

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**AJUSTE DE MODELOS DE ESTRUTURAS
ACOPLADAS POR JUNTAS MECÂNICAS USANDO
FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E
SÍNTESE DOS MODOS DOS COMPONENTES**

por José Maria Campos dos Santos
orientador Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

setembro de 1993

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado

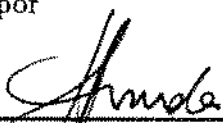
Título da Tese:

AJUSTE DE MODELOS DE ESTRUTURAS ACOPLADAS POR JUNTAS
MECÂNICAS USANDO FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E SÍNTESE
DOS MODOS DOS COMPONENTES

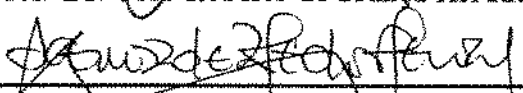
Autor: José Maria Campos dos Santos

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

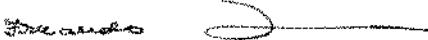
Aprovado por



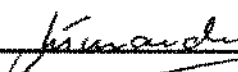
Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente



Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury, Membro.



Prof. Dr. Fernando Iguti, Membro



Prof. Dr. Maher N. Bismark-Nasr, Membro



Prof. Dr. Philippe R. Bernard Devloo, Membro

Campinas, 30 de Julho de 1993.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR José Maria
Campos dos Santos E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 30/7/93



ORIENTADOR

*Ao meu filho Yuri
com amor e carinho*

Agradecimentos

Meus agradecimentos a todas as pessoas que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho. Em particular agradeço:

Ao Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, pela orientação e atenção durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao colega Sergio Carneiro, pelo grande apoio fornecido durante a execução dos testes experimentais e na obtenção das fotografias dos mesmos.

Ao CIFEM e em particular a Maria Raquel e Fernando, pela atenção e presteza dispensadas na manutenção dos equipamentos.

Aos funcionários do DMC, Fátima, Divinair e Rodney, pela colaboração e ajuda nos trabalhos administrativos e didáticos realizados em paralelo.

Ao Instituto de Aeronáutica e Espaço do Centro Técnico Aeroespacial pela cessão de utilização dos equipamentos nos testes experimentais.

Às minhas doces meninas, Lana, Ludmila, Hérika e Altair pela paciência, dedicação e sacrifícios impostos nos momentos difíceis.

Aos meus irmãos Manuel e Ana Maria pelo apoio espiritual e material.

Aos companheiros da pós-graduação, Dante, Júlio, Jordan, Pablo, Mafra, Vladimir, Humberto e Nilson pelo companheirismo e amizade.

Aos colegas Janito, Renato, Waldemar e Luis Cordeiro pelo incentivo e ajuda nos programas gráficos.

Aos amigos Iguti, Carlson, Urtiga, Keitiro e Kioko pelas discussões e sugestões, bem como os revigorantes momentos de lazer convividos.

Ao DMC/FEM/UNICAMP e aos colegas professores pelo grande apoio e incentivo.

A CAPES-PICD e a FEIS-UNESP pelo apoio financeiro no início do trabalho.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	i
CONTEÚDO	ii
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
NOMENCLATURA	vii
1 Introdução	1
2 Método de Ajuste de Modelos	7
2.1 Introdução	7
2.2 Estimação de Parâmetros	9
2.2.1 Modelos e Hipóteses	10
2.2.2 Estimação por Mínimos Quadrados Linear	13
2.2.3 Estimação por Mínimos Quadrados Não-Linear	17
2.3 Método de Ajuste de Modelos Usado no Trabalho	23

3	Métodos de Sub-estruturação Dinâmica	27
3.1	Generalidades	27
3.2	Métodos de Síntese Modal	28
3.2.1	Revisão Bibliográfica	29
3.2.2	Definição dos Tipos de Modos das Sub-estruturas	30
3.2.3	Classificação dos Métodos de Síntese Modal	37
3.2.4	Método de Síntese Modal de Martin & Ghlaïm	39
4	Aplicação de Modos Normais em Formulação de Modos Complexos	46
4.1	Introdução	46
4.2	Formulação do Modelo com Modos Complexos	46
4.3	Modos Normais em Formulação de Modos Complexos	50
5	Análise dos Resultados	55
5.1	Introdução	55
5.2	Sistema Massa-Mola-Amortecedor	55
5.3	Sistema com Vigas Engastada-Livres Usando Elementos Finitos	61
5.4	Sistema Viga Livre-Livre Usando Mola e Amortecedor na Junta	67
5.5	Exemplo Experimental	75
6	Conclusão	92
	BIBLIOGRAFIA	95
A	Formas dos Modos das Estruturas dos Problemas com Viga Engastada-Livre e Viga Livre-Livre	99
B	Cópia dos Artigos Publicados	102

Lista de Figuras

1.1	Veículo Lançador de Satélites (VLS), <i>cortesia do IAE-CTA</i>	5
3.1	Componentes de uma estrutura. (a)Estrutura acoplada. (b) Componentes com suas coordenadas físicas.	29
3.2	Estrutura formada por dois componentes conectados por molas e amortecedores.	40
5.1	Sub-estruturas e juntas do primeiro problema exemplo.	56
5.2	Comparação das FRF's $H_{6,6}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.	57
5.3	Comparação das FRF's $H_{1,5}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.	57
5.4	Comparação das FRF's $H_{6,3}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.	58
5.5	FRF's $H_{6,6}$ do primeiro problema exemplo obtidas com modelo completo com 1% de ruído, calculada com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.	59
5.6	Sub-estruturas e juntas do segundo problema exemplo.	62
5.7	Comparação das FRF's $H_{6,6}$ obtidas pelo cálculo por E.F. do modelo completo e por DCMS com truncamento dos modos das sub-estruturas.	63
5.8	FRF's $H_{6,6}$ do segundo problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com o modelo ajustado.	64

5.9	Comparação das FRF's $H_{4.4}$ obtidas pelo cálculo por E.F. do modelo completo e por DCMS usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste com a FRF $H_{6.6}$	67
5.10	Sub-estruturas e juntas do terceiro problema exemplo.	68
5.11	Comparação da FRF $H_{7.7}$ calculada via DCMS com o modelo completo e com modelo truncado.	69
5.12	Comparação das sensitividades da FRF $H_{34.7}$ calculada com a equação analítica — e aproximada via diferenças finitas ++ em relação ao parâmetro (a) k_1 e (b) c_1	70
5.13	FRF's $H_{1.7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.	73
5.14	FRF's $H_{13.7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.	73
5.15	FRF's $H_{22.7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.	74
5.16	FRF's $H_{34.7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.	74
5.17	Esquema das sub-estruturas e juntas do problema experimental.	75
5.18	Vista da montagem das sub-estruturas e juntas do problema experimental.	75
5.19	Detalhe da montagem das juntas do problema experimental.	77
5.20	FRF's $H_{1.4}$ do sistema experimental, na faixa de 62,8 a 3210,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso A e prevista com modelo ajustado.	80
5.21	FRF's $H_{7.4}$ do sistema experimental, na faixa de 31,4 a 802,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso B e prevista com modelo ajustado.	80
5.22	FRF's $H_{12.4}$ do sistema experimental, na faixa de 62,8 a 3210,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso C e prevista com modelo ajustado.	81

5.23 FRF's $H_{18.4}$ do sistema experimental, na faixa de 31,4 a 802,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso D e prevista com modelo ajustado.	81
5.24 Comparação das curvas das FRF's $H_{20.4}$ obtidas por dados medidos, calculada com valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_B , na faixa de frequência de 62,8 a 1602,2 [rad/s].	84
5.25 Comparação das curvas das FRF's $H_{7.4}$ obtidas por dados medidos, calculada com valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_{AB} , na faixa de frequência de 31,4 a 802,7 [rad/s].	84
5.26 Comparação das curvas das FRF's $H_{11.4}$ obtidas por dados medidos, calculada com valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_{AB} , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].	85
5.27 Comparação das FRF's $H_{7.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente, calculada com os valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_1 , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].	88
5.28 Comparação das FRF's $H_{7.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente, calculada com os valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_4 , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].	88
5.29 Comparação das FRF's $H_{7.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente, calculada com os valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_6 , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].	89
5.30 Comparação das FRF's $H_{2.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$	90
5.31 Comparação das FRF's $H_{10.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$	90
5.32 Comparação das FRF's $H_{13.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$	91

5.33	Comparação das FRF's $H_{19.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$	91
A.1	Formas dos 8 Primeiros Modos das Vigas Engastadas-Livre com Molas nas Juntas. - - - Estrutura Não-Deformada e Posição das Juntas, — Estrutura Deformada.	100
A.2	Formas dos 8 Primeiros Modos das Vigas Livre-Livre com Molas e Amortecedores nas Juntas. - - - Estrutura Não-Deformada e Posição das Juntas, — Estrutura Deformada.	101

Lista de Tabelas

5.1	Valores dos parâmetros do primeiro exemplo.	56
5.2	Comparação de alguns valores das amplitudes das FRF's $H_{6,6}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.	58
5.3	Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 100 [rad/s] sem ruído.	60
5.4	Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 100 [rad/s] com 1% de ruído.	60
5.5	Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 45 [rad/s] com 1% de ruído.	60
5.6	Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{5,5}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 100 [rad/s] com 1% de ruído.	61
5.7	Valores dos parâmetros físicos do segundo exemplo usados na análise de EF	62
5.8	Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 3000 [rad/s] sem ruído.	64
5.9	Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 3000 [rad/s] com 1% de ruído.	65
5.10	Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 1000 - 2000 [rad/s] com 1% de ruído.	65

5.11 Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6.6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 2000 [rad/s] com 1% de ruído.	65
5.12 Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{9.9}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 1500 [rad/s] com 1% de ruído.	66
5.13 Valores dos parâmetros físicos do terceiro exemplo usados na análise de EF	68
5.14 Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{1.7}$, $H_{13.7}$, $H_{22.7}$, e $H_{34.7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 1000 - 3000 [rad/s] com 1% de ruído.	70
5.15 Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{1.7}$, $H_{13.7}$, $H_{22.7}$, e $H_{34.7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 100 - 2000 [rad/s] com 1% de ruído.	71
5.16 Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{7.7}$, $H_{21.7}$, $H_{28.7}$, e $H_{38.7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 1000 - 3000 [rad/s] com 1% de ruído.	71
5.17 Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{1.7}$, $H_{13.7}$, $H_{22.7}$, e $H_{34.7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 1000 - 3000 [rad/s] com 5% de ruído.	71
5.18 Valores dos parâmetros físicos do exemplo experimental.	76
5.19 Valores iniciais dos parâmetros para os diferentes casos investigados.	77
5.20 Resultados da estimação dos parâmetros de rigidez das juntas do problema experimental usando as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$ nas faixas de frequências e valores iniciais investigados.	78
5.21 Resultados da estimação dos parâmetros de amortecimento das juntas do problema experimental usando as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$ nas faixas de frequências e valores iniciais investigados.	79
5.22 Conjuntos das FRF's usadas como dados medidos nos diferentes casos investigados.	82
5.23 Resultados da estimação dos parâmetros de rigidez das juntas do problema experimental usando valores iniciais $k_1 = k_2 = 4.5E+04$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m] com diferentes conjuntos de FRF's e faixas de frequências.	82

5.24 Resultados da estimação dos parâmetros de amortecimento das juntas do problema experimental usando valores iniciais $k_1 = k_2 = 4.5E+04$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m] com diferentes conjuntos de FRF's e faixas de frequências.	83
5.25 Número de FRF's em cada conjunto usado como dados medidos nos diferentes casos investigados.	86
5.26 Resultados da estimação dos parâmetros de rigidez das juntas do problema experimental usando como dados medidos conjuntos de FRF's compostos por diferentes números de FRF's, na faixas de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s], com valores iniciais $k_1 = k_2 = 1.0E+05$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m].	86
5.27 Resultados da estimação dos parâmetros de amortecimento das juntas do problema experimental usando como dados medidos conjuntos de FRF's compostos por diferentes números de FRF's, na faixas de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s], com valores iniciais $k_1 = k_2 = 1.0E+05$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m].	87
5.28 Valores estimados dos parâmetros para os diferentes casos investigados. . .	89

Resumo

A presente pesquisa trata do ajuste de modelos de elementos finitos consistindo de sub-estruturas conectadas entre si através de juntas mecânicas cujos coeficientes de rigidez e amortecimento são desconhecidos. O modelo é ajustado estimando-se os parâmetros das juntas através do ajuste das curvas das Funções de Resposta em Frequência (FRF) medidas usando-se uma técnica de mínimos quadrados não-linear modificada a qual usa um método de busca unidimensional com interpolação quadrática. Uma formulação de síntese dos modos dos componentes com amortecimento é usada para calcular as FRF's teóricas da estrutura montada. Mostra-se que uma boa aproximação da matriz de sensibilidade pode ser obtida por diferenças finitas a um custo computacional menor do que pela formulação exata. Três exemplos usando dados simulados e um usando dados experimentais são apresentados a fim de ilustrar o método proposto. No primeiro exemplo o método é usado para simular o ajuste de um modelo de parâmetros concentrados composto por massas, molas e amortecedores onde as juntas são caracterizadas por molas e amortecedores. O segundo exemplo mostra a simulação do ajuste de um modelo consistindo de duas vigas engastada-livre, com cada uma modelada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e interligadas por molas lineares. No terceiro exemplo usa-se o método para simular o ajuste de um modelo composto por duas vigas livre-livre, modeladas por MEF e interligadas por molas e amortecedores lineares. Nos três casos dos exemplos simulados, as FRF's usadas como dados experimentais foram calculadas usando-se a base modal completa da estrutura como um todo e em seguida poluídas com um ruído Gaussiano aditivo. No último exemplo investiga-se a aplicação do método em um sistema experimental consistindo de duas vigas livre-livre de aço carbono, modeladas analiticamente por MEF e conectadas através de juntas de elastômero de baixa rigidez coladas entre elas. As FRF's medidas foram obtidas em teste experimental através de um analisador espectral multicanal, onde com um excitador eletrodinâmico aplicou-se uma força periódica do tipo "chirp" e captaram-se as respostas com acelerômetros em 20 pontos ao longo do sistema.

Abstract

The present research investigates the finite element model updating of substructures connected through mechanical joints whose stiffness and damping coefficients are unknown. The model is updated by estimating the joint parameters via the curve fit of measured Frequency Response Functions (FRF) using a nonlinear least-squares modified technique which use a unidimensional search method with quadratic interpolation. A damped component mode synthesis formulation is used to calculate the theoretical FRFs of the assembled structure. It is shown that a good approximation of the sensitivity matrix may be obtained by finite differences at a smaller computational cost than by the exact formulation. Three numerical examples using simulated data and one experimental example using real data are presented to illustrate the proposed method. In the first example the method is used to update a lumped parameter model consisting of concentrated masses, springs, and dash-pots when the joints are characterized by springs and dash-pots. The second example consists of two clamped-free beams, each one modeled by the Finite Element Method (MEF) connected through linear springs. On the third example the method is used to simulate the model updating of a structure composed by two free-free beams, modeled by FEM, connected through linear springs and dash-pots. In the three simulated examples, the FRFs used as experimental data were calculated using the complete modal vector base of the whole structure, and then polluted with additive Gaussian noise. In the last example, the method was applied to an experimental system consisting of two free-free carbon steel beams, analytically modeled by FEM, connected through joints made of low stiffness elastomeric mounts which were bonded between them. The measured FRFs were obtained in the experimental testing with a multichannel spectral analyzer using an electrodynamic shaker attached to the structure at a single point. A chirp periodical force was applied and the responses were measured with accelerometers at 20 points along the system.

Nomenclatura

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Omega} \dots$	Letras maiúsculas em negrito representam grandezas matriciais
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\omega} \dots$	Letras minúsculas em negrito representam grandezas vetoriais
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	matrizes do sistema na formulação de estado modificado
$\mathbf{b}_{LS}$	estimador de mínimos quadrados ordinário
$\mathbf{b}_{WLS}$	estimador de mínimos quadrados ponderado
c	amortecimento
$cov()$	covariância
$E(), \mu$	valor esperado
f, q	força
g	flexibilidade
H_{ij}	função de resposta em frequência
$\mathbf{I}$	matriz identidade
k	rigidez
$\mathbf{L}$	autovetor à esquerda
$\tilde{\mathbf{L}}$	autovetor à esquerda em coordenadas físicas
m	massa
p, u, w	deslocamento
$\mathbf{R}$	autovetor à direita
$\tilde{\mathbf{R}}$	autovetor à direita em coordenadas físicas
S	função objetivo
$\mathbf{U}, \mathbf{W}$	matrizes de ponderação
$var(), \sigma^2$	variância
x	coeficiente de sensibilidade ou variável dependente mensurável no problema de estimação linear
y	valor medido da variável mensurável
$\mathbf{y}$	vetor de estado
β	parâmetro a ser estimado
δ	tolerância
ε	variável aleatória
η	variável mensurável

λ, s	autovalor
ϕ	autovetor com normalização de massa
ψ	autovetor com normalização arbitrária
ω	frequência
∇_β	gradiente
i	$\sqrt{-1}$
(k)	índice relativo ao k-ésimo passo da iteração
$*$	índice indicando o conjugado complexo
T	índice indicando a matriz transposta
H	índice indicando a matriz conjugada transposta
$\ \ $	norma
$[]$	matriz diagonal
$ $	valor absoluto
$\dot{}$	primeira derivada em relação ao tempo
$\ddot{}$	segunda derivada em relação ao tempo
$\sim$	valor estimado
$\mathcal{F}$	transformada de Fourier

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento de um modelo matemático que descreva o comportamento de um sistema físico constitui-se em uma das exigências básicas de qualquer análise na engenharia. Após a obtenção deste modelo do sistema, torna-se possível a realização de análises tais como projeto, avaliação, controle, previsão, definição de experimentos, etc. O estado da arte atual no campo da dinâmica estrutural é tal que a solução dos problemas pode ser abordada de duas formas: utilizando-se as técnicas de solução do *problema direto* ou análise, ou através da solução do *problema inverso* ou identificação de sistemas.

Apesar de serem bastante sofisticadas, as técnicas de solução do problema direto têm seus resultados altamente dependentes da adequação e precisão do modelo assumido. Na dinâmica estrutural, o problema direto consiste basicamente na realização dos seguintes passos:

- determinar uma forma de modelo paramétrico específica para o sistema;
- escolher valores específicos para os parâmetros do modelo;
- descrever as forças de entrada;
- resolver as equações dinâmicas resultantes a fim de obter a resposta do sistema na forma mais conveniente (deslocamento, aceleração, deformação, resposta em frequência, etc).

Atualmente os métodos numéricos para solução de problemas da dinâmica estrutural, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), têm sido comumente usados nas análises. Contudo, os modelos formulados por tais métodos contêm algumas fontes de erros, tais como: erros inerentes às leis físicas usadas para descrever o comportamento da estrutura; erros de aproximação quando alguma linearização de equações é usada para simplificar os procedimentos da solução; erros adicionais devido à redução das equações

diferenciais parciais para equações diferenciais ordinárias e à distribuição de cargas em posições nodais.

No problema inverso tenta-se obter informações sobre o modelo a partir dos dados de entrada e saída medidos. Quando não existe conhecimento *a priori* sobre o sistema, a forma paramétrica e os valores dos parâmetros devem ser determinados e o problema é conhecido como *identificação de sistemas*. De outra maneira, se a forma do modelo é conhecida ou assumida, apenas os valores dos parâmetros devem ser determinados e o problema é chamado de *estimação de parâmetros* ou, também, no caso da dinâmica estrutural de *ajuste de modelos*. Observa-se que o objetivo de qualquer método de identificação de sistemas ou estimação de parâmetros é tornar preciso um determinado modelo matemático incompleto de um sistema utilizando-se de dados medidos experimentalmente e informação *a priori* adequada. Um infeliz aspecto dos problemas inversos é que estes são intrinsecamente instáveis ou mal-condicionados.

Recentemente, tem sido crescente o número de trabalhos publicados referentes ao desenvolvimento de métodos de solução de problemas inversos a fim de melhorar os modelos dinâmicos estruturais. Os primeiros trabalhos referentes a métodos de solução de problemas inversos aplicados à dinâmica estrutural surgiram na década de 60. O primeiro levantamento dos trabalhos de modelagem matemática a partir de dados modais medidos foi realizado em 1969 por Young & On citados em [1]. Em 1971, o marco inicial na direção das técnicas de ajuste de modelos via *métodos de ajuste direto das matrizes* foi realizado com o trabalho de Berman & Flannelly [2], o qual assume uma forma simples da matriz de massa e usa os modos medidos para construir uma matriz de massa a partir das equações de ortogonalidade. Em seguida, esta matriz de massa é usada junto com os modos medidos para construir a matriz de rigidez incompleta, assim chamada por não conter a contribuição dos modos mais altos não medidos. Com um enfoque diferente mas mantendo a mesma linha de ajustar diretamente as matrizes, aparece em 1978 o trabalho de Baruch [3], cujo método assume que a matriz de massa está correta e ajusta a matriz de rigidez minimizando a distancia entre as matrizes de rigidez ajustada e analítica usando multiplicadores de Lagrange. Posteriormente, técnicas similares de ajuste foram propostas por Berman [4], Chen, Kuo & Garba [5], Sidhu & Ewins [6], e outros citados em [7].

Em 1974, baseado na análise da sensibilidade inversa de primeira ordem e considerando a natureza aleatória dos erros das medidas, Collins *et al.* [8], usaram um processo iterativo para ajustar um modelo analítico de modo que a diferença entre os parâmetros modais do modelo analítico e do modelo medido fosse minimizada em termos da norma Euclidiana. Este trabalho pode ser considerado como o marco inicial na direção das técnicas de ajuste de modelos via *métodos da sensibilidade inversa*. Posteriormente, técnicas similares de ajuste foram propostas por Chen & Wada [9], Lallemant & Piranda [10] e outros citados em [7], lembrando que todos estes métodos fazem uso apenas dos

parâmetros modais como dados.

Recentemente tem sido observado um número crescente de publicações sobre a identificação de parâmetros de um sistema a partir das funções de resposta em frequência (FRF) medidas. Em 1981, Martinez [11] iniciou o uso de FRF's como dados medidos na estimação de parâmetros usando Filtro de Kalman Estendido (EKF). Posteriormente, outros trabalhos surgiram fazendo uso das FRF's como dados medidos aliadas aos mais diferentes métodos de estimação de parâmetros, tais como os trabalhos de Arruda [12], Lin & Ewins [1] e outros citados em [7]. Considerando-se aqueles mais recentes e que aliam o uso das FRF's como dados medidos às técnicas de ajuste de modelos pelo método da sensibilidade inversa obtêm-se os trabalhos [13, 14, 15, 16].

Dentre os trabalhos possíveis de serem recuperados, nenhum apresenta em sua essência o mesmo enfoque do presente trabalho. A combinação de algumas ferramentas e/ou estratégias diferentes tem sido usada em vários trabalhos a fim de produzir novos métodos com características de desempenho e eficiência diferentes. Dentre as mais recentes pode-se citar algumas, tais como:

- a) utilização da estimativa da função de resposta em frequência (FRF) como dados medidos [11, 12, 1, 13, 14, 15, 16];
- b) aplicação dos métodos de síntese modal (sub-estruturação) como forma de reduzir a ordem do modelo [11] ou para identificar os parâmetros das conexões entre estruturas [17, 15];
- c) o uso dos métodos de estimação de parâmetros com diferentes tipos de estimadores [11, 7, 21];

Existem muitos trabalhos na literatura que tratam com questões altamente teóricas relacionadas com a solução de problemas inversos. Neste estudo não se pretende trabalhar com questões teóricas sobre a natureza geral do problema inverso de identificação de parâmetros. Ao invés, tratam-se questões específicas associadas com a estimação de parâmetros para uma forma particular de modelo dinâmico estrutural. Neste caso, a estrutura consiste de duas ou mais sub-estruturas, as quais podem ser razoavelmente bem modeladas usando-se o MEF, conectadas entre si através de juntas, cujo comportamento é geralmente difícil de prever-se teóricamente. Assim, os parâmetros da junta mecânica (rigidez e amortecimento) podem ser identificados usando-se os dados experimentais. Através da aplicação do método de síntese dos modos dos componentes amortecidos obtém-se a forma paramétrica do modelo dinâmico estrutural assumido a priori, ou seja, uma estrutura definida por um conjunto de sub-estruturas inter-conectadas por juntas mecânicas, onde os parâmetros incógnitos são a rigidez e o amortecimento das juntas.

Emprega-se e justifica-se o uso de um enfoque no domínio da frequência que tem se mostrado útil na área da dinâmica estrutural. Neste caso o enfoque consiste em obter-se, através de teste experimental via força de excitação periódica, uma estimativa da FRF ($\hat{H}(\omega)$) [18], e, em seguida, usam-se estes dados medidos e as equações do modelo na técnica de estimação de parâmetros por mínimos quadrados não-linear modificado.

Inserido neste contexto, o presente trabalho é único e contribui para o campo de ajuste de modelos de várias maneiras. Propõe um novo método de ajuste de modelos através da estimação dos parâmetros das conexões entre sub-estruturas, o qual usa a técnica de mínimos quadrados não-linear modificado [19], combinando o uso das FRF's como dados medidos com um modelo matemático obtido pelo método de síntese dos modos dos componentes amortecido (DCMS) [20, 21]. Contribui para o campo da estimação de parâmetros no desenvolvimento de um método que permite a identificação das propriedades estruturais (rigidez e amortecimento) de elementos discretos (junta) inseridos entre duas ou mais sub-estruturas, as quais podem ser modeladas pelo MEF. Contribui na área de síntese modal fornecendo uma avaliação crítica sobre as diferenças entre os principais métodos de sub-estruturação dinâmica, bem como, estendendo a formulação do método de DCMS a fim de incluir o cálculo de FRF's. Como o referido método de ajuste envolve o uso de acoplamento entre sub-estruturas as dimensões do problema de estimação serão reduzidas, permitindo que estruturas maiores e mais complexas sejam resolvidas. Por outro lado, o uso de FRF's como dados medidos faz com que estas possam ser obtidas diretamente de um analisador espectral multicanal baseado na transformada rápida de Fourier (FFT), facilitando a sua obtenção e a realização de um experimento ótimo [19].

A inexistência de um modelo de elementos finitos com precisão razoável para prever o comportamento dinâmico das juntas de conexão entre o foguete central e os foguetes laterais do Veículo Lançador de Satélites (VLS), ora em desenvolvimento pelo Instituto de Aeronáutica e Espaço - CTA, foi um dos principais motivos da realização deste trabalho. A figura 1.1 mostra uma vista do VLS destacando-se o foguete central, as juntas e os foguetes laterais.

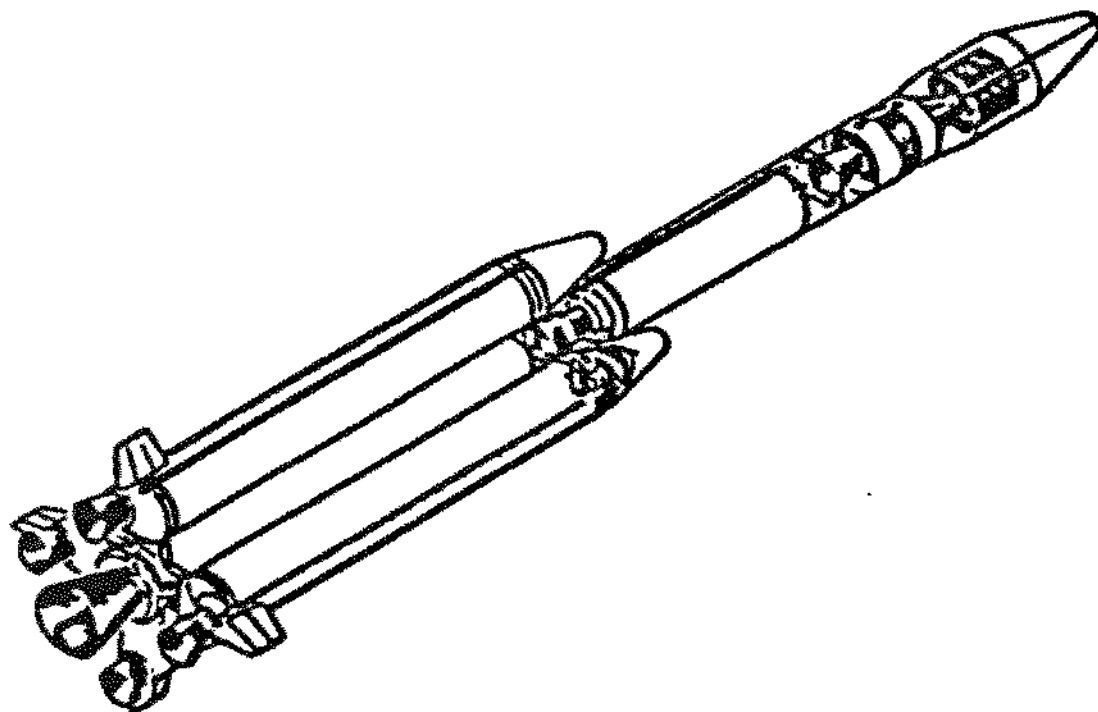


Figura 1.1: Veículo Lançador de Satélites (VLS), *cortesia do IAE-CTA*.

Esta tese de doutorado, organizada em seis Capítulos e um Apêndice, apresenta uma visão dirigida a um método de ajuste de modelos abrangendo, quais sejam: o estudo de métodos de estimação de parâmetros e de métodos de sub-estruturação aplicados à dinâmica de estruturas.

No Capítulo 2 o problema de estimação de parâmetros por mínimos quadrados, em sua forma geral, é definido e investigado para o caso de funções lineares e não lineares nos parâmetros. Definem-se especificamente os estimadores de mínimos quadrados ordinário (OLS) e ponderado (WLS). Apresentam-se, ainda, o método de minimização de Gauss e sua modificação imposta pelo método de Levenberg-Marquardt, usados na estimação não-linear. Descrevem-se os algoritmos com seus respectivos critérios de convergência utilizados na implementação do código computacional usado no método de ajuste proposto.

No Capítulo 3 apresenta-se um estudo genérico dos diferentes métodos de síntese modal, baseado em formulação generalizada para vibração livre não-amortecida, a qual permite apresentá-los em função das diferentes escolhas dos modos das sub-estruturas

e dos diversos acoplamentos entre si. De forma mais detalhada, apresenta-se o desenvolvimento teórico completo do método de síntese modal aplicado neste trabalho.

O Capítulo 4 apresenta o desenvolvimento teórico completo da normalização que deve ser aplicada aos modos reais de uma sub-estrutura para que possam ser usados como modos complexos, como é o caso do cálculo da síntese modal onde os algoritmos implementados já previam a utilização de modos complexos.

No Capítulo 5 apresenta-se uma análise completa dos resultados obtidos na aplicação do método de ajuste a três exemplos simulados e um exemplo experimental nas diferentes condições impostas a cada um.

Finalmente, no Capítulo 6 apresentam-se as conclusões extraídas neste trabalho e algumas sugestões referentes a áreas para futuras pesquisas.

No Apêndice A apresentam-se as formas dos modos das estruturas do segundo e terceiro problema exemplo mostrados no Capítulo 5 .

No Apêndice B apresentam-se cópias completas dos trabalhos publicados durante o período desta pesquisa.

Capítulo 2

Método de Ajuste de Modelos

2.1 Introdução

A crescente demanda por qualidade e confiabilidade em todos os tipos de estruturas tem gerado a necessidade de obter-se previsões mais precisas de suas características dinâmicas. A satisfação desta necessidade só pode ser obtida pela disponibilidade de modelos matemáticos adequados das estruturas em estudo. Com o desenvolvimento das ciências físicas e matemáticas, a modelagem na forma fechada de alguns elementos estruturais, tais como vigas e placas uniformes, tornou-se hoje uma realidade. Contudo, para estruturas práticas complicadas não existem ainda, em geral, soluções analíticas completas. Portanto, alguns modelos discretos aproximados, os quais podem representar a estrutura sob condições relevantes, tem que ser determinados de modo que suas características dinâmicas possam ser analisadas. Tal modelo será considerado bom se for capaz de prever as respostas da estrutura dentro de uma faixa de frequência de interesse e se for, também, representativo das suas características físicas quando for tratado como parte de um sistema maior. Existem duas formas de estabelecer-se um modelo matemático discreto de uma estrutura prática:

1. Modelando experimentalmente, por exemplo, via análise modal;
2. Modelando teóricamente, por exemplo, via algum método numérico como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), etc.

Devido às técnicas de medições e à precisão da instrumentação disponível atualmente, é geralmente aceito que os dados medidos são considerados como os mais próximos da representação verdadeira de uma estrutura, enquanto o modelo analítico, devido às hipóteses simplificadoras, à falta de um conhecimento mais profundo da estrutura e às dificuldades no modelagem das condições de contorno, é considerado menos preciso. Baseado

em tais fatos deve-se buscar a correção do modelo analítico usando-se os dados medidos. Na hipótese em que os dados medidos estejam corretos surgem dois enfoques:

- a) A partir dos dados medidos estabelecer um modelo matemático em termos das coordenadas medidas de interesse;
- b) Correlacionar um modelo analítico já existente com os dados medidos para produzir um modelo analítico ajustado.

A modelagem matemática a partir do uso direto dos dados modais medidos, foi tentada em anos recentes usando-se os resultados do teste dinâmico para identificar-se os parâmetros diretamente nas equações de movimento. Contudo, é geralmente aceito que a menos que o número de modos medidos seja maior ou igual ao número de coordenadas de interesse, não há unicidade do modelo obtido. Young & On citados em [1] mostram uma revisão dos trabalhos nesta área.

Vários métodos que tratam do melhoramento do modelo analítico através da sua correlação com os dados modais medidos tem sido publicados na literatura [7]. A filosofia embutida nesta prática é de que o modelo analítico, embora contendo erros de modelagem, é aceito como representativo da estrutura dentro de alguma precisão, de modo que os dados medidos no teste oferecerão a possibilidade de ajustá-lo.

O procedimento de ajuste do modelo analítico pode ser dividido em dois passos: a *localização* e a *correção* dos erros. Muitas dificuldades são encontradas no primeiro passo devido às incompatibilidades inerentes aos próprios modelos. Em muitos casos práticos o número de coordenadas definindo o modelo de MEF excede em muito as coordenadas medidas. Também, as coordenadas medidas não são frequentemente as mesmas do modelo de MEF, algumas sendo difíceis de medir, como as rotações, ou fisicamente inacessíveis, como as coordenadas internas a estrutura. Em muitas técnicas de ajuste requer-se uma correspondência um a um entre os conjuntos de dados, o que leva a duas possibilidades: a redução do modelo de MEF, através de algum método tal como a redução de Guyan [22], ou a expansão do modelo experimental, através de algum método de expansão dos modos medidos [7]. Outras dificuldades, também, são oriundas dos erros sistemáticos e aleatórios inerentes ao próprio processo experimental. Entretanto, uma vez que a localização dos erros é conhecida, torna-se relativamente fácil corrigi-los no modelo.

Do exposto, pode-se concluir que o objetivo do ajuste de modelos é refinar um modelo analítico existente que represente a estrutura em estudo. Este terá que reproduzir as propriedades modais e funções de resposta em frequência (FRF) em qualquer ponto do modelo, tenha sido ele medido ou não.

Considerando-se os métodos de ajuste de modelos propostos de que se tem conhecimento, é possível classificá-los em dois grandes grupos:

- a) **Métodos Diretos.** Estes métodos procuram corrigir o modelo analítico através do ajuste direto das matrizes de massa, rigidez e amortecimento das equações do movimento. Nesta categoria podemos citar dentre outros os métodos de Baruch & Berman [3, 23], Chen, Kuo & Garba [5] e Sidhu & Ewins [6];
- b) **Métodos da Sensitividade Inversa.** Estes métodos fazem uso da estatística como base para o ajuste do modelo. Quase todos os métodos baseados na sensibilidade calculam a matriz de sensibilidade X , ou seja, a derivada parcial da função do modelo em relação aos seus parâmetros estruturais, via uma expansão de Taylor truncada. A equação matricial resultante é da forma

$$\eta = X\beta, \quad (2.1)$$

onde os elementos de β são os parâmetros estruturais que se deseja identificar e η , é a resposta dinâmica da estrutura. A equação (2.1) é resolvida para β a fim de obter-se uma nova função η e, no processo, o modelo analítico é ajustado. Um novo problema é calculado e o processo se repete até que a função desejada seja obtida. A função do modelo pode ser composta pelos parâmetros modais (λ e Φ) ou pela resposta dinâmica da estrutura (FRF's ou resposta no tempo).

Embora existam diversas estratégias para o ajuste de modelos [7], usar-se-á neste trabalho um método da sensibilidade inversa onde as medidas das FRF's são usadas diretamente para ajustar um modelo de elementos finitos [12]. O uso de FRF's apresenta as seguintes vantagens:

- os dados medidos podem ser usados diretamente sem a necessidade de qualquer análise modal;
- o método é aplicável a estruturas de difícil modelagem modal devido ao alto amortecimento e/ou alta densidade modal;
- a solução pode ser obtida estatisticamente, já que o problema é sobre-determinado devido à disponibilidade de dados das FRF's em vários pontos de frequência;
- as medidas das FRF's contêm informações sobre os modos dentro e fora da faixa de interesse.

2.2 Estimação de Parâmetros

Conforme foi visto na seção 2.1, pode-se concluir que os métodos de ajuste de modelos, em geral, estão fundamentalmente ligados com o conceito de extração de

informação a partir de dados. Neste contexto revela-se a importancia do assunto *estimação de parâmetros*, o qual tem por objetivo fornecer ferramentas para o uso eficiente de dados na estimação de constantes que aparecem nos modelos matemáticos e para ajudar na modelagem do fenômeno. Em suma pode-se dizer que *ajuste de modelos* e *estimação de parâmetros* contem o mesmo significado no caso em que o modelo matemático for definido à priori. O modelo físico em estudo neste trabalho consiste de sub-estruturas conectadas entre si por juntas mecânicas. Uma formulação de síntese modal é usada para calcular as FRF's da estrutura como um todo. O modelo é ajustado estimando-se os parâmetros das juntas (rigidez e amortecimento) através da técnica de mínimos quadrados não-linear modificado [19]. A fim de expor sobre tal técnica, torna-se necessário estabelecer alguns conceitos básicos sobre o assunto, conforme será mostrado nas seções a seguir.

2.2.1 Modelos e Hipóteses

Em um modelo linear nos parâmetros assume-se uma relação funcional entre diversas variáveis mensuráveis ($y, x_1, \dots, x_k$), um ou mais parâmetros ($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$) e valores particulares de uma ou mais variáveis aleatórias ($\varepsilon, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)}$). A medida das variáveis mensuráveis fornecem as observações. Os parâmetros são incógnitas e deseja-se estimar no mínimo alguns deles. Os valores particulares das variáveis aleatórias ε 's são incógnitas. Neste trabalho tratar-se-á apenas com os casos em que cada observação envolve somente uma variável aleatória, assim pode-se abandonar os índices das variáveis aleatórias acima. Assumindo-se que os ε 's podem ser combinados em um ε e que os erros são *aditivos*, pode-se exprimir uma das variáveis mensuráveis em termos das outras obtendo-se

$$y = \eta(x_1, \dots, x_k; \beta_1, \dots, \beta_p) + \varepsilon, \quad (2.2)$$

ou para várias observações obtém-se

$$y = \eta(x, \beta) + \varepsilon. \quad (2.3)$$

no caso deste trabalho a função η corresponde a FRF H do modelo de elementos finitos a ser ajustado, ou seja,

$$\eta(x, \beta) \equiv H(\omega, \beta) \quad (2.4)$$

sendo

$$y \equiv \text{FRF medida}$$

$$\eta \equiv \text{FRF desejada}$$

$x \equiv \omega \equiv$ frequência

$\beta \equiv$ coeficientes de rigidez e amortecimento das juntas

$\varepsilon \equiv$ erro

A distribuição dos ε 's é geralmente desconhecida. Se os ε 's são correlacionados, a estimação de parâmetros pode ser muito mais difícil e o estimador menos confiável [19]. Portanto, neste trabalho, tratar-se-á apenas com casos de ε 's independentes.

Para estimar parâmetros deve-se primeiro obter os dados e em seguida analisá-los. É essencial que os procedimentos experimentais sejam tais que os dados possam ser analisados. A forma da função usada na equação (2.3) e o procedimento experimental devem ser desenvolvidos juntos. "Projeto de Experimentos" é uma técnica que trata com a escolha dos valores dos x 's para facilitar as análises e melhorar a precisão da estimação [19].

Certas condições relacionadas ao modelo e às hipóteses podem ser expressas de forma mais geral usando-se a notação matricial. Fazendo-se a variável dependente η ser dada pelo modelo linear

$$\eta = X\beta, \quad (2.5)$$

onde para a mesma variável dependente medida n vezes, as dimensões de η são $[n \times 1]$ e as de X são $[n \times p]$. O vetor de parâmetros β é $[p \times 1]$. Assim, obtém-se:

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Outra situação que pode ser representada por η na equação (2.5) é o caso multi-resposta. Neste caso η e X podem ser dados por:

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta(1) \\ \eta(2) \\ \vdots \\ \eta(n) \end{bmatrix} \text{ onde } \eta(i) = \begin{bmatrix} \eta_1(i) \\ \eta_2(i) \\ \vdots \\ \eta_m(i) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e

$$X = \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(n) \end{bmatrix} \text{ onde } X(i) = \begin{bmatrix} x_{11}(i) & \dots & x_{1p}(i) \\ x_{21}(i) & \dots & x_{2p}(i) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(i) & \dots & x_{mp}(i) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Neste caso a variável $x_{jk}(i)$ é para a j -ésima variável dependente em η , para o k -ésimo parâmetro e no i -ésimo instante. Nas definições de η e X das equações (2.7) e (2.8) existe um total de n instantes e m variáveis dependentes resultando em η ser um vetor $[mn \times 1]$ e X tendo dimensões de $[mn \times p]$. Casos de multi-resposta normalmente aparecem em problemas de estimação de parâmetros envolvendo equações diferenciais parciais e ordinárias.

Observa-se que no caso do modelo ser não linear nos parâmetros a matriz X nas equações (2.6) e (2.8) será definida como a *matriz de sensibilidade*, onde os coeficientes de sensibilidade são definidos por:

$$x_{jk} = \frac{\partial \eta_j}{\partial \beta_k}; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.9)$$

para a equação (2.6) e

$$x_{jk}(i) = \frac{\partial \eta_j(i)}{\partial \beta_k}; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.10)$$

para a equação (2.8).

Durante todo este capítulo a hipótese de erros aditivos será mantida. Portanto, para o modelo genérico definido na equação (2.5), obtém-se:

$$y = X\beta + \epsilon, \quad (2.11)$$

onde ϵ é o erro desconhecido e y é a medida em X . Contudo, o modelo dado pela equação (2.11) pode representar dois casos distintos [19]:

1. Modelo com Erros nas Medidas
2. Modelo com Erros(Ruidos) no Processo

Independentemente do modelo de erro, o problema de estimação é formalmente o mesmo para os modelos físicos considerados. Contudo, o significado de η e ϵ é diferente, como são as estatísticas para ϵ . Apenas o modelo 1 será considerado ao longo deste trabalho.

Para cada problema de estimação de parâmetros deve-se estabelecer cuidadosamente as hipóteses referentes aos erros das medidas. Se estas não descrevem os dados com precisão, pode-se pelo menos apontar as hipóteses que não são satisfeitas. A simples identificação das hipóteses incorretas pode levar a hipóteses mais realistas e conseqüentemente a estimadores melhores.

Diferentes hipóteses levam a métodos de estimação diferentes. Contudo, neste trabalho será enfocado apenas o método de mínimos quadrados e suas variações. A seguir definem-se as chamadas *hipótese estatísticas padrão* usadas por vários métodos de estimação:

1. $y = \eta(X, \beta) + \varepsilon$ (erros aditivos nas medidas).
2. $E(\varepsilon) = 0$ (média zero dos erros das medidas).
3. $V(y_i|\beta) = \sigma^2$ (variância dos erros constante).
4. $E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = 0$ para $i \neq j$ (erros não correlacionados).
5. ε tem distribuição normal (normalidade).
6. Conhecimento dos parâmetros estatísticos que descrevem ε .
7. Variáveis independentes sem erros.
8. β é um vetor de parâmetros *constantes* e não existe informação a priori.

