

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Análise de Estruturas Tridimensionais  
de Laminados Através do Método  
dos Elementos de Contorno**

Autor: **Simone dos Santos Hoefel**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**

432006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

# Análise de Estruturas Tridimensionais de Laminados Através do Método dos Elementos de Contorno

Autor: **Simone dos Santos Hoefel**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006

SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

H671a Hoefel, Simone dos Santos  
Análise de estruturas tridimensionais de laminados através  
do método dos elementos de contorno / Simone dos Santos  
Hoefel.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Paulo Sollero  
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Materiais  
compostos. 3. Materiais laminados. 4. Anisotropia. I. Sollero,  
Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Analysis of structures three-dimensional of symmetric laminated by  
boundary element method

Palavras-chave em Inglês: Boundary element method, Laminated composite plates,  
Anisotropic material

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutora em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Sergio Frascino Muller de Almeida, Wilson Sergio Venturini,  
Renato Pavanello e Alberto Luiz Serpa

Data da defesa: 23/02/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

# Análise de Estruturas Tridimensionais de Laminados Através do Método dos Elementos de Contorno

Autor: **Simone dos Santos Hoefel**  
Orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**

---

**Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente**  
**Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Sergio Frascino Müller de Almeida**  
**Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica - ITA**

---

**Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini**  
**Escola de Engenharia de São Carlos - USP**

---

**Prof. Dr. Renato Pavanello**  
**Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**  
**Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP**

Campinas, 23 de fevereiro de 2006.

## **Dedicatória**

Aos pais que sem recursos, não puderam educar seus filhos.

Aos filhos que sem oportunidades, repentem a vida dos pais.

E eu pergunto aos economistas políticos, aos moralistas, se já calcularam o número de indivíduos que é forçoso condenar à miséria, ao trabalho desproporcionado, à desmoralização, à infância, à ignorância crapulosa, à desgraça invencível, à penúria absoluta, para produzir um rico?

Almeida Garrett.

## **Agradecimentos**

- Quero agradecer ao meu marido Eduardo pelo apoio e carinho durante o doutorado, pelo constante incentivo, pelas inúmeras madrugadas que atravessamos juntos estudando, pelo cafézinho no meio da noite e principalmente pela enorme paciência!

- Aos meus pais, Carlos e Cida que, apesar das adversidades financeiras sempre incentivaram meus estudos. Obrigada pelo carinho e torcida.

- Aos meus grandes amigos Carlos Souto, Cornelis, Elson, Ilson e Mariano. Agradeço o companherismo, a amizade e principalmente as risadas na hora do café.

- Às minhas amigas Karen e Vanessa pela amizade e carinho. Ao Juliano, Juan, Fuga, Roberto, Humberto, Cavaguti e Marcos Pinho pela agradável convivência durante o curso.

- Ao professor Éder, sempre disposto e atencioso, pela valiosa e indispensável colaboração.  
- Ao professor Carlos Henrique (UFPR), exemplo de humanidade e dedicação.

- À Maria Elena, secretária do Departamento de Mecânica Computacional, pela eficiência e amizade.

- Ao Luppi e a Meg por me fazerem sorrir.

- Aos Professores Paulo Sollero pela orientação precisa e encorajamento

- Ao professor Mitsunori Denda da universidade Rutgers pelas sugestões e críticas.

- À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

## Resumo

Hoefel, Simone dos Santos, *Análise de estruturas tridimensionais*

*de laminados através do método dos elementos de contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006, 100 p., Tese (Doutorado).

Neste trabalho é desenvolvida uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de estruturas formadas pela associação espacial de placas de laminados compósitos. Inicialmente, as formulações do método dos elementos de contorno, desenvolvida para problemas de elasticidade plana e de flexão em placas finas para materiais anisotrópicos, são associadas obtendo-se uma estrutura plana, denominada macro-elemento. Um macro-elemento contém simultaneamente os estados de flexão em placas finas e extensão (chapa) e possui quatro graus de liberdade por nó, sendo eles: deslocamento normal, tangencial e transversal e rotação normal. O modelo final assume uma associação desses macro-elementos no espaço. Cada macro-elemento é tratado como uma sub-região do MEC. As equações de cada sub-região, após as transformações de coordenadas, são acopladas através de equações de equilíbrio e compatibilidade. O tratamento numérico é feito através do método dos elementos de contorno usando elementos constantes e quadráticos. Com o objetivo de validar a formulação desenvolvida, vários exemplos numéricos são analisados, os resultados obtidos são comparados com resultados analíticos e numéricos disponíveis na literatura.

*Palavras chaves:* Método dos elementos de contorno, placas de laminados compósitos, material anisotrópico.

## Abstract

Hoefel, Simone dos Santos, *Analysis of structures three-dimensional of symmetric laminated by boundary element method* . Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 100 p., Tese (Doutorado).

In this work a boundary element formulation is developed for the analysis of structures formed by three-dimensional association of symmetric laminated composite plates. Initially, the boundary element formulations developed for plane elasticity anisotropic problems and bending of anisotropic thin plate problems are associated in one plane structure with four degrees of freedom per node given by normal, tangential and transverse displacements and normal rotations. Then, the formulation is extended in order to allow the plane assembling of these structures. In the two-dimensional formulation, each plane element is defined as macro-element containing out-of-plane (bending) and in plane (stretching) degrees of freedom. The final system is obtained by assuming each individual plane structural element as a sub-domain. After the necessary transformation of these equations, they can be combined in order to take into account displacement compatibilities and traction equilibrium conditions. The numerical treatment is carried out by the direct boundary element method. Numerical examples are presented and their results are compared to results available in literature.

*Key words:* Boundary element method, laminated composite plates, anisotropic material.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Relevância e motivação . . . . .	1
1.1.1	Aspectos gerais dos materiais compósitos . . . . .	2
1.1.2	Materiais compósitos e o avanço tecnológico . . . . .	2
1.2	O método dos elementos de contorno . . . . .	5
1.2.1	Estruturas formadas por associação de lâminas . . . . .	6
1.3	Descrição do presente trabalho . . . . .	10
1.4	Estrutura do texto . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Elasticidade Anisotrópica</b>	<b>13</b>
2.1	Introdução . . . . .	13
2.2	Hipóteses Básicas . . . . .	13
2.2.1	Equações de equilíbrio . . . . .	14
2.3	Equação integral de chapa . . . . .	22
2.4	Solução fundamental de chapa . . . . .	25
2.5	Equações integrais singulares . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Teoria de Placas Laminadas</b>	<b>31</b>
3.1	Introdução . . . . .	31
3.2	Equações constitutivas de uma lâmina . . . . .	31
3.3	Placas laminadas . . . . .	34
3.3.1	Hipóteses básicas . . . . .	35
3.3.2	Equações constitutivas . . . . .	36

3.4	Flexão em placas laminadas. . . . .	39
<b>4</b>	<b>Teoria de Placas Anisotrópicas</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	Equações básicas . . . . .	44
4.3	Cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias . . . . .	53
4.4	Equação integral de placas . . . . .	56
4.5	Solução fundamental de placa . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Método dos Elementos de Contorno</b>	<b>70</b>
5.1	Introdução . . . . .	70
5.2	Discretização do contorno . . . . .	70
5.3	Elementos de contorno para problemas da elasticidade plana . . . . .	75
5.3.1	Discretização das equações integrais . . . . .	75
5.3.2	Integrais analíticas e numéricas . . . . .	77
5.4	Elementos de contorno para problemas de flexão em placas . . . . .	78
5.4.1	Discretização das equações integrais . . . . .	78
5.4.2	Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno . . . . .	80
5.4.3	Integrais analíticas e numéricas . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Exemplos Numéricos de Chapas e Placas</b>	<b>88</b>
6.1	Cilindro quase-isotrópico de paredes espessas . . . . .	88
6.2	Placa ortotrópica simplesmente apoiada . . . . .	91
6.3	Placa quadrada de compósito laminado simplesmente apoiada . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Associação de Macro-elementos Via Sub-regiões do MEC</b>	<b>95</b>
7.1	Introdução . . . . .	95
7.2	Formulação do macro-elemento. . . . .	95
7.2.1	Equações Algébricas do Macro-Elemento . . . . .	96
7.2.2	Montagem do sistema de equações . . . . .	98
7.3	Associação espacial de macro-elementos . . . . .	99

7.3.1	Sistema de coordenadas . . . . .	99
7.3.2	Compatibilização de momentos e rotações . . . . .	102
7.3.3	Associação de macro-elementos via método de sub-regiões do MEC . . . . .	103
7.4	Montagem das matrizes <b>H</b> e <b>G</b> . . . . .	106
<b>8</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	<b>112</b>
8.1	Validação da formulação de macro-elemento. . . . .	112
8.1.1	Viga engastada em um bordo. . . . .	112
8.1.2	Laminado simétrico submetido a um carregamento transversal. . . . .	114
8.1.3	Laminado simétrico submetido a uma força axial. . . . .	115
8.2	Validação da formulação para associação de macro-elementos . . . . .	116
8.2.1	Placa quase-isotrópica retangular simplesmente apoiada . . . . .	116
8.2.2	Viga em balanço com seção aberta U . . . . .	118
8.2.3	Viga engastada nas extremidades . . . . .	119
8.2.4	Viga V engastada nas extremidades . . . . .	124
<b>9</b>	<b>Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuro</b>	<b>126</b>
9.1	Conclusões gerais . . . . .	126
9.2	Conclusões específicas . . . . .	126
9.3	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	128

# Lista de Figuras

2.1	Modelo físico para problemas de estado plano. . . . .	14
2.2	Acréscimo de um domínio infinitesimal. . . . .	24
2.3	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular. . . . .	29
3.1	Sistema de numeração de orientação da lâmina. . . . .	32
3.2	Sistema de coordenadas de uma placa laminada. . . . .	35
3.3	Sistema de numeração das lâminas. . . . .	38
3.4	Forças atuantes no laminado. . . . .	40
4.1	Elemento de placa com suas respectivas tensões. . . . .	45
4.2	Forças e Momentos agindo no elemento de placa. . . . .	46
4.3	Deformação do elemento de placa. . . . .	47
4.4	Posição inicial e final de um elemento de placa $abn_1n_2$ . . . . .	48
4.5	Placa finita contida em uma placa infinita. . . . .	56
4.6	Sistemas de coordenadas normal e tangente ao contorno. . . . .	58
4.7	Canto $i$ do contorno da placa. . . . .	60
4.8	Contorno circular acrescido a um canto de placa. . . . .	62
4.9	Solução fundamental. . . . .	65
5.1	Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno. . . . .	71
5.2	Elemento constante. . . . .	72
5.3	Elemento quadrático descontínuo. . . . .	73
5.4	Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno. . . . .	81
5.5	Transformação da integral de domínio em integral de contorno. . . . .	82

6.1	Tubo de paredes espessas sob pressão interna. . . . .	89
6.2	Discretização com 10 elementos quadráticos. . . . .	90
6.3	Deslocamentos no cilindro de paredes espessas. . . . .	90
6.4	Placa ortotrópica simplesmente apoiada. . . . .	92
6.5	Discretização com 48 elementos constantes. . . . .	93
6.6	Malha da placa rotacionada. . . . .	94
7.1	Deslocamentos e esforços em um nó genérico $\Psi$ de um macro-elemento. . . . .	96
7.2	Sistema de Coordenadas. . . . .	100
7.3	Compatibilização de momentos e rotações nos macro-elementos. . . . .	102
7.4	Associação de dois macro-elementos . . . . .	103
7.5	Numeração local e global de dois macro-elementos. . . . .	106
8.1	Placa monoengastada. . . . .	113
8.2	Deflexão ao longo da aresta $A$ usando a teoria clássica do MEC. . . . .	114
8.3	Laminado submetido a força axial. . . . .	115
8.4	Associação de dois macro-elementos . . . . .	117
8.5	Geometria e condições de contorno do problema proposto. . . . .	118
8.6	Viga engastada nas extremidades. . . . .	119
8.7	Discretização com elementos constantes. . . . .	120
8.8	Discretização com elementos quadráticos. . . . .	121
8.9	Deslocamentos na interface 1 na direção $y$ . . . . .	122
8.10	Deslocamentos na interface 1 na direção $y$ . . . . .	122
8.11	Deslocamentos obtido pelo ANSYS na direção $x$ . . . . .	123
8.12	Deslocamentos na interface 1 na direção $x$ . . . . .	123
8.13	Geometria da estrutura. . . . .	124
8.14	Deslocamentos ao longo da aresta $A$ na direção $y$ . . . . .	125

# Lista de Tabelas

6.1	Deslocamentos nos pontos A, B e C em $10^{-3}\text{mm}$ . . . . .	89
6.2	Deslocamentos transversais obtidos pelo MEC para uma placa ortotrópica submetida a uma carga uniformemente distribuída. . . . .	91
6.3	Deslocamentos transversais obtidos pelo MEF e MEC. . . . .	93
8.1	Deflexão no centro da placa. . . . .	115
8.2	Deslocamentos do laminado no ponto $P$ . . . . .	116
8.3	Deslocamentos $w$ no centro da placa. . . . .	117
8.4	Força distribuída na seção do engaste (kN/m). . . . .	119
8.5	Deflexão máxima da aresta A. . . . .	124

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Relevância e motivação

A variedade de materiais hoje disponíveis para uso em engenharia é extraordinariamente grande e com grau de especialização cada vez maior para aplicações específicas. Os compósitos representam um caso de particular relevância dentro dos materiais de engenharia.

Os principais fatores que colaboram para o sucesso do uso desses materiais em projetos de engenharia são: econômico e performance. O fator econômico vem do fato do material composto ser muito mais leve que os materiais metálicos, o que implica numa economia de combustível e conseqüentemente, num aumento de carga útil (aeronáutica e aeroespacial). A redução na massa total do produto pode chegar a 30% ou mais, em função da aplicação dada ao material composto. O custo de fabricação de algumas peças em material composto pode ser também sensivelmente menor se comparado com os materiais metálicos. O fator performance está ligado a procura por um melhor desempenho de componentes estruturais, sobretudo no que diz respeito às características mecânicas (resistência a ruptura, resistência à ambientes agressivos, etc.). O caráter anisotrópico dos materiais compostos é o fator primordial para a obtenção das propriedades mecânicas requeridas pelo componente. A leveza juntamente com as excelentes características mecânicas faz com que os materiais compostos sejam cada vez mais utilizados dentro de atividades esportivas.

### **1.1.1 Aspectos gerais dos materiais compósitos**

Denomina-se material compósito, um material composto pela união de dois materiais de naturezas diferentes, resultando em um material de performance superior àquela de seus componentes tomados separadamente. O material resultante, é um arranjo de fibras, contínuas ou não, de um material resistente que são impregnados em uma matriz de resistência mecânica inferior as fibras.

A fibra é o elemento constituinte que confere ao material composto suas características mecânicas, tais como: rigidez, resistência à ruptura, etc. As fibras podem ser curtas de alguns centímetros que são injetadas no momento da moldagem da peça, ou longas e que são cortadas após a fabricação da peça. Os tipos mais comuns de fibras são: de vidro, de aramida (kevlar), carbono, boro, etc. As fibras podem ser definidas como sendo unidirecionais, quando orientadas segundo uma mesma direção; bidimensionais, com as fibras orientadas segundo duas direções ortogonais, ou com as fibras orientadas aleatoriamente; e tridimensionais, quando as fibras são orientadas no espaço tridimensional (tecidos multidimensionais).

A principal função das matrizes é a transferência das solicitações mecânicas para as fibras, além de protegê-las do ambiente externo. Vários materiais são utilizados como matrizes, entre os principais estão: as resinas como por exemplo, polyester e epóxi; o carbono e as ligas de alumínio.

A escolha entre um tipo de fibra e uma matriz depende fundamentalmente da aplicação ao qual será dado o material composto: características mecânicas elevadas, resistência a alta temperatura, resistência a corrosão, etc. Geralmente, o custo é um fator de escolha entre um ou outro componente. Deve ser observada também a compatibilidade entre as fibras e as matrizes.

### **1.1.2 Materiais compósitos e o avanço tecnológico**

A aplicação dos materiais compostos surgiu inicialmente na área aeronáutica devido à necessidade de diminuição de peso, preservando a robustez dos componentes estruturais. Atualmente uma grande variedade de peças em materiais compostos podem ser encontradas nos aviões em substituição aos materiais metálicos: fuselagem, spoilers, portas de trem de ater-

rissagem, portas internas, etc. Dentro da área aeronáutica, os helicópteros possuem também vários componentes em material composto: pás da hélice principal, hélice traseira, árvore de transmissão, fuselagem.

A utilização dos materiais compostos dentro da indústria automobilística é bem mais recente do que na área aeronáutica. O primeiro chassis totalmente em compósito apareceu em 1981 (McLaren MP4-1), porém o uso de compósitos tornou-se comum na F1 a partir de 1983. Uma das grandes vantagens trazidas para o meio automobilístico pelos materiais compostos é, além da redução do peso, a facilidade em confeccionar peças com superfícies complexas. Atualmente, o material composto é utilizado para a fabricação de carters de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc. Atualmente, a blindagem à prova de balas com compósitos está encontrando seu nicho em veículos que são usados pela polícia civil, criando novas oportunidades para uma tecnologia de blindagem com compósitos, baseada na fibra de vidro S-2« ”S-2 Glass” da Owens Corning.

O compósito também é amplamente utilizado na engenharia civil, como material de reforço e recuperação de estruturas (Pavan *et al.* 2005). A preferência pelo compósito nas situações de reforço e recuperação deve-se às suas altas razões rigidez/peso e resistência/peso (compósitos reforçados por fibras de carbono, por exemplo, possuem razões 10 a 15 vezes maiores que o aço), excelente resistência à corrosão, baixa expansão térmica, boa performance em fadiga e tolerância a dano, facilidade de transporte e manuseio, possibilidade de inclusão de ”strain gages” dentro da estrutura para um monitoramento contínuo, baixo consumo de energia na fabricação do material e da estrutura em si (Barbero 1998). Desta forma, com o uso dos compósitos obtém-se ganho de resistência e rigidez sem aumento expressivo do peso próprio da estrutura, o que é muito importante para aplicações de reforço e recuperação (Oliveira e Creus 2004).

O plástico reforçado também é matéria-prima para pontes e passarelas de pedestres e carros. Em 1983 foi inaugurada em Beijing, a ponte Miyun, uma das primeiras construídas em material compósito. Desde então há uma tendência crescente no uso de materiais plásticos reforçados com fibras na construção de pontes (Bodamar 1998). Na Inglaterra, a primeira ponte de compósito foi construída em 1992 e nos EUA, em 1996. Atualmente existem nu-

meras pontes em projeto e construção em todo o mundo assim como uma intensa pesquisa em universidades e empresas.

As tendências de desenvolvimento na área de construção civil estão focadas nas seguintes direções: desenvolvimento de aplicações; protensão; otimização e sistematização dos métodos de aplicação; pesquisa de matrizes alternativas e adição de monitoramento contínuo. Quanto à aplicação, os pesquisadores procuram acelerar o processo de cura do adesivo e projetar equipamentos para possibilitar uma aplicação automatizada controlada remotamente, visando especialmente o uso em pontes e outras estruturas de grande porte e difícil acesso. Em relação às matrizes alternativas, estudam-se algumas matrizes não orgânicas, que são menos sensíveis ao calor. Finalmente, em termos de sensoriamento, propõe-se a associação de sensores de fibra ótica ao compósito, formando uma espécie de reforço "inteligente".

Uma aplicação bem recente dos materiais compostos na área aeroespacial são os painéis solares de satélites, confeccionados em uma configuração sanduíche, e os motores de último estágio dos lançadores de satélites, confeccionados a partir do bobinamento das fibras sobre um mandril.

Materiais compósitos também apresentam uma enorme aplicabilidade em dispositivos médicos e odontológicos. A produção de compósitos de matriz polimérica dotados de uma fase bioativa é uma forma de se minimizar as desigualdades mecânicas entre materiais bioativos e tecidos vivos. Nesse caso, a combinação entre polímeros e agentes de reforço específicos permite a produção de materiais com grande bioatividade e comportamento mecânico comparável ao de tecidos vivos. Em praticamente todas as atividades esportivas, a redução do peso está diretamente ligada a redução do tempo de execução de uma prova esportiva. Como exemplo disto, podemos citar: barcos a vela, skis, bicicletas, etc. Em alguns casos, o que se procura é a agilidade, e a perfeição de alguns golpes, como no tênis, com suas raquetes; no golf, com seus tacos; e no surf, com suas pranchas.

Com o aumento do número de projetos com materiais compósitos surgiu a necessidade de calcular tensões e deformações em estruturas de materiais anisotrópicos. Esta tarefa é mais complicada que nos materiais isotrópicos (materiais cujas propriedades mecânicas não variam com a direção), pois a anisotropia aumenta o número de variáveis do problema. Soluções

analíticas para problemas anisotrópicos restringem-se a um pequeno número de problemas de domínios simples. No caso de estruturas e componentes mecânicos, o domínio torna-se bastante complexo, sendo que seu tratamento só é possível através de métodos numéricos ou métodos experimentais. Com a evolução dos computadores, os métodos numéricos passaram a ser utilizados para uma faixa bem maior de problemas. Dentre os métodos numéricos que mais se destacaram no tratamento de problemas estruturais estão o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Embora a obtenção de uma formulação de elementos de contorno seja matematicamente mais trabalhosa que a de elementos finitos, os elementos de contorno possuem características bastante desejáveis para a modelagem de muitos problemas, tais como: (1) conseguem modelar bem problemas de alto gradiente de tensão e deformação e (2) somente o contorno é discretizado.

## 1.2 O método dos elementos de contorno

Embora a idéia de redução na dimensionalidade do problema pelo uso de formulação integral de contorno seja conhecida desde o final do século XIX, através do trabalho de Somigliana (1885), o método dos elementos de contorno, na forma que é apresentado hoje, só se desenvolveu quase 80 anos depois. As equações integrais singulares, com as variáveis físicas acopladas umas as outras na formulação direta do método dos elementos de contorno, foram apresentadas nos trabalhos de Rizzo (1969) e Cruse e Rizzo (1968). Desde então, o método dos elementos de contorno se desenvolveu de forma bastante rápida, sendo atualmente um método bem estabelecido, com vasta bibliografia publicada (Brebbia e Dominguez, 1989, Dominguez, 1993 e Ramachandran, 1994).

Estudos de problemas de flexão em placas usando o método dos elementos de contorno têm sido realizado por vários pesquisadores. Problemas elastostáticos de flexão de placas isotrópicas são mostrados por Paiva (1987), Silva (1988), El-Zafrany *et al.* (1995), Rashed *et al.* (1998), Sanches (1998), Chaves *et al.* (1999) e He (2000) enquanto problemas de flexão de placas isotrópicas sujeitas a solicitação dinâmica são mostrados por Davies e Moslehy (1994), Tanaka *et al.* (1998) e Simões (2001).

A formulação direta do MEC para placas ortotrópicas foi proposta primeiramente por Ka-

miya e Sawaki (1955). O autor adotou a metodologia aplicada anteriormente para análise de flexão em placas isotrópicas. Benjumea e Sikarskie (1972), 4 () desenvolveram uma formulação indireta do MEC, baseada na equação integral para tensão considerando um carregamento fictício distribuído no contorno. Essa formulação foi obtida para problemas de placas ortotrópicas e aplicadas somente em problemas envolvendo tração.

A primeira formulação do método dos elementos de contorno para problemas anisotrópicos foi proposta por Rizzo e Shyppy (1970). Uma importante contribuição foi dada por Cruse e Swedlow (1971) que propuseram uma solução fundamental para materiais anisotrópicos em termos de funções de variáveis complexas. A partir deste trabalho, a solução fundamental no espaço complexo tem sido bastante usada nas mais diferentes aplicações do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos (Sollero e Aliabadi (1993), Deb e Banerjee (1990), Deb (1996) Albuquerque e Sollero (1997), e Kogl e Gaul (2000)). Vogel e Rizzo (1973) apresentaram a primeira aplicação do método dos elementos de contorno na análise de problemas anisotrópicos tridimensionais. Wilson e Cruse (1978) também analisaram problemas anisotrópicos tridimensionais com uma formulação que demanda menos esforço computacional que a apresentada por Vogel e Rizzo (1973).

### **1.2.1 Estruturas formadas por associação de lâminas**

Além dos problemas de chapas e placas, cujos campos de tensão são desacoplados, existem outras categorias de elementos estruturais que podem exigir uma análise simultânea desses problemas: as lâminas. Conforme a terminologia adotada pela Associação brasileira de cimento portland, as lâminas são classificadas em dois grandes grupos identificados pela curvatura da superfície média do corpo; lâminas planas, na inexistência de curvatura e casca para os demais casos. Além disso, outra classificação é dada para as estruturas compostas por um conjunto de lâminas: folha, no caso do elemento-base ser uma casca; folha poliédrica para elementos-base planos.

Um dos primeiros trabalhos envolvendo análise de folhas poliédricas através do MEC foi apresentado por Palermo. (1989). Neste trabalho, as lâminas que compõe a estrutura são assumidas como sendo um estado plano de tensão acoplado ao estado de flexão em placas

finas. O sistema final foi obtido através da técnica de sub-regiões do MEC. Na montagem do sistema algébrico final, são escritas duas equações para representação integral clássica de placas Stern (1978), e as outras duas remanescentes são escritas a partir das equações integrais da elastostática bidimensional Rizzo (1969).

Outra formulação que incorporou essas mesmas representações integrais foi apresentada por Ohga *et al.* (1991). Contudo o sistema algébrico final foi obtido utilizando-se a técnica da sub-estruturação ou método da matriz de transferência, que conduz a matrizes de influência menores, e, portanto, possibilita uma redução do número de operações para a resolução do sistema final de equações algébricas do problema.

Tanaka *et al.* (1998) desenvolveram uma formulação direta do MEC para a associação de estruturas formadas por lâminas no espaço, dando ênfase na implementação numérica das equações de equilíbrio e compatibilidade nas arestas da associação. Kramin e Kramin (1997) obteve a solução final do problema por meio da combinação de uma solução particular e da solução homogênea dos problemas fundamentais que foi introduzida nas representações de Stern (1978) e Rizzo (1969). As variáveis associadas aos deslocamentos de cada lâmina são escritas em relação a um sistema de coordenadas globais da estrutura tridimensional, enquanto as variáveis associadas aos esforços de cada lâmina são escritas a partir do respectivo sistema local da cada lâmina. No acoplamento das lâminas, é empregado o método das sub-regiões e na discretização do problema, são utilizadas interpolações constantes.

Em (Fernandes e Venturini 2002), placas enrijecidas por vigas são analisadas utilizando-se duas abordagens. Na primeira, a viga é considerada uma região enrijecida, conduzindo, portanto, a duas linhas de interação placa-viga e com discretização possuindo duas variáveis por nó. No segundo esquema, o número de graus de liberdade é reduzido pela metade ao longo da interface ao se assumir que o movimento da seção transversal é definido por apenas três componentes independentes. Representações integrais particulares do problema são obtidas diretamente incluindo a interação viga-placa, de forma que as condições de compatibilidade e equilíbrio são automaticamente verificadas. Assim, após a discretização do problema as incógnitas do problema podem ser determinadas.

Liu (2000) aplicou as equações integrais de problemas elásticos tridimensionais direta-

mente em estruturas poliédricas. A formulação integral para sólidos tridimensionais parece ser menos restritiva que as formulações integrais obtidas a partir das diversas teorias de placas e de membrana. Contudo, quando a formulação de problemas elásticos tridimensionais é aplicada nos casos em que as soluções fundamentais dos problemas laminares são conhecidas, a mesma pode tornar ineficiente, uma vez que seus elementos de contorno estão definidos no espaço bidimensional e associados às teorias de lâmina plana são representados por curvas unidimensionais

Sanches (2002) estendeu a formulação apresentada por Palermo. (1989) para problemas dinâmicos visando o modelamento do sistema de laje composta “Steel Deck”. Mendonça (2002) apresenta duas formulações do MEC para análise elástica de estruturas compostas por lâminas planas de espessuras constantes. A lâmina em flexão é assumida sob as hipóteses de Kirchhoff. Na primeira abordagem, as variáveis do problema são representadas por um conjunto de quatro graus de liberdades em deslocamentos e forças associadas à chapa (deslocamentos normal, tangencial e suas respectivas forças de superfície) e à placa (deslocamento transversal, rotação normal e seus respectivos esforços representados pela força de Kirchhoff e momento fletor). Esta abordagem foi chamada de modelo tetraparamétrico. Na segunda abordagem, duas variáveis adicionais são inseridas na formulação tetraparamétrica, resultando em um novo modelo denominado hexaparamétrico. Com isso, o vetor de deslocamentos é composto pelos deslocamentos normal, tangencial, transversal e pelas rotações normal, tangencial e zenital. Essa última variável é associada a uma rotação que atua ao longo da direção perpendicular ao plano médio da lâmina-base. Inicialmente, as matrizes de influência são montadas para ambos modelos e então, técnicas especiais são empregadas somente para a abordagem hexaparamétrica a fim de resolver a incompatibilidade de ordens entre as matrizes de influência dos deslocamentos e das forças. Em seguida, a técnica da sub-região é utilizada para montar o sistema final de equações de uma estrutura não-coplanar. A partir dos modelos tetra e hexaparamétricos para problemas elásticos não-coplanares, o comportamento elastoplástico é incorporado nessas abordagens como campos tensoriais iniciais (tensão/momento ou deformação/curvatura) para analisar problemas coplanares utilizando representações clássicas para a superfície de plastificação.

