

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL

DA TESE DEFENDIDA POR Jorge Roberto

Pimentel E APROVADA PELA

COMISSÃO JULGADORA EM

  
ORIENTADOR

**Contribuição ao Estudo da Mudança  
de Fase em Meios Porosos Planos  
Saturados com Líquido**

Autor: **Jorge Roberto Pimentel**

Orientador: **Kamal Abdel Radi Ismail**

025/95

UNIDADE	BC
N.º CHAVAS	A:
	T/unicamp
	P649c
V	E
	25548
	433/95
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
P. CO	R\$ 11,00
DATA	22/09/95
N.º CPD	

CM-00076729-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P649c

Pimentel, Jorge Roberto

Contribuição ao estudo da mudança de fase em meios porosos planos saturados com líquido / Jorge Roberto Pimentel.--Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Solidificação. 2. \*Meios porosos. I. Ismail, Kamal Abdel Radi. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS**

# **Contribuição ao Estudo da Mudança de Fase em Meios Porosos Planos Saturados com Líquido**

Autor: **Jorge Roberto Pimentel**

Orientador: **Kamal Abdel Radi Ismail**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Tese de doutorado apresentada à Comissão de Pós Graduação da  
Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Mecânica

Campinas, 1995  
S.P. - Brasil

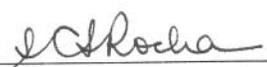
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS

TESE DE DOUTORADO

# Contribuição ao Estudo da Mudança de Fase em Meios Porosos Planos Saturados com Líquido

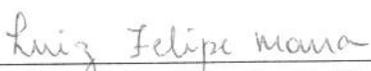
Autor: **Jorge Roberto Pimentel**  
Orientador: **Kamal Abdel Radi Ismail**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Kamal A.R. Ismail, Presidente**  
Instituição: FEM - UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
**Profa. Dra. Sandra Cristina S. Rocha**  
Instituição: FEQ - UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Pio Caetano Lobo**  
Instituição: UFPb - João Pessoa

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Mauricio Araujo Zanardi**  
Instituição: UNESP - Guaratinguetá

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura**  
Instituição: FEM - UNICAMP

Campinas, 28 de junho de 1995

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus pais,  
à minha esposa e minha filha.

## **Agradecimentos**

Agradeço às seguintes pessoas e entidades:

Ao Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail pela orientação, amizade e incentivo, que foram fundamentais para a elaboração e desenvolvimento deste trabalho.

Ao Instituto de Geociências e ao Departamento de Física da UNESP de Rio Claro, pelo apoio e facilidades concedidas.

À CAPES e à UNESP, pelas ajudas financeiras.

Aos amigos que incentivaram e auxiliaram neste trabalho, em especial à José Roberto Campanha e Vicente Luiz Scalon.

À equipe técnica do Departamentos de Térmica e Fluidos da UNICAMP e de Física da UNESP, representada por Setembrino Vaz e Silva Neto e Vitor Hélio Zumpano, pelos serviços prestados.

## Sumário

<b>Capítulo 1 - Introdução</b>	01
<b>Capítulo 2 - Revisão da Literatura</b>	04
<b>Capítulo 3 - Análise Teórica</b>	
3.1 - Estabelecimento do problema	12
3.2 - Equações diferenciais e simplificações	13
3.2.1 - Região sólida	14
3.2.2 - Região líquida	15
3.2.3 - Interface móvel	16
3.2.4 - Propriedades efetivas	17
3.3 - Solução analítica aproximada	18
3.3.1 - Adimensionalização das equações	19
3.3.2 - Solução para o contorno superior termicamente isolado	21
3.3.3 - Limite de validade da solução	24
3.3.4 - Influência da porosidade e do grau da distribuição polinomial de temperatura nos parâmetros $\lambda$ e $\beta$	24
3.3.5 - Influência das propriedades termofísicas na localização da interface e distribuição de temperaturas	29
3.4 - Solução numérica	33
3.4.1 - Grade de pontos nodais. Formulação explícita e implícita	34
3.4.2 - Equações discretizadas e algoritmo numérico	37
3.4.3 - Condição de convecção na superfície livre	40
3.4.4 - Otimização do número de pontos da malha (N) e do degrau de tempo ( $\Delta t$ )	42
3.4.5 - Erros introduzidos pelo método de diferenças finitas. Estabilidade da solução	46
3.4.5.1 - Erros de truncamento	47

3.4.5.2 - Erros de arredondamento	47
3.4.5.3 - Estabilidade da solução	48
3.4.6 - Vantagens e limitações do modelo numérico	48
3.5 - Simulações numéricas	49
3.5.1 - Convecção natural, forçada e isolamento térmico	50
3.5.2 - Influência da temperatura ambiente na convecção forçada	53
3.5.2.1 - Ambiente aquecido	53
3.5.2.2 - Ambiente resfriado	56
3.5.3 - Influência da porosidade	58
3.5.4 - Influência das propriedades termofísicas	59
<b>Capítulo 4 - Análise experimental</b>	63
4.1 - Montagem experimental	63
4.1.1 - Célula de medida	63
4.1.2 - Sistema de refrigeração	65
4.1.3 - Temperatura subitamente imposta	66
4.2 - Meios porosos utilizados	68
4.2.1 - Medida das porosidades	69
4.3 - Erros experimentais	70
4.3.1 - Tipos de erros	70
4.3.2 - Erros sistemáticos das medidas realizadas	70
4.4 - Resultados experimentais	72
4.4.1 - Contorno superior isolado termicamente	73
4.4.2 - Contorno superior sujeito à convecção	78
4.5 - Comparação com as previsões do modelo analítico	81
4.6 - Comparação com as previsões do modelo numérico	82
4.6.1 - Contorno superior isolado termicamente	84
4.6.2 - Contorno superior sujeito à convecção	88
4.6.3 - Meio poroso bom condutor térmico	90
<b>Capítulo 5 - Conclusões</b>	92
5.1 - Modelo analítico	92
5.2 - Modelo numérico	94

5.3 - Resultados experimentais	96
5.4 - Sugestões para próximos trabalhos	97
<b>Referências bibliográficas</b>	98
<b>Apêndice I - Aproximações para as derivadas e obtenção dos coeficientes do algoritmo TDMA</b>	102
I.1 - Pontos nodais afastados da interface sólido-líquido e dos contornos da placa	102
I.1.1 - Pontos até (q-1) - região de sólido	104
I.1.2 - Pontos nodais além de (q+1) - região de líquido	105
I.2 - Pontos nodais próximos da interface sólido-líquido	106
I.2.1 - Ponto nodal (q-1)	106
I.2.2 - Ponto nodal (q+1)	108
I.2.3 - Ponto nodal q	109
I.2.3.a - Ponto q na região líquida ( $\xi < 0$ )	110
I.2.3.b - Ponto q na região sólida ( $\xi > 0$ )	111
I.3 - Condição de continuidade na interface sólido-líquido	112
I.3.1 - Interface abaixo do ponto q ( $\xi < 0$ )	113
I.3.2 - Interface acima do ponto q ( $\xi > 0$ )	114
I.4 - Condições de contorno	115
I.4.1 - Contorno inferior : ponto $i = 0$	115
I.4.2 - Contorno superior : ponto $i = N$	115
I.4.2.a - Ponto nodal (N-1) no líquido e $\xi < 0$	116
I.4.2.b - Ponto nodal (N-1) no sólido e $\xi > 0$	118
I.4.2.c - Ponto nodal (N-1) no sólido e $\xi < 0$	119
<b>Apêndice II - Programa fonte em linguagem C para resolução do algoritmo TDMA</b>	121

## Listas de Figuras

3.1 - Geometria e variáveis utilizadas na formulação do problema.	13
3.2 - Distribuição típica de temperaturas numa amostra finita. Localização da interface $S(\tau)$ e da camada limite térmica $\delta(\tau)$ .	19
3.3 - Variação do parâmetro $\lambda$ , em função do grau $n$ de aproximação do perfil de temperatura e da porosidade.	26
3.4 - Variação do parâmetro $\beta$ , em função do grau $n$ de aproximação do perfil de temperatura e da porosidade.	27
3.5 - Variação da temperatura adimensional do sólido em função da porosidade, no instante $\tau = 0,020$ e na posição $\chi = 0,015$ .	28
3.6 - Variação da temperatura adimensional do líquido em função da porosidade, no instante $\tau = 0,020$ e na posição $\chi = 0,005$ .	28
3.7 - Localização da interface em função da porosidade, numa placa de PVC, no instante $t = 1\ 000$ s.	30
3.8 - Localização da interface em função da porosidade, numa placa de duralumínio, no instante $t = 1\ 000$ s.	30
3.9 - Variação da temperatura adimensional na região solidificada, em função da porosidade, em placas de PVC e duralumínio, após 600 s.	32
3.10 - Variação da temperatura adimensional na região líquida, em função da porosidade, numa placa de PVC, após 600 s.	33
3.11 - Grades de pontos nodais representando a noção dos métodos numéricos explícito (a) e implícito (b).	35
3.12 - Esquema da malha unidimensional de pontos nodais utilizada.	39
3.13 - Influência do número de pontos da malha computacional na localização da interface, numa placa porosa de areia, com $\varepsilon = 0,40$ .	43
3.14 - Influência do número de pontos da malha computacional na localização da	

interface, numa placa porosa de duralumínio, com $\varepsilon = 0,40$ .	44
3.15 - Influência do degrau de tempo na posição da interface, numa placa porosa de areia, com $\varepsilon = 0,40$ .	45
3.16 - Influência do degrau de tempo na posição da interface, numa placa porosa de duralumínio, com $\varepsilon = 0,40$ .	46
3.17 - Influência do coeficiente de película na posição da interface, numa placa de areia com $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Temperatura ambiente constante.	51
3.18 - Influência do coeficiente de película na distribuição de temperaturas ao longo da placa de areia com $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Temperatura ambiente constante.	52
3.19- Influência da temperatura ambiente na posição da interface, numa placa de areia com $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Ambiente aquecido e contorno superior submetido à convecção forçada.	54
3.20- Influência da temperatura ambiente nas temperaturas numa placa de areia com $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Ambiente aquecido e contorno superior submetido à convecção forçada.	55
3.21- Influência da temperatura ambiente na posição da interface numa placa de areia com $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Ambiente resfriado e contorno superior submetido à convecção forçada.	56
3.22- Influência da temperatura superficial nas temperaturas transversais numa placa de areia, com $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Ambiente resfriado e contorno superior submetido à convecção forçada.	57
3.23- Distribuição de temperaturas em placas de areia com diferentes porosidades, após 7 200 s. Temperatura ambiente constante e contorno superior submetido à convecção forçada.	59
3.24 - Posição da interface, em função da porosidade, em placas de areia e PVC, até 300 segundos. Contorno superior isolado.	60
3.25 -Posição da interface, em função da porosidade, em placas de duralumínio e aço-carbono, até 300 s. Contorno superior isolado.	61
4.1- Corte longitudinal da célula de medida. Disposição dos termopares.	63
4.2 - Curva de calibração para um dos termopares utilizados.	65
4.3 - Esquema do sistema de refrigeração utilizado.	65
4.4 - Variação da temperatura do refrigerante no tanque de armazenamento, durante uma das medidas realizadas.	67

- 4.5 - Variação da temperatura no contorno inferior da célula de medida, para uma das medidas realizadas. 68
- 4.6 - Posições da interface em amostras de esferas de vidro com  $\epsilon = 0,40$  e submetidas à diferentes temperaturas subitamente impostas, até 7 200 s. Contorno superior isolado. 74
- 4.7 - Distribuições transversais das temperaturas em uma amostra de esferas de vidro com  $\epsilon = 0,40$  e sujeita a diferentes temperaturas subitamente impostas, após 7 200 s. Contorno superior isolado. 74
- 4.8 - Posições da interface em amostras de esferas de vidro com diferentes porosidades, durante 7 200 s. Contorno superior isolado. 75
- 4.9 - Distribuições transversais das temperaturas em amostras de esferas de vidro com diferentes porosidades, após 7 200 s. Contorno superior isolado. 76
- 4.10- Distribuições transversais das temperaturas em amostras com porosidades próximas de 0,40 e apresentando diferentes propriedades termofísicas, após 3 600 s. Contorno superior isolado. 77
- 4.11- Distribuições transversais das temperaturas em amostras de líquido ( $\epsilon = 1$ ), após 7 200 s. Contorno superior isolado ou sujeito à convecção. 78
- 4.12 - Distribuições transversais das temperaturas em amostras de esferas de vidro com  $\epsilon = 0,47$ , após 7 200 s. Contorno superior isolado ou sujeito à convecção. 79
- 4.13- Distribuições transversais das temperaturas em amostras de duralumínio com  $\epsilon = 0,42$ , após 3 600 s. Contorno superior isolado ou submetido à convecção. 80
- 4.14 - Resultados analítico e experimental para as temperaturas numa amostra somente de água, após 3 600 s. Contorno superior isolado. 81
- 4.15 - Resultados analítico e experimental para as temperaturas através de uma amostra de esferas de vidro, com porosidade igual a 0,40, após 1 800 s. Contorno superior isolado. 82
- 4.16- Resultados experimental, analítico e numérico para a distribuição de temperaturas, numa amostra de líquido ( $\epsilon = 1$ ), após 3 600 s. Contorno superior isolado. 83
- 4.17 - Resultados experimental, analítico e numérico para a distribuição de temperaturas, numa amostra de esferas de vidro com  $\epsilon = 0,40$ , após 1 800 s. Contorno superior isolado. 83
- 4.18 - Posições numérica e experimental da interface numa amostra de líquido

( $\varepsilon = 1$ ), durante 7 200 s. Contorno superior isolado.	85
4.19 - Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra de líquido ( $\varepsilon = 1$ ), após 7 200 s. Contorno superior isolado.	85
4.20 - Posições numérica e experimental da interface numa amostra de PVC com $\varepsilon = 0,43$ , até 7 200 s. Contorno superior isolado.	86
4.21- Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra de PVC com $\varepsilon = 0,43$ , após 3 600 s. Contorno superior isolado.	87
4.22 - Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra com $\varepsilon = 1$ , após 3 600 s. Contorno superior submetido à convecção	89
4.23- Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra de esferas de vidro com $\varepsilon = 0,47$ , após 3 600 s. Contorno superior submetido à convecção.	89
4.24 - Posições numérica e experimental da interface numa amostra de aço-carbono com $\varepsilon = 0,69$ , durante 3 600 s. Contorno superior isolado.	90
4.25 - Temperaturas transversais numérica e experimental numa amostra de aço-carbono com $\varepsilon = 0,69$ , após 3 600 s. Contorno superior isolado.	91
I.1 - Nomenclatura nas regiões de sólido e líquido, para pontos afastados da interface e dos contornos.	102
I.2 - Nomenclatura para os pontos nodais nas proximidades da interface sólido-líquido.	106
I.3 - Nomenclatura para o ponto nodal q situado (a) no líquido e (b) no sólido.	109
I.4 - Nomenclatura para as situações em que a interface está (a) abaixo do ponto q e (b) acima dele.	112
I.5 - Pontos nodais e nomenclatura no contorno superior, enquanto a interface sólido-líquido não atingiu o penúltimo ponto nodal.	116
I.6 - Pontos nodais e nomenclatura quando a interface está próxima do último ponto nodal e $\xi > 0$ .	118
I.7 - Pontos nodais e nomenclatura quando a interface está próxima do último ponto nodal e $\xi < 0$ .	119

**Listas de Tabelas**

3.1 Propriedades termofísicas para água, gelo, vidro, areia, PVC e duralumínio.	25
3.2 Valores das propriedades termofísicas para o aço-carbono.	60
4.1 Dimensões características e porosidades dos materiais utilizados.	69

## Nomenclatura

### Latinas

<b>d</b> - espessura da amostra	[m]
<b>Nu<sub>x</sub></b> - número de Nusselt local = $\overline{h_{cx}} x / k$	[adimensional]
<b>Re<sub>x</sub></b> - número de Reynoldas local = $u_x \rho x / \mu$	[adimensional]
<b>Pr</b> - número de Prandt = $C_p \mu / k$	[adimensional]
<b>Ste</b> - número de Stefan = $C_p S (T_m - T_o) / L$	[adimensional]
$\overline{h_{cx}}$ - coeficiente de película de transferência de calor	[W/m <sup>2</sup> .°C]
<b>k</b> - condutividade térmica do material	[W/m.°C]
<b>C<sub>p</sub></b> - calor específico, à pressão constante	[J/Kg.°C]
<b>L</b> - calor latente de solidificação	[J/Kg]
<b>N</b> - número de pontos nodais da malha computacional	[adimensional]
<b>P</b> - pressão, na equação 3.3	[N/m <sup>2</sup> ]
<b>P</b> - período em que ocorrem variações na temperatura ambiente	[s]
<b>q<sub>r</sub></b> - fluxo de calor radiante	[W/m <sup>2</sup> ]
<b>q<sub>g</sub></b> - fluxo de calor liberado	[W/m <sup>2</sup> ]
<b>q<sub>c</sub></b> - fluxo de calor convectivo	[W/m <sup>2</sup> ]
<b>q<sub>k</sub></b> - fluxo de calor condutivo	[W/m <sup>2</sup> ]
<b>S</b> - posição da interface sólido-líquido	[m]
<b>T</b> - temperatura	[°C]
<b>u</b> - componente da velocidade na direção x	[m/s]
<b>u<sub>∞</sub></b> - velocidade no escoamento livre	[m/s]
<b>V</b> - volume	[m <sup>3</sup> ]
<b>x</b> - coordenada de posição	[m]
<b>t</b> - tempo	[s]

**Gregas**

$\delta$ - espessura da camada térmica	[m]
$\rho$ - densidade do material	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\alpha$ - difusividade térmica do material = $k / \rho.C_p$	[m <sup>2</sup> /s]
$\tau$ - tempo adimensionalizado = $\alpha_s.t / b$	
$\chi$ - posição adimensionalizada = $x/b$	
$\mu$ - viscosidade dinâmica	[Kg/ms]
$\phi_\mu$ - função dissipação	
$\theta$ - temperatura adimensional = $(T - T_O) / (T_i - T_O)$ - método analítico	
$\theta$ - temperatura adimensional = $T - T_F / T_F$ - método numérico	
$\lambda$ - parâmetro adimensional, definido na equação 3.42	
$\beta$ - parâmetro adimensional, definido na equação 3.41	
$\xi$ - constate de valor compreendido entre -0,5 e +0,5	
$\gamma$ - propriedade efetiva genérica, definida na equação 3.20	

**Subscritos**

<b>A</b> - ambiente
<b>S</b> - sólido
<b>L</b> - líquido
<b>MP</b> - matriz porosa
<b>T</b> - total ( sólido + líquido)
<b>c</b> - convecção
<b>i</b> - inicial
<b>i</b> - posição genérica dos pontos nodais
<b>m</b> - solidificação / interface
<b>o</b> - superfície subitamente resfriada
<b>x</b> - local

## Superescritos

\* - propriedade efetiva, obtida de acordo com a equação 3.20

**n** - tempo atual

**(n+1)** - tempo futuro

## Abreviações

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}$  = derivada total ou substantiva

$\beta = -\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$  = coeficiente de dilatação térmica, na equação 3.3 [°C<sup>-1</sup>]

## Siglas

**CAPES** - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

**DETF** - Departamento de Engenharia Térmica e Fluidos

**LHTES** - Latent Heat of Fusion Thermal Energy Storage

**PCM** - Phase Change Material

**TDMA** - TriDiagonal-Matrix Algorithm

**UNESP** - Universidade Estadual Paulista

**UNICAMP** - Universidade Estadual de Campinas

## Resumo

PIMENTEL, J.R., *Contribuição ao Estudo da Mudança de Fase em Meios Porosos Planos Saturados com Líquido*, 129p., Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

A solidificação em meios porosos saturados com líquido apresenta muito interesse, sendo muitas as aplicações práticas existentes, por exemplo na indústria e agricultura. Este trabalho foi iniciado com o propósito de obter um melhor entendimento do problema e verificar a influência de vários parâmetros associados com o mesmo. Ele foi dividido em duas partes: modelamento e solução numérica e verificação experimental da validade do modelo e das hipóteses adotadas. Adaptou-se um modelo analítico conhecido, aplicável à uma única substância pura e sob condições de contorno idealizadas, introduzindo-se o conceito de propriedades térmicas efetivas. Os resultados foram comparados com medidas experimentais, mostrando concordância satisfatória. Com o objetivo de analisar situações e condições de contorno reais, o mesmo problema foi formulado e resolvido numericamente, comparando-se os resultados obtidos com as previsões analíticas e com valores experimentais. Foram feitas várias simulações, para condições de contorno de isolamento, convecção e temperatura ambiente variável, empregando-se diferentes materiais sólidos e meios com porosidades variadas. As comparações com os resultados experimentais indicaram boa concordância, exceto quando foram usados materiais porosos altamente condutores.

### *Palavras Chave*

Solidificação. Meios porosos.

## Abstract

PIMENTEL, J.R., *Contribution to the study of phase change in plane saturated porous medium, saturated with liquid*, 129p., Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

The problem of solidification in porous medium saturated with liquid is very interesting and has many practical implications in industry, agriculture etc. This study was initiated in order to have better understanding of the problem and verify the influence of the various parameters associated with the problem. The study was divided into two parts; modeling and numerical solution of the problem and experimental verification of the validity of the adopted model and the assumptions. In this study an available analytical model for pure and unique substance, under idealized boundary conditions was adapted to handle the present problem using the concept of effective thermal properties. The results were compared with experimental measurements and the agreement was found to be satisfactory. In order to treat real situations under real boundary conditions, the problem was formulated and the resulting equations with different boundary conditions were solved numerically. The obtained results were compared with the analytical predictions and also with experiments. Various simulations were realized including insulated and convective boundary conditions, variable ambiental temperature and different solid materials with different porosities. Comparison with the experiments indicated good agreement except for high conducting porous media.

### *Key Words*

Solidification. Porous Media.

## Capítulo 1

### Introdução

Processos de transferência de calor com mudança de fase em meios porosos estão presentes em uma variedade de sistemas naturais e de engenharia. A mudança de fase pode envolver um líquido e um sólido, um líquido e um gás ou mesmo diferentes líquidos. Em algumas situações mais complexas, pode haver a ocorrência simultânea da transferência de calor, fluxo de fluidos e transporte de material. As condições de contorno a que esses problemas estão submetidos envolvem desde isolamento térmico, até temperaturas variáveis. Podem considerar, também, a presença de convecção, radiação ou de um fluxo de calor. Como exemplos de situações, que tem sido descritas e estudadas na literatura temos:

- o ciclo de derretimento e de congelamento das camadas superficiais do gelo permanente, existente em algumas regiões do hemisfério norte, que interferem no escoamento de água através do solo e exigem cuidados especiais na implantação de projetos de engenharia;
- o congelamento do solo nas regiões em que há ocorrência de baixas temperaturas, afetando o desenvolvimento de pastagens e a produção de alimentos;
- a fase de solidificação dendrítica, presente no crescimento de rochas ígneas, metais e cristais semicondutores, durante a qual o material pode ser modelado como um meio poroso;
- problemas relacionados à ecologia, proteção ambiental e hidrologia, tais como a infiltração e o movimento de resíduos tóxicos e pesticidas no solo;
- o congelamento artificial da água presente no solo, como forma de barrar a penetração desta, nas construções de túneis e em mineração;
- o congelamento industrial e doméstico de alimentos, permitindo sua estocagem e armazenamento por longos períodos;
- aplicações em criocirurgia e criopreservação, onde se requer controle sobre a solidificação de tecidos biológicos, de modo a assegurar a sobrevivência das células, possibilitando sua posterior utilização;

- o desenvolvimento de sistemas armazenadores da energia térmica (LHTES), que utilizam materiais de mudança de fase (PCM), juntamente com materiais de elevada condutividade térmica, com a finalidade de obter temperaturas e taxas de transferência de calor adequadas.

Todas elas são caracterizadas pela presença de uma interface que muda de posição no transcorrer do processo, à medida em que o calor latente é absorvido ou liberado. Essa interface separa regiões com diferentes propriedades termofísicas e pode tanto ser estreita e bem definida, quando no processo estão envolvidas apenas substâncias puras e a mudança de fase acontece numa temperatura característica, quanto constituir-se numa região mais larga, no caso em que há ligas ou misturas de materiais e a mudança de fase ocorre numa faixa de temperaturas.

A presença da interface móvel torna esses problemas matematicamente não lineares, envolvendo um contorno cuja posição não é inicialmente conhecida e só é obtida com a solução final. Isso limita o número de casos para os quais existem soluções analíticas, exatas ou aproximadas e tem estimulado o desenvolvimento e aplicação de variados métodos numéricos.

A existência de um fluxo de calor convectivo através da região de líquido, devido à gradientes de temperatura ou de concentração de solutos, aumenta o grau de complexidade do problema. Este fluxo tem influência no formato da interface e na sua velocidade de crescimento. Alguns trabalhos relacionados com a solidificação em meios porosos saturados, consideram a presença desses efeitos convectivos juntamente com o mecanismo de condução. Em outras situações, a utilização de um modelo puramente condutivo diminui a complexidade matemática, sem comprometer muito a exatidão dos resultados.

Apesar das muitas aplicações para a mudança de fase em meios porosos a maior parte dos trabalhos existentes analisa a condensação ou a evaporação e pouca atenção tem sido dada para os processos de solidificação ou fusão. Não existe um estudo abrangente que estabeleça a influência de variáveis como a porosidade, propriedades termofísicas e condições de contorno, no desempenho desses processos.

Por ser de grande interesse compreender os mecanismos atuantes e verificar a influência das variáveis mais relevantes no processo, a solidificação em meios porosos planos, finitos e saturados, foi estudada teórica e experimentalmente, usando-se de um modelo unidimensional, puramente condutivo, no qual admitiram-se condições de contorno tanto de temperatura quanto de convecção. As previsões teóricas foram comparadas com resultados experimentais, obtidos usando-se uma montagem com a qual foram simuladas diferentes condições para o problema.

## Capítulo 2

### Revisão da Literatura

Embora tenham muito interesse prático, o número de problemas de mudança de fase que apresentam soluções exatas é limitado, em função da não linearidade matemática que os caracteriza. Na sua quase totalidade, restringem-se à situações idealizadas envolvendo regiões infinitas ou semi-infinitas e sujeitas à condições iniciais e de contorno não muito complexas. Quando soluções exatas não são possíveis, vários métodos aproximados semi-analíticos ou numéricos, têm sido utilizados, conforme ÖZISIK (1980).

A primeira solução analítica para um problema de solidificação é atribuída à LAMÉ & CLAPEYRON (1831). Seu trabalho teve origem no interesse de calcular a espessura da camada de sólido formada num líquido, devido à ação constante de baixa temperatura superficial. Supondo a existência de uma região semi-infinita de líquido, toda ela à temperatura de solidificação, usaram a técnica de similaridade (que consiste em expressar tanto as equações diferenciais quanto as condições de contorno em termos de uma única variável independente), para resolver a equação diferencial associada ao problema. Mostraram que a espessura da interface sólido-líquido é proporcional à raiz quadrada do tempo sem ter, entretanto, determinado o valor da constante de proporcionalidade.

A solução exata mais geral para esse mesmo problema, segundo RIEMANN e WEBER (1912), deve ser creditada à FRANZ NEUMANN que divulgou seus resultados por volta de 1860, em Königsberg, sem que tivessem sido publicados. Neumann considerou uma região semi-infinita de líquido, inicialmente a uma temperatura constante qualquer e que subitamente tivesse sua temperatura superficial diminuída e mantida num valor menor que a temperatura de solidificação. Admitindo que o calor era transferido somente por condução e assumindo que a camada sólida formada crescesse conforme a previsão de Lamé e Clapeyron, Neumann mostrou

que a função erro era solução para o problema, obtendo expressões para as temperaturas das regiões de sólido e líquido e para a localização da interface, em qualquer instante.

Importante contribuição na área de mudança de fase, foi dada por STEFAN (1891), estudando o crescimento de gelo polar. Supos um meio líquido semi-infinito, inicialmente à temperatura de congelamento (problema de uma única fase) e usando o método de similaridade obteve uma solução aproximada, semelhante àquela atribuída à Neumann. Embora a solução de Neumann seja mais geral que a de Stefan, por ter sido seu trabalho o primeiro publicado sobre o assunto, é comum referir-se aos problemas de condução com mudança de fase, como problemas de Stefan. Devido à sua contribuição na área de mudança de fase, atribuiu-se a denominação número de Stefan ao parâmetro adimensional que representa a razão entre o valor do calor sensível e do calor latente de mudança de fase da substância considerada.

A solidificação em amostras com espessura finita foi primeiramente resolvida de forma exata por RUOFF (1958), considerando a existência de somente uma fase no processo. Supos uma amostra líquida, inicialmente à temperatura de solidificação, com a temperatura num dos contornos subitamente diminuída abaixo da temperatura de congelamento, enquanto que no outro era mantida constante. Aplicando a técnica da similaridade, obteve expressões para a temperatura na região de sólido formada e para a profundidade da interface sólido-líquido.

CHO & SUNDERLAND (1969), resolveram o mesmo problema, porém considerando a presença de duas fases e supondo que a temperatura inicial da amostra fosse diferente da temperatura de solidificação. Nesse caso não é possível obter-se uma solução exata e seus resultados são aproximados. Na região de sólido admitiram válida a distribuição de temperatura obtida por Neumann. Para a região de líquido, aplicaram o método integral utilizado por GOODMAN (1958, 1961). Assumiram uma distribuição polinomial de temperaturas, satisfazendo as condições de contorno do problema, para resolver a equação integral de balanço de calor e obtiveram expressões para temperatura do líquido e localização da interface com o tempo. Esse mesmo problema foi posteriormente analisado por GUTMAN (1987), usando a técnica de perturbação para obter as distribuições de temperaturas e posicionamento da interface sólido-líquido.

O efeito convectivo durante a solidificação, devido à diferentes densidades das fases líquida e sólida, foi analisado analiticamente por CARSLAW & JAEGER (1959) e CRANK (1975), usando a técnica de similaridade e por LUNARDINI (1983), usando o método da integral de balanço de calor. Obtiveram soluções aproximadas para o problema de Neumann, mostrando que o efeito convectivo é importante somente quando a diferença entre as densidades for grande.

A possibilidade de outras propriedades variarem com a temperatura, durante a mudança de fase, foi considerada entre outros por CHO & SUNDERLAND (1974) que analisaram o problema de Neumann admitindo que a condutividade térmica pudesse variar linearmente com a temperatura. Verificaram que o efeito é mais importante quando o número de Stefan é grande. OLIVER & SUNDERLAND (1987) estudaram o mesmo problema, supondo uma variação linear do calor específico com a temperatura e constatando também que esse efeito é mais significativo para valores grandes do número de Stefan.

Meios porosos saturados com água, como os solos, apresentam a característica de possuírem um intervalo de temperaturas em que o congelamento ou degelo ocorrem, ao invés de um único e bem definido valor. Em consequência, não se forma uma interface sólido-líquido bem definida mas sim uma zona de mudança de fase, delimitada por 2 isoterms, uma à temperatura do sólido e outra à temperatura do líquido. Nela coexistem água, gelo e solo em estado de equilíbrio. A solução desses problemas depende da escolha adequada para a relação funcional entre a quantidade de água não congelada presente no solo e a temperatura, num dado instante.

Problemas envolvendo congelamento de solos foram inicialmente resolvidos por BERGGREN (1943). Aplicando a solução de Neumann, determinou que a espessura da camada de solo congelado dependia da temperatura do solo durante o período de congelamento, de seu calor específico e do número de Stefan. Seu resultado foi posteriormente aprimorado por outros autores, permitindo aplicá-lo à diferentes sistemas de solos e para as situações em que há formação ou derretimento de gelo.

Admitindo uma expressão linear para a função que representa a quantidade de água presente no solo e usando o método da similaridade, LUNARDINI (1985) resolveu o problema

do congelamento de forma exata, tratando-o como um problema de 3 regiões. Determinou além das distribuições de temperatura nas 3 regiões, também a localização das 2 interfaces, em função do tempo. Soluções utilizando outras expressões para a função representando o conteúdo de água no solo, foram obtidas por LUNARDINI (1985) e OSTERKAMP (1987), usando métodos analíticos e por NAKANO & BROWN (1971) e HAYASHI et al (1981), aplicando métodos numéricos.

O congelamento de água em solos pode também ser estudado admitindo-o saturado e apresentando uma interface de mudança de fase bem definida. Dessa forma na região congelada tem-se somente a presença de gelo, sem que haja movimento relativo entre ele e a matriz porosa. O esqueleto sólido é considerado rígido, de modo que a porosidade tem valor constante. Nesse caso, deve ser utilizada uma equação constitutiva relacionando a pressão de água no poro com a densidade, bem como uma expressão para a velocidade de escoamento da água nos poros, o que aumenta a complexidade matemática do problema. Situações desse tipo foram resolvidas numericamente, entre outros, por TAYLOR & LUTHIN (1978).

Em algumas situações, a mudança de fase é provocada por uma condição de convecção em que a energia flui entre o meio e o ambiente. Problemas dessa natureza caracterizam-se por apresentar a interface inicialmente variando linearmente com o tempo. Assim como os problemas sujeitos à condição de contorno de temperatura, nesses casos existem poucas soluções analíticas exatas. Essas soluções também limitam-se à problemas de meios semi-infinitos que estejam inicialmente à temperatura de fusão. Problemas em que a temperatura inicial é diferente desse valor, pela sua dificuldade matemática, só admitem soluções analíticas aproximadas ou numéricas.

As contribuições iniciais para o entendimento dos fenômenos de mudança de fase sujeitos à condição de convecção, foram feitas por LONDON e SEBAN (1943) estudando a solidificação de um meio semi-infinito líquido, mantido à temperatura de fusão. Aplicando o método da aproximação quase-estacionária, obtiveram uma expressão analítica na forma de equação diferencial não diretamente integrável, permitindo determinar de forma aproximada, a posição da interface sólido-líquido e as temperaturas na região solidificada. KREITH e ROMIE (1955) resolveram de forma exata problema semelhante, usando o método de analogia elétrica.

Sua solução permitiu calcular a temperatura superficial e a profundidade da camada solidificada, uma vez conhecidas as propriedades do material e o número de Stefan.

O mesmo problema foi solucionado analiticamente por GOODMAN (1958), aplicando o método integral. As expressões obtidas, tanto para a temperatura superficial quanto para a espessura da interface, mostraram ser concordantes com os resultados de KREITH e ROMIE (1955).

A solidificação unidimensional em um líquido semi-infinito, inicialmente à temperatura de fusão e sujeito à condição de convecção na superfície, foi estudada por WESTPHAL (1967). Usando o método proposto por PORTNOV (1962), expressou a solução da equação de condução em séries infinitas de potências. Seus resultados mostraram como varia a interface sólido-líquido, em termos da diferença entre as temperaturas de solidificação e do meio ambiente.

O congelamento da água sob ação de um fluxo de calor, foi estudado por FOS e FAN (1974), considerando que inicialmente a temperatura da água fosse desconhecida e as temperaturas do ambiente e da superfície da água fossem iguais à de fusão. A temperatura do ambiente era subitamente diminuída e podia, então, variar com o tempo. Usando o método aproximado quase-estacionário, obtiveram soluções para a distribuição de temperaturas e posição da interface, dependentes da expressão usada para representar a variação da temperatura.

Problema análogo, porém relacionado à fusão, foi tratado e resolvido de forma exata por LOZANO e REENSTEN (1981). Eles representaram a temperatura em forma de série infinita e analisaram tanto a situação em que existe fluxo de calor, quanto uma condição convectiva. Obtiveram a expressão para a posição da interface em forma de potências do tempo, constatando que para fluxo constante e baixo número de Stefan, a expressão era linear, desde que o intervalo de tempo transcorrido fosse pequeno.

LUNARDINI (1981) estudou a mudança de fase num meio semi-infinito, inicialmente à temperatura diferente da temperatura de fusão e sujeito à convecção. Obteve uma solução

aproximada, usando o método da integral de balanço térmico. Seus resultados foram aplicados para casos em que existem soluções exatas, mostrando boa concordância.

GUTMAN (1986) estudou meios finitos que encontravam-se no ponto de congelamento e repentinamente eram colocados em contato com um fluido ambiente. O fluido poderia ter diferentes valores das propriedades em cada lado da amostra, mas sua temperatura foi considerada sempre menor que a de congelamento. O problema foi solucionado aproximadamente pelo método de perturbação, usando-se expansão em séries para representar a distribuição de temperaturas e a posição da interface.

O congelamento de líquidos em meios porosos saturados, foi analisado por CHELLAIAH & VISKANTA (1988), supondo somente a existência de condução. Desenvolveram um modelo numérico unidimensional, baseado num esquema implícito de diferenças finitas e usaram valores efetivos, para representar a condutividade e capacidade térmica do sólido e do líquido. Seu modelo possibilitou estudar a influência de diferentes tamanhos de partículas constituintes do meio poroso, da diferença de temperatura imposta e do superaquecimento do líquido, no processo de solidificação. Para o congelamento de um meio poroso saturado com água, verificou-se boa concordância entre as distribuições de temperatura predita pelo modelo e aquela obtida experimentalmente.