Se existe interesse em obter-se a “melhor” estimativa e suas variâncias, os problemas de estimação ficam menos difíceis quando as hipóteses padrão são válidas [19].

2.2.2 Estimação por Mínimos Quadrados Linear

A estimação de parâmetros usando mínimos quadrados não necessita que nenhuma das hipóteses estatísticas padrão sejam válidas, basta minimizar uma função (soma dos quadrados) em relação aos parâmetros. Contudo, para fazer-se uma afirmação estatística com relação aos estimadores é necessário possuir informações com relação aos erros das medidas.

Estimador de Mínimos Quadrados Ordinário (OLS)

A função soma dos quadrados, ou também chamada função objetivo, usada para mínimos quadrados ordinário com o modelo linear $\eta = X\beta$ é dada por

$$S_{LS} = (y - X\beta)^T(y - X\beta). \quad (2.12)$$

O conceito de mínimos quadrados diz que o estimador dos parâmetros pode ser obtido minimizando-se S_{LS} . Ou seja, fazendo-se o gradiente de S_{LS} igual a zero e resolvendo-se o sistema de equações lineares resultante. Da equação (2.12) segue que

$$\nabla_{\beta} S_{LS} = 2[\nabla_{\beta}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T](\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta), \quad (2.13)$$

onde

$$\nabla_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_p} \end{bmatrix}.$$

Mas

$$\nabla_{\beta}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T = -\nabla_{\beta}\beta^T \mathbf{X}^T = -\mathbf{X}^T, \quad (2.14)$$

assim, substituindo-se na equação (2.13) e igualando-a a zero em $\beta = \mathbf{b}_{LS}$, obtém-se:

$$-\mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b}_{LS} = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Observa-se que a derivada parcial de segunda ordem de S_{LS} em relação a β é

$$\frac{\partial^2 S_{LS}}{\partial \beta^2} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}. \quad (2.16)$$

Esta matriz será tão positiva definida quanto $\mathbf{X}$ se aproxime do rank máximo. Assim, a solução da equação (2.15) é única e minimiza S_{LS} . A equação (2.15) pode ser escrita como

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{b}_{LS} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (2.17)$$

Tal sistema é conhecido como a equação *normal* [24]. Assumindo-se que $\mathbf{X}$ tenha rank máximo, a inversa de $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ existe e o estimador de mínimos quadrados ordinário de β é dado por:

$$\mathbf{b}_{LS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (2.18)$$

Para obter-se o vetor da estimativa dos parâmetros $\mathbf{b}_{LS}$ não é necessário invocar-se quaisquer das hipóteses estatísticas padrão. Contudo, se alguma afirmação estatística sobre $\mathbf{b}_{LS}$ deve ser feita, implica que hipóteses com relação à estrutura probabilística dos erros devem ser introduzidas. Neste caso, as hipóteses 1, 2, 7 e 8 da seção

2.2.1 são invocadas, ou seja, os erros são aditivos, a média dos erros em $\mathbf{y}$ é zero e $\mathbf{X}$ e β não são estocásticos. Assim o valor esperado de $\mathbf{b}_{LS}$ é

$$\begin{aligned} E(\mathbf{b}_{LS}) &= E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}] \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta. \end{aligned}$$

Logo,

$$E(\mathbf{b}_{LS}) = \beta. \quad (2.19)$$

Com as quatro hipóteses acima, o estimador de mínimos quadrados é dito ser *não-polarizado*.

Usando a equação (2.19) e mantendo-se as hipóteses acima pode-se determinar a covariância de $\mathbf{b}_{LS}$. Fazendo-se

$$\mathbf{b}_{LS} = \mathbf{F}(\mathbf{X}\beta + \epsilon) = \beta + \mathbf{F}\epsilon, \quad (2.20)$$

onde

$$\mathbf{F} \equiv (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

visto que $\mathbf{F}\mathbf{X} = \mathbf{I}$. Assim a covariância de $\mathbf{b}_{LS}$ é dada por:

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{b}_{LS}) &= E[(\mathbf{b}_{LS} - \beta)(\mathbf{b}_{LS} - \beta)^T] \\ &= E[(\beta + \mathbf{F}\epsilon - \beta)(\beta + \mathbf{F}\epsilon - \beta)^T] \\ &= \mathbf{F}\mathbf{\Upsilon}\mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (2.21)$$

visto que $\mathbf{\Upsilon} = E(\epsilon\epsilon^T)$. Usando a definição de $\mathbf{F}$, obtém-se:

$$cov(\mathbf{b}_{LS}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Upsilon} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{P}_{LS}. \quad (2.22)$$

Sem as hipóteses estatísticas padrão adicionais de que a variância dos erros das medidas são constantes (hipótese 3) e que os erros não são correlacionados (hipótese 4), o estimador OLS não será um estimador de variância mínima e, portanto, é dito ser *ineficiente*. Considerando-se que as hipóteses padrão 1,2,3,4,7 e 8 sejam válidas, então Υ será dado por:

$$\Upsilon = E(\epsilon\epsilon^T) = \sigma^2 I \quad (2.23)$$

e obtém-se:

$$\text{cov}(b_{LS}) = (X^T X)^{-1} \sigma^2, \quad (2.24)$$

a qual é a matriz de covariância *mínima* de b_{LS} . Desta forma obtém-se b_{LS} como um estimador eficiente.

Estimador de Mínimos Quadrados Ponderado (WLS)

Existem casos em que a matriz de covariância dos erros não é conhecida mas deseja-se incluir alguma informação geral relativa aos erros. Neste caso, introduz-se na função a ser minimizada uma matriz de ponderação W simétrica e positiva definida. Assim, para o modelo linear $\eta = X\beta$, esta função será

$$S_{WLS} = (y - X\beta)^T W (y - X\beta), \quad (2.25)$$

a qual produz o estimador

$$b_{WLS} = (X^T W X)^{-1} X^T W y. \quad (2.26)$$

Usando-se as hipóteses padrão 1,2,7, e 8, a matriz de covariância de b_{WLS} pode ser mostrada da equação (2.21) como:

$$\text{cov}(b_{WLS}) = (X^T W X)^{-1} X^T W \Upsilon W X (X^T W X)^{-1}. \quad (2.27)$$

Com base nas hipóteses padrões anteriormente definidas poder-se-ia obter outros estimadores diferentes daqueles de mínimos quadrados, tais como, por exemplo, estimador de máxima probabilidade (ML), estimador de máximo a posteriori (MAP), etc. Contudo, por estar fora do escopo deste trabalho prefere-se declinar desta ação e deixar como indicação as referências [19, 24, 25].

2.2.3 Estimação por Mínimos Quadrados Não-Linear

Nesta seção apresentam-se alguns métodos de minimização de uma função genérica onde a variável dependente é não-linear em termos dos parâmetros. Embora não seja trivial e constitua-se no primeiro problema de otimização na estimação de parâmetros, a função a ser minimizada é assumida como conhecida. O segundo problema de otimização na estimação de parâmetros, objeto desta seção, é a minimização da função escolhida.

Nas ciências muitos fenômenos são modelados usando-se equações diferenciais, onde suas soluções podem ser obtidas na forma fechada ou através de algum método numérico. Independentemente do método de solução, estes modelos são frequentemente uma função não-linear nos parâmetros. As equações e suas condições de contorno e iniciais podem ser lineares no sentido matemático mas ainda assim tem uma solução que é não-linear nos parâmetros.

Pode ser provado que o mínimo obtido para a função objetivo quando o modelo é linear nos parâmetros, será aquele corrigido pela estimação OLS desde que as hipóteses padrão invocadas sejam satisfeitas e exista um único ponto de mínimo. Garantia total não pode ser dada para os casos não-lineares, visto que pode existir mais de um mínimo. Se existem razões para duvidar-se que o mínimo encontrado é aquele desejado, recomenda-se que gráficos dos contornos de S constante sejam traçados na região em que a solução é esperada. Outra possibilidade é começar o procedimento iterativo com diferentes conjuntos de valores iniciais dos parâmetros [19].

Deve-se observar que os mesmos problemas associados ao mal-condicionamento em problemas lineares, também aparecem em problemas de estimação não-lineares. Em problemas lineares a existencia de um mínimo teórico pode ser um problema para casos mal-condicionados, isto é, aqueles associados a valores de $\|X^T X\|$ relativamente pequenos. Nestes casos pequenas variações nas medidas podem causar grandes modificações na posição do mínimo, resultando em grandes perturbações nos valores dos parâmetros estimados. Devido a esta sensibilidade nos casos mal-condicionados, as provas de convergência em casos não-lineares são mais acadêmicas que práticas.

Existem diversos métodos de localização de mínimos de funções arbitrárias [19], contudo, em vez de discutir vários destes, será enfatizado um método básico e algumas de suas modificações. Tal método é conhecido como método de Gauss, o qual tem se mostrado bastante efetivo para uma grande classe de problemas de estimação de parâmetros diferentes.

Função Objetivo

Na estimação de mínimos quadrados ordinário, mínimos quadrados ponderado, máxima probabilidade e máximo à posteriori, as funções objetivo a serem minimizadas são geralmente diferentes. Entretanto, em alguns casos, a função objetivo na estimação MAP reduz-se àquela da estimação ML, a qual por sua vez reduz-se àquela da estimação OLS. Por isto, mostra-se a seguir uma função objetivo que é propícia às estimações OLS, WLS, ML e MAP, quando adequadamente especializada. Esta função é dada por:

$$S = [\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\beta})]^T \mathbf{W} [\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\beta})] + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{U} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}), \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{W}$ e $\mathbf{U}$ são matrizes de ponderação simétricas; $\mathbf{W}$ é positiva definida e $\mathbf{U}$ é semi-positiva definida. Em muitos casos $\mathbf{W}$ e $\mathbf{U}$ serão assumidas como sendo completamente conhecidas.

No caso da estimação por mínimos quadrados, objeto de interesse neste trabalho, faz-se $\mathbf{U} = 0$ e a equação (2.28) reduz-se a

$$S = [\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\beta})]^T \mathbf{W} [\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\beta})]. \quad (2.29)$$

Método de Minimização de Gauss

Constitui-se em um dos mais simples e efetivos métodos de minimização da função S . Considera-se um método atrativo por sua relativa simplicidade e por mostrar a direção e a magnitude das correções do vetor de parâmetros. Mostra-se efetivo na busca de um mínimo que seja razoavelmente bem definido, desde que as estimativas iniciais estejam na região do mínimo. Para os casos difíceis, isto é, aqueles com mínimo indistinto, as *modificações* do método de Gauss são recomendadas.

A condição necessária na minimização de S é que o seu jacobiano seja igual a zero. Desta forma, obtém-se:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} S = 2[-\nabla_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\eta}^T(\boldsymbol{\beta})] \mathbf{W} [\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\beta})]. \quad (2.30)$$

Usando a notação $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})$ para a matriz de sensibilidade,

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}) \equiv 2[\nabla_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\eta}^T(\boldsymbol{\beta})]^T, \quad (2.31)$$

de modo que, fazendo-se a equação (2.30) igual a zero em $\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$, esta torna-se:

$$X^T(\hat{\beta})W[y - \eta(\hat{\beta})] = 0. \quad (2.32)$$

Tendo em vista que $\hat{\beta}$ aparece implicitamente em η e X , não se pode resolver facilmente a equação (2.32). Suponha que se tenha um estimador de $\hat{\beta}$ indicado por b . Aqui duas aproximações são usadas na equação (2.32). Primeiro substitui-se $X(\hat{\beta})$ por $X(b)$ e, depois, desenvolve-se $\eta(\hat{\beta})$ em série de Taylor para $\hat{\beta} = b$, obtendo-se:

$$\eta(\hat{\beta}) = \eta(b) + [-\nabla_{\beta}\eta^T(b)]^T(\hat{\beta} - b) + \dots \quad (2.33)$$

Substituindo-se estas aproximações na equação (2.32) produz-se:

$$X^T(b)W[y - \eta(b) - X(b)(\hat{\beta} - b)] \approx 0. \quad (2.34)$$

Observa-se que a equação (2.34) é linear em $\hat{\beta}$. Se η for aproximadamente linear em β na região da solução da equação (2.32) e se esta região incluir b , o valor de $\hat{\beta}$ que satisfaz a equação (2.34) será uma melhor aproximação para a solução da equação (2.32) do que a fornecida por b . Assumindo-se que estas condições são verdadeiras, a equação (2.34) é igualada a zero. Para usar uma notação compacta e indicar um procedimento iterativo faz-se

$$b^{(k)} = b, \quad b^{(k+1)} = \hat{\beta}, \quad \eta^{(k)} = \eta(b), \quad X^{(k)} = X(b). \quad (2.35)$$

Usando esta notação na equação (2.34) e igualando-a a zero produz-se p equações na forma matricial para $b^{(k+1)}$,

$$b^{(k+1)} = b^{(k)} + P^{(k)}[X^{T(k)}W(y - \eta^{(k)})], \quad (2.36)$$

onde

$$P^{-1(k)} \equiv X^{T(k)}W X^{(k)}. \quad (2.37)$$

A equação (2.36) é conhecida como a *equação de linearização de Gauss*. Observa-se que nos modelos lineares $\eta = X\beta$ e a equação (2.36) reduz-se à equação (2.24) quando se faz $b^{(k)}$ igual a zero.

Usando-se a equação (2.36) em casos não-lineares, uma estimativa inicial de β , designada por $b^{(0)}$, é necessária. Desta forma $\eta^{(0)}$ e $X^{(0)}$ podem ser calculados, os quais por sua vez, são usados na equação (2.36) para obter-se o vetor estimado $b^{(1)}$ melhorado. Isto completa a primeira iteração. Em seguida, $\eta^{(1)}$ e $X^{(1)}$ são avaliados de modo que $b^{(2)}$ possa ser determinado. Este procedimento iterativo continua até que a variação em

qualquer componente de $\mathbf{b}$ seja considerada desprezível. Um critério para indicar isto é sugerido por Beck & Arnold [19]:

$$\frac{|b_i^{(k+1)} - b_i^{(k)}|}{|b_i^{(k)}| + \delta_1} < \delta \text{ para } i = 1, 2, \dots, p \quad (2.38)$$

onde δ é a tolerância, a qual é um número pequeno, geralmente da ordem de 10^{-4} . A fim de evitar problemas caso $b_i^{(k)}$ vá para zero, o valor de δ_1 é feito igual ao menor valor numérico que ainda é maior que o zero da máquina em que o algoritmo está implementado.

Neste ponto, deve-se apresentar alguns comentários e observações importantes com relação à equação de linearização de Gauss, os quais são mostrados a seguir:

- a) Fazendo-se $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, a equação (2.36) fornece o estimador de OLS.
- b) Para estimar-se os parâmetros usando a equação (2.36) é necessário que $\mathbf{P}^{-1}$ tenha uma inversa, portanto, seu determinante tem que ser diferente de zero (ou seja, $\|\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}\| \neq 0$) na região do mínimo. Esta condição é conhecida como *condição de identificabilidade*. Caso este determinante seja igual a zero, em geral, não existirá um ponto único de mínimo. Deve-se alertar que o método de Gauss não produzirá qualquer solução neste caso.
Para estimação OLS ($\mathbf{W} = \mathbf{I}$), também é necessário que $\Delta = \|\mathbf{X}^T \mathbf{X}\| \neq 0$ nas proximidades do mínimo de S . Contudo, a condição de dependência linear é quase satisfeita em muito mais casos do que seria esperado. Nestes casos em que Δ é quase zero, o que se entende como um mal-condicionamento, a função S terá um único ponto de mínimo, entretanto, este ponto não será bem pronunciado.
- c) Embora a equação (2.36) tenha sido obtida usando-se a aproximação linear de Taylor, a equação de Gauss não é uma aproximação rigorosa de primeira ordem porque uma série de primeira ordem não foi usada para $\mathbf{X}^{(k+1)}$.

Tem sido mostrado que as dificuldades encontradas na convergência do método de Gauss são, frequentemente, devidas à dependência linear aproximada citada no item (b). Na maioria dos casos é aconselhável que os gráficos dos coeficientes de sensibilidade sejam traçados para que se possa examiná-los antecipadamente. Em uma estimação não-linear efetiva, o exame cuidadoso destes coeficientes é imperativo.

Modificações do Método de Gauss

O método de Gauss tem a característica de fornecer a direção e a magnitude da variação na estimativa dos parâmetros em cada passo do procedimento iterativo. Pequenas variações dos parâmetros na direção indicada pelo método de Gauss diminuem a

função objetivo. Contudo, ocasionalmente, o tamanho da variação indicada pelo método é tão grande que as sucessivas estimativas oscilam e chegam até a piorar o procedimento, tornando-o instável. Tal fato pode ser resultado da quase dependência linear dos coeficientes de sensibilidade e/ou estimativas iniciais dos parâmetros muito infelizes. Quando os coeficientes de sensibilidade são aproximadamente dependentes, deve-se considerar outras alternativas em adição a outros procedimentos de minimização, tais como, diminuir o número de parâmetros a ser estimado ou reprojeter o experimento de modo que a correlação entre os parâmetros seja reduzida.

Algoritmos muito complexos tem sido propostos para melhorar a convergência do método de Gauss. Alguns destes podem ser chamados modificações do método de Gauss enquanto outros poder-se-iam chamar distintamente de métodos diferentes. Nesta última categoria estão os métodos de Levenberg e Marquardt [19].

Como a aproximação linear é válida sobre alguma região, uma correção suficientemente pequena na direção dada pelo método de Gauss melhoraria a estimativa. Muitos métodos têm sido propostos os quais usam a direção fornecida pelo método de Gauss mas modificam de alguma forma o tamanho do passo. Assim pode-se generalizar a equação (2.36) para

$$b^{(k+1)} = b^{(k)} + h^{(k+1)} \Delta_g b^{(k)}, \quad (2.39)$$

onde

$$\Delta_g b^{(k)} = P^{(k)} [X^{T(k)} W (y - \eta^{(k)})]. \quad (2.40)$$

Na equação (2.39) $h^{(k+1)}$ é um fator de interpolação escalar. Deve-se observar que este fator pode ser dependente da iteração e, se este for feito igual à unidade obtém-se o método de Gauss original.

Em uma determinada classe de métodos, e de particular interesse neste trabalho, uma busca ótima de $h_{(k+1)}$ é feita a fim de determinar-se precisamente o mínimo de S ao longo da direção de Gauss.

Métodos de Levenberg e Marquardt

Levenberg e Marquardt desenvolveram métodos para determinar a direção do parâmetro à cada passo iterativo. Tais métodos têm a mesma idéia essencial em comum, ou seja, tomando-se uma função WLS pode-se generalizar uma função de Levenberg-Marquardt adicionando-se o termo $\gamma^{(k)} \Omega^{(k)}$ na equação 2.37 e, conseqüentemente, transformando a equação 2.36 em

$$\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + (\mathbf{X}^{T(k)}\mathbf{W}\mathbf{X}^{(k)} + \gamma^{(k)}\boldsymbol{\Omega}^{(k)})^{-1}\mathbf{X}^{T(k)}\mathbf{W}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}^{(k)}), \quad (2.41)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}^{(k)}$ é uma matriz diagonal e seus efeitos são reduzir o tamanho e a variação da direção do passo. Desde que exista um único mínimo, o qual é o único ponto estacionário, e a convergência do procedimento iterativo seja dada pela equação (2.41), as estimativas encontradas serão aquelas procuradas. A presença do termo $\gamma^{(k)}\boldsymbol{\Omega}^{(k)}$ tende a reduzir as oscilações ou instabilidades particularmente quando as componentes da diagonal de $\gamma^{(k)}\boldsymbol{\Omega}^{(k)}$ são feitas relativamente grandes quando comparadas com os termos de $\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X}$.

Levenberg provou que S diminui nas iterações iniciais se γ for grande no início e diminua em seguida, ressalvado que S não tenha um ponto estacionário em $\mathbf{b}^{(k)}$. Uma recomendação de Levenberg era fazer $\boldsymbol{\Omega}^{(k)} = \mathbf{I}$, entretanto, se neste caso $\gamma^{(k)}$ for muito grande a equação (2.41) pode ser escrita como:

$$\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + K\mathbf{X}^{T(k)}\mathbf{W}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}^{(k)}), \quad (2.42)$$

onde

$$K = [\gamma^{(k)}]^{-1}$$

este método é conhecido como *método do gradiente*. Tal método fornece a direção mas não o tamanho do passo, por isso, pode ser muito ineficiente quando próximo do mínimo. Entretanto, não requer inversão de matriz como o método de Gauss e Levenberg-Marquardt.

Concomitantemente com $\boldsymbol{\Omega}^{(k)} = \mathbf{I}$, Levenberg sugeriu duas possibilidades: fazer $\gamma^{(k)}$ ser um valor constante ou variá-lo quando o mínimo estiver próximo. Uma possibilidade é que o k -ésimo valor de $\gamma^{(k)}$ seja:

$$\gamma^{(k)} = \frac{\mathbf{e}^{T(k)}\mathbf{W}\mathbf{X}^{(k)}\mathbf{X}^{T(k)}\mathbf{W}\mathbf{e}^{(k)}}{S^k}, \quad (2.43)$$

onde

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}^{(k)},$$

chama-se este procedimento de *método de Levenberg desbalanceado*. Observa-se que $\gamma^{(k)}$ dado pela equação (2.43) vai para zero quando o mínimo S se aproxima, pois cada componente de $\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{e}$ vai para zero no mínimo de S . Quando próximo do mínimo, S também diminui mas o numerador diminui mais depressa.

Outra recomendação de Levenberg era fazer $\boldsymbol{\Omega}^{(k)}$ igual aos termos da diagonal de $\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X}$. Tal escolha tem o efeito de fazer a iteração do problema invariante sob as

variações da escala nos parâmetros. Para esta escolha de $\Omega^{(k)}$, a seguinte expressão de $\gamma^{(k)}$ foi sugerida:

$$\gamma^{(k)} = \frac{\mathbf{e}^{T(k)} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(k)} \Omega_m \mathbf{X}^{T(k)} \mathbf{W} \mathbf{e}^{(k)}}{S^k}, \quad (2.44)$$

a qual também vai para zero quando se aproxima do mínimo. Usando esta expressão e a condição de que $\Omega_m = \text{diag}(\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})$ obtém-se o que se chama de *método de Levenberg balanceado*.

Quando $\Omega = \mathbf{I}$ e quando γ é dado por

$$\gamma^{(k)} = \frac{3\mathbf{e}^{T(k)} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(k)} \Omega_m \mathbf{X}^{T(k)} \mathbf{W} \mathbf{e}^{(k)}}{\mathbf{e}^{T(k)} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(k)} \mathbf{X}^{T(k)} \mathbf{W} \mathbf{e}^{(k)}}, \quad (2.45)$$

chama-se este procedimento de *método de Levenberg modificado*.

Como foi citado anteriormente, o método desenvolvido por Marquardt é similar ao de Levenberg. A diferença entre os métodos reside na forma com que se determina os valores adequados para γ . Da mesma forma, se $\gamma\Omega$ for grande comparado com $\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}$, a correção dos parâmetros estará na mesma direção dada pelo método do descenso máximo, o qual não requer que $\|\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}\| \neq 0$. Por isso os métodos de Levenberg e Marquardt são úteis quando $\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}$ é fracamente condicionado no vetor de parâmetros iniciais mas é melhor condicionado na vizinhança da solução de mínimos quadrados. Ambos os métodos fornecem um compromisso entre o método do descenso máximo e o método de Gauss, com iterações iniciais próximas do primeiro e finais próximas do segundo. Marquardt propôs o que é chamado por Box & Kanemasu [19] o algoritmo (γ, ν) no qual $\gamma^{(k)}$ é calculado por

$$\gamma^{(k)} = \frac{\gamma_0}{\nu^{(k)}}. \quad (2.46)$$

O valor inicial de $\gamma^{(k)} \Omega^{(k)}$, correspondendo à primeira iteração, será $\gamma^{(k)} \Omega^{(k)} = \frac{\gamma_0 \Omega_m}{\nu}$ onde ν é algum valor constante maior que a unidade. Este método possui supostamente as virtudes dos métodos do descenso máximo e de Gauss aonde cada um é mais efetivo.

O método de Levenberg foi proposto antes do advento dos computadores digitais e é de interesse mais acadêmico, enquanto o método de Marquardt tem sido largamente usado e é razoavelmente eficiente e confiável [26].

2.3 Método de Ajuste de Modelos Usado no Trabalho

Poder-se-ia definir o método usado no trabalho como uma estimação por mínimos quadrados amortecido modificado. Baseado nos conceitos apresentados nas seções

anteriores este método consiste de uma estimação por mínimos quadrados não-linear com a minimização de Gauss modificada por Levenbreg-Marquardt. O algoritmo final foi inicialmente implementado por Arruda [27] no ajuste de modelos de rotores e, posteriormente foi adaptado por Arruda & Santos [21] para ser usada no ajuste de modelos de estruturas de uma forma geral. Tomando-se como ponto de partida que as FRF's obtidas experimentalmente e os parâmetros modais (λ e Φ) das sub-estruturas obtido por MEF sejam dados, o algoritmo consiste basicamente dos seguintes passos:

- **Passo 1.** Arbítrio dos valores iniciais dos parâmetros ($\mathbf{b}^{(\bar{k})}$).
- **Passo 2.** Realiza a síntese modal das sub-estruturas e calcula as FRF's $\eta^{(\bar{k})}$
- **Passo 3.** Determinação da matriz jacobiana ($\mathbf{X}^{(\bar{k})}$) do vetor $\eta^{(\bar{k})}$ em $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(\bar{k})}$.

$$x_{ij}(\mathbf{b}^{(\bar{k})}) = \left. \frac{\partial \eta_i(\mathbf{b})}{\partial b_j} \right|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(\bar{k})}} ; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p \quad (2.47)$$

- **Passo 4.** Cálculo do vetor direção de busca $\Delta_g \mathbf{b}^{(\bar{k})}$, obtido pela solução do sistema de equações lineares sobre-determinado, dado por

$$\mathbf{W} \mathbf{X}^{\bar{k}} \Delta_g \mathbf{b}^{(\bar{k})} = \mathbf{W}(\mathbf{y} - \eta^{(\bar{k})}) \quad (2.48)$$

- **Passo 5.** Determinação da magnitude do passo através de uma busca unidimensional na direção de busca minimizando S , isto é, determinando h^{k+1} na equação (2.39)
- **Passo 6.** Testa a convergência da busca unidimensional, ou seja, se $S(\mathbf{b}^{k+1}) < S(\mathbf{b}^k)$ vá para o **Passo 7**, caso contrário faz o **Passo 2** com $\mathbf{b}^{(k+1)}$ e volta no **Passo 5**.
- **Passo 7.** Testa a convergência do ajuste, ou seja, se $S(\mathbf{b}^{\bar{k}+1}) < S(\mathbf{b}^{\bar{k}})$ e $\mathbf{b}^{(\bar{k}+1)} < \mathbf{b}^{(\bar{k})}$ vá para o **Passo 8**, caso contrário, introduz “amortecimento” na direção de busca fazendo-se

$$\mathbf{P}^{-1(k)} \equiv \mathbf{X}^{T(\bar{k})} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(\bar{k})} + \gamma^{(\bar{k})} \Omega_m^{(\bar{k})} \quad (2.49)$$

e aumentando $\gamma^{(\bar{k})}$ quando $\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}$ for menos condicionado no vetor de parâmetros ou diminuindo na condição contrária. Em seguida volta no **Passo 2**.

- **Passo 8.** Pare, convergência atingida.

As FRF's experimentais são obtidas através de medições diretamente na estrutura em teste, enquanto, as FRF's analíticas são obtidas através do método de síntese dos modos dos componentes amortecido (vide Capítulo 3), a partir dos parâmetros modais de cada sub-estrutura calculados em um programa de MEF.

A matriz jacobiana pode ser calculado numericamente por diferenças finitas ou através da formulação exata da derivada das FRF's, obtidas a partir do método de síntese dos modos componentes amortecido, com relação aos parâmetros de rigidez e amortecimento da junta [16]. Outros métodos também são possíveis de serem usados, contudo, como o problema é iterativo, é melhor tomar-se a primeira diferença, pois apresenta resultados com precisão suficiente a um custo computacional mais baixo. Assim obtém-se a matriz jacobiana dada por

$$x_{ij} = \frac{\partial \eta_i}{\partial b_j} \approx \frac{\eta_i(b_j + \Delta b_j) - \eta_i(b_j)}{\Delta b_j}. \quad (2.50)$$

A escolha de Δb_j pode ser crítica. Normalmente, o seu valor será tão pequeno quanto possível, entretanto existem limitações devido ao truncamento numérico. Neste trabalho, utiliza-se o critério proposto por Brown & Dennis [26]:

$$\Delta b_j = \min(\|\eta_i\|, \delta_j), \quad (2.51)$$

onde

$$\delta_j = \begin{cases} 10^{-9} & \text{se } |b_j| < 10^{-6} \\ 10^{-3} & \text{se } |b_j| \geq 10^{-6} \end{cases} \quad (2.52)$$

O sistema de equações lineares é resolvido por decomposição em valores singulares (SVD) [28].

A busca unidimensional é feita usando-se o método de Coggin [29], o qual usa um algoritmo de interpolação quadrática. Assumindo-se que $\mathbf{b}^{(k)}$, $\mathbf{b}^{(k+1)}$, $\mathbf{S}^{(k)}$ e $\mathbf{S}^{(k+1)}$ sejam dados, usa-se o critério de convergência proposto por Wolfe [26], cujo algoritmo consiste dos seguintes passos:

- **Passo 1.** Faz $i = 1$.
- **Passo 2.** Se $|b_i^{(k+1)}| \leq \epsilon_1$ vá para o **Passo 5**.
- **Passo 3.** Se $|b_i^{(k+1)} - b_i^{(k)}| > \epsilon_3 |b_i^{(k)}|$ vá para o **Passo 12**.
- **Passo 4.** Vá para o **Passo 6**.
- **Passo 5.** Se $|b_i^{(k+1)} - b_i^{(k)}| > \epsilon_2$ vá para o **Passo 12**.
- **Passo 6.** Se $i < p$, faça $i = i + 1$ e vá para o **Passo 2**.
- **Passo 7.** Se $|S^{(k+1)}| \leq \epsilon_4$ vá para o **Passo 10**.
- **Passo 8.** Se $|S^{(k+1)} - S^{(k)}| > \epsilon_6 |S^{(k)}|$ vá para o **Passo 12**.

- **Passo 9.** Vá para o **Passo 11.**
- **Passo 10.** Se $|S^{(k+1)} - S^{(k)}| > \epsilon_5$ vá para o **Passo 12.**
- **Passo 11.** Convergência atingida. Vá para o **Passo 13.**
- **Passo 12.** Convergência não é atingida.
- **Passo 13.** Pare.

Este critério de convergência garante que ambos S e b cessarão de variar significativamente da iteração k para a $k + 1$. Os valores de ϵ_i ($i = 1, \dots, 6$) usados foram: $\epsilon_1 = 10^{-3}$, $\epsilon_2 = 10^{-5}$, $\epsilon_3 = 10^{-2}$, $\epsilon_4 = 10^{-3}$, $\epsilon_5 = 10^{-5}$ e $\epsilon_6 = 10^{-2}$.

Desde que algumas das hipóteses padrão (1,2,3,4,7 e 8) se verifiquem a matriz de covariância mínima do estimador OLS para o caso linear, equação (2.26), pode ser aproximada para a obtenção das variâncias da solução de mínimos quadrados não-linear por [25]:

$$b_{LSi} \approx (X^T X)_{ii}^{-1} \sigma^2, \quad (2.53)$$

onde

$$\sigma^2 \approx \frac{S_{LS}(b_{LS})}{n - p} \quad (2.54)$$

Na equação (2.54) n é o número de elementos em y e p é o número de elementos em β . Para $(n - p) \rightarrow \infty$ a distribuição de probabilidade de b_{LS} tende a distribuição Gaussiana e o intervalo de confiança para cada parâmetro b_{LSn} pode ser estabelecido [25]. Desta forma, pode-se obter a previsão do erro estimado, $\hat{\sigma}_{b_{LS}}$ dada por

$$\hat{\sigma}_{b_{LSi}} \approx \sqrt{(X^T X)_{ii}^{-1} \sigma^2} \quad (2.55)$$

Muito embora a formulação de ajuste de modelos seja apresentada na sua forma mais geral possível, no caso desta aplicação do método algumas particularizações foram feitas as quais devem ser observadas. A matriz de ponderação é feita igual a unidade ($W = I$), assim como, a introdução do “amortecimento” no processo iterativo do ajuste, que embora esteja implementado no programa não foi efetivamente usado neste trabalho.

Capítulo 3

Métodos de Sub-estruturação Dinâmica

3.1 Generalidades

A resposta de uma estrutura complexa a uma excitação dinâmica é usualmente obtida através da análise de um modelo de elementos finitos. Como tais modelos podem conter milhares de graus de liberdade, e visto que a estrutura pode conter várias sub-estruturas as quais podem ser projetadas e fabricadas por diferentes organizações, é desejável que se tenha um método de análise dinâmica que permita a redução do número de graus de liberdade, bem como, permita a maior independência possível com relação ao projeto e às análises de cada sub-estrutura.

Os métodos de sub-estruturação constituem hoje as melhores e quiçá as únicas estratégias de resolução para análise dinâmica de estruturas complexas. O uso destes métodos é justificado pelas vantagens que apresentam no plano da eficiência numérica e por levarem em conta as restrições da organização de grandes projetos. Tais métodos permitem a resolução de grandes problemas de forma mais econômica com precisão satisfatória, sua estrutura modular faz com que o impacto das modificações das sub-estruturas sobre a análise do sistema como um todo se mostre reduzido e, finalmente, possibilitam a verificação dos modelos de sub-estruturas através de ensaios de identificação modal.

Existem dois enfoques fundamentais de resolução dinâmica de sub-estruturas: a condensação de Guyan em diferentes níveis e a utilização dos métodos de síntese modal ou também chamados de métodos de síntese dos modos dos componentes ou acoplamento de sub-estruturas.

O *Método de Condensação de Guyan em Diferentes Níveis* é uma extensão da condensação de Guyan [22], cujo princípio básico consiste em obter um autoproblema de tamanho reduzido alterando o mínimo possível o espectro de baixas frequências do sistema inicial. Para tal, efetua-se uma partição do conjunto dos graus de liberdade da estrutura

em dois sub-conjuntos: o dos graus de liberdade dinâmicos ou principais, que servirão para caracterizar apenas o comportamento dinâmico da estrutura, e o complementar, dos graus de liberdade secundários. O método de condensação de Guyan em diferentes níveis consiste em efetuar-se, em uma primeira fase, uma condensação de Guyan para cada sub-estrutura mantendo como graus de liberdade dinâmicos os graus de liberdade da interface e determinados graus de liberdade internos. Em seguida, efetua-se a montagem das matrizes condensadas das sub-estruturas e eliminam-se, por uma nova condensação de Guyan, certos graus de liberdade da interface ou internos, que não se considere essenciais para a análise dinâmica da estrutura completa. Os inconvenientes do método são evidentemente os mesmos da condensação de Guyan, ou seja, é difícil obter uma precisão satisfatória com uma boa eficiência numérica.

Os *Métodos de Síntese Modal* são variações do método dos modos assumidos [42], ou aproximação de Ritz, nos quais se escolhem como base de vetores para cada sub-estrutura os modos normais e os modos de deformação estática com diferentes tipos de condições de contorno. A resolução por síntese modal oferece uma precisão superior à condensação de Guyan com uma eficácia numérica maior [43], assim como, permitem a verificação dos modelos de sub-estruturas através de resultados experimentais.

Neste capítulo pretende-se mostrar alguns dos principais métodos de síntese modal dando um ênfase maior para aquele utilizado no trabalho, ou seja, o método de Martin & Ghlain [20].

3.2 Métodos de Síntese Modal

Os métodos de síntese modal estão baseados nas diferentes escolhas dos modos das sub-estruturas, bem como, em seus diversos procedimentos de acoplamento. Para simplificar as análises consideraremos primeiramente um sistema não-amortecido em vibração livre. Embora qualquer número de componentes possa ser acoplado para formar um sistema, serão usados apenas dois componentes na apresentação do modelo. A Figura (3.1) mostra uma viga engastada dividida em dois componentes α e β . O sistema de coordenadas físicas P dos componentes pode ser dividido em um sistema J das coordenadas da junção (interface), u_j , e o sistema I das coordenadas interiores, u_i .

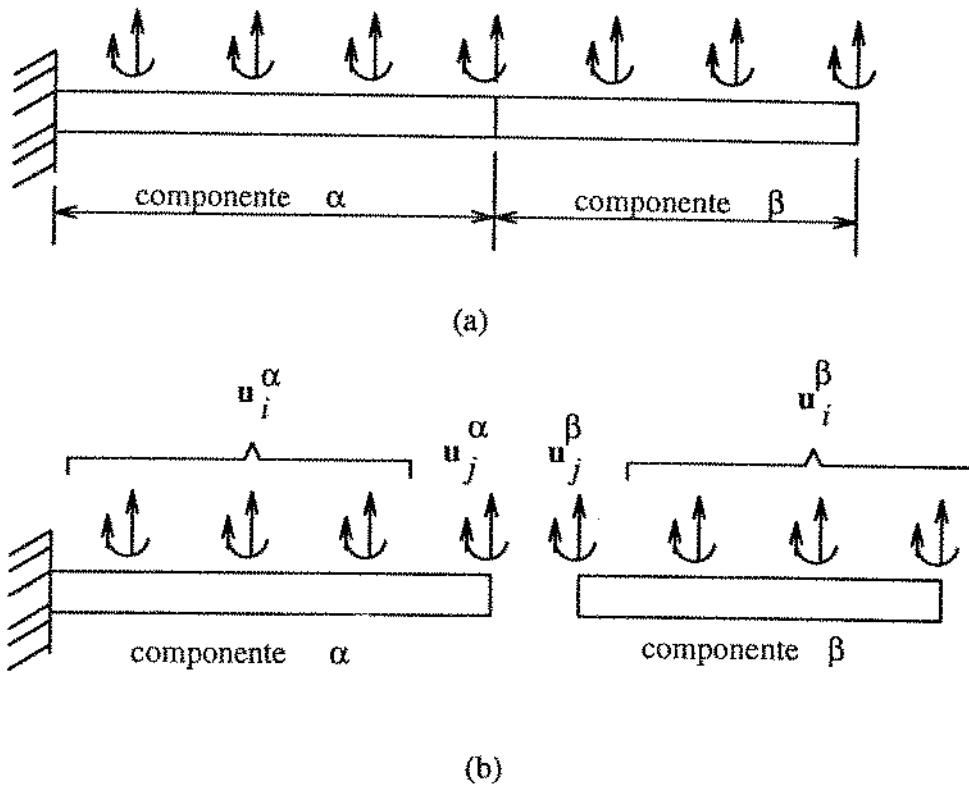


Figura 3.1: Componentes de uma estrutura. (a) Estrutura acoplada. (b) Componentes com suas coordenadas físicas.

A equação do movimento para um componente pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}. \quad (3.1)$$

As coordenadas físicas, u , podem ser representadas em termos das coordenadas generalizadas do componente, p , pela transformação de coordenadas

$$u = \Psi p, \quad (3.2)$$

onde Ψ é a matriz dos modos do componente.

3.2.1 Revisão Bibliográfica

Hurty [30], em 1965, apresentou primeiro trabalho sobre Síntese Modal capaz de analisar sub-estruturas com interface redundante. Modos normais com interface fixa, modos de corpo rígido e modos de restrição redundante são usados para definir

as coordenadas generalizadas das sub-estruturas. Craig & Bampton [31] modificaram o método de Hurty mostrando que era desnecessário separar os modos de restrição em modos de corpo rígido e modos de restrição redundantes. Posteriormente, inúmeros trabalhos propondo novos métodos de acoplamento de sub-estruturas para análises dinâmicas foram apresentados, alguns dos mais destacados podendo ser encontrados nas referências [32, 33, 34, 35, 37, 36, 38]. Diversas revisões da literatura de Síntese Modal têm sido apresentadas [39, 40, 41]. Alguns destes métodos estão descritos em pelo menos três livros [42, 43, 44]. O método utilizado neste trabalho foi desenvolvido por Martin & Ghilaim [20] e constitui-se também em um método de síntese modal de sub-estruturas usando modos normais com interface livre. Este difere dos outros métodos devido ao fato das interfaces das sub-estruturas não serem redundantes, mas estarem ligadas entre si por elementos discretos de rigidez e amortecimento.

3.2.2 Definição dos Tipos de Modos das Sub-estruturas

Os métodos de síntese modal estão baseados nas diferentes escolhas dos modos das sub-estruturas e nas condições impostas na interface quando da determinação dos mesmos. Portanto, torna-se importante definir as diferentes possibilidades de escolha dos modos das sub-estruturas para poder-se efetuar uma classificação dos métodos. Dentre as escolhas possíveis distinguem-se os modos estáticos e os modos normais.

Modos Normais com Interface Fixa

Modos normais com interface fixa são obtidos fazendo-se $u_j = 0$ e resolvendo-se a equação (3.1) para os modos de vibração livre da sub-estrutura ($f_i = 0$). Assim a equação (3.1) reduz-se ao problema de autovalor

$$(k_{ii} - \omega^2 m_{ii})\Phi = 0. \quad (3.3)$$

Os autovalores da sub-estrutura formam a matriz diagonal

$$A = \text{diag}(\omega_{i1}^2, \omega_{i2}^2, \dots, \omega_{iN_i}^2) \quad (3.4)$$

e os correspondentes autovetores normalizados formam a matriz modal

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde N_i é o número total de coordenadas internas da sub-estrutura.

Modos Normais com Interface Livre

Modos normais com interface livre são obtidos fazendo-se $f_j = 0$ na equação (3.1) e resolvendo-a para vibração livre $f_i = 0$. Assim

$$(k - \bar{\omega}^2 m) \bar{\Phi} = 0. \quad (3.6)$$

A matriz dos autovalores é

$$\bar{A} = \text{diag}(\bar{\omega}_1^2, \bar{\omega}_2^2, \dots, \bar{\omega}_N^2), \quad (3.7)$$

onde $N = N_i + N_j$ é o número total de graus de liberdade da sub-estrutura. Como a sub-estrutura poderá estar livre-livre, esta poderá ter N modos de corpo rígido. Os autovetores normalizados formam a matriz modal

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{i1} & \bar{\phi}_{i2} & \dots & \bar{\phi}_{iN} \\ \bar{\phi}_{j1} & \bar{\phi}_{j2} & \dots & \bar{\phi}_{jN} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Modos Normais com Interface Carregada

Modos normais com interface carregada são obtidos aumentando-se a massa e/ou a rigidez da interface na equação (3.6) para obter, por exemplo,

$$\left[\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & (m_{jj} + \Delta m_{jj}) \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde Δm_{jj} é a matriz do carregamento na interface. A matriz modal resultante tem a forma dada na equação (3.8).

Modos Estáticos de Restrição

Um modo de restrição é definido impondo-se estaticamente um deslocamento unitário sobre uma coordenada física e deslocamento zero no restante de um sub-sistema das coordenadas físicas da sub-estrutura. O procedimento para obter os modos de restrição é equivalente à aplicação de uma redução de Guyan a todas as coordenadas interiores, isto é, desprezando-se a massa na primeira linha da partição da equação (3.1) e impondo-se deslocamentos unitários sucessivamente em todas as coordenadas da junção teremos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_j \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

Logo da primeira linha da partição da equação (3.10), obtém-se;

$$k_{ii}u_i + k_{ij}u_j = 0, \quad (3.11)$$

donde:

$$u_i = -k_{ii}^{-1}k_{ij}u_j. \quad (3.12)$$

Aplicando-se a transformação de coordenadas $u = \Psi_c u_j$, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{ii}^{-1}k_{ij} \\ I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

então a matriz dos modos de restrição é dada por:

$$\Psi_c = \begin{bmatrix} \Psi_{ij} \\ I_{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde $\Psi_{ij} = -k_{ii}^{-1}k_{ij}$.

Se a sub-estrutura for livre-livre, Ψ_c conterá N_r modos de corpo rígido linearmente independentes.

Modos Estáticos de Junção

Modos de junção são modos estáticos que podem ser usados para complementar os modos normais de uma sub-estrutura com interface livre. Um modo de junção é definido como a deflexão estática da sub-estrutura a qual resulta quando uma força unitária é exercida sobre uma coordenada física enquanto o restante de um sub-sistema específico das coordenadas físicas está livre de forças. Modos de junção serão descritos primeiro para sub-estruturas restringidas e em seguida para sub-estruturas livre-livre.