Outros pesquisadores tem se dedicado ao estudo de associações de lâminas, contribuindo com novas técnicas, tal como a combinação do método dos elementos de contorno com determinadas técnicas numéricas. Como por exemplo, KOMATSU e Nagai (1982) que analisou seções tubulares retangulares dividindo a estrutura em três regiões constituídas de uma região central e duas extremas. O Método dos Segmentos de Parede Fina (MSPF) é usado para modelar a região central e a discretização é feita em segmentos tridimensionais cujos graus de liberdade estão posicionados ao longo das seções pertencentes às extremidades de cada segmento. Para duas regiões extremas adotou-se método dos elementos de contorno e nas linhas de interface entre o MSPF e o MEC há necessidade da inclusão de um elemento de transição no MSPF para possibilitar a aplicação das condições de equilíbrio e de compatibilidade nos respectivos graus de liberdade compatíveis entre os dois métodos. Assim, um sistema algébrico que envolve as contribuições de ambos os métodos pode ser resolvido.

Uma combinação entre os métodos dos elementos finitos e de contorno foi desenvolvida por (Galuta e Cheung 1995) para análise de seções celulares. As equações integrais clássicas de placas são escritas para os nós situados na placa superior, isto é, no tabuleiro da ponte. As regiões remanescentes do problema são modeladas pelo MEF. Os graus de liberdade dos nós associados ao MEF, situados na interface de regiões comuns aos dois métodos, são transformados em parâmetros nodais compatíveis com o MEC. Assim, a matriz de influência final das incógnitas recebe contribuições de ambos os métodos. Carmo (2001) utilizou uma combinação entre o MEF e o MEC para analisar a influência da excentricidade do centro de gravidade da viga em relação ao plano médio das placas. Nessa formulação, a viga foi modelada pelo MEF e foram usadas as equações de (Rizzo e Shyppy 1970) e (Stern 1978), para representar os efeitos de membrana e flexão na lâmina. Através das equações de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos na interface e da técnica de sub-regiões do MEC, é obtido o sistema de equação final do problema.

Em 2000, Wen *et al.* (2000), usou enrijecedores que foram tratados como uma força distribuída em linha aplicada no domínio placa. A representação integral do problema é constituída de cinco equações: as duas primeiras incorpora o efeito de membrana utilizando-se as equações clássicas de (Rizzo e Shyppy 1970). As três restantes estão associadas à

representação integral de placas que incorpora a deformação por cortante descrita em (Ween 1982). Para o enrijecedor, são admitidas as hipóteses clássicas de vigas prismáticas, cujo centro de gravidade possui uma excentricidade em relação plano médio da placa. Após a discretização, são impostas as condições de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamento nos pontos nodais comuns entre a viga e placa, de forma que o sistema final fica escrito apenas em função dos nós do contorno e de domínio da placa.

### **1.3 Descrição do presente trabalho**

Seguindo a mesma linha de pesquisa desenvolvida por (Sanches 2002) e (Palermo. 1989), este trabalho tem como principal objetivo a análise de tensões em estruturas planas formadas pela associação de placas de laminados compósitos.

Pode-se mencionar os seguintes objetivos específicos do trabalho:

- Estudo do comportamento mecânico de placas de laminados compósitos submetidas à flexão e forças axiais;
- Estudo do método dos elementos de contorno aplicados a problemas da elasticidade bidimensional e à flexão de placas;
- Desenvolvimento de um elemento estrutural plano contendo simultaneamente o estado plano de tensão e o de flexão em placas finas. Para a implementação do elemento, conta-se com o auxílio de programas desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Prof. Dr. Solleró, para análise de problemas envolvendo o estado plano de tensão (Albuquerque 2001), e de flexão em placas finas de materiais anisotrópicos (Paiva 2005);
- Associação tri-dimensional de elementos planos utilizando a técnica de sub-regiões do MEC;
- Empregar o algoritmo em exemplos diversos, avaliar os resultados e compreender o comportamento de placas laminadas associadas no espaço.

## 1.4 Estrutura do texto

No presente capítulo, foi feita uma introdução ao material compósito. Várias aplicações e vantagens foram mostradas. O uso do método dos elementos de contorno para análise de problemas anisotrópico foi abordado com ênfase nas pesquisas sobre as estruturas formadas por associação de lâminas. O segundo capítulo faz uma breve revisão sobre a teoria de placas laminadas. As equações constitutivas de uma lâmina ortotrópica são desenvolvidas e a partir disto, as equações diferenciais que governam o problema de flexão em placas de laminados compósitos são obtidas. É feita uma discussão sobre laminados simétricos e não-simétricos, as equações constitutivas são apresentadas e suas características avaliadas.

O Capítulo 3 apresenta as equações básicas da teoria da elasticidade plana aplicada a materiais anisotrópicos. As equações de equilíbrio são apresentadas e a equação diferencial do movimento de chapa é obtida. Posteriormente a equação integral da elasticidade plana é desenvolvida e a solução fundamental é apresentada. A formulação de placas anisotrópicas é desenvolvida no Capítulo 4. A partir das equações constitutivas são obtidas as equações diferenciais governantes do problema de placas finas. A solução fundamental para problemas de placas anisotrópicas é apresentada.

O método dos elementos de contorno é desenvolvido no Capítulo 4. O teorema de Betti é aplicado e as equações integrais de contorno são obtidas. Essas equações integrais de chapa e placas são discretizadas obtendo-se um sistema de equações algébricas. As funções de forma usadas na discretização com elementos quadráticos e constantes são mostradas. Com o objetivo de validar as formulações apresentadas no capítulo anterior, alguns exemplos numéricos são analisados separadamente para o problema de chapa e placas finas no Capítulo 5.

Com base nas equações integrais da elasticidade plana e de flexão de placas é desenvolvido no Capítulo 7, um macro-elemento, o qual possui quatro graus de liberdade por nó, dois devido ao comportamento de chapa (estado plano) e os outros dois, devido ao comportamento de placa. A associação desses macro-elementos é feita através da técnica de sub-regiões do MEC após a transformação de coordenadas locais de cada macro-elemento para um sistema global. Desta forma, o sistema final de equações algébricas é obtido.

No Capítulo 8 vários exemplos numéricos sobre associação espacial são apresentados e discutidos. Os resultados são comparados com valores encontrados na literatura ou obtidos pelo software ANSYS. Finalmente, no Capítulo 9 é feita uma discussão sobre os resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas.

# Capítulo 2

## Elasticidade Anisotrópica

### 2.1 Introdução

Este capítulo apresenta as equações básicas da teoria da elasticidade para materiais anisotrópicos. A formulação de tensão e deformação será revista, levando à definição da equação constitutiva anisotrópica. É mostrada a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados simétricos a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados. As formulações matemáticas presentes neste capítulo serão usadas nos capítulos posteriores, quer seja na obtenção da formulação do método dos elementos de contorno, quer seja na comparação com resultados numéricos obtidos a partir das formulações propostas.

### 2.2 Hipóteses Básicas

Seja uma placa plana, homogênea e anisotrópica com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ . A espessura  $h$  da placa é uniforme na direção do eixo  $x_3$  e o mesmo é bissecionado por dois planos  $x_3 = -h/2$  e  $x_3 = h/2$ , conforme mostra a Figura 2.1.

Quando a espessura  $h$  é muito pequena comparada às suas dimensões laterais, o problema é tratado pelo estado plano de tensão. Por outro lado, quando a espessura da placa é muito grande, o problema passa a ser tratado como estado plano de deformação. Descrevendo-se o equilíbrio deste corpo na posição antes da deformação e admitindo-se pequenas deformações, ambos os casos podem ser analisados sob as seguintes hipóteses (Lekhnitskii 1963):

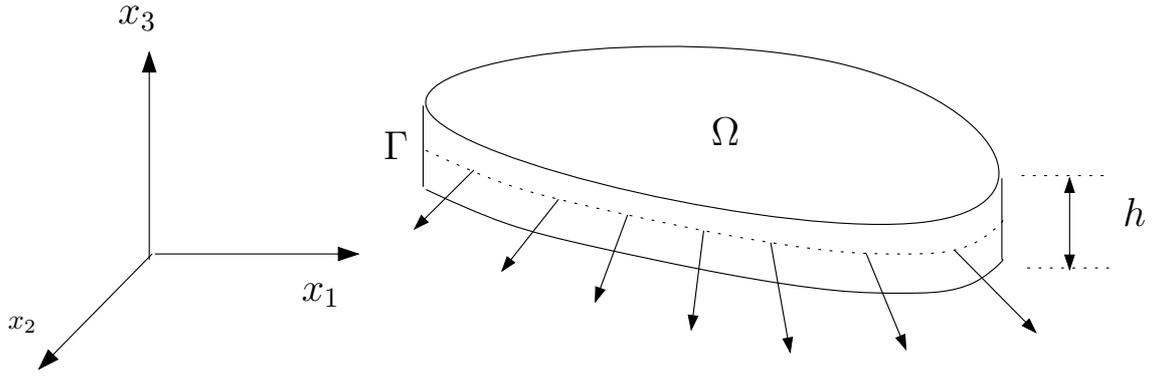


Figura 2.1: Modelo físico para problemas de estado plano.

- i) As forças aplicadas no contorno da placa, se existirem, não possuem componentes na direção normal;
- ii) Não são aplicados carregamentos nos planos paralelos ao contorno da superfície do topo e da base.

No problema de estado plano de deformação, admite-se que as deformações associadas à direção  $x_3$  sejam nulas, ou seja:

$$\varepsilon_{33} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0; \quad (2.1)$$

Para o problema de estado plano de tensão, a hipótese de que as forças são nulas nos planos paralelos implicam no fato das tensões associadas à direção  $x_3$  serem extremamente pequenas, logo:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0; \quad (2.2)$$

### 2.2.1 Equações de equilíbrio

Se o corpo está em equilíbrio, a somatória de todas as forças que agem em cada elemento infinitesimal deve ser igual a zero, ou seja:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (2.3)$$

onde  $b_i$  é o vetor de forças de corpo.

Pode-se mostrar que, na ausência de forças de corpo, a Equação 2.3 se reduz a:

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (2.4)$$

Estas equações de equilíbrio são satisfeitas se:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}, \\ \sigma_{12} &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A função  $F(x_1, x_2)$  é chamada função de tensão de Airy (Lekhnitskii 1968a).

Por sua vez, o equilíbrio de momentos é expresso por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.6)$$

que implica na simetria do tensor de tensões.

O vetor de forças de superfície  $t_i$  em um ponto no contorno  $\Gamma$  de um domínio  $\Omega$  é expresso na forma:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \quad (2.7)$$

onde  $n_j$  é o vetor normal do contorno  $\Gamma$  no ponto.

O vetor de deslocamento e suas derivadas são assumidos como infinitesimais, sob essa hipótese, o tensor de deformação pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.8)$$

As componentes do tensor de deformação devem satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade para que a unicidade dos deslocamentos sejam garantidas. Dessa forma, tem-se:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0, \quad (2.9)$$

que no caso bidimensional é reduzida à forma:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12}. \quad (2.10)$$

Para um material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.11)$$

onde  $C_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor de constantes elásticas. Devido as restrições de simetria, tem-se:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (2.12)$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que:

$$C_{ijkl} = C_{klji}. \quad (2.13)$$

Estas considerações reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Considerando as 21 constantes elásticas, a equação (2.11) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

ou ainda na forma:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (2.15)$$

onde  $S_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido as mesmas razões do tensor de constantes elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes. A Equação 2.15 pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1963), a Equação 2.16 pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como (Lekhnitskii 1963):

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1/E_1 & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\
a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\
a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\
a_{22} &= 1/E_2 & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\
a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} & a_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\
a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & a_{33} &= 1/E_3 \\
a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & a_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\
a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & a_{44} &= 1/G_{23} \\
a_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} & a_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\
a_{55} &= 1/G_{13} & a_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\
a_{66} &= 1/G_{12} & &
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde  $E_k$  são os módulos de elasticidade longitudinais, referindo-se aos eixos  $x_k$ ,  $G_{ij}$  são os módulos de elasticidade transversais, para os planos definidos pelos eixos  $x_i x_j$ . Os coeficientes  $\nu_{ij}$  são chamados coeficientes de Poisson. As constantes  $\eta_{jk,l}$  são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes  $\eta_{l,jk}$  são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim,  $\zeta_{ij,kl}$  são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em planos outros, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ( $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ ), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a Equação 2.17 pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \tag{2.20}$$

Substituindo as Equações 2.8, 2.11 na Equação 2.3, obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos:

$$C_{ijkl} u_{k,jl} + b_i = 0. \tag{2.21}$$

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções  $F(x_1, x_2)$  chamadas funções tensão de Airy (Lekhnitskii 1963) dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= F_{,22} + \mathcal{U} \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + \mathcal{U} \\ \sigma_{12} &= -F_{,12},\end{aligned}\tag{2.22}$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma função potencial na qual

$$\mathcal{U}_{,i} = b_i,\tag{2.23}$$

onde  $b_i$  é o termo que contém as forças de volume.

A equação diferencial para funções de tensão  $F(x_1, x_2)$  são obtidas pela substituição das Equações 2.22 na equação constitutiva 2.20, e na ausência de forças de corpo, pode ser escrita como:

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0.\tag{2.24}$$

Aplicando o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1},\tag{2.25}$$

na função tensão  $F(x_1, x_2)$ , tem-se:

$$\begin{aligned}F_{,2222} - (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1222} + (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3\mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4, \\ + \mu_3\mu_4)F_{,1122} - (\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1112}, \\ + (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1111} = 0.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Conforme mostrado por Lekhnitskii (1968), as Equações 2.24 e 2.26 serão idênticas se  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  forem raízes da equação:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0. \quad (2.27)$$

As raízes da Equação 2.27 são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares  $(\mu_k$  e  $\bar{\mu}_k$ )

Exigindo que a função tensão  $F(x_1, x_2)$  seja real, adotando  $z_k = x_1 + \mu_k x_2$  com  $k = 1, 2$  e com o auxílio do operador diferencial 2.25, obtém-se:

$$F(x_1, x_2) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \quad (2.28)$$

Substituindo a Equação 2.28 em 2.22, obtém-se os componentes de tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re} \left[ \mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right], \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re} \left[ \Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2) \right], \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re} \left[ \mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

sendo que  $\Psi_k^{(1)}$  representa a primeira derivada de  $\Psi_k$ , e

$$\frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \Psi_k(z_k), \quad (2.30)$$

onde a convenção de soma não é empregada em  $k$ .

Substituindo a Equação 2.29 na Equação 2.20 e então na Equação 2.21, desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\text{Re} [q_{11}\Psi_1(z_1) + q_{12}\Psi_2(z_2)], \\ u_2 &= 2\text{Re} [q_{21}\Psi_1(z_1) + q_{22}\Psi_2(z_2)], \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde:

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

é a matriz de parâmetros complexos. Através das condições de contorno, determina-se a função tensão, dada pelas Equações 2.22 com derivadas dadas pela Equação 2.30, que satisfaça estas condições, determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas Equações 2.31, e tensões, dados pelas Equações 2.29.

## 2.3 Equação integral de chapa

Através da aplicação do teorema de *Betti*, as equações integrais de contorno para problemas da elasticidade plana (chapa) são obtidas. Considerando-se inicialmente um corpo em equilíbrio sujeito a dois estados de tensão e deformação, o teorema de *Betti* estabelece que o trabalho realizado pelas tensões do primeiro estado nos deslocamentos do segundo é igual ao trabalho realizado pelas tensões do segundo estado no deslocamentos do primeiro. Sendo assim, dois estados de tensão  $\sigma$  e  $\sigma^*$ , com seus respectivos estados de deformação  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^*$ , relacionam-se de acordo com a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (2.33)$$

A Equação 2.33 também pode ser escrita em função dos deslocamentos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (2.34)$$

Expandindo o primeiro termo da Equação 2.34, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} u_i)_{,j} - \sigma_{ij}^* u_i] d\Omega \quad (2.35)$$

Substituindo a equação de equilíbrio 2.3 na Equação 2.35, resulta em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} u_i)_{,j}] d\Omega + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (2.36)$$

Aplicando-se o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da Equação 2.36, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (2.37)$$

Usando-se a Equação 2.7 das forças de superfície, a tensão no primeiro termo do lado direito da Equação 2.37 pode ser eliminada da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (2.38)$$

A equação final para o teorema de *Betti* pode ser obtida adotando-se o mesmo procedimento para o lado esquerdo da Equação 2.34, desta forma, tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i^* d\Omega \quad (2.39)$$

Pode-se impor quaisquer dois estados, compatíveis, de tensão e deformação à Equação 2.39. Se for adotado que o estado a, de  $\sigma_{ij}^*$  e  $\varepsilon_{ij}^*$ , seja a analogia do problema de Kelvin em um domínio bidimensional, tem-se:

$$u_i^* = u_{ik}^*(Q, P), \quad t_i^* = t_{ik}^*(Q, P) \quad b^* = \Delta(Q, P) \delta_{ik} \quad (2.40)$$

Substituindo-se as expressões 2.40 em 2.39 e fazendo uso das propriedades do delta de Dirac, chega-se a:

$$u_i(P) = - \int_{\Gamma} t_{ik}^*(Q, P) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q, P) t_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q, P)_k(Q) d\Omega \quad (2.41)$$

A Equação 2.41 é conhecida como identidade Somigliana para os deslocamentos. Com esta relação pode-se encontrar o valor do deslocamento em qualquer ponto do domínio  $\Omega$ , interno ao contorno  $\Gamma$ , em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno e das forças de volume. De acordo com a Figura 2.2, acrescenta-se ao domínio uma pequena região  $\Omega_{\Psi}$  de raio  $\Psi$ , com o seu centro sobre o ponto  $P$ . Subtrai-se de contorno original uma pequena porção  $\Gamma$ , adicionando-se em seu lugar um contorno  $\Gamma_{\Psi}$ . A Equação 2.41 passa a ser escrita como:

$$u_i(P) = - \int_{\Gamma-\Psi} t_{ik}^*(Q, P) u_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma_{\epsilon}} t_{ik}^*(Q, P) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma-\Psi} u_{ik}^*(Q, P) t_k(Q) d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_{ik}^*(Q, P) t_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega-\Psi} u_{ik}^*(Q, P)_k(Q) d\Omega + \int_{\Omega_{\epsilon}} u_{ik}^*(Q, P)_k(Q) d\Omega \quad (2.42)$$

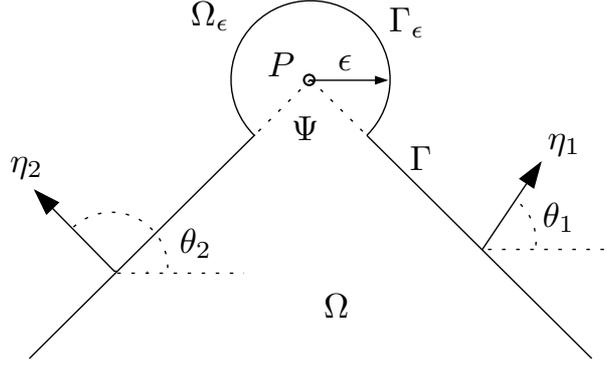


Figura 2.2: Acréscimo de um domínio infinitesimal.

Fazendo-se o raio se aproximar de zero, os termos das integrais sobre o contorno  $\Gamma - \Psi$  são entendidas como um valor principal de *Cauchy* (Brebbia e Domingues 1992). As integrais sobre  $\Gamma_\epsilon$  e  $\Omega_\epsilon$  são nulas, com exceção de:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ik}^*(Q, P) u_k(Q) d\Gamma \right) = \bar{c}_{ik} u_k(P) \quad (2.43)$$

com  $\bar{c}_{ik}$  dependente da geometria do contorno. Da substituição de 2.43 em 2.41 obtém-se:

$$\begin{aligned} c_{ik} u_k(Q) &= - \int_{\Gamma} t_{ik}^*(Q, P) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q, P) t_k(Q) d\Gamma + \\ &\quad \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q, P) t_k(Q) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.44)$$

A matriz  $c_{1k}$  tem seus valores tomados da expressão a seguir:

$$c = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)\gamma + \text{sen}2\theta_1 - \text{sen}\theta_2 & \text{cos}2\theta_2 - \text{cos}\theta_1 \\ \text{cos}2\theta_2 - \text{cos}\theta_1 & 4(1-\nu)\gamma + \text{sen}2\theta_1 - \text{sen}\theta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

sendo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos formados entre o vetor normal e os eixos  $x_1$  e  $x_2$ . No caso do contorno ser suave ou seja, quando a tangente à linha de contorno permanece contínua, a matriz  $c_{ik}$  se reduz a:

$$c_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \quad (2.46)$$

## 2.4 Solução fundamental de chapa

A formulação do método dos elementos de contorno requer o conhecimento da solução fundamental de um problema de elasticidade. A solução fundamental é a resposta à aplicação de um carregamento unitário pontual de um meio elástico infinito, cujas propriedades de material são as mesmas do componente que se quer analisar. Para se obter as soluções fundamentais para problemas de chapa, o domínio  $\Omega$  será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

e

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

onde  $\mu_k$  são raízes complexas da Equação 2.27,  $x'_1$  e  $x'_2$  são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

Considerando-se um contorno fechado  $\Gamma$  ao redor do ponto fonte e usando as forças de superfície definidas pela Equação 2.7 e as tensões definidas pela Equação 3.1, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2]], \\ \int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\Psi_1 + \Psi_2]] \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde os colchetes duplos representam o salto na função para um contorno fechado ao redor do ponto fonte. Se o contorno  $\Gamma$  engloba  $\mathbf{z}'$ , então o resultado das Equações 2.49 serão diferentes de zero.

A partir da função tensão de Airy resultante das forças de superfície fundamentais, dadas pelas Equações 2.49, e a equação de equilíbrio de forças (Equação 2.3) considerando forças de

corpo e efeitos de inércia nulos, obtém-se soluções fundamentais em um plano anisotrópico infinito.

A função tensão de Airy para um ponto carregado na direção  $x_i$  pode ser representada por  $\Psi_{ik}$ . Como as equações integrais de contorno (Equações 2.49) possuem sinais opostos à carga aplicada, ela pode ser expressa para um ponto fonte como:

$$2\text{Re}[[\mu_1\Psi_{i1} + \mu_2\Psi_{i2}]] = -\delta_{i1},$$

$$2\text{Re}[[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}]] = \delta_{i2}. \quad (2.50)$$

As Equações 2.50 podem ser satisfeitas para qualquer contorno fechado  $\mathbf{z}'$ , tomando

$$\Psi_{ik} = A_{ik} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \quad (2.51)$$

onde  $A_{ik}$  são constantes complexas. Usando propriedades de funções complexas, pode ser mostrado que para qualquer contorno fechando o ponto  $\mathbf{z}'$

$$\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') = 2\pi i. \quad (2.52)$$

Usando as Equações 2.50, 2.51 e 2.52, podem ser obtidas duas equações para as constantes desconhecidas  $A_{ik}$

$$A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} = \delta_{i2}/(2\pi i)$$

$$\mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} = -\delta_{i1}/(2\pi i) \quad (2.53)$$

As duas outras equações necessárias para se determinar  $A_{ik}$  resultam da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos, ou seja,

$$[[u_i]] = 0 \quad (2.54)$$

Usando as equações de deslocamentos 2.31, as Equações 2.51 e 2.52, a Equação 2.54 pode ser expandida como:

$$q_{11}A_{i1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{i1} + q_{12}A_{12} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{i2} = 0$$

$$q_{21}A_{i1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{i1} + q_{22}A_{12} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{i2} = 0 \quad (2.55)$$

Escrevendo as Equações 2.53 e 2.55 na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

que é suficiente se para encontrar as constantes complexas  $A_{ik}$ . No caso de materiais isotrópicos a equação característica 2.27 se torna biquadrada com duas raízes iguais a  $i$  e duas iguais a  $-i$ . Estes valores tornam o sistema de Equações 2.56 singular. Por causa disso não é possível o uso de materiais isotrópicos para comparar esta formulação com a formulação isotrópica que utiliza a solução fundamental de Kelvin (Dominguez 1993) e (Partridge *et al.* 1992). Para fazer esta comparação serão usados materiais quase-isotrópicos, ou seja:

$$E_2 = E_1 + \epsilon \cong E \quad (2.57)$$

sendo que

$$\epsilon \leq 10^{-2}E_1 \quad (2.58)$$

e

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad (2.59)$$

As soluções fundamentais para deslocamentos são obtidas inserindo a função tensão dada pela Equação 2.29 nas equações de deslocamentos (Equação 2.31). Desta forma, tem-se:

$$U_{ji}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re}[q_{i1}A_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2}A_{j2} \ln(z_2 - z'_2)]. \quad (2.60)$$

Similarmente, as soluções fundamentais para forças de superfície são obtidas pela substituição da Equação 2.51 nas equações de tensão (Equação 2.31) e usando a Equação 2.7:

$$T_{ij}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \right], \quad (2.61)$$

onde

$$[g_{ji}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

e  $n_k$  são as componentes do vetor normal externo.

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ( $\ln r$ ). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se uma singularidade forte ( $1/r$ ).

## 2.5 Equações integrais singulares

A equação integral 2.41 foi escrita para um ponto do interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semi-circular, com contorno  $\Gamma_\epsilon^*$  e raio  $\epsilon$ , centrado no ponto fonte, conforme

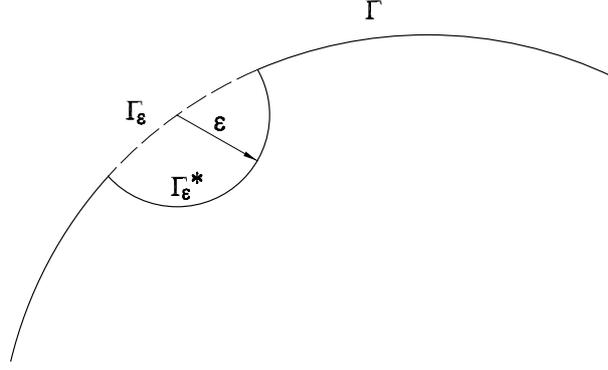


Figura 2.3: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

mostrado na Figura 2.3. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes:

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*) \quad (2.63)$$

onde  $\epsilon$  é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno  $\Gamma$ , conforme a Figura 2.3.

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} U_{li} t_i d\Gamma$$

A integral do lado direito da Equação 2.64 contém um integrando de singularidade fraca da ordem  $\ln(1/r)$  e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem  $1/r$ , que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\ &u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} d\Gamma + \\ &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.64)$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da Equação 2.64 é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por  $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$ , no qual  $A_{ij}(\mathbf{z}')$  é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a Equação 2.64 pode ser escrita na forma:

$$c_{li}u_i + \int T_{li}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{li}t_i d\Gamma \quad (2.65)$$

onde  $\int$  representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente  $c_{li}(\mathbf{z}')$  é dado por  $\delta_{ij} + A_{ij}(\mathbf{z}')$ , no qual  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker.

# Capítulo 3

## Teoria de Placas Laminadas

### 3.1 Introdução

A teoria de placas laminadas foi desenvolvida durante as décadas de 50 e 60 por alguns pesquisadores, tais como, (Smith 1953), (Pister e Dong 1959), (Reissner e Stavsky 1961), (Lekhnitskii 1968b) e (Stavsky 1964). A principal diferença em relação a teoria clássica de placa isotrópicas está na relação tensão-deformação das lâminas, uma vez que outros elementos da teoria tais como as hipóteses de deformações, equações de equilíbrio e as relações deformação-deslocamento são as mesmas usadas na teoria clássica de placa. Neste capítulo são apresentadas as equações básicas de uma placa laminada. A partir disso, a equação diferencial que governa o problema de flexão em placas laminadas é desenvolvida.

### 3.2 Equações constitutivas de uma lâmina

Uma lâmina na qual as fibras imersas na matriz estão alinhadas unidirecionalmente são chamadas de ortotrópicas e sua relação tensão-deformação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde  $Q_{ij}$  são as componentes do tensor de rigidez, dadas por:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
Q_{22} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
Q_{66} &= G_{12} \quad Q_{16} = Q_{26} = 0 \\
Q_{12} &= \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

A lâmina ortotrópica, fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais  $E_1$  e  $E_2$  nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal  $G_{12}$  e a razão de Poisson,  $\nu_{12}$ . A quinta constante elástica,  $\nu_{21}$  pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da matriz  $\mathbf{Q}$ :

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2. \tag{3.3}$$

A convenção adotada para a orientação do ângulo  $\theta$  é mostrada na Figura 3.1. Quando os eixos principais da lâmina (1 e 2) não são coincidentes com os eixos do laminado ( $x$  e  $y$ ), a relação constitutiva para cada lâmina individual deve ser transformada para o eixo de referência do laminado para então se determinar a relação constitutiva. Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja:

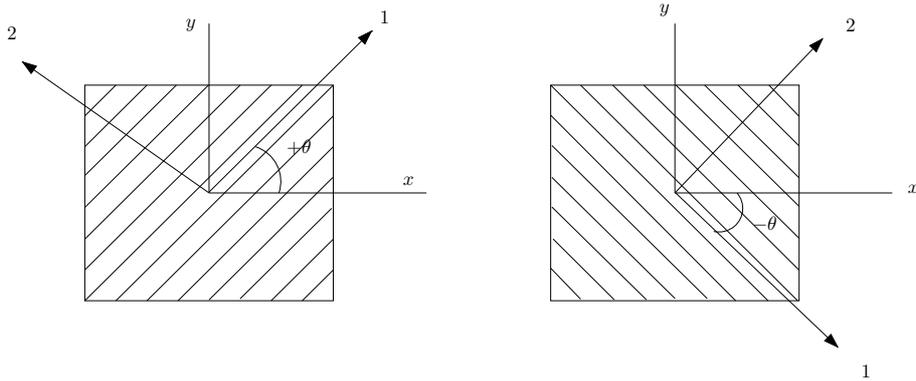


Figura 3.1: Sistema de numeração de orientação da lâmina.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

Fazendo  $m = \cos\theta$  e  $n = \sin\theta$ , a matriz de transformação pode ser escrita como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

A equação constitutiva pode ser escrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Multiplicando-se as matrizes da Equação 3.7, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin^3\theta\cos\theta) \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin\theta\cos^3\theta)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

A matriz  $\bar{Q}$  é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas,  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$ , são dependentes das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz  $\bar{Q}$  é parecida com a matriz  $Q$  dos materiais totalmente anisotrópicos ( $\bar{Q}_{16} \neq 0$ ,  $\bar{Q}_{26} \neq 0$ ). Quando se tem  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

### 3.3 Placas laminadas

Uma placa laminada é formada por um conjunto de lâminas. Assume-se que estas lâminas estão perfeitamente coladas entre si, ou seja, as lâminas que compõe o laminado comportam-se como uma placa anisotrópica única. Não é admitido deslizamento nem empenamento entre as lâminas, a deformação interfacial é assumida como sendo constante. A partir destas considerações, as hipóteses de deformação da teoria clássica de placas podem ser usadas para descrever o comportamento de uma placa laminada.

