



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

MARCO DONISETE DE CAMPOS

Aplicações do Método das Diferenças Finitas de Alta Ordem na Solução de Problemas de Convecção-Difusão

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura**

21/2014

CAMPINAS
2014



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

MARCO DONISETE DE CAMPOS

Aplicações do Método das Diferenças Finitas de Alta Ordem na Solução de Problemas de Convecção-Difusão

Orientador: Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Concentração Térmica e Fluidos.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO MARCO DONISETE DE CAMPOS E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUIZ FELIPE MENDES DE MOURA.

Luiz Felipe Moura

.....
ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS

2014

iii

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C157a Campos, Marco Donisete de, 1976-
Aplicações do método das diferenças finitas de alta ordem na solução de problemas de convecção-difusão / Marco Donisete de Campos. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Luiz Felipe Mendes de Moura.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Diferenças finitas. 2. Métodos numéricos. I. Moura, Luiz Felipe Mendes de, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Applications of high-order finite difference method in the solution of the convection-diffusion equation

Palavras-chave em inglês:

Finite difference

Numerical methods

Área de concentração: Térmica e Fluidos

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Luiz Felipe Mendes de Moura [Orientador]

Carlos Teófilo Salinas Sedano

Rogério Gonçalves dos Santos

João Batista Aparecido

Vicente Luiz Scalon

Data de defesa: 24-02-2014

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

TESE DE DOUTORADO

Aplicações do Método das Diferenças Finitas de Alta Ordem na Solução de Problemas de Convecção-Difusão

Autor: Marco Donisete de Campos

Orientador: Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura

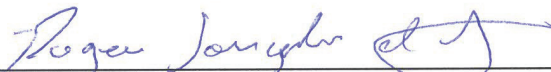
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



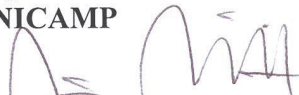
Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura, Presidente
DE/FEM/UNICAMP



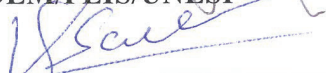
Prof. Dr. Carlos Teófilo Salinas Sedano
DE/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Rogério Gonçalves dos Santos
DE/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. João Batista Aparecido
DEM/FEIS/UNESP



Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon
DEM/FEB/UNESP

Campinas, 24 de fevereiro de 2014.

Para minha família, com carinho.

Agradecimentos

A Deus que *age em todas as coisas para o bem daqueles que O amam* (Rm 8, 28);

Ao Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura pela orientação, pela prudência e ricas sugestões;

Ao Prof. Dr. Estaner Claro Romão pelo incentivo e pela amizade. Também à sua esposa Antonia e às crianças pela hospitalidade e alegria nas viagens a Itabira;

À minha família: meus pais Antonio (*in memoriam*) e Darci pelo amor e exemplo; minhas irmãs, Márcia e Mércia, pelo incentivo e carinho e meu cunhado Helder pelo apoio;

Aos funcionários da FEM: Cleusa Lima (DE) pela constante ajuda e amizade; Marco Abreu e técnicos do SIFEM pelo apoio, Denise Villela e todos os funcionários da SPG pelo profissionalismo;

Aos amigos da Pós: Raquel Cunha, Edlene Cenedese, Laidy Hernandez-Mena, Ed Rocha, Bruno Brentan, Diego Jácome, André Panesi, Danilo Carvalho, Renato Neves, Ismael Marchi pela alegre convivência;

Aos amigos que, embora distantes fisicamente, sempre se fizeram presentes. São eles: André Abade, Anísia Marques, César Marques, Dalva Nunes, Daniel de Angeles, Edistiane Siqueira, Éllen Sousa, Eliane Suchara, Fabiana Ferreira, Jackeline Barbosa, Jaqueline Brito, Júlio Johner, Larissa Cavalheiro, Leandro Duarte, Márcia Rizzatti, Márcia Elias, Nara de Sousa, Nei Carlim, Odacir Neves, Paulo Borges, Solenir Ruffato e Veralice Almeida;

À Vívian Nogueira e a todos os amigos do *Coral Unicamp Zíper na Boca* pela amizade e tantos bons momentos juntos;

À Prof. Dra. Maria Cristina Cunha (IMECC), à Prof. Dra. Katia Tannous (FEQ) e ao Prof. Dr. Ulisses Antuniassi (FCA/UNESP) pela disponibilidade e atenção;

Aos amigos do Centro Inaciano de Juventude: Eduardo Roberto, Régis Sarto, Beguinho, Diego Henrique, Rogério Santos, Alex Jorge, Lucas Maurício, Davi Dorneles pelo crescimento coletivo, pela partilha e pela amizade;

À UFMT pelo afastamento;

À Fapemat pelo apoio financeiro.

*“Renova-te.
Renasce em ti mesmo.
Multiplica os teus olhos, para verem mais.
Multiplica os teus braços, para semeares tudo.
Destrói os olhos que tiverem visto.
Cria outros, para as visões novas.
Destrói os braços que tiverem semeado,
para se esquecerem de colher.
Sê sempre o mesmo.
Sempre outro.
Mas sempre alto.
Sempre longe.
E dentro de tudo.”*

(Cântico XIII, Cecília Meireles)

Resumo

Equações diferenciais parciais constituem uma classe importante de equações, presentes em quase todas as áreas da Engenharia e da Física. Um problema bastante frequente envolvendo as equações diferenciais parciais são as equações de convecção-difusão as quais, mesmo em casos bastante simples, são capazes de formular ou descrever fenômenos físicos importantes. Contudo, a obtenção da sua solução, especialmente nos casos não lineares, constitui uma tarefa difícil. Na maioria dos casos são possíveis soluções aproximadas. Devido a gama de aplicabilidade, alguns pesquisadores têm buscado sua solução usando várias técnicas numéricas.

O presente trabalho tem como objetivo aplicar o método de diferenças finitas de alta ordem na solução de problemas bi e tridimensionais convectivo-difusivos transientes.

No caso dos problemas lineares bidimensionais, as simulações numéricas foram realizadas para investigar o termo de dissipação viscosa na equação de transferência de calor bidimensional. No caso tridimensional foi dada ênfase na aplicação envolvendo troca de calor num canal retangular.

Para problemas não lineares, o método de Newton para a linearização do termo convectivo foi usado para resolver a equação de Burgers bi e tridimensionais.

Nas aplicações propostas, quando possível, as soluções analíticas disponíveis na revisão da literatura foram utilizadas para comparações com as soluções numéricas e validação do código, sendo a análise dos resultados feita a partir das normas L_2 e L_∞ . O esquema desenvolvido mostrou-se simples e computacionalmente rápido.

Abstract

Partial differential equations form an important class of equations, very often all areas of Engineering and Physics. A well-known problem involving partial differential equations are the convection-diffusion equations which, even in simple cases, describe important physical phenomena. However, obtaining its solution, especially in nonlinear cases is a difficult task. In most cases, approximate solutions are possible. Due to the range of applicability, some researchers have tried a solution by using numerical techniques.

The present study aims to apply the high-order Finite Difference Method to transient diffusive-convective problems in two and three dimensions.

Numerical simulations have been undertaken to investigate, in the linear problems, the viscous dissipation term in the two-dimensional heat transfer equation with emphasis, in the three-dimensional case, on the application involving heat exchange in a rectangular channel.

For nonlinear problems, the Newton's method for the linearization of the convective term was used for solving the two and three dimensional Burgers equation.

For the proposed applications, whenever possible, the analytical solutions found in the literature review were used to compare with the numerical solutions. The analysis of results was done from the L_2 and L_∞ norms. This scheme is simple and computationally fast.

Lista de Ilustrações

Figura 1: Configuração do domínio cartesiano.....	27
Figura 2: Perfis de temperatura para $U_{max} = 2$ m/s considerando $L_x = 4$ m; $L_y = 0,05$ m; $L_t = 2$ s; $\Delta x = L_x/200$; $\Delta y = L_y/40$ e $\Delta t = L_t/1000$	28
Figura 3: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $t = 0,1$ e considerando-se (a) $\nu = 10^{-1}$ com $\ L_2\ = 7,78E-04$ e (b) $\nu = 10^{-2}$ com $\ L_2\ = 6,12E-02$	30
Figura 4: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $t = 0,2$ e considerando-se (a) $\nu = 10^{-1}$ com $\ L_2\ = 4,56E-04$ e (b) $\nu = 10^{-2}$ com $\ L_2\ = 2,61E-02$	31
Figura 5: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $t = 0,1$ e considerando-se (a) $\nu = 0,05$ com $\ L_2\ = 3,74E-03$ e (b) $\nu = 10^{-2}$ com $\ L_2\ = 3,07E-02$	32
Figura 6: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $\Delta t = 0,2/100$ e $t = 0,2$ considerando-se (a) $\nu = 10^{-1}$ com $\ L_2\ = 1,27E-02$ e (b) $\nu = 0,05$ com $\ L_2\ = 1,27E-02$	32
Figura 7: Perfil da velocidade u para (a) $\nu = 10^{-1}$ e $t = 1$ e (b) $\nu = 10^{-1}$ e $t = 2$, com $\Delta x = \Delta y = 0,01$ e $\Delta t = 0,05$	33
Figura 8: Perfil da velocidade u para $\nu = 10^{-2}$ e $t = 1$ com $\Delta x = \Delta y = 0,01$ e (a) $\Delta t = 0,05$ e (b) $\Delta t = 0,001$	33
Figura 9: Soluções numéricas para u e v em $t = 0,01$ e $\nu = 1/1000$	37
Figura 10: Domínio computacional e condições de contorno.....	41
Figura 11: Resultados da temperatura média na seção de saída do canal em função do tempo.....	43
Figura 12: (a) Norma L_∞ do erro e (b) perfil de u , ambos no plano XY , considerando-se $z = 0,05$ e $t = 0,1$	45
Figura 13: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^0$	45
Figura 14: Perfil tridimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^0$	46
Figura 15: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^{-1}$	46
Figura 16: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^{-2}$	47
Figura 17: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando $\nu = 10^{-2}$	47
Figura 18: Perfil bidimensional de (a) u (b) v e (c) w no plano XY com $z = 0,5$	49
Figura 19: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,5$ considerando (a) $\nu = 10^0$ e (b) $\nu = 10^{-2}$	51
Figura 20: Perfil bidimensional de v no plano XY com $z = 0,5$ considerando (a) $\nu = 10^0$ e (b) $\nu = 10^{-2}$	51
Figura 21: Perfil bidimensional de w no plano XY com $z = 0,5$ considerando (a) $\nu = 10^0$ e (b) $\nu = 10^{-2}$	52

Figura 22: Domínio computacional e condições de contorno.....	52
Figura 23: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $h = L_x/40$, $\Delta t = L_t/100$ considerando (a) $\nu = 10^0$ e (b) $\nu = 10^{-1}$	53
Figura 24: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $h = L_x/40$, $\Delta t = L_t/100$ considerando (a) $\nu = 10^{-2}$ e (b) $\nu = 10^{-3}$	53
Figura 25: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $\nu = 10^{-4}$, $\Delta t = L_t/100$ considerando (a) $h = L_x/40$ e (b) $h = L_x/100$	54
Figura 26: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $h = L_x/200$, $t = 0,2$, considerando $\nu = 10^{-5}$	54
Figura 27: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $h = L_x/200$, $t = 0,4$, considerando $\nu = 10^{-5}$	55
Figura 28: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $h = L_x/200$, $t = 1$, considerando $\nu = 10^{-5}$	55
Figura 29: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $h = L_x/200$, $t = 5$, considerando $\nu = 10^{-5}$	55
Figura 30: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,05$, $h = L_x/200$, $t = 10$, considerando $\nu = 10^{-5}$	56

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Resultados da norma L_2 para $\Delta x = 0,5/200$; $\Delta y = 0,05/50$ e $\Delta t = 1/100$...	27
Tabela 2 – Resultados de D_m e D_{max} para He considerando $\Delta x = L_x/200$; $\Delta y = L_y/10$ e $\Delta t = t/1000$	28
Tabela 3 – Resultados para D_m and D_{max} para gases com $\Delta x = L_x/510$, $\Delta y = L_y/100$ e $\Delta t = t/1000$	29
Tabela 4 – Resultados para D_m and D_{max} para líquidos saturados com $\Delta x = L_x/510$, $\Delta y = L_y/100$ e $\Delta t = t/1000$	29
Tabela 5: Comparação da aplicação 1 para $t = 0,1$	34
Tabela 6: Comparação da aplicação 1 para $t = 0,4$	35
Tabela 7: Comparação dos erros absolutos para $u(x, y, t)$ em $\nu = 1/100$, $\Delta x = \Delta y = 0,05$	35
Tabela 8: Comparação dos erros absolutos para $v(x, y, t)$ em $\nu = 1/100$, $\Delta x = \Delta y = 0,05$	36
Tabela 9: Comparação da solução numérica com a solução exata de alguns pontos na malha para u e v em $t = 0,01$ e $\nu = 1/1000$	36
Tabela 10: Erro associado segundo a norma L_∞	38
Tabela 11: Tempo gasto para execução (em segundos).....	38
Tabela 12: Erro associado segundo a norma L_∞	38
Tabela 13: Tempo gasto para execução (em segundos).....	39
Tabela 14: Erro associado segundo a norma L_2 para $t = 1,25$, $\Delta t = \lambda h^2$, considerando $h = 0,025$ e $h = 0,05$ e diferentes valores de λ	39
Tabela 15: Tempo gasto para execução (em segundos).....	40
Tabela 16: Resultados da temperatura média (T_{med}) na seção de saída do canal em função da temperatura de resfriamento na entrada (T_{resf}), considerando $\Delta x = L_x/200$, $\Delta y = L_y/10$, $\Delta z = L_z/100$ e $\Delta t = t/500$	42
Tabela 17: Resultados da temperatura média (T_{med}) na seção de saída do canal em função da variação do comprimento do canal considerando $\Delta x = L_x/40$, $\Delta y = L_y/40$, $\Delta z = 0,01$ e $\Delta t = L_t/500$	42
Tabela 18: Resultados da temperatura média (T_{med}) na seção de saída do canal em função da variação da seção de entrada do canal considerando $\Delta x = \Delta y = 0,005$, $\Delta z = L_z/100$ e $\Delta t = L_t/500$	43
Tabela 19: Erro associado a norma L_∞ , tempo gasto para execução (em segundos) e taxa de convergência para $t = 0,1$	44
Tabela 20 - Análise de precisão numérica da solução de u , v e w segundo as normas L_∞ e L_2	48
Tabela 21 - Análise de precisão numérica da solução de u para $h = \Delta t = 0.005$ variando-se a viscosidade cinemática.....	50

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras latinas

c_p	calor específico
f	termo fonte
k	condutividade térmica
T	temperatura
t	tempo
L_i	função avaliada no ponto x_i do domínio
L_2	norma do erro médio no domínio
L_∞	norma do erro máximo no domínio
u	componente da velocidade na direção x
v	componente da velocidade na direção y
w	componente da velocidade na direção z
U_{max}	velocidade máxima
D_m	Diferença média da temperatura negligenciando a dissipação viscosa
D_{max}	Diferença máxima da temperatura considerando a dissipação viscosa

Letras gregas

α	difusividade térmica
μ	viscosidade dinâmica
κ	constante positiva arbitrária
ρ	massa específica
ν	viscosidade cinemática
ψ	grandeza que pode ser a temperatura ou campo de velocidades
Φ	dissipação viscosa

Abreviações

$N_{n\text{ost}}$	número total de nós da malha
DE	Departamento de Energia
DEM	Departamento de Engenharia Mecânica
Fapemat	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso
FCA	Faculdade de Ciências Agrônomicas
FEB	Faculdade de Engenharia de Bauru
FEIS	Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
FEQ	Faculdade de Engenharia Química
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
SIFEM	Seção de Tecnologia de Informação e Comunicação
SPG	Seção de Pós-Graduação
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
UNESP	Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho'

Sumário

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Aspectos Gerais.....	1
1.2 Contribuições desta tese.....	2
1.3 Revisão Bibliográfica.....	2
2 MODELO MATEMÁTICO E MÉTODO NUMÉRICO.....	9
2.1 Modelo Matemático.....	9
2.1.1 Introdução.....	9
2.1.2 Formulação Matemática.....	9
2.2 Método Numérico.....	9
2.2.1 O Método das Diferenças Finitas	9
2.2.2 Método das Diferenças Finitas de Alta Ordem	12
2.2.3 Técnica de Linearização.....	13
2.2.4 Método de Gauss-Seidel	13
2.2.5 Discretização Temporal e Espacial das Equações Governantes.....	14
3 RESULTADOS.....	26
3.1 Investigação Numérica do Termo de Dissipação Viscosa na Equação de Transferência de Calor Bidimensional.....	26
3.2 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica da Equação de Convecção-Difusão Não Linear Bidimensional.....	26
3.3 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica do Sistema Bidimensional de Equações de Convecção-Difusão Não Lineares.....	29
3.4 Investigação Numérica do Termo de Dissipação Viscosa na Equação de Transferência de Calor Tridimensional.....	34
3.5 Convecção-Difusão Linear Transiente Tridimensional.....	37
3.6 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica da Equação de Convecção-Difusão Não Linear Tridimensional.....	43
3.7 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica do Sistema Tridimensional de Equações de Convecção-Difusão Não Lineares.....	48
CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	57
REFERÊNCIAS.....	59

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado um histórico acerca das equações diferenciais parciais e uma breve revisão bibliográfica sobre técnicas numéricas na obtenção da solução dessas equações, com ênfase no método das diferenças finitas, bem como as contribuições deste trabalho.

1.1 Aspectos Gerais

Equações diferenciais parciais estão presentes em quase todas as áreas da Engenharia e da Física. Contudo, a obtenção da sua solução, especialmente nos casos não lineares, constitui uma tarefa difícil. Na maioria dos casos são possíveis soluções aproximadas. Devido a gama de aplicabilidade, alguns pesquisadores têm buscado sua solução usando várias técnicas numéricas como o método de elementos finitos (ZIENKIEWICZ et al., 2013), o método dos volumes finitos (MALALASEKERA e VERSTEEG, 2007), o método *shooting* (ROBERTS e SHIPMAN, 1972), o método modificado da decomposição de domínio (WAZWAZ, 2001), a transformação de Cole-Hopf (FLETCHER, 1983), o método de colocação com funções de base radial (ISLAM et al., 2012), o método de transformação diferencial (LIU e HOU, 2011), o método de quadratura diferencial (MITTAL e JIWARI, 2009), o método da decomposição de Adomian (ZHU et al. 2010) e o método das diferenças finitas (THOMAS, 1995; MORTON e MAYERS, 2005; FORSYTHE e WASOW, 2013), o qual será utilizado neste trabalho.

As aproximações das derivadas usando diferenças finitas representam um dos mais simples e antigos métodos para resolver equações diferenciais já conhecido por Euler (1707-1783) para problemas unidimensionais no espaço e provavelmente estendido para duas dimensões por Runge (1856-1927) em 1908. O advento dessa técnica ocorreu no início da década de 1950 estimulado pelo surgimento dos computadores. Ao longo das últimas décadas, muitos avanços têm sido obtidos em relação à sua precisão, estabilidade e convergência.

Os métodos das diferenças finitas são relativamente simples para desenvolver aproximações numéricas para problemas de valor de contorno e são mais suscetíveis aos

erros de truncamento da análise em séries de Taylor, propriedade essa explorada neste trabalho para desenvolver aproximações de alta ordem.

O mais popular dos esquemas de diferenças para equações diferenciais parciais de segunda ordem é o *método das diferenças centrais*, no qual a primeira e a segunda derivadas parciais em cada ponto da malha são representadas pelas combinações lineares de três valores da função em pontos diretamente adjacentes ao ponto da malha na direção das coordenadas correspondentes.

1.2 Contribuições desta tese

O objetivo principal deste trabalho é a aplicação do método de diferenças finitas de alta ordem à solução numérica de problemas bi e tridimensionais de convecção-difusão.

No caso de problemas lineares bidimensionais, uma investigação numérica do termo de dissipação viscosa na equação de transferência de calor será realizada. Desta forma é possível determinar as situações nas quais o termo de dissipação viscosa pode ser negligenciado na equação de transferência de calor. Para os problemas lineares tridimensionais, será enfatizada uma aplicação de resfriamento num canal retangular.

Agora, no caso de problemas não lineares, a fim de linearizar o termo convectivo, será utilizada uma técnica baseada no método de Newton a qual é iterativa em cada intervalo de tempo. Para os problemas bidimensionais, a solução numérica será comparada com a solução analítica para a validação do código, além de uma outra aplicação sem solução analítica. Já no caso tridimensional foram feitas comparações com soluções analíticas disponíveis na literatura visando validar o programa computacional. Os estudos foram realizados para uma aplicação de escoamento num canal retangular.

1.3 Revisão Bibliográfica

Vários esquemas numéricos baseados em diferenças finitas têm sido desenvolvidos para a solução de equações diferenciais parciais, merecendo destaque, de acordo com Chung (2002), na solução de equações elípticas, os métodos iterativos de Jacobi, de Gauss-Siedel, o das relaxações sucessivas (*Point Successive Over-Relaxation Method*) e o Método Implícito da Direção Alternada (*Alternating Direction Implicit Method*), além do Método Direto com Eliminação de Gauss; para as equações parabólicas os métodos explícitos centrais com avanço no tempo (*Forward-*

Time/Central-Space Method), o de Richardson e o de Dufort-Frankel, além dos métodos implícitos de Crank-Nicolson, o de Laasonen, o método β , bem como os de fatoração aproximada, de passo fracionado e o método direto com matriz tridiagonal. Finalmente, para as equações hiperbólicas, tem-se os métodos explícitos, como o de Euler progressivo no tempo e no espaço (*Euler's Forward Time and Forward Space*), o de Euler progressivo no tempo e central no espaço (*Euler's Forward Time and Central Space*), o de Euler progressivo no tempo e atrasado no espaço (*Euler's Forward Time and Backward Space*), além do de Lax, o do 'pulo do sapo' (*Midpoint Leapfrog Method*) e o de Lax-Wendroff, bem como os implícitos.

Baseado nesses métodos e seus derivados muitos autores têm desenvolvido pesquisas na busca da solução numérica de equações diferenciais parciais e suas aplicações. A seguir apresentamos um resumo destes avanços nas últimas duas décadas.

Radwan (1999) resolveu as equações bidimensionais transientes de Burgers, que são uma simplificação das equações de Navier-Stokes, usando um esquema de quarta ordem baseado no método implícito da direção alternada e também um esquema de quarta ordem de DuFort Frankel. Foram testadas a precisão e a eficiência computacional dos mesmos. O esquema implícito da direção alternada mostrou-se estável, eficiente e com melhor resolução para o cálculo do gradiente em comparação com o outro esquema.

Já Dai e Nassar (2002) desenvolveram uma variante incondicionalmente estável do método implícito da direção alternada padrão para a solução de equações parabólicas bidimensionais. As derivadas de segunda ordem em relação ao espaço foram discretizadas usando diferenças finitas compactas de alta ordem. Foi feita uma generalização para o caso tridimensional e vários exemplos numéricos foram apresentados para a validação do método desenvolvido.

No trabalho de Karaa e Zhang (2004) foi desenvolvido uma variante do método implícito da direção alternada de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo para problemas convectivo-difusivos bidimensionais. Tal método permite usar várias vezes o algoritmo tridiagonal unidimensional com uma considerável economia do tempo computacional. Por meio de uma análise de Fourier discreta provou-se que o método é incondicionalmente estável para problemas bidimensionais. Experimentos numéricos foram realizados para testar a sua alta precisão e compará-lo com o método implícito da direção alternada padrão de segunda ordem de Peaceman-Rachford (1959).

Dehghan (2003) utilizou uma técnica do passo fracionado, eficiente e de fácil implementação computacional, para o desenvolvimento de um método implícito da direção alternada para a solução da equação de difusão tridimensional. O método apresentou uma boa precisão. Numa comparação do tempo computacional utilizado com um esquema implícito de diferenças finitas para o mesmo problema, ficou demonstrado que a técnica implícita da direção alternada é computacionalmente superior, além de obtidos bons resultados numéricos.

Li et al. (2006) elaboraram um método implícito da direção alternada de sexta ordem aplicado às equações parabólicas bi e tridimensionais. Demonstraram a estabilidade do método usando problemas de difusão linear com condições de contorno periódicas. Foram apresentados quatro exemplos numéricos para a validação do esquema.

You (2006) desenvolveu um método implícito da direção alternada de alta ordem para a solução de equações de convecção-difusão transientes. As aproximações de Padé para as derivadas espaciais levaram a uma precisão de quarta ordem com propriedades de alta resolução no espaço, enquanto que uma precisão de segunda ordem é mantida no tempo. O procedimento de solução consistiu num número de multiplicações e inversões das matrizes tridiagonais, o que é computacionalmente econômico. O método apresentado é incondicionalmente estável e produziu melhores soluções que o método implícito da direção alternada padrão de segunda ordem.

No trabalho de Tian e Ge (2007) foi construído um método implícito da direção alternada exponencial de alta ordem para a solução de problemas de difusão-convecção bidimensionais transientes usando o método de Crank-Nicolson para a discretização temporal e um esquema de diferenças finitas exponencial de quarta ordem para a discretização espacial. Através da análise de Fourier foi demonstrado que o método é incondicionalmente estável. A robustez do método foi demonstrada através da aplicação em problemas uni e bidimensionais. Os resultados computacionais comprovaram que o método implícito da direção alternada proposto possui eficiência e robustez, além de não requerer malhas refinadas para resolver adequadamente os gradientes de solução nos problemas de convecção dominante.

Ma et al. (2009) construíram um método implícito da direção alternada usando diferenças finitas com estabilidade e convergência comprovadas por análise de Fourier. Para validação do esquema, foram calculadas as soluções aproximadas de problemas tridimensionais parabólicos.

Liao e Sun (2010) realizaram uma análise teórica para estimar o erro máximo dos métodos implícito da direção alternada padrão e compacto para problemas parabólicos bidimensionais. Mostraram que o método implícito da direção alternada tem solução incondicionalmente convergente com ordem de convergência quadrática. Considerando, ainda, uma expansão assintótica da diferença na solução e, usando extrapolação de Richardson, obtiveram uma aproximação de quarta ordem no tempo e no espaço.