Modos de junção para sub-estruturas restringidas. Modos de junção para uma sub-estrutura restringida são obtidos resolvendo-se um problema de múltipla deflexão estática, onde

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{ij} \\ \Psi_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{jj} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Definindo-se a matriz de flexibilidade $g \equiv k^{-1}$. Então a matriz dos modos de junção serão as colunas da matriz de flexibilidade, ou seja

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \Psi_{ij} \\ \Psi_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij} \\ g_{jj} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Modos de junção para sub-estruturas livres. Para uma sub-estrutura livre devemos restringir seus movimentos de corpo rígido através de um conjunto de R restrições determinadas estaticamente. Logo, os modos de junção relativos as R restrições são definidos por

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ir} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jr} \\ k_{ri} & k_{rj} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{ij} \\ \Psi_{jj} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{jj} \\ R_{rj} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Da mesma forma que no caso das sub-estruturas restringidas, os modos de junção são essencialmente colunas de uma matriz de flexibilidade:

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \Psi_{ij} \\ \Psi_{jj} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij} \\ g_{jj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Nesta formulação as coordenadas R podem ser quaisquer, desde que restrinjam os movimentos de corpo rígido da sub-estrutura, exceto aquelas onde as forças unitárias serão aplicadas.

Modos de junção com alívio de inércia. Uma forma alternativa de definir modos de junção para uma sub-estrutura com liberdade de corpo rígido leva-nos aos modos de alívio de inércia usados por McNeal [35] & Rubin [37]. Estes modos são definidos, também, aplicando-se uma força unitária em cada coordenada do sistema, isto é

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{jj} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Estas forças são aplicadas nas sub-estruturas, cuja equação do movimento é

$$M\ddot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{u}$ é a matriz da soma dos deslocamentos de corpo rígido e flexível, dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_f. \quad (3.21)$$

Como $K\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$, teremos

$$\mathbf{F}_e \equiv M\ddot{\mathbf{u}}_f + K\mathbf{u}_f = \mathbf{F} - M\ddot{\mathbf{u}}_r \quad (3.22)$$

a qual define o sistema de forças equilibradas aplicadas aos modos elásticos. Os deslocamentos das coordenadas físicas devido os deslocamentos das coordenadas generalizadas de corpo rígido são dados por:

$$\mathbf{u}_r = \Psi_r \mathbf{p}_r. \quad (3.23)$$

A equação diferencial para os deslocamentos de corpo rígido devido as forças externas $\mathbf{F}$ é:

$$M_r \ddot{\mathbf{p}}_r = \Psi_r^T \mathbf{F} \quad (3.24)$$

onde

$$M_r = \Psi_r^T M \Psi_r \quad (3.25)$$

Assim, das equações (3.22), (3.23) e (3.24), teremos:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F} - M\Psi_r M_r^{-1} \Psi_r^T \mathbf{F} = \mathbf{D}\mathbf{F}, \quad (3.26)$$

onde

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - M\Psi_r M_r^{-1} \Psi_r^T \quad (3.27)$$

As relações entre as forças elásticas $\mathbf{F}_e$ e as forças externas $\mathbf{F}$ estão restringidas por tantas condições de equilíbrio quantos forem os graus de liberdade de corpo rígido N . Logo quando $N \neq 0$, $\mathbf{D}$ será uma matriz singular. Contudo, quando $N = 0$, $\mathbf{D}$ será a matriz identidade $\mathbf{I}$, pois não haverá forças inerciais de corpo rígido. Indicando a matriz de flexibilidade do corpo restringido por $\mathbf{G}_c$, a correspondente deflexão para este problema será:

$$u = G_c F_e = G_c D F. \quad (3.28)$$

Este é um problema estático incomum em que a matriz de flexibilidade resultante G_c é singular e em geral assimétrica. Qualquer coordenada que seja fixada para evitar movimento de corpo rígido produzirá uma correspondente linha nula na matriz de rigidez e consequentemente em G_c . A deflexão restringida u difere do deslocamento de corpo flexível desjado, u_f , por certos deslocamentos generalizados de corpo rígido p'_r , isto é,

$$u_f = u - \Psi_r p'_r. \quad (3.29)$$

A exigência que u_f esteja livre de qualquer contribuição de corpo rígido é satisfeita determinando-se o p'_r , tal que u_f seja ortogonal aos modos de corpo rígido, ou seja:

$$\Psi_r^T M [u - \Psi_r p'_r] = 0. \quad (3.30)$$

Resolvendo a equação (3.30) para p'_r , teremos:

$$p'_r = M_r^{-1} \Psi_r^T M u. \quad (3.31)$$

Substituindo-se a equação (3.31) na equação (3.29), obtém-se:

$$u_f = u [I - \Psi_r M_r^{-1} \Psi_r^T M], \quad (3.32)$$

onde

$$[I - \Psi_r M_r^{-1} \Psi_r^T M] = D^T. \quad (3.33)$$

Substituindo-se a equação (3.28) na equação (3.32) obtém-se a *matriz de flexibilidade elástica simétrica* G , onde:

$$u_f = G F, \quad G = D^T G_c D. \quad (3.34)$$

Relembrando que o modo de junção é definido como a deflexão estática da sub-estrutura, teremos, os modos de junção com alívio de inércia dados por:

$$\Psi_a = (D^T G_c D) F, \quad (3.35)$$

onde a matriz de flexibilidade restringida G_c e as forças externas F podem ser escritas na forma particionada como:

$$G_c = \begin{bmatrix} g_{ii} & g_{ij} & 0 \\ g_{ji} & g_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Os modos de junção com alívio de inércia são usados em vez dos modos de junção devido à sua formulação ser consistente com o método de superposição modal em aceleração.

Modos de junção com flexibilidade residual. Modos de junção residual têm sido empregados em diversos métodos de síntese modal, entre estes podemos destacar os Métodos de Craig & Chang [38] e de Rubin [37]. Pode ser mostrado que a matriz de flexibilidade elástica da equação (3.34) pode ser escrita como

$$G = \Psi_e \Omega_{ee}^{-1} \Psi_e^T, \quad (3.37)$$

onde Ψ_e são os modos normais elásticos ortonormais. Separando os modos normais elásticos em modos mantidos, Φ_k , e modos descartados, Ψ_d , a matriz de flexibilidade elástica será dada por

$$G = \Psi_k \Omega_{kk}^{-1} \Psi_k^T + \Psi_d \Omega_{dd}^{-1} \Psi_d^T. \quad (3.38)$$

A matriz de flexibilidade residual é dada por:

$$G_d = \Psi_d \Omega_{dd}^{-1} \Psi_d^T, \quad (3.39)$$

a qual pode ser obtida sem o conhecimento direto de Ψ_d e Ω_{dd} , mas combinando-se as equações (3.34), (3.38) e (3.39), para obter-se:

$$G_d = D^T G_c D - \Psi_k \Omega_{kk}^{-1} \Psi_k^T. \quad (3.40)$$

Das equações (3.35) e (3.40) um modo de junção com alívio de inércia residual, Ψ_d , é obtido, onde

$$\Psi_d = G_d F \quad (3.41)$$

Se a estrutura não tiver modos de corpo rígido, $D = I$, logo a equação (3.40) reduz-se para

$$\mathbf{G}_d = \mathbf{G}_c - \Psi_k \Omega_{kk}^{-1} \Psi_k^T, \quad (3.42)$$

a qual é a *matriz de flexibilidade residual* e as equações (3.41) e (3.42) podem então ser combinadas para dar os *modos de junção residuais*.

3.2.3 Classificação dos Métodos de Síntese Modal

Uma classificação dos métodos de síntese modal de sub-estruturas está baseada nas condições impostas na interface entre uma sub-estrutura e as sub-estruturas adjacentes quando da determinação dos seus modos. Estes podem ser *Métodos com Interface Fixa*, *Métodos com Interface Livre* e *Métodos Híbridos* dependendo se todas, nenhuma ou algumas das coordenadas da interface, respectivamente, são restringidas. Relacionados com alguns métodos de interface livre existe uma classe que pode ser chamada de *Métodos com Interface Carregada* [38]. Grande parte dos métodos de síntese existentes podem ser descritos por uma formulação bastante compreensiva e simples. As diferenças entre estes métodos resultam do uso dos diferentes tipos de modos (vide seção 3.2.2) que descrevem as coordenadas generalizadas das sub-estruturas e as diferentes formas de forçar a compatibilidade das interfaces das mesmas. Desta forma é possível mostrar nas seções seguintes uma formulação generalizada, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, da síntese modal de sub-estruturas para análise dinâmica.

Formulação Generalizada de Síntese Modal para Vibração Livre Sem Amortecimento

Considere um sistema composto de duas sub-estruturas, α e β , as quais tem uma interface comum. Os deslocamentos físicos na interface estão restringidos por

$$\mathbf{u}_j^\alpha = \mathbf{u}_j^\beta \quad (3.43)$$

e as forças na interface estão relacionadas por

$$\mathbf{f}_j^\alpha + \mathbf{f}_j^\beta = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

A obtenção das equações do movimento do sistema estarão baseadas nas equações do movimento de Lagrange com coeficientes indeterminados [44]. Usando as expressões para energia cinética e energia potencial do sistema teremos

$$T = 1/2 \dot{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\mu} \dot{\mathbf{p}} = 1/2 \dot{\mathbf{p}}^{\alpha T} \boldsymbol{\mu}^\alpha \dot{\mathbf{p}}^\alpha + 1/2 \dot{\mathbf{p}}^{\beta T} \boldsymbol{\mu}^\beta \dot{\mathbf{p}}^\beta \quad (3.45)$$

e

$$V = 1/2 \mathbf{p}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{p} = 1/2 \mathbf{p}^{\alpha T} \boldsymbol{\kappa}^{\alpha} \mathbf{p}^{\alpha} + 1/2 \mathbf{p}^{\beta T} \boldsymbol{\kappa}^{\beta} \mathbf{p}^{\beta}, \quad (3.46)$$

onde

$$\boldsymbol{\mu}^{\alpha} = \boldsymbol{\Psi}^{\alpha T} \mathbf{m}^{\alpha} \boldsymbol{\Psi}^{\alpha}, \quad \boldsymbol{\kappa}^{\alpha} = \boldsymbol{\Psi}^{\alpha T} \mathbf{k}^{\alpha} \boldsymbol{\Psi}^{\alpha}, \quad (3.47)$$

o mesmo valendo para $\boldsymbol{\mu}^{\beta}$ e $\boldsymbol{\kappa}^{\beta}$, e ainda:

$$\mathbf{p} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{\alpha} \\ \mathbf{p}^{\beta} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mu}^{\beta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\kappa}^{\beta} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Equações de restrição tais como a equação (3.38) podem ser escritas em termos de coordenadas generalizadas $\mathbf{p}$ e combinadas para formar uma matriz de equações de restrição da forma

$$\mathbf{C} \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (3.49)$$

O Lagrangiano para o sistema pode ser escrito como

$$L = T - V + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C} \mathbf{p}, \quad (3.50)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é um vetor dos multiplicadores de Lagrange. As equações do movimento do sistema podem agora ser obtidas aplicando-se a equação de Lagrange na forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_s} \right] - \frac{\partial L}{\partial \zeta_s} = Q_s, \quad (3.51)$$

onde ζ_s refere-se ou a p_s ou σ_s e Q_s é a “força generalizada”. Para o problema de vibração livre, as forças são exercidas somente nas interfaces dos componentes, assim:

$$\delta W = (\delta \mathbf{u}_j^{\alpha})^T \mathbf{f}_j^{\alpha} + (\delta \mathbf{u}_j^{\beta})^T \mathbf{f}_j^{\beta} \quad (3.52)$$

$$= (\delta \mathbf{u}_j^{\alpha})^T (\mathbf{f}_j^{\alpha} + \mathbf{f}_j^{\beta}) = 0, \quad (3.53)$$

onde as equações (3.43) e (3.44) foram usadas. Como $\delta W = 0$, $Q_s = 0$, substituindo-se as equações (3.45), (3.46) e (3.50) na equação (3.51) resulta:

$$\mu \ddot{\mathbf{p}} + \kappa \mathbf{p} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.54)$$

Introduzindo-se uma transformação linear da forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{S} \mathbf{q}, \quad (3.55)$$

e particionando-se $\mathbf{p}$ em coordenadas dependentes, $\mathbf{p}_d$, e coordenadas linearmente independentes, $\mathbf{p}_l$, e aplicando-se na equação (3.49), teremos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{dd} & \mathbf{C}_{dl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_d \\ \mathbf{p}_l \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

onde $\mathbf{C}_{dd}$ é uma matriz quadrada e não-singular, e a equação

$$\mathbf{p} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_d \\ \mathbf{p}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{dl} \\ \mathbf{I}_{ll} \end{bmatrix} \mathbf{p}_l \equiv \mathbf{S} \mathbf{q}, \quad (3.57)$$

define $\mathbf{S}$ e $\mathbf{q}$. Das equações (3.56) e (3.57) é visto que $\mathbf{C} \mathbf{S} = \mathbf{0}$. As equações (3.54) e (3.55) podem agora ser combinadas para dar

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{S}^T \mathbf{C}^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.58)$$

onde

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mu \mathbf{S}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{S}^T \kappa \mathbf{S}. \quad (3.59)$$

Visto que $\mathbf{C} \mathbf{S} = \mathbf{0}$, a equação (3.58) reduz-se a:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.60)$$

3.2.4 Método de Síntese Modal de Martin & Ghlaïm

O método de síntese modal utilizado neste trabalho foi originalmente proposto por Martin & Ghlaïm [20]. Baseado nas seções anteriores poder-se-ia classificá-lo como um método de síntese modal que utiliza os modos normais com interface livre. Contudo, apresenta uma característica diferente quanto à forma de forçar a compatibilidade nas interfaces das sub-estruturas, a qual é obtida através de elementos discretos de rigidez e amortecimento usados como junções entre as sub-estruturas conectadas. Tal fato caracteriza-o como um método em que as interfaces das sub-estruturas não são redundantes, permitindo assim, a caracterização das juntas mecânicas, normalmente difíceis de

serem modeladas. Esta evidência revelou-se como um fator bastante significativo quando da escolha deste método em detrimento de outros. A seguir apresenta-se uma visão teórica mais detalhada do método.

Desenvolvimento Teórico

Considere dois componentes α e β que são conectados por molas e amortecedores como na Figura (3.2).

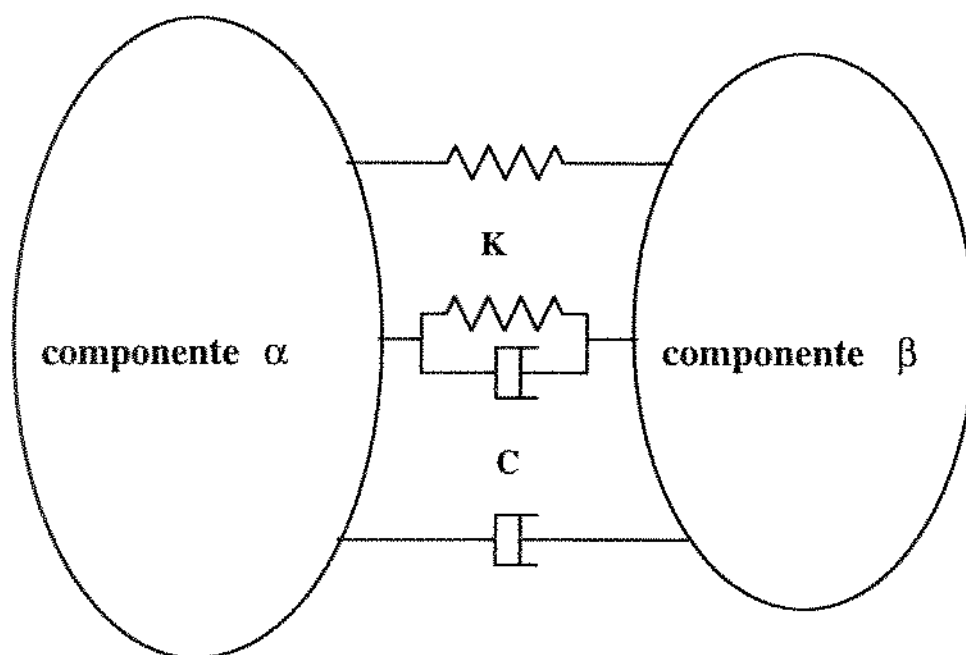


Figura 3.2: Estrutura formada por dois componentes conectados por molas e amortecedores.

Cada componente tem massa, rigidez e amortecimento, logo, pode ser representado por

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (3.61)$$

a equação acima pode ser reduzida a um sistema de equações de primeira ordem usando-se o vetor de estado y , onde

$$y = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ u \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Assim, pode-se reescrever a equação (3.61) como:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

ou na forma compacta

$$A\dot{y} + By = q. \quad (3.64)$$

Para vibração livre $q = 0$ e a equação (3.64) é dada por

$$A\dot{y} + By = 0. \quad (3.65)$$

Assumindo-se uma solução da forma

$$y = \Psi e^{st}, \quad (3.66)$$

onde s é um número complexo e ψ é um vetor modal de elementos complexos, obtém-se:

$$\dot{y} = s\Psi e^{st} = sy. \quad (3.67)$$

Substituindo-se as equações (3.66) e (3.67) na equação (3.65), obtém-se:

$$(sA + B)\Psi = 0, \quad (3.68)$$

o qual é um problema de autovalor solúvel pelos métodos padrões, onde obtém-se os autovalores s e os autovetores Ψ do componente. A matriz modal é dada por

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

a qual é ortogonal as matrizes A e B , donde segue-se que

$$\Psi^T A \Psi = [a] \quad (3.70)$$

e

$$\Psi^T B \Psi = [b]. \quad (3.71)$$

Assim, as coordenadas físicas y e u , podem ser representadas em termos das coordenadas generalizadas, z , pela transformação de coordenadas

$$y = \Psi z. \quad (3.72)$$

Substituindo-se na equação (3.65) e pré-multiplicando-a por Ψ^T , obtém-se:

$$a\dot{z} + bz = 0. \quad (3.73)$$

As equações são desacopladas, obtendo-se o sistema;

$$a_{ii}\dot{z}_i + b_{ii}z_i = 0. \quad (3.74)$$

Assumindo-se uma solução da forma:

$$z_i = Z_i e^{s_i t}, \quad (3.75)$$

a equação (3.73) pode ser reescrita como:

$$(s_i a_{ii} + b_{ii})z_i = 0 \quad (3.76)$$

e os autovalores podem ser expressos por;

$$s_i = -\frac{b_{ii}}{a_{ii}}. \quad (3.77)$$

Torna-se conveniente normalizar a matriz modal:

$$\Phi_{ij} = \frac{\Psi_{ij}}{\sqrt{a_{ii}}}. \quad (3.78)$$

A nova matriz modal normalizada corresponde a uma transformação diferente, ou seja,

$$y = \Phi w \quad (3.79)$$

Usando as condições de ortogonalidade das equações (3.70) e (3.71) pode-se escrever a equação (3.63) como:

$$I\dot{w} - [s] w = \Phi^T q, \quad (3.80)$$

onde I é a matriz identidade e $[s]$ é a matriz diagonal com os elementos da equação (3.77).

Assumindo-se duas sub-estruturas α e β com n_α e n_β graus de liberdade, respectivamente, a equação (3.80) pode ser escrita para ambas como:

$$\begin{bmatrix} I_{n_\alpha \times n_\alpha} & 0 \\ 0 & I_{n_\beta \times n_\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_\alpha \\ \dot{w}_\beta \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_\alpha^T & 0 \\ 0 & \Phi_\beta^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \end{Bmatrix}. \quad (3.81)$$

Considerando-se os componentes α e β ligados entre si por molas e amortecedores, suas influências podem ser levadas em conta no termo q da equação (3.80), ou seja,

$$q = q_x + q_c, \quad (3.82)$$

onde q_c representa as forças de conexão entre as sub-estruturas:

$$q_c = Q \begin{Bmatrix} y_\alpha \\ y_\beta \end{Bmatrix}, \quad (3.83)$$

onde Q é a matriz de conexão cujos elementos são uma combinação dos coeficientes de rigidez e amortecimento na conexão e q_x é o vetor das forças externas atuando sobre as sub-estruturas α e β . Assim,

$$q_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_\alpha \\ 0 \\ f_\beta \end{Bmatrix}. \quad (3.84)$$

A equação (3.80) pode agora ser reescrita como:

$$I\dot{w} + (-[s] + \Phi^T Q \Phi)w = \Phi^T q_x. \quad (3.85)$$

O novo problema de autovalores para vibrações livres da estrutura conectada será:

$$(\lambda I + U)R = 0, \quad (3.86)$$

onde:

$$U = \Phi^T Q \Phi - [s] \quad (3.87)$$

e a solução produz os autovalores λ_r e os correspondentes autovetores da matriz modal:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Para expressar os modos da estrutura conectada em termos do sistema de coordenadas de cada sub-estrutura, y_α e y_β , é necessário aplicar a transformação

$$\tilde{R} = \Phi R \quad (3.89)$$

Deve ser observado que a matriz U na equação (3.86) poderá ser *assimétrica* nos casos em que as conexões entre as sub-estruturas propiciarem a não simetria da matriz de conexão Q . Assim, as condições de ortogonalidade devem ser expressas em termos dos autovetores à direita e à esquerda [42]. Os autovetores à direita são obtidos da equação (3.86) e representam os modos. Os autovetores à esquerda são obtidos do problema transposto, ou seja,

$$(\lambda I + U^T)L = 0 \quad (3.90)$$

e podem ser interpretados como coeficientes de influencia das forças externas. De forma análoga à equação (3.89), é possível expressar os autovetores à esquerda em termos das coordenadas y_α e y_β

$$\tilde{L} = \Phi L. \quad (3.91)$$

Os autovetores à direita e à esquerda podem ser normalizados de forma que:

$$L^T R = I, \quad (3.92)$$

$$L^T U R = [\lambda]. \quad (3.93)$$

Substituindo-se a transformação de coordenadas

$$w = Rz \quad (3.94)$$

na equação (3.85) e pre-multiplicando-se por L^T , obtém-se:

$$\dot{z} + [\lambda] z = L^T \Phi^T q_x. \quad (3.95)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (3.95), obtém-se:

$$[i\omega I + [\lambda]] Z = L^T \Psi^T Q_x, \quad (3.96)$$

onde $i = \sqrt{-1}$, $z \xrightarrow{\mathcal{F}} Z$, $q_x \xrightarrow{\mathcal{F}} Q_x$ e $\dot{z} \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega Z$ são as respectivas transformadas de Fourier. Transformado-se os vetores de estado $y \xrightarrow{\mathcal{F}} Y$ e $w \xrightarrow{\mathcal{F}} W$, a transformação de coordenadas também se aplica às suas transformadas, isto é,

$$Y = \Phi W = \Phi R Z \quad (3.97)$$

Visto que a matriz $[i\omega I + [\lambda]]$ é diagonal pode-se reescrever a equação (3.96) como:

$$Z = \left[\frac{1}{i\omega - \lambda} \right] L^T \Phi^T Q_x. \quad (3.98)$$

Substituindo-se a equação (3.98) na equação (3.97) e das equações (3.89) e (3.91) obtém-se:

$$Y = \tilde{R} \left[\frac{1}{i\omega - \lambda} \right] \tilde{L}^T Q_x \quad (3.99)$$

A função de resposta em frequência (FRF) entre a força de excitação no grau de liberdade (GDL) j , $\{Q_x\}_j$, e a resposta em deslocamento no GDL i , Y_i , será dada por:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{2n_\alpha+2n_\beta} \frac{\tilde{R}_{ir} \tilde{L}_{jr}}{i\omega - \lambda_r} \quad (3.100)$$

A equação (3.100) requer modos complexos cuja dimensão é duas vezes o número de GDL's (deslocamentos e velocidades). Contudo, o modelo de MEF das subestruturas produzirá usualmente, modos reais. Eventualmente, pode-se querer introduzir coeficientes de amortecimento modal o que implica em obter-se um modelo com amortecimento proporcional. A fim de sobrepor estes problemas desenvolveu-se uma formulação adequada para poder-se usar os modos reais em modos complexos incluindo amortecimento. Esta formulação será desenvolvida no capítulo a seguir.

Capítulo 4

Aplicação de Modos Normais em Formulação de Modos Complexos

4.1 Introdução

Devido ao método de sub-estruturação dinâmica (vide Capítulo 3) ter sido formulado para o caso geral de amortecimento viscoso não-proporcional, tornou-se pertinente desenvolver uma formulação alternativa que permitisse a utilização do método, também nos casos não amortecidos e nos casos com amortecimento proporcional, sem que se fizesse necessário alterar a formulação já existente e, conseqüentemente, os códigos computacionais implementados. Tal fato conduz a uma questão que vem sendo discutida por vários autores [45, 46, 47], que é a correta interpretação física dos conceitos de modos normais (reais) e de modos complexos. Neste caso em particular, procura-se aplicar os modos normais em uma formulação de modos complexos.

4.2 Formulação do Modelo com Modos Complexos

Um modelo com modos complexos presume amortecimento e, desta forma, senoides com decaimento exponencial são obtidas na resposta característica do modelo. Esta pode ser investigada sem perda de generalidade assumindo-se a influência de apenas um modo. A solução procurada será da forma:

$$y = \Re(\Psi_r)e^{-\sigma_r t} \cos(\Omega_r t) - \Im(\Psi_r)e^{-\sigma_r t} \sin(\Omega_r t), \quad (4.1)$$

onde $\sigma_r = \xi_r \omega_r$ e $\Omega_r = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$ e $r = 1, \dots, N$.

Observa-se que esta formulação descreve uma função de valor real no tempo e no espaço, a qual é a soma de duas formas vibrantes com decaimento no tempo, em quadratura de fase e na mesma frequência. Agrupando os dois vetores modais em um par de vetores complexos conjugados, a mesma função no tempo pode ser expressa em termos de exponenciais complexas;

$$y = 1/2\{\Re(\Psi_r) + i\Im(\Psi_r)\}e^{(-\sigma_r + i\Omega_r)t} + 1/2\{\Re(\Psi_r) - i\Im(\Psi_r)\}e^{(-\sigma_r - i\Omega_r)t}, \quad (4.2)$$

a qual pode ser abreviada como

$$y = 1/2\{\Psi_r e^{\lambda_r t} + \Psi_r^* e^{\lambda_r^* t}\}. \quad (4.3)$$

Pode-se observar das equações (4.2) e (4.3) que cada solução é a soma de dois termos complexos conjugados. A solução amortecida da equação (4.1) é uma solução válida de:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f, \quad (4.4)$$

contudo, o método de solução requer que a equação (4.4) seja reformulada em termos de vetores de estado [48], ou seja,

$$A\dot{y} + By = q, \quad (4.5)$$

ou na forma estendida,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ f \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

A solução desta equação é determinada em concordância com:

$$q = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$y = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ u \end{Bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} \Psi\Lambda & \Psi^*\Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\Lambda t} \\ e^{\Lambda^* t} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} \Psi\Lambda & \Psi^*\Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\Lambda t} \\ e^{\Lambda^* t} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

onde

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$$

$$\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N]$$

substituindo-se as equações (4.7), (4.8) e (4.9) na equação (4.6), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\Lambda t} \\ e^{\Lambda^* t} \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\Lambda t} \\ e^{\Lambda^* t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

simplificando e rearranjando a equação (4.10), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

ou de forma compacta

$$\Theta \bar{\Lambda} = G \Theta. \quad (4.12)$$

onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix}; \quad \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Assim, a equação (4.12) apresenta um problema de autovalor/vetor o qual pode ser resolvido por algum dos algoritmos conhecidos. Na essência, transformaram-se N equações diferenciais de segunda ordem para um conjunto de $2N$ equações de primeira ordem. Contudo, observa-se realmente um aumento de 8 vezes na dimensão da solução, ou seja, buscam-se $2N$ autovetores cada um de comprimento $2N$ onde cada um é formado por dois elementos, um real e um imaginário. Os $2N$ autovalores associados, λ_n , são pares de polos complexos conjugados, isto é, soluções de polos de frequência positiva e negativa são encontradas. A componente imaginária de cada polo, Ω_n , é a frequência natural amortecida e a componente real, σ_n , é igual à metade da largura da banda do modo.

A matriz modal Θ representa a transformação entre as coordenadas modais e físicas do sistema, especificamente:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ u \end{Bmatrix} = \Theta \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

Aplicando-se a equação (4.14) sobre a equação (4.5) obtém-se a transformação congruente

$$\Theta^T A \Theta \dot{p} + \Theta^T B \Theta p = \Theta^T p. \quad (4.15)$$

Abrindo as matrizes da equação (4.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Lambda \Psi^T & \Psi^T \\ \Lambda^* \Psi^H & \Psi^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \Lambda \Psi^T & \Psi^T \\ \Lambda^* \Psi^H & \Psi^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

logo, teremos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2\Lambda \Psi^T M \Psi + \Psi^T C \Psi & (\Lambda + \Lambda^*) \Psi^T M \Psi^* + \Psi^T C \Psi^* \\ (\Lambda + \Lambda^*) \Psi^H M \Psi + \Psi^H C \Psi & 2\Lambda^* \Psi^H M \Psi^* + \Psi^H C \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -\Lambda^2 \Psi^T M \Psi + \Psi^T K \Psi & -\Lambda \Lambda^* \Psi^T M \Psi^* + \Psi^T K \Psi^* \\ -\Lambda \Lambda^* \Psi^H M \Psi + \Psi^H K \Psi & -\Lambda^{*2} \Psi^H M \Psi^* + \Psi^H K \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

de onde obtém-se as seguintes equações de ortogonalidade:

$$\begin{cases} (\Lambda + \Lambda^*) \Psi^T M \Psi^* + \Psi^T C \Psi^* = 0 \\ (\Lambda + \Lambda^*) \Psi^H M \Psi + \Psi^H C \Psi = 0 \\ -\Lambda \Lambda^* \Psi^T M \Psi^* + \Psi^T K \Psi^* = 0 \\ -\Lambda \Lambda^* \Psi^H M \Psi + \Psi^H K \Psi = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Como cada um dos $\lambda_r = \omega_r(-\xi_r - i\sqrt{1 - \xi_r^2})$, onde $r = 1, \dots, N$, substituindo-se nas equações (4.18), obtém-se:

$$\begin{cases} -2\omega_r \xi_r \Psi_r^T M \Psi_r^* + \Psi_r^T C \Psi_r^* = 0 \\ -2\omega_r \xi_r \Psi_r^H M \Psi_r + \Psi_r^H C \Psi_r = 0 \\ -\omega_r^2 \Psi_r^T M \Psi_r^* + \Psi_r^T K \Psi_r^* = 0 \\ -\omega_r^2 \Psi_r^H M \Psi_r + \Psi_r^H K \Psi_r = 0 \end{cases}, \quad (4.19)$$

das quais obtém-se:

$$\begin{aligned} 2\omega_r \xi_r &= \frac{\Psi_r^T C \Psi_r^*}{\Psi_r^T M \Psi_r^*} = \frac{c_r}{m_r} \\ \omega_r^2 &= \frac{\Psi_r^H K \Psi_r}{\Psi_r^H M \Psi_r} = \frac{k_r}{m_r}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

nestas expressões m_r , k_r e c_r podem ser descritos como parâmetros de massa, rigidez e amortecimento modal, embora o significado seja ligeiramente diferente daquele usado em outros casos.

Retornando à equação (4.17) e impondo as condições de ortogonalidade, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2\Lambda \Psi^T M \Psi + \Psi^T C \Psi & 0 \\ 0 & 2\Lambda^* \Psi^H M \Psi^* + \Psi^H C \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -\Lambda^2 \Psi^T M \Psi + \Psi^T K \Psi & 0 \\ 0 & -\Lambda^{*2} \Psi^H M \Psi^* + \Psi^H K \Psi^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

ou, de forma compacta

$$a_r \dot{p} + b_r p = 0 \quad (4.22)$$

onde a_r e b_r são matrizes diagonais.

4.3 Modos Normais em Formulação de Modos Complexos

Conhecendo-se a equação (4.21) para o caso geral de vibrações com amortecimento viscoso, pode-se aplicar sobre a mesma as condições de ortogonalidade para os casos de um sistema não-amortecido e com amortecimento proporcional.

Iniciando-se com um sistema não-amortecido, têm-se $C = 0$ e as condições de ortogonalidade das matrizes, ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= m \\ \Phi^H M \Phi^* &= m^* \\ \Phi^T K \Phi &= k \\ \Phi^H K \Phi^* &= k^*, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde:

$$m = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$$

$$k = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$$

substituindo-se as equações (4.23) na equação (4.21), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2\Lambda m & 0 \\ 0 & 2\Lambda^* m^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k - \Lambda^2 m & 0 \\ 0 & k^* - \Lambda^{*2} m^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

Na formulação com modos complexos $\Psi = \Phi + i\Phi$, onde Φ é a matriz dos modos reais. Substituindo-se este valor na equação (4.23), obtém-se:

$$(\Phi + i\Phi)^T M (\Phi + i\Phi) = m. \quad (4.25)$$

Simplificando, obtém-se:

$$m = i2\Phi^T M \Phi, \quad (4.26)$$

logo,

$$m = i2\alpha, \quad (4.27)$$

onde, $\alpha = \Phi^T M \Phi$. Usando-se a normalização de massa unitária, obtém-se da equação (4.22)

$$\begin{aligned} 2\Lambda m &= 1 \\ 2\Lambda^* m^* &= 1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Novamente cada um dos $\lambda_r = -\xi_r \omega_r \pm i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$, onde $r = 1, \dots, N$. Mas neste caso $\xi_r = 0$, assim $\lambda_r = -i\omega_r$. Logo da equação (4.28) obtém-se:

$$m_r = \frac{1}{2\lambda_r}, \quad (4.29)$$

substituindo-se m_r e λ_r na equação (4.29), obtém-se:

$$i2\alpha_r = \frac{1}{-i2\omega_r}, \quad (4.30)$$

logo,

$$\alpha_r = \frac{1}{4\omega_r}. \quad (4.31)$$

Analogamente à obtenção da equação (4.27), pode-se mostrar que $\Phi^T K \Phi = k = i2\beta$. Logo, do segundo termo da equação (4.24), obtém-se:

$$k - \Lambda^2 m = i2\beta - \Lambda^2 i2\alpha. \quad (4.32)$$

onde

$$\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$$

$$\beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$$

Mas,

$$\frac{k_r}{m_r} = \omega_r = \frac{\beta_r}{\alpha_r}. \quad (4.33)$$

Assim,

$$k_r - \lambda_r^2 m_r = i2\alpha_r \omega_r^2 - i2\alpha_r \lambda_r^2. \quad (4.34)$$

Simplificando e rearranjando os termos da equação (4.34), obtém-se:

$$k_r - \lambda_r^2 m_r = i\omega_r = \lambda_r^*. \quad (4.35)$$

No caso do amortecimento proporcional, mantêm-se as equações (4.23) juntas com mais duas equações devido ao amortecimento, ou seja,

$$\Phi^T C \Phi = c$$

$$\Phi^H C \Phi^* = c^*. \quad (4.36)$$

onde

$$c = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$$

Substituindo as equações (4.23) e (4.36) na equação (4.21), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2\Lambda m + c & 0 \\ 0 & 2\Lambda^* m^* + c^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k - \Lambda^2 m & 0 \\ 0 & k^* - \Lambda^{*2} m^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.37)$$

Novamente, usando a normalização de massa unitária, obtém-se:

$$\begin{aligned} 2\Lambda m + c &= 1 \\ 2\Lambda^* m^* + c^* &= 1. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Neste caso, como cada um dos $c_r = 2\xi_r m_r \omega_r$ e $\lambda_r = -\xi_r \omega_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$, obtém-se:

$$2m_r(-\xi_r \omega_r - i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}) + 2\xi_r m_r \omega_r = 1. \quad (4.39)$$

Simplificando e rearranjando, obtém-se:

$$m_r = \frac{1}{\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}}. \quad (4.40)$$

Contudo, substituindo-se m_r da equação (4.27) na equação (4.40), obtém-se:

$$\alpha_r = \frac{1}{4\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}}. \quad (4.41)$$

Desta forma torna-se possível usar os modos reais em uma formulação de modos complexos obedecendo-se as devidas normalizações, ou seja, normalizando $\Psi_r = \Phi_r + i\bar{\Phi}_r$ com

$$\Phi_r^T M \Phi_r = \frac{1}{4\omega_r} \quad (\text{n\~ao-amortecido}) \quad (4.42)$$

$$\Phi_r^T M \Phi_r = \frac{1}{4\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}} \quad (\text{amortecimento proporcional}) \quad (4.43)$$

Conforme foi visto no Capítulo 3, a equação para obtenção da função de resposta em frequência (FRF) entre a força de excitação no grau de liberdade (GDL) j , $\{G_x\}_j$, e a resposta em deslocamento no GDL i , Y_i , é dada por:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{2n_\alpha + 2n_\beta} \frac{\tilde{R}_{ir} \tilde{L}_{jr}}{i\omega - \lambda}$$

Tal equação requer modos complexos cuja dimensão é duas vezes o número de GDL's devido a formulação de estado. Entretanto, o modelo dos programas de MEF

(ANSYS e COSMOSM) usados para obtenção dos parâmetros modais ($\bar{\lambda}_r$ e $\bar{\Psi}_r, r = 1, \dots, n$) de cada sub-estrutura produzirão apenas modos reais. Em alguns casos, também, deseja-se obter um modelo com amortecimento proporcional através da introdução de coeficientes de amortecimento modal ($\xi_r, r = 1, \dots, n$). Devido a tais fatos e para evitar-se constantes alterações nos códigos computacionais, converte-se os modos reais em modos complexos podendo-se incluir amortecimento também. Esta conversão é feita normalizando-se os modos reais obtidos do programa de MEF conforme as equações (4.42) e (4.43). Se os modos reais obtidos por MEF tiverem normalização de massa unitária, isto é :

$$\bar{\Phi}_r^T M \bar{\Phi}_r = 1, \quad (4.44)$$

os modos normalizados complexos de cada sub-estrutura serão obtidos por $\Psi_r = \Phi_r + i\bar{\Phi}_r$, onde cada Φ_r é dado por:

$$\Phi_r = \frac{\bar{\Phi}_r}{2\sqrt{\omega_r}} \quad (\text{n\~ao-amortecido}) \quad (4.45)$$

$$\Phi_r = \frac{\bar{\Phi}_r}{\sqrt{4\omega_r} \sqrt{1-\xi_r^2}} \quad (\text{amortecimento proporcional}) \quad (4.46)$$

desta forma monta-se a matriz modal complexa da sub-estrutura como:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi_1 + i\bar{\phi}_1 & \phi_2 + i\bar{\phi}_2 & \dots & \phi_n + i\bar{\phi}_n \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Foi mostrado na equação (4.12) que a matriz modal complexa com ordem dobrada da sub-estrutura pode ser montada como:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Psi \Lambda & \Psi^* \Lambda^* \\ \Psi & \Psi^* \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

e a matriz dos autovalores com ordem dobrada da sub-estrutura como:

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Este procedimento deve ser aplicado a cada sub-estrutura antes de iniciar-se o processo de síntese dos modos dos componentes amortecida.

Capítulo 5

Análise dos Resultados

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a aplicação dos métodos anteriormente descritos (Capítulos 2 e 3) e usados para o ajuste de modelos de EF através da identificação dos parâmetros das juntas. Três exemplos de modelos diferentes foram simulados. Procurou-se, em cada um destes, a validação dos métodos e a análise dos procedimentos de ajuste dos modelos. As simulações foram feitas usando-se um modelo referido como pseudo-experimental, cujas FRF's foram calculadas analiticamente e poluídas com a adição de um ruído do tipo Gaussiano. Este ruído é obtido multiplicando-se um sinal Gaussiano com média nula e desvio padrão unitário pelo valor percentual desejado do valor médio quadrático da FRF (que é igual ao valor médio quadrático da função resposta ao impulso correspondente). Os procedimentos de ajuste dos modelos para cada problema exemplo foram realizados variando-se as faixas de frequência, pontos de excitação e resposta e os níveis de ruído aplicados às FRF's pseudo-experimentais. Neste capítulo inclui-se, também, os resultados obtidos com a aplicação destes métodos a um problema experimental de uma estrutura consistindo de duas vigas de aço conectadas por duas juntas de elastômero.

5.2 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

O primeiro problema exemplo apresentado consiste de um sistema de massas concentradas composto por massas, molas e amortecedores, onde as juntas são caracterizadas por molas e amortecedores [21]. Tais elementos foram arranjados conforme está mostrado na figura 5.1. Este problema exemplo é o mesmo apresentado em [20] com algumas alterações nos valores dos parâmetros do sistema. Tais alterações tornaram-se

necessárias devido a um mal condicionamento do problema original, onde o surgimento de dois autovalores reais perturbavam o cálculo da FRF. A tabela 5.1 mostra os valores dos parâmetros do sistema usados neste modelo, em referência à figura 5.1.

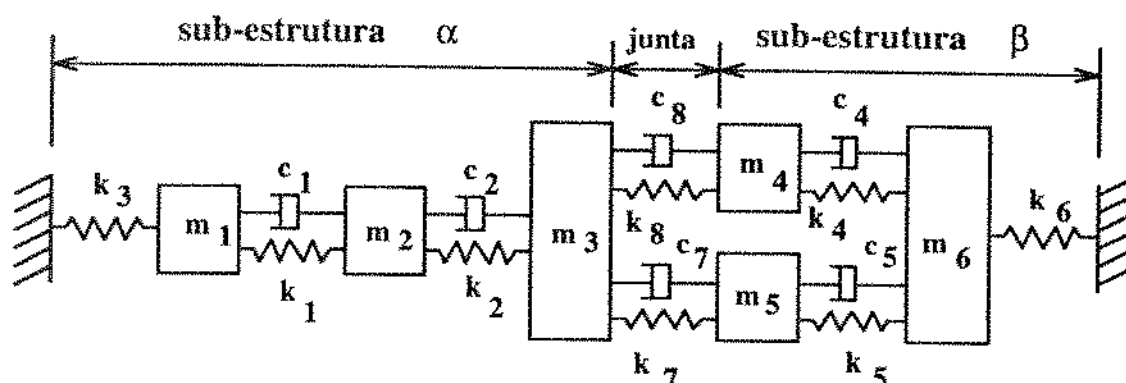


Figura 5.1: Sub-estruturas e juntas do primeiro problema exemplo.

elemento	massa [kg]	rigidez [N/m]	amortecimento [N.s/m]
sub-estrutura α	$m_1 = 10$	$k_1 = 10.000$	$c_1 = 3$
	$m_2 = 10$	$k_2 = 20.000$	$c_2 = 5$
	$m_3 = 10$	$k_3 = 10.000$	-
sub-estrutura β	$m_4 = 10$	$k_4 = 15.000$	$c_4 = 3$
	$m_5 = 10$	$k_5 = 10.000$	$c_5 = 7$
	$m_6 = 10$	$k_6 = 20.000$	-
junta	-	$k_7 = 20.000$	$c_7 = 12,5$
	-	$k_8 = 12.000$	$c_8 = 10$

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros do primeiro exemplo.

A fim de validar o método de Síntese dos Modos dos Componentes Amortecidos (DCMS), as funções de resposta em frequência (FRF) obtidas através deste foram comparadas com as FRF's obtidas usando-se os dados modais do modelo completo. Ambas FRF's forma calculadas usando-se todos os modos do sistema. As figuras 5.2, 5.3,

5.4 e a tabela 5.2 mostram uma comparação destes resultados, onde pode-se observar que o método de DCMS produz resultados iguais para as FRF's quanto os obtidos dos autovalores do sistema.

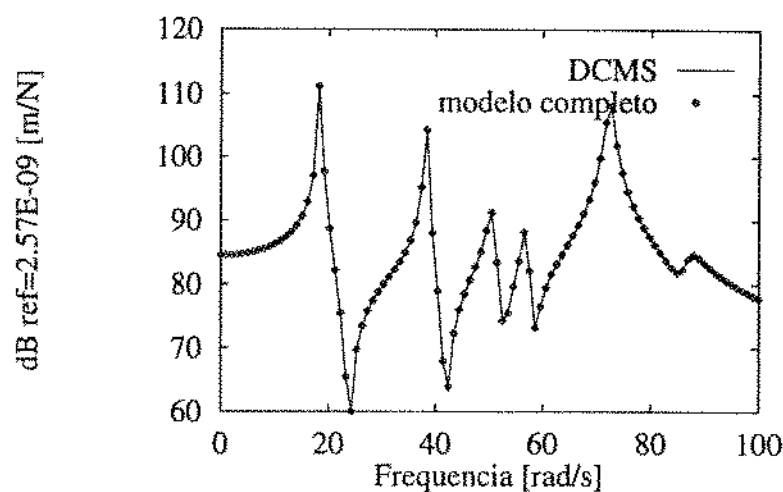


Figura 5.2: Comparação das FRF's $H_{6,6}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.