### 3.3.1 Hipóteses básicas

A Figura 3.2 apresenta o sistema de coordenadas de uma placa laminada. Os deslocamentos em um ponto qualquer da placa, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são representados respectivamente, por  $u$ ,  $v$  e  $w$ . As hipóteses básicas para análise estática de um laminado são:

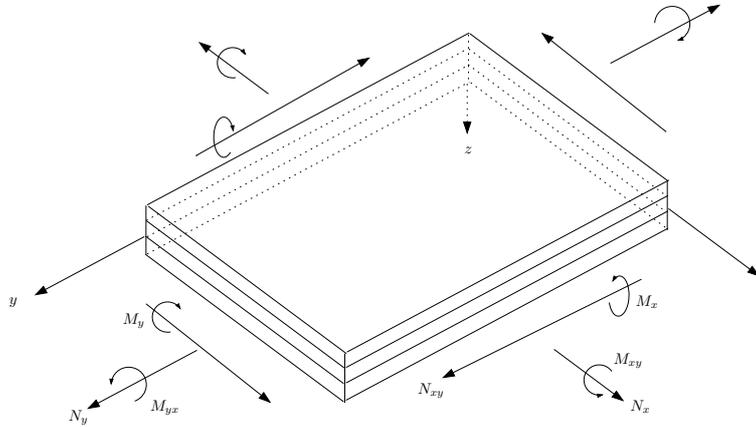


Figura 3.2: Sistema de coordenadas de uma placa laminada.

- 1) A placa é formada por lâminas ortotrópicas perfeitamente coladas. Cada lâmina possui sua própria orientação, ou seja, o laminado possui orientações arbitrárias em relação ao eixo  $xy$ .
- 2) A espessura  $t$  da placa é constante e muito menor que o comprimento ao longo de cada borda da placa.
- 3) Os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  são pequenos quando comparados com a espessura da placa.
- 4) As deformações no plano  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  são pequenas e podem ser desprezadas.
- 5) As deformações de cisalhamento transversais,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , são negligenciadas.
- 6) A deformação normal transversal  $\epsilon_z$  é negligenciada.
- 7) Cada lâmina obedece a Lei de Hooke generalizada.

A hipótese 5 é o resultado da consideração de estado plano de tensão em cada camada (Lakshminarayana e Murthy 1984a). Os itens 5 e 6, definem as hipóteses de deformação de

Kirchhoff para placas finas (Timoshenko e Woinowsky-Krieger 1959), a qual assume que retas normais ao plano médio na posição não deformada permanecem normais após a deformação.

### 3.3.2 Equações constitutivas

De acordo com as hipóteses 6 e 7, os deslocamentos podem ser expressos como:

$$\begin{aligned} u &= u^0(x, y) + z\beta_1(x, y), \\ v &= v^0(x, y) + z\beta_2(x, y), \\ \beta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde  $u$ ,  $v$  são os deslocamentos ao longo das direções  $x$ ,  $y$  respectivamente.  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os giros e o índice “0” indica deslocamento na superfície média da placa. Devido à hipótese 6, o deslocamento transversal na superfície média da placa,  $w^0(x, y)$ , é igual para qualquer ponto com as mesmas coordenadas  $(x, y)$ , então:

$$w(x, y) = w^0(x, y). \tag{3.11}$$

Através da hipótese 8 e usando as Equações 3.10, tem-se:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta_1(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3.12}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta_2(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{3.13}$$

Substituindo as Equações 3.10 nas relações deformação-deslocamento para tensões no plano:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde as deformações na superfície média da placa são dadas por:

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}, \quad (3.15)$$

e as curvaturas:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.16)$$

$\kappa_x$  é a curvatura associada à flexão da superfície média do plano  $(x, z)$  e  $\kappa_y$  é a curvatura associada à flexão na superfície média do plano  $(y, z)$ .  $\kappa_{xy}$  é a curvatura associada à torção fora do plano da superfície média, a qual se encontra no plano  $(x, y)$  antes da deformação. A tensão ao longo do eixo  $(x, y)$  na  $k$ -ésima lâmina de um laminado pode ser descrita através da substituição da Equação 3.14 nas equações de tensão-deformação 3.8 como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \epsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

onde o índice  $k$  se refere à  $k$ -ésima lâmina. As forças e momentos por unidade de comprimento mostrado na Figura 3.3 também são conhecidos como resultantes de tensão. A força  $N_x$  e o momento  $M_x$  por unidade de comprimento, são dadas respectivamente por:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k dz \quad (3.18)$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k z dz, \quad (3.19)$$

onde :

- $t$  = espessura da laminado.
- $(\sigma_x)_k$  = tensão na  $k$ -ésima lâmina.
- $z_{k-1}$  é a distância entre a superfície média e a superfície interna da  $k$ -ésima lâmina.

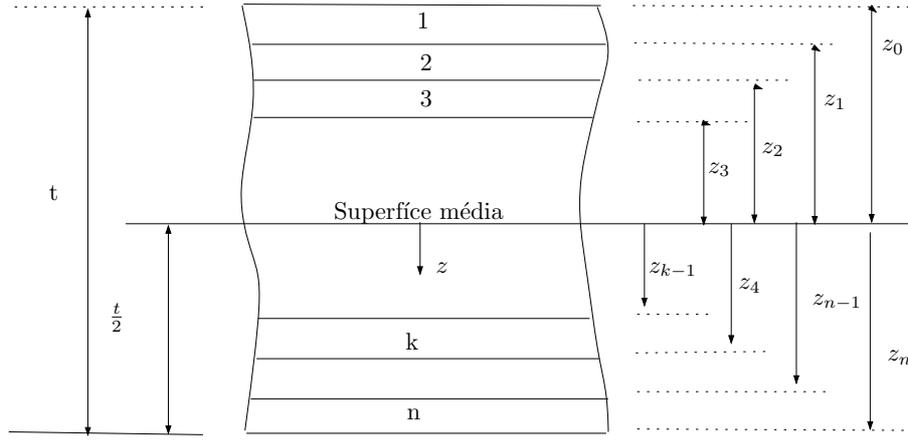


Figura 3.3: Sistema de numeração das lâminas.

- $z_k$  é a distância entre a superfície média e a superfície externa da  $k$ -ésima lâmina (Fig. 3.3).

Através da substituição da Equação 3.17 nas Equações 3.18 e 3.19, as resultantes de força e momento podem ser escritas como:

$$N_x = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{(\bar{Q}_{11})_k(\epsilon_x^0 + z\kappa_x) + (\bar{Q}_{12})_k(\epsilon_y^0 + z\kappa_y) + (\bar{Q}_{16})_k(\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy})\} dz \quad (3.20)$$

$$M_x = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{(\bar{Q}_{11})_k(\epsilon_x^0 + z\kappa_x) + (\bar{Q}_{12})_k(\epsilon_y^0 + z\kappa_y) + (\bar{Q}_{16})_k(\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy})\} z dz, \quad (3.21)$$

combinando os termos e reorganizando as Equações 3.20 e (3.21), tem-se:

$$N_x = A_{11}\epsilon_x^0 + A_{12}\epsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_x + B_{12}\kappa_y + B_{16}\kappa_{xy} \quad (3.22)$$

$$M_x = B_{11}\epsilon_x^0 + B_{12}\epsilon_y^0 + B_{16}\gamma_{xy}^0 + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + D_{16}\kappa_{xy}, \quad (3.23)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k z dz = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k z^2 dz = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \end{aligned} \quad (3.24)$$

sendo  $i, j = 1, 2$ , ou 6. As outras resultantes de tensão podem ser escritas de maneira similar, e o conjunto completo de equações pode ser expresso na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix},$$

ou ainda, na forma compacta:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix}.$$

A matriz  $[A]$  é matriz de rigidez extensional do laminado que relaciona as forças axiais  $\{N\}$  com as deformações  $\{\epsilon^0\}$  do plano médio da placa.  $[D]$  é a matriz de rigidez à flexão e relaciona os momentos  $\{M\}$  com as curvaturas  $\{\kappa\}$ . A matriz  $[B]$  acopla forças axiais  $\{N\}$  com as curvaturas  $\{\kappa\}$  e os momentos  $[M]$  com deslocamentos na superfície média da placa. O tipo de acoplamento  $B_{ij}$  no laminado se deve às propriedades materiais e geométricas assimétricas em relação a superfície média do laminado e não propriamente devido a anisotropia do material. Portanto, a orientação das lâminas, a seqüência de empilhamento e as propriedades geométricas e de materiais, em relação a sua superfície média, são os fatores que dão forma a matriz de rigidez. Quando existe simetria geométrica e de propriedades materiais em relação ao plano médio da placa, os termos da matriz  $B_{ij}$  são nulos. É importante notar que um laminado que possua os termos da matriz  $[B]$  diferentes de zero, quando carregado paralelamente ao seu plano médio pode apresentar deformações transversais a este plano, além de um efeito de extensão no plano médio quando sob flexão ou torção.

### 3.4 Flexão em placas laminadas.

Considere o elemento infinitesimal apresentado na Figura 3.4. As resultantes de tensão (N) estão representadas em (a), as resultantes de momento e tensão de cisalhamento estão

representadas em (b) e (c), respectivamente. É incluída também na Figura 3.4-c uma carga transversal distribuída  $q(x, y)$ . Considerando pequenas as deflexões transversais, as forças cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  são definidas, analogamente às Equações 3.18 e 3.19, como (Halpin 1984):

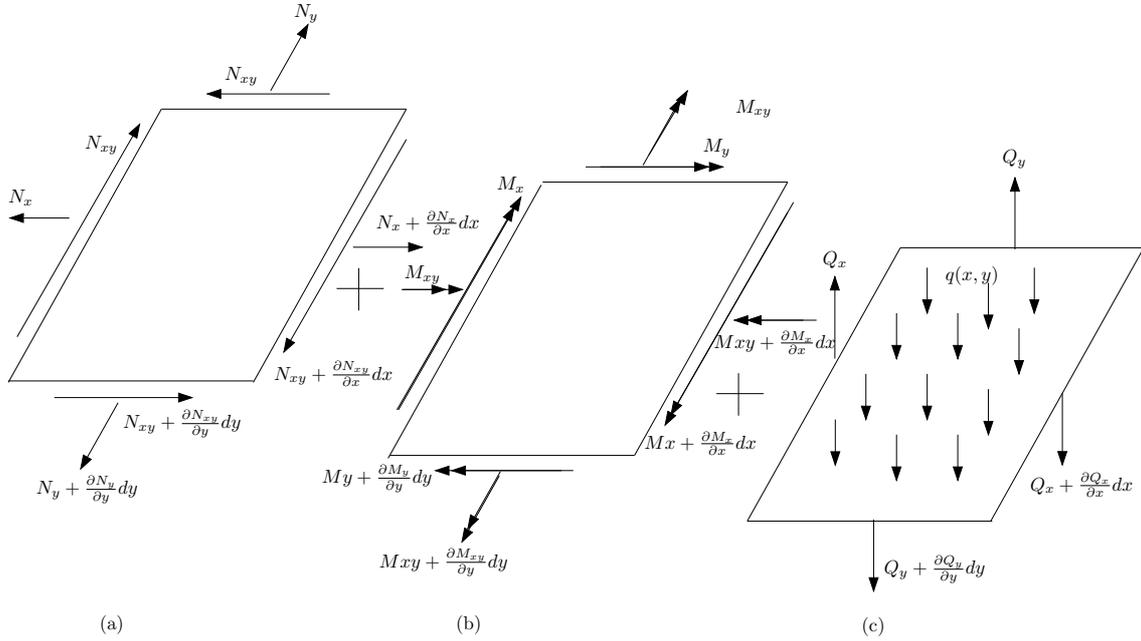


Figura 3.4: Forças atuantes no laminado.

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz, \quad (3.25)$$

Para o equilíbrio estático, de acordo com a segunda lei de Newton, o somatório das forças agindo ao longo da direção  $x$  deve ser:

$$N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + N_{xy} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx dy - N_x dy - N_{xy} dx = 0. \quad (3.26)$$

A Equação 3.26 pode ser reduzida à expressão:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (3.27)$$

Procedendo-se da mesma forma em relação a direção  $y$ , obtém-se:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (3.28)$$

O somatório das forças ao longo da direção  $z$  é expresso como:

$$Q_x dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + Q_y dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy - Q_x dy - Q_y dx + q(x, y) = 0. \quad (3.29)$$

ou simplesmente por:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{\partial y} + q(x, y) = 0. \quad (3.30)$$

O somatório dos momentos agindo em torno do eixo  $x$  deve ser:

$$\begin{aligned} -M_y dx + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - M_{xy} dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy \\ + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx dy + q(x, y) dx dy dy/2 + Q_x dy dy/2 \\ + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy dy/2 + M_y dx + M_{xy} dy - Q_x dy dy/2 = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Simplificando a Equação 3.31, tem-se:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y. \quad (3.32)$$

Analogamente, o somatório de momentos em torno do eixo  $y$  é dado por:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x. \quad (3.33)$$

Substituindo as Equações 3.33, 3.32 na Equação (3.30) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0. \quad (3.34)$$

As Equações 3.27, 3.32 e 3.34 são as equações diferenciais de equilíbrio de placa escritas em termos de tensões e momentos. Essas equações podem ser escritas também em termos de deslocamentos através da substituição das relações (3.22), das relações de tensão-deslocamento 3.15 e das equações de curvatura-deslocamento 3.16 nas Equações 3.27, 3.32 e 3.34 resultando em:

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{16})A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} \\
& + A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{16}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} \\
& + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\
& + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u^0}{\partial x \partial y^2} \\
& - B_{26} \frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x \partial y^2} \\
& - B_{22} \frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3} = q(x, y). \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Observa-se que os deslocamentos  $u^0$  e  $v^0$  são acoplados com o deslocamento transversal  $w$ , caracterizando o acoplamento do tipo  $B_{ij}$ . Este trabalho, entretanto, se restringirá à formulação de flexão de placas em laminados simétricos. Assim, os termos  $B_{ij}$  desaparecem e as Equações 3.35, 3.36 e 3.37 ficam reduzidas à:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{16})A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} = 0 \quad (3.38)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} = 0 \quad (3.39)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (3.40)$$

Geralmente, a solução analítica para essas equações diferenciais parciais são difíceis de serem obtidas, e dependendo das condições de contorno, até mesmo impossíveis. Fica portanto, evidente a importância da implementação de métodos numéricos na resolução de problemas em engenharia.

# Capítulo 4

## Teoria de Placas Anisotrópicas

### 4.1 Introdução

Uma placa pode ser classificada em relação à suas propriedades materiais: anisotrópicas, com diferentes propriedades em diferentes direções ou isotrópicas, com as mesmas propriedades em todas as direções. Dependendo da sua espessura, a placa pode ser considerada espessa, fina ou muito fina, correspondendo a cada classificação um modelo matemático específico.

Na literatura existem diversas teorias para abordar o comportamento das placas submetidas à flexão simples. Neste trabalho será adotada a teoria de Kirchhoff, que em geral interpreta suficientemente bem o comportamento das placas finas.

### 4.2 Equações básicas

As relações e equações diferenciais básicas das placas finas são obtidas à partir das hipóteses decritas a seguir:

- i) Os deslocamentos transversais são pequenos em relação à espessura da placa, ou seja, a deformação é escrita a partir das hipóteses de pequenos deslocamentos.
- ii) Seções planas, inicialmente normais ao plano médio da placa, após a flexão, permanecem planas e perpendiculares ao plano médio deformado, ou seja, a teoria clássica despreza a influência da deformação devido à força cortante.
- iii) As tensões aplicadas em suas faces são pequenas em relação às tensões normais de flexão, paralelas ao plano médio.

iv) A superfície média é assumida rígida nas direções do plano que a contém.

A partir das hipóteses descritas anteriormente pode-se determinar as equações governantes da teoria de placas de Kirchhoff. A Figura 4.1 apresenta um elemento de placa submetido a uma carga  $g$ . Definem-se os momentos de flexão e de torção por unidade de comprimento como:

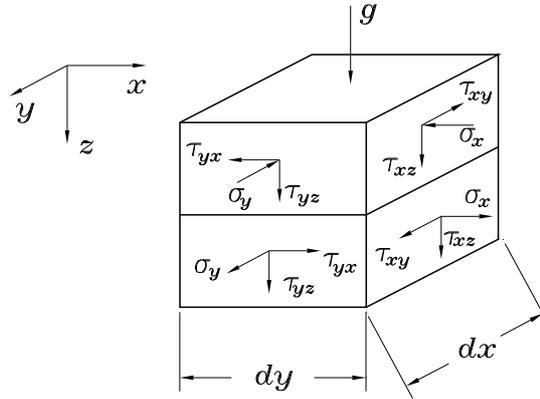


Figura 4.1: Elemento de placa com suas respectivas tensões.

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad (4.1)$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad (4.2)$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \quad (4.3)$$

$$m_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z dz, \quad (4.4)$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad (4.5)$$

e

$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \quad (4.6)$$

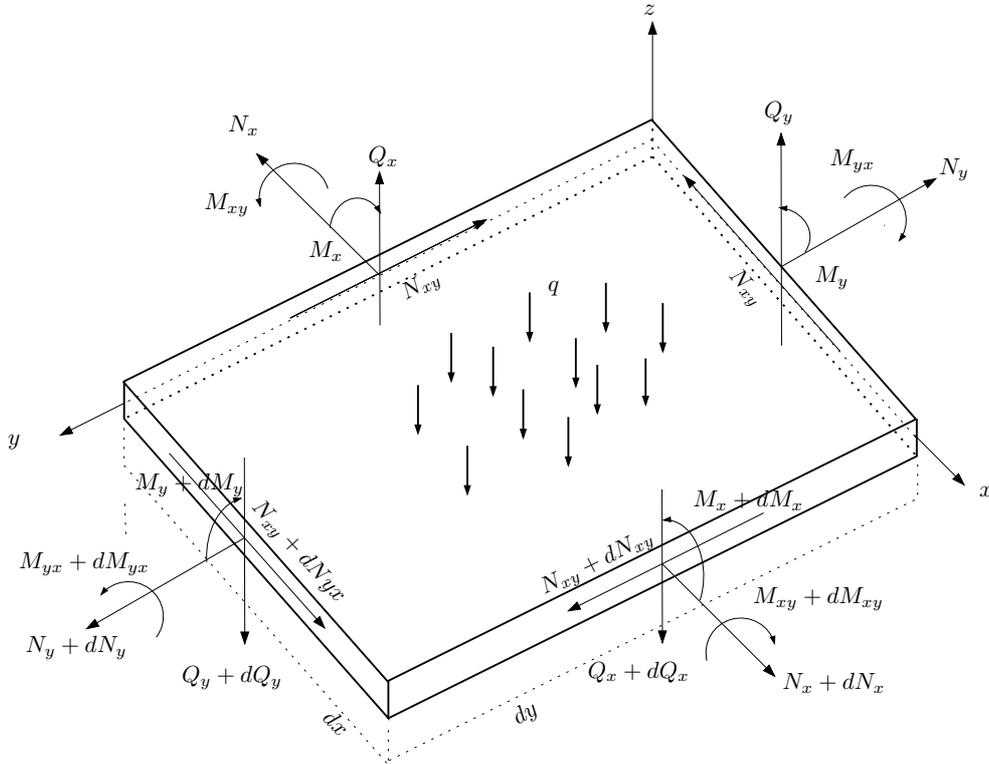


Figura 4.2: Forças e Momentos agindo no elemento de placa.

Através do equilíbrio de forças e momentos, pode-se escrever as seguintes relações:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0. \quad (4.9)$$

Resolvendo as Equações 4.8 e 4.9 para  $q_x$  e  $q_y$ , respectivamente, substituindo na Equação 4.7, e considerando simetria de momentos ( $m_{xy} = m_{yx}$ ), tem-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g. \quad (4.10)$$

Considere a posição inicial e final do elemento de placa dado por  $abcd$  paralelos a superfície média com os lados  $a$  e  $b$  paralelo aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, a uma distância  $z$  da superfície média (Figura 4.3).

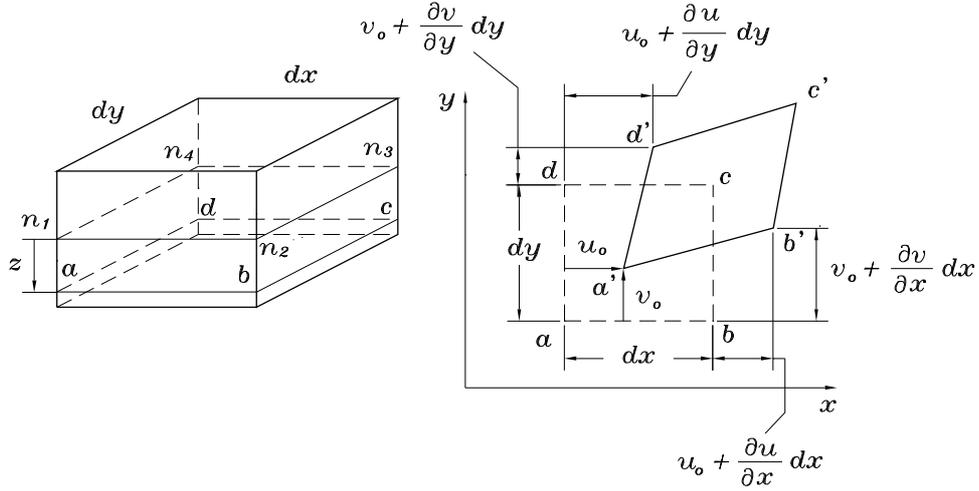


Figura 4.3: Deformação do elemento de placa.

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos  $a, b, c$  e  $d$ , se movem para  $a', b', c'$  e  $d'$ , e chamando  $u_o$  e  $v_o$  de componentes de deslocamento no ponto  $a$  nas direções  $x$  e  $y$  (Figura 4.3), respectivamente, o deslocamento no ponto  $b$  na direção  $x$  é dado por:

$$b'_x - b_x = u_o + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (4.11)$$

Assim, o incremento no comprimento  $dx$  na direção  $x$  é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (4.12)$$

e a deformação na direção no eixo  $x$  é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.13)$$

Da mesma maneira, temos:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (4.14)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.15)$$

A Figura 4.4 mostra a posição final e inicial de uma seção da placa, paralela ao plano  $xz$ , o qual contém os pontos  $a$ ,  $b$ ,  $n_1$  e  $n_2$ . A rotação do elemento  $an_1$ , inicialmente localizado numa posição vertical, é igual a  $\frac{\partial w}{\partial x}$  (Figura 4.4).

Assim, os deslocamentos do ponto na direção  $x$ , numa distância  $z$  da superfície média, podem ser escritos como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.16)$$

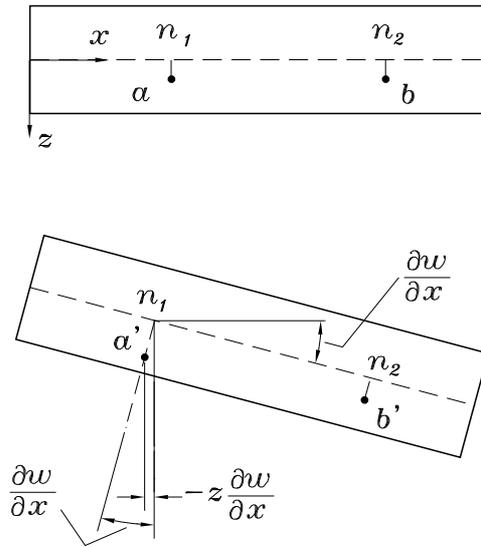


Figura 4.4: Posição inicial e final de um elemento de placa  $abn_1n_2$ .

De maneira análoga, o deslocamento de um ponto na direção  $y$  é dado por:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.17)$$

Substituindo as Equações 4.16 e 4.17 dentro das Equações 4.13, 4.14, e 4.15, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
\varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
\gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

As equações constitutivas para materiais anisotrópicos são dadas por (Lekhnitskii 1968b):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Substituindo as Equações 4.18 dentro das Equações 4.19, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -z \left( C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
\sigma_y &= -z \left( C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
\tau_{xy} &= -z \left( C_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde  $C_{ij}$  são constantes dadas por:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1}{\Delta} (a_{22}a_{66} - a_{26}^2), & C_{22} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{66} - a_{16}^2), \\
C_{12} &= \frac{1}{\Delta} (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}), & C_{66} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \\
C_{16} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}), & C_{26} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}. \quad (4.22)$$

Substituindo a Equação 4.20 dentro da Equação 4.18 e integrando, obtém-se:

$$\begin{aligned} m_x &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ m_y &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ m_{xy} &= - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde

$$D_{ij} = C_{ij} \frac{t^3}{12}. \quad (4.24)$$

Substituindo a Equação 4.23 dentro das Equações 4.8 e 4.9, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} q_x &= \left[ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right], \\ q_y &= \left[ D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A Equação 4.10 pode ser reescrita usando as Equações 4.23 como:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \quad (4.26)$$

A solução geral para  $w$  na Equação 4.26 depende de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\bar{\mu}_1$ , e  $\bar{\mu}_2$ , raízes da equação característica dada por:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \quad (4.27)$$

As raízes dessa equação, conforme mostrada por Lekhnitskii (Lekhnitskii 1968b), são sempre complexas para materiais homogêneos. As raízes complexas:  $\mu_1 = d_1 + e_1i$  e  $\mu_2 = d_2 + e_2i$  são conhecidas como parâmetros complexos de deflexão. Em geral essas raízes são números complexos e diferentes entre si.

Uma expressão geral para a deflexão tem a forma:

i) no caso de parâmetros complexos diferentes ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]. \quad (4.28)$$

ii) no caso de parâmetros complexos iguais ( $\mu_1 = \mu_2$ ):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + \bar{z}_1 w_2(z_1)]. \quad (4.29)$$

onde  $w_o$  é a solução particular da Equação 4.26 que depende da carga distribuída  $q$  na superfície da placa,  $w_1(z_1)$  e  $w_2(z_2)$  são funções analíticas arbitrárias das variáveis complexas  $z_1 = x + \mu_1 y$  e  $z_2 = x + \mu_2 y$ .

Baseado-se na Equações 4.23 e 4.25, expressões gerais para forças e momentos podem ser obtidas como (para o caso  $\mu_1 \neq \mu_2$ ):

$$m_x = m_x^o - 2\text{Re}[p_1 w''(z_1) + p_2 w''(z_2)],$$

$$m_y = m_y^o - 2\text{Re}[q_1 w''(z_1) + q_2 w''(z_2)],$$

$$m_{xy} = m_{xy}^o - 2\text{Re}[r_1 w''(z_1) + r_2 w''(z_2)],$$

$$q_x = q_x^o - 2\text{Re}[\mu_1 s_1 w'''(z_1) + \mu_2 s_2 w'''(z_2)],$$

$$q_y = q_y^o - 2\text{Re}[s_1 w'''(z_1) + s_2 w'''(z_2)]. \quad (4.30)$$

onde  $m_x^o$ ,  $m_y^o$ ,  $m_{xy}^o$ ,  $q_x^o$ , e  $q_y^o$  são momentos e forças cortantes correspondente a função  $w_o$  calculada das Equações 4.23 e 4.25. As outras constantes são dadas por:

$$p_1 = D_{11} + D_{12}\mu_1^2 + 2D_{16}\mu_1,$$

$$p_2 = D_{11} + D_{12}\mu_2^2 + 2D_{16}\mu_2,$$

$$q_1 = D_{12} + D_{22}\mu_1^2 + 2D_{26}\mu_1,$$

$$q_2 = D_{12} + D_{22}\mu_2^2 + 2D_{26}\mu_2,$$

$$r_1 = D_{16} + D_{26}\mu_1^2 + 2D_{66}\mu_1,$$

$$p_2 = D_{16} + D_{26}\mu_2^2 + 2D_{66}\mu_2,$$

$$s_1 = \frac{D_{11}}{\mu_1} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_1 + D_{26}\mu_1^2,$$

$$(4.31)$$

$$s_2 = \frac{D_{11}}{\mu_2} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_2 + D_{26}\mu_2^2,$$

$$s_1 - r_1 = \frac{p_1}{\mu_1},$$

$$s_2 - r_2 = \frac{p_2}{\mu_2},$$

$$s_1 + r_1 = -q_1\mu_1,$$

$$s_2 + r_2 = -q_2\mu_2.$$

Expressões similares podem ser obtidas para o caso onde  $\mu_1 = \mu_2$ . Entretanto, esse caso não será mostrado nesse trabalho, pois em geral em problemas anisotrópicos  $\mu_1$  é diferente de  $\mu_2$ .

