

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Modelagem matemática e análise dos
comportamentos ideal e não ideal de estruturas
flexíveis de rastreamento**

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

94/00

Autor : **André Fenili**
Orientador: **José Manoel Balthazar**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR André Fenili

E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 1/12/2001

José Manoel Balthazar
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO - DPM**

**Modelagem matemática e análise dos
comportamentos ideal e não ideal de estruturas
flexíveis de rastreamento**

Autor : André Fenili

Orientador: José Manoel Balthazar

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2000

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F357m Fenili, André
Modelagem matemática e análise dos comportamentos
ideal e não ideal de estruturas flexíveis de rastreamento /
André Fenili.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: José Manoel Balthazar
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Dinâmica estrutural. 2. Perturbação (Matemática).
3. Equações diferenciais. 4. Sistemas de parâmetros
distribuídos. 5. Modelos matemáticos. I. Balthazar, José
Manoel. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

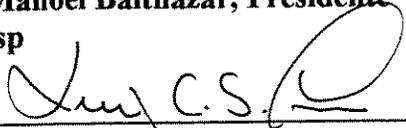
**Modelagem matemática e análise dos
comportamentos ideal e não ideal de estruturas
flexíveis de rastreamento**

Autor : **André Fenili**

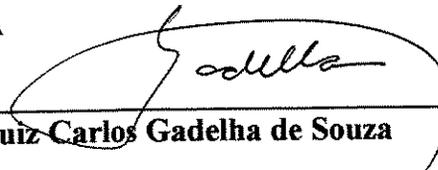
Orientador: **José Manoel Balthazar**



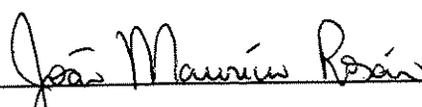
**Prof. Dr. José Manoel Balthazar, Presidente
Unicamp / Unesp**



**Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
ITA / CTA**



**Prof. Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza
INPE**



**Prof. Dr. João Maurício Rosário
Unicamp**



**Prof. Dr. Reinaldo M. L. R. F. Brasil
Escola Politécnica da USP**

Campinas, 1 de Dezembro de 2000



“UMA DAS MAIORES BÊNÇÃOS DO MUNDO,
CREIO EU, É A INCAPACIDADE QUE TEM A
MENTE HUMANA DE CORRELACIONAR TODOS
OS SEUS CONHECIMENTOS. VIVEMOS NUMA
PLÁCIDA ILHA DE IGNORÂNCIA, EM MEIO A
NEGROS MARES DE INFINITUDE, E O CRIADOR
NÃO PRETENDEU QUE VIAJÁSSEMOS ATÉ MUITO
LONGE. AS CIÊNCIAS, CADA QUAL SE
ESFORÇANDO EM SUA PRÓPRIA DIREÇÃO,
ATÉ AGORA CAUSOU-NOS POUCO DANO ;
MAS ALGUM DIA, A CONCATENAÇÃO DE
CONHECIMENTOS DISSOCIADOS HÁ DE
DESCORTINAR PANORAMAS TÃO
TERRIFICANTES DA REALIDADE, E DE NOSSA
PAVOROSA POSIÇÃO NELA, QUE OU A
REVELAÇÃO NOS ENLOUQUECERÁ
OU FUGIREMOS DA LUZ FATAL PARA A
PAZ E A SEGURANÇA DE UMA NOVA
IDADE DAS TREVAS.”

O CHAMADO DE CTHULHU
H. P. LOVECRAFT

(1 9 2 8)

Dedicatória :

Este trabalho é dedicado à raça humana. Que ela possa usufruir de seu conteúdo !

Agradecimentos

Este trabalho não se tornaria uma realidade caso não houvesse uma confluência de fatores favoráveis e adversos à sua realização. Como deve ser com qualquer empreitada que se manifesta (ao menos) dentro dos contornos do universo conhecido.

Assim sendo, agradeço ...

..., antes de tudo e de todos, à minha família : meu pai, minha mãe e minhas irmãs. Agradeço por terem superado toda a angústia da saudade e do aparente esquecimento ao longo desses infundáveis meses (assim pareceram). Que estas páginas sejam uma boa desculpa para a minha constante ausência, principalmente em aniversários, natais e passagens de ano.

... aos meus amigos e amigas pelos risos e pelas lágrimas. E agradeço também àqueles/àquelas com os/as quais idéias ligadas direta ou indiretamente ao contexto deste trabalho foram discutidas. Agradeço a todos pela constante confiança e pelo imenso respeito demonstrados.

... ao pessoal do *Nonlinear Vibration Laboratory* (*Virginia Tech*) pelo apoio e por tornar minha estada em *Blacksburg, VA* a mais agradável possível. Agradeço pela oportunidade de ter entrado em contato com pessoas de tão diferentes culturas (e humores) : do Egito, da Jordânia, da Índia, do Líbano. Pela mesma razão, agradeço a todos aqueles que conheci nesta minha jornada internacional : estudantes universitários, o povo da cidade em

que morei por sete meses e o povo daquelas cidades pelas quais passei. Pessoas que me fizeram ver além daqueles preconceitos estabelecidos no Brasil (e no mundo) com relação ao povo norte-americano e que, inclusive, são alimentados pela propaganda do governo daquele país. E deste. Isso comprova o perigo e o risco das generalizações. Especial agradecimento ao Prof. Dr. Dean T. Mook, meu orientador na *Virginia Tech* ao longo destes sete meses que passaram voando (assim pareceram), por todas as idéias, sugestões, discussões, pelo entusiasmo e pelas oportunidades. E por deixar as portas abertas.

... ao meu orientador na Unicamp (e Unesp), Prof. Dr. José Manoel Balthazar, pela paciência e pelas oportunidades.

... aos avanços tecnológicos dos últimos anos (na verdade, aos responsáveis pelos mesmos) pelas motivações que constantemente me animavam a prosseguir e a tentar encontrar respostas.

... a todos os "miseráveis" (de corpo e de alma) que jamais terão as oportunidades que eu tive e aos "ignorantes" (por vontade ou por falta de opção) que sempre me fizeram (e fazem) questionar a razão de tanta tecnologia e de meu trabalho. De uma forma ou de outra, minha raiva e inconformidade frente a sua passividade transforma-se em força e determinação. Que um dia eu possa ajudar a transformar (para melhor) o mundo em que todos nós vivemos e cada um deles. E a mim mesmo.

... à Fapesp pelo apoio financeiro e pela oportunidade concedida.

Nietzsche disse certa vez que "aqueles que não nos matam nos tornam ainda mais fortes". Por esta razão, agradeço, finalmente, a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, tentaram me impedir de realizar o meu trabalho ou se esforçaram para me prejudicar de alguma maneira. Apesar de não me lembrar especificamente de alguém (e nem vem ao caso), deve-se ficar alerta ! Essas pessoas existem. E deverão sempre ser bemvindas.

Resumo

FENILI, André, *Modelagem matemática e análise dos comportamentos ideal e não ideal de estruturas flexíveis de rastreamento*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 333 p. Tese (Doutorado).

Neste trabalho desenvolve-se modelos matemáticos para sistemas dinâmicos denominados estruturas flexíveis de rastreamento. Dois tipos diferentes de abordagem são utilizados : abordagem de sistema ideal e abordagem de sistema não ideal. Dois diferentes modelos matemáticos são propostos para a deflexão da estrutura flexível de rastreamento (tipo viga) : curvatura linear e curvatura não linear. Um protótipo experimental é projetado e construído com o intuito de levantar características que auxiliem na modelagem de tais sistemas. Um novo modelo matemático para o atrito interno do motor de corrente contínua utilizado experimentalmente é obtido através da identificação de seus parâmetros físicos e ajuste do modelo matemático. Simulações numéricas são efetuadas comparando os modelos propostos e sua aplicabilidade ou não em determinadas situações. Técnicas de perturbação são utilizadas para a obtenção da solução analítica das equações governantes do movimento, obtidas através do Princípio Estendido de Hamilton, para cada um dos modelos matemáticos propostos. Os resultados desse trabalho são da maior importância no estudo de estruturas leves tais como painéis solares em satélites e manipuladores robóticos delgados e rápidos.

Palavras chave

- Sistema Ideal, Sistema Não Ideal, Estrutura Flexível de Rastreamento, Equações Diferenciais Não Lineares.

Abstract

FENILI, André, *Modelagem matemática e análise dos comportamentos ideal e não ideal de estruturas flexíveis de rastreamento*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 333 p. Tese (Doutorado).

In this investigation are developed mathematical models for the dynamical systems named slewing flexible structures. Two different approaches are proposed : the ideal system approach and the nonideal system approach. Two different mathematical models are proposed for the beam-like slewing flexible structure deflection : linear curvature and nonlinear curvature. An experimental prototype is designed and built with the objective of obtaining data that may help in the modeling of such systems. A new mathematical model for the experimental dc motor internal damping is obtained through the identification of its physical parameters and mathematical model fitting. Numerical simulations are realized comparing the proposed models and its applicability or not under determined situations. Perturbation techniques are used for obtaining the analytical solution of the governing equations of motion, derived through the Hamilton Extended Principle, for each one of the proposed models. The results presented in this work are very important in the study of light structures such as solar panels in satellites and long and fast robotic manipulators.

Key Words

- Ideal Systems, Nonideal Systems, Slewing Flexible Structures, Nonlinear Differential Equations

Índice

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xxxii
Nomenclatura	xxxiv
1 Introdução	1
1.1 Aspectos gerais	1
1.1.1 Subsistema 1 : motor dc	3
1.1.2 Subsistema 2 : sistema ideal e sistema não ideal	3
1.1.3 Subsistema 3 : curvatura linear e curvatura não linear	5
1.2 Algumas aplicações	5
1.3 Esquema geral da tese : parte teórica	6
1.4 Esquema geral da tese : parte experimental	10
1.5 Conteúdo da tese	10
2 Modelagem matemática de estruturas flexíveis de rastreamento : curvatura linear	14
2.1 Introdução	14
2.2 Modelo geométrico	15
2.3 Equações dimensionais do movimento	16
2.4 Adimensionalização das equações do movimento	21
2.5 Equações adimensionais do movimento	24
2.6 O método dos modos assumidos	25

2.7	Equações adimensionais discretizadas do movimento	29
2.8	Sistema ideal (estrutura flexível + equações do motor)	30
2.9	Sistema não ideal (estrutura flexível + equações do motor)	31
3	Modelagem matemática de estruturas flexíveis de rastreamento : curvatura não linear	32
3.1	Introdução	32
3.2	Modelo geométrico	33
3.3	Equações dimensionais do movimento	35
3.4	Adimensionalização das equações do movimento	42
3.5	Equações adimensionais do movimento	43
3.6	Equações adimensionais discretizadas do movimento	46
3.7	Sistema ideal (estrutura flexível + equações do motor)	54
3.8	Sistema não ideal (estrutura flexível + equações do motor)	55
3.9	Variáveis espaço-temporais originais e componente longitudinal da deflexão	56
4	Problema não perturbado ($\epsilon = 0$) : simulações numéricas e solução analítica para amortecimento $O(1)$ – 1 modo	58
4.1	Introdução	58
4.2	Solução analítica para o sistema não ideal	59
4.2.1	A solução analítica para q_1	60
4.2.2	A solução analítica para θ	68
4.2.3	A solução analítica para i_a	72
4.3	Solução analítica para o sistema ideal	74
4.4	Solução numérica	75
4.5	Solução analítica X solução numérica : resultados	77
4.5.1	Caso 1	79
4.5.2	Caso 2	87
4.6	Solução analítica X solução numérica : comentários	89
5	Problema não perturbado ($\epsilon = 0$) : simulações numéricas e solução analítica para amortecimento $O(\epsilon^2)$ – 1 modo	92
5.1	Introdução	92
5.2	Solução analítica para o sistema não ideal	93

5.2.1	A solução analítica para q_1	94
5.2.2	A solução analítica para θ	94
5.2.3	A solução analítica para i_a	95
5.3	Solução analítica para o sistema ideal	95
5.4	Solução numérica : equações para $\mu(\epsilon^2)$ e $\epsilon=0$	96
5.5	Solução analítica X solução numérica : resultados	96
5.5.1	Caso 1	97
5.5.2	Caso 2	105
5.6	Solução analítica X solução numérica : comentários	107
6	Solução analítica : curvatura linear	108
6.1	Métodos de perturbação	108
6.1.1	O método das múltiplas escalas (mme)	109
6.1.2	A expansão direta (<i>straightforward expansion</i>)	110
6.2	Sistema ideal (1 modo)	110
6.2.1	Amortecimento de ordem ϵ^2	111
6.2.2	Solução através do MME para o sistema ideal com amortecimento de ordem ϵ^2	111
6.2.3	Amortecimento de ordem 1 (observações)	115
6.3	Sistema não ideal (1 modo)	116
6.3.1	Amortecimento de ordem ϵ^2	117
6.3.2	Solução através da expansão direta para o sistema não ideal com amortecimento de ordem ϵ^2	118
6.3.2.1	A solução analítica para q_{11}	123
6.3.2.2	A solução analítica para θ_1	126
6.3.2.3	A solução analítica para i_{a1}	128
6.4	Solução geral	131
7	Solução analítica : curvatura não linear	133
7.1	Sistema ideal (1 modo)	133
7.1.1	Amortecimento de ordem ϵ^2	134

7.1.2	Solução através do MME para o sistema ideal com amortecimento de ordem ϵ^2	134
7.1.3	Amortecimento de ordem 1 (observações)	139
7.2	Sistema não ideal (1 modo)	142
7.2.1	Amortecimento de ordem ϵ^2	143
7.2.2	Solução através da expansão direta para o sistema não ideal com amortecimento de ordem ϵ^2	144
8	Estudo comparativo : ideal / não ideal / curvatura linear / curvatura não linear	148
8.1	Introdução	148
8.2	Um modo	152
8.2.1	Sistema ideal X sistema não ideal	152
8.2.1.1	Curvatura linear	152
8.2.1.1.1	Caso 1	152
8.2.1.1.2	Caso 2	153
8.2.1.2	Curvatura não linear	154
8.2.1.2.1	Caso 1	154
8.2.1.2.2	Caso 2	155
8.2.2	Curvatura linear X curvatura não linear	156
8.2.2.1	Sistema ideal	156
8.2.2.1.1	Caso 1	156
8.2.2.1.2	Caso 2	157
8.2.2.2	Sistema não ideal	158
8.2.2.2.1	Caso 1	158
8.2.2.2.2	Caso 2	159
8.3	Dois modos	160
8.3.1	Sistema ideal X sistema não ideal	160
8.3.1.1	Curvatura linear	160
8.3.1.1.1	Caso 1	169
8.3.1.1.2	Caso 2	161
8.3.1.2	Curvatura não linear	163
8.3.1.2.1	Caso 1	163

8.3.1.2.2 Caso 2	164
8.3.2 Curvatura linear X curvatura não linear	166
8.3.2.1 Sistema ideal	166
8.3.2.1.1 Caso 1	166
8.3.2.1.2 Caso 2	167
8.3.2.2 Sistema não ideal	168
8.3.2.2.1 Caso 1	168
8.3.2.2.2 Caso 2	169
8.3.3 Um modo X dois modos	170
8.3.3.1 Curvatura linear	170
8.3.3.1.1 Caso 1 : ideal	170
8.3.3.1.2 Caso 1 : não ideal	171
8.3.3.1.3 Caso 2 : ideal	172
8.3.3.1.4 Caso 2 : não ideal	173
8.3.3.2 Curvatura não linear	174
8.3.3.2.1 Caso 1 : ideal	174
8.3.3.2.2 Caso 1 : não ideal	175
8.3.3.2.3 Caso 2 : ideal	176
8.3.3.2.4 Caso 2 : não ideal	177
8.4 Três modos (apenas curvatura linear)	178
8.4.1 Sistema ideal X sistema não ideal	178
8.4.1.1 Caso 1	178
8.4.1.2 Caso 2	180
8.4.2 Um modo X dois modos X três modos	182
8.4.2.1 Caso 1 : ideal	182
8.4.2.2 Caso 1 : não ideal	183
8.4.2.3 Caso 2 : ideal	184
8.4.2.4 Caso 2 : não ideal	185
8.5 Comportamento de $v(x,t)$ e $u(x,t)$	186
8.6 Influência do deslocamento longitudinal, $u(x,t)$, na posição final dos pontos sobre a viga	188

8.7 Sistema perturbado (curvatura linear e curvatura não linear) X sistema não perturbado	190
8.8 Conclusões	192
9 Identificação de um motor de corrente contínua	197
9.1 Modelo inicial	197
9.2 Modelo para operação em regime permanente	198
9.3 Montagem experimental para identificação de um motor de corrente contínua	198
9.4 Resultados experimentais	201
9.5 Obtenção dos parâmetros do motor	212
9.6 O novo modelo para o atrito interno do motor	216
9.7 O novo modelo matemático para o motor de corrente contínua	220
9.8 Resultados teóricos X resultados experimentais	220
9.9 O potenciômetro	238
9.10 Montagem experimental : fotos	240
10 Ensaio experimental de estruturas flexíveis de rastreamento	243
10.1 Considerações acerca da modelagem de estruturas flexíveis reais - modos assumidos e separação de variáveis	243
10.2 Resultados experimentais	246
10.2.1 Viga 1 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 0.2000 (m)	250
10.2.2 Viga 2 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 0.6000 (m)	254
10.2.3 Viga 3 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 0.9000 (m)	258
10.2.4 Viga 4 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 1.4000 (m)	264
10.2.5 Viga 5 (aço) : 0.0159 x 0.0008 x 0.8720 (m)	272
10.3 Comparações entre diferentes vigas	283
10.4 Vibração livre das vigas e condições de contorno	286
10.5 Fotos do experimento	294
11 Conclusões e trabalhos futuros	298
11.1 Conclusões	298
11.2 Trabalhos futuros	301

Referências Bibliográficas	304
Apêndices	311
A Modelagem matemática de um motor de corrente contínua (ideal / não ideal)	313
A.1 Equações governantes do movimento de um motor de corrente contínua	313
A.2 Acoplamento entre o atuador e a estrutura a ser movida	315
A.3 Equação da fonte de potência ideal	318
A.4 Equação da fonte de potência não ideal	319
A.5 Adimensionalização das equações da fonte de potência não ideal	319
B Projeto do suporte para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento	324

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Estruturas flexíveis de rastreamento : subsistemas	2
Figura 1.2 - Fonte de potência ideal e não ideal e comportamento ideal e não ideal (U representa a voltagem nos terminais do motor de corrente contínua)	4
Figura 1.3 - Esquema geral da parte teórica	7
Figura 1.4 - Esquema geral do tratamento dado para a solução das equações governantes do movimento	8
Figura 2.1 - Estrutura flexível de rastreamento (planar) – curvatura linear	15
Figura 2.2 - Os três primeiros modos de vibrar do sistema viga linear sem amortecimento e livre de esforços externos	28
Figura 3.1 - Componentes do vetor deslocamento de um elemento infinitesimal qualquer em A sobre o membro flexível após a deflexão	34
Figura 3.2 - Transformação do sistema de referência móvel para o sistema de referência inercial	35
Figura 3.3 - Modelo representativo da deformação do membro flexível	37

Figura 3.4 – Um segmento infinitesimal do eixo centroidal nas posições não defletida (A, B) e defletida (A', B') da estrutura	38
Figura 4.1 - Perfil de excitação : perfil 1 (linha vermelha) ; perfil 2 (linha azul) - (a) tempo total ; (b) zoom de (a)	78
Figura 4.2 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- ideal	79
Figura 4.3 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1 - ideal	79
Figura 4.4 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - ideal	80
Figura 4.5 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - ideal	80
Figura 4.6 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - ideal	81
Figura 4.7 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 2 - ideal	81
Figura 4.8 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- não ideal	82
Figura 4.9 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1 - não ideal	82
Figura 4.10 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 1 - não ideal	83

Figura 4.11 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - não ideal	83
Figura 4.12 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 1 - não ideal	84
Figura 4.13 -Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2- não ideal	84
Figura 4.14 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - não ideal	85
Figura 4.15 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 2 - não ideal	85
Figura 4.16 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 2 - não ideal	86
Figura 4.17 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 2 - não ideal	86
Figura 4.18 -Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- ideal	87
Figura 4.19 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - ideal	87
Figura 4.20 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- não ideal	88
Figura 4.21 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - não ideal	88

Figura 5.1 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- ideal	97
Figura 5.2 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso1 - perfil 1 - ideal	97
Figura 5.3 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - ideal	98
Figura 5.4 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - ideal	98
Figura 5.5 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso1 - perfil 2 - ideal	99
Figura 5.6 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 2 - ideal	99
Figura 5.7 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- não ideal	100
Figura 5.8 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso1 - perfil 1 - não ideal	100
Figura 5.9 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 1 - não ideal	101
Figura 5.10 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - não ideal	101

Figura 5.11- Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 1 - não ideal	102
Figura 5.12 -Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2- não ideal	102
Figura 5.13 -Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - não ideal	103
Figura 5.14 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 2 - não ideal	103
Figura 5.15 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 2 - não ideal	104
Figura 5.16 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 2 - não ideal	104
Figura 5.17- Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- ideal	105
Figura 5.18 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - ideal	105
Figura 5.19 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- não ideal	106
Figura 5.20 - Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - não ideal	106
Figura 8.1 - Perfis de excitação (tensão elétrica nos terminais do motor cc) : caso 1 (- O- O- O- O-) ; caso 2 (- * - * - * - * -)	149

Figura 8.2 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	152
Figura 8.3 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	152
Figura 8.4 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	153
Figura 8.5 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	153
Figura 8.6 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	154
Figura 8.7 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	154
Figura 8.8 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	155
Figura 8.9 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-)	155
Figura 8.10 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (—————) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)	156

- Figura 8.11 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 156
- Figura 8.12 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 157
- Figura 8.13 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 157
- Figura 8.14 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 158
- Figura 8.15 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 158
- Figura 8.16 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 159
- Figura 8.17 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 159
- Figura 8.18 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 160

- Figura 8.19 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 160
- Figura 8.20 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) ideal (a) X não ideal (b) 161
- Figura 8.21 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 161
- Figura 8.22 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 162
- Figura 8.23 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (a) X não ideal (b) 162
- Figura 8.24 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 163
- Figura 8.25 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 163
- Figura 8.26 - Amplitude da variável de deflexão associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (a) X não ideal (b) 164
- Figura 8.27 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 164

- Figura 8.28 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-) 165
- Figura 8.29 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (a) X não ideal (b) 165
- Figura 8.30 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 166
- Figura 8.31 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 166
- Figura 8.32 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 167
- Figura 8.33 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 167
- Figura 8.34 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos) curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 168
- Figura 8.35 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos) curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 168

- Figura 8.36 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos) curvatura linear (—————) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 169
- Figura 8.37 - Amplitude modal de deflexão associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos) curvatura linear (—————) X curvatura não linear (-O-O-O-O-) 169
- Figura 8.38 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 170
- Figura 8.39 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 170
- Figura 8.40 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 171
- Figura 8.41 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 171
- Figura 8.42 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 172
- Figura 8.43 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 172

- Figura 8.44 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 173
- Figura 8.45 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 173
- Figura 8.46 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 174
- Figura 8.47 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 174
- Figura 8.48 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 175
- Figura 8.49 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 175
- Figura 8.50 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 176
- Figura 8.51 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 176

- Figura 8.52 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 177
- Figura 8.53 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (—————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-)) 177
- Figura 8.54 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-) 178
- Figura 8.55 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-) 178
- Figura 8.56 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b) 179
- Figura 8.57 - Amplitude modal associada ao terceiro modo de vibrar, q_3 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b) 179
- Figura 8.58 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-) 180
- Figura 8.59 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (—————) X não ideal (-O-O-O-O-) 180
- Figura 8.60 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b) 181

Figura 8.61 - Amplitude modal associada ao terceiro modo de vibrar, q_3 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b) 181

Figura 8.62 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modos (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (- * - * - * - * -)) 182

Figura 8.63 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modos (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (- * - * - * - * -)) 182

Figura 8.64 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modos (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (- * - * - * - * -)) 183

Figura 8.65 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modos (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (- * - * - * - * -)) 183

Figura 8.66 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modos (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (- * - * - * - * -)) 184

Figura 8.67 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modos (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (- * - * - * - * -)) 184

Figura 8.68 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modos (————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*-*-*-*-))	185
Figura 8.69 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modos (————) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*-*-*-*-))	185
Figura 8.70 - Comportamento de $v(x,t)$	186
Figura 8.71 - Comportamento de $u(x,t)$: sistema não perturbado ; $U = 5V$	187
Figura 8.72 - Posicionamento final dos pontos sobre a viga em relação ao sistema de referência móvel : sistema não perturbado ; $U=1V$	188
Figura 8.73 - Posicionamento final dos pontos sobre a viga em relação ao sistema de referência móvel : sistema não perturbado ; $U=5V$	189
Figura 8.74 - (————) resposta do sistema não perturbado ; (-*-*-*-*-) resposta do sistema perturbado : curvatura linear ; (-o-o-o-o-) resposta do sistema perturbado : curvatura não linear ; $U=1V$	191
Figura 8.75 - (————) resposta do sistema não perturbado ; (-*-*-*-*-) resposta do sistema perturbado : curvatura linear ; (-o-o-o-o-) resposta do sistema perturbado : curvatura não linear ; $U=5V$	192

Figura 9.1 - Montagem experimental para a medição da corrente (i_a) através do motor (U_{total} = excitação ; U_{motor} = tensão elétrica através dos terminais do motor ; U_{med} = tensão elétrica através do resistor equivalente (medida) : $U_{med} = R_{eq} i_a$)	199
Figura 9.2 - Deslocamento angular para um dos casos estudados (identificação do motor cc). Devido ao espaçamento no resistor do potenciômetro, considera-se que cada um dos picos (final de uma volta pelo resistor circular) ocorra em 360° (ver item 9.9)	200
Figura 9.3 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : I	201
Figura 9.4 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : II	202
Figura 9.5 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : III	203
Figura 9.6 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : IV	204
Figura 9.7 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : V	205
Figura 9.8 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : VI	206
Figura 9.9 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : VII	207

Figura 9.10 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : VIII	208
Figura 9.11 - Curvas do amplificador (do sinal de excitação) : A - valores observados ; B - valores observados e valores interpolados (na faixa de interesse)	212
Figura 9.12 - Valores experimentais (curva vermelha) contra valores teóricos do modelo descrito pela equação 9.11 (curva preta)	217
Figura 9.13 - Valores experimentais (curva vermelha) contra valores teóricos do modelo descrito pela equação 9.12 (curva preta)	217
Figura 9.14 - Valores experimentais (curva vermelha) contra valores teóricos do modelo descrito pela equação 9.13 (curva preta)	219
Figura 9.15 - Curva de ganho do amplificador : valores iniciais (curva azul) X valores corrigidos (curva preta)	221
Figura 9.16 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : I	228
Figura 9.17 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : II	229
Figura 9.18 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : III	230
Figura 9.19 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : IV	231
Figura 9.20 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : V	232

Figura 9.21 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : VI	233
Figura 9.22 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : VII	234
Figura 9.23 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : VIII	235
Figura 9.24 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : IX	236
Figura 9.25 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : X	237
Figura 9.26 - Circuito elétrico representativo do potenciômetro utilizado na parte experimental deste trabalho	239
Figura 9.27 - Verificação da "zona morta" do potenciômetro	240
Figura 9.28 - O potenciômetro e o motor de corrente contínua	241
Figura 9.29 - "Zona morta" do potenciômetro (indicado no eixo de suporte da estrutura flexível de rastreamento como as duas marcas negras)	241
Figura 9.30 - O motor de corrente contínua	242
Figura 10.1 - Perfil de excitação : teórico (vermelho) e experimental (azul)	249
Figura 10.2 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga1)	250

Figura 10.3 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo- (viga1)	251
Figura 10.4 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga1)	252
Figura 10.5 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - (viga1)	253
Figura 10.6 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga2)	254
Figura 10.7 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo- (viga2)	255
Figura 10.8 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga2)	256
Figura 10.9 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - (viga2)	257
Figura 10.10 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga3 : I)	258
Figura 10.11 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga3 : II)	259

Figura 10.12 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo- (viga3)	260
Figura 10.13 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga3 : I)	261
Figura 10.14 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga3 : II)	262
Figura 10.15 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - (viga3)	263
Figura 10.16 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : I)	264
Figura 10.17 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : II)	265
Figura 10.18 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : III)	266
Figura 10.19 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo- (viga4)	267
Figura 10.20 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo- valores extremos (viga4)	267
Figura 10.21 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : I)	268

Figura 10.22 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : II)	269
Figura 10.23 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : III)	270
Figura 10.24 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - valores extremos (viga4)	271
Figura 10.25 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : I)	272
Figura 10.26 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : II)	273
Figura 10.27 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : III)	274
Figura 10.28 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : IV)	275
Figura 10.29 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : V)	276
Figura 10.30 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - (viga5)	277
Figura 10.31 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - valores extremos (viga5)	277

- Figura 10.32 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : I) 278
- Figura 10.33 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : II) 279
- Figura 10.34 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : III) 280
- Figura 10.35 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : IV) 281
- Figura 10.36 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : V) 282
- Figura 10.37 - Deflexão total medida através de um *strain gage* conectado à extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - valores extremos (viga5) 283
- Figura 10.38 - Influências sobre o parâmetro θ - comparação entre diferentes vigas e eixo de rastreamento sem viga conectada : (a) sem viga ; (b) viga 1 ; (c) viga 2 ; (d) viga 3 ; (e) viga 4 ; (f) viga 5 - (azul : alumínio ; magenta : aço ; $U_{\max} \cong 2.30 \text{ V}$) 285
- Figura 10.39 - Influências sobre o parâmetro θ - comparação entre diferentes vigas e eixo de rastreamento sem viga conectada : (a) sem viga ; (b) viga 1 ; (c) viga 2 ; (d) viga 3 ; (e) viga 4 ; (f) viga 5 - (azul : alumínio ; magenta : aço ; $U_{\max} \cong 3.00 \text{ V}$) 285

- Figura 10.40 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 1 - vermelho :
 associado à figura 10.3 (a) ; azul : associado à figura 10.3 (b) ; preto:
 associado à figura 10.3 (c) 288
- Figura 10.41 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 2 - vermelho :
 associado à figura 10.7 (a) ; azul : associado à figura 10.7 (b) ; preto:
 associado à figura 10.7 (c) 288
- Figura 10.42 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 3 - vermelho :
 associado à figura 10.12 (a) ; azul : associado à figura 10.12 (b) ; preto:
 associado à figura 10.12 (c) ; magenta : associado à figura 10.13 (d) 289
- Figura 10.43 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 4 - vermelho :
 associado à figura 10.20 (a) ; azul : associado à figura 10.20 (b) ; preto:
 associado à figura 10.20 (c) ; magenta : associado à figura 10.21 (d) ;
 vermelho (...) : associado à figura 10.21 (e) ; azul (...) : associado à
 figura 10.21 (f) ; magenta (...) : associado à figura 10.22 (g) 289
- Figura 10.44 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 5 (I) - vermelho :
 associado à figura 10.31 (a) ; azul : associado à figura 10.31 (b) ; preto:
 associado à figura 10.31 (c) ; magenta : associado à figura 10.32 (d) ;
 azul claro : associado à figura 10.32 (e) ; vermelho (...) : associado à
 figura 10.32 (f) ; azul (...) : associado à figura 10.33 (g) ; preto (...) :
 associado à figura 10.33 (h) 290
- Figura 10.45 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 5 (II) - vermelho :
 associado à figura 10.33 (i) ; azul : associado à figura 10.34 (j) ; preto:
 associado à figura 10.34 (k) ; magenta : associado à figura 10.34 (l) ;
 vermelho (...) : associado à figura 10.35 (m) ; azul (...) : associado à
 figura 10.35 (n) ; preto (...) : associado à figura 10.35 (o) 290

- Figura 10.46 - Vista geral dos PCs utilizados no envio e captura de sinais bem como as respectivas placas utilizadas para este fim. 295
- Figura 10.47 - Placa utilizada para o envio de sinais (perfis de tensão elétrica, U) para o motor de corrente contínua (responsável pela geração do movimento de rastreamento). Esta placa está associada ao software *Dspace*, o qual utiliza as facilidades do *Simulink* para a geração de diagramas de blocos cujos terminais são conectados diretamente aos pinos externos mostrados na figura. 295
- Figura 10.48 - Placa utilizada para a captura de sinais (enviados pelo acelerômetro, pelo potenciômetro e pelo *strain gage*). Esta placa está associada ao software *LabView*, o qual gera arquivos de dados que podem ser facilmente lidos através do *Matlab*. 296
- Figura 10.49 - O suporte para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento e uma das vigas de alumínio (1.4 m de comprimento) utilizadas na verificação experimental. 296
- Figura 10.50 - Alocação dos acelerômetros na extremidade livre das vigas. Estes sensores utilizados são extremamente pequenos e leves, razão pela qual sua massa não foi incluída no equacionamento. Para o caso da viga mais flexível (aço) foi utilizado um *strain gage* próximo a raiz. 297
- Figura 10.51 - Visão geral do *set-up* experimental (incluindo o amplificador para a placa do *Dspace*, osciloscópio para verificação dos sinais enviados e fonte de potência para o potenciômetro). 297
- Figura A.1 - Acoplamento motor-estrutura flexível de rastreamento 316
- Figura B.1 - Protótipo experimental (projeto): conjunto completo 325
- Figura B.2 - Protótipo experimental (suporte + motor + viga) nas instalações do Laboratório de Vibrações Não Lineares da *Virginia Tech* 332

Figura B.3 - Visão geral do <i>set-up</i> experimental	332
Figura B.4 - Diferentes vigas utilizadas como estruturas de rastreamento com diferentes graus de flexibilidade	333
Figura B.5 - Protótipo experimental	333

Lista de Tabelas

Tabela 9.1 - Valores experimentais medidos	209
Tabela 9.2 - Valores experimentais <i>calculados</i>	210
Tabela 9.3 - Ganhos do amplificador	211
Tabela 9.4 - Erro (mínimos quadrados) em cada modelo teórico apresentado para a relação entre a corrente elétrica e a velocidade angular do motor	219
Tabela 9.5 - Ganhos corrigidos (amplificador)	221
Tabela 9.6 - Parâmetros identificados do motor de corrente contínua	222
Tabela 9.7 - Deslocamento angular do sistema <i>motor de corrente contínua</i> : valores experimentais contra valores teóricos	223
Tabela 9.8 - Velocidade angular do sistema <i>motor de corrente contínua</i> : valores experimentais contra valores teóricos	224
Tabela 9.9 - Corrente elétrica do sistema <i>motor de corrente contínua</i> : valores experimentais contra valores teóricos	225
Tabela 9.10 - Valores do ganho do amplificador corrigidos divididos por tempo de excitação (ne = não existe esta informação nos dados recolhidos)	226

Tabela 9.11 - Valores do ganho do amplificador corrigidos divididos por numero de traços (ne = não existe esta informação nos dados recolhidos)	227
Tabela 10.1 - Inércias envolvidas (vigas, motor e eixo)	245
Tabela 10.2 - Propriedades das vigas experimentais	247
Tabela 10.3 - Freqüências da vibração livre das vigas experimentais a partir do instante em que a tensão elétrica no motor, U, torna-se nula contra as freqüências teóricas para a viga engastada-livre (primeiro modo)	286/287
Tabela 10.4 - Freqüência natural teórica do primeiro e segundo modos para a condição de contorno pinada-livre e freqüência natural teórica do segundo modo para a condição de contorno engastada-livre	291

Nomenclatura

Letras Latinas

XY - sistema de referência inercial

xy - sistema de referência móvel

\bar{R} ou \bar{r}_{XY} - vetor posição relativo ao sistema de referência móvel XY [m]

\bar{r} - vetor posição relativo ao sistema de referência móvel xy [m]

\bar{i}, \bar{j} - versores do sistema de referência inercial XY

\bar{i}_x, \bar{j}_y - versores do sistema de referência inercial xy

v - variável de deflexão transversal [m]

u - variável de deflexão longitudinal [m]

L - Lagrangiano [N]

W - trabalho virtual [N]

E - Módulo de Young (ou módulo de elasticidade transversal) [Kg / m s²]

I - momento de inércia da secção transversal da viga [m⁴]

L - comprimento característico [m]

T - tempo característico ; período da vibração transversal do primeiro modo de uma viga engastada-livre linear, não amortecida e livre de esforços externos [s]

w - frequência natural da vibração transversal dos modos de uma viga engastada-livre linear, não amortecida e livre de esforços externos [1/s]

r - raio de giração da secção transversal da viga [m]

q - variável associada à variação temporal da variável v [m]

n - número de modos

a_L - autovalores (adimensionais) do sistema viga engastada-livre linear, não amortecida e livre de esforços externos	
N - força interna axial (atuando na viga)	[N]
A - área da secção reta transversal da viga	[m ²]
N_g - relação de transmissão	
U - tensão de armadura (tensão aplicada aos terminais do motor)	[V]
R_a - resistência da armadura	[Ω]
i_a - corrente de armadura	[A]
L_m - indutância do motor	[H]
K_b - constante de força contra-eletromotriz (do motor cc)	[Vs/rad]
K_t - constante de torque (do motor cc)	[Nm/A]
C_m - atrito interno do motor cc	[Nms / rad]
M - momento de reação da viga sobre o eixo de rastreamento	[Nm]
i_c - corrente elétrica característica	[A]
v_c - tensão elétrica característica	[V]

Letras Gregas

θ - deslocamento angular do eixo de rastreamento	[rad] ou [graus]
ρ - densidade por unidade de comprimento	[Kg / m]
δ - variacional	
ϵ - pequeno parâmetro de perturbação ($\ll 1$)	
ϕ - modos próprios da viga engastada-livre linear, não amortecida e livre de esforços externos ; variação espacial da variável v	[m]
ϵ - deformação (variação no comprimento / comprimento original)	
r_c - raio de curvatura	[m]
μ - amortecimento estrutural	[Kg/ms]
ℓ - número do modo ($\ell = 1 \dots n$)	
τ_m - torque total em relação ao eixo do motor	[Nm]

Superescritos

* - quantidade adimensional

Subscritos

i - cada um dos modos próprios do sistema viga engastada-livre linear, não amortecida e livre de esforços externos

m ou *motor* - relativo ao motor cc

a - relativo à armadura (do motor cc)

Abreviações

EC - energia cinética

[N]

ED - energia de deformação

[N]

FFT - Fast Fourier Transform

Capítulo 1

Introdução

1.1 - Aspectos gerais

Velocidades de operação cada vez maiores associadas a estruturas cada vez mais leves alertam ao fato de não ser plenamente satisfatório tratar alguns componentes desses sistemas como rígidos. Para sistemas mecânicos nessas condições, sabe-se que alguma deflexão é inevitável. Operar sistemas desse tipo torna-se um desafio quando desempenho e alta precisão são necessários.

O efeito da flexibilidade no comportamento dinâmico de sistemas mecânicos tem sido o objeto de numerosas investigações. Entre esses estudos, a dinâmica de uma viga ligada a um corpo móvel (em rotação) merece alguma atenção especial (Yigit et al., 1988), pois pode representar uma variedade de problemas tecnológicos tais como rotores de helicóptero (Stafford et al., 1975), pás de turbina (Rao et al., 1970), um satélite com painéis flexíveis (Likins, 1972), etc.

O movimento de rastreamento pode ser compreendido como um movimento similar àquele realizado por uma porta quando gira em torno de suas dobradiças. Trata-se de um movimento em torno de um eixo perpendicular ao plano no qual este movimento se realiza. Um modelo típico para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento assemelha-se àquele apresentado na figura 1.1. O trabalho desenvolvido aqui irá envolver somente o estudo de estruturas flexíveis de apenas

um membro, conforme representado nessa mesma figura. A transmissão mecânica não será considerada neste trabalho.

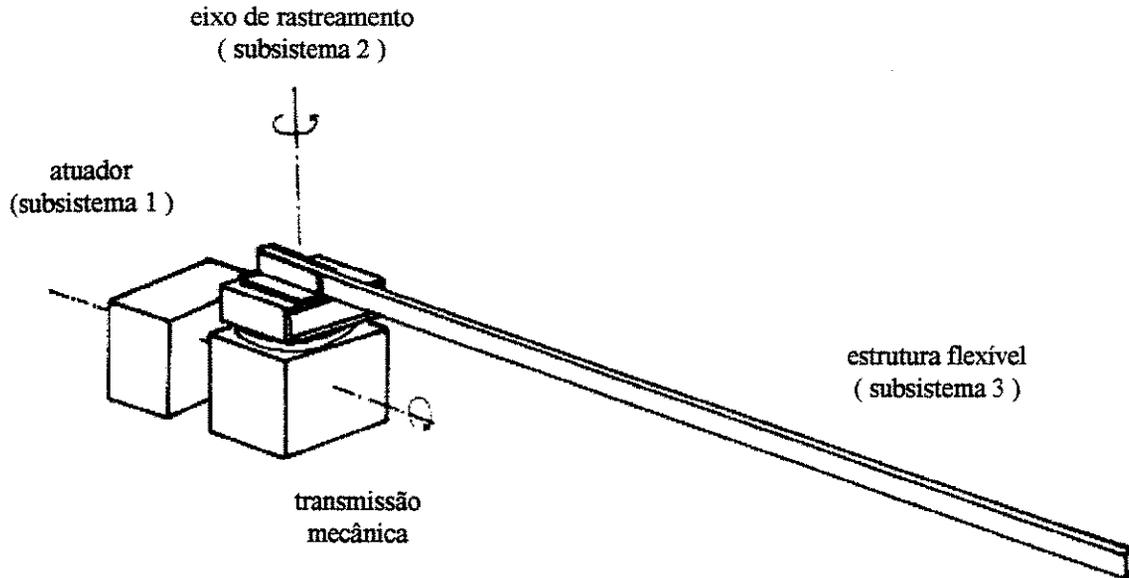


Figura 1.1 - Estruturas flexíveis de rastreamento : subsistemas

De uma forma geral, a modelagem de estruturas flexíveis de rastreamento compreende a modelagem de três subsistemas : atuador, estrutura flexível e interação atuador-estrutura flexível. A Figura 1.1 ilustra esses subsistemas. Um possível quarto subsistema a ser analisado poderá ser a transmissão mecânica, não incluída aqui.

Quando se estuda a modelagem de sistemas dinâmicos do tipo estruturas flexíveis de rastreamento, o atuador (subsistema 1) geralmente utilizado é o motor de corrente contínua. Na interação atuador-estrutura (subsistema 2), o modelo comumente encontrado na literatura diz respeito aos sistemas ideais (vide comentários sobre esta distinção no item 1.1.3). O subsistema 3 é geralmente representado por uma viga do tipo Euler-Bernulli (Sinha, 1998; Khorrami, 1992 e Sah,1990 são apenas uns poucos exemplos). Um modelo incluindo o sistema de controle irá adicionar mais um subsistema ao esquema apresentado na Figura 1.1. Este estará associado aos sensores e não será objeto de estudo deste trabalho.

1.1.1 - Subsistema 1 : motor dc

O atuador geralmente utilizado nas aplicações descritas neste trabalho (e principalmente em aplicações ligadas a robótica) é o motor de corrente contínua. A razão principal advém da facilidade com que se pode controlar sua velocidade. Uma maior ou menor velocidade de rotação do eixo do motor pode ser conseguida simplesmente variando-se a tensão elétrica em seus terminais.

O modelo básico de um motor de corrente contínua, aqui considerado como um sistema ideal (ver item 1.1.3, a seguir), pode ser facilmente encontrado na literatura ([Electro-Craft Corp., 1973], por exemplo, para um bom livro texto sobre o assunto). O modelo para o mesmo tipo de motor agora como fonte de potência limitada (não ideal, ver 1.1.3) pode ser encontrado com aplicações em sistemas dinâmicos em [Kononenko,1969].

1.1.2 - Subsistema 2 : sistema ideal e sistema não ideal

Considerando a interação entre a fonte de potência (excitação) e o sistema sobre o qual está atuando, um sistema dinâmico pode ser classificado como ideal ou não ideal. Os sistemas ideais são os comumente encontrados na literatura.

Os sistemas dinâmicos classificados como ideais são aqueles cuja excitação é previamente conhecida e, portanto, pode ser de alguma forma prescrita. Nestes casos, o atuador influencia a dinâmica da estrutura sobre a qual esta atuando mas a dinâmica dessa estrutura não influencia a dinâmica do atuador. Para esses sistemas, a excitação é geralmente uma função do tempo.

Nos casos aonde a dinâmica da estrutura influencia a fonte da excitação que influencia a dinâmica da estrutura e assim por diante, o perfil da excitação não pode ser conhecido *a priori*. Os sistemas dinâmicos aonde isso ocorre são classificados como não ideais. Para os sistemas não ideais, as equações do atuador (excitação) devem ser integradas juntamente com as equações governantes do movimento da estrutura a fim de que o comportamento do sistema possa ser avaliado. A excitação não é apenas uma função do tempo mas também das variáveis da estrutura.

Com relação ainda aos conceitos de ideal e não ideal aqui empregados, este trabalho divide-se em duas categorias, conforme apresentado na Figura 1.2.

As expressões *comportamento ideal* e *comportamento não ideal* fazem analogia ao fato de a viga não estar interagindo ou estar interagindo com o eixo de rastreamento, respectivamente, nos instantes após o motor (fonte de potência) ser desligado. O movimento do eixo de rastreamento é o responsável direto pela excitação sobre a estrutura (deslocamento angular, θ) quando o motor está ligado. O responsável indireto é a voltagem nos terminais do motor (U).

Quando $U = 0$, ou seja, não há uma fonte de potência alimentando o movimento do eixo de rastreamento, surge a proposta diferenciação de nomenclatura. O eixo de rastreamento e a estrutura podem continuar ou não interagindo e retroalimentando-se até o movimento de ambos extinguir-se por completo. O estudo desenvolvido nos Capítulos 4, 5, 6 e 7 representa um primeiro passo para o estudo mais geral apresentado nos Capítulos 2, 3 e 8 e Apêndice A.

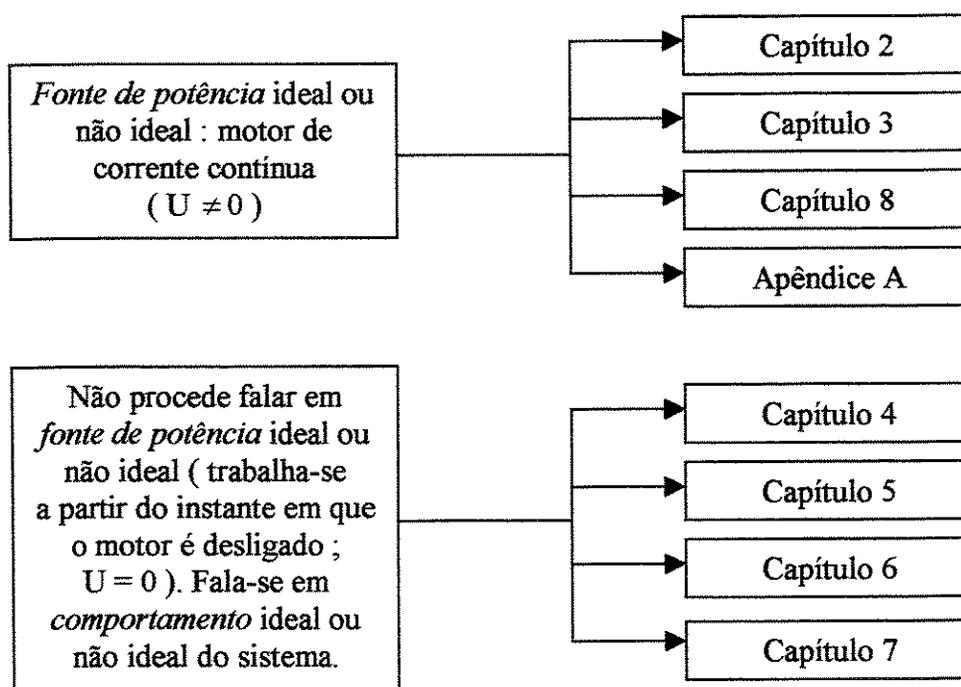


Figura 1.2 - Fonte de potência ideal e não ideal e comportamento ideal e não ideal (U representa a voltagem nos terminais do motor de corrente contínua)

1.1.3 - Subsistema 3 : curvatura linear e curvatura não linear

Modelos diferentes para a curvatura da estrutura flexível (tipo viga) podem ser propostos. Cada modelo terá a sua limitação. O modelo comumente encontrado na literatura é aquele que considera a curvatura linear. Esse modelo tem se mostrado suficientemente bom dentro das aplicações a que foi proposto.

Um modelo mais complexo, que leva em consideração grandes deslocamentos dos pontos sobre a estrutura, como é o caso do modelo de curvatura não linear proposto neste trabalho, encontra suas dificuldades, por exemplo, na parte de manipulação das equações governantes do movimento e na limitação do número de modos que seria viável em uma análise mais acurada.

Para o caso não linear, o número de modos na discretização do sistema contínuo aumenta consideravelmente a complexidade do sistema de equações diferenciais ordinárias obtido.

Algumas questões importantes que podem ser levantadas neste ponto são : (1) quantos modos serão suficientes para uma boa representação do sistema sob determinadas condições e (2) em que situações um modelo é preferível a outro, mais simples ou mais completo.

1.2 - Algumas aplicações

Devido a desenvolvimentos recentes associados ao programa espacial, estruturas flexíveis têm se tornado o foco de numerosas pesquisas.

Baixo amortecimento, baixas frequências naturais e extremamente leves são algumas das características comuns a esses sistemas e também o que os fazem vulneráveis a qualquer distúrbio externo ou interno tais como manobras de rastreamento, impactos, etc.

A necessidade de identificar o acoplamento entre os movimentos de corpo rígido e o comportamento flexível envolvidos no problema tem sido fortemente estudado. As implicações de tal acoplamento e de sua modelagem (ver item 1.3, a seguir) são vitais para uma aplicação significativa e para o desenvolvimento de técnicas de controle ([Barbieri,1988]).

O estudo e metodologia desenvolvidos nesta tese encontram inúmeras aplicações (imediatas ou não), dentre as quais pode-se citar: painéis solares em satélites, pás de helicóptero, palhetas em turbinas, manipuladores robóticos e estruturas aeroespaciais. Matematicamente, o modelo pode apresentar uma completa variedade de características não lineares dependendo dos requerimentos da aplicação em particular ([Barbieri,1988]).

1.3 - Esquema geral da tese : parte teórica

A idéia básica envolvendo a parte teórica deste trabalho é apresentada nas Figuras 1.3 e 1.4.

A Figura 1.3 apresenta, de maneira geral, a metodologia utilizada neste trabalho que se inicia com a proposição de dois diferentes modelos para a curvatura da estrutura flexível de rastreamento. Para cada um desses modelos, duas considerações são feitas com relação à interação atuador-estrutura flexível : o sistema se comporta de maneira ideal ou o sistema se comporta de maneira não ideal. Ambos os casos são aqui verificados. Tem-se, então, quatro modelos diferentes para estruturas flexíveis de rastreamento. Para estes modelos, são obtidas as equações governantes do movimento na forma adimensional e perturbada ([Nayfeh,1973], [Nayfeh,1981], [Kevorkian,1981]).

Com as equações governantes do movimento em mãos, busca-se resolvê-las numericamente e, se possível, analiticamente.

A solução analítica do problema não perturbado é obtida e analisada. Nesta análise, o amortecimento estrutural da estrutura flexível (tipo viga) é considerado com diferentes ordens de importância (da ordem dos termos lineares e da ordem das perturbações). Passa-se, então, a resolver o problema completo ou perturbado (equações com todas as não-linearidades consideradas). A solução numérica é obtida utilizando-se um integrador do tipo previsor-corretor.

A Figura 1.4 apresenta um dos grandes desafios encontrados na modelagem de estruturas flexíveis. Essas estruturas são sistemas de parâmetros distribuídos (ou, simplesmente, sistemas

contínuos) e, portanto, são representadas por equações diferenciais parciais e apresentam "infinitos" graus de liberdade. Tais modelos são utilizados em simulações de algum tipo e em malhas de controle.

A maneira mais complexa de lidar com essas equações consiste em resolver o problema espaço-temporal diretamente aplicando alguma técnica de solução da teoria de equações diferenciais parciais. A mais conhecida dessas técnicas de solução é a separação de variáveis.

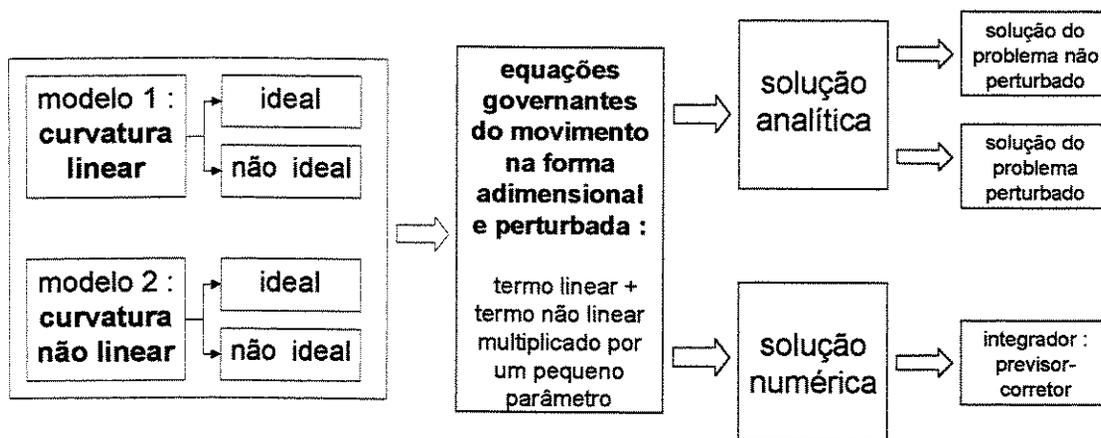


Figura 1.3 - Esquema geral da parte teórica

O método de resolver equações diferenciais parciais através da técnica de separação de variáveis é geralmente aplicado quando a equação diferencial parcial (ou o sistema de equações diferenciais parciais) é suficientemente simples (geralmente linear, não amortecido e não acoplado). A solução final será representada pelo produto da solução no espaço pela solução no tempo.

Neste sentido, o método mais difundido e utilizado é o método dos modos assumidos, o qual evita de se resolver a parte espacial do problema. A solução espacial é proposta como sendo os modos de vibrar da estrutura e o problema a ser resolvido passa a ser apenas temporal. Esse método é comumente empregado devido à sua facilidade de aplicação. Geralmente, nos

problemas aonde esse método é empregado, a expansão modal ignora os modos de alta frequência (Khorrami, 1992).

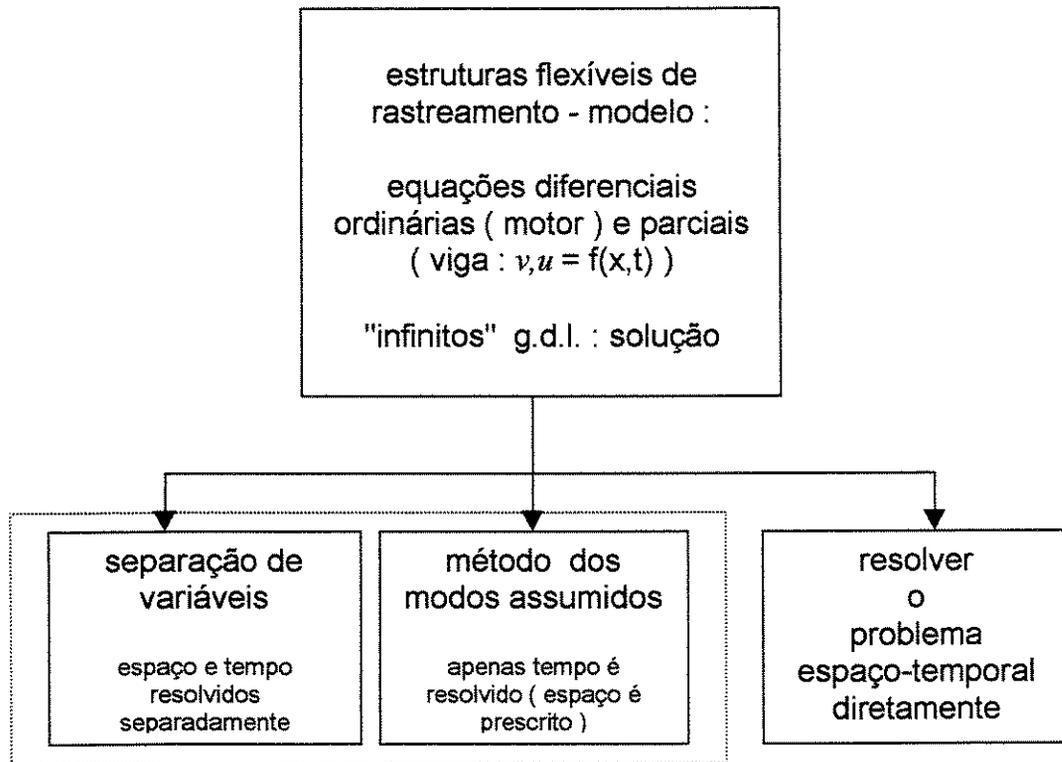


Figura 1.4 - Esquema geral do tratamento dado para a solução das equações governantes do movimento.

Na técnica de separação de variáveis, a solução espacial encontrada para cada modo (resolvendo o problema espacial) não necessariamente será representada por formas semelhantes aos modos de vibrar assumidos do sistema. Por exemplo, caso haja acoplamento entre o deslocamento longitudinal e o deslocamento transversal de cada ponto sobre a estrutura flexível (no caso de grandes curvaturas), a forma dos modos deverá se desviar daquela considerada nos casos aonde apenas o deslocamento transversal ocorra (Hsu, 1992). A semelhança entre as diferentes abordagens deverá ocorrer apenas em alguns casos específicos (sistema linear, não amortecido e livre de esforços externos).

A escolha do melhor função de forma (modo assumido) também é assunto de constantes pesquisas. Alguns autores (Barbieri, 1988) consideram basicamente duas famílias desses modos naturais : os modos de vibração restritos (*constrained*) e os modos de vibração não restritos (*unconstrained*). Os últimos levam em consideração as propriedades de inércia das partes envolvidas (rígida (atuador e transmissão mecânica, basicamente) e flexível (viga)) enquanto os primeiros são simplesmente os modos naturais da viga sem qualquer influência do sub-sistema ao qual está conectada. Outros autores usam os termos engastada-livre e pinada-livre para definir condições no engaste da viga e auxiliar na escolha das melhores formas para os modos (assumidos ; Garcia, 1989 e Garcia, 1990, por exemplo).

Para sistema mais complexos, mais acuradas e dedicadas deverão ser as funções de forma assumidas. Por exemplo, para estruturas flexíveis de rastreamento (tipo viga) com massa atracada à extremidade livre, as autofunções podem ser como aquelas encontradas, por exemplo, em (Kojima, 1986).

Construindo um modelo de dimensão finita para esses sistemas, tanto utilizando um método quanto o outro, surge uma nova questão : quantos modos serão necessários para representar o comportamento do sistema dentro das condições estudadas ?

E esta é uma questão crucial para este tipo de modelagem.

Por exemplo, sob o efeito da velocidade de rastreamento, a estrutura flexível (tipo viga) aumenta sua rigidez estrutural devido a tensões adicionais provocadas por forças centrípetas (Hoa, 1979; Putter, 1978) ou devido à influência do acoplamento cinemático entre deslocamentos longitudinais e transversais advindos da consideração de termos de ordem superior na definição da curvatura da viga (curvatura não linear) (Hsu, 1992). Esse efeito é verificado nas simulações numéricas realizadas aqui e verifica-se que a velocidade de rastreamento aparece multiplicando termos não lineares nos modelos. Para o modelo de curvatura linear o número de modos não se mostra importante (para as condições estudadas foi considerado até 3 modos !). As equações modais não aparecem acopladas entre si (no tempo) nesse modelo. Para o modelo de curvatura não linear (aonde as equações para os modos aparecem completamente acopladas (no tempo)) o número de modos a considerar mostrou-se

relevante. No entanto, o aumento no número de modos considerado provoca um aumento na complexidade das equações governantes do movimento. No caso não linear esse acréscimo de complexidade torna a análise proibitiva.

As equações do motor de corrente contínua, que serão acrescentadas às equações discretizadas da estrutura flexível a fim de completar o modelo do sistema sob análise, são equações diferenciais ordinárias. Uma dessas equações é de segunda ordem (equação mecânica do motor) e a outra de primeira ordem (equação elétrica do motor), conforme pode ser conferido no Apêndice A.

Um tratamento das equações diferenciais parciais utilizando técnicas de perturbação pode ser conferido em [Kevorkian,1981].

1.4 - Esquema geral da tese : parte experimental

Na parte experimental deste trabalho dois tipos de verificação serão feitas : identificação de um motor de corrente contínua e estudo do comportamento de diferentes vigas em movimento de rastreamento.

Os parâmetros do motor de corrente contínua a serem identificados experimentalmente são : R_a (resistência de armadura), K_b (constante de força contra-eletromotriz), K_t (constante de torque) e C_m (atrito interno do motor). Essa identificação irá gerar um novo modelo para o atrito interno no motor e, por conseguinte, um novo sistema de equações governantes do movimento para o motor de corrente contínua.

O estudo das diferentes vigas em diferentes velocidades de rastreamento auxilia, por exemplo, na determinação do melhor modelo matemático para o engaste da estrutura com o eixo do motor e a verificação da quantidade de modos da viga que participam da vibração da estrutura sob determinadas condições.

1.5 - Conteúdo da tese

Segue uma descrição do conteúdo desta tese capítulo a capítulo.

Os capítulos 2, 3 representam a espinha dorsal da parte teórica deste trabalho. O Capítulo 2 apresenta a modelagem matemática de estruturas flexíveis de rastreamento sob a hipótese de curvatura linear. O Capítulo 3 apresenta uma modelagem matemática diferente para o mesmo sistema dinâmico apresentado no capítulo anterior : a hipótese de curvatura não linear do membro flexível, ou seja, não-linearidades geométricas serão incluídas no modelo, tornando a estrutura apta a grandes curvaturas. No trabalho desenvolvido aqui, além dos dois modelos para a curvatura da estrutura flexível, que serão colocados um contra o outro, aborda-se também dois modelos para a interação dessa estrutura (tipo viga) com o atuador responsável pelo movimento de rastreamento do sistema (motor de corrente contínua). Trabalha-se, então, também com as hipóteses de sistema ideal e de sistema não ideal (de acordo com (Kononenko, 1969), embora a abordagem dada a esses sistemas aqui seja ligeiramente diferente daquela apresentada no citado livro).

Nos capítulos 4 e 5, a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (atuador + estrutura) linear associado aos modelos adotados nos Capítulos 2 e 3 é apresentada. Esse sistema linear é o mesmo para ambos os modelos de curvatura, pois, tanto em um caso quanto em outro, as não-linearidades são tratadas como perturbações em torno deste sistema, cuja solução deve ser conhecida. No Capítulo 4 o amortecimento estrutural da estrutura flexível de rastreamento é considerado de ordem 1 enquanto que no Capítulo 5 esse mesmo parâmetro é considerado da ordem das não-linearidades existentes no modelo (ou seja, da mesma ordem da perturbação). A solução obtida aqui mostrou-se simples o suficiente, permitindo que a análise pudesse ser prosseguida utilizando-se uma técnica de perturbação (método dos modos assumidos e expansão direta) com o objetivo de se encontrar as soluções dos sistema não lineares associados à curvatura linear e à curvatura não linear. No caso do modelo de curvatura linear, o acoplamento da dinâmica da viga com a dinâmica do atuador (no caso não ideal) torna o sistema não linear.

Os Capítulos 6 e 7 tratam da solução analítica via métodos de perturbação das equações governantes do movimento para o sistema estrutura flexível de rastreamento apresentadas nos Capítulos 2 e 3. O Capítulo 6 mostra o desenvolvimento da solução para o modelo matemático considerando curvatura linear (ideal e não ideal) ; o Capítulo 7 apresenta a solução para o modelo matemático considerando curvatura não linear (ideal e não ideal). Nestes capítulos, a

solução para o caso não ideal (mais complexa que para o caso ideal) encontra-se devidamente estruturada e algum trabalho nesse sentido é deixado para pesquisa futura.

Em (Anderson et al., 1996 ; Hanagud et al., 1985 ; Holmes, 1995 ; Nayfeh, 1973 ; Nayfeh et al., 1979 ; Nayfeh, 1981 ; Nayfeh, 1993.), por exemplo, métodos de perturbação são utilizados em toda a sua potencialidade para determinar as ressonâncias presentes em um sistema dinâmico sob determinadas condições de excitação e estudar o comportamento desse sistema dinâmico nas vizinhanças dessas ressonâncias. Este mesmo método também pode ser utilizado para a resolução de equações diferenciais não lineares (perturbadas ou fracamente não lineares), de acordo com (Nayfeh, 1973 ; Nayfeh et al., 1979 ; Nayfeh, 1981 ; Nayfeh, 1993.), por exemplo. Nos Capítulos 4, 5, 6 e 7 métodos de perturbação são utilizados para a obtenção de uma solução aproximada das equações governantes do movimento. O estudo de ressonâncias não faz sentido neste trabalho de acordo com a maneira como o problema é tratado aqui.

O Capítulo 8 apresenta exaustivas simulações numéricas comparando os modelos propostos neste trabalho : curvatura linear ideal, curvatura linear não ideal, curvatura não linear ideal, curvatura não linear não ideal. O integrador utilizado é o previsor-corretor. Os resultados apresentados aqui foram de grande valia (no sentido de sensibilidade acerca do comportamento dinâmico do sistema sob as condições estudadas) para o desenvolvimento das soluções analíticas apresentada nos Capítulos 6 e 7.

Os capítulos 9 e 10 correspondem à parte experimental desta investigação e apresentam os resultados de um trabalho desenvolvido por um período de cerca de sete meses no *Nonlinear Vibrations Laboratory* do *Engineering Science and Mechanics Department* da *Virginia Polytechnic Institute and State University* (Blacksburg, VA) sob a orientação do Prof. Dr. Dean T. Mook, cujo interesse e disposição para com esta pesquisa se mostrou sem limites e foi extremamente bem vinda.

O objetivo da parte experimental deste trabalho, tendo-se em vista o tempo disponível para realizá-la e todos os imprevistos, consistiu em obter-se dados acerca da deflexão de estruturas tipo viga sobre determinadas condições de velocidade e geometria do membro flexível e a observação da interação motor-estrutura relacionada ao deslocamento angular do eixo de

rastreamento.

O Capítulo 9 trata da identificação dos parâmetros do motor de corrente contínua utilizado no protótipo construído no citado laboratório. Dessa identificação, um novo modelo para o atrito interno do motor de corrente contínua é desenvolvido, fazendo com que as equações para a fonte de potência apresentadas no Apêndice A fossem ligeiramente alteradas (não-linearidades de ordem 2 são introduzidas nesse modelo). Este novo modelo para o motor não será utilizado na parte teórica deste trabalho, sendo esta abordagem também deixada para trabalhos futuros.

O Capítulo 10 apresenta os resultados obtidos quando diferentes vigas foram testadas no suporte desenvolvido para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento.

O Capítulo 11 apresenta as conclusões obtidas por meio do trabalho desenvolvido e apresenta algumas questões para futuras investigações.

Seguem, então, as Referências Bibliográficas e os Apêndices A e B.

O Apêndice A apresenta a modelagem matemática de um motor de corrente contínua e, ao contrário da maioria dos trabalhos na área e até mesmo em livros-texto (como por exemplo : Nobrega, 1994 ; Sah, 1990 ; Harwood, 1948 ; Leonhard, 1990 ; Gottlieb, 1994), a indutância do motor, assim como a variação da corrente de armadura não são quantidades ignoradas (ou negligenciáveis) e uma equação diferencial de primeira ordem para a corrente de armadura é incluída no sistema de equações diferenciais governantes do movimento para o sistema completo (atuador+estrutura), conforme apresentado ao longo deste trabalho. Da maneira apresentada aqui, obtém-se um sistema de equações diferenciais muito mais representativo do sistema real. Estas considerações são feitas principalmente devido ao fato de, para o caso não ideal, o comportamento do atuador (motor dc) ser desconhecido, uma vez que a sua dinâmica interage com a da estrutura sobre a qual atua (excita).

O Apêndice B apresenta o projeto do suporte para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento desenvolvido e construído na *Virginia Polytechnic Institute and State University* e algumas fotos da montagem experimental.

Capítulo 2

Modelagem matemática de estruturas flexíveis de rastreamento : curvatura linear

2.1 - Introdução

A abordagem utilizada neste trabalho para a obtenção das equações governantes do movimento consiste na aplicação do princípio conhecido como Princípio Estendido de Hamilton (Hagedorn, 1984 ; Crandall et al, 1968 ; Garcia, 1989 ; Rossi, 1996 ; Meirovitch, 1967, por exemplo). Esta formulação trabalha com a energia acumulada e/ou dissipada em um sistema dinâmico durante a sua evolução no tempo e é invariante com respeito ao sistema de coordenadas utilizado.

Adota-se neste trabalho o modelo de viga de Euler-Bernoulli (Popov, 1978).

O modelo de viga de Euler-Bernoulli leva em consideração apenas a inércia transversal e a elasticidade no sentido de deflexão para o contínuo. Neste modelo de viga, negligenciam-se os esforços de cisalhamento (as vigas são suficientemente longas e finas) e a inércia de rotação da secção transversal (as secções planas permanecem planas após deflexão) (Leckar, 1999 ; Craig, 1981; Popov, 1978, por exemplo).

2.2 - Modelo geométrico

Seja uma estrutura flexível de rastreamento apresentando ligeira curvatura (ou seja, apenas o suficiente para provocar deslocamentos transversais nos pontos ao longo da estrutura) e conduzida por um torque aplicado ao eixo de rastreamento. Esta estrutura movimenta-se no plano, conforme mostra a figura 2.1.

A posição de qualquer ponto P ao longo da estrutura, em relação ao sistema de referência inercial, XY, é definida por:

$$\vec{R} = (x \cos \theta - v \sin \theta) i + (x \sin \theta + v \cos \theta) j \quad (2.1)$$

aonde i e j representam os versores ao longo dos eixos do sistema de referência inercial, X e Y, respectivamente, e x , v e θ encontram-se definidos na mesma figura 2.1.

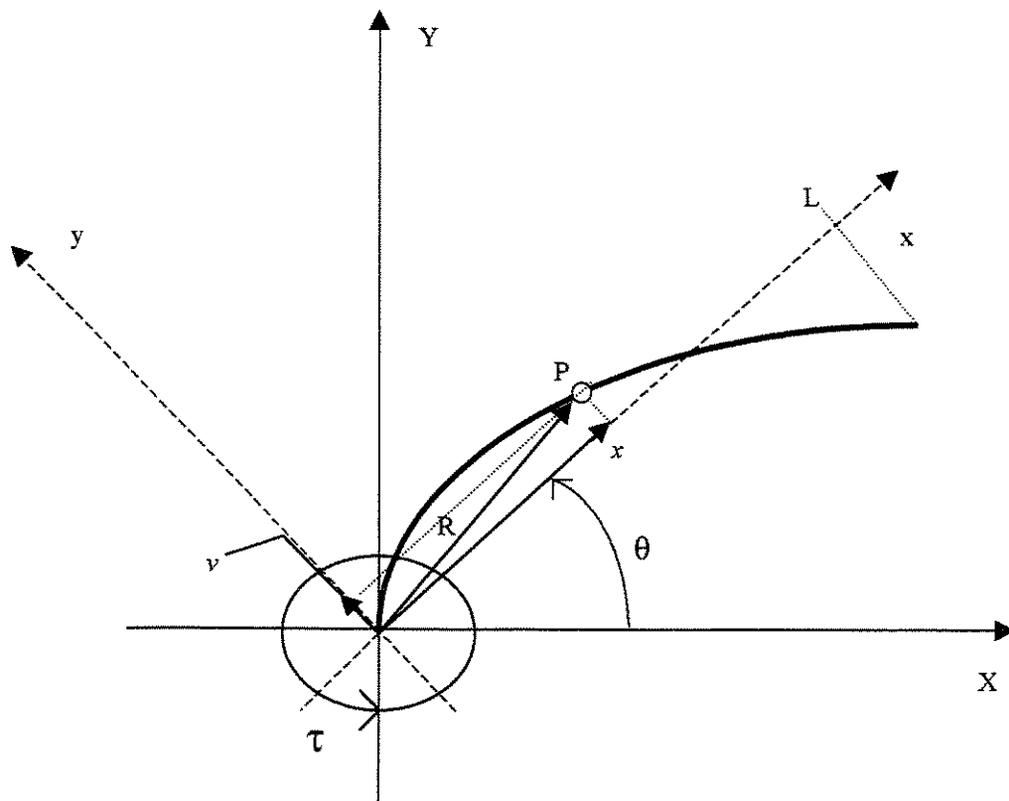


Figura 2.1 - Estrutura flexível de rastreamento (planar) – curvatura linear

Neste modelo, (em relação ao sistema de coordenada local (xy), que rotaciona com a estrutura), qualquer ponto sobre a estrutura é livre para mover-se verticalmente para uma nova posição paralelamente ao eixo y. Para o modelo de curvatura linear, os deslocamentos longitudinais serão negligenciados.

A velocidade de qualquer ponto ao longo da estrutura pode, por conseguinte, ser escrita como :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} = & (\dot{x} \cos\theta - x\dot{\theta} \sin\theta - v \cos\theta \dot{\theta} - \dot{v} \sin\theta) i + (\dot{x} \sin\theta + x\dot{\theta} \cos\theta + \\ & + \dot{v} \cos\theta - v \dot{\theta} \sin\theta) j \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3 - Equações dimensionais do movimento

Seja EC a energia cinética e ED a energia de deformação acumuladas pela estrutura flexível de rastreamento durante uma evolução qualquer no tempo. A parcela correspondente à energia de deformação acumulada pelo sistema é representada pela energia de deformação transversal da estrutura. Estes parâmetros serão representados por :

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] dx \quad (2.3)$$

$$ED = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (2.4)$$

Neste primeiro modelo de curvatura (linear), a curvatura devido à flexibilidade da estrutura será representada por v'' . Esta consideração encontra respaldo na maior parte da literatura consultada (Popov, 1978 ; Sah, 1990, por exemplo).

Seja o lagrangiano (L) do sistema considerado definido por:

$$L = EC - ED \quad (2.5)$$

e seja o Princípio Estendido de Hamilton (Meirovitch, 1967; Greenwood, 1977; Fox, 1987), o qual postula que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (EC - EP) dt = 0 \quad (2.6)$$

com mudanças infinitesimais imaginárias (virtuais) de configuração nulas com relação à configuração da viga nos instantes t_1 e t_2 , ou seja,

$$\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0 \quad (2.7)$$

Em outras palavras, as configurações inicial (t_1) e final (t_2) do sistema são prescritas e coincidem com o caminho real ou Newtoniano (Hurty, 1964).

O Princípio Estendido de Hamilton pode ser descrito da seguinte forma : o caminho real (Newtoniano) seguido por um sistema dinâmico faz com que o valor da integral $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ seja estacionário com respeito a todos os possíveis caminhos (virtuais) na sua vizinhança (e que o sistema possa seguir, respeitando as condições de contorno) entre os instantes t_1 e t_2 . O valor estacionário da integral corresponde a um mínimo do funcional L.

No caso de sistemas não conservativos, $-\delta EP = \delta W$, aonde W representa o trabalho virtual realizado por todas as forças que agem sobre o sistema dinâmico.

Utilizando (2.5) pode-se escrever :

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.6), obtém-se :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (EC - EP) dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v})^2 + (\dot{\theta}v)^2] dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'')^2 dx \right\} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v}) \delta \dot{v} + (\dot{v}\dot{\theta} + x\dot{\theta}^2) \delta x + (\dot{\theta}v^2 + \dot{\theta}x^2 + \dot{v}x) \delta \dot{\theta} + (\dot{\theta}^2 v) \delta v] dx - \right. \\ &\quad \left. - EI \int_0^L (v'') \delta (v'') dx \right\} dt \end{aligned}$$

Efetuada a integração por partes dos termos multiplicados por $\delta \dot{v}$, $\delta \dot{\theta}$ e $\delta v''$ (e posteriormente $\delta v'''$) e eliminando-se os termos multiplicados por δx (uma vez que não ocorre variação neste parâmetro, x), obtém-se :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (EC - EP) dt &= \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v}) \delta v]_{t_2}^{t_1} dx - \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\ddot{\theta}x + \dot{\theta}\dot{x} + \ddot{v}) \delta v dx dt + \\ &+ \rho \int_0^L [(\dot{\theta}v^2 + \dot{\theta}x^2 + \dot{v}x) \delta \theta]_{t_2}^{t_1} dx - \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\ddot{\theta}v^2 + 2\dot{\theta}v\dot{v} + \ddot{\theta}x^2 + 2\dot{\theta}x\dot{x} + \\ &+ \ddot{v}x + \dot{v}\dot{x}) \delta \theta dx dt + \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 v) \delta v dx dt - \int_{t_1}^{t_2} [EI(v'') \delta v]_0^L dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [EI(v''') \delta v]_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI(v^{iv}) \delta v dx dt \end{aligned}$$

Resultando :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (EC - EP) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L [(\rho(\dot{\theta}^2 v - \ddot{\theta}x - \ddot{v}) - EIv^{iv}) \delta v + \int_0^L \rho(-\ddot{\theta}v^2 - 2\dot{\theta}v\dot{v} - \right. \\ &\quad \left. - \ddot{\theta}x^2 - \ddot{v}x) \delta \theta] dx \right\} dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

e os termos de contorno :

$$\int_0^L \{[\rho(\dot{\theta}x + \dot{v})]\delta v \Big|_{t_1}^{t_2}\} dt \quad (2.10)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [(EIv''')\delta v \Big|_0^L] dt = 0 \quad (2.11)$$

$$\int_0^L [\rho(\dot{\theta}v^2 + \dot{\theta}x^2 + \dot{v}x)\delta\theta \Big|_{t_1}^{t_2}] dt \quad (2.12)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [EIv''\delta v' \Big|_0^L] dt = 0 \quad (2.13)$$

Como δv e $\delta\theta$ são considerados nulos nos tempos t_1 e t_2 (condição (2.7)), as expressões (2.10) e (2.12) se anulam, justificando (2.6).

De acordo com a mesma expressão (2.6), as expressões (2.11) e (2.13) podem ser reescritas como :

$$\int_{t_1}^{t_2} \{[EIv'''\delta v]_{x=0} + [EIv'''\delta v]_{x=L}\} dt = 0 \quad (2.14)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \{[EIv''\delta v']_{x=0} + [EIv''\delta v']_{x=L}\} dt = 0 \quad (2.15)$$

Em $x = 0$, devido à condição de engastamento da estrutura, tem-se que $\delta v(0,t) = 0$ e $\delta v'(0,t) = 0$. Devido ao mesmo fato, em $x = 0$:

$$v(0,t) = 0 \quad (2.16a)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (2.16b)$$

Portanto, para satisfazer (2.14) e (2.15), deve-se ter :

$$EIv'''(L,t) = 0 \quad (2.17)$$

$$EIv''(L,t) = 0 \quad (2.18)$$

Desta forma, as condições de contorno para este problema são dadas pelas expressões (2.16a), (2.16b), (2.17) e (2.18).

Assim, a seguinte equação do movimento para a variável v (deflexão transversal da estrutura) é obtida de (2.9), aplicando (2.6) :

$$\rho[\dot{\theta}^2 v - \ddot{\theta} x - \ddot{v}] - EIv^{iv} = 0 \quad (2.19)$$

mais as condições de contorno:

$$v(0,t) = 0 \quad (2.20a)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (2.20b)$$

$$v''(L,t) = 0 \quad (2.20c)$$

$$v'''(L,t) = 0 \quad (2.20d)$$

As equações do movimento associadas ao comportamento de corpo rígido da estrutura (rotação θ em torno do eixo de rastreamento) advêm do equacionamento do motor de corrente contínua responsável por este movimento e são obtidas e comentadas no Apêndice A. O sistema poderá, então, ser considerado ideal ou não ideal.

Em um sistema não ideal, variáveis associadas ao comportamento dinâmico da estrutura (neste caso, associadas à deflexão transversal v) influenciam a fonte de excitação (neste caso considerada de potência limitada) que atua sobre a mesma estrutura, excitando-a.

Em um sistema ideal, o comportamento dinâmico da estrutura movida (carga do motor) não influencia a fonte da excitação.

No final deste capítulo, as equações do motor serão adicionadas a equação (2.19) adimensionalizada, formando o conjunto completo das equações para a estrutura flexível de rastreamento (curvatura linear).

2.4 - Adimensionalização das equações do movimento

O primeiro passo no processo de adimensionalização das equações do movimento consiste em definir as novas variáveis independentes, ou seja, a variável *espaço adimensional* (x^*) e a variável *tempo adimensional* (t^*).

A variável espaço adimensional será definida como:

$$x^* = \frac{1}{L} x \quad (2.21)$$

aonde L representa um comprimento característico associado ao tipo de sistema em análise. No caso da estrutura tipo viga tratada aqui, L representará o comprimento original (inextensível) da estrutura.

A variável tempo adimensional será definida como:

$$t^* = \frac{1}{T} t \quad (2.22)$$

aonde T é um tempo característico também associado ao tipo de sistema em análise. Para sistemas dinâmicos como o estudado neste trabalho, T representa o período da vibração de um modo qualquer (e usual utilizar-se o período do primeiro modo) do sistema linear associado, não amortecido e livre de esforços externos (e que se obtém fazendo $\theta = 0$) em (2.19).

Seja a frequência natural para a vibração transversal do primeiro modo de uma viga engastada-livre linear, não amortecida e livre de esforços externos dada por (Craig, 1981, por exemplo):

$$w_I = (1.8780^2) \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

Consequentemente, o período associado a esta frequência será :

$$T_I = \frac{1}{1.8780^2} \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}} \quad (2.23)$$

O período T_I conforme definido em (2.23) será o tempo característico T para o problema em questão.

De (2.23) tem-se (fazendo $T_I = T$) :

$$\frac{\rho L^4}{EIT^2} = 1.8780^4$$

As derivadas parciais na equação (2.19) devem ser reescritas em função das novas variáveis independentes.

Por exemplo, as derivadas primeira e segunda da variável dependente v (deslocamento transversal da viga flexível) em relação a x^* ficam :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \quad (2.24b)$$

E assim por diante. O mesmo procedimento pode ser empregado para u e suas derivadas em relação a x^* .

De maneira análoga à efetuada em relação à variável independente espacial, em relação à variável independente temporal pode-se chegar a expressões como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) \quad (2.25a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) \quad (2.25b)$$

O próximo passo no sentido da adimensionalização das equações do movimento, consistirá em definir as novas variáveis dependentes adimensionais v^* e θ^* .

Sejam as variáveis dependentes dimensionais definidas em função das variáveis dependentes adimensionais conforme :

$$v = \epsilon L v^* \quad \text{ou} \quad v = \left(\frac{r^2}{L} \right) v^* \quad (2.26)$$

$$\theta = \epsilon \theta^* \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{r^2}{L^2} \theta^* \quad (2.27)$$

O parâmetro ϵ em (2.26) e (2.27) representa um pequeno parâmetro que deverá aparecer nas equações governantes do movimento de forma a tornar as não-linearidades inerentes ao sistema perturbações em torno de um conjunto de equações lineares mais simples e de solução conhecida. Com as equações na forma perturbada, a ordem das não-linearidades ficará aparente e o sistema de equações não lineares poderá ser resolvido através de algum dos métodos conhecidos de perturbação (Nayfeh et al., 1979).

O parâmetro ϵ será melhor apresentado no próximo capítulo.

O parâmetro r que aparece em (2.26) e (2.27) representa o raio de giração da secção transversal da viga.

2.5 - Equações adimensionais do movimento

Sejam as novas derivadas e os novos parâmetros independentes adimensionais, definidos no item 2.3, substituídos na equação governante do movimento para curvatura linear (2.19) :

$$\frac{\rho}{T^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) Lx^* - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) \right] - \frac{EI}{L^4} \left[\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] = 0 \quad (2.28)$$

Multiplicando as equações (2.28) por $\frac{L^4}{EI}$ resulta :

$$1.8780^4 \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) Lx^* - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) \right] - \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) = 0 \quad (2.29)$$

A seguir, substituem-se as variáveis dependentes adimensionais, resultando :

$$1.8780^4 \left[\frac{r^6}{L^5} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) v^* - \frac{r^2}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) Lx^* - \frac{r^2}{L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} \right) \right] - \frac{r^2}{L} \left(\frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Multiplicando (2.30) por $\frac{L}{r^2}$, fazendo $\epsilon = \frac{r^2}{L^2}$ (a razão para tal será esclarecida no próximo capítulo) e passando a representar as quantidades adimensionais sem o (*), resulta :

$$\ddot{\theta}_x + \ddot{v} + \frac{1}{1.8780^4} v^{iv} - \epsilon^2 \dot{\theta}^2 v = 0 \quad (2.31)$$

2.6 - O método dos modos assumidos

O método dos modos assumidos, também conhecido como Método de Ritz, pode ser entendido como um método que busca contornar o problema de se trabalhar com equações que representam os infinitos graus de liberdade (Meirovitch, 1967; Thomson, 1988 ; Craig, 1981, por exemplo).

O método dos modos assumidos resulta na discretização das equações do movimento do sistema dinâmico valendo-se de uma expansão em funções espaciais e temporais.

Desta forma, o sistema poderá ser trabalhado como possuindo n graus de liberdade evoluindo somente no tempo (as funções espaciais serão conhecidas), aonde n , o numero de modos suficiente para representar o comportamento dinâmico do sistema será especificado de acordo com as exigências do sistema em estudo.

De acordo com este método, a variável relacionada ao comportamento flexível da estrutura, $v(x,t)$, pode ser reescrita de forma discretizada através da expansão [Meirovitch, 1967; Thomson, 1988 ; Craig, 1981, por exemplo] :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (2.32)$$

aonde n representa o número de modos (ou fatores de forma) adotado na discretização e considerado suficiente para representar satisfatoriamente o comportamento dinâmico da estrutura.

Cada uma das funções $\phi_i(x)$ que aparece em (2.32) representa cada um dos modos próprios do sistema. As variáveis $q_i(t)$ são os parâmetros do sistema que se pretende determinar daqui por diante, através da equação discretizada apresentada no item 2.7 a seguir.

O problema temporal é usualmente resolvido analiticamente utilizando-se um método de perturbação conveniente (tal como o método do balanço harmônico, a técnica de Lindstedt-

Poincaré, o método da média, o método das múltiplas escalas,...) ou numericamente através de algum integrador numérico (tal como Runge-Kutta, previsor-corretor , ...).

Tomando como base a equação (2.31), pode-se escrever a equação do problema linear associado fazendo-se $\epsilon = 0$. Para a análise da viga engastada linear, sem amortecimento e livre de esforços externos (e fazendo $\theta = 0$), obtém, então, a equação (adimensional) comumente encontrada na literatura (Craig, 1981; Paz, 1991, por exemplo ; em alguns casos a menos da constante $\frac{1}{1.8780^4}$) :

$$\ddot{v} + \frac{1}{1.8780^4} v^{iv} = 0 \quad (2.33)$$

Seja a solução de (2.33) na forma dimensional :

$$v(x,t) = \phi_i(x) e^{i w_i t} \quad (2.34)$$

Em (2.34), fazendo $x = x^* L$ e $t = t^* T_1$, obtém :

$$v(x^*, t^*) = \phi_i(x^*) e^{i w_i T_1 t^*} \quad (2.35)$$

aonde v e ϕ_i agora são funções de quantidades adimensionais.

Substituindo (2.35) em (2.33) e escrevendo as quantidades adimensionais sem o (*), obtém :

$$- w_i^2 T_1^2 \phi_i(x) + \frac{1}{1.8780^4} \phi_i^{iv}(x) = 0$$

Ou :

$$\frac{1}{1.8780^4} \phi_i^{iv}(x) - \frac{w_i^2}{(a_1 L)^4} \phi_i(x) = 0 \quad (2.36a)$$

A expressão (2.36) pode ser reescrita como :

$$\frac{1}{1.8780^4} \phi_i^{iv}(x) = \frac{w_i^2}{(a_i L)^4} \phi_i(x) \quad (2.36b)$$

As funções $\phi_i(x)$ são soluções do problema de autovalores e autovetores (2.36).

Para um problema engastado-livre, tem-se as seguintes condições de contorno :

$$\phi_i(0) = 0 \quad (2.37a)$$

$$\phi_i'(0) = 0 \quad (2.37b)$$

$$\phi_i''(1) = 0 \quad (2.37c)$$

$$\phi_i'''(1) = 0 \quad (2.37d)$$

Resolvendo-se a equação da viga (2.36a) com as condições de contorno de acordo com o modelo adotado (e indicadas em (2.37)), obtém-se como solução uma equação transcendental do tipo :

$$\phi_i(x) = \cosh(a_i x) - \cos(a_i x) - \alpha_i (\sinh(a_i x) - \sin(a_i x)) \quad (2.38a)$$

aonde :

$$\alpha_i = \frac{\cosh(a_i L) + \cos(a_i L)}{\sinh(a_i L) + \sin(a_i L)} \quad (2.38b)$$

Fazendo $x = x^* L$ em 2.38 (ou seja, adimensionalizando os fatores de forma $\phi_i(x)$) resulta :

$$\phi_i(x^*) = \cosh(a_i L x^*) - \cos(a_i L x^*) - \alpha_i (\sinh(a_i L x^*) - \sin(a_i L x^*))$$

ou, cancelando os (*) mas lembrando que a partir de agora a expressão dos fatores de forma e adimensional :

$$\phi_i(x) = \cosh(a_i L x) - \cos(a_i L x) - \alpha_i (\sinh(a_i L x) - \sin(a_i L x)) \quad (2.38c)$$

aonde α_i continua a mesma expressão representada em (2.38b).

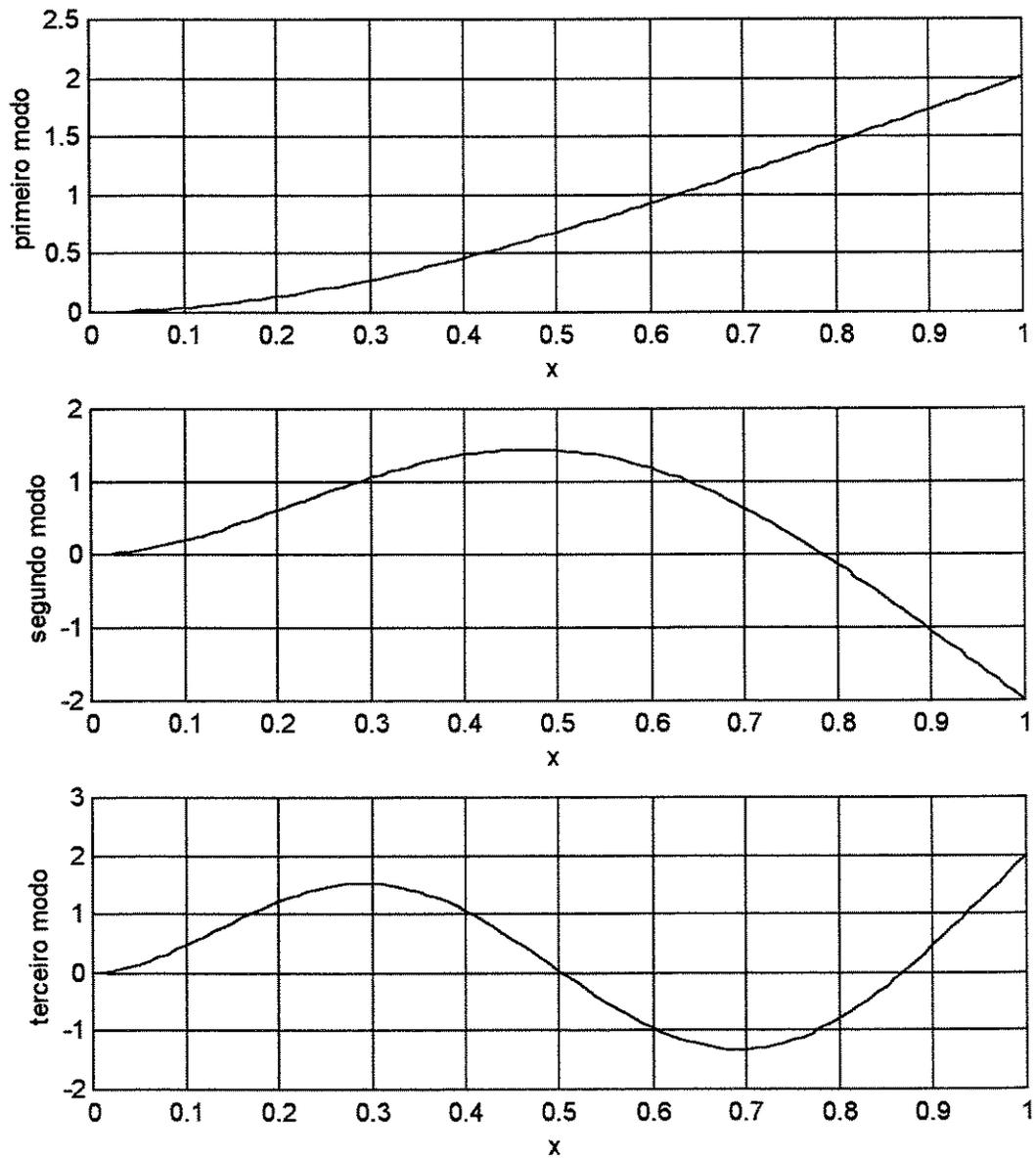


Figura 2.2 - Os três primeiros modos de vibrar do sistema viga linear sem amortecimento e livre de esforços externos

A substituição de (2.38c) nas condições de contorno (2.37a)-(2.37c) leva a relações que são imediatamente satisfeitas. A substituição de (2.38c) na condição de contorno (2.37d) leva a :

$$\cos(a_i L) \cosh(a_i L) + 1 = 0 \quad (2.39)$$

aonde $a_i L$ representa cada uma das raízes de (2.39) e esta associado aos autovalores do sistema livre e não amortecido.

O numero de raízes da equação (2.39) e infinito. Geralmente trabalha-se com os dois ou três primeiros modos próprios do sistema.

A seguir, a nível de ilustração, apresenta-se os valores para as três primeiras raízes da equação (2.39) e as formas dos três primeiros modos de vibrar do sistema (Figura 2.2).

$$a_1 L = 1.8780$$

$$a_2 L = 4.6943$$

$$a_3 L = 7.8548$$

2.7 - Equações adimensionais discretizadas do movimento

Fazendo a expansão para a variável $v(x,t)$ de acordo com (2.32) em (2.31), obtém-se :

$$\ddot{\theta} x + \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \frac{1}{1.8780^4} \sum_{i=1}^n \phi_i^{iv}(x) q_i(t) - \epsilon^2 \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) = 0 \quad (2.40)$$

Substituindo (2.36b) em (2.40), resulta :

$$\ddot{\theta} x + \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{(a_1 L)^2} \phi_i(x) q_i(t) - \epsilon^2 \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) = 0 \quad (2.41)$$

Na equação (2.41), seja:

$$w_{\ell}^2 = \frac{w_i^2}{(\alpha_1 L)^2}.$$

Multiplicando a expressão (2.41) por um modo ortogonal, ϕ_{ℓ} , (lembrando que $\int_0^1 \phi_i \phi_j dx = 1$ se $i=j$ e $\int_0^1 \phi_i \phi_j dx = 0$ se $i \neq j$) e integrando de $x = 0$ a $x = 1$, obtém :

$$\ddot{q}_{\ell} + w_{\ell}^2 q_{\ell} + \alpha_{\ell} \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_{\ell}] = 0 \quad (2.42)$$

aonde:

$$\alpha_{\ell} = \int_0^1 x \phi_{\ell} dx \quad (2.43)$$

mais as condições de contorno adimensionalizadas :

$$v'''(1,t) = 0 \quad (2.44a)$$

$$v''(1,t) = 0 \quad (2.44b)$$

2.8 - Sistema ideal (estrutura flexível + equações do motor)

Adicionando a equação (2.42) às equações do motor definidas no Apêndice A (equações A.25 e A.26, fazendo $co_5 = 0$ em A.26) e acrescentando o termo de amortecimento $\mu \dot{q}_{\ell}$ em (2.42), as equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento para a abordagem de sistema ideal tornam-se :

$$\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} = co_1 U$$

$$\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a = 0$$

$$\ddot{q}_{\ell} + w_{\ell}^2 q_{\ell} + \mu \dot{q}_{\ell} + \alpha_{\ell} \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_{\ell}] = 0$$

(2.45)

mais as condições de contorno (2.44) e (A.27).

2.9 - Sistema não ideal (estrutura flexível + equações do motor)

Da mesma forma que no item 2.8, adicionando a equação (2.42) as equações do motor definidas no Apêndice A (equações A.25 e A.26) e acrescentando o termo de amortecimento $\mu\dot{q}_\ell$ em (2.42), as equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento para a abordagem de sistema não ideal tornam-se :

$$\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} = cc_1 U$$

$$\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) = 0$$

$$\ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \mu \dot{q}_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_\ell] = 0$$

(2.46)

mais as condições de contorno (2.44) e (A.27).

Capítulo 3

Modelagem matemática de estruturas flexíveis de rastreamento : curvatura não linear

3.1 - Introdução

A consideração das não-linearidades presentes em um sistema físico faz com este seja mais difícil de ser modelado, analisado e identificado (Keisler et al., 1985). Contudo, a maior parte dos sistemas físicos encontrados na prática são, de fato, não lineares em natureza. Mesmo sistemas que podem ser representados por modelos lineares tendem a exibir comportamento não linear sob certas condições. Em tais casos, um engenheiro frequentemente é forçado a tomar decisões acerca da inclusão ou não de efeitos não lineares em seus modelos matemáticos. Este capítulo apresenta a inclusão de não-linearidades geométricas e um modelo mais acurado e complexo para o sistema tratado no capítulo anterior.

O modelo matemático proposto neste trabalho para a curvatura não linear da estrutura flexível de rastreamento parte do pressuposto de que qualquer elemento infinitesimal localizado ao longo da estrutura irá ocupar, após a deflexão desta, uma nova posição no plano (considerando sempre o movimento de rotação e deflexão restritos a um plano, embora a estrutura se mova no espaço) tendo alteradas tanto a sua abscissa quanto a sua ordenada em relação ao sistema de

referência móvel xy .

A variável $\theta(t)$, assim como na análise do capítulo anterior, representa a posição do eixo do motor de corrente contínua conectado à extremidade engastada da estrutura flexível e, conseqüentemente, representando a posição de corpo rígido desta. O sistema de coordenadas xy acompanha o movimento de corpo rígido da estrutura e serve como sistema de coordenada local para a determinação das variáveis associadas à curvatura da mesma (deslocamentos transversal e longitudinal).

Adota-se aqui, assim como no capítulo anterior, o modelo de viga do tipo Euler-Bernoulli.

3.2 - Modelo geométrico

As componentes do vetor deslocamento do elemento infinitesimal sobre A movendo-se para A' no sistema de referência móvel são representados pelas quantidades vetoriais $\vec{u}(x,t)$ e $\vec{v}(x,t)$ nas direções $-\vec{i}_x$ e \vec{j}_y , respectivamente, conforme ilustrado na figura 3.1.

Portanto, o vetor posição final do ponto A (ou o vetor posição de A') relativamente ao sistema de referência móvel (xy) é dado por:

$$\vec{r}_{xy} = (x - u)\vec{i}_x + v\vec{j}_y \quad (3.1)$$

que pode ser verificado na mesma figura 3.1 como \vec{r} .

A velocidade do elemento infinitesimal sobre A' relativa ao sistema de referência móvel (xy) pode ser encontrada derivando-se (3.1) em relação ao tempo, resultando :

$$\dot{\vec{r}}_{xy} = (\dot{x} - \dot{u})\vec{i}_x + \dot{v}\vec{j}_y = \vec{v}_{rel}$$

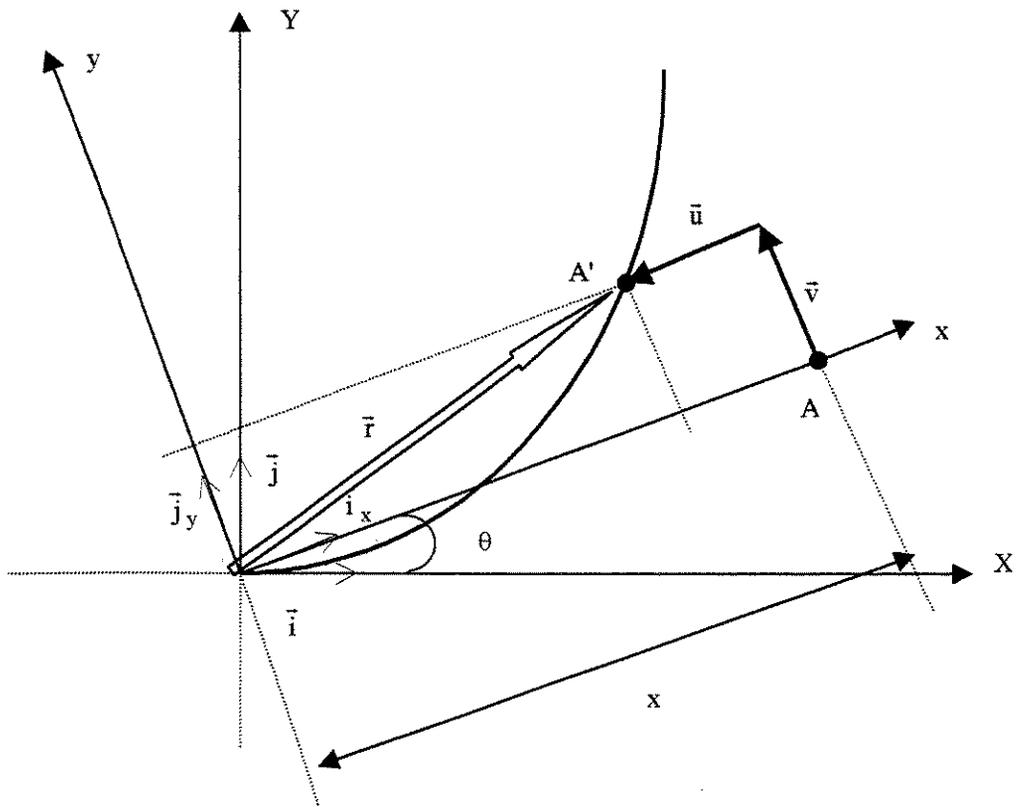


Figura 3.1 - Componentes do vetor deslocamento de um elemento infinitesimal qualquer em A sobre o membro flexível após a deflexão

A quantidade \dot{x} é igual a 0, pois a posição inicial de um elemento qualquer sobre A (ver figura 3.1) medido ao longo do eixo x do sistema de referência móvel é constante. Então:

$$\vec{v}_{rel} = -\dot{u}\vec{i}_x + \dot{v}\vec{j}_y \quad (3.2)$$

As quantidades *vetor deslocamento* e *vetor velocidade relativa* deverão, então, ser transformados do sistema de referência local (xy) para o sistema de referência inercial (XY).

No sistema de referência inercial, o vetor posição do elemento infinitesimal da viga sobre A' (equação (3.1)) será reescrito como:

$$\vec{r}_{XY} = [(x-u)\cos\theta - v\text{sen}\theta]\vec{i} + [(x-u)\text{sen}\theta + v\cos\theta]\vec{j} \quad (3.3)$$

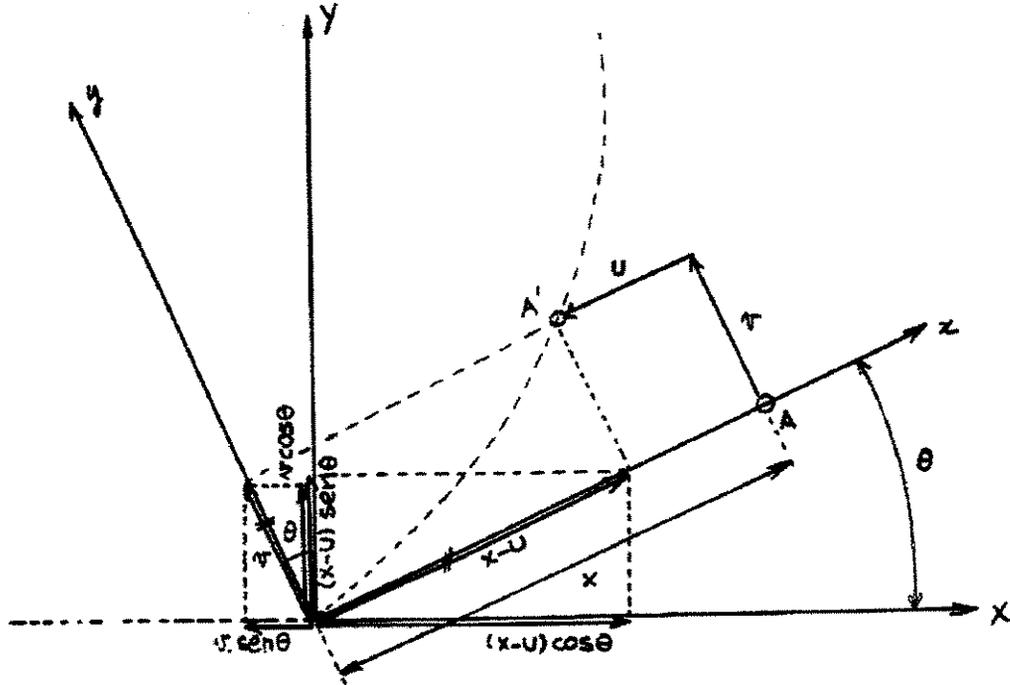


Figura 3.2 - Transformação do sistema de referência móvel para o sistema de referência inercial

A figura 3.2 ilustra a transformação entre os sistemas de coordenadas local (móvel) e inercial.