Qin (2010) desenvolveu um novo esquema implícito da direção alternada para a solução de equações parabólicas tridimensionais com condições de contorno não homogêneas e verificaram a estabilidade do método pela análise de Fourier. O esquema proposto é de quarta ordem no espaço, de segunda ordem no tempo e permitiu uma considerável economia no custo computacional. Exemplos numéricos foram apresentados para testar a sua alta precisão e demonstrar a sua superioridade em termos de precisão e custos computacionais em relação a outros esquemas.

Tian (2011) desenvolveu um método implícito de direção alternada e alta ordem para a solução numérica de problemas de convecção-difusão bidimensionais. O método é de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço. Foi mostrado, através da análise de Fourier, que o método é incondicionalmente estável. Três exemplos numéricos foram apresentados para a validação do método e, embora o método tenha sido proposto para problemas de convecção-difusão, pode também ser estendido para casos de difusão pura ou convecção pura.

Fernandes e Fairweather (2012) desenvolveram um método implícito da direção alternada para a solução aproximada de equações bidimensionais de reação-difusão baseado na extrapolação de Crank-Nicolson, chamado *orthogonal spline collocation method*, já explorado em trabalhos anteriores dos mesmos autores (BIALECKI E FERNANDES, 2009; FERNANDES et al., 2011). Sua eficácia foi demonstrada para a solução de exemplos conhecidos, como os modelos de Brusselator, Gray-Scott, Gierer-Meinhardt e Schnakenberg, e as comparações foram feitas com outras técnicas disponíveis na literatura.

Uma aplicação relevante nas pesquisas envolvendo a solução numérica de equações diferenciais parciais é a investigação acerca do termo de dissipação viscosa uma vez que muitos trabalhos na literatura desconsideram este efeito. No entanto, a avaliação da sensibilidade da solução quanto à energia gerada em escoamentos viscosos tem sido bastante recorrente em recentes pesquisas, uma vez que a dissipação viscosa

pode ter um papel dominante em escoamentos à alta velocidade, especialmente quando a viscosidade do fluido é alta. Isso se manifesta como um aumento significativo na temperatura do fluido devido à conversão da energia cinética do fluido em energia térmica (ÇENGEL, 2006). Um trabalho pioneiro sobre os efeitos da dissipação viscosa em fluidos newtonianos foi Brinkman (1951), no qual a distribuição de temperatura na região de entrada de um tubo circular foi examinada considerando uma temperatura uniforme na parede e condições de contorno adiabáticas. O trabalho numérico de Cheng e Wu (1976) investigou a influência da dissipação viscosa para um fluxo de um fluido newtoniano num canal de placas paralelas. Já Pinho e Oliveira (2000) analisaram os efeitos de dissipação viscosa sobre convecção laminar forçada através de um tubo e canal considerando um escoamento com o fluido Phan-Thien-Tanner e concluíram que a dissipação viscosa aumentou a elasticidade do fluido. Estudos mais recentes têm abordado o assunto analisando diferentes configurações de domínio, como Sheela-Francisca e Tso (2009) que analisaram os efeitos de dissipação viscosa sobre transferência de calor entre duas placas paralelas fixadas com condições de contorno com fluxo de calor constante. Dehkordi e Memari (2010) realizaram um estudo numérico para analisar, dentre outros aspectos, a influência da dissipação viscosa no número de Nusselt local, considerando a região de entrada num escoamento completamente desenvolvido. Já Mondal e Mukherjee (2012) avaliaram analiticamente o valor limite do número de Nusselt, incluindo o efeito da dissipação viscosa na transferência de calor num escoamento laminar entre placas planas paralelas infinitas. Neste, a placa do fundo foi fixada e a do topo movimentada-se no sentido do eixo com velocidade constante. Observaram uma forte influência da dissipação viscosa na análise do fluxo de calor. Recentemente, em Ragueb e Mansouri (2013) foi analisado os efeitos da dissipação viscosa sobre um escoamento de fluido não-newtoniano no interior de duto elíptico e os resultados obtidos mostraram uma boa concordância com os encontrados na literatura para um escoamento em seções transversais circulares e elípticas, sem efeitos de dissipação viscosa.

No estágio atual, o método de diferenças finitas de alta ordem tem sido uma ferramenta muito utilizada por vários autores para resolver a equação de convecção-difusão não linear. Nesse sentido, Bahadır (2003) propôs um método totalmente implícito de diferenças finitas para resolver as equações de Burgers bidimensionais, cuja exatidão foi analisada por comparação com outros resultados analíticos e numéricos, apresentando boa *performance*. Já Radwan (2005) resolveu as equações de Burgers

transientes bidimensionais usando o esquema compacto de dois pontos de quarta ordem e o esquema de quarta ordem de Du Fort Frankel, os quais mostraram-se eficientes e estáveis quando comparados com outros esquema de mesma ordem. Young et al. (2008) demonstraram a capacidade e simplicidade de um método Euleriano-Lagrangeano para as soluções das equações não-lineares transientes de Burgers e compararam os resultados numéricos com outras soluções, analíticas e numéricas. Também Ma e Ge (2010) estenderam o método de diferenças finitas proposto por Sun e Zhang (2004) para a solução da equação uni e bidimensionais de convecção-difusão para o caso tridimensional. O método é uma variante do método implícito da direção alternada baseado em diferenças finitas de quarta ordem e também na técnica de extrapolação de Richardson. Experimentos numéricos foram apresentados, comprovando a validade do mesmo, em comparação com resultados obtidos através de outros esquemas disponíveis na literatura.

Liao (2012) desenvolveu um método das diferenças finitas de quarta ordem para a solução da equação de difusão-convecção transiente. Inicialmente, transformou a equação de convecção-difusão numa equação de reação-difusão, a qual foi resolvida por um método de alta ordem compacto. Esse novo método é incondicionalmente estável e tem precisão de quarta ordem no espaço e no tempo. Dois exemplos numéricos foram resolvidos demonstrando a eficiência e precisão do método.

Romão et al. (2012) propuseram quatro formulações de alta ordem para resolver a equação de convecção-difusão-reação com coeficientes variáveis e as condições de contorno de Robin. Foram aplicadas em duas situações: um caso convectivo-difusivo no qual o coeficiente de difusão é variável e um outro também convectivo-difusivo com coeficientes variáveis e condição de contorno de Robin.

Recentemente, Cui (2013) utilizou um método de diferenças finitas compacto de alta ordem com a técnica do passo fracionado para resolver problemas de difusão transiente multidimensional usando o esquema de diferenças finitas compacto, obtendo bons resultados.

Ge et al. (2013) desenvolveu um método exponencial compacto implícito da direção alternada de alta ordem para a solução da equação de convecção difusão tridimensional. O método é de quarta ordem no espaço e de segunda ordem no tempo e incondicionalmente estável. Três problemas numéricos foram resolvidos a fim de demonstrar a precisão e a eficiência em relação ao esquema clássico de implícito da

direção alternada de Douglas-Gunn e ao esquema implícito da direção alternada de alta ordem proposto por Karaa (2006).

Nesse contexto, neste trabalho o método das diferenças finitas de alta ordem foi implementado para a solução de problemas bi e tridimensionais convectivo-difusivos transientes. No caso dos problemas lineares bidimensionais foi investigado o termo de dissipação viscosa na equação de transferência de calor e, no caso tridimensional foi feita uma aplicação envolvendo troca de calor num canal retangular. Para problemas não lineares, o método de Newton para a linearização do termo convectivo foi usado para resolver a equação de Burgers bi e tridimensionais. A análise dos resultados feita a partir das normas L_2 e L_∞ , sendo que o esquema desenvolvido mostrou-se simples e computacionalmente rápido.

2 MODELO MATEMÁTICO E MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo serão abordadas as ideias básicas do Método das Diferenças Finitas bem como sua extensão como Método de Alta Ordem. Também a técnica de linearização e o método de Gauss-Seidel, utilizado para a solução dos sistemas lineares envolvidos nesse trabalho.

2.1 Modelo Matemático

2.1.1 Introdução

Um problema bastante frequente envolvendo as equações diferenciais parciais são as equações de convecção-difusão as quais, mesmo em casos bastante simples, são capazes de formular ou descrever fenômenos físicos importantes como a modelagem da convecção-difusão envolvendo massa, energia, vorticidade e calor (MORTON, 1996; PEACEMAN, 1977; LOMAX et al., 2004, RASHIDI e ERFANI, 2009), a modelagem de ondas acústicas e os problemas de dinâmica (MOSLEM et al., 2008; Basto et al., 2009), bem como a difusão de nêutrons (GUSTAFSSON, 2008).

2.1.2 Formulação Matemática

A equação tridimensional do transporte para escoamento de fluidos com propriedades constantes em coordenadas cartesianas é dada por

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} - \kappa \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = f \quad (1)$$

sendo t o tempo, $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$ e $w(x,y,z,t)$ as componentes dos campos das velocidades, κ uma constante positiva arbitrária, ψ uma grandeza que pode ser a temperatura ou campo de velocidades e f o termo fonte.

2.2 Método Numérico

2.2.1 O Método das Diferenças Finitas (ANDERSON, 1996; CHUNG, 2002)

A solução de uma equação diferencial parcial num domínio implica na obtenção dos valores para a variável dependente em cada ponto dele. Computacionalmente,

somente pode-se lidar com uma região contínua se determinarmos uma fórmula analítica para a solução do problema. Em se tratando de técnicas numéricas de solução, não é possível tratar o domínio como um contínuo, uma vez que o método numérico obtém a solução em alguns pontos do domínio. Nada impede, no entanto, de se escolher alguns pontos dentro do domínio e somente neles calcular a solução do problema, processo esse conhecido como *discretização*.

Para que seja possível o tratamento numérico das equações diferenciais parciais pelo método das diferenças finitas faz-se necessário discretizá-las, ou seja, representá-las por expressões algébricas em termos dos pontos da malha. Tais expressões é o que se denomina *aproximações por diferenças finitas*. O conjunto final desse processo é uma equação algébrica, denominada *equação de diferenças finitas*, escrita para cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema. Resolvendo-a, determina-se a solução aproximada do problema.

A ideia básica dos *métodos das diferenças finitas* consiste em aproximar o operador diferencial substituindo as derivadas da equação usando quocientes diferenciais. O domínio é dividido no espaço e no tempo e as aproximações da solução são calculadas nos pontos espaciais ou temporais. O erro entre a solução numérica e a solução analítica sem arredondamentos é chamado *erro de discretização* ou *truncamento* e reflete o fato que apenas uma parte finita de uma série de Taylor foi utilizada na aproximação. Tal erro pode ser reduzido à medida que se aumenta a ordem de discretização.

As aproximações de diferenças finitas se baseiam na expansão em série de Taylor de uma função f . Supondo f contínua no intervalo $[a,b]$, derivável até ordem n , pelo teorema de Taylor, qualquer que seja $x \in [a,b]$, tem-se

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

Se $f(x + \Delta x)$ for expandida numa série de Taylor em torno de $f(x)$, tem-se:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \dots \quad (3)$$

e, substituindo a Eq. (3) na Eq. (2):

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \dots = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + O(\Delta x^n) \quad (4)$$

a qual é uma aproximação de primeira ordem. O símbolo $O(\Delta x^n)$ representa a *ordem n do termo* Δx que foi truncado.

Escrevendo a expansão de f em série de Taylor para os nós $i+1$ e $i-1$, com Δx constante:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_i + \frac{\Delta x^5}{5!} \left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \right)_i + \dots \quad (5a)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_i - \frac{\Delta x^5}{5!} \left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \right)_i + \dots \quad (5b)$$

Rearrajando a Eq. (5a), obtém-se a *diferença progressiva*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (6)$$

e, de maneira similar, a *diferença atrasada*:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (7)$$

Já a *diferença central* é obtida subtraindo a Eq. (5b) da Eq. (5a):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (8)$$

Note que o erro de truncamento para as diferenças progressivas e atrasadas são de primeira ordem, enquanto que a diferença central produz um erro de truncamento de segunda ordem.

Agora, adicionando as Eq. (5a) à Eq. (5b), obtêm-se a expressão para a *diferença central para a segunda derivada de f* :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (9)$$

Para as diferenças progressiva e atrasada, têm-se as seguintes expressões com uma precisão de $O(\Delta x^2)$ para a primeira derivada de f :

$$\text{Progressiva: } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (10a)$$

$$\text{Atrasada: } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (10b)$$

Além disso, para a diferença central de $O(\Delta x^4)$, têm-se as seguintes expressões:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (11a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4) \quad (11b)$$

Para um aprofundamento do tema, pode-se recorrer à vasta bibliografia especializada, além dos já citados, vale destacar Mitchell e Griffiths (1987), Thomas (1995), Strikwerda (2004), Morton e Mayers (2005) e LeVeque (2007).

2.2.2 Método das Diferenças Finitas de Alta Ordem (FORTUNA, 2000)

Métodos com precisão maior que $O(\Delta x^2)$ são chamados *métodos de alta ordem*. O número de pontos necessários aumenta com a ordem da aproximação e da derivada a serem discretizadas. As fórmulas que utilizam grande número de pontos podem apresentar algumas dificuldades pois, em geral, quanto mais pontos forem envolvidos numa aproximação, mais sujeito a instabilidades estará o método, além do aumento do custo computacional. Também, na proximidade do contorno, alguns pontos da fórmula podem ficar fora do domínio. Embora algumas vezes seja possível, por meio de considerações físicas ou das condições de contorno, determinar o valor nos pontos do contorno, no caso geral, utiliza-se uma outra discretização nesses pontos.

Vale ressaltar também que a expansão em série de Taylor de uma função só é representativa quando essa função é suficientemente contínua para que os sucessivos termos da série tenham valores decrescentes. Portanto, se as soluções da equação diferencial parcial apresentarem descontinuidades, o que é muito comum no caso das equações hiperbólicas, não há garantias que as derivadas presentes na série de Taylor sejam limitadas ou mesmo que diminuam de magnitude. Nesses casos, a ordem formal da aproximação de diferenças finitas, i.e, dizer que uma dada aproximação é de $O(\Delta x)$ ou $O(\Delta x^2)$, perde seu significado. Isso se deve ao fato de que, quando aproximamos a primeira derivada da função usando diferenças finitas estamos considerando que a derivada de segunda ordem, presente no erro de truncamento local e representado pela notação $O(\Delta x)$, é pequena o suficiente para ser desprezada. Quando existem descontinuidades na solução numérica, essa hipótese não é mais válida.

De acordo com Fletcher (2008), simulações numéricas sugerem que, quando a malha é menos refinada, as fórmulas de alta ordem não necessariamente fornecem aproximações melhores que as fórmulas de ordens menores. Em malhas mais refinadas, no entanto, o cenário muda, com as fórmulas de alta ordem se destacando pela precisão e pelo maior custo computacional. A fim de controlar a precisão da solução numérica é

feito o ajuste dos valores do passo espacial e temporal dentro do razoável, até que se consiga uma boa relação entre o custo computacional e a precisão dos resultados.

2.2.3 Técnica de Linearização

A solução numérica da equação de convecção-difusão usando o método das diferenças centrais apresenta algumas dificuldades sendo a primeira delas devido à presença do termo convectivo, o qual é não-linear e não-simétrico. Na literatura, vários autores têm apresentado procedimentos de linearização para o termo convectivo, valendo destacar Galpin e Raithby (1986), Ozisik (1994), DeBlois (1997), Smith (1998) e Sheu e Lin (2004, 2005).

Neste trabalho utilizamos a técnica de linearização proposta por Jiang e Chang (1990) e Jiang (1998) segundo a qual, para um passo de tempo suficientemente pequeno, os termos convectivos da equação de convecção-difusão podem ser linearizados expandindo em série de Taylor a função $F = f \frac{\partial f}{\partial x}$, a qual, por simplicidade de notação, será denotada por $F = st$. Daí:

$$\begin{aligned} s^{n+1}t^{n+1} &\approx s^n t^n + \left[\frac{\partial}{\partial s}(s^n t^n) \right] (s^{n+1} - s^n) + \left[\frac{\partial}{\partial t}(s^n t^n) \right] (t^{n+1} - t^n) \\ &\Rightarrow s^{n+1}t^{n+1} \approx s^n t^n + s^{n+1}t^n - s^n t^n + s^n t^{n+1} - s^n t^n \\ &\Rightarrow s^{n+1}t^{n+1} \approx s^{n+1}t^n + s^n t^{n+1} - s^n t^n . \end{aligned}$$

Fazendo a substituição, vem:

$$f^{n+1} \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x} \approx f^n \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x} + f^{n+1} \frac{\partial f^n}{\partial x} - f^n \frac{\partial f^n}{\partial x} \quad (12)$$

Tal método é usualmente conhecido como método de Newton pois propicia uma convergência quadrática (DENNIS E SCHMABEL, 1983). Note que esta técnica não requer uma linearização iterativa em cada intervalo de tempo, tornando mais rápido o cálculo de f .

2.2.4 Método de Gauss-Seidel

Gauss apresentou seu método iterativo para resolver sistemas de equações provenientes do Método dos Mínimos Quadrados. Seidel foi aluno de Jacobi e publicou, em 1874, a versão hoje usada. O método de Gauss-Seidel pode ser considerado como uma modificação do método de Jacobi.

Considerando, portanto, um sistema de equações lineares com m equações e m incógnitas escrito usualmente da seguinte forma (CUNHA, 2000; SPERANDIO et al., 2003):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_m = b_m \end{cases} \quad (13)$$

sendo a_{ij} , b_i , $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Supondo $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, pode-se reescrever o sistema anterior da seguinte forma:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

Sendo $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$ uma tentativa inicial para a solução do sistema de equações lineares, para $k = 0, 1, 2, \dots$, calcula-se a sequência de aproximações para a solução X , $\{X^{(k+1)}\} = [x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}]^T$, $k = 0, 1, 2, \dots$, por meio de

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq 0 \quad (15)$$

até que o seguinte teste de parada seja satisfeito:

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \varepsilon_2 \quad (16)$$

sendo ε_1 e ε_2 as tolerâncias.

Neste trabalho, utiliza-se como tentativa inicial o valor da variável no passo anterior do tempo, acelerando, assim, o processo de convergência.

2.2.5 Discretização Temporal e Espacial da Equação Governante

Na Eq. (1), considerando $\psi = T$, $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$ e $f = \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}$ tem-se a equação da

energia tridimensional em coordenadas cartesianas, dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{k_x}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{k_y}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{k_z}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\mu\Phi}{\rho c_p} = 0 \quad (17)$$

sendo μ a viscosidade dinâmica, sendo k_x , k_y e k_z a condutividade térmica nas direções x , y e z , respectivamente, ρ a massa específica, c_p o calor específico e Φ a dissipação viscosa, dada por

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2. \quad (18)$$

Para a discretização temporal, será utilizado o método de aproximação da família α no qual uma média ponderada da derivada da variável dependente ψ em relação ao tempo é aproximada por dois passos consecutivos no tempo através de uma interpolação linear dos valores da variável para os dois passos, i.e,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\{\tilde{\psi}\}^{n+1} - \{\tilde{\psi}\}^n}{\Delta t^{n+1}} = (1-\theta) \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}^n + \theta \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}^{n+1} \quad (19)$$

sendo $0 < \theta \leq 1$, $t \in [t^n, t^{n+1}]$, $n = 1, 2, \dots, mt$, no qual mt é o número de passos de tempo. Ainda, $\{ \}^n$ indica o valor das variáveis no passo n e $\Delta t^{n+1} = t^{n+1} - t^n$ é o $(n+1)$ -ésimo passo de tempo. Para diferentes valores de θ são definidos métodos de discretização temporais bem conhecidos. Neste trabalho será adotado o método de Crank-Nicolson, com $\theta = 0,5$ (REDDY, 2005).

$$\text{Rearranjando a Eq. (1), fazendo } \alpha_x = \frac{k_x}{\rho c_p}, \alpha_y = \frac{k_y}{\rho c_p} \text{ e } \alpha_z = \frac{k_z}{\rho c_p} \text{ sendo } \alpha_x, \alpha_y$$

e α_z a difusividade térmica nas direções x , y e z , respectivamente e aplicando o método de Crank-Nicolson para a discretização no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^n}{\Delta t} \right) &= \frac{1}{2} \left(\alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} - w \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ijk}^{n+1} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} - w \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ijk}^n + \frac{\mu \Phi_{ijk}}{\rho c_p} \end{aligned}$$

o que leva a

$$-\frac{1}{2} \left(\alpha_x \frac{\partial^2 T_{ijk}^{n+1}}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T_{ijk}^{n+1}}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T_{ijk}^{n+1}}{\partial z^2} - u \frac{\partial T_{ijk}^{n+1}}{\partial x} + v \frac{\partial T_{ijk}^{n+1}}{\partial y} + w \frac{\partial T_{ijk}^{n+1}}{\partial z} \right) + \frac{T_{ijk}^{n+1}}{\Delta t} = G_{ijk}^n \quad (20)$$

sendo

$$G_{ijk}^n = \frac{1}{2} \left(\alpha_x \frac{\partial^2 T_{ijk}^n}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T_{ijk}^n}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T_{ijk}^n}{\partial z^2} - u \frac{\partial T_{ijk}^n}{\partial x} - v \frac{\partial T_{ijk}^n}{\partial y} - w \frac{\partial T_{ijk}^n}{\partial z} \right) + \frac{\mu \Phi_{ijk}}{\rho c_p} + \frac{T_{ijk}^n}{\Delta t} \quad (21).$$

Para a discretização espacial da Eq. (20) será adotado o seguinte critério:

- Para os nós com distância Δx e Δy do contorno utiliza-se o método das diferenças centrais com $O(\Delta x^2)$:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\alpha_z}{2\Delta z^2} - \frac{w}{4\Delta z} \right) T_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(-\frac{\alpha_y}{2\Delta y^2} - \frac{v}{4\Delta y} \right) T_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(-\frac{\alpha_x}{2\Delta x^2} - \frac{u}{4\Delta x} \right) T_{i-1,j,k}^{n+1} \\ & + \left(\frac{\alpha_x}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_y}{\Delta y^2} + \frac{\alpha_z}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) T_{ijk}^{n+1} + \left(-\frac{\alpha_x}{2\Delta x^2} + \frac{u}{4\Delta x} \right) T_{i+1,j,k}^{n+1} \\ & + \left(-\frac{\alpha_y}{2\Delta y^2} + \frac{v}{4\Delta y} \right) T_{i,j+1,k}^{n+1} + \left(-\frac{\alpha_z}{2\Delta z^2} + \frac{w}{4\Delta z} \right) T_{i,j,k+1}^{n+1} = G_{ijk}^n \end{aligned} \quad (22)$$

sendo

$$\begin{aligned} G_{ijk}^n &= \frac{\alpha_x}{2} \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{ijk}^n + T_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} \right) + \frac{\alpha_y}{2} \left(\frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{ijk}^n + T_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} \right) + \frac{\alpha_z}{2} \left(\frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{ijk}^n + T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \\ & - \frac{\mu\Phi_{ijk}}{\rho c_p} - \frac{u}{2} \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{v}{2} \left(\frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \right) - \frac{w}{2} \left(\frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{\Delta t} T_{ijk}^n. \end{aligned} \quad (23)$$

- Para os demais utiliza-se o método das diferenças centrais com $O(\Delta x^4)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_x}{24\Delta x^2} + \frac{w}{24\Delta z} \right) T_{i,j,k-2}^{n+1} + \left(-\frac{2\alpha_z}{3\Delta z^2} - \frac{2w}{3\Delta z} \right) T_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(\frac{\alpha_y}{24\Delta y^2} + \frac{v}{24\Delta y} \right) T_{i,j-2,k}^{n+1} \\ & + \left(-\frac{2\alpha_y}{3\Delta y^2} - \frac{v}{3\Delta y} \right) T_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(\frac{\alpha_x}{24\Delta x^2} + \frac{u}{24\Delta x} \right) T_{i-2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2\alpha_x}{3\Delta x^2} - \frac{u}{3\Delta x} \right) T_{i-1,j,k}^{n+1} \\ & + \left(\frac{1,25\alpha_x}{\Delta x^2} + \frac{1,25\alpha_y}{\Delta y^2} + \frac{1,25\alpha_z}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) T_{ijk}^{n+1} + \left(-\frac{2\alpha_x}{3\Delta x^2} + \frac{u}{3\Delta x} \right) T_{i+1,j,k}^{n+1} \\ & + \left(\frac{\alpha_x}{24\Delta x^2} - \frac{u}{24\Delta x} \right) T_{i+2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2\alpha_y}{3\Delta y^2} + \frac{v}{3\Delta y} \right) T_{i,j+1,k}^{n+1} + \left(\frac{\alpha_y}{24\Delta y^2} - \frac{v}{24\Delta y} \right) T_{i,j+2,k}^{n+1} \\ & + \left(-\frac{2\alpha_z}{3\Delta z^2} + \frac{w}{3\Delta z} \right) T_{i,j,k+1}^{n+1} + \left(\frac{\alpha_z}{24\Delta z^2} - \frac{w}{24\Delta z} \right) T_{i,j,k+2}^{n+1} = G_{ijk}^n \end{aligned} \quad (24)$$

sendo

$$\begin{aligned} G_{ijk}^n &= \frac{\alpha_x}{2} \left(\frac{-T_{i+2,j,k}^n + 16T_{i+1,j,k}^n - 30T_{ijk}^n + 16T_{i-1,j,k}^n - T_{i-2,j,k}^n}{12\Delta x^2} \right) \\ & + \frac{\alpha_y}{2} \left(\frac{-T_{i,j+2,k}^n + 16T_{i,j+1,k}^n - 30T_{ijk}^n + 16T_{i,j-1,k}^n - T_{i,j-2,k}^n}{12\Delta y^2} \right) \\ & + \frac{\alpha_z}{2} \left(\frac{-T_{i,j,k+2}^n + 16T_{i,j,k+1}^n - 30T_{ijk}^n + 16T_{i,j,k-1}^n - T_{i,j,k-2}^n}{12\Delta z^2} \right) \\ & + \frac{\mu\Phi_{ijk}}{\rho c_p} - \frac{u}{2} \left(\frac{-T_{i+2,j,k}^n + 8T_{i+1,j,k}^n - 8T_{i-1,j,k}^n + T_{i-2,j,k}^n}{12\Delta x} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{v}{2} \left(\frac{-T_{i,j+2,k}^n + 8T_{i,j+1,k}^n - 8T_{i,j-1,k}^n - T_{i,j-2,k}^n}{12\Delta y} \right) - \frac{w}{2} \left(\frac{-T_{i,j,k+2}^n + 8T_{i,j,k+1}^n - 8T_{i,j,k-1}^n - T_{i,j,k-2}^n}{12\Delta z} \right) + \frac{1}{\Delta t} T_{ijk}^n. \quad (25)$$

