

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
Departamento de Mecânica Computacional

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR ISAÍAS VIZOTTO  
E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 18 / 8 / 93.  
Francisco  
ORIENTADOR

GERAÇÃO COMPUTACIONAL DE FORMAS LIVRES DE  
ESTRUTURAS EM CASCA

Eng.º Isaias Vizotto

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica,  
como parte dos requisitos para a obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 18 de Agosto de 1993.

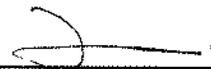


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
Departamento de Mecânica Computacional

Tese de : Doutorado  
Título da Tese : Geração Computacional de Formas Livres de  
Estruturas em Casca

Autor : Eng.<sup>o</sup> Isaiás Vizotto  
Orientador : Prof. Dr. Fernando Iguti  
Co-orientador : Prof. Dr. Dante A. O. Martinelli

Aprovado por:

*Fernando* 

Prof. Dr. Fernando Iguti, Presidente

*Paulo de Mattos Pimenta*

Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

*Sérgio P. B. Proença*

Prof. Dr. Sérgio P. B. Proença

*Aloísio E. Assan*

Prof. Dr. Aloísio E. Assan

*Walter Savassi*

Prof. Dr. Walter Savassi

Campinas, 18 de agosto de 1993.

Aos meus pais,  
Antenor e Noeme;  
à minha mulher,  
Lirys;  
e, aos nossos filhos,  
Laisy e ...

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido com o apoio e o incentivo de muitos, sem os quais não teria sido possível a obtenção dos resultados que são apresentados à comunidade profissional a que se destina.

Agradeço a Deus pela vida, pela saúde, e todas as oportunidades de crescimento, com o devido discernimento, para realização das diversas aspirações.

À Lirys, minha mulher, por ter se colocado ao meu lado e partilhado dos ideais que almejamos para a concretização de um mundo digno para os nossos filhos. Aos nossos pais, pelos fundamentos nobres inculcados em nossa educação. Aos nossos familiares e amigos, pela convivência que resulta no equilíbrio das relações pessoais e torna produtivos os nossos esforços.

Ao Prof. Dr. Fernando Iguti que, junto com o Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, me recebeu cordialmente e proporcionou a orientação necessária para a minha realização profissional, contribuindo notoriamente com mais este passo dado no caminho do conhecimento.

Ao Prof. Dr. Dante A. O. Martinelli que, apesar da nossa recente convivência profissional, contribuiu decisivamente para o interesse e o desenvolvimento do tema que é objeto de pesquisa deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta, da Escola Politécnica da USP, pelas sugestões que me prestou solícitamente em tempo oportuno.

Ao Prof. Vinicius F. Arcaro, colega de trabalho da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pelas sugestões valiosas no que concerne às técnicas de programação matemática utilizadas nesta tese.

Ao Prof. Dr. Álvaro P. Crósta e Patrícia S. C. Leite, respectivamente coordenador e analista de sistemas responsável pelo Laboratório de Processamento de Informações Geo-referenciadas do Instituto de Geociências da UNICAMP, pelo atendimento desprendido, concessão dos equipamentos e assessoria para a realização das imagens em fotografia.

Aos colegas de profissão, pelo incentivo, sugestões e críticas recebidas que contribuíram para o desenvolvimento das idéias que culminaram com esta tese.

À Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, a qual eu pertencço, pelo apoio que me foi dado sempre que solicitado.

Aos setores de computação da Faculdade de Engenharia Mecânica e Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pelos recursos computacionais utilizados no transcorrer das pesquisas e conclusão da tese.

Que os resultados sejam compartilhados por todos ...

## RESUMO

Para estruturas em casca, as formas geométricas são importantes para se obter comportamentos estruturais adequados. O estado de tensão que ocorre numa casca depende diretamente da sua forma geométrica. O estado de tensão ideal para estas estruturas é o de compressão pura.

Neste trabalho, é apresentado um processo relativamente simples para geração de formas de estruturas em casca por meio de técnicas de programação matemática combinadas com a técnica de elementos finitos.

Como resultado da aplicação desta formulação, é possível a definição de formas geométricas para estruturas em casca em que as cargas aplicadas são equilibradas, principalmente, por esforços internos de membrana. Entretanto, isto não exclui a possível existência de outros carregamentos que podem causar estados de tensão diferentes da compressão pura.

Por meio do modelo proposto é possível simular computacionalmente uma membrana flexível, de qualquer formato, sobre a qual podem atuar vários carregamentos, incluindo o efeito de pressão.

Sob a influência e a atuação destes carregamentos, a membrana é deformada até uma das suas configurações de equilíbrio, que define uma superfície média para a estrutura em casca fina a ser construída. No caso do carregamento de pressão pode ser mostrado, no caso geral, que o sistema de forças não é conservativo.

No modelo para geração de formas de estruturas em casca é utilizado um elemento finito triangular plano de membrana, com a hipótese de tensão-deformação constante, modificado para permitir a consideração de deslocamentos normais ao seu plano.

A equação constitutiva adotada para descrever o comportamento do material é uma relação linear entre as tensões e deformações. A definição de deformação utilizada é a de Green, sendo considerados grandes deslocamentos e grandes deformações de modo exato.

No modelo computacional existe a possibilidade de se impor um deslocamento de valor conhecido à membrana, obtendo-se assim formas geométricas simplesmente pela distorção da geometria plana inicial.

Deste modo é possível projetar formas livres e esbeltas de estruturas em casca para coberturas, com quaisquer formatos na projeção horizontal e que, em essência, possuam aproximadamente um comportamento de acordo com a Teoria de Membrana.

## ABSTRACT

In shell structures, geometrical shapes are important for the determination of their correct behavior. The stress state is strongly dependent on the geometrical shape. The ideal stress state for these structures is the pure compression state.

In this work a relatively simple process to generate free form shells by means of mathematical programming combined with the finite element technique is presented.

As a result of the application of such formulation it is possible to define geometrical shapes for the shells where the applied loadings are equilibrated mainly by membrane action. This doesn't however preclude the existence of loadings which cause noncompressive stress.

With the proposed model it is possible to simulate automatically a flexible membrane, with any shape, able to carry a larger number of loading conditions, including pressure loads.

Under the action of these loads the membrane is deformed reaching one of its equilibrium configurations, which will define the middle surface of the shell to be built. For pressure loadings it can be shown that, generally, the system of forces is nonconservative.

The finite element used to generate free form shells is the constant stress-strain triangle modified to consider out of plane displacements.

The constitutive equation to model the material behavior corresponds to linear elasticity. Exact formulation for large displacements and strains are used for the membrane, using Green's strains.

In the computational model it is possible to impose a known displacement to the membrane and to obtain geometrical shapes just distorting the initial configuration.

In this way it is possible to design free form thin shells working as membranes with generic projection in plant.

# ÍNDICE

<b>1 - Introdução</b>	
1.1 - Generalidades	1-2
1.2 - Breve Descrição sobre Cascas Para Coberturas	1-4
1.2.1 - Cascas de Revolução	1-4
1.2.2 - Cascas de Translação	1-11
1.2.3 - Cascas de Formas Livres	1-17
1.3 - Otimização de Estruturas em Casca	1-18
1.4 - Objetivos e Conteúdo do Trabalho	1-19
1.4.1 - Objetivos do Trabalho	1-19
1.4.2 - Conteúdo do Trabalho	1-20
1.5 - Referências	1-23
<b>2 - Estruturas em Casca como Arte Estrutural</b>	
2.1 - Introdução	2-2
2.2 - Teoria das Estruturas em Casca	2-2
2.2.1 - Rudimentos de Geometria Diferencial	2-3
2.2.2 - Teoria de Casca Fina	2-4
2.2.3 - Teoria de Membrana e Teoria Flexional	2-5
2.2.4 - Condições para uma Estrutura em Casca se Comportar de Acordo com a Teoria de Membrana	2-6
2.3 - Geração de Formas de Estruturas em Casca no Regime de Membrana	2-7
2.3.1 - Modelos Físicos	2-7
2.3.2 - Modelos Analíticos	2-7
2.3.3 - Modelos Matemáticos Computacionais	2-8
2.4 - Classificação das Estruturas em Casca por Heinz Isler	2-11
2.5 - Métodos Físicos de Geração de Formas de Estruturas em Casca Empregados por Heinz Isler	2-15
2.5.1 - Formas Pneumáticas	2-15
2.5.2 - Formas de Fluxo	2-16
2.5.3 - Formas de Membranas Pênseis Invertidas	2-17
2.6 - Estruturas em Casca Projetadas por Heinz Isler	2-19
2.6.1 - Geração por Meio de Membranas Pneumáticas	2-24

2.6.2 - Geração por Meio de Fluidos Viscosos Extrudados	2-28
2.6.3 - Geração por Meio de Membranas Pênséis Invertidas	2-35
2.6.4 - Outras	2-44
2.7 - Conclusão	2-48
2.8 - Referências	2-49
<b>3 - Modelo Computacional para Geração de Formas de Estruturas em Casca</b>	
3.1 - Introdução	3-2
3.2 - Equação Constitutiva para o Material	3-2
3.2.1 - Estado Plano de Tensão	3-3
3.3 - Elemento Finito Adotado	3-4
3.3.1 - Deformação	3-7
3.3.2 - Energia de Deformação	3-8
3.3.3 - Gradiente da Energia de Deformação	3-9
3.3.4 - Hessiana da Energia de Deformação	3-10
3.4 - Carregamentos Atuantes no Elemento	3-11
3.4.1 - Carregamentos Concentrados	3-12
3.4.2 - Carregamentos Uniformemente Distribuídos	3-12
3.4.3 - Carregamentos de Pressão	3-14
3.4.4 - Simulação do Efeito Devido ao Peso Próprio	3-17
3.5 - Condições de Contorno	3-18
3.5.1 - Vinculações	3-19
3.5.2 - Deslocamentos Prescritos	3-19
3.6 - Configurações de Equilíbrio Estático	3-20
3.6.1 - Estruturas com Energia Potencial Conhecida	3-20
3.6.2 - Estruturas com Energia Potencial Inexistente	3-21
3.7 - Referências	3-22
<b>4 - Exemplos de Verificação e Comprovação do Modelo Computacional</b>	
4.1 - Introdução	4-2
4.2 - Geração de Formas de Cabos Flexíveis	4-2
4.2.1 - Solicitação por Carga Concentrada	4-3

4.2.2 - Solicitação por Carga Uniformemente Distribuída	4-5
4.2.3 - Solicitação por Carga Linearmente Distribuída	4-7
4.3 - Análise Estrutural Estática das Estruturas em Casca Geradas	4-9
4.4 - Modelo de Casca da Universidade de Kassel	4-11
4.5 - Casca Gerada por Carga Uniformemente Distribuída	4-23
4.6 - Casca Gerada por Efeito de Pressão	4-30
4.7 - Casca Gerada por Prescrição de Deslocamentos	4-41
4.8 - Conclusão	4-48
4.9 - Referências	4-50
5 - Conclusão	
5.1 - Introdução	5-2
5.2 - Sobre o Modelo Computacional Desenvolvido	5-2
5.3 - Temas para Pesquisas Posteriores	5-3
A - Métodos de Otimização Matemática Aplicados à Análise Estrutural	
A.1 - Introdução	A-2
A.2 - Conceitos Fundamentais	A-2
A.3 - Direção de Descida	A-4
A.4 - Busca Unidimensional	A-5
A.4.1 - Método da Interpolação Cúbica	A-5
A.4.2 - Método da Bipartição	A-6
A.5 - Métodos Computacionais Básicos	A-6
A.5.1 - Método Quase-Newton	A-7
A.5.2 - Método Incremental Newton-Raphson	A-8
A.6 - Referências	A-12
Bibliografia	B-1

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Legenda	Página
Figura 1.1	Seção longitudinal da catedral de St. Sophia	1-5
Figura 1.2	Taj Mahal em Agra, Índia	1-6
Figura 1.3	Catedral de São Pedro, em Roma	1-7
Figura 1.4	Cinema Colosseum em Oslo, Noruega	1-8
Figura 1.5	Salão da prefeitura em Ehime, Japão	1-8
Figura 1.6	Mercado Algeciras	1-9
Figura 1.7	Auditório Kresge, M.I.T., EUA	1-9
Figura 1.8	Palácio dos Esportes, projetado por Nervi, em Roma	1-10
Figura 1.9	Ginásio de Esportes Kingdome, EUA	1-11
Figura 1.10	Mercado projetado por Candela, Cidade do México	1-12
Figura 1.11	Laboratório Nacional de Engenharia de Idaho, EUA	1-13
Figura 1.12	Hangar da Força Aérea Americana, Washington	1-13
Figura 1.13	Hipódromo de Zarzuela, em Madri	1-15
Figura 1.14	Restaurante em Xochimilco, México	1-15
Figura 1.15	Catedral St. Mary, em Tóquio	1-16
Figura 1.16	Modelo da cobertura para o Tachira Club	1-17
Figura 2.1	Formas geométricas	2-12
Figura 2.2	Forma estrutural	2-12
Figura 2.3	Forma estrutural	2-12
Figura 2.4	Forma estrutural	2-12
Figura 2.5	Forma estrutural	2-13
Figura 2.6	Forma escultural	2-13
Figura 2.7	Forma escultural	2-13
Figura 2.8	Forma escultural	2-14
Figura 2.9	Forma estrutural pneumática	2-15
Figura 2.10	Forma estrutural de fluxo	2-16
Figura 2.11	Forma estrutural de membrana pênsil invertida	2-17
Figura 2.12	Processos de geração de formas empregados por Isler	2-18
Figura 2.13	Detalhe de um projeto de Heinz Isler	2-20
Figura 2.14	Detalhe construtivo de um projeto de Isler	2-21
Figura 2.15	Detalhe construtivo de um projeto de Isler	2-21

<b>Figura</b>	<b>Legenda</b>	<b>Página</b>
Figura 2.16	Estrutura em casca pneumática	2-24
Figura 2.17	Conjunto de várias cascas pneumáticas	2-24
Figura 2.18	Vista parcial do ambiente interno	2-25
Figura 2.19	Vista parcial do ambiente interno	2-25
Figura 2.20	Construção de um terminal rodoviário	2-26
Figura 2.21	Vista interna do terminal rodoviário concluído	2-27
Figura 2.22	Pavilhão de flôres Wyss	2-28
Figura 2.23	Mercado Coop	2-29
Figura 2.24	Centro de jardinagem Clause	2-30
Figura 2.25	Mercado, em Bellinzona	2-32
Figura 2.26	Mercado, em Bellinzona	2-32
Figura 2.27	Fábrica Kilcher	2-34
Figura 2.28	Posto de Serviços	2-34
Figura 2.29	Posto Essence	2-35
Figura 2.30	Posto Essence	2-36
Figura 2.31	Posto Essence	2-36
Figura 2.32	Centro Cultural e Esportivo	2-37
Figura 2.33	Fábrica Sicli (vista geral)	2-37
Figura 2.34	Fábrica Sicli (vista parcial)	2-38
Figura 2.35	Fábrica Sicli (vista parcial)	2-38
Figura 2.36	Fábrica Sicli (projeção vertical)	2-39
Figura 2.37	Fábrica Sicli (projeção horizontal)	2-39
Figura 2.38	Fábrica Sicli (maquete)	2-40
Figura 2.39	Centro esportivo, em Solothurn	2-40
Figura 2.40	Vista parcial interna	2-41
Figura 2.41	Vista parcial externa	2-41
Figura 2.42	Cobertura para piscina, em Brugg	2-42
Figura 2.43	Piscina (vista parcial interna)	2-42
Figura 2.44	Teatro aberto, em Grötzingen	2-43
Figura 2.45	Teatro aberto, em Grötzingen	2-43
Figura 2.46	Teatro aberto, em Grötzingen	2-44
Figura 2.47	Igreja, em Lommiswill	2-45
Figura 2.48	Residência (parabolóide hiperbólico)	2-46
Figura 2.49	Residência	2-47
Figura 2.50	Residência	2-47
Figura 2.51	Residência	2-48

Figura	Legenda	Página
Figura 3.1	Elemento finito com as respectivas variáveis nodais	3-5
Figura 3.2	Vetores $m$ e $n$ na configuração inicial do elemento	3-13
Figura 4.1	Faixa elástica deformável (configuração inicial)	4-4
Figura 4.2	Faixa elástica deformável (configuração inicial)	4-6
Figura 4.3	Faixa elástica deformável (configuração inicial)	4-8
Figura 4.4	Geometria inicial e malha do modelo de Kassel	4-11
Figura 4.5	Modelo de casca da Universidade de Kassel	4-13
Figura 4.6	Casca na configuração deformada	4-17
Figura 4.7	Deslocamentos horizontais na direção $x$ (m)	4-18
Figura 4.8	Deslocamentos verticais na direção $z$ (m)	4-18
Figura 4.9	Tensões principais $\sigma_1$ na superfície inferior (MPa)	4-19
Figura 4.10	Tensões principais $\sigma_1$ na superfície média (MPa)	4-19
Figura 4.11	Tensões principais $\sigma_1$ na superfície superior (MPa)	4-20
Figura 4.12	Tensões principais $\sigma_2$ na superfície inferior (MPa)	4-20
Figura 4.13	Tensões principais $\sigma_2$ na superfície média (MPa)	4-21
Figura 4.14	Tensões principais $\sigma_2$ na superfície superior (MPa)	4-21
Figura 4.15	Tensões principais $\sigma_3$ na superfície inferior (MPa)	4-22
Figura 4.16	Tensões principais $\sigma_3$ na superfície média (MPa)	4-22
Figura 4.17	Tensões principais $\sigma_3$ na superfície superior (MPa)	4-23
Figura 4.18	Membrana discretizada (configuração inicial)	4-24
Figura 4.19	Casca gerada por carga uniformemente distribuída	4-26
Figura 4.20	Casca na configuração deformada	4-27
Figura 4.21	Deslocamentos horizontais na direção $x$ (m)	4-27
Figura 4.22	Deslocamentos horizontais na direção $y$ (m)	4-28
Figura 4.23	Deslocamentos verticais na direção $z$ (m)	4-28
Figura 4.24	Tensões principais $\sigma_1$ na superfície média (MPa)	4-29
Figura 4.25	Tensões principais $\sigma_2$ na superfície média (MPa)	4-29

Figura	Legenda	Página
Figura 4.26	Tensões principais $\sigma_3$ na superfície média (MPa)	4-30
Figura 4.27	Casca gerada por pressão	4-31
Figura 4.28	Casca na configuração deformada	4-33
Figura 4.29	Deslocamentos horizontais na direção $x$ (m)	4-34
Figura 4.30	Deslocamentos horizontais na direção $y$ (m)	4-34
Figura 4.31	Deslocamentos verticais na direção $z$ (m)	4-35
Figura 4.32	Tensões principais $\sigma_1$ na superfície média (MPa)	4-35
Figura 4.33	Tensões principais $\sigma_2$ na superfície média (MPa)	4-36
Figura 4.34	Tensões principais $\sigma_3$ na superfície média (MPa)	4-36
Figura 4.35	Deslocamentos horizontais na direção $x$ (m)	4-38
Figura 4.36	Deslocamentos horizontais na direção $y$ (m)	4-39
Figura 4.37	Deslocamentos verticais na direção $z$ (m)	4-39
Figura 4.38	Tensões principais $\sigma_1$ na superfície média (MPa)	4-40
Figura 4.39	Tensões principais $\sigma_2$ na superfície média (MPa)	4-40
Figura 4.40	Tensões principais $\sigma_3$ na superfície média (MPa)	4-41
Figura 4.41	Casca gerada por deslocamentos prescritos	4-42
Figura 4.42	Casca na configuração deformada	4-44
Figura 4.43	Deslocamentos horizontais na direção $x$ (m)	4-45
Figura 4.44	Deslocamentos verticais na direção $z$ (m)	4-45
Figura 4.45	Tensões principais $\sigma_1$ na superfície média (MPa)	4-46
Figura 4.46	Tensões principais $\sigma_2$ na superfície média (MPa)	4-46
Figura 4.47	Tensões principais $\sigma_3$ na superfície média (MPa)	4-47

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>	<b>Conteúdo</b>	<b>Página</b>
Tabela 4.1	Faixa com Carga Concentrada	4-5
Tabela 4.2	Faixa com Carga Uniformemente Distribuída	4-7
Tabela 4.3	Faixa com Carga Linearmente Distribuída	4-9
Tabela 4.4	Comparação entre Geometrias (Vizotto e Kassel)	4-14
Tabela 4.5	Malha com Discretização Inicial	4-15
Tabela 4.6	Malha com Discretização Final	4-16
Tabela 4.7	Forma Gerada pelo Efeito do Peso Próprio	4-25
Tabela 4.8	Forma Gerada pelo Efeito de Pressão	4-32
Tabela 4.9	Forma Gerada pelo Efeito de Pressão	4-37
Tabela 4.10	Forma Gerada por Prescrição de Deslocamentos	4-43
Tabela 4.11	Forma Gerada por Prescrição de Deslocamentos	4-48

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolo : Significado

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  : parâmetros escalares das funções interpoladoras para o campo de deslocamentos do elemento finito adotado;
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  : parâmetros escalares das funções interpoladoras para o campo de deslocamentos do elemento finito adotado;
- $\gamma$  : parâmetro escalar utilizado no método quase-Newton;
- $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  : parâmetros escalares das funções interpoladoras para o campo de deslocamentos do elemento finito adotado;
- $\delta$  : variável escalar utilizada nos métodos de programação matemática;
- $\delta_1, \delta_2$  : extremos de um intervalo em que pode variar o parâmetro escalar  $\delta$ ;
- $\bar{\delta}$  : limite superior para o parâmetro escalar  $\delta$ ;
- $\delta^*$  : ponto de mínimo da função  $\psi(\delta)$ ;
- $\epsilon$  : vetor que contém as componentes das deformações;
- $\epsilon_p$  : parâmetro escalar para critério de parada dos algoritmos de programação matemática;
- $\epsilon_{xx}$  : componente do vetor de deformações  $\epsilon$ ;
- $\epsilon_{yy}$  : componente do vetor de deformações  $\epsilon$ ;
- $\epsilon_{zz}$  : componente do vetor de deformações  $\epsilon$ ;
- $\epsilon_{xy}$  : componente do vetor de deformações  $\epsilon$ ;
- $\epsilon_{yz}$  : componente do vetor de deformações  $\epsilon$ ;
- $\epsilon_{xz}$  : componente do vetor de deformações  $\epsilon$ ;
- $\epsilon'_{,u_k}$  : derivada parcial do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação ao deslocamento nodal  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ );
- $\epsilon'_{,u_i u_j}$  : derivada parcial do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_i$  ( $i=1, \dots, 9$ ) e  $u_j$  ( $j=1, \dots, 9$ );
- $\epsilon_{xx, u_k}$  : derivada parcial da componente  $\epsilon_{xx}$  do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação ao deslocamento nodal  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ );
- $\epsilon_{yy, u_k}$  : derivada parcial da componente  $\epsilon_{yy}$  do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação ao deslocamento nodal  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ );

**Símbolo : Significado**

- $\epsilon_{xy, u_k}$  : derivada parcial da componente  $\epsilon_{xy}$  do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação ao deslocamento nodal  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ );
- $\epsilon_{xx, u_i u_j}$  : derivada parcial da componente  $\epsilon_{xx}$  do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_i$  ( $i=1, \dots, 9$ ) e  $u_j$  ( $j=1, \dots, 9$ );
- $\epsilon_{yy, u_i u_j}$  : derivada parcial da componente  $\epsilon_{yy}$  do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_i$  ( $i=1, \dots, 9$ ) e  $u_j$  ( $j=1, \dots, 9$ );
- $\epsilon_{xy, u_i u_j}$  : derivada parcial da componente  $\epsilon_{xy}$  do vetor de deformações  $\epsilon$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_i$  ( $i=1, \dots, 9$ ) e  $u_j$  ( $j=1, \dots, 9$ );
- $\eta$  : versor normal à superfície  $\mathcal{S}$ ;
- $\lambda$  : módulo da pressão uniforme atuante no elemento finito;
- $\mu, \mu_0$  : parâmetros escalares utilizados na estratégia do método incremental Newton-Raphson;
- $\mu_k, \mu_m$  : parâmetros escalares utilizados na estratégia do método incremental Newton-Raphson;
- $\nu$  : Coeficiente de Poisson do concreto;
- $\nu_m$  : coeficiente de Poisson da membrana;
- $\Pi(x)$  : função Energia Potencial Total para a estrutura;
- $\Pi_e$  : Energia de Deformação do elemento finito;
- $\Pi_0$  : Energia Potencial Total inicial da estrutura;
- $\Pi_{e, u_k}$  : componente  $k$  do gradiente da Energia de Deformação para o elemento;
- $\Pi_{e, u_i u_j}$  : componentes da hessiana da Energia de Deformação para o elemento;
- $\rho$  : densidade do material;
- $\sigma$  : vetor que contém as componentes das tensões conjugadas;
- $\sigma_{xx}$  : componente do vetor de tensões conjugadas  $\sigma$ ;
- $\sigma_{yy}$  : componente do vetor de tensões conjugadas  $\sigma$ ;
- $\sigma_{zz}$  : componente do vetor de tensões conjugadas  $\sigma$ ;
- $\sigma_{xy}$  : componente do vetor de tensões conjugadas  $\sigma$ ;
- $\sigma_{yz}$  : componente do vetor de tensões conjugadas  $\sigma$ ;
- $\sigma_{xz}$  : componente do vetor de tensões conjugadas  $\sigma$ ;
- $\sigma_1$  : tensão principal máxima num ponto;

**Símbolo : Significado**

- $\sigma_2$  : tensão principal intermediária num ponto;
- $\sigma_3$  : tensão principal mínima num ponto;
- $\varphi(u)$  : área do elemento finito na configuração deformada;
- $\phi$  : área do elemento finito na configuração inicial indeformada;
- $\psi$  : função objetivo;
- $\psi'$  : derivada primeira de  $\psi$ ;
- $\psi''$  : derivada segunda de  $\psi$ ;
- $\psi_{,z_1}$  : derivada parcial de  $\psi$  em relação a  $z_1$ ;
- $\psi_{,z_1 z_j}$  : derivada parcial de  $\psi$  em relação a  $z_1$  e  $z_j$ ;
- $\omega$  : volume do elemento finito na configuração inicial indeformada;
- $\Omega$  : plano que contém o versor  $\eta$  normal à superfície  $\mathcal{S}$ ;
- $\nabla \Pi(\mathbf{x})$  : gradiente da função Energia Potencial Total da estrutura;
- $\nabla_e \Pi(\mathbf{x})$  : gradiente da função Energia de Deformação de cada elemento;
- $\mathcal{C}_\Omega$  : curva obtida pela secção normal de  $\mathcal{S}$  com um plano  $\Omega$  num ponto  $\mathcal{P}$ ;
- $\mathcal{C}_1$  : curva obtida pela secção normal de  $\mathcal{S}$  com um plano  $\Omega$  em que o raio de curvatura normal é máximo;
- $\mathcal{C}_2$  : curva obtida pela secção normal de  $\mathcal{S}$  com um plano  $\Omega$  em que o raio de curvatura normal é mínimo;
- $k_\Omega$  : curvatura normal de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$  no plano  $\Omega$ ;
- $k_G$  : curvatura de Gauss;
- $k_1$  : curvatura normal máxima de  $\mathcal{S}$  num ponto  $\mathcal{P}$ ;
- $k_2$  : curvatura normal mínima de  $\mathcal{S}$  num ponto  $\mathcal{P}$ ;
- $l$  : vão da faixa elástica deformável;
- $Oxyz$  : sistema de referência tri-ortogonal;
- $O_\Omega$  : centro da circunferência que tangencia o ponto  $\mathcal{P}$  e está contida no plano  $\Omega$ ;
- $\mathcal{P}$  : ponto da superfície média  $\mathcal{S}$  da estrutura em casca;
- $\mathcal{R}_\Omega$  : raio de curvatura de  $\mathcal{C}_\Omega$  em  $\mathcal{P}$ ;
- $\mathcal{R}_1$  : raio de curvatura normal máximo de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$ ;
- $\mathcal{R}_2$  : raio de curvatura normal mínimo de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$ ;

**Símbolo : Significado**

- $\varphi$  : superfície média da estrutura em casca;
- $\alpha_k, \psi_k$  : coordenadas iniciais do ponto nodal  $k$  ( $k=1,2,3$ ) do elemento finito adotado;
- $\mathbb{R}^n$  : espaço vetorial real  $n$ -dimensional;
- $a$  : uma das dimensões em planta da estrutura em casca;
- $a(u)$  : vetor contido no plano do elemento finito na configuração deformada, com a origem no ponto nodal 1 e a extremidade no ponto nodal 2;
- $A$  : matriz que contém as coordenadas iniciais  $\alpha$  e  $\psi$  dos pontos nodais do elemento finito adotado;
- $b$  : uma das dimensões em planta da estrutura em casca;
- $b(u)$  : vetor contido no plano do elemento finito na configuração deformada, com a origem no ponto nodal 1 e a extremidade no ponto nodal 3;
- $b_f$  : largura da faixa;
- $B$  : matriz positiva definida qualquer;
- $C$  : matriz inversa da matriz  $A$ ;
- $d$  : vetor "direção de descida" utilizado nos métodos de programação matemática;
- $d_i$  : componente  $i$  do vetor  $d$ ;
- $d_x$  : vetor que contém os deslocamentos nodais do elemento finito adotado na direção  $x$ ;
- $d_y$  : vetor que contém os deslocamentos nodais do elemento finito adotado na direção  $y$ ;
- $d_z$  : vetor que contém os deslocamentos nodais do elemento finito adotado na direção  $z$ ;
- $d_0, d_1, d_2$  : componentes escalares da matriz  $D$ ;
- $d'_0, d'_1$  : componentes escalares da matriz  $D$ ;
- $D$  : matriz da relação constitutiva entre  $\sigma$  e  $\epsilon$ ;
- $E$  : Módulo de Elasticidade do concreto;
- $E_m$  : Módulo de Elasticidade da Membrana;
- $f(x)$  : vetor global das ações de todos os carregamentos que atuam sobre a estrutura;
- $f_p(u)$  : vetor que contém as componentes da pressão nas direções  $x, y$  e  $z$  para um ponto nodal do elemento;

**Símbolo : Significado**

- $f_v$  : força vertical (direção  $\eta$ ), obtida a partir das componentes da ação nodal devida ao carregamento de pressão;
- $f_{v,u_k}$  : componentes do gradiente da força vertical  $f_v$ ;
- $f_x$  : vetor que contém as constantes escalares  $\alpha_1, \beta_1$  e  $\gamma_1$ ;
- $f_y$  : vetor que contém as constantes escalares  $\alpha_2, \beta_2$  e  $\gamma_2$ ;
- $f_z$  : vetor que contém as constantes escalares  $\alpha_3, \beta_3$  e  $\gamma_3$ ;
- $F(u)$  : matriz de rigidez para o elemento associada à força de pressão;
- $g$  : aceleração da gravidade;
- $g_e$  : resultante do peso próprio do elemento;
- $g_m$  : carga uniformemente distribuída que atua sobre a membrana;
- $h_a$  : altura da casca no meio do lado de comprimento  $a$ ;
- $h_b$  : altura da casca no meio do lado de comprimento  $b$ ;
- $h_c$  : altura no centro da casca;
- $I$  : matriz identidade;
- $m$  : vetor contido no plano do elemento finito na configuração inicial indeformada, com a origem no ponto nodal 1 e a extremidade no ponto nodal 2;
- $n$  : vetor contido no plano do elemento finito na configuração inicial indeformada, com a origem no ponto nodal 1 e a extremidade no ponto nodal 3;
- $n$  : número de deslocamentos livres da estrutura;
- $p$  : pressão uniforme atuante sobre a estrutura em casca;
- $p(u)$  : resultante da pressão uniforme atuante sobre o elemento finito de membrana;
- $p(z)$  : vetor auxiliar utilizado no algoritmo de programação matemática quase-Newton;
- $p_e(u)$  : vetor que contém as componentes da pressão nas direções  $x, y$  e  $z$  para o elemento finito;
- $p_x, p_y, p_z$  : componentes da pressão nas direções  $x, y$  e  $z$  respectivamente;
- $p_{x,u_k}$  : derivadas parciais da componente de pressão na direção  $x$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ );

**Símbolo : Significado**

- $P_{y, u_k}$  : derivadas parciais da componente de pressão na direção  $y$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ );
- $P_{z, u_k}$  : derivadas parciais da componente de pressão na direção  $z$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ );
- $P$  : carga concentrada;
- $q(z)$  : vetor auxiliar utilizado no algoritmo de programação matemática quase-Newton;
- $q_m$  : valor máximo da carga triangular linearmente distribuída;
- $r(z)$  : vetor gradiente obtido a partir da derivada primeira de  $\psi(z)$ ;
- $S(z)$  : matriz Hessiana, obtida a partir da derivada segunda de  $\psi(z)$ ;
- $t$  : espessura da estrutura em casca;
- $t_e$  : espessura do elemento finito;
- $t_f$  : espessura da faixa;
- $t_m$  : espessura da membrana;
- $u_k$  : deslocamentos lineares dos pontos nodais do elemento finito adotado nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  ( $k=1, \dots, 9$ );
- $u_x(x, y)$  : função interpoladora para o campo de deslocamentos em  $x$  do elemento finito adotado;
- $u_y(x, y)$  : função interpoladora para o campo de deslocamentos em  $y$  do elemento finito adotado;
- $u_z(x, y)$  : função interpoladora para o campo de deslocamentos em  $z$  do elemento finito adotado;
- $u_{x, x}$  : derivada parcial de  $u_x$  em relação à  $x$ ;
- $u_{x, y}$  : derivada parcial de  $u_x$  em relação à  $y$ ;
- $u_{x, z}$  : derivada parcial de  $u_x$  em relação à  $z$ ;
- $u_{y, x}$  : derivada parcial de  $u_y$  em relação à  $x$ ;
- $u_{y, y}$  : derivada parcial de  $u_y$  em relação à  $y$ ;
- $u_{y, z}$  : derivada parcial de  $u_y$  em relação à  $z$ ;
- $u_{z, x}$  : derivada parcial de  $u_z$  em relação à  $x$ ;
- $u_{z, y}$  : derivada parcial de  $u_z$  em relação à  $y$ ;
- $u_{z, z}$  : derivada parcial de  $u_z$  em relação à  $z$ ;
- $v$  : vetor auxiliar utilizado no método incremental Newton-Raphson;

**Símbolo : Significado**

- $x$  : vetor dos deslocamentos nodais da estrutura;
- $x_{max}$  : deslocamento máximo da estrutura em casca na direção  $x$ ;
- $x_{min}$  : deslocamento mínimo da estrutura em casca na direção  $x$ ;
- $y_{max}$  : deslocamento máximo da estrutura em casca na direção  $y$ ;
- $y_{min}$  : deslocamento mínimo da estrutura em casca na direção  $y$ ;
- $z$  : conjunto de variáveis  $z_1, z_2, \dots, z_n$  que pertencem ao domínio da função  $\psi$ ;
- $z_c$  : deslocamentos verticais do cabo flexível;
- $z_f$  : deslocamentos verticais da faixa elástica deformável;
- $z_{max}$  : deslocamento máximo da estrutura em casca na direção  $z$ ;
- $z_{min}$  : deslocamento mínimo da estrutura em casca na direção  $z$ ;
- $z^0$  : ponto do conjunto de variáveis  $z \in \mathbb{R}^n$ ;
- $z^*$  : solução de um sistema de equações não lineares obtida por meio do método incremental Newton-Raphson;
- $z_{i, \delta}$  : derivada parcial de  $z_i$  em relação a  $\delta$ ;
- $m!$  : fatorial do número  $m$ ;
- $\int_w$  : integral de volume;
- $\in$  : pertence;
- $||\dots||$  : módulo;
- $\wedge$  : produto vetorial;
- $\sum_{i=1}^m$  : somatório com  $i$  variando de 1 a  $m$ .

**CAPÍTULO 1**

**INTRODUÇÃO**

## 1.1 GENERALIDADES

O mundo em que vivemos está repleto de exemplos de estruturas em casca. Desde o nível microscópico até o macroscópico podem ser observadas estas formas estruturais: as células do corpo humano, as cascas das nozes e dos ovos, as conchas marítimas, os bambús, as folhas das árvores, as pétalas das flores, etc... são algumas das formas de estruturas em casca que podem ser encontradas.

Engenheiros têm pesquisado estas estruturas e aplicado o conhecimento e os resultados obtidos em projetos e construções de aviões, navios, reservatórios, dutos, estruturas aeroespaciais, silos, submarinos, reatores nucleares, hangares, além de diversos tipos de construções civis, dentre muitas outras aplicações.

Devido as suas qualidades estruturais singulares, as cascas sobressaem dentre todas as estruturas de paredes finas. Quando devidamente projetadas, elas combinam a eficiência estrutural decorrente da grande capacidade de resistência devido às suas formas geométricas, com um consumo mínimo de material. Embora o comportamento seja extraordinário por causa da dupla curvatura, pequenas alterações do projeto inicial, como da forma, por exemplo, podem mudar radicalmente o estado de tensões internas. A situação ideal para estas estruturas é um estado de sollicitação de compressão pura, tornando possível a utilização máxima da reserva de resistência dos materiais.

No início deste século as estruturas em casca começaram a ser utilizadas de modo alternativo em relação às estruturas convencionais. Atualmente, no projeto e construção de estruturas civis, as cascas podem ter um amplo emprego em coberturas, reservatórios, torres de resfriamento, túneis, silos, fundações, etc...

Durante o período inicial de desenvolvimento das cascas de concreto armado, houve uma grande tendência para se usar superfícies que podem ser definidas facilmente por expressões matemáticas relativamente simples. Além das cascas de revolução, as cascas de translação receberam atenção considerável e são utilizadas até hoje.

O desenvolvimento na área de cascas de concreto armado foi baseado inicialmente em procedimentos intuitivos, além dos

processos de tentativas e erros. No estágio seguinte, alguns métodos de análise elástica linear foram aplicados com sucesso, primeiramente na Alemanha, e então adotados e aperfeiçoados em todo mundo.

As coberturas em cascas finas de concreto armado surgiram na década de 1920 como uma possibilidade para se cobrir grandes áreas sem necessidade de pilares internos. A disponibilidade de folhas de metais de alta resistência no mesmo período estimulou os pesquisadores a utilizarem cada vez mais as estruturas em casca. Em tempos mais recentes, o desenvolvimento na área de polímeros, que são resistentes e leves ao mesmo tempo e que podem ser utilizados em muitos materiais novos de construção, está incentivando os pesquisadores e construtores a olharem para uma ampliação dos limites de aplicação das estruturas em casca.

A complexidade envolvida nas análises destas estruturas restringiram a utilização das mesmas até o advento de ferramentas analíticas avançadas, métodos numéricos adequados e computadores de alta velocidade e capacidade de processamento.

Com o advento dos métodos numéricos de análise, como por exemplo a técnica dos elementos finitos, e com o desenvolvimento de técnicas experimentais suficientemente precisas, a multiplicidade de estruturas em casca projetadas foi expandida consideravelmente, e a análise de cascas com quaisquer formas geométricas, carregamentos e vinculações tornou-se bastante viável.

Com a técnica dos elementos finitos aplicada às cascas, é possível processar desde as análises elásticas lineares mais simples até os casos mais avançados. Estas análises podem incluir o comportamento inelástico dos materiais, efeitos de não linearidade geométrica, instabilidade, efeitos dependentes do tempo, etc...

Para a utilização de cascas em geral, é necessário o conhecimento das condições de comportamento eficiente e das potencialidades totais destas estruturas. Isto requer um entendimento claro de suas características e do seu comportamento físico sob várias possibilidades de carregamentos. Os pesquisadores procuram chegar à compreensão do comportamento das cascas através de um grande número de teorias, de abordagens por

meio de métodos numéricos e métodos experimentais. Mas uma verificação detalhada dos trabalhos publicados revela que muitos aspectos estão ainda por ser conhecidos, e que muitas questões permanecem sem respostas.

Em anos recentes começaram a surgir vários grupos de pesquisa que se dedicam à aplicação de técnicas de programação matemática para otimização de estruturas em casca com relação a vários parâmetros. São utilizados diferentes enfoques para a abordagem de otimização, e todos com resultados interessantes. As estruturas podem ser otimizadas com relação às formas, ao peso próprio, à distribuição de tensões, etc...

Este trabalho é um dos muitos passos dados que buscam contribuir para a melhor compreensão das estruturas em casca, particularmente no que diz respeito à geração e otimização de formas, que é um dos pontos essenciais mais importantes a serem conhecidos para a construção de cascas arquitetonicamente elegantes e estruturalmente eficientes.

## 1.2 BREVE DESCRIÇÃO SOBRE CASCAS PARA COBERTURAS

Neste tópico é apresentada resumidamente uma visão dos principais grupos de estruturas em casca para coberturas construídas até hoje. As informações contidas neste item podem ser encontradas em várias fontes da bibliografia, como por exemplo num artigo mais recente apresentado por Popov (1991). São comentados com mais detalhes os grupos que incluem as cascas de revolução e translação; as cascas de formas livres, que são o tema principal desta tese, são apresentadas com maior profundidade no Capítulo 2. Informações adicionais podem ser encontradas nas publicações citadas na bibliografia.

### 1.2.1 CASCAS DE REVOLUÇÃO

Dentre as diversas cúpulas construídas para coberturas em todo mundo, destacam-se aquelas obtidas por superfícies de revolução que vem sendo construídas desde há muito tempo.

Se uma curva plana é girada em torno de uma reta fixa contida no mesmo plano, a superfície gerada é chamada de superfície de revolução. Como exemplos tem-se as superfícies esféricas, parabolóides de revolução, elipsóides de revolução, etc... Alguns dos principais casos de coberturas para cujas formas geométricas foram utilizadas superfícies de revolução são abordados a seguir.

Segundo consta na literatura, a cúpula com melhores condições de preservação até a atualidade é a da cobertura do Panteão, em Roma, cuja construção foi terminada por Adriano no ano 124 dC. O seu diâmetro é de 45,0 m, e a espessura da casca é de aproximadamente 1,0 m na parte superior e 6,5 m na parte inferior.

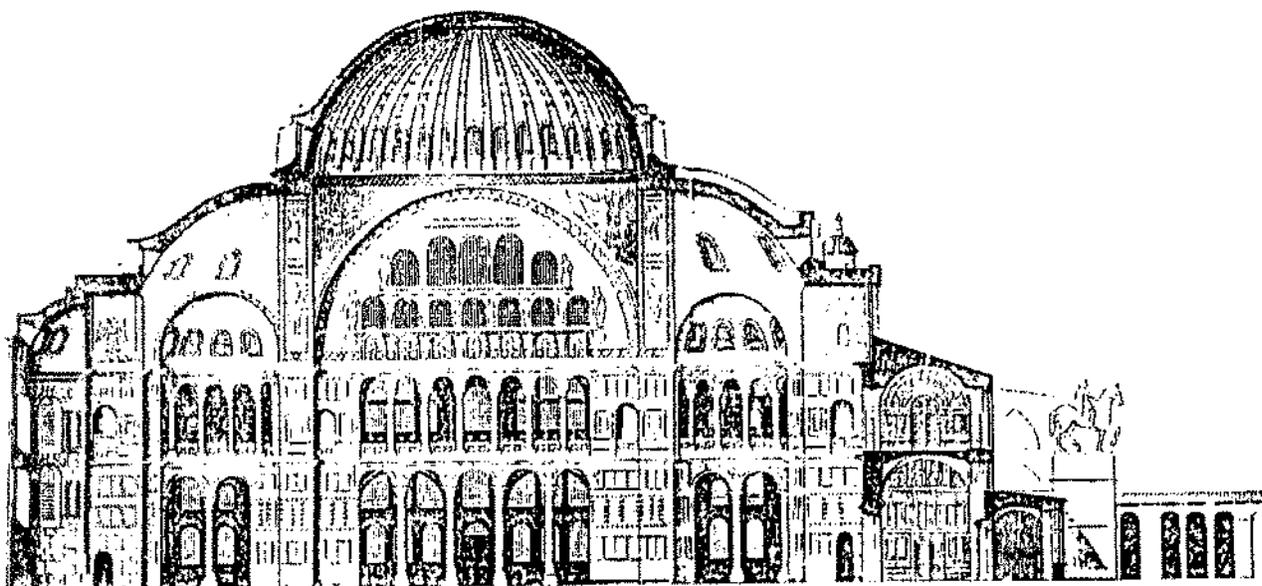


Figura 1.1 - Seção longitudinal da catedral de St. Sophia

A cúpula da catedral de St. Sophia (Figura 1.1), em Constantinopla, foi projetada e construída por dois arquitetos bizantinos (Anthemius e Isidorus) para Justiniano em 532-537 dC. Esta construção influenciou fortemente a construção de outras igrejas na Grécia, Armênia, Síria e Rússia, entre outras, por aproximadamente mil anos.

Após a tomada de Constantinopla pelos turcos em 1453, foram construídas diversas mesquitas de dimensões comparáveis às da catedral de St. Sophia. Pode-se citar a mesquita de Sulleiman,

concluída em 1557, com uma cúpula de 28,0 m de diâmetro.

Outro exemplo é o magnífico Taj Mahal (Figura 1.2) em Agra, Índia, que foi construído pelo Mongol Shah Jahah em 1629, após a morte de sua esposa favorita Mumtaz Mahal. O projeto foi feito por um turco bizantino, Ustad Isa, e construído durante os anos de 1630-1650. Sua arquitetura é extraordinariamente bela, com quatro minaretes e uma cúpula principal de 21,3 m de diâmetro, com acabamento em mármore branco.

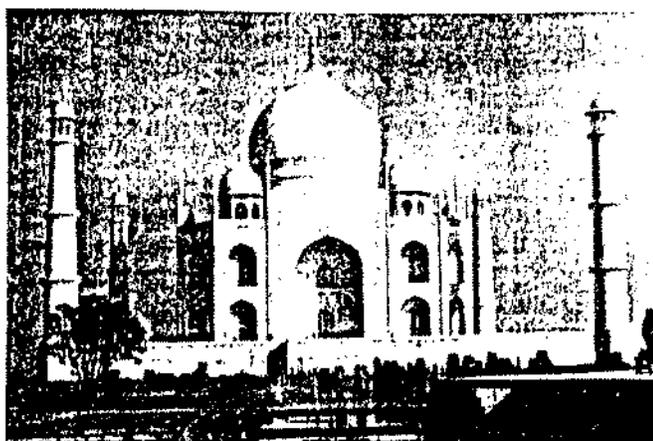


Figura 1.2 - Taj Mahal, em Agra, Índia

Aproximadamente dois séculos antes da conclusão do Taj Mahal, começou na Itália o período de renascença, com efeito marcante na arquitetura. Um dos exemplos mais notáveis desta era é o da catedral de São Pedro (Figura 1.3), em Roma. A cúpula desta catedral tem aproximadamente 40,0 m de diâmetro, com espessura da casca de 3,0 m na parte inferior. O trabalho neste projeto foi iniciado por Donato Bramante em 1506, e foi completado após 120 anos por Michelangelo em 1626 (onze arquitetos trabalharam na construção desta obra). Várias igrejas em Paris tiveram suas arquiteturas influenciadas por este projeto. Também a grande catedral de São Paulo, em Londres, projetada por Sir Christopher Wren, lembra a catedral de São Pedro de muitas maneiras (em contraste, esta catedral foi construída por um só arquiteto em 35 anos, de 1675 a 1710). Estes projetos exerceram uma influência determinante nos EUA, sobre o projeto do Capitólio em Washington,

e sobre diversas construções semelhantes em outras cidades americanas.



Figura 1.3 - Catedral de São Pedro, em Roma

Na era moderna, pode-se dizer que a construção de cúpulas começou na Alemanha, no início da década de 1920, sob a liderança de Dischinger e Finsterwalder, bem como de Dyckerhoff e Widman (Dywidag). Durante este período, utilizando concreto armado, a construção de cascas finas se desenvolveu rapidamente. De acordo com a literatura, o começo real pode ser considerado com o projeto e a execução da cúpula esférica para a fábrica Schott em Jena, em 1923. O diâmetro é de aproximadamente 40,0 m, e a espessura de 6 cm. A relação entre o raio e a espessura da cúpula é menor do que a mesma relação para a casca de um ovo; as cúpulas do Panteão, St. Sophia e São Pedro são muito mais espessas.

Nos projetos de cúpulas em que a ação do peso próprio é o principal carregamento, os tratamentos das cascas com relação aos apoios e à estabilidade são muito importantes. São notados alguns desenvolvimentos interessantes nesta área. No projeto de Aas-Jakobsen para uma casca de concreto armado semi-esférica para cobertura de um cinema em Oslo (Figura 1.4), Noruega, foi adotado um apoio que suportasse as bordas verticais com relativa liberdade de movimentos horizontais. A casca foi construída em 1963, com um raio de 20,0 m, espessura de 10 cm na parte inferior onde foi necessário formas dos dois lados, e 8 cm na parte superior. Como

as bordas verticais não provocam reações horizontais, não foi necessário reforço especial da armadura nessa região da estrutura.



Figura 1.4 - Cinema Colosseum, em Oslo, Noruega



Figura 1.5 - Salão da prefeitura em Ehime, Japão

Por outro lado, para uma casca de concreto armado muito abatida, projetada por Tsuboi em 1954 para o Salão da Prefeitura em Ehime, no Japão (Figura 1.5), foi necessário um tratamento diferente para a borda. A casca, com 25,0 m de raio e 12 cm de espessura, tem um engrossamento gradual da espessura nas regiões próximas aos apoios, além de um aumento significativo da armadura.

Uma nova proposta para solucionar o problema do tratamento das bordas de uma casca esférica foi desenvolvida e apresentada

por Torroja para o Mercado Algeciras (1933). Neste projeto a cúpula esférica é acoplada às abóbodas cilíndricas apoiadas em pilares nas extremidades, como pode ser visto na Figura 1.6. Os elementos interconectados da cúpula e das abóbodas cilíndricas enrijecem a cúpula e concentram as forças diretamente sobre os apoios. A armadura da cúpula segue as trajetórias das tensões principais, sendo que a espessura de 9 cm é aumentada gradualmente até 46 cm nos apoios. Em essência, o projeto estrutural é muito bem integrado com o projeto arquitetônico.

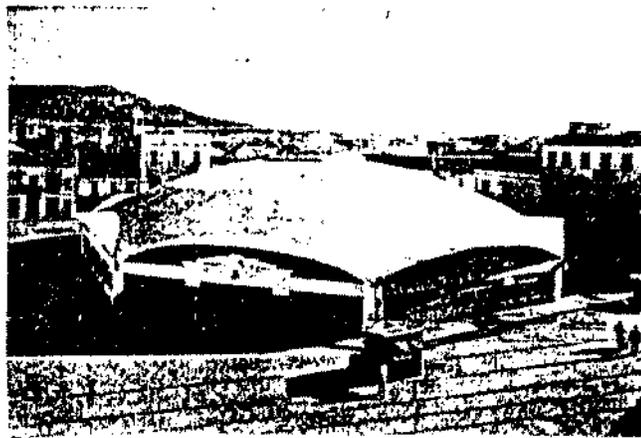


Figura 1.6 - Mercado Algeciras



Figura 1.7 - Auditório Kresge, M.I.T., EUA

Uma cúpula com a forma geométrica de um segmento esférico,

que é apoiada em três suportes, foi concebida por Eero Saarinen para o Auditório Kresge no M.I.T. (Figura 1.7). Este projeto teve a participação dos engenheiros Amman e Whitney atuando como consultores, e foi concluído em 1955. Embora esteticamente integrados ao conjunto como um todo, os apoios originais eram estruturalmente inadequados e tiveram que ser modificados. Com base no projeto de Torroja para o Mercado Algeciras, foi feita uma adaptação para os apoios do auditório que se mostraram mais eficientes.

Uma solução característica encontrada por Nervi para prevenção contra os efeitos de instabilidade em superfícies curvas é a construção destas estruturas mescladas com nervuras de enrijecimento, como é mostrado na Figura 1.8. Embora Nervi tenha sido motivado primeiramente por técnicas construtivas, a aparência interior destas superfícies é muito atrativa. Pode-se notar visualmente a maneira direta com que as forças vão das nervuras para os apoios. Neste caso as nervuras foram construídas com elementos pré-moldados.

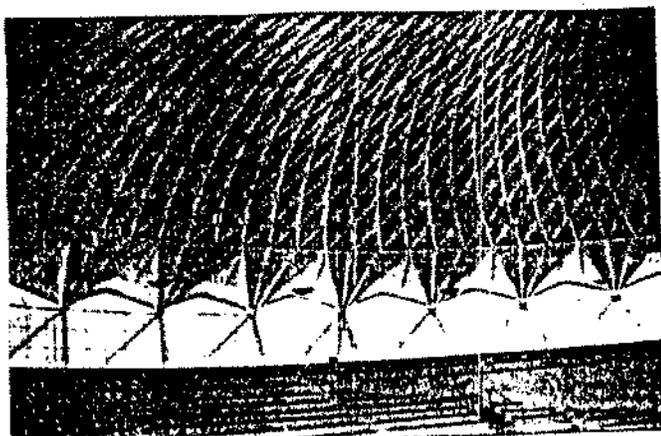


Figura 1.8 - Palácio dos Esportes, projetado por Nervi, em Roma

A maior cúpula já construída é a cobertura de um ginásio de esportes para 80000 pessoas, que está localizado no estado de Washington, EUA, e é chamado de Kingdome (Figura 1.9). Esta cúpula foi projetada por uma equipe liderada por Christiansen, com a participação da firma de Skilling et al. O projeto foi terminado

em 1973, e a construção em 1976. A cobertura tem vão livre de 201,6 m na maior direção e 33,5 m na menor direção, estando o ponto mais alto a 41,0 m do piso. A cúpula é formada por quarenta elementos côncavos de dupla curvatura, de concreto pré-moldado, com 12 cm de espessura. Os segmentos são enrijecidos nas suas bordas por nervuras de concreto armado de 1,8 m de largura. Os elementos pré-moldados convergem para a parte central para formar um anel de compressão. Um anel de concreto protendido resiste o empuxo da cúpula nos apoios.

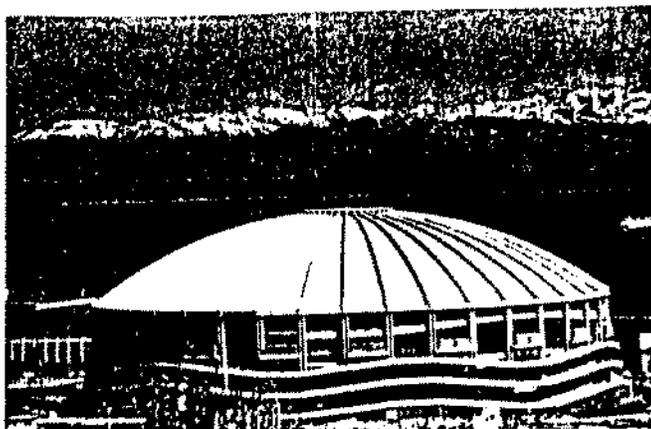


Figura 1.9 - Ginásio de Esportes Kingdome, EUA

## 1.2.2 CASCAS DE TRANSLAÇÃO

Se uma curva contida num plano é transladada sobre outra curva fixa, contida em um outro plano perpendicular ao primeiro, a superfície gerada é chamada de superfície de translação.

Estas superfícies são formadas, por exemplo, pela translação de uma parábola contida em um plano sobre outra parábola fixa, contida num plano normal ao primeiro. Desta maneira, transladando uma parábola convexa sobre uma parábola côncava é obtido um parabolóide hiperbólico. Se uma superfície é obtida pela translação de uma parábola convexa sobre outra parábola convexa ela é denominada parabolóide elíptico.

Uma superfície cilíndrica é obtida se uma parábola, círculo ou outra curva qualquer é transladada sobre uma linha reta fixa.

Esta é uma classe muito importante de estruturas em casca, pois muitos projetos tem sido executados com a utilização de cascas deste tipo.

No início da década de 30 a firma Dyckerhoff & Widmann (Dywidag) começou a atuar ativamente na área de projetos e execução de estruturas em casca na Alemanha. Com base nos desenvolvimentos atingidos na Alemanha, Anton Tedesco procurou ampliar rapidamente a utilização de cascas nos EUA com a firma de Roberts e Schaefer. Após a publicação do Manual 31 da ASCE (1953), as cascas cilíndricas circulares começaram a ser construídas com mais frequência nos EUA. No estágio de desenvolvimento seguinte, começaram a aparecer soluções para cascas cilíndricas obtidas por processos computacionais.

O arquiteto Candela projetou e executou a cobertura para um mercado na cidade do México (Figura 1.10) formada por vários elementos de cascas cilíndricas.

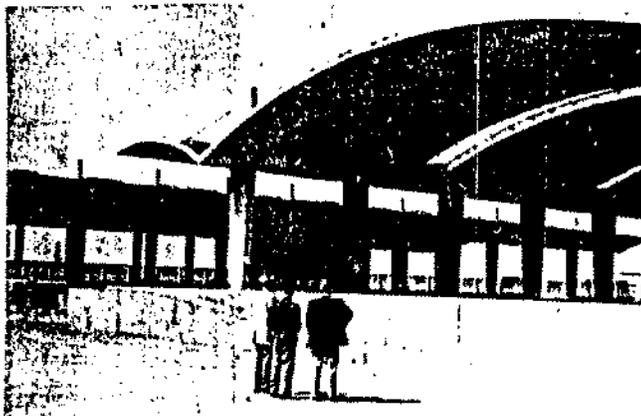


Figura 1.10 - Mercado projetado por Candela, Cidade do México

Uma grande cobertura composta de vários elementos de cascas cilíndricas foi projetada para o Laboratório Nacional de Engenharia de Idaho (Figura 1.11). As cascas cilíndricas têm um vão de 97,3 m na linha de apoio localizada aproximadamente a 8,5 m acima do piso, sendo que a altura no centro é de cerca de 23,0 m. Os arcos de enrigecimento têm uma altura de 1,7 m na corôa, aumentando até 2,3 m nos apoios. Os arcos são espaçados de 7,9 m,

fazendo com que a construção tenha aproximadamente 72,0 m de comprimento. A espessura da casca é de 15 cm, exceto nas secções cheias perto dos elementos enrijecedores onde a espessura aumenta para 20 cm. Na época em que a estrutura foi construída (1957-1958) o vão da cobertura estava entre os maiores dos EUA.

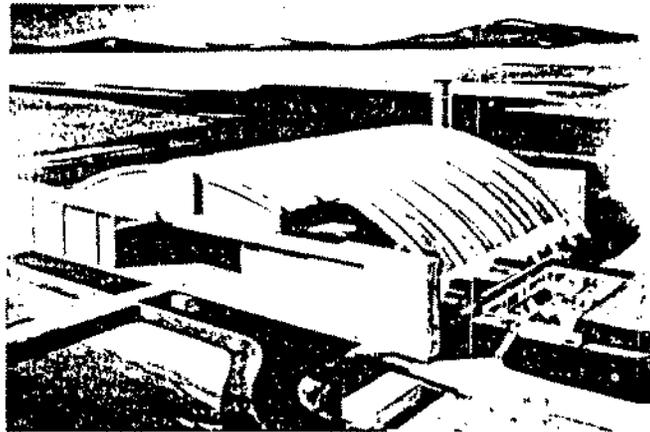


Figura 1.11 - Laboratório Nacional de Engenharia de Idaho, EUA

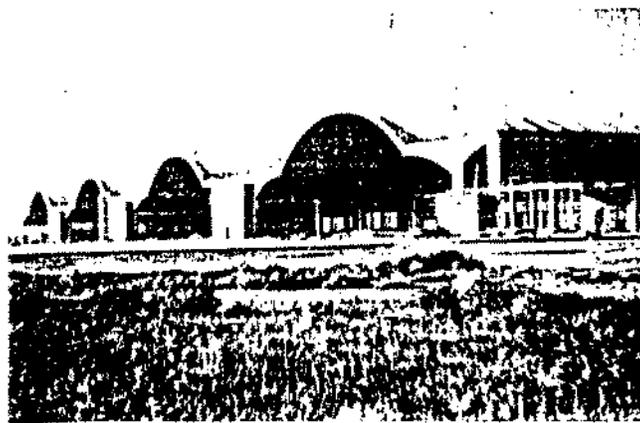


Figura 1.12 - Hangar da Força Aérea Americana, Washington

Christiansen projetou um hangar para a Força Aérea dos EUA (Figura 1.12) no estado de Washington. Esta estrutura tem 115,0 m de largura e 325,0 m de comprimento. Grandes aeronaves podem entrar de ambos os lados dos quatro compartimentos e estacionar de frente uma para a outra. O vão de cada compartimento é de 65,5 m,

com altura máxima de 20,0 m. As cascas cilíndricas de concreto armado de 7,6 cm de espessura são enrijecidas por oito arcos conectados por pinos. Este é o maior hangar de concreto armado do mundo.