A mudança de fase em um meio poroso bidimensional, apresentando transporte de calor e massa, foi modelada numericamente por VAFAI & TIEN (1989). O problema foi analisado de forma completa, sem qualquer simplificação significativa, usando um esquema explícito de diferenças finitas. As propriedades termofísicas foram introduzidas através de expressões baseadas na porosidade do meio. Seu resultado pode ser aplicado à toda classe de problemas em meios porosos, onde há transporte de misturas com mudança de fase.

Trabalhos mais recente na área, incluem os resultados de CHELLAIAH & VISKANTA (1990). O efeito da convecção natural e da inversão da densidade da água na fusão do gelo em meios porosos, foi examinado experimental e numericamente. Seu modelo numérico unidimensional, foi baseado na média volumétrica para as equações macroscópicas de transporte e admite que a mudança de fase ocorra num pequeno intervalo de temperatura. Os resultados numérico e experimental além de apresentarem boa concordância, permitiram

estabelecer que a convecção natural tornou o formato da interface não linear e aumentou a taxa de fusão.

A fusão de gelo em meios porosos bidimensionais, foi analisada por ZHANG & NGUYEN (1991), com base num modelo numérico, baseado no método de diferenças finitas, que inclui os efeitos devido à convecção na fase líquida. Seus resultados permitiram verificar, por exemplo, a influência dos números de Rayleigh e Stefan, tanto na evolução temporal das linhas de corrente e isothermas, quanto na espessura da camada fundida e taxa de transferência de calor.

O congelamento de água em regime transiente, em meios porosos inclinados e saturados, foi examinado experimentalmente por YANG et al. (1993). Trabalhando com meios constituídos por esferas de vidro e aço, analisaram entre outros fatores, a influência do ângulo de inclinação no crescimento da interface sólido-líquido e nas temperaturas através das amostras. À partir dos resultados experimentais, obtiveram correlações que permitiram calcular o volume da região solidificada, em função do ângulo de inclinação e do tempo.

A solidificação de meios porosos saturados com uma solução de NaCl, foi estudada analítica e experimentalmente por MATSUMOTO et al. (1993). Eles consideraram o problema bidimensional, supondo a presença de convecção causada por temperatura ou gradiente de concentração e admitiram que o fluxo no meio poroso fosse governado pela Lei de Darcy. Na região de mudança de fase, supuseram que permeabilidade como fator dominante, propondo uma expressão em potências da porosidade, para representá-la. Medidas de temperatura e distribuição de concentração da solução salina na fase líquida, mostraram que seu modelo analítico prevê bem os resultados experimentais.

Este trabalho teve como objetivo estudar de forma teórica e experimental a solidificação em placas porosas planas, finitas e saturadas com líquido. A temperatura inicial das placas pode ter qualquer valor, acima da temperatura de solidificação do líquido e admitiu-se que a interface sólido-líquido fosse bem definida, caracterizando a situação como sendo de 2 fases. O problema foi analisado unidimensionalmente, admitindo-se que tanto através da interface quanto das regiões de sólido e de líquido, a transferência de calor foi feita unicamente por condução. O contorno inferior teve sua temperatura subitamente diminuída para um valor

menor do que a temperatura de congelamento do líquido, enquanto que o contorno superior foi mantido termicamente isolado ou pode trocar calor convectivamente com o ambiente. A influência do meio poroso foi introduzida nas equações macrocópicas de condução, através de propriedades efetivas, definidas em função da porosidade.

A análise teórica incluiu a utilização de uma solução analítica conhecida, para verificar a influência global da porosidade na posição da interface e nas temperaturas das regiões de sólido e líquido e o desenvolvimento de um modelo numérico, baseado num método implícito de diferenças finitas, que permitiu simular várias situações específicas.

Os resultados experimentais foram obtidos usando-se uma montagem instrumentada adequadamente, constituída por uma célula de medida e sistema de refrigeração, que possibilitou submeter amostras de diferentes materiais e porosidades, às condições inicialmente estabelecidas. Esses resultados foram analisados e discutidos com base nas previsões teóricas.

## Capítulo 3

### Análise Teórica

#### 3.1 - Estabelecimento do problema.

Analisou-se a solidificação numa placa porosa finita e unidimensional, de espessura  $d$ , saturada com um líquido e apresentando temperatura de mudança de fase igual à  $T_m$ . Inicialmente a placa toda encontrava-se à uma temperatura  $T_i$ , de valor maior que  $T_m$  e repentinamente sua superfície inferior ( $x=0$ ) teve a temperatura diminuída e mantida durante todo o processo num valor  $T_o$ , menor do que  $T_m$ . Iniciou-se então o congelamento, formando-se uma interface sólido-líquido que se movimentou na direção positiva de  $x$  e cuja localização  $S(t)$ , depende do tempo. Essa interface delimitou as regiões de sólido e líquido, com propriedades termofísicas diferenciadas e temperaturas,  $T_S(x,t)$  e  $T_L(x,t)$ , dependentes tanto da posição quanto do tempo. Foi admitido ainda que o contorno superior da placa ( $x = d$ ) pudesse estar submetido à 2 condições independentes:

- Permanecer termicamente isolado, representada por:

$$q_K = -k_L \left. \frac{\partial T_L}{\partial x} \right|_d = 0 \quad (3.1)$$

onde  $q_K$  representa o calor transferido por condução através do contorno  $x = d$ .

• Trocar calor convectivamente com um ambiente, sujeito a um coeficiente de troca de calor convectivo  $h_c$ , representada por:

$$q_c = h_c [T_A(t) - T_d] = q_k \quad (3.2)$$

onde  $q_c$  representou o calor transferido por convecção, através do contorno superior, para um ambiente à temperatura  $T_A(t)$ .

Na figura 3.1 estão ilustradas a geometria e as variáveis utilizadas no estabelecimento das equações para esse problema.

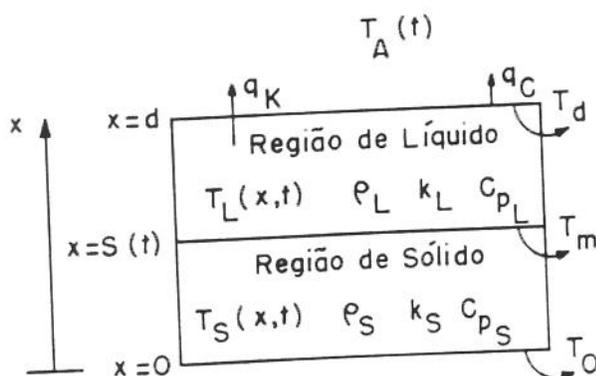


Fig 3.1 - Geometria e variáveis utilizadas na formulação do problema.

### 3.2 - Equações diferenciais e simplificações.

No estabelecimento das equações diferenciais para o problema, partiu-se da equação geral da energia para um fluido Newtoniano, conforme propõe LUNARDINI (1991), onde  $\beta$  representa o coeficiente de dilatação volumétrica:

$$\text{div}(\tilde{k} \cdot \text{grad}T) + q_r + q_g = \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{DP}{Dt} - \mu \phi_\mu \quad (3.3)$$

onde  $\tilde{k}$  representa o tensor condutividade térmica e  $\beta$  o coeficiente de dilatação térmica.

Foram admitidas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Regime transiente unidimensional
- Fluido incompressível e estacionário
- Propriedades isotrópicas e constantes
- Ausência de energia gerada internamente ou devido à radiação ou atrito

A equação geral da energia ficou reduzida à seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C_p}{k} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

onde  $u$  = componente da velocidade do fluido na direção  $x$ .

Este resultado foi aplicado às regiões de sólido e líquido, com as seguintes considerações adicionais:

### 3.2.1 - Região sólida: $0 \leq x \leq S(t)$

Supos-se que o sólido não apresentou movimento macroscópico interno, de forma que o valor para sua velocidade  $u$ , definida em (3.4), foi considerado igual à zero. A equação diferencial para essa região, foi expressa como:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq s(t) , t > 0 \quad (3.5)$$

onde  $\alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s C_{ps}}$  = difusividade térmica da fase sólida

No contorno inferior, a temperatura da placa foi mantida no valor constante,  $T_0$ , isto é :

$$T_s(x,t) = T_0 ; x = 0 , t > 0 \quad (3.6)$$

### 3.2.2 - Região líquida: $S(t) \leq x \leq d$

O volume  $A\Delta x$  de uma determinada massa de líquido que solidifica no tempo  $\Delta t$ , pode diferir daquele do sólido se os valores de suas densidades forem diferentes. Em geral tem-se:

$$\Delta V = V_L - V_S = m \left( \frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_S} \right) \quad (3.7)$$

Nesta situação surge no líquido uma velocidade convectiva  $u_C$ , de forma que :

$$\Delta V = A\Delta x = Au_C\Delta t \quad (3.8)$$

Combinando (3.7) e (3.8) e no limite, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se a seguinte expressão para a velocidade  $u_C$  :

$$u_C = \left( \frac{\rho_S - \rho_L}{\rho_S} \right) \frac{dx}{dt} \quad (3.9)$$

Considerou-se que os valores das densidades das fases sólida e líquida são aproximadamente iguais, de modo que os efeitos devido à densidade puderam ser desconsiderados. Supos-se, também, que o mecanismo de transferência de calor predominante na região líquida foi a condução, de modo que a equação diferencial correspondente foi expressa como:

$$\frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial T_L}{\partial t} \quad S(t) \leq x \leq d, t > 0 \quad (3.10)$$

onde  $\alpha_L = \frac{k_L}{\rho_L C_{PL}}$  = difusividade térmica da fase líquida

Durante todo o processo, o contorno superior pode estar sujeito a 2 condições independentes: isolamento térmico ou troca de calor convectiva com um fluido ambiente. Elas foram representadas pelas seguintes equações:

- Isolamento térmico:

$$\frac{\partial T_L(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = d, \text{ quando } t > 0 \quad (3.11)$$

- Convecção:

$$k_L \frac{\partial T_L(x,t)}{\partial x} = h_C [T_A(t) - T_L(x,t)] \quad \text{para } x = d, \text{ quando } t > 0 \quad (3.12)$$

### 3.2.3 - Interface móvel : $x = S(t)$

A energia necessária para provocar a mudança de fase no material, flui através da interface que tem sua posição,  $S(t)$ , alterada à medida que o processo transcorre. Admitiu-se que o fluxo de calor através das fases sólida e líquida fosse puramente condutivo e que a interface movia-se na direção positiva de  $x$ . A conservação da energia aplicada na interface estabeleceu que a diferença entre os fluxos das 2 fases deve igualar-se à taxa de variação de entalpia da massa solidificada durante o processo, por unidade de área da interface, isto é :

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho_L L \frac{dS(t)}{dt} \quad \text{para } x = S(t) \quad (3.13)$$

onde  $L$  = entalpia latente específica de solidificação.

Considerou-se também a condição de continuidade entre as temperaturas das fases sólida e líquida, na interface. Elas devem ter o mesmo valor e serem iguais à temperatura de mudança de fase do líquido, isto é:

$$T_S(x,t) = T_L(x,t) = T_m \quad \text{para } x = S(t) \quad (3.14)$$

A equação (3.13) é não linear e caracteriza os problemas de mudança de fase. Para evidenciar essa condição da interface, a equação (3.13) foi expressa somente em termos de

derivadas espaciais. Calculou-se a diferencial para a temperatura da fase sólida, a partir de (3.14) e lembrando que  $T_m$  é constante, obteve-se:

$$dT_s = \frac{\partial T_s}{\partial x} dx + \frac{\partial T_s}{\partial t} dt = 0 \quad (3.15)$$

Uma vez que na interface,  $x = S(t)$ , tem-se:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = - \frac{\partial T_s}{\partial x} \frac{dS(t)}{dt} \quad (3.16)$$

Combinando esse resultado com a equação diferencial para a fase sólida (3.5), obteve-se:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)^{-1} \quad (3.17)$$

Substituindo esse valor em (3.13) resultou finalmente:

$$k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)^2 - k_L \left( \frac{\partial T_L}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right) = -\alpha_s \rho_L L \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

Neste formato a não linearidade da equação (3.13) tornou-se mais clara, caracterizada pela presença de produtos e potências de derivadas da variável dependente.

### 3.2.4 - Propriedades efetivas.

O efeito do meio poroso no processo de solidificação foi introduzido através da conceituação de propriedades efetivas. Elas foram baseadas na porosidade  $\varepsilon$  do material que foi considerada como sendo a fração volumétrica de líquido existente na amostra, de acordo com a expressão :

$$\varepsilon = \frac{V_L}{V_T} \quad (3.19)$$

onde  $V_L$  representa o volume de líquido saturante e  $V_T$  o volume total da amostra (sólido + líquido saturante).

As propriedades efetivas (indicadas pelo superescrito \*), tanto para a região de sólido (S) quanto de líquido (L), foram obtidas através de expressões do tipo :

$$\gamma_{S,L}^* = \epsilon \gamma_{S,L} + (1 - \epsilon) \gamma_{MP} \quad (3.20)$$

onde  $\gamma_{S,L}$  indica a propriedade termofísica de interesse, para a região sólida ou líquida e  $\gamma_{MP}$  refere-se especificamente à propriedade termofísica da matriz porosa. Dessa forma os efeitos individuais dos componentes foram incorporados proporcionalmente ao volume que ocupavam na amostra.

A utilização dessas propriedades foi feita para que o sistema composto pelo meio poroso e líquido saturante, fosse tratado como um meio contínuo, no qual pudessem ser aplicadas as leis macroscópicas de conservação. Uma descrição microscópica, embora representasse com mais detalhes o meio poroso e as fases presentes, tornaria a solução das equações mais complicadas.

Para representar o efeito do meio poroso na equação da interface, além de serem usadas as propriedades efetivas, o termo à direita da equação (3.13) foi substituído por:

$$\rho_L \epsilon L \frac{dS(t)}{dt} \quad (3.21)$$

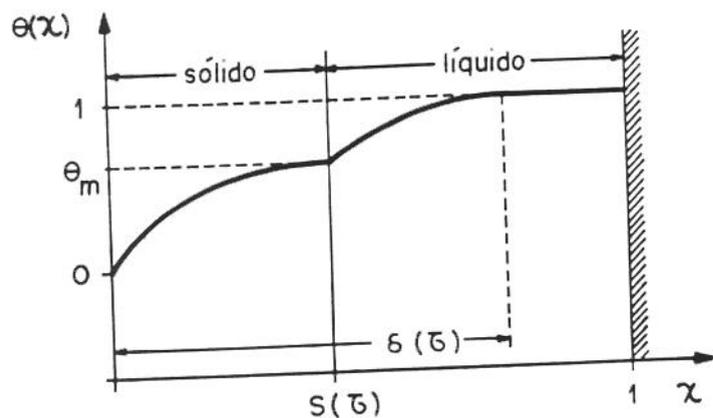
onde  $(\rho\epsilon)$  representa a densidade equivalente do líquido (não efetiva), que satura os poros da placa.

### 3.3 - Solução analítica aproximada

O problema da solidificação unidimensional, onde a temperatura num dos contornos é subitamente diminuída enquanto o outro contorno é mantido termicamente isolado, foi resolvido de forma analítica aproximada por CHO & SUNDERLAND (1969). Usando uma

combinação da solução exata de Neumann, para a região sólida, e do método integral de GOODMAN (1958), para a região líquida, obtiveram expressões para as distribuições de temperatura e localização da interface em função do tempo.

A figura 3.2, conforme Cho e Sunderland, ilustra uma distribuição típica de temperaturas, posição da interface  $S(\tau)$  e localização da camada limite térmica  $\delta(\tau)$ , para uma amostra finita. A camada limite térmica constitui uma linha divisória imaginária, além da qual não há fluxo de calor e a temperatura do líquido mantém-se essencialmente constante.



**Fig.3.2** -Distribuição típica das temperaturas numa amostra finita. Localização da interface  $S(\tau)$  e da camada limite térmica  $\delta(\tau)$ .

Na análise desenvolvida foram usadas as expressões analíticas de Cho e Sunderland às quais incorporou-se a existência de um meio poroso, introduzindo-se as propriedades efetivas definidas pela equação (3.20).

### 3.3.1 - Adimensionalização das equações

Para generalizar a solução do problema, foram utilizadas as seguintes adimensionalizações:

- Posição:  $\chi = \frac{x}{d}$

(3.22)

- Tempo:  $\tau = \frac{\alpha_s t}{d^2}$  (3.23)

- Posição da interface:  $S(\tau) = \frac{S(t)}{d}$  (3.24)

- Temperaturas:  $\theta_j(\tau, \chi) = \frac{T_j(x, t) - T_0}{T_1 - T_0}$  para  $j = S, L, m$ , (3.25)

Estas adimensionalizações foram substituídas nas equações (3.5), (3.6), (3.10), (3.11), (3.13) e (3.14), obtendo-se o seguinte conjunto adimensional de equações diferenciais e respectivas condições de contorno, representadas em termos das propriedades efetivas:

#### REGIÃO SÓLIDA

$$\frac{\partial^2 \theta_s(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} = \frac{\partial \theta_s(\chi, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{para } 0 < \chi < S(\tau), \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.26)$$

$$\theta_s(\chi, \tau) = 0 \quad \text{para } \chi = 0 \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.27)$$

#### REGIÃO LÍQUIDA

$$\frac{\partial^2 \theta_l(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} = \frac{\alpha_s^*}{\alpha_l^*} \frac{\partial \theta_l(\chi, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{para } S(\tau) < \chi < 1, \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.28)$$

#### CONDIÇÃO DE ISOLAMENTO TÉRMICO

$$\frac{\partial \theta_l(\chi, \tau)}{\partial \chi} = 0 \quad \text{para } \chi = 1, \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.29)$$

#### CONDIÇÃO INICIAL

$$\theta_l(\chi, \tau) = 1 \quad \text{para } 0 < \chi < 1, \text{ quando } \tau = 0 \quad (3.30)$$

## INTERFACE SÓLIDO - LÍQUIDO

$$\frac{\partial \theta_s(\chi, \tau)}{\partial \chi} - \frac{k_l^*}{k_s^*} \frac{\partial \theta_l(\chi, \tau)}{\partial \chi} = -\frac{1}{Ste^*} \frac{dS(\tau)}{d\tau} \quad \text{para } \chi = S(\tau), \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.31)$$

$$\text{onde } Ste^* = \frac{C_{ps}^* (T_m - T_o)}{\varepsilon L} = \text{número de Stefan efetivo} \quad (3.32)$$

$$\theta_s(\chi, \tau) = \theta_l(\chi, \tau) = \theta_m \quad \text{para } \chi = S(\tau), \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.33)$$

**3.3.2 - Solução para o contorno superior termicamente isolado.**

A distribuição de temperatura na região sólida foi obtida usando-se a expressão proposta por Neumann, para a solidificação num semi-espaço:

$$\theta_s(\chi, \tau) = \frac{\theta_m}{\text{erf}(\lambda)} \text{erf}\left[\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}}\right] \quad \text{para } 0 < \chi < S(\tau), \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.34)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que deve ser determinado de uma equação transcendental posterior. Esta solução satisfaz a equação diferencial (3.26) e a condição de contorno (3.27).

Assumiu-se, também, que a posição da interface sólido-líquido variasse com a raiz quadrada do tempo, segundo a expressão:

$$S(\tau) = 2\lambda\sqrt{\tau} \quad (3.35)$$

De acordo com BECKERMANN & VISKANTA (1988), a interface pode ter formato altamente irregular, devido à presença da matriz porosa. Esse fato torna-se mais importante, quando a diferença entre as condutividades térmicas da matriz porosa e do fluido é grande.

Para determinar a distribuição de temperatura na região líquida, foi utilizado o método analítico integral. De acordo com GOODMAN & SHEA (1960), como o mecanismo de condução de calor é essencialmente a difusão, o efeito da diminuição súbita da temperatura no contorno inferior não é imediatamente sentido através da placa. Ele ficará restrito, por algum tempo, numa região, a camada limite térmica, que se estende desde  $x = 0$  até  $x = \delta(\tau)$ , de acordo com a figura 3.2. Dentro dela o gradiente térmico, num determinado instante, será significativo e a posição dessa camada obtem-se pela equação:

$$\delta(\tau) = 2\beta\sqrt{\tau} \quad (3.36)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro ainda a ser determinado.

Devido à placa ser finita e usando-se a adimensionalização (3.22), verificou-se que a máxima espessura possível para a camada térmica será 1, e a solução do problema será válida enquanto  $\delta(\tau) \leq 1$ .

Utilizando a posição da camada térmica como novo contorno para o problema e procedendo às devidas transformações, foram obtidas as seguintes novas condições de contorno e inicial para a região de líquido:

$$\frac{\partial \theta_L(\delta, \tau)}{\partial \chi} = 0 \quad \text{para } \delta(\tau) < 1, \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.37)$$

$$\theta_L(\delta, \tau) = 1 \quad \text{para } \delta(\tau) < 1, \text{ quando } \tau > 0 \quad (3.38)$$

A equação diferencial (3.28) para o líquido foi integrada com relação à variável  $\chi$ , dentro da região delimitada por  $S(\tau)$  e  $\delta(\tau)$ . Usando-se as condições de contorno (3.29), (3.30) e (3.31), obteve-se a chamada equação integral da energia para a região de líquido:

$$\frac{\alpha_i^*}{\alpha_s^*} \frac{\partial \theta_L(\chi, \tau)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=S(\tau)} + \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} - \theta_m \frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_{S(\tau)}^{\delta(\tau)} \theta_L(\chi, \tau) d\chi \quad (3.39)$$

cuja solução depende de uma escolha apropriada para o perfil de temperatura  $\theta_L(\chi, \tau)$ .

Utilizando-se uma distribuição polinomial de temperatura na forma:

$$\theta_L(\chi, \tau) = 1 - (1 - \theta_m) \left[ \frac{\delta(\tau) - \chi}{\delta(\tau) - S(\tau)} \right]^n \quad \text{onde } n \geq 2 \quad (3.40)$$

que satisfaz as condições de contorno (3.33), (3.37) e (3.38), conforme sugerem CHO & SUNDERLAND (1969) e substituindo-a na equação integral da energia, obtém-se :

$$\beta = \lambda + \frac{n+1}{2} \left[ -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{\alpha_L^*}{\alpha_S^*} \frac{2n}{n+1}} \right] \quad n \geq 2 \quad (3.41)$$

Usando da equação diferencial da interface (3.31) e substituindo-se as expressões (3.34) e (3.40), para  $\theta_S(\chi, \tau)$  e  $\theta_L(\chi, \tau)$ , obtém-se a seguinte equação transcendental :

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} + \left( \frac{\alpha_S^*}{\alpha_L^*} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k_L^* \theta_m - 1}{k_S^* \theta_m} \frac{1}{\phi_n^*} = \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}^*} \quad (3.42)$$

onde

$$\phi_n^* = \frac{n+1}{n\sqrt{\pi}} \left[ -\lambda \left( \frac{\alpha_S^*}{\alpha_L^*} \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\lambda^2 \frac{\alpha_S^*}{\alpha_L^*} + \frac{2n}{n+1}} \right] \quad n \geq 2 \quad (3.43)$$

Determinando-se a raiz da equação transcendental (3.42), foi possível obter o valor do parâmetro  $\lambda$ . Nos cálculos efetuados, utilizou-se o valor  $n=2$  para o perfil de temperatura na região de líquido, equivalente a uma aproximação polinomial de grau 2

Uma vez conhecido o valor de  $\lambda$ , usando-se a equação (3.41) encontrou-se o valor correspondente para  $\beta$ . Com esses dois parâmetros, através das equações (3.35) e (3.36), foram

determinadas a localização da interface  $S(\tau)$  e da camada limite térmica  $\delta(\tau)$ , em função do tempo.

As distribuições de temperatura na região sólida e líquida, em função da posição e do tempo, foram obtidas respectivamente de (3.34) e (3.40).

### 3.3.3 - Limite de validade da solução

O modelo analítico estabelece que essas soluções são válidas até que a camada térmica atinja o contorno isolado da amostra, isto é, enquanto  $\delta(\tau) \leq 1$ . Determina-se, então, um valor limite de tempo a partir do qual a expressão para a temperatura no líquido (3.40) deixa de ser válida. Da expressão (3.36) esse valor é:

$$\tau_{\text{lim}} = \frac{1}{4\beta^2} \quad (3.45)$$

Quando esse limite de tempo for atingido, a aproximação (3.40) para o perfil de temperatura na região líquida não será mais válida. Nesses casos outras distribuições de temperatura para a região líquida devem ser utilizadas. CHO & SUNDERLAND (1969), sugerem expressões que podem ser usadas para a distribuição de temperaturas no líquido e temperatura da superfície isolada, permitindo estender o limite de validade dessa solução analítica.

Por ser proporcional à  $\beta$ , o valor de  $\tau_{\text{lim}}$  dependerá das propriedades termofísicas efetivas da matriz porosa e do líquido saturante, assim como das temperaturas envolvidas e da espessura da amostra considerada.

### 3.3.4 - Influência da porosidade e do grau da distribuição polinomial de temperatura nos parâmetros $\lambda$ e $\beta$ .

Para estudar a influência que a porosidade e o grau da distribuição polinomial de temperatura tem nos valores dos parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$ , analisou-se uma placa porosa constituída de

areia e saturada com água. A espessura da placa foi considerada igual à 0,20 m admitindo-se que sua temperatura inicial era 20 °C. No instante  $t = 0$  o valor em  $x = 0$  foi subitamente diminuído e mantido até o final do processo em -14 °C, enquanto que a superfície  $x = d$  permaneceu termicamente isolada. A equação transcendental (3.42) foi solucionada para valores de porosidade compreendidos entre 0,10 (representando um meio constituído quase que totalmente por partículas sólidas) até 1,00 (correspondendo à existência somente de líquido). e para o grau da distribuição polinomial de temperaturas (3.40), variando até 4.

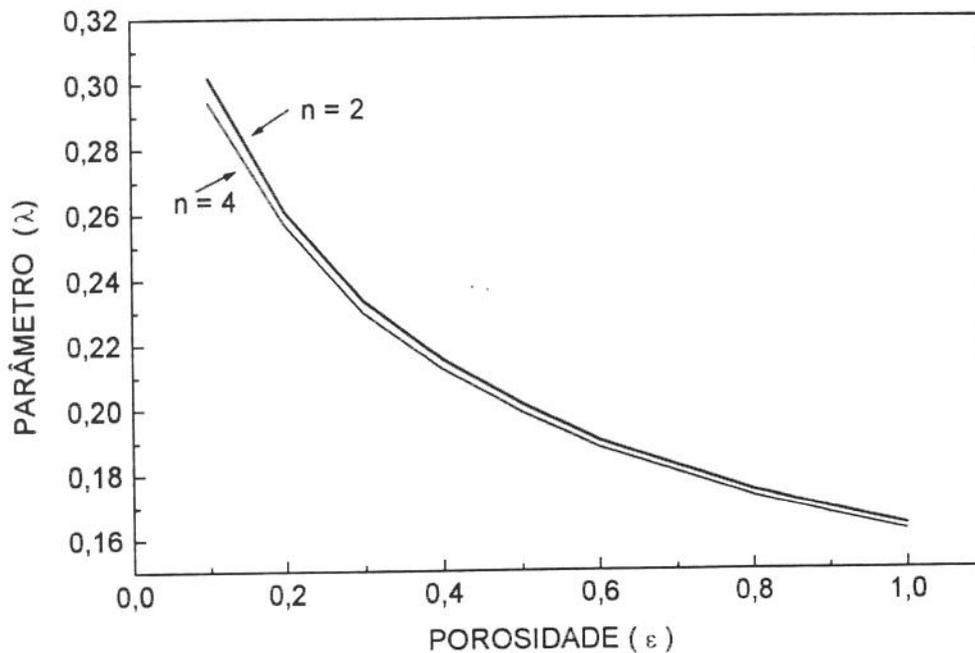
Para as propriedades termofísicas de interesse, usaram-se os valores constantes da tabela seguinte, obtidos de PERRY & CHILTON (1980), LYNCH (1988), WEAST & LIDE (1989), INCROPERA & DeWITT (1981) e HOLMAN (1983).

Propriedade	Água (20 °C)	Gelo (-14 °C)	Vidro (23°C)	Areia (23 °C)	PVC (23 °C)	Alumínio (20°C)
$\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	998	913	1400	1414	1700	2787
$C_p$ [J/Kg°C]	4187	1924	840	1321	1338	883
$k$ [W/m°C]	0,59	2,43	0,78	0,33	0,092	164

**Tabela 3.1:** *Propriedades termofísicas para a água, gelo, vidro, areia, PVC e duralumínio.*

Para a entalpia latente específica de solidificação/fusão do gelo,  $L$ , adotou-se o valor de 334960 J/Kg, correspondente a 80 cal/g.

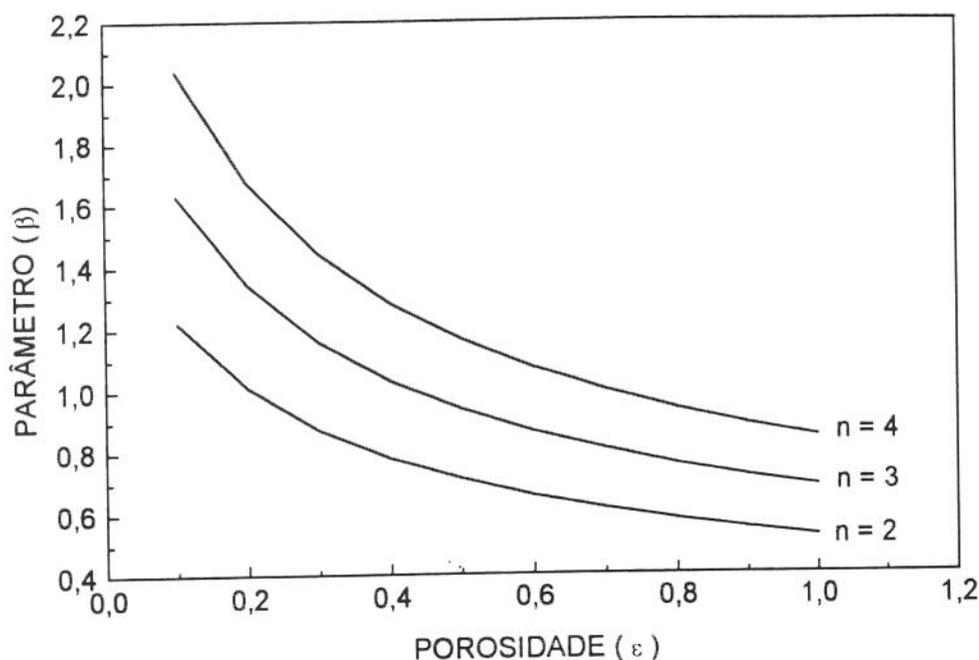
Na figura 3.3 mostra-se o resultado do comportamento do parâmetro  $\lambda$  em função da porosidade e do grau  $n$ .



**Fig 3.3:** *Variação do parâmetro  $\lambda$  em função do grau  $n$  de aproximação do perfil de temperatura e da porosidade.*

Verificou-se que a utilização de valores maiores que 2, para o grau da distribuição polinomial de temperaturas, resultou em alterações muito pequenas nos valores de  $\lambda$ , em média de 1%, quando o grau mudou do valor 2 para 4. Como  $\lambda$  varia muito pouco com  $n$ , mesmo usando-se aproximações pobres consegue-se definir bem a posição da interface. À medida em que a porosidade diminuiu e conseqüentemente mais sólido foi incorporado à placa, ocorreu aumento no valor de  $\lambda$ .

Na figura 3.4 mostra-se o comportamento do parâmetro  $\beta$ , obtido pela solução da equação (3.41), quando a porosidade e o grau da distribuição polinomial são variados.

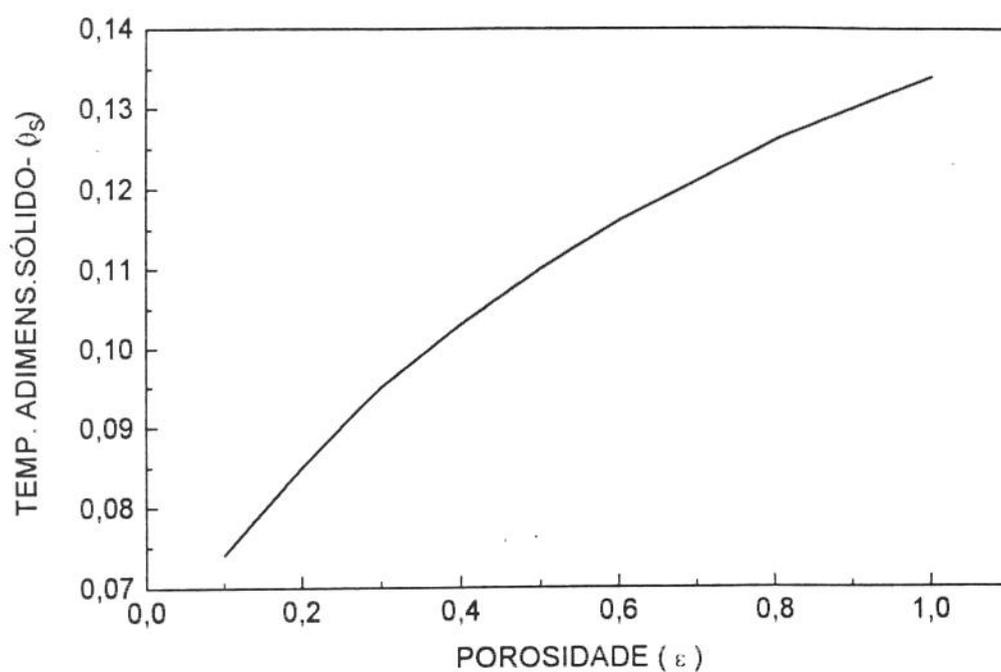


**Fig. 3.4:** *Variação do parâmetro  $\beta$  em função do grau  $n$  de aproximação do perfil de temperatura e da porosidade.*

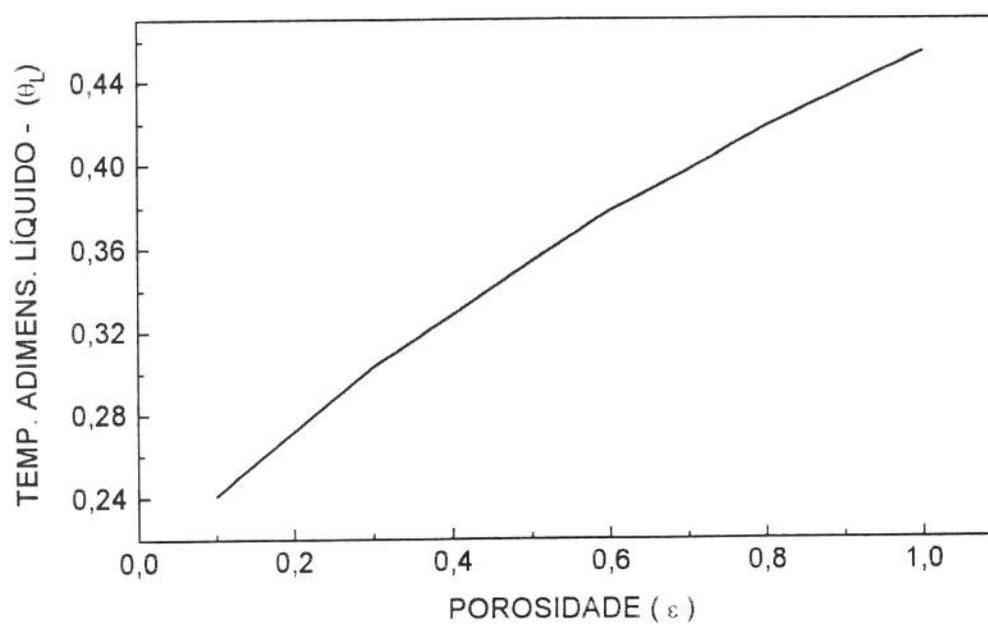
Verificou-se que o valor de  $\beta$  é mais sensível do que  $\lambda$ , tanto às alterações da porosidade da placa, quanto ao grau utilizado para a expressão da temperatura na região líquida. A diminuição da porosidade ou o aumento do valor do grau  $n$ , provocaram aumento nos valores de  $\beta$ . Assim, a camada limite térmica  $\delta(\tau)$  atingiu mais rapidamente o contorno isolado, diminuindo o intervalo de tempo em que a aproximação polinomial (3.40) é válida.

Concluiu-se que placas menos porosas, geraram maiores valores para  $\lambda$ , porém reduziram o intervalo de tempo em que a distribuição de temperaturas (3.40) é matematicamente válida. Da mesma forma, o aumento no grau  $n$  dessa distribuição conduziu a melhores aproximações para os valores das temperaturas na região líquida da placa, porém limitou o tempo em que sua utilização é válida.

Para estudar o efeito da porosidade na resposta das temperaturas adimensionais nas regiões de sólido e líquido, as equações (3.34) e (3.40) foram solucionadas no instante  $\tau = 0,020$ . Para a região de sólido, as temperaturas foram calculadas na posição  $\chi = 0,015$  e na região de líquido em  $\chi = 0,05$ . Os resultados estão apresentados nas figuras 3.5 e 3.6.



**Fig 3.5 :** *Varição da temperatura adimensional do sólido, em função da porosidade, no instante  $\tau = 0,020$  e na posição  $\chi = 0,015$ .*



**Fig.3.6 :** *Varição da temperatura adimensional do líquido, em função da porosidade, no instante  $\tau = 0,020$  e na posição  $\chi = 0,05$ .*

Verificou-se que a redução da porosidade provocou diminuição das temperaturas adimensionalizadas, tanto da região de sólido, quanto de líquido.