Ainda, considerando a Eq. (1), se $\psi = T$, $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$, $f = \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}$ e $w = 0$ tem-se a

equação da energia bidimensional em coordenadas cartesianas, dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu\Phi}{\rho c_p} = 0 \quad (26)$$

sendo μ a viscosidade dinâmica e Φ a dissipação viscosa, dada por

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2.$$

Assim, rearranjando a Eq. (26) e aplicando o método de Crank-Nicolson para a discretização no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ij}^{n+1} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ij}^n + \frac{\mu\Phi_{ij}}{\rho c_p} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T_{ij}^{n+1}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T_{ij}^{n+1}}{\partial y^2} + u \frac{\partial T_{ij}^{n+1}}{\partial x} + v \frac{\partial T_{ij}^{n+1}}{\partial y} + \frac{T_{ij}^{n+1}}{\Delta t} &= G \quad (27) \end{aligned}$$

sendo

$$G = \frac{1}{2} \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T_{ij}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T_{ij}^n}{\partial y^2} - u \frac{\partial T_{ij}^n}{\partial x} - v \frac{\partial T_{ij}^n}{\partial y} - \frac{\mu\Phi_{ij}}{\rho c_p} + \frac{T_{ij}^n}{\Delta t}. \quad (28)$$

Como anteriormente, para a discretização espacial da Eq. (27) será adotado o seguinte critério:

- Para os nós com distância Δx e Δy do contorno utiliza-se o método das diferenças centrais com $O(\Delta x^2)$:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{k}{2\rho c_p \Delta y^2} - \frac{v}{4\Delta y} \right) T_{ij-1}^{n+1} + \left(-\frac{k}{2\rho c_p \Delta x^2} - \frac{u}{4\Delta x} \right) T_{i-1j}^{n+1} + \left(\frac{k}{2\rho c_p \Delta x^2} + \frac{k}{2\rho c_p \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) T_{ij}^{n+1} \\ + \left(-\frac{k}{2\rho c_p \Delta x^2} + \frac{u}{4\Delta x} \right) T_{i+1j}^{n+1} + \left(-\frac{k}{2\rho c_p \Delta y^2} + \frac{v}{4\Delta y} \right) T_{ij+1}^{n+1} = G \quad (29) \end{aligned}$$

sendo

$$G = \frac{k}{2\rho c_p} \left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) + \frac{k}{2\rho c_p} \left(\frac{T_{ij+1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right) - \frac{\mu\Phi_{ij}}{\rho c_p} - \frac{u}{2} \left(\frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{v}{2} \left(\frac{T_{ij+1}^n - T_{ij-1}^n}{2\Delta y} \right) + \frac{1}{\Delta t} T_{ij}^n. \quad (30)$$

- Para os demais nós utiliza-se o método das diferenças centrais com $O(\Delta x^4)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k}{24\rho c_p \Delta y^2} + \frac{v}{24\Delta y} \right) T_{ij-2}^{n+1} + \left(-\frac{2k}{3\rho c_p \Delta y^2} - \frac{v}{3\Delta y} \right) T_{ij-1}^{n+1} + \left(\frac{k}{24\rho c_p \Delta x^2} + \frac{u}{24\Delta x} \right) T_{i-2,j}^{n+1} \\ & + \left(-\frac{2k}{3\rho c_p \Delta x^2} - \frac{u}{3\Delta x} \right) T_{i-1,j}^{n+1} + \left(\frac{5k}{4\rho c_p \Delta x^2} + \frac{5k}{4\rho c_p \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) T_{ij}^{n+1} + \left(-\frac{2k}{3\rho c_p \Delta x^2} - \frac{u}{3\Delta x} \right) T_{i+1,j}^{n+1} \\ & + \left(\frac{k}{24\rho c_p \Delta x^2} - \frac{v}{24\Delta x} \right) T_{i+2,j}^{n+1} + \left(-\frac{2k}{3\rho c_p \Delta y^2} + \frac{v}{3\Delta y} \right) T_{ij+1}^{n+1} + \left(\frac{k}{24\rho c_p \Delta y^2} - \frac{v}{24\Delta y} \right) T_{ij+2}^{n+1} = G \quad (31) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} G = & \frac{k}{2\rho c_p} \left(\frac{-T_{i+2,j}^n + 16T_{i+1,j}^n - 30T_{ij}^n + 16T_{i-1,j}^n - T_{i-2,j}^n}{\Delta x^2} \right) \\ & + \frac{k}{2\rho c_p} \left(\frac{-T_{ij+2}^n + 16T_{ij+1}^n - 30T_{ij}^n + 16T_{ij-1}^n - T_{ij-2}^n}{\Delta y^2} \right) \\ & - \frac{\mu\Phi_{ij}}{\rho c_p} - \frac{u}{2} \left(\frac{-T_{i+2,j}^n + 8T_{i+1,j}^n - 8T_{i-1,j}^n + T_{i-2,j}^n}{12\Delta x} \right) - \frac{v}{2} \left(\frac{-T_{ij+2}^n + 8T_{ij+1}^n - 8T_{ij-1}^n + T_{ij-2}^n}{12\Delta y} \right) + \frac{1}{\Delta t} T_{ij}^n. \quad (32) \end{aligned}$$

Agora, considerando na Eq. (1), $\psi = u, v, w$, $\kappa = \nu$ e $f = 0$ tem-se o sistema de equações tridimensionais não lineares de Burgers, dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (33a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (33b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (33c)$$

sendo ν a viscosidade cinemática, as quais coincidem com as equações tridimensionais para um escoamento laminar incompressível, caso os termos de pressão forem desprezados.

Aplicando o método de Crank-Nicolson para a discretização no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) &= 0,5 \left(\nu \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial z^2} - u^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} - w^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} \right) \\ &+ 0,5 \left(\nu \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} - u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} - w^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \right) &= 0,5 \left(\nu \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial z^2} - u^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} - v^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} - w^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial z} \right) \\ &+ 0,5 \left(\nu \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2} - u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} - w^n \frac{\partial v^n}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (34b)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right) &= 0,5 \left(\nu \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial z^2} - u^{n+1} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} - v^{n+1} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial y} - w^{n+1} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} \right) \\ &+ 0,5 \left(\nu \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^n}{\partial z^2} - u^n \frac{\partial w^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial w^n}{\partial y} - w^n \frac{\partial w^n}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (34c)$$

Aplicando a técnica de linearização (Eq. 12) para os termos convectivos da Eq. (34a-c), obtêm-se:

$$u^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \approx u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + u^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial x} - u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} \quad (35a)$$

$$v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} \approx v^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + v^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial y} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} \quad (35b)$$

$$w^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} \approx w^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} + w^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial z} - w^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \quad (35c)$$

$$u^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} \approx u^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} + u^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial x} - u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} \quad (35d)$$

$$v^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} \approx v^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + v^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial y} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} \quad (35e)$$

$$w^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial z} \approx w^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial z} + w^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial z} - w^n \frac{\partial v^n}{\partial z} \quad (35f)$$

$$u^{n+1} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} \approx u^n \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} + u^{n+1} \frac{\partial w^n}{\partial x} - u^n \frac{\partial w^n}{\partial x} \quad (35g)$$

$$v^{n+1} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial y} \approx v^n \frac{\partial w^{n+1}}{\partial y} + v^{n+1} \frac{\partial w^n}{\partial y} - v^n \frac{\partial w^n}{\partial y} \quad (35h)$$

$$w^{n+1} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} \approx w^n \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} + w^{n+1} \frac{\partial w^n}{\partial z} - w^n \frac{\partial w^n}{\partial z} \quad (35i)$$

Daí, substituindo as Eq. (35a-c) na Eq. (34a):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\right) &= 0,5\left(v\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial z^2}-u^n\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}-u^{n+1}\frac{\partial u^n}{\partial x}+u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}\right. \\
&\quad \left.-v^n\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}-v^{n+1}\frac{\partial u^n}{\partial y}+v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}-w^n\frac{\partial u^{n+1}}{\partial z}-w^{n+1}\frac{\partial u^n}{\partial z}+w^n\frac{\partial u^n}{\partial z}\right) \\
&\quad +0,5\left(v\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2}-u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}-v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}-w^n\frac{\partial u^n}{\partial z}\right) \\
\Rightarrow 0,5\left(-v\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}-v\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2}-v\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial z^2}+u^n\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}+v^n\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}+w^n\frac{\partial u^{n+1}}{\partial z}\right. \\
&\quad \left.-u^{n+1}\frac{\partial u^n}{\partial x}-v^{n+1}\frac{\partial u^n}{\partial y}-w^{n+1}\frac{\partial u^n}{\partial z}\right)+\frac{u^{n+1}}{\Delta t}=F_1
\end{aligned} \tag{36}$$

sendo $F_1 = \frac{u^n}{\Delta t} + 0,5\left(v\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2}\right)$.

Agora, substituindo as Eq. (35e-f) na Eq. (34b), vem:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t}\right) &= 0,5\left(v\frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial z^2}-u^n\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}-u^{n+1}\frac{\partial v^n}{\partial x}+u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}\right. \\
&\quad \left.-v^n\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}-v^{n+1}\frac{\partial v^n}{\partial y}+v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}-w^n\frac{\partial v^{n+1}}{\partial z}-w^{n+1}\frac{\partial v^n}{\partial z}+w^n\frac{\partial v^n}{\partial z}\right) \\
&\quad +0,5\left(v\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2}-u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}-v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}-w^n\frac{\partial v^n}{\partial z}\right) \\
\Rightarrow 0,5\left(-v\frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x^2}-v\frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial y^2}-v\frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial z^2}+u^n\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}+v^n\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}+w^n\frac{\partial v^{n+1}}{\partial z}\right. \\
&\quad \left.-u^{n+1}\frac{\partial v^n}{\partial x}-v^{n+1}\frac{\partial v^n}{\partial y}-w^{n+1}\frac{\partial v^n}{\partial z}\right)+\frac{v^{n+1}}{\Delta t}=F_2
\end{aligned} \tag{37}$$

sendo $F_2 = \frac{v^n}{\Delta t} + 0,5\left(v\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2}\right)$.

Finalmente, substituindo as Eq. (35g-i) na Eq. (34b), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{w^{n+1}-w^n}{\Delta t}\right) &= 0,5\left(v\frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial z^2}-u^n\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x}-u^{n+1}\frac{\partial w^n}{\partial x}+u^n\frac{\partial w^n}{\partial x}\right. \\
&\quad \left.-v^n\frac{\partial w^{n+1}}{\partial y}-v^{n+1}\frac{\partial w^n}{\partial y}+v^n\frac{\partial w^n}{\partial y}-w^n\frac{\partial w^{n+1}}{\partial z}-w^{n+1}\frac{\partial w^n}{\partial z}+w^n\frac{\partial w^n}{\partial z}\right) \\
&\quad +0,5\left(v\frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 w^n}{\partial z^2}-u^n\frac{\partial w^n}{\partial x}-v^n\frac{\partial w^n}{\partial y}-w^n\frac{\partial w^n}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0,5 \left(-v \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial z^2} + u^n \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} + v^n \frac{\partial w^{n+1}}{\partial y} + w^n \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} \right. \\ \left. - u^{n+1} \frac{\partial w^n}{\partial x} - v^{n+1} \frac{\partial w^n}{\partial y} - w^{n+1} \frac{\partial w^n}{\partial z} \right) + \frac{w^{n+1}}{\Delta t} = F_3 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{sendo } F_3 = \frac{w^n}{\Delta t} + 0,5 \left(v \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w^n}{\partial z^2} \right).$$

Considerando os nós com distância Δx , Δy ou Δz do contorno e usando o método das diferenças centrais com $O(\Delta x^2)$, obtêm-se, para a Eq. (36):

$$\begin{aligned} & -0,5v \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) - 0,5v \left(\frac{u_{i,j+1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \\ & - 0,5v \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) + 0,5u_{i,j,k}^n \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + 0,5v_{i,j,k}^n \left(\frac{u_{i,j+1,k}^{n+1} - u_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\ & + 0,5w_{i,j,k}^n \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{n+1} - u_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) + \frac{u_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} + 0,5u_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial x} + 0,5v_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial y} + 0,5w_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial z} = F_1^1 \\ \Rightarrow & \left(-\frac{0,5v}{\Delta x^2} - \frac{0,25w_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right) u_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(-\frac{0,5v}{\Delta y^2} - \frac{0,25v_{i,j,k}^n}{\Delta y} \right) u_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5v}{\Delta x^2} - \frac{0,25u_{i,j,k}^n}{\Delta x} \right) u_{i-1,j,k}^{n+1} \\ & + \left(\frac{v}{\Delta x^2} + \frac{v}{\Delta y^2} + \frac{v}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial x} \right) u_{i,j,k}^{n+1} + \left(0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial y} \right) v_{i,j,k}^{n+1} + \left(0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial z} \right) w_{i,j,k}^{n+1} \\ & + \left(-\frac{0,5v}{\Delta x^2} + \frac{0,25u_{i,j,k}^n}{\Delta x} \right) u_{i+1,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5v}{\Delta y^2} + \frac{0,25v_{i,j,k}^n}{\Delta y} \right) u_{i,j+1,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5v}{\Delta z^2} + \frac{0,25w_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right) u_{i,j,k+1}^{n+1} = F_1^1 \end{aligned} \quad (39)$$

sendo

$$F_1^1 = \frac{u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + 0,5v \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right). \quad (40)$$

Da mesma forma, para a Eq. (37):

$$\begin{aligned} & -0,5v \left(\frac{v_{i+1,j,k}^{n+1} - 2v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) - 0,5v \left(\frac{v_{i,j+1,k}^{n+1} - 2v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \\ & - 0,5v \left(\frac{v_{i,j,k+1}^{n+1} - 2v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) + 0,5u_{i,j,k}^n \left(\frac{v_{i+1,j,k}^{n+1} - v_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + 0,5v_{i,j,k}^n \left(\frac{v_{i,j+1,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\ & + 0,5w_{i,j,k}^n \left(\frac{v_{i,j,k+1}^{n+1} - v_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) + \frac{v_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} + 0,5u_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial x} + 0,5v_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial y} + 0,5w_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial z} = F_2^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta z^2} - \frac{0,25w_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right) v_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta y^2} - \frac{0,25v_{i,j,k}^n}{\Delta y} \right) v_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta x^2} - \frac{0,25u_{i,j,k}^n}{\Delta x} \right) v_{i-1,j,k}^{n+1} \\
&\quad + \left(0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial x} \right) u_{i,j,k}^{n+1} + \left(\frac{\nu}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{\Delta y^2} + \frac{\nu}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial y} \right) v_{i,j,k}^{n+1} + \left(0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial z} \right) w_{i,j,k}^{n+1} \\
&+ \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta x^2} + \frac{0,25u_{i,j,k}^n}{\Delta x} \right) v_{i+1,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta y^2} + \frac{0,25v_{i,j,k}^n}{\Delta y} \right) v_{i,j+1,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta z^2} + \frac{0,25w_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right) v_{i,j,k+1}^{n+1} = F_2^1 \quad (41)
\end{aligned}$$

Sendo

$$F_2^1 = \frac{v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + 0,5\nu \left(\frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right). \quad (42)$$

Finalmente, para a Eq. (38):

$$\begin{aligned}
&-0,5\nu \left(\frac{w_{i+1,j,k}^{n+1} - 2w_{i,j,k}^{n+1} + w_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) - 0,5\nu \left(\frac{w_{i,j+1,k}^{n+1} - 2w_{i,j,k}^{n+1} + w_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \\
&- 0,5\nu \left(\frac{w_{i,j,k+1}^{n+1} - 2w_{i,j,k}^{n+1} + w_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) + 0,5u_{i,j,k}^{n+1} \left(\frac{w_{i+1,j,k}^{n+1} - w_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + 0,5v_{i,j,k}^{n+1} \left(\frac{w_{i,j+1,k}^{n+1} - w_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\
&+ 0,5w_{i,j,k}^{n+1} \left(\frac{w_{i,j,k+1}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) + \frac{w_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} + 0,5u_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial w_{i,j,k}^{n+1}}{\partial x} + 0,5v_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial w_{i,j,k}^{n+1}}{\partial y} + 0,5w_{i,j,k}^{n+1} \frac{\partial w_{i,j,k}^{n+1}}{\partial z} = F_1^3 \\
&\Rightarrow \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta z^2} - \frac{0,25w_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right) w_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta y^2} - \frac{0,25v_{i,j,k}^n}{\Delta y} \right) w_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta x^2} - \frac{0,25u_{i,j,k}^n}{\Delta x} \right) w_{i-1,j,k}^{n+1} \\
&\quad + \left(0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial x} \right) u_{i,j,k}^{n+1} + \left(0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial y} \right) v_{i,j,k}^{n+1} + \left(\frac{\nu}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{\Delta y^2} + \frac{\nu}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial z} \right) w_{i,j,k}^{n+1} \\
&+ \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta x^2} + \frac{0,25u_{i,j,k}^n}{\Delta x} \right) w_{i+1,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta y^2} + \frac{0,25v_{i,j,k}^n}{\Delta y} \right) w_{i,j+1,k}^{n+1} + \left(-\frac{0,5\nu}{\Delta z^2} + \frac{0,25w_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right) w_{i,j,k+1}^{n+1} = F_1^3 \quad (43)
\end{aligned}$$

sendo

$$F_1^3 = \frac{w_{i,j,k}^n}{\Delta t} + 0,5\nu \left(\frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right). \quad (44)$$

Agora, considerando os nós internos e usando novamente o método das diferenças centrais com $O(\Delta x^4)$, obtêm-se, para a Eq. (36):

$$\begin{aligned}
&-0,5\nu \left(\frac{-u_{i+2,j,k}^{n+1} + 16u_{i+1,j,k}^{n+1} - 30u_{i,j,k}^{n+1} + 16u_{i-1,j,k}^{n+1} - u_{i-2,j,k}^{n+1}}{12\Delta x^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{-u_{i,j+2,k}^{n+1} + 16u_{i,j+1,k}^{n+1} - 30u_{i,j,k}^{n+1} + 16u_{i,j-1,k}^{n+1} - u_{i,j-2,k}^{n+1}}{12\Delta y^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{-u_{i,j,k+2}^{n+1} + 16u_{i,j,k+1}^{n+1} - 30u_{i,j,k}^{n+1} + 16u_{i,j,k-1}^{n+1} - u_{i,j,k-2}^{n+1}}{12\Delta z^2} \right) \\
& + 0,5u_{i,j,k}^n \left(\frac{-u_{i+2,j,k}^{n+1} + 8u_{i+1,j,k}^{n+1} - 8u_{i-1,j,k}^{n+1} + u_{i-2,j,k}^{n+1}}{12\Delta x} \right) + 0,5v_{i,j,k}^n \left(\frac{-u_{i,j+2,k}^{n+1} + 8u_{i,j+1,k}^{n+1} - 8u_{i,j-1,k}^{n+1} + u_{i,j-2,k}^{n+1}}{12\Delta y} \right) \\
& + 0,5w_{i,j,k}^n \left(\frac{-u_{i,j,k+2}^{n+1} + 8u_{i,j,k+1}^{n+1} - 8u_{i,j,k-1}^{n+1} + u_{i,j,k-2}^{n+1}}{12\Delta z} \right) + \left(\frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial x} \right) u_{i,j,k}^{n+1} \\
& + 0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial y} v_{i,j,k}^{n+1} + 0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial z} w_{i,j,k}^{n+1} = F_2^1 \\
\Rightarrow & \left(\frac{v}{24\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}^n}{24\Delta z} \right) u_{i,j,k-2}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta z^2} - \frac{w_{i,j,k}^n}{3\Delta z} \right) u_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k}^n}{24\Delta y} \right) u_{i,j-2,k}^{n+1} + \\
& \left(-\frac{2v}{3\Delta y^2} - \frac{v_{i,j,k}^n}{3\Delta y} \right) u_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^n}{24\Delta x} \right) u_{i-2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta x^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{3\Delta x} \right) u_{i-1,j,k}^{n+1} + \\
& + \left(\frac{1,25v}{\Delta x^2} + \frac{1,25v}{\Delta y^2} + \frac{1,25v}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial x} \right) u_{i,j,k}^{n+1} + \left(0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial y} \right) v_{i,j,k}^{n+1} + \left(0,5 \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial z} \right) w_{i,j,k}^{n+1} \\
& + \left(-\frac{2v}{3\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^n}{3\Delta x} \right) u_{i+1,j,k}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta x^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{24\Delta x} \right) u_{i+2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k}^n}{3\Delta y} \right) u_{i,j+1,k}^{n+1} + \\
& \left(\frac{v}{24\Delta y^2} - \frac{v_{i,j,k}^n}{24\Delta y} \right) u_{i,j+2,k}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}^n}{3\Delta z} \right) u_{i,j,k+1}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta z^2} - \frac{w_{i,j,k}^n}{24\Delta z} \right) u_{i,j,k+2}^{n+1} = F_2^1 \quad (45)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_2^1 = & \frac{u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + 0,5v \left(\frac{-u_{i+2,j,k}^n + 16u_{i+1,j,k}^n - 30u_{i,j,k}^n + 16u_{i-1,j,k}^n - u_{i-2,j,k}^n}{12\Delta x^2} + \right. \\
& + \frac{-u_{i,j-2,k}^n + 16u_{i,j-1,k}^n - 30u_{i,j,k}^n + 16u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j+2,k}^n}{12\Delta y^2} \\
& \left. + \frac{-u_{i,j,k-2}^n + 16u_{i,j,k-1}^n - 30u_{i,j,k}^n + 16u_{i,j,k+1}^n - u_{i,j,k+2}^n}{12\Delta z^2} \right). \quad (46)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, para a Eq. (37):

$$\begin{aligned}
& -0,5v \left(\frac{-v_{i+2,j,k}^{n+1} + 16v_{i+1,j,k}^{n+1} - 30v_{i,j,k}^{n+1} + 16v_{i-1,j,k}^{n+1} - v_{i-2,j,k}^{n+1}}{12\Delta x^2} + \right. \\
& \frac{-v_{i,j+2,k}^{n+1} + 16v_{i,j+1,k}^{n+1} - 30v_{i,j,k}^{n+1} + 16v_{i,j-1,k}^{n+1} - v_{i,j-2,k}^{n+1}}{12\Delta y^2} + \\
& \left. \frac{-v_{i,j,k+2}^{n+1} + 16v_{i,j,k+1}^{n+1} - 30v_{i,j,k}^{n+1} + 16v_{i,j,k-1}^{n+1} - v_{i,j,k-2}^{n+1}}{12\Delta z^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,5u_{i,j,k}^n \left(\frac{-v_{i+2,j,k}^{n+1} + 8v_{i+1,j,k}^{n+1} - 8v_{i-1,j,k}^{n+1} + v_{i-2,j,k}^{n+1}}{12\Delta x} \right) + 0,5v_{i,j,k}^n \left(\frac{-v_{i,j+2,k}^{n+1} + 8v_{i,j+1,k}^{n+1} - 8v_{i,j-1,k}^{n+1} + v_{i,j-2,k}^{n+1}}{12\Delta y} \right) \\
& + 0,5w_{i,j,k}^n \left(\frac{-v_{i,j,k+2}^{n+1} + 8v_{i,j,k+1}^{n+1} - 8v_{i,j,k-1}^{n+1} + v_{i,j,k-2}^{n+1}}{12\Delta z} \right) + 0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial x} u_{i,j,k}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial y} \right) v_{i,j,k}^{n+1} + 0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial z} w_{i,j,k}^{n+1} = F_2^2 \\
& \Rightarrow \left(\frac{v}{24\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}^n}{24\Delta z} \right) v_{i,j,k-2}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta z^2} - \frac{w_{i,j,k}^n}{3\Delta z} \right) v_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k}^n}{24\Delta y} \right) v_{i,j-2,k}^{n+1} + \\
& \left(-\frac{2v}{3\Delta y^2} - \frac{v_{i,j,k}^n}{3\Delta y} \right) v_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^n}{24\Delta x} \right) v_{i-2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta x^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{3\Delta x} \right) v_{i-1,j,k}^{n+1} + \\
& + \left(0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial x} \right) u_{i,j,k}^{n+1} + \left(\frac{1,25v}{\Delta x^2} + \frac{1,25v}{\Delta y^2} + \frac{1,25v}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial y} \right) v_{i,j,k}^{n+1} + 0,5 \frac{\partial v_{i,j,k}^n}{\partial z} w_{i,j,k}^{n+1} \\
& + \left(-\frac{2v}{3\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^n}{3\Delta x} \right) v_{i+1,j,k}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta x^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{24\Delta x} \right) v_{i+2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k}^n}{3\Delta y} \right) v_{i,j+1,k}^{n+1} + \\
& \left(\frac{v}{24\Delta y^2} - \frac{v_{i,j,k}^n}{24\Delta y} \right) v_{i,j+2,k}^{n+1} + \left(-\frac{2v}{3\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}^n}{3\Delta z} \right) v_{i,j,k+1}^{n+1} + \left(\frac{v}{24\Delta z^2} - \frac{w_{i,j,k}^n}{24\Delta z} \right) v_{i,j,k+2}^{n+1} = F_2^2 \quad (47)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_2^2 = & \frac{v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + 0,5v \left(\frac{-v_{i+2,j,k}^n + 16v_{i+1,j,k}^n - 30v_{i,j,k}^n + 16v_{i-1,j,k}^n - v_{i-2,j,k}^n}{12\Delta x^2} + \right. \\
& + \frac{-v_{i,j-2,k}^n + 16v_{i,j-1,k}^n - 30v_{i,j,k}^n + 16v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j+2,k}^n}{12\Delta y^2} \\
& \left. + \frac{-v_{i,j,k-2}^n + 16v_{i,j,k-1}^n - 30v_{i,j,k}^n + 16v_{i,j,k+1}^n - v_{i,j,k+2}^n}{12\Delta z^2} \right). \quad (48)
\end{aligned}$$

