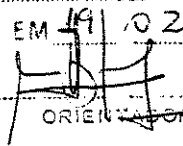


UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ROSALI NORIKO SUZUKI
FASSANI E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 19/10/2001


ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Modelamento Analítico e Numérico da
Transferência de Calor no Processo de Soldagem
com Múltiplos Passes**

Autora: Roseli Noriko Suzuki Fassani

Orientador: Prof. Dr. Osvair Vidal Trevisan

Co-orientadora: Profa. Dra. Roseana da Exaltação Trevisan

12/2001

UNIDADE	30
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	F264m
V. Ex.	
TOMBO BC/	48727
PROC.	16.892101
C ☐ D ☒	
PREÇO	R\$ 41,00
DATA	04/08/01
N.º CPD	

CM00158557-4

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE FABRICAÇÃO**

**Modelamento Analítico e Numérico da
Transferência de Calor no Processo de Soldagem
com Múltiplos Passes**

Autora: Roseli Noriko Suzuki Fassani

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan

Co-orientadora: Profa. Dra. Roseana da Exaltação Trevisan

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Materiais e Processos de Fabricação

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2001
S.P. - Brasil**

9979/1006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F264m Fassani, Roseli Noriko Suzuki
Modelamento analítico e numérico da transferência de
calor no processo de soldagem com múltiplos passes /
Roseli Noriko Suzuki Fassani. --Campinas, SP: [s.n.],
2001.

Orientadores: Osvaldo Vidal Trevisan, Roseana da
Exaltação Trevisan.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Green, Funções de. 2. Calor - Transmissão. 3.
Soldagem. 4. Diferenças finitas. I. Trevisan, Osvaldo Vidal
II. Trevisan, Roseana da Exaltação. III. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica. IV. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE FABRICAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

Modelamento Analítico e Numérico da
Transferência de Calor no Processo de Soldagem
com Múltiplos Passes

Autora: **Roseli Noriko Suzuki Fassani**

Orientador: **Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan**

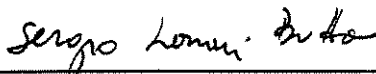
Co-orientadora: **Profa. Dra Roseana da Exaltação Trevisan**



Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan, Presidente
FEM/UNICAMP



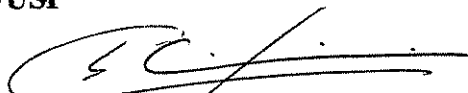
Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Sérgio Tonini Button
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Célio Taniguchi
Poli/USP



Prof. Dr. Cláudio Shyinti Kiminami
Dema/UFSCar

Campinas, 19 de fevereiro de 2001

À minha família, e
em especial ao meu marido.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan, pela orientação e apoio durante todos estes anos de trabalho.

Ao meu marido Fábio Luís Fassani, pela paciência, colaboração e incentivo nos momentos mais difíceis deste trabalho.

À Profa. Dra. Roseana da Exaltação Trevisan, pela possibilidade de utilização do laboratório de soldagem, sem o qual não seriam possíveis a realização dos experimentos.

À minha família, pela compreensão durante este período de trabalho.

Aos professores, funcionários e amigos do Departamento de Engenharia de Fabricação, pela convivência durante o desenvolvimento do trabalho.

Aos professores José Ricardo Figueiredo, Marcelo Moreira Ganzarolli e Sérgio Tonini Button, pelas sugestões valiosas prestadas ao trabalho.

Ao Departamento de Engenharia de Petróleo, pela possibilidade de utilização das estações, que permitiram o desenvolvimento numérico deste trabalho.

À FAPESP, pela concessão da bolsa de estudos e financiamento do projeto.

À USIMINAS, pela doação de material para a realização dos experimentos, especialmente aos senhores Ataíde Pereira da Mata e Luiz Gustavo Manreza, que viabilizaram o contato empresa-universidade.

Abstract

FASSANI, Roseli Noriko Suzuki, *Analytical and Numerical Modeling of Heat Flow in Multiple Pass Welding Process*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 211p. Tese (Doutorado).

In multiple pass welding process, the material undergoes fast cycles of heating and cooling. Materials subjected to phase changes may undergo microstructural modifications, resulting in alterations in their mechanical properties. The knowledge of the thermal cycle for a specific position gives important informations about the peak temperature and the cooling rate, which indicate possible phase changes in the weldment. In this work, analytical and numerical models were developed for one-dimensional and two-dimensional transient heat flow, and also for two-dimensional and three-dimensional steady-state heat flow. The distributed heat source and heat loss were taken into account in the analytical models. Besides convective and radiative heat losses, the change of physical properties with temperature was studied in the numerical models. The main contribution of this work was to provide original analytical solutions for the multipass welding process, in accordance with the heat flow and the mentioned topics. The thermal cycles provided by the analytical solutions were checked against the thermal cycles simulated by the numerical solutions. In one-dimensional transient and two-dimensional steady-state heat flow, the analytical and numerical thermal cycles were compared with those obtained in a experimental setup. The agreement between analytical, numerical and experimental results shows the validity of the proposed analytical models. The advantage of these models is that the influence of the welding parameters, material and plate thickness on the thermal cycle may be assessed in a confident and straightforward manner.

Key-words: Analytical Solution, Numerical Solution, Multiple Pass, Heat Flow, Green's Function, Distributed Heat Source.

Sumário

Lista de Figuras.....	v
Lista de Tabelas.....	ix
Nomenclatura.....	xi
 Capítulo 1 – Introdução e Objetivos.....	1
1.1 Introdução.....	1
1.2 Objetivos.....	2
1.2.1 Objetivo Geral.....	3
1.2.2 Objetivos Específicos.....	3
 Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica.....	5
2.1 Introdução.....	5
2.2 Transferência de Calor na Soldagem.....	5
2.2.1 Propriedades Físicas Independentes da Temperatura.....	8
2.2.2 Perdas de Calor Desprezíveis.....	10
2.2.3 Fonte de Calor Concentrada.....	12
2.2.4 Ausência de Mudança de Fase.....	16
2.3 Soldagem com Múltiplos Passes.....	18
 Capítulo 3 – Desenvolvimento Analítico.....	23
3.1 Introdução.....	23
3.2 Método da Função de Green.....	24
3.3 Modelo Unidimensional.....	26

3.4 Modelo Bidimensional Transiente.....	31
3.4.1 Fonte de Calor Concentrada Linear.....	32
3.4.2 Fonte de Calor Distribuída.....	38
3.4.2.a Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Unidimensional.....	38
3.4.2.b Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Semicircular.....	40
3.5 Modelo Bidimensional Quase-estacionário.....	43
3.6 Modelo Tridimensional Quase-estacionário.....	48
3.6.1 Fonte de Calor Concentrada Pontual, Chapa de Espessura Finita.....	50
3.6.2 Fonte de Calor Distribuída, Chapa de Espessura Finita.....	54
3.6.2.a Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Circular.....	54
3.6.2.b Fonte de Calor com Distribuição Hemisférica.....	57
3.6.3 Fonte de Calor Concentrada, Chapa de Espessura Infinita.....	61
3.6.4 Fonte de Calor Distribuída, Chapa de Espessura Infinita.....	63
3.6.4.a Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Circular.....	63
3.6.4.b Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Hemisférica.....	66
3.7 Consideração das Perdas de Calor Superficiais.....	68
3.7.1 Modelo Unidimensional Transiente.....	69
3.7.2 Modelo Bidimensional Transiente.....	70
3.7.3 Modelo Bidimensional Quase-estacionário.....	71
3.8 Resumo das Soluções Analíticas Obtidas.....	72
 Capítulo 4 – Desenvolvimento Numérico.....	 77
4.1 Introdução.....	77
4.2 Modelo Unidimensional.....	77
4.2.1 Nós Internos.....	78
4.2.2 Contorno $j = 0$ ($y = 0$).....	83
4.2.3 Contorno $j = m$ ($y = L$).....	84
4.3 Modelo Bidimensional.....	85
4.3.1 Nós Internos.....	86
4.4 Modelo Tridimensional.....	89
4.4.1 Nós Internos.....	89

Capítulo 5 – Desenvolvimento Experimental.....	93
5.1 Introdução.....	93
5.2 Materiais.....	93
5.3 Dimensões dos Corpos de Prova.....	94
5.4 Preparação dos Corpos de Prova.....	95
5.5 Disposição dos Termopares.....	95
5.6 Ciclos Térmicos.....	97
5.7 Processo de Soldagem.....	97
5.8 Obtenção das Variáveis do Processo.....	99
Capítulo 6 – Resultados e Discussões.....	103
6.1 Introdução.....	103
6.2 Modelo Unidimensional.....	104
6.2.1 Ciclos Térmicos Experimentais.....	104
6.2.2 Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos.....	107
6.2.2.a Efeito da Variação das Propriedades Físicas.....	109
6.2.2.b Efeito das Perdas Superficiais.....	113
6.2.2.c Efeito da Distribuição da Fonte de Calor.....	117
6.2.3 Comparação entre Ciclos Térmicos Teóricos e Experimentais.....	120
6.3 Modelo Bidimensional Quase-estacionário.....	124
6.3.1 Ciclos Térmicos Experimentais.....	124
6.3.2 Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos.....	127
6.3.2.a Efeito das Perdas Superficiais.....	132
6.3.2.b Efeito da Distribuição da Fonte de Calor.....	134
6.3.3 Comparação entre Ciclos Térmicos Teóricos e Experimentais.....	136
6.4 Modelo Bidimensional Transiente.....	140
6.4.1 Comparação entre Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos.....	140
6.4.2 Efeito das Perdas Superficiais.....	145
6.4.3 Efeito da Distribuição da Fonte de Calor.....	148
6.5 Modelo Tridimensional Quase-estacionário.....	150
6.5.1 Comparação entre Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos.....	150

6.5.2 Efeito da Distribuição da Fonte de Calor.....	156
6.5.2.a Chapa de Espessura Finita.....	156
6.5.2.b Chapa de Espessura Infinita.....	159
Capítulo 7 – Conclusões e Recomendações para Trabalhos Futuros.....	163
7.1 Conclusões.....	163
7.2 Recomendações para Trabalhos Futuros.....	166
Referências Bibliográficas.....	169
Apêndices.....	179

Lista de Figuras

- Figura 2.1 – Ciclos térmicos na soldagem multipasse com passes longos para três posições.
- Figura 2.2 – Ciclos térmicos na soldagem multipasse com passes curtos para duas posições:
(a) próximo ao primeiro passe; (b) próximo ao último passe.
- Figura 3.1 – Sistema de coordenadas para a soldagem a topo de chapas.
- Figura 3.2 – Fonte de calor com distribuição Gaussiana para o modelo unidimensional.
- Figura 3.3 – Fonte de calor com distribuição Gaussiana circular para o modelo bidimensional quase-estacionário.
- Figura 4.1 – Geometria e sistema de coordenadas do material.
- Figura 4.2 – Esquema para a discretização dos nós internos.
- Figura 4.3 – Esquema para a discretização do contorno $j = 0$.
- Figura 4.4 – Esquema para a discretização do contorno $j = m$.
- Figura 4.5 – Esquema para a discretização dos nós internos.
- Figura 5.1 – Tipo de junta utilizada no experimento (sc = sem chanfro; cc = com chanfro).
- Figura 5.2 – Esquema da posição dos termopares para o modelo unidimensional (vista comprimento x largura).
- Figura 5.3 – Esquema da posição dos termopares ao longo do comprimento do cordão de solda, para o modelo bidimensional quase-estacionário.
- Figura 5.4 – Montagem utilizada nos experimentos.
- Figura 5.5 – Variação da condutividade térmica com a temperatura para o aço baixa liga.
- Figura 5.6 – Variação do calor específico com a temperatura para o aço baixa liga.
- Figura 6.1 – Ciclos térmicos experimentais para os corpos de prova 1, 2 e 3.
- Figura 6.2 – Ciclos térmicos experimentais para o corpo de prova 2.
- Figura 6.3 – Ciclos térmicos analítico e numérico unidimensionais, para $y = 5\text{mm}$.

Figura 6.4 – Comparação entre os ciclos térmicos unidimensionais com propriedades constantes e variáveis, para o aço baixa liga, em $y = 3\text{mm}$.

Figura 6.5 – Comparação entre os ciclos térmicos unidimensionais com propriedades constantes e variáveis, para o aço inox 304, em $y = 3\text{mm}$.

Figura 6.6 – Comparação entre os modelos numéricos unidimensionais com e sem perdas superficiais, para $y = 3\text{mm}$.

Figura 6.7 – Comparação entre os modelos numéricos unidimensionais com e sem perdas superficiais, para $y = 10\text{mm}$.

Figura 6.8 – Comparação entre os modelos analítico e numérico unidimensionais com e sem perdas, para $y = 10\text{mm}$.

Figura 6.9 – Comparação entre os ciclos térmicos analíticos unidimensionais com fonte concentrada (plana) e distribuída (Gaussiana 1-D), para $y = 1\text{mm}$.

Figura 6.10 – Comparação entre os ciclos térmicos analíticos unidimensionais com fonte concentrada (plana) e distribuída (Gaussiana 1-D), para $y = 3\text{mm}$.

Figura 6.11 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimental para o cp1, em $y=12,45\text{mm}$.

Figura 6.12 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimental para o cp2, em $y=11,90\text{mm}$.

Figura 6.13 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimental para o cp3, em $y=13,10\text{mm}$.

Figura 6.14 – Ciclos térmicos experimentais para os corpos de prova 1, 2 e 3.

Figura 6.15 – Ciclos térmicos experimentais para o cp1, em duas posições ao longo da direção de soldagem.

Figura 6.16 – Ciclos térmicos analítico e numérico bidimensionais quase-estacionários, em $x_0=50\text{mm}$ e $y=5\text{mm}$.

Figura 6.17 - Ciclos térmicos numéricos bidimensionais para diferentes posições x_0 , em $y=5\text{mm}$.

Figura 6.18 – Ciclos térmicos analíticos e numéricos bidimensionais para diferentes posições x_0 , em $y=5\text{mm}$.

Figura 6.19 - Comparação entre os ciclos térmicos numéricos unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, para $y=4\text{mm}$ e $v=200\text{mm/min}$.

- Figura 6.20 - Comparação entre os ciclos térmicos numéricos unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, para $y=5\text{mm}$ e $v=400\text{mm/min}$.
- Figura 6.21 – Comparação entre os modelos analítico e numérico bidimensionais quase-estacionários com e sem perdas, para $x_0=42\text{mm}$ e $y=10\text{mm}$.
- Figura 6.22 – Comparação entre os modelos analíticos bidimensionais com fonte concentrada (linear) e distribuída (Gaussiana circular), para $x_0=90\text{mm}$ e $y=3\text{mm}$.
- Figura 6.23 – Comparação entre os modelos analíticos bidimensionais com fonte concentrada (linear) e distribuída (Gaussiana circular), para $x_0=90\text{mm}$ e $y=4\text{mm}$.
- Figura 6.24 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimentais para o cp1, em $x_0=42\text{mm}$ e $y=9,6\text{mm}$.
- Figura 6.25 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimentais para o cp2, em $x_0=45\text{mm}$ e $y=9,5\text{mm}$.
- Figura 6.26 - Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimentais para o cp3, em $x_0=43\text{mm}$ e $y=8,6\text{mm}$.
- Figura 6.27 – Ciclos térmicos analíticos e numérico para o modelo bidimensional transiente, em $y=5\text{mm}$, $z=7\text{mm}$ e espessura = 12mm .
- Figura 6.28 – Ciclos térmicos analíticos e numéricos para o modelo bidimensional transiente, em $y=5\text{mm}$, $z=19\text{mm}$ e espessura = 36mm .
- Figura 6.29 - Comparação entre os ciclos térmicos numéricos uni e bidimensional transiente, para $y=2\text{mm}$.
- Figura 6.30 – Comparação entre os modelos analíticos com e sem perdas superficiais, para $y=7\text{mm}$, $z=1\text{mm}$ e espessura = 12mm .
- Figura 6.31 – Comparação entre os modelos analíticos com e sem perdas superficiais, para $y=7\text{mm}$, $z=10\text{mm}$ e espessura = 12mm .
- Figura 6.32 – Comparação entre os modelos analíticos com e sem perdas superficiais, para $y=10\text{mm}$, $z=28\text{mm}$ e espessura = 36mm .
- Figura 6.33 – Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (linear) e distribuída (1-D e semi-circular), para $y=1,5\text{mm}$, $z=4\text{mm}$ e espessura = 12mm .
- Figura 6.34 – Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (linear) e distribuída (semi-circular), para $y=5\text{mm}$, $z=4\text{mm}$ e espessura = 12mm .
- Figura 6.35 – Ciclos térmicos analíticos e numérico para o modelo tridimensional quase-estacionário, em $x_0=50\text{mm}$, $y=5\text{mm}$, $z=5\text{mm}$ e espessura = 12mm .

Figura 6.36 – Ciclos térmicos analíticos e numérico para o modelo tridimensional quase-estacionário, em $x_0=80\text{mm}$, $y=6\text{mm}$ e $z=21\text{mm}$ (espessura = 36mm).

Figura 6.37 – Ciclos térmicos numéricos tridimensionais para diferentes posições x_0 , em $y=5\text{mm}$, $z=8\text{mm}$ e espessura = 12mm .

Figura 6.38 - Comparação entre os modelos numéricos bidimensional transiente e tridimensional quase-estacionário, para $y=5\text{mm}$, $z=4\text{mm}$ e $v=400\text{mm/min}$.

Figura 6.39 - Comparação entre os modelos numéricos bi e tridimensionais quase-estacionários, para $x_0=1,0\text{mm}$ e $y=4,0\text{mm}$.

Figura 6.40 – Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0=50\text{mm}$, $y=2\text{mm}$ e $z=1\text{mm}$ (espessura finita).

Figura 6.41 – Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0=80\text{mm}$, $y=5\text{mm}$ e $z=1\text{mm}$ (espessura finita).

Figura 6.42 – Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0=50\text{mm}$, $y=1\text{mm}$ e $z=2\text{mm}$ (espessura infinita).

Figura 6.43 - Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0=50\text{mm}$, $y=3\text{mm}$ e $z=5\text{mm}$ (espessura infinita).

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Soluções analíticas obtidas para a configuração unidimensional transiente.

Tabela 3.2 - Soluções analíticas obtidas para a configuração bidimensional quase-estacionário.

Tabela 3.3 - Soluções analíticas obtidas para a configuração bidimensional transiente.

Tabela 3.4 - Soluções analíticas obtidas para a configuração tridimensional quase-estacionário, chapa de espessura finita.

Tabela 3.5 - Soluções analíticas obtidas para a configuração tridimensional quase-estacionário, chapa de espessura infinita.

Tabela 5.1 - Dimensões dos corpos de prova.

Tabela 5.2 - Valores das dimensões estabelecidas para os experimentos.

Tabela 6.1 - Parâmetros de soldagem utilizados no modelo unidimensional.

Tabela 6.2 - Distâncias dos termopares à origem do sistema de coordenadas.

Tabela 6.3 - Número de amostras obtidas pela distribuição t .

Tabela 6.4 - Valores da condutividade e da capacidade térmica para o aço baixa liga.

Tabela 6.5 - Valores da condutividade e da capacidade térmica para o aço inox 304.

Tabela 6.6 - Temperaturas de pico obtidas pelos modelos unidimensionais com e sem perdas superficiais.

Tabela 6.7 - Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos unidimensionais com fonte concentrada (plana) e distribuída (Gaussiana 1-D).

Tabela 6.8 - Eficiência térmica para o processo MIG para os modelos com e sem perdas superficiais.

Tabela 6.9 - Parâmetros de soldagem utilizados no modelo bidimensional quase-estacionário.

Tabela 6.10 - Distâncias dos termopares à origem do sistema de coordenadas.

Tabela 6.11 - Número de amostras obtidas pela distribuição t .

Tabela 6.12 - Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos bidimensionais quase-estacionários com fonte concentrada (linear) e distribuída (Gaussiana circular).

Tabela 6.13 - Eficiência térmica do processo MIG para os modelos 2-D com e sem perdas superficiais.

Tabela 6.14 - Parâmetros de soldagem utilizados no modelo bidimensional transiente.

Tabela 6.15 - Parâmetros de soldagem utilizados no modelo tridimensional quase-estacionário.

Tabela 6.16 - Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos tridimensionais quase-estacionários com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para chapa de espessura finita.

Tabela 6.17 - Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos tridimensionais quase-estacionários com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para chapa de espessura infinita.

Nomenclatura

Letras Latinas

A - área [m^2]

A_{cond} - área de troca de calor por condução [m^2]

A_c - área de troca de calor por convecção [m^2]

A_r - área de troca de calor por radiação [m^2]

b - coeficiente de perda de calor [s^{-1}]

c - calor específico [$\text{J/kg}^\circ\text{C}$]

C - comprimento do passe [m]

d - distância do termopar à origem do sistema [m]

E - voltagem [V]

f – função

h_c - coeficiente de transferência de calor por convecção [$\text{W/m}^2^\circ\text{C}$]

h_g - coeficiente de transferência de calor global [$\text{W/m}^2^\circ\text{C}$]

h_r - coeficiente de transferência de calor por radiação [$\text{W/m}^2^\circ\text{C}$]

I - corrente [A]

k - condutividade térmica [$\text{W/m}^\circ\text{C}$]

K_0 - função de Bessel de segunda espécie e ordem zero

L - largura da chapa [m]

n - número de passes

N – norma

n_a – número de amostras

O – origem do sistema de coordenadas

P – perímetro [m]
 q - taxa de transferência de calor [W]
 $q_{\max}$ - densidade de energia máxima [J/m^3]
 q_s - densidade de energia [J/m^3]
 Q - quantidade de calor [J]
 Q' - quantidade de calor por unidade de comprimento [J/m]
 Q'' - quantidade de calor por unidade de área [J/m^2]
 $\dot{Q}$ - potência [W]
 r - distância do ponto considerado à origem do sistema bidimensional [m]
 r_b - raio da fonte de calor [m]
 R - distância do ponto considerado à origem do sistema tridimensional [m]
 S - desvio padrão
 t - tempo [s]
 t_0 - constante de tempo [s]
 t_p - soma dos tempos de soldagem e de intervalo entre passes [s]
 T - temperatura [$^{\circ}\text{C}$]
 T_0 - temperatura inicial [$^{\circ}\text{C}$]
 $T_{i,j,k}$ - temperatura do elemento i,j,k [$^{\circ}\text{C}$]
 T_m - temperatura de fusão [$^{\circ}\text{C}$]
 T_p - temperatura de pico [$^{\circ}\text{C}$]
 T_{ref} - temperatura de referência [$^{\circ}\text{C}$]
 u - função de Green
 v - velocidade de soldagem [m/s]
 V - função temperatura [$^{\circ}\text{C}$]
 V' - volume [m^3]
 w - argumento da função erro
 x,y,z – coordenadas espaciais
 x_0 - ponto de referência no sistema de coordenadas móvel [m]
 y_b - parâmetro de distribuição da fonte de calor [m]
 z_p - altura do cordão de solda [m]
 Z_m - auto-função

Letras Gregas

α - difusividade térmica [m^2/s]

α_p - precisão estatística

α_{ref} - difusividade térmica na temperatura de referência [m^2/s]

β_m - raiz positiva da auto-função

δ - espessura [m]

δ_c - comprimento do intervalo de confiança

ε - emissividade

ϕ - condição de contorno de temperatura conhecida [$^{\circ}\text{C}$]

γ - função para condição inicial [$^{\circ}\text{C}$]

η - eficiência [%]

φ - condição de contorno de fluxo de calor conhecido [W/m^2]

π - pi = 3,141592654

θ - temperatura adimensional

ρ - densidade [kg/m^3]

σ - constante de Stefan-Boltzman [$\text{J}/\text{m}^2\text{s}^{\circ}\text{C}$]

τ - tempo de perturbação [s]

Abreviações

cc - com chanfro

config - configuração

cos - função cosseno

conv – convecção

cp - corpo de prova

ctes - constantes

exp – exponencial

prop - propriedades

rad - radiação

sc - sem chanfro

sen – função seno

VC – volume de controle

Siglas

A/D - Analógico/Digital

ADI - “Alternating Direction Implicit”

AISI - “American Iron and Steel Institute”

Erf – Função Erro

HI - “Heat Input” [J/m]

MAG - “Metal Active Gas”

MIG - “Metal Inert Gas”

TDMA - “TriDiagonal Matrix Algorithm”

TIG - “Tungsten Inert Gas”

ZAC - Zona Afetada pelo Calor

ZF - Zona Fundida

Capítulo 1

Introdução e Objetivos

1.1 Introdução

A transferência de calor durante a soldagem tem despertado o interesse de muitos pesquisadores, pois o conhecimento da distribuição de temperatura no material está relacionado ao controle das alterações microestruturais que possam ocorrer na região da solda. Esse controle é importante porque modificações microestruturais resultam em alterações nas propriedades mecânicas dos materiais sólidos.

A maioria dos trabalhos sobre transferência de calor na soldagem se refere ao processo realizado com um único passe. Na soldagem com múltiplos passes, necessária para a soldagem de chapas grossas, a análise da distribuição de temperatura se torna mais complexa, pois neste caso o material sofre a ação de vários ciclos térmicos, cada um associado à deposição de um cordão de solda. Dependendo do comprimento do passe e do intervalo entre os mesmos, pode-se obter condições iniciais não-homogêneas para os passes seguintes ao primeiro. Com isso, a previsão dos ciclos térmicos não pode ser feita pelos modelos obtidos para a soldagem com passe único, os quais admitem a existência de condições iniciais homogêneas.

Nos trabalhos referentes à soldagem multipasse, normalmente se utilizam técnicas numéricas (Elementos Finitos ou Diferenças Finitas, por exemplo) para a obtenção da

distribuição de temperatura, devido às dificuldades impostas para a obtenção de soluções na forma analítica. Além da condição inicial não homogênea, tais dificuldades incluem: variação das propriedades físicas com a temperatura, e perdas de calor por convecção e radiação, entre outras. A consideração destes fatores no problema analisado resulta tanto em equação quanto em condições de contorno não-lineares, havendo a necessidade de se recorrer aos métodos numéricos.

A obtenção de soluções na forma analítica exige a simplificação do problema, a fim de se obter equação e condições de contorno lineares, permitindo a utilização das ferramentas disponíveis para o tratamento analítico ou semi-analítico do processo analisado. Apesar das simplificações necessárias, as soluções obtidas desta forma são exatas, e permitem verificar a influência dos diversos parâmetros do processo de soldagem na distribuição de temperatura, pela simples substituição destes parâmetros na equação obtida. As considerações de perdas superficiais, através de um coeficiente global de transferência de calor, e de fonte de calor distribuída permitem a obtenção de soluções analíticas ou, para alguns casos, soluções semi-analíticas.

Após o tratamento analítico do problema, a obtenção dos ciclos térmicos resultantes do processo de soldagem multipasse, através de uma análise numérica, também é importante, pois são úteis como padrão de comparação para efeito de comprovação dos modelos analíticos. Além da análise numérica, os resultados obtidos experimentalmente proporcionam mais um padrão de comparação para os modelos propostos, com a finalidade de se verificar a concordância entre teoria e experimento.

1.2 Objetivos

A descrição dos objetivos deste trabalho pode ser melhor compreendida dividindo-os em objetivo geral e objetivos específicos, a saber:

1.2.1 Objetivo Geral

- Desenvolver modelos analíticos e numéricos para a transferência de calor no processo de soldagem com múltiplos passes, com a finalidade de se obter a distribuição de temperatura em qualquer posição e em qualquer instante de tempo.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Obter as soluções analíticas para a equação da condução de calor nas configurações uni e bidimensionais, em regime transiente, considerando uma fonte de calor distribuída.
- Obter as soluções analíticas para a equação da condução de calor nas configurações bi e tridimensionais, em regime quase-estacionário, considerando as perdas de calor superficiais e a distribuição da fonte de calor.
- Obter as soluções para as mesmas configurações acima, através da utilização de um método numérico, considerando as perdas por convecção e radiação, e a variação das propriedades físicas com a temperatura.
- Obter os ciclos térmicos experimentais, para posterior comparação com aqueles obtidos analítica e numericamente.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica sobre os tópicos mais relevantes para o estudo da transferência de calor em soldagem, de forma a abranger todos os objetivos propostos para o presente trabalho. A revisão compreende trabalhos desde a década de 40, época em que foram apresentadas as primeiras soluções para a distribuição de temperatura no material durante o processo de soldagem.

2.2 Transferência de Calor na Soldagem

O processo de soldagem por fusão envolve a utilização de uma fonte de calor intensa e localizada. Para uma faixa de materiais e projetos de juntas, o campo de temperaturas, associado à composição química e cinética de transformação, é a base para prever a microestrutura na zona fundida (ZF) e na zona afetada pelo calor (ZAC). Em particular, a fonte de calor gera um campo de temperaturas transiente que tem importantes consequências: modifica a microestrutura do material por solidificação, recristalização, crescimento de grão e transformações de fase. A microestrutura controla as propriedades térmicas e mecânicas do material soldado (Goldak et al., 1986). Assim, o estudo do comportamento térmico do material durante a soldagem tem sido o assunto de muitas pesquisas há várias décadas.

Rosenthal (1946) obteve soluções analíticas para a distribuição de temperatura nas configurações de fluxo de calor uni, bi e tridimensional, nos regimes transiente e quase-estacionário. As hipóteses simplificadoras feitas pelo autor foram: propriedades físicas do material (condutividade térmica, calor específico e densidade) independentes da temperatura; perdas de calor superficiais desprezíveis; fonte de calor concentrada (pontual, linear e plana), e ausência de mudança de fase no material.

Apesar das simplificações, a utilidade das equações de Rosenthal está presente em muitos trabalhos. Wells (1952) utilizou essas equações para prever a geometria da solda. Com base nas equações de Rosenthal, Adams (1958) obteve as expressões para o cálculo da taxa de resfriamento e da temperatura de pico, que são fatores importantes, pois determinarão a ocorrência ou não de transformações microestruturais no material.

Para estudar as variações morfológicas que ocorrem na ZAC de alguns aços, tal como o crescimento de grão, Ashby e Easterling (1982) obtiveram os ciclos térmicos através das equações de Rosenthal. No trabalho de Myhr e Grong (1990), a partir das soluções de Rosenthal para o estado quase-estacionário, os autores desenvolveram mapas adimensionais para auxiliar na escolha da equação a ser utilizada. De acordo com a espessura da chapa, o fluxo de calor pode ocorrer de forma bi ou tridimensional, pois não existe um limite definido de espessura a partir do qual a chapa possa ser considerada como grossa ou fina.

Considerando a independência das propriedades do material com a temperatura, Lindgren (1986) propôs três soluções analíticas, as quais na realidade correspondem a modificações nas equações de Rosenthal. São elas: solução de Rosenthal para o campo de temperaturas devido a uma fonte de calor móvel numa chapa fina e infinita; solução de Rosenthal desprezando-se o fluxo de calor ao longo do comprimento da solda; solução de Rosenthal onde o calor latente devido aos processos de fusão e solidificação foi modelado. Nas soluções, admitiu-se uma chapa de dimensões infinitamente grandes. Um comprimento finito da chapa na direção de soldagem não afeta as temperaturas, pois a influência da condição de contorno térmica para a extremidade da chapa mostrou-se muito pequena.

Segundo Zhang (1990), as soluções para o regime quase-estacionário estão sujeitas a duas limitações: a primeira é a de que a potência da fonte de calor deve ser constante, caso contrário não é possível a existência do regime quase-estacionário se o meio for considerado infinito; a segunda limitação é a de que o meio deve ser infinito, de forma que o estado quase-estacionário possa ser atingido. Ambas as condições devem ser satisfeitas simultaneamente. O autor propôs uma solução analítica para o caso de condução de calor numa barra fina com perdas de calor superficiais.

Os modelos de Rosenthal foram obtidos considerando o meio infinito. Entretanto, as dimensões das chapas utilizadas na prática nem sempre são grandes o suficiente para que o meio possa ser considerado infinito, e os efeitos dos contornos desprezados. Esta simplificação é mais crítica principalmente em relação à espessura da chapa. Assim, alguns autores passaram a formular o problema de condução de calor levando em consideração a espessura finita da chapa.

Kasuya e Yurioka (1993), e Al-Nimir e Abou-Arab (1994), consideraram um meio finito, e a solução do problema com perdas por convecção foi obtida pelo método da função de Green. A forma da ZAC e os ciclos térmicos simulados a partir da solução analítica foram comparados com aqueles obtidos experimentalmente, verificando-se um bom acordo entre eles. No trabalho de Jeong e Cho (1997), a solução analítica se refere a uma chapa cuja superfície é infinita, mas com uma espessura finita.

Nos trabalhos anteriormente citados, a atenção estava voltada para o estudo da distribuição de temperatura. Quando o interesse se concentra também na geometria da poça de solda, muitos trabalhos foram feitos a fim de se obter soluções para as equações de transferência de calor e de escoamento de fluido. No interior da poça de solda estão presentes a convecção natural e forças eletromagnéticas. O processo de transferência de calor depende da convecção na poça de solda, e da condução fora dela.

A análise da convecção e fluxo de calor na poça de solda é de considerável interesse prático, pois o fluxo de calor convectivo afetará a geometria da poça, a microestrutura e as propriedades mecânicas da junta soldada (Oreper, Eagar e Szekely, 1983). Para a obtenção

dos campos de temperatura e velocidades, o estudo é feito através da utilização de métodos numéricos. Tsao e Wu (1988), Chuansong, Zhenning e Lin (1993), Mundra, DebRoy e Kelkar (1996), e Kim e Basu (1998) utilizaram o método de diferenças finitas para a discretização das equações da continuidade, quantidade de movimento e energia. Os perfis obtidos para a poça de solda são comparados com os perfis obtidos experimentalmente, verificando-se uma boa concordância entre os resultados. Nos trabalhos de Wahab e Painter (1997), e Hong, Weckman e Strong (1998), o estudo do movimento do fluido na poça de solda foi feito através do método de elementos finitos.

Como pode ser observado, a transferência de calor durante a soldagem é um assunto bastante abordado nas pesquisas, seja através de métodos numéricos ou analíticos. Devido às suposições necessárias para a obtenção das soluções na forma analítica, muitas tentativas foram feitas no sentido de se corrigir as equações propostas por Rosenthal e torná-las mais próximas das condições reais de soldagem.

Os itens a seguir mostram alguns dos trabalhos desenvolvidos de acordo com cada simplificação feita por Rosenthal.

2.2.1 Propriedades Físicas Independentes da Temperatura

A hipótese de propriedades físicas constantes no estudo da distribuição de temperatura no processo de soldagem pode conduzir a erros consideráveis, dependendo do material utilizado. Para um material onde a condutividade e a capacidade térmica variam de forma altamente não-linear com a temperatura, as equações de Rosenthal fornecem boas estimativas de temperaturas para regiões mais afastadas da ZF. Isto é esperado, pois os altos gradientes térmicos que ocorrem próximos à região da solda fazem com que as propriedades físicas sejam alteradas durante os ciclos de aquecimento e resfriamento.

A consideração desta variável na formulação do problema resulta em uma equação diferencial não-linear e, desta forma, nem sempre é possível solucioná-la analiticamente. A solução adotada é considerar os valores das propriedades físicas calculados em uma temperatura de interesse, normalmente metade da temperatura de fusão do material.

Rykalin (1951) sugere 400°C para o caso dos aços; Boo e Cho (1990) utilizaram 700°C, correspondente à metade da temperatura de fusão do aço.

Para os estudos do comportamento da poça de solda, a temperatura de fusão é de particular importância, e Tsai e Hou (1988) utilizaram os valores das propriedades térmicas nesta temperatura. Segundo Shah et al. (1995), o erro no desenvolvimento do modelo devido à variação das propriedades físicas do material com a temperatura foi compensado pelo uso da média de valores a baixa e alta temperatura.

Grosh, Trabant e Hawkins (1955) corrigiram as equações de Rosenthal para as configurações uni, bi e tridimensional, no regime quase-estacionário, considerando no desenvolvimento das soluções um coeficiente de ajuste, que corresponde à inclinação da curva da propriedade física com a temperatura. A comparação entre os ciclos térmicos experimentais e teóricos para o aço inox AISI 304, que apresenta uma variação linear da condutividade e da capacidade térmica com a temperatura, mostrou uma melhor concordância do que quando comparados com as equações de Rosenthal (Grosh e Trabant, 1956).

Como as equações de condução que consideram este fator são não-lineares, muitos pesquisadores recorreram aos métodos numéricos para obter as soluções. Ule, Joshi e Sedy (1990) utilizaram uma malha com três diferentes regiões, a saber: malha fina, próxima à solda; malha com um refinamento médio, para uma região intermediária entre a solda e a extremidade da chapa, e uma malha mais grosseira, para pontos distantes da solda. A variação da condutividade térmica com a temperatura foi considerada somente na região de malha fina, sendo constantes nas outras duas, e avaliadas à temperatura ambiente.

Wu (1992), Choo, Szekely e David (1992), e Ushio e Wu (1997) recorreram ao método de diferenças finitas. Os modelos numéricos foram comparados com os resultados experimentais, obtendo-se uma boa concordância entre eles.

Sluzalec e Sluzalec Jr (1986) desenvolveram um modelo bidimensional para distribuição de temperatura considerando a variação das propriedades físicas com a

temperatura, utilizando o método de elementos finitos. Os campos de temperatura previstos pelo modelo foram confirmados pelos resultados experimentais. Segundo os autores, o método dos elementos finitos constitui-se numa poderosa ferramenta para a análise de problemas onde a condutividade térmica é não linear.

No modelo de Kumar e Bhaduri (1994), também utilizando elementos finitos, os valores da condutividade térmica e do calor específico não são conhecidos para o aço HY 130, em temperaturas acima da temperatura de fusão do material. Para esta região, os valores foram extrapolados de uma forma linear. A condutividade térmica do metal fundido foi assumida como aumentando linearmente com o aumento da temperatura da poça de solda.

As curvas de condutividade térmica e calor específico em função da temperatura para os aços carbono são altamente não-lineares. Nos trabalhos de Chidiac, Mirza e Wilkinson (1994), Little e Kamtekar (1998), e Frewin e Scott (1999), a consideração das curvas das propriedades para o aço carbono, na formulação do problema de condução, foi feita através do método de elementos finitos.

2.2.2 Perdas de Calor Desprezíveis

As perdas de calor superficiais nas soluções analíticas de Rosenthal foram consideradas por Rykalin (1951), através de um coeficiente que descreve a intensidade com que ocorre o decréscimo de temperatura provocado por estas perdas. Este coeficiente é inversamente proporcional à espessura da chapa e, portanto, quanto menor a espessura do material soldado, maior o resfriamento provocado pelas perdas de calor através das superfícies do mesmo.

O tratamento das perdas superficiais de uma forma analítica por Rykalin (1951) foi possível porque foi admitido um coeficiente global de transferência de calor que determina estas perdas. Este coeficiente corresponde à soma dos coeficientes de transferência de calor por convecção e radiação, considerados constantes e calculados a uma temperatura de referência. No caso em que estes coeficientes variam com a temperatura, é preciso a

utilização de um método numérico para a obtenção da distribuição de temperatura.

Embora a suposição de perdas por convecção e radiação desprezíveis seja normalmente válida, a transferência de calor pela superfície pode influenciar significativamente a taxa de resfriamento e a temperatura de pico na peça soldada, principalmente quando se trata de elevado insumo de calor, chapas finas, ou materiais de baixa condutividade térmica (Jhaveri, Moffat e Adams, 1962).

A análise do efeito das perdas é mais comum por meio da convecção e da radiação, mas alguns autores consideraram apenas uma destas formas de transferência de calor em seus estudos. Choi, Greif e Salcudean (1986,1987) consideraram as perdas por radiação na condição de contorno, enquanto Yang e Lee (1997) desprezaram os efeitos da radiação, incluindo as perdas por convecção pelas superfícies da chapa na formulação do problema.

Boo e Cho (1990) consideraram somente a convecção nas condições de contorno, mas com valores diferentes dos coeficientes de transferência de calor para as duas superfícies da chapa. Para a superfície superior, ocorre convecção forçada abaixo do bocal da tocha, devido ao fluxo de gás de proteção, e foi admitida convecção natural na superfície oposta. Os coeficientes convectivos foram obtidos a partir de uma relação empírica.

Nos trabalhos de Parkitny, Pawlak e Piekarska (1992), e Chuansong e Lin (1991), as perdas por radiação também foram desprezadas, mas ao contrário dos trabalhos anteriores, utilizaram um coeficiente de transferência de calor por convecção como função da temperatura. O problema foi solucionado pelo método de elementos finitos.

A ação simultânea da convecção e radiação na análise dos efeitos das perdas superficiais sobre a distribuição de temperatura foi estudada por Tekriwal e Mazumder (1988), Asibu Jr e Jallad (1988), Pardo e Weckman (1989), Kumar e Bhaduri (1994), e Wahab, Painter e Davies (1998). O coeficiente de transferência de calor por convecção foi considerado constante com a temperatura, variando somente o coeficiente de radiação. Para espessuras de chapa consideradas como finas, a influência das perdas sobre a distribuição de temperatura será mais acentuada. Os valores de espessuras utilizados nos experimentos

destes trabalhos encontram-se na faixa de 5,8 a 10,0 mm, e houve uma boa concordância entre resultados teóricos e práticos. Isso mostra que, para as condições de geometria e insumo de calor utilizados, as perdas tiveram efeito significativo no resultado final. A resolução da equação da condução e respectivas condições inicial e de contorno foi obtida através de elementos finitos.

Kou (1981) e Zhang, Cao e Kovacevic (1996) também consideraram o efeito conjunto das perdas convectivas e radiantes, mas com a utilização do método de diferenças finitas. A simulação dos campos de temperatura pelos modelos numéricos desenvolvidos apresentou bons resultados quando comparado aos obtidos experimentalmente.

2.2.3 Fonte de Calor Concentrada

A suposição de fonte de calor concentrada, ou seja, de que todo o calor da fonte é liberado em um volume infinitesimal do material, conduz a erros significativos, pois é um fato conhecido que o calor se distribui em um volume finito. As soluções de Rosenthal que consideram fontes de calor pontuais, lineares e planas estão sujeitas a sérios erros para temperaturas medidas nas zonas fundida e afetada pelo calor. Os resultados são mais precisos para regiões onde a temperatura atingida é menor do que 20 % da temperatura de fusão do material (Goldak, Chakravarti e Bibby, 1984).

A solução considerando a distribuição da fonte de calor pode ser obtida tanto analítica quanto numericamente. A consideração de uma fonte de calor com distribuição Gaussiana circular é a mais comum, e foi sugerida por Pavelic et al. (1969). Neste modelo, também chamado de disco de Pavelic, admite-se que a distribuição do fluxo de calor ocorre sobre a superfície da chapa. A consideração do modelo de Pavelic para a fonte de calor representou um grande avanço para uma previsão mais correta da distribuição de temperatura na ZF e ZAC.

O modelo de fonte Gaussiana circular foi utilizado por Eagar e Tsai (1983) na formulação do problema de condução. A solução analítica foi obtida pelo método da função de Green, para um sistema de coordenadas fixo. Considerando o movimento da fonte de

calor, a integração no tempo fornece a solução para o regime quase-estacionário. Para a simulação da distribuição de temperatura, é necessário assumir valores para o parâmetro de distribuição. Os autores utilizaram uma faixa de valores para este parâmetro, de 1,6 a 4,0 mm. As previsões das dimensões da poça de solda foram comparadas com medidas experimentais para vários materiais, obtendo-se um bom acordo entre eles.

A principal dificuldade na utilização de um modelo com fonte distribuída é a determinação prévia do parâmetro de distribuição, ou seja, do raio do arco. Uma discussão sobre medidas experimentais da distribuição radial do arco obtido pelo processo Tungsten Inert Gas (TIG) se encontra no trabalho de Key, Chan e McIlwain (1983), para uma ampla faixa de composição do gás de proteção. Cada uma destas composições foi avaliada em dois níveis de corrente, duas geometrias do eletrodo, e dois materiais do anodo. Para as condições testadas, a composição do gás de proteção e a corrente tiveram influência sobre o raio do arco, enquanto o comprimento do arco e a geometria do eletrodo tiveram efeitos desprezíveis.

Tsai e Eagar (1985) também determinaram experimentalmente a distribuição radial de temperatura do arco do processo TIG, como função de alguns parâmetros de soldagem. Para as condições utilizadas pelos autores, o raio do arco apresentou um aumento aproximadamente linear com o aumento do comprimento do arco. Um aumento da corrente também resultou em um aumento do parâmetro de distribuição do arco. A composição do gás de proteção alterou a distribuição de calor do arco, enquanto o efeito da geometria do eletrodo foi considerado insignificante.

Para Ion, Easterling e Ashby (1984), a utilização das equações de Rosenthal para descrever a geometria da poça de solda e de suas vizinhanças não é muito satisfatória para o caso limite de chapas grossas. Segundo os autores, este fato se deve à suposição de que a fonte de calor pontual não é uma boa aproximação para o caso de chapa grossa. Assim, na solução apresentada pelos autores, a fonte de calor pontual é substituída por uma fonte circular de raio r_b . Para uma distância $r \gg r_b$, a equação de Rosenthal fornece uma boa aproximação para o ciclo térmico, e os cálculos são baseados em tais equações. Próximo à fonte, entretanto, a solução proposta pelos autores apresenta melhores resultados, e o

cálculo da temperatura de pico é baseado nesta equação.

Goldak, Chakravarti e Bibby (1984) apresentaram uma nova geometria para a fonte de calor, e mostraram que o modelo de Pavelic é um caso particular do modelo desenvolvido por eles. Para situações de soldagem onde a profundidade de penetração é pequena, o modelo de fonte de calor superficial de Pavelic é bastante satisfatório. Entretanto, para fontes de alta densidade de potência, os autores sugeriram os modelos de fonte de calor hemisférica e duplo-elipsoidal.

Uma comparação da distribuição de temperatura nas vizinhanças da solda mostrou que o modelo duplo-elipsoidal, no qual o calor se distribui pelo volume da poça de solda, é mais preciso do que o modelo circular, onde o calor é aplicado somente na superfície da chapa. Além disso, o tempo de resfriamento de 800 a 500°C obtido pela utilização da configuração de duplo elipsóide aproxima-se mais do valor experimental do que aquele calculado a partir da equação de Rosenthal. Este tempo é um parâmetro importante, pois no caso dos aços ele indica a formação ou não do microconstituente martensita que, por ser frágil, não é desejado na microestrutura final após a soldagem.

Tsai e Hou (1988), e Boo e Cho (1990), obtiveram soluções analíticas para a distribuição de temperatura tridimensional em uma chapa de espessura finita, com fonte de calor Gaussiana circular. Da mesma forma como foi feita no trabalho de Eagar e Tsai (1983), a temperatura no material, devido a uma fonte distribuída instantânea, foi obtida pela superposição de uma série de fontes pontuais sobre a região de distribuição. Para uma fonte móvel, a temperatura correspondente ao período de atuação da fonte é dada pela somatória de todas as fontes Gaussianas instantâneas. As comparações das isotermas com as obtidas experimentalmente mostraram que as simulações pelos modelos propostos apresentam uma precisão satisfatória.

No trabalho de Vishnu, Li e Easterling (1991), a solução obtida para a fonte Gaussiana também foi na forma analítica, mas o processo de soldagem TIG com corrente pulsada. A validade do modelo foi confirmada pela realização de soldas em chapas de aço carbono.

Chuansong e Lin (1991) consideraram uma distribuição Gaussiana para a fonte de calor, utilizando o método de elementos finitos na obtenção do modelo para a transferência de calor na soldagem. Através do modelo, foi possível o cálculo do intervalo de tempo que o metal adjacente à solda resfria desde 800 a 500°C. Este parâmetro é importante, pois determina se as microestruturas com possibilidade de endurecimento serão formadas nesta região.

A escolha do parâmetro de distribuição do arco não é uma tarefa muito fácil, pois a determinação do mesmo depende de vários fatores, como mostrado anteriormente. Além disso, a determinação deste parâmetro nos dois trabalhos citados se refere ao processo TIG. A definição do valor a ser utilizado na simulação normalmente é feita considerando os valores dos parâmetros de soldagem utilizados nos experimentos. Assim, Yang (1991) utilizou em seu trabalho um valor igual a 5,0 mm para o raio do arco. Zacharia, Eraslan et al. (1989), e Zacharia, David et al. (1991), consideraram 3,0 mm, e Kumar e Bhaduri (1995) um valor igual a 6,0 mm para a distribuição radial da temperatura do arco. No trabalho de Shah et al. (1995), o valor do raio do arco foi considerado como proporcional ao raio do eletrodo de soldagem.

Apesar do modelo de Pavelic corresponder a uma simplificação do modelo de Goldak, muitos autores optaram pela utilização do modelo de distribuição de calor superficial, mesmo para as configurações tridimensionais. O modelo de fonte com distribuição duplo-elipsoidal foi utilizado por Ríbera e Prado (1995) para a obtenção dos ciclos térmicos em alguns pontos da ZAC. Os parâmetros que definem as dimensões dos dois elipsóides são obtidos através de um outro parâmetro, que é função do insumo de calor, das propriedades físicas do material, e das temperaturas inicial e de fusão do material soldado. O problema foi resolvido numericamente pelo método de elementos finitos.

Doumanidis (1995) e Nguyen et al. (1999) resolveram o problema de condução com fonte de calor duplo-elipsoidal de forma analítica, através da integração da fonte pontual instantânea sobre todo o volume do elipsóide. As temperaturas e a geometria da poça de solda foram medidas e comparadas com aquelas previstas pelas soluções, obtendo-se uma

boa concordância entre os resultados teóricos e práticos.

2.2.4 Ausência de Mudança de Fase

Esta última hipótese foi mantida durante muito tempo, pois a sua consideração torna necessária a utilização de métodos numéricos para a análise térmica do processo de soldagem. Segundo Grosh e Trabant (1956), a geometria e propriedades térmicas do material soldado, assim como os parâmetros de soldagem, são as principais variáveis a serem consideradas no estudo da distribuição de temperatura. As perdas superficiais e o calor latente são de importância secundária, e podem ser desprezadas na maioria dos casos.

Eagar e Tsai (1983), e Goldak et al. (1986) consideraram que a distribuição da fonte de calor era o fator mais importante a se avaliar em seus trabalhos, pois o calor latente teria pouco efeito sobre a distribuição de temperatura. Myhr e Grong (1990), e Chidiac, Mirza e Wilkinson (1994) seguiram esta mesma linha de raciocínio, desprezando o efeito do calor latente na obtenção dos ciclos térmicos.

Os trabalhos que levaram em consideração o efeito da mudança de fase na formulação do problema são normalmente trabalhos relacionados com a morfologia do cordão de solda. O calor latente, absorvido durante a fusão e liberado durante a solidificação, influencia a forma e o tamanho da poça de solda. Para considerar este efeito, Pardo e Weckman (1989), e Chuansong e Lin (1991) trataram o calor latente como um aumento no calor específico durante a fusão, e um decréscimo no calor específico durante a solidificação.

Salcudean, Choi e Greif (1986) analisaram a influência da potência fornecida para a soldagem do chumbo, sobre a profundidade de penetração da solda. O chumbo foi escolhido por ser um material de baixo ponto de fusão e ebulição. Para uma potência da ordem de 650 W, a contribuição dominante observada foi o acúmulo de energia no material sólido. Os termos de energia referentes ao calor latente de fusão, e às perdas por radiação e evaporação, foram insignificantes para este nível de potência. Com um aumento da potência para 2000 W, além da condução no sólido, as perdas por evaporação passaram a

ser importantes também, o que era esperado para o material considerado. De acordo com os autores, a forte contribuição da quantidade de energia na fase sólida, quando comparada aos outros modos de transferência de calor, explica porque muitas análises teóricas simplificadas, baseadas somente na condução de calor no sólido, fornecem resultados razoáveis para o processo de soldagem.

No trabalho de Kumar e Bhaduri (1994), onde os autores utilizaram o método de elementos finitos para o estudo da geometria da poça de solda, se a temperatura de um elemento ultrapassa aquela na qual ocorre a mudança de fase, a temperatura deste nó é ajustada para levar em consideração o calor latente. Ronda, Mahrenholtz e Hamann (1992) estudaram o efeito da mudança de fase sobre a distribuição de temperatura na soldagem em chapas de aço. Este efeito foi verificado comparando os contornos de temperatura obtidos considerando ou desprezando a absorção do calor latente que ocorre sobre a superfície definida pela temperatura de transformação de fase. Quando o calor latente foi considerado, houve um decréscimo insignificante na temperatura da chapa soldada.

Nos trabalhos analíticos sobre transferência de calor em soldagem, a consideração da mudança de fase é feita de uma forma mais simples, através da correção da potência utilizada para o cálculo do insumo de calor. Quando a poça de solda se forma, uma quantidade de energia é absorvida como calor latente de fusão. Embora esta energia seja liberada mais tarde, momentaneamente foi removida do insumo de calor, e armazenada na poça fundida. Assim, um ponto no material ainda sólido recebe um insumo de calor que se encontra reduzido desta quantidade absorvida durante a fusão.

Como sugerido por Easterling e Ashby (1984), a potência efetiva é então obtida pela potência inicial, subtraindo deste valor a quantidade armazenada na poça fundida, que corresponde ao volume de metal que se funde por unidade de tempo, multiplicado pelo valor do calor latente de fusão do material soldado. Este foi o procedimento adotado por Reed e Bhadeshia (1994) para a consideração do calor latente.

2.3 Soldagem com Múltiplos Passes

A maior parte dos trabalhos citados nos itens anteriores se refere à soldagem com passe único. O processo de soldagem com múltiplos passes é utilizado para produzir a junção de chapas grossas. Neste tipo de processo, a união entre as chapas é produzida pela deposição de subseqüentes cordões de solda. Quanto maior a espessura do material, maior o número de passes necessários para se obter um adequado preenchimento da junta. Como consequência, o material é exposto várias vezes aos efeitos térmicos característicos do processo de soldagem, resultando em uma microestrutura e estado de tensão cada vez mais complexos.

No processo multipasse, há dois casos a serem considerados, de acordo com Rykalin (1951): soldagem com passes longos (1,0 - 1,5 m) e soldagem com passes curtos (5,0 - 40,0 cm). No caso de passes longos, há tempo para que ocorra o resfriamento do material antes do início do passe seguinte, e o ciclo térmico de um passe não depende dos passes anteriores. Em relação à soldagem com passes curtos, como cada passe é depositado sobre um que não se encontra completamente resfriado, ocorre a superposição dos efeitos térmicos de um passe sobre os seguintes.

Os ciclos térmicos obtidos para o caso limite de passes longos têm a forma apresentada na Figura 2.1, para o caso da soldagem multipasse de aços.

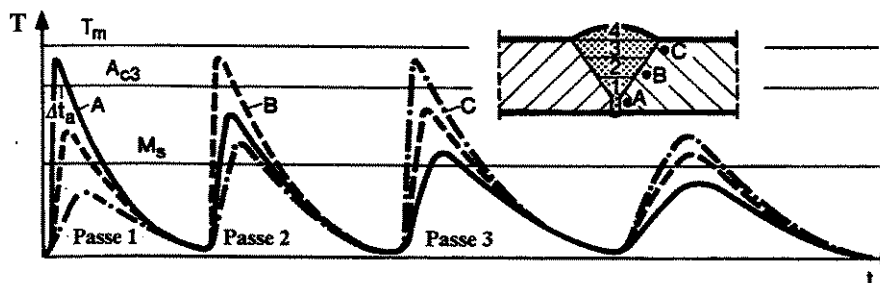


Figura 2.1 - Ciclos térmicos na soldagem multipasse com passes longos para três posições.

Fonte: Radaj (1992).

Para os pontos A, B e C próximos à solda, as temperaturas máximas excedem a

temperatura de austenitização A_{c3} apenas uma vez. Caso ocorra a formação de martensita, ela é revenida pelos passes subseqüentes. Esta martensita revenida tem uma dureza menor e, portanto, maior resistência mecânica. Entretanto, pode ocorrer a formação de trincas a frio mesmo antes da soldagem dos passes subseqüentes.