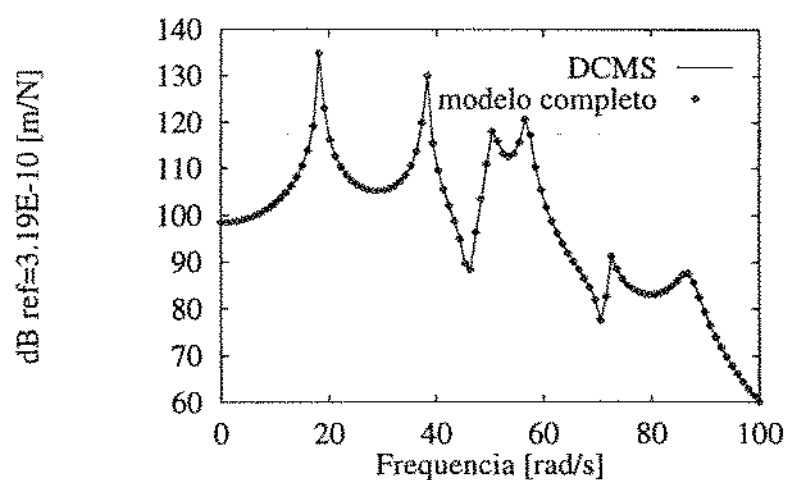


Figura 5.3: Comparação das FRF's $H_{1,5}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.

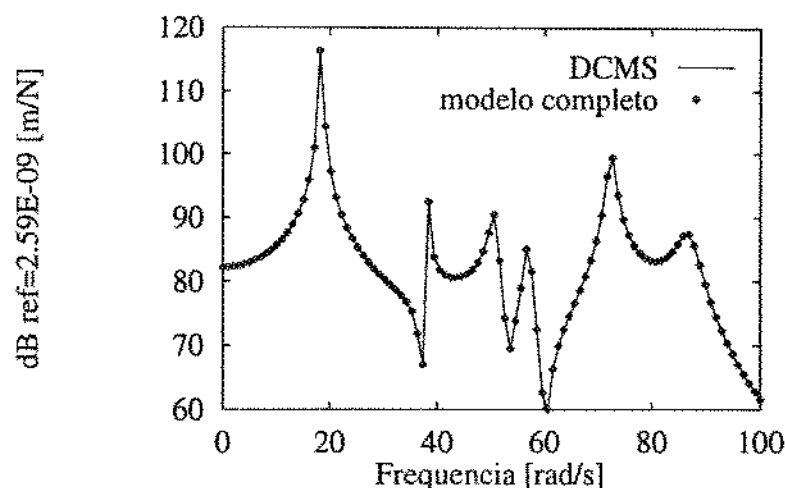


Figura 5.4: Comparação das FRF's $H_{6.3}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.

frequência [rad/s]	amplitude [m/N]	
	modelo completo	DCMS
0.0	4.3333334421218D-05	4.3333332989554D-05
10.1	5.2871466518030D-05	5.2871464861844D-05
20.2	6.9870929787775D-05	6.9870927559858D-05
30.3	2.5778597126545D-05	2.5778595694889D-05
40.4	2.2968630880315D-05	2.2968624728831D-05
50.5	9.4001791556258D-05	9.4001787449724D-05
60.6	2.4216332152588D-05	2.4216333121257D-05
70.7	2.5307607117288D-04	2.5307607446405D-04
80.8	5.2412684242141D-05	5.2412684390890D-05
90.9	3.4554202808172D-05	3.4554202992869D-05
100.0	2.0085788613331D-05	2.0085788656759D-05

Tabela 5.2: Comparação de alguns valores das amplitudes das FRF's $H_{6.6}$ obtidas pelo cálculo do modelo completo e por DCMS.

Para mostrar o uso do método de ajuste, estimaram-se os parâmetros da junta do modelo mostrado na figura 5.1 (k_7 , k_8 , c_7 e c_8) através do ajuste das curvas (analítica e pseudo-experimental) de uma das FRF's do sistema, neste caso, a FRF $H_{6.6}$ (excitação na massa m_6 e resposta na massa m_6). A figura 5.5 mostra uma simulação feita com

uma FRF do modelo completo com 1% de ruído e a FRF calculada por DCMS usando valores iniciais arbitrários para os parâmetros de rigidez e amortecimento da junta. Após algumas iterações do processo de busca automatizado, os testes de convergência do ajuste das curvas são satisfeitos e uma estimativa dos parâmetros da junta é obtida.

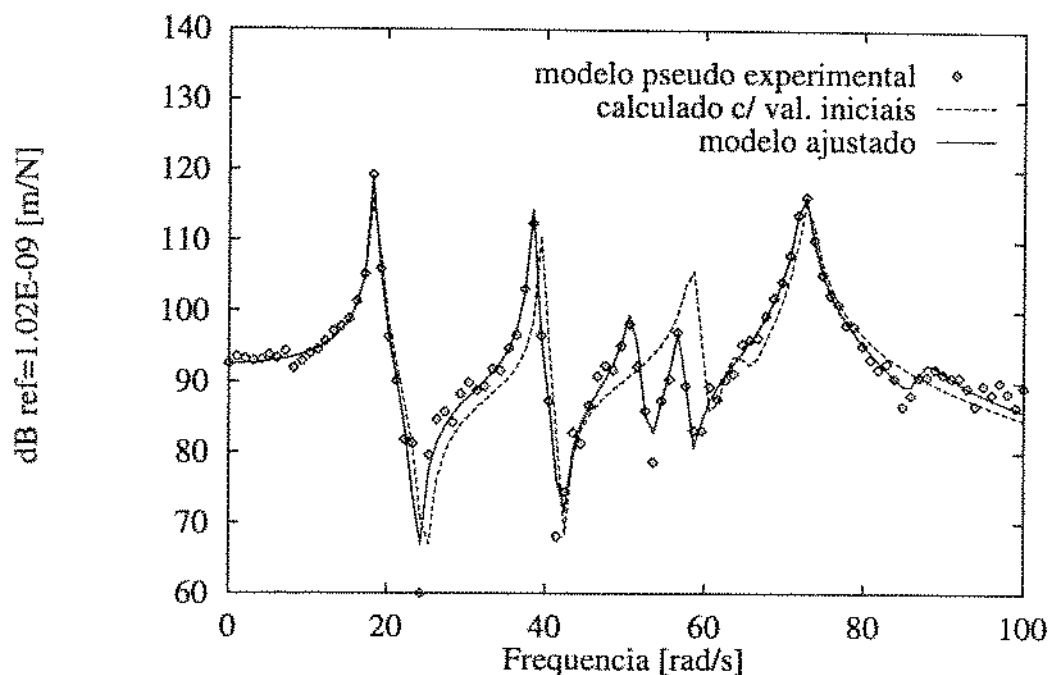


Figura 5.5: FRF's $H_{6,6}$ do primeiro problema exemplo obtidas com modelo completo com 1% de ruído, calculada com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.

As tabelas 5.3 a 5.6 mostram a comparação entre os valores exatos, os valores iniciais arbitrários e os valores dos parâmetros estimados com seus erros estimados e em relação ao valores exatos, para diferentes faixas de frequência, com e sem ruído, para a FRF $H_{6,6}$ e para a FRF $H_{5,5}$, com 1 % de ruído.

Os erros estimados são obtidos de maneira aproximada na forma do desvio padrão normalizado dos valores dos parâmetros assumindo-se uma distribuição normal como proposto por [19], a partir dos valores singulares da matriz de sensibilidade e do erro quadrático total do ajuste da curva (vide equação 2.55).

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_7 [N/m]	3,0E+04	2,0E+04	2,081E+04	4,0	0,7
k_8 [N/m]	3,0E+04	1,2E+04	1,220E+04	1,7	0,6
c_7 [N.s/m]	30,0	12,5	15,25	22,0	15,1
c_8 [N.s/m]	30,0	10,0	11,48	14,8	12,1

Tabela 5.3: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 100 [rad/s] sem ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_7 [N/m]	3,0E+04	2,0E+04	2,002E+04	0,1	1,4
k_8 [N/m]	3,0E+04	1,2E+04	1,241E+04	3,4	1,3
c_7 [N.s/m]	30,0	12,5	8,37	33,0	57,8
c_8 [N.s/m]	30,0	10,0	9,98	0,2	35,6

Tabela 5.4: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 100 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_7 [N/m]	3,0E+04	2,0E+04	2,144E+04	7,2	16,7
k_8 [N/m]	3,0E+04	1,2E+04	1,173E+04	2,3	7,9
c_7 [N.s/m]	30,0	12,5	31,40	- ^a	-
c_8 [N.s/m]	30,0	10,0	16,7	-	67,6

^aErros maiores que 100%.

Tabela 5.5: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 45 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_7 [N/m]	3,0E+04	2,0E+04	1,855E+04	7,2	3,2
k_8 [N/m]	3,0E+04	1,2E+04	1,248E+04	4,0	- ^a
c_7 [N.s/m]	30,0	12,5	28,9	-	35,0
c_8 [N.s/m]	30,0	10,0	10,7	7,0	73,2

^aErros maiores que 100%.

Tabela 5.6: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do primeiro problema exemplo usando a FRF $H_{5,5}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 100 [rad/s] com 1% de ruído.

Os resultados apresentados mostram que para um sistema do tipo massa-mola-amortecedor o uso do método de DCMS é consistente e provavelmente pode ser estendido para estruturas maiores e mais complexas. Pode-se observar da figura 5.5 que as FRF's calculadas por DCMS exibem distorções quando comparadas com as FRF's calculadas com o modelo completo, mas como estas são pequenas torna-se possível ajustar as FRF's "medidas" com as obtidas por DCMS. Os resultados das tabelas 5.3 a 5.6 mostram que os erros entre valor exato e estimado da rigidez das juntas (k_7 e k_8) são inferiores a 10% independentemente das variações aplicadas em cada caso. Já os mesmos erros para o amortecimento (c_7 e c_8) apresentam valores bastante díspares, podendo-se obter em alguns casos valores estimados com erros acima de 100%. Um resultado similar pode ser observado no caso dos erros estimados, à exceção dos casos das tabelas 5.5 e 5.6, onde o erro estimado de uma rigidez apresenta valores acima de 10% e acima de 100%, respectivamente. Tais evidências mostram que, de forma geral, para este tipo de modelo o método consegue obter um bom ajuste entre as FRF's "medidas" e calculadas, com pequenos erros nas estimativas dos valores da rigidez das juntas, mas com variações muito grandes na estimativa dos valores de amortecimento, em função das variações da faixa de frequência, do ponto de excitação/resposta da FRF e do nível de ruído aplicado aos dados "medidos".

5.3 Sistema com Vigas Engastada-Livres Usando Elementos Finitos

Nesta seção apresenta-se o segundo problema exemplo, o qual consiste de duas vigas engastada-livre onde cada uma destas foi modelada com 8 elementos finitos do tipo viga Timoshenko no plano [49]. As vigas foram interligadas entre si por juntas modeladas

por molas lineares. A figura 5.6 mostra a montagem e a discretização do sistema.

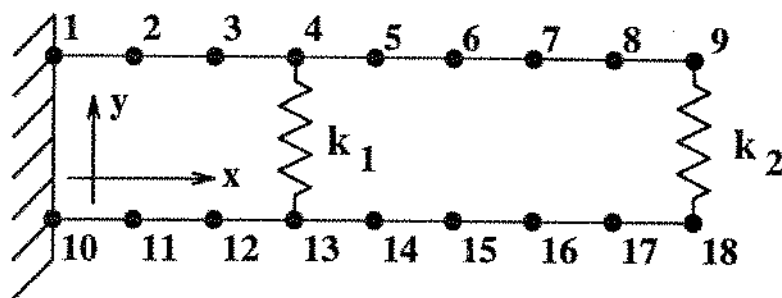


Figura 5.6: Sub-estruturas e juntas do segundo problema exemplo.

Usando-se o programa COSMOSM [50] procedeu-se a uma análise do autoproblema para cada sub-estrutura extraíndo-se pelo método da Iteração no Subespaço [51] as 16 primeiras frequências naturais e suas correspondentes formas dos modos. Para o cálculo do DCMS a base modal foi truncada usando-se os 7 (sete) primeiros modos para a sub-estrutura α e os 5 (cinco) primeiros modos para a sub-estrutura β . Entretanto, para o cálculo das FRF's pseudo-experimentais, usou-se a base modal completa do modelo de elementos finitos da estrutura como um todo, ou seja, o modelo calculado com as duas vigas conectadas entre si por duas molas (o Apendice A mostra as formas dos 8 primeiros modos deste sistema). A tabela 5.7 mostra os valores dos parâmetros físicos do sistema usados neste modelo.

Descrição	Valor
Área da seção das vigas	$A_{\alpha} = 20 \times 5 [mm^2]$ $A_{\beta} = 15 \times 10 [mm^2]$
Módulo de Young	$E = 2.07E + 11 [N/m^2]$
Comprimento das vigas	$l = 400 [mm]$
Densidade	$\rho = 7.80E + 03 [kg/m^3]$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Rigidez das juntas	$k_1 = 6,0E + 05 [N/m]$ $k_2 = 1,0E + 05 [N/m]$

Tabela 5.7: Valores dos parâmetros físicos do segundo exemplo usados na análise de EF

A figura 5.7 mostra uma comparação da FRF $H_{6,6}$ obtida com o modelo completo calculado por elementos finitos com a mesma FRF obtida por DCMS com a base modal de cada sub-estrutura truncada. Tal figura mostra que os resultados obtidos mantêm-se com uma boa concordância.

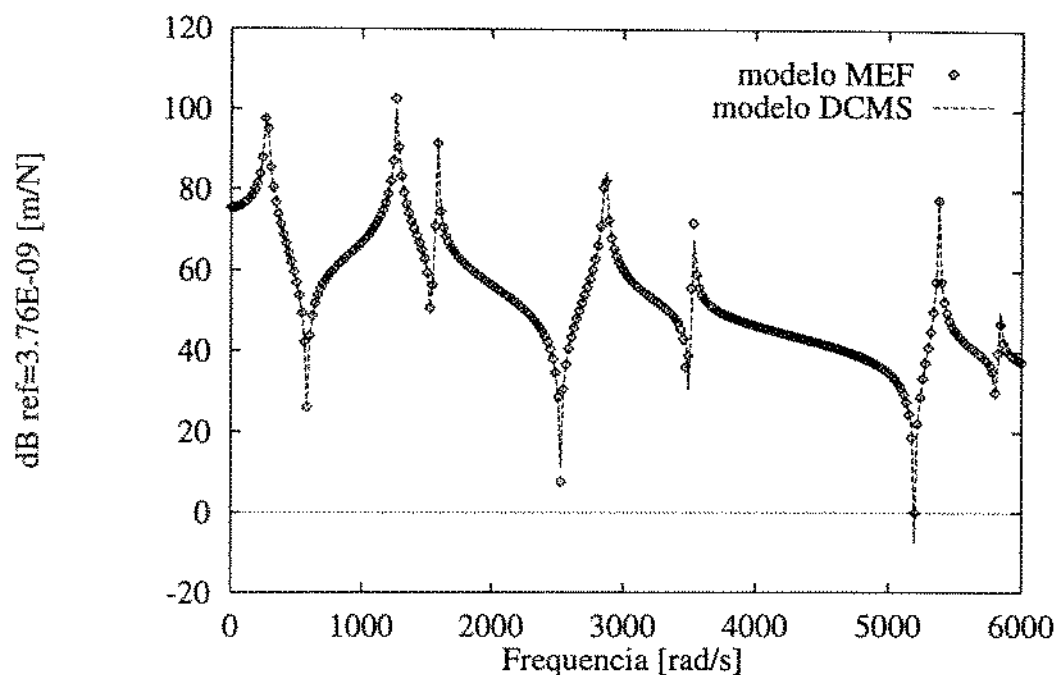


Figura 5.7: Comparação das FRF's $H_{6,6}$ obtidas pelo cálculo por E.F. do modelo completo e por DCMS com truncamento dos modos das sub-estruturas.

A fim de mostrar o uso do método de ajuste com modelos de elementos finitos, estimaram-se os parâmetros da junta do modelo mostrado na figura 5.6 (k_1 e k_2) através do ajuste das curvas (analítica e pseudo-experimental) de uma das FRF's do sistema, neste caso, a FRF $H_{6,6}$ (excitação no nó 6 e resposta no mesmo nó). A figura 5.8 mostra uma simulação feita com uma FRF pseudo-experimental com 1 % de ruído e a FRF calculada por DCMS com base modal truncada e usando valores iniciais arbitrários para os parâmetros de rigidez da junta. Após o procedimento normal já descrito no caso do problema exemplo anterior, a estimação dos parâmetros da junta é obtida e a curva ajustada.

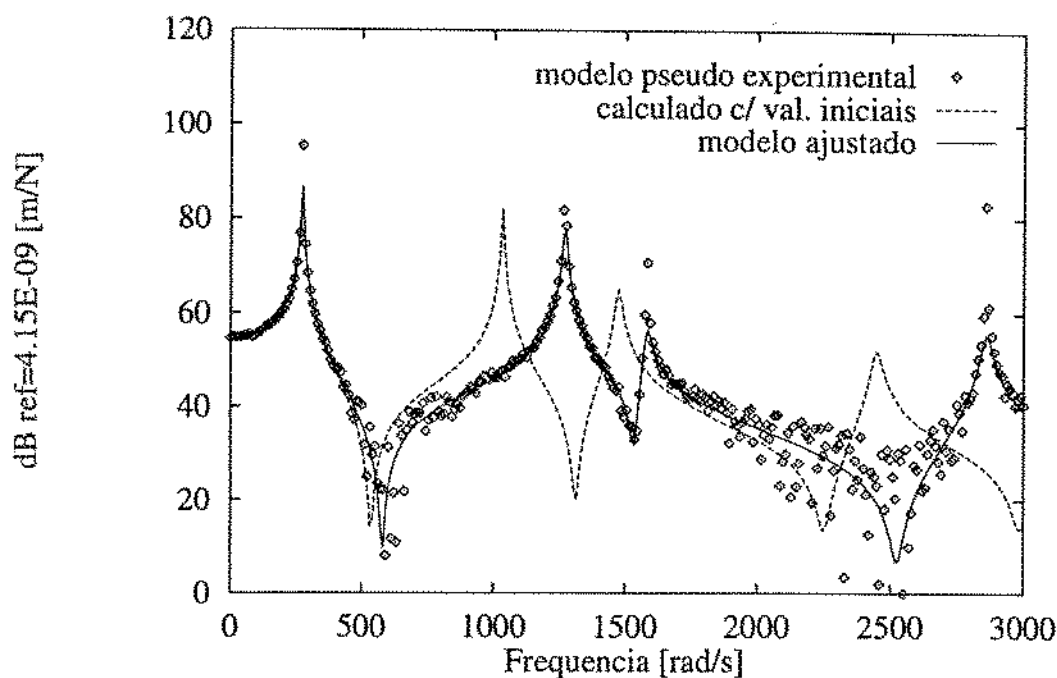


Figura 5.8: FRF's $H_{6,6}$ do segundo problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com o modelo ajustado.

As tabelas 5.8 a 5.12 mostram os valores iniciais arbitrários, os valores dos parâmetros estimados e os erros estimados comparados com valores e erros exatos, para diferentes faixas de frequência, com e sem ruído, para a FRF $H_{6,6}$ e para a FRF $H_{9,9}$, com 1 % de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,0E+05	6,0E+05	5,92E+05	1,29	0,47
k_2 [N/m]	0,5E+05	1,0E+05	1,00E+05	0,10	0,14

Tabela 5.8: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6,6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 3000 [rad/s] sem ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,0E+05	6,0E+05	5,97E+05	0,47	1,67
k_2 [N/m]	0,5E+05	1,0E+05	0,99E+05	0,99	0,47

Tabela 5.9: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6.6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 3000 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,0E+05	6,0E+05	18,50E+05	- ^a	* ^b
k_2 [N/m]	0,5E+05	1,0E+05	0,54E+05	46,0	-

^aErros maiores que 100%.

^bErros maiores que 1000%.

Tabela 5.10: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6.6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 1000 - 2000 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,0E+05	6,0E+05	5,91E+05	1,55	1,14
k_2 [N/m]	0,5E+05	1,0E+05	1,01E+05	0,70	0,53

Tabela 5.11: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{6.6}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 2000 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,0E+05	6,0E+05	2,22E+05	63,0	3,21
k_2 [N/m]	0,5E+05	1,0E+05	1,10E+05	9,60	0,89

Tabela 5.12: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do segundo problema exemplo usando a FRF $H_{9,9}$ com 300 pontos na faixa de frequência de 0 - 1500 [rad/s] com 1% de ruído.

Dos resultados acima pode-se observar que, para um sistema composto de sub-estruturas de massa e rigidez distribuídas conectadas por molas e com parâmetros modais calculados por MEF, o uso do método de DCMS, também é consistente e provavelmente pode ser estendido ainda a estruturas maiores e mais complexas. Da figura 5.8 observa-se um bom ajuste entre as FRF's do modelo pseudo-experimental com aquela do modelo ajustado com os parâmetros das juntas estimados. Os resultados das tabelas 5.8 a 5.12 mostram que os erros entre valor exato e estimado e os erros estimados da rigidez das juntas (k_1 e k_2) são inferiores a 2 % naqueles casos onde a faixa de frequência era de ordem superior ou igual a 2000 rad/s, já para uma faixa de frequência da ordem de 1000 rad/s apresentam valores dos erros entre valor exato e estimado acima de 100% e erros estimados bem acima de 1000%. Um resultado similar pode ser observado no caso da tabela 5.12, onde o erro entre valor exato e estimado de uma rigidez apresenta valores acima de 50% em uma faixa de frequência inferior a 2000 rad/s e em outro ponto de excitação/resposta da FRF. Este resultados indicam que, em geral, para este tipo de modelo o método consegue obter um bom ajuste entre as FRF's "medidas" e calculadas e que erros muito pequenos nas estimativas dos valores da rigidez das juntas podem ser obtidos com uma escolha adequada da faixa de frequência e do ponto de excitação/resposta da FRF escolhida.

É sabido que o principal objetivo das técnica de ajuste de modelos é refinar o modelo analítico que representa a estrutura em estudo. Portanto, este terá de reproduzir as propriedades modais e FRF's em qualquer ponto do modelo, tenha sido ele medido ou não. Baseado neste fato é possível validar um modelo ajustado por uma FRF medida, usando-se os parâmetros das juntas identificados para calcular uma outra FRF e compará-la com a mesma FRF medida, caso estas apresentem um bom ajuste entre as curvas calculada e medida significa que os parâmetros identificados reproduzem as propriedades esperadas em outro ponto do modelo. Assim, a validação do modelo ajustado neste exemplo pode ser verificada através da figura 5.9, a qual mostra uma boa concordância na comparação das curvas pseudo-experimental e analítica da FRF $H_{4,4}$, sendo que a analítica foi calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas identificados com a FRF $H_{6,6}$.

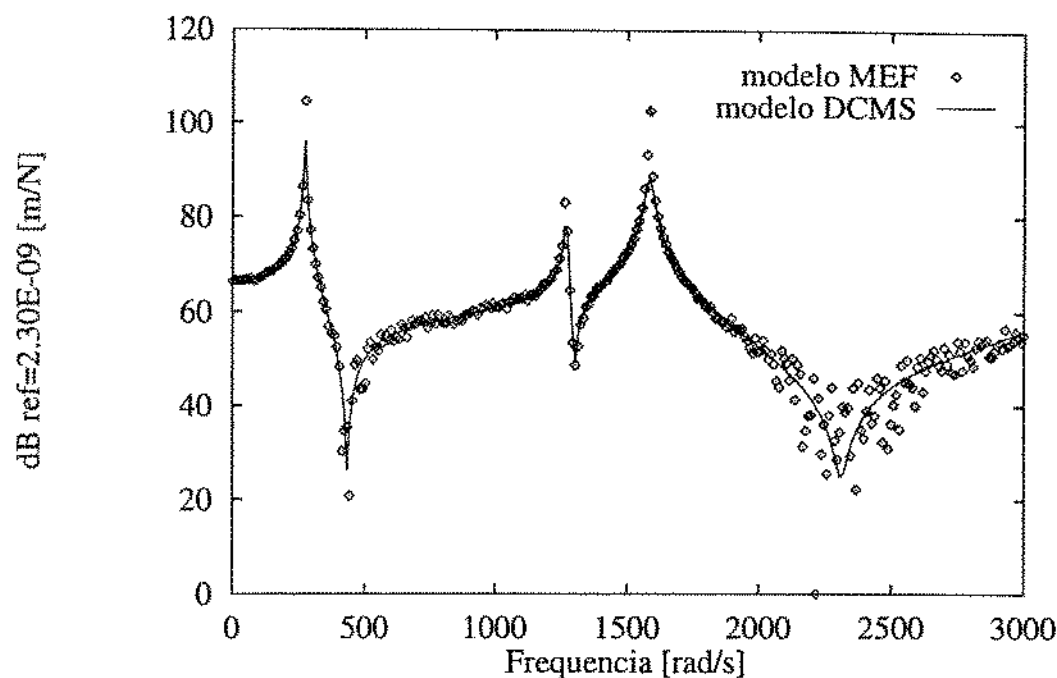


Figura 5.9: Comparação das FRF's $H_{4,4}$ obtidas pelo cálculo por E.F. do modelo completo e por DCMS usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste com a FRF $H_{6,6}$.

5.4 Sistema Viga Livre-Livre Usando Mola e Amortecedor na Junta

Nesta seção apresenta-se o terceiro problema exemplo o qual consiste de duas vigas livre-livre onde uma destas foi modelada com 20 e a outra com 16 elementos finitos do tipo viga Timoshenko no plano [15, 16]. As vigas foram interligadas entre si por juntas modeladas por molas e amortecedores lineares. A figura 5.10 mostra a montagem do sistema e a discretização usada no cálculo de elementos finitos.

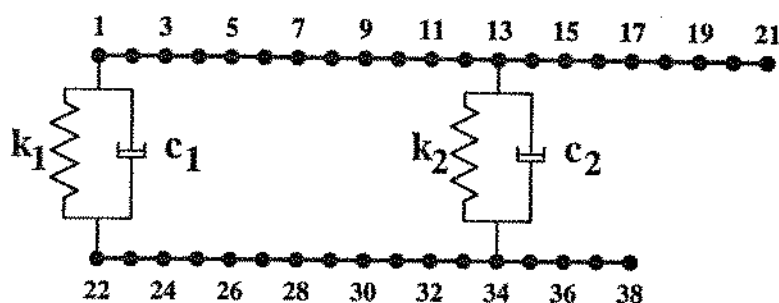


Figura 5.10: Sub-estruturas e juntas do terceiro problema exemplo.

Usando-se o programa ANSYS [52] procedeu-se uma análise do autoproblema para cada sub-estrutura extraíndo-se pelo método de Householder [51] todas as frequências e modos dos 42 graus de liberdade (GDL) da sub-estrutura α e dos 34 GDL da sub-estrutura β . Para o cálculo da DCMS a base modal foi truncada usando-se os 16 primeiros modos para as sub-estruturas α e β (o Apêndice A mostra as formas dos 8 primeiros modos deste sistema). Entretanto, as FRF's pseudo-experimentais foram geradas usando-se o modelo DCMS com todos os modos das sub-estruturas de modo a poder-se investigar de forma realista o efeito do truncamento da base modal no método de ajuste proposto. A tabela 5.13 mostra os valores dos parâmetros físicos do sistema usados neste modelo.

Descrição	Valor
Comprimento das vigas	$l_{\alpha} = 1,0 [m]$ $l_{\beta} = 0,8 [m]$
Módulo de Young	$E = 2,07E + 11 [N/m^2]$
Área da Seção das vigas	$A = 2,41E - 04 [m^2]$
Densidade	$\rho = 7,80E + 03 [kg/m^3]$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Amortecimento modal das vigas	$\xi = 0,01$
Rigidez da junta	$k_1 = k_2 = 2,5E + 05 [N/m]$
Amortecimento da junta	$c_1 = c_2 = 2,0 [N.s/m]$

Tabela 5.13: Valores dos parâmetros físicos do terceiro exemplo usados na análise de EF

A figura 5.11 mostra uma comparação da FRF $H_{7,7}$ obtida por DCMS com o modelo completo com a mesma FRF obtida com a base modal truncada de cada sub-estrutura. Tal figura mostra que os resultados obtidos mantêm-se com uma boa con-

cordância na faixa de baixas frequências, mas vão piorando com o aumento da frequência, conforme era esperado.

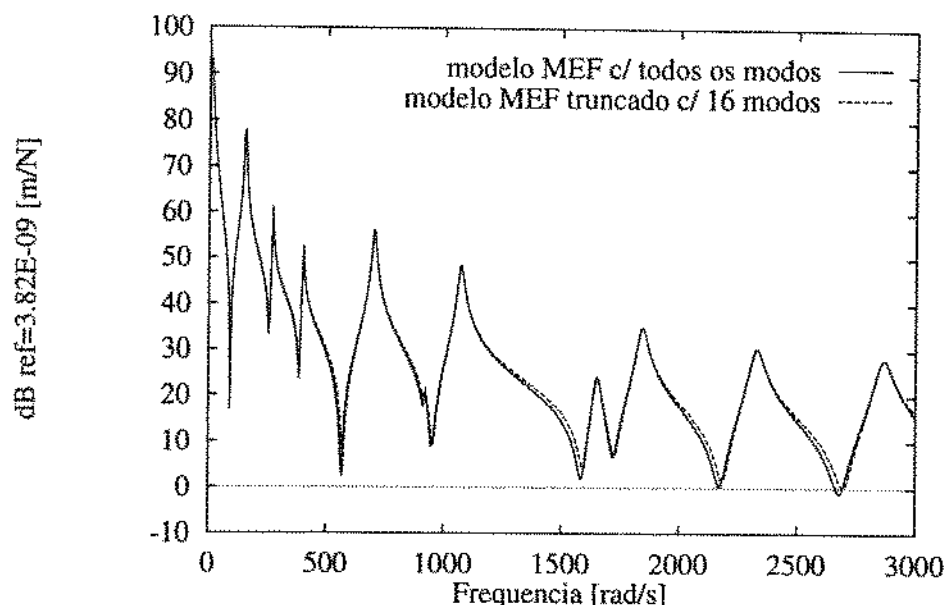


Figura 5.11: Comparação da FRF $H_{7,7}$ calculada via DCMS com o modelo completo e com modelo truncado.

A figura 5.12 mostra uma comparação das sensibilidades da FRF $H_{34,7}$ com relação aos parâmetros das juntas k_1 e c_1 , obtidas usando-se a equação da derivada analítica [16] com aquela aproximada por diferenças finitas. Pode-se observar que existe uma boa concordância entre os valores obtidos pela aproximação por diferenças finitas com a solução analítica exata. Como as sensibilidades são usadas para calcular a direção de busca em cada passo da iteração do programa de ajuste, não é necessário calculá-las com alta precisão. Contudo, como são calculadas muitas vezes, seu custo computacional deve ser minimizado. Portanto, no código computacional implementado, as sensibilidades são calculadas via diferenças finitas.

Os modos de corpo rígido da estrutura montada, quando calculadas via DCMS, mostraram uma alta sensibilidade às perturbações dos parâmetros da junta no cálculo por diferenças finitas, o que não tem sentido físico já que os modos de corpo rígido não são afetados pelos coeficientes das juntas. A fim de sobrepor tal problema, as variações dos modos de corpo rígido não foram incluídas nos cálculos das curvas de sensibilidade usadas no processo de ajuste, bem como, naquelas mostradas na figura 5.12.

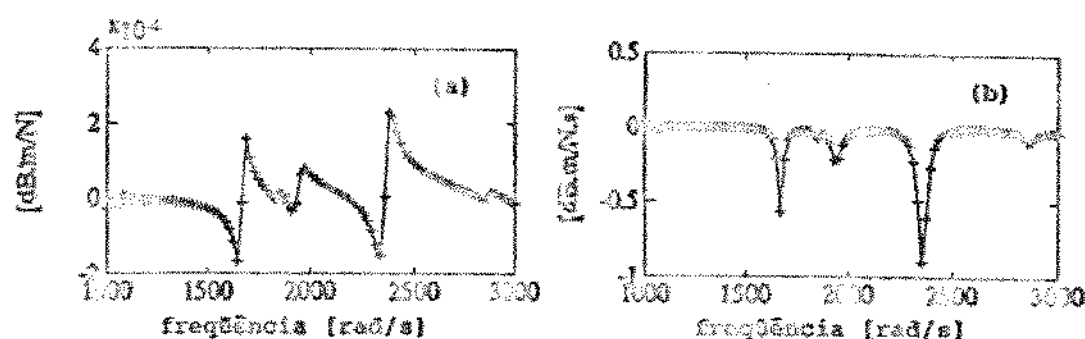


Figura 5.12: Comparação das sensitividades da FRF $H_{34.7}$ calculada com a equação analítica — e aproximada via diferenças finitas ++ em relação ao parâmetro (a) k_1 e (b) c_1 .

Neste problema exemplo, grupos de FRFs foram usadas simultaneamente para estimar os coeficientes de rigidez e amortecimento das duas juntas de conexão. Neste caso, tomou-se esta medida devido ao método ter apresentado dificuldades de convergência quando usava-se apenas uma FRF. Cada FRF foi simulada com 512 pontos dentro da faixa de frequência especificada. As tabelas de 5.14 a 5.17 mostram os resultados obtidos para diferentes níveis de ruído e diferentes grupos de FRFs. Em todos os casos, o processo de ajuste do modelo foi iniciado com as FRFs em escala logarítmica (dB). Após a convergência o processo de busca era reiniciado com as FRFs em escala linear. Desta forma, estimativas mais precisas dos parâmetros foram obtidas e a minimização tornou-se mais robusta.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,51E+05	0,4	0,2
k_2 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,45E+05	2,0	0,2
c_1 [N.s/m]	1,25	2,0	2,82	41,0	7,1
c_2 [N.s/m]	1,25	2,0	1,34	33,0	14,5

Tabela 5.14: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{1.7}$, $H_{13.7}$, $H_{22.7}$, e $H_{34.7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 1000 - 3000 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,48E+05	0,8	0,08
k_2 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,50E+05	0,0	0,02
c_1 [N.s/m]	1,25	2,0	2,24	12,0	1,9
c_2 [N.s/m]	1,25	2,0	2,03	1,5	1,6

Tabela 5.15: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{1,7}$, $H_{13,7}$, $H_{22,7}$, e $H_{34,7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 100 - 2000 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,51E+05	0,4	0,2
k_2 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,46E+05	1,5	0,2
c_1 [N.s/m]	1,25	2,0	2,72	36,1	7,9
c_2 [N.s/m]	1,25	2,0	1,45	27,5	13,7

Tabela 5.16: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{7,7}$, $H_{21,7}$, $H_{28,7}$, e $H_{38,7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 1000 - 3000 [rad/s] com 1% de ruído.

Parâmetro da Junta	Valor Inicial	Valor Exato	Valor Estimado	Erro [%]	Erro Estimado[%]
k_1 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,46E+05	1,6	0,3
k_2 [N/m]	3,75E+05	2,5E+05	2,52E+05	1,9	0,3
c_1 [N.s/m]	1,25	2,0	2,07	3,35	11,8
c_2 [N.s/m]	1,25	2,0	2,09	4,65	11,8

Tabela 5.17: Resultados da estimação dos parâmetros das juntas do terceiro problema exemplo usando as FRF's $H_{1,7}$, $H_{13,7}$, $H_{22,7}$, e $H_{34,7}$ com 512 pontos na faixa de frequência de 1000 - 3000 [rad/s] com 5% de ruído.

Com base nos resultados apresentados pode-se mostrar que, para um sistema do tipo viga livre-livre conectadas por juntas com rigidez e amortecimento, o uso do método de ajuste com DCMS mantém a sua consistência comprovada nos casos anteriores. Os resultados das tabelas 5.14 a 5.17 mostram que os erros entre valor exato e estimado da

rigidez das juntas (k_1 e k_2) são iguais ou inferiores a 2% independentemente das variações aplicadas em cada caso. Contudo, os erros para o amortecimento (c_1 e c_2) apresentam resultados diferentes, podendo-se obter em alguns casos valores estimados com erros de até 41 %. Um resultado similar pode ser observado no caso dos ϵ ros estimados, sendo que para a rigidez estes são inferiores a 0,5 % e para o amortecimento inferiores a 15,0 %. Fica evidente que para este tipo de modelo o método consegue obter um bom ajuste entre as FRF's "medidas" e calculadas com erros bem pequenos nas estimativas dos valores da rigidez das juntas, mas com variações razoáveis, em alguns casos, na estimativa dos valores de amortecimento. Estes níveis de erro na estimativa do amortecimento são também, neste caso, função das variações de faixa de frequência, do ponto de excitação/resposta da FRF e do nível de ruído aplicado aos dados "medidos".

Neste ponto, é importante salientar que, ainda que usando o mesmo método de ajuste de modelos, os resultados da estimação dos parâmetros obtidos por este modelo mostram-se bastante superiores àqueles obtidos para os modelos anteriores. Embora não tenha sido feita uma verificação nos exemplos anteriores, supõe-se que esta melhoria na precisão dos valores estimados seja decorrente do enriquecimento da base de dados quando do uso de mais que uma FRF nos dados "medidos".

As figuras 5.13 a 5.16 mostram os ajustes obtidos para o caso da tabela 5.14. Nestas pode-se observar um bom ajuste entre as FRF's do modelo pseudo-experimental com aquelas do modelo ajustado com os parâmetros das juntas estimados.

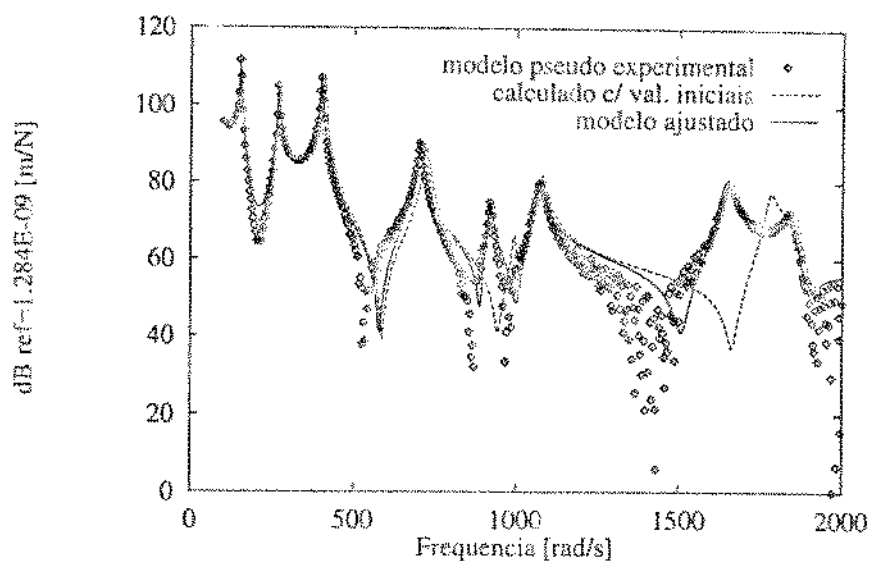


Figura 5.13: FRF's $H_{1,7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.

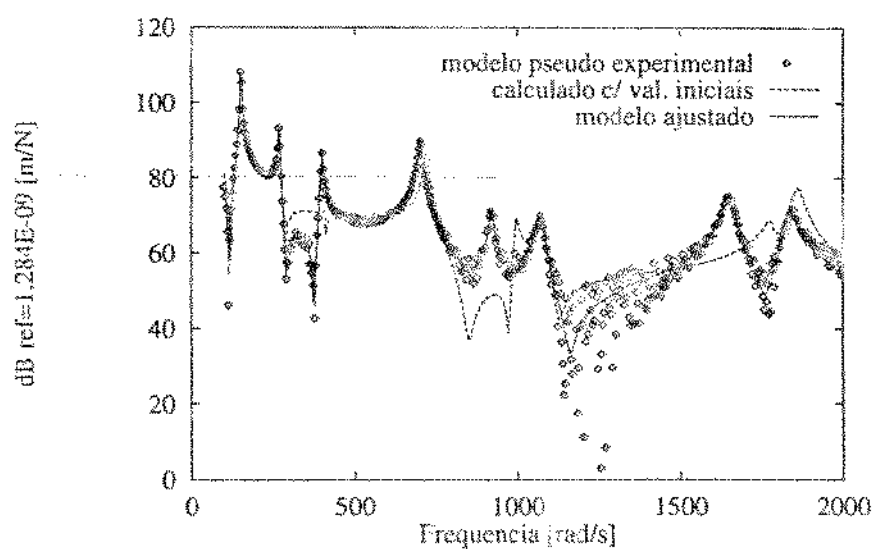


Figura 5.14: FRF's $H_{13,7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.

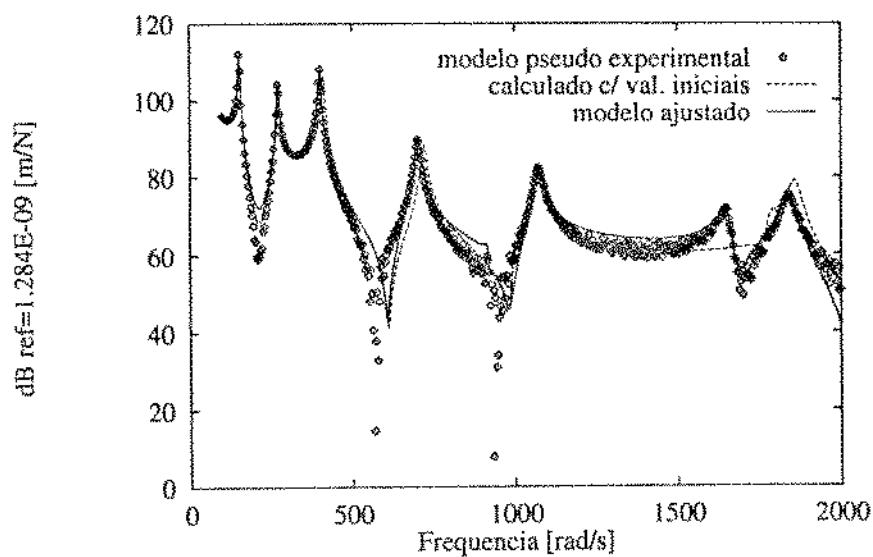


Figura 5.15: FRF's $H_{22.7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.

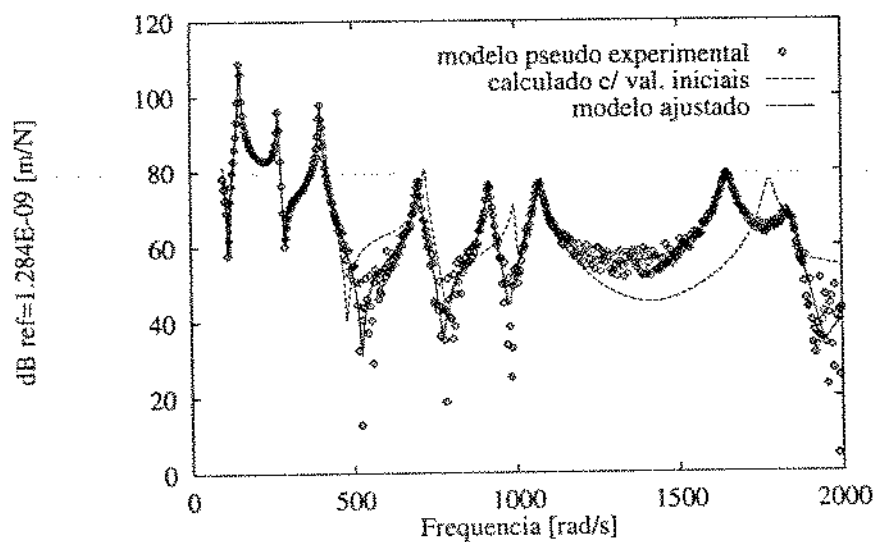


Figura 5.16: FRF's $H_{34.7}$ do terceiro problema exemplo obtidas com modelo pseudo-experimental com 1 % de ruído, prevista com valores iniciais dos parâmetros e prevista com modelo ajustado.