### 4.3 Cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias

Considerando que as constantes de rigidez a flexão da placa no sistema de coordenadas  $x, y, z$  são dadas por  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) e no sistema de coordenadas  $x', y', z'$ , para uma determinada rotação  $\alpha$  em relação a essas constantes, como mostrado por Lekhnitskii (Lekhnitskii 1968b), são dados por:

$$D'_{11} = D_{11} \cos^4 \phi + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \sin^4 \phi + 2(D_{16} \cos^2 \phi + D_{26} \sin^2 \phi) \sin 2\phi, \quad (4.32)$$

$$D'_{22} = D_{11} \sin^4 \phi + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \cos^4 \phi + 2(D_{16} \sin^2 \phi + D_{26} \cos^2 \phi) \sin 2\phi, \quad (4.33)$$

$$D'_{12} = D_{12} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \phi \cos^2 \phi + (D_{26} - D_{16}) \cos 2\phi \sin 2\phi, \quad (4.34)$$

$$D'_{66} = D_{66} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \phi \cos^2 \phi +$$

$$(D_{26} - D_{16}) \cos 2\phi \sin 2\phi, \quad (4.35)$$

$$D'_{16} = \frac{1}{2}[D_{22} \sin^2 \phi - D_{11} \cos^2 \phi + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\phi] \sin 2\phi +$$

$$D_{16} \cos^2 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi) + D_{26} \sin^2 \phi (3 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \quad (4.36)$$

$$D'_{26} = \frac{1}{2}[D_{22} \cos^2 \phi - D_{11} \sin^2 \phi + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\phi] \sin 2\phi +$$

$$D_{16} \sin^2 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi) + D_{26} \cos^2 \phi (3 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi). \quad (4.37)$$

As componentes de tensão e cisalhamento,  $\sigma_n$  e  $\tau_{ns}$ , respectivamente, são relacionadas com as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , e  $\tau_{xy}$  por:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.38)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (4.39)$$

As componentes do momento, inicialmente escritas em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , podem ser reescritas em um sistema de coordenadas genéricas  $n, s$  ((Paiva 1987)). Os momentos fletores escritos nas direções  $n$  e  $s$  são dados por:

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.40)$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha + m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (4.41)$$

Da mesma forma,  $q_n$ , a força cortante no eixo  $n$ , pode ser escrita como:

$$q_n ds = q_x ds \cos \alpha + q_y ds \sin \alpha, \quad (4.42)$$

ou

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha. \quad (4.43)$$

Para solucionar a equação diferencial de placas 4.26, é necessário impor condições de contorno para o deslocamento  $w$  e sua derivada  $\partial w / \partial n$ . Kirchhoff (Kirchhoff 1950) mostrou que as condições de contorno da força cortante  $q_n$  e o momento volvente  $m_{ns}$  podem ser escritos como uma única condição de contorno dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}, \quad (4.44)$$

onde  $V_n$  é denominado cortante equivalente, assim, a outra condição de contorno é o momento  $m_n$ .

## 4.4 Equação integral de placas

Seja uma placa de domínio finito  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  contida em outra de domínio infinito  $\Omega_\infty$  e contorno  $\Gamma_\infty$ . Conforme a Figura 4.5, a placa finita está submetida a um carregamento  $q$  distribuído em uma área  $\Omega_q$ .

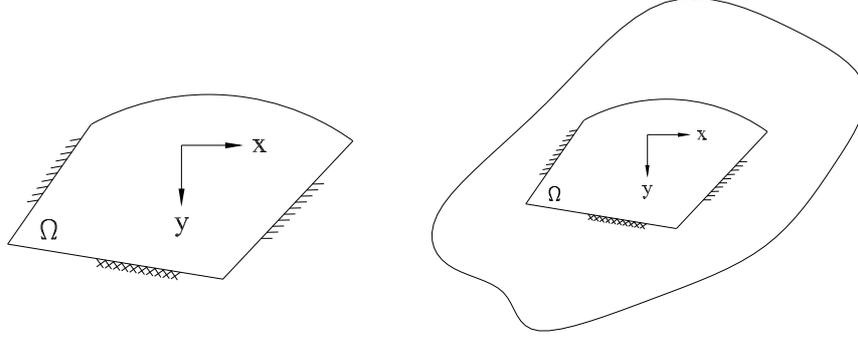


Figura 4.5: Placa finita contida em uma placa infinita.

A placa de domínio finito é submetida a dois carregamentos não simultâneos  $q$  e  $q^*$ , associados a superfícies elásticas  $w$  e  $w^*$ , respectivamente. São identificados dois estados de tensão  $\sigma$  e  $\sigma^*$ , com seus respectivos estados de deformação  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^*$ , que podem relacionar-se da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dv = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dv \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.45)$$

A identidade 4.45 é conhecida como primeiro teorema de Betti, ou teorema da reciprocidade. Chamando de  $U$  o primeiro termo da direita da igualdade 4.45, pode-se escrever notação clássica:

$$U = \int_V (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \sigma_{33} \varepsilon_{33}^* + \tau_{12} \varepsilon_{12}^* + \tau_{13} \varepsilon_{13}^* + \tau_{21} \varepsilon_{21}^* + \tau_{23} \varepsilon_{23}^* + \tau_{31} \varepsilon_{31}^* + \tau_{32} \varepsilon_{32}^*) dV \quad (4.46)$$

Desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, a equação 4.46 pode ser escrita como:

$$U = \int_V (\sigma_{11}\varepsilon_{11}^* + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^* + \tau_{12}\gamma_{12}^*) dV \quad (4.47)$$

Substituindo-se as relações de deformação-deslocamento (Equação 4.20), constitutivas (Equação 4.19) no primeiro termo de  $U$  e integrando-se ao longo da espessura da placa, obtém-se uma integral sobre o domínio  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{11}\varepsilon_{11}^*) dV = \int_{\Omega} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} + D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} + \right. \\ \left. 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (4.48)$$

A partir das relações dos momentos fletores 4.23, a Equação 4.48 pode ser escrita da seguinte forma:

$$U = \int_{\Omega} \left( -M_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - M_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2M_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) d\Omega \quad (4.49)$$

A expressão 4.49 pode ser transformada em uma integral sobre o contorno integrando-se por partes o primeiro termo de 4.49, obtém-se:

$$\int_{\Omega} M_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = - \int_{\Gamma} M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} n_1 d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} d\Omega \quad (4.50)$$

sendo,  $n_1$  o cosseno diretor do vetor normal ao contorno na direção  $x_1$ .

Os cossenos diretores de um ponto P do contorno, são dados por (Figura 4.6):

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos \alpha \\ n_2 &= \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.51)$$

Integrando novamente a segunda parcela da Equação 4.50 e considerando as definições apresentadas em 4.51, pode-se escrever:

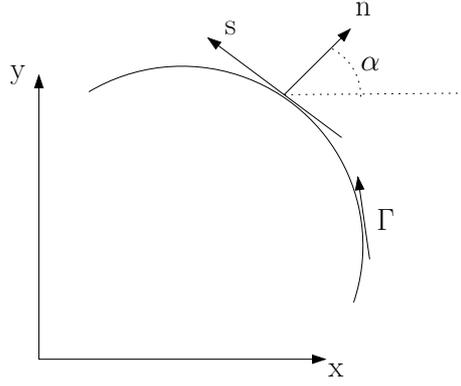


Figura 4.6: Sistemas de coordenadas normal e tangente ao contorno.

$$\int_{\Omega} M_{11} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} w^* \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} w^* d\Omega \quad (4.52)$$

De forma análoga, integrando-se o segundo termo da Equação 4.49, obtém-se:

$$\int_{\Omega} M_{22} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{22} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \sin \alpha + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} w^* d\Omega. \quad (4.53)$$

O terceiro termo da Equação 4.49 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} 2M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega = - \int_{\Omega} M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega - \int_{\Omega} M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega. \quad (4.54)$$

Integrando-se por partes cada termo do membro direito da Equação 4.53, uma vez em relação a  $x_1$  e a outra vez em relação a  $x_2$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cos \alpha - M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \sin \alpha + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} w^* \cos \alpha \right. \\ \left. + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} w^* d\Omega. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Substituindo-se em 4.49 os três termos encontrados nas Equações 4.52, 4.53 e 4.55, obtém-se:

$$\begin{aligned}
U = & - \int_{\Gamma} \left( M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cos \alpha + M_{22} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \sin \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cos \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \sin \alpha \right) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) \sin \alpha \right] w^* d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} \right) w^* d\Omega
\end{aligned} \tag{4.56}$$

De acordo com as equações de equilíbrio de forças e momentos fletores 4.7, 4.8 e 4.9, a equação diferencial de placas 4.10 e a equação de cortantes normais ao contorno 4.43, a Equação 4.56 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U = & - \int_{\Gamma} \left( M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cos \alpha + M_{22} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \sin \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cos \alpha + M_{12} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \sin \alpha \right) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega
\end{aligned} \tag{4.57}$$

A partir das relações entre os sistemas de coordenadas (Figura 4.6), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^*}{\partial x_1} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \\
\frac{\partial w^*}{\partial x_2} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Substituindo-se na Equação 4.57 as Equações 4.58, obtém-se:

$$\begin{aligned}
U = & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} [M_{11} \cos^2 \alpha + 2M_{12} \sin \alpha \cos \alpha + M_{22} \sin^2 \alpha] \right. \\
& \left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} [(M_{22} - M_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + M_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \right\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Substituindo-se na Equação 4.59 as Equações 4.41, pode-se escrever:

$$U = - \int_{\Gamma} \left( M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) + \int_{\Omega} q w^* d\Omega \quad (4.60)$$

Integrando-se por partes o segundo termo da integral de contorno da Equação 4.60, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (4.61)$$

sendo,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  as coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração. No caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, a primeira parcela da Equação 4.61 se anula. Caso contrário, ela dará origem a reações nos cantos da placa. Desta maneira, a Equação 4.61 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = - \sum_{t=1}^N R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (4.62)$$

sendo,  $N_c$  o número total de cantos do contorno da placa e  $w_{ci}^*$  o deslocamento fundamental do canto  $i$  da placa.

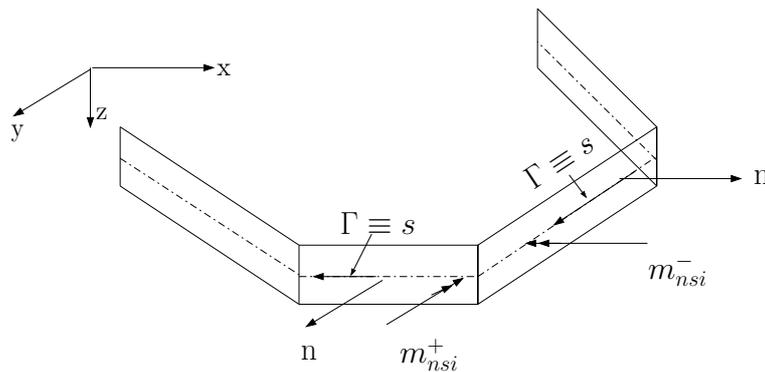


Figura 4.7: Canto  $i$  do contorno da placa.

Uma interpretação apropriada das reações de canto da placa,  $R_{ci}$ , pode ser escrita a partir dos momentos volventes anterior e posterior ao canto da placa, ou seja:

$$R_{ci} = M_{ns_i}^+ - M_{ns_i}^- \quad (4.63)$$

sendo,  $M_{ns_i}^+$  e  $M_{ns_i}^-$  os momentos volventes posterior e anterior ao canto  $i$  da placa, respectivamente. Substituindo-se na Equação 4.60 o valor encontrado pela Equação 4.62, obtém-se:

$$U = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* + Q_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{t=1}^N R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} q w^* d\Omega \quad (4.64)$$

Considerando-se que o carregamento  $q$  está distribuído em  $W_g$  e utilizando-se a Equação 4.44 na Equação 4.64, pode-se escrever:

$$U = \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{t=1}^N R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} q w^* d\Omega \quad (4.65)$$

O termo do primeiro membro da Equação 4.45 pode ser desenvolvido de modo análogo, chegando-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{11}^* \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \varepsilon_{22} + \tau_{12}^* \varepsilon_{12}) d\Omega &= \int_{\Gamma} \left( V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \\ &\sum_{t=1}^N R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} q^* w d\Omega \end{aligned} \quad (4.66)$$

A equação final do teorema de Betti aplicado ao estudo de placas pode ser obtido a partir das Equações 4.65 e 4.66 como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{t=1}^N R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} q w^* d\Omega &= \\ \int_{\Gamma} \left( V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{t=1}^N R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} q^* w d\Omega \end{aligned} \quad (4.67)$$

Supondo-se que o carregamento  $g^*$  em 4.67 seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto  $x$  do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora a solução fundamental e aplicando as propriedades da função delta de Dirac, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
w(Q) + \int_{\Gamma} V_n^*(Q, P)w(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(Q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \\
\int_{\Gamma} w^*(Q, P)V_n(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P)M_n(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(Q, P)R_{c_i}(P) + \\
\int_{\Omega} w^*(Q, P)b(P)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.68}$$

sendo  $x_c$  a coordenada dos cantos da placa. A Equação 4.68 é a equação integral de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes ( $V_n$ ), momentos de flexão na direção normal ( $M_n$ ), reações de canto ( $R_c$ ), deslocamentos ( $w$ ) e rotações em relação à normal ( $\partial w/\partial n$ ) conhecidos no contorno.

Para transformar a Equação 4.68, escrita em termos de valores de domínio da placa, numa relação com apenas valores do contorno é necessário um artifício. Acrescenta-se ao domínio uma pequena região  $\Omega_e$  de modo que o novo domínio seja dado por  $\Omega$  e  $\Omega_e$  com um contorno  $\Gamma + \Gamma_e - \Gamma^*$ , como mostra a Figura 4.8.

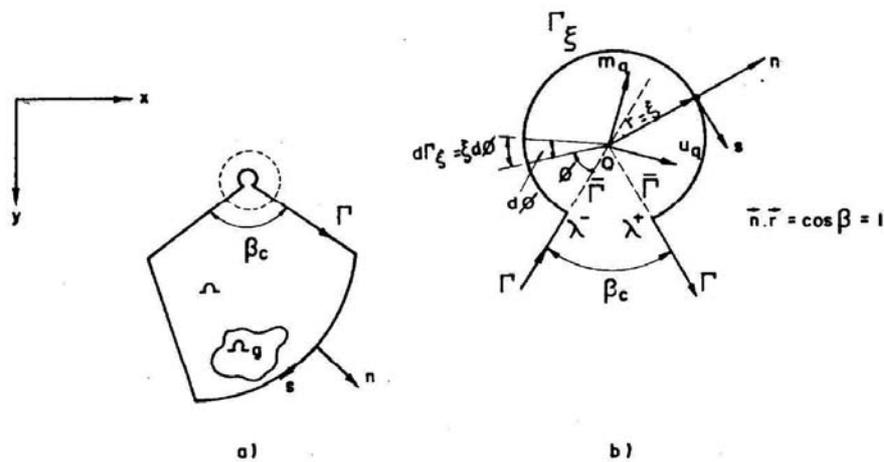


Figura 4.8: Contorno circular acrescido a um canto de placa.

Com o artifício da Figura 4.8, após as integrações em  $\Gamma_e$  com as integrais sobre os contornos  $\Gamma - \Gamma^*$  entendidas no sentido do valor principal, quando  $\epsilon$  tende a zero, a partir de (Paiva 1987) obtém-se:

$$\begin{aligned}
cw(Q) + \int_{\Gamma} V_n^*(Q, P)w(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(Q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \\
\int_{\Gamma} w^*(Q, P)V_n(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P)M_n(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(Q, P)R_{c_i}(P) + \\
\int_{\Omega} w^*(Q, P)b(P)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.69}$$

A Equação 4.69 representa a equação integral de placas finas para pontos do contorno da placa. A quantidade  $C(Q)$  representa as descontinuidades dos cantos da placa, sendo dada por:

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi}, \tag{4.70}$$

onde,  $\beta_c$  é a angulosidade do canto da placa (Figura 4.8). Quando o ponto do contorno não apresenta angulosidades, a Equação 4.70 pode ser reduzida a  $c = 1/2$ .

Para problemas de flexão em placas anisotrópicas tem-se a equação integral de contorno escrita em termos de quatro valores de contorno básicos, isto é, deflexão  $w$ , inclinação da normal  $\partial w/\partial n$ , força cortante equivalente  $V_n$  e momento fletor  $M_n$ . Em um problema bem colocado, dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas. Conforme mostrado por (Paiva 1987), a primeira equação integral de contorno é dada por:

$$\begin{aligned}
cw(Q) + \int_{\Gamma} V_n^*(Q, P)w(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(Q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \\
\int_{\Gamma} w^*(Q, P)V_n(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P)M_n(P)d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(Q, P)R_{c_i}(P) + \\
\int_{\Omega} w^*(Q, P)b(P)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.71}$$

onde  $R_{c_i}$  e  $w_{c_i}$  são as reações e deflexões de canto, respectivamente, no  $i$ -ésimo canto da placa;  $Nc$  é o número de cantos do contorno; o símbolo “\*” representa as soluções fundamentais;  $b$  é a força de corpo aplicada no domínio da placa e  $c$  é introduzido para considerar que o

ponto  $Q$  pode estar sobre o contorno, interno ou externo a ele. Se o ponto estiver sobre um contorno suave,  $c = 1/2$ .

$$\begin{aligned}
c \frac{\partial w}{\partial n_0}(Q) + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(Q, P) w(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_0}(Q, P) w_{c_i}(P) = \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(Q, P) V_n(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n}(Q, P) M_n(P) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_0}(Q, P) R_{c_i}(P) + \\
\int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(Q, P) b(P) d\Omega. \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Pode se verificar que num problema de flexão em placa há sempre duas incógnitas a serem determinadas em qualquer ponto do contorno e, conseqüentemente, a solução do problema requer que uma segunda equação integral de contorno seja estabelecida. A segunda equação integral de contorno é obtida pela derivada da Equação 4.71 em relação à direção  $n_0$  normal ao contorno no ponto fonte, obtendo-se a Equação 4.72.

## 4.5 Solução fundamental de placa

A solução fundamental de placas é dada pelo deslocamento  $w$  em um ponto  $P$  qualquer do domínio, chamado ponto campo, devido a aplicação de uma carga unitária  $q$  em um ponto  $P'$  qualquer, chamado ponto fonte (Figura 4.9). A solução fundamental para placas anisotrópicas em flexão é obtida em termos das raízes  $\mu_k$  da equação característica:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \quad (4.73)$$

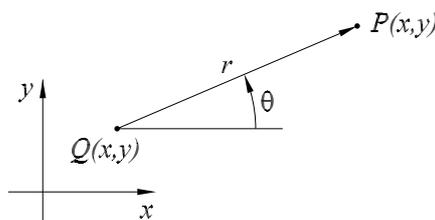


Figura 4.9: Solução fundamental.

Para materiais homogêneos as raízes desta equação, como mostrada por (Lekhnitskii 1968a), são sempre complexas e dadas por:

$$\mu_k = d_k + ie_k, \quad (4.74)$$

sendo  $\bar{\mu}_2$  o conjugado de  $\mu_k$ .

Como visto na Seção 4, a solução fundamental é a solução da equação diferencial 4.26 com o termo não homogêneo igual a uma força concentrada dada pela função delta de Dirac  $\delta(P, P')$ , ou seja:

$$\Delta\Delta w^*(P, P') = \delta(P, P'), \quad (4.75)$$

onde  $\Delta\Delta(\cdot)$  é o operador diferencial dado por:

$$\Delta\Delta(\cdot) = \frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + 4 \frac{D_{16}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial^3 \partial y} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \frac{D_{26}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4}. \quad (4.76)$$

A solução fundamental de flexão para placas anisotrópicas é dada por (Shi e Bezine 1988):

$$w^* = \frac{1}{8\pi D_{22}} \{C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)\}, \quad (4.77)$$

onde:

$$C_1 = \frac{(d_1 - d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_1}, \quad (4.78)$$

$$C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_2}, \quad (4.79)$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)}{GH}, \quad (4.80)$$

e

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2, \quad (4.81)$$

$$H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2. \quad (4.82)$$

$R_i$  e  $S_i$  são funções dadas por:

$$\begin{aligned} R_i = & r^2 [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta] \times \\ & \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta) \right] - 3 \right\} - \\ & 4r^2 e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

e

$$\begin{aligned}
S_i &= r^2 e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \times \\
&\quad \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta) \right] - 3 \right\} + \\
&\quad r^2 [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta] \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \tag{4.84}
\end{aligned}$$

onde:

$$r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}, \tag{4.85}$$

$$\theta = \arctan \frac{y - y_o}{x - x_o}. \tag{4.86}$$

O coeficiente  $a$  que aparece nas funções  $R_i$  e  $S_i$  é uma constante arbitrária. Neste trabalho usa-se  $a = 1$ .

A solução fundamental  $V_n^*$ , é dada por:

$$V_n^* = - \left( h_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + h_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} \right) - \frac{1}{R_c} \left( h_5 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + h_6 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + h_7 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \tag{4.87}$$

onde  $R_c$  é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno  $\Gamma$  e  $h_1$  a  $h_7$  são dados por:

$$h_1 = D_{11}n_x(1 + n_y^2) + 2D_{16}n_y^3 - D_{12}n_xn_y^2, \quad (4.88)$$

$$h_2 = 4D_{16}n_x + D_{12}n_y(1 + n_x^2) + 4D_{66}n_y^3 - D_{11}n_x^2n_y - 2D_{26}n_xn_y^2, \quad (4.89)$$

$$h_3 = 4D_{26}n_y + D_{12}n_x(1 + n_y^2) + 4D_{66}n_x^3 - D_{22}n_xn_y^2 - 2D_{16}n_x^2n_y, \quad (4.90)$$

$$h_4 = D_{22}n_y(1 + n_x^2) + 2D_{26}n_x^3 - D_{12}n_x^2n_y, \quad (4.91)$$

$$h_5 = (D_{12} - D_{11}) \cos 2\alpha - 4D_{16} \sin 2\alpha, \quad (4.92)$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha - 4D_{66} \sin 2\alpha, \quad (4.93)$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12}) \cos 2\alpha - 4D_{26} \sin 2\alpha. \quad (4.94)$$

A solução fundamental  $M_n^*$  é dada por

$$M_n^* = - \left( f_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + f_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \quad (4.95)$$

onde  $f_1$  a  $f_3$  são dados por:

$$f_1 = D_{11}n_x^2 + 2D_{16}n_xn_y + D_{12}n_y^2, \quad (4.96)$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2 + 2D_{66}n_xn_y + D_{26}n_y^2), \quad (4.97)$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2 + 2D_{26}n_xn_y + D_{22}n_y^2, \quad (4.98)$$

As derivadas que aparecem em  $V_n^*$  e  $M_n^*$  são calculadas por meio da combinação linear das derivadas das funções  $R_i$  e  $S_i$ . São dadas, detalhadamente por (Shi e Bezine 1988).

# Capítulo 5

## Método dos Elementos de Contorno

### 5.1 Introdução

Neste Capítulo é aplicado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) em problemas da elasticidade plana e de flexão em placas finas. As equações integrais apresentadas no Capítulo 2 são transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno. Essa transformação é feita a partir da divisão do contorno em segmentos denominados *elementos de contorno* onde as variáveis físicas do problema são aproximadas pelas variáveis nodais do elemento, sendo ponderadas por funções de interpolação previamente escolhidas. Através da transformação das equações integrais para todos os pontos do contorno, obtém-se um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são os próprios deslocamentos e esforços do contorno. Com a imposição das condições de contorno do problema, este sistema é resolvido e pode-se determinar valores de deslocamentos e esforços em nós definidos do contorno, e também em pontos do domínio.

### 5.2 Discretização do contorno

A Figura 5.1 mostra um domínio  $\Omega$  que possui um contorno  $\Gamma$  qualquer. O contorno  $\Gamma$  é dividido em  $j$  segmentos, ou elementos,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_j$ . Cada elemento possui um ou mais nós. Os deslocamentos e as forças no contorno podem ser aproximados a partir de seus valores nodais da mesma forma que a geometria. Para um dado nó  $M$  do elemento  $j$  o valor do deslocamento  $u$  é  $u_M^j$  e o valor das esforços  $t$  é  $t_m^j$ . Portanto, para cada elemento de contorno  $\Gamma_j$ , tanto a aproximação da geometria do elemento quanto as variáveis de deslocamento e

esforço de superfície serão descritas pela mesma função de interpolação. Chamando de  $\Phi_M$  as funções de forma e considerando  $M$  nós no elemento  $j$ , a função de forma de  $u^j(x)$  e  $t^j(x)$  são interpoladas respectivamente, por:

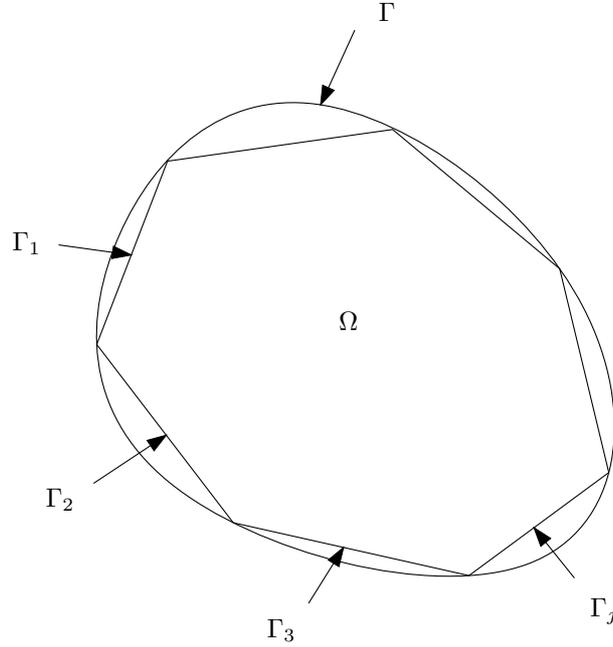


Figura 5.1: Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.

$$u^j(x) = \sum_{m=1}^M u_m^j \Phi_m(x) \quad (5.1)$$

$$t^j(x) = \sum_{m=1}^M t_m^j \Phi_m(x) \quad (5.2)$$

ou matricialmente por:

$$u^j(x) = \mathbf{u}^j \Phi(x) \quad (5.3)$$

$$t^j(x) = \mathbf{t}^j \Phi(x) \quad (5.4)$$

onde  $\mathbf{u}^j$  e  $\mathbf{t}^j$  são vetores  $1 \times M$  e  $\Phi$  é um vetor coluna  $M$ .

Neste trabalho, optou-se pela adoção de dois tipos de funções: constantes e quadráticas.

## Elementos constantes

Neste tipo de discretização ( Figura 5.2), cada elemento possui apenas um nó, os valores de  $u^j(x)$  e  $t^j(x)$  são constante através de todo elemento. Isso significa que  $\Phi = 1$  e,

$$u^j(x) = u_1^j \Phi_1(x) = u^j \quad (5.5)$$

$$t^j(x) = t_1^j \Phi_1(x) = t^j \quad (5.6)$$

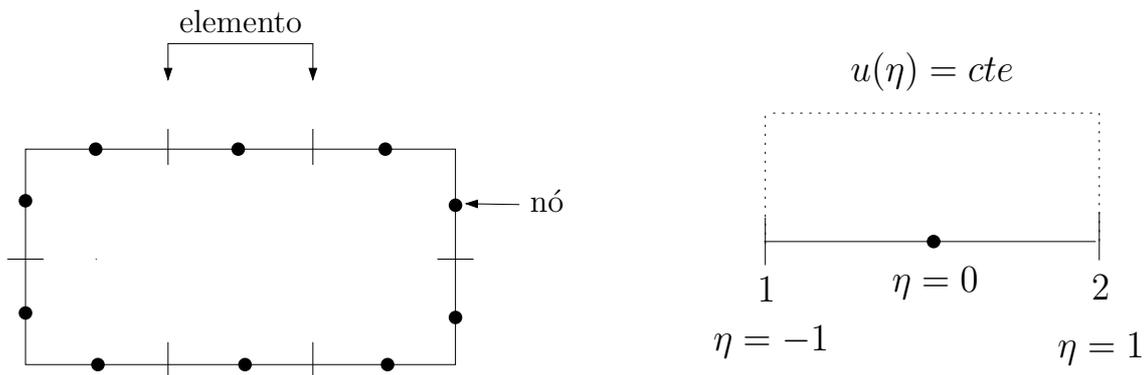


Figura 5.2: Elemento constante.

## Elementos quadráticos descontínuos

No elemento quadrático descontínuo (Figura 5.3), são necessários três nós, pois são três os parâmetros que definem uma função quadrática.

