UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Método da Homogeneização Aplicado à Otimização Estrutural Topológica

Autor: Eng. Eduardo Castelo Branco Porto
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

66/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Método da Homogeneização Aplicado à Otimização Estrutural Topológica

Autor: Eng. Eduardo Castelo Branco Porto
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Curso: Engenharia Mecânica - Mestrado
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica / Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Campinas, 2006
SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P838m	Porto, Eduardo Castelo Branco Método da homogeneização aplicado à otimização estrutural topológica / Eduardo Castelo Branco Porto. -- Campinas, SP: [s.n.], 2006. Orientador: Renato Pavanello Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Otimização estrutural. 2. Homogeneização (Equações diferenciais). 3. Método dos elementos finitos. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Homogenization method applied to structural topology optimization
Palavras-chave em Inglês: Topology optimization, Homogenization method,
Optimality criteria, Finite element method
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Marco Lúcio Bittencourt e Eduardo Alberto Fancello
Data da defesa: 23/02/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Dissertação de Mestrado

Método da Homogeneização Aplicado à Otimização Estrutural Topológica

Autor: Eng. Eduardo Castelo Branco Porto
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

____

Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
UNICAMP

____

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt
UNICAMP

____

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello
UFSC

Campinas, 23 de fevereiro de 2006

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha esposa, aos meus pais e irmão, os quais tanto amo e admiro.

Agradecimentos:

Agradeço inicialmente ao amigo professor Pavanello pela orientação dedicada ao trabalho, a qual foi conduzida de forma tranqüila e objetiva. Muito obrigado também ao professor Arruda, quem primeiro me acolheu na Unicamp.

Voltando um pouco no tempo, agradeço aos meus saudosos professores Joãozinho e Fabrício, os quais me iniciaram na matemática. Da mesma forma, não posso deixar de mencionar o carismático professor Paulo Lemos que me introduziu no mundo da física.

Do gosto pelas ciências exatas à faculdade de engenharia mecânica. Nesta nova jornada e moradia, destaco o amigo e companheiro professor Roberto, com o qual realizei minhas primeiras pesquisas acadêmicas. Sou bastante grato também aos professores Ricardo e Edílson que me ensinaram a apreciar as disciplinas de mecânica dos sólidos e sistemas mecânicos, sem falar do método dos elementos finitos. Ainda na faculdade, dedico meus agradecimentos à professora Sônia e aos professores Jesualdo e Salvador pelo enorme apoio e grande incentivo.

Passando do teórico para o mundo prático, obrigado aos meus primeiros companheiros de time, Accácio, Alex, Fernando, Geraldo e Marcão, com os quais aprendi bastante. Agradeço também aos meus antigos e atuais chefes, Luciana, Marcelinho, Udo, Rômulo, Sérgio, Ricardo e Leandro pelo incentivo e compreensão.

E não posso deixar de dizer meu muito obrigado àqueles que nunca mediram esforços no sentido de propiciar a mim as melhores condições de estudo e importantes lições de vida: meus amados pais, ídolos que sempre prezaram o saber. Obrigado à minha amada esposa, aos meus amados avós, tios e primos, e também a amigos próximos, pelo imenso carinho e torcida constante. Sem me esquecer, é claro, da pequenina e doce Milk, minha companheira de micro.

Mais uma vez, meus sinceros agradecimentos a todos.

Antes de pensar em desistir, insista, persista,
para depois não se lamentar
do que poderia ter sido uma grande conquista.

Eduardo Porto

Resumo

PORTO, Eduardo Castelo Branco, *Método da Homogeneização Aplicado à Otimização Estrutural Topológica*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 159 p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho tem por objetivos a investigação e a implementação de um método de otimização estrutural topológica baseado no uso de microestruturas. Dois modelos de microestrutura são introduzidos no problema de projeto ótimo: um ortotrópico com vazios, via homogeneização, e outro isotrópico com penalidade, via equação constitutiva artificial. As propriedades mecânicas efetivas de tais modelos são determinadas através de um programa iterativo implementado, baseado na abordagem da homogeneização. A análise estrutural é então realizada através do método dos elementos finitos e a topologia ótima é obtida com o uso de um otimizador baseado em critérios de otimalidade. São feitas investigações acerca dos parâmetros envolvidos na técnica de homogeneização, assim como são resolvidos problemas elastoestáticos e elastodinâmicos lineares de estado plano de tensão envolvendo critérios de projeto em rigidez e em freqüência natural e restrição de volume. Os algoritmos, implementados em ambiente Matlab, têm sua eficácia comprovada mediante a resolução de problemas clássicos existentes na literatura. E com a implementação dos modelos de material ortotrópico com vazios e isotrópico com penalidade é possível explorar as principais características e potencialidades de cada abordagem.

Palavras-chave

- Otimização Topológica, Método da Homogeneização, Critérios de Otimalidade, Método dos Elementos Finitos.

Abstract

PORTO, Eduardo Castelo Branco, *Homogenization Method Applied to Structural Topology Optimization*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 159 p. Dissertação (Mestrado).

This work aims to investigate and implement a structural topology optimization method based on microstructures. Two microstructure models are introduced in the optimal design problem: one orthotropic with holes, by homogenization, and other isotropic with penalization, by artificial constitutive equation. An implemented iterative program, based on the homogenization approach, determines the effective mechanical properties of each material model. Structural analyses are performed by using the finite element method and optimal topologies are obtained using an optimizer based on optimality criteria. Investigations concerning the parameters related to the homogenization technique are carried out. Linear elastic static and dynamic problems of structures in plane stress state are solved as well, concerning stiffness and natural frequency design criteria and with a constraint on volume. The solution of classic structural problems encountered in literature has demonstrated the effectiveness of the implemented Matlab codes and the implementation of the orthotropic and isotropic material models has made possible the investigation of the main characteristics and potentialities of each approach.

Keywords

- Topology Optimization, Homogenization Method, Optimality Criteria, Finite Element Method.

Sumário

Lista de Figuras **iv**

Lista de Tabelas **vii**

Nomenclatura **viii**

1. Introdução **1**

1.1 Relevância e Motivação 1

1.2 Objetivos e Contribuições 7

1.3 Descrição do Trabalho 9

2. Revisão da Literatura **11**

2.1 Introdução 11

2.2 Otimização Estrutural 11

2.3 Otimização Estrutural Topológica Baseada no Método da Homogeneização 17

3. Teoria da Homogeneização **28**

3.1 Introdução 28

3.2 Periodicidade e Expansão Assintótica 29

3.3 Equações de Homogeneização 31

3.3.1 Problema de valor de contorno geral 32

3.3.2 Comportamento mecânico em nível microscópico 34

3.3.3 Módulos elásticos homogeneizados 38

3.4 Solução das Equações Homogeneizadas 40

3.4.1 Modelo de material ortotrópico com vazios 44

3.4.2 Modelo de material isotrópico com penalidade 54

4. Otimização Estrutural Topológica Baseada na Homogeneização **56**

4.1 Introdução 56

4.2 Problema de Distribuição de Material 57
4.3 Variáveis de Projeto e Restrições Laterais 62
4.4 Restrição de Volume e Sensibilidades 63
4.5 Funções Objetivo e Sensibilidades 65
4.5.1 Maximização da Rigidez: Único Caso de Carregamento 65
4.5.2 Maximização da Rigidez: Múltiplos Casos de Carregamento 68
4.5.3 Maximização da Rigidez: Ação do Peso Próprio 69
4.5.4 Maximização da Freqüência Natural 71
4.6 Critérios de Otimalidade 78
4.7 Otimizador Baseado nas Condições de Otimalidade 80
4.8 Determinação do Multiplicador de Lagrange da Restrição de Volume 87
4.9 Critérios de Convergência da Solução 89
4.10 Eliminação das Instabilidades Numéricas 89
5. Implementação Computacional 95
5.1 Introdução 95
5.2 Programa de Otimização Estrutural Topológica 95
5.2.1 Módulo de elementos finitos 96
5.2.2 Módulo de homogeneização 99
5.2.3 Módulo de atualização das variáveis de projeto 106
5.2.4 Módulo integrado de otimização estrutural topológica 108
6. Resultados Numéricos 112
6.1 Introdução 112
6.2 Método da Homogeneização 112
6.2.1 Problema 6.2.1 112
6.2.2 Problema 6.2.2 114
6.2.3 Problema 6.2.3 117
6.2.4 Problema 6.2.4 120
6.3 Otimização Estrutural Topológica 123
6.3.1 Problema 6.3.1 123
6.3.2 Problema 6.3.2 127
6.3.3 Problema 6.3.3 132

6.3.4 Problema 6.3.4 138

7. Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros 144

7.1 Conclusões Específicas 144

7.2 Conclusão Geral e Sugestões de Continuidade 145

Referências Bibliográficas 147

Apêndice A 154

Lista de Figuras

Figura 1.1.1 - O desenvolvimento, na prática, do projeto de engenharia.......................................2
Figura 1.1.2 - O desenvolvimento otimizado do projeto de engenharia. 3
Figura 1.1.3 - Os tipos de otimização estrutural e as fases de projeto. 4
Figura 1.1.4 - A tendência tecnológica no ambiente de CAE. 5
Figura 1.1.5 - A otimização estrutural topológica inserida no contexto de CAE. 6
Figura 1.1.6 - Novo conceito do componente obtido a partir da otimização topológica. 6
Figura 3.2.1 - Ilustração de um meio microporoso periódico regular. 29
Figura 3.2.2 - Comportamentos local e global da propriedade F_Y(x), Y-periódica. 30
Figura 3.2.3 - Dimensão característica de não-homogeneidade e escala local expandida. 31
Figura 3.3.1.1 - Problema de elasticidade abordado. 32
Figura 3.3.1.2 - Estrutura constituída de material microcelular periódico regular. 33
Figura 3.4.1 - Modelo de material com microestrutura periódica lamelar de classe-2. 41
Figura 3.4.2 - Modelo de material com microestrutura periódica de vazios retangulares. 42
Figura 3.4.3 - Modelo de material com microestrutura artificial. 42
Figura 3.4.1.1 - Condições de contorno aplicadas à célula-base para o cálculo de D^h_{1111}. 48
Figura 3.4.1.2 - Condições de contorno da célula-base para o cálculo de D^h_{1212} e D^h_{2222}. 51
Figura 3.4.1.3 - Condições de contorno aplicadas à célula-base para o cálculo de D^h_{1212}. 53
Figura 4.2.1 - Viga curta engastada e sujeita à carga pontual no centro da extremidade livre. 57
Figura 4.2.2 - Malha de elementos finitos da viga curta engastada. 58
Figura 4.2.3 - Distribuição inicial de densidades para a viga curta engastada. 59
Figura 4.2.4 - Determinação do tensor elástico efetivo conforme modelo de material. 60
Figura 4.2.5 - Distribuição de densidades para a segunda iteração do problema. 60
Figura 4.2.6 - Distribuição ótima de densidades para o problema da viga curta engastada. 61

Figura 4.5.4.1 - O problema da inversão dos autovalores no processo de otimização. 72
Figura 4.5.4.2 - Eliminação da inversão dos autovalores via uso do autovalor médio ponderado.73
Figura 4.8.1 - Relação entre o volume e o multiplicador de Lagrange. 88
Figura 4.10.1 - Aspecto de tabuleiro de xadrez presente na topologia ótima. 89
Figura 4.10.2 - Diferentes topologias obtidas a partir de diferentes densidades da malha. 91
Figura 4.10.3 - Diferentes topologias obtidas a partir de diferentes densidades iniciais. 92
Figura 4.10.4 - Interpolação dos campos densidade e deslocamento do tipo Q8/U. 93
Figura 5.2.1.1 - Elementos finitos isoparamétricos: (a) linear e (b) parabólico............................96
Figura 5.2.1.2 - Fluxograma do módulo de elementos finitos. 99
Figura 5.2.2.1 - Densidade da malha da célula-base definida como 20 x 20. 100
Figura 5.2.2.2 - Discretização da célula-base com vazio (0,4 x 0,6). 101
Figura 5.2.2.3 - Célula-base (0,4 x 0,6) deformada e módulos elástico efetivos. 102
Figura 5.2.2.4 - Superfícies dos módulos elásticos efetivos: $p_{ab} = 0,1$, E = 1e5 e $\nu = 0,3$.........104
Figura 5.2.2.5 - Fluxograma do módulo de homogeneização. 105
Figura 5.2.3.1 - Algoritmo de atualização da orientação nos casos estático e de peso próprio. ..107
Figura 5.2.3.2 - Fluxograma do módulo de atualização das variáveis de projeto. 108
Figura 5.2.4.1 - Fluxograma do módulo integrado de OT. 111
Figura 6.2.1.1 - Célula-base com vazio (a = 0,4 x b = 0,6). 113
Figura 6.2.2.1 - Resultados do Problema 6.2.2: módulos elásticos D^h_{1111} e D^h_{2222}.....................116
Figura 6.2.2.2 - Resultados do Problema 6.2.2: módulos elásticos D^h_{1122} e D^h_{1212}.....................116
Figura 6.2.3.1 - Viga curta engastada sujeita à carga pontual: Problema 6.2.3. 117
Figura 6.2.3.2 - Resultados do Problema 6.2.3: históricos da energia de deformação. 119
Figura 6.2.3.3 - Resultados do Problema 6.2.3: topologias ótimas..119
Figura 6.2.4.1 - Resultados do Problema 6.2.4: históricos da energia de deformação. 121
Figura 6.2.4.2 - Resultados do Problema 6.2.4: topologias ótimas..122
Figura 6.3.1.1 - Suporte engastado com furo central sujeito à carga pontual: Problema 6.3.1....123
Figura 6.3.1.2 - Topologias ótimas: (A) $N_h = 40$ e $p_{ab} = 0,2$, e (B) $N_h = 80$ e $p_{ab} = 0,1$..............124
Figura 6.3.1.3 - Topologia ótima obtida com o programa PLATO [29]. 125
Figura 6.3.1.4 - Históricos: (A) função objetivo e (B) restrição. 126
Figura 6.3.2.1 - Viga bi-apoiada sujeita a cargas pontuais: Problema 6.3.2. 127
Figura 6.3.2.2 - Resultados do Problema 6.3.2: Caso de carregamento (1). 129

Figura 6.3.2.3 - Resultados do Problema 6.3.2: Casos de carregamento (2). 130
Figura 6.3.2.4 - Topologias ótimas, Caso (2): malha com 60 x 20 elementos. 131
Figura 6.3.3.1 - Viga bi-apoiada sujeita à ação do peso próprio: Problema 6.3.3. 132
Figura 6.3.3.2 - Resultados do Problema 6.3.3: topologias ótimas, Caso (1). 134
Figura 6.3.3.3 - Resultados do Problema 6.3.3: históricos da função objetivo, Caso (1). 135
Figura 6.3.3.4 - Resultados do Problema 6.3.3: topologias ótimas, Caso (2). 135
Figura 6.3.3.5 - Resultados do Problema 6.3.3: históricos da função objetivo, Caso (2). 136
Figura 6.3.4.1 - Viga bi-engastada com massa central não-estrutural: Problema 6.3.4. 138
Figura 6.3.4.2 - Problema 6.3.4: topologias ótimas obtidas pelo código MATLAB e literatura. 140
Figura 6.3.4.3 - Problema 6.3.4: histórico da função objetivo. 140
Figura 6.3.4.4 - Problema 6.3.4: histórico das três primeiras freqüências naturais. 141
Figura 6.3.4.5 - Problema 6.3.4: interpretação da topologia ótima obtida. 141
Figura 6.3.4.6 - Problema 6.3.4: modos normais das estruturas original e ótima. 142

Lista de Tabelas

Tabela 5.2.4.1 - Dados de entrada do programa de OT implementado. 109
Tabela 6.2.1.1 - Dados de entrada do Problema 6.2.1 113
Tabela 6.2.1.2 - Resultados do Problema 6.2.1 114
Tabela 6.2.2.1 - Dados de entrada do Problema 6.2.2 115
Tabela 6.2.3.1 - Dados de entrada do Problema 6.2.3 118
Tabela 6.3.1.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.1 124
Tabela 6.3.2.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.2 128
Tabela 6.3.3.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.3 133
Tabela 6.3.4.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.4 139

Nomenclatura

Letras Latinas

a	funcional bilinear
a	largura do vazio retangular característico da célula-base e variável de projeto
a	vetor contendo certos valores de a, utilizado no cálculo do tensor elástico efetivo
A	operador elíptico
a_e	variável de projeto associada ao elemento finito *e*, modelo ortotrópico
A_e	área do elemento finito
b	altura do vazio da célula-base e variável de projeto
b	vetor contendo certos valores de b, utilizado no cálculo do tensor elástico efetivo
b_e	variável de projeto associada ao elemento finito *e*, modelo ortotrópico
$\mathbf{B}_e$	matriz de transformação deslocamento-deformação do *e*-ésimo elemento finito
C	matriz de flexibilidade do meio isotrópico
$\mathbf{C}^h$	matriz de flexibilidade homogeneizada, função das dimensões da célula-base
D	tensor elástico do meio isotrópico
$\mathbf{D}^h$	tensor elástico homogeneizado, função das dimensões da célula-base
$\mathbf{D}^H$	tensor elástico homogeneizado, função das dimensões e orientação da célula-base
E	módulo de Young
$E\mathrm{x}_e$, $E\mathrm{a}_e$, $E\mathrm{b}_e$	parâmetros indicadores da densidade de energia do elemento *e*
f	componente arbitrária da força de corpo atuando na estrutura
F_Y	função escalar, vetorial ou tensorial **Y**-periódica
F	função que designa a função objetivo do problema de otimização
F	vetor de carga global atuando na estrutura
$\mathrm{f}_{n,i}$	freqüência natural em Hz associada ao modo de vibrar *i*
g_z	valor absoluto da aceleração da gravidade
g	função designando a restrição de volume do problema de otimização
$\hat{H}_f$	função de convolução do filtro proposto por Sigmund
I	matriz identidade
I_m	número máximo de iterações do algoritmo de otimização
K	matriz de rigidez global da estrutura
l	funcional linear
L	função Lagrangiana do problema de otimização
M	variável que define o tipo de modelo de material do algoritmo de otimização
m_e	massa do elemento finito *e*

$\mathbf{M}_g$	matriz de massa global do sistema
m_i	massa generalizada correspondente ao modo de vibrar *i*
n	número de nós do elemento finito
N_c	número de casos de carregamentos independentes
$\mathbf{N}$	matriz diagonal de números inteiros
$\mathbf{N}_e$	vetor contendo as funções de forma do elemento finito *e*
N_{el}	número de elementos finitos da malha da estrutura
N_h	variável que define a densidade da malha da célula-base
N_i^e	função de forma associada ao *i*-ésimo nó do elemento finito
N_m	número de modos considerados no problema de otimização
p	expoente empírico característico do modelo de material isotrópico
p_{ab}	passo dos vetores **a** e **b** para o cálculo do tensor elástico homogeneizado
$\mathbf{P}_e$	vetor de carga nodal relativo às forças de corpo atuando no elemento finito *e*
$\mathbf{R}_e$	matriz de rotação associada ao elemento finito *e*
$r_{\min}$	raio de atuação do filtro proposto por Sigmund
r, s	coordenadas naturais do elemento finito, formulação isoparamétrica
t	espessura uniforme da estrutura
t_p	tolerância de parada do programa de otimização estrutural
$\mathbf{T}_e$	vetor de carga nodal referente às forças de superfície atuando no elemento finito *e*
u	campo de deslocamentos da estrutura
$\mathbf{U}$	vetor global relativo aos deslocamentos nodais da estrutura
$\mathbf{U}_e$	vetor contendo os deslocamentos nodais do elemento finito
$u_{i,1}$, $u_{i,2}$	deslocamentos nodais reais
V	volume da estrutura
v_i	função ponderadora arbitrária
$\overline{V}$	volume final desejado para a estrutura
$\mathbf{W}_e$	vetor contendo os deslocamentos nodais virtuais
$w_{i,1}$, $w_{i,2}$	deslocamentos nodais virtuais
w_i	peso atribuído a um dado modo de vibrar *i*
w_j	peso atribuído a um dado carregamento *j*
$w_{n,i}$	freqüência natural em rad/s associada ao modo de vibrar *i*
x	variável da função pseudodensidade
$\mathbf{x}$	vetor posição ao longo do meio heterogêneo, em nível microscópico
$\mathbf{X}$	vetor das variáveis de projeto generalizadas
x_e	variável de projeto associada ao elemento finito *e*, modelo isotrópico
X_e	variável de projeto generalizada associada ao *e*-ésimo elemento finito
$X_e^{\inf}$	limite inferior da variável de projeto X_e
$X_e^{\sup}$	limite superior da variável de projeto X_e
$x_{\min}$	limite inferior das variáveis de projeto
X*	variável de projeto ótima
$\mathbf{y}$	vetor posição ao longo do meio heterogêneo, em nível macroscópico
$\mathbf{Y}$	vetor contendo os períodos ao longo das direções ortogonais do meio heterogêneo
Y_S	domínio sólido da célula-base do meio heterogêneo regular periódico
Y_V	domínio vazio da célula-base
$\lvert Y \rvert$	volume da célula-base

••

Letras Gregas

χ_e	função que define a orientação ótima, caso de várias cargas e autovalores
X_p^{kl}	campo de deslocamento microscópico **Y**-periódico
δ	parâmetro que indica a razão entre as dimensões microscópica e macroscópica
δ_v	tolerância estabelecida para a violação da restrição de volume
$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	vetor contendo as deformações do *e*-ésimo elemento finito
ϕ_i	autovetor relativo ao modo normal *i*
$\boldsymbol{\Phi}$	matriz modal contendo os autovetores dos modos normais da estrutura
γ	constante de normalização da matriz modal
Γ_d	domínio local da estrutura onde os deslocamentos são restritos
Γ_t	domínio local da estrutura de atuação das forças de superfície
η	parâmetro de amortecimento do otimizador baseado em critérios de otimalidade
λ	multiplicador de Lagrange associado à restrição de volume
Λ	autovalor médio, definido a partir da média recíproca ponderada dos autovalores
$\lambda_{n,i}$	autovalor correspondente ao modo normal *i* e associado à freqüência natural *n*
λ^{sup}, λ^{inf}	multiplicadores de Lagrange associados à restrição lateral
λ_0	multiplicador de Lagrange associado à restrição de volume na iteração inicial
ν	coeficiente de Poisson
θ	variável de projeto relativa à orientação da célula-base
θ_e	orientação do elemento finito *e*
ρ	função pseudodensidade
ρ_e	função pseudodensidade associado ao elemento *e*
ρ_0	densidade do material base
$\boldsymbol{\sigma}_e$	vetor contendo as tensões ao longo do *e*-ésimo elemento finito
σ_x, σ_y	tensões normais verificadas ao longo do elemento finito
τ_{xy}	tensão de cisalhamento ao longo do elemento finito de estado plano
Ω	domínio global da estrutura
$\boldsymbol{\Psi}$	matriz modal normalizada com relação à matriz de massa
ζ	passo de atualização das variáveis de projeto

•••

Abreviações

CAD	projeto assistido por computador
CAE	engenharia assistida por computador
OC	baseado em critérios de otimalidade
SIMP	método de otimização baseado em material sólido isotrópico com penalidade

•••

Siglas

DMC	Departamento de Mecânica Computacional
MEF	Método dos Elementos Finitos
OT	Otimização Topológica

••

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo, inicialmente é destacada a importância do tema estudado dentro do contexto atual de projeto, assim como a motivação para desenvolvê-lo. Em seguida, são relatados os objetivos do presente trabalho e suas contribuições para o grupo de mecânica computacional (DMC). Ao final, é feita uma descrição global dos assuntos abordados em cada um dos capítulos subseqüentes.

1.1 Relevância e Motivação

Problemas fundamentais sobre projeto estrutural ótimo atraíram inicialmente o interesse de Galileu (1638). Posteriormente, o referido tema foi estendido por J. Bernoulli (1687), Newton (1687), D. Bernoulli (1733), Lagrange (1770), Saint-Venant (1864), Maxwell (1869) e Lévy (1873). Naquela época, a otimização estrutural já consistia em um tópico intelectualmente atrativo e tecnicamente significativo, mesclando disciplinas como matemática, mecânica e engenharia [45].

E desde então, fatores como a escassez de recursos existentes na natureza, políticas ambientais bem exigentes, a implacável competição tecnológica, elevados custos com material, dentre outros fatores, cada vez mais considerados no ambiente de projeto, têm motivado e dado continuidade a novas pesquisas sobre a otimização de estruturas. E neste sentido, a contínua evolução do Método dos Elementos Finitos (MEF) é também destacada. Hoje, os métodos de otimização encontram aplicação em diversas áreas, tais como mecânica, civil, materiais, aeronáutica, aeroespacial, *off-shore*, biomecânica, dentre outras.

A otimização estrutural pode ser definida como sendo o estabelecimento racional de um projeto estrutural que é o melhor dentre todos os projetos possíveis, dentro de um objetivo prescrito e de um dado conjunto de limitações geométricas e/ou comportamentais [45].

Na análise estrutural, as dimensões, geometria e propriedades dos materiais são previamente conhecidas e o objetivo da análise é determinar o comportamento da estrutura a certas solicitações. Já na otimização estrutural, alguns ou todos os dados de entrada citados acima são totalmente desconhecidos. O escopo é então determiná-los de forma que o comportamento da estrutura, sujeita àquelas mesmas solicitações, seja minimizado ou maximizado, respeitando certos limitações de projeto.

As *variáveis de projeto* do problema de otimização correspondem então aos dados de entrada da análise estrutural. O objetivo a ser alcançado, estudando-se tais variáveis, constitui a *função objetivo*. E as limitações, às quais está sujeita a solução do problema de otimização, são chamadas de *restrições*. Como exemplos de funções objetivo, podem-se citar a maximização da rigidez estática da estrutura ou a minimização de seu peso. As restrições, por sua vez, podem ser de caráter geométrico, relacionadas, por exemplo, com a espessura de uma chapa ou a área da seção transversal de uma viga, ou de caráter comportamental, podendo estar associadas ao valor da deflexão máxima da estrutura ou ao valor de sua primeira freqüência natural. Um descrição detalhada de demais conceitos pertinentes à otimização estrutural é encontrada em [36] e [45].

Apesar da existência e nível de maturidade das ferramentas de otimização estrutural, o que se tem observado na prática, dentro do ambiente de engenharia, é o projeto consistindo, fundamentalmente, em um processo intuitivo, cujo sucesso depende fortemente da experiência, criatividade, percepção e conhecimentos do engenheiro. É o que ilustra a Figura 1.1.1.

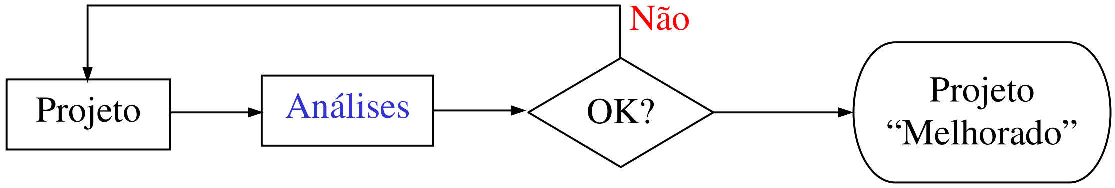


Figura 1.1.1 - O desenvolvimento, na prática, do projeto de engenharia.

De acordo com a Figura 1.1.1 acima, uma vez concebido o projeto, análises pertinentes são realizadas. Os resultados, obtidos a partir de tais análises, são então confrontados com os critérios de projeto previamente estabelecidos. Caso tais critérios não sejam satisfeitos, um novo projeto é estabelecido e novas análises são feitas até que os critérios de projeto venham a ser atendidos, obtendo-se assim um projeto "melhorado". Projeto este que, embora não ótimo, resolve de forma satisfatória o problema de engenharia.

Porém, com o advento e uso das ferramentas de otimização, o que se espera é a eliminação do ciclo intuitivo característico do projeto tradicional e a inclusão das técnicas de otimização, conforme ilustrado na Figura 1.1.2.

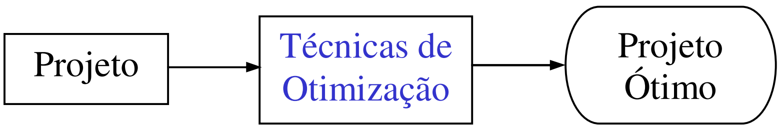


Figura 1.1.2 - O desenvolvimento otimizado do projeto de engenharia.

Neste novo contexto, uma vez concebido o projeto, as análises pertinentes são realizadas com o auxílio das ferramentas de otimização, implicando diretamente a solução ótima de projeto. E desta forma, a experiência do engenheiro, aliada agora às técnicas de otimização, torna-se uma poderosa ferramenta na busca pelo projeto ótimo.

Com base em [30] e [65], a otimização estrutural pode ser dividida em quatro categorias, as quais podem ser definidas e correlacionadas com as fases de projeto da seguinte forma:

- *Otimização topológica* (OT): também denominada de *otimização de forma generalizada*. Ferramenta que visa à determinação ótima do número e localização de furos (vazios) em meios contínuos bi e tridimensionais. Tais regiões de vazios são então desconsideradas do projeto, estabelecendo-se uma nova distribuição de material ao longo do domínio da estrutura. Bastante útil na *fase de concepção* do produto, fase esta altamente dependente do engenheiro e onde não há auxílio computacional. É o método empregado no presente trabalho. A Figura 1.1.3 a seguir ilustra tal técnica.

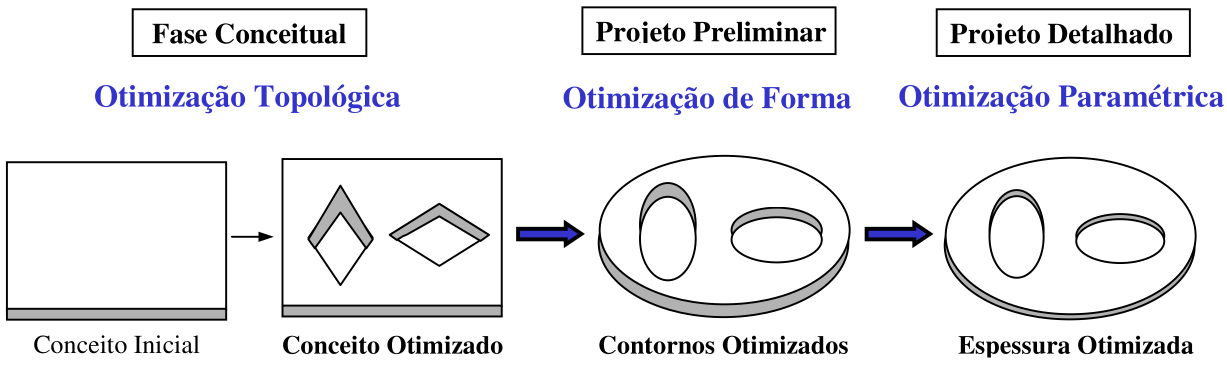


Figura 1.1.3 - Os tipos de otimização estrutural e as fases de projeto.

- *Otimização de forma*: técnica que busca a definição ótima dos contornos externos e internos da estrutura. Uma vez determinada a topologia ótima, a forma da estrutura pode ser então otimizada. A otimização de forma pode ser aplicada durante a *fase de projeto preliminar* (vide Figura 1.1.3 acima).

- *Otimização paramétrica ou dimensional*: obtidas a topologia e forma ótimas, o objetivo seguinte é determinar valores ótimos para os parâmetros geométricos da estrutura a ser projetada. Tais parâmetros podem ser: espessura, comprimento, área da seção transversal, dentre outros. Ferramenta de grande valia na *fase de projeto detalhado* (vide Figura 1.1.3 acima).

- *Otimização de layout*: abordagem de problemas envolvendo estruturas reticuladas, como treliças e armações, com o objetivo de determinar a topologia, forma e dimensões ótimas de seus membros estruturais, assim como a localização ótima das juntas (uniões) que conectam tais membros. Técnica que envolve simultaneamente as otimizações paramétrica, de forma e topológica.

Contudo, no presente ambiente de desenvolvimento de engenharia, onde as ferramentas numéricas relacionadas a análises estáticas, dinâmicas, de fadiga, de vibro-acústica, dentre outras, encontram-se bem consolidadas, tem-se verificado uma maior aplicação das ferramentas de otimização estrutural, com a otimização paramétrica sendo amplamente empregada e as otimizações de forma e de topologia ainda sendo exploradas.

Uma vez consolidadas as otimizações de forma e topologia no ambiente da engenharia auxiliada por computador (CAE), assim como integradas as três técnicas de otimização, o engenheiro terá como novo e grande desafio a busca pela solução ótima que venha a satisfazer critérios de projeto envolvendo as várias disciplinas do cálculo estrutural. A otimização de multicritérios ou multidisciplinar passará então a ser o foco, conforme ilustra a Figura 1.1.4.

Figura 1.1.4 - A tendência tecnológica no ambiente de CAE.

A consideração dos fatos descritos acima "inspirou" o estudo e investigação de um método de otimização estrutural topológica, o qual se apresenta como uma das tendências atuais de projeto e como uma das bases para a tendência tecnológica futura, visando sempre ao projeto o mais eficiente possível.

Inserindo-se a ferramenta de otimização estrutural topológica dentro do ambiente de CAE, o projeto de engenharia passa a ser desenvolvido, basicamente, da seguinte forma: (1) o produto é concebido pela área de projeto assistido por computador (CAD); (2) o mesmo é discretizado através do MEF; (3) os carregamentos e as condições de contorno são aplicados e se realiza a simulação numérica; (4) os resultados obtidos a partir da simulação servem como dados de entrada para a otimização estrutural topológica, a qual, por sua vez, fornece topologia ótima e forma quase-ótima para os contornos do produto; (5) a topologia e formas finais obtidas são redefinidas de acordo com a viabilidade de fabricação; (6) o produto é novamente sujeito às condições de contorno e carregamento impostos a título de verificação da solução; (6) satisfeitos os critérios de projeto, o produto é então manufaturado. O fluxograma apresentado na Figura 1.1.5 a seguir ilustra os passos descritos acima.

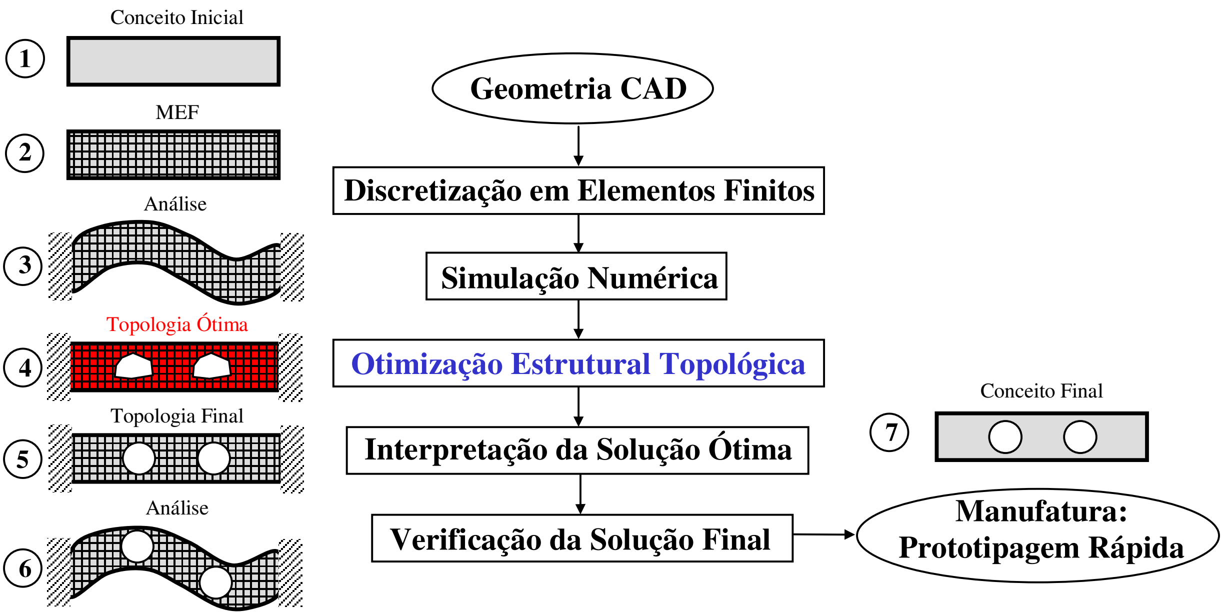


Figura 1.1.5 - A otimização estrutural topológica inserida no contexto de CAE.

O grande potencial da técnica de otimização estrutural topológica, ainda pouco explorado, consiste em sua eficiente capacidade de auxílio na fase de concepção do produto, onde são muitas as possibilidades de solução inicial. Neste sentido, uma vez estendido o domínio de projeto, por exemplo, com base no espaço a ser ocupado pelo componente, e mantido o mesmo fixo, a ferramenta de otimização topológica é capaz de definir um conceito ótimo de partida. Tal procedimento é ilustrado na Figura 1.1.6.

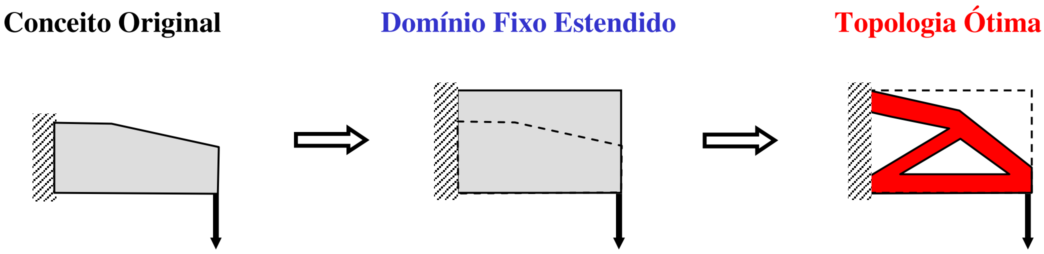


Figura 1.1.6 - Novo conceito do componente obtido a partir da otimização topológica.

Outra característica interessante da OT é o fato de que a distribuição ótima do material ao longo do domínio da estrutura provoca também, ainda que de forma grosseira, a mudança dos contornos externo e interno desta (vide Figura 1.1.6 acima e Figura 1.1.5 anterior). Portanto, tal técnica funciona também como um pré-otimizador da forma da estrutura, com a grande vantagem de que o domínio de cálculo é mantido fixo, ao contrário do que ocorre na otimização de forma.

Entretanto, o que se tem praticado na indústria é o domínio fixo estendido correspondendo ao original, visando-se ao aproveitamento de todo o ferramental já existente. A aplicação da técnica de otimização topológica é tardia, sendo a mesma subutilizada.

Concluindo, a ferramenta de otimização topológica é valiosa e útil no estágio inicial do desenvolvimento estrutural, de forma a auxiliar o engenheiro na busca por um produto enxuto, capaz de satisfazer os requerimentos de projeto e conferir a este uma maior eficiência e um possível menor custo com material. A OT encontra aplicação em diversas áreas como automotiva, aeronáutica, aeroespacial, naval, civil, dentre outras.

1.2 Objetivos e Contribuições

O objetivo geral deste trabalho é a investigação e a implementação de um método de otimização estrutural topológica baseado na técnica de homogeneização, sendo o mesmo aplicado à solução de problemas elastoestáticos e elastodinâmicos lineares de estado plano de tensão. Foram desenvolvidos critérios de projeto associados à maximização de rigidez e freqüência natural, empregando-se um otimizador baseado em critérios de otimalidade.

Como objetivos específicos do trabalho, pode-se mencionar:

- Estudo e revisão ampla do método de otimização topológica baseado na homogeneização.
- Implementação de dois modelos de material: um de microestrutura sólida com vazios retangulares (ortotrópica) e outro de microestrutura isotrópica com penalidade.
- Implementação dos algoritmos de homogeneização e otimização em ambiente MATLAB, assim como o método dos elementos finitos clássico para elementos quadriláteros de estado plano.

O modelo de microestrutura isotrópica com penalidade da densidade, proposto por Bendsøe [8], surgiu ainda quando do aprimoramento da otimização topológica baseada na homogeneização, cujo modelo clássico de material é o de microestrutura com vazios retangulares [11]. Juntamente com o modelo de microestrutura lamelar, o modelo de microestrutura isotrópica foi introduzido como possibilidade adicional para o relaxamento do problema de otimização, conforme será explicado no capítulo seguinte. Entretanto, pelo fato do método da homogeneização não ser efetivamente aplicado quando do uso deste modelo isotrópico e por sua versatilidade na solução de problemas gerais, alguns autores, inclusive o próprio Bendsøe, passaram a definir tal abordagem do problema de otimização como um novo método de solução. Ao longo dos anos, tal técnica recebeu nomes como "abordagem direta", "abordagem da função densidade", "modelo artificial" e "método da densidade", convergindo hoje para o método da microestrutura sólida isotrópica com penalidade, ou simplesmente SIMP, da abreviatura em inglês [50].

Contudo, o modelo de material de microestrutura isotrópica penalizada é considerado no presente trabalho como um dos modelos de material também empregados na OT baseada na homogeneização. O trabalho segue a classificação definida por Bulman et al. [14] para os métodos de otimização topológica. Assume-se que para tal modelo de material as equações homogeneizadas são simplificadas de uma forma empírica e direta.

Com relação às contribuições do trabalho para o DMC, são destacados:

- Implementação do método de otimização estrutural topológica baseado na homogeneização, com a possibilidade do uso dos seguintes modelos de material:
  - Modelo de microestrutura com vazios retangulares.
  - Modelo de microestrutura sólida isotrópica com penalidade.

- Desenvolvimento de um programa integrado que automatiza o cálculo do tensor elástico homogeneizado, $\mathbf{D}^h$, utilizado no módulo de otimização.

- Investigação da influência da discretização da célula-base do modelo de material com microestrutura de vazios retangulares sobre os módulos elásticos efetivos, sobre a convergência da função objetivo, e sobre a topologia ótima.

- Solução do problema estrutural envolvendo a ação do peso próprio, através do uso dos modelos de material implementados.

- Solução do problema de vibração livre, com o emprego do modelo de material de microestrutura sólida isotrópica.

Ao longo do trabalho, a título de simplificação, os termos "modelo de microestrutura com vazios retangulares" e "modelo de microestrutura sólida isotrópica com penalidade" são condensados, respectivamente, em "modelo ortotrópico com vazios" e "modelo isotrópico com penalidade".

1.3 Descrição do Trabalho

Neste primeiro capítulo, foram destacadas a relevância do tema abordado e a motivação para realizá-lo, assim como os objetivos e contribuições do trabalho.

No Capítulo 2, é feito o estudo bibliográfico envolvendo a otimização estrutural e, mais detalhadamente, a otimização estrutural topológica baseada no método da homogeneização.

O Capítulo 3, por sua vez, discute a teoria da homogeneização. São destacados os conceitos pertinentes, as equações que fundamentam o método da homogeneização, assim como a solução das mesmas. Os modelos de material ortotrópico com vazios e isotrópico com penalidade são descritos.

O Capítulo 4 trata do método de OT baseado na homogeneização. Inicialmente, para cada modelo de material, são apresentadas as variáveis de projeto, a restrição de volume e restrições laterais envolvidas. Em seguida, são descritas as funções objetivo e sensibilidades associadas aos seguintes problemas de otimização estudados no trabalho: (1) maximização da rigidez para o caso de carregamento simples; (2) maximização da rigidez para o caso de múltiplos carregamentos; (3) maximização da rigidez, considerando-se a ação do peso próprio; (4) e maximização de uma dada freqüência natural. Prosseguindo, o método baseado nos critérios de otimalidade (CO), usado na solução do problema de otimização, é descrito. A forma de determinação do multiplicador de Lagrange da restrição de volume, usado na atualização das variáveis de projeto, é também definida. E ao final, são apresentados os critérios de convergência, assim como as técnicas utilizadas para lidar com as instabilidades numéricas inerentes à otimização topológica.

No Capítulo 5 são descritos os algoritmos de elementos finitos, de homogeneização e de atualização das variáveis de projeto implementados, os quais integram o algoritmo geral de otimização topológica. Os algoritmos são apresentados também na forma de fluxogramas.

O Capítulo 6 primeiramente apresenta os resultados numéricos obtidos para problemas envolvendo a validação e investigação do método da homogeneização. Posteriormente, problemas estruturais de estado plano de tensão, considerando-se as funções objetivo, variáveis de projeto e restrições descritas no Capítulo 4, são resolvidos, validando o algoritmo de otimização implementado e demonstrando a eficácia do mesmo.

