

TESE DEFENDIDA POR Cristiano Henrique
de Oliveira E APROVADA PEL
COMISSÃO JULGADORA EM 26.05.01

Marcelo Moreira Ganzarolli
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Comparação Entre Duas Técnicas de Discretização
de Domínios Irregulares Aplicadas a Problemas de
Condução do Calor Bidimensionais

Autor: Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli

09/2001

UNIDADE CD. 12
N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
M373c
V. Ex.
TOMBO BC/44896
PROC. 16-392101
C ☐ D ☒
PREQ. R\$ 11,00
DATA 26/06/01
N.º CPD

CM00157654-0

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Comparação Entre Duas Técnicas de Discretização
de Domínios Irregulares Aplicadas a Problemas de
Condução do Calor Bidimensionais**

Autor: Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2001

S.P. Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M373c

Mascarenhas, Cristiano Henrique de Oliveira

Comparação entre duas técnicas de discretização de domínios irregulares aplicadas a problemas de condução do calor bidimensionais. / Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Marcelo Moreira Ganzarolli.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Geração numérica de malhas (Análise numérica).
I. Ganzarolli, Marcelo Moreira. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

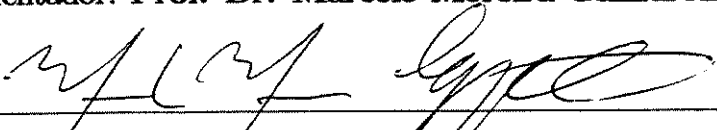
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

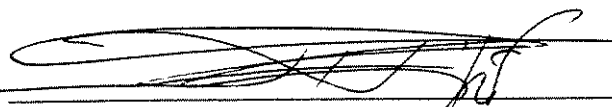
Comparação Entre Duas Técnicas de Discretização
de Domínios Irregulares Aplicadas a Problemas de
Condução do Calor Bidimensionais

Autor: Cristiano Henrique de Olivera Mascarenhas

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli



Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli, Presidente
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Ricardo Alan Verdú Ramos
Universidade Estadual Paulista

Campinas, 26 de Janeiro 2001

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe, Edésia, pela vida de dedicação e exemplo de dignidade.

À Paulírio, irmão e pai, pela solidariedade inesgotável.

Às minhas irmãs Ezelvir, Luacy (in memorian) e Rita pelo apoio em todas as ocasiões.

À Sandra, companheira sutil e compreensiva, pelo apoio inestimável, e às minhas filhas Érica e Ana Carolina presentes de DEUS.

Agradecimentos

São muitas as pessoas que nos ajudam a edificar nossos sonhos; estudar longe de casa não é tarefa simples, mas através dessas pessoas é que nos sentimos menos peixe fora d'água.

Agradeço aos mestres José Ricardo Figueiredo, Carlos Alberto Altemani, Jorge Luis Llagostera e Eugênio Spano Rosa pelo exemplo de profissionalismo e simpatia.

Aos bravos e companheiros colegas de estrada: Marcelo Morandim, Rigoberto, Lourenço, Juan, Allan, Ivan, Paulo (PC), Carlos, Bárbara, Manoel, Edna, Marcelo, entre outros.

Aos funcionários, que são uma ponte importante entre nós e a instituição, repletos de amizade : Neusa, Aninha, Rodrigues, D. Benê, Luís, Alcimar, Sr. José (pintor), entre outros.

À UEFS pelo apoio.

Especialmente ao meu orientador, pela muita, muita paciência ao longo desses anos, bem como pelo envolvimento neste trabalho.

^o Aprender caminhando e caindo é a forma mais árdua e talvez a mais natural.

Aprender por imposição é doloroso e demorado.

Aprende-se muito, mas muito mesmo, e não há outra forma melhor de ensinar e aprender, quando mestre e discípulo usam a linguagem universal do amor.

Resumo

MASCARENHAS, Cristiano H. de O., Comparação Entre Duas Técnicas de Discretização de Domínios Irregulares Aplicadas a Problemas de Condução de Calor Bidimensionais, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 125 p. Dissertação de Mestrado.