Considerando-se o caso limite de passes curtos, o ciclo térmico corresponde ao da Figura 2.2, para o primeiro e último passes, também para o caso em que o material soldado é o aço. Como se pode observar, não ocorre o completo resfriamento do primeiro passe e, com a deposição dos passes seguintes, a soldagem do último passe é feita em um material que se encontra em um estado pré-aquecido. Isto reduz a taxa de resfriamento, permitindo a formação de uma estrutura bainítica.

Na soldagem com passes longos, a homogeneização da temperatura antes da deposição do passe seguinte permite a utilização das equações de Rosenthal para a análise do comportamento térmico do material, pois tais soluções foram obtidas supondo uma condição inicial uniforme. Entretanto, com passes curtos, devido à complexidade gerada pelo acúmulo dos efeitos térmicos de um passe sobre os outros, pouco se tem feito em relação ao assunto.

Uma alternativa é a utilização de uma temperatura de pré-aquecimento interpasse que, sendo uniforme em todo o material, permite a utilização das equações de Rosenthal para a determinação dos ciclos térmicos. Este foi o procedimento adotado por Alberly e Jones (1982), e Reed e Bhadeshia (1994), para o estudo do comportamento térmico do material na soldagem com múltiplos passes.

No estudo da previsão das tensões na soldagem multipasse, Free e Goff (1989) dividiram o problema em duas partes. Primeiro obtiveram a distribuição de temperatura solucionando a equação da condução, considerando-se as perdas de calor por convecção para o ambiente. A condutividade térmica e o calor específico foram considerados constantes, calculados à temperatura ambiente. A segunda parte envolve a avaliação da resposta tensão-deformação às cargas térmicas aplicadas, fornecidas pela distribuição de temperatura. A técnica utilizada foi o método de Elementos Finitos. Após cada passe,

esperou-se o resfriamento de toda a estrutura até a temperatura ambiente. Os resultados numéricos foram comparados com valores experimentais, obtendo-se uma diferença de $\pm 10\%$ entre eles para a temperatura de pico, e de ± 50 MPa para a tensão.

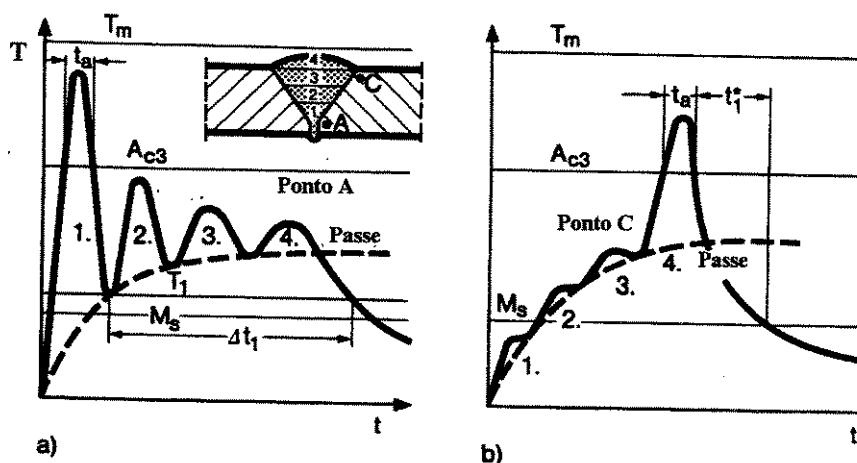


Figura 2.2 - Ciclos térmicos na soldagem multipasse com passes curtos para duas posições: (a) próximo ao primeiro passe; (b) próximo ao último passe. Fonte: Radaj (1992).

Shim et al. (1992) desenvolveram um método para prever a distribuição de tensões residuais resultantes da soldagem multipasse. Assim como no caso anterior, primeiro desenvolveu-se um modelo térmico para a análise do fluxo de calor e, posteriormente, um modelo estrutural para a análise das tensões. Neste trabalho, tanto as propriedades físicas quanto as mecânicas foram consideradas como funções da temperatura. Os modelos foram comparados com resultados experimentais de ciclos térmicos e tensões, obtidos para chapas de 12,7 e 25,4 mm de espessura. Os perfis de temperatura provenientes do modelo apresentaram uma boa correlação com os dados do experimento na região próxima à solda. Este é um fato importante porque a alta temperatura desta região normalmente resulta em grandes deformações plásticas e tensões residuais.

Para a análise termomecânica da soldagem multipasse, Tsai et al. (1992) utilizaram o modelo de Rosenthal na determinação da interface de fusão, que foi considerada como uma das condições de contorno do problema de condução. O modelo térmico considerou a dependência da condutividade térmica e do calor específico do material com a temperatura, e também condições de contorno com convecção nas superfícies inferior e posterior da

chapa. Tanto para o modelo térmico quanto o mecânico, utilizou-se o método de Elementos Finitos. A fim de validar os modelos, os resultados experimentais da soldagem a topo de uma chapa de 50 mm de espessura foram comparados com os resultados teóricos previstos, obtendo-se um bom acordo entre eles.

Davis e King (1993) mostraram o efeito da taxa de resfriamento, provocada por um segundo ciclo térmico, sobre a microestrutura e tenacidade de um aço de alta resistência e baixa liga. Os autores compararam a microestrutura obtida quando o material sofre a ação de um ciclo térmico somente com aquela resultante da aplicação de um segundo ciclo térmico. A microestrutura final depende da taxa de resfriamento do segundo ciclo térmico. Altas taxas de resfriamento produzem a martensita, microconstituente duro e frágil; reduzindo a taxa de resfriamento, ocorre a formação de bainita e perlita. Baixas taxas de resfriamento permitem a transformação da austenita completamente em perlita.

O efeito do número de passes sobre a tenacidade de metais de solda no aço inoxidável austenítico AISI 304L foi estudado por Rao e Srikanth (1993). O microconstituente ferrita delta, normalmente presente em metais de solda austeníticos, pode sofrer alterações microestruturais devido ao calor da solda dos múltiplos passes. Isto, por outro lado, pode provocar variações nas propriedades mecânicas de metais de solda. A análise das microestruturas revelou morfologias muito diferentes de ferrita em diferentes posições do metal de solda devido à soldagem multipasse.

Os trabalhos de Roelens, Maltrud e Lu (1994), e Roelens (1995) tratam da simulação numérica de soldas multipasse para algumas geometrias e tipos de juntas. A validação do modelo foi feita através da comparação entre ciclos térmicos numéricos e experimentais medidos na região da ZAC, entre 800 e 500°C. Outra validação foi obtida comparando as tensões residuais na solda calculadas numericamente com os valores obtidos na superfície e espessura do material.

Os ciclos térmicos mostrados por Murugan et al. (1998) são referentes às medidas experimentais feitas pelos autores para a soldagem multipasse, utilizando chapas com três diferentes espessuras. A partir destes ciclos térmicos, as máximas temperaturas a serem

atingidas em diferentes pontos do material podem ser estimadas, durante diferentes passes de solda. A partir do conhecimento da temperatura de pico, podem ser previstas eventuais modificações na microestrutura, transformações de fase, e alterações nas propriedades mecânicas do material.

Além da escassa literatura sobre transferência de calor na soldagem multipasse, os campos de temperatura nos trabalhos realizados foram obtidos através de métodos numéricos. Para um pequeno número de passes, as técnicas computacionais tem se mostrado adequadas para as determinações da distribuição de temperatura e das tensões residuais no material soldado. Entretanto, um aumento do número de passes aumenta o tempo de simulação das condições de soldagem. Para uma configuração de fluxo de calor tridimensional, este aumento no tempo computacional pode dificultar o estudo da soldagem multipasse.

A praticidade dos modelos analíticos, devido ao curto tempo de simulação, se constitui em uma interessante alternativa aos métodos numéricos para a determinação prévia dos ciclos térmicos a serem obtidos no processo de soldagem com múltiplos passes.

O trabalho de Suzuki (1996) apresenta os modelos analíticos desenvolvidos para a soldagem multipasse, nas configurações de fluxo de calor uni e bidimensionais, em regimes transiente e quase-estacionário. Os modelos consideram as perdas superficiais de calor para o ambiente. No modelo bidimensional quase-estacionário, foi possível considerar também uma variação linear da condutividade térmica e do calor específico com a temperatura.

A validação dos modelos foi feita comparando-os com ciclos térmicos experimentais, obtidos da soldagem a topo de chapas de 12,7 mm de espessura, com três passes. A comparação entre teoria e experimento mostrou que os modelos que consideram as perdas superficiais e a dependência das propriedades físicas com a temperatura foram os que melhor se ajustaram ao experimento, para as condições de geometria e soldagem utilizadas.

Capítulo 3

Desenvolvimento Analítico

3.1 Introdução

Este capítulo descreve todos os passos realizados para a obtenção das soluções analíticas no processo de soldagem multipasse. Para as configurações de fluxo de calor unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, foram desenvolvidos modelos considerando a distribuição da fonte de calor. Para a configuração bidimensional transiente e tridimensional quase-estacionário, foram considerados os casos de fonte de calor concentrada e distribuída.

Entre as hipóteses simplificadoras utilizadas nas equações de Rosenthal, e discutidas no capítulo anterior, serão consideradas no desenvolvimento dos modelos analíticos a distribuição da fonte de calor, e as perdas de calor superficiais. Ficam mantidas, no entanto, as hipóteses de propriedades físicas do material independentes da temperatura, e ausência de mudança de fase.

A consideração das propriedades físicas do material como função da temperatura conduziria a um problema não-linear, não permitindo a obtenção das soluções na forma analítica, que se constitui no objetivo deste capítulo. Este fator será levado em consideração no Capítulo 4, o qual se refere ao desenvolvimento numérico dos modelos.

Em relação ao efeito do calor latente, proveniente da consideração de mudança de fase no material, a correção do insumo de calor fornecido ao processo (Easterling e Ashby, 1984) não modifica significativamente o insumo de calor inicial, pois a quantidade de energia armazenada na poça fundida, para as condições simuladas, é muito pequena se comparada ao valor inicial (aproximadamente 2%). Baseado neste fato, e também nos resultados obtidos por Ronda, Mahrenholtz e Hamann (1992), e Salcudean, Choi e Greif (1986), a hipótese sobre mudança de fase será mantida neste trabalho.

O problema é formulado para cada passe de solda, e a solução geral é obtida através do Princípio da Superposição. No caso de soldagem com passes curtos, não valem as soluções propostas para um único passe, pois a condição inicial não é uniforme, mas sim uma função que depende da posição. Para a obtenção da solução analítica, utilizou-se o Método da Função de Green. Este método permite considerar a não-homogeneidade da condição inicial e/ou das condições de contorno presentes na formulação do problema.

Deve-se lembrar que o comprimento do passe está associado ao intervalo entre os mesmos, ou seja, se os passes forem considerados curtos, mas o tempo de espera entre eles for longo, pode ocorrer o completo resfriamento da chapa antes da deposição do próximo cordão de solda.

3.2 Método da Função de Green

O método da Função de Green constitui-se numa poderosa ferramenta para a solução analítica de muitos problemas de engenharia. No caso específico da soldagem, alguns autores (Beck, 1984; Tsai e Hou, 1988; Boo e Cho, 1990; Al-Nimir e Abou-Arab, 1994) utilizaram este método para a obtenção da distribuição de temperatura, mas sempre para o caso de deposição de um único cordão de solda. A maior facilidade em se obter a função de Green do que a própria solução justifica a sua utilização como um passo intermediário na resolução do problema em que a condição inicial não é uniforme.

Em soldagem, onde a função desejada é a temperatura, Carslaw e Jaeger (1959) obtiveram as funções de Green para várias configurações, sendo que cada uma delas está

associada a um sistema. Uma das propriedades das funções de Green é a de que quando a temperatura é conhecida na fronteira, a função de Green é nula nesta fronteira; da mesma forma, quando a derivada da temperatura é conhecida na fronteira, a derivada da função de Green é nula nesta fronteira.

Para um meio infinito, são as seguintes as funções de Green:

- Para fonte pontual instantânea, aplicada no instante $t = 0$:

$$u(x, y, z, t / x', y', z', \tau) = \frac{1}{[4 \pi \alpha (t - \tau)]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4 \alpha (t - \tau)} \right\} \quad (3.1)$$

- Para fonte linear instantânea,

$$u(x, y, t / x', y', \tau) = \frac{1}{4 \pi \alpha (t - \tau)} \exp \left\{ -\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4 \alpha (t - \tau)} \right\} \quad (3.2)$$

- Para fonte plana instantânea,

$$u(x, t / x', \tau) = \frac{1}{[4 \pi \alpha (t - \tau)]^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x - x')^2}{4 \alpha (t - \tau)} \right\} \quad (3.3)$$

Para o caso de fluxo de calor tridimensional, a distribuição de temperatura em função da posição e do tempo é dada por:

$$T(x, y, z, t) = \int_s u_{\tau=0} f(x', y', z') dV' + \alpha \int_0^t \int_c \left[u \phi - \phi \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS d\tau \quad (3.4)$$

Na equação acima, pode-se observar que, conhecendo-se a função de Green associada ao sistema, pode-se determinar a distribuição de temperatura para qualquer condição inicial,

representada pelo primeiro termo do lado direito da equação, e/ou também para qualquer condição de contorno, considerada no segundo termo.

3.3 Modelo Unidimensional

No modelo unidimensional, considera-se que ocorre fluxo de calor apenas na direção y , conforme o sistema de coordenadas da Figura 3.1. Para isto, são admitidas as seguintes hipóteses: a fonte de calor se move a uma velocidade elevada (fluxo de calor desprezível na direção x), e o efeito térmico de cada passe de solda age sobre toda a espessura do material (fluxo de calor desprezível na direção z).

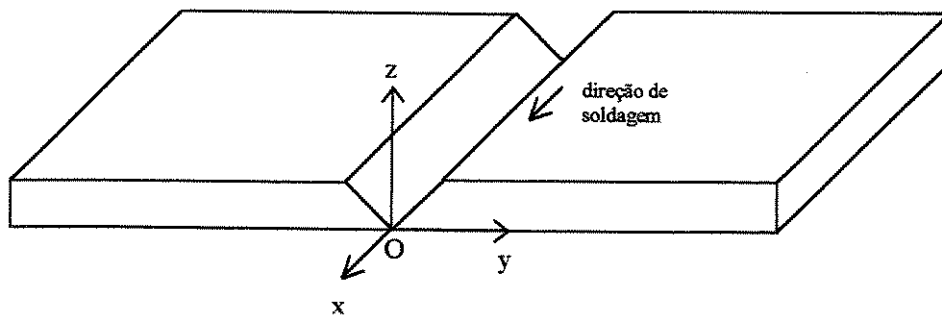


Figura 3.1 - Sistema de coordenadas para a soldagem a topo de chapas.

A solução analítica para o processo de soldagem multipasse unidimensional onde a fonte de calor é concentrada plana já foi obtida por Suzuki (1996), e tem a forma geral dada pela Equação (3.5), para n passes de solda.

$$T(y, t) = T_0 + \frac{1}{2\rho c \sqrt{\pi \alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i''}{\sqrt{t - (i-1)t_p}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\alpha[t - (i-1)t_p]}\right\} \quad (3.5)$$

Nesta equação, t_p corresponde à soma dos tempos de soldagem e de espera entre passes. As soluções de fonte concentrada produzem uma singularidade na origem da fonte, fazendo com que as temperaturas previstas nas áreas adjacentes à fonte de calor sejam inválidas. Como consequência, para medidas de temperaturas próximas à ZF e à ZAC, não se obtém uma boa concordância entre teoria e experimento. Os modelos se ajustam melhor

aos resultados experimentais para regiões onde as temperaturas não ultrapassem 20% da temperatura de fusão do material (Goldak, Chakravarti e Bibby, 1984).

No processo de soldagem, a região de maior interesse no estudo da transferência de calor é a zona termicamente afetada, onde são atingidos níveis de temperatura suficientes para provocar transformações microestruturais no material. Estes níveis de temperatura são maiores que o limite de 20% da temperatura de fusão estabelecido para que sejam obtidos resultados mais precisos com fonte pontual. Assim, é importante considerar o fato de que o calor da fonte distribui-se numa região finita, para evitar a ocorrência de temperatura infinita na região da solda.

Para o desenvolvimento da solução considerando a fonte de calor distribuída, será utilizado o modelo de fonte com distribuição Gaussiana unidimensional. O problema é formulado considerando inicialmente uma fonte concentrada plana. A solução para fonte distribuída é obtida pela soma das contribuições de cada fonte concentrada, como mostrado a seguir.

A formulação do problema para o primeiro passe de solda é composta pela equação da condução unidimensional transiente, e as respectivas condições inicial e de contorno. Na variável θ ($\theta = T - T_0$), tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3.6)$$

$$\theta(t = 0) = 0 \quad (3.6.1)$$

$$\theta(y \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.6.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta \, dy = \frac{Q_1''}{\rho c} \quad (3.6.3)$$

A solução para este problema de fonte concentrada plana é conhecida (Rosenthal, 1941), e é dada por:

$$\theta(y, t) = \frac{Q_1''}{\rho c \sqrt{4\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t}\right) \quad (3.7)$$

A consideração da fonte de calor distribuída pode ser melhor visualizada com o auxílio da Figura 3.2, onde uma fonte com distribuição normal ou Gaussiana unidimensional é aplicada instantaneamente em $t = 0$ à superfície de uma chapa. O centro C da fonte instantânea coincide com a origem O do sistema de coordenadas xyz .

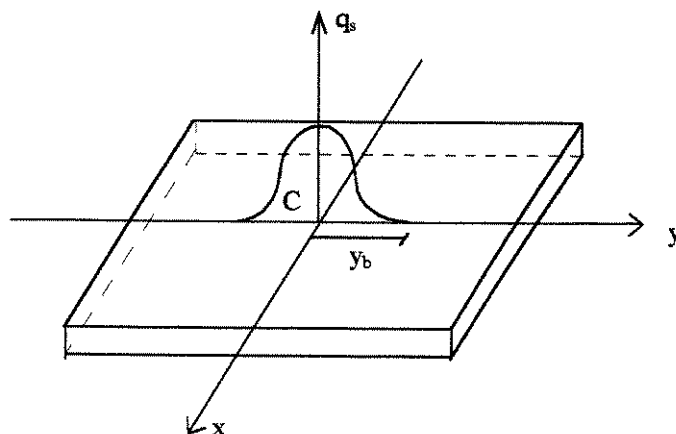


Figura 3.2 - Fonte de calor com distribuição Gaussiana para o modelo unidimensional.

A energia total da fonte por unidade de área é dada por:

$$Q'' = \int_y q_s(y) dy \quad (3.8)$$

No caso unidimensional, a distribuição Gaussiana da fonte de calor ao longo da direção y ocorre simultaneamente em todos os pontos da direção de soldagem (direção x). A densidade de energia $q_s(y)$ pode ser expressa por:

$$q_s(y) = q_{\max} \exp(-Ay^2) \quad (3.9)$$

onde A é o coeficiente de concentração do fluxo térmico do arco ($1/m$). Este coeficiente pode ser determinado considerando-se na Equação (3.9) uma distância y_b , correspondente à distância na qual a densidade de potência se reduz a 5% do seu valor máximo. Então,

$$q_{\max} \exp(-Ay_b^2) = 0,05 q_{\max}$$

de onde se obtém:

$$A = \frac{3}{y_b^2} \quad (3.10)$$

Substituindo na Equação (3.9) e posteriormente na Equação (3.8), e resolvendo a integral entre os limites $-y_b$ e y_b , obtém-se:

$$q_{\max} = \frac{\sqrt{3}Q''}{\sqrt{\pi}y_b \text{Erf}(\sqrt{3})} \quad (3.11)$$

A Equação (3.8) pode então ser reescrita como:

$$q_s(y) = \frac{\sqrt{3}Q''}{\sqrt{\pi}y_b \text{Erf}(\sqrt{3})} \exp\left(-\frac{3y^2}{y_b^2}\right) \quad (3.12)$$

O processo de difusão de uma fonte de calor Gaussiana unidimensional instantânea aplicada à superfície do material pode ser obtido pelo método das fontes. Admita que a coordenada y onde a fonte de calor é aplicada seja dividida em pequenos elementos dy' . A quantidade de calor $dQ'' = q_s(y')dy'$, fornecida no instante $t = 0$ ao elemento dy' , pode ser considerada como uma fonte de calor pontual instantânea. O processo de difusão para uma fonte pontual instantânea é, de acordo com a Equação (3.7):

$$d\theta(y, t) = \frac{dQ''}{\rho c \sqrt{4\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t}\right)$$

ou

$$d\theta(y, t) = \frac{q_s(y') dy'}{\rho c \sqrt{4\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{d^2}{4\alpha t}\right) \quad (3.13)$$

onde d é a distância entre a fonte plana instantânea e um ponto localizado sobre o eixo y , ou seja,

$$d^2 = (y - y')^2 \quad (3.14)$$

Substituindo as expressões (3.12) e (3.14) em (3.13):

$$d\theta(y, t) = \frac{\sqrt{3}Q''}{\pi y_b \rho c \sqrt{4\alpha t} \text{Erf}(\sqrt{3})} \exp\left(-\frac{3y'^2}{y_b^2}\right) \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\alpha t}\right] dy' \quad (3.15)$$

De acordo com o Princípio da Superposição, a variação de temperatura no ponto y pode ser obtida somando as contribuições de todas as fontes planas instantâneas dQ'' , atuando ao longo da coordenada y do material, entre os pontos $-y_b$ e y_b :

$$\theta(y, t) = \frac{\sqrt{3}Q''}{\pi y_b \rho c \sqrt{4\alpha t} \text{Erf}(\sqrt{3})} \int_{-y_b}^{y_b} \exp\left(-\frac{3y'^2}{y_b^2}\right) \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\alpha t}\right] dy'$$

Resolvendo a integral acima, obtém-se:

$$\theta(y, t) = \frac{\sqrt{3}Q''}{2\rho c \sqrt{\pi(12\alpha t + y_b^2)} \text{Erf}(\sqrt{3})} \exp\left(-\frac{3y^2}{12\alpha t + y_b^2}\right) \left\{ \text{Erf}\left(\frac{12\alpha t - yy_b + y_b^2}{2\sqrt{\alpha t(12\alpha t + y_b^2)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-12\alpha t - yy_b - y_b^2}{2\sqrt{\alpha t(12\alpha t + y_b^2)}}\right) \right\} \quad (3.16)$$

A Equação (3.16) é a solução para o primeiro passe de solda, considerando-se uma fonte de calor com distribuição Gaussiana. A solução para o segundo passe é obtida a partir da solução para fonte plana (Suzuki, 1996):

$$d\theta(y, t) = \frac{q_{s1}(y') dy'}{\rho c \sqrt{4\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{d^2}{4\alpha t}\right) + \frac{q_{s2}(y') dy'}{\rho c \sqrt{4\pi\alpha(t-t_p)}} \exp\left[-\frac{d^2}{4\alpha(t-t_p)}\right] \quad (3.17)$$

O uso dos subscritos 1 e 2 na variável q_s é devido à variação ou não da quantidade de calor utilizada em cada passe. Os mesmo passos aplicados para a resolução do problema no primeiro passe são utilizados para obter a solução do segundo passe, que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\theta(y, t) = & \frac{\sqrt{3}Q_1''}{2\rho c\sqrt{\pi(12\alpha t + y_b^2)}\text{Erf}(\sqrt{3})} \exp\left(-\frac{3y^2}{12\alpha t + y_b^2}\right) * \\
& \left\{ \text{Erf}\left(\frac{12\alpha t - yy_b + y_b^2}{2\sqrt{\alpha t(12\alpha t + y_b^2)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-12\alpha t - yy_b - y_b^2}{2\sqrt{\alpha t(12\alpha t + y_b^2)}}\right) \right\} + \\
& \frac{\sqrt{3}Q_2''}{2\rho c\sqrt{\pi(12\alpha(t-t_p) + y_b^2)}\text{Erf}(\sqrt{3})} \exp\left[-\frac{3y^2}{12\alpha(t-t_p) + y_b^2}\right] * \\
& \left\{ \text{Erf}\left(\frac{12\alpha(t-t_p) - yy_b + y_b^2}{2\sqrt{\alpha(t-t_p)[12\alpha(t-t_p) + y_b^2]}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-12\alpha(t-t_p) - yy_b - y_b^2}{2\sqrt{\alpha(t-t_p)[12\alpha(t-t_p) + y_b^2]}}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por analogia, a solução geral para n passes, na variável T, é dada por:

$$T(y, t) = T_o + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c\sqrt{\pi}\text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i''}{\sqrt{M_i}} \exp\left(-\frac{3y^2}{M_i}\right) \left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right) \right] \tag{3.19}$$

onde:

$$M_i = 12\alpha[t - (i-1)t_p] + y_b^2 \tag{3.20}$$

e

$$N_i = 2\sqrt{\alpha M_i[t - (i-1)t_p]} \tag{3.21}$$

Esta equação corresponde à solução para a distribuição de temperatura no processo multipasse unidimensional, com uma fonte de calor Gaussiana. Para pontos distantes da fonte de calor, ou seja, para distâncias onde y tem a mesma magnitude que y_b, a Equação (3.19) é semelhante à solução obtida para fonte plana. Como anteriormente citado, a solução de Rosenthal fornece resultados precisos para pontos distantes da solda. Entretanto, próximo à ZF e à ZAC (y << y_b), a correção introduzida pelo modelo de fonte de calor distribuída na Equação (3.19) permite uma melhor previsão das temperaturas nestas regiões.

3.4 Modelo Bidimensional Transiente

De acordo com o sistema de coordenadas da Figura 3.1, no modelo bidimensional transiente, considera-se que a fonte de calor se move em alta velocidade, desprezando-se o fluxo de calor na direção x (problema y-z).

A solução analítica para o caso de aplicação instantânea da fonte de calor na soldagem multipasse bidimensional (regime transiente) já foi obtida por Suzuki (1996), mas considerando uma chapa de espessura infinita. Este modelo, que considera as perdas pelas superfícies da chapa, é dado pela seguinte equação:

$$T(x, y, t) = T_0 + \frac{1}{4\rho c \pi \alpha} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{[t - (i-1)t_p]} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha[t - (i-1)t_p]}\right\} \exp\{-b[t - (i-1)t_p]\} \quad (3.22)$$

A consideração de um meio infinito simplifica consideravelmente o problema. Entretanto, a espessura do material é sempre finita, e as condições de contorno devem ser levadas em consideração na formulação do problema. Primeiro será considerado o problema de fonte linear instantânea (concentrada), e em seguida o problema onde se leva em consideração a distribuição da fonte de calor.

3.4.1 Fonte de Calor Concentrada Linear

A formulação para o problema bidimensional transiente analisado é dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (3.23)$$

$$\theta(t=0) = 0 \quad (3.23.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta} \theta dy dz = \frac{Q'_1}{\rho c} \quad (3.23.2)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=\delta} = 0 \quad (3.23.3)$$

Como citado no item 3.2, a obtenção da função de Green corresponde a um passo intermediário para a solução do problema estudado. A utilidade da função de Green está no fato de que a solução do problema da Equação (3.23), com as respectivas condições inicial e

de contorno, pode ser representada em termos de funções de Green. Assim, o conhecimento da função de Green adequada ao problema permite a determinação da distribuição de temperatura no meio considerado.

No caso de coordenadas cartesianas, a função de Green para um problema bidimensional pode ser obtida pelo produto de duas funções de Green unidimensionais (Carslaw e Jaeger, 1959). Então,

$$u(y, z, t / y', z', \tau) = u(y, t / y', \tau) \cdot u(z, t / z', \tau) \quad (3.24)$$

No problema considerado, o meio é infinito em y . A função de Green para este caso é dada pela Equação (3.3), substituindo x por y . Para a direção z , com dimensão finita e igual a δ , a função de Green tem a seguinte forma geral (Ozisik, 1993):

$$u(z, t / z', \tau) = \frac{Z_0}{N_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\beta_m^2 \alpha(t - \tau)}{\delta^2}\right] \frac{Z_m(z)Z_m(z')}{N_m} \quad (3.25)$$

Para o problema com condições de contorno adiabáticas tratado aqui, as normas para $m = 0$ e $m = 1, 2, 3 \dots$ são:

$$N_0 = \delta \quad (3.26.1)$$

$$N_m = \frac{\delta}{2} \quad (3.26.2)$$

As auto-funções $Z_m(z)$ correspondem à:

$$Z_m(z) = \cos \frac{\beta_m z}{\delta} \quad (3.27)$$

Os auto-valores β_m são as raízes positivas de $\sin \beta_m \delta = 0$, o que fornece:

$$\beta_m = \frac{m\pi}{\delta} \quad (3.28)$$

Substituindo as Equações (3.26) a (3.28) na Equação (3.25), obtém-se:

$$u(z, t / z', \tau) = \frac{1}{\delta} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{\delta^2} \right] \cos \left(\frac{m\pi z}{\delta} \right) \cos \left(\frac{m\pi z'}{\delta} \right) \right\} \quad (3.29)$$

De acordo com a Equação (3.24), a função de Green procurada para o problema 2-D em questão pode ser escrita como:

$$u(y, z, t / y', z', \tau) = \frac{1}{2\delta[\pi\alpha(t - \tau)]^{1/2}} \exp \left[-\frac{(y - y')^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] * \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{\delta^2} \right] \cos \left(\frac{m\pi z}{\delta} \right) \cos \left(\frac{m\pi z'}{\delta} \right) \right\} \quad (3.30)$$

A função de Green na forma da Equação (3.30) representa a distribuição de temperatura $\theta(y, z, t)$ na posição (y, z) e no instante t , devido à uma fonte linear de energia unitária, localizada em (y', z') , liberando a energia instantaneamente no instante t igual a τ . No problema considerado, para uma quantidade de energia por unidade de comprimento Q_1' , a solução para o problema (3.23) é, conforme a função de Green obtida:

$$\theta(y, z, t) = \frac{Q_1'}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha t}} \exp \left(-\frac{y^2}{4\alpha t} \right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2} \right) \cos \left(\frac{m\pi z}{\delta} \right) \right] \quad (3.31)$$

Esta equação representa a solução para o primeiro passe de solda. Na formulação do problema para o segundo passe, a condição inicial é dada pela Equação (3.31), no instante t igual a t_p (início do segundo passe). Assim, fazendo o deslocamento da variável t , obtém-se:

$$t' = t - t_p \quad (3.32)$$

Além do deslocamento no tempo, deve-se considerar também o deslocamento da origem do eixo z , de um valor igual à z_p , equivalente à altura do cordão de solda, ou seja,

$$w = z - z_p \quad (3.33)$$

A formulação para o segundo passe, utilizando as variáveis t' e w , é dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t'} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial w^2} \right) \quad (3.34)$$

$$\theta(t' = 0) = \frac{Q'_1}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha t_p}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t_p}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t_p}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(w + z_p)}{\delta}\right] \right\} = \gamma(y, w) \quad (3.34.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta} [\theta - \gamma(y, z)] dy dw = \frac{Q'_2}{\rho c} \quad (3.34.2)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial w} \Big|_{w=-z_p} = \frac{\partial \theta}{\partial w} \Big|_{w=\delta-z_p} = 0 \quad (3.34.3)$$

Esta formulação pode ser dividida em duas formulações mais simples, uma considerando a condição inicial, e outra a condição de contorno não-homogênea. Isto implica em dois novos problemas a serem solucionados, como mostrado abaixo.

$$\text{Problema 1} \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial t'} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial w^2} \right) \quad (3.35)$$

$$\theta_1(t' = 0) = 0 \quad (3.35.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta} \theta_1 dy dw = \frac{Q'_2}{\rho c} \quad (3.35.2)$$

$$-\frac{\partial \theta_1}{\partial w} \Big|_{w=-z_p} = \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \Big|_{w=\delta-z_p} = 0 \quad (3.35.3)$$

Problema 2
$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t'} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial w^2} \right) \quad (3.36)$$

$$\theta_2(t' = 0) = \gamma(y, w) \quad (3.36.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta} [\theta_2 - \gamma(y, z)] dy dw = 0 \quad (3.36.2)$$

$$-\frac{\partial \theta_2}{\partial w} \Big|_{w=-z_p} = \frac{\partial \theta_2}{\partial w} \Big|_{w=\delta-z_p} = 0 \quad (3.36.3)$$

A formulação para o problema 1 é semelhante à do primeiro passe. Então, a solução para $\theta_1(y, w, t')$ é:

$$\theta_1(y, w, t') = \frac{Q'_2}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha t'}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t'}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t'}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi w}{\delta}\right) \right] \quad (3.37)$$

A solução para o problema 2, que contém uma condição inicial não-homogênea, pode ser obtida com o auxílio da Equação (3.4). Somente o primeiro termo do lado direito desta equação é considerado, pois a temperatura nula na fronteira elimina o segundo termo. O problema a ser resolvido é dado pela seguinte expressão:

$$\theta_2(y, w, t') = \frac{Q'_1}{4\rho c \delta^2 \pi \alpha \sqrt{t' t_p}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\alpha t'} - \frac{y'^2}{4\alpha t_p}\right] dy' * \int_0^{\delta} \left\{ \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t'}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(w+z_p)}{\delta}\right] \cos\left[\frac{m\pi(w'+z_p)}{\delta}\right] \right] * \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t_p}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(w'+z_p)}{\delta}\right] \right] \right\} dw'$$

A resolução das integrais fornece:

$$\theta_2(y, w, t') = \frac{Q'_1}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha (t' + t_p)}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\alpha(t' + t_p)}\right] \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t' + t_p)}{\delta^2}\right] \cos\left[\frac{m\pi(w + z_p)}{\delta}\right] \right\} \quad (3.38)$$

Pelo Princípio da Superposição, a solução para o segundo passe é composta pela soma das soluções dos problemas 1 e 2. Voltando às variáveis t e z através das Equações (3.32) e (3.33), obtém-se como solução para o segundo passe:

$$\begin{aligned} \theta(y, z, t) = & \frac{Q'_1}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right) \right] + \\ & \frac{Q'_2}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha (t - t_p)}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\alpha(t - t_p)}\right] \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - t_p)}{\delta^2}\right] \cos\left[\frac{m\pi(z - z_p)}{\delta}\right] \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Considerando que z_p e t_p sejam constantes para todos os passes, a solução geral para n passes de solda pode ser obtida seguindo as mesmas etapas da solução do segundo passe. Portanto, na variável T , tem-se:

$$\begin{aligned} T(y, z, t) = T_0 + & \frac{1}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t - (i-1)t_p}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\alpha[t - (i-1)t_p]}\right\} * \\ & \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2}\right\} \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esta é a solução para o problema multipasse bidimensional transiente, para uma chapa de espessura finita, com fonte de calor concentrada. Deve-se tomar cuidado para que não haja confusão em relação aos somatórios presentes na equação acima. O primeiro deles se refere ao número de passes utilizado, que varia de 1 a n . O segundo somatório está relacionado ao número de auto-valores a serem utilizados na solução.

3.4.2 Fonte de Calor Distribuída

A consideração da distribuição da fonte de calor, assim como no caso 1-D, é feita tratando o problema com uma fonte linear concentrada. Através do Princípio da Superposição, obtém-se a solução para o problema com fonte distribuída, pela somatória das contribuições dos efeitos individuais provocados por cada fonte linear. Para a configuração 2-D transiente, serão considerados os modelos de fonte Gaussiana unidimensional e Gaussiana circular.

3.4.2.a Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Unidimensional

Inicialmente, considerando o problema onde a fonte de calor é linear instantânea, a formulação corresponde àquela da Equação (3.23), cuja solução é dada pela Equação (3.31). O processo de difusão para uma fonte linear instantânea, que libera uma quantidade de calor $dQ' = q_s(y')dy'$ no instante $t = 0$ é, de acordo com a Equação (3.31):

$$d\theta(y, z, t) = \frac{q_s(y')dy'}{2\rho c\delta\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\alpha t}\right] \left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right)\right] \quad (3.41)$$

onde o termo $(y-y')^2$ na exponencial da equação acima representa a distância entre o ponto de aplicação da fonte e um ponto sobre o eixo y no material.

O modelo para a fonte Gaussiana unidimensional é o mesmo utilizado na configuração 1-D transiente (item 3.3), onde $q_s(y)$ é dada pela Equação (3.12). Substituindo as expressões (3.12) e (3.27) na Equação (3.41):

$$d\theta(y, z, t) = \frac{\sqrt{3}Q'_1 dy'}{2\rho c\delta y_b \pi \text{Erf}(\sqrt{3})\sqrt{\alpha t}} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\alpha t} - \frac{3y'^2}{y_b^2}\right] \left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right)\right] \quad (3.42)$$

Somando as contribuições de todas as fontes lineares concentradas:

$$\theta(y, z, t) = \frac{\sqrt{3}Q'_1}{2\rho c\delta y_b \pi \text{Erf}(\sqrt{3})\sqrt{\alpha t}} \int_{-y_b}^{y_b} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\alpha t} - \frac{3y'^2}{y_b^2}\right] dy' * \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right)\right] \quad (3.43)$$

Resolvendo a integral, obtém-se:

$$\theta(y, z, t) = \frac{\sqrt{3}Q'_1}{2\rho c\delta \text{Erf}(\sqrt{3})\sqrt{\pi(12\alpha t + y_b^2)}} \exp\left(-\frac{3y^2}{12\alpha t + y_b^2}\right) * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha t - yy_b + y_b^2}{2\sqrt{\alpha t(12\alpha t + y_b^2)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha t - yy_b - y_b^2}{2\sqrt{\alpha t(12\alpha t + y_b^2)}}\right] \right\} * \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right)\right] \quad (3.44)$$

A Equação (3.44) representa a distribuição de temperatura para o problema 2-D transiente, considerando uma fonte de calor distribuída somente ao longo da direção y, numa região compreendida entre os limites $-y_b$ e y_b . A metodologia para a obtenção da solução para o segundo passe é análoga à utilizada no problema de fonte linear. Como pode ser observado pela solução correspondente à Equação (3.40), para cada passe de solda depositado, a solução do passe anterior é acrescida de um termo que considera a energia fornecida a este passe, e as variáveis t e z são deslocadas de t_p e z_p , respectivamente. Seguindo este procedimento, a solução geral para n passes pode ser escrita partindo da solução (3.44):

$$T(y, z, t) = T_0 + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c\delta \sqrt{\pi} \text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{M_i}} \exp\left(-\frac{3y^2}{M_i}\right) \left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right) \right] * \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2}\right] \cos\left[\frac{m\pi [z - (i-1)z_p]}{\delta}\right] \right\} \quad (3.45)$$

A distribuição de temperatura no processo de soldagem multipasse 2-D transiente, para uma fonte de calor com distribuição Gaussiana unidimensional, pode ser obtida através da Equação (3.45). Para pontos bem distantes da solda (y_b desprezível), a equação acima recai na solução obtida considerando fonte concentrada, representada pela Equação (3.40).

3.4.2.b Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Semicircular

O modelo de fonte de calor com distribuição Gaussiana unidimensional utilizado até o momento, que considera a distribuição da densidade de potência somente na superfície da chapa, é útil para situações onde a profundidade de penetração é pequena. Entretanto, para fontes de alta densidade de potência, este modelo não considera a ação do arco em relação ao fato de que o mesmo transporta calor também abaixo da superfície da solda.

Um modelo mais próximo da realidade para este caso é o de uma fonte de calor com distribuição semicircular, na qual o calor se distribui também na direção da coordenada z (espessura). A energia total da fonte é dada por:

$$Q' = \iint q_s(y, z) dy dz \quad (3.46)$$

Assim como no caso unidimensional, devido à suposição de velocidade de soldagem elevada, todos os pontos da direção x apresentam a mesma distribuição semicircular ao longo de y e z . A densidade de potência é obtida através de:

$$q_s(y, z) = q_{\max} \exp[-A(y^2 + z^2)]$$

O coeficiente de concentração A pode ser determinado considerando uma distância r_b na qual a energia da fonte se reduz a 5% do seu valor máximo, da mesma forma como foi feito no modelo unidimensional. Assim,

$$q_s(y, z) = q_{\max} \exp\left[-\frac{3(y^2 + z^2)}{r_b^2}\right] \quad (3.47)$$

Substituindo a Equação (3.47) na Equação (3.46), e realizando a integração em y entre os limites $-r_b$ e r_b , e a integração em z entre $-r_b$ e 0 , obtém-se a seguinte expressão para $q_{\max}$:

$$q_{\max} = \frac{6Q'}{\pi r_b^2 [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \quad (3.48)$$

Voltando à Equação (3.47):

$$q_s(y, z) = \frac{6Q'}{\pi r_b^2 [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \exp\left[-\frac{3(y^2 + z^2)}{r_b^2}\right] \quad (3.49)$$

Os passos para a obtenção da solução com fonte de calor semicircular são análogos aos do modelo anterior, que considera uma fonte distribuída apenas em y . De acordo com a Equação (3.31), a variação de temperatura do elemento de área $dy'dz'$ é dada por:

$$d\theta(y, z, t) = \frac{q_s(y', z') dy' dz'}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right)\right] \quad (3.50)$$

A substituição da expressão obtida para q_s (Equação 3.49) na Equação (3.50) resulta em:

$$d\theta(y, z, t) = \frac{3Q' dy' dz'}{\rho c \delta \pi^{3/2} [r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^2 \sqrt{\alpha t}} \exp\left[-\frac{(y - y')^2}{4\alpha t} - \frac{3y'^2}{r_b^2}\right] * \exp\left(-\frac{3z'^2}{r_b^2}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z - z')}{\delta}\right]\right] \quad (3.51)$$

Somando as contribuições de todas as fontes concentradas:

$$\theta(y, z, t) = \frac{3Q'_1}{\rho c \delta \pi^{3/2} [r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^2 \sqrt{\alpha t}} \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\alpha t} - \frac{3y'^2}{r_b^2}\right] dy' * \int_{-r_b}^0 \exp\left(-\frac{3z'^2}{r_b^2}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z-z')}{\delta}\right] \right\} dz' \quad (3.52)$$

Somente a integral em y pode ser resolvida de forma analítica. A avaliação da integral em z deve ser feita numericamente. Substituindo o resultado da integral em y, obtém-se a seguinte expressão:

$$\theta(y, z, t) = \frac{3Q'_1}{\rho c \delta \pi r_b [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2 \sqrt{r_b^2 + 12\alpha t}} \exp\left(-\frac{3y^2}{r_b^2 + 12\alpha t}\right) * \left[\text{Erf}\left(\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b y}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b y}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) \right] * \int_{-r_b}^0 \exp\left(-\frac{3z'^2}{r_b^2}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z-z')}{\delta}\right] \right\} dz' \quad (3.53)$$

Com a definição de:

$$r_b^2 = 12\alpha t_0 \quad (3.54)$$

a Equação (3.53) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\theta(y, z, t) = \frac{Q'_1}{4\rho c \delta \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2 \sqrt{t_0(t_0 + t)}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\alpha(t_0 + t)}\right] * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha(t + t_0) - 2\sqrt{3\alpha t_0} y}{4\alpha\sqrt{3t(t + t_0)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha(t + t_0) - 2\sqrt{3\alpha t_0} y}{4\alpha\sqrt{3t(t + t_0)}}\right] \right\} * \int_{-2\sqrt{3\alpha t_0}}^0 \exp\left(-\frac{z'^2}{4\alpha t_0}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z-z')}{\delta}\right] \right\} dz'$$

(3.55)

Para o segundo passe, a solução é obtida pelo acréscimo de um termo na Equação (3.55), considerando o deslocamento das variáveis t e z . Por analogia aos modelos anteriores, a solução geral é escrita como:

$$T(y, z, t) = T_0 + \frac{1}{4\rho c \delta \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t_0 S_i}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha S_i}\right) \left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_1 y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1 y}{W_i}\right) \right] * \int_{-2\sqrt{3\alpha t_0}}^0 \exp\left\{-\frac{z'^2}{4\alpha t_0}\right\} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (S_i - t_0)}{\delta^2}\right] \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p - z']}{\delta}\right\} \right\} dz' \quad (3.56)$$

onde C_1 , S_i , U_i , e W_i podem ser determinados através de:

$$C_1 = 2\sqrt{3\alpha t_0} \quad (3.57)$$

$$S_i = t_0 + t - (i-1)t_p \quad (3.58)$$

$$U_i = 12\alpha S_i \quad (3.59)$$

$$W_i = 4\alpha\sqrt{3S_i[t - (i-1)t_p]} \quad (3.60)$$

Esta é a solução para o processo de soldagem multipasse bidimensional transiente considerando uma distribuição semicircular para a fonte de calor.

3.5 Modelo Bidimensional Quase-estacionário

Na configuração de fluxo de calor bidimensional quase-estacionário, o problema considerado é um problema x - y , não ocorrendo variação de temperatura na direção da espessura (direção z). Assim como no modelo unidimensional transiente, a solução analítica da soldagem multipasse com fonte concentrada para o modelo bidimensional quase-estacionário já é conhecida (Suzuki, 1996).

No desenvolvimento da solução com fonte distribuída, será considerado o modelo de fonte de calor Gaussiana circular, com um raio r_b ao longo das direções x e y . Para resolver o problema quase-estacionário, onde se tem a aplicação contínua da fonte de calor durante um certo período de tempo, a distribuição de calor da fonte é tratada como se a aplicação desta ocorresse de forma instantânea.

O primeiro passo para a obtenção da solução é a consideração do modelo 2-D transiente com fonte concentrada instantânea. A partir desta solução, considera-se a distribuição da fonte de calor, ainda com aplicação instantânea da mesma, em um sistema de coordenadas fixo. Finalmente, faz-se a mudança de variável para o sistema de coordenadas móvel, com a aplicação contínua da fonte durante um certo intervalo de tempo. Dessa forma, obtém-se a solução para o regime quase-estacionário com fonte distribuída. Para esta configuração, utiliza-se o Princípio da Superposição tanto no espaço como no tempo.

A solução para a distribuição de temperatura no processo de soldagem multipasse, configuração 2-D transiente e meio infinito, é dada pela Equação (3.22). Considerando o sistema de coordenadas fixo x_0y_0 da Figura 3.3, a energia da fonte é dada por:

$$Q' = \int_{y_0} \int_{x_0} q_s(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (3.61)$$

onde $q_s(x_0, y_0)$ tem a forma da Equação (3.46). Entretanto, para a determinação de $q_{\max}$, a integral dupla é efetuada entre os limites $-r_b$ e r_b para as duas variáveis, pois o domínio neste caso é um círculo na superfície da chapa. Com isso, tem-se:

$$q_{\max} = \frac{3Q'}{\pi r_b^2 [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \quad (3.62)$$

Portanto, a densidade de energia superficial é dada por:

$$q_s(x_0, y_0) = \frac{3Q'}{\pi r_b^2 [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2)}{r_b^2}\right] \quad (3.63)$$

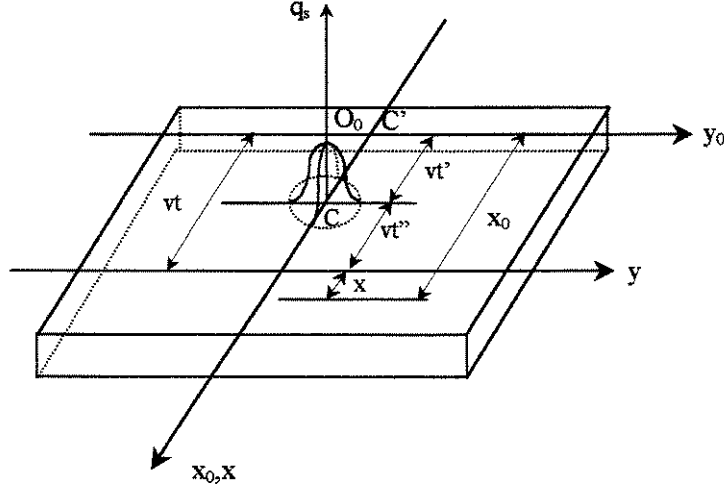


Figura 3.3 – Fonte de calor com distribuição Gaussiana circular para o modelo bidimensional quase-estacionário.

Seguindo os mesmos passos utilizados no modelo bidimensional transiente, ou seja, substituindo a Equação (3.63) na Equação (3.22), obtém-se:

$$d\theta(x_0, y_0, t) = \frac{3Q'}{4\rho c \alpha t [\pi r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \exp\left[-\frac{3(x_0'^2 + y_0'^2)}{r_b^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2}{4\alpha t}\right] dx_0' dy_0' \quad (3.64)$$

Somando as contribuições de todas as fontes concentradas:

$$\theta(x_0, y_0, t) = \frac{3Q'}{4\rho c \alpha t [\pi r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3x_0'^2}{r_b^2} - \frac{(x_0 - x_0')^2}{4\alpha t}\right] dx_0' \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3y_0'^2}{r_b^2} - \frac{(y_0 - y_0')^2}{4\alpha t}\right] dy_0'$$

Resolvendo a integral, obtém-se a solução para o problema de fonte distribuída, com aplicação instantânea da fonte, que pode ser escrita como:

$$\theta(x_0, y_0, t) = \frac{3Q'_1}{4\rho c\pi[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2(r_b^2 + 12\alpha t)} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2)}{r_b^2 + 12\alpha t}\right] * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] \right\} * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] \right\} \quad (3.65)$$

Para a obtenção da solução com a aplicação contínua da fonte de calor, considere que a mesma se move na direção x , com velocidade v , como mostrado na Figura 3.3. No instante $t=0$, o centro C da fonte coincide com a origem O_0 do sistema de coordenadas fixo x_0y_0 .

O período de atuação da fonte de calor pode ser dividido em pequenos intervalos dt' , e o calor introduzido durante um intervalo ($Q'_1 dt'$) pode ser considerado como uma fonte instantânea. A fonte de calor circular tem seu centro no ponto C' , e é aplicada no instante t' a uma distância vt' a partir do ponto O_0 (a posição inicial do centro da fonte). O calor introduzido pela fonte se difunde durante $t-t'$, e a variação de temperatura de um ponto situado em (x_0, y_0) é, de acordo com a Equação (3.65):

$$d\theta(x_0, y_0, t) = \frac{3Q'_1 dt'}{4\rho c\pi[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \exp\left\{-\frac{3[(x_0 - vt')^2 + y_0^2]}{r_b^2 + 12\alpha(t-t')}\right\} * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t')t - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t')t - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] \right\} * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] \right\} \quad (3.66)$$

De acordo com o Princípio da Superposição, a temperatura no instante t produzida pela ação contínua da fonte distribuída móvel é igual à soma de incrementos de temperaturas $d\theta$, provenientes de cada incremento dQ' , liberado desde o instante $t'=0$ até $t'=t$, isto é:

$$\theta(x_0, y_0, t) = \frac{3Q'_1}{4\rho c\pi[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \int_0^t \frac{dt'}{[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \exp\left\{-\frac{3[(x_0 - vt')^2 + y_0^2]}{r_b^2 + 12\alpha(t-t')}\right\} * \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t')t - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t')t - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] \right\} * \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] \right\}$$

Fazendo as mudanças de variáveis,

$$x = x_0 - vt \quad (3.67)$$

$$y = y_0 \quad (3.68)$$

$$t'' = t - t' \quad (3.69)$$

e utilizando a relação definida pela Equação (3.54), a integral anterior pode reescrita como:

$$\theta(x, y, t) = \frac{Q'_1}{16\rho c\pi\alpha[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \int_0^t \frac{dt''}{(t_0 + t'')} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha(t_0 + t'')} - \frac{vt''(2x + vt'')}{4\alpha(t_0 + t'')} \right] * \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''}(t_0 + t'')} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''}(t_0 + t'')} \right] \right\} \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''}(t_0 + t'')} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''}(t_0 + t'')} \right] \right\} \quad (3.70)$$

Para a avaliação da integral na Equação (3.70), é necessário recorrer às técnicas numéricas de integração, não sendo possível a apresentação da solução em uma forma completamente analítica. A solução geral corresponde a:

$$T(x, y, t) = T_0 + \frac{1}{16\rho c \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n Q'_i \int_0^t \frac{dt''_i}{S_i} \exp \left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x_i + V_i)}{U_i} \right] * \left\{ \text{Erf} \left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i} \right] - \text{Erf} \left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i} \right] \right\} \left\{ \text{Erf} \left[\frac{U_i - C_1 y}{W_i} \right] - \text{Erf} \left[\frac{-U_i - C_1 y}{W_i} \right] \right\} \quad (3.71)$$

onde C_1 , S_i , U_i e W_i têm as mesmas definições dadas pelas Equações (3.57), (3.58), (3.59) e (3.60), respectivamente. As variáveis V_i , x_i e r_i são definidas como:

$$V_i = v[t - (i - 1)t_p] \quad (3.72)$$

$$x_i = x_0 - V_i \quad (3.73)$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y^2 \quad (3.74)$$

A Equação (3.71) é a solução para o processo de soldagem multipasse 2-D quase-estacionário, onde a fonte de calor está distribuída de forma Gaussiana circular sobre a superfície do material.

3.6 Modelo Tridimensional Quase-estacionário

Para a configuração tridimensional, de acordo com o sistema de coordenadas da Figura 3.1, considera-se que o fluxo de calor ocorre nas direções de soldagem, perpendicular a esta, e também no sentido da espessura do material, ou seja, nas direções x , y e z , respectivamente. Aplicando o balanço de energia para um elemento de volume $dx dy dz$, obtém-se:

$$q_x + q_y + q_z = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.75)$$

Utilizando a Lei de Fourier e a equação que descreve o acúmulo de energia, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.76)$$

Na Equação (3.76), a condutividade térmica é função da posição e da temperatura, resultando em um problema não-linear. Neste caso, a solução é possível somente através de métodos numéricos. Entretanto, se k for constante, esta equação se reduz a:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.77)$$

A equação acima se refere ao processo de condução de calor em regime transiente. Entretanto, como as fontes de calor utilizadas em soldagem normalmente são móveis, o processo atinge o estado quase-estacionário. Neste regime, para um observador situado sobre a fonte de calor, não se observa variação da temperatura com o tempo e, portanto, o termo $\partial T / \partial t$ é nulo. Considerando o eixo x como a direção de soldagem, uma mudança de variável para um sistema de coordenada móvel através de $x = x_0 - vt$ transforma a Equação (3.77) em:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{v}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.78)$$

Será desenvolvido o modelo para a soldagem multipasse somente para o regime quase-estacionário (fonte contínua), pois não tem aplicação prática em soldagem a utilização de uma fonte instantânea para a configuração tridimensional. Neste caso, serão considerados os modelos de fonte de calor pontual e distribuída (Gaussiana circular e Gaussiana hemisférica), para espessuras de chapa finita e infinita.

