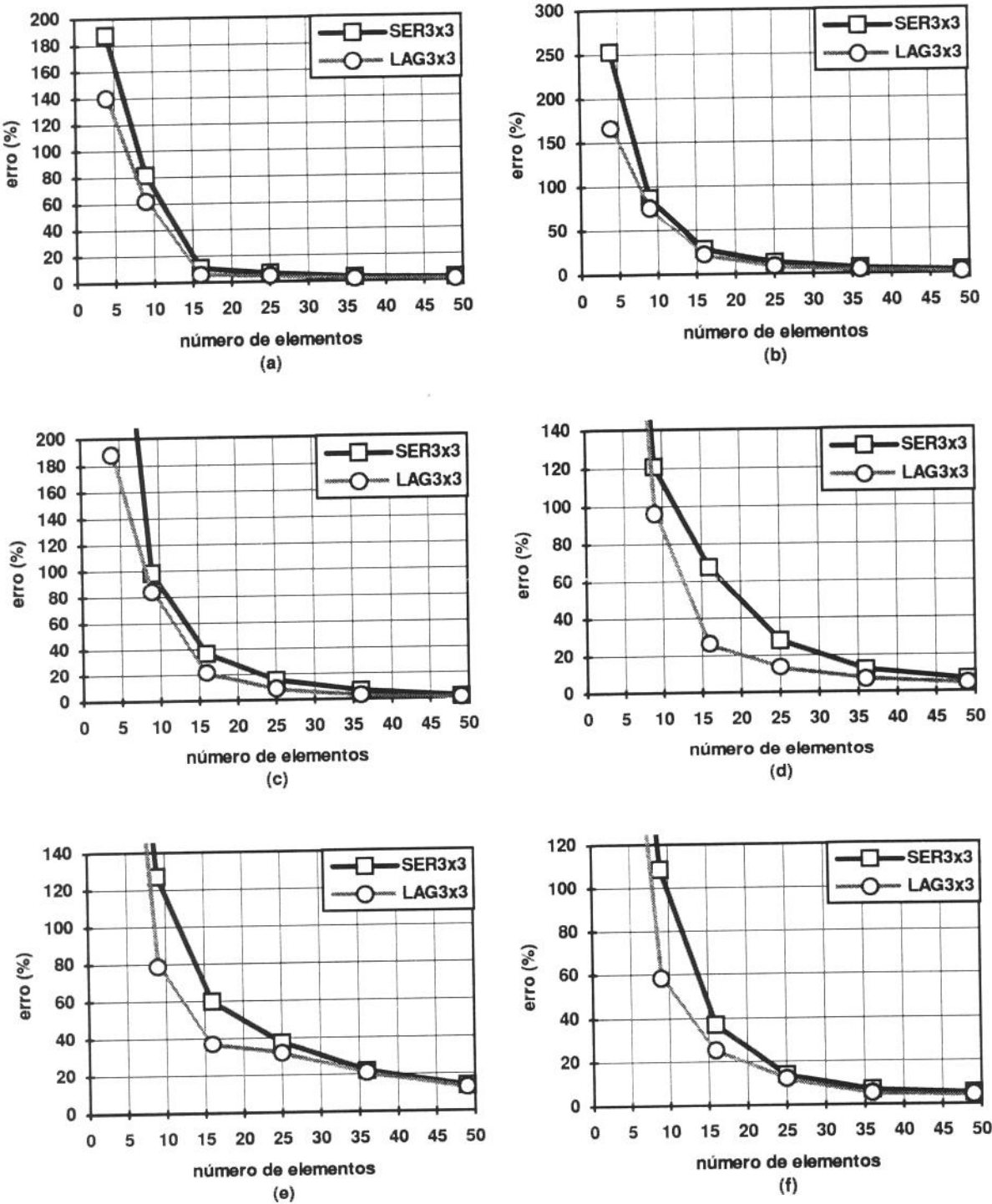


Figura 6.57 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-L-L-L, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.66 e 6.67 e das Figuras 6.56 e 6.57, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity. Nota-se, também, que a distorção na malha de discretização afeta proporcionalmente os dois elementos, em comparação com os resultados obtidos para a casca cilíndrica E-L-L-L com malha regular (Item 6.3.1.1), mas, mesmo assim, a convergência para a solução exata é mantida.

6.3.2.2 Casca cilíndrica E-E-E-E

Em função da geometria e para se obter uma curva de convergência (Figuras 6.58 e 6.59), a casca foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. Foram calculadas as doze primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e estes resultados, comparados com os obtidos, experimentalmente, por Deb Nath [29] como mostram as Tabelas 6.68 e 6.69. Estas Tabelas apresentam, então, para cada malha de discretização e para cada modo (de 1 a 12) os resultados experimentais, obtidos na referência [29] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

As características da casca modelada são as seguintes:

$$S = 101.6 \text{ mm}$$

$$L = 76.2 \text{ mm}$$

$$R = 762.0 \text{ mm}$$

$$t = 0.33 \text{ mm}$$

$$E = 6.89 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2.66 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0.33$$

MALHA	MODO	RESULTADO EXPERIMENTAL	$t/a = 0.00325$			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
2x2	1	814.0	12499.7841	1535.6%	10784.1263	1224.8%
	2	940.0	21163.1625	2251.4%	18504.8589	1868.6%
	3	1260.0	23880.7894	1895.3%	22635.9696	1696.5%
	4	1306.0	30967.8728	2371.2%	27380.1748	1996.5%
	5	1452.0	35604.4925	2452.1%	33188.2135	2185.7%
	6	1735.0	40279.7629	2321.6%	38027.3855	2091.8%
	7	1802.0	44869.8325	2490.0%	43154.6416	2294.8%
	8	2100.0	53799.9061	2561.9%	49234.2963	2244.5%
	9	2225.0	61957.3529	2784.6%	52370.8524	2253.7%
	10	2280.0	64097.6441	2811.3%	55932.2224	2353.2%
	11	2518.0	67769.4521	2691.4%	56496.6443	2143.7%
	12	2622.0	71203.0328	2715.6%	62689.7777	2290.9%
3x3	1	814.0	4030.5158	395.1%	1251.1733	53.7%
	2	940.0	13689.3542	1356.3%	12073.0337	1184.4%
	3	1260.0	17119.2452	1258.7%	16342.8228	1197.0%
	4	1306.0	21150.1110	1519.5%	19652.3137	1404.8%
	5	1452.0	24725.1019	1602.8%	20403.2757	1305.2%
	6	1735.0	28419.3025	1538.0%	25078.9313	1345.5%
	7	1802.0	33025.1949	1732.7%	26678.1480	1380.5%
	8	2100.0	37842.8271	1702.0%	28551.8998	1259.6%
	9	2225.0	42528.5252	1811.4%	32682.9852	1368.9%
	10	2280.0	42704.8652	1773.0%	33100.4324	1351.8%
	11	2518.0	48064.8505	1808.9%	39167.8899	1455.5%
	12	2622.0	50905.6021	1841.5%	46642.7887	1678.9%
4x4	1	814.0	1877.4519	130.6%	1071.5051	31.6%
	2	940.0	4745.9467	404.9%	1397.5838	48.7%
	3	1260.0	5562.1786	341.4%	1897.7755	50.6%
	4	1306.0	12107.6653	827.1%	2311.0134	77.0%
	5	1452.0	18143.7738	1149.6%	16335.6506	1025.0%
	6	1735.0	21646.5686	1147.6%	17330.2947	898.9%
	7	1802.0	22954.7084	1173.8%	22047.7929	1123.5%
	8	2100.0	24387.0695	1061.3%	22195.6796	956.9%
	9	2225.0	25432.2550	1043.0%	22455.8646	909.3%
	10	2280.0	30327.9622	1230.2%	22976.1898	907.7%
	11	2518.0	33187.2995	1218.0%	27760.5828	1002.5%
	12	2622.0	33891.8700	1192.6%	28723.5103	995.5%

Tabela 6.68 Frequências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização distorcidas de (2x2), (3x3) e (4x4) elementos.

MALHA	MODO	RESULTADO EXPERIMENTAL	<i>t/a</i> = 0.01			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
5x5	1	814.0	1258.0244	54.5%	1042.9526	28.1%
	2	940.0	2455.7696	161.3%	1077.8137	14.7%
	3	1260.0	2742.3277	117.6%	1556.4735	23.5%
	4	1306.0	5334.6266	308.5%	1793.8921	37.4%
	5	1452.0	6333.1761	336.2%	2248.6290	54.9%
	6	1735.0	6705.8596	286.5%	2653.9778	53.0%
	7	1802.0	12413.1605	588.9%	3068.2741	70.3%
	8	2100.0	13256.9375	531.3%	3660.1492	74.3%
	9	2225.0	20951.1947	841.6%	4377.9261	96.8%
	10	2280.0	21811.6448	856.7%	20818.7957	813.1%
	11	2518.0	25146.3374	898.7%	21624.0195	758.8%
	12	2622.0	27920.5152	964.9%	21946.3132	737.0%
6x6	1	814.0	1105.1533	35.8%	968.8072	19.0%
	2	940.0	1530.1812	62.8%	1024.3293	9.0%
	3	1260.0	1874.9962	48.8%	1475.8537	17.1%
	4	1306.0	3217.3430	146.4%	1637.1264	25.4%
	5	1452.0	3578.8066	146.5%	1653.2189	13.9%
	6	1735.0	3669.4093	111.5%	2197.0266	26.6%
	7	1802.0	5912.3854	228.1%	2546.3822	41.3%
	8	2100.0	7009.9536	233.8%	2798.7421	33.3%
	9	2225.0	7164.1719	222.0%	3057.6984	37.4%
	10	2280.0	7561.5442	231.6%	3413.1038	49.7%
	11	2518.0	11954.0475	374.7%	3718.1597	47.7%
	12	2622.0	13391.0711	410.7%	4740.5559	80.8%
7x7	1	814.0	1049.7076	29.0%	931.5640	14.4%
	2	940.0	1146.9405	22.0%	1009.4544	7.4%
	3	1260.0	1577.7405	25.2%	1436.3887	14.0%
	4	1306.0	2143.6298	64.1%	1501.5095	15.0%
	5	1452.0	2445.5029	68.4%	1570.5766	8.2%
	6	1735.0	2769.3684	59.6%	2042.2962	17.7%
	7	1802.0	3895.9626	116.2%	2375.9425	31.9%
	8	2100.0	4540.8573	116.2%	2490.5838	18.6%
	9	2225.0	4658.3956	109.4%	2609.2411	17.3%
	10	2280.0	4800.7875	110.6%	2982.6369	30.8%
	11	2518.0	7013.8217	178.5%	3102.1213	23.2%
	12	2622.0	7922.0474	202.1%	3954.2932	50.8%

Tabela 6.69 Frequências naturais [s⁻¹] para a casca cilíndrica E-E-E-E e malhas de discretização distorcidas de (5x5), (6x6) e (7x7) elementos.