Há várias aplicações onde as técnicas de geração de malhas são empregadas: na aerodinâmica (cálculo de coeficientes de arrasto), em trocadores de calor (cálculo do número de Nusselt), etc. Neste trabalho buscou-se mostrar a eficácia das técnicas de geração de malha na solução de problemas de engenharia, com geometrias irregulares, como em banco de tubos, por exemplo. Nestes casos, uma malha ajustada à fronteira do corpo favorece a obtenção de soluções numéricas mais confiáveis. Das metodologias implementadas, a geração elíptica (que tem como base um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares), permite controlar certas características desejadas, como ortogonalidade e espaçamento (nas fronteiras). Neste caso, as equações originais são resolvidas no plano lógico. A obtenção das características especiais, depende da implementação de certas funções de controle. Na técnica multibloco, divide-se o domínio principal em duas sub-malhas independentes, a polar e a cartesiana. O acoplamento destas exige uma rotina para passar dados entre as malhas, na região de contato, via interpolação. Buscou-se, aqui, compará-las, com o objetivo de aferir a importância da malha gerada na precisão do campo analisado (um problema de condução do calor bidimensional é usado nesta aferição). O laplaciano é resolvido em coordenadas generalizadas e nas coordenadas polar e cartesiana, usando-se o método de volumes finitos nas discretizações. Os resultados obtidos foram plotados, analisados e comparados com uma solução exata, tendo sido observadas tendências semelhantes (física e geométrica), mas ganho muito superior para a técnica elíptica.

Palavras chaves: geração numérica de malhas (elíptica e multiblocos).

Abstract

MASCARENHAS, Cristiano H. de O., Comparison Between Two Techniques of Discretization of Domains Irregulars Applied to Problems of Conduction of Heat two-dimensional, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 125 p. Dissertação de Mestrado.

There are many applications where one of the techniques here used are applied with relevance, for instance, into aerodynamics in the calculus of drag coefficient, in the heat exchangers (calculus of Nusselt number). In this work it was sought to show the efficacy of grid generation techniques on the solution of engineering problems. Specifically at one geometry type tube banks, by sample. In these cases a grid boundary fitted increases greatly the obtention of more reliable numerical solutions. In this context, two strategies for grid generation were developed. The elliptical approach (which has as basis a system of non-linear partial differential equations) implemented, permits to obtain automatically specific characteristics such as specified space and orthogonality (both in the boundary). The equations are solved into transformed plane using TDMA solver. To obtain those conditions control functions are implemented. In the second strategy, multibloc technique, the main domain is divided into two independent sub-grids, one polar and other cartesian. The join of sub-grids demands a procedure for information transfer, on the contact boundary, by interpolation. In this study there was a focus to analyse the two strategies comparatively with the aim of gauging the importance of grid generation on the accuracy over the field of temperature. A bidimensional heat transfer problem is used to check it out. The laplacian operator is solved in generalized, polar and cartesian coordinates, using finite volumes method into discretizations. The results obtained were plotted, analysed and compared with an exact solution, have been observed similar tendencies (physics and geometrics) but with stronger gains for the elliptic formulation.

Key words: numerical grid generation (elliptic and multiblock).

Sumário

Lista de Figuras	v
1 Introdução	1
2 Revisão da Literatura	5
2.1 Geração Elíptica	5
2.2 Geração Multiblocos	7
2.3 Este Trabalho	10
3 Conceitos Básicos	12
3.1 Introdução	12
3.2 Regra da Cadeia e Bases	14
3.3 Mapeamento e Invertibilidade	15
3.3.1 Especificação do Contorno	17
3.4 Elementos Métricos	19
3.4.1 Comprimento de Arco	19
3.4.2 Incremento numa dada direção:	20
3.4.3 Jacobiano	21
3.4.4 Área	23
3.5 Operadores Diferenciais	24
4 Técnicas de Geração de Malhas	29
4.1 Introdução	29
4.2 Sistemas de Geração Elíptica de Malhas	30
4.2.1 Sistema de Laplace	30
4.2.2 Sistema de Poisson	31
4.2.3 Equações no Plano Transformado	33
4.2.4 Discretização das Equações da Malha	35
4.2.5 Condição de Ortogonalidade nas Fronteiras	39
4.2.6 Controle do Espaçamento na Fronteira	41
4.3 A Técnica de Multiblocos	43