Finalmente, para a Eq. (37):

$$\begin{aligned}
& -0,5v \left(\frac{-w_{i+2,j,k}^{n+1} + 16w_{i+1,j,k}^{n+1} - 30w_{i,j,k}^{n+1} + 16w_{i-1,j,k}^{n+1} - w_{i-2,j,k}^{n+1}}{12\Delta x^2} + \right. \\
& \frac{-w_{i,j+2,k}^{n+1} + 16w_{i,j+1,k}^{n+1} - 30w_{i,j,k}^{n+1} + 16w_{i,j-1,k}^{n+1} - w_{i,j-2,k}^{n+1}}{12\Delta y^2} + \\
& \left. \frac{-w_{i,j,k+2}^{n+1} + 16w_{i,j,k+1}^{n+1} - 30w_{i,j,k}^{n+1} + 16w_{i,j,k-1}^{n+1} - w_{i,j,k-2}^{n+1}}{12\Delta z^2} \right) \\
& + 0,5u_{i,j,k}^n \left(\frac{-w_{i+2,j,k}^{n+1} + 8w_{i+1,j,k}^{n+1} - 8w_{i-1,j,k}^{n+1} + w_{i-2,j,k}^{n+1}}{12\Delta x} \right) + 0,5v_{i,j,k}^n \left(\frac{-w_{i,j+2,k}^{n+1} + 8w_{i,j+1,k}^{n+1} - 8w_{i,j-1,k}^{n+1} + w_{i,j-2,k}^{n+1}}{12\Delta y} \right) \\
& + 0,5w_{i,j,k}^n \left(\frac{-w_{i,j,k+2}^{n+1} + 8w_{i,j,k+1}^{n+1} - 8w_{i,j,k-1}^{n+1} + w_{i,j,k-2}^{n+1}}{12\Delta z} \right) + 0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial x} u_{i,j,k}^{n+1} + 0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial y} v_{i,j,k}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial z} \right) w_{i,j,k}^{n+1} = F_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\frac{\nu}{24\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}^n}{24\Delta z} \right) w_{i,j,k-2}^{n+1} + \left(-\frac{2\nu}{3\Delta z^2} - \frac{w_{i,j,k}^n}{3\Delta z} \right) w_{i,j,k-1}^{n+1} + \left(\frac{\nu}{24\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k}^n}{24\Delta y} \right) w_{i,j-2,k}^{n+1} + \\
&\quad \left(-\frac{2\nu}{3\Delta y^2} - \frac{v_{i,j,k}^n}{3\Delta y} \right) w_{i,j-1,k}^{n+1} + \left(\frac{\nu}{24\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^n}{24\Delta x} \right) w_{i-2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2\nu}{3\Delta x^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{3\Delta x} \right) w_{i-1,j,k}^{n+1} + \\
&\quad + \left(0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial x} \right) u_{i,j,k}^{n+1} + \left(0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial y} \right) v_{i,j,k}^{n+1} + \left(\frac{1,25\nu}{\Delta x^2} + \frac{1,25\nu}{\Delta y^2} + \frac{1,25\nu}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} + 0,5 \frac{\partial w_{i,j,k}^n}{\partial z} \right) w_{i,j,k}^{n+1} \\
&\quad + \left(-\frac{2\nu}{3\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^n}{3\Delta x} \right) w_{i+1,j,k}^{n+1} + \left(\frac{\nu}{24\Delta x^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{24\Delta x} \right) w_{i+2,j,k}^{n+1} + \left(-\frac{2\nu}{3\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k}^n}{3\Delta y} \right) w_{i,j+1,k}^{n+1} + \\
&\quad \left(\frac{\nu}{24\Delta y^2} - \frac{v_{i,j,k}^n}{24\Delta y} \right) w_{i,j+2,k}^{n+1} + \left(-\frac{2\nu}{3\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}^n}{3\Delta z} \right) w_{i,j,k+1}^{n+1} + \left(\frac{\nu}{24\Delta z^2} - \frac{w_{i,j,k}^n}{24\Delta z} \right) w_{i,j,k+2}^{n+1} = F_2^3 \quad (49)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_2^3 = &\frac{w_{i,j,k}^n}{\Delta t} + 0,5\nu \left(\frac{-w_{i+2,j,k}^n + 16w_{i+1,j,k}^n - 30w_{i,j,k}^n + 16w_{i-1,j,k}^n - w_{i-2,j,k}^n}{12\Delta x^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-w_{i,j-2,k}^n + 16w_{i,j-1,k}^n - 30w_{i,j,k}^n + 16w_{i,j+1,k}^n - w_{i,j+2,k}^n}{12\Delta y^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-w_{i,j,k-2}^n + 16w_{i,j,k-1}^n - 30w_{i,j,k}^n + 16w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k+2}^n}{12\Delta z^2} \right). \quad (50)
\end{aligned}$$

Se, na Eq. (33a), adotarmos $\psi = u$, $\kappa = \nu$ e $f = 0$, tem-se a equação tridimensional não linear de Burgers, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (51)$$

a qual será utilizada como caso-teste para a validação do modelo envolvendo o método de diferenças centrais de quarta ordem e a técnica de linearização para a solução numérica do sistema de equações (Eq. 33a-c). As discretizações espacial e temporal são análogas às apresentadas anteriormente, considerando-se $\psi = u = v = w$.

3 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações usando o Método de Diferenças Finitas de Alta-Ordem. No caso de problemas lineares bidimensionais, uma investigação numérica do termo de dissipação viscosa na equação de transferência de calor será realizada e, nos tridimensionais, analisado o resfriamento num canal retangular. Já no caso de problemas não lineares, será utilizada uma técnica a fim de linearizar o termo convectivo. Para os problemas bidimensionais, para a validação do código, a solução numérica será comparada com a solução analítica, além de outra aplicação sem solução analítica. Já no caso tridimensional foram feitas comparações com soluções analíticas disponíveis na literatura visando validar o programa computacional e, ainda, considerado uma aplicação de escoamento num canal retangular.

3.1 Introdução

Nas aplicações a seguir, o sistema linear gerado pela equação governante e pelas condições de contorno foi resolvido usando o método de Gauss-Seidel e a solução numérica comparada com a solução analítica, quando existe, usando a norma L_2

definida em Zlamal (1978): $\|L_2\| = \left[\left(\sum_{i=1}^{N_{nost}} L_i^2 \right) / N_{nost} \right]^{1/2}$, sendo N_{nost} o número total de

nós da malha e $L_i = |\psi_{(num)_i} - \psi_{(an)_i}|$, onde $\psi_{(num)}$ e $\psi_{(an)}$ é o resultado da solução numérica e analítica, respectivamente. Já a norma L_∞ , que é o erro máximo no domínio, é definida por $\|L\|_\infty = |\psi_{(num)} - \psi_{(an)}|$, onde, como anteriormente, $\psi_{(num)}$ e $\psi_{(an)}$ é o resultado da solução numérica e analítica, respectivamente. Todos os cálculos foram executados em um computador particular *Intel Core i7/2.4G* usando aritmética de precisão dupla.

3.2 Investigação Numérica do Termo de Dissipação Viscosa na Equação de Transferência de Calor Bidimensional

Nesta aplicação, considera-se a equação da energia em coordenadas cartesianas bidimensionais dada pela Eq. (26) e a discretização temporal e espacial dada pelas Eqs. (29-32).

Caso 1: Neste caso-teste, adotou-se um parâmetro A como coeficiente dos termos difusivos da equação $-\frac{\partial T}{\partial t} + B\frac{\partial T}{\partial x} + B\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, escolhido de tal modo que, à medida que o valor do parâmetro A aumenta, o problema assume características estritamente convectivas. A equação tem como solução analítica $T(x, y, t) = e^{-0.5AB^2t} (e^{-0.5ABx} + e^{-0.5ABy})$ (CAMPOS et al., 2014) e o domínio computacional é $0 \leq x \leq 0,01$; $0 \leq y \leq 0,01$ e $0 \leq t \leq 0,01$. A Tabela 1 apresenta os resultados da norma L_2 quando o valor A aumenta segundo um incremento espacial de $\Delta x = L_x/100$ e $\Delta y = L_y/100$, e temporal de $\Delta t = L_t/100$, com $L_x = L_y = L_t = 0,01$ e considerando $B = 0,01$. Pode-se notar que, mesmo para $A = 10^5$, i.e, no caso de um problema altamente convectivo, o método atinge uma precisão de duas casas decimais.

Tabela 1 – Resultados da norma L_2 para $\Delta x = L_x/100$, $\Delta y = L_y/100$, $\Delta t = L_t/100$, com $L_x = L_y = L_t = 0,01$.

A	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
norma L_2	2,28E-03	2,79E-03	6,01E-03	9,48E-03	1,05E-02

Caso 2: Nesse caso, assumimos, inicialmente, hélio à pressão atmosférica e temperatura de 300 K, escoando num domínio retangular com dimensões $L_x = 10$ m por $L_y = 0,05$ m (Fig. 1) e $t = 2$ s.

Foram adotadas as seguintes propriedades termofísicas, de acordo com Incropera e DeWitt (2006): $\rho = 0,1625$ kg/m³, $c_p = 5193$ J/kg.K, $\mu = 199 \times 10^{-7}$ N.s/m², $k = 0,152$ W/m.K para a massa específica, calor específico, viscosidade dinâmica e condutividade térmica, respectivamente. Também foram adotadas as seguintes condições de contorno: $x = 0$ m para $T = 353$ K, $x = L_x$ para $dT/dx = 0$ e $y = 0$ m e $y = L_y$ para $T = 278$ K. A condição inicial é $T = 278$ K.



Figura 1: Configuração do domínio cartesiano.

Comparando com os resultados da aplicação (Tabela 1), é possível notar que

$$\frac{k}{\rho c_p} \cong 2E-04 > \frac{1}{A} \cong E-05. \text{ Considerando um perfil de velocidade parabólico}$$

$$u(x, y, t) = \frac{4U_{\max}}{L_y} \left(-\frac{y^2}{L_y} + y \right), \text{ o qual se aproxima de um perfil de escoamento laminar}$$

completamente desenvolvido onde, na linha de centro ($y = L_y/2$), a velocidade é máxima ($U = U_{max}$). Para o cômputo do termo de dissipação viscosa, tem-se

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = \frac{4U_{max}}{L_y} \left(-\frac{2y}{L_y} + 1 \right).$$

Agora, a Tabela 2 apresenta a diferença média e máxima, denotadas, respectivamente, por D_m e D_{max} , entre os valores da temperatura para todos os pontos, negligenciando ($\mu = 0$) e considerando ($\mu = 199 \times 10^{-7} \text{ N.s/m}^2$) a dissipação viscosa para o hélio (He), para alguns perfis de velocidade. Note que, para $U_{max} = 0,1 \text{ m/s}$, os valores obtidos para D_m e D_{max} foram menores que 10^{-8} e, portanto, desprezados. Já na Fig. 2, considerando $L_x = 4 \text{ m}$, $L_y = 0,05 \text{ m}$, $L_t = 2 \text{ s}$; $\Delta x = L_x/200$, $\Delta y = L_y/40$ e $\Delta t = L_t/1000$, são apresentados perfis de temperatura para $U_{max} = 2 \text{ m/s}$.

Tabela 2 – Resultados de D_m e D_{max} para He considerando $\Delta x = L_x/200$; $\Delta y = L_y/10$ e $\Delta t = t/1000$.

U_{max}	D_m	D_{max}
0,1	0	0
0,5	2,08E-07	1,00E-05
1	8,20E-06	2,00E-05
1,5	2,58E-05	5,00E-05
2	4,93E-05	1,00E-04
3	1,27E-04	2,90E-04
4	2,38E-04	6,40E-04
6	5,51E-04	1,95E-03
8	9,58E-04	4,23E-03
10	1,43E-03	7,57E-03

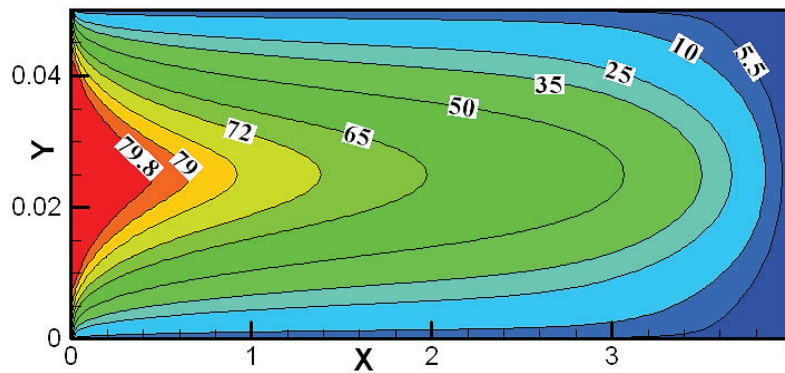


Figura 2: Perfis de temperatura para $U_{max} = 2 \text{ m/s}$ considerando $L_x = 4\text{m}$; $L_y = 0,05\text{m}$; $L_t = 2 \text{ s}$; $\Delta x = L_x/200$; $\Delta y = L_y/40$ e $\Delta t = L_t/1000$.

Será considerado, agora, gases ou líquidos saturados à pressão atmosférica e temperatura de 300 K escoando num domínio retangular com dimensões $L_x = 51 \text{ m}$,

$L_y = 0.05$ m e, ainda, $t = 0.5$ s e $U_{max} = 100$ m/s. As propriedades termofísicas adotadas nas Tabelas 3 e 4 foram adotadas de acordo com Incropera e DeWitt (2006).

Tabela 3 – Resultados para D_m and D_{max} para gases com $\Delta x = L_x/510$, $\Delta y = L_y/100$ e $\Delta t = t/1000$.

<i>Gases</i>	ρ (kg/m ³)	c_p (J/kg.K)	k (W/m.K)	μ (N.s/m ²)	D_m	D_{max}
<i>Ar</i>	1,161E+00	1,007E+03	2,630E-02	1,846E-05	8,847E-03	3,335E-01
<i>Amônia [NH₃]</i>	6,894E-01	2,158E+03	2,470E-02	1,015E-05	3,953E-03	1,573E-01
<i>Dióxido de Carbono [CO₂]</i>	1,773E+00	8,51E+02	1,650E-02	1,490E-05	5,906E-03	2,487E-01
<i>Monóxido de Carbono [CO]</i>	1,123E+00	1,043E+03	2,500E-02	1,750E-05	8,424E-03	3,21E-01
<i>Hélio [He]</i>	1,625E-01	5,193E+03	1,520E-01	1,990E-05	8,210E-03	1,521E-01
<i>Hidrogênio [H₂]</i>	8,070E-02	1,431E+03	1,830E-01	8,960E-06	2,813E-03	5,525E-02
<i>Oxigênio [O₂]</i>	1,284E+00	9,20E+02	2,680E-02	2,072E-05	9,82E-03	3,696E-01

Tabela 4 – Resultados para D_m and D_{max} para líquidos saturados com $\Delta x = L_x/510$, $\Delta y = L_y/100$ e $\Delta t = t/1000$.

<i>Líquidos Saturados</i>	ρ (kg/m ³)	c_p (J/kg.K)	k (W/m.K)	μ (N.s/m ²)	D_m	D_{max}
<i>Óleo de motor (virgem)</i>	8,841E+02	1,909E+03	1,450E+00	4,860E-01	1,840E+00	8,704E+00
<i>Etilenoglicol [C₂H₄(OH)₂]</i>	1,114E+03	2,415E+03	2,520E-01	1,570E-02	3,760E-03	1,789E-01
<i>Freon [CCl₂F₂]</i>	1,305E+03	9,781E+02	7,200E-02	2,540E-04	1,280E-04	6,110E-03
<i>Glicerina [C₃H₅(OH)₃]</i>	1,259E+03	2,427E+03	2,860E-01	7,990E-01	1,684E-01	8,016E+00
<i>Merúrio [Hg]</i>	1,352E+04	1,393E+02	8,540E+00	1,523E-03	5,060E-04	2,282E-02

Pode-se notar nas Tabelas 3 e 4 que apenas as situações em que a alta velocidade foi combinada a um fluido com alta viscosidade dinâmica (no caso, óleo de motor 8,70°C e glicerina 8,01°C) apresentam significativas diferenças entre as temperaturas, desprezando ou não a dissipação viscosa na Eq. (2).

3.3 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica da Equação de Convecção-Difusão Não Linear Bidimensional

Aqui, considerara-se a versão bidimensional da Eq. (51), dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (52)$$

onde $u(x,y,t)$ é o perfil de velocidades nas direções x e y e ν é a viscosidade cinemática.

Nos casos 1 e 2 a seguir, o valor inicial da solução analítica é tomado como sendo a condição inicial, e as condições de contorno também são especificadas pela equação anterior em cada passo de tempo. Já para o caso 3, as condições serão especificadas no próprio caso. Foi considerado como domínio computacional $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$ com $t > 0$. Nos casos 1 e 2, a solução numérica foi comparada com a solução

analítica considerando a norma L_2 definida anteriormente. Agora, uma vez que o caso 3 não possui solução analítica, foi utilizada uma malha grosseira e outra mais refinada para mostrar as oscilações numéricas da solução em cada caso.

Caso 1: Considerando a solução analítica da Eq. (52) dada por

$$u(x,y,t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x+y-t}{2\nu}\right)} \quad (\text{LI et al., 2006; VELIVELLI e BRYDEN, 2006})$$

foi feita a comparação com a solução numérica. As variáveis foram escolhidas a fim de evitar que o perfil de velocidade fornecido pela solução analítica se aproximasse de zero ou da unidade. Dessa forma, na Fig. 3, à direita, foram considerados $\nu = 10^{-1}$, $t = 0,1$ e $0 \leq x,y \leq 0,1$.

Pode-se notar, no caso da Fig. 3(a), por exemplo, que, para $x = 0$ e $y = 0,035$ o perfil da velocidade atinge $u \approx 0,58$, o que é compatível com o valor fornecido pela solução analítica, que é $u \approx 0,5854$. Já na Fig. 3(b), considerando, por exemplo, $x = 0,04$ e $y = 0$, o perfil da velocidade v atinge o valor aproximado de 0,95, o que se aproxima do valor obtido via solução analítica ($u \approx 0,9525$).

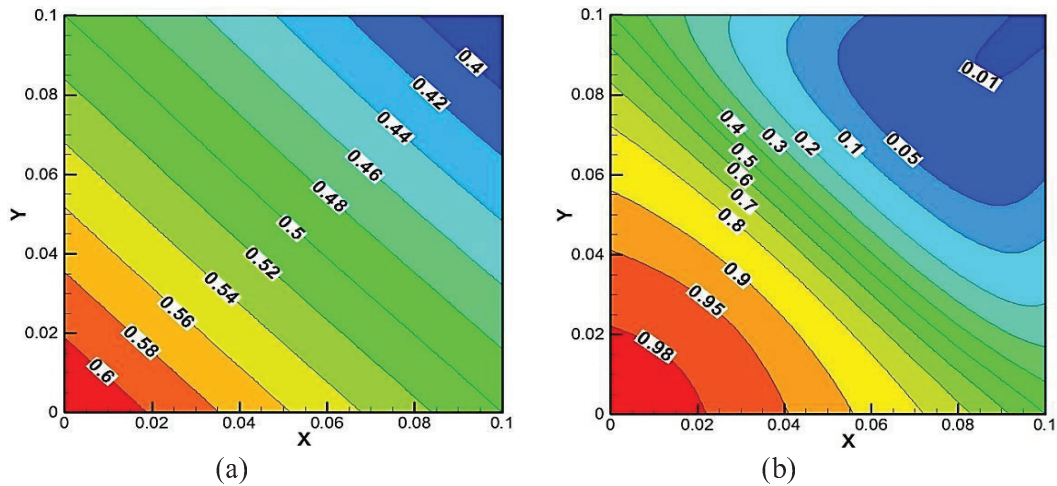


Figura 3: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $t = 0,1$ e considerando-se (a) $\nu = 10^{-1}$ com $\|L_2\| = 7,78E-04$ e (b) $\nu = 10^{-2}$ com $\|L_2\| = 6,12E-02$.

Na Fig. 4(a), pode-se verificar que, por exemplo, para $x = 0,03$ e $y = 0$, o perfil da velocidade atinge $u \approx 0,7$, semelhante ao valor encontrado via solução analítica ($u \approx 0,7005$). Da mesma forma, no caso da Fig. 4(b), tomando, $x = 0,0375$ e $y = 0$, o

perfil da velocidade atinge $u \approx 0,9997$, compatível ao encontrado através da solução analítica ($u \approx 0,999704$).

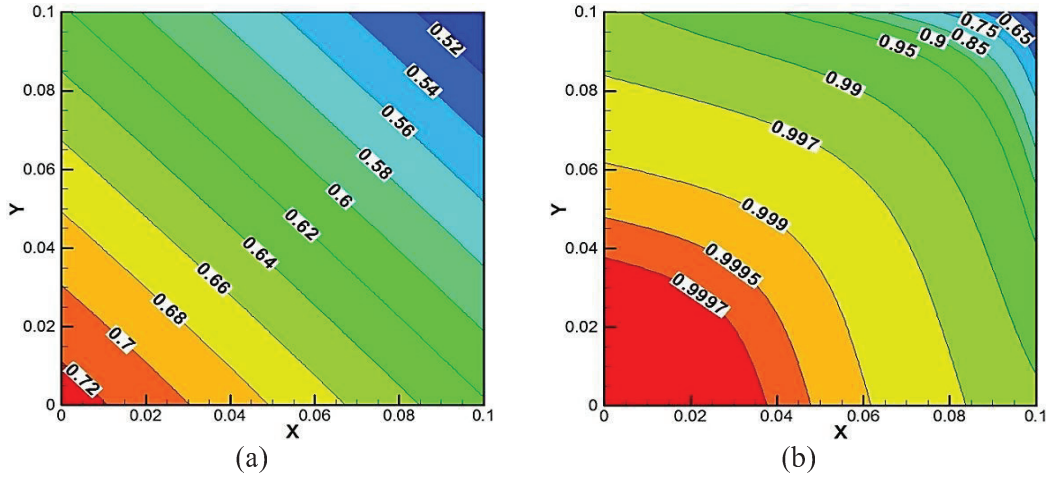


Figura 4: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $t = 0,2$ e considerando-se (a) $\nu = 10^{-1}$ com $\|L_2\| = 4,56E-04$ e (b) $\nu = 10^{-2}$ com $\|L_2\| = 2,61E-02$.

Nas Fig. 3 e 4 pode-se notar que foi possível obter uma precisão de pelo menos duas casas decimais, o que é considerado bastante satisfatório para a maioria dos problemas em engenharia.

Caso 2: Neste segundo caso, foi considerada a solução analítica dada por Zhang e Yan (2008): $u(x, y, t) = \frac{1}{2} - \tanh\left(\frac{x + y - t}{2\nu}\right)$. O valor inicial da solução analítica foi tomado como condição inicial e as condições de contorno foram especificadas também pela equação anterior e modificadas de acordo com o tempo.

Verifica-se, na Fig. 5(a), ao considerarmos $x = 0$ e $y = 0,08$, por exemplo, o perfil da velocidade atinge, aproximadamente, $u \approx 0,6$, o que se aproxima do valor fornecido pela solução analítica ($u \approx 0,6973$). Da mesma, na Fig. 5(b), para $x = 0,1$ e $y = 0$, o perfil da velocidade u atinge o valor de $0,5$, coincidindo com o valor obtido via solução analítica ($u \approx 0,5$).

Análise similar pode ser feita em relação à Fig. 6 (a-b) na qual, no primeiro caso, tomando $x = 0,045$ e $y = 0$, por exemplo, o perfil da velocidade atinge, aproximadamente, $u \approx 1,15$, se aproximando da solução analítica ($u \approx 1,1593$) e, no segundo, para $x = 0$ e $y = 0,09$, por exemplo, o perfil da velocidade atinge, aproximadamente, $u \approx 1,3$, em concordância com a solução analítica ($u \approx 1,3329$).

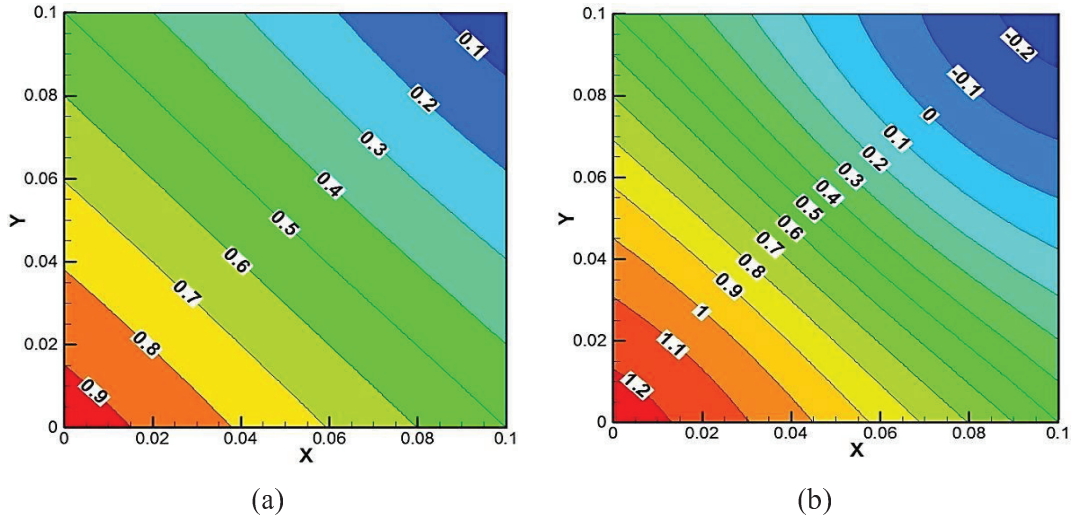


Figura 5: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $t = 0,1$ e considerando-se (a) $\nu = 0,05$ com $\|L_2\| = 3,74E-03$ e (b) $\nu = 10^{-2}$ com $\|L_2\| = 3,07E-02$.