### 3.3.5 - Influência das propriedades termofísicas na localização da interface e distribuição de temperaturas

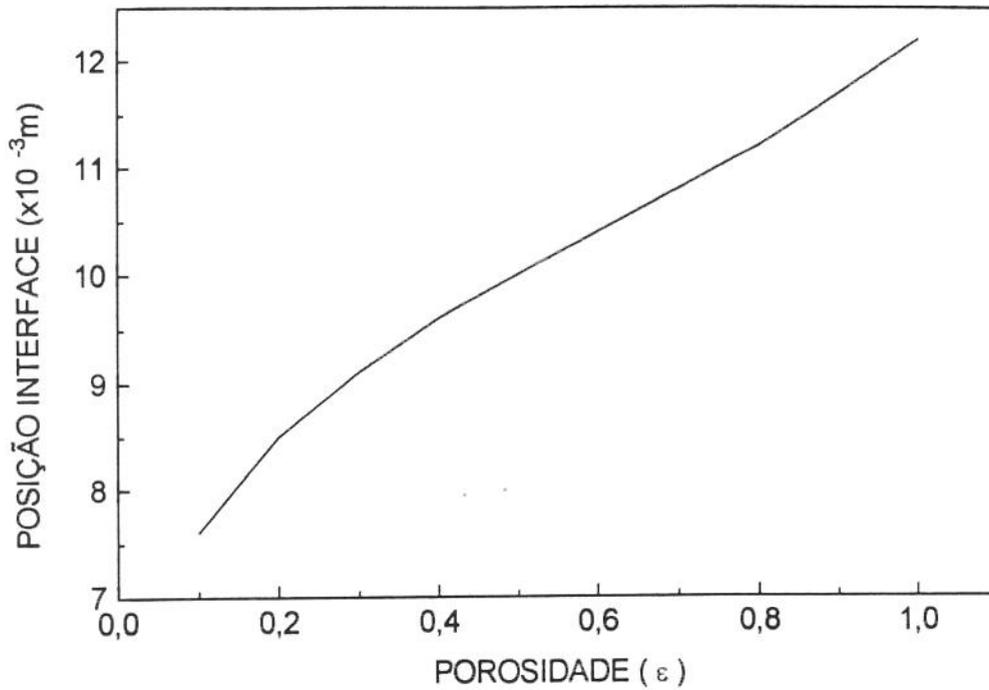
À partir da equação (3.35), a interface de mudança de fase pode ser calculada por:

$$S(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_s t} \quad (3.35a)$$

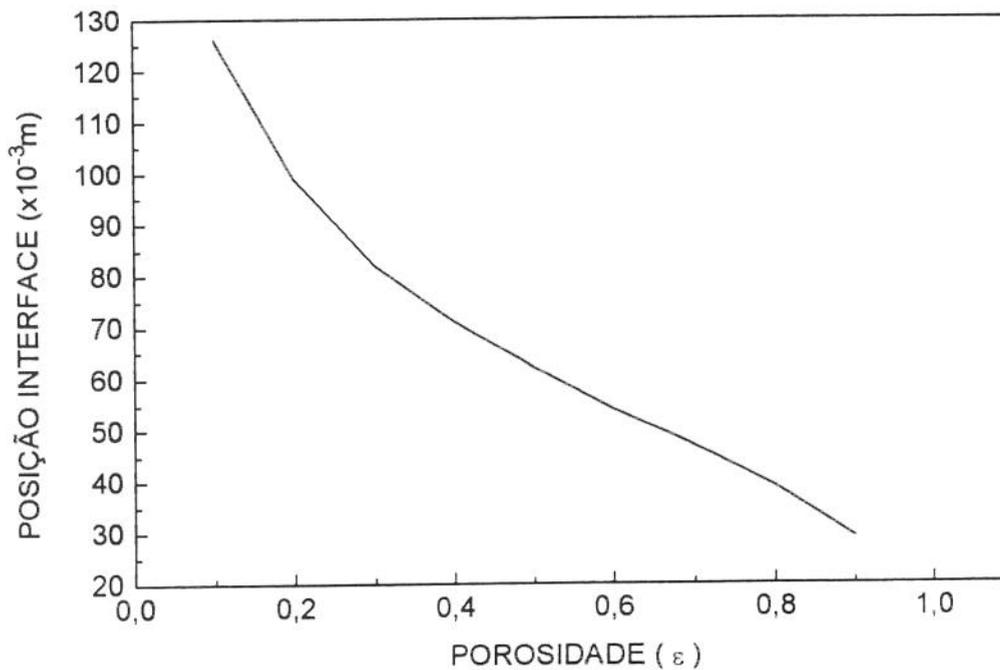
Observa-se que além do parâmetro  $\lambda$ , a localização da interface depende também da difusividade térmica efetiva do sólido. Portanto esses dois fatores devem ser analisados conjuntamente, quando o crescimento da interface for estudado.

Para verificar a influência das propriedades termofísicas no crescimento da interface, sua posição foi determinada através de (3.35a), no instante  $t = 1000$  s, em placas de duralumínio e PVC. Foram usados os valores das propriedades constantes na tabela 3.1, considerando-se a placa com espessura igual à 0,20 m e tendo diferentes porosidades. Admitiu-se que as temperaturas iniciais das placas eram iguais à 20 °C e que no instante  $t = 0$  foram diminuídas para -14 °C.

As figuras 3.7 e 3.8 apresentam os resultados obtidos para a posição da interface.



**Fig.3.7** - Localização da interface em função da porosidade, numa placa de PVC ,no instante  $t = 1000$  s.



**Fig.3.8**-Localização da interface em função da porosidade, numa placa de duraluminio, no instante  $t = 1000$  s.

Tanto para a placa de PVC, quanto para a placa de duralumínio, os valores obtidos para  $\lambda$  aumentaram à medida em que a porosidade cresceu, conforme verificado anteriormente. Entretanto a localização da interface, obtida pela equação (3.35a), apresentou comportamento diferente para esses dois materiais.

Quando a placa foi constituída de PVC, verificou-se aumento no valor da posição da interface à medida em que a porosidade cresceu. Isto é, quanto menor a quantidade de PVC presente na placa, maior foi o desenvolvimento da interface, resultando numa região solidificada mais espessa. A utilização do PVC teve o efeito de retardar o processo de solidificação da água.

Com a placa de duralumínio obteve-se o resultado oposto. Diminuindo-se a porosidade, o crescimento da interface foi favorecido. À medida em que foi adicionado duralumínio, o processo de solidificação da água foi acelerado. Esses resultados foram interpretados macroscopicamente, considerando-se a influência dos valores das difusividades térmicas efetivas da região solidificada, em cada situação.

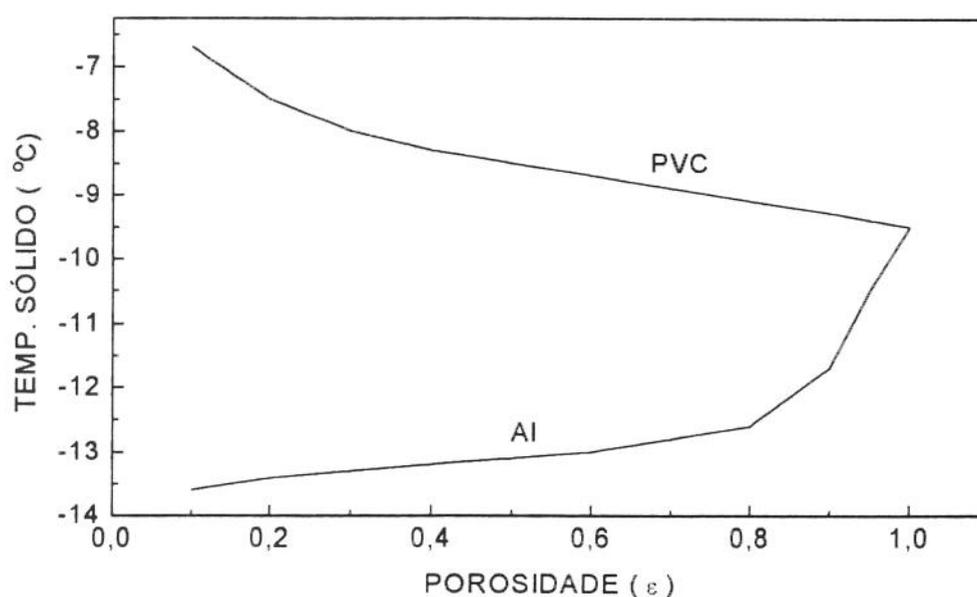
A difusividade térmica do PVC ( $\alpha_{pvc} = 0,4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ) é menor do que o valor do gelo ( $\alpha_{gelo} = 13,8 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ). À medida em que a porosidade da placa é diminuída com a introdução de PVC, os valores efetivos que se obtêm para a difusividade térmica, resultam menores do que o valor do gelo. Como o calor é retirado através da camada de sólido que vai sendo formada, sua difusão será prejudicada com a incorporação desse material na placa. Isso levará à formação de uma camada solidificada com menor espessura, comparada com a situação em que há somente água ( $\epsilon = 1,00$ ).

Para o duralumínio, em função de sua difusividade térmica ser muito maior que a do gelo ( $\alpha_{Al} = 6,7 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ), a diminuição da porosidade resulta em valores efetivos para a difusividade térmica sempre maiores que o do gelo. A difusão de calor através da camada solidificada é, então, favorecida e esta cresce mais do que na situação em que  $\epsilon = 1,00$ .

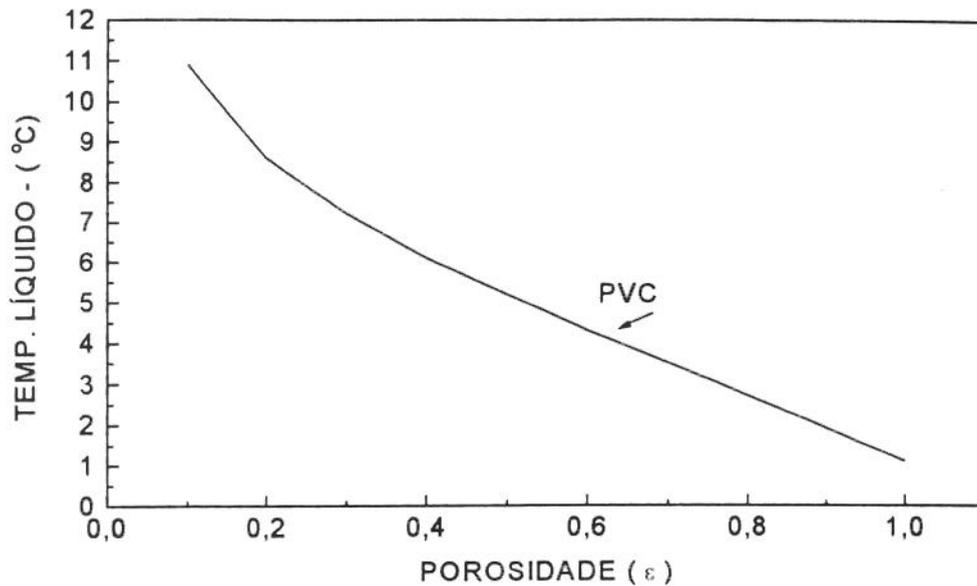
Os resultados indicaram que a utilização de materiais com elevada difusividade térmica apressou o congelamento de placas porosas saturadas com água e que materiais com baixa difusividade retardaram o processo.

Para verificar a influência que diferentes materiais constituintes da placa porosa tem na distribuição de temperaturas, determinaram-se os valores das temperaturas para as mesmas placas numa dada localização, nas regiões de sólido e de líquido, usando-se as equações (3.34) e (3.40). No sólido, as temperaturas foram calculadas na posição de 0,003 m e no líquido de 0,10 m, supondo-se transcorridos 600 s desde o início do processo.

Os resultados, apresentados nas figuras 3.9 e 3.10, mostraram que à medida em que a porosidade diminuiu (mais sólido estava presente na placa), a utilização de PVC conduziu à maiores temperaturas, tanto na região solidificada quanto na região líquida, quando se comparou com a situação em que  $\epsilon = 1,00$ ; confirmando que a utilização desse material retardou o processo de solidificação.. Para o duralumínio, ocorreu efeito inverso, tendo essas temperaturas diminuído quando a porosidade decresceu. Os resultados referentes à temperatura na região líquida das placas de duralumínio não foram representados, porque o modelo analítico prevê que em 600s, uma placa de duralumínio saturada com água e sujeita às condições de temperatura que utilizamos, estará completamente solidificada, para todos os valores de porosidade.



**Fig. 3.9** - Variação da temperatura na região solidificada, em função da porosidade, em placas de PVC e duralumínio, após 600 s.



**Fig. 3.10** - *Variação da temperatura na região líquida, em função da porosidade, numa placa de PVC, após 600 s.*

### 3.4 - Solução Numérica

O modelo analítico que foi empregado apresenta as seguintes características e limitações:

- aplica-se somente à situação em que um dos contornos permanece termicamente isolado.
- apresenta um limite de tempo, à partir do qual devem ser utilizadas outras expressões convenientes, para a distribuição de temperaturas na região líquida.

Para permitir o estudo do processo de solidificação com diferentes condições de contorno e sem limitação temporal, foi desenvolvido o modelo numérico descrito à seguir. As derivadas

das equações diferenciais foram aproximadas por diferenças finitas, empregando-se uma formulação implícita para determinar as expressões das temperaturas nas regiões de sólido, de líquido e na interface. O conceito de propriedades efetivas também foi introduzido para representar as propriedades termofísicas nas duas regiões.

### 3.4.1 - Grade de pontos nodais. Formulação explícita e implícita

Para utilizar o método das diferenças finitas, trabalhou-se com uma rede fixa de pontos nodais, dividindo-se o domínio  $(x,t)$ , em pequenos intervalos iguais,  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , de modo que :

$$x = i.\Delta x \quad i = 0,1,2,\dots,N \quad (3.46)$$

$$t = n.\Delta t \quad n = 0,1,2,\dots \quad (3.47)$$

Dessa forma a amostra de espessura  $d$  foi subdividida numa malha de  $N$  pontos nodais, de modo que:

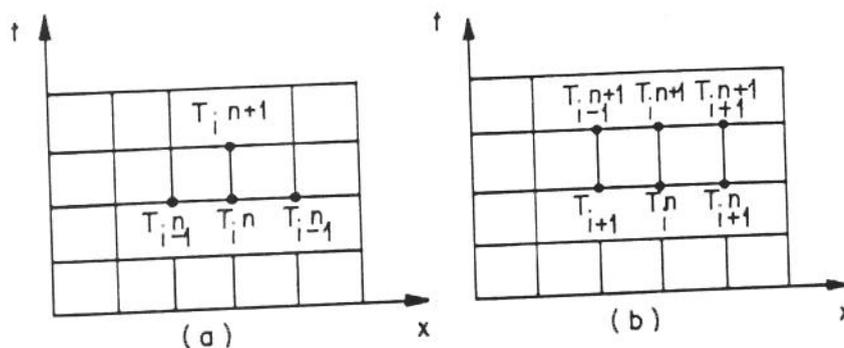
$$N.\Delta x = d \quad (3.48)$$

A temperatura em um determinado ponto nodal  $i.\Delta x$  , num instante  $n.\Delta t$  foi representada por:

$$T_i^n = T(i\Delta x, n\Delta t) \quad (3.49)$$

As notações  $(n+1)$  e  $(n-1)$  indicaram valores da temperatura num tempo futuro e anterior, respectivamente. Analogamente,  $(i+1)$  e  $(i-1)$  representaram valores de temperatura em posições imediatamente posterior e anterior àquela considerada.

Existem 2 categorias de métodos numéricos que podem ser utilizados para resolver equações diferenciais expressas em diferenças finitas : explícitos e implícitos. A idéia básica de cada um deles pode ser entendida através da grade de pontos nodais da figura 3.11.



**Fig.3.11** - Grades de pontos nodais, representando a noção dos métodos numéricos explícito (a) e implícito (b).

Nos métodos **explícitos** o valor da variável desconhecida ( $T_i^{n+1}$ ) é expresso diretamente (explicitamente) em termos de valores conhecidos das variáveis anteriores  $T_{i-1}^n, T_i^n$  e  $T_{i+1}^n$ . Aplicando-se a todos os pontos nodais, obtém-se um conjunto de equações algébricas não acopladas, que podem ser representadas por expressões do tipo :

$$T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \quad (3.50)$$

$$\text{onde } r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3.51)$$

Essas equações podem ser resolvidas separadamente para cada um dos intervalos de tempo  $\Delta t$ . Partindo-se de valores iniciais conhecidos para a temperatura, calculam-se os valores posteriores, sempre em termos dos valores anteriores, até que todos os pontos da grade tenham seus valores determinados. Tal procedimento numérico, embora apresente simplicidade computacional, exibe limitação quanto à estabilidade da solução. Segundo SMITH (1978), o método explícito é válido enquanto a seguinte condição de estabilidade for obedecida:

$$0 < \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.52)$$

Ela indica que fixando-se a separação  $\Delta x$  entre os pontos nodais da malha computacional, existirá um valor máximo que pode ser utilizado para o degrau de tempo  $\Delta t$ . A violação desse critério origina valores oscilatórios para a solução, que não correspondem ao comportamento físico do sistema.

Os métodos **implícitos** expressam o valor da variável desconhecida  $T_i^{n+1}$  no ponto nodal de interesse, em termos de uma equação que envolve 3 valores conhecidos e outros 2 desconhecidos, a qual pode ser representada como:

$$(1+r)T_i^{n+1} = r(T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + r(T_{i-1}^n + T_{i+1}^n) + (1-r)T_i^n \quad (3.53)$$

com o parâmetro  $r$  sendo obtido de (3.51).

Cada ponto da malha computacional é, então, representado por uma equação desse tipo. As equações resultantes são acopladas, de forma que devem ser resolvidas simultaneamente. Embora esses métodos requeiram mais cálculos computacionais do que os explícitos, apresentam, conforme SMITH (1978), a característica de serem matematicamente estáveis para qualquer valor finito do parâmetro de estabilidade.

Na representação das equações diferenciais para as regiões de sólido e líquido, foi utilizado um método implícito modificado, sugerido por CRANK & NICOLSON (1947). As derivadas temporais foram substituídas usando-se um esquema de diferenças para frente. Para as derivadas espaciais empregou-se a média aritmética entre suas representações implícita e explícita, obtidas usando-se diferenças centrais. A equação genérica utilizada para as duas regiões foi:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right]. \quad (3.54)$$

A principal vantagem apresentada por este método relaciona-se com a diminuição do erro que afeta a solução devido ao truncamento em  $\Delta t$ . Ele será da ordem de  $(\Delta t)^2$ , menor do que aqueles introduzidos usando-se as representações puramente implícita ou explícita. Embora requeira um número maior de cálculos, o método é matematicamente estável para todos os

valores do parâmetro  $r$  que satisfazem a equação (3.51). Apesar disso, PATANKAR & BALIGA (1978), registram exemplos onde o emprego de valores muito grandes para  $\Delta t$ , embora garantindo estabilidade matemática para o método de Crank-Nicolson, levam à soluções oscilatórias e fisicamente irreais.

### 3.4.2 - Equações discretizadas e algoritmo numérico

Para obter as equações de discretização utilizadas no modelo numérico, foi seguido o seguinte procedimento:

- As equações diferenciais para cada ponto nodal tiveram suas derivadas expandidas convenientemente em séries de Taylor, de acordo com um esquema de 3 pontos (pontos central, anterior e posterior).

- As temperaturas, tanto na região sólida quanto líquida, foram adimensionalizadas usando-se a expressão:

$$\theta \equiv \frac{T - T_m}{T_m} \quad (3.55)$$

onde  $T_m$  representou a temperatura de fusão/solidificação do líquido. Para evitar a singularidade matemática nesta expressão, as temperaturas foram expressas em graus Kelvin, de forma que, para a água  $T_m = 273$  K. A utilização dessa adimensionalização trouxe a vantagem de eliminar os termos relacionados com  $\theta_m$  nas equações discretizadas, diminuindo sua complexidade. As demais variáveis não foram adimensionalizadas.

- O método de Crank-Nicolson foi aplicado para representar a equação de condução, nos vários pontos nodais.

O problema tratado é unidimensional, no qual a matriz obtida com os coeficientes das equações discretizadas apresenta elementos não nulos somente ao longo de 3 diagonais (a principal e suas vizinhas). Para solucioná-lo pode ser usado um método de eliminação direto, como o de Gauss ou de Gauss-Jordan. Optamos por utilizar o algoritmo TDMA (TriDiagonal-

Matriz Algorithm), baseado no método de eliminação de Gauss, com as equações de discretização expressas no formato sugerido por PATANKAR (1980):

$$a_i T_i^{n+1} = b_i T_{i-1}^{n+1} + c_i T_{i-1}^n + d_i \quad (3.56)$$

com  $i = 1, 2, \dots, N$  e  $n = 0, 1, 2, \dots, t$

Este algoritmo aplica-se muito bem na solução de equações algébricas que estejam no formato (3.56), além de necessitar de recursos de armazenamento e tempo computacional, proporcionais somente ao número  $N$  de pontos da malha.

Na elaboração do programa numérico foi seguida a sequência de operações para o desenvolvimento do algoritmo, descritas por PATANKAR. Partindo-se da seguinte expressão simbólica para a temperatura :

$$T_i^{n+1} = P_i T_{i+1}^{n+1} + Q_i \quad (3.57)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N$  e  $n = 0, 1, 2, \dots, t$

os valores dos coeficientes  $P_i$  e  $Q_i$  foram calculados através das seguintes relações de recorrência:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.58)$$

No início do processo de recorrência tem-se  $i = 1$ , o que resultou em

$$P_1 = \frac{a_1}{b_1} \quad e \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3.59)$$

No final do processo, a temperatura  $T_{N+1}$  na equação (3.57) não tem significado físico, de modo que deve-se ter  $b_N = 0$ . Com isso  $P_N = 0$  e obteve-se :

$$T_N^{n+1} = Q_N \quad (3.60)$$

Iniciou-se, então, um processo de substituição de volta, usando-se a equação (3.57) com  $i = N-1, N-2, \dots, 2, 1$  o que permitiu obter os valores para  $T_{N-1}^{n+1}, T_{N-2}^{n+1}, \dots, T_2^{n+1}, T_1^{n+1}$ .

A rede de pontos nodais utilizada foi obtida dividindo-se a amostra unidimensional de espessura  $d$  em pequenos intervalos espaciais  $\Delta x$  e temporais  $\Delta t$ , obedecendo respectivamente as expressões (3.46) e (3.47). Admitiu-se a possibilidade de que a posição da interface sólido-líquido possa não coincidir com algum ponto nodal, representando sua coordenada espacial por:

$$S(t) = q\Delta x + \xi\Delta x \quad , \text{ sendo } -0.5 \leq \xi \leq 0.5 \quad (3.61)$$

onde  $q$  indica a posição da coordenada do ponto nodal que está mais próximo da interface sólido-líquido e  $\xi\Delta x$  a distância desse ponto nodal até a interface.

Na figura 3.12 foi esquematizada a malha unidimensional de pontos nodais utilizada. Nela indicou-se a notação para as regiões de sólido e líquido e para a interface, empregada na obtenção das equações discretizadas. As linhas tracejadas representaram as faces do volume de controle, tomado entre dois pontos nodais. Para o problema unidimensional considerado o valor desse volume, por unidade de área, foi  $\Delta x$ .

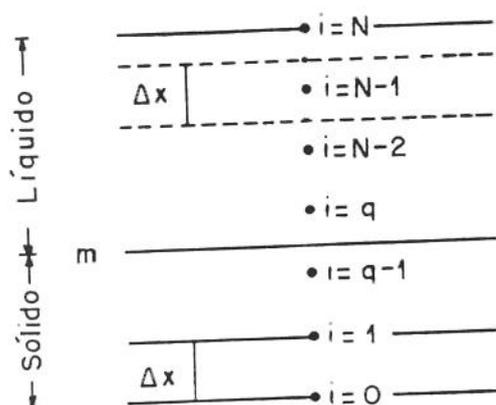


Fig.3.12 -Esquema da malha unidimensional de pontos nodais utilizada.

Um esquema de representação semelhante foi utilizado por MURRAY & LANDIS (1959) e depois por SPRINGER & OLSON (1959), na solidificação e fusão em geometrias cilíndricas.

No apêndice I foi descrita a metodologia utilizada para obtenção das derivadas parciais, aproximadas por diferenças finitas, em vários pontos nodais de interesse, na interface e nos contornos. A partir desses resultados obtiveram-se os valores correspondentes para os coeficientes do algoritmo TDMA.

No apêndice II apresentou-se o programa fonte, escrito em linguagem C, usado na solução numérica do problema.

### 3.4.3 - Condição de convecção na superfície livre

No estudo da mudança de fase, existem situações de interesse para as quais a condição de contorno da superfície livre pode ser expressa em termos do valor de uma temperatura ou através de um fluxo de energia. Esse fluxo em geral envolve a presença de um fluido ambiente e irá depender tanto do valor da temperatura da superfície, quanto das propriedades termofísicas e do estado de movimento do fluido.

Considerando-se a situação em que a superfície livre é mantida em contato com um fluido e transfere ou recebe calor convectivamente do ambiente, o fluxo de calor que se estabelecerá vai depender, além das propriedades termofísicas da superfície e do fluido, também de seu estado de movimento. O balanço de energia na superfície pode ser representado através da seguinte expressão:

$$-k_L \cdot \left. \frac{\partial T_L(t)}{\partial x} \right|_d = h_C \cdot [T_d(t) - T_A(t)] \quad (3.62)$$

onde  $h_C$  = coeficiente superficial convectivo ou coeficiente de película. Quando  $h_C$  é muito grande, tem-se a condição de temperatura constante  $T(0,t) = T_A$ , enquanto que  $h_C = 0$  representa a condição de isolamento térmico. Os coeficientes de película são, em geral,

obtidos por meio de expressões e correlações específicas. Valores de  $h_c$  grandes caracterizam a situação de convecção forçada, enquanto que valores baixos relacionam-se com a convecção natural.

A temperatura ambiente  $T_A(t)$  pode assumir valores maiores ou menores do que a temperatura inicial da placa, dependendo do meio ambiente estar sendo aquecido ou refrigerado. Pode ainda tanto manter-se constante como ter seu valor alterado durante o processo de mudança de fase. Essa última situação é representada através de uma expressão matemática apropriada para a variação da temperatura ambiente com o tempo.

Para estudar os efeitos no processo de congelamento, causado pela exposição da superfície livre da placa à convecção, foram analisadas duas situações às quais o contorno pode estar sujeito:

- Exposição súbita a um ambiente cuja temperatura é fixa. Essa temperatura pode, ainda, ter um valor maior ou igual à temperatura de mudança de fase,  $T_m$ , do líquido saturante.
- Exposição a um ambiente cuja temperatura é gradualmente elevada até um valor maior ou igual à  $T_m$ .

Ambas foram representadas matematicamente supondo que a variação da temperatura ambiente com o tempo,  $T_A(t)$ , fosse descrita por uma expressão senoidal do tipo:

$$T_A(t) = T_A(o) + \Delta T \sin\left(\frac{2 \pi t}{P_F}\right) \quad (3.63)$$

onde :

$\Delta T = T_{A \max} - T_A(o) =$  variação máxima da temperatura ambiente ( $^{\circ}\text{C}$ )

$T_{A \max} =$  valor máximo atingido pela temperatura ambiente durante o processo ( $^{\circ}\text{C}$ )

$T_A(o) =$  valor da temperatura ambiente no início do processo ( $^{\circ}\text{C}$ )

$P_F =$  período de flutuação da temperatura ambiente (s)

$t =$  tempo de exposição do contorno ao ambiente (s)

Quando  $\Delta T = 0$  representa-se a condição de temperatura ambiente constante, enquanto que  $\Delta T \neq 0$  indica variação gradual no valor dessa temperatura.

O uso de expressões dependentes do tempo na representação da temperatura ambiente, em processos de mudança de fase, foi feita entre outros por WESTPHAL (1967) e FOSS & FAN (1974). Ambos trabalharam com a solidificação de meios semi-infinitos. O primeiro considerou o meio inicialmente à temperatura de fusão, introduzindo uma condição convectiva onde a temperatura ambiente variava com o tempo. Os segundos admitiram que a temperatura inicial do meio fosse desconhecida e que, tanto na superfície quanto no ambiente, o valor da temperatura era o de fusão. Subitamente, a temperatura do ambiente diminuiu para um valor menor, podendo variar com o tempo. Seus resultados mostraram que nessas condições, a localização da interface não varia linearmente com o tempo.

#### **3.4.4 - Otimização do número de pontos da malha (N) e do degrau de tempo ( $\Delta t$ )**

Para verificar a influência que o degrau de tempo,  $\Delta t$ , e o número de pontos, N, da malha computacional têm nos resultados, o modelo numérico foi aplicado em placas com 0,075 m de espessura e porosidade igual à 0,40, saturadas com água. Uma delas foi considerada como sendo constituída de areia e a outra de duralumínio. Em ambas o contorno superior foi suposto estar termicamente isolado, enquanto que o inferior teve sua temperatura, no instante  $t = 0$ , diminuída e mantida no valor de  $-20^{\circ}\text{C}$ . As temperaturas iniciais foram consideradas iguais a  $20^{\circ}\text{C}$ . Para as propriedades termofísicas, foram utilizados os valores da tabela 3.1.

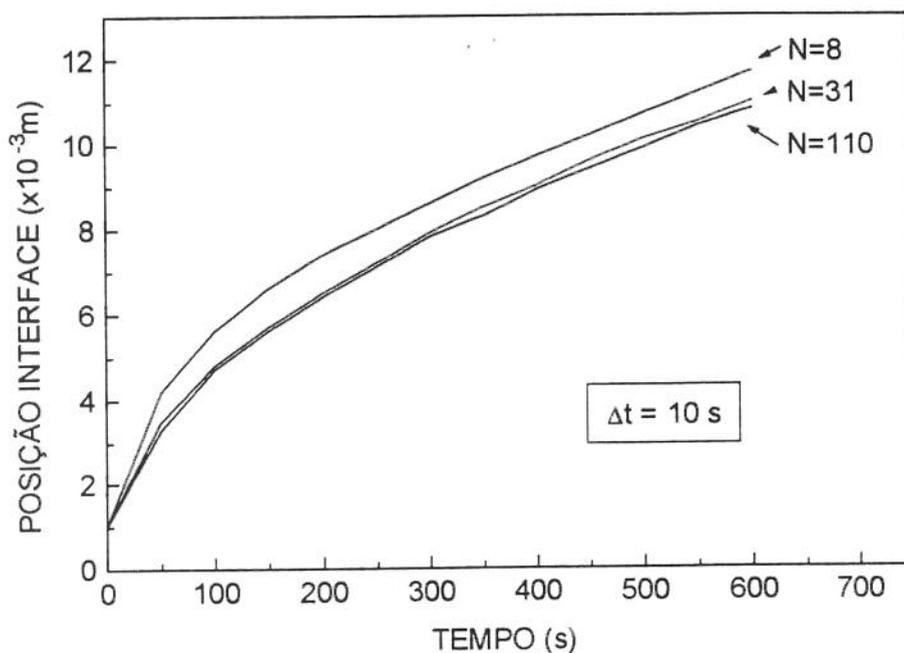
Para a condutividade térmica do gelo, empregou-se a relação sugerida por DILLARD & TIMMERHAUS (1969), que possibilitou calcular seu valor, em função da temperatura, através de:

$$k_{\text{gelo}} = \frac{630}{T_{\text{gelo}}} \quad (3.64)$$

com a temperatura T deve ser expressa em graus Kelvin.

Uma vez que a temperatura na região sólida da amostra é variável, o valor da temperatura do gelo foi considerado como sendo a média aritmética entre os valores das temperaturas subitamente imposta ( $T_o$ ) e de mudança de fase ( $T_m$ ).

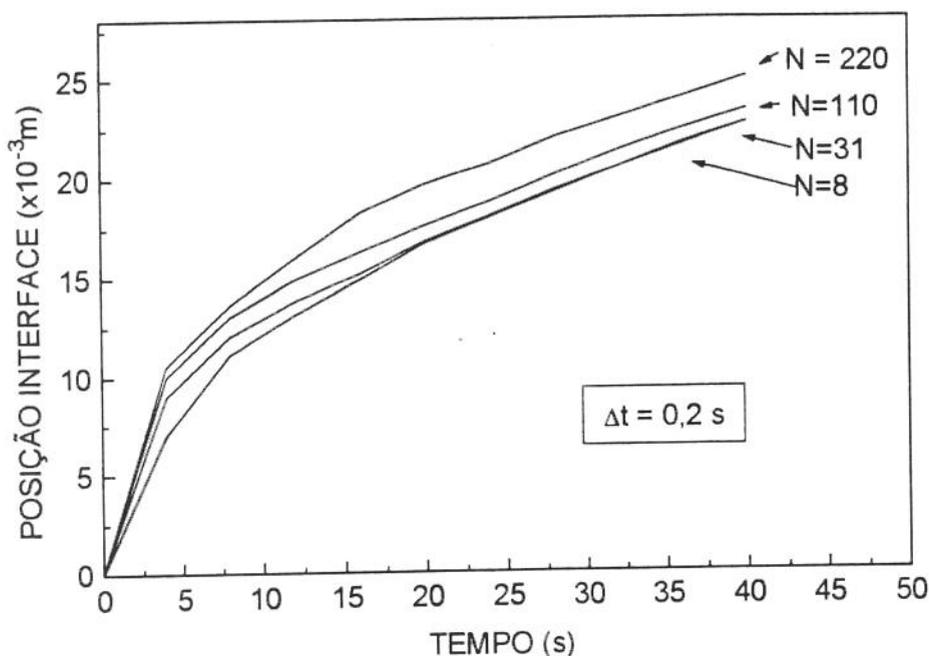
Na figura 3.13 foi representado o efeito do número de pontos,  $N$ , da malha computacional, sobre a localização da interface sólido-líquido, na placa porosa de areia, com porosidade igual à 0,40. Utilizou-se o valor de 10 s, para o degrau de tempo  $\Delta t$ , simulando-se um processo com duração de 600 s.



**Fig.3.13** - Influência do número de pontos da malha computacional na localização da interface, numa placa porosa de areia, com  $\varepsilon = 0,40$ .

Constatou-se que aumentando-se o número de pontos da malha, ocorreu aumento no tempo necessário para rodar o programa numérico. A utilização de um número pequeno de pontos ( $N=8$ ), gerou diferenças de 8 % na posição da interface, quando comparada com os demais resultados obtidos. O uso de valores entre 16 e 110, por sua vez, não levou à diferenças significativas para a localização da interface.

A figura 3.14 mostra o resultado numérico para a placa porosa de duralumínio, com a mesma porosidade, onde foi utilizado o degrau de tempo igual à 0,2 s. Devido ao congelamento ocorrer mais rápido nessa placa do que na de areia, o processo foi simulado somente até 40 segundos.

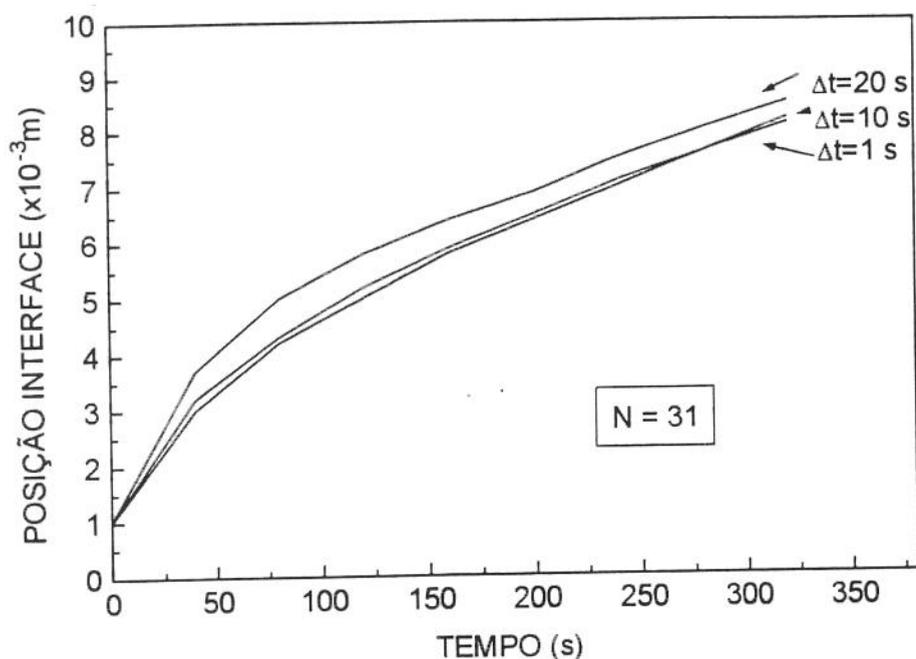


**Fig.3.14** - Influência do número de pontos da malha computacional na localização da interface, numa placa porosa de duralumínio, com  $\varepsilon = 0,40$ .

Verificou-se, novamente, aumento no tempo necessário para rodar o programa numérico, com o crescimento do número de pontos da malha. A utilização de  $N = 110$  gerou diferenças de até 3% na posição da interface, quando comparada com os demais resultados, enquanto que valores menores que 31 não provocaram diferenças significativas.