5.5 Exemplo Experimental

Nesta seção apresenta-se um problema experimental o qual consiste de duas vigas de aço ao carbono ABNT 1020 conectadas entre si através de duas juntas de elastômero de baixa rigidez (borracha usada na vedação de porta de veículos). O teste experimental foi realizado para o sistema livre-livre conforme mostrado esquematicamente na figura 5.17. A foto da figura 5.18 mostra uma vista completa da montagem do teste experimental.

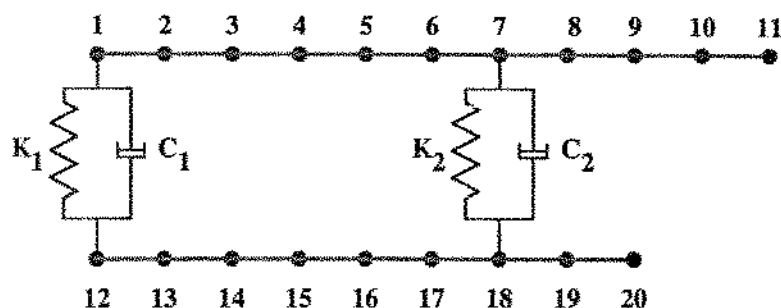


Figura 5.17: Esquema das sub-estruturas e juntas do problema experimental.

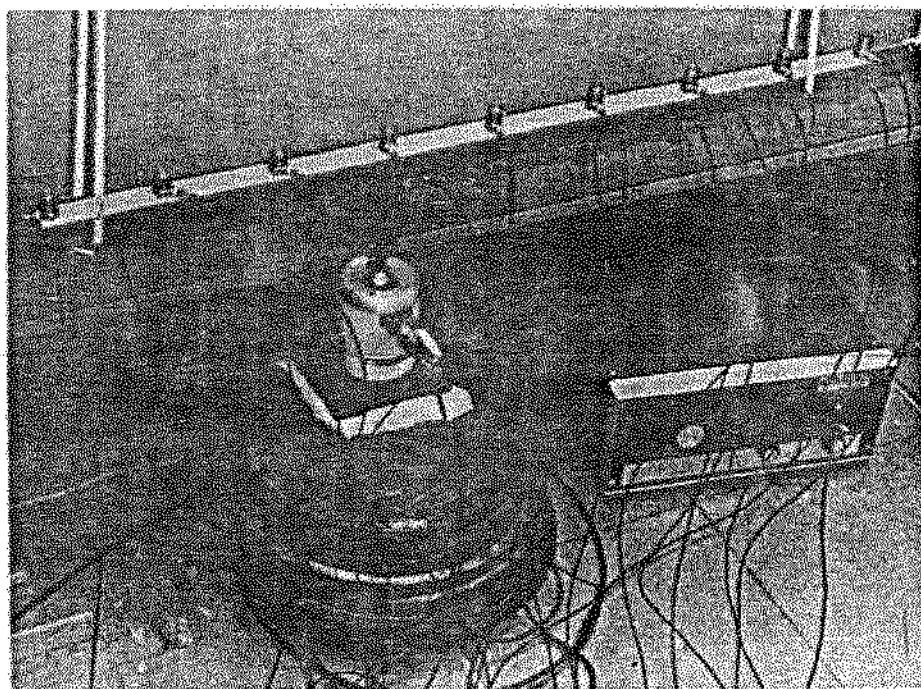


Figura 5.18: Vista da montagem das sub-estruturas e juntas do problema experimental.

O modelo experimental desta estrutura foi discretizado com 20 nós, onde no nó 4 aplicou-se uma força de excitação periódica do tipo “chirp” [48], através de um excitador eletrodinâmico. As respostas foram captadas nos 20 acelerômetros colocados

em cada um dos nós, cada um pesando cerca de 17 gramas. Os sinais das respostas foram adquiridos separadamente mas simultaneamente com o sinal da força de excitação. As FRF's estimadas foram obtidas com 10 médias usando-se o estimador $\hat{H}_1$ [18]. Desta forma, obtiveram-se dois conjuntos de dados, com 20 FRF's cada, onde cada FRF contém 512 pontos, nas faixas de frequência de 0 a 128 Hz e de 0 a 512 Hz.

Os valores dos parâmetros físicos usados no modelo são dados na tabela 5.18. Pode-se observar que as dimensões e propriedades das vigas são as mesmas do problema exemplo dado na seção 5.4. Este fato permitiu que se usasse no cálculo do DCMS deste problema a mesma base modal das sub-estruturas α e β já calculadas naquela seção e com o mesmo truncamento. A fim de considerar o amortecimento interno do material, o coeficiente de amortecimento modal $\xi = 0.001$ foi introduzido em todos os modos das duas sub-estruturas usando-se o equacionamento do Capítulo 4. Elementos de massa concentrada foram introduzidos nos nós do modelo de MEF para levar em conta o efeito das massas dos acelerômetros. As juntas foram construídas de borracha elastomérica de baixa rigidez, com dimensões aproximadas de $38,1 \times 6,35 \times 6,35 \text{ mm}$ e de propriedades físicas desconhecidas. Em seguida, estas foram coladas entre as vigas formando o sistema experimental. A foto da figura 5.19 mostra uma vista em detalhe de uma das juntas colada entre as vigas.

Descrição	Valor
Comprimento das vigas	$l_\alpha = 1,0 \text{ [m]}$ $l_\beta = 0,8 \text{ [m]}$
Módulo de Young	$E = 2,07\text{E}+11 \text{ [N/m}^2\text{]}$
Área da Seção das vigas	$A = 2,41\text{E}-04 \text{ [m}^2\text{]}$
Densidade	$\rho = 7.80\text{E}+03 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
Coeficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Amortecimento modal das vigas	$\xi = 0,001$

Tabela 5.18: Valores dos parâmetros físicos do exemplo experimental.

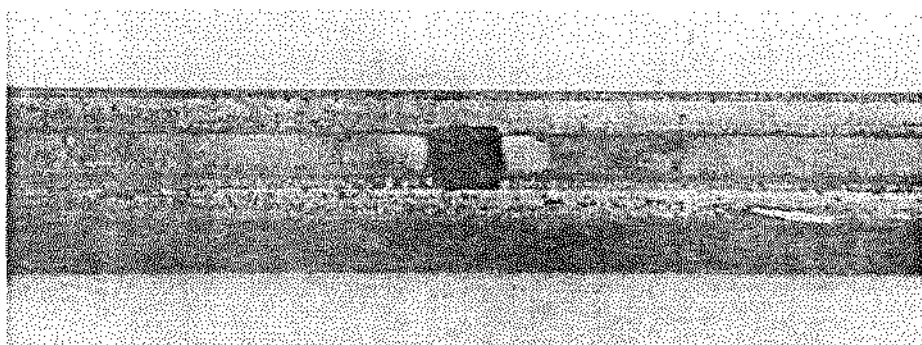


Figura 5.19: Detalhe da montagem das juntas do problema experimental.

O procedimento de ajuste de modelo por mínimos quadrados não-linear já descrito foi usado a fim de tentar-se estimar os coeficientes de rigidez e amortecimento das juntas: k_1, k_2, c_1 e c_2 . Devido ao desconhecimento dos possíveis valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento da junta, foram realizadas algumas tentativas de arbítrio dos valores iniciais no sentido de definir uma ordem de grandeza destes valores baseado na experiência pessoal e na avaliação visual do primeiro ajuste obtido entre as curvas das FRF's obtidas experimentalmente e calculada com estes valores arbitrados. Desta forma, tornou-se possível detectar que valores de rigidez na faixa de $1.0\text{E}+04$ a $1.0\text{E}+05$ [N/m] e de amortecimento na faixa de 5 a 50 [N.s/m] mostravam-se como prováveis de encontrarem-se dentro da região do mínimo para este problema. Arbitrando-se três valores iniciais de $k_1 = k_2 = 2,5\text{E}+04$; $4,5\text{E}+04$; e $1,0\text{E}+05$ [N/m] e dois de $c_1 = c_2 = 10,0$ e $40,0$ [N.s/m], procedeu-se ao ajuste do modelo para quatro casos diferentes combinando estes valores conforme mostra a tabela 5.19.

Caso	Valor Inicial do Parâmetro			
	k_1 [N/m]	k_2 [N/m]	c_1 [N.s/m]	c_2 [N.s/m]
A	$2.5\text{E}+04$	$2.5\text{E}+04$	10.0	10.0
B	$4.5\text{E}+04$	$4.5\text{E}+04$	10.0	10.0
C	$1.0\text{E}+05$	$1.0\text{E}+05$	10.0	10.0
D	$2.5\text{E}+04$	$2.5\text{E}+04$	40.0	40.0

Tabela 5.19: Valores iniciais dos parâmetros para os diferentes casos investigados.

Cada caso foi ajustado em três faixas de frequências diferentes, ou seja, 31,4 a 802,7 [rad/s] com 492 pontos, 62,8 a 3210,7 [rad/s] com 502 pontos e 62,8 a 1602,2 [rad/s] com 246 pontos. Os ajustes do modelo foram realizados em escala logarítmica usando-se como dados medidos grupos de 4 FRF's obtidas experimentalmente, onde o ponto de excitação permanecia fixo e variavam-se os pontos de resposta. As tabelas 5.20 e 5.21

mostram os resultados obtidos para uma das combinações das FRF's medidas ($H_{1,4}$, $H_{7,4}$, $H_{12,4}$, e $H_{18,4}$) e dos valores iniciais de rigidez e amortecimento das juntas escolhidos.

Parâmetros de Rigidez	Caso	Faixa de Frequências		
		31,4 a 802,7 [rad/s]	62,8 a 3210,7 [rad/s]	62,8 a 1602,2 [rad/s]
k_1 [N/m] $erro_{k_1}$ [%]	A	0.3762E+05 1.11	0.2857E+05 2.18	0.3242E+05 1.32
	B	0.4040E+05 1.17	0.2897E+05 1.94	0.3588E+05 0.18
	C	0.7250E+05 5.65	0.2922E+05 1.71	0.3571E+05 1.43
	D	0.4007E+05 1.11	0.3655E+05 1.64	0.3612E+05 1.39
k_2 [N/m] $erro_{k_2}$ [%]	A	0.2841E+05 1.54	0.3512E+05 1.95	0.2925E+05 2.36
	B	0.2815E+05 1.82	0.4546E+05 1.60	0.2648E+05 2.74
	C	0.7986E+05 2.61	0.4101E+05 1.43	0.2564E+05 3.13
	D	0.2850E+05 1.78	0.2732E+05 2.21	0.2501E+05 3.15

Tabela 5.20: Resultados da estimação dos parâmetros de rigidez das juntas do problema experimental usando as FRF's $H_{1,4}$, $H_{7,4}$, $H_{12,4}$, e $H_{18,4}$ nas faixas de frequências e valores iniciais investigados.

Parâmetros de Amortecimento	Caso	Faixa de Frequências		
		31,4 a 802,7 [rad/s]	62,8 a 3210,7 [rad/s]	62,8 a 1602,2 [rad/s]
c_1 [N.s/m] $erro_{c_1}$ [%]	A	0.1600E+02 5.05	0.1282E+02 5.00	0.1018E+02 7.56
	B	0.1621E+02 5.66	0.1253E+02 4.93	0.9940E+01 7.94
	C	0.9235E+02 5.54	0.1128E+02 4.58	0.9476E+01 8.48
	D	0.1480E+02 5.46	0.9873E+01 5.51	0.8917E+01 8.52
c_2 [N.s/m] $erro_{c_2}$ [%]	A	0.5388E+02 3.57	0.1850E+02 7.27	0.4338E+02 6.38
	B	0.5980E+02 3.69	0.1654E+02 6.28	0.4978E+02 5.83
	C	0.9812E+02 5.41	0.1433E+02 7.04	0.5516E+02 6.00
	D	0.6015E+02 3.45	0.2107E+02 7.59	0.5534E+02 5.73

Tabela 5.21: Resultados da estimação dos parâmetros de amortecimento das juntas do problema experimental usando as FRF's $H_{1,4}$, $H_{7,4}$, $H_{12,4}$, e $H_{18,4}$ nas faixas de frequências e valores iniciais investigados.

Neste caso do sistema experimental não há conhecimento a priori dos valores verdadeiros dos parâmetros de rigidez e amortecimento das juntas, assim, as análises terão que ser feitas com base nos erros estimados dos valores identificados. Os resultados das tabelas 5.20 e 5.21 mostram que, à exceção do caso C, na faixa de frequência mais estreita (31,4 a 802,7 [rad/s]), os valores e erros estimados da rigidez e amortecimento das juntas mostram-se bastante coerentes, assim como revelam-se independentes dos valores iniciais arbitrados, desde que estes obedeçam às condições já anteriormente estabelecidas nos exemplos simulados. Baseado em tais fatos, pode-se estabelecer o critério de que as "melhores" estimativas dos valores de rigidez e amortecimento serão aquelas que apresentarem um menor erro estimado. No caso deste problema seriam obtidos das tabelas 5.20 e 5.21 os seguintes valores: $k_1 = 0.3588E+05$ [N/m]; $k_2 = 0.4101E+05$ [N/m]; $c_1 = 0.1128E+02$ [N.s/m]; e $c_2 = 0.6015E+02$ [N.s/m]. As figuras 5.20 a 5.23 mostram as curvas das FRF's experimental, calculada com valores iniciais e ajustada, obtidas para alguns casos da tabela 5.19. Nestas pode-se observar um bom ajuste entre as FRF's experimentais com aquelas do modelo ajustado.

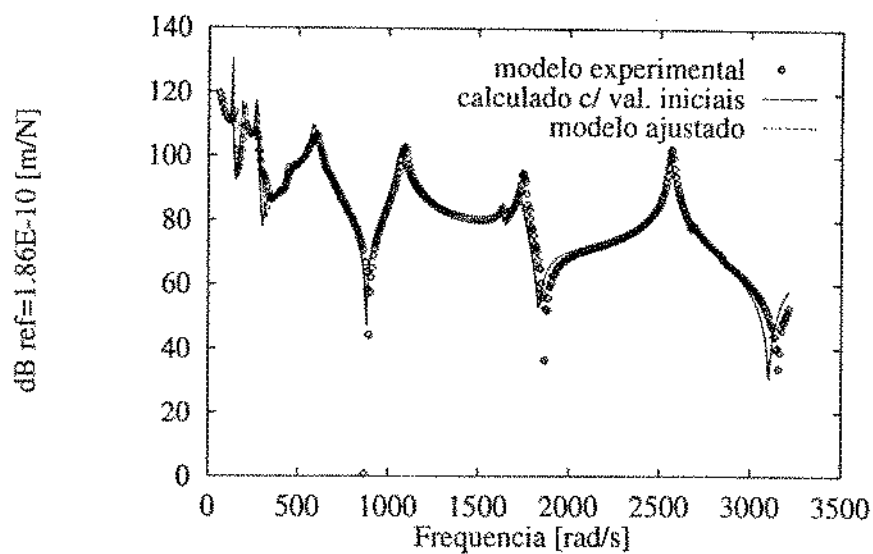


Figura 5.20: FRF's $H_{1,4}$ do sistema experimental, na faixa de 62,8 a 3210,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso A e prevista com modelo ajustado.

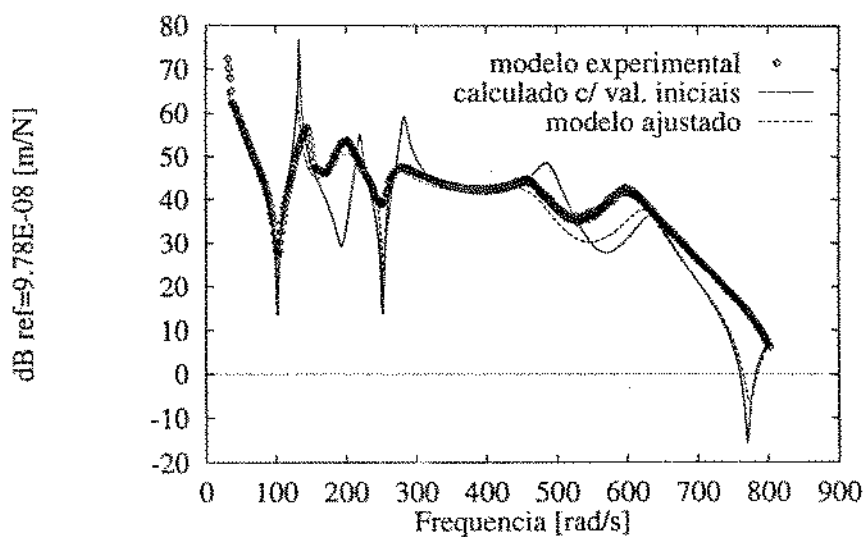


Figura 5.21: FRF's $H_{7,4}$ do sistema experimental, na faixa de 31,4 a 802,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso B e prevista com modelo ajustado.

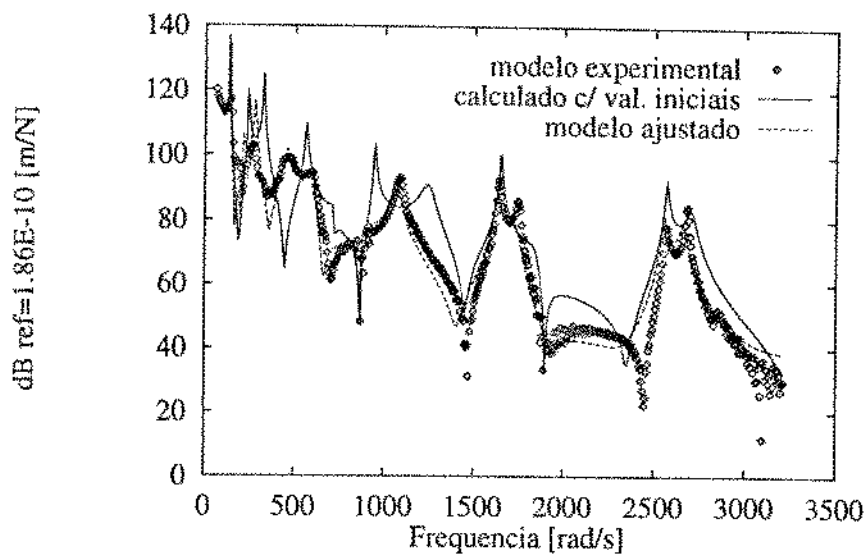


Figura 5.22: FRF's $H_{12.4}$ do sistema experimental, na faixa de 62,8 a 3210,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso C e prevista com modelo ajustado.

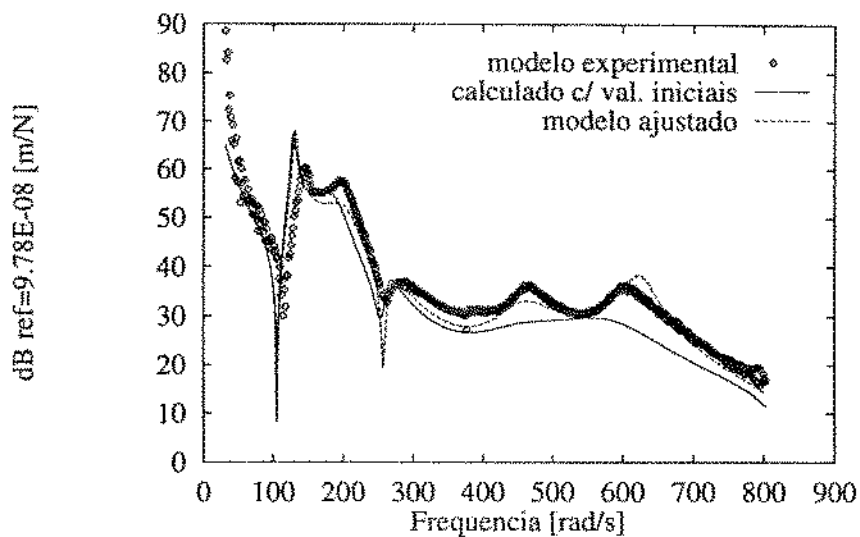


Figura 5.23: FRF's $H_{18.4}$ do sistema experimental, na faixa de 31,4 a 802,7 [rad/s], obtidas com dados medidos, prevista com valores iniciais do caso D e prevista com modelo ajustado.

Considerando-se a evidência observada nos resultados das tabelas 5.20 e 5.21 com relação à relativa independência do método aos valores iniciais arbitrados, explorou-se uma nova estratégia a fim de tentar confirmar os resultados obtidos. Esta nova estratégia consiste em manter um mesmo conjunto de valores iniciais dos parâmetros das juntas e variar o conjunto das FRF's medidas nas três faixas de frequências já estabelecidas. Escolhendo-se $k_1 = k_2 = 4.5\text{E}+04$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m] como valores iniciais e os conjuntos das FRF's mostradas na tabela 5.22 como os valores medidos, obtiveram-se as estimativas dos valores e dos erros dos parâmetros de rigidez e amortecimento das juntas mostrados nas tabelas 5.23 e 5.24, respectivamente.

Conjunto	FRF's Usadas
H_A	$H_{1.4}, H_{7.4}, H_{12.4}, \text{ e } H_{18.4}$
H_B	$H_{4.4}, H_{11.4}, H_{15.4}, \text{ e } H_{20.4}$
H_{AB}	$H_{1.4}, H_{4.4}, H_{7.4}, H_{11.4}, H_{12.4}, H_{15.4}, H_{18.4} \text{ e } H_{20.4}$

Tabela 5.22: Conjuntos das FRF's usadas como dados medidos nos diferentes casos investigados.

Parâmetros de Rigidez	Conjunto de FRF's	Faixa de Frequências		
		31,4 a 802,7 [rad/s]	62,8 a 3210,7 [rad/s]	62,8 a 1602.2 [rad/s]
k_1 [N/m] $erro_{k_1}$ [%]	H_A	0.4040E+05 1.17	0.2897E+05 1.94	0.3588E+05 0.18
	H_B	0.3650E+05 1.51	0.3262E+05 1.11	0.3281E+05 1.17
	H_{AB}	0.3706E+05 0.88	0.3243E+05 1.10	0.3500E+05 0.81
k_2 [N/m] $erro_{k_2}$ [%]	H_A	0.2815E+05 1.82	0.4546E+05 1.60	0.2648E+05 2.74
	H_B	0.2449E+05 2.01	0.2904E+05 1.33	0.2807E+05 2.22
	H_{AB}	0.2855E+05 1.15	0.3928E+05 1.19	0.2615E+05 1.86

Tabela 5.23: Resultados da estimação dos parâmetros de rigidez das juntas do problema experimental usando valores iniciais $k_1 = k_2 = 4.5\text{E}+04$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m] com diferentes conjuntos de FRF's e faixas de frequências.

Parâmetros de Amortecimento	Conjunto de FRF's	Faixa de Frequências		
		31,4 a 802,7 [rad/s]	62,8 a 3210,7 [rad/s]	62,8 a 1602,2 [rad/s]
c_1 [N.s/m] $erro_{c_1}$ [%]	H_A	0.1621E+02 5.66	0.1253E+02 4.93	0.9940E+01 7.94
	H_B	0.2078E+02 5.16	0.1116E+02 3.51	0.1000E+02 6.11
	H_{AB}	0.1781E+02 3.56	0.1165E+02 3.29	0.8395E+01 5.47
c_2 [N.s/m] $erro_{c_2}$ [%]	H_A	0.5980E+02 3.69	0.1654E+02 6.28	0.4978E+02 5.83
	H_B	0.6078E+02 3.53	0.1733E+02 4.76	0.4795E+02 4.98
	H_{AB}	0.5394E+02 2.54	0.1936E+02 4.12	0.4944E+02 3.75

Tabela 5.24: Resultados da estimação dos parâmetros de amortecimento das juntas do problema experimental usando valores iniciais $k_1 = k_2 = 4.5E+04$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m] com diferentes conjuntos de FRF's e faixas de frequências.

Os resultados das tabelas 5.23 e 5.24 mostram que, de uma forma geral, os valores e erros estimados da rigidez e amortecimento das juntas mostram-se bastante coerentes, assim como os erros estimados diminuem significativamente com o aumento do número de FRF's usadas como dados medidos. Isto pode ser visto claramente no caso do conjunto de FRF's H_{AB} . Baseado no critério anteriormente definido, de que as "melhores" estimativas dos valores de rigidez e amortecimento serão aquelas que apresentarem um menor erro estimado, obtém-se das tabelas 5.20 e 5.24 os seguintes valores: $k_1 = 0.3588E+05$ [N/m]; $k_2 = 0.2855E+05$ [N/m]; $c_1 = 0.1165E+02$ [N.s/m]; e $c_2 = 0.5394E+02$ [N.s/m]. Observa-se que estes resultados estão bastante próximos dos valores dos coeficientes rigidez e amortecimento das juntas obtidos no caso anterior.

As figuras 5.24 a 5.26 mostra as curvas das FRF's experimental, calculada com os valores iniciais e ajustada, obtidas para alguns casos das tabelas 5.22. Nestas pode-se observar um bom ajuste entre as FRF's experimentais e aquelas do modelo ajustado.

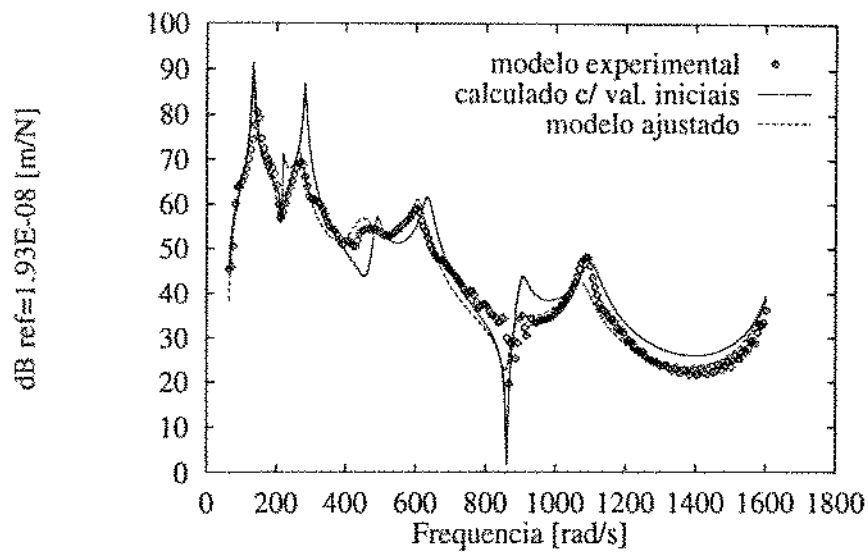


Figura 5.24: Comparação das curvas das FRF's $H_{20.4}$ obtidas por dados medidos, calculada com valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_B , na faixa de frequência de 62,8 a 1602,2 [rad/s].

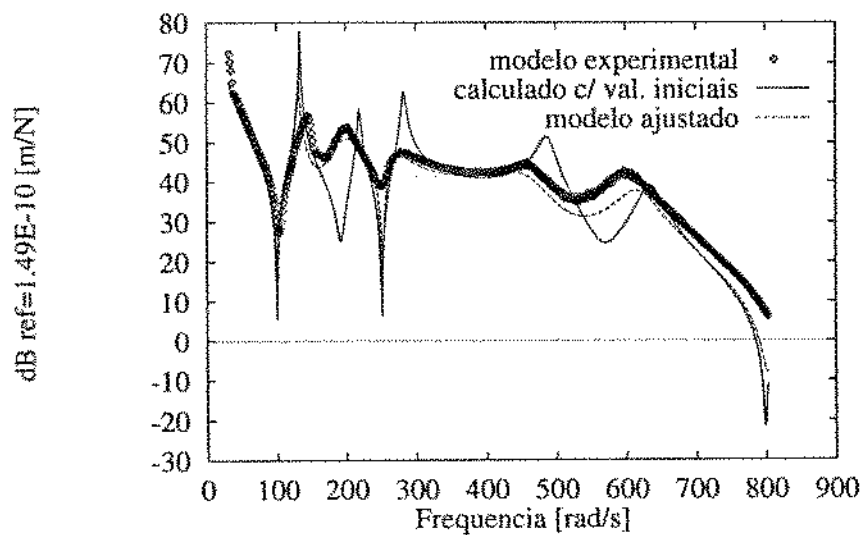


Figura 5.25: Comparação das curvas das FRF's $H_{7.4}$ obtidas por dados medidos, calculada com valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_{AB} , na faixa de frequência de 31,4 a 802,7 [rad/s].

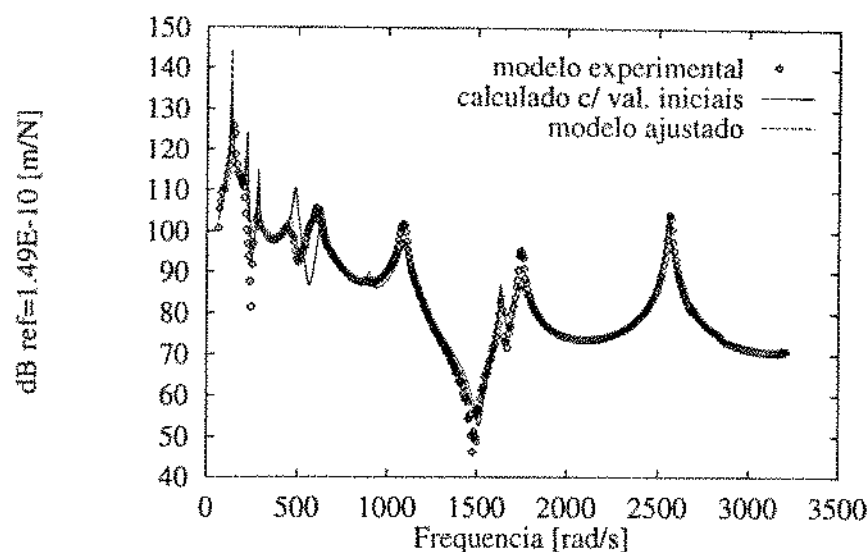


Figura 5.26: Comparação das curvas das FRF's $H_{11,4}$ obtidas por dados medidos, calculada com valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_{AB} , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].

Baseado em um fato observado nos resultados das tabelas 5.23 e 5.24, onde o aumento do número de FRF's usadas como dados medidos resultou em uma redução significativa do erro estimado em relação aos casos anteriores, levou a exploração de um outro caminho para tentar determinar de que forma e em que quantidade o aumento do número de FRF's como dados medidos influenciava na redução do erro estimado. Para tal manteve-se um mesmo conjunto de valores iniciais dos parâmetros das juntas e variou-se o número de FRF's contidas em cada conjunto das FRF's medidas em uma mesma faixa de frequência, neste caso, na faixa de 62,8 a 3210,7 [rad/s]. Escolhendo-se $k_1 = k_2 = 1.0E+05$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m] como valores iniciais e os conjuntos das FRF's mostradas na tabela 5.25 como os valores medidos, obtiveram-se as estimativas dos valores e dos erros dos parâmetros de rigidez e amortecimento das juntas mostradas nas tabelas 5.26 e 5.27, respectivamente.

Conjunto	No. de FRF's	FRF's Usadas
H_0	01	$H_{19.4}$
H_1	02	$H_{7.4}$ e $H_{18.4}$
H_2	04	$H_{4.4}$, $H_{11.4}$, $H_{15.4}$, e $H_{20.4}$
H_3	08	$H_{1.4}$, $H_{4.4}$, $H_{7.4}$, $H_{11.4}$, $H_{12.4}$, $H_{15.4}$, $H_{18.4}$ e $H_{20.4}$
H_4	12	$H_{1.4}$, $H_{3.4}$, $H_{5.4}$, $H_{6.4}$, $H_{7.4}$, $H_{9.4}$, $H_{11.4}$, $H_{12.4}$, $H_{14.4}$, $H_{16.4}$, $H_{18.4}$ e $H_{20.4}$
H_5	16	$H_{1.4}$, $H_{3.4}$, $H_{4.4}$, $H_{5.4}$, $H_{6.4}$, $H_{7.4}$, $H_{8.4}$, $H_{9.4}$, $H_{11.4}$, $H_{12.4}$, $H_{14.4}$, $H_{15.4}$, $H_{16.4}$, $H_{17.4}$, $H_{18.4}$ e $H_{20.4}$
H_6	20	$H_{1.4}$ até $H_{20.4}$

Tabela 5.25: Número de FRF's em cada conjunto usado como dados medidos nos diferentes casos investigados.

Conjunto de FRF's	Parâmetros de Rigidez das Juntas			
	k_1 [N/m]	$erro_{k_1}$ [%]	k_2 [N/m]	$erro_{k_2}$ [%]
H_0	0.3240E+05	3.68	0.3312E+05	5.43
H_1	0.2563E+05	2.32	0.3189E+05	3.00
H_2	0.3006E+05	1.28	0.4150E+05	1.29
H_3	0.2905E+05	0.85	0.4277E+05	0.92
H_4	0.3079E+05	1.03	0.3986E+05	0.97
H_5	0.3023E+05	0.89	0.3934E+05	0.85
H_6	0.3151E+05	0.72	0.3246E+05	0.88

Tabela 5.26: Resultados da estimação dos parâmetros de rigidez das juntas do problema experimental usando como dados medidos conjuntos de FRF's compostos por diferentes números de FRF's, na faixas de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s], com valores iniciais $k_1 = k_2 = 1.0\text{E}+05$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m].

Conjunto de FRF's	Parâmetros de Amortecimento das Juntas			
	c_1 [N.s/m]	$erro_{c_1}$ [%]	c_2 [N.s/m]	$erro_{c_2}$ [%]
H_0	0.1289E+02	10.86	0.2313E+02	12.12
H_1	0.1515E+02	4.94	0.2711E+02	4.92
H_2	0.1022E+02	5.01	0.1563E+02	5.52
H_3	0.1036E+02	3.15	0.1829E+02	3.23
H_4	0.1234E+02	2.62	0.1601E+02	3.81
H_5	0.1244E+02	2.25	0.1719E+02	3.11
H_6	0.1141E+02	0.01	0.2110E+02	1.40

Tabela 5.27: Resultados da estimação dos parâmetros de amortecimento das juntas do problema experimental usando como dados medidos conjuntos de FRF's compostos por diferentes números de FRF's, na faixas de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s], com valores iniciais $k_1 = k_2 = 1.0E+05$ [N/m] e $c_1 = c_2 = 10.0$ [N.s/m].

Os resultados das tabelas 5.26 e 5.27 mostram que, de uma forma geral, os erros estimados da rigidez e amortecimento das juntas, respectivamente, sofrem uma redução significativa em seus erros estimados com o aumento do número de FRF's usadas como dados medidos. Este fato aparece com maior intensidade na estimação do amortecimento do que na rigidez. Baseado no critério já definido, obtém-se da tabela 5.26 os seguintes valores: $k_1 = 0.3151E+05$ [N/m]; e $k_2 = 0.3934E+05$ [N/m], e da tabela 5.27 obtém-se: $c_1 = 0.1141E+02$ [N.s/m]; e $c_2 = 0.2110E+02$ [N.s/m]. Observa-se que, à exceção do parâmetro c_2 , estes resultados estão bastante próximos dos valores dos coeficientes rigidez e amortecimento das juntas obtidos nos casos anteriores.

As figuras 5.27 a 5.29 mostram as curvas das FRF's $H_{7,4}$ experimental, calculada com os valores iniciais e ajustada, obtidas para alguns casos da tabela 5.25. Nestas pode-se observar um bom ajuste entre as FRF's experimentais e aquelas do modelo ajustado.

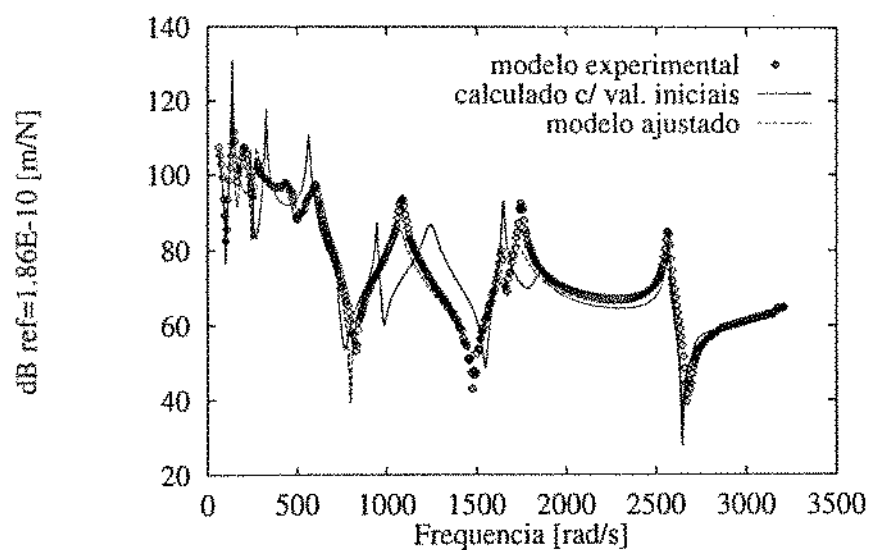


Figura 5.27: Comparação das FRF's $H_{7,4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente, calculada com os valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_1 , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].

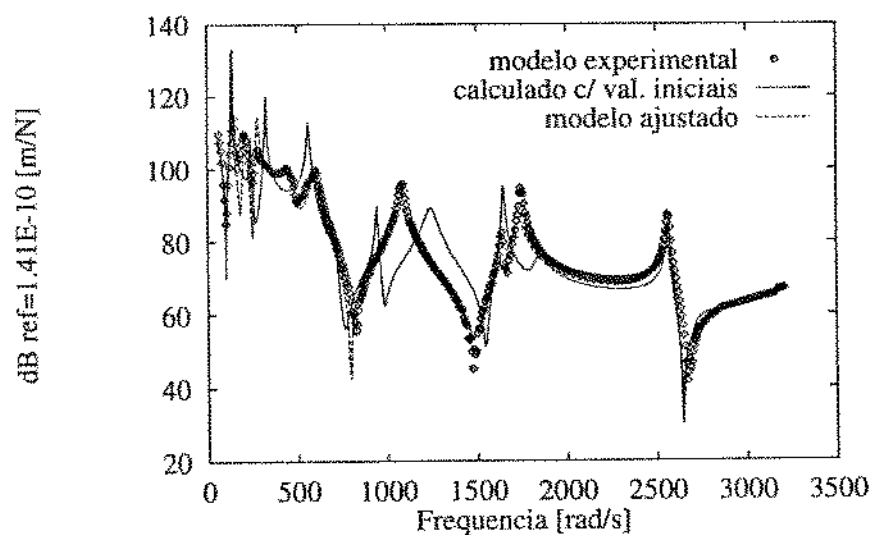


Figura 5.28: Comparação das FRF's $H_{7,4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente, calculada com os valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_4 , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].

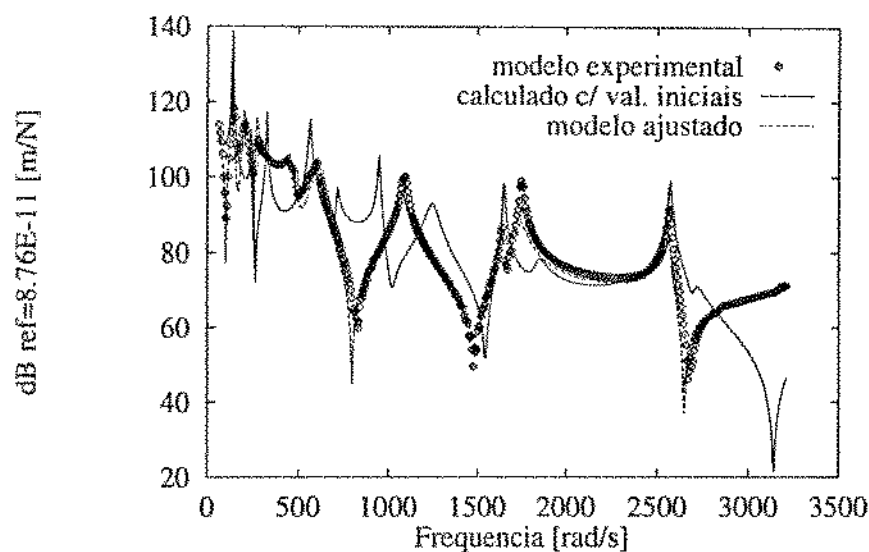


Figura 5.29: Comparação das FRF's $H_{7,4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente, calculada com os valores iniciais e ajustada usando-se os parâmetros identificados com o conjunto de FRF's H_6 , na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s].

A fim de verificar se os resultados identificados em cada caso aproximam-se dos valores reais dos coeficientes das juntas deve-se aplicá-los a outro conjunto de FRF's diferente daquele utilizado para estimar estes parâmetros. Para facilitar a interpretação dos resultados gráficos construiu-se a tabela 5.28 correlacionando cada caso com os respectivos valores dos parâmetros com o menor erro estimado.

Caso	Tabela de Origem	Valor Estimado do Parâmetro			
		k_1 [N/m]	k_2 [N/m]	c_1 [N.s/m]	c_2 [N.s/m]
1	5.20 e 5.21	0.3588E+05	0.4101E+05	0.1128E+02	0.6015E+02
2	5.23 e 5.24	0.3588E+05	0.2855E+05	0.1165E+02	0.5394E+02
3	5.26 e 5.27 s/ H_6	0.2905E+05	0.3934E+05	0.1244E+02	0.1719E+02
4	5.26 e 5.27 c/ H_6	0.3151E+05	0.3934E+05	0.1141E+02	0.2110E+02

Tabela 5.28: Valores estimados dos parâmetros para os diferentes casos investigados.

Assim, usando-se estes resultados no cálculo das FRF's $H_{2,4}$, $H_{10,4}$, $H_{13,4}$, e $H_{19,4}$, na faixa de frequência de 62,8 a 3210,7 [rad/s], e comparando-as com aquelas obtidas experimentalmente, obtém-se os gráficos das figuras 5.30 a 5.33, os quais mostram um bom ajuste entre as curvas medidas e estimadas.

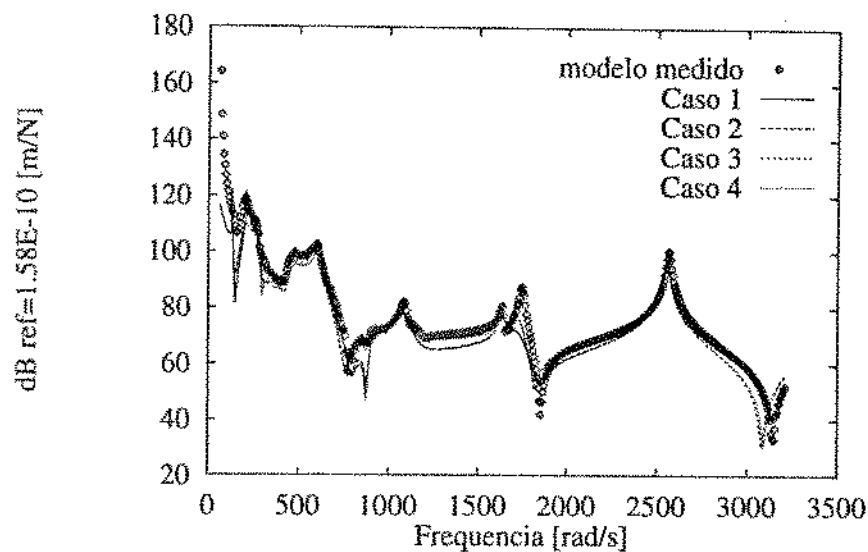


Figura 5.30: Comparação das FRF's $H_{2,4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1,4}$, $H_{7,4}$, $H_{12,4}$, e $H_{18,4}$.