4.3.1	Geração das Sub-malhas	48
4.3.2	Interpolação entre as Sub-malhas	48
5	Aplicação das Técnicas de Geração de Malhas em Problemas de Condução Bidimensional Permanente	52
5.1	Equações para o Campo de Temperatura	53
5.1.1	Malha Elíptica	53
5.1.2	Malha Multiblocos (MB)	64
6	Resultados e Discussão	67
6.1	Malhas elípticas	71
6.2	Malhas multiblocos	79
6.3	Problema Teste I	83
6.3.1	Resultados pela técnica elíptica	84
6.3.2	Resultados obtidos usando a técnica de multiblocos	84
6.4	Problema Teste II	89
6.4.1	Resultados obtidos pela técnica elíptica	90
6.4.2	Resultados usando a técnica de multiblocos	100
6.5	Comparação dos resultados	103
7	Conclusões	108
	Referências Bibliográficas	111
A	Funções de Interpolação	114
A.1	Esquema de Interpolação	114
B	Discretização das Equações do Campo de Temperatura para as Malhas Polar e Cartesiana	119
B.1	Malha Polar	119
B.2	Malha Cartesiana	122
C	Principais Rotinas e Listagens dos Códigos Fontes	124

Lista de Figuras

1.1	Transformação de coordenadas, planos físico e lógico (computacional)	2
2.1	Topologias tipo multiblocos	8
3.1	Sistema de coordenadas generalizadas bidimensional (ξ, η)	13
3.2	Sistema de vetores de base covariante	16
3.3	Condições de contorno nos planos físico e transformado.	18
3.4	Mapeamento do plano físico para o lógico: geometria duplamente conexa.	19
3.5	Relações entre comprimentos e métricas no plano físico.	23
3.6	Relação entre as áreas no plano físico e transformado.	24
4.1	Domínio de cálculo para malha e temperatura.	30
4.2	Linhas máximas: onde são especificados os espaçamentos S_{ns} e S_{nn}	41
4.3	Plano computacional nas variáveis $1 \leq \xi \leq NI$ e $1 \leq \eta \leq NJ$	44
4.4	Malha principal e sub-malhas (MB).	45
4.5	Sub-malha criada na malha principal e pontos de interpolação.	46
4.6	Eliminação dos pontos da malha principal que caem dentro sub-malha.	46
4.7	Região de cálculo na malha multiblocos : união das sub-malhas polar e cartesiana.	47
4.8	Célula de interpolação para sub-malha polar.	49
4.9	Célula de interpolação para a sub-malha cartesiana.	50
5.1	Condições de contorno para a temperatura (ME).	54
5.2	Fluxo através do volume de controle interno no plano físico.	55
5.3	Volume de controle interno no domínio (ξ, η)	57
5.4	Condição de temperatura prescrita.	61
5.5	Volume de controle na fronteira no domínio (ξ, η)	62
5.6	Regiões de cálculo na malha multiblocos.	65
5.7	Condições de contorno para a temperatura (MB).	65
6.1	Linhas de referência para comparação da temperatura.	71
6.2	Sistema de Laplace com 17x17 pontos.	74

6.3	Malhas O e NO para JENG 0, 17x17 pontos	75
6.4	Malhas O e NO para JENG 2, 17x17 pontos.	76
6.5	Malhas O e NO para JENG 2, 25x25 pontos.	77
6.6	Malhas para fatores de extensão FAT 1 e FAT 2.	80
6.7	Malhas para fatores de extensão FAT1 e FAT3	81
6.8	Malha para fatores de extensão FAT 2 e FAT 3.	82
6.9	Linhas isotérmicas para malha elíptica JENG 2, ortogonal.	85
6.10	Temperatura na linha de centro para diversos casos, 17x17 pontos. . .	86
6.11	Temperatura na linha de centro com a malha multiblocos.	87
6.12	Temperatura exata para o problema II.	90
6.13	Temperatura na linha de centro: problema teste II, para JENG 0. . .	91
6.14	Influência do espaçamento no erro médio.	93
6.15	Influência da ortogonalidade e espaçamento no erro médio.	94
6.16	Erro médio em função do uso ou não das funções de controle P e Q . .	95
6.17	Erro relativo na linha de centro (malhas elípticas).	97
6.18	Erro relativo na linha de centro (malhas elípticas).	98
6.19	Erro relativo na linha de centro (malhas não-ortogonais).	99
6.20	Temperatura na linha de centro (MB).	101
6.21	Perfis do erro relativo pela técnica multiblocos	102
6.22	Temperaturas na linha de centro: ME versus MB.	105
6.23	Comparação entre as temperaturas na linha de centro: ME <i>versus</i> MB	106
6.24	Erro médio entre as abordagens elíptica e multiblocos.	107
A.1	Célula para Obtenção das Funções de Interpolação	117
B.1	Volume de controle para sub-malha polar.	121