3.6.1 Fonte de Calor Concentrada Pontual, Chapa de Espessura Finita

Considerando-se que a fonte de calor se move na direção x , a formulação do problema para o regime quase-estacionário de soldagem, na variável θ , é dada por :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\frac{v}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.79)$$

com :

$$\theta(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.79.1)$$

$$Q_1 = \lim_{R \rightarrow 0} -4\pi R^2 k \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad (3.79.2)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=\delta} = 0 \quad (3.79.3)$$

Da mesma forma como foi feito para o modelo 2-D transiente, a solução para este problema será obtida através da função de Green adequada ao caso considerado. Utilizando a propriedade de multiplicação de funções de Green 1-D, tem-se:

$$u(x, y, z, t / x', y', z', \tau) = u(x, t / x', \tau) \cdot u(y, t / y', \tau) \cdot u(z, t / z', \tau) \quad (3.80)$$

As funções de Green 1-D necessárias para o produto acima já foram anteriormente determinadas. Para as direções x e y , que podem ser consideradas como meios infinitos, a função de Green corresponde à Equação (3.3). Para a direção z , finita de espessura δ , a função de Green tem a forma mostrada na Equação (3.29). Portanto, substituindo estas equações em (3.80):

$$u(x, y, z, t / x', y', z', \tau) = \frac{1}{4\pi\alpha\delta(t-\tau)} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\alpha(t-\tau)}\right] * \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2\pi^2\alpha(t-\tau)}{\delta^2}\right] \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right) \cos\left(\frac{m\pi z'}{\delta}\right)\right\} \quad (3.81)$$

A função de Green nesta equação representa a temperatura no ponto (x',y',z') no instante t , a partir de uma fonte de calor com uma quantidade de energia unitária. Para uma fonte de potência Q_1 , a variação de temperatura pode ser escrita a partir da Equação (3.81), resultando em:

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{Q_1}{4\rho c \delta \pi \alpha t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha t}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right) \right\} \quad (3.82)$$

Esta equação corresponde a uma configuração tridimensional, mas para aplicação instantânea da fonte de calor. Para que se atinja o regime quase-estacionário, deve-se considerar o movimento da fonte de calor a uma velocidade constante v , ao longo do eixo O_0x_0 . O sistema de coordenadas $x_0y_0z_0$ é fixo em relação à fonte de calor, e o sistema xyz é móvel. O ponto O corresponde à origem do sistema de coordenadas xyz , e também será considerado como a posição instantânea da fonte.

No instante t' após o início do aquecimento, a fonte se encontra no ponto O' , que possui coordenadas $(vt', 0, 0)$. Considerando um intervalo infinitesimal de tempo dt' , a fonte localizada no ponto O libera uma quantidade de calor dQ , que se difunde durante o intervalo $t-t'$, produzindo em um ponto (x_0, y_0, z_0) no instante t uma variação de temperatura equivalente a $d\theta(t')$. Somando as variações infinitesimais de temperatura provocadas por cada fonte instantânea introduzida durante o intervalo de tempo t , no qual a fonte percorre o trajeto O_0O , a variação de temperatura pode ser obtida através de:

$$\theta(t) = \int_0^t d\theta(t') \quad (3.83)$$

A variação de temperatura $d\theta(t')$ pode ser determinada através da Equação (3.82), que considera a difusão de calor a partir de uma fonte instantânea. Reescrevendo esta equação em termos do sistema de coordenadas fixo, durante um período $t-t'$, e considerando a distância entre um ponto no material e a fonte de calor:

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\dot{Q}_1 dt'}{4\rho c \delta \pi \alpha (t-t')} \exp\left[-\frac{(x_0 - vt')^2 + y_0^2}{4\alpha(t-t')}\right] \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t-t')}{\delta^2}\right] \cos\left(\frac{m\pi z_0}{\delta}\right) \right\} \quad (3.84)$$

De acordo com a Equação (3.83), a integração desta equação durante o período de atuação da fonte permite obter a distribuição de temperatura, ou seja:

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\dot{Q}_1}{4\rho c \delta \pi \alpha} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')} \exp\left[-\frac{(x_0 - vt')^2 + y_0^2}{4\alpha(t-t')}\right] \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t-t')}{\delta^2}\right] \cos\left(\frac{m\pi z_0}{\delta}\right) \right\} \quad (3.85)$$

A equação acima se refere ao sistema de coordenadas fixo. Com as mudanças de variáveis para o sistema de coordenadas móvel utilizando as Equações (3.64), (3.65) e (3.66), e definindo ainda:

$$z = z_0 \quad (3.86)$$

a Equação (3.85) se torna:

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{\dot{Q}_1}{4\rho c \delta \pi \alpha} \exp\left(-\frac{vx}{2\alpha}\right) \int_0^t \frac{dt''}{t''} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha t''} - \frac{v^2 t''}{4\alpha}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t''}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right) \right\} \quad (3.87)$$

A avaliação da integral acima produz o seguinte resultado para a distribuição de temperatura:

$$\theta(x, y, z) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k \delta} \exp\left(-\frac{vx}{2\alpha}\right) \left\{ K_0\left(\frac{vr}{2\alpha}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi\alpha}{v\delta}\right)^2} \left(\frac{vr}{2\alpha}\right)\right] \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right) \right\} \quad (3.88)$$

Esta é a solução para o primeiro passe de solda. A variável r que aparece no argumento da função de Bessel de segunda espécie e ordem zero (K_0) é obtida através da Equação (3.74).

Por analogia aos modelos anteriores, no segundo passe de solda, o tempo t e a coordenada z devem ser deslocados de t_p e z_p , respectivamente. Entretanto, como o tempo aparece implícito na variável x (Equação (3.67)), e esta é utilizada para a determinação da distância r (Equação (3.74)), há a necessidade do subscrito nessas variáveis referente a cada passe. Assim, a solução para o segundo passe é obtida pelo acréscimo à solução do primeiro passe de um termo que considera a energia fornecida ao sistema neste passe:

$$\theta(x, y, z) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k \delta} \exp\left(-\frac{vx_1}{2\alpha}\right) \left\{ K_0\left(\frac{vr_1}{2\alpha}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi\alpha}{v\delta}\right)^2} \left(\frac{vr_1}{2\alpha}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi z}{\delta}\right) \right\} +$$

$$\frac{\dot{Q}_2}{2\pi k \delta} \exp\left(-\frac{vx_2}{2\alpha}\right) \left\{ K_0\left(\frac{vr_2}{2\alpha}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi\alpha}{v\delta}\right)^2} \left(\frac{vr_2}{2\alpha}\right) \right] \cos\left[\frac{m\pi(z - z_p)}{\delta}\right] \right\}$$

A expressão geral para n passes, na variável T , pode ser escrita como:

$$T(x, y, z) = T_0 + \frac{1}{2\pi k \delta} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \exp\left(-\frac{vx_i}{2\alpha}\right) * \left\{ K_0\left(\frac{vr_i}{2\alpha}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0 \left[C_2 \left(\frac{vr_i}{2\alpha}\right) \right] \cos\left[\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right] \right\} \quad (3.90)$$

onde x_i e r_i foram definidas anteriormente nas Equações (3.73) e (3.74), e C_2 é obtido através de:

$$C_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi\alpha}{v\delta}\right)^2} \quad (3.91)$$

A partir da Equação (3.90) é possível obter a distribuição de temperatura para o processo de soldagem multipasse 2-D quase-estacionário, para uma chapa de espessura finita, com fonte de calor pontual.

3.6.2 Fonte de Calor Distribuída, Chapa de Espessura Finita

No modelo tridimensional quase-estacionário, serão considerados os modelos Gaussiana circular e Gaussiana hemisférica para a distribuição da fonte de calor.

3.6.2.a Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Circular

Da mesma forma como foi feito para o modelo bidimensional quase-estacionário, a distribuição da fonte de calor é considerada primeiro tratando o problema com a aplicação instantânea da fonte. A variação de temperatura $d\theta$ provocada pela quantidade de calor dQ no elemento de área $dx_0 dy_0$ (sistema de coordenadas fixo da Figura 3.3) é dada por:

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{dQ}{4\rho c \delta \pi \alpha t} \exp\left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{4\alpha t}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z_0}{\delta}\right)\right]$$

ou

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{q_s(x'_0, y'_0) dx'_0 dy'_0}{4\rho c \delta \pi \alpha t} \exp\left(-\frac{(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2}{4\alpha t}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z_0}{\delta}\right)\right] \quad (3.92)$$

A expressão para $q_s(x'_0, y'_0)$ é a mesma do modelo bidimensional quase-estacionário, correspondente à Equação (3.63). A substituição desta na Equação (3.92) resulta em:

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3Q_1}{4\rho c \delta \alpha t [\pi \operatorname{Erf}(\sqrt{3})]^2} * \exp\left[-\frac{3(x_0'^2 + y_0'^2)}{r_b^2} - \frac{(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2}{4\alpha t}\right] \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi z_0}{\delta}\right)\right]$$

Somando as contribuições de todas as fontes pontuais instantâneas dQ :

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3Q_1}{4\rho c \delta \alpha t [\pi r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m \pi z_0}{\delta}\right) \right] * \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3x_0'^2}{r_b^2} - \frac{(x_0 - x_0')^2}{4\alpha t}\right] dx_0' \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3y_0'^2}{r_b^2} - \frac{(y_0 - y_0')^2}{4\alpha t}\right] dy_0' \quad (3.93)$$

Como resultado da integral, tem-se:

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3Q_1}{8\rho c [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2 \pi^{3/2} (\alpha t)^{1/2} (r_b^2 + 12\alpha t)} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2)}{r_b^2 + 12\alpha t}\right] \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m \pi z_0}{\delta}\right) \right] * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t (r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t (r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] \right\} \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t (r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t (r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] \right\} \quad (3.94)$$

Dividindo o intervalo de atuação da fonte de calor em pequenos intervalos dt' , a difusão de calor ocorre durante $t-t'$. A variação de temperatura de um ponto localizado em (x_0, y_0, z_0) é, conforme a Equação (3.94):

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t') = \frac{3Q_1 dt'}{4\rho c \delta \pi [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2 [r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} * \exp\left[-\frac{3[(x_0 - vt')^2 + y_0^2]}{r_b^2 + 12\alpha(t-t')}\right] \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha(t-t')}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m \pi z_0}{\delta}\right) \right] \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} }\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} }\right] \right\} * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} }\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} }\right] \right\} \quad (3.95)$$

Através das mudanças de variáveis definidas pelas Equações (3.67) a (3.69), e também com a transferência da variável z para o sistema de coordenadas móvel (Equação (3.86)), a solução para o primeiro passe é obtida somando-se os incrementos de temperatura $d\theta$, desde $t'=0$ a $t'=t$, ou seja:

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{\dot{Q}_i}{16\rho c \delta \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \int_0^t \frac{dt''}{(t_0 + t'')} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha(t_0 + t'')} - \frac{vt''(2x + vt'')}{4\alpha(t_0 + t'')} \right] \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t''}{\delta^2} \right) \cos \left(\frac{m\pi z}{\delta} \right) \right] \\ \left\{ \text{Erf} \left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}} \right] - \text{Erf} \left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}} \right] \right\} * \\ \left\{ \text{Erf} \left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}} \right] - \text{Erf} \left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}} \right] \right\} \quad (3.96)$$

A resolução numérica da integral acima fornece a solução para o primeiro passe de solda. Para n passes de solda, deve-se deslocar o tempo de t_p e, conseqüentemente, a variável x também deve ser recalculada após cada passe (Equação 3.73), e a variável z deve ser deslocada de um valor igual à z_p . Como solução geral, tem-se:

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{1}{16\rho c \delta \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \int_0^t \frac{dt''}{S_i} \exp \left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x + V_i)}{U_i} \right] * \\ \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (S_i - t_0)}{\delta^2} \right] \cos \left\{ \frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta} \right\} \right\} \\ \left\{ \text{Erf} \left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i} \right] - \text{Erf} \left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i} \right] \right\} * \\ \left[\text{Erf} \left(\frac{U_i - C_1 y}{W_i} \right) - \text{Erf} \left(\frac{-U_i - C_1 y}{W_i} \right) \right] \quad (3.97)$$

Nesta equação, as variáveis auxiliares x_i , S_i , V_i , r_i , U_i , W_i e C_1 tem as mesmas definições anteriores. Esta solução permite obter a distribuição de temperatura no modelo

tridimensional quase-estacionário, considerando uma distribuição circular da fonte sobre a superfície do material.

3.6.2.b Fonte de Calor com Distribuição Hemisférica

As etapas seguidas para a obtenção da solução com a fonte hemisférica são as mesmas do item anterior. No modelo hemisférico, além de um círculo sobre a superfície da chapa, o calor da fonte se distribui também ao longo do eixo z. Portanto, a Equação (3.92) deve ser reescrita como:

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{q_s(x'_0, y'_0, z'_0) dx'_0 dy'_0 dz'_0}{4\rho c \delta \pi \alpha t} \exp\left(-\frac{(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2}{4\alpha t}\right) * \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi(z_0 - z'_0)}{\delta}\right)\right] \quad (3.98)$$

A energia total Q da fonte é obtida através de:

$$Q = \int_{z_0} \int_{y_0} \int_{x_0} q_s(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (3.99)$$

onde q_s tem a forma:

$$q_s(x_0, y_0, z_0) = q_{\max} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{r_b^2}\right] \quad (3.100)$$

A substituição da Equação (3.100) em (3.99) resulta em:

$$Q = \int_{-rb}^0 \int_{-rb}^{rb} \int_{-rb}^{rb} q_{\max} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{r_b^2}\right] dx_0 dy_0 dz_0$$

Resolvendo a integral tripla, obtém-se a seguinte expressão para $q_{\max}$:

$$q_{\max} = \frac{6\sqrt{3}Q}{\pi^{3/2}[r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \quad (3.101)$$

Portanto, q_s pode ser escrita como:

$$q_s(x_0, y_0, z_0) = \frac{6\sqrt{3}Q}{\pi^{3/2}[r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{r_b^2}\right] \quad (3.102)$$

Substituindo a Equação (3.102) na Equação (3.98), obtém-se:

$$\begin{aligned} d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = & \frac{3\sqrt{3}Q_1}{2\rho c \delta \alpha \pi^{3/2} [r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^3} * \\ & \exp\left(-\frac{3(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)}{r_b^2} - \frac{(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2}{4\alpha t}\right) * \\ & \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi(z_0 - z_0')}{\delta}\right)\right] dx_0' dy_0' dz_0' \end{aligned}$$

A variação de temperatura do ponto (x_0, y_0, z_0) sob a ação de um fonte de forma hemisférica é obtida pela soma das contribuições de cada fonte pontual atuando no elemento de volume $dx_0 dy_0 dz_0$. Assim:

$$\begin{aligned} \theta(x_0, y_0, z_0, t) = & \frac{3\sqrt{3}Q_1}{2\rho c \delta \alpha [r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3x_0'^2}{r_b^2} - \frac{(x_0 - x_0')^2}{4\alpha t}\right] dx_0' * \\ & \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3y_0'^2}{r_b^2} - \frac{(y_0 - y_0')^2}{4\alpha t}\right] dy_0' \int_{-r_b}^0 \exp\left(-\frac{3z_0'^2}{r_b^2}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z_0 - z_0')}{\delta}\right]\right] dz_0' \end{aligned} \quad (3.103)$$

As integrais na equação acima podem ser resolvidas analiticamente somente para as variáveis x e y . Para a coordenada z , deve-se recorrer às técnicas numéricas de integração. Resolvendo as integrais em x e y , obtém-se:

$$\begin{aligned} \theta(x_0, y_0, z_0, t) = & \frac{3\sqrt{3}Q_1}{2\rho c\delta r_b \pi^{3/2} [\text{Erf}(\sqrt{3})]^3 (r_b^2 + 12\alpha t)} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2)}{r_b^2 + 12\alpha t}\right] * \\ & \left[\text{Erf}\left(\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) \right] * \\ & \left[\text{Erf}\left(\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) \right] * \\ & \int_{-r_b}^0 \exp\left(-\frac{3z_0'^2}{r_b^2}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z_0 - z'_0)}{\delta}\right] \right\} dz'_0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Esta equação corresponde à solução para fonte distribuída hemisférica da configuração tridimensional, com aplicação instantânea da fonte. No processo onde o calor é fornecido de forma contínua, com o movimento da fonte na direção x , para cada período de tempo dt' , a variação de temperatura provocada pela potência $d\dot{Q}$, de acordo com a Equação (3.104), é:

$$\begin{aligned} d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = & \frac{3\sqrt{3}\dot{Q}_1 dt'}{2\rho c\delta r_b \pi^{3/2} [\text{Erf}(\sqrt{3})]^3 [r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \exp\left[-\frac{3[(x_0 - vt')^2 + y_0^2]}{r_b^2 + 12\alpha(t-t')}\right] * \\ & \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] \right\} * \\ & \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')}[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]} \right] \right\} * \\ & \int_{-r_b}^0 \exp\left(-\frac{3z_0'^2}{r_b^2}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha(t-t')}{\delta^2}\right] \cos\left[\frac{m\pi(z_0 - z'_0)}{\delta}\right] \right\} dz'_0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

Recorrendo novamente às mudanças de variáveis definidas pelas Equações (3.67) a (3.69), e (3.86), a mudança de temperatura no material é obtida pela integração da Equação (3.105), durante o período de atuação da fonte, resultando em:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & \frac{\sqrt{3}\dot{Q}_1}{8\rho c\delta\alpha\Gamma_b\pi^{3/2}[\text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \int_0^t \frac{dt''}{(t_0 + t'')} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha(t_0 + t'')} - \frac{vt''(2x + vt'')}{4\alpha(t_0 + t'')} \right] * \\ & \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] \right\} * \\ & \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] \right\} * \\ & \int_{-rb}^0 \exp\left(-\frac{z'^2}{4\alpha t_0}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\alpha t''}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z - z')}{\delta}\right] \right] dz' \end{aligned} \quad (3.106)$$

O resultado desta integral deve ser obtido numericamente. Como nos modelos anteriores, a solução para o segundo passe é obtida pelo acréscimo de um termo à Equação (3.106), considerando o deslocamento no tempo e no espaço. O mesmo procedimento é adotado para cada passe de solda depositado. Então, como solução geral, tem-se:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = T_0 + & \frac{\sqrt{3}}{8\rho c\delta\alpha\Gamma_b\pi^{3/2}[\text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \int_0^t \frac{dt''}{S_i} \exp\left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x + V_i)}{U_i}\right] * \\ & \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} * \\ & \left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_1y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1y}{W_i}\right) \right] * \\ & \int_{-rb}^0 \exp\left(-\frac{z_i'^2}{4\alpha t_0}\right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\alpha(S_i - t_0)}{\delta^2}\right) \cos\left[\frac{m\pi(z_i - z'_i)}{\delta}\right] \right] dz' \end{aligned} \quad (3.107)$$

As variáveis desta equação possuem as mesmas definições anteriores. A resolução numérica das integrais acima permite obter a distribuição de temperatura para a

configuração 3-D, em regime quase-estacionário, com uma fonte de calor que possui distribuição Gaussiana hemisférica.

3.6.3 Fonte de Calor Concentrada, Chapa de Espessura Infinita

Assim como no caso do modelo de chapa com espessura finita, a solução do problema para o regime quase-estacionário é obtida aplicando o princípio da Superposição no tempo, somando as contribuições de várias fontes instantâneas. Para isto, é necessário determinar a solução para o problema tridimensional com aplicação instantânea da fonte. A formulação para este problema, na variável θ , pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (3.108)$$

$$\text{com :} \quad \theta (t = 0) = 0 \quad (3.108.1)$$

$$\theta (x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.108.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \, dx \, dy \, dz = \frac{Q_1}{\rho c} \quad (3.108.3)$$

A função de Green para este problema corresponde à Equação (3.1), para um meio infinito. Para uma quantidade de energia $Q_1/(\rho c)$, a solução para a formulação acima é dada por:

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{Q_1}{\rho c (4\pi \alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4 \alpha t} \right) \quad (3.109)$$

Seguindo o mesmo procedimento do modelo anterior, ou seja, fazendo as mudanças de variáveis para o sistema de coordenadas que se move com a fonte de calor, e somando as contribuições dos efeitos provocados por cada fonte instantânea, tem-se:

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{\dot{Q}_1}{\rho c (4\pi\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{vx}{2\alpha}\right) \int_0^t \frac{dt''}{t''^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2 t''}{4\alpha} - \frac{R^2}{4\alpha t''}\right) \quad (3.110)$$

Como resultado da integral, obtém-se a solução para o primeiro passe de solda, de acordo com a equação abaixo:

$$\theta(R, x) = \frac{\dot{Q}_1}{4\pi k R_1} \exp\left(-\frac{v x_1}{2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{v R_1}{2\alpha}\right) \quad (3.111)$$

Por analogia ao modelo anterior, no segundo passe de solda, o tempo t e a coordenada z devem ser deslocados de t_p e z_p , respectivamente. Entretanto, como o tempo aparece implícito na variável x (Equação (3.67)), e a coordenada z encontra-se implícita na variável R ($R^2 = x^2 + y^2 + z^2$), são necessários subscritos nessas variáveis. Assim, a solução para o segundo passe é obtida pelo acréscimo à solução do primeiro passe de um termo que considera a energia fornecida ao sistema neste passe:

$$\theta(R, x) = \frac{\dot{Q}_1}{4\pi k R_1} \exp\left(-\frac{v x_1}{2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{v R_1}{2\alpha}\right) + \frac{\dot{Q}_2}{4\pi k R_2} \exp\left(-\frac{v x_2}{2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{v R_2}{2\alpha}\right)$$

A expressão geral para n passes na variável T pode ser escrita como:

$$T(R, x) = T_o + \frac{1}{4\pi k} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{R_i} \exp\left(-\frac{v x_i}{2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{v R_i}{2\alpha}\right) \quad (3.112)$$

onde a variável x_i foi definida anteriormente pela Equação (3.73), e a distância R_i é calculada pela seguinte relação:

$$R_i = \sqrt{x_i^2 + y^2 + [z - (i-1)z_p]^2} \quad (3.113)$$

A Equação (3.112) fornece a distribuição de temperatura para uma chapa considerada infinita nas três dimensões, gerada por uma fonte de calor aplicada pontualmente na origem do sistema, em regime quase-estacionário.

3.6.4 Fonte de Calor Distribuída, Chapa de Espessura Infinita

No modelo anterior, considerou-se uma fonte de calor pontual. Como já citado, a simplificação ao se considerar que a fonte de calor se distribui em um volume infinitesimalmente pequeno do material conduz a sérios erros para medidas de temperaturas na ZAC e na ZF. Portanto, seguindo o mesmo raciocínio das configurações uni e bidimensionais, neste item será considerado o fato da fonte de calor possuir uma dimensão finita.

3.6.4.a Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Circular

A formulação do problema para o primeiro passe de solda é semelhante à formulação composta pela Equação (3.108), e respectivas condições inicial e de contorno (Equações (3.108.1) a (3.108.3)). Para uma fonte pontual instantânea, conforme a Equação (3.109), o processo de difusão, no sistema de coordenadas fixo (x_0, y_0, z_0) , é dado por:

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{dQ_1}{\rho c (4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\alpha t}\right)$$

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{q_s(x'_0, y'_0) dx'_0 dy'_0}{\rho c (4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R'^2}{4\alpha t}\right) \quad (3.114)$$

onde R' é a distância da fonte pontual instantânea, localizada em (x'_0, y'_0) , a um ponto (x_0, y_0, z_0) no material, ou seja,

$$R'^2 = (x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2 + z_0^2 \quad (3.115)$$

Substituindo as expressões (3.63) e (3.115) em (3.114):

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3Q_1}{\rho c \pi^{5/2} (4\alpha t)^{3/2} [r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^{3/2}} \exp\left[-\frac{3(x_0'^2 + y_0'^2)}{r_b^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + z_0^2}{4\alpha t}\right] dx_0' dy_0' \quad (3.116)$$

Somando as contribuições de todas as fontes pontuais instantâneas dQ :

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \int_F d\theta(x_0, y_0, z_0, t)$$

Substituindo $d\theta$ da Equação (3.116) e integrando as variáveis x_0' e y_0' entre os limites de $-r_b$ a r_b ,

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3Q_1}{\rho c \pi^{5/2} (4\alpha t)^{3/2} [r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \exp\left(-\frac{z_0^2}{4\alpha t}\right) * \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3x_0'^2}{r_b^2} - \frac{(x_0 - x_0')^2}{4\alpha t}\right] dx_0' \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3y_0'^2}{r_b^2} - \frac{(y_0 - y_0')^2}{4\alpha t}\right] dy_0' \quad (3.117)$$

Resolvendo as integrais, obtém-se:

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3Q_1'}{8\rho c \pi^{3/2} (\alpha t)^{1/2} [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2 (r_b^2 + 12\alpha t)} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2)}{r_b^2 + 12\alpha t} - \frac{z_0^2}{4\alpha t}\right] * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] \right\} * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right] \right\} \quad (3.118)$$

A equação acima corresponde à solução para o primeiro passe de solda, considerando-se a distribuição da fonte de calor com aplicação instantânea da mesma. Para a obtenção da solução para o regime quase-estacionário, a fonte de calor deve ser aplicada continuamente durante um período de tempo t . Seguindo o mesmo raciocínio do modelo bidimensional quase-estacionário, até a solução dada pela Equação (3.70), para a configuração tridimensional, esta solução corresponde a:

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{\dot{Q}_i}{32\rho c(\pi\alpha)^{3/2}[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \int_0^t \frac{dt''}{t''^{1/2}(t_0 + t'')} \exp\left[-\frac{z^2}{4\alpha t''} - \frac{x^2 + y^2}{4\alpha(t_0 + t'')} - \frac{vt''(2x + vt'')}{4\alpha(t_0 + t'')} \right] * \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}(x + vt'')}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] \right\} \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-12\alpha(t_0 + t'') - 2\sqrt{3\alpha t_0}y}{4\alpha\sqrt{3t''(t_0 + t'')}}\right] \right\} \quad (3.119)$$

Através da resolução numérica da integral, obtém-se a solução para o primeiro passe de solda. Por analogia, a solução geral para n passes, na variável T , torna-se:

$$T(x, y, t) = T_0 + \frac{1}{32\rho c(\pi\alpha)^{3/2}[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \int_0^t \frac{dt''_i}{(S_i - t_0)^{1/2} S_i} \exp\left[-\frac{[z - (i-1)z_p]^2}{4\alpha(S_i - t_0)} - \frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x_i + V_i)}{U_i} \right] * \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1y}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1y}{W_i}\right] \right\} \quad (3.120)$$

A equação acima representa a distribuição de temperatura para n passes de solda, considerando-se uma fonte de calor com distribuição Gaussiana circular, aplicada continuamente em uma chapa de espessura infinita. As variáveis auxiliares C_1 , S_i , U_i e W_i são obtidas através das Equações (3.57) a (3.60), e V_i , x_i e r_i através das Equações (3.72) a (3.74).

3.6.4.b Fonte de Calor com Distribuição Gaussiana Hemisférica

No modelo hemisférico, a densidade de potência distribui-se de acordo com a Equação (3.102). A distância entre o ponto de atuação da fonte pontual instantânea e um ponto no material é dada por:

$$R'^2 = (x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2 + (z_0 - z'_0)^2 \quad (3.121)$$

Os passos para a obtenção da solução para o caso de fonte de calor com distribuição hemisférica são análogos aos do modelo anterior, que considera uma fonte circular. Assim, a substituição das Equações (3.102) e (3.121) na Equação (3.114) fornece:

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{6\sqrt{3}Q_1}{\rho c(4\alpha t)^{3/2} [\pi r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \exp\left[-\frac{3(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)}{r_b^2}\right] * \\ \exp\left[-\frac{(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2 + (z_0 - z'_0)^2}{4\alpha t}\right] dx'_0 dy'_0 dz'_0$$

O efeito da distribuição da fonte de calor sobre a variação de temperatura é obtido aplicando o princípio da Superposição no espaço, ou seja, somando as contribuições de todas as fontes pontuais:

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3\sqrt{3}Q_1}{4\rho c(\alpha t)^3 2[\pi r_b \text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3x_0'^2}{r_b^2} - \frac{(x_0 - x'_0)^2}{4\alpha t}\right] dx'_0 * \\ \int_{-r_b}^{r_b} \exp\left[-\frac{3y_0'^2}{r_b^2} - \frac{(y_0 - y'_0)^2}{4\alpha t}\right] dy'_0 \int_{-r_b}^0 \exp\left[-\frac{3z_0'^2}{r_b^2} - \frac{(z_0 - z'_0)^2}{4\alpha t}\right] dz'_0 \quad (3.122)$$

Resolvendo as integrais, obtém-se a solução para o primeiro passe de solda:

$$\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3\sqrt{3}Q_1}{4\rho c[\text{Erf}(\sqrt{3})]^3[\pi(r_b^2 + 12\alpha t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{3(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{r_b^2 + 12\alpha t}\right] * \\ \left[\text{Erf}\left(\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b x_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) \right] * \\ \left[\text{Erf}\left(\frac{r_b^2 + 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) \right] * \\ \left[-\text{Erf}\left(\frac{r_b z_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-r_b^2 - 12\alpha t - r_b z_0}{2\sqrt{\alpha t(r_b^2 + 12\alpha t)}}\right) \right] \quad (3.123)$$

No caso de aplicação contínua da fonte de calor, de forma que seja atingido o regime quase-estacionário, a variação de temperatura $d\theta$, proveniente de uma fonte de calor de potência dQ , conforme a Equação (3.123), é dada por:

$$d\theta(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{3\sqrt{3}\dot{Q}_1 dt'}{4\rho c[\text{Erf}(\sqrt{3})]^3 \{\pi[r_b^2 + 12\alpha(t-t')]\}^{3/2}} \exp\left\{-\frac{3[(x_0 - vt')^2 + y_0^2 + z_0^2]}{r_b^2 + 12\alpha(t-t')}\right\} * \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')}]}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b(x_0 - vt')}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')}]}\right] \right\} * \\ \left\{ \text{Erf}\left[\frac{r_b^2 + 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')}]}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b y_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')}]}\right] \right\} * \\ \left\{ -\text{Erf}\left[\frac{r_b z_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')}]}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-r_b^2 - 12\alpha(t-t') - r_b z_0}{2\sqrt{\alpha(t-t')[r_b^2 + 12\alpha(t-t')}]}\right] \right\} \quad (3.124)$$

A integração numérica desta equação durante o período de atuação da fonte de calor fornece a solução para o primeiro passe de solda. Com a relação dada pela Equação (3.54), e também com as definições das variáveis auxiliares de acordo com as Equações (3.58) a (3.60), (3.72), (3.73) e (3.113), para n passes, a solução tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{1}{32\rho c(\pi\alpha)^{3/2}[\text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \int_0^t \frac{dt''}{(S_i)^{3/2}} \exp\left[-\frac{3R_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x + V_i)}{U_i}\right] * \\
\left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} * \\
\left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_1y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1y}{W_i}\right) \right] \left[-\text{Erf}\left(\frac{C_1z}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1z}{W_i}\right) \right]
\end{aligned} \quad (3.125)$$

Esta equação permite obter a distribuição de temperatura para o modelo tridimensional quase-estacionário, para uma chapa de espessura considerada infinita, sob a atuação de uma fonte de calor distribuída de forma Gaussiana hemisférica.

3.7 Consideração das Perdas de Calor Superficiais

Nos modelos analíticos, as perdas superficiais são consideradas através de um coeficiente global de transferência de calor (h_g). Este coeficiente caracteriza a capacidade de perda de calor para o ambiente através da superfície do material, e é determinado pela superposição dos processos de troca de calor por convecção e radiação, isto é:

$$h_g = h_c + h_r \quad (3.126)$$

O coeficiente global varia com a temperatura de acordo com a variação dos coeficientes de troca de calor por convecção e radiação (h_c e h_r). Entretanto, na solução analítica, o coeficiente h_g é calculado a uma determinada temperatura, assim como a condutividade e a capacidade térmica do material.

As perdas superficiais são consideradas nos modelos uni e bidimensionais. Para a configuração tridimensional, as perdas podem ser desprezadas, pois o mecanismo de troca de calor por condução predomina em relação à convecção e radiação. O erro produzido com esta simplificação normalmente não excede 5% (Rykalin, 1951).

3.7.1 Modelo Unidimensional Transiente

O tratamento das perdas superficiais é feito pelo acréscimo à taxa de variação da temperatura ($\partial\theta/\partial t$), na Equação (3.6), de um termo que corresponde à taxa na qual ocorrem estas perdas, ou seja,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - b\theta \quad (3.127)$$

onde:

$$b = \frac{h_g P}{\rho c A} \quad (3.128)$$

As variáveis P e A são o perímetro e a área da secção transversal da chapa, respectivamente. A solução para a Equação (3.127) pode ser escrita como o produto da temperatura $V(y,t)$ multiplicada pelo fator adimensional $\exp(-bt)$, onde $V(y,t)$ é a temperatura da placa sem perdas superficiais (Rykalin, 1951).

Para o modelo 1-D com fonte concentrada plana, a solução com perdas é conhecida (Suzuki, 1996). No modelo com fonte de calor Gaussiana unidimensional, a consideração das perdas na Equação (3.19) conduz a:

$$T(y,t) = T_o + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c \sqrt{\pi} \text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{M_i}} \exp\left\{-\frac{3y^2}{M_i} - b[t - (i-1)t_p]\right\} \left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right) \right] \quad (3.129)$$

Através deste modelo, pode-se obter a distribuição de temperatura no material considerando dois fatores importantes na formulação do problema, que são a distribuição da fonte de calor, e também as perdas de calor superficiais. A distribuição da fonte corrige a

temperatura de pico para regiões bem próximas à solda. A influência das perdas se reflete não somente na temperatura de pico, mas principalmente na taxa de resfriamento do ciclo térmico.

3.7.2 Modelo Bidimensional Transiente

O procedimento para a consideração das perdas superficiais no modelo 2-D é semelhante ao do modelo anterior, ou seja, a taxa com que ocorrem estas perdas é acrescida à Equação da condução (3.23). Neste caso, o coeficiente b é calculado de acordo com a seguinte equação:

$$b = \frac{2h_g}{\rho c \delta} \quad (3.130)$$

Pode-se observar por esta definição a importância da consideração das perdas neste modelo, pois o coeficiente b é inversamente proporcional à espessura δ da chapa. Quanto menor a espessura, maior será o efeito das perdas sobre a distribuição de temperatura. A solução é obtida através da multiplicação da solução para o problema sem perdas pelo fator adimensional $\exp(-bt)$. No modelo de fonte concentrada linear, tem-se:

$$T(y, z, t) = T_0 + \frac{1}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t - (i-1)t_p}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{4\alpha[t - (i-1)t_p]} - b[t - (i-1)t_p] \right\} * \\ \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2} \right\} \cos \left\{ \frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta} \right\} \right\} \quad (3.131)$$

Para o modelo com fonte distribuída Gaussiana unidimensional, a consideração das perdas na Equação (3.45) resulta em:

$$\begin{aligned}
T(y, z, t) = T_0 + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c \delta \sqrt{\pi} \text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{M_i}} \exp\left\{-\frac{3y^2}{M_i} - b[t - (i-1)t_p]\right\} * \\
\left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right) \right] * \\
\left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2}\right] \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\} \right\}
\end{aligned} \quad (3.132)$$

Quando a fonte de calor foi admitida como tendo uma distribuição semi-circular, a Equação (3.56), correspondente à solução sem perdas, passa a ser:

$$\begin{aligned}
T(y, z, t) = T_0 + \frac{1}{4\rho c \delta \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t_0 S_i}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\alpha S_i} - b[t - (i-1)t_p]\right\} \left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_1 y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1 y}{W_i}\right) \right] \\
\int_{-2\sqrt{3\alpha t_0}}^0 \exp\left\{-\frac{[z' - (i-1)z_p]^2}{4\alpha t_0}\right\} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (S_i - t_0)}{\delta^2}\right] \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\} \right\} dz'
\end{aligned} \quad (3.133)$$

As Equações (3.131) a (3.133) permitem a obtenção dos ciclos térmicos para o modelo 2-D transiente, para uma chapa de espessura δ , considerando as perdas superficiais. Como anteriormente citado, a não consideração destas perdas pode conduzir a erros consideráveis, dependendo da espessura do material.

3.7.3 Modelo Bidimensional Quase-estacionário

Neste modelo, a presença do fator adimensional na solução deve ser incluída na integral, pois este fator depende da duração do processo. Então, a Equação (3.71) deve ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
T(r, x) = T_0 + \frac{1}{16\rho c \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n Q'_i \int_0^1 \frac{dt''_i}{S_i} \exp\left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x_i + V_i)}{U_i} - b(S_i - t_0)\right] * \\
\left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1 y}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1 y}{W_i}\right] \right\}
\end{aligned} \quad (3.134)$$

Na equação acima, além da distribuição circular da fonte de calor, as perdas também foram consideradas, permitindo que os valores de temperatura previstos por este modelo sejam mais próximos dos valores obtidos experimentalmente, como será mostrado na seção de resultados.

No caso de fonte de calor concentrada linear, a solução para o processo de soldagem multipasse, considerando as perdas superficiais, pode ser escrita como:

$$T(r, x) = T_0 + \frac{1}{2\pi k} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \exp\left(-\frac{vx_i}{2\alpha}\right) K_0\left[\sqrt{\frac{v^2}{4\alpha^2} + \frac{b}{\alpha}} r_i\right] \quad (3.135)$$

3.8 Resumo das Soluções Analíticas Obtidas

Em função da variedade de modelos considerados neste capítulo, as Tabelas 3.1 a 3.5 mostram um resumo das soluções analíticas obtidas para cada um destes modelos.

Tabela 3.1 – Soluções analíticas obtidas para a configuração unidimensional transiente.

Modelo da fonte de calor	Solução
distribuída Gaussiana 1-D sem perdas	$T(y, t) = T_o + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c \sqrt{\pi} \text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i''}{\sqrt{M_i}} \exp\left(-\frac{3y^2}{M_i}\right) * \left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right) \right]$
distribuída Gaussiana 1-D com perdas	$T(y, t) = T_o + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c \sqrt{\pi} \text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i''}{\sqrt{M_i}} \exp\left[-\frac{3y^2}{M_i} - b[t - (i-1)t_p]\right] * \left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right) \right]$

Tabela 3.2 – Soluções analíticas obtidas para a configuração bidimensional quase-estacionário.

Modelo da fonte de calor	Solução
distribuída Gaussiana circular s/perdas	$T(x, y, t) = T_o + \frac{1}{16\rho c \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n Q_i' \int_0^t \frac{dt_i''}{S_i} \exp\left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x_i + V_i)}{U_i}\right] * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1 y}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1 y}{W_i}\right] \right\}$
distribuída Gaussiana circular c/perdas	$T(r, x) = T_o + \frac{1}{16\rho c \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n Q_i' \int_0^t \frac{dt_i''}{S_i} \exp\left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x_i + V_i)}{U_i} - b(S_i - t_o)\right] * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1 y}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1 y}{W_i}\right] \right\}$
concentrada linear com perdas	$T(r, x) = T_o + \frac{1}{2\pi k} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \exp\left(-\frac{vx_i}{2\alpha}\right) K_0\left[\sqrt{\frac{v^2}{4\alpha^2} + \frac{b}{\alpha}} r_i\right]$

Tabela 3.3 – Soluções analíticas obtidas para a configuração bidimensional transiente.

Modelo da fonte de calor	Solução
concentrada linear sem perdas	$T(y, z, t) = T_0 + \frac{1}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t - (i-1)t_p}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\alpha[t - (i-1)t_p]}\right\} * \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2}\right\} \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\}\right\}$
concentrada linear com perdas	$T(y, z, t) = T_0 + \frac{1}{2\rho c \delta \sqrt{\pi \alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t - (i-1)t_p}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\alpha[t - (i-1)t_p]} - b[t - (i-1)t_p]\right\} * \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2}\right\} \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\}\right\}$
distribuída Gaussiana 1-D sem perdas	$T(y, z, t) = T_0 + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c \delta \sqrt{\pi} \text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{M_i}} \exp\left\{-\frac{3y^2}{M_i} \left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right)\right]\right\} * \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2}\right\} \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\}\right\}$
distribuída Gaussiana 1-D com perdas	$T(y, z, t) = T_0 + \frac{\sqrt{3}}{2\rho c \delta \sqrt{\pi} \text{Erf}(\sqrt{3})} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{M_i}} \exp\left\{-\frac{3y^2}{M_i} - b[t - (i-1)t_p]\right\} * \left[\text{Erf}\left(\frac{M_i - yy_b}{N_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-M_i - yy_b}{N_i}\right)\right] * \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha [t - (i-1)t_p]}{\delta^2}\right\} \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\}\right\}$
distribuída semicircular sem perdas	$T(y, z, t) = T_0 + \frac{1}{4\rho c \delta \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t_0 S_i}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\alpha S_i}\right\} \left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_i y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_i y}{W_i}\right)\right] * \int_{-2\sqrt{3\alpha t_0}}^0 \exp\left\{-\frac{z'^2}{4\alpha t_0}\right\} \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (S_i - t_0)}{\delta^2}\right\} \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p - z']}{\delta}\right\}\right\} dz'$
distribuída semicircular com perdas	$T(y, z, t) = T_0 + \frac{1}{4\rho c \delta \pi \alpha [\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{\sqrt{t_0 S_i}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\alpha S_i} - b[t - (i-1)t_p]\right\} * \left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_i y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_i y}{W_i}\right)\right] * \int_{-2\sqrt{3\alpha t_0}}^0 \exp\left\{-\frac{[z' - (i-1)z_p]^2}{4\alpha t_0}\right\} \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (S_i - t_0)}{\delta^2}\right\} \cos\left\{\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right\}\right\} dz'$

Tabela 3.4 – Soluções analíticas obtidas para a configuração tridimensional quase-estacionário, chapa de espessura finita.

Modelo da fonte de calor	Solução
concentrada pontual	$T(x, y, z) = T_0 + \frac{1}{2\pi k\delta} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \exp\left(-\frac{vx_i}{2\alpha}\right) * \left\{ K_0\left(\frac{vr_i}{2\alpha}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0\left[C_2\left(\frac{vr_i}{2\alpha}\right)\right] \cos\left[\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right] \right\}$
distribuída Gaussiana circular	$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{1}{16\rho c\delta\pi\alpha[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \int_0^t \frac{dt''}{S_i} \exp\left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x + V_i)}{U_i}\right] * \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2\pi^2\alpha(S_i - t_0)}{\delta^2}\right] \cos\left[\frac{m\pi[z - (i-1)z_p]}{\delta}\right] \right\} \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} \left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_1y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1y}{W_i}\right) \right]$
distribuída Gaussiana hemisférica	$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{\sqrt{3}}{8\rho c\delta\alpha r_b \pi^{3/2} [\text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \int_0^t \frac{dt''}{S_i} \exp\left[-\frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x + V_i)}{U_i}\right] * \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} * \left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_1y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1y}{W_i}\right) \right] * \int_{-rb}^0 \exp\left(-\frac{z_i'^2}{4\alpha t_0}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{m^2\pi^2\alpha(S_i - t_0)}{\delta^2}\right] \cos\left[\frac{m\pi(z_i - z_i')}{\delta}\right] \right\} dz'$

Tabela 3.5 – Soluções analíticas obtidas para a configuração tridimensional quase-estacionário, chapa de espessura infinita.

Modelo da fonte de calor	Solução
concentrada pontual	$T(R, x) = T_0 + \frac{1}{4\pi k} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{R_i} \exp\left(-\frac{v x_i}{2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{v R_i}{2\alpha}\right)$
distribuída Gaussiana circular	$T(x, y, t) = T_0 + \frac{1}{32\rho c(\pi\alpha)^{3/2}[\text{Erf}(\sqrt{3})]^2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i *$ $\int_0^t \frac{dt''}{(S_i - t_0)^{1/2} S_i} \exp\left[-\frac{[z - (i-1)z_p]^2}{4\alpha(S_i - t_0)} - \frac{3r_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x_i + V_i)}{U_i}\right] *$ $\left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} *$ $\left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1 y}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1 y}{W_i}\right] \right\}$
distribuída Gaussiana hemisférica	$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{1}{32\rho c(\pi\alpha)^{3/2}[\text{Erf}(\sqrt{3})]^3} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i *$ $\int_0^t \frac{dt''}{(S_i)^{3/2}} \exp\left[-\frac{3R_i^2}{U_i} - \frac{3V_i(2x + V_i)}{U_i}\right] *$ $\left\{ \text{Erf}\left[\frac{U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] - \text{Erf}\left[\frac{-U_i - C_1(x_i + V_i)}{W_i}\right] \right\} *$ $\left[\text{Erf}\left(\frac{U_i - C_1 y}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1 y}{W_i}\right) \right] *$ $\left[-\text{Erf}\left(\frac{C_1 z}{W_i}\right) - \text{Erf}\left(\frac{-U_i - C_1 z}{W_i}\right) \right]$

Capítulo 4

Desenvolvimento Numérico

4.1 Introdução

Entre os métodos numéricos mais utilizados para a solução de problemas de transferência de calor, encontram-se os métodos de elementos finitos e de diferenças finitas. O primeiro é o melhor para a análise de problemas não-lineares, e no tratamento de geometrias complexas. Para a análise térmica somente, a técnica de diferenças finitas é a mais indicada (Goldak et al., 1986). Neste trabalho, a discretização das equações representando o problema foi obtida utilizando-se o método de diferenças finitas.

A grande vantagem dos métodos numéricos está na possibilidade de considerar fatores que conduzem a não-linearidades na equação diferencial do calor, tais como a variação das propriedades físicas do material com a temperatura, e as perdas de calor por radiação. Serão desenvolvidos modelos para as configurações uni, bi e tridimensionais, a fim de que os mesmos possam ser comparados com os modelos analíticos. Os índices i , j e k referem-se às direções x , y e z , respectivamente.

4.2 Modelo Unidimensional

Para o modelo unidimensional, considera-se que as temperaturas variem apenas na direção da largura da peça soldada (y), sendo uniformes ao longo das direções de soldagem

(x) e da espessura do material (z), conforme mostra a Figura 4.1. Nesta figura, apenas metade do domínio é considerado, uma vez que o problema é simétrico em $y = 0$.

Para a formulação do problema, considera-se o balanço de energia:

$$\text{energia entra} + \text{energia gerada} = \text{energia sai} + \text{variação energia interna} \quad (4.1)$$

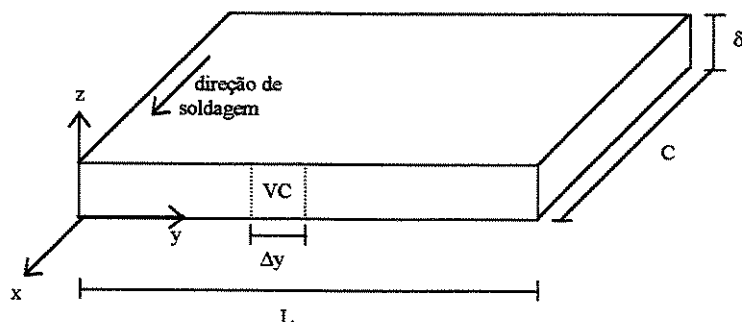


Figura 4.1 - Geometria e sistema de coordenadas do material.

Nos contornos $y = 0$ e $y = L$, a formulação do problema é diferente da formulação para os pontos internos do domínio. Assim, é necessária a divisão do mesmo em nós internos, contorno $y = 0$ e contorno $y = L$.

4.2.1 Nós Internos

Para os nós internos, a formulação pode ser obtida com o auxílio da Figura 4.2, que corresponde a uma região da área formada pelas dimensões $L \times \delta$ da Figura 4.1.

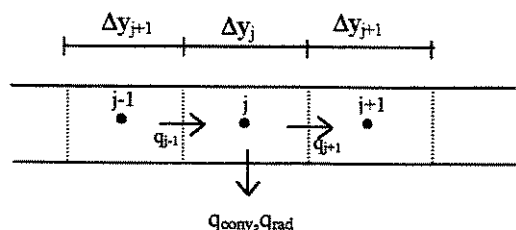


Figura 4.2 - Esquema para a discretização dos nós internos.

Utilizando o balanço de energia dado pela Equação (4.1):

$$q_{j-1} = q_{j+1} + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2)$$

As áreas de troca de calor por condução (A_{cond}), por convecção (A_{cj}), e por radiação (A_{rj}), e o volume do elemento considerado (V_j), são dados por:

$$A_{\text{cond}} = C\delta \quad (4.3)$$

$$A_{\text{cj}} = 2C\Delta y_j + 2\delta\Delta y_j \quad (4.4)$$

$$A_{\text{rj}} = 2C\Delta y_j + 2\delta\Delta y_j \quad (4.5)$$

$$V_j = C\delta\Delta y_j = A_{\text{cond}}\Delta y_j \quad (4.6)$$

Assim, as taxas de transferência de calor pelos três modos acima referidos são escritas como:

$$q_{j-1} = -k_j A_{\text{cond}} \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta y_j} \quad (4.7)$$

$$q_{j+1} = -k_j A_{\text{cond}} \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta y_j} \quad (4.8)$$

$$q_{\text{conv}} = h_c A_{\text{cj}} (T_j - T_0) \quad (4.9)$$

$$q_{\text{rad}} = h_{\text{rj}} A_{\text{r}} (T_j - T_0) \quad (4.10)$$

O coeficiente h_{rj} é definido como:

$$h_{\text{rj}} = \sigma \epsilon (T_j + T_0)(T_j^2 + T_0^2) \quad (4.11)$$

Uma alternativa muito utilizada para generalizar o problema a ser solucionado é a adimensionalização das variáveis. Para o caso estudado, a coordenada y , o tempo t e a temperatura T são adimensionalizados da seguinte forma:

$$y' = \frac{y}{L} \quad (4.12)$$

$$\tau = \frac{\alpha_{\text{ref}} t}{L^2} \quad (4.13)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \quad (4.14)$$

Como pode ser observado, a coordenada y é adimensionalizada dividindo-a pelo seu intervalo de variação (0 a L); para a variável t , como as propriedades físicas do material variam com a temperatura, a adimensionalização é obtida calculando-se a difusividade em uma temperatura de referência como, por exemplo, a temperatura ambiente; para a temperatura T , utilizou-se para a adimensionalização a temperatura de fusão do material T_m .

Substituindo as Equações (4.3) a (4.10) na Equação (4.2), e utilizando a forma adimensional das variáveis (Equações (4.12) a (4.14)), obtém-se:

$$\theta_j^{t+1} - \theta_j^t = \frac{k_j \Delta \tau}{\alpha_{\text{ref}} \rho c_j (\Delta y')_j^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}) - \frac{2L^2 \Delta \tau (h_c + h_{\text{rj}})(C + \delta)}{\rho c_j A_{\text{cond}} \alpha_{\text{ref}}} \theta_j \quad (4.15)$$

Há três possibilidades para o tratamento do tempo na Equação (4.15), as quais serão descritas resumidamente a seguir.

Método Explícito

Este método corresponde ao mais simples de todos. As temperaturas no instante $t+1$, desconhecidas, são obtidas através das temperaturas no instante anterior t , conhecidas. Assim, a partir da condição inicial do problema ($t = 0$), obtém-se a solução no instante $t = t_1$, e assim por diante. Embora seja simples, este método apresenta restrições quanto à estabilidade. Um procedimento numérico é dito estável se o efeito de um erro (ou

perturbação) em um estágio do cálculo não resulta em erros maiores em estágios posteriores do processo, ou seja, se erros localizados não se tornam significativos mais adiante. Pelo critério de estabilidade de von Neumann:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta y'^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.16)$$

Assim, o problema do método explícito é a restrição quanto à estabilidade, pois deve obedecer à condição acima.

Método Implícito

Neste método, todos os termos do lado direito da Equação (4.15) são avaliados no instante $t+1$. Cada Equação (4.15) envolve três valores desconhecidos de θ_j no instante $t+1$, de forma que, na matriz dos coeficientes desta equação, todos os coeficientes não nulos se encontram alinhados ao longo de três diagonais. Assim, em cada intervalo de tempo, um sistema tridiagonal de equações deve ser resolvido simultaneamente.

A resolução das equações é feita utilizando-se o algoritmo TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm). Este algoritmo é útil não somente para a resolução de equações de diferenças finitas de problemas unidimensionais, mas também forma a base de vários métodos para resolver problemas bi e tridimensionais. Ao contrário de outros métodos, o trabalho computacional no TDMA é diretamente proporcional ao número de equações m , ao invés de m^2 ou m^3 (Peaceman, 1977).

O método implícito é mais complicado que o explícito. Em compensação, não tem restrição quanto à estabilidade, ou seja, o método converge, independente da razão dada pela Equação (4.16).

Método de Crank-Nicholson

Embora o método implícito seja incondicionalmente estável, as equações algébricas do sistema resultante devem ser solucionadas simultaneamente, ao contrário do método explícito, onde cada equação é solucionada individualmente. Crank e Nicholson modificaram o método implícito considerando uma média aritmética das aproximações de diferenças finitas nas formas explícita e implícita.

A estrutura da matriz resultante é semelhante à do método implícito. Este método possui dupla vantagem: é incondicionalmente estável, e a precisão é de segunda ordem no espaço e no tempo, ao contrário dos anteriores, onde se obtém precisão de segunda ordem apenas no espaço (Smith, 1985).

Utilizando o método de Crank-Nicholson na Equação (4.15):

$$\begin{aligned} \theta_j^{t+1} - \theta_j^t = & \frac{k_j \Delta \tau}{2\alpha_{\text{ref}} \rho c_j (\Delta y')_j^2} (\theta_{j-1}^{t+1} - 2\theta_j^{t+1} + \theta_{j+1}^{t+1}) + \frac{k_j \Delta \tau}{2\alpha_{\text{ref}} \rho c_j (\Delta y')_j^2} (\theta_{j-1}^t - 2\theta_j^t + \theta_{j+1}^t) - \\ & - \frac{L^2 \Delta \tau (h_c + h_{rj})(C + \delta)}{\rho c_j A_{\text{cond}} \alpha_{\text{ref}}} \theta_j^{t+1} - \frac{L^2 \Delta \tau (h_c + h_{rj})(C + \delta)}{\rho c_j A_{\text{cond}} \alpha_{\text{ref}}} \theta_j^t \end{aligned}$$

Rearranjando:

$$-A_j \theta_{j-1}^{t+1} + (1 + 2A_j + B_j) \theta_j^{t+1} - A_j \theta_{j+1}^{t+1} = A_j \theta_{j-1}^t + (1 - 2A_j - B_j) \theta_j^t + A_j \theta_{j+1}^t \quad (4.17)$$

onde:

$$A_j = \frac{k_j \Delta \tau}{2\alpha_{\text{ref}} \rho c_j (\Delta y')_j^2} \quad (4.18)$$

$$B_j = \frac{L^2 \Delta \tau (h_c + h_{rj})(C + \delta)}{\rho c_j A_{\text{cond}} \alpha_{\text{ref}}} \quad (4.19)$$

A presença do índice j nestes coeficientes se deve à consideração da variação da condutividade térmica e do calor específico do material com a temperatura, assim como do coeficiente de radiação e da malha variável, os quais são novamente calculados após cada iteração. A Equação (4.17) é válida para os nós internos, ou seja, para $0 < y < L$, correspondente na forma discretizada a $0 < j < m$.

4.2.2 Contorno $j = 0$ ($y = 0$)

No contorno $j = 0$, como mostra a Figura 4.3, tem-se a aplicação da fonte de calor com potência Q para a obtenção da junta soldada.

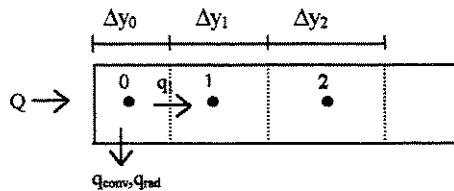


Figura 4.3 - Esquema para a discretização do contorno $j = 0$.

Utilizando a Equação (4.1):

$$Q = q_1 + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.20)$$

As áreas de troca de calor por condução, convecção, radiação e o volume são iguais às dos pontos internos (Equações (4.3) a (4.6)). Substituindo as equações para as taxas de transferência de calor na Equação (4.20), e rescrevendo-a na forma adimensional, obtém-se:

$$\begin{aligned} Q + k_0 A_{\text{cond}} \frac{1}{L} (T_m - T_\infty) \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\Delta y'_0} - (h_c + h_{r0}) 2L \Delta y'_0 (C + \delta) (T_m - T_0) \theta_0 = \\ = \rho c_0 A_{\text{cond}} L \Delta y'_0 \frac{\alpha_{\text{ref}}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_0^{t+1} - \theta_0^t)}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

Utilizando novamente o método de Crank-Nicholson e as definições dadas para os coeficientes A e B (Equações (4.18) e (4.19)):

$$(1 + A_0 + B_0)\theta_0^{t+1} - A_0\theta_1^{t+1} = (1 - A_0 - B_0)\theta_0^t + A_0\theta_1^t + K \quad (4.21)$$

onde:

$$K = \frac{L \Delta\tau Q}{\rho c_0 A_k \Delta y'_0 (T_m - T_0) \alpha_{ref}} \quad (4.22)$$

O termo K aparece na Equação (4.21) para a simulação do processo durante a deposição dos cordões. A potência Q é obtida pelo produto da corrente pela tensão de soldagem utilizada em cada passe ($Q = EI$). Para o período de espera entre um passe e outro, utiliza-se a Equação (4.21) sem o termo fonte K.