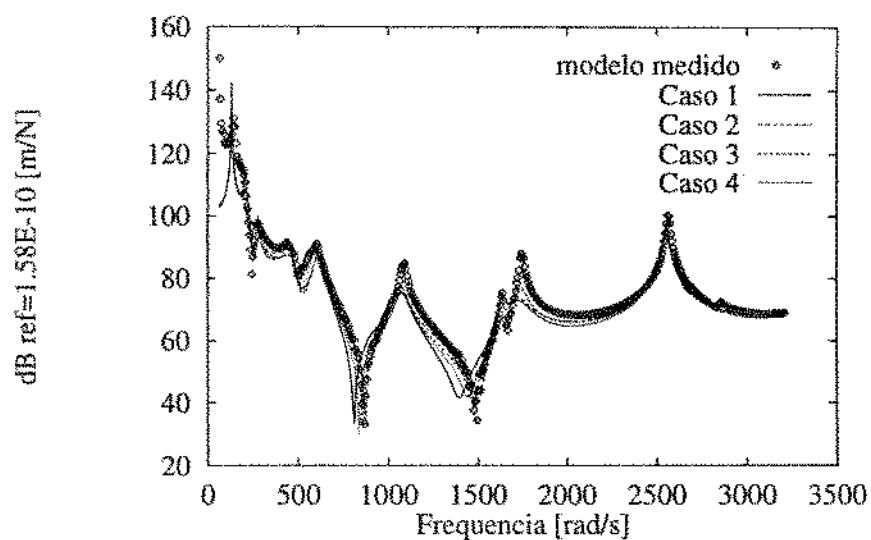


Figura 5.31: Comparação das FRF's $H_{10,4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1,4}$, $H_{7,4}$, $H_{12,4}$, e $H_{18,4}$.

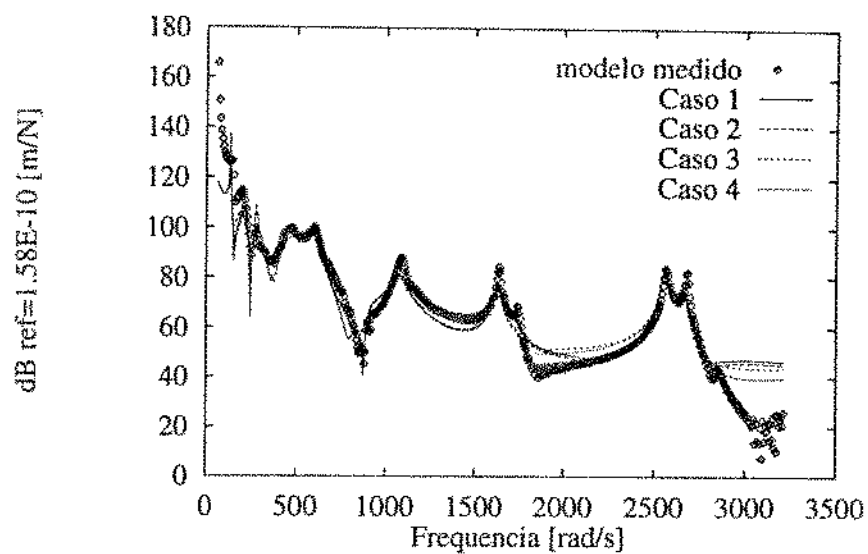


Figura 5.32: Comparação das FRF's $H_{13.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$.

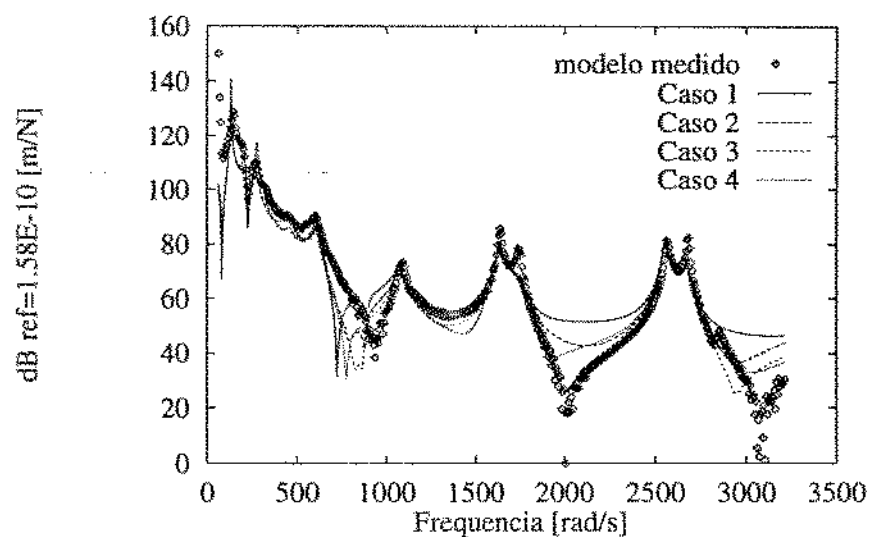


Figura 5.33: Comparação das FRF's $H_{19.4}$ obtidas por dados medidos experimentalmente calculada usando-se os valores dos parâmetros das juntas obtidos no ajuste do modelo com as FRF's $H_{1.4}$, $H_{7.4}$, $H_{12.4}$, e $H_{18.4}$.

Capítulo 6

Conclusão

O ajuste de modelos através da estimação dos coeficientes de rigidez e amortecimento das juntas mecânicas conectando duas ou mais sub-estruturas pode ser feito com a técnica de mínimos quadrados não-linear modificada, ajustando-se as curvas das FRF's medidas com aquelas obtidas teoricamente pela técnica de síntese dos modos dos componentes amortecidos. A utilização da síntese modal permite a aplicação do método a estruturas de grande porte.

O procedimento proposto foi ilustrado com três exemplos numéricos diferentes, onde foram estimados os coeficientes de rigidez e amortecimento das juntas a partir de FRF's simuladas poluídas com um ruído aditivo Gaussiano. Um exemplo experimental foi também investigado, onde estimaram-se os coeficientes das juntas a partir de FRF's medidas baseado no critério do menor erro estimado do parâmetro. Em todos os casos o efeito do truncamento da base modal das FRF's calculadas via DCMS foi levado em consideração, onde demonstra-se que as distorções entre estas e as FRF's com a base modal completa são pequenas.

Os resultados dos vários testes realizados com o método confirmam duas das afirmativas preconizadas por Beck & Arnold [19] com relação às técnicas de estimação não-lineares de parâmetros, quais sejam:

- A não garantia de um único ponto de mínimo, fazendo com que, em alguns casos, o método convirja para valores errados dos parâmetros. Este fato ocorre sempre que os valores dos parâmetros arbitrados no início do processo estiverem muito fora da região do mínimo. Isto mostra a necessidade de se mapear esta região através da utilização de diferentes conjuntos de valores iniciais dos parâmetros aliado a experiência pessoal do analista com relação à ordem de grandeza dos parâmetros. Esta evidência sugere o desenvolvimento de sistemas para visualização de imagens multi-dimensional dos dados da variação da função objetivo com relação aos

parâmetros a fim de obter-se um mapeamento global e de fácil interpretação destas regiões.

- Como nos casos lineares, os problemas associados ao mal-condicionamento de alguns casos não-lineares faz com que pequenas variações nas medidas causem grandes modificações na posição do mínimo resultando em grandes perturbações nos valores estimados. Este fato ocorre sempre que a matriz de sensibilidade apresentar valores singulares muito baixos (próximos de zero). Isto pode ser observado no método através da análise da sensibilidade dos parâmetros. Esta mostra os níveis de sensibilidade dos parâmetros em função da faixa de frequência através do valor singular da matriz de sensibilidade correspondente. Por esta análise é possível avaliar o nível de dependência linear entre os parâmetros e determinar um projeto de experimento ótimo que evite o mal-condicionamento do caso através da escolha ótima do posicionamento dos sensores e da excitação do sistema, bem como quais e quantos parâmetros são possíveis de estimar de cada vez.

Mostra-se que a matriz de sensibilidade pode ser calculada numericamente por diferenças finitas sem perda significativa de precisão mas a um custo computacional baixo em relação ao cálculo feito pela formulação analítica exata. Entretanto, alguns problemas de convergência poderão ocorrer em função do valor escolhido para variação imposta ao parâmetro no cálculo por diferenças finitas (vide equação 2.50), neste caso o critério de Brown & Dennis usado mostrou-se satisfatório.

Nas primeiras simulações realizadas com o terceiro problema exemplo ficou evidenciada uma diferença bastante acentuada entre as FRF's obtidas por DCMS com todos os modos e aquelas truncada com apenas 8 modos em cada sub-estrutura. Este fato levou a ampliação da base modal usada, passando-se de 8 para 16 modos em cada sub-estrutura (vide Capítulo 5). Isto mostra que o método de DCMS apresenta algumas limitações com relação a uma quantidade mínima de modos necessários a uma boa reprodução das características da estrutura como um todo, como era esperado.

Fica evidenciado, do terceiro exemplo, que o uso de apenas uma FRF medida na identificação dos parâmetros dificulta a convergência do método, fato que pode ser suplantado através do aumento do número de FRF's.

Dos resultados analisados mostra-se que os modos de corpo rígido da estrutura montada quando calculados via DCMS apresentam uma alta sensibilidade às perturbações dos parâmetros da junta na derivação por diferenças finitas, levando a resultados errados destes valores. Assim, as variações dos modos de corpo rígido não devem ser incluídas nos cálculos das curvas de sensibilidade usadas no processo de ajuste.

Os resultados do exemplo experimental confirmam as conclusões anteriormente apresentadas, bem como indicam algumas outras, tais como:

- Desde que os valores iniciais arbitrados estejam na região do mínimo da função e que a faixa de frequência escolhida contenha um número de modos representativo do fenômeno, os valores dos parâmetros convergirão para valores corretos com erros estimados baixos, independentemente dos valores especificamente arbitrados. Este fato confirma a necessidade de explorar bem a região provável da localização do mínimo, bem como diferentes faixas de frequência.
- O critério do *menor erro estimado* pode ser usado para escolher os melhores valores estimados dos parâmetros.
- O aumento do número de FRF's usadas na estimação dos parâmetros deixa evidente a redução dos erros estimados e a consequente melhora na estimativa do valor do parâmetro.

Como decorrência destas conclusões e dando continuidade ao trabalho, apresentam-se algumas sugestões para estudos futuros:

- A implementação de métodos recursivos para o ajuste dos modelos.
- A introdução de métodos de validação do modelo ajustado através da verificação da normalidade do resíduo do ajuste.
- A otimização do programa para minimização do custo computacional através de:
 - a) Otimização da solução do problema de autovalor usando em cada passo do processo iterativo do código computacional os autovalores calculados no passo anterior.
 - b) A simetrização das matrizes do problema de síntese modal.
- Identificar experimentalmente os parâmetros da junta como base para a partida dos parâmetros iniciais.
- Investigar por que os modos de corpo rígido influenciam no cálculo da sensibilidade dos parâmetros.

BIBLIOGRAFIA

- [1] LIN, R. M., EWINS, D. J. "Model Updating Using FRF Data", *Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis*, Leuven, Belgium, 19-21 Sep, Conference Part I, 1990.
- [2] BERMAN, A., FLANNELLY, W. "Theory of Incomplete Models of Dynamics Structures", *AIAA J*, v. 9, n. , p. 1481-1487, 1971.
- [3] BARUCH, M. "Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests", *AIAA J*, v. 11, n. 16, p. 1208-1210, 1978.
- [4] BERMAN, A. "Mass Matrix Correction Using an Incomplete Set of Measured Modes", *AIAA J*, v. 17, n. , p. 1147-1148, 1979.
- [5] CHEN, J. C., KUO, C. P., GARBA, J. A. "Direct Structural Parameter Identification by Modal Test Results", *AIAA/ASME/ASCE/AMS Proc. 24th Struc. Dynam. and Materials Conf.*, p. 44-49, 1983.
- [6] SIDHU, J., EWINS, D. J. "Correlation of Finite Element and Modal Test Studies of a Practical Structure", *Proceedings of the 2nd International Modal Analyses Conference*, p. 756-762, 1984.
- [7] IMREGUN, M., VISSER W. J. "A Review of Model Updating Techniques", *Shock and Vibration Digest*, v. 23, no. 1, p. 9-20, 1991.
- [8] COLLINS, J. D. *et al* "Statistical Identification of Structures", *AIAA J*, v. 12, n. , p. 185-190, 1974.
- [9] CHEN, J. C., WADA, B. K. "Criteria for Analysis-Test Correlation of Structural Dynamic Systems", *J. Appl. Mech.*, p. 471-477, 1975.
- [10] LALLEMANT, G., PIRANDA, J. "Localization Methods for Parametric Updating of FE Models", *Proceedings of the 8th International Modal Analyses Conference*, p. 579-585, 1990.
- [11] MARTINEZ, D. R. "Parameter Estimation in Structural Dynamics Models", *Sandia National Laboratories*, Report SAND80-0135, 315p., mar, 1981.

- [12] ARRUDA, J. R. F. "Frequency Domain Estimation of Structural Parameters", *VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, ITA, S. J. dos Campos, Brasil, p. 741-744, Dez, 1985.
- [13] IMREGUN, M., SANLITURK, K. Y., EWINS, D. J. "Correcting a Medium-Size Finite Element Model Using Measured FRF Data", *Proceedings of the 17th International Seminar on Modal Analysis*, Leuven, Belgium, 23-25 Sep, Conference Part II, p. 547-562, 1992.
- [14] VISSER, W. J., IMREGUN, M., EWINS, D. J. "Direct Use of Measured FRF Data to Update Finite Element Models", *Proceedings of the 17th International Seminar on Modal Analysis*, Leuven, Belgium, 23-25 Sep, Conference Part I, p. 33-49, 1992.
- [15] ARRUDA, J. R. F., SANTOS, J. M. C., CARNEIRO, S. H. S. "Experimental Estimation of Mechanical Joint Using Frequency Response Functions and Modal Parameters", *Proceedings of the 11th International Modal Analyses Conference*, Orlando, U.S.A., p. 1502-1507, 1993.
- [16] ARRUDA, J. R. F., SANTOS, J. M. C. "Mechanical Joint Parameter Estimation Using Frequency Response Functions and Component Mode Synthesis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, (aceito para publicação).
- [17] LAWRENCE, C. "Parameter Identification Methods for Improving Structural Dynamic Models", *National Aeronautics and Space Administration*, Report No. TM-100812, 154p., Jun, 1988.
- [18] WICKS, A. L., MITCHELL, L. D. "Methods for the Estimation of Frequency-Response Functions in the Presence of Uncorrelated Noise, A Review", *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 2, n. 3, p. 109-112, Jul, 1987.
- [19] BECK, J. V., ARNOLD, K. J. "Parameter Estimation In Engineering and Science", New York, John Wiley & Sons, 501p., 1977.
- [20] MARTIN, K. F., GHLAIM, K. H. "System Prediction Using Damped Component Modes", *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, v. 198C, n. 16, p. 261-268, 1984.
- [21] ARRUDA, J. R. F., SANTOS, J. M. C. "Model Adjusting of Structures with Mechanical Joints Using Modal Synthesis", *Proceedings of the 7th International Modal Analyses Conference*, Las Vegas, U.S.A., 30 Jan - 2 Feb, p. 850-856, 1989.
- [22] GUYAN, R. J. "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA J*, v. 2, n. 3, p. 380, 1965.
- [23] BERMAN, A., NAGY, E. J. "Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data", *AIAA J*, v. 8, n. 21, p. 1168-1173, 1983.

- [24] SORENSON, H. W., "Parameter Estimation: Principles and Problems", New York, Marcel Dekker, 382p., 1980.
- [25] EYKHOFF, P. "System Identification - Parameter and State Estimation", London, John Wiley & Sons, p., 1974.
- [26] WOLFE, M. A. "Numerical Methods for Unconstrained Optimization", New York, Van Nostrand Reinhold, 312p., 1978.
- [27] ARUDA, J. R. F. "Rotor Finite Element Model Adjusting", *IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, UFSC, Florianópolis, Brasil, p. 741-744, Dez, 1987.
- [28] GOLUB, H. G., VAN LOAN, C. F. "Matrix Computations", Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 476p., 1985.
- [29] HIMMELBLAU, D. M. "Applied Nonlinear Programming", New York, McGraw-Hill, 498p., 1972.
- [30] HURTY, W. C. "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", *AIAA J*, v. 3, n. 4, p. 678-685, Apr, 1965.
- [31] CRAIG JR., R. R., BAMPTON, M. C. C. "Coupling Substructures for Dynamic Analyses", *AIAA J*, v. 6, n. 7, p.1313-1319, Jul, 1968.
- [32] GOLDMAN, R. L. "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning", *AIAA J*, v. 7, n. 6, p. 1152-1154, Jun, 1969.
- [33] HINTZ, R. M. "Analytical Methods in Component Modal Synthesis", *AIAA J*, v. 13, n. 8, p. 1007-1016, Aug, 1975.
- [34] BENFIELD, W. A., HRUDA, R. F. "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution", *AIAA J*, v. 9, n. 7, Jul, 1971.
- [35] MACNEAL, R. H. "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis", *Computer & Structures*, v. 1, n. 4, p. 581-601, Dec, 1971.
- [36] KUCHAR, E. J., STAHL, C. V. "Dynamic Transformation Method for Modal Synthesis", *AIAA J*, v. 12, n. 5, p. 672-678, May, 1974.
- [37] RUBIN, S. "Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis", *AIAA J*, v. 13, n. 8, p. 995-1006, Aug, 1975.
- [38] CRAIG JR., R. R., CHANG, C-J "A Review of Substructure Coupling Methods for Dynamic Analysis", *13th Annual Meeting, Soc. for Eng. Sci., Advances in Engineering Science*, NASA CP-2001, v. 2, p. 393-408, Nov, 1976.
- [39] GREIF, R. "Substructuring and Component Mode Synthesis",
- [40] NELSON, F. C. "A Review of Substructure Analysis of Vibrating Systems", *Shock and Vibration Digest*, p. 3-8,

- [41] CRAIG JR., R. R. "A Review of Time-Domain and Frequency-Domain Component-Mode Synthesis Methods", *Journal of Modal Analysis*, p. 59-72, Apr, 1987.
- [42] MEIROVITCH, L. "Computational Methods in Structural Dynamics", Alphen aan den Rijn, Sijthoff & Noordhoff, p., 1980.
- [43] IMBERT, J. F. "Analyse des Structures par Elements Finis", Toulouse, Cepadues, 480p., 1979.
- [44] CRAIG JR., R. R. "Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods", New York, John Wiley & Sons, 527p., 1981.
- [45] LANG, G. F. "Demystifying Complex Modes", *Sound and Vibration*, p. 36-40, Jan, 1989.
- [46] MITCHELL, L. "Complex Modes: A Review", *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, U.S.A., p. 891-899, 29 Jan-1 Feb, 1990.
- [47] LIANG, Z., TONG, M. and LEE, G. C. "Complex Modes in Damped Linear Dynamic Systems", *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 7, n. 1, p. 1-20, Jan, 1992.
- [48] EWINS, D. J. "Modal Testing: Theory and Practice", Hertfordshire, Research Studies Press, 269p., 1984.
- [49] SANTOS, J. M. C., ARRUDA, J. R. F. "Finite Element Model Updating Using Frequency Response Functions and Component Mode Synthesis", *Proceedings of the 8th International Modal Analyses Conference*, Kissimmee, U.S.A., 29 Jan - 1 Feb, p. 1195-1201, 1990.
- [50] STRUCTURAL RESEARCH & ANALYSIS CORPORATION "COSMOS/M Finite Element Analysis Program", Version 1.6 (Educational), 1992.
- [51] BATHE, K.-J. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", New Jersey, Prentice-Hall, 735p., 1982.
- [52] SWANSON ANALYSIS SYSTEMS INC. "ANSYS Finite Element Analysis Program", Revision 4.4A (Educational Version), 1991.

Apêndice A

Formas dos Modos das Estruturas dos Problemas com Viga Engastada-Livre e Viga Livre-Livre

Este apêndice contém as formas dos oito primeiros modos das estruturas do segundo (figura A.1) e terceiro (figura A.2) problema exemplo apresentados no Capítulo 5.

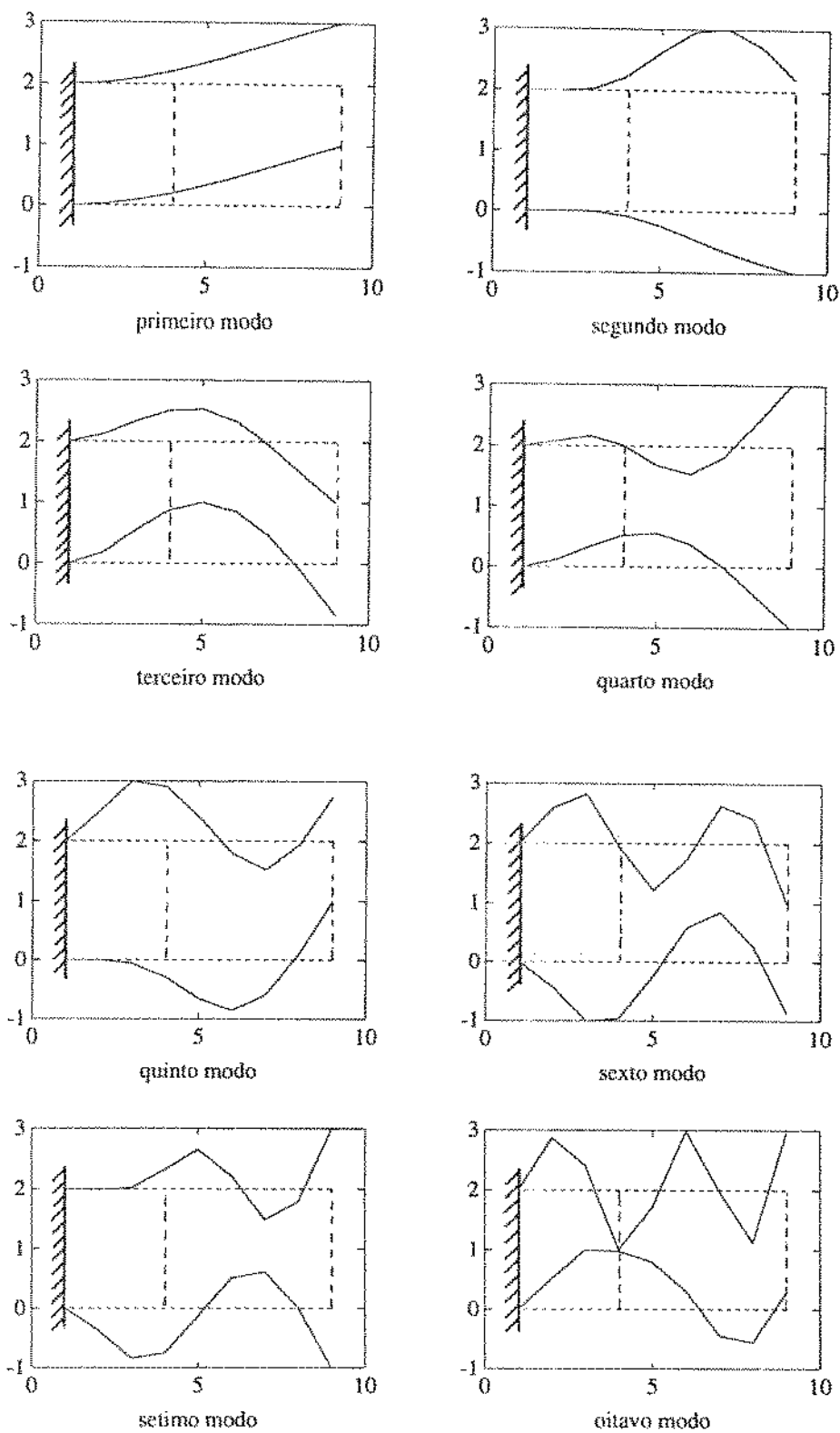


Figura A.1: Formas dos 8 Primeiros Modos das Vigas Engastadas-Livre com Molas nas Juntas. - - - Estrutura Não-Deformada e Posição das Juntas, — Estrutura Deformada.

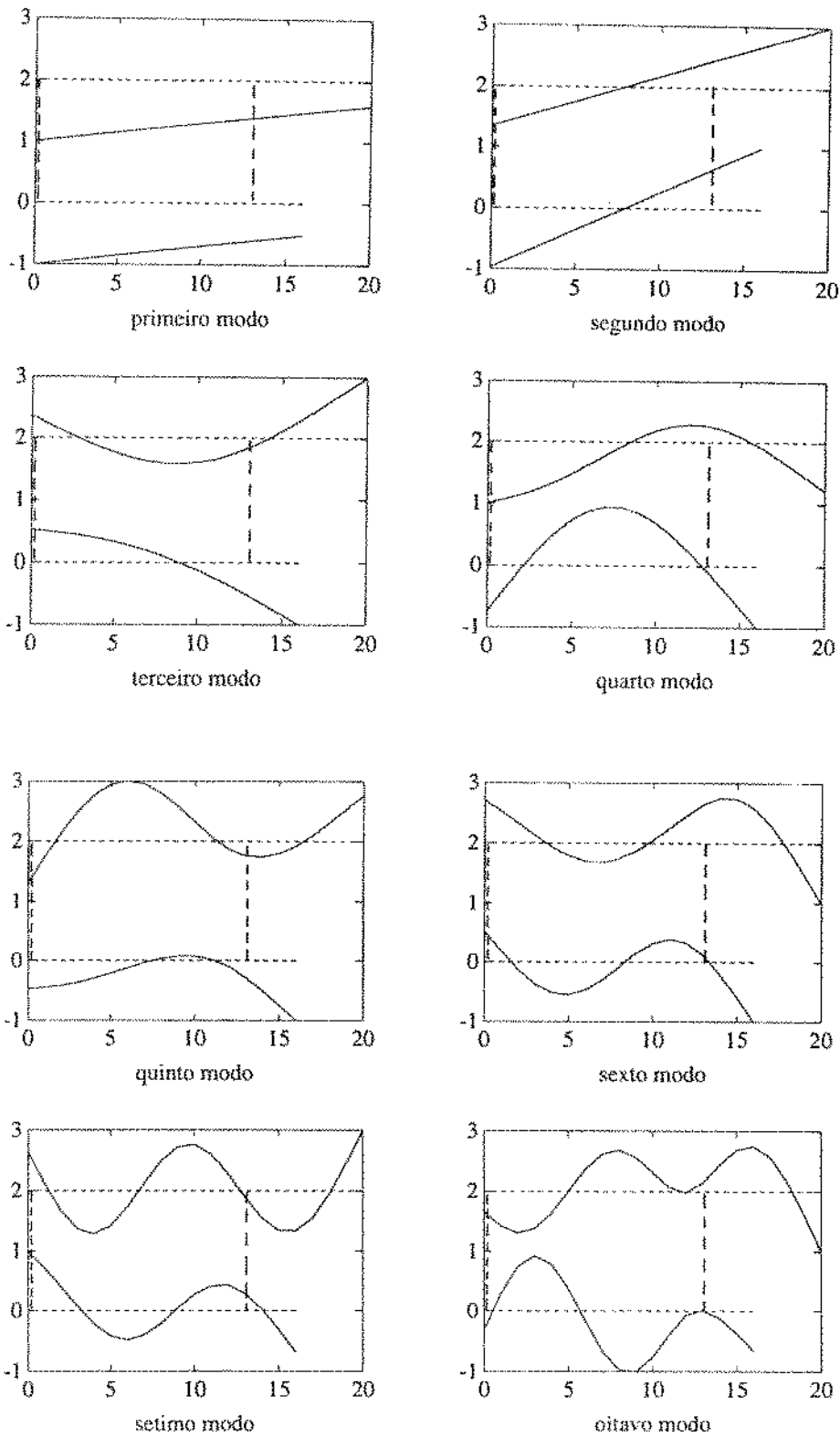


Figura A.2: Formas dos 8 Primeiros Modos das Vigas Livre-Livre com Molas e Amortecedores nas Juntas. - - - Estrutura Não-Deformada e Posição das Juntas, — Estrutura Deformada.

Apêndice B

Cópia dos Artigos Publicados

Este apêndice contém uma coletânea da íntegra de todos os artigos publicados durante o período de duração deste trabalho.

Arruda, J.R.F. and Santos, J.M.C., *Model Adjusting of Structures With Mechanical Joints Using Modal Synthesis*. Proceedings of the 7th Int. Conference on Modal Analysis IMAC, SEM, Las Vegas, NV, USA, 1989, pp. 850-856.

MODEL ADJUSTING OF STRUCTURES WITH MECHANICAL JOINTS USING MODAL SYNTHESIS

José Roberto de F. Arruda

Computational Mechanics Division
Departamento de Projeto Mecânico
Universidade Estadual de Campinas
Campinas, S. P.
Brasil

José Maria C. dos Santos

ABSTRACT

The dynamic behavior of mechanical joints is generally difficult to characterize and complex structures often consist of substructures connected by mechanical joints. In most of the cases the former can be modelled conveniently, while the latter cannot. Under actual assemblage conditions, the joints can usually be fairly well characterized by a small number of linearized stiffness and damping coefficients. In this paper, the possibility of estimating mechanical joint parameters by curve-fitting frequency response functions (FRF) measured on the assembled structure is investigated. The analytical FRFs are calculated for different parameter values using a modal synthesis technique, where each substructure is non-proportionally damped. The curve-fitting is done using a modified-damped-least-squares technique which can be classified as an inverse sensitivity model adjusting method. The proposed method is used to adjust the model of a simple system of concentrated masses, springs and dash-pots connected by joints which consist of springs and dash-pots.

NOMENCLATURE

x	$x(t)$	displacement vector (response)
f	$f(t)$	external force vector (excitation)
$\dot{x}$		time derivative of vector x (velocity)
M		mass matrix
K		stiffness matrix
C		damping matrix
$H(\omega)$		Frequency response matrix
$H_{ij}(\omega)$		Frequency Response Function (FRF)
ω		circular frequency in rad./sec.
$X_i(\omega)$		Fourier transform (or series) of $x_i(t)$
$F_j(\omega)$		Fourier transform (or series) of $f_j(t)$
$X(\omega)$		vector of elements $X_i(\omega)$
$F(\omega)$		vector of elements $F_j(\omega)$
$G_{FF}(\omega)$		one-sided power spectral density matrix of the inputs f .
$G_{XF}(\omega)$		one-sided cross-spectral density matrix between inputs f and outputs x
$()^H$		conjugate transpose of a matrix or vector
A	$= \begin{bmatrix} C & M \\ K & C \end{bmatrix}$	

B	$= \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$	
y		state vector $\{x \dot{x}\}^T$
g		external forces $\{f \ 0\}^T$
$y \xrightarrow{F} Y$		Fourier transform (or series) pair
r		Fourier transform (or series) of y
r^e		complex eigenvectors
θ		modal matrix which columns are the r^e
s_r		complex eigenvalues
s		diagonal matrix of elements s
a_r		scalar coefficients which scale $H_{ij}(\omega)$
$\bar{r}$		normalized modal matrix
z		modal coordinate for uncoupled equations
w		transformed coordinate for structure assembling.
W		Fourier transform (or series) of w
α_B		indices for different substructures
n_α		number of degrees-of-freedom of substructure α .
$g_x = \{f_\alpha \ 0 \ f_\beta \ 0\}^T$		
G_x		Fourier transform (or series) of g_x
$f_\alpha \ f_\beta$		external forces acting on substructures
c		vector of connection forces
O		connection matrix
u_r		eigenvalues of the assembled structure
r^r		right-eigenvectors of the assembled structure relative to coordinates w
R		modal matrix of columns r^r
R^e		right-eigenvectors of the assembled structure relative to coordinates y
r^l		left-eigenvectors of the assembled structure relative to coordinates w
L		modal matrix of columns r^l
L^e		left-eigenvectors of the assembled structure relative to coordinates y
$R \ \theta \ L \ \theta$		right and left modal matrices
z		modal coordinate for uncoupled equations of the assembled structure
Ξ		Fourier transform (or series) of z
e_r		scalar coefficients which scale $H_{ij}(\omega)$ for the assembled structure
p_j		parameter to be estimated
p		vector of elements p_j
n_{par}		number of parameters to be estimated

nfreq	number of frequencies where the FRF is calculated
ω_k	k th. value of circular frequency
$H(\omega_k, p)$	FRF at freq. ω_k for a given vector p
V_{kj}	normalized sensitivity coefficient for parameter p_j at frequency ω_k
r_{kj}	sensitivity matrix element
$O(p)$	objective function to be minimized
H_m	measured FRF vector
$H_a(p)$	analytical FRF calculated for parameters p
W_e	weighting matrix

INTRODUCTION

Nowadays there is no further need to emphasize the importance of combining experimental and analytical models for the analysis of the dynamic behavior of structures. Most of the congresses and conferences on the dynamics of structures have one or more sessions to discuss related problems(1). Experimental models are obtained using modal testing techniques and analytical models are generally obtained via finite element analysis. Combined analysis means comparing and modifying analytical and experimental data in order to have one validated dynamic model to be used in further dynamic analysis, e.g. simulation. Most of the existing commercial computer codes for structure analysis work around a data base where analytical and experimental data are stored with the same file structure. Finite element analysis program and experimental modal analysis program generate the data and a combined analysis program performs orthogonality checks (2-4), calculates the modal assurance criterion (MAC) matrix (5) and does other analytical/experimental quantitative comparisons. When the discrepancy is not acceptable, small parametric variations may be done in the analytical model in order to improve the agreement between analytical and experimental data. When this is achieved, the validated analytical model is taken as the dynamic model of the structure. The task of changing the analytical model in order to have good agreement with experience is called here model adjusting. In this paper we shall be concerned with a technique to help the task of model adjusting. Existing techniques for model adjusting (6-9) generally consist of using the inverse of the formulation used for structure modification. Small variations in the natural frequencies and mode shapes may be calculated from variations in the mass and stiffness matrices without re-calculating the whole structure. These relations may be used to obtain analytically a sensitivity matrix which is used in the inverse problem of calculating the mass and stiffness variations that are necessary to modify the modal parameters so that they agree, in a least-squares sense, with the experimentally derived data. The most important draw-back of these methods is the difficulty of interpretation of the system matrices variations, which do not necessarily correspond to physically meaningful changes in the structure parameters. A modified approach consist of allowing only mass and stiffness matrices variations which are related to physical parameter variations (9). This approach seems to be the most suitable for model adjusting when the modal parameters are used. In some applications, it is very difficult or even

impossible to perform a complete modal test, and only a few dynamic measurements are available to validate (partially) an analytical model. In recent papers (10-12) one of the authors has proposed a method which can be used in such situations. The method has been developed for rotor system models, for which it is often difficult to perform conventional modal analysis due to rotation. In this paper, the proposed method is used for the estimation of parameters of mechanical joints connecting substructures. There seems to be a frequent situation where well-characterized structures are connected by joints which are difficult to characterize. Joint stiffness and damping coefficients cannot be obtained analytically and tests performed separately on the joints frequently fail to reproduce their behavior when mounted on the actual structure. Substructuring is also an efficient way to reduce computational costs when using the proposed method. Component mode synthesis is a form of substructure analysis extensively used and well reported in the literature (for a very good review see ref. 13). In this paper the technique proposed in reference 14 is utilized. This technique allows internal damping in the component substructures and damping in the connections.

A very simple system consisting of lumped masses, springs and dash-pots is teated to illustrate the proposed method. The component mode synthesis formulation used here allows easy extention of the method to treat more general structures.

MATHEMATICAL MODEL OF LINEAR DISCRETE STRUCTURES

Assuming a linear discretized model with non-proportional viscous damping, the dynamic behavior of a given structure may be expressed by:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = f \quad (1)$$

where $x=x(t)$, $f=f(t)$ are the displacement and force vectors respectively at instant t. M, K and C are the mass, stiffness and damping nxn matrices respectively, where n is the number of degrees-of-freedom of the discrete model.

From a dynamic systems theory point of view, the inputs are the forces f_i ($i=1,n$) and the outputs are the displacements x_i ($i=1,n$). The relation between them for stable, time-invariant systems, may be expressed by the frequency response matrix $H(\omega)$:

$$H(\omega) = [K - \omega^2 M + i\omega C]^{-1} \quad (2)$$

where $i = \sqrt{-1}$. The relation between inputs and outputs in the frequency domain for transient (and periodic) signals is given by:

$$X(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (3)$$

where $X(\omega)$ and $F(\omega)$ are vectors of the Fourier integrals (or series) of the output vector $x(t)$ and the input vector $f(t)$ respectively. For stationary random signals the relation is given by: (15)

$$G_{XF}(\omega) = H(\omega) \cdot G_{FF}(\omega) \quad (4)$$

where:

$$G_{XF}(\omega) = E[X(\omega) \cdot F^H(\omega)] \quad (5)$$

is the cross-spectral density matrix and:

$$G_{FF}(\omega) = E[F(\omega) \cdot F^H(\omega)] \quad (6)$$

is the auto-spectral density matrix of the inputs. $E[\cdot]$ denotes the expected value and the superscript H denotes the conjugate transpose of a matrix or a vector.

It is possible to express the frequency response functions $H_{ij}(\omega)$ as a function of the modal parameters. For the case of non-proportional damping it is necessary to re-state equation 1 in a modified state space formulation:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7a)$$

$$\text{or:} \quad A \dot{y} + B y = g \quad (7b)$$

$$\text{where:} \quad \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

The homogeneous equation corresponding to equations 7 are in a standard eigenvalue problem form. It is possible to express any of the FRFs in terms of the complex eigenvectors r^E ($r=1, 2n$) and complex eigenvalues s_r ($r=1, n$):

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{r^E_i \cdot r^E_j}{a_r(i\omega - s_r)}; \quad i, j=1, n. \quad (9)$$

where r^E_i is the i th. element of the eigenvector r^E corresponding to the response coordinate i and r^E_j is the j th. element, corresponding to the excitation coordinate j . The scalar coefficient a_r is obtained from the orthogonality properties of the eigenvectors:

$$a_r = r^E T A r^E \quad (10)$$

The frequency response matrix fully characterizes the dynamic behavior of a linear, discrete, time-invariant model. From equation 2 it is clear that all of the structure parameters (stiffness, mass and damping coefficients) are present in any of the FRF elements $H_{ij}(\omega)$ ($i, j=1, n$).

MODE SYNTHESIS TECHNIQUE

The component mode synthesis technique used here has been proposed by Martin and Ghahim in reference (16). For complete, discrete structure models, this free-interface technique works well for the calculation of the assembled structure natural frequencies and mode shapes. For continuous, real structures, it must be enhanced by the inclusion of other types of modes (e.g. constrained and charged interface modes) to have a more complete modal base (see for instance reference (13)). As this paper intends to discuss the use of a model adjusting method by treating a simple, discrete multi-d.o.f. structure example, the technique may be used as it was originally described in reference (16). This technique will be extended here to include a frequency response function formulation. As it will be

shown latter, the calculation of the FRF from the modal synthesis model presents more numerical problems than the calculation of natural frequencies and mode shapes.

The modal matrix of each substructure, say α , has the form:

$$\Phi_\alpha = [\phi_1, \phi_2, \dots] \quad (11)$$

and it is used for a coordinate transformation:

$$y = \Phi_\alpha z \quad (12)$$

The orthogonality conditions are expressed by:

$$\Phi_\alpha^T A_\alpha \Phi_\alpha = [a^a] \quad (13a)$$

$$\Phi_\alpha^T B_\alpha \Phi_\alpha = [a^b] \quad (13b)$$

The equations 7 become, thus, uncoupled:

$$a^a_r \ddot{z} + a^b_r \dot{z} = 0 \quad (14)$$

Assuming the solution of the form:

$$z_\alpha = Z_\alpha e^{s_r t}$$

the equation 14 can be re-written:

$$(a^s_r a^a_r + a^b_r) z_\alpha = 0 \quad (15)$$

and the eigenvalue may be expressed as:

$$a^s_r = -a^b_r / a^a_r \quad (16)$$

It is convenient to normalize the modal matrix:

$$\psi_{ij} = \phi_{ij} / \sqrt{a^a_i} \quad (17)$$

The new normalized modal matrix corresponds to a different transformation:

$$y_\alpha = \psi_\alpha^T w_\alpha \quad (17)$$

Using the orthogonality conditions of equations 13, equations 7 may be written:

$$I \dot{w}_\alpha - [s] w_\alpha = \psi_\alpha^T g \quad (19)$$

where I is the identity matrix and the elements s_r of the diagonal matrix are given by equation 16. Assuming two substructures α and β with n_α and n_β degrees of freedom respectively, equations 19 for both of them may be combined to give:

$$\begin{bmatrix} I(n_\alpha \times n_\alpha) & 0 \\ 0 & I(n_\beta \times n_\beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_\alpha \\ \dot{w}_\beta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_\alpha^T & 0 \\ 0 & \psi_\beta^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{pmatrix} \quad (20)$$

or, in a shortened form:

$$I \dot{w} - [s] w = \psi^T g \quad (21)$$

with:

$$y = \psi w \quad (22)$$

Considering the connections of components α and β by springs and dash-pots, their influence may be accounted for in equations 21 and in the term g :

$$g = g_x + g \quad (23a)$$

where q represents the connection forces:

$$q = -Q \begin{pmatrix} y_a \\ y_b \end{pmatrix} \quad (23b)$$

Q is the connection matrix of which the elements are a combination of the connection stiffness and damping coefficients and g_x is the vector of external forces acting on substructures α and β .

$$g_x = [f_a \ 0 \ f_b \ 0]^T \quad (24)$$

Equations 21 may now be written as:

$$I \ddot{w} + [-[s] + \Psi^T Q \Psi] w = \Psi^T g_x \quad (25)$$

The new eigenvalue problem for the assembled structure is:

$$[u_r \ I + U] r = 0 \quad (26)$$

where:

$$U = -[s] + \Psi^T Q \Psi \quad (27)$$

and the solution gives the eigenvalues u_r and the eigenvectors r . The new modal matrix in terms of coordinates w is R :

$$R = [r_1 \ r_2 \ \text{etc...}]$$

To express the mode shapes of the assembled structure in terms of the coordinate system of each substructure y_a and y_b it is necessary to apply the transformation:

$$R_\theta = \Psi R \quad (28)$$

To extend the formulation in order to be able to obtain the assembled structure FRF it should be noticed that the matrix U in equation 26 is not symmetric. Thus, the formulation given in the preceding section cannot be applied directly. The orthogonality conditions must now be expressed by the so-called right and left eigenvectors (17). The right eigenvectors are obtained from equation 26 and represent the mode shapes. The left eigenvectors are obtained from the transposed problem:

$$[u_r \ I + U^T] l = 0 \quad (29)$$

and can be interpreted as influence coefficients for the external forces, as it will be shown latter. In an analog form to equation 28, it is possible to express the left eigenvectors in terms of the coordinates y_a and y_b :

$$L_\theta = \Psi L \quad (30)$$

Starting with equation 25 and using the modal transformation:

$$w = R \xi \quad (31)$$

and pre-multiplying by L^T :

$$L^T R \ddot{\xi} + L^T U R \xi = L^T \Psi^T g_x \quad (32)$$

Applying the Fourier transform (or series) on both sides of equation 32 and using the orthogonality conditions:

$$[i\omega [e_r] + [d_r]] \xi = L^T \Psi^T G_x \quad (33)$$

where $\xi \xrightarrow{F} \Xi$ and $g_x \xrightarrow{F} G_x$ are Fourier transform (or series) pairs. Using equations 31 and 22 that can also be applied to the Fourier transforms (or series) of the vectors y and w , equation 33 may be written as:

$$Y = \Psi W = \Psi R E = \Psi R \left[\frac{1}{i\omega e_r + d_r} \right] L^T \Psi^T G_x \quad (34)$$

where $y \xrightarrow{F} Y$ and $w \xrightarrow{F} W$ are Fourier pairs. Now, using equations 28 and 30:

$$Y = R_\theta \left[\frac{1}{e_r(i\omega - u_r)} \right] L_\theta^T G_x \quad (35)$$

From equation 35, any FRF matrix element is given by:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{L_{r\theta j} R_{r\theta i}}{e_r(i\omega - u_r)} \quad ; i, j = 1, n \text{ and } \dots \dots 2n+1, 2n+n. \quad (36)$$

where $n = n_a + n_b$.

MODEL ADJUSTING METHOD

The model adjusting method used here has been proposed in previous publications (10,11) and will be shortly presented here. As it has been pointed out before in this paper, any FRF depends upon all of the structure parameters. This dependence is quantified by the normalized sensitivity coefficients v_{kj} relative to parameter p_j at frequency ω_k :

$$v_{kj} = \frac{p_j}{H(\omega_k, p)} \frac{\partial H(\omega_k, p)}{\partial p_j} \quad ; j=1, n_{par}. \quad (37)$$

In the above equation, p is a vector of n_{par} elements p_j and ω_k is a discrete frequency value at which the FRF is evaluated.