As Figuras, a seguir, apresentam, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), os gráficos das curvas de convergência para a casca E-E-E-E para as doze primeiras frequências naturais; os gráficos têm na ordenada o erro comparativamente aos resultados obtidos na referência [29] e na abscissa o número total de elementos correspondentes a cada malha de discretização.

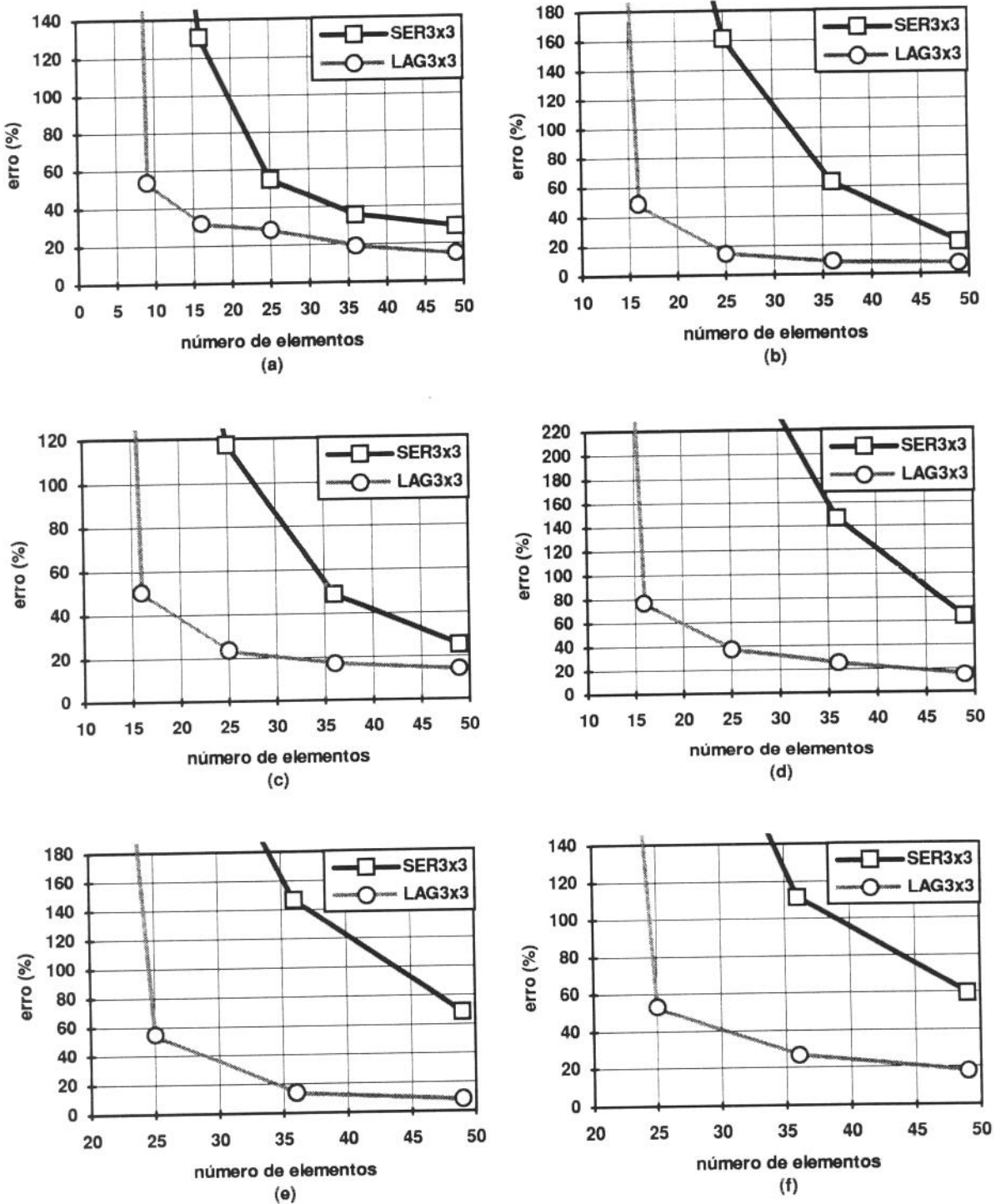


Figura 6.58 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às primeira (a), segunda (b), terceira (c), quarta (d), quinta (e) e sexta (f) frequências naturais.

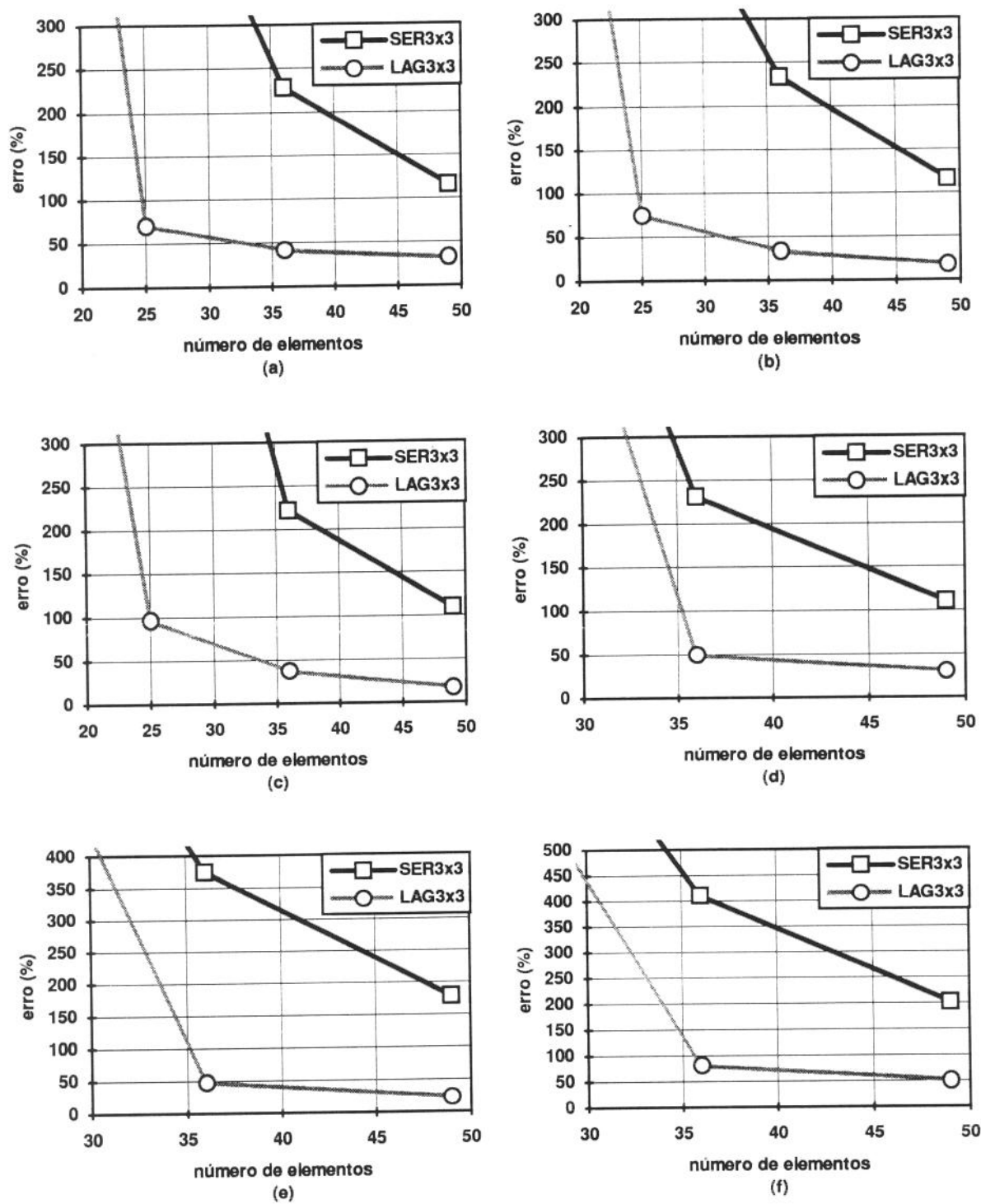


Figura 6.59 Curvas de convergência, para os dois elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3), para a casca E-E-E-E, correspondentes às sétima (a), oitava (b), nona (c), décima (d), décima primeira (e) e décima segunda (f) frequências naturais.

Verifica-se, a partir das Tabelas 6.68 e 6.69 e das Figuras 6.58 e 6.59, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity. Nota-se, também, que a distorção na malha de discretização afeta proporcionalmente os dois elementos, em comparação com os resultados obtidos para a casca cilíndrica E-E-E-E com malha regular (Item 6.3.1.2), mas, mesmo assim, a convergência para a solução exata é mantida.

6.4 Viga engastada

Um exemplo clássico da elasticidade plana consiste em uma viga em balanço, como mostra a Figura 6.60. Em função da geometria a viga foi modelada com duas malhas de discretização de 5×1 e 10×2 elementos. Foram calculadas as doze primeiras frequências naturais para os dois elementos em análise e esses resultados, são comparados com os obtidos, analiticamente, por *Timoshenko et al* [30] como mostram as Tabelas 6.70 e 6.71. Estas Tabelas apresentam, então, para cada malha de discretização e para cada modo (1 a 12) os resultados analíticos, obtidos na referência [30] e os resultados, obtidos para os elementos em análise (SER3x3 e LAG3x3) e seus respectivos erros.