4.2.3 Contorno j = m (y = L)

Para a discretização do contorno j = m, considere o esquema abaixo:

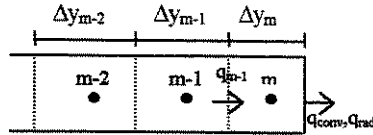


Figura 4.4 - Esquema para a discretização do contorno j = m.

Considerando o balanço de energia para o nó j = m, tem-se:

$$q_{m-1} = q_{conv} + q_{rad} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.23)$$

Para este contorno, a área de condução e o volume são os mesmos das Equações (4.3) e (4.6), mas as áreas de troca de calor por convecção e radiação são dadas por:

$$A_{cm} = A_{mm} = 2\Delta y_m (C + \delta) + A_{cond} \quad (4.24)$$

Escrevendo a Equação (4.23) na forma de taxas de transferência de calor e adimensionalizando:

$$\begin{aligned} -k_m A_{\text{cond}} \frac{1}{L} (T_m - T_0) \frac{(\theta_m - \theta_{m-1})}{\Delta y'_m} - (h_c + h_m) [2L \Delta y'_m (C + \delta) + A_{\text{cond}}] (T_m - T_0) \theta_m = \\ = \rho c_m A_{\text{cond}} L \Delta y'_m \frac{\alpha_{\text{ref}}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_m^{t+1} - \theta_m^t)}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

Aplicando o método de Crank-Nicholson para o tratamento do tempo na equação acima e rearranjando, obtém-se:

$$-A_m \theta_{m-1}^{t+1} + (1 + A_m + C) \theta_m^{t+1} = A_m \theta_{m-1}^t + (1 - A_m - C) \theta_m^t \quad (4.25)$$

onde:

$$C = \frac{L \Delta \tau (h_c + h_m) [2L \Delta y'_m (C + \delta) + A_{\text{cond}}]}{2 \rho c_m A_{\text{cond}} \alpha_{\text{ref}} \Delta y'_m} \quad (4.26)$$

As Equações (4.17), (4.21) e (4.25) compõem o conjunto de equações que formam o sistema para se determinar a distribuição unidimensional de temperatura em cada instante de tempo.

4.3 Modelo Bidimensional

O modelo bidimensional pode ser discretizado de duas formas, dependendo das direções que são consideradas na sua formulação. No modelo em regime transiente, considera-se que a variação de temperatura ocorra nas direções y e z da Figura 4.1, sendo uniforme ao longo da direção de soldagem, como descrito no capítulo 3. No modelo quase-estacionário, admite-se que a variação de temperatura ocorra nas direções x e y da Figura 4.1, sendo uniforme ao longo da espessura da chapa.

A discretização das equações na forma de diferenças finitas para os dois casos é semelhante. A diferença está no cálculo da área de troca de calor por condução. No primeiro caso, onde a temperatura é constante ao longo de todo o comprimento C (Figura 4.1), as áreas são obtidas por $C\Delta z$ (para condução na direção y) e $C\Delta y$ (para condução na direção z). No segundo caso, onde a temperatura é constante ao longo da espessura δ (Figura 4.1), as áreas de condução são dadas por $\delta\Delta y$ (na direção x) e $\delta\Delta x$ (na direção y).

Para a discretização, em vez de um volume de controle VC como o da Figura 4.1, no caso bidimensional transiente este VC é formado pelas dimensões $C\Delta y\Delta z$, e no caso quase-estacionário, é formado por $\delta\Delta x\Delta y$. A obtenção das equações discretizadas para o modelo bidimensional será feita considerando o regime quase-estacionário (problema x - y).

Da mesma forma que para o modelo unidimensional, é necessária a discretização do domínio ($0 < x < C$ e $0 < y < L$) por partes, devido às diferentes condições de contorno presentes no problema. Entretanto, devido ao grande número de equações envolvidas na discretização dos contornos, somente as equações discretizadas para os nós internos estão contidas neste texto. A obtenção das equações na forma de diferenças finitas para os pontos sobre os contornos encontra-se detalhada no Apêndice A.

4.3.1 Nós Internos

Para os nós internos, a discretização pode ser melhor visualizada através da Figura 4.6. As linhas tracejadas formam o VC que contém o ponto i,j em consideração. As perdas por convecção e radiação, assim como os índices em Δx e Δy , referentes à variação do tamanho da malha, não estão representadas na figura apenas para efeito de simplificação da mesma, mas foram consideradas na formulação do problema.

Utilizando o balanço de energia dado pela Equação (4.1):

$$q_{i-1,j} + q_{i,j-1} = q_{i+1,j} + q_{i,j+1} + q_{conv} + q_{rad} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.27)$$

As equações na forma de taxas de transferência de calor são escritas da mesma forma já anteriormente apresentadas (Equações (4.7) a (4.10)). No caso bidimensional, as áreas de troca de calor por condução nas direções x (A_{kx}) e y (A_{ky}), por convecção e por radiação, e o volume V são calculados através de:

$$A_{kx} = \delta \Delta y \quad (4.28)$$

$$A_{ky} = \delta \Delta x \quad (4.29)$$

$$A_c = A_r = 2\Delta x \Delta y \quad (4.30)$$

$$V = \delta \Delta x \Delta y \quad (4.31)$$

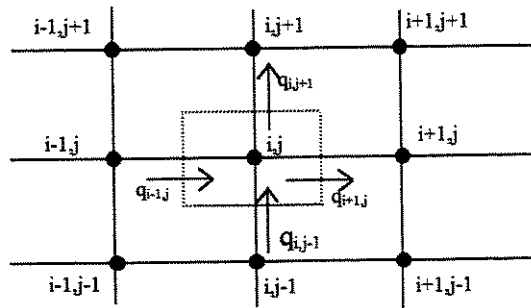


Figura 4.5 - Esquema para a discretização dos nós internos.

Para a adimensionalização do problema, além das variáveis definidas pelas Equações (4.12) a (4.14), a coordenada x , assim como a coordenada y , é dividida pela largura L da chapa, ou seja,

$$x' = \frac{x}{L} \quad (4.32)$$

Substituindo as equações na forma de taxas de transferência de calor e reescrevendo a Equação (4.27) na forma adimensional, obtém-se:

$$k_{i,j}\delta L\Delta y'\frac{1}{L}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j})}{\Delta x'} + k_{i,j}\delta L\Delta x'\frac{1}{L}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1})}{\Delta y'} -$$

$$- (h_c + h_{ri})2L^2\Delta x'\Delta y'(T_m - T_0)\theta_{i,j} = \rho c_{i,j}\delta L^2\Delta x'\Delta y'\frac{\alpha_{ref}}{L^2}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i,j}^{t+1} - \theta_{i,j}^t)}{\Delta \tau}$$

O rearranjo da equação acima resulta em:

$$\theta_{i,j}^{t+1} - \theta_{i,j}^t = A_{i,j}(\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) + B_{i,j}(\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}) - C_{i,j}\theta_{i,j} \quad (4.33)$$

onde:

$$A_{i,j} = \frac{k_{i,j}\Delta \tau}{\rho c_{i,j}\alpha_{ref}(\Delta x')^2} \quad (4.34)$$

$$B_{i,j} = \frac{k_{i,j}\Delta \tau}{\rho c_{i,j}\alpha_{ref}(\Delta y')^2} \quad (4.35)$$

$$C_{i,j} = \frac{2(h_c + h_{ri})L^2\Delta \tau}{\rho c_{i,j}\delta \alpha_{ref}} \quad (4.36)$$

A solução numérica pode ser obtida através da utilização de um método explícito ou implícito. O método semi-implícito como, por exemplo, o de Crank-Nicholson, tem a vantagem de ser incondicionalmente estável para todos os valores do intervalo de tempo $\Delta \tau$. Entretanto, a utilização deste método para problemas bi ou tridimensionais se torna complicada quando o domínio destes problemas é formado por um grande número de subdivisões.

Nestes casos, o método ADI (Alternating Direction Implicit) é mais adequado, e apresenta um nível intermediário de complexidade entre os métodos explícito e implícito (Douglas e Rachford, 1956). A solução através deste método é obtida alternando-se as direções x e y. Assim, para a discretização das derivadas espaciais, utiliza-se alternadamente uma forma explícita e uma forma implícita em instantes de tempo sucessivos. No instante

$t+1$, a utilização de uma forma implícita para a direção x e uma forma explícita para a direção y na Equação (4.33) produz como resultado:

$$-A_{i,j}\theta_{i-1,j}^{t+1} + (1 + 2A_{i,j})\theta_{i,j}^{t+1} - A_{i,j}\theta_{i+1,j}^{t+1} = B_{i,j}\theta_{i,j-1}^t + (1 - 2B_{i,j} - C_{i,j})\theta_{i,j}^t + B_{i,j}\theta_{i,j+1}^t \quad (4.37)$$

No instante $t+2$, a Equação (4.33) é reescrita utilizando-se uma forma explícita para a direção y e implícita para a direção z , obtendo-se:

$$-B_{i,j}\theta_{i,j-1}^{t+2} + (1 + 2B_{i,j})\theta_{i,j}^{t+2} - B_{i,j}\theta_{i,j+1}^{t+2} = A_{i,j}\theta_{i-1,j}^{t+1} + (1 - 2A_{i,j} - C_{i,j})\theta_{i,j}^{t+1} + A_{i,j}\theta_{i+1,j}^{t+1} \quad (4.38)$$

As Equações (4.37) e (4.38) são utilizadas para os nós internos $0 < i < n$ e $0 < j < m$. Para os contornos, são necessárias novas equações, como descrito no Apêndice A.

4.4 Modelo Tridimensional

No modelo tridimensional, da mesma forma que para os modelos uni e bidimensionais, a discretização dos domínios ($0 < x < C$, $0 < y < L$, $0 < z < \delta$) é feita por partes, devido às diferenças no balanço de energia para cada elemento. Para os pontos sobre os contornos, as equações discretizadas encontram-se no Apêndice B. As equações para a adimensionalização das variáveis foram as mesmas utilizadas nos modelos uni e bidimensional. Apenas a variável z ainda não se encontra adimensionalizada. Seguindo o mesmo procedimento das variáveis x e y :

$$z' = \frac{z}{L} \quad (4.39)$$

4.4.1 Nós Internos

Utilizando o balanço de energia para um ponto genérico (i,j,k) , tem-se:

$$q_{i-1,j,k} + q_{i,j-1,k} + q_{i,j,k-1} = q_{i+1,j,k} + q_{i,j+1,k} + q_{i,j,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.40)$$

Escrevendo os termos da Equação (4.40) na forma de taxa de transferência de calor por condução, convecção e radiação, tem-se:

$$\begin{aligned} & -k_{i,j,k} A_{kx} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1,j,k} - k_{i,j,k} A_{ky} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i,j-1,k} - k_{i,j,k} A_{kz} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j,k-1} = \\ & = -k_{i,j,k} A_{kx} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1,j,k} - k_{i,j,k} A_{ky} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i,j+1,k} - k_{i,j,k} A_{kz} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j,k+1} + \rho c_{i,j,k} V \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.41)$$

As áreas de troca de calor por condução em x, y e z, e o volume, são dados por:

$$A_{kx} = \Delta y \Delta z \quad (4.42)$$

$$A_{ky} = \Delta x \Delta z \quad (4.43)$$

$$A_{kz} = \Delta x \Delta y \quad (4.44)$$

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.45)$$

Substituindo na Equação (4.40) e utilizando as equações para a adimensionalização das variáveis:

$$\begin{aligned} & -k_{i,j,k} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,j,k} - \theta_{i-1,j,k})}{L \Delta x'} - k_{i,j,k} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j-1,k})}{L \Delta y'} - \\ & - k_{i,j,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j,k-1})}{L \Delta z'} = -k_{i,j,k} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,j,k} - \theta_{i+1,j,k})}{L \Delta x'} - \\ & - k_{i,j,k} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j+1,k})}{L \Delta y'} - k_{i,j,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j,k+1})}{L \Delta z'} + \\ & + \rho c_{i,j,k} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{ref}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,j,k}^{t+1} - \theta_{i,j,k}^t)}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

Rearranjando, obtém-se:

$$\theta_{i,j,k}^{t+1} - \theta_{i,j,k}^t = A_{i,j,k} (\theta_{i-1,j,k} - 2\theta_{i,j,k} + \theta_{i+1,j,k}) + B_{i,j,k} (\theta_{i,j-1,k} - 2\theta_{i,j,k} + \theta_{i,j+1,k}) + C_{i,j,k} (\theta_{i,j,k-1} - 2\theta_{i,j,k} + \theta_{i,j,k+1}) \quad (4.46)$$

onde:

$$A_{i,j,k} = \frac{k_{i,j,k} \Delta \tau}{\rho c_{i,j,k} \alpha_{\text{ref}} (\Delta x')^2} \quad (4.47)$$

$$B_{i,j,k} = \frac{k_{i,j,k} \Delta \tau}{\rho c_{i,j,k} \alpha_{\text{ref}} (\Delta y')^2} \quad (4.48)$$

$$C_{i,j,k} = \frac{k_{i,j,k} \Delta \tau}{\rho c_{i,j,k} \alpha_{\text{ref}} (\Delta z')^2} \quad (4.49)$$

A solução numérica será obtida utilizando-se o método ADI (Alternating Direction Implicit), da mesma forma como foi feita para o modelo bidimensional. Neste método, a solução é obtida alternando-se as direções x, y e z, utilizando-se as formas explícita e implícita em instantes de tempo sucessivos. Assim, no instante t+1, considerando uma forma implícita para a direção x e a forma explícita para as direções y e z, tem-se:

$$\begin{aligned} & -A_{i,j,k} \theta_{i-1,j,k}^{t+1} + (1 + 2A_{i,j,k}) \theta_{i,j,k}^{t+1} - A_{i,j,k} \theta_{i+1,j,k}^{t+1} = \\ & B_{i,j,k} \theta_{i,j-1,k}^t + C_{i,j,k} \theta_{i,j,k-1}^t + (1 - 2B_{i,j,k} - 2C_{i,j,k}) \theta_{i,j,k}^t + B_{i,j,k} \theta_{i,j+1,k}^t + C_{i,j,k} \theta_{i,j,k+1}^t \end{aligned} \quad (4.50)$$

No instante t+2, utiliza-se uma forma implícita para a direção y e explícita para as direções x e z. Assim,

$$\begin{aligned} & -B_{i,j,k} \theta_{i,j-1,k}^{t+2} + (1 + 2B_{i,j,k}) \theta_{i,j,k}^{t+2} - B_{i,j,k} \theta_{i,j+1,k}^{t+2} = \\ & A_{i,j,k} \theta_{i-1,j,k}^{t+1} + C_{i,j,k} \theta_{i,j,k-1}^{t+1} + (1 - 2A_{i,j,k} - 2C_{i,j,k}) \theta_{i,j,k}^{t+1} + A_{i,j,k} \theta_{i+1,j,k}^{t+1} + C_{i,j,k} \theta_{i,j,k+1}^{t+1} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Analogamente, no instante t+3, utiliza-se uma forma implícita para z e explícita para as direções x e y, ou seja,

$$\begin{aligned}
& -C_{i,j,k} \theta_{i,j,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{i,j,k}) \theta_{i,j,k}^{t+3} - C_{i,j,k} \theta_{i,j,k+1}^{t+3} = \\
& A_{i,j,k} \theta_{i-1,j,k}^{t+2} + B_{i,j,k} \theta_{i,j-1,k}^{t+2} + (1 - 2A_{i,j,k} - 2B_{i,j,k}) \theta_{i,j,k}^{t+2} + A_{i,j,k} \theta_{i+1,j,k}^{t+2} + B_{i,j,k} \theta_{i,j+1,k}^{t+2}
\end{aligned}
\tag{4.52}$$

As Equações (4.50) a (4.52) são válidas para os nós internos. Para os contornos, são necessárias novas equações, como descrito no Apêndice B.

Capítulo 5

Desenvolvimento Experimental

5.1 Introdução

Esta etapa tem como objetivo a obtenção de ciclos térmicos experimentais, em determinadas posições da ZAC, com a finalidade de compará-los com os ciclos térmicos provenientes dos modelos analíticos e numéricos.

A determinação experimental destes ciclos térmicos foi feita somente para os modelos unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, ou seja, para os modelos que não envolvem a variação de temperatura na direção da espessura da chapa. Assim, para estas duas configurações, além dos ciclos térmicos numéricos, os ciclos térmicos obtidos experimentalmente proporcionaram mais um padrão de comparação para os ciclos térmicos analíticos.

5.2 Materiais

Para a obtenção dos ciclos térmicos experimentais, foram utilizadas como metal base chapas de um aço alta resistência e baixa liga, mais especificamente o aço denominado SAR60T. Como metal de adição, utilizou-se o arame eletrodo ER70S6, com diâmetro de 1,6 mm. É importante ressaltar que, embora este estudo considere as curvas das

propriedades físicas para o aço acima especificado, os modelos podem ser aplicados para qualquer material.

5.3 Dimensões dos Corpos de Prova

Com a realização de testes preliminares, foi possível determinar as dimensões para os corpos de prova, em função da configuração de fluxo de calor desejada. A Tabela 1 mostra as dimensões finais (comprimento, largura e espessura) utilizadas nos experimentos.

Tabela 5.1 – Dimensões dos corpos de prova.

Configuração do fluxo de calor	C (mm)	L (mm)	δ (mm)	Número de passes
1-D	100,0	150,0	12,7	2
2-D quase-estacionário	135,0	150,0	12,7	2

Para a definição destas dimensões, foram considerados alguns fatores, como discutido a seguir.

- Espessura - A definição da espessura foi baseada no número de passes utilizados para o preenchimento da junta, como sugerido na literatura (Devletian and Wood, 1983). Para uma quantidade de passes menor que quatro, não ocorreria mudança de temperatura ao longo da espessura. Então, definiu-se a utilização de dois passes de solda em uma espessura de 12,7 mm para os modelos unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, que desprezam a variação de temperatura na direção da espessura.
- Comprimento - A definição do comprimento do corpo de prova foi feita de forma que representasse um passe curto de solda, o que garante a sobreposição dos efeitos térmicos de um passe sobre os anteriores, desde que o intervalo entre os passes não seja muito longo. Para os modelos quase-estacionários, utilizou-se um comprimento maior do que para os transientes, permitindo as medidas de temperaturas em dois pontos ao longo da direção de soldagem.

- **Largura** - A determinação da largura foi feita utilizando os modelos analíticos, de forma que fosse obedecida a condição de contorno de temperatura ambiente na extremidade da chapa, durante um determinado período de tempo.

5.4 Preparação dos Corpos de Prova

A preparação da junta foi feita utilizando um chanfro 1/2V, com um ângulo de 30° , como mostrado na Figura 5.1. A distância mantida entre as chapas foi igual ao diâmetro do arame (1,6 mm), com um nariz de 1,0 mm.

A etapa seguinte à de preparação da junta foi a de abertura dos orifícios para a fixação dos termopares, em posições pré-determinadas da chapa. Posteriormente, os corpos de prova foram jateados com areia para remoção de possíveis impurezas e contaminantes.

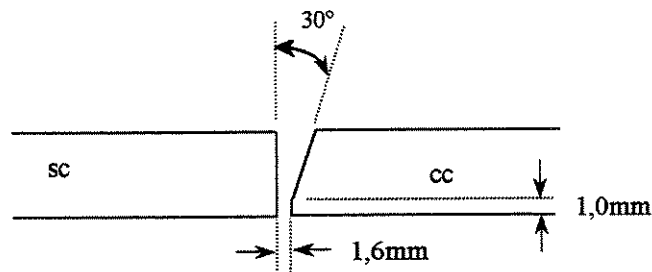


Figura 5.1 – Tipo de junta utilizada no experimento (sc = sem chanfro; cc = com chanfro).

5.5 Disposição dos Termopares

Para as medidas de temperatura, foram utilizados termopares tipo R (Pt/Pt-Rh), com diâmetros iguais a 0,5 mm, devidamente calibrados. Como proteção para os respingos durante a soldagem, os mesmos foram envolvidos com capilares cerâmicos. A inserção dos termopares na região da ZAC foi feita de acordo com a configuração de fluxo de calor a ser analisada, sempre na chapa sem o chanfro (chapa “sc” da Figura 5.1), como descrito a seguir. Os valores para y_1 , y_2 , y_3 e x_0 nas Figuras 5.2 e 5.3 encontram-se na Tabela 5.2. As dimensões C, L e δ são as mesmas definidas na Tabela 5.1.

- **Modelo Unidimensional** - Neste modelo, foram dispostos três termopares no sentido da largura da chapa, que corresponde à direção de variação da temperatura (Figura 5.2). Em relação às outras duas direções (comprimento e espessura), a posição dos termopares correspondeu ao ponto médio destas dimensões.

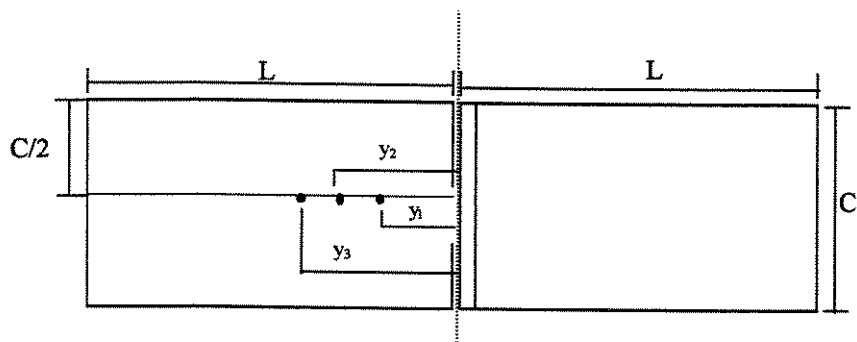


Figura 5.2 – Esquema da posição dos termopares para o modelo unidimensional (vista comprimento x largura).

- **Modelo bidimensional quase-estacionário** - Neste modelo, a disposição dos termopares no sentido da espessura foi feita no ponto médio da mesma, como no modelo unidimensional. Entretanto, ao longo do comprimento da solda, foram inseridos termopares em dois pontos diferentes, como mostrado na Figura 5.3.

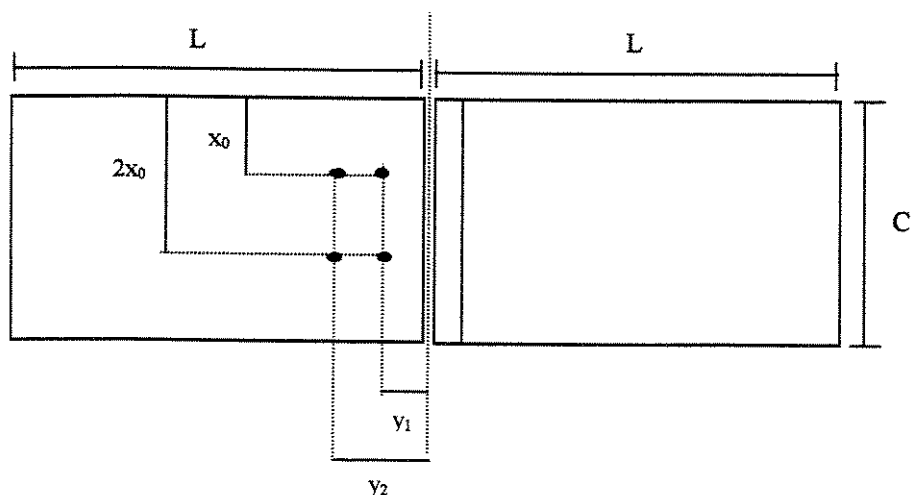


Figura 5.3 – Esquema da posição dos termopares ao longo do comprimento do cordão de solda, para o modelo bidimensional quase-estacionário.

Tabela 5.2 – Valores das dimensões estabelecidas para os experimentos.

Dimensão (mm)	Configuração do fluxo de calor	
	1-D transiente	2-D quase-estacionário
y_1	11,80	9,80
y_2	17,80	11,20
y_3	22,00	-
x_0	50,00	45,00

Os valores da Tabela 5.2 correspondem às posições onde foram inseridos os termopares. Estes foram fixados nos orifícios através de descarga capacitiva, e a posição real dos mesmos, durante a medição das temperaturas, foi obtida tendo como referência o sinal da solda resultante provocado por essa descarga capacitiva em cada orifício.

5.6 Ciclos Térmicos

Após a determinação da localização dos termopares, para cada posição foi obtido um ciclo térmico correspondente. Para isto, utilizou-se o sistema de aquisição de sinais AqDados, da Lynx Tecnologia, com a placa de conversão A/D instalada em um microcomputador Pentium. O modelo 12/32 desta placa possui oito canais, sendo um deles destinado à junta fria.

A tensão em milivolts proveniente do termopar é amplificada, de forma a torná-la adequada à faixa de entrada disponível na placa. A conversão do sinal de milivolts para graus Celsius foi obtida utilizando-se o recurso de linearização de sinais do AqDados, com compensação de junta fria. Os sinais foram coletados com uma frequência de 15 Hz por canal, ou seja, a cada 0,067 s foi feita uma medida de temperatura.

5.7 Processo de Soldagem

O processo de soldagem utilizado foi o “Metal Active Gas” (MAG), tendo o CO_2 como gás de proteção, com uma vazão de 12 l/min. A soldagem a topo exigiu a utilização de um dispositivo para fixação dos corpos de prova, proporcionando um percurso retilíneo

para a tocha durante a deposição dos cordões em cada passe. Essa linearidade foi auxiliada pelo acoplamento da tocha de soldagem ao sistema de deslocamento Bug-O Systems, modelo Speed Weaver II, o qual também garante uma velocidade constante durante o processo.

A otimização dos parâmetros de soldagem e número de passes a serem utilizados nos experimentos foi feita de forma a obter o preenchimento da junta e satisfazer a configuração de fluxo de calor desejada. A presença de chanfro em uma das chapas faz com que seja necessário aumentar a quantidade de metal de adição após cada passe, uma vez que a região a ser preenchida aumenta com a abertura do chanfro.

O insumo de calor (HI) fornecido à chapa é calculado de acordo com a seguinte equação:

$$HI = \eta \frac{EI}{v} \quad (5.1)$$

onde E, I e v são a voltagem, a corrente e a velocidade de soldagem, respectivamente. A eficiência η varia de acordo com o processo de soldagem. O aumento na velocidade de alimentação do arame aumenta a intensidade de corrente e, conseqüentemente, o insumo de calor fornecido à peça.

Na prática, é comum se aumentar o insumo de calor de um passe para o outro. Esse aumento pode ser obtido também pelo aumento na voltagem ou pela redução na velocidade de soldagem. Como a redução na velocidade de soldagem de um passe para o outro implica em maior tempo de processo, para todos os testes a velocidade foi mantida constante, independente da configuração do fluxo de calor. O aumento no insumo de calor foi então obtido pelo aumento na tensão e corrente de soldagem.

5.8 Obtenção das Variáveis do Processo

Para a comparação entre os resultados teóricos e práticos, os modelos propostos são simulados utilizando os mesmos valores das variáveis que permitiram a obtenção dos ciclos térmicos experimentais. Entre estas variáveis, encontram-se: corrente, tensão e velocidade de soldagem, propriedades físicas do material soldado, e distância do termopar à origem do sistema. A Figura 5.4 mostra uma vista geral do esquema experimental.

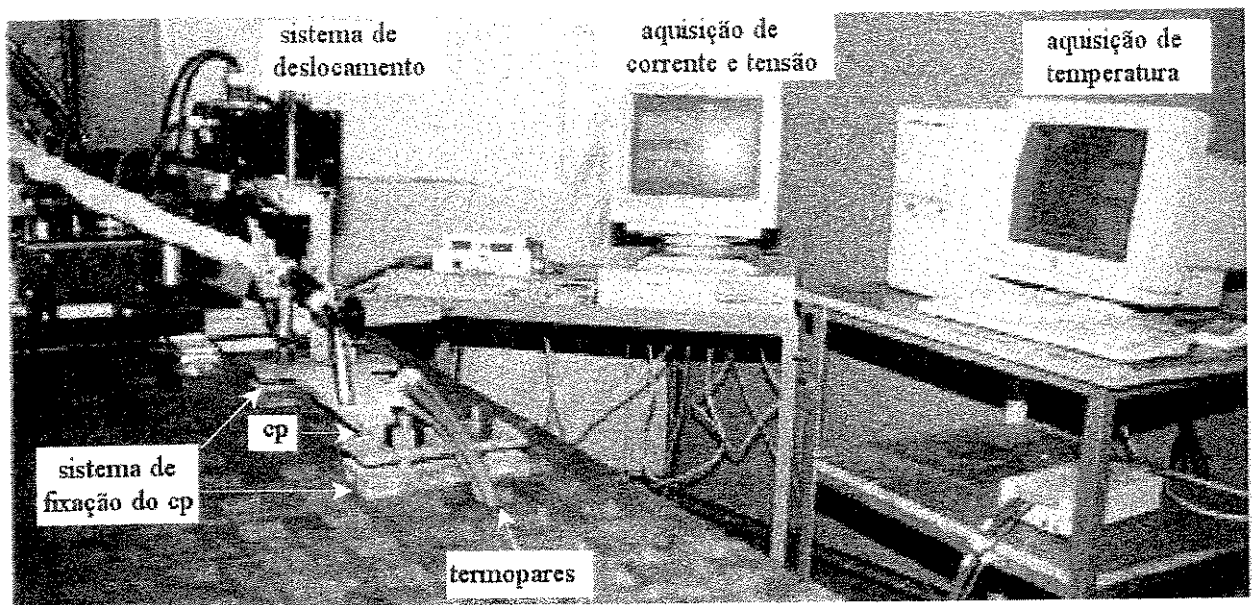


Figura 5.4 – Montagem utilizada nos experimentos.

O controle da corrente e tensão durante a soldagem foi feito através do sistema de aquisição de dados Sisdatasolda, desenvolvido na Universidade Federal de Santa Catarina. Este sistema é composto por uma placa A/D Interdata 3, um sensor de indução eletromagnética, um multímetro digital TC-1, e o “software” MIG/MAG. Com isto, foi possível a obtenção dos valores médios e eficazes da corrente e tensão que geraram o arco para a realização da solda. A velocidade de soldagem é obtida diretamente no sistema de deslocamento utilizado para o transporte da tocha.

As propriedades físicas devem ser calculadas em uma temperatura média do processo, nos modelos em que foram consideradas constantes. Nas simulações numéricas em que as

variações da condutividade térmica e do calor específico com a temperatura foram levadas em consideração, os valores destas propriedades foram obtidos através das Figuras 5.5 e 5.6 (Parkitny, Pawlak e Piekarska, 1992). Como os dados destas figuras referem-se a temperaturas até 1800°C, acima desta os valores de k e c foram considerados constantes e iguais aos valores obtidos para a temperatura de 1800°C.

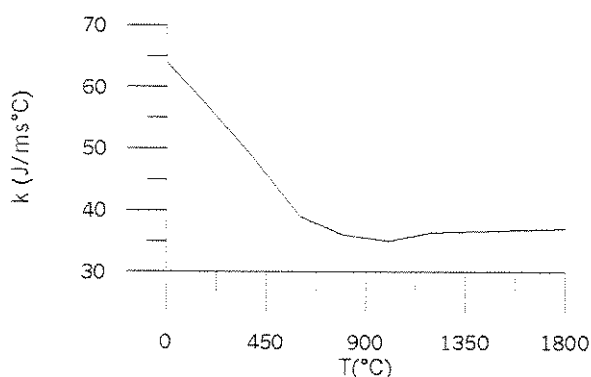


Figura 5.5 – Variação da condutividade térmica com a temperatura para o aço baixa liga.

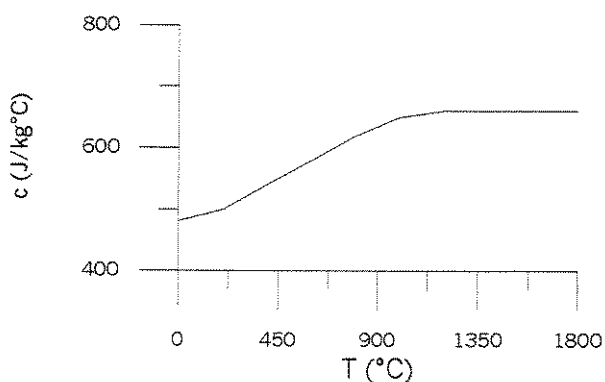


Figura 5.6 – Variação do calor específico com a temperatura para o aço baixa liga.

As medidas das distâncias dos termopares à origem do sistema de coordenadas foram feitas com o auxílio de um paquímetro. Para se determinar exatamente a posição dos termopares, os corpos de prova foram seccionados transversalmente, a fim de se observar com mais nitidez a indicação proveniente da solda do termopar no respectivo orifício.

Para a análise dos modelos teóricos, deve-se considerar um detalhe referente ao cálculo da potência utilizada nos modelos numéricos transientes, no que diz respeito à

comparação com os respectivos modelos analíticos. No modelo unidimensional transiente, como anteriormente citado, considera-se que a variação de temperatura ocorra apenas na direção da largura da chapa (direção y da Figura 3.1). No modelo bidimensional transiente, além da variação de temperatura na direção y , tem-se também a variação na direção z (espessura da chapa).

Nos modelos analíticos transientes uni e bidimensional, considera-se que a fonte de calor é aplicada instantaneamente no material. Assim, mesmo que a duração do processo de soldagem seja de um determinado período de tempo t_s , a resposta do material a essa quantidade de calor fornecida é instantânea em uma dada posição da chapa. No caso do modelo numérico, para que a resposta do material ocorresse de forma instantânea, foi necessário reduzir esse tempo de aplicação da fonte t_s . Então, a potência $\dot{Q}$ fornecida ao sistema, para uma eficiência η , voltagem E e corrente I , é dada por:

$$\dot{Q} = \eta EI \quad (5.2)$$

Essa fórmula poderia ser utilizada para o cálculo da potência no modelo numérico, da mesma forma como é feito no modelo analítico. Entretanto, a redução no tempo de soldagem t_s , para se ter uma resposta imediata do material, deve ser compensada por um fator f , de forma que a energia fornecida ao sistema seja constante nos dois casos (analítico e numérico). Assim, a Equação (5.2) se torna:

$$\dot{Q}' = \eta E I f \quad (5.3)$$

A utilização da Equação (5.3) permitiu a comparação entre os modelos analítico e numérico, para os casos de regime transiente. Nos modelos quase-estacionários, como a fonte de calor se move ao longo da direção de soldagem, não foi necessário este tipo de correção para o cálculo da potência $\dot{Q}$.

Para a avaliação da função de Bessel K_0 , foi utilizada a aproximação polinomial sugerida por Abramovitz e Stegun (1970). A função erro foi determinada através da expressão (Grong, 1994):

$$\begin{aligned} \text{Erf}(w) = g_2 \exp(-g_1^2 - 1,26551223 + g_2(1,00002368 + g_2(0,37409196 + \\ g_2(0,09678418 + g_2(-0,18628806 + g_2(0,27886807 + g_2(-1,13520398 + \\ g_2(1,48851587 + g_2(-0,82215223 + g_2(0,17087277)))))))))) \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde g_1 e g_2 são dados por:

$$g_1 = \text{abs}(w) \quad (5.5)$$

$$g_2 = \frac{1}{1 + 0,5g_1} \quad (5.6)$$

Capítulo 6

Resultados e Discussões

6.1 Introdução

O objetivo deste capítulo consiste na comparação entre os ciclos térmicos obtidos pelos modelos analíticos, com aqueles obtidos pelos modelos numéricos. Para as configurações unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, foi possível também a comparação dos ciclos térmicos analíticos e numéricos com os ciclos térmicos obtidos experimentalmente.

A comprovação das soluções analíticas foi feita inicialmente através da comparação com os modelos numéricos correspondentes, para o caso em que são mantidas todas as hipóteses das equações de Rosenthal, ou seja, fonte de calor concentrada, independência das propriedades físicas com a temperatura, e perdas superficiais desprezíveis. Em seguida, foi analisado o efeito da variação das propriedades físicas com a temperatura, e das perdas por convecção e radiação sobre o ciclo térmico, considerando cada fator isoladamente no modelo numérico.

Foi realizado também um estudo sobre a influência da distribuição da fonte de calor sobre a temperatura de pico para cada configuração. Esta influência é marcante somente para pontos bem próximos à ZF. Entretanto, devido à dificuldade em se obter experimentalmente medidas de temperaturas para esta região, a análise foi feita através da

comparação entre os ciclos térmicos analíticos obtidos pelos modelos com fonte concentrada e distribuída. O capítulo foi separado por tópicos, de acordo com a geometria avaliada.

6.2 Modelo Unidimensional

6.2.1 Ciclos Térmicos Experimentais

No modelo unidimensional, os parâmetros de soldagem foram otimizados visando ao preenchimento da junta com dois passes de solda. Para a obtenção dos ciclos térmicos experimentais, foram realizados três ensaios. A Tabela 6.1 mostra os valores da tensão, corrente e velocidade de soldagem, assim como o insumo de calor fornecido para cada passe, calculado pela Equação (5.1). Inicialmente, foi utilizado η igual a 1. Para um adequado preenchimento da junta, o aumento no insumo de calor de um passe para o outro foi proporcionado pelo aumento simultâneo da voltagem e da corrente de soldagem.

Tabela 6.1 – Parâmetros de soldagem utilizados no modelo unidimensional.

cp	Passe	I (A)	E (V)	v (mm/min)	HI (10^6 J/m)
1	1	269	22,3	300	1,20
	2	336	29,7	300	2,00
2	1	248	24,4	300	1,21
	2	328	28,6	300	1,88
3	1	302	24,6	300	1,49
	2	347	29,5	300	2,05

Conforme citado no item 5.5, para o modelo unidimensional, foram feitas medidas de temperaturas em três posições ao longo da direção da largura da chapa. As distâncias dos termopares à origem do sistema para estes três pontos encontram-se na Tabela 6.2. Pode-se observar que estes valores diferem daqueles estabelecidos na Tabela 5.2. Essas diferenças se devem ao fato de que os termopares não foram fixados exatamente no ponto central de cada orifício. As medidas destas distâncias de acordo com as indicações dos pontos de solda nos

orifícios evitam erros na comparação dos ciclos térmicos experimentais com os modelos teóricos, pois são estes os valores a serem utilizados nas soluções analítica e numérica.

Tabela 6.2 – Distâncias dos termopares à origem do sistema de coordenadas.

cp	y_1 (mm)	y_2 (mm)	y_3 (mm)
1	12,45	18,50	22,70
2	11,90	17,95	21,95
3	13,10	18,85	23,30

A Figura 6.1 mostra os ciclos térmicos experimentais para os três ensaios, medidos pelos termopares situados mais próximos à solda (distância y_1 na Tabela 6.2). Também consta nesta figura a curva de temperatura correspondente à média dos valores das temperaturas obtidas para os três corpos de prova.

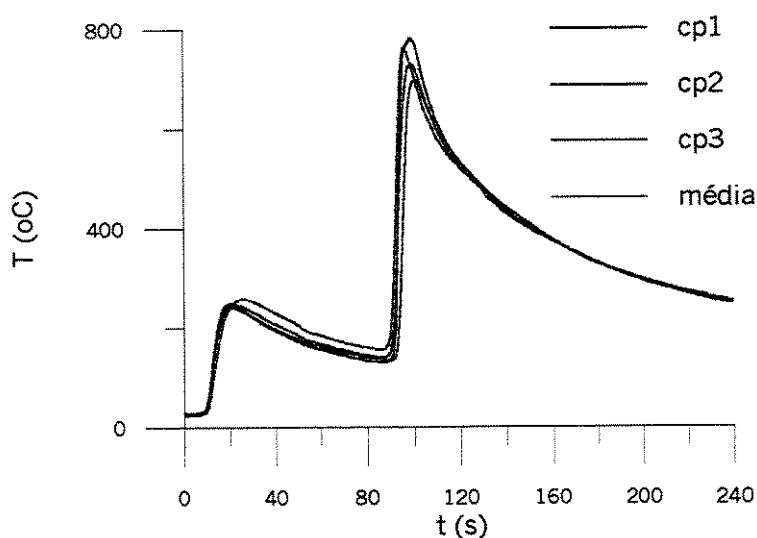


Figura 6.1 – Ciclos térmicos experimentais para os corpos de prova 1, 2 e 3.

A dificuldade no controle dos parâmetros de soldagem não permite a realização de testes utilizando exatamente os mesmos valores de insumo de calor em cada um deles. Somada a isto, a variação da posição do termopar de um corpo de prova para o outro faz com que as temperaturas de pico atingidas em cada ensaio sejam diferentes.

Para verificar se o número de réplicas utilizado foi adequado, fez-se uso da distribuição t de Student, pois o número de amostras n_a é menor que 20 (Dally, Riley and McConnell, 1993). A dependência da distribuição t com o tamanho da amostra n_a permite que o valor de t possa ser usado para estimar n_a , de tal forma que uma estimativa da média da amostra seja obtida para uma dada confiança. Para um desvio padrão S e um comprimento do intervalo de confiança $2\delta_c$, n_a pode ser determinado através de:

$$n_a = \left(t \frac{S}{\delta_c} \right)^2 \quad (6.1)$$

Para o cálculo de n_a , foram tomados como referência os valores de temperaturas em cinco instantes de tempo, onde dois deles correspondem aos instantes de ocorrência da temperatura de pico ($t = 20,27$ e $100,27$). Considerando uma precisão (α_p) para a estimativa da média da amostra de $\pm 10\%$, com uma confiança de 90% , número de amostras n_a igual a 3, número de graus de liberdade igual a 2, $\alpha_p/2$ igual a 5% , pela tabela da distribuição t , tem-se t igual a 2,92. Na Tabela 6.3 estão os valores de n obtidos pela Equação (6.1), para os respectivos instantes de tempo considerados.

Tabela 6.3 – Número de amostras obtidas pela distribuição t .

t (s)	20,27	50,13	100,27	150,40	200,53
S (°C)	3,88	9,80	40,86	4,77	2,50
δ_c (°C)	24,54	18,07	72,14	40,15	29,54
n_a	0,21	2,51	2,74	0,12	0,06

De acordo com os dados apresentados na tabela acima, o número de réplicas igual a 3 foi suficiente para representar as condições estabelecidas para o modelo unidimensional, pois os valores de n_a para os instantes de tempo considerados não foram superiores a 3. Caso fossem maiores que 3, seriam necessários novos ensaios para a obtenção de repetibilidade com o grau de confiança desejado. Para os outros termopares, os valores de n_a obtidos também foram menores que 3.

A Figura 6.2 mostra os ciclos térmicos para o corpo de prova 2, para as três distâncias consideradas. Como esperado, quanto menor a distância de um ponto em relação à solda, maior a temperatura de pico para este ponto, e mais cedo ela ocorre. Na comparação entre os ciclos térmicos experimentais e teóricos, serão utilizados os resultados obtidos para este corpo de prova.

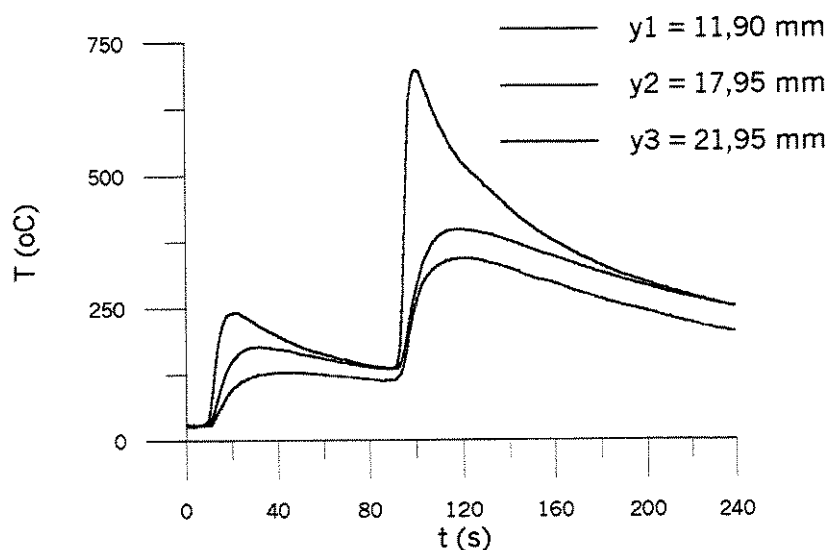


Figura 6.2 – Ciclos térmicos experimentais para o corpo de prova 2.

A utilização de um comprimento de 100 mm, juntamente com um tempo de espera entre passes de 60 s, permitiram o acúmulo dos efeitos térmicos do segundo passe sobre o primeiro. Isso foi evidenciado pelo fato de que as temperaturas, para as três distâncias consideradas, não correspondem à temperatura ambiente no início do segundo passe ($t = 80$ s). Ao contrário, estas temperaturas não são uniformes, pois dependem da posição. A grande vantagem dos modelos desenvolvidos é a possibilidade de se obter estas temperaturas, as quais não podem ser previstas pelas soluções formuladas para o problema com um único passe de solda.

6.2.2 Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos

Antes da comparação entre os resultados experimentais e teóricos, a validação do modelo unidimensional proposto será feita através da comparação do ciclo térmico obtido

por este modelo com aquele obtido pelo modelo numérico correspondente. Primeiro, a comparação entre os modelos é feita desprezando os efeitos das perdas de calor superficiais, da variação das propriedades físicas com a temperatura e da distribuição da fonte de calor. A princípio, os valores da condutividade e da capacidade térmica foram obtidos a 400°C, para a simulação dos modelos com propriedades constantes. Todos estes fatores serão tratados com mais detalhes nos próximos itens.

Para simular uma fonte instantânea na solução numérica, como discutido no capítulo 5, verificou-se qual o tempo de aplicação da fonte necessário para se obter as taxas de aquecimento e resfriamento obtidas pela solução analítica. Um tempo de soldagem de 0,5 s foi suficiente para que o modelo numérico correspondesse a uma fonte instantânea. Com uma velocidade de 300 mm/min nos experimentos para o caso de regime transiente, seriam necessários 20 s para a deposição de um cordão de solda de 100 mm de comprimento. Então, o fator f na Equação (5.3) foi igual a 40, de forma a compensar a redução no tempo de soldagem, mantendo a energia constante. Devido à hipótese de simetria admitida em y igual a zero, somente metade desta quantidade de energia é considerada no modelo numérico.

A Figura 6.3 mostra os ciclos térmicos obtidos analítica e numericamente, para uma distância y igual a 5 mm a partir da origem do sistema (centro do cordão de solda).

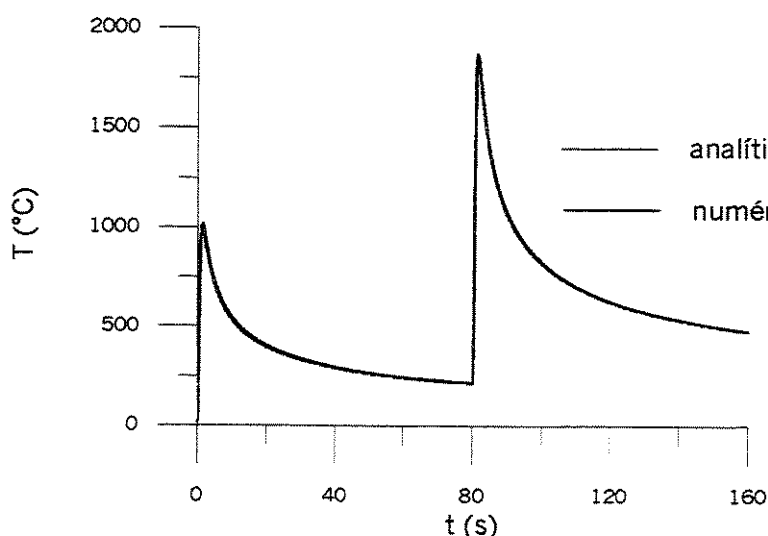


Figura 6.3 – Ciclos térmicos analítico e numérico unidimensionais, para $y = 5$ mm.

A simulação foi feita para dois passes de solda, durante um período de 160 s. No modelo numérico, os valores de Δy e Δt utilizados correspondem a 0,5 mm e 0,05 s, respectivamente, os quais fornecem uma relação de estabilidade de 2,28 (Equação 4.16), maior que o limite de 0,5 imposto ao método explícito. Isso mostra a vantagem do método de Crank-Nicholson em relação ao explícito, que é o fato de ser incondicionalmente estável.

O refinamento em Δy e Δt foram feitos até que as diferenças entre as temperaturas de pico obtidas pelas soluções analíticas e numéricas fosse menor que 5%, para a distância igual a 5 mm. A escolha desta posição se deve ao problema de singularidade da solução analítica na origem da fonte de calor, onde as temperaturas calculadas são extremamente elevadas e, portanto, muito diferentes das obtidas pela simulação numérica.

À medida que se afasta da região da solda, as diferenças entre as temperaturas de pico são cada vez menores. Para uma posição y igual a 10 mm, esta diferença se reduz a 1%, para os valores estabelecidos de Δy e Δt . Maiores refinamentos da malha e do intervalo de tempo não modificaram o ciclo térmico. A sobreposição das curvas mostra uma boa concordância entre as soluções analíticas e numéricas.

6.2.2.a Efeito da Variação das Propriedades Físicas

Para verificar o efeito da variação das propriedades físicas com a temperatura sobre o ciclo térmico, foi admitida uma tolerância de 10°C para a temperatura obtida entre uma iteração e a próxima. Definida esta tolerância, o incremento de tempo Δt foi refinado até que não fosse observada variação de temperatura maior que 5% entre os ciclos térmicos em relação ao valor do Δt anterior. O mesmo procedimento foi adotado para o refinamento da malha, obtendo-se os valores de $4,0 \times 10^{-4}$ s e 0,5 mm para Δt e Δy , respectivamente.

A análise será feita para dois materiais, cujas curvas de variação da condutividade térmica e do calor específico com a temperatura apresentam diferentes comportamentos. No caso do aço baixa liga, as curvas de variação da condutividade térmica e do calor específico

com a temperatura foram mostradas no capítulo anterior (Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente). O outro material considerado é o aço inox 304, para o qual tanto a condutividade térmica quanto o calor específico aumentam linearmente com o aumento da temperatura.

Para o modelo com propriedades constantes, recomenda-se a utilização de valores para a condutividade e capacidade térmicas calculadas a 400°C (Rykalin, 1951), ou também na temperatura correspondente à metade da temperatura de fusão do material. De acordo com a temperatura escolhida como referência, podem ser obtidos diferentes ciclos térmicos, dependendo da forma de variação das propriedades com a temperatura. Então, para a comparação entre os resultados obtidos com os modelos de propriedades constantes e variáveis, os ciclos térmicos numéricos serão simulados considerando as duas temperaturas de referência citadas.

Considerando a temperatura de fusão do aço baixa liga como 1500°C, a Tabela 6.4 mostra os valores de k e ρc para este material, correspondentes às temperaturas de 400 e 750°C, para uma densidade constante e igual a 7800 kg/m³.

Tabela 6.4 – Valores da condutividade e da capacidade térmica para o aço baixa liga.

T_{ref} (°C)	k (J/ms°C)	ρc (J/m ³ °C)
400	48,00	4,21x10 ⁶
750	37,52	4,69x10 ⁶

Os ciclos térmicos obtidos para o modelo com propriedades constantes, utilizando os valores das propriedades nas duas temperaturas de referência, e com propriedades variáveis, estão na Figura 6.4, para uma distância de 3 mm a partir da solda. Os ciclos térmicos simulados considerando as propriedades físicas constantes, com os valores de k e ρc mostrados na Tabela 6.4, apresentam praticamente os mesmos valores de temperaturas.

Para a temperatura de 750°C, a condutividade do aço baixa liga é menor do que a 400°C. Uma redução na condutividade térmica, para a mesma capacidade térmica, resulta

em uma temperatura de pico maior, e diminui a taxa de resfriamento. Entretanto, a diminuição no valor da condutividade térmica, associada ao aumento da capacidade térmica, não foi suficiente para alterar os ciclos térmicos simulados nas duas temperaturas de referência. Portanto, para o caso de propriedades constantes, todos os ciclos térmicos serão simulados com os valores de k e ρc a 400°C , como sugerido por Rykalin (1951), quando o material considerado é o aço.

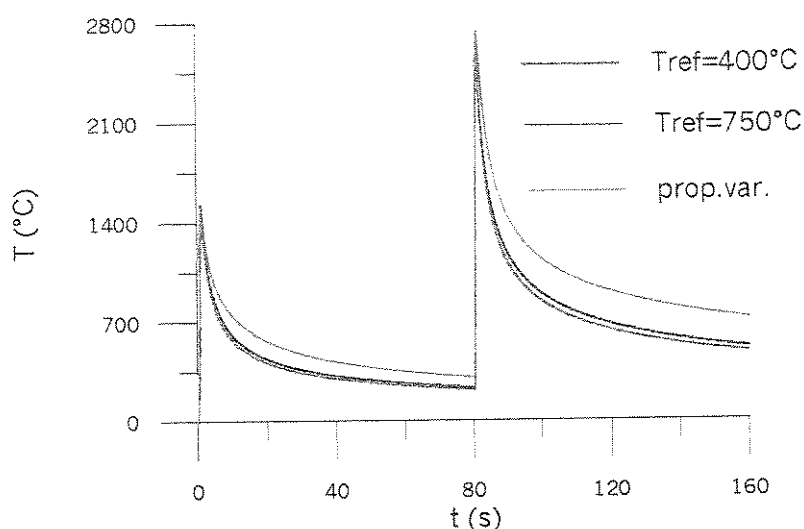


Figura 6.4 – Comparação entre os ciclos térmicos unidimensionais com propriedades constantes e variáveis, para o aço baixa liga, em $y = 3 \text{ mm}$.

Nesta mesma figura, tem-se uma comparação entre os ciclos térmicos obtidos pelos modelos com propriedades constantes e variáveis. Pode-se observar que as temperaturas de pico são as mesmas para os dois modelos. Entretanto, o ciclo térmico obtido pelo modelo com propriedades variáveis apresenta uma taxa de resfriamento mais lenta que aquela do ciclo térmico obtido pelo modelo em que as propriedades foram consideradas constantes.

Isso ocorre porque a capacidade térmica do material aumenta com a temperatura, enquanto a condutividade térmica diminui. Um maior valor de ρc faz com que a variação de temperatura seja menor, para uma mesma quantidade de calor fornecida ao material. Como resultado da redução da condutividade térmica e do aumento da capacidade térmica, a difusividade térmica do material diminui com o aumento da temperatura, de forma que a

taxa de resfriamento seja menor se comparada à taxa de resfriamento do ciclo térmico do modelo com propriedades constantes. Como será visto mais adiante na comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimentais, o modelo com propriedades constantes, calculadas a 400°C, foi suficiente para a simulação de um ciclo térmico com temperaturas bem próximas daquelas obtidas na prática.

Para um material onde a condutividade e a capacidade térmica aumentam linearmente com a temperatura, como é o caso do aço inox 304, os ciclos térmicos obtidos pelos modelos com propriedades constantes e variáveis correspondem àqueles da Figura 6.5, para a mesma distância de 3 mm a partir da origem. Para a simulação destes ciclos térmicos, foram utilizados os mesmos parâmetros de soldagem do cp2 (Tabela 6.1). Os valores das propriedades são conhecidos até a temperatura de 1200°C. Então, no modelo com propriedades variáveis, acima desta temperatura, os valores de k e ρc foram considerados constantes e iguais aos valores obtidos a 1200°C.