Por fim, no Capítulo 7, são feitas as conclusões acerca do trabalho desenvolvido e são apresentadas sugestões de continuidade do tema estudado para trabalhos futuros, com a utilização dos códigos implementados.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o estudo bibliográfico acerca do tema discutido no presente trabalho, envolvendo a otimização estrutural baseada no método dos elementos finitos (MEF), com ênfase na otimização topológica baseada na teoria da homogeneização.

A revisão bibliográfica apresenta inicialmente a trajetória da otimização estrutural, destacando-se seus tipos e métodos. Em seguida, discuti-se a otimização topológica baseada no método da homogeneização, onde referências sobre o assunto são descritas e comentadas, apresentando-se um histórico da evolução da técnica e suas contribuições relevantes.

2.2 Otimização Estrutural

Nesta seção é apresentada a evolução da otimização estrutural em ordem cronológica de surgimento de seus tipos. Esta nasce com a otimização de *layout*, evoluindo para as otimizações paramétrica e de forma, respectivamente, que por sua vez, colaboram para o surgimento da otimização topológica. A partir desta, trabalhos no sentido de integrar tais ferramentas são desenvolvidos e vários métodos de otimização topológica são propostos.

Pode-se dizer que o marco inicial da otimização estrutural moderna corresponde ao trabalho de Michell (1904) [65]. Correspondendo a uma extensão de seu trabalho sobre treliças de mínimo peso, na década de 60 problemas envolvendo a determinação da localização ótima de juntas de treliças e armações já eram resolvidos. No final da década de 70, Prager e Rozvany avançam no estudo do *layout* ótimo de estruturas reticuladas: são determinadas tanto a localização ótima das uniões dos membros estruturais quanto a disposição e seção transversal ótimas destes [65]. A otimização de layout é realizada com base na *Abordagem de Estrutura Reticulada* [12]. De acordo com tal metodologia, uma vez definido o domínio de projeto, ao longo deste e de forma reticulada é feita a distribuição de múltiplos pontos (juntas), os quais, em seguida, são unidos por membros estruturais. Em uma primeira etapa, são determinados os membros potencialmente ótimos, sendo eliminados os demais e definindo-se assim uma nova topologia (disposição) para os mesmos. Na segunda e última etapa, são definidas a localização ótima das juntas e a forma e área da seção transversal ótimas de cada membro [52]. A otimização de *layout* é resolvida analitica ou numericamente, sendo a abordagem analítica chamada de *teoria de layout* [65]. Nas décadas de 80 e 90 a teoria de *layout* foi consideravelmente generalizada, sendo a mesma empregada, por exemplo, na resolução de problemas envolvendo múltiplas cargas e múltiplas restrições [50].

Porém, em virtude da menor complexidade e tendo em vista a possibilidade de aplicações práticas (em especial na indústria aeronáutica), na década de 60 os problemas de otimização estrutural de treliças e armações se concentram, em sua grande maioria, na otimização das dimensões de suas seções transversais, visando à maximização da rigidez estática [55].

A não-complexidade dos problemas de dimensionamento ótimo de seções transversais advém do fato de que o domínio de projeto é mantido fixo ao longo do processo de otimização. A localização das juntas é mantida fixa, enquanto que apenas as seções transversais variam, correspondendo estas às variáveis de projeto; diferentemente dos primeiros problemas de *layout* ótimo de juntas, onde as seções transversais eram mantidas fixas. Deste modo, construído o modelo de elementos finitos da estrutura, este é mantido fixo até o final do processo de otimização, dado que possíveis modificações das variáveis de projeto não implicam mudança no respectivo modelo. A análise do efeito da variação das dimensões geométricas sobre a função objetivo e restrições (análise de sensibilidade), uma vez independente da etapa de pré-processamento, é facilmente implementada no código de elementos finitos [11]. Com base na análise de sensibilidade e nos resultados via MEF (deslocamentos e tensão, por exemplo), um procedimento iterativo é definido, a partir do qual são obtidas as dimensões ótimas.

Ainda envolvendo treliças e armações, novas pesquisas se dedicam à melhoria das informações da análise de sensibilidade e ao estudo do problema de autovalor; sendo posteriormente estendida a otimização dimensional a estruturas de casca e placa, sendo a espessura destas a variável de projeto. Neste contexto, destaca-se o trabalho de Rossow e Taylor (1973) sobre a otimização de chapas de espessura variável [50]. Cheng e Olhoff (1981), aprofundando o estudo do problema de determinação da espessura ótima de placas e cascas, apontam que a natureza da solução ótima não é tão clara: a menos que o gradiente de distribuição de espessura seja restrito, infinitas nervuras aparecem na estrutura ótima, a qual deve ser apropriadamente discretizada através de um modelo anisotrópico de casca/placa, aplicando-se o método da homogeneização [55].

Visando a aplicações na indústria mecânica, onde o projeto de componentes envolve fortemente a representação geométrica destes, Zienkiewicz e Campbell (1973) resolvem problemas envolvendo a otimização de geometria [55].

Seja considerada a hipótese de que as mudanças no contorno da estrutura são pequenas. O contorno desta é representado por pontos de controle, constituindo as variáveis de projeto. Sendo pequenas as mudanças destes pontos com relação às dimensões globais do domínio de projeto, as mesmas podem ser transferidas proporcionalmente aos nós da malha de elementos finitos, sem distorcê-la consideravelmente e facilitando a análise de sensibilidade e desenvolvimento de um algoritmo apropriado. As grandes dificuldades são então manter a qualidade da malha de elementos finitos e definir as sensibilidades para problemas onde as mudanças de forma são bem significativas. No início da década de 80, a questão da manutenção da qualidade da malha é eficientemente contornada, graças ao contínuo desenvolvimento do MEF, através de geradores de malha automáticos. Com relação à análise de sensibilidade, é feita a integração do módulo de otimização de forma com o gerador de malha ou com o módulo de modelagem geométrica.

Similarmente a Cheng e Olhoff (1981), em seu problema de otimização paramétrica, Kohn e Strang (1983) encontram na forma ótima da seção transversal de uma barra sob torção uma configuração microestrutural envolvendo vazios e elementos sólidos [50].

Dentre os métodos clássicos de otimização de forma, destacam-se: o *Método Baseado na Variação do Contorno* e o *Método Baseado no Crescimento Adaptativo*, os quais têm passado por evoluções [52].

No primeiro método, conforme já comentado, as variáveis de projeto correspondem às coordenadas dos pontos de controle de *splines* que definem o contorno da estrutura bi ou tridimensional avaliada. São então medidos, a cada iteração, os efeitos da mudança de tais variáveis sobre grandezas como tensão ou deslocamento obtidas via MEF. Tais sensibilidades são usadas pelo algoritmo otimizador que, funcionando de forma iterativa, fornece a forma ótima.

O segundo método, por sua vez intuitivo, procura reproduzir o crescimento que ocorre na natureza, especialmente de árvores, procurando gerar um estado de tensão homogêneo ao longo da superfície da estrutura. O procedimento do método consiste, primeiro, em adicionar uma fina camada flexível à superfície externa da estrutura e, em seguida, impor um carregamento térmico ao conjunto, de forma a simular o estado de tensão gerado pela aplicação do carregamento original. A fina camada sobre o contorno da estrutura tende então a ser deformada em virtude da expansão térmica e a forma ótima da estrutura é obtida adicionando-se a deformação verificada em cada iteração à geometria original.

Contudo, em meados da década de 80, os resultados da otimização de forma passam a ser questionados, assim como os da otimização paramétrica de placas e cascas. Forma e parâmetros geométricos da estrutura são modificados a partir de uma topologia não necessariamente ótima e que não se altera ao longo do processo de otimização. É buscando contornar tal deficiência, que Bendsøe e Kikuchi [11] passam a representar a forma da estrutura sem se utilizar das equações paramétricas da otimização de forma, as quais não são capazes de conferir à estrutura novas topologias. Como alternativa às curvas paramétricas, os referidos autores propõem o uso de materiais com microestrutura. O problema de otimização de forma é transformado em um problema de distribuição de material, onde, similarmente ao trabalho de Cheng e Olhoff (1981), o método da homogeneização é utilizado na determinação das propriedades mecânicas efetivas do material compósito. Outro destaque do método é o fato do domínio de projeto se manter fixo ao longo do processo de otimização; uma outra vantagem sobre os métodos de otimização de forma clássicos.

Bends∅e e Kikuchi [11] foram inspirados pelos trabalhos de Cheng e Olhoff (1981) e Kohn e Strang (1983), nos quais fica demonstrada a conexão entre materiais com microestrutura e a solução ótima, seja ela paramétrica ou de forma [50]. Contribui também, para o desenvolvimento da nova técnica, o trabalho de Kohn e Strang (1986), onde é demonstrado que a introdução de microestruturas na formulação do problema de projeto estrutural implica relaxação do problema variacional que pode ser formulado para o projeto ótimo, com a vantagem de diminuir o número de mínimos locais do problema original, tornando-se mais fácil atingir o ótimo global [17]. Bends∅e e Kikuchi buscaram inspiração também nas técnicas de fresagem numericamente controlada e de conformação plástica com controle de porosidade feito através de resfriamento controlado.

O método de OT de Bends∅e e Kikuchi [11], baseado no método da homogeneização, é então capaz de fornecer topologia e forma ótimas à estrutura, onde a variação da forma é garantida sem ser preciso utilizar equações paramétricas ou superfícies auxiliares, mantendo-se fixa a malha do modelo de elementos finitos ao longo do processo de otimização. Vale ressaltar que a natureza do referido método é tal, que a topologia ótima obtida resulta em uma forma não-suave da forma ótima exata do contorno da estrutura. O que se tem é uma forma ótima preliminar. A idéia então é que a otimização topológica seja utilizada inicialmente, sendo em seguida empregado um dos métodos clássicos de otimização de forma. Esta segunda etapa passa a ser realizada de forma mais rápida e eficiente, uma vez que já se parte de uma topologia ótima e de uma forma já bem próxima da ótima exata. E uma vez de posse da topologia e forma ótimas, a otimização paramétrica pode ser executada. Neste sentido é que novos trabalhos buscando a integração entre as ferramentas de otimização começam a ser desenvolvidos.

Dentre os trabalhos envolvendo a otimização integrada, pode-se destacar o trabalho de Olhoff et al. [44], onde os métodos de otimização topológica, de forma e paramétrica são integrados em um sistema, no qual a otimização topológica serve como pré-processador das otimizações de forma e paramétrica, conferindo a estas resultados finais muito melhores. Neste mesmo sentido, a integração entre as otimizações topológica e de forma é feita nos trabalhos de Sienz e Hinton [52] e de Tang e Chang [56], também através da definição de módulos para cada ferramenta. Mais recentemente, Céa et al. [15] integra um gradiente topológico, que fornece informação sobre a oportunidade de se criar um pequeno furo (vazio) no domínio da estrutura, ao gradiente de forma clássico, o qual indica como mover o contorno do domínio; como resultado são obtidas topologia e forma ótimas. Neste sentido, é destacado também o trabalho de Ansola et al. [3], o qual trata da otimização de estruturas de casca.

O desenvolvimento do método de OT baseado na teoria da homogeneização motivou e impulsionou vários pesquisadores no sentido de se encontrar novos métodos que viessem a resolver também os problemas de otimização de forma e de topologia simultaneamente. A seguir são destacados alguns deles:

Algoritmo Genético (AG): algoritmo de busca probabilístico baseado no processo de seleção natural e na genética, ou seja, na sobrevivência do mais adaptado (teoria de Darwin) [33]. Inicialmente é considerada uma população viável de soluções para o problema. Tal população é capaz de se reproduzir e sofrer mutações, criando-se desta forma uma nova geração de possíveis soluções. Contudo, apenas as soluções mais adaptadas passam à próxima geração, sendo descartadas aquelas soluções que menos se ajustam ao objetivo do problema, de forma semelhante à evolução natural, e eventualmente conduzindo à solução ótima [34]. Um outro método estocástico, de mesmo potencial que o AG, é o *Recozimento Simulado*, o qual simula o processo de recozimento e teve seu algoritmo inspirado por estudos na mecânica estatística que trata do equilíbrio de um grande número de átomos em sólidos e líquidos a uma dada temperatura [25].

Método de Matar Fraco / Matar Forte: método baseado na técnica de projeto de saturação das tensões (*fully stressed design*). Os módulos de elasticidade de cada elemento finito correspondem às variáveis de projeto. Uma relação é definida entre os módulos de elasticidade e valores indicadores de tensão (como, por exemplo, tensão de von Mises ou tensão principal) para cada elemento. Assim, à medida que a tensão varia ao longo do elemento, seu módulo de elasticidade pode variar de forma linear (método de matar fraco) ou segundo uma função degrau (método de matar forte). Outras funções podem ser empregadas. Repetindo-se iterativamente tal procedimento e com base em um critério de parada preestabelecido a solução converge para uma situação de melhor desempenho que a da condição inicial. Elementos de alta rigidez devem ser mantidos no projeto, enquanto que aqueles de rigidez baixa ou nula devem ser removidos. [52].

Otimização Estrutural Evolucionária (OEE): método de matar forte que se fundamenta no fato de que através da remoção lenta do material ineficiente da estrutura, a forma desta evolui em direção a um ótimo [60]. Um indicador da ineficiência do material é definido de acordo com o tipo de problema estrutural. A solução do problema é obtida retirando-se a cada iteração uma pequena quantidade de elementos finitos subutilizados, procurando-se afetar o mínimo possível a integridade global da estrutura [34].

Otimização Topológica Adaptativa Restrita: método híbrido que combina as idéias da matematicamente rigorosa OT baseada no método da homogeneização (comenta em detalhes na próxima seção) e da intuitiva otimização estrutural evolucionária [6][14].

Contornos Móveis Implícitos (CMI): visando à possibilidade de modificações da topologia ao longo do processo de otimização, contornos implícitos são propostos. Os mesmos podem se movimentar durante as etapas de otimização: contornos internos (vazios) podem se separar originando novos contornos, ou podem se unir ao contorno externo da estrutura ou a outros contornos formando um único contorno. Um método de programação matemática é usado para se chegar à solução ótima [59]. A *Otimização Topológica Baseada na Regularização e em Funções Implícitas* parte do mesmo princípio que o CMI [7].

Além dos métodos de OT descritos acima, outros, menos gerais, podem ser citados: a *Otimização Topológica Baseada na Abordagem de Energia* [41], o *Método do Domínio de Projeto Baseado em Microestrutura de Vazios Esféricos* [22], o *Método da Bolha* [52], dentre outros.

2.3 Otimização Estrutural Topológica Baseada no Método da Homogeneização

Na seção anterior, a origem e a potencialidade do método de OT proposto por Bendsøe e Kikuchi [11], método investigado no presente trabalho, foram discutidas. Nesta seção o mesmo é comentado em maiores detalhes, sendo apresentada inicialmente sua filosofia, seguida de sua evolução e contribuições de destaque.

Com relação à metodologia da técnica de OT baseada na homogeneização, como já comentado, esta parte da introdução de um material com microestrutura na formulação do problema de otimização. As propriedades mecânicas do material original da estrutura envolvida no problema passam então a ser definidas com base nas propriedades da microestrutura estabelecida. Esta, por sua vez, é caracterizada por sua célula-base. Tal célula corresponde a menor parte da microestrutura que contém todas as suas características e que se repete de forma regular ao longo desta. O material com microestrutura é então assumido periódico e regular, de forma que as propriedades mecânicas efetivas podem ser calculadas a partir do método da homogeneização, analisando-se a respectiva célula-base.

O método da homogeneização foi introduzido no projeto ótimo por Murat e Tartar no final da década de 70. Pesquisadores de várias partes do mundo uniram forças no sentido de desenvolver tal teoria. Contudo, surpreendentemente, os algoritmos numéricos baseados no método da homogeneização amadureceram de forma lenta. Após várias contribuições restritas a problemas acadêmicos, foi exatamente o trabalho de Bendsøe e Kikuchi [11], no final da década de 80, que primeiro demonstrou a eficiência do método da homogeneização na otimização de forma. Após tal contribuição, vários trabalhos foram desenvolvidos, colaborando para tornar o método da homogeneização um dos mais populares e eficientes métodos usados na otimização topológica e de forma [1].

Uma vez estabelecido o modelo de material com microestrutura, o domínio de projeto é discretizado via MEF. As características da microestrutura são então atribuídas a cada elemento finito. Em seu trabalho pioneiro, Bendsøe e Kikuchi [11], estudando problemas de elasticidade plana, atribuem à célula-base uma forma quadrada de dimensão unitária, sendo a mesma constituída de material sólido (idêntico ao material original da estrutura), porém com um vazio retangular em seu centro. Deste modo, as características mecânicas de cada elemento finito passam a ser definidas de acordo com as propriedades de tal célula-base, mais especificamente a partir das dimensões do vazio desta.

A idéia consiste em variar ao longo do processo de otimização as dimensões (largura e altura) do vazio retangular associado a cada elemento finito, de forma a permitir a geração de vazios internos no interior da estrutura e conseqüentemente produzir a variação de sua topologia. Por exemplo, se certos elementos finitos adjacentes apresentarem célula-base com vazio retangular de largura e altura unitárias (implicando ausência de material na célula), um vazio macroscópico fica caracterizado na região da estrutura correspondente àqueles elementos. As propriedades mecânicas de cada elemento finito com vazio característico são então calculadas através do método da homogeneização.

Em outras palavras, furos (vazios) podem ser formados no interior da estrutura fazendo-se variar a densidade de cada elemento finito, a qual passa a ser então função das dimensões de sua respectiva célula-base. Trata-se de uma pseudodensidade, visto que o material original, de fato, não se caracteriza por tal microestrutura celular. Assumindo-se um valor unitário para a densidade do material sólido da célula-base também unitária, a densidade de cada elemento finito pode variar continuamente de 0 a 1. O espaço de projeto do problema de otimização é assim relaxado, ou seja, aumentado no sentido de contornar o problema da não-existência de soluções do problema binário (0 ou 1) [54].

O problema de OT é desta forma transformado em um problema de otimização paramétrica, onde as dimensões do vazio da célula-base correspondem às variáveis de projeto. Além destas, a orientação da célula-base é também considerada como tal, face ao comportamento ortotrópico. Este é verificado quando da determinação do tensor elástico efetivo pelo método da homogeneização. Desta forma, com base nos resultados via MEF, no método da homogeneização e em um otimizador apropriado, um procedimento iterativo é definido, a partir do qual é obtida a solução ótima.

Apresentada a filosofia do método de OT baseado na homogeneização, a seguir são apresentadas a evolução do método e suas contribuição relevantes, partindo do trabalho pioneiro de Bendsøe e Kikuchi.

Em 1988, Bendsøe e Kikuchi [11] introduzem na formulação do problema de otimização o modelo de material cuja célula-base se caracteriza por uma célula quadrada unitária sólida com vazio retangular central (modelo ortotrópico com vazios). Problemas de minimização da flexibilidade, sujeitos a uma restrição de volume, são resolvidos, sendo considerados casos lineares estáticos de estado plano de tensão e de um único caso de carregamento. Um método CO tradicional é empregado para se chegar à solução ótima. Inicialmente, os autores demonstram que as propriedades mecânicas efetivas obtidas via método da homogeneização são pouco sensíveis à variação do grau de discretização da célula-base de vazio retangular. Para este tipo de célula a solução das equações de homogeneização só pode ser obtida numericamente. Em seguida, células de vazio quadrado são também adotadas, reduzindo o número de variáveis de projeto (de 3 para 2) e implicando topologia bem semelhante à obtida com modelo de vazio retangular, apresentando apenas pequenas diferenças nos contornos internos. Ao final, os autores constatam que a desconsideração da orientação da célula-base como variável de projeto leva a topologias incoerentes.

Prosseguindo com os estudos de projeto ótimo envolvendo o método da homogeneização, Bendsøe [8], em 1989, passa a considerar dois novos materiais com microestrutura. O objetivo é tentar eliminar da topologia ótima, as várias densidades intermediárias presentes quando do uso do modelo de material com vazios retangulares (denominado no presente trabalho de modelo de material ortotrópico). Ainda que tais densidades possuam um significado físico, as mesmas não apresentam viabilidade de fabricação.

Um dos modelos é inspirado pelos vários estudos matemáticos que estabelecem que, para a elasticidade plana, o modelo de material lamelar de classe-2 é o mais rígido dentre os compósitos constituídos da mistura de dois materiais (microestrutura ótima). Os resultados obtidos com o emprego do modelo de material com célula-base lamelar de classe-2 são bem similares àqueles obtidos através do uso de célula-base com vazio quadrado e com uma grande vantagem de que as equações de homogeneização podem ser resolvidas analiticamente. Assim como o modelo de vazios, o modelo lamelar é ortotrópico e leva em conta a orientação da célula-base.

O segundo modelo, por sua vez, é construído com base no trabalho de Rossow e Taylor (1973), os quais, para a obtenção da variação de espessura ótima de chapas de espessura variável, consideram que o tensor elástico da estrutura ótima corresponde ao tensor elástico original multiplicado por uma função densidade artificial. Bendsøe aproveita então tal modelo e simplesmente acrescenta um expoente empírico (de valor igual a 4) a tal função densidade, considerada como variável de projeto, denominando tal técnica de abordagem direta (modelo isotrópico com penalidade). Os resultados conseguidos com o modelo de material isotrópico são praticamente do tipo {0;1} em termos da densidade de cada elemento, ou seja, praticamente viável quanto à manufatura. Contudo, é verificado que tal modelo sofre de uma maior dependência da malha de elementos finitos da estrutura e não é possível conferir às densidades intermediárias um significado físico. O grande destaque da referida abordagem é que o número de variáveis de projeto passa a ser 1 por elemento finito, contra 2 no caso de modelo de microvazios quadrados e 3 sendo o modelo lamelar ou de vazios retangulares. Além disso, as propriedades efetivas são obtidas sem o uso do método da homogeneização, características estas que reduzem consideravelmente o esforço computacional.

Em 1991, Suzuki e Kikuchi [55] modificam o método de OT de Bendsøe e Kikuchi [11]. As variáveis de projeto (largura e altura do vazio retangular da célula-base) passam a ser atualizadas diretamente, seguindo o esquema de atualização originalmente proposto, e não mais indiretamente através da atualização da função pseudodensidade. E ao invés de se determinar a orientação ótima com base no critério de otimalidade correspondente a tal variável, esta é obtida a partir da orientação da máxima tensão principal. Os autores seguem os trabalhos de Pedersen (1988) e de Gibiansky e Chercaev (1988), onde estes mostram que orientação ótima dos eixos ortotrópicos pode ser identificada como a orientação principal do tensor de tensões para o caso de materiais de baixa rigidez ao cisalhamento.

Novos e vários problemas lineares elásticos de estado plano de tensão e com restrição de volume são considerados por Suzuki e Kikuchi [55]. A energia potencial total é adotada como função objetivo e as forças de superfícies são então consideradas. Topologias ótimas são obtidas para o caso de vários tipos de carregamento distribuídos sendo aplicados simultaneamente. A independência qualitativa da topologia ótima com relação à densidade da malha de elementos finitos da estrutura é comprovada para o modelo de vazios retangulares. É concluído também que a topologia ótima obtida é dependente da definição das condições de contorno e das regiões de projeto não-factíveis ao longo do domínio total. Com o trabalho, Suzuki e Kikuchi [55] demonstram a validade e robustez da nova versão do método de OT baseado na teoria da homogeneização.

Ainda em 1991, Zhou e Rozvany [65] dão forte destaque ao material de modelo isotrópico com penalidade. Com o emprego do mesmo em um problema estático de estrutura sujeita a uma carga pontual, os autores conseguem obter topologia ótima próxima à exata (obtida pela teoria de *layout*) para um valor de expoente empírico próximo de 2 e para um valor pequeno de volume final desejado para a estrutura. Estes também demonstram a tendência de se obter topologias ótimas manufaturáveis quando do uso de um expoente empírico de valor mais alto, implicando maior penalidade das densidades intermediárias. Fica demonstrado então que o uso do modelo de material isotrópico permite um controle adequado da penalidade das densidades intermediárias através da escolha apropriada do expoente empírico. Controle este não conseguido quando do uso do modelo ortotrópico com vazios (microestrutura não-ótima).

Assim como o relaxamento conseguido com as microestruturas de vazios e lamelas, a penalidade das densidades intermediárias é uma outra forma de modificar o problema 0-1 de distribuição de material, tornando possível à obtenção de soluções. Contudo, tal procedimento, ainda que de resultados práticos, é um tanto questionável, visto que o problema é conduzido de forma a se obter soluções desejadas, não procurando entender completamente sua natureza [54]. Uma outra forma de penalidade, consiste em adicionar à função objetivo uma função que penaliza as densidades intermediárias. A mesma é descrita em detalhes por Allaire em seu livro [1].

Estendendo o emprego do modelo de material isotrópico com penalidade e o deixando mais em evidência, em 1992, Rozvany et al. [51] resolvem o problema de otimização topológica com critério de projeto em tensão. O volume da estrutura passa a corresponder à função objetivo e o critério de projeto é inserido na forma de restrições.

Também em 1992, Díaz e Bendsøe [18] estudam o problema de minimização da flexibilidade de estruturas sujeitas a múltiplos carregamentos pontuais. O modelo de material ortotrópico com vazios é empregado. As múltiplas cargas foram consideradas atuando simultanea e separadamente. Para o primeiro caso, a abordagem é feita conforme em [55]. Já no segundo, a função objetivo corresponde à média ponderada das flexibilidades associadas a cada um dos carregamentos aplicados à estrutura. Além disso, a orientação ótima do material volta a ser determinada pela condição de estacionaridade do Lagrangiano do problema com respeito à variável orientação, conforme em [11], dado que tal variável passa a depender da combinação das direções principais relativas a cada carregamento. A abordagem para tal é desenvolvida com base no trabalho de Pedersen sobre a orientação ótima de materiais ortotrópicos [46]. Contudo, ao invés das equações do sistema não-linear de variáveis acopladas serem resolvidas por um método iterativo como em [11], as orientações foram consideradas desacopladas, passando a condição de estacionaridade a ser resolvida para cada elemento finito independentemente. Além disso, na referida abordagem as tensões principais são explicitadas ao invés das deformações. Os autores mostram que topologias ótimas mais estáveis são conseguidas quando da consideração dos carregamentos atuando separadamente, comparadas àquelas obtidas para um único caso de carregamento. Fica constatada então a dependência da solução ótima com relação à definição dos casos de carga.

Estendendo os estudos sobre a otimização topológica, Díaz e Kikuchi [19], ainda em 1992, investigam os problemas de otimização de forma e topologia envolvendo autovalores (freqüência natural). Problemas lineares elásticos de estado plano de tensão são resolvidos e o modelo de material ortotrópico com vazios é usado. O objetivo é encontrar topologia e forma ótimas que maximizem uma dada freqüência natural, adicionando-se material a estrutura como se fosse um reforço. Para tal, um domínio viável e outro não-viável são definidos, a partir do domínio global. Os problemas têm como restrição o volume da estrutura e a função objetivo correspondendo ao autovalor associado a um dado modo de vibrar. A orientação ótima é obtida a partir da direção da máxima tensão principal como em [55]. As topologias ótimas obtidas são capazes de indicar a localização e o tipo de reforço (barra ou chapa) a ser empregado de forma a atender os requerimento de projeto.

Em 1993, Yang e Chuang [62], utilizam o modelo de material isotrópico aliado a um otimizador baseado na programação linear (PL), em substituição ao otimizador CO. Problemas bi e tridimensionais lineares elásticos são resolvidos. O caso estático de minimização da flexibilidade da estrutura e o caso dinâmico de maximização de seu autovalor fundamental são considerados. O trabalho evidencia a vantagem do uso da PL sobre a abordagem OC, a qual é lidar com problemas gerais, por exemplo, de caráter estático (de um único caso de carga ou de vários) ou dinâmico de autovalores, sem a necessidade de grandes modificações no algoritmo de solução.

Voltando à questão da orientação ótima para o caso de múltiplos carregamentos, em 1994, Cheng et al. [17] desenvolvem nova metodologia para a determinação da variável orientação ótima para o caso de modelo de material lamelar ou ortotrópico com vazios. No respectivo trabalho, os autores justificam o uso do campo de tensões (explicitação das tensões ao invés das deformações) na determinação do ângulo ótimo, o que não foi feito em [18] apesar de tal abordagem ter sido empregada. É demonstrado que o campo de tensões, comparado ao campo de deformações, é bem menos sensível a uma dada variação da orientação do material. Portanto, através desta abordagem, justifica-se desacoplar as variáveis de orientação, passando a equação de otimalidade a ser resolvida para cada elemento finito e de forma independente. E ao invés de se utilizarem das tensões principais como em [18], os autores fazem uso do próprio estado de tensão, eliminando o cálculo daquelas. A metodologia desenvolvida é empregada na solução do problema de maximização de múltiplos autovalores, demonstrando-se a generalidade da abordagem baseada no estado de tensão. Além disso, a mesma fornece melhores resultados, comparados aos das demais abordagens, como a da orientação fixa, método baseado no estado de deformação, método baseado nas tensões principais e o método dos gradientes conjugados [17].

Em 1995, a exemplo do problema de múltiplos carregamentos, Ma et al. [38] estudam o problema de múltiplos autovalores. O modelo de material ortotrópico é utilizado. Diferentemente de Díaz e Kikuchi [19], a função objetivo do problema de autovalores passa a ser uma combinação ponderada destes, o que previne a inversão dos modos ao longo do processo de otimização. Três casos são estudados: (a) maximização da freqüência fundamental; (b) maximização da distância entre dois autovalores quaisquer, (c) e minimização da distância entre autovalores especificados e seus valores desejados. Uma modificação no algoritmo de atualização das variáveis de projeto [55] é feita, tendo em vista que a função custo usada no esquema heurístico CO pode apresentar valores positivos ou negativos em problemas dinâmicos, implicando variáveis de projeto negativas ou complexas sem nenhum significado físico. O mesmo não ocorre no caso estático, pois a função custo apresenta valores sempre positivos. O problema de resposta em freqüência é também estudado, minimizando-se a flexibilidade dinâmica com restrição sobre o volume.

Hassani e Hinton [27][28][29], em 1998, fazem um revisão do método da homogeneização e do método de OT baseado em tal técnica. Em [27] e [28], respectivamente, as equações de homogeneização e a solução destas são apresentadas com base no trabalho de Guedes e Kikuchi [23]. A exemplo destes, um programa para determinação dos módulos elásticos efetivos de materiais idealizados sob estado plano de tensão e com célula-base bilateralmente simétrica é construído. Em [29], os modelos de material ortotrópico com vazios, lamelar e isotrópico com penalidade são considerados em problemas de minimização da energia potencial total da estrutura, envolvendo elementos lineares elásticos de estado plano de tensão e de um único caso de carregamento. Um novo esquema CO de atualização das variáveis de projeto é proposto a partir da modificação do otimizador CO definido em [55]. Para o caso estático, os autores mostram que o novo esquema, em comparação ao algoritmo que lhe deu origem, apresenta convergência mais rápida e conduz à topologia ótima similar.

Em 1999, Fernandes et al. [20] adotam o método do Lagrangiano aumentado como otimizador em problemas de otimização topológica envolvendo estruturas estáticas tridimensionais lineares elásticas. O modelo de material ortotrópico com vazios (cúbicos) é utilizado.

Ainda em 1999, Krog e Olhoff [35] resolvem problemas estáticos e dinâmicos de multiobjetivos através da formulação max-min, envolvendo estruturas planas e de placa. Modelos de material com microestrura lamelar são considerados. O problema estático de múltiplos carregamentos é também resolvido através da formulação ponderada apresentada em [18] e os resultados são comparados com os obtidos via abordagem max-min. Diferenças tanto na topologia ótima quanto na máxima energia potencial total são constatadas, indicando ser mais conservadora a metodologia max-min. Os autores mostram que tal abordagem produz resultados mais significativos para problemas estáticos e dinâmicos de múltiplos objetivos.

Em 2000, Mi et al. [40] desenvolvem uma metodologia de projeto capaz de fornecer topologias ótimas que satisfazem ambos os critérios de rigidez e freqüência natural. O modelo de material ortotrópico com vazios é utilizado em casos bi e tridimensionais.

Depois de extensivamente estudados os problemas de otimização envolvendo critérios de projeto em rigidez e freqüência natural, ainda em 2000, Nishiwaki et al. [43] desenvolvem um método de otimização topológica considerando a flexibilidade de estruturas sob cargas periódicas transientes. Propriedade de grande interesse, por exemplo, na síntese de micro-sistemas eletromecânicos (MEMS). O modelo de material ortotrópico com vazios e elementos de estado plano de tensão são utilizados. A função objetivo contempla tanto a rigidez quanto a flexibilidade da estrutura.

Também em 2000, Hammer e Olhoff [26], ainda que envolvendo o critério de projeto em rigidez, passam a abordar uma classe especial e complexa de tais problemas. Pressões estáticas são aplicadas à estrutura linear elástica e a variação destas (em direção e localização) conforme a mudança de topologia é considerada. O material de modelo isotrópico com penalidade é utilizado. As superfícies de aplicação da carga são consideradas como função da distribuição de densidades e representadas por *splines* cúbicas. A malha de elementos finitos continua fixa, a qual corresponde a uma das grandes vantagens dos métodos de OT. À medida que a topologia é alterada, o mesmo acontece com a superfície de carga. O carregamento distribuído é então transformado em cargas nodais consistentes aplicadas aos elementos que interceptam aquela superfície. As sensibilidades do carregamento são então consideradas e um otimizador CO é empregado para a resolução do problema.

Em 2001, Chen e Kikuchi [16] investigam também o problema de otimização com cargas dependentes do projeto. Ao invés das superfícies de carga serem parametrizadas, um carregamento térmico fictício, simulando a carga dependente, é proposto. O modelo de material isotrópico com penalidade é novamente empregado. O problema de otimização é transformado em um problema de distribuição de material trifásico constituído de sólido, vazio e fluido hidrostático. A programação linear seqüencial (PLS) é utilizada para resolver o problema de otimização.

Também em 2001, Nishiwaki et al. [42] voltam a estudar o problema de síntese de estruturas flexíveis, passando a considerar o caso de múltiplas flexibilidades e de restrição da deformação. O modelo de material ortotrópico com vazios é adotado em problemas bi e tridimensionais e a PLS é utilizada como otimizador.

Abrangendo os estudos dos problemas de projeto ótimo envolvendo critérios de falha, Pereira et al. [47], em 2003, utilizam o modelo de material isotrópico com penalidade na solução de problemas de OT com critério em tensão ou deformação. A massa da estrutura é minimizada, estando o problema de otimização sujeito a restrições em tensão ou deformação. O Método do Lagrangiano Aumentado, combinado ao Método da Região de Confiança, é utilizado como otimizador. Topologias bem próximas àquelas conseguidas considerando-se o critério de projeto em rigidez são obtidas.

Em 2004, Allaire et al. [2] dão continuidade aos estudos de otimização relacionados com critérios de falha. A função objetivo corresponde à minimização da tensão ao longo da estrutura, estando o problema restrito em volume. A idéia do método é aplicar à função objetivo um fator de amplificação de tensão, o qual leva em consideração as heterogeneidades microscópicas do material. Neste sentido, o modelo de material lamelar é empregado, para o qual existem fórmulas para computar tal fator de correção. Um otimizador baseado na abordagem de máximo descenso é utilizado. Casos estáticos são resolvidos, com resultados semelhantes àqueles obtidos com o critério de projeto em rigidez.

Também em 2004, problemas envolvendo o peso próprio da estrutura analisada são investigados por Bruyneel e Duysinx [13]. Ainda que de grande relevância no projeto estrutural de grandes construções ou máquinas rotativas, poucos são os trabalhos existentes envolvendo as forças de inércia. Talvez pela abordagem desse tipo problema não ser tão simples e direta quanto aquela usada em problemas com critério em rigidez envolvendo carregamentos externos fixos, como mostram os autores. Dentre as dificuldades verificadas, destacam-se: o caráter não-monotônico da flexibilidade (função objetivo) e o aspecto irregular de densidades intermediárias na topologia ótima quando do uso do modelo clássico de material isotópico com penalidade para valores baixos de densidade. No referido trabalho, a ação do peso próprio é considerada em problemas lineares elásticos de estado plano de tensão. E os inconvenientes acima apresentados são contornados através do uso do *Método das Assíntotas Móveis Baseado no Gradiente* (MAMBG) como otimizador e de uma modificação apropriada no modelo de material isotrópico.

Além das aplicações discutidas acima, a OT baseada na homogeneização tem encontrado aplicação na resolução de problemas de flambagem, de não-linearidade geométrica e de contato, no projeto de materiais, em problemas de *crash*, dentre outros, através do uso dos modelos de material ortotrópico com vazios, lamelar e isotrópico com penalidade. O estado da arte do referido problema de distribuição de material é apresentado na recente e notória publicação de Bendsøe e Sigmund [12], na qual são comentadas as várias aplicações do método, além de serem fornecidas inúmeras referências acerca do tema.

Capítulo 3

Teoria da Homogeneização

3.1 Introdução

Conforme já mencionado, a técnica de otimização topológica baseada no método da homogeneização faz uso de uma microestrutura periódica e regular, caracterizada por sua célula-base, a qual é associada a cada elemento finito utilizado na discretização da estrutura analisada. A introdução de tal microestrutura provoca o relaxamento do problema original 0-1 irrestrito de distribuição de material, contornando o problema da não-existência de soluções inerente ao mesmo [54].

Neste contexto, o papel do método da homogeneização é exatamente determinar as propriedades mecânicas do meio homogêneo que é equivalente àquele meio microestrutural periódico e regular estabelecido para cada elemento finito da estrutura. Desta forma, as propriedades mecânicas efetivas de cada elemento finito passam a ser conhecidas ao longo do processo de otimização, propiciando, juntamente com os respectivos carregamentos impostos e condições de contorno, a análise numérica do problema estrutural, cujos resultados alimentam o algoritmo de otimização.

A seguir, são apresentados inicialmente os conceitos pertinentes à teoria da homogeneização. Posteriormente, são estudadas suas equações para um meio periódico e regular generalizado. Concluindo o capítulo, a solução das equações de homogeneização é definida de acordo com o modelo de microestrutura adotado para a solução do problema de otimização (modelo ortotrópico com vazios ou modelo isotrópico com penalidade).

O trabalho de Guedes e Kikuchi [23] e os de Hassani e Hinton [27][28] são utilizados com referência no presente capítulo.

3.2 Periodicidade e Expansão Assintótica

Um meio heterogêneo é dito periódico e regular quando suas funções, envolvendo uma dada grandeza física do meio, satisfazem a seguinte relação:

$$F_Y(\mathbf{x}+\mathbf{NY}) = F_Y(\mathbf{x})\,, \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

onde,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Acima, a matriz **N** corresponde a uma matriz diagonal de números inteiros quaisquer. O vetor **Y** ao vetor contendo os períodos Y_1, Y_2 e Y_3 ao longo das direções x, y e z, respectivamente. O vetor **x**, por sua vez, corresponde ao vetor cujas componentes x_1, x_2 e x_3 indicam uma dada posição no meio heterogêneo em termos das coordenadas x, y e z, respectivamente. E F_Y corresponde a uma certa função que pode ser escalar, vetorial ou tensorial, a qual é denominada de **Y**-periódica pelo fato da mesma variar com um período **Y**.

A Figura 3.2.1 ilustra um meio heterogêneo periódico e regular, no qual uma função F_Y, representando um dado comportamento seu, apresenta valores iguais se avaliada nos pontos P_1, P_2, P_3, P_4, assim como em pontos opostos localizados no lados de sua célula-base.

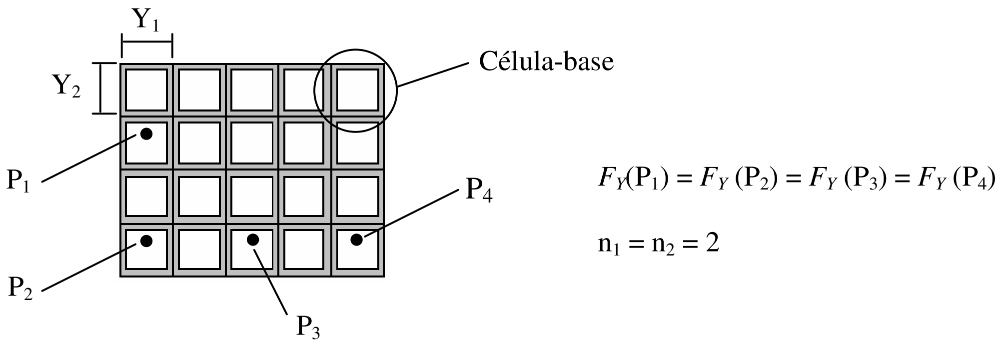
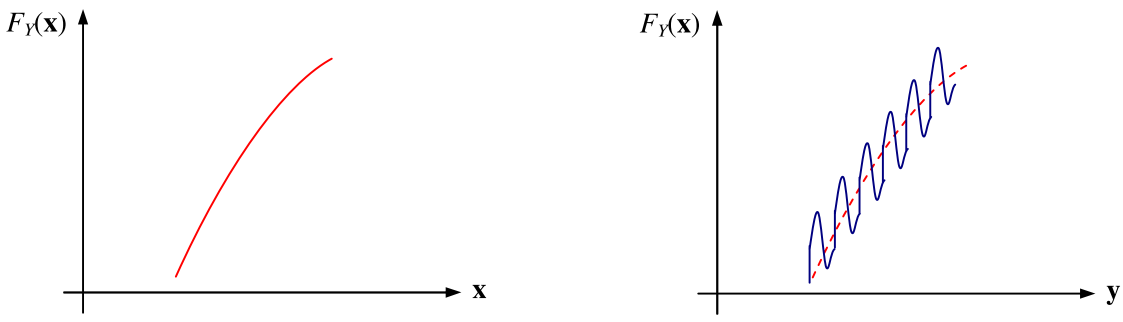


Figura 3.2.1 - Ilustração de um meio microporoso periódico regular.

Na teoria da homogeneização, assume-se o vetor **Y** suficientemente pequeno comparado às dimensões globais do meio. Sendo assim, avaliando-se uma certa propriedade, $F_Y(\mathbf{x})$, deste, verifica-se que a mesma a nível local ou microscópico varia rapidamente e de forma **Y**-periódica, enquanto que a nível global ou macroscópico, sua variação se dá de forma mais suave e lenta.

A Figura 3.2.2 ilustra os comportamentos descritos acima, onde o vetor **x** indica a posição global ou macroscópica no meio e o vetor **y** corresponde à posição local ou microscópica aumentada.



(a) Comportamento global

(b) Comportamento local aumentado

Figura 3.2.2 - Comportamentos local e global da propriedade $F_Y(\mathbf{x})$, **Y**-periódica.

A Figura 3.2.2 ilustra a idéia do método da homogeneização, que se fundamenta na abordagem em dupla escala das funções do meio heterogêneo regular periódico. Uma escala global e outra local, sendo esta última avaliada a nível macroscópico, ou seja, às dimensões do domínio global, conforme mostrado na Figura 3.2.2 (b).

Neste contexto, segundo a teoria da homogeneização, as escalas macro e microscópica se relacionam através de uma dimensão escalar característica, δ, da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\delta}, \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

Tal parâmetro característico, δ, corresponde à medida da razão entre as dimensões microscópica e macroscópica. E de acordo com a referida teoria, tal medida é considerada suficientemente pequena.

Assim, a razão $1/\delta$ funciona como um fator de amplificação de um certo ponto **x** global do meio, permitindo-se a análise em nível macroscópico do comportamento local de F_Y naquele ponto. A Figura 3.2.3 ilustra tal interpretação.

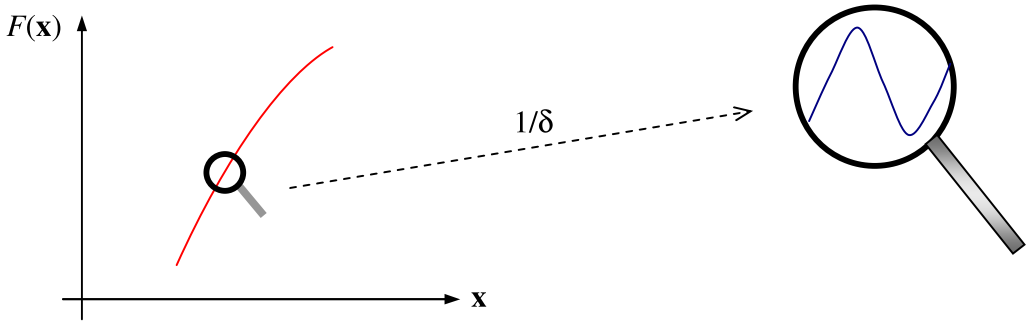


Figura 3.2.3 - Dimensão característica de não-homogeneidade e escala local expandida.