A velocidade do elemento infinitesimal sobre A', portanto, no referencial inercial torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{XY} = \vec{v}_{XY} = & [(\dot{x} - \dot{u})\cos\theta - \dot{\theta}(x-u)\text{sen}\theta - \dot{v}\text{sen}\theta - v\cos\theta\dot{\theta}]\vec{i} + \\ & + [(\dot{x} - \dot{u})\text{sen}\theta + \dot{\theta}(x-u)\cos\theta + \dot{v}\cos\theta - v\text{sen}\theta\dot{\theta}]\vec{j} \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.3 - Equações dimensionais do movimento

A energia cinética acumulada pela estrutura flexível durante o movimento de rastreamento será representada por:

$$EC = \frac{1}{2} \rho \int_0^L |\dot{v}_{XY}|^2 dx \quad (3.5)$$

aonde ρ representa a densidade do material por unidade de comprimento (assumida como sendo constante ao longo de todo o comprimento da estrutura) e L representa o comprimento original da estrutura.

Desta forma, substituindo (3.4) em (3.5) obtém-se :

$$EC = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \{(\dot{\theta}v + \dot{u})^2 + [\dot{\theta}(x-u) + \dot{v}]^2\} dx \quad (3.6)$$

A energia total de deformação (transversal + longitudinal) acumulada pela estrutura flexível após deflexão será representada por:

$$ED = \frac{1}{2} \int_0^L M v'' dx + \frac{1}{2} \int_0^L N \varepsilon_{axial} dx \quad (3.7)$$

ou (lembrando que $v' = \phi$ e, portanto, $v'' = \phi'$) :

$$ED = \frac{1}{2} \int_0^L M \phi' dx + \frac{1}{2} \int_0^L N \varepsilon_{axial} dx \quad (3.8)$$

aonde M representa o momento interno, relacionado à deflexão angular ϕ através da expressão (Popov, 1978) :

$$M = \frac{EI}{\mu} = \frac{EI}{\left(\frac{dl}{d\phi}\right)} = EI \left(\frac{d\phi}{dl}\right) \quad (3.9)$$

Nas expressões 3.8 e 3.9 :

ϕ = ângulo entre a tangente à viga defletida no ponto de tangencia e o eixo x do sistema de referência móvel ;

dl = elemento do comprimento de arco ao longo da viga defletida (distância entre A' e B' sobre a estrutura deformada - figura 3.3) ;

E = módulo de elasticidade transversal da estrutura ;

I = momento de inércia de área da secção reta transversal em torno do eixo neutro da estrutura.

Na expressão da energia total de deformação, (3.8), N representa a força interna axial atuando na estrutura, representada por:

$$N = EA \varepsilon_{axial} \quad (3.10)$$

aonde:

A = área da secção reta transversal ;

ε_{axial} = deformação axial (variação no comprimento / comprimento original).

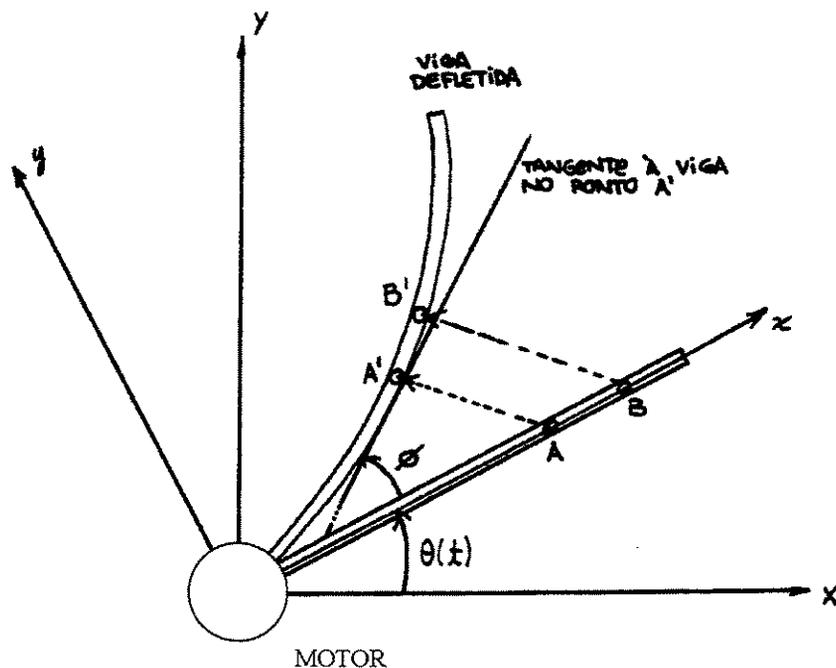


Figura 3.3 - Modelo representativo da deformação do membro flexível

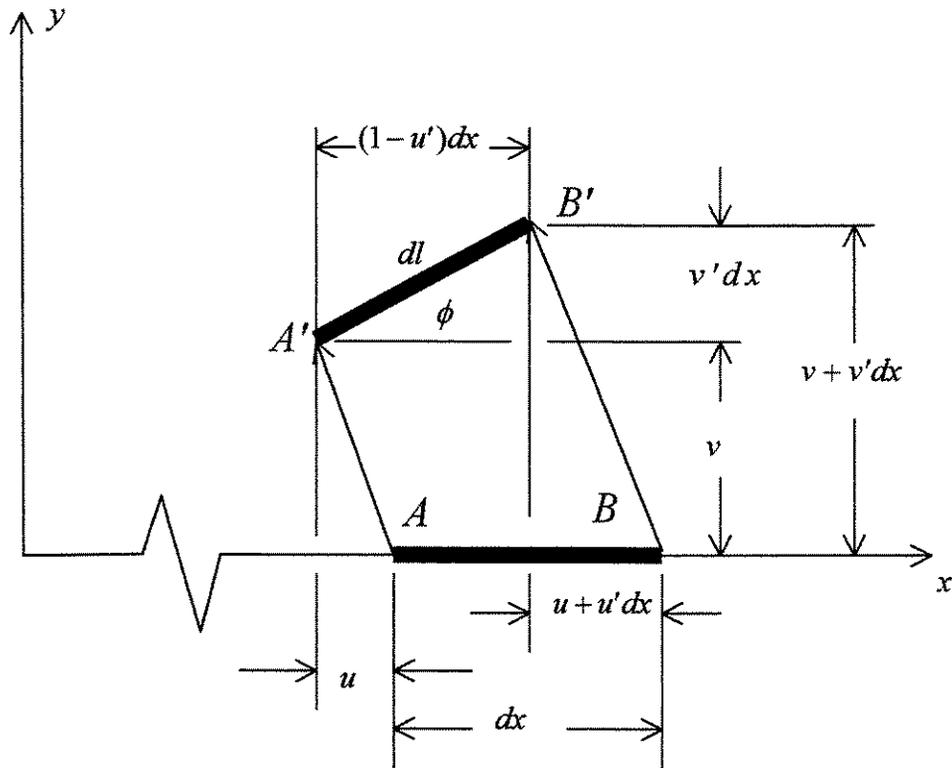


Figura 3.4 – Um segmento infinitesimal do eixo centroidal nas posições não defletida (A, B) e defletida (A', B') da estrutura.

Os pontos A e B, conforme mostra a figura 3.4 são separados por uma distância infinitesimal dx sobre a posição não defletida da viga. A deformação axial (ϵ_{axial}) é dada por (Popov, 1978) :

$$\epsilon_{axial} = \frac{dl - dx}{dx} \quad (3.11)$$

De acordo com a figura 3.4 pode-se escrever a expressão :

$$dl = [(1 - u')^2 + v'^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

a qual, expandida em Série de Taylor resulta :

$$dl = (1 - u' + \frac{1}{2}v'^2 + \dots)dx \quad (3.12)$$

Ainda de acordo com a Figura 3.4 pode-se escrever :

$$\begin{aligned} \text{sen } \phi &= \frac{v'}{[(1-u')^2 + v'^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{v'}{(1-2u' + u'^2 + v'^2)^{\frac{1}{2}}} = v' \left(1 - 2u' + \frac{1}{2}v'^2 + \dots\right)^{-1} = \\ &= v' \left(1 + u' - \frac{1}{2}v'^2 + \dots\right) = v' + u'v' - \frac{1}{2}v'^3 + O(v^5) \end{aligned}$$

e, expandindo $\text{sen } \phi$:

$$\phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \dots = v' + u'v' - \frac{1}{2}v'^3 + \dots$$

Seja :

$$\phi = v' + \phi_1$$

aonde ϕ_1 é uma pequena correção para v' . Substituindo esta última expressão na anterior e desprezando termos de ordem superior obtém-se :

$$\phi_1 = u'v' - \frac{1}{3}v'^3 + O(v^4)$$

Desta forma :

$$\phi = v' + u'v' - \frac{1}{3}v'^3 + O(v^4) \quad (3.13)$$

A expressão 3.11 pode, então, ser reescrita como:

$$\varepsilon_{axial} = -u' + \frac{1}{2}v'^2 + O(v^4) \quad (3.14)$$

Derivando 3.13 :

$$d\phi = (v' + u''v + u'v'' - v'^2v'')dx \quad (3.15)$$

Desta forma :

$$\frac{1}{r_C} = \frac{d\phi}{dl} = v'' + 2u'v'' + u''v' - \frac{3}{2}v'^2v'' + u'u''v' - \frac{1}{2}u''v'^3 + u'^2v'' - \frac{3}{2}u'v'^2v'' + \frac{1}{2}v'^4v'' \quad (3.16)$$

Vale relembrar que, na análise de estruturas flexíveis considerando curvatura linear, conforme apresentado no capítulo 2, considerou-se :

$$\frac{1}{r_C} = v''$$

aonde r_C representa o raio de curvatura. A expressão (3.16) recai nesta se $\phi \cong 0$ (ou seja, $v' \cong 0$) e $u' \cong 0$.

A expressão não linear para a curvatura comumente encontrada em livros de geometria (Maurer, 1967 ; por exemplo) é escrita como :

$$\frac{1}{r_C} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que também recai na expressão linear utilizada no Capítulo 2 (e reescrita acima) quando $v' \cong 0$.

Esta expressão (devidamente expandida), por sua vez, recai na (3.16) quando, naquela, u e suas derivadas são iguais a zero.

Neste capítulo, dedicado a curvatura não linear, serão considerados os termos em (3.16) ate ordem 3. Desta forma :

$$\frac{d\phi}{r_c} = \frac{d\phi}{\left(\frac{dl}{d\phi}\right)} = \frac{d\phi^2}{dl} = (v'^2 + 2u'v'v'' + 3u'v''^2 - \frac{5}{2}v'^2v''^2) dx \quad (3.17)$$

Finalmente, substituindo (3.9), (3.10), (3.14) e (3.17) em (3.8) resulta :

$$EP = \frac{1}{2} \left\{ EI \int_0^L [(v'')^2 + 2u''v'v'' + 3u'(v'')^2 - \frac{5}{2}(v')^2(v'')^2] dx + EA \int_0^L (-u' + \frac{1}{2}v'^2)^2 dx \right\} \quad (3.18)$$

Aplicando o Princípio Estendido de Hamilton (Meirovitch, 1967), obtém-se as seguintes equações do movimento para as variáveis u e v (componente longitudinal e componente transversal da deflexão, respectivamente) da estrutura flexível de membro único e contínuo apresentando curvatura não linear :

$$\rho(\dot{\theta}^2 v + 2\dot{\theta}\dot{u} - \ddot{\theta}x + \ddot{\theta}u - \ddot{v}) - EI(v^{\dot{v}v} + u^{\dot{v}v}v' + 4u''v'' + 6u''v'' + 3u'v^{\dot{v}v} - \frac{5}{2}v''^3 - 10v'v''v'' - \frac{5}{2}v'^2v^{\dot{v}v}) - EA(u''v' + u'v'' - \frac{3}{2}v'^2v'') = 0 \quad (3.19a)$$

$$\rho(-\ddot{\theta}v - 2\dot{\theta}\dot{v} - \ddot{u} - \dot{\theta}^2x + \dot{\theta}^2u) - EI(v'v^{\dot{v}v}) - EA(-u'' + v'v'') = 0 \quad (3.19b)$$

mais as condições de contorno :

$$u(0,t) = 0 \quad (3.20a)$$

$$v(0,t) = 0 \quad (3.20b)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (3.20c)$$

$$EI \left[\frac{1}{2} v''(L,t)^2 - v'(L,t)v''''(L,t) \right] + EA(u'(L,t) - \frac{1}{2} v'(L,t)^2) = 0 \quad (3.20d)$$

$$EI \left[\frac{5}{2} v'(L,t)v''(L,t)^2 - v''''(L,t) - u''''(L,t)v'(L,t) - \right. \\ \left. - 3u''(L,t)v''(L,t) - 3u'(L,t)v''''(L,t) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} v'(L,t)^2 v''''(L,t) \right] + EA[-u'(L,t)v'(L,t) + \frac{1}{2} v'(L,t)^3] = 0 \quad (3.20e)$$

$$EI[v'(L,t)v''(L,t)] = 0 \quad (3.20f)$$

$$EI[v''(L,t) + u''(L,t)v'(L,t) + 3u'(L,t)v''(L,t) - \frac{5}{2} v'(L,t)^2 v''(L,t)] = 0 \quad (3.20g)$$

3.4 - Adimensionalização das equações do movimento

As variáveis espaço adimensional (x^*) e tempo adimensional (t^*) são representadas pelas mesmas expressões (2.21) e (2.22), respectivamente, conforme observado no capítulo anterior. As novas derivadas parciais reescritas em função destas novas variáveis independentes são as mesmas vistas em (2.24) e (2.25).

Da mesma forma, as variáveis dependentes dimensionais definidas em função das variáveis dependentes adimensionais seguem conforme (2.26) e (2.27), aonde agora, inclui-se também :

$$u = \epsilon^2 L u^*$$

ou

$$u = \frac{r^4}{L^3} u^* \quad (3.21)$$

O pequeno parâmetro de perturbação, ϵ , que aparece em (2.26), (2.27) e (3.21) e cuja definição foi imposta no capítulo 2 será definido em detalhes a seguir. A razão pela qual $u = O(\epsilon^2)$ (lembrar que $v = O(\epsilon)$) será comentada posteriormente neste mesmo capítulo.

3.5 - Equações adimensionais do movimento

Substituindo as novas derivadas e os novos parâmetros independentes adimensionais e colocando-se termos em evidência, as equações (3.19) serão transformadas em :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{T^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L x^* + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v \right] - \\ & - \frac{EI}{L^4} \left[\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{*4}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) + 4 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) + 6 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) + \right. \\ & + 3 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) - 10 \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right)^3 - \\ & - \left. \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{EA}{L^2} \left[- \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{T^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 L x^* + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 u \right] - \\ & - \frac{EI}{L^4} \left[\frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{EA}{L^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.22b)$$

Multiplicando cada uma das expressões (3.22) por $\frac{L^4}{EI}$ resulta :

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho L^4}{EIT^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) Lx^* + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v \right] - \\
& - \left[\left(\frac{\partial^4 \mathbf{v}}{\partial x^{*4}} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{*4}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^*} \right) + 4 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}} \right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^{*2}} \right) + 6 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial x^{*3}} \right) + \right. \\
& + 3 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 \mathbf{v}}{\partial x^{*4}} \right) - 10 \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial x^{*3}} \right) - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^{*2}} \right)^3 - \\
& - \left. \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^*} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 \mathbf{v}}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{AL^2}{I} \left[- \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^*} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0 \tag{ 3.23a }
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho L^4}{EIT^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 Lx^* + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 u \right] - \\
& - \left[\frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 \mathbf{v}}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{AL^2}{I} \left[- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0 \tag{ 3.23b }
\end{aligned}$$

Ao se substituir as novas derivadas do tipo visto em (2.24) e (2.25) em (3.19) e multiplicar cada uma das expressões por $\frac{L^4}{EI}$, aparecem os termos adimensionais :

$$\frac{\rho L^4}{EIT^2} \tag{ 3.24 }$$

$$\frac{AL^2}{I} \tag{ 3.25 }$$

O termo (3.25) não aparece no tipo de modelo proposto no capítulo 2. Na ordem natural deste trabalho, os procedimentos para curvatura não linear verificados neste capítulo foram executados primeiramente. Contudo, as mesmas operações realizadas para as equações (3.19) foram executadas para as equações (2.19).

De (2.23) tem-se (fazendo $T_l = T$) :

$$\frac{\rho L^4}{EIT^2} = 1.8780^4$$

O pequeno parâmetro de perturbação (ϵ) para o problema de estrutura tipo viga em análise neste trabalho estará associado ao termo $\frac{AL^2}{I}$, aparecendo naturalmente através das operações descritas neste mesmo item 3.5 para a adimensionalização das equações (3.19).

O termo $\frac{AL^2}{I}$ pode ser reescrito como :

$$\frac{AL^2}{I} = \frac{AL^2}{Ar^2} = \frac{L^2}{r^2} = \frac{1}{\epsilon} \quad (3.26)$$

aonde r representa o raio de giração da área da secção reta (A) e L representa o comprimento inextensível da viga flexível. Para uma viga típica, $\epsilon \ll 1$ (Nayfeh, 1979).

Portanto, de (3.26) :

$$\epsilon = \frac{r^2}{L^2} \quad (3.27)$$

Segue-se, então, os mesmos passos indicados no item 2.5 do capítulo 2. Substituindo as variáveis dependentes adimensionais e desprezando-se termos de $O(\epsilon^3)$ e $O(\epsilon^4)$, as equações do movimento (3.19) adimensionalizadas tornam-se :

$$\ddot{v} + \frac{1}{1.8780^4} v^{iv} + \ddot{\theta}x + \epsilon^2 \left(-\dot{\theta}^2 v - 2\dot{\theta}\dot{u} - \ddot{\theta}u + \frac{1}{1.8780^4} \left[u^{iv}v' + 4u''v'' + 6u''v''' + 3u'v^{iv} - 10v'v''v''' - \frac{5}{2}v''^3 - \frac{5}{2}v'^2v^{iv} \right] \right) - \epsilon \left(\frac{1}{1.8780^4} \left[-v''u' - v'u'' + \frac{3}{2}v'^2v'' \right] \right) = 0 \quad (3.28a)$$

$$\epsilon \left(\ddot{u} + \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta}v + 2\dot{\theta}\dot{v} + \frac{1}{1.8780^4} v'v^{iv} \right) - \frac{1}{1.8780^4} \left(u' - \frac{1}{2}v'^2 \right)' = 0 \quad (3.28b)$$

mais as condições de contorno adimensionalizadas :

$$u(0,t) = 0 \quad (3.29a)$$

$$v(0,t) = 0 \quad (3.29b)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (3.29c)$$

$$u'(1,t) - \frac{1}{2}v'(1,t)^2 + \epsilon \left[\frac{1}{2}v''(1,t)^2 - v'(1,t)v'''(1,t) \right] = 0 \quad (3.29d)$$

$$-2v'''(1,t) + \epsilon \left[-2u'(1,t)v'(1,t) + v'(1,t)^3 \right] + \epsilon^2 \left[5v'(1,t)v''(1,t)^2 - 2u''(1,t)v'(1,t) - 6u''(1,t)v''(1,t) - 6u'(1,t)v'''(1,t) + 5v'(1,t)^2v'''(1,t) \right] = 0 \quad (3.29e)$$

$$\epsilon \left[v'(1,t)v''(1,t) \right] = 0 \quad (3.29f)$$

$$v''(1,t) + \epsilon^2 \left[u''(1,t)v'(1,t) + 3u'(1,t)v''(1,t) - \frac{5}{2}v'(1,t)^2v''(1,t) \right] = 0 \quad (3.29g)$$

3.6 - Equações adimensionais discretizadas do movimento

A equação do movimento para a variável u , (3.28b), será eliminada a fim de que se possa trabalhar apenas com a equação para v e as equações do motor definidas no Apêndice A.

Da equação do movimento (3.28b) segue que:

$$\frac{1}{1.8780^4} \left(u' - \frac{1}{2} v'^2 \right)' = \epsilon \left(\ddot{u} + \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta} v + 2\dot{\theta} \dot{v} + \frac{1}{1.8780^4} v' v^{iv} \right)$$

Ou :

$$\left(u' - \frac{1}{2} v'^2 \right)' = 0(\epsilon) \quad (3.30)$$

Portanto:

$$u' - \frac{1}{2} v'^2 = F(t) + 0(\epsilon) \quad (3.31)$$

Contudo, a condição de contorno (3.29d) mostra que :

$$u'(1,t) - \frac{1}{2} v'(1,t)^2 = \epsilon \left[\frac{1}{2} v''(1,t)^2 - v'(1,t) v'''(1,t) \right] \quad (3.32)$$

ou seja, que $F(t) = 0$.

Logo:

$$u' - \frac{1}{2} v'^2 = 0(\epsilon) \quad (3.33)$$

Resultando:

$$u'' = v' v'' + 0(\epsilon) \quad (3.34)$$

$$u''' = v''^2 + v' v''' + 0(\epsilon) \quad (3.35)$$

$$u^{iv} = 3 v'' v''' + v' v^{iv} + 0(\epsilon) \quad (3.36)$$

Substituindo as expressões (3.33) - (3.36) na equação do movimento (3.28a), obtém-se:

$$\ddot{v} + \frac{1}{1.8780^4} v^{iv} + \ddot{\theta}x + \epsilon^2 \left[-\dot{\theta}^2 v - 2\dot{\theta}\dot{u} - \ddot{\theta}u + \frac{3}{1.8780^4} v'v''v''' + \frac{3}{2(1.8780^4)} v''^3 \right] - \epsilon \left[\frac{1}{1.8780^4} v' \left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) \right]' = 0 \quad (3.37)$$

O último termo de (3.37) é realmente de $0(\epsilon^2)$ porque $\left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) = 0(\epsilon)$, de acordo com (3.33).

Seja a condição de contorno (3.29g) reproduzida a seguir :

$$v''(1,t) + \epsilon^2 [u''(1,t)v'(1,t) + 3u'(1,t)v''(1,t) - \frac{5}{2} v'(1,t)^2 v''(1,t)] = 0$$

Substituindo as derivadas de u de acordo com (3.33) e (3.36) obtém-se :

$$v''(1,t) = 0 \quad (3.38)$$

Seja a condição de contorno (3.29e) reproduzida a seguir :

$$-v'''(1,t) + \epsilon [-u'(1,t)v'(1,t) + \frac{1}{2} v'(1,t)^3] + \epsilon^2 \left[\frac{5}{2} v'(1,t)v''(1,t)^2 - u'''(1,t)v'(1,t) - 3u''(1,t)v''(1,t) - 3u'(1,t)v'''(1,t) + \frac{5}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) \right] = 0$$

Novamente, substituindo u e suas derivadas, obtém-se:

$$v'''(1,t) = 0 \quad (3.39)$$

Assim, utilizando (3.33), expandindo v através da expressão (2.32) e integrando em

relação a x , botem-se :

$$u = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \left[\int_0^x \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi \right] \right\} + o(\epsilon) + G(t) \quad (3.40)$$

Derivando a expressão (3.40) em relação ao tempo (e lembrando que $ij = ji$), tem-se :

$$\dot{u} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \dot{q}_j R_{ij} + o(\epsilon) \quad (3.41)$$

aonde :

$$R_{ij}(x) = \int_0^x \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi = R_{ji}(x) \quad (3.42)$$

Derivando (3.41) em relação ao tempo, obtém-se :

$$\ddot{u} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{q}_i \dot{q}_j R_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \ddot{q}_j R_{ij} + o(\epsilon) \quad (3.43)$$

Para $u(0,t) = 0$, $G(t) = 0$

Portanto, seja:

$$\frac{1}{1.8780^4} \left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)' = \epsilon \left[-\ddot{u} - \dot{\theta}^2 x - \ddot{\theta} v - 2\dot{\theta} \dot{v} - \frac{1}{1.8780^4} v' v'' \right] \quad (3.44)$$

Substituindo (2.32) e (3.43) em (3.44), resulta :

$$\frac{1}{1.8780^4} \left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)' = \epsilon \left\{ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\ddot{q}_i q_j + \dot{q}_i \dot{q}_j) R_{ij} - \dot{\theta}^2 x - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N (\ddot{\theta} q_i + 2\dot{\theta} \dot{q}_i) \phi_i - \frac{1}{1.8780^4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \phi_i' \phi_j^{iv} \right\} + o(\epsilon^2) \quad (3.45)$$

Integrando (3.45) de 0 a x e utilizando (2.36b), obtém-se :

$$\frac{1}{1.8780^4} \left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) = \epsilon \left\{ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\ddot{q}_i q_j + \dot{q}_i \dot{q}_j) S_{ij}(x) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 x^2 - \sum_{i=1}^N (\ddot{\theta} q_i + 2\dot{\theta} \dot{q}_i) V_i(x) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_j^2 q_i q_j W_{ij}(x) - H(t) \right\} \quad (3.46)$$

aonde :

$$w_j^2 = \frac{w_n^2}{(a_1 L)^4} = \frac{w_n^2}{1.8780^4}.$$

O parâmetro w_j representa cada uma das freqüências naturais do sistema linear associado ($\epsilon = 0$) racionalizadas de tal forma que, quando $n (= j) = 1$ tem-se $w_1^2 = 1$. Ou seja, $w_1 = 1$ representara a primeira freqüência natural do sistema linear associado e todas as demais freqüências naturais deste sistema serão consideradas em relação a primeira.

O termo $H(t)$ em (3.46) é escolhido tal que $-u' + \frac{1}{2} v'^2 = 0$ em $x = 1$, pois em (3.38) mostrou-se que $v'' = 0$ em $x = 1$ e em (3.39) mostrou-se que $v''' = 0$ em $x = 1$ e, de acordo com a condição de contorno (3.32), reproduzida a seguir :

$$u'(1,t) - \frac{1}{2} v'(1,t)^2 \left[\frac{1}{2} v''(1,t)^2 - v'(1,t) v''''(1,t) \right]$$

tem-se que :

$$u'(1,t) - \frac{1}{2} v'(1,t)^2 = 0$$

ou :

$$-u'(1,t) + \frac{1}{2} v'(1,t)^2 = 0 \quad (3.47)$$

Seja (3.46) reescrita em $x = 1$:

$$\frac{1}{1.8780^4} \left(-u'(1,t) + \frac{1}{2} v'(1,t)^2 \right) = \left\{ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\ddot{q}_i(t) q_j(t) + \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t)) S_{ij}(1) - \frac{1}{2} \dot{\theta}(t)^2 1^2 - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N (\ddot{\theta}(t) q_i(t) + 2\dot{\theta}(t) \dot{q}_i(t)) V_i(1) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_j^2 q_i(t) q_j(t) W_{ij}(1) - H(t) \right\}$$

Utilizando (3.47), tem-se que :

$$- \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\ddot{q}_i(t) q_j(t) + \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t)) S_{ij}(1) - \frac{1}{2} \dot{\theta}(t)^2 1^2 - \sum_{i=1}^N (\ddot{\theta}(t) q_i(t) + 2\dot{\theta}(t) \dot{q}_i(t)) V_i(1) - \\ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_j^2 q_i(t) q_j(t) W_{ij}(1) - H(t) = 0 \quad (3.48)$$

Para satisfazer (3.48), pode-se alterar ligeiramente as definições de S_{ij} , V_i e W_{ij} para que, quando $x = 1$, tenha-se $S_{ij}(1) = V_i(1) = W_{ij}(1) = 0$ e $H(t) = -\frac{1}{2} \dot{\theta}(t)^2$.

O termo :

$$S_{ij}(x) = \int_0^x R_{ij}(\xi) d\xi - \int_0^1 R_{ij}(\xi) d\xi$$

pode ser reescrito como :

$$S_{ij}(x) = -\int_x^1 \left[\int_0^\eta \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi \right] d\eta \quad (3.49)$$

Portanto, $S_{ij}(1) = 0$.

O termo :

$$V_i(x) = \int_0^x \phi_i(\xi) d\xi - \int_0^1 \phi_i(\xi) d\xi$$

pode ser reescrito como :

$$V_i(x) = -\int_x^1 \phi_i(\xi) d\xi \quad (3.50)$$

Portanto, $V_i(1) = 0$.

E o termo :

$$W_{ij}(x) = \int_0^x \phi_i'(\xi) \phi_j(\xi) d\xi - \int_0^1 \phi_i'(\xi) \phi_j(\xi) d\xi$$

pode ser reescrito como :

$$W_{ij}(x) = -\int_x^1 \phi_i'(\xi) \phi_j(\xi) d\xi \quad (3.51)$$

Portanto, $W_{ij}(1) = 0$

Substituindo (2.32), (3.40), (3.41), (3.42), (3.45) e (3.46) em (3.37) resulta :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N (\ddot{q}_i + w_i^2 q_i) \phi_i + \ddot{\theta} x + \epsilon^2 \left[-\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N q_i \phi_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[2\dot{\theta} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i q_j + \frac{1}{2} q_i \dot{q}_j \right) + \ddot{\theta} \left(\frac{1}{2} q_i q_j \right) \right] R_{ij} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_i q_j q_k \left[\frac{3}{1.8780^4} \phi_i' \phi_j'' \phi_k'' + \frac{3}{2(1.8780^4)} \phi_i'' \phi_j'' \phi_k'' \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_i q_j q_k \left[w_j^2 W_{ij} \phi_k'' + \right. \\
& + w_j^2 \phi_i' \phi_j \phi_k' \left. \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_i (\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k) \left[S_{jk} \phi_i'' + R_{jk} \phi_i' \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\ddot{\theta} q_i q_j + 2\dot{\theta} q_i \dot{q}_j \right] \left[\phi_i'' V_j + \right. \\
& \left. + \phi_i' \phi_j \right] + \sum_{i=1}^N \dot{\theta}^2 q_i \left[\frac{1}{2} (x^2 - 1) \phi_i'' + x \phi_i' \right] \left. \right] = 0 \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Multiplica-se, então, a expressão (3.52) por ϕ_ℓ , valendo-se da propriedade de ortogonalização dos modos. Desta maneira, as equações (3.52) ficarão desacopladas em relação à variável espacial ϕ_i e acopladas somente em relação às variáveis temporais q_i . A seguir, integra-se (3.52) de $x = 0$ a $x = 1$, obtendo-se as expressões finais para as equações governantes do movimento para a coordenada generalizada temporal q_i :

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \beta_{i\ell} q_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\rho_{ij\ell} \dot{\theta} q_i \dot{q}_j - \lambda_{ij\ell} \ddot{\theta} q_i q_j \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{ijk\ell} q_i (\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk\ell} q_i q_j q_k \right] = 0 \tag{3.53}
\end{aligned}$$

aonde:

$$\alpha_\ell = \int_0^1 x \phi_\ell dx \tag{3.54}$$

$$\beta_{i\ell} = \left[\int_0^1 \left(x \phi_i' \phi_\ell + \frac{1}{2} (x^2 - 1) \phi_i'' \phi_\ell \right) dx \right] - 1 \tag{3.55}$$

$$\rho_{ij\ell} = \int_0^1 (2R_{ij}\phi_\ell - 2\phi_i''V_j\phi_\ell - 2\phi_i'\phi_j\phi_\ell) dx \quad (3.56)$$

$$\lambda_{ij\ell} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}R_{ij}\phi_\ell + \phi_i''V_j\phi_\ell + \phi_i'\phi_j\phi_\ell \right) dx \quad (3.57)$$

$$\Lambda_{ijk\ell} = \int_0^1 (S_{jk}\phi_i''\phi_\ell + R_{jk}\phi_i'\phi_\ell) dx \quad (3.58)$$

$$\Gamma_{ijk\ell} = \int_0^1 \left[\frac{3}{1.8780^4} \phi_i'\phi_j''\phi_k''\phi_\ell + \frac{3}{2(1.8780^4)} \phi_i''\phi_j''\phi_k''\phi_\ell + w_j^2 (\phi_i'\phi_j\phi_k'\phi_\ell + W_{ij}\phi_k''\phi_\ell) \right] dx \quad (3.59)$$

mais as condições de contorno :

$$v(0,t) = 0 \quad (3.60)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (3.61)$$

$$v''(1,t) = 0 \quad (3.62)$$

$$v'''(1,t) = 0 \quad (3.63)$$

3.7 - Sistema ideal (estrutura flexível + equações do motor)

Adicionando a equação (3.53) as equações do motor definidas no Apêndice A (equações A.25 e A.26, fazendo $co_5 = 0$ em A.26) e acrescentando o termo de amortecimento $\mu\dot{q}_\ell$ em (3.53), as equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento para a abordagem de sistema ideal tornam-se :

$$\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} = co_1 U$$

$$\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a = 0$$

$$\ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} + \mu \dot{q}_\ell + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \beta_{i\ell} q_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\wp_{ij\ell} \dot{\theta} q_i \dot{q}_j - \lambda_{ij\ell} \ddot{\theta} q_i q_j \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{ijk\ell} q_i \left(\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk\ell} q_i q_j q_k \right] = 0$$

(3.64)

mais as condições de contorno (3.60)-(3.63) e (A.27).

3.8 - Sistema não ideal (estrutura flexível + equações do motor)

Da mesma forma que no item 3.7, adicionando a equação (3.53) as equações do motor definidas no Apêndice A (equações A.25 e A.26) e acrescentando o termo de amortecimento $\mu \dot{q}_\ell$ em (3.53), as equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento para a abordagem de sistema não ideal tornam-se :

$$\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} = co_1 U$$

$$\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) = 0$$

$$\ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} + \mu \dot{q}_\ell + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \beta_{i\ell} q_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\wp_{ij\ell} \dot{\theta} q_i \dot{q}_j - \lambda_{ij\ell} \ddot{\theta} q_i q_j \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{ijk\ell} q_i \left(\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk\ell} q_i q_j q_k \right] = 0$$

(3.65)

mais as condições de contorno (3.60)-(3.63) e (A.27).

3.9- Variáveis espaço-temporais originais e componente longitudinal da deflexão

Conhecendo os resultados de $q_i(t)$ através da integração de (3.64) ou (3.65) e as expressões para ϕ_i através das expressões (2.38 a,b), pode-se obter o comportamento da variável original $v(x,t)$, componente transversal da deflexão, após redimensionalização, através da expressão :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \quad (3.66)$$

que é a mesma expressão (2.32) reproduzida aqui.

Para a determinação do comportamento perturbado da variável $u(x,t)$ deve-se integrar numericamente a equação 3.28b, reproduzida (e reescrita) em (3.67), onde já se consideram conhecidos os comportamentos (numéricos) de $\theta(t)$ e $v(x,t)$.

Em (3.67), as derivadas espaciais de v são repassadas, através da discretização (método dos modos assumidos), para os fatores de forma, $\phi(x)$, também conhecidos. A derivada temporal de v é também obtida numericamente (pela discretização citada anteriormente, através de \dot{q}_1).

A variável $u(x,t)$ deverá, então, ser discretizada como um somatório de um produto de funções temporais por funções espaciais nos mesmos moldes de $v(x,t)$ e para o mesmo fim. Obter-se-á, então, uma solução para a componente temporal de $u(x,t)$. A componente espacial de $u(x,t)$ será uma função modal conhecida.

$$\in \ddot{u} - \left(\frac{1}{1.8780^4} \right) u'' = - \left(\frac{1}{1.8780^4} \right) v' v'' + \left(-\dot{\theta}^2 x - \ddot{\theta} v - 2\dot{\theta} \dot{v} - \left(\frac{1}{1.8780^4} \right) v' v^{iv} \right) \quad (3.67)$$

Esta verificação será reservada para trabalhos futuros.

Os comportamentos das variáveis espaço-temporais $u(x,t)$ (não perturbada) e $v(x,t)$ (perturbada) encontram-se ilustrados no final do Capítulo 8 (item 8.5), para um dos casos simulados numericamente naquele capítulo (perturbado e não perturbado).

Capítulo 4

Problema não perturbado ($\epsilon = 0$): simulações numéricas e solução analítica para amortecimento $O(1)$ – 1 modo

4.1 - Introdução

Dispondo-se de uma dada condição inicial, uma dada condição de contorno e um conjunto específico de parâmetros, pode-se utilizar computadores modernos cada vez mais rápidos e poderosos para efetuar a integração de equações diferenciais lineares e não lineares com razoável acurácia. Contudo, caso o problema em questão exija a obtenção de informações acerca do comportamento das soluções de equações diferenciais não lineares e sua dependência em relação a determinados parâmetros, precisar-se-á repetir os cálculos numéricos para tantos quanto forem os valores dos parâmetros e condições iniciais que se pretende verificar. Mesmo para problemas não lineares simples, a solução numérica pode ser tão complicada a ponto de dificultar o reconhecimento de fenômenos simples e gerais. Por outro lado, métodos analíticos podem facilmente detectar fenômenos gerais, produzindo resultados úteis em forma fechada. Para alguns casos, a combinação de métodos numéricos e analíticos pode estabelecer um procedimento ótimo para a solução de problemas não lineares (Nayfeh, 1993).

Frequentemente o pesquisador se vê envolvido em problemas nos quais um ou mais parâmetros apresentam-se ou muito grandes ou muito pequenos. Tipicamente, estas são situações

difíceis de serem tratadas diretamente por métodos numéricos. Nessas situações, métodos analíticos podem providenciar aproximações acuradas e até mesmo sugerir uma maneira de se aprimorar o procedimento numérico.

Dentre as técnicas analíticas mais utilizadas estão os métodos sistemáticos de perturbação (expansões assintóticas) em termos de pequenos ou grandes parâmetros ou coordenadas. Para que qualquer uma dessas técnicas de perturbação possa ser utilizada, a solução do problema não perturbado (ou de ordem zero, geralmente) deverá ser conhecida (Kevorkian et al., 1981; Nayfeh, 1973; Nayfeh et al., 1979; Nayfeh, 1981; Nayfeh, 1993). Os termos não lineares serão considerados perturbações em torno de uma solução conhecida (linear).

Buscar soluções de equações diferenciais não lineares perturbadas utilizando técnicas de perturbação exige, no mínimo, um conhecimento anterior acerca de solução de equações diferenciais lineares. Nesse sentido, alguns bons livros podem ser citados como referência, entre eles (Boyce et al., 1986 ; Andronov, 1966 ; Davies et al., 1966 ; Keisler, 1986).

As equações perturbadas (ideal e não ideal) foram apresentadas nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho. A solução das equações não perturbadas (ideal e não ideal), condição necessária para a obtenção da solução das equações perturbadas, será objeto deste capítulo.

4.2 - Solução analítica para o sistema não ideal

Em (2.46) ou (3.65), fazendo $\epsilon=0$, obtém-se o mesmo sistema de equações diferenciais lineares descrito pela expressão (4.1) :

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\ \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) &= 0 \\ \ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \mu \dot{q}_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Seja $\ell = n = 1$ (expansão para a variável v considerando apenas o primeiro modo). O sistema de equações (4.1) será reescrito como :

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\ \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \phi_1''(0) Q_1(t) &= 0 \\ \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \mu \dot{q}_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

A solução analítica que se pretende encontrar aqui refere-se ao estado do sistema após o desligamento do motor. Neste caso, em (4.2), faz-se $U = 0$. Seja também $AA = co_5 \phi_1''(0)$. Então, o sistema de equações (4.2) poderá ser finalmente reescrito como :

$$\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - AA q_1 = 0 \quad (4.3b)$$

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \mu \dot{q}_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} = 0 \quad (4.3c)$$

Para que os sistemas de equações diferenciais (2.46) e (3.65) tenham uma solução analítica através de algum método de perturbação (por exemplo, o método das múltiplas escalas), a solução analítica do sistema linear (4.3) deverá ser conhecida (Nayfeh et al., 1979 ; Holmes, 1995 ; Kevorkian, 1981 ; Krauss, 1998).

4.2.1 – A solução analítica para q_1

Multiplicando a equação (4.3c) por $-\frac{1}{\alpha_1}$ e somando a equação (4.3b) resulta :

$$-\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\ddot{q}_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} + AA\right)q_1 - \left(\frac{\mu}{\alpha_1}\right)\dot{q}_1 + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a = 0 \quad (4.4)$$

Isolando i_a em (4.4) :

$$i_a = -\left(\frac{1}{\alpha_1 c o_4}\right) \ddot{q}_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) q_1 - \left(\frac{\mu}{\alpha_1 c o_4}\right) \dot{q}_1 + \left(\frac{c o_3}{c o_4}\right) \dot{\theta} \quad (4.5)$$

Derivando (4.5) em relação ao tempo resulta :

$$\dot{i}_a = -\left(\frac{1}{\alpha_1 c o_4}\right) \dddot{q}_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) \dot{q}_1 - \left(\frac{\mu}{\alpha_1 c o_4}\right) \ddot{q}_1 + \left(\frac{c o_3}{c o_4}\right) \ddot{\theta} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.5) e (4.6) em (4.3a) resulta :

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{\alpha_1 c o_4}\right) \dddot{q}_1 - \left(\frac{c o_1}{\alpha_1 c o_4} + \frac{\mu}{\alpha_1 c o_4}\right) \ddot{q}_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4} + \frac{c o_1 \mu}{\alpha_1 c o_4}\right) \dot{q}_1 - \\ & -\left(\frac{c o_1 w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_1 AA}{c o_4}\right) q_1 + \left(\frac{c o_3}{c o_4}\right) \ddot{\theta} + \left(\frac{c o_1 c o_3}{c o_4} + c o_2\right) \dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Da equação (4.3c) :

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \ddot{q}_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right) q_1 - \left(\frac{\mu}{\alpha_1}\right) \dot{q}_1 \quad (4.8)$$

Integrando (4.8) de 0 a t, obtém-se :

$$\dot{\theta} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \dot{q}_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right) \int_0^t q_1 - \left(\frac{\mu}{\alpha_1}\right) q_1 \quad (4.9)$$

Substituindo (4.8) e (4.9) em (4.7) resulta :

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{\alpha_1 c o_4} \right) \ddot{q}_1 - \left(\frac{c o_1}{\alpha_1 c o_4} + \frac{\mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_3}{\alpha_1 c o_4} \right) \ddot{q}_1 - \\
& - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{A A}{c o_4} + \frac{c o_1 \mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_3 \mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_1 c o_3}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_2}{\alpha_1} \right) \dot{q}_1 - \\
& - \left(\frac{c o_1 w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_1 A A}{c o_4} + \frac{c o_3 w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_1 c o_3 \mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_2 \mu}{\alpha_1} \right) q_1 - \\
& - \left(\frac{c o_1 c o_3 w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_2 w_1^2}{\alpha_1} \right) \int_0^t q_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Derivando (4.10) em relação ao tempo e multiplicando a mesma equação por (-1) resulta :

$$A \ddot{\ddot{q}}_1 + B \ddot{\ddot{q}}_1 + C \ddot{\ddot{q}}_1 + D \dot{q}_1 + E q_1 = 0 \tag{4.11}$$

aonde:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\alpha_1 c o_4} \\
B &= \frac{c o_1}{\alpha_1 c o_4} + \frac{\mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_3}{\alpha_1 c o_4} \\
C &= \frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{A A}{c o_4} + \frac{c o_1 \mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_3 \mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_1 c o_3}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_2}{\alpha_1} \\
D &= \frac{c o_1 w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_1 A A}{c o_4} + \frac{c o_3 w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_1 c o_3 \mu}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_2 \mu}{\alpha_1} \\
E &= \frac{c o_1 c o_3 w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{c o_2 w_1^2}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

A equação (4.11) representa uma equação diferencial ordinária a coeficientes constantes de quarta ordem somente na variável q_1 .

A equação característica associada a (4.11) será dada por :

$$A r^4 + B r^3 + C r^2 + D r + E = 0 \quad (4.12)$$

A solução analítica de (4.12), apesar de obtida facilmente através de um software como o *Mathematica*^R, e extremamente complexa para se poder trabalhar com a mesma. A melhor opção será resolver (4.12) para coeficientes conhecidos (casos específicos). Algumas considerações podem, no entanto, ser feitas.

Se (4.12) possuir apenas raízes reais e não iguais, a solução de (4.11) será da forma :

$$q_1 = C_1 e^{r_1 a t} + C_2 e^{r_2 a t} + C_3 e^{r_3 a t} + C_4 e^{r_4 a t} \quad (4.13)$$

Se (4.12) possuir apenas raízes complexas, a solução de (4.11) será da forma :

$$q_1 = C_1 e^{r_1 a t} \cos(r_{1b} t) + C_2 e^{r_2 a t} \text{sen}(r_{2b} t) + C_3 e^{r_3 a t} \cos(r_{3b} t) + C_4 e^{r_4 a t} \sin(r_{4b} t) \quad (4.14)$$

aonde :

$$\begin{aligned} r_i &= r_{ia} + i r_{ib} \rightarrow e^{r_i a t} \cos(r_{ib} t) \\ r_i &= r_{ia} - i r_{ib} \rightarrow e^{r_i a t} \sin(r_{ib} t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

O parâmetro r_i representa cada uma das raízes complexas de (4.12).

As constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 em (4.13) e (4.14) deverão ser determinados através das condições iniciais do sistema. A análise em questão, conforme mencionado anteriormente, relaciona-se ao estado do sistema após o desligamento do motor. Seja o tempo inicial representado por t_r .

A solução numérica e a solução analítica deverão caminhar juntas a partir deste ponto. O tempo a partir do qual a voltagem nos terminais do motor, U , torna-se zero é conhecido, assim

como, através da simulação numérica conhece-se $q_1(t_r)$, $\dot{q}_1(t_r)$, $i_a(t_r)$, $\theta(t_r)$ e $\dot{\theta}(t_r)$. Assim, tem-se que :

$$q_1(t_r) = q_{1r} \quad (4.16)$$

$$\dot{q}_1(t_r) = \dot{q}_{1r} \quad (4.17)$$

$$i_a(t_r) = i_{ar} \quad (4.18)$$

$$\theta(t_r) = \theta_r \quad (4.19)$$

$$\dot{\theta}(t_r) = \dot{\theta}_r \quad (4.20)$$

Sejam as equações (4.3) em $t = t_r$:

$$\dot{i}_a(t_r) + co_1 i_a(t_r) + co_2 \dot{\theta}(t_r) = 0 \quad (4.21a)$$

$$\ddot{\theta}(t_r) + co_3 \dot{\theta}(t_r) - co_4 i_a(t_r) - AA q_1(t_r) = 0 \quad (4.21b)$$

$$\ddot{q}_1(t_r) + w_1^2 q_1(t_r) + \mu \dot{q}_1(t_r) + \alpha_1 \ddot{\theta}(t_r) = 0 \quad (4.21c)$$

Utilizando (4.16),(4.18) e (4.20) em (4.21b) resulta :

$$\ddot{\theta}(t_r) = -co_3 \dot{\theta}_r + co_4 i_{ar} + AA q_{1r} = \ddot{\theta}_r \quad (4.22)$$

Utilizando (4.16),(4.17) e (4.22) em (4.21c) resulta :

$$\ddot{q}_1(t_r) = -w_1^2 q_{1r} - \mu \dot{q}_{1r} - \alpha_1 \ddot{\theta}_r = \ddot{q}_{1r} \quad (4.23)$$

Utilizando (4.18) e (4.20) em (4.21a) resulta :

$$\dot{i}_a(t_r) = -co_1 i_{ar} - co_2 \dot{\theta}_r = \dot{i}_{ar} \quad (4.24)$$

Derivando (4.21b) e utilizando (4.17),(4.22) e (4.24) resulta :

$$\ddot{\theta}(t_r) = -c_3 \ddot{\theta}_r + c_4 \dot{i}_{ar} + AA \dot{q}_{1r} = \ddot{\theta}_r \quad (4.25)$$

Derivando (4.21c) e utilizando (4.17),(4.23) e (4.25) resulta :

$$\ddot{q}_1(t_r) = -w_1^2 \dot{q}_{1r} - \mu \ddot{q}_{1r} - \alpha_1 \ddot{\theta}_r = \ddot{q}_{1r} \quad (4.26)$$

Assim, o seguinte sistema algébrico pode ser construído utilizando (4.13) ou (4.14) e suas derivadas em $t = t_r$:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{1r} \\ \dot{q}_{1r} \\ \ddot{q}_{1r} \\ \ddot{q}_{1r} \end{Bmatrix}$$

(4.27)

aonde, para (4.13) :

$$A_1 = e^{r_1 a t_r}$$

$$A_2 = e^{r_2 a t_r}$$

$$A_3 = e^{r_3 a t_r}$$

$$A_4 = e^{r_4 a t_r}$$

$$A_5 = r_{1a} e^{r_1 a t_r}$$

$$A_6 = r_{2a} e^{r_2 a t_r}$$

$$A_7 = r_{3a} e^{r_3 a t_r}$$

$$A_8 = r_{4a} e^{r_{4a} t_r}$$

$$A_9 = r_{1a}^2 e^{r_{1a} t_r}$$

$$A_{10} = r_{2a}^2 e^{r_{2a} t_r}$$

$$A_{11} = r_{3a}^2 e^{r_{3a} t_r}$$

$$A_{12} = r_{4a}^2 e^{r_{4a} t_r}$$

$$A_{13} = r_{1a}^3 e^{r_{1a} t_r}$$

$$A_{14} = r_{2a}^3 e^{r_{2a} t_r}$$

$$A_{15} = r_{3a}^3 e^{r_{3a} t_r}$$

$$A_{16} = r_{4a}^3 e^{r_{4a} t_r}$$

e, para (4.14) :

$$A_1 = e^{r_{1a} t_r} \cos(r_{1b} t_r)$$

$$A_2 = e^{r_{2a} t_r} \text{sen}(r_{2b} t_r)$$

$$A_3 = e^{r_{3a} t_r} \cos(r_{3b} t_r)$$

$$A_4 = e^{r_{4a} t_r} \sin(r_{4b} t_r)$$

$$A_5 = r_{1a} e^{r_{1a} t_r} \cos(r_{1b} t_r) - r_{1b} e^{r_{1a} t_r} \sin(r_{1b} t_r)$$

$$A_6 = r_{2a} e^{r_{2a} t_r} \text{sen}(r_{2b} t_r) + r_{2b} e^{r_{2a} t_r} \cos(r_{2b} t_r)$$

$$A_7 = r_{3a} e^{r_{3a} t_r} \cos(r_{3b} t_r) - r_{3b} e^{r_{3a} t_r} \sin(r_{3b} t_r)$$

$$A_8 = r_{4a} e^{r_{4a} t_r} \text{sen}(r_{4b} t_r) + r_{4b} e^{r_{4a} t_r} \cos(r_{4b} t_r)$$

$$A_9 = (r_{1a}^2 - r_{1b}^2) e^{r_{1a} t_r} \cos(r_{1b} t_r) - (2 r_{1a} r_{1b}) e^{r_{1a} t_r} \sin(r_{1b} t_r)$$

$$A_{10} = (r_{2a}^2 - r_{2b}^2) e^{r_{2a} t_r} \text{sen}(r_{2b} t_r) + (2 r_{2a} r_{2b}) e^{r_{2a} t_r} \cos(r_{2b} t_r)$$

$$A_{11} = (r_{3a}^2 - r_{3b}^2) e^{r_{3a} t_r} \cos(r_{3b} t_r) - (2 r_{3a} r_{3b}) e^{r_{3a} t_r} \sin(r_{3b} t_r)$$

$$A_{12} = (r_{4a}^2 - r_{4b}^2) e^{r_{4a} t_r} \text{sen}(r_{4b} t_r) + (2 r_{4a} r_{4b}) e^{r_{4a} t_r} \cos(r_{4b} t_r)$$

$$A_{13} = (r_{1a}^3 - 3 r_{1a} r_{1b}^2) e^{r_{1a} t_r} \cos(r_{1b} t_r) + (r_{1b}^3 - 3 r_{1a}^2 r_{1b}) e^{r_{1a} t_r} \text{sen}(r_{1b} t_r)$$

$$A_{14} = (r_{2a}^3 - 3 r_{2a} r_{2b}^2) e^{r_{2a} t_r} \text{sen}(r_{2b} t_r) + (-r_{2b}^3 + 3 r_{2a}^2 r_{2b}) e^{r_{2a} t_r} \cos(r_{2b} t_r)$$

$$A_{15} = (r_{3a}^3 - 3 r_{3a} r_{3b}^2) e^{r_{3a} t_r} \cos(r_{3b} t_r) + (r_{3b}^3 - 3 r_{3a}^2 r_{3b}) e^{r_{3a} t_r} \sin(r_{3b} t_r)$$

$$A_{16} = (r_{4a}^3 - 3 r_{4a} r_{4b}^2) e^{r_{4a} t_r} \text{sen}(r_{4b} t_r) + (-r_{4b}^3 + 3 r_{4a}^2 r_{4b}) e^{r_{4a} t_r} \cos(r_{4b} t_r)$$

Resolvendo (4.27), as constantes C_i serão conhecidas e as soluções (4.13) e (4.14) serão bem definidas.

Porém, a equação para cada uma das variáveis q_ℓ , de acordo com (4.1), e de ordem 2. A solução para q_ℓ , portanto, deverá conter duas raízes reais ou uma raiz complexa. Desta forma, as constantes C_1 e C_2 (por exemplo) em (4.13) não possuem significado físico. Com efeito, todas as simulações numéricas efetuadas mostrou que as duas primeiras raízes da equação característica de (4.13) são negativas e suficientemente grandes para fazer $C_1 = C_2 = 0$. Assim, (4.13) e (4.14) podem finalmente ser reescritas como :

$$q_1 = C_3 e^{r_{3a} t} + C_4 e^{r_{4a} t} \quad (4.28)$$

$$q_1 = C_3 e^{r_{3a} t} \cos(r_{3b} t) + C_4 e^{r_{4a} t} \sin(r_{4b} t) \quad (4.29)$$

O sistema (4.27) reduz-se a :

$$\begin{bmatrix} A_3 & A_4 \\ A_7 & A_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{1r} \\ \dot{q}_{1r} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Resolvendo (4.31) obtém-se :

$$C_3 = \frac{A_8 q_{1r} - A_4 \dot{q}_{1r}}{A_3 A_8 - A_4 A_7} \quad (4.32a)$$

$$C_4 = \frac{-A_7 A_8 q_{1r} + (A_3 A_8 - 2 A_4 A_7) \dot{q}_{1r}}{A_3 A_8^2 - A_4 A_7 A_8} \quad (4.32b)$$

Todas as constantes que aparecem em (4.32) são as mesmas já definidas anteriormente.

Em (4.28), caso as duas raízes da equação característica sejam reais e iguais, tem-se :

$$q_1 = C_5 e^{r_{3a} t}$$

aonde $C_5 = C_3 + C_4$.

Cale relembrar nesta altura que, de acordo com (4.15), em (4.29) tem-se que :

$$\begin{aligned} r_{3a} &= r_{4a} \\ r_{3b} &= r_{4b} \end{aligned} \quad (4.33)$$

ou seja, (4.29) pode ser reescrita como :

$$q_1 = C_3 e^{r_{3a} t} \cos(r_{3b} t) + C_4 e^{r_{3a} t} \sin(r_{3b} t)$$

4.2.2 – A solução analítica para θ

Integrando (4.9) em relação ao tempo tem-se :

$$\theta = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) q_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right) \int_0^t \int_0^t q_1 dt dt - \left(\frac{\mu}{\alpha_1}\right) \int_0^t q_1 dt \quad (4.34)$$

Com a expressão para q_1 obtida no item anterior (4.2.1), pode-se encontrar $\int_0^t \int_0^t q_1 dt dt$

e $\int_0^t q_1 dt$.

Utilizando a expressão de q_1 obtida em (4.13), obtém-se :

$$\theta = z [G_1 e^{r_{1a}t} + G_2 e^{r_{2a}t} + G_3 e^{r_{3a}t} + G_4 e^{r_{4a}t}] + M \quad (4.35)$$

aonde :

$$G_1 = -\frac{C_1}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_1}{r_{1a}^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_1}{r_{1a}} \right)$$

$$G_2 = -\frac{C_2}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_2}{r_{2a}^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_2}{r_{2a}} \right)$$

$$G_3 = -\frac{C_3}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_3}{r_{3a}^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_3}{r_{3a}} \right)$$

$$G_4 = -\frac{C_4}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_4}{r_{4a}^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_4}{r_{4a}} \right)$$

Utilizando a expressão de q_1 obtida em (4.14), aonde :

$$\int_0^t \alpha e^{\beta t} \cos(\gamma t) dt = \frac{\alpha}{\beta^2 + \gamma^2} \left[\beta e^{\beta t} \cos(\gamma t) + \gamma e^{\beta t} \text{sen}(\gamma t) \right]$$

$$\int_0^t \alpha e^{\beta t} \text{sen}(\gamma t) dt = \frac{\alpha}{\beta^2 + \gamma^2} \left[\beta e^{\beta t} \text{sen}(\gamma t) - \gamma e^{\beta t} \cos(\gamma t) \right]$$

obtem-se :

$$\theta = z \left[E_1 e^{r_{1a} t} \cos(r_{1b} t) + E_2 e^{r_{1a} t} \text{sen}(r_{1b} t) + E_3 e^{r_{2a} t} \cos(r_{2b} t) + E_4 e^{r_{2a} t} \sin(r_{2b} t) + \right. \\ \left. + E_5 e^{r_{3a} t} \cos(r_{3b} t) + E_6 e^{r_{3a} t} \text{sen}(r_{3b} t) + E_7 e^{r_{4a} t} \cos(r_{4b} t) + E_8 e^{r_{4a} t} \sin(r_{4b} t) \right] + M$$

(4.36)

aonde :

$$E_1 = -\frac{C_1}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_1 r_{1a}^2 - C_1 r_{1b}^2}{(r_{1a}^2 + r_{1b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_1 r_{1a}}{r_{1a}^2 + r_{1b}^2} \right)$$

$$E_2 = -\left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{2 C_1 r_{1a} r_{1b}}{(r_{1a}^2 + r_{1b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_1 r_{1b}}{r_{1a}^2 + r_{1b}^2} \right)$$

$$E_3 = \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{2 C_2 r_{2a} r_{2b}}{(r_{2a}^2 + r_{2b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_2 r_{2b}}{r_{2a}^2 + r_{2b}^2} \right)$$

$$E_4 = -\frac{C_2}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_2 r_{2a}^2 - C_2 r_{2b}^2}{(r_{2a}^2 + r_{2b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_2 r_{2a}}{r_{2a}^2 + r_{2b}^2} \right)$$

$$E_5 = -\frac{C_3}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_3 r_{3a}^2 - C_3 r_{3b}^2}{(r_{3a}^2 + r_{3b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_3 r_{3a}}{r_{3a}^2 + r_{3b}^2} \right)$$

$$E_6 = -\left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{2 C_3 r_{3a} r_{3b}}{(r_{3a}^2 + r_{3b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_3 r_{3b}}{r_{3a}^2 + r_{3b}^2} \right)$$

$$E_7 = \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{2 C_4 r_{4a} r_{4b}}{(r_{4a}^2 + r_{4b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_4 r_{4b}}{r_{4a}^2 + r_{4b}^2} \right)$$

$$E_8 = -\frac{C_4}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_4 r_{4a}^2 - C_4 r_{4b}^2}{(r_{4a}^2 + r_{4b}^2)^2} \right) - \left(\frac{\mu}{\alpha_1} \right) \left(\frac{C_4 r_{4a}}{r_{4a}^2 + r_{4b}^2} \right)$$

O parâmetro z que aparece em (4.35) e (4.36) é necessário para o acerto da condição inicial para θ analítico, que deve ser a mesma condição inicial (a partir do instante em que U torna-se zero) encontrada para a solução numérica. Ou seja :

$$\theta_{\text{numerico}}(t_r) = z\theta_{\text{analitico}}(t_r)$$

O parâmetro M que aparece em (4.35) e (4.36) representa uma constante necessária para que a solução analítica oscile em torno do mesmo valor em torno do qual a solução numérica oscila (novamente a partir do instante em que U torna-se zero). Este parâmetro apenas desloca o gráfico da solução analítica.

O parâmetro M é obtido através da média dos valores de θ_{numerico} compreendidos entre $\frac{t_{\text{total}}}{2}$ e t_{total} . Este parâmetro é necessário apenas para fins de comparação entre as duas soluções (analítica e numérica).

Assim como para a variável q_ℓ , a equação dinâmica que define a variável θ também é de ordem 2. Fazendo $C_1 = C_2 = 0$, tem-se que $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = G_1 = G_2 = 0$. Então, (4.35) e (4.36) podem ser reescritas como :

$$\theta = z [G_3 e^{r_{3a}t} + G_4 e^{r_{4a}t}] + M \quad (4.37)$$

$$\theta = z [E_5 e^{r_{3a}t} \cos(r_{3b}t) + E_6 e^{r_{3a}t} \text{sen}(r_{3b}t) + E_7 e^{r_{4a}t} \cos(r_{4b}t) + E_8 e^{r_{4a}t} \sin(r_{4b}t)] + M \quad (4.38)$$

Utilizando as relações (4.33), a solução (4.38) pode ser reescrita de forma ainda mais simples :

$$\theta = E_9 e^{r_{3a}t} \cos(r_{3b}t) + E_{10} e^{r_{3a}t} \text{sen}(r_{3b}t) + M \quad (4.39)$$

aonde: $E_9 = z(E_5 + E_7)$ e $E_{10} = z(E_6 + E_8)$.

Em (4.37), caso as duas raízes da equação característica sejam reais e iguais, tem-se :

$$\theta = G_5 e^{r_{3a}t} + M$$

aonde $G_5 = z(G_3 + G_4)$.

4.2.3 – A solução analítica para i_a

Seja a equação (4.5) reproduzida a seguir :

$$i_a = -\left(\frac{1}{\alpha_1 c o_4}\right) \ddot{q}_1 - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) q_1 - \left(\frac{\mu}{\alpha_1 c o_4}\right) \dot{q}_1 + \left(\frac{c o_3}{c o_4}\right) \dot{\theta}$$

Substituindo q_l de acordo com (4.13) e suas derivadas primeira e segunda e a derivada de θ , definido em (4.35)), a equação (4.5) torna-se :

$$i_a = H_1 e^{r_{1a}t} + H_2 e^{r_{2a}t} + H_3 e^{r_{3a}t} + H_4 e^{r_{4a}t} \quad (4.40)$$

aonde :

$$H_1 = -\left(\frac{C_1 r_{1a}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_1 - \left(\frac{\mu C_1 r_{1a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 G_1 r_{1a}}{c o_4}\right)$$

$$H_2 = -\left(\frac{C_2 r_{2a}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_2 - \left(\frac{\mu C_2 r_{2a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 G_2 r_{2a}}{c o_4}\right)$$

$$H_3 = -\left(\frac{C_3 r_{3a}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_3 - \left(\frac{\mu C_3 r_{3a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 G_3 r_{3a}}{c o_4}\right)$$

$$H_4 = -\left(\frac{C_4 r_{4a}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_4 - \left(\frac{\mu C_4 r_{4a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 G_4 r_{4a}}{c o_4}\right)$$

Substituindo q_l de acordo com (4.14) e suas derivadas primeira e segunda e a derivada de θ , definido em (4.36)), a equação (4.5) torna-se :

$$\begin{aligned}
i_a = & F_1 e^{r_{1a}t} \cos(r_{1b}t) + F_2 e^{r_{1a}t} \text{sen}(r_{1b}t) + F_3 e^{r_{2a}t} \cos(r_{2b}t) + F_4 e^{r_{2a}t} \sin(r_{2b}t) + \\
& + F_5 e^{r_{3a}t} \cos(r_{3b}t) + F_6 e^{r_{3a}t} \text{sen}(r_{3b}t) + F_7 e^{r_{4a}t} \cos(r_{4b}t) + F_8 e^{r_{4a}t} \sin(r_{4b}t)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

aonde :

$$\begin{aligned}
F_1 = & -\left(\frac{C_1 r_{1a}^2 - C_1 r_{1b}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_1 - \left(\frac{\mu C_1 r_{1a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (E_1 r_{1a} + E_2 r_{1b})}{c o_4}\right) \\
F_2 = & \left(\frac{2 C_1 r_{1a} r_{1b}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{\mu C_1 r_{1b}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (-E_1 r_{1b} + E_2 r_{1a})}{c o_4}\right) \\
F_3 = & -\left(\frac{2 C_2 r_{2a} r_{2b}}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{\mu C_2 r_{2b}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (E_3 r_{2a} + E_4 r_{2b})}{c o_4}\right) \\
F_4 = & -\left(\frac{C_2 r_{2a}^2 - C_2 r_{2b}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_2 - \left(\frac{\mu C_2 r_{2a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (-E_3 r_{2b} + E_4 r_{2a})}{c o_4}\right) \\
F_5 = & -\left(\frac{C_3 r_{3a}^2 - C_3 r_{3b}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_3 - \left(\frac{\mu C_3 r_{3a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (E_5 r_{3a} + E_6 r_{3b})}{c o_4}\right) \\
F_6 = & \left(\frac{2 C_3 r_{3a} r_{3b}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{\mu C_3 r_{3b}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (-E_5 r_{3b} + E_6 r_{3a})}{c o_4}\right) \\
F_7 = & -\left(\frac{2 C_4 r_{4a} r_{4b}}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{\mu C_4 r_{4b}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (E_7 r_{4a} + E_8 r_{4b})}{c o_4}\right) \\
F_8 = & -\left(\frac{C_4 r_{4a}^2 - C_4 r_{4b}^2}{\alpha_1 c o_4}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 c o_4} + \frac{AA}{c o_4}\right) C_4 - \left(\frac{\mu C_4 r_{4a}}{\alpha_1 c o_4}\right) + \left(\frac{c o_3 (-E_7 r_{4b} + E_8 r_{4a})}{c o_4}\right)
\end{aligned}$$

De acordo com as considerações feitas anteriormente, as soluções (4.40) e (4.41) são reescritas, respectivamente, como :

$$i_a = H_3 e^{r_{3a}t} + H_4 e^{r_{4a}t} \tag{4.42}$$

$$i_a = F_5 e^{r_{3a} t} \cos(r_{3b} t) + F_6 e^{r_{3a} t} \text{sen}(r_{3b} t) + F_7 e^{r_{4a} t} \cos(r_{4b} t) + F_8 e^{r_{4a} t} \sin(r_{4b} t) \quad (4.43)$$

Utilizando as relações (4.33), a solução (4.43) pode ser reescrita de forma ainda mais simples :

$$i_a = F_9 e^{r_{3a} t} \cos(r_{3b} t) + F_{10} e^{r_{3a} t} \text{sen}(r_{3b} t) \quad (4.44)$$

aonde: $F_9 = F_5 + F_7$ e $F_{10} = F_6 + F_8$.

Em (4.42), caso as duas raízes da equação característica sejam reais e iguais, tem-se :

$$i_a = H_5 e^{r_{3a} t}$$

aonde $H_5 = H_3 + H_4$.

4.3 - Solução analítica para o sistema ideal

Para o caso ideal, a partir do instante em que a voltagem nos terminais do motor, U , torna-se zero, tem-se : $\theta = \text{constante}$, $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$. A solução para θ e i_a tornam-se irrelevantes e podem ser prescritas de acordo com algum perfil desejável. A equação que define o comportamento da variável q_ℓ torna-se :

$$\ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \mu \dot{q}_\ell = 0 \quad (4.45)$$

ou, considerando apenas o primeiro modo :

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \mu \dot{q}_1 = 0 \quad (4.46)$$

A equação característica associada a (4.46) é dada por (Boyce et al., 1986 ; Andronov, 1966 ; Davies et al., 1966):

$$r^2 + \mu r + w_1^2 = 0 \quad (4.47)$$

A solução de (4.47) é :

$$r = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4w_1^2}}{2} \quad (4.48)$$

Em (4.48), como $w_1 = 1$ e μ^2 será sempre menor que 4, o termo dentro da raiz será sempre menor que zero. Portanto, as raízes de (4.48) serão sempre complexas. Sejam, então:

$$r_{1a} = \frac{-\mu}{2}$$

$$r_{1b} = \frac{\sqrt{\mu^2 - 4w_1^2}}{2}$$

A solução de (4.46) é :

$$q_1 = C_1 e^{r_{1a} t} \cos(r_{1b} t) + C_2 e^{r_{1a} t} \sin(r_{1b} t) \quad (4.49)$$

e as constantes C_i em (4.49) deverão ser encontradas da mesma forma que em 4.2.1.

4.4 - Solução numérica

A fim de que a solução numérica pudesse ser integrada através de um algoritmo previsor-corretor, algumas alterações foram efetuadas na forma de estado do sistema de equações diferenciais (4.3), reproduzido a seguir :

$$\dot{i}_a + c o_1 i_a + c o_2 \dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + c o_3 \dot{\theta} - c o_4 i_a - A A q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \mu \dot{q}_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} = 0$$

a fim de se eliminar $\ddot{\theta}$ da terceira equação.

O sistema (4.3), na forma de estado, torna-se :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -w_1^2 x_1 - \mu x_2 - \alpha_1 \dot{x}_8 \\
 \dot{x}_7 &= x_8 \\
 \dot{x}_8 &= -cO_3 x_8 + cO_4 x_9 + AAx_1 \\
 \dot{x}_9 &= -cO_1 x_9 - cO_2 x_8
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

aonde : $x_1 = Q_1$; $x_2 = \dot{Q}_1$; $x_7 = \theta$; $x_8 = \dot{\theta}$ e $x_9 = i_a$.

Que pode ser reescrito como :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 + \alpha_1 \dot{x}_8 &= -w_1^2 x_1 - \mu x_2 \\
 \dot{x}_7 &= x_8 \\
 \dot{x}_8 &= -cO_3 x_8 + cO_4 x_9 + AAx_1 \\
 \dot{x}_9 &= -cO_1 x_9 - cO_2 x_8
 \end{aligned}$$

ou, em forma matricial :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -w_1^2 x_1 - \mu x_2 \\ x_8 \\ -cO_3 x_8 + cO_4 x_9 + AAx_1 \\ -cO_1 x_9 - cO_2 x_8 \end{bmatrix}$$

(4.51)

Seja :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos os lados de (4.51) por R^{-1} , resulta :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ -w_1^2 x_1 - \mu x_2 \\ x_8 \\ -co_3 x_8 + co_4 x_9 + AAx_1 \\ -co_1 x_9 - co_2 x_8 \end{Bmatrix}$$

Ou :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -w_1^2 x_1 - \mu x_2 - \alpha_1 (-co_3 x_8 + co_4 x_9 + AAx_1) \\ \dot{x}_7 &= x_8 \\ \dot{x}_8 &= -co_3 x_8 + co_4 x_9 + AAx_1 \\ \dot{x}_9 &= -co_1 x_9 - co_2 x_8 \end{aligned} \tag{4.52}$$

O sistema (4.52) representa o sistema de equações diferenciais ordinárias integrado para se obter a solução numérica do sistema linear associado ($\epsilon = 0$) as equações governantes do movimento vistas nos capítulos 2 e 3.

4.5 - Solução analítica X solução numérica : resultados

Dois casos são estudados, aonde os dados do motor e os parâmetros de cada sistema em análise são :

$$\begin{aligned} \text{Motor : } C_m &= 0.004629000 ; K_t = 0.052814000 ; K_b = 0.052814000 ; \\ L_m &= 0.003100000 ; R_a = 1.914952000 ; C_m = 0.004629000 ; \text{IMOTOR} = \\ &0.000065400 ; I_{\text{eixo}} = 0.000036900 ; \end{aligned}$$

Caso 1 : $L = 1.5 \text{ m}$; $U_{\text{max}} = 0.2 \text{ V}$; $N_g = 1$; altura = 0.015 m ; base = 0.0005 m ;
 $E = 0.7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\mu = 0.01 \text{ Kg/ms}$; tempo de excitação $t = 0.5 \text{ s}$ (perfil 1 e perfil 2).

Caso 2 : $L = 0.3 \text{ m}$; $U_{\text{max}} = 0.2 \text{ V}$; $N_g = 1$; altura = 0.0050 m ; base = 0.0005 m ;
 $E = 0.7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\mu = 0.01 \text{ Kg/ms}$; tempo de excitação $t = 0.5 \text{ s}$ (perfil 2).

Os comentários das simulações são feitos no item 4.5.

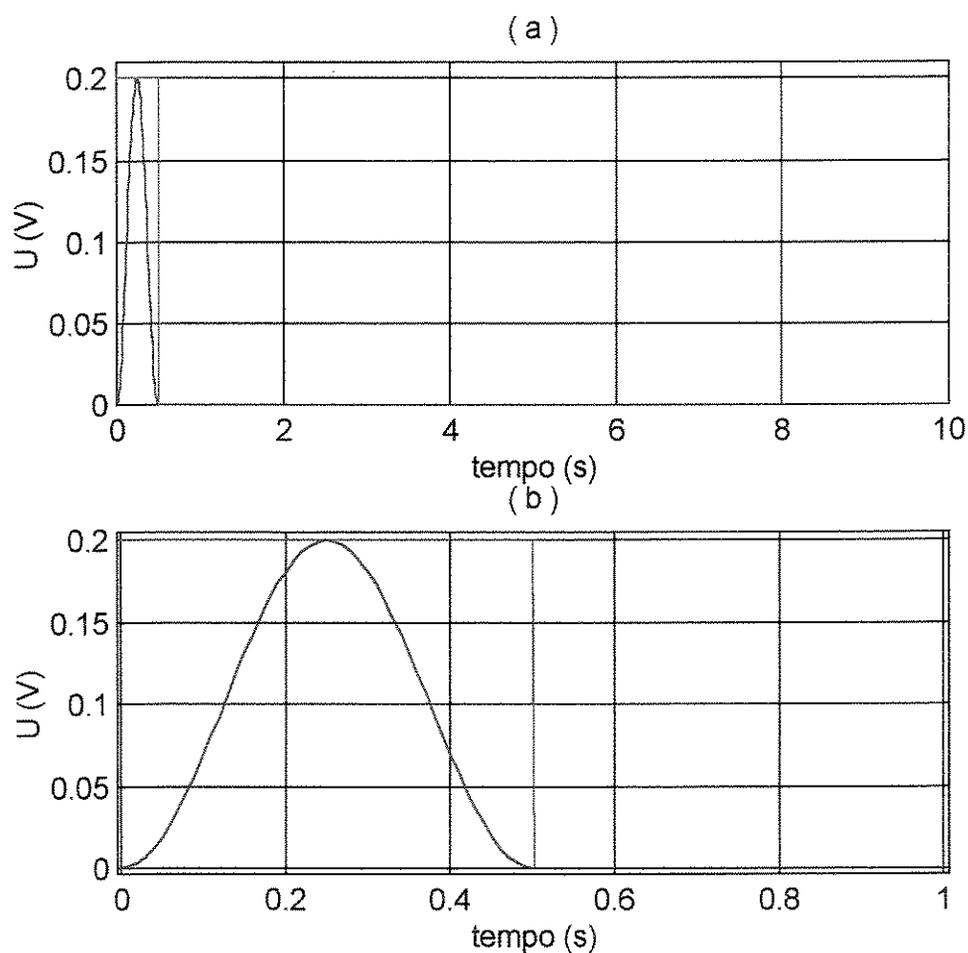


Figura 4.1 - Perfil de excitação : perfil 1 (linha vermelha) ; perfil 2 (linha azul) -
(a) tempo total ; (b) zoom de (a)

4.5.1 - Caso 1

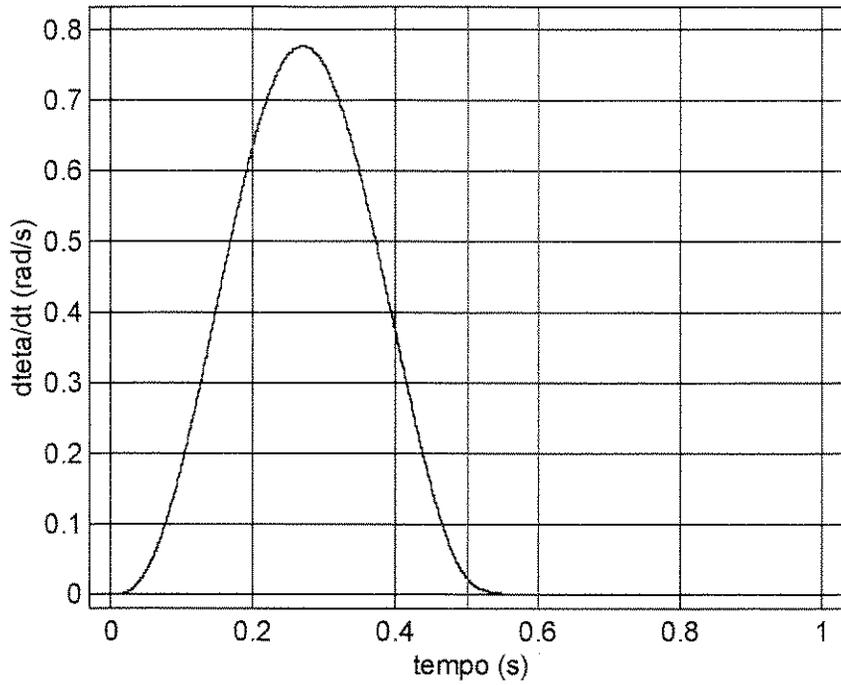


Figura 4.2 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- ideal.

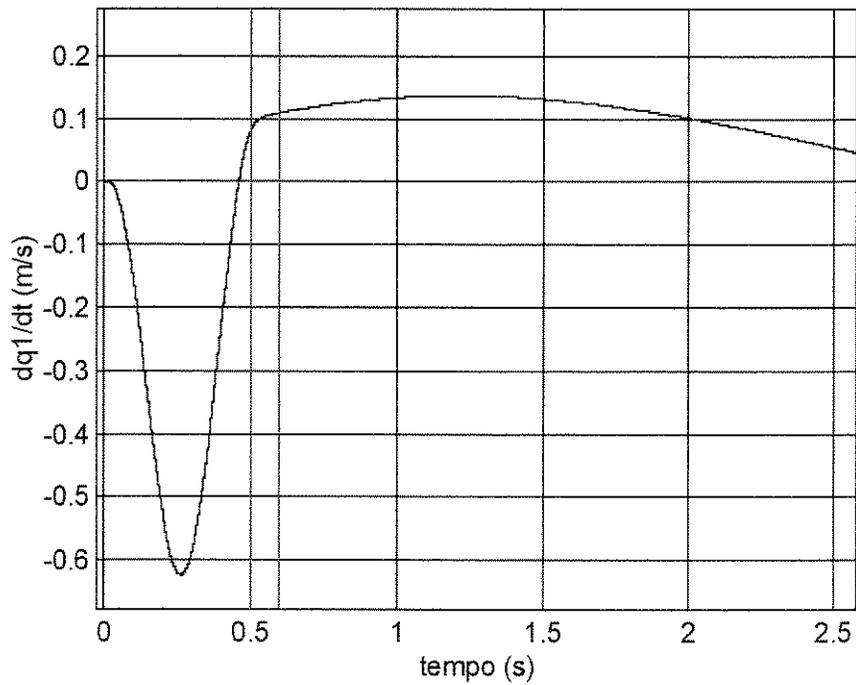


Figura 4.3 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1 - ideal.

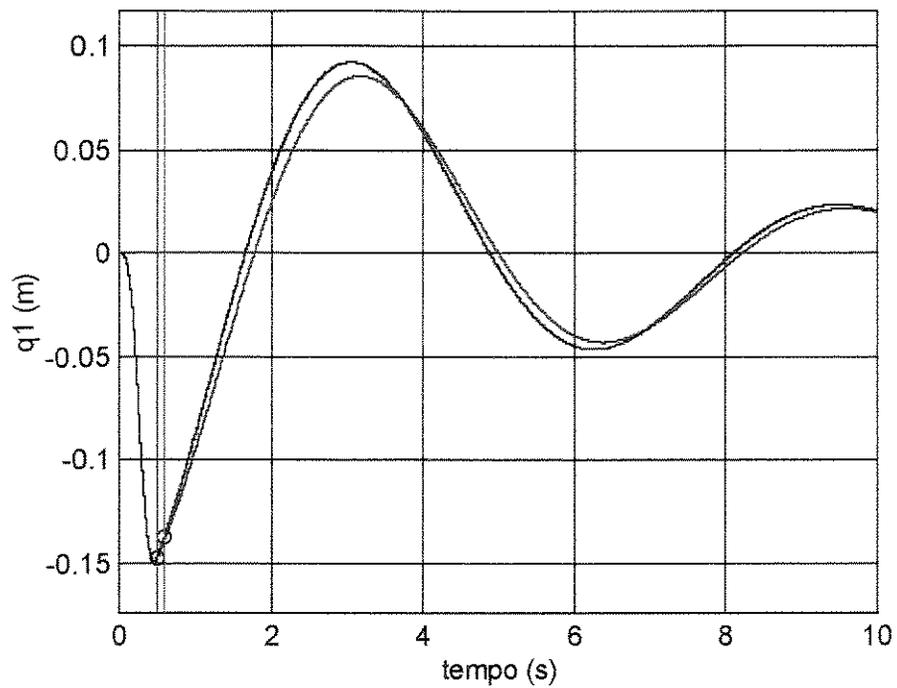


Figura 4.4 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - ideal.

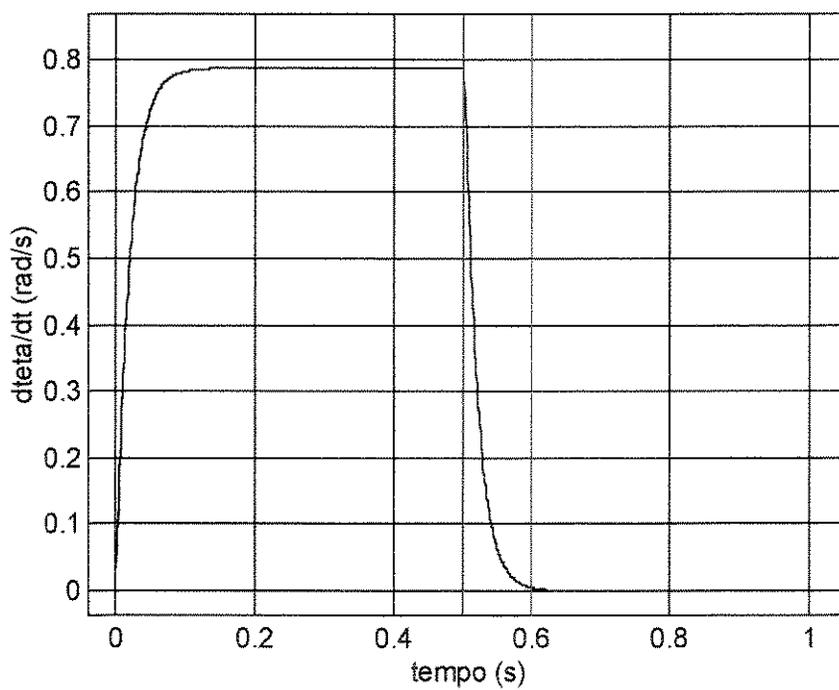


Figura 4.5 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - ideal.

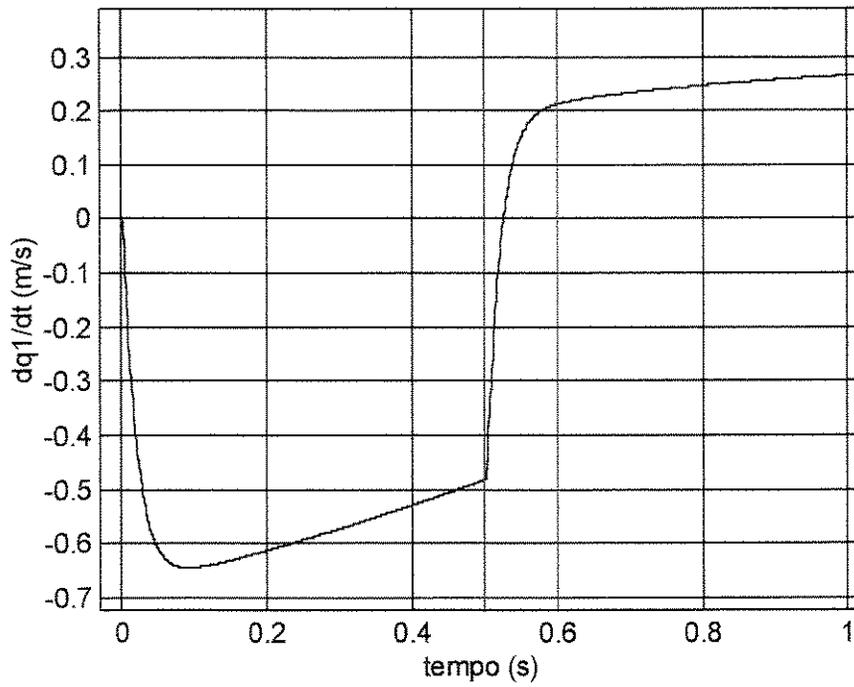


Figura 4.6 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - ideal.

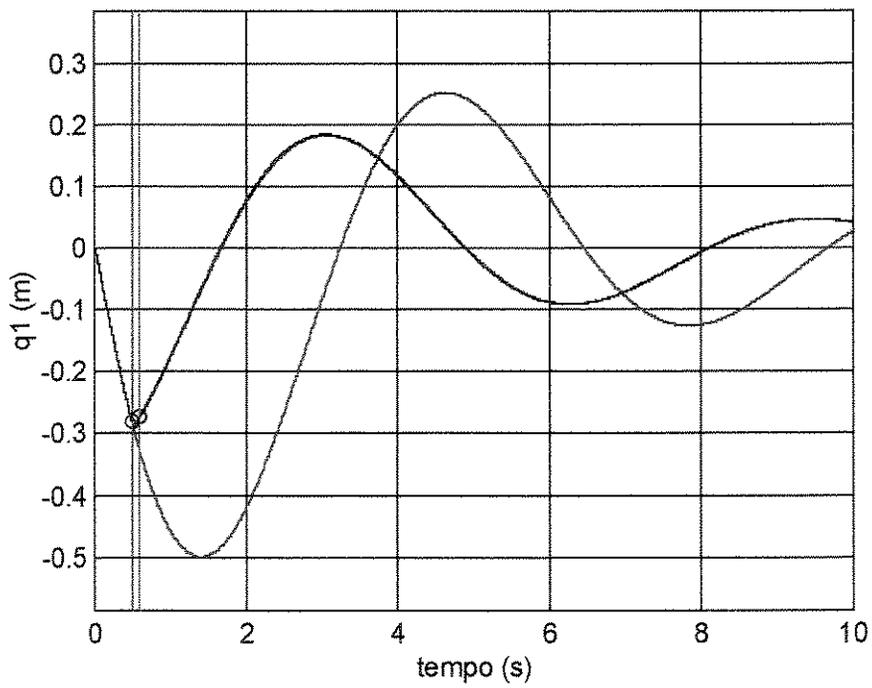


Figura 4.7 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 2 - ideal.

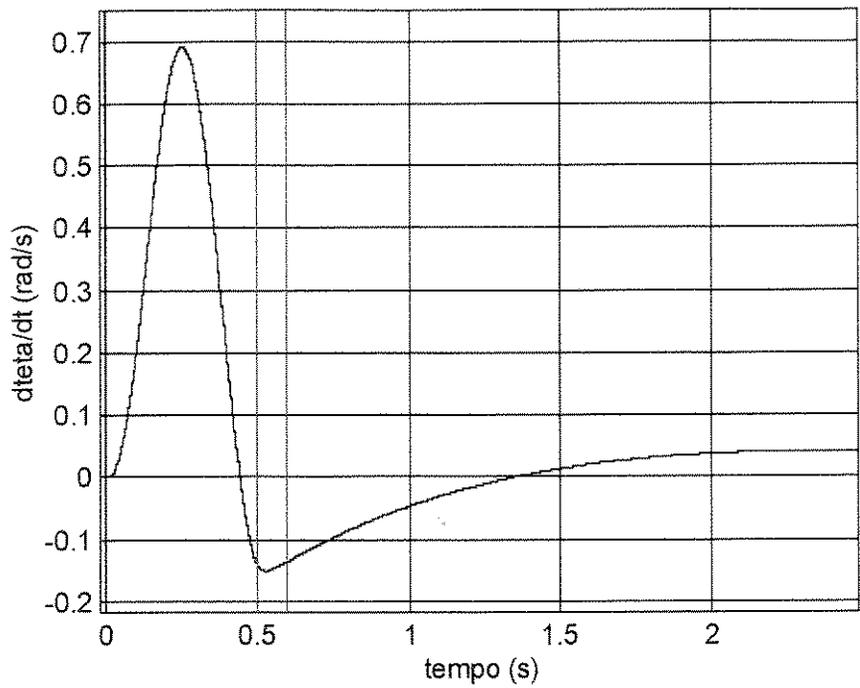


Figura 4.8 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- não ideal.

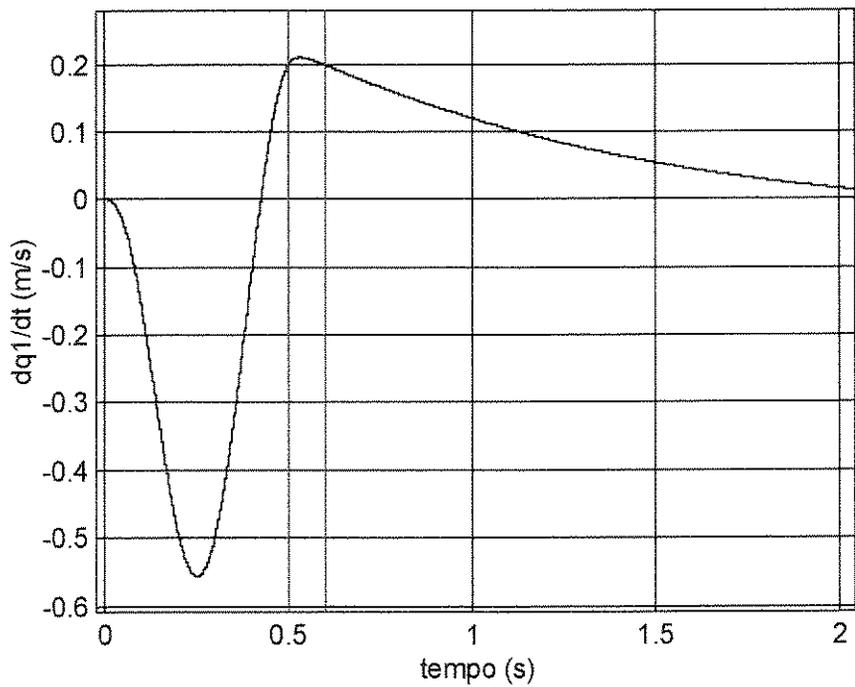


Figura 4.9 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso1 - perfil 1 - não ideal.

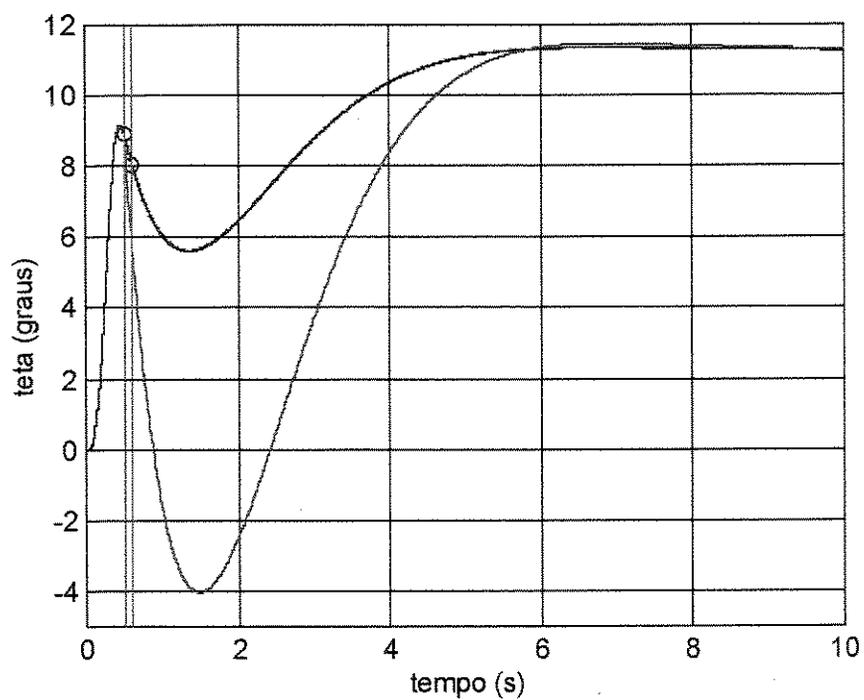


Figura 4.10 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 1 - não ideal.

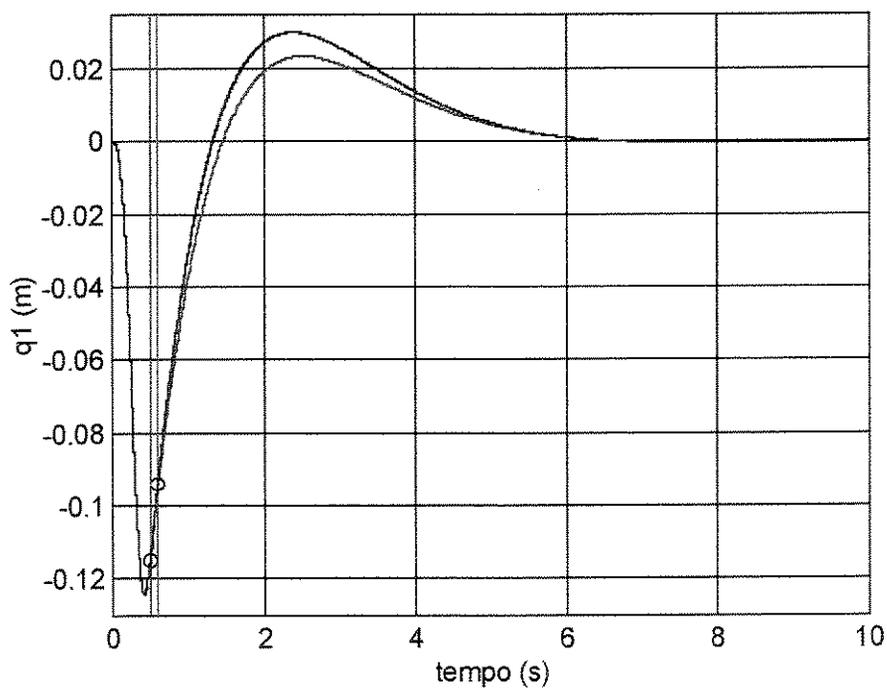


Figura 4.11 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - não ideal.

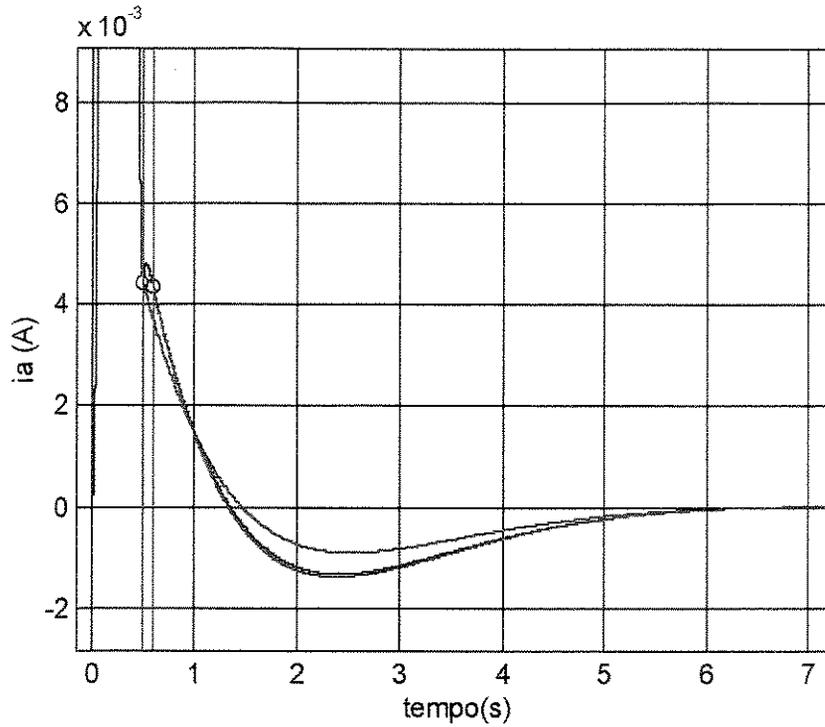


Figura 4.12 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 1 - não ideal.

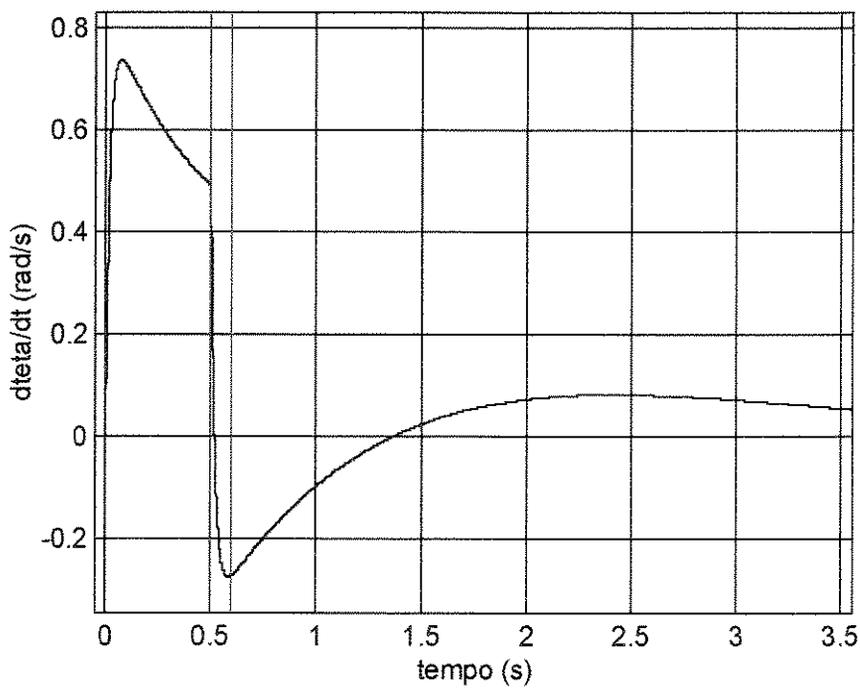


Figura 4.13 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2- não ideal.

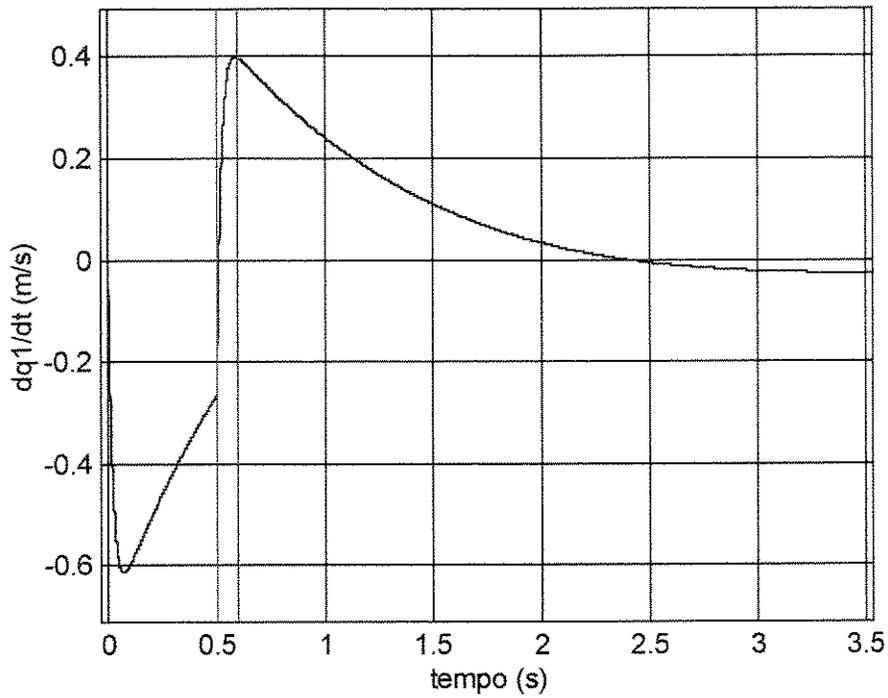


Figura 4.14 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

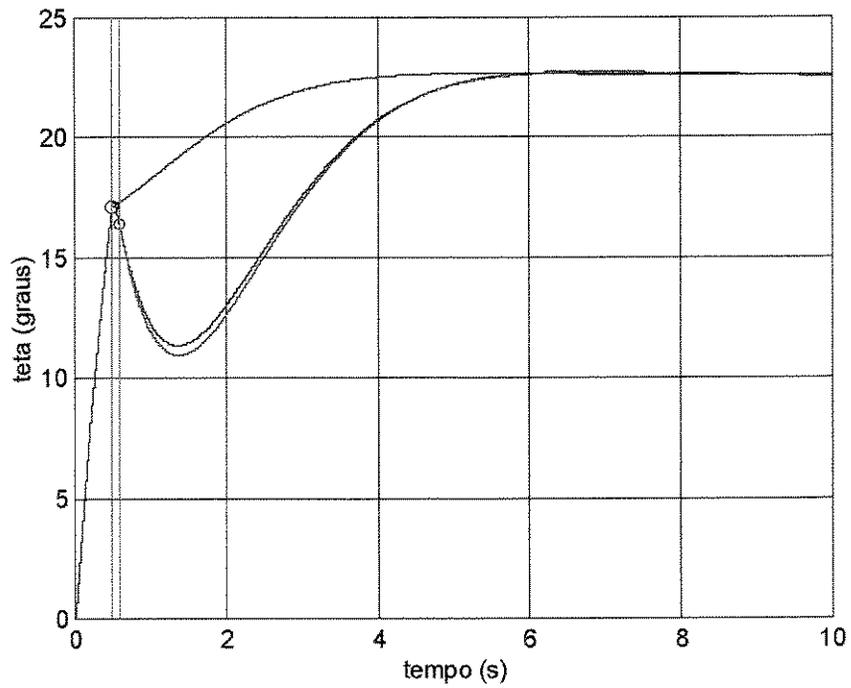


Figura 4.15 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

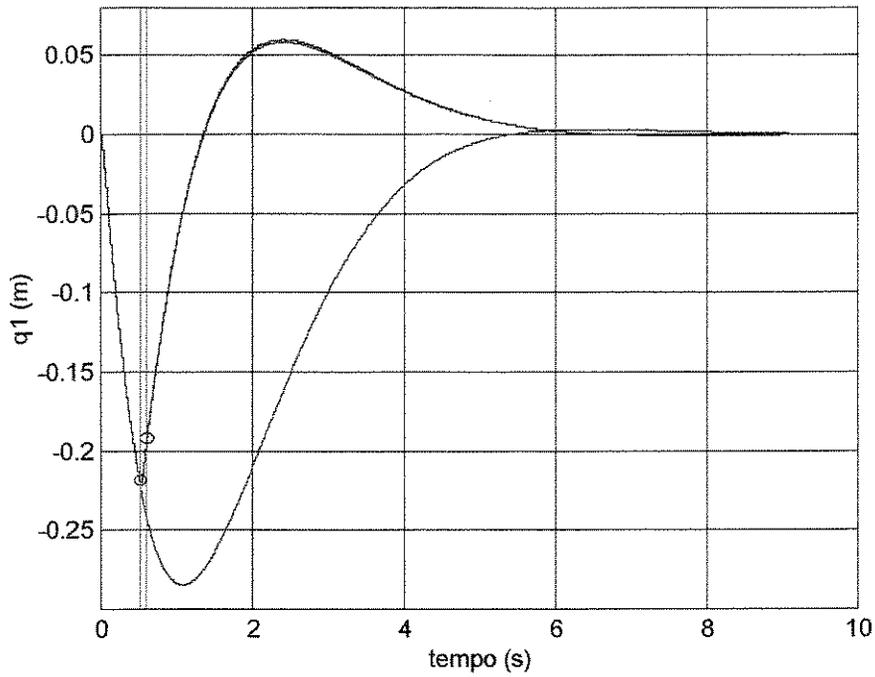


Figura 4.16 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) :
deflexão - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

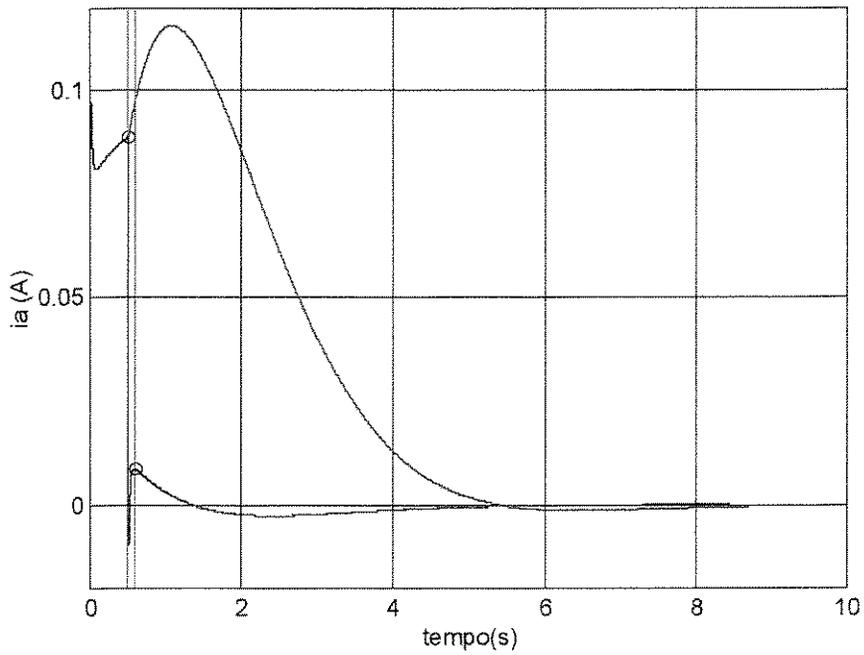


Figura 4.17 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) :
corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

4.5.2 - Caso 2

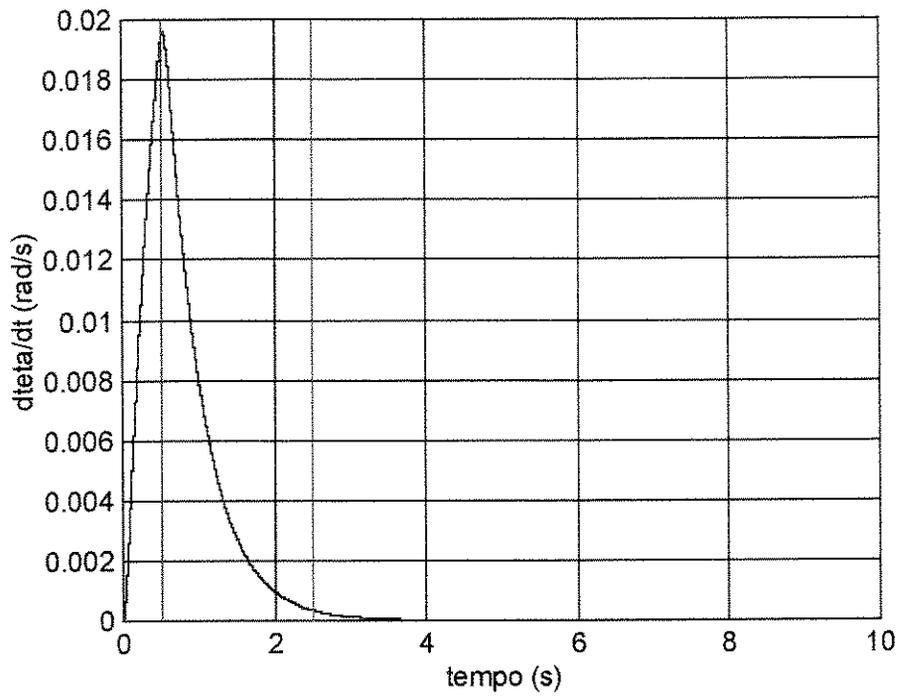


Figura 4.18 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- ideal.