Da mesma forma como no caso do aço baixa liga, foram consideradas as duas temperaturas de referência sugeridas na literatura, obtendo-se os valores de k e ρc mostrados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Valores da condutividade e da capacidade térmica para o aço inox 304.

$T_{ref} (^{\circ}C)$	$k (J/ms^{\circ}C)$	$\rho c (J/m^3^{\circ}C)$
400	21,41	$4,31 \times 10^6$
750	23,92	$4,82 \times 10^6$

Para este material, o aumento de k e ρc ao passar de 400 para 750°C mantém a difusividade constante. Assim, para uma mesma difusividade, as curvas apresentam o mesmo comportamento, estando apenas deslocadas uma da outra na mesma razão em que variaram a condutividade e a capacidade térmica.

O ciclo térmico com temperaturas mais elevadas foi obtido para o caso onde k e ρc são menores. A diminuição isolada da condutividade térmica reduziria somente a taxa de

resfriamento, mas somado ao efeito de uma menor capacidade térmica, o resultado final é uma curva acima da obtida com a T_{ref} igual a 750°C .

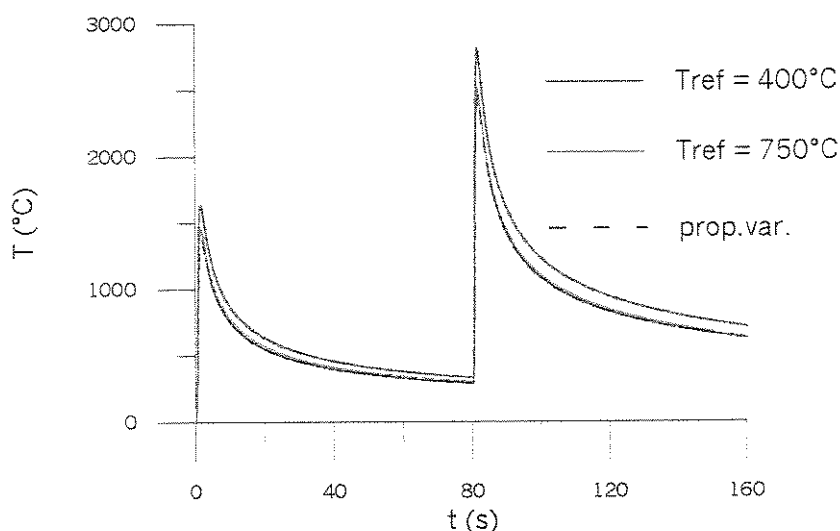


Figura 6.5 – Comparação entre os ciclos térmicos unidimensionais com propriedades constantes e variáveis, para o aço inox 304, em $y = 3$ mm.

Como mostrado na figura acima, quando a variação das propriedades físicas com a temperatura ocorre linearmente, não há necessidade de se utilizar um modelo numérico para levar em consideração este fator. As temperaturas obtidas pelo modelo considerando as propriedades constantes, calculadas a 750°C , são praticamente as mesmas daquelas produzidas pelo modelo com propriedades variáveis. Isso pode ser verificado pela sobreposição destas duas curvas na Figura 6.5. O mesmo acontece para as outras posições. Assim, neste caso, para a obtenção do ciclo térmico, pode-se utilizar a solução analítica, que considera a independência das propriedades com a temperatura.

6.2.2.b Efeito das Perdas Superficiais

Para verificar o efeito das perdas de calor superficiais sobre a solução onde as mesmas são consideradas desprezíveis, foram analisados os efeitos isolados da convecção e radiação, e depois o efeito da ação simultânea dos dois processos.

Antes de se estabelecerem valores para Δy e Δt , da mesma forma como no item anterior, definiu-se uma tolerância de 10°C para as temperaturas calculadas em um intervalo de tempo, ou seja, não ocorre o incremento de tempo enquanto as diferenças de temperaturas entre uma iteração e a seguinte não sejam menores que a tolerância admitida de 10°C .

A partir disto, foram simulados os ciclos térmicos para alguns valores de Δy e Δt , considerando o coeficiente de transferência de calor por convecção e a emissividade nulos, até se obter o mesmo ciclo térmico do modelo sem perdas. Para a tolerância de 10°C , os valores de Δy e Δt para os quais as soluções com e sem perdas coincidem foram de $0,5\text{ mm}$ e $4,0 \times 10^{-4}\text{ s}$.

A Figura 6.6 mostra os ciclos térmicos para os modelos sem perdas e com perdas por convecção e radiação, para a posição y igual a 3 mm . Foram utilizados os seguintes valores na simulação: coeficiente de transferência de calor por convecção igual a $18\text{ W/m}^2\text{C}$, adequado à situação prática (Jeong e Cho, 1997), e emissividade igual a $0,51$ para o aço (Frewin e Scott, 1999).

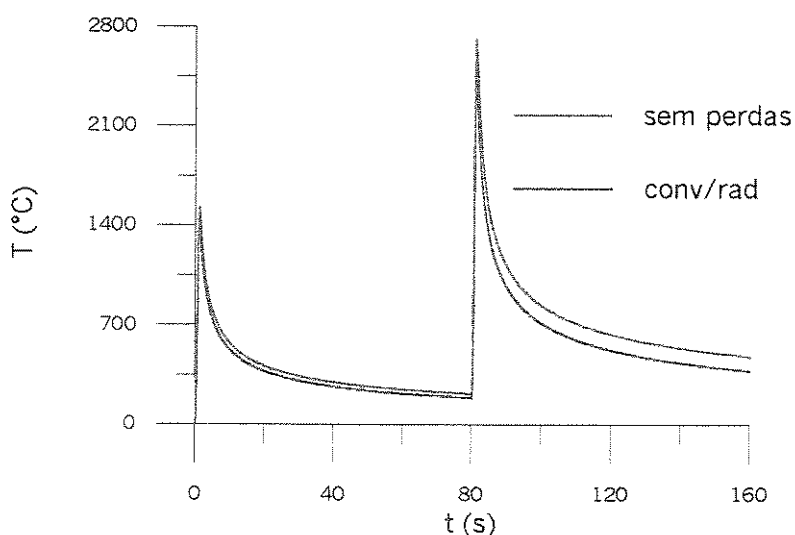


Figura 6.6 – Comparação entre os modelos numéricos unidimensionais com e sem perdas superficiais, para $y = 3\text{ mm}$.

Para uma melhor visualização do efeito das perdas sobre o ciclo térmico em que estas foram desprezadas, a Figura 6.6 mostra somente o efeito conjunto das perdas por convecção e radiação. No entanto, as temperaturas de pico obtidas considerando o efeito isolado de cada mecanismo de troca de calor, assim como o efeito conjunto dos mesmos, encontram-se na Tabela 6.6. Nesta tabela estão contidos também os valores das temperaturas de pico para um ponto mais distante da solda ($y = 10$ mm).

Tabela 6.6 – Temperaturas de pico obtidas pelos modelos unidimensionais com e sem perdas superficiais.

Modelo	$y = 3$ mm		$y = 10$ mm	
	T_{p1} (°C)	T_{p2} (°C)	T_{p1} (°C)	T_{p2} (°C)
Sem perdas	1524,47	2712,47	512,85	1016,29
Convecção	1455,59	2687,20	488,02	996,29
Radiação	1438,38	2553,69	478,49	920,02
Convecção/Radiação	1437,82	2543,85	476,98	908,72

Para as duas posições, as maiores diferenças entre as temperaturas de pico foram observadas quando se consideram as perdas por radiação, principalmente para as temperaturas do segundo passe. Isto se deve ao fato de que, no processo de radiação, as temperaturas envolvidas variam de acordo com a quarta potência, o que provoca as maiores diferenças em temperaturas mais altas. Como esperado, a influência das perdas sobre as temperaturas obtidas nos ciclos térmicos é mais acentuada para pontos mais próximos à solda.

A consideração das perdas através da radiação não modifica somente a temperatura de pico. As etapas de resfriamento do ciclo térmico são mais rápidas do que as do modelo sem perdas. Este fato é mais nítido principalmente após o segundo passe, onde as temperaturas são mais altas, devido ao pré-aquecimento provocado pelo primeiro passe, e também pelo maior valor de insumo de calor utilizado na simulação deste último passe. Uma estimativa precisa da taxa de resfriamento é importante, uma vez que é um indicador de possíveis transformações na microestrutura do material soldado.

As diferenças entre as temperaturas de pico e as taxas de resfriamento entre os modelos com e sem perdas podem ser melhor observadas nos ciclos térmicos da Figura 6.7, para a posição mais distante da solda. De acordo com as curvas da figura abaixo, tem-se uma noção do grau de influência das perdas radiantes sobre as temperaturas de pico e taxa de resfriamento, principalmente para o segundo passe. As temperaturas mais baixas previstas pelo modelo com perdas influenciarão no cálculo da eficiência do processo de soldagem utilizado, como será mostrado mais adiante na comparação entre ciclos térmicos teóricos e experimentais.

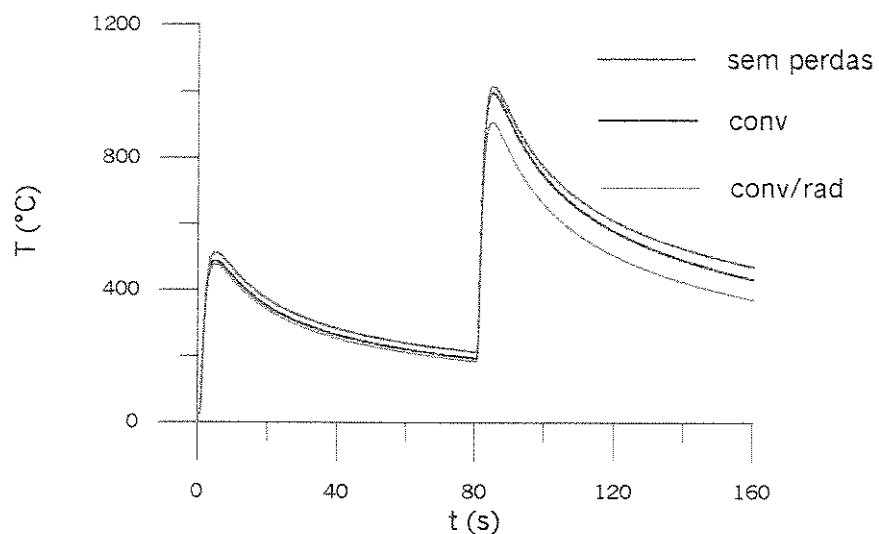


Figura 6.7 - Comparação entre os modelos numéricos unidimensionais com e sem perdas superficiais, para $y = 10$ mm.

Na Figura 6.8, tem-se uma comparação entre os efeitos das perdas superficiais obtidas pelos modelos analítico e numérico, para a distância de 10 mm da origem. No ciclo térmico resultante do modelo numérico, foram levadas em consideração tanto as perdas convectivas quanto as radiantes.

No modelo analítico, como apresentado no capítulo 3, a inclusão das perdas superficiais foi feita considerando um coeficiente global, obtido de acordo com a Equação

(3.128). Este coeficiente, que corresponde à soma dos coeficientes de transferência de calor por convecção e radiação, para a temperatura de 400°C, é igual a 33,21 J/m²s°C.

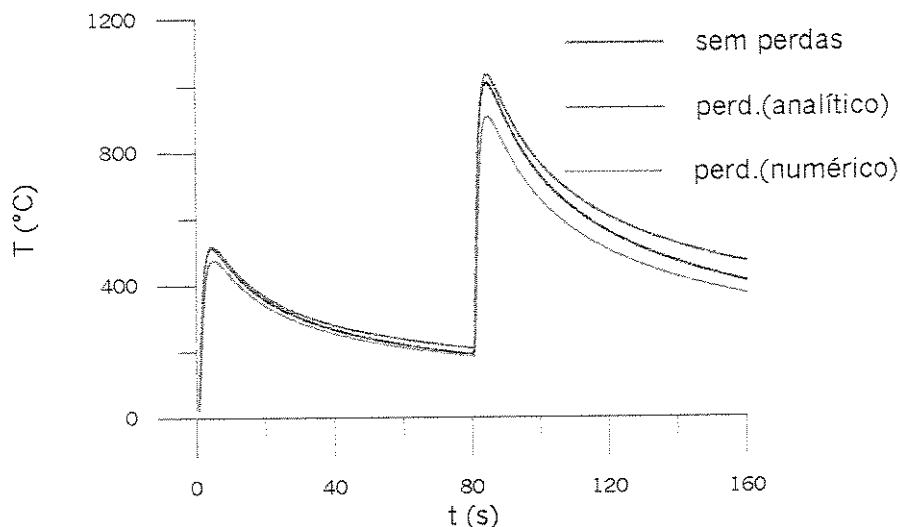


Figura 6.8 – Comparação entre os modelos analítico e numérico unidimensionais com e sem perdas, para $y = 10$ mm.

Conforme mostra a Figura 6.8, a diferença entre os ciclos térmicos nos modelos analíticos com e sem perdas é mais pronunciada no que diz respeito à taxa de resfriamento do que em relação à temperatura de pico.

Comparando os ciclos térmicos obtidos pelos modelos analítico e numérico com perdas, a consideração das perdas por radiação na simulação numérica resulta em temperaturas mais baixas do que as obtidas pela solução analítica. No entanto, pode-se observar que as duas curvas são aproximadamente paralelas, mostrando que a inclusão das perdas no modelo analítico tem o mesmo efeito provocado pela consideração das perdas no modelo numérico, no que diz respeito à taxa de resfriamento.

6.2.2.c Efeito da Distribuição da Fonte de Calor

A consideração da variação das propriedades físicas com a temperatura introduz não-linearidades na formulação do problema. Como consequência, a solução não pode ser obtida

na forma analítica. Entretanto, o tratamento da distribuição do calor da fonte em uma região finita do material, que é um outro fator de muito interesse para a previsão do ciclo térmico próximo à fonte, permitiu a obtenção de uma solução sem a necessidade de se recorrer aos métodos numéricos.

Para o estudo da influência deste efeito sobre o ciclo térmico para regiões próximas à solda, é necessária a definição do parâmetro y_b a ser utilizado na Equação (3.19). A escolha deste parâmetro levou em consideração o valor do insumo de calor utilizado na simulação do ciclo térmico, comparado aos valores obtidos em alguns trabalhos (Kou e Wang, 1986; Zacharia et al., 1989; Wu, 1992).

De acordo com os dados da Tabela 6.1, como o insumo de calor aumentou de um passe para o outro, foram utilizados diferentes valores de y_b em cada passe. Isto porque, segundo o critério adotado para a definição deste parâmetro, um aumento na energia fornecida faz com que y_b seja maior, pois a posição na qual a energia se reduz a 5% do seu valor máximo estará mais afastada da origem. Este aumento foi estabelecido na mesma proporção do aumento em H . Assim, os valores escolhidos para y_b foram 4 e 6 mm para o primeiro e segundo passes, respectivamente.

Para a comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada e Gaussiana unidimensional, os ciclos térmicos foram simulados em duas distâncias diferentes: y igual a 1mm, correspondente a um ponto próximo à ZF ($y \ll y_b$), e y igual a 3 mm, apropriado para representar um ponto da mesma magnitude que o parâmetro y_b .

A Figura 6.9 mostra os ciclos térmicos obtidos a partir dos dois modelos, para a distância de 1mm. Pode-se observar que as temperaturas de pico em cada passe são bem mais elevadas para o ciclo térmico simulado pelo modelo de fonte pontual.

Essa acentuada diferença ocorre devido à suposição de que a energia fornecida para a realização da solda é instantaneamente aplicada na área composta pelo comprimento e espessura da chapa. No modelo de fonte Gaussiana unidimensional, admite-se que o calor da

fonte é aplicado não somente nesta mesma área, mas também na coordenada y , ao longo da dimensão dada por y_b . Desta forma, as temperaturas de pico previstas por este modelo tendem a ser mais próximas da realidade.

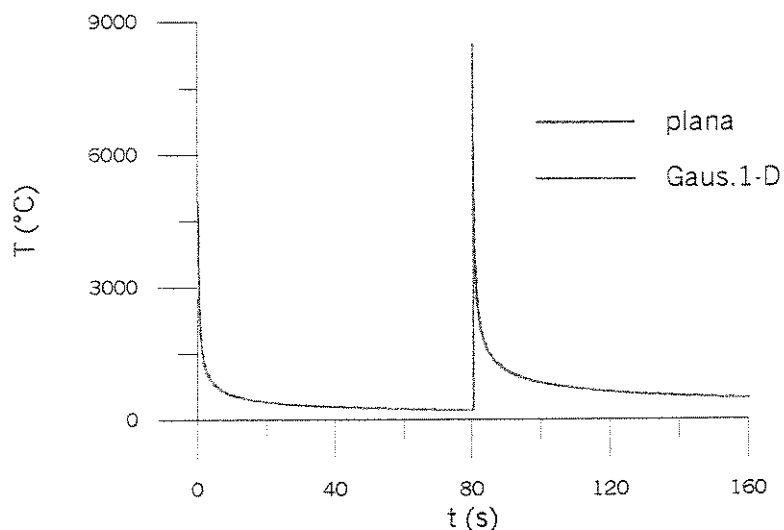


Figura 6.9 – Comparação entre os ciclos térmicos analíticos unidimensionais com fonte concentrada (plana) e distribuída (Gaussiana 1-D), para $y = 1$ mm.

A determinação prévia da temperatura de pico a ser atingida em uma posição específica é interessante, uma vez que é um indicador de eventuais transformações de fase no material soldado. As diferenças entre as temperaturas simuladas pelos dois modelos estão descritas na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos unidimensionais com fonte concentrada (plana) e distribuída (Gaussiana 1-D).

Fonte	T_{p1} (°C)	T_{p2} (°C)
Concentrada	4919,77	8469,79
Gaussiana 1-D	3719,09	5051,60

Para a distância considerada, a temperatura de pico no segundo passe, prevista pelo modelo com fonte concentrada, é aproximadamente 68% maior do que a prevista pelo modelo de fonte distribuída. Esta diferença se deve à tendência de se obterem temperaturas

infinitas no modelo onde a fonte de calor se concentra em um volume muito pequeno do material, como admitido no modelo de fonte concentrada. É importante ressaltar que a correção do modelo proposto afeta somente a obtenção da temperatura de pico, não sendo observada nenhuma diferença em relação à taxa de resfriamento do ciclo térmico.

Na Figura 6.10, os ciclos térmicos foram simulados para uma distância y igual a 3 mm, com o objetivo de mostrar que, para pontos próximos da dimensão y_b , o modelo de fonte Gaussiana 1-D é equivalente ao de fonte concentrada. As duas soluções fornecem ciclos térmicos que possuem praticamente as mesmas temperaturas. Isto significa que o modelo de fonte concentrada plana pode prever corretamente os campos de temperatura em distâncias afastadas da fonte de calor.

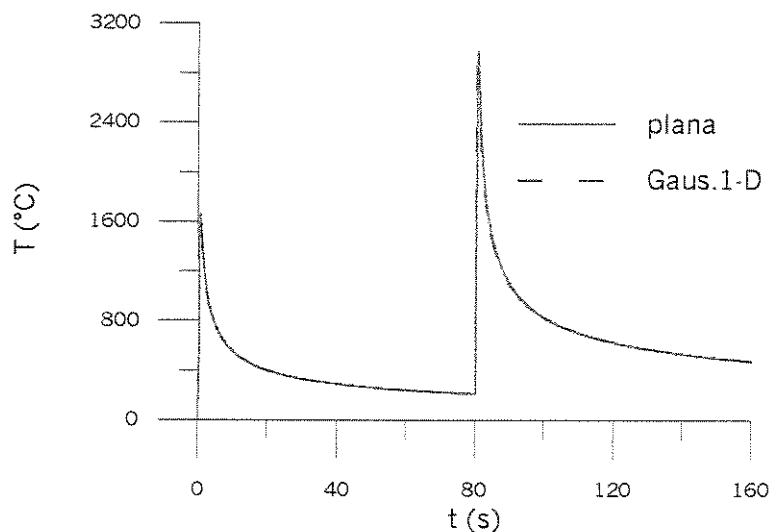


Figura 6.10 – Comparação entre os ciclos térmicos analíticos unidimensionais com fonte concentrada (plana) e distribuída (Gaussiana 1-D), para $y = 3$ mm.

6.2.3 Comparação entre Ciclos Térmicos Teóricos e Experimentais

Para a comparação entre resultados teóricos e experimentais, os ciclos térmicos analíticos e numéricos foram simulados com os mesmos parâmetros utilizados na soldagem dos corpos de prova 1, 2 e 3 (Tabela 6.1), para as três distâncias consideradas.

Na simulação dos ciclos térmicos analítico e numérico, inicialmente a eficiência térmica do processo na Equação (5.1) foi considerada igual a 1 (100%). Uma forma de se comparar resultados teóricos e experimentais é através da divisão da temperatura de pico obtida experimentalmente em cada passe pelo valor da mesma obtida através dos modelos teóricos. O resultado dessa divisão é admitido como sendo a eficiência do processo (Giedt, Tallerico e Fuerschbach, 1989). Após o cálculo das eficiências, as curvas teóricas foram novamente simuladas, agora levando em consideração os valores destas eficiências, que estão contidas na Tabela 6.8, para os três corpos de prova.

Tabela 6.8 – Eficiência térmica para o processo MIG para os modelos com e sem perdas superficiais.

cp	Passe	η sem perdas	η com perdas (analítico)	η com perdas (numérico)
1	1	0,60	0,60	0,63
	2	0,84	0,86	0,94
2	1	0,60	0,60	0,63
	2	0,82	0,84	0,91
3	1	0,59	0,60	0,62
	2	0,86	0,87	0,94

A obtenção da eficiência do processo de soldagem através da comparação entre resultados teóricos e experimentais não corresponde a uma medida real da fração de energia que é transferida para o material. Uma das formas de se determinar este parâmetro é através de medidas por calorimetria (DuPont e Marder, 1995). Os valores de eficiência da Tabela 6.8 são valores utilizados para o ajuste entre resultados teóricos e práticos. Se o modelo utilizado na simulação representa adequadamente a situação estabelecida na prática, os valores calculados da eficiência estarão próximos dos valores obtidos por calorimetria (Giedt, Tallerico e Fuerschbach, 1989).

As Figuras 6.11, 6.12 e 6.13 mostram os ciclos térmicos teóricos e experimentais para os corpos de prova 1, 2 e 3, respectivamente. As figuras mostram a comparação entre teoria

e experimento somente para o primeiro termopar (dimensão y_1 na Tabela 6.2), pois como a análise para as demais posições foi feita de forma semelhante, evitou-se a reprodução dos mesmos neste texto. Tanto para o modelo analítico quanto para o numérico, foram simulados os ciclos térmicos utilizando os modelos com perdas superficiais. Os valores para o coeficiente de transferência de calor, emissividade e coeficiente global de perdas foram os mesmos utilizados nas simulações do item 6.2.2.b.

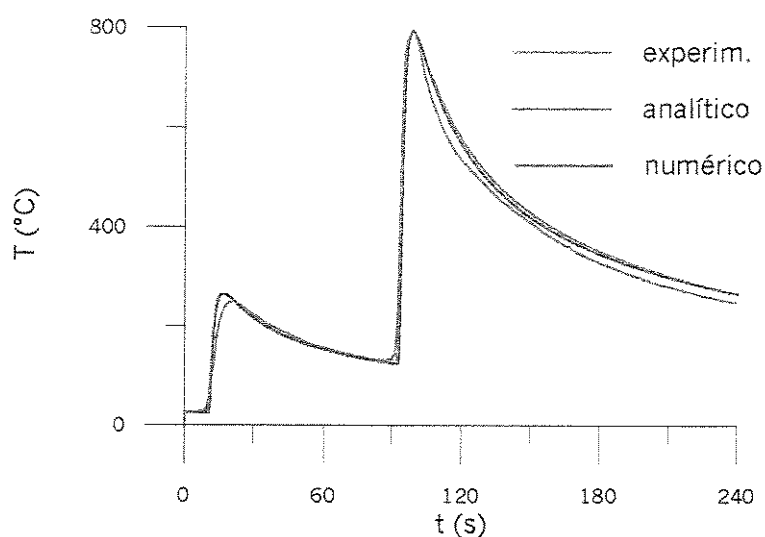


Figura 6.11 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimental para o cp1, em $y_1 = 12,45$ mm.

Na figura acima, o ciclo térmico do modelo analítico apresenta uma taxa de resfriamento semelhante ao do modelo numérico. Este fato já havia sido verificado anteriormente na Figura 6.8. A comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimental mostra uma boa concordância entre os resultados obtidos. Isso significa que, para as condições utilizadas, as perdas superficiais não podem ser desprezadas para que se obtenha um bom acordo entre a teoria e o experimento.

A consideração das perdas se reflete no cálculo da eficiência do processo, uma vez que as temperaturas de pico previstas desta forma serão mais baixas e, portanto, mais próximas das obtidas na prática. Assim, os valores das eficiências obtidos pelos modelos com perdas são maiores do que os obtidos pelo modelo sem perdas (Tabela 6.8). Dentre os

dois modelos com perdas (analítico e numérico), os maiores valores de eficiência para o modelo numérico também está dentro do previsto, pois a consideração das perdas radiantes contribui muito para a obtenção de temperaturas de pico menores.

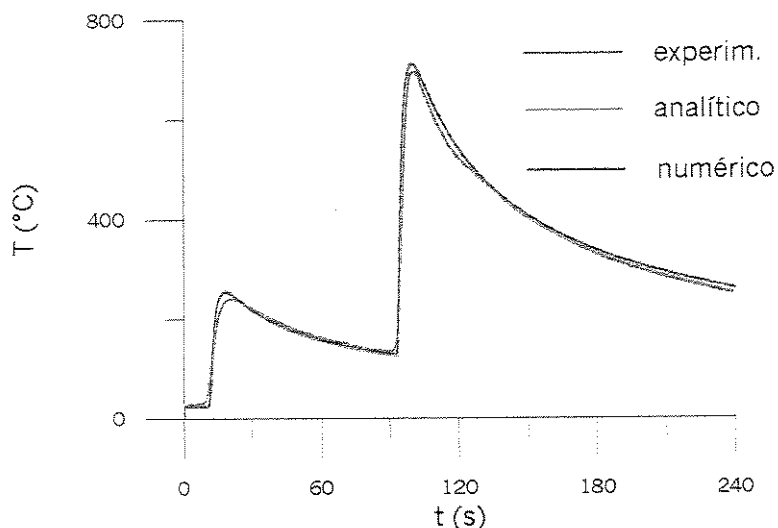


Figura 6.12 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimental para o cp2, em $y_1 = 11,90$ mm.

Para as Figuras 6.12 e 6.13, da mesma forma como observado na Figura 6.11, os ciclos térmicos obtidos tanto pela simulação analítica quanto pela numérica representam de forma adequada o ciclo térmico obtido por medidas experimentais.

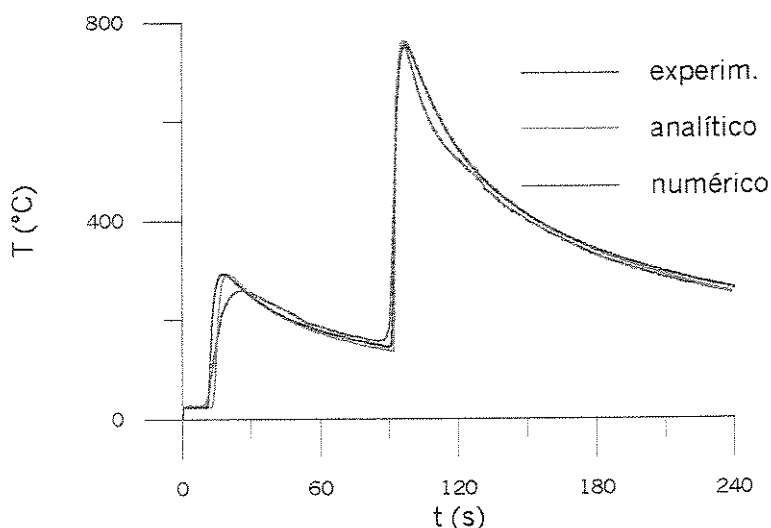


Figura 6.13 – Comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimental para o cp3, em $y_1 = 13,10$ mm.

6.3 Modelo Bidimensional Quase-estacionário

6.3.1 Ciclos Térmicos Experimentais

Neste modelo, assim como no unidimensional, o preenchimento do chanfro também foi obtido com dois passes de solda. Os parâmetros de soldagem utilizados nos três ensaios realizados estão na Tabela 6.9.

O aumento do insumo de calor do primeiro para o segundo passe, necessário para o preenchimento de juntas com chanfro $\frac{1}{2} V$, resultou de um aumento na voltagem, mantendo a corrente e a velocidade de soldagem constantes para os dois passes. Mesmo não alterando a corrente de soldagem, os valores eficazes deste parâmetro registrados pelo “software” MIGMAG mostram uma pequena diferença para os cps 1 e 2. No cálculo de HI de acordo com a Equação (5.1), a eficiência foi considerada igual a 1.

Tabela 6.9 – Parâmetros de soldagem utilizados no modelo bidimensional quase-estacionário.

cp	Passe	I (A)	E (V)	v (mm/min)	HI (10^6 J/m)
1	1	240	20,7	200	1,49
	2	230	24,2	200	1,67
2	1	225	20,5	200	1,38
	2	220	23,2	200	1,53
3	1	220	21,5	200	1,42
	2	220	23,1	200	1,52

As posições dos termopares para as quais foram feitas aquisições de temperaturas são as indicadas na Tabela 6.10. A utilização dos subscritos "a" e "b" para as posições y_1 , y_2 e x_0 da Figura 5.3 se deve às diferenças observadas durante a medida destas distâncias. Como se pode observar pelos valores da tabela, os termopares não estavam fixados a uma mesma distância da origem para os dois pontos de medida ao longo da direção de soldagem.

Tabela 6.10 – Distâncias dos termopares à origem do sistema de coordenadas.

cp	y_{1a} (mm)	y_{1b} (mm)	y_{2a} (mm)	y_{2b} (mm)	x_{01} (mm)	x_{02} (mm)
1	9,60	9,50	12,40	12,45	42,00	89,00
2	9,50	9,60	12,75	12,60	45,00	89,00
3	8,60	8,55	12,85	12,80	43,00	88,00

Na Figura 6.14 encontram-se a curva média e os ciclos térmicos obtidos para os três ensaios. A posição considerada corresponde ao termopar situado mais próximo à solda, no primeiro ponto ao longo da direção x (posições a_1, d_1 da Tabela 6.10).

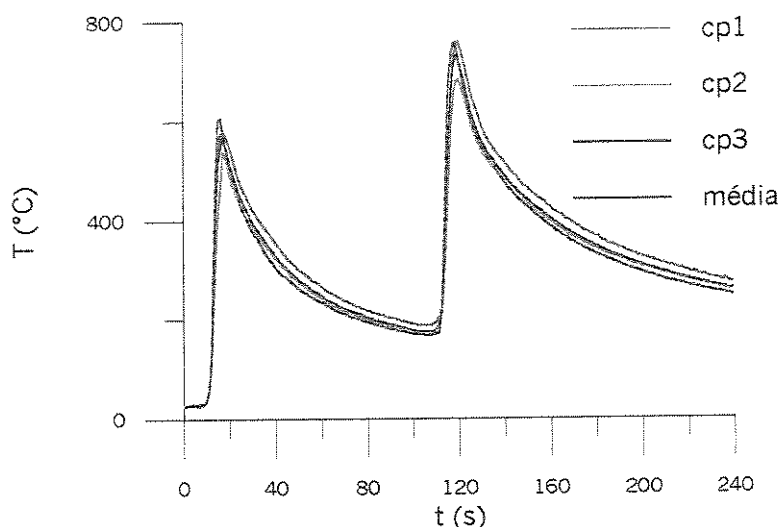


Figura 6.14 – Ciclos térmicos experimentais para os corpos de prova 1, 2 e 3.

Seguindo o mesmo procedimento adotado no caso do modelo unidimensional, a determinação do número adequado de amostras (n_a) foi feita através da distribuição t de Student.

Considerando uma precisão de 10% para a estimativa da média da amostra, um número de graus de liberdade igual a 2, obtém-se o mesmo valor de t utilizado no modelo unidimensional ($t = 2,92$). Os valores de n_a foram calculados com o auxílio da Equação (6.1), para cinco instantes de tempo, incluindo os instantes de ocorrência dos dois picos de temperatura (Tabela 6.11).

Tabela 6.11 – Número de amostras obtidas pela distribuição t .

t (s)	17,07	60,80	118,40	168,53	220,80
S (°C)	21,19	13,86	42,99	19,47	13,51
δ_c (°C)	57,56	24,36	73,49	37,49	27,94
n_a	2,58	2,76	2,92	2,30	2,00

Conforme os valores mostrados na Tabela 6.11, como nenhum dos valores obtidos para n_a foi maior que 3, não houve necessidade da realização de mais experimentos. Assim, com um nível de confiança de 90% estabelecido para a análise acima, pode-se considerar que os ciclos térmicos apresentaram uma boa repetibilidade.

Para os dois pontos situados ao longo da direção x , os ciclos térmicos experimentais estão representados na Figura 6.15, e correspondem ao cp1. Pela definição de regime quase-estacionário, para um observador localizado sobre a fonte de calor, o campo de temperaturas é sempre uniforme, como pode ser verificado na situação da referida figura.

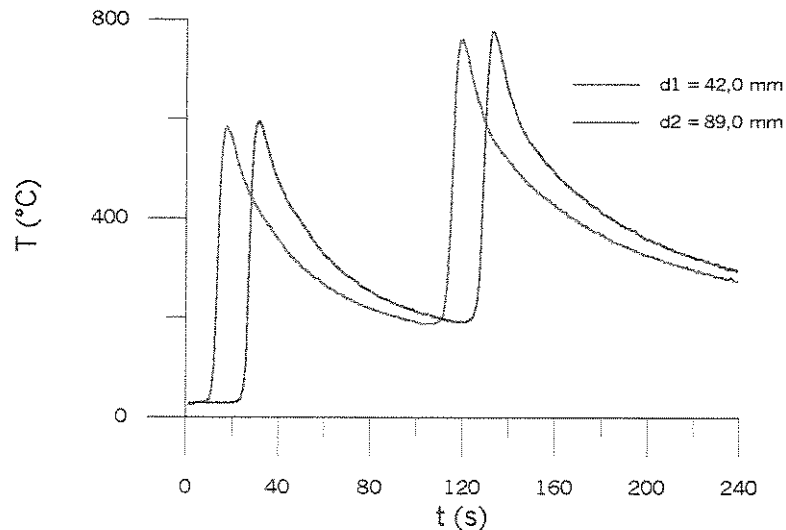


Figura 6.15 – Ciclos térmicos experimentais para o cp1, em duas posições ao longo da direção de soldagem.

Na posição x_{01} , mais próxima à origem do eixo x , a passagem da fonte de calor por este ponto ocorre após 12,60 s do início do processo de soldagem. Assim, a temperatura se eleva até atingir o seu valor máximo, diminuindo após a passagem da fonte e durante o intervalo entre passes. Para a posição x_{02} , o ciclo térmico produzido é semelhante ao anterior, mas deslocado de um período de tempo necessário para que a fonte de calor passe por essa posição, o que ocorre aproximadamente no instante t igual a 26,70 s.

No segundo passe de solda, os ciclos térmicos das duas posições apresentam o mesmo comportamento observado no primeiro passe, mas agora as temperaturas são mais elevadas, devido ao estado de pré-aquecimento do material, e também ao maior valor do insumo de calor utilizado neste passe. Assim, conforme as condições utilizadas nos experimentos, foi possível observar, para as duas posições consideradas, a ocorrência do regime quase-estacionário.

6.3.2 Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos

Para a comprovação do modelo analítico proposto para esta configuração de fluxo de calor, seus resultados são comparados aos do modelo numérico equivalente. Inicialmente, a comparação é feita para o caso mais simples, com fonte concentrada e sem perdas superficiais.

Com base nos resultados do modelo unidimensional, as propriedades físicas serão consideradas independentes da temperatura nas simulações dos ciclos térmicos numéricos, pois a diferença na taxa de resfriamento do ciclo térmico simulado considerando a variação das propriedades com a temperatura não foi observada na prática.

A solução analítica utilizada para a simulação do ciclo térmico da Figura 6.16 foi a obtida em um trabalho anterior (Suzuki, 1996), para a soldagem multipasse em regime quase-estacionário bidimensional. Os parâmetros de soldagem correspondem aos do cp1 (Tabela 6.9), e os valores das propriedades físicas são aquelas contidas na Tabela 6.4, para a temperatura de 400°C.

O período de simulação foi de 240 s, abrangendo os tempos de soldagem e espera para os dois passes. Os refinamentos do incremento de tempo e da malha foram feitos de forma que as diferenças entre as temperaturas de pico para os dois modelos fossem menores que 5%, para as posições x e y consideradas. Como resultado, foram obtidos os valores de 0,05 s, 1,0mm e 0,5 mm, para Δt , Δx e Δy , nessa ordem.

De acordo com a simetria do problema em y igual a zero, admitindo que as duas chapas recebem a mesma quantidade de calor, apenas metade da potência é considerada no modelo numérico, para comparação com o modelo analítico. Pela Figura 6.16, nota-se uma boa concordância entre os ciclos térmicos provenientes dos modelos analítico e numérico.

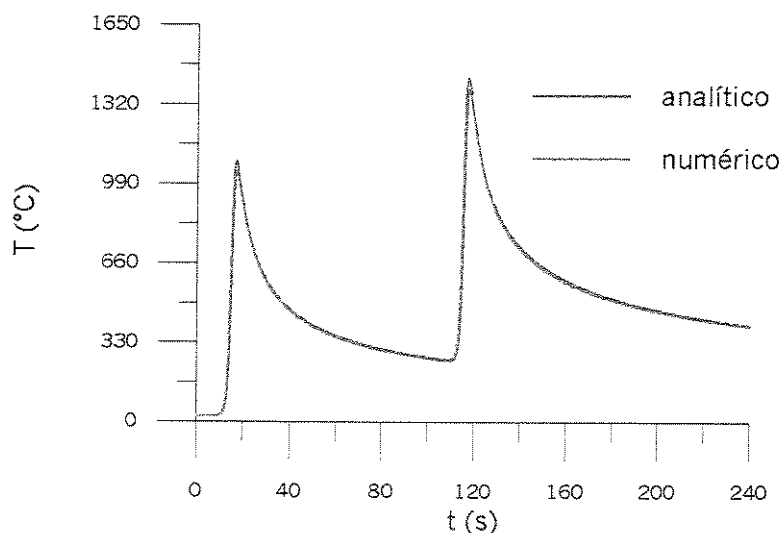


Figura 6.16 – Ciclos térmicos analítico e numérico bidimensionais quase-estacionários, em $x_0=50$ mm e $y = 5$ mm.

Na simulação do ciclo térmico através da solução analítica, independente da posição x_0 considerada, os valores de temperatura são sempre os mesmos, uma vez que a obtenção da solução é feita partindo-se do princípio de que já foi atingido o regime quase-estacionário. Entretanto, no modelo numérico, para pontos situados no início da coordenada x , ainda não se observa a existência do regime quase-estacionário. Essa situação somente é atingida após alguns instantes de aplicação da fonte de calor (Figura 6.17).

Uma estimativa do tempo necessário para que se atinja o regime quase-estacionário pode ser feita através do cálculo da constante de tempo (Taniguchi, 1992). Se d corresponde à distância percorrida até o instante t , a constante de tempo é dada por:

$$t = \frac{16\alpha}{v^2} \quad (6.2)$$

Com os valores de v e α utilizados na simulação, o regime quase-estacionário ocorreria após 16,41 s, o que equivale a uma distância percorrida de 54,70 mm a partir da origem.

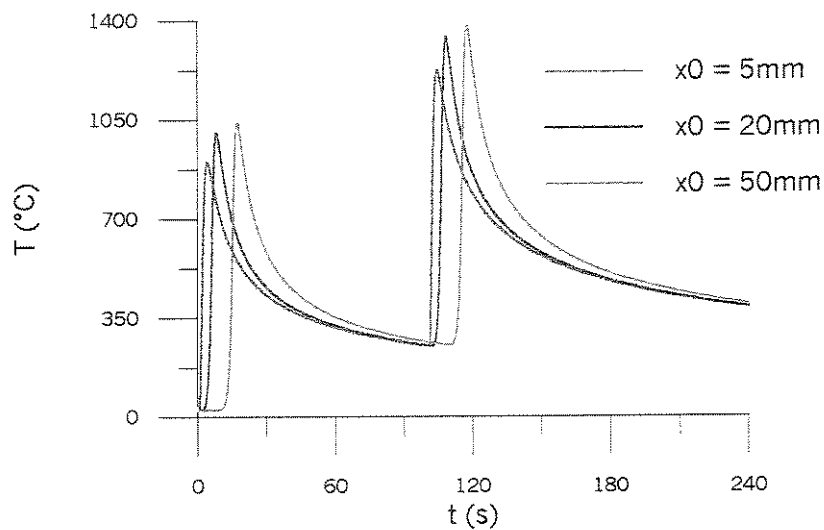


Figura 6.17 – Ciclos térmicos numéricos bidimensionais para diferentes posições x_0 , em $y=5\text{mm}$.

De acordo com a Figura 6.17, nota-se que, para pontos localizados no início da trajetória percorrida pela fonte ($x_0 = 5$ e 20 mm), os valores de temperatura obtidos para o ciclo térmico correspondente a esta posição são menores que aqueles obtidos para outros pontos mais adiante. Isto significa que ainda não havia sido atingido o regime quase-estacionário naquela região. Tal situação foi verificada para x_0 maior que 50 mm, a partir do qual não foram mais observadas variações nos campos de temperaturas.

A Figura 6.18 mostra uma comparação entre os ciclos térmicos simulados analítica e numericamente, para dois pontos da direção x , considerando a mesma distância y de 5 mm.

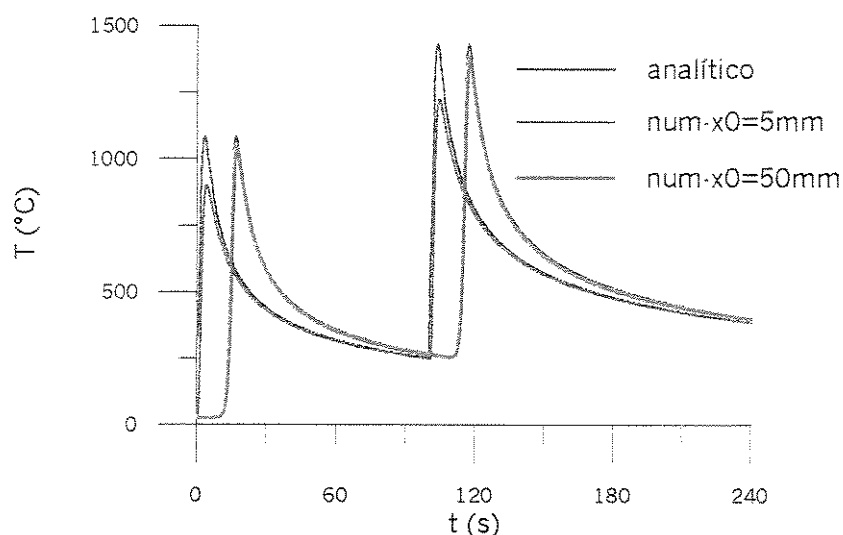


Figura 6.18 – Ciclos térmicos analíticos e numéricos bidimensionais para diferentes posições x_0 , em $y = 5\text{ mm}$.

Devido à hipótese de regime quase-estacionário da solução analítica, as curvas são as mesmas para os dois valores de x_0 (5 e 50 mm) utilizados na obtenção das mesmas. Entretanto, ao compará-las com os ciclos térmicos numéricos para os mesmos valores de x_0 , pode-se notar as diferenças entre as temperaturas de pico do primeiro e segundo passes.

Em x_0 igual a 5 mm, como mostrado na figura anterior, o processo ainda se encontra em regime transiente. Assim, as temperaturas máximas previstas pelo modelo analítico são maiores que as previstas pelo modelo numérico. Para x_0 igual a 50 mm, onde já se observa a ocorrência do regime quase-estacionário, observa-se a concordância entre as duas soluções. Devido a esse período de regime transiente, os refinamentos do incremento de tempo e da malha para a comparação entre os modelos analítico e numérico na Figura 6.16 foram feitos para x_0 igual a 50 mm.

Como citado anteriormente, para a configuração unidimensional transiente, uma das simplificações admitidas é a passagem da fonte de calor em alta velocidade, de forma que a

temperatura na direção x possa ser considerada uniforme. Para a configuração bidimensional quase-estacionário, o aumento da velocidade de soldagem simplifica o problema, pois recai no caso unidimensional, com a variação de temperatura somente na direção y .

Com a finalidade de se verificar a consistência do modelo numérico, foi feita uma comparação entre os ciclos térmicos obtidos para as configurações unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, considerando duas velocidades de soldagem: 200 e 400 mm/min. Foram utilizados os valores de corrente e tensão de soldagem do cp1 (Tabela 6.9).

Os valores de Δy e Δt utilizados nas simulações numéricas foram iguais a 0,5mm e 0,05s, respectivamente. Para o caso bidimensional, além destes dois parâmetros, foi considerado um valor de Δx igual a 1,0mm, e os ciclos térmicos correspondem à posição x_0 igual a 90mm. Na Figura 6.19, tem-se os ciclos térmicos obtidos para as duas configurações, considerando a velocidade de soldagem igual a 200 mm/min.

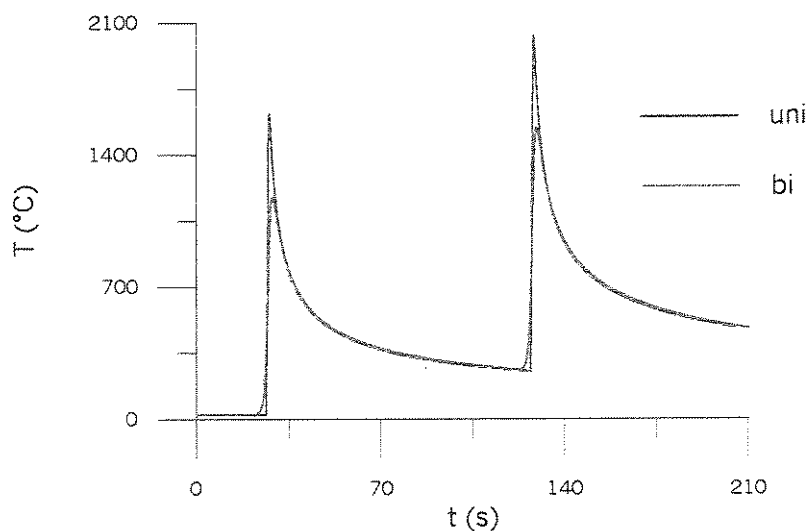


Figura 6.19 – Comparação entre os ciclos térmicos numéricos unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, para $y=4\text{mm}$ e $v=200\text{mm/min}$.

Como no caso unidimensional a resposta do material à aplicação da fonte de calor é instantânea, a temperatura foi mantida igual à temperatura ambiente durante o período correspondente ao percurso da fonte até a posição x_0 igual a 90mm.

Para a velocidade de soldagem de 200 mm/min, a diferença entre as temperaturas máximas obtidas para as duas configurações é de 31,7%. Com o aumento da velocidade de soldagem para 400 mm/min, essa diferença diminui para 9,7%, como mostrado na Figura 6.20. Pode-se observar, então, que o aumento da velocidade de soldagem, na configuração bidimensional, resulta em ciclos térmicos cujos valores de temperatura se aproximam daqueles obtidos para a configuração unidimensional.

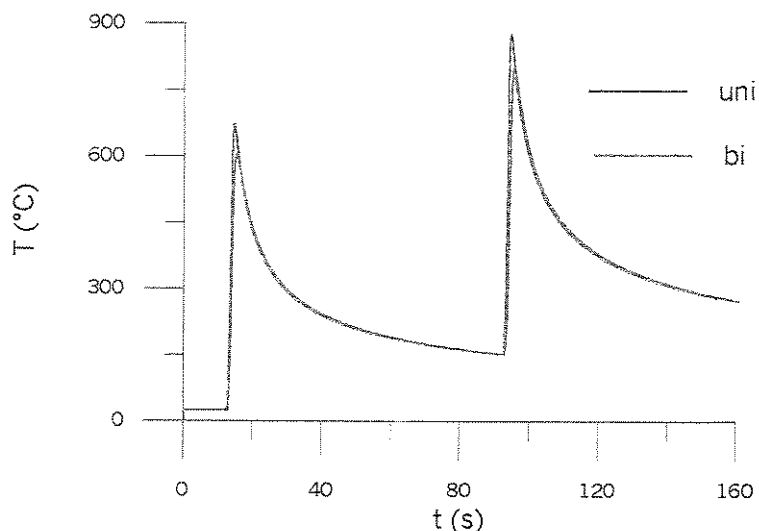


Figura 6.20 – Comparação entre os ciclos térmicos numéricos unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, para $y=5\text{mm}$ e $v=400\text{mm/min}$.

O comportamento esperado das curvas obtidas nas figuras anteriores mostra a consistência do modelo numérico utilizado para a comprovação das soluções analíticas.

6.3.2.a Efeito das Perdas Superficiais

A equação utilizada na simulação dos ciclos térmicos analíticos com perdas corresponde à Equação (3.135). No modelo numérico, para uma tolerância admitida de 10°C entre um instante de tempo e o seguinte, os valores obtidos para Δt , Δx e Δy foram $5,0 \times 10^{-4}$ s, 1 mm e 0,5 mm. Refinamentos posteriores destes parâmetros não alteraram a solução.

O efeito das perdas por convecção e radiação foi estudado isoladamente, e depois considerado simultaneamente na simulação do ciclo térmico numérico, enquanto no modelo analítico as perdas foram consideradas através do coeficiente global de transferência de calor. Os valores de h_c , h_r e h são os mesmos utilizados no modelo unidimensional, iguais à 18, 15,21 e 33,21 W/m²°C, respectivamente. O efeito das perdas superficiais sobre o ciclo térmico onde estas são consideradas desprezíveis pode ser observado nas curvas da Figura 6.21, para uma posição igual a 10 mm distante da solda.

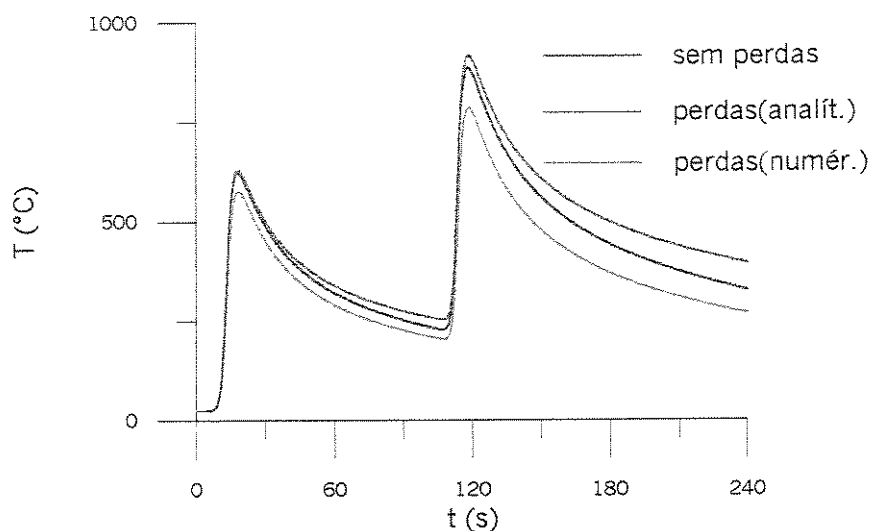


Figura 6.21 – Comparação entre os modelos analítico e numérico bidimensionais quase-estacionário com e sem perdas, para $x_0 = 42$ mm e $y = 10$ mm.

No modelo analítico, a influência das perdas tem reflexos mais acentuados na taxa de resfriamento. O decréscimo da temperatura de pico do segundo passe é consequência da distribuição de temperatura a que o material está submetido no início deste passe. A taxa de resfriamento mais elevada do ciclo térmico com perdas faz com que a condição inicial seja de temperaturas mais baixas e, portanto, a temperatura de pico a ser atingida no segundo passe será menor neste modelo.

O ciclo térmico simulado pelo modelo numérico (perdas por convecção e radiação) difere do ciclo térmico sem perdas da mesma forma como o faz o ciclo térmico analítico. Conforme observado na Figura 6.21, as curvas obtidas pelas soluções analíticas e numéricas

são paralelas. Entretanto, a inclusão das perdas por radiação no modelo numérico produz um ciclo térmico com temperaturas mais baixas do que as do modelo analítico. As diferenças de temperatura entre as curvas com e sem perdas no primeiro passe tem um efeito considerável sobre o segundo passe do ciclo térmico.

6.3.2.b Efeito da Distribuição da Fonte de Calor

Para o estudo do efeito da distribuição Gaussiana circular da fonte sobre o ciclo térmico obtido considerando a fonte pontual, o modelo analítico corresponde à Equação (3.71). Como citado anteriormente, a resolução desta equação é possível somente através de integração numérica. Neste trabalho, o método utilizado para a integração no tempo foi o de quadratura Gaussiana com vinte pontos.

Seguindo o mesmo procedimento do modelo unidimensional, o parâmetro r_b a ser utilizado na solução foi admitido igual a 4 mm, para a simulação do ciclo térmico do primeiro passe. No segundo passe, de acordo com a proporção de aumento no insumo de calor para os dados do cp1 considerados na simulação, utilizou-se um valor de r_b igual a 4,5 mm.

O efeito da singularidade na fonte para o modelo analítico com fonte concentrada linear resulta em elevadas temperaturas próximas à região da solda. O uso de um modelo com fonte distribuída tende a minimizar este problema. A Figura 6.22 mostra os ciclos térmicos dos modelos com fonte concentrada linear e fonte distribuída Gaussiana circular, para uma distância de 3 mm da origem.

As diferenças entre as temperaturas de pico para os modelos com fonte concentrada e distribuída são mais nítidas para posições bem próximas à solda, de modo que a distância considerada seja bem menor que o raio da fonte r_b . Isso foi observado nos resultados do modelo unidimensional. Entretanto, no caso do modelo bidimensional quase-estacionário, estas diferenças são acentuadas mesmo para a distância de 3 mm, como pode visto na Figura 6.22 e pelos valores da Tabela 6.12.

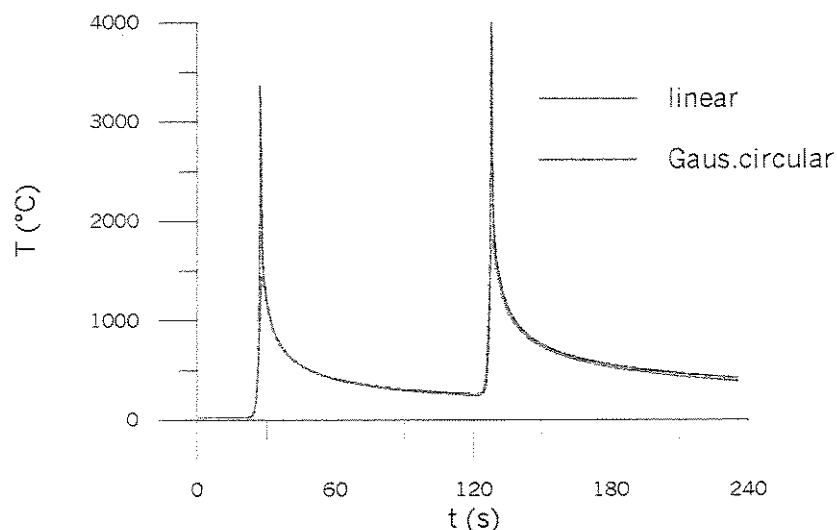


Figura 6.22 – Comparação entre os modelos analíticos bidimensionais com fonte concentrada (linear) e distribuída (Gaussiana Circular), para $x_0 = 90\text{mm}$ e $y=3\text{mm}$.