E considerando-se agora as duas escalas de análise, a função F_Y passa a ser definida como uma função explícita de **x** e implícita de **y**: $F_Y(\mathbf{x}) = F_Y(\delta\mathbf{y}) = F_Y(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Desta forma, a propriedade F_Y do material compósito pode ser então expandida assintoticamente em potências de δ como se segue:

$$F_Y^{\delta}(\mathbf{x}) = F_Y^{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \delta F_Y^{1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \delta^2 F_Y^{2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \ldots \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

Na equação acima, as funções F_Y^i (i = 0,1,2,...) são consideradas suaves em nível macroscópico e **Y**- periódicas em nível microscópico. E como citado anteriormente, assume-se a dimensão característica de não-homogeneidade, δ, como sendo suficientemente pequena.

3.3 Equações de Homogeneização

Nesta seção são apresentadas as equações a partir das quais serão determinadas as propriedades mecânicas homogeneizadas (efetivas e macroscópicas) de um meio heterogêneo periódico regular generalizado.

O desenvolvimento das equações é feito a partir da definição do problema geral de valor de contorno para um meio heterogêneo de estrutura regular periódica, seguindo o procedimento realizado em [28]. Tal abordagem se faz suficiente para o entendimento e resolução dos problemas de homogeneização e otimização estudados no trabalho. Uma abordagem com maior número de hipóteses, baseada no princípio dos trabalhos virtuais, é apresentada em detalhes em [23].

Foi pensando em apresentar o tema de forma objetiva e didática, que se utilizou o procedimento do trabalho [28]. Contudo, ao mesmo foi conferido um maior detalhamento às passagens entre equacionamentos, sendo feitas duas devidas correções quanto a sinais em equações, que passaram despercebidas pelos autores daquela referência. Vale ressaltar que as equações finais aqui obtidas para o problema de elasticidade abordado são as mesmas alcançadas a partir da abordagem adotada em [23].

3.3.1 Problema de valor de contorno geral

O seguinte problema de elasticidade plana, apresentado na Figura 3.3.1.1, é considerado no desenvolvimento das equações de homogeneização.

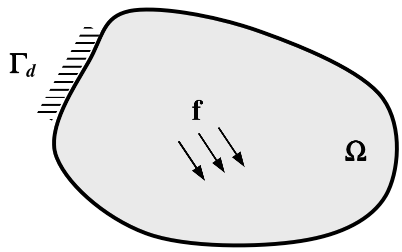


Figura 3.3.1.1 - Problema de elasticidade abordado.

O problema físico ilustrado na Figura 3.3.1.1 acima pode ser modelado matematicamente através de equações elípticas. E o mesmo pode ser definido através do problema de valor de contorno abaixo:

$$-A^{\delta}(u^{\delta}) = \mathrm{f} \qquad \text{em } \Omega \tag{3.3.1.1}$$

$$u^{\delta} = 0 \qquad \text{em } \Gamma_d \,, \tag{3.3.1.2}$$

onde f corresponde a uma dada componente da força de corpo **f** que atua ao longo domínio global da estrutura, Ω; e o operador elíptico é dado por

$$A^{\delta} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta})\frac{\partial}{\partial x_l}\right) \tag{3.3.1.3}$$

Nas equações acima, o subscrito δ indica a dependência do operador elíptico, A, assim como do campo de deslocamento, u (restrito ao longo do domínio local Γ_d), com relação à dimensão característica de não-homogeneidade. O tensor **D**, por sua vez, corresponde ao tensor elástico do material, o qual é considerado simétrico e define as propriedades mecânicas do mesmo.

Seja considerada a estrutura apresentada no problema da Figura 3.3.1.1 como sendo constituída de uma material de microestrutura **Y**-periódica e regular, conforme ilustra a Figura 3.3.1.2.

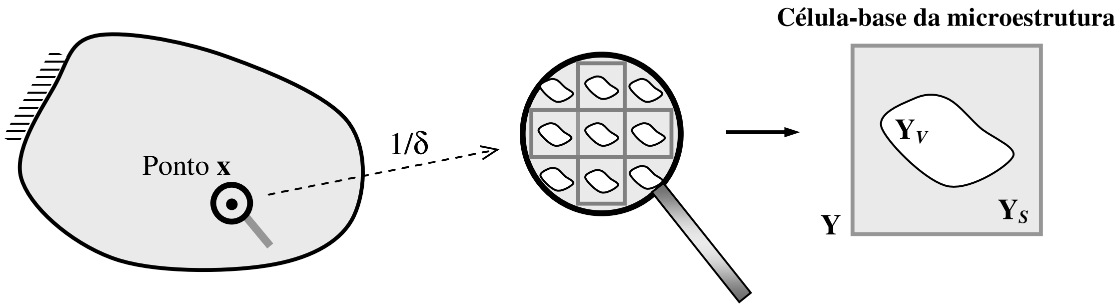


Figura 3.3.1.2 - Estrutura constituída de material microcelular periódico regular.

O objetivo do método da homogeneização é definir em nível macroscópico o problema que rege o comportamento mecânico da microestrutura heterogênea periódica regular, a partir dos módulos elásticos homogeneizados (uniformes em nível macroscópico) e sem explicitar a dimensão característica, δ.

O problema geral de valor de contorno é então redefinido, passando a Equação (3.3.1.1) a ser reescrita conforme abaixo:

$$-\mathbf{D}^{h}_{ijkl}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l} = \mathrm{f} \qquad \text{em } \Omega \tag{3.3.1.4}$$

Na Equação (3.3.1.4) acima, $\mathbf{D}^h$ corresponde ao tensor elástico homogeneizado. O mesmo é obtido através da análise do comportamento microscópico do material celular ao longo do domínio de sua célula-base, **Y**. Este é constituído pelo domínios sólido e vazio, Y_S e Y_V, respectivamente, como ilustra a Figura 3.3.1.2.

A seguir é determinada a equação que governa o comportamento mecânico do material compósito em nível microscópico. A partir desta, são definidas as equações dos módulos elásticos efetivos do tensor $\mathbf{D}^h$, presente na Equação (3.3.1.4) que rege o comportamento macroscópico do material heterogêneo.

3.3.2 Comportamento mecânico em nível microscópico

Dando início ao desenvolvimento das equações homogeneizadas, primeiramente são determinadas as equações que definem o campo de deslocamento local da estrutura de material celular.

O problema de valor de contorno apresentado na Figura 3.3.1.1 é modelado pelas Equações (3.3.1.1) a (3.3.1.3). Tais equações e a expansão assintótica definida pela Equação (3.2.3) são consideradas.

No método da homogeneização, o tensor elástico **D** é assumido uniforme em nível macroscópico, variando apenas na escala microscópica **y** e de forma **Y**-periódica:

$$\mathbf{D}_{ijkl} = \mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y}) \tag{3.3.2.1}$$

Expandindo assintoticamente o campo de deslocamento u e considerando-se apenas os termos de ordem máxima 2, visto que δ é suficientemente pequeno, obtém-se:

$$u^{\delta}(\mathbf{x}) = u^{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \delta u^{1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \delta^{2} u^{2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad \textbf{(3.3.2.2)}$$

Tomando o operador elíptico definido pela Equação (3.3.1.3), a Equação (3.3.2.1) e aplicando-se a regra da cadeia, tem-se:

$$A^{\delta} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial x_l}\right) \qquad \textbf{(3.3.2.3)}$$

Dado que **y** depende de **x** de acordo com a Equação (3.2.2), a Equação (3.3.2.3) é reescrita como se segue:

$$A^{\delta} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial x_l}\right) + \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial x_l}\right) \qquad \textbf{(3.3.2.4)}$$

Substituindo as Equações (3.3.2.2) e (3.3.2.4) na Equação (3.3.1.1), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}\right) + \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}\right) + \delta\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l}\right) +$$
$$\delta^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^2}{\partial x_l}\right) + \delta\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^2}{\partial x_l}\right) = -f \qquad \textbf{(3.3.2.5)}$$

Aplicando agora a regra da cadeia às derivadas internas da Equação (3.3.2.5), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}\right) + \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^0}{\partial y_l}\right) + \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}\right) + \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^0}{\partial y_l}\right) +$$
$$\delta\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l}\right) + \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right) +$$
$$\delta^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^2}{\partial x_l}\right) + \delta\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^2}{\partial y_l}\right) + \delta\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^2}{\partial x_l}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial u_k^2}{\partial y_l}\right)=-\mathrm{f} \qquad \textbf{(3.3.2.6)}$$

Definindo-se os operadores,

$$A^1=\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial}{\partial y_l}\right);\ A^2=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial}{\partial y_l}\right)+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right);\ A^3=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right),$$

a Equação (3.3.2.6) é reduzida a:

$$\delta^2 A^3(u^2)+\delta[A^3(u^0)+A^2(u^2)]+A^3(u^0)+A^2(u^1)+A^1(u^2)+$$
$$\frac{1}{\delta}[A^2(u^0)+A^1(u^1)]+\frac{1}{\delta^2}A^1(u^0)=\delta^2\cdot 0+\delta\cdot 0-f+\frac{1}{\delta}\cdot 0+\frac{1}{\delta^2}\cdot 0 \qquad \textbf{(3.3.2.7)}$$

Fazendo a equivalência entre o primeiro e segundo membros da Equação (3.3.2.7), igualando-se os termos de mesma potência de δ, as seguintes relações podem ser definidas:

$$A^1(u^0)=0 \qquad \textbf{(3.3.2.8)}$$

$$A^2(u^0)+A^1(u^1)=0 \qquad \textbf{(3.3.2.9)}$$

$$A^3(u^0)+A^2(u^1)+A^1(u^2)=-\mathrm{f} \qquad \textbf{(3.3.2.10)}$$

Seja a equação

$$A^1(u')=P, \qquad \textbf{(3.3.2.11)}$$

definida para uma dada função *u*’, **Y**-periódica. Tal equação apresentará solução única se

$$\overline{P}=\frac{1}{|\mathrm{Y}|}\int_{\mathrm{Y}_S}P\,d\mathbf{Y}=0, \qquad \textbf{(3.3.2.12)}$$

onde $|\mathrm{Y}|$ corresponde ao volume da célula-base da microestrutura celular [28].

A partir das Equações (3.3.2.11) e (3.3.2.12), verifica-se que a Equação (3.3.2.8) apresenta solução única, pois se tem $P = 0$, implicando $\overline{P} = 0$.

Uma vez que a Equação (3.3.2.8) possui uma única solução, conclui-se que u_0 deve ser função apenas de **x**, o que satisfaz a referida equação independentemente de $\mathbf{D}_{ijkl}$ variar ou não em nível microscópico. Portanto,

$$u^0 = u^0(\mathbf{x}) \qquad \textbf{(3.3.2.13)}$$

O primeiro termo da expansão assintótica do campo de deslocamento u depende então apenas da escala macroscópica **x.**

Substituindo a Equação (3.3.2.13) na Equação (3.3.2.9), tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial y_l}\right)+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right)=0$$

$$0+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right)=-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l}\right) \qquad \textbf{(3.3.2.14)}$$

Simplificando-se a Equação (3.3.2.14), chega-se a:

$$\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}=-\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \qquad \textbf{(3.3.2.15)}$$

A solução da Equação (3.3.2.15) para u_1 pode ser escrita da seguinte forma, após integrar ambos os lados da referida equação ao longo de y_l:

$$u_k^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -X_p^{kl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + c_p(\mathbf{x}) , \qquad \textbf{(3.3.2.16)}$$

onde X_p^{kl} corresponde a uma função (**Y**-periódica) dependente somente da escala microscópica **y** e c_p é uma constante de integração, função apenas de **x**.

Substituindo, agora, a Equação (3.3.2.16) na Equação (3.3.2.14), obtém-se:

$$-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} = -\frac{\partial \mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})}{\partial y_j}\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right) = \frac{\partial \mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})}{\partial y_j}} \qquad \textbf{(3.3.2.17)}$$

A Equação (3.3.2.17) corresponde exatamente à expressão que rege o comportamento local do material celular, tendo $X_p^{kl}(\mathbf{y})$ como sua solução, descrevendo o campo de deslocamento microscópico **Y**-periódico.

3.3.3 Módulos elásticos homogeneizados

Nesta seção é definida a equação a partir da qual são determinados os módulos elásticos efetivos do tensor elástico $\mathbf{D}^h$ do material.

A partir das Equações (3.3.2.10) a (3.3.2.12), pode-se afirmar que $A^1(u^2)$ apresentará solução única caso:

$$\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\mathrm{Y}_S}\left[-\mathrm{f} - A^3\left(u^0\right) - A^2\left(u^1\right)\right]d\mathbf{Y} = 0 \qquad \textbf{(3.3.3.1)}$$

Considerando f definida na escala macroscópica **x,** a Equação (3.3.3.1) é reescrita como:

$$\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\mathrm{Y}_S}\left[A^3\left(u^0\right) + A^2\left(u^1\right)\right]d\mathbf{Y} = -\mathrm{f} \qquad \textbf{(3.3.3.2)}$$

Substituindo a Equação (3.3.2.16) no integrando da Equação (3.3.3.2) e considerando-se as Equações (3.3.2.1) e (3.3.2.13), obtém-se:

$$A^3\left(u^0(\mathbf{x})\right)+A^2\left(u^1(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right)+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l}\right)$$

$$=\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial^2 u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l}\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)+$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(X_p^{kl}(\mathbf{y})\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial^2 u_p^0(\mathbf{x})}{\partial^2 x_q}-\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial c_p(\mathbf{x})}{\partial x_q}\right)$$

$$=\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial^2 u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l}-\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\frac{\partial^2 u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l}+$$

$$-\frac{\partial\left(X_p^{kl}(\mathbf{y})\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\right)}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_p^0(\mathbf{x})}{\partial^2 x_q}+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijpq}(y)\frac{\partial c_p(\mathbf{x})}{\partial x_q}\right) \qquad \textbf{(3.3.3.3)}$$

A Equação (3.3.3.3) é reescrita da seguinte forma:

$$A^3\left(u(\mathbf{x})\right)+A^2\left(u_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)=\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})-\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_p}\right)\frac{\partial^2 u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l}+$$

$$-\frac{\partial\left(X_p^{kl}(\mathbf{y})\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\right)}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_p^0(\mathbf{x})}{\partial^2 x_q}+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijpq}(y)\frac{\partial c_p(\mathbf{x})}{\partial x_q}\right) \qquad \textbf{(3.3.3.4)}$$

Substituindo a Equação (3.3.3.4) na Equação (3.3.3.2), obtém-se:

$$-\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{Y_S}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})-\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)d\mathbf{Y}\cdot\frac{\partial^2 u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l}+$$

$$\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{Y_S}\left(\frac{\partial\left(X_p^{kl}(\mathbf{y})\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\right)}{\partial y_j}\right)d\mathbf{Y}\cdot\frac{\partial^2 u_p^0(\mathbf{x})}{\partial^2 x_q}+$$

$$-\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{Y_S}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijpq}(y)\frac{\partial c_p(\mathbf{x})}{\partial x_q}\right)d\mathbf{Y}=\mathrm{f} \qquad \textbf{(3.3.3.5)}$$

Fazendo a correlação entre as Equações (3.3.3.5) e (3.3.4), obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{D}_{ijkl}^{h} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{Y_S}\left(\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y}) - \mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)d\mathbf{Y}} \qquad \textbf{(3.3.3.6)}$$

A Equação (3.3.3.6) expressa então os módulos elásticos homogeneizados, função apenas do comportamento microscópico do material celular.

3.4 Solução das Equações Homogeneizadas

As Equações (3.3.2.17) e (3.3.3.6) constituem as equações de homogeneização. Nesta seção é apresentada a solução das mesmas de acordo com o modelo de material adotado para a estrutura.

Inicialmente são apresentados os modelos de microestrutura mais comumente empregados no problema de OT baseada na homogeneização para a condição de estado plano, os quais já foram ligeiramente comentados no Capítulo 2. São eles:

Modelo ortotrópico lamelar

Modelo de material celular periódico e regular cuja célula-base é constituída por lamelas de densidades e rigidezes diferentes. As células-base típicas são as de classe-1 e classe-2.

As células de classe-1 são constituídas de um material rígido e outro flexível, dispostos paralelamente e cuja soma das densidades relativas (γ_r e 1-γ_r, respectivamente) corresponde à unidade. Assim, no processo de otimização, as regiões de material ineficiente apresentam o valor da densidade relativa do material flexível próximo ou igual a 1, implicando densidade do material rígido próxima de 0 ou nula. O inverso ocorre quando uma dada região de material deve ser mantida.

As células-base de classe-2, por sua vez, são constituídas de células de classe-1 imersas no material rígido formador destas, cujas densidades relativas (1-μ e μ, respectivamente) se somadas apresentam valor unitário. As lamelas do material rígido se encontram dispostas ortogonalmente com relação às lamelas das células de classe-1.

Estudos envolvendo a mistura de dois diferentes materiais mostram que o compósito de classe-2 constitui o material mais rígido dentre todos [12]. Originalmente, as regiões de material flexível correspondem a vazios, contudo, procurando-se evitar singularidades no algoritmo de solução da equação de estado um material de rigidez suficientemente baixa é assumido no lugar destes.

A Figura 3.4.1 ilustra o material celular composto por célula-base de classe-2.

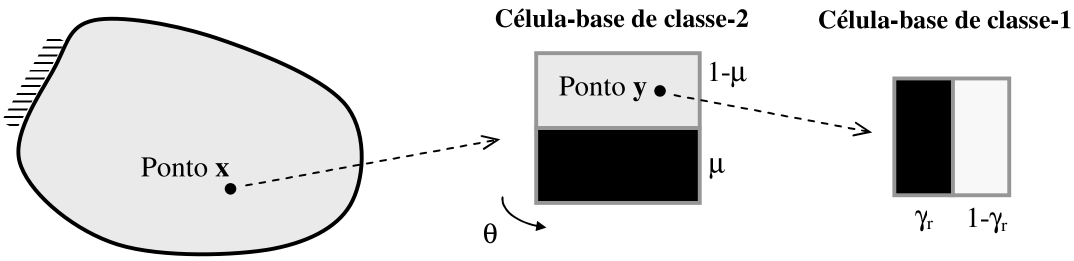


Figura 3.4.1 - Modelo de material com microestrutura periódica lamelar de classe-2.

Na otimização estrutural topológica baseada no modelo de material lamelar são consideradas como variáveis de projeto as densidades relativas (μ e γ_r) dos materiais e a orientação da célula-base (θ) no meio composto. Estas são associadas a cada elemento finito utilizado na discretização da estrutura analisada. Por exemplo, serão 2 variáveis de projeto por elemento finito caso seja empregado o material lamelar de classe-1, e 3 variáveis de projeto por elemento no caso do uso do material lamelar de classe-2.

Modelo ortotrópico com vazios (retangulares)

Modelo de material celular periódico e regular cuja célula-base é constituída por uma célula quadrada unitária com um vazio retangular central, conforme ilustra a Figura 3.4.2.

Analogamente ao modelo de material lamelar, no processo de otimização, regiões de material essencial à estrutura possuem densidade de valor próximo ou igual a 1, ou seja dimensões do vazio da célula-base nulas ou próximas de 0; enquanto que as regiões de material ineficiente apresentam valor de densidade nulo ou próximo de 0, ou seja, dimensões do vazio da célula-base iguais ou próximos à unidade.

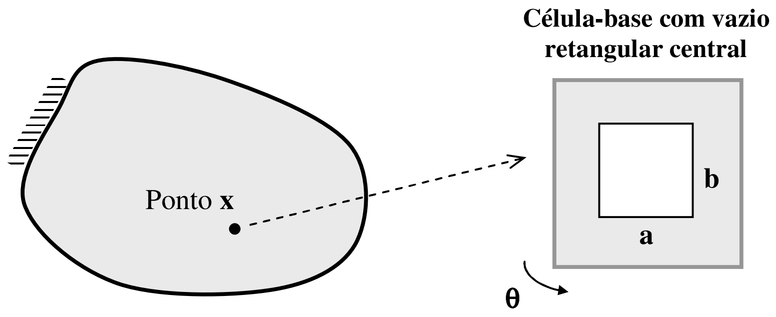


Figura 3.4.2 - Modelo de material com microestrutura periódica de vazios retangulares.

Uma vez utilizado o modelo de material com vazios retangulares, as variáveis de projeto do problema de otimização passam a ser as dimensões geométricas do vazio central, a e b, assim como a orientação da célula-base, θ, no meio heterogêneo.

Modelo isotrópico com penalidade

Além da relaxação (obtida com o uso dos modelos anteriores), outro modo de se obter soluções para o problema 0-1 de distribuição de material é penalizar os valores de densidade intermediários [54]. Uma forma de fazê-lo é empregar o modelo de material cuja rigidez (tensor elástico) efetiva corresponde à rigidez original multiplicada pela razão entre uma pseudodensidade, ρ, e a densidade original, ρ_0, do material, elevada a um expoente empírico, p (vide Figura 3.4.3).

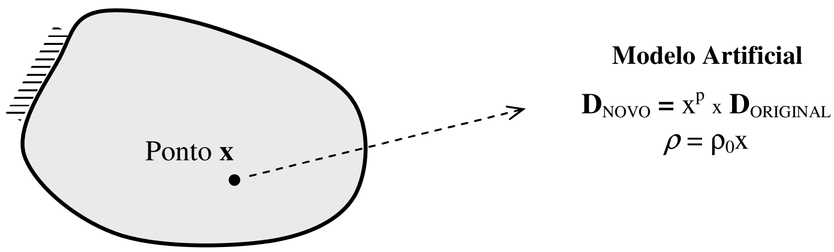


Figura 3.4.3 - Modelo de material com microestrutura artificial.

Trata-se de uma abordagem direta, se comparada aos modelos anteriores, onde a variável x, associada a cada elemento finito, pode variar de forma contínua de 0 a 1 ao longo do processo de otimização.

O caso em que o expoente empírico, p, é igual a 1, corresponde exatamente ao problema relaxado clássico de otimização da chapa de espessura variável [8]. Caso o mesmo seja maior do que 1, as densidades intermediárias de menor valor são penalizadas de forma a se aproximarem de 0 e as de maior valor a se aproximarem de 1. Segundo Bendsøe e Sigmund [12], para que este modelo seja realmente considerado como um modelo de material na OT, em casos bidimensionais o valor de p deve ser maior ou igual a 3, para um coeficiente de Poisson igual a 1/3. Cuidados devem ser tomados quando da utilização de valores muito altos de p, visto que desta forma tende-se ao problema {0;1} numericamente instável [54].

No presente trabalho são considerados os seguintes modelos:

- Modelo ortotrópico com vazios.
- Modelo isotrópico com penalidade.

Maiores detalhes a respeito do modelo ortotrópico lamelar empregado na otimização estrutural topológica podem ser encontrados nas referências [1], [12] e [30]. O fato das equações homogeneizadas para o modelo de vazios retangulares apresentarem apenas solução numérica motivou a investigação do modelo ortotrópico com vazios. As equações homogeneizadas para o modelo lamelar possuem solução analítica.

Com relação ao modelo isotrópico com penalidade, o mesmo tem sido empregado de forma intensa tanto em nível acadêmico quanto em pacotes comerciais. Dentre os motivos, destacam-se sua eficiência, simplicidade e baixo custo computacional [12][50]. Este então foi o motivo de considerar o notório modelo no estudo.

Vale salientar que a comparação direta entre os modelos de material considerados está fora do escopo do trabalho. Neste sentido, é indicada a referência [50]. O intuito aqui é investigar as características individuais de cada modelo em vários problemas estruturais.

A seguir apresenta-se a solução das equações homogeneizadas para cada um dos modelos de material considerados.

3.4.1 Modelo de material ortotrópico com vazios

Sabendo-se que as equações de homogeneização para tal modelo apresentam apenas solução numérica e que será empregado o método dos elementos finitos, a Equação (3.3.2.17) do deslocamento microscópico é inicialmente escrita em sua forma fraca (variacional). Em seguida, é aplicado o MEF, cuja solução fornece o campo de deslocamento local, por sua vez utilizado na Equação (3.3.3.6) para a determinação dos módulos elásticos homogeneizados.

A solução das equações de homogeneização é feita ao longo do domínio sólido da célula-base, menor parte característica do material celular.

Escrevendo a integral ponderada para a Equação (3.3.2.17), tem-se:

$$\int_{Y_S} v_i \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)d\mathbf{Y} - \int_{Y_S} v_i \frac{\partial \mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})}{\partial y_j}d\mathbf{Y} = 0 \qquad \textbf{(3.3.4.1)}$$

onde v_i corresponde a uma função ponderadora arbitrária.

Integrando por partes ambas as parcelas da Equação (3.3.4.1), obtém-se:

$$\left[v_i\left(\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)\right]_{\mathbf{Y_S}} - \int_{Y_S}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)d\mathbf{Y} +$$

$$-\left[v_i\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\right]_{Y_S} + \int_{Y_S}\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial v_i}{\partial y_j}d\mathbf{Y} = 0 \qquad \textbf{(3.3.4.2)}$$

Reorganizando os termos da Equação (3.3.4.2):

$$\int_{Y_S}\mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial v_i}{\partial y_j}d\mathbf{Y} - \int_{Y_S}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y})\frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q}\right)d\mathbf{Y} +$$

$$\left[\nu_i \left(\mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q} \right) \right]_{\mathrm{Y}_S} - \left[\nu_i \mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y}) \right]_{\mathrm{Y}_S} = 0 \qquad \textbf{(3.3.4.3)}$$

A partir da Equação (3.3.4.3), é obtida a forma fraca do problema local celular, expressa por:

$$\boxed{\int_{\mathrm{Y}_S} \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial y_j} \mathbf{D}_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial X_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q} \right) d\mathbf{Y} = \int_{\mathrm{Y}_S} \mathbf{D}_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \nu_i}{\partial y_j} d\mathbf{Y}} \qquad \textbf{(3.3.4.4)}$$

Uma vez estabelecida a forma fraca do problema microscópico, dada pela Equação (3.3.4.4), e considerando-se a Equação (3.3.3.6), através da variação dos índices *i*, *j*, *k*, *l*, *p*, *q* consegue-se chegar a um certo número de equações suficiente para se determinar os módulos elásticos efetivos do tensor $\mathbf{D}^h$.

Uma vez que no presente estudo problemas bidimensionais (*i*, *j*, *k*, *l*, *p*, *q* = 1, 2) são analisados, os seguintes casos abaixo são suficientes para encontrar a solução homogeneizada:

- Caso (1) : $k = l = 1 \Rightarrow$ Determinação de $\mathbf{D}_{1111}^h$
- Caso (2) : $k = l = 2 \Rightarrow$ Determinação de $\mathbf{D}_{1122}^h$ e $\mathbf{D}_{2222}^h$
- Caso (3) : $k = 1$ e $l = 2 \Rightarrow$ Determinação de $\mathbf{D}_{1212}^h$

Tratando-se de um material ortotrópico, são 4 (quatro) os módulos elásticos a serem determinados, sendo nulos os demais módulos:

$$\mathbf{D}^h = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{1111}^h & \mathrm{D}_{1122}^h & 0 \\ \mathrm{D}_{1122}^h & \mathrm{D}_{2222}^h & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}_{1212}^h \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.3.4.5)}$$

Vale ressaltar que o material sólido presente na célula-base é isotrópico e idêntico ao material de origem da estrutura investigada:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{1111} & \mathrm{D}_{1122} & 0 \\ \mathrm{D}_{1122} & \mathrm{D}_{2222} = \mathrm{D}_{1111} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}_{1212} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.3.4.6)}$$

A seguir, os casos acima considerados são analisados.

Caso (1) : *k* = *l* = 1

Expandindo a Equação (3.3.4.4) e considerando apenas os termos contendo os módulos elásticos não-nulos conforme a equação (3.3.4.6), obtém-se:

$$\int_{Y_S} \left(\frac{\partial \nu_1}{\partial y_1} \mathrm{D}_{1111} \frac{\partial X_1^{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \nu_1}{\partial y_1} \mathrm{D}_{1122} \frac{\partial X_2^{11}}{\partial y_2} + \right.$$

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial y_2} \mathrm{D}_{1212} \frac{\partial X_1^{11}}{\partial y_2} + \frac{\partial \nu_2}{\partial y_1} \mathrm{D}_{2112} \frac{\partial X_1^{11}}{\partial y_2} + \frac{\partial \nu_1}{\partial y_2} \mathrm{D}_{1221} \frac{\partial X_2^{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \nu_2}{\partial y_1} \mathrm{D}_{2121} \frac{\partial X_2^{11}}{\partial y_1} +$$

$$\left. \frac{\partial \nu_2}{\partial y_2} \mathrm{D}_{2211} \frac{\partial X_1^{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \nu_2}{\partial y_2} \mathrm{D}_{2222} \frac{\partial X_2^{11}}{\partial y_2} \right) d\mathbf{Y} = \int_{Y_S} \left(\mathrm{D}_{1111} \frac{\partial \nu_1}{\partial y_1} + \mathrm{D}_{2211} \frac{\partial \nu_2}{\partial y_2} \right) d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.7)}$$

Reorganizando a Equação (3.3.4.7) e considerando-se as propriedades de simetria das constantes elásticas:

$$\int_{Y_S} \left[\left(\mathrm{D}_{1111} \frac{\partial X_1^{11}}{\partial y_1} + \mathrm{D}_{1122} \frac{\partial X_2^{11}}{\partial y_2} \right) \frac{\partial \nu_1}{\partial y_1} + \right.$$

$$\mathbf{D}_{1212} \left(\frac{\partial \nu_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \nu_2}{\partial y_1} \right) \left(\frac{\partial X_1^{11}}{\partial y_2} + \frac{\partial X_2^{11}}{\partial y_1} \right) +$$

$$\left. \left(\mathrm{D}_{1122} \frac{\partial X_1^{11}}{\partial y_1} + \mathrm{D}_{2222} \frac{\partial X_2^{11}}{\partial y_2} \right) \frac{\partial \nu_2}{\partial y_2} \right] d\mathbf{Y} = \int_{Y_S} \left(\mathrm{D}_{1111} \frac{\partial \nu_1}{\partial y_1} + \mathrm{D}_{1122} \frac{\partial \nu_2}{\partial y_2} \right) d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.8)}$$

Escrevendo a equação (3.3.4.8) na forma matricial e aplicando-se o método dos elementos finitos clássico [4][49], tem-se que:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \mathbf{B}_e^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.9)}$$

Retirando das integrais os vetores de deslocamentos, que por sua vez são números, a partir da Equação (3.3.4.9), obtém-se:

$$\mathbf{W}_e^T \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega^e \mathbf{U}_e = \mathbf{W}_e^T \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_e^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e$$

$$\boxed{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega^e \mathbf{U}_e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_e^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e} \qquad \textbf{(3.3.4.10)}$$

Na equação (3.3.4.10) a integral do produto matricial $\mathbf{B}_e{}^T\mathbf{D}\mathbf{B}_e$ ao longo do domínio do elemento finito é conhecida e corresponde à matriz de rigidez elementar.

A seguinte equação matricial pode ser montada com base na Equação (3.3.4.10):

$$\mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_e \qquad \textbf{(3.3.4.11)}$$

onde,

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.12)}$$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_e^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.13)}$$

As Equações (3.3.4.12) e (3.3.4.13) definem, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de carga elementares.

Discretizado o domínio sólido, Y_S, da célula-base, é definida a matriz de conectividade através da numeração dos nós de cada elemento finito. Por meio desta, são unidos as matrizes de rigidez e os vetores de carga associados a cada elemento finito, montando-se a matriz de rigidez, $\mathbf{K}_g$, e o vetor de carga, $\mathbf{F}_g$, globais da estrutura analisada. A partir destes e consideradas as respectivas condições de contorno naturais impostas, é determinado o vetor deslocamento global, $\mathbf{U}_g$, a partir da Equação (3.3.4.14) [4][49]:

$$\mathbf{K}_g \mathbf{U}_g = \mathbf{F}_g \tag{3.3.4.14}$$

O vetor $\mathbf{U}_g$ é então utilizado na Equação (3.3.3.6) para a determinação do módulo elástico homogeneizado D^h_{1111}.

Para se chegar até o valor de D^h_{1111}, ainda precisam ser definidas as condições de contorno do problema. Determinadas com base na interpretação do carregamento $\mathbf{F}_e$, na periodicidade característica e simetria geométrica da célula-base, as condições de contorno para o Caso (1) são apresentadas na Figura 3.4.1.1 [28]:

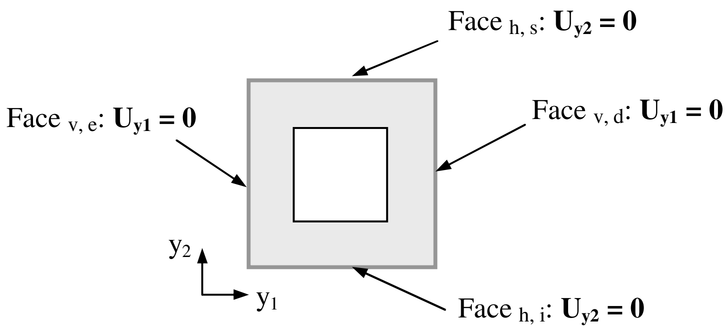


Figura 3.4.1.1 - Condições de contorno aplicadas à célula-base para o cálculo de D^h_{1111}.

Conforme mostra a Figura 3.4.1.1 anterior, os deslocamentos na direção y_1 ao longo das faces verticais direita e esquerda devem ser nulos, assim como aqueles na direção y_2 ao longo das faces horizontais inferior e superior.

Obtido o vetor deslocamento global a partir da Equação (3.3.4.14), são determinados os deslocamentos dos nós de cada elemento finito. Com base na matriz de transformação deslocamento-deformação, $\mathbf{B}_e$, do elemento, é calculado o vetor de deformação elementar, $\boldsymbol{\varepsilon}_e$. A partir deste, é definido o módulo elástico homogeneizado D^h_{1111} com base na Equação (3.3.3.6).

Considerando $i = j = 1$ na Equação (3.3.3.6), lembrando que o caso em estudo adota $k = l = 1$, e expandindo tal equação considerando-se apenas os módulos elásticos não-nulos, tem-se:

$$D^h_{1111} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{Y_S}\left(D_{1111} - D_{1111}\frac{\partial X^{11}_1}{\partial y_1} - D_{1122}\frac{\partial X^{11}_2}{\partial y_2}\right)d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.15)}$$

$$\mathbf{D}^{h,e}_{1111} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(D_{1111} - \begin{Bmatrix} D_{1111} \\ D_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e\right)d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.16)}$$

Desta forma, considerando-se a Equação (3.3.4.16) e o domínio **Y** da célula-base, o módulo elástico homogeneizado $\mathbf{D}^h_{1111}$ ao longo do mesmo é expresso por:

$$\boxed{D^h_{1111} = \sum_{i=1}^{N_{el}} D^{h,e}_{1111} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\sum_{i=1}^{N_{el}}\int_{\Omega^e}\left(D_{1111} - \begin{Bmatrix} D_{1111} \\ D_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e\right)d\Omega^e} \qquad \textbf{(3.3.4.17)}$$

Na expressão acima, N_{el} corresponde ao número de elementos finitos utilizados na discretização da célula-base.

Os detalhes da transformação da Equação (3.3.4.8) na Equação (3.3.4.9) e da obtenção da Equação (3.3.4.16) a partir da Equação (3.3.4.15) encontram-se no Apêndice A.

De forma análoga ao Caso (1), são desenvolvidos os cálculos para os Casos (2) e (3). Estes são apresentados de forma sucinta a seguir.

Caso (2) : $k = l = 2$

Expandindo a Equação (3.3.4.4) e considerando apenas os termos contendo os módulos elásticos não-nulos, obtém-se:

$$\int_{Y_S}\left[\left(D_{1111}\frac{\partial X_1^{22}}{\partial y_1}+D_{1122}\frac{\partial X_2^{22}}{\partial y_2}\right)\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\right.$$

$$D_{1212}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial X_1^{22}}{\partial y_2}+\frac{\partial X_2^{22}}{\partial y_1}\right)+$$

$$\left.\left(D_{1122}\frac{\partial X_1^{22}}{\partial y_1}+D_{2222}\frac{\partial X_2^{22}}{\partial y_2}\right)\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right]d\mathbf{Y}=\int_{Y_S}\left(D_{1122}\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+D_{2222}\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right)d\mathbf{Y} \qquad \mathbf{(3.3.4.18)}$$

Escrevendo a Equação (3.3.4.18) na forma matricial e aplicando-se o método dos elementos finitos, tem-se:

$$\mathbf{K}_e\mathbf{U}_e=\mathbf{F}_e \qquad \mathbf{(3.3.4.19)}$$

onde,

$$\mathbf{K}_e=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}\mathbf{B}_e d\Omega^e \qquad \mathbf{(3.3.4.20)}$$

$$\mathbf{F}_e=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_e^T\begin{Bmatrix}D_{1122}\\D_{2222}\\0\end{Bmatrix}d\Omega^e \qquad \mathbf{(3.3.4.21)}$$

Novamente, as condições de contorno são determinadas com base na interpretação física do carregamento dado pela Equação (3.3.4.21), na periodicidade característica da célula-base e em sua simetria [28]. As mesmas são apresentadas na Figura 3.4.1.2, onde os deslocamentos na direção y_1 ao longo das faces verticais direita e esquerda devem ser nulos, assim como aqueles na direção y_2 ao longo das faces horizontais inferior e superior.

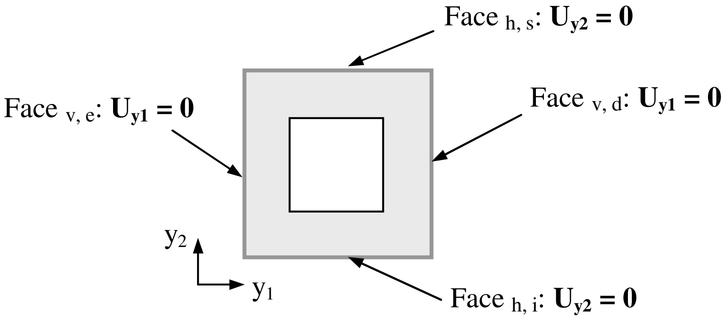


Figura 3.4.1.2 - Condições de contorno da célula-base para o cálculo de D^h_{1212} e D^h_{2222}.

Observando-se as Figuras (3.4.1.1) e (3.4.1.2), observa-se que as condições de contorno aplicadas à célula-base são as mesmas para os Casos (1) e (2).

Determinado o vetor deslocamento global a partir da Equação (3.3.4.19) e obtido o vetor de deformação para cada elemento, são definidos os módulos elásticos homogeneizados D^h_{1122} e D^h_{2222} a partir da Equação (3.3.3.6).

Considerando $i = j = 1$ na Equação (3.3.3.6), lembrando que o caso em estudo adota $k = l = 2$, e expandindo tal equação considerando-se apenas os módulos elásticos não-nulos, obtém-se:

$$D^h_{1122} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{Y_S}\left(D_{1122} - D_{1111}\frac{\partial X_1^{22}}{\partial y_1} - D_{1122}\frac{\partial X_2^{22}}{\partial y_2}\right)d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.22)}$$

Considerando-se a formulação de elementos finitos, a Equação (3.3.4.22) é reescrita como se segue para um dado elemento finito da célula-base:

$$D^{h,e}_{1122} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(D_{1122} - \begin{Bmatrix} D_{1111} \\ D_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e\right)d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.23)}$$

A partir da Equação (3.3.4.23) e considerando o domínio **Y** da célula-base, o módulo elástico homogeneizado $\mathbf{D}^h_{1122}$ ao longo do mesmo é dado por:

$$\boxed{\mathrm{D}^h_{1122} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}_e} \mathrm{D}^{h,e}_{1122} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}_{el}} \int_{\Omega^e} \left(\mathrm{D}_{1122} - \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e \right) d\Omega^e} \qquad \textbf{(3.3.4.24)}$$

Por sua vez, adotando $i = j = 2$ na Equação (3.3.3.6) e expandindo tal equação considerando-se apenas os módulos elásticos não-nulos e a simetria destes, tem-se:

$$\mathrm{D}^h_{2222} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathrm{Y}_S} \left(\mathrm{D}_{2222} - \mathrm{D}_{1122} \frac{\partial X_1^{22}}{\partial y_1} - \mathrm{D}_{2222} \frac{\partial X_2^{22}}{\partial y_2} \right) d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.25)}$$

Considerando-se a formulação de elementos finitos, a Equação (3.3.4.25) é reescrita, para um dado elemento finito da célula-base, conforme a seguir:

$$\mathrm{D}^{h,e}_{2222} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\Omega^e} \left(\mathrm{D}_{2222} - \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1122} \\ \mathrm{D}_{2222} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e \right) d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.26)}$$

A partir da Equação (3.3.4.26) e considerando o domínio **Y** da célula-base, o módulo elástico homogeneizado D^h_{2222} é expresso por:

$$\boxed{\mathrm{D}^h_{2222} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}_{el}} \mathrm{D}^{h,e}_{2222} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}_{el}} \int_{\Omega^e} \left(\mathrm{D}_{2222} - \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1122} \\ \mathrm{D}_{2222} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e \right) d\Omega^e} \qquad \textbf{(3.3.4.27)}$$

Caso (3) : *k* = 1 e *l* = 2

Expandindo a Equação (3.3.4.4) e considerando apenas os termos contendo os módulos elásticos não-nulos, escreve-se que:

$$\int_{Y_S}\left[\left(D_{1111}\frac{\partial X_1^{12}}{\partial y_1}+D_{1122}\frac{\partial X_2^{12}}{\partial y_2}\right)\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\right.$$

$$D_{1212}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial X_1^{12}}{\partial y_2}+\frac{\partial X_2^{12}}{\partial y_1}\right)+$$

$$\left.\left(D_{1122}\frac{\partial X_1^{12}}{\partial y_1}+D_{2222}\frac{\partial X_2^{12}}{\partial y_2}\right)\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right]d\mathbf{Y}=\int_{Y_S}D_{1212}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right)d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.28)}$$

Escrevendo a equação (3.3.4.28) na forma matricial e aplicando-se o método dos elementos finitos, tem-se:

$$\mathbf{K}_e\mathbf{U}_e=\mathbf{F}_e \qquad \textbf{(3.3.4.29)}$$

onde,

$$\mathbf{K}_e=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}\mathbf{B}_e\,d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.30)}$$

$$\mathbf{F}_e=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_e^T\begin{Bmatrix}0\\0\\D_{1212}\end{Bmatrix}d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.31)}$$

As condições de contorno para o referido caso são ilustradas na Figura 3.4.1.3 [28].

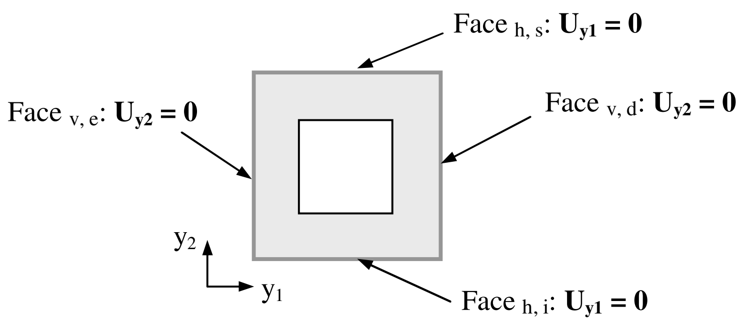


Figura 3.4.1.3 - Condições de contorno aplicadas à célula-base para o cálculo de D^h_{1212}.

De acordo com a Figura 3.4.1.3 anterior, os deslocamentos na direção y_2 ao longo das faces verticais direita e esquerda devem ser nulos, da mesma forma que aqueles na direção y_1 ao longo das faces horizontais inferior e superior.