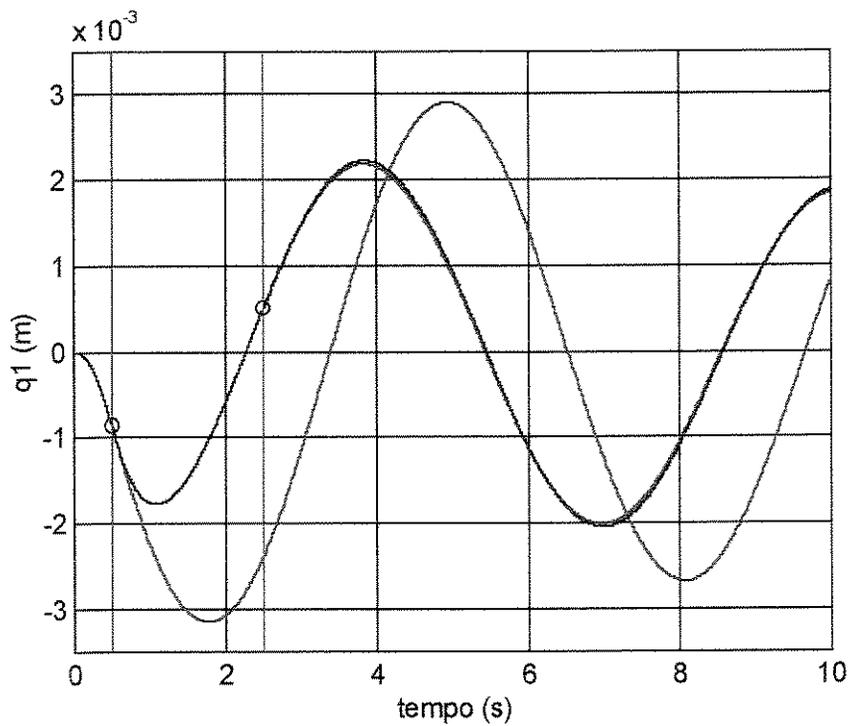


Figura 4.19 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - ideal.

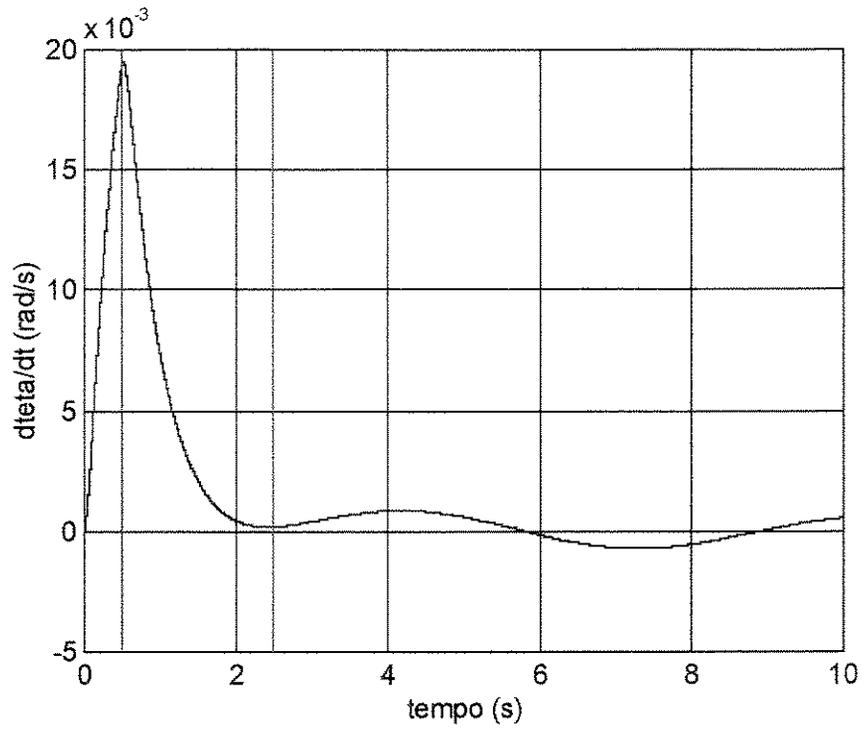


Figura 4.20 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- não ideal.

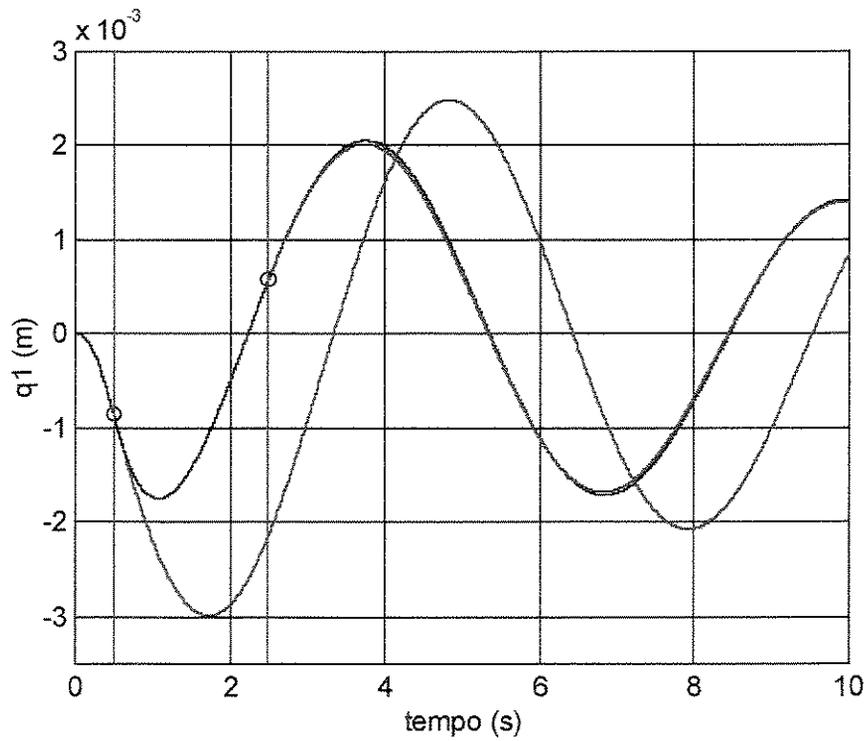


Figura 4.21 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - não ideal.

4.6 - Solução analítica X solução numérica : comentários

Seguem alguns comentários acerca dos resultados apresentados no item 4.5 :

1 - O primeiro caso apresentado (caso 1) apresenta viga com inércia de corpo rígido em torno do eixo de rastreamento (eixo do motor) maior que a inércia do conjunto motor + eixo de conexão (do eixo do motor com a viga). Em torno do mesmo eixo de rastreamento, o caso 2 apresenta viga com inércia de corpo rígido menor que a inércia do motor + eixo de conexão.

2 - O perfil 1 da excitação nos terminais do motor (U (V)), mais suave que o perfil 2 (ver Figura 4.1), produz curvas mais suaves na transição de $U \neq 0$ para $U = 0$ (ou seja, a partir do instante em que a excitação nos terminais do motor torna-se zero). Esses perfis são teóricos e a transição citada dá-se de forma brusca. Essa brusquidão gera descontinuidade na excitação cujos efeitos na solução do sistema de equações diferenciais deverão ser minimizados pelo integrador numérico após um determinado intervalo de tempo. A distância entre as duas linhas azuis verticais que aparecem em todas as figuras apresentadas neste capítulo representa este intervalo de tempo necessário ao integrador para superar os efeitos da descontinuidade citada.

3 - Como não foi efetuado neste trabalho nenhum tipo de análise envolvendo a tensão máxima de flexão nas vigas estudadas antes dessa colapsar ou deformar-se permanentemente, o valor máximo da excitação (tensão elétrica nos terminais do motor) foi determinado teoricamente como aquele necessário para produzir amplitudes de deflexão razoáveis na viga (no máximo, de até 20 % do comprimento, L , da viga).

4 - Quando comparado entre mesmo tipo de interação atuador-estrutura (ideal comparado com ideal e não ideal comparado com não ideal), o perfil de excitação 2 produz sempre as maiores amplitudes de vibração em relação ao perfil de excitação 1. De acordo com a Figura 4.1, ambos os perfis de excitação (perfil 1 e perfil 2), possuem a mesma amplitude máxima (nas simulações apresentadas neste capítulo, o valor é de 0.2 V). Devido à forma dos perfis

escolhidos, para o perfil 2 (pulso quadrado) o valor máximo da excitação perdura por mais tempo e a descontinuidade citada anteriormente é mais brusca (ou seja, de maneira mais repentina se dá a passagem de $U \neq 0$ para $U = 0$).

5 - Para o mesmo perfil de excitação, o sistema ideal apresenta sempre as maiores amplitudes de vibração quando comparado com o sistema não ideal equivalente. No sistema não ideal, aonde a interação atuador-estrutura é mútua, parte da energia da estrutura flexível (viga) escoia para o eixo do motor, fazendo com que as amplitudes sejam menores. Esta interação poderá ser devidamente explorada futuramente para propósitos de controle.

6 - Verifica-se que, para o mesmo perfil de excitação e para o mesmo tipo de interação atuador-estrutura, os efeitos da descontinuidade na excitação (na transição de $U \neq 0$ para $U = 0$) são mais rapidamente amenizados pelo integrador para o caso 1, aonde a inércia de corpo rígido da viga em torno do eixo de rastreamento é maior que a inércia do conjunto motor + eixo de conexão. Esta observação pode ser comprovada, por exemplo, comparando-se as Figuras 4.16 e 4.21.

7 - Duas condições iniciais diferentes são apresentadas para a solução analítica, a fim de que esta possa ser comparada à solução numérica. Estas diferentes condições iniciais serão doravante denominadas CI1 e CI2. A condição inicial denominada CI2 adapta a solução analítica perfeitamente bem à solução numérica enquanto aquela denominada CI1 não adapta de maneira aceitável a solução analítica em alguns casos e conduz a resultados analíticos completamente diferentes dos equivalentes numéricos em outros. Estas condições iniciais (CI1 e CI2) definem as linhas azuis verticais anteriormente citadas.

8 - As linhas azuis verticais nas figuras apresentadas neste capítulo indicam as duas condições iniciais utilizadas na solução analítica (sempre na ordem : CI1 seguida de CI2) com as respectivas soluções analíticas partindo de cada uma. Vale ressaltar neste ponto que as condições iniciais utilizadas para as simulações numéricas foram sempre, a partir do instante $t = 0$, iguais a zero para todas as variáveis e suas derivadas primeiras.

9 - Em trabalhos futuros, novos perfis de excitação, mais suaves, poderão ser testados. Nesses novos perfis, a descontinuidade será eliminada fazendo com que o intervalo CI1-CI2 venha a desaparecer. A condição inicial para a comparação das soluções numéricas e analíticas poderá ser, então, aquela tomada no instante em que a tensão elétrica nos terminais do motor vai a zero, que é a condição adotada neste trabalho a partir da qual busca-se uma solução analítica para o sistema de equações governantes do movimento. Este instante equívale ao ponto denominado CI1, que representa a primeira linha vertical azul nos gráficos.

11 - Quanto maior o momento de reação da viga sobre o eixo de rastreamento, maior será a interação atuador-estrutura e, portanto, mais significativo o comportamento não ideal do sistema dinâmico. Desta forma, quanto mais rígida a estrutura, menos significativo será o seu comportamento não ideal ou, em outras palavras, menos significativa será a troca mútua de energia entre o atuador e a estrutura; no caso extremo, toda estrutura rígida irá se comportar como um sistema ideal.

10 - Conclui-se que, sob as condições apresentadas, obteve-se boas soluções analíticas para o sistema linear associado (tanto ideal quanto não ideal) para o caso em que $\mu = O(1)$.

Capítulo 5

**Problema não perturbado ($\epsilon = 0$):
simulações numéricas e solução analítica
para amortecimento $O(\epsilon^2)$ – 1 modo**

5.1- Introdução

No capítulo anterior, apresentou-se a busca pela solução do problema não perturbado considerando o amortecimento estrutural (da estrutura flexível tipo viga), μ , da mesma ordem dos termos lineares (ordem 1). A única diferença entre o Capítulo 4 e este consiste no fato de que agora considera-se que o mesmo amortecimento estrutural, μ , seja da ordem dos termos não lineares e, portanto, não aparece no sistema de equações diferenciais lineares a ser resolvido.

Os mesmos procedimentos descritos anteriormente para a obtenção da solução geral são utilizados aqui. Por esta razão, apresenta-se neste capítulo apenas as expressões finais.

Em todos os textos aonde aparecem equações perturbadas e amortecimento de qualquer ordem é incluído no modelo, a ordem deste é sempre aquela proposta neste capítulo (Capítulo 5), ou seja, da ordem das não-linearidades. A razão desta escolha ficará mais clara quando os Capítulos 6 e 7 forem lidos.

5.2 - Solução analítica para o sistema não ideal

Em (4.1), eliminando o termo de amortecimento, $\mu \dot{q}_\ell$, obtém-se o sistema de equações diferenciais lineares descrito em (5.1) :

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\ \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) &= 0 \\ \ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

ou, para $\ell = n = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\ \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \phi_1''(0) Q_1(t) &= 0 \\ \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

A solução analítica a ser determinada, assim como no capítulo anterior, refere-se ao estado do sistema a partir do instante em que a tensão elétrica nos terminais do motor, U , torna-se zero. Em (5.2), fazendo $U = 0$ e $AA = co_5 \phi_1''(0)$, obtém-se :

$$\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} = 0 \quad (5.3a)$$

$$\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - AA q_1 = 0 \quad (5.3b)$$

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} = 0 \quad (5.3c)$$

Assim como no Capítulo 4, para que os sistemas de equações diferenciais (2.46) e (3.65), com o fator representando o amortecimento da estrutura da ordem de ϵ^2 , tenham uma solução analítica através de algum método de perturbação (por exemplo, o método das múltiplas escalas), a solução analítica do sistema de equações diferenciais lineares (5.3) deverá ser conhecida (Nayfeh et al., 1979); Holmes, 1995 ; Kevorkian, 1981 ; Krauss, 1998).

5.2.1 – A solução analítica para q_I

Através das mesmas operações realizadas e considerações feitas no capítulo anterior, as expressões para q_I tornam-se as mesmas desenvolvidas no Capítulo 4 (expressões 4.28 e 4.29, reproduzidas a seguir). Os coeficientes que aparecem aqui são os mesmos definidos anteriormente, devendo-se apenas tomar o cuidado de se fazer $\mu=0$ aonde este termo aparecer.

Assim,

$$q_1 = C_3 e^{r_{3a}t} + C_4 e^{r_{4a}t} \quad (5.1)$$

ou

$$q_1 = C_3 e^{r_{3a}t} \cos(r_{3b}t) + C_4 e^{r_{3a}t} \sin(r_{3b}t) \quad (5.2)$$

dependendo das raízes da equação característica, conforme explicado anteriormente.

5.2.2 – A solução analítica para θ

Valendo-se da mesma discussão feita no item anterior (5.2.1), as expressões para θ são as mesma desenvolvidas no capítulo 4 (expressões 4.39 e 4.40). Os coeficientes que aparecem aqui são os mesmos definidos anteriormente, devendo-se apenas tomar o cuidado de se fazer $\mu=0$ aonde este termo aparecer.

Assim,

$$\theta = E_9 e^{r_{3a}t} \cos(r_{3b}t) + E_{10} e^{r_{3a}t} \text{sen}(r_{3b}t) + M \quad (5.3)$$

ou:

$$\theta = G_5 e^{r_{3a}t} + M \quad (5.4)$$

dependendo das raízes da equação característica.

5.2.3 – A solução analítica para i_a

Novamente, conforme os itens 5.2.1 e 5.2.2 , as expressões para i_a tornam-se :

$$i_a = F_9 e^{r_{3a}t} \cos(r_{3b}t) + F_{10} e^{r_{3a}t} \text{sen}(r_{3b}t) \quad (5.5)$$

ou:

$$i_a = H_5 e^{r_{3a}t} \quad (5.6)$$

dependendo das raízes da equação característica.

As expressões 5.5 e 5.6 podem, novamente, ser encontradas no capítulo anterior com os devidos cuidados quanto a μ .

5.3 - Solução analítica para o sistema ideal

De acordo com o raciocínio desenvolvido no item 4.3 e as considerações feitas no item 5.2, a equação que define o comportamento da variável q_ℓ torna-se simplesmente :

$$\ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell = 0 \quad (5.7)$$

ou, considerando apenas o primeiro modo :

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 = 0 \quad (5.8)$$

que representa uma equação diferencial de segunda ordem comumente conhecida e cuja solução é dada por:

$$q_1 = C_1 \cos(w_1 t) + C_2 \sin(w_1 t) \quad (5.9)$$

e as constantes C_i em (5.9) deverão ser encontradas de acordo com as condições iniciais a partir do instante em que a tensão elétrica U torna-se zero, conforme discutido no capítulo anterior.

5.4 - Solução numérica : equações para $\mu(\in^2)$ e $\in=0$.

Para a integração das equações (5.3) através de um algoritmo previsor-corretor, estas mesmas equações são transformadas (através do mesmo procedimento apresentado no capítulo anterior) em :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -w_1^2 x_1 - \alpha_1 (-\cos_3 x_8 + \cos_4 x_9 + A A x_1) \\ \dot{x}_7 &= x_8 \\ \dot{x}_8 &= -\cos_3 x_8 + \cos_4 x_9 + A A x_1 \\ \dot{x}_9 &= -\cos_1 x_9 - \cos_2 x_8\end{aligned}\tag{5.10}$$

aonde : $x_1 = Q_1$; $x_2 = \dot{Q}_1$; $x_7 = \theta$; $x_8 = \dot{\theta}$ e $x_9 = i_a$.

5.5 - Solução analítica X solução numérica : resultados

Dois casos são estudados. Os dados do motor e os parâmetros do sistema em análise são :

Motor : $C_m = 0.004629000$; $K_t = 0.052814000$; $K_b = 0.052814000$;
 $L_m = 0.003100000$; $R_a = 1.914952000$; $C_m = 0.004629000$; $IMOTOR =$
 0.000065400 ; $ISHAFT = 0.000036900$;

Caso 1 : $L = 1.5$ m ; $U_{max} = 0.2$ V ; $N_g = 1$; altura = 0.015 m ; base = 0.0005 m ;
 $E = 0.7 \cdot 10^{11}$ N/m² ; $\mu = 0.00$ Kg/ms; tempo de excitação $t = 0.5$ s (perfil 1 e perfil 2).

Caso 2 : $L = 0.3$ m ; $U_{max} = 0.2$ V ; $N_g = 1$; altura = 0.0050 m ; base = 0.0005 m ;
 $E = 0.7 \cdot 10^{11}$ N/m² ; $\mu = 0.00$ Kg/ms; tempo de excitação $t = 0.5$ s (perfil 2).

Os perfis de excitação denominados 1 e 2 são os mesmos apresentados no capítulo anterior, com representação gráfica ilustrada na Figura 4.1. Os comentários acerca das simulações são feitos no item 5.6.

5.5.1 - Caso 1

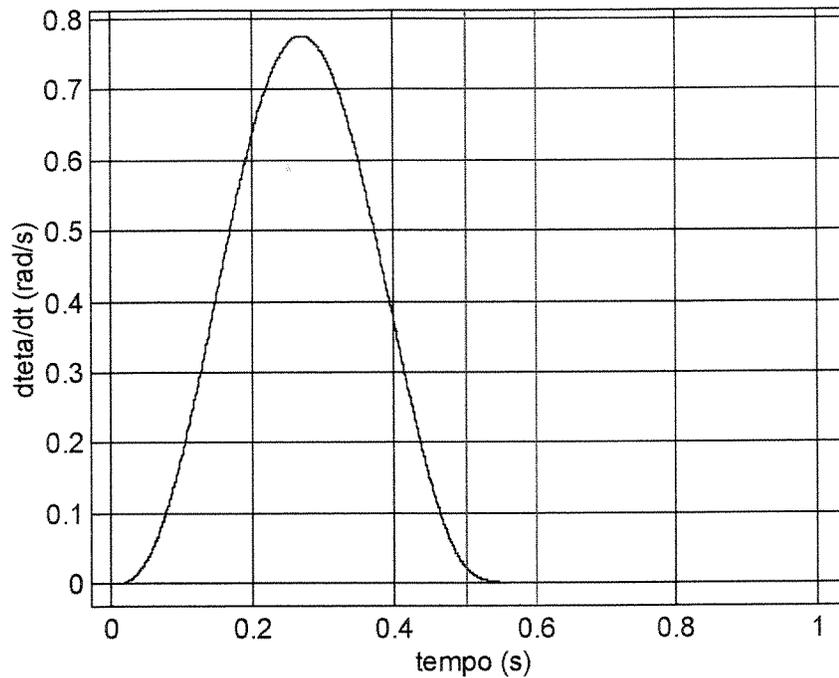


Figura 5.1 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- ideal.

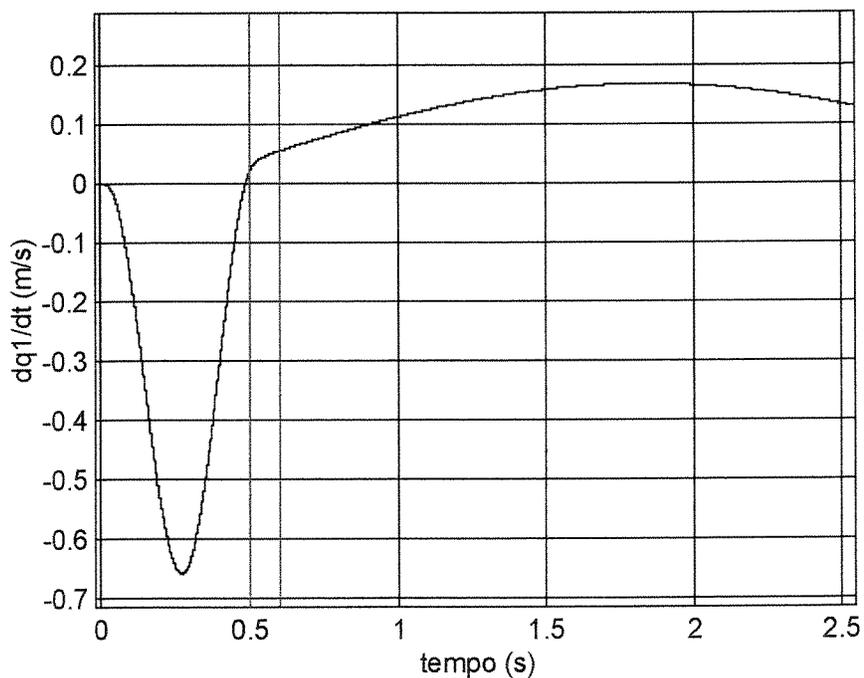


Figura 5.2 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1 - ideal.

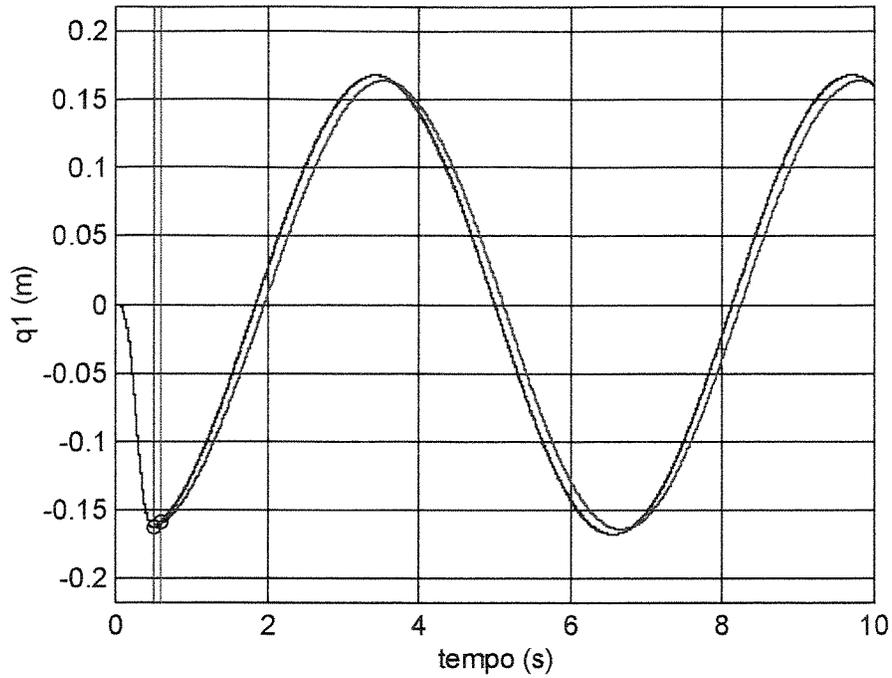


Figura 5.3 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - ideal.

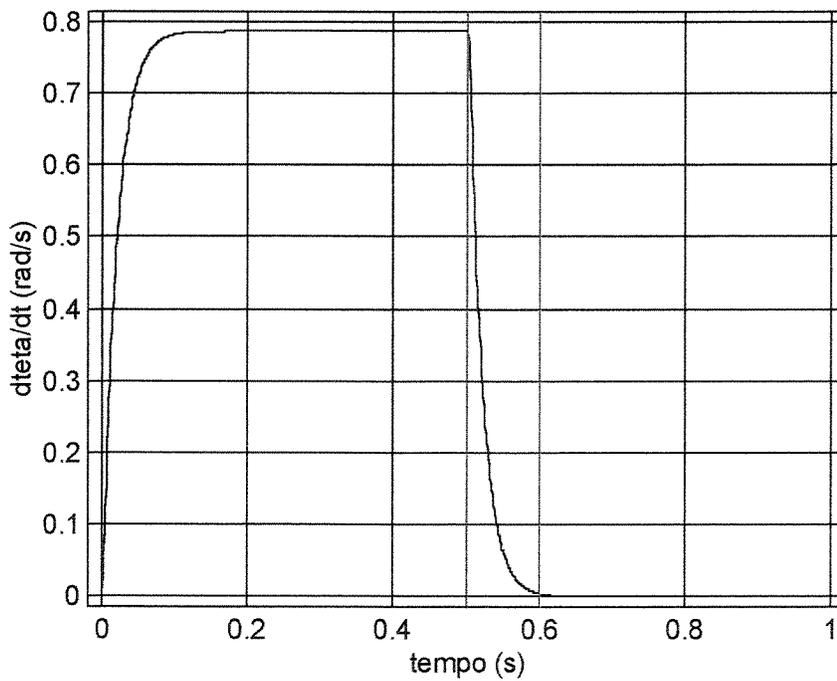


Figura 5.4 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - ideal.

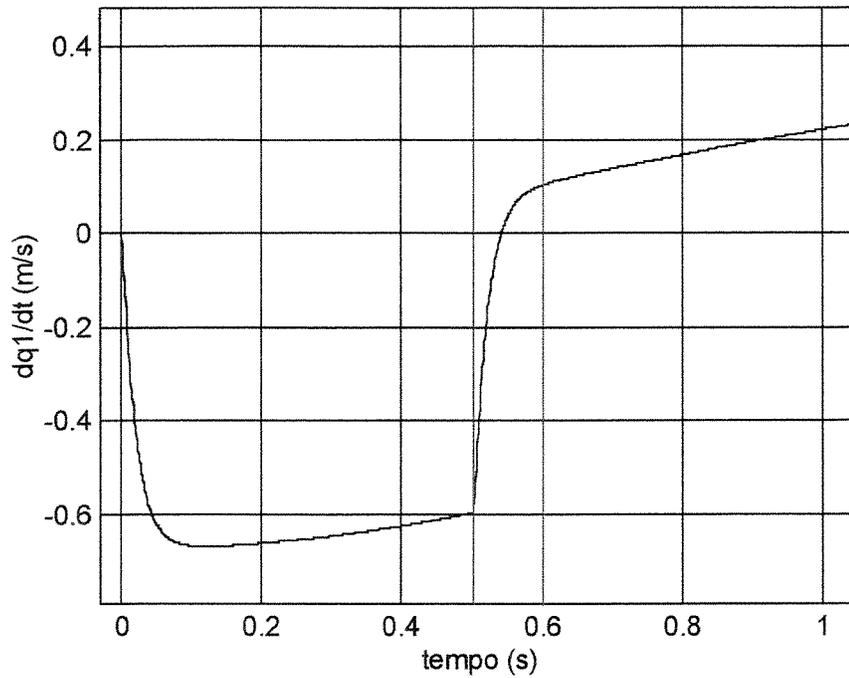


Figura 5.5 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - ideal.

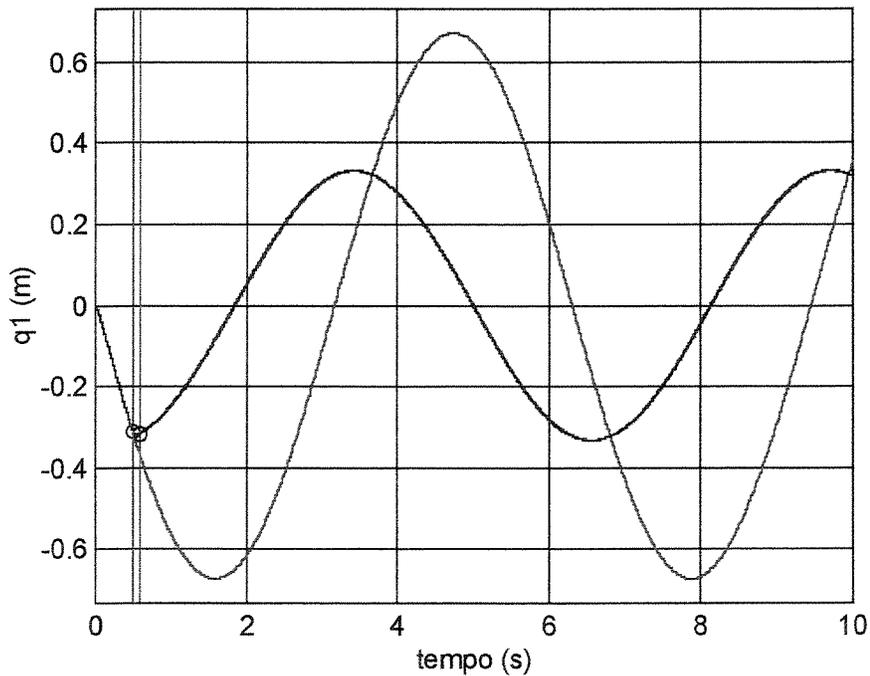


Figura 5.6 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 2 - ideal.

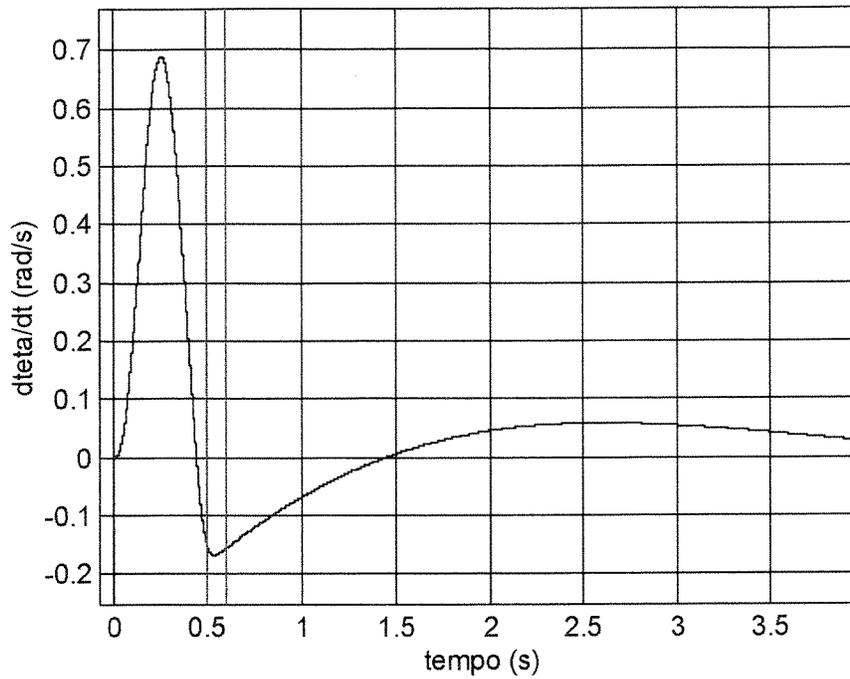


Figura 5.7 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1- não ideal.

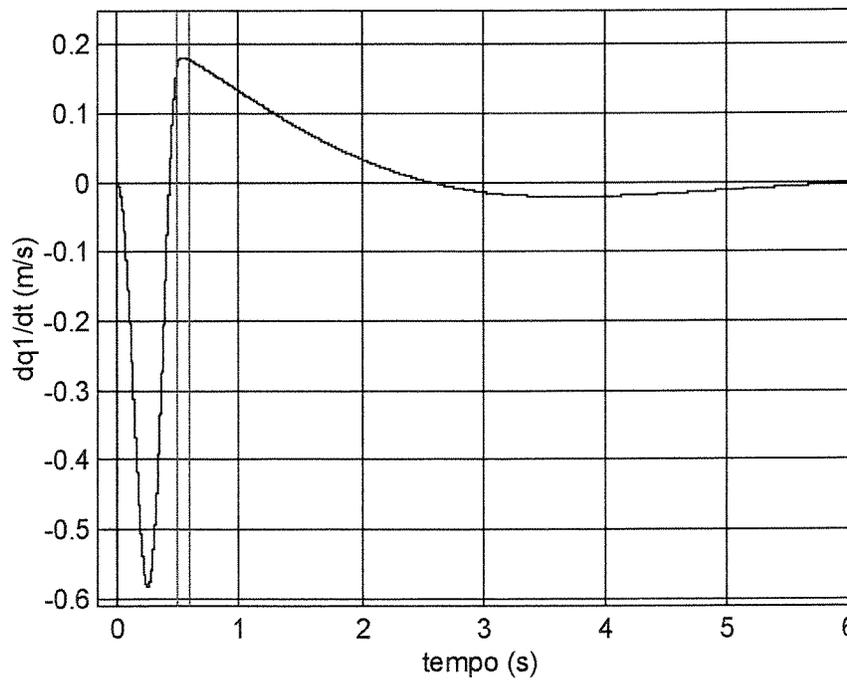


Figura 5.8 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 1 - não ideal.

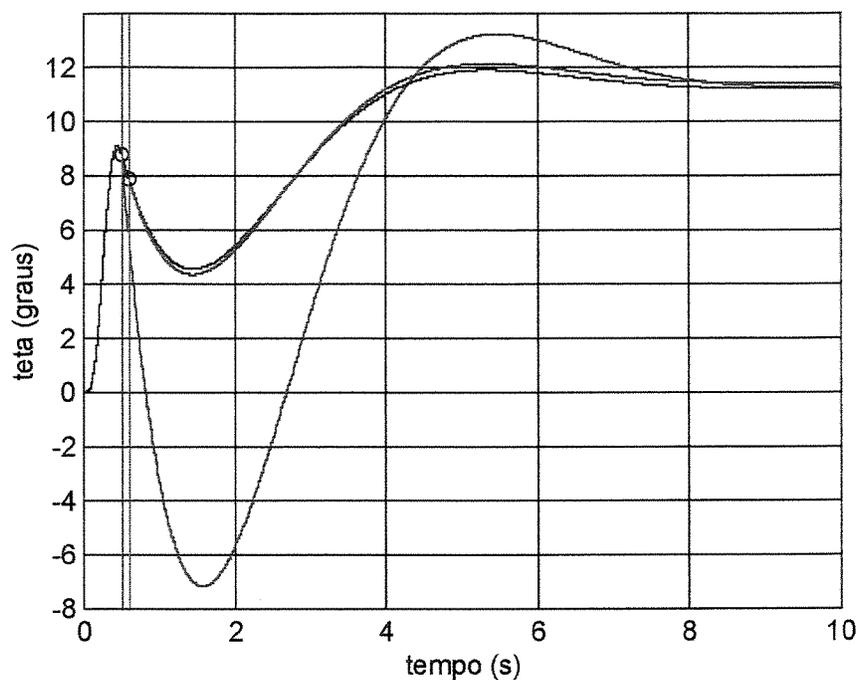


Figura 5.9 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 1 - não ideal.

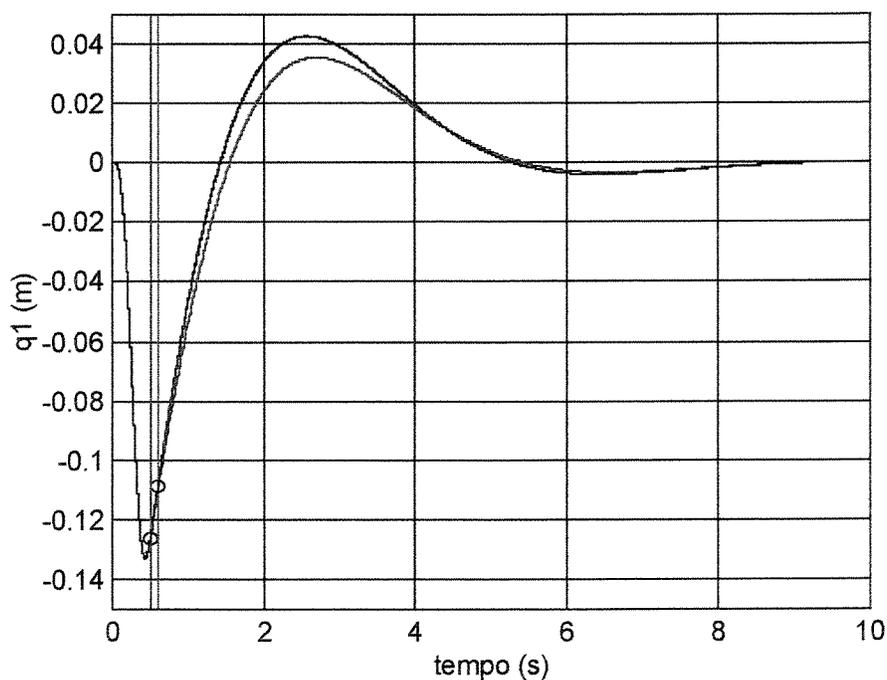


Figura 5.10 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 1 - perfil 1 - não ideal.

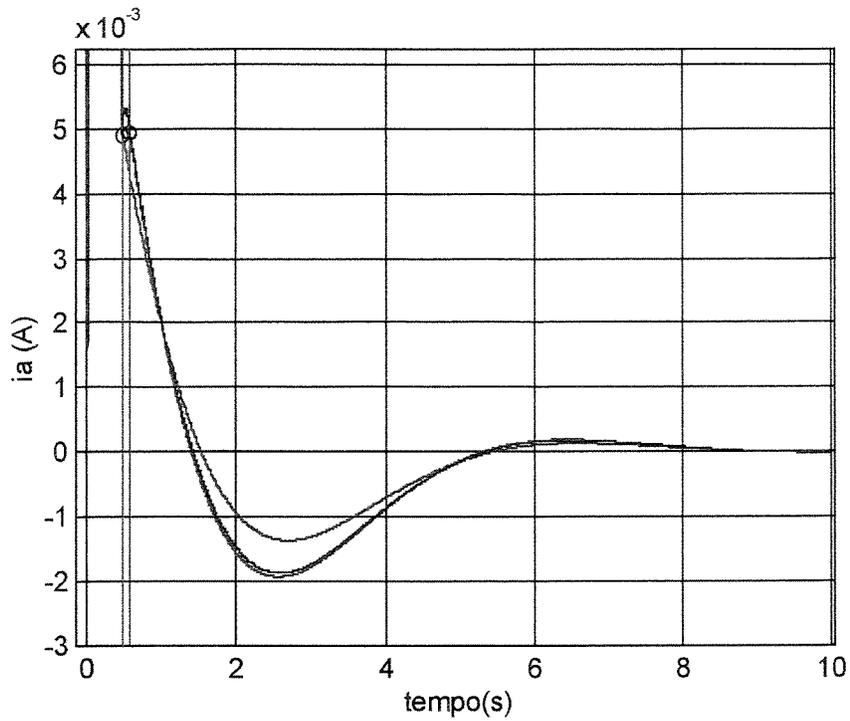


Figura 5.11 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 1 - não ideal.

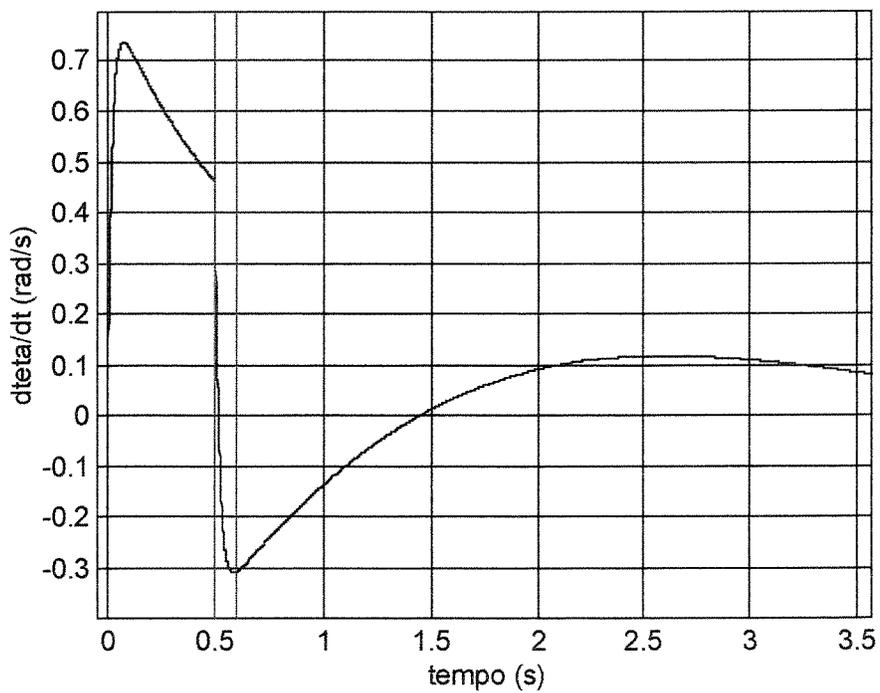


Figura 5.12 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2- não ideal.

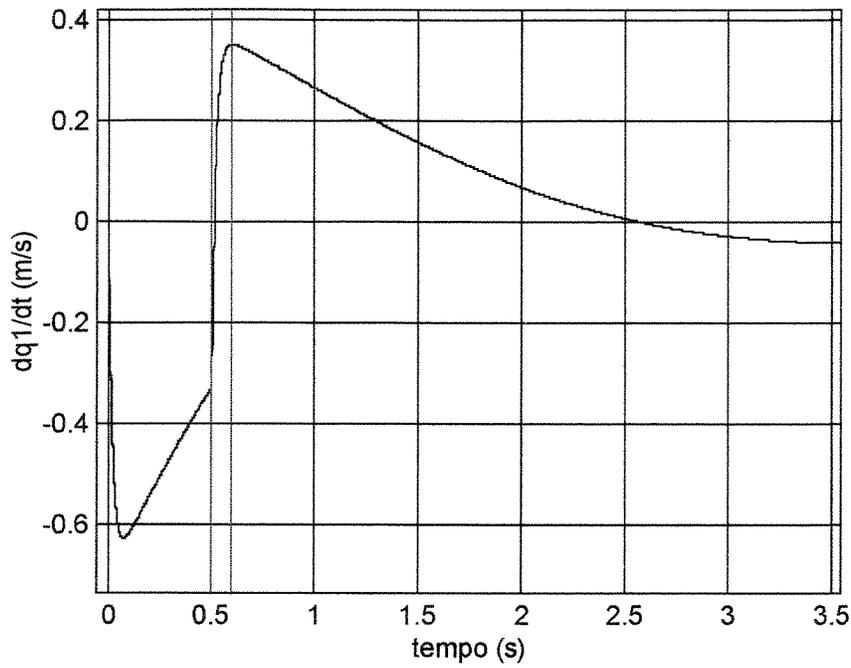


Figura 5.13 - Velocidade de deflexão (numérica), \dot{q}_1 , e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

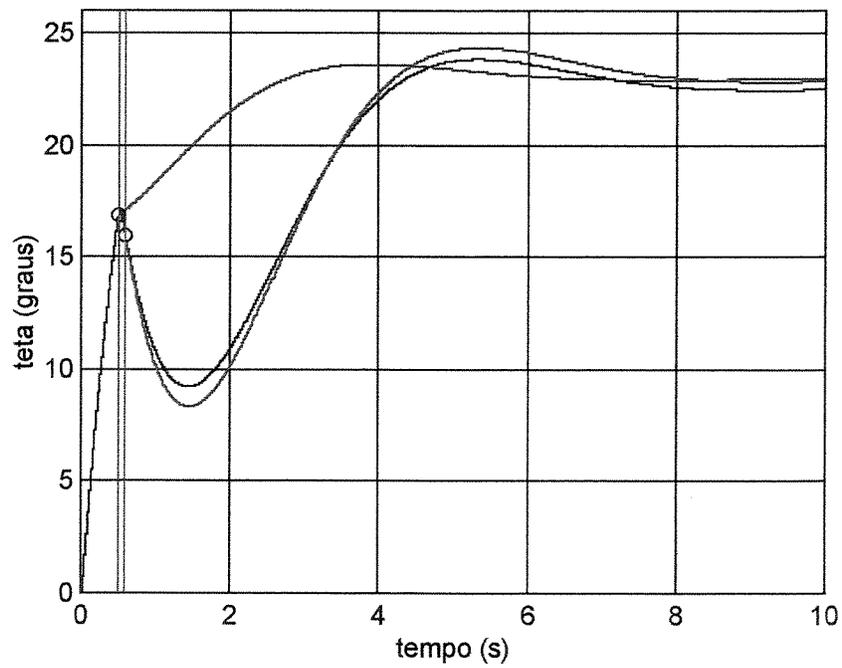


Figura 5.14 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deslocamento angular, θ - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

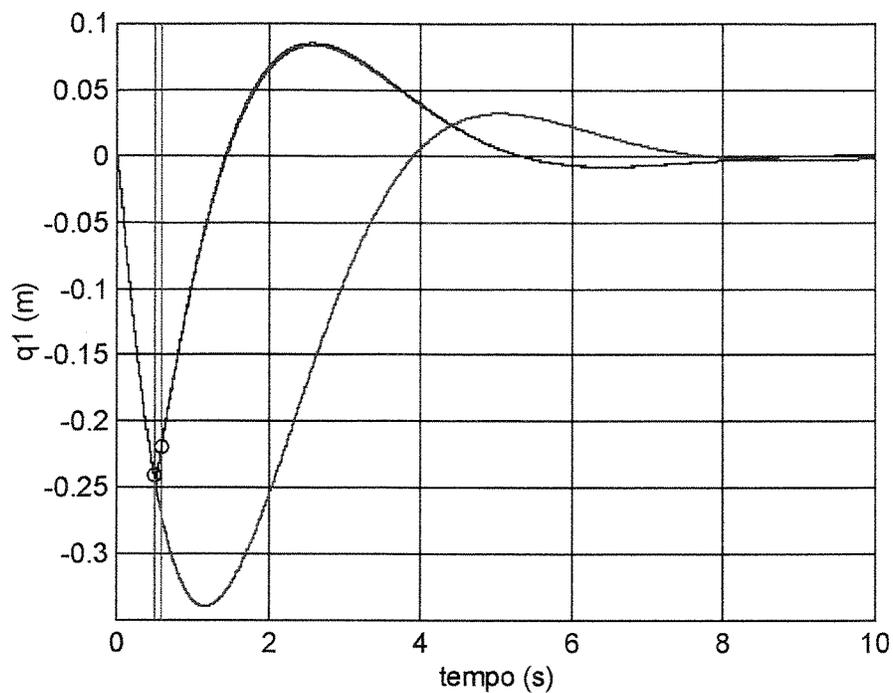


Figura 5.15 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) :
deflexão - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

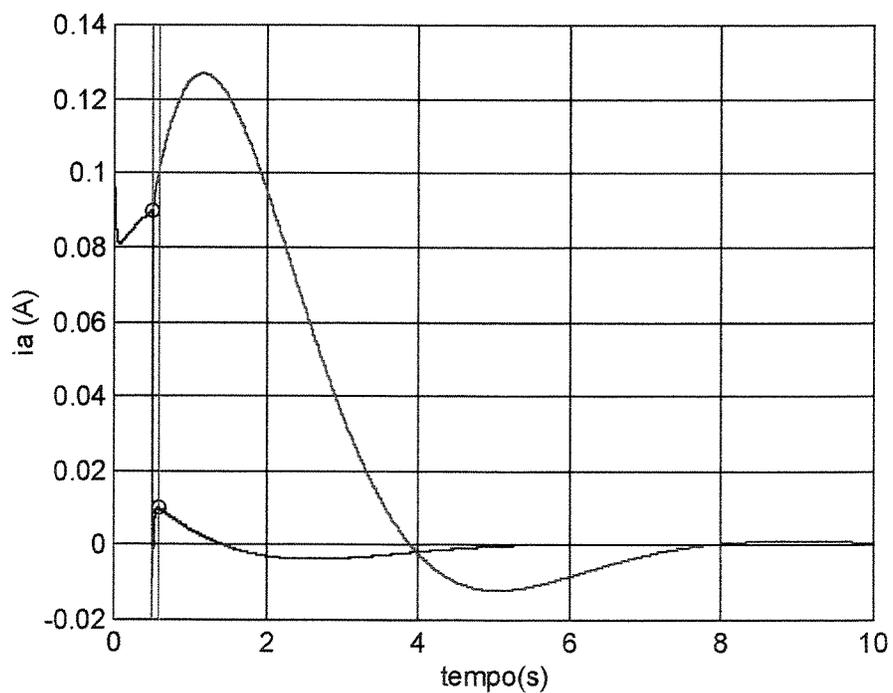


Figura 5.16 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) :
corrente de armadura, i_a - caso 1 - perfil 2 - não ideal.

5.5.2 - Caso 2

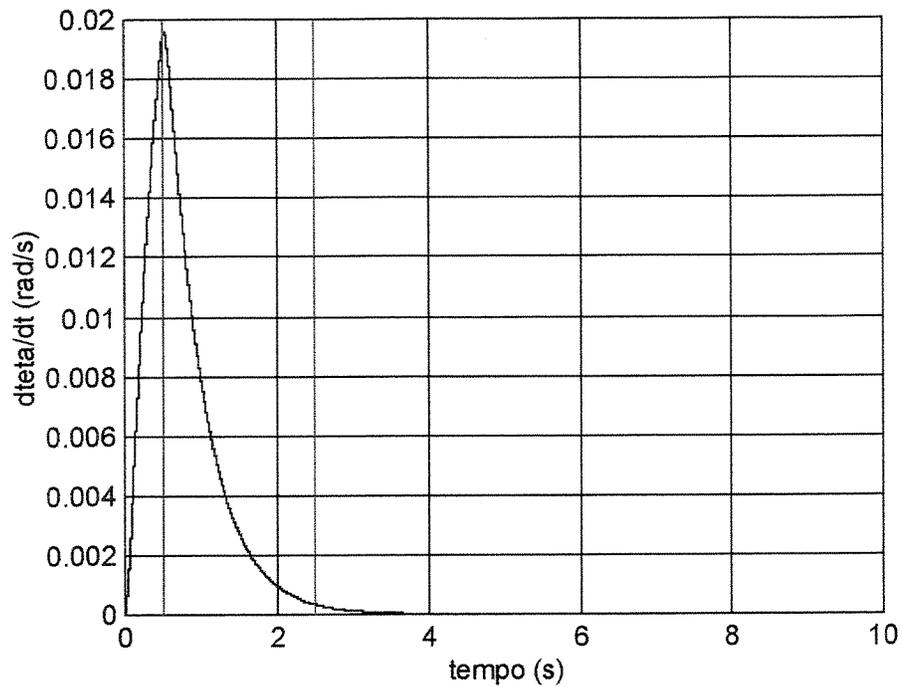


Figura 5.17 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- ideal.

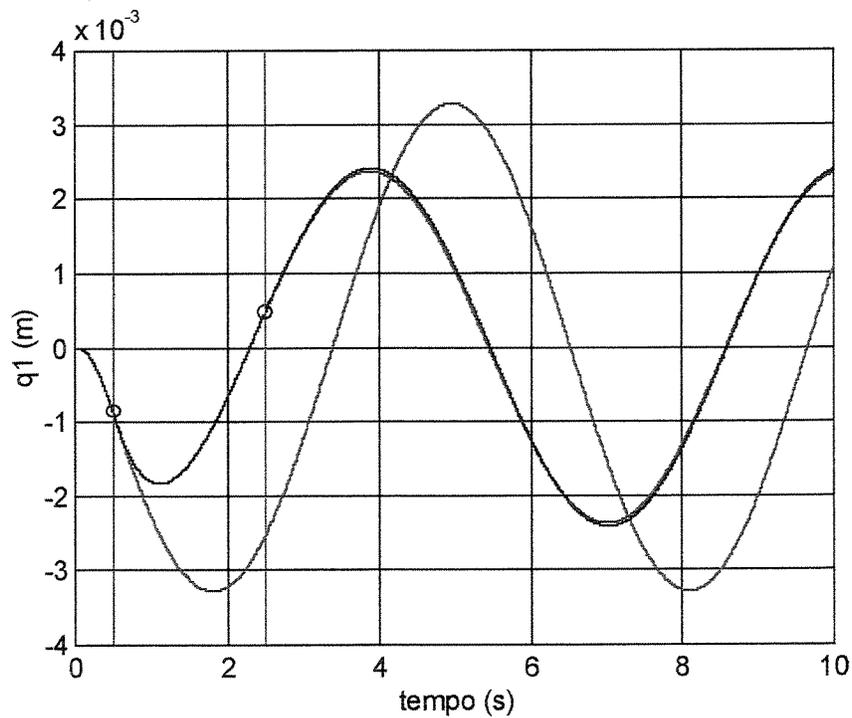


Figura 5.18 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - ideal.

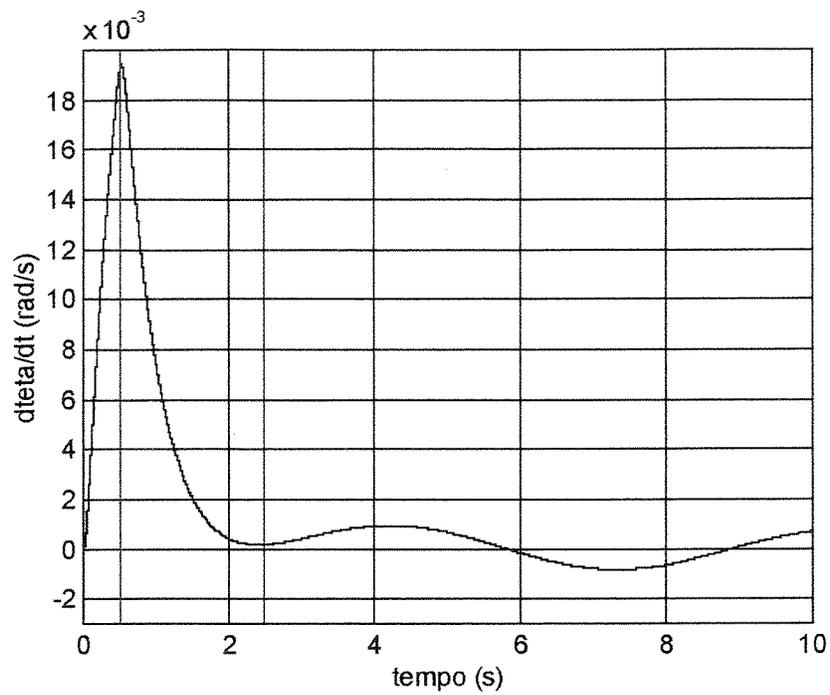


Figura 5.19 - Velocidade angular (numérica), $\dot{\theta}$, e a escolha da condição inicial para a solução analítica - caso 2 - perfil 2- não ideal.

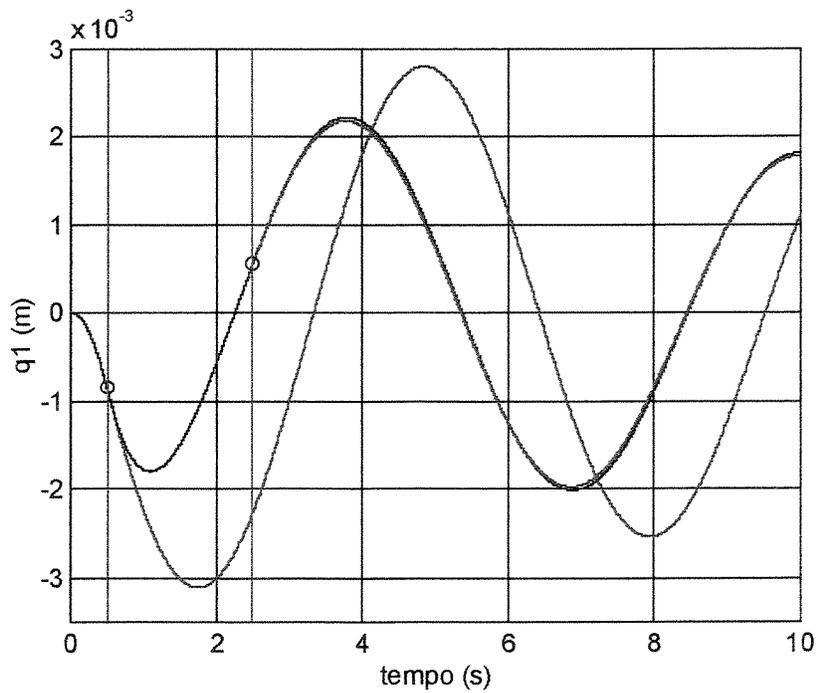


Figura 5.20 – Solução analítica (linha vermelha) contra solução numérica (linha preta) : deflexão - caso 2 - perfil 2 - não ideal.

5.6 - Solução analítica X solução numérica : comentários

Os comentários sobre os resultados apresentados no item 5.5 são os mesmos apresentados no item 4.6 do capítulo anterior, e ainda :

1 - Para o sistema não ideal, a troca de energia entre o eixo do motor (eixo de rastreamento) e a estrutura (viga) amortece consideravelmente a vibração desta última. Percebe-se que o amortecimento proveniente desta interação tem maior efeito sobre a vibração da viga que o amortecimento estrutural, μ (considerado neste trabalho : 0.01 Kg/ms, suficientemente grande !), conforme mostra a comparação entre as Figuras 4.4 e 5.3, 4.7 e 5.6 e 4.19 e 5.18 (aonde a interação motor estrutura não existe e μ , portanto, predomina) e entre as Figuras 4.11 e 5.10, 4.16 e 5.15 e 4.21 e 5.20 (aonde μ e o amortecimento devido à interação motor-estrutura coexistem embora este último se sobressaia). Embora a transferência de energia da viga para o motor (em virtude da interação atuador-estrutura) e o amortecimento estrutural da viga sejam conceitos completamente diferentes, seus efeitos sobre a amplitude de vibração da estrutura flexível são comparáveis.

2 - Conclui-se que, sob as condições apresentadas, obteve-se boas soluções analíticas para o sistema linear associado (tanto ideal quanto não ideal) para o caso em que $\mu = O(\epsilon^2)$. O estudo deste sistema é importante para o estudo do sistema não linear (perturbado).

Capítulo 6

Solução analítica : curvatura linear

6.1 - Métodos de perturbação

Obter soluções analíticas para sistemas não lineares não é uma tarefa fácil (ou, algumas vezes, possível). Contudo, existem muitos sistemas reais para os quais os efeitos não lineares podem ser considerados suficientemente pequenos. Em tais casos, soluções analíticas aproximadas podem ser obtidas até uma específica ordem de acurácia utilizando-se técnicas tais como o método de múltiplas escalas (Hanagud et al., 1985) ou o método da expansão direta. Métodos de perturbação têm se mostrado promissores no tratamento de manipuladores flexíveis (Khorrami et al., 1992 ; Atluri, 1973).

Para que alguma método de perturbação (expansão direta, método das múltiplas escalas, método da média, ...) possa ser aplicado a uma equação ou sistema de equações diferenciais ordinárias (no caso) no intuito de se obter uma solução aproximada de 2.45 ou 2.46 e 3.64 ou 3.65, a solução para o problema linear associado a cada um desses sistemas de equações diferenciais ordinárias deve ser conhecido. Os Capítulos 4 e 5 trabalham na solução desse sistema linear associado. Seja esta solução a partir de agora representada por θ_0 , q_{10} e I_{a0} .

Devido às características peculiares de cada sistema de equação desenvolvido neste trabalho, dois métodos de perturbação serão aqui utilizados (o mesmo vale para o próximo capítulo): a expansão direta para os sistemas não ideais e o método das múltiplas escalas para os sistemas ideais.

A peculiaridade dos sistemas não ideais apresentados aqui consiste no fato da parte linear deste apresentar vibração amortecida (confirmado através da simulação numérica). Para estes casos, a expansão direta poderá ser um bom método, uma vez que esta solução não deverá apresentar termos seculares. Para o caso ideal, o sistema linear apresenta vibração harmônica não amortecida (também confirmado através da simulação numérica) e os termos seculares deverão aparecer. Para estes casos, o mme parece ser o melhor método. A expansão direta não se aplica aqui pois a solução a ser obtida fatalmente apresentará termos seculares.

6.1.1 - O método das múltiplas escalas (mme)

Aplicar o mme, conhecendo-se θ_0, q_{10} e I_{a0} , eqüivale a buscar uma solução aproximada uniforme (ou que não contenha termos seculares) para 2.45 ou 2.46 e 3.64 ou 3.65 da forma:

$$\theta(t;\epsilon) = \theta_0(T_0, T_1) + \epsilon^2 \theta_1(T_0, T_1) \quad (6.1)$$

$$q_1(t;\epsilon) = q_{10}(T_0, T_1) + \epsilon^2 q_{11}(T_0, T_1) \quad (6.2)$$

$$I_a(t;\epsilon) = I_{a0}(T_0, T_1) + \epsilon^2 I_{a1}(T_0, T_1) \quad (6.3)$$

aonde a variável independente "t" que aparece em (6.1) a (6.3) representa o tempo adimensional.

Introduzindo as escalas de tempo T_0 e T_1 , as derivadas em relação ao tempo (t) tornam-se:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (6.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right] \quad (6.5)$$

6.1.2 - A expansão direta (*straightforward expansion*)

Aplicar a expansão direta, conhecendo-se θ_0, q_{10} e I_{a0} , equívale a buscar uma solução aproximada uniforme (ou que não contenha termos seculares) para 2.45 ou 2.46 e 3.64 ou 3.65 da forma:

$$\theta(t; \epsilon) = \theta_0(t) + \epsilon^2 \theta_1(t) \quad (6.6)$$

$$q_1(t; \epsilon) = q_{10}(t) + \epsilon^2 q_{11}(t) \quad (6.7)$$

$$I_a(t; \epsilon) = I_{a0}(t) + \epsilon^2 I_{a1}(t) \quad (6.8)$$

aonde a variável independente "t" que aparece em (6.6) a (6.8) representa o tempo adimensional.

6.2 - Sistema ideal (1 modo)

As equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento ideal considerando o modelo de curvatura linear, anteriormente obtidas através do Princípio de Hamilton (conforme verificado no Capítulo 2), são reproduzidas em (6.9) (na forma adimensional e perturbada), considerando-se ℓ modos na expansão modal e sem amortecimento.

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + c_0 i_a + c_2 \dot{\theta} &= c_1 U \\ \ddot{\theta} + c_3 \dot{\theta} - c_4 i_a &= 0 \\ \ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_\ell] &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

mais as condições de contorno (2.44) e (A.27).

Para o caso ideal, a variável dependente deslocamento angular, θ , é prescrita (ou conhecida *a priori*) e, portanto, não se faz necessário resolver todo o sistema (6.9) mas apenas a última dessas equações. Fazendo $\ell=1$ (um modo na expansão modal) o sistema (6.9) reduz-se ao sistema (6.10) a seguir, aonde θ (e suas derivadas) é conhecido.

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_1] = 0 \quad (6.10)$$

6.2.1 - Amortecimento de ordem ϵ^2

Fazendo com que o termo de amortecimento, $\mu \dot{q}_1$, tenha a mesma ordem de grandeza das não-linearidades (ou dos termos de perturbação), a equação (6.10) torna-se :

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_1 + \mu \dot{q}_1] = 0 \quad (6.11)$$

Fazendo $\epsilon=0$ em (6.11), o sistema linear resultante

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} = 0 \quad (6.12)$$

tem sua solução apresentada no Capítulo 5.

6.2.2 - Solução através do MME para o sistema ideal com amortecimento de ordem ϵ^2

Para o caso ideal, quando $U = 0$, tem-se que $\theta = \text{constante}$. Assim, substituindo 6.4 e 6.5 em 6.11 e fazendo $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$ obtém-se :

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0^2} + 2\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + w_1^2 q_1 - \epsilon^2 \left[\mu \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_0} \right) + \epsilon^2 \left(\mu \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_1} \right) \right) \right] \quad (6.13)$$

Substituindo 6.2 em 6.13 resulta :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{10} + \epsilon^2 \left[\left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + w_1^2 q_{11} - \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_0} \right) \right] + \\ & + \epsilon^4 \left[2 \left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0 \partial T_1} \right) - \mu \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_0} \right) - \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_1} \right) \right] - \epsilon^6 \left[\mu \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_1} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Considerando os termos até $O(\epsilon^2)$, 6.14 reduz-se a :

$$\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{10} + \epsilon^2 \left[\left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + w_1^2 q_{11} - \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_0} \right) \right] = 0 \quad (6.15)$$

Em 6.15 coleta-se, a seguir, os termos de mesma ordem de ϵ .

Os termos de ordem ϵ^0 resultam :

$$\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{10} = 0 \quad (6.16)$$

Os termos de ordem ϵ^2 resultam :

$$\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{11} = \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_0} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} \right) \quad (6.17)$$

A forma da solução de 6.16, de acordo com o Capítulo 5, será dada por :

$$q_{10} = C_1(T_1) \cos(w_1 T_0) + C_2(T_1) \sin(w_1 T_0)$$

que pode ser reescrita como :

$$q_{10} = A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + CC \quad (6.18)$$

aonde $A(T_1)$ representa uma função complexa arbitrária e CC representa os termos complexos conjugados de q_{10} .

Substituindo 6.18 em 6.17 obtém-se :

$$\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} + \omega_1^2 q_{11} = i\mu\omega_1 A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} - 2i\omega_1 \left(\frac{dA(T_1)}{dT_1} \right) e^{i\omega_1 T_0} + CC \quad (6.19)$$

Eliminando os termos seculares de 6.19 (em outras palavras, eliminando os termos multiplicados por $e^{i\omega_1 T_0}$ responsáveis pela geração de termos na solução de (6.19) que a fará tender a infinito quando o tempo tender a infinito) resulta:

$$\mu\omega_1 A(T_1) - 2\omega_1 \left(\frac{dA(T_1)}{dT_1} \right) = 0$$

Ou simplesmente :

$$\dot{A} - \left(\frac{\mu}{2} \right) A = 0 \quad (6.20)$$

aonde o ponto ($\dot{}$) agora representa derivada em relação a T_1 .

Seja A escrito na forma polar como :

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (6.21)$$

Substituindo 6.21 em 6.20 obtém-se :

$$\frac{1}{2}\dot{a}e^{i\beta} + \frac{1}{2}ia\dot{\beta}e^{i\beta} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{2}ae^{i\beta}\right) = 0 \quad (6.22)$$

A equação 6.22 pode ser reescrita como :

$$\dot{a} + ia\dot{\beta} - \left(\frac{\mu}{2}\right)a = 0 \quad (6.23)$$

Separando 6.23 em parte real e imaginária resulta :

$$a\dot{\beta} = 0 \quad (6.24)$$

$$\dot{a} - \frac{\mu}{2}a = 0 \quad (6.25)$$

A solução para a em 6.25 é dada por :

$$a = a_0 e^{\left(\frac{\mu}{2}\right)\tau_1} \quad (6.26)$$

aonde a_0 é uma constante.

Substituindo 6.26 em 6.24 resulta :

$$\left(a_0 e^{\left(\frac{\mu}{2}\right)\tau_1}\right) \dot{\beta} = 0 \quad (6.27)$$

Portanto, $\dot{\beta} = 0$ e

$$\beta = \text{constante} = \beta_0 \quad (6.28)$$

Substituindo a (através da expressão 6.26) e β (através da expressão 6.28) em 6.21 obtém-se :

$$A = \frac{1}{2} a_0 e^{\left(\left(\frac{\mu}{2} \right) T_1 + i\beta_0 \right)} \quad (6.29)$$

Mas como $T_1 = \epsilon^2 T_0 = \epsilon^2 t$, pode-se reescrever 6.29 como :

$$A = \frac{1}{2} a_0 e^{\left(\left(\frac{\mu}{2} \right) \epsilon^2 t + i\beta_0 \right)} \quad (6.30)$$

A escala de ordem superior (T_1) afeta a amplitude e fase da solução de ordem 1, q_{10} .

Para uma solução uniforme de primeira ordem, não é necessário resolver para q_{11} [Nayfeh,1981] (para isso eliminam-se os termos seculares de 6.19).

Portanto, substituindo 6.30 em 6.18 e 6.2 resulta (e sem se preocupar com a solução para q_{11}), obtém-se :

$$q_1 = \frac{1}{2} a_0 e^{\left(\left(\frac{\mu}{2} \right) \epsilon^2 t + i (w_1 t + \beta_0) \right)} + \frac{1}{2} a_0 e^{\left(\left(\frac{\mu}{2} \right) \epsilon^2 t - i (w_1 t + \beta_0) \right)} \quad (6.31)$$

6.2.3 - Amortecimento de ordem 1 (observações)

Fazendo com que o termo de amortecimento, $\mu \dot{q}_1$, tenha a mesma ordem de grandeza da parte linear das equações governantes do movimento ($O(1)$), a equação (6.11) torna-se :

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \mu \dot{q}_1 - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_1] = 0 \quad (6.32)$$

Fazendo $\epsilon = 0$ em (6.32), o sistema linear resultante

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \mu \dot{q}_1 = 0 \quad (6.33)$$

tem sua solução apresentada no Capítulo 5.

Para o caso ideal, quando $U = 0$, tem-se que $\theta = \text{constante}$. Assim, fazendo $\dot{\theta} = 0$ em 6.32, obtém-se a mesma equação apresentada em (6.33). Ou seja, a dinâmica do sistema *curvatura linear ideal perturbado* reduz-se à dinâmica do sistema *curvatura linear ideal não perturbado* (ou simplesmente o sistema linear associado).

A solução para 6.32 (ou 6.33), nessas condições, torna-se a mesma encontrada anteriormente para o sistema linear visto no Capítulo 4. Não faz sentido falar em sistema perturbado.

6.3 - Sistema não ideal (1 modo)

As equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento não ideal considerando o modelo de curvatura linear, anteriormente obtidas através do Princípio de Hamilton (conforme verificado no Capítulo 2), são reproduzidas em (6.9) (na forma adimensional e perturbada), considerando-se ℓ modos na expansão modal e sem amortecimento.

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + c o_1 i_a + c o_2 \dot{\theta} &= c o_1 U \\ \ddot{\theta} + c o_3 \dot{\theta} - c o_4 i_a - c o_5 \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i''(0) &= 0 \\ \ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_\ell] &= 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

mais as condições de contorno (2.44) e (A.27).

No caso não ideal, a variável deslocamento angular, θ , não é conhecida *a priori*. Fazendo $\ell=1$ (um modo na expansão modal), o sistema (6.34) reduz-se ao sistema (6.35) a seguir.

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\
 \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 q_1 \phi_1''(0) &= 0 \\
 \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_1] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.35}$$

6.3.1 - Amortecimento de ordem ϵ^2

Fazendo com que o termo de amortecimento, $\mu \dot{q}_1$, tenha a mesma ordem de grandeza das não-linearidades (ou dos termos de perturbação), a equação (6.35) torna-se :

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\
 \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 q_1 \phi_1''(0) &= 0 \\
 \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_1 + \mu \dot{q}_1] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.36}$$

A solução a ser encontrada neste trabalho para o caso não ideal visa representar a vibração "livre" da viga e sua interação com a fonte de excitação (eixo do atuador ou eixo de rastreamento) a partir do instante em que a tensão elétrica no motor, U , vai a zero (ou seja, a partir do instante em que o motor é desligado).

O termo "livre" no parágrafo anterior foi assim assinalado devido ao fato de que a vibração da viga mesmo após o motor ser desligado continua a influenciar e ser influenciada pelo movimento de rastreamento (ou movimento angular do eixo do motor) até a sua total extinção.

A solução analítica aqui almejada buscará representar a maneira como a resposta associada a cada uma das variáveis dependentes do problema decai com o tempo. Com efeito, de acordo com

as simulações numéricas efetuadas neste mesmo trabalho, cada uma dessas respostas é amortecida. Isso ocorre devido ao caráter não ideal do modelo do sistema dinâmico estudado.

Assim, em (6.36), fazendo $\epsilon = 0$ e $U = 0$, o sistema linear resultante

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + c o_1 i_a + c o_2 \dot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + c o_3 \dot{\theta} - c o_4 i_a - c o_5 q_1 \phi_1''(0) &= 0 \\ \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

tem sua solução apresentada no Capítulo 5.

6.3.2 - Solução através da expansão direta para o sistema não ideal com amortecimento de ordem ϵ^2

Seja o sistema de equações 6.36, reproduzido a seguir, fazendo $U = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + c o_1 i_a + c o_2 \dot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + c o_3 \dot{\theta} - c o_4 i_a - (c o_5 \phi_1''(0)) q_1 &= 0 \\ \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_1 + \mu \dot{q}_1] &= 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Substituindo 6.6 a 6.8 em 6.38 resulta :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d i_{a0}}{dt} \right) + c o_1 i_{a0} + c o_2 \left(\frac{d \theta_0}{dt} \right) + \epsilon^2 \left[\left(\frac{d i_{a1}}{dt} \right) + c o_1 i_{a1} + c o_2 \left(\frac{d \theta_1}{dt} \right) \right] &= 0 \\ \left(\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right) + c o_3 \left(\frac{d \theta_0}{dt} \right) - c o_4 i_{a0} - (c o_5 \phi_1''(0)) q_{10} + \epsilon^2 \left[\left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \right) + c o_3 \left(\frac{d \theta_1}{dt} \right) - \right. \\ \left. - c o_4 i_{a1} - (c o_5 \phi_1''(0)) q_{11} \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^2 q_{10}}{dt^2} \right) + w_1^2 q_{10} + \alpha_1 \left(\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right) + \epsilon^2 \left[\left(\frac{d^2 q_{11}}{dt^2} \right) + w_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \right) - \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 q_{10} + \right. \\
& \left. + \mu \left(\frac{dq_{10}}{dt} \right) \right] + \epsilon^4 \left[- \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 q_{11} - 2 \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) q_{10} + \mu \left(\frac{dq_{11}}{dt} \right) \right] + \epsilon^6 \left[- \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 q_{10} - \right. \\
& \left. - 2 \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) q_{11} \right] + \epsilon^8 \left[- \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 q_{11} \right] = 0
\end{aligned}$$

Eliminando os termos de $O(\epsilon^4)$ e superiores e agrupando os termos restantes em mesma ordem de ϵ resulta :

Ordem ϵ^0 :

$$\left(\frac{di_{a0}}{dt} \right) + c_{o1} i_{a0} + c_{o2} \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right) + c_{o3} \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) - c_{o4} i_{a0} - (c_{o5} \phi_1'(0)) q_{10} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 q_{10}}{dt^2} \right) + w_1^2 q_{10} + \alpha_1 \left(\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right) = 0 \tag{6.39}$$

Ordem ϵ^2 :

$$\left(\frac{di_{a1}}{dt} \right) + c_{o1} i_{a1} + c_{o2} \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \right) + c_{o3} \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) - c_{o4} i_{a1} - (c_{o5} \phi_1'(0)) q_{11} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 q_{11}}{dt^2} \right) + w_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \right) = \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 q_{10} - \mu \left(\frac{dq_{10}}{dt} \right) \tag{6.40}$$

Para a solução do sistema 6.39, duas possibilidades são analisadas nos Capítulos 4 e 5: raízes reais e raízes complexas da equação característica obtida através da metodologia de solução proposta. A forma geral da solução pode ser reescrita como :

$$\begin{aligned}
 i_{a0} &= C_1 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_1 e^{(a-ib)t} \\
 \theta_0 &= C_2 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_2 e^{(a-ib)t} \\
 q_{10} &= C_3 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_3 e^{(a-ib)t}
 \end{aligned}
 \tag{6.41}$$

aonde C_1, C_2, C_3 e seus complexos conjugados são constantes a serem definidas.

Quando as raízes da equação característica (conforme apresentado no Capítulo 4) forem complexas, as expressões 6.41 se aplicam. Quando as raízes da equação característica forem reais, basta fazer $b = 0$ em 6.41 e obter as novas soluções.

O caso mais geral será estudado aqui (o outro trata-se de um caso especial deste).

Substituindo 6.41 em 6.40 obtém-se :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{di_{a1}}{dt} \right) + \omega_1 i_{a1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) &= 0 \\
 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) - \omega_4 i_{a1} - (\omega_5 \phi_1''(0)) q_{11} &= 0 \\
 \left(\frac{d^2 q_{11}}{dt^2} \right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) &= [(a+ib)^2 C_2^2 C_3] e^{3(a+ib)t} + [(a-ib)^2 \bar{C}_2^2 \bar{C}_3] e^{3(a-ib)t} + \\
 [(a+ib)^2 C_2^2 \bar{C}_3 + 2C_2 \bar{C}_2 C_3 (a+ib)(a-ib)] e^{(3a+ib)t} &+ [(a-ib)^2 \bar{C}_2^2 C_3 + \\
 + 2C_2 \bar{C}_2 \bar{C}_3 (a+ib)(a-ib)] e^{(3a-ib)t} - [\mu(a+ib)C_3] e^{(a+ib)t} &- [\mu(a-ib)\bar{C}_3] e^{(a-ib)t}
 \end{aligned}
 \tag{6.42}$$

A solução do sistema 6.42 não apresentará termos seculares. Buscar-se-á, a seguir, resolver 6.42 utilizando metodologia semelhante àquela apresentada no capítulo 4.

O modelo não ideal aonde o amortecimento estrutural (μ) é de $O(1)$ não fará parte do escopo deste trabalho.

Seja 6.42 reescrito como :

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_{a_1}}{dt} \right) + \omega_1 i_{a_1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) - \omega_4 i_{a_1} - (\omega_5 \phi_1''(0)) q_{11} &= 0 \\ \left(\frac{d^2 q_{11}}{dt^2} \right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) &= N_1 e^{3(a+ib)t} + N_2 e^{3(a-ib)t} + N_3 e^{(3a+ib)t} + \\ &+ N_4 e^{(3a-ib)t} - N_5 e^{(a+ib)t} - N_6 e^{(a-ib)t} \end{aligned} \quad (6.43)$$

aonde :

$$N_1 = (a+ib)^2 C_2^2 C_3$$

$$N_2 = (a-ib)^2 \bar{C}_2^2 \bar{C}_3$$

$$N_3 = (a+ib)^2 C_2^2 \bar{C}_3 + 2C_2 \bar{C}_2 C_3 (a+ib)(a-ib)$$

$$N_4 = (a-ib)^2 \bar{C}_2^2 C_3 + 2C_2 \bar{C}_2 \bar{C}_3 (a+ib)(a-ib)$$

$$N_5 = \mu(a+ib)C_3$$

$$N_6 = \mu(a-ib)\bar{C}_3$$

A solução particular de (6.43) pode ser obtida através do somatório das soluções particulares obtidas de cada um dos seguintes sistemas :

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_{a_1}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a_1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) - \omega_4 i_{a_1} - (\cos\phi_1'(0))q_{11} &= 0 \\ \left(\frac{d^2q_{11}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) &= N_1 e^{3(a+ib)t} \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_{a_1}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a_1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) - \omega_4 i_{a_1} - (\cos\phi_1'(0))q_{11} &= 0 \\ \left(\frac{d^2q_{11}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) &= N_2 e^{3(a-ib)t} \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_{a_1}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a_1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) - \omega_4 i_{a_1} - (\cos\phi_1'(0))q_{11} &= 0 \\ \left(\frac{d^2q_{11}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) &= N_3 e^{(3a+ib)t} \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_{a_1}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a_1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) - \omega_4 i_{a_1} - (\cos\phi_1'(0))q_{11} &= 0 \\ \left(\frac{d^2q_{11}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) &= N_4 e^{(3a-ib)t} \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_{a_1}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a_1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) - \omega_4 i_{a_1} - (\cos\phi_1'(0))q_{11} &= 0 \\ \left(\frac{d^2q_{11}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) &= -N_5 e^{(a+ib)t} \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_{a1}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) - \omega_4 i_{a1} - (\cos\phi_1(0))q_{11} &= 0 \\ \left(\frac{d^2q_{11}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) &= -N_6 e^{(a-ib)t} \end{aligned} \quad (6.49)$$

6.3.2.1 - A solução analítica para q_{11}

Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido no Capítulo 4 (e no Capítulo 5), as soluções para q_{11} (uma solução para cada um dos sistemas 6.44 a 6.49) serão dadas, respectivamente, pelas soluções particulares de :

$$A\ddot{q}_{11} + B\dot{q}_{11} + Cq_{11} + D\dot{q}_{11} + Eq_{11} = M_4 e^{3(a+ib)t} \quad (6.50)$$

$$A\ddot{q}_{11} + B\dot{q}_{11} + Cq_{11} + D\dot{q}_{11} + Eq_{11} = M_5 e^{3(a-ib)t} \quad (6.51)$$

$$A\ddot{q}_{11} + B\dot{q}_{11} + Cq_{11} + D\dot{q}_{11} + Eq_{11} = M_6 e^{(3a+ib)t} \quad (6.52)$$

$$A\ddot{q}_{11} + B\dot{q}_{11} + Cq_{11} + D\dot{q}_{11} + Eq_{11} = M_7 e^{(3a-ib)t} \quad (6.53)$$

$$A\ddot{q}_{11} + B\dot{q}_{11} + Cq_{11} + D\dot{q}_{11} + Eq_{11} = M_8 e^{(a+ib)t} \quad (6.54)$$

$$A\ddot{q}_{11} + B\dot{q}_{11} + Cq_{11} + D\dot{q}_{11} + Eq_{11} = M_9 e^{(a-ib)t} \quad (6.55)$$

aonde A, B, C, D e E são constantes definidas no Capítulo 4, fazendo $\mu = 0$, e as demais constantes que aparecem em (6.50) a (6.55) são dadas por :

$$M_1 = \frac{\omega_1 \omega_3}{\alpha_1 \omega_4} + \frac{\omega_2}{\alpha_1}$$

$$M_2 = \frac{\omega_1 + \omega_3}{\alpha_1 \omega_4}$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

$$M_3 = \frac{1}{\alpha_1 c o_4}$$

$$M_4 = M_1 N_1 + 3M_2 N_1(a + ib) + 9M_3 N_1(a + ib)^2$$

$$M_5 = M_1 N_2 + 3M_2 N_2(a - ib) + 9M_3 N_2(a - ib)^2$$

$$M_6 = M_1 N_3 + M_2 N_3(3a + ib) + M_3 N_3(3a + ib)^2$$

$$M_7 = M_1 N_4 + M_2 N_4(3a - ib) + M_3 N_4(3a - ib)^2$$

$$M_8 = -M_1 N_5 - M_2 N_5(a + ib) - M_3 N_5(a + ib)^2$$

$$M_9 = -M_1 N_6 - M_2 N_6(a - ib) - M_3 N_6(a - ib)^2$$

As equações (6.50) a (6.55) são equações diferenciais ordinárias de quarta ordem com coeficientes constantes e somente na variável q_{11} .

Seja $q_{11}^{(6.50)}$ a solução para q_{11} obtida através da resolução da equação (6.50) e assim por diante para (6.52) a (6.55). Resolvendo (6.50) a (6.55) utilizando o software *Mathematica^R* (e eliminando a solução homogênea) obtém-se :

$$q_{11}^{(6.50)} = M_{10} e^{3(a+ib)t}$$

$$q_{11}^{(6.51)} = M_{11} e^{3(a-ib)t}$$

$$q_{11}^{(6.52)} = M_{12} e^{(3a+ib)t}$$

$$q_{11}^{(6.53)} = M_{13} e^{(3a-ib)t}$$

$$q_{11}^{(6.54)} = M_{14} e^{(a+ib)t}$$

$$q_{11}^{(6.55)} = M_{15} e^{(a-ib)t}$$

aonde :

$$r_\alpha = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_1 - r_4)$$

$$r_\beta = (r_1 - r_2)(r_2 - r_3)(r_2 - r_4)$$

$$r_\eta = (r_1 - r_3)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)$$

$$r_\psi = (r_3 - r_4)(r_4 - r_1)(r_4 - r_2)$$

$$M_{10} = M_4 \left(\frac{1}{A(3a + 3ib - r_1)r_\alpha} - \frac{1}{A(3a + 3ib - r_2)r_\beta} - \frac{1}{A(3a + 3ib - r_3)r_\eta} - \frac{1}{A(3a + 3ib - r_4)r_\psi} \right)$$

$$M_{11} = M_5 \left(\frac{1}{A(3a - 3ib - r_1)r_\alpha} - \frac{1}{A(3a - 3ib - r_2)r_\beta} - \frac{1}{A(3a - 3ib - r_3)r_\eta} - \frac{1}{A(3a - 3ib - r_4)r_\psi} \right)$$

$$M_{12} = M_6 \left(\frac{1}{A(3a + ib - r_1)r_\alpha} - \frac{1}{A(3a + ib - r_2)r_\beta} - \frac{1}{A(3a + ib - r_3)r_\eta} - \frac{1}{A(3a + ib - r_4)r_\psi} \right)$$

$$M_{13} = M_7 \left(\frac{1}{A(3a - ib - r_1)r_\alpha} - \frac{1}{A(3a - ib - r_2)r_\beta} - \frac{1}{A(3a - ib - r_3)r_\eta} - \frac{1}{A(3a - ib - r_4)r_\psi} \right)$$

$$M_{14} = M_8 \left(\frac{1}{A(a + ib - r_1)r_\alpha} - \frac{1}{A(a + ib - r_2)r_\beta} - \frac{1}{A(a + ib - r_3)r_\eta} - \frac{1}{A(a + ib - r_4)r_\psi} \right)$$

$$M_{15} = M_9 \left(\frac{1}{A(a - ib - r_1)r_\alpha} - \frac{1}{A(a - ib - r_2)r_\beta} - \frac{1}{A(a - ib - r_3)r_\eta} - \frac{1}{A(a - ib - r_4)r_\psi} \right)$$

e r_1, r_2, r_3 e r_4 representam cada uma das raízes da equação característica (4.12) (ver Capítulo 4).

Portanto, a solução para q_{11} em (6.43) será dada por :

$$q_{11} = M_{10}e^{3(a+ib)t} + M_{11}e^{3(a-ib)t} + M_{12}e^{(3a+ib)t} + M_{13}e^{(3a-ib)t} + M_{14}e^{(a+ib)t} + M_{15}e^{(a-ib)t} \quad (6.56)$$

A expressão (6.56) considera (implicitamente) que todas as quatro raízes da equação característica sejam possíveis. Esta é uma consideração matemática advinda das operações

realizadas para a transformação dos sistemas originais (6.44) a (6.49) nos sistemas (parciais, pois apenas para q_{11}) (6.50) a (6.55). No entanto, conforme visto no Capítulo 4, a solução para q_{11} deverá conter duas raízes reais ou uma raiz complexa, pois o sistema original (em q_{11}) é de ordem 2. Esta consideração irá fazer com que as expressões para M_{10} a M_{15} sejam ligeiramente alteradas posteriormente, eliminando-se alguns termos das mesmas.

6.3.2.2 - A solução analítica para θ_1

Novamente seguindo-se o raciocínio desenvolvido no Capítulo 4 (e no item 6.3.2.1), obtém-se uma expressão para θ_1 da forma :

$$\theta_1^{(6.50)} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)q_{11}^{(6.50)} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t q_{11}^{(6.50)} dt dt + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t N_1 e^{3(a+ib)t} dt dt \quad (6.57)$$

$$\theta_1^{(6.51)} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)q_{11}^{(6.51)} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t q_{11}^{(6.51)} dt dt + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t N_2 e^{3(a-ib)t} dt dt \quad (6.58)$$

$$\theta_1^{(6.52)} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)q_{11}^{(6.52)} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t q_{11}^{(6.52)} dt dt + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t N_3 e^{3a+ib)t} dt dt \quad (6.59)$$

$$\theta_1^{(6.53)} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)q_{11}^{(6.53)} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t q_{11}^{(6.53)} dt dt + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t N_4 e^{3a-ib)t} dt dt \quad (6.60)$$

$$\theta_1^{(6.54)} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)q_{11}^{(6.54)} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t q_{11}^{(6.54)} dt dt - \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t N_5 e^{(a+ib)t} dt dt \quad (6.61)$$

$$\theta_1^{(6.55)} = -\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)q_{11}^{(6.55)} - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t q_{11}^{(6.55)} dt dt + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\int_0^t \int_0^t N_6 e^{(a-ib)t} dt dt \quad (6.62)$$

Desenvolvendo (6.57) a (6.62) e agrupando termos resulta :

$$\theta_1^{(6.50)} = M_{16} e^{3(a+ib)t} + M_{17} (1 + 3at + 3ibt)$$

$$\theta_1^{(6.51)} = M_{18}e^{3(a-ib)t} + M_{19}(1+3at-3ibt)$$

$$\theta_1^{(6.52)} = M_{20}e^{(3a+ib)t} + M_{21}(1+3at+ibt)$$

$$\theta_1^{(6.53)} = M_{22}e^{(3a-ib)t} + M_{23}(1+3at-ibt)$$

$$\theta_1^{(6.54)} = M_{24}e^{(a+ib)t} + M_{25}(1+at+ibt)$$

$$\theta_1^{(6.55)} = M_{26}e^{(a-ib)t} + M_{27}(1+at-ibt)$$

aonde :

$$M_{16} = -\frac{M_{10}}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2 M_{10} - N_1}{9\alpha_1 (a+ib)^2} \right)$$

$$M_{17} = \frac{w_1^2 M_{10} - N_1}{9\alpha_1 (a+ib)^2}$$

$$M_{18} = -\frac{M_{11}}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2 M_{11} - N_2}{9\alpha_1 (a-ib)^2} \right)$$

$$M_{19} = \frac{w_1^2 M_{11} - N_2}{9\alpha_1 (a-ib)^2}$$

$$M_{20} = -\frac{M_{12}}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2 M_{12} - N_3}{\alpha_1 (3a+ib)^2} \right)$$

$$M_{21} = \frac{w_1^2 M_{12} - N_3}{\alpha_1 (3a+ib)^2}$$

$$M_{22} = -\frac{M_{13}}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2 M_{13} - N_4}{\alpha_1 (3a-ib)^2} \right)$$

$$M_{23} = \frac{w_1^2 M_{13} - N_4}{\alpha_1 (3a-ib)^2}$$

$$M_{24} = -\frac{M_{14}}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2 M_{14} - N_5}{\alpha_1 (a+ib)^2} \right)$$

$$M_{25} = \frac{w_1^2 M_{14} - N_5}{\alpha_1 (a+ib)^2}$$

$$M_{26} = -\frac{M_{15}}{\alpha_1} - \left(\frac{w_1^2 M_{15} - N_6}{\alpha_1 (a - ib)^2} \right)$$

$$M_{27} = \frac{w_1^2 M_{15} - N_6}{\alpha_1 (a - ib)^2}$$

Portanto, a solução para θ_1 em (6.43) será dada por :

$$\begin{aligned} \theta_1 = & M_{16}e^{3(a+ib)t} + M_{18}e^{3(a-ib)t} + M_{20}e^{(3a+ib)t} + M_{22}e^{(3a-ib)t} + M_{24}e^{(a+ib)t} + M_{26}e^{(a-ib)t} + \\ & + M_{17}(1+3at+3ibt) + M_{19}(1+3at-3ibt) + M_{21}(1+3at+ibt) + M_{23}(1+3at-ibt) + \\ & + M_{25}(1+at+ibt) + M_{27}(1+at-ibt) \end{aligned} \quad (6.63)$$

6.3.2.3 - A solução analítica para i_{a1}

Novamente utilizando os procedimentos descritos no Capítulo 4 (e itens 6.3.2.1 e 6.3.2.2), obtém-se as seguintes expressões para cada uma das soluções particulares de i_{a1} :

$$\begin{aligned} i_{a1}^{(6.50)} = & \\ = & -\left(\frac{1}{\alpha_1 \cos_4} \right) \left(\frac{d^2 q_{11}^{(6.50)}}{dt^2} \right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \cos_4} + \frac{\cos_5 \phi_1''(0)}{\cos_4} \right) q_{11}^{(6.50)} + \left(\frac{\cos_3}{\cos_4} \right) \left(\frac{d\theta_1^{(6.50)}}{dt} \right) + \left(\frac{N_1}{\alpha_1 \cos_4} \right) e^{3(a+ib)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{a1}^{(6.51)} = & \\ = & -\left(\frac{1}{\alpha_1 \cos_4} \right) \left(\frac{d^2 q_{11}^{(6.51)}}{dt^2} \right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \cos_4} + \frac{\cos_5 \phi_1''(0)}{\cos_4} \right) q_{11}^{(6.51)} + \left(\frac{\cos_3}{\cos_4} \right) \left(\frac{d\theta_1^{(6.51)}}{dt} \right) + \left(\frac{N_2}{\alpha_1 \cos_4} \right) e^{3(a-ib)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{a1}^{(6.52)} = & \\ = & -\left(\frac{1}{\alpha_1 \cos_4} \right) \left(\frac{d^2 q_{11}^{(6.52)}}{dt^2} \right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \cos_4} + \frac{\cos_5 \phi_1''(0)}{\cos_4} \right) q_{11}^{(6.52)} + \left(\frac{\cos_3}{\cos_4} \right) \left(\frac{d\theta_1^{(6.52)}}{dt} \right) + \left(\frac{N_3}{\alpha_1 \cos_4} \right) e^{(3a+ib)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_{a1}^{(6.53)} &= \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) \left(\frac{d^2 q_{11}^{(6.53)}}{dt^2}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1''(0)}{\text{co}_4}\right) q_{11}^{(6.53)} + \left(\frac{\text{co}_3}{\text{co}_4}\right) \left(\frac{d\theta_1^{(6.53)}}{dt}\right) + \left(\frac{N_4}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) e^{(3a-ib)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_{a1}^{(6.54)} &= \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) \left(\frac{d^2 q_{11}^{(6.54)}}{dt^2}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1''(0)}{\text{co}_4}\right) q_{11}^{(6.54)} + \left(\frac{\text{co}_3}{\text{co}_4}\right) \left(\frac{d\theta_1^{(6.54)}}{dt}\right) - \left(\frac{N_5}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) e^{(a+ib)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_{a1}^{(6.55)} &= \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) \left(\frac{d^2 q_{11}^{(6.55)}}{dt^2}\right) - \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1''(0)}{\text{co}_4}\right) q_{11}^{(6.55)} + \left(\frac{\text{co}_3}{\text{co}_4}\right) \left(\frac{d\theta_1^{(6.55)}}{dt}\right) - \left(\frac{N_6}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) e^{(a-ib)t} \end{aligned}$$

Desenvolvendo as expressões acima resulta :

$$\dot{i}_{a1}^{(6.50)} = M_{28} e^{3(a+ib)t} + M_{29}$$

$$\dot{i}_{a1}^{(6.51)} = M_{30} e^{3(a-ib)t} + M_{31}$$

$$\dot{i}_{a1}^{(6.52)} = M_{32} e^{(3a+ib)t} + M_{33}$$

$$\dot{i}_{a1}^{(6.53)} = M_{34} e^{(3a-ib)t} + M_{35}$$

$$\dot{i}_{a1}^{(6.54)} = M_{36} e^{(a+ib)t} + M_{37}$$

$$\dot{i}_{a1}^{(6.55)} = M_{38} e^{(a-ib)t} + M_{39}$$

aonde :

$$M_{28} = -\left(\frac{9M_{10}(a+ib)^2}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) - M_{10} \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1''(0)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{3\text{co}_3 M_{16}(a+ib)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{N_1}{\alpha_1 \text{co}_4}\right)$$

$$M_{29} = \frac{3\text{co}_3 M_{17}(a+ib)}{\text{co}_4}$$

$$M_{30} = -\left(\frac{9M_{11}(a-ib)^2}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) - M_{11} \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1''(0)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{3\text{co}_3 M_{18}(a-ib)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{N_2}{\alpha_1 \text{co}_4}\right)$$

$$M_{31} = \frac{3\text{co}_3 M_{19} (a - ib)}{\text{co}_4}$$

$$M_{32} = -\left(\frac{M_{12} (3a + ib)^2}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) - M_{12} \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1'(0)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{\text{co}_3 M_{20} (3a + ib)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{N_3}{\alpha_1 \text{co}_4}\right)$$

$$M_{33} = \frac{\text{co}_3 M_{21} (3a + ib)}{\text{co}_4}$$

$$M_{34} = -\left(\frac{M_{13} (3a - ib)^2}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) - M_{13} \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1'(0)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{\text{co}_3 M_{22} (3a - ib)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{N_4}{\alpha_1 \text{co}_4}\right)$$

$$M_{35} = \frac{\text{co}_3 M_{23} (3a - ib)}{\text{co}_4}$$

$$M_{36} = -\left(\frac{M_{14} (a + ib)^2}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) - M_{14} \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1'(0)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{\text{co}_3 M_{24} (a + ib)}{\text{co}_4}\right) - \left(\frac{N_5}{\alpha_1 \text{co}_4}\right)$$

$$M_{37} = \frac{\text{co}_3 M_{25} (a + ib)}{\text{co}_4}$$

$$M_{38} = -\left(\frac{M_{15} (a - ib)^2}{\alpha_1 \text{co}_4}\right) - M_{15} \left(\frac{w_1^2}{\alpha_1 \text{co}_4} + \frac{\text{co}_5 \phi_1'(0)}{\text{co}_4}\right) + \left(\frac{\text{co}_3 M_{26} (a - ib)}{\text{co}_4}\right) - \left(\frac{N_6}{\alpha_1 \text{co}_4}\right)$$

$$M_{39} = \frac{\text{co}_3 M_{27} (a - ib)}{\text{co}_4}$$

Portanto, a solução para i_{a1} em (6.43) será dada por :

$$i_{a1} = M_{28} e^{3(a+ib)t} + M_{30} e^{3(a-ib)t} + M_{32} e^{(3a+ib)t} + M_{34} e^{(3a-ib)t} + M_{36} e^{(a+ib)t} + M_{38} e^{(a-ib)t} + M_{40}$$

(6.64)

aonde :

$$M_{40} = M_{29} + M_{31} + M_{33} + M_{35} + M_{37} + M_{39} .$$

6.4 - Solução geral

Isolando q_{11} nas segundas equações de (6.44) a (6.49) conclui-se que, na verdade, $\dot{\theta}_1$ e i_a não poderão ter termos constantes em suas expressões, uma vez que q_1 e $\ddot{\theta}_1$ não irão apresentá-lo. Estes termos aparecem em θ_1 (expressão (6.63) e, por conseguinte, em i_{a1} na expressão (6.64)) devido à integração dupla nas expressões (6.57) a (6.62) e deverão ser eliminados para que as segundas equações de (6.44) a (6.49) e, por conseguinte, a segunda equação de (6.38), possam ser verificadas. Cabe ressaltar também que as soluções numéricas de (6.38) para cada uma das variáveis estudadas, conforme apresentado no Capítulo 8, apresenta comportamento vibratório de amplitude decrescente (amortecido) ao longo do tempo nas condições estudadas.

Assim, a solução geral do sistema original perturbado (6.38, reproduzido a seguir) :

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + c\omega_1 i_a + c\omega_2 \dot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + c\omega_3 \dot{\theta} - c\omega_4 i_a - (c\omega_5 \phi_1''(0)) q_1 &= 0 \\ \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 q_1 + \mu \dot{q}_1] &= 0 \end{aligned} \quad (6.65)$$

de acordo com (6.6) a (6.8), torna-se :

$$\begin{aligned} i_a = C_1 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_1 e^{(a-ib)t} + \epsilon^2 \left[M_{28} e^{3(a+ib)t} + M_{30} e^{3(a-ib)t} + M_{32} e^{(3a+ib)t} + M_{34} e^{(3a-ib)t} + \right. \\ \left. + M_{36} e^{(a+ib)t} + M_{38} e^{(a-ib)t} \right] \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \theta = C_2 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_2 e^{(a-ib)t} + \epsilon^2 \left[M_{16} e^{3(a+ib)t} + M_{18} e^{3(a-ib)t} + M_{20} e^{(3a+ib)t} + M_{22} e^{(3a-ib)t} + \right. \\ \left. + M_{24} e^{(a+ib)t} + M_{26} e^{(a-ib)t} \right] \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$q_1 = C_3 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_3 e^{(a-ib)t} + \epsilon^2 \left[M_{10} e^{3(a+ib)t} + M_{11} e^{3(a-ib)t} + M_{12} e^{(3a+ib)t} + M_{13} e^{(3a-ib)t} + M_{14} e^{(a+ib)t} + M_{15} e^{(a-ib)t} \right] \quad (6.68)$$

Os coeficientes $M_{28}, M_{30}, M_{32}, M_{34}, M_{36}, M_{38}, M_{16}, M_{18}, M_{20}, M_{22}, M_{24}, M_{26}, M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$ e M_{15} dependem de parâmetros do sistema dinâmico, que serão conhecidos uma vez que o sistema dinâmico seja especificado e das constantes $C_1, \bar{C}_1, C_2, \bar{C}_2, C_3$ e \bar{C}_3 , que aparecem em (6.40).

Assim, fazendo para $t = t_{\text{inicial}}$

$$\dot{i}_a = \dot{i}_{a \text{ inicial}}$$

$$\ddot{i}_a = \ddot{i}_{a \text{ inicial}}$$

$$\theta = \theta_{\text{inicial}}$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\text{inicial}}$$

$$q_1 = q_{1 \text{ inicial}}$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_{1 \text{ inicial}}$$

obtem-se seis equações complexas para as seis incógnitas : $C_1, \bar{C}_1, C_2, \bar{C}_2, C_3$ e \bar{C}_3 . Desta forma, as soluções (6.66) a (6.68) serão bem definidas. No entanto, o sistema de equações algébricas complexas que se obtém nesta operação é um sistema de equações algébricas não lineares nessas incógnitas, que deve ser resolvido para a parte real e para a parte imaginária separadamente.

Capítulo 7

Solução analítica : curvatura não linear

7.1 - Sistema ideal (1 modo)

As equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento ideal considerando o modelo de curvatura não linear, anteriormente obtidas através do Princípio de Hamilton (conforme verificado no Capítulo 3), são reproduzidas em (7.1) (na forma adimensional e perturbada), considerando-se ℓ modos na expansão modal e sem amortecimento.

$$\begin{aligned} \dot{i}_a + c_{01}i_a + c_{02}\dot{\theta} &= c_{01}U \\ \ddot{\theta} + c_{03}\dot{\theta} - c_{04}i_a &= 0 \\ \ddot{q}_\ell + w_\ell^2q_\ell + \alpha_\ell\ddot{\theta} + \epsilon^2 &\left[\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \beta_{i\ell}q_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\rho_{ij\ell}\dot{\theta}q_i\dot{q}_j - \lambda_{ij\ell}\ddot{\theta}q_iq_j) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{ijk\ell}q_i(\dot{q}_j\dot{q}_k + q_j\ddot{q}_k) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk\ell}q_iq_jq_k \right] = 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

mais as condições de contorno (3.60)-(3.63) e (A.27).

Conforme visto no capítulo anterior, para o caso ideal, a variável dependente deslocamento angular, θ , é prescrita (ou conhecida *a priori*) e, portanto, não se faz necessário resolver todo o sistema (7.1) mas apenas a última dessas equações. Fazendo $\ell=1$ (um modo na expansão modal) o sistema (7.1) reduz-se ao sistema (67.2) a seguir, aonde θ (e suas derivadas) é conhecido.

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \beta_{11} q_1 - \wp_{111} \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 + \lambda_{111} \ddot{\theta} q_1 q_1 + \Lambda_{1111} q_1 \dot{q}_1^2 + \Lambda_{1111} q_1^2 \ddot{q}_1 + \Gamma_{1111} q_1^3 \right] = 0 \quad (7.2)$$

7.1.1 - Amortecimento de ordem ϵ^2

Fazendo com que o termo de amortecimento, $\mu \dot{q}_1$, tenha a mesma ordem de grandeza das não-linearidades (ou dos termos de perturbação), a equação (7.2) torna-se :

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \beta_{11} q_1 - \wp_{111} \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 + \lambda_{111} \ddot{\theta} q_1 q_1 + \Lambda_{1111} q_1 \dot{q}_1^2 + \Lambda_{1111} q_1^2 \ddot{q}_1 + \Gamma_{1111} q_1^3 + \mu \dot{q}_1 \right] = 0 \quad (7.3)$$

Fazendo $\epsilon=0$ em (7.3), o sistema linear resultante

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} = 0 \quad (7.4)$$

é o mesmo apresentado em (6.12) e, conforme mencionado no capítulo anterior, tem sua solução apresentada no Capítulo 5.