Outra cobertura importante citada na literatura, que é formada por cascas cilíndricas, foi projetada por Yamasaki (arquiteto) e Tedesco (engenheiro), e foi construída em 1954 para o aeroporto de St. Louis.

Muitas cascas cilíndricas de concreto armado tem sido construídas através do mundo. Em algumas instâncias, para construções repetitivas, tem sido vantajoso o uso de painéis pré-moldados e painéis protendidos. Este método de construção é frequentemente usado na Rússia.

Além de cascas cilíndricas, alguns exemplos notáveis de uso de cascas de translação de dupla curvatura lembrando parabolóides elípticos têm sido registrados, como por exemplo o hangar projetado por Esquillan em Marignane, França, construído em 1950-1952. Ballesteros também projetou um grande número de cascas deste tipo que foram construídas no México.

Dois tipos de cascas largamente utilizados, cujas superfícies podem ser descritas por equações matemáticas analíticas, são os hiperbolóides de uma folha e parabolóides hiperbólicos.

Uma superfície moderadamente abatida pode ser obtida através de cortes por seções paralelas aos eixos de um hiperbolóide, com forma final semelhante à de um parabolóide hiperbólico. Torroja selecionou este tipo de casca para o Hipódromo Zarzuela (Figura 1.13), em Madri, na Espanha. Uma sequência de hiperbolóides abatidos foi usada no projeto de Torroja. Os elementos, que são fixos em uma de suas extremidades, têm 12,8 m de comprimento. Nos apoios a seção transversal tem 1,4 m de elevação, e o raio de curvatura é de 2,7 m. Na borda livre, a elevação é de 0,5 m e o raio de curvatura de 6,7 m. As cascas têm 5 cm de espessura, e o conjunto aparenta ser bem leve. Pelo fato das bordas livres das cascas lembrarem pássaros em vôo, Torroja denominou-as de "gaivotas". Esta estrutura, concluída em 1935, teve enorme influência nas construções leves de concreto armado através do mundo. Conforme é encontrado na literatura, sua importância excede em muito o seu tamanho.

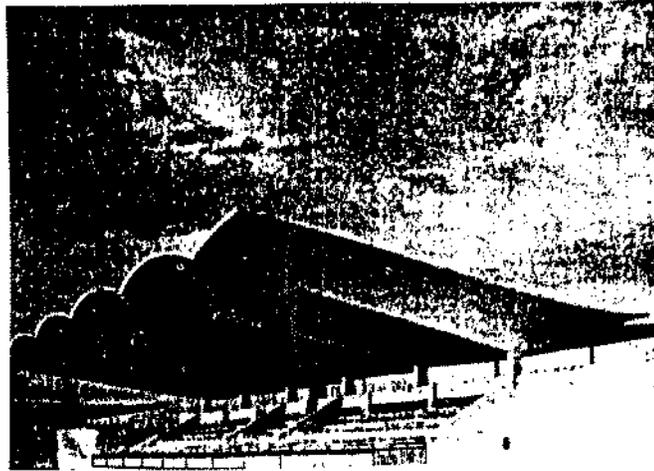


Figura 1.13 - Hipódromo de Zarzuela, em Madri

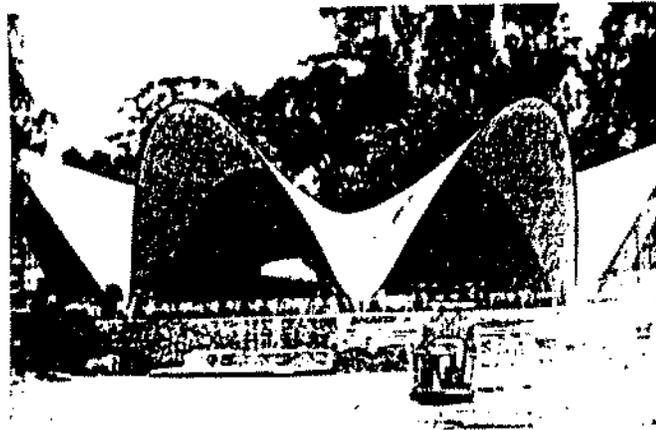


Figura 1.14 - Restaurante em Xochimilco, México

Um parabolóide hiperbólico, que é apoiado ao longo das bordas por parábolas muito fechadas, lembra uma sela abatida usada por Torroja para o hipódromo. Como os parabolóides hiperbólicos são superfícies regradas, eles podem ser gerados de maneira simples por segmentos de linhas retas. Combinações interessantes de alguns segmentos de cascas com esta geometria foram obtidas por Candela para estruturas tridimensionais. Como exemplo, um dos seus projetos para um restaurante é mostrado na Figura 1.14. Ele também fez uso criativo de parabolóides hiperbólicos para a cobertura de uma igreja de Monterrey, México.

Após o uso de hiperbolóides por Torroja para o hipódromo e as numerosas aplicações de parabolóides hiperbólicos por Candela no

México, muitos parabolóides hiperbólicos foram construídos nos EUA. Gradualmente começaram a ser desenvolvidos procedimentos computacionais para as análises específicas destas estruturas. Scordelis foi um dos pioneiros nesta área, e atuou como consultor em alguns dos maiores projetos. Um dos seus trabalhos importantes é sobre a análise de tensões de membrana de parabolóides hiperbólicos com formas quadrilaterais arbitrarias. A aplicação de sua teoria ao projeto de um parabolóide hiperbólico, com vão de 82,6 m, para a cobertura de uma obra em Ponce, Porto Rico, consta da publicação da International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) de 1969.

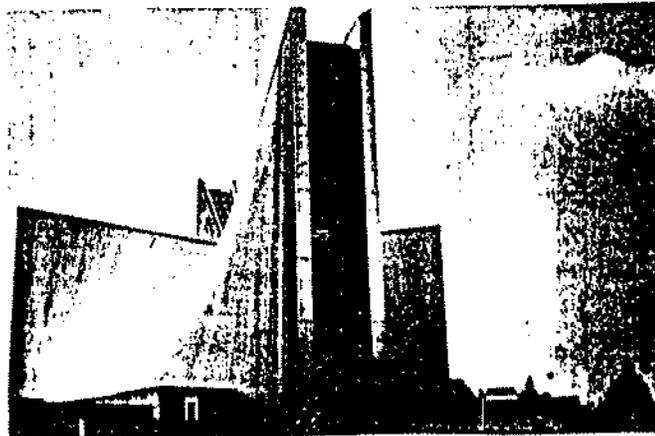


Figura 1.15 - Catedral St. Mary, em Tóquio

Uma utilização interessante destas estruturas foi feita por Tsuboi e Tange para a catedral St. Mary (Figura 1.15), em Tóquio, com oito parabolóides hiperbólicos. Este conjunto de 40,0 m de altura, com a espessura das cascas variando de 12 a 30 cm, foi concluída em 1964. Uma catedral similar, mas muito maior, foi construída em San Francisco poucos anos depois, sendo que a sua concepção foi desenvolvida por McSweeney et al. e Robinson, com Belluschi e Nervi atuando como consultores. Esta estrutura consiste de oito parabolóides hiperbólicos que têm 15,2 m de largura e 62,5 m de comprimento, cobrindo uma área de 62,5 m por 62,5 m. A catedral é revestida externamente com mármore. Apresenta um aspecto muito atraente, parecido com o da catedral de Tóquio.

### 1.2.3 CASCAS DE FORMAS LIVRES

O desenvolvimento de cascas de formas livres teve um grande impulso a partir da década de 1950. Como a geração destas formas é o tema central deste trabalho, este tópico é apresentado com mais detalhes no Capítulo 2.

De acordo com Popov (1991), as cascas de formas livres são aquelas que têm suas geometrias selecionadas por critérios absolutamente arbitrários, ou por meio de requisitos artísticos, ou ainda para minimizar o peso próprio que corresponde precisamente às condições de contorno e de carregamentos atuantes. Estas cascas não podem ser definidas geometricamente de modo simples por equações matemáticas analíticas.

Primeiramente foram desenvolvidos procedimentos experimentais para determinação de formas livres de estruturas em casca que resistissem a ação de carregamentos predominantes e previamente conhecidos.

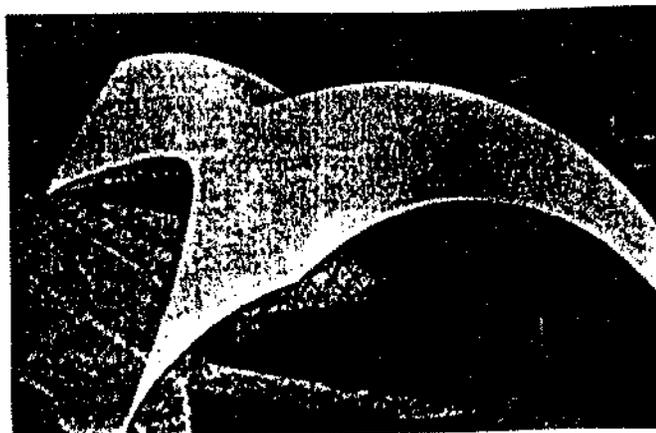


Figura 1.16 - Modelo da cobertura para o Tachira Club

Um dos primeiros projetos de uma casca de forma arbitrária foi desenvolvido por Torroja para o Tachira Club, mostrado na Figura 1.16. No projeto desta casca foi utilizado o estado da arte em 1957 para cálculos aproximados, com a utilização de um modelo reduzido em escala 1:10.

Outros pesquisadores propuseram diversos modelos para geração de formas livres de estruturas em casca, que basicamente

compreendem modelos físicos, analíticos e computacionais. Pesquisas subsequentes mostraram que as formas de cascas assim determinadas são essencialmente corretas do ponto de vista estrutural.

Dentre as propostas apresentadas, o engenheiro suíço Heinz Isler vem obtendo grande sucesso ao aplicar métodos físicos experimentais para geração de formas de cascas para diversas condições de apoio e carregamentos (ver, por exemplo, a publicação *New Shapes for Shells - Twenty Years Later*, 1980). Um dos seus métodos consiste na obtenção de formas por meio de uma membrana de borracha sob pressão. Em outro método, as formas geométricas são obtidas por meio de processos de extrusão de materiais viscosos. E por fim, em outro método, as formas são obtidas por meio de um tecido suspenso por vários pontos previamente determinados. Isler também utiliza modelos reduzidos para proceder ensaios de análise de comportamento estrutural das cascas a serem construídas.

Se os andaimes e as formas de madeira forem muito bem executados para as formas geométricas resultantes, as estruturas em casca de concreto armado serão muito finas e de elegância excepcional. Isler tem construído com destaque centenas de cascas, principalmente no oeste da Europa.

### 1.3 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS EM CASCA

Otimização de estruturas em casca e visualização destas superfícies geradas por computador é um dos mais novos e excitantes desenvolvimentos na área de pesquisas e projetos de cascas na atualidade. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos ultimamente nesta área que está em plena expansão, como é apresentado, por exemplo, no artigo de Bletzinger e Ramm (1992).

Os principais objetivos de projetos para estruturas em geral, e para as cascas em particular, são rigidez adequada e suficiente, estados de tensões baixas com distribuições homogêneas, inexistência de concentrações de tensões, pouca ou nenhuma flexão, gasto mínimo de materiais, etc... Esta é uma área típica de aplicação dos conceitos de otimização. Formulações específicas de problemas práticos de otimização variam um pouco para cada

aplicação, e requerem métodos de solução poderosos e flexíveis.

Os métodos de programação matemática podem ser aplicados, e se ajustam perfeitamente, aos métodos de análise numérica como a técnica dos elementos finitos.

No caso de otimização de formas de estruturas em casca em engenharia civil, que são estruturas construídas principalmente de concreto armado, podem ser consideradas algumas funções objetivo. A função objetivo "Energia de Deformação", utilizada para minimizar a flexão, e "Nível de Tensão", empregada para controlar diretamente o estado de tensão, são de importância fundamental. Outra função objetivo utilizada é o "Peso Próprio" ou "Volume", para consumir o mínimo de material possível na execução das estruturas.

Neste trabalho, a otimização é utilizada para geração de formas de estruturas em casca por meio de membranas elásticas flexíveis, e não para otimizar cascas com formas iniciais pré-determinadas. A função objetivo adotada é a "Energia Potencial Total", sendo que o mínimo desta função representa um ponto de equilíbrio da membrana segundo o Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Este modelo computacional foi idealizado para simular os métodos físicos utilizados por Isler para geração das formas de estruturas em casca.

Com o progresso alcançado nas ciências de computação, e com o desenvolvimento de computadores com capacidades de processamento e velocidades cada vez maiores, a otimização estrutural tem se tornado uma ajuda adicional valiosa para a pesquisa e o projeto de estruturas em casca em geral, com a conseqüente redução do tempo de planejamento e diminuição de gastos com modelos experimentais.

## 1.4 OBJETIVOS E CONTEÚDO DO TRABALHO

### 1.4.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo principal deste trabalho é a geração de geometrias de formas livres para estruturas em casca em que o estado de tensões seja de compressão pura para o carregamento principal atuante. Para os outros carregamentos secundários é desejável que

ocorra o mínimo possível de flexão da casca, uma vez que o estado ideal, que é a ausência de flexão para todos os carregamentos, é praticamente impossível.

As formas são obtidas a partir de configurações iniciais de membranas deformáveis, que sob a ação de diversos carregamentos, chegam à uma das configurações de equilíbrio estático. Nesta configuração a membrana está solicitada por tração pura. Ao se construir uma casca em concreto armado com a forma geométrica da membrana invertida em relação ao plano horizontal, a estrutura será solicitada por compressão pura, sob a ação do carregamento inicialmente utilizado para a geração da forma. Podem ser considerados as ações dos carregamentos concentrados, de carregamentos uniformemente distribuídos, de pressão, além de simulação devida ao peso próprio e prescrição de deslocamentos.

As configurações de equilíbrio estável são equivalentes aos pontos de mínimo da função escalar Energia Potencial Total. São utilizados dois métodos de programação matemática para duas situações diferentes de aplicação. Para as estruturas com Energia Potencial Total conhecida (as forças aplicadas são conservativas), os pontos de mínimo são obtidos com um algoritmo do tipo quase-Newton, que utiliza valores da função e de seu gradiente. Para as estruturas com Energia Potencial Total inexistente (as forças aplicadas não são conservativas, como é o caso da pressão), as configurações de equilíbrio estático da membrana são obtidas com um algoritmo incremental do tipo Newton-Raphson, que é utilizado para resolver o sistema de equações não-lineares dadas pelas equações de equilíbrio que envolvem a Hessiana da Energia Potencial de Deformação (matriz de rigidez) e a matriz não simétrica associada às forças de pressão. Cada um destes métodos é descrito com detalhes no Apêndice A.

#### 1.4.2 CONTEÚDO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em cinco capítulos e um apêndice. O presente capítulo, que é a Introdução, é o Capítulo 1.

No Capítulo 2 as estruturas em casca são abordadas sob o enfoque de arte estrutural.

Inicialmente são considerados elementos de geometria diferencial que são aplicáveis à Teoria das Estruturas em Casca. A formulação da Teoria de Cascas Finas é tratada considerando-se os casos de Teoria de Membrana e Teoria Flexional.

Depois são comentadas as condições para uma estrutura em casca se comportar de acordo com a Teoria de Membrana.

São apresentadas algumas metodologias básicas desenvolvidas para geração de formas estruturais de cascas que tenham comportamento segundo a Teoria de Membrana, que são modelos físicos, modelos analíticos e modelos computacionais. São citados exemplos de cada um dos modelos de geração, sendo que os modelos matemáticos computacionais são descritos mais detalhadamente, pois esta tese apresenta uma contribuição relativa à esta área.

O ponto central deste capítulo é a apresentação da classificação das estruturas em casca feita por Heinz Isler, e os métodos físicos de geração de formas de estruturas em casca empregados por ele, que são: formas pneumáticas, formas de fluxos e formas de membranas pênseis invertidas. Por fim são apresentadas as principais estruturas em casca projetadas por Isler englobando os três grupos, com a inclusão de alguns dos seus projetos que não fazem parte de nenhum desses grupos. O trabalho de Isler serviu de inspiração para o desenvolvimento desta tese.

No Capítulo 3 é apresentado o modelo computacional que foi desenvolvido para geração de formas de estruturas em casca por meio de membranas elásticas deformáveis. O modelo matemático foi obtido com a utilização de técnicas de programação matemática combinadas com a técnica dos elementos finitos.

Inicialmente é descrita a relação constitutiva adotada para o material da membrana, com ênfase para o estado plano de tensão. O elemento finito utilizado para discretizar a membrana é triangular com as incógnitas nodais representadas por deslocamentos lineares. Depois são apresentadas as expressões das componentes da deformação que fazem parte do estado plano de tensões, sendo consideradas no modelo grandes deformações e grandes deslocamentos de modo exato para as membranas.

A seguir são descritas as expressões para a Energia Potencial de Deformação, das componentes do seu gradiente e da sua Hessiana. Para compor os carregamentos foram consideradas as ações das

forças concentradas, uniformemente distribuídas, de pressão e também a simulação do peso próprio e prescrição de deslocamentos. Com relação às condições de contorno, para um determinado ponto nodal são relacionadas todas as combinações de vinculações e de deslocamentos prescritos possíveis.

Para terminar o capítulo são apresentadas as duas formas de tratamento das configurações de equilíbrio estático que podem ocorrer no modelo: para estruturas com Energia Potencial Total conhecida e para estruturas com Energia Potencial Total desconhecida.

No Capítulo 4 são apresentados vários resultados decorrentes do modelo proposto. Inicialmente são geradas formas aproximadas de cabos flexíveis através de uma faixa elástica deformável, solicitada por ações de vários carregamentos: concentrado, uniformemente distribuído, e linearmente distribuído. Para cada carregamento é gerada uma forma, que é comparada com o respectiva geometria do cabo flexível correspondente.

A seguir é feita uma descrição do programa de elementos finitos ANSYS, e do elemento que é utilizado para a análise estrutural estática das estruturas em casca de concreto armado, com formas geradas por meio do modelo computacional proposto neste trabalho.

Depois é apresentado um modelo de casca construído em concreto armado na Universidade de Kassel, Alemanha, cuja geometria foi gerada por um programa de elementos finitos considerando grandes deslocamentos. Os resultados geométricos provenientes do modelo de Kassel são comparados com os resultados obtidos por Vizotto para uma forma idêntica gerada neste trabalho. São mostradas as tensões principais decorrentes do peso próprio da estrutura de concreto armado, que foi o carregamento utilizado para a geração da forma.

Finalmente, é feita a geração de três cascas de maneiras diferentes: com carregamento uniformemente distribuído, com carregamento de pressão, e com deslocamentos prescritos. Em cada caso, para cada forma gerada são fornecidos os parâmetros da membrana considerada e para a correspondente estrutura de concreto armado gerada. São calculados os deslocamentos e as tensões principais que ocorrem em cada caso, e comprovado o comportamento

estrutural das cascas no "regime de membrana".

No Capítulo 5 são feitas considerações finais sobre o trabalho desenvolvido e apresentadas algumas sugestões para continuidade futura das pesquisas relacionadas ao assunto.

No apêndice A são apresentados conceitos fundamentais e informações complementares necessários para uma melhor compreensão das técnicas de programação matemática. São descritos sucintamente o método quase-Newton e o método incremental Newton-Raphson, que são utilizados para encontrar configurações de equilíbrio estático das membranas elásticas deformáveis.

## 1.5 REFERÊNCIAS

- [1-01] - Bletzinger, K.-U.; Ramm, E., *Structural Optimization as Tool for Shape Design*, Numerical Methods in Engineering, pp. 465-477, 1992.
- [1-02] - Isler, H., *New Shapes for Shells - Twenty Years Later*, in *Heinz Isler as Structural Artist*, The Art Museum, Princeton University, New Jersey, 1980.
- [1-03] - Popov, E. P., *Progress in analysis and design of RC shells*, Engineering Structures, v. 13, april, pp. 128-143, 1991.

**CAPÍTULO 2**

**ESTRUTURAS EM CASCA  
COMO ARTE ESTRUTURAL**

## 2.1 INTRODUÇÃO

As cascas existem na natureza muito tempo antes dos homens aprenderem a construí-las. Uma característica destas estruturas é que as espessuras são muito menores que as outras dimensões; outra característica é a grande capacidade de resistência decorrente de suas geometrias.

O estudo das estruturas em casca é complexo do ponto de vista matemático. Antes da era computacional, mesmo os casos mais simples eram resolvidos por meio de tratamentos analíticos extensos e, mesmo com simplificações, as abordagens eram matematicamente difíceis e exaustivas. Era comum a utilização de modelos físicos reduzidos para solucionar problemas de projetos. Depois, com o advento dos computadores e o desenvolvimento de técnicas computacionais, notadamente a técnica dos elementos finitos, também foi possível a análise numérica de cascas com quaisquer formas, condições de contorno, de vínculos e carregamentos.

Mais recentemente, os métodos de otimização estrutural têm sido apresentados como ferramentas computacionais gerais para gerar as formas de cascas submetidas às muitas combinações diferentes de carregamentos e condições de contorno. O procedimento de otimização é uma área interdisciplinar que pode combinar os modelos de formas, análise estrutural e programação matemática. Estes métodos envolvem problemas não lineares e requerem algoritmos sofisticados.

O avanço na análise computacional das estruturas em casca teve como consequência a redução da espessura, o aperfeiçoamento das formas que as tornaram mais leves, melhor precisão nos resultados, etc...

## 2.2 TEORIA DAS ESTRUTURAS EM CASCA

Para o estudo das estruturas em casca em geral pode ser utilizada a Teoria da Elasticidade. Desta teoria advém diversas teorias simplificadas da engenharia que são aplicadas nas áreas de projetos mecânicos e estruturais.

As componentes básicas dos problemas de mecânica geral podem ser expressas através de equações de equilíbrio, equações de compatibilidade e relações constitutivas. As equações de equilíbrio representam um estado das leis de Newton; as condições de compatibilidade expressam a relação cinemática entre deformações e deslocamentos; e as relações constitutivas descrevem as hipóteses dos comportamentos tensão-deformação dos materiais.

Uma simplificação comum, frequentemente imposta aos problemas de elasticidade, tem sido a formulação menos restritiva das teorias baseadas em características geométricas distintas para cada problema específico. Dentre as teorias aproximadas pode-se citar as Teorias de Vigas, que são aplicáveis aos elementos estruturais uni-dimensionais submetidos à flexão, e que têm uma dimensão característica muito maior que as outras duas; as Teorias de Placas, que tratam inicialmente de elementos estruturais planos com duas dimensões bem maiores que a terceira; e as Teorias de Cascas, que tratam de elementos estruturais tridimensionais curvos que têm uma dimensão pequena em relação às outras dimensões características.

## 2.2.1 RUDIMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

A estrutura em casca é definida geometricamente pela especificação da sua superfície média, da sua espessura em cada ponto do seu domínio e pelas condições de contorno. Superfície média é a região do espaço que divide a casca ao meio ao longo de sua espessura  $t$ . Além destes, existem outros elementos geométricos envolvidos no estudo das cascas que são definidos a seguir (Zagottis, 1973).

Considerando uma superfície  $\mathcal{S}$  definida em relação a um sistema de referência tri-ortogonal  $Oxyz$ , denomina-se seção normal de  $\mathcal{S}$  num ponto  $\mathcal{P}$  a uma curva  $\mathcal{C}_\Omega$  determinada pela intersecção de  $\mathcal{S}$  com um plano qualquer  $\Omega$  que contenha o versor  $\eta$  normal à superfície. Denomina-se raio de curvatura  $\mathcal{R}_\Omega$  de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$  no plano  $\Omega$  ao raio de curvatura de  $\mathcal{C}_\Omega$  em  $\mathcal{P}$ . Chama-se curvatura normal de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$  no plano  $\Omega$  o inverso do raio de curvatura  $\mathcal{R}_\Omega$  que é representado por  $k_\Omega$ . O centro de curvatura  $O_\Omega$  é dado pelo centro da

circunferência que tangencia o ponto  $\mathcal{P}$  e dois vizinhos próximos, e que está contida no plano  $\Omega$ .

Ao girar o plano  $\Omega$  em torno da normal  $\eta$ , a cada posição do mesmo corresponde um valor de  $k_\Omega$ . Existem duas posições de  $\Omega$ , perpendiculares entre si, em que as respectivas curvaturas  $k_1$  e  $k_2$  constituem um máximo e um mínimo relativos de  $k_\Omega$ . A curvatura de Gauss definida como  $k_G$  é igual ao produto de  $k_1$  por  $k_2$ . O sinal de  $k_G$  é muito importante na teoria das cascas.

Se  $k_G$  é positivo em  $\mathcal{P}$ , significa geometricamente que ao se variar  $\Omega$  em torno de  $\eta$  todos os centros de curvatura  $O_\Omega$  estarão no mesmo semi-espaço em relação ao plano tangente a  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$ ; o que equivale dizer que as seções  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  têm a concavidade dirigida para o mesmo semi-espaço relativamente ao plano tangente a  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$ .

Se  $k_G$  é negativo em  $\mathcal{P}$ , significa geometricamente que ao se variar  $\Omega$  em torno de  $\eta$  existem centros de curvatura  $O_\Omega$  nos dois semi-espaços em relação ao plano tangente a  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$ ; o que equivale dizer que as seções  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  têm concavidades voltadas para semi-espaços opostos em relação ao plano tangente a  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$ .

Se  $k_G$  é nulo, um dos raios de curvatura é infinito e a casca pode ter a superfície média descrita por formas cilíndricas, cónicas, etc...

## 2.2.2 TEORIA DE CASCA FINA

A partir da Teoria da Elasticidade são formuladas outras teorias simplificadas mais específicas, dentre as quais destaca-se a Teoria de Cascas Finas. Com esta formulação é possível estudar estas formas estruturais de modo satisfatório.

A relação entre a espessura  $t$  e os raios de curvatura principais ( $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ ) da superfície média de uma casca fina deve estar dentro dos seguintes limites:

$$1/1000 \leq (t/\mathcal{R}_1 \text{ ou } t/\mathcal{R}_2) \leq 1/20$$

No caso da Teoria de Cascas Finas são consideradas neste trabalho as seguintes hipóteses fundamentais (Pflüger, 1961; Zagottis, 1973):

- A espessura da casca é pequena em relação às dimensões e aos raios de curvatura principais da superfície média;
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões;
- Os pontos contidos em retas normais à superfície média indeformada após a deformação passam a ocupar posições sobre retas perpendiculares à superfície média deformada (Kirchoff-Love);

### 2.2.3 TEORIA DE MEMBRANA E TEORIA FLEXIONAL

A Teoria de Membrana tem o seu nome devido as estruturas em casca finas para as quais é adotado como hipótese o equilíbrio de membrana. Este equilíbrio é definido como uma abstração do equilíbrio estático de uma casca, obtido exclusivamente por meio de forças contidas no plano tangente em cada ponto da sua superfície média, que são forças normais (compressão e tração) e de cisalhamento.

Quando as hipóteses acima são adotadas, quaisquer momentos fletores e de torção e as correspondentes forças cortantes são nulos. A Teoria de Membrana pode ser usada somente quando estes esforços são nulos, ou as tensões associadas a eles são tão pequenas que se tornam desprezíveis.

A Teoria Flexional é utilizada quando além dos esforços de membrana que atuam no plano tangente da superfície média da casca, devem ser considerados os momentos fletores e de torção e as respectivas forças cortantes.

A Teoria de Membrana é interessante porque, além de ser matematicamente mais simples do que a Teoria Flexional, ela se adapta muito bem como modelo para descrever com boa aproximação o comportamento estrutural de cascas reais que satisfazem determinadas condições de geometria, de apoio e de carregamento.

## 2.2.4 CONDIÇÕES PARA UMA ESTRUTURA EM CASCA SE COMPORTAR DE ACORDO COM A TEORIA DE MEMBRANA

O comportamento de uma estrutura em casca segundo a Teoria de Membrana pode ocorrer se as seguintes condições forem satisfeitas (Rekach, 1978):

1 - A estrutura deve ter uma superfície com variação suave e contínua, com a espessura constante ou discretamente variável. Uma mudança brusca dos raios de curvatura ou da espessura pode fazer surgir uma diferença de deformação e, conseqüentemente, produzir flexão;

2 - Os carregamentos que agem sobre a estrutura em casca devem ser contínuos, podendo variar suavemente. Uma força concentrada geralmente faz surgir flexão na região de sua aplicação;

3 - As bordas da estrutura em casca devem ser vinculadas de modo que elas possam se mover livremente segundo a direção normal;

4 - As forças aplicadas nas bordas devem estar contidas no plano tangente da estrutura em casca.

Se não forem satisfeitas as condições necessárias para que uma estrutura em casca tenha comportamento de membrana, pode ocorrer uma das duas hipóteses (Zagottis, 1973):

A - Se a curvatura de Gauss  $k_G$  for positiva ou nula, existem regiões da casca em que os momentos fletores e de torção são consideravelmente importantes. Contudo, estas regiões são pequenas e estes esforços são amortecidos rapidamente. Portanto, quase toda a estrutura pode ser estudada pela Teoria de Membrana, e as zonas denominadas perturbadas devem ser estudadas pela Teoria Flexional. São passíveis de perturbação as regiões dos apoios, as áreas onde ocorrem variações bruscas dos carregamentos e também onde se tem cargas concentradas aplicadas;

B - Se a curvatura de Gauss  $k_G$  for negativa, as perturbações do regime de membrana estendem-se por amplas zonas, e eventualmente, por toda a estrutura. Neste caso deve ser utilizada a Teoria Flexional para o estudo destas cascas, pois a solução encontrada pela Teoria de Membrana não é adequada para descrever o comportamento real da estrutura.

## 2.3 GERAÇÃO DE FORMAS DE ESTRUTURAS EM CASCA NO REGIME DE MEMBRANA

Os profissionais que trabalham com estruturas em casca têm conhecimento de algumas metodologias desenvolvidas para geração de formas estruturais que se comportem essencialmente segundo a Teoria de Membrana. Existem basicamente três áreas nas quais é possível atuar neste sentido: geração de formas por modelos físicos, por modelos analíticos e por modelos computacionais.

### 2.3.1 MODELOS FÍSICOS

Na área de geração de formas por modelos físicos pode-se citar, por exemplo, Giovanni Poleni (1748) que utilizou o princípio da inversão da catenária para a construção da cúpula da catedral de São Pedro, em Roma. Outro exemplo é do arquiteto espanhol Gaudí (1908), que também com o princípio da inversão da catenária construiu o modelo suspenso de uma capela da colônia Guell (Ramm e Mehlhorn, 1991).

O engenheiro português J. F. Lobo Fialho (1957) elaborou uma técnica experimental para geração de formas de estruturas em casca para barragens em arco. O engenheiro suíço Heinz Isler vem desenvolvendo, desde 1954, métodos experimentais de geração de formas de estruturas em casca através de modelos reduzidos de membranas flexíveis submetidas à ação de carregamentos distribuídos ou de pressão, e membranas obtidas por analogia de formas obtidas de processos de extrusão de materiais viscosos. Em 1986, Gerhard Mehlhorn verificou a possibilidade de geração de modelos estruturais em casca por meio de um processo de geração de formas com a utilização de acrílico (Ramm e Mehlhorn, 1991).

### 2.3.2 MODELOS ANALÍTICOS

Como exemplo deste modo de geração pode-se citar Milankovic, que em 1908 apresentou sua tese de doutoramento à Academia Iugoslava de Ciências ("Über Schalen gleicher Festigkeit") a

respeito de determinação de formas de algumas estruturas em casca de tensão constante, sob a ação de forças com simetria radial, por processos analíticos. Esse trabalho serviu posteriormente para outros, como os trabalhos dos autores Pöschl, Flügge e Forchheimer (Ramaswamy, 1961).

Ramaswamy (1961) apresentou uma formulação com funções que envolvem somatórios de termos de séries matemáticas para geração de formas de algumas estruturas em casca no regime de membrana.

### 2.3.3 MODELOS MATEMÁTICOS COMPUTACIONAIS

Esta linha de pesquisa é mais recente e está em plena expansão. Com o incremento das possibilidades computacionais, torna-se cada vez maior o emprego de métodos que possibilitam a geração de formas e o estudo de estruturas em casca.

M. K. S. Rajan apresentou em 1968 a tese de doutoramento "Shell Theory Approach for Optimization of Arch Dam Shapes" na Universidade da Califórnia (Berkeley, EUA). Nesse trabalho, um sistema de equações diferenciais parciais não lineares que regem o problema de membranas foi formulado e resolvido utilizando a técnica de diferenças finitas. Esse método foi utilizado para gerar formas para barragens em arco e, posteriormente, também para formas de coberturas em casca. O procedimento de diferenças finitas desenvolvido é um tanto limitado porque não é apropriado para o tratamento de uma membrana com borda livre. Neste caso específico é necessário introduzir uma membrana fictícia de grande flexibilidade, com bordas fixas e sem carregamento (Smith e Wilson, 1971).

P. G. Smith apresentou em 1969 sua tese de doutorado intitulada "Membrane Shapes for Shell Structures" na Universidade da Califórnia (Berkeley, EUA). Smith foi inspirado pela técnica experimental que Fialho utilizou para projetos de formas de barragens em arco (modelo físico) para projetar formas de estruturas em casca por computador (modelo matemático computacional). O programa foi desenvolvido com uma formulação de elementos finitos, considerando pequenas deformações e grandes deslocamentos (não linearidade geométrica). O material é

considerado como homogêneo, isótropo e elástico linear. O procedimento utilizado para a análise do problema geometricamente não linear é o método incremental iterativo Newton-Raphson (Smith e Wilson, 1971).

C. J. K. Williams (1990) desenvolveu um método para obtenção de formas para coberturas e para velas de barcos, utilizando para a função de tensão uma analogia eletro-magnética obtida da Lei de Biot-Savart. Nessa formulação, o contorno da cobertura deve ter o formato inicial de uma poligonal num plano, com condições de contorno aplicadas somente nos seus vértices. As tensões principais no plano  $xy$  são obtidas pela função de Airy que envolve as derivadas da função do fluxo de corrente elétrica em um fio dobrado com a forma de um polígono, e as direções principais pelo Circulo de Mohr. Resolvendo a equação de equilíbrio de uma membrana por diferenças finitas, é obtida a forma da estrutura em casca com comportamento de acordo com a Teoria de Membrana.

Vários grupos de pesquisa estão trabalhando em desenvolvimento de projetos de formas de estruturas em casca de madeira. Entre estes está a Unidade de Pesquisa de Estruturas Leves (LSRU) da Escola de Arquitetura da Universidade de New South Wales, em Sidney, Austrália, que é dirigida pelo Professor Vinzenz Sedlak, e que tem participado de projetos conjuntos com outras instituições européias, como a Universidade Tecnológica Federal de Lausanne (Suíça), a Universidade de Stuttgart (Alemanha), e as Universidades de Innsbruck e Vienna (Austria). A natureza interdisciplinar desses programas de pesquisa é o principal aspecto inovador dos trabalhos desenvolvidos. As formas estruturais são adotadas como o ponto comum e central para investigações em arquitetura, engenharia estrutural, e modelos de geração e análise das formas. Estão sendo desenvolvidos modelos computacionais que envolvem elementos estruturais de cabos e membranas para se encontrar formas para as estruturas com elementos de madeira, e também são construídos modelos físicos reduzidos para verificações e ensaios das estruturas tridimensionais obtidas através dos programas. Alguns métodos de procura de formas que devem ser adotadas em resposta ao tipo de forma e material escolhidos para a construção estão sendo pesquisados. Formas determinadas pelas propriedades do material

que respondem ao caso dominante de carregamento têm emergido como as mais econômicas. Assim, a forma torna-se o ponto de partida para o desenvolvimento integrado de projeto envolvendo os aspectos arquitetônico, estrutural e construtivo (Sedlak, 1991).

Na Universidade de Stuttgart foram desenvolvidos recentemente vários trabalhos na área de otimização de formas de estruturas em casca sob a orientação de Ekkehard Ramm. Dentre eles encontram-se as teses de doutoramento de Kai-Uwe Bletzinger ("Formoptimierung von Flächentragwerken") e de Stefan Kimmich ("Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit Finiten Elementen"), concluídas em 1990 (Bletzinger e Ramm, 1992). Foram desenvolvidos métodos computacionais de otimização estrutural como ferramentas gerais de procura de formas de estruturas em casca livres. São adotados procedimentos que envolvem modelagem de formas, análise estrutural e programação matemática combinados com conceitos de projetos geométricos com auxílio de computador (CAGD) e análise de comportamento de sensibilidade. Existe a possibilidade das estruturas em casca serem otimizadas em relação à várias funções objetivo, sendo que as que se destacam são: peso (ou volume), energia de deformação e nível de tensão.

A contribuição especial do trabalho desenvolvido por Kai-Uwe Bletzinger é a aplicação às estruturas em casca livres em engenharia civil e mecânica, incluindo como casos especiais as estruturas axisimétricas, placas e membranas. Os métodos e resultados são aplicáveis às cascas com comportamento linear, que são discretizadas por elementos isoparamétricos degenerados utilizando como incógnitas os deslocamentos nodais. Todas as funções objetivo e restrições que envolvem as variáveis de otimização são não lineares. Para se considerar problemas de estruturas sob a ação de múltiplos efeitos, uma função objetivo geral pode ser definida pela soma ponderada de funções objetivo simples. Existem duas funções objetivo de importância predominante no caso de otimização de formas de cascas com carregamentos que resultem em estado de tensão de membrana ou compressão pura. Uma função objetivo é a Mínima Energia de Deformação, que é utilizada para minimizar o efeito de flexão; e a outra é a função Nível de Tensão, que é empregada para controlar os estados de tensões admissíveis do material da casca.

Os conceitos e métodos gerais de Projeto Geométrico Auxiliado por Computador (CAGD) são a base do modelo desenvolvido por Kai-Uwe Bletzinger. As formas das estruturas que se pretende otimizar são aproximadas por elementos finitos, sendo que a forma ótima resultante é parametrizada em termos de funções de forma, parâmetros referentes ao elemento, e pontos nodais que descrevem a locação do elemento no espaço. Existem disponíveis no modelo vários elementos com funções de formas diferentes. As condições de contorno podem ser geradas versátilmente em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Os exemplos de otimização são de estruturas em casca de concreto armado às quais são impostas condições de contorno, de vinculação e de carregamento, as propriedades dos materiais e as funções objetivo pelas quais se pretende otimizar as formas.

## 2.4 CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS EM CASCA POR HEINZ ISLER

Segundo Billington (1982), nos últimos 75 anos está se evidenciando uma nova classe profissional na área de engenharia de estruturas, principalmente em coberturas de cascas finas, em que a estética tem sido um dos motivos mais influentes. O trabalho desenvolvido por este grupo pode ser identificado como um novo conceito em arte, denominado arte estrutural.

Nesta classe de profissionais podem ser citados alguns engenheiros como Maillart, Dischinger, Finsterwalder, Tedesko, Freyssinet, Nervi, Torroja, Christiansen e Isler e o arquiteto Candela (que desenvolveu considerável habilidade matemática). Dentre todos, destaca-se o engenheiro suíço Heinz Isler, com seu método de trabalho e resultados obtidos na concepção de estruturas de casca fina de concreto armado aplicadas às coberturas.

Isler classificou as estruturas em casca com base no modo de definição de suas superfícies em três grandes grupos (Ramm e Schunck, 1989):

**Geométricas:** são estruturas em casca em que as definições das superfícies são feitas através de fórmulas matemáticas. Como exemplos, tem-se superfícies cilíndricas, esféricas, cônicas, parabolóides elípticos e hiperbólicos, etc... (Figura 2.1).

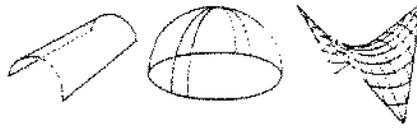


Figura 2.1 - Formas geométricas

**Estruturais:** são estruturas em casca com bom comportamento estrutural. No caso de Isler, estas estruturas são definidas por meio de analogias físicas em que as formas geométricas são obtidas por meio de modelos físicos reduzidos, com a utilização de membranas pneumáticas sob pressão (Figura 2.2), fluidos viscosos extrudados (Figura 2.3 e Figura 2.4) e membranas pênseis invertidas (Figura 2.5).

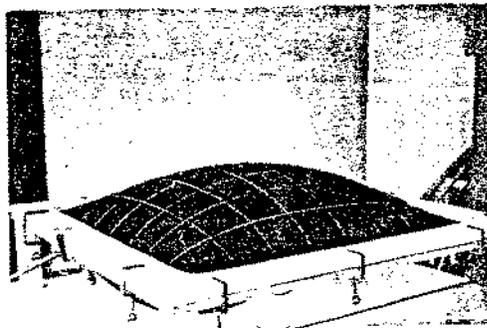


Figura 2.2 - Forma estrutural

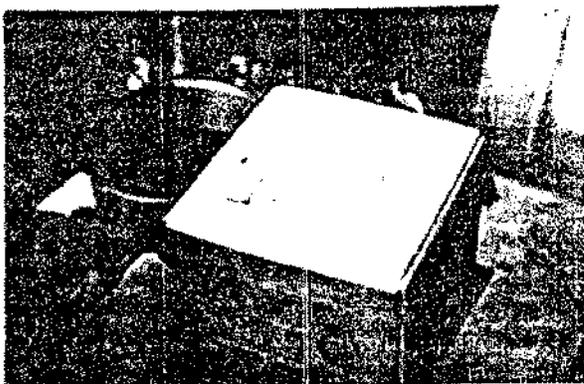


Figura 2.3 - Forma estrutural

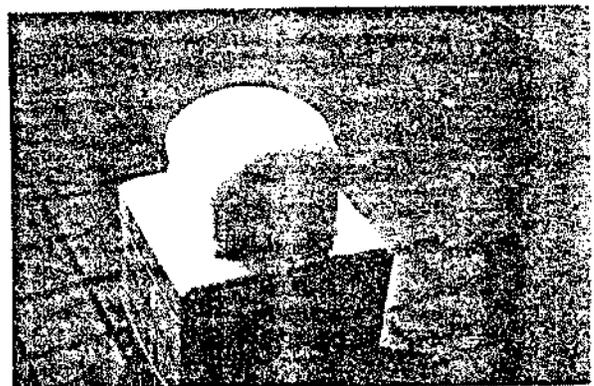


Figura 2.4 - Forma estrutural

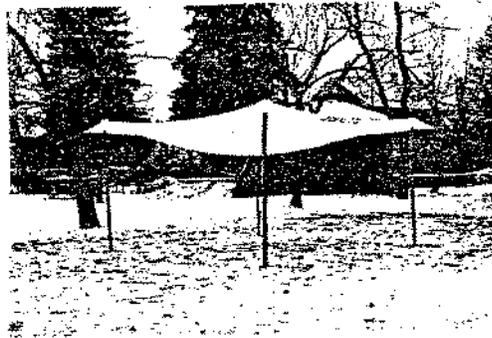


Figura 2.5 - Forma estrutural

Esculturais: as formas para estas estruturas são obtidas por meio de métodos de definição arbitrários. Podem ser utilizadas simulações de formas da natureza, formas esculpidas livremente, e formas geométricas ou estruturais empregadas como decoração (Figura 2.6, Figura 2.7 e Figura 2.8).



Figura 2.6 - Forma escultural

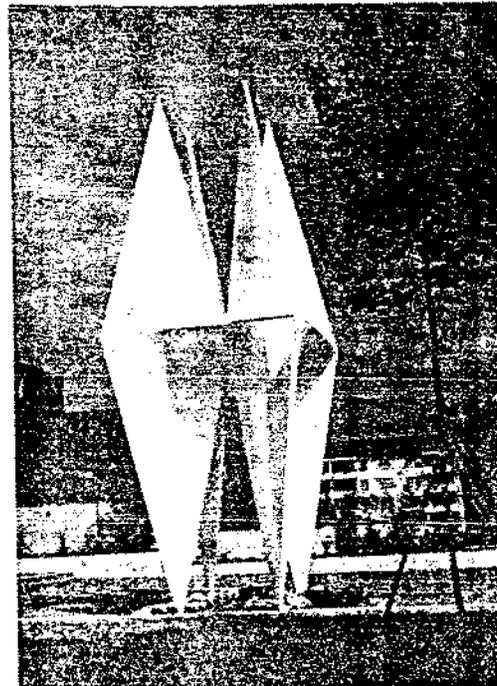


Figura 2.7 - Forma escultural

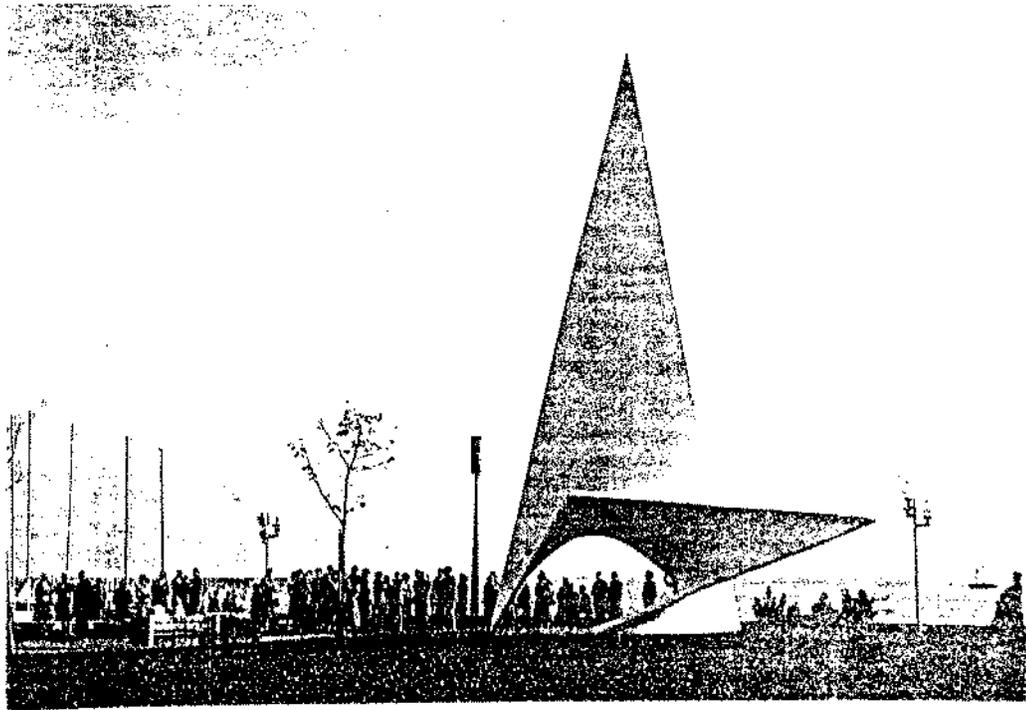


Figura 2.8 - Forma escultural

Apesar de Isler ter classificado as estruturas em casca em três grupos, pode haver um interrelacionamento entre eles. Uma estrutura em casca pode ser enquadrada no grupo das geométricas, como também no grupo das estruturais e das esculturais.

As cascas definidas como estruturais têm sido projetadas profusamente por Isler desde a década de 1950. Estas estruturas são divulgadas e destacadas em todo mundo pelas suas projeções estéticas, e também pelo bom comportamento estrutural, como tem sido demonstrado ao longo do tempo.

Contudo, a concepção de estruturas em casca através das analogias físicas de formas pneumáticas, formas de fluidos viscosos extrudados e membranas pênseis invertidas é inviável de ser aplicada correntemente por engenheiros estruturais. Além da necessidade de se ter equipamentos e condições técnicas, são indispensáveis condições de trabalho para desenvolver técnicas experimentais, e acima de tudo o engenheiro deve ter sensibilidade e percepção profissionais para projetar estes tipos de estruturas. Em seu trabalho Isler recorre à modelos físicos adequadamente instrumentados, à análises simplificadas, e à sua excepcional sensibilidade de artista estrutural.

## 2.5 MÉTODOS FÍSICOS DE GERAÇÃO DE FORMAS DE ESTRUTURAS EM CASCA EMPREGADOS POR HEINZ ISLER

O tema central desta tese é inspirado principalmente nos métodos físicos de geração de formas utilizados por Heinz Isler, que serviram de base para esta proposta de geração de formas por modelos computacionais. Sendo assim, o trabalho desenvolvido por Isler será exposto com mais detalhes. Na atualidade ele é um dos mais expressivos projetistas e responsável por centenas de estruturas em casca, construídas principalmente na Europa.

Isler desenvolveu analogias físicas para geração de formas de estruturas em casca que se comportem estruturalmente segundo a Teoria de Membrana de cascas finas. Basicamente são três tipos de analogias que Isler utiliza para obtenção de formas estruturais: membranas elásticas pneumáticas, fluidos viscosos extrudados e membranas pênseis invertidas. Deste modo Isler tem criado muitas cascas de formas não usuais, tanto de contornos físicos regulares como irregulares (Ramm e Schunck, 1989).

### 2.5.1 FORMAS PNEUMÁTICAS

Para obtenção das formas pneumáticas, uma membrana elástica de contorno pré-determinado é presa ao longo das suas bordas e, sob pressão, é inflada para cima, resultando em uma forma submetida à tração (ver Figura 2.2). Uma estrutura em casca com essa forma suportará pressão para baixo por compressão, com as bordas retas tracionadas (Figura 2.9).



Figura 2.9 - Forma estrutural pneumática

As formas pneumáticas não são ideais para suportarem ações de carregamentos gravitacionais porque estas ações são sempre verticais, e as ações dos carregamentos de pressão são normais à superfície considerada. Contudo, quando a superfície tem pouca curvatura e é praticamente horizontal, as diferenças são pequenas e desprezíveis. Isler tem utilizado estas formas com considerável sucesso, principalmente para estruturas industriais, desde a metade da década de 1950.

## 2.5.2 FORMAS DE FLUXO

As formas de fluxo são obtidas por meio de um processo de extrusão, em que um material viscoso de consistência adequada é moldado através de um tubo por uma abertura de forma idêntica à área que se pretende cobrir. Ao se expandir lentamente, o material adquire a forma curva de uma estrutura em casca (ver Figura 2.3 e Figura 2.4). Com este método, Isler encontrou algumas formas não usuais que podem ser construídas sem quaisquer elementos estruturais de borda (Figura 2.10).

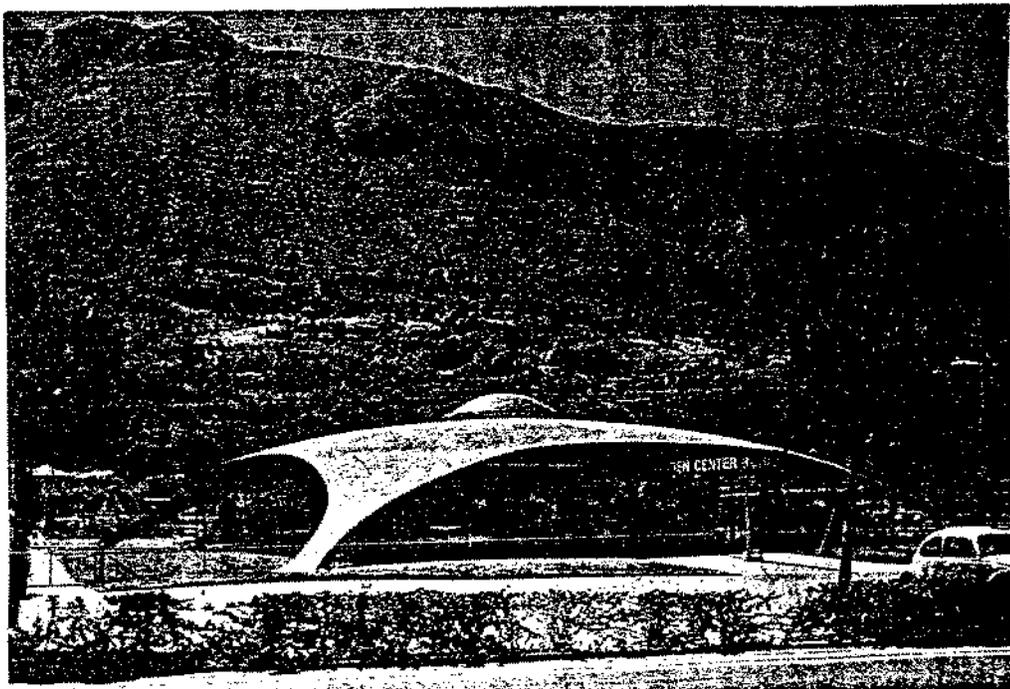


Figura 2.10 - Forma estrutural de fluxo

### 2.5.3 FORMAS DE MEMBRANAS PÊNSEIS INVERTIDAS

As membranas pênseis invertidas são obtidas pela suspensão de um tecido, que anteriormente é colocado imerso numa solução de um material adequado, que irá enrigecer ao secar-se. O tecido é preso por alguns suportes posicionados em função das condições de contorno (vínculos, apoios, condições de borda, etc...) que são impostas ao modelo, de acordo com a forma final que se pretende obter. Deste modo, as membranas assim obtidas ficam totalmente tracionadas (ver Figura 2.5). Quando o material que impregna o tecido enrijece, a membrana é invertida de posição em relação ao plano horizontal, e a forma resultante é a de uma estrutura em casca que é comprimida sob a ação do peso próprio (Figura 2.11).

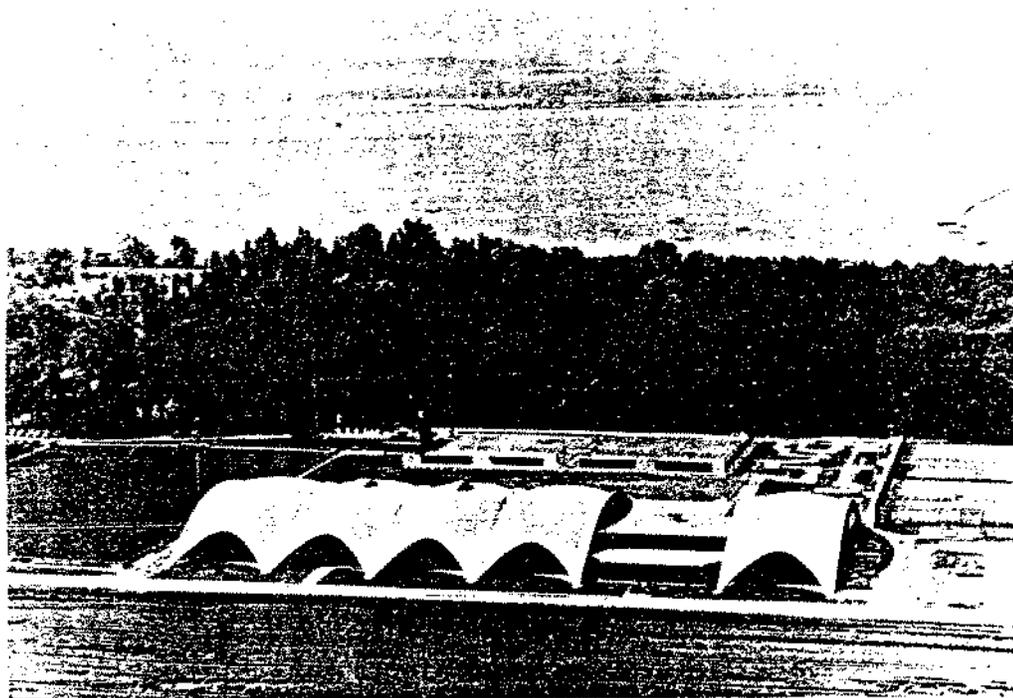


Figura 2.11 - Forma estrutural de membrana pênseil invertida

Estas formas são, na visão de Isler, as melhores de todas porque dispensam os elementos de borda como nas membranas obtidas com formas de fluxo e também, porque as deflexões são menores que as observadas nas formas pneumáticas.

Além do peso próprio, podem ser considerados também outros

carregamentos verticais que irão influenciar consideravelmente na obtenção da forma final da membrana correspondente.

A Figura 2.12 mostra um resumo essencial dos três modos de geração de estruturas em casca utilizadas por Isler e suas respectivas aplicações.

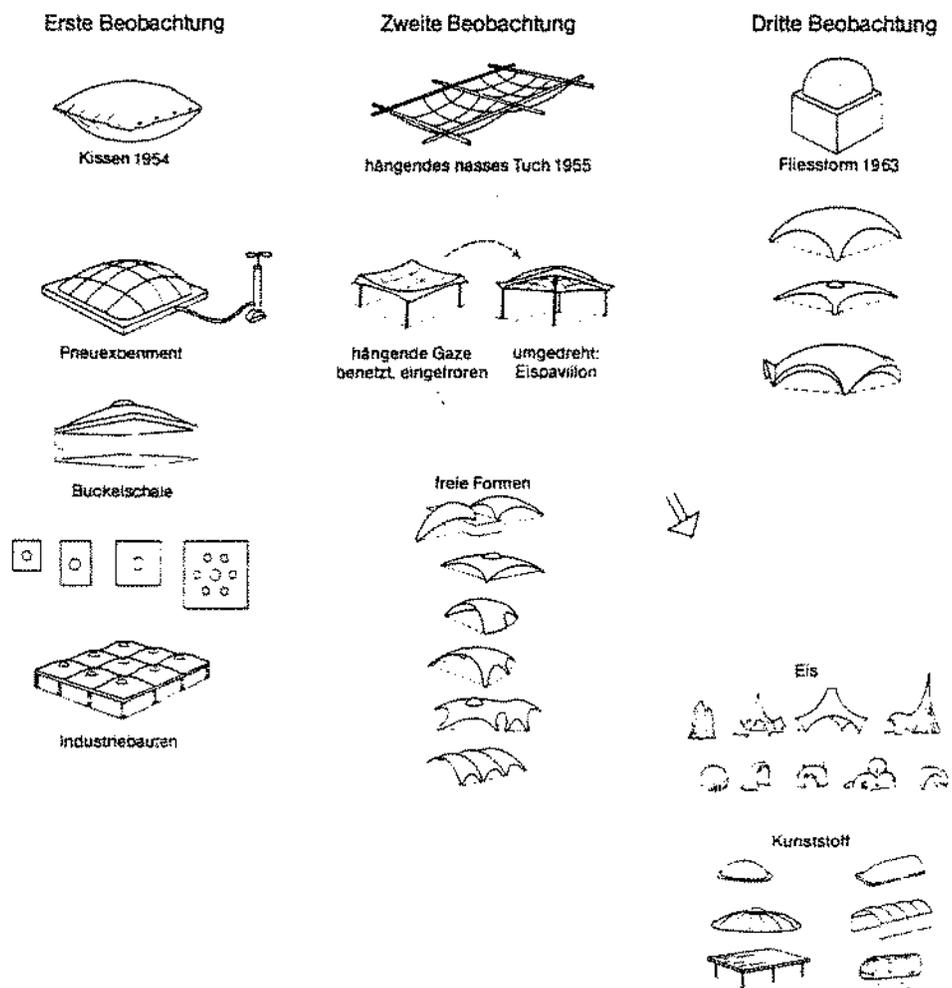


Figura 2.12 - Processos de geração de formas empregados por Isler

Com esses vários métodos Isler aplica princípios físicos de concepção de estruturas em casca, não para analisar formas, mas para projetá-las. Naturalmente, uma vez criada, a estrutura com a nova forma deve ser analisada pelo seu comportamento estrutural; contudo, a análise não precisa ser complexa porque os processos de

geração da forma asseguram uma estrutura em casca submetida essencialmente a um comportamento estrutural de acordo com a Teoria de Membrana.

## 2.6 ESTRUTURAS EM CASCA PROJETADAS POR HEINZ ISLER

Ao se consultar a bibliografia a respeito do trabalho desenvolvido por Isler, verifica-se que a estética é um dos motivos predominantes que Isler tem ao conceber os seus projetos. Isto pode ser visto, por exemplo, em "Heinz Isler Schalen" (Ramm, E.; Schunck, E., 1989), "Concrete Shells and Architecture" (Isler, H., 1986), "Typologie und Technik der modernen Schalen" (Isler, H., 1983), "New Shapes for Shells - Twenty Years Later, in Heinz Isler as Structural Artist" (Isler, H., 1980), "Structural Beauty of Shells" (Isler, H., 1980), "Schalenformgebung und Konstruktion" (Isler, H., 1978), "Aplicaciones recientes de cascarones representativos" (Isler, H., 1967), "Doce anos de aplicación de cascarones tipo burbuja" (Isler, H., 1967), etc...