As temperaturas de pico previstas pelo modelo de fonte concentrada linear são da ordem de 120% maiores que as previstas pelo modelo de fonte distribuída, para os dois passes. Estas diferenças são extremamente significativas, pois a distância utilizada na simulação (3 mm) é da mesma ordem de grandeza que o raio estimado para a fonte (4 mm).

Tabela 6.12 – Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos bidimensionais quase-estacionários com fonte concentrada (linear) e distribuída (circular).

Fonte	T_{p1} (°C)	T_{p2} (°C)
Linear	3663,15	3990,82
Gaussiana circular	1451,49	1816,50

No modelo 1-D, a distribuição da fonte ocorre somente ao longo da ordenada y , e dentro da extensão $0-y_b$. Para distâncias próximas do valor admitido para y_b , as temperaturas de pico previstas pelos modelos de fonte concentrada e distribuída são praticamente as mesmas.

No modelo 2-D quase-estacionário, o modelo de fonte Gaussiana considera que o calor da mesma está distribuído sobre um círculo de raio r_b . Para uma mesma distância y do

centro da fonte, a temperatura será menor que a prevista pelo modelo unidimensional com fonte distribuída. Esta diferença diminui à medida que se atinge o valor estabelecido para r_b , como pode ser observado na Figura 6.23.

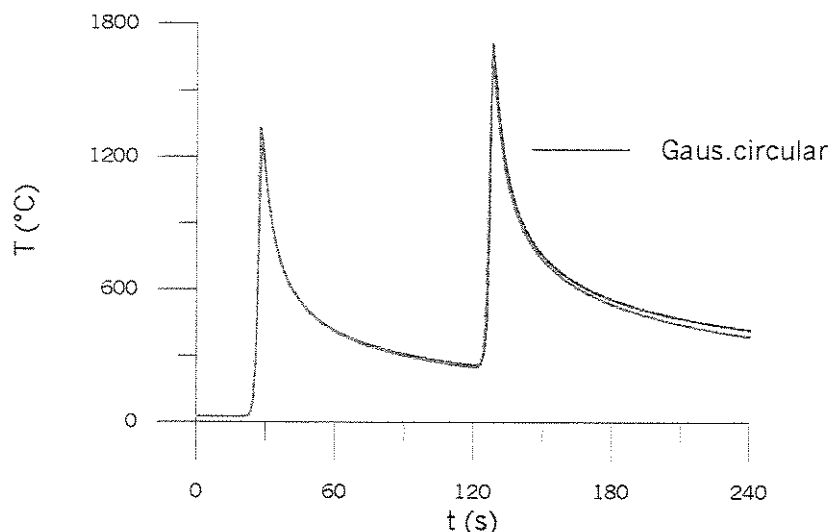


Figura 6.23 – Comparação entre os modelos analíticos bidimensionais com fonte concentrada (linear) e distribuída (Gaussiana circular), para $x_0 = 90\text{mm}$ e $y=4\text{mm}$.

Nesta figura, os ciclos térmicos foram simulados para uma posição correspondente a 4 mm da origem. Neste ponto, distante apenas 1mm do ponto utilizado na Figura 6.22, as diferenças entre as temperaturas de pico para os dois passes se reduzem a 7%. Desta forma, a consideração da distribuição da fonte de calor no modelo bidimensional quase-estacionário é um fator importante para a previsão dos ciclos térmicos tanto na região da ZF como da ZAC.

6.3.3 Comparação entre Ciclos Térmicos Teóricos e Experimentais

Na simulação dos ciclos térmicos teóricos, os valores dos parâmetros de soldagem e das distâncias dos termopares à origem do sistema de coordenadas foram aqueles das Tabelas 6.9 e 6.10, respectivamente, para cada cp. Seguindo o mesmo procedimento adotado no modelo 1-D, a eficiência do processo foi obtida dividindo-se a temperatura de pico obtida experimentalmente pela temperatura de pico teórica alcançada ao se considerar a eficiência igual a 1. Os valores obtidos para cada cp estão na Tabela 6.13.

Tabela 6.13 – Eficiência térmica do processo MIG para os modelos 2-D com e sem perdas superficiais.

cp	Passe	η sem perdas	η com perdas (analítico)	η com perdas (numérico)
1	1	0,89	0,90	0,96
	2	0,81	0,85	0,93
2	1	0,88	0,89	0,95
	2	0,78	0,82	0,90
3	1	0,89	0,90	0,97
	2	0,81	0,84	0,93

Os valores mais altos de eficiência para os modelos que consideram as perdas estão dentro do esperado, uma vez que a consideração deste fator na solução resulta em valores menores de temperaturas e, conseqüentemente, mais próximos dos obtidos na prática.

O aumento considerável da eficiência no segundo passe para o modelo numérico se deve ao fato observado na Figura 6.21, onde o aumento da taxa de resfriamento do primeiro passe reduz a temperatura de pico do segundo passe. Com isso, os valores de temperatura de pico previstos por este modelo são bem menores do que os obtidos pelo modelo sem perdas. Como a eficiência é calculada tendo como referência a temperatura de pico, ocorre um aumento considerável nos valores obtidos com o modelo numérico.

Para o preenchimento da junta, o aumento no insumo de calor de um passe para o outro foi obtido através de um aumento da tensão, mantendo-se constantes corrente e velocidade de soldagem. Isto teve como conseqüência um decréscimo nos valores de eficiência para o segundo passe. As eficiências para o primeiro passe são maiores do que as obtidas no modelo 1-D, indicando que as condições utilizadas nos experimentos para o modelo 2-D contribuíram para a geração de um arco estável.

A variação no insumo de calor do primeiro para o segundo passe no modelo 2-D foi menor do que para o modelo 1-D. A intensidade desta variação teve reflexos nos valores das eficiências, que variou de forma significativa de um passe para o outro no modelo 1-D (aumento de até 50%), enquanto que no modelo 2-D houve um decréscimo da ordem de 10%.

Nas Figuras 6.24 a 6.26, faz-se uma comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimentais, para os três ensaios realizados. As simulações analítica e numérica foram feitas considerando os valores de eficiência da Tabela 6.13.

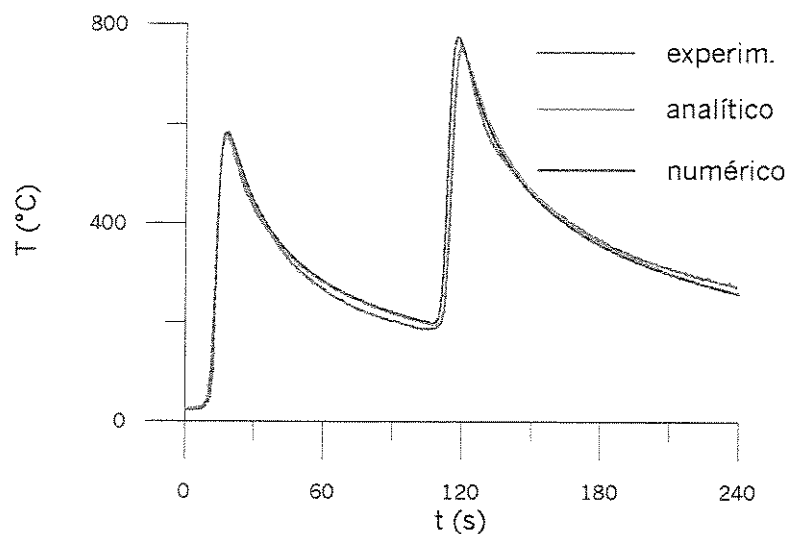


Figura 6.24 – Comparação entre ciclos térmicos teóricos e experimentais para o cpl, em $x_0=42$ mm e $y = 9,6$ mm.

Nessas três figuras, foi considerado somente o ciclo térmico obtido experimentalmente para o termopar situado mais próximo da origem, ou seja, para a posição correspondente a a_1 e d_1 na Tabela 6.10.

Para os valores dos coeficientes de transferência de calor por convecção ($18 \text{ W/m}^2\text{°C}$), de radiação ($15,21 \text{ W/m}^2\text{°C}$), e global ($33,21 \text{ W/m}^2\text{°C}$) utilizados nas simulações dos ciclos térmicos teóricos, a taxa de resfriamento do modelo analítico não difere muito da obtida

pelo modelo numérico. Entretanto, o melhor acordo entre as taxas de resfriamento teóricas e experimental foi observado para a etapa do ciclo térmico referente ao segundo passe.

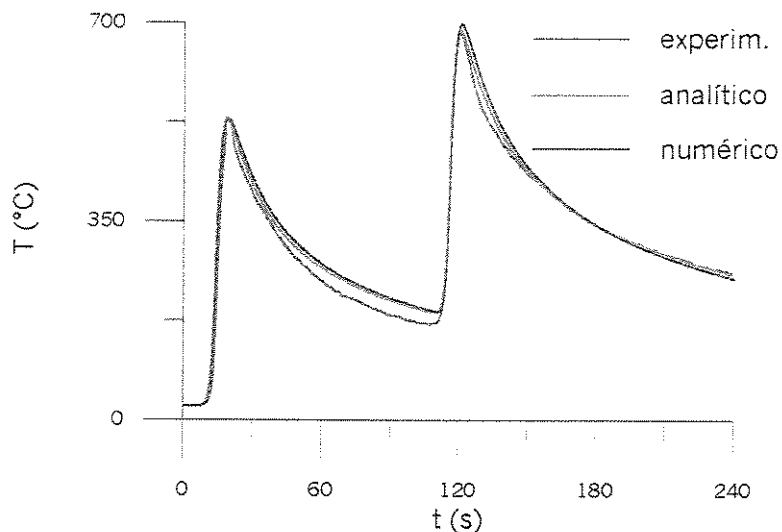


Figura 6.25 - Comparação entre ciclos térmicos teóricos e experimentais para o cp2, em $x_0=45$ mm e $y = 9,5$ mm.

Nos três experimentos, o resfriamento do primeiro passe ocorreu de forma mais rápida do que o previsto pela teoria. No segundo passe, as temperaturas mais elevadas contribuem para um maior efeito das perdas, contribuindo para uma melhor concordância entre os resultados teóricos e experimentais.

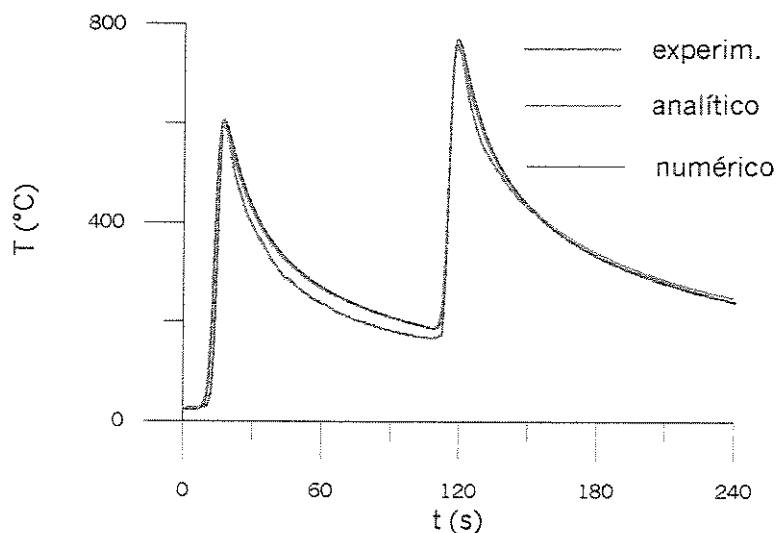


Figura 6.26 – Comparação entre ciclos térmicos teóricos e experimentais para o cp3, em $x_0=43$ mm e $y = 8,6$ mm.

Como citado anteriormente, a taxa de resfriamento constitui um importante indicador da ocorrência ou não de transformações de fase dos materiais sujeitos a modificações em sua microestrutura. No entanto, as diferenças observadas nas três últimas figuras em relação ao resfriamento do primeiro passe não são críticas do ponto de vista metalúrgico, uma vez que as temperaturas envolvidas estão fora da faixa crítica de transformação, que para os aços corresponde à passagem de 800 para 500°C.

Através da comparação entre os ciclos térmicos teóricos e experimentais, observou-se que as perdas superficiais devem ser consideradas nas simulações, a fim de se obter uma boa concordância entre resultados teóricos e práticos.

6.4 Modelo Bidimensional Transiente

6.4.1 Comparação entre Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos

Para a comprovação da solução analítica proposta para o modelo bidimensional transiente, faz-se a comparação entre os ciclos térmicos deste modelo com os ciclos térmicos da solução numérica equivalente.

Nas simulações destes ciclos térmicos, foram utilizados os parâmetros de soldagem mostrados na Tabela 6.14. A escolha destes parâmetros foi baseada em trabalhos anteriores (Suzuki, 1996; Murugan et al., 1998), referentes à soldagem multipasse, utilizando como metal base chapas de aço inox 304.

Tabela 6.14 – Parâmetros de soldagem utilizados no modelo bidimensional transiente.

Passe	I (A)	E (V)	v (mm/min)	HI (10^6 J/m)
1	180	25	300	0,90
2	210	25	300	1,05
3	230	25	300	1,15
4	250	25	300	1,25

Foram simulados quatro passes de solda, para o preenchimento de um chanfro com um ângulo de 30° . As dimensões da chapa são de $80 \times 100 \times 12$ mm, correspondentes ao comprimento, largura e espessura, respectivamente.

A dependência da condutividade e da capacidade térmica com a temperatura para o aço inox 304 ocorre de forma linear. Como mostrado no item 6.2.2.a, para este material, não há necessidade de utilização de um modelo que considere a variação das propriedades com a temperatura. Assim, os valores das propriedades físicas utilizadas na simulação correspondem àqueles da Tabela 6.5, para a temperatura de 750°C .

A solução analítica definida pela Equação (3.40) corresponde ao modelo bidimensional transiente, para uma espessura de chapa que possa ser considerada finita. Por outro lado, a Equação (3.22) se aplica ao caso de chapas de grande espessura, de forma que a variação de temperatura nesta direção ocorra como em um meio infinito.

Entretanto, a maior dificuldade está na definição de uma espessura que corresponda à transição de um meio finito para um meio infinito, ou seja, qual modelo dever ser utilizado para uma dada espessura de chapa. Neste item, para a comparação entre ciclos térmicos analíticos e numéricos, serão consideradas na mesma figura as curvas obtidas pelas duas soluções analíticas.

Na simulação numérica, a aplicação da fonte de calor é feita localizadamente, no primeiro elemento que compõe o trecho referente a um quarto da espessura. A atuação concentrada da fonte de calor permite a comparação com as soluções analíticas dadas pelas Equações (3.22) e (3.40), para as quais admitiu-se a hipótese de fonte concentrada. Devido à simetria em y igual a zero, metade da potência utilizada no modelo analítico é considerada para a simulação dos ciclos térmicos numéricos.

Para um comprimento de solda de 80 mm, com uma velocidade de soldagem de 300 mm/min, seriam necessários 16 s para efetuar este cordão de solda. No entanto, para se

obter uma resposta instantânea da fonte de calor, o tempo de aplicação da mesma foi de 0,5 s. Com isso, utilizou-se um fator f igual a 32 na Equação (5.3), garantindo uma quantidade de energia equivalente para um tempo de atuação da fonte de 16 s.

A Figura 6.27 mostra os ciclos térmicos obtidos pelos modelos analíticos de espessura finita e infinita, e também pelo modelo numérico. Para a simulação numérica, foram utilizados valores iguais a 0,5 mm para Δy e Δz , e 0,05 s para Δt . Um posterior refinamento na malha e no intervalo de tempo não produz modificações significativas nos ciclos térmicos (variações de 1%). A posição considerada corresponde a um ponto situado próximo ao terceiro passe ($z=7\text{mm}$), para uma distância igual a 5 mm da solda.

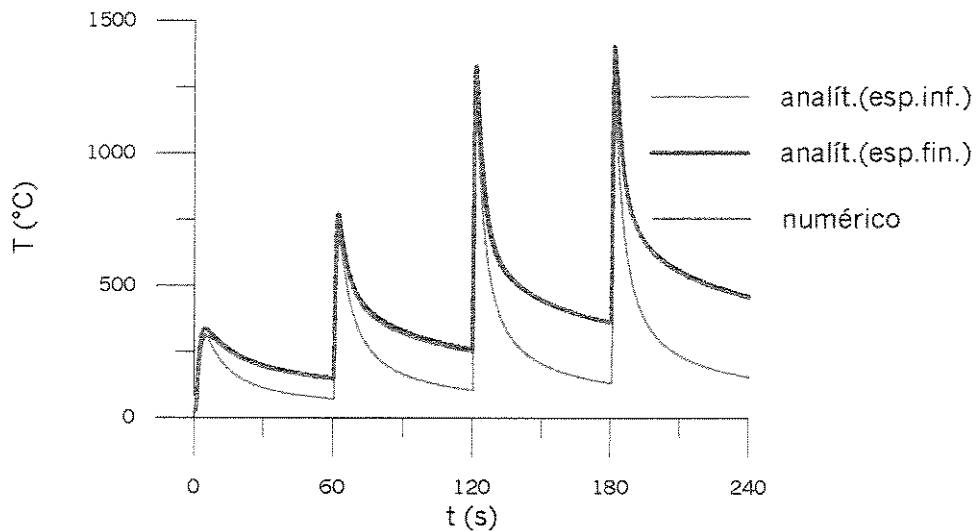


Figura 6.27 – Ciclos térmicos analíticos e numérico para o modelo bidimensional transiente, em $y = 5\text{mm}$, $z = 7\text{mm}$ e espessura = 12mm.

A etapa de resfriamento do ciclo térmico analítico para o modelo de chapa de espessura infinita é bem mais rápida que a do modelo para chapa de espessura finita. Isto se deve justamente à hipótese de que a chapa possui uma espessura de grandes dimensões, permitindo uma alta taxa de transferência de calor por condução nessa direção.

As temperaturas de pico no primeiro passe são iguais para os dois modelos analíticos. A taxa de resfriamento mais elevada do modelo de espessura infinita, comparada ao de espessura finita, faz com que a condição inicial seja de temperatura mais baixa do segundo

passa em diante. Como consequência, a partir do segundo passe, as temperaturas de pico obtidas pelo modelo de espessura infinita são menores que as do modelo de espessura finita.

Como a solução numérica leva em consideração uma espessura de dimensão finita, o ciclo térmico resultante desta solução apresenta uma melhor concordância com o ciclo térmico analítico obtido pelo modelo de espessura finita. Com o aumento da espessura da chapa, os valores de temperatura das duas soluções analíticas tendem a se aproximarem, como pode ser visto na Figura 6.28, para uma chapa com 36 mm de espessura.

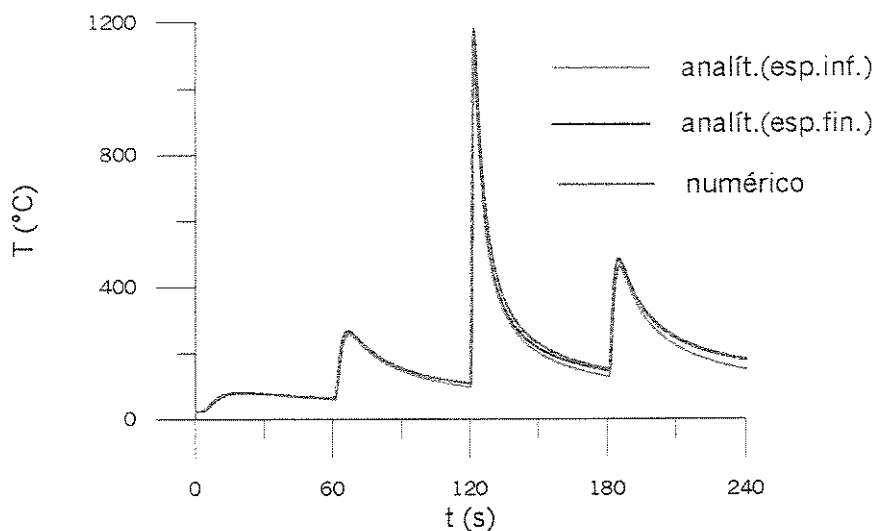


Figura 6.28 – Ciclos térmicos analíticos e numérico para o modelo bidimensional transiente, em $y = 5\text{mm}$, $z = 19\text{mm}$ e espessura = 36 mm.

Nas simulações dos ciclos térmicos, foram utilizados os mesmos parâmetros das Tabelas 6.5 e 6.14. Os ciclos térmicos foram simulados para um ponto na direção y distante 5mm da solda, a uma altura de 19mm ao longo da espessura, próximo ao terceiro passe. Os valores de Δx , Δy e Δt são os mesmos da Figura 6.27.

Para as mesmas condições de simulação, pode-se observar pelos ciclos térmicos da Figura 6.28 acentuadas diferenças em relação à figura anterior. As taxas de resfriamento obtidas pelos modelos de espessura finita e infinita são muito próximas para a espessura de

36 mm e, com isso, as temperaturas de pico dos dois ciclos térmicos convergem para os mesmos valores.

Outra diferença que pode ser notada pelo aumento da espessura da chapa se refere à influência do efeito térmico de um passe sobre os anteriores. Admitindo que cada cordão de solda depositado tenha a mesma altura, para a espessura de 12mm, cada passe preencheria 3mm. Desta forma, no início do terceiro passe, a origem deve ser deslocada para o ponto z igual a 6mm.

Os ciclos térmicos da Figura 6.27 correspondem à z igual a 7mm, bem próximo à origem deste terceiro passe. Então, a temperatura de pico deste passe deveria ser bem maior que as temperaturas dos outros passes. No entanto, devido à baixa taxa de resfriamento do modelo de espessura finita, os efeitos térmicos da deposição do último passe são sentidos pelo ponto em consideração, o que pode ser verificado pela temperatura de pico relativamente alta do último passe.

O aumento da espessura da chapa para 36 mm permite uma trajetória maior para a condução de calor. Assim, para um ponto também situado próximo ao terceiro passe, a realização do último passe não tem um efeito marcante sobre a temperatura de pico daquele passe. A maior temperatura de pico ocorre para a posição considerada, próxima à origem do terceiro passe, sendo que os demais passes têm pouca influência térmica sobre esta temperatura (Figura 6.28).

Para verificar a consistência do modelo numérico, assim como na análise do modelo bidimensional quase-estacionário, foi feita uma comparação entre os ciclos térmicos obtidos para as configurações uni e bidimensional transiente. Entretanto, para que o ciclo térmico simulado pela solução bidimensional transiente possa ser comparado com aquele obtido pela solução da configuração unidimensional, admite-se que cada passe de solda preenche toda a espessura, de forma que a temperatura na direção z possa ser considerada uniforme. Com esta simplificação, tem-se como resultado um problema somente nas variáveis y e t , semelhante ao unidimensional transiente.

A Figura 6.29 mostra os ciclos térmicos para as configurações uni e bidimensional transiente, simulados com as condições de soldagem estabelecidas na Tabela 6.14. As curvas correspondem à posição y igual a 2mm e, para o caso bidimensional, z igual a 10mm. Com o preenchimento de toda a espessura por cada passe de solda, os ciclos térmicos bidimensionais são semelhantes, independente da posição z considerada.

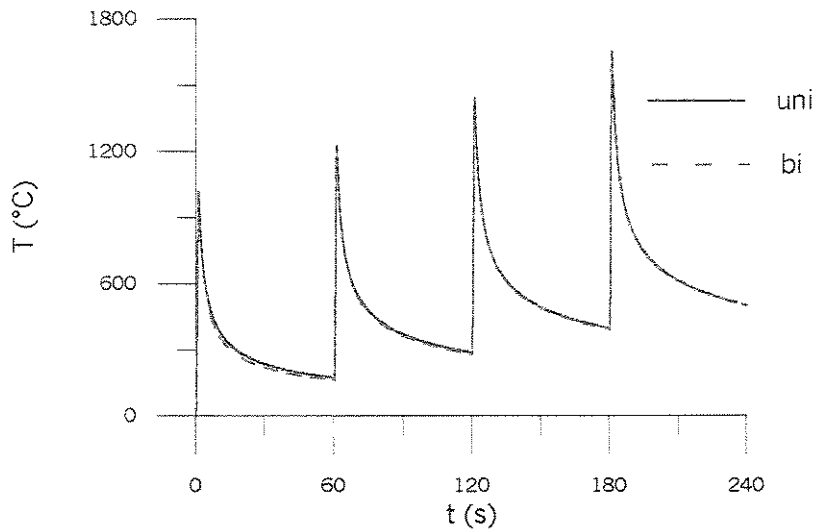


Figura 6.29 – Comparação entre os ciclos térmicos numéricos uni e bidimensional transiente, para $y = 2\text{mm}$.

Conforme esperado, a simplificação do problema bidimensional transiente, através do preenchimento de toda a espessura da chapa, produz os mesmos ciclos térmicos obtidos pela simulação do modelo numérico proposto para a configuração unidimensional.

6.4.2 Efeito das Perdas Superficiais

A equação a ser utilizada na simulação dos ciclos térmicos com perdas superficiais, para o modelo bidimensional transiente com chapa de espessura finita, corresponde à Equação (3.131). Assim como nas geometrias anteriores, será utilizado um coeficiente global de transferência de calor igual a $33,21 \text{ W/m}^2\text{°C}$.

O efeito das perdas de calor sobre o ciclo térmico pode ser observado na Figura 6.30, para uma posição próxima ao primeiro passe ($z = 1\text{mm}$), distante 7mm do centro do cordão de solda, e espessura de chapa igual a 12mm.

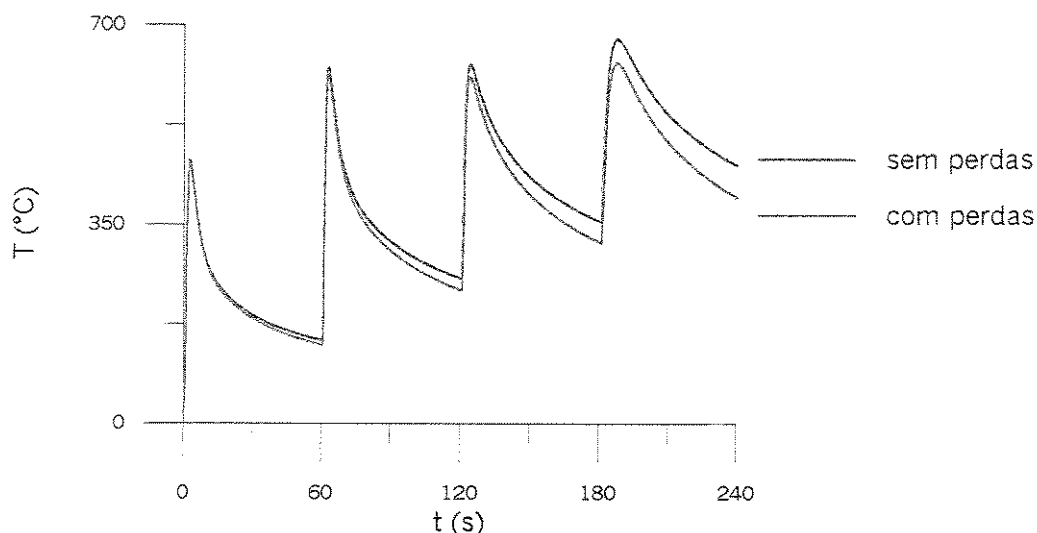


Figura 6.30 – Comparação entre os modelos analíticos com e sem perdas superficiais, para $y=7\text{mm}$, $z = 1\text{mm}$ e espessura = 12mm.

A influência mais acentuada destas perdas ocorre em relação à taxa de resfriamento. Uma taxa de resfriamento mais elevada resulta em temperaturas de pico menores para os passes seguintes. A alteração na curva de resfriamento torna-se mais nítida a partir do segundo passe, reduzindo as temperaturas de pico do terceiro e do último passe.

Quando somente o primeiro passe foi depositado, o trecho correspondente a $\frac{3}{4}$ da espessura, que ainda não foi preenchido, permite que a variação de temperatura nesta direção ocorra basicamente por condução, não sofrendo o efeito das perdas superficiais. À medida que o espaço disponível para condução diminui, o que acontece com o preenchimento da junta, as perdas passam a exercer influência sobre os valores de temperatura do ciclo térmico. O aumento da taxa de resfriamento a partir do segundo passe foi verificado independente das posições y ou z consideradas, como mostra a Figura 6.31, para um ponto próximo ao último passe.

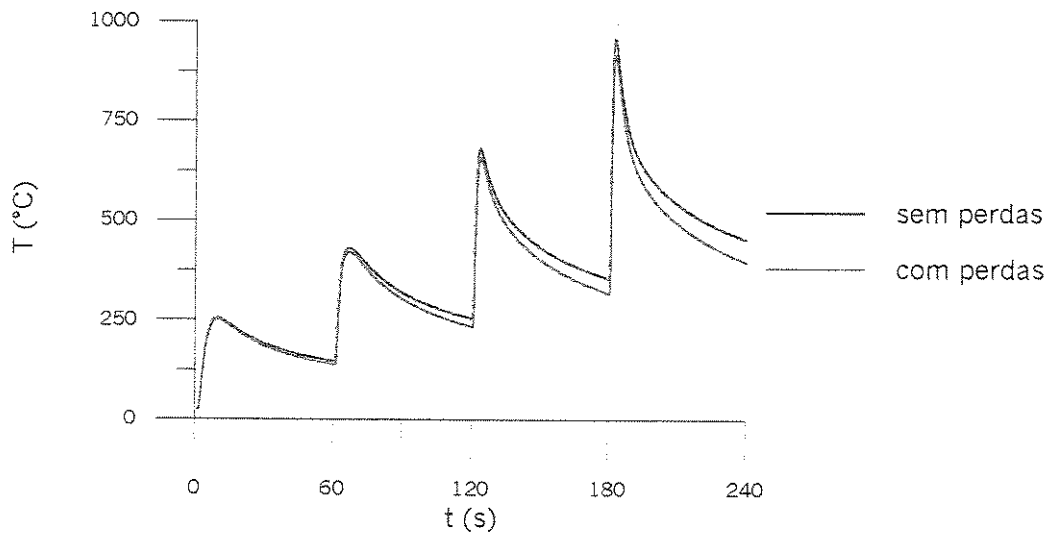


Figura 6.31 – Comparação entre os modelos analíticos com e sem perdas superficiais, para $y=7\text{mm}$, $z = 10\text{mm}$ e espessura = 12mm .

De acordo com a definição do coeficiente de perdas de calor b , dado pela Equação (3.130) para a configuração bidimensional, o efeito das perdas será menor quanto maior a espessura da chapa. Na Figura 6.32, tem-se uma comparação entre os modelos com e sem perdas para uma espessura de 36mm .

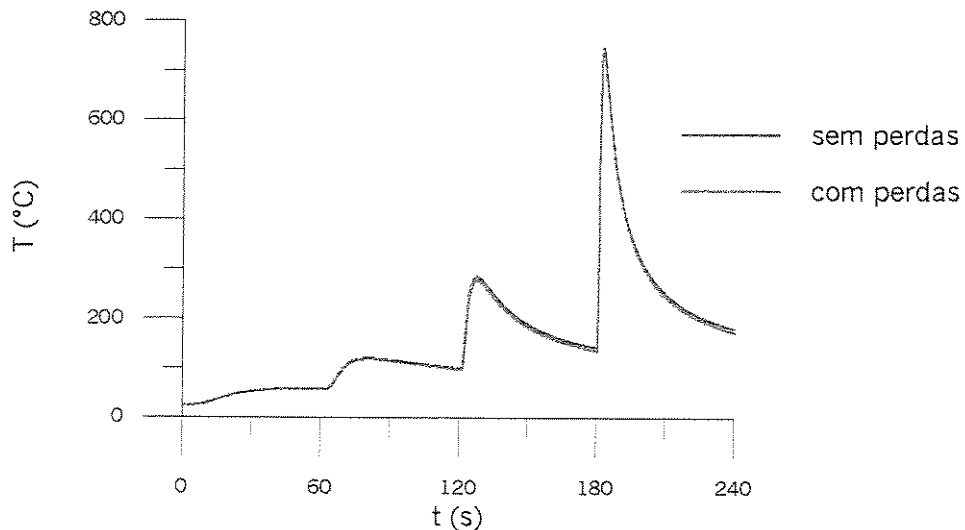


Figura 6.32 – Comparação entre os modelos analíticos com e sem perdas superficiais, para $y=10\text{mm}$, $z = 28$, e espessura = 36mm .

Os ciclos térmicos foram simulados para a distância y igual a 7mm, a uma altura ao longo da espessura próxima ao último passe ($z = 28\text{mm}$). A maior diferença de temperatura observada entre os dois ciclos térmicos foi de 7°C , insignificante para as faixas de temperatura de interesse na soldagem. Como o coeficiente global de transferência de calor foi considerado independente da temperatura, esta variação é constante com a variação da posição. Portanto, para as condições simuladas, as perdas superficiais podem ser desprezadas para a espessura de 36mm.

No caso da chapa de 12mm de espessura, a diferença de temperatura foi de 60°C , para as condições utilizadas na obtenção dos ciclos térmicos. Esta variação já não pode ser ignorada para um material como o aço, onde a faixa de temperatura de 500 a 800°C é a de maior interesse do ponto de vista metalúrgico.

6.4.3 Efeito da Distribuição da Fonte de Calor

Para a análise do efeito da distribuição da fonte de calor, foram considerados dois modelos: um modelo com uma distribuição Gaussiana unidimensional (Equação 3.45), e outro modelo com uma distribuição Gaussiana semicircular (Equação 3.56).

O parâmetro de distribuição para a simulação destes modelos será menor que o utilizado nas geometrias unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário, pois o insumo de calor foi reduzido. O aumento deste parâmetro de um passe para o outro foi feito proporcionalmente ao aumento do insumo de calor. Os valores definidos para os quatro passes foram 3,0; 3,5; 3,8 e 4,1mm, nessa ordem.

Na Figura 6.33 encontram-se os ciclos térmicos obtidos pelos modelos de fonte concentrada (linear), e de fonte distribuída Gaussiana unidimensional e Gaussiana semicircular, para uma chapa com 12mm de espessura. A posição considerada ($y = 1,5\text{mm}$ e $z = 4\text{mm}$) corresponde a um ponto próximo à origem do segundo passe, após o deslocamento da variável z de um valor igual a um quarto da espessura ($z_p = 3\text{mm}$).

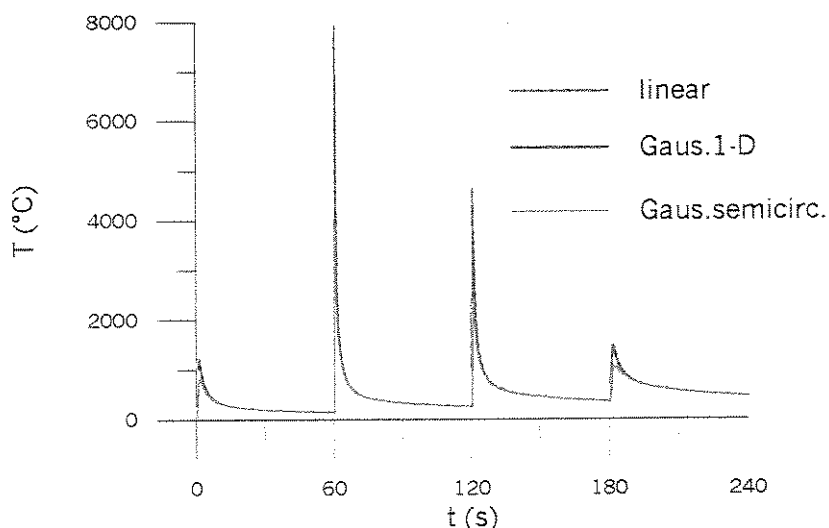


Figura 6.33 – Comparação entre o modelo analítico com fonte concentrada (linear) e distribuída (Gaussiana 1-D e semicircular), para $y = 1,5\text{mm}$ e $z = 4\text{mm}$.

A correção imposta pelo modelo de fonte distribuída sobre o modelo de fonte concentrada é mais efetiva para a fonte com distribuição Gaussiana semicircular que para a Gaussiana unidimensional. Isso ocorre porque, neste último modelo, admite-se que o calor da fonte se distribui somente ao longo da dimensão definida pelo parâmetro y_b , enquanto que no modelo semicircular, admite-se a distribuição do calor em um semicírculo de raio r_b . Assim, para uma mesma posição, a quantidade de calor aplicada neste ponto será menor para o modelo com distribuição semicircular, resultando em temperaturas de pico menores.

Para a posição correspondente aos ciclos térmicos da Figura 6.33, a maior diferença entre as temperaturas de pico dos modelos de fonte concentrada e distribuída é de 12% para a fonte Gaussiana unidimensional. Para o modelo de fonte Gaussiana semicircular, essa diferença é de 101%. Na geometria bidimensional transiente, a utilização do modelo de fonte distribuída unidimensional, não contribuiu de forma significativa para corrigir a tendência de obtenção de temperaturas infinitas nas regiões próximas à solda.

No caso do modelo de fonte com distribuição semicircular, para a mesma posição z da figura anterior, mas a uma distância y igual a 5mm, as diferenças entre as temperaturas de pico em relação ao modelo de fonte concentrada linear são da ordem de 15% (Figura 6.34).

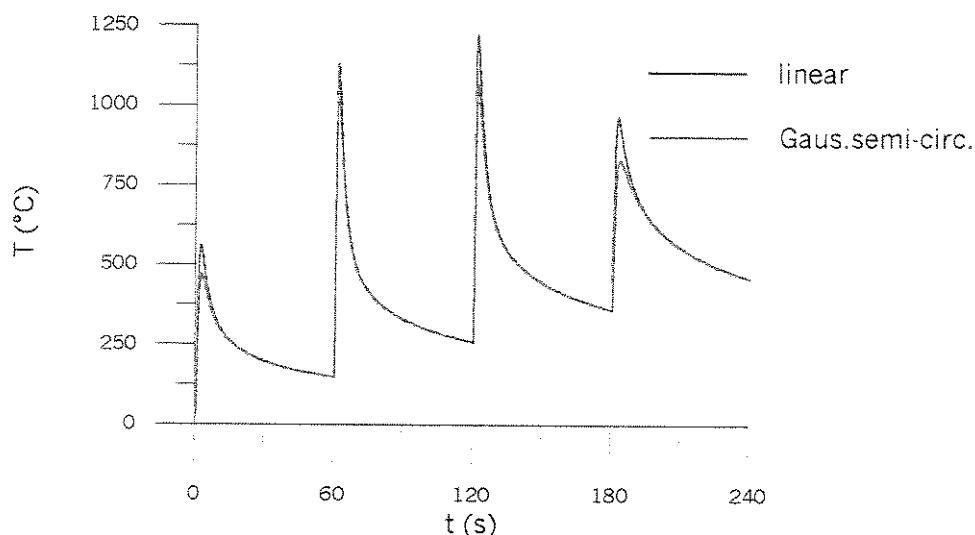


Figura 6.34- Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (linear) e distribuída (Gaussiana semicircular), para $y = 5\text{mm}$ e $z = 4\text{mm}$.

Mesmo para esta posição mais afastada da solda, é importante a consideração da distribuição da fonte de calor na simulação dos ciclos térmicos. Entretanto, deve-se utilizar o modelo com distribuição Gaussiana semicircular, uma vez que o modelo unidimensional fornece os mesmos valores de temperatura que os obtidos pelo modelo de fonte concentrada.

6.5 Modelo Tridimensional Quase-estacionário

6.5.1 Comparação entre Ciclos Térmicos Analíticos e Numéricos

Para esta configuração de fluxo de calor, foram considerados os modelos analíticos com fonte de calor concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para chapas de espessura finita e infinita. Neste item, os ciclos térmicos simulados através das soluções analíticas com fonte concentrada são comparados com aqueles da solução numérica.

Os valores de corrente, tensão e velocidade de soldagem utilizados nas simulações estão contidos na Tabela 6.15. O insumo de calor utilizado em cada um dos quatro passes de

solda foi igual ao da geometria bidimensional transiente. Assim, a redução da velocidade de soldagem para simular o estado quase-estacionário foi compensada pela diminuição da corrente de soldagem, mantendo a voltagem constante (Equação 5.1).

Tabela 6.15 – Parâmetros de soldagem utilizados no modelo tridimensional quase-estacionário.

Passe	I (A)	E (V)	v (mm/min)	HI (10^6 J/m)
1	120	25	200	0,90
2	140	25	200	1,05
3	154	25	200	1,15
4	167	25	200	1,25

O material considerado é o aço inox 304 e, portanto, os valores das propriedades físicas são aqueles mostrados na Tabela 6.5. Os quatro passes são realizados para a junção de duas chapas com 12mm de espessura, comprimento de solda de 100mm, e largura também igual a 100mm. Para uma velocidade de 200 mm/min, são necessários 30 s para a deposição de cada cordão. Com um tempo de espera de 50 s ($t_p = 80$ s), o processo foi simulado durante um período de 320 s.

Através das curvas contidas na Figura 6.35, pode-se observar as diferenças entre os ciclos térmicos obtidos pelos modelos de chapa de espessura finita (Equação 3.91) e espessura infinita (Equação 3.112). Na mesma figura encontra-se o ciclo térmico do modelo numérico. Os valores de Δx , Δy , Δz e Δt utilizados na obtenção do ciclo térmico numérico foram iguais a 1,0mm, 0,5mm, 1,0mm e 0,06s, respectivamente. O ponto z corresponde a um ponto próximo ao primeiro passe.

A hipótese de espessura infinita resulta em um ciclo térmico com uma taxa de resfriamento bem maior que a obtida pela geometria de chapa com espessura finita. Esse resfriamento mais rápido tem influência sobre as temperaturas de pico do segundo passe em diante, que são menores para o modelo de chapa com espessura infinita.

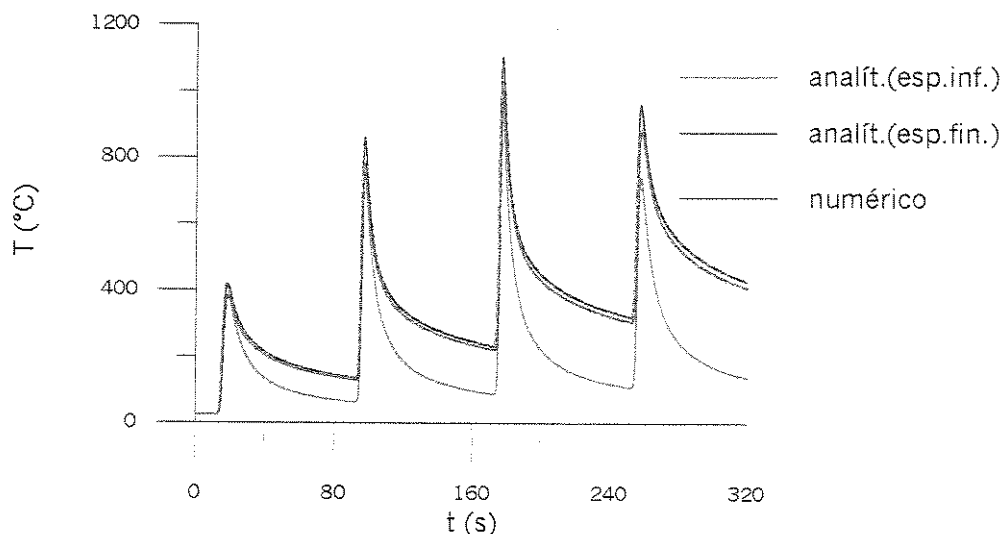


Figura 6.35 – Ciclos térmicos analíticos e numérico para o modelo tridimensional quase-estacionário, em $x_0 = 50\text{mm}$, $y = 5\text{mm}$, $z = 5\text{mm}$, e espessura = 12mm .

O melhor acordo verificado entre os ciclos térmicos das simulações numérica e analítica, no modelo de espessura finita, se deve ao fato de que, no modelo numérico, a chapa possui uma espessura finita. A exemplo do que foi observado na análise do modelo bidimensional transiente, com o aumento da espessura da chapa, os valores de temperatura dos ciclos térmicos obtidos pelos dois modelos analíticos se aproximam, como mostrado na Figura 6.36, para uma chapa de espessura igual a 36mm .

Para a obtenção dos ciclos térmicos da referida figura, foram mantidos todos os parâmetros utilizados na simulação dos ciclos térmicos para a espessura de 12mm . O aumento da espessura permite uma taxa de resfriamento mais elevada, pois aumenta o percurso para a condução de calor na direção da espessura da chapa. Com isso, o ciclo térmico obtido pela solução de chapa com espessura finita se assemelha ao da solução de chapa com espessura infinita.

Assim como foi observada na simulação dos ciclos térmicos numéricos do modelo bidimensional para o regime quase-estacionário, esta situação é alcançada somente após alguns instantes de atuação da fonte de calor.

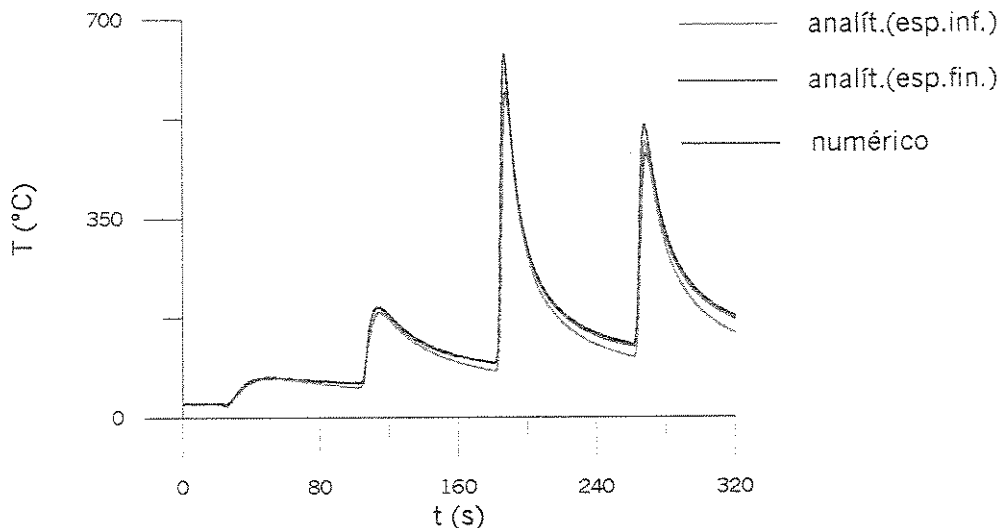


Figura 6.36 – Ciclos térmicos analíticos e numérico para o modelo tridimensional quase-estacionário, em $x_0 = 80\text{mm}$, $y = 6\text{mm}$ e $z = 21\text{mm}$ (espessura = 36mm).

Utilizando os valores das propriedades para o aço inox 304 (Tabela 6.5), para a velocidade de 200 mm/min considerada na simulação, o período de tempo necessário para que seja verificada a existência do estado quase-estacionário pode ser estimado de acordo com a Equação (6.2). Este estado seria atingido após $7,14\text{ s}$, o que corresponde a uma distância igual a $23,80\text{mm}$.

Conforme mostrado na Figura 6.37, para as posições iguais a 5 e 20mm ao longo da direção x , as diferenças entre as temperaturas dos ciclos térmicos para estas duas posições indicam que o regime quase-estacionário ainda não foi atingido. Entretanto, para a posição x_0 igual a 30mm , os valores de temperaturas não variam muito comparados aos de x_0 igual a 20mm . Para as posições adiante de 30mm , os ciclos térmicos são semelhantes, confirmando o alcance do estado quase-estacionário, para as condições simuladas.

Os ciclos térmicos provenientes do modelo analítico são sempre iguais, para todos os pontos ao longo da direção de soldagem, pois, como citado anteriormente, a solução é obtida admitindo a existência do estado quase-estacionário.

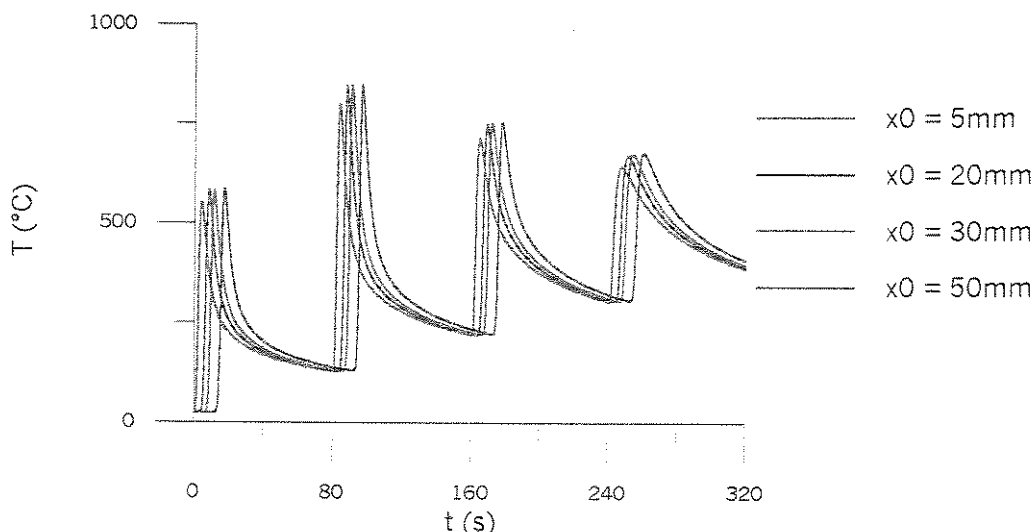


Figura 6.37 – Ciclos térmicos numéricos tridimensionais para diferentes posições x_0 , em $y = 5\text{mm}$, $z = 8\text{mm}$ e espessura = 12mm .

Seguindo o mesmo procedimento adotado para as configurações bidimensionais em regime quase-estacionário e transiente, a análise da consistência do modelo numérico tridimensional utilizado para a comprovação do modelo analítico será feita através da comparação com os modelos numéricos bidimensionais.

A utilização de uma alta velocidade de soldagem, na simulação do ciclo térmico referente à configuração tridimensional, resulta em um ciclo térmico cujos valores de temperatura tendem para aqueles simulados através da configuração bidimensional transiente, como pode ser observado pelas curvas da Figura 6.38.

Neste caso, os valores de corrente e tensão de soldagem utilizados na simulação se referem aos dados da Tabela 6.15. A velocidade de soldagem foi aumentada para 400mm/min , com o objetivo de se verificar a aproximação entre os ciclos térmicos obtidos para as duas configurações.

O preenchimento de toda a espessura por cada passe de solda simplifica o problema tridimensional, reduzindo-o ao caso da configuração bidimensional quase-estacionário, uma vez que o efeito térmico de cada passe atuando sobre toda a espessura da chapa permite a consideração de temperatura uniforme nesta direção.

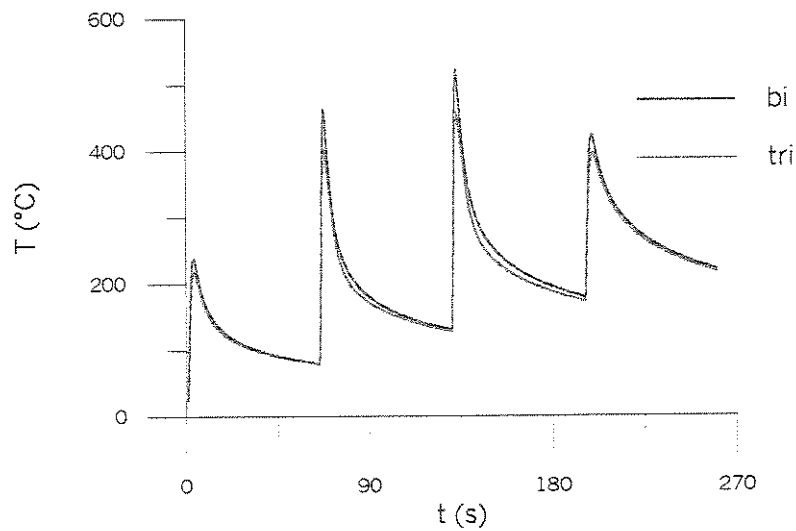


Figura 6.38 – Comparação entre os modelos numéricos bidimensional transiente e tridimensional quase-estacionário, para $y = 5\text{mm}$, $z = 4\text{mm}$ e $v = 400\text{mm/min}$.

Na Figura 6.39, tem-se uma comparação entre os ciclos térmicos simulados para as configurações bi e tridimensionais quase-estacionário, com os parâmetros de soldagem correspondentes ao cp1 da Tabela 6.9. Independente da posição z considerada no modelo tridimensional, o ciclo térmico obtido é o mesmo, o que está de acordo com o propósito de preenchimento de toda a espessura por cada passe de solda.

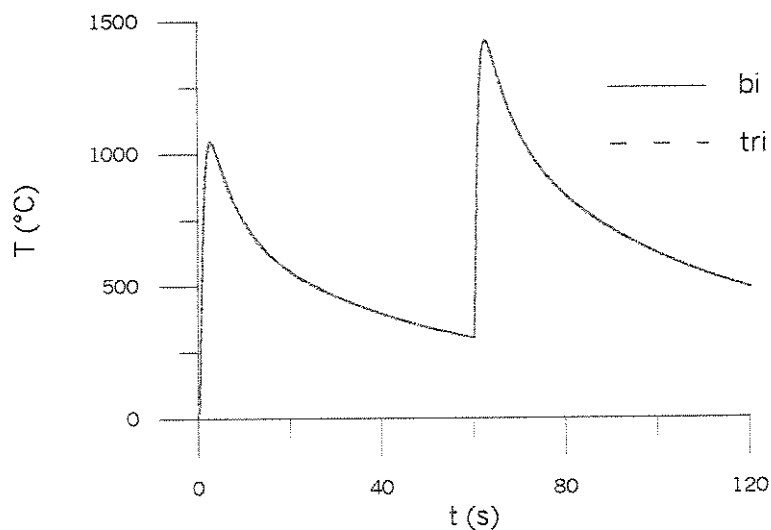


Figura 6.39 – Comparação entre os modelos numéricos bi e tridimensionais quase-estacionários, para $x_0 = 1\text{mm}$ e $y = 4\text{mm}$.

A sobreposição das curvas mostra que os modelos numéricos são consistentes, pois os comportamentos das curvas estão dentro do esperado, para as condições utilizadas na simulação.

6.5.2 Efeito da Distribuição da Fonte de Calor

Para verificar a influência da distribuição da fonte de calor sobre o ciclo térmico, as soluções analíticas foram obtidas para duas formas de distribuição da fonte de calor: Gaussiana circular e Gaussiana hemisférica. A consideração de fonte distribuída foi feita tanto para o caso de chapa de espessura finita quanto para o caso de chapa de espessura infinita.

Os valores utilizados para o parâmetro de distribuição são os mesmos do modelo bidimensional transiente, ou seja, 3,0; 3,5; 3,8 e 4,1 para o primeiro, segundo, terceiro e quarto passes, respectivamente.

A resolução das integrais presentes nas soluções analíticas foi feita numericamente, através do método de quadratura Gaussiana com vinte pontos. Os dois sub-itens a seguir mostram a análise para as duas espessuras de chapa (finita e infinita).

6.5.2.a Chapa de Espessura Finita

A equação correspondente ao caso de chapa de espessura finita é a Equação (3.97), para a fonte com distribuição circular, e a Equação (3.107), para a fonte com distribuição hemisférica. Na Figura 6.40 encontram-se os ciclos térmicos obtidos considerando a fonte de calor concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para uma chapa de 12mm de espessura.