7.1.2 - Solução através do MME para o sistema ideal com amortecimento de ordem ϵ^2

Para o caso ideal, quando $U = 0$, tem-se que $\theta = \text{constante}$. Assim, substituindo 6.4 e 6.5 em 7.3 e fazendo $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$ obtém-se :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 q_1}{\partial T_o^2} + 2 \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_o \partial T_1} \right) + w_1^2 q_1 + \epsilon^2 \left[\Lambda_{1111} q_1 \left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial T_o} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_1} \right) \right)^2 + \right. \\
& \left. + \Lambda_{1111} q_1^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_o^2} + 2 \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_o \partial T_1} \right) \right) + \Gamma_{1111} q_1^3 + \mu \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_o} \right) + \epsilon^2 \left(\mu \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_1} \right) \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Substituindo 6.2 em 7.5 resulta :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_o^2} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_o^2} \right) + 2 \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_o \partial T_1} \right) + 2 \epsilon^4 \left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_o \partial T_1} \right) + w_1^2 q_{10} + \epsilon^2 w_1^2 q_{11} + \\
& + \epsilon^2 \left[\Lambda_{1111} (q_{10} + \epsilon^2 q_{11}) \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_o} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_o} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_1} \right) + \epsilon^4 \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_1} \right) \right) \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_o} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \epsilon^2 \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_o} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_1} \right) + \epsilon^4 \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_1} \right) \right) + \Lambda_{1111} (q_{10}^2 + 2 \epsilon^2 q_{10} q_{11} + \right. \\
& \left. + \epsilon^4 q_{11}^2) \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_o^2} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_o^2} \right) + 2 \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_o \partial T_1} \right) + 2 \epsilon^4 \left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_o \partial T_1} \right) \right) + \Gamma_{1111} (q_{10}^3 + \right. \\
& \left. + 3 \epsilon^2 q_{10}^2 q_{11} + 3 \epsilon^4 q_{10} q_{11}^2 + \epsilon^6 q_{11}^3) + \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_o} \right) + \epsilon^2 \left(\mu \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_o} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \epsilon^2 \left(\mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_1} \right) \right) + \epsilon^4 \left(\mu \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_1} \right) \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Considerando os termos até $O(\epsilon^2)$, 7.6 reduz-se a :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_o^2} \right) + w_1^2 q_{10} + \epsilon^2 \left[w_1^2 q_{11} + \left(\frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_o^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_o \partial T_1} \right) + \Lambda_{1111} (q_{10}) \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_o} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \Lambda_{1111} (q_{10}^2) \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_o^2} \right) + \Gamma_{1111} (q_{10}^3) + \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_o} \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Em 7.7 coleta-se, a seguir, os termos de mesma ordem de ϵ .

Os termos de ordem ϵ^0 resultam :

$$\left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0^2} \right) + w_1^2 q_{10} = 0 \quad (7.8)$$

Os termos de ordem ϵ^2 resultam :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{11} = & -2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} \right) - \Lambda_{1111}(q_{10}) \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_0} \right)^2 - \Lambda_{1111}(q_{10}^2) \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0^2} \right) - \\ & - \Gamma_{1111}(q_{10}^3) - \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_0} \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

A solução de 7.8, de acordo com o Capítulo 5 (ou Capítulo 6), será dada por :

$$q_{10} = A(T_1) e^{iw_1 T_0} + CC \quad (7.10)$$

aonde $A(T_1)$ representa uma função complexa arbitrária e CC representa os termos complexos conjugados de q_{10} .

Substituindo 7.10 em 7.9 obtém-se :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{11} = & -2i w_1 \left(\frac{dA(T_1)}{dT_1} \right) e^{iw_1 T_0} + 2\Lambda_{1111}(w_1^2 (A(T_1))^3 e^{3iw_1 T_0}) - \\ & - \Gamma_{1111}((A(T_1))^3 e^{3iw_1 T_0} + 3(A(T_1))^2 \bar{A}(T_1) e^{iw_1 T_0} + 3A(T_1)(\bar{A}(T_1))^2 e^{-iw_1 T_0} + \\ & + (\bar{A}(T_1))^3 e^{-3iw_1 T_0}) - i\mu w_1 A(T_1) e^{iw_1 T_0} + CC \end{aligned} \quad (7.11)$$

Eliminando os termos seculares de 7.11 (em outras palavras, eliminando os termos multiplicados por $e^{iw_1T_0}$ responsáveis pela geração de termos na solução de (7.11) que a fará tender a infinito quando o tempo tender a infinito) resulta:

$$-2i w_1 \left(\frac{dA(T_1)}{dT_1} \right) - 3\Gamma_{1111} (A(T_1))^2 \bar{A}(T_1) - i\mu w_1 A(T_1) = 0$$

Ou simplesmente :

$$-2i w_1 \dot{A} - 3\Gamma_{1111} A^2 \bar{A} - i\mu w_1 A = 0 \quad (7.12)$$

aonde o ponto ($\dot{}$) agora representa derivada em relação a T_1 .

Seja A escrito na forma polar como :

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (7.13)$$

Substituindo 7.13 em 7.12 obtém-se :

$$-2i w_1 \left(\frac{1}{2} \dot{a} e^{i\beta} + \frac{1}{2} a i \dot{\beta} e^{i\beta} \right) - 3\Gamma_{1111} \left(\frac{1}{8} a^3 e^{i\beta} \right) - i\mu w_1 \left(\frac{1}{2} a e^{i\beta} \right) = 0 \quad (7.14)$$

A equação 7.14 pode ser reescrita como :

$$i \dot{a} w_1 - a w_1 \dot{\beta} + \frac{3}{8} \Gamma_{1111} a^3 + \frac{1}{2} i a \mu w_1 = 0 \quad (7.15)$$

Separando 7.15 em parte real e imaginária resulta :

$$a\dot{\beta} - \left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8w_1} \right) a^3 = 0 \quad (7.16)$$

$$\dot{a} + \frac{\mu}{2} a = 0 \quad (7.17)$$

A equação 7.16 pode ainda ser reescrita como :

$$\dot{\beta} = \left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8w_1} \right) a^2 \quad (7.18)$$

A solução para a em 7.17 é dada por :

$$a = a_0 e^{-\left(\frac{\mu}{2}\right)T_1} \quad (7.19)$$

aonde a_0 é uma constante.

Substituindo 7.19 em 7.18 resulta :

$$\dot{\beta} = \left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8w_1} \right) a_0^2 e^{-\mu T_1} \quad (7.20)$$

Portanto :

$$\beta = -\left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8\mu w_1} \right) a_0^2 e^{-\mu T_1} + \beta_0 \quad (7.21)$$

aonde β_0 é uma constante.

Substituindo a (através da expressão 7.19) e β (através da expressão 7.21) em 7.13 obtém-se :

$$A = \frac{1}{2} a_O e^{-\left(\left(\frac{\mu}{2}\right)T_1 + i\left(\left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8\mu w_1}\right)a_O^2 e^{-\mu T_1 + \beta_O}\right)\right)} \quad (7.22)$$

Mas como $T_1 = \epsilon^2 T_O = \epsilon^2 t$, pode-se reescrever 7.22 como :

$$A = \frac{1}{2} a_O e^{-\left(\left(\frac{\mu}{2}\right)\epsilon^2 t + i\left(\left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8\mu w_1}\right)a_O^2 e^{-\mu\epsilon^2 t + \beta_O}\right)\right)} \quad (7.22)$$

Substituindo 7.22 em 7.10 e 6.2 resulta (neste caso, considera-se que a solução de ordem superior afeta a amplitude e fase da solução de ordem 1, q_{10} , e a solução para q_{11} não é necessária) :

$$q_1 = \frac{1}{2} a_O e^{-\left(\left(\frac{\mu}{2}\right)\epsilon^2 t + i\left(w_{1t} + \left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8\mu w_1}\right)a_O^2 e^{-\mu\epsilon^2 t + \beta_O}\right)\right)} + \frac{1}{2} a_O e^{-\left(\left(\frac{\mu}{2}\right)\epsilon^2 t - i\left(w_{1t} + \left(\frac{3\Gamma_{1111}}{8\mu w_1}\right)a_O^2 e^{-\mu\epsilon^2 t + \beta_O}\right)\right)} \quad (7.23)$$

7.1.3 - Amortecimento de ordem 1 (observações)

Fazendo com que o termo de amortecimento, $\mu\dot{q}_1$, tenha a mesma ordem de grandeza da parte linear das equações governantes do movimento ($O(1)$), a equação (7.3) torna-se :

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \mu\dot{q}_1 + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \beta_{11} q_1 - \wp_{111} \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 + \lambda_{111} \ddot{\theta} q_1 q_1 + \Lambda_{1111} q_1 \dot{q}_1^2 + \Lambda_{1111} q_1^2 \ddot{q}_1 + \Gamma_{1111} q_1^3 \right] = 0 \quad (7.24)$$

Fazendo $\epsilon = 0$ em (7.24), o sistema linear resultante

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \mu \dot{q}_1 = 0 \quad (7.25)$$

tem sua solução apresentada no Capítulo 5.

Para o caso ideal, quando $U = 0$, tem-se que $\theta = \text{constante}$. Assim, substituindo 6.4 e 6.5 em 7.24 e fazendo $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$ obtém-se :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0^2} + 2\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + w_1^2 q_1 + \mu \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_0} \right) + \mu \epsilon^2 \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_1} \right) + \\ & + \epsilon^2 \left[\Lambda_{1111} q_1 \left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial T_0} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_1} \right) \right)^2 + \Lambda_{1111} q_1^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0^2} + 2\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0 \partial T_1} \right) \right) + \Gamma_{1111} q_1^3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.26)$$

Substituindo 6.2 em 7.26 e coletando termos de mesma ordem de ϵ resulta :

Ordem ϵ^0 :

$$\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{10} + \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_0} \right) = 0 \quad (7.27)$$

Ordem ϵ^2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{11} + \mu \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_0} \right) = -2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} \right) - \mu \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_1} \right) - \Lambda_{1111} q_{10} \left(\frac{\partial q_{10}}{\partial T_0} \right)^2 - \\ & - \Lambda_{1111} q_{10}^2 \left(\frac{\partial^2 q_{10}}{\partial T_0^2} \right) - \Gamma_{1111} q_{10}^3 \end{aligned} \quad (7.28)$$

A solução de 7.27 , conforme apresentada no Capítulo 5, é dada por :

$$q_{10} = Ce^{(a+ib)T_0} + \bar{C}e^{(a-ib)T_0} \quad (7.29)$$

aonde a e b também são definidos no mesmo Capítulo 5. Substituindo 7.29 em 7.28 obtém-se :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_{11}}{\partial T_0^2} + w_1^2 q_{11} + \mu \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial T_0} \right) &= -2 \left(\dot{C}(a+ib)e^{(a+ib)T_0} \right) - \mu \left(\dot{C}e^{(a+ib)T_0} \right) - \\ &- \Lambda_{1111} \left(C^3(a+ib)^2 e^{3(a+ib)T_0} + 2C^2\bar{C}(a+ib)(a-ib)e^{(3a+ib)T_0} + C\bar{C}^2(a-ib)^2 e^{(3a-ib)T_0} \right) - \\ &- \Lambda_{1111} \left(C^3(a+ib)^2 e^{3(a+ib)T_0} + 2C^2\bar{C}(a+ib)^2 e^{(3a+ib)T_0} + C\bar{C}^2(a+ib)^2 e^{(3a-ib)T_0} \right) - \\ &- \Gamma_{1111} \left(C^3 e^{3(a+ib)T_0} + 3C^2\bar{C}e^{(3a+ib)T_0} + 3C\bar{C}^2 e^{(3a-ib)T_0} + \bar{C}^3 e^{3(a-ib)T_0} \right) + cc \end{aligned} \quad (7.30)$$

Para uma solução uniforme de primeira ordem não é necessário resolver 7.30 para q_{11} . Nesta mesma equação, é suficiente coletar e eliminar os termos que produzirão termos seculares em q_{11} [Nayfeh,1981].

Assim, eliminando os termos seculares de 7.30 resulta

$$2\dot{C}a + \mu\dot{C} + 2i\dot{C}b = 0 \quad (7.31)$$

Portanto, $\dot{C} = 0$ ou $C = \text{constante}$. Desta forma, C não depende de T_1 .

A solução para q_1 torna-se, então :

$$q_1 = Ce^{(a+ib)T_0} + \bar{C}e^{(a-ib)T_0} \quad (7.32)$$

Desta forma, verifica-se que a amplitude e fase de q_1 não são afetados pela pequena escala de tempo ($T_1 = \epsilon^2 T_0$), ou seja, a solução de 7.24 não é perturbada.

Conforme visto no Capítulo 6 (item 6.2.3), a solução do sistema perturbado cai na solução do sistema linear associado (não perturbado) e as não-linearidades presentes no modelo são eliminadas pelo amortecimento de ordem superior.

Confirma-se [Nayfeh,1981; Nayfeh et al.,1979] que o amortecimento de $O(1)$ não é uma boa hipótese para o modelo proposto para o caso ideal.

7.2 - Sistema não ideal (1 modo)

As equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento não ideal considerando o modelo de curvatura não linear, anteriormente obtidas através do Princípio de Hamilton (conforme verificado no Capítulo 3), são reproduzidas em (7.10) (na forma adimensional e perturbada), considerando-se ℓ modos na expansão modal e sem amortecimento.

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_a + co_1 \dot{i}_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\
 \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i''(0) &= 0 \\
 \ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \beta_{i\ell} q_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\rho_{ij\ell} \dot{\theta} q_i \dot{q}_j - \lambda_{ij\ell} \ddot{\theta} q_i q_j) + \right. \\
 \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{ijk\ell} q_i (\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk\ell} q_i q_j q_k \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

mais as condições de contorno (3.60)-(3.63) e (A.27).

No caso não ideal, a variável deslocamento angular, θ , não é conhecida *a priori*. Fazendo $\ell=1$ (um modo na expansão modal), o sistema (7.10) reduz-se ao sistema (7.11) a seguir.

$$\begin{aligned}
\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\
\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 q_1 \phi_1''(0) &= 0 \\
\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \beta_{111} q_1 - \wp_{111} \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 + \lambda_{111} \ddot{\theta} q_1 q_1 + \right. \\
&\left. + \Lambda_{1111} q_1 \dot{q}_1^2 + \Lambda_{1111} q_1^2 \ddot{q}_1 + \Gamma_{1111} q_1^3 \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.11}$$

7.2.1 - Amortecimento de ordem ϵ^2

Fazendo com que o termo de amortecimento, $\mu \dot{q}_1$, tenha a mesma ordem de grandeza das não-linearidades (ou dos termos de perturbação), o sistema (7.11) torna-se :

$$\begin{aligned}
\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= co_1 U \\
\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 q_1 \phi_1''(0) &= 0 \\
\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \beta_{111} q_1 - \wp_{111} \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 + \lambda_{111} \ddot{\theta} q_1 q_1 + \right. \\
&\left. + \Lambda_{1111} q_1 \dot{q}_1^2 + \Lambda_{1111} q_1^2 \ddot{q}_1 + \Gamma_{1111} q_1^3 + \mu \dot{q}_1 \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Novamente, a solução a ser encontrada neste trabalho para o caso não ideal visa representar a vibração "livre" da viga e sua interação com a fonte de excitação (eixo do atuador ou eixo de rastreamento) a partir do instante em que a tensão elétrica no motor, U , vai a zero (ou seja, a partir do instante em que o motor é desligado).

Assim, em (7.12), fazendo $\epsilon = 0$ e $U = 0$, o sistema linear resultante

$$\begin{aligned}
\dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= 0 \\
\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 q_1 \phi_1''(0) &= 0 \\
\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{7.13}$$

tem sua solução apresentada no Capítulo 5.

7.2.2 - Solução através da expansão direta para o sistema não ideal com amortecimento de ordem ϵ^2

Seja o sistema de equações 7.12, reproduzido a seguir, fazendo $U = 0$:

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} &= 0 \\
 \ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - (co_5 \phi_1''(0)) q_1 &= 0 \\
 \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2 \beta_{11} q_1 - \wp_{111} \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 + \lambda_{111} \ddot{\theta} q_1 q_1 + \right. \\
 \left. + \Lambda_{1111} q_1 \dot{q}_1^2 + \Lambda_{1111} q_1^2 \ddot{q}_1 + \Gamma_{1111} q_1^3 + \mu \dot{q}_1 \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Substituindo 6.6 a 6.8 em 7.14 e retendo apenas termos até $O(\epsilon^2)$ resulta :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{di_{a0}}{dt} \right) + co_1 i_{a0} + co_2 \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) + \epsilon^2 \left[\left(\frac{di_{a1}}{dt} \right) + co_1 i_{a1} + co_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \right] &= 0 \\
 \left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2} \right) + co_3 \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) - co_4 i_{a0} - (co_5 \phi_1''(0)) q_{10} + \epsilon^2 \left[\left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) + co_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) - \right. \\
 \left. - co_4 i_{a1} - (co_5 \phi_1''(0)) q_{11} \right] &= 0 \\
 \left(\frac{d^2 q_{10}}{dt^2} \right) + w_1^2 q_{10} + \alpha_1 \left(\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right) + \epsilon^2 \left[\left(\frac{d^2 q_{11}}{dt^2} \right) + w_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \right) + \right. \\
 + \beta_{11} \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 q_{10} - \wp_{111} \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) \left(\frac{dq_{10}}{dt} \right) q_{10} + \lambda_{111} \left(\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right) q_{10}^2 + \Lambda_{1111} \left(\frac{dq_{10}}{dt} \right)^2 q_{10} + \\
 \left. + \Lambda_{1111} \left(\frac{d^2 q_{10}}{dt^2} \right) q_{10}^2 + \Gamma_{1111} q_{10}^3 + \mu \left(\frac{dq_{10}}{dt} \right) \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Agrupando os termos em mesma ordem de ϵ em (7.15) obtém-se :

Ordem ϵ^0 :

$$\left(\frac{di_{a0}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a0} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right) - \omega_4 i_{a0} - (\omega_5 \phi_1''(0)) q_{10} = 0$$

$$\left(\frac{d^2q_{10}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{10} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right) = 0$$

(7.16)

Ordem ϵ^2 :

$$\left(\frac{di_{a1}}{dt}\right) + \omega_1 i_{a1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) - \omega_4 i_{a1} - (\omega_5 \phi_1''(0)) q_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2q_{11}}{dt^2}\right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\right) = & -\beta_{11} \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 q_{10} + \rho_{111} \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right) \left(\frac{dq_{10}}{dt}\right) q_{10} - \\ & -\lambda_{111} \left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right) q_{10}^2 - \Lambda_{1111} \left(\frac{dq_{10}}{dt}\right)^2 q_{10} - \Lambda_{1111} \left(\frac{d^2q_{10}}{dt^2}\right) q_{10}^2 - \Gamma_{1111} q_{10}^3 - \mu \left(\frac{dq_{10}}{dt}\right) \Big] = 0 \end{aligned}$$

(7.17)

A solução do sistema 7.16 é a mesma discutida no capítulo anterior. A forma geral da solução é representada por :

$$i_{a0} = C_1 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_1 e^{(a-ib)t}$$

$$\theta_0 = C_2 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_2 e^{(a-ib)t}$$

$$q_{10} = C_3 e^{(a+ib)t} + \bar{C}_3 e^{(a-ib)t}$$

(7.18)

aonde C_1, C_2, C_3 e seus complexos conjugados são constantes a serem definidas.

Substituindo 7.18 em 7.17 obtém-se :

$$\left(\frac{di_{a1}}{dt} \right) + \omega_1 i_{a1} + \omega_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) + \omega_3 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) - \omega_4 i_{a1} - (\omega_5 \phi_1''(0)) q_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 q_{11}}{dt^2} \right) + \omega_1^2 q_{11} + \alpha_1 \left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \right) = & P_1 e^{(a+ib)t} + P_2 e^{(a-ib)t} + P_3 e^{3(a+ib)t} + P_4 e^{3(a+ib)t} + \\ & + P_5 e^{3(a-ib)t} + P_6 e^{3(a-ib)t} \end{aligned}$$

(7.19)

aonde :

$$P_1 = -\mu C_3 (a + ib)$$

$$P_2 = -\mu \bar{C}_3 (a - ib)$$

$$P_3 = -\beta_{111} C_2^2 C_3 (a + ib)^2 + \wp_{111} C_2 C_3^2 (a + ib)^2 - \lambda_{111} C_2 C_3^2 (a + ib)^2 - 2\Lambda_{1111} C_3^3 (a + ib)^2 - \Gamma_{1111} C_3^3$$

$$\begin{aligned} P_4 = & -2\beta_{111} C_2 \bar{C}_2 C_3 (a + ib)(a - ib) - \beta_{111} C_2^2 \bar{C}_3 (a + ib)^2 + \wp_{111} C_2 \bar{C}_3 C_3 (a + ib)^2 + \\ & + \wp_{111} C_2 \bar{C}_3 C_3 (a + ib)(a - ib) + \wp_{111} \bar{C}_2 C_3^2 (a + ib)(a - ib) - 2\lambda_{111} C_2 C_3 \bar{C}_3 (a + ib)^2 - \\ & - \lambda_{111} \bar{C}_2 C_3^2 (a - ib)^2 - 2\Lambda_{1111} C_3^2 \bar{C}_3 (a + ib)(a - ib) - 3\Lambda_{1111} C_3^2 \bar{C}_3 (a + ib)^2 - \\ & - \Lambda_{1111} C_3^2 \bar{C}_3 (a - ib)^2 - 3\Gamma_{1111} C_3^2 \bar{C}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5 = & -2\beta_{11}C_2\bar{C}_2\bar{C}_3(a+ib)(a-ib) - \beta_{11}\bar{C}_2^2C_3(a-ib)^2 + \wp_{111}C_2\bar{C}_3^2(a+ib)(a-ib) + \\
& + \wp_{111}\bar{C}_2\bar{C}_3C_3(a+ib)(a-ib) + \wp_{111}\bar{C}_2C_3\bar{C}_3(a-ib)^2 - 2\lambda_{111}\bar{C}_2C_3\bar{C}_3(a-ib)^2 - \\
& - \lambda_{111}C_2\bar{C}_3^2(a+ib)^2 - 2\Lambda_{1111}\bar{C}_3^2C_3(a+ib)(a-ib) - 3\Lambda_{1111}\bar{C}_3^2C_3(a-ib)^2 - \\
& - \Lambda_{1111}\bar{C}_3^2C_3(a+ib)^2 - 3\Gamma_{1111}\bar{C}_3^2C_3
\end{aligned}$$

$$P_6 = -\beta_{11}\bar{C}_2^2\bar{C}_3(a-ib)^2 + \wp_{111}\bar{C}_2\bar{C}_3^2(a-ib)^2 - \lambda_{111}\bar{C}_2\bar{C}_3^2(a-ib)^2 - 2\Lambda_{1111}\bar{C}_3^3(a-ib)^2 - \Gamma_{1111}\bar{C}_3^3$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (7.19) assemelha-se ao sistema de equações diferenciais ordinárias (6.43) discutido anteriormente (Capítulo 6). Assim, a solução de (7.19) será semelhante à solução de (6.43), ou seja, (6.66) a (6.68), com as devidas alterações (por exemplo, substituindo os parâmetros N_i pelos parâmetros P_i e tomando-se cuidado com alguns sinais associados aos parâmetros N_i).

O sistema algébrico complexo e não linear necessário para a obtenção dos parâmetros C_1 , \bar{C}_1 , C_2 , \bar{C}_2 , C_3 e \bar{C}_3 terá equações maiores e será extremamente mais complicado de resolver que aquele citado no capítulo anterior.

O modelo não ideal aonde o amortecimento estrutural (μ) é de $O(1)$ também não fará parte do escopo deste trabalho.

Capítulo 8

Estudo comparativo :

ideal / não ideal / curvatura linear /

curvatura não linear

8.1 - Introdução

As equações governantes do movimento que aparecem nos capítulos 2 (curvatura linear) e 3 (curvatura não linear) são colocadas em forma apropriada e integradas numericamente (no tempo) através de um método de integração denominado previsor-corretor com passo constante.

Na discretização dessas equações via método dos modos assumidos, mais de um modo de flexão é (neste trabalho) considerado (são considerados apenas modos de flexão) : três modos para o caso de curvatura linear e dois modos para o caso de curvatura não linear. Desta forma, pretende-se determinar, sob as condições estudadas, quantos modos (de flexão) deverão ser necessários para a representação do comportamento dinâmico do sistema.

Para o caso não linear, neste trabalho, apenas os dois primeiros modos de flexão foram considerados devido à crescente complexidade das operações a serem realizadas para o acréscimo de mais um modo na expansão (discretização).

Nos itens que seguem (8.2 a 8.4), os dois modelos propostos para a curvatura da estrutura flexível de rastreamento são comparados sob as mesmas condições tanto para o caso ideal (motor e estrutura interagem) quanto para o caso não ideal (motor e estrutura não interagem).

A figura 8.1 mostra o perfil de excitação (tensão elétrica prescrita nos terminais do motor cc) utilizado nas simulações apresentadas neste capítulo. Para o caso ideal, este perfil gera o deslocamento angular (prescrito) através das equações do motor que podem ser tratadas independentemente das equações da viga neste caso.

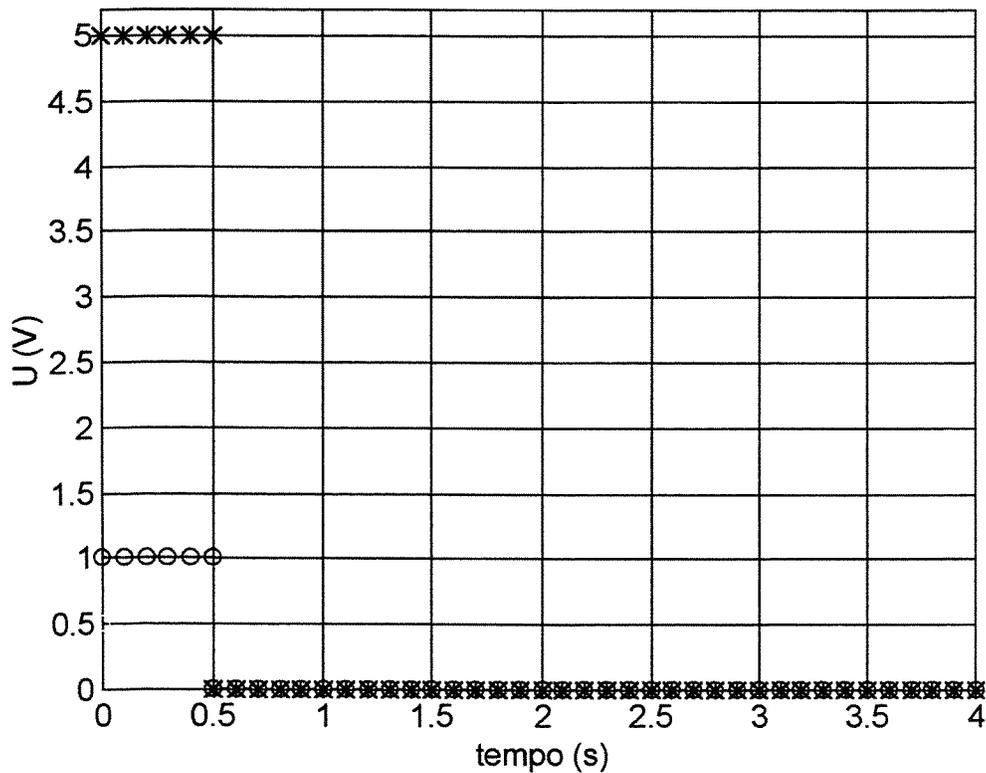


Figura 8.1 - Perfis de excitação (tensão elétrica nos terminais do motor cc) :
caso1 (-O-O-O-O-O-) ; caso 2 (-*-*-*-*-*)

Diferentes valores de U_{max} nos terminais do motor geram diferentes velocidades no eixo do mesmo (aqui também referenciado como eixo de rastreamento).

O denominado *caso 1* na Figura 8.1 será considerado doravante o caso aonde tem-se uma velocidade angular de rastreamento consideravelmente baixa. Neste caso $U_{\max} = 1V$.

O denominado *caso 2* na mesma Figura 8.1 será considerado o caso aonde a velocidade angular de rastreamento é suficientemente alta a ponto de fazer com que as não-linearidades presentes no sistema e, conseqüentemente, a interação entre os modos de vibrar (quando houver) da estrutura flexível sejam importantes, provocando o diferenciamento entre os diferentes modelos de curvatura. Neste caso $U_{\max} = 5V$.

Nas simulações apresentadas nos itens 8.2.1, 8.3.1 e 8.4.1, o objeto de estudo é a interação atuador-estrutura (sistema ideal X sistema não ideal). Este estudo é realizado para cada modelo (curvatura linear e curvatura não linear) separadamente. Cada um dos casos propostos (caso 1 : baixa velocidade ; caso 2 : alta velocidade) é estudado nessas condições.

Nas simulações apresentadas nos itens 8.2.2 e 8.3.2, o objeto de estudo é a comparação entre os diferentes modelos de curvatura (curvatura linear X curvatura não linear). Este estudo é realizado para cada tipo de sistema (ideal e não ideal) separadamente. Cada um dos casos propostos (caso 1 : baixa velocidade ; caso 2 : alta velocidade) é estudado nessas condições.

Nas simulações apresentadas no item 8.3.3, o objeto de estudo é a comparação entre os diferentes números de modos considerados na discretização das equações governantes do movimento (um modo X dois modos). Este estudo é realizado para cada modelo (curvatura linear e curvatura não linear) e para cada tipo de sistema (ideal e não ideal) separadamente. Cada um dos casos propostos (caso 1 : baixa velocidade ; caso 2 : alta velocidade) é estudado nessas condições.

Nas simulações apresentadas no item 8.4.2, o objeto de estudo é a comparação entre os diferentes números de modos considerados na discretização das equações governantes do movimento (um modo X dois modos X três modos). Este estudo é realizado somente para o modelo de curvatura linear e cada tipo de sistema (ideal e não ideal) é estudado separadamente. Cada um dos casos propostos (caso 1 : baixa velocidade ; caso 2 : alta velocidade) é estudado nessas condições.

A viga utilizada nas simulações numéricas apresenta inércia em torno do eixo de rastreamento inferior à inércia do motor + eixo de conexão de forma que a condição proposta para a extremidade da viga em contato com o eixo de rastreamento, engastada-livre, possa ser verificada em detrimento da condição pinada-livre.

Os valores dos parâmetros físicos do motor e da estrutura flexível utilizados nas simulações que seguem são :

Motor CC : $C_m = 0.004629000$; $K_t = 0.052814000$; $K_b = 0.052814000$;
 $L_m = 0.003100000$; $R_a = 1.914952000$; $C_m = 0.004629000$;
IMOTOR = 0.000065400 ; ISHAFT = 0.000036900.

Viga : material : alumínio ; $E = 0.7 \cdot 10^{11}$ N/m² ; comprimento : $L = 0.30$ m ; secção reta :
altura = 0.0050 m ; base = 0.0005 m ; amortecimento estrutural : $\mu = 0.01$ Kg/ms.

Tempo de excitação : $t = 0.5$ s.

Relação de transmissão : $N_g = 1$.

8.2 - Um modo

8.2.1 - Sistema ideal X sistema não ideal

8.2.1.1 - Curvatura linear

8.2.1.1.1 - Caso 1

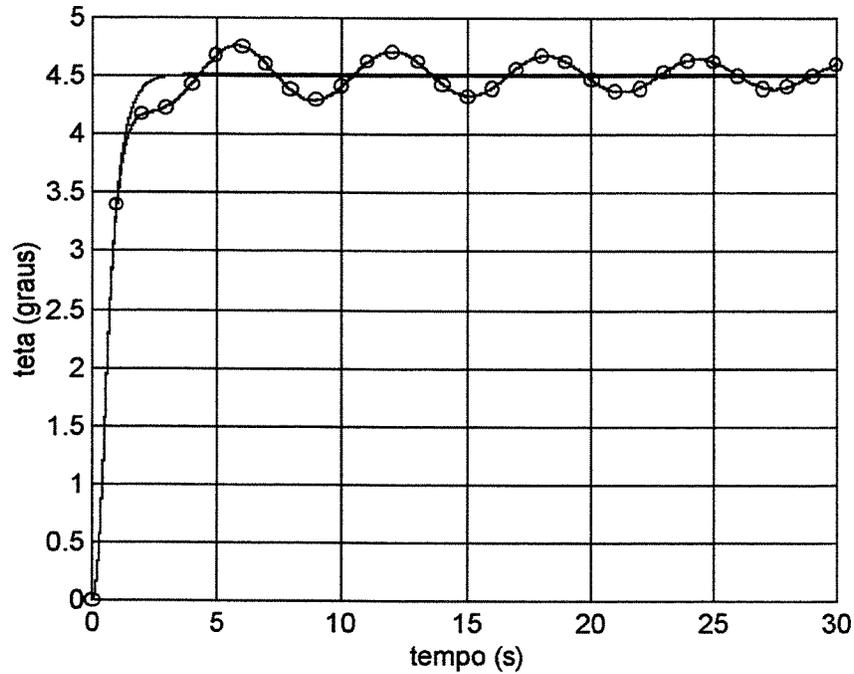


Figura 8.2 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

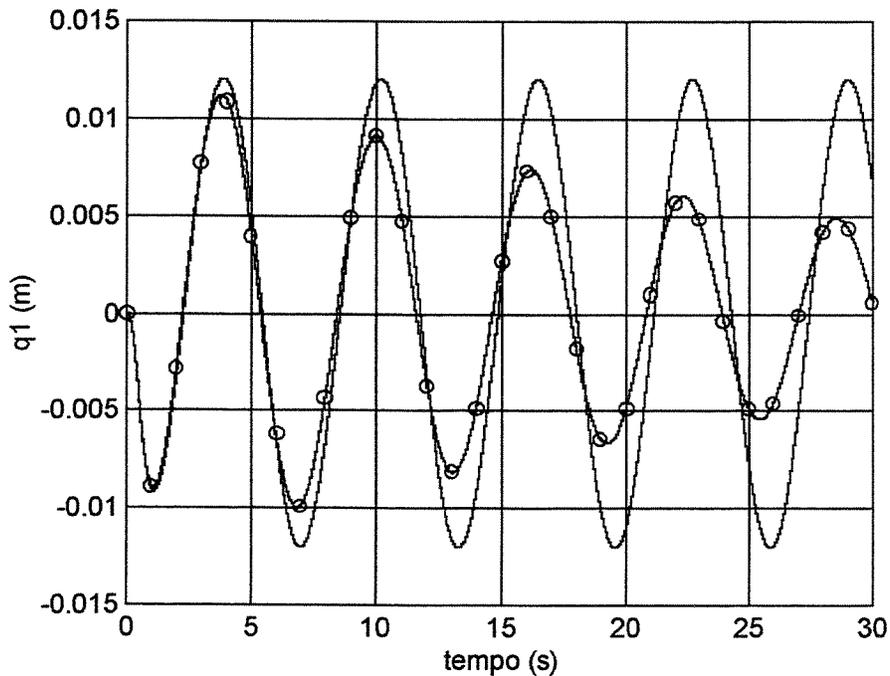


Figura 8.3 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

8.2.1.1.2 - Caso 2

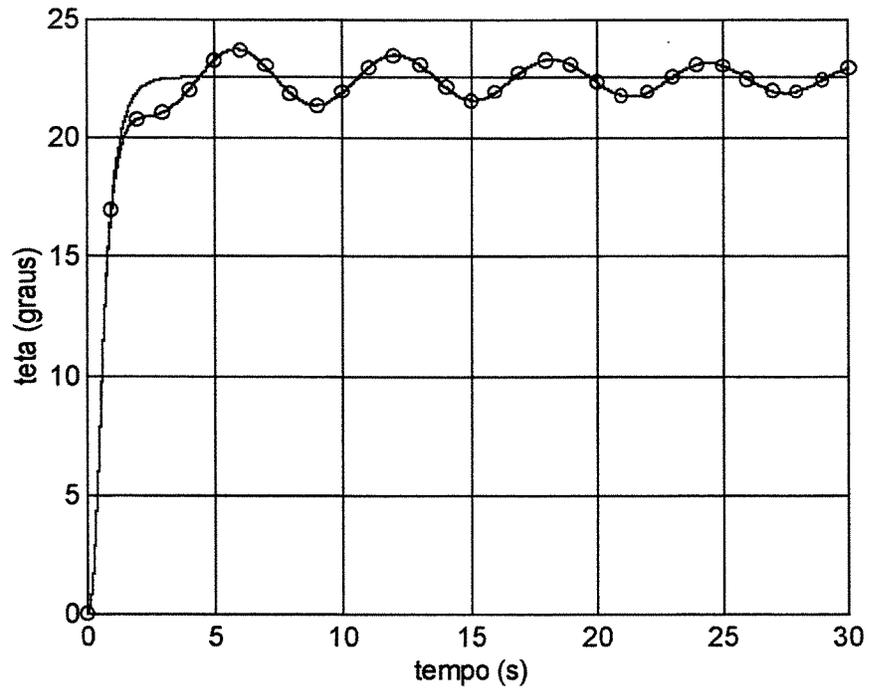


Figura 8.4 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—) X não ideal (-O-O-O-)

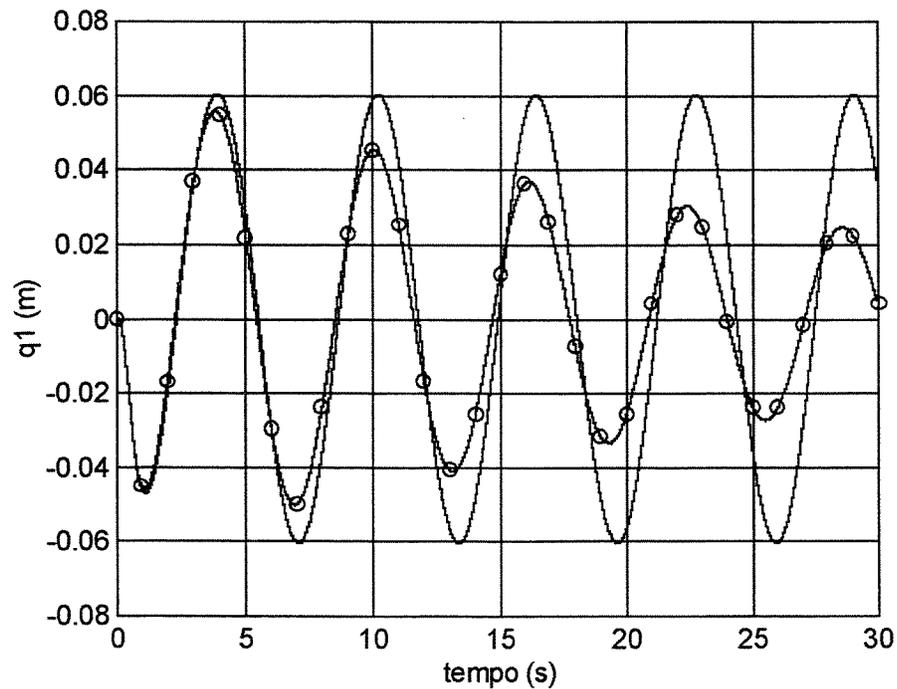


Figura 8.5 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (—) X não ideal (-O-O-O-)

8.2.1.2 - Curvatura não linear

8.2.1.2.1 - Caso 1

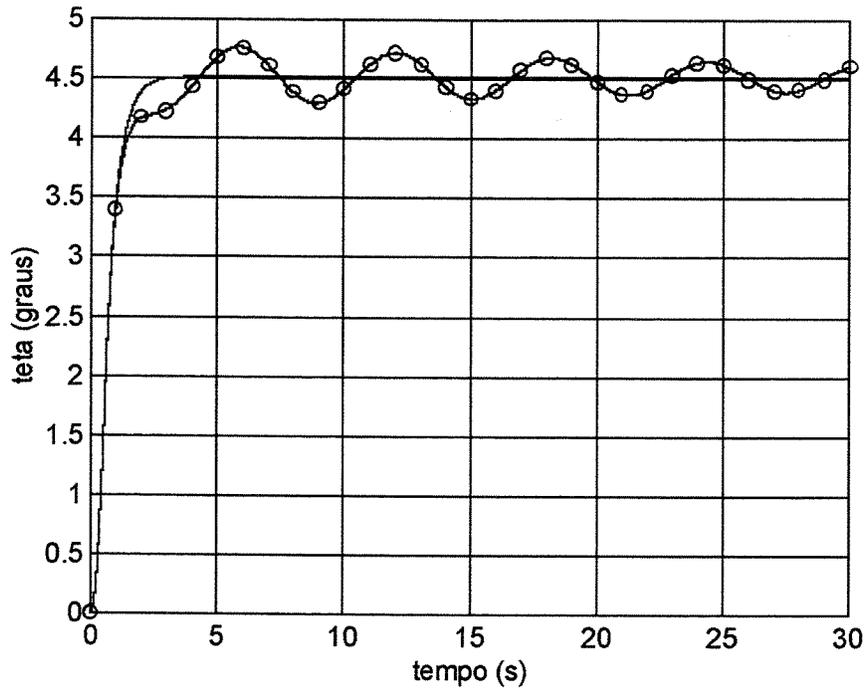


Figura 8.6 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

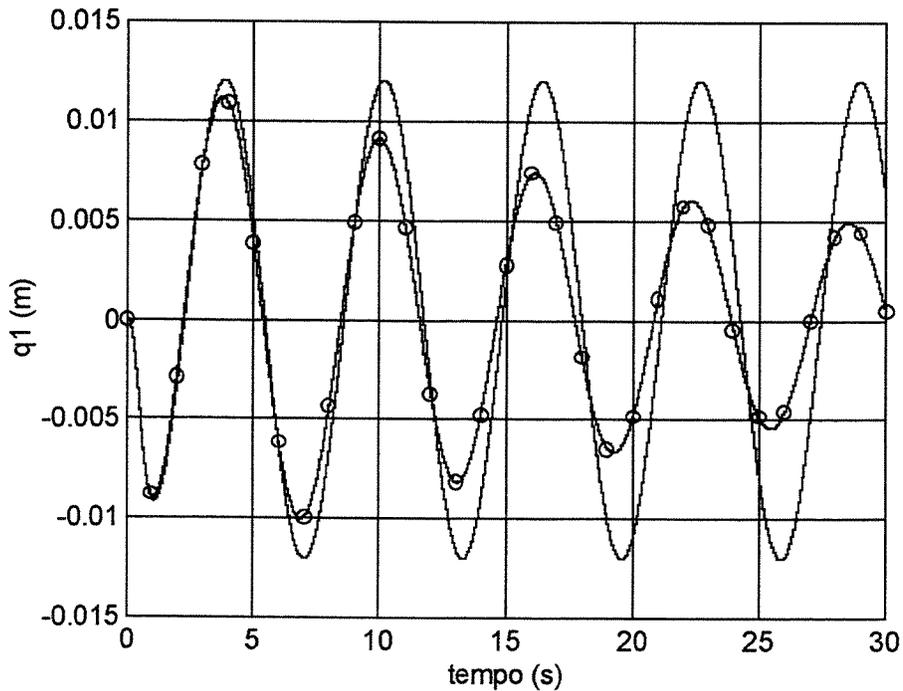


Figura 8.7 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

8.2.1.2.2 - Caso 2

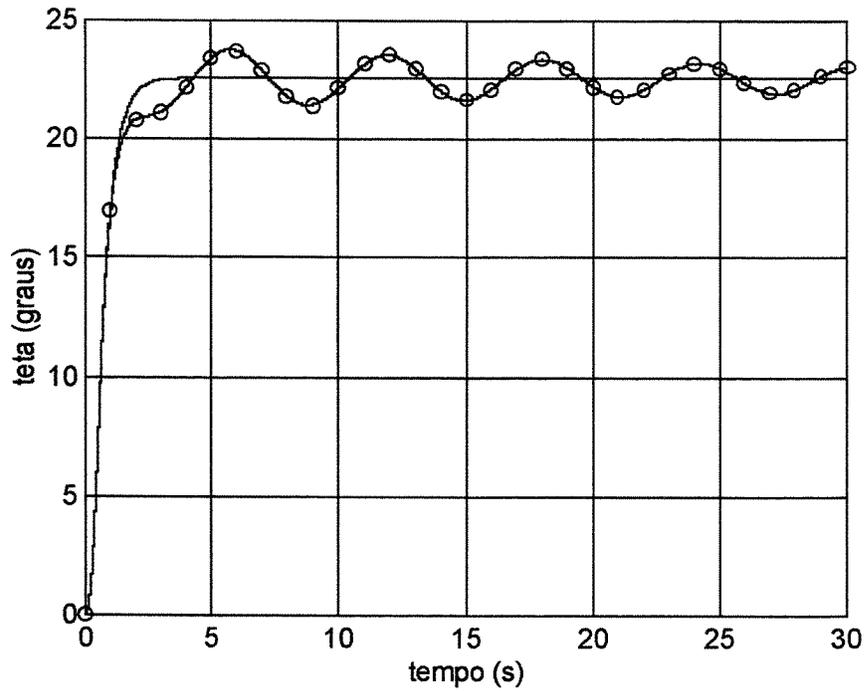


Figura 8.8 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (——) X não ideal (-O-O-O-O-)

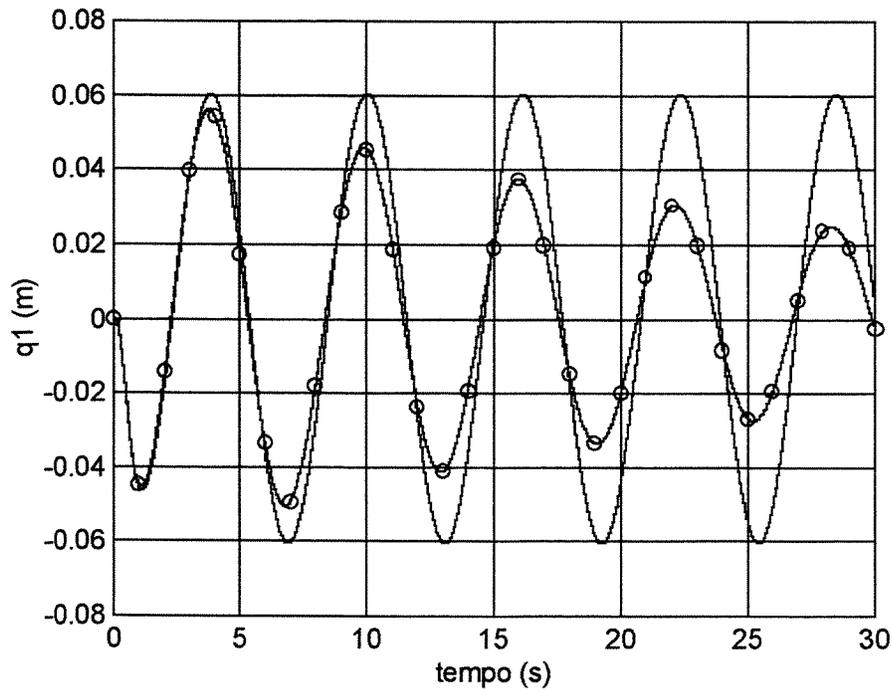


Figura 8.9 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 1 modo) - ideal (——) X não ideal (-O-O-O-O-)

8.2.2 - Curvatura linear X curvatura não linear

8.2.2.1 - Sistema ideal

8.2.2.1.1 - Caso 1

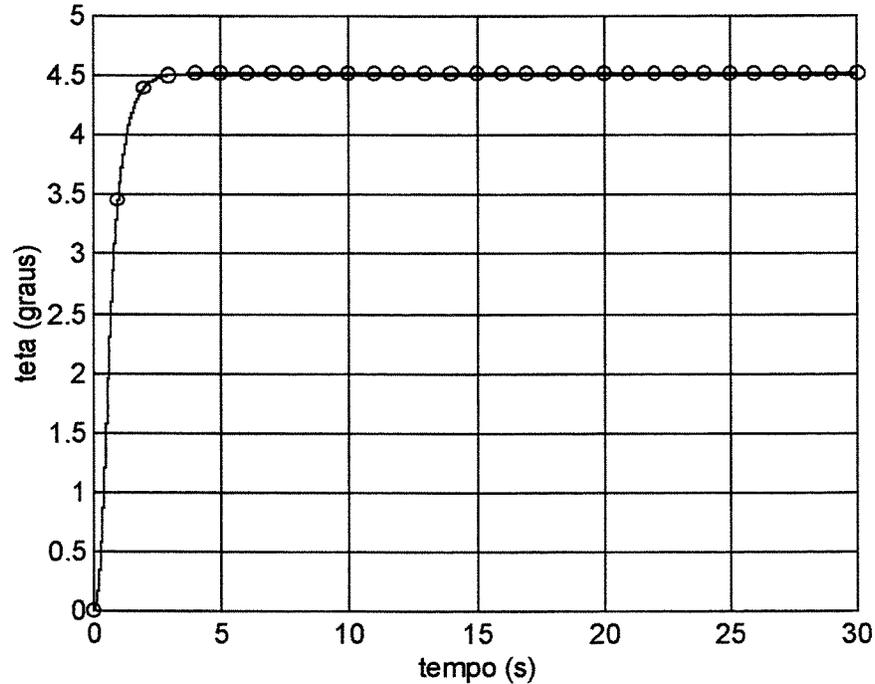


Figura 8.10 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

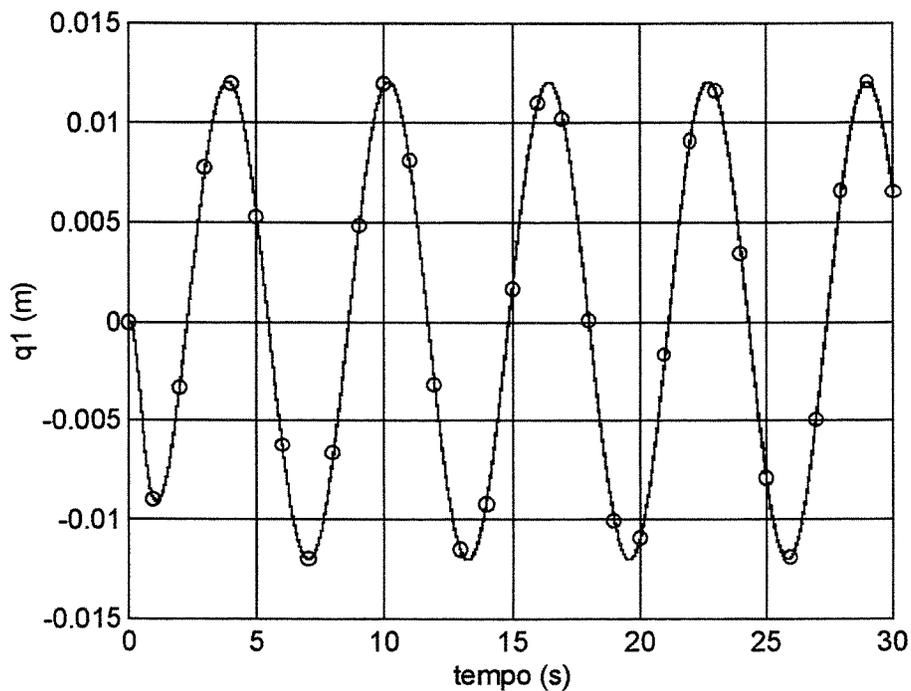


Figura 8.11 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.2.2.1.2 - Caso 2

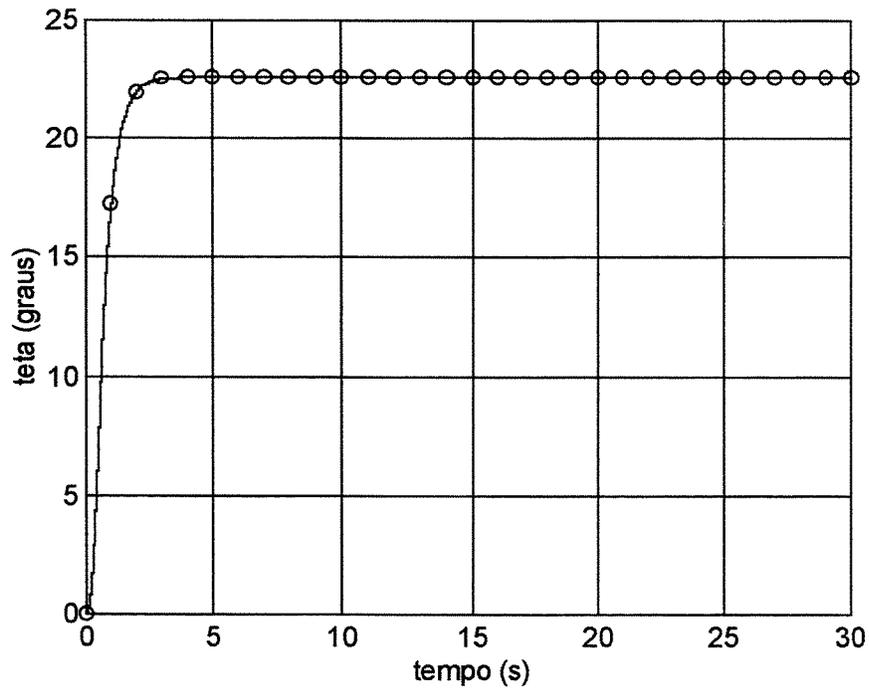


Figura 8.12 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

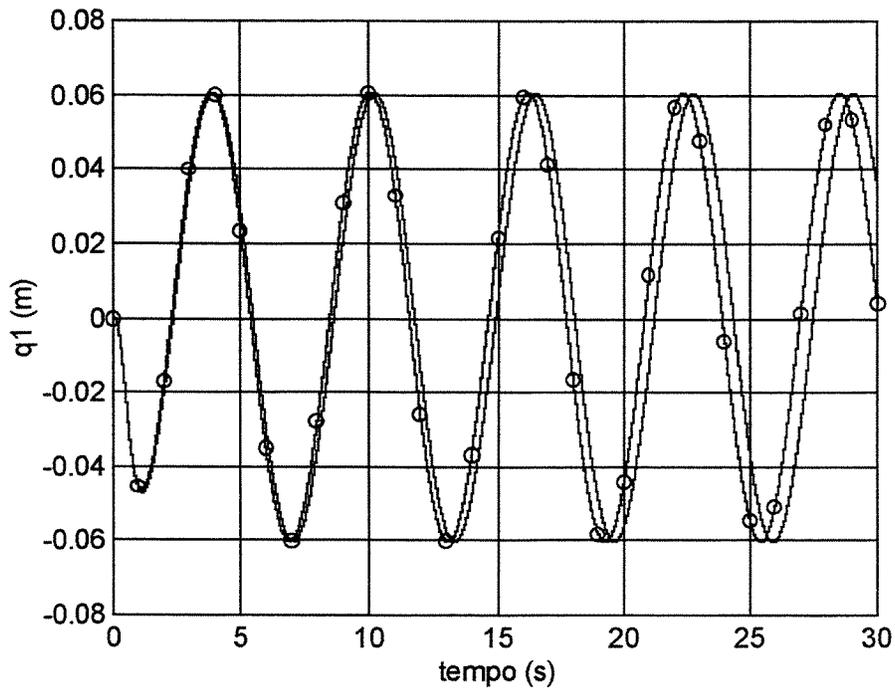


Figura 8.13 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.2.2.2 - Sistema não ideal

8.2.2.2.1 - Caso 1

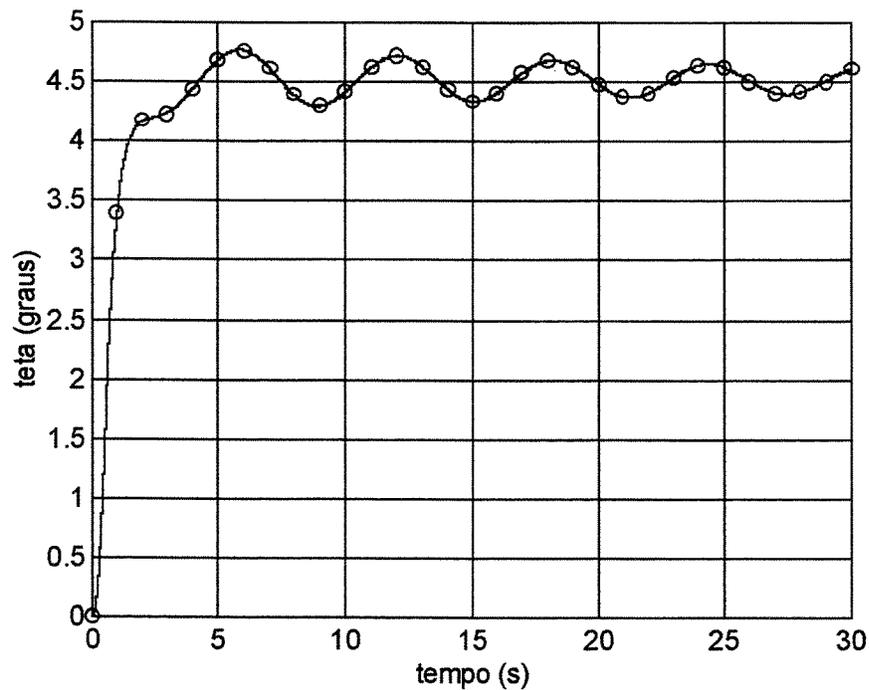


Figura 8.14 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

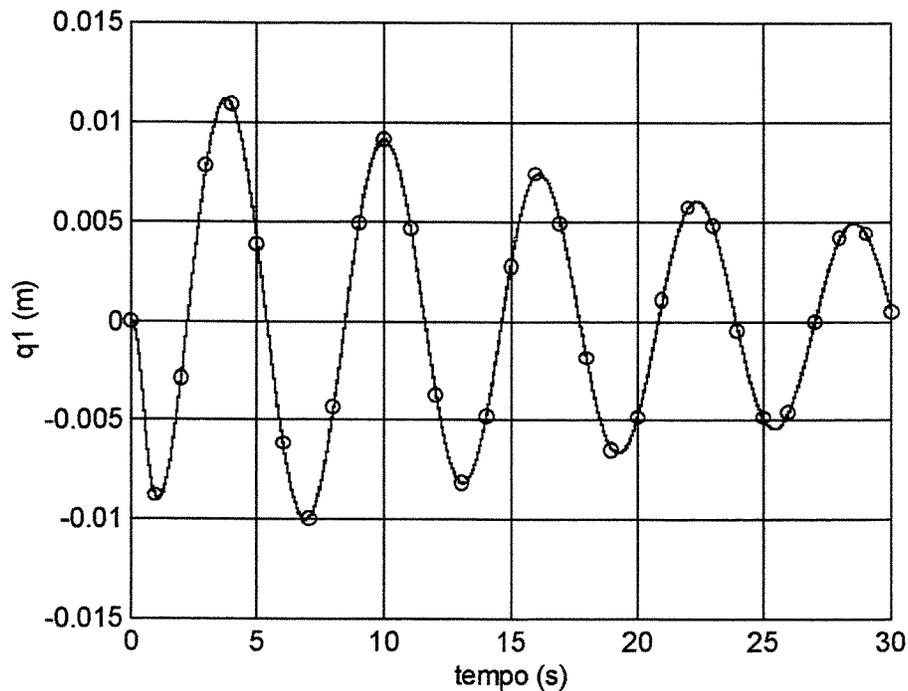


Figura 8.15 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.2.2.2.2 - Caso 2

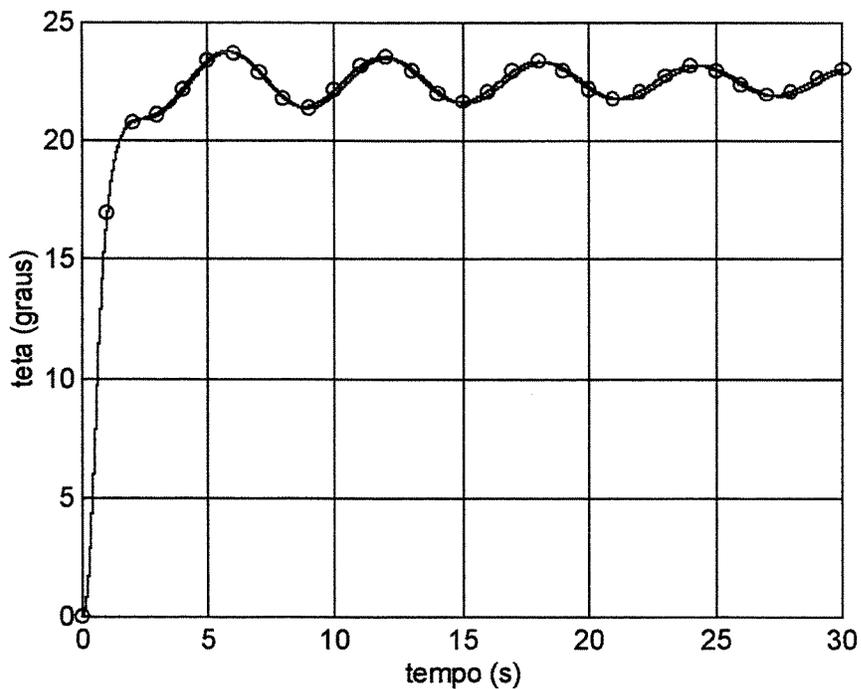


Figura 8.16 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

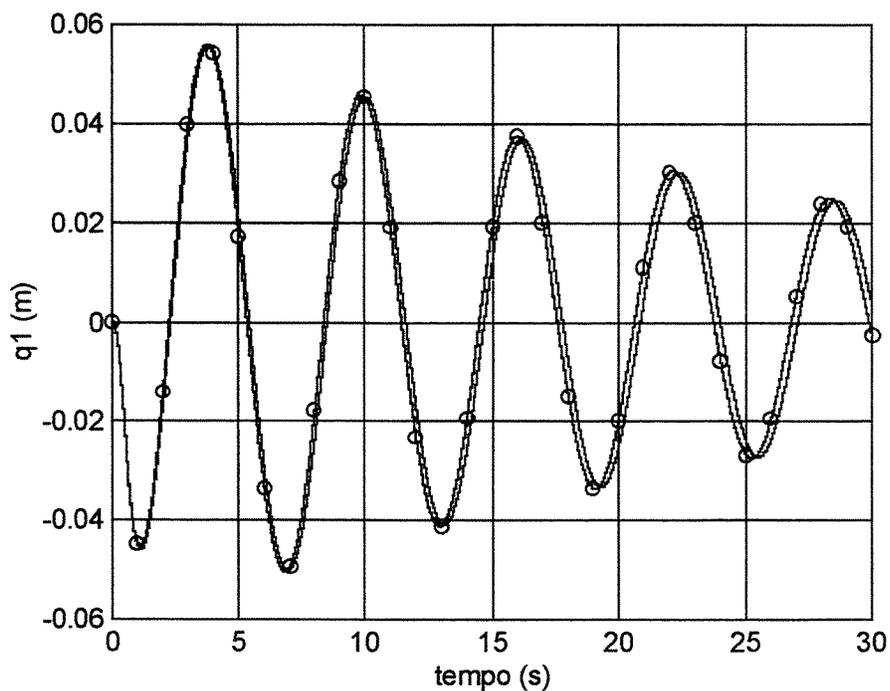


Figura 8.17 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo) - curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.3 - Dois modos

8.3.1 - Sistema ideal X sistema não ideal

8.3.1.1 - Curvatura linear

8.3.1.1.1 - Caso 1

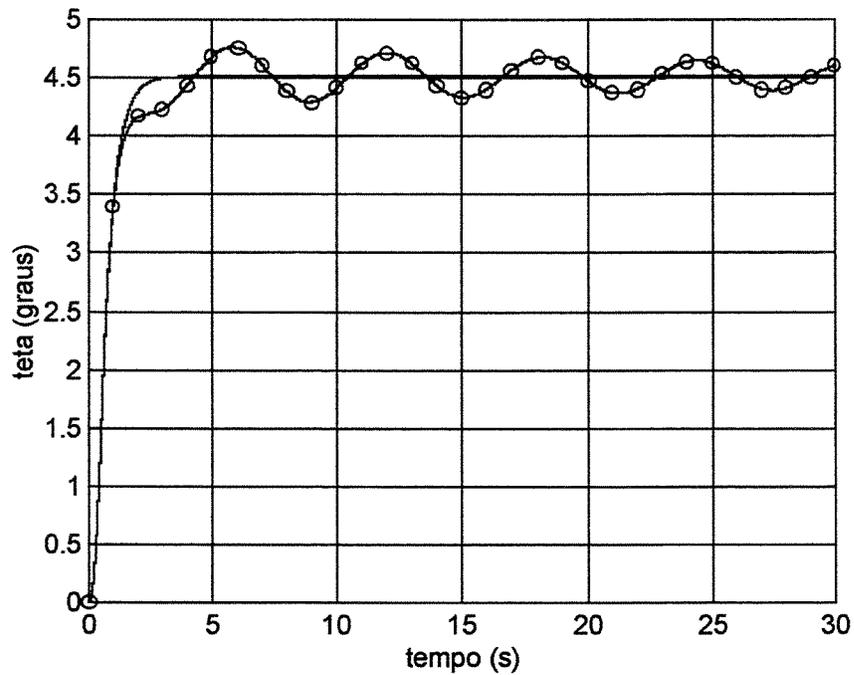


Figura 8.18 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

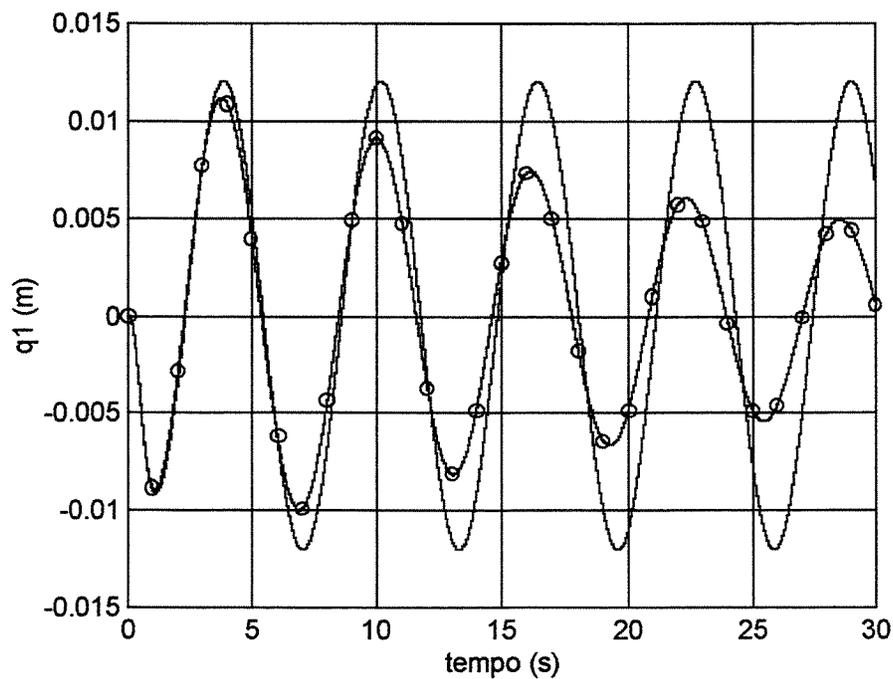


Figura 8.19 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

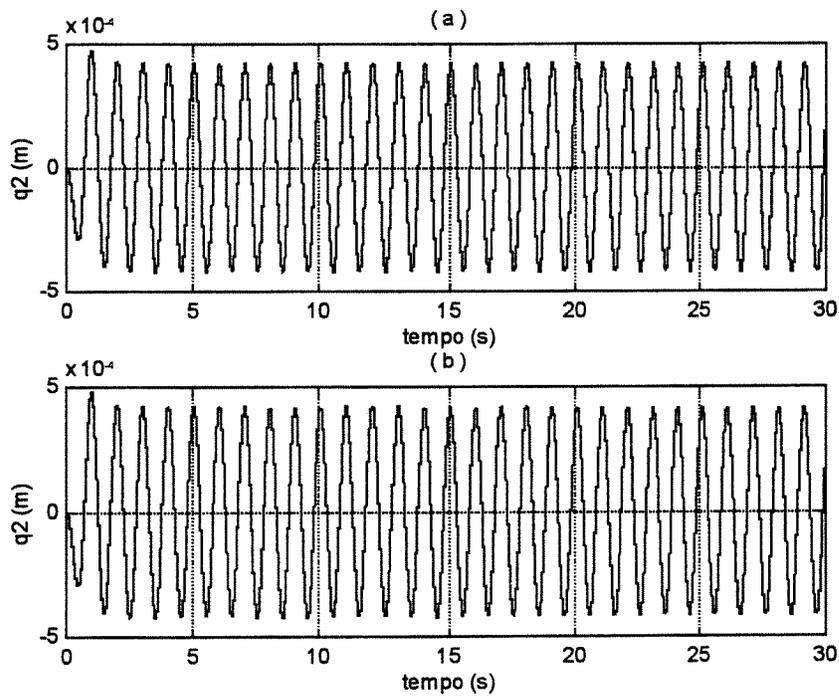


Figura 8.20 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) ideal (a) X não ideal (b)

8.3.1.1.2 - Caso 2

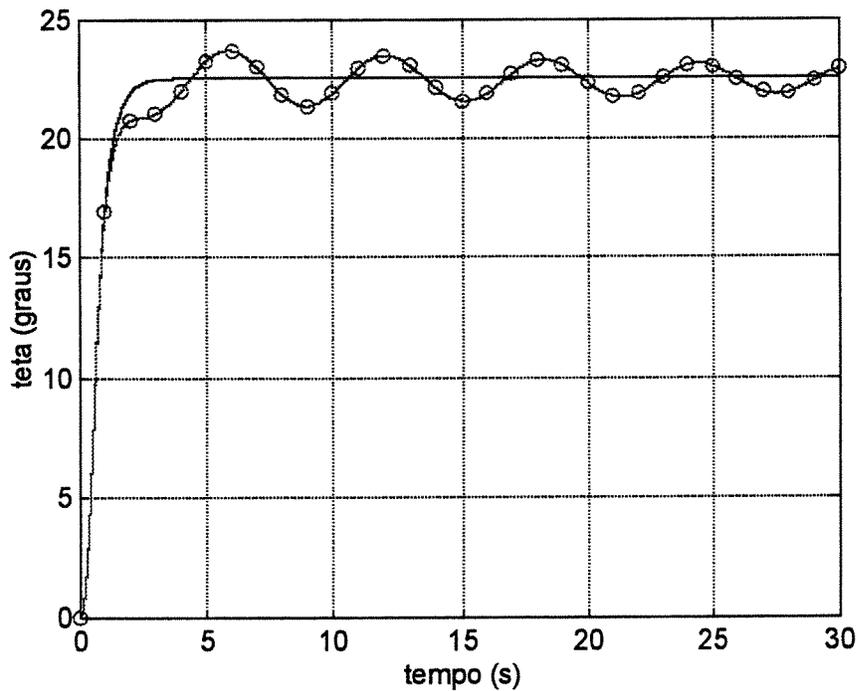


Figura 8.21 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

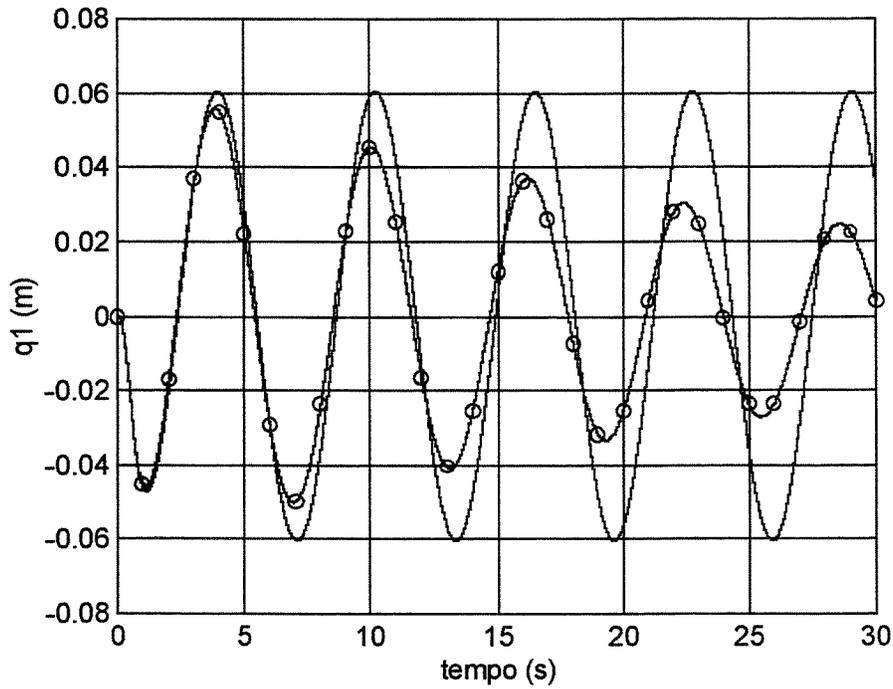


Figura 8.22 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (—) X não ideal (-O-O-O-O-)

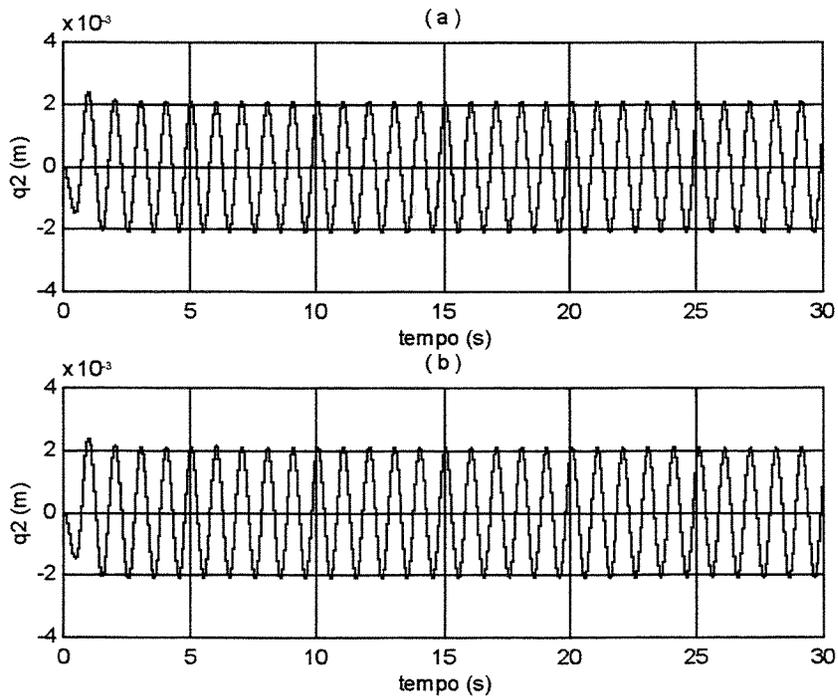


Figura 8.23 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (a) X não ideal (b)

8.3.1.2 - Curvatura não linear

8.3.1.2.1 - Caso 1

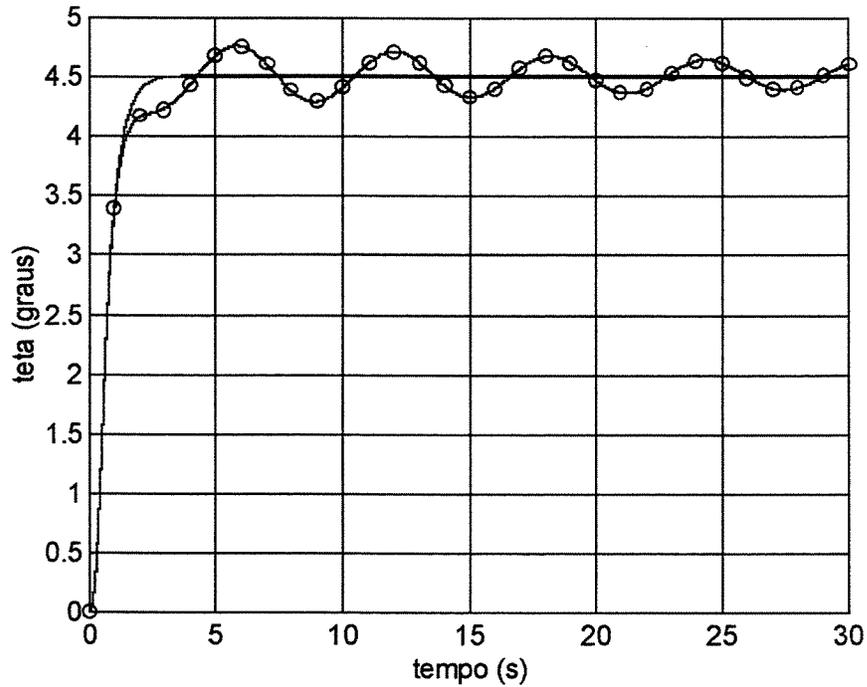


Figura 8.24 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (——) X não ideal (-O-O-O-O-)

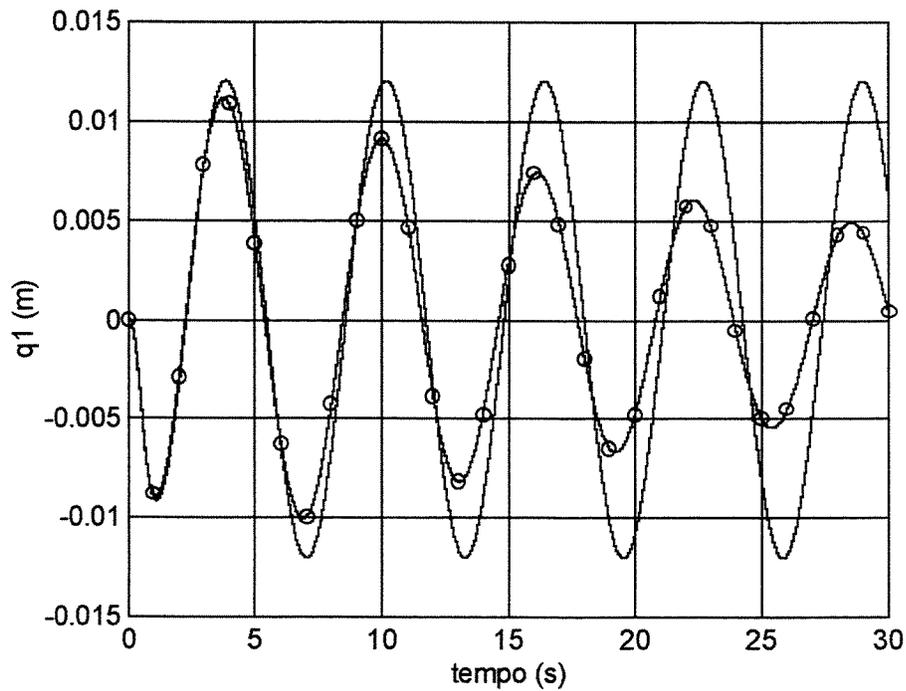


Figura 8.25 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (——) X não ideal (-O-O-O-O-)

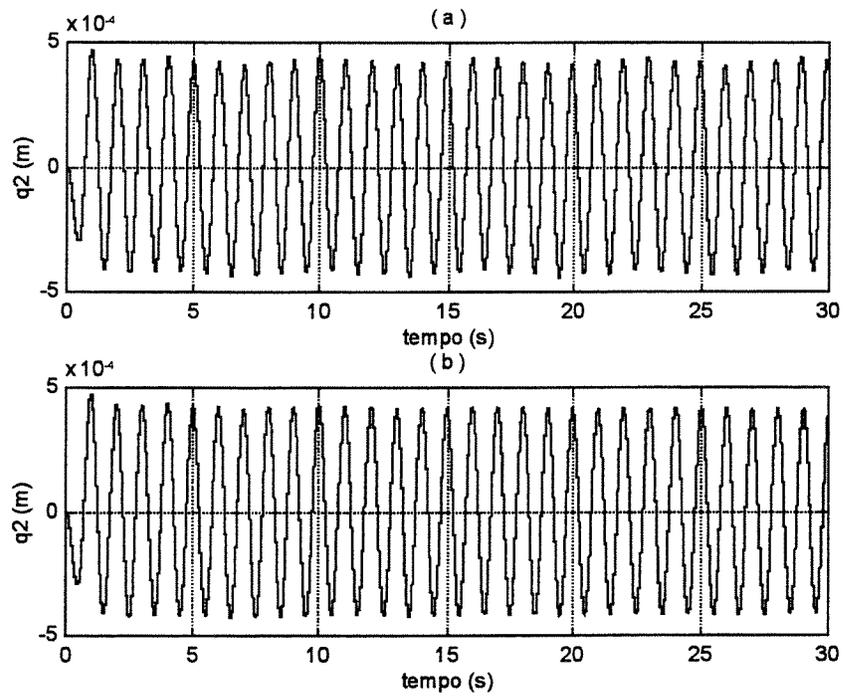


Figura 8.26 - Amplitude da variável de deflexão associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 1 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (a) X não ideal (b)

8.3.1.2.2 - Caso 2

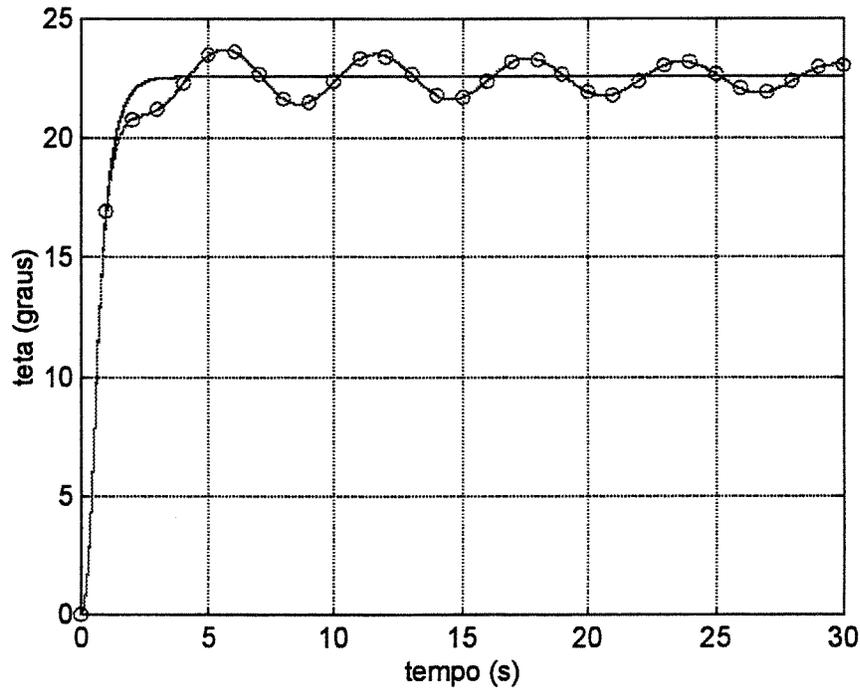


Figura 8.27 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (—) X não ideal (-O-O-O-)

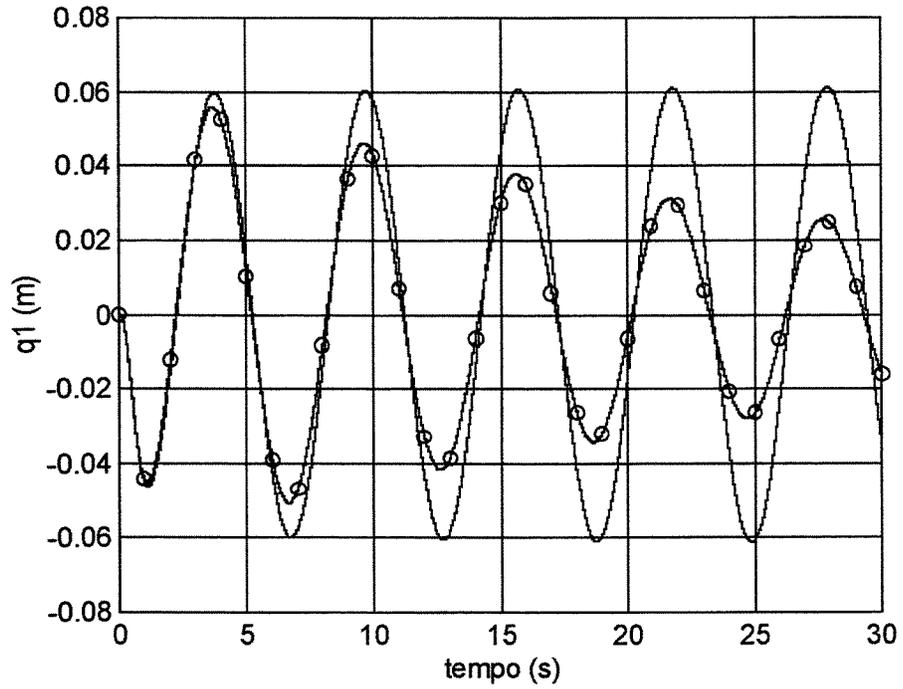


Figura 8.28 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (—) X não ideal (-O-O-O-)

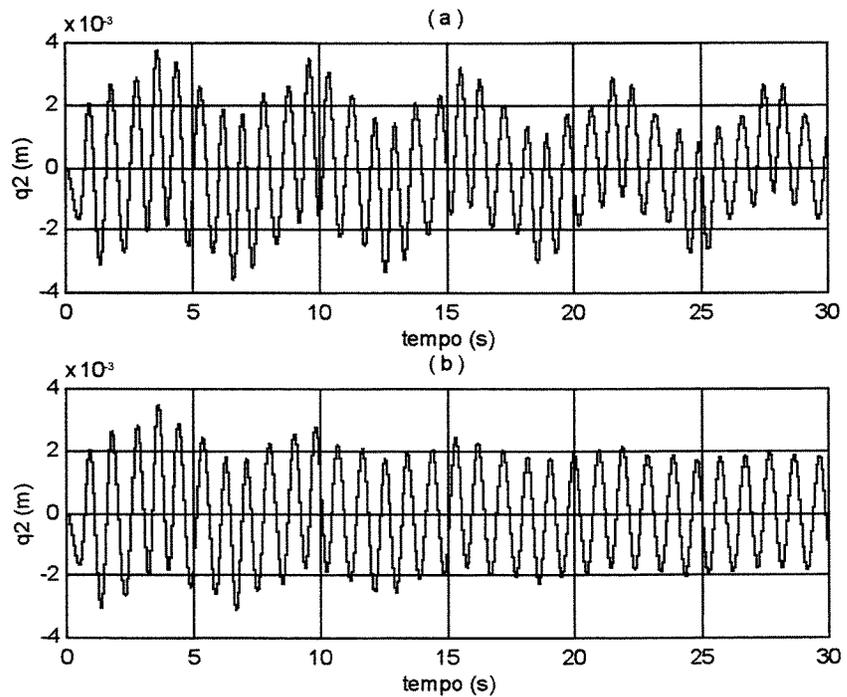


Figura 8.29 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 2 - curvatura não linear (expansão modal utilizando 2 modos) - ideal (a) X não ideal (b)

8.3.2 - Curvatura linear X curvatura não linear

8.3.2.1 - Sistema ideal

8.3.2.1.1 - Caso 1

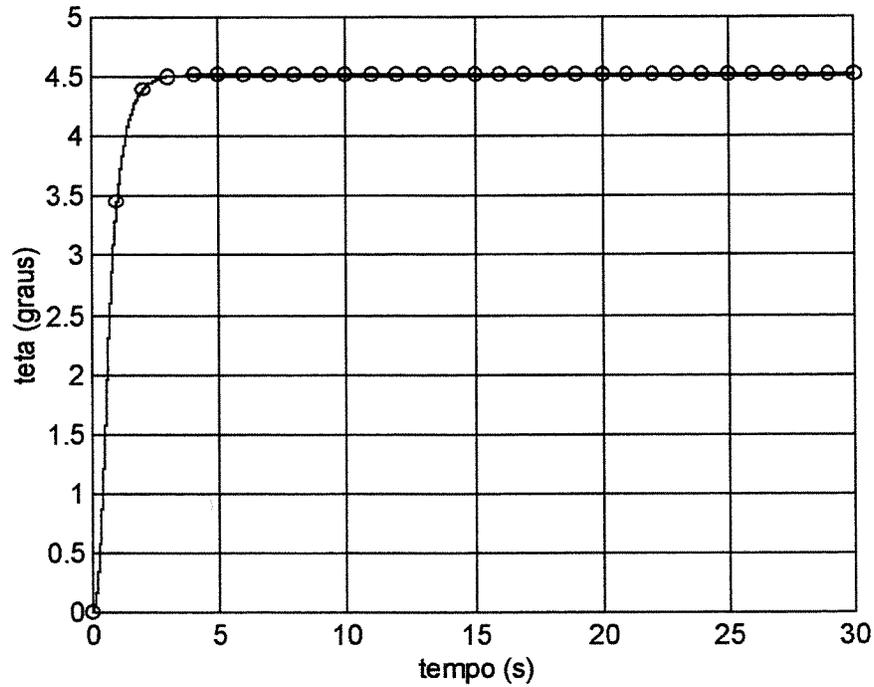


Figura 8.30 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

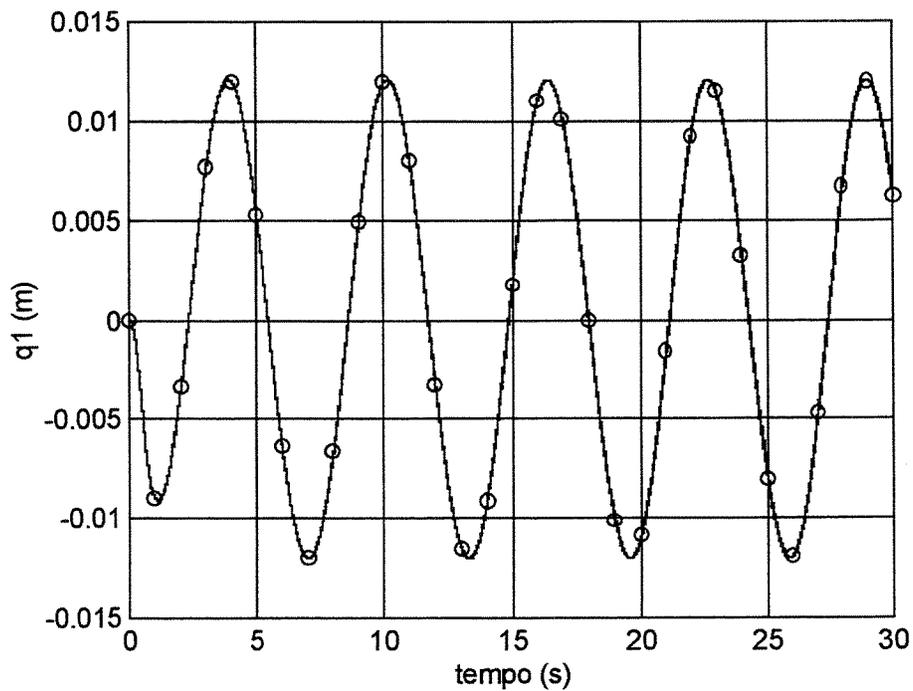


Figura 8.31 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.3.2.1.2 - Caso 2

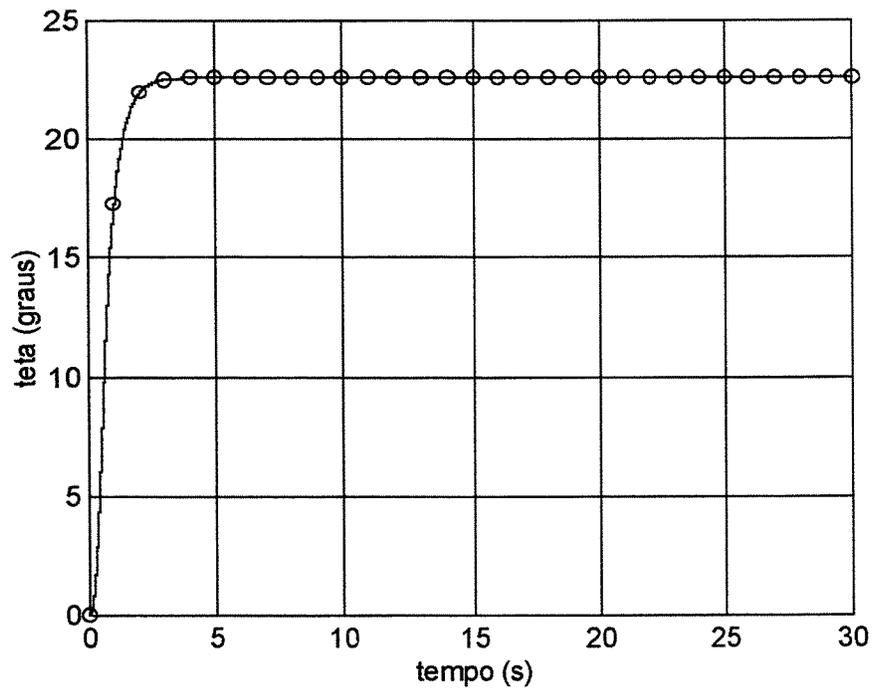


Figura 8.32 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

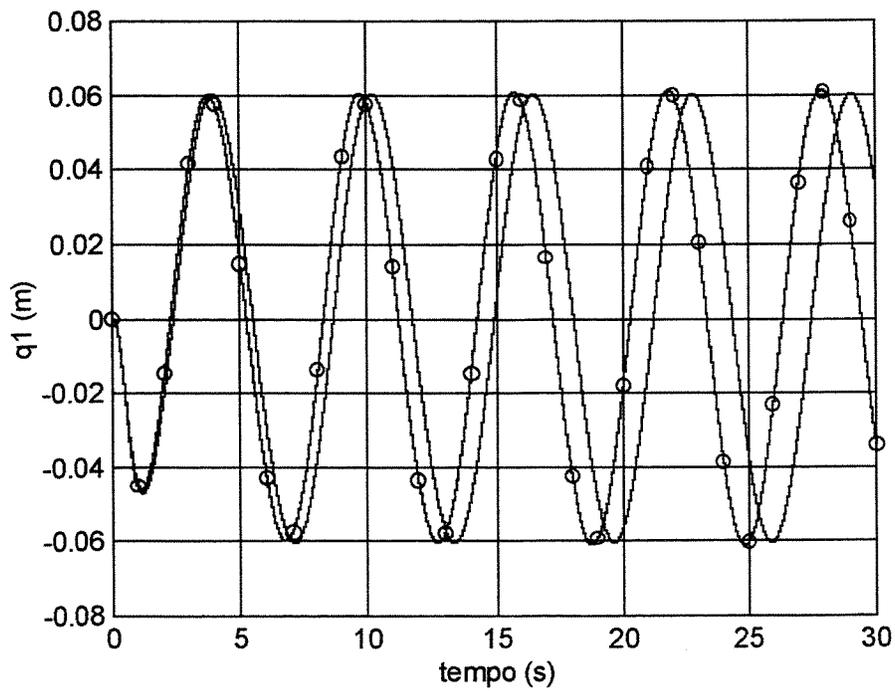


Figura 8.33 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema ideal (expansão modal utilizando 2 modos) - curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.3.2.2 - Sistema não ideal

8.3.2.2.1 - Caso 1

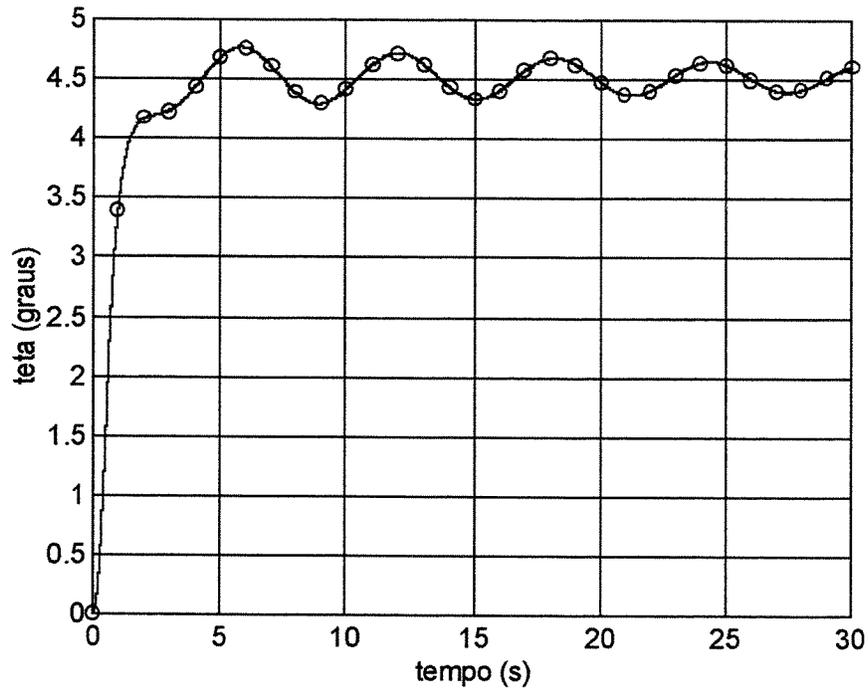


Figura 8.34 - Deslocamento angular : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos)
curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

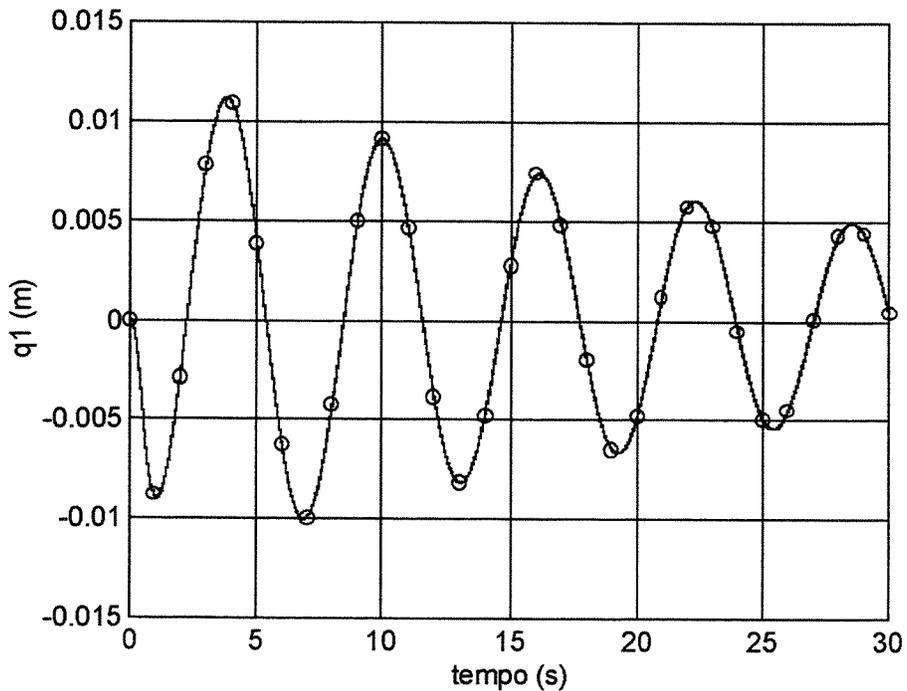


Figura 8.35 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos) curvatura linear (———) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.3.2.2.2 - Caso 2

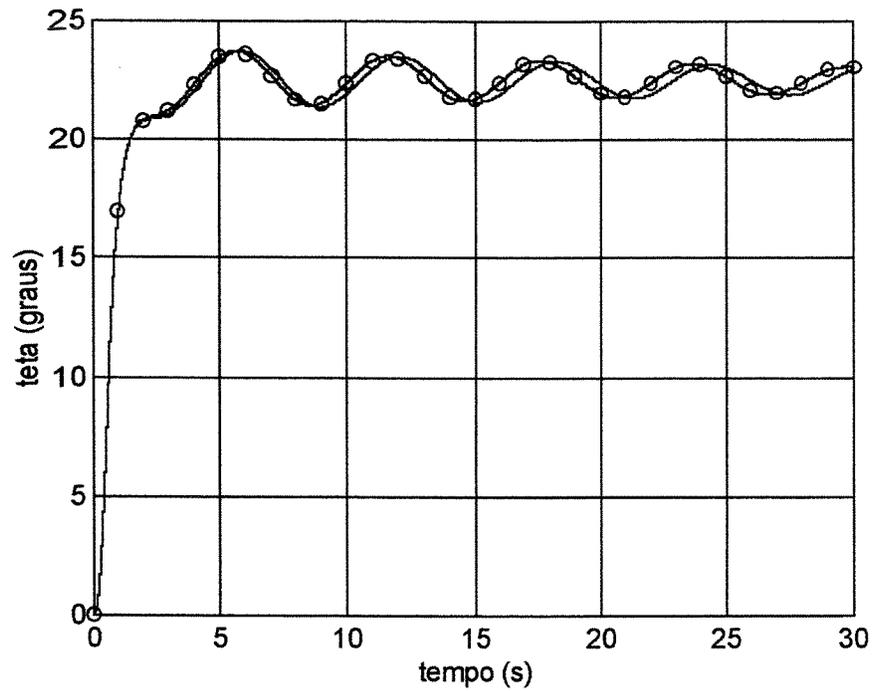


Figura 8.36 - Deslocamento angular : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos) curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

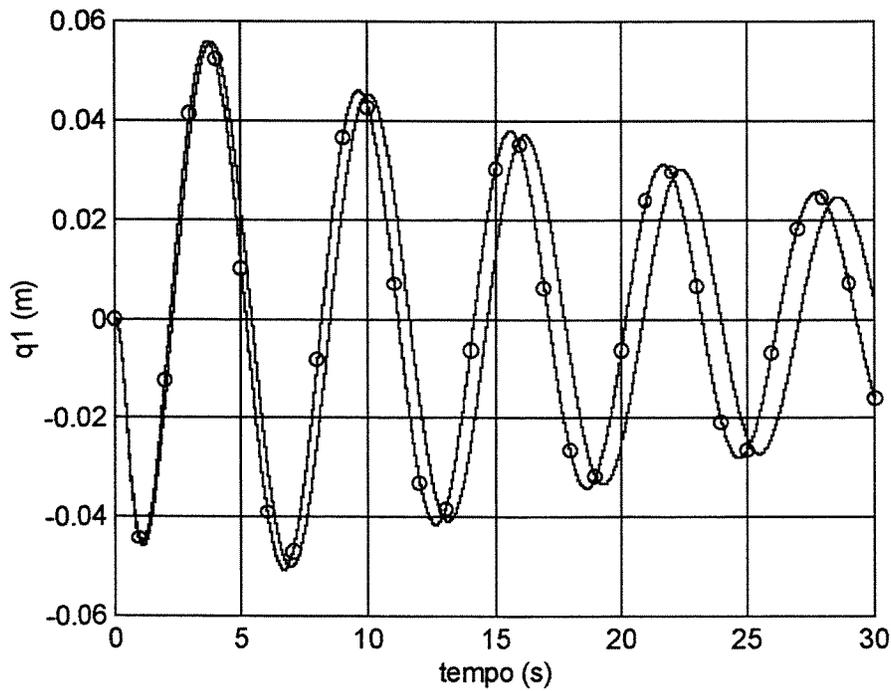


Figura 8.37 - Amplitude modal de deflexão associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - sistema não ideal (expansão modal utilizando 2 modos) curvatura linear (—) X curvatura não linear (-O-O-O-O-)

8.3.3 - Um modo X dois modos

8.3.3.1 - Curvatura linear

8.3.3.1.1 - Caso 1 : ideal

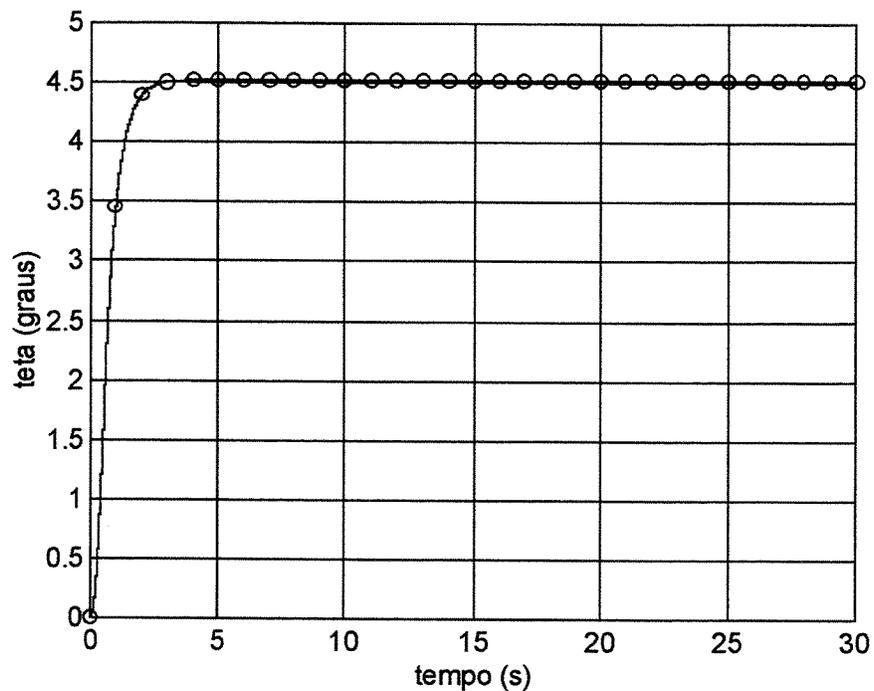


Figura 8.38 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

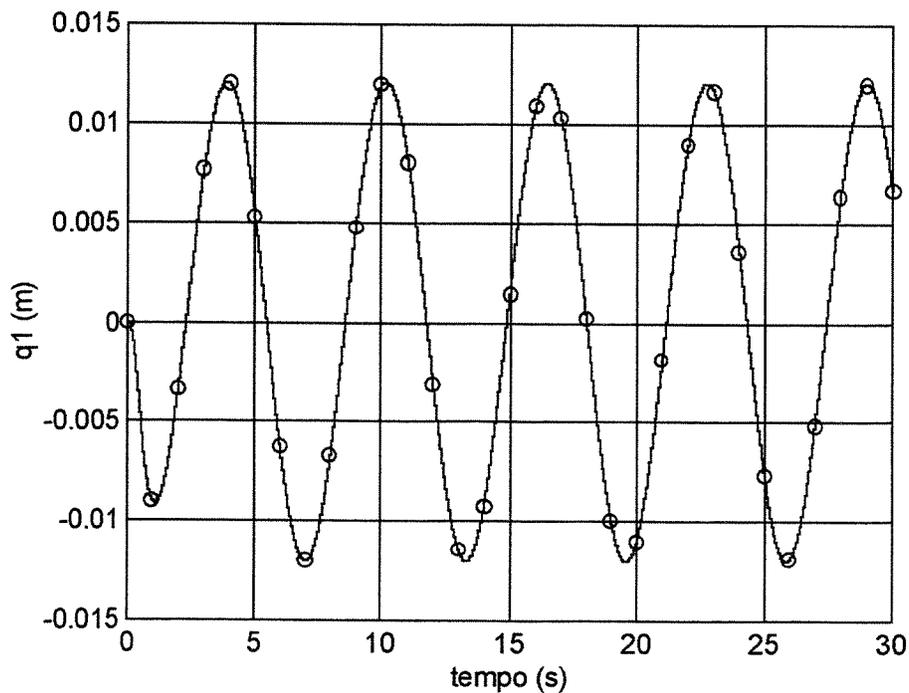


Figura 8.39 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.3.3.1.2 - Caso 1 : não ideal