Analisando estes resultados, foi escolhida uma malha de 31 pontos nodais para trabalhar com o modelo numérico. Dessa forma foi estabelecido um compromisso de minimizar o tempo computacional, com uma baixa discrepância entre os resultados numéricos. Essa escolha trouxe uma vantagem adicional. Como na montagem experimental foram utilizados 15 termopares, igualmente espaçados ao longo da amostra, haverá pontos nodais localizados tanto na posição dos termopares, quanto à meia distância deles.

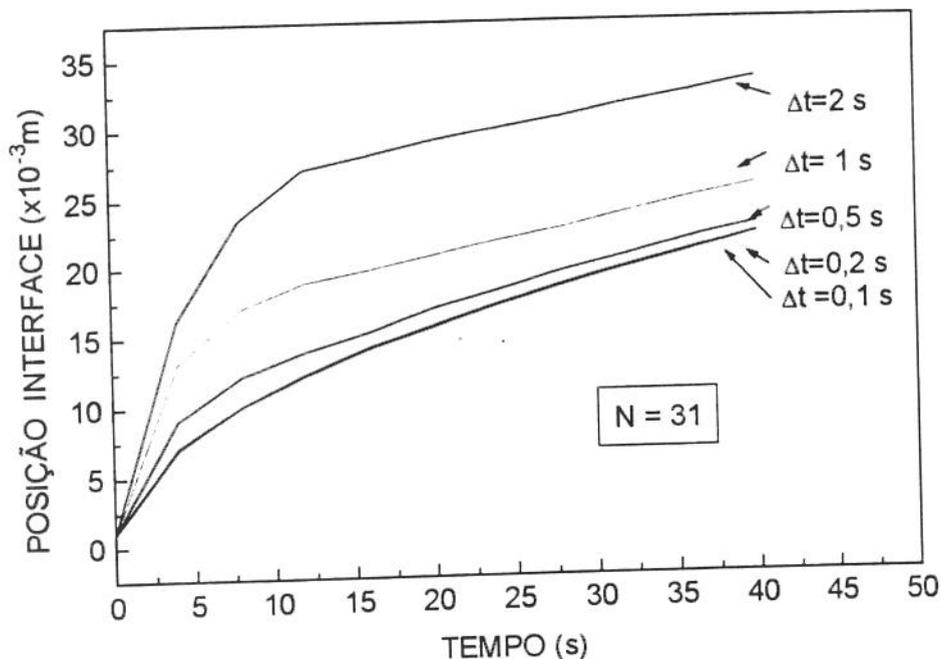
A figura 3.15 representa o efeito do degrau de tempo  $\Delta t$  na localização da interface, para a placa porosa de areia. Usou-se uma malha com  $N = 31$  simulando-se o processo até 320 s.



**Fig.3.15** - Influência do degrau de tempo na posição da interface, numa placa porosa de areia, com  $\varepsilon = 0,40$ .

Para valores de  $\Delta t$  compreendidos entre 1 s e 10 s, praticamente não foram registradas diferenças no posicionamento da interface. Verificou-se que o valor  $\Delta t = 20$  segundos gerou diferenças de 5 %, quando comparado com os demais resultados.

Na figura 3.16, representaram-se os resultados para a placa porosa de duralumínio, supondo também para uma malha com  $N = 31$  e com o processo simulado até 40 s.



**Fig. 3.16** - Influência do degrau de tempo na posição da interface, numa placa porosa de duralumínio, com  $\epsilon = 0,40$ .

Para valores do degrau de tempo até 0,2 s não foram registradas diferenças na posição da interface, enquanto que a utilização de  $\Delta t = 2$  s gerou significativa alteração.

Em vista desses resultados empregaram-se degraus de tempo diferenciados. Quando trabalhou-se com placas isolante térmicas, como a areia, foi utilizado  $\Delta t = 10$  s. Para placas condutoras, como o duralumínio, utilizou-se  $\Delta t = 0,2$  s.

### 3.4.5 - Erros introduzidos pelo método de diferenças finitas. Estabilidade da solução

No processo de aproximar as equações diferenciais usando expressões de diferenças finitas em cada ponto nodal, são introduzidos erros nas várias etapas do cálculo. Esses erros estão ligados essencialmente à dois fatores: truncamentos aplicados na obtenção das expressões

e arredondamentos nos cálculos efetuados. Seu efeito cumulativo, afetando tanto o resultado numérico final, quanto a estabilidade da solução, torna importante conhecer suas origens para minimizar seus efeitos.

#### **3.4.5.1 - Erros de truncamento.**

Quando se utiliza o método de aproximar as derivadas por expansões em série de Taylor, a série resultante é truncada após um determinado número de termos. O erro de truncamento é gerado em cada etapa do processo de cálculo, devido à interrupção da série. Na obtenção das equações, optou-se por desprezar a contribuição dos termos com potências superiores a 2 para as expressões utilizadas. Isso levou a um erro de truncamento da ordem de  $(\Delta x)^2$ . Este erro poderia tornar-se menor se fosse considerado um maior número de termos na série, antes do truncamento. Entretanto, seriam geradas equações mais complexas para as aproximações, aumentando o tempo de computação necessário para resolver o algoritmo.

O método implícito de CRANK & NICOLSON (1947), que usamos para representar a equação da condução em diferenças finitas, por sua vez, introduz um erro de  $(\Delta t)^2$  na equação temporal. Dessa forma o erro espacial e temporal foi da ordem de  $(\Delta x)^2$  e  $(\Delta t)^2$ , respectivamente.

#### **3.4.5.2 - Erros de arredondamento**

Toda vez que um cálculo é realizado com números compostos por finitas casas decimais, introduz-se um erro de arredondamento, que superpõe-se em soluções lineares. A curva de distribuição desses erros é semelhante à de um processo aleatório, de modo que seu efeito é, em parte, cancelado. Os valores mais pobre que foram utilizados possuem 2 casas decimais, contribuindo para diminuir os efeitos cumulativos desses erros.

O aumento do número de pontos da malha computacional, embora melhore a aproximação das equações diferenciais, contribui para aumentar esse efeito cumulativo, uma vez que aumenta o número de equações a serem solucionadas. Conforme discutido anteriormente, nos cálculos numéricos foi utilizada uma malha formada por 31 pontos nodais, que também contribuiu para diminuir o efeito cumulativo dos erros de arredondamento.

### 3.4.5.3 - Estabilidade da solução

Os critérios de estabilidade que atuam num determinado problema são característicos do tipo de problema e da aproximação utilizada, de acordo com ÖZISIK (1989). Problemas unidimensionais de condução de calor, com condições de contorno de 1a. espécie, tiveram sua condição de estabilidade analisada por RICHTMEYER (1957). Utilizando o método de expansão em séries de Fourier-Neumann, verificou que a introdução de um pequeno erro nos cálculos não será amplificada, se a seguinte condição for satisfeita:

$$\frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1 \quad (3.65)$$

que é equivalente à (3.52).

Conforme anteriormente citado, o método implícito de CRANK & NICOLSON (1947) é matematicamente estável para qualquer valor do parâmetro de estabilidade  $r$ , definido em (3.51). Deve-se, entretanto, ressaltar o resultado de PATANKAR & BALIGA (1978), que registraram soluções oscilatórias e fisicamente irreais, em situações onde foram usados valores muito grandes para  $\Delta t$ .

### 3.4.6 - Vantagens e limitações do modelo numérico

O modelo numérico desenvolvido apresenta como uma de suas características, permitir mudanças nas condições de contorno, de maneira que pode ser usado, por exemplo, em situações onde haja convecção.

Outros valores para os coeficientes referentes ao contorno superior foram obtidos, introduzindo-se a expressão (3.2) na condição de contorno convectiva (3.1), conforme mostrado no Apêndice I. Com essas modificações foi possível estudar o processo de solidificação em placas porosas planas e finitas, induzido pela diminuição súbita da temperatura inferior e sujeitas à convecção na superfície livre, com as seguintes vantagens:

- A temperatura inicial da placa pode ter qualquer valor.
- A temperatura ambiente pode tanto permanecer constante, quanto variar com o tempo, de acordo com alguma expressão matemática.
- O regime convectivo pode ser tanto natural quanto forçado assim como ter-se a condição de isolamento térmico.
- A duração do processo, a porosidade da placa e o número de Stefan, puderam assumir qualquer valor prático.

Supondo que a temperatura ambiente atinja valores muito baixos, menores que o valor da temperatura de solidificação do líquido, uma nova situação seria criada. Teremos o desenvolvimento de 2 interfaces : uma de baixo para cima ( devido ao abaixamento súbito da temperatura nesse contorno) e outra de cima para baixo ( gerada pela baixa temperatura ambiente). Assim, num dado instante, ocorreriam a existência simultânea de 3 regiões ( 2 fases sólidas separadas por líquido), com temperaturas diferenciadas. Nesse caso o modelo numérico não se aplicaria, configurando-se uma limitação para seu uso : a temperatura ambiente deve ser sempre maior do que a temperatura de solidificação do líquido existente na placa porosa.

### 3.5 - Simulações numéricas

Com os novos valores para os coeficientes referentes ao contorno superior da amostra, fizeram-se simulações para verificar como a localização da interface sólido-líquido e a distribuição de temperaturas ao longo da amostra são afetadas por essa nova condição. Foram analisadas as seguintes situações:

- Temperatura ambiente constante e variável.
- Convecção natural e forçada.
- Porosidades variáveis.

Em todas considerou-se o meio poroso constituído de areia e saturado por água. As porosidades variaram desde  $\varepsilon = 1,00$ , correspondendo à amostra constituída unicamente pelo líquido, até  $\varepsilon = 0,20$ , representando uma diminuição no volume de líquido presente na amostra e acentuada influência do componente sólido nos valores das propriedades efetivas utilizadas.

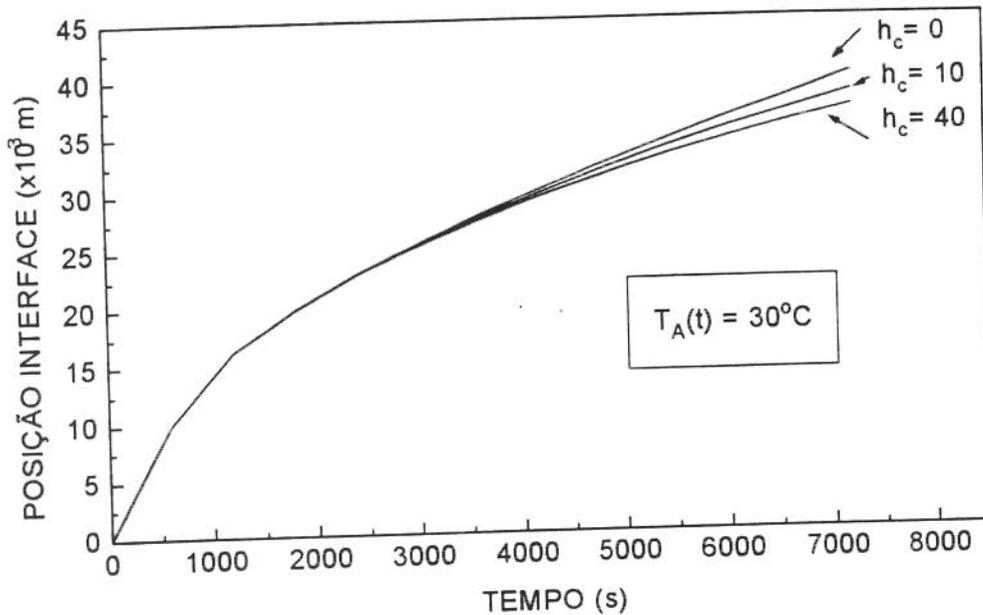
Para iniciar a simulação numérica foi necessário admitir a existência de uma fina camada de gelo, no instante  $t = 0$ . A escolha de um valor inicial para essa espessura, foi baseada primeiramente no tamanho da amostra e no espaçamento da grade utilizada. Em seguida, empregando-se a equação do balanço de energia na interface (3.13), sua localização, em instantes subsequentes e para diferentes porosidades, foi determinada numericamente. Analisando-se a consistência dos resultados, escolheu-se o valor de 0,001 m, para ser utilizado nos cálculos, o qual correspondeu à aproximadamente 33% de um espaçamento da grade de 31 pontos adotada.

### 3.5.1 - Convecção natural, forçada e isolamento térmico

As propriedades convectivas da superfície livre e do fluido ambiente, bem como o regime de convecção, foram englobadas no valor do coeficiente de troca de calor convectivo,  $h_c$ . Admitiu-se o valor  $10 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$  como representando a situação de convecção natural e  $40 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$  a de convecção forçada. Já  $h_c = 0$ , caracterizou a condição de isolamento térmico.

As figuras seguintes mostram alguns dos resultados obtidos para a variação da posição da interface sólido-líquido com o tempo e para a distribuição de temperaturas através de uma placa com espessura de 0,075 m. Foi simulado um processo com duração de 2 horas, adotando-se os valores da tabela 3.1 para as propriedades da água, gelo e areia. Os coeficientes convectivos assumiram os valores acima citados, para representar as situações de isolamento térmico, convecção natural e forçada. A temperatura subitamente imposta e mantida no contorno inferior da placa foi de  $-20^\circ\text{C}$  e o líquido encontrava-se à uma temperatura inicial de  $+20^\circ\text{C}$ .

Na figura 3.17 tem-se o resultado da influência do coeficiente de película  $h_c$  no processo de solidificação, analisando-se uma placa com porosidade igual a 0,40. Admitiu-se que a superfície superior foi mantida em contato um ambiente de temperatura constante e igual à  $30^\circ\text{C}$ .



**Fig 3.17** - Influência do coeficiente de película na posição da interface, numa placa de areia com  $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Temperatura ambiente constante.

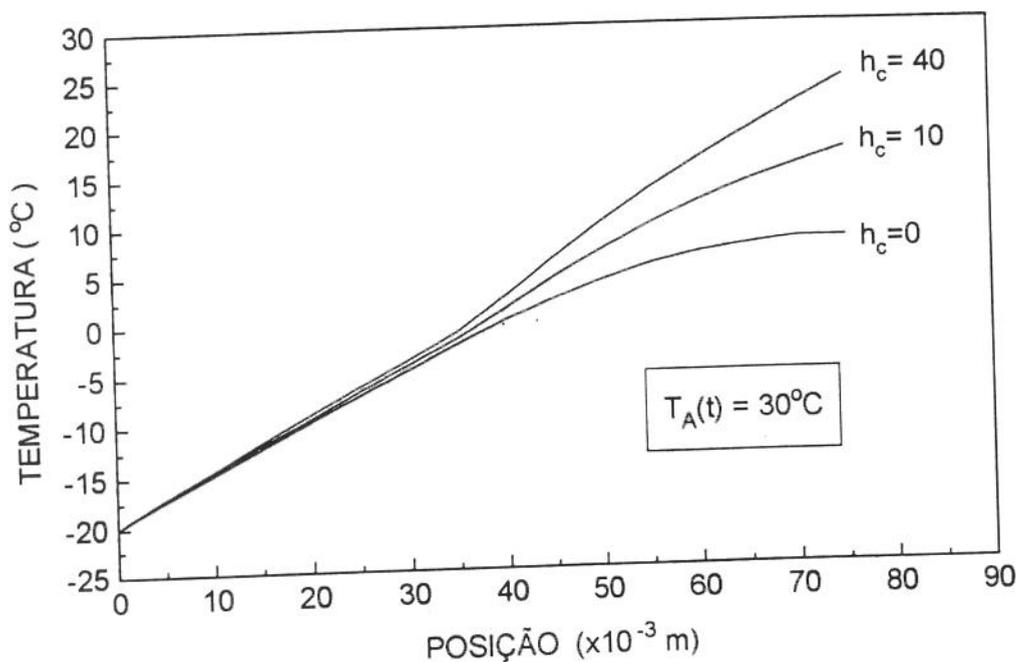
O resultado sugeriu que o processo de solidificação, nas circunstâncias e com os valores das propriedades utilizadas, apresenta 2 etapas.

A primeira, atuando durante os 3 600 s iniciais, na qual o crescimento da interface praticamente não foi afetado pelas condições do contorno superior. A formação da interface foi controlada basicamente pelo valor da temperatura no contorno inferior (subitamente imposta no instante  $t = 0$ ). A diminuição desse valor levaria a interface a localizar-se mais profundamente.

A outra ocorreu em seguida e à medida que o tempo passou a influência das condições convectivas e da temperatura ambiente manifestou-se. Como resultado foi observada uma diminuição na espessura da camada de sólido formada. Os menores valores foram obtidos

quando a transferência de calor convectiva foi suposta forçada ( $h_c = 40 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ ). A interface resultou mais extensa quando o contorno foi mantido termicamente isolado.

A figura 3.18 mostra as distribuições de temperatura nas placas, nas mesmas condições anteriores.



**Fig 3.18** - Influência do coeficiente de película na distribuição de temperaturas ao longo da placa de areia com  $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Temperatura ambiente constante.

Verificou-se que o tipo de processo convectivo simulado atuar durante o intervalo de tempo utilizado (7 200 s), influenciou muito pouco os valores das temperaturas na região sólida. Isso corrobora a pouca alteração constatada na posição da interface. Na região de líquido, entretanto, a influência foi muito acentuada. Ocorreu sensível aumento nos valores das temperaturas dessa região, quando comparadas com a situação de isolamento térmico e à medida que o regime convectivo passou de natural para forçado.

Os resultados indicaram que se a temperatura ambiente for mantida constante e num valor maior do que a temperatura inicial da placa, a presença de convecção no contorno superior retardará a solidificação, gerando temperaturas mais elevadas na região de líquido. Esses efeitos foram mais pronunciados à medida em que o coeficiente de troca de calor convectivo aumentou

de valor. Comparando-se os resultados obtidos com  $h_c = 0 \text{ W/m}^2\text{°C}$  e  $h_c = 40 \text{ W/m}^2\text{°C}$ , após 7 200 s, verificou-se uma diferença de 10 % na posição da interface, enquanto que as temperaturas na região de líquido triplicaram de valor.

### 3.5.2 - Influência da temperatura ambiente na convecção forçada

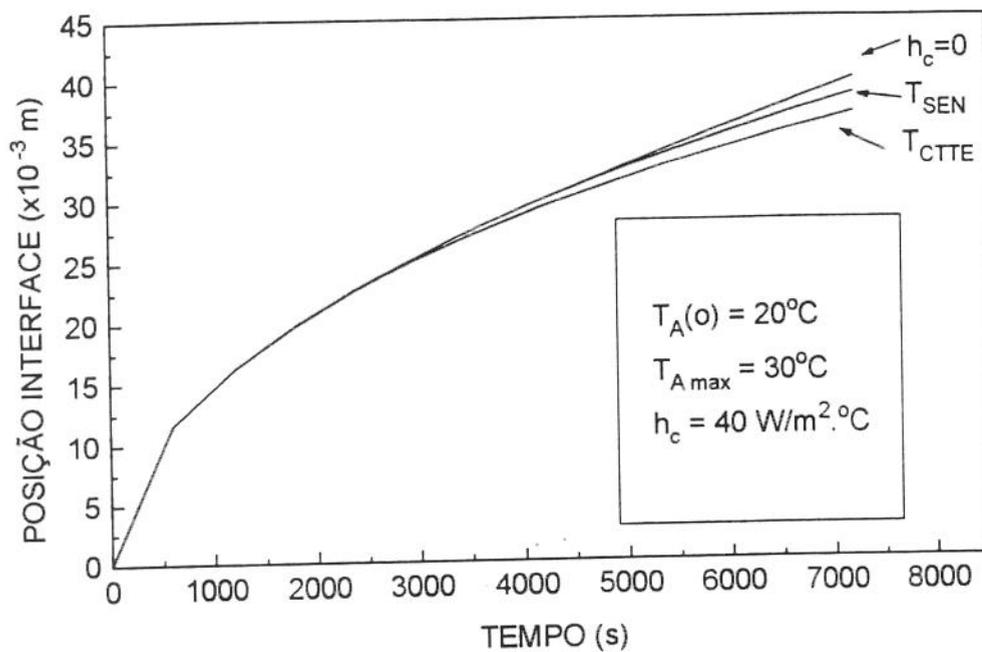
Para verificar a influência que uma variação gradual na temperatura ambiente tem no processo, foi simulado o congelamento de uma placa de arcia, com porosidade igual a 0,40, saturada com água e submetida ao regime de convecção forçada. Utilizou-se a expressão (3.63) para o perfil sinusoidal de temperaturas, com o período  $P$  correspondente a 86 400 s. Dessa forma a temperatura externa deve atingir seu valor máximo 21 600 s após o início do processo.

Foram estudadas duas situações possíveis que o valor da temperatura ambiente inicial,  $T_A(0)$ , pode assumir em relação à temperatura inicial do líquido presente na amostra,  $T_i$ , e de mudança de fase,  $T_m$ :

- Ambiente aquecido:  $T_A(0) > T_i$
- Ambiente resfriado:  $T_m < T_A(0) < T_i$ .

#### 3.5.2.1 - Ambiente aquecido: $T_A(0) > T_i$

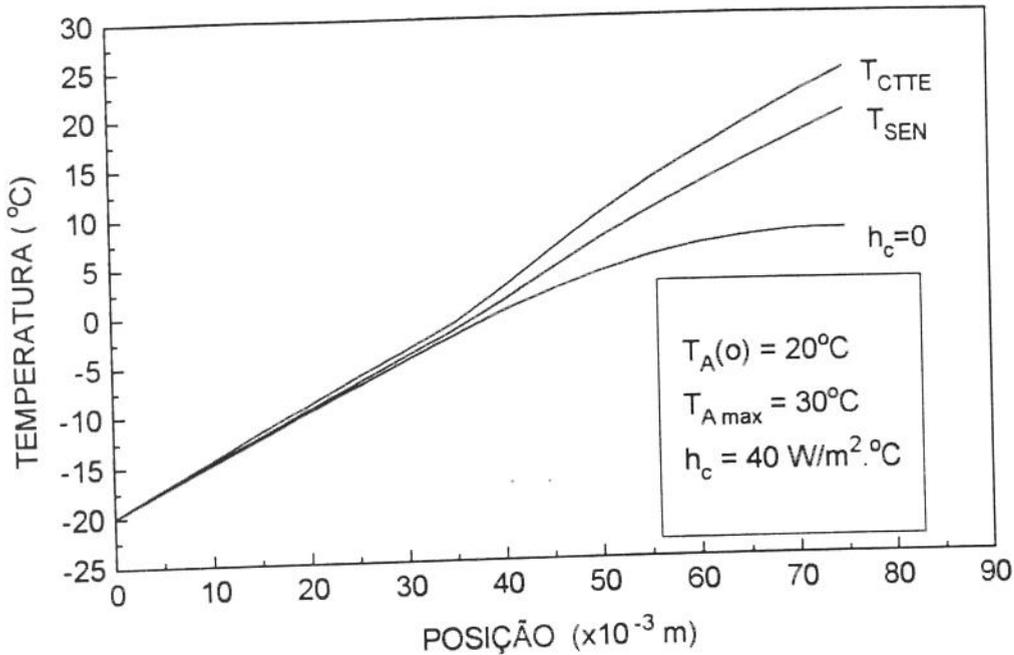
A figura 3.19 apresenta os resultados da variação da posição da interface em função do tempo, para a placa porosa. A curva indicada por  $T_{CTTE}$ , representou a situação da placa exposta a um ambiente com temperatura constante de 30 °C. A curva  $T_{SEN}$  indicou que houve aumento gradual na temperatura ambiente, desde 20 °C até 30 °C. Os resultados obtidos após 7 200 s, foram comparados com a situação de isolamento térmico ( $h_c = 0$ ).



**Fig 3.19** - *Influência da variação da temperatura ambiente na posição da interface, numa placa de areia com  $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Ambiente aquecido e contorno superior submetido à convecção forçada.*

Mais uma vez verificou-se que aproximadamente até 3 600 s, a localização da interface não foi afetada pelas condições externas. Transcorrido esse tempo o efeito das condições ambientais evidenciou-se, provocando diminuição na posição da interface. A manutenção do valor sempre constante para a temperatura ambiente inibiu mais a formação da interface do que o aumento gradual, conforme verificou-se comparando as curvas  $T_{ctte}$  e  $T_{sen}$ . Em ambos os casos, entretanto, a espessura da camada de sólido formada resultou menor quando comparada com a situação de isolamento térmico.

A figura 3.20 representa as distribuições de temperaturas nessa placa, obtidas transcorridos 7200 s.



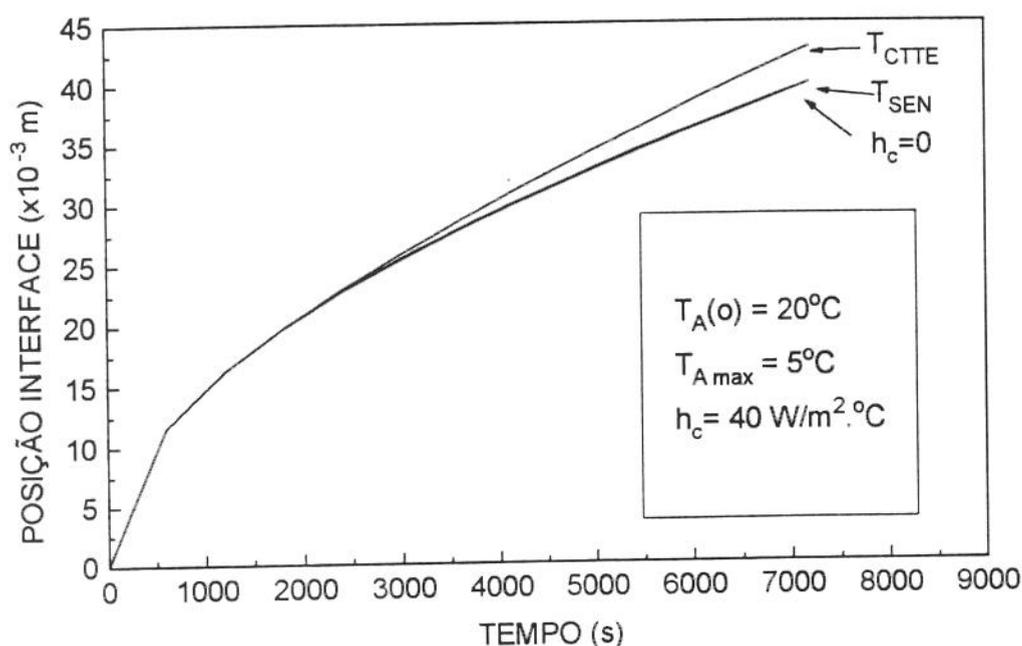
**Fig 3.20** - Influência da temperatura ambiente nas temperaturas numa placa de areia com  $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Ambiente aquecido e contorno superior submetido à convecção forçada.

Na região solidificada, verificou-se novamente que as temperaturas quase não foram influenciadas pelas condições existentes no contorno superior. Próximo da interface sólido-líquido ( $T = 0^\circ\text{C}$ ), observou-se ligeira tendência de aumento nas temperaturas, quando se comparou a condição de isolamento térmico ( $h_c = 0$ ), com as outras duas situações.

Ao final de 7 200 s, as temperaturas na região líquida da placa apresentaram valores 18 % menores, quando o ambiente foi aquecido através da variação senoidal, do que quando foi mantido desde o início num valor constante de temperatura. Os valores mais baixos para as temperaturas nessa região, foram obtidos com a superfície livre mantida termicamente isolada ( $h_c = 0$ ).

### 3.5.2.2 - Ambiente resfriado: $T_m < T_A(o) < T_i$

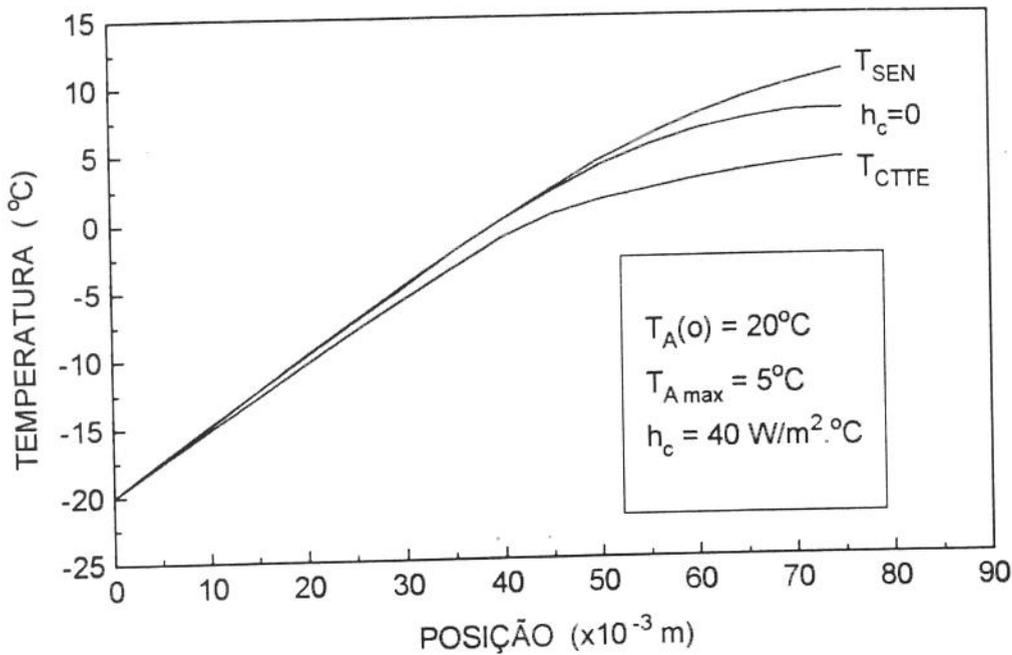
As curvas correspondentes a  $T_{cte}$  referem-se agora à temperatura ambiente constante e igual a  $5^\circ\text{C}$ , enquanto que as curvas  $T_{sen}$  representaram a diminuição gradual dessa temperatura desde  $20^\circ\text{C}$  até  $5^\circ\text{C}$ . A influência do resfriamento do ambiente na posição da interface com o passar do tempo, até  $7\,200$  s, foi representada na figura 3.21.



**Fig 3.21** - Influência da temperatura ambiente na posição da interface, numa placa de areia com  $\varepsilon = 0,40$ , após  $7\,200$  s, Ambiente resfriado e contorno superior submetido à convecção forçada.

Como anteriormente, notou-se que a influência das condições exteriores manifestou-se aproximadamente 1 hora após iniciado o processo. A manutenção da temperatura ambiente num valor constante e menor do que a temperatura inicial da amostra, colaborou para aumentar a extensão da interface sólido-líquido. Os resultados indicaram ainda que a localização da interface não foi afetada quando o contorno foi mantido termicamente isolado ou esteve submetido à diminuição senoidal da temperatura ambiente.

Na figura 3.22 foram representadas as distribuições de temperaturas nessa placa, após 7 200 s.



**Fig 3.22** - Influência da temperatura superficial nas temperaturas transversais numa placa de areia com  $\varepsilon = 0,40$ , após 7 200 s. Ambiente resfriado e contorno superior submetido à convecção forçada.

Verificou-se que a diminuição gradual da temperatura exterior ( $T_{sen}$ ), gerou menores temperaturas na região de líquido, do que aquelas obtidas com a condição de isolamento ( $h_c = 0$ ). Já a manutenção da temperatura exterior num valor constante e menor do que a temperatura da amostra, facilitou o processo de solidificação. Esse resultado foi confirmado pelos menores valores obtidos nessa condição para as temperaturas, tanto da região de sólido, quanto de líquido.

Dos resultados verificou-se que, estando a placa exposta a um ambiente que foi aquecido através do aumento gradual de sua temperatura, formou-se uma camada de sólido mais espessa do que aquela obtida quando a temperatura ambiente foi mantida constante desde o início do processo. As temperaturas transversais na placa, principalmente na região de líquido, resultaram menores também quando foi imposta a variação senoidal. Mantendo-se o contorno superior termicamente isolado, o processo de solidificação foi favorecido, gerando-se camadas de sólido mais espessas e menores valores para as temperaturas transversais na placa.

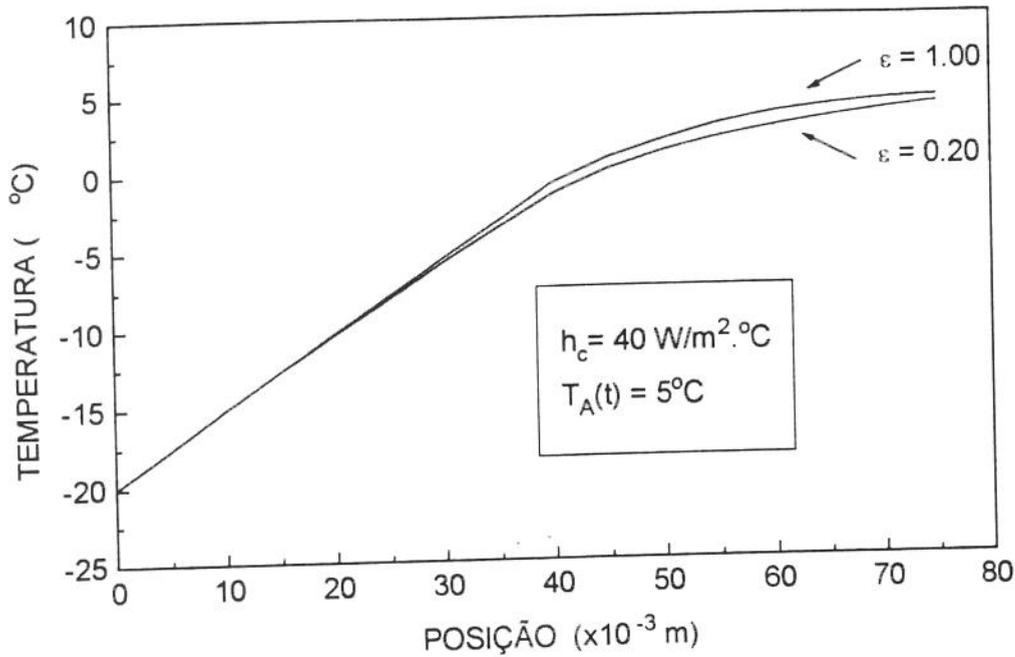
Resfriando-se o ambiente e mantendo-se sua temperatura num valor baixo desde o início do processo, obtiveram-se camadas de sólido mais espessas e menores temperaturas transversais, indicando que o processo de solidificação foi favorecido. Até 7 200 s, a diminuição gradual da temperatura ambiente ou a manutenção do isolamento térmico, não introduziram diferenças nas localização da interface, nem nas temperaturas da região sólido. Neste mesmo intervalo de tempo, as menores temperaturas na região de líquido foram obtidas com a presença de isolamento térmico.

### **3.5.3 - Influência da porosidade**

Para verificar como a variação das condições ambientais, combinada com diferentes porosidades influencia o processo de solidificação, foram obtidas as distribuições de temperaturas, após 7 200 s, ao longo de uma placa com espessura de 0,075 m. Como anteriormente considerou-se uma placa de areia saturada de água, com temperatura inicial de 20°C. Subitamente seu contorno inferior teve a temperatura abaixada para -20°C. Supos-se que a superfície livre estivesse em contato com um fluido ambiente de temperatura constante. O regime imposto foi o de convecção forçada e a porosidade da placa teve seu valor variado desde 0,20 até 1,0.

Em todas as simulações, verificou-se que as temperaturas na região solidificada diminuíram ligeiramente com o decréscimo da porosidade e que na região de líquido, essa diminuição foi mais evidenciada. Assim, à medida que o volume do esqueleto sólido da placa aumentou (ou o volume de líquido existente na placa diminuiu), as temperaturas transversais diminuíram, qualquer que fosse a situação de convecção (natural ou forçada) na superfície livre. Conforme esperado, os menores valores de temperatura foram obtidos com a superfície livre exposta a um ambiente resfriado e mantido à temperatura constante.

Na figura 3.23 encontram-se os resultados obtidos para as distribuições de temperatura em placas de areia com valores extremos para a porosidade. A temperatura ambiente foi mantida constante no valor de 5°C, em regime que consideramos como de convecção forçada.



**Fig 3.23** - Distribuição de temperaturas em placas de areia, com diferentes porosidades, após 7 200 s. Temperatura ambiente constante e contorno superior submetido à convecção forçada.

Registrou-se ligeira diminuição das temperaturas nas regiões de sólido e principalmente de líquido, quando a porosidade diminuiu de 1,00 para 0,20, novamente indicando que o regime convectivo afetou mais as temperaturas na região líquida da amostra.