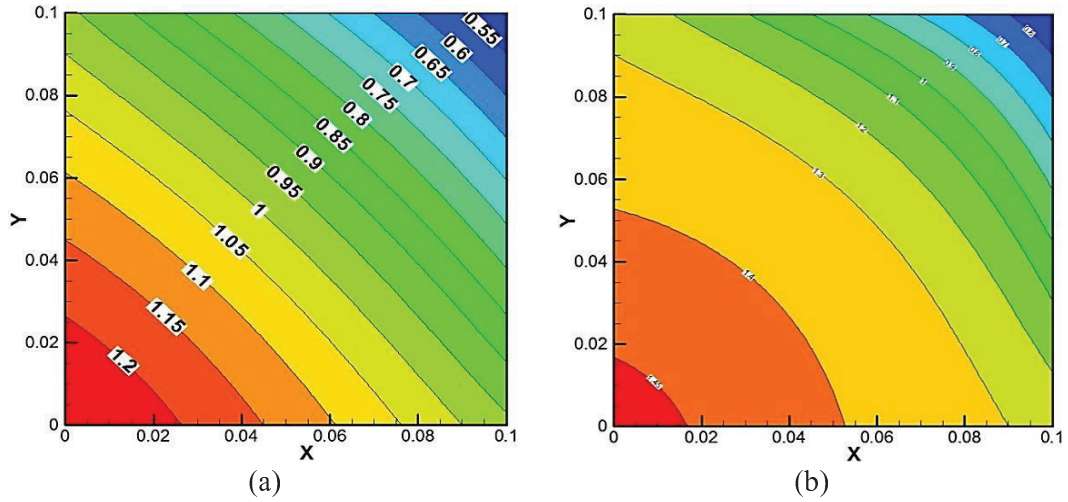


Figura 6: Perfil da velocidade u para $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,1/100$, $\Delta t = 0,2/100$ e $t = 0,2$ considerando-se (a) $\nu = 10^{-1}$ com $\|L_2\| = 1,27E-02$ e (b) $\nu = 0,05$ com $\|L_2\| = 1,27E-02$.

Caso 3: Aqui, foi considerado um domínio computacional da forma $0 \leq x, y \leq 1$ e $t > 0$, a condição inicial $u(x, y, 0) = 0$, bem como as seguintes condições de contorno $u(0, y, t) = 1$, $u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0, y, t) = 0$.

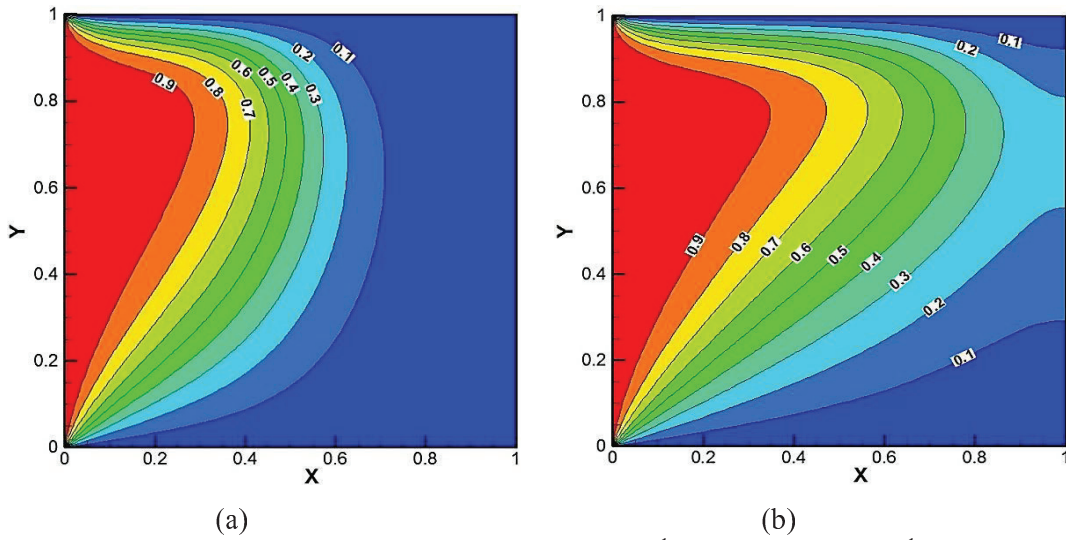


Figura 7: Perfil da velocidade u para (a) $\nu = 10^{-1}$ e $t = 1$ e (b) $\nu = 10^{-1}$ e $t = 2$, com $\Delta x = \Delta y = 0,01$ e $\Delta t = 0,05$.

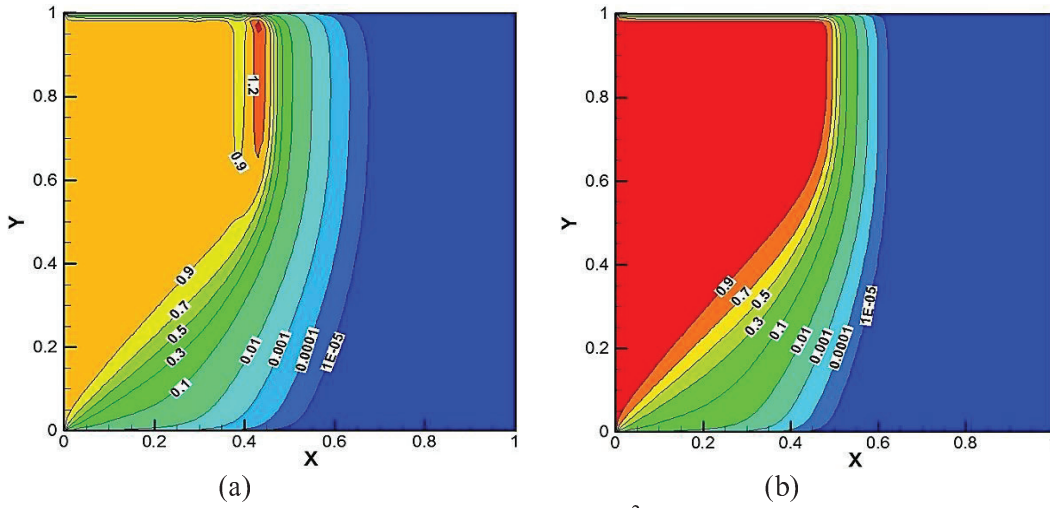


Figura 8: Perfil da velocidade v para $\nu = 10^{-2}$ e $t = 1$ com $\Delta x = \Delta y = 0,01$ e (a) $\Delta t = 0,05$ e (b) $\Delta t = 0,001$.

Uma análise qualitativa dos resultados dos dois instantes de tempo para a malha adotada e $\nu = 10^{-1}$ (Fig. 7) mostra que não há oscilações numéricas e, ainda, os valores numéricos encontrados estão no intervalo de 0 a 1. Contudo, para $\nu = 10^{-1}$ e $\Delta t = 0,05$ (Fig. 8a), obteve-se um valor máximo para $u = 1,48537$, totalmente fora do intervalo de 0 a 1. A fim de amenizar as oscilações numéricas foi necessário diminuir $\Delta t = 0,001$ levando a uma solução numérica sem oscilações e com todos os valores nodais de u no intervalo de 0 a 1 (Fig. 8b).

De modo especial, em relação à técnica de linearização dos termos não lineares da equação, ela não necessita de qualquer tipo de processo iterativo dentro de cada intervalo de tempo, representando uma economia considerável no custo computacional.

3.4 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica do Sistema Bidimensional de Equações de Convecção-Difusão Não Lineares

Nesse caso, foi considerado o sistema de equações não lineares de Burgers dado pelas Eq. (33a-c), tomando-se $\psi = u$, $w = 0$ e $z = 0$, as quais coincidem com as equações bidimensionais da quantidade de movimento para escoamento laminar incompressível.

Caso 1: Considerando as equações governantes com as condições iniciais $u(x, y, 0) = x + y$, $v(x, y, 0) = x - y$ e a seguinte solução analítica (BIAZAR e AMINIKHAH, 2009; ZHU et al., 2010): $u(x, y, t) = \frac{x + y - 2xt}{1 - 2t^2}$ e

$v(x, y, t) = \frac{x - y - 2yt}{1 - 2t^2}$, $t > 0$, sendo o domínio computacional dado por $0 \leq x \leq L_x$,

$0 \leq y \leq L_y$, com $L_x = L_y = 0,5$ e $\Delta t = 10^{-2}$. Os resultados numéricos encontrados foram comparados com Zhu et al. (2010), considerando o erro máximo para o critério de parada para o método de Gauss-Seidel de 10^{-14} e Erro 1 = |Numérica – Analítica $u(x, y, t)$ | e Erro 2 = |Numérica – Analítica $v(x, y, t)$ |. As soluções numéricas para diferentes intervalos de tempo e diferentes pontos da malha são dadas pelas Tabelas 5 e 6.

Nas tabelas a seguir pode-se notar que o método atinge uma precisão, ao menos, na ordem de 10^{-14} quando comparado com o trabalho de Zhu et al. (2010), o que demonstra um excelente desempenho.

Tabela 5: Comparação do Caso 1 para $t = 0,1$.

Pontos da malha	Zhu et al. (2010), $\Delta t=10^{-4}, \Delta x=\Delta y=0,025$		Presente trabalho, $\Delta t=10^{-2}, \Delta x=\Delta y=0,05$	
	Erro 1	Erro 2	Erro 1	Erro 2
(0,1;0,1)	3,30750E-06	1,05384E-06	3,87467E-14	9,85322E-15
(0,3;0,1)	5,56160E-06	3,30770E-06	4,59632E-14	1,18516E-14
(0,2;0,2)	6,61520E-06	2,10766E-06	7,67719E-14	1,96925E-14
(0,4;0,2)	8,86940E-06	2,25400E-06	3,45279E-14	9,02056E-15
(0,1;0,3)	7,66960E-06	7,52340E-06	4,32986E-14	1,11577E-14
(0,3;0,3)	9,92330E-06	3,16150E-06	5,48450E-14	1,42177E-14
(0,2;0,4)	1,09769E-05	8,57700E-06	3,14193E-14	8,27116E-15
(0,3;0,4)	1,21040E-05	6,39600E-06	2,79776E-14	7,38298E-15

Tabela 6: Comparação do Caso 1 para $t = 0,4$.

Pontos da malha	Zhu et al. (2010), $\Delta t=10^{-4}, \Delta x=\Delta y=0,025$		Presente trabalho, $\Delta t=10^{-2}, \Delta x=\Delta y=0,05$	
	Erro 1	Erro 2	Erro 1	Erro 2
(0,1;0,1)	1,01945E-04	3,54833E-04	3,55271E-14	4,36733E-14
(0,3;0,1)	5,58724E-04	1,01946E-04	4,95714E-14	6,08402E-14
(0,2;0,2)	2,03891E-04	7,09666E-04	8,17124E-14	9,98090E-14
(0,4;0,2)	6,60670E-04	4,56779E-04	4,25215E-14	5,19376E-14
(0,1;0,3)	1,50942E-04	1,31739E-03	4,55191E-14	5,57331E-14
(0,3;0,3)	3,05837E-04	1,06450E-03	6,67244E-14	8,16013E-14
(0,2;0,4)	4,89963E-05	1,67222E-03	3,71924E-14	4,56301E-14
(0,3;0,4)	1,79393E-04	1,77417E-03	3,51940E-14	4,36317E-14

Caso 2: Considerando novamente as equações governantes com a solução

analítica (BAHADIR, 2003; ZHU et al., 2010): $u(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \left(1 + e^{\left(\frac{1}{32v}(-t-4x+4y) \right)} \right)}$ e

$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \left(1 + e^{\left(\frac{1}{32v}(-t-4x+4y) \right)} \right)}, \quad t > 0,$$

As condições iniciais e de contorno são dadas pela solução analítica e o domínio computacional do problema é $0 \leq x \leq L_x$ e $0 \leq y \leq L_y$, com $L_x = L_y = 1$. Os cálculos numéricos foram realizados usando uma malha uniforme com largura constante $\Delta x = \Delta y = 0,05$. Para a comparação foi calculada a solução numérica em alguns pontos da malha para alguns intervalos de tempo considerando $\Delta t = 10^{-4}$. As Tabelas 7 e 8 mostram os valores numéricos de u e v para alguns pontos da malha considerando $v = 1/100$ para os instantes de tempo $t = 0,01$ e $t = 0,5$.

Tabela 7: Comparação dos erros absolutos para $u(x, y, t)$ em $v = 1/100$, $\Delta x = \Delta y = 0,05$ (tempo de execução = 1,094 s para $t = 0,01$ e 92,796 s para $t = 0,5$).

Pontos da malha	$t = 0,01$				$t = 0,5$			
	Zhu et al. (2010), $\Delta t = 10^{-4}$	Bahadir (2003), $\Delta t = 10^{-4}$	Young et al. (2008), $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$	Presente trabalho, $\Delta t = 10^{-4}$	Zhu et al. (2010), $\Delta t = 10^{-4}$	Bahadir (2003), $\Delta t = 10^{-4}$	Young et al. (2008), $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$	Presente trabalho, $\Delta t = 10^{-4}$
(0,1;0,1)	5,91E-05	7,24E-05	7,58E-04	2,28E-06	2,78E-04	5,13E-04	9,72E-04	6,55E-05
(0,5;0,1)	4,84E-06	2,43E-05	1,21E-05	2,27E-05	4,52E-04	8,86E-04	7,13E-04	6,63E-06
(0,9;0,1)	3,41E-08	8,40E-06	1,10E-05	1,57E-07	3,37E-06	6,53E-05	6,92E-04	8,93E-08
(0,3;0,3)	5,91E-05	8,25E-05	6,30E-05	6,47E-06	2,78E-04	7,32E-04	1,25E-03	8,08E-03
(0,7;0,3)	4,84E-06	3,41E-05	2,07E-06	2,36E-05	4,52E-04	6,27E-04	7,43E-04	1,94E-04
(0,1;0,5)	1,64E-06	5,62E-05	4,04E-06	2,46E-05	2,87E-04	4,02E-04	9,14E-04	3,25E-04
(0,5;0,5)	5,91E-05	7,33E-05	6,30E-05	6,48E-06	2,78E-04	3,47E-04	1,10E-03	1,40E-02

Tabela 8: Comparação dos erros absolutos para $v(x, y, t)$
em $\nu = 1/100$, $\Delta x = \Delta y = 0,05$.

Pontos da malha	$t = 0,01$				$t = 0,5$			
	Zhu et al. (2010), $\Delta t = 10^{-4}$	Bahadir (2003), $\Delta t = 10^{-4}$	Young et al. (2008), $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$	Presente trabalho, $\Delta t = 10^{-4}$	Zhu et al. (2010), $\Delta t = 10^{-4}$	Bahadir (2003), $\Delta t = 10^{-4}$	Young et al. (2008), $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$	Presente trabalho, $\Delta t = 10^{-4}$
(0,1;0,1)	5,91E-05	8,36E-05	7,30E-05	2,28E-06	2,78E-04	6,17E-04	9,08E-04	6,55E-05
(0,5;0,1)	4,84E-06	5,14E-05	7,93E-06	2,27E-05	4,52E-04	4,67E-04	1,38E-03	6,63E-06
(0,9;0,1)	3,41E-08	7,03E-06	9,00E-06	1,57E-07	3,37E-06	1,70E-05	1,39E-03	8,93E-08
(0,3;0,3)	5,91E-05	6,15E-05	6,30E-05	6,47E-06	2,78E-04	6,25E-04	7,18E-04	8,08E-03
(0,7;0,3)	4,84E-06	5,41E-05	2,07E-06	2,36E-05	4,52E-04	4,66E-04	1,38E-03	1,94E-04
(0,1;0,5)	1,64E-06	7,35E-05	5,96E-06	2,46E-05	2,87E-04	8,72E-04	7,96E-04	3,25E-04
(0,5;0,5)	5,91E-05	8,51E-05	6,30E-05	6,48E-06	2,78E-04	6,23E-04	1,72E-04	1,40E-02

Através da análise dos erros absolutos apresentados, pode-se verificar que a aproximação numérica do método desenvolvido neste trabalho é, de modo geral, melhor ou compatível com as apresentadas por Zhu et al. (2010), Bahadir (2003) e Young et al. (2008) sendo que a ordem de precisão obtida neste trabalho é superior em, ao menos, uma ordem, com exceção do ponto de coordenadas (0,5, 0,5) no passo de tempo $t = 0,5$, devido ao fato de que a solução analítica, nesse ponto, apresenta uma descontinuidade.

Caso 3: Neste caso, considera-se a seguinte solução analítica dada por Kweyu et al. (2012):

$$u(x, y, t) = \nu \left(\frac{-2y - 2\pi e^{\nu(-2\pi^2 t)} ((\cos(\pi x) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y))}{100 + xy + 2\pi e^{\nu(-2\pi^2 t)} ((\cos(\pi x) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y))} \right) e$$

$$v(x, y, t) = \nu \left(\frac{-2x - 2\pi e^{\nu(-2\pi^2 t)} ((\cos(\pi x) + \sin(\pi x)) \sin(\pi y))}{100 + xy + 2\pi e^{\nu(-2\pi^2 t)} ((\cos(\pi x) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y))} \right),$$

O domínio computacional é dado por $0 \leq x, y \leq 0,5$ e foi utilizada uma malha uniforme com $\Delta x = \Delta y = 0,025$, além de $\Delta t = 10^{-4}$.

Tabela 9: Comparação da solução numérica com a solução analítica de alguns pontos na malha para u e v em $t = 0,01$ e $\nu = 1/1000$.

Pontos da malha	$u(x, y, t)$		$v(x, y, t)$	
	Analítica	Presente trabalho	Analítica	Presente trabalho
(0,1;0,1)	-1,4433E-05	-1,4435E-05	-7,7122E-05	-7,7130E-05
(0,3;0,1)	2,2955E-06	2,2959E-06	-8,9486E-05	-8,9494E-05
(0,2;0,2)	-1,2148E-05	-1,2149E-05	-7,4861E-05	-7,4868E-05
(0,1;0,3)	-3,8419E-05	-3,8422E-05	-4,8262E-05	-4,8267E-05
(0,4;0,3)	2,6737E-05	2,6740E-05	-5,4746E-05	-5,4751E-05
(0,2;0,4)	-2,1156E-05	-2,1157E-05	-3,1025E-05	-3,1028E-05
(0,3;0,4)	5,2222E-06	5,2236E-06	-3,3145E-05	-3,3148E-05

Nota-se, a partir da Tabela 9, que foram alcançados bons resultados para alguns pontos do domínio computacional. As soluções aproximadas de $u(x,y,t)$ e $v(x,y,t)$, propostas pelo presente método segundo as condições do caso 3, ou seja, $t = 0,01$ e $\nu = 1/1000$, são apresentadas na Fig. 9.

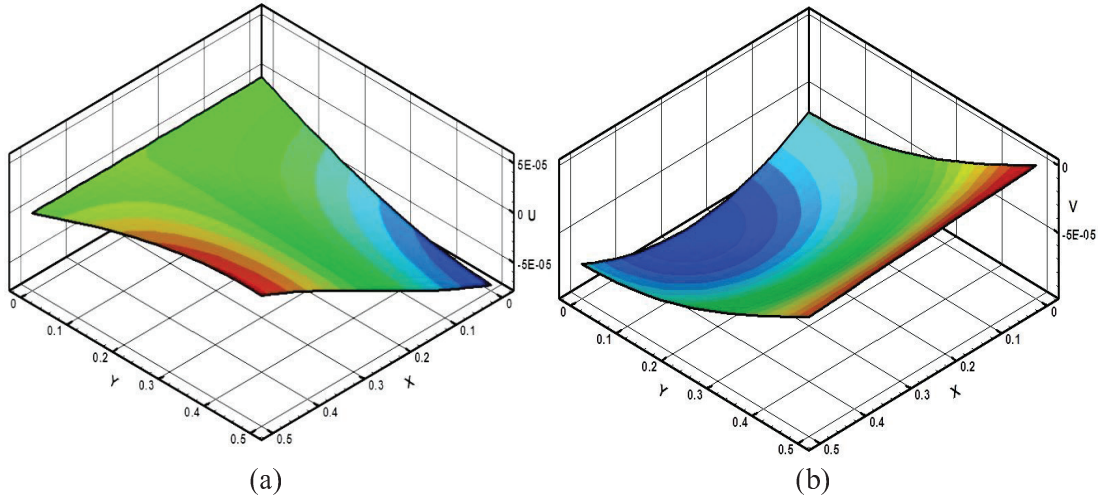


Figura 9: Soluções numéricas para (a) u e (b) v em $t = 0,01$ e $\nu = 1/1000$.

Vale ressaltar que a técnica de linearização proposta neste trabalho tem a vantagem de, além de ser de fácil implementação, não requer o uso de várias iterações dentro de cada passo de tempo.

3.5 Convecção-Difusão Linear Transiente Tridimensional

Nesta aplicação, será considerada a equação da energia em coordenadas cartesianas dada pela Eq. (17) e a discretização temporal e espacial dada pelas Eqs. (22-25). O sistema linear gerado pela equação governante e pelas condições de contorno foi resolvido usando o método de Gauss-Seidel e a solução foi comparada com a solução analítica no caso 1 usando a norma L_∞ .

Caso 1: Nesta aplicação, considerou-se um caso puramente difusivo segundo a equação $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$ cuja solução analítica é $T(x,y,z,t) = e^{(t+x+y+z)}$. O domínio computacional é $0 \leq x,y,z \leq 1$ e $t = 1$ e foi utilizada uma malha com espaçamento regular $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. A Tabela 10 apresenta os erros associados à solução numérica em comparação com a solução analítica segundo a norma L_∞ considerando o erro máximo para o critério de parada para o método de Gauss-Seidel da ordem de 10^{-8}

ao passo que a Tabela 11 mostra o tempo gasto, em segundos, para a execução computacional.

Tabela 10: Erro associado segundo a norma L_∞ .

Δt	$\Delta x = \Delta y = \Delta z$			
	1/10	1/20	1/40	1/50
0,1	2,18E-03	1,81E-03	1,79E-03	1,79E-03
0,05	9,29E-04	4,76E-04	4,50E-04	4,48E-04
0,01	6,25E-04	6,27E-05	1,91E-05	1,74E-05
0,005	6,16E-04	5,74E-05	6,13E-06	4,20E-06
0,001	6,13E-04	5,60E-05	4,40E-06	1,90E-06

Tabela 11: Tempo gasto para execução (em segundos).

Δt	$\Delta x = \Delta y = \Delta z$			
	1/10	1/20	1/40	1/50
0,1	0,859	12,266	291,594	856,844
0,05	1,125	14,156	334,063	1019,172
0,01	2,219	19,203	439,656	1269,281
0,005	2,734	24,485	453,406	1494,672
0,001	8,844	52,343	709,250	2009,328

Caso 2: Nesta aplicação, considerou-se um caso convectivo-difusivo segundo a equação $\frac{\partial T}{\partial t} + 2 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ cuja solução analítica é $T(x,y,z,t) = e^{(t+x+y+z)}$. O domínio computacional é $0 \leq x,y,z \leq 1$ e $t = 1$ e foi utilizada uma malha com espaçamento regular $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. A Tabela 12 apresenta os erros associados à solução numérica em comparação com a solução analítica segundo a norma L_∞ considerando o erro máximo para o critério de parada para o método de Gauss-Seidel da ordem de 10^{-8} enquanto que Tabela 13 mostra o tempo gasto, em segundos, para a execução computacional.

Tabela 12: Erro associado segundo a norma L_∞ .

Δt	$\Delta x = \Delta y = \Delta z$			
	1/10	1/20	1/40	1/50
0,1	4,92E-04	6,27E-04	6,35E-04	6,36E-04
0,05	1,36E-04	1,49E-04	1,57E-04	1,57E-04
0,01	2,11E-04	1,73E-05	4,96E-06	4,93E-06
0,005	2,13E-04	1,86E-05	1,30E-06	5,20E-07
0,001	2,14E-04	1,91E-05	1,49E-06	1,48E-06

Tabela 13: Tempo gasto para execução (em segundos).

Δt	$\Delta x = \Delta y = \Delta z$			
	1/10	1/20	1/40	1/50
0,1	1,375	18,875	492,563	1547,500
0,05	1,906	27,766	778,922	2222,391
0,01	3,031	40,454	1136,250	3210,422
0,005	4,954	46,297	1273,188	3604,047
0,001	11,562	89,500	1535,500	4204,719

Caso 3: Nesta aplicação, considerou-se um caso convectivo-difusivo segundo a equação $\frac{\partial T}{\partial t} + 0,8 \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0,01 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$ cuja solução analítica é dada por (KARAA, 2006; GE et al., 2013):

$$T(x, y, z, t) = (4t + 1)^{-3/2} \exp \left[-\frac{1}{0,01(4t + 1)} \left[(x - 0,8t - 0,5)^2 + (y - 0,8t - 0,5)^2 + (z - 0,8t - 0,5)^2 \right] \right].$$

As condições de contorno de Dirichlet e as condições iniciais são tomadas diretamente da solução analítica.

O domínio computacional é $0 \leq x, y, z \leq 2$, $t = 1,25$ e foi utilizada uma malha com espaçamento regular $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$.

Foi adotado $h = 0,025$ a fim de comparar os resultados obtidos neste trabalho com os apresentados por Ge et al. (2013) que implementou três metodologias para a solução da equação de difusão-convecção baseadas no método implícito da direção alternada usando diferenças finitas. Nota-se, pela Tabela 14, que os resultados deste trabalho, em comparação com a literatura escolhida, apresentam uma precisão igual ou superior, para diferentes valores de λ , sendo $\lambda = \Delta t / \lambda h^2$. Mesmo considerando uma malha menos refinada ($h = 0,05$), a metodologia aqui proposta apresenta uma precisão equivalente aos obtidos por Ge et al. (2013) com uma malha mais refinada. Já a Tabela 15 mostra o tempo gasto, em segundos, para a execução computacional.

Tabela 14: Erro associado segundo a norma L_2 para $t = 1,25$, $\Delta t = \lambda h^2$, considerando $h = 0,025$ e $h = 0,05$ e diferentes valores de λ .

λ	$h = 0,025$			$h = 0,05$	
	Método ADI de Douglas-Gunn (GE et al., 2013)	Método ADI de Karaa (GE et al., 2013)	Método compacto ADI exponencial de alta ordem (GE et al., 2013)	Presente trabalho	Presente trabalho
5	5,599E-04	5,184E-05	5,266E-05	5,261E-06	4,900E-05
10	5,764 E-04	5,268E-05	5,309E-05	1,353E-05	5,431E-05
20	5,991E-04	6,978E-05	6,674E-05	4,845E-05	8,152E-05
40	7,329E-04	2,035E-04	1,858E-04	1,907E-04	2,413E-04

Tabela 15: Tempo gasto para execução (em segundos).