Os deslocamentos e as forças de superfícies são representados em um elemento quadrático padrão como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{u}^{(n)} \quad (5.7)$$

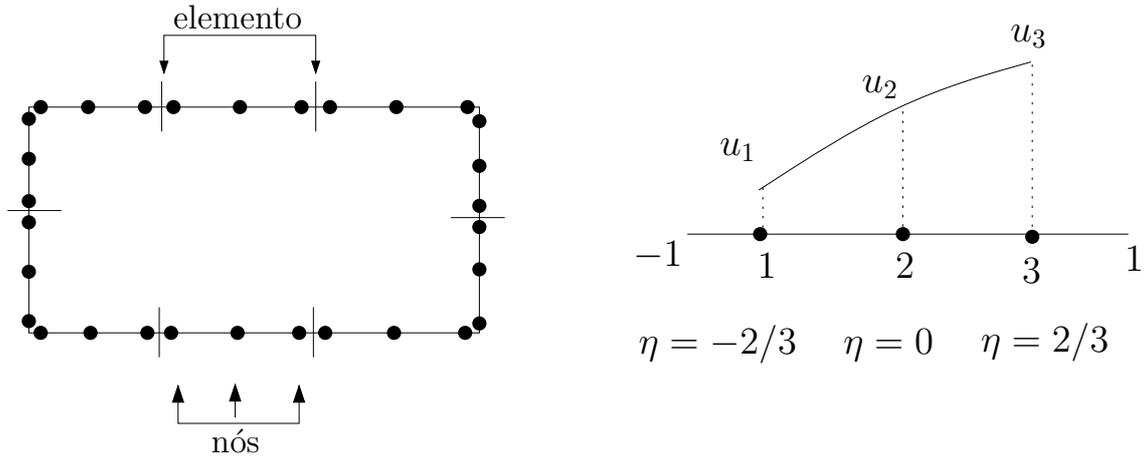


Figura 5.3: Elemento quadrático descontínuo.

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{t}^{(n)} \quad (5.8)$$

onde  $u_i^{(n)}$  e  $t_i^{(n)}$  são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e  $\phi^{(i)}$  são as funções de forma quadráticas definidas por:

$$\phi^{(1)} = \frac{9}{8}\eta \left( \eta - \frac{2}{3} \right) \quad (5.9)$$

$$\phi^{(2)} = \frac{9}{4} \left( \frac{4}{9} - \eta^2 \right) \quad (5.10)$$

$$\phi^{(3)} = \frac{9}{8}\eta \left( \eta + \frac{2}{3} \right) \quad (5.11)$$

onde  $\eta$  representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 5.3).

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{x}^{(n)} \quad (5.12)$$

A geometria do elemento pode também ser considerada quadrática (elementos isoparamétricos) e, neste caso, ser representada pelas coordenadas nodais e as funções de forma  $\phi^{(i)}$ , como em 5.12.

## 5.3 Elementos de contorno para problemas da elasticidade plana

Nesta seção, as equações integrais que descrevem o problema de chapa são transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno em elementos de contorno.

### 5.3.1 Discretização das equações integrais

A Equação 2.44 define as representações integrais para o deslocamentos  $u$  em um ponto  $i$  de um estado estático. Os vetores e tensores apresentados por estas equações, podem ser escritos na forma matricial. Genericamente, a Equação 2.44 pode ser escrita da seguinte forma:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} t^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} t u^* d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b d\Omega, \quad (5.13)$$

sendo  $u^i$  o deslocamento do ponto  $i$  onde o carregamento unitário é aplicado e  $c^i$  é uma matriz de dimensões  $(2 \times 2)$  com valores dependentes do tipo de ponto sob consideração.  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  são os vetores de deslocamentos e esforços de superfície dados por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.14)$$

e  $\mathbf{u}^*$  e  $\mathbf{t}^*$  são os tensores que representam as soluções fundamentais, dados por:

$$\mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

Considerando que o contorno do problema seja dividido em  $N_e$  elementos de contorno contantes (Figura 5.1), de maneira que a integral sobre o contorno seja obtida de forma aproximada fazendo-se a somatória das integrais sobre cada elemento. Assim, a Equação 5.13 pode ser escrita na forma discretizada como:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} t^* d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} t_j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega, \quad (5.16)$$

sendo,  $u^i$  o deslocamento do ponto  $i$  onde o carregamento unitário é aplicado e  $c^i$  é uma matriz de dimensão (2) com valores constantes que dependem do tipo de ponto sob consideração.  $u^j$  e  $t^j$  representam, respectivamente, os deslocamentos e esforços de superfície do nó  $j$ . Estas variáveis nodais foram levadas para fora das integrais pois, as mesmas são constantes sobre cada elemento.

A equação integral de contorno discretizada 5.16 pode ser agora escrita como sendo,

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} t^* d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} t_j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega, \quad (5.17)$$

Introduzindo-se os seguintes termos:

$$h_{ij} = \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma, \quad g_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma, \quad (5.18)$$

A Equação 5.17 pode ser escrita como:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N_e} h_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N_e} g_{ij} t_j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega, \quad (5.19)$$

A Equação 5.19 relaciona os deslocamentos de qualquer ponto, no espaço bidimensional (Figura 5.1), com valores de força e deslocamento dos pontos nodais. Aplicando-se um número  $N$  conforme o número de incógnitas do contorno, pode-se escrever um sistema de equações relacionando os efeitos de domínio, as forças e os deslocamentos no contorno, da seguinte forma:

$$C \quad u^i + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{T} + \mathbf{B} \quad (5.20)$$

Na matriz  $\hat{\mathbf{H}}$  da Equação 5.20 é necessário acrescentar o deslocamento correspondente ao ponto do contorno no qual foi aplicada a equação integral. Com este este procedimento somado a aplicação das condições de contorno do problema a Equação 5.20 pode ser redefinida. O processo consiste na movimentação para o lado esquerdo da equação todas as colunas multiplicadas pelas incógnitas e acumulação do lado direito dos termos correspondentes a todos valores obtidos pela multiplicação das condições de contorno conhecidas. Esse processo conduz a:

$$\mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (5.21)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  contém os termos das variáveis incógnitas, que foram obtidos com a troca das colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ . O vetor  $\mathbf{F}$  contém os efeitos dos deslocamentos e esforços de superfície prescritos no contorno e o efeito do carregamento de domínio. O vetor  $\mathbf{x}$  contém todos os valores desconhecidos de deslocamento ou esforço de superfície.

### 5.3.2 Integrais analíticas e numéricas

Integrais singulares da ordem  $O(\ln r)$  podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por (Telles 1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i), \quad (5.22)$$

onde  $N$  é o número de pontos de Gauss. A coordenada do ponto de integração  $\xi_i$  e o fator peso  $w_i$  podem ser encontrados na literatura (Brebbia e Domínguez 1989).

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de  $\mathbf{G}$  são do tipo  $\ln(r)$  sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de  $\mathbf{H}$  são do tipo  $1/r$  e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy.

## 5.4 Elementos de contorno para problemas de flexão em placas

Nesta seção é feita a discretização das equações integrais de contorno para problemas de placa. Os termos de domínio das Equações 4.71 e 4.72 provenientes de forças de corpo  $b$  quaisquer são tratadas através da técnica apresentada por Albuquerque *et al.* (2005).

### 5.4.1 Discretização das equações integrais

As variáveis relacionadas ao problema de flexão em placas finas são deflexão  $w$ , inclinação normal  $\frac{\partial w}{\partial n}$ , força cortante equivalente  $V_n$  e momento fletor  $M_n$ . Em um problema bem colocado, dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas. Desconsiderando-se a ação das forças de corpo, representadas pela integral de domínio, que serão tratadas mais à frente, obtém-se então, a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 cw(Q) &+ \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} V_n^*(Q, P)w(P)d\Gamma_e - \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} M_n^*(Q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)d\Gamma_e + \\
 &+ \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} w^*(Q, P)V_n(P)d\Gamma_e - \\
 &- \sum_{i=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P)M_n(P)d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(Q, P)R_{c_i}(P). \tag{5.23}
 \end{aligned}$$

Assumindo que o contorno foi discretizado usando-se elementos constantes, os valores de  $w(P)$ ,  $\partial w(P)/\partial n$ ,  $V_n(P)$  e  $M_n(P)$  são constantes e podem ser tirados do integrando:

$$\begin{aligned}
 cw(Q) &+ \sum_{i=1}^{Ne} w(P) \int_{\Gamma_e} V_n^*(Q, P)d\Gamma_e - \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\partial w}{\partial n}(P) \int_{\Gamma_e} M_n^*(Q, P)d\Gamma_e + \\
 &+ \sum_{i=1}^{Nc} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \sum_{i=1}^{Ne} V_n(P) \int_{\Gamma_e} w^*(Q, P)d\Gamma_e - \\
 &- \sum_{i=1}^{Ne} M_n(P) \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P)d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{Nc} w_{c_i}^*(Q, P)R_{c_i}(P) \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, a Equação 4.72 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
c \frac{\partial w}{\partial n_0}(Q) &+ \sum_{i=1}^{Ne} w(P) \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(Q, P) d\Gamma - \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\partial w}{\partial n}(P) \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(Q, P) d\Gamma + \\
&\sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_0}(Q, P) w_{c_i}(P) = \sum_{i=1}^{Ne} V_n(P) \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(Q, P) d\Gamma - \\
&\sum_{i=1}^{Ne} M_n(P) \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n}(Q, P) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_0}(Q, P) R_{c_i}(P).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

As Equações 5.24 e 5.25 podem ser escritas na forma matricial, resultando:

$$\begin{aligned}
c \left\{ \begin{array}{c} w^* \\ \frac{\partial w^*}{\partial n_0} \end{array} \right\} &+ \sum_{i=1}^{Ne} \left( \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right]_i \left\{ \begin{array}{c} w^* \\ \frac{\partial w^*}{\partial n} \end{array} \right\}_i \right) + \sum_{i=1}^{Nc} \left( \left\{ \begin{array}{c} R_{c_1} \\ R_{c_2} \end{array} \right\}_i w_{c_i}^* \right) = \\
&\sum_{i=1}^{Ne} \left( \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right]_i \left\{ \begin{array}{c} V_n^* \\ M_n^* \end{array} \right\}_i \right) + \sum_{i=1}^{Nc} \left( \left\{ \begin{array}{c} w_{c_1} \\ w_{c_2} \end{array} \right\}_i R_{c_i}^* \right).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Os termos da equação matricial 5.26 são dados por:

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \int_{\Gamma_e} V_n^*(Q, P) d\Gamma_e ; & H_{12} &= \int_{\Gamma_e} M_n^*(Q, P) d\Gamma_e ; \\
H_{21} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_0}(Q, P) d\Gamma_e ; & H_{22} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_0}(Q, P) d\Gamma_e ; \\
G_{11} &= \int_{\Gamma_e} w^*(Q, P) d\Gamma_e ; & G_{12} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_e ; \\
G_{21} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial w^*}{\partial n_0}(Q, P) d\Gamma_e ; & G_{22} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n}(Q, P) d\Gamma_e .
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Os valores resultantes destas integrais são chamados de coeficientes de influência.

Assumindo-se que a posição do ponto fonte  $Q$  varia de 1 a  $Ne$  e agrupando os termos semelhantes, é obtido um sistema de equações dado por:

$$\mathbf{Hw} = \mathbf{Gv}. \tag{5.28}$$

Após a aplicação das condições de contorno a matriz  $\mathbf{H}$ , que originalmente era formada apenas pelas soluções fundamentais de esforços, passa a ser chamada de  $\mathbf{A}$ , e inclui também soluções fundamentais de deslocamentos. O vetor  $\mathbf{w}$ , por sua vez, passa a conter todas as incógnitas, sejam elas valores de deslocamentos ou esforços, sendo, então, chamado de  $\mathbf{x}$ . No lado direito da equação, a matriz  $\mathbf{G}$  e o vetor  $\mathbf{v}$ , modificados, são multiplicados, obtendo-se o vetor  $\mathbf{F}$ . Assim, o sistema de equações representado pela Equação 5.28 é reescrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{F}. \quad (5.29)$$

e pode ser resolvido por qualquer método de solução de sistema de equações lineares.

#### 5.4.2 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno

Segundo Shi e Bezine (1988) essas integrais podem ser computadas no domínio pela integração direta de sua área  $\Omega_q$ . Entretanto, a formulação de elementos de contorno perde sua característica principal que é a discretização somente no contorno, porque este procedimento necessita discretização do domínio em células. Rajamohan e Raamachandran (2004) apresentaram uma alternativa para evitar a discretização do domínio propondo um método para análise de problemas de flexão em placas anisotrópicas finas onde a integral de domínio é substituída por uma integral particular polinomial. Neste trabalho a integral de domínio proveniente da carga distribuída é transformada em integral de contorno pela transformação exata, seguindo os procedimentos apresentados por Venturini (1988) e por Albuquerque *et al.* (2003), para problemas de flexão de placa anisotrópicas. Considerando  $b = q$  onde  $q$  é o carregamento aplicado no domínio, dois casos de carregamentos serão considerados: carregamento uniformemente distribuído e linearmente distribuído.

Considere a placa mostrada na Figura 5.4. A placa está submetida a um carregamento  $q$ , aplicado em uma área  $\Omega_q$ . Assumindo que o carregamento  $q$  tem uma distribuição linear  $(Ax + By + C)$  na área  $\Omega_q$  a integral de domínio pode ser escrita fazendo-se a integração no elemento  $d\rho(\rho d\theta)$  variando-se  $\rho$  de 0 a  $r$ , onde  $r$  é o valor do raio de integração no contorno

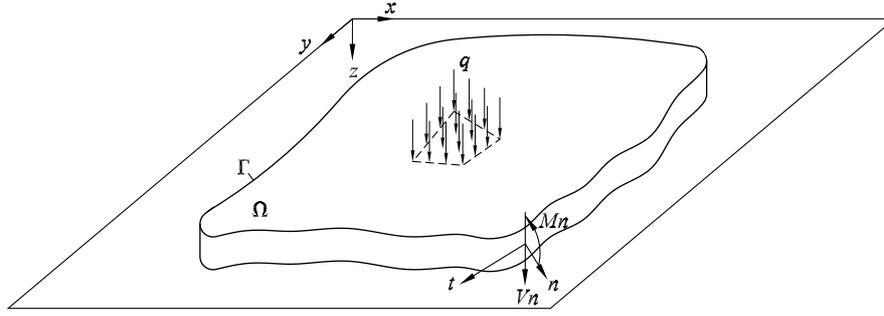


Figura 5.4: Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno.

$\Gamma_q$  (Figura 5.5). Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\Omega_q} (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta \quad (5.30)$$

ou

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta. \quad (5.31)$$

Definindo-se  $F^*$  como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho, \quad (5.32)$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \quad (5.33)$$

Considerando um ângulo infinitesimal  $d\theta$  (Figura 5.5) a relação entre o comprimento do arco  $r d\theta$  e o comprimento infinitesimal do contorno  $d\Gamma$ , pode ser escrita como:

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \quad (5.34)$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma. \quad (5.35)$$

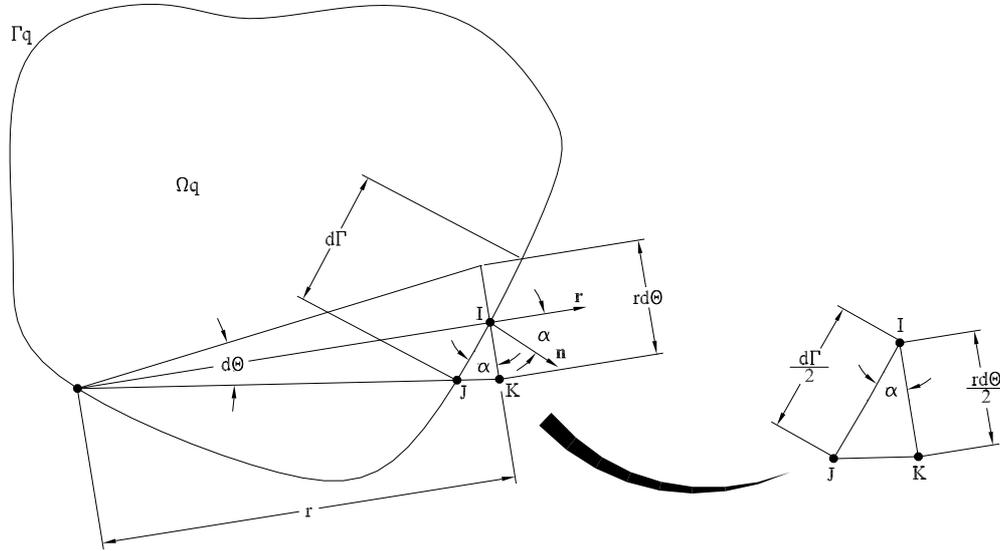


Figura 5.5: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

Aplicando as propriedades do produto interno de vetores unitários  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{r}$  indicados na Figura 5.5 pode-se escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{nr}}{r} d\Gamma. \quad (5.36)$$

Substituindo a Equação 5.36 na Equação 5.33 a integral de domínio da Equação 4.71 pode ser escrita como integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_q} qw^* d\Omega = \int_{\Gamma_q} \frac{F^*}{r} \mathbf{nr} d\Gamma. \quad (5.37)$$

Sendo

$$x = \rho \cos \theta \quad (5.38)$$

$$y = \rho \sin \theta, \quad (5.39)$$

a integral  $F^*$  pode ser escrita substituindo-se as Equações 4.77, 5.38 e 5.39 em 5.32, obtendo-se:

$$F^* = \int_0^r \frac{1}{8\pi} (A\rho \cos \theta + B\rho \sin \theta + C) [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] \rho d\rho. \quad (5.40)$$

A Equação 5.40 pode ser reescrita como:

$$F^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho + \right. \\ \left. C \int_0^r \rho [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho \right\}. \quad (5.41)$$

Seguindo procedimento similar para obter Equação 5.41, o termo de domínio da Equação 4.72 pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_q} q \frac{\partial w^*}{\partial n_0} d\Omega = \int_{\theta} G^* d\theta, \quad (5.42)$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial w^*}{\partial n_0} \rho d\rho. \quad (5.43)$$

Substituindo-se a derivada da solução fundamental  $w^*$  em relação à normal no ponto fonte e as Equações 5.38 e 5.39 na Equação 5.43, obtém-se:

$$G^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 \left[ C_1 \frac{\partial R_1}{\partial n_0} + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial n_0} + C_3 \left( \frac{\partial S_1}{\partial n_0} - \frac{\partial S_2}{\partial n_0} \right) \right] d\rho + \right. \\ \left. C \int_0^r \rho \left[ C_1 \frac{\partial R_1}{\partial n_0} d\rho + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial n_0} + C_3 \left( \frac{\partial S_1}{\partial n_0} - \frac{\partial S_2}{\partial n_0} \right) \right] d\rho \right\}. \quad (5.44)$$

As integrais das Equações 5.41 e 5.44 são independentes de  $\theta$  e podem ser calculadas analiticamente. São dadas por:

$$\begin{aligned}
\int_0^r R_i \rho d\rho &= \frac{r^4}{16} \left\{ -16e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) - \right. \\
&\left[ -7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \times \\
&\left. [-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \tag{5.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r S_i \rho d\rho &= \frac{r^4}{16} \left\{ 2e_i \left[ -7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \times \right. \\
&\sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) + 2 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \times \\
&\left. [1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \tag{5.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r R_i \rho^2 d\rho &= \frac{r^5}{50} \left\{ -40e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) - \right. \\
&\left[ -17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \times \\
&\left. [-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \tag{5.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r S_i \rho^2 d\rho &= \frac{r^5}{50} \left\{ 2e_i \left[ -17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \times \right. \\
&\sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) + 5 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \times \\
&\left. [1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \tag{5.48}
\end{aligned}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho d\rho = \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta + \right. \\ \left. \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (5.49)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) + \right. \\ \left. \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}, \quad (5.50)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho d\rho = \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \sin \theta + \right. \\ \left. 6 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (5.51)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \times \right. \\ \left. (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) - 6 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}, \quad (5.52)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta + \right. \\ \left. \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (5.53)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) + \right. \\ \left. \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}, \quad (5.54)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \sin \theta + 4 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (5.55)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) + 4 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}. \quad (5.56)$$

Na formulação apresentada nesta seção considerou-se o carregamento aplicado no domínio como constante e uniformemente distribuído ou linearmente distribuído, no entanto, a formulação pode ser estendida para outros carregamentos de ordens mais elevadas.

### 5.4.3 Integrais analíticas e numéricas

Nas equações integrais de contorno para problemas de placas são encontrados integrais com integrandos dos seguintes tipos: regular; com singularidade fraca; com singularidade forte e com singularidade fortíssima (hipersingularidade).

Paiva (2005) apresentou um procedimento detalhado para o tratamento das integrais com singularidade forte e hipersingularidade inerentes à formulação, onde todos os termos da integração analítica são apresentados. Um procedimento semelhante foi desenvolvido por Rashed *et al.* (1998) para placas isotrópicas espessas.

As derivadas da solução fundamental de deflexão podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções  $R_i$  e  $S_i$ , dadas pelas Equações 4.83 e 4.84. Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi D_{22}} \left[ C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3 \left( \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (5.57)$$

As derivadas de todos os outros termos são obtidas da mesma maneira.

Como apresentado por Paiva (2005), as derivadas de  $R_i$  e  $S_i$  apresentam singularidade fraca ( $\log r$ ), forte ( $r^{-1}$ ), e hipersingularidade ( $r^{-2}$ ) e necessitam uma atenção especial durante a integração.

As Equações 4.71 e 4.72 apresentam integrais da solução fundamental nas quais, de acordo com a Equação 4.77, verifica-se que a solução fundamental  $w^*$  e suas derivadas  $\partial w^*/\partial n$  e  $\partial w^*/\partial n_0$  são funções regulares, isto é, não apresentam singularidade e, portanto, podem ser resolvidas analiticamente ou usando quadratura de Gauss.

De acordo com a Equação 4.77 verifica-se que as integrais presentes em  $\partial^2 w^*/\partial n \partial n_0$  são integrais impróprias, ou seja, apresentam singularidade fraca. O mesmo ocorre em relação às derivadas da Equação 4.95. Estas integrações podem ser realizadas analiticamente ou usando Gauss logarítmico.

Por outro lado, as integrais de  $V_n^*$  e de  $\partial M_n^*/\partial n_0$ , conforme Equações 5.27, incluem um salto, apresentando singularidade forte. Estas integrais devem ser computadas no sentido do valor principal de Cauchy.

Finalmente, a partir das derivadas quartas de  $R_i$  e  $S_i$  pode se mostrar que a integral de  $\partial V_n^*/\partial n_0$  do termo  $H_{21}$  da Equação 5.27 contém uma hipersingularidade. Esta hipersingularidade deve ser interpretada no sentido do valor principal de Hadamard.

# Capítulo 6

## Exemplos Numéricos de Chapas e Placas

Com base nas formulações desenvolvidas nos capítulos anteriores referentes aos problemas de chapas e placas finas, apresenta-se neste capítulo alguns exemplos numéricos com o objetivo de validar a formulação desenvolvida nos capítulos anteriores.

### 6.1 Cilindro quase-isotrópico de paredes espessas

Neste exemplo, analisa-se um cilindro de paredes espessas submetido a uma pressão  $\mathbf{P} = 100$  Pa como mostrado na Figura 6.1-a, raio interno igual a  $10\text{mm}$  e raio externo igual a  $25\text{mm}$ . Devido a simetria do problema, somente um quarto da seção transversal do cilindro necessita ser discretizado. As condições de contorno são mostradas na Figura 6.1-b. Adota-se nessa análise um material quase-isotrópico. As propriedades materiais usadas nesta análise são:  $E_{11} = 213\text{ kN/mm}^2$ ,  $E_{22} = 215\text{ kN/mm}^2$  e  $\nu = 0,33$ . Este problema é equivalente ao problema isotrópico apresentado por Brebbia e Domingues (1992) no qual é considerado  $E_{11} = 200\text{ kN/mm}^2$  e  $\nu = 0,25$ .

Foram calculados os deslocamentos dos pontos **A**, **B** e **C** mostrados na Figura 6.1-b. Esses valores foram comparados com os resultados obtidos pela teoria clássica da elasticidade plana para materiais isotrópicos (Brebbia e Domingues 1992). A Figura 6.2 mostra uma das discretizações adotada: 10 elementos de contorno quadráticos e 15 nós internos.

O contorno foi discretizado com 4, 10 e 20 elementos quadráticos e os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.1

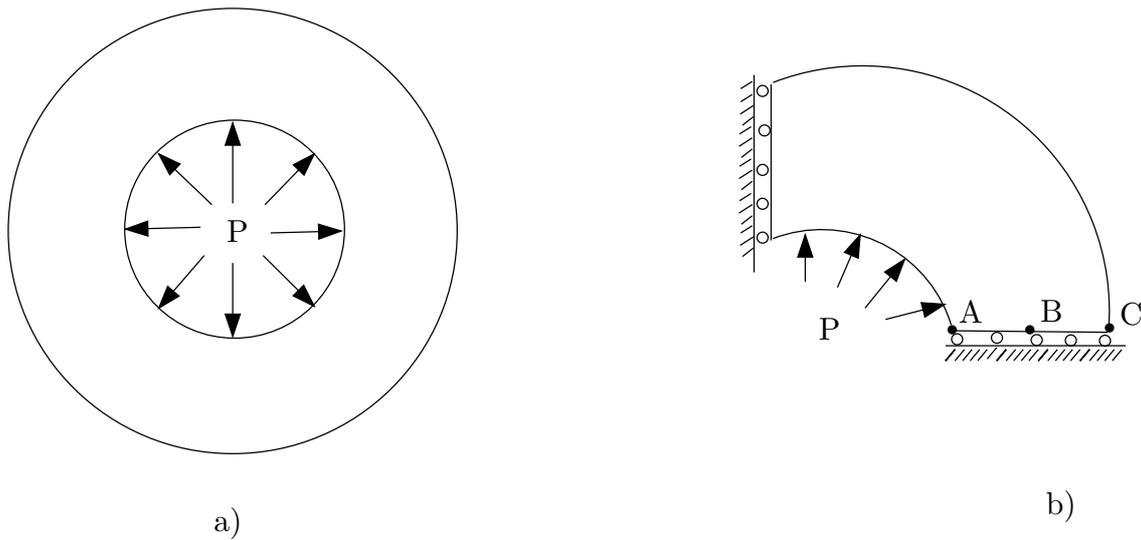


Figura 6.1: Tubo de paredes espessas sob pressão interna.

Tabela 6.1: Deslocamentos nos pontos A, B e C em  $10^{-3}$ mm

Pontos	Discretização com elementos quadráticos						
	Valor Exato	4 elementos	Erro (%)	10 elementos	Erro (%)	20 elementos	Erro (%)
A	8.0325	7.8174	2.7	8.0506	0.2	8.0508	0.2
B	5.2912	5.1419	2.8	5.3132	0.4	5.3132	0.4
C	4.4526	4.3775	1.6	4.4875	0.7	4.4875	0.7

A Figura 6.3 mostra os resultados obtidos usando 20 elementos quadráticos.

Verificando-se os resultados obtidos para malhas de 4, 10 e 20 elementos, observa-se que os mesmos apresentam uma boa aproximação da solução analítica. Na discretização com 4 elementos o erros obtidos ficaram abaixo de 3%. Com o refinamento da malha esse valor caiu para menos de 0.7%.

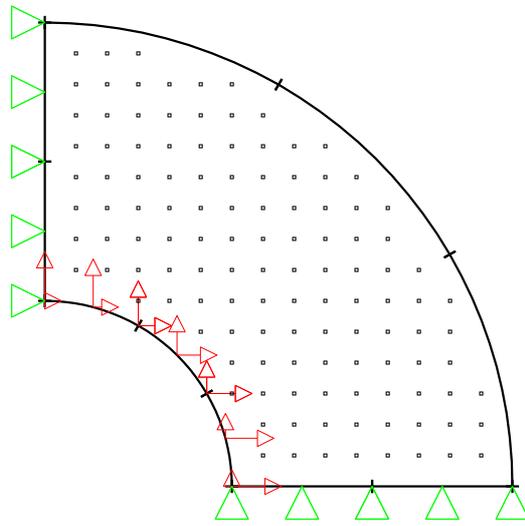


Figura 6.2: Discretização com 10 elementos quadráticos.

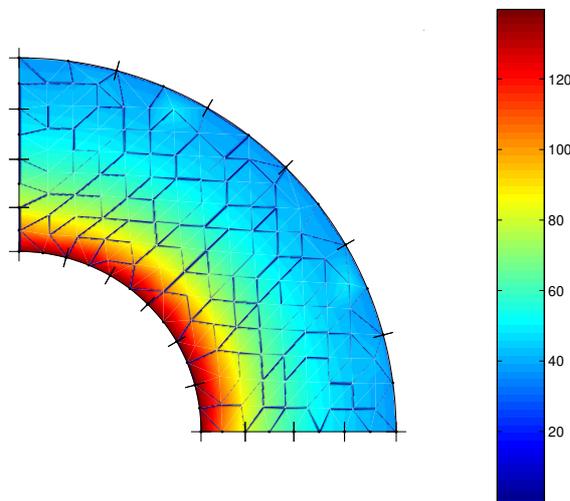


Figura 6.3: Deslocamentos no cilindro de paredes espessas.

## 6.2 Placa ortotrópica simplesmente apoiada

Neste exemplo, considera-se uma placa quadrada de lados  $a = 1$  m e espessura  $h = 0.01$  m. O material é ortotrópico a suas propriedades materiais são:  $E_{11} = 2.068 \times 10^{11}$  Pa,  $E_{11} = E_{22}/15$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $G_{12} = 6.055 \times 10^8$  Pa. A placa está submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $q = 1 \times 10^4$  Pa aplicado ao longo de seu domínio (Figura 6.4) e simplesmente apoiada em seus bordos. Esse problema é analisado por (Shi e Bezine 1988) usando o método dos elementos de contorno e integração no domínio para tratar carregamentos distribuídos e por (Rajamohan e Raamachandran 2004) usando o método de simulação de carga.