### 3.5.4 - Influência das propriedades termofísicas

Para verificar a influência que as propriedades termofísicas do meio poroso, tem no processo de mudança de fase, o modelo numérico foi aplicado à algumas placas porosas hipotéticas. Foi considerado que as placas eram constituídas de areia, PVC, duralumínio e aço-carbono e que estavam saturadas com água. Para as propriedades termofísicas, além dos valores relacionados na tabela 3.2, foram utilizados ainda os seguintes, obtidos nas mesmas referências:

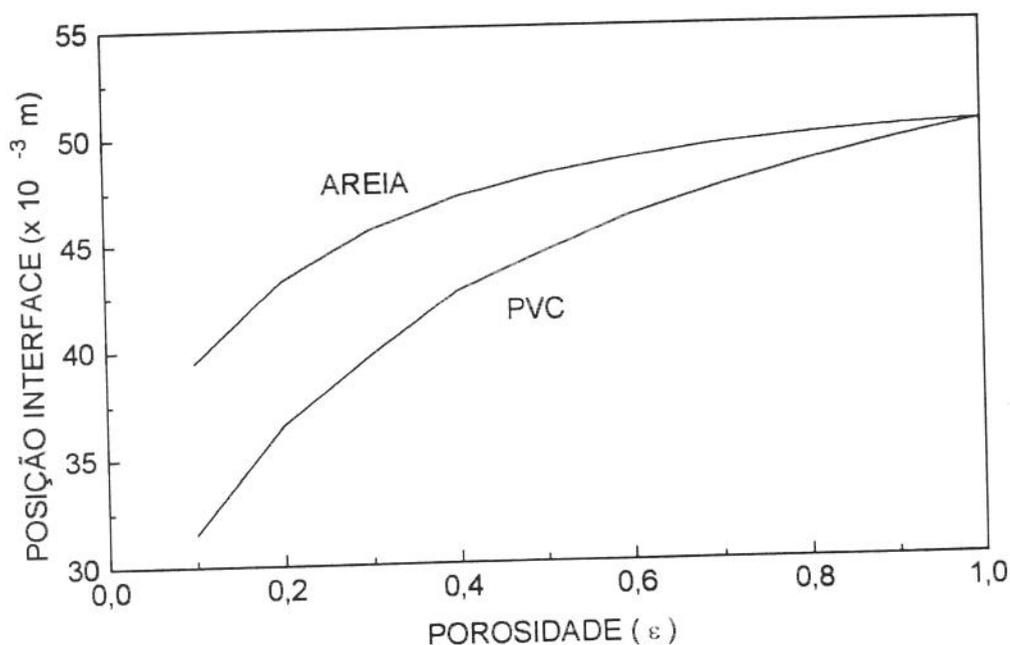
Aço-carbono (23 °C)
$\rho = 7272 \text{ Kg/m}^3$
$C_p = 420 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$
$k = 52 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

**Tabela 3.2** - Valores das propriedades termofísicas para o aço carbono.

A espessura das placas foi considerada igual à 0,075 m e sua temperatura inicial admitida como 30°C. A temperatura subitamente imposta foi considerada igual a -10°C e o contorno superior foi suposto estar termicamente isolado.

A posição da interface sólido-líquido, em função da porosidade, foi determinada para cada uma das placas. Considerou-se uma malha com 31 pontos nodais e degrau de tempo igual a 10 s, supondo-se, ainda, que a duração do processo foi de 300 s.

Na figura 3.24, são mostrados os resultados obtidos para as placas de areia e PVC.

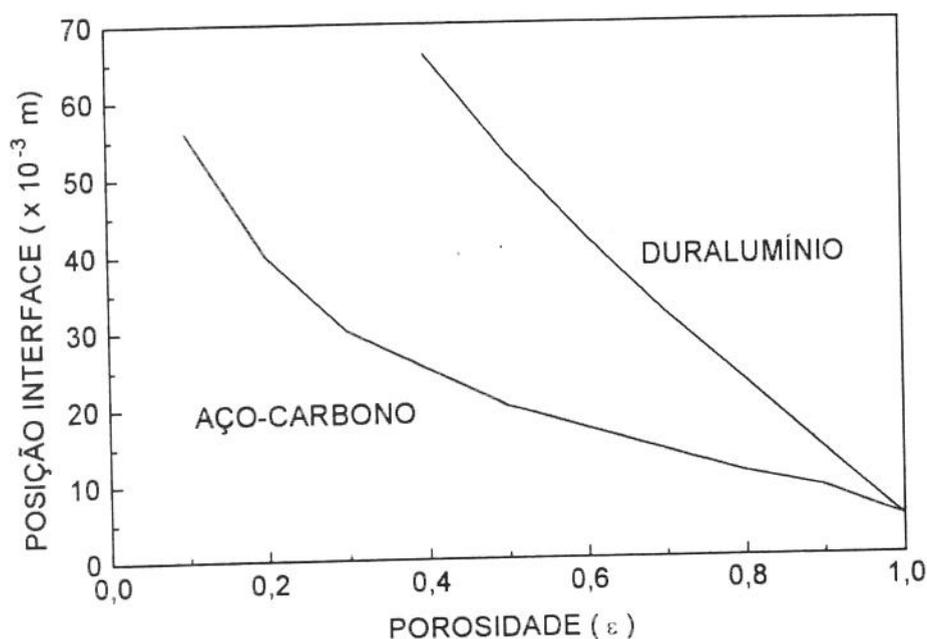


**Fig.3.24** - Posição da interface, em função da porosidade, em placas de areia e PVC, até 300 segundos. Contorno superior isolado.

Verificou-se que o aumento da porosidade levou a interface a formar-se mais profundamente. O maior valor para sua localização, foi obtido na situação em que somente o líquido estava presente na amostra ( $\epsilon = 1,00$ ). O resultado indicou que a utilização de material

poroso, com difusividade térmica efetiva menor do que a do gelo, irá prejudicar o crescimento da interface, retardando o congelamento total da placa.

Na figura 3.25, estão representados os resultados obtidos para as placas de duralumínio e aço-carbono, supostas estarem nas mesmas condições anteriores.



**Fig.3.25** -Posição da interface, em função da porosidade, em placas de duralumínio e aço-carbono, até 300 segundos. Contorno superior isolado..

Utilizando-se material com propriedades de condutor térmico, foi verificado um comportamento diferente. A diminuição da porosidade (significando mais sólido presente na placa), levou a interface a formar-se mais profundamente, em relação à situação em que na placa tem-se somente líquido ( $\epsilon = 1,00$ ). Assim a introdução de materiais bons condutores térmicos, em placas saturadas com água, apressou seu congelamento total. Para o duralumínio, verificou-se que valores da porosidade inferiores à 0,30, provocaram a solidificação total dessa placa, antes de 300 segundos. Por esse motivo os resultados correspondentes a  $0,10 < \epsilon < 0,30$ , não foram representados.

Os resultados dessas figuras foram explicados, analisando-se os valores das difusividades térmicas efetivas para as regiões sólidas, formadas nas placas.

Quando se empregam bons condutores térmicos na constituição da matriz porosa, os valores das difusividades térmicas efetivas das regiões de sólido, sempre resultaram muito maiores do que o valor do gelo. Como o calor é retirado mais rápido através de uma placa com elevada difusividade térmica, após algum tempo a interface deverá localizar-se mais profundamente nessas placas porosas, quando comparadas com a situação em que  $\epsilon = 1,00$ . À medida em que a porosidade foi diminuída (e, portanto, mais sólido foi agregado à placa) ou que a difusividade térmica da matriz porosa aumentou, ocorreu maior penetração da interface sólido-líquido. Em consequência foram também obtidas menores temperaturas através da placa, conforme os resultados numéricos.

Utilizando-se materiais isolantes térmicos na confecção da matriz porosa, foram obtidos resultados opostos. A interface desenvolveu-se menos do que na situação em que  $\epsilon = 1,00$ . À medida em que a difusividade térmica efetiva da fase sólida ou a porosidade foram diminuídas, o calor foi retirado mais lentamente. Consequentemente a interface localizou-se menos profundamente e as temperaturas através da placa resultaram maiores.

## Capítulo 4

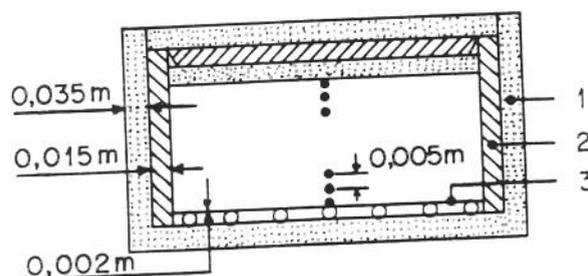
### Análise experimental

#### 4.1 - Montagem experimental

A montagem experimental desenvolvida, permitiu submeter amostras de diferentes materiais e porosidades, às condições estabelecidas na formulação teórica. Ela foi constituída basicamente por uma célula de medida, instrumentada convenientemente e por um sistema de refrigeração, descritos à seguir.

##### 4.1.1 - célula de medida

A célula de medida, esquematizada na figura 4.1, foi construída no formato retangular com 0,40 m de comprimento, 0,20 m de largura e 0,20 m de altura. Suas laterais foram feitas usando-se placas de acrílico com 0,015 m de espessura. O fundo foi fechado com uma placa de cobre, de 0,002 m de espessura, embaixo da qual soldamos uma serpentina, feita com tubos de cobre com diâmetro de 0,006 m. Por essa serpentina circulou o líquido refrigerante, responsável pela diminuição da temperatura nas amostras. Todas as partes da célula foram fixadas usando-se adesivo à base de silicone. A parte superior foi dotada de uma tampa removível possibilitando a colocação e retirada do meio poroso, bem como eventuais manutenções internas. Além disso permitiu manter a superfície tanto isolada, quanto em contato com o meio ambiente, quando se estudou a influência da convecção no processo.



1- isolante térmico 2- acrílico 3- cobre

Fig.4.1 -Corte longitudinal da célula de medida. Disposição dos termopares.

Para minimizar a influência dos efeitos de borda, além de ser utilizado acrílico espesso e grandes valores para o comprimento e a largura das paredes, toda a célula foi revestida externamente com isolante térmico de 0,035 m de espessura.

A célula foi desenvolvida para abrigar além do meio poroso saturado, um conjunto de sensores para medir as temperaturas transversais nas amostras. Foram usados 15 termopares, dispostos equidistantemente das paredes laterais e separados de 0,005 m entre si. Empregaram-se termopares tipo T, de cobre-constantan ( $\text{Cu}_{57}\text{Ni}_{43}$ ), com os fios isolados e de 0,0005 m de diâmetro (AWG24), adequados para a faixa de temperaturas que trabalhamos ( $-20\text{ }^{\circ}\text{C} / 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Eles foram confeccionados fundindo-se os materiais com descarga elétrica, resultando em junções com diâmetro aproximado de 0,001 m.

Na calibração de sensores de temperatura, existem vários métodos e cuidados que devem ser observados, conforme descreve BENEDICT (1984). Empregou-se um banho térmico com refrigeração (MASTERLINE, modelo 2095), submetendo os termopares à variação decrescente e estabilizada da temperatura. As temperaturas registradas pelos termopares foram comparadas com os valores indicados por um termômetro de mercúrio e bulbo de vidro (INCOTERM no. 54431), com precisão de  $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Para conectar os termopares, foram usadas chaves seletoras de teclas (ROBERTSHAW e ENGRO), acopladas a um indicador de temperatura compatível com os termopares (ENGRO, modelo 2000). Estes mesmos instrumentos foram utilizados para coletar os dados durante os experimentos.

As leituras foram feitas à cada  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ , no intervalo de  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  à  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , fornecendo um número razoável de pontos, para as curvas de calibração. Os pontos foram ajustados a uma reta, usando-se um método de regressão linear. Dessa forma foi possível obter expressões matemáticas, que foram usadas para converter as leituras dos termopares.

A figura 4.2 mostra o resultado de uma curva de calibração dos termopares.

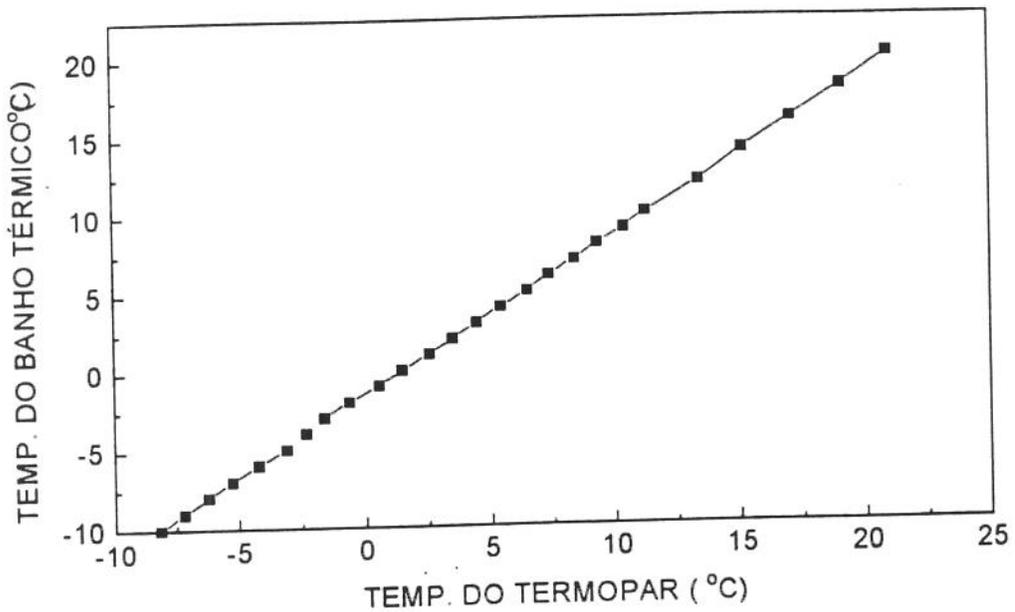
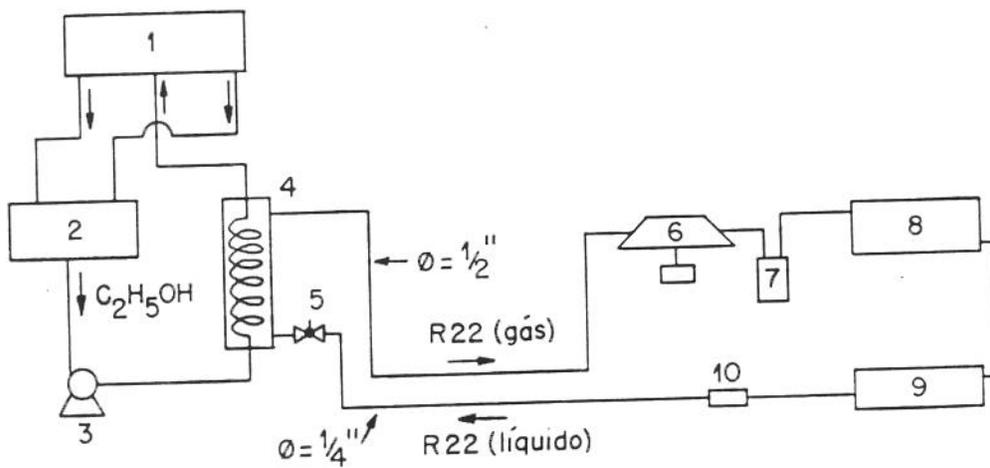


Fig.4.2 - Curva de calibração para um dos termopares utilizados.

#### 4.1.2 - sistema de refrigeração

O sistema de refrigeração utilizado e esquematizado na figura 4.3, constituiu-se basicamente de uma unidade compressora, de um evaporador e de um reservatório para o líquido refrigerante.



1- célula de medida 2- reservatório de álcool 3- bomba circulação  
4- evaporador 5- válvula pressostática 6- compressor de refrigeração  
7- separador de óleo 8- condensador 9- reservatório de freon liquefeito  
10- filtro secador.

Fig.4.3 - Esquema do sistema de refrigeração utilizado.

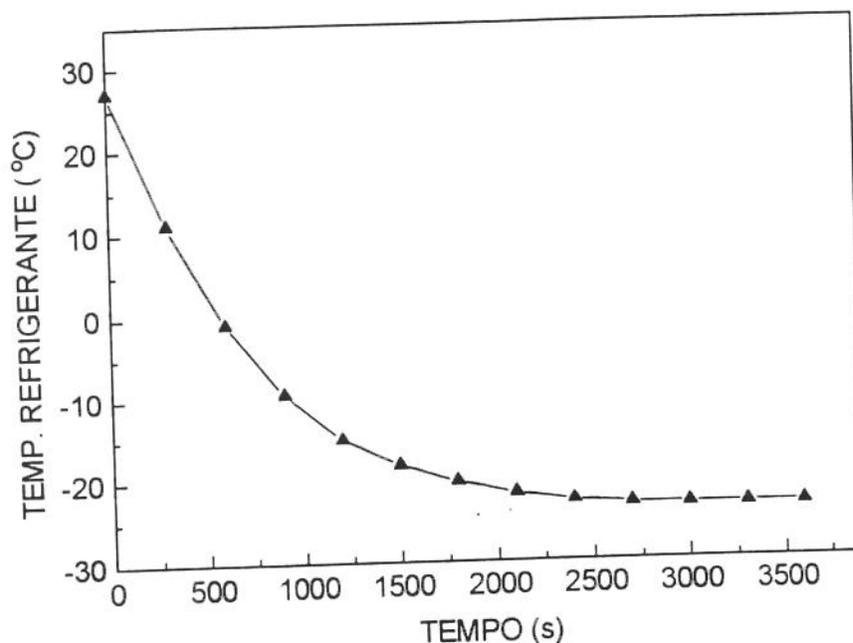
A unidade compressora foi formada por um compressor de refrigeração de baixa rotação, um separador de óleo, um condensador, um tanque de armazenamento para o gás liquefeito e um filtro secador. Ela foi carregada com freon 22 (R22), permitindo obter temperaturas inferiores à  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

O evaporador constituiu-se de uma carcaça cilíndrica de aço, abrigando uma serpentina de tubos de cobre, dentro da qual circula o líquido refrigerante. Uma válvula tipo agulha, instalada na linha de entrada, com a função de regular a taxa de expansão do gás, permitiu controlar a temperatura interna do evaporador. Dessa forma, o líquido na serpentina teve sua temperatura diminuída e foi usado para resfriar a célula de medida.

Como líquido refrigerante, empregaram-se 5 litros de álcool etílico  $80\text{ }^{\circ}\text{GL}$ , que solidifica à temperaturas menores do que aquelas atingidas nos experimentos. Para armazenar esse refrigerante, foi usado um reservatório de aço inoxidável, revestido externamente com isolante térmico. Em sua saída conectou-se uma bomba elétrica blindada, com rotor de palheta, que manteve uma vazão de  $0,017\text{ l/s}$ , à  $-13\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Essa bomba propiciou a circulação do refrigerante através das serpentinas, tanto no evaporador, quanto na placa inferior da célula de medida.

#### **4.1.3 - Temperatura subitamente imposta**

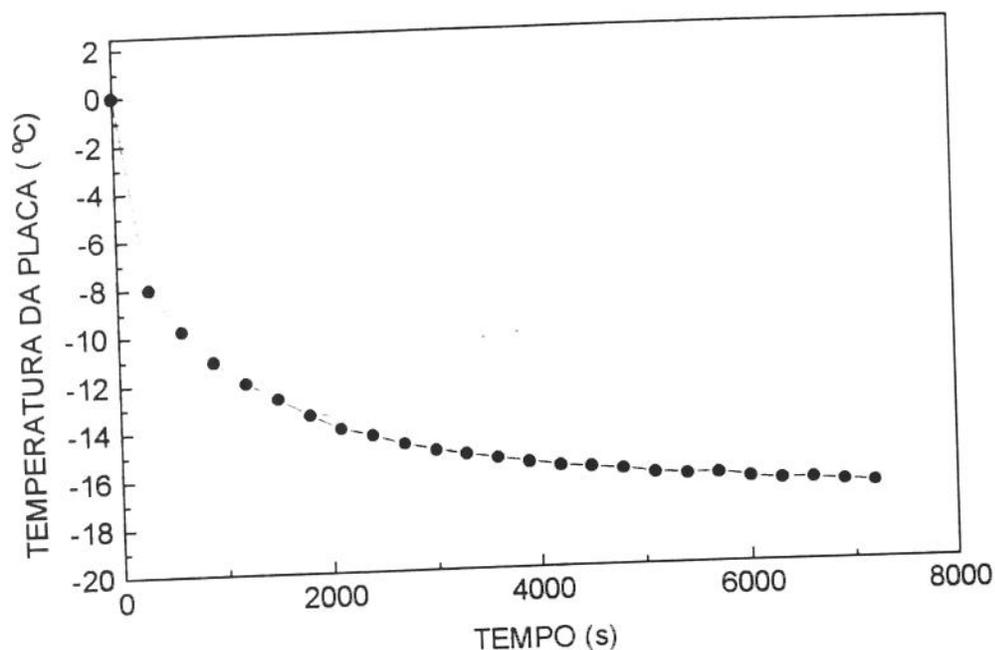
Para abaixar a temperatura na célula de medida, adotou-se o seguinte procedimento. O líquido refrigerante era desviado da célula, circulando somente entre o evaporador e o tanque de armazenamento, até que sua temperatura diminuísse significativamente. Acompanhando-se a diminuição da temperatura do refrigerante no tanque de armazenamento, constatou-se, em todos os testes, que após  $1\ 800\text{ s}$  ela tendia à estabilização, conforme se verifica na figura 4.4, onde está representado o resultado de um desses controles. Mesmo assim, aguardou-se  $3\ 600\text{ s}$  para então desviar repentinamente o refrigerante para a placa inferior da célula e iniciar o experimento.



**Fig. 4.4** - *Variação da temperatura do refrigerante no tanque de armazenamento, durante uma das medidas realizadas.*

A medida da temperatura subitamente imposta na amostra, foi feita através de um termopar instalado internamente e no fundo da célula. Verificou-se que a temperatura não diminuiu instantaneamente, conforme exige a análise teórica desenvolvida, necessitando-se de 1 200 s a 1 800 s para que seja iniciada a estabilização. O uso de um sistema de refrigeração mais eficiente, empregando por exemplo o nitrogênio líquido, pode reduzir o tempo de estabilização. Outra possibilidade para diminuir esse tempo, seria modificar a montagem de modo que a célula de medida pudesse ser deslizada rapidamente para cima de uma placa refrigerada continuamente

Na figura 4.5, mostra-se um resultado típico para a variação da temperatura da placa, medida durante 7 200 s.



**Fig.4.5** - Variação da temperatura no contorno inferior da célula de medida, para uma das medidas realizadas.

Em função desse resultado, nas análises feitas considerou-se a temperatura subitamente imposta, como sendo igual à média dos valores registrados durante o teste, para a temperatura da placa inferior da célula de medida.

## 4.2 - Meios porosos utilizados

Na escolha dos meios porosos, entre os materiais disponíveis selecionaram-se aqueles com diferentes características termofísicas e cujas partículas fossem impermeáveis para a água. Dessa forma procurou-se evitar que a absorção de água pelos constituintes do meio, tivesse também que ser considerada. Procurou-se diferenciar, também, o tamanho das partículas, uma vez que materiais com dimensões físicas semelhantes podem originar o mesmo empacotamento do meio, resultando nos mesmos valores para a porosidade.

vez que materiais com dimensões físicas semelhantes podem originar o mesmo empacotamento do meio, resultando nos mesmos valores para a porosidade.

#### 4.2.1 - medida da porosidade

O conceito de porosidade foi utilizado como sendo a razão entre o volume de água que satura um determinado meio poroso (equivalente ao volume de vazios existente) e o volume total que esse meio ocupa, quando está saturado.

O volume total da célula de medida foi determinado usando-se água. A célula foi preenchida até que o nível de água atingisse o último termopar instalado. Para isso usou-se um total de 2,75 litros.

Na determinação do volume de água que saturou um meio, as partículas constituintes foram colocadas lentamente e distribuídas uniformemente na célula vazia, até atingirem o nível do último termopar. Em seguida foi colocada água e mediu-se o volume necessário para conseguir a saturação, obtendo-se valores específicos para cada material. Usando esses resultados, as porosidades foram calculadas por meio da expressão (3.19).

A tabela 4.1 relaciona os materiais utilizados, suas dimensões características e os respectivos valores de porosidade obtidos. Nela,  $d_m$  representa o diâmetro médio e  $h_m$  o valor médio de uma dimensão característica para as partículas.

Material	$d_m$ (m)	$h_m$ (m)	Porosidade
Esferas de vidro I	0,0014	-.-.-	0,40
Esferas de vidro II	0,017	-.-.-	0,47
Esferas de plástico	0,006	-.-.-	0,42
Pastilhas de PVC	0,0035	0,002	0,43
Aparas de aço	-.-.-	0,001	0,69
Cilindros de alumínio	0,010	0,010	0,42

**Tabela 4.1** - Dimensões características e porosidades dos materiais utilizados.

## **4.3 - Erros experimentais**

### **4.3.1 - tipos de erros**

A determinação experimental de qualquer grandeza física tem sempre associada uma imprecisão ou incerteza no valor dessa grandeza. Por melhor que sejam os instrumentos de medida e as técnicas utilizadas, todo resultado sempre é afetado por vários tipos de erros. Os diferentes tipos de erros podem ser classificados, por exemplo segundo VUOLO (1992), em 3 grandes grupos que são erros grosseiros, acidentais e sistemáticos.

Os erros grosseiros são enganos cometidos pelo observador, tanto no processo de medida, quanto na realização dos cálculos (por exemplo, na leitura dos resultados indicados pelos instrumentos de medição ou máquinas de cálculo) e devem ser totalmente eliminados.

Os erros acidentais são ocasionados por fatores que não puderam ser ou não foram totalmente controlados durante o processo de medida. Como exemplos temos condições flutuantes de temperatura, pressão, tensão (não diretamente relacionadas com o experimento), falhas de funcionamento dos equipamentos etc.

Procurou-se minimizar esses erros ligando os equipamentos numa rede com tensão estabilizada e examinando o funcionamento de toda a montagem, antes de cada medida. As leituras dos equipamentos e coleta de dados, foi feita cuidadosamente e repetida em caso de dúvida.

Os erros sistemáticos podem ter causas diversas, mas geralmente enquadram-se como erros instrumentais (devidos à calibração dos instrumentos ou alterações na mesma), erros teóricos (resultantes do uso de fórmulas ou valores de constantes físicas aproximadas) e erros de observação (devidos à limitações do observador, por exemplo em distinguir o efeito de paralaxe ou reagir à um estímulo).

### **4.3.2 - erros sistemáticos das medidas realizadas**

Ao efetuar-se uma medida diretamente com algum tipo de instrumento, o resultado obtido é sempre afetado por um erro sistemático, intrínseco ao instrumento, chamado erro de

calibração. Na falta de informações sobre ele (que deve ser indicado pelo fabricante) e admitindo que não existam outros erros sistemáticos significativos, pode-se assumir como regra geral, que o erro de calibração numa medida, é igual à metade da menor divisão ou menor leitura do instrumento. Com base nos instrumentos utilizados, foram estimados os seguintes valores para os erros de calibração :

- calibração de termopares

Para medir a temperatura do banho térmico usado na calibração dos termopares, empregou-se um termômetro de precisão (apresentando a menor divisão da escala igual a  $0,1^{\circ}\text{C}$ ) e para visualizar a posição da coluna de mercúrio foi utilizada uma lupa. Dessa forma, devido à resolução da escala do termômetro, cada termopar apresentou um erro no mínimo de  $0,05^{\circ}\text{C}$ .

- leitura dos termopares

O indicador digital de temperaturas permitiu leitura de décimos de grau. Durante as medidas apresentou flutuação de  $0,1^{\circ}\text{C}$ , de modo que o último algarismo indicado foi estimado conforme essa flutuação. Por ser este resultado maior do que o anterior, considerou-se o valor de  $0,1^{\circ}\text{C}$  como igual ao erro cometido na leitura final da temperatura, indicada pelos termopares.

- localização dos termopares

Para marcar a posição de inserção dos termopares na célula de medida, foi utilizado um paquímetro graduado em milímetros, com nônio de 10 divisões. A menor leitura que pode ser efetuada com esse instrumento é de  $0,001\text{ m}$ , à  $20^{\circ}\text{C}$ . Associou-se, então, na localização dos termopares um erro de calibração de  $0,0005\text{ m}$ .

Admitiu-se, também, que o tamanho físico das junções dos termopares (não desprezível) deve ser considerado para efeito de sua exata localização. Em média, as junções apresentaram diâmetro com valor de  $0,001\text{ m}$  (medidos com um micrômetro, cuja menor divisão é de  $0,0001\text{ m}$ ). Assim o erro introduzido pelo tamanho da junção foi maior do que o erro sistemático devido ao posicionamento do termopar. Considerou-se, então, a existência de um erro de  $0,001\text{ m}$  no posicionamento dos termopares.

Esse erro deve interferir na localização da interface, principalmente nos primeiros instantes do processo. Nessa ocasião, a espessura da camada de sólido pode ser da ordem das dimensões dessas junções e a localização experimental da interface pode ser grandemente afetada.. Entretanto, à medida que o tempo passa e a camada de sólido aumenta de tamanho, essa influência pode ser desconsiderada. As medidas foram feitas por um tempo longo, de forma a minimizar a influência do tamanho das junções nos resultados experimentais.

- porosidades

As porosidades foram calculadas através da razão entre volumes, conforme descrito anteriormente. Para medir os volumes, empregou-se uma proveta graduada, com capacidade de 0,5 l, à 20 °C. A menor divisão de sua escala é de 0,025 l e o erro padrão correspondente de 0,0125 l. Com base nos valores obtidos para os volumes e usando a teoria de propagação de erros, estimamos em 1% o erro associado com a determinação das porosidades, por meio da expressão (3.19)

- tempo

Para medir o tempo utilizou-se um cronômetro digital, cuja menor leitura permitida é de 1 s e admitiu-se o valor de 0,5 s como erro de calibração. Os valores das temperaturas dos 15 termopares utilizados foram lidos no indicador de temperatura, comutando-os através de teclas seletoras. Dispendeu-se, em média, 2 s entre o acionamento de uma tecla e o registro da indicação correspondente. Dessa forma, estimamos em 30 s o tempo gasto para coletar todas as leituras dos termopares, que deveriam ser simultâneas. Como as medidas foram feitas em intervalos de tempo iguais a 300 s, o erro em admitir a simultaneidade no registro dos dados foi significativo logo no início do processo, minimizando-se com as medidas sendo feitas durante um tempo muito grande.

#### **4.4 - Resultados experimentais**

Foram feitas medidas experimentais em várias amostras, com diferentes porosidades e propriedades termofísicas, submetidas à diversas temperaturas subitamente impostas, para as situações em que o contorno superior permaneceu termicamente isolado, ou foi submetido à convecção.

Todas as amostras foram montadas com a mesma espessura de 0,075 m e saturadas com água. Suas temperaturas transversais foram coletadas à intervalos de 300 segundos

A localização da interface foi determinada à cada 300 s, à partir dos valores obtidos para as temperaturas e considerando-se que, quando é registrada uma mudança no sinal da temperatura entre dois termopares sucessivos, isto indica que a interface deve estar localizada entre ambos. Sua posição foi então determinada procedendo-se da seguinte maneira. Admitiu-se que a temperatura variasse linearmente entre esses dois pontos e calculou-se o valor do gradiente de temperatura entre esses termopares, que indica a razão de aumento da temperatura por unidade de comprimento. Com esse resultado foi possível determinar a posição, entre esses termopares, onde a temperatura atingiu o valor de mudança de fase. Uma vez que a localização de cada termopar na amostra era conhecida, o posicionamento da interface foi determinado.

#### **4.4.1 - contorno superior isolado termicamente**

Com essa condição de contorno foram feitas medidas nas seguintes situações:

- diferentes temperaturas subitamente impostas

A influência que a temperatura subitamente imposta no contorno inferior da célula de medida, tem no processo de solidificação, foi verificada submetendo-se uma amostra constituída por esferas de vidro, com porosidade de 0,40, aos valores de  $-13,5^{\circ}\text{C}$  e de  $-18^{\circ}\text{C}$  e mantendo-se o contorno superior isolado.

Na figura 4.6, são apresentados os resultados para a variação da posição da interface com o tempo e na figura 4.7 mostram-se as distribuições transversais das temperatura, nessa amostra, após 7 200 s.

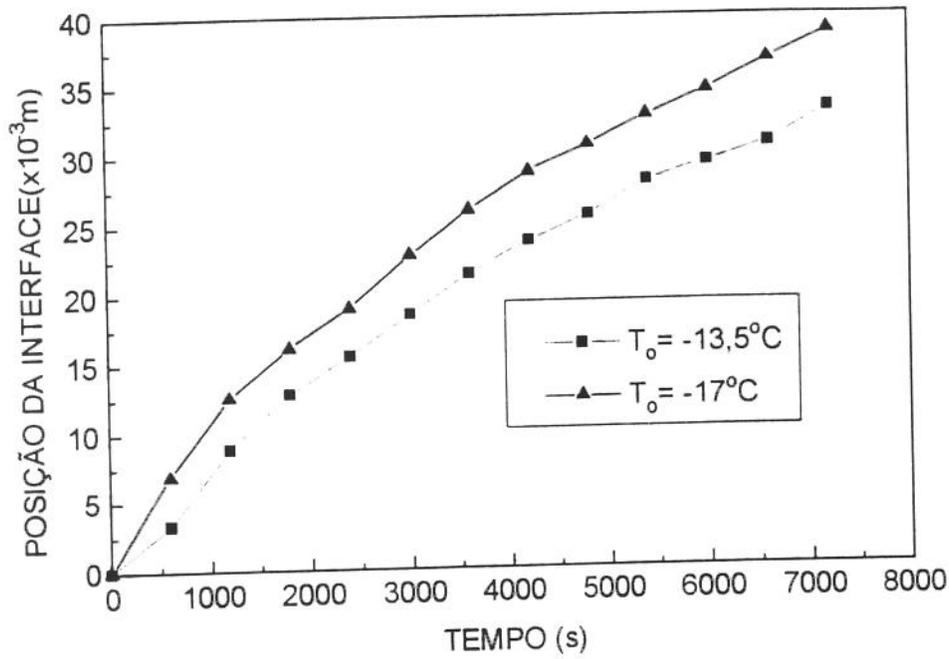


Fig. 4.6 - Posições da interface em amostras de esferas de vidro com  $\varepsilon = 0,40$  e submetidas à diferentes temperaturas subitamente imposta, até 7 200 s. Contorno superior isolado.

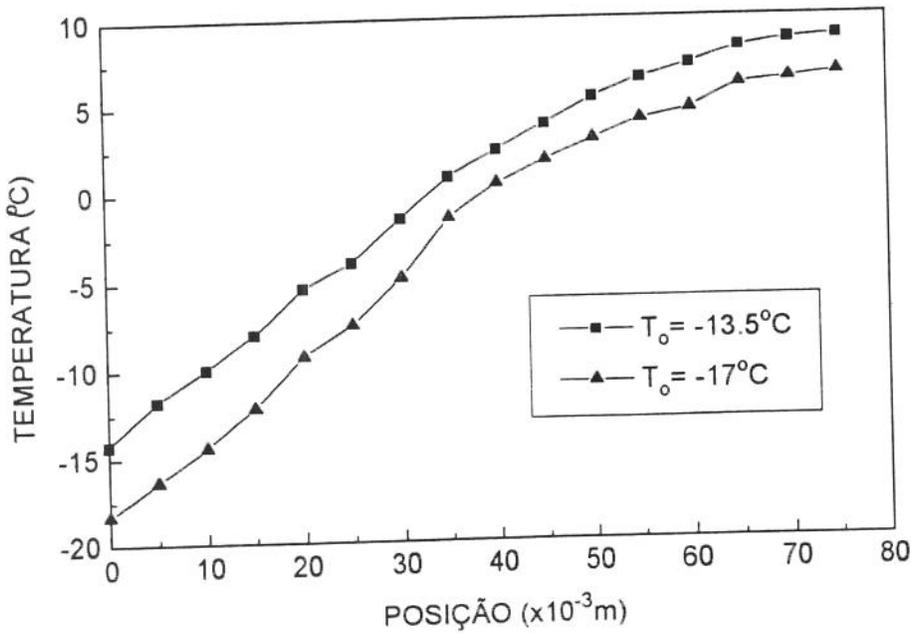


Fig. 4.7 - Distribuições transversais das temperaturas em amostras de esferas de vidro com  $\varepsilon = 0,40$ , sujeitas à diferentes temperaturas subitamente impostas, após 7 200 s. Contorno superior isolado.

Verificou-se que a interface desenvolveu-se mais profundamente quando a temperatura no contorno inferior foi mais baixa. Em consequência, a espessura da camada de sólido formada foi maior e a amostra deverá solidificar-se totalmente em menos tempo. Esse fato foi sugerido também pela distribuição transversal de temperaturas, registradas após 7 200 s, que mostrou valores menores para as temperaturas, tanto na região de sólido quanto na de líquido, quando o contorno inferior estava mais frio.

- porosidades diferentes

Nas figuras 4.8 e 4.9, mostram-se os resultados de medidas efetuadas em amostras constituídas por esferas de vidro, com diferentes porosidades (0,40 e 0,47), comparadas com uma amostra somente de água.

As temperaturas iniciais das 3 amostras apresentaram o valor de 23 °C, enquanto que as temperaturas do contorno inferior, foram ligeiramente diferentes, sendo iguais à -16 °C para a água e -17 °C para as outras 2 amostras.