Isler expressa através do seu próprio trabalho uma visão pessoal de beleza. É interessante observar as funções, dimensões e proporções dessas estruturas. Sendo que suas idéias de concepção enfatizam a análise visual dos seus projetos, percebe-se claramente que a estética está no centro do seu estilo pessoal de trabalho.

Deste modo, para se entender as idéias de estética de Isler é preciso ver seu estilo de pesquisa da forma. Pelo menos três aspectos de sua expressão são evidentes em suas estruturas em casca: bordas finas, maior curvatura das superfícies e contrastes acentuados.

As estruturas em casca são dominantes e devem ser cuidadosamente situadas em relação às construções adjacentes. Elas causam maior impacto quando situadas em parques ou junto à natureza. Mas podem ser construídas com sucesso em ambientes urbanos. Contudo, algumas regras devem ser observadas como: dimensões apropriadas, distância suficiente das construções mais próximas e estilo contrastando com os estilos das outras construções ao redor.

Convém não olvidar as formas das fachadas e janelas e suas ligações com as estruturas em casca, que devem ser discretas e ter um papel secundário na arquitetura final do projeto (Figura 2.13). Isso pode ser conseguido pela escolha apropriada dos materiais e das cores. As fachadas podem ser construídas utilizando-se os sistemas tradicionais e normais. As paredes podem ser, por exemplo, de aço, de concreto armado, de vidro, etc.... As soluções mais bonitas são obtidas quando é usado muito vidro. Se as portas forem corrediças pode-se ter um aproveitamento total do espaço interno. Uma fachada nunca deve dominar uma estrutura em casca, pois essas estruturas constituem formas fortes que não precisam de decoração.

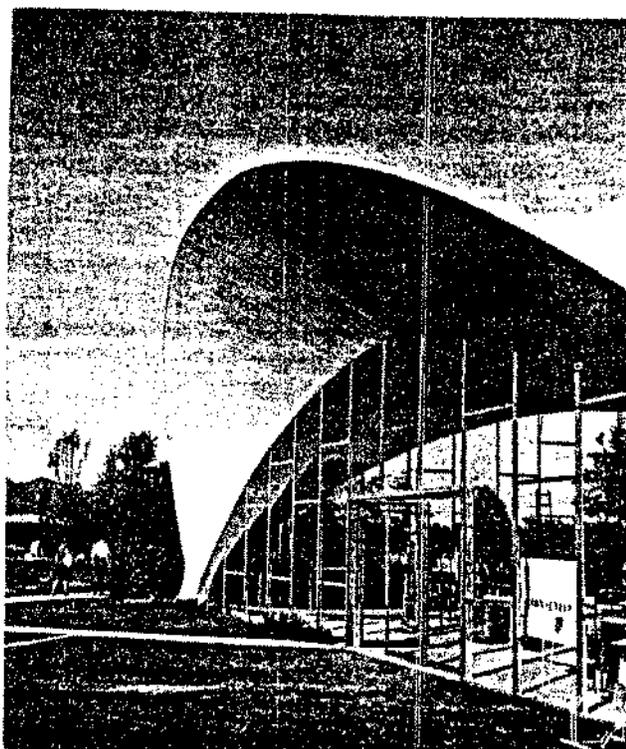


Figura 2.13 - Detalhe de um projeto de Heinz Isler

Um ponto importante a ser salientado é que na construção de estruturas em casca deve existir uma estreita colaboração entre o projetista e o construtor. No caso de Isler, ele treinou a empresa construtora suíça Bosiger que desenvolveu um sistema de construção que é simples e de ampla aplicação, e que executou praticamente

todos os seus projetos sob sua orientação, acompanhamento e supervisão.

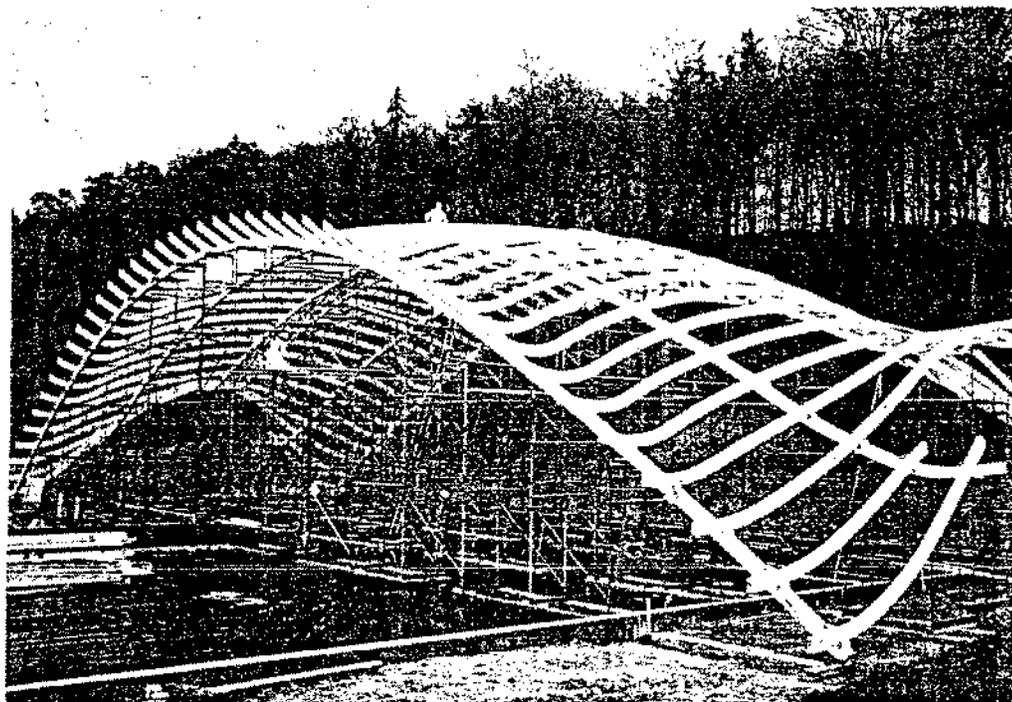


Figura 2.14 - Detalhe construtivo de um projeto de Isler



Figura 2.15 - Detalhe construtivo de um projeto de Isler

Para a execução dos projetos de estruturas em casca neste sistema são utilizados elementos de arcos de madeira que, sendo cuidadosamente montados, propiciam a forma que um determinado projeto requer (Figura 2.14). São montados suportes de metal para servirem de apoio dos arcos, e por cima destes arcos são colocadas

ripas de madeira que recebem a forma para o concreto armado e que pode ser posteriormente deixada no lugar como isolamento para a cobertura (Figura 2.15). Esses elementos de arco são posteriormente utilizados muitas vezes na execução de outros projetos.

Deste modo, a estrutura em casca é construída economicamente porque, em primeiro lugar, o construtor é familiarizado com o processo; em segundo lugar, o custo dos elementos de arco é baixo pelo fato deles serem utilizados diversas vezes; e, em terceiro lugar, no caso do isolamento térmico e/ou acústico ser necessário, as placas isolantes são colocadas sobre o escoramento antes da concretagem, e podem servir de formas.

A utilização das formas como isolamento é eficiente, pois nas condições ambientais severas de clima que ocorrem na Suíça verifica-se que não existem trincas nas cascas. Outro fato que contribui para este efeito é o comportamento estrutural destas cascas, que são submetidas praticamente à compressão pura. Além disto, a utilização da tecnologia atual de concreto resulta em uma estrutura naturalmente impermeável. O isolamento obtido é suficiente para proteger a estrutura em casca de grandes diferenças de temperatura entre o exterior e o interior da mesma.

Desde a construção das primeiras estruturas em casca até as mais recentes não existem sinais de deterioração. Em determinadas ocasiões um ou outro proprietário pode revestir a estrutura com uma leve camada de tinta ou outro material apropriado, mas isto não é feito por necessidade de manutenção, e sim por razões estéticas.

Além disso, podem ser aplicados produtos nas superfícies externas das cascas que proporcionam um alto índice de reflexão dos raios solares, com boa elasticidade e aderência permanente ao concreto. Por meio desta pintura o aquecimento da estrutura em casca pode ser atenuado, tendo-se uma maior impermeabilização e ainda um bom acabamento.

A iluminação natural pode ser obtida de diversas maneiras: através das fachadas, por meio de um ou mais domus, por aberturas entre as estruturas e através de janelas colocadas entre cascas de níveis diferentes. A qualidade da iluminação depende das relações geométricas entre altura, distância e tamanho das passagens de

luz. Pode-se obter iluminação natural do modo que se desejar, porém a solução mais comum é através de um domus na parte superior da casca. Segundo Isler, uma superfície de iluminação natural de 6% é mais que suficiente para a maioria dos casos, apesar da orientação dos especialistas de que a área de iluminação deve ser 14% da área total. Contudo, sabe-se que uma passagem de luz horizontal proporciona o dobro da iluminação natural se comparada com uma janela vertical do mesmo tamanho.

A transformação total do ambiente de um edifício para outro com função diferente é totalmente viável. Além disso, o sistema oferece a possibilidade de ampliação com a construção de estruturas em casca adicionais sem nenhuma dificuldade de execução.

Os custos do sistema de construção são baixos para a realidade suíça. Isler compete com os sistemas tradicionais de construção na maioria dos casos, oferecendo além disso vantagens adicionais. Existe uma pesquisa contínua para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de novas técnicas de construção, com o objetivo conseguir a melhor qualidade das estruturas e a máxima redução dos custos.

Na Europa, estes projetos são sempre aprovados pelos órgãos competentes porque as exigências técnicas de construção (segurança, iluminação, isolamento acústico e térmico, proteção contra o fogo, drenagem rápida, durabilidade, etc...) são amplamente satisfeitas.

Os processos de construção de estruturas em casca têm que ser planejados e executados cuidadosamente para se obter o melhor resultado de qualidade a um custo razoável. As estruturas em casca oferecem relativamente grandes vãos livres e pouco consumo de material. Pelo fato dessas estruturas poderem ser feitas com bordas livres e poucos apoios, elas se tornam leves e elegantes.

Para uma visão melhor dos projetos de Isler, serão mostrados vários exemplos de estruturas em casca obtidas por simulações físicas através de membranas pneumáticas, fluidos viscosos extrudados e membranas pênseis invertidas.

## 2.6.1 GERAÇÃO POR MEIO DE MEMBRANAS PNEUMÁTICAS

Em 1954 Isler projetou e construiu a primeira estrutura em casca pneumática. Desde aquela época foram construídas centenas destas estruturas em toda a Europa, principalmente para pavilhões industriais.

A estrutura em casca pneumática que é adequada para as indústrias, em geral é um elemento em planta retangular ou quadrado, de dupla curvatura e bordas retas (Figura 2.16), sendo apoiada em pilares nos quatro cantos.

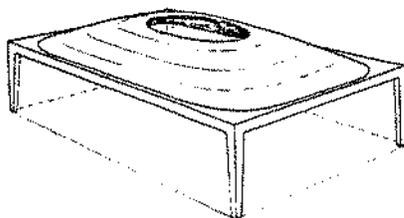


Figura 2.16 - Estrutura em casca pneumática

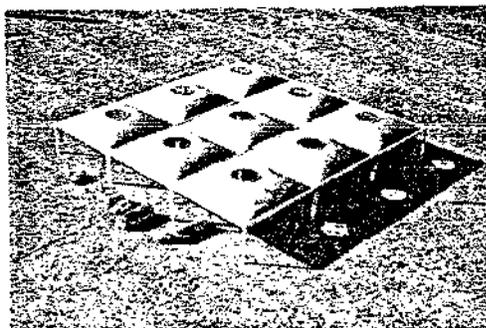


Figura 2.17 - Conjunto de várias cascas pneumáticas

Pode-se combinar várias estruturas em casca deste tipo de diversas maneiras para se obter grandes áreas cobertas, com o mínimo de pilares internos. Um conjunto de nove estruturas quadradas de 40 m de vão (Figura 2.17), por exemplo, cobre uma

área de 14400 m<sup>2</sup> e necessita somente de quatro pilares internos, permitindo ampla liberdade no uso do espaço interior, que é essencial no caso das indústrias (Figura 2.18).

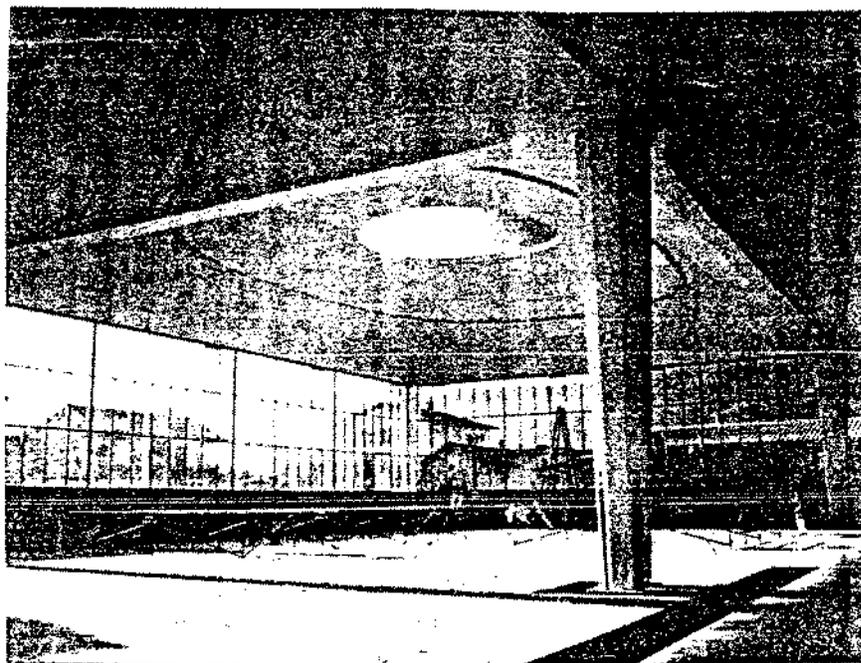


Figura 2.18 - Vista parcial do ambiente interno

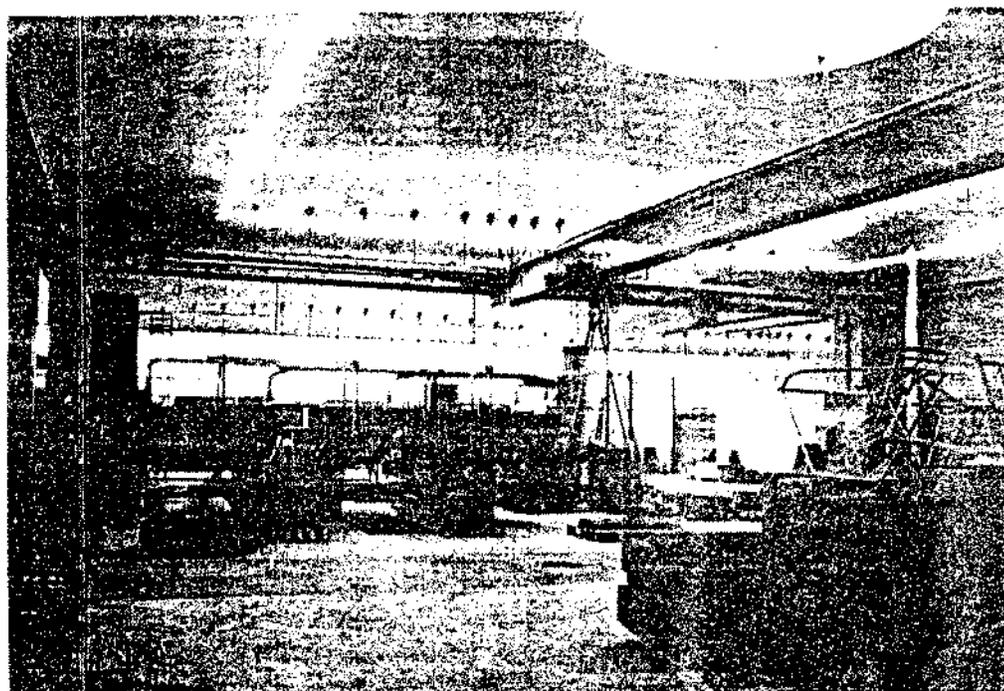


Figura 2.19 - Vista parcial do ambiente interno.

Podem ser utilizados diversos sistemas de guias com esses tipos de estruturas em casca. A Figura 2.19 mostra um exemplo em que a borda da estrutura em casca é justamente o apoio da ponte rolante. Apoios para uma ou duas toneladas podem ser fixados posteriormente na estrutura sem maiores consequências.

As estruturas em casca pneumáticas podem ter efeitos harmônicos melhores que os obtidos por construções industriais tradicionais. Muitas empresas tem adotado estas formas em vez dos sistemas usuais de construção, que também são muito apropriadas para ambientes de exposições.

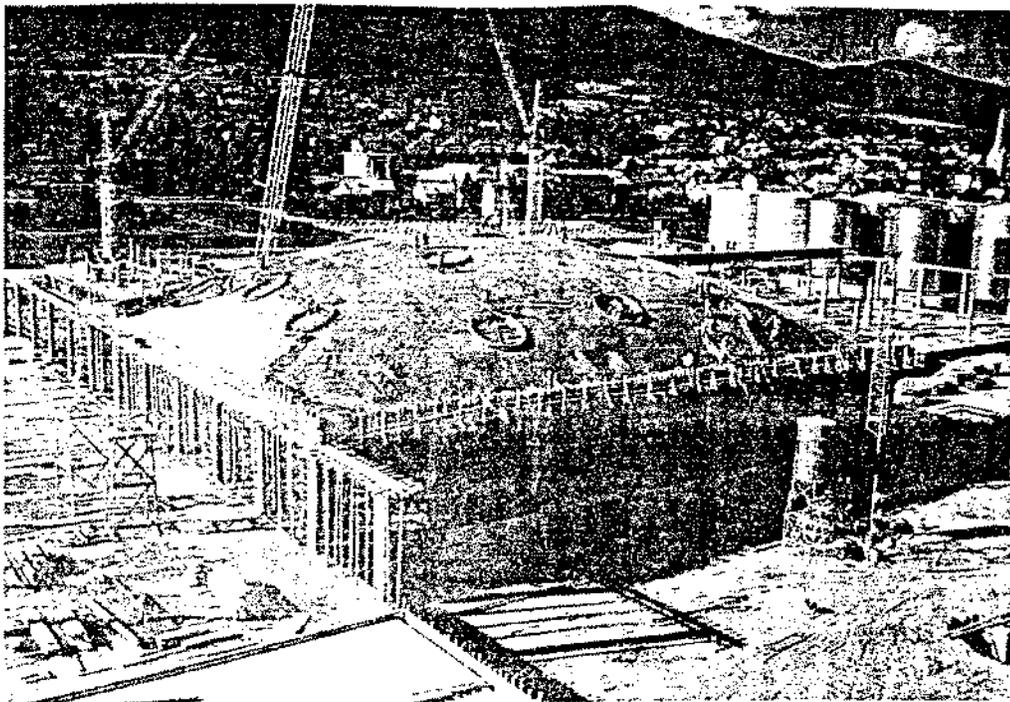


Figura 2.20 - Construção de um terminal rodoviário

Uma das maiores obras construídas com estruturas pneumáticas é uma estação de embarque e desembarque de transporte rodoviário. Ela é de forma quadrada e tem  $3200 \text{ m}^2$  de área coberta (Figura 2.20). Foi construída em 1960 e proporciona uma agradável vista interna (Figura 2.21).



Figura 2.21 - Vista interna do terminal rodoviário concluído

Foram projetados por Isler e construídos muitos edifícios para indústrias utilizando-se estruturas em casca pneumáticas. Cerca de 60% são para indústrias de confecções, tecelagens, metalúrgicas, etc...; 20% são utilizadas para locais de exposições, galpões e garagens para empresas prestadoras de serviços ; 10% das estruturas são utilizadas para estações de embarque e desembarque de serviços de transporte; e 10% para outros fins.

As cascas com formas quadradas correspondem a 80% do total das estruturas pneumáticas, enquanto que as retangulares ou irregulares a 20%. A maioria dessas estruturas em casca têm vãos de 20 m aproximadamente.

Procurou-se projetar estas estruturas em casca com dimensões padronizadas com o fim de economizar cimbramento. Foram executados aproximadamente 50% dos projetos nos tamanhos padrões, e o restante com dimensões variáveis.

Isler mostra convicção de que as estruturas em casca pneumáticas continuarão sendo utilizadas em muitos países, com aproveitamento das suas vantagens técnicas e a beleza de suas formas.

## 2.6.2 GERAÇÃO POR MEIO DE FLUÍDOS VISCOSOS EXTRUDADOS

Serão consideradas algumas das principais estruturas em casca que foram obtidas por Isler através de fluidos viscosos submetidos à extrusão.

### *Pavilhão de Flôres Wyss, Solothurn, Suíça*

Em 1962 Isler foi procurado por uma grande empresa de flôres que planejava construir um novo centro para comércio, que consistiria de um parque amplo e alguns edifícios. Os dirigentes da empresa desejavam que o edifício de exposições ficasse em meio aos jardins, no centro do parque, e fosse algo muito especial. Ficaram convencidos de que uma casca seria o ideal para os seus planos. A estrutura em casca que foi construída é apoiada em quatro cantos diretamente sobre a fundação (Figura 2.22). Cada lado foi complementado com uma estrutura em casca em balanço, em forma de arco, para dar enrigecimento ao conjunto e proteção dos raios solares.

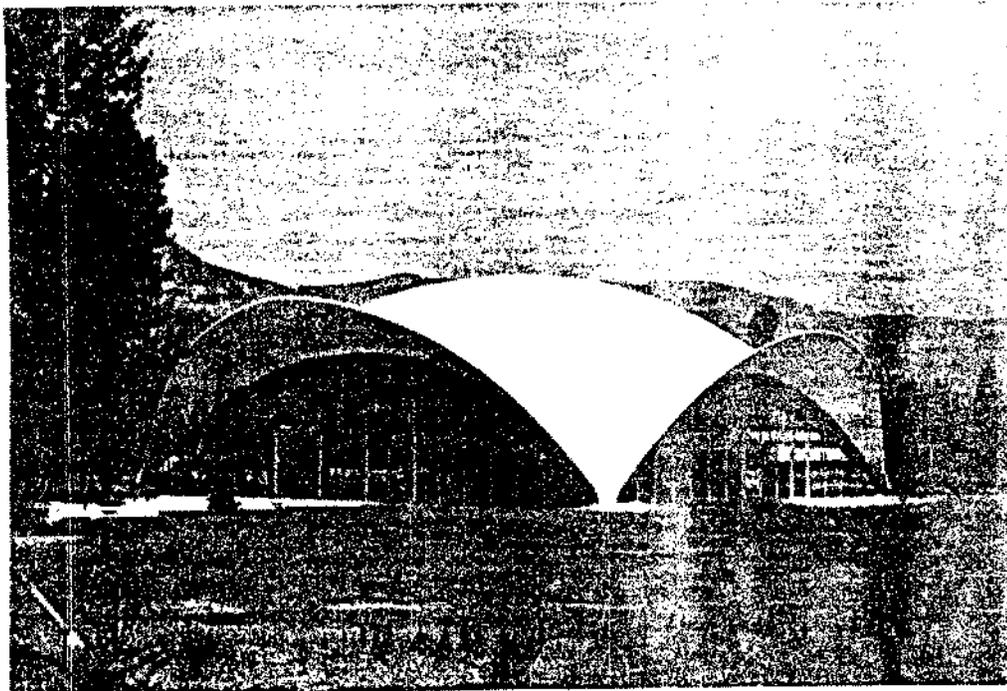


Figura 2.22 - Pavilhão de flôres Wyss

Como foi muito difícil fazer o detalhamento do projeto estrutural dos apoios, eles foram detalhados e moldados diretamente na obra para que não ocorressem problemas de construção. Na parte central a estrutura tem 7 cm de espessura, na região da borda onde ocorre a junção com o balanço a espessura é de 12 cm, e nas bordas livres a espessura é de 6 cm.

As fachadas foram construídas com vidro, de modo que o conjunto final ficasse discreto e bonito, sendo muito atraente para exposições. A forma e as dimensões da estrutura em casca a tornam esteticamente equilibrada e atrativa, e proporcionam ao centro comercial de flôres características que são utilizadas para publicidade dos seus produtos.

#### *Mercado Coop, Biasca, Suíça*

Esta estrutura em casca foi projetada por Isler, com a participação do arquiteto Sigg, para uma firma distribuidora de alimentos. Foi construída em 1963, inspirada no Pavilhão de Flôres Wyss (Solothurn, Suíça), utilizando-se o mesmo andaime e cimbramento (Figura 2.23).

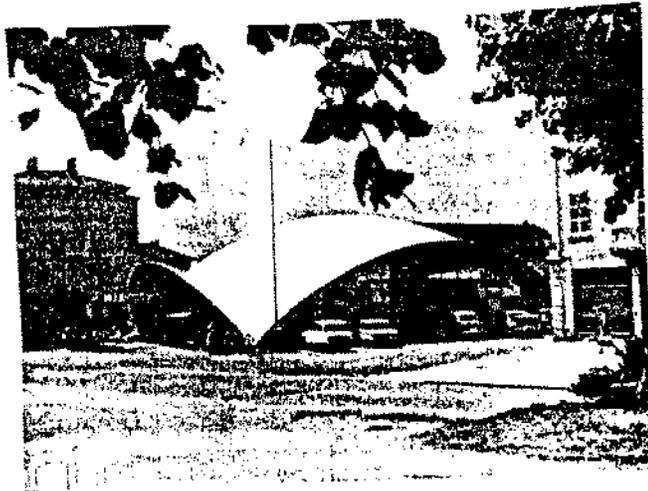


Figura 2.23 - Mercado Coop

Ao contrário do Pavilhão de Flôres, que se encontra em meio a

amplos jardins, este mercado se encontra próximo a outros prédios, mas perfeitamente integrado ao ambiente que o circunda.

Como esta construção se encontra na parte sudeste da Suíça, onde o inverno é mais rigoroso, foi tomado um cuidado especial com o sistema de calefação, sendo criados dutos de ar por baixo do piso e na parte posterior da parede. Devido à curvatura do teto, que é de uma forma aerodinâmica excelente, a circulação de ar é muito boa. Para a fachada sudeste foi utilizado um vidro absorvente de calor. A espessura geral da estrutura em casca é de 7 cm, com o aumento suave e gradativo nas regiões dos apoios onde há uma concentração de tensões.

*Centro de Jardinagem Clause, St. Appoline, Paris, França*

A firma francesa Clause precisou construir um grande centro de jardinagem em uma estrada perto de Paris. Um dos requisitos era que a forma da construção deveria ser diferente para dominar os amplos jardins, e sobressair em relação a todas as formas usuais.

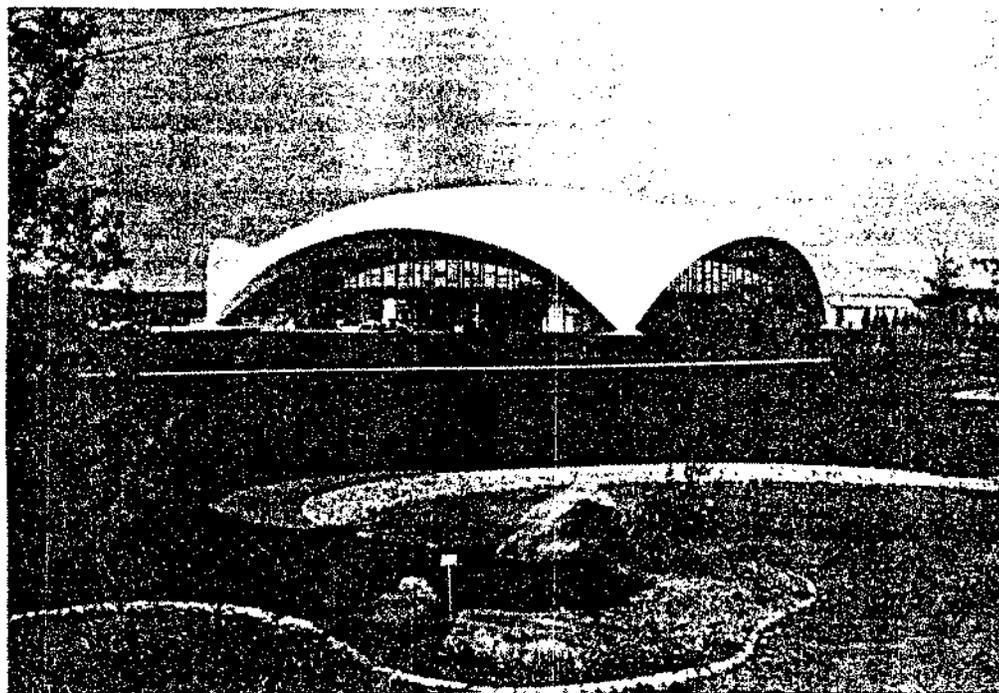


Figura 2.24 - Centro de jardinagem Clause

Depois de verem o exemplo suíço em Solothurn, os diretores solicitaram algo similar a Isler, que projetou uma estrutura em casca que cobre  $1300 \text{ m}^2$  em planta pentagonal (Figura 2.24). Em cada um dos cinco lados existe uma projeção em balanço que mostra em sua borda a espessura real. A estrutura é de cor branca e domina toda a região. Durante a noite, a borda pode ser iluminada por meio de tubos de gás neon, e com isso o centro de jardinagem adquire um aspecto muito interessante e agradável.

O projeto desta estrutura em casca é do engenheiro Isler, com a colaboração do engenheiro Summer e do arquiteto Dresse.

O comportamento estrutural da casca foi estudado por meio de ensaios de modelos reduzidos. O regulamento francês sempre exige comprovações analíticas do projeto. Como esta estrutura não podia ser calculada com maior rigor, no princípio Isler teve algumas dificuldades ao apresentar somente os resultados obtidos através dos modelos. O comportamento estrutural da casca real tem sido muito bom e não se tem observado deformações importantes.

#### *Mercado em Bellinzona, Suíça*

Este é um projeto do engenheiro Isler com a participação dos arquitetos Chiesa e Buchler. A organização comercial Migros solicitou um projeto de um novo mercado com área de  $1000 \text{ m}^2$ , para ser construído no centro de uma vila medieval. Uma das exigências era de que a construção se integrasse arquitetonicamente com um edifício administrativo adjunto existente.

Depois de um amplo estudo entre várias possibilidades, chegou-se à conclusão que a melhor forma seria a de uma estrutura em casca simples de curvatura constante. A estrutura cobre uma área quadrada com 32 m de lado, e é apoiada nos quatro cantos. Sua altura máxima, no centro, é de 10 m (Figura 2.25 e Figura 2.26).

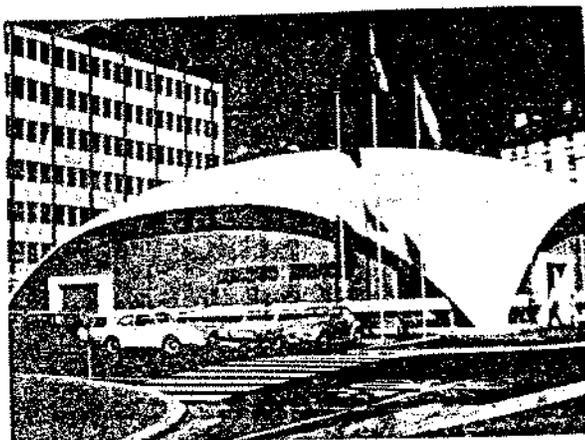


Figura 2.25 - Mercado, em Bellinzona

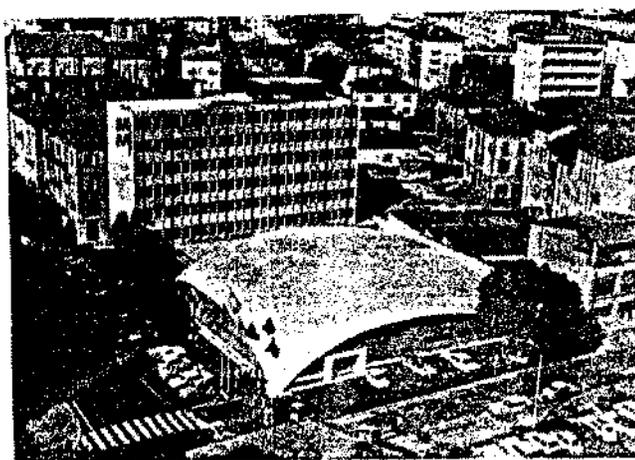


Figura 2.26 - Mercado, em Bellinzona

Inspirado em algumas obras de Candela, Isler foi estimulado a projetar esta estrutura com bordas livres. As estruturas em casca com bordas livres podem ser construídas dentro de algumas limitações. Em primeiro lugar, a forma da estrutura tem que ser tal que só exista compressão para os carregamentos atuantes sobre a mesma. Também a dupla curvatura tem que garantir a rigidez necessária da borda livre. Além disso, todas as demais condições de estabilidade que resultam do raio de curvatura, da espessura e do esforço máximo de compressão têm que ser considerados cuidadosamente.

No entanto, a forma ideal para a casca de Bellinzona não pode ser adotada porque sua altura máxima foi limitada pelo código de

obras local, e também porque os edifícios contíguos precisavam ser interligados por passagens consideravelmente grandes em suas fachadas. Para cumprir com estas exigências foi proposta uma forma para a estrutura em casca que teria maior inclinação na parte inferior, e seria relativamente plana na parte superior. Em decorrência da forma não ser a ideal, foram usados cabos de aço verticais para conter as bordas, sendo que os resultados obtidos foram satisfatórios. A estrutura foi feita com concreto bombeado nas partes inclinadas e com concreto lançado normalmente na parte central plana.

Do ponto de vista prático esta estrutura tem funcionado muito bem. Como nos outros exemplos, o mercado tem se tornado muito popular por sua forma, o que tem contribuído para a sua publicidade.

#### *Fábrica Kilcher, Rechterswill, Suíça*

Essa firma nova e dinâmica precisou construir uma nova sede para a fábrica. Por estar ao lado de uma autoestrada recém construída, os proprietários solicitaram uma estrutura inovadora que incorporasse os novos avanços da técnica moderna das estruturas em casca. Portanto, foi escolhida uma estrutura em casca fina de planta quadrada de 25 m de lado, com bordas livres (Figura 2.27). Neste projeto Isler teve a colaboração do arquiteto Wirz.

A estrutura em casca foi contruída sobre o mesmo cimbramento de madeira que foi utilizado para o mercado de Bellinzona e o Centro de Jardinagem de Paris, fazendo com que seus custos ficassem bem baixos. Na maior parte da casca (região central) a espessura é aproximadamente de 8 cm, tendo uma variação suave de acréscimo nas regiões dos apoios. Do mesmo modo que em outros casos, foram construídos modelos reduzidos para o estudo do comportamento da estrutura.

Como o edifício é publicado e discutido continuamente em periódicos, evidentemente cumpre um dos propósitos iniciais do projeto, que é o de servir como um meio de publicidade para a empresa.

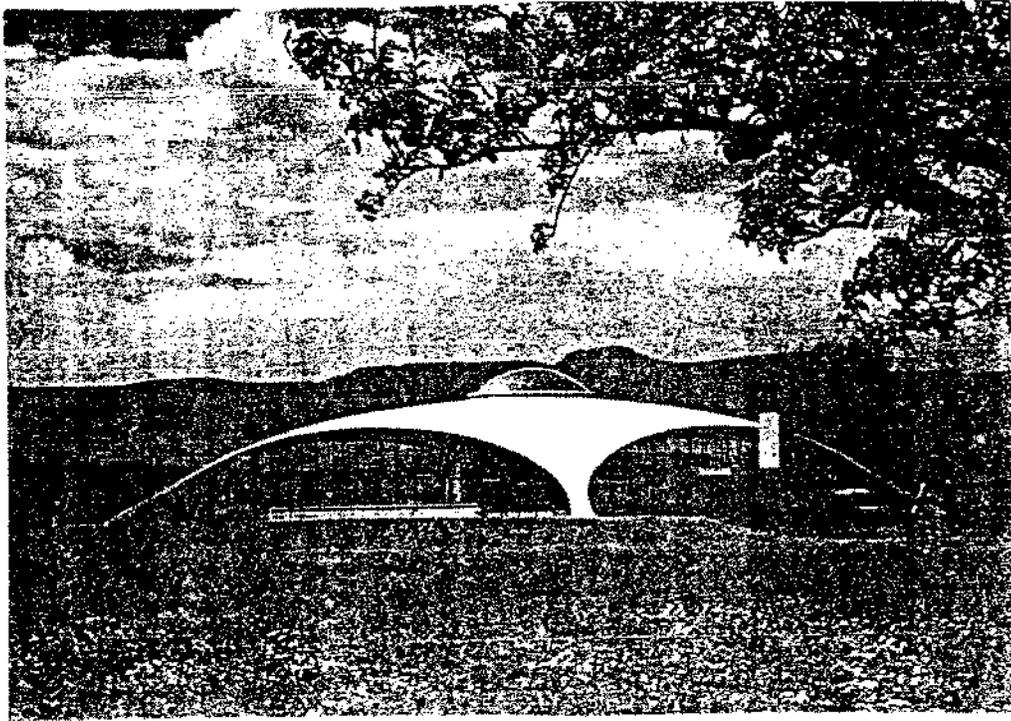


Figura 2.27 - Fábrica Kilcher

*Posto de Serviços em uma Via Expressa*

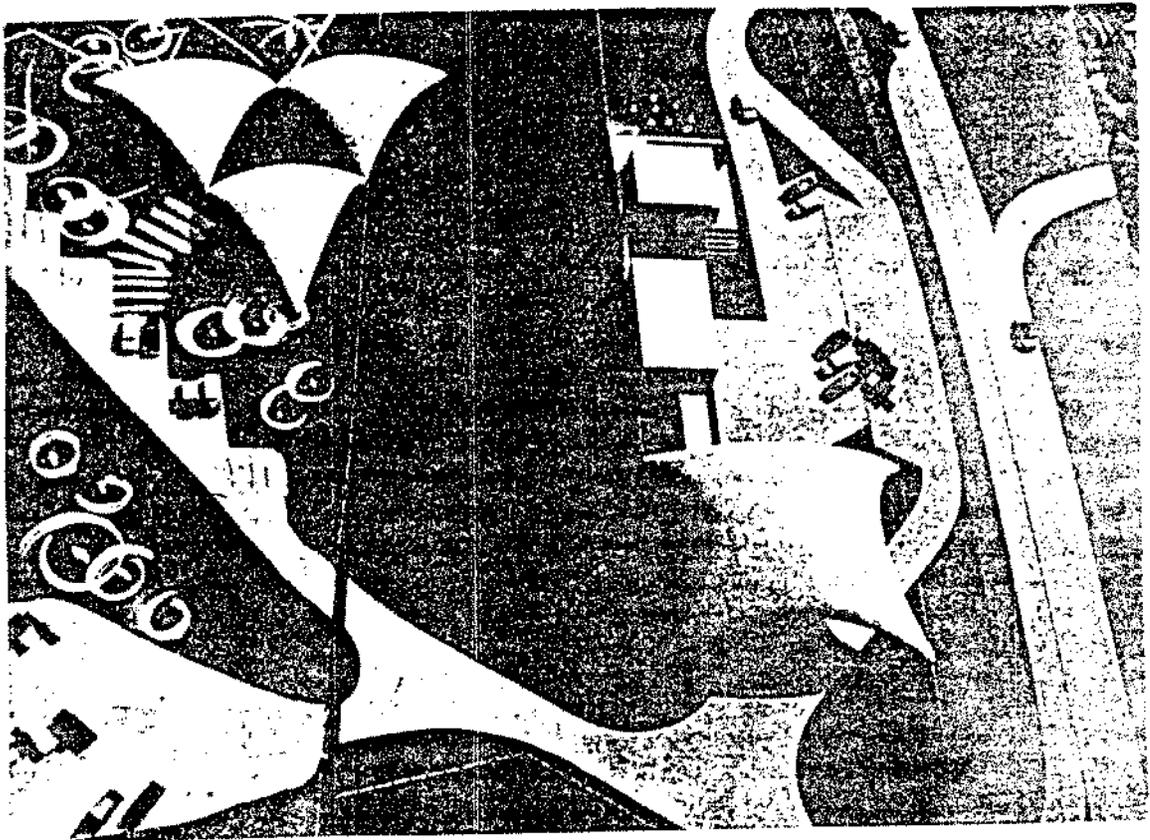


Figura 2.28 - Posto de Serviços

Este projeto reúne um conglomerado de estruturas em casca, que possuem diferentes formas e finalidades, ao lado de uma via expressa.

Foi projetada uma estrutura em casca quadrada para um restaurante e algumas estruturas em casca triangulares para lojas comerciais e floriculturas. A Figura 2.28 mostra aspectos do conjunto.

### 2.6.3 · GERAÇÃO POR MEIO DE MEMBRANAS PÊNSEIS INVERTIDAS

#### *Posto de Abastecimento e Serviços Essence*

A construção deste posto de abastecimento e serviços ao lado de uma auto-estrada na Suíça foi executada pela empresa BP. Por razões funcionais, Isler escolheu duas estruturas em casca de plantas triangulares para cobrir as áreas de serviços, de modo a formar um conjunto harmônico com o restaurante adjacente (Figura 2.29).

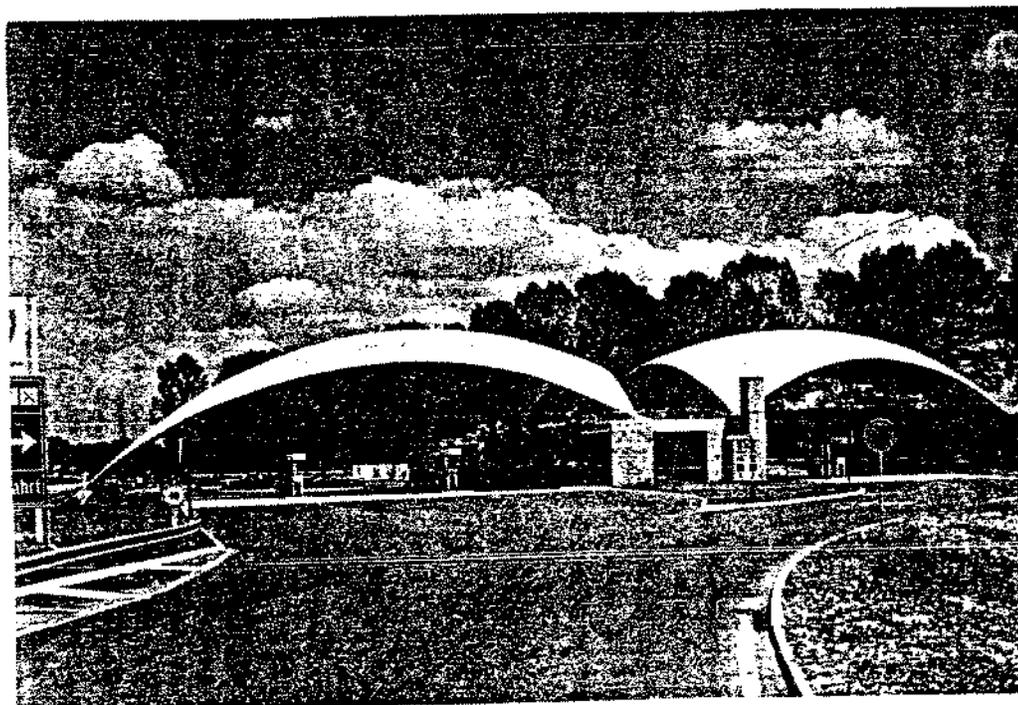


Figura 2.29 - Posto Essence

As duas estruturas em casca foram colocadas de modo simétrico em relação às suas bases (Figura 2.30). A maior delas tem 35 m de vão na direção de maior extensão, e a outra menor tem 25 m de vão. Os pontos extremos são apoiados sobre a fundação, enquanto os outros pontos se apóiam sobre o teto do restaurante. Um sistema de cabos é utilizado para dar equilíbrio estrutural ao conjunto. Visto de longe, o arranjo arquitetônico das cascas e do restaurante é extremamente agradável, bonito e atraente (Figura 2.31).



Figura 2.30 - Posto Essence

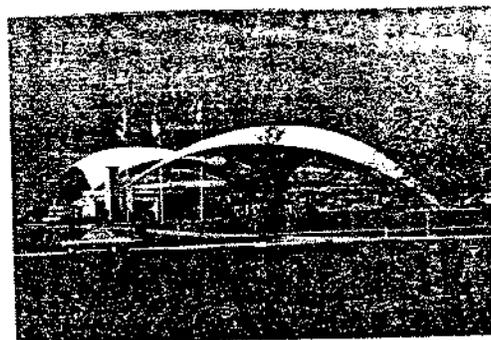


Figura 2.31 - Posto Essence

### *Centro Cultural e Esportivo*

Este projeto foi desenvolvido para um centro cultural e esportivo, com o objetivo de abrigar espaços com diversas finalidades. Deveria ser um centro com múltiplas funções, que possibilitassem a prática de várias atividades simultâneas como exposições, desportos, etc... (Figura 2.32).

Foram projetadas quatro estruturas em casca, de aproximadamente 5000 m<sup>2</sup> cada uma, para a formação de um conjunto multifuncional de quase 20000 m<sup>2</sup>. Os ambientes podem ser utilizados separadamente ou como um todo. Cada estrutura em casca é quadrada, com lados que medem 70 m em planta, e pode abrigar, por exemplo, três quadras de tênis.

No centro do conjunto das quatro estruturas em casca foi construído um edifício com banheiros, oficinas, salões de conferências e um restaurante na parte superior com uma vista magnífica.

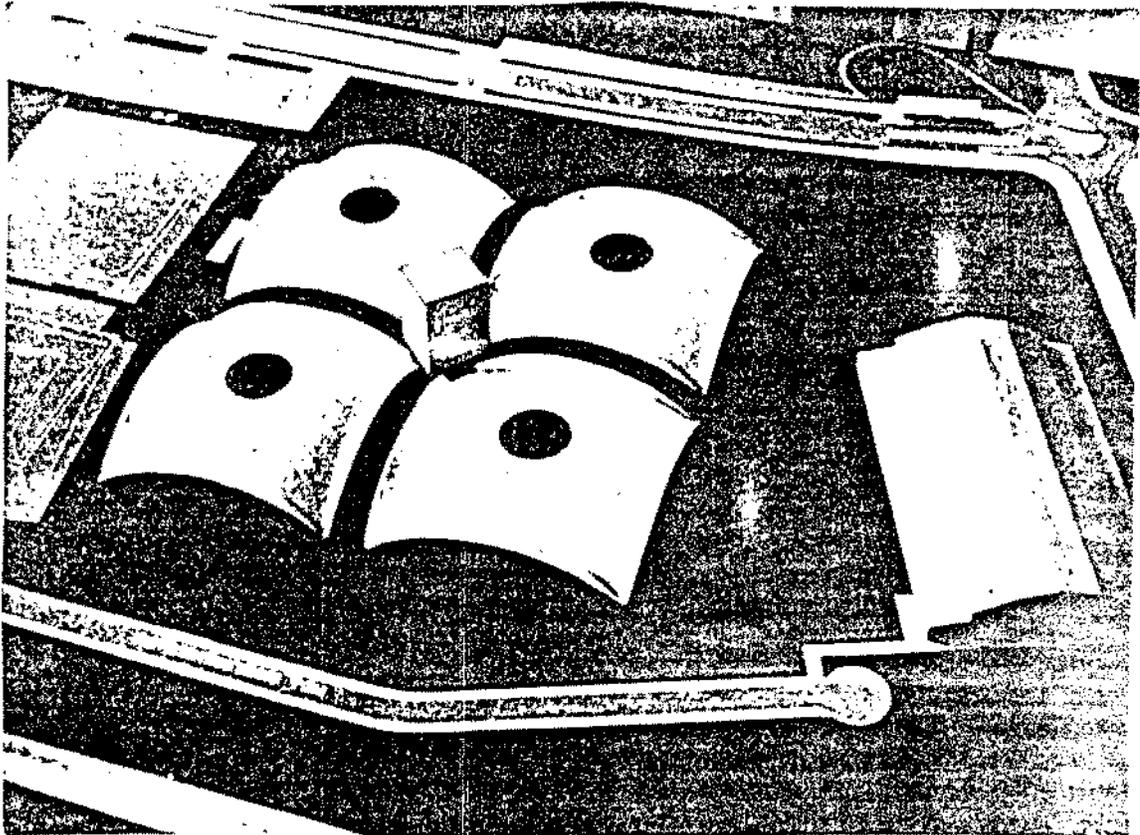


Figura 2.32 - Centro Cultural e Esportivo

*Fábrica Sicli, Genf, Suíça*

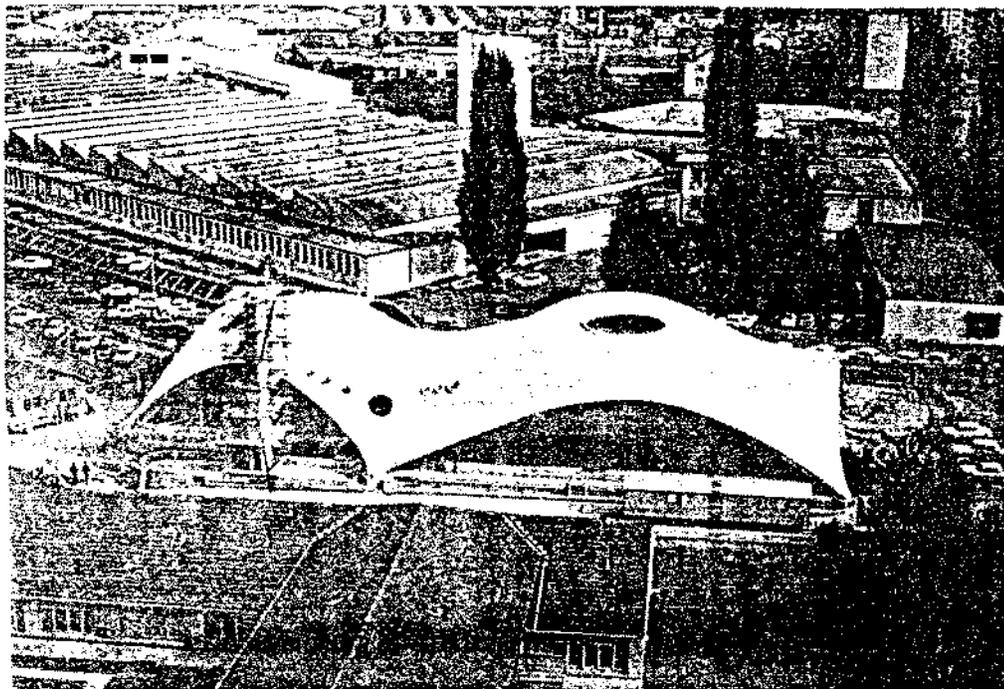


Figura 2.33 - Fábrica Sicli (vista geral)

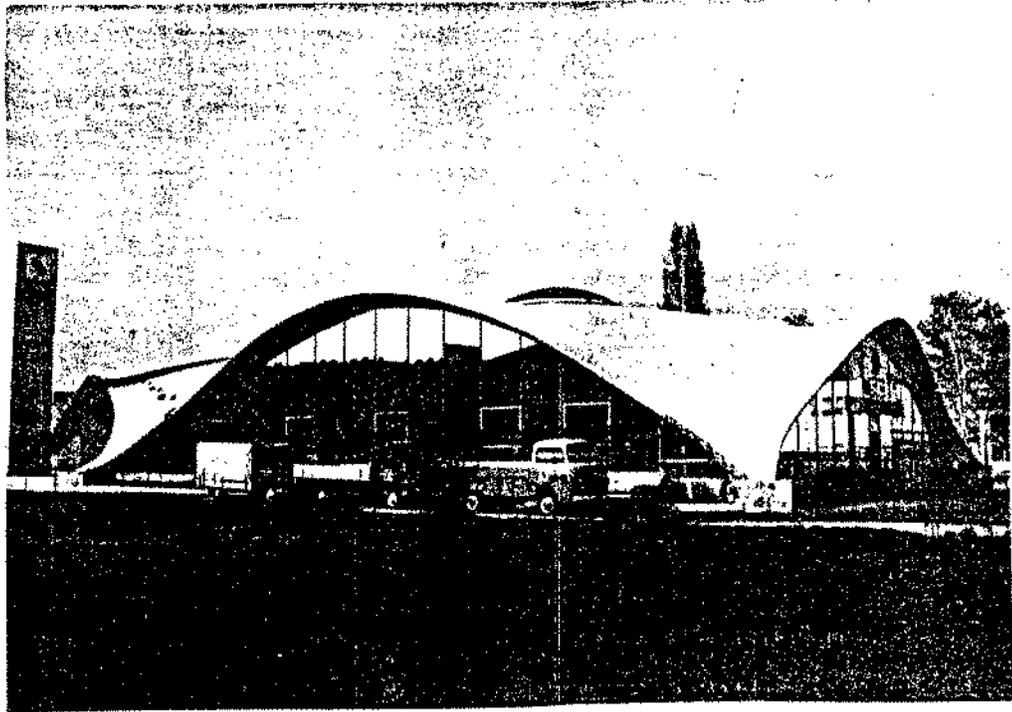


Figura 2.34 - Fábrica Sicli (vista parcial)

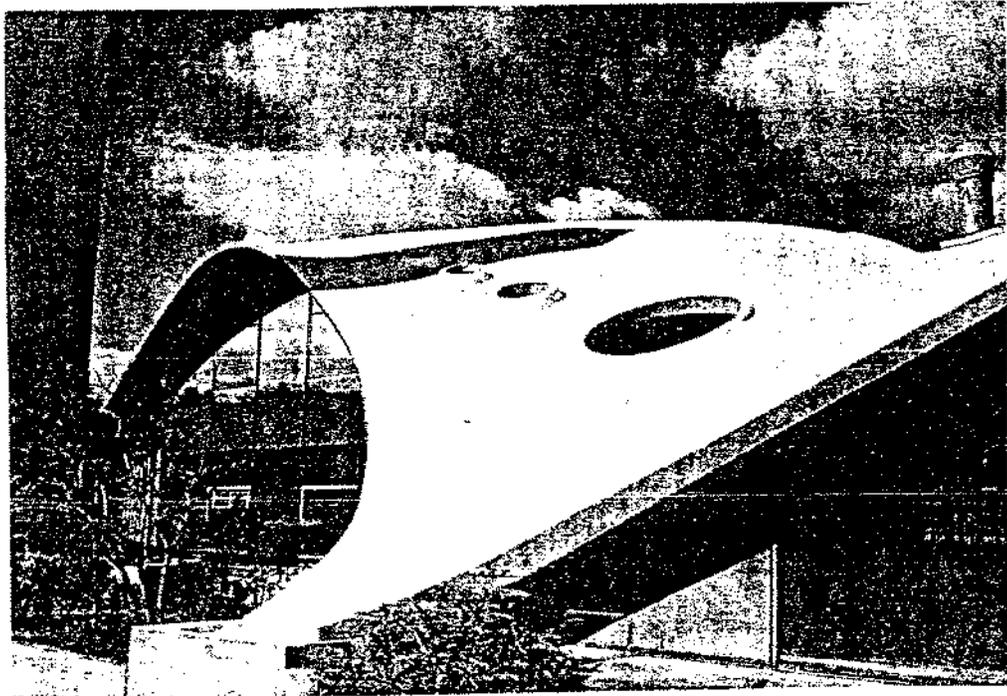


Figura 2.35 - Fábrica Sicli (vista parcial)

Este projeto, que teve a participação do arquiteto C. Hilberer, mostra a versatilidade das técnicas de geração de formas de Isler através de modelos físicos. Este trabalho foi desenvolvido em 1969 e 1970.

A Figura 2.33 mostra uma vista geral da casca construída, e a Figura 2.34 e a Figura 2.35 mostram vistas parciais.

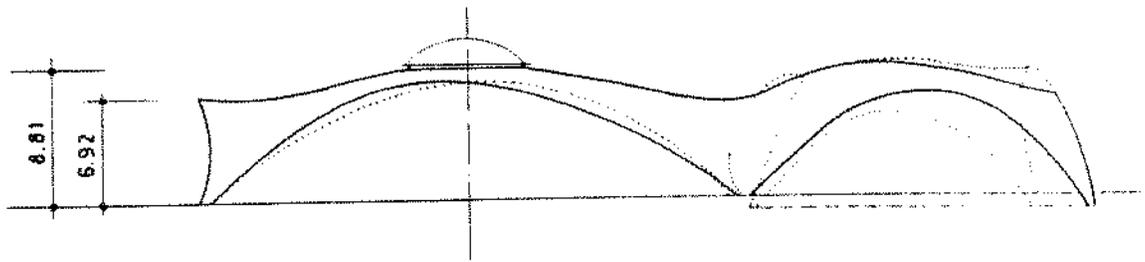


Figura 2.36 - Fábrica Sicli (projeção vertical)

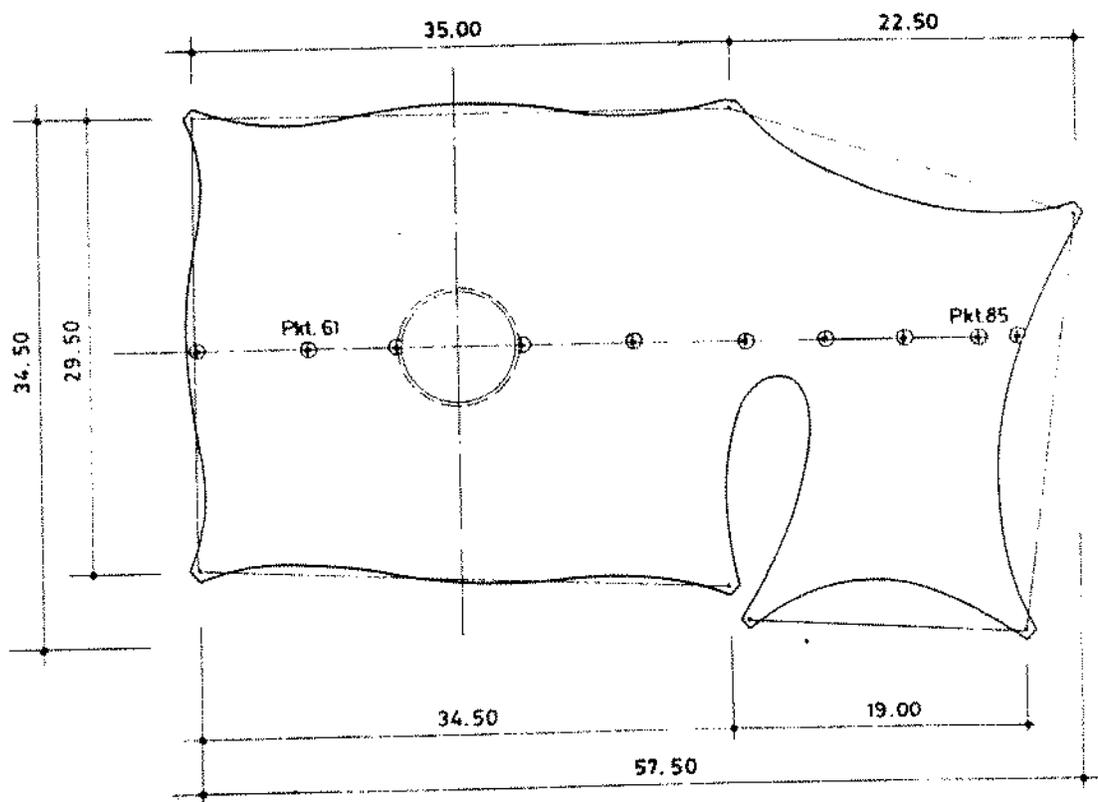


Figura 2.37 - Fábrica Sicli (projeção horizontal)

A Figura 2.36 mostra as dimensões (m) da elevação da casca, e a Figura 2.37 as suas dimensões (m) em planta. O contorno é totalmente irregular, e a forma obtida por meio de uma membrana suspensa sob o efeito do peso próprio é mostrada numa maquete (Figura 2.38).