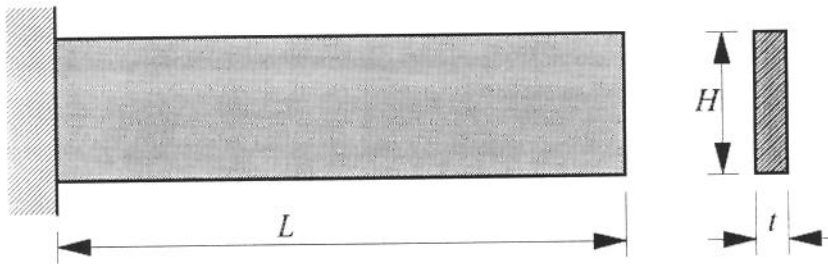


Figura 6.60 Viga engastada em uma de suas extremidades.

As características da viga modelada são as seguintes:

$$L = 20 \text{ m}$$

$$H = 4 \text{ m}$$

$$t = 0.1 \text{ m}$$

$$E = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 1 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0.3$$

MALHA	MODO	RESULTADO ANALÍTICO	$t/a = 0.005$			
			SER3x3	ERRO	LAG3x3	ERRO
5x1	1	1.5670	1.5897	1.45%	1.5810	0.89%
	2	8.4370	8.7067	3.20%	8.6698	2.76%
	3	12.5000	12.5429	0.34%	12.5391	0.31%
	4	20.0800	21.1050	5.10%	21.0434	4.80%
	5	33.3400	35.9285	7.76%	35.8669	7.58%
	6	37.5000	37.5481	0.13%	37.5353	0.09%
	7	47.4100	53.0545	11.91%	52.9975	11.79%
	8	61.5300	62.3960	1.41%	62.3663	1.36%
	9	62.5000	69.5007	11.20%	68.8948	10.23%
	10	75.0700	87.1602	16.11%	87.0116	15.91%
	11	81.8800	89.1578	8.89%	89.0316	8.73%
	12	87.5000	92.2419	5.42%	91.8745	5.00%
10x2	1	1.5670	1.5744	0.47%	1.5727	0.36%
	2	8.4370	8.5203	0.99%	8.5076	0.84%
	3	12.5000	12.5336	0.27%	12.5309	0.25%
	4	20.0800	20.3869	1.53%	20.3498	1.34%
	5	33.3400	34.0469	2.12%	33.9713	1.89%
	6	37.5000	37.4910	-0.02%	37.4825	-0.05%
	7	47.4100	48.7286	2.78%	48.5902	2.49%
	8	61.5300	62.0259	0.81%	62.0108	0.78%
	9	62.5000	63.6713	1.87%	63.4396	1.50%
	10	75.0700	77.8824	3.75%	77.6116	3.39%
	11	81.8800	82.5250	0.79%	82.3436	0.57%
	12	87.5000	85.6306	-2.14%	85.3285	-2.48%

Tabela 6.70 Freqüências naturais [s⁻¹] para a viga engastada com malhas de discretização regulares de (5x1) e (10x2) elementos.

A Figura 6.61 ilustra os doze primeiros modos de vibrar da viga engastada, com malha de discretização de (10x2) elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Verifica-se, a partir das Tabela 6.70, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity.

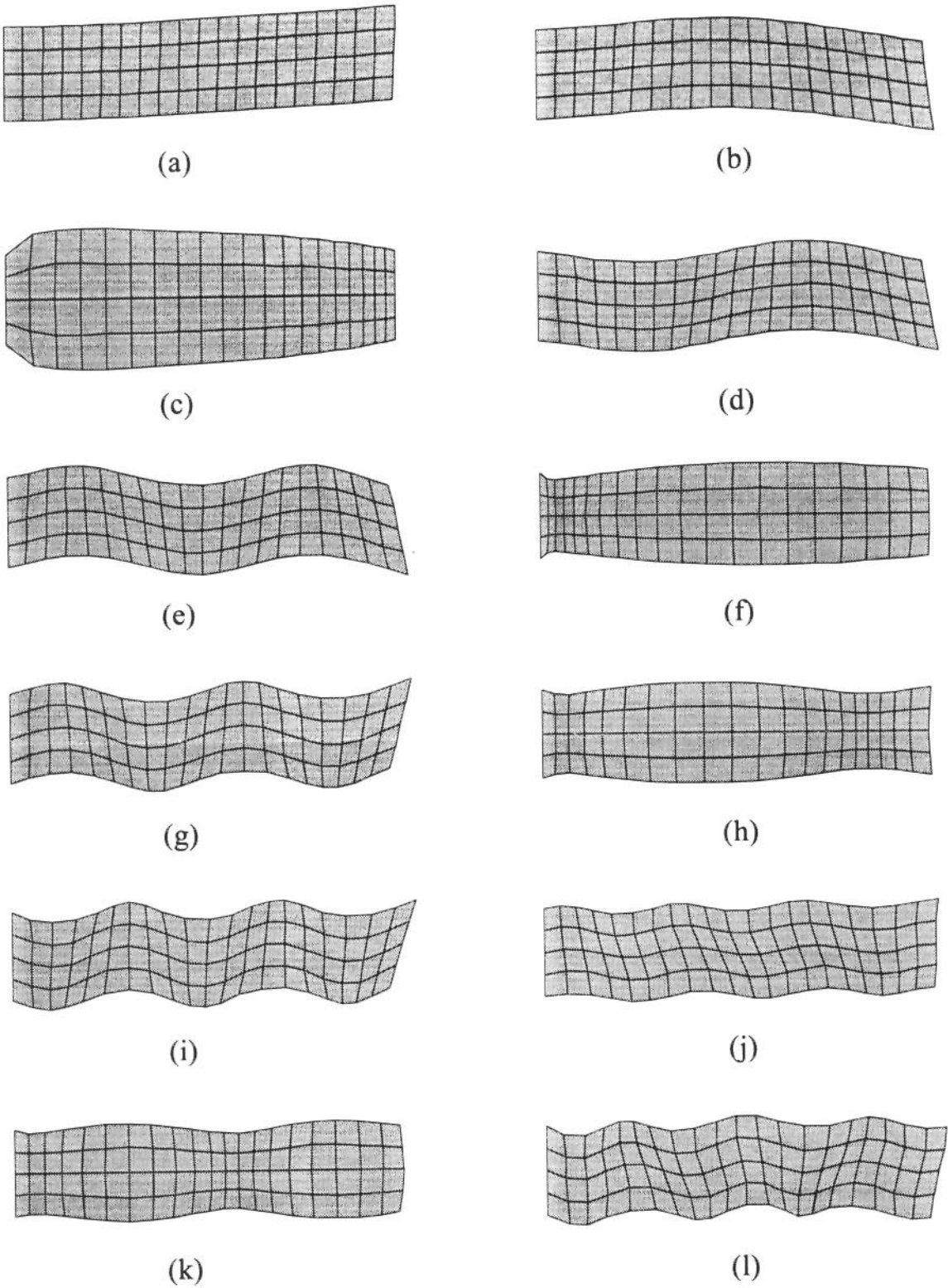


Figura 6.61 Primeiro (a), segundo (b), terceiro (c), quarto (d), quinto (e), sexto (f), sétimo (g), oitavo (h), nono (i), décimo (j), décimo primeiro (k) e décimo segundo (l) modos de vibrar da viga engastada com malha de discretização de 10x2 elementos, obtidos a partir do elemento da família Lagrangeana.

Capítulo 7

CONCLUSÕES

Verifica-se a partir dos resultados obtidos no Capítulo anterior, que o *elemento da família Lagrangeana* apresentou um desempenho melhor que o *elemento da família Serendipity*, principalmente, para situações de placas e cascas finas, considerando-se tanto malhas de discretização regular, como distorcidas. Constatou-se, também, que, quanto mais severas as condições de contorno impostas (por exemplo, todos os lados engastados), a convergência se torna mais lenta, mas sempre, obtendo-se melhores resultados para o *elemento da família Lagrangeana*, em comparação com os obtidos para o *elemento da família Serendipity*.

Pode-se verificar, ainda, que os resultados, obtidos pelos elementos em análise para as situações de placas moderadamente grossas, são excelentes (convergência rápida) e que com a redução da espessura, situações de placa fina, a convergência se torna mais lenta em função do elemento apresentar um aumento excessivo de sua rigidez [7]. Desta forma, com o objetivo de retirar essa característica de rigidez excessiva do elemento de *Ahmad*, para situações de placas e cascas finas, pode-se estabelecer que o *elemento da família Lagrangeana* é o mais apropriado para iniciar o desenvolvimento de um *elemento finito subparamétrico do tipo*

hierárquico. Isto significa que em cima da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma quadráticas da família Lagrangeana, mostrada na Figura 2.8, deve-se inserir termos de maneira a obter polinômios completos de terceiro grau, quarto grau, etc., como mostra a Figura 7.1, refinando-se, desta forma, a solução obtida, inicialmente, através da interpolação quadrática.

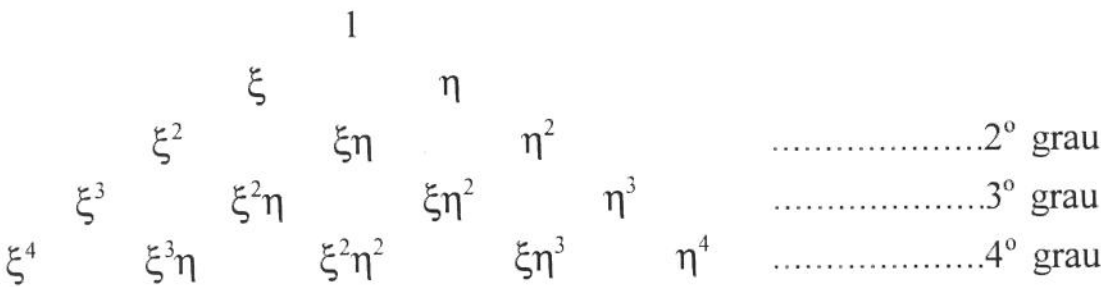


Figura 7.1 Expansão polinomial correspondente ao refinamento hierárquico de 3º e 4º graus.

Portanto, utilizando-se uma formulação subparamétrica do tipo hierárquica com refinamento adaptativo, é possível identificar os lados e os elementos mais carentes de refinamento, uma vez que possibilita empregar expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes, podendo gerar novos graus de liberdade hierárquicos, sempre que requeridos pela magnitude do erro envolvido na análise.