Nomenclatura

Letras Latinas

A	área no plano físico [pg. 22]
A_P	coeficiente da equação discretizada onde se calcula a solução dos campos de temperatura ou das coordenadas [Equações 4.16 e 5.17]
A_{NB}	coeficientes vizinhos de A_P
ds	comprimento de arco [Equação 3.6]
dS	área no plano transformado [Equação 3.17]
$d\vec{r}_\xi$	incremento na direção ξ [Equação 3.8]
$d\vec{r}_\eta$	incremento na direção η [Equação 3.11]
dV	volume infinitesimal [pg. 53]
Eps	critério de parada nos processos iterativos [pg. 82]
Erphi	erro da variável ϕ no programa fonte [pg. 82]
$E_{i,j}$	erro relativo nas malhas [Equação 6.3]
$E_{médio}$	erro médio ou global [Equação 6.4]
$f(x, y)$	uma função de classe C^2 [pg. 33]
Fat	fator de extensão da malha polar [Equação 4.42]
g_{ij}	tensor métrico na base covariante [pg. 20]
g^{ij}	tensor métrico na base contravariante [pg. 27]
g	determinante da matriz do tensor métrico [Equação 3.18]
HSU	parâmetro que define o uso das funções interpolantes de Hsu-Lee [pg. 71]
IFC	parâmetro que define o uso entre as funções interpolantes de Hsu-Lee e Jeng-Liou [pg.71]
(I,J)	ponto da malha numérica elíptica [pg. 35]
(I_p, J_p)	ponto da malha numérica polar [pg. 47]

(k,l)	ponto da malha numérica cartesiana modificada [pg. 69]
J	jacobiano [Equação 3.15]
JENG	parâmetro que define o espaçamento nas fronteiras Sul e Norte na malha elíptica [pg 71]
L	dimensão linear do domínio (Ω) [pg. 30]
Laplace	parâmetro que define uma malha elíptica sem funções de controle [pg. 71]
Neq	número equivalente de pontos para a malha multiblocos [pg. 69]
NI	linha máxima na direção ξ [pg. 43]
NJ	linha máxima na direção η [pg. 43]
N_{out}	número de pontos eliminados da malha cartesiana inicial [pg. 69]
NR	linha máxima na direção radial [pg. 68]
NDT	número de divisões na direção angular(θ) [Equação 4.41]
NT	linha máxima na direção angular [pg. 68]
P	função de controle na direção ξ [Equação 4.42]
Q	função de controle na direção η [Equação 4.42]
q_x	fluxo de calor normal à direção x [Figura 5.7]
q_y	fluxo de calor normal à direção y [Figura 5.7]
q_θ	fluxo de calor normal à direção θ [Figura 5.7]
$F_{no,\xi}$	fluxo de calor normal à direção ξ [pg. 56]
$F_{no,\eta}$	fluxo de calor normal à direção η [pg. 56]
$\vec{r} = (x, y)$	vetor posição [Figura 3.1]
$\vec{r}_\xi$	vetor tangente às linhas ξ [pg. 15]
$\vec{r}_\eta$	vetor tangente às linhas η [pg. 15]
R	raio interno da malha polar [Figura 4.1]
R_o	raio externo da malha polar [Equação 4.42]
$Res\phi_{i,j}^n$	resíduo da variável genérica ϕ [pg. 82]
s_{ns}	espaçamento na fronteira Sul [Figura 4.2]
s_{nn}	espaçamento na fronteira Norte [Figura 4.2]