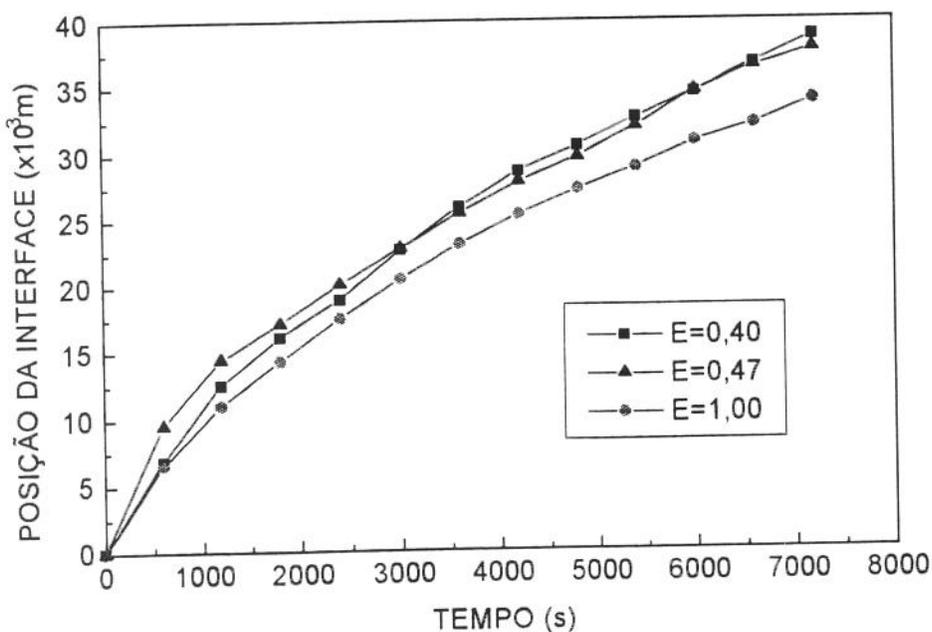
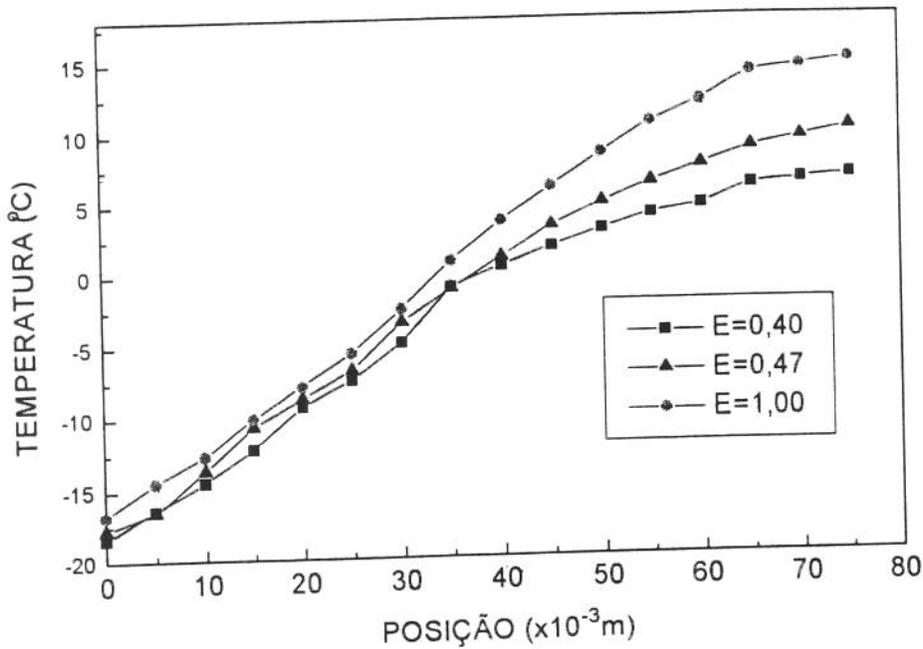


Fig. 4.8 -Posições da interface em amostras de esferas de vidro com diferentes porosidades, durante 7 200 s. Contorno superior isolado.



**Fig. 4.9** - Distribuições transversais das temperaturas em amostras de esferas de vidro, com diferentes porosidade, após 7 200 s.. Contorno superior isolado.

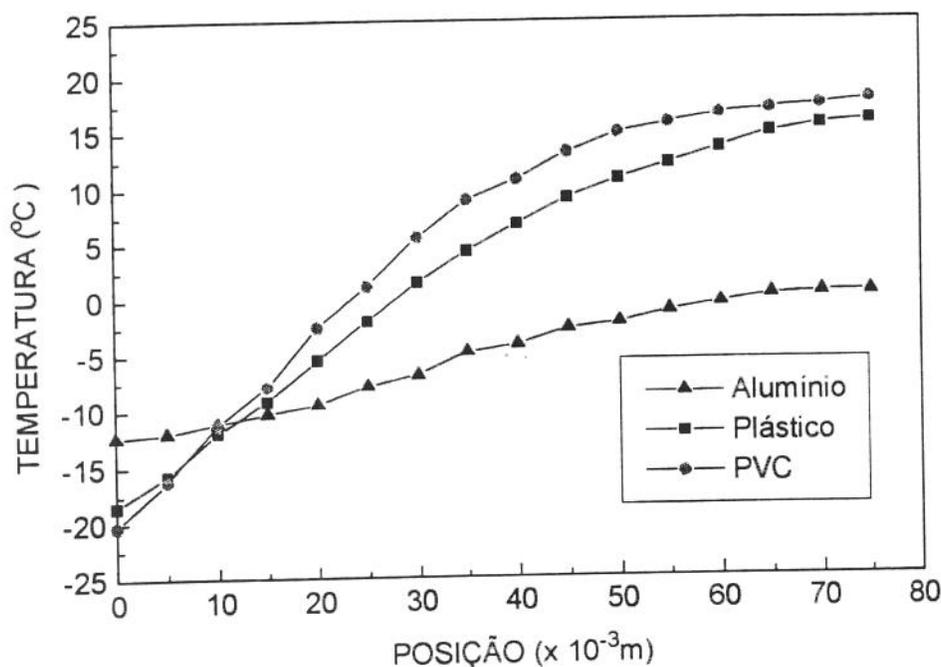
Verificou-se que a interface localizou-se mais profundamente à medida que a porosidade diminuiu de valor e que as temperaturas através das amostras, após 7 200 s, foram menores naquela que tem o menor valor de porosidade, principalmente na região de líquido.

Os resultados confirmaram experimentalmente que a utilização de esferas de vidro, favoreceu o processo de solidificação da água.

- propriedades termofísicas diferentes

Para verificar a influência das propriedades termofísicas da matriz porosa no processo de solidificação, foram medidas 3 amostras de materiais diversificados, com porosidades praticamente idênticas. Uma das amostras, com porosidade igual à 0,42, foi constituída por cilindros de duralumínio, material bom condutor térmico. Ela inicialmente encontrava-se à temperatura de 21 °C e sua superfície inferior teve a temperatura subitamente diminuída para -13 °C. Uma segunda amostra, composta de pastilhas de PVC e com porosidade igual à 0,43, teve sua temperatura inicial de 18 °C repentinamente diminuída para -16 °C. A terceira amostra foi constituída por esferas plásticas, com porosidade igual à 0,42, sendo sua temperatura inicial de 20 °C subitamente abaixada para -17 °C.

Na figura 4.10, foram representadas as distribuições transversais das temperaturas para essas amostras, 3 600 s após o início do processo.



**Fig. 4.10** - Distribuições transversais das temperaturas em amostras com porosidade próximas de 0,40 e apresentando diferentes propriedades termofísicas, após 3 600 s. Contorno superior isolado.

Verificou-se que a utilização do meio poroso de duralumínio favoreceu bastante o processo de mudança de fase, conduzindo à temperaturas significativamente mais baixas através da amostra. Após 3 600 s, todo o líquido contido nessa amostra estava solidificado, conforme indicam os valores de temperatura.

A amostra de PVC, mesmo tendo temperatura inicial menor e sendo submetida à uma temperatura mais baixa do que as outras, apresentou valores mais elevados para as temperaturas transversais.

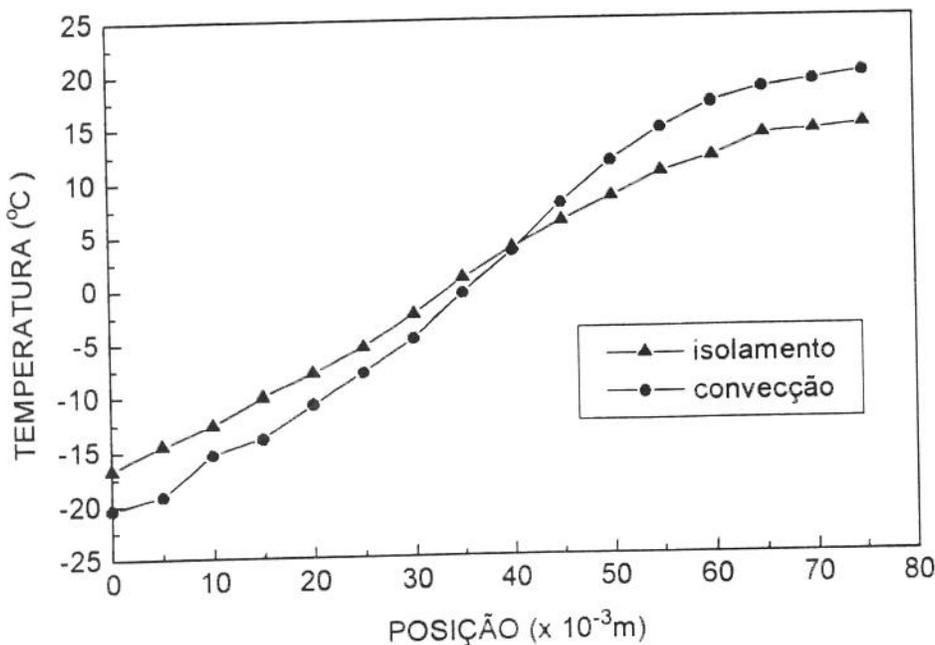
Estes resultados podem ser explicados com base nos diferentes valores das difusividades térmicas efetivas dos sólidos envolvidos no processo. No caso do alumínio, com porosidade igual à 0,40, o valor efetivo da difusividade é muito superior ao do PVC e do gelo, resultando

em menores temperaturas na amostra. O processo de congelamento deve ser acelerado, fato esse que foi confirmado pelos resultados experimentais.

#### 4.4.2 - contorno superior sujeito à convecção.

Para verificar a influência do ambiente externo no processo de mudança de fase, foram feitas medidas com a célula aberta na parte de cima. A condição de troca de calor convectiva foi simulada mantendo-se o ar ambiente em movimento, com o uso de um ventilador. Os resultados experimentais foram comparados àqueles obtidos para os mesmos meios porosos, porém na situação de isolamento térmico.

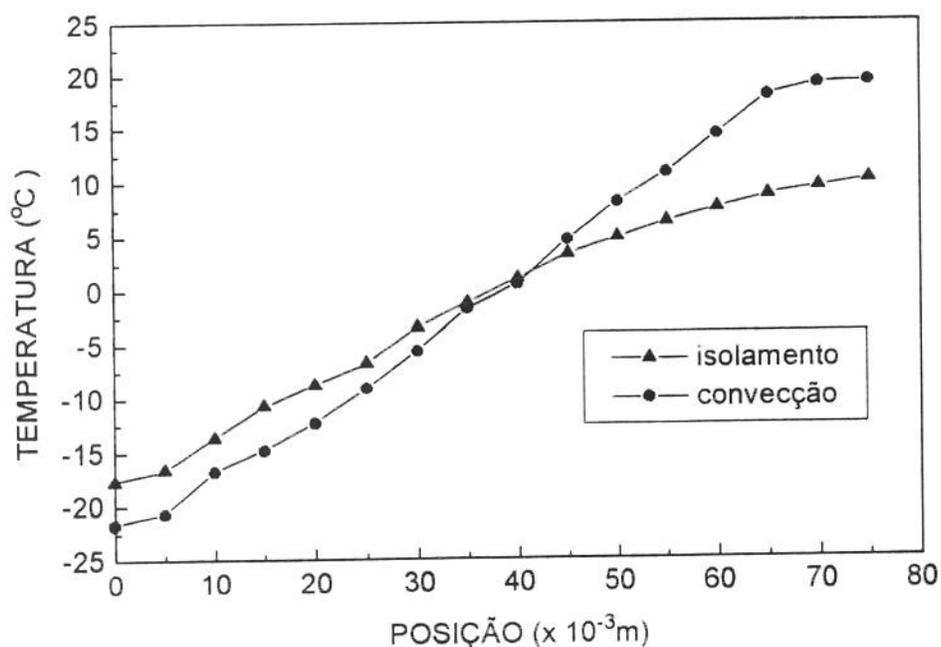
Na figura 4.11 são mostradas as distribuições das temperaturas, após 7 200 s do início do teste, para uma amostra somente de líquido ( $\epsilon = 1$ ), nas situações em que o contorno superior foi mantido isolado termicamente e quando esteve submetido à convecção. No primeiro caso, a temperatura inicial da amostra de 21 °C foi subitamente diminuída para -16 °C. Na condição de convecção, a temperatura inicial de 23 °C foi subitamente abaixada para o valor de -18,5 °C, enquanto que o ar em movimento manteve-se, em média, à 28 °C.



**Fig. 4.11** - Distribuições transversais das temperaturas em amostras de água ( $\epsilon = 1$ ), após 7 200 s. Contorno superior isolado ou sujeito à convecção.

Na situação de convecção, a temperatura subitamente imposta à amostra foi mais baixa do que quando ela encontrava-se isolada termicamente. Isto deveria gerar temperaturas menores, tanto para a região de sólido, quanto de líquido. O que se verificou após 7 200 s, entretanto, foi um aumento progressivo dessas temperaturas. Na região de sólido, as diferenças tornaram-se menores, enquanto que no líquido os valores ultrapassaram aqueles registrados na condição de isolamento térmico. Os resultados indicaram que a convecção, com os valores da temperatura ambiente e coeficiente de película utilizados, provocou aumento nas temperaturas transversais da amostra, tanto na região de sólido, quanto na de líquido.

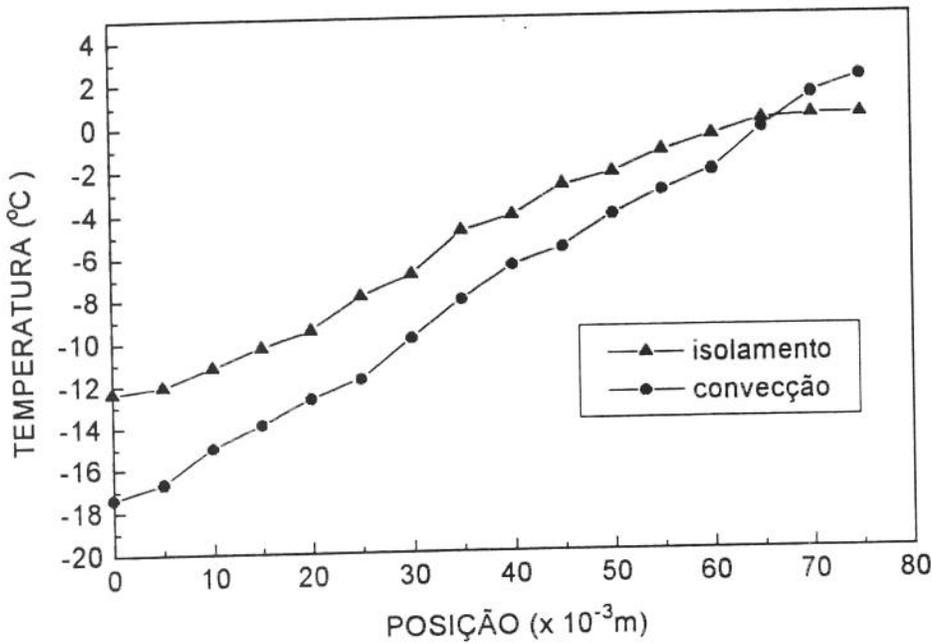
Na figura 4.12, representaram-se as distribuições das temperaturas para uma amostra porosa de esferas de vidro, com porosidade igual a 0,47, que foi submetida às condições de convecção e isolamento. Na primeira situação a temperatura inicial da amostra de 23 °C foi subitamente diminuída para -17 °C. Na condição de convecção a temperatura inicial de 26 °C foi diminuída para -20 °C. A temperatura do ar em movimento manteve-se, em média, igual à 29 °C.



**Fig. 4.12** - Distribuições transversais das temperaturas em amostras de esferas de vidro, com  $\varepsilon = 0,47$ , após 7 200 s. Contorno superior isolado ou sujeito à convecção.

Como na situação anterior, após 7 200 s registrou-se um progressivo aumento das temperaturas através da amostra sujeita à convecção, em relação àquela mantida isolada. Na região líquida, onde as temperaturas são positivas, a diferença foi ainda mais acentuada.

Para verificar o efeito convectivo em amostras boas condutoras térmicas, empregou-se uma amostra de duralumínio. Sua temperatura inicial de 24 °C foi subitamente diminuída para -10 °C, enquanto que a temperatura média do ar na corrente livre foi igual à 26,5 °C. O resultado para a distribuição de temperaturas é mostrado na figura 4.13, comparando-se com a situação de isolamento, onde a temperatura inicial de 21 °C e foi diminuída para -15 °C.



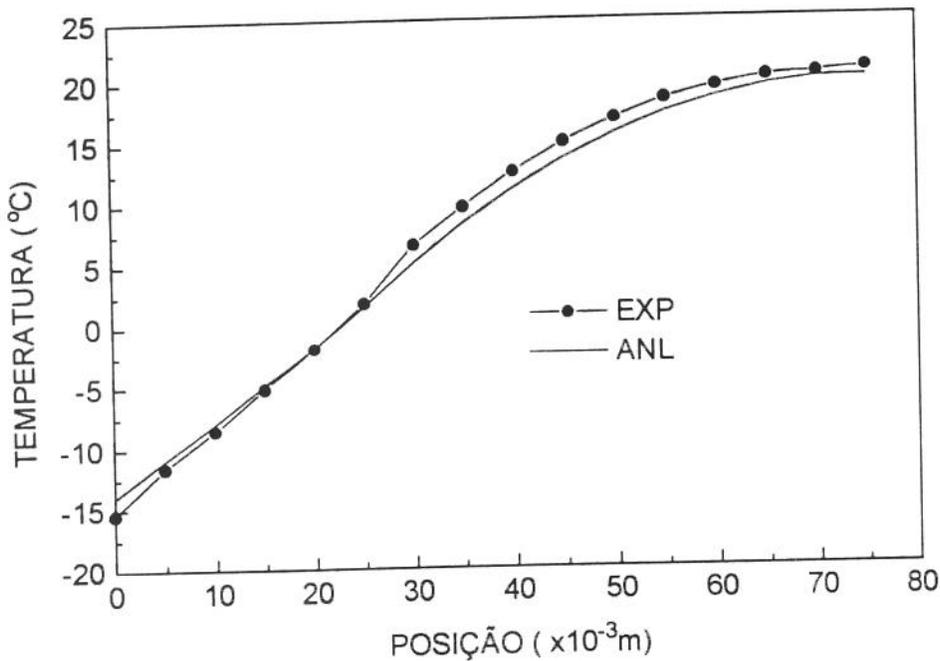
**Fig. 4.13** - Distribuições transversais das temperaturas em amostras de duralumínio, com  $\epsilon = 0,42$ , após 3 600 s. Contorno superior isolado ou submetido à convecção.

Após 3 600 s, tempo em que quase todo o líquido presente na amostra solidificou-se, verificou-se o mesmo resultado. A ação da convecção provocou aumento progressivo das temperaturas através da amostra, quando comparadas com a condição de isolamento.

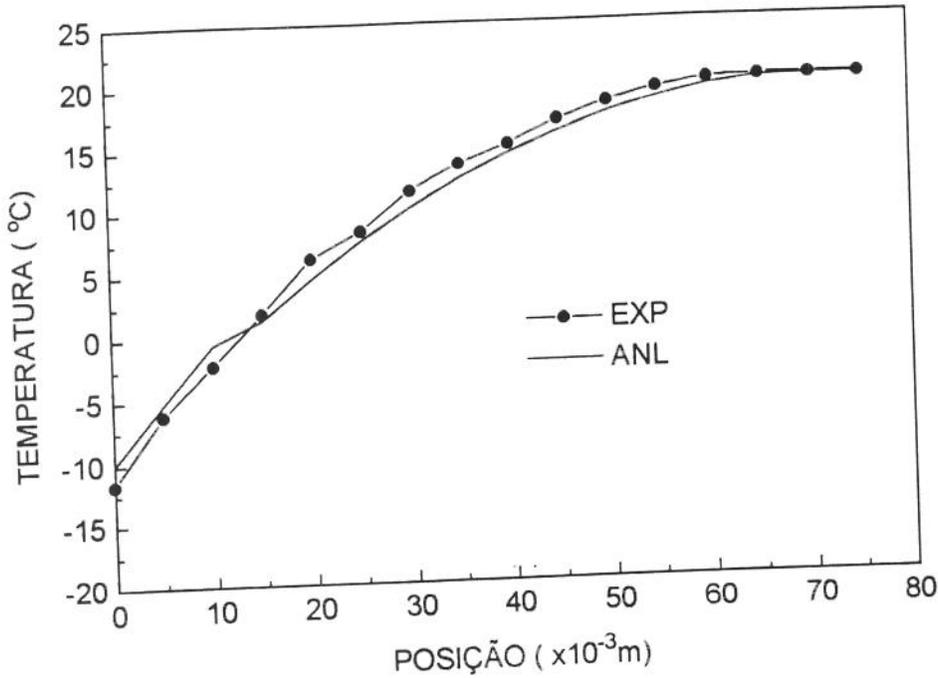
Verificou-se que a de troca de calor convectivo no contorno superior das amostras, com um ambiente ligeiramente aquecido, provocou aumento em suas temperaturas, tanto na região sólida, quanto na líquida.

#### 4.5 - Comparação com as previsões do modelo analítico

As previsões do modelo analítico foram comparadas com medidas experimentais para 2 amostras. Uma delas, contendo somente água e com temperatura inicial de 20 °C, teve sua temperatura inferior diminuída para -14 °C. A outra, constituída de esferas de vidro, com porosidade igual à 0,40 e saturada com água, teve sua temperatura inicial de 20 °C diminuída para -10 °C. Para as propriedades termofísicas, foram utilizados os valores da tabela 3.1. Os resultados referem-se um intervalo de tempo de 3600 s para a água e de 1800 s para a amostra de esferas de vidro, dentro do limite de validade imposto pela equação (3.45). As figuras 4.14 e 4.15, mostram os resultados para as temperaturas nas regiões de sólido e líquido.



**Fig. 4.14** Resultados analítico e experimental, para as temperaturas numa amostra somente de água, após 3600 s. Contorno superior isolado.



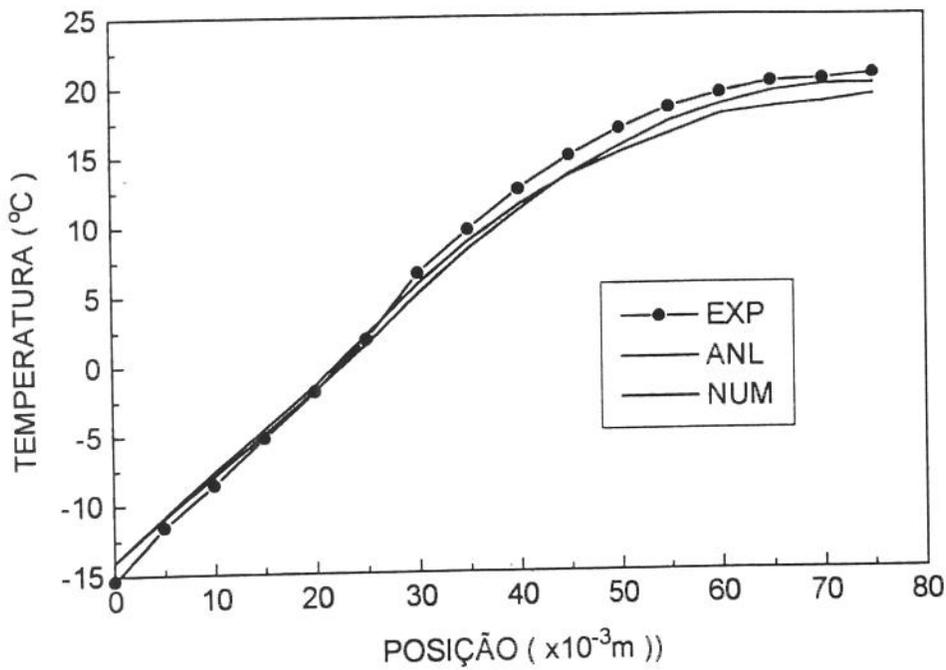
**Fig.4.15** - Resultados analítico e experimental para as temperaturas através de uma amostra de esferas de vidro, com porosidade igual à 0.40, após 1800 s. Contorno superior isolado.

As curvas mostraram boa concordância, tanto para as temperaturas da região solidificada, quanto para a região líquida das amostras.

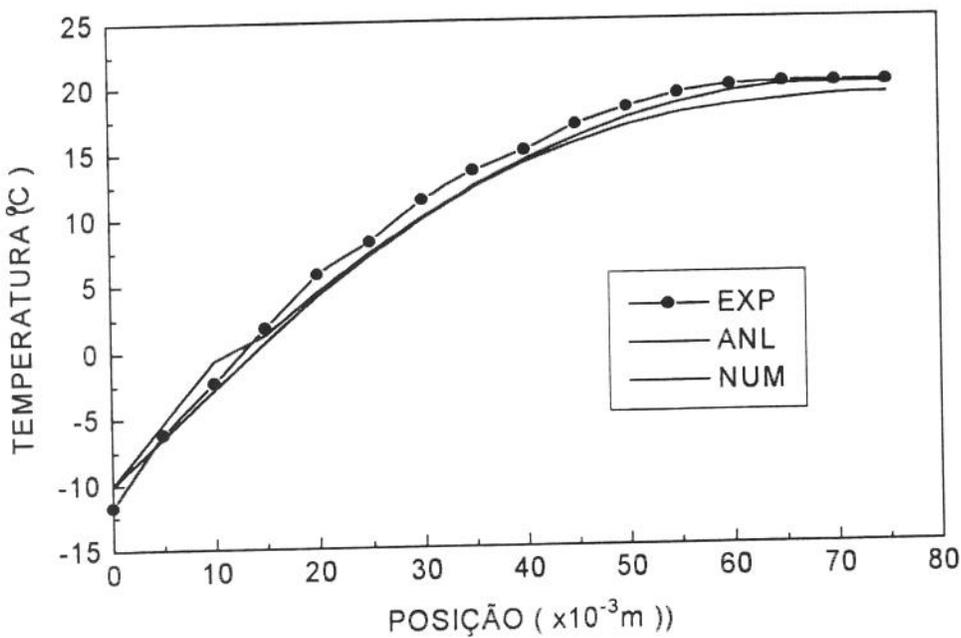
Os resultados sugeriram a possibilidade deste modelo analítico, juntamente com o conceito de propriedades efetivas, definidas através da relação (3.20), poder ser utilizado para estudar a solidificação em meios porosos. Para constatar essa possibilidade, mais simulações e comparações experimentais devem ser desenvolvidas, envolvendo diferentes materiais bem como outros valores de porosidade.

#### 4.6 - Comparação com as previsões do modelo numérico

Os mesmos resultados experimental e analítico das figuras 4.14 e 4.15, foram comparados com as previsões do modelo numérico conforme mostrado nas figuras 4.16 e 4.17.



**Fig. 4.16** - Resultados experimental, analítico e numérico, para a distribuição transversal de temperaturas, numa amostra de líquido ( $\epsilon = 1$ ), após 3600 s Contorno superior isolado.



**Fig. 4.17** - Resultados experimental, analítico e numérico para as distribuições das temperaturas numa amostra de esferas de vidro com  $\epsilon = 0,40$ , após 1800 s. Contorno superior isolado.

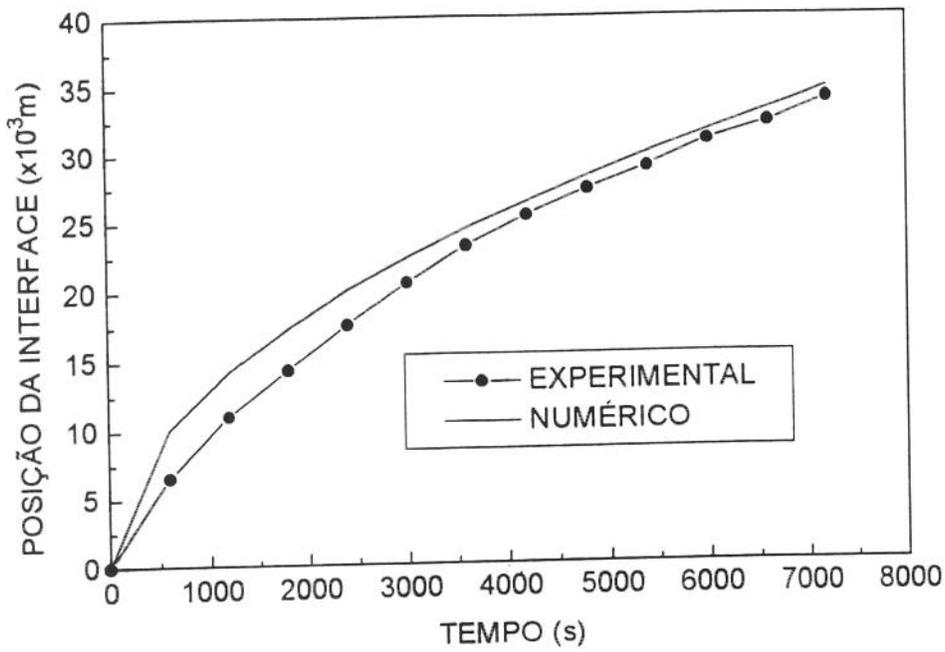
Verificou-se boa concordância entre eles, sugerindo o uso do modelo numérico para outras amostras e diferentes situações. Em seguida foram analisadas tanto a situação em que o contorno superior foi mantido termicamente isolado, quanto a possibilidade dele trocar calor convectivamente com o ambiente. Para as propriedades de interesse, foram utilizados os valores das tabelas 3.1 e 3.2. A condutividade térmica do gelo foi determinada pela expressão (3.67).

Os valores das temperaturas iniciais das amostras,  $T_1$ , foram obtidos calculando-se a média das temperaturas indicadas pelos 15 termopares instalados na célula de medida, antes do início dos experimentos.

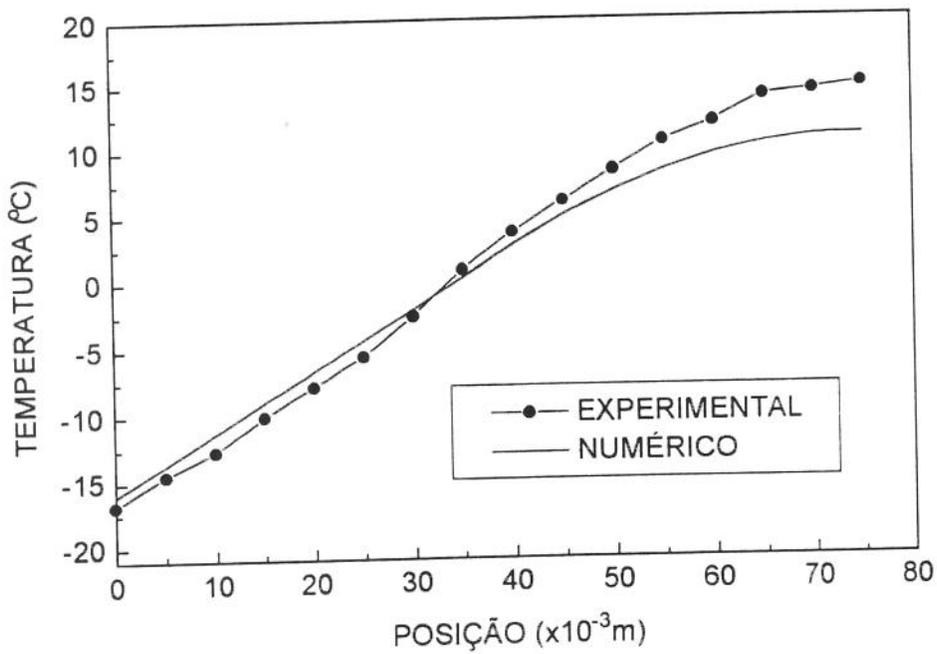
Os valores das temperaturas subitamente impostas no contorno inferior,  $T_0$ , representaram o valor médio das temperaturas registradas pelo termopar ali instalado, durante o período de duração das medidas.

#### **4.6.1 - contorno superior isolado termicamente**

Nas figuras 4.18 e 4.19, mostram-se os resultados obtidos para uma amostra contendo somente água ( $\varepsilon = 1$ ), com o contorno superior mantido termicamente isolado. Os dados referem-se a um período de 7 200 s, para a situação em que a temperatura inicial da amostra de  $20\text{ }^\circ\text{C}$  foi subitamente diminuída para  $-16\text{ }^\circ\text{C}$ .



**Fig. 4.18** - Posições numérica e experimental da interface numa amostra de líquido ( $\varepsilon = 1$ ), durante 7 200 s. Contorno superior isolado.

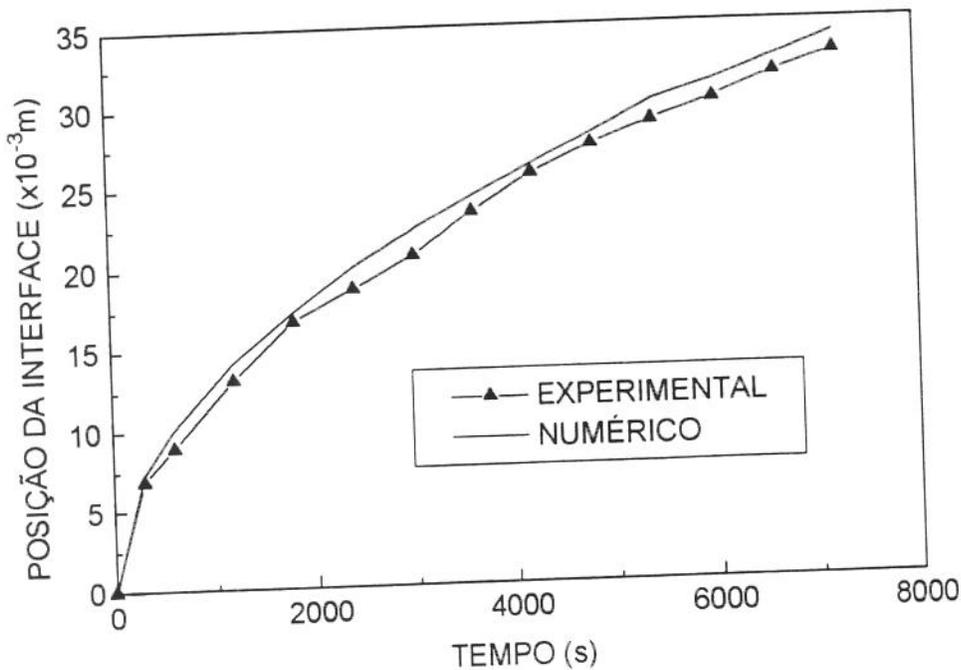


**Fig. 4.19** - Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra de líquido ( $\varepsilon = 1$ ), após 7 200 s. Contorno superior isolado.

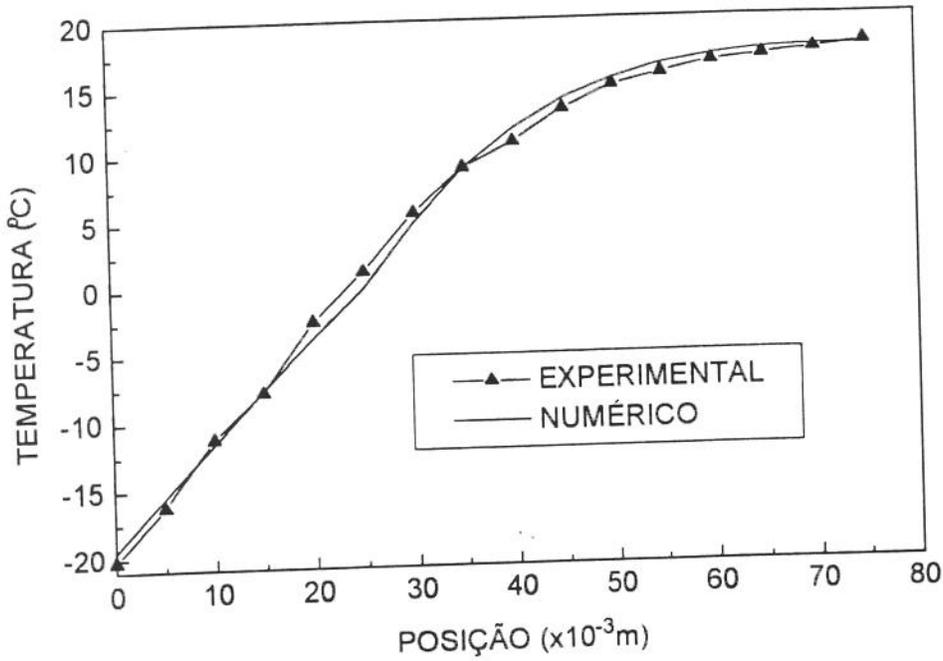
A localização da interface, prevista pelo modelo numérico, foi um pouco superior àquela medida experimentalmente, principalmente na fase inicial do processo. Já as temperaturas medidas na região líquida, resultaram maiores do que as previsões teóricas.