O problema é resolvido usando diferentes malhas e os resultados para o deslocamento transversal no ponto  $A$  e  $B$  são comparados com a solução em série para o ponto  $A$  e  $B$  dados respectivamente por  $w_{se.} = 8.1258 \times 10^{-3}$  m e  $w_{se.} = 4.5211 \times 10^{-3}$  m, respectivamente. A Tabela 6.2 mostra os deslocamentos transversais calculados pela formulação do MEC, apresentada neste trabalho, usando diferentes malhas e seus respectivos erros comparados com a solução por série apresentada por (Timoshenko e Woinowsky-Krieger 1959). Os resultados obtidos para malha de 12 elementos (3 elementos por aresta) foram poucos satisfatórios. Entretanto, a convergência para solução por série é obtida com o aumento do número de elementos. Quando adotada a malha de 48 elementos (Figura 6.5), os deslocamentos transversais em ambos os pontos apresentam erros abaixo de 1% quando comparados com a solução por série.

Tabela 6.2: Deslocamentos transversais obtidos pelo MEC para uma placa ortotrópica submetida a uma carga uniformemente distribuída.

Número de elementos	Deslocamentos Transversais ( $10^{-6}$ m)		Erros (%)	
	Ponto $A$	Ponto $B$	Ponto $A$	Ponto $B$
12	-0.7985	-0.4415	1.7310	2.3545
24	-0.8014	-0.4430	1.3806	2.0100
48	-0.8081	-0.4481	0.5513	0.8875

Se a placa é rotacionada em  $30^\circ$  em torno do seu centro como mostra a Figura 6.6, o eixo principal de ortotropia não coincide com as eixos coordenados. Neste caso, todas as 6 constantes de  $D_{ij}$  são diferentes de zero. Usando esse modelo, o deslocamento transversal

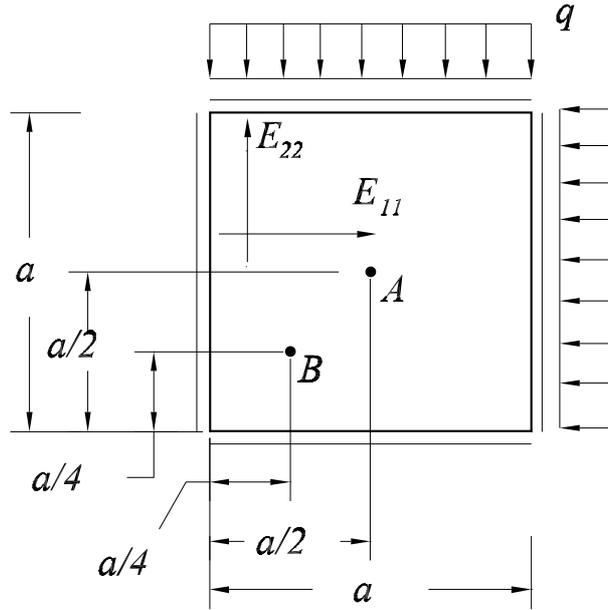


Figura 6.4: Placa ortotrópica simplesmente apoiada.

calculado em um ponto no centro da placa é igual a  $w = 8.0645 \times 10^{-3}$  m. O erro neste caso é de 0.75% quando comparado com a solução por série.

### 6.3 Placa quadrada de compósito laminado simplesmente apoiada

Considere o caso de uma placa quadrada, de compósito laminado simplesmente apoiada. As lâminas que compõe o laminado são feitas de grafite-epoxy e possuem a seguinte orientação:  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$ . A placa de lados  $a = 1$  m está submetida a um carregamento distribuído  $q = 6.9 \times 10^3$  Pa. As propriedades materiais de cada lâmina são:  $E_{11} = 2.07 \times 10^9$  Pa,  $E_{22} = 5.17 \times 10^9$  Pa,  $G_{12} = 3.10 \times 10^9$  Pa, e  $\nu_{12} = 0.25$ . Todas as lâminas possuem a mesma espessura, sendo que a espessura total do laminado é  $h = 0.01$  m. Este mesmo problema foi analisado por Lakshminarayana e Murthy (1984b) usando o método dos elementos finitos. Uma solução em série para o deslocamento transversal no centro da placa foi apresentada por Noor e Mathers (1975), a placa de laminado compósito foi considerada como sendo uma única lâmina ortotrópica. Essa solução é dada por:

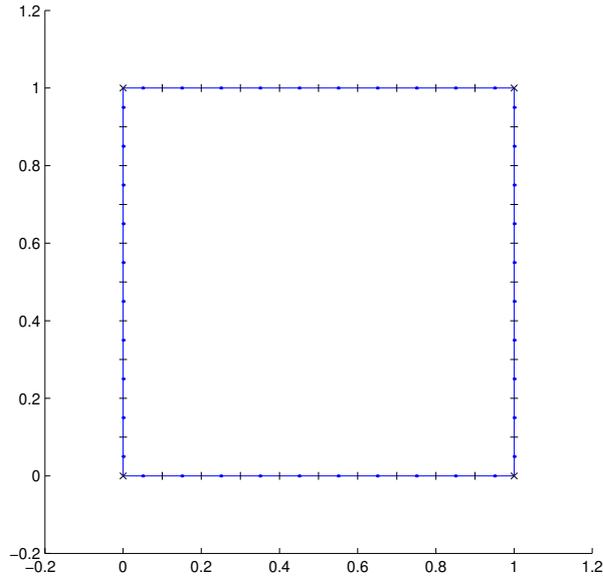


Figura 6.5: Discretização com 48 elementos constantes.

$$\frac{w_{an}.E_{22}h^3}{qa^4} \times 10^3 = 4.4718 \quad (6.1)$$

O deslocamento transversal no centro da placa é obtido pela formulação proposta usando uma malha de 22 elementos de contorno por aresta. Esses deslocamentos são comparados na Tabela 6.3 com a solução de elementos finitos apresentadas por Lakshminarayana e Murthy (1984b), e com a solução analítica apresentada por Noor e Mathers (1975). Nota-se que foi obtido a mesma precisão dos resultados obtidos pelo método dos elementos finitos.

Tabela 6.3: Deslocamentos transversais obtidos pelo MEF e MEC.

Métodos numéricos	Deslocamentos transversais e erros	
	$wE_{22}h^3/(qa^4) \times 10^3$	Erros (%)
MEC	4.4507	0.47
FEM	4.4508	0.47

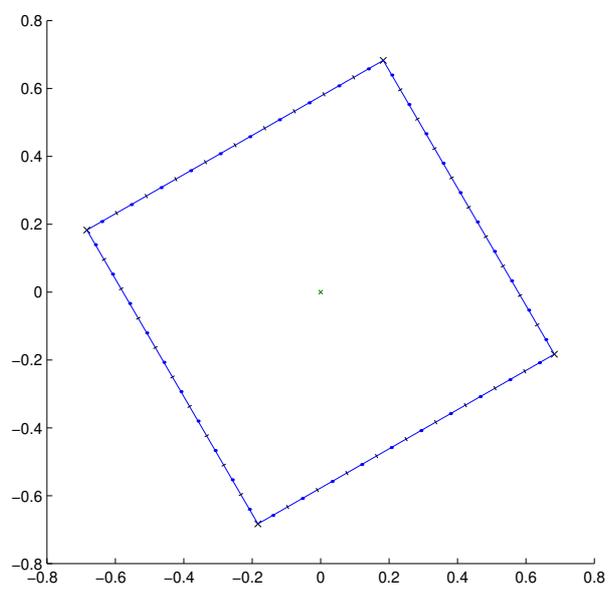


Figura 6.6: Malha da placa rotacionada.

# Capítulo 7

## Associação de Macro-elementos Via Sub-regiões do MEC

### 7.1 Introdução

A análise de estruturas tridimensionais formadas por laminados compósitos é feita admitindo-se que os laminados que compõem essas estruturas, sejam analisados como uma associação de elementos planos denominados *macro-elementos*. Sua principal característica é a superposição do estado plano de tensão e o de flexão em placas finas. Neste capítulo, o Método dos elementos de contorno é aplicado para discretizar as equações integrais de flexão de placas finas e estado plano de tensão em um macro-elemento. Em seguida a técnica de sub-regiões do MEC é aplicada no desenvolvimento da formulação para associação de macro-elementos no espaço. O sistema algébrico para a estrutura é obtido através da associação dos sistemas de equações de cada macro-elemento individual. A junção destes sistemas de equação é feita através de imposições de equilíbrio e compatibilidade de esforços e deslocamentos entre as interfaces (arestas) comuns. Impondo-se as condições de contorno e após conveniente troca entre deslocamentos conhecidos e forças incógnitas obtém-se a resolução do sistema final de equações.

### 7.2 Formulação do macro-elemento.

O objetivo desta seção é desenvolver um elemento estrutural plano que contenha simultaneamente comportamento de membrana e flexão. Admite-se que as tensões no elemento, devidas

ao seu comportamento de chapa, não altere seu comportamento como placa e vice-versa. O elemento plano é denominado *macro-elemento* e é obtido a partir das equações algébricas para problemas de chapas e placas apresentadas na Capítulo 5. O macro-elemento então, é discretizado através do MEC, as equações integrais obtidas são transformadas através de equações algébricas em um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços definidos em nós do contorno. Aplicando-se as condições de contorno e resolvendo o sistema de equações resultantes obtém-se os resultados nodais do contorno e domínio do macro-elemento.

### 7.2.1 Equações Algébricas do Macro-Elemento

Seja  $\Psi$  um ponto genérico de um macro-elemento, como apresentado na Figura 7.1. O campo de deslocamento e esforços para o  $\Psi$  é composto de quatro variáveis relacionadas à superposição dos estados plano de tensão e de flexão placas finas. Nas equações integrais da elasticidade plana, as variáveis do problema são os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  e dois esforços de superfície  $t_1$  e  $t_2$  conforme mostrado na seção 2.1. Nas equações integrais de placa, as variáveis relacionadas são  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n}$ ,  $V_n$  e  $M_n$  e são definidas na Seção 4.4. Desprezando as reações de canto  $R_c$ , o vetor  $\mathbf{u}$  é definido como o vetor de deslocamentos do macro-elemento em um ponto genérico  $\Psi$  e seus termos são organizados da seguinte forma:

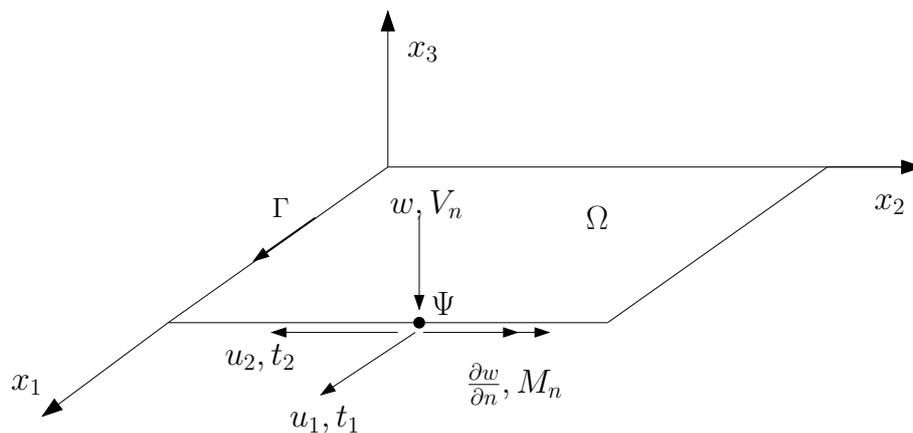


Figura 7.1: Deslocamentos e esforços em um nó genérico  $\Psi$  de um macro-elemento.

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\}, \quad (7.1)$$

é o vetor  $\mathbf{t}$  é definido como o vetor de esforços do nó  $\Psi$  do macro-elemento e é dado por:

$$\mathbf{t} = \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{array} \right\}. \quad (7.2)$$

Com o auxílio das equações algébricas do MEC para cada formulação, mostradas no Capítulo 5, o seguinte sistema algébrico pode ser montado em função dos deslocamentos e esforços:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{11}^w & 0 & h_{12}^w \\ h_{21} & 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & h_{21}^w & 0 & h_{22}^w \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\}, \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{11}^w & 0 & g_{12}^w \\ g_{21} & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & g_{21}^w & 0 & g_{22}^w \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{array} \right\}. \quad (7.4)$$

Os termos não nulos da primeira e terceira linha das matrizes 7.3 e 7.4 são referentes às equações integrais do estado plano, enquanto que os termos não nulos da segunda e quarta linha referem às equações integrais de flexão de placas representadas pelo índice  $w$ . Nas matrizes 7.3 e 7.4, observa-se que os estado plano de tensão e o regime de flexão de placa estão desacoplados e as equações finais encontradas são independente. Portanto, a discretização de um macro-elemento pode iniciar-se pela elasticidade e depois passar à de placas ou vice-versa, pois uma discretização não afeta a outra.

As equações algébricas obtidas no capítulo 5 são calculadas numericamente para todos os micro-elementos (elementos constantes ou quadráticos) usados na discretização do macro-elemento, de acordo com as componentes matriciais dados por 7.3 e 7.4. São encontradas

$4N$  equações algébricas para as variáveis incógnitas e variáveis conhecidas dos problemas de chapas e placa.

### 7.2.2 Montagem do sistema de equações

Após as integrações numéricas das equações integrais dos problemas da elasticidade plana e de flexão de placas finas sobre os  $N_e$  elementos nos  $N$  nós do contorno do macro-elemento, pode-se escrever genericamente o seguinte sistema algébrico de  $4N$  equações:

$$\mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{T} + \mathbf{B}, \quad (7.5)$$

onde  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes não simétricas de dimensão  $4N \times 4N$ .

Impondo-se as condições de contorno e após conveniente troca de membros das colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , obtém-se o seguinte sistema final de equações algébricas:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (7.6)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o vetor das incógnitas de deslocamentos ou esforços (duas incógnitas referentes à elasticidade plana e outras duas à flexão de placas),  $\mathbf{F}$  é o vetor que contém os efeitos dos deslocamentos ou esforços conhecidos e valores de domínio,  $\mathbf{A}$  contém os termos das variáveis incógnitas que foram obtidos com a troca das colunas  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ .

## 7.3 Associação espacial de macro-elementos

Neste seção, é desenvolvida a formulação para associação espacial de macro-elementos através da técnica de sub-regiões do MEC.

### 7.3.1 Sistema de coordenadas

Uma das principais características das equações integrais de flexão e placas e de estado plano de tensão é que o deslocamento de um ponto é descrito em função de sua posição relativa aos demais pontos do problema. Portanto, as relações entre as forças e deslocamento no contorno serão preservadas independente do sistema de coordenadas usado para a montagem das matrizes do problema. Assim, cada macro-elemento pode possuir seu próprio sistema de coordenadas, no qual suas equações integrais são escritas.

Quando se tem a associação de macro-elementos, o sistema de coordenadas pode não ser o mesmo para cada macro-elemento. Como se deseja compatibilizar forças e deslocamentos de vários macro-elementos, resolvendo-os simultaneamente, é necessário escrever essas incógnitas em um mesmo sistema de global de coordenadas. Assim, torna-se necessário escrever equações de transformação de coordenadas para cada macro-elemento, relacionando-se os sistemas local e global de coordenadas.

Considere o sistema de coordenadas da Figura 7.2. Seja  $U'$  o vetor de deslocamentos no ponto  $Q$  expresso no sistema local de coordenadas da seguinte forma:

$$\mathbf{U}' = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ w' \\ u'_2 \\ \theta' \end{Bmatrix}, \quad (7.7)$$

onde  $u'_1$  é o deslocamento na direção do vetor  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \frac{P4 - P1}{\|P4 - P1\|} = \{n_1, n_2, n_3\}, \quad (7.8)$$

$u'_2$  é o deslocamento na direção do vetor  $\mathbf{l}$

$$\mathbf{l} = \frac{P2 - P1}{\|P2 - P1\|} = \{l_1, l_2, l_3\}, \quad (7.9)$$

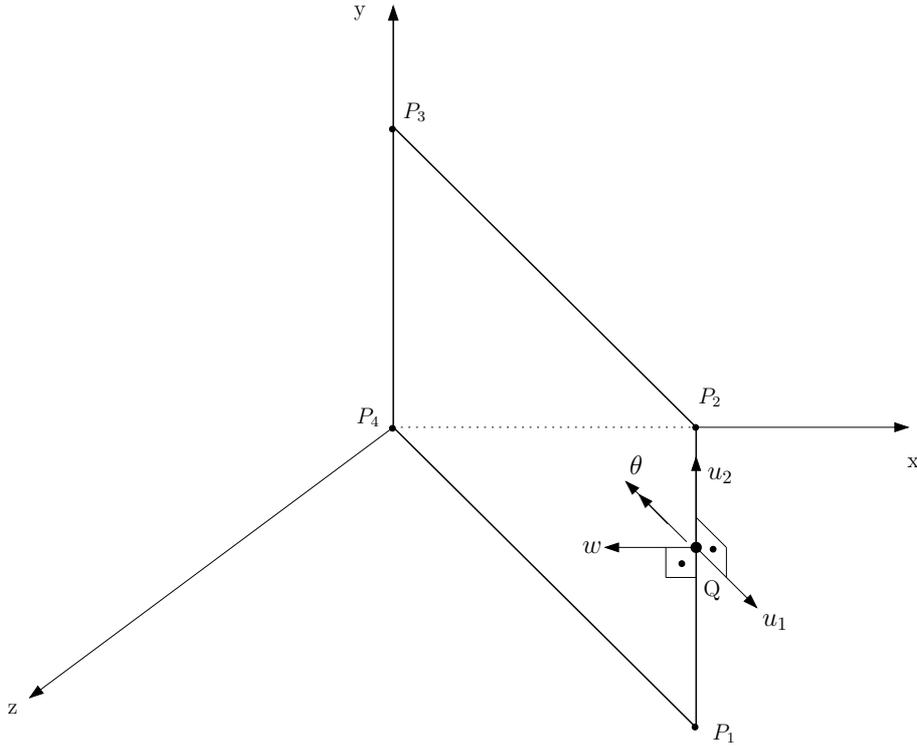


Figura 7.2: Sistema de Coordenadas.

$w'$  é o deslocamento na direção do vetor  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l} = \{m_1, m_2, m_3\}, \quad (7.10)$$

e  $\theta = \frac{\partial w}{\partial n}$ . Passando ao sistema global de coordenadas, o vetor de deslocamentos é expresso como:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix}. \quad (7.11)$$

Vejamos agora como expressar os deslocamentos  $u_1, w, u_2$ , no sistema global de coordenadas, em termos dos deslocamentos  $u'_1, w', u'_2$  no sistema local. Primeiramente escrevemos os vetores  $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{l}\}$  do referencial local como combinações lineares dos vetores  $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$  do referencial global:

$$\begin{cases} \mathbf{n} = n_1\mathbf{X} + n_2\mathbf{Y} + n_3\mathbf{Z} \\ \mathbf{m} = m_1\mathbf{X} + m_2\mathbf{Y} + m_3\mathbf{Z} \\ \mathbf{l} = l_1\mathbf{X} + l_2\mathbf{Y} + l_3\mathbf{Z}. \end{cases} \quad (7.12)$$

Aplicando-se cada deslocamento ao seu respectivo vetor temos a seguinte combinação linear:  $u'_1 \mathbf{n} + w' \mathbf{m} + u'_2 \mathbf{l}$ , substituindo-se em (7.12) temos:

$$u'_1(n_1 \mathbf{X} + n_2 \mathbf{Y} + n_3 \mathbf{Z}) + w'(m_1 \mathbf{X} + m_2 \mathbf{Y} + m_3 \mathbf{Z}) + u'_2(l_1 \mathbf{X} + l_2 \mathbf{Y} + l_3 \mathbf{Z}) \quad (7.13)$$

esta última expressão pode ser reescrita como:

$$(u'_1 n_1 + w' m_1 + u'_2 l_1) \mathbf{X} + (u'_1 n_2 + w' m_2 + u'_2 l_2) \mathbf{Y} + (u'_1 n_3 + w' m_3 + u'_2 l_3) \mathbf{Z}. \quad (7.14)$$

Esta última expressão deve ser idêntica àquela obtida aplicando-se os deslocamentos no sistema global a seus respectivos vetores:  $u_1 \mathbf{X} + w \mathbf{Y} + u_2 \mathbf{Z}$ . Portanto temos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} u_1 = u'_1 n_1 + w' m_1 + u'_2 l_1 \\ w = u'_1 n_2 + w' m_2 + u'_2 l_2 \\ u_2 = u'_1 n_3 + w' m_3 + u'_2 l_3. \end{cases} \quad (7.15)$$

as quais podem ser reescritas matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & m_1 & l_1 & 0 \\ n_2 & m_2 & l_2 & 0 \\ n_3 & m_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ w' \\ u'_2 \\ \hat{\theta} \end{Bmatrix}, \quad (7.16)$$

ou de maneira compacta:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{T}]\{\hat{\mathbf{u}}\}, \quad (7.17)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz que transforma o vetor de deslocamento  $\mathbf{u}'$  escrito em coordenadas locais em um vetor  $\mathbf{u}$  expresso em coordenadas globais.

Adotando o mesmo procedimento para descrever o vetor de esforços  $\mathbf{t}$  em coordenadas globais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & m_1 & l_1 & 0 \\ n_2 & m_2 & l_2 & 0 \\ n_3 & m_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ v'_n \\ t_2 \\ M'_n \end{Bmatrix}, \quad (7.18)$$

Substituindo, respectivamente, as Equação 7.16 e 7.18 nas matrizes elementares 7.3 e 7.4 apresentadas na Seção 7.2, tem-se no referencial global:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{11}^w & 0 & h_{12}^w \\ h_{21} & 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & h_{21}^w & 0 & h_{22}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & m_1 & l_1 & 0 \\ n_2 & m_2 & l_2 & 0 \\ n_3 & m_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ w' \\ u'_2 \\ \theta'_n \end{Bmatrix} = \quad (7.19)$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{11}^w & 0 & g_{12}^w \\ g_{21} & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & g_{21}^w & 0 & g_{22}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & m_1 & l_1 & 0 \\ n_2 & m_2 & l_2 & 0 \\ n_3 & m_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ v'_n \\ t'_2 \\ M'_n \end{Bmatrix}. \quad (7.20)$$

### 7.3.2 Compatibilização de momentos e rotações

Na associação de macro-elementos, aparecem na interface, momentos de flexão (ou rotações) na direção normal. Esses momentos não são alterados com a aplicação da matriz de transformação apresentada na seção anterior. Portanto, na interface desses macro-elementos, os momentos positivos locais têm sentidos opostos. O mesmo problema ocorre com a rotação  $\frac{\partial v}{\partial n}$ . Por essa razão, é necessário fazer a compatibilização das rotações e momentos nas interfaces do macro-elemento. Para isso, adota-se de um sentido positivo para os elementos de contorno.

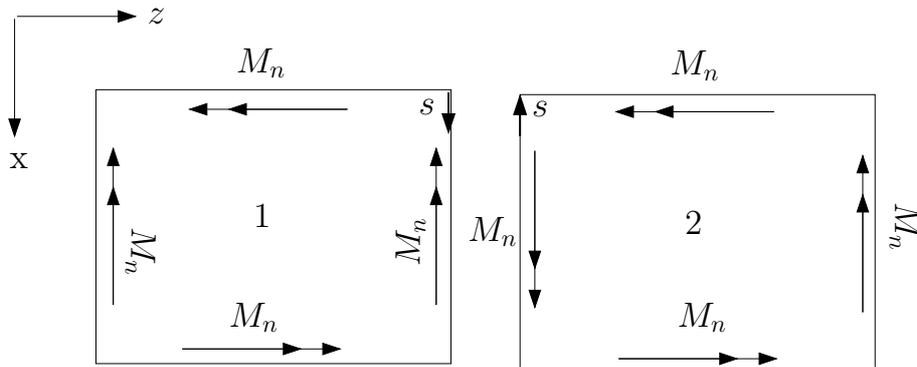


Figura 7.3: Compatibilização de momentos e rotações nos macro-elementos.

A Figura 7.3 mostra a associação de dois macro-elementos no plano  $xz$ . Os momentos de flexão  $M_n$  tem sentidos opostos concordando com o vetor  $s$  de orientação do contorno e

as direções das rotações não se alteram, apenas os seu sentidos. Neste trabalho, define-se como positivo o sentido de  $s$  que concorda com o eixo  $x$ . Assim, inverte-se o sentido dos momentos  $M_n$  onde a coordenada  $s$  não é positiva. Geralmente, para se determinar o sentido de percurso da coordenada de orientação  $s$ , basta realizar a inspeção dos cossenos diretores dos elementos de contorno em cada macro-elemento. Portanto, para aqueles cossenos diretores do elemento que são negativos, altera-se os correspondentes sinais do momento de flexão  $M_n$  e das rotações.

### 7.3.3 Associação de macro-elementos via método de sub-regiões do MEC

Seja a associação plana de dois macro-elementos conforme a Figura 7.4. De acordo com o que foi desenvolvido em capítulos anteriores, o vetor de deslocamentos em um dado nó no contorno de um macro-elemento, possui 4 graus de liberdade, dois referentes ao estado plano e dois referente a flexão de placas. Sabe-se que em nós pertencentes a interface dos macro-elementos, existem 8 graus de liberdade ( $u_1, u_2, w, \theta, t_1, t_2, V_n$  e  $M_n$ ). Através da aplicação das condições de equilíbrio e continuidade de deslocamentos na interface, os graus de liberdade são reduzidos para 4 (Sanches 2002).

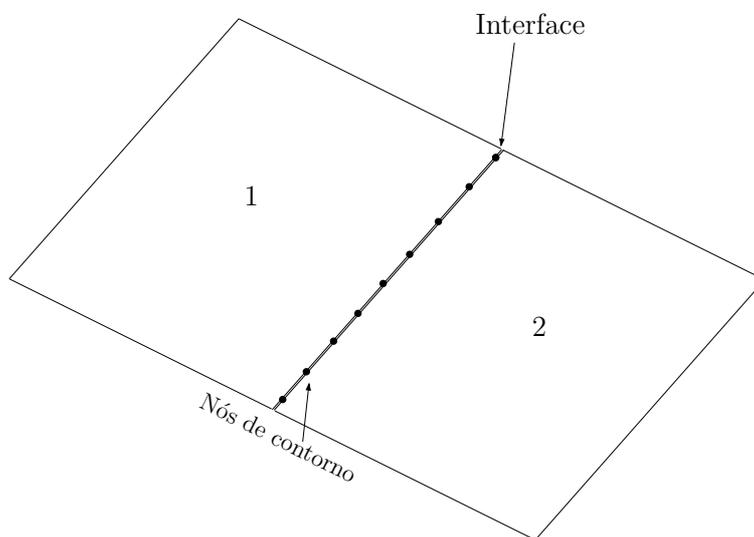


Figura 7.4: Associação de dois macro-elementos

As condições de continuidade de deslocamento são dadas por:

$$\begin{aligned}
u_i^1 &= u_i^2, \\
t_i^1 &= t_i^2, \\
\theta_i^1 &= \theta_i^2
\end{aligned} \tag{7.21}$$

e as condições de equilíbrio de esforços por:

$$\begin{aligned}
t_i^1 + t_i^2 + t_i &= 0 \\
V_n^1 + V_n^2 + V_n &= 0 \\
M_n^1 + M_n^2 + M_n &= 0
\end{aligned} \tag{7.22}$$

onde os índices superiores referem-se ao número de macro-elemento.

Nas equações apresentadas em 7.23, a terceira parcela de cada equação refere-se aos esforços na aresta. Estas forças relacionam-se com os esforços da interface, ou quando o deslocamento é incógnito, a força é conhecida ou vice-versa, ou seja, não há aumento do número de incógnitas. Na ausência do termo de domínio, o sistema final de equações algébricas obtido após o cálculo das integrais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{T}, \tag{7.23}$$

onde as matrizes elementares que fazem parte das matrizes finais  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  da Equação 7.23 são montadas a partir das equações de transformação de coordenadas locais em globais mostrada na seção 7.3.1.

Usando a técnica de sub-regiões do MEC, a equação matricial correspondente ao macro-elemento 1 pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & \mathbf{H}_{1i}^1 \\ \mathbf{H}_{i1}^1 & \mathbf{H}_{ii}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \mathbf{G}_{1i}^1 \\ \mathbf{G}_{i1}^1 & \mathbf{G}_{ii}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_A^I \end{Bmatrix} \tag{7.24}$$

da mesma forma, para o macro-elemento 2, têm-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^2 & \mathbf{G}_{1i}^2 \\ \mathbf{G}_{i1}^2 & \mathbf{G}_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^2 & \mathbf{G}_{1i}^2 \\ \mathbf{G}_{i1}^2 & \mathbf{G}_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_A \end{Bmatrix}, \quad (7.25)$$

sendo:

- i)  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{U}_2$  os deslocamentos nodais sobre o contorno dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
- ii)  $\mathbf{T}_1$  e  $\mathbf{T}_2$  os esforços nodais sobre o contorno dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
- iii)  $\mathbf{U}_A$  e  $\mathbf{T}_A$  os deslocamentos e esforços nodais na aresta da interface, respectivamente.
- iv)  $\mathbf{H}_{ij}^k$  e  $\mathbf{G}_{ij}^k$  sub-matrizes, dos efeitos  $i$  em  $j$  do macro elemento  $k$ .