Assuming that most of the structure analytical model parameters are known, to adjust the analytical model consists of estimating the unknown parameters. In the proposed method this estimation is done by means of a non-linear curve-fit of one or more measured FRFs. The modified-damped-least-squares (MDLS) curve fitting method (17) may be shown to be equivalent to a Gauss-Newton minimization of an objective function $O(p)$, which is the weighted sum:

$$O(p) = (H_m - H_a(p))^T W_e (H_m - H_a(p)) \quad (38)$$

where H_m is a vector of elements H_{mk} which are the measured FRF values at frequency ω_k ($k=1, n_{freq}$) and H_a are the FRF values calculated with the analytical model for a given set of parameter values p at the same frequency values.

Some important features of the implemented micro-computer code are:

- The FRFs are taken in logarithmic scale in the minimization process. This ameliorates the search process stability in the presence of a large amplitude dynamic range of the FRF.
- The sensitivity matrix is calculated by numerical differentiation as proposed by Brown and Dennis (18). The sensitivity matrix Γ_{kj} has the same expression of v_{kj} but without normalization.
- The solution of the linear system of equations

to determine the search direction is done by singular value decomposition.

- The singular values of the sensitivity matrix and the sensitivity coefficient vectors (columns of the matrix y_{kj} of equation 37) may be plotted at each iteration step. The linear dependence of the sensitivity vectors may be used as a identifiability criterion (17). The difference between consecutive singular values may be used to determine the number of parameters that can be estimated at each iteration step for a given FRF at a given frequency range.
- The singular values may also be used as an optimal experiment criterion, consisting of choosing the excitation and measurement points and the frequency range that produce the greater smallest singular value (17).
- Upper and lower bounds may be imposed for the parameters to be estimated. They are taken into account in the search process by externally penalizing the objective function.
- The computer code is highly interactive, and allows changes in the parameter set to be estimated at each iteration step, as well as changing the FRF to be curve-fitted or the initial values during the adjusting process.

MODEL ADJUSTING PROCEDURE

In this paper, the problem of concern is that one in which two or more well characterized structures are connected by mechanical joints with stiffness and damping properties which are difficult to measure directly or to estimate theoretically. The proposed procedure consists of following the steps:

1. Calculate the natural frequencies and mode shapes (complex) of each substructure.
2. Formulate a mathematical model for the joints, i.e., prepare the connection matrix of which the elements are combinations of a limited set of stiffness and damping parameters.
3. Investigate numerically the FRFs and frequency ranges that produce the better identifiability for the parameter set to be estimated.
4. Measure the FRFs.
5. Curve-fit the measured FRFs, estimating the connection stiffness and damping coefficients.
6. Verify the adjusted model by comparing other measured FRFs to FRFs calculated with the adjusted model.

To illustrate the above procedure, a simple example of a discrete structure will be treated in the next section.

SIMPLE EXAMPLE APPLICATION

The discrete structure system shown in figure 1 is treated here to illustrate the model adjusting method using component mode synthesis. The same system of reference (14) have been used here for convenience. The parameter values have been changed because the parameters given in reference (14)

lead to an ill-conditioned problem where two real eigenvalues upset the FRF calculation. The frequency response functions were simulated using the complete system modal parameters (equation 9). In order to verify the accuracy of the FRFs obtained by component mode synthesis (equation 36), they have been compared to the simulated FRFs. Figure 2 and table 2 show an example of such a comparison results. It can be observed that the component mode synthesis method used here produces results which are as good for FRFs as for the system eigenvalues (see reference 14). The simulated FRFs, upon which the model adjusting method is applied, were polluted by the addition of Gaussian noise. The noise is quantified in terms of percents of the highest amplitude value encountered in the FRF. This type of noise corresponds to a frequently encountered type of noise in real-life situations, due to the limited dynamic range of the instrumentation. For simplicity, only the amplitude values of the FRF were used in the model adjusting procedure. It is well-known that the amplitude values of the FRF are sufficient to characterize a linear relation. The phase of the FRF may in fact be calculated from the amplitude by Hilbert transform (19).

To illustrate the use of the proposed method, the connection parameters of the system shown in figure 1 (k_7, k_8, c_7, c_8) can be estimated by curve-fitting

one of the system FRFs, e.g. FRF 66 (excitation at mass m_6 and response at mass m_6). Figure 3 shows the simulated FRF with 1% noise and the FRF calculated by mode synthesis using arbitrary initial values for the connection stiffness and damping parameters. After some iterations of the automated search process, the curve-fit convergence tests are satisfied and an estimation of the connection parameters is obtained. Figure 4 shows the final curve-fit achieved and table 3 shows the estimated parameter values and estimated errors compared to the exact values and errors.

The estimated errors are obtained in a very approximate way in the form of normalized standard deviations of the parameter values assuming a normal distribution ($n_{freq} \gg n_{par}$) as proposed in ref. 17, page 7.65, from the singular values of the sensitivity matrix and the total square error of the curve-fit.

As it has already been pointed out in a previous section, a computer program was developed which is highly interactive. At each iteration step (the non-linear curve-fit is an iterative process), after the calculation of the search direction, the user may choose one of the following alternatives:

- continue to perform a line search in the calculated direction, doing one more iteration.
- change the search direction by fixing some of the parameters which should not vary during the next iteration step.
- choose another measured FRF to be fitted in the next iteration step.
- continue automatically until convergence or until the maximum selected number of iterations is attained.
- ask for HELP, which means to perform a sensitivity analysis consisting of plotting the sensitivity vectors and the difference between consecutive singular values of the sensitivity matrix as well as printing its singular values

and the estimated errors. Based on identifiability criteria, those informations guide the choice of one of the above options.

* One interesting thing to notice is the advantage of taking a logarithmic scale FRF to curve-fit. This ameliorates the stability of the search process. Once convergence is attained, the search process may continue with weighting (see equation 38). The W_e matrix may be a diagonal matrix which elements are the linear scale values of the FRF amplitude. This weighting allows a more accurate estimation of the parameters once the parameter values are close to the exact values. Table 3 also shows other results obtained for different simulated FRFs. The influence of noise, measure point location and frequency range may be evaluated from these results. The number of FRF calculations in table 3 mean the number of times the FRF has been calculated for different parameter values during the whole adjusting process. Figures in table 3 show the importance of using component mode synthesis with this method. Otherwise, the amount of calculations of FRFs for the complete structure by finite-elements would be prohibitive in the case of large, real structures.

CONCLUSIONS

The possibility of estimating a limited set of structure parameters by curve-fitting measured frequency response functions has been investigated. The use of component mode synthesis allows extending the use of the proposed method for large, real-life structures. A formulation for the frequency response functions obtained from the component mode synthesis has been presented. It was verified that the FRFs calculated via mode synthesis exhibit distortion when compared with the exact FRFs, but this distortion is small, and it is possible to curve-fit measured FRFs with the mode synthesis model. The proposed method consists of a non-linear curve-fit of measured frequency response functions. The features of the non-linear fit method utilized here have been discussed. The proposed method is well-suited for the estimation of mechanical joint parameters when unknown joints connect well-characterized substructures.

REFERENCES

- (1) "Combined experimental/analytical modeling of dynamic structural systems". Edited by D.R. Martinez and A.K. Hiller. The joint ASCE/ASME Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, June 24-26, 1985. ASME publication.
- (2) Ewins, D.J., "Modal testing: Theory and practice". Research Studies Press, J. Wiley, 1984.
- (3) Berman, A.; Nagy, E.J., "Improvement of large dynamic analytical model using ground vibration test data". AIAA paper 82-0743.
- (4) Berman, A., "Improved orthogonality check for measured modes". AIAA Journal vol. 18, sept. 1980, pp. 1151-1152.
- (5) Grossman, D.T., "An automated technique for improving modal test/analysis correlation". AIAA paper 82-0640.
- (6) Steinwender, F.; Nordmann, R., "Parameter adjusting of a finite element model by means of measured

natural frequencies". Proceedings of the 4th. IMAC Los Angeles, 1986, pp. 795-801.

- (7) Chou, Y.F.; Chen, J.S., "Structural dynamics modification via sensitivity analysis". Proc. of the 3rd. IMAC, Orlando, Florida, 1985, pp. 463-489.
- (8) Natke, H.G., "Improvement of analytical models with input/output measurements contra experimental modal analysis". Proc. of the 4th. IMAC. Los Angeles, 1986, pp. 409-413.
- (9) Fillod, R.; Lallement, G.; Piranda, J., "Readjusting a model". Mécanique, matériaux, électricité no. 389-391, 1982.
- (10) Arruda, J.R.F.; Oliveira, N.V., "Frequency domain methods for structural parameters estimation". Mécanique, matériaux, électricité, no. 416, Mai-juin 1986, pp. 4-8.
- (11) Arruda, J.R.F., "Rotor finite element model adjusting". Proc. of the 9th. Brazilian Congress of Mechanical Engineering, São José dos Campos, SP dec. 1987, pp. 741-744.
- (12) Arruda, J.R.F., "Rotor model adjusting by unbalance response curve-fitting". To be presented at the 7th. IMAC, Las Vegas, 1989.
- (13) Craig, R.R., "A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis method". In ref. (1), pp. 1-30.
- (14) Martin, K.F.; Ghilain, K.H., "System prediction using damped component modes". Proc. Instn. Mech. Engineers, vol. 198C, no. 16, 1984, pp. 261-268.
- (15) Bendat, J.S.; Piersol, A.G., "Random data: analysis and measurement procedures". 2nd. ed., J. Wiley, 86.
- (16) same as (14)
- (17) Beck, J.V.; Arnold, K.J., "Parameter estimation in engineering and science". J. Wiley, N.Y., 1977.
- (18) Wolfe, M.A., "Numerical methods for unconstrained optimization". Van Nostrand and Reinhold, 1978.
- (19) Simon, M.; Tomlinson, G.R., "Use of the Hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures". J. of Sound and Vibration vol. 96(4), 1984, pp. 421-436.

table 1. System parameter values (see figure 1).

mass (Kg)		stiffness (N/m)		damping (Ns/m)	
component a					
m_1	10	k_1	10000	c_1	3
m_2	10	k_2	20000	c_2	5
m_3	10	k_3	10000	-	-
component B					
m_4	10	k_4	15000	c_4	3
m_5	10	k_5	10000	c_5	7
m_6	10	k_6	20000	-	-
connection					
		k_7	20000	c_7	12.5
		k_8	12000	c_8	10

table 2. Comparison of FRF amplitude values.

FRF	excitation at m_6	response at m_6	dBref. 2.49E-9
frequency rad./s.	complete model (equation 9)	comp. mode synth. (equation 36)	error dB
0.0	84.808	84.807	.001
10.1	86.536	86.535	.001
20.2	88.952	88.954	.002
30.3	80.301	80.296	.005
40.4	79.277	79.326	.049
50.5	91.520	91.655	.135
60.6	79.734	79.833	.099
70.7	100.22	100.14	.12
80.8	86.360	86.444	.084
90.9	82.660	82.802	.142
100.0	78.038	78.119	.031

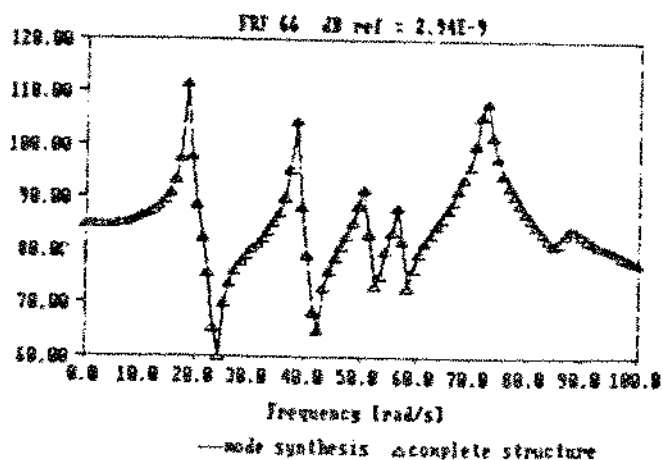


Figure 2. Comparison of FRF amplitude values with and without component mode synthesis.

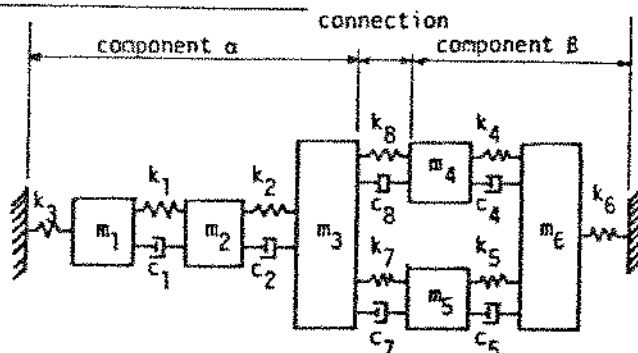


Figure 1. Simple system: components and connection.

table 3. Estimated connection parameters for different FRF curve-fits.

connection parameter	exact value	FRF 66 0-100 rad/s 0%noise			FRF 66 0-100rad/s 1%noise			FRF 55 0-100rad/s 1%noise			FRF66 0-45 rad/s 1%noise		
		estimated value	error	exact error	estimated value	error	exact error	estimated value	error	exact error	estimated value	error	exact error
k_7	20000 N/m	20810	0.7	4.0	20020	1.4	0.1	18550	3.2	7.2	21440	16.7	7.2
k_8	12000 N/m	12200	0.6	1.7	12410	1.3	3.4	12480	--	4.0	11730	7.9	2.3
c_7	12.5 Ns/m	15.25	15.1	22.0	8.37	57.8	33.0	28.9	35.0	--	31.4	--	--
c_8	10.0 Ns/m	11.48	12.1	14.8	9.98	35.6	0.2	10.7	73.2	7.0	16.7	--	67.6
number of iterations		4			7			6			6		
nº of SFUNC calls		58			87			71			93		

NOTA: all the cases above: initial parameter values are $k_7=k_8=30000$ N/m and $c_7=c_8=30$ Ns/m. Obs. --- > 100%.

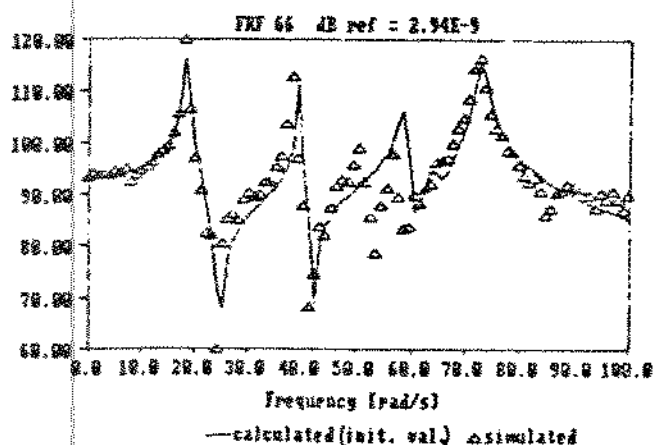


Figure 3. Simulated FRF with 1% noise at each frequency component and FRF calculated by c.m.s.

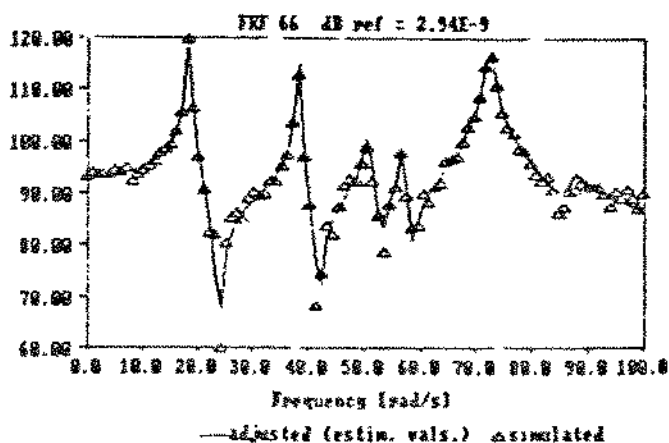


Figure 4. Simulated FRF of fig.3 after final curve-fitting with estimated parameters (table 3).

Santos, J.M.C. and Arruda, J.R.F., *Finite Element Model Updating Using Frequency Response Functions and Component Mode Synthesis*. Proceedings of the 8th Int. Conference on Modal Analysis IMAC, SEM, Kissimmee, FL, USA, 1990, pp. 1195-1201.

FINITE ELEMENT MODEL UPDATING USING FREQUENCY RESPONSE FUNCTIONS AND COMPONENT MODE SYNTHESIS

JOSÉ MARIA CAMPOS DOS SANTOS

JOSÉ ROBERTO DE FRANÇA ARRUDA

Departamento de Mecânica Computacional
Universidade Estadual de Campinas
Brasil

ABSTRACT

This paper treats the problem of Finite Element Model updating of structures consisting of substructures connected through joints. A damped component mode synthesis formulation is used to calculate the theoretical Frequency Response Functions of the assembled structure for a set of joint stiffness and damping parameter values. The FE model is updated by estimating the joint parameters with a non-linear least-squares curve-fit of measured FRFs. The problems of sensitivity matrix calculation, identifiability and estimation errors are discussed. An example consisting of two clamped-free beams connected through springs is shown to illustrate the model updating method.

NOMENCLATURE

x - displacement response vector

f - external force vector

$\dot{x}$ - time derivative of vector x

M - mass matrix

K - stiffness matrix

C - viscous damping matrix

F^t - vector of function values calculated with the theoretical model

F^x - vector of measured function values

W_F - weighting matrix for experimental data

W_p - weighting matrix for parameters p

p - vector of parameter values to be estimated

p_0 - initial (guess) values for p

γ - scalar coefficient denoting the confidence in the theoretical model

α, β - subscripts denoting substructures α and β

$y = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$ state vector

$g = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$ - double order external force vector

A, B - system matrices

$[s_\alpha]$ - diagonal matrix whose elements are the eigenvalues $s_r, r=1, n_\alpha$, of substructure α .

Ψ_α - modal matrix of substructure α

w_α - state vector of substructure α

I - identity matrix

n_α - number of degrees-of-freedom of substructure α

g_x - external forces vector for the assembled structure

g_c - connection forces vector for the assembled structure

Q - connection matrix

R_r, L_r - right-hand and left-hand eigenvectors

$\tilde{R}, \tilde{L}$ - right-hand and left-hand eigenvectors, in physical coordinates.

$H_{ij}(\omega)$ - Frequency Response Function

$[H(\omega)]$ - Frequency Response Matrix

ω - circular frequency in rad/s

e_r - eigenvector scaling factor

u_r - complex eigenfrequency

S - sensitivity matrix

Δp_j - perturbation applied to parameter p_j to calculate a derivative

W - Fourier transform of w

G_x - Fourier transform of g_x

$\hat{p}$ - estimated values for parameters p

n_e - dimension of vector F

n_p - dimension of vector p

σ^2 - variance of the measurement noise

FRF - Frequency Response Function

FE - Finite Elements

INTRODUCTION

Two different situations occur in the problem of structural FE model updating:

- The parameters of the theoretical model should be changed are unknown and should be localized (1-3).
- The a priori knowledge of the structure indicates clearly the parameters to be adjusted.

This paper deals with the latter situation. It is not uncommon in structural applications to have substructures which can be modelled quite conveniently connected through joints, whose behavior is very difficult to predict. This problem seems to be calling the attention of the dynamicists and some recent publications deal with it (4-6).

In this paper, the problem of updating finite element models of structures consisting of substructures connected through joints based on experimentally determined FRFs is investigated. The estimation method used here is the weighted least squares method, but a more generalized approach, which can take into account the relative confidence in both the theoretical model and the measured data, is also discussed.

In a previous paper (7) the authors have applied the proposed method to a lumped parameter system.

In this paper, an analytical formulation for the calculation of the sensitivity matrix (Jacobian) of the FRF with respect to the joint stiffness and damping parameters is derived, and the results are compared to the finite-differences solution.

Simulation results for a system consisting of two beams connected through springs and dash-pots are presented.

In the treated example, the influence of the modal base truncation in the damped component mode synthesis is investigated.

MODEL UPDATING PROCEDURE

Model parameter estimation is done by minimizing the difference with respect to measured data from the input or the output of the system (10). Experimental modal analysis consists usually of normalizing the outputs with respect to the inputs in the frequency domain (FRFs) and then estimating modal parameters from these outputs, characterizing an output error method. No a priori knowledge with respect to the particular structure under test is usually taken into account. The only a priori knowledge used is the fact that the structure has a linear behaviour and can be represented by a modal model. Experimental modal analysis produces a representation model.

It is possible to use the FRFs directly, or to use the modal parameters to update FE models of structures. The former approach is used here (7,8).

Putting the experimentally obtained FRF in a vector called F^x and, accordingly, the predicted values in F^l , and given a set of physical parameters of the theoretical model in vector form p , to be estimated starting from initial guess values p_0 , updating the model consists in minimizing the objective function (11-13):

$$J(p) = [F^x - F^l]^T W_F [F^x - F^l] + \gamma [p - p_0]^T W_p [p - p_0] \quad (1)$$

in this expression, W_F is the weighting matrix of the experimental data, expressing the relative confidence (statistically the inverse of the covariance matrix) in the experimentally obtained FRFs. W_p is a weighting matrix expressing the relative confidence in the theoretical model parameters (statistically the inverse of the covariance matrix, usually unknown). The scalar γ expresses a global relative confidence between theoretical and experimental models. If $\gamma = 0$ the minimization of the objective function produces the generalized least-squares solution. If $\gamma \rightarrow \infty$ the minimization leads to the trivial solution $p = p_0$, and the experimental data is not taken into account.

The weighting matrices may be chosen empirically in practical situations, giving to the analyst the possibility of using any a priori subjective knowledge about the problem.

When obtained from the statistics of the problem, this approach is the Bayesian approach (12).

The solution which minimizes $J(p)$ may be shown to be:

$$p^{k+1} = p^k + (W_p + S^T W_F S)^{-1} [W_p (p_0 - p^k) + S^T W_F (F^x - F^l)] \quad (2)$$

where S is the sensitivity matrix given by the Jacobian of function F^l with respect to the parameters:

$$S = \frac{\partial F^l}{\partial p} \quad (3)$$

Due to the fact that F^l is non-linear in the parameters, the minimization process is iterative and k represents the iterative step. To start the process an initial guess of the parameter values p_0 is needed. The calculation of the sensitivity matrix will be discussed later in this paper.

In the case of FE model updating by estimating connecting joint parameters, there is usually a very low confidence in the guess values of the joint stiffness and damping parameters and, so, $\gamma = 0$ in equation 1. In the examples treated here, the absolute value of the FRF in logarithmic scale is used. It was observed that the logarithmic scale improves the convergence. A diagonal weighting matrix W_F whose elements are the theoretical values

of the FRF in linear scale is used after a high correlation level is attained between F^t and F^x in the iterative process.

DAMPED COMPONENT MODE SYNTHESIS

The component mode synthesis formulation used here is due to Martin and Ghahai (9) and has been extended to include the Frequency Response Function formulation by the authors in a previous paper (7). Only the basic equations will be reviewed here.

Each substructure is modelled with non-proportional viscous damping. Using subscripts α and β for the two substructures (the formulation can be easily extended to more than two substructures):

$$\begin{aligned} A_\alpha \dot{y}_\alpha + B_\alpha y_\alpha &= g_\alpha \\ A_\beta \dot{y}_\beta + B_\beta y_\beta &= g_\beta \end{aligned} \quad (4)$$

where, for substructure α :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \begin{bmatrix} C_\alpha & M_\alpha \\ M_\alpha & 0 \end{bmatrix}; B_\alpha = \begin{bmatrix} K_\alpha & 0 \\ 0 & -M_\alpha \end{bmatrix} \\ y_\alpha &= \begin{bmatrix} x_\alpha \\ \dot{x}_\alpha \end{bmatrix}; g_\alpha = \begin{bmatrix} f_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

The same is valid for substructure β , with K, M and C being the stiffness, inertia and damping matrices, respectively, x being the displacement response vector and f the external force vector.

Equation 4 may be diagonalized using the modal matrix obtained from the generalized eigenvalue problem:

$$\begin{aligned} B_\alpha \Psi_\alpha &= A_\alpha [s_\alpha] \\ B_\beta \Psi_\beta &= A_\beta [s_\beta] \end{aligned} \quad (6)$$

With the proper normalization of the modal matrix:

$$\begin{aligned} I\dot{w}_\alpha - [s_\alpha]w_\alpha &= \Psi_\alpha^T g_\alpha \\ I\dot{w}_\beta - [s_\beta]w_\beta &= \Psi_\beta^T g_\beta \end{aligned} \quad (7)$$

where $w_\alpha = \Psi_\alpha y_\alpha; w_\beta = \Psi_\beta y_\beta$.

Equations 7 may be put together as:

$$\begin{bmatrix} I(n_\alpha \times n_\alpha) & 0 \\ 0 & I(n_\beta \times n_\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_\alpha \\ \dot{w}_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_\alpha^T & 0 \\ 0 & \Psi_\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} \quad (8)$$

where n_α and n_β represent twice the number of degrees-of-freedom of substructures α and β , respectively.

Eliminating the subscripts for the equation of motion of the complete system:

$$I\dot{w} - [s]w = \Psi^T g \quad (9)$$

The excitation forces vector g contains the connecting forces when the substructures are put together through joints modelled with springs and dashpots.

$$g = g_x + g_c \quad (10)$$

where g_x are the external forces and g_c are the connection forces:

$$g_c = -Q \begin{Bmatrix} y_\alpha \\ y_\beta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Q is called the connection matrix, whose elements are the stiffness and damping coefficients of the joints. Putting the term g_c to the left side of equation 9 gives:

$$I\dot{w} - [-s] + \Psi^T Q \Psi w = \Psi^T g_x \quad (12)$$

Solving the eigenvalue problem given by equation 12 produces the system eigenvalues u_r , right-hand eigenvectors R_r and left-hand eigenvectors L_r (because Q is non-symmetric). To express the eigenvectors in the physical coordinates of the substructures it is necessary to use the transformation matrix:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \Psi R \\ \tilde{L} &= \Psi L \end{aligned} \quad (13)$$

It can be shown that the FRFs for the assembled structure may be expressed as (7):

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{n_\alpha+n_\beta} \frac{\tilde{R}_i^T \tilde{L}_j}{e_r(i\omega - u_r)}; i, j = 1, (n_\alpha + n_\beta) \quad (14)$$

where

$$e_r = \tilde{L}^T \tilde{R}; r = 1, (n_\alpha + n_\beta) \quad (15)$$

SENSITIVITY MATRIX CALCULATIONS

Many recent papers treat the problem of calculating the sensitivity matrix S of equation 2 with respect to the structure parameters (14,17). In this paper, a specific formulation will be derived for the case of frequency response functions, obtained from a component mode synthesis method, with respect to the joint stiffness and damping parameters.

Another approach, which is always feasible, consists in calculating the sensitivities by finite differences. Different formulations are possible but, as the problem is iterative, it is usually better to take the first difference, because it costs computationally less and gives enough accurate results:

$$S_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \cong \frac{F_i(p_j + \Delta p_j) - F_i(p_j)}{\Delta p_j} \quad (16)$$

The choice of Δp_j may be critical. It should be as small as possible, but there are limitations due to numerical truncation. Brown and Dennis (18) suggest:

$$\Delta p_j = \min\{\|F^i(p_j)\|, \delta_j\} \quad (17)$$

where

$$\delta_j = \begin{cases} 10^{-9} & \text{if } |p_j| < 10^{-6} \\ 10^{-3}|p_j| & \text{if } |p_j| \geq 10^{-6} \end{cases} \quad (18)$$

Applying the Fourier Transform to both sides of equation 12 leads to:

$$[i\omega - s_r] + \Psi^T Q \Psi W = \Psi^T G_r \quad (19)$$

where the uppercase letters denote a variable in the frequency domain.

The Frequency Response Matrix can be expressed as:

$$[H(\omega)] = \Psi B^{-1}(\omega) \Psi^T \quad (20)$$

where

$$B(\omega) = [i\omega - s_r] + \Psi^T Q \Psi \quad (21)$$

Using the known property for the inverse square matrix derivative (19):

$$\frac{\partial B^{-1}}{\partial p} = -B^{-1} \frac{\partial B}{\partial p} B^{-1} \quad (22)$$

we obtain, for a specific FRF:

$$\frac{\partial H_{ij}(\omega)}{\partial p_k} = - \sum_l \sum_n \psi_l^i D_{ln}^k(\omega) \psi_n^j \quad (23)$$

where

$$D^k(\omega) = B^{-1}(\omega) \Psi^T \frac{\partial Q}{\partial p_k} \Psi B^{-1}(\omega) \quad (24)$$

In the connection matrix Q, the stiffness and damping coefficients of the joints appear linearly and, because of that, to obtain its partial derivatives with respect to each parameter p_k it is sufficient to replace the parameter values by one, and all the other parameter values by zero, $p_i = 0$, $i \neq k$.

Using this analytical formulation to calculate more precisely the sensitivity matrix can improve the convergence of the iterative non-linear least-squares procedure but this is done at the expense of a higher computational effort. This is because it is necessary to invert matrix $B(\omega)$ or, numerically, to solve a linear system of algebraic equations, for each frequency ω where the Frequency Response Function was measured, what means doing it hundreds or thousands of times.

As the simulation results shown here have been obtained with a microcomputer, it has not been feasible to implement the analytical Jacobian solution in the model updating computer code.

Figure 1 shows a comparison of sensitivity matrices obtained via both procedures. It can be seen that the finite-differences method gives fairly precise results when compared to the exact, analytical solution. In the examples treated here, only finite-differences calculation of the Jacobian has been used. The FRFs were taken in dB scale and, hence, sensitivities are given in [dB m/N].

ESTIMATION ERRORS

The variances of the generalized non-linear least-squares solution in the case of additive Gaussian noise may be shown to be approximated by (10):

$$\text{var}[\hat{p}] \cong [S^T S]^{-1} \sigma^2 \quad (25)$$

where σ^2 is the variance of the noise which can be estimated with

$$\sigma^2 \cong \frac{J(\hat{p})}{n_r - n_p} \quad (26)$$

where n_r is the number of elements of F^X and n_p is the number of elements of p . For $(n_r - n_p) \rightarrow \infty$ the probability distribution of $\hat{p}$ tends to be Gaussian and the normal confidence intervals for $\hat{p}_i$ may be established (19).

In the model updating procedure treated here, the estimation of the joint parameters is not the main goal, but their variances may be useful to evaluate the quality of the combined model.

UNIQUENESS AND IDENTIFIABILITY

A question that is always present is the model updating and parameter estimation fields is whether the models are unique. This question will be discussed here.

Given a set of modal parameters (natural frequencies, modal dampings and scaled mode shapes), the only possibility of defining uniquely the structure stiffness, mass and damping matrices is to have a complete modal model where all modes are measured on every degree-of-freedom. This is practically impossible because real structures are continuous and because it costs too much to experimentally identify high order modes, as pointed out by Berman (20).

So, one cannot intend to find the model of the structure, but, hopefully, a model consistent with the a priori knowledge about the structure and with the measured data. Recent papers deal with the structural model uniqueness problem (20).

In the case where only a small set of parameters of the theoretical model is estimated from experimental data, the problem may be formulated

as an identifiability problem. The question is whether the parameters can be independently estimated from the available data.

There exist some criteria of identifiability and, for the particular problem of non linear least-squares estimation, one of them consists of looking for the number of non negligible singular values of the sensitivity matrix (19). They are related to the linear independence of the sensitivity vectors, which are the columns of the sensitivity matrix. It may be proved (19) that, if the sensitivity vectors related to a group of parameters are linearly dependent, that group of parameters cannot be estimated uniquely. In the implemented computer code, equation 3 is solved by a singular value decomposition of the sensitivity matrix and the singular values are used at each iteration step to choose the number of parameters which can be estimated at that step.

SIMULATION EXAMPLE

Figure 2 shows the structure treated here to illustrate the model updating procedure. Each damped-free beam is modelled by 8 Timoshenko beam finite elements constrained to in-plane deflection. The connecting joints are modelled as simple linear springs in this illustrative example. An eigenvalue analysis is made for each substructure. In the mode synthesis only the 7 first modes are kept for substructure a and the 5 first modes for substructure b.

The FRFs simulating experimental data are calculated using the complete modal base of the finite element model of the whole structure consisting of the two connected beams.

It was not possible to include damping in the connecting joints because the FE computer code that was used did not allow such type of element.

Figure 3 shows a comparison of a FRF obtained with the complete model and the same FRF obtained by mode synthesis with truncated modal bases of the substructures.

In order to test the updating procedure sensitivity with respect to experimental errors, the simulated FRFs were polluted with Gaussian noise added to the FRFs. The noise percentage represents the quotient between the rms value of the total added noise and the rms value of the response signal corresponding to the FRF.

Table 1 shows the results obtained for different noise levels and different frequency ranges of the FRF. The validation of the updated model is done by comparing other experimental and analytical FRFs which have not been used in the updating procedure. Figure 4 shows the initial fit of an FRF with the initial joint parameters guess values and the final fit. Figure 5 shows another comparison of analytical and "experimental" FRF for validation of the updated model.

The last case presented in Table 1 merits a comment. Comparing other FRFs predicted with the updated model with "measured" ones, it would be

easily verified that the model was not correct in this case, although a good fit had been obtained with FRF 99.

It is interesting to notice that the frequency range may be selected based on an "optimum experiment" criterion which consists in choosing the frequency range that produces the biggest value of the smaller singular value of the sensitivity matrix (19).

To put the normal modes ψ_r ; $r=1,n$ obtained from the FE model in the complex mode form (double order) one can start by normalizing the normal modes so that:

$$\psi_r^T M \psi_r = \frac{1}{4\omega_r}; r=1,n. \quad (27)$$

With the modes normalized as shown in the previous equation, a complex mode may be constructed:

$$\phi_r = \psi_r + i\dot{\psi}_r; r=1,n. \quad (28)$$

and, finally, the double order complex modal matrix may be written as:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & \phi^* \\ \phi[\lambda] & \phi^*[\lambda^*] \end{bmatrix} \quad (29)$$

where

$$\lambda_r = -\xi_r \omega_r - i\omega_r \sqrt{1-\xi_r^2}; r=1,n. \quad (30)$$

The eigenvalue matrix may be written:

$$[s] = - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{bmatrix} \quad (31)$$

With Φ and $[s]$ given by equations 29 and 31, constructed for each substructure, the damped component mode synthesis may be applied.

CONCLUSION

The non-linear least squares curve-fit of measured FRFs may be used to update mathematical models of structures. In this paper, the mathematical model consists of a damped component mode synthesis model, where each substructure is modelled by its first modes obtained from a FE model. The parameters estimated in the updating procedure are the stiffness and damping coefficients of the mechanical joints connecting the substructures.

The proposed procedure was verified using FRFs simulated with the model parameters obtained from a FE model of the assembled structure. In the treated example the connection joints were modelled only by springs because of limitations of the FE computer code that was used. It has been

shown that the modal data base truncation of the substructures is not a major obstacle.

The authors are now working on the experimental application of the proposed method. For that purpose, the damped component mode synthesis method used here is being adapted to be able to treat freely suspended substructures with rigid-body modes.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are thankful to the Research Council of the State of Sao Paulo, Fapesp, for the financial support given to this applied research work.

REFERENCES

- (1) Zhang, Q; Lallement, G., "Dominant Error Localization in a Finite Element Model of a Mechanical Structure". Mechanical Systems and Signal Processing, 1(2), pp.141-149 (1987).
- (2) O'Callahan, J.C.; Chou, C.M., "Localization of Model Errors in Optimized Mass and Stiffness Matrices Using Modal-Test Data". International Journal of Theoretical and Experimental Modal Analysis January, pp.8-14 (1989).
- (3) Lallement, G. et al. "Parametric Identification of Conservative Self-Adjoint Structures". To be published in the Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences.
- (4) Lawrence, C.; Huckelbridge, A.A., "Characterization of Damped Structural Connections for Multi-Component Systems". Proceedings of the 7th IMAC, Las Vegas, pp.71-78 (1989).
- (5) Good, M.R.; Marioce, D.J., "Using Experimental Modal Analysis to Characterize Automobile Body Joints and Improve Finite Element Analysis". Proceedings of the 7th IMAC, Las Vegas, pp.106-110 (1989).
- (6) Gray, S.D.; Starkey, J.M., "Mount Property Identification An Optimizational Approach to Dynamic Substructuring". Proceedings of the 7th IMAC, pp.38-44 (1989).
- (7) Arruda, J.R.F.; Santos, J.M.C., "Model Adjusting of Structures With Mechanical Joints Using Modal Synthesis". Proceedings of the 7th IMAC, Las Vegas, pp.850-856 (1989).
- (8) Arruda, J.R.F., "Rotor Model Adjusting by Unbalance Response Curve-Fitting". Proceedings of the 7th IMAC, Las Vegas, pp.479-484 (1989).
- (9) Martin, K.F.; Ghlain, K.H., "System prediction using damped component modes". Proc. Instr. Mechanical Engineers, Vol. 198 C, n° 16, pp. 261-268 (1984).
- (10) Eykhoff, P. "System Identification - Parameter and State Estimation". John Wiley & Sons, 1974.
- (11) Natke, H.G., "Improvement of Analytical Models With Input/Output Measurements Contra Experimental Modal Analysis". Proceedings of

the 4th IMAC, Los Angeles, pp.409-413 (1986).

- (12) Natke, H.G., "Updating of Computational Models in the Frequency Domain Based on Measured Data: A Survey". Probabilistic Engineers Mechanics, V. 3, n° 1, pp. 28-35 (1988).
- (13) Blakely, K.D.; Walton, W.B., "Selection of measurement and parameter uncertainties for FE model revision". Proceedings of the 2nd. IMAC, pp. 82-88 (1984).
- (14) Vanhonacker, P., "Sensitivity Analysis of Mechanical Structures, Based on Experimentally Determined Modal Parameters". Proceedings of the 7th IMAC, Las Vegas, pp.534-541 (1989).
- (15) Sutter, T.R. et al. "Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives". AIAA Journal, V.26, n° 12, pp. 1506-1511 (dec. 1988).
- (16) Sharp, R.S.; Brooks, P.C., "Sensitivities of Frequency Response Functions of Linear Dynamic Systems to Variations in Design Parameter Values". J. of Sound & Vibration, 126 (1), pp.167-172 (1988).
- (17) Adelman, H.M.; Haftka, R.T., "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems". AIAA Journal, V.24, n° 5, May, pp.823-832 (1986).
- (18) Wolfer, M.A., "Numerical Methods for Unconstrained Optimization". Van Nostrand, Reinhold Co., pp.262-263 (1978).
- (19) Beck, J.V.; Arnold, K.J., "Parameter Estimation in Engineering and Science". J. Wiley & Sons, New York (1977).
- (20) Berman, A., "Nonunique Structural System Identification". Proc. of the 6th IMAC, Orlando, pp.355-358 (1988).

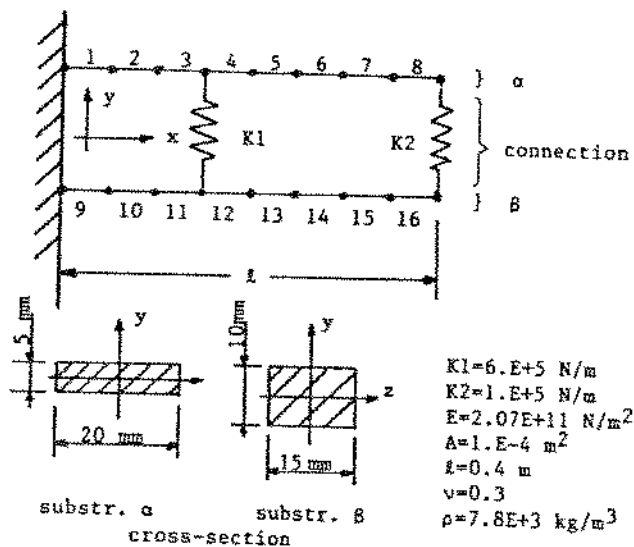


Figure 2 - Example structure. FE discretization and physical parameters.

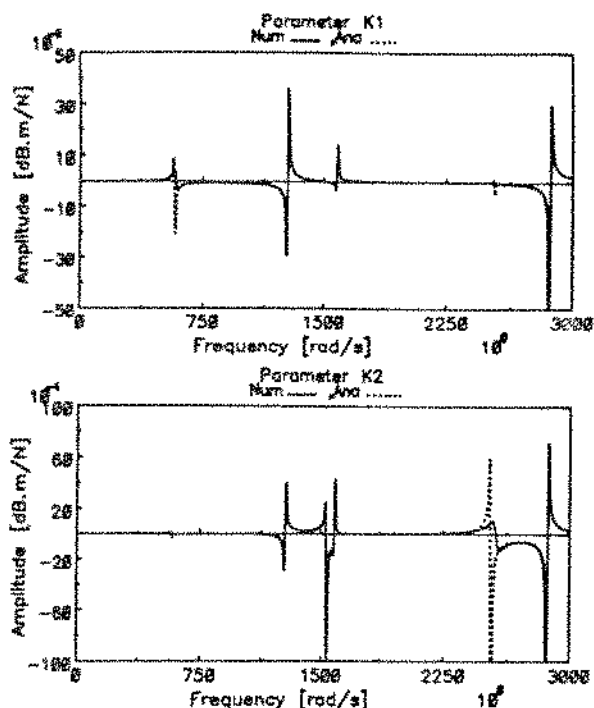


Figure 1. Comparison of sensitivities calculated by finite-differences with the analytical ones.

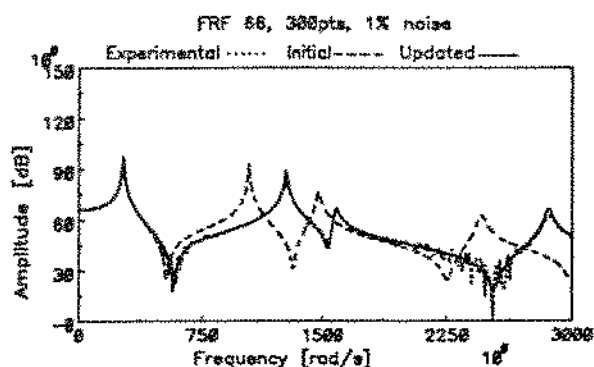


Figure 4. Curve-fit in the model updating procedure

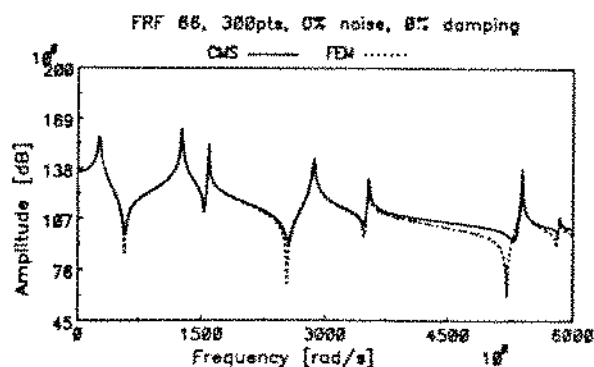


Figure 3. FRF calculated with the complete modal basis and by component mode synthesis with the modal basis of the substructure truncated.

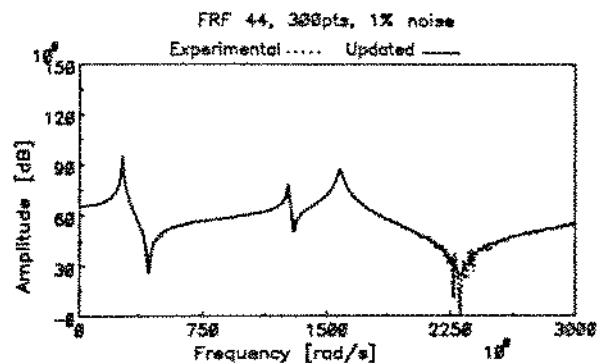


Figure 5. Comparison of FRF not used in the curve-fit for the validation of the updated model.

Table 1 Model updating results for different measurement point locations, frequency ranges and noise levels.

FRF used for model updating	K 1 exact 6.E 5N/m	error	estimated error	K2 exact 1.E5N/m	error	estimated error	No. of iterations
FRF 66 0-3000 rad/s 0% noise	5.92E5	1.29%	0.47%	1.00E5	0.10%	0.14%	4
FRF 66 0-3000 rad/s 1% noise	5.97E5	0.47%	1.67%	0.99E5	0.99%	0.47%	4
FRF 66 1000-2000 rad/s 1% noise	18.5E5	208.2	1935.2	.54E5	46%	378.2	10 (interrupted)
FRF 66 0-2000 rad/s 1% noise	5.91E5	1.55%	1.14%	1.01E5	0.70%	0.53%	5
FRF 99 0.1500 rad/s 1% noise	2.22E5	63%	3.21%	1.10E5	9.6%	0.89%	3

Santos, J.M.C. e Arruda, J.R.F., *Ajuste de Modelos de Estruturas Usando Síntese Modal*. Anais do I Congresso de Engenharia Mecânica do Norte-Nordeste, UFRGN, Natal, RN, Brasil, 20-22 Jun. 1991, pp. 436-442.