Tais resultados foram explicados considerando-se que a temperatura subitamente imposta no contorno inferior da amostra não se manteve constante. Ela diminuiu com o passar do tempo, até estabilizar-se próxima de um certo valor, conforme discutimos na seção 4.13. Isto provocou um crescimento inicialmente menor da interface. Além disso a presença de movimento convectivo durante o resfriamento do líquido e que não foi considerado no modelo que desenvolvemos, pode colaborar para aumentar o valor da temperatura na região líquida da amostra.

Nas figuras 4.20 e 4.21, são apresentados os resultados obtidos com amostras de PVC, de porosidade igual à 0,43 e saturadas com água. A temperatura subitamente imposta no contorno inferior da amostra foi de  $-19.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , sendo que inicialmente sua temperatura era de  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



**Fig. 4.20** - Posições numérica e experimental e numérico da interface numa amostra de PVC com  $\varepsilon = 0,43$ , até 7 200 s. Contorno superior isolado



**Fig.4.21** -Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra de PVC com  $\varepsilon = 0,43$ , após 3 600 s. Contorno superior isolado.

Os resultados experimentais mostraram que as temperaturas previstas para as regiões de sólido e líquido, concordaram muito bem com os resultados numéricos. O modelo numérico previu valores ligeiramente maiores para a posição da interface, do que aqueles medidos. Comportamento semelhante foi registrado por CHELLAIAH & VISKANTA (1988), em amostras constituídas por esferas de vidro e saturadas com água. A espessura da camada de sólido prevista por seu modelo numérico puramente condutivo, resultou maior do que os valores medidos experimentalmente.

Além das justificativas anteriores, esse resultado pode ser explicado relacionando-o também com um possível aumento da condutividade térmica através do material. À medida que a água solidifica-se, forma-se uma região sólida, composta por PVC e gelo, de baixa difusividade térmica, que dificulta a transferência de calor e diminui a velocidade de crescimento da interface.

#### 4.6.2 - contorno superior sujeito à convecção

O efeito convectivo foi caracterizado, determinando-se o coeficiente de transferência de calor médio,  $\overline{h_c}$  ( cujo valor é o dobro do coeficiente local,  $h_{cx}$  ) à que as superfícies das amostras estiveram sujeitas. Para isso, admitiu-se que a superfície aberta comportou-se como uma placa plana, de 0,30 m de comprimento, cuja temperatura manteve-se num valor constante durante as medidas.

O coeficiente local de transmissão de calor por convecção foi obtido calculando-se o número de Nusselt local,  $Nu_x$ , usando-se a seguinte expressão, citada em KREITH (1981) :

$$Nu_x = \frac{h_{cx} x}{k} = 0,332 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (4.1)$$

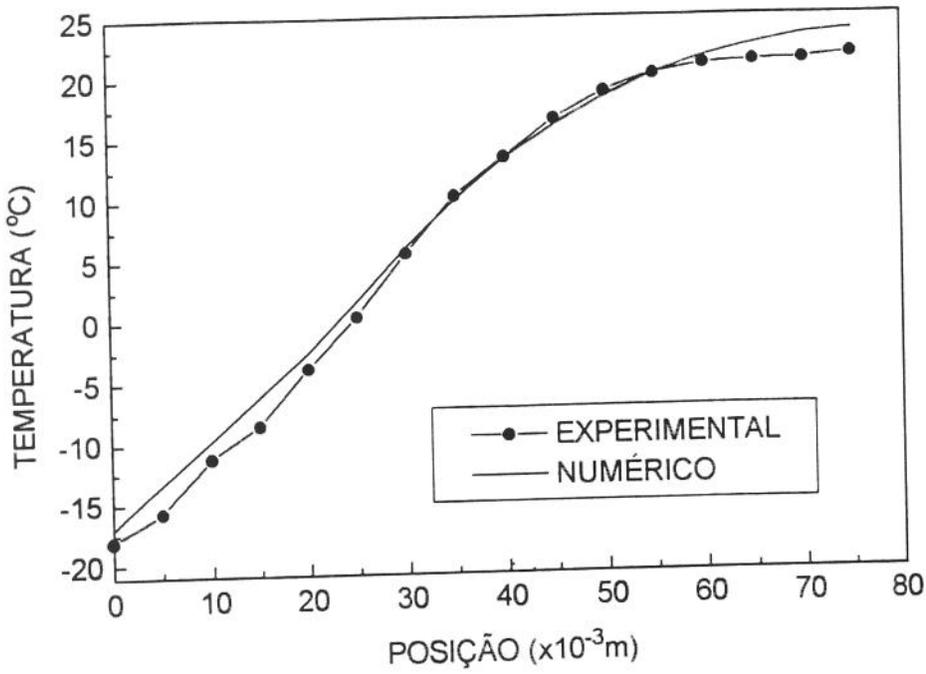
onde  $Re_x$  representa o número de Reynolds local e  $Pr$  o número de Pradt, para o ar.

Para determinar o valor de  $Re_x$  e  $Pr$ , a velocidade de escoamento do ar foi medida a 0,20 m acima da amostra, usando-se um anemômetro de fio quente (TSI modelo 1650), dotado de sensor de temperatura. A pressão ambiente foi medida com um barômetro (FISCHER) e as propriedades do ar foram obtidas de tabelas citadas também em KREITH (1981).

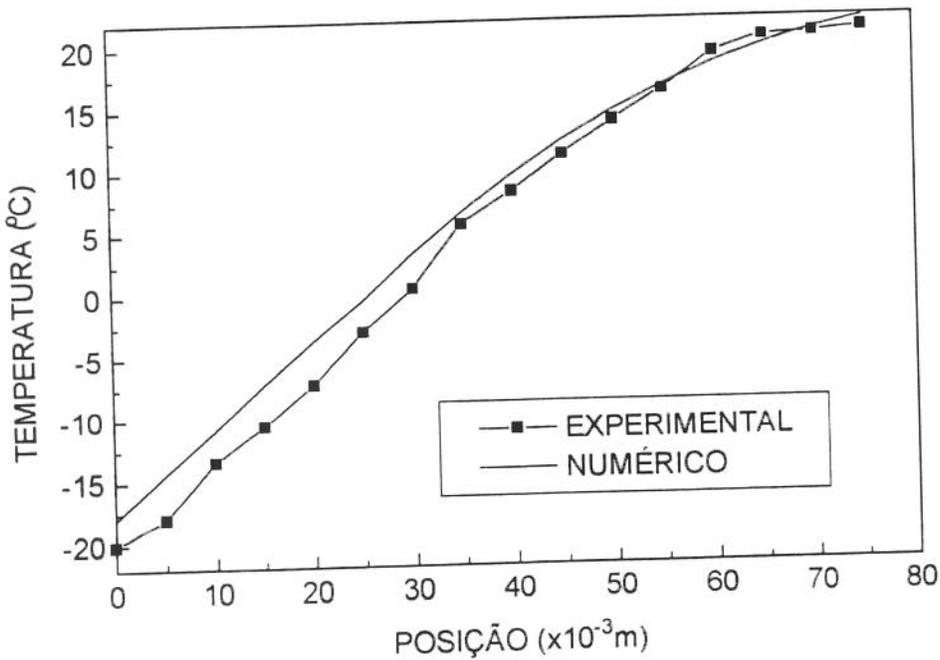
Com esses dados e usando a equação (4.1), obteve-se para  $\overline{h_c}$  o valor de  $17 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ , que foi usado nos cálculos.

As figuras 4.22 e 4.23 mostram as distribuições de temperaturas experimental e numérica, obtidas após 3600 s, em uma amostra somente com água ( $\epsilon = 1$ ) e em outra contendo esferas de vidro ( $\epsilon = 0,47$ ). Ambas foram mantidas com o contorno superior exposto ao ar com temperatura de  $27 \text{ } ^\circ\text{C}$ , em movimento.

Nos cálculos numéricos supos-se que a temperatura inicial de  $24 \text{ } ^\circ\text{C}$  para a água, foi subitamente diminuída para  $-17 \text{ } ^\circ\text{C}$ , enquanto que a amostra de esferas de vidro teve sua temperatura inicial de  $24 \text{ } ^\circ\text{C}$  abaixada para  $-18 \text{ } ^\circ\text{C}$ .



**Fig. 4.22** - Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra com  $\varepsilon = 1$ , após 3 600 s. Contorno superior submetido à convecção.



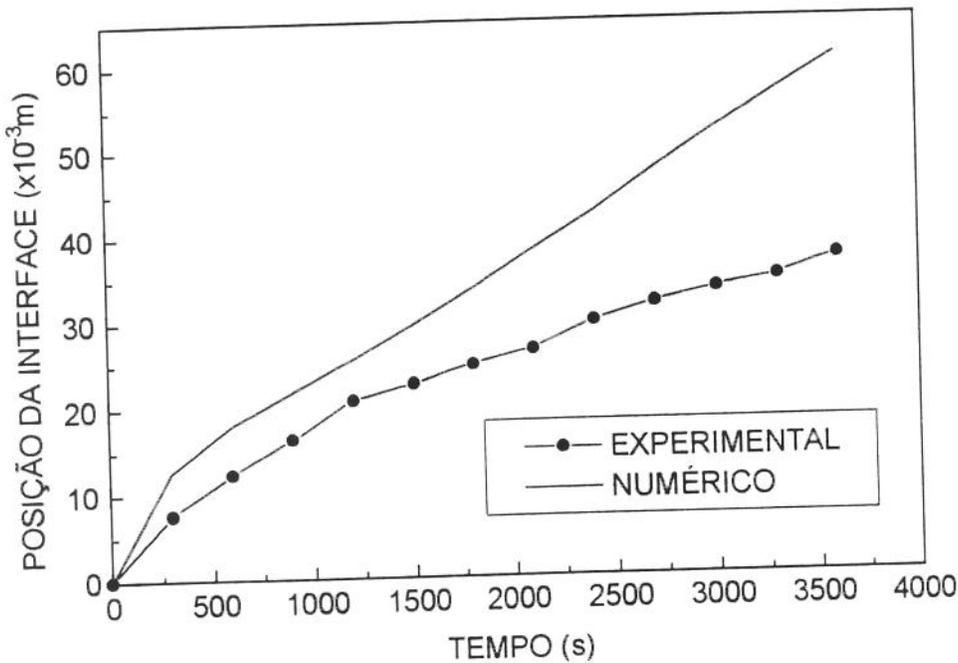
**Fig. 4.23** - Distribuições numérica e experimental das temperaturas numa amostra de esferas de vidro com  $\varepsilon = 0,47$ , após 3 600 s. Contorno superior submetido à convecção.

Em ambas as amostras, os resultados numéricos mostram uma variação praticamente linear para as temperaturas transversais, na região solidificada. Os valores obtidos teoricamente para as temperaturas nessa região, foram cerca de 20 % maiores do que aqueles registrados experimentalmente.

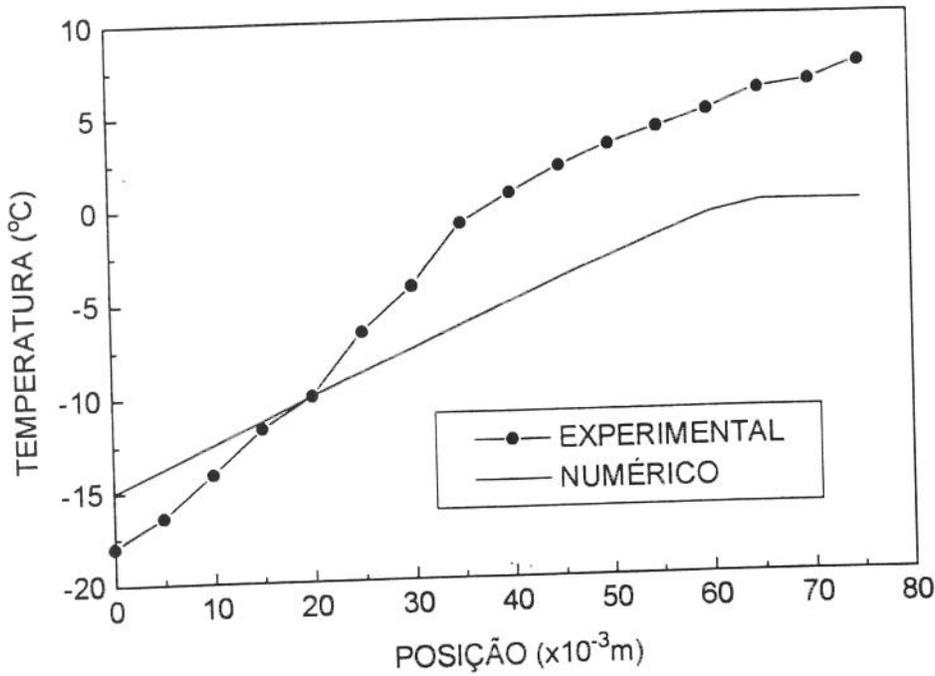
Na região de líquido as previsões numéricas concordaram bem com os resultados experimentais. Para a água o modelo numérico previu para as temperaturas próximas do contorno superior, valores um pouco maiores do que aqueles obtidos experimentalmente.

#### 4.6.3 meio poroso bom condutor térmico

O modelo numérico foi aplicado numa amostra constituída de aparas de aço, de porosidade igual à 0,69 , comparando-se as previsões numéricas com resultados experimentais obtidos para a posição da interface e temperaturas transversais.



**Fig. 4.24** - Posições numérica e experimental da interface numa amostra de aço-carbono com  $\varepsilon = 0,6$ , durante 3 600 s. Contorno superior isolado.



**Fig. 4.25** - Temperaturas transversais numérica e experimental numa amostra de aço-carbono com  $\varepsilon = 0,69$ , após 3 600 s. Contorno superior isolado

Verificou-se uma grande discrepância entre as previsões do modelo numérico, para a localização da interface e temperaturas nas regiões de sólido e líquido, quando comparadas com os resultados experimentais. O mesmo resultado foi registrado por CHELLAIAH & VISKANTA (1988), comparando o resultado de seu modelo numérico com medidas experimentais obtidas para um meio poroso de esferas de alumínio e saturadas com água. Os resultados indicaram que o modelo numérico desenvolvido não foi adequado para representar o processo de mudança de fase, quando o material constituinte da matriz porosa era bom condutor térmico. Para esses casos, o modelo deve ser revisto e a utilização de propriedades efetivas, definidas de acordo com a equação (3.11), rediscutida.

## Capítulo 5

### Conclusões

A solidificação unidimensional em placas porosas planas, finitas e saturadas, foi estudada numérica e experimentalmente. O contorno inferior teve a temperatura subitamente diminuída e mantida num valor inferior à temperatura de mudança de fase, enquanto que o contorno superior pôde estar sujeito à duas situações independentes: 1) convecção, natural ou forçada, com o meio ambiente ou 2) isolamento térmico. O problema foi tratado como sendo de 2 fases, supondo-se que a temperatura do líquido inicialmente presente na placa, pudesse ter qualquer valor acima da temperatura de solidificação. Admitiu-se, também, que tanto através da interface, quanto das regiões de sólido e líquido formadas, o calor fosse transferido unicamente por condução. A existência do meio poroso foi introduzida nas equações macroscópicas da condução, por meio de propriedades efetivas, baseadas na porosidade.

#### 5.1 - Modelo analítico

Inicialmente o problema foi estudado supondo-se o contorno superior isolado termicamente e usando-se os resultados de um modelo analítico, proposto por CHO & SUNDERLAND (1969), ao qual introduziram-se propriedades termofísicas efetivas, para representar a presença do meio poroso. A análise dos resultados obtidos mostrou que:

- o parâmetro  $\lambda$ , com o qual se determinou a localização da interface em função do tempo, aumentou de valor à medida em que a porosidade diminuiu. Esse parâmetro foi afetado muito pouco por mudanças no grau  $n$ , da aproximação usada para representar as temperaturas na região de líquido.

- o parâmetro  $\beta$ , que permitiu tanto localizar a posição da camada térmica em qualquer instante, quanto definir o limite de tempo que a distribuição de temperatura na região líquida é válida, tal qual  $\lambda$ , aumentou de valor com a diminuição da porosidade. Diferentemente de  $\lambda$ , porém, o parâmetro  $\beta$  foi bastante afetado pela mudança no grau  $n$  da expressão (3.40). O aumento no valor desse grau, provocou aumento nos valores de  $\beta$ . Conclui-se que placas menos porosas geram valores maiores para  $\beta$  reduzindo o intervalo de tempo em que a distribuição de temperaturas (3.40) é matematicamente válida. Além disso, o aumento do grau  $n$  dessa distribuição embora conduza a uma melhor aproximação para as temperaturas na região líquida, limita o tempo de validade para a expressão matemática utilizada em sua representação.

- quando a placa porosa foi constituída por material mau condutor térmico, as temperaturas nas regiões de sólido e líquido tornaram-se mais elevadas, na medida em que a porosidade diminuiu. Utilizando-se bons condutores térmicos verificou-se diminuição dessas temperaturas com o decréscimo da porosidade.

- quando foram utilizadas matrizes porosas constituídas de bons condutores térmicos, verificou-se que as difusividades térmicas efetivas aumentaram de valor com a diminuição da porosidade. Em função disso a interface sólido-líquido, obtida pela expressão (3.35), localiza-se mais profundamente, na medida em que a porosidade diminui. Assim placas porosas com difusividade térmica de valor elevado apressaram o congelamento do líquido saturante.

- o uso de matrizes porosas com baixa condutividade térmica provocou diminuição nos valores efetivos para as difusividades térmicas, com o decréscimo da porosidade. A interface sólido-líquido diminuiu sua penetração, à medida em que a porosidade decresceu, indicando que a utilização desse tipo de material retardou o processo de solidificação.

As previsões analíticas foram comparadas com resultados experimentais, para uma amostra constituída por esferas de vidro e mostraram boa concordância na localização da interface e distribuição de temperaturas transversais. Os resultados sugeriram que o modelo analítico modificado, dentro de seu limite de validade, pode ser utilizado no estudo da solidificação em meios porosos saturados. É conveniente, entretanto, que outras simulações e

comparações experimentais, envolvendo diferentes materiais e porosidades, sejam desenvolvidas, para comprovar essa possibilidade.

## 5.2 - Modelo numérico

No modelo numérico desenvolvido, as derivadas das equações diferenciais foram aproximadas por diferenças finitas, utilizando-se o método implícito modificado sugerido por CRANK & NICOLSON (1947), aplicado-o à uma rede fixa de pontos nodais. Para solucionar as equações de discretização resultantes, empregou-se o algoritmo TDMA, baseado no método Gaussiano de eliminação, com as equações expressas no formato sugerido por PATANKAR (1980).

O modelo permitiu estudar o processo de solidificação em placas porosas planas e finitas, sujeitas à diminuição súbita da temperatura inferior e com a superfície livre mantida termicamente isolada ou sendo submetida à convecção. Possibilitou, também, que a temperatura inicial da placa tivesse qualquer valor e que a temperatura ambiente fosse mantida constante ou variasse com o tempo. A duração do processo, a porosidade da placa e o número de Stefan, puderam ter qualquer valor prático.

Simulações numéricas usando-se as propriedades da areia e um valor de porosidade igual à 0,40, feitas para as situações em que a temperatura do contorno superior foi mantida constante e num valor maior do que a temperatura inicial da placa, com o contorno superior estando sujeito à convecção natural, forçada ou a isolamento térmico, mostraram que:

- numa primeira etapa do processo, o desenvolvimento da interface foi controlado pelo valor da temperatura subitamente imposta à placa e não pelas condições existentes no contorno superior.

- à medida em que o tempo passou, o aumento no valor do coeficiente de troca de calor convectivo provocou diminuição na posição da interface, gerando camadas menos espessas de sólido.

- as temperaturas transversais na placa aumentaram de valor com o aumento do coeficiente convectivo, principalmente na região de líquido onde a diferença foi muito acentuada.

Admitindo o regime de convecção forçada e supondo que a temperatura ambiente tivesse sido mantida constante, variasse senoidalmente com o tempo ou que o contorno superior estivesse termicamente isolado, verificou-se que:

- para o ambiente aquecido, quando sua temperatura foi superior à temperatura inicial da placa porosa, obtiveram-se as maiores espessuras da camada solidificada e as menores temperaturas na região de líquido na condição de isolamento térmico.

- para o ambiente resfriado, quando sua temperatura foi intermediária entre a temperatura inicial da placa e a de mudança de fase do líquido saturante, obtiveram-se as camadas de sólido mais espessas e os menores valores para a temperatura na região líquida, quando a temperatura ambiente foi mantida num valor constante.

- em regime de convecção forçada, o aumento da porosidade da placa provocou aumento nas temperaturas da região de sólido e principalmente na região de líquido.

A influência das propriedades termofísicas e da porosidade foi estudada numericamente para a areia, o PVC, o aço-carbono e o duralumínio, constatando-se que:

- o aumento da difusividade térmica da placa porosa, levou a interface formar-se mais profundamente, resultando em maiores espessuras para a região solidificada.

- quando se empregaram isolantes térmicos na constituição da placa porosa, o aumento da porosidade gerou camadas de sólido mais espessas. Utilizando-se materiais bons condutores, as espessuras obtidas diminuíram com o aumento da porosidade.

### 5.3 - Resultados experimentais

Foi desenvolvida uma montagem experimental, constituída por uma célula de medida instrumentada adequadamente e por um sistema de refrigeração, que permitiu submeter amostras de diferentes materiais e porosidades, à algumas das condições previstas na formulação teórica.

Os resultados experimentais, obtidos na situação em que o contorno superior foi mantido termicamente isolado, mostraram que:

- para amostras de esferas de vidro, foram obtidas menores temperaturas nas regiões de sólido e líquido, à medida que o valor da temperatura subitamente imposta diminuiu. O aumento da porosidade, conduziu à temperaturas maiores na região líquida das amostras e afetou muito pouco as temperaturas na região sólida.

- amostras com a mesma porosidade, apresentaram menores temperaturas, tanto nas regiões de sólido, quanto de líquido, à medida em que aumentaram os valores das difusividades térmicas efetivas de seus constituintes sólidos.

Expondo o contorno superior de amostras ao ar em movimento, após 7 200 s, constatou-se que a ação convectiva provocou aumento das temperaturas nas regiões sólida e principalmente na região líquida.

Os resultados experimentais obtidos após 7 200 s de teste, para a água, o PVC e esferas de vidro, nas situações em que o contorno superior está termicamente isolado ou sujeito à convecção, comparados com as previsões teóricas, mostraram que:

- o modelo numérico preveu valores um pouco superiores para a localização da interface sólido-líquido e para as temperaturas na região sólida das amostras. Isto pode ser explicado, considerando-se um aumento da condutividade térmica à medida que a camada de gelo cresce, fato esse que não foi considerado na formulação do problema. Como consequência, a transferência de calor foi dificultada e a velocidade de crescimento da interface diminuiu.

- na região líquida, as temperaturas previstas teoricamente resultaram um pouco menores do que aquelas registradas nos experimentos. Este fato pode estar relacionado com a presença de efeitos convectivos nessa região e que não foram considerados no desenvolvimento do modelo.

- quando se utilizou material bom condutor térmico na constituição da matriz porosa, o modelo numérico previu valores bem maiores para a localização da interface e temperaturas transversais menores do que aquelas obtidas experimentalmente, indicando que o modelo deve ser revisto, introduzindo-se uma nova expressão para as propriedades efetivas.

#### **5.4 - Sugestões para próximos trabalhos**

Uma análise final revelou que o modelo numérico desenvolvido previu razoavelmente bem o congelamento de meios porosos planos saturados e sua aplicação pode ser estendida para outras situações correlacionadas. Com pequenas modificações nos coeficientes do algoritmo, o modelo numérico pode, em princípio, ser empregado nas seguintes situações:

- inversão das condições de contorno
- fusão de substâncias
- condição de contorno de radiação.

Nesses casos torna-se de fundamental importância testar as previsões numéricas, confrontando-as com resultados experimentais e montagens experimentais apropriadas devem ser desenvolvidas.

O modelo pode ainda ser melhorado, introduzindo-se algumas alterações importantes, entre as quais a variação na condutividade térmica, à medida que a camada de sólido cresce e a presença de convecção na região líquida. As previsões numéricas obtidas com essas modificações devem ser comparadas com os resultados experimentais.

## Referências Bibliográficas

- BECKERMANN, C. , VISKANTA, R. Natural convection solid/liquid phase change in porous media. *Int.J.Heat Mass Transfer*. v.31, n.1, pp.35-46, 1988.
- BENEDICT, R.P. *Fundamentals of temperature, pressure, and flow measurements*. 3.ed. New York, John Wiley & Sons, 1984, 532p.
- BERGGREN, W.P. Prediction of temperature distribution in frozen soils. *Transactions, American Geophysical Union*, v.24, pp.71-7, 1943.
- CARSLAW, H.S., JAEGER, J.C. *Conduction of heat in solids*. 2.ed. London, Clarendon Press, 1959, 510p.
- CHELLAIAH, S. , VISKANTA, R. Freezing of saturated and superheated liquid in porous media. *Int.J.Heat Mass Transfer*, v.31, n.2, pp. 321-30, 1988.
- CHELLAIAH, S. , VISKANTA, R. Natural convection melting of a frozen porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.33, n.5, pp. 887-99, 1990.
- CHO, S.H. , SUNDERLAND, J.E. Heat-conduction problems with melting or freezing. *J.Heat Transfer*, v.91c, pp. 421-26, 1969.
- CHO, S.H. , SUNDERLAND, J.E Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity. *J.Heat Transfer*, v.96, pp.214-17, 1974.
- CRANK, J. , NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation os solutions of partial differential equations of the heat conduction type. *Proc.Camb.Phil.Soc.*,v.43, pp 50-67, 1947.
- CRANK, J. *The mathematics os diffusion*. Oxford, Clarendon Press, 1975.
- DILLARD, D.S. , TIMMERHAUS, K.D. Low temperature thermal conductivity of selected dielectric crystalline solids. In *8<sup>th</sup> Thermal Conductivity Conference*. New York, 1969. Proceedings. New York, Plenum Press, 1969. pp.949-67.

- FOSS, S.D. , FAN, S.S.T. Approximate solution to the freezing of the ice-water system with constant heat flux in the water phase. *J. Water Resources Research*, v.10, n.3, pp 511-13, 1974.
- GOODMAN, T.R. The heat-balance integral and its application to problems involving a change of phase. *J.Heat Transfer*, v.80, Trans.ASME, pp 335 - 42, 1958.
- GOODMAN, T.R. , SHEA, J.J. The melting of finite slabs. *Journal of Applied Mechanics*, v.82, Trans.ASME, pp 16-24, 1960.
- GOODMAN, T.R. The heat-balance integral - further considerations and refinements. *J.Heat Transfer*, v.83, pp 83-86, 1961.
- GUTMAN, L.N. On the problem of heat transfer in phase-change material for small Stefan numbers. *Int.J.Heat Mass Transfer*, v. 29, pp 921-26, 1986.
- GUTMAN, L.N. On the problem of heat transfer in a phase-change slab initially not at the critical temperature. *J.Heat Transfer*, v. 109, pp 5-9, 1987.
- HAYASHI, Y.K. et al. Heat conduction during freezing and melting of binary aqueous solution. *ASME Paper* n.81, WA/HT-38, 1981.
- HOLMAN, J.P. *Transferência de calor*. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1983, 639 p.
- INCROPERA, F.P. , DeWITT, D.P. *Fundamentals of heat transfer*. New York, John Wiley & Sons, 1981, 819 p.
- KREITH, F. *Princípios da transmissão de calor*. São Paulo, Edgard Blucher, 1981, 550p.
- KREITH, F , ROMIE, F.E. A study of the thermal diffusion equation with boundary conditions corresponding to solidification or melting of material initially at the fusion temperature. *Proceedings of Physical Society*, v. 68, section B, pp 277-91, 1955.
- LAMÉ, G. , CLAPEYRON, B.P. Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe solide. *Ann.Chem.Phys.*, v.47, pp 250-56, 1831.
- LONDON, A.L. , SEBAN, R.A. Rate of ice formation. *J.Heat Transfer*, v.65, n.7, pp 711-79, 1943.
- LOZANO, C.J. , REEMSTEN, R. On a Stefan problem with an emerging free boundary. *Numerical Heat Transfer*, v.4, pp 239-45, 1981.
- LUNARDINI, V.J. Application of the heat balance integral to conduction phase-change problems. *USA CREEL Report* , 81-25, Hanover. NH, 1981.
- LUNARDINI, V.J. Aproximate solution to conduction freezing with density variation. *J.Energy Res Tech.* v.105, pp.43-5, 1983.

- LUNARDINI, V.J. Freezing of soil with phase change occurring over a finite temperature difference. Proc. 4th International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, ASME, pp.38-46, 1985.
- LUNARDINI, V.J. *Heat transfer with freezing and thawing*. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1991, 437 p.
- LYNCH, C.T. *Handbook of materials science*. Florida, CRC Press Inc, v.III, 1988.
- MATSUMOTO, K. et al. Solidification of porous medium saturated with aqueous solution in a rectangular cell. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 36, n.11, pp. 2869-80, 1993.
- MIZRAHI, V.V. *Treinamento em linguagem C*. São Paulo, McGraw-Hill, 2v, 1990, 514p.
- MURRAY, W.D. , LANDIS, F. Numerical and machine solutions of transient heat conduction problems involving melting or freezing. *Trans.ASME*, v.81, pp 106-12, 1959.
- NAKANO, Y. , BROWN, J. Effect of a freezing zone of finite width on the thermal regime of soils. *J.Water Resources Research*, v.7, n.5, pp.1226-33, 1971.
- OLIVER, D.L.R. , SUNDERLAND, J.E. A phase change problem with temperature-dependent thermal conductivity and specific heat. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.30, n.12, pp.2657-61, 1987.
- OSTERKAMP, T.E. Freezing and thawing of soils and permafrost containing unfrozen water or brine. *Water Res. Research*, v.23,n.12, pp.2279-85, 1987.
- ÖZISIK, M.N. *Heat conduction*. New York, John Wiley & Sons, 1980, 687p.
- ÖZISIK, M.N. *Boundary value problems of heat conduction*. New York, Dover Publications Inc.,1989, 504p.
- PATANKAR, S.V. , BALIGA, B.R.. A new finite-difference scheme for parabolic differential equations. *Num.Heat Transfer*,v.1, p.27, 1978.
- PATANKAR, S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. EUA, Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 197p.
- PERRY, R.H. , CHILTON, C.H. *Manual de engenharia química*. 5.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
- PORTNOV, I.G. Exact solution of freezing problem with arbitrary temperature variation on fixed boundary. *Soviet Phys. Dokl.*,n.7, pp. 186, 1962.
- RICHTMEYER, R.D. *Difference methods for initial value problems*. New York, Interscience Publishers, Inc, 1957.
- RIEMANN, G.F.B. , WEBER, H. *Die partiellen differentialgleichungen der mathematischen physik*. 5a.ed.. v.2, p.121, 1912.

- RUOFF, A.L. An alternate solution to Stefan's problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, v.16, pp.197-201, 1958.
- SMITH, G.D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. 2.ed. London, Oxford University Press, 1978, 304p.
- SPRINGER, G.S. , OLSON, D. Method of solution of axisymmetric solidification and melting problems. *ASME Paper*, 62-WA-246.
- STEFAN, J. *Ann.Phys.Chemie* (wiedemannsche Annalen), v.42, pp.269-86, 1891.
- TAYLOR, G.S. , LUTHIN, J.N. A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing. *Canadian Geotech.J.*, v.15, pp.548-55, 1978.
- VAFAI, K. , TIEN, H.C. A numerical investigation of phase change effects in porous materials. *Int.J. Heat Mass Transfer*, v.32, n.7, pp.1261-77, 1989.
- VUOLO, J.H. *Fundamentos da teoria de erros*. São Paulo, Edgard Blucher, 1992.
- WEAST, R.C. , LIDE, D.R. *Handbook of chemistry and physics*. Florida, CRC Press, 1989.
- WESTPHAL, K.O. Series solution of freezing problem with the fixed surface radiating into a medium of arbitrary varying temperature. *Int.J.Heat Transfer*, v.10, pp 195-205, 1967.
- YANG, C.H. et al. Freezing of water-saturated inclined packed bed of beads. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.36, n.14, pp. 3583-92, 1993.
- ZHANG, X. , NGUYEN, T.H. Melting of ice in a porous medium heated from below. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 34, n.2, pp.389-45, 1991.

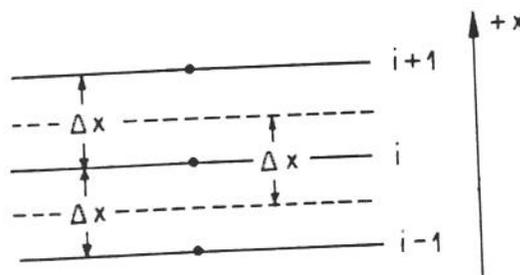
## Apêndice I

### Aproximações para as derivadas e obtenção dos coeficientes do algoritmo TDMA

Na obtenção das equações que representaram as aproximações das derivadas por diferenças finitas e os coeficientes utilizados no algoritmo TDMA, foram consideradas as seguintes posições particulares para os pontos nodais, referindo-se à malha mostrada na figura 3.14.

#### I.1 - Pontos nodais afastados da interface sólido-líquido e dos contornos da placa.

Tanto para a região de sólido quanto de líquido, a temperatura num ponto genérico  $i$  foi expressa em termos das temperaturas nos pontos  $(i-1)$  e  $(i+1)$ , conforme nomenclatura da figura I.1. As linhas tracejadas representam as faces do volume de controle correspondente. Para o problema unidimensional considerado, o valor desse volume foi igual à  $\Delta x$ .



**Fig. I.1** - Nomenclatura nas regiões de sólido e líquido, para pontos afastados da interface e dos contornos.

A temperatura  $T_{i-1}$  foi expandida como série de Taylor, em potências de  $-\Delta x$  em torno do ponto  $i$ , obtendo-se:

$$\Delta x \frac{\partial T_{s,L}}{\partial x} \Big|_i = (T_i - T_{i-1}) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_{s,L}}{\partial x^2} \Big|_i + O(\Delta x)^3 \quad (1.1)$$

onde  $O(\Delta x)^3$  indica a ordem de grandeza dos termos que foram desprezados na aproximação da derivada.

A expansão da temperatura  $T_{i+1}$  em potências de  $\Delta x$  em torno do ponto  $i$  resultou em:

$$\Delta x \frac{\partial T_{s,L}}{\partial x} \Big|_i = (T_{i+1} - T_i) - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_{s,L}}{\partial x^2} \Big|_i + O(\Delta x)^3 \quad (1.2)$$

Igualando (1.1) e (1.2) para eliminar  $\frac{\partial T_{s,L}}{\partial x} \Big|_i$ , obteve-se:

$$\frac{\partial^2 T_{s,L}}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} (T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}) \quad (1.3)$$

com erro de truncação da ordem de  $(\Delta x)$ .

Essas temperaturas foram adimensionalizadas segundo (3.55) resultando em:

$$\frac{\partial^2 \theta_{s,L}}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} (\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) \quad (1.4)$$

O método de CRANK-NICOLSON (1947) foi introduzido usando-se a seguinte representação:

$$\theta_i = \frac{\theta_i^{n+1} + \theta_i^n}{2} \quad (1.5)$$

onde  $n$  refere-se ao tempo atual e  $(n+1)$  ao tempo futuro, obtendo-se a seguinte expressão para a derivada segunda da temperatura adimensional, do sólido ou do líquido, no ponto  $i$ :

$$\frac{\partial^2 \theta_{s,L}}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{1}{2(\Delta x)^2} [\theta_{i-1}^{n+1} + \theta_{i-1}^n - 2(\theta_i^{n+1} + \theta_i^n) + \theta_{i+1}^{n+1} + \theta_{i+1}^n] \quad (1.6)$$

com erro de truncamento da ordem de  $(\Delta x)$ .

### 1.1.1 - Pontos até (q-1) - Região de sólido.

Para pontos nodais no sólido, a equação diferencial correspondente, obtida de (3.5) foi:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

Nesta equação a derivada temporal, calculada no ponto de interesse, foi representada em diferenças finitas por:

$$\frac{\partial \theta_{s,L}}{\partial t} \Big|_i = \frac{\theta_{s,L}^{n+1} - \theta_{s,L}^n}{\Delta t} \Big|_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.8)$$

aplicando-se o resultado à todos os pontos da rede nodal utilizada.

As equações algébricas resultantes foram escritas no formato padrão sugerido por PATANKAR (1980):

$$a_i \theta_i^{n+1} = b_i \theta_{i-1}^{n+1} + c_i \theta_{i+1}^{n+1} + d_i \quad (1.9)$$

com os resultados (1.6) e (1.8) agrupados convenientemente, obtendo-se os seguintes valores para os coeficientes do algoritmo TDMA:

$$a_i = \frac{2(\Delta x)^2}{\alpha_s \Delta t} + 2 \quad (1.10)$$

$$b_i = 1 \quad (1.11)$$

$$c_i = 1 \quad (1.12)$$

$$d_i = \theta_{i-1}^n + \left[ \frac{2(\Delta x)^2}{\alpha_s \Delta t} - 2 \right] \theta_i^n + \theta_{i+1}^n \quad (I.13)$$

Este resultado foi aplicado a todos os pontos nodais até (q-1), à exceção do próprio ponto e do contorno inferior  $i = 0$ .