Considerando i = 1 e j = 2 na Equação (3.3.3.6) e expandindo tal equação considerando-se apenas os módulos elásticos não-nulos, tem-se que:

$$\mathrm{D}_{1212}^{h} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\mathrm{Y}_S}\left(\mathrm{D}_{1212} - \mathrm{D}_{1212}\frac{\partial X_1^{12}}{\partial y_1} - \mathrm{D}_{1212}\frac{\partial X_2^{12}}{\partial y_2}\right)d\mathbf{Y} \tag{3.3.4.32}$$

Considerando-se a formulação de elementos finitos, a Equação (3.3.4.32) é reescrita como se segue, para um dado elemento finito da célula-base:

$$\mathrm{D}_{1122}^{h,e} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(\mathrm{D}_{1212} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{D}_{1212} \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e\right)d\Omega^e \tag{3.3.4.33}$$

A partir da Equação (3.3.4.33), o módulo elástico homogeneizado D_{1212}^{h} é dado por:

$$\boxed{\mathrm{D}_{1212}^{h} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}_{el}}\mathrm{D}_{1212}^{h,e} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_{el}}\int_{\Omega^e}\left(\mathrm{D}_{1212} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{D}_{1212} \end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e\right)d\Omega^e} \tag{3.3.4.34}$$

3.4.2 Modelo de material isotrópico com penalidade

Com relação ao modelo de material isotrópico, mostrado na Figura 3.4.3, as equações de homogeneização se resumem a:

$$\mathbf{D}_{1111}^{h} = \rho_e^{\mathrm{p}}\mathbf{D}_{1111} \tag{3.4.2.1}$$

$$\mathbf{D}_{1122}^{h} = \rho_e^{\mathrm{p}}\mathbf{D}_{1122} \tag{3.4.2.2}$$

$$\mathbf{D}_{2222}^{h} = \rho_e^{\mathrm{p}} \mathbf{D}_{2222} \qquad \textbf{(3.4.2.3)}$$

$$\mathbf{D}_{1212}^{h} = \rho_e^{\mathrm{p}} \mathbf{D}_{1212} \qquad \textbf{(3.4.2.4)}$$

Nas equações acima, como já mencionado anteriormente, p corresponde ao expoente empírico de penalidade das densidades intermediárias e ρ_e representa a pseudodensidade associada a um dado elemento finito utilizado na discretização da estrutura avaliada.

Escrevendo as Equações (3.4.2.1) a (3.4.2.4) em notação matricial, tem-se:

$$\boxed{\mathbf{D}^{h} = \rho_e^{\mathrm{p}} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1111} & \mathbf{D}_{1122} & 0 \\ \mathbf{D}_{1122} & \mathbf{D}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{1212} \end{bmatrix}} \qquad \textbf{(3.4.2.5)}$$

Capítulo 4

Otimização Estrutural Topológica Baseada na Homogeneização

4.1 Introdução

No capítulo anterior foram apresentadas as equações de homogeneização e suas soluções para o modelo de material ortotrópico e para o SIMP. No presente capítulo estes modelos são utilizados para se chegar à solução do problema de otimização topológica.

O problema de otimização é tratado como uma problema de distribuição de material [8], no qual variáveis relacionadas a pseudodensidades atribuídas a cada elemento finito constituem as variáveis de projeto. No caso do modelo de material ortotrópico com vazios ainda há a orientação do material como variável. Neste sentido, densidades baixas implicam diretamente uma rigidez também baixa, tendendo à remoção daquele elemento finito da estrutura. Densidades altas, por sua vez, implicam rigidez próxima a do material de origem, tendendo a manutenção daquele elemento.

No caso do uso do modelo ortotrópico com vazios, os elementos finitos de densidades intermediárias podem ser encarados como elementos cujo material pode ser substituído por um material microporoso cujos vazios se orientam no sentido de melhor resposta do material à solicitação. Por sua vez, sendo aplicado o modelo isotrópico com penalidade, as regiões de densidade intermediária - neste caso em bem menor número, já que as mesmas são penalizadas - podem ser interpretadas como regiões de possível aplicação de um material menos rígido.

Além da questão das densidades intermediárias, problemas numéricos existem associados ao modo de abordagem e à natureza do problema de distribuição de material. Na Seção 4.10 os mesmos são comentados e algumas técnicas para solução de tais problemas são citadas, destacando-se aquelas empregadas no trabalho para cada modelo.

Os problemas de otimização estudados envolvem a maximização de rigidez e autovalores, estando os mesmos sujeitos a uma única restrição de volume, além de restrições laterais relacionadas com as variáveis de projeto. Otimizadores baseados em critérios de otimalidade são empregados.

4.2 Problema de Distribuição de Material

Esta seção procura apresentar de forma didática como é definido e abordado o problema de OT baseado na homogeneização.

Seja o problema de encontrar a estrutura de máxima rigidez, sujeita ao carregamento e condições de contorno ilustrados na Figura 4.2.1 e a uma certa restrição de volume, a qual informa que 50% de material, no mínimo, devem ser eliminados da estrutura.

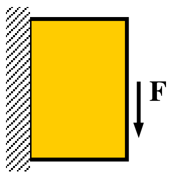


Figura 4.2.1 - Viga curta engastada e sujeita à carga pontual no centro da extremidade livre.

O problema de otimização pode então ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \underset{x_e\ (e=1,2,\ldots,N_e)}{\text{Maximizar}} & \textbf{RIGIDEZ} \\ \text{Sujeito a} & Vol_{\text{FINAL}} \leq 50\% Vol_{\text{INICIAL}} \end{array} \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

No problema acima, as variáveis de projeto x_e estão associadas às pseudodensidades de cada elemento finito utilizado na discretização da estrutura, *Vol* ao volume da estrutura, e N_e ao número de elementos finitos empregados.

Dependendo do modelo de material adotado no problema de otimização, as seguintes pseudodensidades são definidas:

- Modelo ortotrópico com vazios: $\rho_e = \rho_0 x_e = \rho_0(1 - a_e \times b_e)$.

A célula-base quadrada é considerada de volume unitário. Assim, as dimensões a_e (largura) e b_e (altura) de seu vazio retangular podem variar de 0 a 1 para vários pares (a_e, b_e). O objetivo de definir o vazio em forma de um retângulo é propiciar tal variação. A mesma não seria possível, por exemplo, caso o vazio fosse de forma circular. A constante ρ_0 é considerada unitária no caso estático em que acelerações não são aplicadas à estrutura, e de mesmo valor que a densidade do material original constituinte da estrutura no caso em que as inércias são consideradas. Nesta abordagem, a variável x_e passa a ser estudada com base em a_e e b_e, as quais passam a corresponder às variáveis de projeto.

- Modelo isotrópico com penalidade: $\rho_e = \rho_0 x_e$.

De forma direta, a variável x_e pode assumir valores de 0 a 1. As mesmas considerações feitas para ρ_0 no modelo anterior valem para o modelo em questão.

No caso do modelo de material ortotrópico, além de a_e e b_e, a orientação θ_e da célula-base do material heterogêneo associado ao elemento finito também constitui uma variável de projeto.

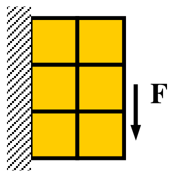


Figura 4.2.2 - Malha de elementos finitos da viga curta engastada.

Definidas as variáveis de projeto, a estrutura é discretizada através do uso de elementos finitos, como ilustra a Figura 4.2.2 acima.

Inicialmente, a cada elemento finito é atribuído um valor inicial para x_e. Na prática, visando a iniciar o problema com uma solução já factível e ao aproveitamento do máximo de material, o que se faz é conferir a cada elemento finito um mesmo valor de x_e, sendo este à razão entre o limite superior da restrição de volume e o volume inicial da estrutura. Ou seja, no exemplo em estudo, x_e = 0,5 para o modelo isotrópico e $a_e = b_e$ = 0,707, por exemplo, para o modelo ortotrópico.

Assim, para a primeira iteração do problema da viga curta engastada considerado, a seguinte configuração de pseudodensidades (normalizadas) é estabelecida, conforme apresentado na Figura 4.2.3.

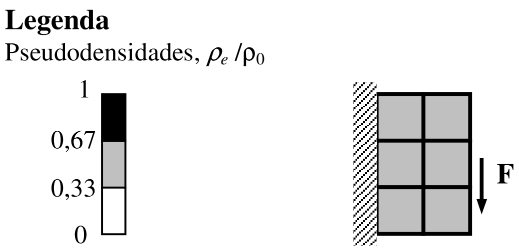


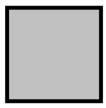
Figura 4.2.3 - Distribuição inicial de densidades para a viga curta engastada.

Em seguida, o cálculo numérico da estrutura é realizado. Para tal, precisa-se definir o tensor elástico efetivo (homogeneizado) de acordo com o modelo de material adotado para a estrutura. Vide Figura 4.2.4 a seguir.

Da análise por elementos finitos, são obtidos os deslocamentos nodais $\mathbf{U}_e$, a partir dos quais são determinadas as grandezas (tensões, energia de deformação, autovalores), a partir das quais são calculadas as sensibilidades. Estas, por sua vez, são utilizadas pelo otimizador escolhido para a solução do problema.

E a partir do otimizador baseado em critérios de otimalidade, as variáveis de projeto são atualizadas.

Elemento finito com um dado valor de x_e



* **Modelo isotrópico com penalidade**:

$\mathbf{D}_e^h = (x_e)^p \mathbf{D}_e$, para $e = 1,..., 4$ (Equação 3.4.2.5)

* **Modelo ortotrópico com vazios**:

Conforme explicado no Capítulo 3:

1) Dicretiza-se por elementos finitos, para cada e-ésimo elemento finito do modelo da estrutura, a célula-base unitária de vazio a_e x b_e a ele associada (sendo $e = 1,..., 4$).
2) Para os Casos (1) a (3), aplica-se as respectivas condições de contorno e carregamentos para cada célula.
3) Determina-se a deformação $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ para cada caso.
4) A partir desta, acham-se os módulos elásticos homogeneizados do tensor $\mathbf{D}_e^h$ ($e = 1,..., 4$).

Figura 4.2.4 - Determinação do tensor elástico efetivo conforme modelo de material.

Após a atualização das variáveis de projeto, supõe-se que seja obtida a distribuição de pseudodensidades mostrada na Figura 4.2.5.

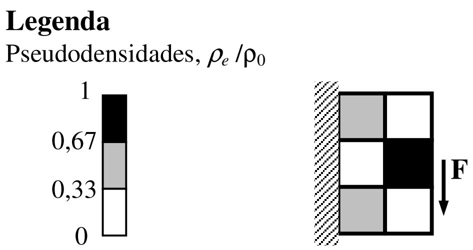


Figura 4.2.5 - Distribuição de densidades para a segunda iteração do problema.

De posse dos novos valores de x_e, o procedimento descrito na Figura 4.2.4 para se determinar o tensor elástico efetivo é repetido. É interessante observar que para o caso de modelo isotrópico com penalidade o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento é preciso ser feito uma única vez. O mesmo não ocorre quando do emprego do modelo ortotrópico com vazios, onde para cada iteração é necessário um novo cálculo para determinação da matriz de rigidez de cada elemento, já que a_e e b_e são variáveis implícitas do tensor elástico homogeneizado, ao contrário de x_e para modelo isotrópico.

Calculados os novos tensores elásticos de cada elemento finito, é feita novamente a simulação numérica e posteriormente a atualização das variáveis de projeto.

Supondo que na terceira iteração a solução ótima seja obtida, de acordo com o critério de parada preestabelecido, a distribuição de material tem então o aspecto apresentado na Figura 4.2.6.

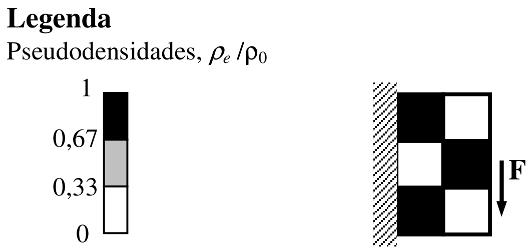


Figura 4.2.6 - Distribuição ótima de densidades para o problema da viga curta engastada.

Na Figura 4.2.6 acima os elementos em preto correspondem àqueles imprescindíveis à estrutura (pseudodensidade igual a 1), dados os carregamentos e condições de contorno aplicados. E aqueles em branco, aos elementos desnecessários à estrutura para a aplicação especificada (pseudodensidade nula). A escala de cinza indica as densidades intermediárias, as quais não constam na solução ótima.

A solução ótima do problema da viga curta engastada pode ser interpretada como uma treliça cujas barras formam um ângulo de 45° com a horizontal. Solução está que implica economia de 50% de material compara à geometria original proposta.

No caso do modelo ortotrópico, visando-se à redução do número de cálculos para se determinar os módulos elásticos efetivos para as várias e possíveis configurações $a_e \times b_e$ de vazios da célula-base, estes são inicialmente calculados para apenas alguns pares $a_e \times b_e$. Em seguida, utilizando-se de técnicas de interpolação ou de ajuste de curvas, os módulos elásticos homogeneizados passam a ser definidos na forma de uma função explícita de a e b, como um banco de dados. Assim é possível encontrar os módulos efetivos correspondentes a uma célula-base cujo vazio tem dimensões arbitrárias, sem ser necessário construir e avaliar uma nova célula-base. Basta entrar com os valores de dimensão na função contínua de a e b de cada módulo elástico, obtendo-se os respectivos módulos homogeneizados com boa aproximação. O módulo de homogeneização é apresentado no Capítulo 5.

Com relação à variável de projeto θ_e, representando a orientação dos eixos do material ortotrópico, esta é inserida na equação do tensor elástico homogeneizado da seguinte forma [30]:

$$\mathbf{D}^H(a_e, b_e, \theta_e) = \mathbf{R}_e(\theta_e)^T \mathbf{D}^h(a_e, b_e)\mathbf{R}_e(\theta_e) \qquad \textbf{(4.2.1.1)}$$

onde, a matriz de rotação é dada por

$$\mathbf{R}_e(\theta_e) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_e & \text{sen}^2\theta_e & \cos\theta_e \text{sen}\theta_e \\ \text{sen}^2\theta_e & \cos^2\theta_e & -\cos\theta_e \text{sen}\theta_e \\ -\text{sen}2\theta_e & \text{sen}2\theta_e & \cos 2\theta_e \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.2.1.2)}$$

A atualização da variável orientação é também feita com base nas condições de otimalidade.

4.3 Variáveis de Projeto e Restrições Laterais

No problema de OT baseada na homogeneização, as variáveis de projeto consistem nas seguintes grandezas de acordo com o modelo de material adotado:

- **Modelo isotrópico com penalidade**: x_e (e = 1, 2,...,N_e).

  A variável de projeto x_e pode variar de um valor mínimo, x_{min}, à unidade:

$$x_{min} \leq x_e \leq 1 \qquad \textbf{(4.3.1)}$$

- **Modelo ortotrópico com vazios**: a_e, b_e e θ_e (e = 1, 2,...,N_e).

As dimensões a_e e b_e do vazio retangular da célula-base podem variar da seguinte forma:

$$x_{min} \le a_e, b_e \le 1 \qquad \textbf{(4.3.2)}$$

A variável x_{min}, considerada na Equação (4.3.1), é utilizada para evitar quaisquer singularidades na solução do vetor de deslocamentos do problema estrutural. Já no caso da Equação (4.3.2), x_{min} é adotada no sentido de impedir que equações do algoritmo de otimização apresentem valor tendendo a infinito, pois em algumas equações as variáveis de projeto encontram-se no denominador destas. Em ambos os casos, o valor de x_{min} é geralmente de 0,001.

Limitando-se as variáveis de projeto conforme apresentado acima, a pseudodensidade ρ_e pode então variar de um valor mínimo $\rho_{e,\min}$ (quando $x_e = x_{min}$, indicando material a ser removido) ao valor ρ_0 original (para $x_e = 1$, indicando material a ser mantido), dado que

$$\rho_e = \rho_0 x_e, \qquad \text{(\textbf{modelo isotrópico})} \qquad \textbf{(4.3.3)}$$

ou de um valor nulo (para $a_e = b_e = 1$, indicando material a ser retirado) a um valor máximo $\rho_{e,\max}$ próximo do valor ρ_0 original (quando $a_e = b_e = x_{min}$, indicando material a ser mantido), uma vez que

$$\rho_e = \rho_0 (1 - a_e b_e) \qquad \text{(\textbf{modelo ortotrópico})} \qquad \textbf{(4.3.4)}$$

4.4 Restrição de Volume e Sensibilidades

No que se refere às restrições do problema de otimização, apenas uma única restrição é considerada, envolvendo o volume da estrutura, V, e seu volume final desejado, $\overline{V}$:

$$V \le \overline{V} \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

Para o **modelo ortotrópico com vazios**, a Equação (4.4.1) é escrita em maiores detalhes da seguinte forma:

$$\frac{1}{\rho_0}\sum_{e=1}^{N_{el}} m_e \leq \overline{V}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\sum_{e=1}^{N_{el}} \rho_e V_e \leq \overline{V}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\sum_{e=1}^{N_{el}} \rho_0 (1 - a_e b_e) A_e t \leq \overline{V}$$

$$\sum_{e=1}^{N_{el}} (1 - a_e b_e) A_e t \leq \overline{V}$$

$$\boxed{g(a_e, b_e) = \sum_{e=1}^{N_{el}} (1 - a_e b_e) A_e t - \overline{V} \leq 0} \qquad \textbf{(4.4.2)}$$

onde t corresponde à espessura da estrutura (considerada constante) e A_e à área do *e*-ésimo elemento finito.

A partir da Equação (4.4.2), as sensibilidades da restrição de volume (derivadas desta com relação às variáveis de projeto), são obtidas através das expressões:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial a_e} = -b_e A_e t} \qquad \textbf{(4.4.3)}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial b_e} = -a_e A_e t} \qquad \textbf{(4.4.4)}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta^e} = 0} \qquad \textbf{(4.4.5)}$$

Para o **modelo de material isotrópico**, a Equação (4.4.1) tem a seguinte forma em detalhes:

$$g(x_e) = \sum_{e=1}^{N_{el}} x_e A_e t - \overline{V} \leq 0 \qquad \textbf{(4.4.6)}$$

Com base na Equação (4.4.6), a sensibilidade de *g* é dada por:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}_e} = \mathrm{A}_e \mathrm{t}} \qquad \textbf{(4.4.7)}$$

4.5 Funções Objetivo e Sensibilidades

Nesta seção são apresentadas as funções objetivo estudadas no presente trabalho, assim como as sensibilidades referentes a cada uma delas.

Com base no modelo de material escolhido, os problemas têm como variáveis de projeto as grandezas apresentadas na Seção 4.3, estão sujeitos à restrição de volume de acordo com a Equação (4.4.2) ou Equação (4.4.6) e às restrições laterais conforme a Equação (4.3.1) ou a Equação (4.3.2).

4.5.1 Maximização da Rigidez: Único Caso de Carregamento

Com relação ao problema de se maximizar a rigidez global de uma estrutura, três possíveis abordagens existem [11][29][53]:

- minimizar a flexibilidade média (trabalho externo), expressa pelo funcional

$$l(u) = \sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{U}_e^T \mathbf{P}_e \, d\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{U}_e^T \mathbf{T}_e \, d\Gamma_t^e \right), \qquad \textbf{(4.5.1.1)}$$

onde *u* corresponde ao campo de deslocamento de equilíbrio, $\mathbf{P}_e$ ao vetor elementar das forças de corpo que atuam sobre o domínio Ω^e do elemento finito *e*, e $\mathbf{T}_e$ ao vetor das forças de superfície que agem sobre o domínio Γ_t^e ;

- minimizar a energia de deformação (metade do trabalho interno)

$$\frac{1}{2} a(u,u) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{D}^H \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e \, ; \qquad \textbf{(4.5.1.2)}$$

- ou maximizar a energia potencial total

$$\frac{1}{2}a(u,u)-l(u)=\sum_{e=1}^{N_{el}}\left(\frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{\varepsilon}_e^T\mathbf{D}^H\boldsymbol{\varepsilon}_e\,d\Omega^e-\mathbf{U}_e^T\mathbf{P}_e-\mathbf{U}_e^T\mathbf{T}_e\right); \qquad \textbf{(4.5.1.3)}$$

No caso do modelo isotrópico com penalidade $\mathbf{D}^H$ nas equações acima corresponde à $\mathbf{D}$.

Do princípio dos trabalhos virtuais e tendo em vista o problema maximização da rigidez estática [12][49], as seguintes relações são válidas:

$$a(u,u)=l(u) \qquad \textbf{(4.5.1.4)}$$

$$\frac{1}{2}a(u,u)-l(u)=-\frac{1}{2}a(u,u) \qquad \textbf{(4.5.1.5)}$$

De acordo com a Equação (4.5.1.4), verifica-se que minimizar a flexibilidade (maximizar a rigidez), $l(u)$, corresponde a minimizar o trabalho interno, $a(u,u)$, e conseqüentemente a metade deste, ou seja, a energia de deformação, $a(u,u)/2$. E com base na Equação (4.5.1.5), maximizar a energia potencial total, $-a(u,u)/2$, corresponde a minimizar a energia de deformação, ou o mesmo que maximizar a rigidez.

No presente trabalho, a energia potencial total é considerada como função objetivo nos problemas estáticos, visto que tal abordagem é geral, contemplando ambos trabalhos interno e externo. E com relação à flexibilidade média, as forças de superfície não são consideradas nos referidos problemas.

A seguir, para cada modelo de material, é escrito o problema de otimização que trata da maximização da rigidez global de uma estrutura sujeita à ação de um único caso de carregamento. As sensibilidades da função objetivo são também apresentadas.

Modelo ortotrópico com vazios

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{D}_e^H \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e - \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{U}_e^T \mathbf{T}_e \\ a_e,\, b_e,\, \theta_e \ (e=1,2,...,N_{el}) & \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{e=1}^{N_{el}} (1 - a_e b_e) A_e t - \overline{V} \le 0 \\ & x_{min} \le a_e, b_e \le 1 \end{array} \qquad \textbf{(4.5.1.6)}$$

Com relação às sensibilidades, baseado-se na função objetivo, *F*, da Equação (4.5.1.6) e sendo, neste caso, as cargas pontuais independentes das variáveis de projeto, tem-se [29]:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial a_e} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(a_e, b_e, \theta_e)}{\partial a_e} \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.1.7)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial b_e} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(a_e, b_e, \theta_e)}{\partial b_e} \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.1.8)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \theta_e} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(a_e, b_e, \theta_e)}{\partial \theta_e} \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.1.9)}$$

Modelo isotrópico com penalidade

Reescrevendo a função objetivo com base na Equação (3.4.2.5), tem-se:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \left(x_e^{\,p} \mathbf{D}\right) \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e - \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{U}_e^T \mathbf{T}_e \\ x_e \ (e=1,2,...,N_{el}) & \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{e=1}^{N_{el}} x_e A_e t - \overline{V} \le 0 \\ & x_{min} \le x_e \le 1 \end{array} \qquad \textbf{(4.5.1.10)}$$

A sensibilidade da função objetivo, *F*, é dada por [12]:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}_e} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^{\,T}\left(\mathrm{p}\mathrm{x}_e^{\,\mathrm{p}-1}\mathbf{D}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.1.11)}$$

4.5.2 Maximização da Rigidez: Múltiplos Casos de Carregamento

No caso do problema estático de maximização da rigidez de estrutura submetida a vários casos de carregamento, a função objetivo é considerada como sendo a combinação das energias de deformação associadas a cada um dos carregamentos, na forma ponderada [12][18].

Sejam considerados N_c casos de carregamentos independentes e atribuído a cada um deles um peso w_j, com j = 1, 2,..., N_c. As funções objetivo e suas sensibilidades têm então as seguintes formas, para cada modelo de material:

Modelo ortotrópico com vazios

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathrm{a}_e,\,\mathrm{b}_e,\,\theta_e\ (e=1,2,\ldots,\,\mathrm{N}_{el})}{\text{Maximizar}} & \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \left(\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}^T \mathbf{D}_e^H \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}\, d\Omega^e - \sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \mathbf{U}_{e,j}^T \mathbf{T}_{e,j} \right) \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} (1-\mathrm{a}_e\mathrm{b}_e)\mathrm{A}_e\mathrm{t} - \overline{\mathrm{V}} \le 0 \\ & \mathrm{x}_{\min} \le \mathrm{a}_e, \mathrm{b}_e \le 1 \end{array} \qquad \textbf{(4.5.2.1)}$$

Com relação às sensibilidades, as mesmas, para a nova função objetivo F, são expressas por [18]:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{a}_e} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(\mathrm{a}_e,\mathrm{b}_e,\theta_e)}{\partial \mathrm{a}_e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}\, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.2.2)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{b}_e} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(\mathrm{a}_e,\mathrm{b}_e,\theta_e)}{\partial \mathrm{b}_e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}\, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.2.3)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \theta_e} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(\mathrm{a}_e, \mathrm{b}_e, \theta_e)}{\partial \theta_e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}\, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.2.4)}$$

Modelo isotrópico com penalidade

Considerando-se o modelo de material isotrópico, tem-se:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{\mathrm{x}_e\ (e=1,2,\ldots,\mathrm{N}_{el})}{\text{Maximizar}} & \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \left(\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}^T \left(\mathrm{x}_e{}^{\mathrm{p}}\mathbf{D}\right) \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}\, d\Omega^e - \sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \mathbf{U}_{e,j}^T \mathbf{T}_{e,j} \right) \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_e} \mathrm{x}_e \mathrm{A}_e \mathrm{t} - \overline{\mathrm{V}} \le 0 \\ & \mathrm{x}_{\min} \le \mathrm{x}_e \le 1 \end{array}} \qquad \textbf{(4.5.2.5)}$$

No que se refere à sensibilidade, escreve-se que [12]:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}_e} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}^T \left(\mathrm{p}\mathrm{x}_e{}^{\mathrm{p-1}}\mathbf{D}\right) \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}\, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.2.6)}$$

4.5.3 Maximização da Rigidez: Ação do Peso Próprio

É interessante notar que para o problema de maximização da rigidez global de estrutura sujeita à ação do peso próprio, **P**, a sensibilidade do trabalho externo com respeito às variáveis de projeto não é mais nula. E o problema de otimização é escrito conforme apresentado na Equação (4.5.3.1):

Modelo ortotrópico com vazios

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{\mathrm{a}_e,\ \mathrm{b}_e,\ \theta_e\ (e=1,2,\ldots,\mathrm{N}_{el})}{\text{Maximizar}} & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{D}_e^H \boldsymbol{\varepsilon}_e\, d\Omega^e - \sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \mathbf{U}_e^T \mathbf{P}_e \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} (1-\mathrm{a}_e \mathrm{b}_e) \mathrm{A}_e \mathrm{t} - \overline{\mathrm{V}} \le 0 \\ & \mathrm{x}_{\min} \le \mathrm{a}_e, \mathrm{b}_e \le 1 \end{array}} \qquad \textbf{(4.5.3.1)}$$

As sensibilidades, com base na nova função objetivo, F, da Equação (4.5.3.1), são expressas conforme a seguir [29]:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{a}_e} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(\mathrm{a}_e, \mathrm{b}_e, \theta_e)}{\partial \mathrm{a}_e} \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e - \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial \mathrm{a}_e}} \qquad \textbf{(4.5.3.2)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{b}_e} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(\mathrm{a}_e, \mathrm{b}_e, \theta_e)}{\partial \mathrm{b}_e} \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e - \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial \mathrm{b}_e}} \qquad \textbf{(4.5.3.3)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \theta_e} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H(\mathrm{a}_e, \mathrm{b}_e, \theta_e)}{\partial \theta_e} \boldsymbol{\varepsilon}_e \, d\Omega^e} \qquad \textbf{(4.5.3.3)}$$

Salienta-se que as forças de corpo independem da orientação da célula-base.

Com base na formulação por elementos finitos [49] e na Equação (4.3.4), a função peso próprio $\mathbf{P}_e$ consistente, para um certo elemento finito, pode ser escrita da seguinte forma, sendo g_z a aceleração vertical:

$$\mathbf{P}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \begin{Bmatrix} 0 \\ [\rho_0(1 - \mathrm{a}_e \mathrm{b}_e)\mathrm{A}_e \mathrm{t}]\mathrm{g}_z \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.3.4)}$$

Assim, as derivadas parciais de $\mathbf{P}_e$ com relação às variáveis de projeto a_e e b_e são dadas pelas relações abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial a_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -[\rho_0 \mathrm{b}_e \mathrm{A}_e \mathrm{t}]\mathrm{g}_z \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.3.5)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial \mathrm{b}_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -[\rho_0 \mathrm{a}_e \mathrm{A}_e \mathrm{t}]\mathrm{g}_z \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.3.6)}$$

Modelo isotrópico com penalidade

Para o modelo de material isotrópico, o problema de otimização é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{|ll|}\hline \begin{array}{c}\text{Maximizar}\\ \mathbf{x}^e\ (e=1,2,\ldots,\mathrm{N}_{el})\end{array} & \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{\varepsilon}_e^T\left(\mathrm{x}_e^{\mathrm{p}}\mathbf{D}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_e\,d\Omega^e-\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}}\mathbf{U}_e^T\mathbf{P}_e \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_e}\mathrm{x}_e\mathrm{A}_e\mathrm{t}-\overline{\mathrm{V}}\leq 0 \\ & \mathrm{x}_{\min}\leq\mathrm{x}_e\leq 1 \\ \hline\end{array} \qquad \textbf{(4.5.3.7)}$$

E a sensibilidade da função objetivo é expressa por:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}_e}=\frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{\varepsilon}_e^T\left[\mathrm{p}\left(\mathrm{x}_e\right)^{\mathrm{p}\text{-}1}\right]\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_e\,d\Omega^e-\mathbf{U}_e^T\frac{\partial\mathbf{P}_e}{\partial\mathrm{x}_e}} \qquad \textbf{(4.5.3.8)}$$

onde,

$$\mathbf{P}_e=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_e^T\begin{Bmatrix}0\\ \left[\rho_0\mathrm{x}_e\mathrm{A}_e\mathrm{t}\right]\mathrm{g}_z\end{Bmatrix}d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.3.9)}$$

e por conseguinte,

$$\frac{\partial\mathbf{P}_e}{\partial\mathrm{x}_e}=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_e^T\begin{Bmatrix}0\\ \left[\rho_0\mathrm{A}_e\mathrm{t}\right]\mathrm{g}_z\end{Bmatrix}d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.3.10)}$$

4.5.4 Maximização da Freqüência Natural

É estudado a seguir o problema dinâmico de se maximizar uma dada freqüência natural, com base na maximização de seu autovalor correspondente.

O problema de autovalor é definido da seguinte forma, dadas as matrizes de massa $\mathbf{M}_g$ e rigidez $\mathbf{K}_g$ globais e simétricas do sistema:

$$(\mathbf{K}_g - \lambda_{n,i}\mathbf{M}_g)\phi_i = 0 \quad \textbf{(4.5.4.1)}$$

onde ϕ_i corresponde ao autovetor associado ao autovalor $\lambda_{n,i}$. A partir deste é obtida a freqüência natural associada àquele modo *i*. O autovetor, por sua vez, caracteriza qualitativamente o modo de vibrar da estrutura, em termos dos deslocamentos nodais.

A freqüência natural $f_{n,i}$ do modo *i* correspondente, em Hz, se relaciona com o autovalor $\lambda_{n,i}$, da seguinte maneira:

$$\lambda_{n,i} = w_{n,i}^2 = (2\pi f_{n,i})^2 \therefore f_{n,i} = \frac{\sqrt{\lambda_{n,i}}}{2\pi} \quad \textbf{(4.5.4.2)}$$

Assim, a partir da Equação (4.5.4.2), verifica-se que maximizar a freqüência natural $f_{n,i}$, em Hz, ou a freqüência angular $w_{n,i}$, em rad/s, é o mesmo que maximizar o autovalor $\lambda_{n,i}$.

Um dos grandes inconvenientes da maximização de autovalores é o fato de que estes durante o processo de otimização podem ter seus modos de vibrar invertidos, sendo o problema dinâmico de autovalores não tão bem comportado quanto o problema estático [38]. Pode ser então que em uma dada iteração haja autovalores repetidos e que na iteração seguinte estes venham a ter seus modos correspondentes trocados. É o que ilustra Figura 4.5.4.1.

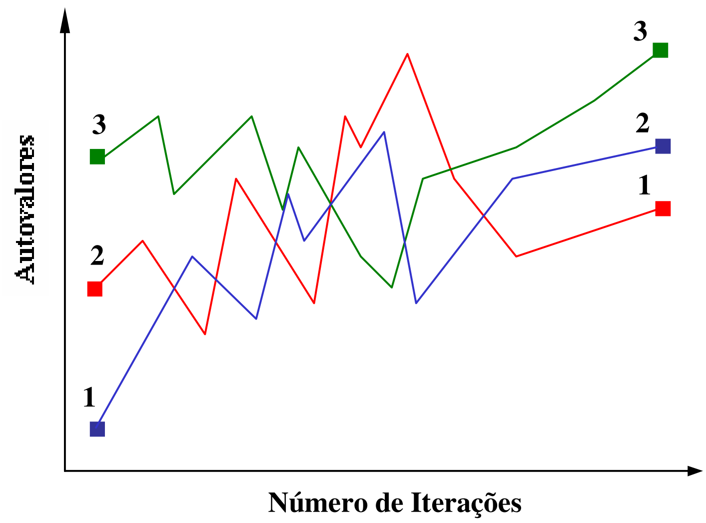


Figura 4.5.4.1 - O problema da inversão dos autovalores no processo de otimização.

Buscando-se contornar o problema da inversão dos autovalores, ao invés de maximizar um único autovalor, uma combinação ponderada de um certo números destes é admitida como função objetivo [38].

Considerando-se a função objetivo proposta, as curvas de convergência de cada autovalor passam a ter o aspecto ilustrado na Figura 4.5.4.2. Os demais autovalores considerados na função ponderada passam também a ser maximizados, de forma que a possibilidade de inversão dos autovalores é eliminada.

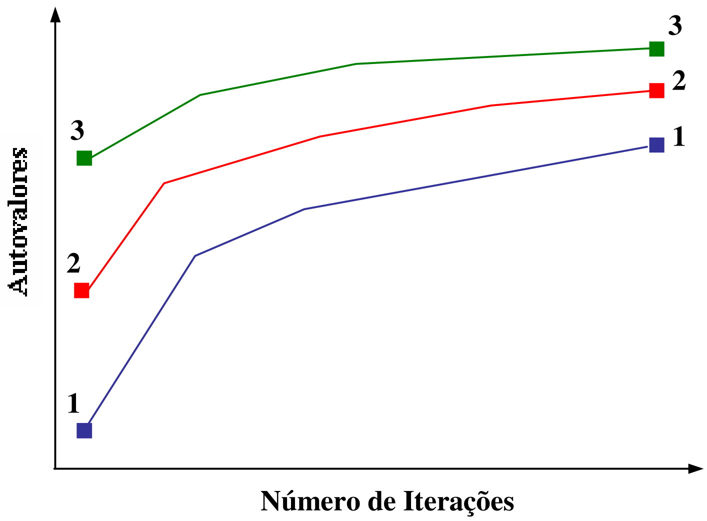


Figura 4.5.4.2 - Eliminação da inversão dos autovalores via uso do autovalor médio ponderado.

Considerando-se a média recíproca ponderada de um certo conjunto de autovalores $\lambda_{n,i}$ correspondentes a N_m modos e atribuindo a cada um deles um peso w_i [38], o problema de otimização envolvendo a maximização de um dos autovalores considerados é estabelecido conforme apresentado a seguir para cada modelo de material.

Modelo ortotrópico com vazios

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \\ a_e,\ b_e,\ \theta_e\ (e=1,2,\ldots,N_{el}) & \Lambda = \left(\sum_{i=1}^{N_m} \frac{w_i}{\lambda_{n,i}} \right)^{-1} \\ \text{Sujeito a} & \sum_{e=1}^{N_{el}} (1-a_e b_e) A_e t - \overline{V} \le 0 \\ & x_{\min} \le a_e, b_e \le 1 \end{array} \qquad \textbf{(4.5.4.3)}$$

Com respeito às sensibilidades, a partir da Equação (4.5.4.3), estas apresentam a seguinte forma [38]:

$$\boxed{\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathrm{a}_e}=\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_m}\frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}}\right)^{-2}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_m}\frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}^{\;2}}\frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{a}_e}\right)} \quad \textbf{(4.5.4.4)}$$

Analogamente, tem-se para as demais variáveis que:

$$\boxed{\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathrm{b}_e}=\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_m}\frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}}\right)^{-2}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_m}\frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}^{\;2}}\frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{b}_e}\right)} \quad \textbf{(4.5.4.5)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_e}=\left(\sum_{i=1}^{N_m}\frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}}\right)^{-2}\left(\sum_{i=1}^{N_m}\frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}^{\;2}}\frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \theta_e}\right)} \quad \textbf{(4.5.4.6)}$$

Nas equações acima ainda é preciso determinar as sensibilidades do autovalor $\lambda_{n,i}$. Antes de fazê-lo, visando a simplificar as referidas sensibilidades, a matriz modal do problema de autovalor dado pela Equação (4.5.4.1), cujas colunas correspondem ao autovetor de cada modo, é normalizada com relação à matriz de massa.

Normalizando a matriz modal, $\mathbf{\Phi}$, do problema original com respeito à matriz de massa, uma nova matriz modal é obtida, $\boldsymbol{\psi}$, cujas propriedades de ortogonalidade passam a ser escritas da seguinte maneira [39]:

$$\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_g \boldsymbol{\psi} = \mathbf{I} \quad \textbf{(4.5.4.7)}$$

$$\boldsymbol{\psi}^t \mathbf{K}_g \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \mathrm{w}_{n,1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{w}_{n,2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{w}_{n,\mathrm{N}_m}^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.5.4.8)}$$

onde, **I** corresponde à matriz identidade.

Assumindo $\boldsymbol{\psi} = \gamma \times \boldsymbol{\Phi}$ (onde, γ é uma constante*)* na Equação (4.5.4.7), obtém-se:

$$\boldsymbol{\psi}^t \mathbf{M}_g \boldsymbol{\psi} = (\gamma\boldsymbol{\Phi})^t \mathbf{M}_g (\gamma\boldsymbol{\Phi}) = \gamma^2 \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{M}_g \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \qquad \textbf{(4.5.4.9)}$$

Da propriedade de ortogonalidade relacionada à matriz de massa, pode-se escrever para o problema modal original representado pela Equação (4.5.4.1) que [39]:

$$\boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{M}_g \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathrm{m}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{m}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{m}_{N_m} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.5.4.10)}$$

onde m_i é denominada de massa generalizada correspondente ao modo *i*.

Combinando as Equações (4.5.4.9) e (4.5.4.10), pode-se escrever que:

$$\gamma^2 \begin{bmatrix} \mathrm{m}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{m}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{m}_{\mathrm{N}_m} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \qquad \textbf{(4.5.4.11)}$$

A partir das Equações (4.5.4.10) e (4.5.4.11) acima, pode-se estabelecer que para cada modo *i* a seguinte relação é valida:

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}_i}} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M}_g \boldsymbol{\Phi}_i}} \qquad \textbf{(4.5.4.12)}$$

Assim, multiplicando-se cada autovetor $\boldsymbol{\Phi}_i$ (coluna i da matriz modal $\boldsymbol{\Phi}$ original) por γ_i, garante-se a propriedade de ortogonalidade da matriz de massa normalizada pela massa, conforme indicado na Equação (4.5.4.7).

Considerando-se então os novos autovetores $\boldsymbol{\psi}_i = \gamma_i \boldsymbol{\Phi}_i$ na Equação (4.5.4.1) e derivando-se seus os membros com relação à variável de projeto a_e, por exemplo, obtém-se:

$$\left(\mathbf{K}_g - \lambda_{n,i}\mathbf{M}_g\right)\boldsymbol{\psi}_i = 0 \qquad \textbf{(4.5.4.13)}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}_g}{\partial \mathrm{a}_e} - \frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{a}_e}\mathbf{M}_g - \lambda_{n,i}\frac{\partial \mathbf{M}_g}{\partial \mathrm{a}_e}\right)\boldsymbol{\psi}_i + \left(\mathbf{K}_g - \lambda_{n,i}\mathbf{M}_g\right)\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \mathrm{a}_e} = 0 \qquad \textbf{(4.5.4.14)}$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (4.5.4.14) por $\boldsymbol{\psi}_i^T$ e tendo em vista a característica simétrica da matriz $\mathbf{K}_g$ -$\lambda_{n,i}\mathbf{M}_g$, tem-se que:

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_g}{\partial \mathrm{a}_e}\boldsymbol{\psi}_i - \frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{a}_e}\boldsymbol{\psi}_i^T\mathbf{M}_g\boldsymbol{\psi}_i - \lambda_{n,i}\boldsymbol{\psi}_i^T\frac{\partial \mathbf{M}_g}{\partial \mathrm{a}_e}\boldsymbol{\psi}_i +$$

$$\left[\left(\mathbf{K}_g - \lambda_{n,i}\mathbf{M}_g\right)\boldsymbol{\psi}_i\right]^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \mathrm{a}_e} = 0 \qquad \textbf{(4.5.4.15)}$$

Considerando-se a Equação (4.5.4.13) e tomando a propriedade de ortogonalidade apresentada na Equação (4.5.4.7) para uma coluna da matriz modal (modo $\boldsymbol{\psi}_i$), a Equação (4.5.4.15) passa a:

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_g}{\partial \mathrm{a}_e}\boldsymbol{\psi}_i - \frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{a}_e} - \lambda_{n,i}\boldsymbol{\psi}_i^T\frac{\partial \mathbf{M}_g}{\partial \mathrm{a}_e}\boldsymbol{\psi}_i = 0 \qquad \textbf{(4.5.4.16)}$$

Considerando-se a formulação de elementos finitos e a matriz de massa consistente [49], a Equação (4.5.4.16) é reescrita da seguinte maneira para um dado elemento *e*:

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\psi}_{i,e}^T\mathbf{B}_e^T\frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \mathrm{a}_e}\mathbf{B}_e\boldsymbol{\psi}_{i,e}\,d\Omega^e - \frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{a}_e} - \lambda_{n,i}\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\psi}_{i,e}^T\mathbf{N}_e^T\begin{bmatrix}\frac{\partial \rho_e}{\partial \mathrm{a}_e} & 0\\ 0 & \frac{\partial \rho_e}{\partial \mathrm{a}_e}\end{bmatrix}\mathbf{N}_e\boldsymbol{\psi}_{i,e}d\Omega^e = 0$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}_e\boldsymbol{\psi}_{i,e}\right)^T\frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \mathrm{a}_e}\left(\mathbf{B}_e\boldsymbol{\psi}_{i,e}\right)d\Omega^e - \frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{a}_e} - \lambda_{n,i}\frac{\partial \rho_e}{\partial \mathrm{a}_e}\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{N}_e\boldsymbol{\psi}_{i,e}\right)^T\left(\mathbf{N}_e\boldsymbol{\psi}_{i,e}\right)d\Omega^e = 0 \qquad \textbf{(4.5.4.17)}$$

onde, $\boldsymbol{\psi}_{i,e}$ corresponde ao vetor dos deslocamentos do elemento *e* presentes em $\boldsymbol{\psi}_i$.

Logo, considerando-se a Equação (4.3.4), tem-se que:

$$\frac{\partial\lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{a}_e} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e})^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \mathrm{a}_e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}) d\Omega^e + \lambda_{n,i} \rho_0 \mathrm{b}_e \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e})^T (\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}) d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.4.18)}$$

De forma análoga,

$$\frac{\partial\lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{b}_e} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e})^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \mathrm{b}_e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}) d\Omega^e + \lambda_{n,i} \rho_0 \mathrm{a}_e \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e})^T (\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}) d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.4.19)}$$

$$\frac{\partial\lambda_{n,i}}{\partial \theta_e} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e})^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \theta_e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}) d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.4.20)}$$

Ressalta-se que a matriz de massa independe da variável orientação da célula-base.