AJUSTE DE MODELOS DE ESTRUTURAS USANDO SÍNTESE MODAL

JOSÉ MARIA C. DOS SANTOS

JOSÉ R. F. ARRUDA

Departamento de Mecânica Computacional

Faculdade de Engenharia Mecânica

Universidade Estadual de Campinas

Caixa Postal 6122, Campinas - SP

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se o problema de Ajuste de Modelos de Elementos Finitos consistindo de sub-estruturas conectadas através de juntas. Uma formulação de Síntese dos Modos dos Componentes (CMS) com amortecimento é usada para calcular as Funções de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura montada para um grupo de valores dos parâmetros de rigidez e amortecimento da junta. O modelo de elementos finitos é ajustado estimando-se os parâmetros da junta através do ajuste das curvas das FRF's medidas usando-se a técnica de mínimos quadrados não-linear. Um exemplo é mostrado a fim de ilustrar o método de ajuste de modelos.

INTRODUÇÃO

A situação neste problema de ajuste de modelos de elementos finitos é aquela em que o conhecimento à priori da estrutura indica claramente os parâmetros que devem ser ajustados. Não é incomum em aplicações estruturais encontrar-se estruturas que podem ser modeladas mais convenientemente por sub-estruturas conectadas através de juntas. Contudo, devido o comportamento dinâmico da junta mecânica ser, geralmente, difícil de ser previsto tal problema vem chamando a atenção dos pesquisadores da área. Este trabalho é também uma aplicação estrutural, onde investiga-se o problema de ajuste de modelo de elementos finitos em uma estrutura consistindo de sub-estruturas conectadas através de juntas, com base nas FRF's determinadas experimentalmente. Na estimação dos parâmetros usa-se o método de mínimos quadrados ponderado, o qual leva em conta a confiança relativa de ambos modelos teórico e experimental. Resultados da simulação de um sistema consistindo de duas vigas interligadas por molas e amortecedores são apresentados e a influência do truncamento da base modal na síntese dos modos dos componentes com amortecimento é investigada.

PROCEDIMENTO DO AJUSTE DO MODELO

A estimação de parâmetro do modelo é feita minimizando-se a diferença com relação aos dados previsto e os medidos na entrada (excitação) ou na saída (resposta) do sistema [1]. A análise modal experimental consiste usualmente, da normalização das saídas com relação às entradas no domínio da frequência (FRF's), seguido da estimação dos parâmetros modais a partir destas saídas, caracterizando-se desta forma em um método de erro na

saída. Nenhum conhecimento à priori com relação à particular estrutura em teste é levado em conta, exceto o fato de que a estrutura tem um comportamento linear e pode ser representada por um modelo modal. Pode-se usar as FRF's diretamente para ajustar modelos de elementos finitos de estruturas [2], e este é o enfoque usado aqui. Colocando a FRF experimental no vetor F_x e os valores previsto em F_t , e fornecendo um conjunto de parâmetros físicos do modelo teórico na forma de um vetor p , a ser estimado à partir de valores iniciais de tentativa p_0 , o ajuste do modelo consistirá na minimização da função objetivo

$$J(p) = [F_x - F_t]^T W_F [F_x - F_t] + \gamma [p - p_0]^T W_t [p - p_0] \quad (1)$$

onde W_F e W_t são as matrizes de ponderação que expressam a confiança relativa (estatisticamente a inversa da matriz de covariância) nas FRF's obtidas experimentalmente e teoricamente, respectivamente. O escalar γ expressa a confiança relativa global entre os modelos teórico e experimental. Se $\gamma = 0$ a minimização da equação 1 produz a solução de mínimos quadrados generalizado, de outra forma ($\gamma \rightarrow \infty$) a minimização leva à solução trivial $p = p_0$ e os dados experimentais não são levados em conta. As matrizes de ponderação podem ser escolhidas empiricamente nas situações práticas, dando ao analista a possibilidade de usar qualquer conhecimento subjetivo sobre o problema. Quando obtido de dados estatísticos do problema este enfoque é chamado de *Bayesiano* [3]. Pode ser mostrado que a solução que minimiza $J(p)$ é dada por

$$p_{k+1} = p_k + (W_t + S^T W_F S)^{-1} [W_t (p_0 - p_k) + S^T W_F (F_x - F_t)] \quad (2)$$

onde S é a matriz de sensibilidade dada pelo Jacobiano da função F_t com relação aos parâmetros p , ou seja,

$$S = \frac{\partial F_t}{\partial p} \quad (3)$$

Devido ao fato de F_t ser não-linear nos parâmetros, o processo de minimização é iterativo e k representa o passo da iteração. Para iniciar o processo é necessário arbitrar os valores iniciais de p_0 por tentativa. O cálculo da matriz de sensibilidade é feito por diferenciação numérica como proposto por Brown e Dennis [4]. Um outro enfoque consiste em calcular a matriz de sensibilidade por uma formulação específica para o caso das derivadas das FRF's com relação aos parâmetros de rigidez e amortecimento da junta. Os autores mostram em [2] que este método pode melhorar a convergência do procedimento iterativo mas às custas de um esforço computacional muito alto. No caso de ajuste de modelos de elementos finitos por estimação dos parâmetros da junta de conexão, existe usualmente uma confiança muito baixa nos valores de tentativa dos parâmetros de rigidez e amortecimento, assim, $\gamma = 0$ na equação 1.

SÍNTESE DOS MODOS DOS COMPONENTES

A formulação de síntese dos modos dos componentes usada aqui é devido a Martin e Ghlain [5] e foi estendida pelos autores em [6] para incluir a formulação de Função de Resposta em Frequência. Somente as equações básicas serão revistas aqui. Cada subestrutura é modelada com amortecimento viscoso não-proporcional. Usando os índices α e β para as duas subestruturas teremos

$$\begin{aligned} A_\alpha \dot{y}_\alpha + B_\alpha y_\alpha &= g_\alpha \\ A_\beta \dot{y}_\beta + B_\beta y_\beta &= g_\beta \end{aligned} \quad (4)$$

onde para a sub-estrutura α teremos

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} C_\alpha & M_\alpha \\ M_\alpha & 0 \end{bmatrix}; B_\alpha = \begin{bmatrix} K_\alpha & 0 \\ 0 & -M_\alpha \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$y_\alpha = \begin{Bmatrix} x_\alpha \\ \dot{x}_\alpha \end{Bmatrix}; g_\alpha = \begin{Bmatrix} f_\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O mesmo se aplica para a sub-estrutura β , com K , M e C sendo as matrizes de rigidez, inércia e amortecimento, respectivamente, x sendo o vetor de deslocamento e f o vetor das forças externas. A equação 4 pode ser diagonalizada usando-se a matriz modal obtida do problema de autovalor generalizado, ou seja,

$$B_\alpha \Psi_\alpha = A_\alpha [s_\alpha] \quad (6)$$

$$B_\beta \Psi_\beta = A_\beta [s_\beta]$$

Normalizando-se adequadamente a matriz modal obtém-se

$$I\dot{w}_\alpha - [s_\alpha]w_\alpha = \Psi_\alpha^T g_\alpha \quad (7)$$

$$I\dot{w}_\beta - [s_\beta]w_\beta = \Psi_\beta^T g_\beta$$

onde

$$w_\alpha = \Psi_\alpha y_\alpha; w_\beta = \Psi_\beta y_\beta.$$

As equações em 7 podem ser agrupadas obtendo-se

$$\begin{bmatrix} I(n_\alpha \times n_\alpha) & 0 \\ 0 & I(n_\beta \times n_\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_\alpha \\ \dot{w}_\beta \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_\alpha^T & 0 \\ 0 & \Psi_\beta^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{Bmatrix} \quad (8)$$

onde n_α e n_β representam o dobro do número de graus de liberdade das subestruturas α e β , respectivamente. Eliminando-se os índices para a equação do movimento do sistema completo, obtém-se

$$I\dot{w} - [s]w = \Psi^T g \quad (9)$$

O vetor das forças de excitação g contém as forças de conexão quando as subestruturas são conectadas entre si através das juntas modeladas com molas e amortecedores, assim

$$g = g_x + g_c \quad (10)$$

onde g_x é o vetor das forças externas e g_c das forças de conexão, logo

$$g_c = -Q \begin{Bmatrix} y_\alpha \\ y_\beta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

onde Q é chamada de matriz de conexão, cujos elementos são os coeficientes de rigidez e amortecimento das juntas. Colocando g_c do lado esquerdo da equação 9 teremos

$$I\dot{w} - [-[s] + \Psi^T Q \Psi]w = \Psi^T g_x \quad (12)$$

Resolvendo o problema de autovalor dado pela equação 12 produz-se os autovalores do sistema ω_r , e os correspondentes autovetores à direita R_r e à esquerda L_r (devido a não simetria de Q). Para expressar os autovetores em coordenadas físicas da estrutura é necessário usar a matriz de transformação

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \Psi R \\ \hat{L} &= \Psi L\end{aligned}\tag{13}$$

[6] Pode ser mostrado que as FRF's para a estrutura montada podem ser expressas como

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{2n_\alpha + 2n_\beta} \frac{\hat{R}_i^r \hat{L}_j^r}{e_r(i\omega - u_r)}; i, j = 1, 2(n_\alpha + n_\beta)\tag{14}$$

onde

$$e_r = \tilde{L}^T \tilde{R}^r; r = 1, 2(n_\alpha + n_\beta)\tag{15}$$

ERROS DA ESTIMAÇÃO

As variancias da solução de minimos quadrados generalizado não-linear no caso de ruído gaussiano aditivo podem ser aproximadas por [1]

$$\text{var}[\hat{p}] \cong [S^T S]^{-1} \sigma^2\tag{16}$$

onde σ^2 é a variancia do ruído a qual pode ser estimada por

$$\sigma^2 \cong \frac{J(\hat{p})}{n_x - n_p}\tag{17}$$

onde n_x é o número de elementos de F_x e n_p é o número de elementos de p . Para $(n_x - n_p) \rightarrow \infty$ a distribuição de probabilidade de $\hat{p}$ tende a ser gaussiana e o intervalo de confiança normal para $\hat{p}$, pode ser estabelecido [7]. No procedimento de ajuste de modelo tratado aqui o principal objetivo não é a estimação dos parâmetros da junta, mas suas variâncias que podem ser úteis na avaliação da qualidade do modelo combinado.

EXEMPLO DA SIMULAÇÃO

A figura 1 mostra a estrutura usada para ilustrar o procedimento de ajuste de modelo. Cada viga livre-engastada é modelada por 8 elementos finitos de viga tipo Timoshenko restrito no plano. As juntas de conexão são modeladas como molas lineares simples. Uma análise de autovalor é feita para cada sub-estrutura. Na síntese somente os 7 primeiros modos da sub-estrutura α são mantidos e os 5 primeiros da sub-estrutura β . As FRF's simulando os dados experimentais são calculadas usando a base modal completa do modelo de elementos finitos da estrutura completa consistindo das duas vigas conectadas. Não foi possível incluir amortecimento nas juntas devido o código coputacional de elementos finitos usado não conter um elemento deste tipo.

A figura 2a mostra uma comparação de uma FRF obtida com o modelo completo e a mesma FRF obtida pela síntese dos modos dos componentes com as bases modais das sub-estruturas truncadas. A figura 2b mostra o ajuste inicial de uma FRF com os parâmetros iniciais da junta por tentativa e o ajuste final obtido.

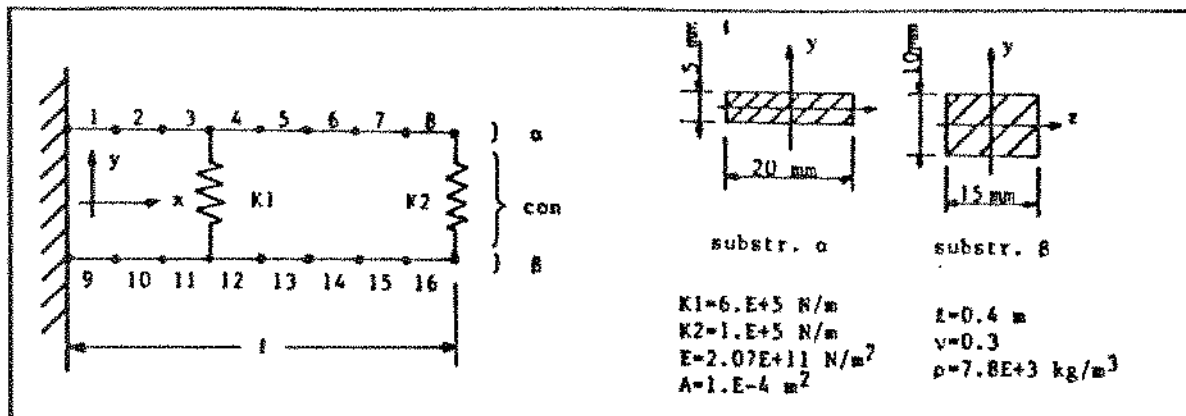


Figura 1: Exemplo da estrutura. Discretização do modelo de E.F. e parâmetros físicos.

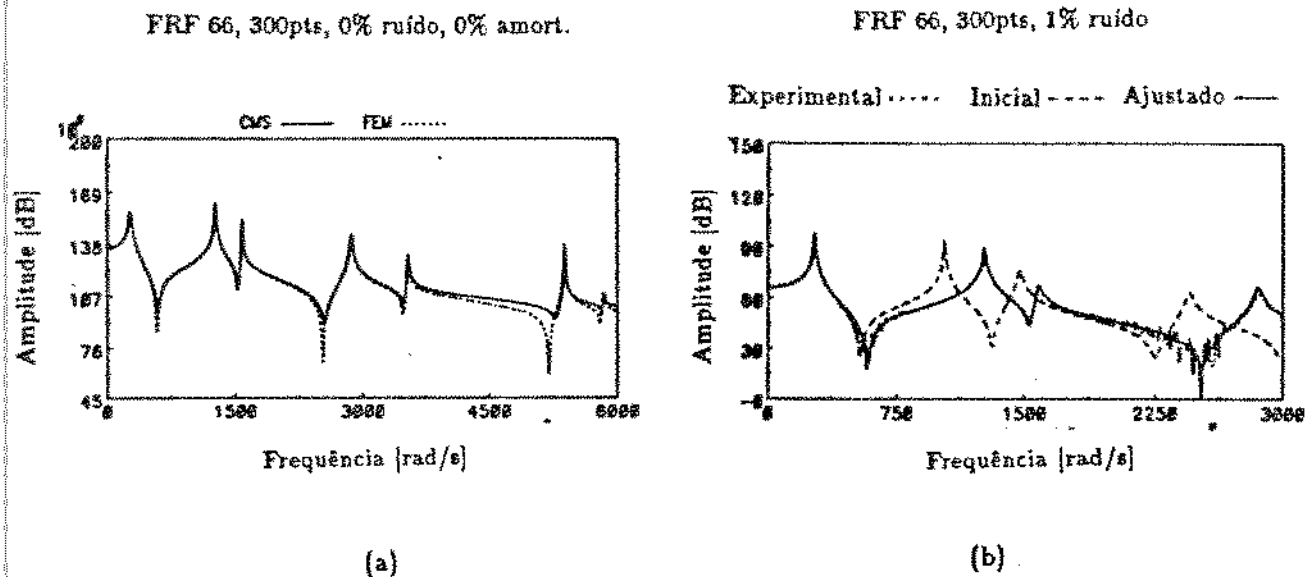


Figura 2: (a) FRF calculada com a base modal completa e por síntese dos modos dos componentes com a base modal truncada. (b) Ajuste das curvas no procedimento de ajuste de modelos.

A fim de testar a sensibilidade do procedimento de ajuste com relação aos erros experimentais, as FRF's simuladas foram poluídas com um ruído gaussiano adicionado a elas. A percentagem de ruído representa o quociente entre o valor rms do ruído total adicionado e o valor rms do sinal da resposta correspondente para a FRF. A tabela 1 mostra os resultados obtidos para diferentes níveis de ruído e diferentes faixas de frequência da FRF. A validação do modelo ajustado é feita comparando-se outras FRF's experimentais ou analíticas, as quais não tenham sido usadas no procedimento de ajuste.

FRF usada para ajustar o modelo	Faixa de Frequ. [rad/s]	Coefficiente da Mola [N/m]	Erro (%)	Erro (%) Estimado	No. de itera.
FRF 66 0% ruído	0-3000	K1 = 5.92E+5 K2 = 1.00E+5	1.29 0.10	0.47 0.14	4
FRF 66 1% ruído	0-3000	K1 = 5.97E+5 K2 = 0.99E+5	0.47 0.99	1.67 0.47	4
FRF 66 1% ruído	1000-2000	K1 = 18.5E+5 K2 = 0.54E+5	208.0 46.0	1935.0 378.0	10 interromp.
FRF 66 1% ruído	0-2000	K1 = 5.91E+5 K2 = 1.01E+5	1.55 0.70	1.14 0.53	5
FRF 99 1% ruído	0-1500	K1 = 2.22E+5 K2 = 1.10E+5	63.0 9.60	3.21 0.89	3

Tabela 1: Resultados de ajuste de modelos para diferentes pontos de medida faixas de frequência e níveis de ruído.

CONCLUSÃO

O ajuste das curvas das FRF's medidas por mínimos quadrados não-linear pode ser usado para ajustar modelos de estruturas. Neste artigo, o modelo matematico consiste de um modelo de síntese dos modos dos componentes amortecido, onde cada sub-estrutura é modelada por seus primeiros modos obtidos de um modelo de elementos finitos. Os parâmetros estimados no procedimento de ajuste são os coeficientes de rigidez e amortecimento das juntas mecânicas conectando as sub-estruturas. O procedimento proposto foi verificado usando-se FRF's simuladas com os parâmetros modais obtidos de um modelo de elementos finitos da estrutura montada. No exemplo tratado as juntas foram modeladas apenas por molas devido as limitações do código computacional de elementos finitos que foi usado. Neste caso mostrou-se que o truncamento da base modal das sub-estruturas não é o maior obstáculo.

REFERÊNCIAS

- [1] Eykhoff, P., *System Identification*. John Wiley & Sons, 1974.
- [2] Dos Santos, J.M.C.; Arruda, J.R.F., *Finite Element Model Updating Using Frequency Response Functions and Component Mode Synthesis*. *Proc. of 8th IMAC*. Kissimmee, USA, Jan. 1990, pp. 1195-1201.
- [3] Natke, H.G., *Updating Computational Models in the Frequency Domain Based on Measured Data: A Survey*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v.3, nº 1, 1988, pp.28-35.
- [4] Wolfer, M.A., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*. J. Wiley & Sons, New York, 1977.
- [5] Martin, K.F.; Ghlain, K.H., *System Prediction Using Damped Component Modes*. *Proc. Inst. Mechanical Engineers*, v.198, nº 16, 1988, pp.261-268.

- [6] Arruda, J.R.F.; Dos Santos, J.M.C., *Model Adjusting of Structures With Mechanical Joints Using Modal Synthesis*. Proc. of 7th Int. Modal Analysis Conference. Las Vegas, USA, Jan. 1989, pp. 850-856.
- [7] Beck, J.V.; Arnold, K.J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*. John Wiley & Sons, New York, 1977.

SUMMARY

This paper treats the problem of Finite Element Model Updating of structures consisting of substructures connected through joints. A damped component mode synthesis formulation is used to calculate the theoretical Frequency Response Functions and the FE model is updated by estimating the joint parameters with a non-linear least-squares curve-fit of measured FRFs. Simulation results for a system consisting of two beams connected through springs and dashpots are presented and the influence of the modal base truncation in the damped component mode synthesis is investigated.

Arruda, J.R.F., Santos, J.M.C., and Carneiro, S.H.S., *Experimental Estimation of Mechanical Joint Parameters Using Frequency Response Functions and Modal Parameters*. Proceedings of the 11th Int. Conference on Modal Analysis IMAC, SEM, Kissimmee, FL, USA, 1993, pp. 1502-1507.

EXPERIMENTAL ESTIMATION OF MECHANICAL JOINT PARAMETERS USING FREQUENCY RESPONSE FUNCTIONS AND MODAL PARAMETERS

José Roberto F. Arruda
José Maria C. Santos

Departamento de Mecânica Computacional
Universidade Estadual de Campinas
13081 Campinas, SP
Brasil

Sérgio Henrique S. Carneiro

Instituto de Aeronáutica e Espaço
Centro Técnico Aeroespacial
12225 São José dos Campos, SP
Brasil

ABSTRACT

Large structures often consist of substructures connected through mechanical joints, whose dynamic behavior is generally difficult to characterize. In previous publications, the authors have proposed and verified numerically a method to solve the problem of modeling this kind of structure. It consists of updating a component mode synthesis model by adjusting the stiffness and damping coefficients of the joints based on either experimental modal parameters or on measured Frequency Response Functions. In this paper, the applicability of the proposed method is investigated using an experimental example consisting of two beams connected by elastomeric mounts. The issues of mode synthesis with rigid-body modes, sensitivity computation, and convergence are discussed based on preliminary experimental results.

NOMENCLATURE

C_1, C_2	joint damping coefficients
$E(\{p\})$	total square error (cost function)
$\{F_A\}$	analytical dynamic functions (either FRFs or modal parameters)
$\{F_X\}$	experimental dynamic functions (corresponding to $\{F_A\}$)
f_r	natural frequency of mode r in Hz
$H_{i,j}$	FRF for excitation at node j and response at node i
K_1, K_2	joint stiffness coefficients
$\{p\}$	analytical model parameters
$\{p_k\}$	analytical model parameters values at the k th iteration
$[S]$	sensitivity matrix
α_r	complex-to-real ratio of mode $\{\psi_r\}$

Note: All other symbols appearing in this paper are defined in the *Notation for Modal Testing & Analysis* - Version 1 of June, 1992.

1 INTRODUCTION

Model updating methods may be roughly classified as global or local methods [1]. Methods of the first type generally consist of correcting the mass and/or the stiffness matrices in a global sense, so that they produce eigensolutions matching with experimentally identified modal parameters [2,3]. The adjusted system matrices are usually obtained by a straightforward, non-iterative way, but the results may lack in physical meaning. Practical interpretation of the adjusted matrices is often awkward. In the second type of method, the correction is centered on a few parameters, of limited spatial regions of the structure [4,5,6]. These regions may be chosen either by automatic localization methods [7] or by *a priori* knowledge of the model. Local adjusting methods allow immediate physical interpretation of the modifications, which is handy in practical applications.

One of the main sources of discrepancies between theoretical and experimental models is the poor knowledge of mechanical joint properties [8]. Stiffness and damping of the connections between substructures are hardly ever known with sufficient accuracy to generate reasonable dynamic models. This problem can be overcome when the behavior of the joints can be assumed linear in the neighborhood of a given operating condition.

The local model adjusting method used in this paper was developed to deal with this problem. It was proposed and verified numerically by the authors in previous publications [9,10,11]. In the proposed method, a damped component mode synthesis [12] method is used, assuming there is good confidence in the models of the individual substructures (*a priori* knowledge). The linearized stiffness and damping coefficients of the connecting joints are estimated by minimizing the weighted sum of squares of the differences between experimental and theoretical dynamic functions, e.g., Frequency Response Functions (FRFs) [9,10] and modal parameters [11].

This paper is a contribution to the discussion of the main problems of the practical application of inverse sensitivity model updating techniques, namely the poor convergence, the presence of rigid-body modes in the mode synthesis, and the excessive computational cost. The discussion is based on preliminary experimental results obtained for a simple structure consisting of two beams connected through elastomeric mounts.

2 NONLINEAR LEAST SQUARES

Most local updating methods use the inverse sensitivity approach, which corresponds mathematically to the nonlinear least-squares problem. Given the sensitivities of some dynamic function (which can be both calculated using the analytical model and obtained experimentally), $\{F_A\}$, with respect to a set of analytical model parameters, $\{p\}$, in matrix form:

$$[S] = \frac{\partial \{F_A\}}{\partial \{p\}}, \quad (1)$$

it is theoretically possible to obtain a correction of the parameter values from the difference between $\{F_A\}$ and the corresponding experimental values $\{F_X\}$. As $\{F_A\}$ is nonlinear with respect to the parameters $\{p\}$, this is an iterative process, which does not always converge. The corrected parameters at iteration $k+1$, $\{p_{k+1}\}$, are given relative to the values at iteration k by the expression:

$$\{p_{k+1}\} = \{p_k\} + [S]^+ (\{F_X\} - \{F_A\}). \quad (2)$$

In order to enhance the convergence of the inverse sensitivity method, it is necessary to introduce a one-dimensional search in the direction of $(\{p_{k+1}\} - \{p_k\})$. This line search seeks the minimization of the total squared error function, given by:

$$E(\{p\}) = (\{F_X\} - \{F_A\})^H (\{F_X\} - \{F_A\}), \quad (3)$$

using quadratic or cubic interpolation. The nonlinear least squares method can be further enhanced when there is some knowledge of the statistics of the errors present in the experimental data and the analytical model parameters, in which case it can be generalized into a Bayesian estimation [4].

Once the updating method is chosen, one is still left with the following questions: what dynamic functions to use and how to calculate them efficiently?; how to obtain the sensitivities in a computationally efficient way?; how to improve convergence?

3 COMPONENT MODE SYNTHESIS

In the iterative search of the optimal parameter values $\{p\}$ based on Eq. 2, it is important to minimize the computational cost, because the iterative search process involves calculating the dynamic responses tens, or even thousands of times. When the parameters to be ad-

justed are joint parameters, component mode synthesis can be used as an efficient way to compute the dynamic responses of the modified system.

In previous papers, the authors have shown in detail how to calculate modal parameters [11] and FRFs [10] using the Martin and Ghahai's Damped Component Mode Synthesis (DCMS) method. This is a free-interface synthesis method, which assumes viscous, non-proportional damping in the substructures and in the joints.

The substructure component modes, calculated using a Finite Element (FE) model, are usually real. When internal damping is taken into consideration, this is generally done through modal damping coefficients, which are specified according to the kind of structure, based on previous experience or identified experimentally. However, the DCMS technique requires that the double order, complex modal matrix $[\theta]$ be normalized so that:

$$[\theta]^T \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} [\theta] = [I]_{2N \times 2N}. \quad (4)$$

Therefore, given a real modal matrix $[\Phi]$, mass normalized so that:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]_{N \times N}, \quad (5)$$

it is necessary to build matrix $[\theta]$. Using the well-known structure of matrix $[\theta]$, it is easy to show that, in order to achieve the normalization of Eq. 4, it is necessary to make:

$$\{\psi\}_r = \left(\frac{1 + \zeta_r}{4\omega_r} \right)^{\frac{1}{2}} (\{\phi\}_r + i\alpha_r \{\phi\}_r), \quad (6)$$

where:

$$\alpha_r = \left(\frac{1 - \zeta_r}{1 + \zeta_r} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

Problems arise when the free-interface substructures have rigid-body modes. In this case, Eq. 6 cannot be applied because $\omega_r = 0$. To overcome this difficulty, the authors have found that it is possible to obtain good synthesis results using the residual, non-zero natural frequency values obtained using standard FE codes. When only exact rigid-body modes with zero natural frequency are available, one simple solution consists of contaminating the exact rigid-body mode with residual contributions of flexible modes, preferably higher-order modes, not included in the synthesis. The residual natural frequency then becomes:

$$\omega_r^2 = \frac{\{\phi_r\}^T [K] \{\phi_r\}}{\{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\}}. \quad (8)$$

Figure 1 shows a typical comparison of an FRF computed with the DCMS compared to the FE result obtained for the whole assembled structure. Results on Fig. 1 correspond to the example shown in Fig. 2, but without damping, neither in the substructures nor in the

joints, as the FE code used did not allow non-proportional damping. The joint stiffness coefficient values used in Fig. 1 were: $K_1 = K_2 = 1.0 \times 10^6$ N/m. The other physical parameters of the structure are given in Table 1.

4 SENSITIVITIES

The sensitivities were calculated using both the closed-form solution derived in previous publications [10,11] and finite differences (first difference). The closed-form solution was only used to validate the finite-difference approximation. The finite-difference is preferred because it has a much smaller cost when compared to the closed-form solution.

Special care is needed in the calculation of the sensitivities of FRFs using the DCMS when rigid-body modes are present. It was observed that the rigid-body mode parameters of the assembled structure become sensitive to the joint stiffness and damping coefficients, which is not physically meaningful. This problem affects the sensitivity matrix, introducing significant errors. To avoid that, the simple solution found by the authors consisted of holding the the assembled structure's rigid-body mode parameters fixed while perturbing the joint parameters to calculate the sensitivities. The calculation of the sensitivities of the modal parameters with respect to the joint parameters is not affected by this problem because the rigid-body mode parameters are not included in vector $\{F_x\}$.

Figure 3 shows FRF sensitivity plots comparing closed-form and finite difference results for the structure example of Fig. 2. The excellent agreement validates the finite-difference approximation.

5 CONVERGENCE PROBLEMS

It is well known that the nonlinear least-squares method is prone to poor convergence. The usual means to make it more robust consist of introducing a one-dimensional search. In the example shown in this paper, quadratic-interpolation line-search methods were used. The Box-Kanemasu [12] method was used in the model updating based on modal parameters and Coggin's method [12] was used with FRFs.

It was shown by one of the authors [13] that, when using FRFs, the logarithmic amplitude scale leads to more smooth cost functions, and, hence, improves convergence. Furthermore, in previous publications [14], this author have shown that there's no need for using the phase information when updating dynamic models using FRFs. The authors have also derived the expression of the sensitivity of FRF amplitudes in decibel scale [10]. However, it was observed that in the example treated here the FRF anti-resonances were strongly affected by

the inaccuracy of the rigid body modes calculated via DCMS. This may cause a poor estimation of the joint parameters.

To overcome this difficulty, the strategy used here consisted of starting the updating process with logarithmic scale FRFs. Once convergence was achieved, the process was restarted using linear amplitude scale FRFs. By doing this, better estimates of the joint parameters can be obtained, and the convergence improvement of the logarithmic scale FRFs is preserved.

6 EXPERIMENTAL RESULTS

A modal test was performed on the structure shown schematically in Fig. 2. 11 accelerometers, each weighing 17 grams, were attached at the nodes shown in this figure. The structure was driven by an electromagnetic shaker placed at node 4. The force signal was a periodic chirp. The response signals were acquired separately but simultaneously with the excitation force signal. FRF estimates were obtained with 10 averages, using the $\hat{H}_1$ estimator.

Table 2 shows the natural frequencies and modal damping coefficients identified using the Complex Exponential method [15]. The eigenvectors were identified using the circle-fit method. The physical parameters used in the FE model of the substructures are given in Table 1. A constant modal damping coefficient of $\zeta_i = 0.0005$ was introduced in all the modes of the two substructures using Eqs. 6 and 7 to take into account the material internal damping. Concentrated mass elements were introduced at the nodes to model the mass-load effect of the accelerometers.

The nonlinear least-squares updating procedure described previously was then used to try to estimate the joint linearized stiffness and damping coefficients: K_1 , K_2 , C_1 , and C_2 . As all the attempts to estimate the four parameters using either FRFs or modal parameters failed, i.e., no convergence was attained, a constraint – namely that the two joints were identical, i.e., $K_1 = K_2$, $C_1 = C_2$ – was introduced. Following that, it was possible to obtain convergence using the first identified eigenvalues. However, convergence was not attained when using measured FRFs directly. Only a small improvement in the agreement between experimental and predicted FRFs was possible. Furthermore, joint-parameter estimates were not consistent among the different cases treated.

Table 3 shows illustrative results obtained using FRFs. The different cases correspond to different sets of FRFs used in the updating procedure. Each FRF is denoted by $H_{i,j}$ where j is the excitation DOF and i the response DOF. Case 1: FRFs $H_{1,4}$, $H_{7,4}$, $H_{12,4}$, and $H_{18,4}$ were used. Case 2: FRFs $H_{4,4}$, $H_{11,4}$, and $H_{20,4}$ were used. All FRFs were measured with a frequency resolution of

1.0 Hz in the frequency range 0-512 Hz, but only the range 16-240 Hz was used in the updating. Figure 4 shows one of the experimental FRFs of case 1 compared to the analytical FRF calculated with the initial and updated models. Although no convergence was attained, an improvement of the curve-fit can be observed after a few iterations.

Table 4 shows illustrative results obtained using modal parameters. In case 1 only the eigenvalues of flexible modes 4, 5, and 6 were used, while in case 2 the eigenvalues of the first 6 flexible modes were used. The inclusion of eigenvectors have worsen the convergence problems, and no good results could be found using them. Several different initial guess values were tried, and the joint-parameter values converged systematically to the same values, with variations of less than 0.1%.

7 DISCUSSION

In this experimental example there are no exact joint-parameter values to compare with, as it was the case in the numerical examples of the previous publications. Actually, this is likely to occur in most real situations. Therefore, the quality of the updated model can only be verified by comparing predicted and measured results, preferably data which have not been used in the updating process. This condition is essential because comparing only data which was curve-fitted do not validate the updated model. As a matter of fact, provided there are enough parameters to adjust, it is always possible to obtain a reasonable fit in the process, but this does not necessarily mean that the updated model is good for dynamic response prediction. However, a good agreement between analytical and experimental data not used in the updating process is a strong evidence that a good dynamic model was obtained.

Figure 5 shows the comparison of a measured FRF, $H_{18,4}$, and the corresponding analytical FRF predicted using the DCMS model that was updated based on modal parameters (Table 4, case 2). The FRF was generated using all the DCMS model eigenvalues, not only the ones used in the updating process. Figure 6 shows the comparison of flexible mode shape 4 obtained experimentally with the analytical modes using both the initial and the updated models (Table 4, case 2). Finally, Table 5 shows the first 6 flexible-mode natural frequencies obtained experimentally compared to the analytical values calculated with the initial and updated DCMS models (Table 4, case 2).

The fact that the inclusion of eigenvectors have worsen the convergence was probably caused by the relatively poor precision of the identified modes. Another reason is possibly the fact that no prior updating of the models of the substructures was performed. It was assumed that the FE model of the beams was good enough, which is probably not the case. This agrees with the fact that the

updating failed when using FRFs, which depend upon the mode shapes as well as the eigenvalues.

8 CONCLUSION

It was shown how the nonlinear least squares parameter estimation method can be used to update dynamic models of large structures consisting of well-characterized substructures connected through poorly modeled mechanical joints. The updating consists in the adjustment of the joint linearized stiffness and damping coefficients based on experimental data, which can be modal parameters, FRFs, or any other dynamic function that can be both predicted with the analytical model and experimentally determined.

In previous publications, the authors have already validated the proposed method using numerically simulated data. In this paper, an experimental example of a freely suspended structure was used to illustrate the applicability of the method. To be able to treat the experimental example, some extensions of the previously proposed method were developed. The damped component mode synthesis method was extended to treat substructures with rigid-body modes. It was shown that approximations of the sensitivities with reasonably good accuracy can be obtained by finite differences at a lower computational cost.

9 ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are thankful to FAPESP, the Research Council of the State of São Paulo, Brazil, for the financial support.

10 REFERENCES

- [1] Imregun, M. and Visser, W.J., "A Review of Model Updating Techniques," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 23, No. 1, pp. 9-20, 1991.
- [2] Baruch, M., "Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests," *AIAA Journal*, November issue, pp. 1208-1210, 1978.
- [3] Kabe, A.M., "Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, pp. 1431-1436, 1985.
- [4] Natke, H.G., "Updating of computational models in the frequency domain based on measured data: A survey," *Probabilistic Engineers Mechanics*, Vol. 3, No. 1, pp. 28-35, 1988.
- [5] Wang, B.P. et al., "Reanalysis Techniques Used to Improve Local Uncertainties in Modal Analysis."

Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, Orlando, FL, U.S.A., pp. 389-402, 1985.

- [6] Lawrence, C. and Huckelbridge, A.A., "Characterization of Damped Structural Connections for Multi-Component Systems," *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, NV, U.S.A., pp. 71-78, 1989.
- [7] Zhang, Q. and Lallement, G., "Dominant Error Localization in a Finite Element Model of a Mechanical Structure," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 1, No. 2, pp. 141-149, 1987.
- [8] Wang, J. and Sas, P., "A Method for Identifying Parameters of Mechanical Joints," *Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, June issue, pp. 337-342, 1990.
- [9] Arruda, J.R.F. and Santos, J.M.C., "Model adjusting of structures with mechanical joints using modal synthesis," *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, U.S.A., pp. 850-856, January 30 - February 2, 1989.
- [10] Santos, J.M.C. and Arruda, J.R.F., "Finite element model updating using frequency response functions and component mode synthesis," *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, U.S.A., pp. 1195-1201, 1990.
- [11] Carneiro, S.H.S. and Arruda, J.R.F., "Updating mechanical joint properties based on experimentally determined modal parameters," *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, U.S.A., pp. 1169-1175, 1990.
- [12] Himmelblau, D.M., *Applied Nonlinear Programming*, New York: McGraw-Hill, 1972.
- [13] Arruda, J.R.F., "Objective Functions for the Non-linear Curve Fit of Frequency Response Functions," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 3, pp. 855-857, 1992.
- [14] Arruda, J.R.F. and Oliveira, N.V., "Frequency-Domain Methods for Structural Parameters Estimation," *Mécanique, Matériaux, Electricité*, No. 416, Mai-Juin, pp. 4-8, 1986.
- [15] Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*, London: Research Studies Press Ltd, 1984.

Table 1: Physical parameter values used in the FE model of the example structure in Fig. 2.

Description	Notation	Value
Length of beam α	l_α	1.0 m
Length of beam β	l_β	0.8 m
Young's module	E	2.07×10^{11} N/m ²
Poisson's coefficient	ν	0.3
Mass density	ρ	7.8×10^3 kg/m ³

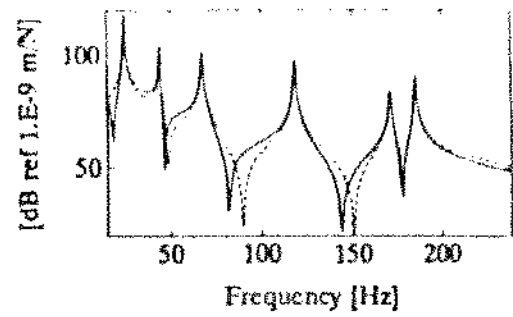


Fig. 1: Comparison of FRF $H_{12,4}$ obtained via DCMS and FE for the structure in Fig. 2. — FE, -- DCMS.

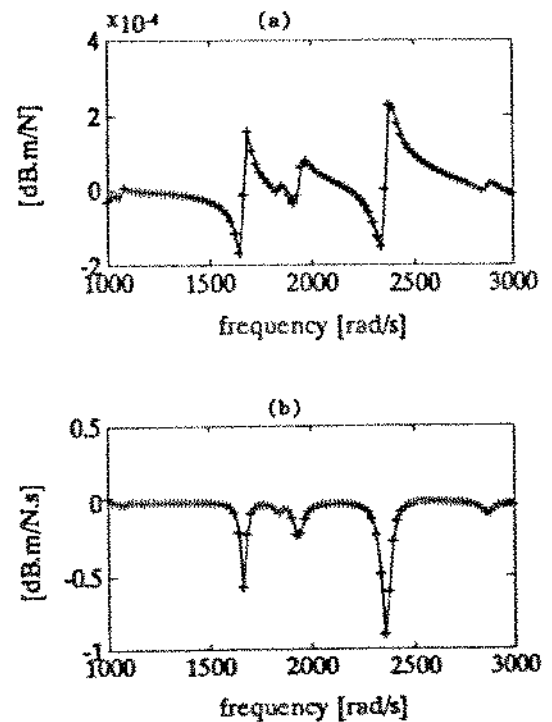


Fig. 3: Comparison of FRF sensitivities calculated by closed-form solution and by finite differences relative to: (a) stiffness K_1 , (b) damping C_1 for $H_{12,4}$. — Closed-form, ++ finite differences.

Table 3: Linearized joint stiffness and damping coefficients estimation results for model updating using FRFs.

Joint parameter	Initial guess	Case 1	Case 2
$K_1 = K_2$ [N/m]	1.0×10^6	4.429×10^6	6.336×10^6
$C_1 = C_2$ [Ns/m]	10.	2981.	3657.

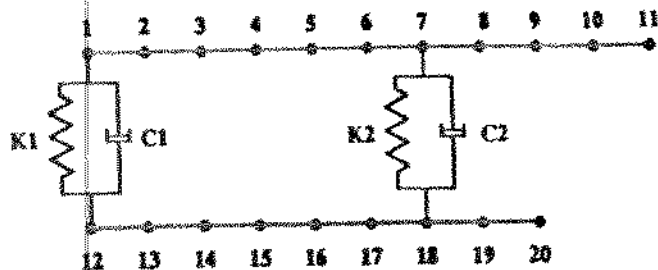


Fig. 2: Example structure indicating the nodes used in the FE model.

Table 2: Natural frequencies and damping coefficients of the first 6 flexible modes estimated using the Complex Exponential method.

mode No.	1	2	3	4	5	6
f_n [Hz]	23.67	42.00	63.62	109.90	159.72	191.27
ζ_n	0.0194	0.0058	0.0049	0.0035	0.0071	0.0055

Table 4: Linearized joint stiffness and damping coefficients estimation results for model updating using modal parameters.

Joint parameter	Initial guess	Case 1	Case 2
$K_1 = K_2$ [N/m]	1.0×10^8	1.977×10^6	1.876×10^6
$C_1 = C_2$ [Ns/m]	10.	236.	245.

Table 5: Comparison of natural frequencies and damping coefficients of the first 6 flexible modes obtained experimentally with the analytical values predicted using the initial DCMS model and using the updated model (Table 3, case 1).

mode No.	experimental [Hz]	analytical	
		initial [Hz]	updated [Hz]
1	23.67	22.88	23.31
2	42.00	40.19	41.84
3	63.62	54.15	64.61
4	109.90	94.31	113.32
5	159.72	120.70	166.29
6	191.27	161.13	189.65

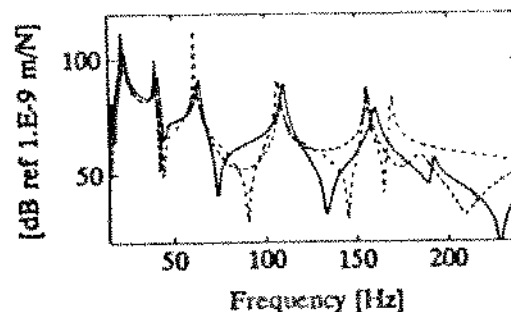


Fig. 4: FRF $H_{13,4}$ obtained experimentally compared with the analytical predictions using the initial DCMS model and the updated model (Table 3, case 1). — Measured, --- initial analytical, -.- updated analytical.

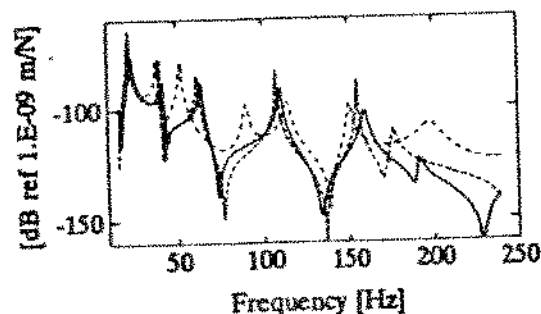


Fig. 5: Validation of the model updated using modal parameters (Table 4, case 2) by comparing experimental and predicted FRFs, $H_{13,4}$. — Measured, --- initial analytical, -.- updated analytical.

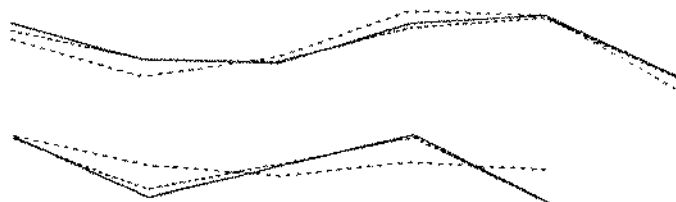


Fig. 6: Comparison of analytical and experimental mode shape (mode 4) before and after the model updating using experimental eigenvalues (Table 4, case 1). — Measured, --- initial analytical, -.- updated analytical.