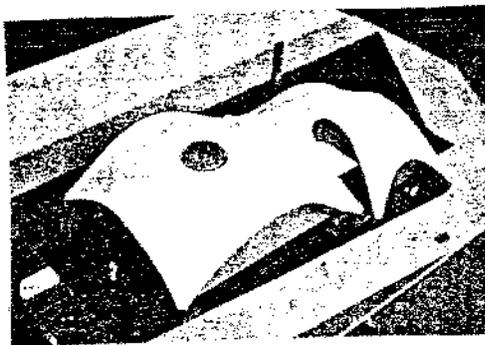


Figura 2.38 - Fábrica Sicli (maquete)

*Centro Esportivo, Solothurn, Suíça*

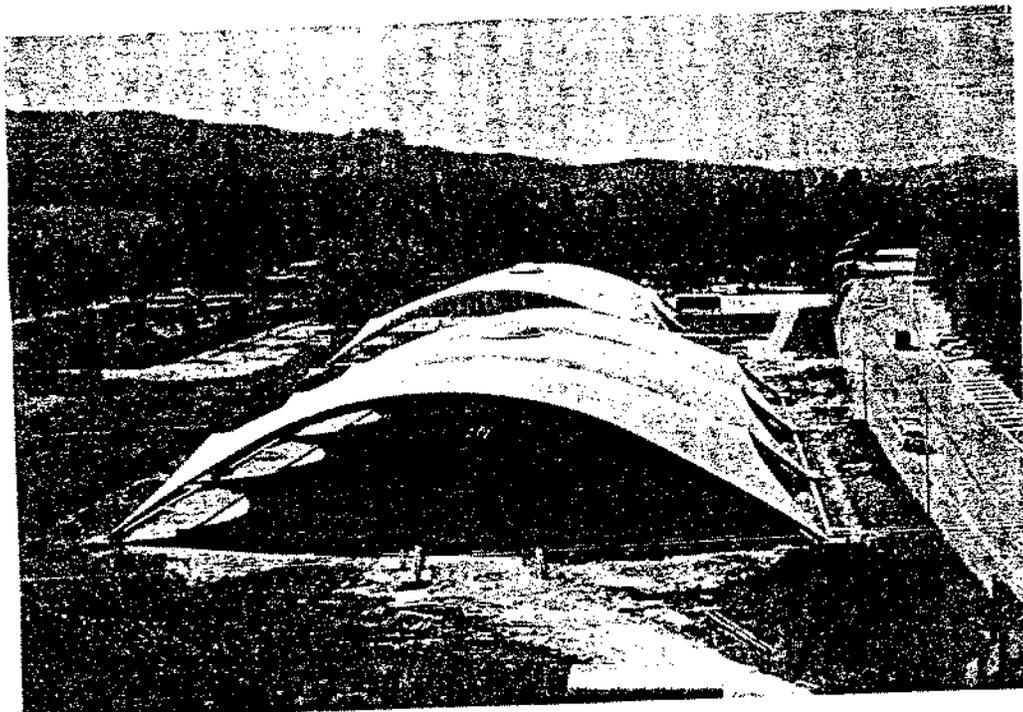


Figura 2.39 - Centro esportivo, em Solothurn

Este centro esportivo foi projetado em 1982 pelos arquitetos Copeland, Haus e Herd, com a participação do engenheiro Isler na geração da forma da casca, que é repetida várias vezes para formar o conjunto global.

Cada casca tem 17,55 m por 48,00 m em planta, com uma altura no centro de 9,90 m. A Figura 2.39 mostra uma vista geral do conjunto, e a Figura 2.40 uma vista parcial interna quando da conclusão da construção.



Figura 2.40 - Vista parcial interna

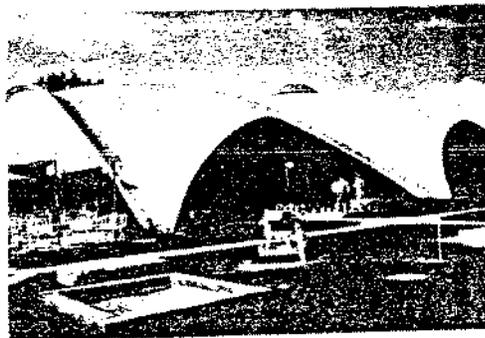


Figura 2.41 - Vista parcial externa

O complexo esportivo se integra à natureza que o circunda dando um efeito visual muito atrativo. O conjunto é visto parcialmente de um outro ângulo na Figura 2.41.

*Piscina, Brugg, Suíça*

Como na Europa central o clima apresenta estações de verão com duração bem limitada, grande parte das piscinas são construídas em ambientes fechados.

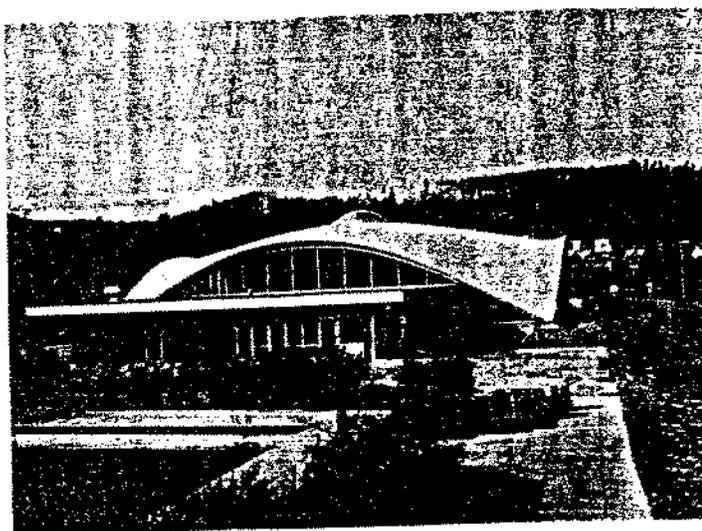


Figura 2.42 - Cobertura para piscina, em Brugg

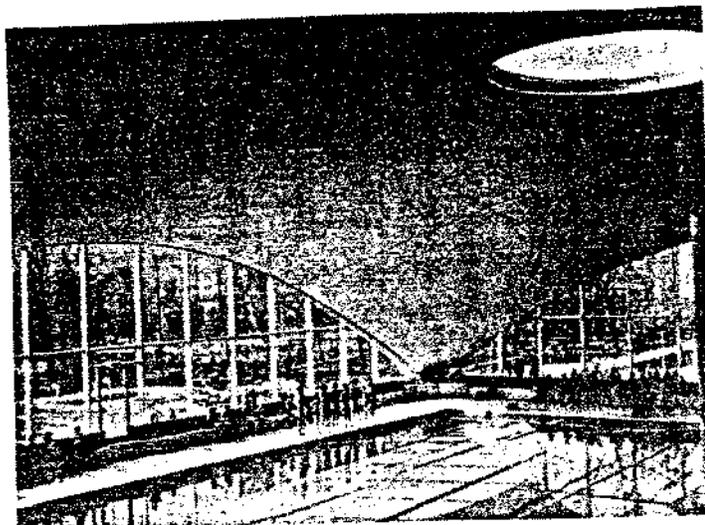


Figura 2.43 - Piscina (vista parcial interna)

Este exemplo, em que a forma da casca de cobertura foi gerada por Isler em 1981, mede 35,00 m por 35,00 m em planta e tem 8,90 m de altura máxima no centro. A Figura 2.42 mostra uma vista externa da casca junto com um prédio anexo de construção convencional. A Figura 2.43 mostra uma vista parcial interna da piscina, com ampla visão para o ambiente externo.

*Teatro Integrado à Natureza, Grötzingen, Alemanha*

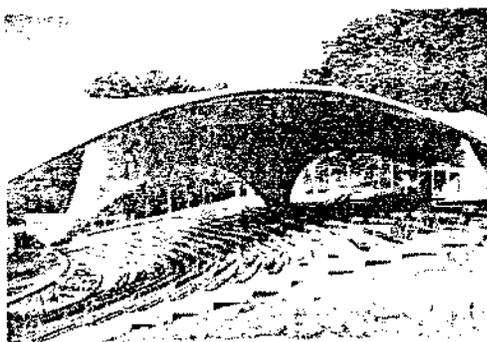


Figura 2.44 - Teatro aberto, em Grötzingen

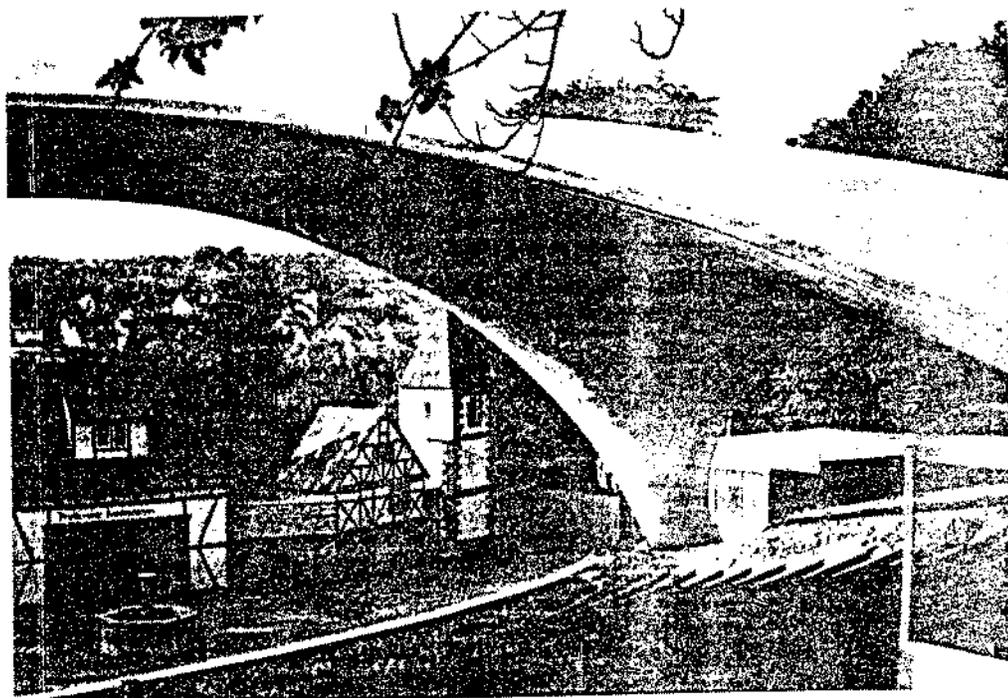


Figura 2.45 - Teatro aberto, em Grötzingen

Isler participou do projeto de uma cobertura para um teatro integrado à natureza para 800 pessoas, que foi construído na Alemanha em 1977. As apresentações dos espetáculos são feitas ao ar livre, e o público se instala na parte protegida pela estrutura em casca (Figura 2.44). As Figuras 2.45 e 2.46 mostram vistas do teatro de outros ângulos.

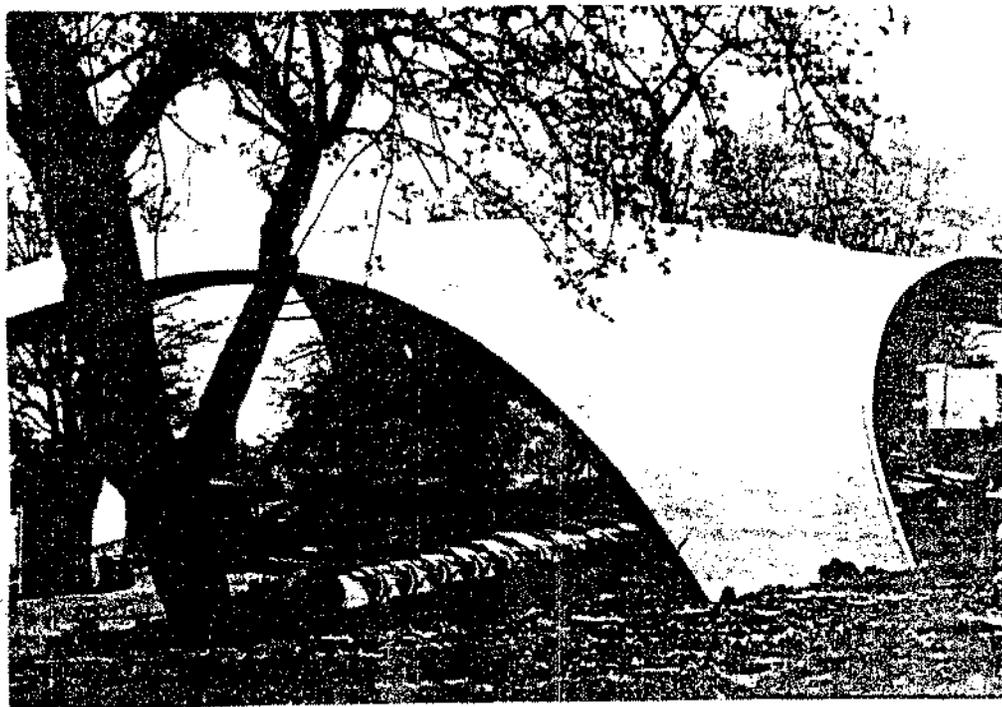


Figura 2.46 - Teatro aberto, em Grötzingen

#### 2.6.4 OUTRAS

##### *Igreja, Lommiswill, Suíça*

Este projeto foi desenvolvido pelo engenheiro Isler com a colaboração do arquiteto Hanselmann.

Foi estudada uma forma adequada para esta igreja que seria construída ao lado de uma antiga capela do século catorze, e chegou-se à conclusão que poderia ser uma forma em espiral que acompanhasse a topografia do lugar.

Para o teto foi idealizado um parabolóide hiperbólico, que é descrito por uma expressão matemática analítica, e é fixado no seu

ponto mais alto em um apoio de concreto, com seu contorno apoiado sobre as paredes de elementos pré-fabridados. A Figura 2.47 mostra um aspecto do conjunto.

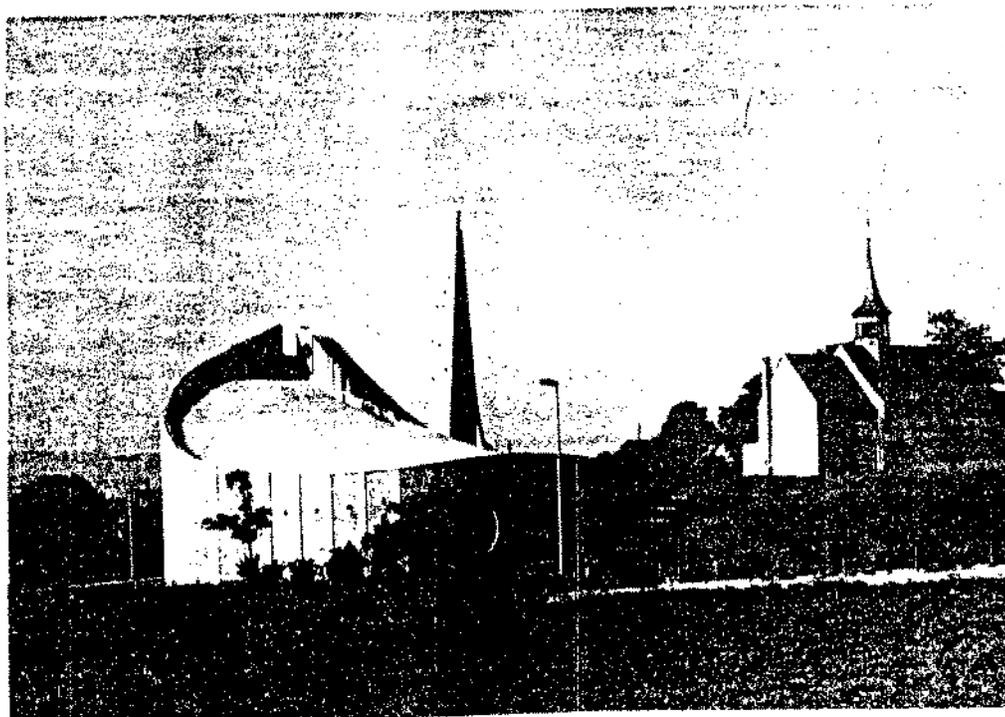


Figura 2.47 - Igreja, em Lommiswill

A espessura do parabolóide de concreto armado é na sua maior parte de aproximadamente 8 cm. No lado interno foram colocadas placas isolantes de 5 cm de espessura. Na direção de sua inclinação máxima, foram colocados cabos com capacidade para 700 KN. Pelas análises efetuadas, estas providências seriam suficientes para a estrutura suportar as diversas combinações de esforços solicitantes.

Como a estrutura tem um alto grau de hiperestaticidade foram feitos cálculos matemáticos aproximados e vários ensaios de modelos reduzidos. Dois modelos reduzidos serviram para definir a forma e as dimensões gerais. Estes modelos preliminares se transformaram em modelos arquitetônicos, mostrando as proporções exteriores e interiores. O modelo principal para os ensaios estruturais foi construído em acrílico, utilizando-se escala 1:20. Foram aplicadas forças externas, peso próprio e protensão. Com os

extensômetros do modelo foram definidas as deformações e os esforços atuantes sobre a estrutura.

Como os espaços delimitados por paredes curvas podem ter propriedades acústicas críticas, os problemas acústicos foram estudados por especialistas. Como resultado deste estudo, foi aplicado no interior um revestimento áspero nas paredes e o teto foi revestido com uma membrana.

O ambiente é iluminado através de uma janela vertical, uma frontal e outra horizontal em um dos lados. Em volta destas janelas foram colocados vitrais redondos coloridos em alguns elementos pré-fabricados da parede.

O teto foi projetado de modo que, ao se entrar na igreja, a parte superior não seja visível. Somente quando se aproxima dos assentos é que podem se vistos totalmente a janela frontal e o ponto mais alto da cobertura. Este detalhe foi pensado como um meio de se proporcionar uma satisfação visual para quem entra no interior da igreja.

#### *Residências*

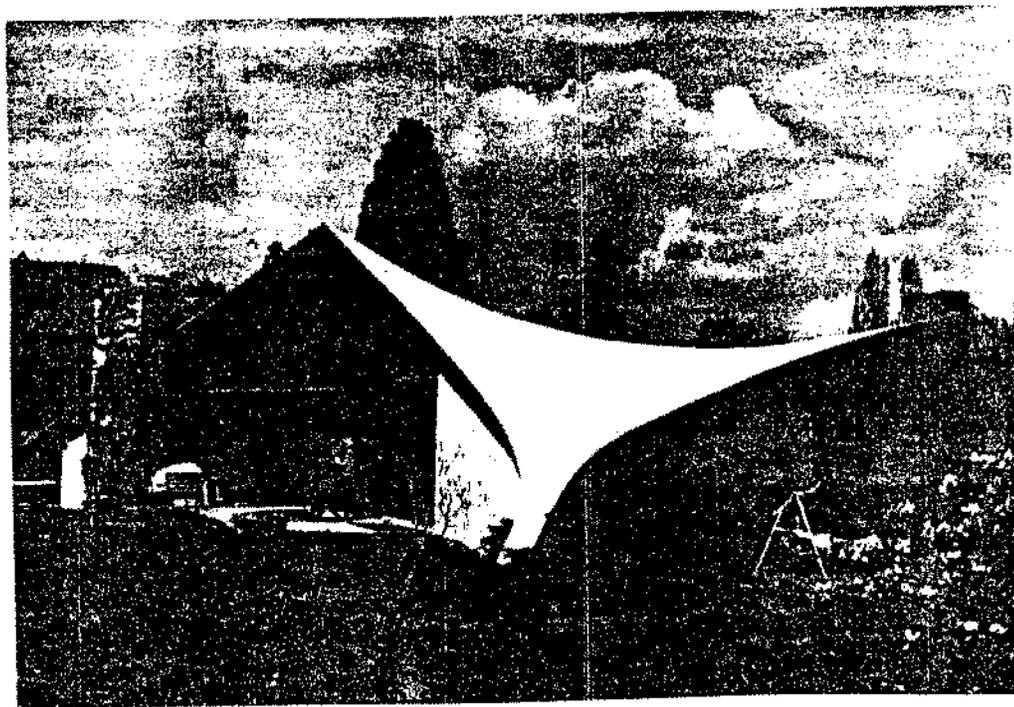


Figura 2.48 - Residência (parabolóide hiperbólico)

São apresentadas duas residências cujas formas foram geradas por dois procedimentos diferentes.

A primeira é uma residência mostrada na Figura 2.48, que tem a forma geométrica da sua cobertura dada por uma expressão matemática analítica de um parabolóide hiperbólico. Os vãos, em planta, são de 18,00 m e 21,00 m, e a espessura de 8 cm.

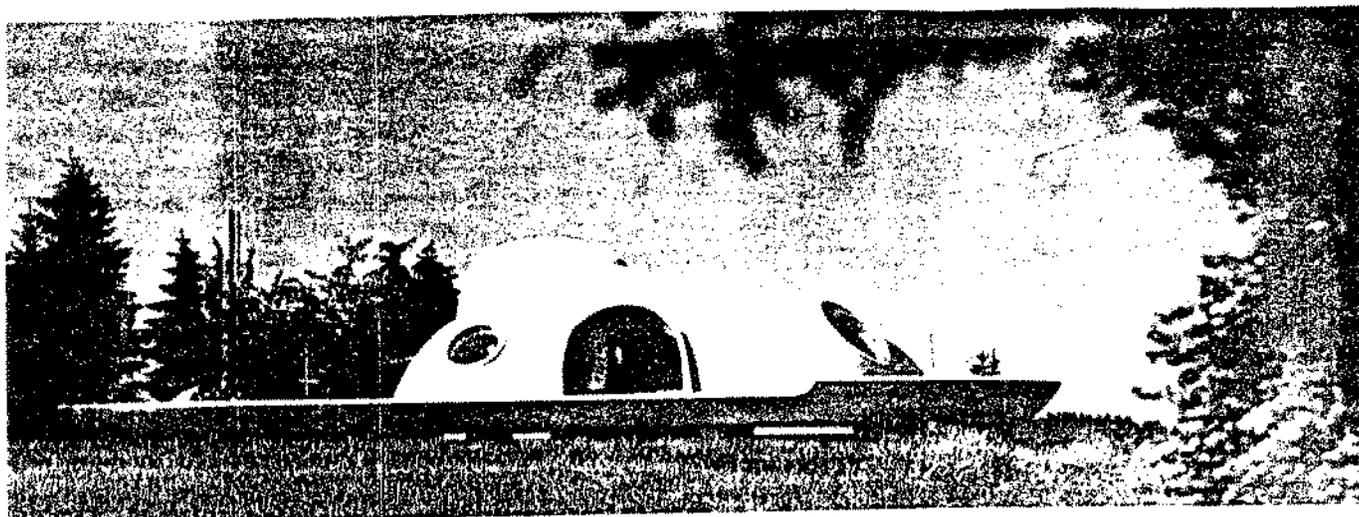


Figura 2.49 - Residência

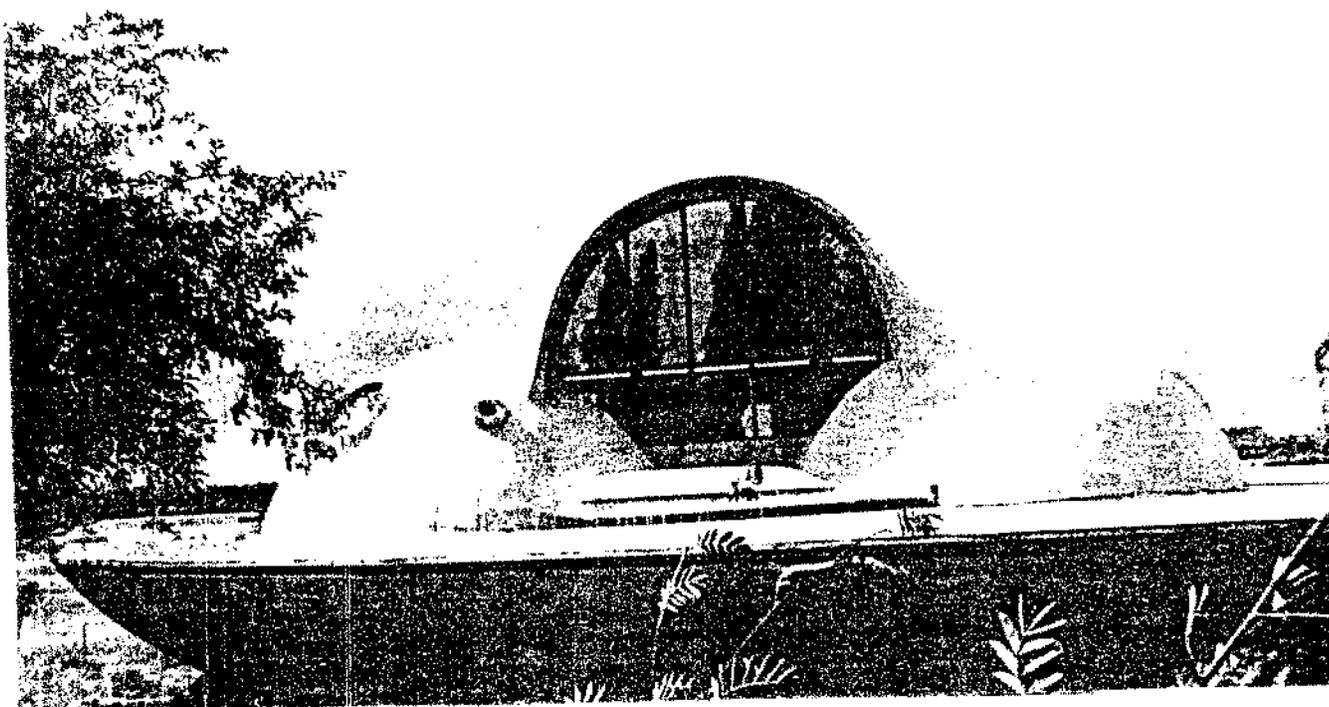


Figura 2.50 - Residência

A residência mostrada na Figura 2.49 teve suas formas geradas por efeitos de pressão. Outras vistas são mostradas na Figura 2.50 e Figura 2.51. Esta construção é totalmente diferente dos padrões arquitetônicos atuais da sociedade na qual está inserida.

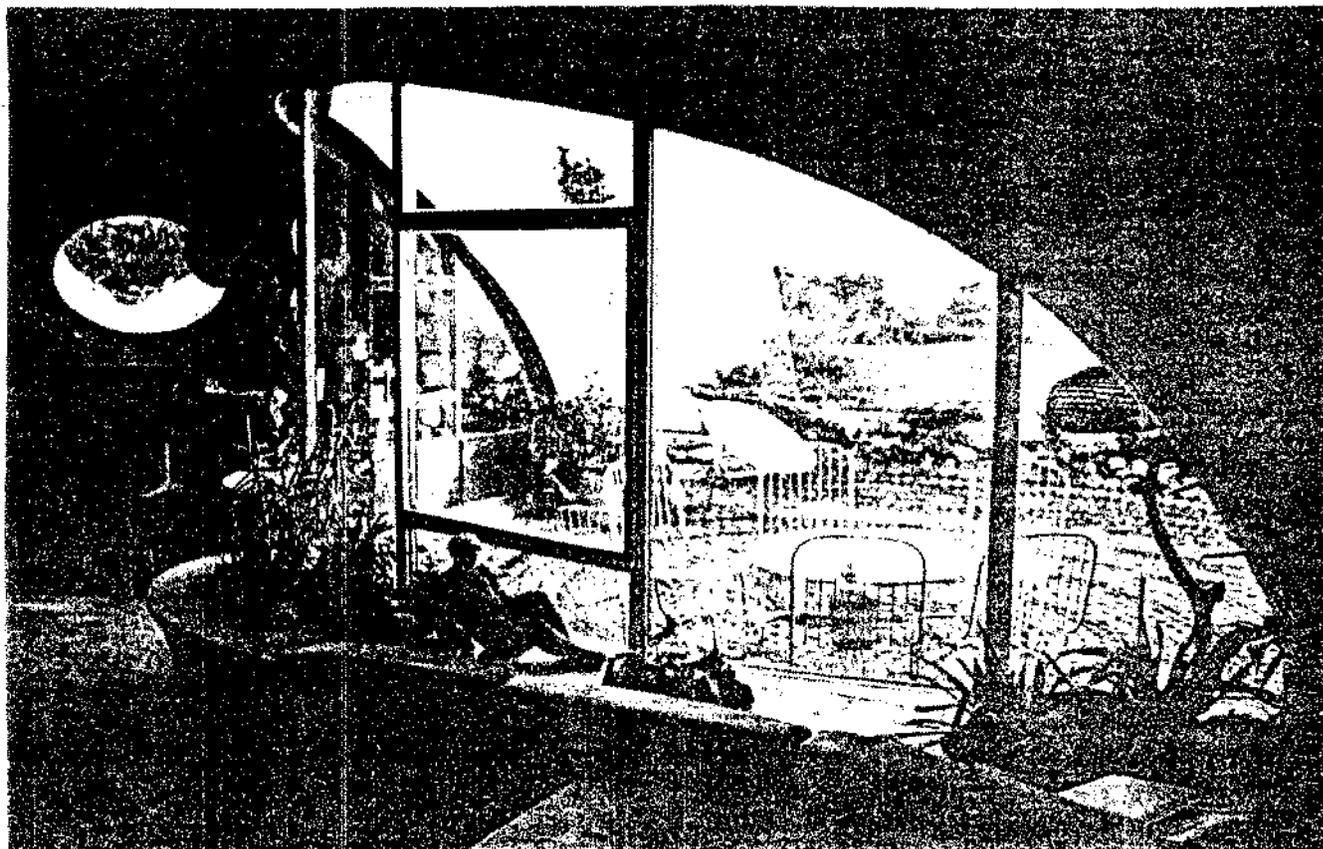


Figura 2.51 - Residência

## 2.7 CONCLUSÃO

No comportamento segundo a Teoria de Membrana é que reside a grande qualidade estrutural das cascas, que podem cobrir grandes vãos com pequenas espessuras, pois a ocorrência preponderante de esforços tangenciais impõe que todo material trabalhe solicitado ao máximo.

Os projetos de estruturas em casca são um grande desafio para os engenheiros e arquitetos modernos. Existem possibilidades ilimitadas para construção desses tipos de estruturas que servem para diversas finalidades. Como foi visto, podem ser construídas

igrejas, indústrias, centros de exposições, centros desportivos, restaurantes, clubes, pavilhões de todos os tipos e formas e também residências. Neste capítulo foram mostrados vários exemplos de projetos nos quais o engenheiro Heinz Isler utiliza processos físicos para a determinação das formas das estruturas em casca.

Com base nos métodos utilizados por Isler e, aproveitando sua experiência com estruturas em casca, principalmente as de formas livres, os métodos computacionais propostos neste trabalho permitem a geração de formas simulando-se membranas submetidas ao peso próprio, à pressão e imposição de deslocamentos.

## 2.8 REFERÊNCIAS

- [2-01] - Balz, M., Isler, H., *Haus und Gehäuse*, Sonderdruck aus BETON-PRISMA 43, Herausgegeben von Bundesverband der Deutschen Zementindustrie, 1982.
- [2-02] - Bletzinger, K.-U.; Ramm, E., *Structural Optimization as Tool for Shape Design*, Numerical Methods in Engineering, pp. 465-477, 1992.
- [2-03] - Billington, D. P., *Thin Shell Concrete Structures*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York, 1982.
- [2-04] - Bletzinger, K.-U.; Ramm, E., *Structural Optimization as Tool for Shape Design*, Numerical Methods in Engineering, pp. 465-477, 1992.
- [2-05] - Fialho, J. F. L., *Design of shells based on the experimental determination of funicular surfaces*, V Congresso IABSE, Lisboa, 1957.
- [2-06] - Isler, H., *Aplicaciones Recientes de Cascarones Representativos*, Congreso Internacional sobre la Aplicación de Estructuras Laminares en Arquitectura, México, 1967.

- [2-07] - Isler, H., *Concrete Shells and Architecture*, in Invited Lecture at the IASS Symposium on Membrane Structures and Space Frames, Bulletin IASS, n.º 91, Osaka, September, 1986.
- [2-08] - Isler, H., *Doce anos de aplicación de cascarones tipo burbuja*, Congreso Internacional sobre la Aplicación de Estructuras Laminares en Arquitectura, México, 1967.
- [2-09] - Isler, H., *New Shapes for Shells - Twenty Years Later*, in *Heinz Isler as Structural Artist*, The Art Museum, Princeton University, New Jersey, 1980.
- [2-10] - Isler, H., *Schalen - Formgebung und Konstruktion*, Berichte der Bundesvereinigung der Prüffingenieure für Baustatik, Lübeck-Travemünde, 1978.
- [2-11] - Isler, H., *Structural Beauty of Shells*, XI Congress IABSE, Viena, Aug 31 - Sep 5, 1980.
- [2-12] - Isler, H., *Typologie und Technik der Modernen Schalen*, Separadtruck aus Werk, Bauen+Wohnen, Dezember 1983.
- [2-13] - Kollegger, J.; Mehlhorn, G., *Traglastversuch an einer freigeformten Stahlbetonschale*, Gesamthochschule Kassel Universität, 1989.
- [2-14] - Pflüger, A., *Elementary Statics of Shells*, 2nd. ed., F. W. Dodge Corporation, 1961.
- [2-15] - Ramaswamy, G.S., *Analysis, Design and Construction of a New Shell of Double Curvature*, in *Shell Research*, Proc. Symposium RILEM-IASS, Bruxelles, Set. 1961, North Holland, 1961.
- [2-16] - Ramm, E., Schunk, E., *Heinz Isler Schalen*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1989.

- [2-17] - Ramm, E.; Mehlhorn, G., *On shape finding methods and ultimate load analysis of reinforced concrete shells*, *Engineering Structures*, v. 13, april, pp. 178-198, 1991.
- [2-18] - Rekach, V. G., *Static Theory of Thin-walled Space Structures*, Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [2-19] - Sedlak, V. *Timber Shell Structures and their Shapes - Recent Developments and Design Approach*, International Timber Engineering Conference London, pp. 2.34-2.45, 1991.
- [2-20] - Smith, P. G.; Wilson, E. L., *Automatic design of shell structures*, *Proc. ASCE, Journal of Structural Division.*, pp. 191-201, January, 1971.
- [2-21] - Williams, C. J. K., *The generation of a class of structural forms for vaults and sails*, *The Structural Engineer*, Vol. 68, n° 12/19, June, pp. 231-235, 1990.
- [2-22] - Zagottis, D. de, *Pontes e Grandes Estruturas: V - Introdução à Teoria das Placas e das Cascas*, Escola Politécnica-USP, São Paulo, 1973.

**MODELO COMPUTACIONAL PARA  
GERAÇÃO DE FORMAS DE  
ESTRUTURAS EM CASCA**

### 3.1 INTRODUÇÃO

Para a geração de formas de estruturas em casca é proposto um modelo computacional no qual são utilizados conceitos de otimização matemática e elementos finitos. Em síntese, o modelo reúne áreas específicas relacionadas à otimização de formas, análises de comportamentos estruturais e programação matemática.

A formulação matemática para a definição de formas de estruturas em casca foi desenvolvida empregando-se técnicas de programação matemática combinadas com a técnica dos elementos finitos. Com este modelo é possível a definição de formas para estruturas em casca com projeções horizontais arbitrárias.

O elemento finito adotado é triangular plano, com três graus de liberdade (deslocamentos lineares) em cada um dos três pontos nodais situados nos vértices, para o qual a deformação é considerada constante.

Podem ser aplicadas forças concentradas, forças distribuídas, pressão uniforme, simulação do peso próprio, e também prescrição de deslocamentos às estruturas.

Como hipótese, é adotado para o comportamento do material uma relação linear entre as deformações e as tensões. O estado plano de tensão é adotado para que o modelo represente as estruturas com comportamento de membrana. Grandes deslocamentos e grandes deformações são tratados de modo exato com a utilização da definição de deformação quadrática de Green.

Para encontrar as configurações de equilíbrio estático das membranas submetidas à grandes deslocamentos e grandes deformações, é utilizado um método do tipo quase-Newton quando a função Energia Potencial Total é conhecida, e do tipo incremental Newton-Raphson quando a função Energia Potencial Total é desconhecida.

### 3.2 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA O MATERIAL

Adotando como hipótese para o comportamento do material uma relação linear entre as deformações e as tensões (ver, por exemplo, Malvern, 1969; Bathe e Wilson, 1976; Chen e Saleeb,

1982), tem-se:

$$\sigma = D \epsilon \quad (3.1)$$

com o vetor  $\sigma$  das tensões e  $\epsilon$  das deformações contendo as seguintes componentes:

$$\sigma^T = \left[ \begin{array}{cccccc} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} \end{array} \right] \quad (3.2)$$

$$\epsilon^T = \left[ \begin{array}{cccccc} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xz} \end{array} \right] \quad (3.3)$$

e com a matriz D, expressa em função do Módulo de Elasticidade do material E e do Coeficiente de Poisson  $\nu$ , dada por:

$$D = d_0 \left[ \begin{array}{cccccc} d_1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & d_1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 \end{array} \right] \quad (3.4)$$

onde:

$$d_0 = E / [(1 + \nu) (1 - 2\nu)] \quad (3.5)$$

$$d_1 = (1 - \nu) \quad (3.6)$$

$$d_2 = (1 - 2\nu) \quad (3.7)$$

### 3.2.1 Estado Plano de Tensão

Para simular o comportamento de uma membrana são desprezadas as tensões e deformações que não estão contidas no plano do elemento, que neste caso são as tensões  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{xz}$  e as deformações  $\epsilon_{yz}$  e  $\epsilon_{xz}$ . Porém, a deformação  $\epsilon_{zz}$  não é nula, sendo expressa por:

$$\epsilon_{zz} = -\nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / E \quad (3.8)$$

Sendo assim, os vetores  $\sigma$  e  $\epsilon$  que fazem parte da relação constitutiva adotada passam a ter as seguintes componentes:

$$\sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\epsilon^T = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e a matriz D é expressa por:

$$D = d'_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d'_1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

com:

$$d'_0 = E / (1 - \nu^2) \quad (3.12)$$

$$d'_1 = (1 - \nu) \quad (3.13)$$

### 3.3 ELEMENTO FINITO ADOTADO

Foi adotado o elemento finito triangular plano para o qual é considerada a hipótese de tensão e deformação constante (ver, por exemplo, Bathe e Wilson, 1976; Desai, 1979; Becker, Carey e Oden, 1981), modificado para permitir deslocamentos normais ao seu plano. A configuração inicial do elemento é representada no plano  $xy$  do sistema de referência tri-ortogonal destrógiro adotado, que após a deformação ocupa uma posição final de equilíbrio no espaço  $Oxyz$ . As variáveis nodais são os deslocamentos lineares  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ ) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , conforme é mostrado na Figura 3.1.

As funções interpoladoras para o campo de deslocamentos no elemento são dadas por:

$$u_x(x, y) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \quad (3.14)$$

$$u_y(x, y) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \quad (3.15)$$

$$u_z(x, y) = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \quad (3.16)$$

com  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  e  $\gamma_j$  ( $j=1,2,3$ ) constantes e,  $x$  e  $y$  coordenadas dos pontos pertencentes ao domínio do elemento.

Sendo  $x_i$  e  $y_i$  as coordenadas iniciais do ponto nodal  $i$  ( $i=1,2,3$ ) do elemento, os deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1,\dots,9$ ) podem ser escritos como:

$$u_1 = u_x(x_1, y_1) = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 \quad (3.17)$$

$$u_2 = u_y(x_1, y_1) = \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 \quad (3.18)$$

$$u_3 = u_z(x_1, y_1) = \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 \quad (3.19)$$

$$u_4 = u_x(x_2, y_2) = \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 \quad (3.20)$$

$$u_5 = u_y(x_2, y_2) = \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 \quad (3.21)$$

$$u_6 = u_z(x_2, y_2) = \alpha_3 x_2 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 \quad (3.22)$$

$$u_7 = u_x(x_3, y_3) = \alpha_1 x_3 + \beta_1 y_3 + \gamma_1 \quad (3.23)$$

$$u_8 = u_y(x_3, y_3) = \alpha_2 x_3 + \beta_2 y_3 + \gamma_2 \quad (3.24)$$

$$u_9 = u_z(x_3, y_3) = \alpha_3 x_3 + \beta_3 y_3 + \gamma_3 \quad (3.25)$$

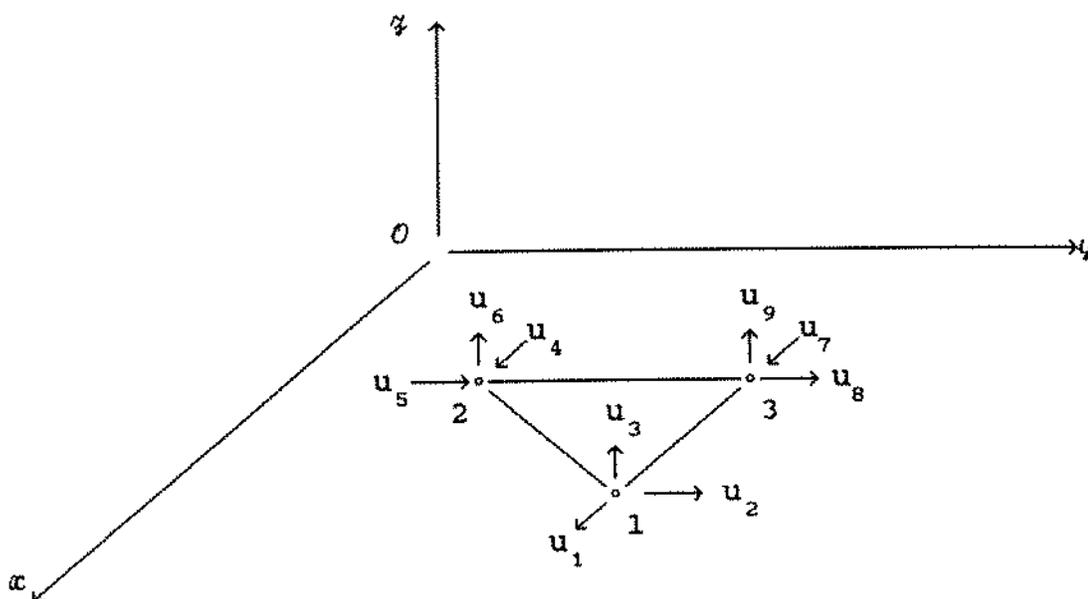


Figura 3.1 - Elemento finito com as respectivas variáveis nodais

Os deslocamentos  $u_1$ ,  $u_4$  e  $u_7$  na direção  $x$  para os respectivos pontos nodais 1, 2 e 3 do elemento, podem ser representados por:

$$d_x = A f_x \quad (3.26)$$

onde:

$$\mathbf{d}_x^T = [ u_1 \quad u_4 \quad u_7 ] \quad (3.27)$$

$$\mathbf{f}_x^T = [ \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 ] \quad (3.28)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \psi_1 & 1 \\ \alpha_2 & \psi_2 & 1 \\ \alpha_3 & \psi_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Com procedimento análogo, os deslocamentos nodais  $u_2, u_5$  e  $u_8$  na direção  $\psi$ , e  $u_3, u_6$  e  $u_9$  na direção  $\varphi$  para os respectivos pontos nodais do elemento podem ser expressos por:

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{A} \mathbf{f}_y \quad (3.30)$$

$$\mathbf{d}_z = \mathbf{A} \mathbf{f}_z \quad (3.31)$$

onde:

$$\mathbf{d}_y^T = [ u_2 \quad u_5 \quad u_8 ] \quad (3.32)$$

$$\mathbf{d}_z^T = [ u_3 \quad u_6 \quad u_9 ] \quad (3.33)$$

$$\mathbf{f}_y^T = [ \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2 ] \quad (3.34)$$

$$\mathbf{f}_z^T = [ \alpha_3 \quad \beta_3 \quad \gamma_3 ] \quad (3.35)$$

Sendo  $\mathbf{C}$  a matriz inversa da matriz  $\mathbf{A}$ , os vetores que contém as constantes  $\alpha_j, \beta_j$  e  $\gamma_j$  ( $j=1,2,3$ ) podem ser escritos como:

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{C} \mathbf{d}_x \quad (3.36)$$

$$\mathbf{f}_y = \mathbf{C} \mathbf{d}_y \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f}_z = \mathbf{C} \mathbf{d}_z \quad (3.38)$$

Portanto, como resultado final, as expressões para  $\alpha_j, \beta_j$  e  $\gamma_j$  ( $j=1,2,3$ ) representadas em função dos deslocamentos nodais são:

$$\alpha_1 = ( c_{11}u_1 + c_{12}u_4 + c_{13}u_7 ) \quad (3.39)$$

$$\alpha_2 = ( c_{11} u_2 + c_{12} u_5 + c_{13} u_8 ) \quad (3.40)$$

$$\alpha_3 = ( c_{11} u_3 + c_{12} u_6 + c_{13} u_9 ) \quad (3.41)$$

$$\beta_1 = ( c_{21} u_1 + c_{22} u_4 + c_{23} u_7 ) \quad (3.42)$$

$$\beta_2 = ( c_{21} u_2 + c_{22} u_5 + c_{23} u_8 ) \quad (3.43)$$

$$\beta_3 = ( c_{21} u_3 + c_{22} u_6 + c_{23} u_9 ) \quad (3.44)$$

$$\gamma_1 = ( c_{31} u_1 + c_{32} u_4 + c_{33} u_7 ) \quad (3.45)$$

$$\gamma_2 = ( c_{31} u_2 + c_{32} u_5 + c_{33} u_8 ) \quad (3.46)$$

$$\gamma_3 = ( c_{31} u_3 + c_{32} u_6 + c_{33} u_9 ) \quad (3.47)$$

Estas equações permitem escrever  $u_x(x,y)$ ,  $u_y(x,y)$  e  $u_z(x,y)$  em função das coordenadas iniciais e dos deslocamentos dos pontos nodais do elemento, conforme as equações interpoladoras adotadas inicialmente.

### 3.3.1 Deformação

Utilizando a definição de deformação quadrática de Green, onde são considerados grandes deslocamentos e grandes deformações de modo exato (Malvern, 1969), são obtidas as expressões para as componentes da deformação:

$$\epsilon_{xx} = [ 2 u_{x,x} + (u_{x,x})^2 + (u_{y,x})^2 + (u_{z,x})^2 ] / 2 \quad (3.48)$$

$$\epsilon_{yy} = [ 2 u_{y,y} + (u_{x,y})^2 + (u_{y,y})^2 + (u_{z,y})^2 ] / 2 \quad (3.49)$$

$$\epsilon_{zz} = [ 2 u_{z,z} + (u_{x,z})^2 + (u_{y,z})^2 + (u_{z,z})^2 ] / 2 \quad (3.50)$$

$$\epsilon_{xy} = [ u_{x,y} + u_{y,x} + u_{x,x} u_{x,y} + u_{y,x} u_{y,y} + u_{z,x} u_{z,y} ] / 2 \quad (3.51)$$

$$\epsilon_{yz} = [ u_{y,z} + u_{z,y} + u_{x,y} u_{x,z} + u_{y,y} u_{y,z} + u_{z,y} u_{z,z} ] / 2 \quad (3.52)$$

$$\epsilon_{xz} = [ u_{x,z} + u_{z,x} + u_{x,x} u_{x,z} + u_{y,x} u_{y,z} + u_{z,x} u_{z,z} ] / 2 \quad (3.53)$$

Considerando o estado plano de tensão em que o elemento na posição inicial indeformada se encontra no plano  $xy$  e, substituindo as derivadas das funções interpoladoras nas expressões das componentes da deformação, são obtidas as equações:

$$\epsilon_{xx} = [ 2 \alpha_1 + (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2 ] / 2 \quad (3.54)$$

$$\epsilon_{yy} = [ 2 \beta_2 + (\beta_1)^2 + (\beta_2)^2 + (\beta_3)^2 ] / 2 \quad (3.55)$$

$$\epsilon_{xy} = ( \alpha_2 + \beta_1 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 ) / 2 \quad (3.56)$$

Finalmente, as componentes da deformação para o elemento podem ser escritas em função dos deslocamentos e das coordenadas nodais iniciais como:

$$\epsilon_{xx} = (c_{11}u_1 + c_{12}u_4 + c_{13}u_7) + \left[ (c_{11}u_1 + c_{12}u_4 + c_{13}u_7)^2 + (c_{11}u_2 + c_{12}u_5 + c_{13}u_8)^2 + (c_{11}u_3 + c_{12}u_6 + c_{13}u_9)^2 \right] / 2 \quad (3.57)$$

$$\epsilon_{yy} = (c_{21}u_2 + c_{22}u_5 + c_{23}u_8) + \left[ (c_{21}u_1 + c_{22}u_4 + c_{23}u_7)^2 + (c_{21}u_2 + c_{22}u_5 + c_{23}u_8)^2 + (c_{21}u_3 + c_{22}u_6 + c_{23}u_9)^2 \right] / 2 \quad (3.58)$$

$$\epsilon_{xy} = \left[ c_{11}u_2 + c_{12}u_5 + c_{13}u_8 + c_{21}u_1 + c_{22}u_4 + c_{23}u_7 + (c_{11}u_1 + c_{12}u_4 + c_{13}u_7)(c_{21}u_1 + c_{22}u_4 + c_{23}u_7) + (c_{11}u_2 + c_{12}u_5 + c_{13}u_8)(c_{21}u_2 + c_{22}u_5 + c_{23}u_8) + (c_{11}u_3 + c_{12}u_6 + c_{13}u_9)(c_{21}u_3 + c_{22}u_6 + c_{23}u_9) \right] / 2 \quad (3.59)$$

### 3.3.2 Energia de Deformação

Adotando-se o volume inicial do elemento indeformado como referência, a Energia de Deformação  $\Pi_e$  para materiais com comportamento linear pode ser escrita como:

$$\Pi_e = \left( \int_{\omega} \sigma^T \epsilon \, dW \right) / 2 = \left( \int_{\omega} \epsilon^T \mathbf{D} \epsilon \, dW \right) / 2 \quad (3.60)$$

Considerando o elemento com espessura constante e definindo o seu volume na configuração indeformada como  $\omega$ , a Energia de Deformação para o elemento se reduz a:

$$\Pi_e = \left( \omega \epsilon^T \mathbf{D} \epsilon \right) / 2 \quad (3.61)$$

sendo as componentes do vetor de deformação  $\epsilon$  e da matriz  $\mathbf{D}$  constantes.

### 3.3.3 Gradiente da Energia de Deformação

O gradiente da Energia de Deformação para o elemento, conhecido como o vetor das forças nodais internas, que é calculado por meio das derivadas parciais dos elementos do vetor  $\epsilon$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ ), pode ter suas componentes escritas como:

$$\Pi_{\sigma, u_k} = \omega \epsilon^T D \epsilon_{, u_k} = \omega \sigma^T \epsilon_{, u_k} \quad (3.62)$$

As derivadas parciais da Energia de Deformação do elemento em relação aos deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ ) são:

$$\epsilon_{xx, u_1} = (1 + \alpha_1) c_{11} \quad (3.63)$$

$$\epsilon_{yy, u_1} = \beta_1 c_{21} \quad (3.64)$$

$$\epsilon_{xy, u_1} = [(1 + \alpha_1) c_{21} + \beta_1 c_{11}] / 2 \quad (3.65)$$

$$\epsilon_{xx, u_2} = \alpha_2 c_{11} \quad (3.66)$$

$$\epsilon_{yy, u_2} = (1 + \beta_2) c_{21} \quad (3.67)$$

$$\epsilon_{xy, u_2} = [(1 + \beta_2) c_{11} + \alpha_2 c_{21}] / 2 \quad (3.68)$$

$$\epsilon_{xx, u_3} = \alpha_3 c_{11} \quad (3.69)$$

$$\epsilon_{yy, u_3} = \beta_3 c_{21} \quad (3.70)$$

$$\epsilon_{xy, u_3} = (\beta_3 c_{11} + \alpha_3 c_{21}) / 2 \quad (3.71)$$

$$\epsilon_{xx, u_4} = (1 + \alpha_1) c_{12} \quad (3.72)$$

$$\epsilon_{yy, u_4} = \beta_1 c_{22} \quad (3.73)$$

$$\epsilon_{xy, u_4} = [(1 + \alpha_1) c_{22} + \beta_1 c_{12}] / 2 \quad (3.74)$$

$$\epsilon_{xx, u_5} = \alpha_2 c_{12} \quad (3.75)$$

$$\epsilon_{yy, u_5} = (1 + \beta_2) c_{22} \quad (3.76)$$

$$\epsilon_{xy, u_5} = [(1 + \beta_2) c_{12} + \alpha_2 c_{22}] / 2 \quad (3.77)$$

$$\epsilon_{xx, u_6} = \alpha_3 c_{12} \quad (3.78)$$

$$\epsilon_{yy, u_6} = \beta_3 c_{22} \quad (3.79)$$

$$\epsilon_{xy, u_6} = (\beta_3 c_{12} + \alpha_3 c_{22}) / 2 \quad (3.80)$$

$$\epsilon_{xx, u_7} = (1 + \alpha_1) c_{13} \quad (3.81)$$

$$\epsilon_{yy, u_7} = \beta_1 c_{23} \quad (3.82)$$

$$\epsilon_{xy, u_7} = [(1 + \alpha_1) c_{23} + \beta_1 c_{13}] / 2 \quad (3.83)$$

$$\epsilon_{xx, u_8} = \alpha_2 c_{13} \quad (3.84)$$

$$\epsilon_{yy, u_8} = (1 + \beta_2) c_{23} \quad (3.85)$$

$$\epsilon_{xy, u_8} = [(1 + \beta_2) c_{13} + \alpha_2 c_{23}] / 2 \quad (3.86)$$

$$\epsilon_{xx, u_9} = \alpha_3 c_{13} \quad (3.87)$$

$$\epsilon_{yy, u_9} = \beta_3 c_{23} \quad (3.88)$$

$$\epsilon_{xy, u_9} = (\beta_3 c_{13} + \alpha_3 c_{23}) / 2 \quad (3.89)$$

### 3.3.4 Hessiana da Energia de Deformação

A hessiana da Energia de Deformação para o elemento, conhecida como matriz de rigidez associada às forças internas, que é calculada por meio das derivadas parciais dos elementos do vetor  $\epsilon$  em relação aos deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ ), pode ter suas componentes escritas como:

$$\Pi_{\epsilon, u_i u_j} = \omega \left[ \epsilon^T_{, u_i} D \epsilon_{, u_j} + \epsilon^T D \epsilon_{, u_i u_j} \right] \quad (3.90)$$

As derivadas parciais da Energia de Deformação do elemento em relação aos deslocamentos nodais são:

$$\epsilon_{xx, u_1 u_1} = \epsilon_{xx, u_2 u_2} = \epsilon_{xx, u_3 u_3} = c_{11}^2 \quad (3.91)$$

$$\epsilon_{yy, u_1 u_1} = \epsilon_{yy, u_2 u_2} = \epsilon_{yy, u_3 u_3} = c_{21}^2 \quad (3.92)$$

$$\epsilon_{xy, u_1 u_1} = \epsilon_{xy, u_2 u_2} = \epsilon_{xy, u_3 u_3} = c_{11} c_{21} \quad (3.93)$$

$$\epsilon_{xx, u_1 u_4} = \epsilon_{xx, u_2 u_5} = \epsilon_{xx, u_3 u_6} = c_{11} c_{12} \quad (3.94)$$

$$\epsilon_{yy, u_1 u_4} = \epsilon_{yy, u_2 u_5} = \epsilon_{yy, u_3 u_6} = c_{21} c_{22} \quad (3.95)$$

$$\epsilon_{xy, u_1 u_4} = \epsilon_{xy, u_2 u_5} = \epsilon_{xy, u_3 u_6} = (c_{11} c_{22} + c_{12} c_{21}) / 2 \quad (3.96)$$

$$\epsilon_{xx, u_1 u_7} = \epsilon_{xx, u_2 u_8} = \epsilon_{xx, u_3 u_9} = c_{11} c_{13} \quad (3.97)$$

$$\epsilon_{yy, u_1 u_7} = \epsilon_{yy, u_2 u_8} = \epsilon_{yy, u_3 u_9} = c_{21} c_{23} \quad (3.98)$$

$$\epsilon_{xy, u_1 u_7} = \epsilon_{xy, u_2 u_8} = \epsilon_{xy, u_3 u_9} = (c_{11} c_{23} + c_{13} c_{21}) / 2 \quad (3.99)$$

$$\epsilon_{xx, u_4 u_4} = \epsilon_{xx, u_5 u_5} = \epsilon_{xx, u_6 u_6} = c_{12}^2 \quad (3.100)$$

$$\epsilon_{yy, u_4 u_4} = \epsilon_{yy, u_5 u_5} = \epsilon_{yy, u_6 u_6} = c_{22}^2 \quad (3.101)$$

$$\epsilon_{xy, u_4 u_4} = \epsilon_{xy, u_5 u_5} = \epsilon_{xy, u_6 u_6} = c_{12} c_{22} \quad (3.102)$$

$$\epsilon_{xx, u_4 u_7} = \epsilon_{xx, u_5 u_8} = \epsilon_{xx, u_6 u_9} = c_{12} c_{13} \quad (3.103)$$

$$\epsilon_{yy, u_4 u_7} = \epsilon_{yy, u_5 u_8} = \epsilon_{yy, u_6 u_9} = c_{22} c_{23} \quad (3.104)$$

$$\epsilon_{xy, u_4 u_7} = \epsilon_{xy, u_5 u_8} = \epsilon_{xy, u_6 u_9} = (c_{12} c_{23} + c_{13} c_{22}) / 2 \quad (3.105)$$

$$\epsilon_{xx, u_7 u_7} = \epsilon_{xx, u_8 u_8} = \epsilon_{xx, u_9 u_9} = c_{13}^2 \quad (3.106)$$

$$\epsilon_{yy, u_7 u_7} = \epsilon_{yy, u_8 u_8} = \epsilon_{yy, u_9 u_9} = c_{23}^2 \quad (3.107)$$

$$\epsilon_{xy, u_7 u_7} = \epsilon_{xy, u_8 u_8} = \epsilon_{xy, u_9 u_9} = c_{13} c_{23} \quad (3.108)$$

### 3.4 CARREGAMENTOS ATUANTES NOS ELEMENTOS

No modelo desenvolvido são consideradas as ações dos carregamentos concentrados, uniformemente distribuídos, de pressão e peso próprio.

As forças dos carregamentos concentrados podem ser aplicadas sobre os pontos nodais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ; as forças dos carregamentos uniformemente distribuídos e da simulação do efeito devido ao peso próprio podem ser aplicadas sobre o elemento somente na vertical (direção do eixo  $z$ ); e as forças dos carregamentos de pressão atuam sempre perpendiculares à superfície do elemento, desde a configuração inicial em que começa a atuar o

carregamento até a configuração final de equilíbrio.

Para as forças distribuídas e de pressão, são determinadas forças nodais equivalentes, que são forças concentradas que atuam sobre os pontos nodais para as quais as correspondentes ações são equivalentes às de forças distribuídas e de pressão consideradas inicialmente.

Pode ser considerado também o efeito da ação de cargas concentradas e distribuídas atuando concomitantemente. Como as forças concentradas podem ser aplicadas em qualquer direção do sistema de coordenadas adotado, existe a possibilidade, por exemplo, de se tracionar a estrutura com cargas concentradas simulando um carregamento distribuído na direção do plano horizontal inicial da estrutura indeformada, ao mesmo tempo em que é considerada a ação de cargas distribuídas.

Existe a possibilidade da simulação de quaisquer carregamentos distribuídos a partir da composição de cargas concentradas. Pode-se obter, por exemplo, o efeito equivalente ao de um carregamento uniformemente distribuído, ou linearmente distribuído (triangular), ou qualquer outro pelo qual se tem interesse.

#### 3.4.1 Carregamentos Concentrados

Definindo  $f(x)$  como o vetor global das ações de todos os carregamentos que agem sobre a estrutura, onde  $x$  representa os deslocamentos nodais da estrutura, as forças concentradas são levadas em consideração de um modo simples e objetivo. Ao ser identificada a posição global da atuação da força concentrada, ao vetor  $f(x)$  é feita a correspondente contribuição relativa a este carregamento.

#### 3.4.2 Carregamentos Uniformemente Distribuídos

As ações de carregamentos uniformemente distribuídos são obtidas em decorrência da simulação do peso próprio inicial da estrutura como carga distribuída, cuja configuração inicial ocorre

sempre na posição do plano horizontal.