Modelo isotrópico com penalidade

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \Lambda = \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_m} \frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}} \right)^{-1} \\ \mathrm{x}_e \ (e = 1,2,\ldots,\mathrm{N}_{el}) & \\ \text{Sujeito a} & \sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}} \mathrm{x_e A_e t} - \overline{\mathrm{V}} \le 0 \\ & \mathrm{x}_{\min} \le \mathrm{x}_e \le 1 \end{array}} \qquad \textbf{(4.5.4.21)}$$

Aplicando-se o mesmo desenvolvimento feito para o modelo ortotrópico, obtém-se para a sensibilidade da função objetivo a seguinte expressão:

$$\boxed{\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathrm{x}_e} = \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_m} \frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}} \right)^{-2} \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}_m} \frac{\mathrm{w}_i}{\lambda_{n,i}^{\ 2}} \frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{x}_e} \right)} \qquad \textbf{(4.5.4.22)}$$

onde,

$$\frac{\partial\lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{x}_e} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e})^T \frac{\partial (x_e^{\mathrm{p}} \mathbf{D}^H)}{\partial \mathrm{x}_e} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}) d\Omega^e - \lambda_{n,i} \frac{\partial \rho_e}{\partial \mathrm{x}_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e})^T (\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}) d\Omega^e \,, \qquad \textbf{(4.5.4.23)}$$

a qual, considerando-se a Equação (4.3.3), passa a ser escrita como:

$$\frac{\partial \lambda_{n,i}}{\partial \mathrm{x}_e} = \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}\right)^T \left(p\mathrm{x}_e^{p-1}\mathbf{D}^H\right)\left(\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}\right) d\Omega^e - \lambda_{n,i}\rho_0 \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}\right)^T \left(\mathbf{N}_e \boldsymbol{\psi}_{i,e}\right) d\Omega^e \qquad \textbf{(4.5.4.24)}$$

4.6 Critérios de Otimalidade

As condições (critérios) de otimalidade são também conhecidas por condições de Karush-Kuhn-Tucker, ou simplesmente condições KKT [5]. São condições necessárias, porém não suficientes, para se garantir a otimalidade global da solução do problema de otimização restrito [25] [57].

Seja considerado o problema de otimização a seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & F(\mathbf{X}) & \\ \mathbf{X} = \{\mathrm{X}_e\},\ e = 1,2,...,n & & \\ \text{Sujeito a} & g_j(\mathbf{X}) \le 0 & j = 1,2,...,m \\ & \mathrm{X}_e^{\inf} \le \mathrm{X}_e \le \mathrm{X}_e^{\sup} & e = 1,2,...,n \end{array} \qquad \textbf{(4.6.1)}$$

Para o problema definido na Equação (4.6.1) acima, constituem as **condições ou critérios de otimalidade** para o ponto ótimo, $\mathbf{X}^*$, as seguintes expressões [57]:

$$\nabla F(\mathbf{X}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{X}^*) - \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\inf} + \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\sup} = 0 \qquad \textbf{(4.6.2)}$$

$$\lambda_j, \lambda_e^{\inf}, \lambda_e^{\sup} \ge 0 \qquad \textbf{(4.6.3)}$$

$$\lambda_j g_j(\mathbf{X}^*) = 0 \qquad \textbf{(4.6.4)}$$

$$\lambda_e^{\inf}(\mathbf{X}_e^{\inf} - \mathbf{X}_e^*) = 0 \qquad \textbf{(4.6.5)}$$

$$\lambda_e^{\sup}(\mathbf{X}_e^* - \mathbf{X}_e^{\sup}) = 0 \qquad \textbf{(4.6.6)}$$

O primeiro membro da Equação (4.6.2) corresponde ao gradiente da função Lagrangiana (ou simplesmente Lagrangiano), L, do problema de otimização, avaliada no ponto ótimo. O Lagrangiano para o problema definido pela Equação (4.6.1) é expresso por:

$$L(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{X}) + \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\text{inf}} (\text{X}_e^{\text{inf}} - \text{X}_e) + \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\text{sup}} (\text{X}_e - \text{X}_e^{\text{sup}}) \qquad \textbf{(4.6.7)}$$

A Equação (4.6.2) estabelece a condição de estacionaridade do Lagrangiano, L, do problema de otimização: seu gradiente deve ser nulo. As Equações (4.6.4) a (4.6.6) são conhecidas por folgas complementares. As constantes λ_j, λ_e^{inf} e λ_e^{sup} constituem os chamados multiplicadores de Lagrange, associados às restrições de desigualdade e laterais, respectivamente. Estes, ao final da solução, indicam quais restrições são relevantes (apresentam $\lambda \neq 0$) e quais não têm influência (apresentam $\lambda = 0$) na solução ótima do problema de otimização.

Vale ressaltar que caso as funções $g_i(\mathbf{X})$ sejam definidas na forma $g_i(\mathbf{X}) \geq 0$, ou seja, $-g_i(\mathbf{X}) \leq 0$, ou o objetivo seja maximizar, o que corresponde a minimizar $-F(\mathbf{X})$, a Equação (4.6.7) do Lagrangiano e, conseqüentemente, as equações de otimalidade sofrem pequenas mudanças. No primeiro caso, é trocado o sinal das parcelas contendo as restrições $g_i(\mathbf{X})$. Na segunda situação, um sinal de menos deve preceder as parcelas envolvendo $F(\mathbf{X})$.

O segundo caso corresponde exatamente à situação dos problemas considerados no trabalho, onde se deseja maximizar F. Desta forma, o Lagrangiano passa ser escrito como:

$$L(\mathbf{X}) = -F(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{X}) + \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\text{inf}} (\text{x}_{\text{min}} - \text{X}_e) + \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\text{sup}} (\text{X}_e - 1) \qquad \textbf{(4.6.8)}$$

Com base nas Equações (4.6.3) a (4.6.6) e (4.6.8), as condições de otimalidade para os problemas de otimização tratados na Seção 4.5 anterior são expressas da seguinte forma:

$$-\nabla F + \lambda \nabla g - \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\text{inf}} + \sum_{e=1}^{n} \lambda_e^{\text{sup}} = 0 \qquad \textbf{(4.6.9)}$$

$$\lambda, \lambda_e^{\text{inf}}, \lambda_e^{\text{sup}} \geq 0 \qquad \textbf{(4.6.10)}$$

$$\lambda g = 0 \tag{4.6.11}$$

$$\lambda_e^{\inf}(x_{min} - X_e^*) = 0 \tag{4.6.12}$$

$$\lambda_e^{\sup}(X_e^* - 1) = 0 \tag{4.6.13}$$

correspondendo os gradientes de F e g aos vetores contendo às sensibilidades destes com relação às variáveis de projeto, X_e. (vide Seções 4.4 e 4.5).

4.7 Otimizador Baseado nas Condições de Otimalidade

Nesta seção são apresentados os otimizadores utilizados no presente trabalho, os quais se baseiam nas condições de otimalidade discutidas na Seção 4.6. Inicialmente é feito um breve comentário acerca das técnicas de otimização mais comumente empregadas.

Com relação aos otimizadores utilizados na OT baseada no método da homogeneização, destacam-se: os métodos de programação matemática e os métodos baseados nos critérios de otimalidade (CO) [30]. Tais técnicas, contudo, ao tratarem de problemas de OT tiveram como grande desafio lidar com uma enorme quantidade de variáveis de projeto e com um moderado número de restrições [12].

A grande maioria dos problemas de projeto estrutural apresentam a função objetivo e/ou as restrições como funções não-lineares das variáveis de projeto [25]. E dentre os procedimentos existentes usados na solução desta classe de problemas, chamada de programação não-linear (PNL), destacam-se: a Programação Linear Seqüencial (PLS) e o Método das Assíntotas Móveis (MAM), este surgido a partir do CONLIN [12]. A PLS resolve, repetidamente, o problema de PNL como uma seqüência de subproblemas aproximados de programação linear (PL), os quais convergem para a solução do problema original de PNL [25]. Os subproblemas de PL são obtidos a partir da expansão em série de Taylor do problema original, apresentando pseudofunção objetivo e pseudo-restrições ambas lineares e sendo resolvidos pelo Método Simplex. No MAM, tais subproblemas são separáveis e convexos [12]. A primeira característica significa que nas equações de otimalidade dos sub-problemas as variáveis de projeto não se encontram acopladas, tornando-se viável e atrativa a aplicação de métodos duais; a convexidade dos sub-problemas, por sua vez, implica a existência de um único valor extremo, o qual é global [57]. Juntas, tais características reduzem consideravelmente o esforço computacional necessário para resolver os subproblemas lineares, especialmente no caso de problemas com um número reduzido de restrições [12].

Enquanto que os métodos de programação matemática são largamente empregados também em outras áreas da engenharia e ciências, os métodos CO, estreitamente relacionados com o método intuitivo baseado no critério de saturação das tensões (*fully stressed design*) [55], têm sido usados especialmente em problemas de otimização estrutural [25]. O método CO tradicional consiste em duas etapas. A primeira delas é o estabelecimento de equações matemáticas que definem as condições necessárias da solução ótima. O segundo passo, por sua vez heurístico, corresponde ao redimensionamento da estrutura (atualização das variáveis de projeto) a fim de que os critérios de otimalidade preestabelecidos seja satisfeitos [25]. A evolução do método CO tradicional, com o surgimento de várias variantes, pode ser encontrada em [64].

Os métodos CO possuem uma relação estreita com os métodos duais (utilizados quando da convexidade do problema, assumindo os multiplicadores de Lagrange como variáveis de projeto), o que faz com que os mesmos sejam eficientes quando o número de restrições é pequeno comparado ao número de variáveis de projeto [12]. Em geral, quando o problema apresenta apenas uma restrição, além de possíveis restrições laterais, há pouca dúvida de que os métodos OC constituem a melhor abordagem de solução para problemas estruturais [25]. Um outro destaque da eficiência dos métodos CO está no fato de que a atualização de uma dada variável de projeto é feita independente da atualização das demais; exceto apenas quando o redimensionamento ocorre para satisfazer a restrição de volume [12].

Seu grande inconveniente é o fato de que o esquema de atualização das variáveis de projeto precisa ser modificado de uma abordagem do problema para uma outra, o que não costuma ser tarefa fácil. Neste sentido os métodos de programação matemática são mais gerais e preferidos na obtenção direta do resultado ótimo. Tipicamente, estes implicam maior custo computacional [34], contudo a escolha do algoritmo adequado pode deixar tal abordagem tão eficiente quanto os métodos CO [12].

Outras técnicas de projeto ótimo podem ser aplicadas a OT baseada na homogeneização, como o *Método do Lagrangiano Aumentado* [47] e a própria *Abordagem Dual* [41].

A seguir são definidos os otimizadores CO utilizados no trabalho, de acordo com o modelo de material e com o tipo de problema (estático ou dinâmico). O método CO tradicional é escolhido em virtude dos problemas de otimização estudados apresentarem uma única restrição e pelo fato de já existirem para os mesmos esquemas heurísticos bem definidos. Inicialmente é apresentado o otimizador utilizado no **caso estático**, sendo em seguida apresentado aquele empregado no caso dinâmico, que por sua vez, fundamenta-se no primeiro. A atualização da variável X_e genérica é considerada.

A primeira etapa do método CO clássico é então definir as condições de otimalidade para o problema. Estas correspondem exatamente às Equações (4.6.9) a (4.6.13). A partir da Equação (4.6.9), referente à condição de estacionaridade do Lagrangiano, a seguinte expressão é escrita com respeito à variável X_e:

$$-\frac{\partial F}{\partial X_e}+\lambda\frac{\partial g}{\partial X_e}-\lambda_e^{\inf}+\lambda_e^{\sup}=0 \qquad \textbf{(4.7.1)}$$

Dividindo-se ambos os membros da Equação (4.7.1) acima por $-\lambda(\partial g/\partial X_e)$, obtém-se:

$$\frac{\partial F}{\partial X_e}\Big/\left(\lambda\frac{\partial g}{\partial X_e}\right)-1+\lambda_e^{\inf}\Big/\left(\lambda\frac{\partial g}{\partial X_e}\right)-\lambda_e^{\sup}\Big/\left(\lambda\frac{\partial g}{\partial X_e}\right)=0 \qquad \textbf{(4.7.2)}$$

Denominando

$$E_{X_e}=\frac{\partial F}{\partial X_e}\Big/\left(\lambda\frac{\partial g}{\partial X_e}\right), \qquad \textbf{(4.7.3)}$$

tem-se, a partir da Equação (4.7.2), que

$$E_{X_e} = 1 - \lambda_e^{\inf} / \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial X_e} \right) + \lambda_e^{\sup} / \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial X_e} \right) \qquad \textbf{(4.7.4)}$$

Supondo que em uma dada iteração do processo de otimização apenas a restrição de volume esteja ativa, tem-se que, pelas condições de folga complementar, $\lambda > 0$ e $\lambda_e^{inf} = \lambda_e^{sup} = 0$, reduzindo-se a Equação (4.7.4) à seguinte forma:

$$E_{X_e} = 1 \qquad \textbf{(4.7.5)}$$

Pode-se afirmar então que na solução ótima do problema de otimização, as variáveis intermediárias de projeto ($X_{min} < X_e < 1$) satisfazem a Equação (4.7.5). O parâmetro E_{X_e} é um indicador da densidade de energia de deformação [12].

Com base no parâmetro E_{X_e} é que foram desenvolvidos os algoritmos heurísticos apresentados a seguir para cada modelo de material. Estes consistem em variações do algoritmo desenvolvido em [11]. A segunda e última etapa do método OC clássico é então definida.

Modelo isotrópico com penalidade

O algoritmo empregado por Sigmund em [53] é utilizado para atualizar a variável de projeto $X_e = x_e$:

$$x_e^{i+1} = \begin{cases} \min\left(1, x_e^i + \zeta\right) & \text{, se} \quad x_e^i \cdot \left(E_{X_e}^i\right)^{\eta} \geq \min\left(1, x_e^i + \zeta\right) \\ x_e^i \cdot \left(E_{X_e}^i\right)^{\eta} & \text{, se} \quad \max\left(x_{\min}, x_e^i - \zeta\right) < x_e^i \cdot \left(E_{X_e}^i\right)^{\eta} < \min\left(1, x_e^i + \zeta\right) \\ \max\left(x_{\min}, x_e^i - \zeta\right) & \text{, se} \quad x_e^i \cdot \left(E_{X_e}^i\right)^{\eta} \leq \max\left(x_{\min}, x_e^i - \zeta\right) \end{cases} \qquad \textbf{(4.7.6)}$$

No algoritmo acima, η corresponde ao parâmetro de amortecimento (geralmente 2) e ζ corresponde ao limite móvel (geralmente variando de 0,001 a 0,2). Tais parâmetros constituem variáveis de controle do algoritmo, as quais podem ser ajustadas no sentido de conferir maior rapidez e/ou estabilidade ao otimizador.

Modelo ortotrópico com vazios

Com relação ao modelo de material ortotrópico, o algoritmo empregado na atualização das variáveis de projeto a_e e b_e corresponde àquele proposto por Hassani e Hinton [29]:

$$a_e^{i+1} = \begin{cases} \min\left[\left(1+\dfrac{\zeta}{\left|a_e^i-\zeta\right|}\right)\cdot a_e^i, 1\right] & \text{, se} \quad a_e^i\cdot\left(E_{a_e}^i\right)\leq \max\left(\left(1-\zeta\right)\cdot a_e^i, x_{\min}\right) \\ a_e^i\cdot\left(E_{a_e}^i\right)^{\frac{1}{a_e^i}} & \text{, se} \quad \max\left(\left(1-\zeta\right)\cdot a_e^i, x_{\min}\right) < a_e^i\cdot\left(E_{a_e}^i\right) < \min\left(\left(1+\zeta\right)\cdot a_e^i, 1\right) \\ \max\left[\left(1-\dfrac{\zeta}{\left|a_e^i-\zeta\right|}\right)\cdot a_e^i, x_{\min}\right] & \text{, se} \quad a_e^i\cdot\left(E_{a_e}^i\right)\geq \min\left(\left(1+\zeta\right)\cdot a_e^i, 1\right) \end{cases} \qquad \textbf{(4.7.7)}$$

De maneira análoga é feita a atualização da variável de projeto b_e.

Para o **caso dinâmico**, onde o parâmetro E_{X_e} pode assumir valores negativos, é adotada no trabalho a sugestão de Bendsøe e Sigmund [12], proposta no sentido de evitar tal possibilidade. Os referidos autores sugerem que o parâmetro E_{X_e}, presente nos algoritmos acima, seja calculado da seguinte maneira:

$$E_{X_e} = \max\left(-\frac{\partial F}{\partial X_e}, 0\right) / \left(\lambda\frac{\partial g}{\partial X_e}\right), \qquad \textbf{(4.7.8)}$$

Com relação à variável orientação, θ_e, no **caso estático de uma única condição de carregamento**, esta é atualizada conforme a *orientação da máxima tensão principal*, σ_1 [55].

Para os **demais casos (múltiplas cargas e múltiplos autovalores)**, a orientação é atualizada conforme a *condição de estacionaridade do Lagrangiano*, de acordo com o procedimento desenvolvido em [17] para o problema de (múltiplos) autovalores. O mesmo é apresentado a seguir para o **caso estático de múltiplas cargas**.

Desconsiderando as restrições laterais, as quais são levadas em consideração no interior do algoritmo heurístico de atualização das variáveis de projeto, e tomando a Equação (4.6.9), esta com relação à variável orientação se reduz a:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_e} = 0 \tag{4.7.9}$$

Considerando-se a Equação (4.5.2.4) e a Equação (4.7.9), a condição de estacionaridade acima é escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \theta_e} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,j}\, d\Omega^e = 0 \tag{4.7.10}$$

Uma vez que $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{C}^H \boldsymbol{\sigma}_e$, onde $\mathbf{C}^H$ corresponde à matriz de flexibilidade homogeneizada, $\mathbf{C}^H = (\mathbf{D}^H)^{-1}$, a Equação (4.7.10) pode ser reescrita da seguinte forma, explicitando o campo de tensão:

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathrm{w}_j \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_{e,j}^T \frac{\partial \mathbf{C}^H}{\partial \theta_e} \boldsymbol{\sigma}_{e,j}\, d\Omega^e = 0 \tag{4.7.11}$$

A matriz de flexibilidade $\mathbf{C}^H$ pose ser escrita como função da orientação θ_e, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^H = {} & \mathbf{C}^0 + \mathbf{C}^1 \operatorname{sen}(2\theta_e) + \mathbf{C}^2 \cos(2\theta_e) + \mathbf{C}^3 \operatorname{sen}(2\theta_e)\cos(2\theta_e) + \\ & - \mathbf{C}^4 \operatorname{sen}^2(2\theta_e)\,, \end{aligned} \tag{4.7.12}$$

onde

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} \left(\mathrm{C}_{11}^h + \mathrm{C}_{22}^h\right)/2 & \mathrm{C}_{12}^h & 0 \\ \mathrm{C}_{12}^h & \left(\mathrm{C}_{11}^h + \mathrm{C}_{22}^h\right)/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C}_{66}^h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^1 = \mathrm{c}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^2 = \mathrm{c}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^3 = 2\mathrm{c}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^4 = \mathrm{c}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{c}_1 = \left(\mathrm{C}_{11}^h - \mathrm{C}_{22}^h\right)/2, \quad \mathrm{c}_2 = \left(\mathrm{C}_{11}^h + \mathrm{C}_{22}^h - 2\mathrm{C}_{12}^h - \mathrm{C}_{66}^h\right)/4,$$

e $\mathbf{C}^h$ corresponde à matriz de flexibilidade homogeneizada original, função apenas das dimensões do vazio da célula-base.

A partir da Equação (4.7.12), a derivada da matriz $\mathbf{C}^H$ com relação à orientação é expressa da seguinte maneira, lembrando que 2sen(θ)cos(θ) = sen(2θ) e $\cos^2(\theta)$- $\mathrm{sen}^2(\theta)$ = cos(2θ):

$$\frac{\partial \mathbf{C}^H}{\partial \theta_e} = 2 \cdot \left[\mathbf{C}^1 \cos(2\theta_e) - \mathbf{C}^2 \,\mathrm{sen}(2\theta_e) + \mathbf{C}^3 \cos(4\theta_e) - \mathbf{C}^4 \,\mathrm{sen}(4\theta_e)\right] \qquad \textbf{(4.7.13)}$$

E reescrevendo a Equação (4.7.11) com base na Equação (4.7.13) acima, tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_e} = 2 \cdot \left[g_e^1 \cos(2\theta_e) - g_e^2 \,\mathrm{sen}(2\theta_e) + g_e^3 \cos(4\theta_e) - g_e^4 \,\mathrm{sen}(4\theta_e)\right], \qquad \textbf{(4.7.14)}$$

onde

$$g_e^k = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}_c} \mathbf{w}_j \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_{e,j}^T \mathbf{C}^k \boldsymbol{\sigma}_{e,j} \, d\Omega^e, \quad k = 1,2,3,4 \qquad \textbf{(4.7.15)}$$

Assim, a partir da equação (4.7.15), a condição de estacionaridade do Lagrangiano do problema é dada por:

$$g_e^1 \cos(2\theta_e) - g_e^2 \,\mathrm{sen}(2\theta_e) + g_e^3 \cos(4\theta_e) - g_e^4 \,\mathrm{sen}(4\theta_e) = 0 \qquad \textbf{(4.7.16)}$$

Assumindo $z = \mathrm{tg}(\theta_e)$ e substituindo tal relação na Equação (4.7.16), obtém-se:

$$f_4 z^4 + f_3 z^3 + f_2 z^2 + f_1 z + f_0 = 0, \qquad \textbf{(4.7.17)}$$

onde

$$f_4 = -g_e^1 + g_e^3; \quad f_3 = -2g_e^2 + 4g_e^4; \quad f_2 = -6g_e^3; \quad f_1 = -2g_e^2 - 4g_e^4; \quad f_0 = g_e^1 + g_e^3.$$

Obtidos os valores de θ_e a partir de z e da Equação (4.7.17), os mesmos são checados a partir da função abaixo, onde os valores $-\pi/2$ e $+\pi/2$ são também testados:

$$\chi_e(\theta_e) = g_e^1 \,\mathrm{sen}(2\theta_e) + g_e^2 \cos(2\theta_e) + g_e^3 \,\mathrm{sen}(2\theta_e)\cos(2\theta_e) - g_e^4 \,\mathrm{sen}^2(2\theta_e) \qquad \textbf{(4.7.18)}$$

A orientação ótima será aquela que fornecer o maior valor para a função teste acima, no caso de maximização da função objetivo, ou o menor valor, no caso de minimização desta.

Para o **caso de múltiplos autovalores**, basta considerar no desenvolvimento acima,

$$g_e^k = \left(\sum_{i=1}^{N_m} \frac{W_i}{\lambda_i} \right)^{-2} \left(\sum_{i=1}^{N_m} \frac{W_i}{\lambda_i^2} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_{e,j}^T \mathbf{C}^k \boldsymbol{\sigma}_{e,j} \, d\Omega^e \right), \; k = 1,2,3,4 \qquad \textbf{(4.7.19)}$$

4.8 Determinação do Multiplicador de Lagrange da Restrição de Volume

Uma vez que para se determinar E_{X_e} o multiplicador de Lagrange da restrição de volume, λ, deve ser conhecido, este último precisa ser previamente determinado.

Tal multiplicador é determinado considerando-se primeiro que a restrição de volume se encontra sempre ativa durante o processo de otimização, conforme assumido quando do desenvolvimento dos esquemas heurísticos. A quantidade máxima de material disponível é sempre utilizada em cada iteração. O fato de que a relação entre o volume e o referido multiplicador de Lagrange se dá de forma decrescente e monotônica [11], conforme ilustra a Figura 4.8.1, é também considerado.

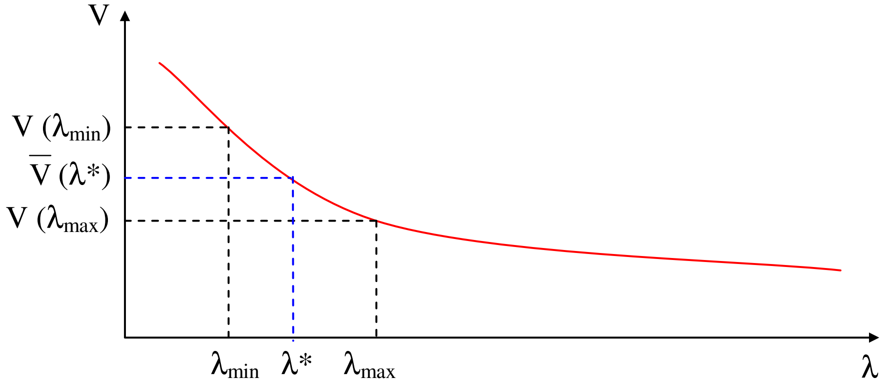


Figura 4.8.1 - Relação entre o volume e o multiplicador de Lagrange.

De acordo com a Figura 4.8.1, o multiplicador de Lagrange da restrição de volume pode ser obtido através do método da bisseção.

De posse do multiplicador de Lagrange, o parâmetro E_{X_e} é definido e as variáveis de projeto são atualizadas. O volume da estrutura é então calculado, repetindo-se o processo mencionado até que a restrição de volume seja igual ao limite superior da restrição de volume dentro de uma certa tolerância preestabelecida. O seguinte algoritmo pode ser definido a partir da Figura 4.8.1:

(1) Encontram-se λ_{min} e λ_{max}, testando-se valores para tais grandezas, até que sejam verificadas as seguintes relações:

$V(\lambda_{min}) > V(\lambda^*)$ e $V(\lambda_{max}) < V(\lambda^*)$.

(2) Calcula-se:

$\lambda_m = 0{,}5 \times (\lambda_{min} + \lambda_{max})$.

(3) Atualizam-se as variáveis de projeto conforme o respectivo algoritmo heurístico, determina-se $V(\lambda_m)$ e compara-se:

$V(\lambda_m) > V(\lambda^*)$, então $\lambda_{min} = \lambda_m$;

$V(\lambda_m) < V(\lambda^*)$, então $\lambda_{max} = \lambda_m$.

(4) E repetem-se os passos (2) e (3) até que $|V(\lambda_m) - V(\lambda^*)| < \delta_v$, onde δ_v corresponde à tolerância da restrição de volume (geralmente variando de 0,01 a 0,001).

4.9 Critérios de Convergência da Solução

Três critérios de convergência da solução do problema de otimização são estabelecidos, assumindo-se que a convergência ocorrerá quando pelo menos um deles for satisfeito. Abaixo são apresentados os critérios:

- O número de iterações não deve ser maior do que um valor preestabelecido;
- Dadas três iterações sucessivas, a diferença, em módulo, dos módulos do valor da função objetivo em duas delas, dividida pelo módulo do valor da função objetivo na iteração inicial, deve ser menor ou igual a uma tolerância de parada especificada, t_p:

$$\frac{\left\| F^{i+1} \right| - \left| F^{i} \right\|}{\left| F^{1} \right|} \leq t_p \; ; \tag{4.9.1}$$

- A função objetivo não deve diminuir ao longo de três iterações sucessivas.

4.10 Eliminação das Instabilidades Numéricas

À medida que o tema de OT foi sendo aprofundado, problemas numéricos inerentes a tal técnica vieram à tona e metodologias para contorná-los foram sendo propostas. São três os problemas numéricos que mais comumente aparecem na OT: o aspecto de tabuleiro, a dependência da malha e os mínimos locais [54]. A seguir os mesmos são brevemente comentados.

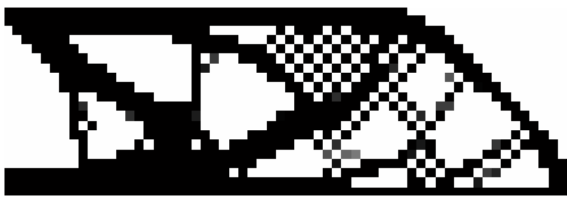


Figura 4.10.1 - Aspecto de tabuleiro de xadrez presente na topologia ótima.

O **aspecto de tabuleiro de xadrez** se caracteriza pela formação na topologia ótima de regiões contendo vazios e elementos sólidos que se alternam de forma semelhante a um tabuleiro de xadrez, conforme ilustra a Figura 4.10.1 anterior.

A explicação mais direta para o aparecimento de tal configuração de densidades está no fato de que a mesma apresenta, artificialmente, uma rigidez mais alta quando considerado o problema discretizado [12].

As regiões com aspecto de tabuleiro não constituem microestruturas ótimas, como pensado inicialmente, e as mesmas aparecem na topologia ótima em virtude da modelagem numérica inadequada da rigidez de tais regiões [32]. Inspirando-se na condição de Babuska-Brezzi (B-B), que estabelece um critério para que a discretização via MEF propicie um esquema numérico estável, a primeira tentativa de evitar a instabilidade de tabuleiro foi o uso de elementos de alta ordem (de 8 e 9 nós) [12]. Tal abordagem, em problemas onde a densidade é uniforme ao longo do elemento finito, faz com que a dimensão do campo de deslocamentos se aproxime daquela do campo de densidades (que corresponde à dimensão do domínio do elemento), garantindo a estabilidade numérica [54]: ao invés de apenas 4 (quatro), são considerados 8 nós distribuídos ao longo do domínio do elemento caracterizando o campo de deslocamentos. Por exemplo, o aspecto de tabuleiro pode ser evitado através do uso da implementação Q8/U (elementos quadrilaterais de oito nós com campo de deslocamento bi-quadrático, sendo a variável de projeto uniforme ao longo do mesmo).

No sentido de se trabalhar com a formulação dos campos de deslocamento e de densidade envolvidos no problema de distribuição ótima de material, vários trabalhos têm surgido, propondo a melhor abordagem destes dois campos que resulte em um esquema estável, eliminando a presença do aspecto de tabuleiro [32][48].

Dentre as técnicas de eliminação da instabilidade de tabuleiro, destacam-se, além do uso de elementos de alta ordem, as técnicas de processamento de imagem [37], o uso do filtro da densidade [12], a introdução de “superelementos” para as funções densidade e deslocamento [12], técnicas baseadas no processo de difusão [58], algoritmo de redistribuição da densidade [63] e o uso do conceito de força gravitacional [21]. São técnicas mais baratas computacionalmente. Diferentemente das demais, as quais indiretamente garantem a equiparação dos campos de densidade e deslocamento, as técnicas de processamento de imagem não abordam a causa do problema do aspecto de tabuleiro, e sim a conseqüência deste. Estas devem ser evitadas [54].

Com relação ao problema numérico da **dependência da malha** (vide Figura 4.10.2), onde para diferentes graus de discretização desta diferentes topologias ótimas são obtidas, vários métodos também têm sido propostos no sentido de contorná-lo. Dentre eles, destacam-se os métodos de restrição do problema de otimização, os quais, à semelhança da abordagem de relaxamento, garantem a existência da solução do problema 0-1 de distribuição de material [54]. Neste sentido, as seguintes técnicas são citadas: controle do perímetro (restrição do perímetro dos vazios formados na topologia) [24], restrição aos gradientes global e local da densidade [12], assim como o método da restrição ao gradiente local da densidade modificado [66].

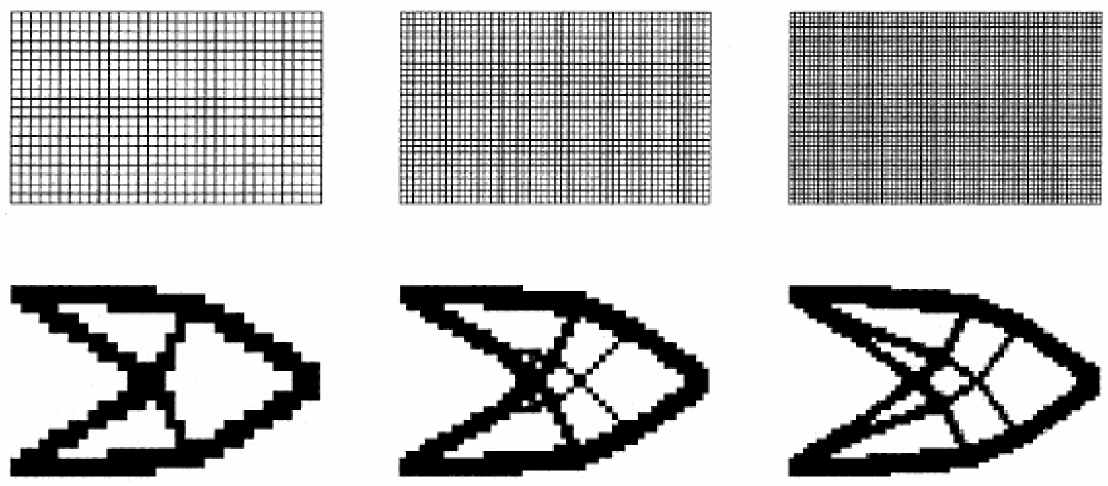


Figura 4.10.2 - Diferentes topologias obtidas a partir de diferentes densidades da malha.

Um outro método de destaque, de filosofia diferente e por sua vez heurístico, é a técnica de filtragem das sensibilidades ou filtro independente da malha, baseada no processamento de imagem [12][54]. Tanto este método quanto aqueles baseados na restrição do problema de otimização indiretamente eliminam o aspecto de tabuleiro [54].

A existência de *vários* **mínimos locais**, por sua vez, está associada ao problema de se obter, para uma mesma densidade da malha, diferentes soluções a partir da escolha de diferentes parâmetros do algoritmo de otimização, como, por exemplo, os valores inicias de densidade atribuídos a cada elemento da malha [54]. A Figura 4.10.3 ilustra este caso.

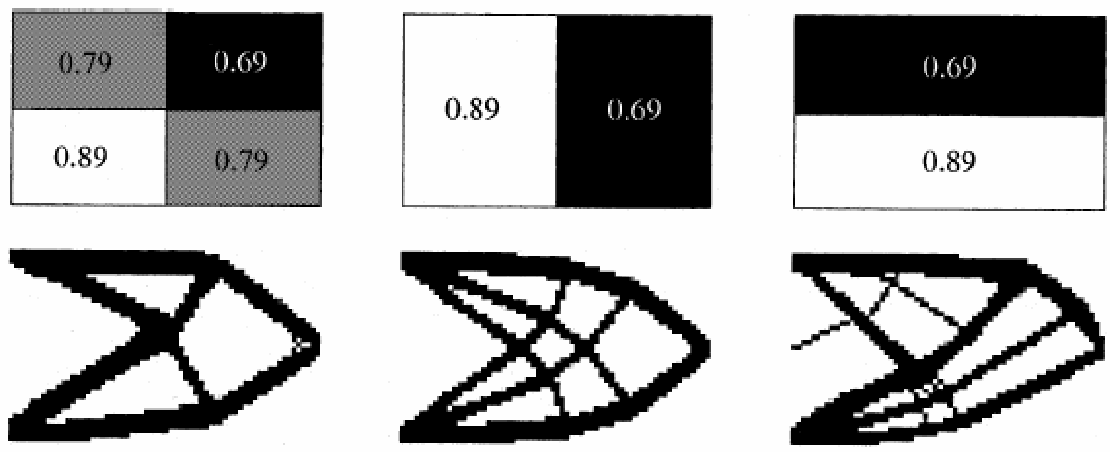


Figura 4.10.3 - Diferentes topologias obtidas a partir de diferentes densidades iniciais.

Dentre as técnicas existentes visando a contornar tal instabilidade numérica, destacam-se os métodos de continuação, cuja idéia básica é gradualmente abordar o problema não-convexo original, partindo-se de um problema convexo artificial [54]. Os seguintes procedimentos podem ser citados: a penalidade gradual das densidades intermediárias [1] e o aumento gradual do expoente empírico [12] [30].

Maiores detalhes acerca do tema, assim como de outras técnicas de eliminação de instabilidades numéricas relacionadas com a OT, podem ser encontrados em [12], [34] e [54].

A seguir são apresentadas as respectivas técnicas empregadas no trabalho para contornar os problemas numéricos da otimização topológica, para cada modelo de material.

Modelo ortotrópico com vazios

Com relação ao modelo ortotrópico, a eliminação da instabilidade de tabuleiro é feita mediante o uso da implementação Q8/U, ilustrada na Figura 4.10.4 a seguir.

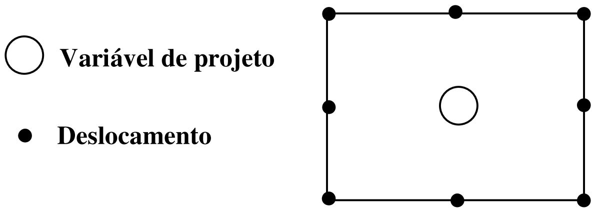


Figura 4.10.4 - Interpolação dos campos densidade e deslocamento do tipo Q8/U.

Conforme já comentado, o objetivo é aumentar suficientemente o número de nós que definem o campo de deslocamentos de forma que o espaço dimensional deste seja comparável àquele estabelecido para o campo de densidades, por sua vez maior e correspondendo ao domínio do elemento.

Ainda que tal técnica implique a presença de várias densidades intermediárias (pois não há penalidade direta destas), além de um maior custo computacional, no presente trabalho optou-se por tal abordagem com o intuito de identificar na topologia ótima as regiões em que um material poroso de vazios orientados possa vir a ser empregado.

Com relação à dependência da malha, o uso do modelo de material ortotrópico é pouco sensível à discretização da malha conforme já apontado nos trabalhos iniciais sobre a OT baseada no método da homogeneização [8][55]. E no que se refere aos mínimos locais, problemas testes com diferentes parâmetros de inicialização do algoritmo de otimização têm sugerido que o problema relaxado via uso de microestrutura ortotrópica admite apenas solução global, ainda que o mesmo seja quase-convexo [1][14].

Modelo de material isotrópico

Com respeito ao modelo isotrópico com penalidade, visando a solucionar o problema da dependência da malha e ao mesmo tempo procurando eliminar a instabilidade de tabuleiro, no trabalho é empregado o filtro independente da malha proposto por Sigmund [54]. O mesmo é apresentado a seguir.

Através do referido procedimento, o cálculo das sensibilidades da função objetivo, para um dado elemento, é modificado com base na média ponderada das respectivas sensibilidades relacionadas a seus elementos vizinhos:

$$\overline{\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}_e}} = \frac{1}{\mathrm{x}_e \sum_{f=1}^{\mathrm{N}_{el}} \hat{H}_f} \sum_{f}^{\mathrm{N}_{el}} \hat{H}_f \mathrm{x}_f \frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}_f} \qquad \textbf{(4.10.1)}$$

A função de convolução, $\hat{H}_f$, é escrita como

$$\hat{H}_f = \mathrm{r}_{\min} - d(e,f)\,,\ \{f \in \mathrm{N}_e \mid dist(e,f) \leq \mathrm{r}_{\min}\},\ f = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}_e \qquad \textbf{(4.10.2)}$$

onde o operador $d(e,f)$ define a distância entre o centro dos elementos e e f. A função de convolução $\hat{H}_f$ é nula fora da região de filtragem delimitada pelo raio $r_{\min}$ e decai linearmente a partir do elemento e. Atribuindo valor 0 a $\mathrm{r}_{\min}$, o filtro é desativado. Maiores detalhes a respeito do referido filtro podem ser encontrados no endereço eletrônico www.topopt.dtu.dk.

As sensibilidades da função objetivo apresentadas para o modelo isotrópico com penalidade passam a ter a forma apresentada na Equação (4.10.1).

Com relação ao problema de mínimos locais, nenhuma técnica foi adotada, pois resultados satisfatórios são obtidos através do uso do modelo isotrópico com penalidade aliado ao filtro descrito acima [53].

Capítulo 5

Implementação Computacional

5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas em detalhes as etapas e principais características dos módulos implementados no presente estudo, formadores do algoritmo geral de otimização estrutural topológica baseado no método da homogeneização. Os mesmos foram implementados em ambiente MATLAB.

Primeiramente, é discutido o módulo de elementos finitos, o qual é utilizado na solução das equações homogeneizadas e na determinação da topologia ótima. Em seguida, é comentado o módulo de homogeneização, a partir do qual são determinadas as propriedades mecânicas efetivas (homogeneizadas) do modelo de material adotado para a estrutura do problema de otimização. Dando continuidade, é apresentado o módulo de atualização das variáveis de projeto, que utiliza os dados de saída da análise, por elementos finitos, da estrutura com suas propriedades homogeneizadas. Ao final do capítulo, é apresentado o algoritmo geral de otimização estrutural topológica, integrando os referidos módulos.

5.2 Programa de Otimização Estrutural Topológica

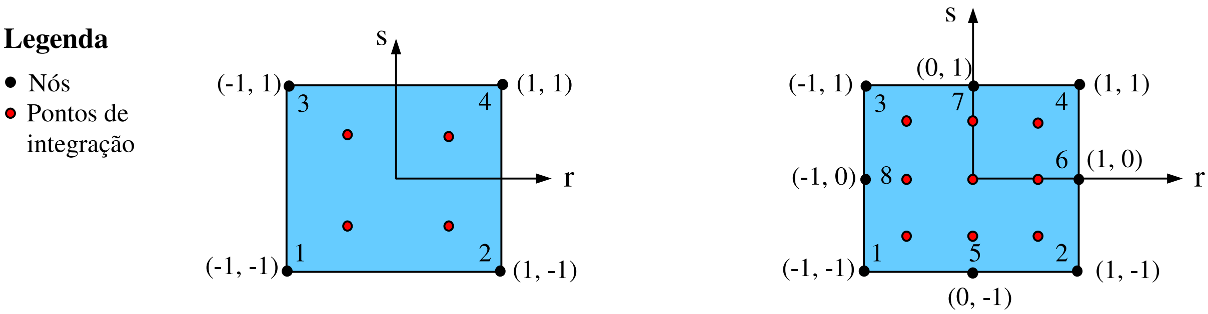
A seguir são apresentadas as características principais dos módulos integrantes do algoritmo de OT comentados anteriormente.

5.2.1 Módulo de elementos finitos

Com relação ao módulo de elementos finitos, no trabalho foram implementados elementos quadrilaterais de estado plano de tensão (2 graus de liberdade por nó), tanto de primeira ordem quanto de segunda ordem. Os resultados do módulo com elementos lineares foram validados a partir daqueles obtidos com o ANSYS (elemento PLANE42 com comportamento de estado plano de tensão e excluindo os deslocamentos extras). Já os resultados com elementos parabólicos foram confirmados com base nos resultados fornecidos pelo ABAQUS (elemento CSP8).

Os elementos são analisados no sistema de coordenadas naturais, r e s, e formulados seguindo a metodologia isoparamétrica, onde as mesmas funções de forma utilizadas na interpolação das coordenadas do elemento são empregadas na interpolação dos deslocamentos nodais.

A Figura 5.2.1.1 ilustra, no sistema de coordenadas naturais, os elementos finitos implementados, assim como a disposição dos pontos de Gauss, usados nas integrais de volume pertinentes do método. Neste sentido, a integração numérica de Gauss-Legendre é utilizada, considerando-se 2 x 2 pontos de Gauss no caso linear e 3 x 3 pontos no caso parabólico [49].



(a) Elemento linear de integração 2 x 2 **(a)** Elemento parabólico de integração 3 x 3

Figura 5.2.1.1 - Elementos finitos isoparamétricos: (a) linear e (b) parabólico.

Os elementos são orientados conforme a numeração dos nós apresentada na Figura 5.2.1.1 anterior.

Abaixo são descritas as etapas do módulo de elementos finitos:

1) discretização do domínio do problema através dos elementos finitos;

Devem ser fornecidos dois arquivos textos: um contendo numeração e coordenadas (x,y) dos nós e outro incluindo numeração e nós dos elementos.

No caso do módulo ser utilizado para o cálculo das equações de homogeneização apenas o elemento do tipo linear é disponibilizado. Uma vez que os elementos utilizados neste cálculo são considerados idênticos, a discretização da malha é feita automaticamente.

Já no módulo de otimização, pode-se optar por um dos dois tipos de elementos: linear ou parabólico. Na solução dos problemas numéricos estruturais, o primeiro tipo é utilizado quando do uso de modelo isotrópico com penalidade e o segundo quando adotado o modelo ortotrópico com vazios.

2) definição das propriedades mecânicas;

São informados os valores do módulo de Young, E, e do coeficiente de Poisson, ν, do material isotrópico da estrutura. O modelo de material adotado é linear. Deve ser fornecida também a espessura da estrutura, t, considerada uniforme. A partir de tais informações é montada a matriz de elasticidade **D**. No módulo de otimização, a matriz $\mathbf{D}^H$ é considerada.