Deve-se ressaltar, contudo, que a comparação efetuada neste trabalho, entre os dois elementos (família Serendipity e família Lagrangeana), referiu-se à análise dinâmica, devendo-se, ainda, verificar seus comportamentos no que concerne à análise de estabilidade; a análise estática já foi efetuada [31], tendo-se obtido as mesmas conclusões no que se refere aos desempenhos dos dois elementos em análise. Portanto, uma outra proposta de continuidade deste trabalho é o “estudo comparativo entre elementos finitos isoparamétricos das famílias Serendipity e Lagrangeana para análise de estabilidade de placas e cascas”.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Timoshenko, P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. 2ed., Kogakusha: McGraw-Hill, 1959.
- [2] Ugural A. C. *Stresses in plates and shells*. New York: McGraw-Hill, 1981.
- [3] Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische physik*. v.1, Mechanik, 1876.
- [4] Szabo B. A., Sahrman G. J. *Hierarchic plate and shell models based on p-extension*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.26, p.1855-1881, 1988.
- [5] Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. *Analysis of thick and thin shell structures by curved elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.3, p.419-451, 1970.
- [6] Bathe K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
- [7] Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L. *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.3, p.375-390, 1971.
- [8] Coons S. A. *Surfaces for computer aided design of space form*. M.I.T. Project MAC. MAC-TR-41, 1967.
- [9] Forrest A. R. *Curves and surfaces for computer aided design*. Computer Aided Design Group. Cambridge: 1968.
- [10] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The finite element method*. 4ed., London: McGraw-Hill, 1989.

- [11] Desai C. S. *Elementary finite element method*. New Jersey: Prentice-Hall, 1979.
- [12] Przemieniecki J. S. *Theory of matrix structural analysis*. London: McGraw-Hill, 1968.
- [13] Kaplan W. *Advance calculus*. Addison-Wesley, 1971.
- [14] Pipes L. A., Hovanessian S. A. *Matrix computer methods in engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [15] Leipholz H. *Theory of elasticity*. Leyden: Noordhoof International, 1974.
- [16] Timoshenko S. P. *Resistência dos materiais*. v.1. 3ed., Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1969.
- [17] Volterra E., Gaines J. H. *Advanced strength of materials*. New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- [18] Meirovitch L. *Introduction to dynamics and control*. John Wiley & Sons, 1985.
- [19] Hurty W. C., Rubbinstain M. F. *Dynamics of structures*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
- [20] Rutishauser H. *Computational aspects of F. L. Bauer's simultaneous iteration method*. Numerische Mathematik, v.13, p.4-13, 1969.
- [21] Sanal Z. *Finite element programming and C*. Comput. Struct. v.51, n.6, p.671-686, 1994.
- [22] Thompson E., Shimazaki Y. *A frontal procedure using skyline storage*. International Journal for Numerical. Methods in Engineering. v.15, p.889-910, 1980.
- [23] Bathe K. J., Wilson E. *Numerical methods in finite element analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [24] Levinson M. *Free vibration of a simply supported, rectangular plate: an exact elasticity solution*. Journal of Sound and Vibration. v.98, p.289-298, 1985.
- [25] Leissa A. W. *The free vibration of retangular plates*. Journal of Sound and Vibration. v.31, p.257-293, 1973.
- [26] Dawe D. J., Roufaeil O. L. *Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates*. Journal of Sound and Vibration. v.69, p.345-359, 1980.
- [27] MacNeal R. H., Harder R. L. *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finits Elements in Analysis and Design.v.1, p.3-20, 1985.

- [28] Olson M. D., Lindberg G. M. *Dynamic analysis of shallow shells with a doubly-curvature triangular finite element*. Journal of Sound and Vibration. v.19, p.299-318, 1971.
- [29] Deb Nath J. M. *Dynamics of rectangular curved plates*. Southampton: University of Southampton, 1969. Thesis (Ph.D.).
- [30] Timoshenko S., Yong D. H., Weaver W. *Vibration problems in engineering*. 4ed., New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [31] Pierossi M. A. *Estudo comparativo entre elementos finitos Isoparamétricos das famílias Serendipity e Lagrangeana para análise estática de placas e cascas*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995. Dissertação (Mestrado).
- [32] Leithold L. *The calculus with analytic geometry*. 2ed. Harper & Row Publ. Inc., 1981.

Apêndice A

DETERMINAÇÃO DOS VETORES E VERSORES

A.1 Determinação dos vetores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$

No ponto O, genérico, da superfície média do elemento de casca (Figura A.1), considere-se a definição de um vetor $\vec{r}_3$, normal a ela, obtido a partir do produto vetorial de dois outros vetores: $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes a esta superfície e dados por [32]:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{r}_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (\text{A.2})$$

Portanto,

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \vec{r}_1(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_2(\xi, \eta) \quad (\text{A.3})$$

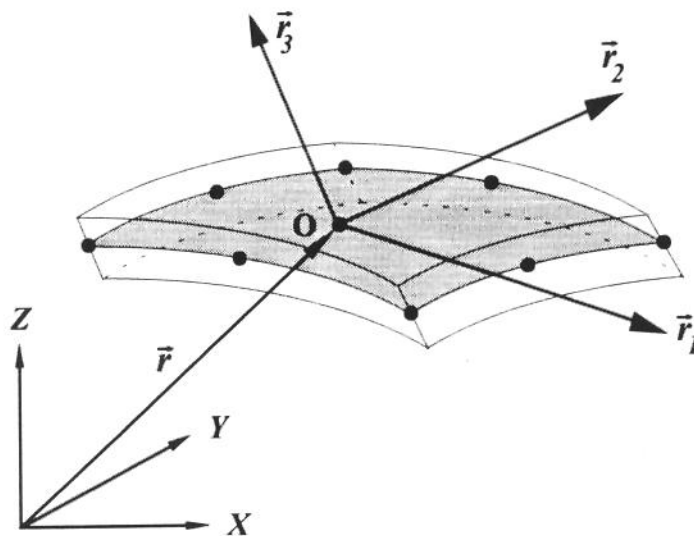


Figura A.1 Vetor $\vec{r}_3$, normal à superfície média e vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes a ela.

Considerando-se a Equação (2.2), pode-se escrever, então, que:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \vec{r}_i \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{r}_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \vec{r}_i \quad (\text{A.5})$$

Se r_{11} , r_{12} e r_{13} são, respectivamente, as componentes do vetor $\vec{r}_1$, segundo os eixos X, Y, e Z do sistema de referência global e, da mesma forma, r_{21} , r_{22} e r_{23} , as componentes do vetor $\vec{r}_2$, pode-se, tendo-se em conta a Equação (2.1), escrever que:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{11}(\xi, \eta) \\ r_{12}(\xi, \eta) \\ r_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

e que:

$$\vec{r}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{21}(\xi, \eta) \\ r_{22}(\xi, \eta) \\ r_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Se $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são uma base triortogonal, associada ao sistema de referência global, o vetor $\vec{r}_3$, de componentes r_{31} , r_{32} e r_{33} , obtido a partir da Equação (A.3), será dado por:

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{11}(\xi, \eta) & r_{12}(\xi, \eta) & r_{13}(\xi, \eta) \\ r_{21}(\xi, \eta) & r_{22}(\xi, \eta) & r_{23}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Resolvendo-se a equação anterior e substituindo-se as componentes de $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, dadas através das Equações (A.6) e (A.7), obtém-se que:

$$r_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (y_i z_j - y_j z_i) \quad (\text{A.9})$$

$$r_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (z_i x_j - x_i z_j) \quad (\text{A.10})$$

$$r_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (x_i y_j - y_i x_j) \quad (\text{A.11})$$

A.2 Determinação dos versores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$

No ponto O, genérico, da superfície média do elemento de casca, considere-se a definição de um sistema cartesiano, local, de referência, constituído dos eixos x' , y' e z' , cujos versores são, respectivamente, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, conforme mostra a Figura A.2.

O versor $\vec{v}_3$ é normal à superfície média e pode ser determinado a partir do vetor $\vec{r}_3$, através da seguinte expressão:

$$\vec{v}_3(\xi, \eta) = \frac{\vec{r}_3(\xi, \eta)}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \quad (\text{A.12})$$

onde $\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|$ é o módulo do vetor $\vec{r}_3$, obtido da seguinte maneira:

$$\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| = \sqrt{r_{31}^2(\xi, \eta) + r_{32}^2(\xi, \eta) + r_{33}^2(\xi, \eta)} \quad (\text{A.13})$$

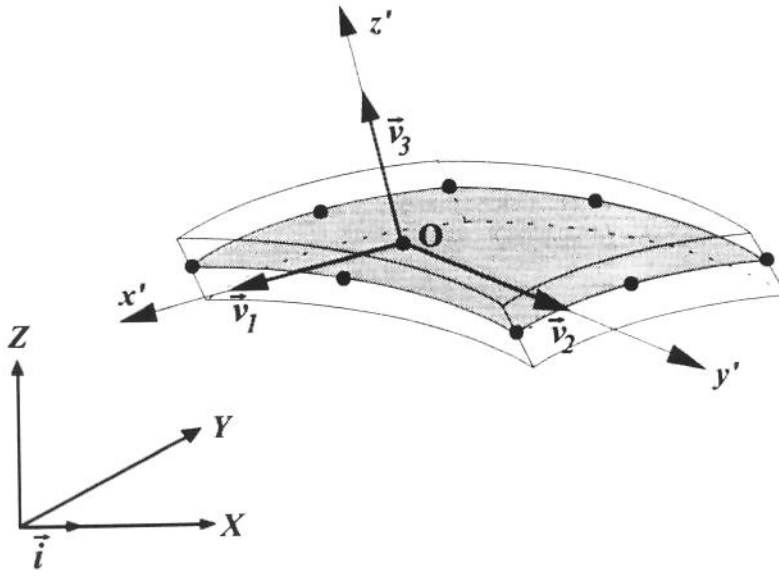


Figura A.2 Sistema, local, de referência (x' , y' , z'), associado ao ponto O e versor $\vec{i}$, associado à direção X do sistema de referência global.

Se v_{31} , v_{32} e v_{33} são as componentes do versor $\vec{v}_3$, segundo o sistema de referência global, a Equação (A.12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{v}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{31}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

ou, ainda,

$$v_{31}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{A.15})$$

$$v_{32}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{A.16})$$

$$v_{33}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{A.17})$$

Os versores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são tangentes à superfície média e obtidos a partir dos seguintes produtos vetoriais:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \frac{\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)}{\|\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)\|} \quad (\text{A.18})$$

e

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{v}_1(\xi, \eta) \quad (\text{A.19})$$

onde $\bar{i}$ é o versor do eixo X do sistema de referência global (Figura A.2); caso, eventualmente, este versor tenha a mesma direção do versor $\bar{v}_3$, deve-se tomar o versor $\bar{j}$ do eixo Y para executar o produto vetorial estabelecido na Equação (A.18).