λ	$h = 0,025$			$h = 0,05$	
	Método ADI de Douglas-Gunn (GE et al.,2013)	Método ADI de Karaa (GE et al.,2013)	Método compacto ADI exponencial de alta ordem (GE et al., 2013)	Presente trabalho	Presente trabalho
5	762,04	1081,65	829,45	897,953	121,344
10	379,87	551,39	412,14	476,562	72,203
20	188,42	280,35	207,96	316,64	41,875
40	97,45	142,28	104,11	138,891	28,36

Caso 4: Neste caso, considerou-se a equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Foram adotadas as seguintes propriedades termofísicas (INCROPERA e DEWITT, 2006): $\rho = 1,1614 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 1007 \text{ J/kg.K}$, $k = 0,0263 \text{ W/m.K}$, para a massa específica, calor específico e condutividade térmica, respectivamente. Assim, $\frac{k}{\rho c_p} \cong 0,00022488$. Também foi considerado um perfil de

velocidade parabólico $w(x, y, z, t) = \frac{16U_{\max}}{L_x \cdot L_y} \left(-\frac{x^2}{L_x} + x \right) \left(-\frac{y^2}{L_y} + y \right)$, sendo U_{\max} a velocidade máxima na linha de centro do escoamento.

Foi considerado ar na pressão atmosférica e temperatura de 300 K, escoando num canal retangular com dimensões $L_x \times L_y \times L_z$, com as seguintes condições de contorno, conforme a Fig. 10:

- no plano XY com $z = 0$: $T = T_{ent}$, sendo T_{ent} a temperatura de entrada no canal;
- no plano XY com $z = L_z$: $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$;
- no plano YZ com $x = 0$ ou $x = L_x$: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$;
- no plano XZ com $y = 0$: $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$;
- no plano XZ com $y = L_y$: $T = T_{resf}$, sendo T_{resf} a temperatura mais baixa que T para resfriar do fluido.

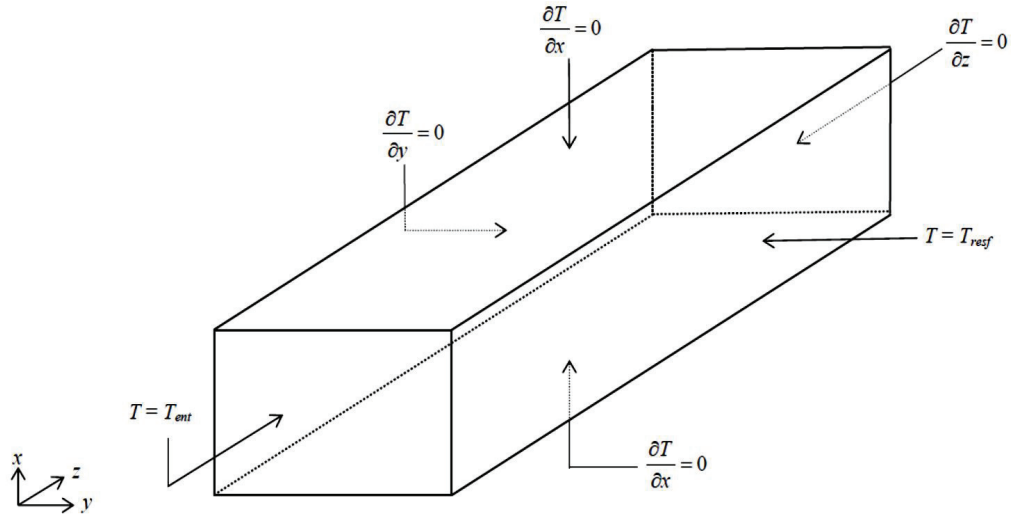


Figura 10: Domínio computacional e condições de contorno.

Considerando uma temperatura inicial e de entrada igual a 30°C, o objetivo é o resfriamento do ar a uma temperatura média de 23°C na seção de saída do canal. Se $L_x = L_y = 0,2$ m; $L_z = 1$ m e $L_t = 100$ s e considerando um refinamento da malha $\Delta x = L_x/40$, $\Delta y = L_y/40$, $\Delta z = L_z/100$ e $\Delta t = L_t/500$. Variando-se os valores da temperatura de resfriamento (T_{resf}) na entrada, os resultados para temperatura média, denotada por T_{med} , na seção de saída do canal estão apresentados na Tabela 16, considerando-se a ordem de precisão de duas casas decimais.

Pela Tabela 16, nota-se claramente que à medida que a temperatura de resfriamento decresce em 1°C a temperatura média da seção de saída reduz-se 0,16°C. Assim, a fim de atingir uma temperatura média de 15°C na seção de saída, será necessária uma temperatura de resfriamento de aproximadamente -14°C.

Outras duas estratégias para que a temperatura média esperada na saída fosse atingida foram a variação do comprimento e a dimensão da seção de entrada do canal. Assim, tomando-se $L_x = L_y = 0,2$ m e variando-se L_z e $L_t = 100$ s considerando um refinamento da malha $\Delta x = L_x/40$, $\Delta y = L_y/40$, $\Delta z = 0,01$ m e $\Delta t = L_t/500$, com $T_{resf} = 1^\circ\text{C}$ fixada, obteve-se os valores numéricos apresentados na Tabela 17. Nota-se, que foi necessário um comprimento $z = 3,5$ m para que a temperatura de 23,06°C fosse atingida evidenciando a relação entre a variação do comprimento do canal e o resfriamento do mesmo.

Tabela 16: Resultados da temperatura média (T_{med}) na seção de saída do canal em função da temperatura de resfriamento na entrada (T_{resf}), considerando $\Delta x = L_x/40$, $\Delta y = L_y/40$, $\Delta z = L_z/100$ e $\Delta t = t/500$.

T_{resf} (°C)	T_{med} (°C)
10	26,78
9	26,62
8	26,46
7	26,30
6	26,14
5	25,98
4	25,82
3	25,66
2	25,50
1	25,34
0	25,18
-1	25,02
-2	24,96
-3	24,80

Tabela 17: Resultados da temperatura média (T_{med}) na seção de saída do canal em função da variação do comprimento do canal considerando $\Delta x = L_x/40$, $\Delta y = L_y/40$, $\Delta z = 0,01$ m e $\Delta t = L_t/500$.

L_z (m)	T_{med} (°C)
1,0	25,34
1,5	24,67
2,0	24,14
2,5	23,71
3,0	23,35
3,5	23,06
4,0	22,81
4,5	22,61
5,0	22,45
5,5	22,32
6,0	22,22
6,5	22,16

Considerando, agora, a variação da seção de entrada do canal e tomando-se $L_z = 1$ m e $L_t = 100$ s e variando-se $L_x = L_y$ e considerando um refinamento da malha $\Delta x = \Delta y = 0,005$ m, $\Delta z = L_z/100$ e $\Delta t = L_t/500$, com $T_{resf} = 1^\circ\text{C}$ fixada, obteve-se os valores apresentados na Tabela 18. Pode-se notar que, para $L_z = 1$ m, $L_x = L_y = 0,1$ m, $T_{resf} = 1^\circ\text{C}$ e $L_t = 100$ s foi atingida a temperatura $T_{med} \cong 22,25^\circ\text{C}$. Porém ao se testar $L_t = 200$ s ou $L_t = 300$ s, os resultados na seção de saída não se alteraram, o que comprova o regime permanente de distribuição de temperatura.

Tabela 18: Resultados da temperatura média (T_{med}) na seção de saída do canal em função da variação da seção de entrada do canal considerando $\Delta x = \Delta y = 0,005$ m, $\Delta z = L_z/100$ e $\Delta t = L_t/500$.

$\Delta x = \Delta y$ (m)	T_{med} (°C)
0,20	25,98
0,19	25,16
0,18	24,98
0,17	24,77
0,16	24,54
0,15	24,28
0,14	23,98
0,13	23,65
0,12	23,26
0,11	22,80
0,10	22,25

Após esses resultados, testou-se para $L_z = 5$ m, $\Delta z = L_z / 500$, $L_x = L_y = 0,1$ m, $\Delta x = \Delta y = L_x / 20$, $L_t = 100$ s, $\Delta t = L_t/500$ para $T_{resf} = 1^\circ\text{C}$. Os resultados obtidos nesse caso são apresentados na Fig. 11. Pode-se notar que a temperatura média de 23°C foi atingida após 18 s.

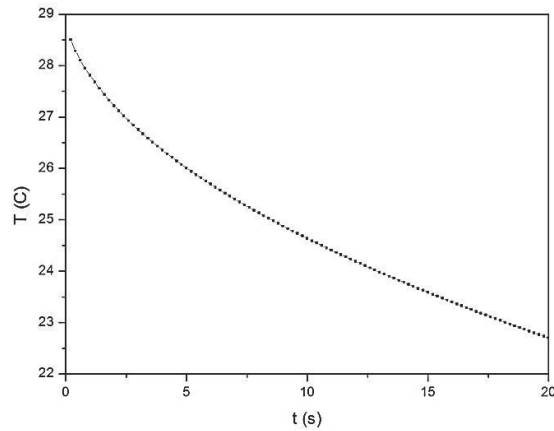


Figura 11: Resultados da temperatura média na seção de saída do canal em função do tempo

3.6 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica da Equação de Convecção-Difusão Não Linear Tridimensional

Nesse caso, foi considerada equação tridimensional não linear de Burgers dada pela Eq. (51).

Caso 1: Tomando a solução analítica da Eq. (51) dada por $u(x,y,z,t) = \exp\left(\frac{x+y-2z+6t}{v}\right)$ foi feita a comparação com a solução numérica.

Foram considerados $v = 10^0$, $t = 0,1$ e $0 \leq x,y,z \leq 0,1$ e foi utilizada uma malha com espaçamento regular $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1$. A Tabela 1 apresenta os erros associados à solução numérica em comparação com a solução analítica segundo a norma L_∞ , considerando o erro máximo para o critério de parada para o método de Gauss-Seidel da ordem de 10^{-10} , além do tempo de execução computacional e a taxa de convergência (CR), definida por (SCHATZMAN, 2002):

$$CR = \frac{\log(E_1 / E_2)}{\log(\Delta t_1 / \Delta t_2)},$$

sendo E_1 e E_2 os erros absolutos médios correspondentes às discretizações Δt_1 e Δt_2 , respectivamente.

As condições de contorno de Dirichlet e iniciais foram tomadas a partir da solução analítica. Inicialmente, foi considerado $h = 0,005$, $t = 0,1$ e variou-se Δt de 0,005 até 0,001. O erro associado à norma L_∞ e o tempo de CPU gasto são apresentados na Tabela 19. Pode-se notar que o método atinge a precisão de $2,03 \times 10^{-8}$ com um refinamento temporal de $\Delta t = 0,001$ enquanto que, para $h = 0,0025$ atinge a precisão de 9,03E-09.

Tabela 19: Erro associado a norma L_∞ , tempo gasto para execução (em segundos) e taxa de convergência para $t = 0,1$.

Δt	$h = 0,005$			$h = 0,0025$		
	norma L_∞	tempo de CPU (s)	CR	norma L_∞	tempo de CPU (s)	CR
0,00500	4,69E-07	60,781	-	4,58E-07	1744,875	-
0,00250	1,16E-07	103,172	2,02	1,05E-07	2873,437	2,12
0,00167	5,29E-08	137,375	1,93	4,14E-08	3708,547	2,29
0,00125	3,06E-08	165,328	1,91	1,92E-08	4842,578	2,67
0,00100	2,03E-08	189,110	1,84	9,03E-09	5391,891	3,38

A Fig. 12 mostra a norma L_∞ do erro e perfil da velocidade u no plano XY , considerando-se $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L_x/20$, sendo $L_x = L_y = L_z = 0,1$. Pode-se notar que o maior erro ocorre no centro do plano analisado, conforme a Fig 12(a).

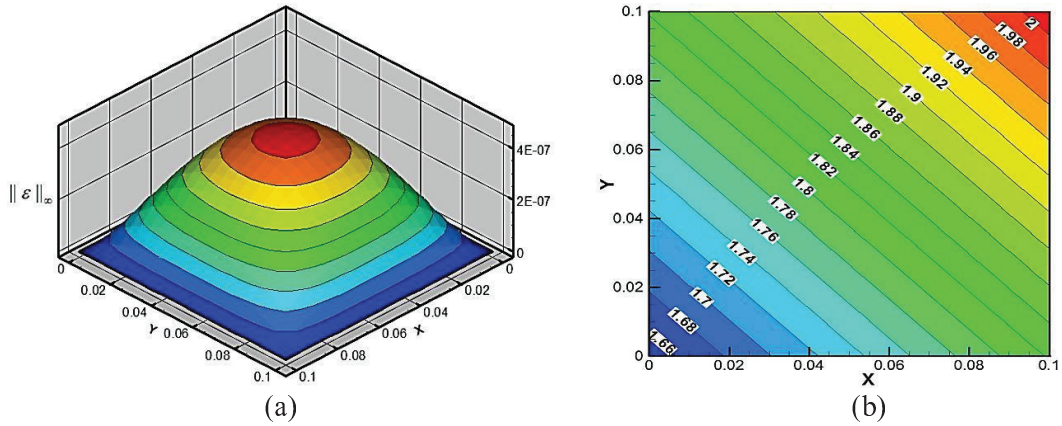


Figura 12: (a) Norma L_∞ do erro e (b) perfil de u , ambos no plano XY , considerando-se $z = 0,05$ e $t = 0,1$.

Caso 2: Considerando, agora, o domínio computacional como sendo um cubo unitário e $t = 0,1$, sujeito à condição inicial $u(x, y, z, 0) = \text{sen}(2\pi x) \cos(2\pi y) z$ e à condição de contorno $u(x, y, z, t) = \text{sen}(2\pi x) \cos(2\pi y) z e^t$.

Nas Figs. 13 e 14 a seguir são apresentados os perfis bi e tridimensionais, respectivamente, da velocidade u no plano XY com $z = 0,5$ e no plano XZ com $y = 0,5$ considerando $\nu = 10^0$ e $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L_x/20$ e $\Delta t = L_t/20$.

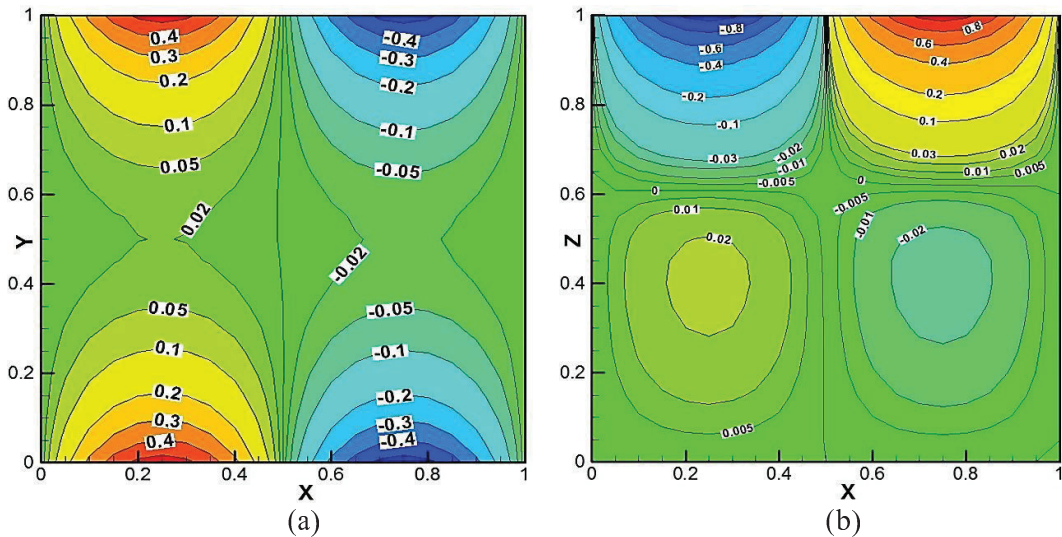


Figura 13: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^0$.

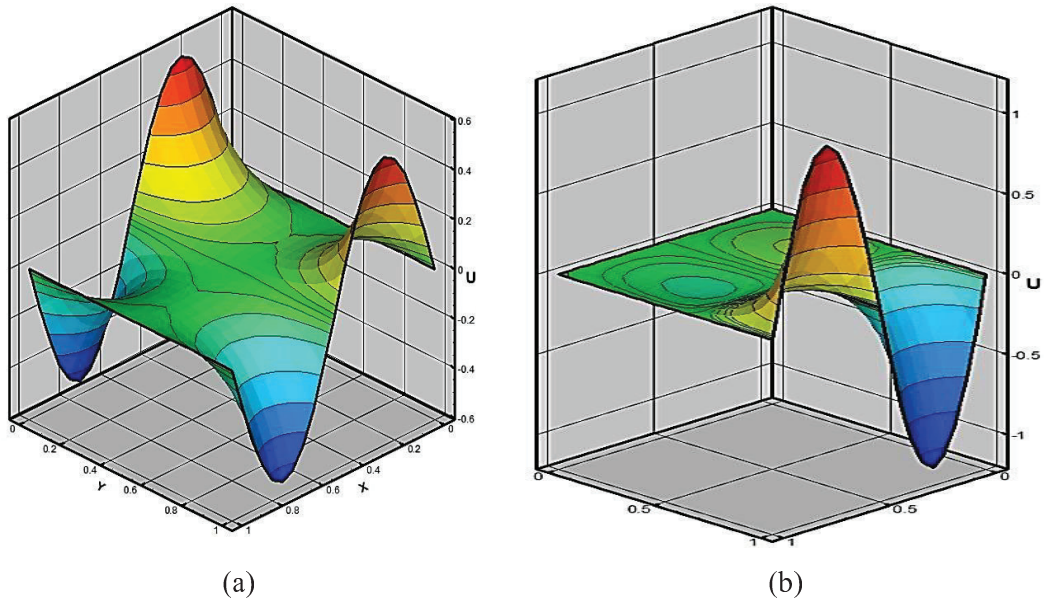


Figura 14: Perfil tridimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^0$.

Nas Figs. 15 e 16, a seguir, é apresentado o perfil bidimensional da velocidade u no plano XY com $z = 0,5$ e no plano XZ com $y = 0,5$ considerando-se, respectivamente, $\nu = 10^{-1}$ e $\nu = 10^{-2}$, ambos com $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L_x/20$ e $\Delta t = L_t/20$.

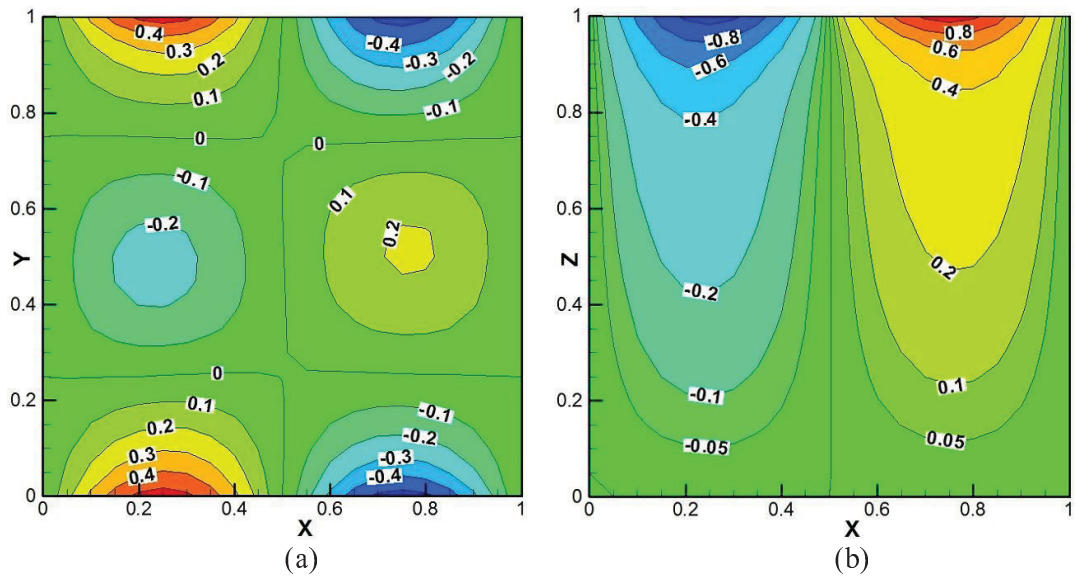


Figura 15: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^{-1}$.

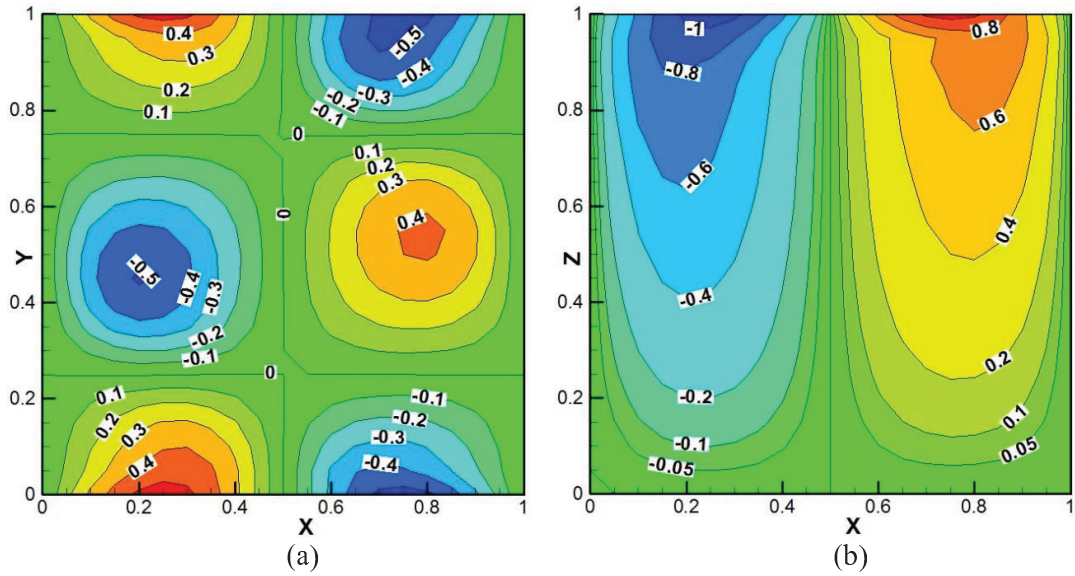


Figura 16: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando-se $\nu = 10^{-2}$.

A fim de amenizar as oscilações numéricas presentes nos casos anteriores, foi feito um refinamento na malha, considerando-se, agora, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L_x/40$ e $\Delta t = L_t/20$. Assim, nas condições do caso anterior, foi obtido o perfil de velocidade apresentado na Fig. 17.

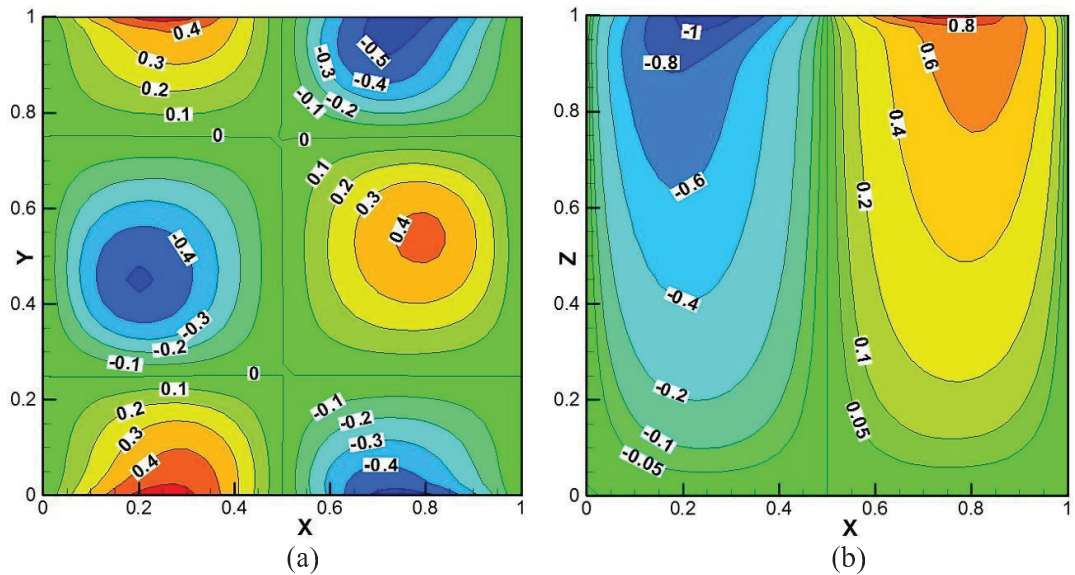


Figura 17: Perfil bidimensional de u (a) no plano XY com $z = 0,5$ e (b) no plano XZ com $y = 0,5$, considerando $\nu = 10^{-2}$.

3.7 Técnica de Linearização aplicada à Solução Numérica do Sistema Tridimensional de Equações de Convecção-Difusão Não Lineares

Nesse caso, foi considerado o sistema de equações governantes (Eqs. 33a-c) bem como sua discretização temporal e espacial dada pelas Eqs. (39-50).

Serão apresentados três casos, sendo que, nos dois primeiros para efeito de validação do código, serão feitas comparações com soluções analíticas disponíveis na literatura e, no terceiro, será considerado escoamento num canal retangular.

Caso 1: Nesse caso, com o objetivo de validar o código computacional, foi adotada a seguinte solução analítica (ROMÃO, 2014): $u(x, y, z, t) = \frac{-0,5x + y + z - 2,25xt}{1 - 2,25t^2}$,

$$v(x, y, z, t) = \frac{x - 0,5y + z - 2,25yt}{1 - 2,25t^2} \text{ e } w(x, y, z, t) = \frac{x + y - 0,5z - 2,25zt}{1 - 2,25t^2}.$$

Considerando-se $L_x = L_y = L_z = 1$, $L_t = 0,1$, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L_x/20$, $\Delta t = L_t/20$, os resultados numéricos encontrados foram comparados com as soluções analíticas apresentadas anteriormente. considerando o erro máximo para o critério de parada para o método de Gauss-Seidel da ordem de 10^{-14} .

A Tabela 20 a seguir apresenta a precisão numérica da solução de u , v e w de acordo com as normas L_∞ e L_2 para a malha utilizada. Nota-se que a precisão para a norma L_2 é da mesma ordem do erro de truncamento do método de Gauss-Seidel. Tal fato foi evidenciado em outros testes realizados, ou seja, à medida que se alterasse a ordem do erro de truncamento da precisão numérica da solução de u , v e w , o mesmo acontecia com a ordem do erro de truncamento para o método de Gauss-Seidel.