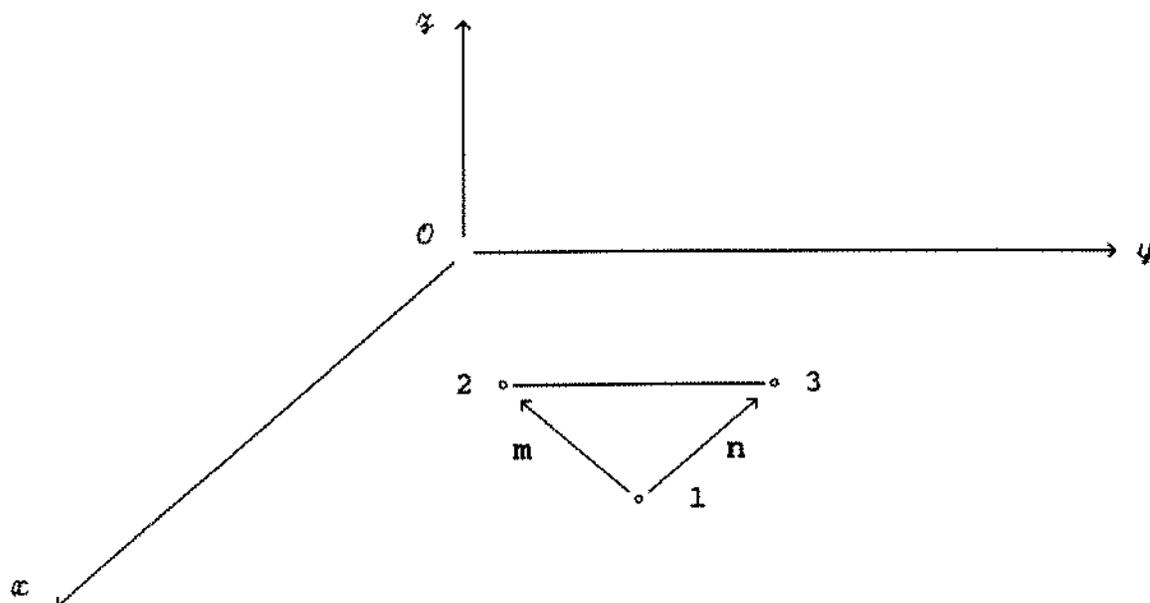


Figura 3.2 - Vetores m e n na configuração inicial do elemento

Considerando a configuração indeformada do elemento, e sendo m e n dois vetores contidos no seu plano com as origens no ponto nodal 1 e as extremidades nos pontos nodais 2 e 3 respectivamente (ver Figura 3.2), é possível calcular a área  $\phi$  como:

$$\phi = \frac{|| \mathbf{m} \wedge \mathbf{n} ||}{2} \quad (3.109)$$

onde os vetores m e n são representados por:

$$\mathbf{m}^T = [ (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (\psi_2 - \psi_1) \quad 0 ] \quad (3.110)$$

$$\mathbf{n}^T = [ (\alpha_3 - \alpha_1) \quad (\psi_3 - \psi_1) \quad 0 ] \quad (3.111)$$

sendo que  $\alpha_i$  e  $\psi_i$  são as coordenadas iniciais do ponto nodal i ( $i=1,2,3$ ) do elemento.

Adotando como constante a espessura  $t_e$  para o elemento, e considerando o peso específico do material  $\rho$ , a resultante do peso próprio  $g_e$  para o elemento é:

$$g_e = \rho t_e \phi \quad (3.112)$$

A carga nodal equivalente para o ponto nodal do elemento é igual a um terço do seu peso próprio  $g_e$ , resultando numa força que age sempre na vertical (eixo  $z$ ), e que irá compor o vetor global  $f(x)$  das ações de carregamentos nodais da estrutura.

Como vários elementos podem estar conectados a um determinado ponto nodal, o vetor global  $f(x)$  das ações de carregamentos nodais da estrutura receberá as contribuições destes elementos por meio das respectivas superposições das componentes do peso próprio de cada um na posição correspondente.

### 3.4.3 Carregamentos de Pressão

Para considerar os efeitos das forças de pressão, é importante observar que as direções dos vetores dependem da posição do elemento, que é variável ao longo do tempo devido aos deslocamentos<sup>1</sup> que ocorrem até a configuração final de equilíbrio.

Considerando a configuração deformada do elemento, e sendo  $a(u)$  e  $b(u)$  dois vetores contidos no seu plano com as origens no ponto nodal 1 e as extremidades nos pontos nodais 2 e 3 respectivamente, é possível calcular a área  $\phi(u)$  como:

$$\phi(u) = \frac{|| a(u) \wedge b(u) ||}{2} \quad (3.113)$$

Sendo  $x_i$  e  $\psi_i$  ( $i=1,2,3$ ) as coordenadas iniciais dos pontos nodais do elemento, e  $u_k$  ( $k=1,\dots,9$ ) os deslocamentos nodais, os vetores  $a(u)$  e  $b(u)$  são representados por:

$$a(u) = \begin{bmatrix} (x_2 + u_4) - (x_1 + u_1) \\ (\psi_2 + u_5) - (\psi_1 + u_2) \\ u_6 - u_3 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

---

<sup>1</sup> Os deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1,\dots,9$ ) do elemento também serão representados por  $u$  para simplificar algumas expressões.

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} (x_3 + u_7) - (x_1 + u_1) \\ (\psi_3 + u_8) - (\psi_1 + u_2) \\ u_9 - u_3 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Definindo  $\lambda$  como o módulo da pressão uniforme atuante no elemento, tem-se a resultante da pressão  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$  no elemento:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \lambda \varphi(\mathbf{u}) \frac{\mathbf{a}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{a}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{u})\|} \quad (3.116)$$

É importante observar que a incidência dos pontos nodais dos elementos deve ser sempre no sentido horário para que a orientação do vetor  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$  seja coerente com a formulação deduzida.

Portanto, para o elemento considerado, a resultante da pressão é:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \lambda [\mathbf{a}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{u})] / 2 \quad (3.117)$$

Para cada ponto nodal do elemento, a parcela correspondente a um terço de  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$  é o vetor com três componentes  $\mathbf{f}_p(\mathbf{u})$ :

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{u}) = \lambda [\mathbf{a}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{u})] / 6 \quad (3.118)$$

ou, na forma matricial:

$$\mathbf{f}_p^T(\mathbf{u}) = [p_x \ p_y \ p_z] \quad (3.119)$$

onde  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  são as componentes da pressão em  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, com as direções provenientes do produto vetorial de  $\mathbf{a}(\mathbf{u})$  por  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$ .

Conseqüentemente, o efeito da pressão constante sobre o elemento, considerando os três pontos nodais, é representado pelo vetor de nove componentes  $\mathbf{p}_e(\mathbf{u})$ :

$$\mathbf{p}_e^T(\mathbf{u}) = [p_x \ p_y \ p_z \ p_x \ p_y \ p_z \ p_x \ p_y \ p_z] \quad (3.120)$$

sendo que para um ponto nodal do elemento, as componentes do vetor

$f_p(u)$  são:

$$p_x = \lambda \left[ (\psi_3 + u_8 - \psi_1 - u_2)(u_6 - u_3) - (\psi_2 + u_5 - \psi_1 - u_2)(u_9 - u_3) \right] / 6 \quad (3.121)$$

$$p_y = \lambda \left[ (\alpha_2 + u_4 - \alpha_1 - u_1)(u_9 - u_3) - (\alpha_3 + u_7 - \alpha_1 - u_1)(u_6 - u_3) \right] / 6 \quad (3.122)$$

$$p_z = \lambda \left[ (\alpha_3 + u_7 - \alpha_1 - u_1)(\psi_2 + u_5 - \psi_1 - u_2) - (\alpha_2 + u_4 - \alpha_1 - u_1)(\psi_3 + u_8 - \psi_1 - u_2) \right] / 6 \quad (3.123)$$

Como  $p_e(u)$  depende dos deslocamentos nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ ), as derivadas parciais de  $p_e(u)$  em relação aos deslocamentos resultam em uma matriz  $F(u)$  associada à força de pressão, sendo que as suas componentes não nulas são:

$$F_{12} = F_{42} = F_{72} = u_9 - u_6 \quad (3.124)$$

$$F_{13} = F_{43} = F_{73} = \psi_2 + u_5 - \psi_3 - u_8 \quad (3.125)$$

$$F_{15} = F_{45} = F_{75} = u_3 - u_9 \quad (3.126)$$

$$F_{16} = F_{46} = F_{76} = \psi_3 + u_8 - \psi_1 - u_2 \quad (3.127)$$

$$F_{18} = F_{48} = F_{78} = u_6 - u_3 \quad (3.128)$$

$$F_{19} = F_{49} = F_{79} = \psi_1 + u_2 - \psi_2 - u_5 \quad (3.129)$$

$$F_{21} = F_{51} = F_{81} = u_6 - u_9 \quad (3.130)$$

$$F_{23} = F_{53} = F_{83} = \alpha_3 + u_7 - \alpha_2 - u_4 \quad (3.131)$$

$$F_{24} = F_{54} = F_{84} = u_9 - u_3 \quad (3.132)$$

$$F_{26} = F_{56} = F_{86} = \alpha_1 + u_1 - \alpha_3 - u_7 \quad (3.133)$$

$$F_{27} = F_{57} = F_{87} = u_3 - u_6 \quad (3.134)$$

$$F_{29} = F_{59} = F_{89} = \alpha_2 + u_4 - \alpha_1 - u_1 \quad (3.135)$$

$$F_{31} = F_{61} = F_{91} = \psi_3 + u_8 - \psi_2 - u_5 \quad (3.136)$$

$$F_{32} = F_{62} = F_{92} = \alpha_2 + u_4 - \alpha_3 - u_7 \quad (3.137)$$

$$F_{34} = F_{64} = F_{94} = \psi_1 + u_2 - \psi_3 - u_8 \quad (3.138)$$

$$F_{35} = F_{65} = F_{95} = \alpha_3 + u_7 - \alpha_1 - u_1 \quad (3.139)$$

$$F_{37} = F_{67} = F_{97} = \psi_2 + u_5 - \psi_1 - u_2 \quad (3.140)$$

$$F_{38} = F_{68} = F_{98} = \alpha_1 + u_1 - \alpha_2 - u_4 \quad (3.141)$$

Como pode ser notado, a matriz  $F(u)$  não é simétrica, o que implica na não existência da função Energia Potencial Total associada à força de pressão.

H. D. Hibbitt (1979) apresenta um artigo intitulado "Some Follower Forces and Load Stiffness", em que ele trata de forças que dependem dos deslocamentos do corpo em que elas atuam, bem como de algum parâmetro externo, para suas definições.

No caso do carregamento de pressão, as forças sempre atuam perpendicularmente à superfície do corpo, que é variável ao longo do tempo em decorrência dos deslocamentos que ocorrem, sendo que o parâmetro externo considerado é a magnitude da pressão.

Hibbitt apresenta a expressão da matriz de rigidez da contribuição do efeito de pressão, que não é simétrica, onde são importantes o módulo da pressão e os deslocamentos da estrutura. Contudo, ocorre um caso particular que é bem conhecido, em que uma superfície de contorno fechado, submetida à ação de uma pressão constante produz um sistema de forças conservativo. Este fato conduz à uma matriz de rigidez simétrica para a estrutura.

#### 3.4.4 Simulação do Efeito Devido ao Peso Próprio

Neste caso o que se pretende é a descrição de um artifício para a simulação do efeito do carregamento devido ao peso próprio do elemento.

Considerando a densidade e a espessura constantes por hipótese, e observando que o elemento varia de tamanho até atingir a configuração de equilíbrio, ocorre uma situação onde o peso próprio do elemento varia até atingir a configuração de equilíbrio. Esta situação pode ser tratada por meio de um carregamento de pressão, para o qual a resultante é uma força proporcional à área do elemento, considerando que sua atuação ocorre na direção vertical.

A formulação para este caso é semelhante àquela desenvolvida para as ações dos carregamentos de pressão. A partir das componentes da ação nodal devida ao carregamento de pressão, a força vertical pode ser escrita como:

$$f_v = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2} \quad (3.142)$$

O gradiente da força  $f_v$  é obtido em função das derivadas parciais de  $f_v$  em relação às variáveis nodais  $u_k$  ( $k=1, \dots, 9$ ), e pode ter as suas componentes escritas como :

$$f_{v,u_k} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{-1/2} (p_x p_{x,u_k} + p_y p_{y,u_k} + p_z p_{z,u_k}) \quad (3.143)$$

sendo que as componentes não nulas de  $p_{x,u_k}$ ,  $p_{y,u_k}$  e  $p_{z,u_k}$  são:

$$p_{x,u_2} = u_9 - u_6 \quad (3.144)$$

$$p_{x,u_3} = \psi_2 + u_5 - \psi_3 - u_8 \quad (3.145)$$

$$p_{x,u_5} = u_3 - u_9 \quad (3.146)$$

$$p_{x,u_6} = \psi_3 + u_8 - \psi_1 - u_2 \quad (3.147)$$

$$p_{x,u_8} = u_6 - u_3 \quad (3.148)$$

$$p_{x,u_9} = \psi_1 + u_2 - \psi_2 - u_5 \quad (3.149)$$

$$p_{y,u_1} = u_6 - u_9 \quad (3.150)$$

$$p_{y,u_3} = \alpha_3 + u_7 - \alpha_2 - u_4 \quad (3.151)$$

$$p_{y,u_4} = u_9 - u_3 \quad (3.152)$$

$$p_{y,u_6} = \alpha_1 + u_1 - \alpha_3 - u_7 \quad (3.153)$$

$$p_{y,u_7} = u_3 - u_6 \quad (3.154)$$

$$p_{y,u_9} = \alpha_2 + u_4 - \alpha_1 - u_1 \quad (3.155)$$

$$p_{z,u_1} = \psi_3 + u_8 - \psi_2 - u_5 \quad (3.156)$$

$$p_{z,u_2} = \alpha_2 + u_4 - \alpha_3 - u_7 \quad (3.157)$$

$$p_{z,u_4} = \psi_1 + u_2 - \psi_3 - u_8 \quad (3.158)$$

$$p_{z,u_5} = \alpha_3 + u_7 - \alpha_1 - u_1 \quad (3.159)$$

$$p_{z,u_7} = \psi_2 + u_5 - \psi_1 - u_2 \quad (3.160)$$

$$p_{z,u_8} = \alpha_1 + u_1 - \alpha_2 - u_4 \quad (3.161)$$

### 3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

No modelo computacional desenvolvido é possível a consideração de condições de contorno referentes às prescrições de

deslocamentos nulos (simulação de vinculações com restrições dos graus de liberdade), e prescrições de deslocamentos não nulos (permitindo imposições de deslocamentos concernentes aos possíveis movimentos dos pontos nodais da estrutura).

### 3.5.1 Vinculações

Para cada ponto nodal do elemento finito considerado podem existir deslocamentos lineares nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  com as seguintes possibilidades:

- deslocamentos livres nas direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ ;
- deslocamento na direção  $x$  impedido e deslocamentos nas direções  $y$  e  $z$  livres;
- deslocamento na direção  $y$  impedido e deslocamentos nas direções  $x$  e  $z$  livres;
- deslocamento na direção  $z$  impedido e deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  livres;
- deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  impedidos e deslocamento na direção  $z$  livre;
- deslocamentos nas direções  $y$  e  $z$  impedidos e deslocamento na direção  $x$  livre;
- deslocamentos nas direções  $x$  e  $z$  impedidos e deslocamento na direção  $y$  livre;
- deslocamentos impedidos nas direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ .

Portanto, com estas possibilidades de imposição de condições de contorno é possível simular a borda livre (deslocamentos livres nas três direções em um ponto nodal de borda), apoio móvel (um deslocamento impedido e os outros dois livres ou, dois deslocamentos impedidos e o outro livre) e apoio fixo (deslocamentos impedidos nas três direções).

### 3.5.2 Deslocamentos Prescritos

Além dos deslocamentos nulos que são impostos aos pontos

nodais para simulação de vinculações, é possível a imposição de deslocamentos diferentes de zero para se obter outras configurações de equilíbrio para a estrutura.

Estas condições de contorno são interessantes para a prescrição de deslocamentos não nulos para alguns pontos nodais da estrutura, para a obtenção de configurações de equilíbrio com ou sem a atuação de quaisquer carregamentos.

### 3.6 CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

Após a formulação do modelo matemático que representa os comportamentos estruturais de membranas, é necessário o emprego de métodos computacionais para resolução dos problemas propostos.

Pelo Princípio da Mínima Energia Potencial Total, as possíveis posições de equilíbrio estável correspondem a pontos de mínimo local da função Energia Potencial Total. Estas configurações de equilíbrio estável podem ser encontradas através de técnicas matemáticas de otimização de funções não lineares, que são descritas com mais detalhes no Apêndice A (Arcaro, 1992).

O modelo proposto apresenta duas situações distintas: estruturas com Energia Potencial Total conhecida, para as quais é empregado um método de otimização do tipo quase-Newton; e estruturas com Energia Potencial Total desconhecida, para as quais o método empregado é do tipo incremental Newton-Raphson.

#### 3.6.1 Estruturas com Energia Potencial Total Conhecida

Quando existe a função Energia Potencial Total, que é o caso que ocorre para as estruturas solicitadas pelos carregamentos distribuídos e concentrados, as posições de equilíbrio estável correspondem aos pontos de mínimo local desta função e é muito recomendável a utilização do método do tipo quase-Newton, pois o mesmo dispensa o uso da matriz de rigidez.

Sendo  $x$  um vetor cujas componentes representam os deslocamentos nodais da estrutura, e considerando  $n$  como sendo o número de deslocamentos livres, os deslocamentos prescritos podem

ser representados pelas variáveis  $x_i \mid i > n$ .

A função Energia Potencial Total  $\Pi(\mathbf{x})$  para a estrutura pode ser escrita como:

$$\Pi(\mathbf{x}) = \sum_{\text{elementos}} \Pi_e(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^T \mathbf{x} + \Pi_0 \quad (3.162)$$

e o gradiente  $\nabla \Pi(\mathbf{x})$  da função Energia Potencial Total pode ser representado como :

$$\nabla \Pi(\mathbf{x}) = \sum_{\text{elementos}} \nabla \Pi_e(\mathbf{x}) - \mathbf{f} \quad (3.163)$$

onde:

- $\mathbf{x}$  : representa os deslocamentos livres da estrutura;
- $\Pi_e$  : é a Energia de Deformação do elemento;
- $\mathbf{f}$  : é o vetor das forças nodais da estrutura;
- $\Pi_0$  : é a Energia Potencial Total inicial;
- $\nabla \Pi(\mathbf{x})$  : é o gradiente da função Energia Potencial Total;
- $\nabla \Pi_e(\mathbf{x})$  : é o gradiente da Energia de Deformação de cada elemento.

### 3.6.2 Estruturas com Energia Potencial Total Inexistente

Quando a função Energia Potencial Total é inexistente ou desconhecida, que é o caso que ocorre para as estruturas solicitadas pela força de pressão e para a simulação do efeito devido ao peso próprio, o método incremental do tipo Newton-Raphson pode ser utilizado para encontrar as soluções dos sistemas de equações algébricas não lineares dadas pelas equações de equilíbrio:

$$\sum_{\text{elementos}} (\nabla \Pi_e(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0 \quad (3.164)$$

Convém observar que neste caso a utilização da matriz de rigidez é indispensável. Entretanto, é possível uma aproximação da matriz de rigidez exata por meio de uma matriz obtida por

diferenças finitas.

### 3.7 REFERÊNCIAS

- [3-01] - Arcaro, V. F., *Conceitos Fundamentais e Métodos Computacionais Básicos para Encontrar Configurações de Equilíbrio de Estruturas Não Lineares*, UNICAMP - Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, junho, 1992.
- [3-02] - Bathe, K.-J.; Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [3-03] - Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T., *FINITE ELEMENTS, An Introduction, Vol. I*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [3-04] - Chen, W.-F.; Saleeb, A. F., *Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol. 1, Elasticity and Modeling*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
- [3-05] - Desai, C. S., *Elementary Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [3-06] - Hibbitt, H. D., *Some Follower Forces and Load Stiffness*, *International Journal of Solids and Structures*, John Wiley & Sons, Ltd., pp. 937-941, 1979.
- [3-07] - Malvern, L. E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

**CAPÍTULO 4**

**EXEMPLOS DE  
VERIFICAÇÃO E COMPROVAÇÃO DO  
MODELO COMPUTACIONAL**

## 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos de verificação e comprovação do modelo matemático desenvolvido neste trabalho.

Inicialmente, são geradas formas aproximadas de cabos flexíveis por meio de uma faixa elástica deformável, que é submetida à ação de diversos carregamentos (concentrado, uniformemente distribuído e linearmente distribuído). Para cada carregamento é gerada uma forma para a faixa, que é comparada com a respectiva disposição do cabo flexível correspondente.

Depois, são apresentadas de maneira sucinta algumas informações sobre o programa de elementos finitos, que é utilizado para a análise estrutural estática das estruturas em casca geradas através do modelo computacional proposto.

Em seguida, é gerada e analisada uma forma de estrutura em casca semelhante à do modelo de estrutura em casca estudado na Universidade de Kassel (Alemanha). Os resultados provenientes do modelo de Kassel são comparados com os resultados apresentados neste trabalho.

Por fim, são apresentadas as formas geométricas e os resultados das análises estruturais que foram obtidos para uma casca gerada por meio de uma membrana elástica submetida a um carregamento uniformemente distribuído, para outra obtida por meio de uma membrana submetida à pressão, e outra gerada por meio de deslocamentos prescritos impostos à membrana.

## 4.2 GERAÇÃO DE FORMAS DE CABOS FLEXÍVEIS

Pode-se encontrar na literatura técnica diversas informações a respeito de cabos flexíveis. Por exemplo, no livro *Ciencia de la Construccion*, volume 1, de Odone Belluzzi (1971), estão relacionados alguns casos de cabos flexíveis, fixos nas extremidades, e que são solicitados por alguns tipos de carregamentos mais comuns.

Os cabos flexíveis assumem formas segundo os funiculares dos respectivos carregamentos. Dentre as possíveis alternativas que podem definir a disposição de um cabo flexível sob a ação de um

determinado carregamento, existe a possibilidade de se adotar as posições geométricas de três pontos distintos. Por conveniência, os pontos adotados podem ser as extremidades e o ponto mais baixo do cabo. Esta foi a opção escolhida para descrever as equações dos funiculares de cabos flexíveis abordados a seguir, que são comparados com as formas geradas por meio de uma faixa elástica deformável através do modelo computacional desenvolvido.

Como no modelo computacional o elemento finito utilizado é de membrana e não de cabo, para gerar uma forma aproximada de um cabo flexível foi adotada uma faixa elástica deformável, discretizada em elementos finitos de membrana, que foi submetida aos principais carregamentos apresentados por Belluzzi. As formas aproximadas, que foram obtidas por meio da faixa elástica submetida aos diversos carregamentos, são comparadas com os funiculares dos cabos flexíveis correspondentes.

A faixa adotada tem o seu comprimento muito maior que as dimensões características da sua seção transversal (largura e espessura). O comprimento é de 10,00 m e a seção transversal é retangular, com 0,25 m de largura e 0,01 m de espessura.

Foram considerados três casos de carregamentos atuantes sobre a faixa elástica deformável: carga concentrada, carga uniformemente distribuída e carga linearmente distribuída. Os apoios nas extremidades, que foram considerados fixos e em nível, são as únicas condições de contorno impostas ao modelo (ver Figura 4.1, Figura 4.2 e Figura 4.3).

#### 4.2.1 Solicitação por Carga Concentrada

Um cabo flexível com suas extremidades fixas e em nível, que é solicitado por uma carga concentrada vertical em qualquer ponto da sua extensão, tem sua equação dos funiculares dada por uma função com variação linear.

Para a geração da forma correspondente a este caso, a faixa elástica deformável foi submetida a um carregamento concentrado no meio do vão. A Figura 4.1 mostra um esquema da faixa elástica na configuração inicial indeformada, com a carga concentrada  $P$  aplicada na posição central do vão  $l$ .

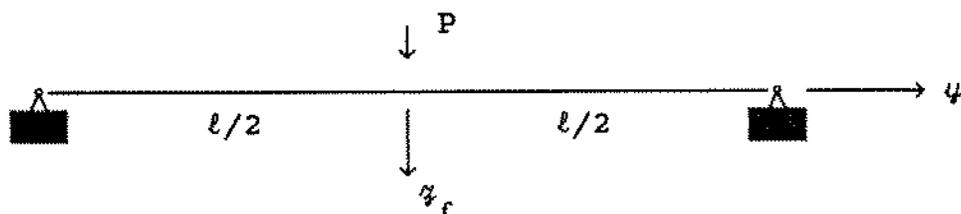


Figura 4.1 - Faixa elástica deformável (configuração inicial)

Os dados utilizados para a geração da forma para este problema, empregando o modelo computacional proposto neste trabalho, são os seguintes:

Módulo de Elasticidade $E_m$	: $1,00 \cdot 10^{-2}$ MPa
Coefficiente de Poisson $\nu_m$	: 0,00
Carga concentrada P	: 0,10 N
Comprimento da faixa $l$	: 10,00 m
Largura da faixa $b_f$	: 0,25 m
Espessura da faixa $t_f$	: 0,01 m

Após a faixa elástica ter se deformado e encontrado a posição final da configuração de equilíbrio, a sua forma geométrica foi comparada com o funicular de um cabo flexível submetido à ação de uma carga concentrada no meio do vão  $l$ , com a posição do ponto central e dos apoios coincidentes com os pontos correspondentes da faixa de comparação.

Na Tabela 4.1 estão relacionados os valores das flechas em diversos pontos da faixa que foram obtidos com o programa, e também os valores obtidos com a equação linear do funicular do cabo flexível correspondente. Verifica-se que não existem diferenças entre os valores obtidos para a faixa ( $z_f$ ) e os valores obtidos para o cabo ( $z_c$ ). Os valores  $z_f$  são calculados pelo programa de geração de formas, e os valores de  $z_c$  são calculados pela equação linear do funicular do cabo flexível com carregamento concentrado, com as unidades das grandezas em m, que é dada por:

$$z_c = 0,793701 - 0,793701 \psi / 5,00$$

SIMULAÇÃO DE CABO FLEXÍVEL COM ATUAÇÃO DE CARGA CONCENTRADA			
$\psi$ ( $10^{-2}$ m)	$\varphi_c$ ( $10^{-2}$ m)	$\varphi_f$ ( $10^{-2}$ m)	Erro (%)
500,0000	0,0000	0,0000	0,00
475,0000	3,9685	3,9685	0,00
450,0000	7,9370	7,9370	0,00
425,0000	11,9056	11,9055	0,00
400,0000	15,8741	15,8740	0,00
375,0000	19,8426	19,8425	0,00
350,0000	23,8112	23,8110	0,00
325,0000	27,7797	27,7796	0,00
300,0000	31,7482	31,7481	0,00
275,0000	35,7168	35,7166	0,00
250,0000	39,6853	39,6851	0,00
225,0000	43,6538	43,6536	0,00
200,0000	47,6223	47,6221	0,00
175,0000	51,5908	51,5906	0,00
150,0000	55,5592	55,5591	0,00
125,0000	59,5277	59,5276	0,00
100,0000	63,4962	63,4961	0,00
75,0000	67,4647	67,4646	0,00
50,0000	71,4331	71,4331	0,00
25,0000	75,4016	75,4016	0,00
0,0000	79,3701	79,3701	0,00

Tabela 4.1 - Faixa com carga concentrada

O erro da diferença entre o valor de  $\varphi_f$  e  $\varphi_c$  em relação ao valor obtido com a equação do funicular  $\varphi_c$  é calculado em porcentagem por:

$$\text{Erro} = 100 (\varphi_f - \varphi_c) / \varphi_c$$

#### 4.2.2 Solicitação por Carga Uniformemente Distribuída

Um cabo flexível, fixo e nivelado nas extremidades, que é solicitado por uma carga uniformemente distribuída ao longo do seu vão, tem como equação dos funiculares uma curva de segundo grau (parábola).

Para a geração da forma correspondente a este caso, a faixa elástica deformável foi submetida a um carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu vão.

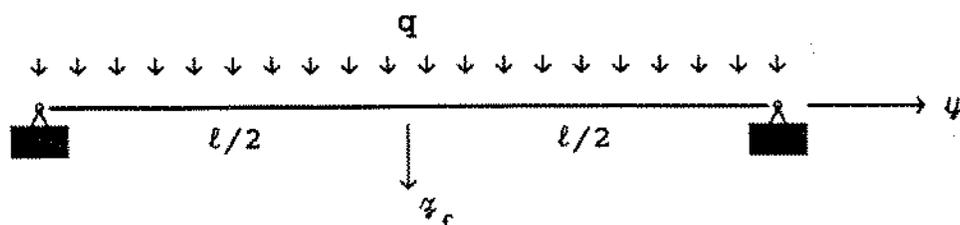


Figura 4.2 - Faixa elástica deformável (configuração inicial)

A Figura 4.2 mostra o esquema da faixa na configuração inicial indeformada. A carga  $q$  por unidade de comprimento, que é aplicada sobre toda a extensão da faixa, é oriunda de uma carga uniformemente distribuída de  $8,00 \cdot 10^{-3}$  Pa que atua sobre toda a sua área. Os dados utilizados para o problema foram:

Módulo de Elasticidade $E_m$	: $1,00 \cdot 10^{-2}$ MPa
Coefficiente de Poisson $\nu_m$	: 0,00
Carga uniformemente distribuída $q$	: $2,00 \cdot 10^{-3}$ N/m
Comprimento da faixa $l$	: 10,00 m
Largura da faixa $b_f$	: 0,25 m
Espessura da faixa $t_f$	: 0,01 m

Após a faixa elástica ter se deformado e encontrado a posição final da configuração de equilíbrio, a sua forma geométrica foi comparada com o funicular de um cabo flexível submetido à ação de uma carga uniformemente distribuída ao longo do seu vão  $l$ , com a posição do ponto central e dos apoios coincidentes com os pontos correspondentes da faixa de comparação.

Na Tabela 4.2 são apresentados os valores das flechas em diversos pontos da faixa que foram obtidos com o programa ( $z_f$ ), e os valores calculados com a equação do funicular do carregamento uniformemente distribuído ( $z_c$ ) do cabo flexível correspondente, com as unidades das grandezas em m, dada por:

$$z_c = 0,977116 - 0,977116 \psi^2 / 5,00^2$$

sendo os valores de  $z_f$ ,  $z_c$  e do Erro definidos de forma análoga quando da definição dos mesmos parâmetros que fazem parte da Tabela 4.1. Verifica-se que os valores encontrados para as flechas

nos diversos pontos da faixa elástica são muito próximos daqueles obtidos com a equação da parábola que descreve o funicular do carregamento do respectivo cabo flexível.

SIMULAÇÃO DE CABO FLEXÍVEL COM ATUAÇÃO DE CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA			
$y$ ( $10^{-2}$ m)	$y_c$ ( $10^{-2}$ m)	$y_f$ ( $10^{-2}$ m)	Erro (%)
500,0000	0,0000	0,0000	0,00
476,0410	9,1619	9,1399	0,24
451,9805	18,0452	17,8670	1,00
427,7234	26,3612	26,2073	0,59
403,3719	34,3883	34,1174	0,79
378,8392	41,3281	41,6177	0,51
354,2204	48,9692	48,6713	0,61
329,4379	55,5042	55,2933	0,38
304,5785	61,7316	61,4535	0,45
279,5746	67,3357	67,1623	0,26
254,5039	72,6242	72,3956	0,32
229,3099	77,2743	77,1597	0,15
204,0599	81,6018	81,4366	0,20
178,7093	85,2781	85,2291	0,06
153,3143	88,6260	88,5246	0,12
127,8427	91,3124	91,3237	0,01
102,3389	93,6659	93,6182	0,05
76,7834	95,3504	95,4073	0,06
51,2085	96,6990	96,6867	0,01
25,6075	97,3740	97,4553	0,08
0,0000	97,7116	97,7116	0,00

Tabela 4.2 - Faixa com carga uniformemente distribuída

#### 4.2.3 Solicitação por Carga Linearmente Distribuída

Um cabo flexível com suas extremidades fixas e em nível, que é solicitado por um carregamento simétrico linearmente distribuído ao longo do vão, com o valor máximo  $q$  nas extremidades e nulo no centro (ver Figura 4.3), tem sua equação dos funiculares dada por uma função com variação cúbica (parábola cúbica).

Para a geração da forma geométrica correspondente a este caso, a faixa elástica deformável foi submetida ao carregamento linearmente distribuído descrito anteriormente, sendo a configuração inicial da faixa com o respectivo carregamento

mostrados na Figura 4.3. Os dados utilizados no processamento foram:

Módulo de Elasticidade $E_m$	: $1,00 \cdot 10^{-2}$ MPa
Coefficiente de Poisson $\nu_m$	: 0,00
Valor máximo da carga linearmente distribuída $q_m$	: $6,25 \cdot 10^{-2}$ N/m
Comprimento da faixa $l$	: 10,00 m
Largura da faixa $b_f$	: 0,25 m
Espessura da faixa $t_f$	: 0,01 m

Para o processamento deste caso, a carga linearmente distribuída foi obtida a partir da composição de cargas concentradas de valores variáveis que atuam nos pontos nodais da faixa discretizada, pois o modelo computacional não inclui a opção de cargas linearmente distribuídas atuando sobre as membranas elásticas deformáveis para geração de formas.

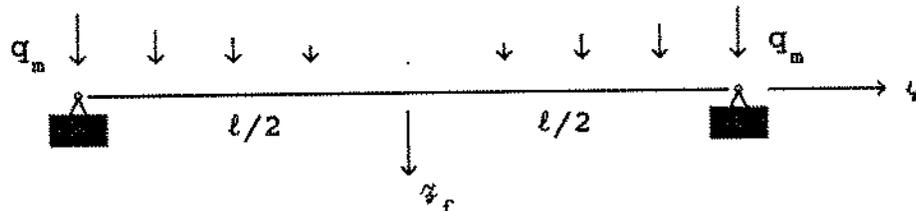


Figura 4.3 - Faixa elástica deformável (configuração inicial)

Após a faixa elástica ter se deformado e encontrado a posição final de equilíbrio, a sua forma geométrica foi comparada com o funicular de um cabo flexível submetido à ação de um carregamento simétrico linearmente distribuído ao longo do seu vão  $l$ , com o valor máximo  $q_m$  atuando nas extremidades e nulo no centro, com a posição do ponto central e dos apoios coincidentes com os pontos correspondentes da faixa de comparação.

Na Tabela 4.3 são apresentados os valores das flechas em diversos pontos da faixa que foram obtidos com o programa ( $z_f$ ), e os valores calculados com a equação do funicular do carregamento linearmente distribuído ( $z_c$ ) do cabo flexível correspondente, considerando as unidades das grandezas em m, que é dada por:

$$\psi_c = 0,659060 - 0,659060 \psi^3 / 5,00^3$$

sendo os valores de  $\psi_f$ ,  $\psi_c$  e do Erro definidos de forma análoga quando da definição dos mesmos parâmetros que fazem parte da Tabela 1 e Tabela 2.

SIMULAÇÃO DE CABO FLEXÍVEL COM ATUAÇÃO DE CARGA LINEARMENTE DISTRIBUÍDA			
$\psi$ ( $10^{-2}$ m)	$\psi_c$ ( $10^{-2}$ m)	$\psi_f$ ( $10^{-2}$ m)	Erro (%)
500,0000	0,0000	0,0000	0,00
476,2721	9,0795	8,9446	1,51
452,2558	17,3510	17,1344	1,26
427,9855	24,8307	24,5725	1,05
403,4948	31,5404	31,2699	0,87
378,8157	37,5071	37,2445	0,71
353,9778	42,7622	42,5207	0,57
329,0086	47,3416	47,1285	0,45
303,9327	51,2844	51,1031	0,35
278,7717	54,6330	54,4835	0,27
253,5448	57,4318	57,3123	0,21
228,2678	59,7275	59,6348	0,16
202,9541	61,5680	61,4983	0,11
177,6146	63,0023	62,9517	0,08
152,2577	64,0804	64,0450	0,06
126,8898	64,8526	64,8288	0,04
101,5155	65,3697	65,3544	0,02
76,1379	65,6826	65,6733	0,02
50,7589	65,8422	65,8370	0,01
25,3795	65,8996	65,8974	0,01
0,0000	65,9060	65,9060	0,00

Tabela 4.3 - Faixa com carga linearmente distribuída

### 4.3 ANÁLISE ESTRUTURAL ESTÁTICA DAS ESTRUTURAS EM CASCA GERADAS

Para a análise estrutural estática das estruturas em casca de concreto armado, geradas por meio da simulação de membranas elásticas deformáveis submetidas aos diferentes carregamentos adotados, foi utilizado o programa de elementos finitos denominado ANSYS, versão 4.4A, para estações de trabalho SUN.

Foi empregado o elemento finito triangular de três pontos nodais, obtido como opção proveniente de simplificações a partir

do elemento quadrilátero de casca fina elástica de quatro pontos nodais, denominado STIF63. O elemento tem seis graus de liberdade por ponto nodal: três deslocamentos lineares e três deslocamentos angulares.

O comportamento estrutural do elemento leva em consideração os efeitos de membrana e de flexão. A deflexão de cisalhamento não é incluída neste elemento de casca fina. Existe a possibilidade de se considerar carregamentos normais e tangentes ao plano do elemento, que pode ter espessura variável.

Como dados de entrada para o programa ANSYS, são requeridas as informações elementares usuais como os elementos e as respectivas incidências nodais, as coordenadas dos pontos nodais, as propriedades geométricas (como a espessura nos pontos nodais), as propriedades dos materiais (Módulo de Elasticidade, Coeficiente de Poisson, densidade), as condições de contorno (apoios, vinculações, deslocamentos prescritos, etc...), e os carregamentos (forças e momentos nos pontos nodais, pressão nas faces dos elementos, forças de corpo como a gravidade e variação de temperatura).

As informações fornecidas pelo programa após o processamento são os deslocamentos dos pontos nodais, forças e momentos por unidade de comprimento, tensões no centro e nos pontos nodais do elemento e as tensões principais nas superfícies superior, média e inferior.

Neste trabalho, as tensões são referenciadas ao sistema global de coordenadas, e em cada ponto nodal as tensões principais são obtidas pela média das respectivas tensões principais de cada elemento no ponto nodal considerado.

Para o elemento triangular a rigidez de membrana se reduz à da formulação de deformação constante. Uma casca curva pode ser aproximada por elementos finitos do tipo STIF63 (que são elementos de casca planos) desde que cada elemento tenha suas dimensões correspondentes à uma curvatura de, no máximo, um arco de quinze graus.

#### 4.4 MODELO DE CASCA DA UNIVERSIDADE DE KASSEL

O primeiro exemplo de geração de formas geométricas de estruturas em casca com comportamento de membrana é uma forma semelhante a de um modelo estudado por Mehlhorn, que é apresentado nos trabalhos de J. Kollegger e G. Mehlhorn (1989), e de E. Ramm e G. Mehlhorn (1991). Este modelo de casca em concreto armado foi gerado, construído em escala real e testado na Universidade de Kassel em 1988.

A membrana utilizada por aquele autor para a geração da forma tem a configuração inicial indeformada contida no plano horizontal, com as dimensões de 5,50 m por 5,50 m, com os lados definidos por parábolas, sendo sua área de 22,28 m<sup>2</sup>, e a espessura constante de 0,016 m (ver Figura 4.4). Para o material que constitui a membrana foi considerado um modelo de comportamento elástico linear, com o Módulo de Elasticidade  $E_m = 3,00 \cdot 10^4$  MPa, e o Coeficiente de Poisson  $\nu_m = 0,2$ .

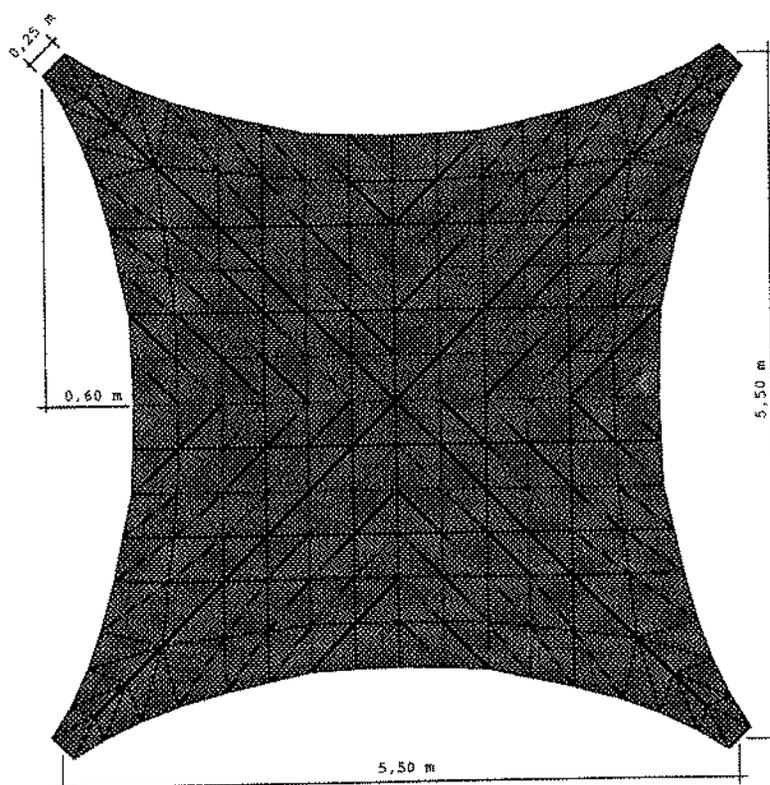


Figura 4.4 - Geometria inicial e malha do modelo de Kassel

A forma geométrica da casca foi determinada por um programa de elementos finitos, que leva em consideração grandes deslocamentos, partindo de uma configuração inicial plana. Para a geração da forma foi utilizado um elemento degenerado de nove pontos nodais com integração completa, que é reduzido à um elemento de oito pontos nodais, sendo quatro pontos nodais localizados nos vértices e quatro nos pontos médios dos lados. A membrana horizontal foi submetida à incrementos de carga uniforme vertical com os seguintes níveis de carregamento:  $1,00 \cdot 10^{-5}$ ;  $8,50 \cdot 10^{-5}$ ;  $1,00 \cdot 10^{-3}$ ;  $6,90 \cdot 10^{-3}$ ;  $2,00 \cdot 10^{-1}$ ;  $5,50 \cdot 10^{-1}$ ; 1,00 e 1,876 MPa, até o deslocamento vertical no centro atingir 1,00 m.

No trabalho desenvolvido por Vizotto foram utilizadas duas malhas de elementos finitos para efeito de comparação de resultados: uma malha inicial, com alguns pontos nodais coincidentes com os pontos nodais apresentados na discretização do modelo de Kassel (como os pontos nodais dos apoios, por exemplo, pois são apresentadas somente as coordenadas finais dos pontos nodais), e uma malha final, obtida pelo refinamento da malha inicial. Apesar das superfícies geradas serem próximas uma da outra, a rigor elas são diferentes, pois uma maior discretização conduz à uma superfície gerada com comportamento estrutural mais aproximado ao de uma membrana. A malha mais refinada, que é utilizada para a geração da geometria da membrana, é utilizada posteriormente para se processar a análise estrutural da casca encontrada (ver Figura 4.4).

Na fase posterior em que é processada a análise estrutural por meio do programa ANSYS, é constatado que os resultados obtidos para as duas malhas não diferem significativamente, principalmente no que concerne às tensões principais de compressão, o que indica que a malha final é discretizada suficientemente de modo a se ter uma boa precisão para os resultados fornecidos.

Os parâmetros que foram adotados para o material da membrana com espessura constante  $t_m = 0,01$  m são o Módulo de Elasticidade  $E_m = 0,20$  MPa e o Coeficiente de Poisson  $\nu_m = 0,20$ . O carregamento uniformemente distribuído com o qual foi simulado o peso próprio e obtida uma flecha de 1,00 m no centro da casca foi  $g_m = 5,27102$  Pa.

Depois que a geometria foi obtida em decorrência do peso próprio da membrana, esta foi invertida em relação ao plano

horizontal, e ao material da estrutura resultante foram impostos parâmetros que o identificaram como sendo de concreto armado, obtendo-se assim uma cobertura em casca (ver Figura 4.5).

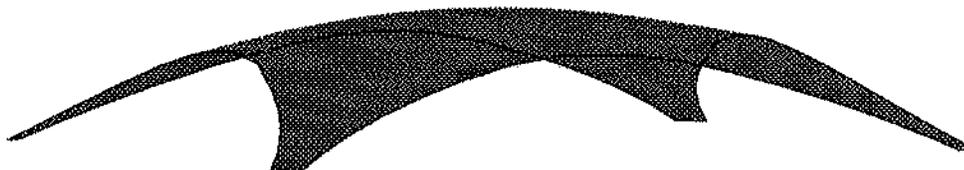


Figura 4.5 - Modelo de casca da Universidade de Kassel

Na Tabela 4.4 estão relacionadas as coordenadas dos pontos nodais para a geometria da casca gerada por Vizotto, e do modelo de Kassel, para um oitavo da estrutura. Nota-se que os valores das coordenadas obtidas pelo processo desenvolvido neste trabalho são próximos dos resultados obtidos do modelo de comparação.

A estrutura de concreto gerada por Vizotto foi submetida à ação do seu peso próprio. Para verificação do seu comportamento estrutural estático, foram utilizados elementos finitos de casca no regime completo de flexão, com o emprego do programa ANSYS.

Num primeiro processamento os quatro apoios da casca foram considerados fixos, de acordo com as condições de contorno utilizadas para a geração da geometria da estrutura. Posteriormente, os apoios foram considerados engastados, não havendo variações significativas nos resultados das tensões principais nas superfícies inferior, média e superior. Isto comprova que a estrutura em casca está trabalhando essencialmente no regime de membrana, pois mesmo ao se alterar a vinculação inicial as resultantes das forças que chegam ao apoio estão contidas nos planos tangentes à casca.

FORMAS GEOMÉTRICAS GERADAS						
Coordenadas dos Pontos Nodais						
VIZOTTO			KASSEL			NÓ
$x(10^{-2} \text{ m})$	$y(10^{-2} \text{ m})$	$z(10^{-2} \text{ m})$	$x(10^{-2} \text{ m})$	$y(10^{-2} \text{ m})$	$z(10^{-2} \text{ m})$	
283,80	266,20	0,00	283,80	266,20	0,00	1
268,31	241,62	11,95	270,92	242,14	11,60	2
253,84	211,40	24,88	258,34	213,95	24,30	3
242,83	181,55	36,13	246,23	182,19	37,54	4
231,99	141,85	49,09	234,25	142,97	52,14	5
224,32	107,13	58,94	225,89	107,60	63,36	6
216,71	72,31	67,40	220,02	72,06	72,40	7
214,98	36,27	72,90	216,43	36,12	78,43	8
214,04	0,00	74,54	215,28	0,00	80,47	9
249,30	249,30	15,40	250,24	250,25	15,18	10
223,21	223,21	30,74	226,24	226,25	29,38	11
193,66	193,66	47,34	195,77	195,77	46,35	12
187,57	142,40	61,17	189,35	143,72	61,43	13
183,56	107,61	69,01	185,05	108,19	70,57	14
179,61	72,62	75,44	182,18	72,43	77,96	15
178,61	36,39	79,45	180,26	36,28	82,92	16
177,63	0,00	81,03	179,78	0,00	84,57	17
142,38	142,38	71,27	144,04	144,02	71,15	18
142,31	107,65	77,70	144,12	108,42	78,13	19
142,22	72,64	82,71	144,14	72,56	83,92	20
142,16	36,39	86,05	144,14	36,32	87,85	21
142,14	0,00	87,22	144,13	0,00	89,17	22
107,58	107,58	83,68	108,48	108,47	84,18	23
107,49	72,59	88,29	108,46	72,57	89,13	24
107,43	36,36	91,31	108,43	36,32	92,43	25
107,40	0,00	92,35	108,42	0,00	93,55	26
72,51	72,51	92,56	72,54	72,52	93,31	27
72,45	36,32	95,34	72,50	36,28	96,09	28
72,43	0,00	96,29	72,48	0,00	97,02	29
36,28	36,28	97,97	36,26	36,25	98,48	30
36,27	0,00	98,90	36,24	0,00	99,28	31
0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	100,00	32

Tabela 4.4 - Comparação entre geometrias (Vizotto e Kassel)

Os valores máximo e mínimo para os resultados dos deslocamentos da superfície média da casca, e das tensões principais nas superfícies inferior, média e superior são mostrados na Tabela 4.5 (com malha inicial, menos discretizada) e Tabela 4.6 (com malha final, mais discretizada).

TÍTULO: CASCA KASSEL (PESO PRÓPRIO) - APOIOS FIXOS				
$E = 2,10 \cdot 10^4$ MPa		$t = 0,05$ m		
$\nu = 0,20$		$h = 1,00$ m		
$\rho = 2500$ Kg/m <sup>3</sup>		$h^c = 0,744237$ m		
$g = 9,80$ m/s <sup>2</sup>		$a^a = 5,50$ m		
		$b = 5,50$ m		
DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA (m)				
$X_{max} = 1,86 \cdot 10^{-5}$		$X_{min} = -1,86 \cdot 10^{-5}$		
$Y_{max} = 1,86 \cdot 10^{-5}$		$Y_{min} = -1,86 \cdot 10^{-5}$		
$Z_{max} = 0,00$		$Z_{min} = -2,04 \cdot 10^{-4}$		
TENSÕES PRINCIPAIS (MPa)				
		Superfície Inferior	Superfície Média	Superfície Superior
$\sigma_1$	max	$2,92 \cdot 10^{-2}$	$6,98 \cdot 10^{-3}$	$4,83 \cdot 10^{-2}$
	min	$-2,58 \cdot 10^{-11}$	$-1,52 \cdot 10^{-11}$	$-4,14 \cdot 10^{-11}$
$\sigma_2$	max	$1,53 \cdot 10^{-11}$	$-1,19 \cdot 10^{-3}$	$8,79 \cdot 10^{-12}$
	min	$-1,90 \cdot 10^{-1}$	$-2,06 \cdot 10^{-1}$	$-2,22 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_3$	max	$-1,18 \cdot 10^{-1}$	$-1,03 \cdot 10^{-1}$	$-3,00 \cdot 10^{-2}$
	min	-1,11	-1,09	-1,08

Tabela 4.5 - Malha com discretização inicial

São fornecidos os valores dos parâmetros relativos ao material que são o Módulo de Elasticidade E, o Coeficiente de Poisson  $\nu$  e a densidade  $\rho$ . A espessura t da casca é constante, e o peso próprio é obtido por meio do efeito da aceleração da gravidade g e da densidade  $\rho$ . A altura máxima ocorre no centro da casca e tem o valor dado por  $h_c$ ; nas laterais as alturas máximas ocorrem no meio dos vãos e são representadas por  $h_a$ . Os parâmetros a e b representam as dimensões dos lados projetados em planta.

Como as duas malhas são diferentes, as tensões principais máximas e mínimas não ocorrem num mesmo ponto, apesar de serem em pontos próximos na mesma região. Para um concreto considerado com resistência à compressão de 15,00 MPa e à tração de 1,50 MPa,

verifica-se que os resultados das tensões principais são bastante satisfatórios, sendo que para a malha mais refinada (Tabela 4.6) o valor máximo de compressão é de 1,12 MPa e, o valor máximo de tração é de  $4,36 \cdot 10^{-2}$  MPa.

TÍTULO: CASCA KASSEL (PESO PRÓPRIO) - APOIOS FIXOS				
E = $2,10 \cdot 10^4$ MPa		t = 0,05 m		
V = 0,20		h = 1,00 m		
$\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$		$h^c = 0,745348 \text{ m}$		
g = 9,80 m/s <sup>2</sup>		$a^a = 5,50 \text{ m}$		
		b = 5,50 m		
DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA (m)				
$X_{\max} = 4,45 \cdot 10^{-6}$		$X_{\min} = -4,45 \cdot 10^{-6}$		
$Y_{\max} = 4,45 \cdot 10^{-6}$		$Y_{\min} = -4,45 \cdot 10^{-6}$		
$Z_{\max} = 0,00$		$Z_{\min} = -1,76 \cdot 10^{-4}$		
TENSÕES PRINCIPAIS (MPa)				
		Superfície Inferior	Superfície Média	Superfície Superior
$\sigma_1$	max	$7,96 \cdot 10^{-3}$	$6,94 \cdot 10^{-3}$	$4,36 \cdot 10^{-2}$
	min	$-2,48 \cdot 10^{-9}$	$-1,13 \cdot 10^{-10}$	$-2,26 \cdot 10^{-11}$
$\sigma_2$	max	$-1,45 \cdot 10^{-3}$	$-3,04 \cdot 10^{-3}$	$4,25 \cdot 10^{-12}$
	min	$-1,48 \cdot 10^{-1}$	$-1,30 \cdot 10^{-1}$	$-1,11 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_3$	max	$-9,67 \cdot 10^{-2}$	$-8,61 \cdot 10^{-2}$	$-5,29 \cdot 10^{-2}$
	min	-1,12	-1,08	-1,05

Tabela 4.6 - Malha com discretização final

Os valores das tensões principais de tração são desprezíveis e comprova-se que a casca está totalmente comprimida, que é o efeito pretendido quando da geração da geometria pelo processo matemático computacional proposto.

As figuras a seguir mostram os principais resultados da análise estática da estrutura em casca gerada por Vizotto

(semelhante ao modelo da Universidade de Kassel), que foi efetuada através do programa ANSYS.

A Figura 4.6 mostra a casca deformada pelo efeito do peso próprio. A malha tracejada é relativa à configuração inicial indeformada, e na configuração final é mostrada somente a forma da estrutura. A Figura 4.7 mostra a variação dos valores dos deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m). Como a casca é de geometria simétrica submetida à atuação de carregamento simétrico, os valores dos deslocamentos na direção horizontal  $y$  são os mesmos que ocorrem na direção  $x$ . A Figura 4.8 mostra os valores dos deslocamentos verticais na direção  $z$  (m).

As distribuições das tensões principais máximas  $\sigma_1$  (MPa) nas superfícies inferior, média e superior da casca são mostradas respectivamente na Figura 4.9, Figura 4.10 e Figura 4.11. Analogamente, as distribuições das tensões principais  $\sigma_2$  (MPa) nas superfícies inferior, média e superior são mostradas respectivamente na Figura 4.12, Figura 4.13 e Figura 4.14. E finalmente, as distribuições das tensões principais mínimas  $\sigma_3$  (MPa) nas superfícies inferior, média e superior são mostradas respectivamente na Figura 4.15, Figura 4.16 e Figura 4.17.