3) determinação das matrizes de rigidez e de massa globais da estrutura;

No caso dinâmico modal, além da matriz de rigidez, é definida a matriz de massa global. A matriz de massa utilizada no código é a matriz de massa consistente, definida a partir da densidade ρ_0 do material e das funções de forma $\mathbf{N}_e$.

4) definição das condições de contorno e carregamentos;

Definidas as matrizes de elasticidade e rigidez, são definidas as restrições impostas a cada nó da malha - deslocamentos fixos ou livres nas direções horizontal, x, e vertical, y - assim como os carregamentos aos quais está sujeita a estrutura. Entra-se com os mesmos via arquivo de texto.

No módulo de homogeneização, as restrições e carregamentos são impostos conforme discutido nos Casos (1) a (3) do Capítulo 3. E uma vez que os carregamentos são definidos ao longo do domínio do elemento, a mesma matriz de conectividade utilizada na montagem das matrizes de rigidez e massa globais é utilizada para formar o vetor de carga global.

Com relação ao módulo de otimização, a única restrição é quanto ao tipo de carregamento, o qual deve ser pontual. No caso do problema de estrutura sujeita à ação apenas de seu peso próprio, a valor da aceleração da gravidade, g, na direção y vertical, deve ser informado. Vale lembrar que no caso da análise dos modos normais nenhum carregamento precisa ser informado.

5) solução do sistema linear de equações;

No caso estático, determinados a matriz de rigidez global $\mathbf{K}_g$ e o vetor de carga global $\mathbf{F}_g$, monta-se o sistema matricial $\mathbf{K}_g\mathbf{U}_g = \mathbf{F}_g$, onde o vetor dos deslocamentos globais $\mathbf{U}_g$ constitui a solução do mesmo.

No caso dinâmico, o problema de autovalor é resolvido: $(\mathbf{K}_g-\lambda_{n,i}\mathbf{M}_g)\boldsymbol{\psi}_g = 0$. Como já comentado, a matriz modal é normalizada com relação à matriz de massa da estrutura.

Com base nas restrições de deslocamento impostas é feita a condensação estática dos referidos sistemas, reduzindo-se assim o número de equações a serem resolvidas para se obter $\mathbf{U}_g$ [4].

6) Pós-processamento dos resultados.

São fornecidas como resultados de saída as seguintes grandezas: deslocamentos nodais, deformações, tensões e energia de deformação ao longo dos elementos; assim como freqüências naturais (no caso modal). Vale salientar que para o caso dinâmico os valores de deslocamento, deformação, tensão e energia têm caráter qualitativo.

O fluxograma apresentado na Figura 5.2.1.2 resume as etapas comentadas acima.

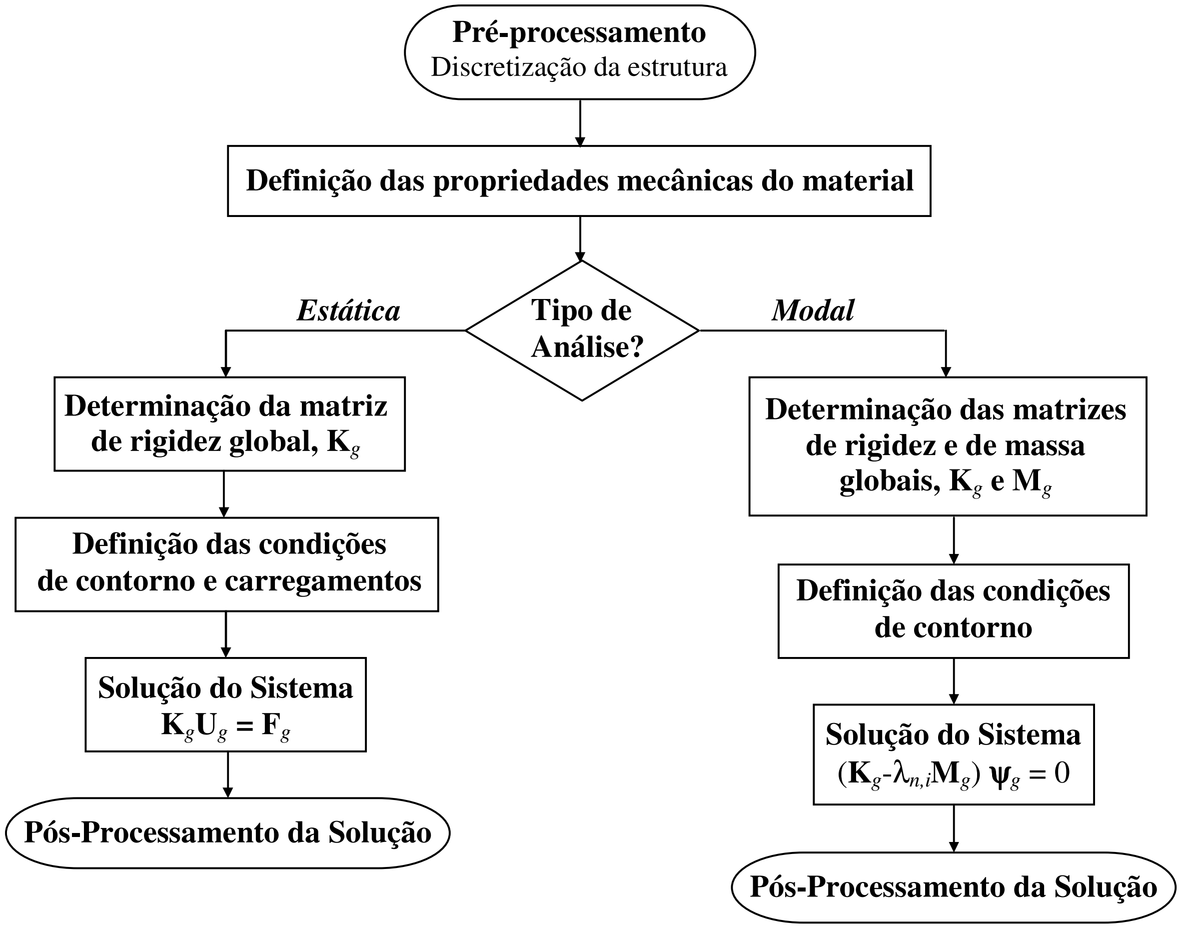


Figura 5.2.1.2 - Fluxograma do módulo de elementos finitos.

5.2.2 Módulo de homogeneização

A seguir é apresentado o módulo de homogeneização, o qual utiliza o módulo de elementos finitos apresentado anteriormente, considerando-se os elementos do tipo linear.

As etapas do referido módulo são as seguintes:

1) escolha do modelo de material;

Definição do modelo de material para a solução do problema de distribuição ótima de material: isotrópico com penalidade ou ortotrópico com vazios.

2) definição da densidade da malha da célula-base totalmente sólida;

Nesta etapa é definido o grau de discretização da malha de elementos finitos da célula-base **unitária** considerada inicialmente como sendo totalmente sólida, como ilustra a Figura 5.2.2.1. No exemplo da figura, é considerada uma malha de 20 x 20 elementos finitos lineares idênticos de estado plano de tensão.

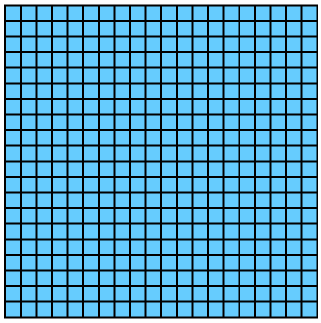


Figura 5.2.2.1 - Densidade da malha da célula-base definida como 20 x 20.

3) definição dos pares (a_e, b_e) a serem calculados;

Estabelecida a densidade N_h x N_h da malha da célula-base unitária 100% sólida (onde N_h deve ser um número par), tem-se que o comprimento do elemento finito é dado por $1/N_h$. A partir deste valor, é informado um valor para o passo, p_{ab}, de variação das variáveis a_e e b_e, o qual deve corresponder a ($2k \times 1/N_h$), sendo $k \in Z^+$, e valor este que ao dividir 1 pertença também a Z^+. Quanto menor o passo, maior o número de células-base avaliadas.

Para a discretização da célula da Figura 5.2.2.1, onde N_h = 20, tem-se que os elementos possuem aresta = 1/20 = 0,05. Assim, como passo p_{ab} de variação das variáveis a_e e b_e, pode-se ter valores como 0,1 (k = 1), 0,2 (k = 2), dentre outros. Observa-se que 0,3 (k = 3), por exemplo, não pode ser adotado, visto que 1/0,3 = 10/3 que não corresponde a um número inteiro.

Os seguintes vetores de a_e e b_e são montados, correspondendo a algumas possíveis dimensões do vazio da célula-base: **a** = **b** = $\{0, p_{ab}, 2 \times p_{ab}, 3 \times p_{ab}, \ldots, 1\}$.

4) análise por elementos finitos;

O módulo de elementos finitos passa a ser utilizado. A discretização da malha é feita de forma automatizada com base nos vetores **a** e **b** determinados anteriormente, visto que os elementos finitos empregados são idênticos. Desta forma, as possíveis células de vazio (a_e,b_e) são definidas.

Estabelecida uma célula de vazio (a_e,b_e), são retirados da malha da célula-base 100% sólida os elementos finitos abrangendo a área a_e x b_e concêntrica com relação à célula-base completamente sólida. Aos elementos retirados é atribuída rigidez nula e aos respectivos nós eliminados são atribuídos deslocamentos nulos para evitar singularidades. A Figura 5.2.2.2 mostra a célula-base de vazio (0,4 x 0,6) obtida a partir da célula-sólida de 100% material ilustrada na Figura 5.2.2.1.

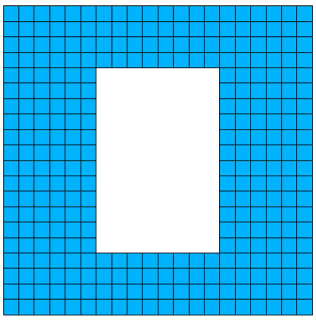


Figura 5.2.2.2 - Discretização da célula-base com vazio (0,4 x 0,6).

Definidas as propriedades mecânicas, para cada célula-base de vazio (a_e,b_e) são então aplicadas as condições de contorno e os carregamentos definidos conforme os três casos apresentados no Capítulo 3. O sistema de equações lineares é então resolvido encontrando-se para cada caso um valor do vetor de deslocamento $\mathbf{U}_g$. A partir deste são obtidas as respectivas deformações elementares, $\boldsymbol{\varepsilon}_e$.

5) determinação dos módulos elásticos homogeneizados discretos;

Com base nas deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ obtidas através do módulo de elementos finitos, os módulos elásticos homogeneizados são determinados a partir das equações apresentadas no Capítulo 3, para cada célula-base.

A Figura 5.2.2.3 apresenta a célula-base deformada, considerado o vazio de dimensões 0,4 x 0,6 e os três casos de estudo.

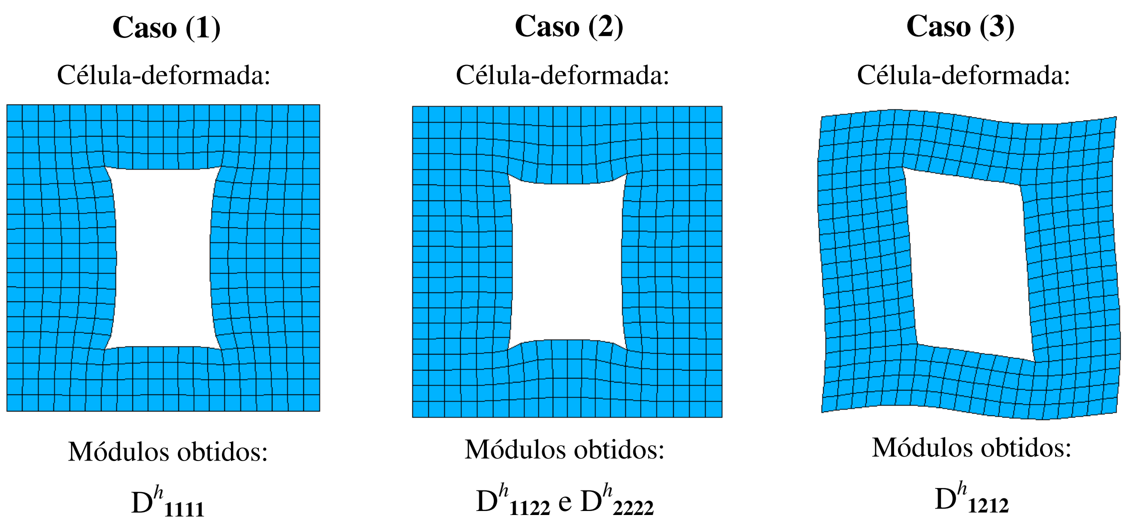


Figura 5.2.2.3 - Célula-base (0,4 x 0,6) deformada e módulos elástico efetivos.

É interessante salientar que uma vez calculadas as propriedades elásticas da célula-base (a_e,b_e), não se faz necessário novo cálculo para a célula-base (b_e,a_e), pois devido à simetria: $D^h_{1111}(b_e,a_e) = D^h_{2222}(a_e,b_e)$; $D^h_{1122}(b_e,a_e) = D^h_{1122}(a_e,b_e)$; $D^h_{2222}(b_e,a_e) = D^h_{1111}(a_e,b_e)$; e $D^h_{1212}(b_e,a_e) = D^h_{1212}(a_e,b_e)$.

6) determinação dos módulos elásticos homogeneizados contínuos.

Concluída a etapa anterior, passa-se a ter de forma discreta valores dos módulos elásticos para $(1/p_{ab} + 1)^2$ pares (a_e,b_e). Tendo em vista que, durante a otimização, pares (a_e,b_e) diferentes daqueles calculados poderão existir no inicio ou após a etapa de atualização das variáveis de projeto, é interessante que se tenha tais valores em uma forma contínua. Reduzindo o esforço computacional, para tal é utilizado o método dos mínimos quadrados, ajustando-se os $(1/p_{ab} + 1)^2$ pares (a_e,b_e) a uma certa superfície.

No presente trabalho os pontos (a_e,b_e) são ajustados ao polinômio bi-cúbico completo a seguir:

$$D_c^h(a_e, b_e) = c_1 + c_2 a_e + c_3 b_e + c_4 a_e^{\,2} + c_5 a_e b_e + c_6 b_e^{\,2} + c_7 a_e^{\,3} + c_8 a_e^{\,2} b_e + c_9 a_e b_e^{\,2} + c_{10} b_e^{\,3} \qquad \textbf{(5.2.2.1)}$$

Resolvendo por mínimos quadrados, é definida inicialmente a seguinte função erro, envolvendo o somatório dos quadrados das diferenças entre os valores interpolado, D_c^h, e o discreto, D^h:

$$F_{erro} = \sum_{i=1}^{(1/p_{ab}+1)^2} \sum_{j=1}^{(1/p_{ab}+1)^2} \left[D_c^h(a_i, b_j) - D^h(a_i, b_j) \right] \qquad \textbf{(5.2.2.2)}$$

O objetivo então é encontrar coeficientes c_m (m = 1,2,...,10) que minimizem a função erro F_{erro}, ou seja, a distância entre os pontos interpolados e os respectivos pontos originais. Assim os coeficientes c_m são determinados derivando-se F_{erro} parcialmente com relação aos mesmos e igualando-se as derivadas a zero:

$$\frac{\partial F_{erro}}{\partial c_m} = 0 \ , \ m = 1,2,...,10 \qquad \textbf{(5.2.2.3)}$$

Um sistema linear de 10 equações independentes é então montado, a partir do qual são obtidos os coeficientes c_m. Definidos os coeficientes do polinômio bi-cúbico completo, cada módulo elástico homogeneizado passa a ser representado por uma função contínua conforme a Equação (5.2.2.1). Deste modo, para se saber as propriedades efetivas de uma certa célula (a_e,b_e), basta que se entre nas respectivas funções contínuas dos módulos, a qual fornecerá o valor desejado.

Deve-se notar que no caso do modelo isotrópico com penalidade apenas esta etapa é executada, conforme discutido no Capítulo 3, sem ajuste de curva.

Abaixo, na Figura 5.2.2.4, são apresentadas as superfícies de ajuste correspondentes a cada módulo elástico homogeneizado para o caso da célula-base discretizada conforme a Figura 5.2.2.1, para E = 100 000, ν = 0,3 e p_{ab} = 0,1, implicando 11 x 11 pares (a_e,b_e) (unidades consistentes).

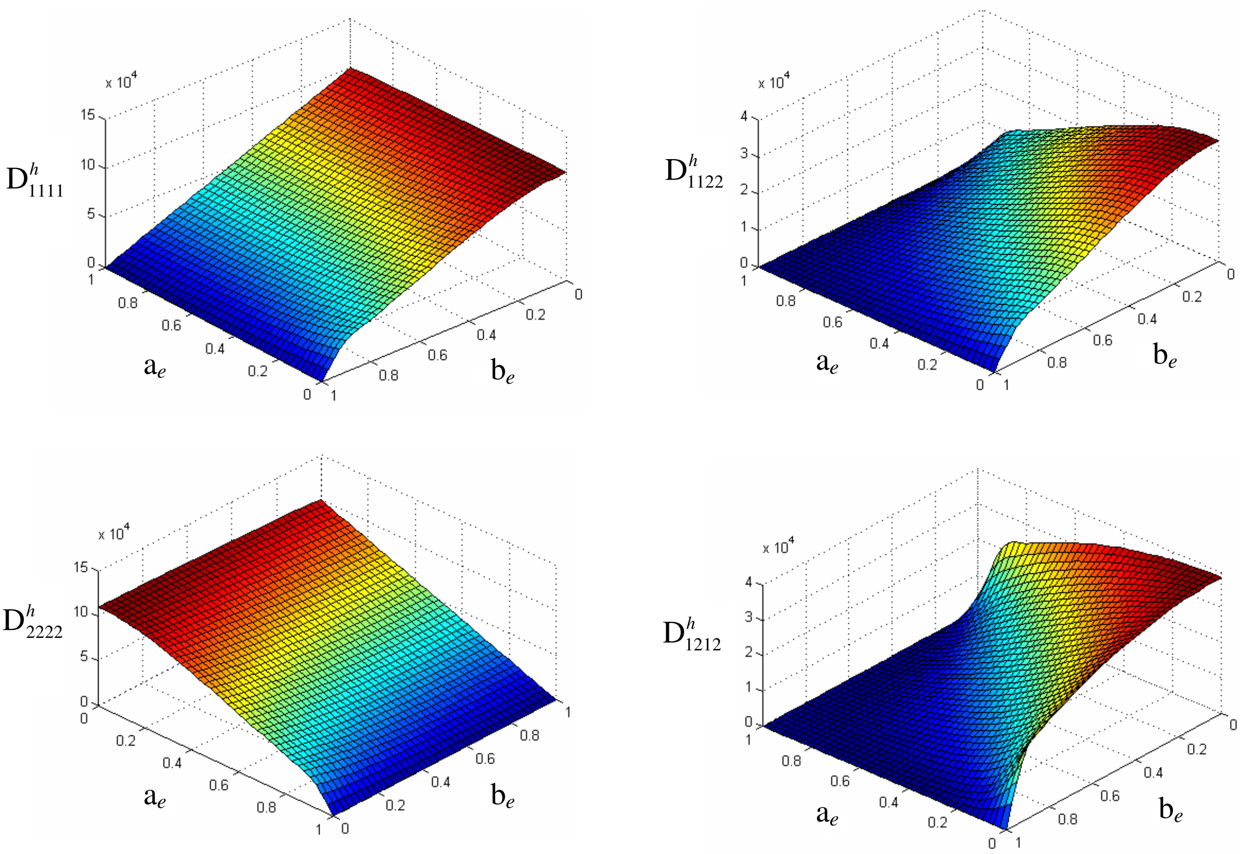


Figura 5.2.2.4 - Superfícies dos módulos elásticos efetivos: p_{ab} = 0,1 , E = 1e5 e ν = 0,3.

É importante destacar que até aqui o tensor elástico efetivo é função apenas de a_e *e* b_e*. A rotação é considerada conforme discutido no Capítulo 4, através da matriz de rotação* $\mathbf{R}_e$. Tal tarefa faz parte do módulo global de otimização.

O fluxograma apresentado na Figura 5.2.2.5 fornece uma visão geral das etapas do módulo de homogeneização.

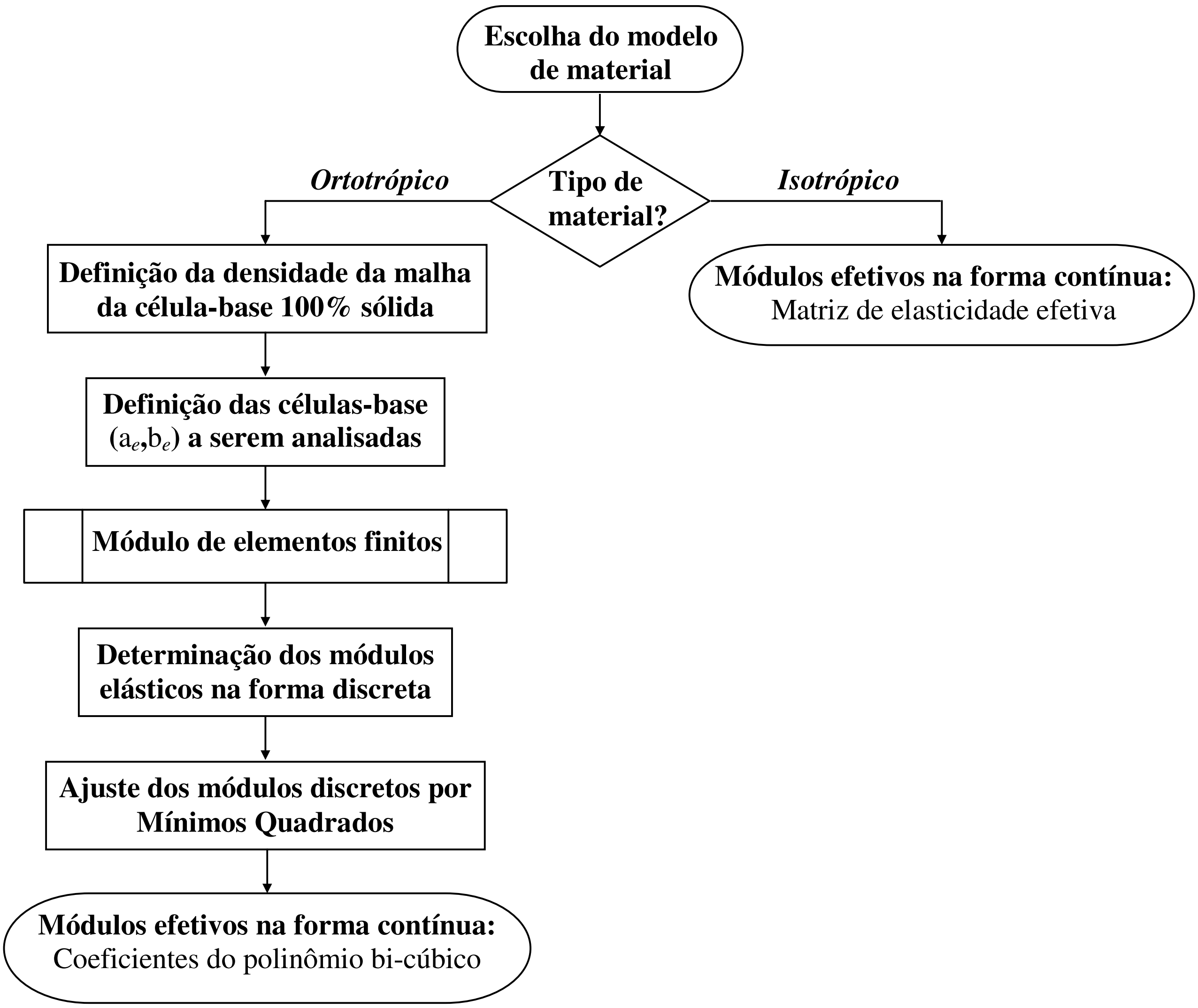


Figura 5.2.2.5 - Fluxograma do módulo de homogeneização.

Um fato interessante a destacar é que novos módulos elásticos efetivos só precisam ser calculados quando da mudança de ν. *Do contrário, caso apenas o* E *venha a mudar, basta multiplicar os módulos já existentes pelo novo E dividido pelo antigo. Tal fato é observado com base nas equações de tais módulos apresentadas no Capítulo 3 e do fato de que o* E *encontra-se no tensor elástico isotrópico na forma de um fator de multiplicação, diferentemente do* ν.

5.2.3 Módulo de atualização das variáveis de projeto

O referido módulo se baseia nos algoritmos de atualização apresentados no Capítulo 4. O objetivo é manter em cada iteração a restrição de volume sempre ativa. Outro fato, também já citado, é de que para a atualização das variáveis de projeto é necessário se determinar o multiplicador de Lagrange da restrição de volume. Tais tarefas constituem o módulo de atualização das variáveis de projeto. O mesmo é descrito a seguir.

1) definição do modelo de material;

Dependendo do modelo de material escolhido, há um otimizador específico, conforme apresentado no Capítulo 4, baseado nos critérios de otimalidade.

2) método da bisseção e orientação ótima.

Partindo-se dos resultados do módulo de elementos finitos, são definidas as sensibilidades da função objetivo e da restrição de volume conforme as equações apresentadas no Capítulo 4.

De posse das sensibilidades, o multiplicador de Lagrange inicial da restrição de volume é definido (etapa global do módulo geral). O parâmetro E_{X_e} é então determinado para cada elemento, o qual é utilizado pelo otimizador, fornecendo as variáveis de projeto atualizadas. Na iteração seguinte, um novo multiplicador de Lagrange é definido, assim como novas variáveis de projeto. O volume da estrutura é calculado para tais variáveis e caso o mesmo seja inferior ao limite superior da restrição de volume, continua-se com o método da bisseção até que a restrição de volume se apresente ativa dentro de uma certa tolerância. Desde que não sejam satisfeitos os critérios de parada, passa-se à iteração seguinte do processo de otimização.

Como já mencionado no Capítulo 4, sendo o modelo ortotrópico utilizado, a orientação ótima de cada elemento, nos casos estático de única carga e de peso próprio, é definida com base na orientação da máxima tensão principal, conforme mostra o algoritmo a seguir.

Com base no vetor de tensões e no círculo de Mohr [31], para cada elemento é calculado o ângulo θ_e segundo a seguinte equação:

$$\theta_e = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\left|\tau_{xy}\right|}{\left|\sigma_x - \sigma_y\right|}\right) \qquad \textbf{(5.2.3.1)}$$

O ângulo θ_e é então introduzido no algoritmo da Figura 5.2.3.1.

Se $\sigma_x \geq (\sigma_{x+}\sigma_y)/2$
    Se $\tau_{xy} \geq 0$
        $\theta^* = \theta;$
    Do contrário,
        $\theta^* = -\theta.$
    Fim.
Caso contrário,
    Se $\tau_{xy} \geq 0$
        $\theta^* = (\pi-\theta)/2;$
    Do contrário,
        $\theta^* = -(\pi-\theta)/2;$
    Fim.
Fim.

Figura 5.2.3.1 - Algoritmo de atualização da orientação nos casos estático e de peso próprio.

Para os casos de múltiplos carregamentos e autovalores, a orientação ótima é definida com base na condição de otimalidade envolvendo tal variável conforme explicado no Capítulo 4.

O fluxograma da Figura 5.2.3.2 a seguir ilustra as etapas descritas anteriormente.

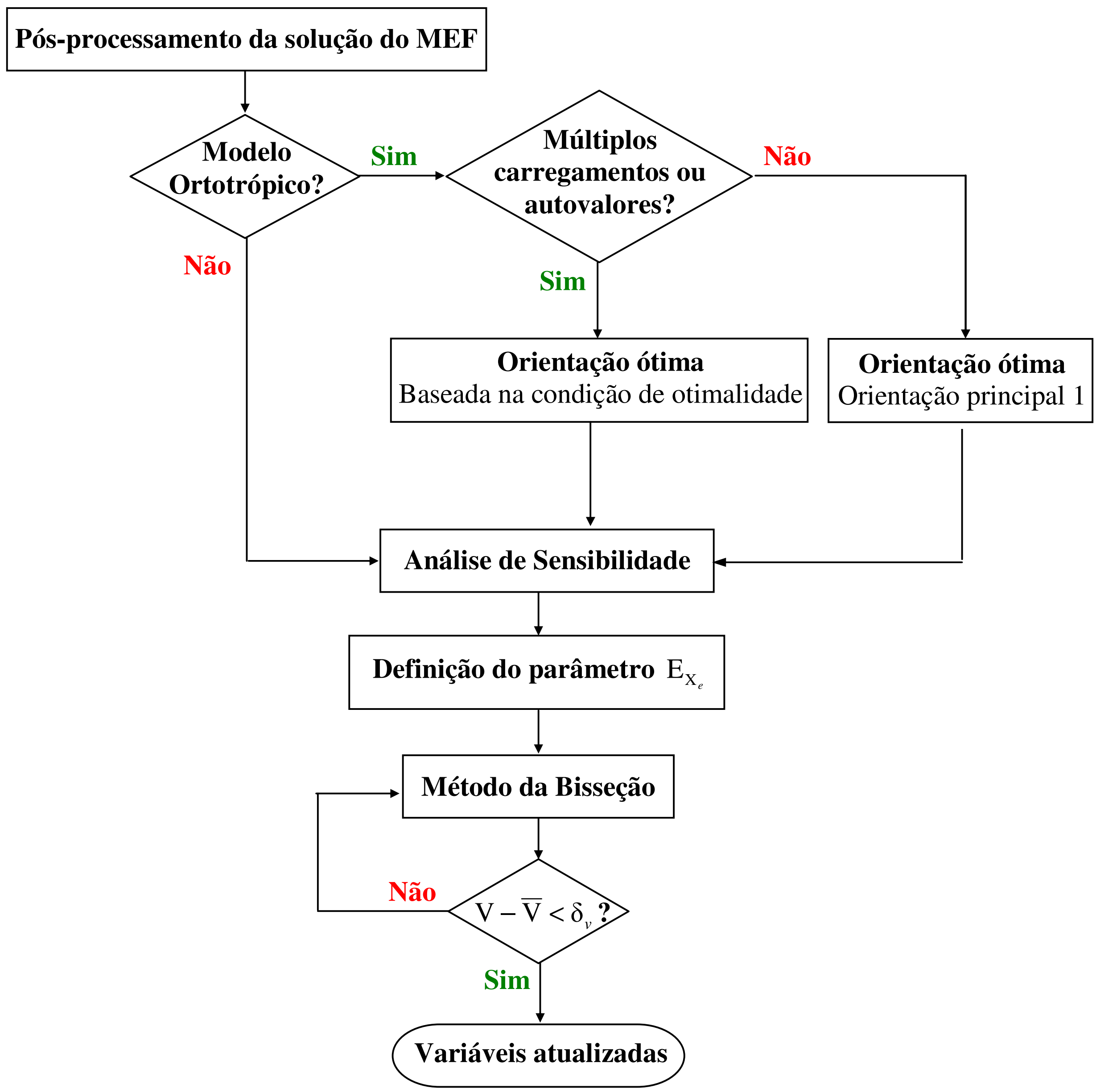


Figura 5.2.3.2 - Fluxograma do módulo de atualização das variáveis de projeto.

5.2.4 Módulo integrado de otimização estrutural topológica

Nesta seção é apresentado o modulo global de otimização estrutural topológica, o qual inclui os módulos locais apresentados até então.

Além dos módulos de elementos finitos, de homogeneização e de atualização das variáveis de projeto, existem etapas globais que complementam e/ou interligam aqueles módulos. Estas são apresentadas a seguir:

1) dados de entrada;

Constituem dados de entrada do programa os arquivos e parâmetros apresentados na Tabela 5.2.4.1.

Tabela 5.2.4.1 - Dados de entrada do programa de OT implementado.

Identificação	Arquivos e Parâmetros de Entrada
1	Modelo de material adotado, M (1 = modelo ortotrópico e 2 = modelo isotrópico).
2	Arquivo texto contendo numeração e coordenadas dos nós (coord.txt).
3	Arquivo texto contendo numeração e nós dos elementos (elem.txt).
4	Arquivo texto contendo nós e os graus de liberdade restritos (spc.txt).
5	Arquivo texto contendo os valores de carregamentos, respectivos pesos (w_j), e nós de aplicação (force.txt). No caso modal, especificação dos modos a serem avaliados, assim como os pesos de cada modo, w_i (modal.txt).
6	Módulo de Young (E) e coeficiente de Poisson (ν) do material da estrutura.
7	Espessura da estrutura (t).
8	Densidade da malha da célula-base 100% sólida, N_h x N_h, sendo M = 1.
9	Passo dos vetores **a** e **b** para o cálculo do tensor elástico efetivo contínuo (p_{ab}), no caso de M = 1.
10	Volume final desejado para a estrutura analisada $(\overline{V})$ e limite inferior das variáveis de projeto (x_{min}).
11	Tolerância de parada do programa (t_p) e número máximo de iterações (I_m)
12	Tolerância da restrição de volume (δ_v).
13	Passo de atualização das variáveis de projeto (ζ).
14	Expoente empírico (p) e parâmetro de amortecimento (η), caso M = 2.
15	Raio de atuação do filtro da malha independente (r_{min}), caso M = 2.

As variáveis a_e, b_e e x_e de entrada são obtidas com base no volume final desejado, de forma a deixar a restrição de volume ativa. Na iteração inicial é atribuído a cada elemento finito o mesmo valor de variável de projeto, de forma a implicar valor do volume da estrutura igual ao limite superior da restrição de volume imposta, ou seja, restrição ativa. Na iteração inicial, o ângulo ótimo é considerado nulo.

2) definição do multiplicador de Lagrange inicial da restrição de volume;

Previamente à primeira atualização das variáveis de projeto, é preciso se ter um valor inicial do multiplicador de Lagrange da restrição de volume. Tal valor, dependendo do modelo adotado, é definido com base na condição de estacionaridade do Lagrangiano e da seguinte forma para cada elemento:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{a}_e} / \frac{\partial g}{\partial \mathrm{a}_e} + \frac{\partial F}{\partial \mathrm{b}_e} / \frac{\partial g}{\partial \mathrm{b}_e}\right) \quad \text{(modelo ortotrópico com vazios)} \qquad \textbf{(5.2.4.1)}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{\mathrm{N}_{el}}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}_e} / \frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}_e}\right) \quad \text{(modelo isotrópico com penalidade)} \qquad \textbf{(5.2.4.2)}$$

Caso o multiplicador venha a ser menor do que zero, ao mesmo é atribuído um valor unitário.

3) critérios de parada;

A parada do programa é determinada quando pelo menos um dos critérios apresentados no Capítulo 4 for satisfeito.

4) dados de saída.

Como saída do programa de OT, além dos valores das variáveis ótimas de projeto, são fornecidos também os históricos correspondentes à função objetivo, à restrição de volume, e à freqüência natural (no caso dinâmico), assim como a distribuição de densidades ao longo da malha de elementos finitos.

O fluxograma da Figura 5.2.4.1 apresenta uma visão geral do módulo de otimização integrado.

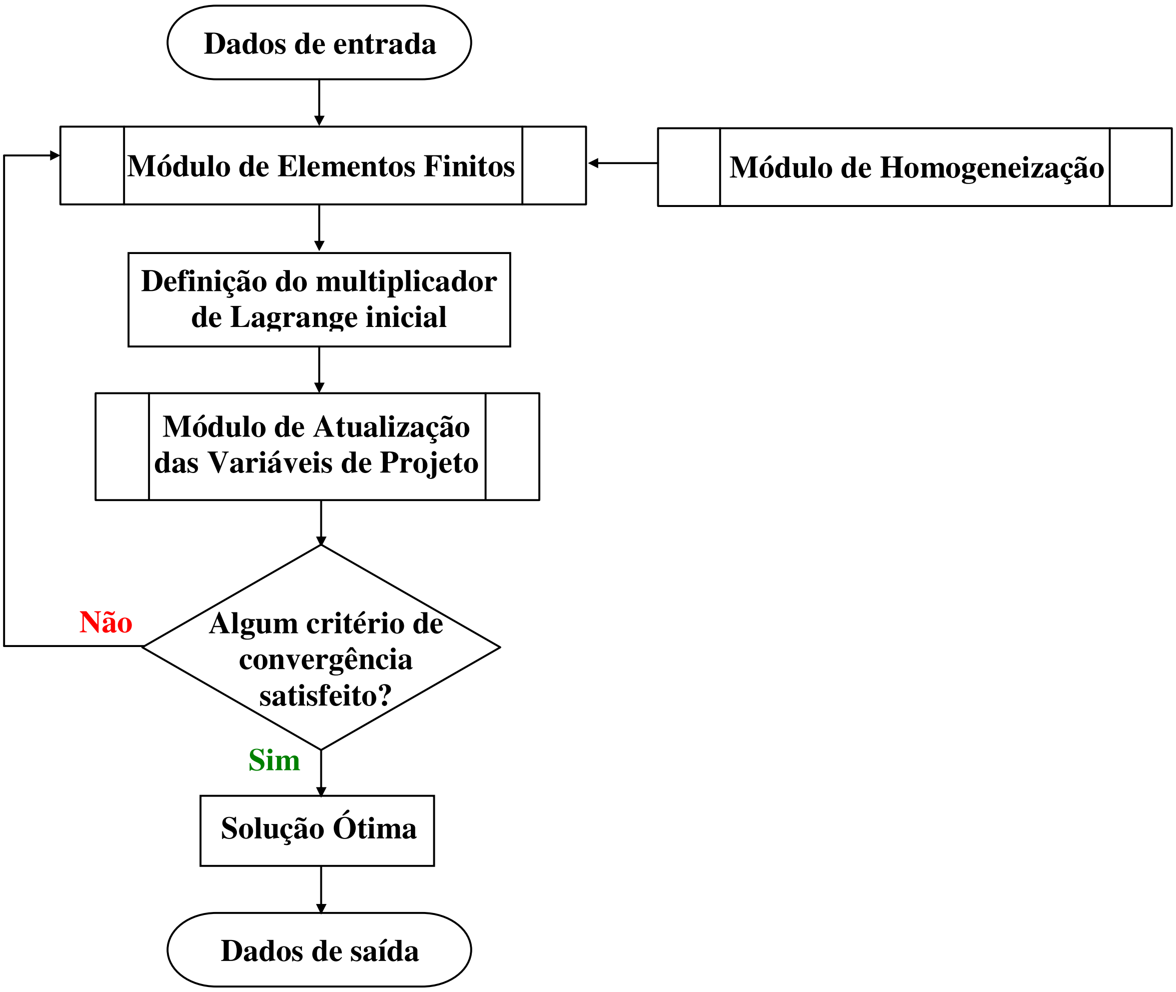


Figura 5.2.4.1 - Fluxograma do módulo integrado de OT.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

6.1 Introdução

O intuito deste capítulo é aplicar os algoritmos de homogeneização e de OT baseada no método da homogeneização implementados no trabalho na resolução de problemas existentes na literatura, visando à validação dos módulos e à verificação das potencialidades dos modelos de material isotrópico com penalidade e ortotrópico com vazios na respectiva solução.

Nos problemas a seguir as unidades das grandezas envolvidas são consideradas consistentes. Os dados de entrada estão de acordo com a Tabela 5.2.4.1. e com o respectivo modelo de material adotado na OT.

6.2 Método da Homogeneização

Nesta seção são resolvidos problemas envolvendo o método da homogeneização.

6.2.1 Problema 6.2.1

Objetivo

Validar o módulo de homogeneização implementado com base nos resultados obtidos na literatura para a célula-base unitária quadrada de com vazio de dimensões 0,4 x 0,6 mostrada na Figura 6.2.1.1 a seguir.

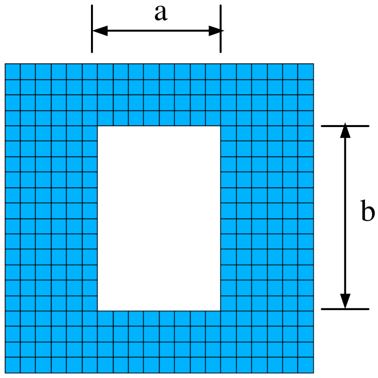


Figura 6.2.1.1 - Célula-base com vazio (a = 0,4 x b = 0,6).

Dados de entrada

Os dados de entrada do problema são apresentados na Tabela 6.2.1.1.

Tabela 6.2.1.1 - Dados de entrada do Problema 6.2.1.

Identificação	Dados de Entrada
1	M =1.
2	Modelo com 441 nós.
3	400 elementos idênticos lineares de estado plano de tensão são usados.
4	As restrições são aplicadas conforme apresentado no Capítulo 3.
5	Os carregamentos também seguem as equações desenvolvidas no Capítulo 3.
6	E = 26,6672 e ν = 0,33333.
8	N_h = 20.
9	p_{ab} = 0,2 (os módulos são definidos apenas para a = 0,4 e b = 0,6).

Resultados

A Tabela 6.2.1.2 a seguir apresenta os resultados obtidos com o referido módulo implementado (Código MATLAB), comparando-os com aqueles obtidos por Bendsøe e Kikuchi [11] para os mesmos dados de entrada.

Tabela 6.2.1.2 - Resultados do Problema 6.2.1

Algoritmo	$\mathbf{D}^h_{1111}$	$\mathbf{D}^h_{1122}$	$\mathbf{D}^h_{2222}$	$\mathbf{D}^h_{1212}$
Bendsøe e Kikuchi [11]	13,015	3,241	17,552	2,785
Código MATLAB	13,015	3,241	17,552	2,785
Erro (%)	0,0	0,0	0,0	0,0

Conclusão

De acordo com a Tabela 6.2.1.2, os resultados obtidos através do módulo de homogeneização implementado coincidem com aqueles obtidos na literatura, considerando-se três casas decimais. O referido módulo encontra-se assim validado.

6.2.2 Problema 6.2.2

Objetivo

Investigar a influência da densidade da malha da célula-base sobre os valores obtidos para os módulos elásticos homogeneizados.

Dois casos são estudados:

(A) Célula-base com vazio de dimensões **0,8 x 0,8**.

(B) Célula-base com vazio de dimensões **0,4 x 0,6**.

Para cada caso acima, são considerados 4 graus de discretização da malha da célula-base: **10 x 10**, **20 x 20**, **40 x 40**, **80 x 80** e **100 x 100**.

Dados de entrada

Os dados de entrada do problema, para os casos **(A)** e **(B)** considerados, são apresentados na Tabela 6.2.2.1 a seguir.

Tabela 6.2.2.1 - Dados de entrada do Problema 6.2.2.

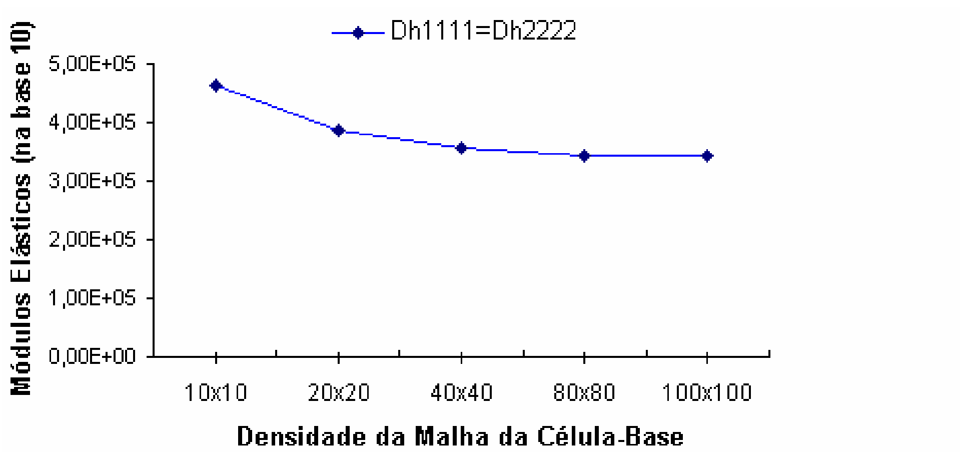
Identificação	Dados de Entrada
1	M = 1.
2	Modelos com 121; 441; 1681; 6561 e 10201 nós.
3	Respectivamente, 100; 400; 1600; 6400 e 10000 elementos lineares de estado plano de tensão são usados (malha automática).
4	As restrições são aplicadas conforme apresentado no Capítulo 3.
5	Os carregamentos também seguem as equações desenvolvidas no Capítulo 3.
6	E = 26,6672 e ν = 0,33333.
8	N_h = 10; 20; 40; 80 e 100.
9	p_{ab} = 0,2. Os módulos são calculados apenas para os valores de a e b considerados em cada caso.