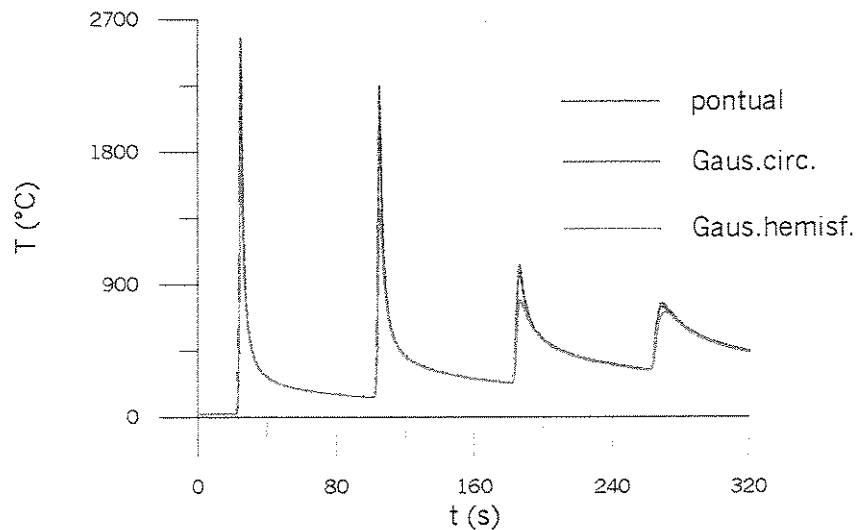


Figura 6.40 – Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0 = 80\text{mm}$, $y = 2\text{mm}$ e $z = 1\text{mm}$ (espessura finita).

A posição correspondente aos ciclos térmicos da Figura 6.40 se encontra próxima à origem do primeiro passe ($z = 1\text{mm}$), a uma distância y igual a 2mm . Conforme esperado, os valores das temperaturas de pico previstos pelo modelo de fonte distribuída são menores do que os previstos pelo modelo de fonte pontual.

Entre os dois modelos de fonte distribuída, a consideração de uma distribuição hemisférica para a fonte de calor resulta em temperaturas de pico menores comparadas às obtidas pelo modelo de fonte circular (Tabela 6.16). Isto se deve ao fato de que, no modelo hemisférico, a distribuição do calor ocorre em uma região maior que a do modelo circular. Assim, a temperatura máxima atingida será menor em relação à obtida pelo modelo de fonte circular.

De acordo com os dados da Tabela 6.16, as diferenças entre as temperaturas de pico, para o primeiro passe (mais alta), previstas pelos modelos de fonte pontual e distribuída é de 11% para a fonte circular, e de 49% para a fonte hemisférica. O modelo de fonte hemisférica é recomendado para os processos e/ou condições de soldagem onde se obtém grande profundidade de penetração.

Tabela 6.16 – Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos tridimensionais quase-estacionários com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para chapa de espessura finita.

Fonte de Calor	T_{p1} (°C)	T_{p2} (°C)	T_{p3} (°C)	T_{p4} (°C)
Pontual	2572,66	2248,15	1030,25	773,07
Gaussiana Circular	2324,27	2030,89	979,45	753,06
Gaussiana Hemisférica	1726,06	1418,44	793,92	713,41

À medida que se afasta da região da solda, os ciclos térmicos simulados pelos modelos de fonte concentrada e distribuída são equivalentes (Figura 6.41). Para um ponto mais distante da solda ($y = 5\text{mm}$) em relação à figura anterior ($y = 2\text{mm}$), as temperaturas máximas previstas pelo modelo de fonte distribuída circular são semelhantes às previstas pelo modelo de fonte pontual. Entretanto, para o modelo de fonte hemisférica, as diferenças entre as temperaturas de pico, comparadas às obtidas pelo modelo de fonte concentrada, são da ordem de 13%. Essa diferença se torna insignificante (menor que 5%) somente para distâncias y acima de 8mm, para a posição z e valores do parâmetro de distribuição (r_b) utilizados na simulação.

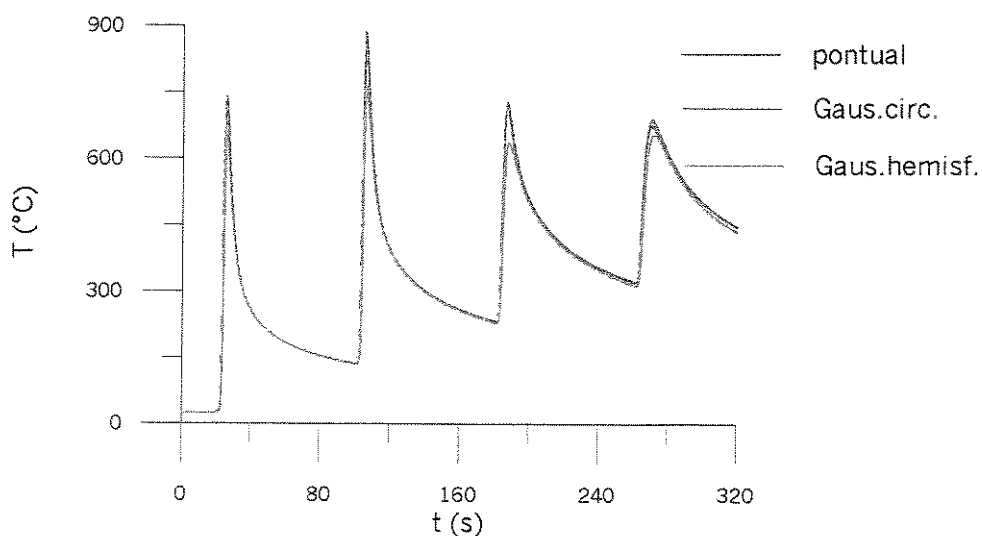


Figura 6.41 – Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0 = 80\text{mm}$, $y = 5\text{mm}$ e $z = 1\text{mm}$ (espessura finita).

6.5.2.b Chapa de Espessura Infinita

No caso de chapa de grande espessura, as equações utilizadas para a simulação dos ciclos térmicos para fonte distribuída foram as Equações (3.120) e (3.125), para fonte com distribuição circular e hemisférica, respectivamente. Para a solução de chapa de espessura infinita, os ciclos térmicos foram simulados considerando uma espessura de chapa igual a 36mm.

A Figura 6.42 mostra os ciclos térmicos resultantes da simulação pelos modelos de fonte pontual e Gaussiana circular e hemisférica. Os ciclos térmicos se referem a uma posição bem próxima à solda e, portanto, correspondem a uma região em que as temperaturas de pico previstas pelo modelo de fonte pontual são muito elevadas, diferindo daquelas que seriam obtidas na prática.

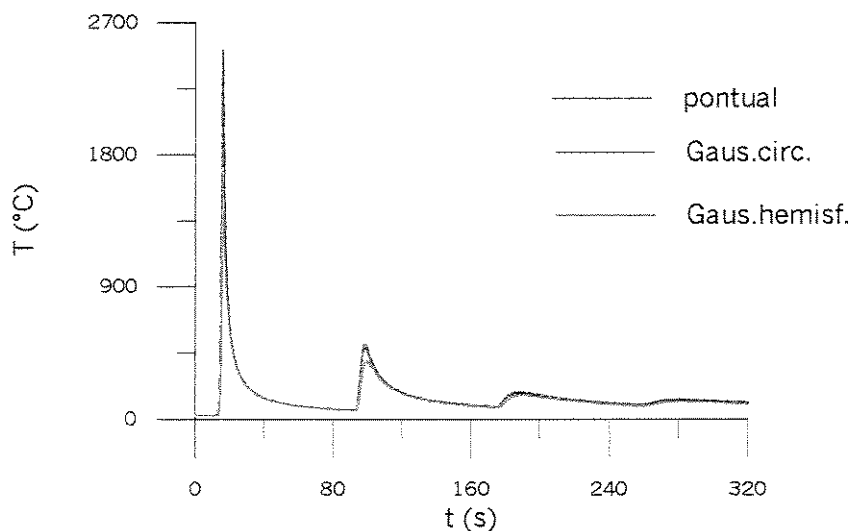


Figura 6.42 - Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0 = 50\text{mm}$, $y = 1\text{mm}$ e $z = 2\text{mm}$ (espessura infinita).

Da mesma forma como verificado na análise para chapa com espessura finita, a correção da temperatura máxima obtida em cada passe, pelo modelo de fonte com distribuição hemisférica, é mais acentuada que a correção resultante do modelo de fonte com

distribuição circular. Os valores das temperaturas de pico para os quatro passes se encontram na Tabela 6.17.

Tabela 6.17 - Temperaturas de pico obtidas em cada passe pelos modelos tridimensionais quase-estacionários com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para chapa de espessura infinita.

Fonte de Calor	T_{p1} (°C)	T_{p2} (°C)	T_{p3} (°C)	T_{p4} (°C)
Pontual	2507,66	508,72	184,61	133,73
Gaussiana Circular	2050,53	490,33	179,34	126,68
Gaussiana Hemisférica	1421,13	397,55	164,86	120,68

No caso de chapa de espessura finita, divergências acentuadas entre as temperaturas máximas foram observadas não somente para o primeiro passe, que corresponde ao ponto mais próximo da posição considerada na simulação, mas também para o segundo passe, como mostrado na Figura 6.40 e Tabela 6.16. Com os modelos para chapa de espessura infinita, a maior diferença obtida pelos modelos de fonte pontual e distribuída ocorreu para o primeiro passe, sendo iguais a 23% e 76%, para fonte circular e hemisférica, respectivamente.

A partir do segundo passe, essa diferença se reduz consideravelmente e, conforme observado pelos valores da Tabela 6.17, pode ser desprezada para o modelo de fonte Gaussiana circular. Essa diminuição ocorre porque, para o segundo, terceiro e quarto passes, a origem na coordenada z é deslocada após a deposição de cada passe, de um valor igual a z_p ($z_p = 9\text{mm}$). Embora o ponto y igual a 1mm seja bem próximo à solda, para a posição z considerada na simulação, as etapas do ciclo térmico de cada passe realizado se referem a pontos distantes da variável z para a qual foi feita a simulação ($z = 2\text{mm}$).

A simulação dos modelos analíticos para um ponto mais distante da solda, tanto na direção y quanto na direção z , tem como resultado os ciclos térmicos mostrados na Figura 6.43. Embora a posição y ($y = 3\text{mm}$) não seja tão distante da considerada na figura anterior ($y = 1\text{mm}$), a posição z considerada na simulação ($z = 5\text{mm}$) se encontra mais distante da

origem. Para esta distância da origem, os ciclos térmicos obtidos pelos modelos de fonte pontual e distribuída circular são praticamente os mesmos.

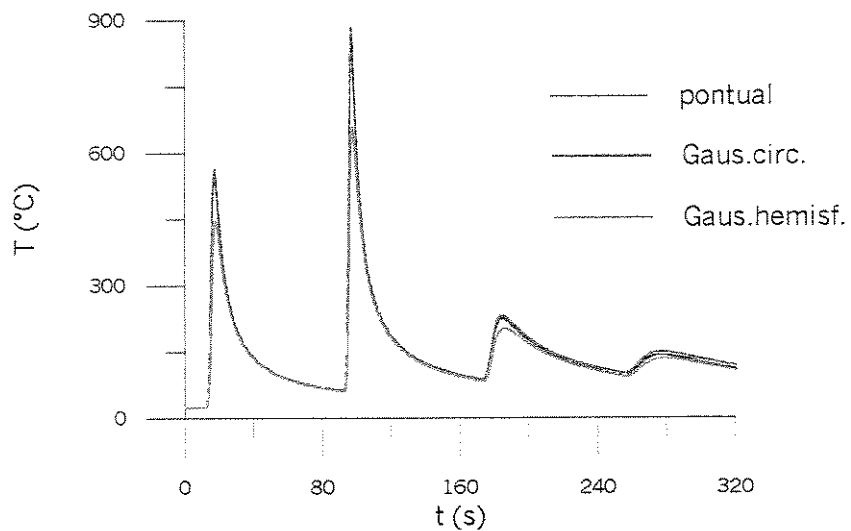


Figura 6.43 - Comparação entre os modelos analíticos com fonte concentrada (pontual) e distribuída (circular e hemisférica), para $x_0 = 50\text{mm}$, $y = 3\text{mm}$ e $z = 5\text{mm}$ (espessura infinita).

Para o modelo de fonte distribuída hemisférica, a diferença entre as temperaturas de pico do segundo passe é igual a 33%, significativa para a faixa de temperatura atingida neste passe.

Capítulo 7

Conclusões e Recomendações para Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

De acordo com a análise dos resultados obtidos neste trabalho, pode-se concluir que:

1. Com relação ao desenvolvimento analítico dos modelos:
 - A. A utilização do método da Função de Green permitiu a obtenção das soluções para as seguintes configurações:
 - a) Unidimensional transiente: fonte de calor distribuída Gaussiana unidimensional, com e sem perdas superficiais.
 - b) Bidimensional quase-estacionário:
 - i) Fonte de calor distribuída Gaussiana circular, com e sem perdas superficiais;
 - ii) Fonte de calor concentrada linear, com perdas superficiais.
 - c) Bidimensional transiente:
 - i) Fonte de calor concentrada linear, com e sem perdas superficiais;
 - ii) Fonte de calor distribuída Gaussiana unidimensional, com e sem perdas superficiais;
 - iii) Fonte de calor distribuída Gaussiana semicircular, com e sem perdas superficiais.
 - d) Tridimensional quase-estacionário, chapa de espessura finita:
 - i) Fonte de calor concentrada pontual;

- ii) Fonte de calor distribuída Gaussiana circular;
 - iii) Fonte de calor distribuída Gaussiana hemisférica.
 - e) Tridimensional quase-estacionário, chapa de espessura infinita:
 - i) Fonte de calor concentrada pontual;
 - ii) Fonte de calor distribuída Gaussiana circular;
 - iii) Fonte de calor distribuída Gaussiana hemisférica.
- B. Os modelos permitem determinar a distribuição de temperatura no material de forma rápida e simples, pela substituição dos parâmetros de soldagem, propriedades físicas dos materiais e posições de interesse nas equações obtidas.
2. Com relação ao desenvolvimento numérico pelo método de diferenças finitas para as configurações de fluxo de calor uni, bi e tridimensionais:
- a) Os métodos de Crank-Nicholson (unidimensional) e Alternating Direction Implicit (bi e tridimensionais), utilizados para o tratamento do tempo na discretização das equações, se mostraram adequados do ponto de vista de estabilidade e tempo computacional;
 - b) Os modelos desenvolvidos apresentaram consistência que, somada à estabilidade, são pré-requisitos para a convergência;
 - c) Os modelos numéricos permitiram a comprovação dos modelos analíticos, através da boa concordância observada entre os ciclos térmicos simulados pelos dois tipos de soluções.
3. Com relação à consideração dos fatores variação das propriedades físicas com a temperatura, perdas superficiais e distribuição da fonte de calor:
- a) Propriedades físicas:
 - i) Para materiais onde a variação das propriedades físicas com a temperatura ocorre de forma não-linear, como no caso do aço baixa liga, a etapa de resfriamento do ciclo térmico obtido considerando a variação das propriedades físicas com a temperatura, foi mais lenta que a do ciclo térmico obtido com

propriedades constantes, para as condições de soldagem e geometria utilizadas na simulação do modelo numérico unidimensional transiente;

- ii) No caso do aço inox 304, onde a variação das propriedades físicas com a temperatura é linear, não é necessária a utilização de um modelo com a consideração deste fator.

b) Perdas superficiais:

- i) A consideração das perdas superficiais nos modelos analíticos, através de um coeficiente global de transferência de calor, aumenta a taxa de resfriamento e diminui a temperatura de pico do ciclo térmico;
- ii) A consideração das perdas superficiais nos modelos numéricos influencia a taxa de resfriamento e a temperatura de pico do ciclo térmico, da mesma forma como observado no modelo analítico. Entretanto, esta influência é mais acentuada no modelo numérico, pois o coeficiente de radiação varia com a temperatura, enquanto no modelo analítico é mantido constante.

c) Distribuição da fonte de calor:

- i) Para todas as configurações analisadas, a consideração da distribuição da fonte de calor teve como consequência a redução da temperatura de pico, particularmente para regiões próximas ao centro da fonte, nas quais os modelos de fonte concentrada fornecem temperaturas muito elevadas;
- ii) A distribuição da fonte de calor é um fator importante para a previsão das temperaturas de pico na zona fundida, principalmente devido à dificuldade de se medir experimentalmente as temperaturas nesta região da solda;
- iii) Para as configurações bidimensional transiente e tridimensional quase-estacionário, os modelos de fonte que consideram a distribuição de calor ao longo da espessura da chapa (semicircular e hemisférica), a redução da temperatura de pico é mais significativa que a proporcionada pelos modelos de fonte onde a distribuição de calor ocorre apenas na superfície da chapa;
- iv) Para posições distantes da fonte de calor, os modelos de fonte concentrada e distribuída são equivalentes, ou seja, a previsão dos ciclos térmicos pode ser feita através dos modelos de fonte concentrada.

4. Com relação à comparação entre os ciclos experimentais e teóricos, para as configurações unidimensional transiente e bidimensional quase-estacionário:
- a) O comprimento do passe, associado ao intervalo entre os mesmos, se mostraram adequados à situação dos modelos teóricos, os quais se aplicam à simulação de processos com passes curtos, onde não ocorre o resfriamento completo de um passe antes da deposição do seguinte;
 - b) As condições de soldagem e geometrias dos corpos de prova utilizadas nos experimentos corresponderam à representação dos modelos analisados;
 - c) A consideração das perdas superficiais nos modelos analíticos e numéricos resultou em um melhor acordo entre os ciclos térmicos teóricos e experimentais, tanto no que se refere à temperatura de pico quanto à taxa de resfriamento, para as condições de soldagem e geometria utilizadas nos experimentos;
 - d) Para o aço baixa liga, não houve necessidade de se considerar na simulação numérica a variação das propriedades físicas com a temperatura, pois a taxa de resfriamento obtida teoricamente não foi observada na prática;
 - e) A boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais, sob o critério de eficiência, mostra que os modelos propostos permitem prever corretamente os ciclos térmicos na soldagem multipasse.

7.2 Recomendações para Trabalhos Futuros

- A. Determinação experimental dos ciclos térmicos para as configurações bidimensional transiente e tridimensional quase-estacionário, e comparação dos resultados com aqueles obtidos pelos modelos propostos.
- B. Determinação experimental dos ciclos térmicos e análise da microestrutura resultante, comparando-a com as que podem ser previstas pelos ciclos térmicos dos modelos analíticos.

- C. Utilização do método de elementos finitos como ferramenta numérica, e comparação dos resultados com os obtidos pelo método de diferenças finitas.
- D. Obtenção das soluções analíticas com fonte distribuída, considerando os modelos elipsoidal e duplo-elipsoidal para a fonte de calor.
- E. Estudo da influência da convecção e forças eletromagnéticas sobre a geometria da poça de solda, para o caso da soldagem multipasse.

Referências Bibliográficas

- Abramovitz, M., Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. 9.ed. New York: Dover Publications, 1970. Cap. 9: Bessel functions of integer order, p. 355 – 433.
- Adams Jr, C. M. Cooling rates and peak temperatures in fusion welding. *Welding Journal*, v. 37, n. 5, p. 210s - 215s, may 1958.
- Alberry, P. J., Jones, W. K. C. Computer model for prediction of heat-affected-zone microstructures in multipass weldments. *Metals Technology*, v. 9, p. 419 - 426, october 1982.
- Al-Nimr, M. A., Abou-Arab, T. W. Transient temperature distribution within a flat sheet during the welding process - Analytical solution. *Heat Transfer Engineering*, v. 15, n. 1, p. 27 - 33, 1994.
- Ashby, M. F., Easterling, K. E. A first report on diagrams for grain growth in welds. *Acta Metallurgica*, v. 30, p. 1969 - 1978, 1982.
- Asibu Jr, E. K., Jallad, A. -R. Experimental finite element analisis of temperature distribution during arc welding. *ASME Prod. Eng. Div. Publ. PED Sensors and Controls for Manufacturing*, v. 33, p. 1 – 15, november 27 - december 2 1988.

- Beck, J. V. Green's function solution for transient heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 27, n. 8, p. 1235 - 1244, 1984.
- Boo, K. S., Cho, H. S. Transient temperature distribution in arc welding of finite thickness plates. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Part B - Journal of Engineering Manufacture*, v. 204, p. 175 - 183, 1990.
- Carslaw, H. S., Jaeger, J. C. *Conduction of heat in solids*. 2.ed. Oxford: Oxford University Press, 1959. 510p.
- Chidiac, S. E., Mirza, F. A., Wilkinson, D. S. A simplified welding arc model by the finite element method. *Computers & Structures*, v. 53, n. 5, p. 1235 - 1241, 1994.
- Choi, M., Salcudean, M., Greif, R. A study of heat transfer during arc welding. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 29, n. 2, p. 215 - 225, 1986.
- Choi, M., Greif, R., Salcudean, M. A study of the heat transfer during arc welding with applications to pure metals or alloys and low or high boiling temperature materials. *Numerical Heat Transfer*, v. 11, p. 477 - 489, 1987.
- Choo, R. T. C., Szekely, J., David, S. A. On the calculation of the free surface temperature of gas-tungsten-arc weld pools from first principles: Part II - modeling the weld pool and comparison with experiments. *Metallurgical Transactions B*, v. 23B, p. 371 - 384, june 1992.
- Chuansong, W., Lin, W. A microcomputer aided system for selecting arc-welding process parameters. *Computer-Aided Engineering Journal*, p. 122 - 125, june 1991.
- Chuansong, W., Zhenning, C., Lin, W. Numerical analysis of three-dimensional fluid flow and heat transfer in TIG weld pool with full penetration. *Acta Metallurgica Sinica, Series B*, v. 6, n. 2, p. 130 - 136, april 1993.

- Dally, J. W., Riley, W. F., McConnell, K. G. *Instrumentation for engineering measurements*. 2.ed. Editora: John Wiley and Sons, 1993. Cap. 13: Statistical methods, p. 521 – 557.
- Davis, C. L., King, J. E. Effect of cooling rate on intercritically reheated microstructure and toughness in high strength low alloy steel. *Materials Science and Technology*, v. 9, n. 1, p. 8 - 15, january 1993.
- Devletian, J. H., Wood, W. E. Welding, brazing and soldering. In: *Metals Handbook*. Americam Society for Metals, 1983. v.6, p. 33.
- Douglas Jr, J., Rachford Jr, H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 82, p. 421 – 439, july 1956.
- Doumanidis, C. C. Thermal regulation in multiple-source arc welding involving material transformations. *Welding Journal*, v. 74, n. 6, p. 185s – 194s, june 1995.
- DuPont, J. N., Marder, A. R. Thermal efficiency of arc welding process. *Welding Journal*, v. 74, n. 12, p. 406s – 416s, december 1995.
- Eagar, T. W., Tsai, N. -S. Temperature fields produced by traveling distributed heat sources. *Welding Journal*, v. 62, n. 12, p. 346s - 355s, december 1983.
- Free, J. A., Goff, R. F. D. P. Predicting residual stresses in multi-pass weldments with the finite element method. *Computers & Structures*, v. 32, n. 2, p. 365 - 378, 1989.
- Frewin, M. R., Scott, D. A. Finite element model of pulsed laser welding. *Welding Journal*, v. 78, n.1, p. 15s – 22s, january 1999.

- Giedt, W. H., Tallerico, L. N., Fuerschbach, P. W. GTA welding efficiency: calorimetric and temperature field measurements. *Welding Journal*, v. 68, n. 1, p. 28s – 32s, january 1989.
- Goldak, J., Bibby, M., Moore, J., House, R., Patel, B. Computer modeling of heat flow in welds. *Metallurgical Transactions B*, v. 17B, p. 587 - 600, september 1986.
- Goldak, J., Chakravarti, A., Bibby, M. A new finite element model for welding heat sources. *Metallurgical Transactions B*, v. 15B, p. 299 - 305, june 1984.
- Grong, O. *Metallurgical modeling of welding*. London: Institute of Materials, 1994. Cap. 1: Heat flow and temperature distribution in welding, p. 1 – 115.
- Grosh, R. J., Trabant, E. A. Arc-welding temperatures. *Welding Journal*, v. 35, n. 8, p. 396s - 400s, august 1956.
- Grosh, R. J., Trabant, E. A., Hawkins, G. A. Temperature distribution in solids of variable thermal properties heated by moving heat sources. *Quarterly Applied Mathematics*, v. 13, n. 2, p. 161 - 167, february 1955.
- Hong, K., Weckman, D. C., Strong, A. B. The influence of thermofluids phenomena in gas tungsten arc welds in high and low thermal conductivity metals. *Canadian Metallurgical Quarterly*, v. 37, n. 3 – 4, p. 293 – 303, 1998.
- Ion, J. C., Easterling, F. E., Ashby, M. F. A second report on diagrams of microstructure and hardness for heat-affected zones in welds. *Acta Metallurgica*, v. 32, n. 11, p. 1949 - 1962, 1984.
- Jeong, S. K., Cho, H. S. An analytical solution for transient temperature distribution in fillet arc welding including the effect of molten metal. *Proceedings of Institution Mechanical Engineers*, v. 211, Part B, p. 63 - 72, 1997.

- Jhaveri, P., Moffat, W. G., Adams Jr, C. M. The effect of plate thickness and radiation on heat flow in welding and cutting. *Welding Journal*, v. 41, n. 1, p. 12s - 16s, january 1962.
- Kasuya, T., Yurioka, N. Prediction of welding thermal history by a comprehensive solution. *Welding Journal*, v. 72, n. 3, p. 107s - 115s, march 1993.
- Key, J. F., Chan, J. W., McIlwain, M. E. Process variable influence on arc temperature distribution. *Welding Journal*, v. 62, n. 7, p. 179s - 184s, july 1983.
- Kim, I. S., Basu, A. A mathematical model of heat transfer and fluid flow in the gas metal arc welding process. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 77, p. 17 - 24, 1998.
- Kou, S. Simulation of heat flow during the welding of thin plates. *Metallurgical Transactions A*, v. 12A, p. 2025 - 2030, december 1981.
- Kou, S., Wang, Y. H. Weld pool convection and its effect. *Welding Journal*, v. 65, n. 3, p. 63s - 70s, march 1986.
- Kumar, S., Bhaduri, S. C. Three-dimensional finite element modeling of gas metal-arc welding. *Metallurgical and Materials Transactions B*, v. 25B, p. 435 - 441, june 1994.
- Kumar, S., Bhaduri, S. C. Theoretical investigation of penetration characteristics in gas metal-arc welding using finite element method. *Metallurgical and Materials Transactions B*, v. 26N, p. 611 - 624, june 1995.
- Lindgren, L. E. Temperature fields in simulation of butt-welding of large plates. *Communications in Applied Numerical Methods*, v. 2, n. 2, p. 155 - 164, mar-apr 1986.

- Little, G. H., Kamtekar, A. G. The effect of thermal properties and weld efficiency on transient temperatures during welding. *Computers & Structures*, v. 68, p. 157 – 165, 1998.
- Mundra, K., DebRoy, T., Kelkar, K. M. Numerical prediction of fluid flow and heat transfer in welding with a moving heat source. *Numerical Heat Transfer*, v. 29, Part A, p. 115 – 129, 1996.
- Murugan, S., Kumar, P. V., Raj, B., Mose, M. S. C. Temperature distribution during multipass welding of plates. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 75, p. 891 – 905, 1998.
- Myhr, O. R., Grong, O. Dimensionless maps for heat flow analyses in fusion welding. *Acta Metallurgica et Materialia*, v. 38, n. 3, p. 449 – 460, 1990.
- Nguyen, N. T., Ohta, A., Matsuoka, K., Suzuki, N., Maeda, Y. Analytical solutions for transient temperature of semi-infinite body subjected to 3-D moving heat sources. *Welding Journal*, v. 78, n.8, p. 265s – 274s, august 1999.
- Oreper, G. M., Eagar, T. W., Szekely, J. Convection in arc weld pools. *Welding Journal*, v. 62, n. 11, p. 307s – 312s, november 1983.
- Ozisik, M. N. *Heat conduction*. 2 ed. Reading: John Wiley & Sons, Inc, 1993. Cap. 6: The use of Green's function, p. 214 – 256.
- Pardo, E., Weckman, D. C. Prediction on weld pool and reinforcement dimensions of GMA welds using a finite-element model. *Metallurgical Transactions B*, v. 20B, p. 937 - 947, december 1989.
- Parkitny, R., Pawlak, A., Piekarska, W. Thermal model of submerged arc welding. *Materials Science and Technology*, v. 8, p. 841 – 843, september 1992.

- Pavelic, V., Tanbakuchi, R., Uyehara, O. A., Myers, P. S. Experimental and computed temperature histories in gas tungsten-arc welding of thin plates. *Welding Journal*, v. 48, n. 7, p. 295s - 305s, july 1969.
- Peaceman, D. W. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. 1 ed. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. Cap. 3: Numerical solution of parabolic problems in one dependent variable, p. 45 – 64.
- Radaj, D. *Heat effects of welding*. United States of America: Springer-Verlag, 1992. Cap. 2: Welding temperature fields, p. 19 - 128.
- Rao, K. P., Srikanth, Y. Effect of multipasses on austenitic weld microstructures and toughness. *Praktische Metallographie*, v. 30, n. 7, p. 365 – 371, 1993.
- Reed, R. C., Bhadeshia, D. H. A simple model for multipass steel welds. *Acta Metallurgica et Materialia*, v. 42, n. 11, p. 3663 – 3678, 1994.
- Ribera, J. M., Prado, J. M. Modelización térmica y microestructural de la zona afectada por el calor en la soldadura – I Parte: ciclos térmicos. *Revista de Soldadura*, v. 25, n. 4, p.185 – 198, oct. – nov. – dic. 1995.
- Roelens, J. –B. Numerical Simulation of some multipass submerged arc welding – determination of the residual stresses and comparison with experimental measurements. *Welding in the world*, v. 35, n. 2, p. 110 – 117, 1995.
- Roelens, J. B., Maltrud, F., Lu, J. Determination of residual stresses in submerged arc multi-pass welds by means of numerical simulation and comparison with experimental measurements. *Welding in the world*, v. 33, n. 3, p. 152 – 159, 1994.
- Ronda, J., Mahrenholtz, O., Hamann, R. Quality oh the TH-3D- a new solver of nonlinear heat transfer problem. *Numerical Heat Transfer*, Part B, v. 22, p. 25 – 48, 1992.

- Rosenthal, D. The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, v. 68, p. 849 – 866, november 1946.
- Rykalin, N. N. *Calculation of heat flow during welding*. Berlin: VEB Verlag Technik, 1951. 287p.
- Shah, A. K., Kulkarni, S. D., Gopinathan, V., Krishnan, R. Weld heat-affected zone in Ti-6Al-4V alloy, Part I – computer simulation of the effect of weld variables on the thermal cycles in the HAZ. *Welding Journal*, v. 74, n. 9, p. 297s – 304s, september 1995.
- Shim, Y., Feng, Z., Lee, S., Kim, D., Jaeger, J., Papritan, J. C., Tsai, C. L. Determination of residual stresses in thick-section weldments. *Welding Journal*, v. 71, n. 9, p. 305s – 312s, september 1992.
- Sluzalec, A., Sluzalec Jr, A. Moving heat source analysed by finite elements and its application in welding. *Indian Journal of Technology*, v. 24, p. 303 – 308, june 1986.
- Smith, G. D. *Numerical solution of partial differential equations*. 3 ed. Oxford: Oxford University Press, 1985. Cap. 2: Parabolic equations: finite difference methods, convergence, and stability, p. 11 – 109.
- Suzuki, R. N. *Solução analítica para distribuição de temperatura no processo de soldagem MIG com múltiplos passes*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 118p. Dissertação (Mestrado).
- Taniguchi, C. Transferência de calor na soldagem. In: Wainer, E., Brandi, S. D., Mello, F. D. *Soldagem – Processos e metalurgia*. Editora: Edgard Blucher Ltda, 1992. Cap. 8a, p. 359 – 370.

- Tekriwal, P., Mazumder, J. Finite element analysis of three-dimensional transient heat transfer in GMA welding. *Welding Journal*, v. 67, n. 7, p. 150s – 156s, july 1988.
- Tsai, N. S., Eagar, T. W. Distribution of the heat and current fluxes in gas tungsten arcs. *Metallurgical Transactions B*, v. 16B, p. 841 – 846, december 1985.
- Tsai, C. L., Hou, C. A. Theoretical analysis of weld pool behavior in the pulsed current GTAW process. *Journal of Heat Transfer – Transactions of the ASME*, v. 110, p. 160 – 165, february 1988.
- Tsai, C. L., Lee, S. G., Shim, Y. L., Jaeger, J. J., Chasten, C. P. Experimental verification of modeling techniques for thermal-related welding problems. *Heat Transfer in Materials Processing HTD ASME*, v. 224, p. 9 – 17, 1992.
- Tsao, K. C., Wu, C. S. Fluid flow and heat transfer in GMA weld pools. *Welding Journal*, v. 67, n. 3, p. 70s – 75s, march 1988.
- Ule, R. L., Joshi, Y., Sedy, E. B. A new technique for three-dimensional transient heat transfer computations of autogenous arc welding. *Metallurgical Transactions B*, v. 21B, p. 1033 – 1047, december 1990.
- Ushio, M., Wu, C. S. Mathematical modeling of three-dimensional heat and fluid flow in a moving gas metal arc weld pool. *Metallurgical and Materials Transactions B*, v. 28B, p. 509 – 516, june 1997.
- Vishnu, P. R., Li, W. B., Easterling, K. E. Heat flow model for pulsed welding. *Materials Science and Technology*, v. 7, p. 649 – 659, july 1991.
- Wahab, M. A., Painter, M. J. Numerical models of gas metal arc welds using experimentally determined weld pool shapes as the representation of the welding heat source. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 73, p. 153 – 159, 1997.

- Wahab, M. A., Painter, M. J., Davies, M. H. The prediction of the temperature distribution and weld pool geometry in the gas metal arc welding process. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 77, p. 233 – 239, 1998.
- Wells, A. A. Heat Flow in Welding. *Welding Journal*, v. 31, n.5, p. 263s – 267s, may 1952.
- Wu, C. S. Computer simulation of three-dimensional convection in traveling MIG weld pools. *Engineering Computations*, v. 9, p. 529 – 537, 1992.
- Yang, H. Q. Non-Fourier effect on heat conduction during welding. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 34, n. 11, p. 2921 – 2924, 1991.
- Yang, Y. -S., Lee, S., -H. A study on the mechanical stress relieving in a butt-welded-pipe. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 73, p. 175 – 182, 1997.
- Zacharia, T., David, S. A., Vitek, J. M., Kraus, H. G. Computational modeling of stationary gas-tungsten-arc weld pools and comparison to stainless steel 304 experimental results. *Metallurgical Transactions B*, v. 22B, p. 243 – 257, april 1991.
- Zacharia, T., Eraslan, A. H., Aidun, D. K., David, S. A. Three-dimensional transient model for arc welding process. *Metallurgical Transactions B*, v. 20B, p. 645 – 659, october 1989.
- Zhang, H. J. Non-quase-steady analysis of heat conduction from a moving heat source. *Journal of Heat Transfer – Transactions of the ASME*, v. 112, p. 777 – 781, august 1990.
- Zhang, Y. M., Cao, Z. N., Kovacevic, R. Numerical analysis of fully penetrated weld pools in gas tungsten arc welding. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, v. 210, p. 187 – 195, 1996.

Apêndice A

Modelo Bidimensional

A.1 Contorno $i = 0, j = 0$ a m

De acordo com o elemento em consideração, os termos presentes no balanço de energia são diferentes. Assim, foi feita a seguinte subdivisão para os pontos sobre este contorno: $(i = 0, j = 0)$, $(i = 0, j = 1 \text{ a } m-1)$, e $(i = 0, j = m)$.

A.1.1 Elemento $i = 0, j = 0$

Durante o período de deposição dos cordões de solda, a fonte de calor passa por este elemento. Fazendo o balanço de energia, obtém-se:

$$Q = q_{1,0} + q_{0,1} + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

As áreas de troca de calor por condução em x e y , e o volume são dados pelas Equações (4.28), (4.29) e (4.31), respectivamente. No entanto, para as áreas de convecção e radiação, tem-se:

$$A_c = A_r = \Delta y(2\Delta x + \delta) \quad (\text{A.2})$$

Substituindo na Equação (A.1) e adimensionalizando:

$$Q + k_{0,0} \delta L \Delta y' \frac{1}{L} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{1,0} - \theta_{0,0})}{\Delta x'} + k_{0,0} \delta L \Delta x' \frac{1}{L} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,1} - \theta_{0,0})}{\Delta y'} -$$

$$- (h_c + h_r) L \Delta y' (2L \Delta x' + \delta) (T_m - T_0) \theta_{0,0} = \rho c_{0,0} \delta L^2 \Delta x' \Delta y' \frac{\alpha_{\text{ref}}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,0}^{t+1} - \theta_{0,0}^t)}{\Delta \tau}$$

Rearranjando a equação acima:

$$(1 + A_{0,0}) \theta_{0,0}^{t+1} - A_{0,0} \theta_{1,0}^{t+1} = (1 - B_{0,0} - D_{0,0}) \theta_{0,0}^t + B_{0,0} \theta_{0,1}^t + K \quad (\text{A.3})$$

onde:

$$D_{i,j} = \frac{(h_c + h_r) L \Delta \tau (2L \Delta x' + \delta)}{\rho c_{i,j} \delta \Delta x' \alpha_{\text{ref}}} \quad (\text{A.4})$$

$$K = \frac{Q \Delta \tau}{\rho c_{0,0} \delta \Delta x' \Delta y' \alpha_{\text{ref}} (T_m - T_0)} \quad (\text{A.5})$$

O termo fonte K na Equação (A.3) é considerado somente quando a fonte passa por esse elemento. Durante a passagem da fonte pelos outros elementos e no intervalo entre passes, utiliza-se esta equação, mas sem este termo.

A.1.2 Contorno $i = 0, j = 1$ a $m-1$

O balanço de energia para os pontos deste contorno é dado por:

$$q_{0,j-1} = q_{1,j} + q_{0,j+1} + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

As áreas de troca de calor por condução em x e y, por convecção e o volume são as mesmas já consideradas anteriormente nas Equações (4.28), (4.29), (4.40) e (4.31), respectivamente. Escrevendo a Equação (A.6) na forma adimensional:

$$k_{0,j}\delta L\Delta y'\frac{1}{L}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{1,j} - \theta_{0,j})}{\Delta x'} + k_{0,j}\delta L\Delta x'\frac{1}{L}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{0,j-1} - 2\theta_{0,j} + \theta_{0,j+1})}{\Delta y'} -$$

$$-(h_c + h_r)L\Delta y'(2L\Delta x' + \delta)(T_m - T_0)\theta_{0,j} = \rho c_{0,j}\delta L^2\Delta x'\Delta y'\frac{\alpha_{ref}}{L^2}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{0,j}^{t+1} - \theta_{0,j}^t)}{\Delta \tau}$$

Utilizando as definições dos coeficientes dadas pelas Equações (4.34), (4.35) e (A.4), a equação acima se torna:

$$(1 - A_{0,j})\theta_{0,j}^{t+1} - A_{0,j}\theta_{1,j}^{t+1} = B_{0,j}\theta_{0,j-1}^t + (1 - B_{0,j} - D_{0,j})\theta_{0,j}^t + B_{0,j}\theta_{0,j+1}^t \quad (A.7)$$

A.1.3 Elemento $i = 0, j = m$

Pelo balanço de energia, obtém-se:

$$q_{0,m-1} = q_{1,m} + q_{conv} + q_{rad} + mc\frac{\partial T}{\partial t} \quad (A.8)$$

As áreas de troca de calor por condução nas direções x e y, assim como o volume, são as mesmas definidas para os elementos anteriores deste contorno. Entretanto, para as áreas de convecção e radiação:

$$A_c = A_r = 2\Delta x\Delta y + \delta(\Delta x + \Delta y) \quad (A.9)$$

Substituindo na Equação (A.8) e colocando-a na forma adimensional:

$$k_{0,m}\delta L\Delta y'\frac{1}{L}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{1,m} - \theta_{0,m})}{\Delta x'} - k_{0,m}\delta L\Delta x'\frac{1}{L}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{0,m} - \theta_{0,m-1})}{\Delta y'} -$$

$$-(h_c + h_r)L[2L\Delta x'\Delta y' + \delta(\Delta x' + \Delta y')](T_m - T_0)\theta_{0,m} = \rho c_{0,m}\delta L^2\Delta x'\Delta y'\frac{\alpha_{ref}}{L^2}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{0,m}^{t+1} - \theta_{0,m}^t)}{\Delta \tau}$$

Rearranjando:

$$(1 + A_{0,m})\theta_{0,m}^{t+1} - A_{0,m}\theta_{1,m}^{t+1} = B_{0,m}\theta_{0,m-1}^t + (1 - B_{0,m} - E_{0,m})\theta_{0,m}^t \quad (\text{A.10})$$

onde:

$$E_{i,j} = \frac{(h_c + h_r)L\Delta\tau[2L\Delta x'\Delta y' + \delta(\Delta x' + \Delta y')]}{\rho c_{i,j}\delta\Delta x'\Delta y'\alpha_{\text{ref}}} \quad (\text{A.11})$$

A.2 Contorno $i = n, j = 0$ a m

Assim como para o contorno $i = 0$, devido à diferente forma no cálculo das áreas de troca de calor por condução, convecção e radiação, é necessário dividir este contorno em três partes, análogas ao caso anterior. Para este e os demais contornos, serão considerados somente as equações do balanço de energia para cada caso, partindo para a equação discretizada na sua forma final.

A.2.1 Elemento $i = n, j = 0$

Aplicando o balanço de energia para este VC:

$$Q + q_{n-1,0} = q_{n,1} + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.12})$$

Utilizando as áreas de troca de calor por condução, convecção, radiação e o volume definidos pelas Equações (4.28), (4.29), (4.31) e (A.2), fazendo a adimensionalização das variáveis e rearranjando:

$$-A_{n,0}\theta_{n-1,0}^{t+1} + (1 - A_{n,0})\theta_{n,0}^{t+1} = (1 - B_{n,0} - D_{n,0})\theta_{n,0}^t + B_{n,0}\theta_{n,1}^t + K \quad (\text{A.13})$$

Assim como na Equação (A.3), o termo K só deve ser considerado durante a passagem da fonte de calor por este elemento.

A.2.2 Contorno $i = n, j = 1$ a $m-1$

Fazendo um balanço de energia para estes pontos, obtém-se:

$$q_{n-1,j} + q_{n,j-1} = q_{n,j+1} + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.14})$$

As áreas de troca de calor e o volume são as mesmas utilizadas no item anterior. Com as definições dos coeficientes A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} , a equação da forma de diferenças para este trecho do contorno é:

$$-A_{n,j} \theta_{n-1,j}^{t+1} + (1 + A_{n,j}) \theta_{n,j}^{t+1} = B_{n,j} \theta_{n,j-1}^t + (1 - 2B_{n,j} - D_{n,j}) \theta_{n,j}^t + B_{n,j} \theta_{n,j+1}^t \quad (\text{A.15})$$

A.2.3 Elemento $i = n, j = m$

Para este elemento, o balanço de energia fornece:

$$q_{n-1,m} + q_{n,m-1} = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.16})$$

Com as mesmas áreas utilizadas para a discretização do elemento $i=0, j=m$, tem-se como resultado:

$$-A_{n,m} \theta_{n-1,m}^{t+1} + (1 + A_{n,m}) \theta_{n,m}^{t+1} = B_{n,m} \theta_{n,m-1}^t + (1 - B_{n,m} - E_{n,m}) \theta_{n,m}^t \quad (\text{A.17})$$

A.3 Contorno $i = 1$ a $n-1, j = 0$ e $j = m$

A.3.1 Contorno $i = 1$ a $n-1, j = 0$

Para este trecho do contorno, o balanço de energia resulta em:

$$Q + q_{i-1,0} = q_{i+1,0} + q_{i,1} + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

As áreas de troca de calor e o volume são semelhantes aos obtidos para os pontos internos, dadas pelas Equações (4.28) a (4.31). Assim, após a adimensionalização:

$$-A_{i,0}\theta_{i-1,0}^{t+1} + (1 + 2A_{i,0})\theta_{i,0}^{t+1} - A_{i,0}\theta_{i+1,0}^{t+1} = (1 - B_{i,0} - C_{i,0})\theta_{i,0}^t + B_{i,0}\theta_{i,1}^t + K \quad (\text{A.19})$$

Para considerar o termo fonte, deve-se avaliar a posição da fonte de calor para que a Equação (A.19) seja escrita com ou sem K.

A.3.2 Contorno $i = 1$ a $n-1$, $j = m$

A aplicação do balanço de energia aos elementos deste contorno fornece a seguinte equação:

$$q_{i-1,m} + q_{i,m-1} = q_{i+1,m} + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.20})$$

As áreas de troca de calor por condução em x e y, assim como o volume, são as mesmas utilizadas na discretização dos pontos internos. Para a convecção e radiação, a área a ser considerada é dada por:

$$A_c = A_r = 2\Delta x \Delta y + \delta \Delta x \quad (\text{A.21})$$

Substituindo as equações na forma de taxas de transferência de calor e simplificando, tem-se como resultado:

$$-A_{i,m}\theta_{i-1,m}^{t+1} + (1 + 2A_{i,m})\theta_{i,m}^{t+1} - A_{i,m}\theta_{i+1,m}^{t+1} = B_{i,m}\theta_{i,m-1}^t + (1 - B_{i,m} - F_{i,m})\theta_{i,m}^t \quad (\text{A.22})$$

onde:

$$F_{i,m} = \frac{(h_c + h_r)L\Delta\tau(2L\Delta y' + \delta)}{\rho c_{i,m}\delta\Delta y'\alpha_{ref}} \quad (A.23)$$

A Equação (4.37), para os pontos internos do plano xy, e as Equações (A.3), (A.7), (A.10), (A.12), (A.15), (A.17), (A.19) e (A.22), para os contornos deste plano, formam o sistema tridiagonal, o qual é solucionado para o primeiro instante de tempo (t+1), partindo da condição inicial do problema (t = 0). Os valores de temperatura obtidos são armazenados em uma matriz, para serem utilizados no instante de tempo seguinte (t+2), após a mudança de direção.

Para a discretização das equações no instante t+2, será considerada agora uma forma implícita para a direção y e explícita para x. A equação para os pontos internos no instante t+2 corresponde à Equação (4.38). Em relação aos contornos, todas as equações já foram determinadas. Entretanto, deve-se alterar a ordem dos coeficientes $A_{i,j}$ e $B_{i,j}$. Assim, as equações discretizadas serão apenas rescritas nestes próximos itens, uma vez que o balanço de energia é o mesmo para cada equação.

A.4 Contorno $j = 0, i = 0$ a n

A discretização deste contorno será feita dividindo-se o mesmo em três partes:

A.4.1 Elemento $j = 0, i = 0$

A discretização para este elemento já foi obtida anteriormente no item A.1.1. Assim, a Equação (A.3) obtida no instante t+1 pode ser escrita no instante t+2 como:

$$(1 + B_{0,0})\theta_{0,0}^{t+2} - B_{0,0}\theta_{0,1}^{t+2} = (1 - A_{0,0} - D_{0,0})\theta_{0,0}^{t+1} + A_{0,0}\theta_{1,0}^{t+1} + K \quad (A.24)$$

A.4.2 Contorno $j = 0, i = 1$ a $n-1$

Para este trecho do contorno, a equação correspondente no instante t+1 é a Equação (A.19). Após as devidas alterações:

$$(1 + B_{i,0})\theta_{i,0}^{t+2} - B_{i,0}\theta_{i,1}^{t+1} = A_{i,0}\theta_{i-1,0}^{t+1} + (1 - 2A_{i,0} - C_{i,0})\theta_{i,0}^{t+1} + A_{i,0}\theta_{i+1,0}^{t+1} + K \quad (A.25)$$

A.4.3 Elemento $j = 0, i = n$

A discretização para este elemento foi feita no instante $t+1$, e a equação obtida corresponde à Equação (A.12). No instante seguinte $t+2$, a equação discretizada a ser considerada é:

$$(1 + B_{n,0})\theta_{n,0}^{t+2} - B_{n,0}\theta_{n,1}^{t+2} = A_{n,0}\theta_{n-1,0}^{t+1} + (1 - A_{n,0} - D_{n,0})\theta_{n,0}^{t+1} + K \quad (A.26)$$

A.5 Contorno $j = m, i = 0$ a n

Assim como nos casos anteriores, o tratamento deste contorno deve ser feito conforme as seguintes subdivisões:

A.5.1 Elemento $j = m, i = 0$

No caso deste elemento, a equação discretizada tem a forma da Equação (A.10), para o instante $t+1$. Em $t+2$, fazendo as alterações necessárias, obtém-se como resultado a equação abaixo:

$$-B_{0,m}\theta_{0,m-1}^{t+2} + (1 + B_{0,m})\theta_{0,m}^{t+2} = (1 - A_{0,m} - E_{0,m})\theta_{0,m}^{t+1} + A_{0,m}\theta_{1,m}^{t+1} \quad (A.27)$$

A.5.2 Contorno $j = m, i = 1$ a $n-1$

Para os pontos sobre este contorno, a equação a ser considerada é aquela dada pela Equação (A.22). Após a mudança de direção, obtém-se:

$$-B_{i,m}\theta_{i,m-1}^{t+2} + (1 + B_{i,m})\theta_{i,m}^{t+2} = A_{i,m}\theta_{i-1,m}^{t+1} + (1 - 2A_{i,m} - F_{i,m})\theta_{i,m}^{t+1} + A_{i,m}\theta_{i+1,m}^{t+1} \quad (A.28)$$

A.5.3 Contorno $j = m, i = n$

A discretização obtida anteriormente para este elemento resultou na Equação (A.17). A forma da equação discretizada para o instante $t+2$ corresponde a:

$$-B_{n,m}\theta_{n,m-1}^{t+2} + (1+B_{n,m})\theta_{n,m}^{t+2} = A_{n,m}\theta_{n-1,m}^{t+1} + (1-A_{n,m}-E_{n,m})\theta_{n,m}^{t+1} \quad (A.29)$$

A.6 Contorno $j = 1$ a $m-1, i = 0$ e $i = n$

Fazendo a subdivisão, tem-se:

A.6.1 Contorno $j = 1$ a $m-1, i = 0$

No instante $t+1$, foi obtida a Equação (A.7) representando estes pontos na forma de diferenças finitas. Rearranjando esta equação para o instante $t+2$:

$$-B_{0,j}\theta_{0,j-1}^{t+2} + (1-2B_{0,j})\theta_{0,j}^{t+2} - B_{0,j}\theta_{0,j+1}^{t+2} = (1-A_{0,j}-D_{0,j})\theta_{0,j}^{t+1} + A_{0,j}\theta_{1,j}^{t+1} \quad (A.30)$$

A.6.2 Contorno $j = 1$ a $m-1, i = n$

Para este contorno, rescrevendo a Equação (A.15), obtém-se:

$$-B_{n,j}\theta_{n,j-1}^{t+2} + (1-2B_{n,j})\theta_{n,j}^{t+2} - B_{n,j}\theta_{n,j+1}^{t+2} = A_{n,j}\theta_{n-1,j}^{t+1} + (1-A_{n,j}-D_{n,j})\theta_{n,j}^{t+1} \quad (A.31)$$

No instante $t+2$, o conjunto de Equações (4.38) e (A.24) a (A.31) formam o sistema tridiagonal. Da mesma forma como no instante anterior, os valores de temperatura obtidos são armazenados em uma matriz, para serem utilizados no instante seguinte $t+3$. Para este instante $t+3$, é feita novamente a inversão das direções x e y , utilizando as equações definidas para o instante $t+1$, com a forma implícita para x e explícita para y . No instante $t+4$, as equações que formarão o sistema tridiagonal correspondem àquelas utilizadas no instante $t+2$, e assim sucessivamente. Desta forma, foram determinadas todas as equações

necessárias para a obtenção da distribuição de temperatura no modelo bidimensional quase-estacionário.

Apêndice B

Modelo Tridimensional Quase-estacionário

Primeiro será discretizado o plano xy da Figura 4.1, para cada ponto ao longo da espessura (direção z). Assim, os itens B.1, B.2 e B.3 abaixo se referem aos pontos $k=0$, $k=1$ a $(p-1)$ e $k=p$, respectivamente. Tal divisão se deve à diferença no balanço de energia para os pontos extremos ($k = 0$ e $k = p$) e intermediários. Para os pontos correspondentes aos contornos, as áreas de troca de calor por condução em x, y e z, e o volume, são os mesmos anteriormente definidos pelas Equações (4.42) a (4.45), enquanto que as áreas de troca de calor por convecção e radiação serão definidas para cada contorno em consideração.

B.1 Contorno $k = 0$, $j = 0$ a m , $i = 0$ a n

Da mesma forma como foi feita para os nós internos, nos contornos será utilizada a forma implícita para a direção x no instante $t+1$, e explícita para as direções y e z.