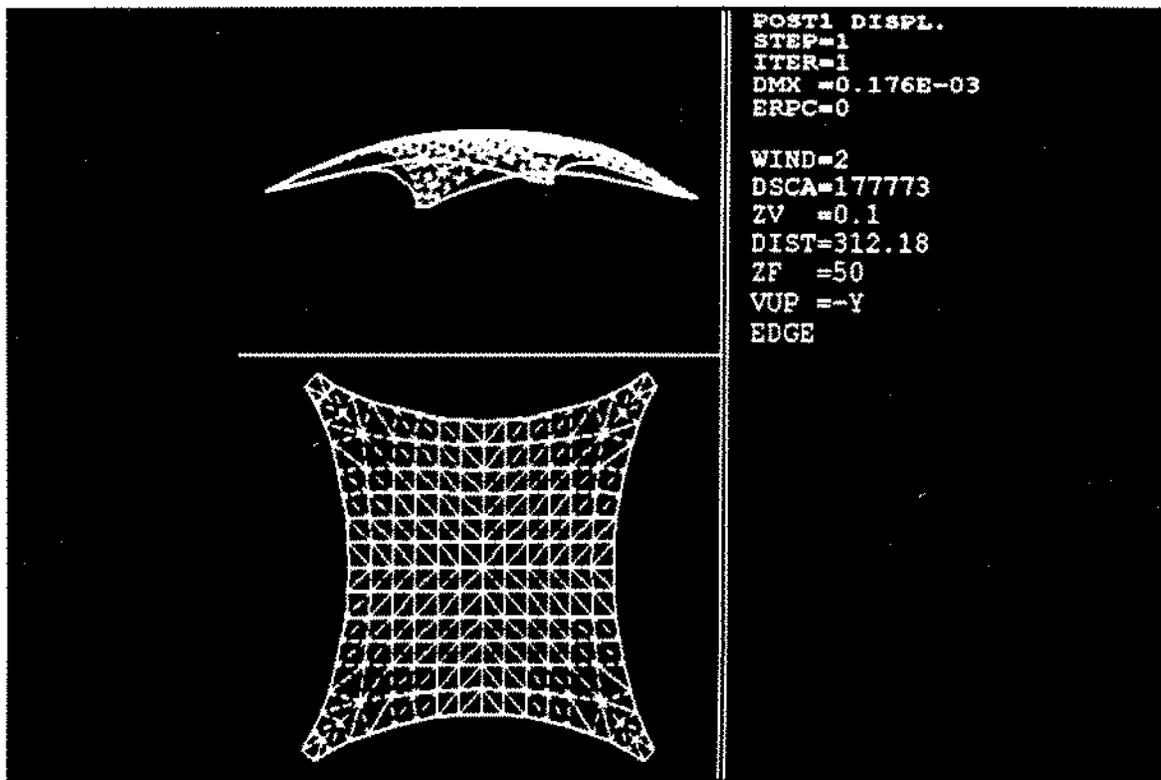


Figura 4.6 - Casca na configuração deformada

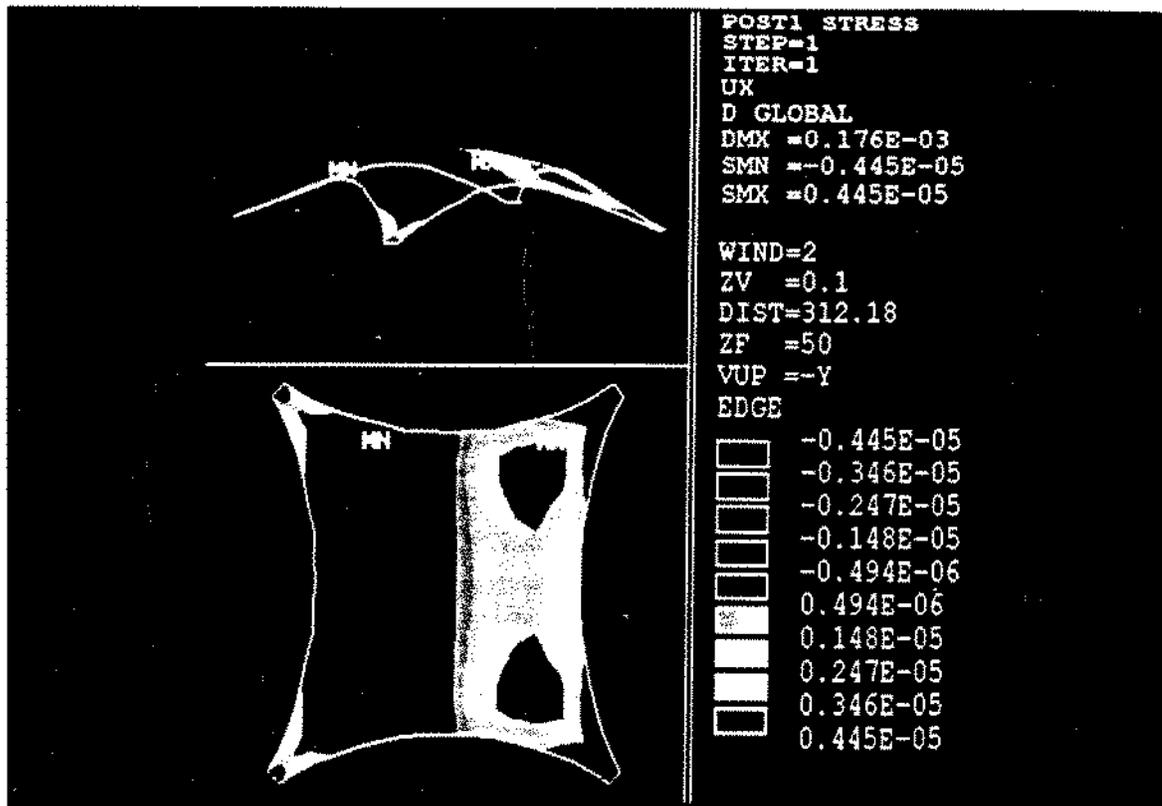


Figura 4.7 - Deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m)

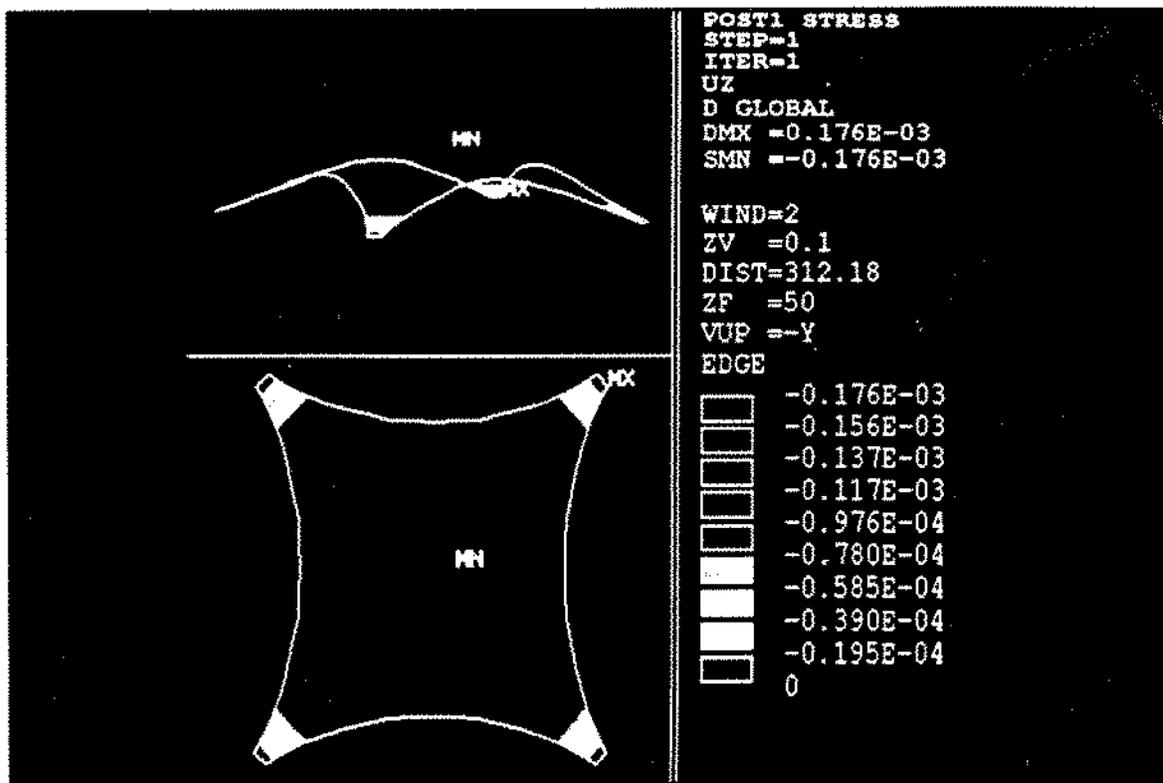


Figura 4.8 - Deslocamentos verticais na direção  $z$  (m)

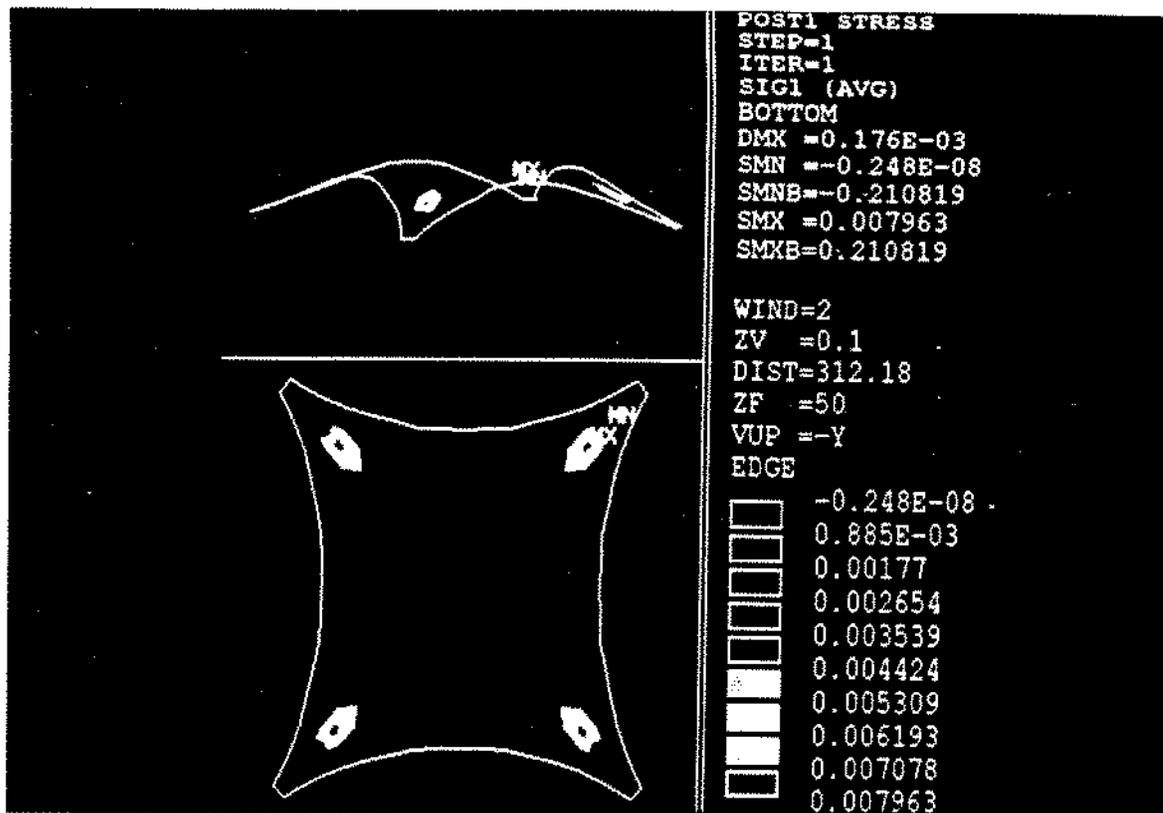


Figura 4.9 - Tensões principais  $\sigma_1$  na superfície inferior (MPa)

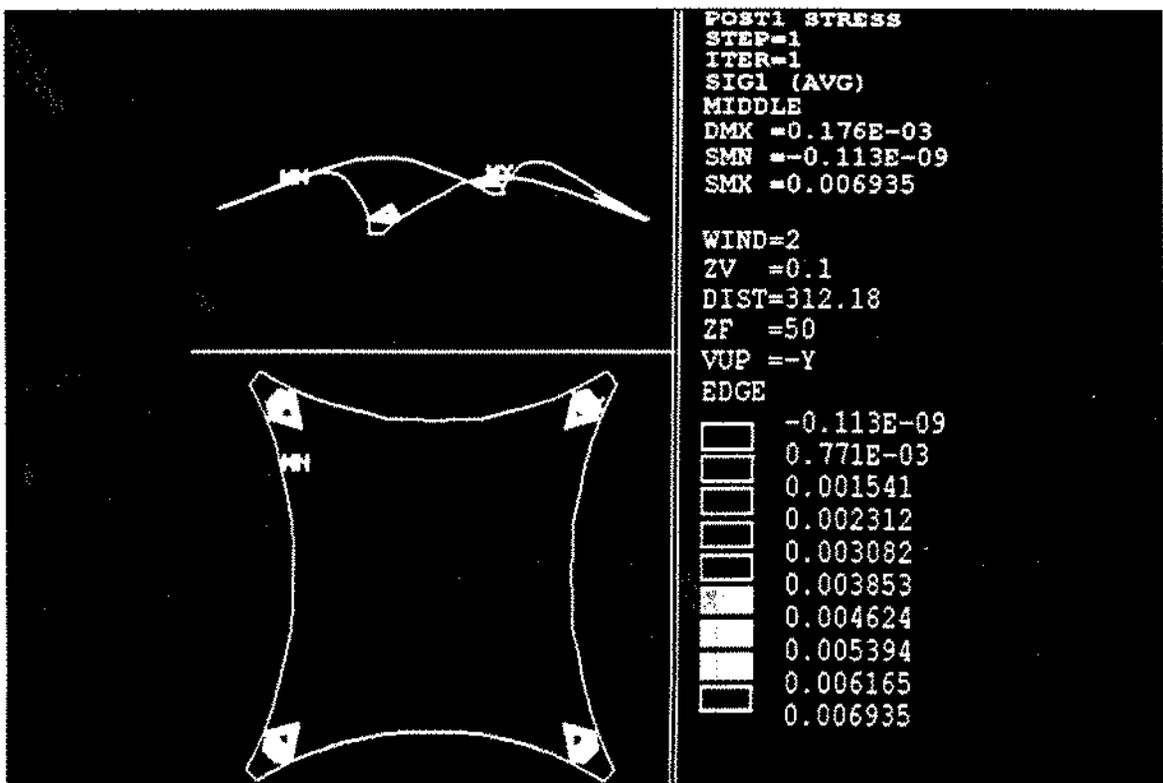


Figura 4.10 - Tensões principais  $\sigma_1$  na superfície média (MPa)

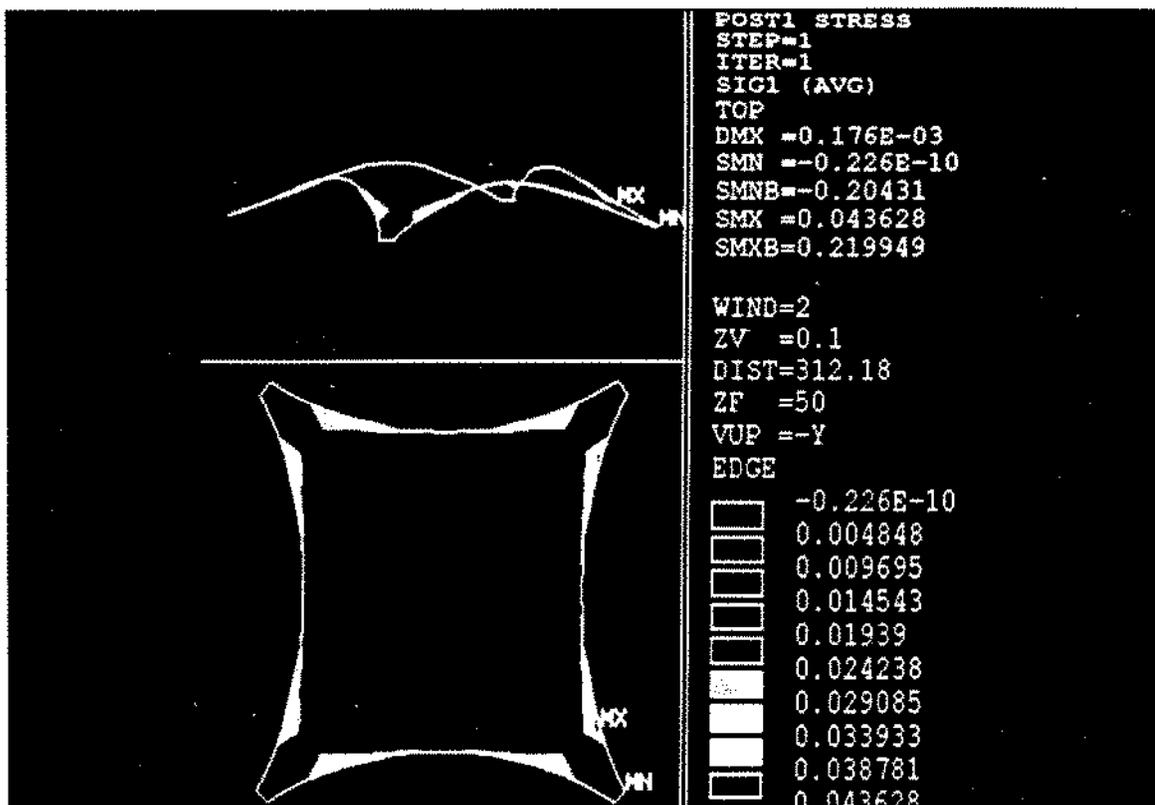


Figura 4.11 - Tensões principais  $\sigma_1$  na superfície superior (MPa)

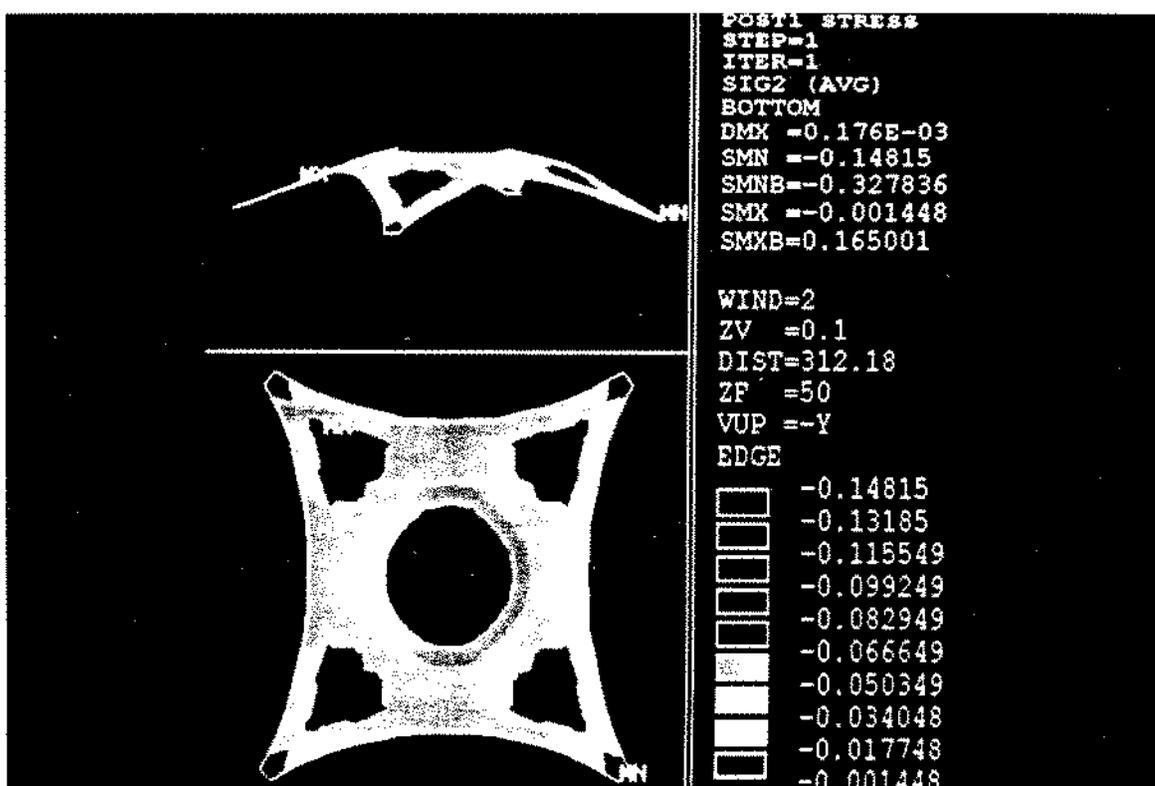


Figura 4.12 - Tensões principais  $\sigma_2$  na superfície inferior (MPa)

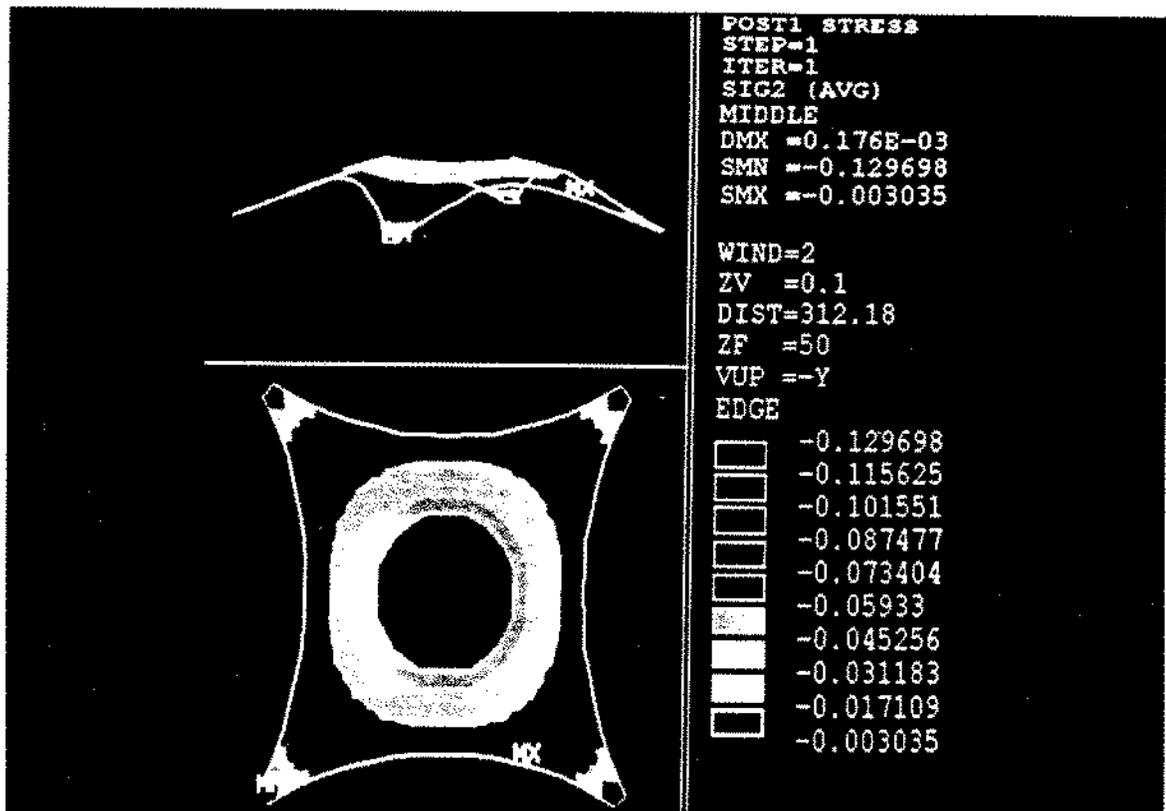


Figura 4.13 - Tensões principais  $\sigma_2$  na superfície média (MPa)

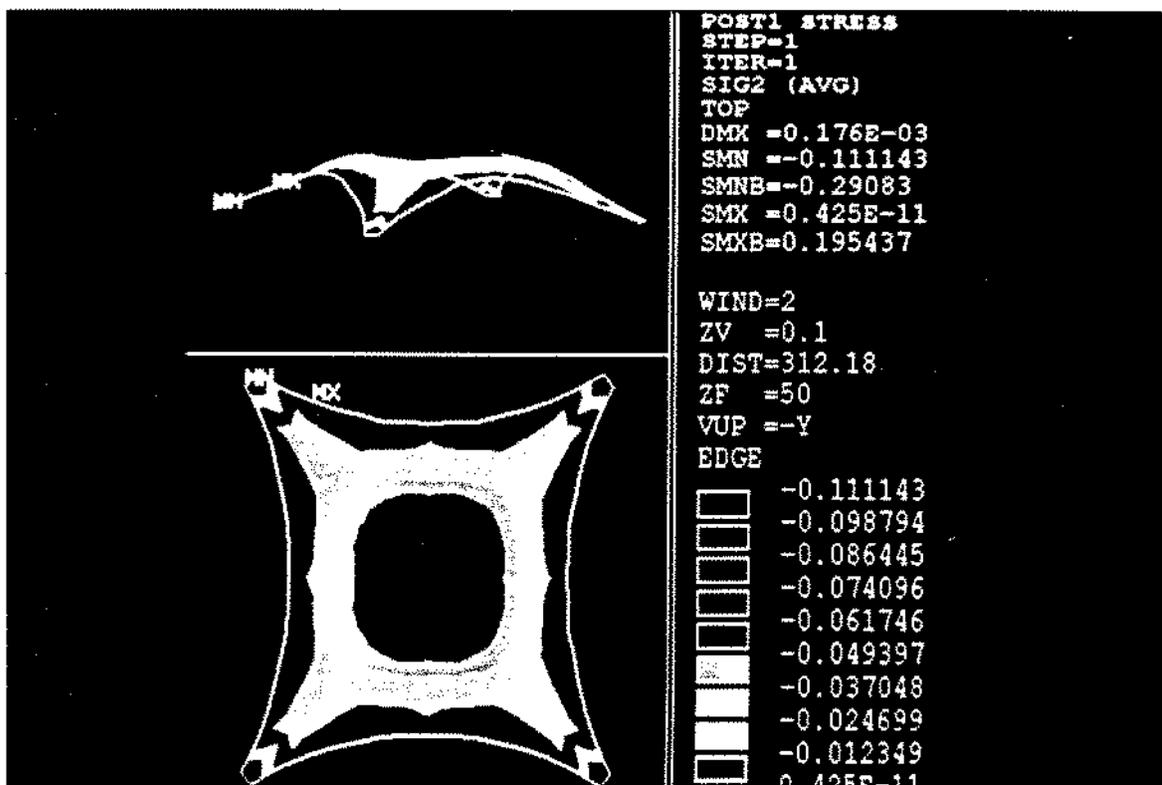


Figura 4.14 - Tensões principais  $\sigma_2$  na superfície superior (MPa)

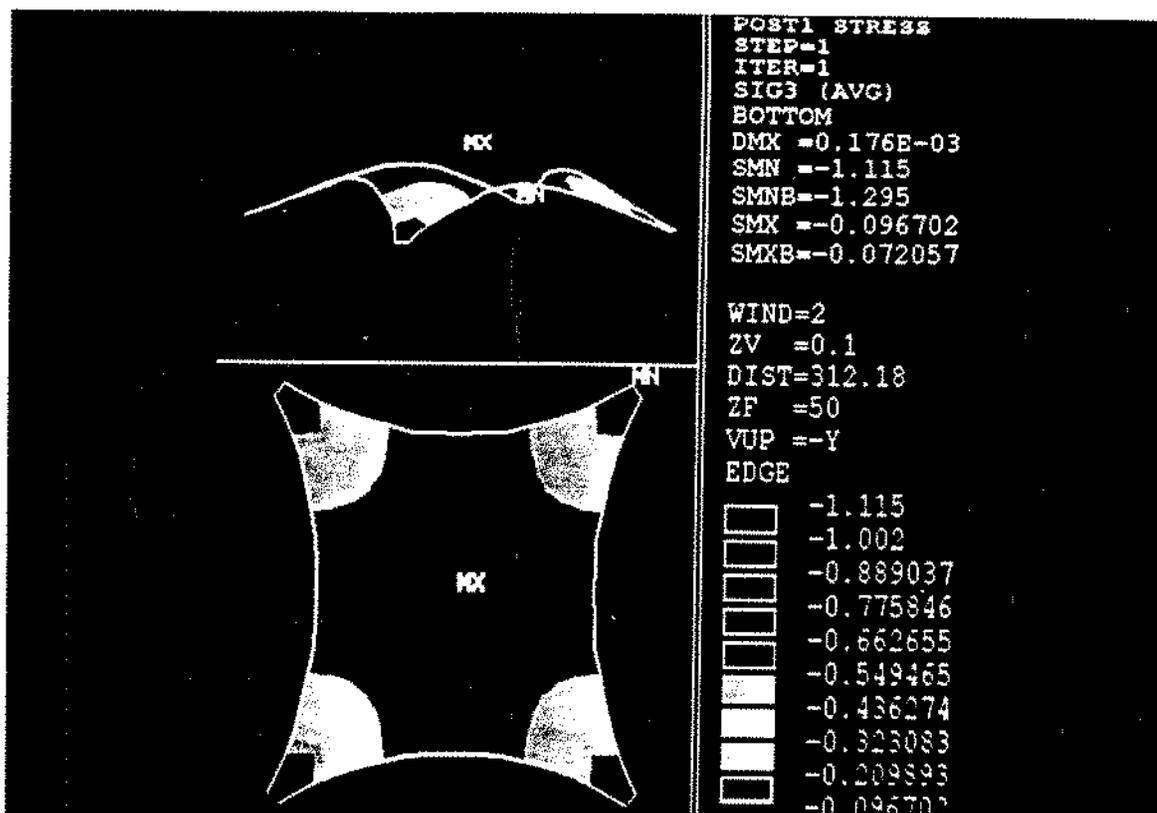


Figura 4.15 - Tensões principais  $\sigma_3$  na superfície inferior (MPa)

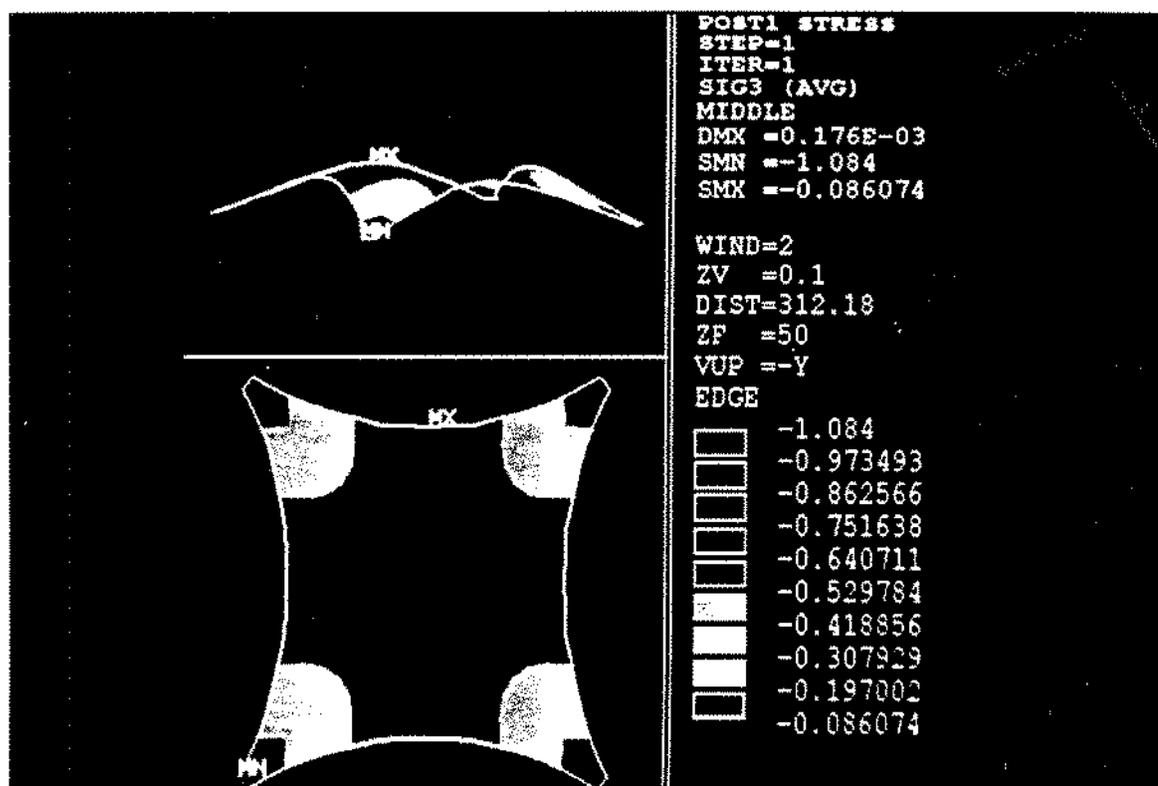


Figura 4.16 - Tensões principais  $\sigma_3$  na superfície média (MPa)

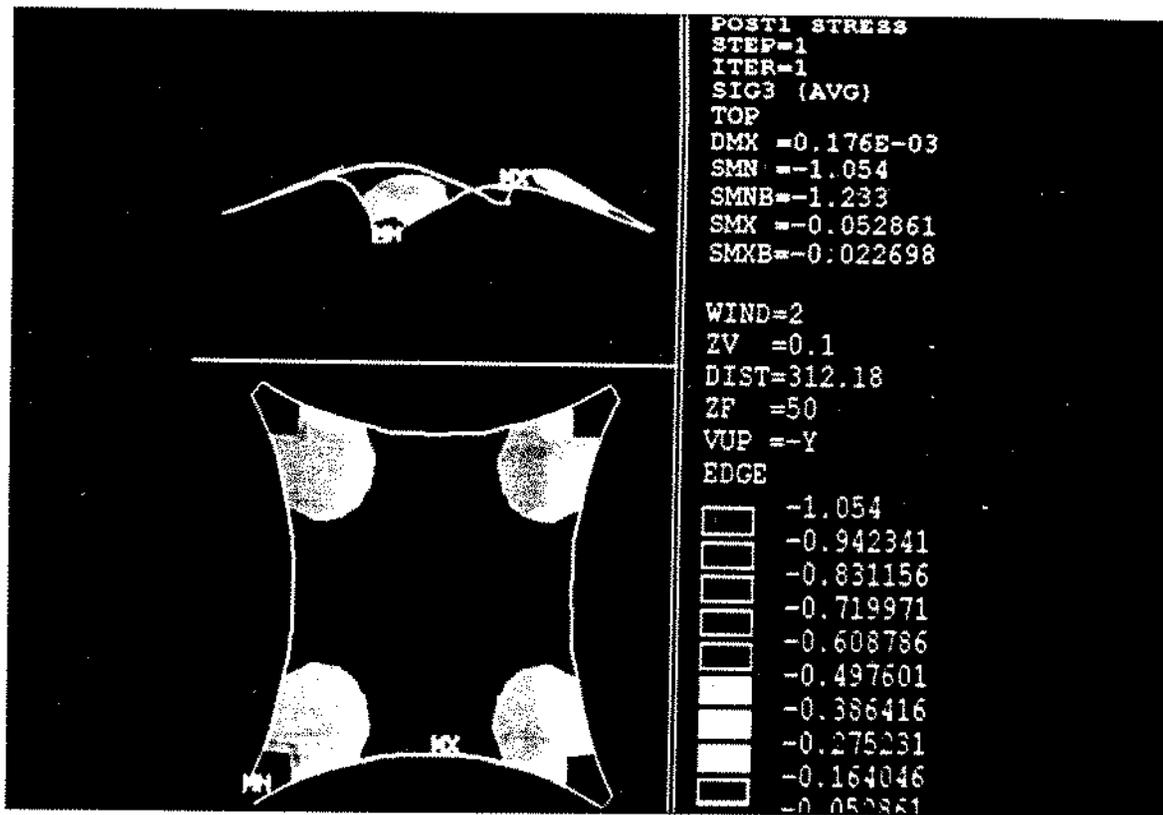


Figura 4.17 - Tensões principais  $\sigma_3$  na superfície superior (MPa)

#### 4.5 CASCA GERADA POR CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA

Este é um exemplo de casca gerada pela ação de carga uniformemente distribuída que simula o peso próprio de uma membrana elástica de espessura constante na configuração inicial.

A membrana adotada tem sua configuração inicial no plano horizontal, com a forma de um retângulo de 19,50 m por 13,50 m, com os quatro vértices recortados e mantidos fixos, conforme é mostrado na Figura 4.18. A malha de elementos finitos foi discretizada de modo a se ter precisão suficiente nos resultados de acordo com testes previamente realizados, e contém 513 pontos nodais e 936 elementos.

O material de que é feita a membrana elástica deformável utilizada na geração da forma geométrica da casca tem Módulo de Elasticidade  $E_m = 1,00 \cdot 10^{-1}$  MPa e Coeficiente de Poisson  $\nu_m = 0,20$ . A espessura da membrana, considerada constante, é  $t_m = 0,01$  m. A carga uniformemente distribuída atuante é  $g_m = 5,00$  Pa.

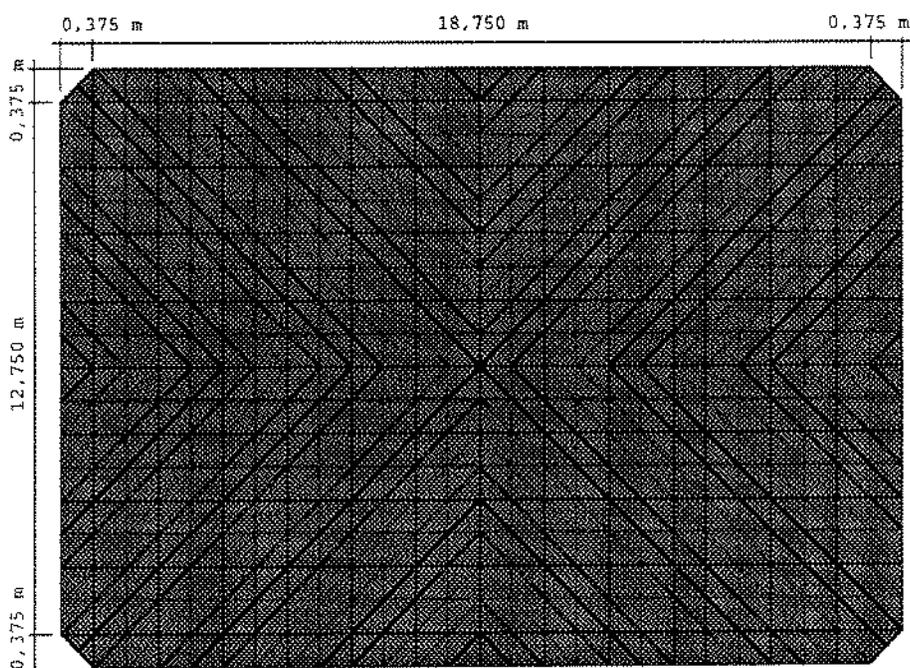


Figura 4.18 - Membrana discretizada (configuração inicial)

Como no exemplo da casca semelhante à da Universidade de Kassel, depois que a geometria foi obtida em decorrência do peso próprio da membrana, esta foi invertida em relação ao plano horizontal, e ao material da estrutura foram impostos parâmetros que o qualificaram como sendo de concreto armado, obtendo-se assim uma estrutura de cobertura.

Na Tabela 4.7 são apresentados os dados da estrutura em casca de concreto armado, e os principais resultados dos deslocamentos e tensões principais obtidos através das análises efetuadas por meio do programa ANSYS.

O concreto foi considerado como tendo Módulo de Elasticidade  $E$ , Coeficiente de Poisson  $\nu$  e densidade  $\rho$ . O efeito do peso próprio é levado em consideração através da aceleração da gravidade  $g$  e da densidade  $\rho$ .

Com relação às condições de contorno, os quatro cantos recortados foram considerados como apoios fixos, de acordo com as imposições de contorno utilizadas para a geração da geometria por meio da membrana elástica deformável.

CASCA DE CONCRETO SOB ATUAÇÃO DO PESO PRÓPRIO (CONTORNO FIXO)				
$E = 2,10 \cdot 10^4$ MPa		$b = 13,50$ m		
$\nu = 0,20$		$h^c = 4,664094$ m		
$\rho = 2500$ Kg/m <sup>3</sup>		$h^a = 3,641442$ m		
$g = 9,80$ m/s <sup>2</sup>		$h^b = 2,186590$ m		
$a = 19,50$ m		$t = 0,15$ m		
DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA (m)				
$X_{max} = 5,56 \cdot 10^{-5}$		$X_{min} = -5,56 \cdot 10^{-5}$		
$Y_{max} = 5,43 \cdot 10^{-5}$		$Y_{min} = -5,43 \cdot 10^{-5}$		
$Z_{max} = 0,00$		$Z_{min} = -6,26 \cdot 10^{-4}$		
TENSÕES PRINCIPAIS (MPa)				
		Superfície Inferior	Superfície Média	Superfície Superior
$\sigma_1$	max	$1,57 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$	$4,58 \cdot 10^{-2}$
	min	$-1,15 \cdot 10^{-10}$	$-3,71 \cdot 10^{-9}$	$-5,66 \cdot 10^{-11}$
$\sigma_2$	max	$-1,17 \cdot 10^{-2}$	$-5,17 \cdot 10^{-4}$	$3,40 \cdot 10^{-11}$
	min	$-3,30 \cdot 10^{-1}$	$-3,16 \cdot 10^{-1}$	$-3,01 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_3$	max	$-1,61 \cdot 10^{-1}$	$-1,28 \cdot 10^{-1}$	$-9,50 \cdot 10^{-2}$
	min	-1,88	-1,79	-1,71

Tabela 4.7 - Forma gerada pelo efeito do peso próprio

A geometria da estrutura em casca gerada é mostrada na Figura 4.19. As dimensões em planta são representadas por  $a$  e  $b$ ,  $h_c$  é a altura no centro da casca,  $h_a$  é a altura máxima que ocorre no centro do lado de comprimento  $a$ , e  $h_b$  é a altura máxima que ocorre no centro do lado de comprimento  $b$ . A espessura  $t$  foi considerada constante ao longo de toda a estrutura.

Na Figura 4.20 é apresentada a estrutura em casca de concreto armado deformada pelo efeito do peso próprio. A malha tracejada é relativa à configuração inicial indeformada, e na representação final da estrutura deformada foi omitida a malha, sendo mostrada somente a forma da estrutura. A Figura 4.21 mostra a variação dos deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m), e a Figura 4.22 a

variação dos deslocamentos horizontais na direção  $y$  (m). A variação dos deslocamentos verticais na direção  $z$  (m) é mostrada na Figura 4.23. Apesar da Tabela 4.7 conter todos os valores extremos para as tensões principais, só serão apresentadas as figuras das distribuições destas tensões na superfície média para esta casca. Sendo assim, a distribuição das tensões principais  $\sigma_1$  (MPa) é mostrada na Figura 4.24, a distribuição das tensões principais  $\sigma_2$  (MPa) é mostrada na Figura 4.25, e na Figura 4.26 a distribuição das tensões principais  $\sigma_3$  (MPa).

Considerando um concreto com resistência à compressão de 15,00 MPa e, adotando que a resistência à tração é um décimo da resistência à compressão (1,50 MPa), verifica-se que os valores das tensões principais mostradas na Tabela 4.7 são aceitáveis, mesmo sem armadura. Contudo, construtivamente e por segurança, além da possibilidade de atuação de outros carregamentos adicionados ao peso próprio, é necessária a colocação de uma armadura mínima na estrutura.

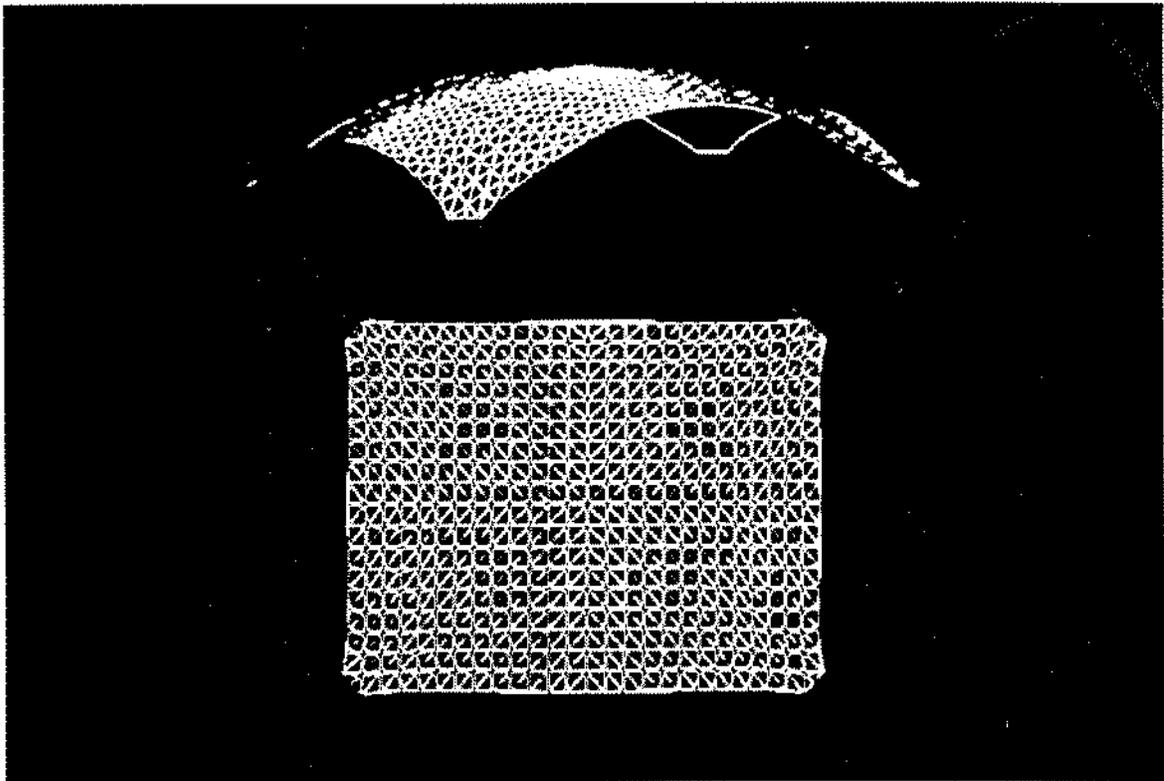


Figura 4.19 - Casca gerada por carga uniformemente distribuída

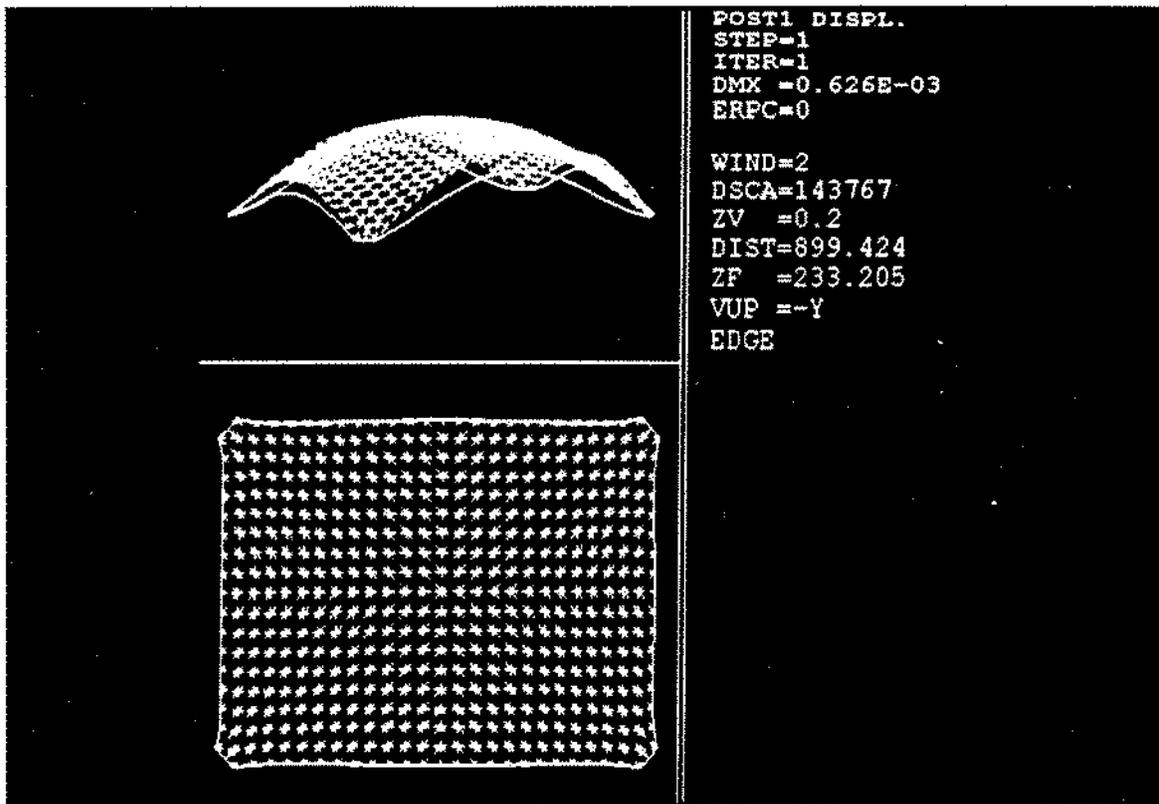


Figura 4.20 - Casca na configuração deformada

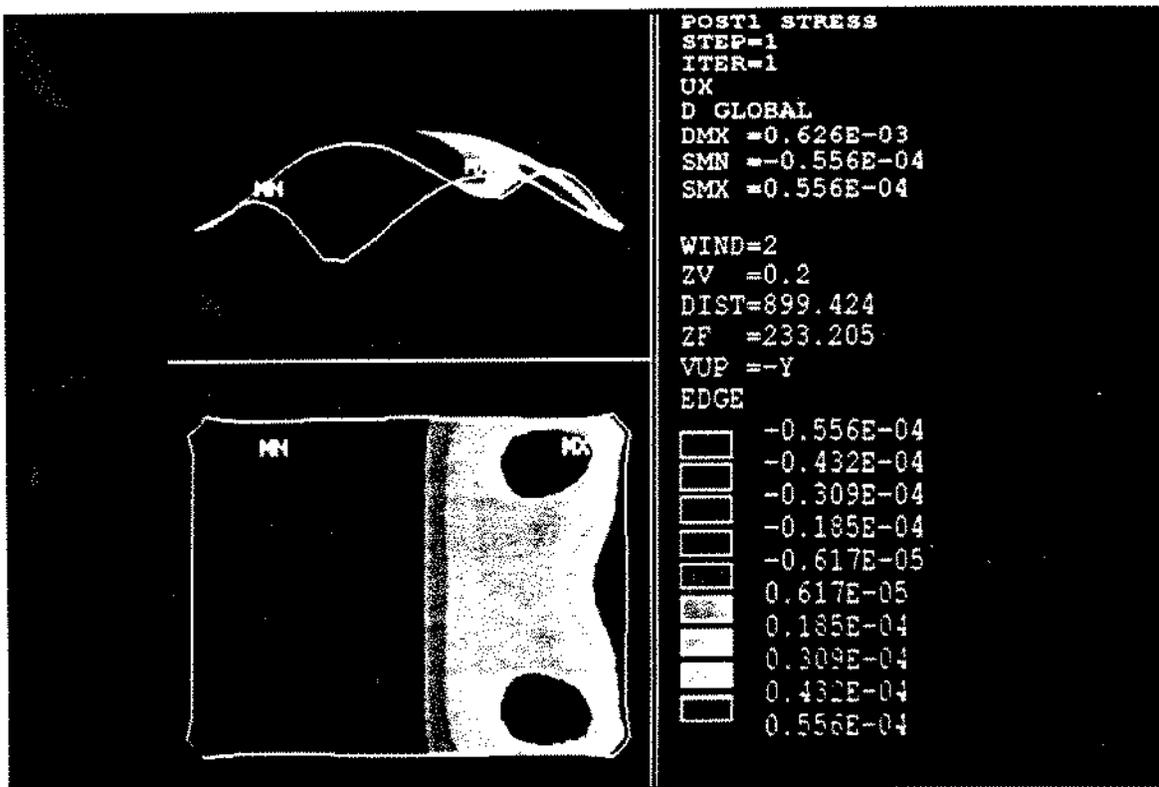


Figura 4.21 - Deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m)

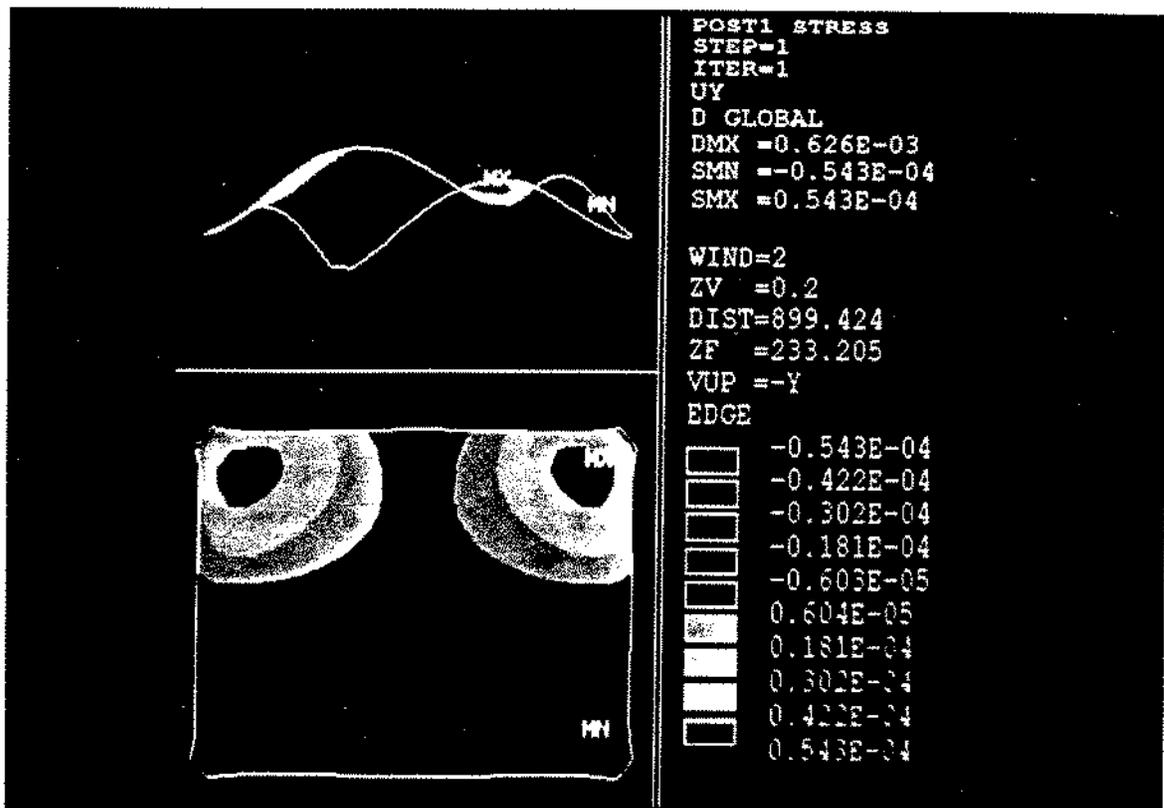


Figura 4.22 - Deslocamentos horizontais na direção  $y$  (m)

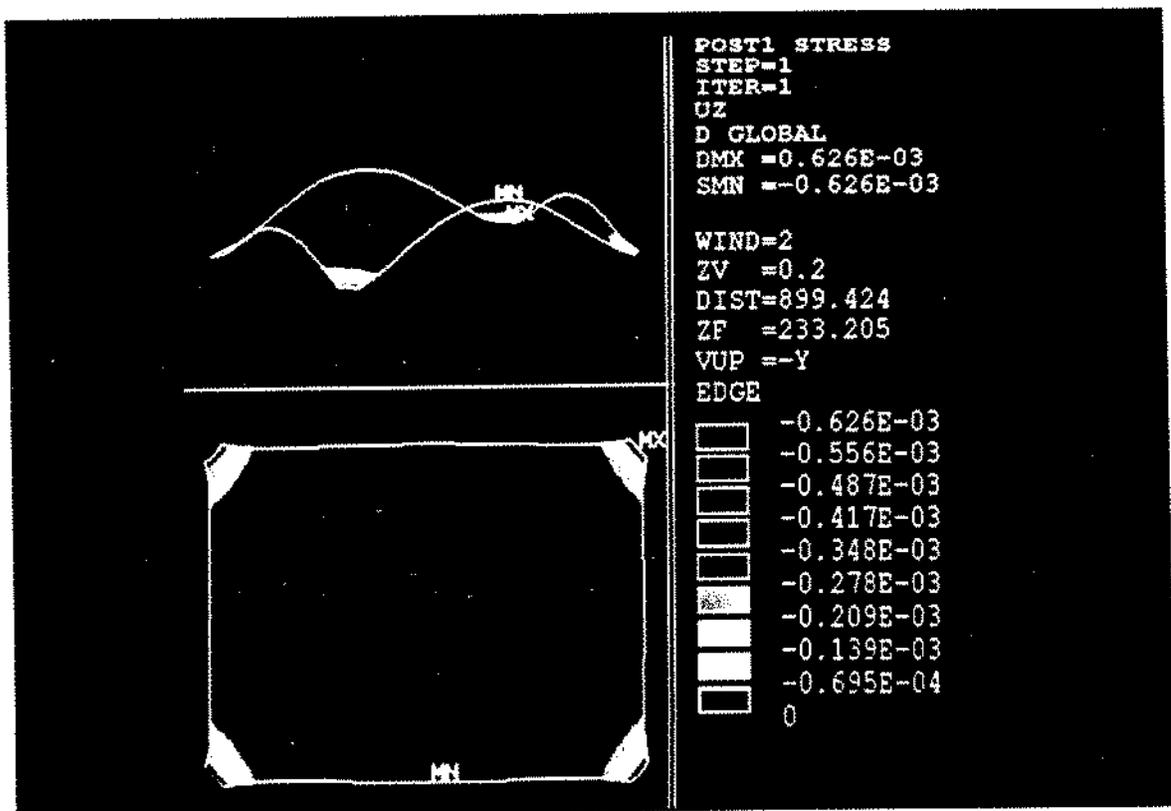


Figura 4.23 - Deslocamentos verticais na direção  $z$  (m)

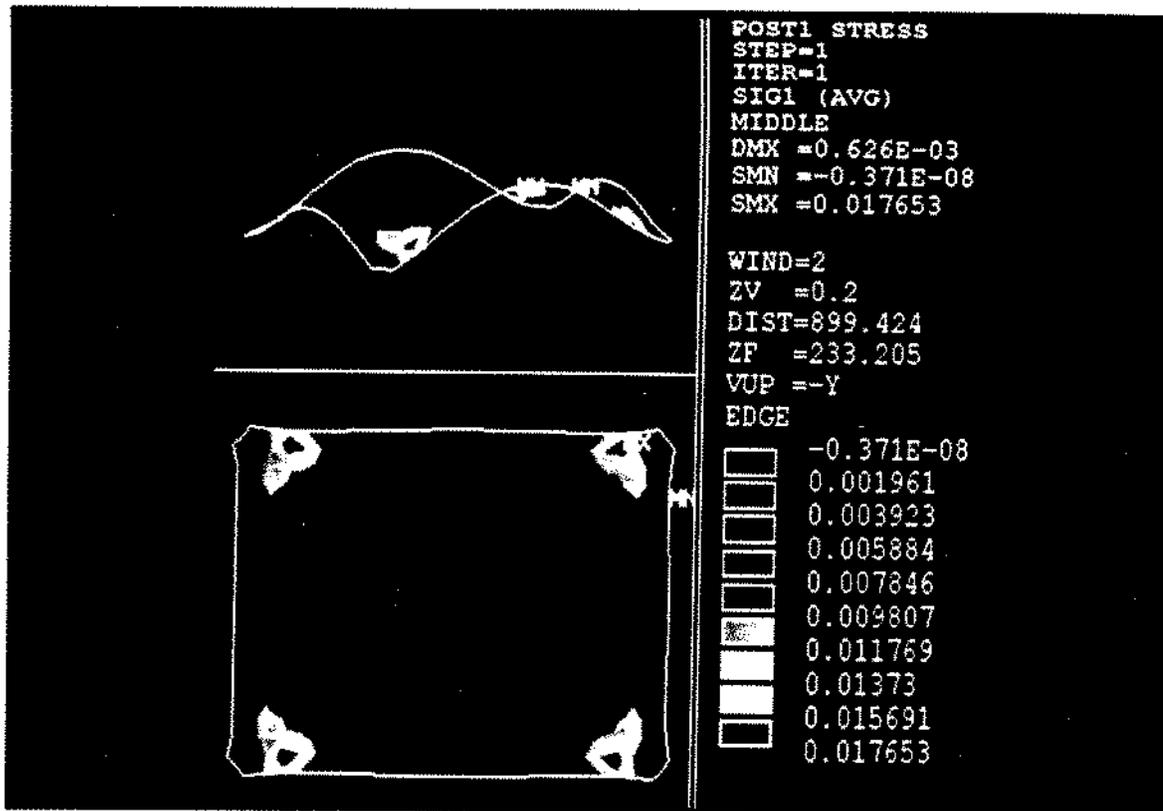


Figura 4.24 - Tensões principais  $\sigma_1$  na superfície média (MPa)

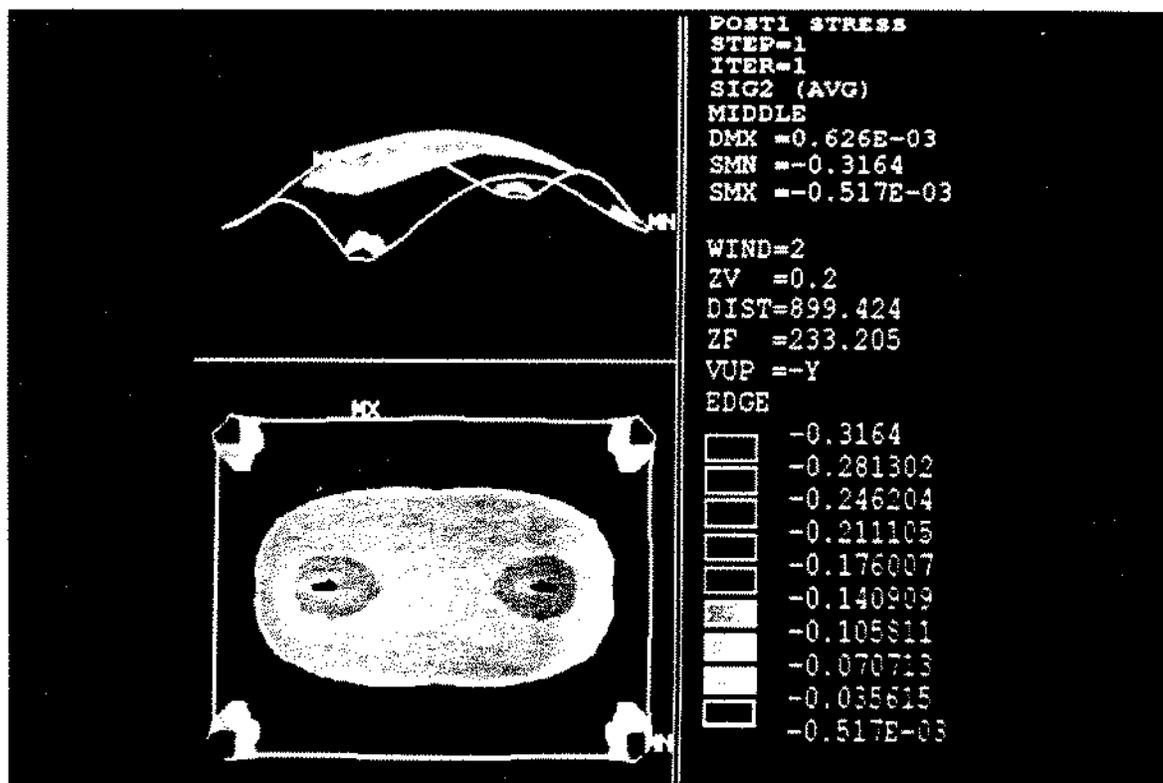


Figura 4.25 - Tensões principais  $\sigma_2$  na superfície média (MPa)

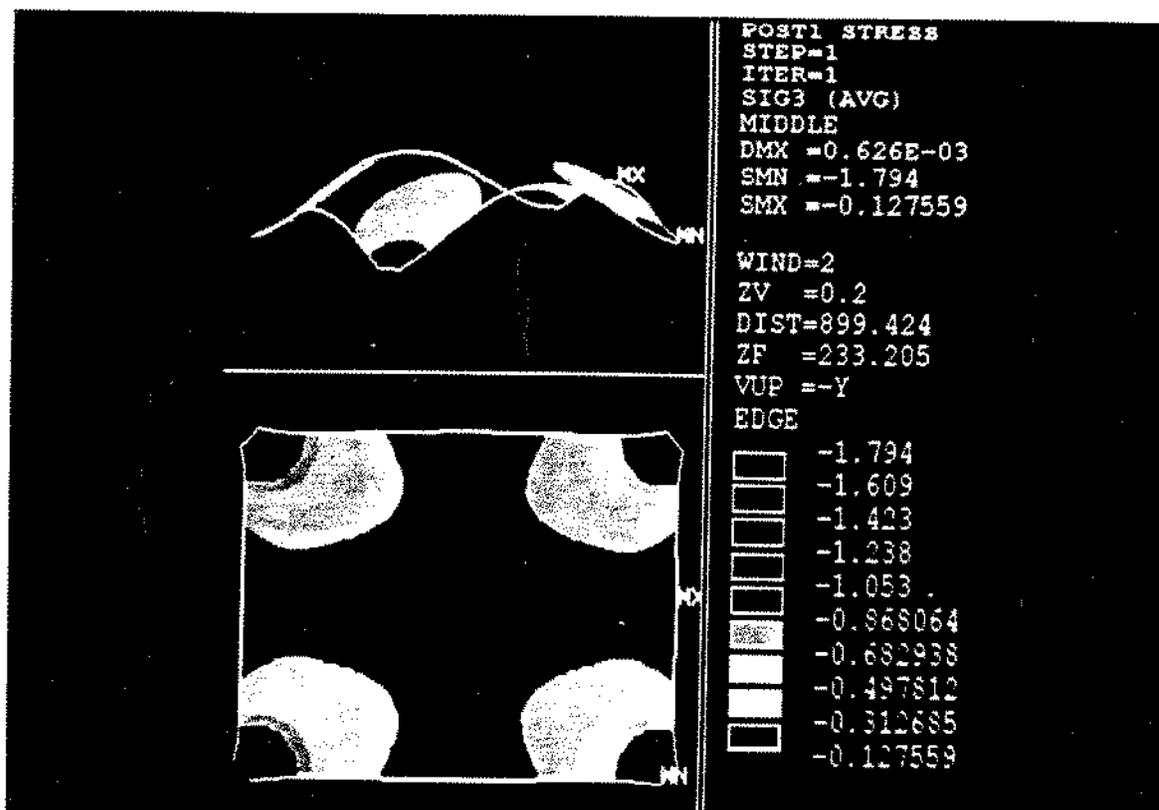


Figura 4.26 - Tensões principais  $\sigma_3$  na superfície média (MPa)

#### 4.6 CASCA GERADA POR EFEITO DE PRESSÃO

Neste exemplo, a forma da casca gerada é obtida pela ação de pressão uniforme aplicada sobre toda a superfície da membrana.