Resultados

As Figuras 6.2.2.1 e 6.2.2.2 a seguir apresentam os resultados obtidos para cada caso, em escala "log", considerando-se as várias densidades da malha da célula-base e os respectivos módulos elásticos homogeneizados.

- Módulos elásticos D^h_{1111} e D^h_{2222}

Caso **(A)**



Caso (B)

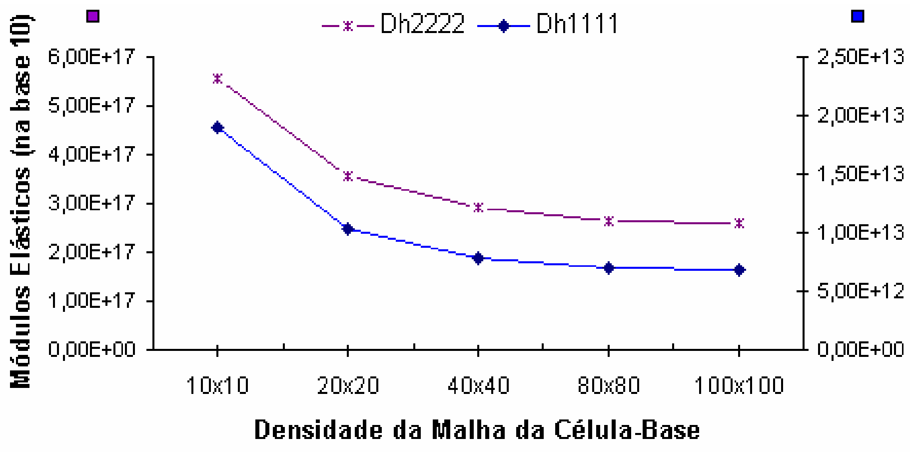
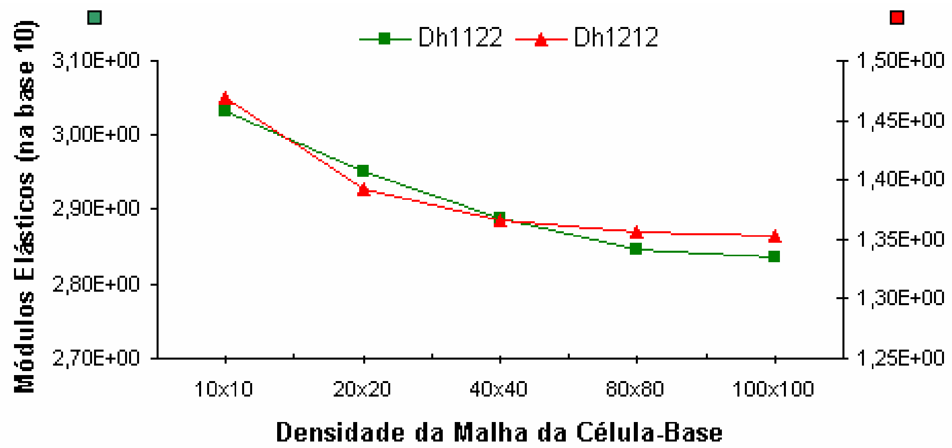


Figura 6.2.2.1 - Resultados do Problema 6.2.2: módulos elásticos $D^h{}_{1111}$ e $D^h{}_{2222}$.

- Módulos elásticos $D^h{}_{1122}$ e $D^h{}_{1212}$

Caso (**A**)



Caso (**B**)

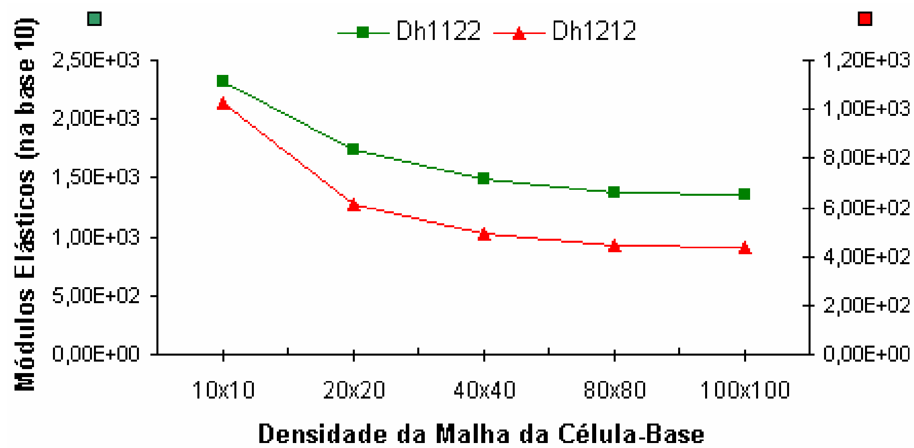


Figura 6.2.2.2 - Resultados do Problema 6.2.2: módulos elásticos $D^h{}_{1122}$ e $D^h{}_{1212}$.

Conclusão

De acordo com os gráficos das Figuras 6.2.2.1 e 6.2.2.2, os módulos elásticos efetivos tendem a ficar uniformes a partir de uma densidade de malha 80 x 80, para as propriedades da malha e do material consideradas.

6.2.3 Problema 6.2.3

Objetivo

Investigar a influência da densidade da malha da célula-base sobre a solução ótima e a convergência da energia de deformação.

Três casos são investigados, sendo **11 x 11** o número de pares (a_e,b_e) de ajuste:

(A) Célula-base com densidade da malha de **20 x 20**.

(B) Célula-base com densidade.da malha de **40 x 40**.

(C) Célula-base com densidade da malha de **80 x 80**.

Para a discretização da célula-base em seu algoritmo, Fujii e Kikuchi [21] utilizam 20 x 20 elementos finitos lineares. Por sua vez, Hassani e Hinton [30] consideram a mesma densidade de malha, contudo usam elementos finitos de segunda ordem.

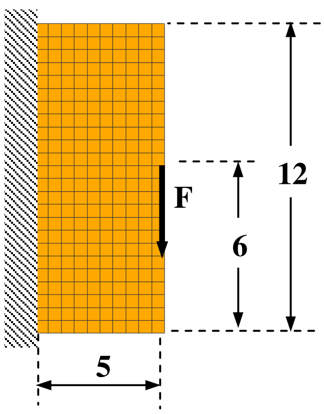


Figura 6.2.3.1 - Viga curta engastada sujeita à carga pontual: Problema 6.2.3.

O problema estático da viga curta engatada sujeita a um única carga pontual é resolvido no sentido de se encontrar a topologia de máxima rigidez para um valor de massa final correspondente a 20% do inicial. O mesmo é ilustrado na Figura 6.2.3.1 anterior.

Dados de entrada

Os dados de entrada do problema, para os casos **(A)**, **(B)** e **(C)** considerados, são apresentados na Tabela 6.2.3.1.

Tabela 6.2.3.1 - Dados de entrada do Problema 6.2.3.

Identificação	Dados de Entrada
1	M = 1.
2	Modelo com 789 nós.
3	240 elementos parabólicos idênticos de estado plano de tensão são usados.
4	Na face esquerda da viga, os deslocamentos nas direções x e y são restritos.
5	F = 1
6	E = 100 000 e ν = 0,3.
7	t = 1,0.
9	**(A)** N_h = 20; **(B)** N_h = 40; **(C)** N_h = 80;
9	p_{ab} = 0,1.
10	$\overline{V}$ = 20%V e x_{min} = 0,001.
11	São realizadas 130 iterações, visando à comparação dos resultados.
12	δ = 0,02.
13	ζ = 0,015.

Resultados

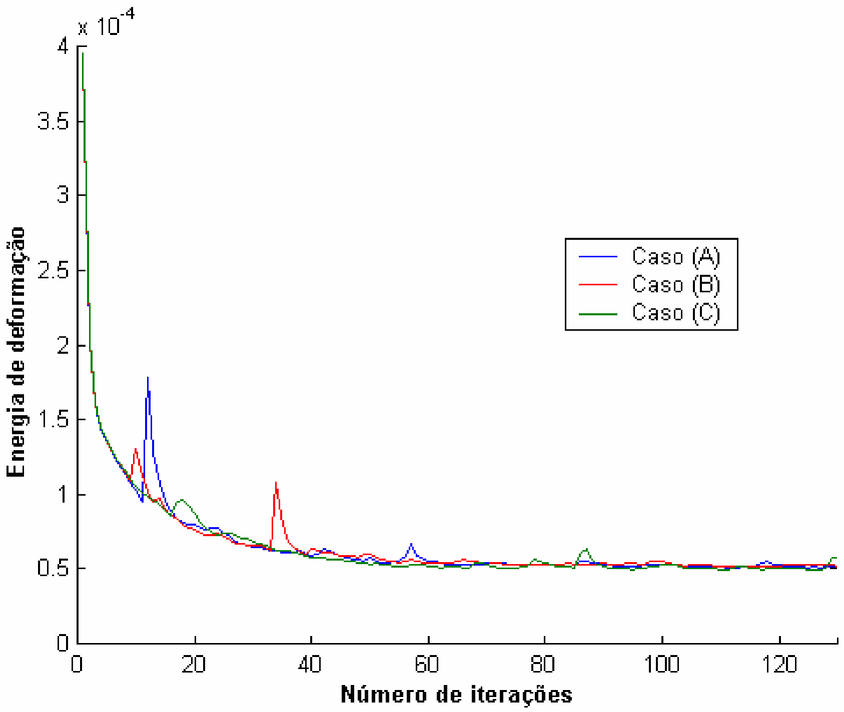


Figura 6.2.3.2 - Resultados do Problema 6.2.3: históricos da energia de deformação.

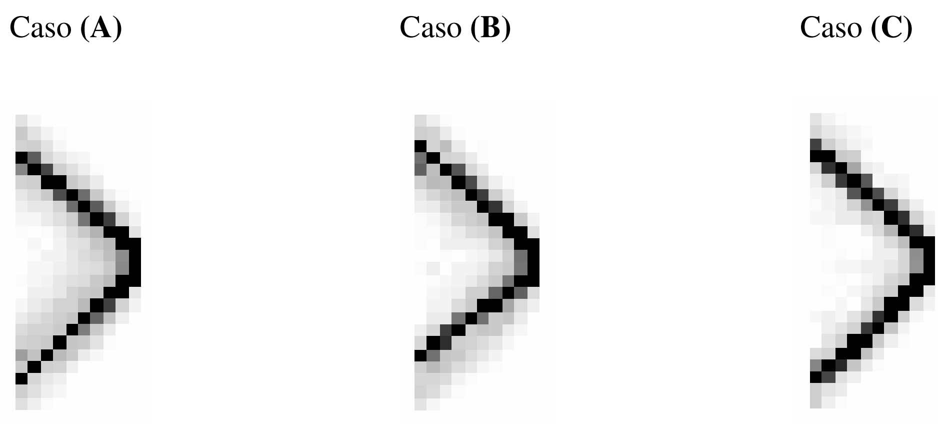


Figura 6.2.3.3 - Resultados do Problema 6.2.3: topologias ótimas.

As Figuras 6.2.3.2 e 6.2.3.3 anteriores apresentam os resultados de convergência da energia de deformação e de topologia ótima, respectivamente, considerando-se as densidades da célula-base avaliadas.

Os picos presentes nas curvas de convergência da Figura 6.2.3.2 podem ser minimizados, ou até eliminados, mediante o uso, por exemplo, de um menor valor para o passo de atualização, ζ, das variáveis de projeto.

Conclusões

De acordo com as curvas da Figura 6.2.3.3 e topologias da Figura 6.2.3.3, as seguintes conclusões podem ser feitas, considerando-se os parâmetros do algoritmo de otimização utilizados:

- A convergência da energia de deformação é mais estável quando da utilização da densidade da malha da célula-base correspondendo a 80 x 80.
- A discretização 80 x 80 da célula-base também propicia uma menor escala de cinza (densidades intermediárias) verificada na topologia ótima.
- A topologia ótima mais próxima à encontrada na literatura [29][55] é conseguida com o uso da densidade 80 x 80 da malha da célula-base. A solução exata corresponde a uma treliça de duas barras dispostas a 45° e ocupando uma área cuja altura é o dobro da largura (no caso, 5 x 10).

6.2.4 Problema 6.2.4

Objetivo

Investigar a influência do número de pares (a_e,b_e), de ajuste, sobre a topologia ótima e a convergência da energia de deformação.

Três casos são investigados, para a densidade da malha da célula-base de **40 x 40**:

(A) 6 x 6 pares (a_e,b_e).

(B) 11 x 11 pares (a_e,b_e).

(C) 21 x 21 pares (a_e,b_e).

O problema da viga curta engastada da Figura 6.2.3.1 é novamente considerado, assim como os dados de entrada referenciados na Tabela 6.2.3.1.

Com relação ao número de pares (a_e,b_e) e as técnicas de ajuste ou interpolação dos módulos elásticos obtidos para tais pares, estas têm variado ao longo dos trabalhos desenvolvidos sobre o tema. Por exemplo, Bendsøe e Kikuchi [11] utilizam 6 x 6 pares e polinômios de Legendre para a interpolação, já Fujii e Kikuchi [21] usam 51 x 51 pares e polinômios de Lagrange. Hassani e Hinton [30] empregam 11 x 11 pares e o ajuste dos módulos é feito pelo método dos mínimos quadrados convencional, considerado no presente trabalho.

<u>Resultados</u>

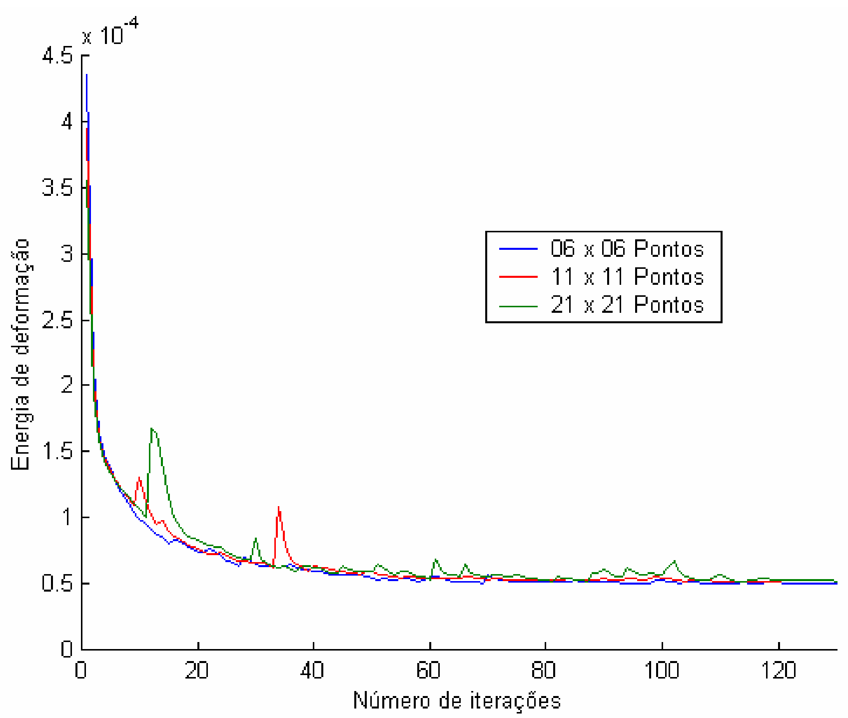


Figura 6.2.4.1 - Resultados do Problema 6.2.4: históricos da energia de deformação.

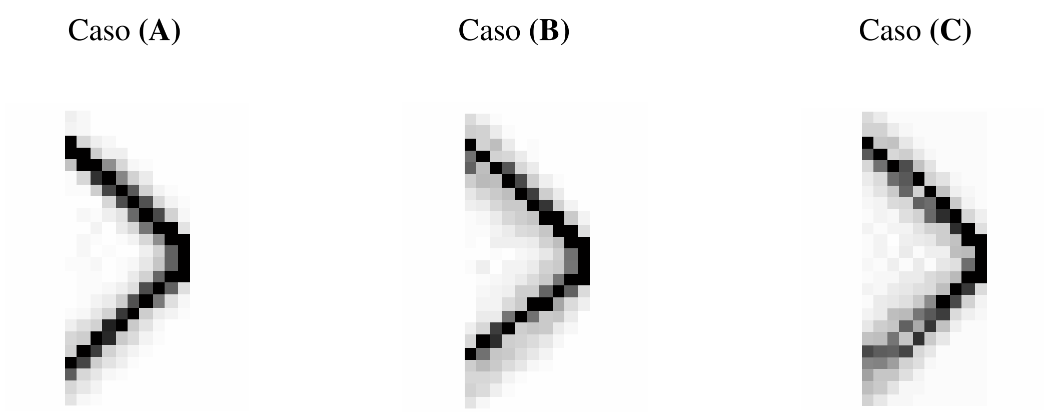


Figura 6.2.4.2 - Resultados do Problema 6.2.4: topologias ótimas.

As Figuras 6.2.4.1 e 6.2.4.2 anteriores apresentam os resultados para a convergência da energia de deformação e para as topologias ótimas, respectivamente, considerando-se o número de pares (a_e,b_e) de ajuste avaliados.

Conclusões

De acordo com as curvas da Figura 6.2.4.1 e topologias da Figura 6.2.4.2, chega-se às seguintes conclusões, considerados a densidade da malha de 40 x 40 e os demais parâmetros do algoritmo de otimização utilizados:

- A convergência da energia de deformação é mais estável quando do emprego de 6 x 6 pares (a_e,b_e) no ajuste dos módulos elásticos efetivos.
- O uso de 6 x 6 pares (a_e,b_e) também implica uma menor escala de cinza (densidades intermediárias) verificada na topologia ótima.
- A topologia ótima mais próxima à encontrada na literatura [29][55] é obtida com a utilização 6 x 6 pares (a_e,b_e).
- Com base no presente problema e no Problema 6.2.3, verifica-se que há uma relação apropriada entre a discretização da célula-base e o número de pares (a_e,b_e) de ajuste no sentido de se obter a topologia ótima correta.

6.3 Otimização Estrutural Topológica

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos através do código de OT implementado, para os problemas envolvendo as funções objetivo discutidas no Capítulo 4.

6.3.1 Problema 6.3.1

<u>Objetivo</u>

Validar o algoritmo de otimização estrutural implementado para o modelo de material ortotrópico com vazios a partir do resultado obtido na literatura.

O problema estrutural apresentado na Figura 6.3.1.1 é considerado.

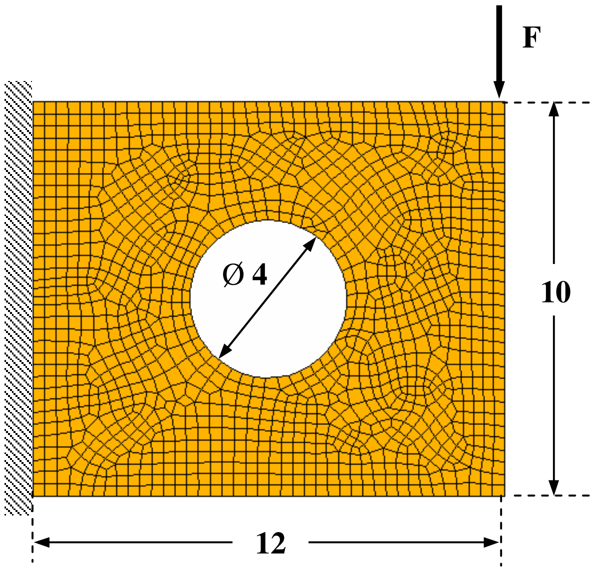


Figura 6.3.1.1 - Suporte engastado com furo central sujeito à carga pontual: Problema 6.3.1.

<u>Dados de entrada</u>

Os dados de entrada do problema são apresentados na Tabela 6.3.1.1 a seguir.

Tabela 6.3.1.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.1.

Identificação	Dados de Entrada
1	M = 1.
2	Modelo com 4207 nós.
3	N_{el} = 1139 (elementos parabólicos de estado plano de tensão são utilizados).
4	Na face esquerda da viga, os deslocamentos nas direções x e y são restritos.
5	F = 1000
6	E = 100 000 e ν = 0,3.
7	t = 1,0.
8	N_h = 40 e 80.
9	p_{ab} = 0,1 (N_h = 80) e 0,2 (N_h = 40).
10	$\overline{V} = 30\%V$ e x_{min} = 0,001.
11	t_p = 0,0001 e I_m = 200
12	δ = 0,02.
13	ζ = 0,006.

Resultados

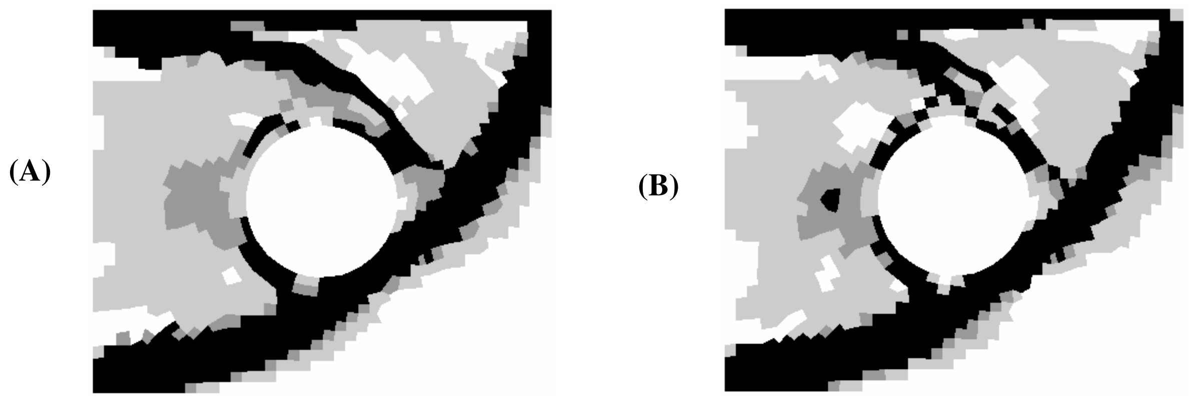


Figura 6.3.1.2 - Topologias ótimas: **(A)** N_h = 40 e p_{ab} = 0,2, e **(B)** N_h = 80 e p_{ab} = 0,1.

A Figura 6.3.1.2 **(A)** anterior apresenta a topologia ótima obtida para uma densidade de malha da célula-base de 40 x 40 elementos e para 6 x 6 pares (a_e,b_e) de ajuste, enquanto que a Figura 6.3.1.2 **(B)** mostra o resultado obtido considerando-se uma célula-base de densidade 80 x 80 e 11 x 11 pares (a_e,b_e).

A Figura 6.3.1.3 apresenta a solução ótima obtida através do programa PLATO, desenvolvido por Hinton e Hassani [29].

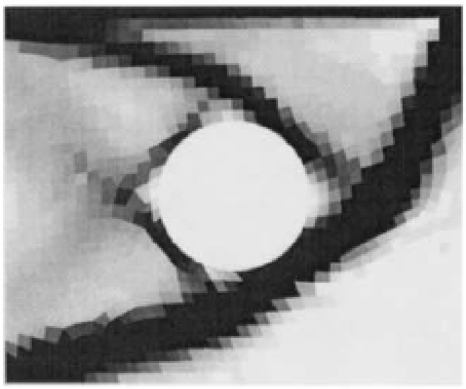
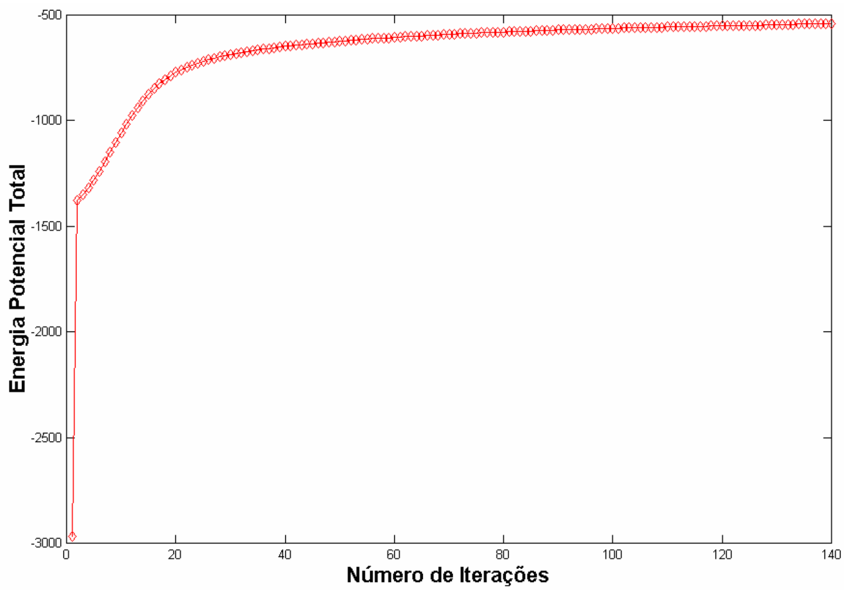


Figura 6.3.1.3 - Topologia ótima obtida com o programa PLATO [29].

(A)



(B)

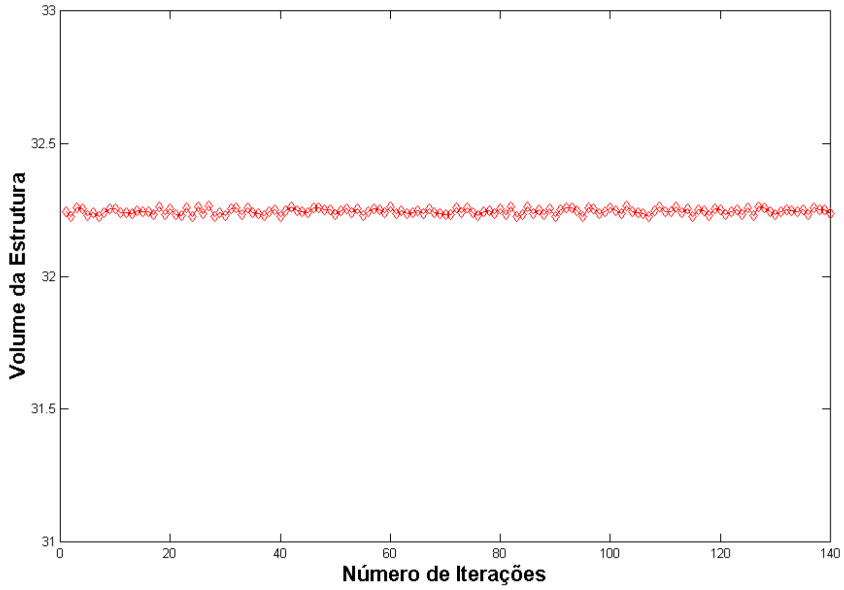


Figura 6.3.1.4 - Históricos: **(A)** função objetivo e **(B)** restrição.

A partir da curva de convergência da função objetivo obtida, Figura 6.3.1.4 **(A)**, verifica-se que na segunda iteração há um aumento acentuado da energia potencial total. Tal fato é esperado em virtude de que é exatamente na segunda iteração que a orientação do material passa a coincidir com aquela da máxima tensão principal, critério este estabelecido para a atualização da referida variável de projeto.

Com relação à restrição, Figura 6.3.1.4 **(B)**, observa-se que a mesma é de fato mantida ativa ao longo do processo de otimização, cujas pequenas oscilações no seu histórico são decorrentes de sua tolerância de violação preestabelecida.

Conclusão

As topologias ótimas da Figura 6.3.1.2, obtidas mediante o algoritmo implementado, mostram-se bem similares àquela da literatura, apresentada na Figura 6.3.1.3. E a partir dos históricos da Figura 6.3.1.4, os comportamentos monotônico crescente da função objetivo e constante do volume da estrutura são constatados conforme esperado, ao longo do processo de otimização. Desta forma, conclui-se que o algoritmo de OT encontra-se validado para o modelo de material ortotrópico.

6.3.2 Problema 6.3.2

Objetivos

Verificar a influência da definição dos carregamentos sobre a topologia ótima obtida, assim como validar o código de otimização implementado para o modelo de material isotrópico com penalidade com base em resultados da literatura.

Duas condições de carregamento são consideradas:

(1) Cargas pontuais atuando de forma simultânea (único caso de carregamento).

(2) Cargas pontuais independentes (três casos de carregamento).

A Figura 6.3.2.1 apresenta o problema estrutural estudado. O mesmo é também resolvido para o modelo de material ortotrópico com vazios.

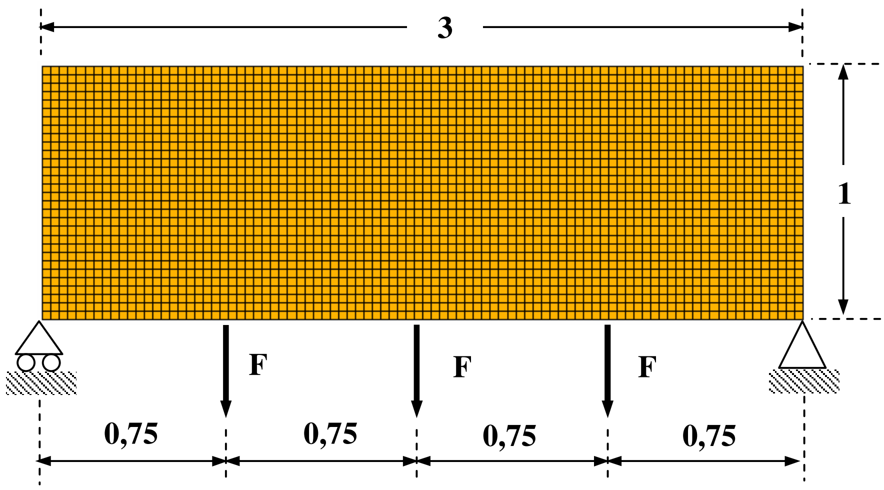


Figura 6.3.2.1 - Viga bi-apoiada sujeita a cargas pontuais: Problema 6.3.2.

Dados de entrada

A Tabela 6.3.2.1 apresenta os dados de entrada do problema.

Tabela 6.3.2.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.2.

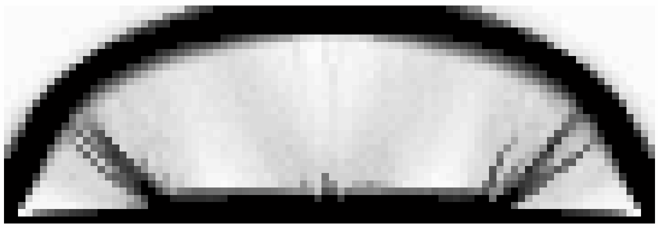
Identificação	Dados de Entrada
1	M = 1 e M = 2.
2	Modelos com 8341 (M = 1) e 2821 (M = 2) nós.
3	N_{el} = 2700; elementos parabólicos no caso de M = 1 e lineares para M = 2.
4	No suporte à esquerda, restrição ao deslocamento na direção y; no suporte à direita, restrição ao deslocamento em ambas direções x e y.
5	F = 1, N = 3 e w_j = 1.
6	E = 100 000 e ν = 0,3.
7	t = 1,0.
8	N_h = 40 (M = 1).
9	p_{ab} = 0,2 (M = 1).
10	$\overline{V}$ = 40%V e x_{min} = 0,001.
11	São realizadas 130 iterações.
12	δ = 0,02.
13	ζ = 0,015 (M = 1) e 0,2 (M = 2).
14	p = 3,4 e η = 2 (M = 2).
15	r_{min} =1,2 (M = 2).

Resultados

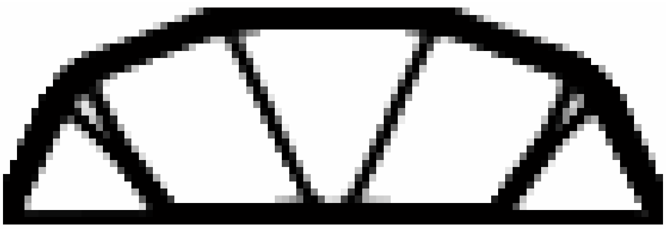
A seguir, na Figura 6.3.2.2, são apresentados os resultados obtidos para a condição de carregamentos simultâneos, Caso **(1)**, e para cada modelo de material adotado; a solução obtida na literatura por Bendsøe e Sigmund [12], através do SIMP, é também considerada.

Para o Caso **(1)** de carregamento, utilizando-se o modelo de material ortotrópico com vazios são necessários 163 787 s (~ 46 h) para se chegar à solução ótima, enquanto que para o modelo de material isotrópico com penalidade o tempo de processamento do respectivo cálculo é de 18 441 s (~ 5 h).

Modelo ortotrópico com vazios



Modelo isotrópico com penalidade



Bendsøe e Sigmund [12]

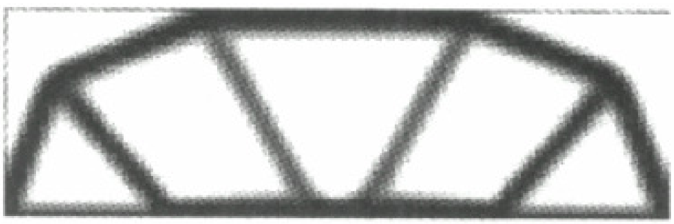
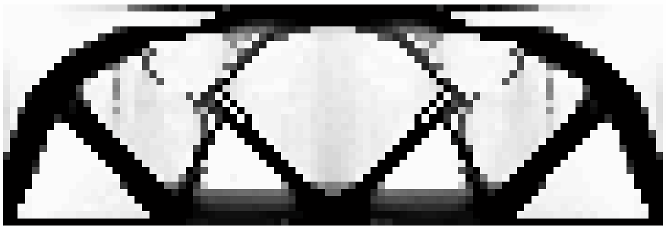


Figura 6.3.2.2 - Resultados do Problema 6.3.2: Caso de carregamento **(1)**.

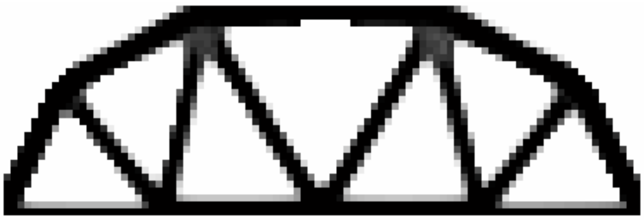
Na Figura 6.3.2.3 seguinte, são apresentados os resultados obtidos para a condição de carregamentos independentes, Caso **(2)**.

Para o Caso **(2)** de carregamento, os tempos de processamento de cálculo para os modelos de material ortotrópico com vazios e isotrópico com penalidade são, respectivamente, 198 594 s (~ 55 h) e 26 717 s (~ 7,5 h).

Modelo ortotrópico com vazios



Modelo isotrópico com penalidade



Bendsøe e Sigmund [12]

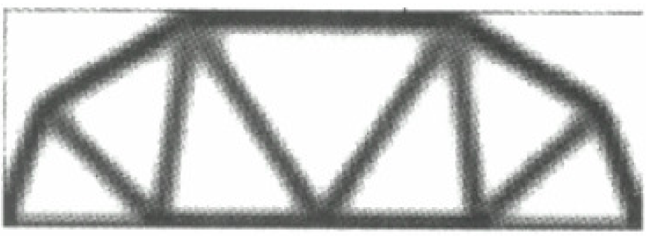
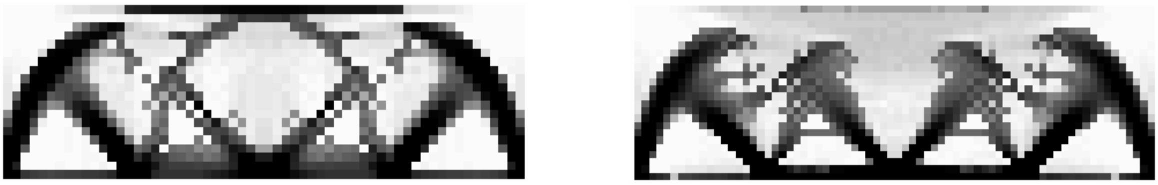


Figura 6.3.2.3 - Resultados do Problema 6.3.2: Casos de carregamento **(2)**.

A escolha por uma célula-base de discretização 40 x 40 e por 6 x 6 pares de ajuste para a solução do problema foi feita com base nos resultados da Figura 6.3.2.4 a seguir, que se refere ao Caso **(2)** de carregamento e a uma malha da estrutura constituída de 60 x 20 elementos finitos. A partir da mesma verifica-se que uma topologia ótima mais nítida, com menor número de densidades intermediárias, é obtida quando do uso de tais parâmetros de homogeneização, Figura 6.3.2.4 **(a)**, comparando-se com o resultado obtido através do uso de uma célula-base de discretização 80 x 80 e de 11 x 11 pares de ajuste, Figura 6.3.2.4 **(b)**.



(a) Célula-base 40 x 40 e 6 x 6 pares de ajuste **(b)** Célula-base 80 x 80 e 11 x 11 pares de ajuste

Figura 6.3.2.4 - Topologias ótimas, Caso **(2)**: malha com 60 x 20 elementos.

<u>Conclusões</u>

De acordo com as topologias ótimas das Figuras 6.3.2.2 e 6.3.2.3, conclui-se que:

- O código de OT implementado encontra-se também validado para o modelo de material isotrópico com penalidade, tendo em vista que as topologias ótimas obtidas com tal modelo, em ambos os casos de carregamento, condizem com aquelas apresentadas na literatura.
- Uma estrutura ótima mais rígida é obtida quando da consideração de múltiplos carregamentos atuando na estrutura, Caso **(2)**.
- As topologias ótimas obtidas com o uso do modelo ortotrópico com vazios tendem para aquelas obtidas com o modelo de material isotrópico com penalidade. No Caso **(1)**, é sugerido o emprego de um material microporoso (de vazios retangulares) na região interna da estrutura. Já no Caso **(2)** de carregamento, a topologia ótima se mostra mais nítida, com uma menor escala de cinza.
- Com relação ao modelo de material ortotrópico, para o problema investigado e Caso **(2)** de carregamento, verifica-se que o emprego de uma célula-base de discretização 40 x 40 e de 6 x 6 pares de ajuste implica topologia ótima mais nítida, com uma menor quantidade de densidades intermediárias, comparado ao uso de célula-base de discretização 80 x 80 e de 11 x 11 pares de ajuste.

6.3.3 Problema 6.3.3

Objetivo

Verificar a topologia ótima e o comportamento da curva de convergência da função objetivo obtidos, considerando-se o problema envolvendo a ação do peso próprio da referência ilustrado na Figura 6.3.3.1.

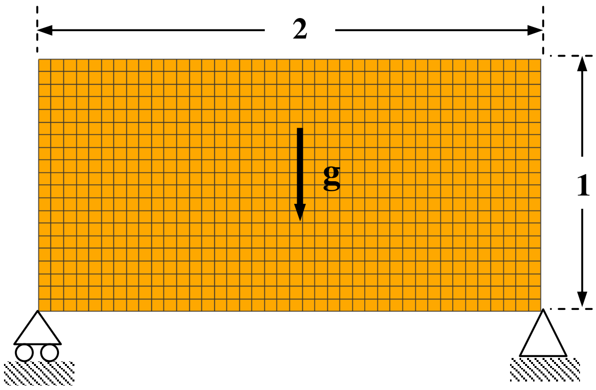


Figura 6.3.3.1 - Viga bi-apoiada sujeita à ação do peso próprio: Problema 6.3.3.

Dois casos de estudo são considerados:

(1) Topologia final com volume correspondendo a **10%** do inicial.

(2) Topologia final com volume correspondendo a **32,5%** do inicial.

Dados de entrada

Os dados de entrada do problema são apresentados na Tabela 6.3.3.1 a seguir.

Tabela 6.3.3.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.3.

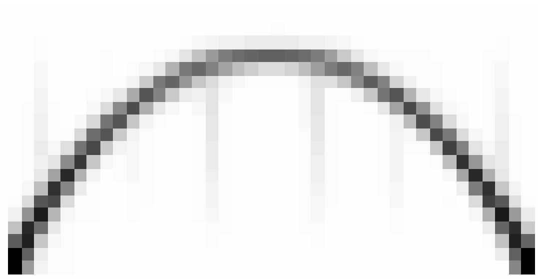
Identificação	Dados de Entrada
1	M = 1 e M = 2.
2	Modelos com 2521 (M = 1) e 861 (M = 2) nós.
3	N_{el} = 800, elementos parabólicos no caso de M = 1 e lineares para M = 2.
4	No suporte à esquerda, restrição ao deslocamento na direção y; no suporte à direita, restrição ao deslocamento em ambas direções x e y.
5	$g_z = -9{,}81$
6	E = 100 000, $\nu = 0{,}3$ e $\rho_0 = 1{,}0$.
7	t = 1,0.
8	N_h = 80.
9	p_{ab} = 0,1.
10	Caso **(1)**: $\overline{V} = 10\%V$ e $x_{min} = 0{,}01$; Caso **(2)**: $\overline{V} = 32{,}5\%V$ e $x_{min} = 0{,}001$
11	t_p = 0,00001 e I_m = 200
12	$\delta = 0{,}01$.
13	$\zeta = 0{,}01$ (M = 1) e 0,2 (M = 2).

Resultados

A Figura 6.3.3.2 apresenta, para o Caso **(1)** de estudo, as topologias finais obtidas para os modelos de material ortotrópico e isotrópico, assim como a topologia ótima da literatura obtida via SIMP modificado [13]. Conforme esperado, as topologias são semelhantes a das pontes estruturais existentes.

Modelo ortotrópico com vazios

Modelo isotrópico com penalidade



Bruyneel e Duysinx [13]

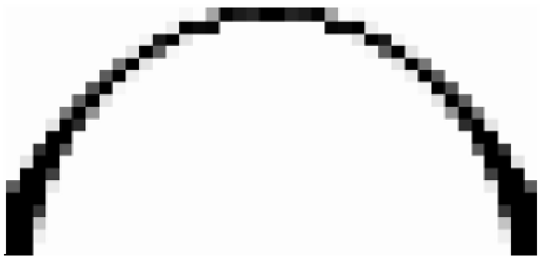
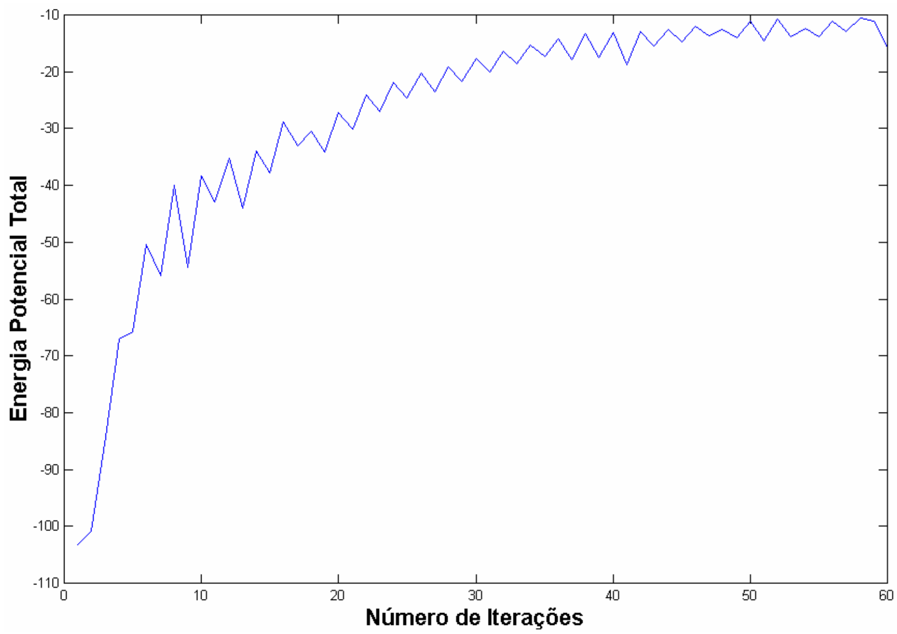


Figura 6.3.3.2 - Resultados do Problema 6.3.3: topologias ótimas, Caso **(1)**.