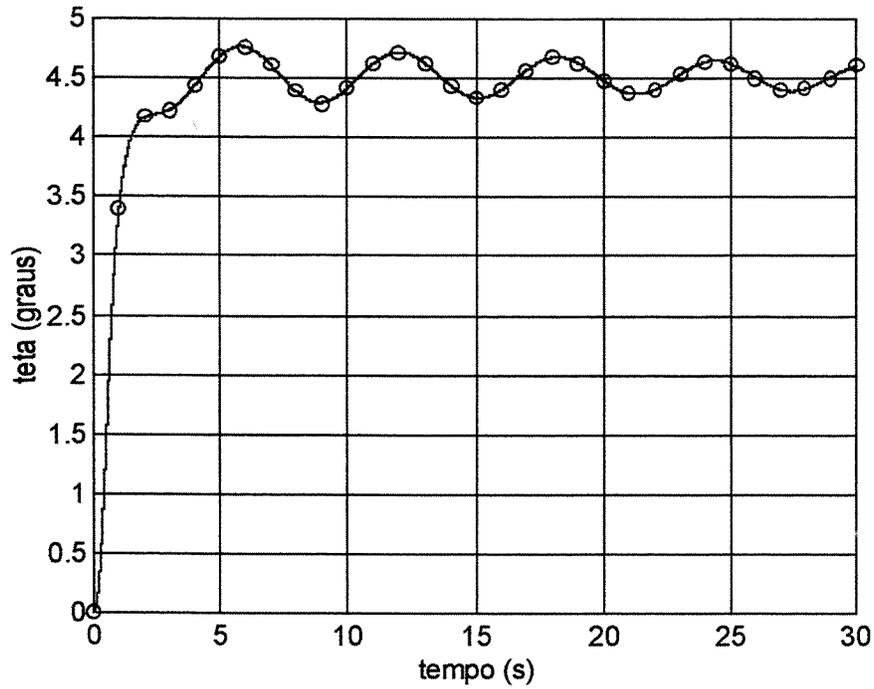


Figura 8.40 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

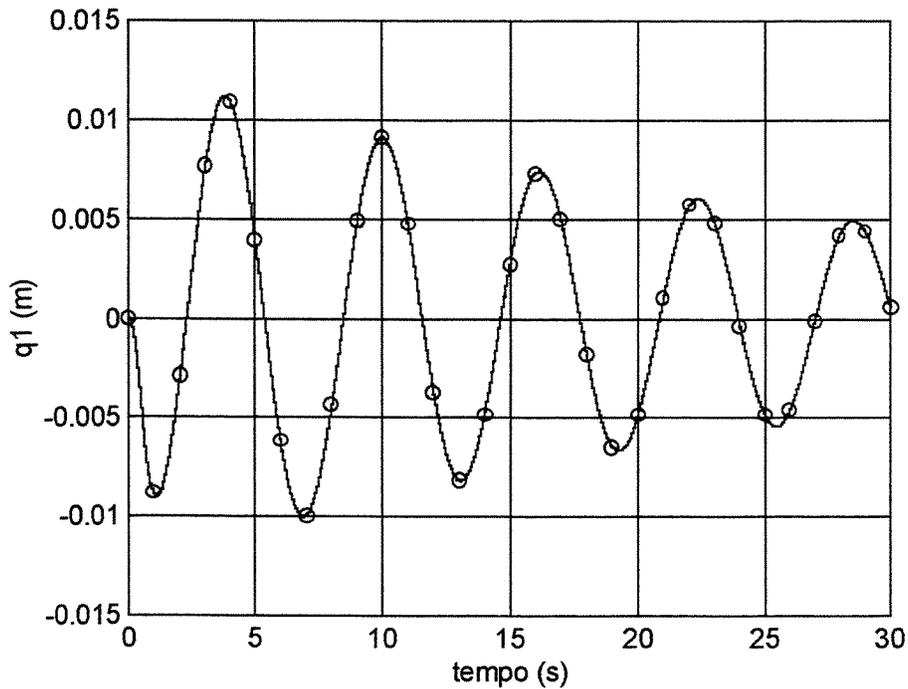


Figura 8.41 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.3.3.1.3 - Caso 2 : ideal

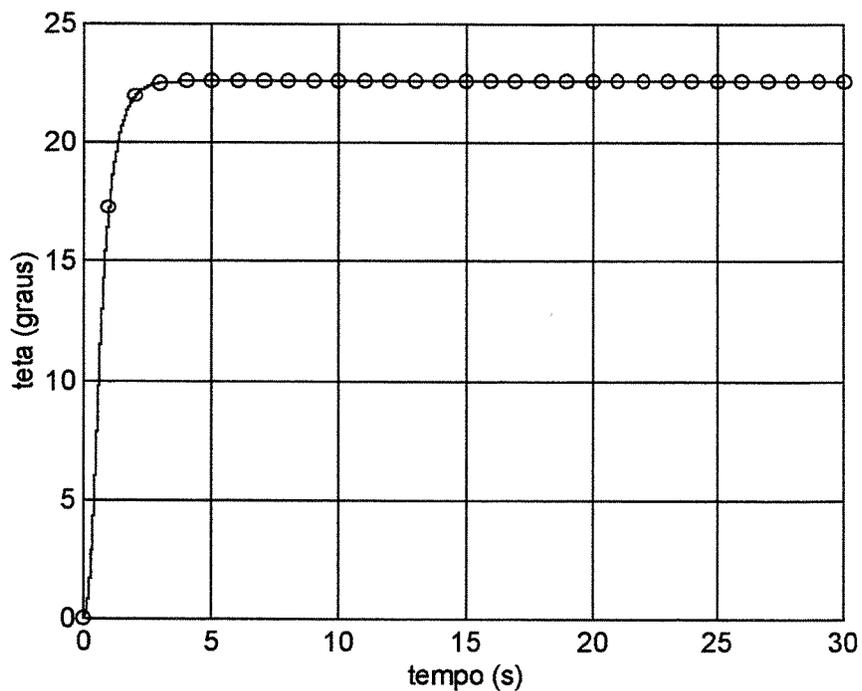


Figura 8.42 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

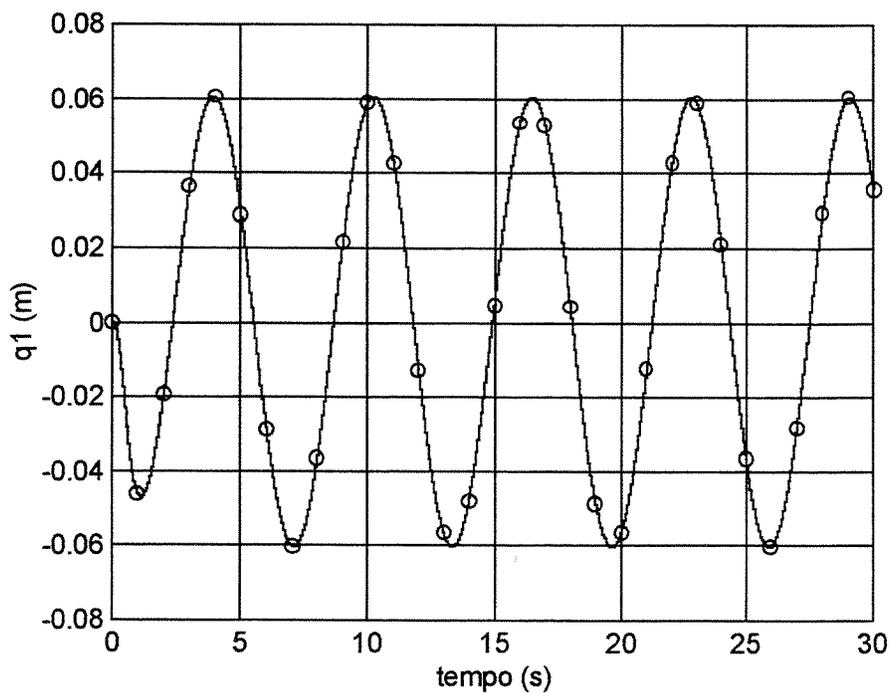


Figura 8.43 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.3.3.1.4 - Caso 2 : não ideal

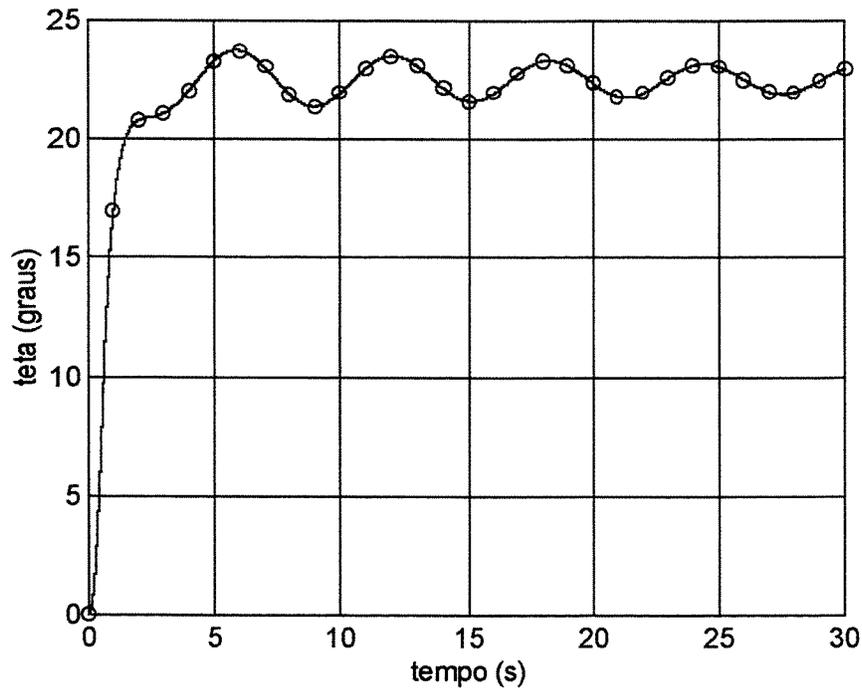


Figura 8.44 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

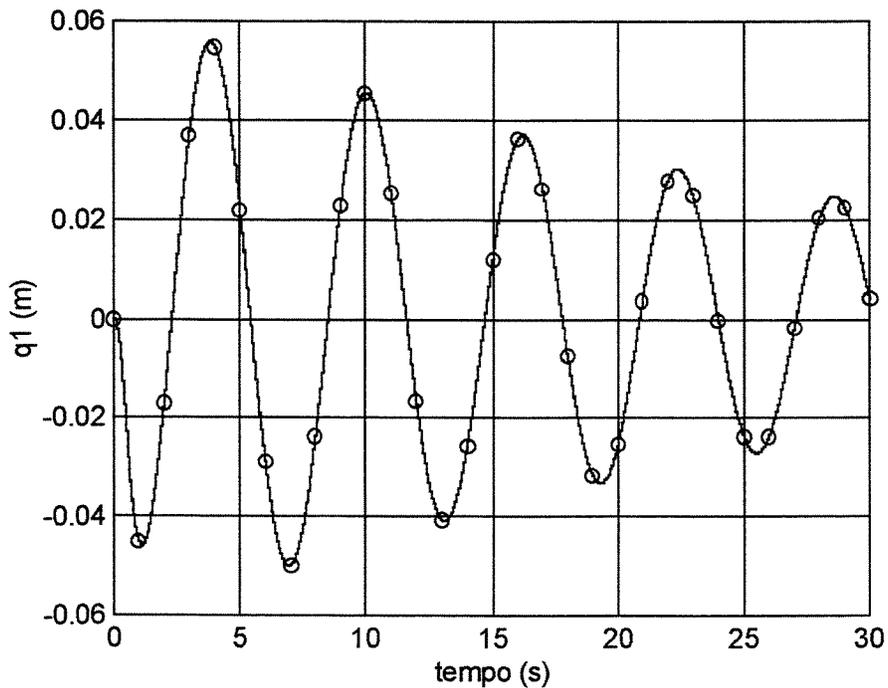


Figura 8.45 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.3.3.2 - Curvatura não linear

8.3.3.2.1 - Caso 1 : ideal

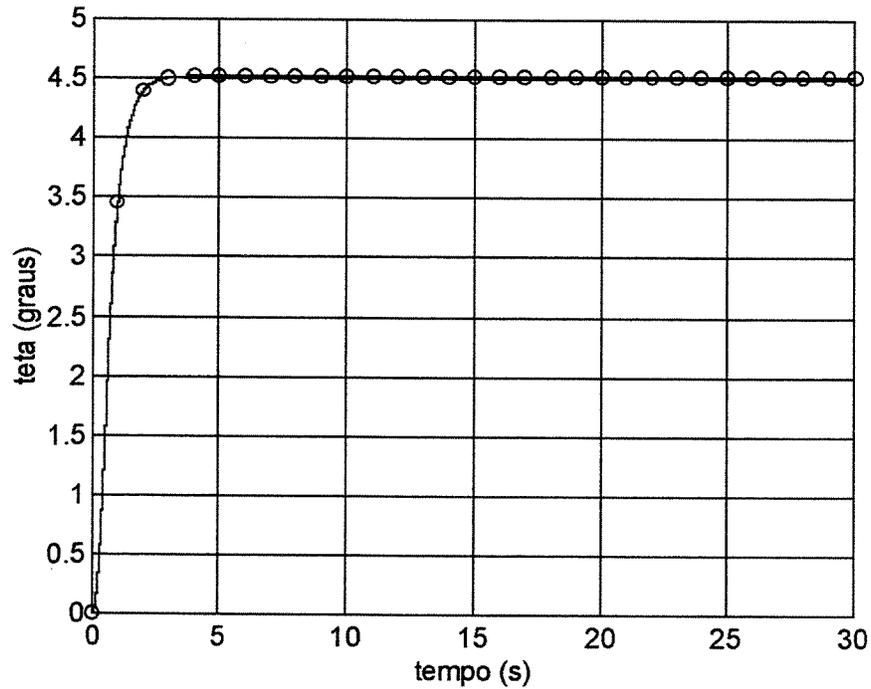


Figura 8.46 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

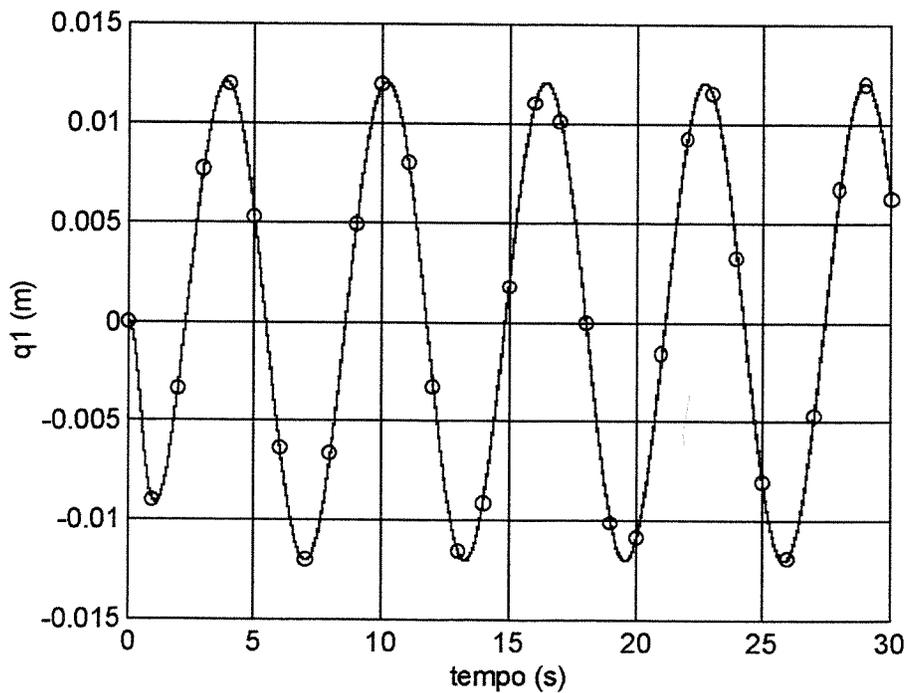


Figura 8.47 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.3.3.2.2 - Caso 1 : não ideal

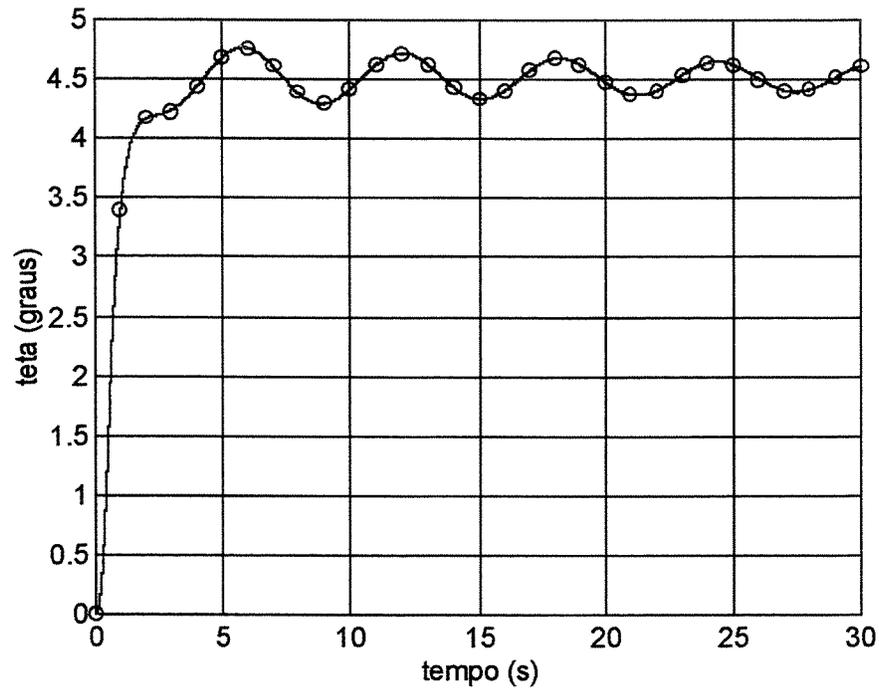


Figura 8.48 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

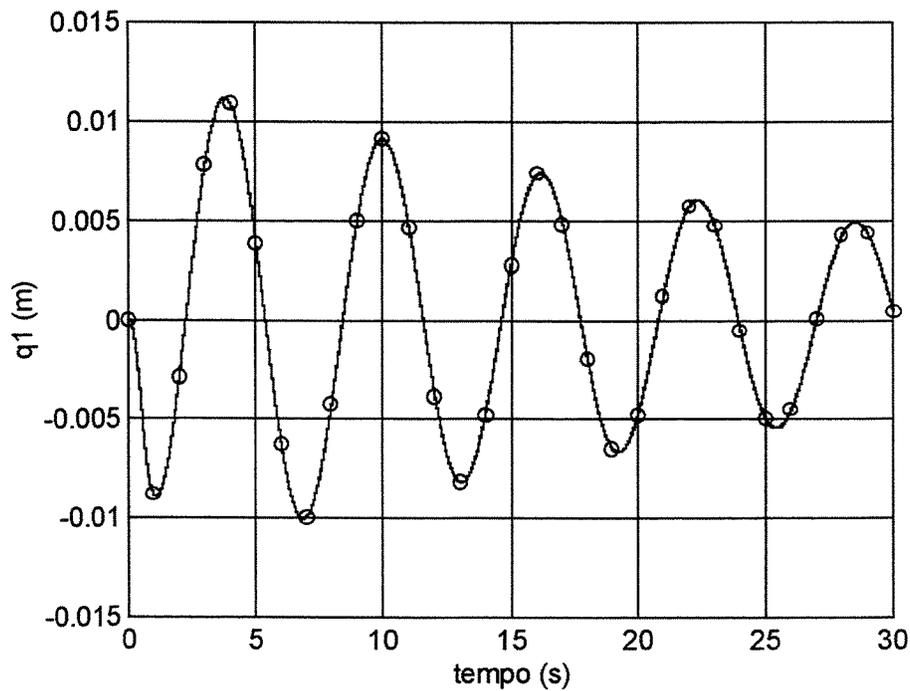


Figura 8.49 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.3.3.2.3 - Caso 2 : ideal

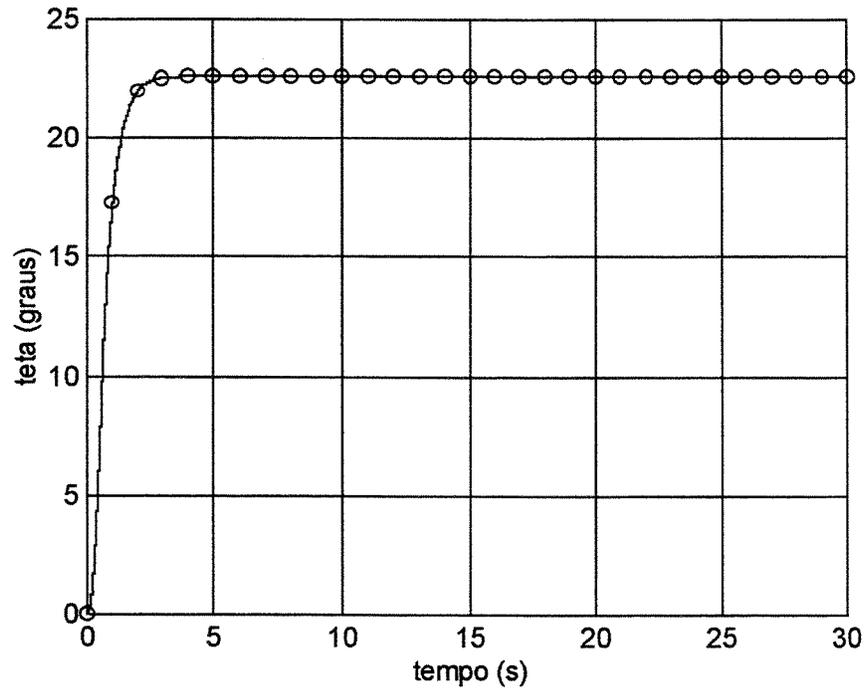


Figura 8.50 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

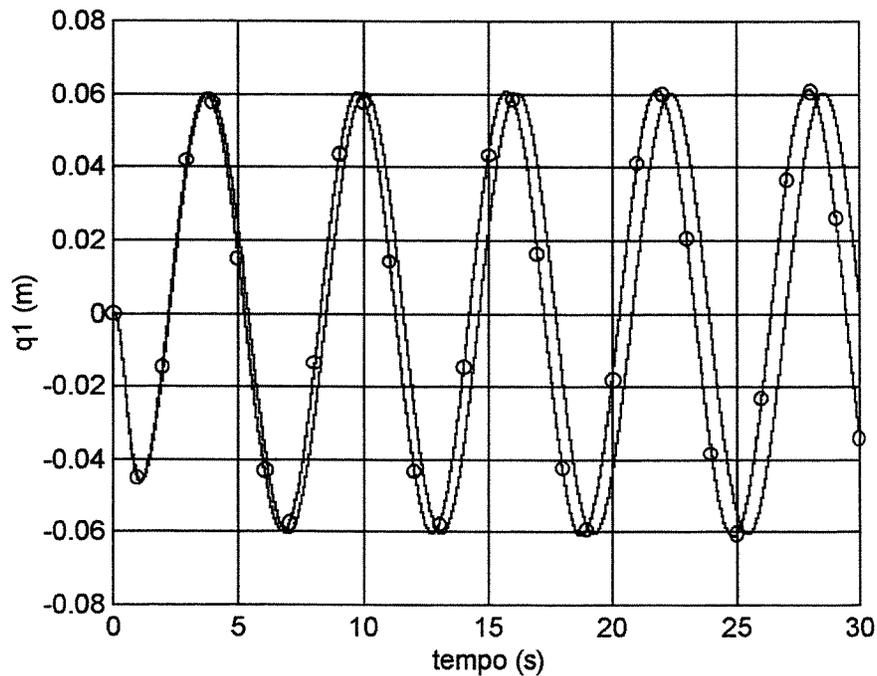


Figura 8.51 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.3.3.2.4 - Caso 2 : não ideal

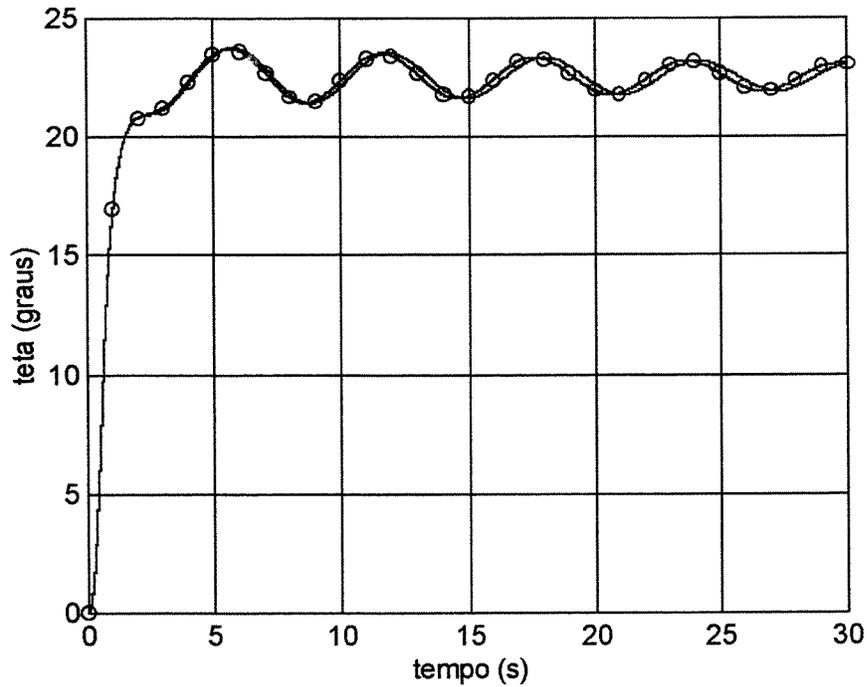


Figura 8.52 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

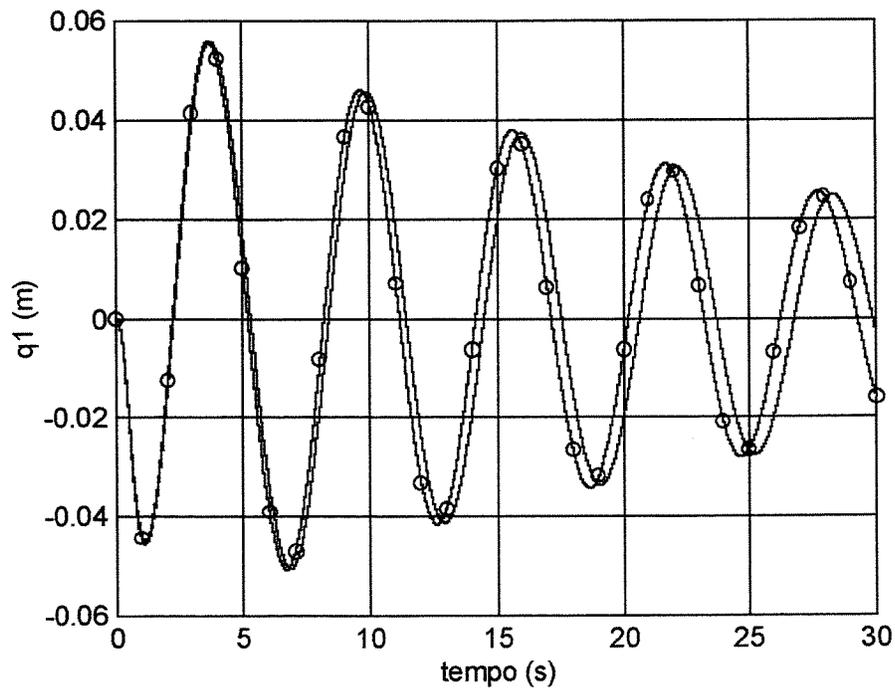


Figura 8.53 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura não linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-))

8.4 - Três modos (apenas curvatura linear)

8.4.1 - Sistema ideal X sistema não ideal

8.4.1.1 - Caso 1

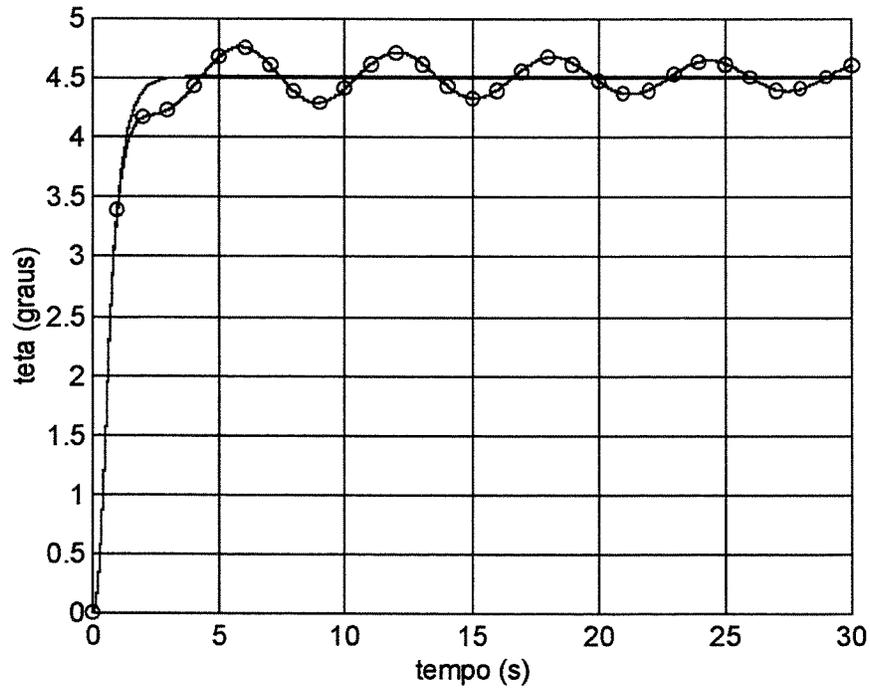


Figura 8.54 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

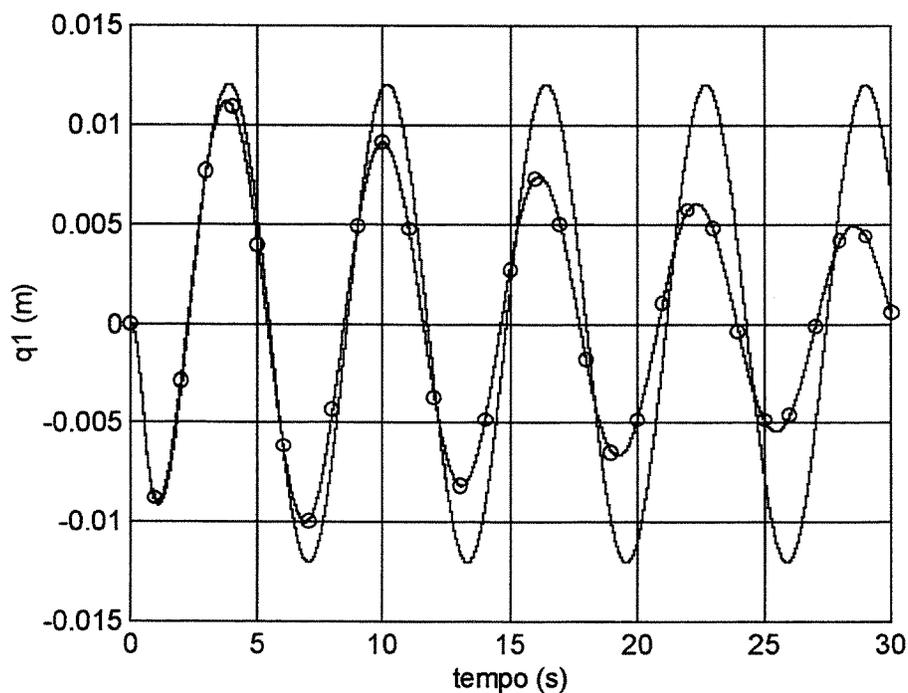


Figura 8.55 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

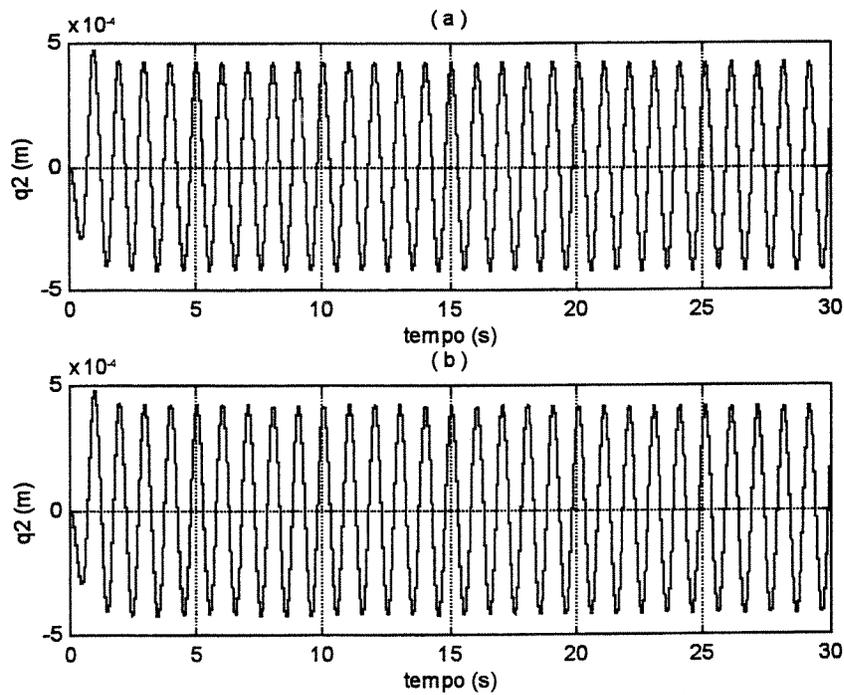


Figura 8.56 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b)

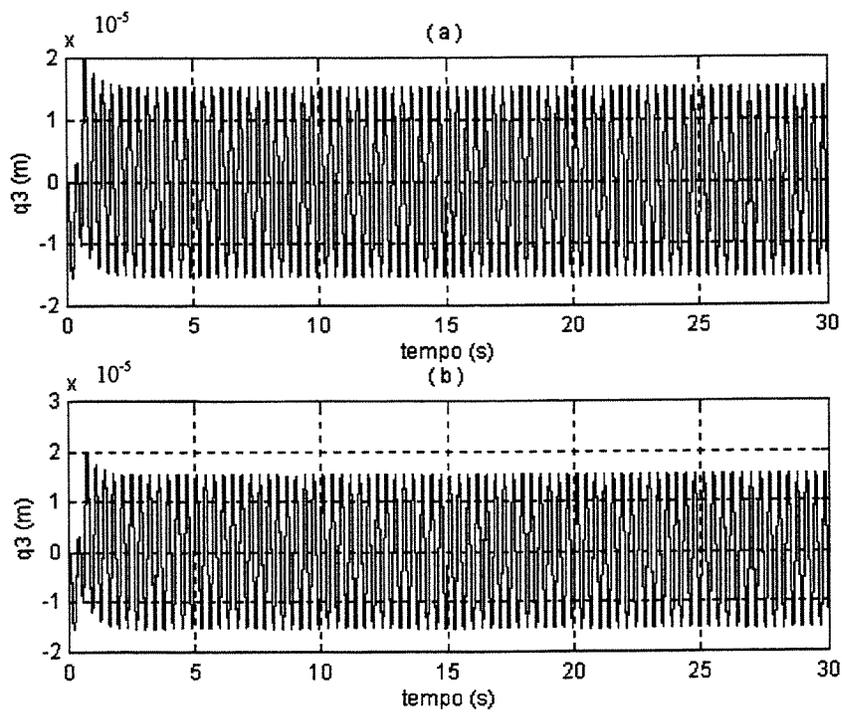


Figura 8.57 - Amplitude modal associada ao terceiro modo de vibrar, q_3 : caso 1 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b)

8.4.1.2 - Caso 2

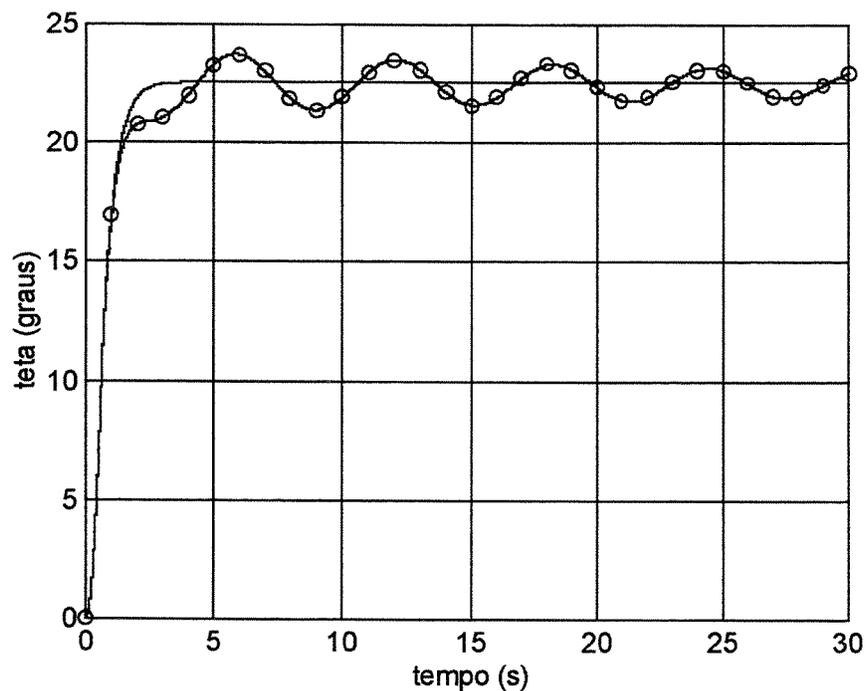


Figura 8.58 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

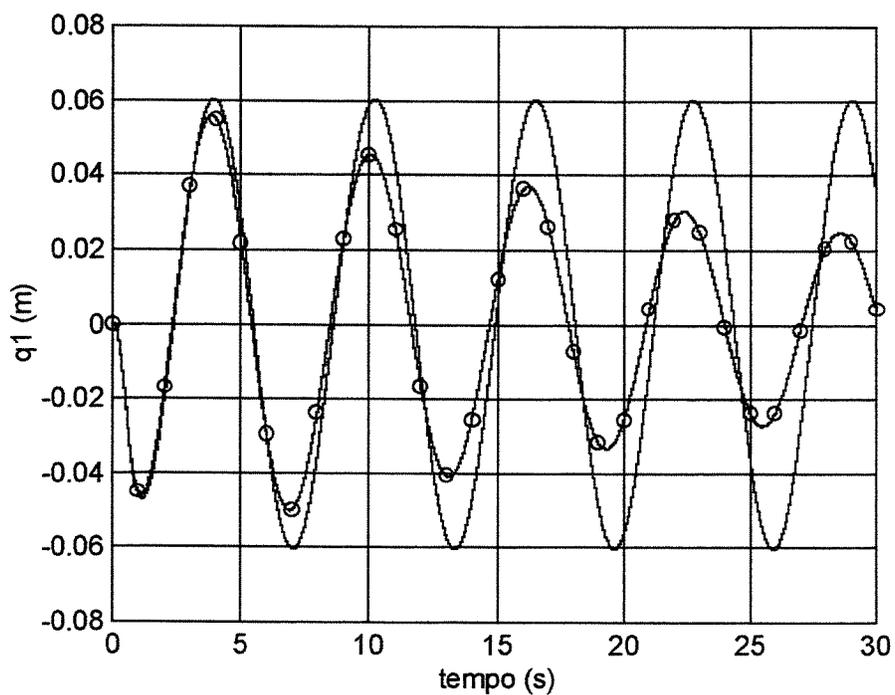


Figura 8.59 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) -ideal (———) X não ideal (-O-O-O-O-)

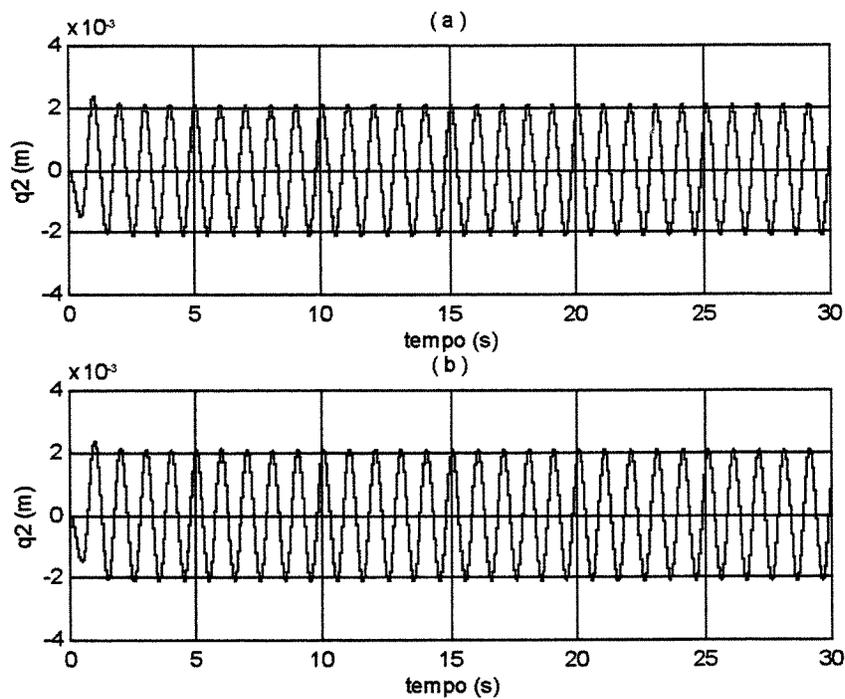


Figura 8.60 - Amplitude modal associada ao segundo modo de vibrar, q_2 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b)

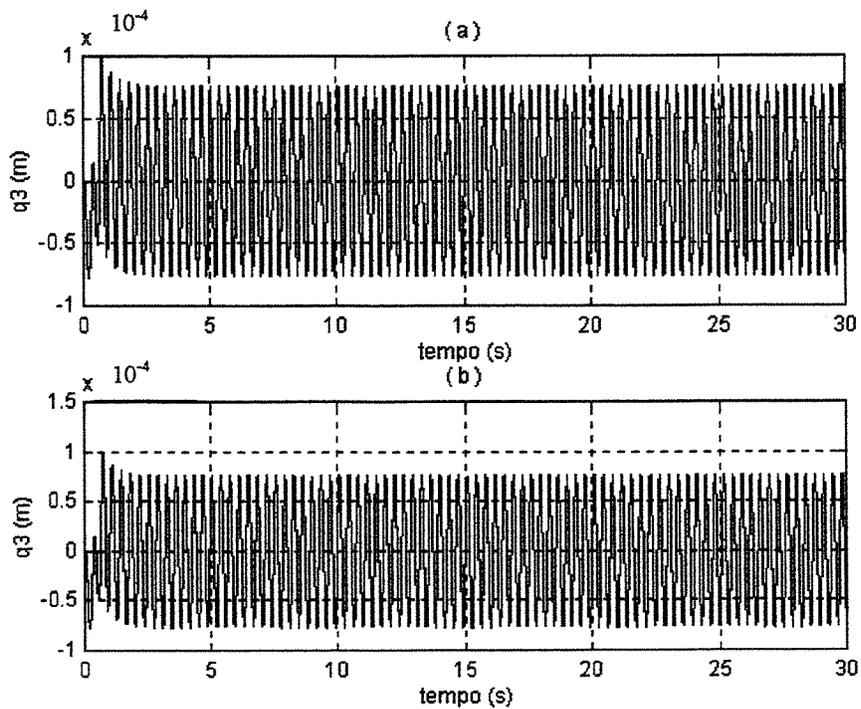


Figura 8.61 - Amplitude modal associada ao terceiro modo de vibrar, q_3 : caso 2 - curvatura linear (expansão modal utilizando 3 modos) - ideal (a) X não ideal (b)

8.4.2 - Um modo X dois modos X três modos

8.4.2.1 - Caso 1 : ideal

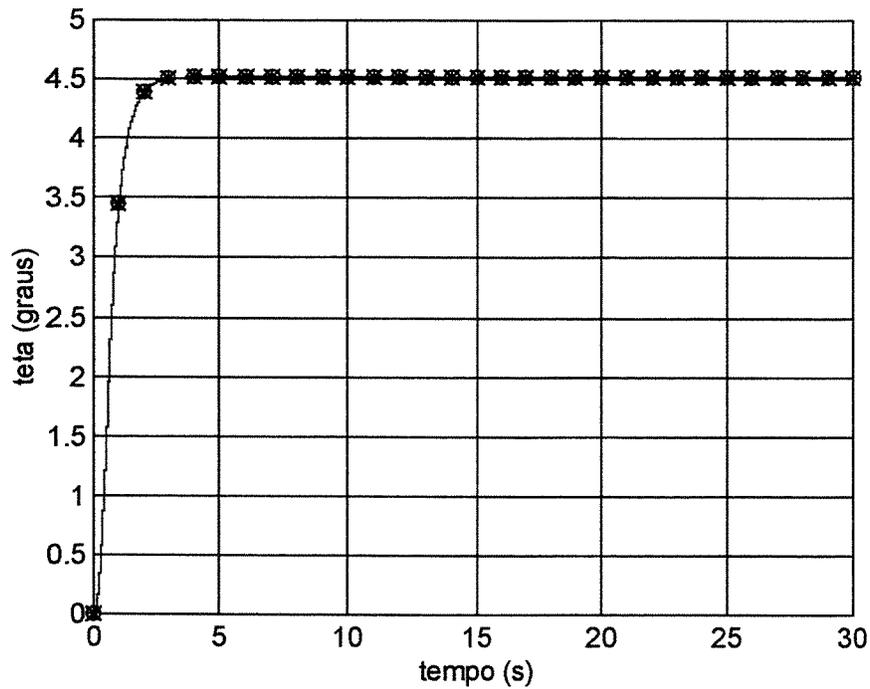


Figura 8.62 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*- -*- -))

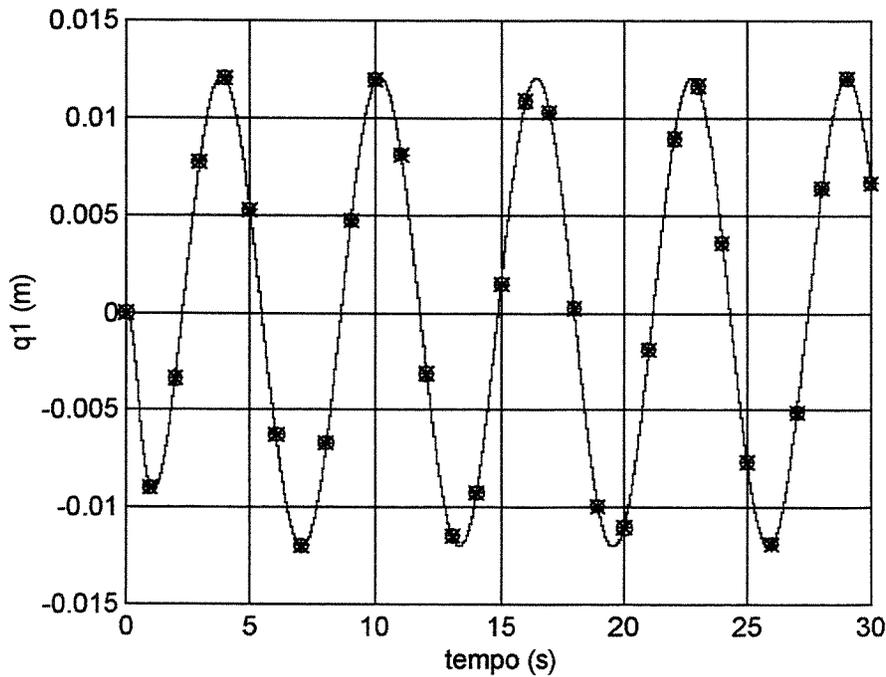


Figura 8.63 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*- -*- -))

8.4.2.2 - Caso 1 : não ideal

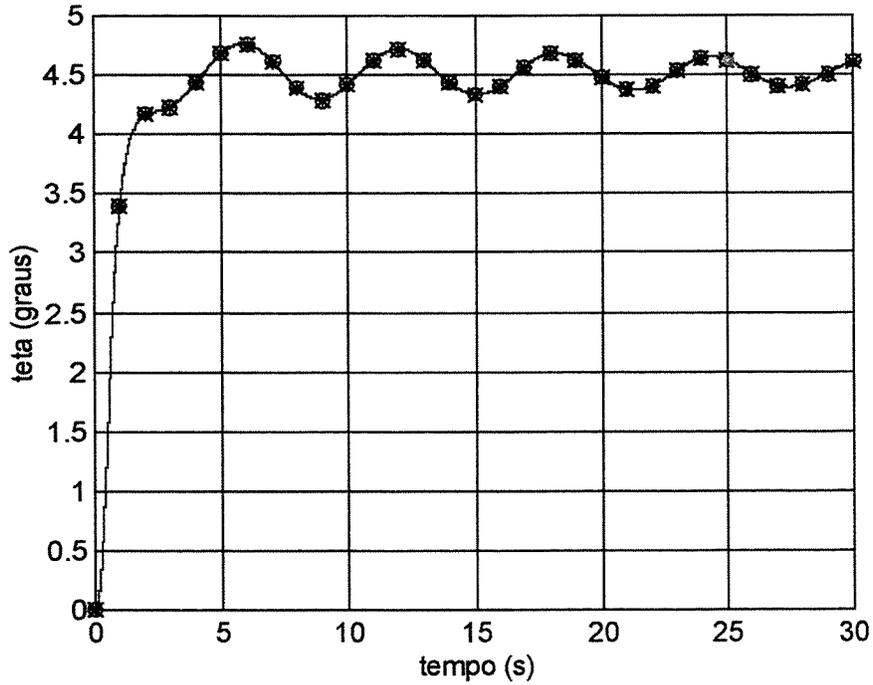


Figura 8.64 - Deslocamento angular : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*- -*- -*-))

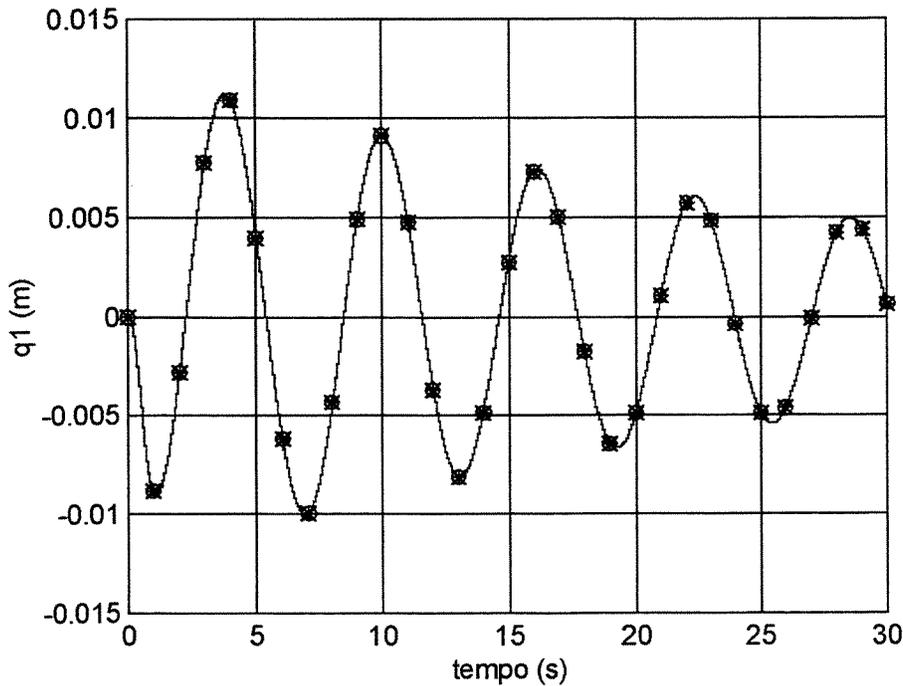


Figura 8.65 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 1 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*- -*- -*-))

8.4.2.3 - Caso 2 : ideal

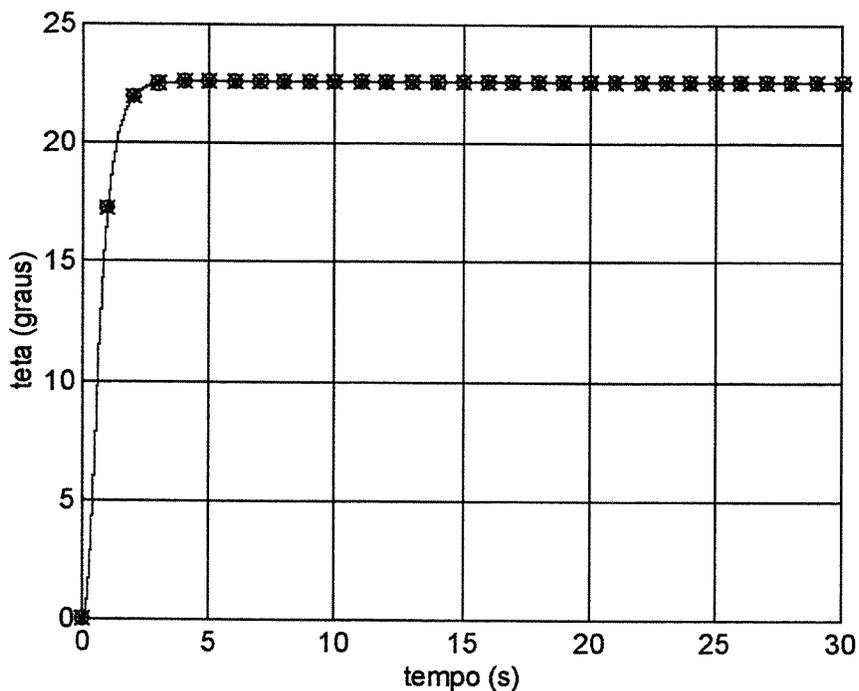


Figura 8.66 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-***-***-))

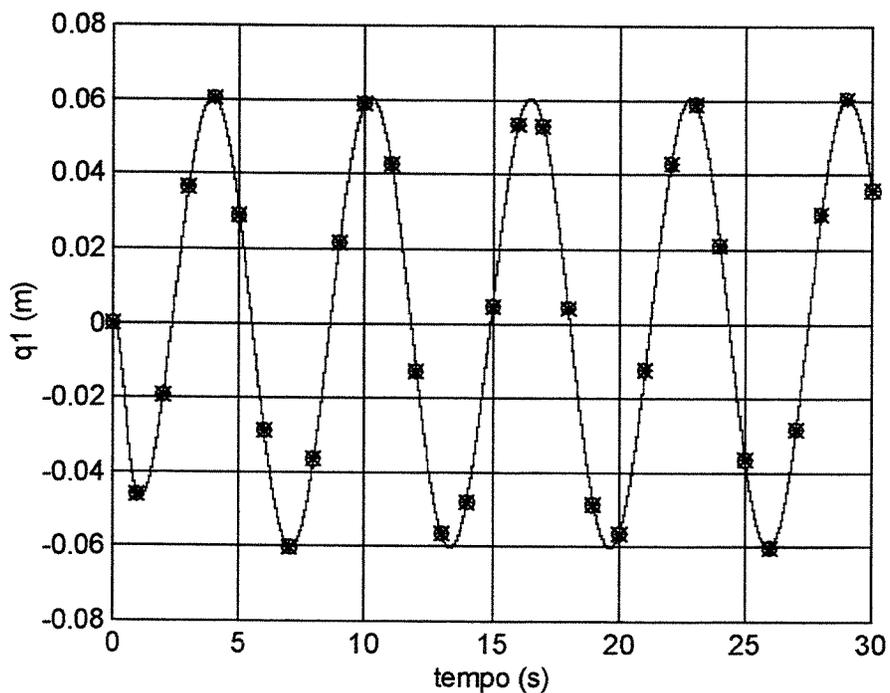


Figura 8.67 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-***-***-))

8.4.2.4 - Caso 2 : não ideal

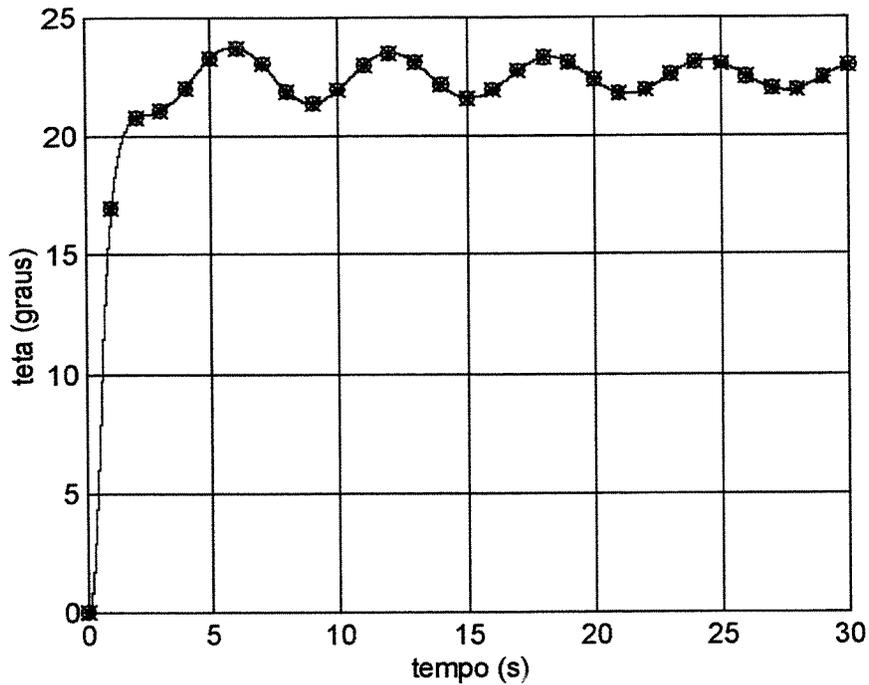


Figura 8.68 - Deslocamento angular : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*- -*- -))

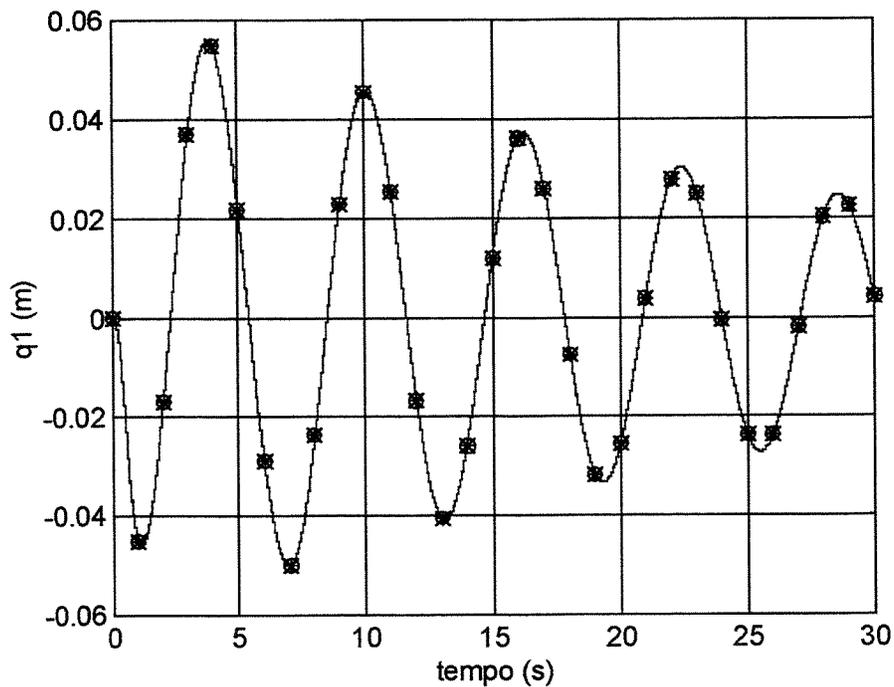


Figura 8.69 - Amplitude modal associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 : caso 2 - curvatura linear - sistema não ideal (expansão modal utilizando 1 modo (———) X expansão modal utilizando 2 modos (-O-O-O-O-) X expansão modal utilizando 3 modos (-*- -*- -))

8.5 Comportamento de $v(x,t)$ e $u(x,t)$

As Figuras 8.70 e 8.71 ilustram os comportamentos das variáveis espaço-temporais $v(x,t)$ e $u(x,t)$ conforme as expressões (3.66) e (3.40) (fazendo os termos de $O(\epsilon)$ iguais a zero nesta última), respectivamente. Os resultados apresentados nas Figuras 8.70 e 8.71 utilizam resultados numéricos do mesmo sistema dinâmico estudado neste capítulo e o perfil do caso 2. Para a verificação de $v(x,t)$ utilizou-se os resultados do modelo de curvatura não linear e do sistema do tipo não ideal (conforme as simulações em 8.2.1.2.2). Para a verificação de $u(x,t)$ simulou-se novamente apenas a parte linear (ou não perturbada, ou seja, $\epsilon = 0$) deste mesmo sistema. Nessas simulações considera-se $\mu = O(\epsilon)$.

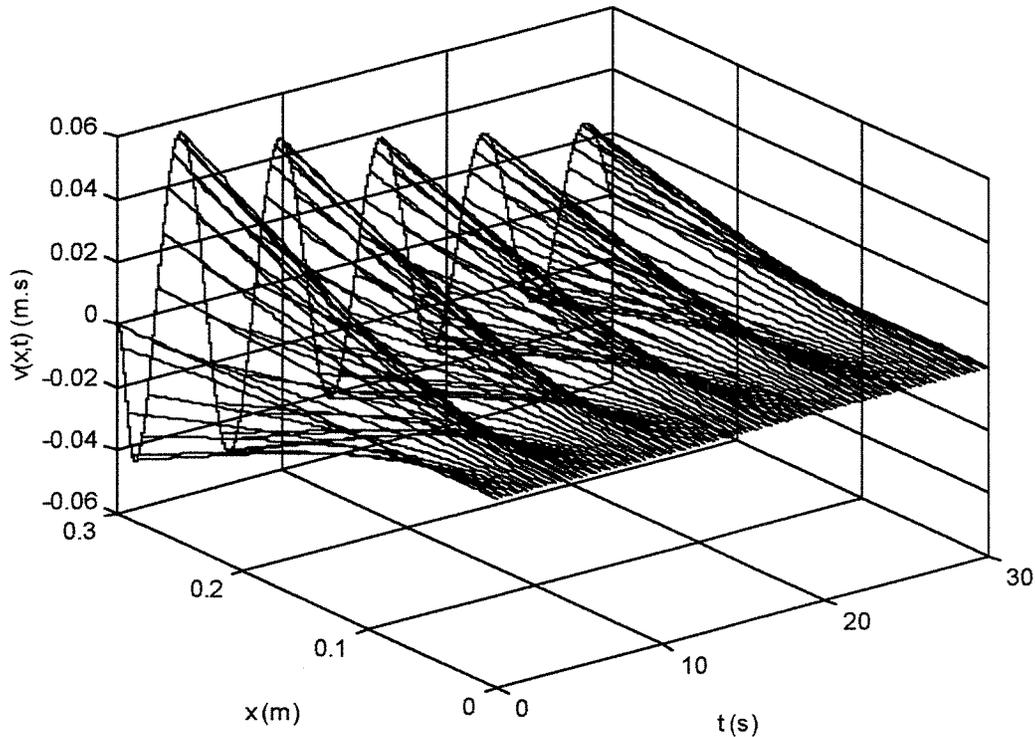


Figura 8.70 - Comportamento de $v(x,t)$

Neste capítulo, até este ponto, buscou-se apenas observar o comportamento da componente temporal da variável $v(x,t)$, denominada $q_1(t)$. Não se havia preocupado, até então, com o estudo da componente longitudinal da deflexão, $u(x,t)$.

A maneira como $u(x,t)$ influencia o posicionamento final dos pontos sobre a viga (para o caso não perturbado) será apresentado no item 8.6, a seguir.

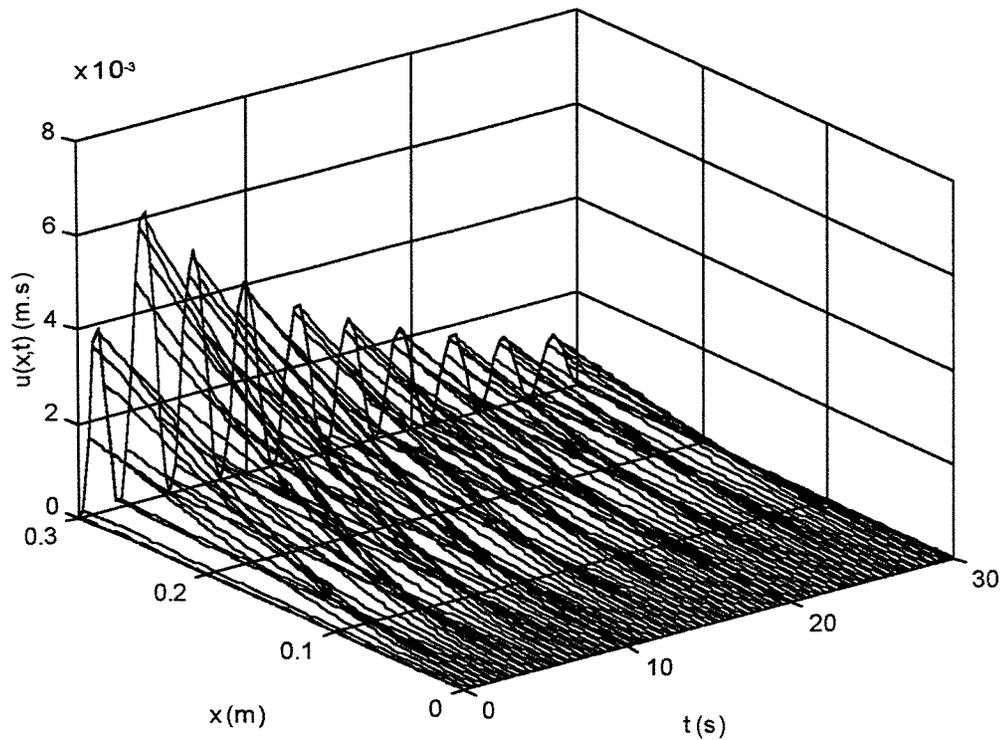


Figura 8.71 - Comportamento de $u(x,t)$: sistema não perturbado ; $U = 5V$.

Em cada dessas figuras, a curva plotada no plano $(t, v(x,t))$ (para a Figura 8.70) e no plano $(t, u(x,t))$ (para a Figura 8.71) representa o comportamento da componente temporal das variáveis espaço-temporais em questão.

Para o caso da Figura 8.70, por exemplo, a curva é a mesma apresentada na Figura 8.9 para o caso não ideal.

8.6 Influência do deslocamento longitudinal, $u(x,t)$, na posição final dos pontos sobre a viga

O modelo matemático para curvatura não linear (Capítulo 3) introduz a variável $u(x,t)$, a qual não aparece no modelo matemático para curvatura linear (Capítulo 2). A expressão para $u(x,t)$, na forma perturbada, aparece em (3.40) e é reproduzida a seguir :

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i(t) q_j(t) \left(\int_0^x \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi \right) \right\} + O(\epsilon) \quad (8.1)$$

As Figuras 8.72 e 8.73 apresentam o comportamento não perturbado da variável $u(x,t)$ para os casos 1 e 2, respectivamente, tratados neste capítulo. Os termos de $O(\epsilon)$ que aparecem na expressão (8.1) não são considerados nos resultados apresentados nessas figuras. Isso corresponde a fazer $\epsilon = 0$ na expressão (8.1).

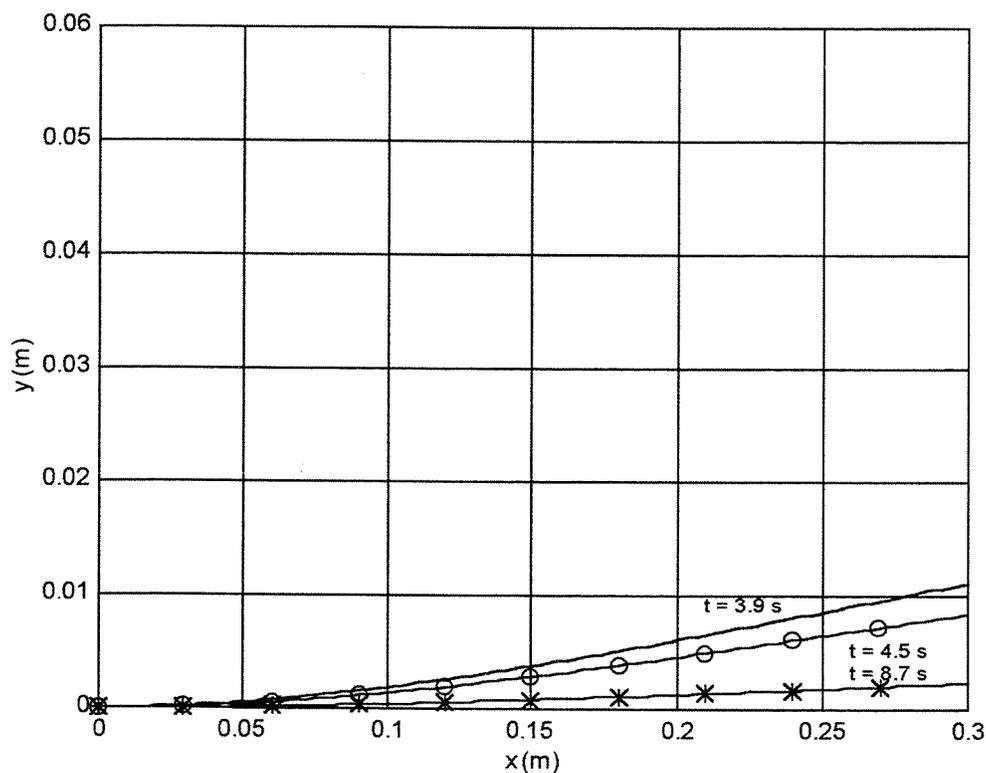


Figura 8.72 - Posicionamento final dos pontos sobre a viga em relação ao sistema de referência móvel : sistema não perturbado ; $U=1V$.

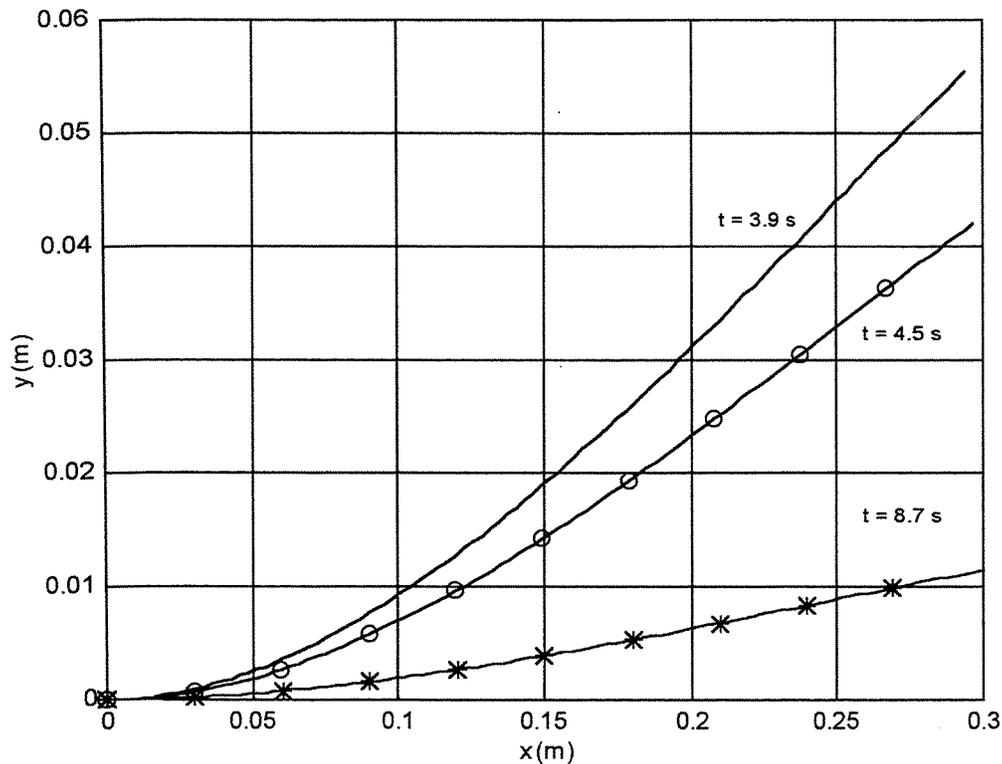


Figura 8.73 - Posicionamento final dos pontos sobre a viga em relação ao sistema de referência móvel : sistema não perturbado ; $U=5V$.

Para três instantes de tempo distintos quaisquer, a posição final de cada um dos pontos sobre a viga é plotada (cada ponto é localizado de acordo com os valores de $v(x,t)$ e $u(x,t)$). O resultado apresentado na Figura 8.73 corresponde ao resultado apresentado na Figuras 8.71.

As Figuras 8.73 pode ser melhor compreendida comparando-a com qualquer uma das Figuras 3.1 a 3.4, utilizadas para a modelagem da curvatura não linear da estrutura flexível proposta neste trabalho.

Os deslocamentos longitudinais dos pontos sobre a viga, como pode ser percebido claramente na Figura 8.73 ao se observar a extremidade livre da viga (da maneira como foi apresentada essa figura e lembrando que se trata da variável não perturbada), não são

negligenciáveis. O mesmo não pode ser concluído ao observar-se a Figura 8.72, aonde o deslocamento longitudinal dos pontos sobre a viga é desprezível.

Nas condições da Figura 8.72, o modelo matemático de curvatura linear poderia ser utilizado sem problemas (para a análise do problema não perturbado).

Nas condições apresentadas na Figura 8.73, um modelo matemático propondo apenas deslocamentos transversais dos pontos sobre a viga, no entanto, não apresentará resultados confiáveis (para a análise do problema não perturbado). O modelo matemático de curvatura linear para este sistema nessas condições estará apresentando resultados não acurados.

8.7 - Sistema perturbado (curvatura linear e curvatura não linear) X sistema não perturbado

O sistema perturbado é comparado com o sistema não perturbado nas duas próximas figuras. O mesmo sistema (e os mesmos parâmetros) tratado ao longo deste capítulo é utilizado (assim como os mesmos casos 1 e 2). Para o sistema não perturbado faz-se $\epsilon = 0$ em cada uma das condições apresentadas (ou seja, avalia-se apenas a solução numérica da parte linear e não perturbada desses sistemas). Em ambos os casos tratados nesse item considerou-se o sistema do tipo não ideal (esta consideração faz com que o modelo de curvatura linear seja não linear devido ao acoplamento das equações para θ e para v).

Conforme apresentado na Figura 8.74, para baixas velocidades de rastreamento ($U = 1V$ nos terminais do motor ; $\dot{\theta} \cong 0.1 \text{ rad / s}$), o sistema não perturbado, o sistema perturbado obtido através do modelo matemático de curvatura linear e o sistema perturbado obtido através do modelo matemático de curvatura não linear apresentam o mesmo comportamento. As não-linearidades (perturbações) presentes nos diferentes modelos matemáticos não alteram o comportamento dinâmico do sistema linear associado. Sua influência é negligenciável.

O mesmo não ocorre com os resultados apresentados na Figura 8.75, para velocidades de rastreamento mais altas ($U = 5V$ nos terminais do motor ; $\dot{\theta} \cong 0.5 \text{ rad / s}$). O comportamento do sistema não perturbado e o comportamento do sistema perturbado obtido através do modelo

matemático de curvatura linear continuam praticamente idênticos e ambos diferem visivelmente do comportamento do sistema perturbado obtido através do modelo matemático de curvatura não linear.

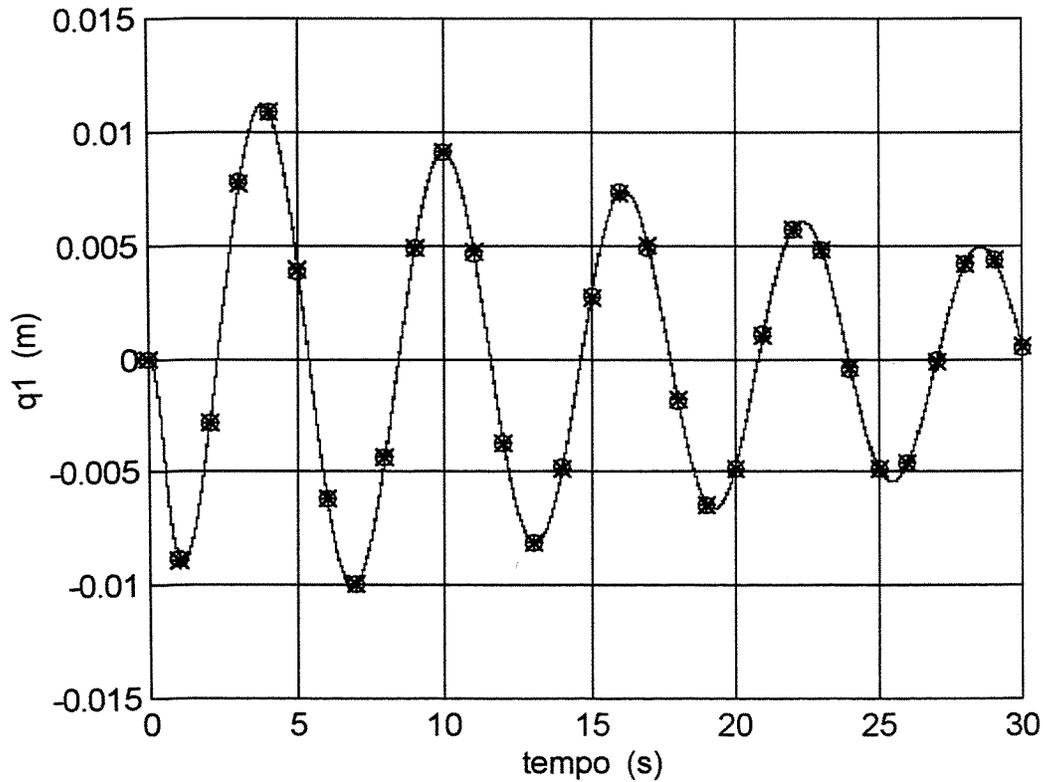


Figura 8.74 - (—) resposta do sistema não perturbado ; (-*-*) resposta do sistema perturbado : curvatura linear ; (-o-o-o-o-) resposta do sistema perturbado : curvatura não linear ; $U = 1V$.

Quanto maior a velocidade de rastreamento, $\dot{\theta}$, espera-se que tanto maior seja o distanciamento entre os perfis apresentados na Figura 8.75, pois a influência dos termos não lineares sobre os termos lineares aumenta. Em outras palavras, os termos não lineares tornam-se cada vez mais importantes.

O cuidado que deve ser tomado, então, é não fazer com que a importância dos termos não lineares seja demasiada em relação aos termos de $O(1)$. Cabe lembrar que a análise realizada

neste trabalho faz sentido apenas se os termos não lineares puderem ser considerados como uma perturbação em torno do sistema linear ou não perturbado.

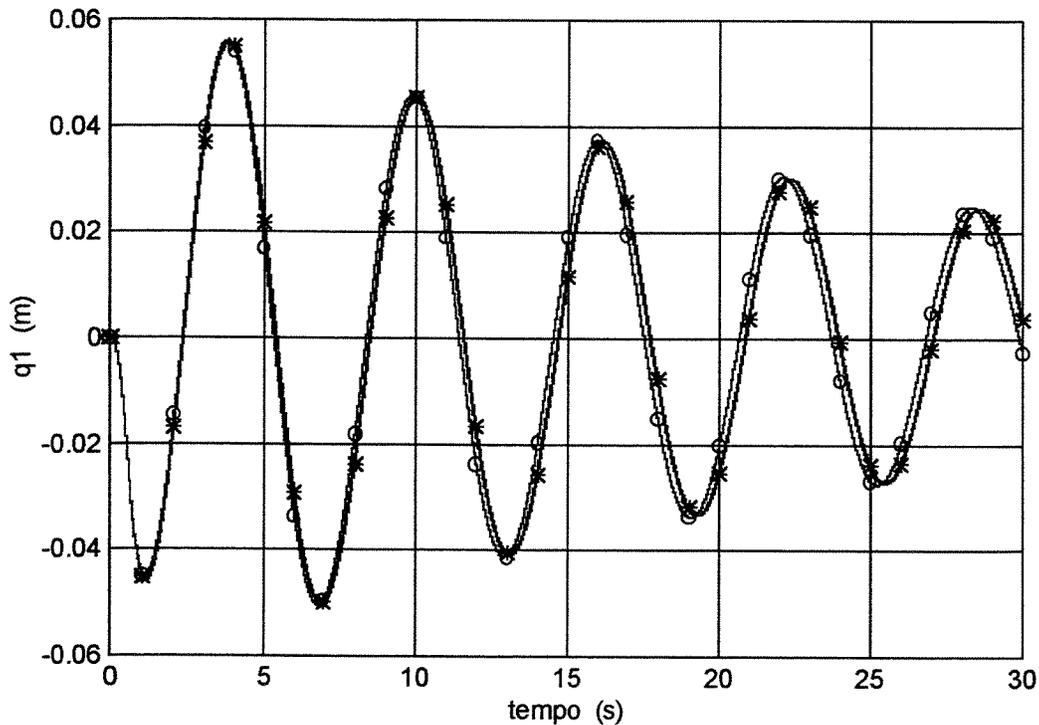


Figura 8.75 - (—) resposta do sistema não perturbado ; (-*-*) resposta do sistema perturbado : curvatura linear ; (-o-o-o-o-) resposta do sistema perturbado : curvatura não linear ; $U = 5V$.

As Figuras 8.74 e 8.75 mostram a importância dos termos não lineares para cada um dos modelos matemáticos de curvatura apresentado neste trabalho, em duas situações distintas (baixas e altas velocidades de rastreamento).

8.8 - Conclusões

De acordo com as simulações numéricas efetuadas neste capítulo, algumas conclusões podem ser feitas :

1 - O comportamento dinâmico do sistema ideal difere sempre do comportamento dinâmico do sistema não ideal, não importando o modelo de curvatura ou a velocidade de rastreamento utilizados.

2 - Para o sistema ideal, o deslocamento angular do eixo de rastreamento, θ , pode ser prescrito de forma a atingir um valor máximo quando a tensão elétrica nos terminais do motor cessa e permanecer neste valor indefinidamente. Para o sistema não ideal, sob as mesmas condições de excitação no motor (U), a variável θ , obtida agora através de integração numérica e não conhecida *a priori*, apresenta comportamento temporal oscilatório em torno do valor máximo prescrito para o sistema ideal. Esta oscilação dá-se com a frequência de vibração da viga e possui amplitude decrescente (amortecida), assim como a da viga. Este comportamento pode ser observado nos casos 1 e 2 nas figuras: 8.2, 8.4, 8.6, 8.8, 8.18, 8.21, 8.24, 8.27, 8.54 e 8.58.

3 - Para o sistema ideal, a amplitude da componente temporal da variável de deflexão associada ao primeiro modo de vibrar, q_1 , não decresce com o tempo (ou decresce de forma negligenciável). Neste caso, a influência do termo de amortecimento é encoberta pela influência dos demais termos não lineares (ambos considerados como perturbações). Para o sistema não ideal, a amplitude de q_1 , nas mesmas condições, decresce com o tempo, mostrando que o termo de amortecimento e a interação atuador-estrutura passam a se tornar importantes. A frequência em que q_1 oscila para o sistema ideal é ligeiramente diferente (menor) daquela em que oscila para o sistema não ideal mostrando que, para este último, a influência dos termos não lineares advindos do modelo de curvatura não linear faz com que a estrutura flexível se torne ligeiramente mais rígida do que suposto no caso de curvatura linear. Este comportamento pode ser observado nos casos 1 e 2 nas figuras: 8.3, 8.5, 8.7, 8.9, 8.19, 8.22, 8.25, 8.28, 8.55 e 8.59.

4 - Comparando o modelo de curvatura linear com o modelo de curvatura não linear para o caso 1 (ideal com ideal e não ideal com não ideal), percebe-se que não existe diferença perceptível entre os dois modelos. Esta observação vale tanto para θ quanto para q_1 . Pode-se concluir que, sob estas condições, qualquer um dos modelos de curvatura pode ser utilizado. Uma vez que o modelo de curvatura linear é consideravelmente mais simples,

nada impede seu uso, por exemplo, no projeto da malha de controle, em detrimento do modelo de curvatura não linear. Este comportamento pode ser observado nas figuras: 8.10, 8.11, 8.14 e 8.15. Nas figuras 8.30, 8.31, 8.34 e 8.35 uma diferença muito pequena (praticamente insignificante) começa a se desenvolver no tempo (nas simulações aonde o segundo modo é considerado).

5 - Comparando o modelo de curvatura linear com o modelo de curvatura não linear para o caso 2 (ideal com ideal e não ideal com não ideal), percebe-se que existem diferenças significativas entre os dois modelos. Esta observação vale tanto para θ (sistema não ideal) quanto para q_1 (sistemas ideal e não ideal). Para o sistema ideal, θ é o mesmo para ambos os modelos de curvatura (Figuras 8.12 e 8.32). Nesse sistema, novamente, apesar de possuir a mesma amplitude (aparentemente não amortecida), a frequência de vibração de q_1 de acordo com o modelo de curvatura linear é menor que a do modelo de curvatura não linear. Sob condições como as simuladas aqui, ou seja, altas (ou suficientemente altas) velocidades de rastreamento, deve-se tomar muito cuidado ao se decidir o modelo de curvatura a ser utilizado. As diferenças entre eles não são negligenciáveis. Este comportamento pode ser observado nas figuras: 8.13, 8.16 e 8.17.

6 - As discrepâncias entre os dois modelos de curvatura descritas no item anterior aumentam significativamente com a participação do segundo modo de vibrar da viga (sempre modos de flexão serão tratados aqui ; estes modos são considerado na expansão modal de $v(x,t)$). Este comportamento pode ser observado nas figuras: 8.33, 8.36 e 8.37.

7 - O acoplamento entre o primeiro e o segundo modos não ocorre para o modelo de curvatura linear. As figuras 8.20 e 8.23 mostram a amplitude da componente temporal da variável de deflexão associada ao segundo modo de vibrar, q_2 , para este modelo (da ordem de 10^{-4} metros para o caso 1 e da ordem de 10^{-3} metros para o caso 2). As amplitudes apresentam-se não amortecidas. No estudo aqui realizado, considerou-se que o amortecimento estrutural, μ , seja o mesmo para todos os modos considerados.

8 - O acoplamento entre o primeiro e o segundo modos mostrou-se fraco para o modelo de curvatura não linear para o caso 1. A figura 8.26 mostra a amplitude da componente

temporal da variável de deflexão associada ao segundo modo de vibrar, q_2 , para este caso (da ordem de 10^{-4} metros). A amplitude apresenta-se não amortecida. No entanto, para o caso 2, aonde a velocidade de rastreamento é maior (em relação ao caso 1), percebe-se que o acoplamento entre o primeiro e o segundo modos é significativo. Esse fato pode ser verificado na Figura 8.29, aonde a amplitude de q_2 é da ordem de 10^{-3} metros. Neste mesma figura, percebe-se o amortecimento da vibração do segundo modo. O caráter não ideal do sistema torna-se mais significativo com o crescimento das amplitudes modais.

9 - Para o modelo de curvatura linear, a expansão da variável $v(x,t)$ utilizando apenas o primeiro modo de flexão já é suficiente para a representação da dinâmica do sistema flexível de rastreamento, tanto para baixas quanto para altas velocidades de rastreamento. Este comportamento pode ser corroborado através das figuras nos itens 8.3.1.1, 8.4.1 e 8.4.2. Nenhuma diferença é observada com relação à discretização valendo-se dos dois primeiros de flexão (figuras 8.38, 8.39, 8.40, 8.41, 8.42, 8.43, 8.44 e 8.45) nem com relação à discretização valendo-se dos três primeiros modos de flexão (figuras 8.62, 8.63, 8.64, 8.65, 8.66, 8.67, 8.68 e 8.69). As amplitudes negligenciáveis de q_2 e q_3 podem ser observadas através das figuras 8.56, 8.57, 8.60 e 8.61.

10 - Para o modelo de curvatura não linear, a expansão da variável $v(x,t)$ em apenas um modo de vibração (o primeiro modo de flexão) é suficiente para os casos de baixas velocidades de rastreamento. Este comportamento pode ser corroborado através das figuras 8.46, 8.47, 8.48 e 8.49.

11 - Para o modelo de curvatura não linear, a expansão modal utilizando apenas o primeiro modo de flexão mostrou não ser suficiente para os casos aonde as velocidades de rastreamento são altas e, por conseguinte, a participação do segundo modo de flexão na dinâmica da estrutura flexível e do sistema como um todo não é desprezível. Esta interação faz com que a frequência do primeiro modo de vibração (flexão) da viga aumente. Quanto maior a velocidade de rastreamento, maior a interação dos modos entre si e com o atuador e, portanto, maiores as discrepâncias observadas. Este resultado é ilustrado pelas Figuras 8.51, 8.52 e 8.53. Para o sistema ideal, sob altas velocidades, conforme a figura 8.50, o

segundo modo de flexão mostrou não ser importante (neste caso não existe interação atuador-estrutura).

12 - A Figura 8.73, que mostra a influência da variável $u(x,t)$ na localização dos pontos sobre a viga (para o caso não perturbado), corrobora o fato de que, em algumas situações, o modelo de curvatura não linear e o modelo de curvatura linear podem produzir resultados completamente diferentes. Deve-se, portanto, tomar o cuidado necessário na adoção do melhor modelo.

13 - A comparação entre o comportamento dinâmico do sistema perturbado (curvatura linear e curvatura não linear) e o comportamento dinâmico do sistema não perturbado ($\epsilon = 0$) apresenta de maneira bem clara a influência dos termos não lineares sob altas velocidades de rastreamento (Figura 8.75). Para baixas velocidades de rastreamento, os resultados se confundem (Figura 8.74). Em (Crespo da Silva et al., 1978a,b) mostra-se que termos de curvatura geralmente negligenciados (em uma análise diferente da tratada aqui e considerando, por exemplo, movimento torsional) podem ter significativa influência na resposta do sistema.

14 - Apesar do modelo matemático considerando curvatura não linear ser mais acurado para as aplicações modernas (estruturas leves em altas velocidades de operação), eles são também computacionalmente mais pesados para servirem como modelo dinâmico para manipuladores flexíveis (por exemplo) em situações de controle em tempo real (Wang et al., 1994). Atualmente, técnicas têm sido aprimoradas para se desenvolver o modelo de estruturas espaciais (estruturas conforme as tratadas aqui) e o seu respectivo sistema de controle de maneira simultânea, integrada e otimizada em todos os sentidos (Padula et al., 1992).

Capítulo 9

Identificação de um motor de corrente contínua

9.1 - Modelo inicial

O modelo matemático a partir do qual se pretende estudar o motor de corrente contínua é apresentado em detalhes no Apêndice A. As equações governantes do movimento de um motor de corrente contínua ideal (na forma dimensional ; equações A.12), são reproduzidas a seguir :

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (9.1a)$$

$$(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (C_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a = 0 \quad (9.1b)$$

A equação (9.1a) representa a equação governante da corrente de armadura (i_a ; equação da parte elétrica do motor) e a equação (9.1b) representa a equação governante do deslocamento angular do eixo do motor (θ ; equação da parte mecânica do motor).

Na primeira das equações 9.1, considera-se que a tensão elétrica, $U(t)$, aplicada aos terminais do motor, representa a excitação sobre o mesmo. A variação da corrente de armadura com o tempo, \dot{i}_a , é um efeito imediato de $U(t)$. Por sua vez, a corrente de armadura, i_a , faz com que seja gerado um torque no eixo do motor, $T_m (= K_t i_a)$ e este causa o deslocamento angular, θ .

Os parâmetros físicos do motor (R_a (resistência de armadura), K_t (constante de torque do motor), K_b (constante de força contra-eletromotriz) e C_m (coeficiente de atrito viscoso)) serão levantados experimentalmente fazendo com que o motor de corrente contínua opere em regime permanente.

O parâmetro L_m (indutância de armadura) optou-se por medir de outra forma : utilizando um medidor de indutância, com o motor parado.

9.2 - Modelo para operação em regime permanente

As equações 9.1, no instante em que o motor elétrico atinge a condição de regime permanente, podem ser reescritas como :

$$\begin{aligned} R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} &= U \\ (C_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a &= 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

aonde os termos que envolvem a variação da corrente elétrica através do motor em relação ao tempo, \dot{i}_a , e a variação da velocidade do eixo do motor em relação ao tempo, $\dot{\theta}$, são anulados. Na primeira das equações 9.1, se a tensão elétrica de entrada (excitação), U , for constante, cada um dos termos na expressão também o deve ser. Assim, se i_a for constante (uma vez que considera-se R_a como sendo), \dot{i}_a será igual a zero. Pela mesma razão, da primeira das equações 9.1, se $\dot{\theta}$ for constante (uma vez que considera-se K_b e N_g como sendo), na segunda das equações 8.1 tem-se que $\dot{\theta}$ será igual a zero.

O modelo matemático proposto em 9.2 será utilizado doravante até o item 9.7.

9.3 - Montagem experimental para identificação de um motor de corrente contínua

Tendo-se em mente as equações 9.2, o que se pretende aqui é projetar um arranjo experimental que possibilite a medição da corrente elétrica através do motor de corrente contínua

e a velocidade angular do eixo do mesmo (ambos considerados, então, constantes ; o motor operando em regime permanente). Com estas informações acerca de estados do sistema, e considerando os parâmetros R_a , K_b e C_m em 9.2 como incógnitas, pode-se montar um sistema de tantas equações quantas forem as medições efetuadas e obter-se o valor destes parâmetros.

Ao longo de todo este capítulo considerar-se-á a relação de transmissão, N_g , igual a 1. Não se trabalhou experimentalmente com uma caixa de redução. A caixa de redução entre o motor e a estrutura envolveria dificuldades adicionais acerca do modelagem deste dispositivo (por exemplo, folgas e atrito entre as engrenagens), não fazendo parte do escopo deste trabalho.

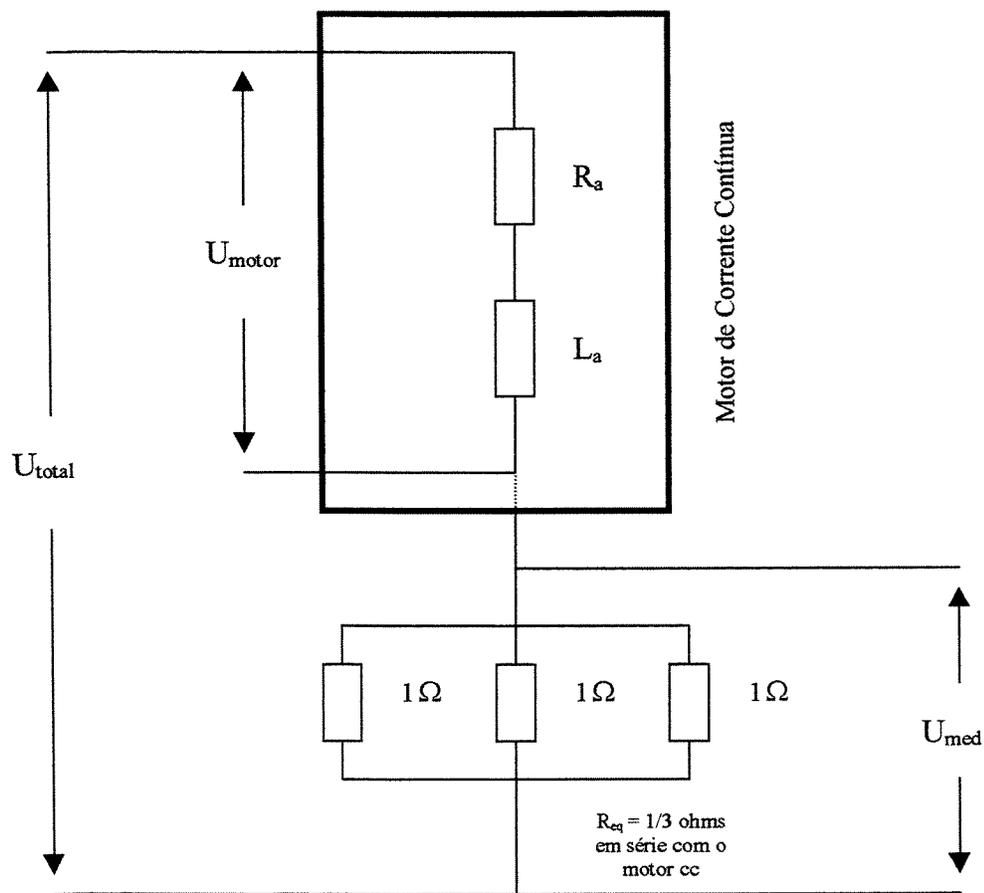


Figura 9.1 - Montagem experimental para a medição da corrente (i_a) através do motor (U_{total} = excitação ; U_{motor} = tensão elétrica através dos terminais do motor ; U_{med} = tensão elétrica através do resistor equivalente (medida) : $U_{med} = R_{eq} i_a$)

O arranjo experimental utilizado encontra-se esquematizado na Figura 9.1. A medição da tensão elétrica (U_{med}) através de uma resistência conhecida (R_{eq}) em série com o motor de corrente contínua fornece a corrente elétrica (i_a) através do motor, fazendo $U_{med} = R_{eq} i_a$.

A velocidade angular do eixo do motor foi obtida aproximadamente através dos perfis de deslocamento angular, obtidos via potenciômetro. Seja um dos resultados experimentais (Figura 9.2):

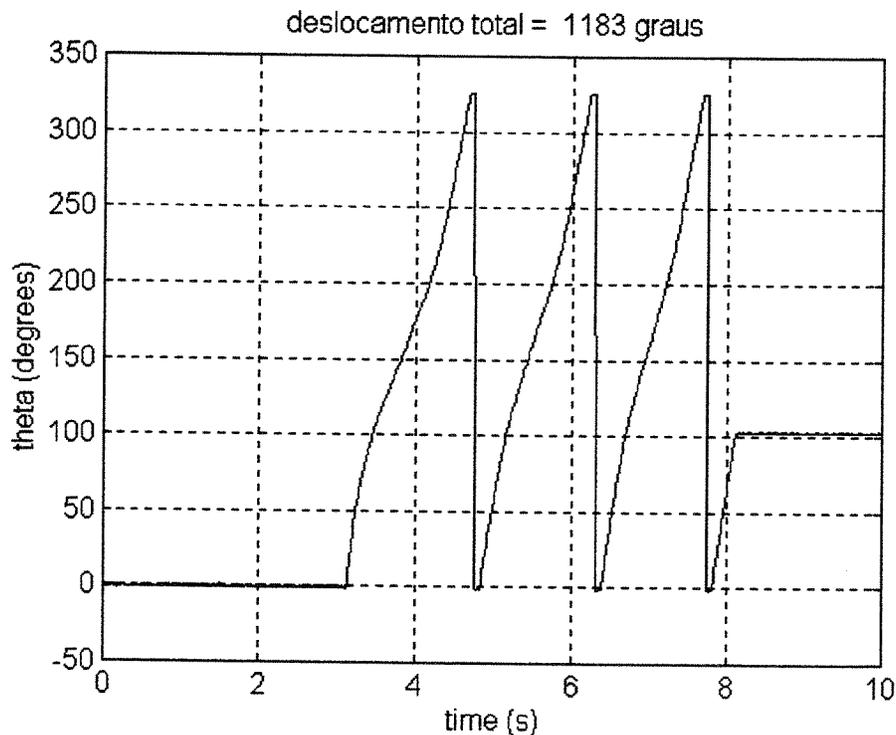


Figura 9.2 - Deslocamento angular para um dos casos estudados (identificação do motor cc). Devido ao espaçamento no resistor do potenciômetro, considera-se que cada um dos picos (final de uma volta pelo resistor circular) ocorra em 360° (ver item 9.9).

Sabe-se que em cinco segundos o eixo percorreu $theta = 1183^\circ$. Portanto,

$$\dot{\theta} = \frac{theta * pi}{180 * 5} = 4.1294 \text{ rad/s}$$

9.4 - Resultados experimentais

Seguem os dados obtidos utilizando a montagem descrita na figura 9.1. Os valores apresentados neste item para a excitação (média ; Tabela 9.1) e para a tensão média através do motor (U_{motor} ; Tabela 9.2) serão corrigidos no item seguinte (9.5) para o ajuste do modelo matemático com os dados experimentais.