As Equação 7.24 e 7.25 podem ser escritas num só sistema após a imposição das condições (7.22) e (3.34), como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & \mathbf{H}_{1i}^1 & 0 & -\mathbf{G}_{1i}^1 & 0 \\ \mathbf{H}_{i1}^1 & \mathbf{H}_{ii}^1 & 0 & -\mathbf{G}_{ii}^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{ii}^2 & \mathbf{H}_{i2}^2 & 0 & -\mathbf{G}_{ii}^2 \\ 0 & \mathbf{H}_{2i}^2 & \mathbf{H}_{22}^2 & 0 & -\mathbf{G}_{2i}^2 \\ 0 & 0 & 0 & I & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_A \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{T}_i^1 \\ \mathbf{T}_i^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & 0 & 0 \\ \mathbf{G}_{i1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{2i}^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{22}^2 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_A \\ \mathbf{T}_2 \end{Bmatrix}, \quad (7.26)$$

sendo:

- i)  $\mathbf{T}_i^1$  e  $\mathbf{T}_i^2$  os esforços nos macro-elementos 1 e 2 respectivamente.
- ii)  $\mathbf{I}$  a matriz identidade para compor as condições 7.22 e 3.34 em 7.26

Rearranjando os sistemas de equações algébricas 7.26 obtém-se um sistema de equações final, do tipo  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F}$  Aplica-se então as condições de contorno e resolve-se o sistema encontrando-se os valores desconhecidos nos nós do contorno e da interface. Esse procedimento estende-se a associação de uma maior quantidade de macro-elementos associados.

## 7.4 Montagem das matrizes H e G

O esquema de montagem para associação de matrizes foi baseado no roteiro apresentado por Hughes (2000) para montagem da matriz de rigidez do MEF referente ao problema de treliças.

Por simplicidade, considere dois macro-elementos associados. Todas as arestas são discretizadas com 1 elemento de contorno e os nós locais e globais são indicados conforme mostra a Figura 7.5.

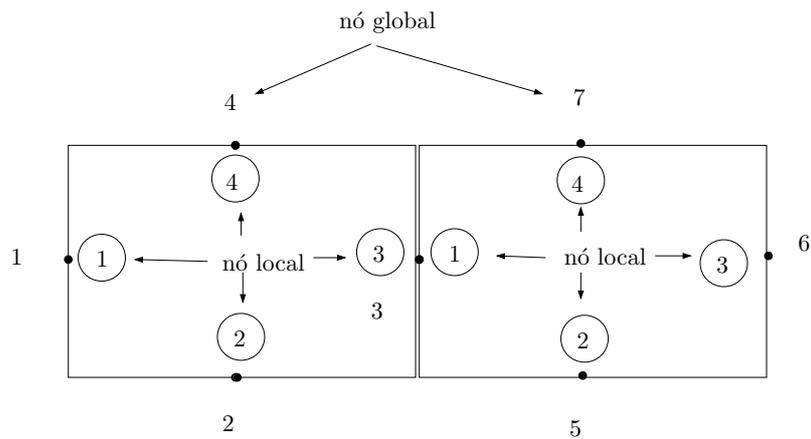


Figura 7.5: Numeração local e global de dois macro-elementos.

- i) *Matriz de identificação (ID)*: é a matriz que enumera os graus de liberdades globais da estrutura através da equação (Figura 7.27):

$$ID(a, k) = 4(a - 1) + k, \quad (7.27)$$

onde  $k$  é o número de graus de liberdade nodal e  $a$  é o número de nós. Para o exemplo considerado, tem-se:



$$LG(p, m) = ID(k, NG(a, m)) \quad (7.29)$$

Por exemplo, para saber os números dos graus de liberdade globais relacionado com o nó local 2 do segundo macro-elemento:

$$\begin{aligned} k &= 1 \quad m = 2, \quad a = 2; \\ p &= 4(2 - 1) + 1 = 5 \\ LG(5, 2) &= ID(1, NG(2, 2)) = 17 \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} k &= 2 \\ p &= 4(2 - 1) + 2 = 6 \\ LG(6, 2) &= ID(2, NG(2, 2)) = 18 \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} k &= 3 \\ p &= 4(2 - 1) + 2 = 7 \\ LG(7, 2) &= ID(3, NG(2, 2)) = 19 \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} k &= 4 \\ p &= 4(2 - 1) + 2 = 8 \\ LG(8, 2) &= ID(4, NG(2, 2)) = 20 \end{aligned} \quad (7.33)$$

iv) *Matriz auxiliar*: auxilia na montagem da matriz de associação

$$LA(p, m) = ID(k, NG(a, m)) + c \quad \text{para } m \geq 1 \quad (7.34)$$

onde  $c$  é o número total de graus de liberdade da interface. Para o exemplo proposto  $c = 8$  (4 do macro-elemento I e 4 do macro-elemento II).



$$\begin{aligned}
H(p, q) &= h(n, el) \\
G(p, q) &= g(n, el)
\end{aligned}
\tag{7.35}$$

onde  $n$  e  $el$  são respectivamente, os nós e os elementos de cada macro-elemento. Sendo:

$$\begin{aligned}
q &= LG(n, m) \\
p &= LG(n, m) \quad \text{para o macro-elemento I} \\
p &= LA(n, m - 1) \quad \text{para macro-elemento II}
\end{aligned}
\tag{7.36}$$

Por exemplo, para saber qual a posição dos termos  $h^I(n, 1)$  e  $h^I(n, 1)$  com  $n = 1, 2, 3, 4$  da matriz do primeiro macro-elemento na matriz global  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned}
p &= LG(1, 1) = 1 \quad \text{e} \quad q = LG(1, 1) = 1 \\
H(1, 1) &\rightarrow h^I(1, 1)
\end{aligned}
\tag{7.37}$$

onde o subscripto  $I$  indica o número do macro elemento.

Semelhantemente para  $n = 2, 3$  e  $4$ :

$$\begin{aligned}
H(2, 1) &\rightarrow h^I(2, 1) \\
H(3, 1) &\rightarrow h^I(3, 1) \\
H(4, 1) &\rightarrow h^I(4, 1)
\end{aligned}
\tag{7.38}$$

Para o segundo macro-elemento:

$$\begin{aligned}
p &= LA(1, 2) = 17 \quad \text{e} \quad q = LG(1, 2) = 9 \\
H(17, 9) &\rightarrow h^{II}(1, 1)
\end{aligned}
\tag{7.39}$$

da mesma forma, para  $n = 2, 3$  e  $4$ :

$$H(18, 9) \rightarrow h^{II}(2, 1)$$

$$H(19, 9) \rightarrow h^{II}(3, 1)$$

$$H(20, 9) \rightarrow h^{II}(4, 1)$$

(7.40)

# Capítulo 8

## Exemplos Numéricos

### 8.1 Validação da formulação de macro-elemento.

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos com o objetivo de validar a formulação de macro-elemento. Como apresentado na seção 7.2, as reações de canto da placa são desprezadas na formulação do macro-elemento. Por esse motivo, o primeiro exemplo proposto avalia a influência das reações de canto no problema de placa. Nos demais exemplos, procurou-se analisar placas de laminados compósitos submetidas a carregamentos transversais e axiais para várias condições de contorno. A discretização foi realizada usando elementos constantes e quadráticos, onde foi possível verificar a convergência do método através do aumento do número de elementos.

#### 8.1.1 Viga engastada em um bordo.

Considere o problema de uma placa quadrada de espessura  $h = 0.01$ , engastada em uma de suas extremidades. A placa está submetida a um carregamento linearmente distribuído em seu domínio como mostra a Figura 8.1. Suas propriedades materiais (graphite-epoxi) são:  $E_{11} = 3.0 \times 10^7 \text{ Pa}$ ,  $E_{22} = 7.5 \times 10^7 \text{ Pa}$ ,  $G_{12} = 4.5 \times 10^7 \text{ Pa}$  e  $\nu_{12} = 0.25$ .

- a) Considerando as reações de canto, a placa é discretizada com 10 elementos constantes por aresta.
- b) Desprezando as reações de canto, a placa é discretizada com 10 e 30 elementos constantes por aresta.

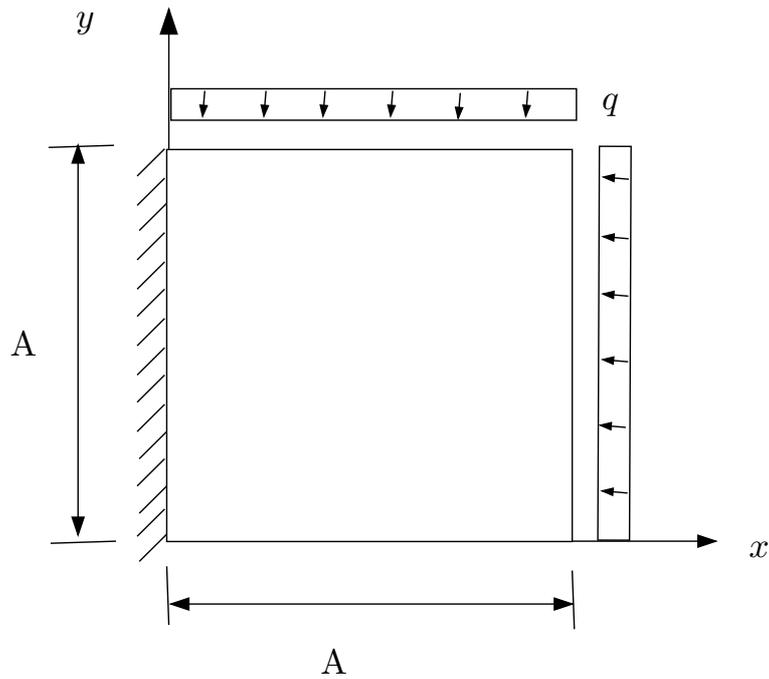


Figura 8.1: Placa monoengastada.

A análise foi feita usando a formulação do MEC para teoria clássica de placas, isto é, considerando-se as reações de canto. Os deslocamentos obtidos ao longo do eixo  $x$  é mostrado no gráfico da Figura (8.2).

O erro relativo pode ser calculado segundo a expressão:

$$Erro = \left| \frac{(Desl_c - Desl_{sc})}{Desloc_c} \right| \cdot 100,$$

sendo  $Desl_c$  o valor do deslocamento obtido usando a formulação descrita em (a) e  $Desl_{sc}$ , o valor do deslocamento obtido usando a formulação descrita em (b). Desta forma, na extremidade da viga (em  $x = 1.9$ ) o erro relativo obtido para as malhas de 10 e 30 elementos são, 15% e 22% respectivamente.

Observou-se que a desconsideração das reações de canto conduz a uma rigidez maior na extremidade da placa oposta ao engaste. O aumento do número de elementos não conduziu a uma melhora nos resultados obtidos nesse extremo.

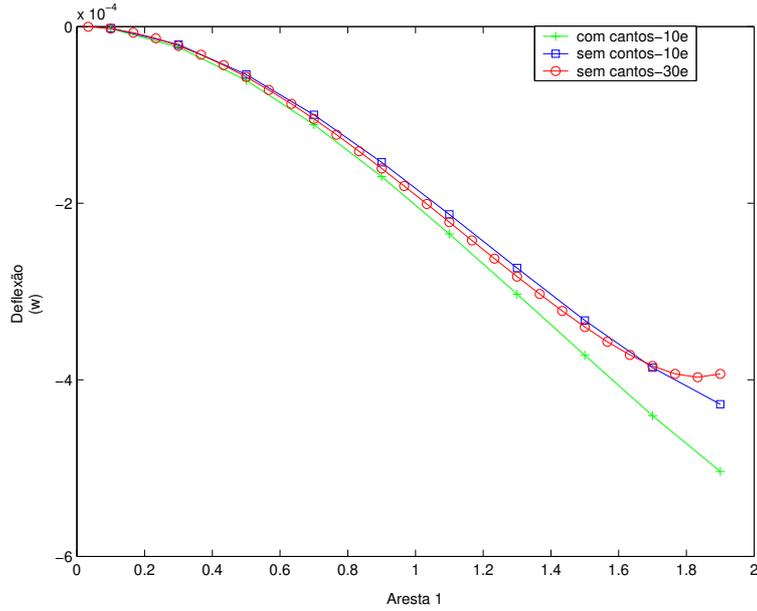


Figura 8.2: Deflexão ao longo da aresta  $A$  usando a teoria clássica do MEC.

### 8.1.2 Laminado simétrico submetido a um carregamento transversal.

Neste exemplo, considera-se uma placa laminada composta por nove lâminas  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . A placa quadrada de espessura total  $h = 0.001\text{m}$  e dimensão  $(1 \times 1)\text{m}$  possui suas bordas simplesmente apoiadas. As propriedades de cada lâmina, fabricada com compósito de grafite-epoxi, usadas nesta análise são:  $E_{11} = 30 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $E_{22} = 0,75 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $G_{12} = 0,45 \times 10^6 \text{ Pa}$  e  $\nu = 0,25$ . Todas as lâminas têm a mesma espessura. O carregamento aplicado é constante e distribuído uniformemente sobre toda a superfície, sendo  $q = -1\text{N/m}^2$ . O problema é analisado usando-se 84 elementos constantes e posteriormente, 12 elementos quadráticos. O resultado obtido para deflexão no centro da placa é comparado com a solução analítica apresentada por (Noor e Mathers 1975) como:

$$\frac{w_a E_{22} h^3}{q a^4} \times 10^3 = 4.4718, \quad (8.1)$$

da qual, para este problema, obtém-se  $w_a = 5.9624$ .

Na tabela 8.1 os resultados obtidos pelo MEC usando a formulação de macro-elementos são comparados com a solução analítica. Quanto ao tipo de elemento adotado, usa-se a

seguinte notação:

- i) Macro(c): elementos constantes.
- ii) Macro(q): elementos quadráticos.

Tabela 8.1: Deflexão no centro da placa.

Deflexão				
Analítica	Macro(c)	Erro(%)	Macro(q)	Erro (%)
5.9624	5.9344	0.47	5.9732	0.16

A Tabela 8.1 mostra que os erros obtidos usando a formulação de macro-elementos ficam abaixo de 0.5% e que o uso de elementos quadráticos tende a apresentar melhores resultados.

### 8.1.3 Laminado simétrico submetido a uma força axial.

Neste exemplo considera-se um laminado monoengastado submetido a uma força  $q = 1000N/m$  uniformemente distribuída, aplicada na extremidade oposta a borda engastada. Considerando-se as mesmas características geométricas e de materiais da placa do exemplo 8.1.2. Os resultados obtidos para o ponto  $P$  do laminado (Figura 8.3) são comparados aos resultados obtidos pelo ANSYS.

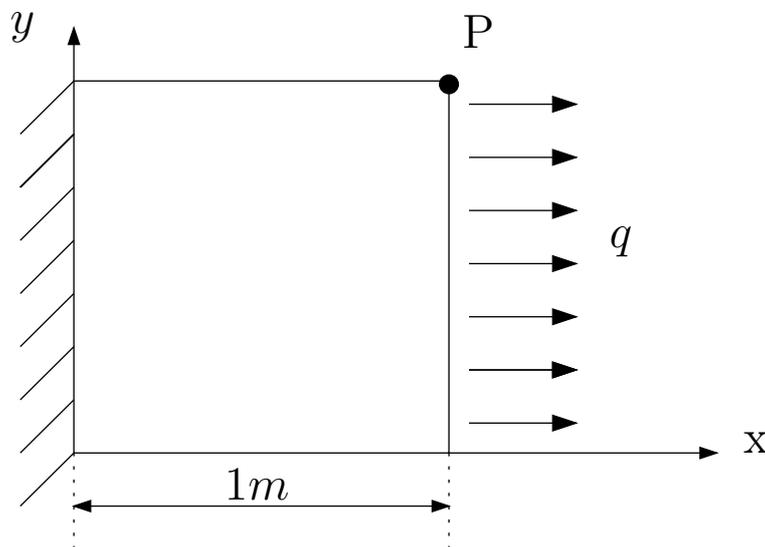


Figura 8.3: Laminado submetido a força axial.

A seguinte discretização foi adotada:

Tabela 8.2: Deslocamentos do laminado no ponto  $P$ .

Anslys	Macro (c)	Erro (%)	Macro (q)	Erro (%)
0.7263	0.7282	0.27	0.7263	0.0

i) Macro(c): usou-se 50 elementos constantes por aresta.

ii) Macro(q): usou-se 10 elementos quadráticos por aresta.

A Tabela 8.2 mostra os erros obtidos para as duas malhas propostas. As duas malhas apresentaram bons resultados comparados com os resultados obtidos pelo ANSYS.

## 8.2 Validação da formulação para associação de macro-elementos

O objetivo desta seção é validar a formulação de associação de macro-elementos. No primeiro exemplo analisa-se a associação plana de dois macros-elementos, os resultados obtidos são comparados com resultados obtidos para o mesmo problema, porém considerando apenas um macro-elemento. Nos exemplos seguintes, várias estruturas espaciais são analisadas e os resultados obtidos são comparados com resultados obtidos pelo ANSYS e por métodos numéricos disponíveis na literatura.

### 8.2.1 Placa quase-isotrópica retangular simplesmente apoiada

A Figura 8.4 mostra o esquema proposto para a resolução do problema considerado: uma placa quase-isotrópica simplesmente apoiada em quatro lados, submetida a carregamento constante distribuído uniformemente por toda a sua superfície. O problema é analisado para uma placa retangular, com as seguintes dimensões:  $a = 1$  m,  $b = 2$  m e  $h = 0,1$  m. As propriedades do material adotado neste exemplo são: módulos de elasticidade  $E_1 = 1 - (1 \cdot 10^{-15})$  Pa e  $E_2 = 1$  Pa e razão de Poisson  $\nu = 0,3$ . O carregamento aplicado é  $q = -1$  N/m<sup>2</sup>.

O problema é dividido em dois casos: usando um macro-elemento e com dois macros-elementos, os resultados obtidos para o deslocamento no centro da placa são comparados com aqueles calculados por (Timoshenko e Woinowsky-Krieger 1959).

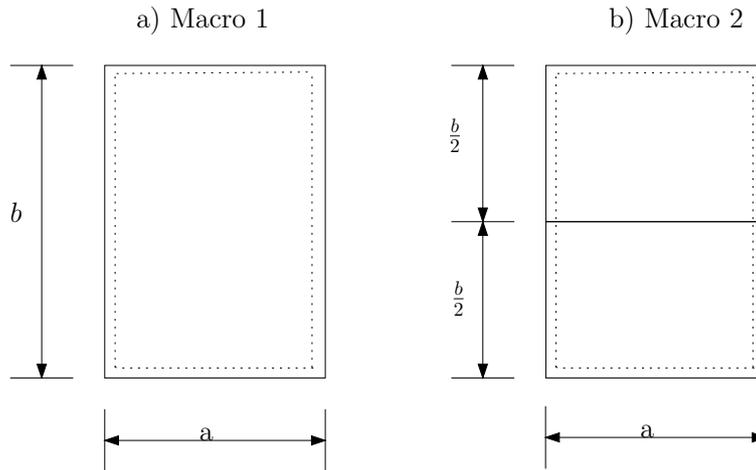


Figura 8.4: Associação de dois macro-elementos

A discretização para os casos propostos contou com 81 nós internos.

1) Usando 1 macro-elemento :

(a) Malha 1: 3 e 6 elementos constantes nas aresta  $b$  e  $a$ , respectivamente.

(b) Malha 2: 6 e 12 elementos constantes nas aresta  $b$  e  $a$ , respectivamente.

2) Usando 2 macro-elementos :

(a) Malha 1: 3 elementos constantes nas aresta por aresta.

(b) Malha 2: 7 elementos constantes nas aresta por aresta.

Tabela 8.3: Deslocamentos  $w$  no centro da placa.

Analítica $w_a = 110.708$	Macro 1		Macro 2	
	$w$	Erro (%)	$w$	Erro (%)
Malha 1	-111.860	1.04	-109.240	1.32
Malha 2	-110.690	0.02	-110.360	0.31

Conforme a tabela 8.3, as deflexões obtidas no centro da placa através do MEC foram satisfatórias para as duas malhas propostas, apresentando erros inferiores a 1.4%.

### 8.2.2 Viga em balanço com seção aberta U

Este exemplo tem como objetivo validar a formulação apresentada para para associação espacial. Os resultados obtidos na análise serão comparados com os valores obtidos por (Sanches 2002) e (Palermo. 1989), por esse motivo, assume-se que a viga seja feita com um material quase-isotrópico. Os valores obtidos nas reações de apoio são comparados com o resultado obtido pela Mécânica dos Materiais.

A geometria e as condições de contorno do problema são mostradas na Figura 8.5. Considera-se que em cada lâmina de espessura constante  $h = 0.05\text{m}$ , esteja associado um macro-elemento (1, 2 e 3).

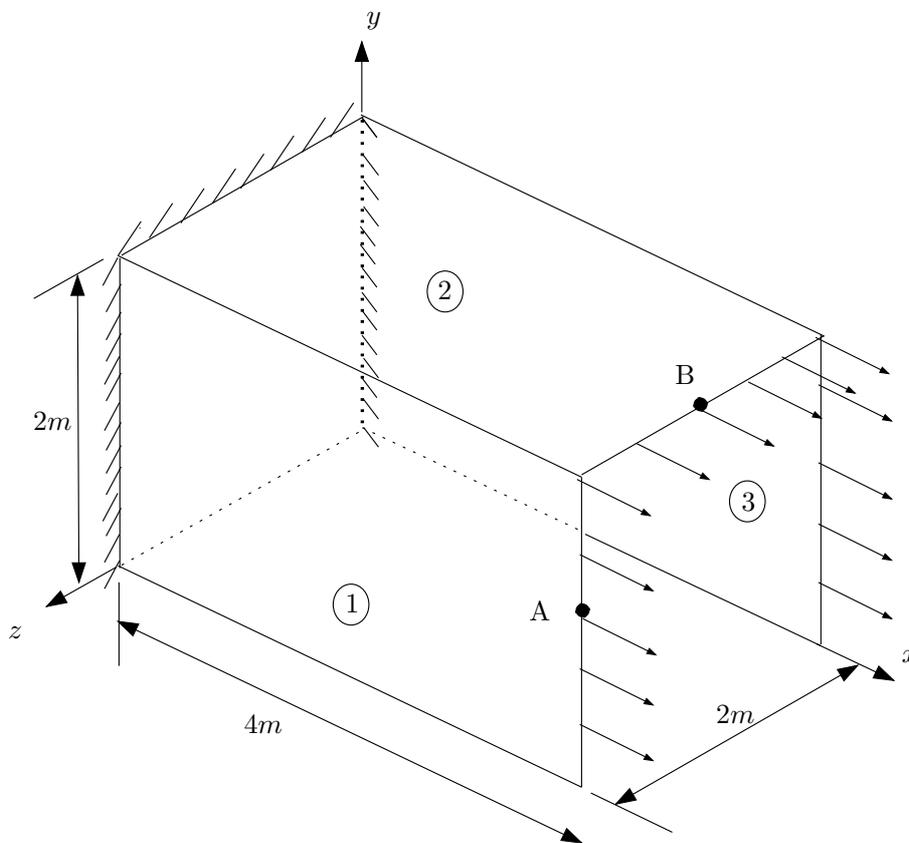


Figura 8.5: Geometria e condições de contorno do problema proposto.

A discretização foi feita usando 16 elementos constantes por aresta, incluindo as interfaces, num total de 192 elementos. O carregamento  $q = 9.806 \text{ kN/m}$  foi uniformemente distribuído na extremidade livre ( $x = 4$ ) na direção  $x$  e as propriedades materiais são:  $E_{11} = 19612 \text{ Pa}$ ,

$E_{22} = 19610 \text{ Pa}$  e  $\nu = 0$ .

A força distribuída obtida na seção do engaste é comparada na Tabela 8.4, com valores encontrados por Sanches (2002) e Palermo. (1989) através do MEC.

Tabela 8.4: Força distribuída na seção do engaste (kN/m).

Sanches	Palermo	Presente trabalho
1.551	1.633	1.634

As reações de apoio obtidas na seção do engaste foram de  $-9.808kN$ , para cada aresta, o erro foi de 0.02% em relação ao valor obtido da Mécânica dos Materiais.

### 8.2.3 Viga engastada nas extremidades

A Figura 8.6 mostra o problema considerado: uma viga de seção aberta U e espessura constante, engastada em suas extremidades (em  $x = 0$  e  $x = 4$ ), submetida a um carregamento constante distribuído uniformemente por toda superfície do macro-elemento 2. Dois tipos de materiais são considerados neste exemplo. No item *a*, trata-se de uma material quase-isotrópico e o item *b* é adotado um laminado simétrico composto por 9 lâminas ortotrópicas.

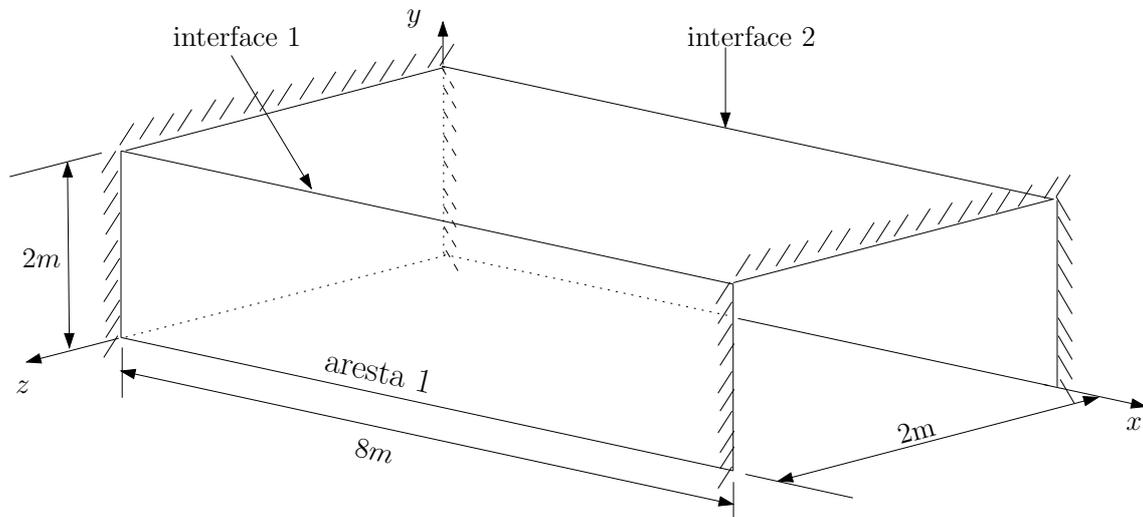


Figura 8.6: Viga engastada nas extremidades.

### a) Viga quase-isotrópica

Neste exemplo adota-se as seguintes propriedades materiais:  $E_{11} = 1 - (1 \times 10^{-15})$  Pa,  $E_{22} = 1$  Pa e  $\nu = 0$  e altura total  $h = 0.04$ .

O gráfico da Figura (8.7) mostra os deslocamentos obtidos na aresta A, para três tipos de malhas: 30, 40 e 70 elementos constantes por aresta. Nota-se que os valores obtidos são razoavelmente próximos aos resultados obtidos pelo ANSYS, usando o elemento SHELL63, no total de 3888 elementos. Os erros em percentagem, para a deflexão máxima ao longo da aresta 1, foram de 9.4%, 7.3% e 4.7% respectivamente.

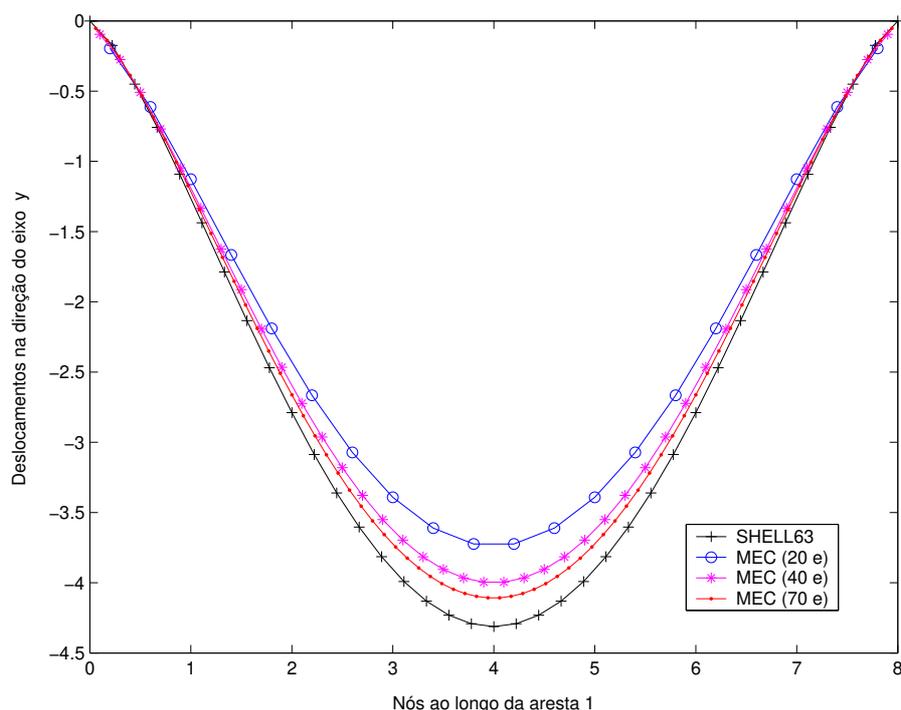


Figura 8.7: Discretização com elementos constantes.

Os resultados obtidos com utilização de elementos quadráticos na discretização do problema se mostrou mais preciso, conforme mostra o gráfico da Figura 8.8. Neste caso, cada aresta foi discretizada com 5 e 10 elementos quadráticos. Os erros obtidos para a máxima deflexão na aresta 1 foi de 1% e 0.3 respectivamente.