Tabela 20 - Análise de precisão numérica da solução de u , v e w segundo as normas L_∞ e L_2 .

	norma L_∞	norma L_2
u	1,48E-13	4,46E-14
v	1,51E-13	4,55E-14
w	1,54E-13	4,64E-14

A Fig. 18 (a-c) a seguir mostra os perfis de velocidade de u , v e w no plano XY , respectivamente, para $z = 0,5$. Pode-se notar, por exemplo, na Fig. 18 (a), para $x = y = 1$ o perfil da velocidade atinge, aproximadamente, $u \approx 0,8$, o que se aproxima do valor fornecido pela solução analítica, que é $u \approx 0,7928$. Já na Fig. 18 (b), para $x = 0$ e $y = 0,15$, o perfil da velocidade v atinge o valor aproximado de 0,4, o que coincide com

o valor obtido via solução analítica ($v \approx 0,40025$). Finalmente, na Fig. 18 (c), para $x = 0$ e $y = 0,75$, tem-se $w(0;0,75;0,5;0,1) \approx 0,4$, o que se aproxima do valor de $w \approx 0,3964$, obtido via solução analítica.

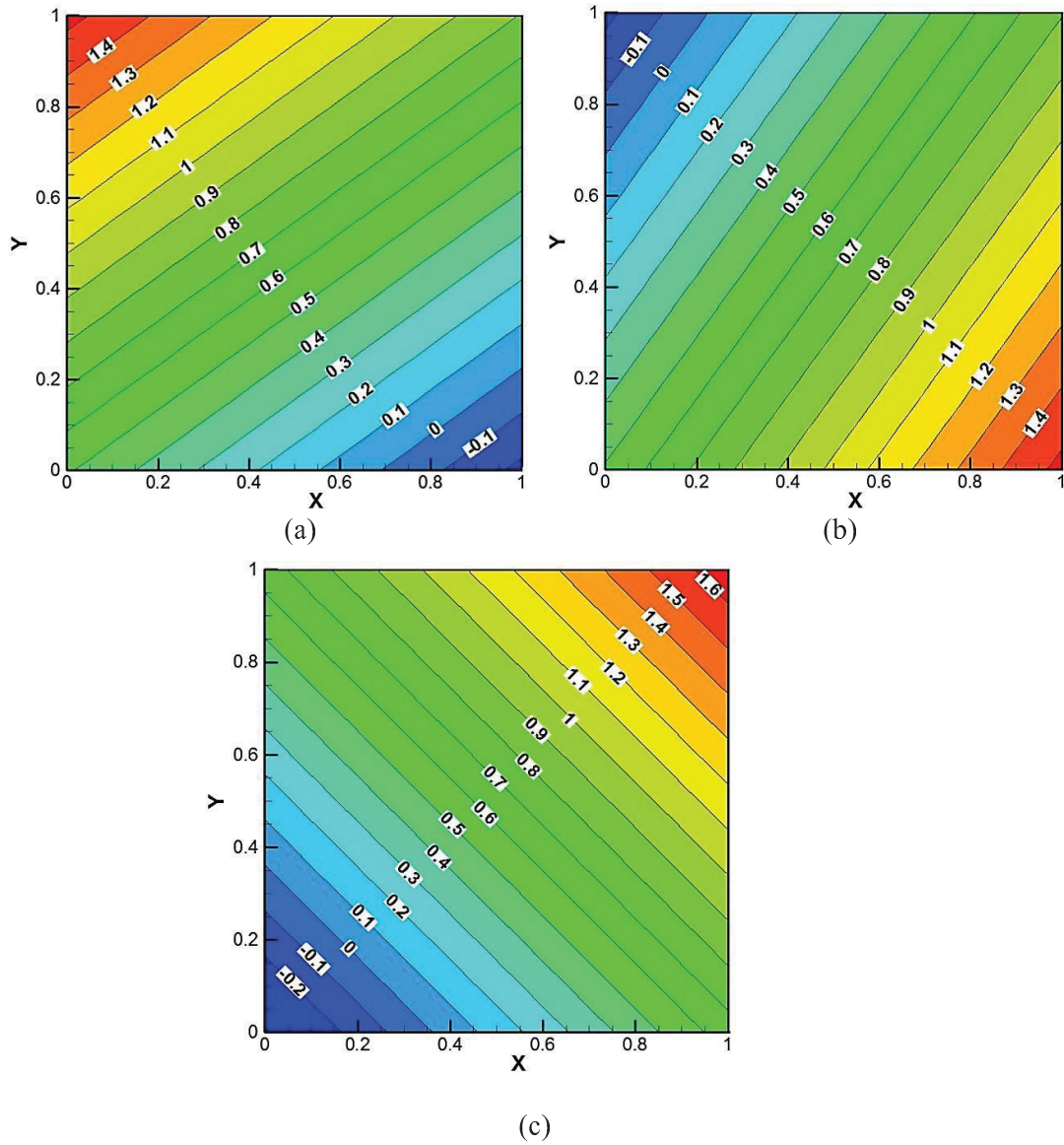


Figura 18: Perfil bidimensional de (a) u (b) v e (c) w no plano XY com $z = 0,5$.

Caso 2: Considerando as equações governantes dadas pela Eq. 33 (a-c) com a seguinte solução analítica proposta por Srivastava et al. (2013):

$$u(x, y, z, t) = -\frac{2}{\text{Re}} \frac{a_2 + a_3 y + a_7 z + a_8 yz + \gamma A (B \cos \gamma x - C \sin \gamma x) (D \sin \delta y + E \cos \delta y) (F \sin \mu z + G \cos \mu z) e^{\left(\frac{-\alpha^2}{\text{Re}} t\right)}}{H},$$

$$v(x, y, z, t) = -\frac{2}{\text{Re}} \frac{a_3 + a_5 x + a_6 z + a_8 xz + \delta A (B \sin \gamma x + C \cos \gamma x) (D \cos \delta y - E \sin \delta y) (F \sin \mu z + G \cos \mu z) e^{\left(\frac{-\alpha^2}{\text{Re}} t\right)}}{H},$$

$$w(x, y, z, t) = -\frac{2}{\text{Re}} \frac{a_3 + a_6 y + a_7 x + a_8 xy + \mu A (B \sin \gamma x + C \cos \gamma x) (D \sin \delta y + E \cos \delta y) (F \cos \mu z - G \sin \mu z) e^{\left(\frac{-\alpha^2}{\text{Re}} t\right)}}{H}$$

sendo

$$H = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 yz + a_7 xz + a_8 xyz + A (B \sin \gamma x + C \cos \gamma x) (D \sin \delta y + E \cos \delta y) (F \sin \mu x + G \cos \mu y) e^{\left(\frac{-\alpha^2}{\text{Re}} t\right)}; \alpha, \gamma, \delta, \mu, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, A, B, C, D, E, F \text{ e } G \text{ constantes arbitrárias.}$$

Tomando $a_1 = a_2 = 1; a_3 = a_4 = \dots = a_8 = 0; A = B = D = F = 1; C = E = G = 0;$
 $\gamma = \delta = \mu = 1$ e $\alpha = \sqrt{\text{Re}}$, a solução analítica utilizada é da forma:

$$u(x, y, z, t) = -\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{1 + \cos x \sin y \sin z e^{-t}}{1 + x + \sin x \sin y \sin z e^{-t}} \right), \quad v(x, y, z, t) = -\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\sin x \cos y \sin z e^{-t}}{1 + x + \sin x \sin y \sin z e^{-t}} \right)$$

e $w(x, y, z, t) = -\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\sin x \sin y \cos z e^{-t}}{1 + x + \sin x \sin y \sin z e^{-t}} \right).$

Considerou-se $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z, L_x = L_y = L_z = L_t = 0,1$ e o erro máximo para o critério de parada para o método de Gauss-Seidel da ordem de 10^{-10} .

A Tabela 21 apresenta a análise do erro em u , o qual é idêntico aos encontrados para v e w , considerando-se $h = \Delta t = 0,005$ e variando-se a viscosidade cinemática. Vale ressaltar que foram feitos alguns testes computacionais fixando a viscosidade cinemática e refinando espacialmente ou temporalmente a malha, sendo insignificante o ganho na precisão da solução.

Tabela 21 - Análise de precisão numérica da solução de u para $h = \Delta t = 0,005$ variando-se a viscosidade cinemática.

ν (m ² /s)	norma L_∞	norma L_2
10^1	2,95E-05	9,80E-06
10^0	5,79E-06	1,98E-06
10^{-1}	1,98E-06	7,12E-07
10^{-2}	2,70E-06	9,66E-07
10^{-3}	9,76E-07	3,29E-07
10^{-4}	1,45E-07	4,51E-08
10^{-5}	1,60E-08	4,78E-09

As Figs. 19-21 mostram, respectivamente, os perfis de velocidade de u, v e w no plano XY com $z = 0,5$, considerando a viscosidade cinemática igual a 10^0 e 10^{-2} . Na

Fig. 19(a), ao se considerar, por exemplo, $x = 0,02$ e $y = 0$, o perfil da velocidade atinge, aproximadamente, $u \approx -1,96$, o que se aproxima do valor da solução analítica ($u \approx -1,9607$). De maneira similar, na Fig. 19(b), para $x = 0,075$ e $y = 0$, o perfil da velocidade u atinge o valor de $-0,01860$, coincidindo com o valor obtido via solução analítica ($u \approx -0,01860$).

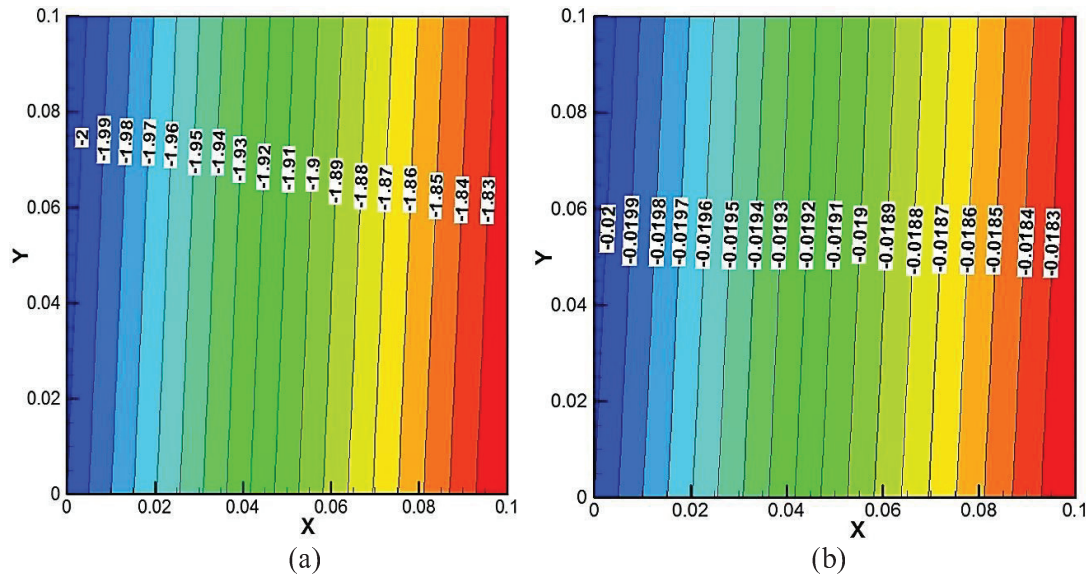


Figura 19: Perfil bidimensional de u no plano XY com $z = 0,5$ considerando-se (a) $\nu = 10^0$ e (b) $\nu = 10^{-2}$.

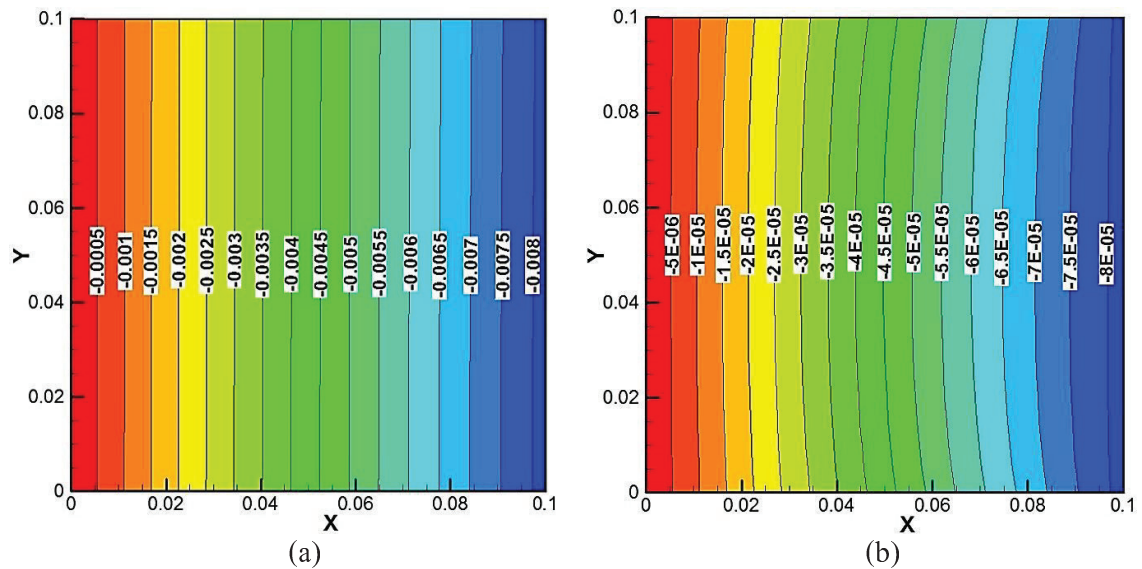


Figura 20: Perfil bidimensional de v no plano XY com $z = 0,5$ considerando-se (a) $\nu = 10^0$ e (b) $\nu = 10^{-2}$.

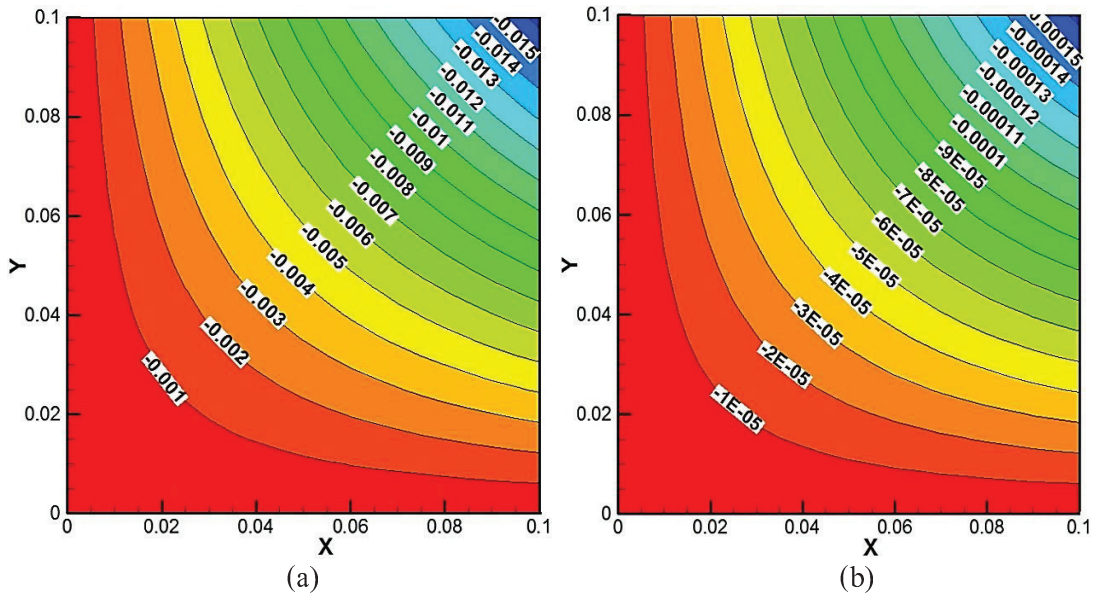


Figura 21: Perfil bidimensional de w no plano XY com $z = 0,5$ considerando-se (a) $\nu = 10^0$ e (b) $\nu = 10^{-2}$.

Caso 3: Nesse caso, consideramos como domínio computacional o canal retangular com dimensões $L_x = L_y = L_z = 0,1$ m, $L_t = 0,2$ s e como condição inicial $u = v = w = 0$. As condições de contorno, conforme a Fig. 22, são as seguintes:

- no plano XY com $x = 0$: $u = v = w = 0,1$ m/s;
- no plano XY com $x = L_x$: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$;
- nos outros planos foi adotada a condição de não deslizamento, i.e, $u = v = w = 0$.

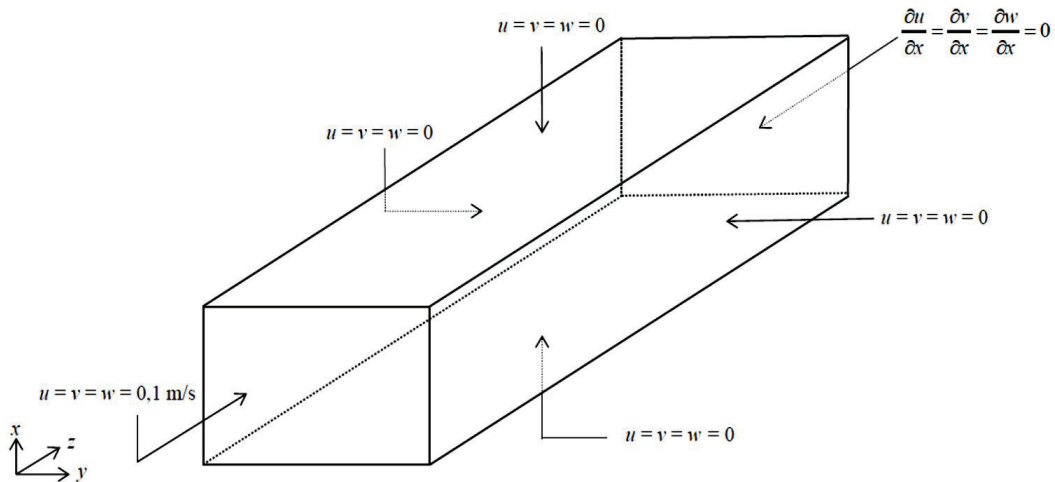


Figura 22: Domínio computacional e condições de contorno.

As Figs. 23-25, a seguir, apresentam o perfil bidimensional da velocidade u no plano XY com $z = 0,05$ m, levando-se em consideração diferentes valores de ν (Figs. 23 e 24) e fixando-se $\nu = 10^{-4}$ m²/s e fazendo o refinamento espacial (Fig. 25). Em todos os casos, os valores numéricos de u atingiram o intervalo de 0 a 0,1 m/s, com exceção do caso da Fig. 24 (a) na qual os resultados ficaram no intervalo de $-1,05E-07$ a 0,111 m/s. Note ainda que, no caso da Fig. 25, o refinamento espacial ($h = L_x/40$ no caso (a) e $h = L_x/100$ no caso (b)) amenizou as oscilações numéricas.

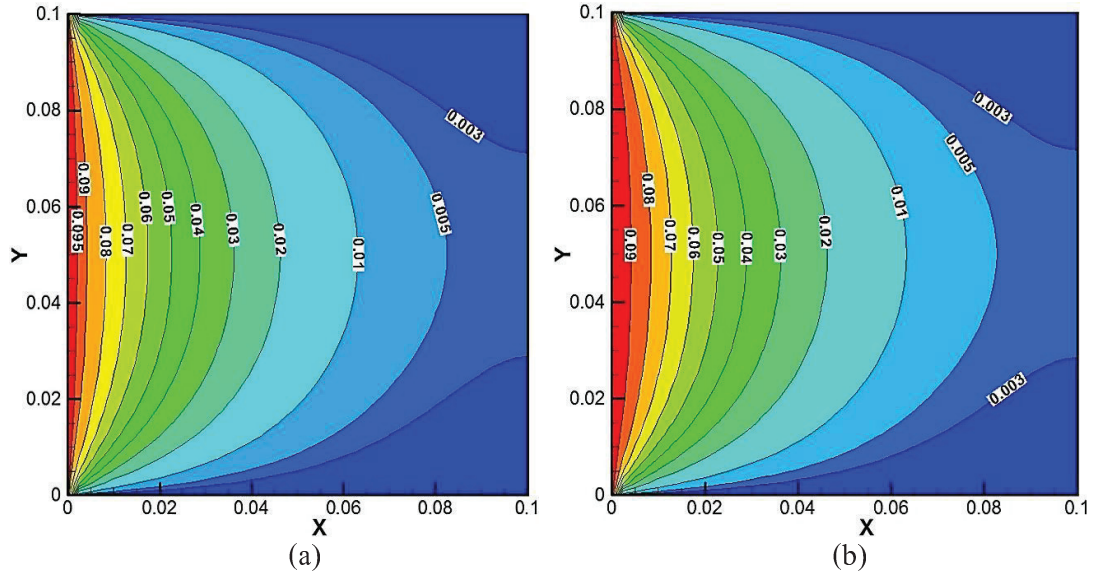


Figura 23: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m, $h = L_x/40$, $\Delta t = L_t/100$ considerando (a) $\nu = 10^0$ m²/s e (b) $\nu = 10^{-1}$ m²/s.

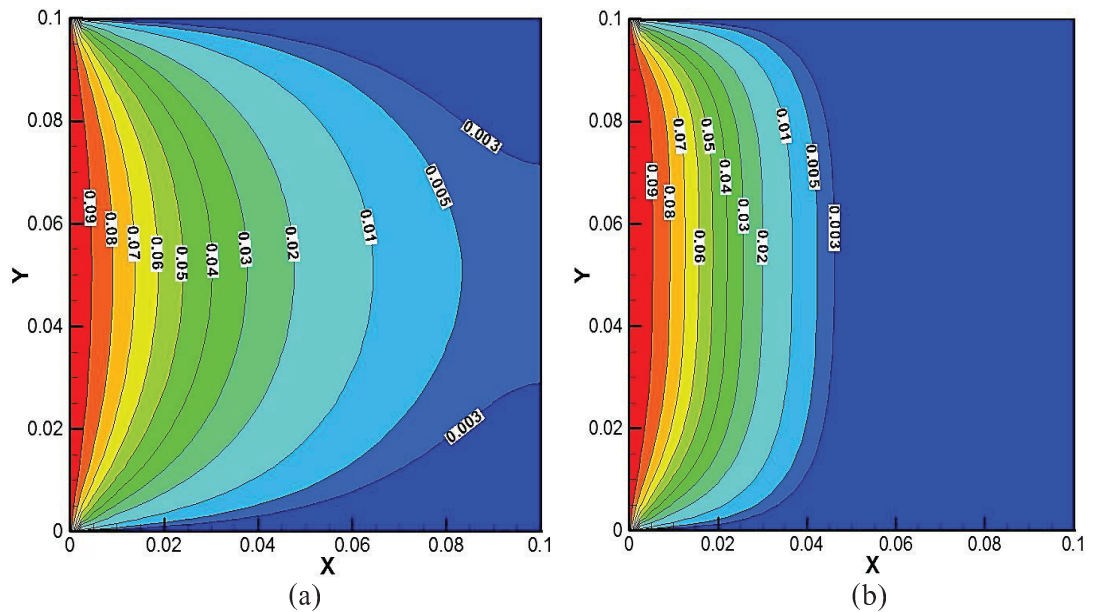


Figura 24: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m, $h = L_x/40$, $\Delta t = L_t/100$ considerando (a) $\nu = 10^{-2}$ m²/s e (b) $\nu = 10^{-3}$ m²/s.

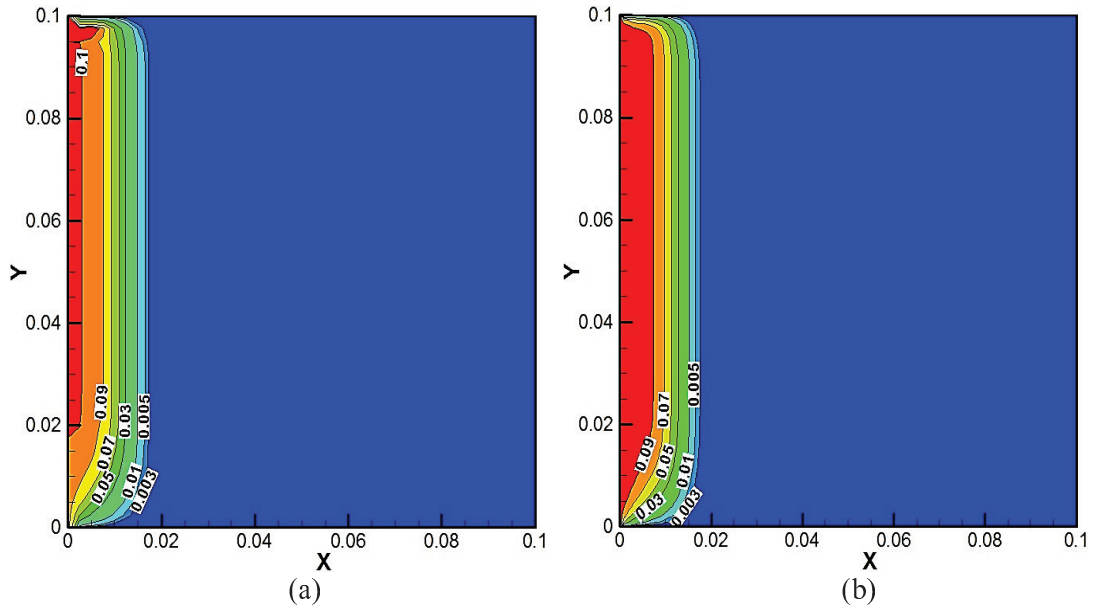


Figura 25: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m, $\nu = 10^{-4}$ m²/s, $\Delta t = L_y/100$ considerando (a) $h = L_x/40$ e (b) $h = L_x/100$.

Para o caso em que $\nu = 10^{-5}$ m²/s, devido à falta de memória virtual, não foi possível realizar um refinamento significativo na malha e, conseqüentemente, a convergência dos resultados. Assim, foi necessário reduzir as dimensões do domínio para que se realizasse um refinamento no qual a convergência dos resultados pudesse ser alcançada. Dessa forma, nas mesmas condições iniciais e de contorno utilizadas anteriormente, porém agora num canal retangular com dimensões $L_x = 0,1$ m, $L_y = L_z = 0,01$ m, $\Delta x = L_x/200$, $\Delta y = \Delta z = L_y/50$, $0,2 \leq t \leq 10$ e $\Delta t = 10^{-3}$ s, obteve-se os perfis de velocidade u mostrados, nas Figs. 26 a 30, para $t = 0,2$ s, $t = 0,4$ s, $t = 1$ s, $t = 5$ s e $t = 10$ s, respectivamente.