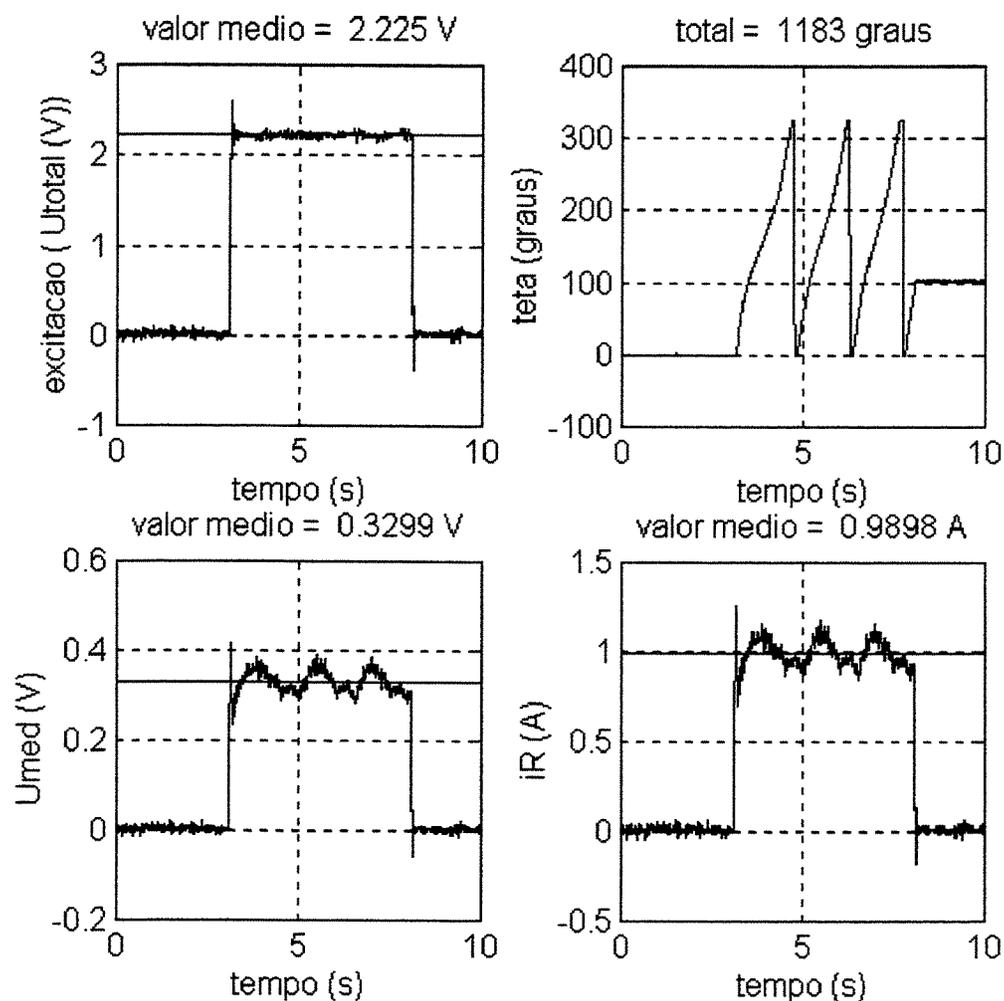


Figura 9.3 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : I

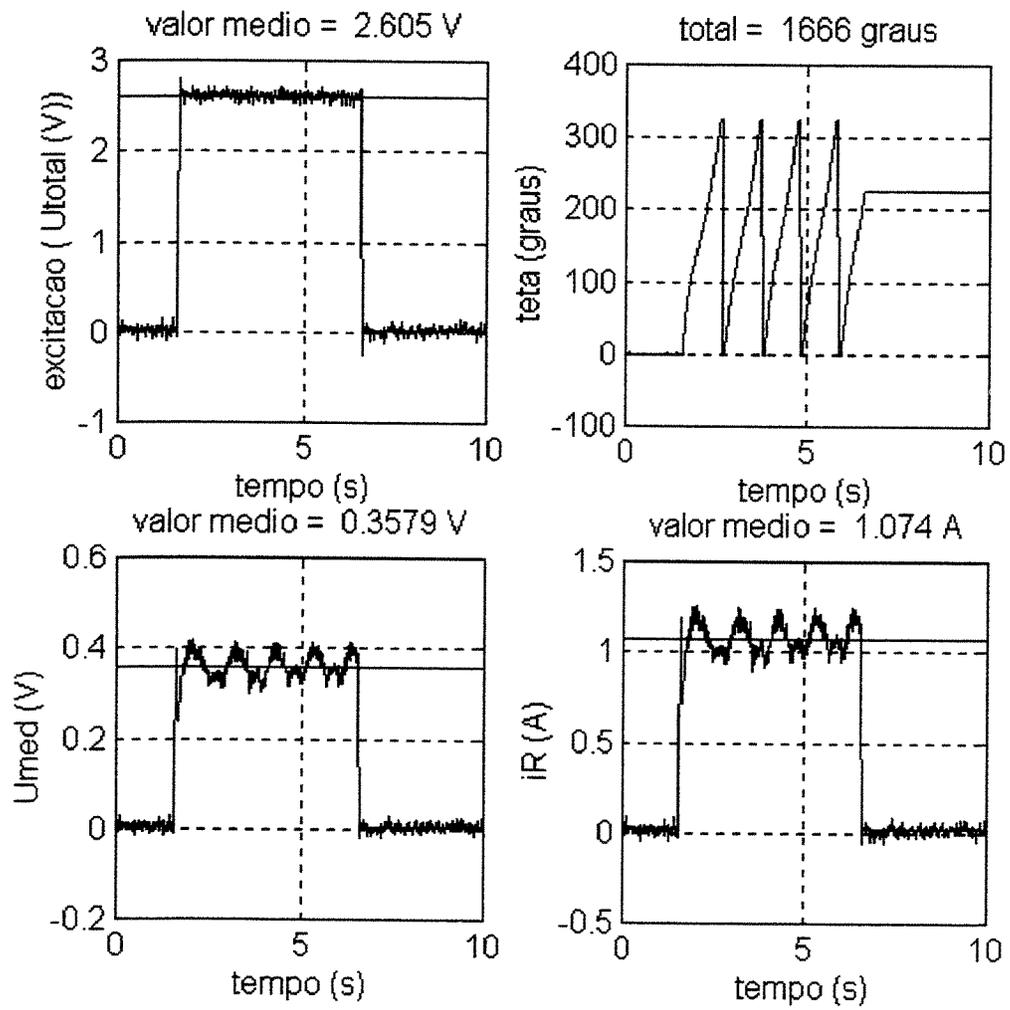


Figura 9.4 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : II

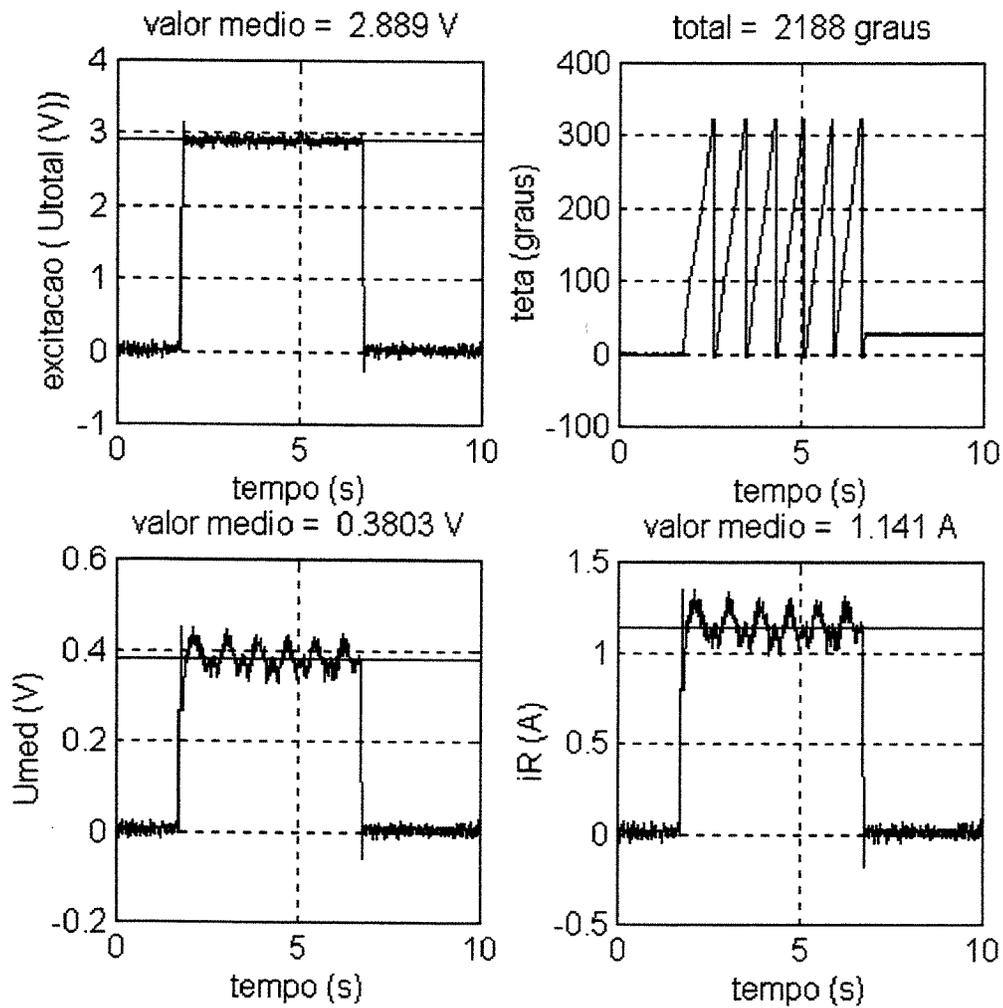


Figura 9.5 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : III

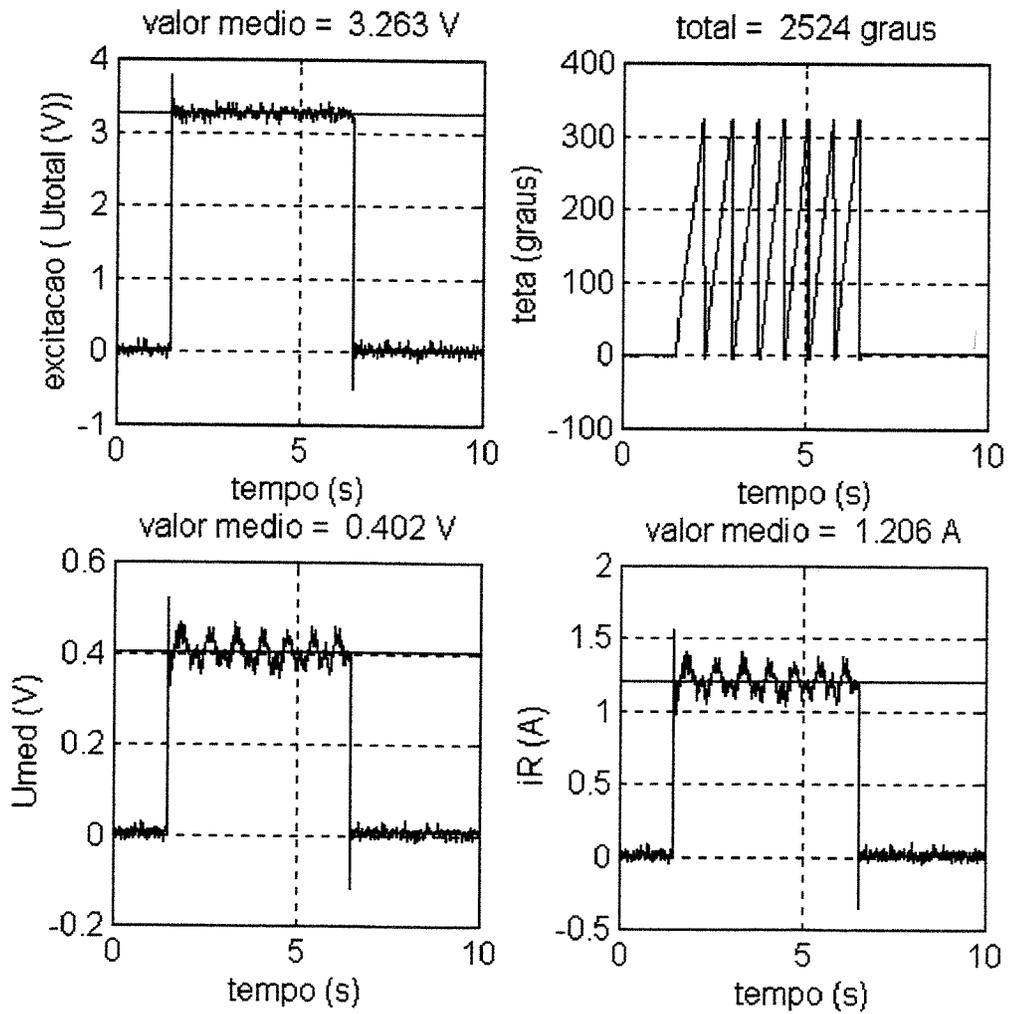


Figura 9.6 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : IV

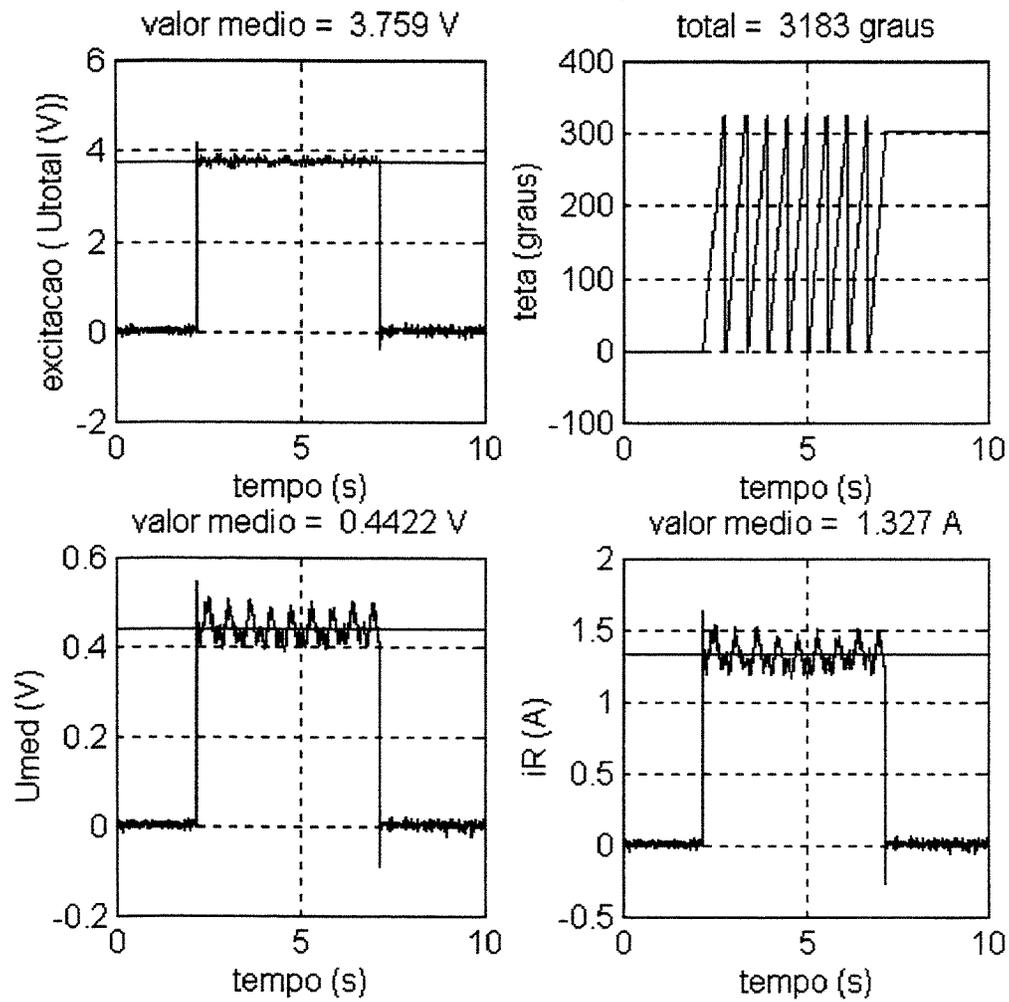


Figura 9.7 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : V

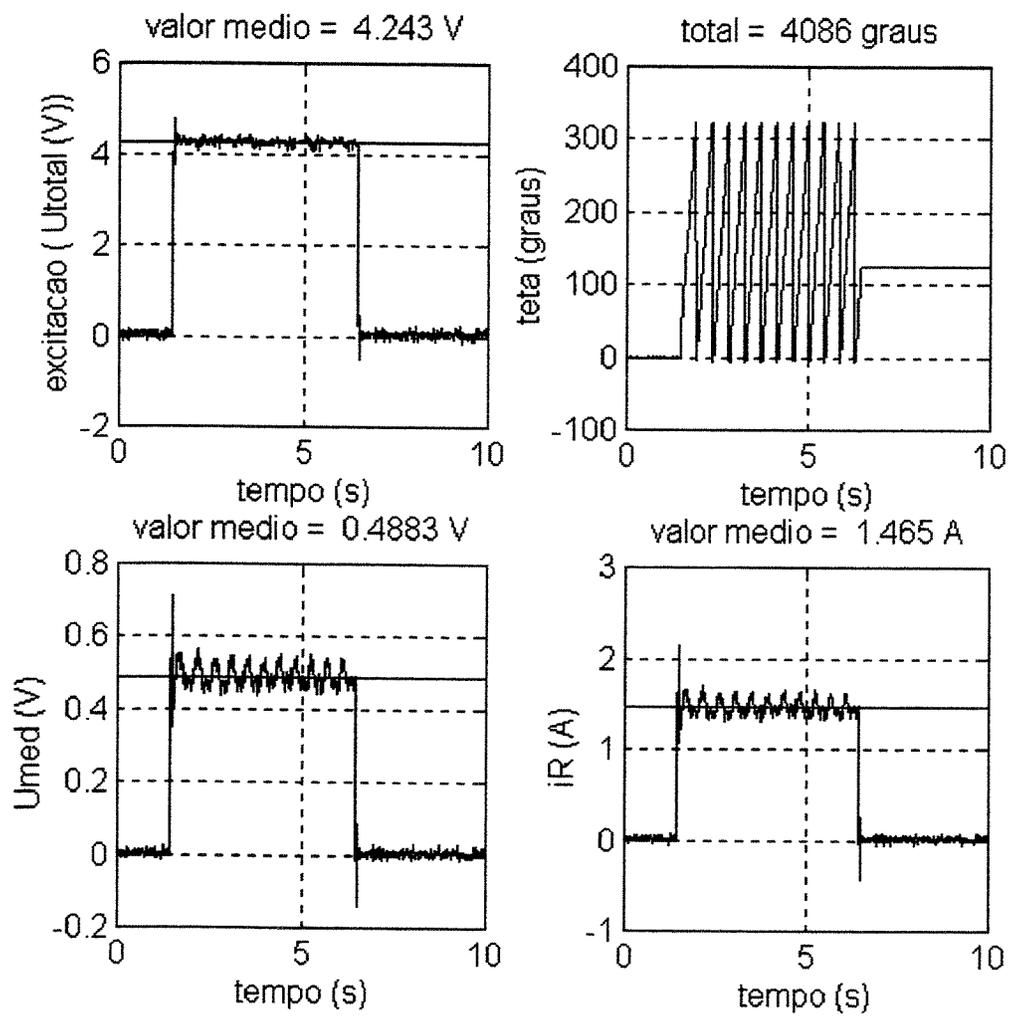


Figura 9.8 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : VI

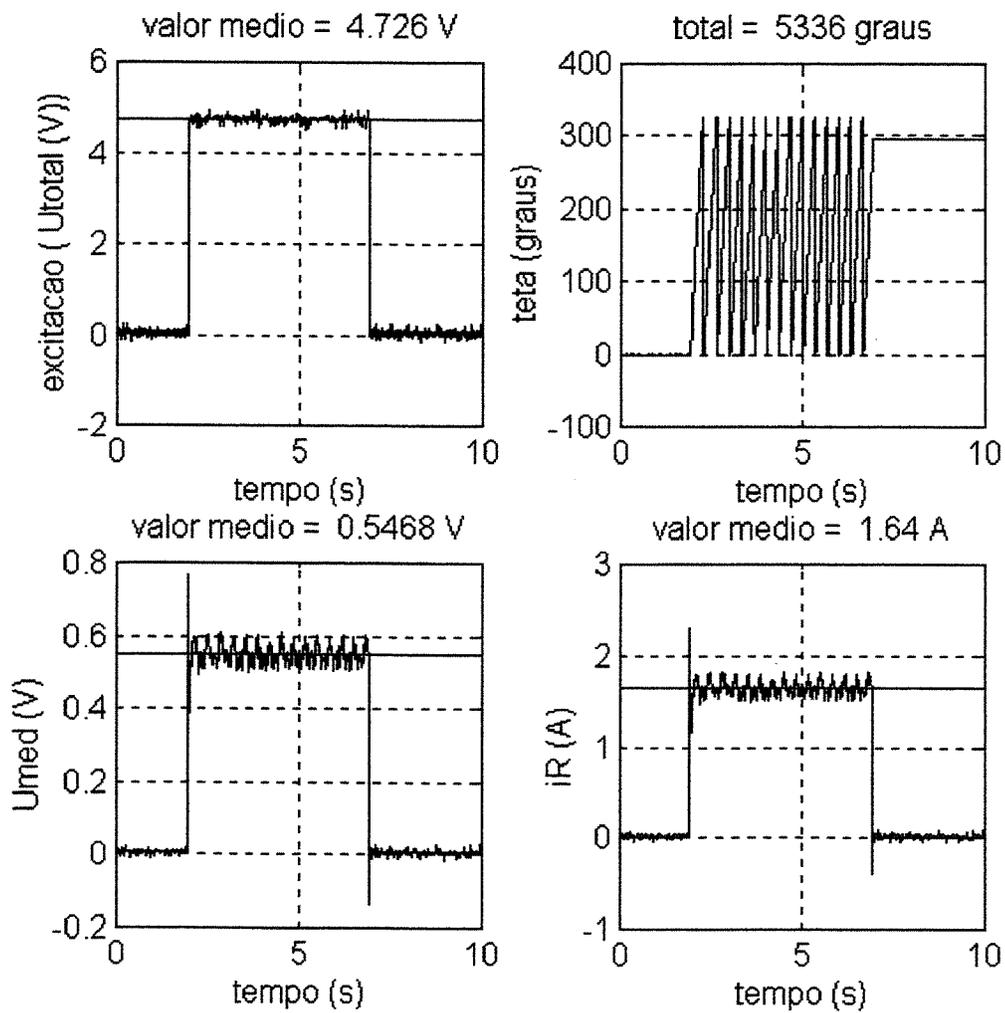


Figura 9.9 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : VII

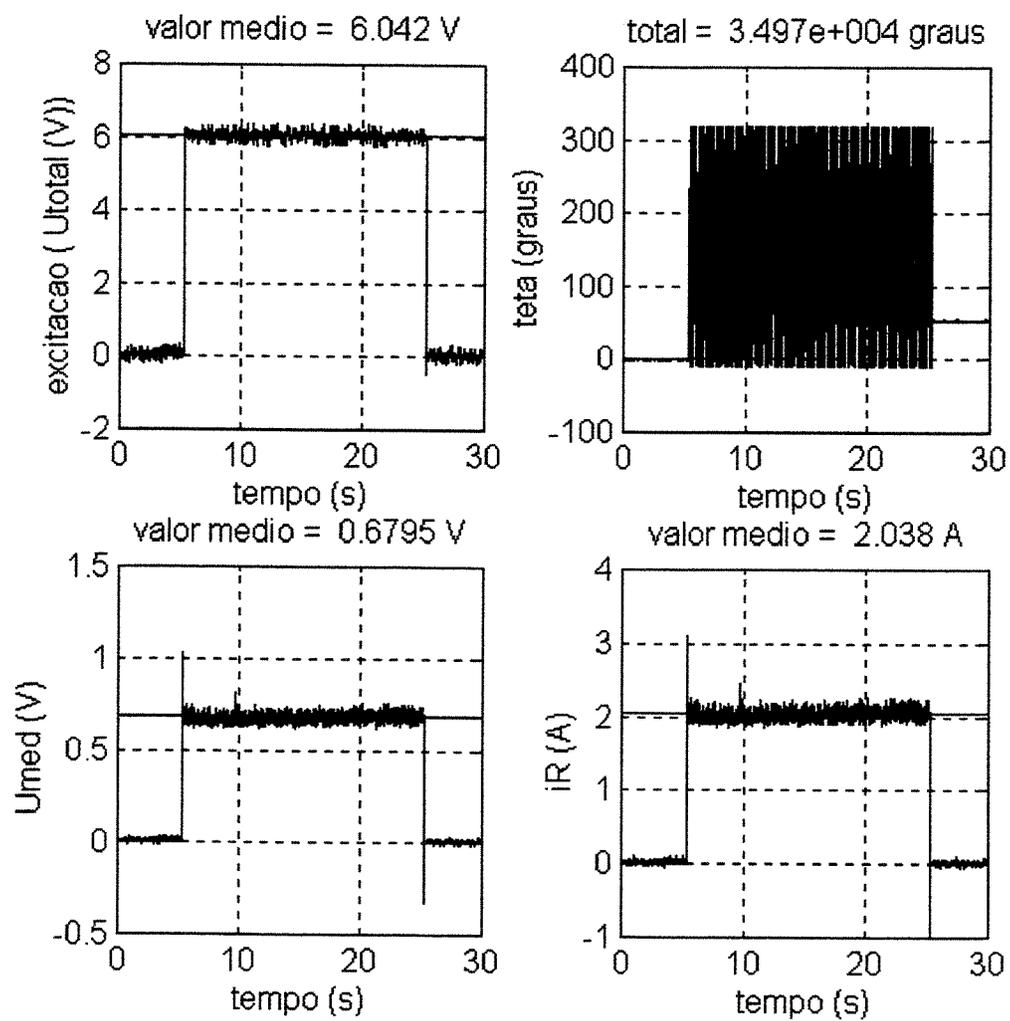


Figura 9.10 - Dados experimentais para a identificação do motor de corrente contínua : VIII

tempo de excitação (s)	amplitude média da excitação: U_{total} (V) (*)	deslocamento angular total : teta (graus)	tensão elétrica média através do R_{eq} : U_{med} (V)
5	2.225	1183	0.3299
5	2.605	1666	0.3579
5	2.889	2188	0.3803
5	3.263	2524	0.4020
5	3.759	3183	0.4422
5	4.243	4086	0.4883
5	4.726	5336	0.5468
20	6.042	34970	0.6795

Tabela 9.1 - Valores experimentais medidos

(*) : ver Tabela 9.3.

Com os dados apresentados na Tabela 9.1, pode-se determinar a velocidade angular aproximada do eixo do motor, a corrente elétrica média através do resistor equivalente (e, conseqüentemente através do motor) e a tensão elétrica média aplicada aos terminais do motor (U_{motor}). Estes dados serão apresentados na Tabela 9.2.

<p>velocidade angular do eixo do motor</p> $\dot{\theta} = \frac{\text{desloc. total}}{\text{tempo do desloc.}}$ <p>(rad / s)</p>	<p>corrente elétrica média através do resistor equivalente :</p> $i_R = \frac{U_{med}}{R_{eq}}$ <p>(A)</p>	<p>tensão elétrica média através do motor :</p> $U_{motor} = U_{total} - U_{med}$ <p>(V)</p>
4.1294	0.9898	1.8947
5.8144	1.0740	2.2471
7.6365	1.1410	2.5084
8.8104	1.2060	2.8610
11.1097	1.3270	3.3169
14.2611	1.4650	3.7551
18.6244	1.6400	4.1797
30.5206	2.0380	5.3623

Tabela 9.2 - Valores experimentais *calculados*

amplitude original do sinal de excitação (V)	numero de traços no <i>dial</i> do amplificador	ganho do amplificador (**)
0.9672	12	2.3000
0.9648	13	2.7000
0.9629	14	3.0000
0.9597	15	3.4000
0.9557	16	3.9333 (***)
0.9500	17	4.4667 (***)
0.9453	18	5.0000
0.9343	20	6.4667 (***)

Tabela 9.3 - Ganhos do amplificador

(**): estes valores serão alterados posteriormente para o ajuste do modelo matemático

(***): valores interpolados ; os demais valores da segunda coluna foram observados experimentalmente

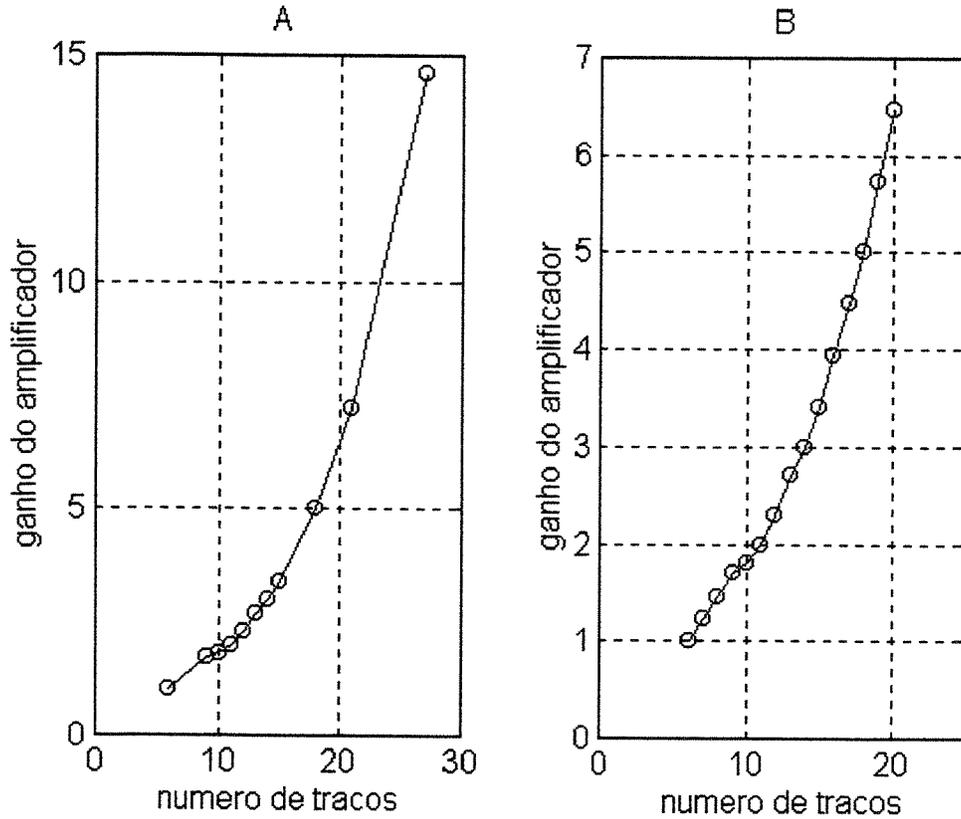


Figura 9.11 - Curvas do amplificador (do sinal de excitação) :
 A - valores observados ; B - valores observados e valores interpolados
 (na faixa de interesse)

9.5 - Obtenção dos parâmetros do motor

Para a identificação dos parâmetros do motor, oito medições foram efetuadas e os resultados dessas medições estão expostos nas Figuras 9.3 a 9.10 e Tabelas 9.1 a 9.3. Seja a primeira das equações 9.2, reproduzida a seguir :

$$R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (9.3)$$

Utilizando a Tabela 9.2, pode-se escrever o seguinte sistema de equações algébricas (onde $N_g = 1$) :

$$\begin{aligned}
0.9898 R_a + 4.1294 K_b &= 1.8947 \\
1.0740 R_a + 5.8144 K_b &= 2.2471 \\
1.1410 R_a + 7.6365 K_b &= 2.5084 \\
1.2060 R_a + 8.8104 K_b &= 2.8610 \\
1.3270 R_a + 11.1097 K_b &= 3.3169 \\
1.4650 R_a + 14.2611 K_b &= 3.7551 \\
1.6400 R_a + 18.6244 K_b &= 4.1797 \\
2.0380 R_a + 30.5206 K_b &= 5.3623
\end{aligned} \tag{9.4}$$

O sistema de equações algébricas 9.4 pode ser reescrito, em forma matricial, de acordo com :

$$A x = b \tag{9.5}$$

aonde :

$$A = \begin{bmatrix} 0.9898 & 4.1294 \\ 1.0740 & 5.8144 \\ 1.1410 & 7.6365 \\ 1.2060 & 8.8104 \\ 1.3270 & 11.1097 \\ 1.4650 & 14.2611 \\ 1.6400 & 18.6244 \\ 2.0380 & 30.5206 \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

$$x = \begin{Bmatrix} R_a \\ K_b \end{Bmatrix} \tag{9.7}$$

$$b = \begin{Bmatrix} 1.8947 \\ 2.2471 \\ 2.5084 \\ 2.8610 \\ 3.3169 \\ 3.7551 \\ 4.1797 \\ 5.3623 \end{Bmatrix} \tag{9.8}$$

O sistema de equações (9.5) pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados. Desta forma, obtém-se :

$$[A]^T [A] x = [A]^T b$$

ou, fazendo $B = [A]^T [A]$ e $C = [A]^T b$:

$$B x = C$$

(9.9)

Resolvendo o sistema 2X2 descrito em (9.9), conclui-se que :

$$R_a = 1.916700 \Omega$$

$$K_b = 0.052579 \frac{Vs}{rad}$$

De acordo com [Kuo, 1995], apesar de funcionalmente a constante de torque do motor, K_t , e a constante de força contra-eletromotriz, K_b , serem dois parâmetros distintos, para um dado motor, seus valores são intimamente relacionados e, portanto, pode-se escrever que :

$$K_t = K_b = 0.052579 \frac{Nm}{A}$$

Desta forma, resta determinar o coeficiente associado ao atrito viscoso, C_m .

Seja a segunda das equações (9.2), reproduzida a seguir :

$$(C_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a = 0$$

(9.10)

Fazendo $N_g = 1$, (9.10) torna-se :

$$C_m \dot{\theta} - K_t i_a = 0$$

(9.11)

Pode-se observar que única incógnita em 9.11 é o coeficiente C_m . Resolvendo (9.11) resulta :

$$C_m = 0.004638 \frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$$

Os dados experimentais $i_a (= i_R)$ e $\dot{\theta}$ são plotados na Figura 9.12 (aonde os valores de i_R e $\dot{\theta}$ constam na Tabela 9.2) contra a equação 9.11, considerando os valores encontrados para C_m e K_t .

Prolongando a curva experimental (curva vermelha na Figura 9.12) em direção ao eixo das ordenadas, observa-se que a mesma não passará pela origem do sistema de coordenadas, o ponto (0,0), mas cortará o eixo das ordenadas em um determinado valor (de i_a).

A conclusão que se pode extrair desta observação experimental é que o motor necessita de uma determinada corrente elétrica mínima (ou, em outras palavras, um torque mínimo desenvolvido pelo motor) antes que possa iniciar o movimento de seu eixo. Esse valor mínimo representa a quantidade necessária e suficiente para sobrepujar o atrito das partes internas do motor.

De outra forma, quando a velocidade angular do eixo do motor é nula, não necessariamente a corrente elétrica através do mesmo motor também o será. Isso contradiz a expressão (9.11).

Portanto, o modelo proposto em (9.11) para a relação entre a corrente elétrica e a velocidade angular do motor de corrente contínua e o coeficiente de atrito viscoso do mesmo não condiz com a realidade (basta observar a curva preta na Figura 9.12).

Um novo modelo para o atrito interno do motor, C_m , ou, de outra forma, uma nova relação entre a corrente elétrica do motor, i_a , e sua velocidade angular, $\dot{\theta}$, deve ser buscada a fim de que se possa explicar satisfatoriamente os dados experimentais.

9.6 - O novo modelo para o atrito interno do motor

O primeiro movimento no sentido de se alterar a relação (9.11) em busca de um melhor modelo matemático para o motor de corrente contínua será, utilizando a mesma relação linear entre i_a e $\dot{\theta}$, fazer com que a curva teórica não passe pela origem do sistema de coordenadas adotado. Assim, o valor mínimo exigido para a corrente elétrica (ou o torque desenvolvido pelo motor) vencer os atritos internos do motor será considerado no novo modelo.

Interpolando os valores experimentais através de uma equação de ordem 1 (reta não passando pela origem), o modelo matemático 9.11 é substituído pelo modelo matemático 9.12, a seguir :

$$C_1 + C_2 \dot{\theta} - K_t i_a = 0 \quad (9.12)$$

onde :

$$C_1 = 0.044936 \text{ Nm}$$

$$C_2 = 0.002107 \frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$$

Os valores teóricos obtidos através do modelo 9.12 é plotado contra os mesmos valores experimentais da Tabela 9.2 na Figura 9.13.

O novo modelo matemático (9.12) mostra ser muito mais acurado que o modelo anteriormente proposto (9.11).

Contudo, devido ao aspecto ligeiramente não linear da curva experimental, um modelo de ordem 2 foi desenvolvido.

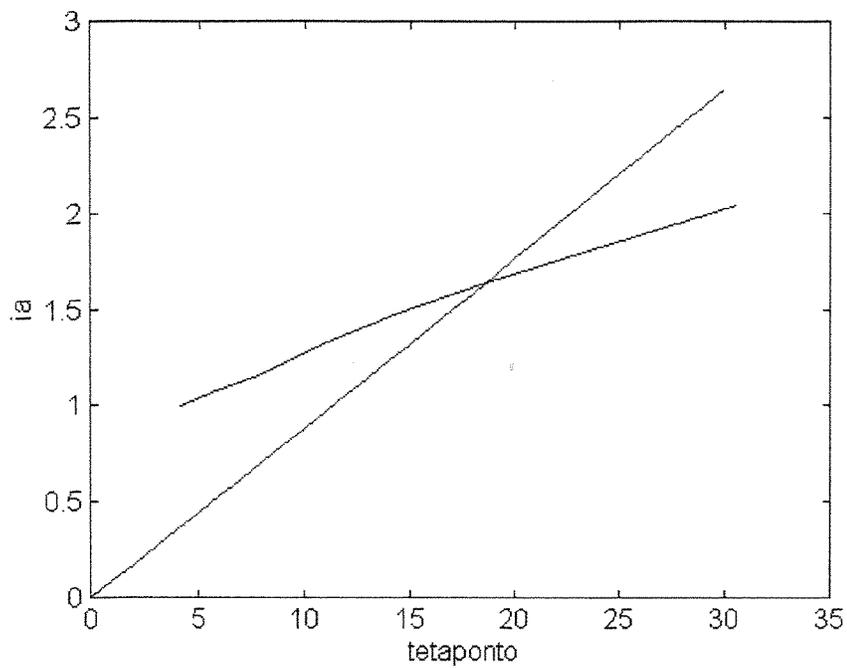


Figura 9.12 - Valores experimentais (curva vermelha) contra valores teóricos do modelo descrito pela equação 9.11 (curva preta)

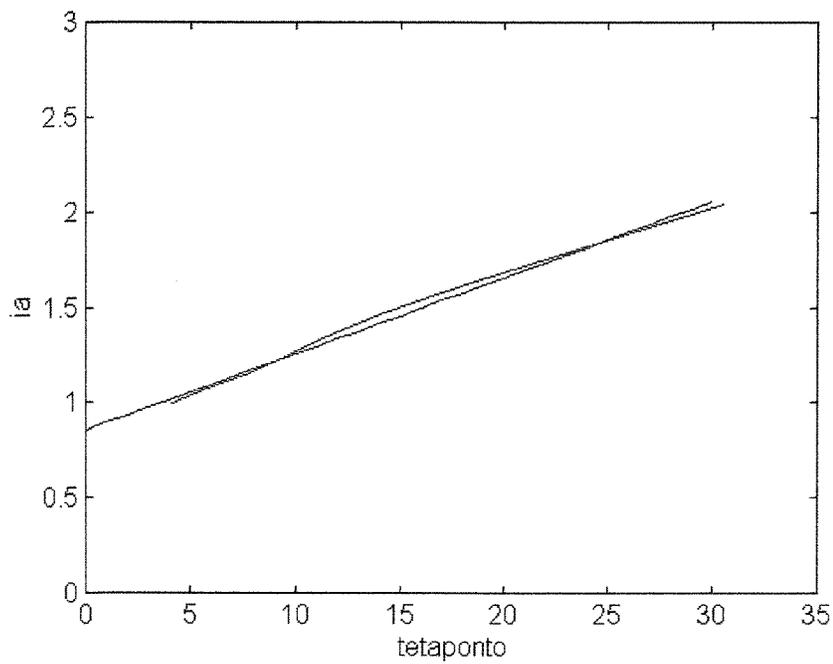


Figura 9.13 - Valores experimentais (curva vermelha) contra valores teóricos do modelo descrito pela equação 9.12 (curva preta)

Interpolando os mesmos valores experimentais apresentados na Tabela 9.2 através de uma equação de ordem 2 (parábola não passando pela origem), o modelo 9.11 (e, conseqüentemente, o modelo 9.12) é substituído pelo novo modelo matemático 9.13, a seguir :

$$C_1 + C_2 \dot{\theta} + C_3 \dot{\theta}^2 - K_t i_a = 0 \quad (9.13)$$

onde :

$$C_1 = 0.040058 \text{ Nm}$$

$$C_2 = 0.002902 \frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$$

$$C_3 = -0.000023 \frac{\text{Nms}^2}{\text{rad}^2}$$

Os valores teóricos obtidos através do modelo (9.13) é plotado contra os valores experimentais na Figura 9.14.

Observa-se na Figura 9.14 que o modelo proposto na equação (9.13) é o melhor dentre todos os apresentados (a saber, as expressões (9.11) e (9.12)) para a representação dos dados experimentais.

A Tabela 9.4 mostra o erro obtido em cada um dos modelos matemáticos apresentados quando se substitui os valores de i_a e $\dot{\theta}$ obtidos experimentalmente em cada um destes e utiliza-se os valores obtidos através das interpolações de curvas para os parâmetros C_1 , C_2 e C_3 e da solução da equação (9.11) para C_m . Espera-se que, para um bom modelo matemático, este erro seja o mínimo possível.

Na mesma Tabela 9.4, o conjunto denominado Erro1 está associado ao modelo matemático (9.11), o conjunto denominado Erro2 está associado ao modelo matemático (9.12) e o conjunto denominado Erro3 está associado ao modelo matemático (9.13).

A terceira coluna da Tabela 9.4 (Erro3) apresenta, no geral, os menores valores dentre todos os apresentados.

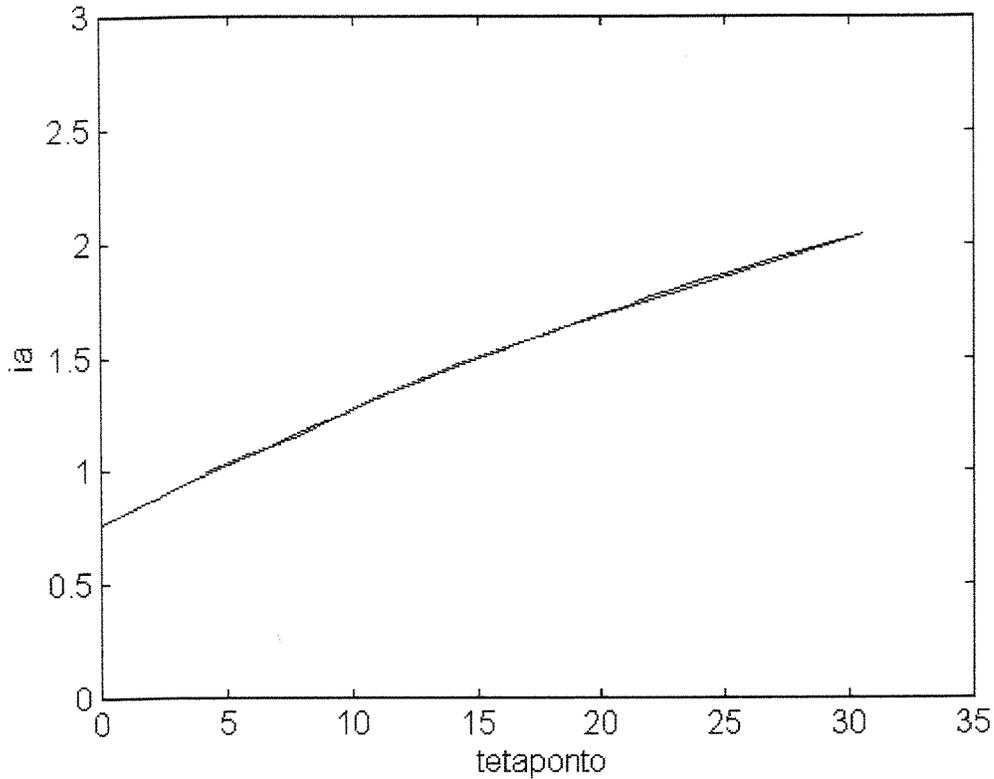


Figura 9.14 - Valores experimentais (curva vermelha) contra valores teóricos do modelo descrito pela equação 9.13 (curva preta)

Erro1	Erro2	Erro3
-0.03303973970152	0.00160043779391	-0.00039539340034
-0.02963773666595	0.00071988206503	-0.00031745089223
-0.02468871279389	0.00103789684231	0.00088951264479
-0.02265344664074	0.00008960469660	0.00043273173113
-0.01833350989259	-0.00143430862475	-0.00031284358071
-0.01094223179132	-0.00205255912306	-0.00026089788338
0.00014010205267	-0.00205989213777	-0.00009732793727
0.03453405171298	0.00209893848773	0.00006166931802

Tabela 9.4 - Erro (mínimos quadrados) em cada modelo teórico apresentado para a relação entre a corrente elétrica e a velocidade angular do motor.

Apesar dos erros apresentados nas colunas 1 e 2 da Tabela 9.4 serem aparentemente pequenos, as curvas construídas utilizando-se os valores obtidos por mínimos quadrados ou interpolação, como pode ser verificado nas Figuras 9.12 e 9.13 (principalmente na Figura 9.12) não se ajustam aos dados experimentais, pois estes modelos não são fisicamente representativos.

9.7 - O novo modelo matemático para o motor de corrente contínua

Tendo-se em vista do que foi apresentado no item anterior, 9.6, o novo modelo matemático para o motor de corrente contínua passa a ser representado através do sistema de equações diferenciais ordinárias 9.14 apresentado a seguir.

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U$$

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (C_1 N_g) \dot{\theta} + (C_2 N_g^2) \dot{\theta} + (C_3 N_g^3) \dot{\theta}^2 - (N_g K_t) i_a = 0$$

(9.14)

9.8 - Resultados teóricos X resultados experimentais

A fim de que o modelo matemático apresentado através das equações (9.14) (equações completas do motor de corrente contínua) possa representar com boa precisão o sistema físico real, a curva de ganho do amplificador deve de ser ligeiramente corrigida.

Os valores anteriores e os novos valores para os ganhos do amplificador são mostrados na Tabela 9.5. Cabe lembrar que o *dial* do amplificador não apresentavam valores, sendo que os mesmos tiveram que ser levantados enviando-se um sinal de tensão, por exemplo, de 1 V , e observando-se o respectivo ganho na saída do amplificador.

A curva dos ganhos iniciais contra a curva do ganho corrigido é mostrada na Figura 9.15.

Tanto na Tabela 9.5 quanto na Figura 9.15 pode-se observar que os valores corrigidos estão muito próximos dos valores inicialmente considerados (os valores inicialmente considerados envolvem erros de leitura e de precisão de valores setados, por exemplo, na entrada do amplificador).

ganhos iniciais	ganhos corrigidos
2.30000	2.51230
2.70000	2.80929
3.00000	3.11590
3.40000	3.32604
3.93333	3.72404
4.46667	4.25084
5.00000	4.93790
6.46667	6.63132

Tabela 9.5 - Ganhos corrigidos (amplificador)

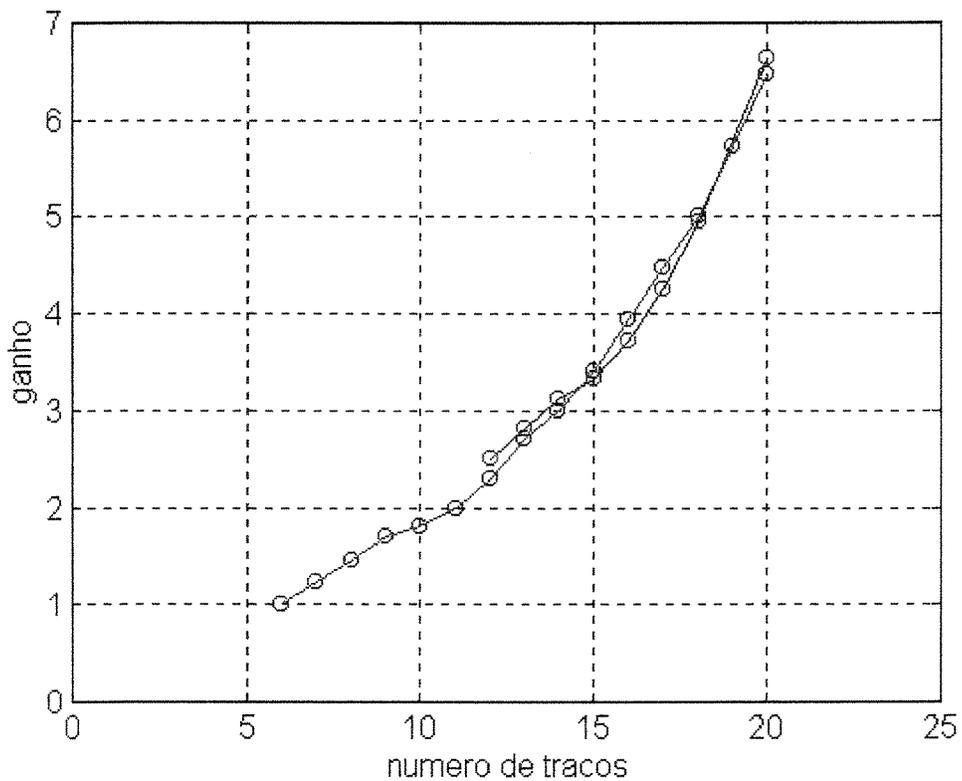


Figura 9.15 - Curva de ganho do amplificador :
valores iniciais (curva azul) X valores corrigidos (curva preta)

A seguir, na Tabela 9.6, apresentam-se os novos valores para os coeficientes C_i (do modelo adotado (9.13)), R_a , K_t e K_b . Observa-se também que os valores obtidos anteriormente praticamente não se alteram.

Nas Tabelas 9.7, 9.8 e 9.9 apresentam-se os valores teóricos e os valores experimentais para os vários parâmetros do sistema em análise, com a correção apresentada na Tabela 9.5.

O valor considerado para a inércia do rotor do motor, I_{motor} , é aquele apresentado no catálogo do mesmo motor utilizado nos experimentos. O valor de R_a obtido através da identificação experimental do motor e o valor de catálogo estão bem próximos, sendo o valor de catálogo igual a 1.9Ω . Os valores de K_t (e, conseqüentemente de K_b) obtidos através da identificação são aproximadamente a metade dos valores apresentados no catálogo ($K_t = 0.10450 \text{ Nm/A}$ e $K_b = 0.10504 \text{ Vs/rad}$). O catálogo não apresenta valor para o coeficiente C_m e nem para a indutância do motor, L_m . Os valores apresentados no catálogo não foram, portanto, levados em consideração. O valor de I_{shaft} foi determinado teoricamente através da geometria do eixo de conexão entre o motor e a estrutura flexível de rastreamento.

R_a (Ω)	1.914952
K_t (Nm/A)	0.052814
K_b (Vs/rad)	0.052814
C_1 (Nm)	0.040236
C_2 (Nms/rad)	0.002914
C_3 (Nms ² /rad ²)	-0.000023

Tabela 9.6 - Parâmetros identificados do motor de corrente contínua

Os valores apresentados na Tabela 9.6 serão utilizados no programa do integrador das equações (9.14) para gerar os dados teóricos apresentados nas Tabelas 9.7, 9.8 e 9.9.

deslocamento angular : θ (experimental) (graus)	deslocamento angular : θ (teórico) (graus)
1183	1185
1666	1667
2188	2187
2524	2524
3183	3184
4086	4087
5336	5334
34970	34940

Tabela 9.7 - Deslocamento angular do sistema *motor de corrente contínua* :
valores experimentais contra valores teóricos

velocidade angular : $\dot{\theta}$ (experimental) ver Tabela 8.2 (rad/s)	deslocamento angular : $\dot{\theta}$ (teórico) (rad/s)
4.1294	4.1356
5.8144	5.8170
7.6365	7.6336
8.8104	8.8079
11.1097	11.1121
14.2611	14.2666
18.6244	18.6240
30.5206	30.4968

Tabela 9.8 - Velocidade angular do sistema *motor de corrente contínua* : valores experimentais contra valores teóricos

corrente elétrica : i_a (experimental) valor médio (A)	corrente elétrica : i_a (teórico) (A)
0.9898	0.9826
1.0740	1.0681
1.1410	1.1576
1.2060	1.2140
1.3270	1.3212
1.4650	1.4604
1.6400	1.6384
2.0380	2.0395

Tabela 9.9 - Corrente elétrica do sistema *motor de corrente contínua* :
valores experimentais contra valores teóricos

Outro conjunto de dados experimentais foram obtidos do motor sem o resistor utilizado para a identificação dos parâmetros do mesmo a fim de confirmar o modelo matemático adotado. Estes resultados são plotados ao lado dos resultados teóricos nas figuras 9.16 a 9.25.

As tabelas 9.10 e 9.11 a seguir mostram os diferentes tempos de excitação utilizados e as diferentes correções necessárias na curva do amplificador, em cada caso, para que os valores experimentais e teóricos do deslocamento angular do eixo do motor, θ , para a mesma amplitude de excitação do pulso quadrado, sejam os mais próximos possíveis.

tempo de excitação (s)	número de traços no <i>dial</i> do amplificador	valor do ganho : inicial (leitura aproximada)	valor do ganho corrigido avaliado com o resistor (identificação)	valor do ganho corrigido avaliado sem o resistor
0.5	10	1.80000	ne	2.01000
	12	2.30000	ne	2.47500
	14	3.00000	ne	3.08000
	15	3.40000	ne	3.25000
5.0	10	1.80000	ne	1.78250
	12	2.30000	2.51230	2.39000
	13	2.70000	2.80929	ne
	14	3.00000	3.11590	ne
	15	3.40000	3.32604	ne
	16	3.93333	3.72404	ne
	17	4.46667	4.25084	ne
	18	5.00000	4.93790	ne
20.0	10	1.80000	ne	1.84000
	12	2.30000	ne	2.40500
	14	3.00000	ne	2.94000
	15	3.40000	ne	3.17000
	20	6.46667	6.63132	ne

Tabela 9.10 - Valores do ganho do amplificador corrigidos divididos por tempo de excitação (ne = não existe esta informação nos dados recolhidos)

número de traços no <i>dial</i> do amplificador	tempo de excitação (s)	Valor Do Ganho : inicial (leitura aproximada)	valor do ganho corrigido avaliado com o resistor (identificação)	valor do ganho corrigido avaliado sem o resistor
10	0.5	1.80000	ne	2.01000
	5.0	1.80000	ne	1.78250
	20.0	1.80000	ne	1.84000
12	0.5	2.30000	ne	2.47500
	5.0	2.30000	2.51230	2.39000
	20.0	2.30000	ne	2.40500
13	5.0	2.70000	2.80929	ne
14	0.5	3.00000	ne	3.08000
	5.0	3.00000	3.11590	ne
	20.0	3.00000	ne	2.94000
15	0.5	3.40000	ne	3.25000
	5.0	3.40000	3.32604	ne
	20.0	3.40000	ne	3.17000
16	5.0	3.93333	3.72404	ne
17	5.0	4.46667	4.25084	ne
18	5.0	5.00000	4.93790	ne
20	20.0	6.46667	6.63132	ne

Tabela 9.11 - Valores do ganho do amplificador corrigidos divididos por número de traços (ne = não existe esta informação nos dados recolhidos)

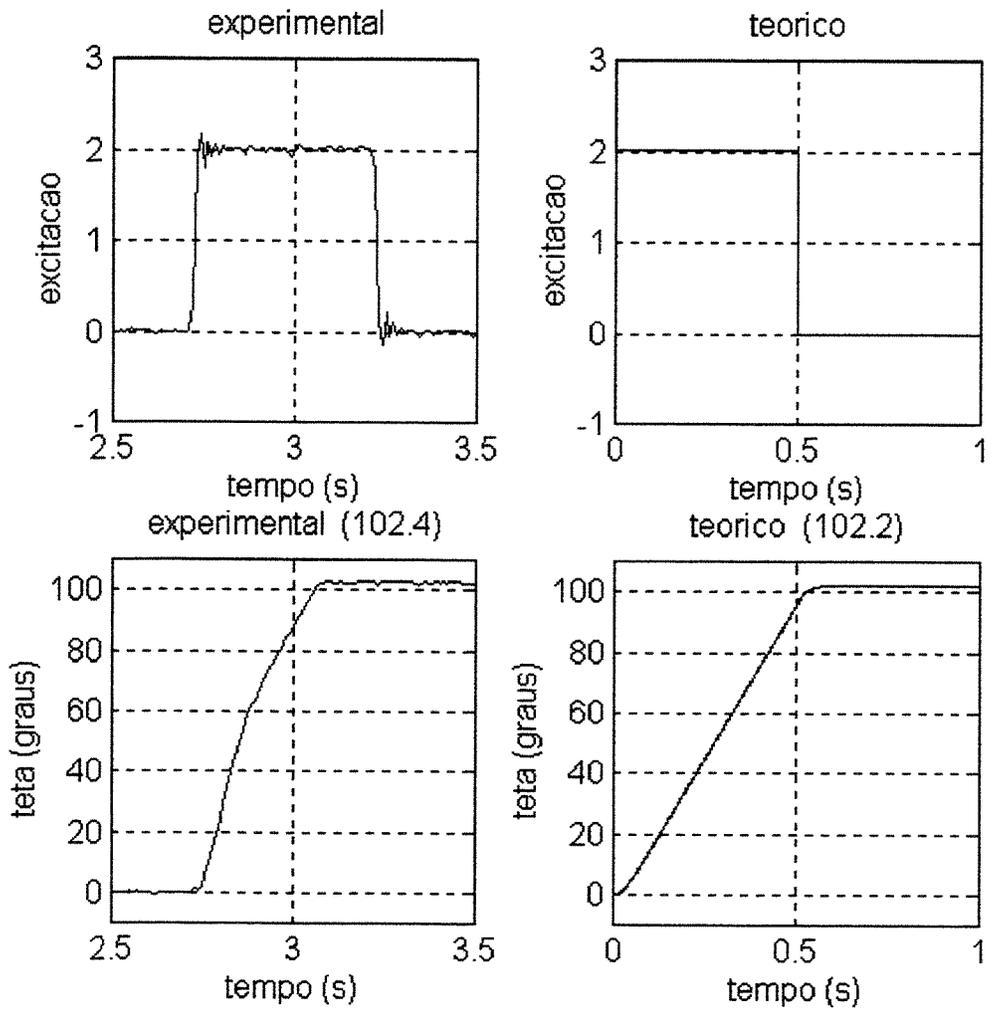


Figura 9.16 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : I

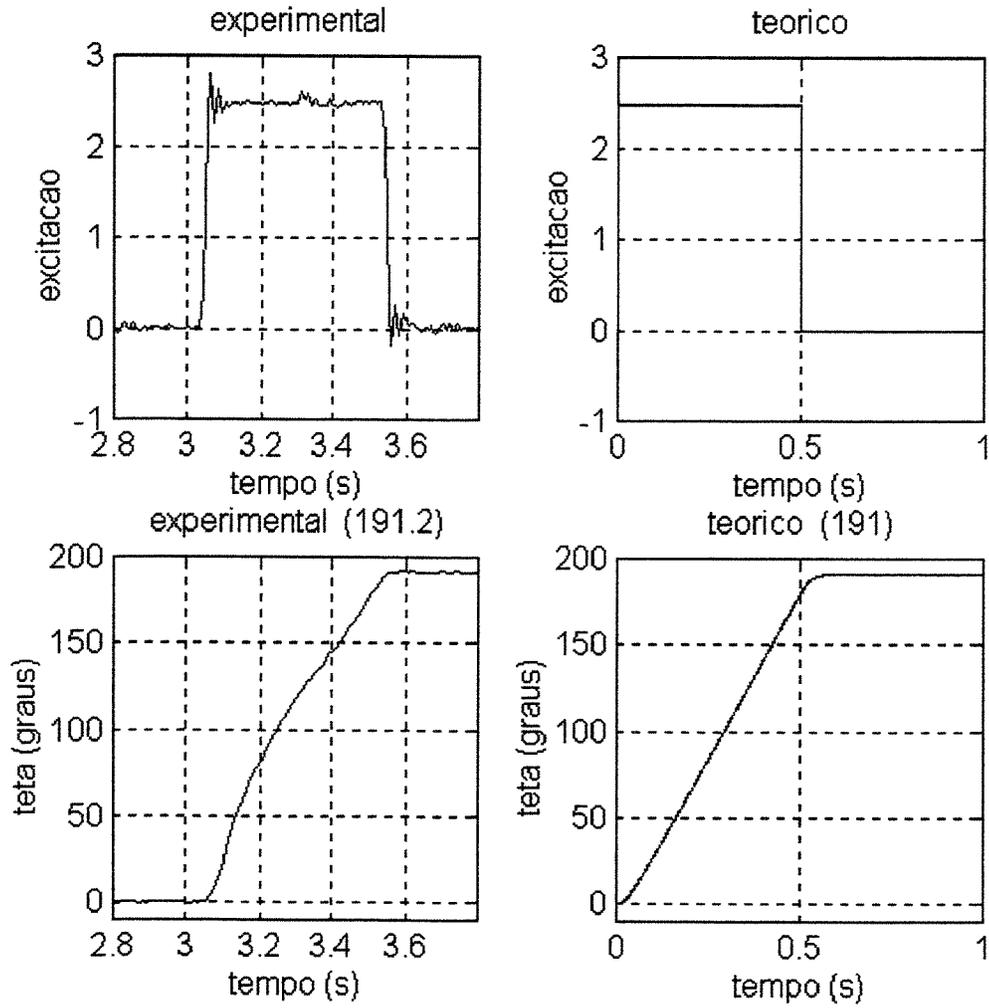


Figura 9.17 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : II

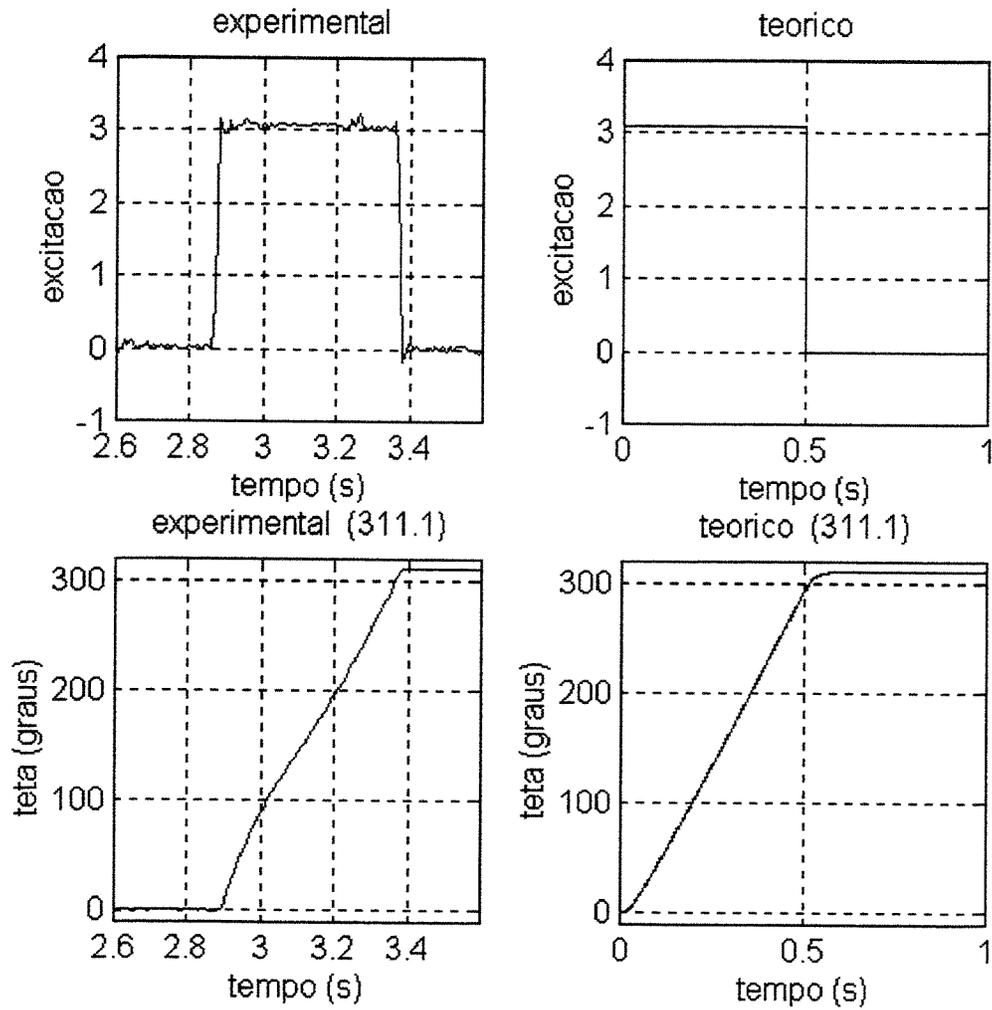


Figura 9.18 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : III

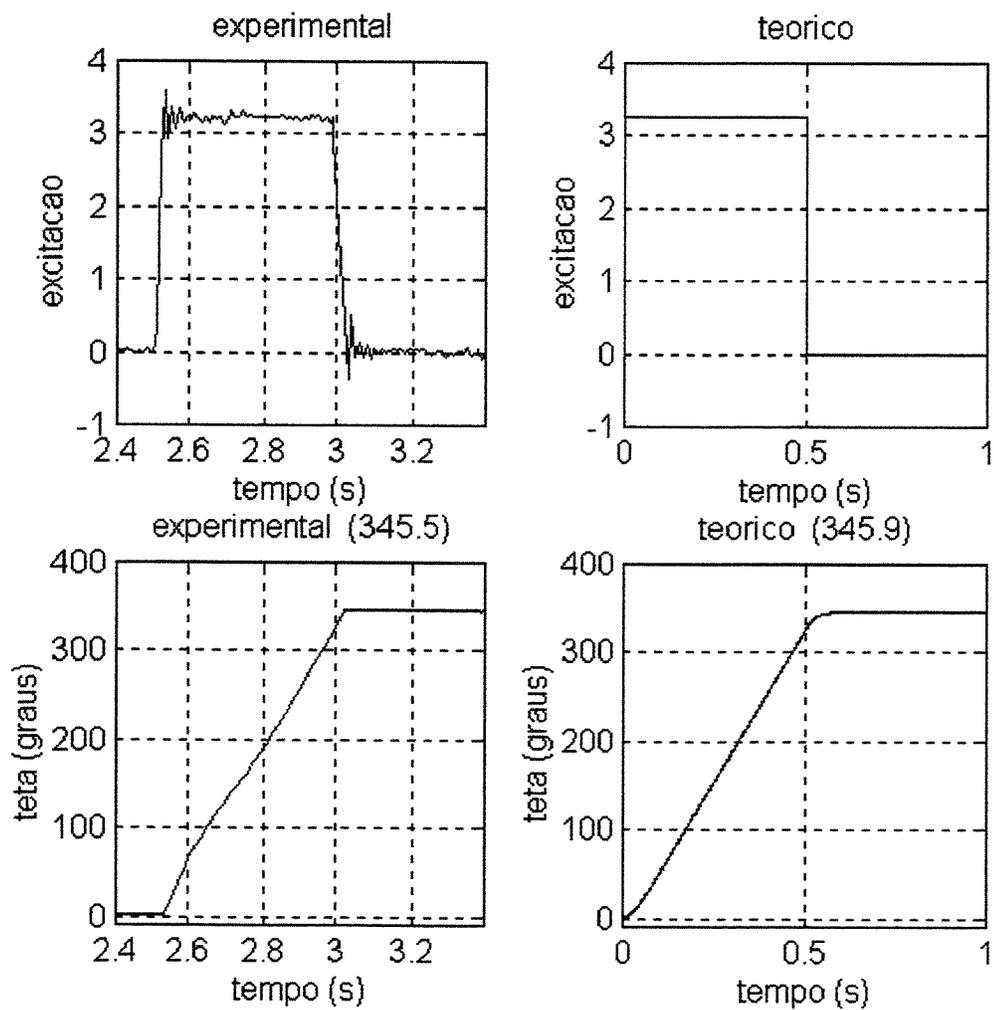


Figura 9.19 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : IV

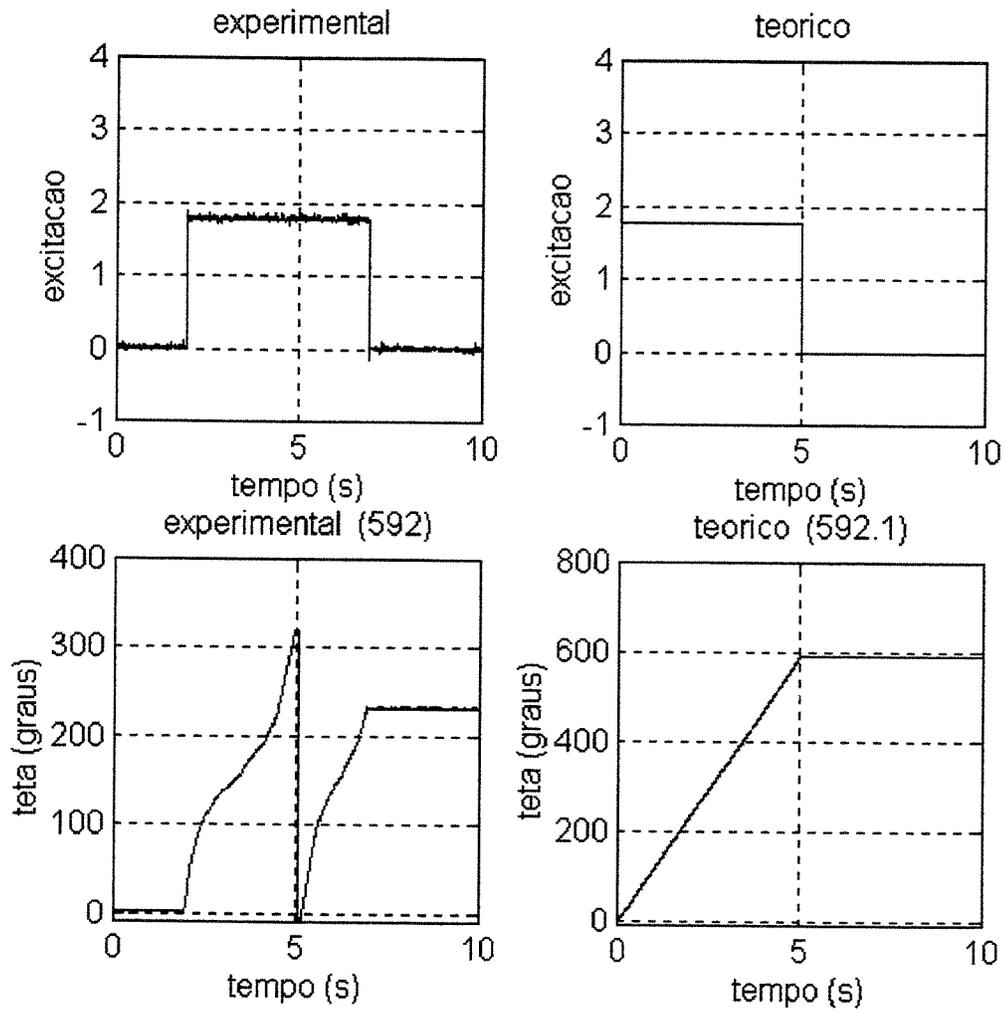


Figura 9.20 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : V

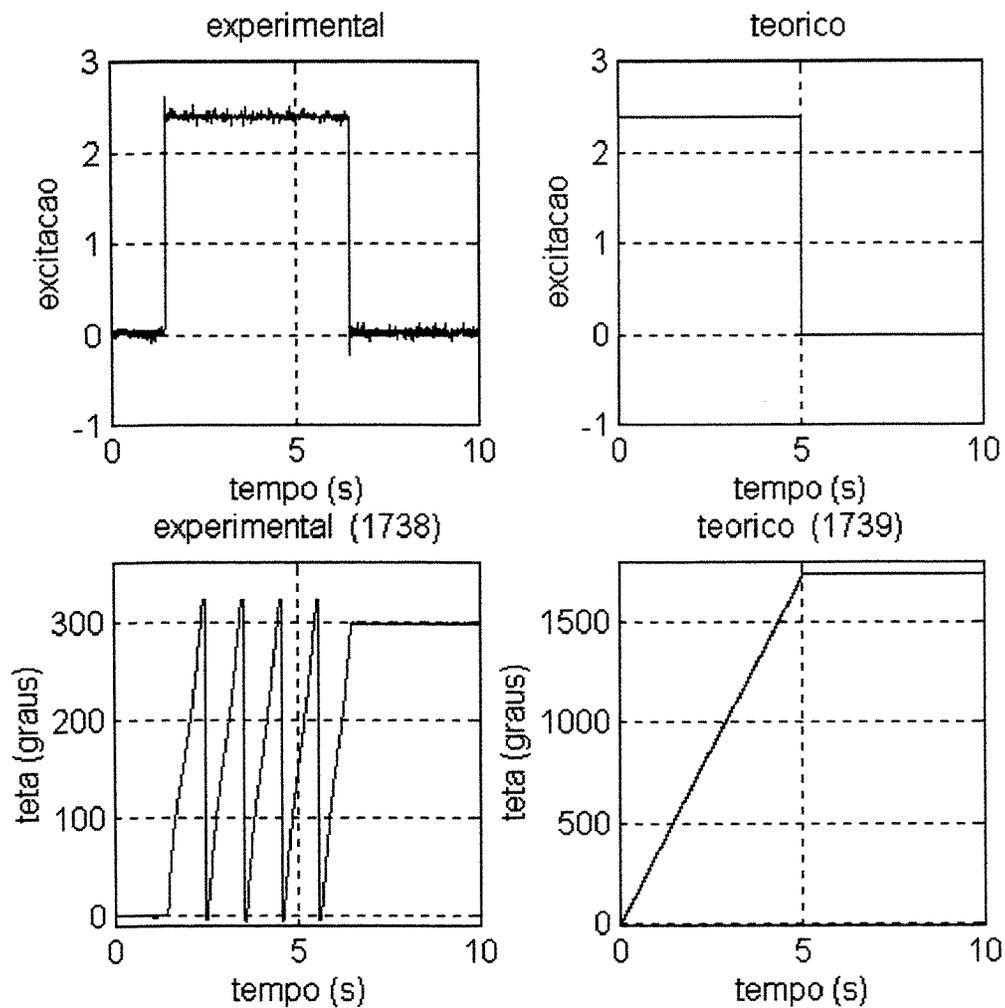


Figura 9.21 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : VI

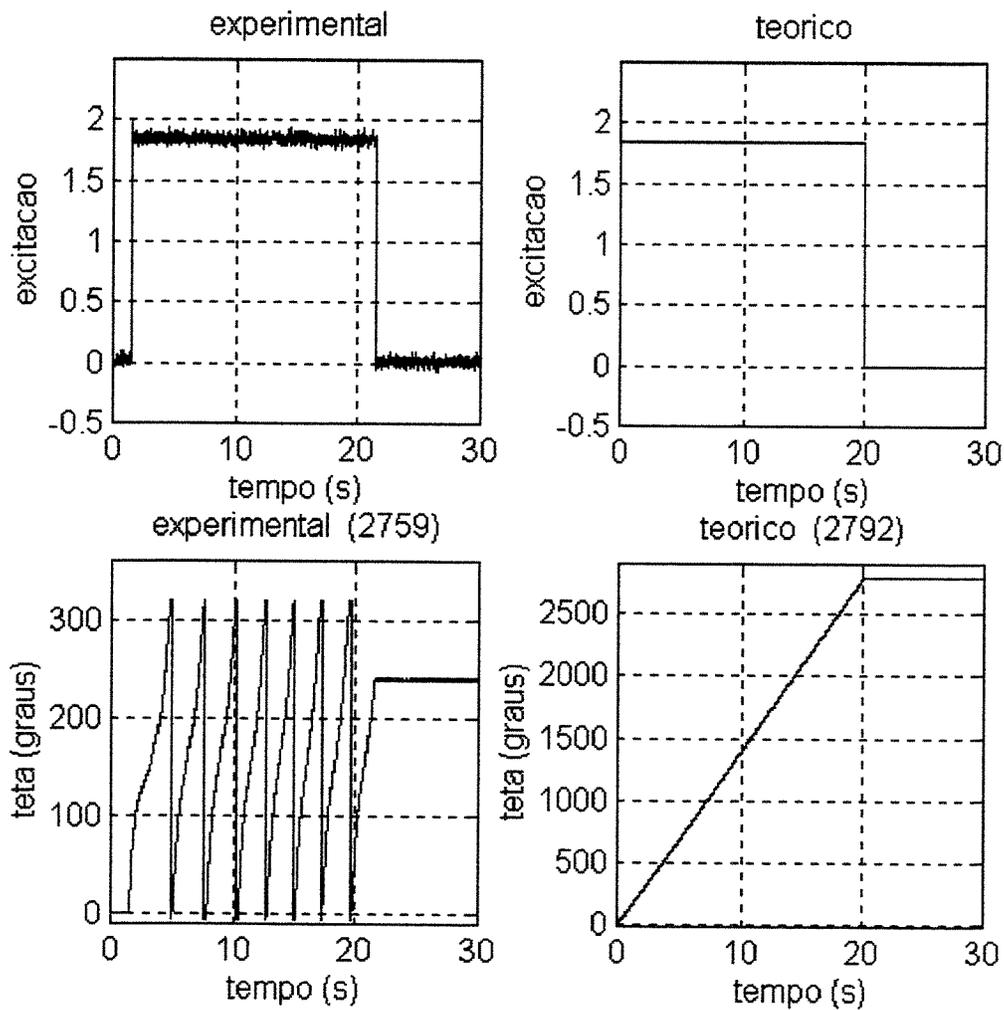


Figura 9.22 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : VII

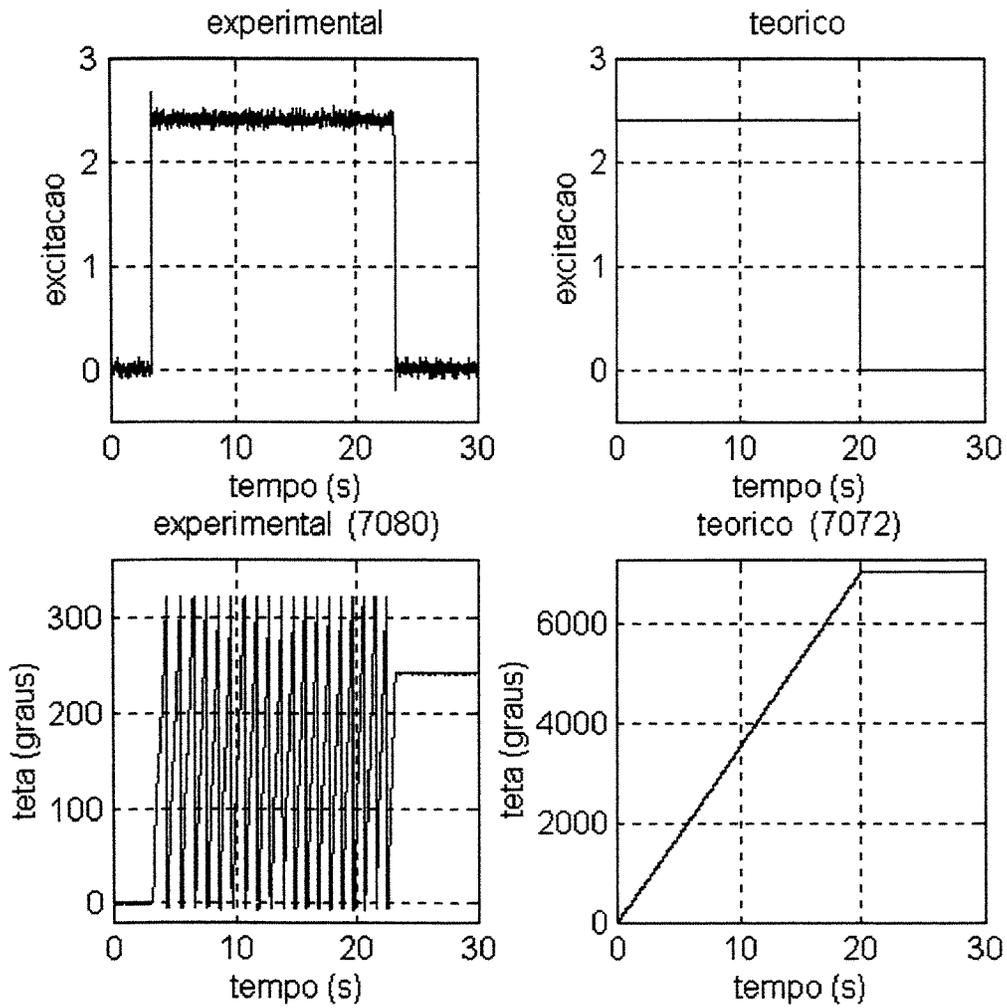


Figura 9.23 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : VIII

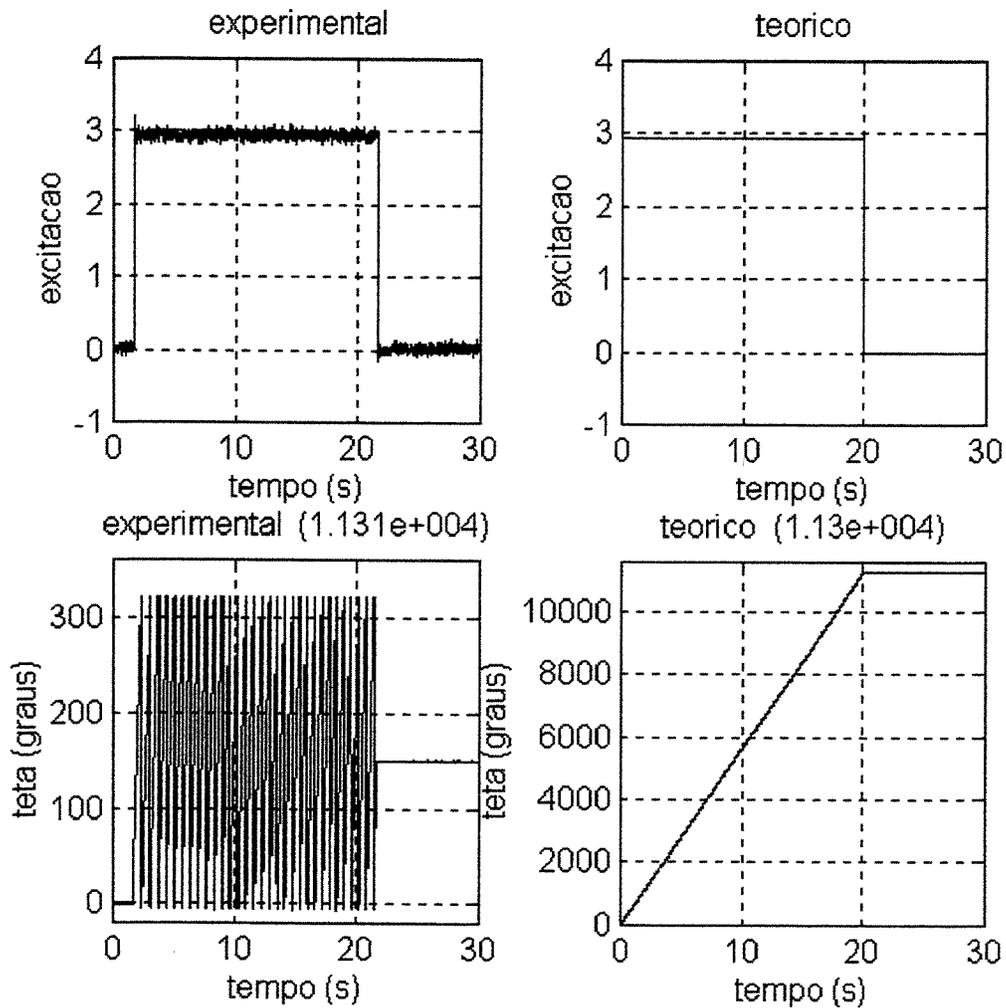


Figura 9.24 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : IX

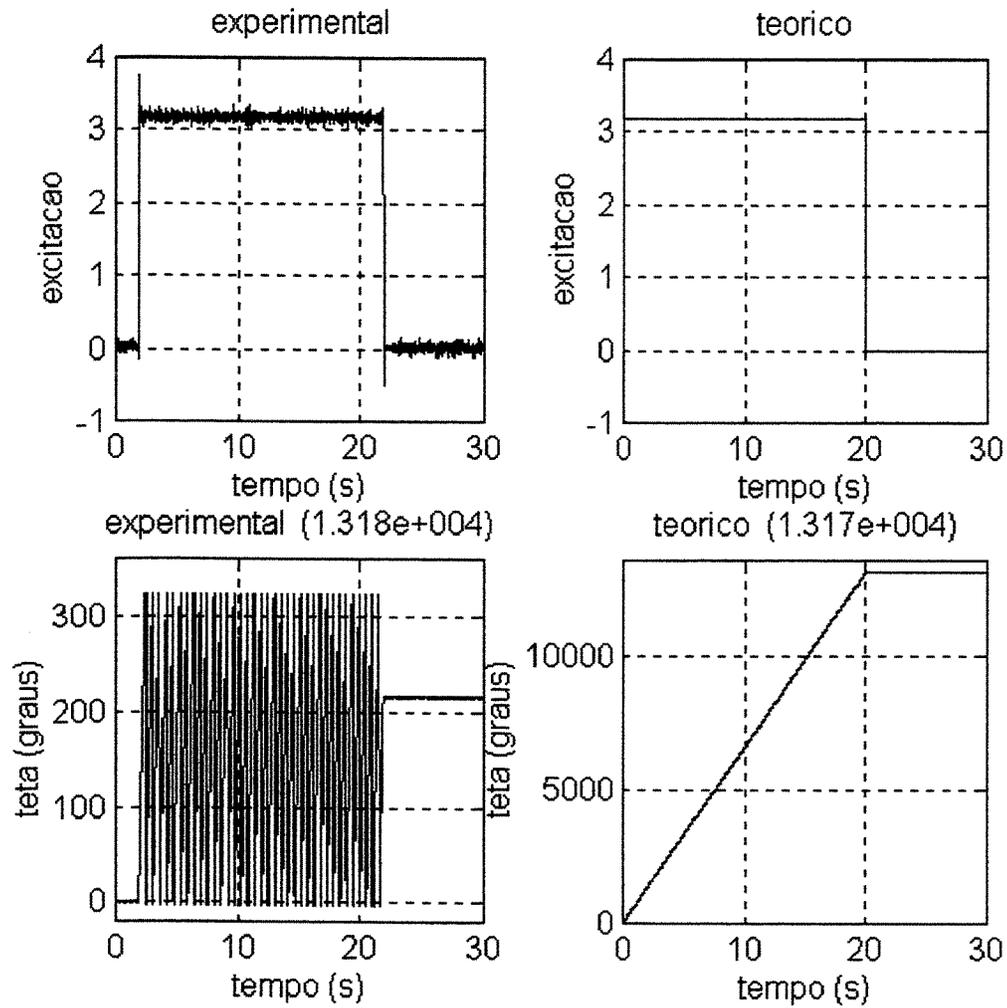


Figura 9.25 - Dados experimentais contra dados teóricos para confirmação do modelo matemático adotado para o motor de corrente contínua : X

9.9 - O potenciômetro

O potenciômetro é um transdutor eletromecânico que converte energia mecânica em energia elétrica. O sinal de entrada para este dispositivo dá-se na forma de um deslocamento mecânico, seja este linear ou rotacional. Quando uma determinada tensão elétrica é aplicada através dos terminais fixos do potenciômetro, a voltagem de saída, a qual é medida através dos terminais variáveis, é proporcional ao sinal de entrada (deslocamento mecânico) seja linearmente ou de acordo com alguma relação não linear.

Potenciômetros utilizados para medir movimentos rotativos são disponíveis comercialmente na forma em que podem ser utilizados para medir uma simples revolução ou na forma em que podem ser utilizados para a medição de múltiplas revoluções. Alguns potenciômetros possuem movimento limitado (medem uma ou poucas revoluções), enquanto outros possuem movimento rotacional ilimitado.

Um esquema geral do circuito elétrico que pode ser utilizado como uma representação do potenciômetro utilizado na parte experimental deste trabalho para a medição do deslocamento angular do eixo do motor (e, portanto, o movimento de rastreamento do sistema) pode ser verificado na Figura 9.26.

Uma volta completa pelo resistor equivale a um sinal de saída de 10V e 360°. A medição da voltagem de saída (proporcional ao deslocamento angular do eixo do motor) é feita através dos terminais variáveis.

A "zona morta" indicada na Figura 9.26, para o potenciômetro utilizado neste trabalho, equivale a aproximadamente 34°.

O deslocamento angular de saída (após a conversão de *volts* para *graus*), para mais de uma volta do potenciômetro, equivale a uma curva semelhante àquela mostrada, por exemplo, em um dos gráficos da Figura 9.20, reproduzido a seguir (Figura 9.27).

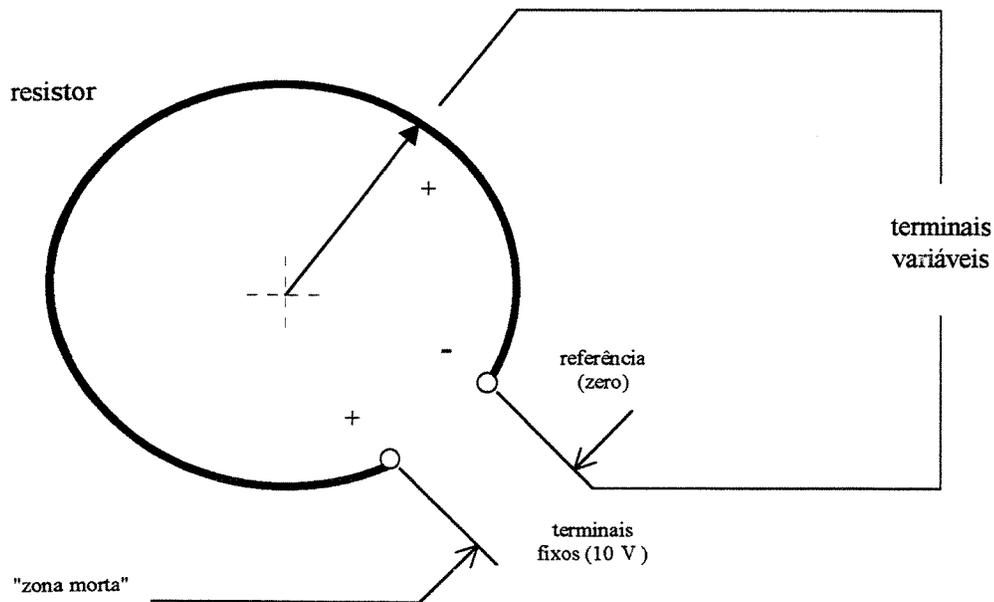


Figura 9.26 - Circuito elétrico representativo do potenciômetro utilizado na parte experimental deste trabalho.

Durante o tempo em que se encontra na "zona morta", a tensão elétrica não se altera através do resistor e o dado de saída lido é sempre 10 V. Após atravessar este espaço, a tensão de saída retorna a (salta para) 0V e uma nova volta se inicia.

Na Figura 9.27, por exemplo, tem-se, aproximadamente, 1volta + 232° , resultando em um deslocamento angular total de 592° .

Os resultados do tipo apresentado acima são corrigidos adicionando-se o valor equivalente ao espaço não preenchido pelo resistor (34°) e no qual o potenciômetro não marca. Embora nos gráficos apresentados estes valores experimentais (aparentemente subestimados) não tenham sido corrigidos, conforme pode ser verificado, todos os valores associados aos mesmos gráficos apresentam a correção citada.

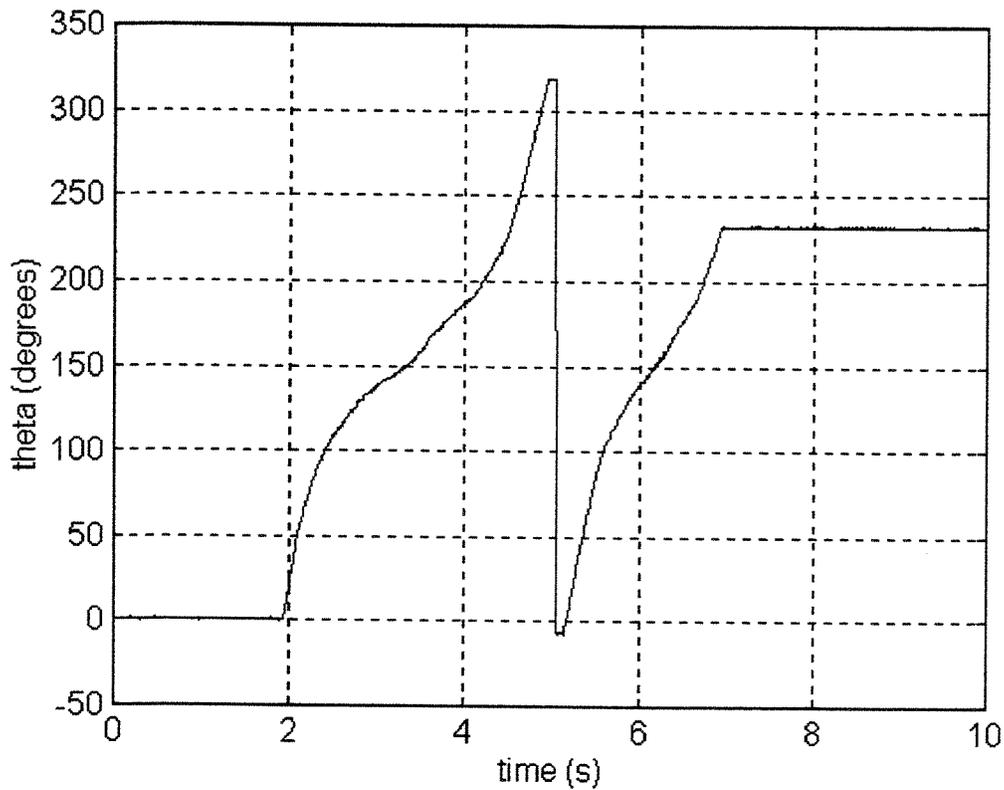


Figura 9.27 - Verificação da "zona morta" do potenciômetro

9.10 - Montagem experimental : fotos

Seguem fotos da montagem experimental mostrando o potenciômetro conectado ao motor de corrente contínua e à base do suporte (para o estudo de estruturas de rastreamento) através de um pedaço de *plexiglass* (Figura 9.28), a "zona morta" do potenciômetro indicada no suporte antes citado (Figura 9.29) e o motor de corrente contínua cujos parâmetros foram identificados neste capítulo (Figura 9.30).

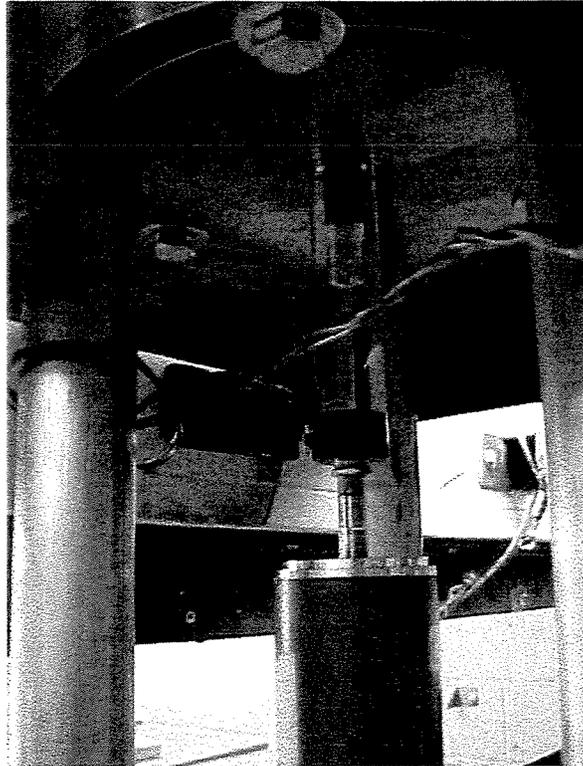


Figura 9.28 - O potenciômetro e o motor de corrente contínua.

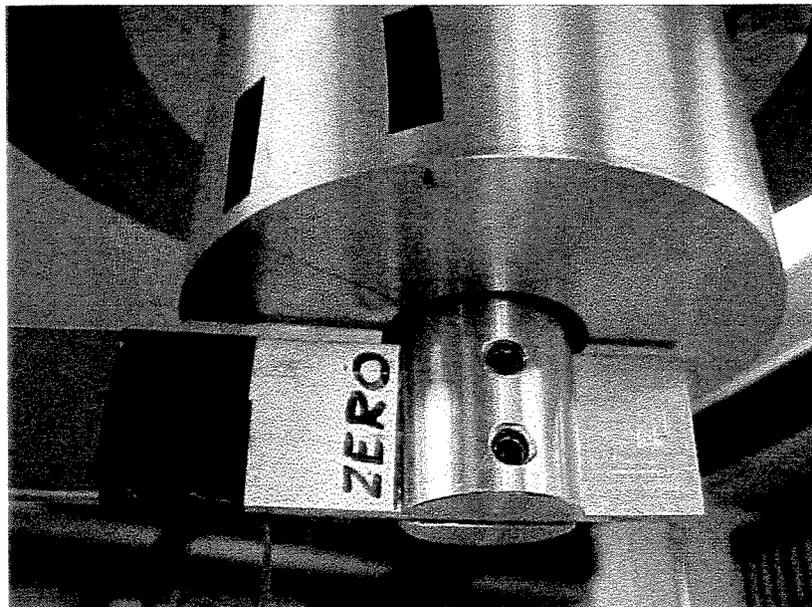


Figura 9.29 - "Zona morta" do potenciômetro (indicado no eixo de suporte da estrutura flexível de rastreamento como as duas marcas negras).



Figura 9.30 - O motor de corrente contínua

Capítulo 10

Ensaio experimental de estruturas flexíveis de rastreamento

10.1 - Considerações acerca da modelagem de estruturas flexíveis reais - modos assumidos e separação de variáveis

No estudo de sistemas contínuos (também denominados sistemas de parâmetros distribuídos), como é o caso das estruturas tipo viga utilizadas neste trabalho, as equações governantes do movimento aparecem sempre na forma de equações integro-diferenciais parciais.

As equações diferenciais parciais para as quais a teoria é melhor desenvolvida e cujas aplicações são mais significativas e variadas são as equações lineares de segunda ordem. Essas equações podem ser classificadas em três categorias : equações governantes para processos difusivos, para processos oscilatórios e para processos independentes do tempo ou estacionários. A equação de condução de calor, a equação de onda e a equação de potencial, respectivamente, são exemplos de cada uma dessas categorias. O estudo dessas equações geralmente fornece informações acerca das demais equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem. O método de separação de variáveis talvez seja o mais antigo método sistemático para a solução de equações diferenciais parciais [Boyce et al., 1990].

A principal característica do método de separação de variáveis é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, por exemplo, trabalhando com a variável tempo e a variável espaço separadamente. A solução desejada da equação diferencial parcial é, então, representada por uma soma, usualmente uma série infinita, envolvendo as soluções do conjunto dessas equações diferenciais ordinárias. Em muitos casos, essas soluções são funções senoidais ou cossenoidais. Em alguns casos, ainda, algumas funções especiais são empregadas, tal como a função de Bessel (soluções por séries de potência ; Boyce, 1986).

Uma outra opção utilizada para resolver o problema de encontrar uma solução para equações diferenciais parciais envolve a aplicação do método dos modos assumidos [por exemplo: Craig, 1981]. Este método, apresentado no Capítulo 2, pode ser considerado como uma simplificação do método de separação de variáveis.

O método dos modos assumidos é bastante utilizado na representação de sistemas contínuos com condições de contorno engastado-livre. Para sistemas do tipo apresentado neste trabalho, a perfeição desta condição de acoplamento irá influenciar a troca de energia entre a estrutura a ser movida (tipo viga) e o atuador. Dois fatores são importantes nesta troca de energia: a inércia relativa entre atuador-estrutura e a velocidade com que o movimento de rastreamento é perpetuado.

Todas as vigas utilizadas na montagem experimental apresentada aqui possuem inércia de rotação em torno do eixo de rastreamento maior que a inércia do subsistema motor + eixo de conexão e desenvolvem velocidades de rastreamento e acelerações relativamente grandes.

No Apêndice B, aonde o projeto do protótipo experimental é apresentado, o eixo de conexão citado anteriormente apresenta-se indicado pela letra B. Este mesmo será referenciado doravante através do sub-índice *eixo*. Na tabela 10.1, são apresentados os valores das inércias de rotação das vigas utilizadas na realização do experimento bem como a inércia do motor e do eixo de conexão.

Seja o sistema de equações diferenciais ordinárias, A.13, representando a fonte de potência limitada (ou não ideal), reproduzido em (10.1), a seguir.

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U$$

$$(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - \boxed{EI \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0)} = 0 \quad (10.1)$$

aonde o termo assinalado, conforme apresentado no mesmo Apêndice A, representa a interação atuador-estrutura. Essa interação será mais significativa quanto maior for a relação $\frac{I_{viga}}{I_{motor}}$, como pode ser verificado através dos dados experimentais ao longo deste capítulo. De acordo com a Tabela 10.1, esta relação será significativa para todas as vigas experimentais utilizadas neste trabalho.

I_{motor} (Kg m ²)	0.000065400
I_{eixo} (Kg m ²)	0.000036900
$I_{motor} + I_{eixo}$ (Kg m ²)	0.000102300
$I_{viga 1}$ (Kg m ²)	0.000703778
$I_{viga 2}$ (Kg m ²)	0.016825422
$I_{viga 3}$ (Kg m ²)	0.055617208
$I_{viga 4}$ (Kg m ²)	0.206241341
$I_{viga 5}$ (Kg m ²)	0.023428847

Tabela 10.1 - Inércias envolvidas (vigas, motor e eixo de conexão)

A aplicação do método dos modos assumidos, conforme apresentado nos capítulos 2 e 3, somente será efetiva se a viga em questão puder ser considerada como engastada-livre. Esta é uma consideração geralmente feita quando se trabalha com estruturas flexíveis em rotação.

Nestes casos, porém, $\frac{I_{viga}}{I_{motor}} \ll 1$.

Cabe (re)lembrar que um modelo matemático não é desenvolvido de maneira estanque. Deve-se sempre estar oscilando entre a teoria e o experimento. Um sempre fornecendo informações para o outro até se chegar a um consenso, ocasião em que se tem um modelo confiável do sistema físico.

Assim sendo, a análise dos resultados experimentais conforme apresentados aqui auxilia a compreensão dos limites da teoria ora apresentada e lança as bases para uma teoria mais acurada para estruturas flexíveis de rastreamento.

O item 10.2 apresenta e comenta esses resultados experimentais.

10.2 - Resultados experimentais

As dimensões das vigas utilizadas nas verificações experimentais são apresentadas na Tabela 10.2. Nesta tabela consta também a designação que será utilizada para essas estruturas doravante (viga 1, viga 2, ...).

Nas condições experimentais deste trabalho e tomando o conjunto apresentado na Tabela 10.2, a viga 1 pode ser considerada como a viga mais rígida ensaiada e a viga 5 pode ser considerada como a mais flexível dentre todas.

A análise dos dados experimentais, conforme apresentados nos itens 10.2.1 a 10.2.5, deverá ser entendida em duas instâncias : o momento em que o motor encontra-se sob excitação ($U \neq 0$, ou seja, o instante em que se aplica um determinado perfil de tensão elétrica nos terminais do motor a fim de que o movimento de rastreamento possa ser realizado) e o instante em que a excitação nos terminais do motor se anula ($U = 0$, e, portanto, a interação motor-estrutura será a responsável pelo movimento do eixo de rastreamento deste instante para frente). Tendo isso em vista, os resultados experimentais são apresentados contra o perfil de excitação.

	material	largura (m)	espessura (m)	comprimento (m)
viga 1	alumínio	0.02544	0.00316	0.200
viga 2	alumínio	0.02544	0.00316	0.600
viga 3	alumínio	0.02544	0.00316	0.900
viga 4	alumínio	0.02544	0.00316	1.400
viga 5	aço	0.01587	0.00082	0.872

Tabela 10.2 - Propriedades das vigas experimentais

Para as diferentes vigas cujo comportamento foi analisado, observa-se que, quanto maior a relação $\frac{I_{viga}}{I_{motor}}$, maior a influência da estrutura sobre o eixo de rastreamento. As comparações entre as diferentes vigas, para as mesmas condições de excitação, serão apresentadas no item 10.3.

Nos experimentos realizados no decorrer deste trabalho, nenhuma viga que apresentasse a relação $\frac{I_{viga}}{I_{motor}}$ muito menor que 1 foi estudada. Os resultados para essas vigas (aonde as considerações teóricas feitas neste trabalho se aplicam melhor), são apresentados somente através de simulações numéricas (Capítulo 8) e utilizando os modelos matemáticos propostos. Os parâmetros físicos do motor experimental (identificado no Capítulo 9) são utilizados nessas simulações.

Para uma mesma viga, quanto maior a amplitude de excitação (U_{max} ou tensão elétrica máxima nos terminais do motor), maior a velocidade da estrutura, e, como o tempo da excitação é mantido constante em todos os casos estudados (0.5 s), maior a sua aceleração e, desta forma, maior a influência sobre o eixo de rastreamento. Este comportamento pode ser verificado nas Figuras 10.3, 10.7, 10.12, 10.19, 10.20, 10.30 e 10.31.

Para velocidade de rastreamento constante (e, portanto, aceleração igual a zero) e de módulo suficientemente pequeno, a interação atuador-estrutura se aproxima das condições teóricas impostas neste trabalho. Quanto menor a velocidade de rastreamento, mais o comportamento dinâmico das estruturas flexíveis se aproxima do comportamento dinâmico das estruturas ditas rígidas e o modelo de curvatura linear torna-se um bom modelo para essas estruturas. (Stanway et al., 1998), mostrou que não-linearidades de ordem superior são menos importantes para manobras lentas. As diferentes velocidades de rastreamento (manobras rápidas ou lentas) podem evidenciar a importância relativa de vários termos não lineares considerados nos modelos matemáticos.

Outro fato que se deve observar diz respeito à vibração livre das vigas quando a excitação no motor vai a zero. Este assunto é tratado no item 10.4, aonde é apresentada uma comparação entre a frequência natural do primeiro modo de vibrar das vigas nas condições experimentais contra alguns valores teóricos para estas mesmas frequências supondo condição de contorno engastada-livre. Comparações são feitas também utilizando as frequências teóricas da condição de contorno pinado-livre. Para os casos aonde a viga interage com o eixo de rastreamento perde o sentido falar em "vibração livre".

Vale ressaltar nesta altura que o experimento não foi conduzido com o intuito de se extrair as FFT's dos dados experimentais. Por esta razão, certos cuidados não foram tomados na obtenção destes dados, como por exemplo o cuidado de se escolher o período de amostragem correto. Tal fato fez com que certas informações fossem perdidas. As FFT's são utilizadas aqui com o único objetivo de se obter uma idéia acerca da frequência natural do primeiro modo de flexão da "vibração livre" das vigas estudadas. Para uma análise mais acurada destas frequências, dever-se-á retornar ao experimento, o que poderá ser feito em trabalhos futuros.

Ao longo de todo o experimento (e ao longo de todo o trabalho teórico apresentado aqui), o perfil de excitação utilizado segue aquele apresentado na Figura 10.1. Nesta figura, o perfil teórico desejado (a ser enviado aos terminais do motor através de uma placa conversora DA ligada ao software *Dspace*) e o perfil efetivamente atuando no motor são plotados um contra o outro.

A descontinuidade no perfil da excitação tanto no início (quando a excitação vai de zero a U_{\max}) quanto no final (quando a excitação vai de U_{\max} a zero) provoca, em alguns casos, a manifestação de modos superiores, como pode ser observado claramente nas figuras associadas às vigas 3, 4 e 5. De acordo com Juang et al. (1987), a concordância entre resultados teóricos e experimentais é melhorada (efeitos de não-linearidades são minimizados) quando o perfil de torque (ou da excitação) é mais suave.

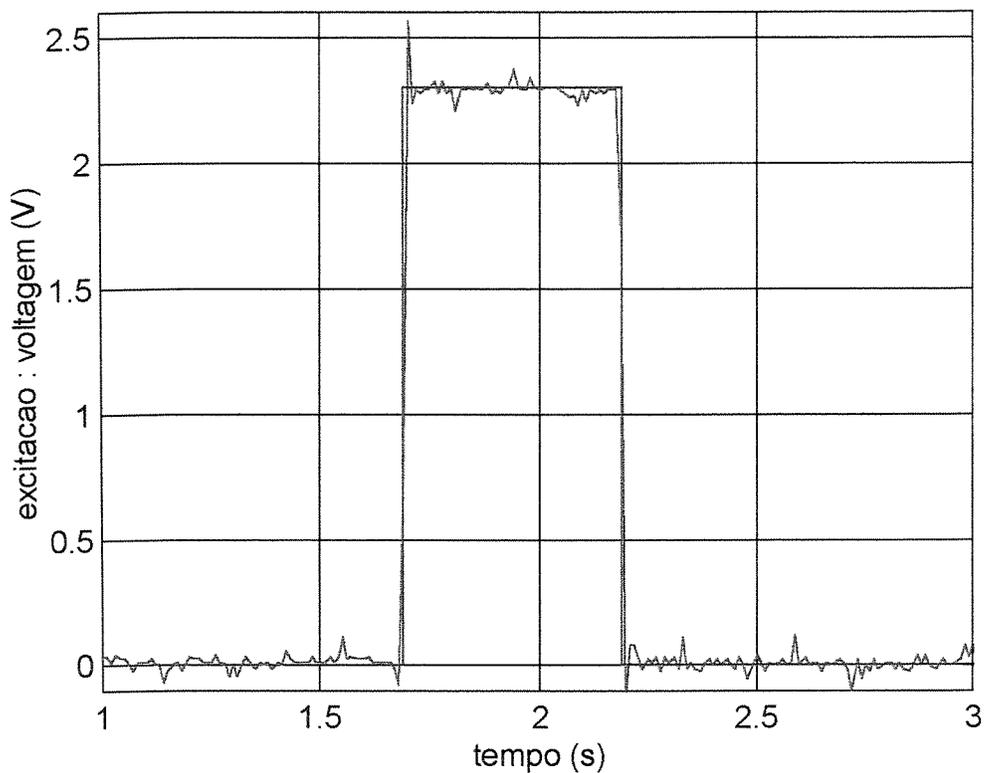


Figura 10.1 - Perfil de excitação : teórico (vermelho) e experimental (azul)

10.2.1 - Viga 1 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 0.2000 (m)

Seguem os dados experimentais coletados utilizando-se a viga 1.