A membrana é a mesma utilizada no caso anterior, com a configuração inicial representada no plano horizontal, que tem a forma de um retângulo de 19,50 m por 13,50 m, com os quatro vértices recortados, conforme é mostrado na Figura 4.18. O contorno da membrana foi considerado todo fixo. A malha de elementos finitos também é a mesma, que foi discretizada de modo a se ter precisão suficiente nos resultados, e contém 513 pontos nodais e 936 elementos.

O material de que é feita a membrana utilizada na geração da forma da casca tem Módulo de Elasticidade  $E_m = 1,00 \cdot 10^{-1}$  MPa e Coeficiente de Poisson  $\nu_m = 0,20$ . A espessura da membrana, considerada constante, é  $t_m = 0,01$  m. A pressão uniforme atuante é  $p_m = 3,00 \cdot 10^{-1}$  Pa. A geometria da estrutura em casca gerada é mostrada na Figura 4.27.

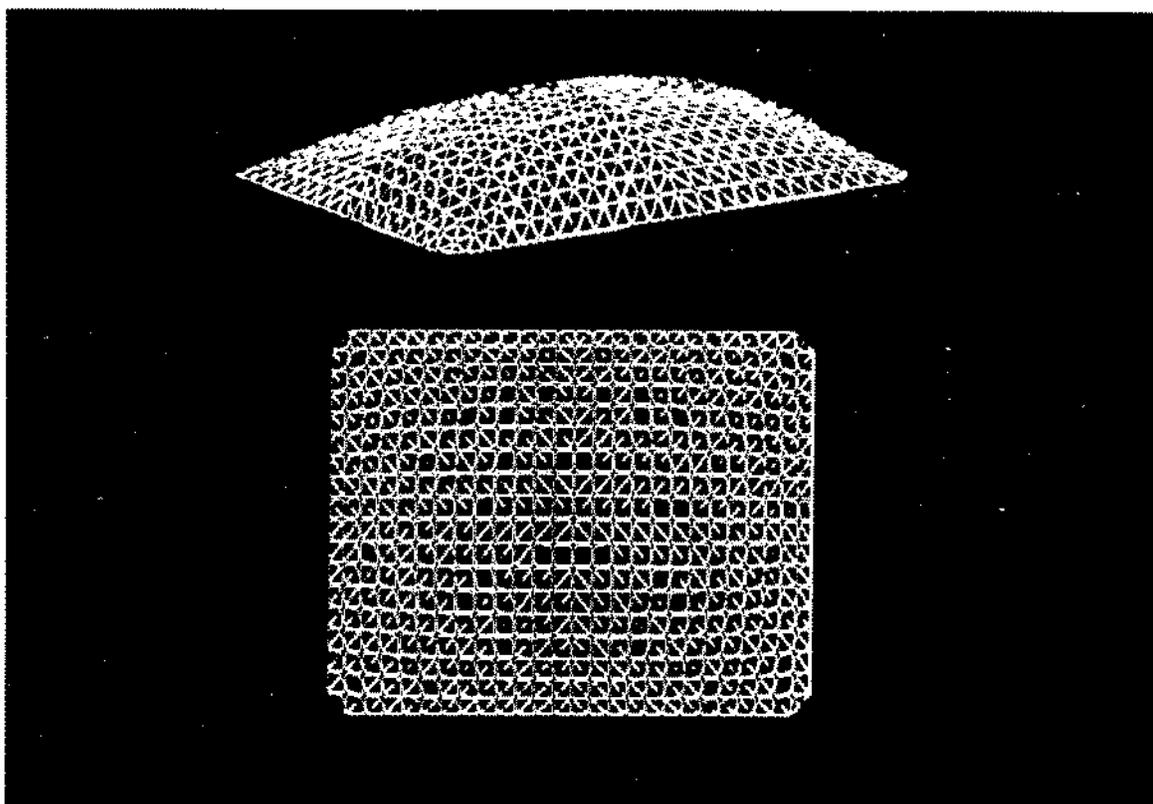


Figura 4.27 - Casca gerada por pressão

Na Tabela 4.8 são apresentados os dados da estrutura em casca de concreto armado, e os principais resultados dos deslocamentos e tensões principais obtidos através das análises efetuadas através do programa ANSYS.

As dimensões em planta são representadas por  $a$  e  $b$ , sendo  $h_0$  a altura máxima que ocorre no centro da casca. A espessura  $t$  foi considerada constante ao longo de toda a estrutura. Ao material da estrutura foram impostos parâmetros que o qualificaram como sendo de concreto com Módulo de Elasticidade  $E$  e Coeficiente de Poisson  $\nu$ . A pressão  $p$  aplicada sobre a casca foi adotada com uma intensidade igual ao peso próprio da estrutura de espessura  $t$ .

Com relação às condições de contorno, todos os pontos nodais da borda da estrutura foram considerados como apoios fixos, de acordo com as imposições de contorno adotadas para a geração da forma por meio da membrana.

Como nos casos anteriores, considerando um concreto com resistência à compressão de 15,00 MPa e, adotando que a resistência à tração é um décimo da resistência à compressão (1,50 MPa), verifica-se que os valores das tensões principais mostradas

na Tabela 4.8 são aceitáveis mesmo sem armadura. Contudo, com a possibilidade de atuação de outros carregamentos além da pressão, por segurança, e construtivamente é necessária a colocação de uma armadura mínima na estrutura.

CASCA DE CONCRETO SOB ATUAÇÃO DE PRESSÃO (CONTORNO FIXO)				
$E = 2,10 \cdot 10^4$ MPa $\nu = 0,20$ $p = 3,75 \cdot 10^{-3}$ MPa $a = 19,50$ m $b = 13,50$ m		$h_c = 2,766744$ m $t^c = 0,15$ m		
DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA (m)				
$X_{max} = 3,14 \cdot 10^{-5}$ $Y_{max} = 4,54 \cdot 10^{-5}$ $Z_{max} = 2,54 \cdot 10^{-5}$		$X_{min} = -3,14 \cdot 10^{-5}$ $Y_{min} = -4,54 \cdot 10^{-5}$ $Z_{min} = -2,34 \cdot 10^{-4}$		
TENSÕES PRINCIPAIS (MPa)				
		Superfície Inferior	Superfície Média	Superfície Superior
$\sigma_1$	max	$3,71 \cdot 10^{-2}$	$3,95 \cdot 10^{-3}$	$4,87 \cdot 10^{-2}$
	min	$-3,75 \cdot 10^{-3}$	$-1,88 \cdot 10^{-3}$	$-3,03 \cdot 10^{-12}$
$\sigma_2$	max	$-2,05 \cdot 10^{-3}$	$-2,23 \cdot 10^{-3}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$
	min	$-2,15 \cdot 10^{-1}$	$-2,01 \cdot 10^{-1}$	$-1,91 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_3$	max	$-3,75 \cdot 10^{-3}$	$-1,89 \cdot 10^{-2}$	$-8,91 \cdot 10^{-3}$
	min	$-2,58 \cdot 10^{-1}$	$-2,14 \cdot 10^{-1}$	$-3,16 \cdot 10^{-1}$

Tabela 4.8 - Forma gerada pelo efeito de pressão

Observa-se também que há uma grande diferença nos valores das tensões máximas e mínimas em relação ao caso anterior em que as dimensões das estruturas são da mesma ordem de grandeza. Neste caso a estrutura é apoiada em todo o seu contorno, enquanto que na estrutura anterior as regiões de apoio são somente os quatro cantos, e portanto com a redução da área de apoio e consequente

aumento das tensões.

A Figura 4.28 mostra a casca de concreto armado deformada pelo efeito da pressão. A malha tracejada é relativa à configuração inicial indeformada, e a configuração final da estrutura deformada é mostrada sem a malha.

A Figura 4.29 mostra a variação dos deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m), e a Figura 4.30 a variação dos deslocamentos horizontais na direção  $y$  (m). A variação dos deslocamentos verticais na direção  $z$  (m) é mostrada na Figura 4.31.

Serão apresentadas somente as figuras das distribuições das tensões principais na superfície média para esta casca. Portanto, a distribuição das tensões principais  $\sigma_1$  (MPa) é mostrada na Figura 4.32, a distribuição das tensões principais  $\sigma_2$  (MPa) é mostrada na Figura 4.33, e na Figura 4.34 a distribuição das tensões principais  $\sigma_3$  (MPa).

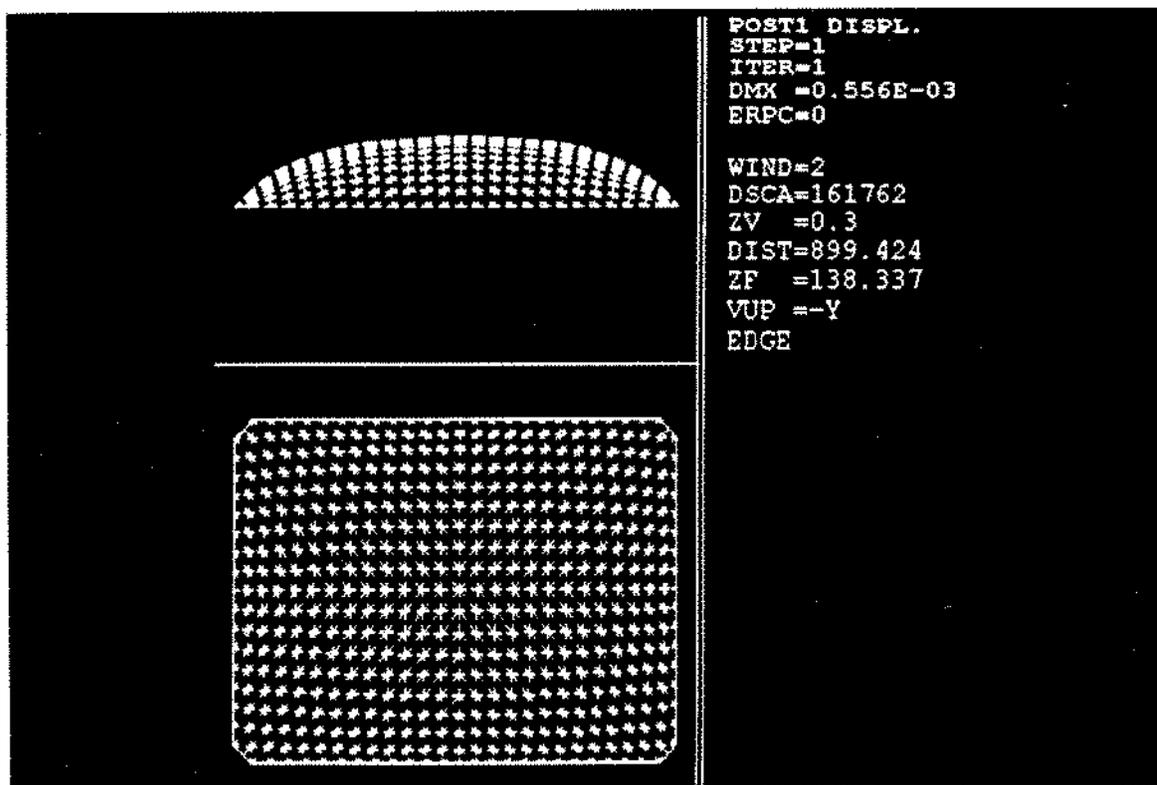


Figura 4.28 - Casca na configuração deformada

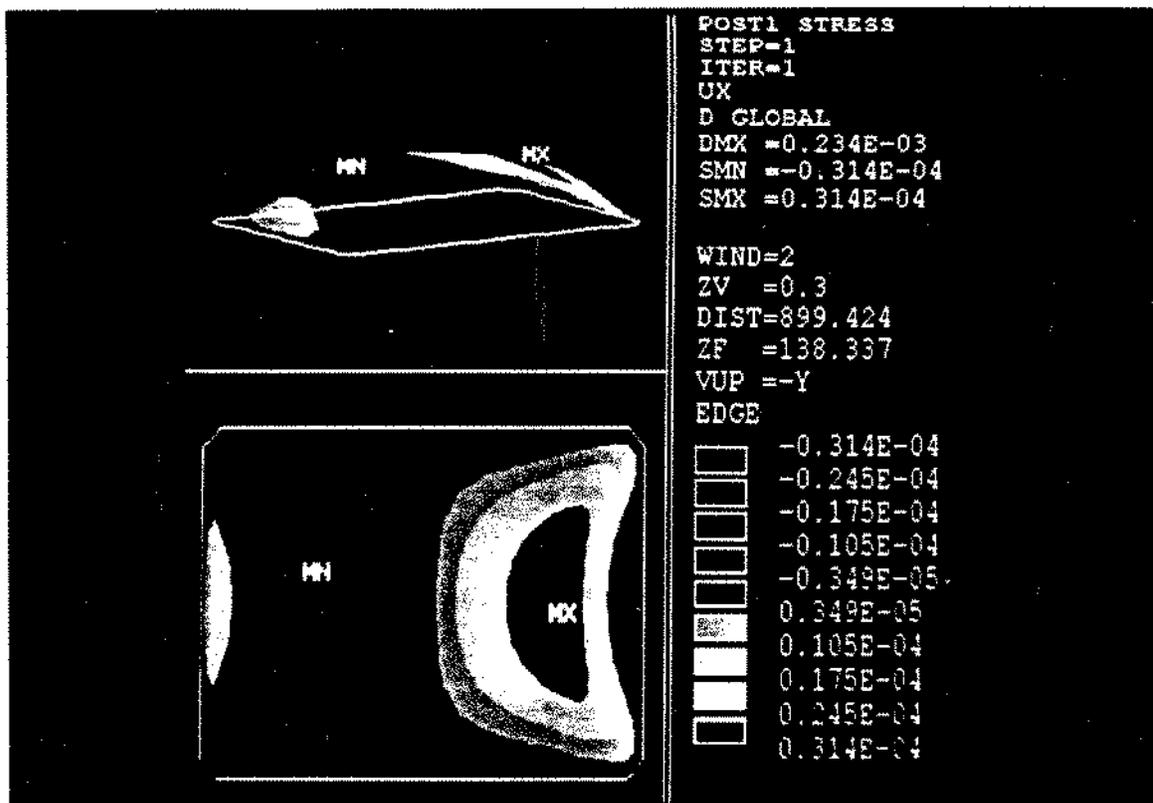


Figura 4.29 - Deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m)

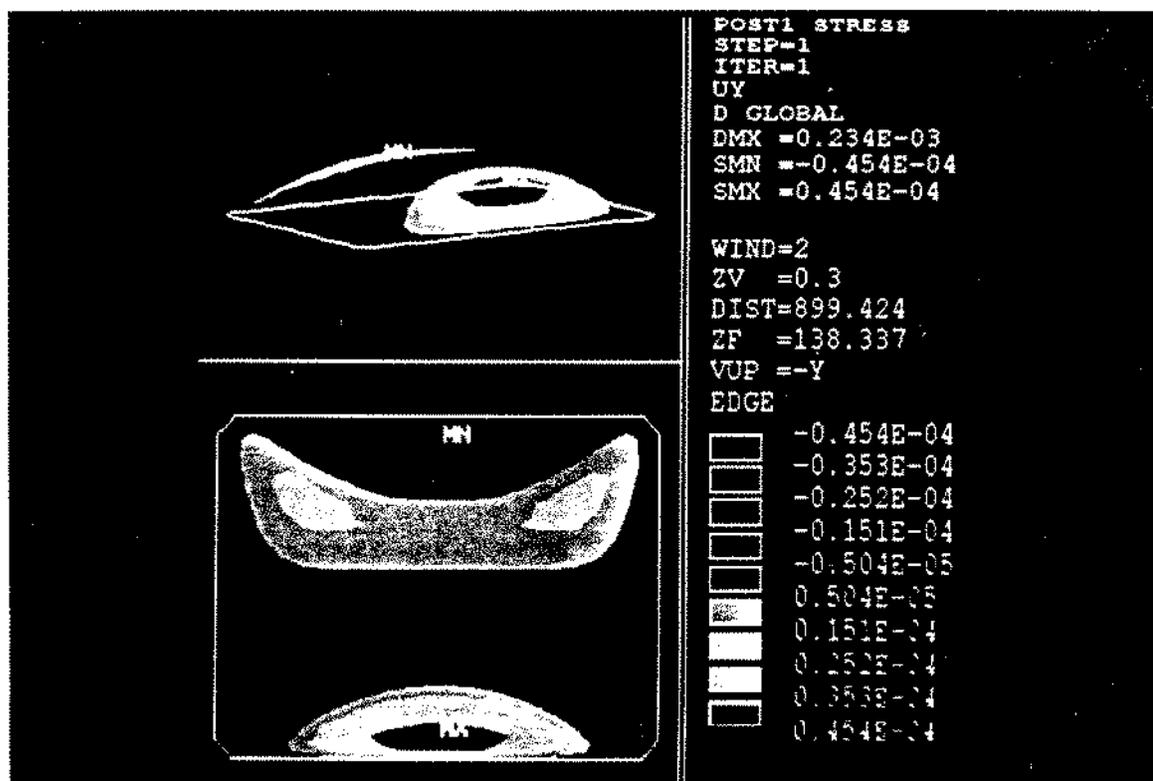


Figura 4.30 - Deslocamentos horizontais na direção  $y$  (m)

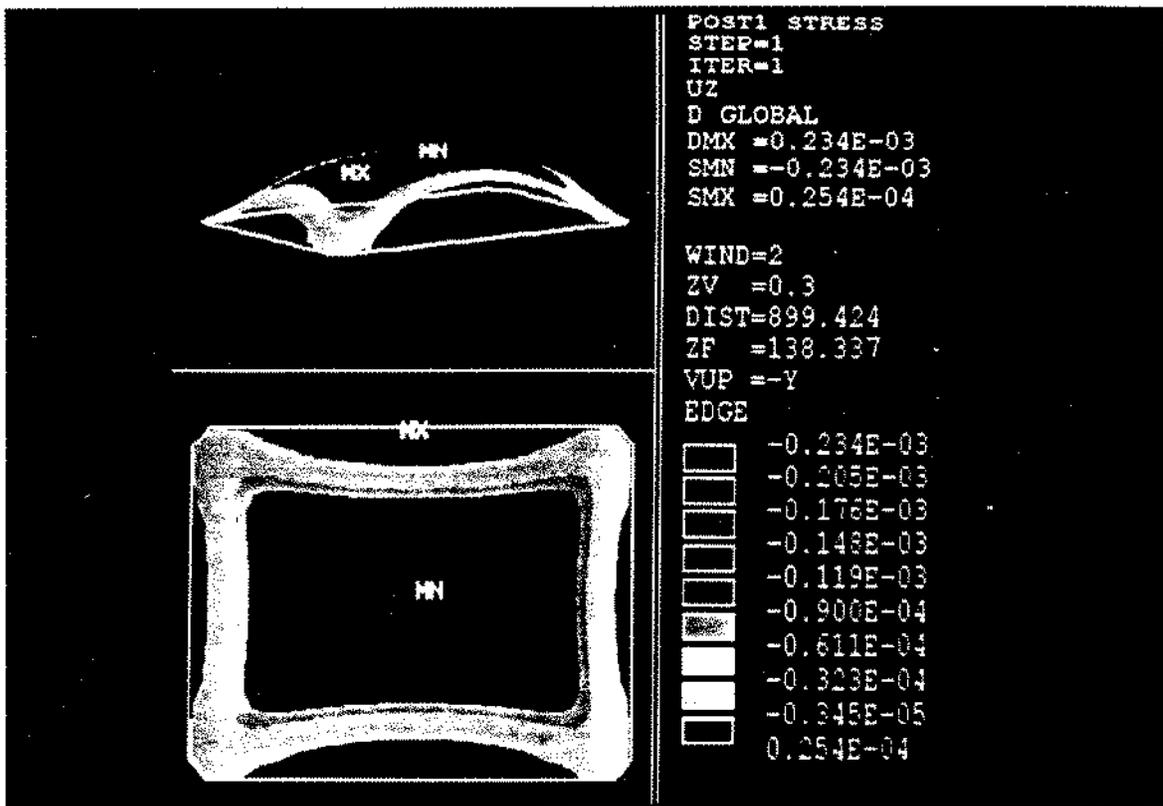


Figura 4.31 - Deslocamentos verticais na direção  $z$  (m)

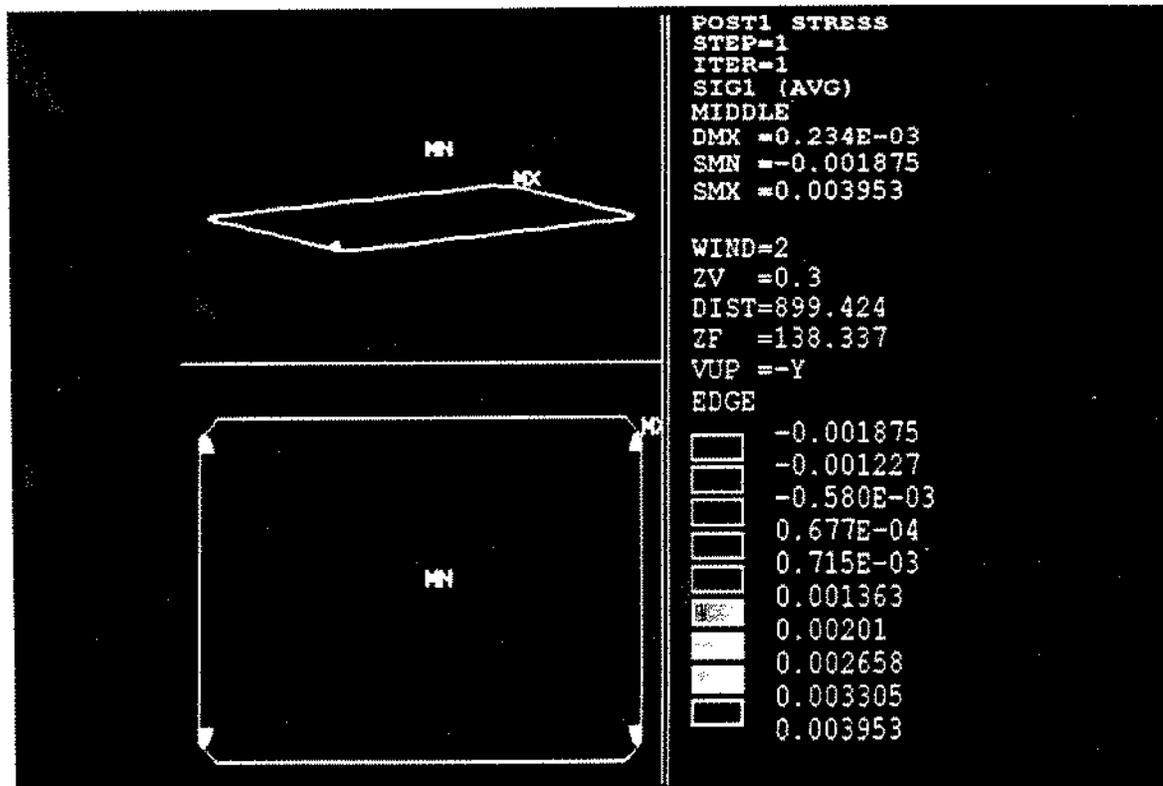


Figura 4.32 - Tensões principais  $\sigma_1$  na superfície média (MPa)

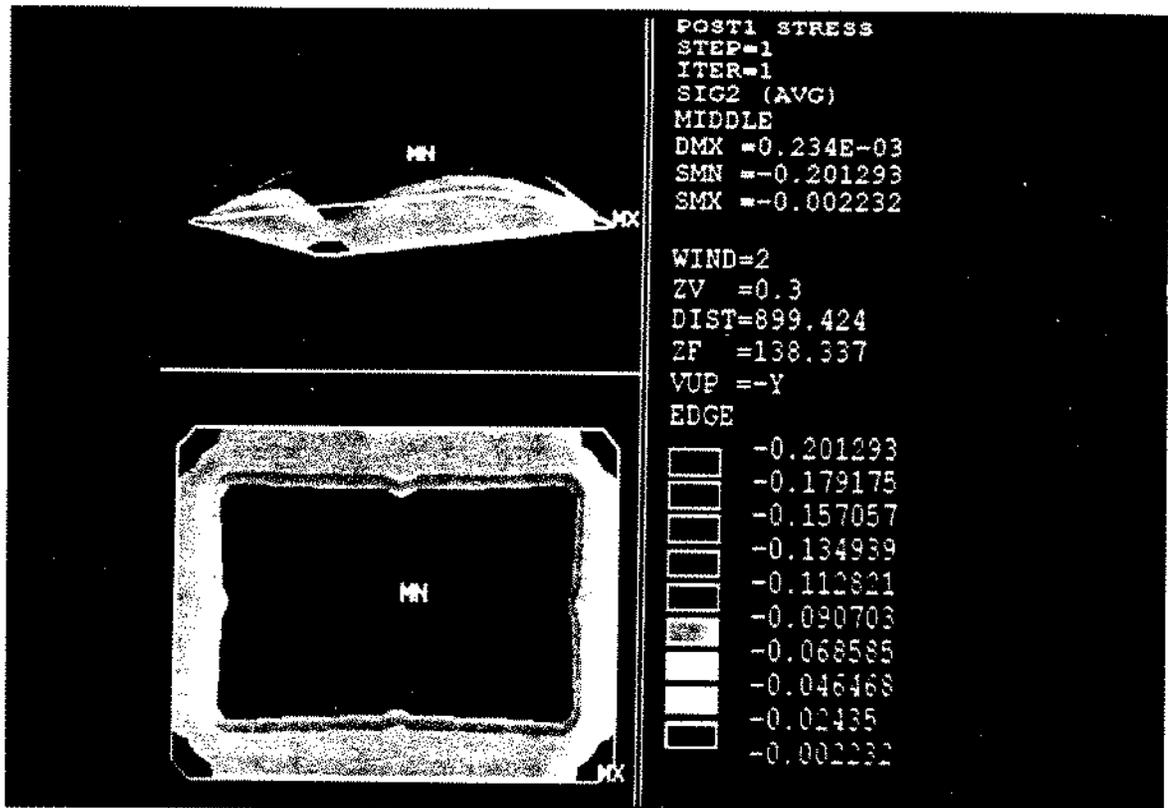


Figura 4.33 - Tensões principais  $\sigma_2$  na superfície média (MPa)

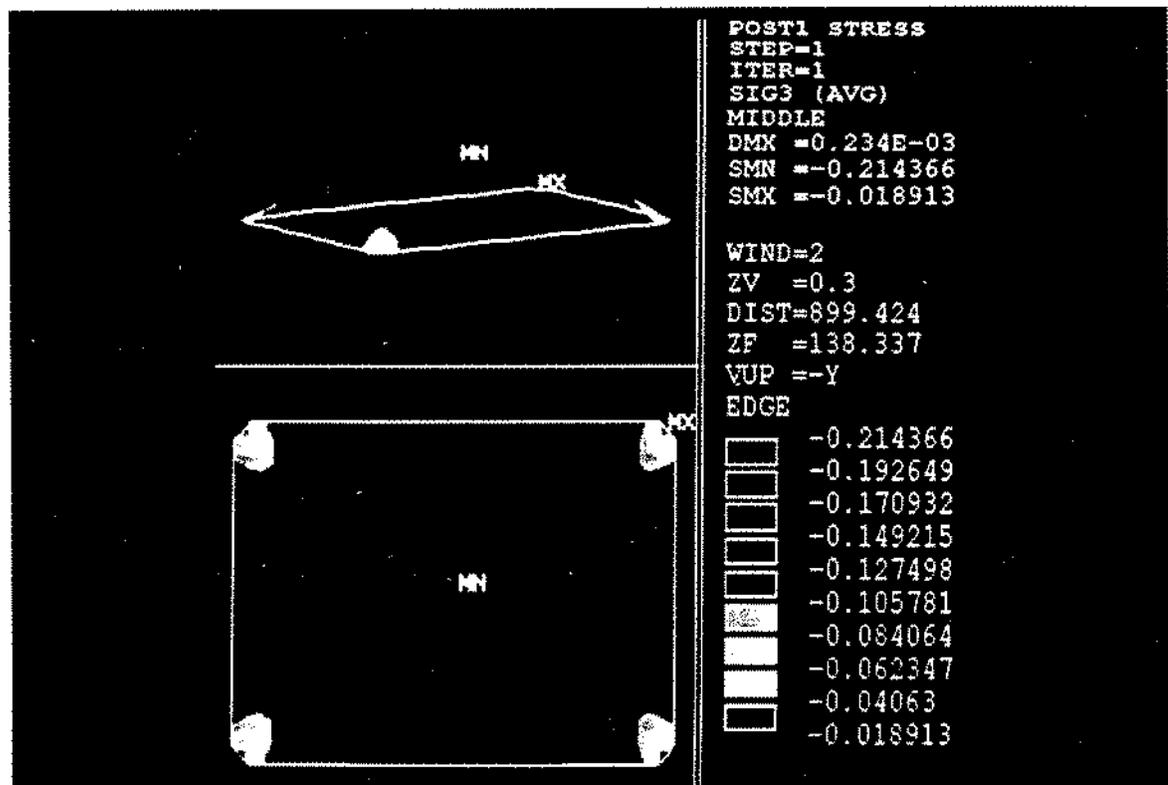


Figura 4.34 - Tensões principais  $\sigma_3$  na superfície média (MPa)

Apesar da forma da casca de concreto armado ter sido gerada por uma membrana elástica submetida à pressão, é importante também uma verificação da estrutura submetida à ação do peso próprio.

A mesma estrutura de concreto que foi submetida à ação da pressão foi também submetida à atuação do peso próprio, concomitantemente com o efeito da pressão. O efeito do peso próprio é levado em consideração através da aceleração da gravidade  $g$  e da densidade  $\rho$  do material, e a pressão  $p$  aplicada sobre a casca foi adotada com uma intensidade igual ao peso próprio da estrutura de espessura  $t$ .

CASCA DE CONCRETO SOB ATUAÇÃO DO PESO PRÓPRIO E DE PRESSÃO (CONTORNO FIXO)				
$E = 2,10 \cdot 10^4$ MPa		$b = 13,50$ m		
$\nu = 0,20$		$h = 2,766744$ m		
$\rho = 2500$ Kg/m <sup>3</sup>		$t^c = 0,15$ m		
$g = 9,80$ m/s <sup>2</sup>				
$p = 3,75 \cdot 10^{-3}$ MPa				
$a = 19,50$ m				
DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA (m)				
$X_{\max} = 6,49 \cdot 10^{-5}$		$X_{\min} = -6,49 \cdot 10^{-5}$		
$Y_{\max} = 1,56 \cdot 10^{-4}$		$Y_{\min} = -1,56 \cdot 10^{-4}$		
$Z_{\max} = 1,19 \cdot 10^{-4}$		$Z_{\min} = -5,56 \cdot 10^{-4}$		
TENSÕES PRINCIPAIS (MPa)				
		Superfície Inferior	Superfície Média	Superfície Superior
$\sigma_1$	max	$9,18 \cdot 10^{-2}$	$-1,88 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$
	min	$-3,75 \cdot 10^{-3}$	$-1,88 \cdot 10^{-3}$	$-6,56 \cdot 10^{-11}$
$\sigma_2$	max	$-2,07 \cdot 10^{-3}$	$-1,19 \cdot 10^{-2}$	$1,26 \cdot 10^{-2}$
	min	$-4,54 \cdot 10^{-1}$	$-4,07 \cdot 10^{-1}$	$-3,68 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_3$	max	$-3,80 \cdot 10^{-2}$	$-7,30 \cdot 10^{-2}$	$-2,07 \cdot 10^{-2}$
	min	$-5,36 \cdot 10^{-1}$	$-4,42 \cdot 10^{-1}$	$-7,43 \cdot 10^{-1}$

Tabela 4.9 - Forma gerada pelo efeito de pressão

Na Tabela 4.9 são apresentados os dados da estrutura em casca de concreto armado, e os principais resultados dos deslocamentos e tensões principais obtidos através das análises efetuadas através do programa ANSYS.

A Figura 4.35 mostra a variação dos deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m), e a Figura 4.36 a variação dos deslocamentos horizontais na direção  $y$  (m). A variação dos deslocamentos verticais na direção  $z$  (m) é mostrada na Figura 4.37.

Neste caso também serão apresentadas somente as figuras das distribuições das tensões principais na superfície média para esta casca. Portanto, a distribuição das tensões principais  $\sigma_1$  (MPa) é mostrada na Figura 4.38, a distribuição das tensões principais  $\sigma_2$  (MPa) é mostrada na Figura 4.39, e na Figura 4.40 a distribuição das tensões principais  $\sigma_3$  (MPa).

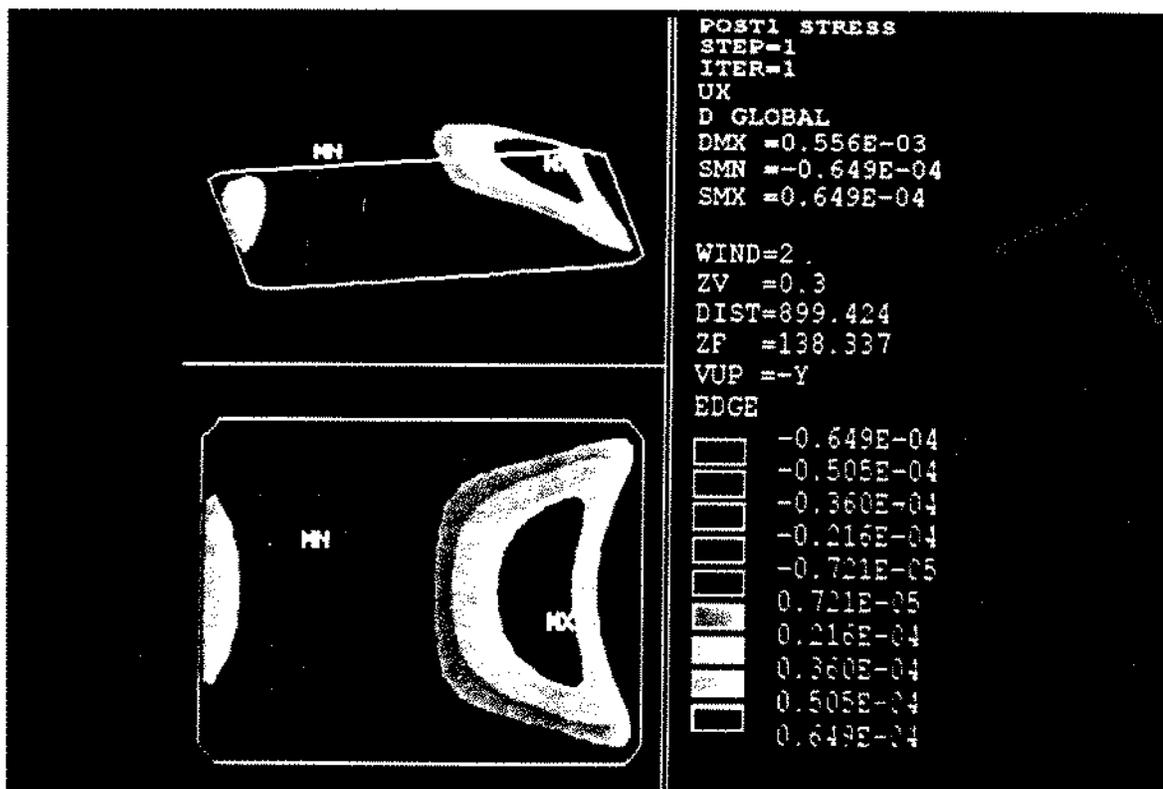


Figura 4.35 - Deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m)

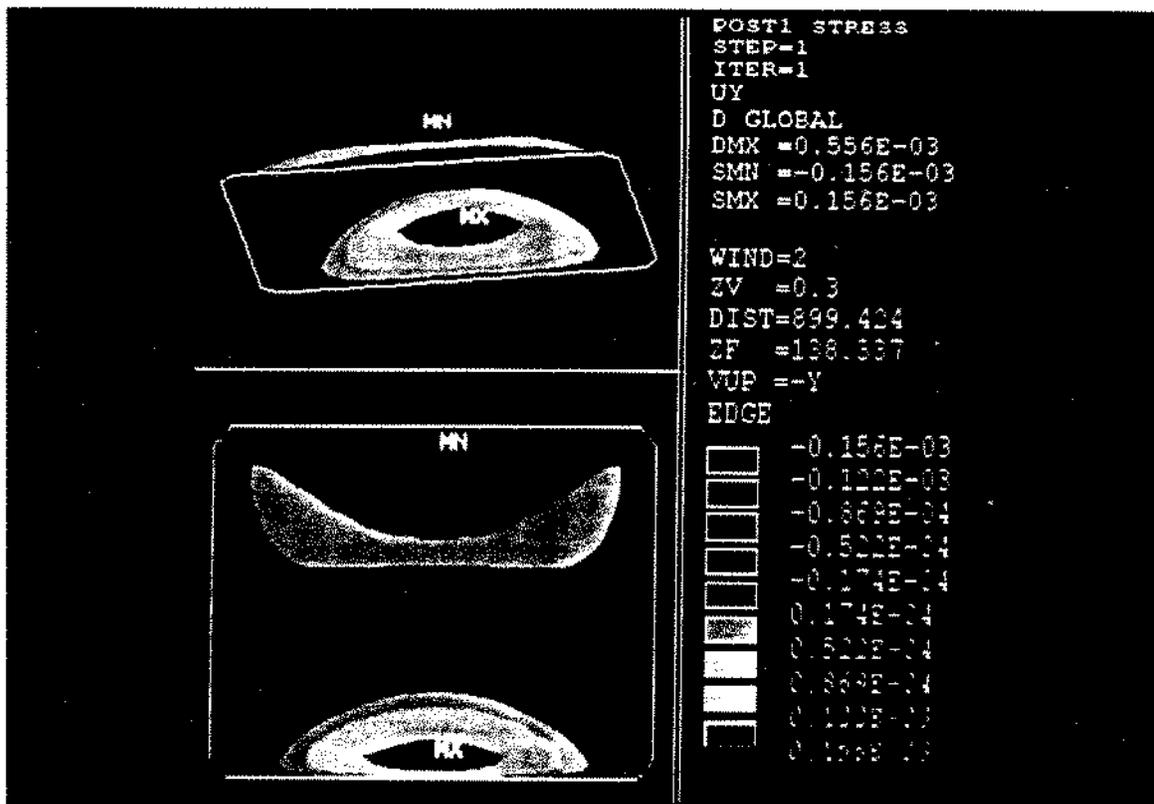


Figura 4.36 - Deslocamentos horizontais na direção  $y$  (m)

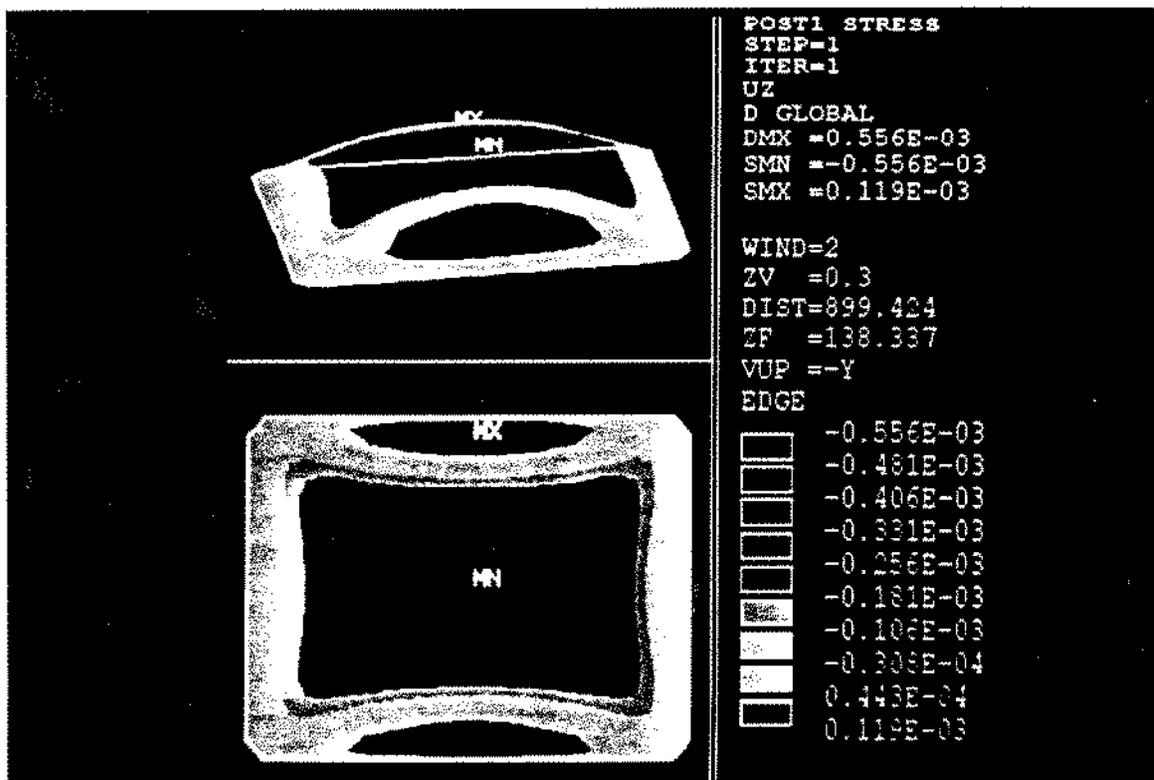


Figura 4.37 - Deslocamentos verticais na direção  $z$  (m)

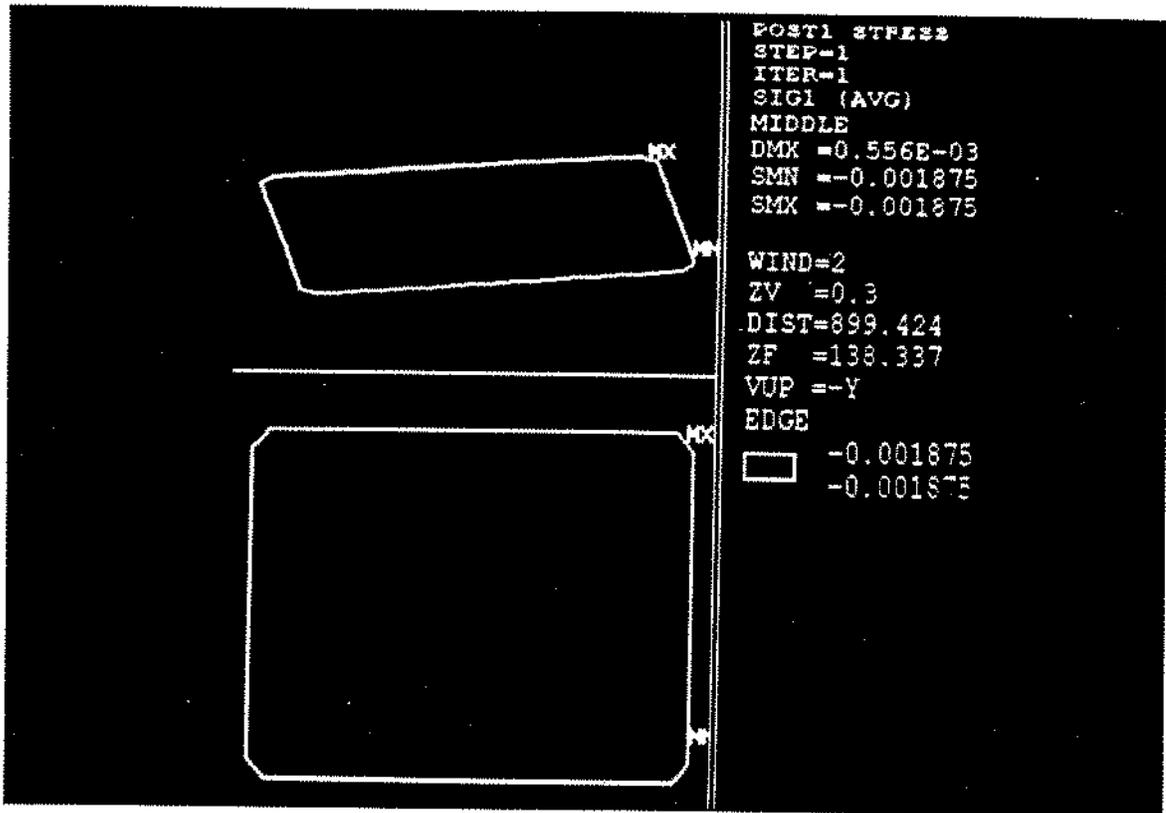


Figura 4.38 - Tensões principais  $\sigma_1$  na superfície média (MPa)

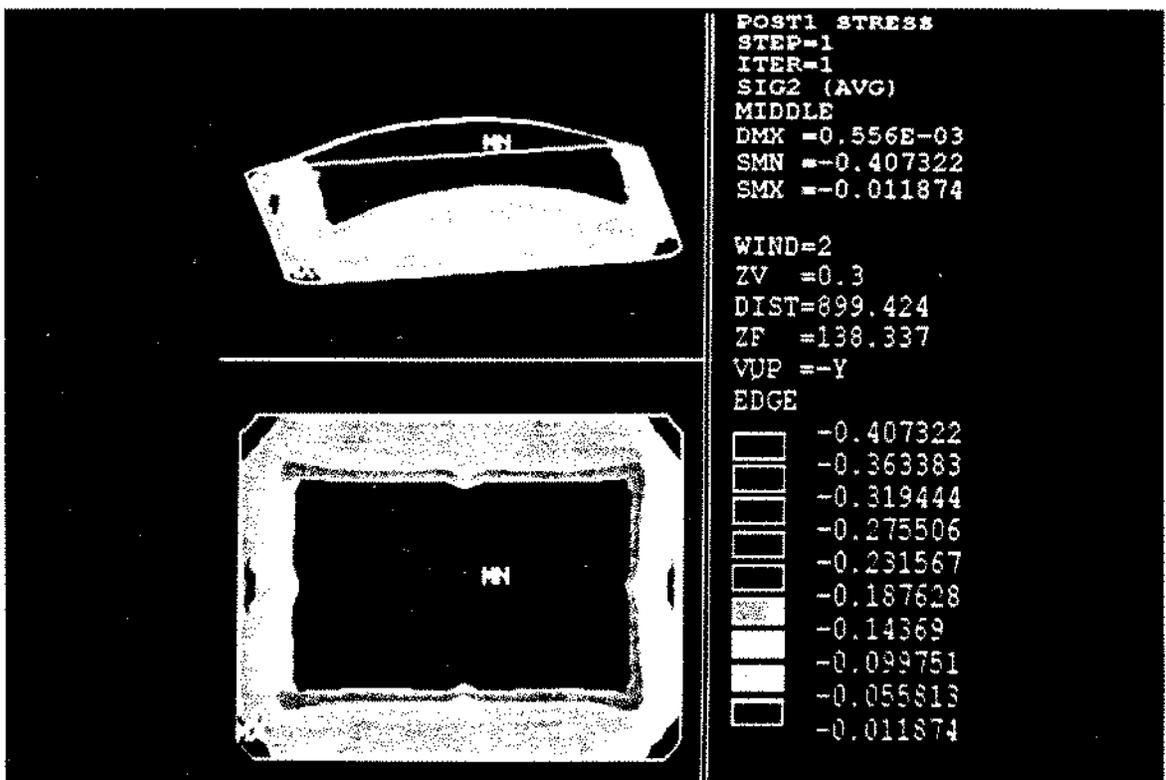


Figura 4.39 - Tensões principais  $\sigma_2$  na superfície média (MPa)

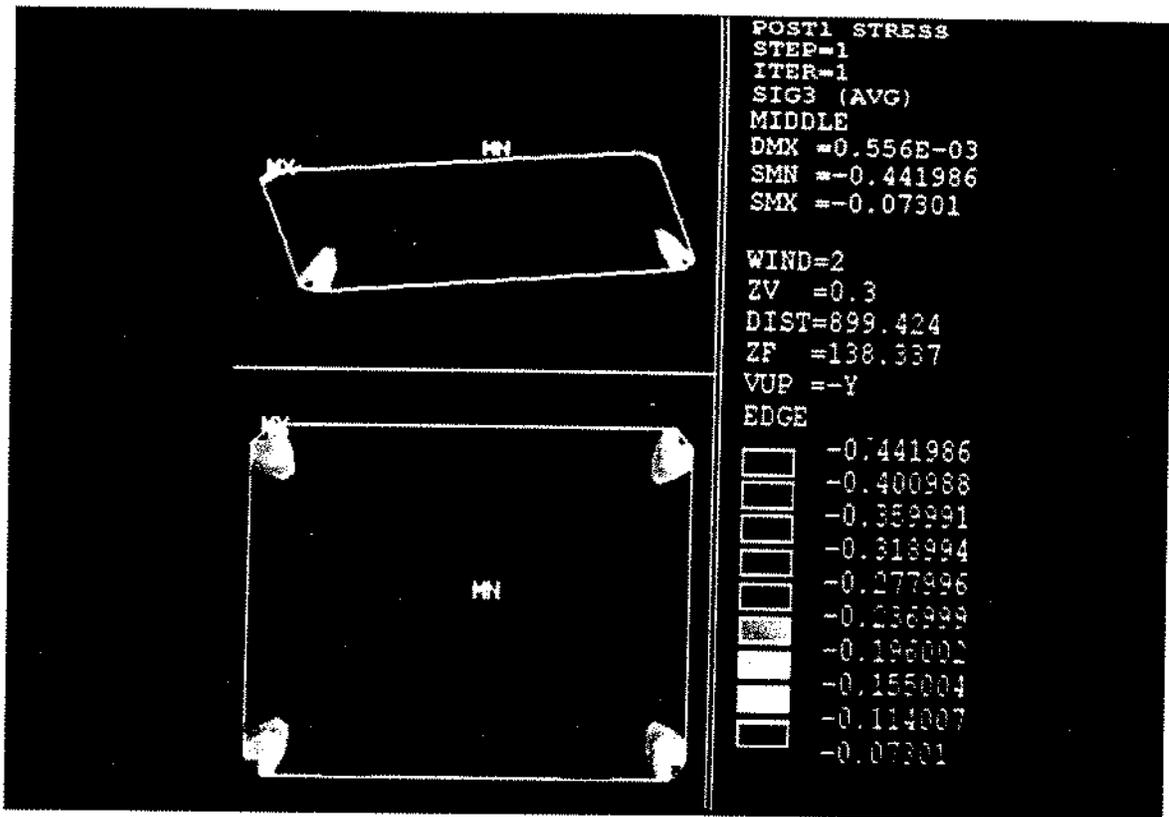


Figura 4.40 - Tensões principais  $\sigma_3$  na superfície média (MPa)

#### 4.7 CASCA GERADA POR PRESCRIÇÃO DE DESLOCAMENTOS

O modelo computacional desenvolvido permite a geração de formas geométricas de estruturas em casca simplesmente impondo-se deslocamentos pré-determinados às membranas elásticas deformáveis, com quaisquer configurações planas iniciais.

Para este exemplo, a membrana utilizada para a geração da forma por meio de deslocamentos prescritos é a mesma que foi utilizada para a geração do caso similar ao do modelo da Universidade de Kassel, com 5,50 m por 5,50 m em planta e com os lados definidos por parábolas (vide Figura 4.4).

Como a malha de elementos finitos utilizada para a geração da forma geométrica por meio da membrana elástica deformável é a mesma utilizada posteriormente quando do processamento da análise estrutural da casca de concreto armado obtida, a mesma foi discretizada de modo a se ter precisão suficiente nos resultados e contém 197 pontos nodais e 324 elementos finitos.

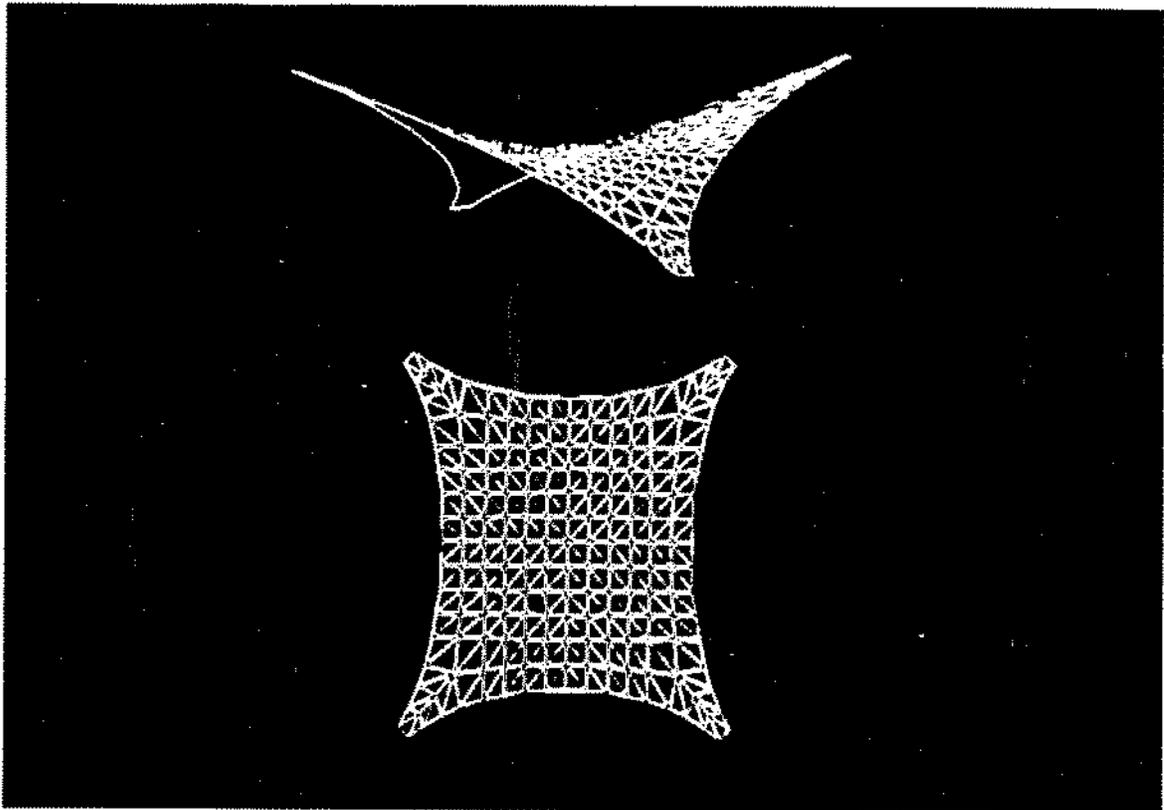


Figura 4.41 - Casca gerada por deslocamentos prescritos

Dois apoios da membrana, situados em extremos opostos numa mesma diagonal, foram mantidos fixos; e os outros dois, na outra diagonal, foram deslocados 2,50 m na vertical, perpendicularmente ao plano horizontal da membrana na configuração indeformada inicial, resultando na forma geométrica mostrada na Figura 4.41. O Módulo de Elasticidade utilizado para a membrana foi  $E_m = 1,00 \cdot 10^{-1}$  MPa, o Coeficiente de Poisson  $\nu_m = 0,20$ , e a espessura constante  $t_m = 0,01$  m.

Após a geração da forma, a estrutura resultante foi caracterizada como de concreto armado, com os dois apoios inferiores numa mesma diagonal considerados fixos, e as bordas livres. Os dados e os principais resultados dos deslocamentos e tensões principais, obtidos através das análises efetuadas por meio do programa ANSYS, são apresentados na Tabela 4.10.

O concreto foi considerado como tendo Módulo de Elasticidade  $E$ , Coeficiente de Poisson  $\nu$  e densidade  $\rho$ . O efeito do peso próprio é levado em consideração através da aceleração da gravidade  $g$  e da densidade  $\rho$ .

CASCA DE CONCRETO SOB ATUAÇÃO DO PESO PRÓPRIO (APOIOS FIXOS)				
$E = 2,10 \cdot 10^4$ MPa		$b = 5,50$ m		
$\nu = 0,20$		$h = 1,25$ m		
$\rho = 2500$ Kg/m <sup>3</sup>		$h_c = 2,50$ m		
$g = 9,80$ m/s <sup>2</sup>		$h_a = 2,50$ m		
$a = 5,50$ m		$t = 0,05$ m		
DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA (m)				
$X_{max} = 2,18 \cdot 10^{-3}$		$X_{min} = -2,18 \cdot 10^{-3}$		
$Y_{max} = 2,18 \cdot 10^{-3}$		$Y_{min} = -2,18 \cdot 10^{-3}$		
$Z_{max} = 6,82 \cdot 10^{-3}$		$Z_{min} = -1,16 \cdot 10^{-3}$		
TENSÕES PRINCIPAIS (MPa)				
		Superfície Inferior	Superfície Média	Superfície Superior
$\sigma_1$	max	1,80	$3,20 \cdot 10^{-1}$	1,11
	min	$-3,51 \cdot 10^{-11}$	$-1,31 \cdot 10^{-11}$	$-5,99 \cdot 10^{-11}$
$\sigma_2$	max	$3,21 \cdot 10^{-1}$	$1,81 \cdot 10^{-2}$	1,01
	min	-1,09	$-3,75 \cdot 10^{-1}$	$-6,39 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_3$	max	$4,51 \cdot 10^{-12}$	$-1,72 \cdot 10^{-2}$	$1,23 \cdot 10^{-11}$
	min	-1,80	-1,84	-4,07

Tabela 4.10 - Forma gerada por prescrição de deslocamentos

As dimensões em planta são representadas por  $a$  e  $b$ ,  $h_c$  é a altura no centro da casca,  $h_a$  é a altura máxima da casca no meio do lado de comprimento  $a$ , e  $h_b$  é a altura máxima da casca no meio do lado de comprimento  $b$ . A espessura  $t$  foi considerada constante ao longo de toda a estrutura.

A Figura 4.42 mostra a estrutura em casca de concreto armado deformada pelo efeito do peso próprio. A malha tracejada é relativa à configuração inicial indeformada, e a representação final da estrutura deformada é mostrada somente por meio da sua forma. A Figura 4.43 mostra a variação dos deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m). Como a casca é de geometria simétrica com atuação de carregamento simétrico, os valores dos

deslocamentos horizontais na direção  $y$  são os mesmos verificados na direção  $x$ . A variação dos deslocamentos verticais na direção  $z$  (m) é mostrada na Figura 4.44.

Apesar de todos os valores extremos para as tensões principais constarem da Tabela 4.10, só serão apresentadas as figuras das distribuições destas tensões na superfície média da casca. Sendo assim, a distribuição das tensões principais máximas  $\sigma_1$  (MPa) é mostrada na Figura 4.45, a distribuição das tensões principais  $\sigma_2$  (MPa) é mostrada na Figura 4.46, e na Figura 4.47 a distribuição das tensões principais mínimas  $\sigma_3$  (MPa).