Se v_{11} , v_{12} e v_{13} são as componentes do versor $\bar{v}_1$, segundo o sistema de referência global e, da mesma forma, 1, 0 e 0, as componentes do versor $\bar{i}$, a Equação (A.18) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ v_{31}(\xi, \eta) & v_{32}(\xi, \eta) & v_{33}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (\text{A.20})$$

ou, resolvendo-se o determinante indicado na equação anterior,

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Portanto,

$$v_{11}(\xi, \eta) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$v_{12}(\xi, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{A.23})$$

e

$$v_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{A.24})$$

Executando-se, agora, o produto vetorial especificado na Equação (A.19), o versor $\bar{v}_2$ de componentes v_{21} , v_{22} e v_{23} , segundo o sistema de referência global, resulta:

$$\vec{v}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{21}(\xi, \eta) \\ v_{22}(\xi, \eta) \\ v_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) - v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \\ v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) - v_{32}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Tendo-se, ainda, em conta que a componente v_{11} do versor $\vec{v}_1$ é nula, as componentes do versor $\vec{v}_2$ tornam-se:

$$v_{21}(\xi, \eta) = v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{A.26})$$

$$v_{22}(\xi, \eta) = -v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{A.27})$$

$$v_{23}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{A.28})$$

As Equações (A.22), (A.23), (A.24), (A.26), (A.27), (A.28), (A.15), (A.16) e (A.17) fornecem, então, as componentes dos versores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, que definem o sistema cartesiano, local, de referência (x', y', z') , associado ao ponto O.

Quando se considera o nó i de coordenadas ξ_i e η_i , o sistema de referência local (x', y', z') , a ele associado (Figura A.3), será definido pelos seguintes versores:

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_1(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.29})$$

$$\vec{v}_{2i} = \vec{v}_2(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.30})$$

$$\vec{v}_{3i} = \vec{v}_3(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.31})$$

Da mesma forma, as componentes dos versores $\vec{v}_{1i}$, $\vec{v}_{2i}$ e $\vec{v}_{3i}$, segundo o sistema de referência global, serão dadas por:

$$v_{11i} = v_{11}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.32})$$

$$v_{12i} = v_{12}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.33})$$

$$v_{13i} = v_{13}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.34})$$

$$v_{21i} = v_{21}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.35})$$

$$v_{22i} = v_{22}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.36})$$

$$v_{23i} = v_{23}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.37})$$

$$v_{31i} = v_{31}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.38})$$

$$v_{32i} = v_{32}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.39})$$

$$v_{33i} = v_{33}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.40})$$

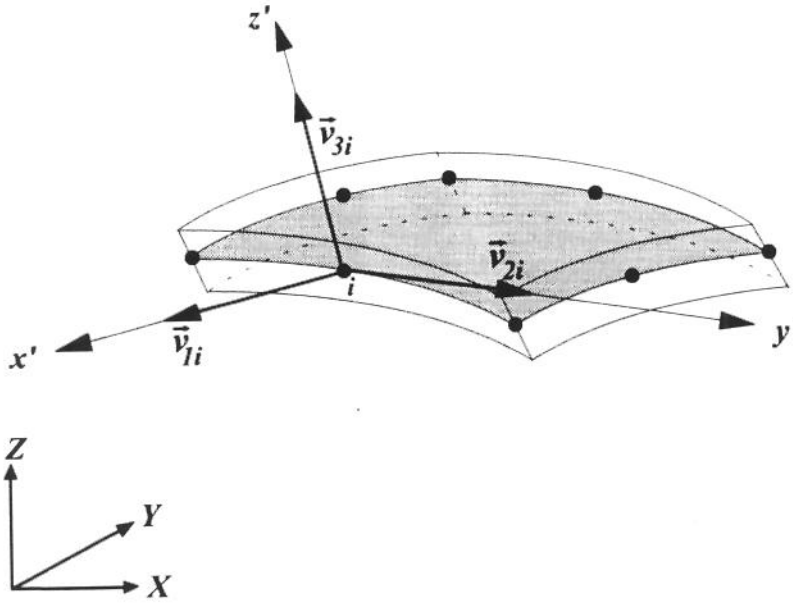


Figura A.3 Sistema, local, de referência (x', y', z'), associado ao nó i .

As Equações (A.32), (A.33), (A.34), (A.35), (A.36), (A.37), (A.38), (A.39) e (A.40) fornecem, então, as componentes dos versores $\vec{v}_{1i}$, $\vec{v}_{2i}$ e $\vec{v}_{3i}$, que definem o sistema cartesiano, local, de referência (x', y', z'), associado ao nó i .

Apêndice B

FUNÇÕES DE FORMA

B.1 Introdução

Apresentam-se, a seguir, para cada nó i da superfície média do elemento de casca, as funções de forma, $N_i(\xi, \eta)$, das famílias Serendipity e Lagrangeana, bem como, suas derivadas com relação às coordenadas curvilíneas: $\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$.

B.2 - Funções de forma da família Serendipity

As funções de forma da família Serendipity, utilizadas neste trabalho, estão descritas nas equações B.1 a B.8:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \quad (B.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \quad (B.2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad (B.3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \quad (B.4)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (B.5)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (\text{B.6})$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \quad (\text{B.7})$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (\text{B.8})$$

As Figuras de B.1 a B.8 mostram os gráficos da variação destas funções de forma sobre o elemento.