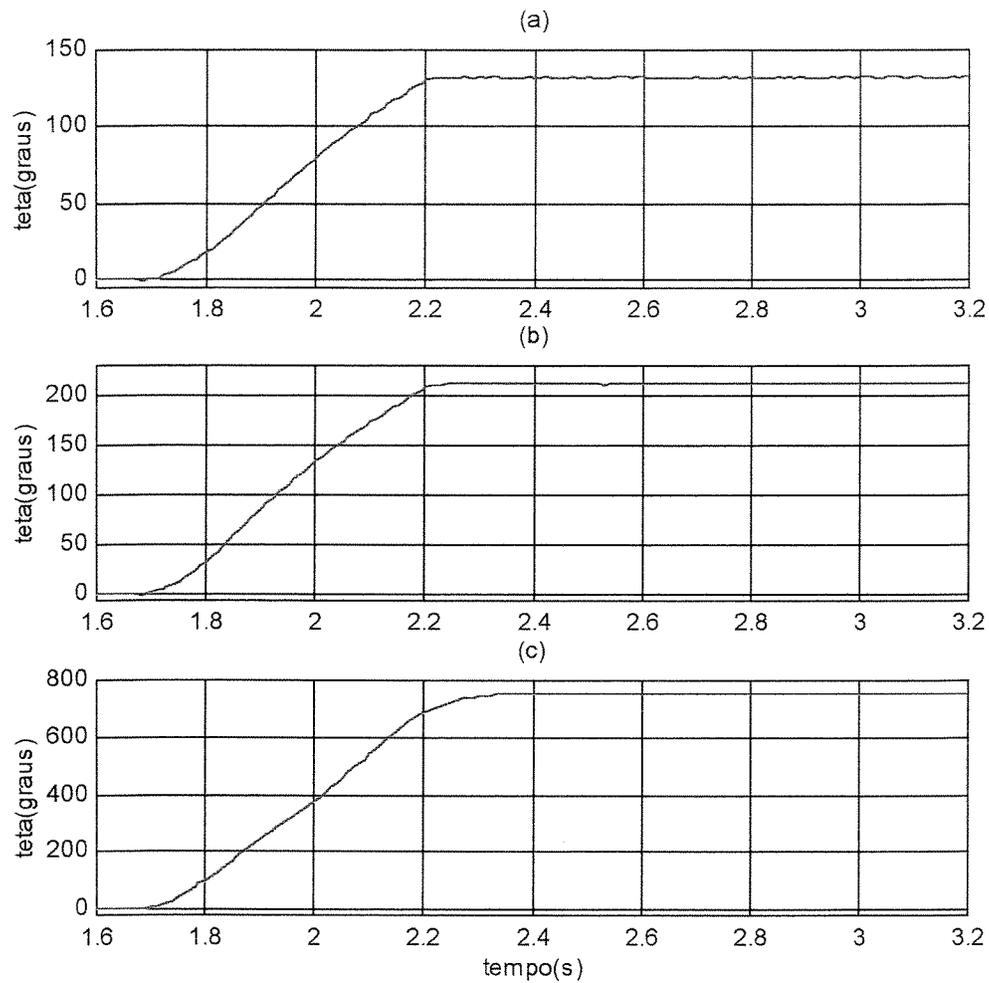


Figura 10.2 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga1).

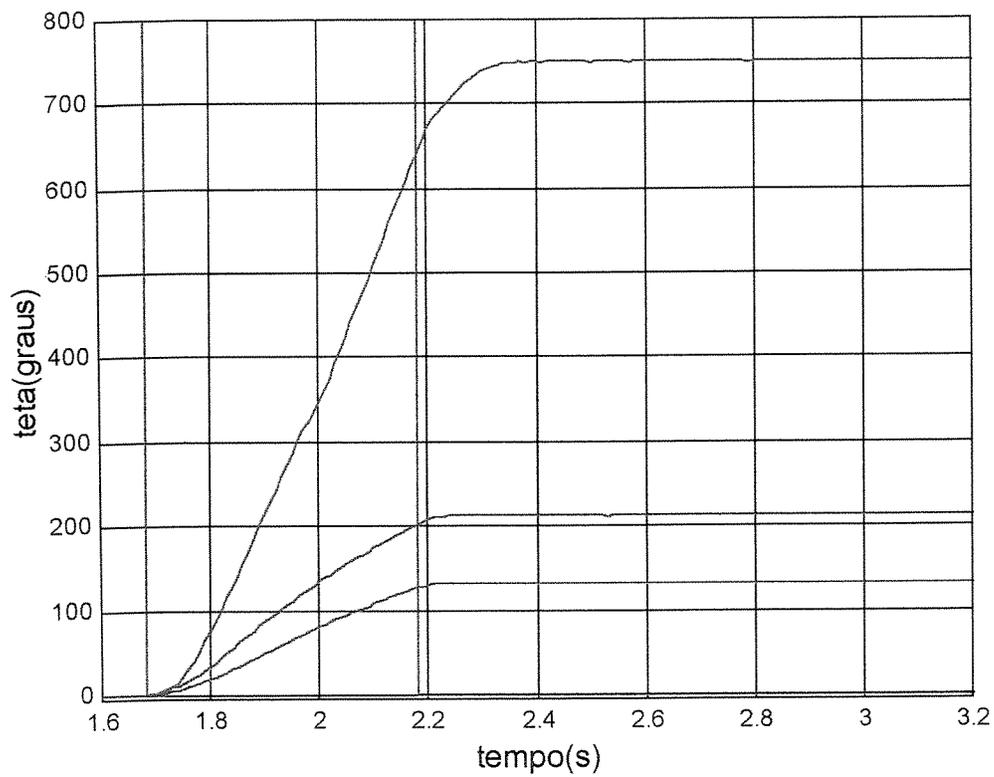


Figura 10.3 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo- (viga1).

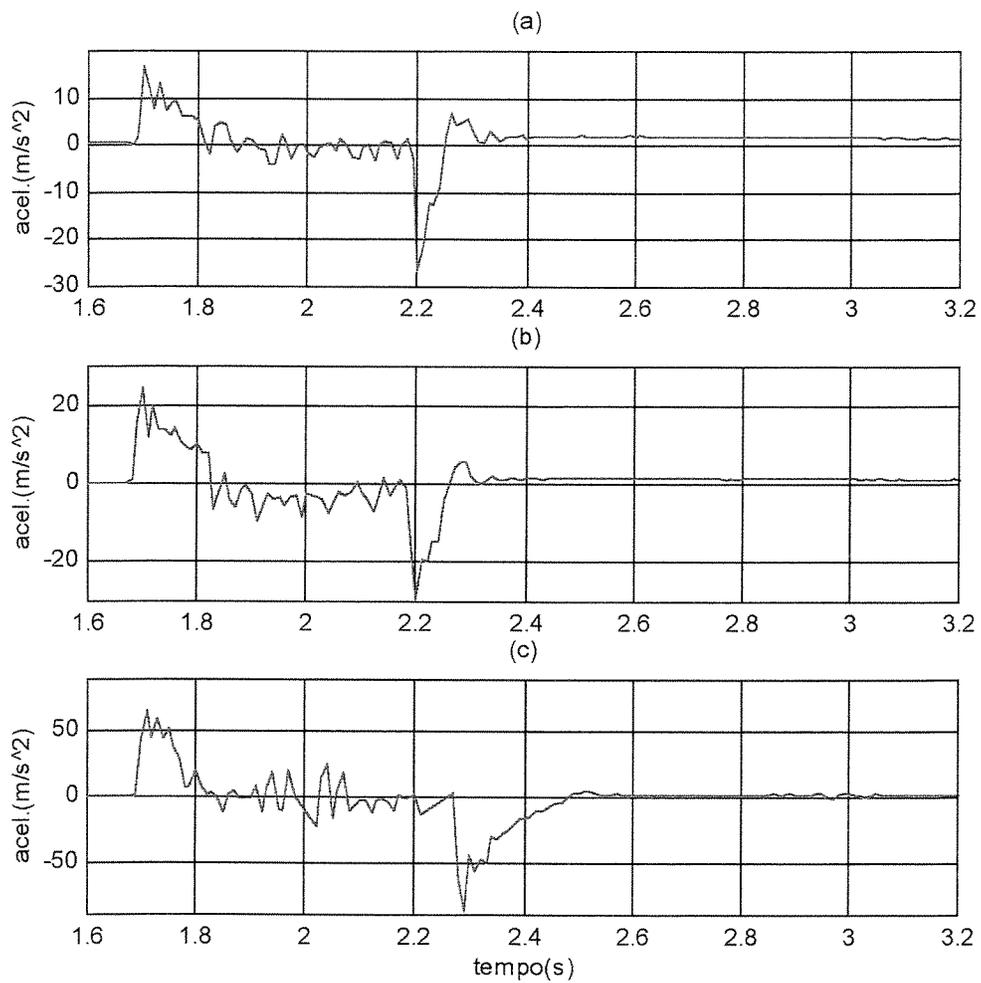


Figura 10.4 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga1).

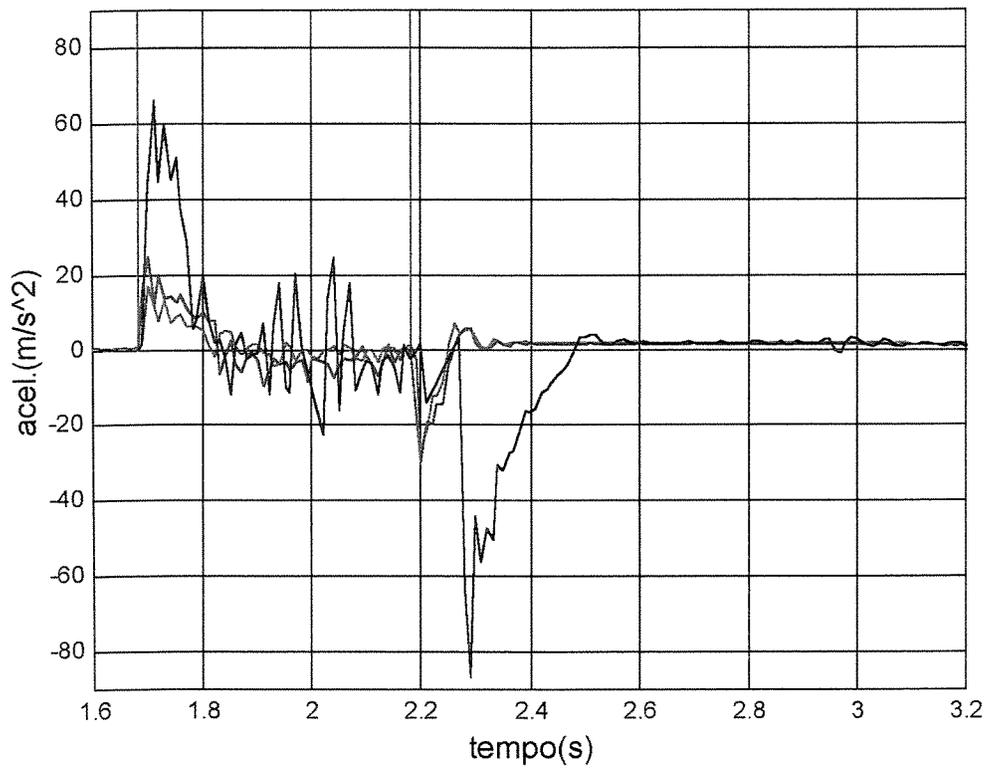


Figura 10.5 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - (viga1).

10.2.2 - Viga 2 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 0.6000 (m)

Seguem os dados experimentais coletados utilizando-se a viga 2.

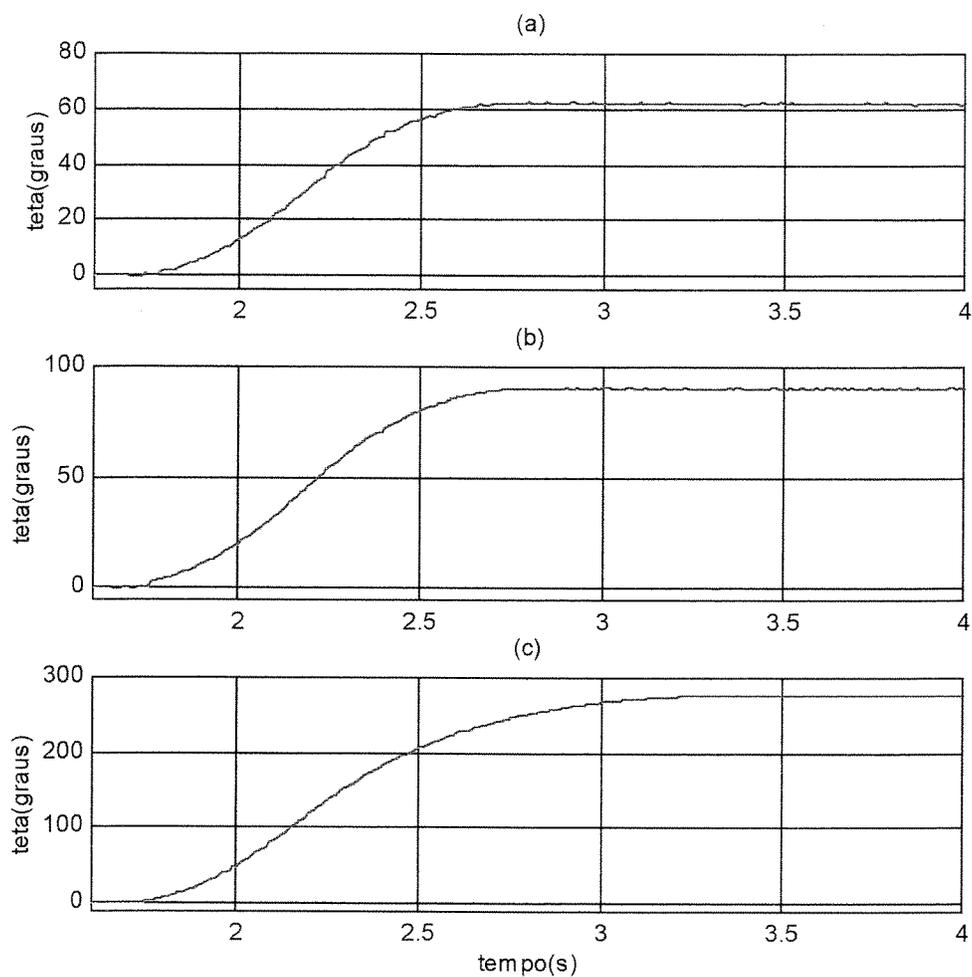


Figura 10.6 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga2).

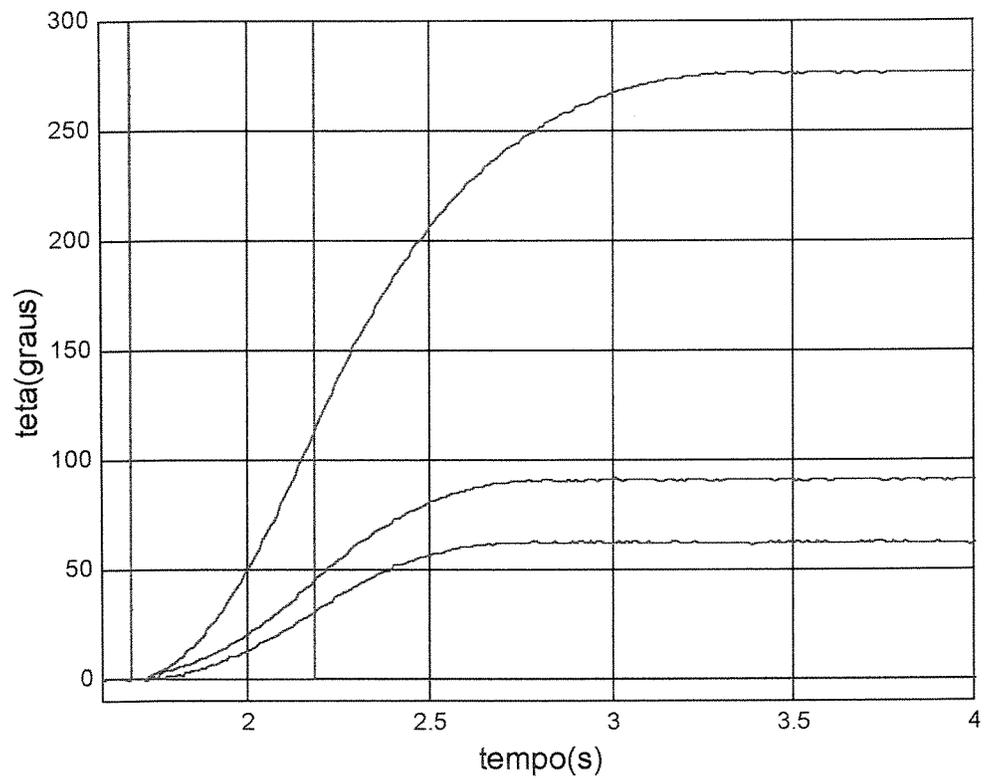


Figura 10.7 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo- (viga2).

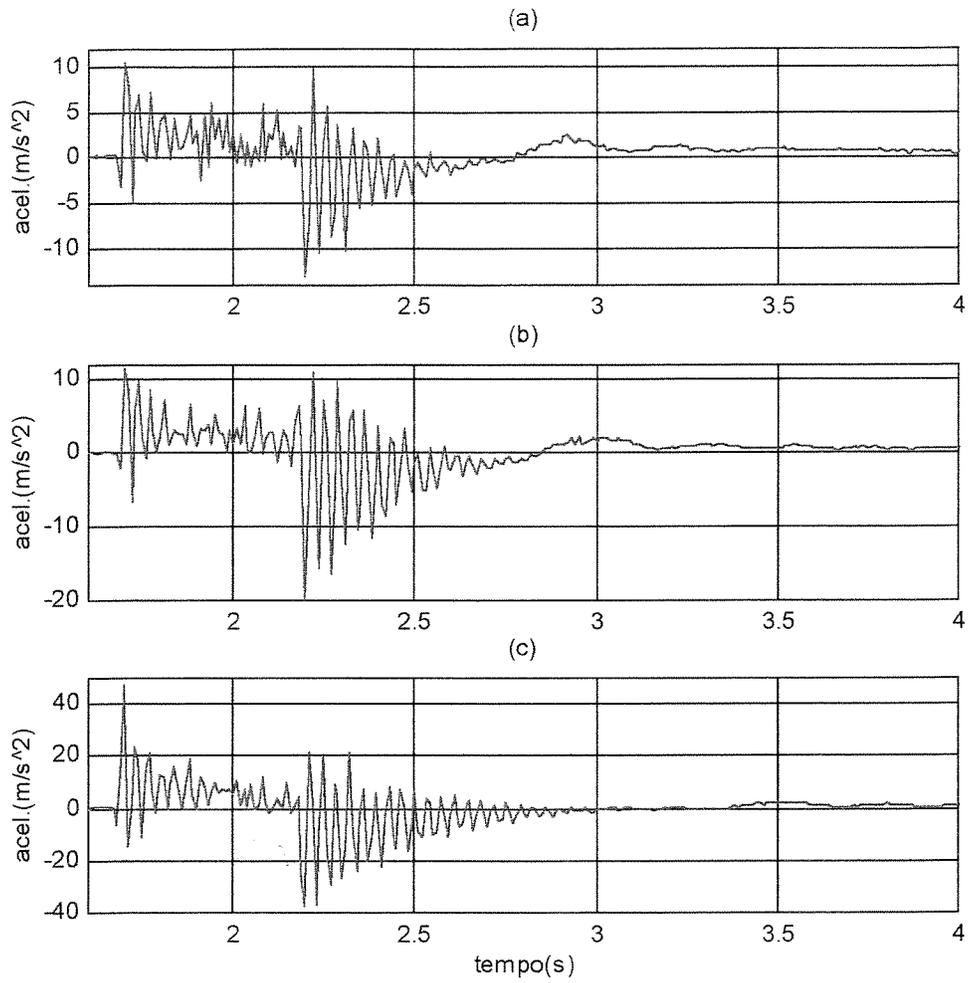


Figura 10.8 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{max} - (viga2).

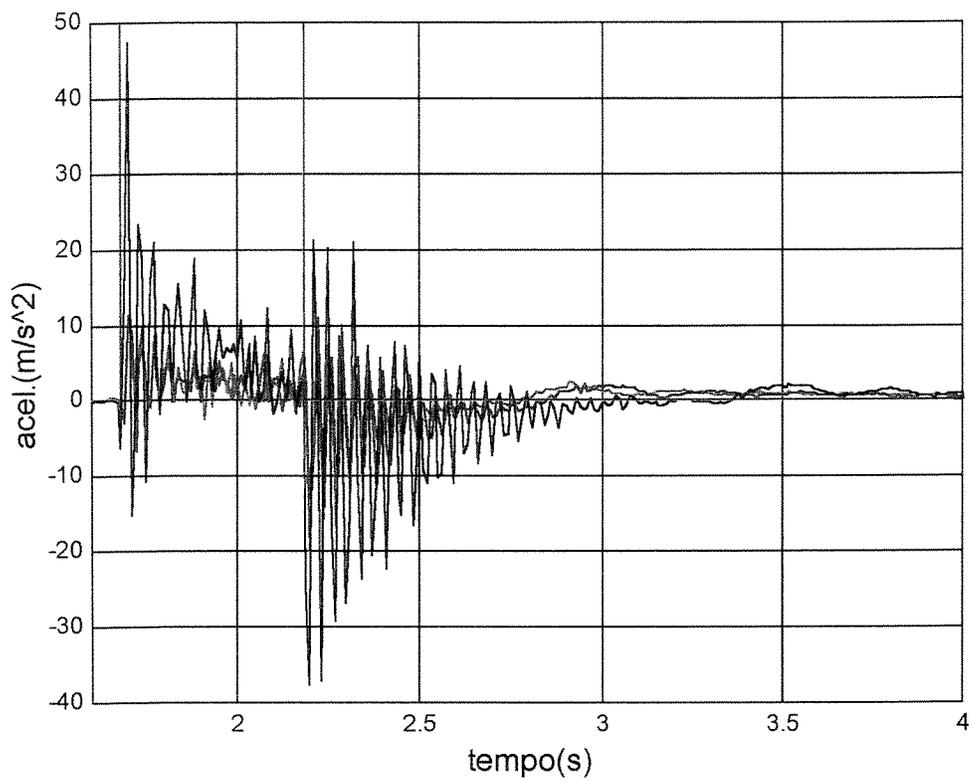


Figura 10.9 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} : gráfico comparativo - (viga2).

10.2.3 - Viga 3 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 0.9000 (m)

Seguem os dados experimentais coletados utilizando-se a viga 3.

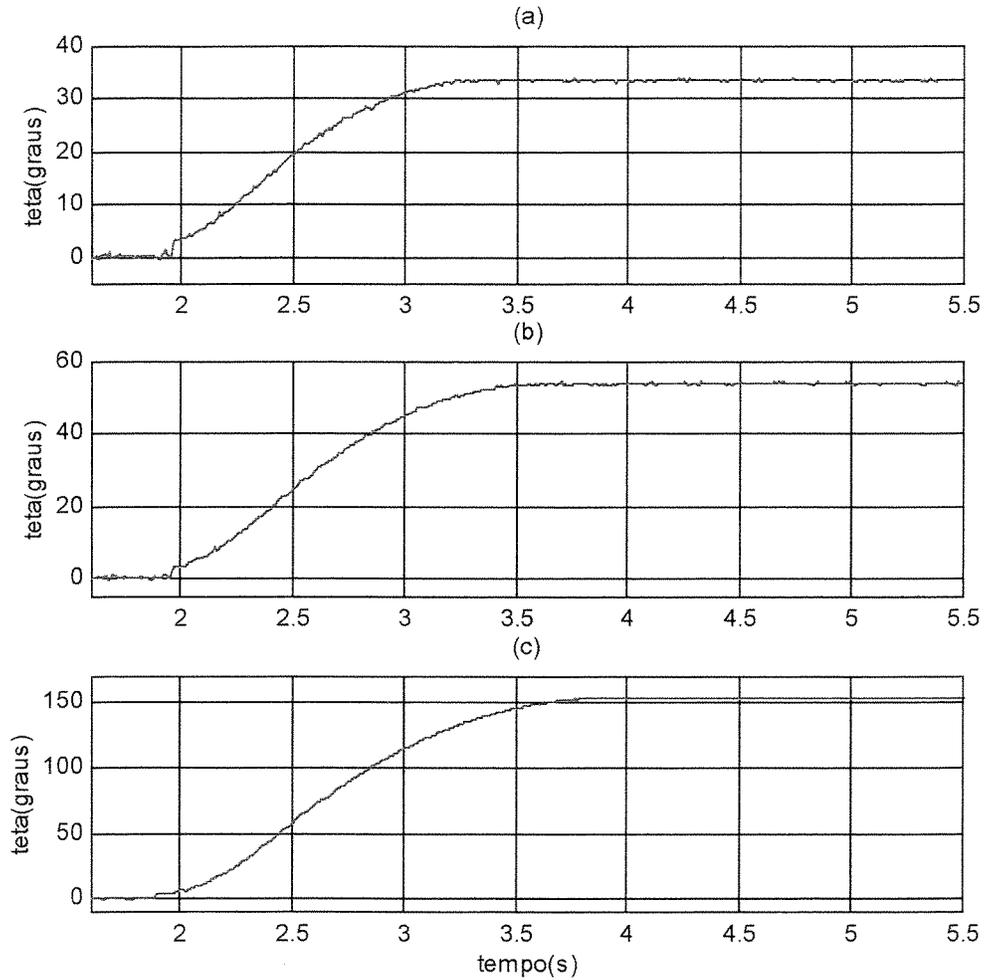


Figura 10.10 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga3 : I).

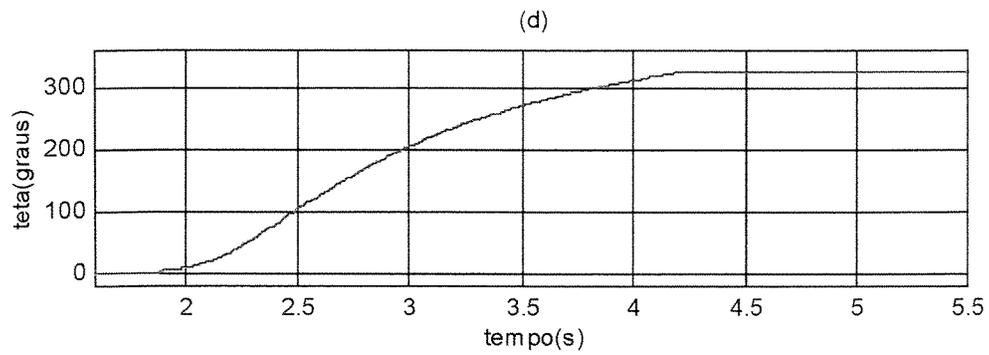


Figura 10.11 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga3 : II).

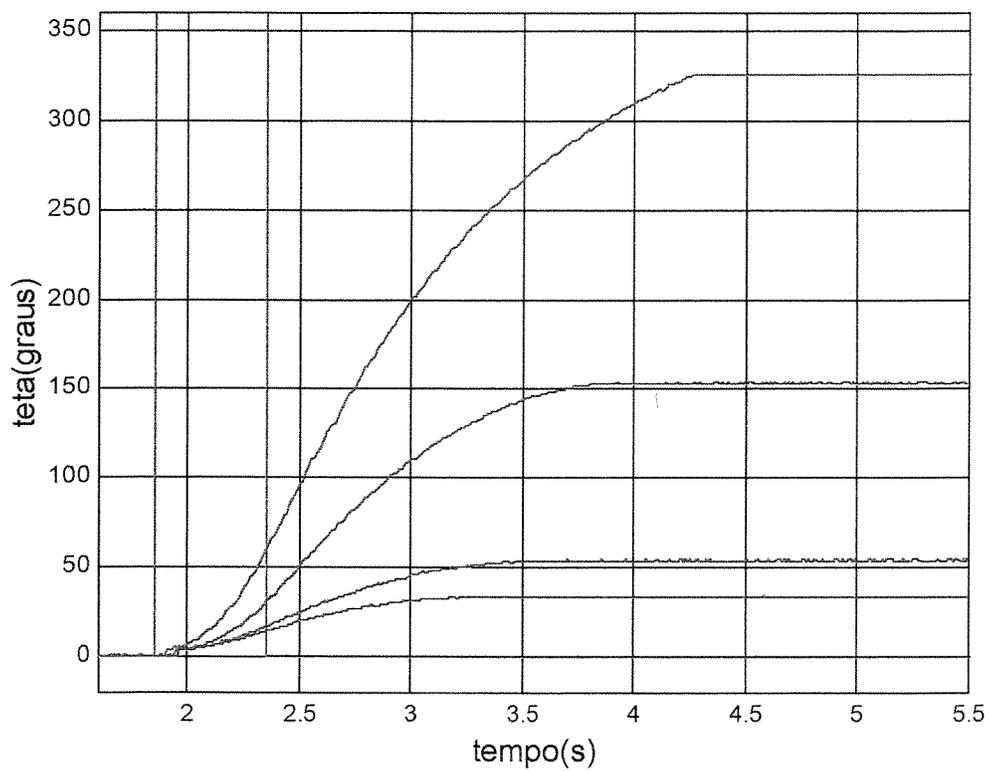


Figura 10.12 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo- (viga3).

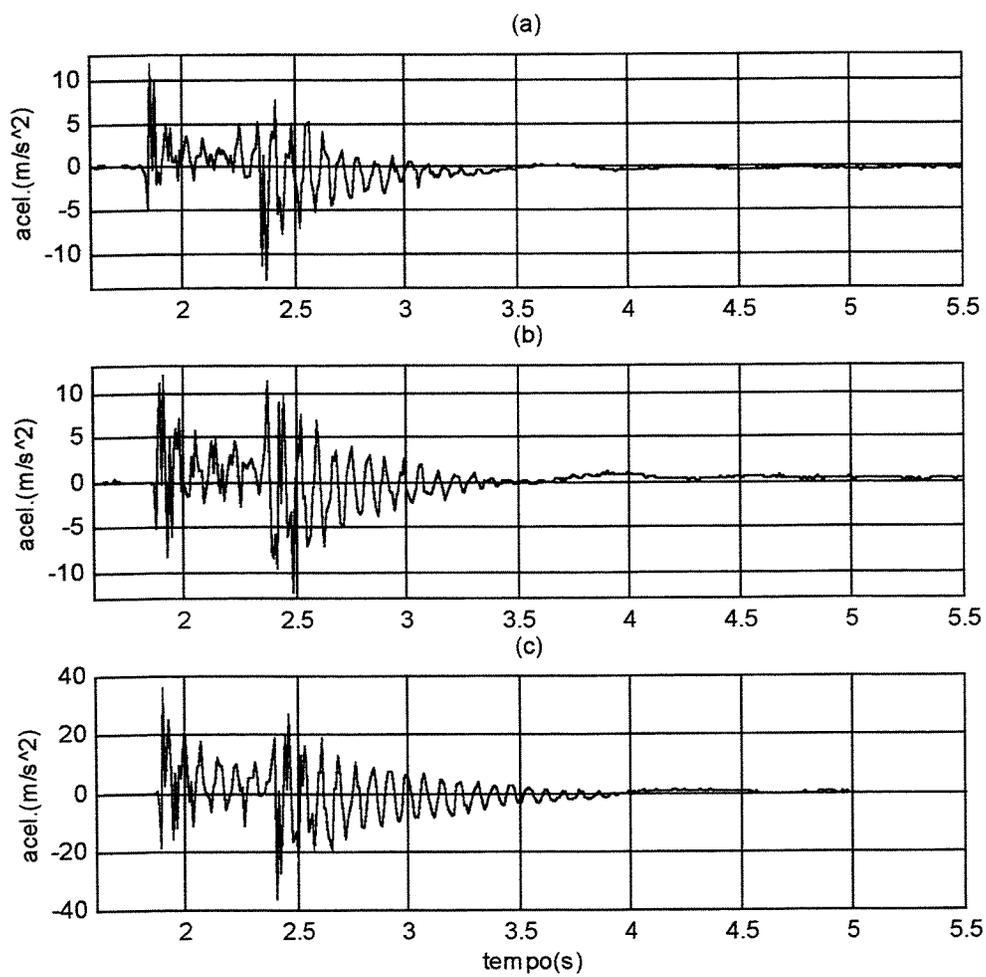


Figura 10.13 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{max} - (viga3 : I).

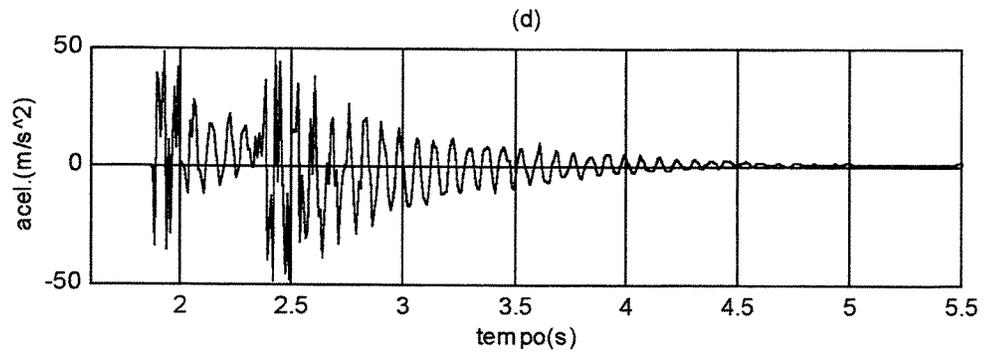


Figura 10.14 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga3 : II).

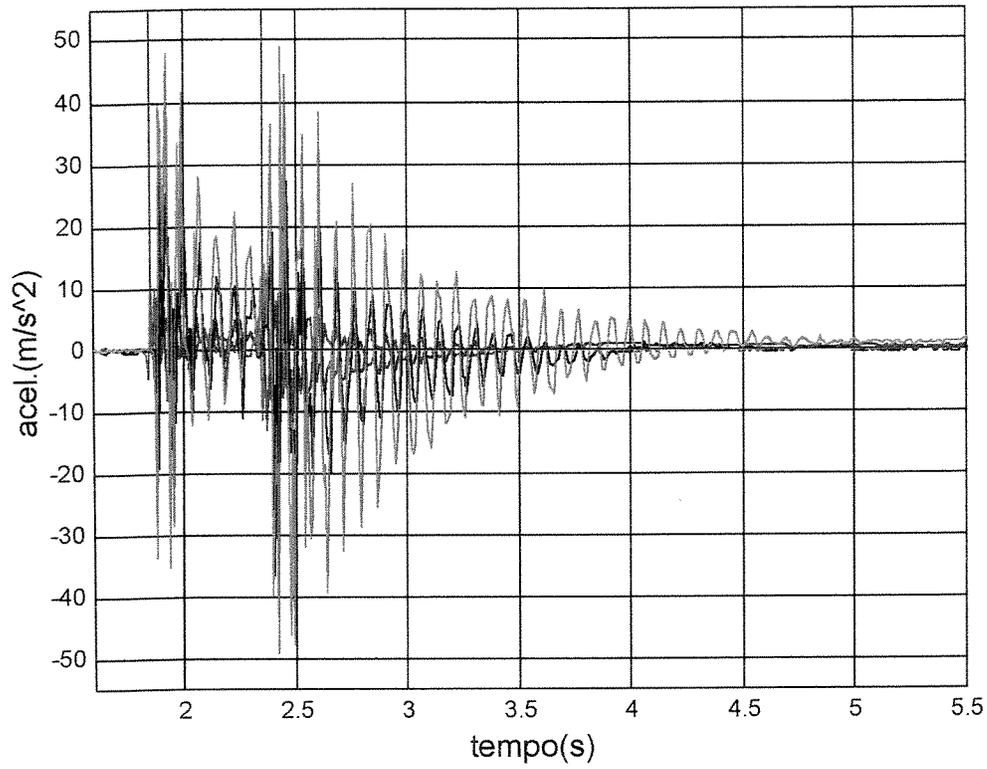


Figura 10.15 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo - (viga3).

10.2.4 - Viga 4 (alumínio) : 0.0254 x 0.0032 x 1.4000 (m)

Seguem os dados experimentais coletados utilizando-se a viga 4.

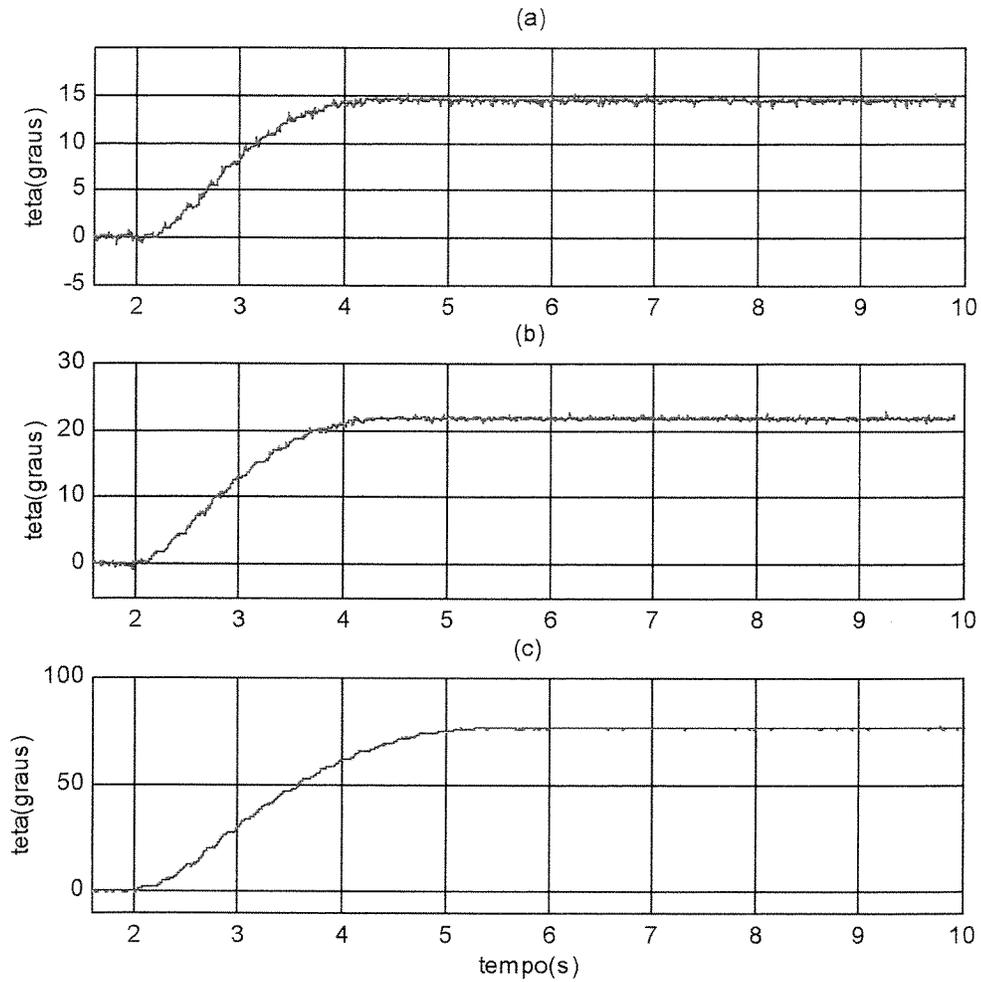


Figura 10.16 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : I).

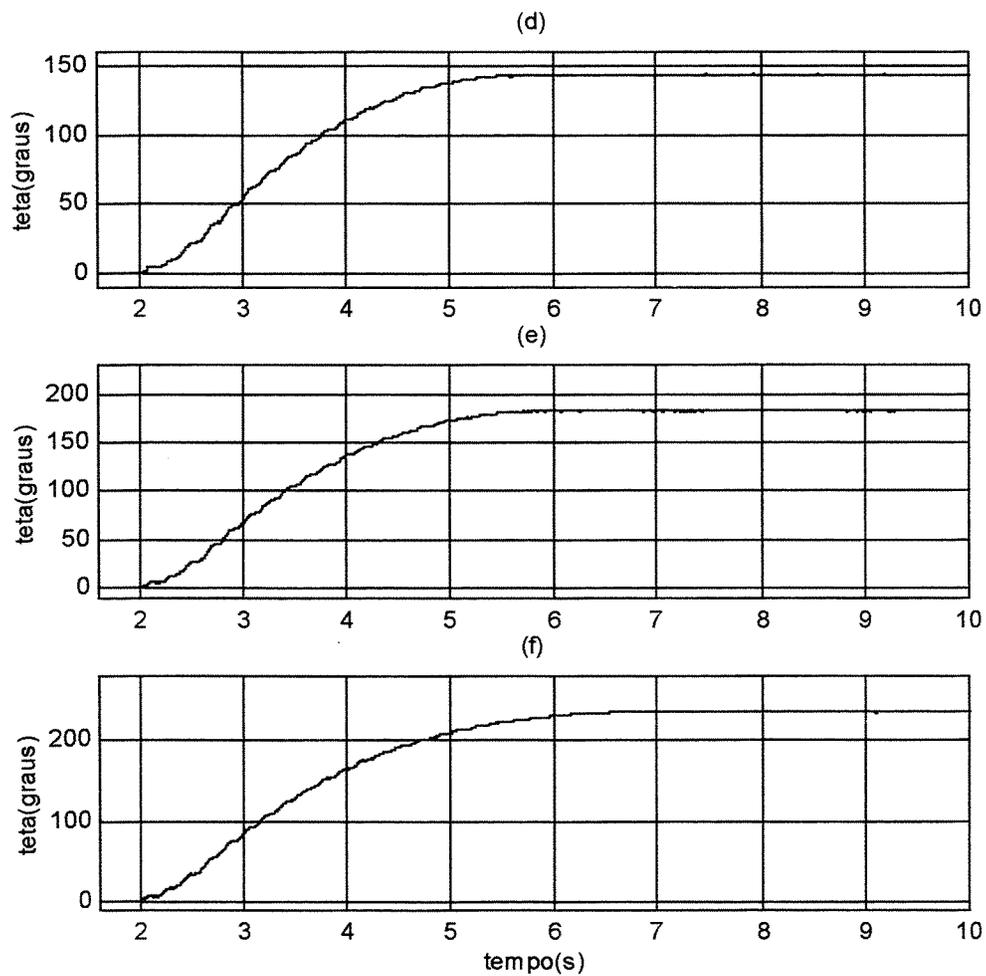


Figura 10.17 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : II).

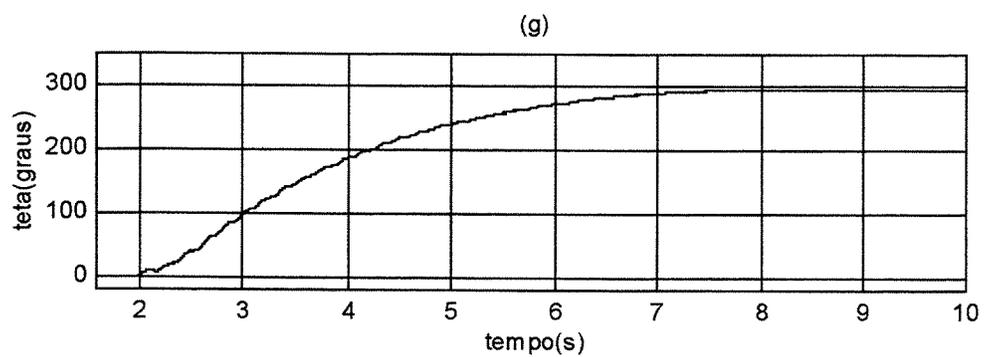


Figura 10.18 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : III).

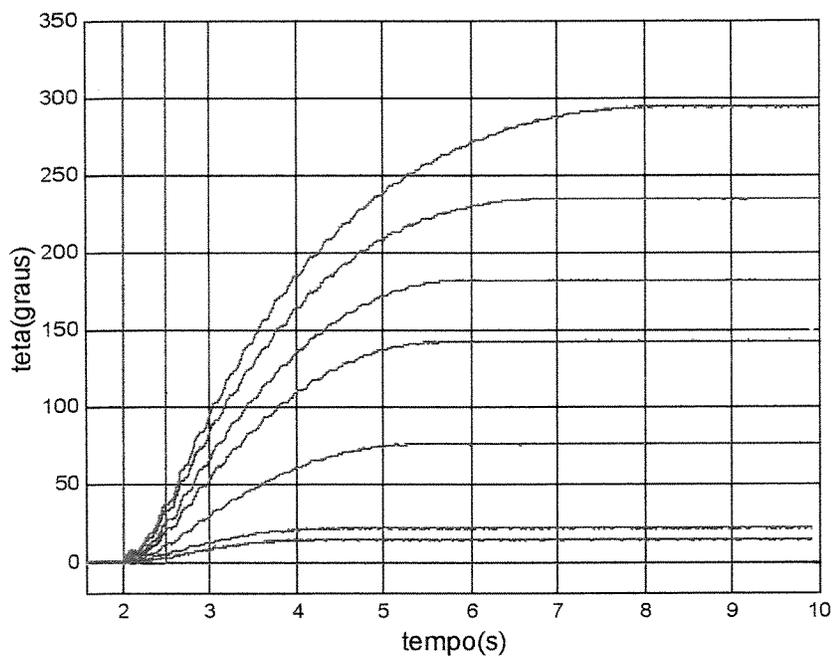


Figura 10.19 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo- (viga4).

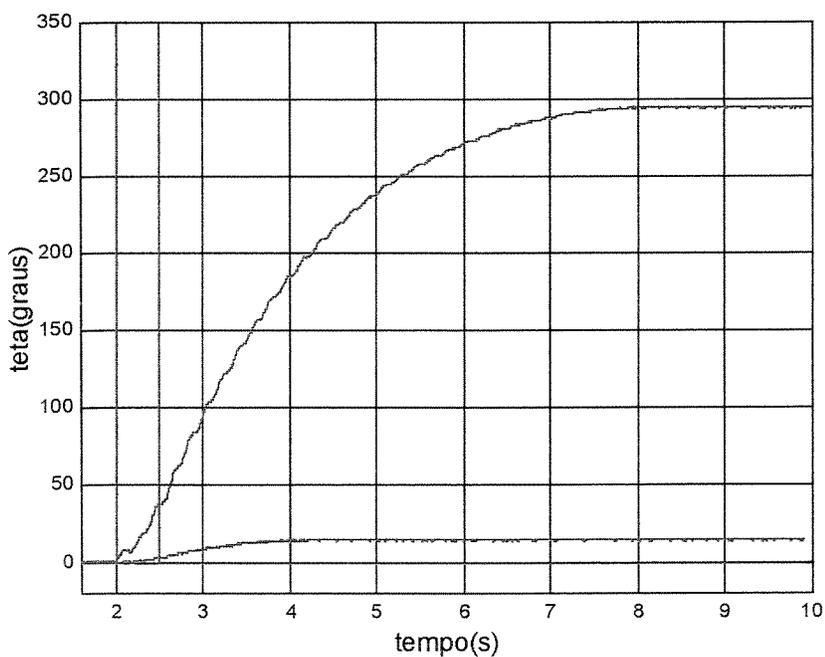


Figura 10.20 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo-valores extremos (viga4).

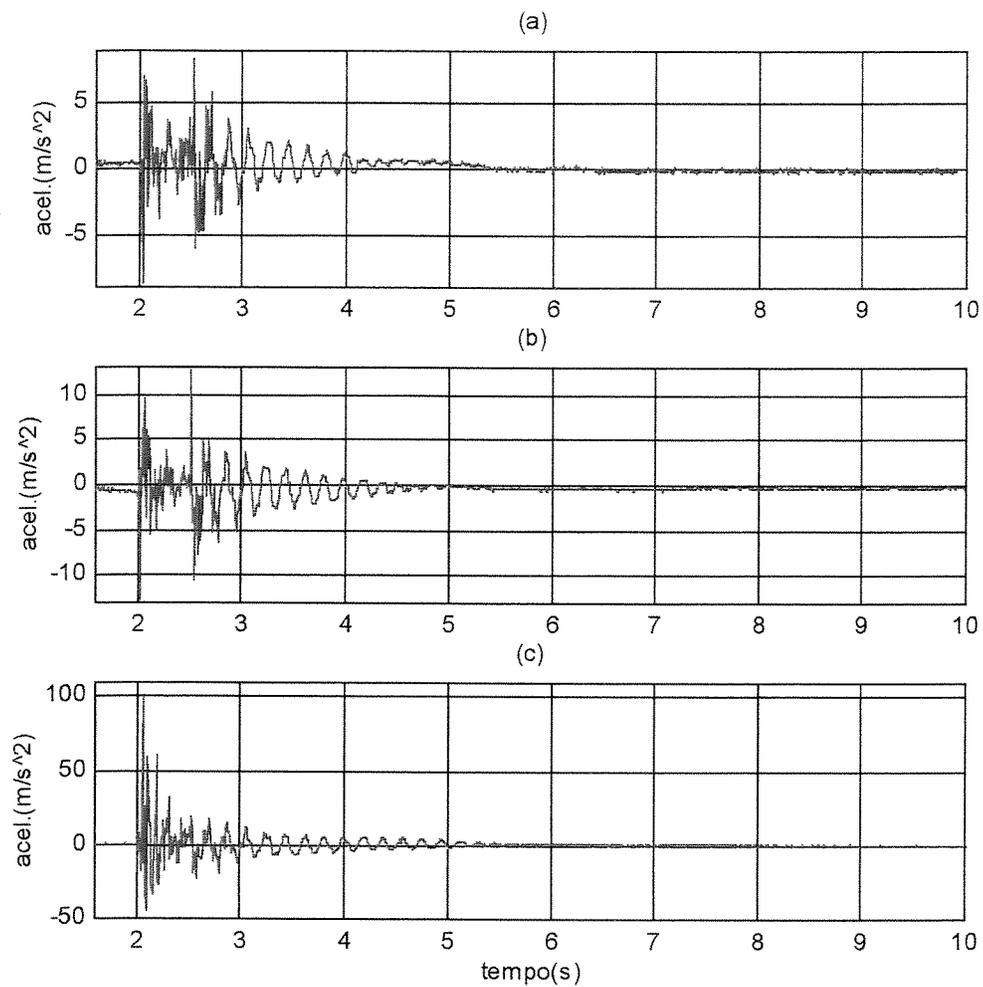


Figura 10.21 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : I).

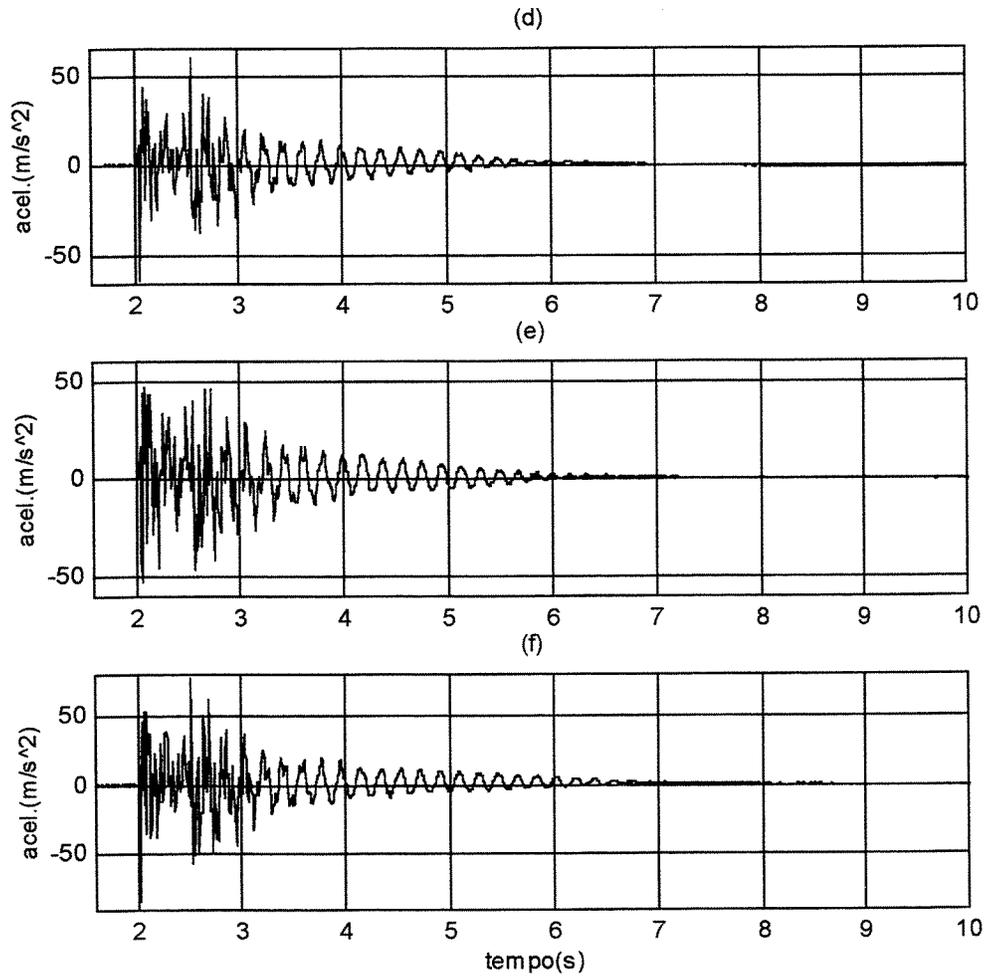


Figura 10.22 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : II).

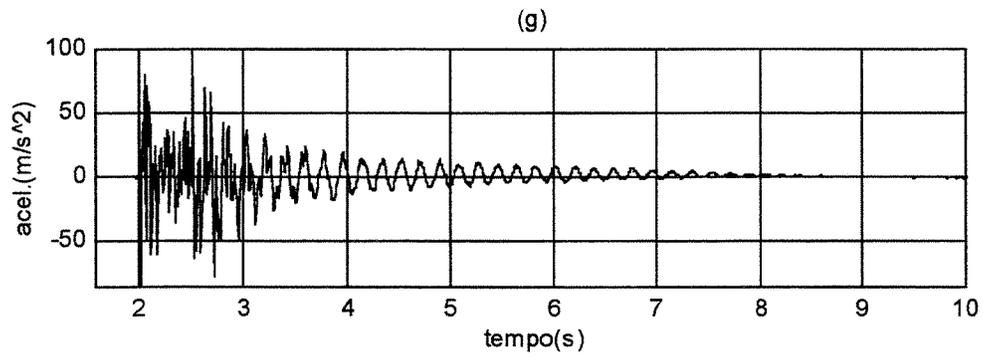


Figura 10.23 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{\max} - (viga4 : III).

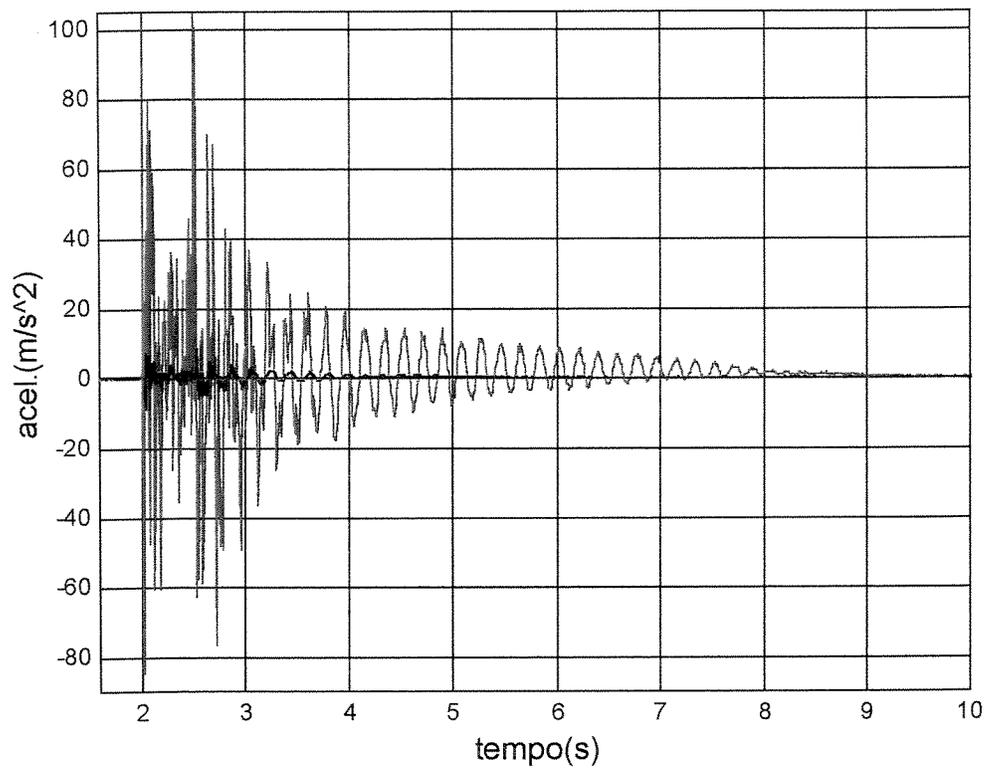


Figura 10.24 - Aceleração total medida através de um acelerômetro conectado na extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo - valores extremos (viga4).

10.2.5 - Viga 5 (aço) : 0.0159 x 0.0008 x 0.8720 (m)

Seguem os dados experimentais coletados utilizando-se a viga 5.

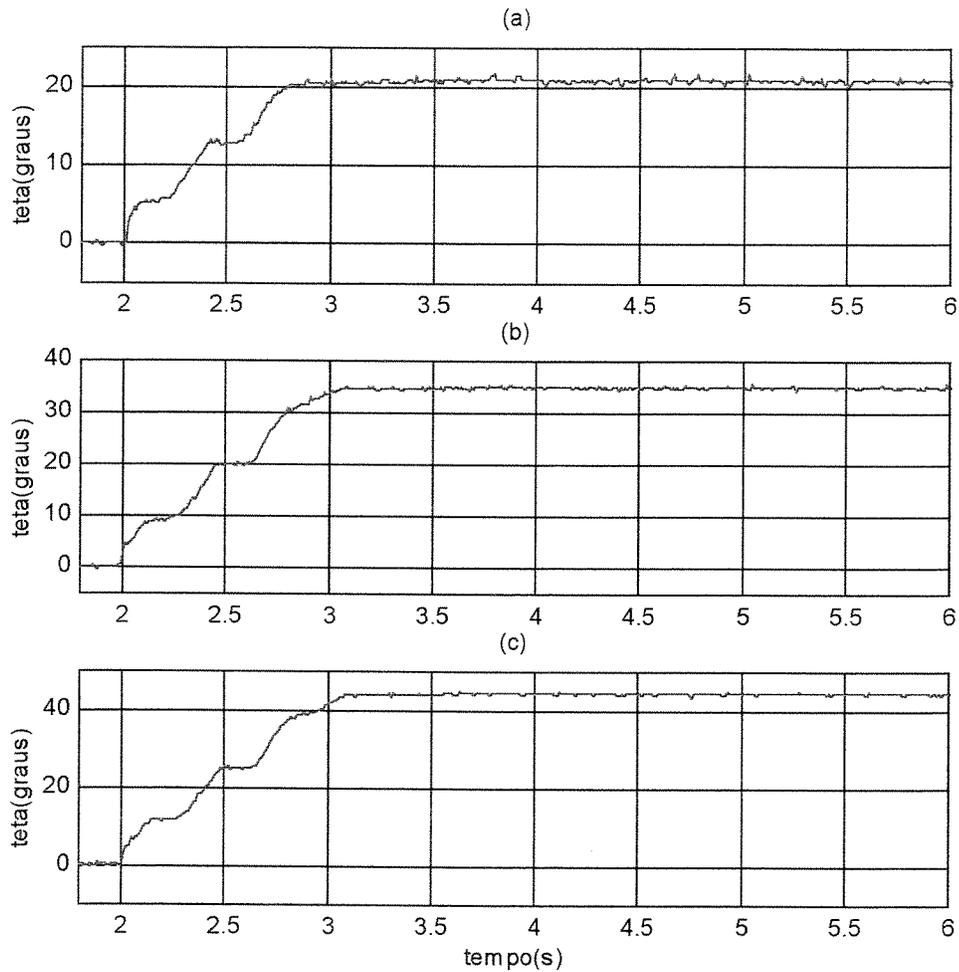


Figura 10.25 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : I).

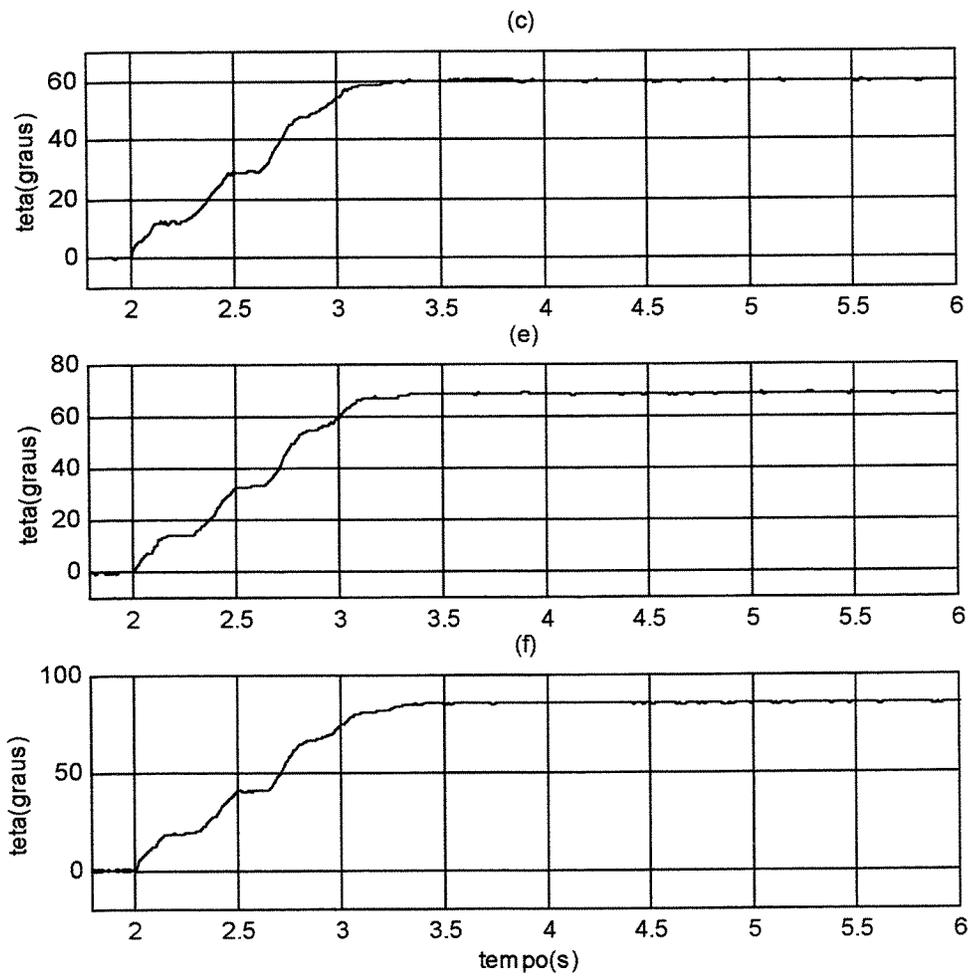


Figura 10.26 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : II).

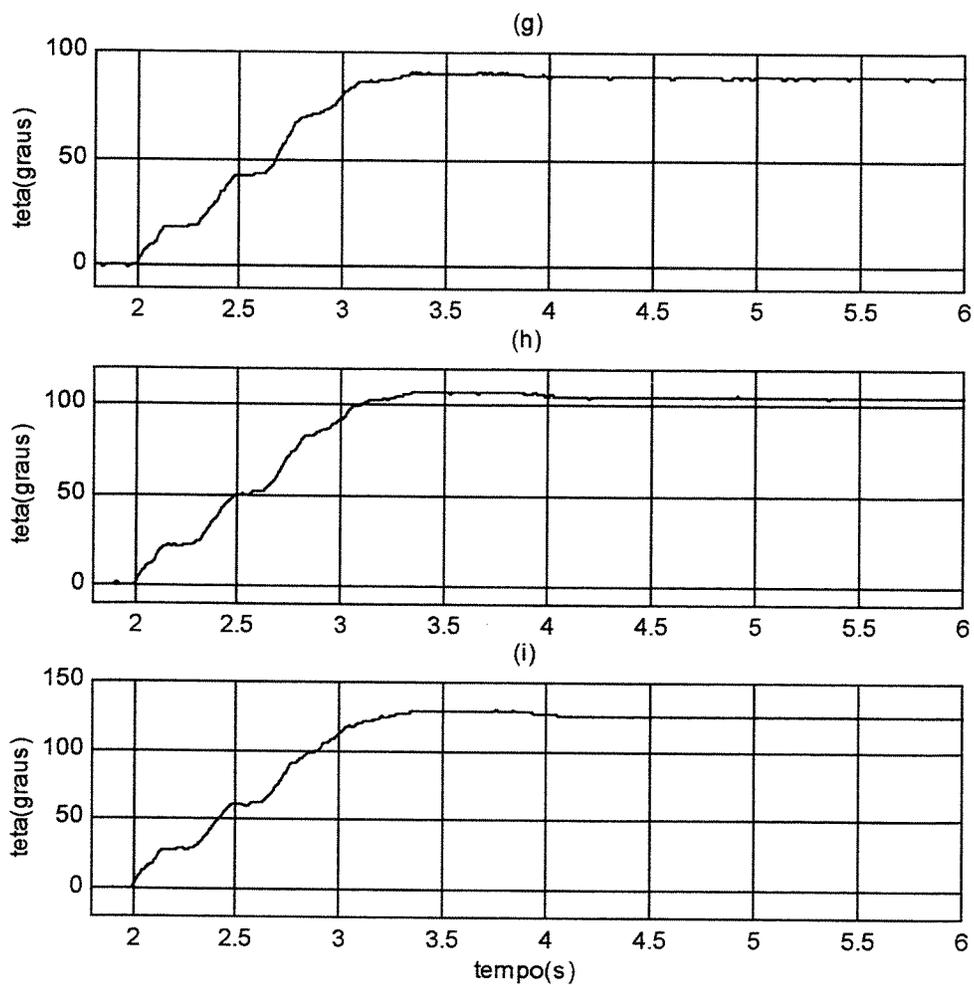


Figura 10.27 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : III).

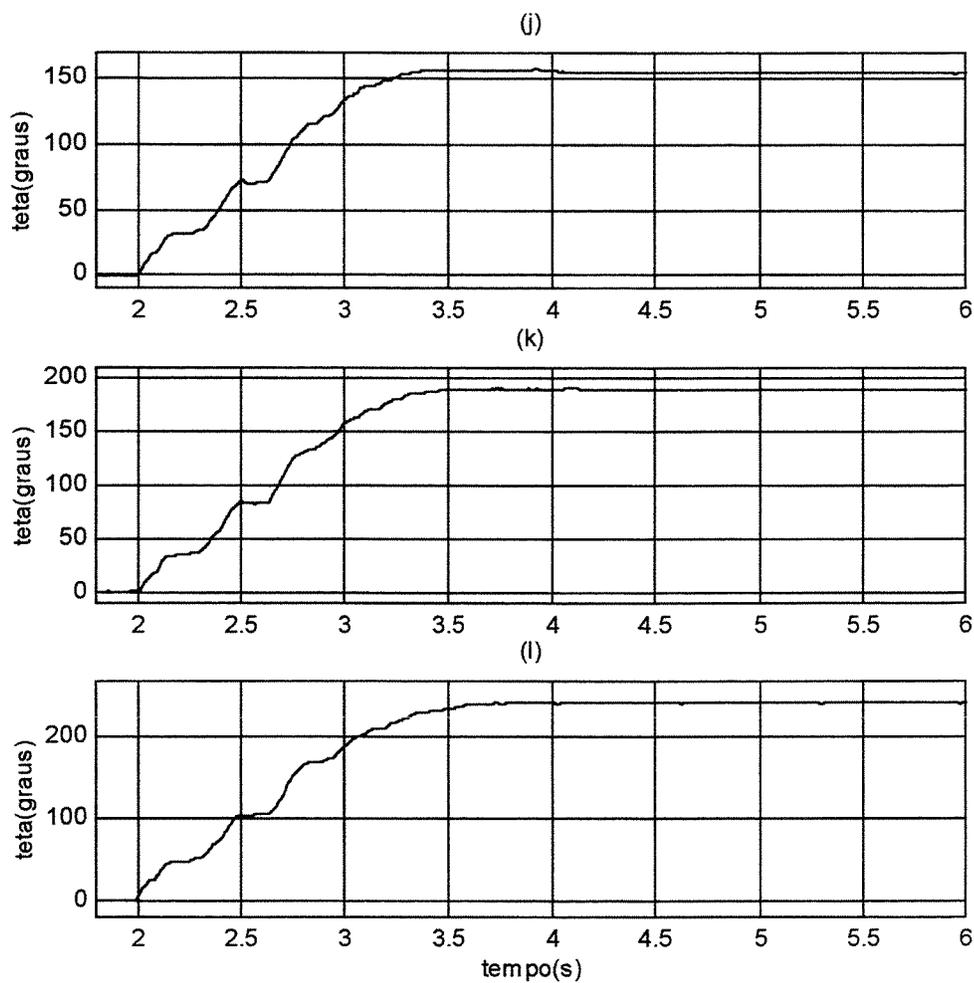


Figura 10.28 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : IV).

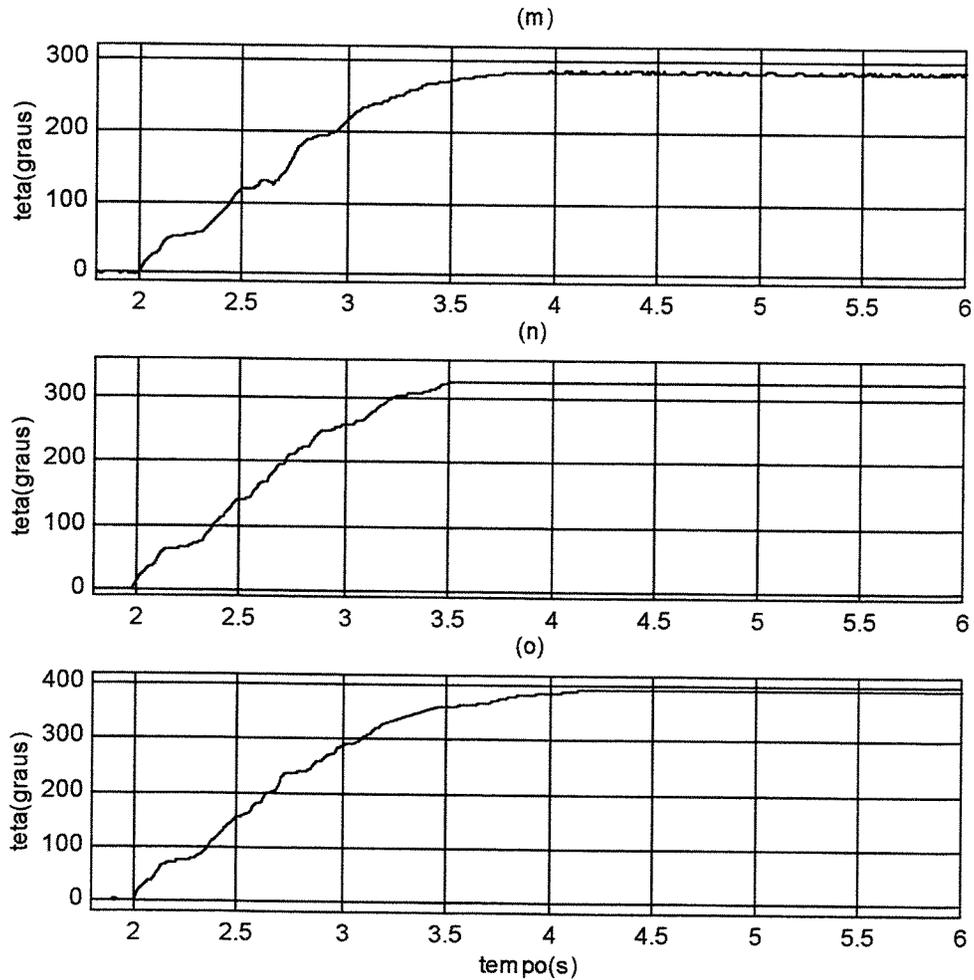


Figura 10.29 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : V).

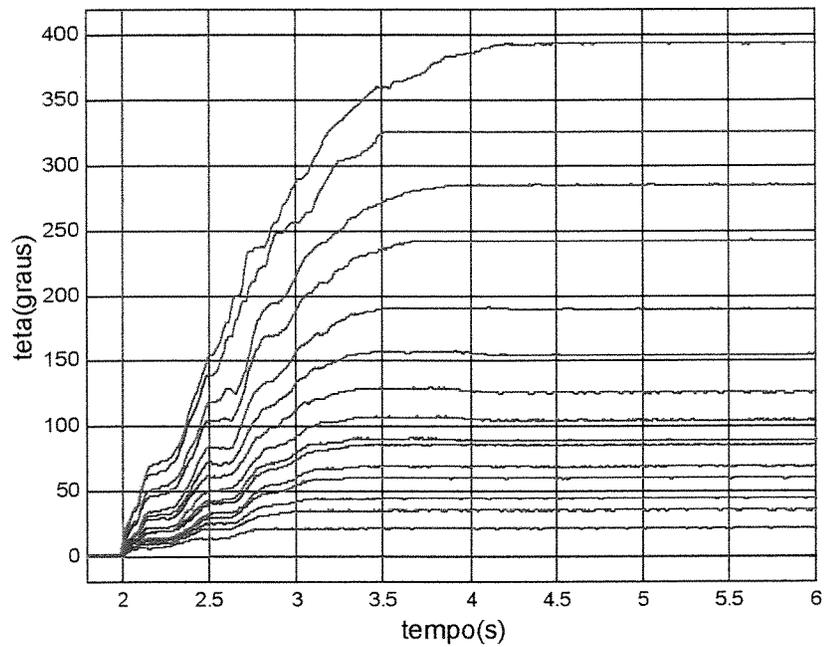
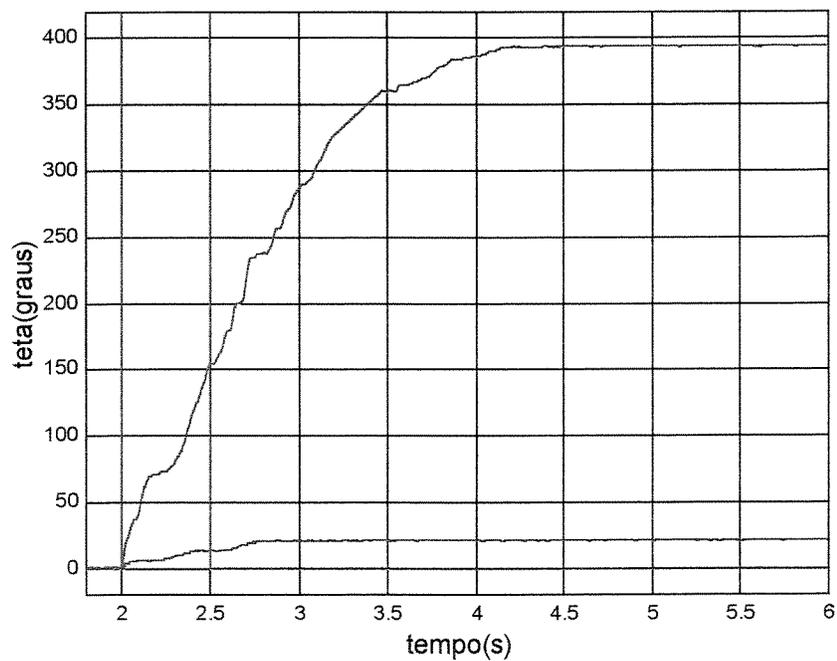


Figura 10.30 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo - (viga5).



10.31 - Deslocamento angular, θ , medido através de um potenciômetro conectado ao eixo de rastreamento, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo - valores extremos (viga5).

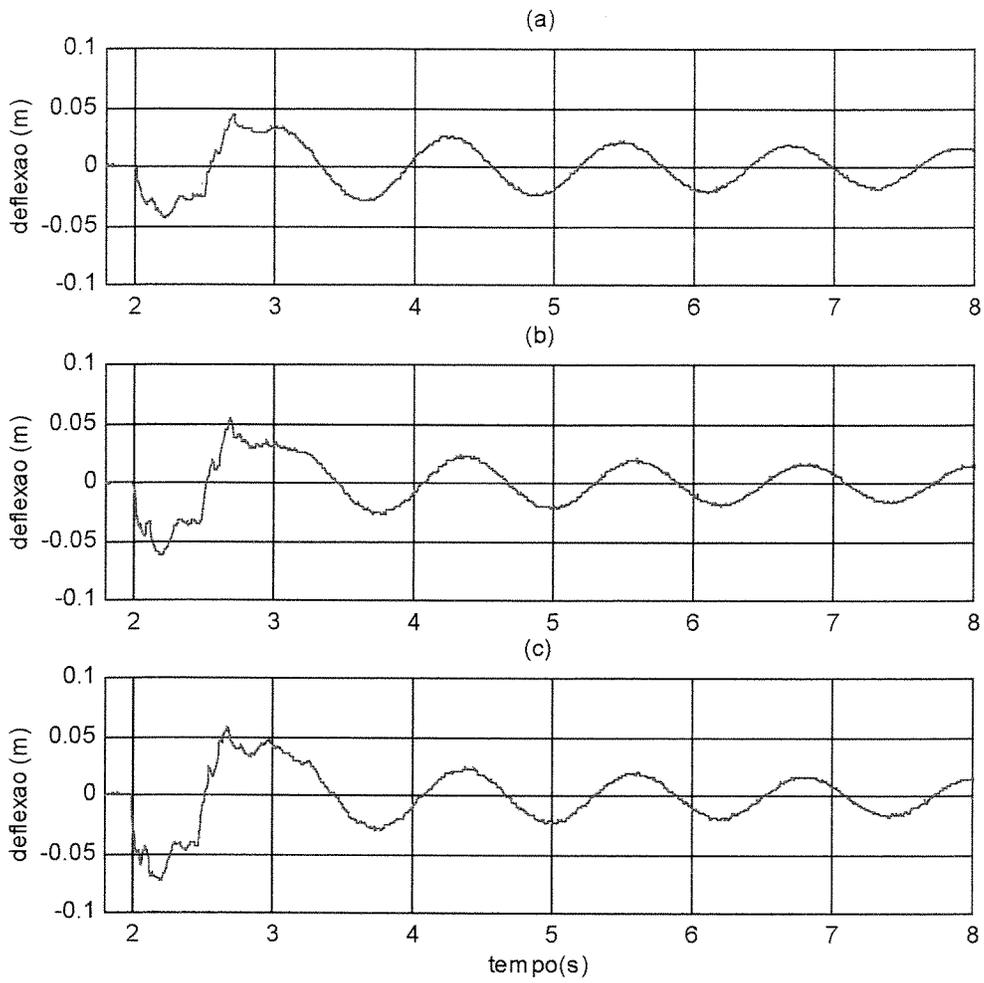


Figura 10.32 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : I).

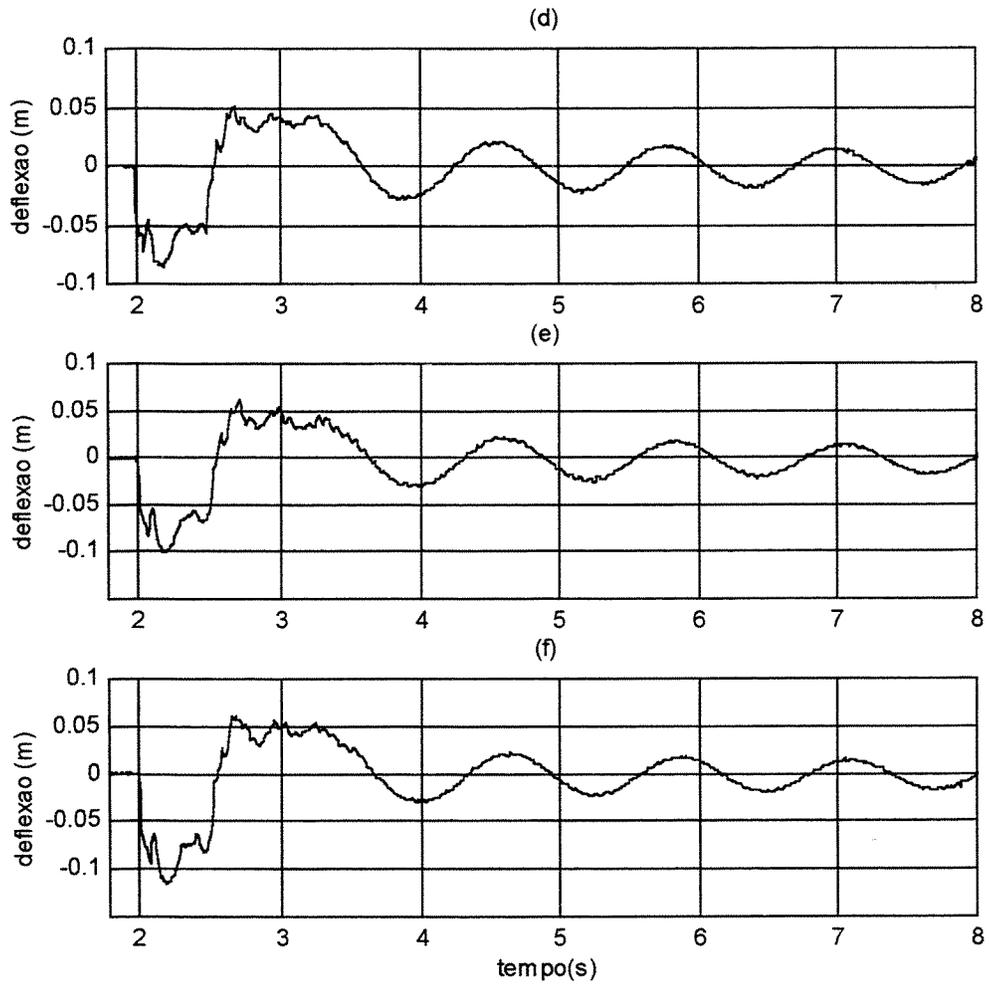


Figura 10.33 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} (viga5 : II).

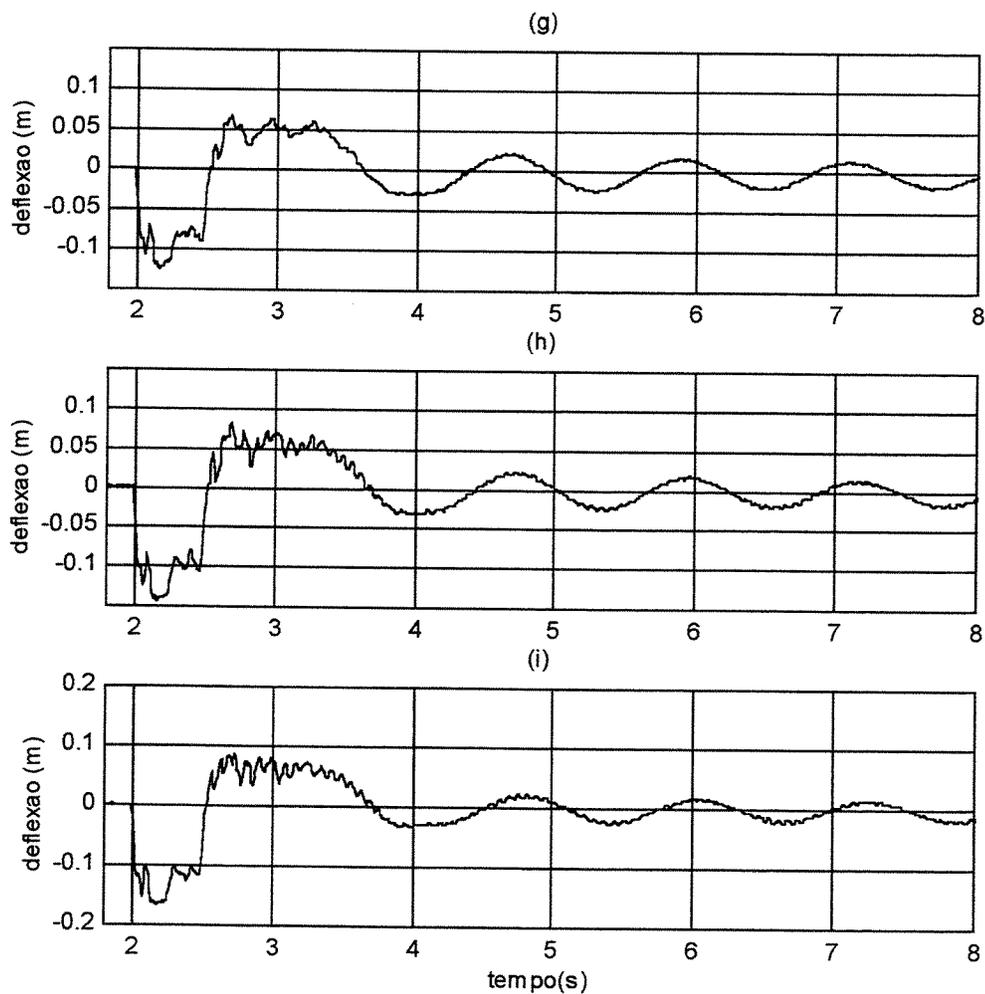


Figura 10.34 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : III).

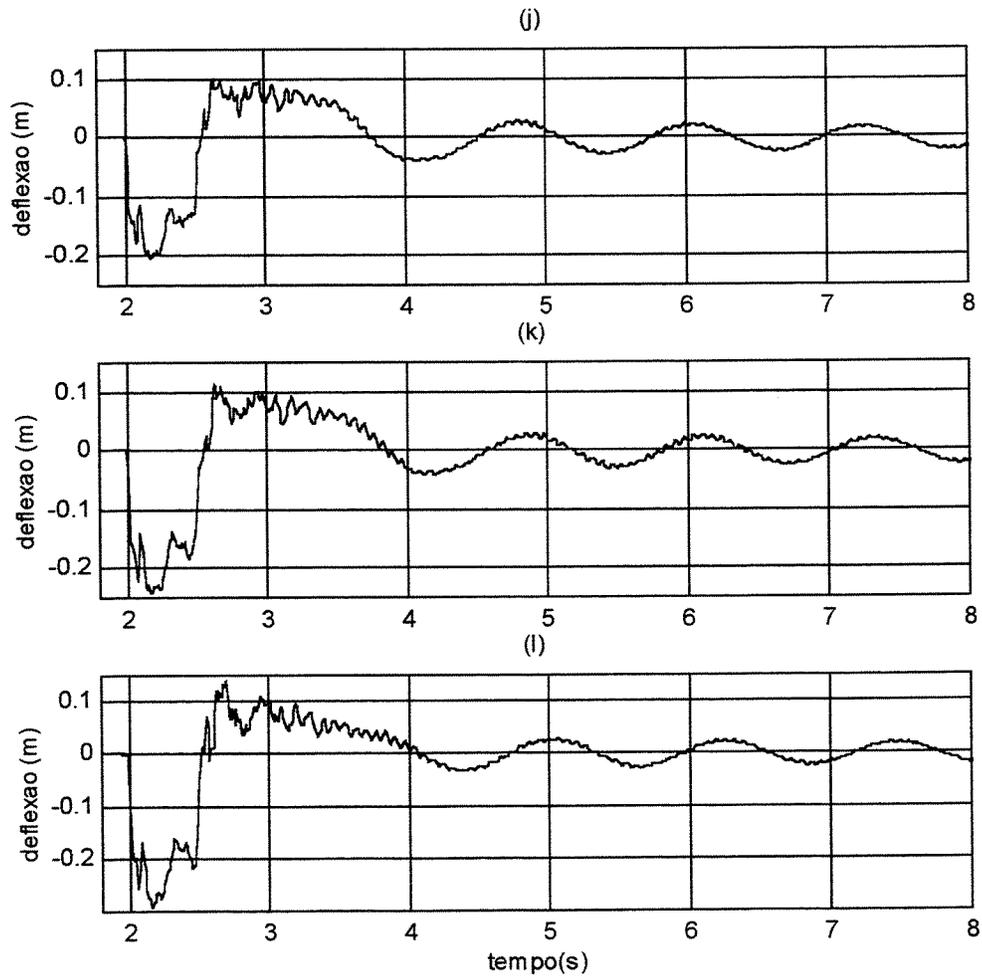


Figura 10.35 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : IV).

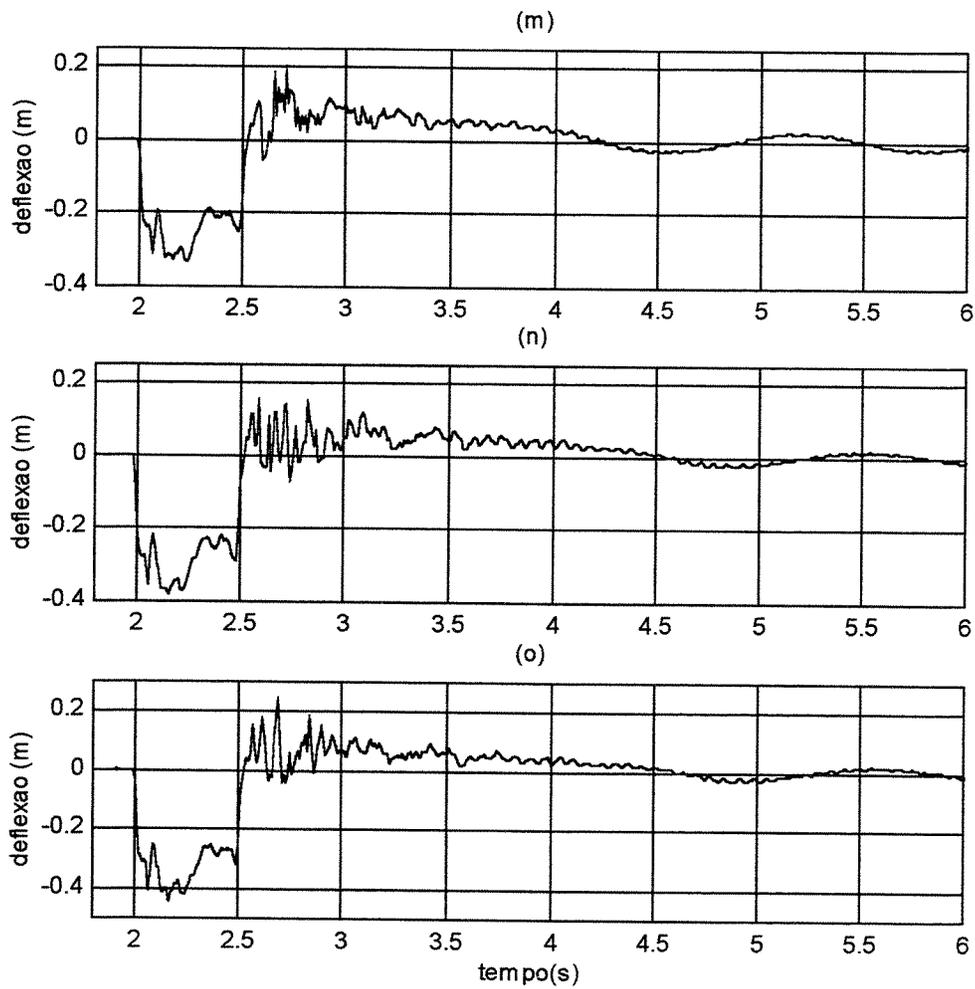


Figura 10.36 - Deflexão medida através de um *strain gage* montado a 3.2 cm da raiz (extremidade conectada ao eixo de rastreamento), para diferentes valores de U_{\max} - (viga5 : V).

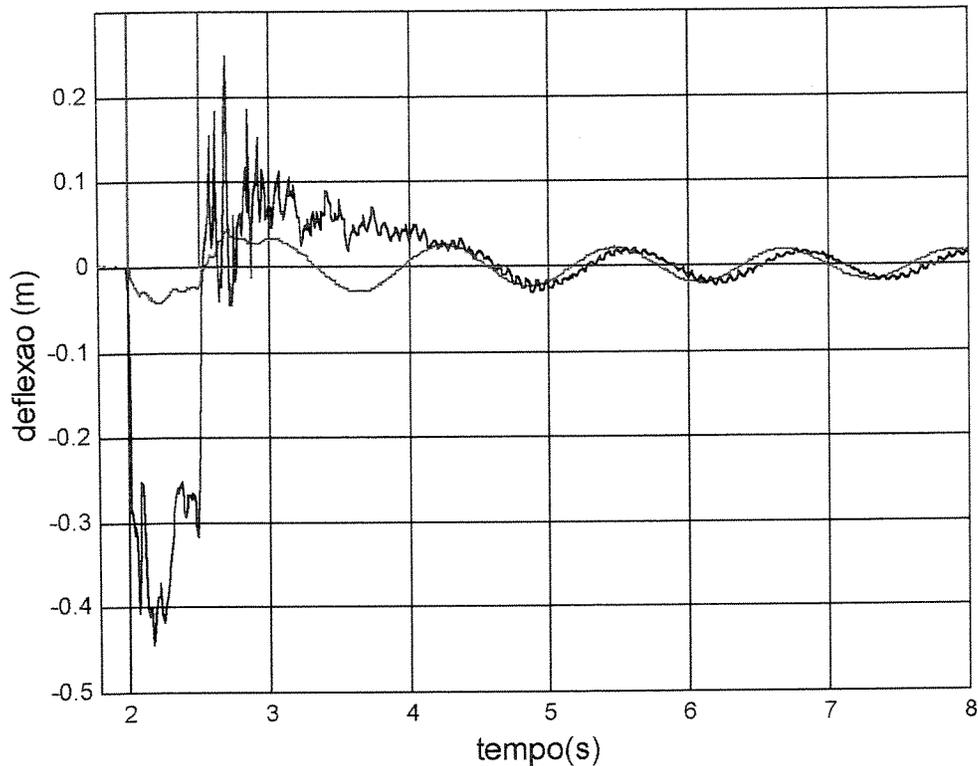


Figura 10.37 - Deflexão total medida através de um *strain-gage* conectado à extremidade livre da viga, para diferentes valores de U_{max} : gráfico comparativo - valores extremos (viga5).

10.3 - Comparações entre diferentes vigas

A influência do comportamento dinâmico de cada uma das vigas sobre o comportamento dinâmico do eixo de rastreamento (ou eixo do motor) pode ser verificada através das Figuras 10.38 e 10.39 em comparação com o comportamento dinâmico do eixo de rastreamento sem que nenhuma das vigas seja conectada ao mesmo (eixo livre). A linha vermelha que aparece nestas figuras demarca as instâncias nas quais a excitação nos terminais do motor (tensão elétrica, U) ora assume um valor máximo ora vale zero.

Para uma mesma viga, uma maior velocidade de rastreamento implica em uma maior alteração no perfil do deslocamento angular, θ , demonstrando uma maior interação entre o

atuador e a estrutura. Para diferentes vigas, uma maior velocidade de rastreamento associada a uma maior inércia implica em uma maior alteração no perfil de θ .

Em velocidades altas ou baixas, sob as condições estudadas, o deslocamento angular do eixo de rastreamento persiste por algum tempo após a excitação nos terminais do motor cessar. A inércia da viga passa a conduzir o eixo até o momento em que um valor limite para θ é atingido (a troca de energia entre o atuador e a estrutura cessa) e tanto a "vibração livre" da viga quanto o deslocamento angular do eixo de rastreamento cessam.

As maiores interações entre a viga e o eixo de rastreamento, para as mesmas condições de operação, ocorre, mesmo para pequenos deslocamentos angulares, com a viga 5, conforme pode ser observado nas Figuras 10.38 e 10.39. Comparativamente, por ser também a mais flexível de todas, é a que apresenta as maiores deflexões.

A viga 4, de maior inércia de rotação em torno do eixo de rastreamento, faz com que este mesmo eixo demore mais para parar, arrastando-o por muito mais tempo após a tensão elétrica no motor cessar. Por ser a maior carga no motor, é também a viga com menor deslocamento angular.

A curva (a) nas Figuras 10.38 e 10.39, representativa do deslocamento angular do eixo de rastreamento sem a carga de qualquer uma das vigas, mostra que o movimento de rotação deste eixo cessa no momento em que a tensão elétrica nos terminais do motor se anula (a inércia do motor mais a do eixo de conexão motor-viga não são suficientemente grandes para conduzir o eixo). A curva (b), referente à viga 1, de menor inércia de rotação em torno do eixo de rastreamento, sob as condições que são apresentadas nestas figuras, é a que apresenta o comportamento dinâmico do eixo do motor mais próximo ao comportamento dinâmico do eixo do motor livre. Contudo, aumentando a velocidade angular da viga 1, a influência sobre o eixo de rastreamento aumenta, como pode ser observado pela Figura 10.2.

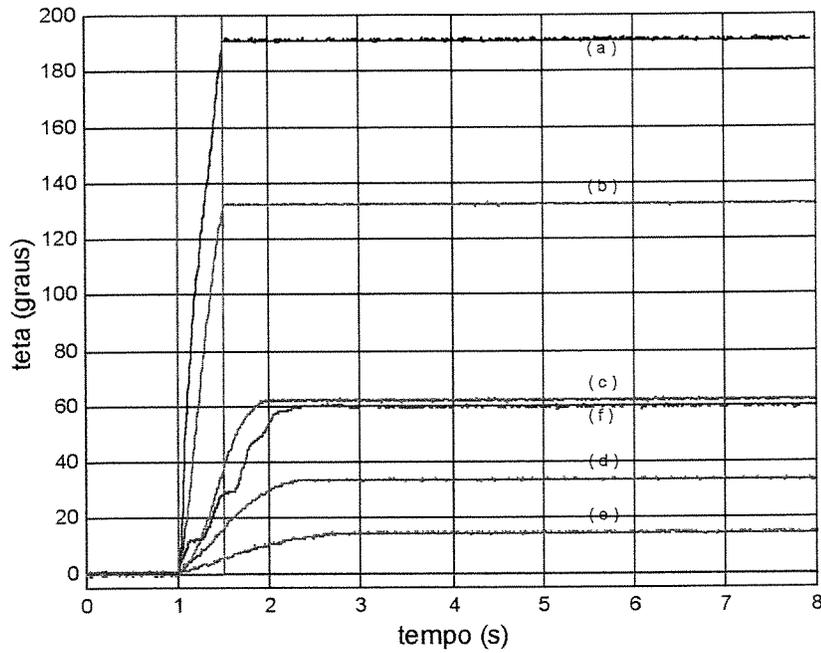


Figura 10.38 - Influências sobre o parâmetro θ - comparação entre diferentes vigas e eixo de rastreamento sem viga conectada : (a) sem viga ; (b) viga 1 ; (c) viga 2 ; (d) viga 3 ; (e) viga 4 ; (f) viga 5 - (azul : alumínio ; magenta : aço ; $U_{\max} \cong 2.30 \text{ V}$).

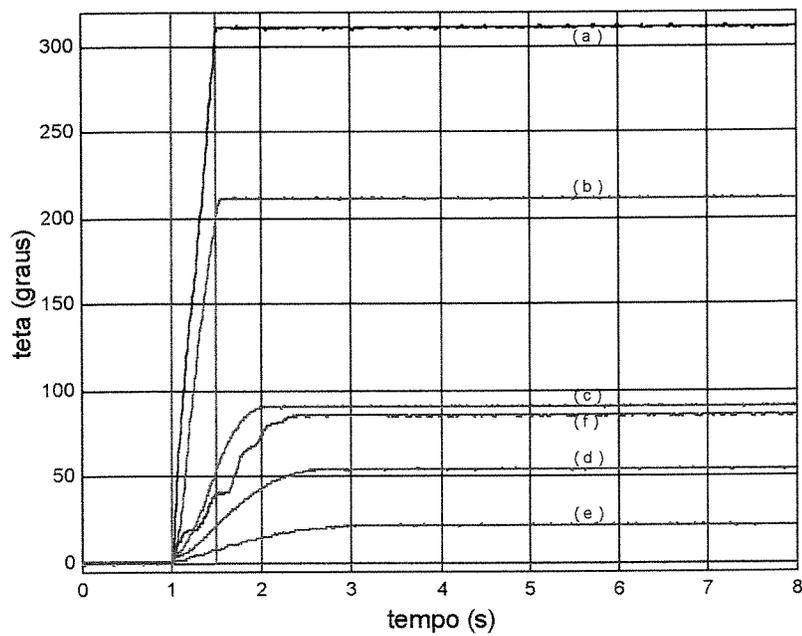


Figura 10.39 - Influências sobre o parâmetro θ - comparação entre diferentes vigas e eixo de rastreamento sem viga conectada : (a) sem viga ; (b) viga 1 ; (c) viga 2 ; (d) viga 3 ; (e) viga 4 ; (f) viga 5 - (azul : alumínio ; magenta : aço ; $U_{\max} \cong 3.00 \text{ V}$).

10.4 - Vibração livre das vigas e condições de contorno

Através das Figuras 10.40 a 10.45, pode-se construir a Tabela 10.3 a seguir. Os valores na segunda coluna desta tabela representam os valores do maior pico em cada FFT. Devido ao pequeno intervalo aonde $U \neq 0$ (0.5 segundos) e a precisão utilizada na captura dos dados experimentais (um ponto a cada 0.01 segundos), torna-se praticamente impossível concluir algo neste intervalo. Pela mesma razão, dificilmente pode-se concluir algo acerca de picos de frequência com relação aos dados associados à vibração livre da viga 1, cuja taxa de amostragem deveria, para tal, ser inferior a 0.0025s.

	Frequência (experimental) - vibração livre : primeiro modo (rad/s)	Frequência (teórica) para a vibração da viga engastada-livre: primeiro modo (rad/s)
viga 1	impossível avaliar	414.7226
	impossível avaliar	
	impossível avaliar	
viga 2	173.7731	46.0802
	175.5124	
	174.4432	
viga 3	80.2806	20.4801
	80.9388	
	81.0998	
	80.8889	
viga 4	33.9632	8.4637
	33.5103	
	33.3768	
	33.5316	
	33.7460	
	33.8961	
	34.0508	

viga 5	5.0265	5.5597
	5.1927	
	4.9216	
	4.6485	
	5.3055	
	4.6031	
	4.4880	
	4.7720	
	4.8332	
	4.7902	
	4.7720	
	5.5324	
	5.5116	
	5.0739	
	5.0333	

Tabela 10.3 - Frequências da vibração livre das vigas experimentais a partir do instante em que a tensão elétrica no motor, U, torna-se nula contra as frequências teóricas para a viga engastada-livre (primeiro modo).

A Tabela 10.3 corrobora o fato de a abordagem engastada-livre não ser um bom modelo matemático para as vigas experimentais utilizadas neste trabalho. De acordo com esta tabela, a frequência natural experimental do primeiro modo para as vigas 2, 3 e 4 é, em média, aproximadamente quatro vezes aquela calculada teoricamente considerando essa mesma condição de contorno. Para a viga 1 é impossível estabelecer qualquer comparação, conforme observado anteriormente. Para a viga 5 observa-se que a frequência natural experimental do primeiro modo é, em média, aproximadamente 0.9 vezes aquela calculada teoricamente, sendo a que mais se aproxima do valor teórico para esta condição de contorno. A frequência natural teórica do segundo modo é apresentada na Tabela 10.4. Na mesma Tabela 10.4 são apresentadas a primeira e segunda frequências naturais teóricas para a condição de contorno pinada-livre.

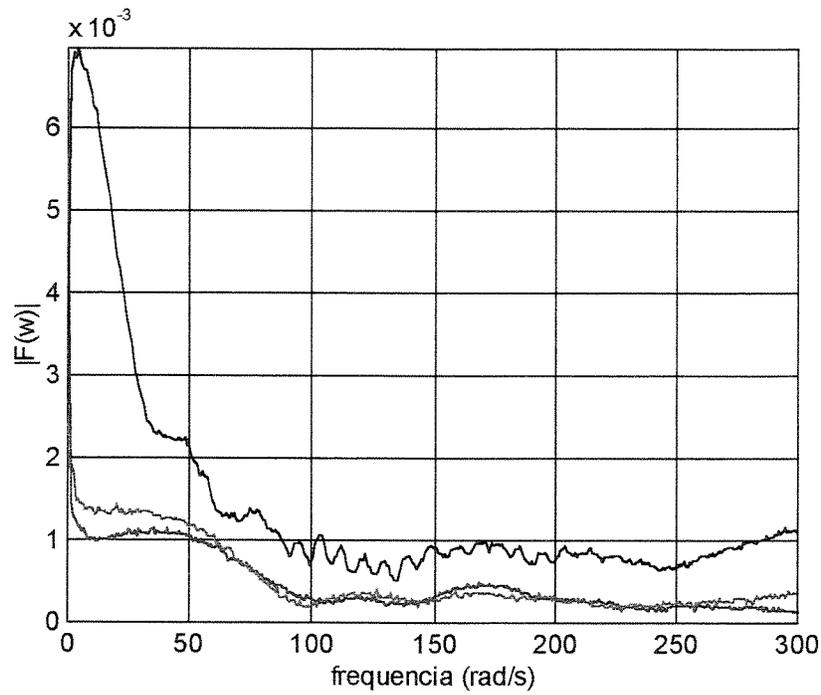


Figura 10.40 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 1 - vermelho : associado à figura 10.3 (a) ; azul : associado à figura 10.3 (b) ; preto: associado à figura 10.3 (c).