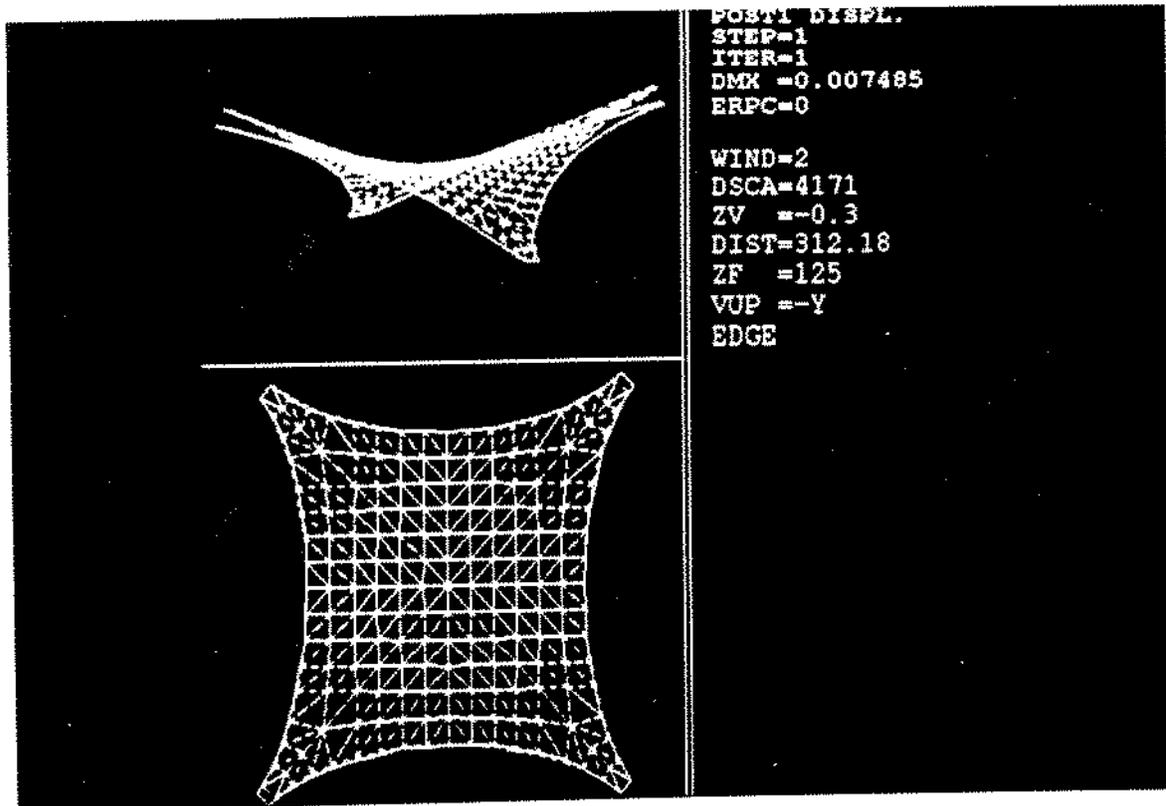


Figura 4.42 - Casca na configuração deformada

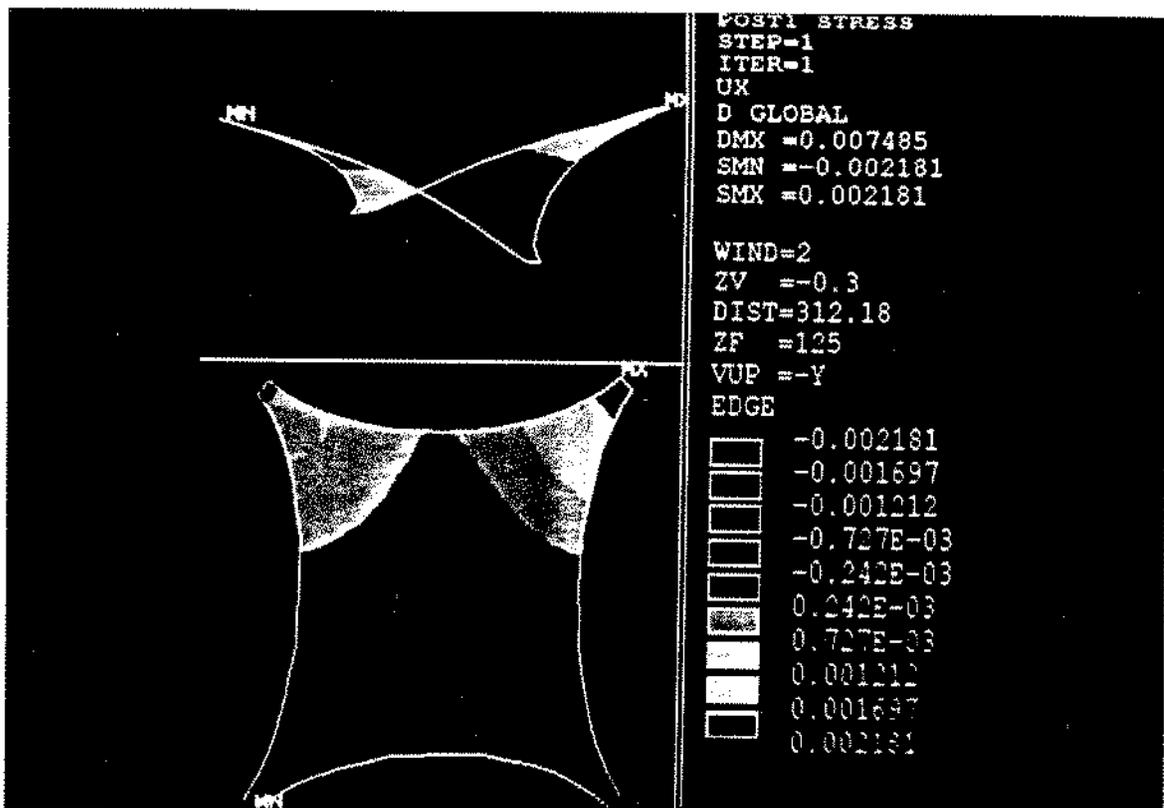


Figura 4.43 - Deslocamentos horizontais na direção  $x$  (m)

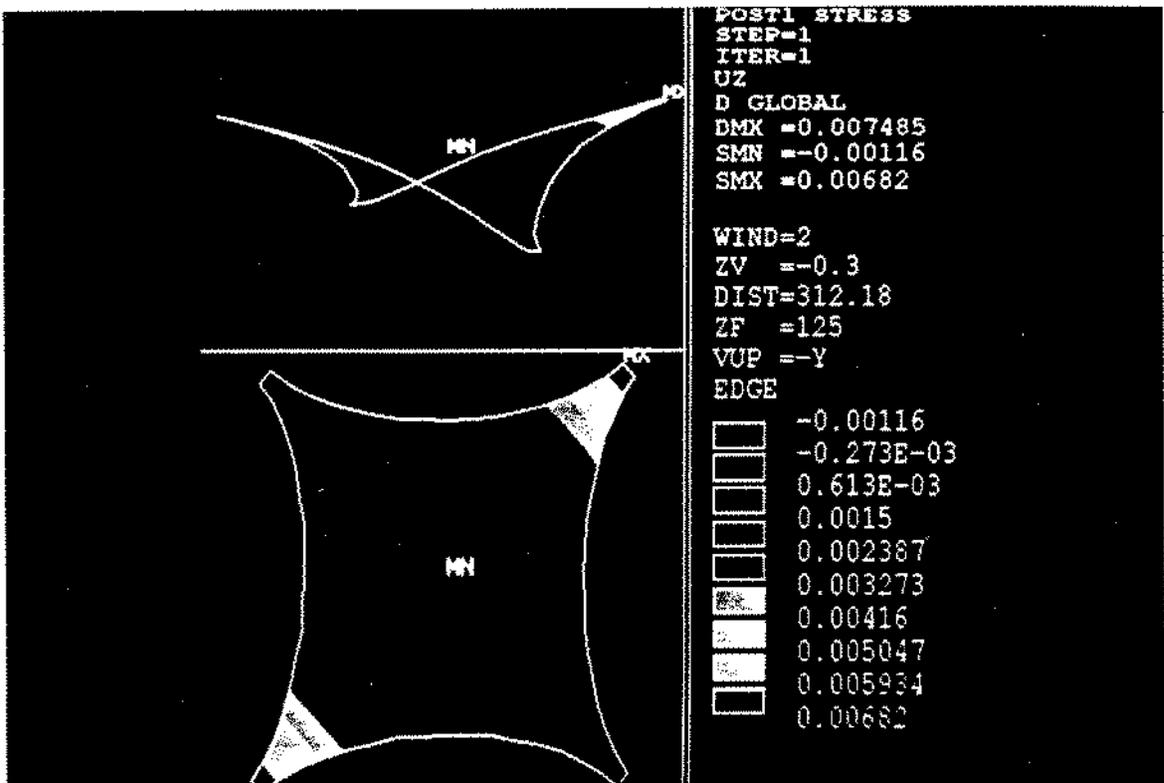


Figura 4.44 - Deslocamentos verticais na direção  $z$  (m)

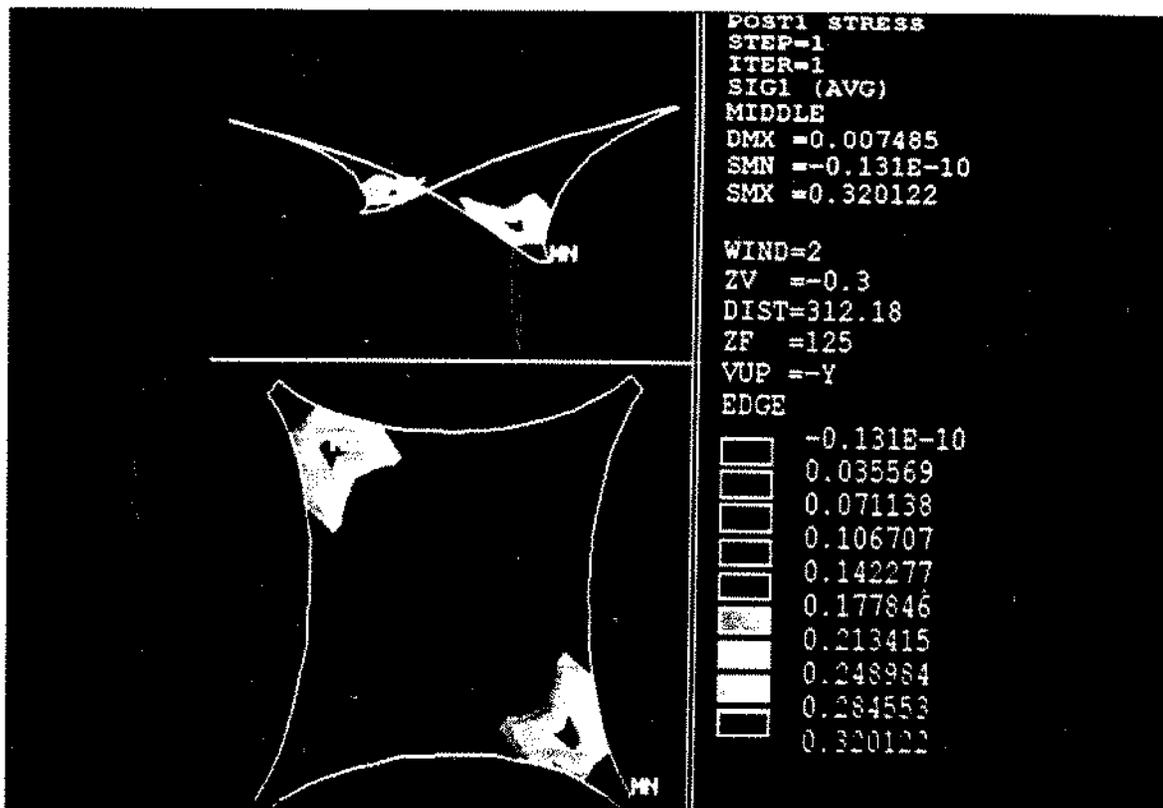


Figura 4.45 - Tensões principais  $\sigma_1$  na superfície média (MPa)

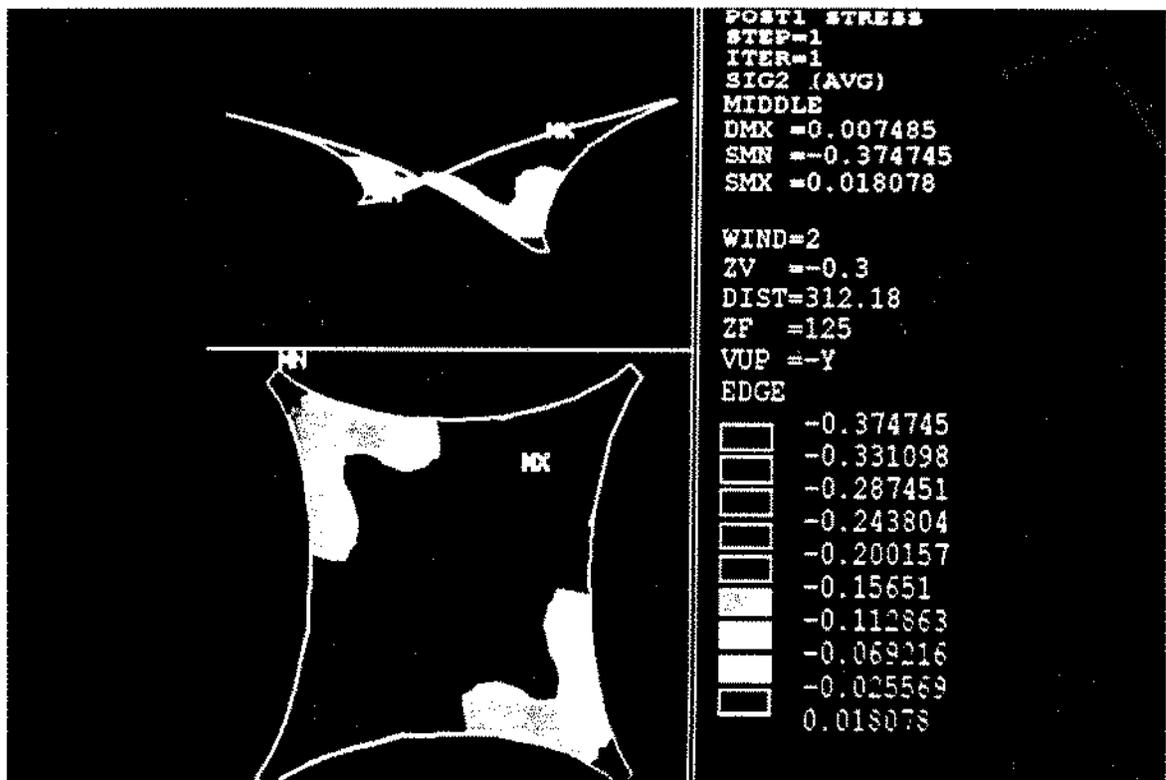


Figura 4.46 - Tensões principais  $\sigma_2$  na superfície média (MPa)

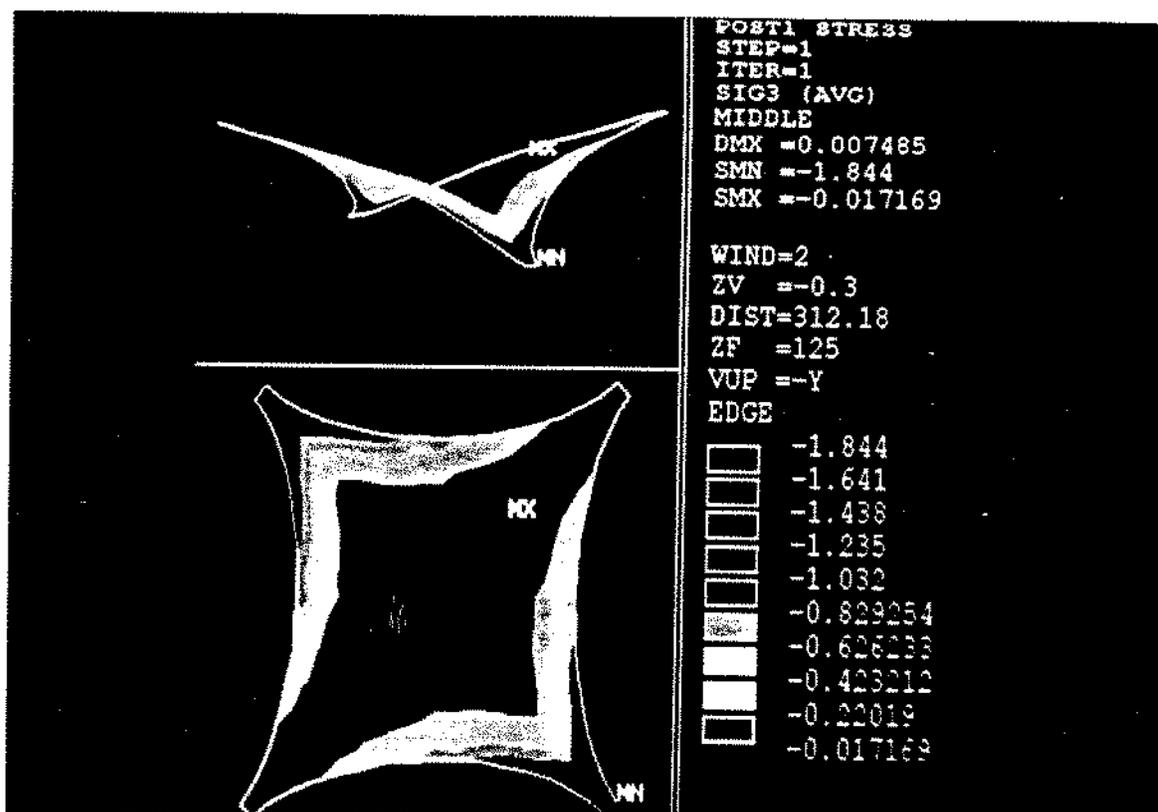


Figura 4.47 - Tensões principais  $\sigma_3$  na superfície média (MPa)

Para a casca de concreto armado, que foi obtida por meio de deslocamentos impostos à membrana, se os apoios inferiores numa mesma diagonal forem considerados engastados em vez de fixos, e as bordas forem consideradas livres, os resultados obtidos para os deslocamentos e tensões principais são mostrados na Tabela 4.11.

Verifica-se que, mesmo para uma estrutura em que sua geometria foi obtida por meio de modo totalmente adverso ao carregamento principal que ela possa vir a suportar, os resultados são satisfatórios do ponto de vista estrutural. Considerando que o concreto empregado na sua execução tenha resistência à compressão de 15,00 MPa e resistência à tração de 1,50 MPa, as tensões principais que ocorrem ao longo da estrutura em casca ultrapassam o limite de resistência à tração do concreto em algumas regiões. Portanto, neste caso deve ser colocada uma armadura que não é construtiva, além da prevenção com relação a outros carregamentos secundários que possam vir a atuar sobre a estrutura.

Deste modo é possível projetar estruturas com fins estéticos que servem também como obras de arte plástica.

CASCA DE CONCRETO SOB ATUAÇÃO DO PESO PRÓPRIO (APOIOS ENCASTADOS)				
E = 2,10 . 10 <sup>4</sup> MPa		b = 5,50 m		
V = 0,20		h = 1,25 m		
$\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$		h <sup>c</sup> = 2,50 m		
g = 9,80 m/s <sup>2</sup>		h <sup>a</sup> = 2,50 m		
a = 5,50 m		h <sup>b</sup> = 2,50 m		
		t = 0,05 m		
DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA (m)				
X <sub>max</sub> = 1,75 . 10 <sup>-3</sup>		X <sub>min</sub> = -1,75 . 10 <sup>-3</sup>		
Y <sub>max</sub> = 1,75 . 10 <sup>-3</sup>		Y <sub>min</sub> = -1,75 . 10 <sup>-3</sup>		
Z <sub>max</sub> = 5,52 . 10 <sup>-3</sup>		Z <sub>min</sub> = -7,86 . 10 <sup>-4</sup>		
TENSÕES PRINCIPAIS (MPa)				
		Superfície Inferior	Superfície Média	Superfície Superior
$\sigma_1$	max	1,14	2,33 . 10 <sup>-1</sup>	3,99
	min	-5,59 . 10 <sup>-11</sup>	-1,33 . 10 <sup>-11</sup>	-6,08 . 10 <sup>-12</sup>
$\sigma_2$	max	2,86 . 10 <sup>-1</sup>	1,76 . 10 <sup>-2</sup>	1,82
	min	-2,54	-3,21 . 10 <sup>-1</sup>	-5,60 . 10 <sup>-1</sup>
$\sigma_3$	max	5,30 . 10 <sup>-12</sup>	-9,78 . 10 <sup>-3</sup>	3,84 . 10 <sup>-11</sup>
	min	-7,48	-1,78	-2,48

Tabela 4.11 - Forma gerada por prescrição de deslocamentos

#### 4.8 CONCLUSÃO

Analisando os resultados obtidos, verifica-se que estão de acordo com os objetivos deste trabalho.

A comparação entre as formas obtidas com a faixa elástica deformável, sob a ação de diversos carregamentos, com os resultados obtidos através das equações dos funiculares dos carregamentos para os cabos flexíveis correspondentes mostra que os resultados são compatíveis com os resultados esperados do modelo computacional proposto.

A geometria gerada por meio do programa desenvolvido neste trabalho para o modelo similar ao da Universidade de Kassel

apresentou resultados muito próximos em relação aos resultados das pesquisas efetuadas naquela Universidade. Com as informações iniciais disponíveis, os resultados obtidos para a geometria da casca são adequados uma vez que a malha de elementos finitos não tem os pontos nodais coincidentes com os pontos da malha utilizada no modelo de comparação. A análise das tensões principais da forma gerada mostra que, para o carregamento utilizado, a casca é basicamente toda comprimida. As tensões principais que são normais às superfícies (inferior, média e superior) da casca são representadas por  $\sigma_1$  e tem seus valores desprezíveis; as tensões principais  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  estão contidas nos planos tangentes às superfícies da casca, e são todas de compressão.

Para as outras cascas geradas, com exceção da geometria obtida por deslocamentos prescritos impostos à membrana elástica deformável, em que os carregamentos considerados são o inverso dos carregamentos utilizados para a geração das formas com as membranas elásticas, os resultados para as tensões principais são muito bons e confirmam as previsões com relação ao comportamento estrutural estático das cascas nas quais predomina o efeito de compressão.

Para as cascas com espessura constante, o peso próprio pode ser considerado como um carregamento uniformemente distribuído na configuração inicial (horizontal), ou através da simulação do peso próprio com a componente vertical do efeito de pressão. No entanto, a primeira opção é mais indicada, pois o carregamento total não é dividido em incrementos de carga, e por isso o processamento é mais rápido. Na segunda opção, o processo é mais demorado para se atingir a configuração de equilíbrio da membrana devido aos incrementos de carga da ação de pressão.

No caso da casca gerada através de uma membrana elástica submetida ao efeito decorrente da prescrição de deslocamentos, era previsível que ela não se comportasse estruturalmente como as demais em relação à atuação do peso próprio, pois a sua geometria foi obtida por efeito diverso ao do carregamento atuante. Mesmo assim, verifica-se que as tensões principais de tração não são exageradas, e é possível construir a estrutura para suportar estas tensões. Para não ter este inconveniente, convém gerar a forma da casca compondo-se os efeitos de prescrição de deslocamentos com a

ação do peso próprio.

Convém observar que o modelo computacional desenvolvido permite a geração de formas geométricas de estruturas em casca por meio de membranas elásticas deformáveis submetidas à atuação de carregamentos distribuídos, concentrados e prescrição de deslocamentos simultaneamente.

#### 4.9 REFERÊNCIAS

- [4-01] - Belluzzi, O., *Ciencia de la Construccion I*, Aguilar, S. A., Madrid, 1971.
- [4-02] - Kollegger, J.; Mehlhorn, G., *Traglastversuch an einer freigeformten Stahlbetonschale*, Gesamthochschule Kassel Universität, 1989.
- [4-03] - Ramm, E.; Mehlhorn, G., *On shape finding methods and ultimate load analysis of reinforced concrete shells*, *Engineering Structures*, v. 13, april, pp. 178-198, 1991.

**CAPÍTULO 5**

**CONCLUSÃO**

## 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados comentários finais sobre o modelo computacional desenvolvido para a geração de formas geométricas livres de estruturas em casca. São também sugeridos alguns temas complementares, e diretamente relacionados ao assunto, para pesquisas posteriores com o intuito de se tratar o tema sobre as estruturas em casca de modo abrangente e global.

## 5.2 SOBRE O MODELO COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO

A era da informática está presente e irá cada vez mais interferir no dia a dia de todos os segmentos da sociedade. No trabalho e no lazer, em todos os campos o homem tem que conviver com a informática em menor ou maior grau, e se adaptar às transformações decorrentes do crescimento científico e tecnológico.

Com as novas possibilidades tecnológicas disponíveis, o tratamento das estruturas em casca não é uma exceção à regra. Como foi mostrado neste trabalho, muitos modelos têm sido desenvolvidos para a geração de formas de estruturas em casca. Apesar de vários engenheiros e arquitetos terem projetado com sucesso muitas cascas com esses modelos, uma nova fase no tratamento destas estruturas está em pleno desenvolvimento. São os modelos computacionais de geração de formas de cascas que têm como parâmetros várias opções de otimização. Estes modelos têm provido bons resultados com relação aos objetivos pretendidos no tratamento destas estruturas.

Com o modelo proposto nesta tese, as formas a serem geradas são de número ilimitado. Podem ser feitas diversas combinações das variáveis de geração, e adequá-las às limitações e objetivos de cada projeto em particular.

Não existem as limitações dos modelos como os utilizados por Isler. Os modelos reduzidos podem até ser construídos, mas após uma pesquisa ampla através do modelo computacional das várias formas possíveis para um determinado projeto.

No caso das estruturas em casca, a determinação da forma geométrica torna-se o ponto de partida para o desenvolvimento

integrado de projetos envolvendo os aspectos estrutural, arquitetônico e construtivo.

Apesar de alguns trabalhos terem sido desenvolvidos há vários anos, as pesquisas para geração de formas de estruturas em casca por modelos computacionais tiveram um desenvolvimento mais acentuado nos últimos anos. Esta tese começou a ser desenvolvida praticamente na mesma época em que outros trabalhos de doutorado, notadamente na Alemanha, começaram a ser desenvolvidos.

Nesta tese, as técnicas de programação matemática são utilizadas para gerar formas de estruturas em casca obtidas por meio de configurações de equilíbrio de uma membrana elástica deformável, com a utilização do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Nos outros trabalhos, as técnicas de programação matemática são utilizadas para otimizar formas pré-determinadas de estruturas em casca com relação a algum parâmetro relevante adotado, considerando outras funções objetivo.

Dos resultados obtidos nos exemplos ressalta-se a comprovação do comportamento estático estrutural de acordo com a Teoria de Membrana para as formas das casca geradas. A formulação desenvolvida no Capítulo 3, com o elemento finito triangular de membrana com deformação constante, é simples mas com resultados obtidos muito bons, conforme pode ser visto no Capítulo 4.

### 5.3 TEMAS PARA PESQUISAS POSTERIORES

Para as formas geométricas das estruturas em casca geradas, foram feitas análises do comportamento estático. O campo de pesquisas relacionado ao estudo das cascas é muito amplo. Estas pesquisas podem envolver um grupo multidisciplinar de engenheiros, arquitetos, físicos e matemáticos, onde devem existir preocupações com os aspectos relacionados aos projetos arquitetônicos e estruturais, e às técnicas e processos construtivos.

Os efeitos da não linearidade do material, bem como as influências dependentes do tempo e os efeitos de instabilidade não foram considerados no modelo. Estas abordagens são assuntos para serem tratados posteriormente em sequência a este trabalho.

As pesquisas sobre os efeitos de vibração, instabilidade,

análises não lineares dependentes do tempo, bem como inovações nas formas das cascas permanecem como algumas das principais áreas de análise de estruturas em casca.

Embora o comportamento de cascas ter sido considerado satisfatório com relação aos efeitos sísmicos em terremotos recentes, é necessária uma pesquisa mais detalhada sobre o assunto.

Os pontos sugeridos para serem abordados e pesquisados posteriormente com relação às estruturas em casca de um modo geral são:

- pesquisas de desenvolvimento e aperfeiçoamento de técnicas de programação matemática para aplicação em otimização de estruturas em casca;

- adequação de outros elementos finitos de membrana, com outras funções aproximadoras, para a geração de formas de estruturas em casca combinando-se as técnicas de programação matemática com a técnica dos elementos finitos;

- análise numérica do comportamento estrutural estático das formas obtidas com relação aos efeitos de recalques de apoios e de temperatura;

- análise numérica do comportamento estrutural dinâmico das formas obtidas, como por exemplo, com relação ao efeito do vento;

- análise do comportamento das cascas geradas com relação aos efeitos da instabilidade local e global;

- análise das formas das estruturas em casca em relação ao conforto térmico, acústica e iluminação;

- desenvolvimento de técnicas e de processos construtivos aplicados às estruturas em casca;

- construção e instrumentação de modelos em laboratório das formas geradas pelo modelo computacional; confrontação dos resultados obtidos em laboratório experimental e análise numérica computacional;

- estudo da viabilidade econômica e levantamento dos custos envolvidos na construção destas estruturas nas diferentes fases de execução; comparação com os custos das construções atuais.

Todos os estudos devem ser realizados levando-se em conta as condições brasileiras de disponibilidade de materiais, tipos de solos ocorrentes, de temperatura, umidade, estações climáticas,

etc... Não se tem disponível registros detalhados do comportamento destas estruturas. Na Suíça as condições são totalmente diferentes das condições do Brasil. Segundo Isler, mesmo para as condições adversas dos ambientes em que são construídas as cascas na Europa, estas estruturas têm se comportado muito bem. Os modelos físicos de geração de formas asseguram um bom comportamento estrutural, pois as cascas trabalham aproximadamente de acordo com a Teoria de Membrana, em que só há compressão. Não tem havido problemas de infiltração, nem de fissuras ou trincas. A conservação e a manutenção destas estruturas tem sido feitas sem problemas.

Estes são os principais pontos envolvidos nas pesquisas sobre as estruturas em casca, além da geração de formas geométricas por métodos computacionais que é tratada como enfoque central deste trabalho.

APÊNDICE A

MÉTODOS DE  
OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA  
APLICADOS À  
ANÁLISE ESTRUTURAL

## A.1 INTRODUÇÃO

Existem alguns métodos computacionais básicos de programação matemática que podem ser utilizados para se encontrar configurações de equilíbrio de estruturas elásticas não lineares. Neste apêndice, são abordados de modo sucinto os conceitos relativos ao método quase-Newton e ao método incremental Newton-Raphson, que são de particular interesse para este trabalho.

São apresentados os conceitos fundamentais e os detalhes mais relevantes dos métodos empregados para se determinar posições de equilíbrio obtidas através do modelo matemático proposto para a análise estrutural não linear de membranas.

O texto apresentado neste apêndice é proveniente principalmente da publicação *Conceitos Fundamentais e Métodos Computacionais Básicos para Encontrar Configurações de Equilíbrio de Estruturas Não Lineares*, do Prof. Vinicius Arcaro (1992), da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP. O intuito desta transcrição é contribuir para uma melhor compreensão dos métodos computacionais empregados neste trabalho.

## A.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Função objetivo é uma função matemática para a qual se pretende conhecer os pontos do seu domínio em que ocorrem extremos da função e os valores que esta assume. No caso de análise estrutural, a função objetivo pode ser a Energia Potencial Total que deve ser minimizada para se determinar configurações de equilíbrio, de acordo com o princípio da mínima Energia Potencial Total.

O procedimento que deve ser adotado para se encontrar os pontos de mínimo de uma função objetivo é o seguinte: calcular o valor da função em algum ponto pertencente ao domínio da mesma e, determinar neste ponto uma direção na qual o valor da função decresça. A partir desta direção, encontrar o valor de mínimo da função objetivo que deve ser o novo ponto de partida. O processo estará completo quando num determinado ponto, que é o ponto de

mínimo, não houver uma direção na qual o valor da função diminua.

Adotando uma função multi-variável não linear qualquer representada por:

$$\psi(\mathbf{z}) = \psi(z_1, z_2, \dots, z_n): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

e, considerando um ponto  $\mathbf{z}$  pertencente a uma reta que passa pelo ponto  $\mathbf{z}^0$ , e tem uma direção dada por um vetor  $\mathbf{d}$ , tem-se:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}^0 + \delta \mathbf{d} \quad (\text{A.2})$$

Ao considerar um ponto  $\mathbf{z}$  dado pela expressão anterior, é importante observar que  $\psi(\mathbf{z})$  se restringe a uma função de uma única variável  $\delta$ . Sendo assim, tem-se que  $\psi(\mathbf{z}) = \psi(\delta)$ . A derivada primeira de  $\psi(\delta)$  é representada por:

$$\psi'(\delta) = \sum_{i=1}^n \psi_{, z_i} z_i', \delta = \sum_{i=1}^n \psi_{, z_i} d_i \quad (\text{A.3})$$

e, a derivada segunda de  $\psi(\delta)$  é:

$$\psi''(\delta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{, z_i z_j} d_i d_j \quad (\text{A.4})$$

Definindo um vetor  $\mathbf{r}(\mathbf{z})$ , obtido da derivada primeira de  $\psi(\mathbf{z})$ , e uma matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{z})$ , obtida da derivada segunda de  $\psi(\mathbf{z})$ , tem-se que:

$$\mathbf{r}_i = \psi_{, z_i} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{S}_{i j} = \psi_{, z_i z_j} \quad (\text{A.6})$$

sendo que o vetor  $\mathbf{r}(\mathbf{z})$  é conhecido como o vetor gradiente de  $\psi(\mathbf{z})$ , e a matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{z})$  é conhecida como a matriz Hessiana de  $\psi(\mathbf{z})$ . Portanto, as expressões para  $\psi'(\delta)$  e  $\psi''(\delta)$  podem ser representadas por:

$$\psi'(\delta) = \mathbf{r}(\mathbf{z})^T \mathbf{d} \quad (\text{A.7})$$

$$\psi''(\delta) = \mathbf{d}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) \mathbf{d} \quad (\text{A.8})$$

Em análise estrutural por elementos finitos em que  $z$  representa os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura, a função  $\psi(z)$  representa a Energia Potencial Total, o vetor  $r(z)$  representa o vetor resíduo que contém as equações de equilíbrio, e a matriz  $S(z)$  é a representação da matriz de rigidez tangente.

### A.3 DIREÇÃO DE DESCIDA

Para determinar uma direção de descida, considere a expansão de  $\psi(\delta)$  pela série de Taylor em torno de  $\delta=0$ :

$$\psi(\delta) = \psi(0) + \psi'(0) \delta + \psi''(0) \frac{\delta^2}{2!} + \dots \quad (\text{A.9})$$

e, utilizando as expressões anteriores para as derivadas primeira e segunda de  $\psi(\delta)$ , tem-se que:

$$\psi(z^0 + \delta d) = \psi(z^0) + \delta r(z^0)^T d + \frac{1}{2} \delta^2 d^T S(z^0) d + \dots \quad (\text{A.10})$$

ou, ainda:

$$\psi(z^0 + \delta d) - \psi(z^0) = \delta \left[ r(z^0)^T d + \frac{1}{2} \delta d^T S(z^0) d + \dots \right] \quad (\text{A.11})$$

O valor do parâmetro  $\delta$  pode ser restrito a  $\delta \geq 0$  sem perda da generalidade da expressão. Pode ser notado que o sinal do segundo membro da expressão anterior é dominado pelo sinal proveniente de  $[ r(z^0)^T d ]$  para pequenos valores de  $\delta$ , ou, existe um intervalo  $(0, \bar{\delta})$  de modo que para  $\delta \in (0, \bar{\delta})$  o sinal do segundo membro da expressão é definido pelo sinal de  $[ r(z^0)^T d ]$ . Supondo que seja satisfeita a inequação:

$$[ r(z^0)^T d ] < 0 \quad (\text{A.12})$$

então a direção  $d$  é denominada direção de descida, pois para o parâmetro  $\delta \in (0, \bar{\delta})$  é verificada a inequação:

$$\psi(\mathbf{z}^0 + \delta \mathbf{d}) < \psi(\mathbf{z}^0) \quad (\text{A.13})$$

ou seja, o valor da função decresce.

Para determinar uma direção de descida pela deflexão do vetor gradiente, considere uma matriz simétrica positiva definida  $\mathbf{B}$  qualquer, sendo que uma direção de descida pode ser dada por:

$$\mathbf{d} = -\mathbf{B} \mathbf{r}(\mathbf{z}^0) \quad (\text{A.14})$$

pois, a partir desta expressão para o vetor  $\mathbf{d}$ , tem-se:

$$\mathbf{r}(\mathbf{z}^0)^T \mathbf{d} = -\mathbf{r}(\mathbf{z}^0)^T \mathbf{B} \mathbf{r}(\mathbf{z}^0) < 0 \quad (\text{A.15})$$

Os métodos computacionais básicos, que são utilizados para se encontrar os pontos de mínimo local de uma função não linear são diferenciados principalmente pela escolha da matriz positiva definida  $\mathbf{B}$ .

#### A.4 BUSCA UNIDIMENSIONAL

Adotando um ponto qualquer pertencente ao domínio da função objetivo, e sendo escolhida uma direção em que o valor da função decresce, embora não seja necessário, é recomendável a determinação do ponto de mínimo da função nesta direção. Este procedimento é denominado busca unidimensional.

O problema da determinação do ponto de mínimo de uma função de  $n$  variáveis é reduzido a uma sequência de problemas de determinação do ponto de mínimo de uma função  $\psi(\delta)$ , de apenas uma variável  $\delta$ , com  $\delta \geq 0$ .

##### A.4.1 Método da Interpolação Cúbica

Dentre os diversos métodos que podem ser utilizados para se encontrar o ponto de mínimo de uma função de uma variável, um muito utilizado é o da interpolação cúbica.

Denominando  $\delta^*$  como o ponto de mínimo de  $\psi(\delta)$  com  $\delta \geq 0$ , pelo

método da interpolação cúbica é encontrado um intervalo inicial  $(\delta_1, \delta_2)$  de modo que  $\delta^*$  pertença a este intervalo. Utilizando os valores da função objetivo e da derivada primeira dos pontos limites do intervalo, que são  $\psi(\delta_1)$ ,  $\psi'(\delta_1)$ ,  $\psi(\delta_2)$  e  $\psi'(\delta_2)$ , é possível interpolar neste intervalo uma função cúbica em  $\delta$ . Para a função cúbica interpolada, determinar o ponto de mínimo e o valor da derivada primeira e utilizar estes valores para redefinir o intervalo anterior. O procedimento deve ser repetido até que uma determinada precisão seja satisfeita. O último valor do parâmetro  $\delta$  encontrado é o valor de  $\delta^*$ .

#### A.4.2 Método da Bipartição

Outro método utilizado para se encontrar o ponto de mínimo de uma função de uma variável é conhecido como método da bipartição. Determina-se um intervalo inicial  $(\delta_1, \delta_2)$  de modo que  $\delta^* \in (\delta_1, \delta_2)$ . Em seguida é calculado  $\delta$  como a média aritmética de  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , e a derivada primeira  $\psi'(\delta)$ . Estes dois valores são utilizados para redefinir o intervalo anterior. O procedimento deve ser repetido até que uma determinada precisão seja satisfeita e o valor para parâmetro  $\delta^*$  é o valor do último  $\delta$  encontrado.

O método da bipartição é interessante pelo fato de não ser preciso calcular o valor de  $\psi(\delta)$ , que no contexto da análise estrutural significa dispensar o cálculo do valor da Energia Potencial Total. Este método é conveniente no caso em que a função Energia Potencial Total, apesar de existir, não está disponível.

### A.5 MÉTODOS COMPUTACIONAIS BÁSICOS

Um algoritmo genérico utilizado para se encontrar pontos de mínimo local de uma função não linear pode ser escrito como:

```

z ← ponto de partida
i ← 0
enquanto (  $\|z\| > \epsilon_p \|r(0)\|$  ) e (  $i < \text{limite}$  ) faça
    começo
    i ← i + 1
    d ←  $-B r(z)$ 
     $\delta$  ← busca unidimensional
    z ←  $z + \delta d$ 
    fim

```

(A.16)

A direção de descida é obtida pela deflexão do vetor gradiente por uma matriz  $B$  positiva definida qualquer. A escolha da matriz  $B$  determina o método de otimização empregado.

Convém ressaltar que o valor de  $\epsilon_p$  deve ser suficientemente pequeno. A norma utilizada deve ser a norma infinito, pois deste modo há um significado importante no contexto da análise estrutural. Assim, o critério de parada do algoritmo significa que o máximo desequilíbrio nodal é menor ou igual a  $\epsilon_p$  vezes o máximo desequilíbrio nodal calculado para a estrutura na posição cujos deslocamentos incógnitos são iguais a zero, que é geralmente a configuração indeformada da estrutura. Nessa configuração, portanto, o máximo desequilíbrio nodal é simplesmente a máxima força nodal aplicada. Porém, no caso de não haver força aplicada, devem ser prescritos deslocamentos não nulos para alguns pontos nodais, o que resultará num vetor residuo diferente de zero.

#### A.5.1 Método Quase-Newton

Quando para o cálculo da matriz Hessiana é necessário um esforço computacional relativamente excessivo, ou mesmo porque as expressões para as suas componentes são impraticáveis ou não estão disponíveis, é interessante a utilização do método quase-Newton.

A utilização deste método de análise de estruturas não lineares é muito atraente porque dispensa a trabalhosa obtenção das expressões para as componentes da matriz de rigidez, sendo necessárias somente as expressões para a função Energia Potencial Total e seu gradiente.

Um modelo para a construção da matriz inversa aproximada da matriz Hessiana pressupõe que esta aproximação se mantém constante em todas as iterações. Existem também modelos mais sofisticados, em que as aproximações são atualizadas a cada iteração de acordo com o comportamento da função objetivo e do seu gradiente. Neste trabalho, a inversa da matriz Hessiana é construída pela atualização de sua primeira aproximação, que deve ser por construção uma matriz positiva definida, sendo inicialmente adotada a matriz identidade.

O algoritmo utilizado, e que é apresentado a seguir, é uma variação do método denominado DFP (Davidon, Fletcher e Powell), cuja formulação pode ser encontrada em Luenberger, 1984. O fator  $\gamma$  está associado ao bom condicionamento que a matriz aproximada obtida deve possuir.

```

z ← ponto de partida
B ← I
i ← 0
enquanto ( ||z|| > εp ||r(0)|| ) e ( i < limite ) faça
    começo
    i ← i + 1
    p ← z
    q ← r(z)
    d ← -B r(z)
    δ ← busca unidimensional
    z ← z + δ d
    p ← z - p
    q ← r(z) - q
    γ ← pTq / qTB q
    B ← ( B - B q qTB / qTB q ) γ + p pT / pTq
    fim

```

(A.17)

### A.5.2 Método Incremental Newton-Raphson

O método incremental Newton-Raphson é utilizado para a resolução direta do sistema de equações não lineares obtidas das equações de equilíbrio. Convém observar que este método não deve

ser confundido com o método de Newton, que é utilizado para procurar um ponto de mínimo local de uma função objetivo.

Considere um sistema de  $n$  equações não lineares, que contém  $n$  incógnitas, representado por:

$$r(z) = 0 \quad (\text{A.18})$$

em que a solução é representada por  $z^*$ , e cada componente do vetor  $r(z)$  é uma função não linear dada por:

$$r_i(z): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.19})$$

Expandindo pela série de Taylor em torno de um ponto  $z^0$  qualquer, é possível obter uma aproximação para a função  $r_i(z)$  que pode ser representada por:

$$r_i(z) \approx r_i(z^0) + \sum_{j=1}^n r_{i,z_j} (z_j - z_j^0) \quad (\text{A.20})$$

e, definindo uma matriz  $S(z)$ , conhecida como matriz Jacobiana de  $r(z)$ , em que seus termos são representados por:

$$S_{ij} = r_{i,z_j} \quad (\text{A.21})$$

obtém-se a expressão:

$$r(z) \approx r(z^0) + S(z) (z - z^0) \quad (\text{A.22})$$

No contexto da análise estrutural em que  $z$  representa os deslocamentos nodais da estrutura,  $r(z)$  representa o vetor residuo que contém as equações de equilíbrio e,  $S(z)$  a matriz de rigidez.

Considerando o ponto de mínimo do segundo membro da expressão aproximadora de  $r(z)$  como uma aproximação aceitável do ponto de mínimo de  $r(z)$ , a solução aproximada pode ser escrita como:

$$z^1 = z^0 - S(z^0)^{-1} r(z^0) \quad (\text{A.23})$$

O ponto  $z^1$  pode ser adotado como um novo ponto de partida  $z^0$ , e com sucessivas iterações, é obtido um valor aproximado para  $z^*$  dentro de níveis aceitáveis de precisão. Pode ser demonstrado que a convergência do processo depende do ponto de partida que deve ser suficientemente próximo de  $z^*$ .

Adotando um parâmetro  $\mu$ , a estratégia incremental consiste em definir uma sequência de problemas escritos como:

$$r(z, \mu) = 0 \quad (\text{A.24})$$

de modo que para  $\mu = \mu_0$  seja conhecida uma solução de:

$$r(z, \mu_0) = 0 \quad (\text{A.25})$$

e, para  $\mu = \mu_m$  tem-se que:

$$r(z, \mu_m) = r(z) \quad (\text{A.26})$$

Pode ser adotada pelo menos uma sequência ordenada de valores próximos começando por  $\mu_0$  até  $\mu_m$ , de modo que a solução de:

$$r(z, \mu_{k-1}) = 0 \quad (\text{A.27})$$

possa ser usada pelo método incremental Newton-Raphson como ponto de partida para a solução de:

$$r(z, \mu_k) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Partindo da solução para  $\mu = \mu_0$ , o método incremental Newton-Raphson pode ser utilizado em cada incremento sucessivo do valor  $\mu$  para se atingir a solução para  $\mu = \mu_m$ .

Num problema de análise estrutural não linear, para a aplicação da estratégia incremental, as equações de equilíbrio podem ser representadas por:

$$r(z) = p(z) - q(z) \quad (\text{A.29})$$

onde  $p(z)$  representa os esforços internos que equilibram os

esforços externos  $q(z)$  que atuam sobre a estrutura. Portanto, é possível se definir a função  $r(z, \mu)$  como:

$$r(z, \mu) = p(z) - \mu q(z) \quad (\text{A.30})$$

Se todos os deslocamentos impostos forem nulos, que é uma condição normal de vinculação de uma estrutura, e para o parâmetro  $\mu_0$  for atribuído o valor zero, o que representa a posição indeformada da estrutura em que os esforços internos são nulos e que é dada por  $z = 0$ , a expressão para  $r(z, \mu)$  é uma solução de:

$$r(z, \mu_0) = 0 \quad (\text{A.31})$$

e, para  $\mu_m = 1$ , pode ser escrito que:

$$r(z, \mu_m) = r(z) \quad (\text{A.32})$$

Pode ser definida uma sequência de valores  $\mu_k$  como:

$$\mu_k = k / m \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

(A.33)

em que o valor de  $m$  a ser adotado é tal que o número máximo de iterações requeridas para a convergência em cada incremento seja aproximadamente três.

Pela formulação apresentada, mesmo no caso em que todos os deslocamentos nodais são nulos, é impossível iniciar o processo incremental num ponto diferente daquele que representa a estrutura na posição indeformada ( $z = 0$ ).

Existem, porém, situações para as quais é interessante começar o processo incremental por uma configuração qualquer, como por exemplo, quando se conhece uma posição aproximada de equilíbrio, ou mesmo quando se tem interesse em encontrar várias configurações de equilíbrio da estrutura. Esta nova situação pode ser abordada ao se redefinir o problema parametrizado por:

$$r(z, \mu) = r(z) - (\mu - \mu_m) r(z^0) / (\mu_0 - \mu_m) \quad (\text{A.34})$$

Assim, para  $\mu = \mu_0$ ,  $z^0$  é uma solução de:

$$r(z, \mu_0) = 0 \quad (\text{A.35})$$

e, para  $\mu = \mu_m$ , pode ser escrito que:

$$r(z, \mu_m) = r(z) \quad (\text{A.36})$$

Deste modo, o processo incremental pode ser iniciado com um ponto  $z^0$  qualquer. Adotando  $\mu_0 = 1$  e  $\mu_m = 0$ , e definindo um vetor  $v$  como:

$$v = -r(z^0) \quad (\text{A.37})$$

o problema parametrizado pode ser escrito como:

$$r(z, \mu) = r(z) + \mu v \quad (\text{A.38})$$

Em análise estrutural, este procedimento implica em adicionar uma força fictícia na estrutura de modo a resultar numa configuração de equilíbrio na posição escolhida para iniciar o processo incremental. Este procedimento utiliza um incremento negativo, pois o objetivo é reduzir gradualmente a força fictícia que foi aplicada até se tornar zero.

## A.6 REFERÊNCIAS

- [A-01] - Arcaro, V. F., *Conceitos Fundamentais e Métodos Computacionais Básicos para Encontrar Configurações de Equilíbrio de Estruturas Não Lineares*, UNICAMP - Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, junho, 1992.
- [A-02] - Luenberger, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1984.

## BIBLIOGRAFIA

- [001] - Alpa, G.; Bozza, E.; Corsanego, A. and Del Grosso, A.,  
*Shape determination for shell structures on pointlike supports*, IASS-Bull., 67, August, 1978.
- [002] - Arcaro, V. F., *Conceitos Fundamentais e Métodos Computacionais Básicos para Encontrar Configurações de Equilíbrio de Estruturas Não Lineares*, UNICAMP - Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, junho, 1992.
- [003] - Balz, M., Isler, H., *Haus und Gehäuse*, Sonderdruck aus BETON-PRISMA 43, Herausgegeben von Bundesverband der Deutschen Zementindustrie, 1982.
- [004] - Bathe, K.-J.; Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [005] - Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T., *FINITE ELEMENTS, An Introduction*, Vol. I, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [006] - Beles, A.; Soare, M., *Paraboloidul Eliptic si Hiperbolic în Constructii*, Ed. Academiei Republicii Populare Romine, 1964.
- [007] - Belluzzi, O., *Ciencia de la Construccion I*, Aguilar, S. A., Madrid, 1971. adrid, 1971.
- [008] - Belluzzi, O., *Ciencia de la Construccion III*, Aguilar, S. A., Madrid, 1977.
- [009] - Berg, H. G., *Tragverhalten und Formfidung versteifter Kuppelschalen uber quadratischem Grundriss auf Einzelstutzen*, Dr. Ing. Diss., Bericht 79-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979.

- [010] - Billington, D. P., *Thin Shell Concrete Structures*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York, 1982.
- [011] - Bletzinger, K. U., *Formoptimierung von Flachentragwerken*, Dr. Ing. Diss., Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.
- [012] - Bletzinger, K. U.; Kimmich, S. and Ramm, E., *Interactive shape optimization of shells*, Int. Conf. on 'Advances in numerical methods in engineering, theory and application (NUMETA 90)', Swansea, UK, Elsevier, 1990.
- [013] - Bletzinger, K.-U.; Ramm, E., *Structural Optimization as Tool for Shape Design*, Numerical Methods in Engineering, pp. 465-477, 1992.
- [014] - Brebbia, C. A.; Connor, J. J., *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*, Butterworths, London, 1973.
- [015] - Chatterjee, B. K., *Theory and Design of Concrete Shells*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1971.
- [016] - Chen, W.-F.; Saleeb, A. F., *Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol. 1, Elasticity and Modeling*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
- [017] - Chronowicz, A., *The Design of Shells, A Practical Approach*, Ed. Crosby Lockwood, London, 1959.
- [018] - Conil, P., *Le Voile Autoportant, Conception - Tracé - Construction*, Éditions Eyrolles, Paris, 1967.
- [019] - Csonka, P., *Point-supported shells with free boundary*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 75, pp. 121-136, 1973.

- [020] - Day, A., *A general computer technique for form finding for tension structures*, Proc. IAAS Symp. on development of form, Morgantown, West Virginia, 1978.
- [021] - Desai, C. S., *Elementary Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [022] - Desai, C. S.; Abel, J. F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1972.
- [023] - Dikmen, M., *Theory of Thin Elastic Shells*, Pitman, Boston, 1982.
- [024] - Fialho, J. F. L., *Princípios orientadores do projeto de barragens abóboda*, LNEC, Lisboa, Publ. n° 65, 1955.
- [025] - Fialho, J. F. L., *Design of shells based on the experimental determination of funicular surfaces*, V Congresso IABSE, Lisboa, 1957.
- [026] - Fischer, L., *Theory and Practice of Shell Structures*, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-Munich, 1968.
- [027] - Flügge, W., *Stresses in Shells*, 2nd. Ed., Springer-Verlag, New York, 1973.
- [028] - Fung, Y. C.; Sechler, E. E., *Thin-Shell Structures: Theory, Experiment and Design*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [029] - Ghosh, B., *Investigation into the bending analysis of doubly curved shells*, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India, july, 1991.

- [030] - Gibson, J. E., *The Design of Shell Roofs*, 3rd. Ed., E. & F. N. Spon Ltd., London, 1968.
- [031] - Gill, P. E.; Murray, W., *Newton Type Methods for Unconstrained and Linearly Constrained Optimization*, *Mathematical Programming* 7, 1974.
- [032] - Gol'denveizer, A. L., *Teoria de los Cascarones Elasticos Delgados*, Cia. Editorial Continental, S. A., México, 1963.
- [033] - Gould, P. L., *Analysis of Shells and Plates*, Springer-Verlag, New York Inc., 1988.
- [034] - Green, A. E.; Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, Oxford at the Clarendon Press, 1954.
- [035] - Haas, A. M., *Design of Thin Concrete Shells*, Vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
- [036] - Hibbitt, H. D., *Some Follower Forces and Load Stiffness*, *International Journal of Solids and Structures*, John Wiley & Sons, Ltd., pp. 937-941, 1979.
- [037] - Isler, H., *Aplicaciones Recientes de Cascarones Representativos*, Congreso Internacional sobre la Aplicación de Estructuras Laminares en Arquitectura, México, 1967.
- [038] - Isler, H., *Concrete Shells and Architecture*, in Invited Lecture at the IASS Symposium on Membrane Structures and Space Frames, Bulletin IASS, n.º 91, Osaka, September, 1986.
- [039] - Isler, H., *Doce años de aplicación de cascarones tipo burbuja*, Congreso Internacional sobre la Aplicación de Estructuras Laminares en Arquitectura, México, 1967.

- [040] - Isler, H., *Eis-Versuche*, Schlusskapitel Eines, Vortrag gehalten am 2. Internationalen Symposium "Weitgespannte Flächentragwerke", Sonderforschungsbereich 64 - Universität Stuttgart, Mai, 1979.
- [041] - Isler, H., *New shapes for shells*, Int. Colloquium on Construction processes of shell structures, IASS, Madrid, 1959.
- [042] - Isler, H., *New Shapes for Shells - Twenty Years Later*, in Heinz Isler as Structural Artist, The Art Museum, Princeton University, New Jersey, 1980.
- [043] - Isler, H., *Schalen - Formgebung und Konstruktion*, Berichte der Bundesvereinigung der Prüfindenieure für Baustatik, Lübeck-Travemünde, 1978.
- [044] - Isler, H., *Structural Beauty of Shells*, XI Congress IABSE, Viena, Aug 31 - Sep 5, 1980.
- [045] - Isler, H., *The Stability of Thin Concrete Shells*, in Buckling of Shells, Ed.: E. Ramm, Springer, New York, 1982.
- [046] - Isler, H., *Typologie und Technik der Modernen Schalen*, Separatdruck aus Werk, Bauen+Wohnen, Dezember 1983.
- [047] - Isler, H., *Zur Korrelation von Formgebung und Stabilität bei dünnen Schalentragerwerken*, Vortrag gehalten am 2. Internationalen Symposium "Weitgespannte Flächentragwerke", Sonderforschungsbereich 64 - Universität Stuttgart, Mai, 1979.
- [048] - Kimmich, S., *Struckturoptimierung und Sensibilitatsanalyse mit finiten Element*, Dr. Ing. Diss., Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.

- [049] - Kollegger, J.; Mehlhorn, G., *Traglastversuch an einer freigeformten Stahlbetonschale*, Gesamthochschule Kassel Universität, 1989.
- [050] - Korda, J., *Ribless membrane shells with point supports at the corners*, Int. symp. on shell structures in engineering practice, Budapest, Vol. 1, pp. 179-190, 1965.
- [051] - Kraus, H., *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
- [052] - Lasdon, L. S., *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan Company, 1972.
- [053] - Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4nd. Ed., Dover, New York, 1927.
- [054] - Lundgren, H., *Cylindrical Shells*, Vol. I, The Danish Technical Press, Copenhagen, 1960.
- [055] - Luenberger, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1984.
- [056] - Malvern, L. E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [057] - Margarit, J.; Buxadé, C., *Cálculo de Estruturas en Paraboloides Hiperbólicas*, Manuales de Arquitectura - 3, Editorial Blume, Barcelona, 1969.
- [058] - Martinelli, D. A. O. et alii, *Introdução à Estruturas em Casca de Revolução - Capítulo 2*, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 1983.
- [059] - Martinelli, D. A. O. et alii, *Introdução à Estruturas em Casca de Revolução - Capítulos 3 e 4*, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 1983.

- [060] - Mollmann, H., *Introduction to the Theory of Thin Shells*, John Wiley & Sons Ltd., 1981.
- [061] - Murtagh, B. A.; Saunders, M. A., *MINOS 5.1 User's Guide*, Stanford University, 1987.
- [062] - Novozhilov, V. V., *Thin Shell Theory*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970.
- [063] - Paduart, A., *Les Voiles Minces en Béton Armé*, Presses Universitaires de Bruxelles, 1969.
- [064] - Pflüger, A., *Elementary Statics of Shells*, 2nd. ed., F. W. Dodge Corporation, 1961.
- [065] - Popov, E. P., *Progress in analysis and design of RC shells*, *Engineering Structures*, v. 13, april, pp. 128-143, 1991.
- [066] - Ramm, E., Schunk, E., *Heinz Isler Schalen*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1989.
- [067] - Ramm, E.; Mehlhorn, G., *On shape finding methods and ultimate load analysis of reinforced concrete shells*, *Engineering Structures*, v. 13, april, pp. 178-198, 1991.
- [068] - Ramm, E.; Bletzinger, K. U. and Kimmich, S., *Trimming of structures by shape optimization*, Proc. 2nd Int. conf. on 'Computer aided analysis and design of concrete structures, Zell am See, Austria, April 1990, Pineridge Press, Swansea, U. K., 1990.
- [069] - Ramaswamy, G.S., *Analysis, Design and Construction of a New Shell of Double Curvature*, in *Shell Research*, Proc. Symposium RILEM-IASS, Bruxelles, Set. 1961, North Holland, 1961.

- [070] - Ramaswamy, G. S., *Design and Construction of Concrete Shell Roofs*, McGraw-Hill Book Company, USA, 1968.
- [071] - Rekach, V. G., *Static Theory of Thin-walled Space Structures*, Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [072] - Scheck, H. J., *The force densities method for form finding and computation of general networks*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, pp. 115-134, 1974.
- [073] - Schnobrich, W. C., *Reflections on the behaviour of reinforced concrete shells*, *Engineering Structures*, v. 13, april, pp. 199-210, 1991.
- [074] - Sedlak, V. *Timber Shell Structures and their Shapes - Recent Developments and Design Approach*, International Timber Engineering Conference London, pp. 2.34-2.45, 1991.
- [075] - Seide, P., *Small Elastic Deformations of Thin Shells*, Noordhoff International Publishing Leyden, 1975.
- [076] - Smith, P. G.; Wilson, E. L., *Automatic design of shell structures*, *Proc. ASCE, Journal of Structural Division.*, pp. 191-201, January, 1971.
- [077] - Soare, M., *Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis*, Pergamon Press and Publishing House of the Academy of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, 1967.
- [078] - Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd. Ed., International Student Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., Tokyo, 1959.
- [079] - Ugural, A. C., *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, USA, 1981.

- [080] - Volterra, E.; Gaines, J. H., *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [081] - Williams, C. J. K., *The generation of a class of structural forms for vaults and sails*, *The Structural Engineer*, Vol. 68, n° 12/19, June, pp. 231-235, 1990.
- [082] - Zagottis, D. de, *Pontes e Grandes Estruturas: V - Introdução à Teoria das Placas e das Cascas*, Escola Politécnica-USP, São Paulo, 1973.
- [083] - Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, New York, 1971.