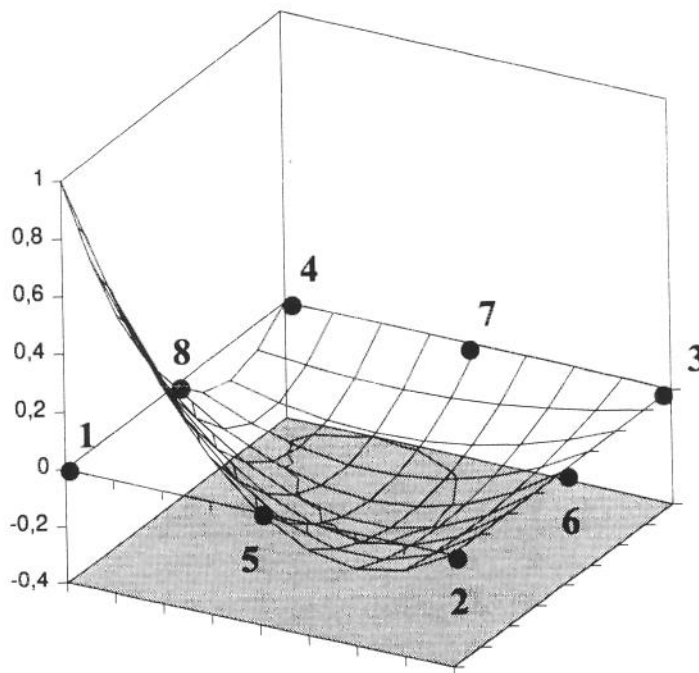


Figura B.1 Função de forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

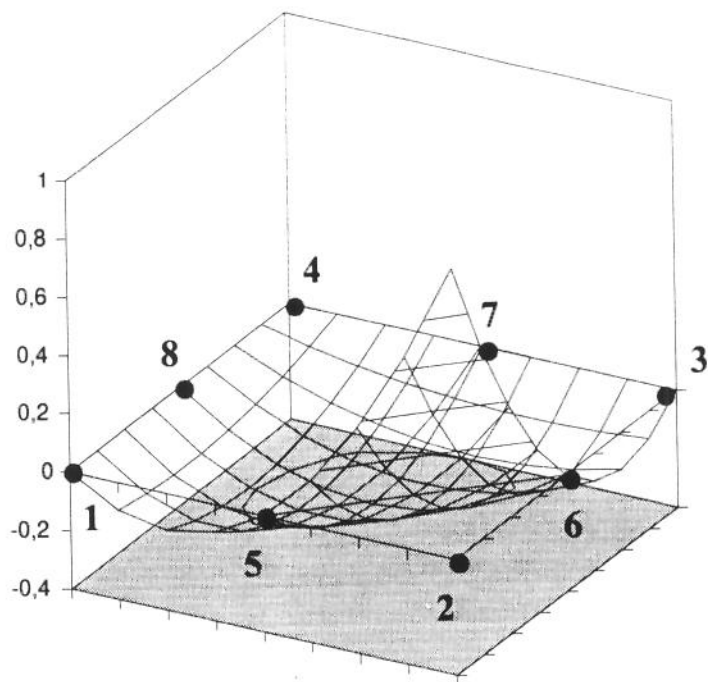


Figura B.2 Função de forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

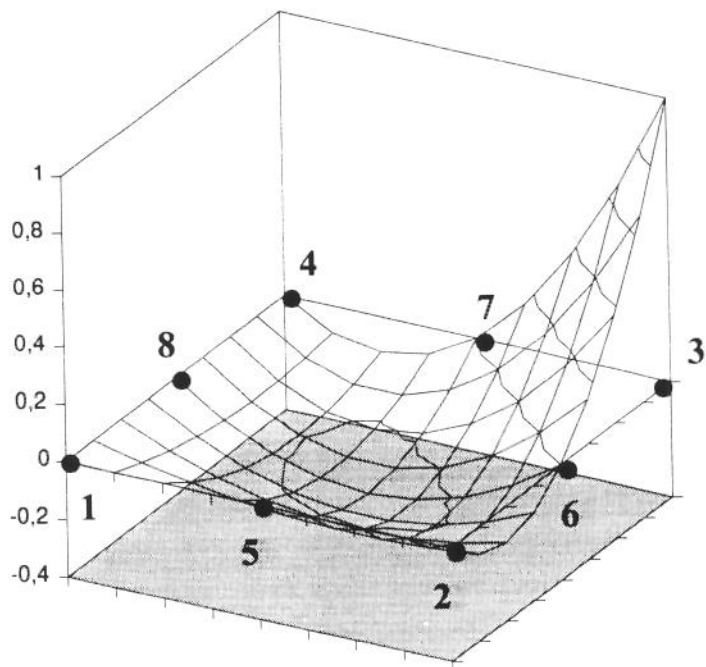


Figura B.3 Função de forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

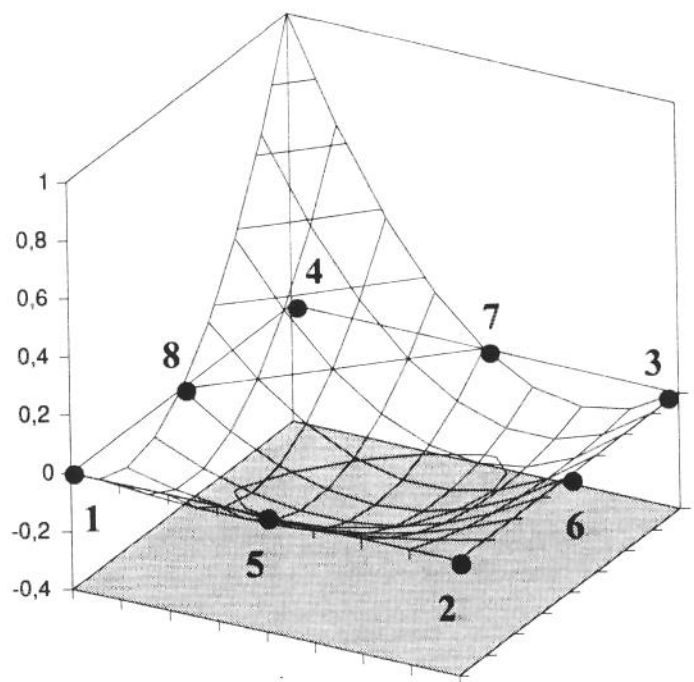


Figura B.4 Função de forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

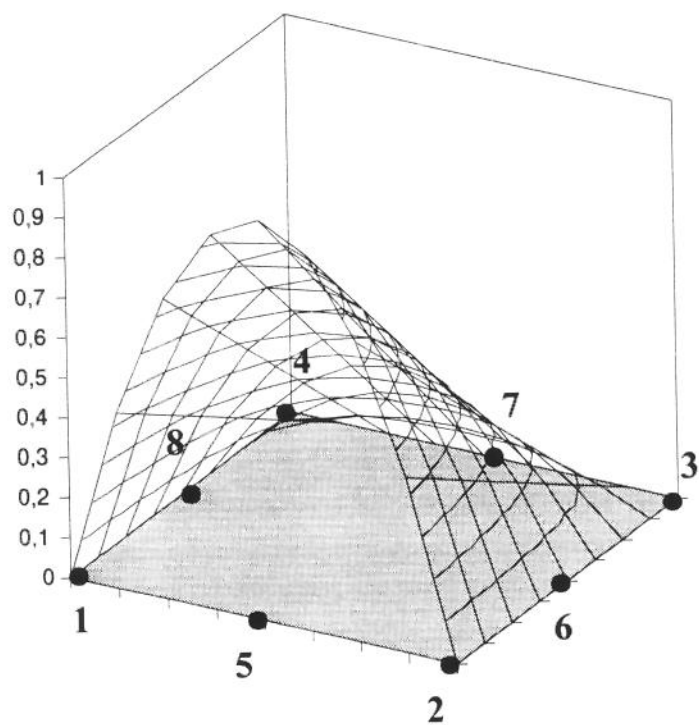


Figura B.5 Função de forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

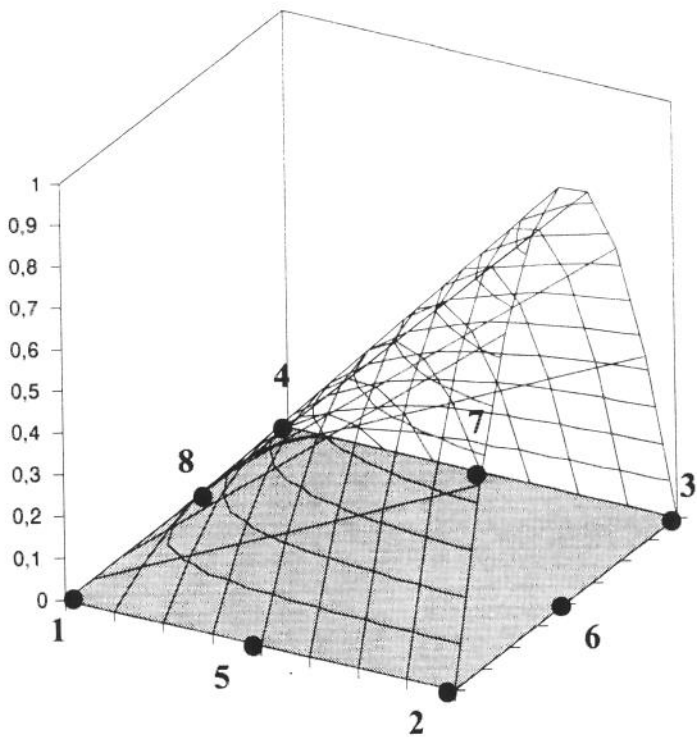


Figura B.6 Função de forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

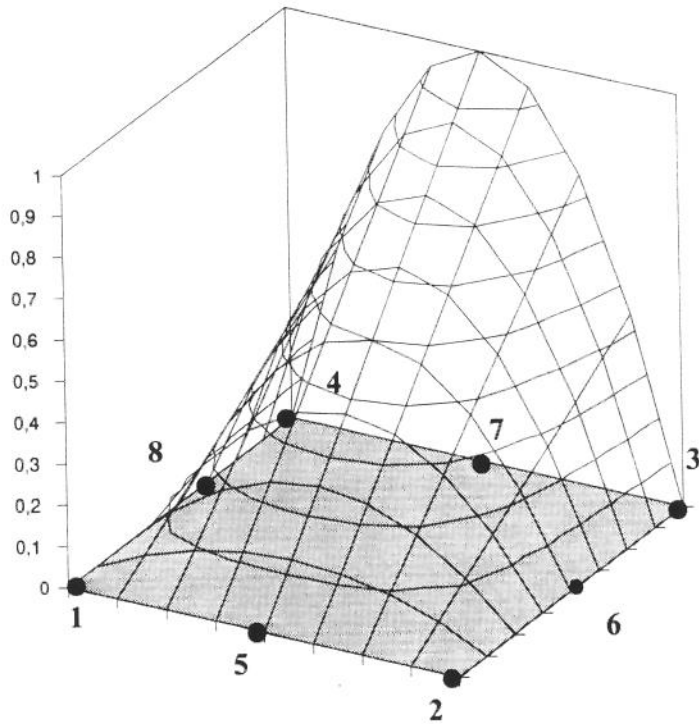


Figura B.7 Função de forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

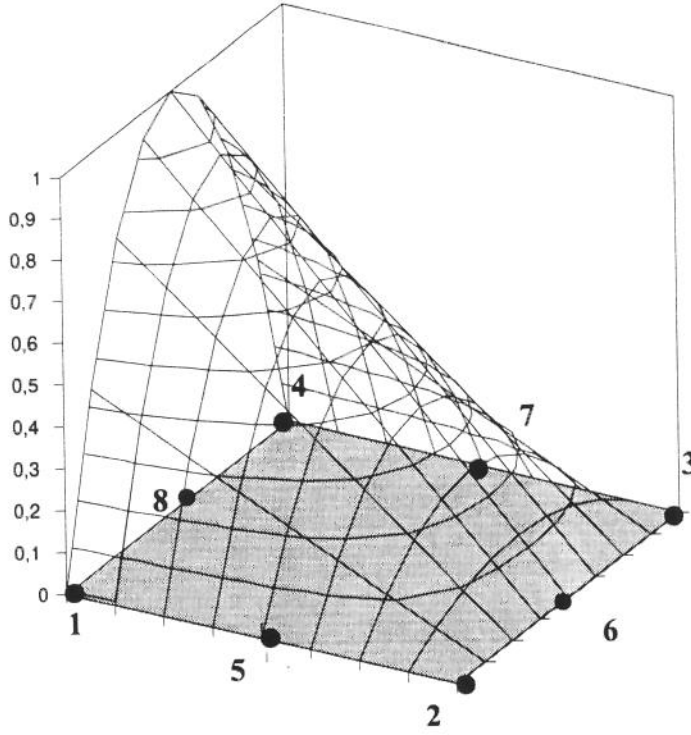


Figura B.8 Função de forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

B.3 Derivadas das funções de forma da família Serendipity

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)(-2\xi-\eta) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta)(-2\xi+\eta) \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\xi(1-\eta) \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1-\eta^2) \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -\xi(1+\eta) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1 - \eta^2) \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(-\xi - 2\eta) \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi - 2\eta) \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi + 2\eta) \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(-\xi + 2\eta) \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\eta(1 + \xi) \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = -\eta(1 - \xi) \quad (\text{B.24})$$

B.4 Funções de forma da família Lagrangeana

As funções de forma da família Lagrangeana, utilizadas neste trabalho, estão descritas nas Equações de B.25 a B.32:

$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{B.25})$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{B.26})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{B.27})$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{B.28})$$

$$N_5 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{B.29})$$

$$N_6 = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.30})$$

$$N_7 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{B.31})$$

$$N_8 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.32})$$

$$N_9 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.33})$$

As Figuras de B.9 a B.17 mostram os gráficos da variação destas funções de forma sobre o elemento.