Modelo ortotrópico com vazios



Modelo isotrópico com penalidade

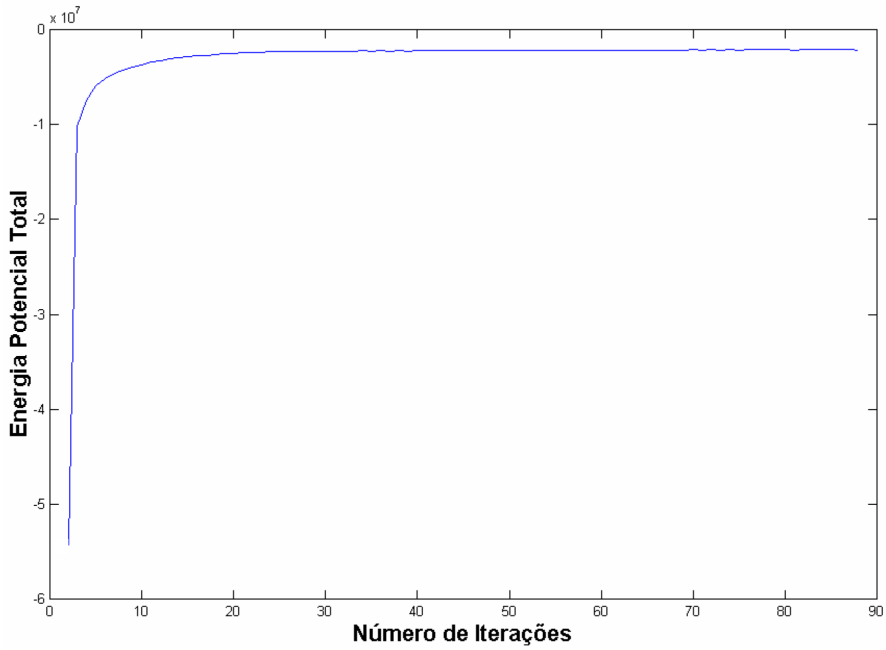


Figura 6.3.3.3 - Resultados do Problema 6.3.3: históricos da função objetivo, Caso **(1)**.

A Figura 6.3.3.3 anterior mostra as curvas de convergência da função objetivo para cada modelo de material.

As Figuras 6.3.3.4 e 6.3.3.5 apresentam os resultados obtidos para o Caso **(2)** de estudo.

Modelo ortotrópico com vazios

Modelo isotrópico com penalidade

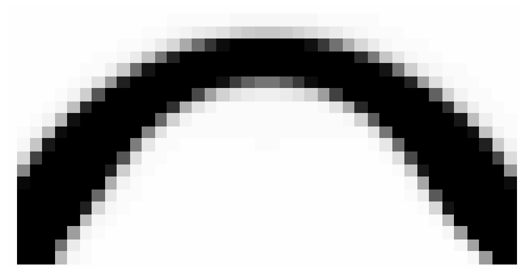
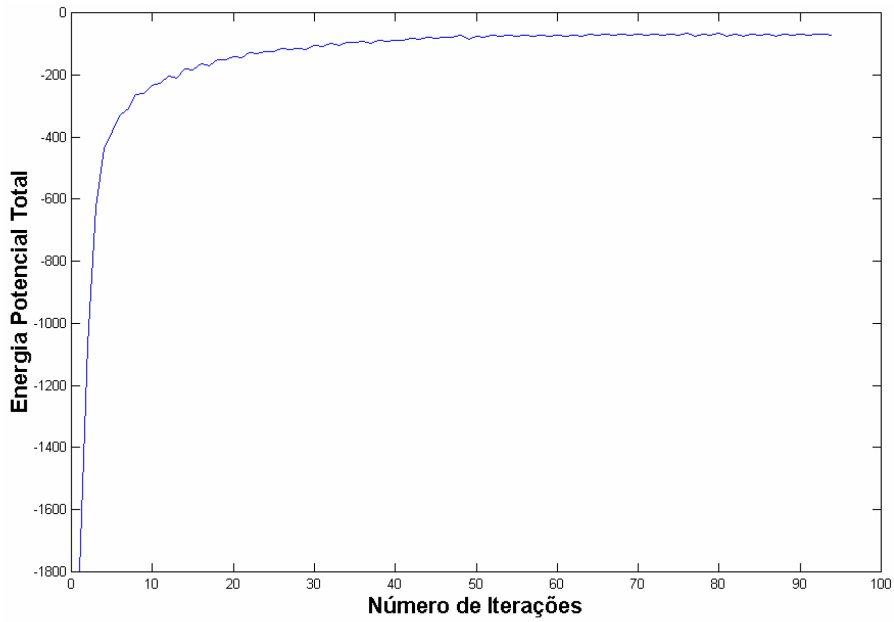


Figura 6.3.3.4 - Resultados do Problema 6.3.3: topologias ótimas, Caso **(2)**.

Modelo ortotrópico com vazios



Modelo isotrópico com penalidade

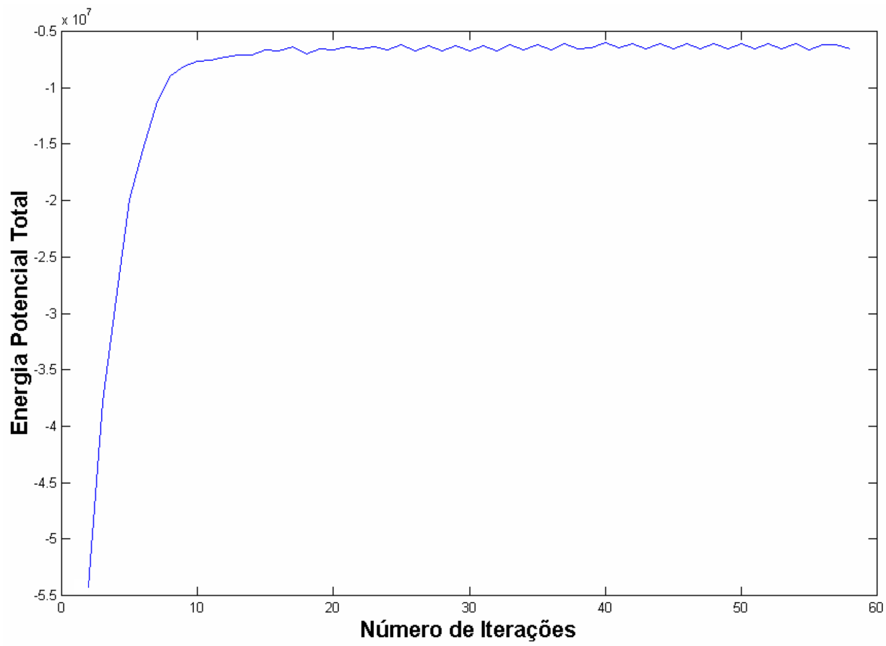


Figura 6.3.3.5 - Resultados do Problema 6.3.3: históricos da função objetivo, Caso **(2)**.

Com base nas topologias da Figura 6.3.3.2, observa-se que para o modelo de material ortotrópico a topologia ótima contém uma grande quantidade de densidades intermediárias, à exceção das regiões próximas aos apoios, constituídas de material completamente sólido. No caso do modelo de material isotrópico, uma escala de cinza é também verificada, entretanto, em menor quantidade. Neste caso, o aspecto irregular das densidades intermediárias na topologia ótima é de fato esperado quando do uso do modelo clássico de material isotópico com penalidade [13]. Para contornar tal inconveniente, Bruyneel e Duysinx [13] propõem uma modificação no modelo SIMP convencional e chegam à topologia ótima apresentada na Figura 6.3.3.2. No Caso **(2)** de estudo, Figura 6.3.3.4, onde uma maior quantidade de material é utilizada, tal aspecto irregular da escala de cinza não é mais verificado na solução ótima, e para o modelo de material ortotrópico o número de densidades intermediárias passa a ser reduzido.

Com relação às curvas de convergência das Figuras 6.3.3.3 e 6.3.3.5, verifica-se que para ambos os modelos estas tendem a manter o comportamento monotônico ao longo do processo de otimização, à semelhança daquele observado no caso estático onde as inércias são desprezadas. Bruyneel e Duysinx [13] não chegam à mesma constatação para o modelo de material isotrópico. Os referidos autores consideram como função objetivo a flexibilidade média, cuja sensibilidade com respeito à variável de projeto pode ser positiva ou negativa ao longo do processo de otimização, dificultando a convergência. E de forma a garantir a característica monotônica da curva de convergência da função objetivo, Bruyneel e Duysinx empregam o *Método das Assíntotas Móveis Baseado no Gradiente* (MAMBG) como otimizador. No presente trabalho, o comportamento monotônico é mantido em virtude do uso da energia potencial total como função objetivo, cuja sensibilidade com relação à variável de projeto é sempre positiva, evitando instabilidades no otimizador. No caso do modelo ortotrópico, a sensibilidade é mantida sempre negativa.

<u>Conclusões</u>

De acordo com os resultados obtidos, conclui-se que:

- As topologias ótimas obtidas condizem com as da literatura.

- O caráter monotônico da curva de convergência da função objetivo é mantido quando do emprego de ambos modelos de material.

- Para ambos os modelos de material, topologias ótimas com uma menor escala de cinza são obtidas para uma maior quantidade de material utilizada, assim como uma curva de convergência mais estável para o caso de modelo de material ortotrópico.

6.3.4 Problema 6.3.4

<u>Objetivo</u>

Resolver através do emprego do modelo de material isotrópico com penalidade um problema de maximização da freqüência fundamental solucionado com o uso do modelo ortotrópico com vazios [38].

O problema estrutural da viga bi-engastada com massa concentrada não-estrutural em seu centro, apresentado na Figura 6.3.4.1, é estudado.

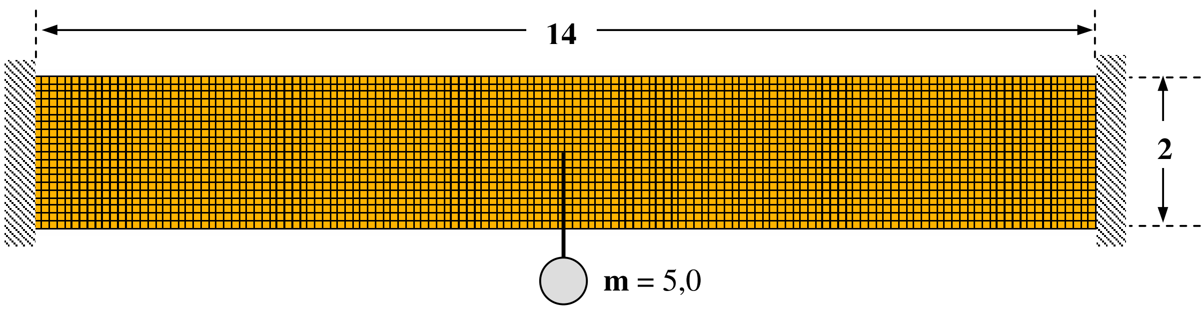


Figura 6.3.4.1 - Viga bi-engastada com massa central não-estrutural: Problema 6.3.4.

<u>Dados de entrada</u>

A Tabela 6.3.4.1 a seguir contém os dados de entrada do problema.

Tabela 6.3.4.1 - Dados de entrada do Problema 6.3.4.

Identificação	Dados de Entrada
1	M = 2.
2	Modelo com 2961 nós.
3	N_{el} = 2800 e elementos lineares.
4	Nas regiões de engaste, restrição ao deslocamento nas direções x e y.
5	$N_m = 3$ e $w_i = 1/3$.
6	E = 100 000, ν = 0,3 e ρ_0 = 1,0.
7	t = 1,0.
10	$\overline{V} = 50\%V$ e x_{min} = 0,001.
11	t_p = 0,00001 e I_m = 200
12	δ = 0,02.
13	ζ = 0,2.
14	p = 3,5 e η = 2.
15	r_{min} =1,2.

<u>Resultados</u>

A Figura 6.3.4.2 apresenta as topologias ótimas obtidas para o problema, através do algoritmo implementado (modelo de material isotrópico com penalidade) e do algoritmo de Ma et al. [38], que utiliza o modelo de material ortotrópico com vazios.

Código MATLAB implementado

Ma et al. [38]

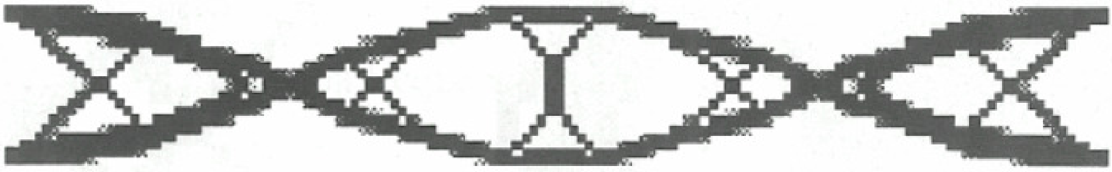


Figura 6.3.4.2 - Problema 6.3.4: topologias ótimas obtidas pelo código MATLAB e literatura.

As Figuras 6.3.4.3 e 6.3.4.4 mostram, respectivamente, a curva de convergência da função objetivo e o histórico das três primeiras freqüências naturais da estrutura obtidas.

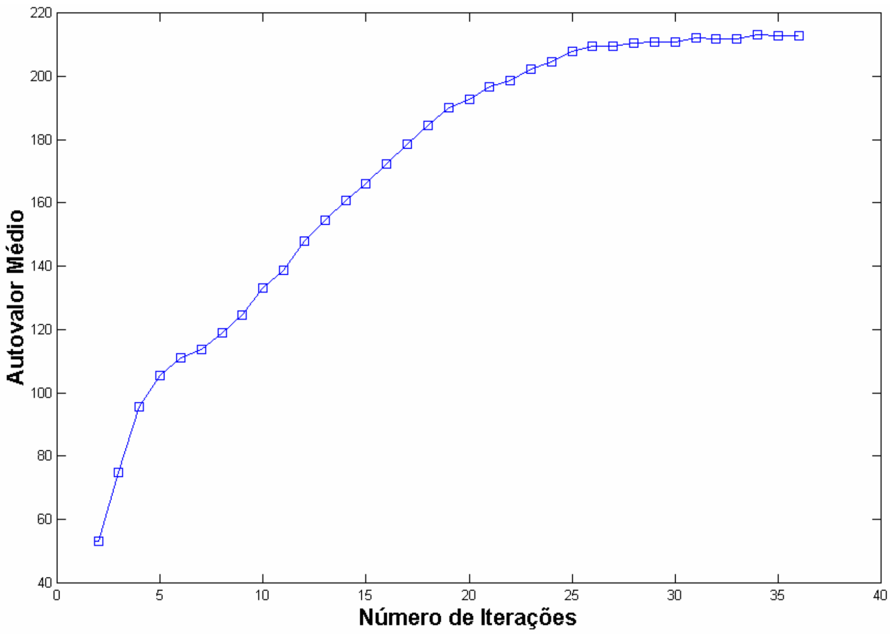


Figura 6.3.4.3 - Problema 6.3.4: histórico da função objetivo.

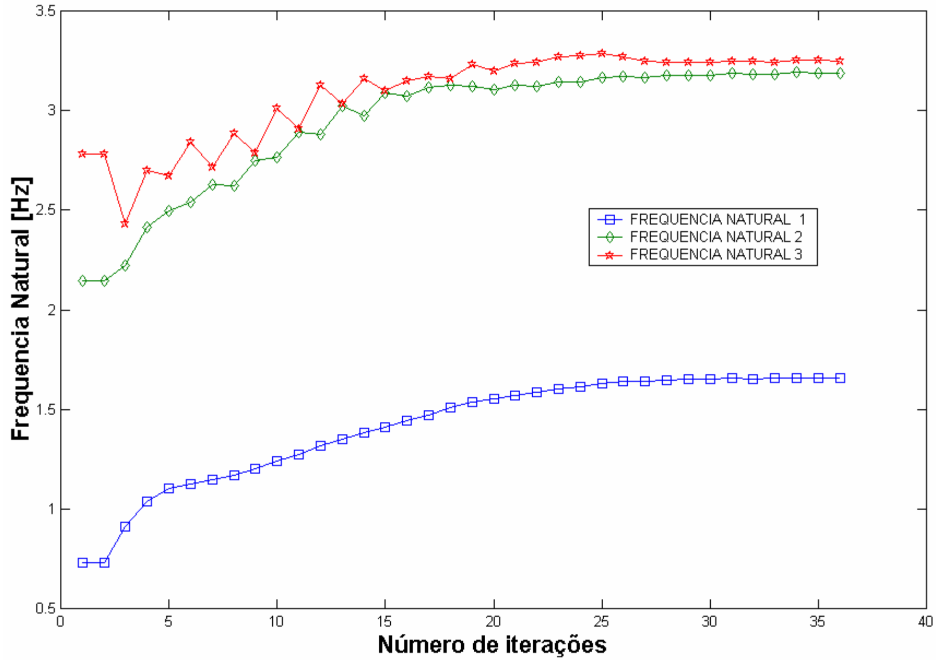


Figura 6.3.4.4 - Problema 6.3.4: histórico das três primeiras freqüências naturais.

A partir da interpretação da topologia da Figura 6.3.4.2 é gerada uma nova topologia para a estrutura, visando-se à viabilidade de fabricação. A mesma é apresentada na Figura 6.3.4.5.

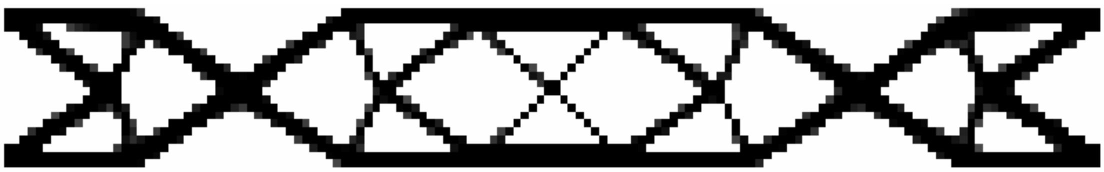


Figura 6.3.4.5 - Problema 6.3.4: interpretação da topologia ótima obtida.

A Figura 6.3.4.6 seguinte ilustra os modos normais correspondentes às três primeira freqüências naturais, relativos à estrutura original e à estrutura ótima final da Figura 6.3.4.5.

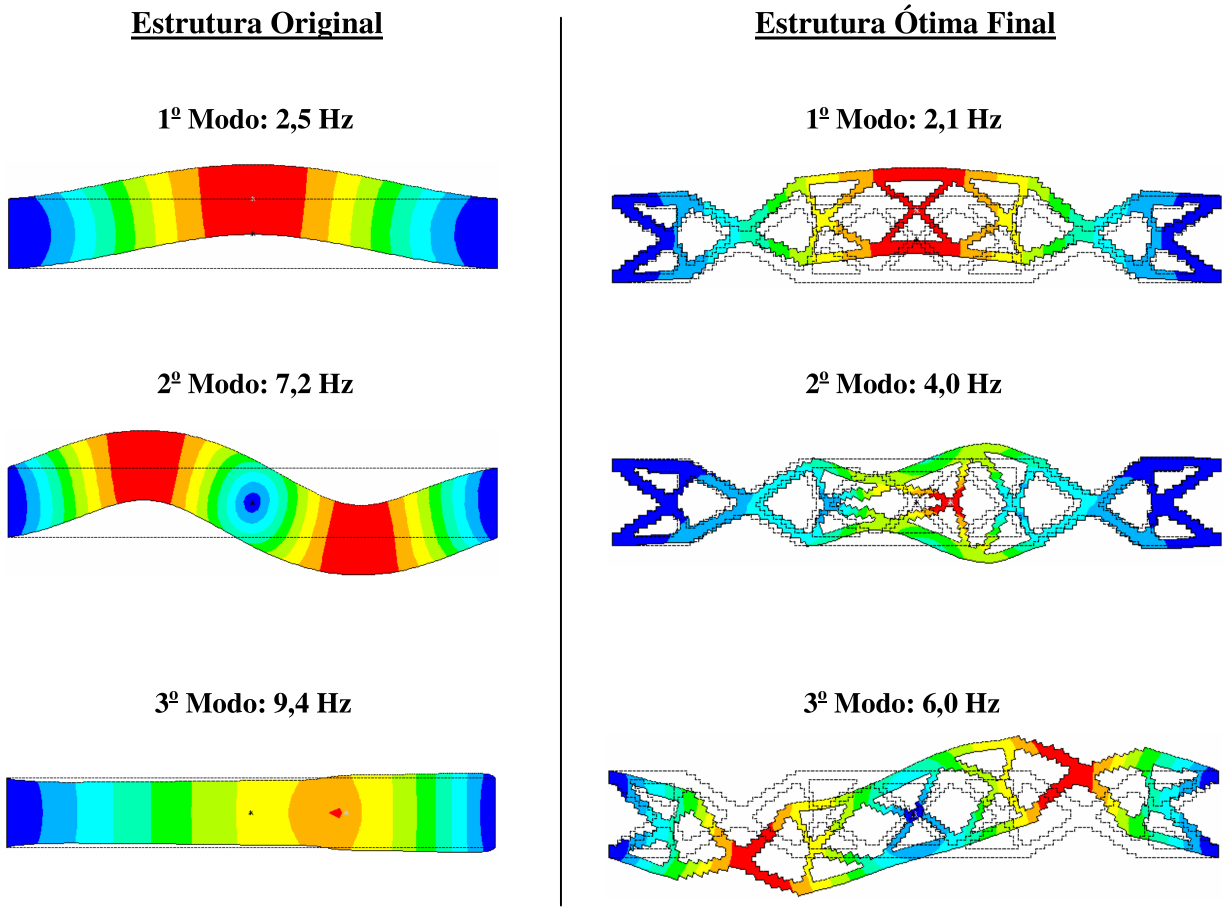


Figura 6.3.4.6 - Problema 6.3.4: modos normais das estruturas original e ótima.

Com base na Figura 6.3.4.6, verifica-se que os segundo e terceiro modos da estrutural ótima final encontram-se invertidos com relação àqueles da estrutura original. Ainda que investigada a topologia ótima interpretada, tal fato sugere que a não-inversão dos autovalores não necessariamente implica uma não-inversão dos correspondentes autovetores. A enorme quantidade de material retirada (no caso, 50% da massa inicial) leva a uma descaracterização da rigidez da estrutura original, conseqüentemente dificultando a manutenção da ordem de seus modos normais quando considerada a estrutura ótima.

Conclusões

De posse dos resultados obtidos, é possível concluir que:

- A topologia ótima obtida é bem similar a da literatura.
- O algoritmo implementado é capaz de prevenir a inversão dos autovalores durante o processo de otimização, estabilizando a curva de convergência.
- A freqüência fundamental da estrutura considerando-se sua topologia ótima viável encontra-se bem próxima daquela obtida com a topologia original e uma redução de massa da ordem de 50% é conseguida.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões Específicas

A seguir são apresentadas as conclusões acerca do trabalho desenvolvido, relacionadas com cada um dos tópicos investigados.

Método da Homogeneização

A partir do estudo do efeito da densidade da malha da célula-base sobre o tensor elástico homogeneizado, conclui-se, em princípio, que uma maior discretização de tal célula implica melhores resultados tanto no que se refere aos valores dos módulos elásticos efetivos quanto no comportamento da curva de convergência da função objetivo e no aspecto da topologia ótima obtida.

Ainda que menos representativa com relação aos valores dos módulos elásticos homogeneizados, uma menor discretização da célula-base pode ser considerada desde que um número apropriado de pares (a_e,b_e) de ajuste seja adotado. Resultados de convergência e de topologia final similares àqueles obtidos com uma maior discretização da célula-base podem ser atingidos, até mesmo fornecendo topologia ótima mais nítida, manufaturável, como no caso de múltiplos carregamentos.

Maximização da Rigidez: Único Caso de Carregamento

Mesmo diante de uma malha irregular, o algoritmo de otimização implementado é capaz de fornecer resultados satisfatórios.

Maximização da Rigidez: Múltiplos Casos de Carregamento

A definição e interpretação dos carregamentos aos quais está submetida a estrutura têm forte influência na solução ótima. Topologias ótimas de maior rigidez são verificadas quando as várias cargas de projeto são assumidas independentes. A abordagem de múltiplos carregamentos pode ser utilizada a favor da segurança.

Maximização da Rigidez: Ação do Peso Próprio

Para ambos os modelos de material estudados, a escolha da energia potencial total como função objetivo preserva a característica monotônica da curva de convergência da função objetivo, sem ser necessário para tal quaisquer modificações no algoritmo tradicional.

Maximização da Freqüência Fundamental

A versatilidade do modelo de material isotrópico com penalidade é comprovada na solução do problema dinâmico de maximização da freqüência natural, sendo tal modelo facilmente implementado a partir do algoritmo para resolução de problemas estáticos e promovendo de forma simples e eficiente a erradicação do inconveniente relacionado a autovalores repetidos.

7.2 Conclusão Geral e Sugestões de Continuidade

Dentro dos critérios de projeto e restrições propostos, os algoritmos implementados tiveram sua eficácia comprovada mediante a resolução de problemas clássicos existentes na literatura. E com a implementação dos modelos de material ortotrópico com vazios e isotrópico com penalidade foi possível observar e explorar as principais características e potencialidades de cada abordagem.

A seguir, são sugeridas propostas para o desenvolvimento de trabalhos futuros envolvendo o tema estudado, os quais podem utilizar os algoritmos implementados no presente trabalho:

- Continuação do estudo da influência da discretização da célula-base e do número de pares (a_e,b_e) de ajuste sobre a topologia ótima e sobre a curva de convergência da função objetivo; através, por exemplo, da resolução de novos problemas, do emprego de elementos finitos de alta ordem, ou do uso de técnicas de malhas adaptativas.

- Investigação acerca da possível inversão dos modos, inerente ao problema de otimização com critério de projeto em freqüência, e de possíveis métodos de contorno.

- Estudo do problema de vibração livre usando o modelo de material isotrópico com penalidade para os casos de maximização da distância entre dois autovalores e aproximação de autovalores específicos a valores desejados.

- Resolução de problemas de resposta em freqüência, considerando-se o efeito do amortecimento estrutural.

- Aplicação dos modelos isotrópico e ortotrópico de material na solução de problemas governados pela teoria da poroelasticidade.

- Extensão dos referidos algoritmos para aplicações 3D e implementação dos códigos em ambiente de linguagem de programação orientada a objetos (OOP).

Referências Bibliográficas

[1] Allaire, G. *Shape optimization by the homogenization method.* New York: Springer, 2002, 456p.

[2] Allaire, G. , Jouve, F. , Maillot, H. Topology optimization for minimum stress design with the homogenization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.28, pp.87-98, 2004.

[3] Ansola, R. , Canales, J. , Tárrago, J. A. , Rasmussen J. An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures. *Computers and Structures*, v.80, pp.449-458, 2002.

[4] Bathe, K.J. *Finite elements procedures*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996, 1037p.

[5] Bazaraa, M. S. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 2nd ed. John Wiley & Sons, 1993.

[6] Belblidia, F. , Bulman, S. Constrained adaptive topology optimization for vibrating shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.22, pp.167-176, 2001.

[7] Belytschko, T., Xiao S. P., Parimi C. Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.57, (8), pp.1177-1196, 2003.

[8] Bendsøe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v.1, pp.193-202, 1989.

[9] Bendsøe, M. P , Díaz, A. R. , Lipton, R. , Taylor, J. E. Optimal design of material properties and material distribuition for multiple loading conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, pp.1149-1170, 1995.

[10] Bendsøe, M. P. , Guedes, J. M. , Haber, R. B., Pedersen, P. and Taylor, J. E. An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural desgin. *Journal of Applied Mechanics*, v.61, pp.930-937, 1994.

[11] Bendsøe, M. P. , Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.71, pp.197-224, 1988.

[12] Bendsøe, M. P. , Sigmund, O. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Berlin: Springer, 2004, 370p.

[13] Bruyneel, M. , Duysinx, P. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight. *Structural Optimization*, 2004.

[14] Bulman, S. , Sienz, J., Hinton, E. Comparisons between algorithms for structural topology optimization using a series of benchmark studies. *Computers and Structures*, v.79, pp.1203-1218, 2001.

[15] Céa, J. , Stéphane, G. , Guillaume, P. , Masmoudi, M. The shape and topological optimizations connection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.188, pp.713-726, 2000.

[16] Chen, B. C. , Kikuchi, N. Topology optimization with design-dependent loads. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.37, pp.57-70, 2001.

[17] Cheng, H. C., Kikuchi, N. , Ma, Z. D. An improved approach for determining the optimal orientation of orthotropic material. *Structural Optimization*, v.8, pp.101-112, 1994.

[18] Díaz, A. R. , Bendsøe, M. P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. *Structural Optimization*, v.4, pp.17-22, 1992.

[19] Díaz, A. R. , Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.35, pp.1487-1502, 1992.

[20] Fernandes, P. , Guedes, J. M. , Rodrigues, H. Topology optimization of three-dimensional linear elastic structures with a constraint on "perimeter". *Computers and Structures*, v.73, pp.583-594, 1999.

[21] Fujji, D. , Kikuchi, N. Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the SLP method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.19, pp.113-121, 2000.

[22] Gea, H. C. Topology optimization: a new microstructure-based desgn domain method. *Computers and Structures*, v.61, (5), pp.781-788, 1996.

[23] Guedes, J. M. , Kikuchi, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.83, pp.143-198, 1990.

[24] Haber, R. B. , Jog, C.S. , Bendsøe, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural Optimization*, v.11, pp.1-12, 1996.

[25] Haftka, R. T. , Gürdal, Z. *Elements of structural opitimization*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999, 481p.

[26] Hammer, V. B. , Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.19, pp.85-92, 2000.

[27] Hassani, B. , Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structures*, v.69, pp.707-717, 1998.

[28] Hassani, B. , Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization II – analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computers and Structures*, v.69, pp.719-738, 1998.

[29] Hassani, B. , Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization III – topology optimization using optimality criteria. *Computers and Structures*, v.69, pp.739-756, 1998.

[30] Hassani, B. , Hinton, E. *Homogenization and Structural Topology Optimization*. Springer, 1999, 268p.

[31] Hibeller, R. C. *Mechanics of Materials*. New Jersey: Prentice Hall, 1997, 855p.

[32] Jog, C. S. , Haber, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.130, pp.203-226, 1996.

[33] Kane, C. , Schoenauer, M. Topological optimum design using genetic algorithms. *Control and Cybernetics*, v.25, pp.1059-1088, 1996.

[34] Kim, H. , Querin, O. M. , Steven, G. P. On the development of structural optimisation and its relevance in engineering design. *Design Studies*, v.23, pp.85-102, 2002.

[35] Krog, L. A. , Olhoff, N. Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives. *Computers and Structures*, v.72, pp.535-563, 1999.

[36] Leiva, J. P. , Watson, B. C. , Kosaka I. Modern structural optimization concepts applied to topology optimization. *Proceedings of the 40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference*, 1999, pp.1589-1596.

[37] Lin, C.-Y. , Chao, L.-S. Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.20, pp.125-137, 2000.

[38] Ma, Z.-D. , Kikuchi, N. , Cheng, H.-C. Topological design for vibrating structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.121, pp.259-280, 1995.

[39] Maia, N. M. N., Silva, J. M. M. *Theoretical and experimental modal analysis*. Somerset: Research Studies, 1997, 468p.

[40] Min, S. , Nishiwaki, S. , Kikuchi, N. Unified topology design of static and vibrating structures using multiobjective optimization. *Computers and Structures*, v.75, pp.93-116, 2000.

[41] Mlejnek, H. P. , Schirrmacher, R. An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.106, pp.1-26, 1993.

[42] Nishiwaki, S. , Min, S. , Yoo, J. , Kikuchi, N. Optimal structural design considering flexibility. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.190, pp. 4457-4504, 2001.

[43] Nishiwaki, S. , Saitou, K. , Min, S. , Kikuchi, N. Topological design considering flexibility under periodic loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.19, pp.4-16, 2000.

[44] Olhoff, N. , Bendsøe, M. P. , Rasmussen, J. On CAD-integrated structural topology and design optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.89, pp.259-279, 1991.

[45] Olhoff, N. , Taylor, J. E. On structural optimization. *Jounal of Applied Mechanics*, v.50, pp.1139-1151, 1983.

[46] Pedersen, P. On optimal orientation of orthotropic materials. *Structural Optimization*, v.1, pp.101-106, 1989.

[47] Pereira, J. T. , Fancello, E. A. , Barcellos, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2003.

[48] Rahmatalla, S. F., Swan, C. C. A Q4/Q4 continuum structural topology implementation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.27, pp.130-135, 2004.

[49] Reddy, J. N. *An introduction to the finite element method*. Singapore: McGraw-Hill, 1993.

[50] Rozvany, G. I. N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.21, pp.90-108, 2001.

[51] Rozvany, G. I. N. , Zhou, M., BirkerT. Generalized shape optimization. *Structural Optimization*, v.4, pp.250-254, 1992.

[52] Sienz, J. , Hinton, E. Reliable structural optimization with error estimation, adaptivity and robust sensitivity analysis. *Computers and Sructures*, v.64, pp.31-63, 1997.

[53] Sigmund, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.21, pp.120-127, 2001.

[54] Sigmund, O. , Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, v.16, pp.68-75, 1998.

[55] Suzuki, K. , Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.93, pp.291-318, 1991.

[56] Tang, P.-S. , Chang, K.-H. Integration of topology and shape optimization for design of structural components. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.22, pp.65-82, 2001.

[57] Vanderplaats, G. N. *Numerical optimization techniques for engineering design with applications*. New York: MacGraw-Hill, 1984, 333p.

[58] Wang, M. Y. , Zhou, S. , Ding, H. Nonlinear diffusions in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.28, pp.262-276, 2004.

[59] Wang, M. Y. , Wang, X. , Guo, D. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.192, pp.227-246, 2003.

[60] Xie, Y. M. and Steven, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, v.49, pp.885-896, 1993.

[61] Yang, R. J. Multidiscipline topology optimization. *Computers & Structures*, v.63, (6), p. 1205-1212, 1997.

[62] Yang, R. J. , Chuang, C. H. Optimal topology design using linear programming. *Computers and Structures*, v.52, (2), pp.265-275, 1994.

[63] Youn, S.-K. , Park, S.-H. A study on the shape extraction process in the structural topology optimization using homogenized material. *Computers and Structures*, v.62, (3), pp.527-538, 1997.

[64] Zhou, M. , Haftka, R. T. A comparison of optimality criteria methods for stress and displacement constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.124, pp.253-271, 1995.

[65] Zhou, M. , Rozvany, G. I. N. The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.89, pp.309-336, 1991.

[66] Zhou, M. , Shyy, Y. K. , Thomas, H.L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.21, pp.152-158, 2001.

Apêndice A

Caso (1): $k = l = 1$

Solução nodal em nível microscópico

Os detalhes da transformação da Equação (3.3.4.8) na Equação (3.3.4.9) são apresentados a seguir:

Escrevendo a equação (3.3.4.8) na forma matricial, tem-se:

$$\int_{Y_S}\left[\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\{D_{1111} \quad D_{1122} \quad 0\}\begin{Bmatrix}\partial X_1^{11}/\partial y_1\\ \partial X_2^{11}/\partial y_2\\ 0\end{Bmatrix}+\right.$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right)\{0 \quad 0 \quad D_{1212}\}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \partial X_1^{11}/\partial y_1+\partial X_2^{11}/\partial y_2\end{Bmatrix}+$$

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\{D_{1122} \quad D_{2222} \quad 0\}\begin{Bmatrix}\partial X_1^{11}/\partial y_1\\ \partial X_2^{11}/\partial y_2\\ 0\end{Bmatrix}\right]d\mathbf{Y}=\int_{Y_S}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y_2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}D_{1111}\\ D_{1122}\end{Bmatrix}d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.8a)}$$

Colocando em evidência os vetores da Equação (3.3.4.8a):

$$\int_{Y_s}\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\{D_{1111} \quad D_{1122} \quad 0\}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\{D_{1122} \quad D_{2222} \quad 0\}\right)\begin{Bmatrix}\partial X_1^{11}/\partial y_1\\ \partial X_2^{11}/\partial y_2\\ 0\end{Bmatrix}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right)\{0 \quad 0 \quad D_{1212}\}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \partial X_1^{11}/\partial y_1+\partial X_2^{11}/\partial y_2\end{Bmatrix}\right]d\mathbf{Y}=\int_{Y_s}\begin{Bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}D_{1111}\\ D_{1122}\end{Bmatrix}d\mathbf{Y}$$

$$\int_{Y_s}\left[\begin{Bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}D_{1111} & D_{1122} & 0\\ D_{1122} & D_{2222} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial X_1^{11}/\partial y_1\\ \partial X_2^{11}/\partial y_2\\ 0\end{Bmatrix}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right)\{0 \quad 0 \quad D_{1212}\}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \partial X_1^{11}/\partial y_1+\partial X_2^{11}/\partial y_2\end{Bmatrix}\right]d\mathbf{Y}=\int_{Y_s}\begin{Bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}D_{1111}\\ D_{1122}\end{Bmatrix}d\mathbf{Y}$$

$$\int_{Y_s}\begin{Bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}D_{1111} & D_{1122} & 0\\ D_{1122} & D_{2222} & 0\\ 0 & 0 & D_{1212}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial X_1^{11}/\partial y_1\\ \partial X_2^{11}/\partial y_2\\ \partial X_1^{11}/\partial y_1+\partial X_2^{11}/\partial y_2\end{Bmatrix}d\mathbf{Y}=$$

$$\int_{Y_s}\begin{Bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}D_{1111}\\ D_{1122}\end{Bmatrix}d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.8b)}$$

Reescrevendo o segundo membro da Equação (3.3.4.8b), esta passa a:

$$\int_{Y_s}\begin{Bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}D_{1111} & D_{1122} & 0\\ D_{1122} & D_{2222} & 0\\ 0 & 0 & D_{1212}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial X_1^{11}/\partial y_1\\ \partial X_2^{11}/\partial y_2\\ \partial X_1^{11}/\partial y_1+\partial X_2^{11}/\partial y_2\end{Bmatrix}d\mathbf{Y}=$$

$$\int_{Y_s}\begin{Bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}D_{1111}\\ D_{1122}\\ 0\end{Bmatrix}d\mathbf{Y} \qquad \textbf{(3.3.4.8c)}$$

Aplicando-se o método dos elementos finitos clássico [4][49], os deslocamentos local, X, e virtual, v, são escritos conforme abaixo, para um dado elemento finito:

$$X_p^e = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{u}_{i,p}^e \ , \ \text{para } p = 1{,}2 \qquad \textbf{(3.3.4.8d)}$$

$$v_p^e = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{w}_{i,p}^e \ , \ \text{para } p = 1{,}2 \qquad \textbf{(3.3.4.8e)}$$

Nas Equações (3.3.4.8d) e (3.3.4.8e) acima, $\mathrm{u}_{i,p}$ e $\mathrm{w}_{i,p}$ correspondem aos deslocamentos nodais real e virtual, respectivamente, N_i^e à função de forma associada ao *i*-ésimo nó, e n ao número de nós do elemento finito.

Substituindo as Equações (3.3.4.8d) e (3.3.4.8e) na Equação (3.3.4.8c), e a avaliando ao longo do domínio Ω^e de um dado elemento finito, segue que:

$$\int_{\Omega^e} \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{w}_{i,1}^e \\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{w}_{i,2}^e \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{1111} & \mathrm{D}_{1122} & 0 \\ \mathrm{D}_{1122} & \mathrm{D}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{u}_{i,1}^e \\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{u}_{i,2}^e \end{Bmatrix} d\Omega^e =$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{u}_{i,1}^e \\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i^e \mathrm{u}_{i,2}^e \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.8f)}$$

Considerando-se os seguintes vetores deslocamento $\mathbf{U}^e$ e $\mathbf{W}^e$, e a matriz $\mathbf{N}_e$ abaixo,

$$\mathbf{U}_e = \left\{ \mathrm{u}_{1,1}^e \quad \mathrm{u}_{1,2}^e \quad \ldots \quad \mathrm{u}_{n,1}^e \quad \mathrm{u}_{n,2}^e \right\}^T \qquad \textbf{(3.3.4.8g)}$$

$$\mathbf{W}_e = \left\{ \mathrm{w}_{1,1}^e \quad \mathrm{w}_{1,2}^e \quad \ldots \quad \mathrm{w}_{n,1}^e \quad \mathrm{w}_{n,2}^e \right\}^T \qquad \textbf{(3.3.4.8h)}$$

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} \mathrm{N}_1^e & 0 & \mathrm{N}_2^e & 0 & \mathrm{N}_3^e & 0 & \mathrm{N}_4^e & 0 & \ldots & \mathrm{N}_\mathrm{n}^e & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_1^e & 0 & \mathrm{N}_2^e & 0 & \mathrm{N}_3^e & 0 & \mathrm{N}_4^e & \ldots & 0 & \mathrm{N}_\mathrm{n}^e \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.3.4.8i)}$$

e reorganizando a Equação (3.3.4.8f), escreve-se que:

$$\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_e \mathbf{W}_e)^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{1111} & \mathrm{D}_{1122} & 0 \\ \mathrm{D}_{1122} & \mathrm{D}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \mathbf{N}_e \mathbf{U}_e d\Omega^e =$$

$$\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_e \mathbf{W}_e)^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \mathbf{N}_e^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{1111} & \mathrm{D}_{1122} & 0 \\ \mathrm{D}_{1122} & \mathrm{D}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \mathbf{N}_e \mathbf{U}_e d\Omega^e =$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \mathbf{N}_e^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \mathbf{N}_e \right)^T \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{1111} & \mathrm{D}_{1122} & 0 \\ \mathrm{D}_{1122} & \mathrm{D}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \mathbf{N}_e \mathbf{U}_e d\Omega^e =$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \mathbf{N}_e \right)^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.8j)}$$

A multiplicação da matriz contendo os operadores diferenciais pela matriz das funções de forma gera a conhecida matriz de transformação deslocamento-deformação, $\mathbf{B}_e$.

Deste modo, considerando-se a matriz $\mathbf{B}_e$, a Equação (3.3.4.8j) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{W}_e^T \mathbf{B}_e^T \begin{Bmatrix} \mathrm{D}_{1111} \\ \mathrm{D}_{1122} \\ 0 \end{Bmatrix} d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.9)}$$

Determinação do módulo elástico $\mathbf{D}_{1111}^h$

Os detalhes da obtenção da Equação (3.3.4.16) a partir da Equação (3.3.4.15) são apresentados abaixo:

Considerando-se a formulação e a notação de elementos finitos apresentada nos parágrafos anteriores, a Equação (3.3.4.15) é reescrita como se segue para um dado elemento finito da célula-base:

$$\mathrm{D}_{1111}^{h,e} = \frac{1}{|\mathrm{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(\mathrm{D}_{1111} - \begin{Bmatrix}\mathrm{D}_{1111}\\ \mathrm{D}_{1122}\\ 0\end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix}\partial X_1^{11}/\partial y_1\\ \partial X_2^{11}/\partial y_2\\ \partial X_1^{11}/\partial y_1 + \partial X_2^{11}/\partial y_2\end{Bmatrix}\right)d\Omega^e$$

$$\mathrm{D}_{1111}^{h,e} = \frac{1}{|\mathrm{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(\mathrm{D}_{1111} - \begin{Bmatrix}\mathrm{D}_{1111}\\ \mathrm{D}_{1122}\\ 0\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2}\\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{N}_i^e\mathrm{u}_{i,1}^e\\ \sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{N}_i^e\mathrm{u}_{i,2}^e\end{Bmatrix}\right)d\Omega^e$$

$$\mathbf{D}_{1111}^{h,e} = \frac{1}{|\mathrm{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(\mathrm{D}_{1111} - \begin{Bmatrix}\mathrm{D}_{1111}\\ \mathrm{D}_{1122}\\ 0\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2}\\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1}\end{bmatrix} \mathbf{N}_e\mathbf{U}_e\right)d\Omega^e$$

$$\mathbf{D}_{1111}^{h,e} = \frac{1}{|\mathrm{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(\mathrm{D}_{1111} - \begin{Bmatrix}\mathrm{D}_{1111}\\ \mathrm{D}_{1122}\\ 0\end{Bmatrix}^T \mathbf{B}_e\mathbf{U}_e\right)d\Omega^e$$

$$\mathbf{D}_{1111}^{h,e} = \frac{1}{|\mathrm{Y}|}\int_{\Omega^e}\left(\mathrm{D}_{1111} - \begin{Bmatrix}\mathrm{D}_{1111}\\ \mathrm{D}_{1122}\\ 0\end{Bmatrix}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e\right)d\Omega^e \qquad \textbf{(3.3.4.16)}$$