B.1.1 Elemento $k = 0$, $i = 0$, $j = 0$

Este ponto sofre a ação da fonte de calor durante o primeiro passe. Fazendo o balanço de energia, obtém-se:

$$Q = q_{1,0,0} + q_{0,1,0} + q_{0,0,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (B.1)$$

Substituindo as equações para taxas de transferência de calor e as relações para a adimensionalização das variáveis na Equação (B.1), obtém-se:

$$Q = -k_{0,0,0} L^2 \Delta y' \Delta z' \frac{1}{L} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{1,0,0}^{t+1} - \theta_{0,0,0}^{t+1})}{\Delta x'} - k_{0,0,0} L^2 \Delta x' \Delta z' \frac{1}{L} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,1,0}^t - \theta_{0,0,0}^t)}{\Delta y'} - k_{0,0,0} L^2 \Delta x' \Delta y' \frac{1}{L} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{10,0,1}^t - \theta_{0,0,0}^t)}{\Delta z'} + \rho c_{0,0,0} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{ref}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,0,0}^{t+1} - \theta_{0,0,0}^t)}{\Delta \tau}$$

Utilizando as Equações (4.47) a (4.49) e rearranjando:

$$(1 + A_{0,0,0}) \theta_{0,0,0}^{t+1} - A_{0,0,0} \theta_{1,0,0}^{t+1} = (1 - B_{0,0,0} - C_{0,0,0}) \theta_{0,0,0}^t + B_{0,0,0} \theta_{0,1,0}^t + C_{0,0,0} \theta_{0,0,1}^t + K \quad (B.2)$$

onde:

$$K = \frac{Q \Delta \tau}{\rho c_{0,0,0} L \Delta x' \Delta y' \Delta z' \alpha_{ref} (T_m - T_0)} \quad (B.3)$$

B.1.2 Contorno $k = 0, i = 0, j = 1$ a $(m-1)$

Para os pontos sobre este contorno, o balanço de energia resulta em:

$$q_{0,j-1,0} = q_{1,j,0} + q_{0,j+1,0} + q_{0,j,1} + mc \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (B.4)$$

A equação discretizada neste caso corresponde a:

$$(1 + A_{0,j,0}) \theta_{0,j,0}^{t+1} - A_{0,j,0} \theta_{1,j,0}^{t+1} = B_{0,j,0} \theta_{0,j-1,0}^t + (1 - 2B_{0,j,0} - C_{0,j,0}) \theta_{0,j,0}^t + B_{0,j,0} \theta_{0,j+1,0}^t + C_{0,j,0} \theta_{0,j,1}^t \quad (B.5)$$

B.1.3 Elemento $k = 0, i = 0, j = m$

Pelo balanço de energia:

$$q_{0,m-1,0} = q_{1,m,0} + q_{0,m,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

Escrevendo esta equação na forma de taxas de transferência de calor, tem-se:

$$\begin{aligned} -k_{0,m,0} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,m,0}^t - \theta_{0,m-1,0}^t)}{L \Delta y'} = & -k_{0,m,0} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{1,m,0}^{t+1} - \theta_{0,m,0}^{t+1})}{L \Delta x'} - \\ -k_{0,m,0} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,m,1}^t - \theta_{0,m,0}^t)}{L \Delta z'} + & \rho c_{0,m,0} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{\text{ref}}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,m,0}^{t+1} - \theta_{0,m,0}^t)}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

Simplificando:

$$(1 + A_{0,m,0}) \theta_{0,m,0}^{t+1} - A_{0,m,0} \theta_{1,m,0}^{t+1} = B_{0,m,0} \theta_{0,m-1,0}^t + (1 - B_{0,m,0} - C_{0,m,0}) \theta_{0,m,0}^t + C_{0,m,0} \theta_{0,m,1}^t \quad (\text{B.7})$$

B.1.4 Contorno $k = 0$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = 0$

Os pontos sobre este contorno sofrem a atuação da fonte de calor somente no primeiro passe. Pelo balanço de energia:

$$Q + q_{i-1,0,0} = q_{i+1,0,0} + q_{i,1,0} + q_{i,0,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} Q - k_{i,0,0} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,0,0}^{t+1} - \theta_{i-1,0,0}^{t+1})}{L \Delta x'} = & -k_{i,0,0} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i+1,0,0}^{t+1} - \theta_{i,0,0}^{t+1})}{L \Delta x'} - \\ -k_{i,0,0} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,1,0}^t - \theta_{i,0,0}^t)}{L \Delta y'} - & k_{i,0,0} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,0,1}^t - \theta_{i,0,0}^t)}{L \Delta z'} + \\ + \rho c_{i,0,0} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{\text{ref}}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,0,0}^{t+2} - \theta_{i,0,0}^{t+1})}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (4.47) a (4.49) e rearranjando:

$$\begin{aligned}
& -A_{i,0,0}\theta_{i-1,0,0}^{t+1} + (1 + 2A_{i,0,0})\theta_{i,0,0}^{t+1} - A_{i,0,0}\theta_{i+1,0,0}^{t+1} = \\
& = (1 - B_{i,0,0} - C_{i,0,0})\theta_{i,0,0}^t + B_{i,0,0}\theta_{i,1,0}^t + C_{i,0,0}\theta_{i,0,1}^t + K
\end{aligned} \tag{B.9}$$

B.1.5 Contorno $k = 0$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = 1$ a $(m-1)$

O balanço de energia aplicado a cada elemento deste contorno fornece:

$$q_{i-1,j,0} + q_{i,j-1,0} = q_{i+1,j,0} + q_{i,j+1,0} + q_{i,j,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.10}$$

A equação discretizada tem sua forma final dada por:

$$\begin{aligned}
& -A_{i,j,0}\theta_{i-1,j,0}^{t+1} + (1 + 2A_{i,j,0})\theta_{i,j,0}^{t+1} - A_{i,j,0}\theta_{i+1,j,0}^{t+1} = \\
& = B_{i,j,0}\theta_{i,j-1,0}^t + (1 - 2B_{i,j,0} - C_{i,j,0})\theta_{i,j,0}^t + B_{i,j,0}\theta_{i,j+1,0}^t + C_{i,j,0}\theta_{i,j,1}^t
\end{aligned} \tag{B.11}$$

B.1.6 Contorno $k = 0$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = m$

Os pontos sobre este contorno não sofrem a ação da fonte de calor durante todo o processo. O balanço de energia fornece:

$$q_{i-1,m,0} + q_{i,m-1,0} = q_{i+1,m,0} + q_{i,m,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.12}$$

Substituindo no balanço de energia as equações de transferência de calor:

$$\begin{aligned}
& -k_{i,m,0}L^2\Delta y'\Delta z'(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i,m,0}^{t+1} - \theta_{i-1,m,0}^{t+1})}{L\Delta x'} - k_{i,m,0}L^2\Delta x'\Delta z'(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i,m,0}^t - \theta_{i,m-1,0}^t)}{L\Delta y'} = \\
& = -k_{i,m,0}L^2\Delta y'\Delta z'(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i+1,m,0}^{t+1} - \theta_{i,m,0}^{t+1})}{\Delta x'} - k_{i,m,0}L^2\Delta x'\Delta y'(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i,m,1}^t - \theta_{i,m,0}^t)}{L\Delta z'} + \\
& + \rho c_{i,m,0}L^3\Delta x'\Delta y'\Delta z'\frac{\alpha_{ref}}{L^2}(T_m - T_0)\frac{(\theta_{i,m,0}^{t+2} - \theta_{i,m,0}^{t+1})}{\Delta \tau}
\end{aligned}$$

O rearranjo desta equação utilizando os coeficientes $A_{i,j,k}$, $B_{i,j,k}$ e $C_{i,j,k}$ produz:

$$\begin{aligned} & -A_{i,m,0}\theta_{i-1,m,0}^{t+1} + (1 + 2A_{i,m,0})\theta_{i,m,0}^{t+1} - A_{i,m,0}\theta_{i+1,m,0}^{t+1} = \\ & = B_{i,m,0}\theta_{i,m-1,0}^t + (1 - B_{i,m,0} - C_{i,m,0})\theta_{i,m,0}^t + C_{i,m,0}\theta_{i,m,1}^t \end{aligned} \quad (B.13)$$

Para os pontos sobre o contorno $i = n, j = 0$ a m , as equações para as áreas de troca de calor por convecção são semelhantes às definidas para o contorno $i = 0, j = 0$ a m . Portanto, nos itens B.1.7 a B.1.9 serão considerados a equação do balanço de energia para cada caso, e a equação discretizada já na sua forma definitiva.

B.1.7 Elemento $k = 0, i = n, j = 0$

Este ponto recebe o calor da fonte somente no primeiro passe. Do balanço de energia:

$$Q + q_{n-1,0,0} = q_{n,1,0} + q_{n,0,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (B.14)$$

Rescrevendo em termos dos coeficientes $A_{i,j,k}$, $B_{i,j,k}$ e $C_{i,j,k}$ e simplificando:

$$-A_{n,0,0}\theta_{n-1,0,0}^{t+1} + (1 + A_{n,0,0})\theta_{n,0,0}^{t+1} = (1 - B_{n,0,0} - C_{n,0,0})\theta_{n,0,0}^t + B_{n,0,0}\theta_{n,1,0}^t + C_{n,0,0}\theta_{n,0,1}^t + K \quad (B.15)$$

B.1.8 Contorno $k = 0, i = n, j = 1$ a $(m-1)$

De acordo com o balanço de energia:

$$q_{n-1,j,0} + q_{n,j-1,0} = q_{n,j+1,0} + q_{n,j,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (B.16)$$

A forma discretizada desta equação é:

$$\begin{aligned} & -A_{n,j,0}\theta_{n-1,j,0}^{t+1} + (1 + A_{n,j,0})\theta_{n,j,0}^{t+1} = B_{n,j,0}\theta_{n,j-1,0}^t + \\ & + (1 - 2B_{n,j,0} - C_{n,j,0})\theta_{n,j,0}^t + B_{n,j,0}\theta_{n,j+1,0}^t + C_{n,j,0}\theta_{n,j,1}^t \end{aligned} \quad (B.17)$$

B.1.9 Elemento $k = 0, i = n, j = m$

Assim como os pontos sobre o contorno anterior, este ponto também não recebe a fonte de calor durante o processo de soldagem. Pelo balanço de energia:

$$q_{n-1,m,0} + q_{n,m-1,0} = q_{n,m,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (B.18)$$

Após a adimensionalização e rearranjo:

$$-A_{n,m,0} \theta_{n-1,m,0}^{t+1} + (1 + A_{n,m,0}) \theta_{n,m,0}^{t+1} = B_{n,m,0} \theta_{n,m-1,0}^t + (1 - B_{n,m,0} - C_{n,m,0}) \theta_{n,m,0}^t + C_{n,m,0} \theta_{n,m,1}^t \quad (B.19)$$

B.2 Contorno $k = 1$ a $(p-1), i = 0$ a $n, j = 0$ a m

B.2.1 Contorno $k = 1$ a $(p-1), i = 0, j = 0$

Aplicando o balanço de energia para este ponto, obtém-se:

$$Q + q_{0,0,k-1} = q_{1,0,k} + q_{0,1,k} + q_{0,0,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (B.20)$$

Com as equações para taxas de transferência de calor e a área dada pela equação anterior:

$$\begin{aligned} Q - k_{0,0,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,0,k}^t - \theta_{0,0,k-1}^t)}{L \Delta z'} &= -k_{0,0,k} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{1,0,k}^{t+1} - \theta_{0,0,k}^{t+1})}{L \Delta x'} - \\ &- k_{0,0,k} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,1,k}^t - \theta_{0,0,k}^t)}{L \Delta y'} - k_{0,0,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,0,k+1}^t - \theta_{0,0,k}^t)}{L \Delta z'} + \\ &+ \rho c_{0,0,k} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{ref}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,0,k}^{t+1} - \theta_{0,0,k}^t)}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

$$(1 + A_{0,0,k})\theta_{0,0,k}^{t+1} - A_{0,0,k}\theta_{1,0,k}^{t+1} = C_{0,0,k}\theta_{0,0,k-1}^t + (1 - B_{0,0,k} - 2C_{0,0,k})\theta_{0,0,k}^t + B_{0,0,k}\theta_{0,1,k}^t + C_{0,0,k}\theta_{0,0,k+1}^t + K \quad (\text{B.21})$$

B.2.2 Contorno $k = 1$ a $(p-1)$, $i = 0$, $j = 1$ a $(m-1)$

Fazendo o balanço de energia para os elementos que formam este contorno:

$$q_{0,j-1,k} + q_{0,j,k-1} = q_{1,j,k} + q_{0,j+1,k} + q_{0,j,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.22})$$

A área para convecção é igual à do item anterior. Assim, a equação discretizada pode ser escrita como:

$$(1 + A_{0,j,k})\theta_{0,j,k}^{t+1} - A_{0,j,k}\theta_{1,j,k}^{t+1} = B_{0,j,k}\theta_{0,j-1,k}^t + C_{0,j,k}\theta_{0,j,k-1}^t + (1 - 2B_{0,j,k} - 2C_{0,j,k})\theta_{0,j,k}^t + B_{0,j,k}\theta_{0,j+1,k}^t + C_{0,j,k}\theta_{0,j,k+1}^t \quad (\text{B.23})$$

B.2.3 Contorno $k = 1$ a $(p-1)$, $i = 0$, $j = m$

O balanço de energia para este contorno fornece:

$$q_{0,m-1,k} + q_{0,m,k-1} = q_{1,m,k} + q_{0,m,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.24})$$

Substituindo as equações para taxas de condução, convecção e radiação, e adimensionalizando:

$$\begin{aligned} & -k_{0,m,k} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,m,k}^t - \theta_{0,m-1,k}^t)}{L \Delta y'} - k_{0,m,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,m,k}^t - \theta_{0,m,k-1}^t)}{L \Delta z'} = \\ & = -k_{0,m,k} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{1,m,k}^{t+1} - \theta_{0,m,k}^{t+1})}{L \Delta x'} - k_{0,m,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,m,k+1}^t - \theta_{0,m,k}^t)}{L \Delta z'} + \\ & + \rho c_{0,m,k} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{\text{ref}}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{0,m,k}^{t+1} - \theta_{0,m,k}^t)}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

$$(1 + A_{0,m,k})\theta_{0,m,k}^{t+1} - A_{0,m,k}\theta_{1,m,k}^{t+1} = B_{0,m,k}\theta_{0,m-1,k}^t + C_{0,m,k}\theta_{0,m,k-1}^t + (1 - B_{0,m,k} - 2C_{0,m,k})\theta_{0,m,k}^t + C_{0,m,k}\theta_{0,m,k+1}^t \quad (\text{B.25})$$

B.2.4 Contorno $k = 1$ a $(p-1)$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = 0$

Para estes pontos, o balanço de energia é dado por:

$$Q + q_{i-1,0,k} + q_{i,0,k-1} = q_{i+1,0,k} + q_{i,1,k} + q_{i,0,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} Q - k_{i,0,k} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_\infty) \frac{(\theta_{i,0,k}^{t+1} - \theta_{i,-1,0,k}^{t+1})}{L \Delta x'} - k_{i,0,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_\infty) \frac{(\theta_{i,0,k}^t - \theta_{i,0,k-1}^t)}{L \Delta z'} = \\ = -k_{i,0,k} L^2 \Delta y' \Delta z y (T_m - T_\infty) \frac{(\theta_{i+1,0,k}^{t+1} - \theta_{i,0,k}^{t+1})}{L \Delta x'} - k_{i,0,k} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_\infty) \frac{(\theta_{i,1,k}^t - \theta_{i,0,k}^t)}{L \Delta y'} - \\ - k_{i,0,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_\infty) \frac{(\theta_{i,0,k+1}^t - \theta_{i,0,k}^t)}{L \Delta z'} + \rho c_{i,0,k} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{ref}}{L^2} (T_m - T_\infty) \frac{(\theta_{i,0,k}^{t+1} - \theta_{i,0,k}^t)}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

Utilizando as definições dos coeficientes $A_{i,j,k}$, $B_{i,j,k}$ e $C_{i,j,k}$:

$$\begin{aligned} -A_{i,0,k}\theta_{i-1,0,k}^{t+1} + (1 + 2A_{i,0,k})\theta_{i,0,k}^{t+1} - A_{i,0,k}\theta_{i+1,0,k}^{t+1} = C_{i,0,k}\theta_{i,0,k-1}^t + \\ + (1 - B_{i,0,k} - 2C_{i,0,k})\theta_{i,0,k}^t + C_{i,0,k}\theta_{i,0,k+1}^t + B_{i,0,k}\theta_{i,1,k}^t + K \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

B.2.5 Contorno $k = 1$ a $(p-1)$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = m$

Pelo balanço de energia:

$$q_{i-1,m,k} + q_{i,m-1,k} + q_{i,m,k-1} = q_{i+1,m,k} + q_{i,m,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.28})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& -k_{i,m,k} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,m,k}^{t+1} - \theta_{i,m,k-1}^{t+1})}{L \Delta x'} - k_{i,m,k} L^2 \Delta x' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,m,k}^t - \theta_{i,m-1,k}^t)}{L \Delta y'} - \\
& -k_{i,m,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,m,k}^t - \theta_{i,m,k-1}^t)}{L \Delta z'} = -k_{i,m,k} L^2 \Delta y' \Delta z' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i+1,m,k}^{t+1} - \theta_{i,m,k}^{t+1})}{L \Delta x'} - \\
& -k_{i,m,k} L^2 \Delta x' \Delta y' (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,m,k+1}^t - \theta_{i,m,k}^t)}{L \Delta z'} + \rho c_{i,m,k} L^3 \Delta x' \Delta y' \Delta z' \frac{\alpha_{ref}}{L^2} (T_m - T_0) \frac{(\theta_{i,m,k}^{t+1} - \theta_{i,m,k}^t)}{\Delta \tau}
\end{aligned}$$

Após as simplificações:

$$\begin{aligned}
& -A_{i,m,k} \theta_{i-1,m,k}^{t+1} + (1 + 2A_{i,m,k}) \theta_{i,m,k}^{t+1} - A_{i,m,k} \theta_{i+1,m,k}^{t+1} = \\
& B_{i,m,k} \theta_{i,m-1,k}^t + C_{i,m,k} \theta_{i,m,k-1}^t + (1 - B_{i,m,k} - 2C_{i,m,k}) \theta_{i,m,k}^t + C_{i,m,k} \theta_{i,m,k+1}^t
\end{aligned} \tag{B.29}$$

B.2.6 Contorno $k = 1$ a $(p-1)$, $i = n$, $j = 0$

Este contorno sofre a atuação da fonte de calor em todos os passes depositados. Do balanço de energia, tem-se:

$$Q + q_{n-1,0,k} + q_{n,0,k-1} = q_{n,1,k} + q_{n,0,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.30}$$

Na forma de diferenças finitas:

$$\begin{aligned}
& -A_{n,0,k} \theta_{n-1,0,k}^{t+1} + (1 + A_{n,0,k}) \theta_{n,0,k}^{t+1} = C_{n,0,k} \theta_{n,0,k-1}^t \\
& + (1 - B_{n,0,k} - 2C_{n,0,k}) \theta_{n,0,k}^t + C_{n,0,k} \theta_{n,0,k+1}^t + B_{n,0,k} \theta_{n,1,k}^t + K
\end{aligned} \tag{B.31}$$

B.2.7 Contorno $k = 1$ a $(p-1)$, $i = n$, $j = 1$ a $(m-1)$

O balanço de energia para este caso fornece:

$$q_{n-1,j,k} + q_{n,j-1,k} + q_{n,j,k-1} = q_{n,j+1,k} + q_{n,j,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.32}$$

Como resultado da equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& -A_{n,j,k} \theta_{n-1,j,k}^{t+1} + (1 + A_{n,j,k}) \theta_{n,j,k}^{t+1} = B_{n,j,k} \theta_{n,j-1,k}^t + \\
& + C_{n,j,k} \theta_{n,j,k-1}^t + (1 - 2B_{n,j,k} - 2C_{n,j,k}) \theta_{n,j,k}^t + B_{n,j,k} \theta_{n,j+1,k}^t + C_{n,j,k} \theta_{n,j,k+1}^t
\end{aligned} \tag{B.33}$$

B.2.8 Contorno $k = 1$ a $(p-1)$, $i = n$, $j = m$

Fazendo o balanço de energia para os elementos deste contorno, obtém-se:

$$q_{n-1,m,k} + q_{n,m-1,k} + q_{n,m,k-1} = q_{n,m,k+1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}
& -A_{n,m,k} \theta_{n-1,m,k}^{t+1} + (1 + A_{n,m,k}) \theta_{n,m,k}^{t+1} = B_{n,m,k} \theta_{n,m-1,k}^t + \\
& + C_{n,m,k} \theta_{n,m,k-1}^t (1 - B_{n,m,k} - 2C_{n,m,k}) \theta_{n,m,k}^t + C_{n,m,k} \theta_{n,m,k+1}^t
\end{aligned} \tag{B.35}$$

B.3 Contorno $k = p$, $i = 0$ a n , $j = 0$ a m

Para a discretização do plano xy para o ponto $k = p$ (superfície superior da chapa), as áreas de convecção e radiação são as mesmas já definidas durante a discretização do plano xy para $k = 0$ (superfície inferior da chapa). Portanto, a obtenção das equações do item seguinte será feita de forma resumida, considerando apenas o balanço de energia e a equação final para cada caso.

B.3.1 Elemento $k = p$, $i = 0$, $j = 0$

Este elemento recebe a fonte de calor somente no último passe. Pelo balanço de energia:

$$Q + q_{0,0,p-1} = q_{1,0,p} + q_{0,1,p} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.36}$$

Na forma de discretizada:

$$(1 + A_{0,0,p})\theta_{0,0,p}^{t+1} - A_{0,0,p}\theta_{1,0,p}^{t+1} = C_{0,0,p}\theta_{0,0,p-1}^t + (1 - B_{0,0,p} - C_{0,0,p})\theta_{0,0,p}^t + B_{0,0,p}\theta_{0,1,p}^t + K \quad (\text{B.37})$$

B.3.2 Contorno $k = p$, $i = 0$, $j = 1$ a $(m-1)$

Do balanço de energia:

$$q_{0,j-1,p} + q_{0,j,p-1} = q_{1,j,p} + q_{0,j+1,p} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.38})$$

Da equação acima resulta:

$$(1 + A_{0,j,p})\theta_{0,j,p}^{t+1} - A_{0,j,p}\theta_{1,j,p}^{t+1} = B_{0,j,p}\theta_{0,j-1,p}^t + C_{0,j,p}\theta_{0,j,p-1}^t + (1 - 2B_{0,j,p} - C_{0,j,p})\theta_{0,j,p}^t + B_{0,j,p}\theta_{0,j+1,p}^t \quad (\text{B.39})$$

B.3.3 Elemento $k = p$, $i = 0$, $j = m$

O balanço de energia aplicado a este ponto fornece:

$$q_{0,m-1,p} + q_{0,m,p-1} = q_{1,m,1} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.40})$$

Após a adimensionalização e o rearranjo da Equação (B.40), obtém-se:

$$(1 + A_{0,m,p})\theta_{0,m,p}^{t+1} - A_{0,m,p}\theta_{1,m,p}^{t+1} = B_{0,m,p}\theta_{0,m-1,p}^t + C_{0,m,p}\theta_{0,m,p-1}^t + (1 - B_{0,m,p} - C_{0,m,p})\theta_{0,m,p}^t \quad (\text{B.41})$$

B.3.4 Contorno $k = p$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = 0$

Os pontos sobre este contorno recebem o calor da fonte apenas no último passe. Aplicando o balanço de energia, tem-se:

$$Q + q_{i-1,0,p} + q_{i,0,p-1} = q_{i+1,0,p} + q_{i,1,p} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.42})$$

Rearranjando:

$$\begin{aligned} & -A_{i,0,p} \theta_{i-1,0,p}^{t+1} + (1 + 2A_{i,0,p}) \theta_{i,0,p}^{t+1} - A_{i,0,p} \theta_{i+1,0,p}^{t+1} = \\ & = C_{i,0,p} \theta_{i,0,p-1}^t + (1 - B_{i,0,p} - C_{i,0,p}) \theta_{i,0,p}^t + B_{i,0,p} \theta_{i,1,p}^t + K \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

B.3.5 Elemento $k = p$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = 1$ a $(m-1)$

Fazendo o balanço de energia:

$$q_{i-1,j,p} + q_{i,j-1,p} + q_{i,j,p-1} = q_{i+1,j,p} + q_{i,j+1,p} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.44})$$

A equação resultante pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & -A_{i,j,p} \theta_{i-1,j,p}^{t+1} + (1 + 2A_{i,j,p}) \theta_{i,j,p}^{t+1} - A_{i,j,p} \theta_{i+1,j,p}^{t+1} = \\ & = B_{i,j,p} \theta_{i,j-1,p}^t + C_{i,j,p} \theta_{i,j,p-1}^t + (1 - 2B_{i,j,p} - C_{i,j,p}) \theta_{i,j,p}^t + B_{i,j,p} \theta_{i,j+1,p}^t \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

B.3.6 Contorno $k = p$, $i = 1$ a $(n-1)$, $j = m$

Fazendo o balanço de energia para este contorno:

$$q_{i-1,m,p} + q_{i,m-1,p} + q_{i,m,p-1} = q_{i+1,m,p} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.46})$$

Substituindo as equações para adimensionalização:

$$\begin{aligned}
& -A_{i,m,p} \theta_{i-1,m,p}^{t+1} + (1 + 2A_{i,m,p}) \theta_{i,m,p}^{t+1} - A_{i,m,p} \theta_{i+1,m,p}^{t+1} = \\
& = B_{i,m,p} \theta_{i,m-1,p}^t + C_{i,m,p} \theta_{i,m,p-1}^t + (1 - B_{i,m,p} - C_{i,m,p}) \theta_{i,m,p}^t
\end{aligned} \tag{B.47}$$

B.3.7 Elemento $k = p, i = n, j = 0$

De acordo com o balanço de energia, para este elemento:

$$Q + q_{n-1,0,p} + q_{n,0,p-1} = q_{n,1,p} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.48}$$

$$\begin{aligned}
& -A_{n,0,p} \theta_{n-1,0,p}^{t+1} + (1 + A_{n,0,p}) \theta_{n,0,p}^{t+1} = C_{n,0,p} \theta_{n,0,p-1}^t + (1 - B_{n,0,p} - C_{n,0,p}) \theta_{n,0,p}^t + B_{n,0,p} \theta_{n,1,p}^t + K
\end{aligned} \tag{B.49}$$

B.3.8 Contorno $k = p, i = n, j = 1$ a $(m-1)$

O balanço de energia aplicado aos pontos deste contorno fornece:

$$q_{n-1,j,p} + q_{n,j-1,p} + q_{n,j,p-1} = q_{n,j+1,p} + mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.50}$$

A equação resultante é escrita como:

$$\begin{aligned}
& -A_{n,j,p} \theta_{n-1,j,p}^{t+1} + (1 + A_{n,j,p}) \theta_{n,j,p}^{t+1} = B_{n,j,p} \theta_{n,j-1,p}^t + \\
& + C_{n,j,p} \theta_{n,j,p-1}^t + (1 - 2B_{n,j,p} - C_{n,j,p}) \theta_{n,j,p}^t + B_{n,j,p} \theta_{n,j+1,p}^t
\end{aligned} \tag{B.51}$$

B.3.9 Elemento $k = p, i = n, j = m$

Este ponto não recebe calor da fonte durante todo o processo. Pelo balanço de energia:

$$q_{n-1,m,p} + q_{n,m-1,p} + q_{n,m,p-1} = mc \frac{\partial T}{\partial t} \tag{B.52}$$

Simplificando:

$$-A_{n,m,p}\theta_{n-1,m,p}^{t+1} + (1 + A_{n,m,p})\theta_{n,m,p}^{t+1} = B_{n,m,p}\theta_{n,m-1,p}^t + C_{n,m,p}\theta_{n,m,p-1}^t + (1 - B_{n,m,p} - C_{n,m,p})\theta_{n,m,p}^t \quad (B.53)$$

Todos os planos xy ao longo da espessura da peça foram discretizados. Os itens B.4, B.5 e B.6 adiantes tratam da discretização de todos os planos yz ao longo da direção x de soldagem. Será utilizada a forma implícita para a direção y e explícita para as direções x e z, e o instante de tempo considerado agora é o t+2. As equações necessárias para a determinação das temperaturas em todos os planos yz já foram anteriormente obtidas no instante t+1. Assim, para o instante t+2 a ser tratado agora estas equações serão apenas rescritas na forma conveniente, não sendo necessária uma discretização detalhada das mesmas.

B.4 Contorno i = 0, j = 0 a m, k = 0 a p

B.4.1 Elemento i = 0, k = 0, j = 0

$$(1 + B_{0,0,0})\theta_{0,0,0}^{t+2} - B_{0,0,0}\theta_{0,1,0}^{t+2} = (1 - A_{0,0,0} - C_{0,0,0})\theta_{0,0,0}^{t+1} + A_{0,0,0}\theta_{1,0,0}^{t+1} + C_{0,0,0}\theta_{0,0,1}^{t+1} + K \quad (B.54)$$

B.4.2 Contorno i = 0, k = 0, j = 1 a (m-1)

$$\begin{aligned} & -B_{0,j,0}\theta_{0,j-1,0}^{t+2} + (1 + 2B_{0,j,0})\theta_{0,j,0}^{t+2} - B_{0,j,0}\theta_{0,j+1,0}^{t+2} = \\ & = (1 - A_{0,j,0} - C_{0,j,0})\theta_{0,j,0}^{t+1} + A_{0,j,0}\theta_{1,j,0}^{t+1} + C_{0,j,0}\theta_{0,j,1}^{t+1} \end{aligned} \quad (B.55)$$

B.4.3 Elemento i = 0, k = 0, j = m

$$-B_{0,m,0}\theta_{0,m-1,0}^{t+2} + (1 + B_{0,m,0})\theta_{0,m,0}^{t+2} = (1 - A_{0,m,0} - C_{0,m,0})\theta_{0,m,0}^{t+1} + A_{0,m,0}\theta_{1,m,0}^{t+1} + C_{0,m,0}\theta_{0,m,1}^{t+1} \quad (B.56)$$

B.4.4 Contorno $i = 0, k = 1$ a $(p-1), j = 0$

$$(1 + B_{0,0,k})\theta_{0,0,k}^{t+2} - B_{0,0,k}\theta_{0,1,k}^{t+2} = C_{0,0,k}\theta_{0,0,k-1}^{t+1} + (1 - A_{0,0,k} - 2C_{0,0,k})\theta_{0,0,k}^{t+1} + A_{0,0,k}\theta_{1,0,k}^{t+1} + C_{0,0,k}\theta_{0,0,k+1}^{t+1} + K \quad (B.57)$$

B.4.5 Contorno $i = 0, k = 1$ a $(p-1), j = 1$ a $(m-1)$

$$-B_{0,j,k}\theta_{0,j-1,k}^{t+1} + (1 + 2B_{0,j,k})\theta_{0,j,k}^{t+2} - B_{0,j,k}\theta_{0,j+1,k}^{t+2} = C_{0,j,k}\theta_{0,j,k-1}^{t+1} + (1 - A_{0,j,k} - 2C_{0,j,k})\theta_{0,j,k}^{t+1} + C_{0,j,k}\theta_{0,j+1,k}^{t+1} + A_{0,j,k}\theta_{1,j,k}^{t+1} \quad (B.58)$$

B.4.6 Contorno $i = 0, k = 1$ a $(p-1), j = m$

$$-B_{0,m,k}\theta_{0,m-1,k}^{t+2} + (1 + B_{0,m,k})\theta_{0,m,k}^{t+2} = C_{0,m,k}\theta_{0,m,k-1}^{t+1} + (1 - A_{0,m,k} - 2C_{0,m,k})\theta_{0,m,k}^{t+1} + A_{0,m,k}\theta_{1,m,k}^{t+1} + C_{0,m,k}\theta_{0,m,k+1}^t \quad (B.59)$$

B.4.7 Elemento $i = 0, k = p, j = 0$

$$(1 + B_{0,0,p})\theta_{0,0,p}^{t+2} - B_{0,0,p}\theta_{0,1,p}^{t+2} = C_{0,0,p}\theta_{0,0,p-1}^{t+1} + (1 - A_{0,0,p} - C_{0,0,p})\theta_{0,0,p}^{t+1} + A_{0,0,p}\theta_{1,0,p}^{t+1} + K \quad (B.60)$$

B.4.8 Contorno $i = 0, k = p, j = 1$ a $(m-1)$

$$-B_{0,j,p}\theta_{0,j-1,p}^{t+2} + (1 + 2B_{0,j,p})\theta_{0,j,p}^{t+2} - B_{0,j,p}\theta_{0,j+1,p}^{t+2} = C_{0,j,p}\theta_{0,j,p-1}^{t+1} + (1 - A_{0,j,p} - C_{0,j,p})\theta_{0,j,p}^{t+1} + A_{0,j,p}\theta_{1,j,p}^{t+1} \quad (B.61)$$

B.4.9 Elemento $i = 0, k = p, j = m$

$$-B_{0,m,p}\theta_{0,m-1,p}^{t+2} + (1 + B_{0,m,p})\theta_{0,m,p}^{t+2} = C_{0,m,p}\theta_{0,m,p-1}^{t+1} + (1 - A_{0,m,p} - C_{0,m,p})\theta_{0,m,p}^{t+1} + A_{0,m,p}\theta_{1,m,p}^{t+1} \quad (B.62)$$

B.5 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = 0$ a p , $j = 0$ a m

B.5.1 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = 0$, $j = 0$

$$(1 + B_{i,0,0})\theta_{i,0,0}^{t+2} - B_{i,0,0}\theta_{i,1,0}^{t+2} = A_{i,0,0}\theta_{i-1,0,0}^{t+1} + (1 - 2A_{i,0,0} - C_{i,0,0})\theta_{i,0,0}^{t+1} + A_{i,0,0}\theta_{i+1,0,0}^{t+1} + C_{i,0,0}\theta_{i,0,1}^{t+1} + K \quad (B.63)$$

B.5.2 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = 0$, $j = 1$ a $(m-1)$

$$-B_{i,j,0}\theta_{i,j-1,0}^{t+2} + (1 + B_{i,j,0})\theta_{i,j,0}^{t+2} - B_{i,j,0}\theta_{i,j+1,0}^{t+2} = A_{i,j,0}\theta_{i-1,j,0}^{t+1} + (1 - 2A_{i,j,0} - C_{i,j,0})\theta_{i,j,0}^{t+1} + A_{i,j,0}\theta_{i+1,j,0}^{t+1} + C_{i,j,0}\theta_{i,j,1}^{t+1} \quad (B.64)$$

B.5.3 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = 0$, $j = m$

$$-B_{i,m,0}\theta_{i,m-1,0}^{t+2} + (1 + B_{i,m,0})\theta_{i,m,0}^{t+2} = A_{i,m,0}\theta_{i-1,m,0}^{t+1} + (1 - 2A_{i,m,0} - C_{i,m,0})\theta_{i,m,0}^{t+1} + A_{i,m,0}\theta_{i+1,m,0}^{t+1} + C_{i,m,0}\theta_{i,m,1}^{t+1} \quad (B.65)$$

B.5.4 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = 1$ a $(p-1)$, $j = 0$

$$(1 + B_{i,0,k})\theta_{i,0,k}^{t+2} - B_{i,0,k}\theta_{i,1,k}^{t+2} = A_{i,0,k}\theta_{i-1,0,k}^{t+1} + C_{i,0,k}\theta_{i,0,k-1}^{t+1} + (1 - 2A_{i,0,k} - 2C_{i,0,k})\theta_{i,0,k}^{t+1} + A_{i,0,k}\theta_{i+1,0,k}^{t+1} + C_{i,0,k}\theta_{i,0,k+1}^{t+1} + K \quad (B.66)$$

B.5.5 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = 1$ a $(p-1)$, $j = m$

$$-B_{i,m,k}\theta_{i,m-1,k}^{t+2} + (1 + B_{i,m,k})\theta_{i,m,k}^{t+2} = A_{i,m,k}\theta_{i-1,m,k}^{t+1} + C_{i,m,k}\theta_{i,m,k-1}^{t+1} + (1 - 2A_{i,m,k} - 2C_{i,m,k})\theta_{i,m,k}^{t+1} + A_{i,m,k}\theta_{i+1,m,k}^{t+1} + C_{i,m,k}\theta_{i,m,k+1}^{t+1} \quad (B.67)$$

B.5.6 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = p$, $j = 0$

$$(1 + B_{i,0,p})\theta_{i,0,p}^{t+2} - B_{i,0,p}\theta_{i,1,p}^{t+2} = A_{i,0,p}\theta_{i-1,0,p}^{t+1} + C_{i,0,p}\theta_{i,0,p-1}^{t+1} + (1 - 2A_{i,0,p} - C_{i,0,p})\theta_{i,0,p}^{t+1} + A_{i,0,p}\theta_{i+1,0,p}^{t+1} + K \quad (B.68)$$

B.5.7 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = p$, $j = 1$ a $(m-1)$

$$\begin{aligned} & -B_{i,j,p} \theta_{i,j-1,p}^{t+2} + (1 + 2B_{i,j,p}) \theta_{i,j,p}^{t+2} - B_{i,j,p} \theta_{i,j+1,p}^{t+2} = \\ & A_{i,j,p} \theta_{i-1,j,p}^{t+1} + C_{i,j,p} \theta_{i,j,p-1}^{t+1} + (1 - 2A_{i,j,p} - C_{i,j,p}) \theta_{i,j,p}^{t+1} + A_{i,j,p} \theta_{i+1,j,p}^{t+1} \end{aligned} \quad (B.69)$$

B.5.8 Contorno $i = 1$ a $(n-1)$, $k = p$, $j = m$

$$\begin{aligned} & -B_{i,m,p} \theta_{i,m-1,p}^{t+2} + (1 + B_{i,m,p}) \theta_{i,m,p}^{t+2} = A_{i,m,p} \theta_{i-1,m,p}^{t+1} + \\ & + C_{i,m,p} \theta_{i,m,p-1}^{t+1} + (1 - 2A_{i,m,p} - C_{i,m,p}) \theta_{i,m,p}^{t+1} + A_{i,m,p} \theta_{i+1,m,p}^{t+1} \end{aligned} \quad (B.70)$$

B.6 Contorno $i = n$, $k = 0$ a p , $j = 0$ a m

B.6.1 Elemento $i = n$, $k = 0$, $j = 0$

$$(1 + B_{n,0,0}) \theta_{n,0,0}^{t+2} - B_{n,0,0} \theta_{n,1,0}^{t+2} = A_{n,0,0} \theta_{n-1,0,0}^{t+1} + (1 - A_{n,0,0} - C_{n,0,0}) \theta_{n,0,0}^{t+1} + C_{n,0,0} \theta_{n,0,1}^{t+1} + K \quad (B.71)$$

B.6.2 Contorno $i = n$, $k = 0$, $j = 1$ a $(m-1)$

$$\begin{aligned} & -B_{n,j,0} \theta_{n,j-1,0}^{t+2} + (1 + 2B_{n,j,0}) \theta_{n,j,0}^{t+2} - B_{n,j,0} \theta_{n,j+1,0}^{t+2} = \\ & = A_{n,j,0} \theta_{n-1,j,0}^{t+1} + (1 - A_{n,j,0} - C_{n,j,0}) \theta_{n,j,0}^{t+1} + C_{n,j,0} \theta_{n,j,1}^{t+1} \end{aligned} \quad (B.72)$$

B.6.3 Elemento $i = n$, $k = 0$, $j = m$

$$-B_{n,m,0} \theta_{n,m-1,0}^{t+2} + (1 + B_{n,m,0}) \theta_{n,m,0}^{t+2} = A_{n,m,0} \theta_{n-1,m,0}^{t+1} + (1 - A_{n,m,0} - C_{n,m,0}) \theta_{n,m,0}^{t+1} + C_{n,m,0} \theta_{n,m,1}^{t+1} \quad (B.73)$$

B.6.4 Contorno $i = n$, $k = 1$ a $(p-1)$, $j = 0$

$$\begin{aligned} & (1 + B_{n,0,k}) \theta_{n,0,k}^{t+2} - B_{n,0,k} \theta_{n,1,k}^{t+2} = A_{n,0,k} \theta_{n-1,0,k}^{t+1} + \\ & + C_{n,0,k} \theta_{n,0,k-1}^t + (1 - A_{n,0,k} - 2C_{n,0,k}) \theta_{n,0,k}^{t+1} + C_{n,0,k} \theta_{n,0,k+1}^t + K \end{aligned} \quad (B.74)$$

B.6.5 Contorno $i = n$, $k = 1$ a $(p-1)$, $j = 1$ a $(m-1)$

$$\begin{aligned} & -B_{n,j,k} \theta_{n,j-1,k}^{t+2} + (1 + 2B_{n,j,k}) \theta_{n,j,k}^{t+2} - B_{n,j,k} \theta_{n,j+1,k}^{t+2} = \\ & A_{n,j,k} \theta_{n-1,j,k}^{t+1} + C_{n,j,k} \theta_{n,j,k-1}^t + (1 - A_{n,j,k} - 2C_{n,j,k}) \theta_{n,j,k}^{t+1} + C_{n,j,k} \theta_{n,j,k+1}^t \end{aligned} \quad (B.75)$$

B.6.6 Contorno $i = n$, $k = 1$ a $(p-1)$, $j = m$

$$\begin{aligned} & -B_{n,m,k} \theta_{n,m-1,k}^{t+2} + (1 + B_{n,m,k}) \theta_{n,m,k}^{t+2} = \\ & A_{n,m,k} \theta_{n-1,m,k}^{t+1} + C_{n,m,k} \theta_{n,m,k-1}^t + (1 - A_{n,m,k} - 2C_{n,m,k}) \theta_{n,m,k}^t + C_{n,m,k} \theta_{n,m,k+1}^t \end{aligned} \quad (B.76)$$

B.6.7 Elemento $i = n$, $k = p$, $j = 0$

$$(1 + B_{n,0,p}) \theta_{n,0,p}^{t+2} - B_{n,0,p} \theta_{n,1,p}^{t+2} = A_{n,0,p} \theta_{n-1,0,p}^{t+1} + (1 - A_{n,0,p} - C_{n,0,p}) \theta_{n,0,p}^{t+1} + C_{n,0,p} \theta_{n,0,p-1}^{t+1} + K \quad (B.77)$$

B.6.8 Contorno $i = n$, $k = p$, $j = 1$ a $(m-1)$

$$\begin{aligned} & -B_{n,j,p} \theta_{n,j-1,p}^{t+2} + (1 + 2B_{n,j,p}) \theta_{n,j,p}^{t+2} - B_{n,j,p} \theta_{n,j+1,p}^{t+2} = \\ & = A_{n,j,p} \theta_{n-1,j,p}^{t+1} + C_{n,j,p} \theta_{n,j,p-1}^{t+1} + (1 - A_{n,j,p} - C_{n,j,p}) \theta_{n,j,p}^{t+1} \end{aligned} \quad (B.78)$$

B.6.9 Contorno $i = n$, $k = p$, $j = m$

$$-B_{n,m,p} \theta_{n,m-1,p}^{t+2} + (1 + B_{n,m,p}) \theta_{n,m,p}^{t+2} = A_{n,m,p} \theta_{n-1,m,p}^{t+1} + (1 - A_{n,m,p} - C_{n,m,p}) \theta_{n,m,p}^{t+1} + C_{n,m,p} \theta_{n,m,p-1}^{t+1} \quad (B.79)$$

Todos os planos yz foram discretizados para cada elemento da direção x . Então, será feita novamente uma mudança de direção, para a discretização de todos os planos xz ao longo da direção y . Será utilizada a forma implícita para a direção z e explícita para as

direções x e y. Da mesma forma como ocorreu na discretização dos planos yz no instante t+2, todas as equações necessárias já foram obtidas no instante t+1. Portanto, as equações serão apenas rescritas para cada caso, considerando o instante t+3.

B.7 Contorno j = 0, i = 0 a n, k = 0 a p

B.7.1 Elemento j = 0, i = 0, k = 0

$$(1 + C_{0,0,0})\theta_{0,0,0}^{t+3} - C_{0,0,0}\theta_{0,0,1}^{t+3} = (1 - A_{0,0,0} - B_{0,0,0})\theta_{0,0,0}^{t+2} + A_{0,0,0}\theta_{1,0,0}^{t+2} + B_{0,0,0}\theta_{0,1,0}^{t+2} + K \quad (B.80)$$

B.7.2 Contorno j = 0, i = 0, k = 1 a (p-1)

$$\begin{aligned} & -C_{0,0,k}\theta_{0,0,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{0,0,k})\theta_{0,0,k}^{t+3} - C_{0,0,k}\theta_{0,0,k+1}^{t+3} = \\ & = (1 - A_{0,0,k} - B_{0,0,k})\theta_{0,0,k}^{t+2} + A_{0,0,k}\theta_{1,0,k}^{t+2} + B_{0,0,k}\theta_{0,1,k}^{t+2} + K \end{aligned} \quad (B.81)$$

B.7.3 Elemento j = 0, i = 0, k = p

$$-C_{0,0,p}\theta_{0,0,p-1}^{t+3} + (1 + C_{0,0,p})\theta_{0,0,p}^{t+3} = (1 - A_{0,0,p} - B_{0,0,p})\theta_{0,0,p}^{t+2} + A_{0,0,p}\theta_{1,0,p}^{t+2} + B_{0,0,p}\theta_{0,1,p}^{t+2} + K \quad (B.82)$$

B.7.4 Contorno j = 0, i = 1 a (n-1), k = 0

$$\begin{aligned} & (1 + C_{i,0,0})\theta_{i,0,0}^{t+3} - C_{i,0,0}\theta_{i,0,1}^{t+3} = A_{i,0,0}\theta_{i-1,0,0}^{t+2} + \\ & + (1 - 2A_{i,0,0} - B_{i,0,0})\theta_{i,0,0}^{t+2} + A_{i,0,0}\theta_{i+1,0,0}^{t+2} + B_{i,0,0}\theta_{i,1,0}^{t+2} + K \end{aligned} \quad (B.83)$$

B.7.5 Contorno j = 0, i = 1 a (n-1), k = 1 a (p-1)

$$\begin{aligned} & -C_{i,0,k}\theta_{i,0,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{i,0,k})\theta_{i,0,k}^{t+3} - C_{i,0,k}\theta_{i,0,k+1}^{t+3} = A_{i,0,k}\theta_{i-1,0,k}^{t+2} + \\ & + (1 - 2A_{i,0,k} - B_{i,0,k})\theta_{i,0,k}^{t+2} + A_{i,0,k}\theta_{i+1,0,k}^{t+2} + B_{i,0,k}\theta_{i,1,k}^{t+2} + K \end{aligned} \quad (B.84)$$

B.7.6 Contorno $j = 0, i = 1$ a $(n-1), k = p$

$$-C_{i,0,p} \theta_{i,0,p-1}^{t+3} + (1 + C_{i,0,p}) \theta_{i,0,p}^{t+3} = A_{i,0,p} \theta_{i-1,0,p}^{t+2} + (1 - 2A_{i,0,p} - B_{i,0,p}) \theta_{i,0,p}^{t+2} + A_{i,0,p} \theta_{i+1,0,p}^{t+1} + B_{i,0,p} \theta_{i,1,p}^{t+2} + K \quad (B.85)$$

B.7.7 Elemento $j = 0, i = n, k = 0$

$$(1 + C_{n,0,0}) \theta_{n,0,0}^{t+3} - C_{n,0,0} \theta_{n,0,1}^{t+3} = (1 - A_{n,0,0} - B_{n,0,0}) \theta_{n,0,0}^{t+2} + A_{n,0,0} \theta_{n-1,0,0}^{t+2} + B_{n,0,0} \theta_{n,1,0}^{t+2} + K \quad (B.86)$$

B.7.8 Contorno $j = 0, i = n, k = 1$ a $(p-1)$

$$\begin{aligned} & -C_{n,0,k} \theta_{n,0,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{n,0,k}) \theta_{n,0,k}^{t+3} - C_{n,0,k} \theta_{n,0,k+1}^{t+3} = \\ & = A_{n,0,k} \theta_{n-1,0,k}^{t+2} + (1 - A_{n,0,k} - B_{n,0,k}) \theta_{n,0,k}^{t+2} + B_{n,0,k} \theta_{n,1,k}^{t+2} + K \end{aligned} \quad (B.87)$$

B.7.9 Elemento $j = 0, i = n, k = p$

$$\begin{aligned} & -C_{n,0,p} \theta_{n,0,p-1}^{t+3} + (1 + C_{n,0,p}) \theta_{n,0,p}^{t+3} = \\ & A_{n,0,p} \theta_{n-1,0,p}^{t+2} + (1 - A_{n,0,p} - B_{n,0,p}) \theta_{n,0,p}^{t+2} + B_{n,0,p} \theta_{n,1,p}^{t+2} + K \end{aligned} \quad (B.88)$$

B.8 Contorno $j = 1$ a $(m-1), i = 0$ a $n, k = 0$ a p

B.8.1 Contorno $j = 1$ a $(m-1), i = 0, k = 0$

$$\begin{aligned} & (1 + C_{0,j,0}) \theta_{0,j,0}^{t+3} - C_{0,j,0} \theta_{0,j,1}^{t+3} = \\ & B_{0,j,0} \theta_{0,j+1,0}^{t+2} + (1 - A_{0,j,0} - 2B_{0,j,0}) \theta_{0,j,0}^{t+2} + B_{0,j,0} \theta_{0,j+1,0}^{t+2} + A_{0,j,0} \theta_{1,j,0}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.89)$$

B.8.2 Contorno $j = 1$ a $(m-1), i = 0, k = 1$ a $(p-1)$

$$\begin{aligned} & -C_{0,j,k} \theta_{0,j,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{0,j,k}) \theta_{0,j,k}^{t+3} - C_{0,j,k} \theta_{0,j,k+1}^{t+3} = \\ & B_{0,j,k} \theta_{0,j-1,k}^{t+2} + (1 - A_{0,j,k} - 2B_{0,j,k}) \theta_{0,j,k}^{t+2} + B_{0,j,k} \theta_{0,j+1,k}^{t+2} + A_{0,j,k} \theta_{1,j,k}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.90)$$

B.8.3 Contorno $j = 1$ a $(m-1)$, $i = 0$, $k = p$

$$\begin{aligned} -C_{0,j,p}\theta_{0,j,p-1}^{t+3} + (1 + C_{0,j,p})\theta_{0,j,p}^{t+3} &= B_{0,j,p}\theta_{0,j-1,p}^{t+2} + \\ + (1 - A_{0,j,p} - 2B_{0,j,p})\theta_{0,j,p}^{t+2} &+ B_{0,j,p}\theta_{0,j+1,p}^{t+2} + A_{0,j,p}\theta_{1,j,p}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.91)$$

B.8.4 Contorno $j = 1$ a $(m-1)$, $i = 1$ a $(n-1)$, $k = 0$

$$\begin{aligned} (1 + C_{i,j,0})\theta_{i,j,0}^{t+3} - C_{i,j,0}\theta_{i,j,1}^{t+3} &= A_{i,j,0}\theta_{i-1,j,0}^{t+2} + B_{i,j,0}\theta_{i,j-1,0}^{t+2} + \\ + (1 - 2A_{i,j,0} - 2B_{i,j,0})\theta_{i,j,0}^{t+2} &+ A_{i,j,0}\theta_{i+1,j,0}^{t+2} + B_{i,j,0}\theta_{i,j+1,0}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.92)$$

B.8.5 Contorno $j = 1$ a $(m-1)$, $i = 1$ a $(n-1)$, $k = p$

$$\begin{aligned} -C_{i,j,p}\theta_{i,j,p-1}^{t+3} + (1 + C_{i,j,p})\theta_{i,j,p}^{t+3} &= A_{i,j,p}\theta_{i-1,j,p}^{t+2} + B_{i,j,p}\theta_{i,j-1,p}^{t+2} + \\ + (1 - 2A_{i,j,p} - 2B_{i,j,p})\theta_{i,j,p}^{t+2} &+ A_{i,j,p}\theta_{i+1,j,p}^{t+2} + B_{i,j,p}\theta_{i,j+1,p}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.93)$$

B.8.6 Contorno $j = 1$ a $(m-1)$, $i = n$, $k = 0$

$$(1 + C_{n,j,0})\theta_{n,j,0}^{t+3} - C_{n,j,0}\theta_{n,j,1}^{t+3} = A_{n,j,0}\theta_{n-1,j,0}^{t+2} + B_{n,j,0}\theta_{n,j-1,0}^{t+2} + (1 - A_{n,j,0} - 2B_{n,j,0})\theta_{n,j,0}^{t+2} + B_{n,j,0}\theta_{n,j+1,0}^{t+2} \quad (B.94)$$

B.8.7 Contorno $j = 1$ a $(m-1)$, $i = n$, $k = 1$ a $(p-1)$

$$\begin{aligned} -C_{n,j,k}\theta_{n,j,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{n,j,k})\theta_{n,j,k}^{t+3} - C_{n,j,k}\theta_{n,j,k+1}^{t+3} &= \\ A_{n,j,k}\theta_{n-1,j,k}^{t+2} + B_{n,j,k}\theta_{n,j-1,k}^{t+2} &+ (1 - A_{n,j,k} - 2B_{n,j,k})\theta_{n,j,k}^{t+2} + B_{n,j,k}\theta_{n,j+1,k}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.95)$$

B.8.8 Contorno $j = 1$ a $(m-1)$, $i = n$, $k = p$

$$\begin{aligned} -C_{n,j,p}\theta_{n,j,p-1}^{t+3} + (1 + C_{n,j,p})\theta_{n,j,p}^{t+3} &= A_{n,j,p}\theta_{n-1,j,p}^{t+2} + B_{n,j,p}\theta_{n,j-1,p}^{t+2} + (1 - A_{n,j,p} - 2B_{n,j,p})\theta_{n,j,p}^{t+2} + B_{n,j,p}\theta_{n,j+1,p}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.96)$$

B.9 Contorno $j = m, i = 0$ a $n, k = 0$ a p

B.9.1 Elemento $j = m, i = 0, k = 0$

$$(1 + C_{0,m,0})\theta_{0,m,0}^{t+3} - C_{0,m,0}\theta_{0,m,1}^{t+3} = B_{0,m,0}\theta_{0,m-1,0}^{t+2} + (1 - A_{0,m,0} - B_{0,m,0})\theta_{0,m,0}^{t+2} + A_{0,m,0}\theta_{1,m,0}^{t+2} \quad (B.97)$$

B.9.2 Contorno $j = m, i = 0, k = 1$ a $(p-1)$

$$\begin{aligned} & -C_{0,m,k}\theta_{0,m,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{0,m,k})\theta_{0,m,k}^{t+3} - C_{0,m,k}\theta_{0,m,k+1}^{t+3} = \\ & = B_{0,m,k}\theta_{0,m-1,k}^{t+2} + (1 - A_{0,m,k} - B_{0,m,k})\theta_{0,m,k}^{t+2} + A_{0,m,k}\theta_{1,m,k}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.98)$$

B.9.3 Elemento $j = m, i = 0, k = p$

$$\begin{aligned} & -C_{0,m,p}\theta_{0,m,p-1}^{t+3} + (1 + C_{0,m,p})\theta_{0,m,p}^{t+3} = \\ & = B_{0,m,p}\theta_{0,m-1,p}^{t+2} + (1 - A_{0,m,p} - B_{0,m,p})\theta_{0,m,p}^{t+2} + A_{0,m,p}\theta_{1,m,p}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.99)$$

B.9.4 Contorno $j = m, i = 1$ a $(n-1), k = 0$

$$\begin{aligned} & (1 + C_{i,m,0})\theta_{i,m,0}^{t+3} - C_{i,m,0}\theta_{i,m,1}^{t+3} = A_{i,m,0}\theta_{i-1,m,0}^{t+2} + \\ & + B_{i,m,0}\theta_{i,m-1,0}^{t+2} + (1 - 2A_{i,m,0} - B_{i,m,0})\theta_{i,m,0}^{t+2} + A_{i,m,0}\theta_{i+1,m,0}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.100)$$

B.9.5 Contorno $j = m, i = 1$ a $(n-1), k = 1$ a $(p-1)$

$$\begin{aligned} & -C_{i,m,k}\theta_{i,m,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{i,m,k})\theta_{i,m,k}^{t+3} - C_{i,m,k}\theta_{i,m,k+1}^{t+3} = \\ & B_{i,m,k}\theta_{i,m-1,k}^{t+2} + A_{i,m,k}\theta_{i-1,m,k}^{t+2} + (1 - 2A_{i,m,k} - B_{i,m,k})\theta_{i,m,k}^{t+2} + A_{i,m,k}\theta_{i+1,m,k}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.101)$$

B.9.6 Contorno $j = m, i = 1$ a $(n-1), k = p$

$$\begin{aligned} & -C_{i,m,p}\theta_{i,m,p-1}^{t+3} + (1 + C_{i,m,p})\theta_{i,m,p}^{t+3} = A_{i,m,p}\theta_{i-1,m,p}^{t+2} + \\ & + B_{i,m,p}\theta_{i,m-1,p}^{t+2} + (1 - 2A_{i,m,p} - B_{i,m,p})\theta_{i,m,p}^{t+2} + A_{i,m,p}\theta_{i+1,m,p}^{t+2} \end{aligned} \quad (B.102)$$

B.9.7 Elemento $j = m, i = n, k = 0$

$$(1 + C_{n,m,0})\theta_{n,m,0}^{t+3} - C_{n,m,0}\theta_{n,m,1}^{t+3} = A_{n,m,0}\theta_{n-1,m,0}^{t+2} + B_{n,m,0}\theta_{n,m-1,0}^{t+2} + (1 - A_{n,m,0} - B_{n,m,0})\theta_{n,m,0}^{t+2} \quad (\text{B.103})$$

B.9.8 Contorno $j = m, i = n, k = 1$ a $(p-1)$

$$\begin{aligned} & -C_{n,m,k}\theta_{n,m,k-1}^{t+3} + (1 + 2C_{n,m,k})\theta_{n,m,k}^{t+3} - C_{n,m,k}\theta_{n,m,k+1}^{t+3} = \\ & = A_{n,m,k}\theta_{n-1,m,k}^{t+2} + B_{n,m,k}\theta_{n,m-1,k}^{t+2} + (1 - A_{n,m,k} - B_{n,m,k})\theta_{n,m,k}^{t+2} \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$

B.9.9 Elemento $j = m, i = n, k = p$

$$\begin{aligned} & -C_{n,m,p}\theta_{n,m,p-1}^{t+3} + (1 + C_{n,m,p})\theta_{n,m,p}^{t+3} = \\ & A_{n,m,p}\theta_{n-1,m,p}^{t+2} + B_{n,m,p}\theta_{n,m-1,p}^{t+2} + (1 - A_{n,m,p} - B_{n,m,p})\theta_{n,m,p}^{t+2} \end{aligned} \quad (\text{B.105})$$