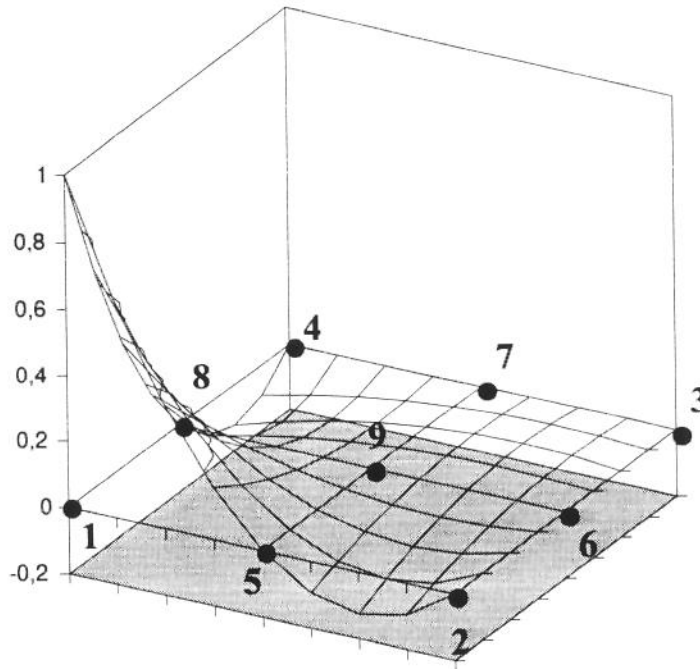


Figura B.9 Função de forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

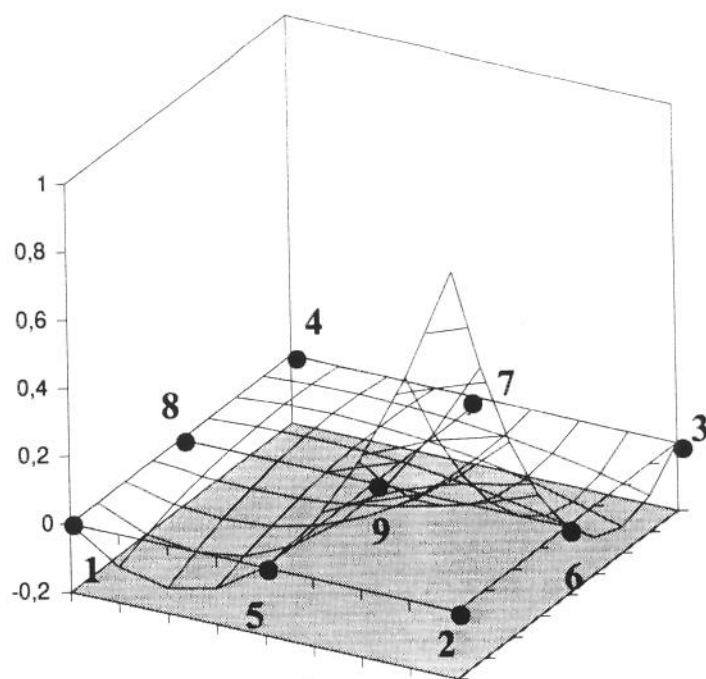


Figura B.10 Função de forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

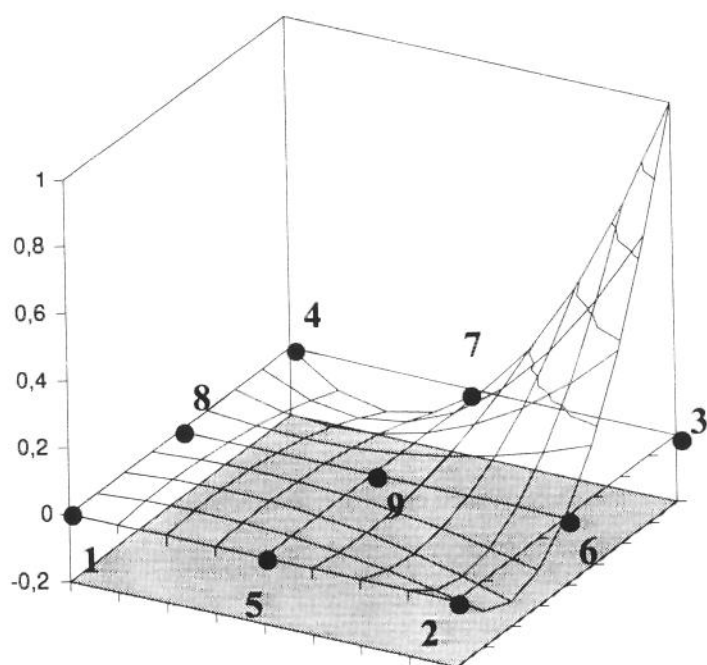


Figura B.11 Função de forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

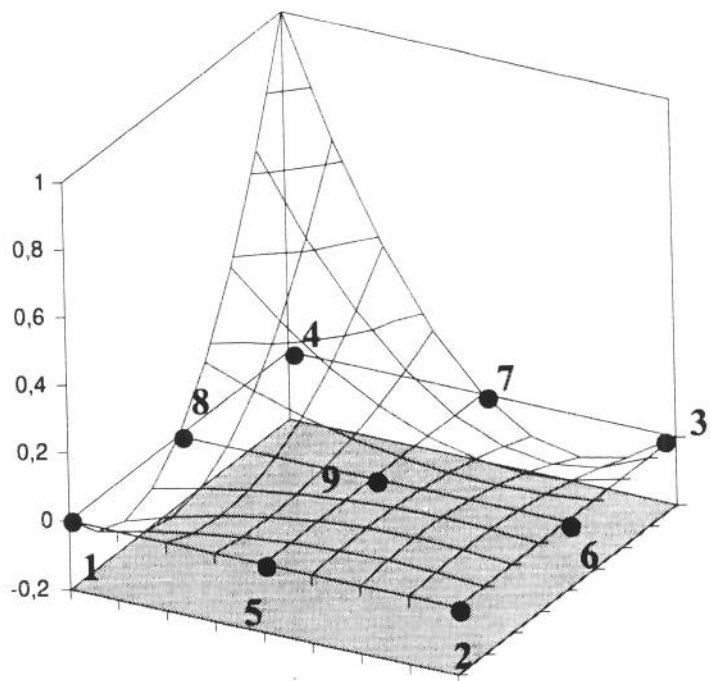


Figura B.12 Função de forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

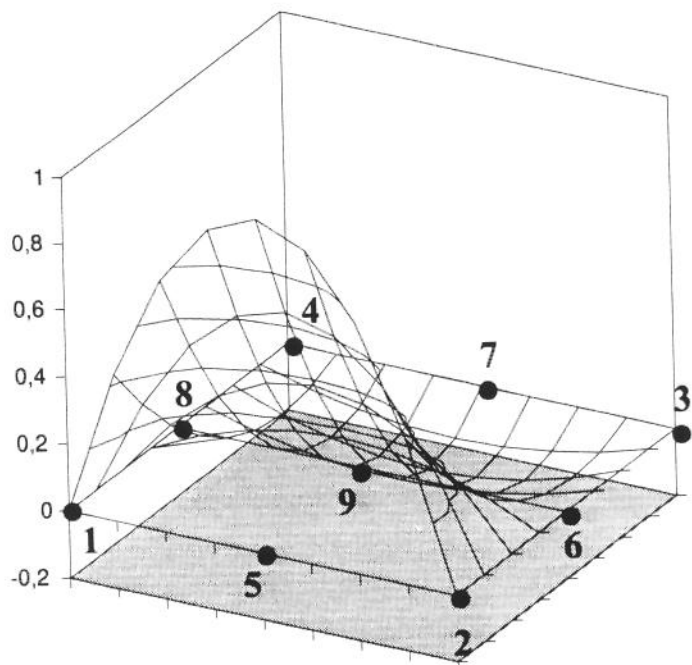


Figura B.13 Função de forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

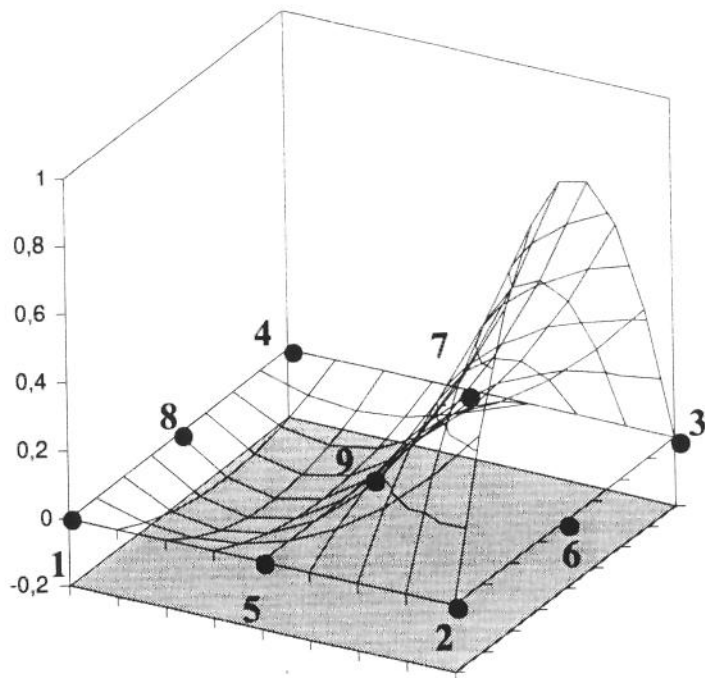


Figura B.14 Função de forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

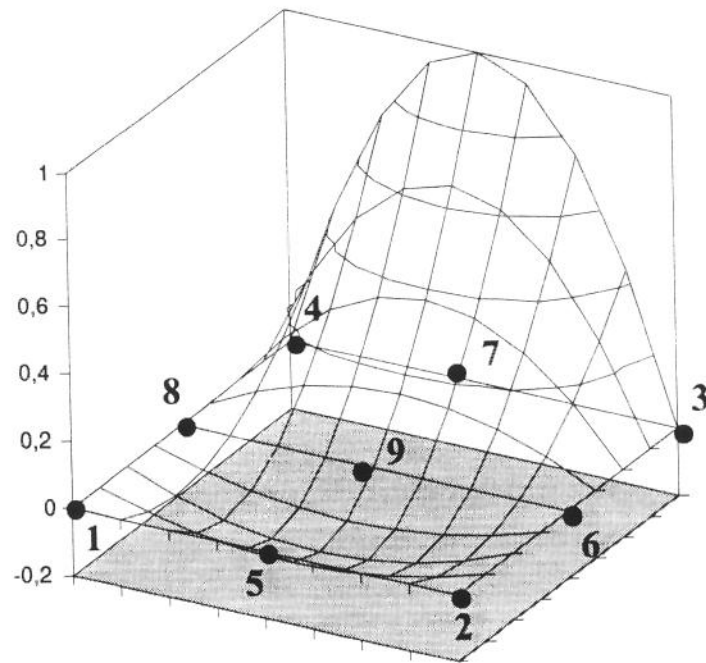


Figura B.15 Função de forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

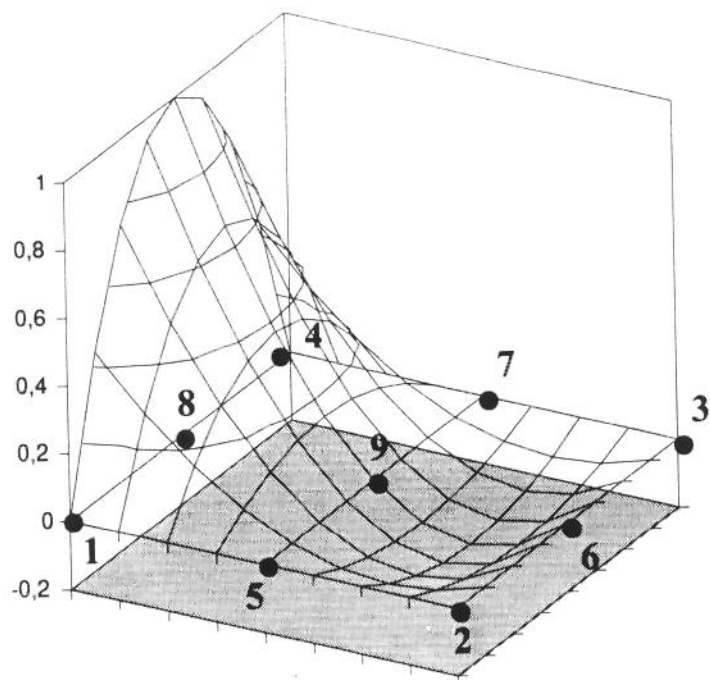


Figura B.16 Função de forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

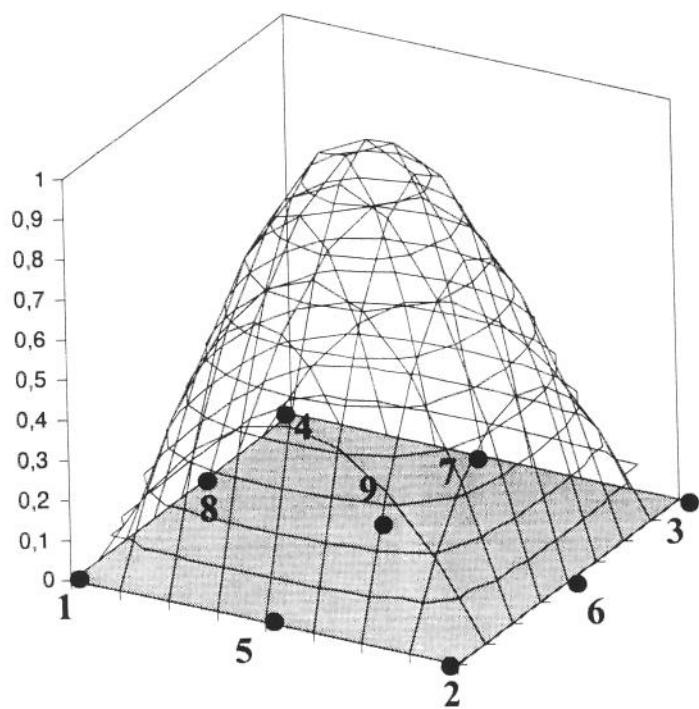


Figura B.17 Função de forma $N_9(\xi, \eta)$, associada ao nó 9 do elemento quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

B.5 - Derivadas das funções de forma da família Lagrangeana

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - 1)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + 1)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + 1)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - 1)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\xi(\eta^2 - \eta) \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(2\xi + 1)(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -\xi(\eta^2 + \eta) \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(2\xi - 1)(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \xi} = 2\xi(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta - 1)(\xi^2 - \xi) \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta - 1)(\xi^2 + \xi) \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta + 1)(\xi^2 + \xi) \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta + 1)(\xi^2 - \xi) \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(2\eta - 1)(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\eta(\xi^2 + \xi) \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(2\eta + 1)(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = -\eta(\xi^2 - \xi) \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \eta} = 2\eta(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.51})$$

Apêndice C

ELEMENTOS DAS MATRIZES

C.1 Elementos da matriz $[A(\xi, \eta)]$

$$\begin{aligned}
 A_{11}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
 A_{21}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{31}(\xi, \eta) + v_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{32}(\xi, \eta) + v_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{33}(\xi, \eta) \tag{C.5}$$

C.2 Derivadas dos deslocamentos locais (u' , v' e w') com relação às coordenadas locais (x' , y' e z')

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{11} & A_{11}v_{12} & A_{11}v_{13} & A_{12}v_{11} & A_{12}v_{12} & A_{12}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (C.6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{11} & A_{21}v_{12} & A_{21}v_{13} & A_{22}v_{11} & A_{22}v_{12} & A_{22}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{11} & A_{33}v_{12} & A_{33}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{21} & A_{11}v_{22} & A_{11}v_{23} & A_{12}v_{21} & A_{12}v_{22} & A_{12}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (C.9)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{21} & A_{21}v_{22} & A_{21}v_{23} & A_{22}v_{21} & A_{22}v_{22} & A_{22}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (C.10)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{21} & A_{33}v_{22} & A_{33}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T \quad (C.11)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{31} & A_{11}v_{32} & A_{11}v_{33} & A_{12}v_{31} & A_{12}v_{32} & A_{12}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (C.12)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{31} & A_{21}v_{32} & A_{21}v_{33} & A_{22}v_{31} & A_{22}v_{32} & A_{22}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (C.13)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{31} & A_{33}v_{32} & A_{33}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T \quad (C.14)$$

C.3 Elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$

$$d_{11}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (C.15)$$

$$d_{12}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (C.16)$$

$$d_{13}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (C.17)$$

$$d_{14}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (C.18)$$

$$d_{15}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (C.19)$$

$$d_{16}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (C.20)$$

$$d_{21}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (C.21)$$

$$d_{22}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (C.22)$$

$$d_{23}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (C.23)$$

$$d_{24}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (C.24)$$

$$d_{25}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (C.25)$$

$$d_{26}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (C.26)$$

$$d_{31}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (C.27)$$

$$d_{32}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (C.28)$$

$$d_{33}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (C.29)$$

$$d_{34}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (C.30)$$

$$d_{35}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (C.31)$$

$$d_{36}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (C.32)$$

$$d_{41}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (C.33)$$

$$d_{42}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (C.34)$$

$$d_{43}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (C.35)$$