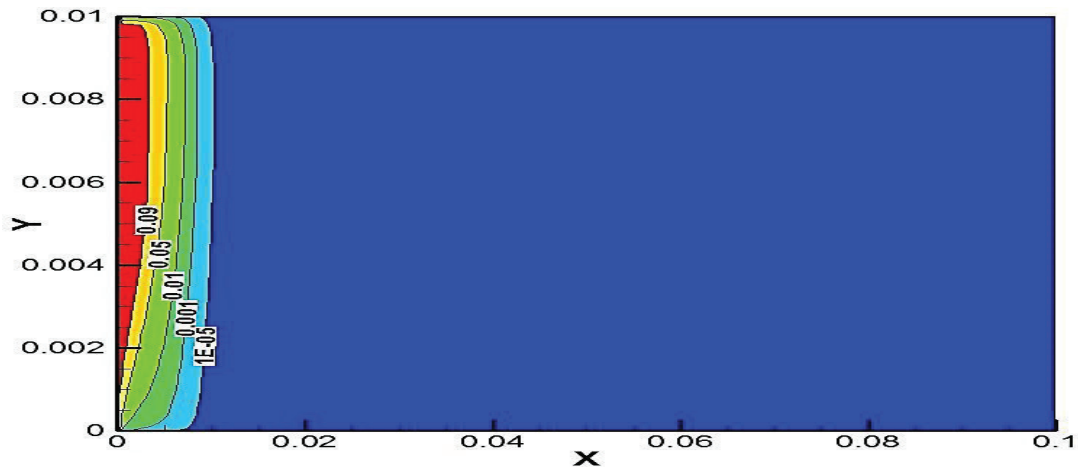


Figura 26: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m, $h = L_x/200$, $t = 0,2$ s, considerando $\nu = 10^{-5}$ m²/s.

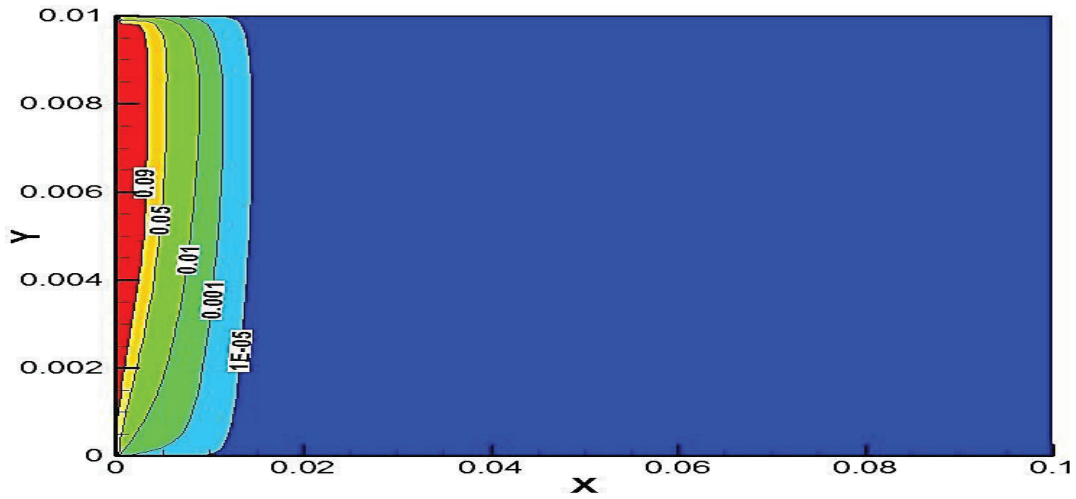


Figura 27: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m, $h = L_x/200$, $t = 0,4$ s, considerando $\nu = 10^{-5}$ m²/s.

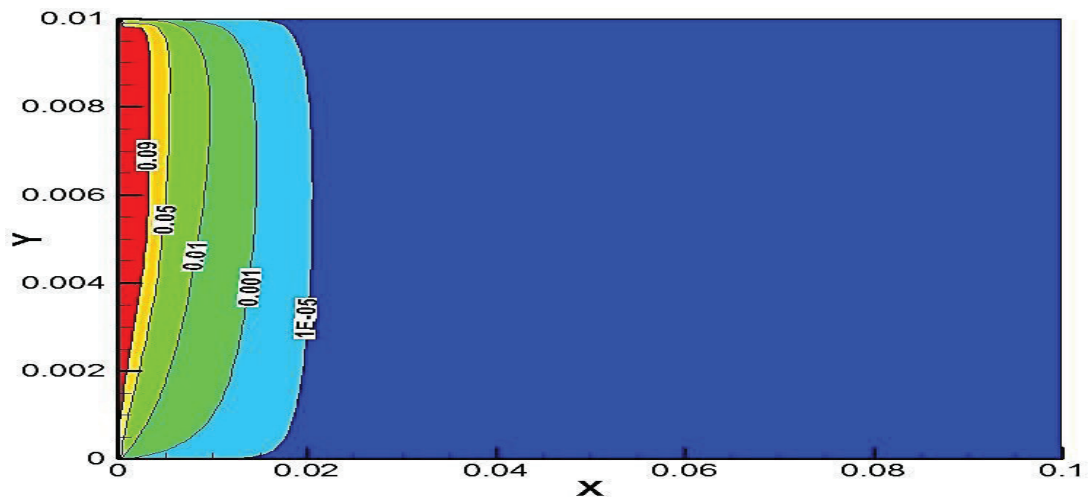


Figura 28: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m, $h = L_x/200$, $t = 1$ s, considerando $\nu = 10^{-5}$ m²/s.

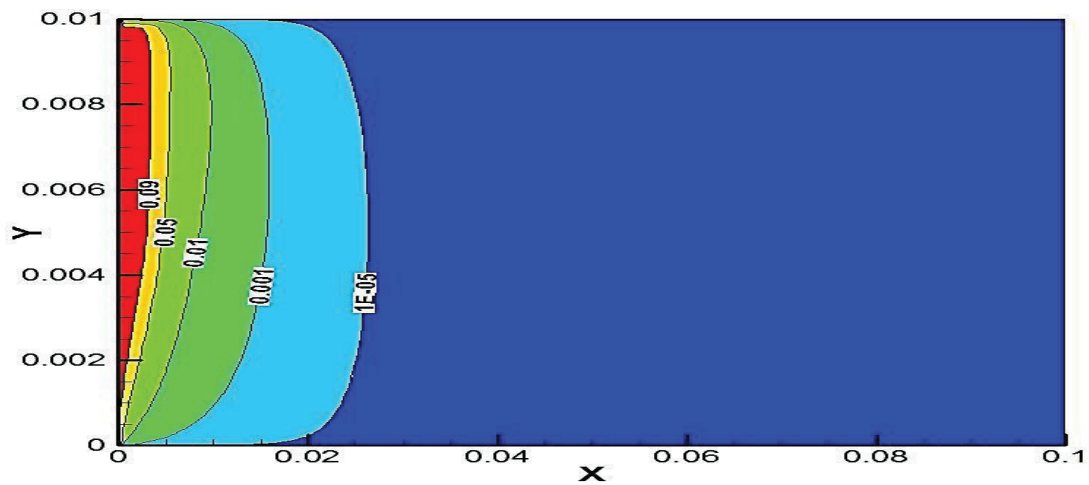


Figura 29: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m, $h = L_x/200$, $t = 5$ s, considerando $\nu = 10^{-5}$ m²/s.

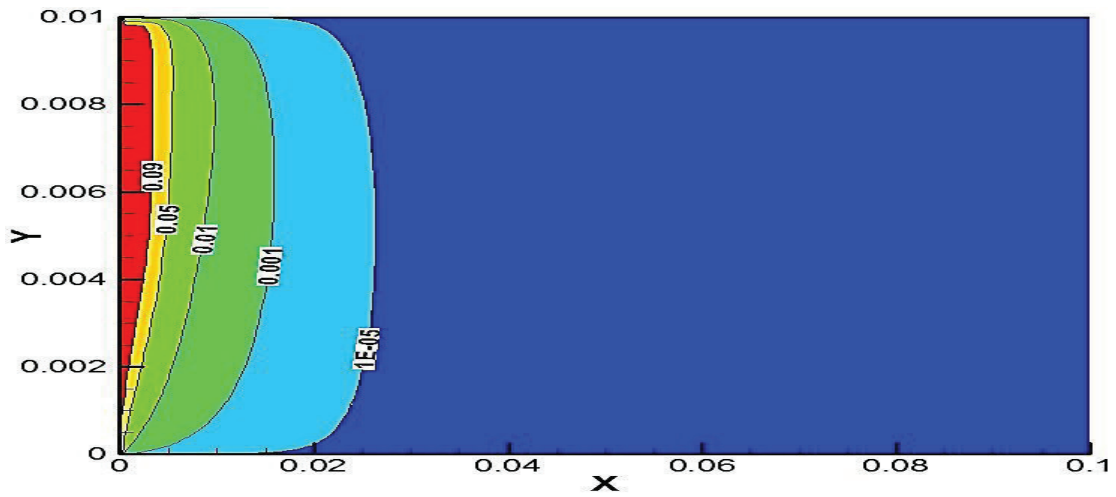


Figura 30: Perfil bidimensional de u em m/s no plano XY com $z = 0,05$ m,
 $h = L_x/200$, $t = 10$ s, considerando $\nu = 10^{-5}$ m²/s.

Pode-se notar, pelas Figs. 29 e 30 que, para $t = 5$ s e $t = 10$ s, o escoamento atinge o regime estacionário.

Conclusões e Sugestões

Neste trabalho, o método de diferenças finitas de alta ordem foi aplicado à solução numérica de problemas bi e tridimensionais de convecção-difusão. No caso dos problemas lineares foi feita uma investigação numérica do termo de dissipação viscosa na equação de transferência de calor. Já no caso de problemas não lineares, para a linearização do termo convectivo, foi utilizada uma técnica baseada no método de Newton para a solução da equação de Burgers. Em ambas as situações, a equação de convecção-difusão foi bem resolvida usando o método proposto. O esquema numérico desenvolvido é simples e computacionalmente econômico e pode ser aplicado com êxito quer na solução de problemas bi ou tridimensionais, seja no caso de difusão ou convecção dominante.

No caso dos problemas lineares bidimensionais, foram analisadas as aplicações nas quais o termo de dissipação viscosa pode ser negligenciado ou não na equação de transferência de calor. Os resultados numéricos confirmaram uma relação evidente entre situações em que a alta velocidade foi combinada com uma alta viscosidade dinâmica conduzindo a uma diferença significativa entre as temperaturas. Já no caso dos problemas lineares tridimensionais, os exemplos numéricos mostraram que o método pode ser usado para se obter, com boa precisão, a solução numérica da equação, com ênfase na aplicação que envolve a troca de calor em um canal retangular.

Da mesma forma, em se tratando das equações lineares tridimensionais, excelentes resultados puderam ser obtidos. Embora na literatura esteja disponível uma gama de resultados que apresentem boa precisão numérica, no caso deste trabalho, a técnica de linearização proposta, além de fácil implementação, não faz uso de várias iterações dentro de cada passo de tempo, o que acarreta baixo custo computacional no cálculo das variáveis do problema quando comparado com as outras técnicas. E, no caso das equações não lineares tridimensionais, a técnica mostrou-se simples, estável e precisa e sem requerer qualquer tipo de processo iterativo dentro de cada intervalo de tempo, o que representa uma importante economia em tempo de cálculo.

Pretende-se dar prosseguimento às pesquisas empreendidas neste trabalho, principalmente no que se refere aos seguintes temas de interesse:

- aplicar o método na solução de problemas de convecção-difusão-reação;
- aplicar o método na simulação de dispersão de poluentes na atmosfera;
- aplicar o método para a simulação de nanofluidos.

Referências

- ANDERSON, J.D. Discretization of partial differential equations. In: WENDT, John F. (Ed.). **Computational fluid dynamics: an introduction**. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996. Chap. 5, p. 84-100.
- BAHADIR, A.R. A fully implicit finite-difference scheme for two-dimensional Burgers' equations, **Appl. Math. Comput.**, v. 137, p. 131-137, 2003.
- BASTO, M.; SEMIAO, V.; CALHEIROS, F. Dynamics and synchronization of numerical solutions of the Burgers equation, **J. Comput. Appl. Math.**, v. 231, p. 793-806, 2009.
- BIALECKI, B., FERNANDES, R.I. An alternating direction implicit backward differentiation orthogonal spline collocation method for linear variable coefficient parabolic equations, **SIAM J. Numer. Anal.**, v. 47. p. 3429–3450, 2009.
- BIAZAR, J.; AMINIKHAH, H. Exact and numerical solutions for non-linear Burger's equation by VIM, **Math. Comput. Modelling**, v. 49, p. 1394-1400, 2009.
- BRINKMAN, H.C. Heat effects in capillary flow, **Appl. Sci. Res.**, v. 2, n. 1, p. 120-124, 1951.
- CAMPOS, M.D.; ROMAO, E.C.; MOURA, L.F.M. Numerical Investigation of the Viscous Dissipation Term on 2D Heat Transfer, **Defect and Diffusion Forum**, v. 348, p. 279-284, 2014.
- ÇENGEL, Y.A. **Heat transfer: a practical approach**, 3rd ed. Mc-Graw Hill, 2006, 928 p.
- CHENG, K.C.; WU, R.S. Viscous dissipation effects on convective instability and heat transfer in plane Poiseuille flow heated from below, **Appl. Sci. Res**, v. 32, n. 4, p. 327-346, 1976.
- CHUNG, T.J. **Computational fluid dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002, 1012 p.
- CUI, M. Convergence analysis of high-order compact alternating direction implicit

- schemes for the two-dimensional time fractional diffusion equation. **Numer. Algor.**, v. 62, p. 383-409, 2013.
- CUNHA, M.C.C. **Métodos numéricos**, 2ª ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2000, 276 p.
- DAI, W., NASSAR, R. Compact ADI method for solving parabolic differential equations, **Numer. Meth. Partial Differen. Eqns**, v. 18, n. 2, p. 129-142, 2002.
- DEBLOIS, B.M. Linearizing convection terms in the Navier-Stokes equations. **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, v. 143, n.3-4, p. 289-297, 1997.
- DEHGHAN, M. Fractional step methods for parabolic equations with a non-standard condition, **Appl. Math. Comput.**, v. 142, p. 177-187, 2003.
- DEHKORDI, A.M.; MEMARI, M. Transient and steady-state forced convection to power-law fluids in the thermal entrance region of circular ducts: effects of viscous dissipation, variable viscosity and axial conduction, **Energy Convers. Manage.**, v. 51, n.5, p. 1065-1074, 2010.
- DENNIS JR, J.E.; SCHMABEL, R.B. **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1983, 378 p.
- FERNANDES, R.I., BIALECKI, B., FAIRWEATHER, G. Alternating direction implicit orthogonal spline collocation methods for evolution equations. In: JACOB, M.J.; PANDA, S. (Eds.). **Mathematical modelling and applications to industrial problems** (MMIP-2011), Macmillan Publishers India Limited, p. 3-11, 2011.
- FERNANDES, R.I., FAIRWEATHER, G. An ADI extrapolated Crank-Nicolson orthogonal spline collocation method for nonlinear reaction–diffusion systems, **J. Comput. Phys.**, v. 231, p. 6248-6267, 2012.
- FLETCHER, C.A.J. **Computational techniques for fluid dynamics, v. 1: fundamental and general techniques**. 2nd ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2008, 401 p.
- FLETCHER, J.D. Generating exact solutions of the two-dimensional Burgers' equations, **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 3, p. 213-316, 1983.

- FORSYTHE, G.E., WASOW, W.R. **Finite difference methods for partial differential equations: Applied Mathematics Series**. Literary Licensing, 2013, 454 p.
- FORTUNA, A.O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Ed. da USP, 2000, 552 p.
- GALPIN, P.F.; RAITHBY, G.D. Treatment of non-linearities in the numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations. **Int. J. Num. Meth. Fluids**, v. 6, p. 409-426, 1986.
- GE, Y., TIAN, Z.F., ZHANG, J. An exponential high-order compact ADI method for 3D unsteady convection–diffusion problems, **Numer. Meth. Partial Differen. Eqns.**, v. 29, n. 1, p. 186-205, 2013.
- GUSTAFSSON, B. **High-order difference methods for time dependent PDE**, Berlin: Springer, 2008, 334 p.
- INCROPERA, F.P.; DEWITT, D.P. **Fundamentals of heat and mass transfer**, 6th ed., John Wiley & Sons, 2006, 1024 p.
- ISLAM, S.; SARLER, B.; VERTNIK R., KOSEC, G. Radial basis function collocation method for the numerical solution of the two-dimensional transient nonlinear coupled Burgers equations, **Appl. Math. Model**, v. 36, p. 1148-1160, 2012.
- JIANG, B.N. **The least-squares finite element method: theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics**. New York: Springer, 1998, 418 p.
- JIANG, B.N.; CHANG, C.L. Least-squares finite elements for Stokes problem, **Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.**, v. 78, p. 297-311, 1990.
- KARAA, S. A high-order compact ADI method for solving three-dimensional unsteady convection-diffusion problems, **Numer. Meth. Partial Differen. Eqns.**, v. 22, p.983-993, 2006.
- KARAA, S., ZHANG, J. High order ADI method for solving unsteady convection-diffusion problems. **J. Comp. Phys.**, v. 198, n. 1, p. 1-9, 2004.

- KWEYU, M.C.; MANYONGE, W.A.; KOROSS, A.; SEMAGANDA, V. Numerical solutions of the Burgers' system in two dimensions under varied initial and boundary conditions. **Appl. Math. Sci.**, v. 6, p. 5603 – 5615, 2012.
- LEVEQUE, R.J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady state and time-dependent problems**. Philadelphia: SIAM, 2007, 341 p.
- LI, J.; CHEN, Y.; LIU, G. High-Order Compact ADI Methods for Parabolic Equations, **Comp. Math. Appl.**, v. 52, p. 1343-1356, 2006.
- LIAO, H.L.; SUN, Z.Z., Maximum norm error bounds of ADI and compact ADI methods for solving parabolic equations, **Numer. Meth. Partial Differen. Eqns.**, v. 26, p. 37–60, 2010.
- LIAO, W.A. Compact high-order Finite Difference Method for unsteady convection-diffusion equation. **Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.**, v. 13, n. 3, p. 135-145, 2012.
- LIU, J.C.; HOU, G.L. Numerical solutions of the space and time fractional coupled Burgers equations by generalized differential transform method, **Appl. Math. Comput.**, v. 217, p. 7001-7008, 2011.
- LOMAX, H.; PULLIAM, T.H.; ZINGG, D.W. **Fundamentals of computational fluid dynamics**, Berlin: Springer, 2004, 263 p.
- MA, M., MA, W., WANG, X. A compact alternate direct implicit difference method for solving parabolic equation of multi-dimension, **Comp. Math. Appl.**, v. 212, p. 281-286, 2009.
- MA, Y., GE, Y. A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation, **Appl. Math. Comput.**, v. 215, p. 3408-3417, 2010.
- MALALASEKERA, W., VERSTEEG, H. **An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method**, 2nd ed. Pearson, 2007, 520 p.
- MITCHELL, A.R.; GRIFFITHS, D.F. **The finite difference method in partial differential equations**. John Wiley & Sons, 1987, 284 p.

- MITTAL, R.C.; JIWARI, R. Differential quadrature method for two-dimensional Burgers' equations, **Int. J. Comput. Meths. Engin. Sci. Mech.**, v. 10, n. 6, p. 450-459, 2009.
- MONDAL P.K.; MUKHERJEE, S. Viscous dissipation effects on the limiting value of Nusselt numbers for a shear driven flow between two asymmetrically heated parallel plates, **Front. Heat and Mass Transfer**, v. 3, p.1-6, 2012.
- MORTON, K.W. **Numerical solution of convection-diffusion problems**. London: Chapman & Hall, 1996, 372 p.
- MORTON, K.W.; MAYERS, D.F. **Numerical solution of partial differential equations**, 2nd ed. London: Cambridge University Press, 2005, 278 p.
- MOSLEM, W.M.; SABRY, R.; KUZNETSOV, Z. Burgers equation for dust ion acoustic waves, **Chaos Solitons Fractals**, v. 36, p. 628-634, 2008.
- OZISIK, M.N. **Finite difference methods in heat transfer**. Boca Raton: CRC Press, 1994, 412 p.
- PEACEMAN, D.W. **Fundamentals of numerical reservoir simulations**, Amsterdam: Elsevier Science, 1977, 176 p.
- PEACEMAN, D.W.; RACHFORD JR., H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, **J. Soc. Ind. Appl. Math.**, v. 3, p. 28-41, 1959.
- PINHO, F.T.; OLIVEIRA, P.J. Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified Phan-Thien-Tanner fluid, **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 43, n.13, p. 2273-2287, 2000.
- QIN, J. The new alternating direction implicit difference methods for solving three-dimensional parabolic equations, **Appl. Math. Model.**, v. 34, p. 890-897, 2010.
- RADWAN, S.F. Comparison of higher-order accurate schemes for solving the two-dimensional unsteady Burgers' equation, **J. Comput. Appl. Math.**, v. 174, p. 383-397, 2005.
- RADWAN, S.F. On the fourth-order accurate compact ADI scheme for solving the unsteady nonlinear coupled Burgers' equations, **J. Nonlinear Math. Phys.**, v. 6,

n.1, p.13–34, 1999.

RAGUEB, H.; MANSOURI, K. A numerical study of viscous dissipation effect on non-Newtonian fluid flow inside elliptical duct, **Energy Convers. Manage.**, vol. 68, p. 124-132, 2013.

RASHIDI, M.M.; ERFANI, E. New analytical method for solving Burgers' and nonlinear heat transfer equations and comparison with HAM, **Comput. Phys. Commun.**, v. 180, p. 1539-1544, 2009.

REDDY, J. **An introduction to the finite element method**, 3th ed. (Engineering Series) McGraw-Hill Science, 2005, 912 p.

ROBERTS, S.M.; SHIPMAN, J.S. **Two point boundary value problems: shooting methods**. New York: American Elsevier, 1972, 269 p.

ROMÃO, E.C. Two exact solutions of 3D nonlinear convection diffusion, **Appl. Math. Sci.**, v. 8, p. 71-754, 2014.

ROMÃO, E.C.; AGUILAR, J.C.Z.; CAMPOS, M.D.; MOURA, L.F.M. Central difference method of $O(\Delta x^6)$ in solution of the CDR equation with variable coefficients and Robin condition, **Int. J. Appl. Math.**, v. 25, n. 1, p. 1-15, 2012.

SCHATZMAN, M. **Numerical analysis: a mathematical introduction**. Oxford: Oxford University Press, 2002, 496 p.

SHEU, T.W.H.; LIN, R.K. Newton linearization of the incompressible Navier-Stokes equations. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 44, p. 297–312, 2004.

SHEU, T.W.H.; LIN, R.K. On a high-order Newton linearization method for solving the incompressible Navier–Stokes equations. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 62, p. 1559–1578, 2005.

SMITH, G.D. **Numerical solution of partial differential equations: finite difference method**. 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 1998, 337 p.

SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; SILVA, L.H.M. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: Prentice-Hall, 2003, 354 p.

- SUN, H.W., ZHANG, J. A high order finite difference discretization strategy based on extrapolation for convection diffusion equations, **Numer. Meth. Partial Differen. Eqns.**, v. 20, p.18-32, 2004.
- SHEELA-FRANCISCA, J.; TSO, C.P. Viscous dissipation effects on parallel plates with constant heat flux boundary condition, **Int. Commun. Heat Mass Transf.**, v. 36, n. 3, p. 249-254 , 2009.
- SRIVASTAVA, V.K., ASHUTOSH; TAMSIR, M. Generating exact solution of three-dimensional coupled unsteady nonlinear generalized viscous Burgers' equations, **Int. J. Mod. Math. Sci.**, v. 5, n. 1, p. 1-13, 2013.
- STRIKWERDA, J.C. Finite difference schemes and partial differential equations, 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2004, 435 p.
- THOMAS, J.W. **Numerical partial differential equations: finite difference methods.** New York Springer-Verlag, 1995, 437 p.
- TIAN, Z.F. A rational high-order compact ADI method for unsteady convection–diffusion equations, **Comput. Phys. Comm.**, v. 182, p. 649–662, 2011.
- TIAN, Z.F., GE, Y.B. A fourth-order compact ADI method for solving two-dimensional unsteady convection–diffusion problems, **J. Comput. Appl. Math**, v. 198, p. 268-286, 2007.
- THOMAS, J.W. **Numerical partial differential equations: finite difference Methods.** New York: Springer-Verlag, 1995, 480 p.
- VELIVELLI, A.C.; BRYDEN, K.M. Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and traditional finite difference methods for solving the unsteady two-dimensional Burgers equation, **Physica A**, v. 362, p. 139-145, 2006.
- YOU, D. A high-order Padé ADI method for unsteady convection-diffusion equations, **J. Comput. Phys.**, v.214, p. 1-11, 2006.
- YOUNG, D.L., FAN, C.M., HU, S.P., ATLURI, S.N. The Eulerian-Lagrangian method of fundamental solutions for two-dimensional unsteady Burgers' equations, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, v. 32, p. 395-412, 2008.

ZHANG, J.; YAN, F. Lattice Boltzmann method for one and two-dimensional Burgers equation. **Physica A**, v. 387, p. 4771-4786, 2008.

ZHU, H.Q.; SHU, H.Z.; DING, M.Y. Numerical solutions of two dimensional Burgers' equations by discrete Adomian decomposition method, **Comput. Math. Appls.**, v. 60, p. 840-848, 2010.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; NITHIARASU, P. **The finite element method for fluid dynamics**, 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013, 400 p.

ZLAMAL, M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method, **Mathematics and Computation**, v. 32, p. 663-685, 1978.

WAZWAZ, A.M. The numerical solution of sixth order boundary value problems by the modified decomposition method, **Appl. Math. Comput.**, v. 18, p. 311-325, 2001.