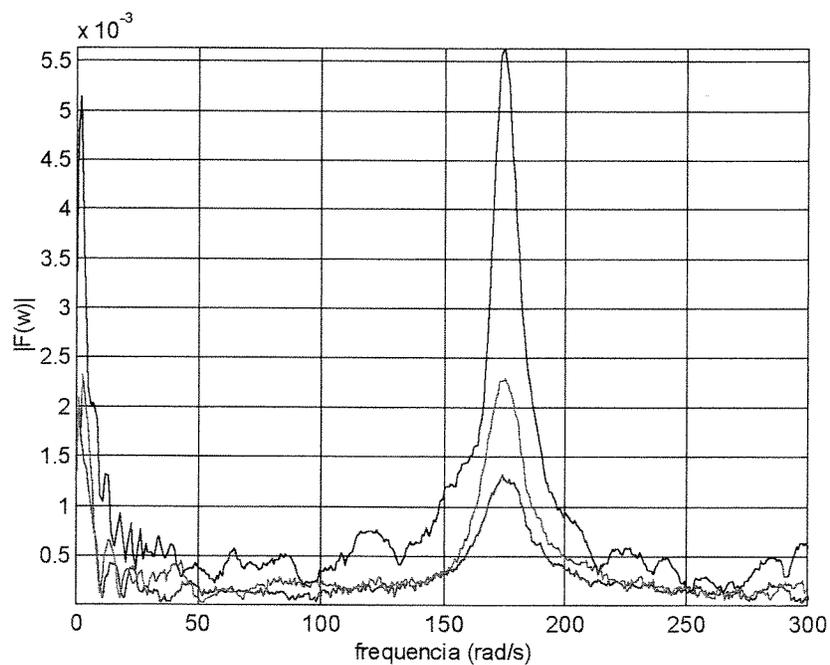


Figura 10.41 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 2 - vermelho : associado à figura 10.7 (a) ; azul : associado à figura 10.7 (b) ; preto: associado à figura 10.7 (c).

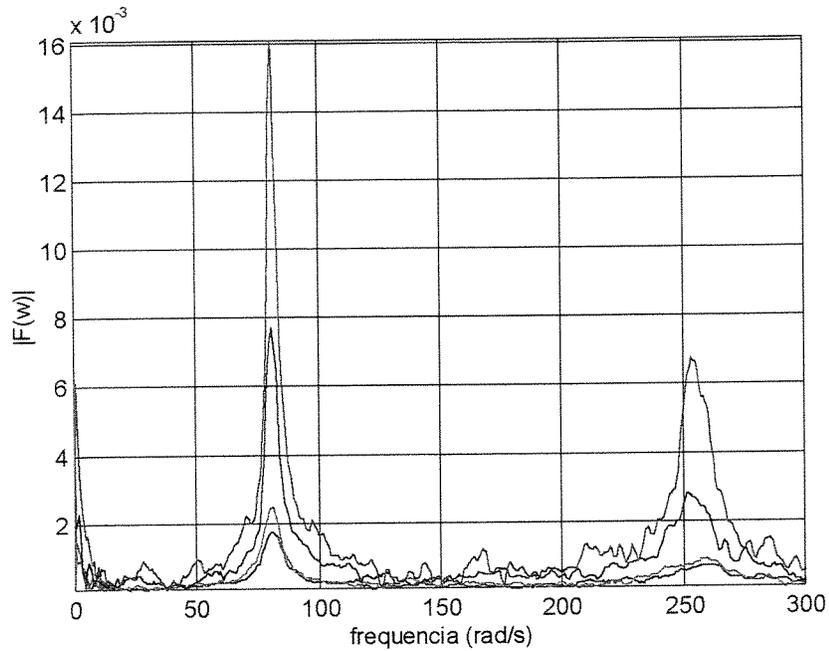


Figura 10.42 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 3 - vermelho : associado à figura 10.12 (a) ; azul : associado à figura 10.12 (b) ; preto: associado à figura 10.12 (c) ; magenta : associado à figura 10.13 (d).

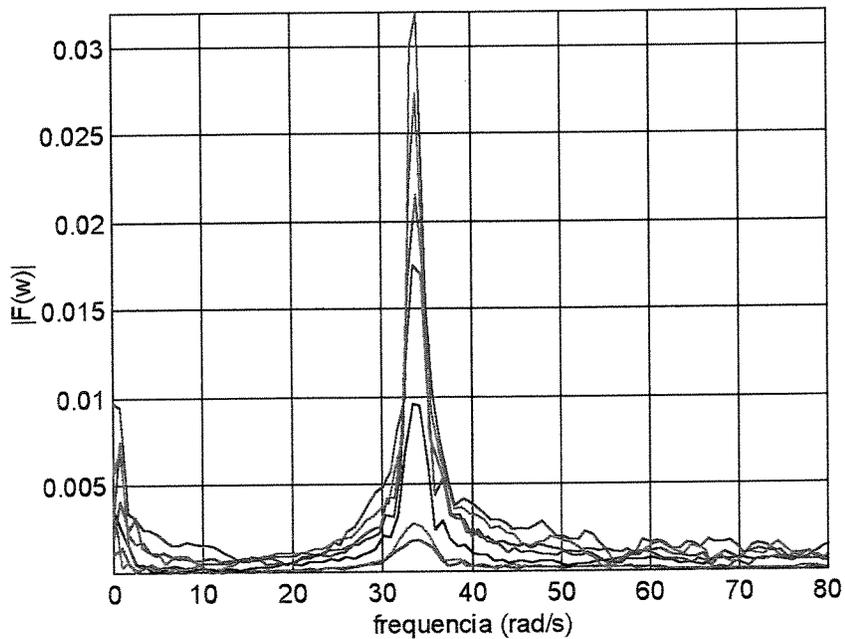


Figura 10.43 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 4 - vermelho : associado à figura 10.20 (a) ; azul : associado à figura 10.20 (b) ; preto: associado à figura 10.20 (c) ; magenta : associado à figura 10.21 (d) ; vermelho (...) : associado à figura 10.21 (e) ; azul (...) : associado à figura 10.21 (f) ; magenta (...) : associado à figura 10.22 (g).

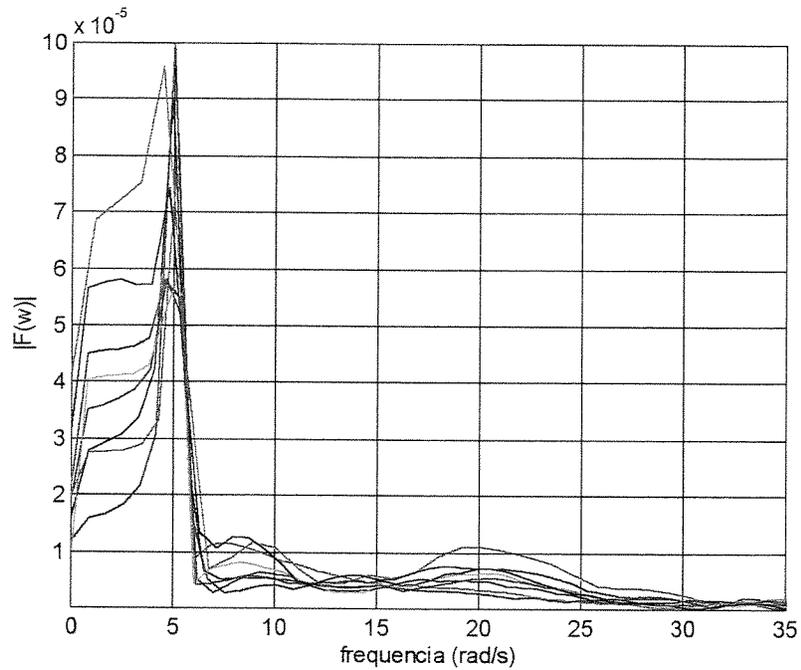


Figura 10.44 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 5 (I) - vermelho : associado à figura 10.31 (a) ; azul : associado à figura 10.31 (b) ; preto: associado à figura 10.31 (c) ; magenta : associado à figura 10.32 (d) ; azul claro : associado à figura 10.32 (e) ; vermelho (...) : associado à figura 10.32 (f) ; azul (...) : associado à figura 10.33 (g) ; preto (...) : associado à figura 10.33 (h).

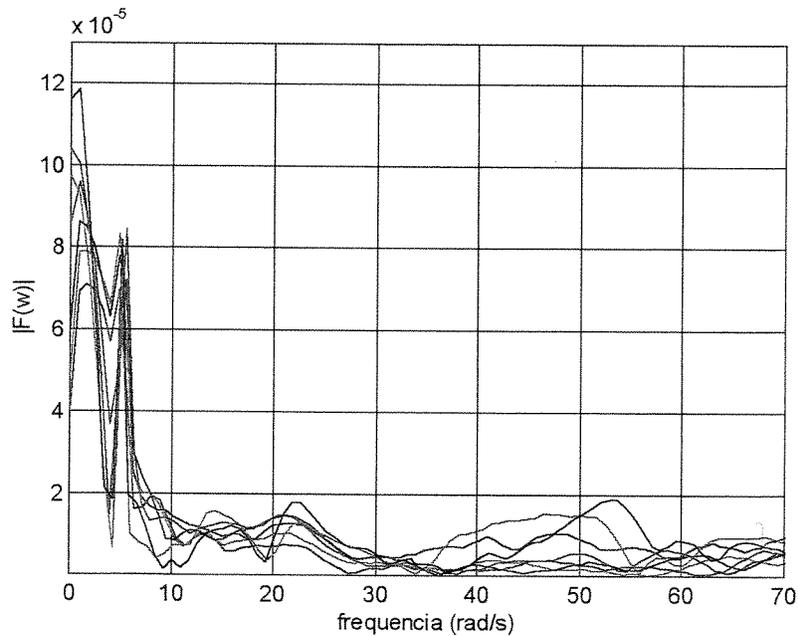


Figura 10.45 - FFT para o sinal associado à vibração livre da viga 5 (II) - vermelho : associado à figura 10.33 (i) ; azul : associado à figura 10.34 (j) ; preto: associado à figura 10.34 (k) ; magenta : associado à figura 10.34 (l) ; vermelho (...) : associado à figura 10.35 (m) ; azul (...) : associado à figura 10.35 (n) ; preto (...) : associado à figura 10.35 (o) .

	freqüência natural teórica : primeiro modo - pinada-livre (rad/s)	freqüência natural teórica : segundo modo - pinada-livre (rad/s)	freqüência natural teórica : segundo modo - engastada-livre (rad/s)
viga 1	1813.0084	5875.3442	2591.0224
viga 2	201.4453	652.8160	287.8914
viga 3	89.5312	290.1404	127.9517
viga 4	37.0001	119.9049	52.8780
viga 5	24.3047	78.7634	34.7346

Tabela 10.4 - Freqüência natural teórica do primeiro e segundo modos para a condição de contorno pinada-livre e freqüência natural teórica do segundo modo para a condição de contorno engastada-livre.

De acordo com as tabelas 10.3 e 10.4, a freqüência natural teórica do primeiro modo (de flexão) que mais se ajusta à freqüência natural experimental do mesmo modo é aquela obtida através da abordagem teórica pinada-livre para as vigas 2,3 e 4. Para a viga 1, conforme mencionado anteriormente, é impossível esboçar qualquer comentário nesse sentido.

O fato de a freqüência natural experimental da viga 5 apresentar-se próxima da freqüência natural teórica para a condição engastada-livre (e não da freqüência natural teórica para a condição pinada-livre, como as demais vigas) apesar de sua inércia de corpo rígido ser maior que a inércia do motor + eixo de conexão indica que talvez este critério das inércias não seja o único (como propõe, por exemplo : Garcia, 1989 e Garcia, 1991) a ser considerado na escolha do modelo mais representativo para o acoplamento entre o eixo de rastreamento e a estrutura tipo viga. Esta questão será melhor investigada em trabalhos futuros.

A condição de contorno pinada-livre é utilizada por alguns autores na modelagem de estruturas flexíveis tipo viga (como, por exemplo, Leckar et al., 1999 ; Garcia, 1989 ; Rossi, 1996), e algumas considerações feitas no modelo geométrico diferem daquelas tratadas neste trabalho.

O segundo modo participa da "vibração livre" mais significativamente em alguns casos, como acontece de forma bem clara nos testes realizados com a viga 3. O seu valor obtido através de dados experimentais (via FFT), novamente parece estar mais próximo do valor teórico para

o modelo pinado-livre (para a viga 3, a frequência natural do segundo modo experimental surge em torno de 250 rad/s, conforme mostra a Figura 10.42). No caso da viga 3, a importância do segundo modo cresce com a velocidade de rastreamento. Esse fato também pode ser observado nas Figuras 10.12 e 10.13.

Nos casos aonde a inércia de corpo rígido da viga (em torno do eixo de rastreamento) representa a inércia dominante no sistema, existe a possibilidade de uma considerável interação dinâmica entre o motor e a carga em seu eixo. Um sistema de transmissão mecânica entre o motor e a viga pode ser ajustado a fim de minimizar esta interação (Sah et al., 1993). Em alguns casos, porém, esta interação pode ser utilizada para propósitos de controle, uma vez que auxilia no amortecimento da vibração da viga (conforme pode ser verificado no Capítulo 8 para as simulações numéricas envolvendo sistemas não ideais). Em (Garcia, 1989 e Garcia et al., 1990) mostra-se que a interação dinâmica entre um motor e uma estrutura flexível de rastreamento pode auxiliar na supressão de vibrações nesta última.

A principal desvantagem do motor de corrente contínua (como o utilizado neste trabalho) é a relativamente grande inércia do rotor, a qual limita a aceleração do motor. Em muitas aplicações, porém, a inércia da carga (conectada ao eixo do motor), é muito maior que a inércia do rotor (do motor). Nesse caso, a inércia da carga domina e a inércia do rotor tem efeito praticamente desprezível no desempenho da aceleração do eixo do motor (Andeen, 1988).

Dentre as razões que podem ser citadas como responsáveis pelo distanciamento entre as frequências teóricas e experimentais (e, por conseguinte, entre os modelos matemáticos propostos e o sistema real) observado neste trabalho estão os que seguem.

Experimentalmente, a interação atuador-estrutura ocorre de maneira significativa para as vigas utilizadas (ver Tabela 10.1 para relações de inércia). De acordo com (Sah , 1990; Sah et al., 1993), sistemas de rastreamento reais cuja interação motor-viga seja mínima, possuirá um comportamento dinâmico dominado pelas frequências naturais próximas das frequências naturais da viga com condição de contorno engastada-livre enquanto que sistemas deste tipo com consideráveis interações dinâmicas irão apresentar resposta transiente lenta e as frequências

naturais do sistema estarão próximas das freqüências naturais de uma viga com condição de contorno pinada-livre.

Alteração na rigidez da estrutura (Yigit et al., 1988) pode alterar os autovalores de um sistema dinâmico. O efeito geral da presença de não-linearidades na resposta de um sistema dinâmico pode ser no sentido de torná-lo mais rígido (*hardening effect*) ou menos rígido (*softening effect*) dependendo da força relativa das não-linearidades advindas dos termos de curvatura ou dos termos de inércia. Não-linearidades geométricas geralmente produzem efeito de aumento da rigidez da estrutura enquanto não-linearidades associadas a termos de inércia produzem efeitos de diminuição da rigidez (Anderson et al., 1996).

Um fator que pode influenciar na rigidez da estrutura flexível de rastreamento e, portanto, alterar as suas freqüências naturais em relação a um modelo matemático engastado-livre (de uma viga de Euler-Bernoulli, comumente adotado) é o acoplamento entre os deslocamentos longitudinal ($u(x,t)$, conforme referenciado aqui) e transversal ($v(x,t)$, conforme referenciado aqui) para vigas delgadas como resultado da rotação finita desta estrutura (Hsu et al., 1992).

A velocidade de rastreamento também pode alterar a rigidez da estrutura. A velocidade de rotação gera tensões adicionais no interior da viga devido ao desenvolvimento de forças centrífugas, fazendo com que a energia armazenada na viga seja maior que a energia de deformação devido somente à deflexão da estrutura (Hoa, 1979 ; Al-Ansary, 1998 ; Wright et al., 1982). Em (Putter et al., 1978) propõe-se, para pequenos valores da velocidade de rastreamento, correções para a freqüência natural da estrutura flexível mostrando que, quando esta velocidade angular aumenta, aumenta também a rigidez da viga em rotação.

Os modos assumidos utilizados na discretização da variável de deflexão transversal, $v(x,t)$, são funções que satisfazem as condições de contorno geométricas do sistema e não necessariamente são aproximações acuradas das autofunções do mesmo. Os modos assumidos são aproximações acuradas somente para o caso mais simples de viga linear, não amortecida e livre de esforços externos, que não representa nenhum caso tratado neste trabalho.

O uso dos modos próprios da estrutura, procedimento freqüentemente empregado em pesquisas afim, parece ser de pouco valor no caso geral (grandes deslocamentos angulares e

curvaturas) devido à natureza não linear e altamente acoplada das equações semi-discretas (discretas apenas na variável de corpo rígido, θ) resultantes (Simo et al., 1986a,b).

Quando uma estrutura flexível de rastreamento realiza grandes movimentos angulares, θ , uma provável fonte de erros e instabilidades nas simulações numéricas advém da interação entre os movimentos de rotação e a flexibilidade da estrutura (Yoo, 1995). Em (Wright et al., 1985), um método é utilizado para se obter as frequências naturais e os modos próprios para vigas em relativamente grandes movimentos de rotação (para rigidez flexural, EI, e distribuição de massa variando linearmente ao longo da viga).

É possível definir modos normais para sistemas não lineares e extensivo trabalho tem sido desenvolvido para o caso de sistemas com um número finito de graus de liberdade (Rosenberg, 1966). Até recentemente, havia uma lacuna na formulação de modos normais para sistemas não lineares contínuos com "infinitos" graus de liberdade, preenchida por autores como (Boivin et al., 1993 ; Shaw et al., 1992 ; Hsieh et al., 1994 ; King et al., 1993). Nos trabalhos destes autores investiga-se a discretização das equações governantes da viga engastada-livre com não-linearidades geométricas advindas de grandes deformações. Estes autores não consideram a análise de vigas em rotação. A utilização de modos normais definidos para sistemas não lineares é uma alternativa para a discretização dos sistemas de equações diferenciais de "infinitos" graus de liberdade considerados neste trabalho e não será tratada aqui.

Neste trabalho, a utilização de modos assumidos na discretização das equações governantes do movimento apresenta-se como uma primeira aproximação para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento (inclusive contendo não-linearidades geométricas cúbicas e equações acopladas). Em pesquisa futura, outras possibilidades deverão ser verificadas nesse sentido, inclusive a utilização da teoria de modos normais para a discretização de sistemas não lineares.

10.5 - Fotos do experimento

Seguem algumas fotos do experimento desenvolvido no Laboratório de Vibrações Não Lineares do *Engineering Science and Mechanics Department* da *Virginia Polytechnic Institute and State University* localizada em Blacksburg, Virgínia.

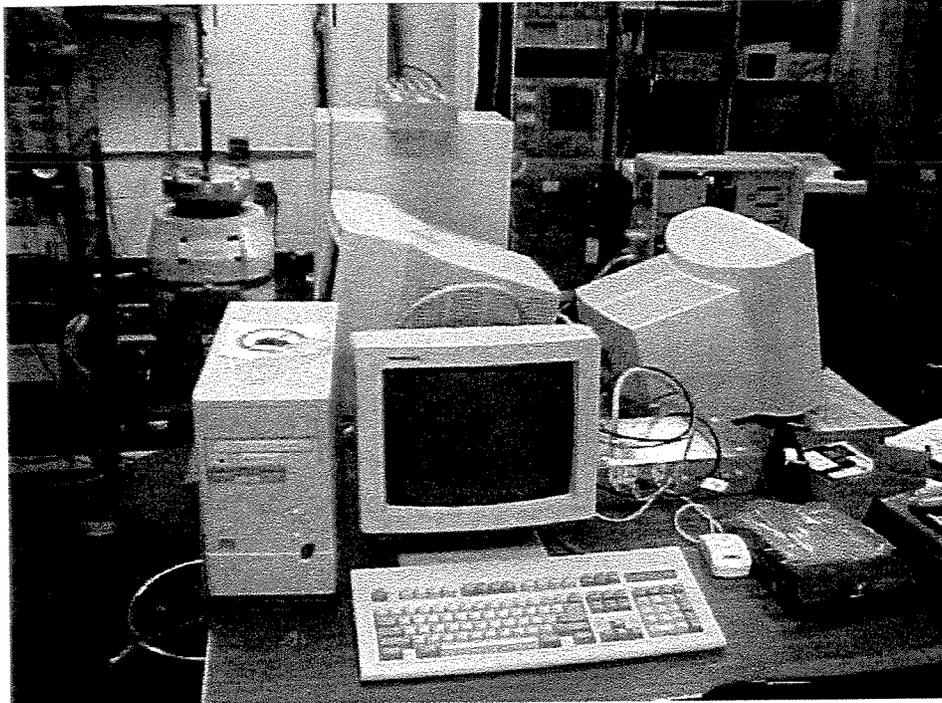


Figura 10.46 - Vista geral dos PCs utilizados no envio e captura de sinais bem como as respectivas placas utilizadas para este fim.

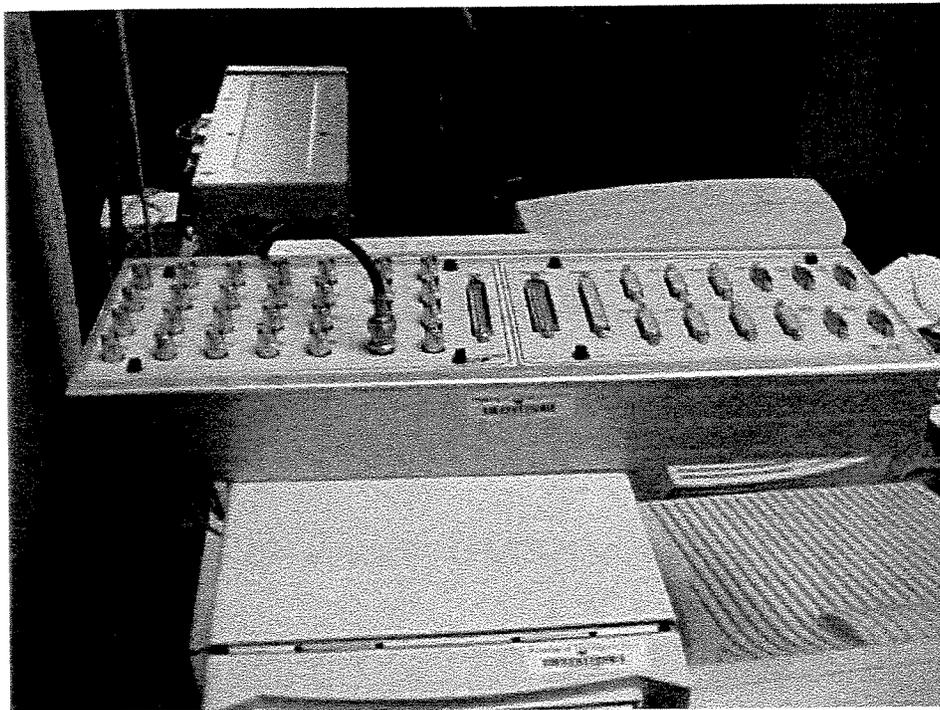


Figura 10.47 - Placa utilizada para o envio de sinais (perfis de tensão elétrica, U) para o motor de corrente contínua (responsável pela geração do movimento de rastreamento). Esta placa está associada ao software *Dspace*, o qual utiliza as facilidades do *Simulink* para a geração de diagramas de blocos cujos terminais são conectados diretamente aos pinos externos mostrados na figura.

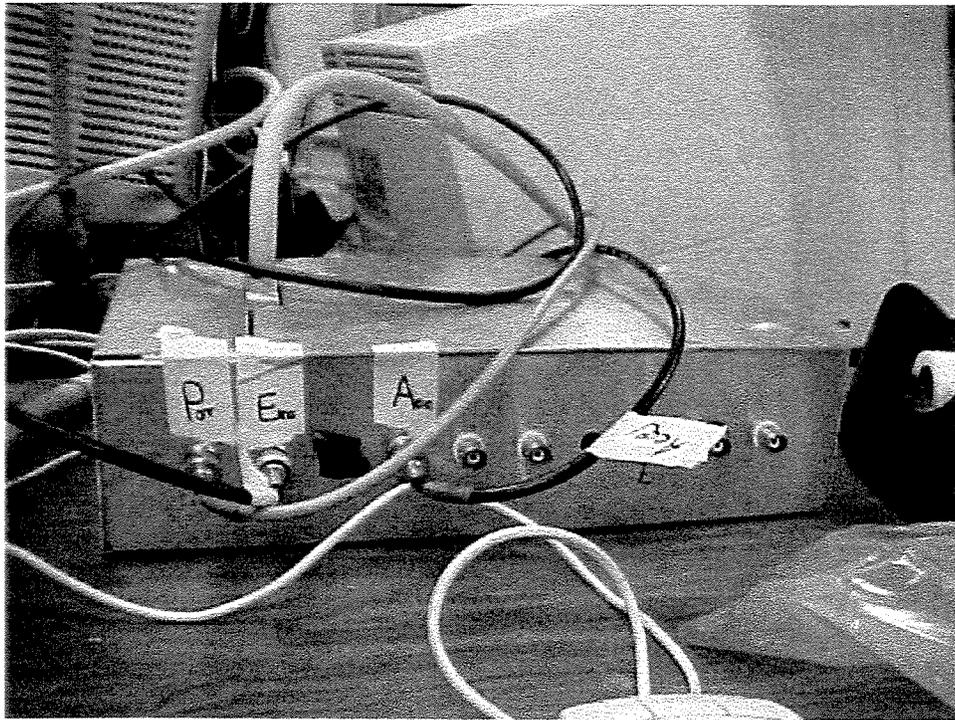


Figura 10.48 - Placa utilizada para a captura de sinais (enviados pelo acelerômetro, pelo potenciômetro e pelo *strain gage*). Esta placa está associada ao software *LabView*, o qual gera arquivos de dados que podem ser facilmente lidos através do *Matlab*.

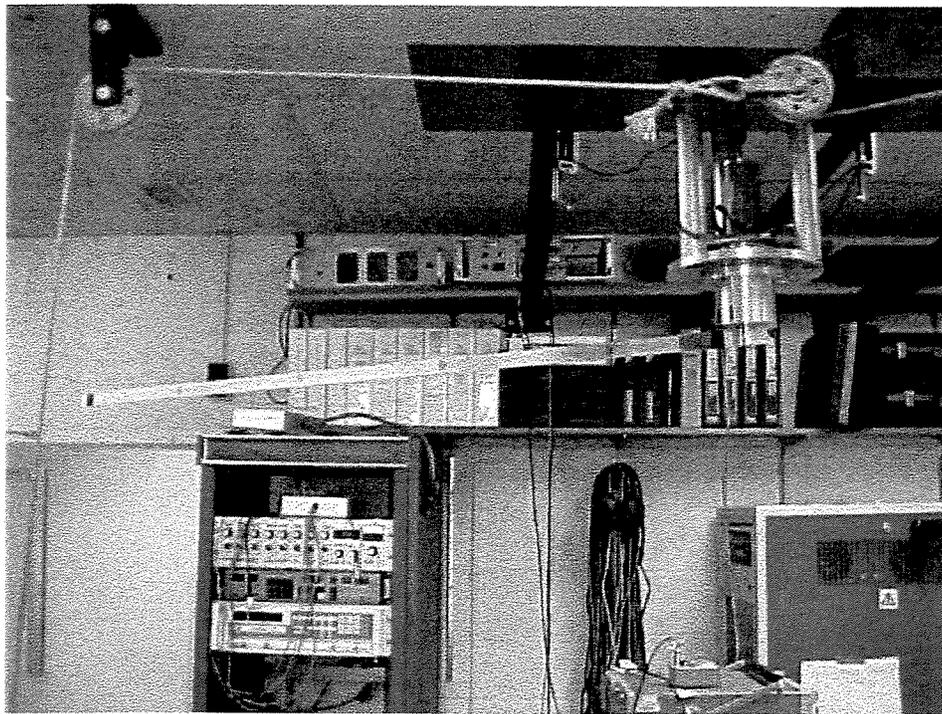


Figura 10.49 - O suporte para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento e uma das vigas de alumínio (1.4 m de comprimento) utilizadas na verificação experimental.

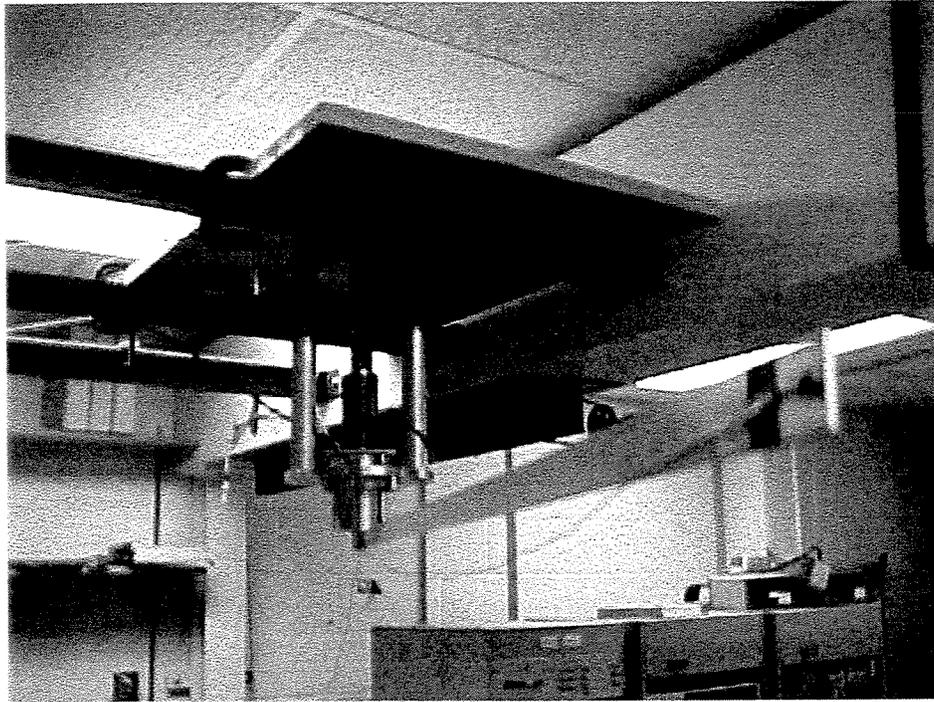


Figura 10.50 - Alocação dos acelerômetros na extremidade livre das vigas. Estes sensores utilizados são extremamente pequenos e leves, razão pela qual sua massa não foi incluída no equacionamento. Para o caso da viga mais flexível (aço) foi utilizado um *strain gage* próximo a raiz.

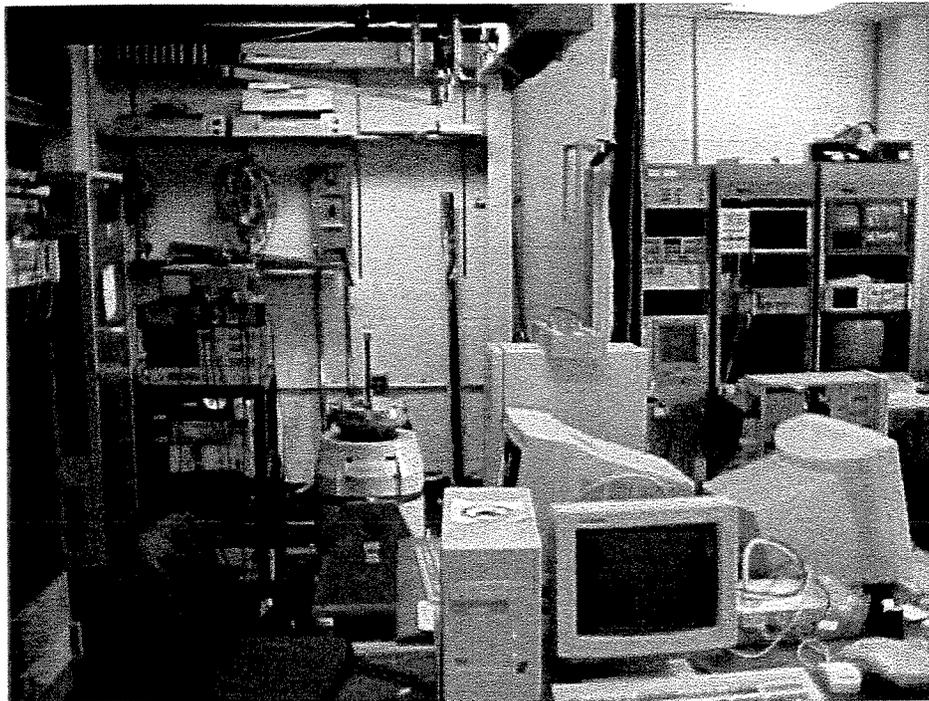


Figura 10.51 - Visão geral do *set-up* experimental (incluindo o amplificador para a placa do *Dspace*, osciloscópio para verificação dos sinais enviados e fonte de potência para o potenciômetro).

Capítulo 11

Conclusões e trabalhos futuros

11.1 - Conclusões

As maiores contribuições deste trabalho são :

- a) - A modelagem matemática de estruturas flexíveis de rastreamento apresentando grandes curvaturas (não linearidades geométricas até ordem três) - Capítulos 3 e 8 ;
- b) - O início dos trabalhos de obtenção da solução analítica aproximada para as equações governantes do movimento perturbadas para estruturas flexíveis de rastreamento não lineares (utilizando o modelo matemático desenvolvido no Capítulo 3) - Capítulos 5 e 7 ;
- c) - Apresentação de um método de ajuste de modelo para um motor de corrente contínua através da identificação de alguns de seus parâmetros - Capítulo 9.

A modelagem desenvolvida neste trabalho pretende ser a mais geral possível no tratamento de estruturas flexíveis de rastreamento. Os resultados obtidos aqui podem ser utilizados como base para a compreensão de uma classe de problemas correlatos. Ao longo de todo o trabalho, a estrutura utilizada para representar uma estrutura flexível de rastreamento foi a viga (do tipo Euler-Bernouli). Uma boa compreensão acerca de alguns sistemas dinâmicos (tais como manipuladores robóticos leves e delgados, estruturas aeroespaciais, ...) e uma primeira

compreensão acerca de outros (tais como painéis solares de satélites, pás de helicópteros,...) pode ser empreendida. Matematicamente, pode-se trabalhar com uma variedade de características não lineares, dependendo dos requerimentos da aplicação em particular.

Este trabalho apresenta quatro diferentes modelos matemáticos para o sistema dinâmico estrutura flexível de rastreamento (sdefr), aqui tratado apresentando apenas um membro. A diferença entre os modelos versa sobre diferentes abordagens para a curvatura do membro flexível e diferentes interações com a fonte de potência (atuador). São esses modelos : curvatura linear e ideal, curvatura linear e não ideal, curvatura não linear e ideal e curvatura não linear e não ideal.

Dois modelos com diferentes graus de complexidade foram desenvolvidos para a curvatura da estrutura tipo viga (idealizada como estrutura flexível) e dois modelos foram propostos para a interação desta estrutura com o atuador (motor de corrente contínua). O sdefr ideal é o comumente encontrado na literatura. O caso não ideal torna a análise desses sistemas muito mais complexa devido ao fato da excitação sobre a estrutura flexível (deslocamento angular do eixo de rastreamento e suas derivadas temporais) não ser conhecida e, portanto, impossível de ser prescrita. As equações da fonte de excitação (motor de corrente contínua) devem ser integradas juntamente com as equações da viga. O motor é excitado por um perfil conhecido de tensão elétrica. Este último irá, portanto, excitar indiretamente a carga do motor.

O controle desses sistemas dinâmicos representa um desafio em constante pesquisa e está intrinsecamente associado aos modelos matemáticos desenvolvidos para tais sistemas (como acontece com a teoria de controle de uma forma geral). Pretendeu-se, com este trabalho, construir uma base sólida para a modelagem desses sistemas e ao mesmo tempo gerar modelos confiáveis para futura inclusão dos mesmos em malhas de controle.

Qual o melhor modelo para a curvatura da estrutura flexível ? Duas condições foram verificadas : suficientemente baixas velocidades de rastreamento (da ordem de 0.1 rad/s) e suficientemente altas velocidades de rastreamento (da ordem de 0.7 rad/s).

Sob baixas velocidades de rastreamento, ambos os modelos de curvatura (linear e não linear) apresentam os mesmos resultados, não importando se ideal ou não ideal (os casos ideal e

não ideal com resultados diferentes entre si). Uma vez que o modelo matemático para curvatura não linear é muito mais complexo que o modelo matemático para curvatura linear, torna-se mais racional trabalhar com o modelo mais simples. Para velocidades extremamente baixas, a curvatura da viga será negligenciável e a mesma se comportará como um corpo rígido.

Sob altas velocidades de rastreamento, a escolha do modelo correto para a curvatura da estrutura flexível torna-se crucial. A velocidade de rastreamento possui forte influência sobre os termos não lineares. As equações governantes para as variáveis modais da estrutura são acopladas entre si (e com as equações do motor para o caso não ideal). Sob condições de altas velocidades, a frequência com que a viga oscila aumenta (a estrutura flexível torna-se mais rígida), ao contrário do resultado verificado sob as mesmas condições utilizando-se o modelo de curvatura linear (o mesmo acontece tanto para o caso ideal quanto para o caso não ideal).

Para cada um dos modelos de curvatura propostos, verifica-se que a "não-idealidade" do sistema dinâmico age no sentido de amortecer as vibrações advindas da estrutura flexível. Quando é permitido à estrutura flexível interagir com o eixo do motor (eixo de rastreamento), energia pode fluir de um sub-sistema para o outro. Esta característica observada aqui consiste em valiosa informação a ser utilizada posteriormente no projeto do sistema de controle de tais estruturas.

Segundo o modelo de curvatura linear, não importando a velocidade de rastreamento, mostra-se que o número de modos não afeta a resposta do sistema (obtida numericamente). A expansão através de três modos (de deflexão) foi verificada para este modelo. Para o caso de curvatura não linear, o número de modos mostrou-se crucial para o caso de altas velocidades de rastreamento, uma vez que as equações modais estão acopladas e fortemente influenciadas pela velocidade angular do motor (ou velocidade de rastreamento). No entanto, a complexidade das equações obtidas para este caso limita o número de modos a ser considerado no modelo matemático. Apenas a influência dos dois primeiros modos (de deflexão) foi verificada.

Soluções numéricas e analíticas são apresentadas.

Para a solução numérica foi utilizado um integrador do tipo previsor-corretor.

Optou-se por buscar uma solução analítica para os modelos propostos utilizando-se técnicas de perturbação. Para este fim, o sistema não perturbado é resolvido para duas situações : amortecimento estrutural (da viga) da ordem dos termos lineares e amortecimento estrutural da viga da ordem dos termos não lineares (perturbação em torno do sistema linear conhecido). Mostra-se que, para o caso de sistemas ideais (curvatura linear e curvatura não linear), o amortecimento deve ser da ordem das não-linearidades, sob o risco de mascarar o efeito das não-linearidades iminentes ao sistema.

Para o caso ideal, o método das múltiplas escalas foi utilizado. Para o caso não ideal (curvatura linear), a expansão direta (*straightforward expansion*) foi utilizada, uma vez que a simulação numérica comprovou a não existência de termos seculares nas respostas do sistema (nas condições estudadas).

Para o caso não ideal a análise foi apenas iniciada neste trabalho.

Na parte experimental deste trabalho um protótipo para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento foi projetado, construído e testado. A identificação dos parâmetros do motor de corrente contínua utilizado no protótipo resultou em um novo modelo para o atrito interno no motor. O novo modelo representa fielmente o sistema físico (real).

Embora não houvesse possibilidades de comprovar os modelos aqui apresentados através desse protótipo, informações acerca do comportamento real destes sistemas puderam ser verificadas.

Através da montagem experimental, notou-se a importância da relação de inércias entre a viga e o atuador para o modelo matemático da viga. Esta relação irá definir o tipo de contato da viga com o eixo de rastreamento (engastada-livre ou pinada-livre).

11.2 - Trabalhos futuros

Longe de ser um trabalho fechado em si próprio, este se apresenta como um primeiro passo em um longo caminho. Devido a sua complexidade e inúmeras ramificações, alguns itens são aqui apresentados como pesquisas futuras :

1 - Verificação do modelo completo para a estrutura flexível de rastreamento considerando o novo modelo matemático para o motor de corrente contínua identificado experimentalmente. Este modelo (sem cargas (vigas) conectadas ao eixo de rastreamento) possui não linearidades quadráticas e verifica o comportamento do motor real.

2 - Solução analítica para o caso de curvatura não linear e não ideal utilizando técnicas de perturbação (expansão direta) e seguindo as mesmas idéias apresentadas aqui.

3 - Solução das equações governantes do movimento sem utilizar o método dos modos assumidos (uma aproximação para o comportamento espacial de sistemas contínuos) e técnicas de perturbação (uma aproximação para sistemas fortemente não lineares, tornando-os fracamente não lineares). A idéia aqui seria a de se tentar resolver as equações diferenciais parciais diretamente (analítica e numericamente). Para alguns casos em particular, a solução desenvolvida anteriormente (para o sistema perturbado) poderá servir como referência.

4 - Estudo de técnicas de controle utilizando os modelos aqui apresentados. Várias técnicas poderão ser estudadas e comparadas entre si, levando-se em consideração a complexidade dos modelos matemáticos (curvatura não linear e sistemas não ideais) aqui apresentados.

5 - Modelagem de estruturas flexíveis de rastreamento (tipo manipuladores robóticos) manuseando cargas na extremidade livre.

6 - Modelagem de estruturas flexíveis de rastreamento (tipo painéis solares de satélites) como placas finas. Aqui estariam inclusos efeitos como torção.

7 - Verificação experimental dos modelos propostos neste trabalho (utilização de vigas experimentais com inércia de rotação em torno do eixo de rastreamento menor que a inércia do motor). Simulações adicionais com carga na extremidade livre das vigas.

8 - Alterações no protótipo original propiciando a inclusão de tipos diferentes de estruturas flexíveis a serem testadas, tais como placas finas.

9 - Movimentos (rotatórios) repetitivos do eixo de rastreamento (excitação periódica) simulando, por exemplo, atividades robóticas em linhas de produção. Sob este tipo de excitação, estruturas flexíveis de rastreamento poderão apresentar comportamentos dinâmicos interessantes.

10 - Movimentos gerais do eixo de rastreamento (rotações + translações), simulando, por exemplo, as diferentes missões dos satélites em órbita.

11 - Considerar estruturas flexíveis compostas por outros materiais mais flexíveis e leves (por exemplo, polímeros (Potvin et al., 1998)), em substituição ao alumínio e ao aço, considerados ao longo deste trabalho e geralmente utilizados em trabalhos encontrados na literatura.

12 - Estudo do modelo matemático considerando condição de contorno pinado-livre e verificações experimentais.

Referências bibliográficas

- Al-Ansary, M. D., "Flexural vibrations of rotating beams considering rotary inertia", *Computers and Structures*, 69, pp 321-328, 1998.
- Andeen, G. B. (Editor-in-Chief), "Robot Design Handbook", SRI International, McGraw-Hill Book Company, 1988.
- Anderson, T. J., Nayfeh, A. H., Balachandran, B., "Experimental verification of the importance of the nonlinear curvature in the response of a cantilever beam", *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 118, pp 21-27, January 1996.
- Andronov, A. A., Vitt, A. A., Khaikin, S. E., "Theory of oscillators", Pergamon Press, 1966.
- Atluri, S., "Nonlinear vibrations of a hinged beam including nonlinear inertia effects", *Journal of Applied Mechanics*, pp 121-126, March 1973.
- Barbieri, E., Özgüner, Ü., "Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link", *Transactions of the ASME*, Vol. 110, dezembro, 1988.
- Boivin, N., Pierre, C., Shaw, S. W., "Non-linear normal modes, invariance, and modal dynamics approximations of non-linear systems", *Nonlinear Vibrations*, DE-Vol. 54, pp 1-19, ASME, 1993.

- Boyce, W.E., DiPrima, R.C., "Elementary differential equations and boundary value problems", John Wiley and Sons, New York, 1986.
- Craig, Jr., R. R., "Structural dynamics - An introduction to computer methods", John Wiley and Sons, 1981.
- Crandall, S., Karnopp, D. C., Kurtz Jr, E. F., Pridmore-Brown, D. C., "Dynamics of mechanical and electromechanical systems", McGraw-Hill Book Company, 1968.
- Crespo da Silva, M. R. M., Glynn, C. C., "Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion", Journal Struct. Mech., 6 (4), pp 437-448, 1978a.
- Crespo da Silva, M. R. M., Glynn, C. C., "Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. II. Forced motions", Journal Struct. Mech., 6 (4), pp 437-448, 1978b.
- Davies, T. V., James E. M., "Nonlinear differential equations", Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- Electro-Craft Corp, "Dc Motors, Speed Control and Servo Systems - an engineering handbook by Electro-Craft Corporation", segunda edição, Minnesota, EUA, 1973.
- Fox, C., "An introduction to the calculus of variations", Dover Publications, Inc., New York, 1987.
- Fu, K. S., Gonzalez, R. C., Lee, C. S. G., "Robotics: control, sensing, vision, and intelligence", McGraw-Hill Book Company series in CAD/CAM robotics and computer vision, International edition, 1987
- Garcia, E., "On the modeling and control of slewing flexible structures", Tese de doutorado em engenharia mecânica defendida na State University of New York at Buffalo em 1989.

- Garcia, E., Inman, D. J., "Advantages of slewing na active structure", *Journal of Intell. Mater. Syst. and Struct.*, Vol. 1, julho 1990.
- Garcia, E., Inman, D. J., "Modeling of the slewing control of a flexible structure", *International Journal of Guidance and Control*, Vol. 14, julho-agosto, 1991.
- Gottlieb, I. M., "Electric motors and control techniques", TAB Books imprint of MacGraw-Hill, 1994.
- Greenwood, D.T., "Classical dynamics", Dover Publications, Inc., New York, 1977.
- Hagedorn, P., "Oscilações não-lineares", Editora Edgar Blücher Ltda, 1984.
- Hanagud, S. V., Meyyappa, M., Craig, J. I., "Method of multiple scale and identification of nonlinear structural dynamic systems", *AIAA Journal*, vol. 23, no. 5, May 1985.
- Harwood, P. B., "Control of electric motors", John Wiley and Sons, Inc, 1948.
- Hoa, S. V., "Vibration of a rotating beam with a tip mass", *Journal of Sound and Vibration*, 67 (3), pp 369-381, 1979.
- Holmes, M. H., "Introduction to perturbation methods", Springer-Verlag, 1995.
- Hsieh, S.-R., Shaw, S. W., Pierre, C., "Normal modes for large amplitude vibrations of a cantilever beam", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, No. 14, pp 1981-2014, 1994
- Hsu, W. C., Shabana, A. A., "Passive and active inertia forces in flexible body dynamics", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, dezembro, vol. 114, pp 571-579, 1992.
- Hurty, W. C., Rubinstein, M. F., "Dynamics of structures", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA, 1964.

- Juang, J. N., Horta, L. G., "Effects of atmosphere on slewing control of a flexible structure", *Journal of Guidance and Control*, julho-agosto, vol. 10, no. 4, 1987.
- Keisler, H. J., "Elementary calculus - an infinitesimal approach", segunda edição, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts, 1986.
- Kevorkian, J., Cole, J. D., "Perturbation methods in applied mathematics", Applied Mathematical Series 34, Springer-Verlag New York Inc, USA, 1981.
- Khorrami, F., Zheng, S., "An inner/outer loop controller for rigid-flexible manipulators", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, dezembro, vol. 114, pp 580-587, 1992.
- King, M. E., Vakakis, A. F., "Nonlinear normal modes in a class of nonlinear continuous systems", *Nonlinear Vibrations, DE-Vol. 54*, 33-41, ASME, 1993.
- Kojima, H., "Transient vibrations of a beam/mass system fixed to a rotating body", *Journal of Sound and Vibration*, 107 (1), pp 149-154, 1986.
- Kononenko, V. O., "Vibrating systems with a limited power supply", Iliffe Books Ltd., 1969.
- Krauss, R. W., "Experimental identification of nonlinear systems", Tese de mestrado em engenharia mecânica defendida na Virginia Tech em agosto de 1998 sob orientação do Prof. Dr. Ali. H. Nayfeh.
- Kuo, B. C., "Automatic control systems", Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1995.
- Leckar, H., Sampaio, R., "Aspectos matemáticos de vibrações mecânicas", Minicurso oferecido durante o "49º Seminário Brasileiro de Análise" em maio de 1999 na Unicamp, Campinas, SP.
- Leonhard, W., "Control of electrical drives", Springer-Verlag, 1990.

- Likins, P. W., "Dynamic analysis of a system of hinge-connected rigid beams with nonrigid appendages", *International Journal of Solids and Structures*, 8, pp 709-731, 1972.
- Maurer, W. A., "Curso de cálculo diferencial e integral - fundamentos geométricos e físicos", Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, 1967.
- Meirovitch, L., "Analytical methods in vibrations", Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1967.
- Nayfeh, A.H., "Perturbation techniques", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1973.
- Nayfeh, A.H., Mook, D.T., "Nonlinear oscillations", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1979.
- Nayfeh, A.H., "Introduction to perturbation techniques", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981.
- Nayfeh, A.H., "Problems in perturbation", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1993.
- Nóbrega, P. G. B., "Auto-sincronização de motores não-ideais apoiados em estruturas elásticas", Tese de mestrado em engenharia mecânica defendida na Escola Politécnica da USP em 1994.
- Padula, S. L., Sandridge, C. A., Walsh, J. L., Haftka, R. T. "Integrated controls-structures optimization of a large space structure", *Computers and structures*, vol. 42, no. 5, pp 725-732, 1992.
- Paz, M., "Structural dynamics - theory and computation", third edition, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- Popov, E. P., "Introdução à mecânica dos sólidos", Editora Edgar Blücher Ltda, 1978.

- Potvin, M.-J., Piedboeuf, J.-C., Nemes, J. A., "Comparison of viscoelastic models in simulating the transient response of a slewing polymer arm", Transactions of the ASME, vol. 120, pp 340-345, 1998.
- Putter, S., Manor, H., "Natural frequencies of radial rotating beams", Journal of Sound and Vibration, 56 (2), pp 175-185, 1978.
- Rao, J. S., Carnegie, W., "Nonlinear vibrations of rotating cantilever beams", Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, 74, pp 161-165, 1970.
- Rosenberg, R. M., "On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom", Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, pp 155-242, 1966.
- Rossi, M., "Passive and adaptive controller design strategies for a class of manipulators with a flexible link", Tese de mestrado em engenharia mecânica defendida na University of Waterloo em 1996.
- Sah, J. J. F., "On the interaction between actuator and slewing structure", Tese de doutorado em engenharia mecânica defendida na State University of New York at Buffalo em 1990.
- Sah, J. J., Mayne, R. W., " Modeling of a slewing motor-beam system ", Proceedings of the International Computers in Engineering Conference, Boston, pp 481-486, 1990.
- Sah, J. J., Mayne, R. W., Crassidis, A. L., Lin J. S., "Dynamic interaction in a slewing motor-beam system : closed loop control", Vibration and Control of Mechanical Systems, ASME, DE-Vol. 61, 1993.
- Shaw, S. W., Pierre, C., "On nonlinear normal modes", Winter Annual Meeting, American Society of Mechanical Engineers, Anaheim, California, November, pp 8-13, 1992
- Simo, J. C., Vu-Quoc, L., "On the dynamics of flexible beams under large overall motions - The plane case : Part I", Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp 849-854, December 1986a.

- Simo, J. C., Vu-Quoc, L., "On the dynamics of flexible beams under large overall motions - The plane case : Part II", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 855-863, December 1986b.
- Sinha, S. C., Marghitu, D. B., Boghiu, D., "Stability and control of a parametrically excited rotating beam", *Transactions of the ASME*, Vol. 120, dezembro, 1998.
- Stafford, R., Giurgiutiu, V., "Semi-analytic methods for rotating Timoshenko beams", *International Journal of Mechanical Science*, 17, pp 719-727, 1975.
- Stanway, J., Sharf, I., Damaren, C., "Comparison and validation of dynamics simulation models for a structurally flexible manipulator", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, setembro, vol. 120, pp 404-409, 1998.
- Thomson, W.T., "Theory of vibration with applications", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Wang, F.-Y., Guan, G., "Influences of rotatory inertia, shear and loading on vibrations of flexible manipulators", *Journal of Sound and Vibration*, 171 (4), pp 433-452, 1994.
- Wright, A. D., Smith, C. E., Thresher, R. W., Wang, J. L. C., "Vibration modes of centrifugally stiffened beams", *Transactions of the ASME*, Vol. 49, pp 197-202, March 1982.
- Yigit, A., Scott, R. A., Ulsoy, A. G., "Flexural motion of a radially rotating beam attached to a rigid body", *Journal of Sound and Vibration*, 121 (2), pp 201-210, 1988.
- Yoo, H. H., Ryan, R. R., Scott R. A., "Dynamics of flexible beams undergoing overall motions", *Journal of Sound and Vibration*, 181 (2), pp 261-278, 1995.

Apêndices

Apêndice A

Modelagem matemática de um motor de corrente contínua (ideal / não ideal)

A.1- Equações governantes do movimento de um motor de corrente contínua

O balanço de tensão elétrica (diferença de potencial) em um motor de corrente contínua controlado por armadura pode ser representado, de acordo com a Lei de Kirchoff, por :

$$L_m \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \dot{\theta}_{motor} = U \quad (\text{A.1})$$

aonde :

U = tensão de armadura (tensão aplicada aos terminais do motor) ;

R_a = resistência da armadura ;

i_a = corrente de armadura ;

L_m = indutância do motor ;

K_b = constante de força contra-eletromotriz ;

θ_{motor} = posição angular do motor.

A equação (A.1) pode ser entendida como a equação elétrica do motor de corrente contínua controlado por armadura. Esta equação diferencial representa a variação da corrente de armadura ao longo do tempo.

A somatória dos torques em relação ao eixo do motor produz o que se pode entender como a equação mecânica do motor de corrente contínua controlado por armadura, representada por :

$$\tau_m = K_t i_a - c_m \dot{\theta}_{motor} - I_{motor} \ddot{\theta}_{motor} \quad (A.2)$$

aonde :

I_{motor} = inércia do motor ;

c_m = atrito interno ao motor ;

τ_m = torque aplicado à transmissão mecânica entre o atuador e a estrutura a ser movida ;

K_t = constante de torque do motor.

O deslocamento angular do eixo do motor e o torque aplicado pelo mesmo eixo à transmissão mecânica entre o motor e a carga a ser movida relacionam-se ao deslocamento angular da estrutura sobre a qual o motor esta atuando e ao torque aplicado à mesma por :

$$\tau = N_g \tau_m \quad (A.3)$$

$$\theta_{motor} = N_g \theta \quad (A.4)$$

aonde τ representa o torque aplicado pelo motor de corrente contínua à estrutura a ser movida, θ representa o deslocamento angular desta estrutura e N_g representa a relação de transmissão entre o motor e a estrutura.

Portanto, em relação aos parâmetros da estrutura a ser movida, as equações (A.1) e (A.2) podem ser reescritas como :

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (\text{A.5})$$

$$I_{motor} N_g^2 \ddot{\theta} + c_m N_g^2 \dot{\theta} - N_g K_t i_a + \tau = 0 \quad (\text{A.6})$$

As equações (A.5) e (A.6) representam as equações (dimensionais) governantes do movimento de um motor de corrente contínua. A equação (A.5) representa a equação para a corrente na armadura, i_a , e a equação (A.6) representa a equação para o deslocamento angular, θ .

Na maioria dos casos encontrados na literatura, considera-se que a indutância do motor, L_m , seja desprezível (e, portanto, igual a zero) em (A.5), ou que não haja variação de corrente de armadura ($\dot{i}_a = 0$). Combinam-se, então, as expressões (A.5) e (A.6) isolando-se i_a em (A.5) e substituindo em (A.6). Obtém-se, neste caso, uma única equação representativa do comportamento do motor de corrente contínua (equação para θ). Esta consideração (simplificação) geralmente é feita nos casos aonde a constante de tempo elétrica do motor, $\frac{L_a}{R_a}$, é

muito menor que a constante de tempo mecânica do motor, $\frac{R_a (I_{motor} + I_{carga})}{K_t K_b}$ (Fu et al., 1987).

No estudo realizado aqui, trabalha-se com o modelo mais geral do motor, conforme representado pelas equações (A.5) e (A.6), sem desprezar a indutância do motor e, portanto, considerando variações na corrente de armadura. Com efeito, o comportamento dinâmico do motor no caso não ideal é uma incógnita e deverá ser verificado devidamente.

A.2 - Acoplamento entre o atuador e a estrutura a ser movida

A opção por uma abordagem de sistema dinâmico ideal ou por uma abordagem de sistema dinâmico não ideal [Kononenko, 1969] irá depender da maneira como o acoplamento atuador-

estrutura for considerado. Na equação (A.6), dependerá das considerações feitas para a representação do torque τ .

Optou-se neste apêndice por começar pela abordagem não ideal, no caso, a mais geral. A abordagem ideal, como será visto adiante, representa uma simplificação da abordagem do tipo não ideal.

A simplificação citada no parágrafo anterior, contudo, em alguns casos, poderá gerar um comportamento completamente diferente para o sistema em questão. Por esta razão, esta consideração (ideal / não ideal) torna-se importante no modelagem de tais sistemas.

Seja o seguinte esquema representativo do eixo do motor e seu acoplamento a estrutura flexível de rastreamento sob análise :

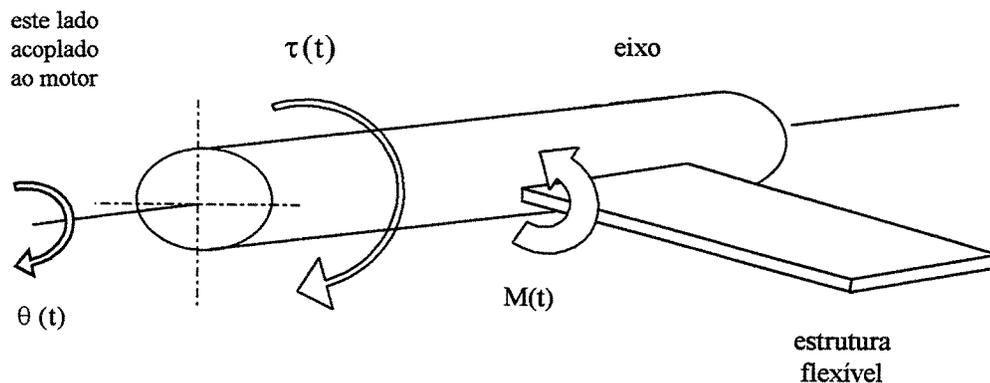


Figura A.1 - Acoplamento motor-estrutura flexível de rastreamento

Se o eixo em questão for suficientemente curto (como, na realidade, se pretende que seja), poder-se-á considerá-lo rígido. Assim, o torque total, τ , atuando sobre a estrutura flexível pode ser escrito como :

$$\tau = -M + I_{eixo} \ddot{\theta} \quad (A.7)$$

aonde o parâmetro M representa o momento de flexão da viga atuando sobre o eixo do motor (ou sobre o eixo que produz o deslocamento angular, θ , no caso de haver uma caixa de transmissão mecânica).

Na figura A.1, a caixa de transmissão não se encontra representada. Contudo, o parâmetro I_{eixo} poderá também incluir a inércia das engrenagens associada ao sistema de transmissão mecânica. Neste trabalho, devido às complexidades já consideradas, a caixa de transmissão está sendo considerada sem folgas e atritos internos.

Assim, a equação (A.6) pode ser reescrita como :

$$(I_{eixo} + I_{motor}N_g^2)\ddot{\theta} + (c_mN_g^2)\dot{\theta} - (N_gK_t)i_a - M = 0 \quad (A.8)$$

O momento M pode ser representado, para o modelo de curvatura linear [Craig,1981; Hurty, 1964 ; Paz, 1991; Popov, 1978], como :

$$M = EIv'' \quad (A.9)$$

e para o modelo de curvatura não linear, de acordo com as considerações deste trabalho, como :

$$M = EI \left(v'' + 2u'v'' + u''v' - \frac{3}{2}v'^2v'' \right) \quad (A.10a)$$

aonde os parâmetros E e I e as variáveis v e u são definidos nos capítulos 2 e 3.

Utilizando as expressões para u' e u'' desenvolvidas no capítulo 3 (expressões (3.33) e (3.34)), a expressão A.10a se reduz a :

$$M = EI \left(v'' + \frac{1}{2}v'^2v'' \right) \quad (A.10b)$$

Expandindo v (de acordo com 2.32) em (A.10b), obtém-se :

$$M = EI \left(\sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Q_i(t) Q_j(t) Q_k(t) \phi_i'(0) \phi_j'(0) \phi_k''(0) \right) \quad (\text{A.10c})$$

Mas como, de acordo com as condições de contorno (2.37), $\phi_i'(0) = \phi_j'(0) = 0$, a expressão (A.10c) reduz-se a expressão A.9 na origem ($x = 0$). Com efeito, pois, na raiz (origem), a condição de contorno é a mesma para os dois modelos de curvatura.

Assim, valendo-se da expansão para v discutida nos mesmos capítulos 2 e 3, e utilizada anteriormente neste apêndice, pode-se reescrever A.8 como :

$$(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - EI \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Assim, as equações (A.5) e (A.11) representam agora as equações (dimensionais) governantes do movimento de um motor de corrente contínua atuando como uma fonte de potência limitada (ou não ideal).

A.3- Equação da fonte de potência ideal

O sistema de equações representando a fonte de potência ilimitada (ou ideal) é fornecido pela equação (A.5) e pela equação (A.8) fazendo-se, nessa ultima, o momento M igual a zero , ou seja :

$$\begin{aligned} L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} &= U \\ (I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Neste caso, a dinâmica da estrutura flexível de rastreamento, representada pelo parâmetro M , não influencia a dinâmica do motor. Apenas o oposto ocorre, ou seja, a dinâmica do motor influencia a dinâmica da estrutura movida.

Nos sistemas ideais, a variável θ poderá ser prescrita, ou seja, conhecida de antemão.

A.4- Equação da fonte de potência não ideal

O sistema de equações representando a fonte de potência limitada (ou não ideal) e fornecida pelas equações A.5 e A.11, reproduzidas a seguir :

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U$$

$$(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - EI \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) = 0$$
(A.13)

A fonte de potência é considerada limitada, neste caso, porque depende da dinâmica da estrutura, ou seja, da deflexão, q_i , que é uma quantidade limitada. Quando a estrutura flexível vibra, esta vibração altera o comportamento da fonte da excitação sobre a mesma, que altera o comportamento da fonte da excitação e assim por diante . Por esta razão, torna-se impossível prescrever a variável θ sem conhecer a vibração da estrutura flexível.

A.5- Adimensionalização das equações da fonte de potência não ideal

Os procedimentos seguidos aqui são os mesmos apresentados nos Capítulos 2 e 3 para a adimensionalização das equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento e, portanto, maiores explicações poderão ser encontradas naqueles capítulos.

Sejam as variáveis adimensionais deslocamento angular, θ^* , corrente de armadura, i_a^* , e tensão elétrica, U^* , associadas as respectivas variáveis dimensionais de acordo com :

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta^* \\
i_a &= i_c \in i_a^* \\
U &= v_c \in U^*
\end{aligned} \tag{A.14}$$

aonde a corrente característica, i_c , e a tensão elétrica característica, v_c , são representadas por [Sah, 1990] :

$$i_c = \frac{K_b}{L_m} \tag{A.15}$$

$$v_c = \frac{K_b R_a}{L_m} \tag{A.16}$$

Seja a segunda das equações A.13 reescrita como :

$$(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - E I v'' = 0 \tag{A.17}$$

Reescrevendo as derivadas da primeira das equações (A.13) e da equação (A.17) em função dos novos parâmetros independentes *tempo adimensional* e *espaço adimensional*, conforme descritos nos Capítulos 2 e 3, obtém-se :

$$L_m \left(\frac{1}{T} \right) \left(\frac{\partial i_a}{\partial t^*} \right) + R_a i_a + K_b N_g \left(\frac{1}{T} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) = U$$

$$\begin{aligned}
&(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \left(\frac{1}{T^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) + (c_m N_g^2) \left(\frac{1}{T} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) - (N_g K_t) i_a - \\
&- E I \left(\frac{1}{L^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) = 0
\end{aligned}$$

(A.18)

Substituindo em (A.18) as variáveis adimensionais (A.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 L_m \left(\frac{1}{T} \right) \left(\frac{K_b}{L_a} \right) \in i_a^* + R_a \left(\frac{K_b}{L_a} \right) \in i_a^* + K_b N_g \left(\frac{1}{T} \right) \in \dot{\theta}^* &= \left(\frac{K_b R_a}{L_a} \right) \in U^* \\
 (I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \left(\frac{1}{T^2} \right) \in \ddot{\theta}^* + (c_m N_g^2) \left(\frac{1}{T} \right) \in \dot{\theta}^* - (N_g K_t) \left(\frac{K_b}{L_m} \right) \in i_a^* - \\
 - EI \left(\frac{1}{L^2} \right) \in L(v^*)'' &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.19}$$

A partir deste ponto, as variáveis adimensionais serão representadas sem o (*).

Multiplicando as equações (A.19) por $\frac{1}{\in}$ resulta :

$$\begin{aligned}
 L_m \left(\frac{1}{T} \right) \left(\frac{K_b}{L_a} \right) i_a + R_a \left(\frac{K_b}{L_a} \right) i_a + K_b N_g \left(\frac{1}{T} \right) \dot{\theta} &= \left(\frac{K_b R_a}{L_a} \right) U \\
 (I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \left(\frac{1}{T^2} \right) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \left(\frac{1}{T} \right) \dot{\theta} - (N_g K_t) \left(\frac{K_b}{L_m} \right) i_a - \\
 - EI \left(\frac{1}{L^2} \right) L v'' &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.20}$$

Multiplicando a primeira das equações (A.20) por $\frac{T}{K_b}$ e a segunda por $\frac{L}{EI}$ resulta :

$$\begin{aligned}
 i_a + \left(\frac{R_a T}{L_m} \right) i_a + N_g \dot{\theta} &= \left(\frac{R_a T}{L_m} \right) U \\
 \left(\frac{(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) L}{EIT^2} \right) \ddot{\theta} + \left(\frac{c_m N_g^2 L}{EIT} \right) \dot{\theta} - \left(\frac{N_g K_t K_b L}{EIL_m} \right) i_a - v'' &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.22}$$

Multiplicando a segunda das equações A.22 por $\left(\frac{EIT^2}{(I_{eixo} + I_{motor}N_g^2)L} \right)$ resulta :

$$i_a + \left(\frac{R_a T}{L_m} \right) i_a + N_g \dot{\theta} = \left(\frac{R_a T}{L_m} \right) U \quad (\text{A.23})$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{c_m N_g^2 T}{I_{eixo} + N_g^2 I_{motor}} \right) \dot{\theta} - \left(\frac{N_g K_t K_b T^2}{L_m (I_{eixo} + N_g^2 I_{motor})} \right) i_a - \left(\frac{EIT^2}{L(I_{eixo} + N_g^2 I_{motor})} \right) v'' = 0 \quad (\text{A.24})$$

Expandindo novamente v em (A.24), resulta, finalmente :

$$i_a + co_1 i_a + co_2 \dot{\theta} = co_1 U \quad (\text{A.25})$$

$$\ddot{\theta} + co_3 \dot{\theta} - co_4 i_a - co_5 \sum_{i=1}^n Q_i(t) \phi_i''(0) = 0 \quad (\text{A.26})$$

aonde :

$$co_1 = \frac{R_a T}{L_a}$$

$$co_2 = N_g$$

$$co_3 = \frac{c_v N_g^2 T}{I_{eixo} + N_g^2 I_{motor}}$$

$$co_4 = \frac{N_g K_t K_b T^2}{L_m (I_{eixo} + N_g^2 I_{motor})}$$

$$co_5 = \frac{EIT^2}{L(I_{eixo} + N_g^2 I_{motor})}$$

que são as equações adimensionais do motor não ideal. As condições de contorno são representadas por :

$$\begin{aligned}i_a(0) &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= 0\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

Para a abordagem de sistema ideal, basta fazer \cos_5 igual a zero em A.26. Em outras palavras, não se considera a interação motor-estrutura (ou a influência da estrutura na dinâmica do motor).

Apêndice B

Projeto do suporte para o estudo de estruturas flexíveis de rastreamento

Este Apêndice B apresenta o projeto do suporte desenvolvido no *Nonlinear Vibration Laboratory* (*ESM - Virginia Polytechnic Institute and State University*) por este e pelo Prof. Dr. Dean T. Mook para o estudo de estruturas (tipo viga) flexíveis de rastreamento e algumas fotografias relacionadas ao experimento.

A Figura B.1 apresenta o conjunto completo do suporte, em corte, seguida do detalhamento de cada uma das partes componentes, referenciadas de acordo com uma letra (A, B,...), conforme apresentado na mesma Figura B.1. Nesta figura é também representado, em escala, o motor de corrente contínua utilizado e como este se encaixa no conjunto.

As Figuras B.2 a B.5 mostram fotografias do *set-up* experimental, do protótipo (suporte) e das vigas utilizadas nos ensaios.

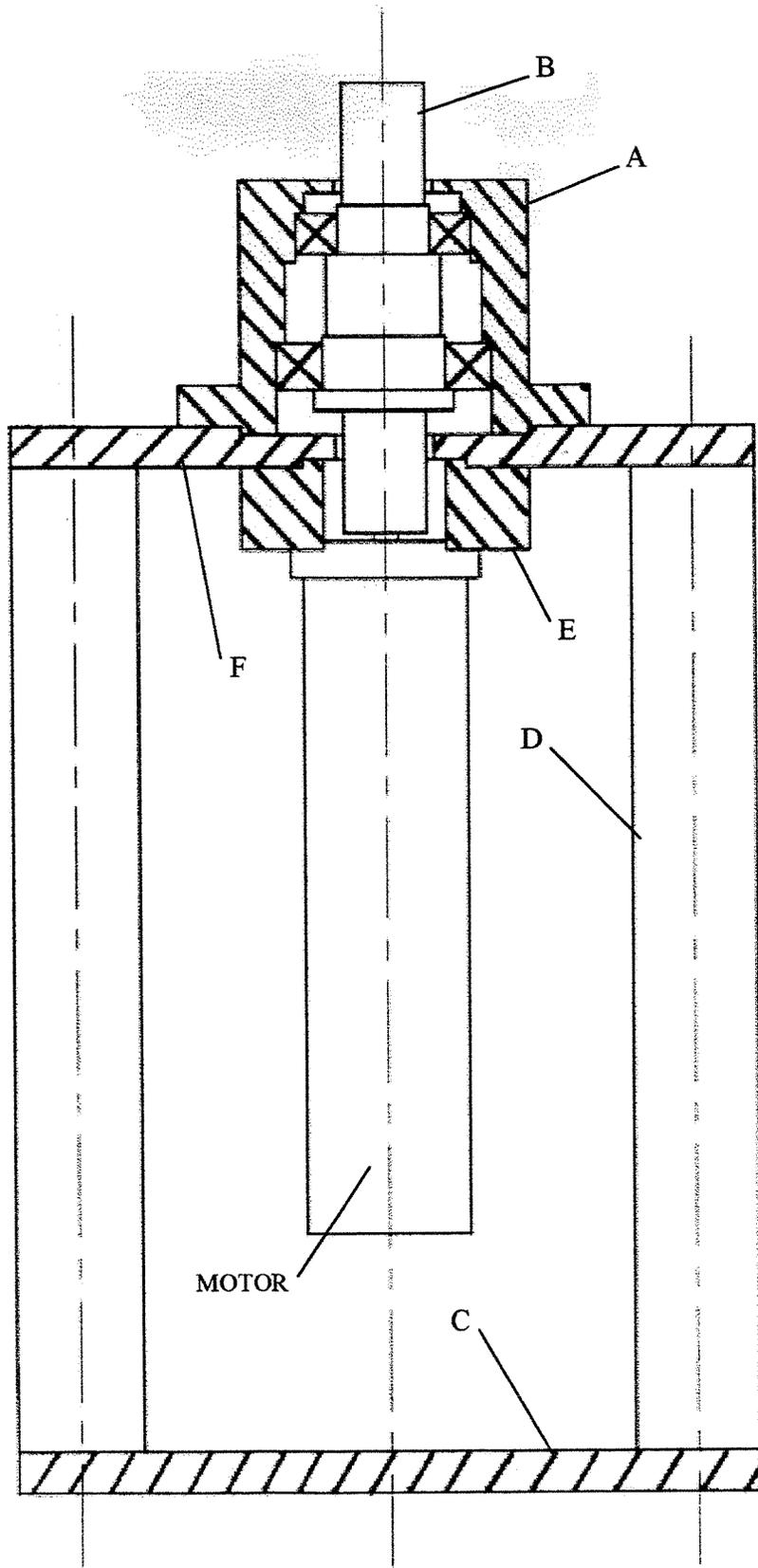
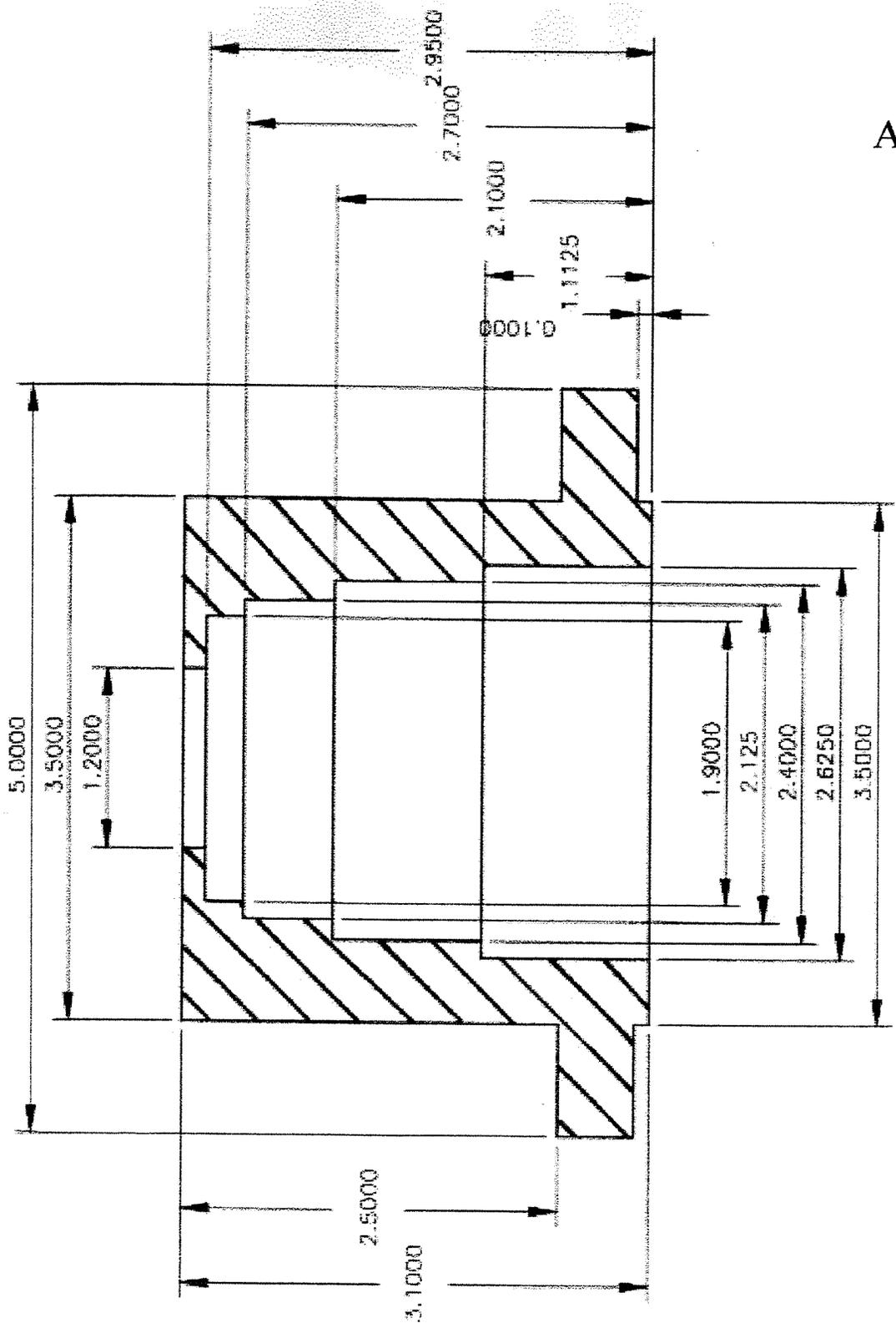
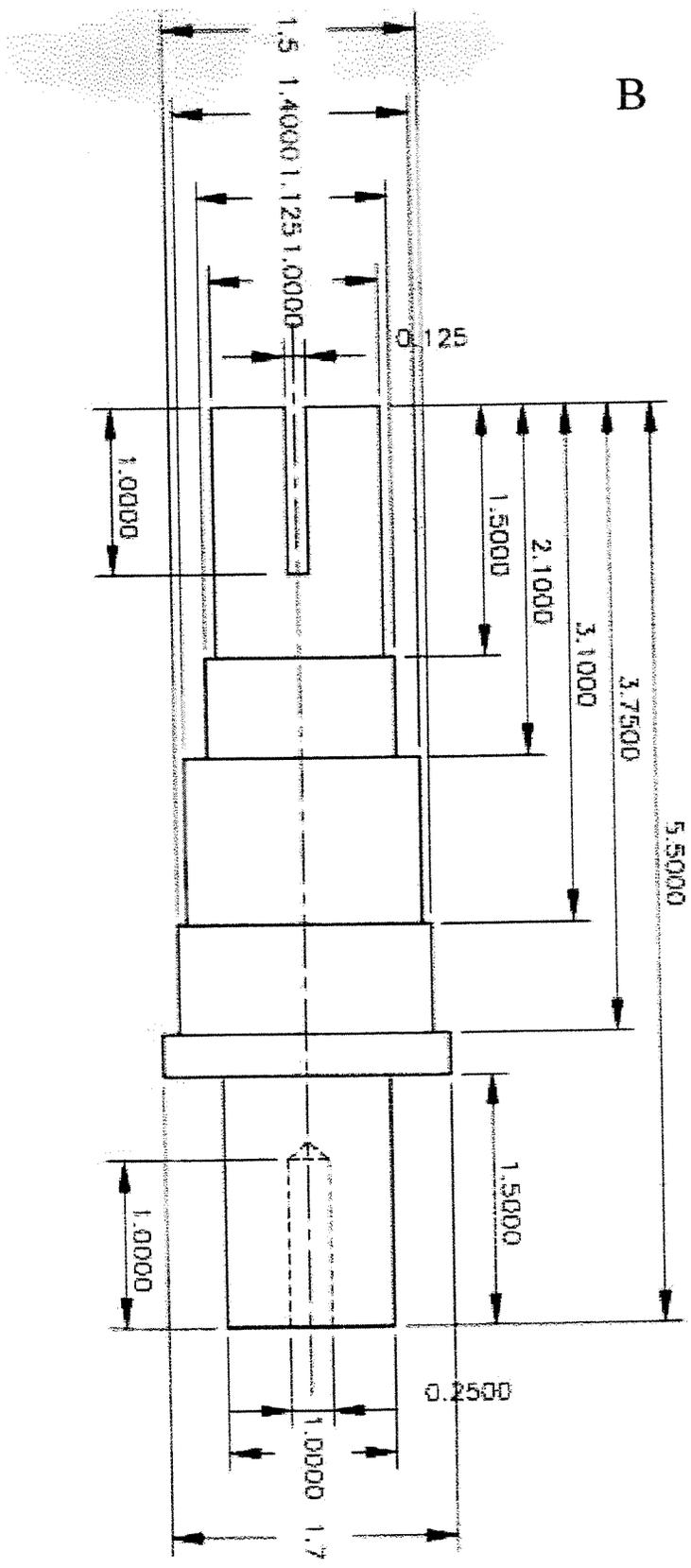
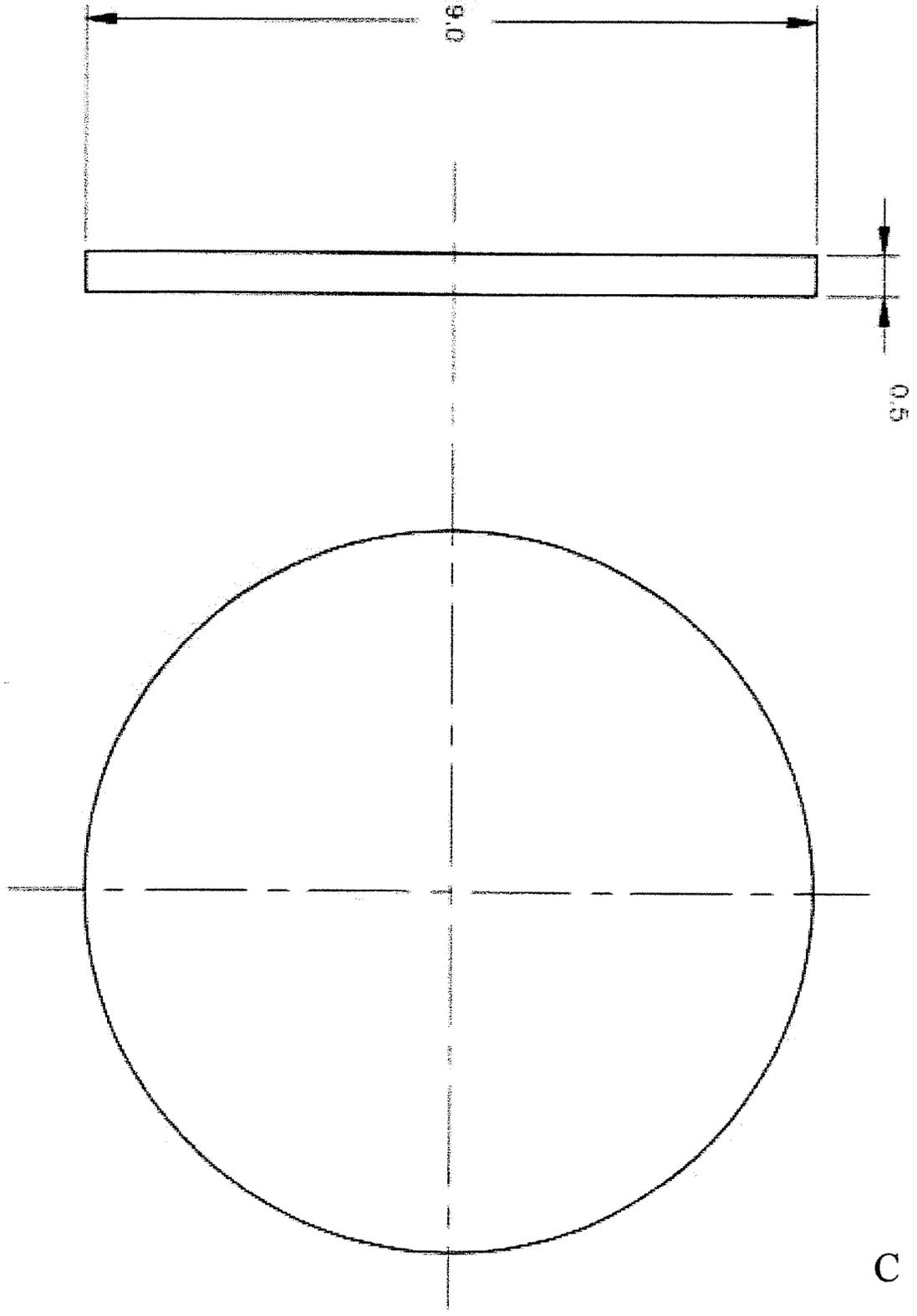
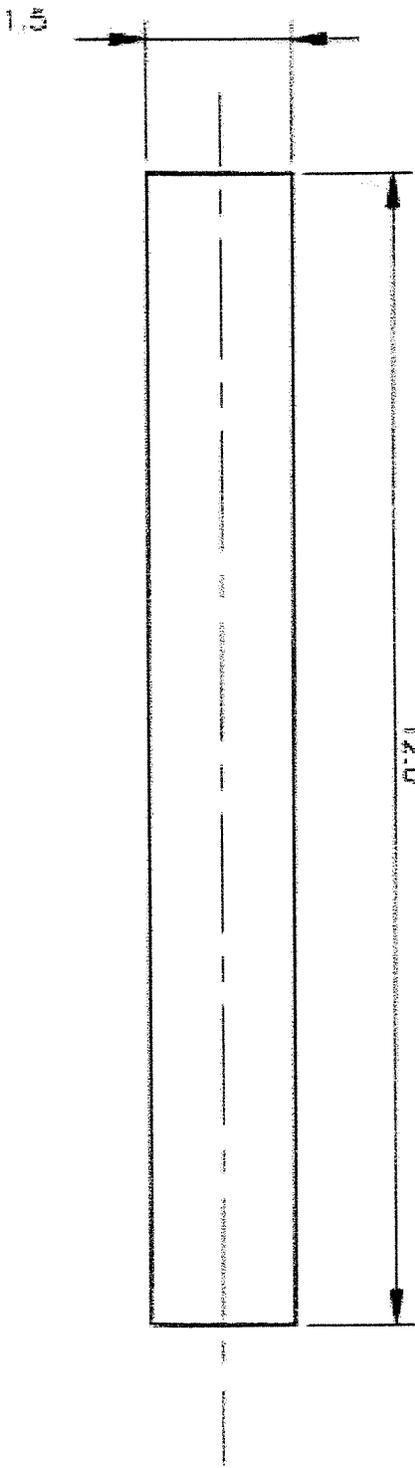


Figura B.1 - Protótipo experimental (projeto): conjunto completo

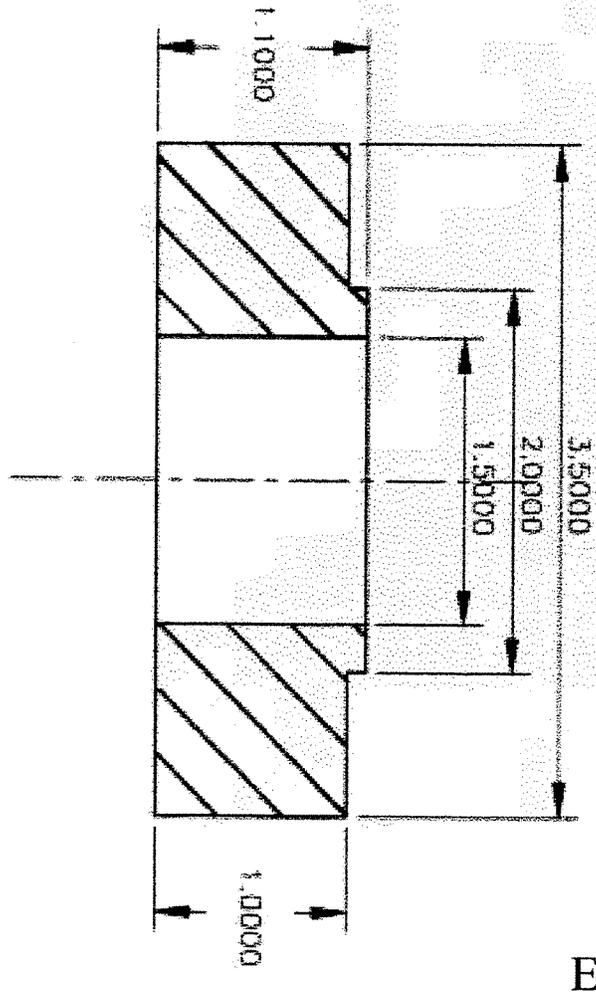


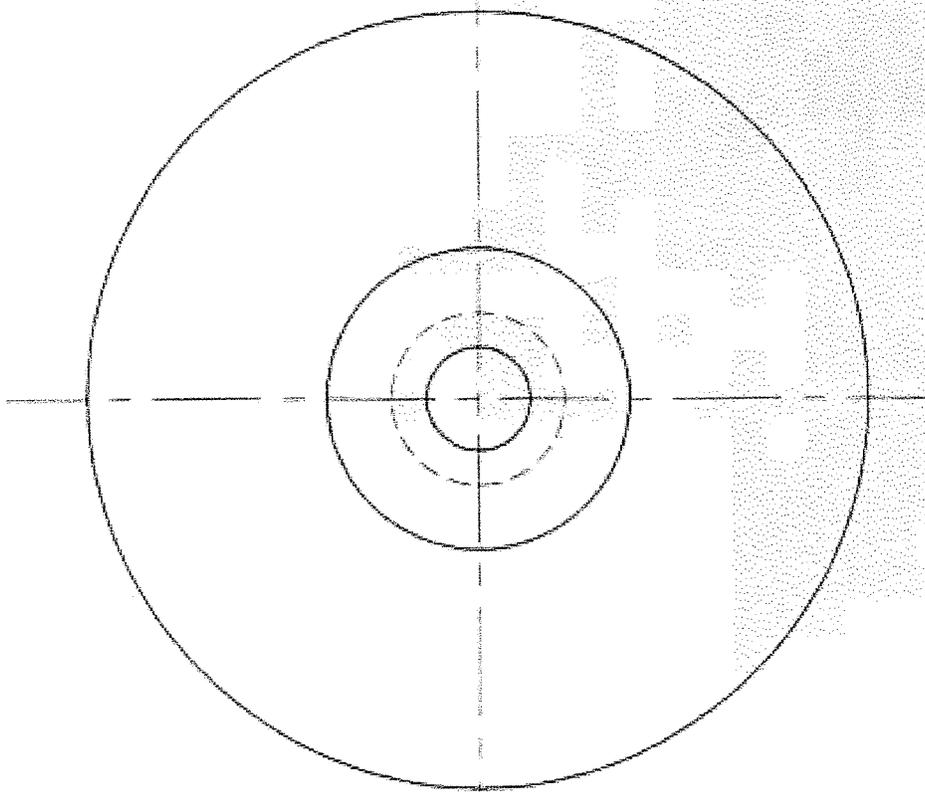
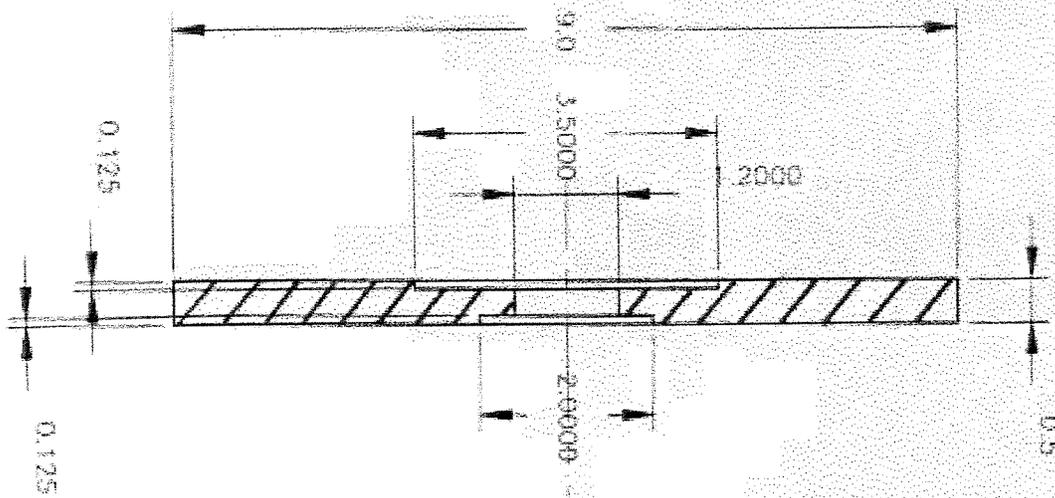






D





F

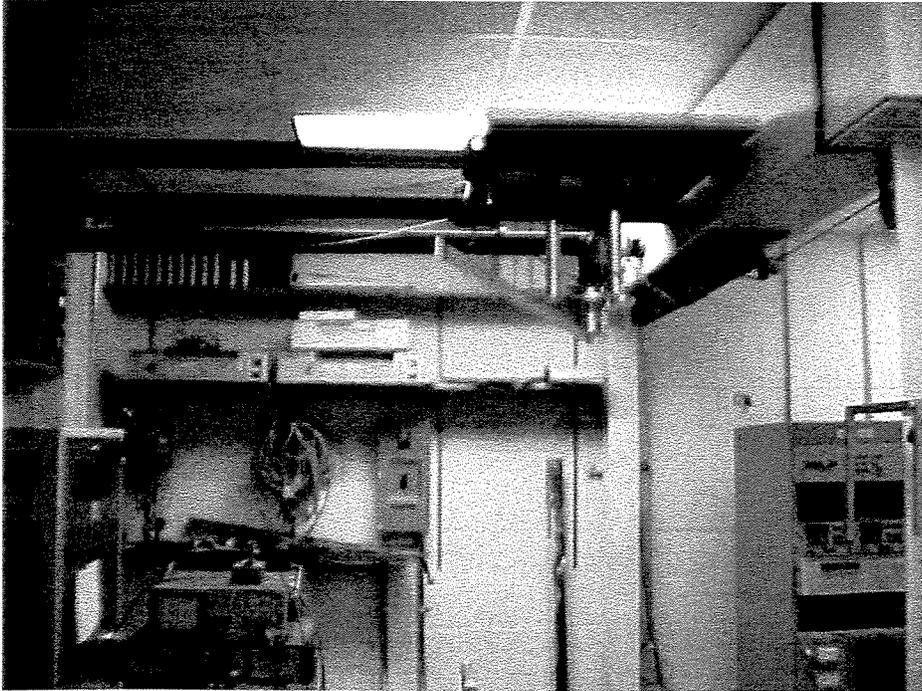


Figura B.2 - Protótipo experimental (suporte + motor + viga) nas instalações do Laboratório de Vibrações Não Lineares da *Virginia Tech*.

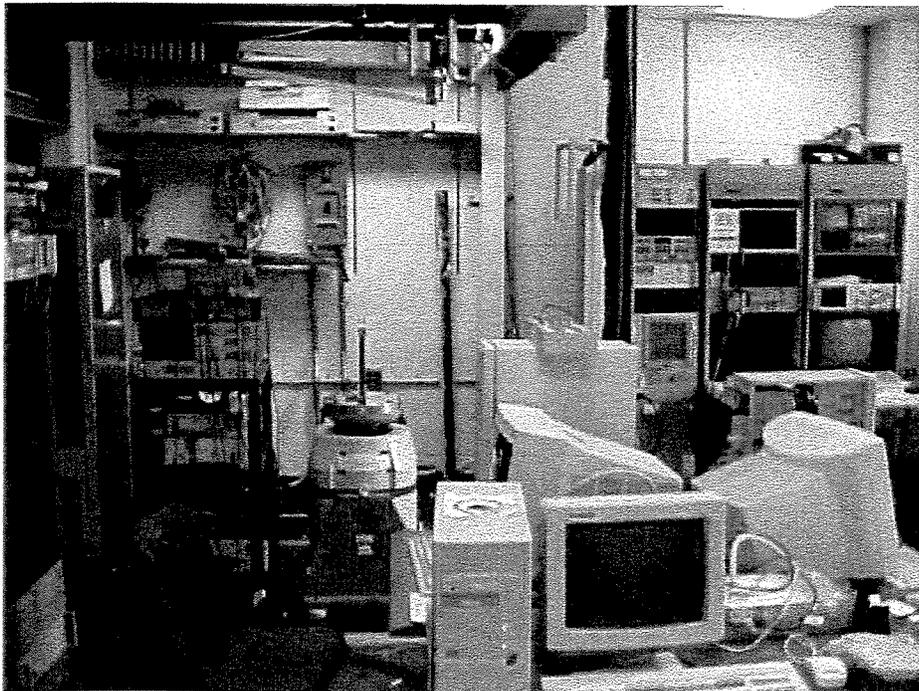


Figura B.3 - Visão geral do *set-up* experimental

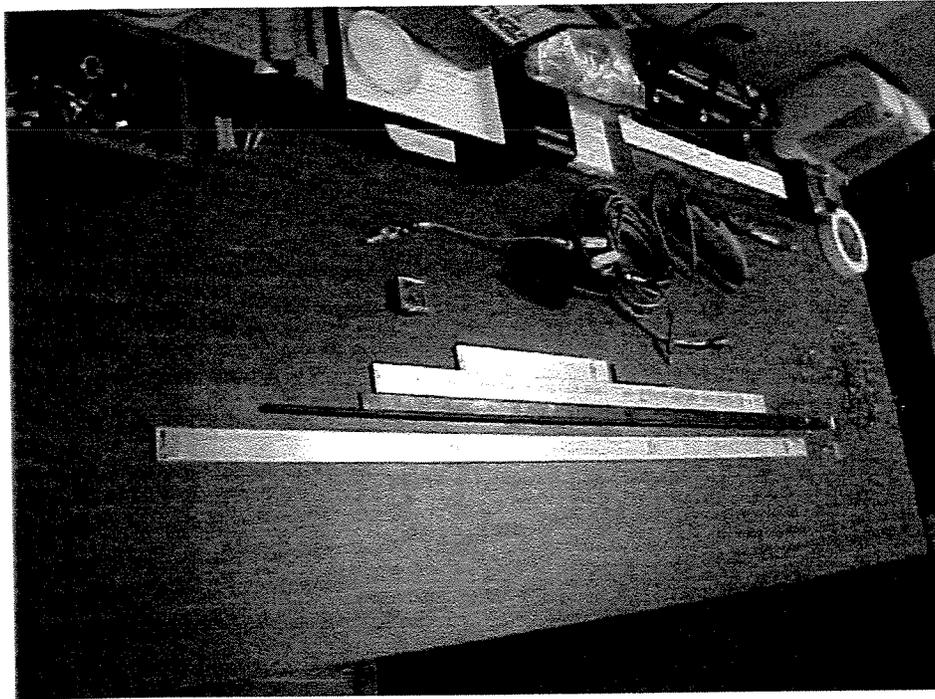


Figura B.4 - Diferentes vigas utilizadas como estruturas de rastreamento com diferentes graus de flexibilidade.

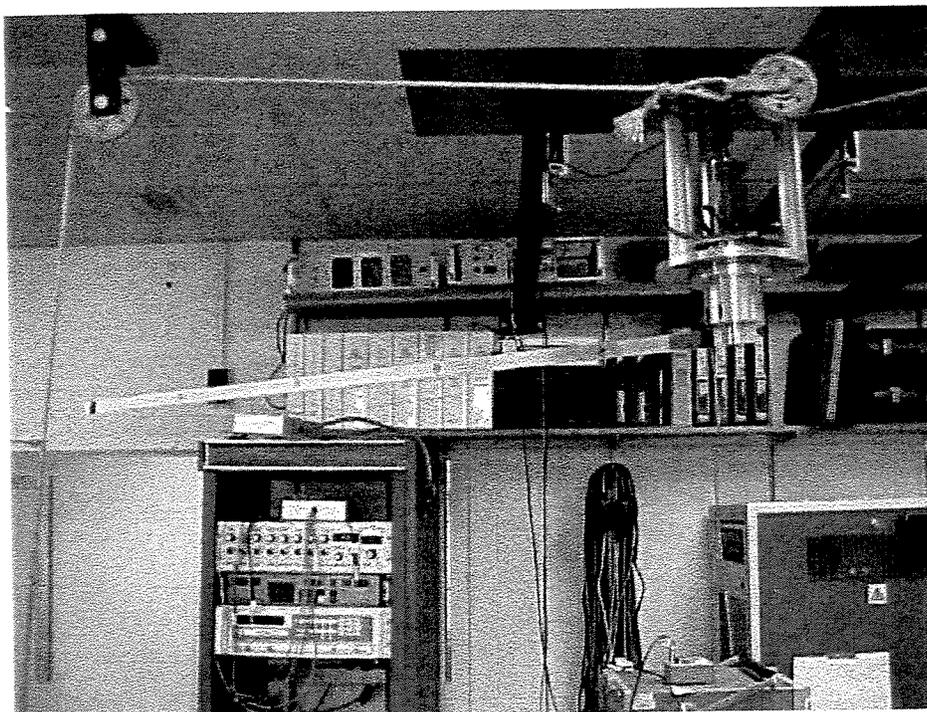


Figura B.5 - Protótipo experimental

Súmula Curricular

A - Trabalhos Publicados :

- 1- **Fenili, A.**, Hermini, H. A., Balthazar, J. M., Rosário, J. M., "Modelagem Matemática e Controle de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares", XIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Goiânia, Setembro de 1996, pp 466-467.
- 2- Hermini, H. A., **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Rosário, J. M., "On Mathematical Modeling and Control of Nonlinear Dynamic System and an Application on Robotic Systems", ICONNE 96, Second International Conference on Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications in Engineering Sciences, São Pedro, Agosto de 1996, ISBN 900351, vol.1, Chapter 3 : Control, Robotics, Neural Networks and Optimization Engineering, pp 246-252.
- 3- Hermini, H. A., Balthazar, J. M., **Fenili, A.**, Rosário, J. M., "Application of Intentional Nonlinearities in Dynamic Systems Control", SBPN 97 - Ciência e Cultura na Globalização - Novos Paradigmas, 08-10 de Agosto de 1996, Águas de Lindóia, São Paulo, pp 129-136.
- 4- Hermini, H. A., **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Rosário, J. M., "Simulações Numéricas de um Manipulador Robótico Contendo Elementos Não-Lineares", Revista Robótica e Automação, No 26, Porto, Portugal, 26/01/97, pp 36-42, Registro No 113164.
- 5- **Fenili, A.**, Rosário, J. M., Balthazar, J. M., "Modeling and Dynamics of a Slewing Flexible Structure Under Small Deflections", DINAME 97 - 7th International Conference on Dynamic Problems in Mechanics, Angra dos Reis, Rio de Janeiro, 03-07 de Março de 1997, pp 70-71.

- 6- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., Rosário, J. M., "Study of Vibrations in Nonideal Slewing Flexible Structures", II Panamerican Workshop of Computational and Applied Mathematics, Gramado, RS, Brasil, 8-12 de Setembro de 1997 e em "Proceedings Abstracts" pp 116, 1997.
- 7- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Rosário, J. M., "On the Modeling and Dynamics of a Slewing Flexible Structures I : Small Deflections", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (ABCM), 1997 (trabalho em fase de publicação).
- 8- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., Rosário, J. M., "On the Modeling and Dynamics of Slewing Flexible Structures II : Some Comparisons Between Small and Large Deflections (Contributions)", COB483, CD ROM, 8 páginas (ou em "Proceedings Abstracts" pp 185-186, 1997), 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM), Bauru, SP, Brasil, 8-12 de Dezembro de 1997.
- 9- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., Weber, H. I., "Application of the Center Manifold Theory to the Slewing Flexible Non-Ideal Structure Under Large Deflections: A Case Study". In: COBEM 99, CD ROM, 10 páginas, Monte Sião, São Paulo, Brasil, Novembro de 1999.
- 10- Balthazar, J. M. , Hermeni, H. A., Rosario, J. M., **Fenili, A.**, "On the Numerical Simulations of the Intentional Non-Linearities in A Servo Mechanism Control", Revista de Matemática e Estatística da UNESP, SP, 17, p. 9-33,1999.
- 11- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., "On the Comparison Between Ideal and Nonideal Systems Modeling for Flexible Slewing Structures (Nonlinear Curvature)", XXI CILAMCE : 21st Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, De 6 a 8 de Dezembro de 2000, Rio de Janeiro, Brasil.
- 12- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., "On the Comparison Between Two Mathematical Models for Flexible Slewing Structures-Linear and Nonlinear Curvatures", In: Nonlinear Dynamics, chaos, Control and Their applications to Engineering Sciences, Volume 4: Recent Developments in Nonlinear Phenomena, ISBN: 85-900351-4-x, pp 372-371, No Prelo, 2001.

- 13- Balthazar, J. M., Mook, D. T., Weber, H. I., Mattos, M. C., Brasil, R. M. L. R., **Fenili, A.**, Belato, D., Palacious, J. L., "Review of Unresolved Rotating Machine Torsional Vibrations Issues", In: Dynamical Systems and Their Controls, Trabalho convidado a ser publicado como capitulo de Livro academic Pres, ed. F. E. Udwaia, University of California, 2001.
- 14- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., "Some Remarks about the Experimental Analysis of Slewing Flexible Structures and Mathematical Modeling", IX DINAME, Aceito para Publicação, Florianópolis, 2001.
- 15- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., "On the comparison between two mathematical models for flexible slewing structures - linear and nonlinear curvature", ICONNE 2000, Third International Conference on Nonlinear Dynamics, Chaos, Control, and their Applications in Engineering Sciences, Campos do Jordão, 31 de julho a 4 de agosto de 2000, Aceito para Publicação.

B - Trabalhos Submetidos :

- 1- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D.T., "Nonlinear Analysis of the Motion of a Flexible Rotating Cantilver Beam", Journal of Vibration and Control, Submetido, 1999.
- 2- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook. D.T., "A Note on Experimental Identification of DC Motor Parameters", Science & Engineering Journal, Submetido, 2000.
- 3- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., "Recent Results on the Behaviour of Slewing Flexible Structures", In: Experiments with Nonlinear Dynamical Systems, 18th ASME Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, September 09-13, 2001, Pittsburg, PA, USA.

C - Resumos Publicados :

- 1- Balthazar, J M., Mook, D. T., Weber, H. I., Mattos, M. C., **Fenili, A.**, Belato, D., Palacios, J. L., etc - "Comments on Mathematical Modeling of Vibrating Systems with Limited Power Supply and Their Applications to Engineering Sciences", In: 3rd Italian Latin-american Conference on Applied and Industrial Mathematics, p.4, Petrópolis, 3-5/11/1999.
- 2- Balthazar, J M., **Fenili, A.**, Mook, D. T., "On Non-Ideal flexible Slewing Structures Small and Large Deflections", In: 3rd european Nonlinear Oscillations Conference, Copenhagen, August 8-12,1999, p.28.
- 3- Balthazar, J M., **Fenili, A.**, Mook, D. T., Weber, H. I., "On Nonlinear Vibrations of a Nonideal Flexible Structure", In: 1999 ASME, June 27-30, Blacksburg, VA, p. 394, 1999.

D - Posters em Congressos :

- 1- **Fenili, A.**, Balthazar, J. M., Mook, D. T., "Experimental Identification of a DC Motor", ICONNE 2000, Third International Conference on Nonlinear Dynamics, Chaos, Control, and their Applications in Engineering Sciences, Campos do Jordão, 31 de julho a 4 de agosto de 2000, Aceito para Publicação.

E - Cursos :

- 1- Balthazar, J. M., Mook, D. T., Weber, H. I., Mattos, M. C., **Fenili, A.**, Belato, D., Wicczorek, S., "On Vibrating systems with a Limited Power Supply and Their Applications to Engineering Sciences", In: 49th Seminário Brasileiro de Análise, IMECC, UNICAMP, p. 137- 227, 1999.