$$d_{44}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (C.36)$$

$$d_{45}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (C.37)$$

$$d_{46}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (C.38)$$

$$d_{47}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{11}(\xi, \eta) \quad (C.39)$$

$$d_{48}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{12}(\xi, \eta) \quad (C.40)$$

$$d_{49}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{13}(\xi, \eta) \quad (C.41)$$

$$d_{51}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (C.42)$$

$$d_{52}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (C.43)$$

$$d_{53}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (C.44)$$

$$d_{54}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (C.45)$$

$$d_{55}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (C.46)$$

$$d_{56}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (C.47)$$

$$d_{57}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{21}(\xi, \eta) \quad (C.48)$$

$$d_{58}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{22}(\xi, \eta) \quad (C.49)$$

$$d_{59}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{23}(\xi, \eta) \quad (C.50)$$

C.4 Elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$

$$B_{11i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{14} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.51)$$

$$B_{21i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{24} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.52)$$

$$B_{31i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{34} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \quad (C.53)$$

$$B_{41i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{44} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \quad (C.54)$$

$$B_{51i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{54} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.55)$$

$$B_{12i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{15} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.56)$$

$$B_{22i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{25} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.57)$$

$$B_{32i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{35} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.58)$$

$$B_{42i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{45} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \quad (C.59)$$

$$B_{52i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{55} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.60)$$

$$B_{13i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{16} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \quad (C.61)$$

$$B_{23i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{26} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \quad (C.62)$$

$$B_{33i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{36} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.63)$$

$$B_{43i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{46} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.64)$$

$$B_{53i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{56} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (C.65)$$

$$B_{14i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{11} v_{11i} + d_{12} v_{12i} + d_{13} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{14} v_{11i} + d_{15} v_{12i} + d_{16} v_{13i}) \right] \quad (C.66)$$

$$B_{24i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{21} v_{11i} + d_{22} v_{12i} + d_{23} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{24} v_{11i} + d_{25} v_{12i} + d_{26} v_{13i}) \right] \quad (C.67)$$

$$B_{34i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{31} v_{11i} + d_{32} v_{12i} + d_{33} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{34} v_{11i} + d_{35} v_{12i} + d_{36} v_{13i}) \right] \quad (C.68)$$

$$B_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{41} v_{11i} + d_{42} v_{12i} + d_{43} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{44} v_{11i} + d_{45} v_{12i} + d_{46} v_{13i}) \right] \quad (C.69)$$

$$B_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{51} v_{11i} + d_{52} v_{12i} + d_{53} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{54} v_{11i} + d_{55} v_{12i} + d_{56} v_{13i}) \right] \quad (C.70)$$

$$B_{15i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{11} v_{21i} + d_{12} v_{22i} + d_{13} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{14} v_{21i} + d_{15} v_{22i} + d_{16} v_{23i}) \right] \quad (C.71)$$

$$B_{25i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{21} v_{21i} + d_{22} v_{22i} + d_{23} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{24} v_{21i} + d_{25} v_{22i} + d_{26} v_{23i}) \right] \quad (C.72)$$

$$B_{35i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{31} v_{21i} + d_{32} v_{22i} + d_{33} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{34} v_{21i} + d_{35} v_{22i} + d_{36} v_{23i}) \right] \quad (C.73)$$

$$B_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{41} v_{21i} + d_{42} v_{22i} + d_{43} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{44} v_{21i} + d_{45} v_{22i} + d_{46} v_{23i}) \right] \quad (C.74)$$

$$B_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{51} v_{21i} + d_{52} v_{22i} + d_{53} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{54} v_{21i} + d_{55} v_{22i} + d_{56} v_{23i}) \right] \quad (C.75)$$

$$C_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} [N_i (d_{47} v_{11i} + d_{48} v_{12i} + d_{49} v_{13i})] \quad (C.76)$$

$$C_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} [N_i (d_{57} v_{11i} + d_{58} v_{12i} + d_{59} v_{13i})] \quad (C.77)$$

$$C_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} [N_i (d_{47} v_{21i} + d_{48} v_{22i} + d_{49} v_{23i})] \quad (C.78)$$

$$C_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} [N_i (d_{57} v_{21i} + d_{58} v_{22i} + d_{59} v_{23i})] \quad (C.79)$$