### I.1.2 - Pontos nodais além de (q+1) - Região de líquido.

Para os pontos nodais no líquido, a equação diferencial correspondente, obtida de (3.10) foi:

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \alpha_L \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} \quad (I.14)$$

Utilizando-se o formato padrão para as equações em diferenças finitas, sugerido por Patankar e agrupando convenientemente os resultados (I.6) e (I.14), foram obtidos os seguintes valores para os coeficientes do algoritmo TDMA:

$$a_i = \frac{2(\Delta x)^2}{\alpha_L \Delta t} + 2 \quad (I.15)$$

$$b_i = 1 \quad (I.16)$$

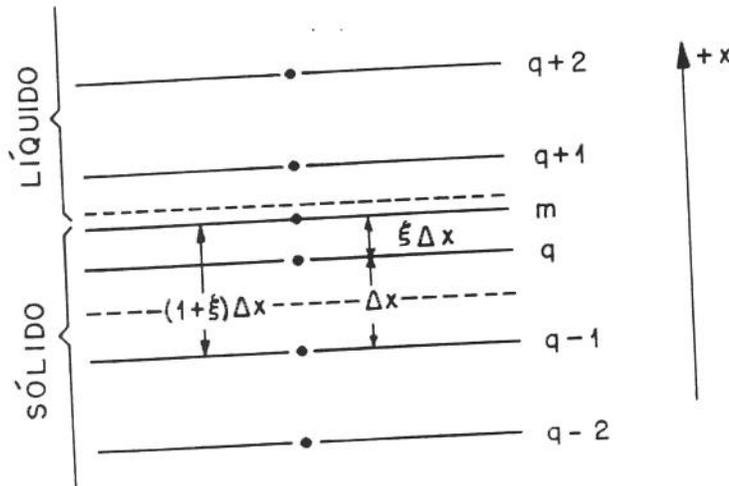
$$c_i = 1 \quad (I.17)$$

$$d_i = \theta_{i-1}^n + \left[ \frac{2(\Delta x)^2}{\alpha_L \Delta t} - 2 \right] \theta_i^n + \theta_{i+1}^n \quad (I.18)$$

Este resultado foi aplicado a todos os pontos nodais além de (q+1), à exceção do próprio ponto e do contorno  $i = N$ .

## A.2 - Pontos nodais próximos da interface sólido-líquido.

Admitiu-se que a localização da interface, em qualquer instante, não necessariamente coincidissem com a posição de algum ponto nodal, representando sua posição sempre em relação ao ponto nodal mais próximo. Na figura 1.2 mostra-se o ponto nodal  $q$ , mais próximo e separado de  $\xi \Delta x$  da interface, bem como os pontos anteriores ( $q-2$ ) e ( $q-1$ ) e posteriores ( $q+1$ ) e ( $q+2$ ).



**Fig.1.2** - Nomenclatura para os pontos nodais nas proximidades da interface sólido-líquido.

### 1.2.1 - Ponto nodal ( $q-1$ ).

A temperatura nesse ponto foi expressa usando-se as temperaturas da interface e do ponto nodal ( $q-2$ ).

A expansão da temperatura da interface,  $T_m$ , como série de Taylor, em potências de  $(1+\xi)\Delta x$  em torno do ponto ( $q-1$ ), resultou em:

$$\Delta x \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{q-1} = \frac{(T_m - T_{q-1})}{(1+\xi)} - \frac{(1+\xi)(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \Big|_{q-1} + O(\Delta x)^3 \quad (1.19)$$

e a expansão de  $T_{q-2}$  em potências de  $-\Delta x$  em torno do ponto  $(q-1)$  em:

$$\Delta x \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{q-1} = (T_{q-1} - T_{q-2}) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \Big|_{q-1} + O(\Delta x)^3 \quad (1.20)$$

Os resultados (1.19) e (1.20) foram igualados para eliminar  $\frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{q-1}$  e adimensionalizados, usando-se a expressão (3.55). Aplicando-se o método de Crank-Nicolson chegou-se à seguinte expressão para a derivada segunda da temperatura adimensional no ponto  $(q-1)$ :

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} \Big|_{q-1} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ -\frac{1}{(1+\xi)} \theta_{q-1}^{n+1} - \frac{1}{(1+\xi)} \theta_{q-1}^n + \frac{1}{(2+\xi)} \theta_{q-2}^{n+1} + \frac{1}{(2+\xi)} \theta_{q-2}^n \right] \quad (1.21)$$

com erro de truncamento da ordem de  $(\Delta x)$ .

Como esse ponto nodal encontra-se na região de sólido, deve satisfazer também a equação diferencial (1.7). Colocando o resultado no formato padrão (1.9), foram obtidos os seguintes coeficientes:

$$a[\text{pos } q-1] = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha_s \Delta t} + \frac{1}{(1+\xi)} \quad (1.22)$$

$$b[\text{pos } q-1] = 0 \quad (1.23)$$

$$c[\text{pos } q-1] = \frac{1}{(2+\xi)} \quad (1.24)$$

$$d[\text{pos } q-1] = \left[ \frac{(\Delta x)^2}{\alpha_s \Delta t} - \frac{1}{(1+\xi)} \right] \theta_{q-1}^n + \frac{1}{(2+\xi)} \theta_{q-2}^n \quad (1.25)$$

onde a notação [pos q-1] especificou a posição do ponto nodal em que o coeficiente foi calculado.

### 1.2.2 - Ponto nodal (q+1)

Procedendo de modo análogo, a temperatura no ponto (q+1) foi expressa usando-se as temperaturas na interface e no ponto nodal (q+2). Conforme se verifica na figura 1.2, este ponto localiza-se na região de líquido.

A expansão de  $T_m$  como série de Taylor em potências de  $-(1+\xi)\Delta x$  em torno do ponto (q+1), resultou em:

$$\Delta x \frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_{q+1} = \frac{(T_{q+1} - T_m)}{(1-\xi)} + \frac{(1-\xi)(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \Big|_{q+1} + O(\Delta x)^3 \quad (1.26)$$

e a expansão de  $T_{q+2}$  em potências de  $\Delta x$  em torno do ponto (q+1) em:

$$\Delta x \frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_{q+1} = (T_{q+2} - T_{q+1}) - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \Big|_{q+1} + O(\Delta x)^3 \quad (1.27)$$

Igualando-se (1.26) e (1.27), fazendo uso da adimensionalização (3.55) e aplicando-se o método de Crank-Nicolson, foi obtida a seguinte expressão para a derivada segunda da temperatura adimensional no ponto (q+1):

$$\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} \Big|_{q+1} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ -\frac{1}{(1-\xi)} \theta_{q-1}^{n+1} - \frac{1}{(1-\xi)} \theta_{q-1}^n + \frac{1}{(2-\xi)} \theta_{q+2}^{n+1} + \frac{1}{(2-\xi)} \theta_{q+2}^n \right] \quad (1.28)$$

com erro de truncamento da ordem de  $(\Delta x)$ .

Como esse ponto nodal encontra-se na região de líquido, deve satisfazer a equação diferencial (1.14). Colocando-se o resultado no formato padrão (1.9), foram obtidos os seguintes coeficientes:

$$a[\text{pos } q + 1] = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha_L \Delta t} + \frac{1}{(1 - \xi)} \quad (1.29)$$

$$b[\text{pos } q + 1] = \frac{1}{(2 - \xi)} \quad (1.30)$$

$$c[\text{pos } q + 1] = 0 \quad (1.31)$$

$$d[\text{pos } q + 1] = \left[ \frac{(\Delta x)^2}{\alpha_L \Delta t} - \frac{1}{(1 - \xi)} \right] \theta_{q+1}^n + \frac{1}{(2 - \xi)} \theta_{q+2}^n \quad (1.32)$$

### 1.2.3 - Ponto nodal q

Durante o processo de solidificação, o ponto nodal q pode situar-se na região de líquido ou de sólido, dependendo da interface estar localizada antes ou depois dele, conforme representado na figura 1.3. Essas duas possibilidades foram analisadas com a finalidade de serem obtidos os respectivos coeficientes.

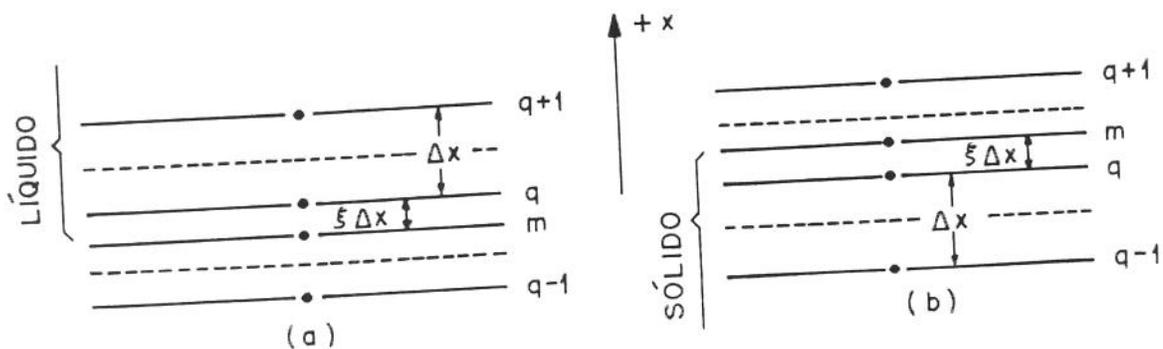


Fig. 1.3 - Nomenclatura para o ponto nodal q situado (a) no líquido e (b) no sólido.

### 1.2.3a -Ponto q na região líquida ( $\xi < 0$ )

A temperatura no ponto q foi expressa em termos da temperatura na interface e no ponto (q+1).

A expansão de  $T_m$  como série de Taylor, em potências de  $-\xi\Delta x$  em torno do ponto q, resultou em:

$$\Delta x \frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_q = \frac{(T_m - T_q)}{\xi} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \Big|_q + O(\Delta x)^3 \quad (1.33)$$

e a expansão de  $T_{q+1}$  em potências de  $\Delta x$  em torno de q em:

$$\Delta x \frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_q = (T_{q+1} - T_q) - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \Big|_q + O(\Delta x)^3 \quad (1.34)$$

Igualando-se (1.33) e (1.34), adimensionalizando e usando o método de Crank-Nicolson, foi obtida a seguinte expressão para a derivada segunda da temperatura adimensional no ponto q:

$$\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} \Big|_q = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{1}{\xi} (\theta_q^n + \theta_q^{n+1}) + \frac{1}{(1-\xi)} (\theta_{q-1}^n + \theta_{q-1}^{n+1}) \right] \quad (1.35)$$

com erro de truncamento da ordem de  $(\Delta x)$ .

Nesta situação o ponto nodal q deve satisfazer a equação diferencial (1.14), para a região líquida. Colocando-se o resultado final no formato padrão (1.9), obtiveram-se os seguintes coeficientes :

$$a[\text{pos } q] = \frac{\Delta x}{\alpha_L \Delta t} - \frac{1}{\xi} \quad (1.36)$$

$$b[\text{pos } q] = \frac{1}{(1-\xi)} \quad (1.37)$$

$$c[\text{pos } q] = 0 \quad (1.38)$$

$$d[\text{pos } q] = \left[ \frac{(\Delta x)^2}{\alpha_L \Delta t} + \frac{1}{\xi} \right] \theta_q^n + \left[ \frac{1}{(1-\xi)} \right] \theta_{q+1}^n \quad (1.39)$$

### 1.2.3b - Ponto q na região sólida ( $\xi > 0$ )

A temperatura no ponto q foi expressa em termos da temperatura na interface e no ponto q-1.

A expansão de  $T_m$  como série de Taylor, em potências de  $\xi \Delta x$  em torno do ponto q, resultou em:

$$\Delta x \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_q = \frac{(T_m - T_q)}{\xi} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \Big|_q + O(\Delta x)^3 \quad (1.40)$$

e a expansão de  $T_{q+1}$  em potências de  $-\Delta x$  em torno de q em:

$$\Delta x \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_q = (T_q - T_{q+1}) - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \Big|_q + O(\Delta x)^3 \quad (1.41)$$

Igualando-se (A.40) e (A.41), adimensionalizando e usando o método de Crank-Nicolson, foi obtida a seguinte expressão para a derivada segunda da temperatura adimensional, no ponto q:

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} \Big|_q = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ -\frac{1}{\xi} (\theta_q^n + \theta_{q+1}^n) + \frac{1}{(1+\xi)} (\theta_{q-1}^n + \theta_q^n) \right] \quad (1.42)$$

com erro de truncamento da ordem de  $(\Delta x)$ .

Nesta situação o ponto nodal q deve satisfazer a equação diferencial (1.7), para a região sólida. Colocando-se o resultado final no formato padrão (1.9), obtiveram-se os seguintes coeficientes :

$$a[\text{pos } q] = \frac{\Delta x}{\alpha_s \Delta t} + \frac{1}{\xi} \quad (1.43)$$

$$b[\text{pos } q] = 0 \quad (1.44)$$

$$c[\text{pos } q] = \frac{1}{(1+\xi)} \quad (1.45)$$

$$d[\text{pos } q] = \left[ \frac{(\Delta x)^2}{\alpha_s \Delta t} - \frac{1}{\xi} \right] \theta_q^n + \left[ \frac{1}{(1+\xi)} \right] \theta_{q+1}^n \quad (1.46)$$

### 1.3 - Condição de continuidade na interface sólido-líquido

Para obter as expressões em diferenças finitas, das derivadas primeiras existentes na equação da interface sólido-líquido definida por (3.12), foram consideradas 2 situações possíveis para sua localização, em relação a um ponto genérico  $q$  : interface imediatamente abaixo ou acima desse ponto, conforme representado na figura 1.4.

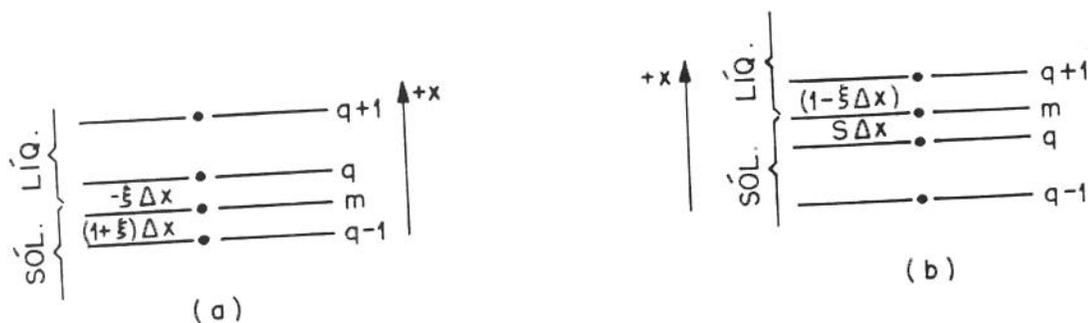


Fig. 1.4. Nomenclatura para as situações em que a interface está (a) abaixo do ponto  $q$  e (b) acima dele.

### 1.3.1 - Interface abaixo do ponto q ( $\xi < 0$ )

Nessa situação a temperatura da interface na região sólida foi expressa em termos do ponto nodal (q-1) e na região líquida em termos do ponto q.

A expansão da temperatura no ponto (q-1), como série de Taylor em potências de  $(1+\xi)\Delta x$ , em torno da interface m, resultou em:

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_m = -\frac{1}{(1+\xi)\Delta x} (T_{q-1} - T_m) + O(\Delta x)^2 \quad (1.47)$$

onde  $(\Delta x)^2$  indica a ordem de grandeza dos termos desprezados na aproximação.

A expansão da temperatura no ponto q, em potências de  $-\xi\Delta x$ , em torno da interface m, resultou em:

$$\frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_m = -\frac{1}{\xi\Delta x} (T_q - T_m) + O(\Delta x)^2 \quad (1.48)$$

Adimensionalizando as temperaturas, usando-se (3.55) e aplicando o método de Crank-Nicolson, obtiveram-se as expressões:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x} \Big|_m = -\frac{T_m}{2(1+\xi)\Delta x} (\theta_{q-1}^{n+1} + \theta_{q-1}^n) \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial x} \Big|_m = -\frac{T_m}{2\xi\Delta x} (\theta_q^{n+1} + \theta_q^n) \quad (1.50)$$

A aproximação em diferenças finitas para a derivada temporal, dada pela equação (1.8), é:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t} \quad (1.51)$$

Combinando os resultados (1.49), (1.50) e (1.51) chegou-se à seguinte expressão para a posição futura da interface sólido-líquido:

$$s^{n+1} = s^n - \frac{T_m \Delta t}{2\rho_L \varepsilon L \Delta x} \left[ \frac{k_s}{(1+\xi)} (\theta_{q-1}^{n+1} + \theta_{q-1}^n) - \frac{k_L}{\xi} (\theta_q^{n+1} + \theta_q^n) \right] \quad (1.52)$$

### 1.3.2 - Interface acima do ponto q ( $\xi > 0$ )

A temperatura da interface na região sólida foi expressa em termos do ponto nodal q e na região líquida em termos do ponto (q+1).

A expansão da temperatura  $T_q$  como série de Taylor em potências de  $-\xi\Delta x$ , em torno da interface m, resultou em:

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_m = -\frac{1}{\xi \Delta x} (T_q - T_m) + O(\Delta x)^2 \quad (1.53)$$

onde  $(\Delta x)^2$  indica a ordem de grandeza dos termos desprezados na aproximação.

A expansão a temperatura  $T_{q+1}$ , em potências de  $(1-\xi)\Delta x$ , em torno da interface m, resultou em:

$$\frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_m = \frac{1}{(1-\xi)\Delta x} (T_{q+1} - T_m) + O(\Delta x)^2 \quad (1.54)$$

Adimensionalizando-se as temperaturas, usando (3.55) e aplicando o método de Crank-Nicolson, foram obtidas as expressões:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x} \Big|_m = -\frac{T_m}{2\xi \Delta x} (\theta_q^{n+1} + \theta_q^n) \quad (1.55)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_L}{\partial x} \right|_m = \frac{T_m}{2(1-\xi)\Delta x} (\theta_{q+1}^{n+1} + \theta_{q+1}^n) \quad (1.56)$$

Combinando-se os resultados (1.51), (1.54) e (1.55) foi obtida a seguinte expressão para a posição futura da interface sólido-líquido:

$$s^{n+1} = s^n - \frac{T_m \Delta t}{2\rho_L \varepsilon L \Delta x} \left[ \frac{k_s}{\xi} (\theta_q^{n+1} + \theta_q^n) + \frac{k_L}{(1-\xi)} (\theta_{q+1}^{n+1} + \theta_{q+1}^n) \right] \quad (1.57)$$

## 1.4 - Condições de contorno

### 1.4.1 - Contorno inferior - ponto $i = 0$

Na superfície inferior da placa ( $x = 0$ ), tem-se uma condição de contorno de 1.ª espécie. A temperatura a partir do instante  $t = 0$  foi mantida num valor constante e igual à  $T_o$ , ou seja:

$$T_o^n = T_o^{n+1} = T_o \quad (1.58)$$

Usando o formato padrão (1.9), obtiveram-se os seguintes coeficientes para o ponto  $i = 0$ :

$$a[0] = 1 \quad (1.59)$$

$$b[0] = c[0] = d[0] = 0 \quad (1.60)$$

### 1.4.2 - Contorno superior - ponto $i = N$

Considerou-se que a extremidade superior da placa ( $x = d$ ) pudesse estar sujeita a 2 situações: trocar calor convectivamente com o meio ambiente ou manter-se termicamente isolada. Na hipótese de haver convecção, admitiu-se ainda que a temperatura ambiente pudesse tanto ser mantida constante, como variar senoidalmente com o tempo, de acordo com a equação (3.63).

A condição de troca de calor convectiva no ponto N foi expressa como :

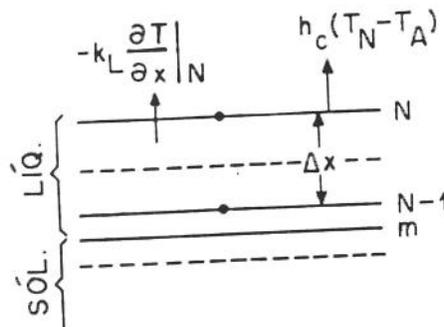
$$-k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_N = h_c (T_N - T_A) \quad (1.61)$$

onde o termo à esquerda representou o calor transferido por condução, através do ponto N e o termo à direita, o calor trocado convectivamente com um ambiente à temperatura  $T_A$ .

Primeiramente foi analisada a situação em que a interface sólido-líquido não tenha atingido o penúltimo ponto nodal (N-1).

#### 1.4.2a - Ponto nodal (N-1) no líquido e $\xi < 0$

A figura 1.5 representa os pontos nodais e a nomenclatura utilizada para obter a aproximação de  $\frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_N$  nessa situação.



**Fig.1.5** - Pontos nodais e nomenclatura no contorno superior, enquanto a interface sólido-líquido não atingiu o penúltimo ponto nodal.

Admitiu-se a existência de um perfil linear de temperatura entre N e (N-1), que foi expresso como:

$$\left. \frac{\partial T_L}{\partial x} \right|_N = \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta x} \quad (1.62)$$

Igualando-se (1.61) e (1.62) e adimensionalizando-se as temperaturas usando-se (3.55), chegou-se à expressão:

$$(h_c \Delta x + k_L) \theta_N = h_c \Delta x \theta_A + k_L \theta_{N-1} \quad (1.63)$$

Identificando este resultado com o formato padrão definido por (1.9), foram obtidos os seguintes coeficientes:

$$a[\text{dim}-1] = 1 \quad (1.64)$$

$$b[\text{dim}-1] = 0 \quad (1.65)$$

$$c[\text{dim}-1] = \frac{k_L}{h_c \Delta x + k_L} \quad (1.66)$$

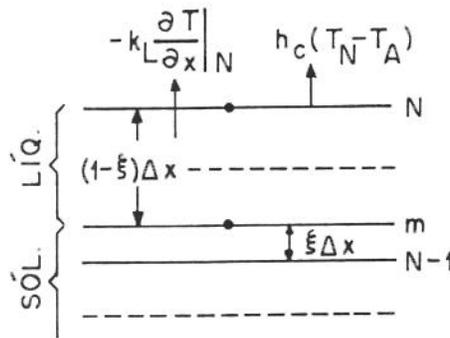
$$d[\text{dim}-1] = \frac{h_c \Delta x \theta_A}{h_c \Delta x + k_L} \quad (1.67)$$

onde a notação  $[\text{dim}-1]$  refere-se à posição do ponto nodal N.

Quando a interface ultrapassa o penúltimo ponto nodal e o líquido na placa porosa encontra-se praticamente todo congelado, foram consideradas 2 possibilidades para a localização da interface :

#### 1.4.2b - Ponto (N-1) no sólido e $\xi > 0$ .

A figura 1.6 representa os pontos nodais e a nomenclatura utilizada para essa situação.



**Fig. 1.6** -Pontos nodais e nomenclatura quando a interface está próxima do último ponto nodal e  $\xi > 0$ .

Admitiu-se a existência de um perfil linear de temperatura entre o ponto nodal N e a interface m, obtendo-se:

$$\frac{\partial T_L}{\partial x} \Big|_N = \frac{T_N - T_m}{(1 - \xi)\Delta x} \quad (1.68)$$

Este resultado foi igualado com (1.61) e a equação resultante adimensionalizada. Expressando-a no formato definido por (1.9), foram obtidos os seguintes coeficientes:

$$a[\text{dim}-1] = 1 \quad (1.69)$$

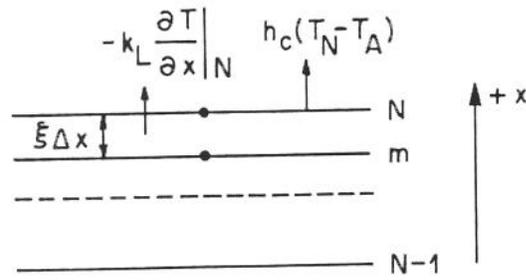
$$b[\text{dim}-1] = 0 \quad (1.70)$$

$$c[\text{dim}-1] = 0 \quad (1.71)$$

$$d[\text{dim}-1] = \frac{(1 - \xi)\Delta x h_c \theta_A}{(1 - \xi)\Delta x h_c + k_L} \quad (1.72)$$

### 1.4.2c - Ponto (N-1) no sólido e $\xi < 0$ .

A figura 1.7 representa os pontos nodais e a nomenclatura utilizada nesse caso.



**Fig. 1.7** -Pontos nodais e nomenclatura usada quando a interface está próxima do último ponto nodal e  $\xi < 0$ .

Foi admitida novamente a existência de um perfil linear de temperatura entre o ponto nodal N e a interface, obtendo-se:

$$\left. \frac{\partial T_L}{\partial x} \right|_N = \frac{T_N - T_m}{-\xi \Delta x} \quad (1.73)$$

Este resultado foi igualado com (1.61) e a equação resultante adimensionalizada. Expressando-a no formato definido por (1.9), foram obtidos os seguintes coeficientes:

$$a[\text{dim}-1] = 1 \quad (1.74)$$

$$b[\text{dim}-1] = 0 \quad (1.75)$$

$$c[\text{dim}-1] = 0 \quad (1.76)$$

$$d[\text{dim}-1] = \frac{\xi \Delta x h_c \theta_A}{\xi \Delta x h_c - k_L} \quad (1.77)$$

A condição de isolamento térmico constitui uma situação particular da convecção. Os coeficientes do algoritmo TDMA para esse caso foram obtidos fazendo-se  $h_C = 0$  nas equações anteriores. Da mesma forma, a temperatura ambiente  $\theta_A$  pode ter valor constante ou variar com o tempo, de acordo com alguma expressão conhecida, bastando substituí-la nas expressões dos coeficientes.

## Apêndice II

### Programa Fonte em Linguagem C para Resolução do Algoritmo TDMA

Para resolver o algoritmo TDMA, foi escrito um programa utilizando os coeficientes obtidos no apêndice I, segundo o método sugerido por PATANKAR (1980).

O programa utilizou a linguagem C, que segundo MIZRAHI (1990) é estruturada e apresenta como interessante característica a portabilidade. Assim programas escritos em C são facilmente transferidos entre computadores que apresentem arquiteturas diferentes.

Como compilador foi empregado o Turbo C na versão C++. Seu software agrega as principais funções necessárias para criar e rodar programas em C, resultando grande comodidade e facilidade de utilização.

Os comentários, inseridos entre barra-asterisco, tiveram como objetivo esclarecer as definições utilizadas, as ações que serão executadas ou o significado de símbolos, que foram usados na elaboração do programa.

```

*****
/*  CONGELAMENTO DE UMA PLACA POROSA PLANA UNIDIMENSIONAL  */
*****

*****
/*    CONTORNO INFERIOR MANTIDO À TEMPERATURA CONSTANTE    */
/*    CONTORNO SUPERIOR TROCANDO CALOR CONVECTIVAMENTE    */
/*  TEMPERATURA AMBIENTE VARIANDO SENOIDALMENTE COM O TEMPO  */
*****

/* Diretivas utilizadas */
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#define tam1 120
#define PI 3.1415926535897931159979634685
/* Tipos de variáveis */
double tet[tam1], tetp[tam1];
double a[tam1], b[tam1], c[tam1], d[tam1];
/* Sumário do algoritmo TDMA */
void tdma(at, bt, ct, dt, nn, xt)
double at[], bt[], ct[], dt[], xt[];
int nn;
{
double p[tam1], q[tam1];
int ii;
p[0] = bt[0] / at[0];
q[0] = dt[0] / at[0];
for (ii = 1; ii <= nn; ii++) {
if (fabs(bt[ii]) > 1e-35)
p[ii] = bt[ii] / (at[ii] - ct[ii] * p[ii - 1]);
}
}

```

```

else
    p[ii] = 0;
if (fabs(dt[ii] + ct[ii] * q[ii - 1]) > 1e-35)
    q[ii] = (dt[ii] + ct[ii] * q[ii - 1]) /
        (at[ii] - ct[ii] * p[ii - 1]);
else
    q[ii] = 0;
}
xt[nn] = q[nn];
for (ii = nn-1; ii >= 0; ii--)
    xt[ii] = p[ii] * xt[ii+1] + q[ii];
}

/* Início da execução do programa principal */
void main()
/* Declaração/tipo de variáveis a serem utilizadas */
{
double E, C, h, s, dz, tau, dtau, Pf, dz2, xi, xi2, xiant, pa, pg, pl, pm, ps;
double taulim, sp, vp, sa, tf, tinic, tetinic, tinf, tinfp, tzero, tetzero;
double Ls, as, al, cps, cpl, cpa, cpm, cpg, tmax;
double ks, kl, ka, kg, km;
int dim, posq;
register int i, j;
char wq;

/* Valores utilizados para as variáveis */
dim = 31;          /* Número de pontos nodais da malha */
taulim = 11000.0; /* Duração do processo, (s), >3horas */
dtau = 10.0;      /* Incremento de tempo, (s) */
Pf = 43200.0;     /* Período de flutuação da temperatura (s) */
s = 0.075;        /* Espessura da placa, (m) */
dz = s/(dim-1);   /* Separação ( $\Delta x$ ) entre pontos da malha, (m) */
tinic = 0.07326; /* Temp.inicial da amostra, (ADIM=T/273), T=20 °C */

```

$t_{zero} = -0.07326;$  /\* Temp.imposta em  $x = 0$ , (ADIM=T/273), $T = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$  \*/  
 $t_{inf} = 0.018315;$  /\* Temp. ambiente (ADIM=T/273), $T = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$  \*/  
 $t_{max} = 0.07326;$  /\* Temp. ambiente máxima (ADIM=T/273), $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  \*/  
 $t_f = 273.0;$  /\* Temp. mudança de fase (Kelvin),  $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$  \*/

/\* Valores das propriedades e definições utilizadas \*/

$E = 0.40;$  /\* Porosidade da amostra \*/  
 $h = 40.0;$  /\* Coef. película amostra/ar, ( $\text{W}/\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $p_a = 998.0;$  /\* Densidade da água, ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ ) \*/  
 $p_g = 913.0;$  /\* Densidade do gelo, ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ ) \*/  
 $p_m = 1414.0;$  /\* Densidade da matriz porosa, ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ ) \*/  
 $p_l = E\cdot p_a + (1-E)\cdot p_m;$  /\* Densidade efetiva do líquido, ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ ) \*/  
 $p_s = E\cdot p_g + (1-E)\cdot p_m;$  /\* Densidade efetiva do sólido, ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ ) \*/  
 $k_a = 0.59;$  /\* Condução térmica da água, ( $\text{W}/\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $k_g = 2.49;$  /\* Condução térmica do gelo,  $630/T$ , ( $\text{W}/\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $k_m = 0.33;$  /\* Condução térmica da matriz porosa, ( $\text{W}/\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $k_s = E\cdot k_g + (1-E)\cdot k_m;$  /\* Condução térmica EFETIVA da fase sólida, ( $\text{W}/\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $k_l = E\cdot k_a + (1-E)\cdot k_m;$  /\* Condução térmica EFETIVA da fase líquida, ( $\text{W}/\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $c_{p_a} = 4187.0;$  /\* Calor específico da água, ( $\text{J}/\text{Kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $c_{p_g} = 1924.0;$  /\* Calor específico do gelo, ( $\text{J}/\text{Kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $c_{p_m} = 1321.0;$  /\* Calor específico da matriz porosa, ( $\text{J}/\text{Kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $c_{p_s} = E\cdot c_{p_g} + (1-E)\cdot c_{p_m};$  /\* Calor específico EFETIVO da fase sólida, ( $\text{J}/\text{Kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $c_{p_l} = E\cdot c_{p_a} + (1-E)\cdot c_{p_m};$  /\* Calor específico EFETIVO da fase líquida, ( $\text{J}/\text{Kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ ) \*/  
 $L_s = 334960.0;$  /\* Calor latente solidificação da água, ( $\text{J}/\text{Kg}$ ) \*/  
 $\alpha_l = k_l/p_l/c_{p_l};$  /\* Difusividade térmica EFETIVA da fase líquida, ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) \*/  
 $\alpha_s = k_s/p_s/c_{p_s};$  /\* Difusividade térmica EFETIVA da fase sólida, ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) \*/

/\* Condições iniciais \*/

$\tau = 0;$  /\* Tempo zero, (s) \*/  
 $s_a = 0.001;$  /\* Posição da interface, (m) \*/  
 $pos_q = 0;$  /\* Posição do ponto q \*/  
 $\xi_i = (s_a - pos_q \cdot dz)/dz;$  /\* Expressão genérica para  $q_{si}$ , (m) \*/  
 $\xi_{iant} = 0;$  /\* Posição anterior de  $q_{si}$ , (m) \*/

```

tinfp = tinf;          /* Temp. inicial, (°C) */

for (i=0; i<dim; i++)
    tet[i] = tinic;
    tet[0] = tzero;
    for (i=0; i<dim; i++)
        {
        }
do
    {
xi = (sa-posq*dz)/dz; /* Expressão genérica para qsi */
tau = tau + dtau;     /* Novo intervalo de tempo , (s) */
/*Definições utilizadas internamente*/
dz2 = dz*dz;         /* ( $\Delta x$ )2 */
C = (tf*dtau)/(2*E*pa*Lv*dz); /* Coeficiente da interface */

/* Condição no contorno inferior - temperatura constante */
/*Ponto i = 0*/
a[0] = 1;
b[0] = 0;
c[0] = 0;
d[0] = tzero;

/*Condição no contorno superior - Convecção em ambiente com temperatura variável */

/* Ponto i = N */
if (posq == dim-1)
    {
a[dim-1] = 1;
b[dim-1] = 0;
c[dim-1] = 0;
d[dim-1] = (h*xi*dz*tinfp)/((h*xi*dz)-kl);
    }

```

```

if (posq == dim-2 && xi>0)
    {
    a[dim-1] = 1;
    b[dim-1] = 0;
    c[dim-1] = 0;
    d[dim-1] = (h*(1-xi)*dz*tinfp)/((h*(1-xi)*dz)+kl);
    }
else
    {
    a[dim-1] = 1;
    b[dim-1] = 0;
    c[dim-1] = kl/((h*dz)+kl);
    d[dim-1] = (h*dz*tinfp)/((h*dz)+kl);
    }

/* Pontos gerais na região de sólido */

/* Pontos até (q-1) */
for (i = 1; i< posq-1; i++)
    {
a[i] = ((2*dz2)/(as*dtau)+2);
b[i] = 1;
c[i] = b[i];
d[i] = tet[i-1] + ((2*dz2)/(as*dtau)-2)*tet[i] + tet[i+1];
    }

/* Ponto (q-1) */
if (posq>1)
    {
a[posq-1] = dz2/(as*dtau) + 1/(1+xi);
b[posq-1] = 0;
c[posq-1] = 1/(2+xi);
d[posq-1] = (dz2/(as*dtau) - 1/(1+xi))*tet[posq-1] + (1/(2+xi))*tet[posq-2];
    }

```

```

        }
/* Ponto q */

    if ((posq>0) && (posq < dim-1))

if (xi>0)
    {
a[posq] = dz2/(as*dtau) + 1/xi;
b[posq] = 0;
c[posq] = 1/(1+xi);
d[posq] = (dz2/(as*dtau)-(1/xi))*tet[posq] + 1/(1+xi)*tet[posq-1];
    }

/* quando (xi < 0) */
    else
    {
a[posq] = dz2/(al*dtau) - 1/xi;
b[posq] = 1/(1-xi);
c[posq] = 0;
d[posq] = (dz2/(al*dtau)+(1/xi))*tet[posq] + (1/(1-xi))*tet[posq+1];
    }

/* Ponto (q+1) */
    if (posq<dim-2)
    {
a[posq+1] = dz2/(al*dtau) + 1/(1-xi);
b[posq+1] = 1/(2-xi);
c[posq+1] = 0;
d[posq+1] = (dz2/(al*dtau)-1/(1-xi))*tet[posq+1] + (1/(2-xi))*tet[posq+2];
    }

/* Pontos gerais na região de líquido */

/* Ponto (q+1) em diante */

```

```

for (i=posq+1; i<dim-1; i++)
    {
a[i]=(2*dz2)/(al*dtau) + 2;
b[i] = 1;
c[i] = b[i];
d[i] = tet[i-1] + ((2*dz2)/(al*dtau) - 2)*tet[i] + tet[i+1];
    }

/* Execução do algoritmo TDMA */
    tdma(a, b, c, d, dim, tetp);

/* Condição de continuidade na interface sólido-líquido */

/* Equação para a posição futura da interface */
    if (xi>0)
        {
        sp = sa - C*(ks/xi)*(tetp[posq]+tet[posq]) -
            C*k1/(1-xi)*(tetp[posq+1]+tet[posq+1]);
        }
        else
        {
        sp = sa - C*ks/(1+xi)*(tetp[posq-1]+tet[posq-1]) +
            C*(k1/xi)*(tetp[posq]+tet[posq]);
        }
    if (tau>dtau)
        {
        xiant = xi;
        xi = (sp-posq*dz)/dz;
        sa = sp;
        }

/* Expressão para a temperatura ambiente variando senoidalmente com o tempo */
    tinfp = tinf+(tmax-tinf)*sin(2*PI*tau/Pf);

```

```

    }
if (xi>0.5)
{
do
{
xi = xi-1;
posq++;
}while (xi > 0.5);
}

```

```

if (xi<-0.5)
{
do
{
xi = xi+1;
posq--;
}while (xi <- 0.5);
}

```

```

for (i=0; i<dim; i++)
tet[i] = tetp[i];
if (xiant<0 && xi>=0)

```

```

{
}

```

/\* Executar o programa até o tempo escolhido ou até a solidificação total da placa \*/

```

} while (tau<taulim || posq==dim-1);
}

```