O gráfico da Figura 8.9 apresenta os deslocamentos obtidos na interface. A malha adotada foi de 70 elementos constantes (MEC (70 c)) e 5 elementos quadráticos (MEC (5 q)) por

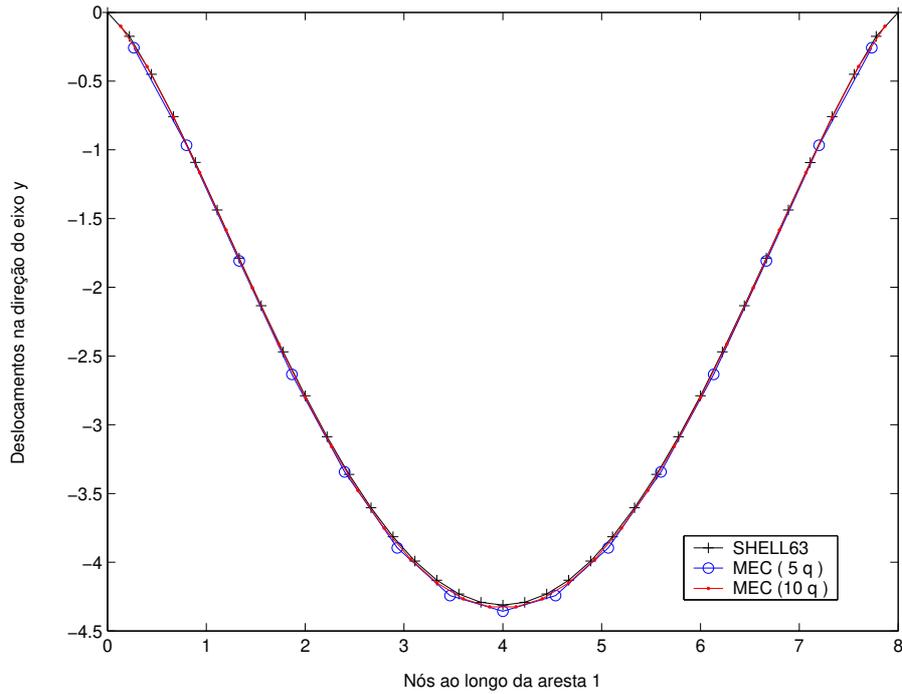


Figura 8.8: Discretização com elementos quadráticos.

aresta.

### b) Laminado simétrico

Neste exemplo considera-se um laminado composto por 9 lâminas, com a seguinte sequência [45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/45] e altura total igual a  $h = 0.01$ . Considera-se que cada lâmina tenha as mesmas propriedades descritas no exemplo 8.1.2. O problema foi analisado usando-se 5 elementos quadráticos por aresta, num total de 50 elementos. O mesmo problema foi modelado no ANSYS usando o elemento SHELL99, a discretização contou com o total de 768 elementos.

O gráfico da Figura 8.10 compara os deslocamentos obtidos na interface 1 na direção  $y$  através do MEC com os resultados obtidos pelo ANSYS.

Os deslocamentos obtidos através do MEC na interface 1 na direção  $x$  são comparados com os deslocamentos obtidos pelo ANSYS (Figura 8.11) no gráfico da Figura 8.12. Observa-se que o MEC apresentou uma boa aproximação em relação ao ANSYS.

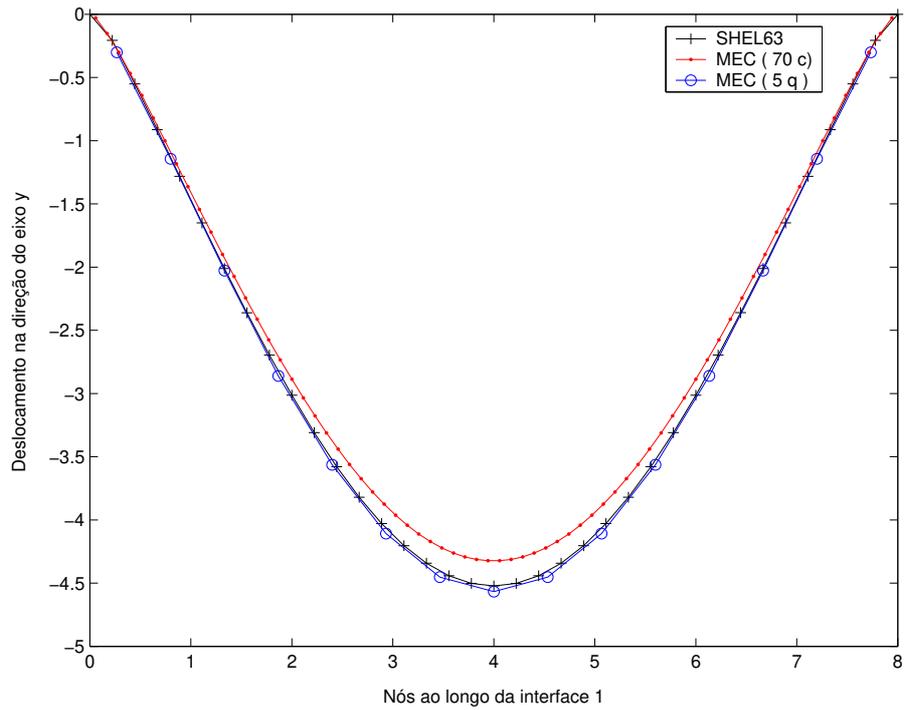


Figura 8.9: Deslocamentos na interface 1 na direção y.

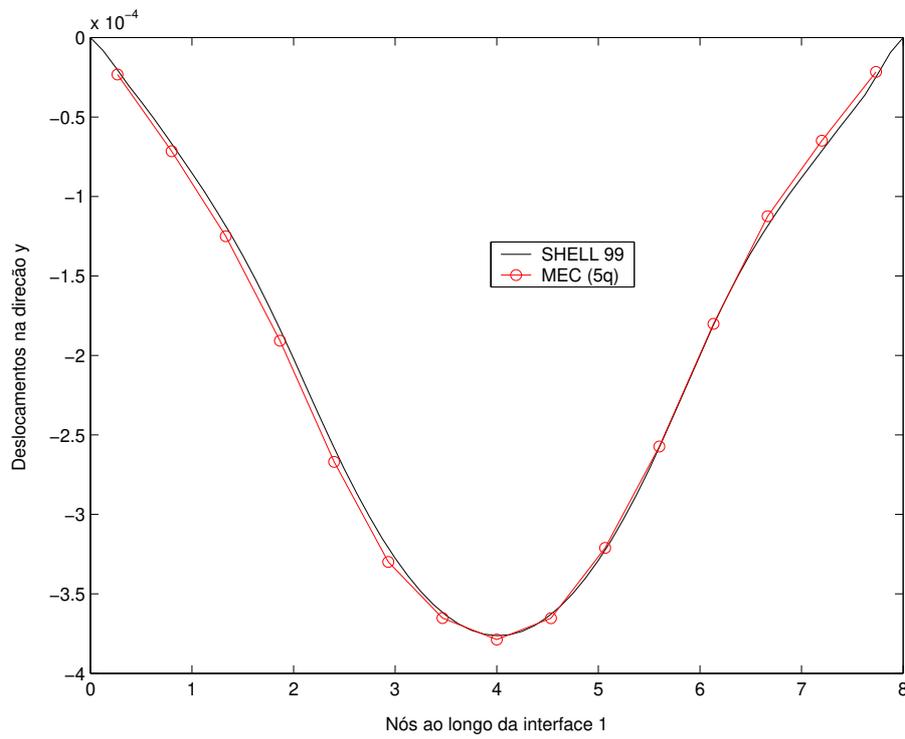


Figura 8.10: Deslocamentos na interface 1 na direção y.

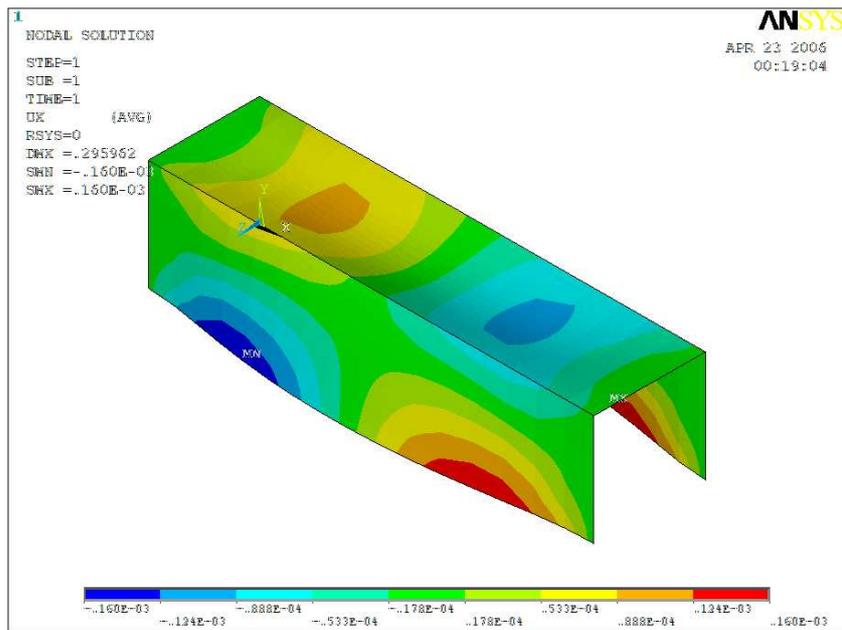


Figura 8.11: Deslocamentos obtido pelo ANSYS na direção x.

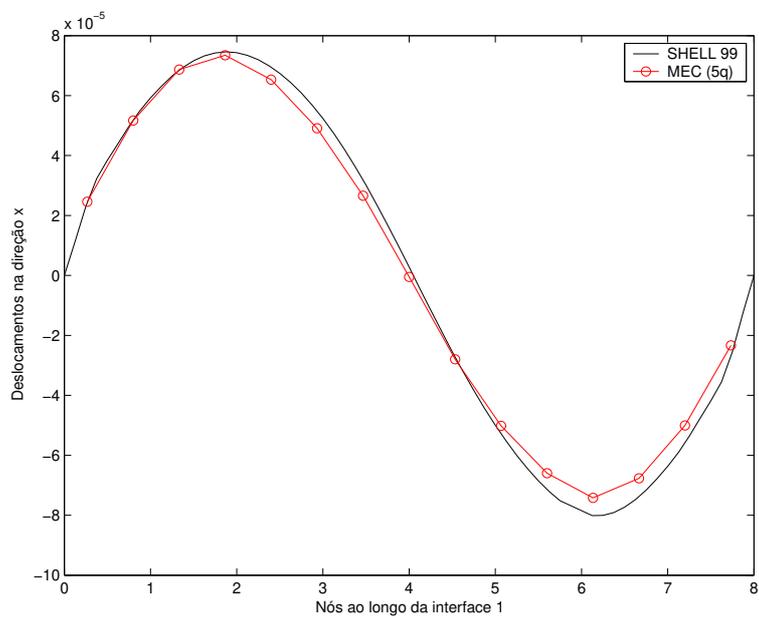


Figura 8.12: Deslocamentos na interface 1 na direção x.

### 8.2.4 Viga V engastada nas extremidades

A estrutura mostrada na Figure 8.13-a é formada pela associação de quatro macro-elementos com uma interface em comum.

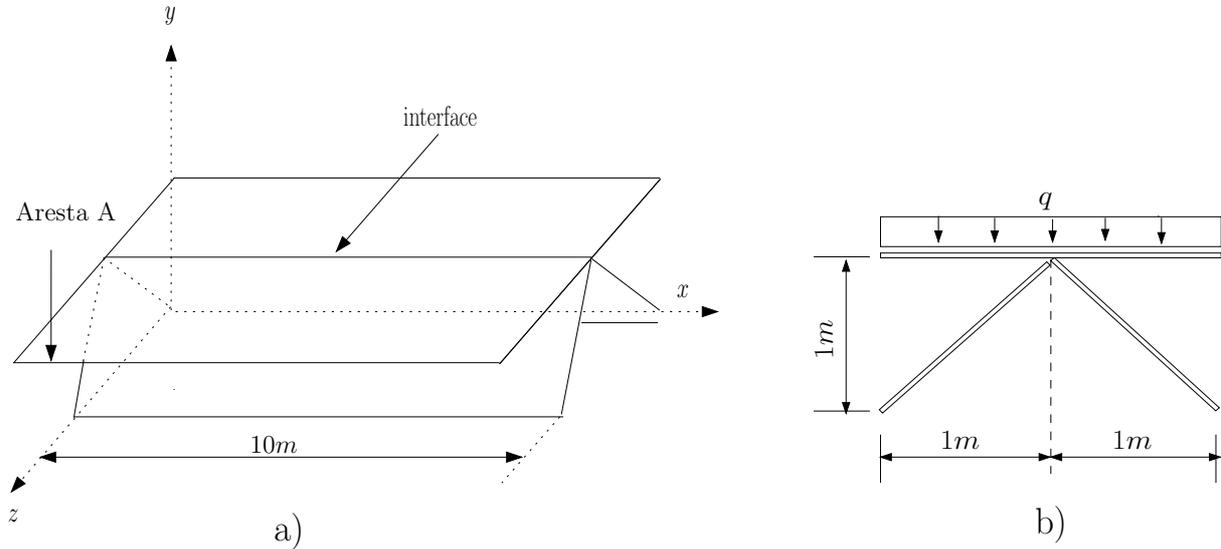


Figura 8.13: Geometria da estrutura.

A estrutura engastada nas extremidades,  $x = 0$  e  $x = 10$ , está submetida a um carregamento uniformemente distribuído em  $y = 1$  igual a  $q = -1N/m^2$ , como mostra a Figure 8.13-b. As propriedades materiais usadas nesta análise são:  $E_{11} = 30 \times 10^6$  Pa,  $E_{22} = 0.75 \times 10^6$  Pa,  $G_{12} = 0.45 \times 10^6$  Pa e  $\nu = 0.25$ . Os resultados obtidos para a deflexão na aresta A foram comparados com os valores obtidos pelo ANSYS, usando o elemento SHELL63.

Tabela 8.5: Deflexão máxima da aresta A.

SHELL 63	Elementos constantes				Elementos quadráticos			
	20	Erro (%)	40	Erro (%)	8	Erro (%)	17	Erro (%)
-3.2676	-3.0833	5.6	-3.0995	5.4	-3.1660	3.1	-3.1930	2.3

Os resultados obtidos com utilização de elementos constantes na discretização do problema são mostrados no gráfico da Figura 8.14. Os valores encontrados pela formulação apresentada neste trabalho ficaram muito próximos dos valores obtidos pelo ANSYS.

A deflexão máxima obtida na aresta A para vários tipos de malhas é apresentada na Tabela 8.5. Verificou-se que os menores erros foram obtidos pela discretização com elementos quadráticos.

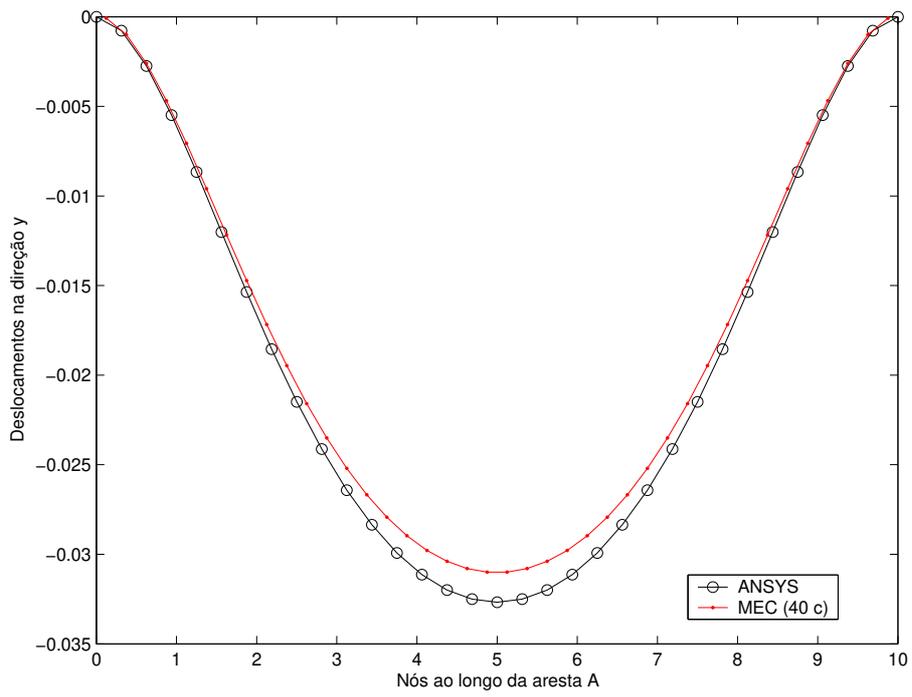


Figura 8.14: Deslocamentos ao longo da aresta A na direção y.

# Capítulo 9

## Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuro

### 9.1 Conclusões gerais

Este trabalho analisou o comportamento de estruturas tridimensionais formadas pela associação de placas de laminados compósitos. A partir da aplicação do método dos elementos de contorno foi possível a análise destas estruturas, os resultados obtidos pela formulação proposta mostrou-se eficiente comparados com resultados analíticos e numéricos disponíveis na literatura.

### 9.2 Conclusões específicas

Neste trabalho, as equações básicas da teoria de placas laminadas foram apresentadas. As matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados foram obtidas a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados. Foi feita uma breve discussão sobre laminados simétricos e não-simétricos, onde foi mostrado que um laminado simétrico possui equações mais simples que a do laminado não-simétrico, além de ser empregado com mais frequência em estruturas de engenharia.

Foram apresentadas as hipóteses básicas em que se baseiam as teorias da elasticidade plana e de placas finas para materiais anisotrópicos. Com base nestas teorias foram obtidas as equações constitutivas de chapas e placas. Também foi apresentada a obtenção das

equações diferenciais e das soluções fundamentais, da formulação anisotrópica para esses estados.

A partir da análise de lâminas simétricas uma formulação do método dos elementos de contorno foi desenvolvida para a análise de problemas de chapas e placas finas em materiais anisotrópicos. A implementação do MEC para análises individuais desses problemas, apresentou boa convergência de resultados com os valores de referência da literatura consultada e obtidos através do ANSYS. A utilização de elementos constantes apresentou bons resultados, porém a adoção de elementos quadráticos se mostrou mais eficiente apresentando resultados satisfatórios em todos os exemplos analisados.

Um macro-elemento contendo quatro graus de liberdades por nó foi desenvolvido para representar o modelo de folhas poliédricas proposto neste trabalho. Observou-se que para problemas planos envolvendo laminados simétricos, o macro-elemento possui os estados de chapa e flexão desacoplados portanto os deslocamentos podem ser obtidos separadamente.

A associação de macro-elementos foi feita através de equações de compatibilidade de deslocamento e equilíbrio, além da compatibilização de momentos na região da interface. Na formulação da associação espacial foi necessário escrever equações de transformação de coordenadas para cada macro-elemento, relacionando-se um sistema local e sistema global de coordenadas obtendo-se um sistema final de equações. Após a aplicação das condições de contorno, o sistema de equações pode ser resolvido obtendo-se as incógnitas do problema em questão. Os resultados obtidos com a formulação desenvolvida neste trabalho apresentaram uma boa concordância com os resultados disponíveis na literatura. A partir da análise dos resultados pode-se concluir que o emprego de elementos quadráticos foi mais eficiente, pois os resultados obtidos usando esses elementos convergiram mais rapidamente para os valores de referência.

### 9.3 Sugestões para trabalhos futuros

Após o estudo da análise estática de estruturas tridimensionais desenvolvido neste trabalho, a análise de tensões seria de grande valia para compreensão do comportamento mecânico dessas estruturas.

A formulação apresentada pode ser estendida para análise de problemas dinâmicos, visco-elásticos, análise de dano e etc.

O estudo de problemas da mecânica da fratura baseia-se na técnica de sub-regiões do MEC, e por esse motivo pode ser facilmente implementada neste trabalho.

Uma vez que matriz do sistema global acoplado possui grandes blocos de zeros associados com nós desacoplados de diferentes sub-regiões seria de grande interesse o estudo de algoritmos iterativos de acoplamento visando a eficiência e robustez do programa desenvolvido.

# Referências

- Albuquerque, E. L. (2001). “Análise de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno,” PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Albuquerque, E. L., P. Sollero, W. S. V., e Aliabadi, M. H. (2005). “Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates.” *International Journal for Solids and Structures*, Submetido(.), .
- Albuquerque, E. L. e Sollero, P. (1997). “Boundary element analysis applied to dynamic crack problems.” *Proc. XVII Int. Conf. Dynamic Problems in Mechanics*, ABCM, Angra dos Reis, Brasil. 277–279.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., Venturini, W. S., e Aliabadi, M. H. (2003). “Exact transformation of domain integrals into boundary integrals in anisotropic plate bending boundary element method.” *4<sup>th</sup> International Conference on Boundary Element Techniques*, Granada, Espanha.
- Barbero, E. J. (1998). *Introduction to Composite Materials Design*,. Taylor and Francis, Philadelphia, PA.
- Benjumea, R. e Sikarskie, D. (1972). “On the solution of plane orthotropic elasticity problems by an integral method.” *Journal Applied Mechanics*, 39, 1–8.
- Bodamar, D. A. (1998). “A composite sketch.” *Civil Engineering, ASCE*, 56–59.

- Brebbia, C. e Domínguez, J. (1989). *Boundary Element: An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 2nd edition.
- Brebbia, C. A. e Domingues, J. (1992). *Boundary Elements: an Introductory Course*. McGraw-Hill, New York.
- Carmo, R. (2001). “Determinação de rigidez de estruturas de pavimentos através do método dos elementos de contorno,” PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Chaves, E. W. V., Fernandes, G. R., e Venturini, W. S. (1999). “Plate bending boundary element formulation considering variable thickness.” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 53, 405–418.
- Cruse, T. A. e Rizzo, F. J. (1968). “A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problems.” *J. of Mathematic Analysis Applied*, 22, 244–259.
- Cruse, T. A. e Swedlow, J. L. (1971). “Interactive program for analysis and design problems in advanced composites.” *Report no.*, Carnegie-Mellon University, Report AFLM-TR-71-268.
- Davies, T. W. e Moslehy, F. A. (1994). “Modal analysis of plates using the dual reciprocity boundary element method.” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14, 357–362.
- Deb, A. (1996). “Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings.” *Computers and Structures*, 58, 715–726.
- Deb, A. e Banerjee, P. K. (1990). “Bem for general anisotropic 2d elasticity using particular integrals.” *Communications in Applied Numerical Methods*, 6, 111–119.
- Dominguez, J. (1993). *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston.
- El-Zafrany, A., Fadhil, S., e Debbih, M. (1995). “An efficient approach for boundary element bending analysis of thin and thick plates.” *Computers & Structures*, 56(4), 565–576.

- Fernandes, G. R. e Venturini, W. S. (2002). “Stiffened plate bending analysis by the boundary element method.” *Computational Mechanics*, 28, 275–281.
- Galuta, E. M. e Cheung, M. S. (1995). “Combined boundary element and finite element analysis of composite box girder bridges.” *Computer & Structures*, 57(3), 427–437.
- Halpin, J. C. (1984). *Primer on composite materials*. Technomic Publishing Co, Lancaster, PA.
- He, W. J. (2000). “An equivalent boundary integral formulation for bending problems of thin plates.” *Computers & Structures*, 74, 319–322.
- Hughes, T. (2000). “The finite element method—linear static and dynamic finite element analysis.
- Kamiya, N. e Sawaki, Y. (1955). “A general boundary element method for bending analysis of orthotropic elastic plates.” *Journal Composite Materials*, 22, 694–716.
- Kirchhoff, G. (1950). “On the equilibrium and motion of an elastic plate..” *J. Math.*, 58, 40–51.
- Kogl, M. e Gaul, L. (2000). “A boundary element method for transient piezoelectric analysis.” *Engr. Anal. with Boundary Elements*, 24, 591–598.
- KOMATSU, S. e Nagai, M. (1982). “Analytical combination of boundary element method and thin-walled segment method and its application to box girder bridges.” *In. BEM IV, Southampton, U.K.*
- Kramin, T. e Kramin, M. V. (1997). “The investigation of the thin-walled three-dimensional structures of complex shape using bem.” *In. BEM XIX, Merchetti et all. (eds.)*. 35–44.
- Lakshminarayana, H. V. e Murthy, S. (1984a). “A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, 591–623.

- Lakshminarayana, H. V. e Murthy, S. S. (1984b). “A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates.” *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 20, 591–623.
- Lekhnitskii, S. G. (1963). *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-Day., San Francisco.
- Lekhnitskii, S. G. (1968a). *Anisotropic plates*. Gordon and Breach-New York.
- Lekhnitskii, S. G. (1968b). *Anisotropic plates*. Gordon and Breach, New York.
- Liu, Y. (2000). “Analysis of shell-like by the boundary element method based on 3d elasticity: formulation and verification.” *Int. J. Num. Math. Engne*, 41, 541–588.
- Mendoça, V. A. (2002). “Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessuras consatntes: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno,” PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Noor, A. K. e Mathers, M. D. (1975). “Shear flexible finite element models of laminated composite plates and shells.” *Report no.*, NASA, Technical Report TND-8044, Houston/USA.
- Ohga, M., Shigematsu, T., e Takashi, H. (1991). “Boundary element-transfer matrix method for plated structure.” *Journal Eng. Mechanics*, 117, 2509–2526.
- Oliveira, B. F. e Creus, G. J. (2004). “An analytical numerical framework for the study of ageing in fibre reinforced polymer composites.” *Composite Structures*, 65, 443–457.
- Paiva, J. B. (1987). “Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas,” PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Paiva, W. P. (2005). “Análise de problemas estáticos e dinâmicos em placas anisotrópicas usando o método dos elementos de contorno,” PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.

- Palermo., L. (1989). “Análise de peças de seção delgada como associação de placas pelo método dos elementos de contorno,” PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., e Wrobel, L. C. (1992). *The dual reciprocity boundary element method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston.
- Pavan, R. C., Oliveira, B. F., e Creus, G. J. (2005). “Modelo computacional aplicado à vigas de concreto armado reforçadas por placas de materiais compósito.” *Engenharia estudo e pesquisa*, 7, 29–37.
- Pister, K. S. e Dong, S. B. (1959). “Elastic bending of layered plates.” *American Society of Civil Engineers*, Vol. 85. 1–10.
- Rajamohan, C. e Raamachandran, J. (2004). “Bending of anisotropic plates by charge simulation method.” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30, 1–12.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H., e Brebbia, C. A. (1998). “Hypersingular boundary element formulation for reissner plates.” *International Journal of Solids and Structures*, 35(18), 2229–2249.
- Reissner, E. e Stavsky, Y. (1961). “Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates.” *Journal of Applied Mechanics*, 28, 402–408.
- Rizzo, F. J. (1969). “An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics.” *Quarterly of Applied Mathematics*, 17, 201–217.
- Rizzo, F. J. e Shyppy, D. J. (1970). “A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies.” *J. of Composite Materials*, 4, 36–61.
- Sanches, L. C. F. (1998). “Uma resolução de placas com a teoria de mindlin através do método dos elementos de contorno. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas - Faculdade de Engenharia Civil.
- Sanches, L. C. F. (2002). “Análise de folhas poliédricas para estudo de lajes com forma de aço incorporada (steel deck) utilizando o método dos elementos de contorno,” PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas/São Paulo.

- Shi, G. e Bezine, G. (1988). “A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems.” *Journal of Composite Materials*, 22, 694–716.
- Silva, N. A. (1988). “Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas. Master’s thesis, Universidade de São Paulo, Departamento de Estruturas - Escola de Engenharia de São Carlos.
- Simões, R. (2001). “Um estudo de placas sob cargas dinâmicas estacionárias e com o efeito da não linearidade geométrica sob cargas estáticas usando o método dos elementos de contorno. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas - Faculdade de Engenharia Civil.
- Smith, C. B. (1953). “Some new types of orthotropic plates laminated of orthotropic material.” *Journal of Applied Mechanics*, 20, 286–288.
- Sollero, P. e Aliabadi, M. H. (1993). “Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method.” *Int. J. of Fracture*, 64, 269–284.
- Somigliana, C. (1885). “Sopra l’equilibrio di un corpo elastico isotropo.” *il Nuovo Cimento*, 17–20.
- Stavsky, Y. (1964). “On the general theory of heterogeneous anisotropic plates.” *Aeronautical Quarterly*, 15, 29–38.
- Stern, M. A. (1978). “A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems.” *International Journal Solids Structures*, 15, 769–782.
- Tanaka, M., Matsumoto, T., e Shiozaki, A. (1998). “Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures.” *Computers & Structures*, 66(6), 725–735.
- Telles, J. C. F. (1987). “A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 959–973.

- Timoshenko, S. P. e Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shell*. MacGraw-Hill, New York.
- Venturini, W. S. (1988). “Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e das aplicações em problemas de engenharia,” PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Vogel, S. M. e Rizzo, F. J. (1973). “An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems.” *J. of Elasticity*, 3, 203–216.
- Ween, F. V. (1982). “Application of the boundary integral equation method to reissner’s plate model.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 1–10.
- Wen, P. H., Aliabadi, M. H., e Young, A. (2000). “Plane stress and plate bending coupling in bem analysis of shallow shells.” *Int. J. for Numerical Methods in Engn.*, 48, 1107–1125.
- Wilson, R. B. e Cruse, T. A. (1978). “Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary integral equation stress analysis.” *Int. J. for Numerical Methods in Engn.*, 12, 1383–1397.