S_p	termo fonte das equações discretizadas [Equação 5.33]
T	temperatura na malha elíptica [Equação 5.3]
T_p	temperatura na malha polar [Equação 6.5]
T_c	temperatura na malha cartesiana [Equação 6.5]
T_{exa}	temperatura exata [Equação 6.10]
$T_{exa,max}$	temperatura exata máxima no domínio [Equação 6.3]
$T_{exa,min}$	temperatura exata mínima no domínio [Equação 6.3]
$u(x, y)$	solução genérica para o laplaciano numa geometria cartesiana [pg. 88]
x^j	coordenadas cartesianas [pg. 14]
Δx	variação das abscissas : $\Delta x = x_1 + x_2$ [Figura 4.8]
Δy	variação das ordenadas: $\Delta y = y_1 + y_2$ [Figura 4.8]
$x_1, x_2,$ y_1, y_2	coeficientes de interpolação numa célula cartesiana para cálculo da temperatura polar [Equação 4.44]
wf	função peso [Equação 4.22]
wf^*	função peso para termos mistos [Equação 4.23]

Letras Gregas

α	tensor métrico na direção η [Equação 3.7]
β	tensor métrico na direção $\xi\eta$ [Equação 3.7]
γ	tensor métrico na direção ξ [Equação 3.7]
θ	ângulo na malha polar [Figura 4.7]
$\theta_1, \theta_2,$ r_1, r_2	coeficientes de interpolação numa célula polar para cálculo da temperatura cartesiana [Figura 4.9]
$\Delta\theta$	variação angular na malha polar $\Delta\theta = \theta_1 + \theta_2$ [Figura 4.9]
ΔR	variação radial na malha polar $\Delta R = r_1 + r_2$ [pg. 48]
ϕ	uma variável genérica contínua
ϕ_P	variável discreta para T [Equação 5.17] e $\vec{r} = (x, y)$ [Equação 4.12]
λ	parâmetro da solução exata [Equação 6.10]
ξ	abscissa do plano transformado [Figura 3.3 b]
$\xi_{\max}$	abscissa máxima na direção ξ [Figura 4.3]
$\xi_{\min}$	abscissa mínima na direção ξ [Figura 4.3]
ξ^i	coordenadas generalizadas [pg. 14]
$\Delta\xi$	variação da abscissa ξ [pg. 35]
η	ordenada do plano transformado [Figura 3.3 b]
$\eta_{\max}$	ordenada máxima na direção η [Figura 4.3]
$\eta_{\min}$	ordenada mínima na direção η [Figura 4.3]
$\Delta\eta$	variação da ordenada η [pg. 35]
Γ	coeficiente de difusividade [Equação 5.1]
∇^2	operador laplaciano [Equação 3.21]
$\partial\Omega$	contorno da região Ω [Figura 5.4]
δV	volume elementar da região Ω [pg. 53]
Ψ	transformação de coordenadas : do plano físico para o transformado [Equação 3.15]
Φ^{-1}	transformação inversa de coordenadas : do plano transformado para o físico [Equação 3.15]

Superescritos

$ ^n$	propriedade na iteração atual
$ ^{n-1}$	propriedade na iteração anterior

Subscritos

$()_e$	propriedade na interface e
$()_w$	propriedade na interface w
$()_n$	propriedade na interface n
$()_s$	propriedade na interface s

Abreviações

ME	malha elíptica
MB	malha multiblocos

Siglas

SOR	successive over-relaxation
TDMA	tridiagonal matrix algorithm
FVM	finite volume method

Capítulo 1

Introdução

A geração numérica de malhas surgiu da necessidade de se obter, numericamente, soluções de equações diferenciais parciais sobre regiões físicas com geometrias complexas. Isto é feito através de uma transformação (ou mapeamento) de uma região física de geometria irregular para uma outra de características mais simples, de preferência ortogonal, removendo-se a dificuldade da forma (complexa) da região física do problema. Tais transformações podem ser vistas como um sistema geral de coordenadas curvilineares para a região física, como mostra a Figura 1.1. Algumas transformações aonde ocorrem geometrias tipo polar, cilíndrica ou esféricas, são casos especiais bem definidos.

O custo do uso de tal sistema de coordenadas é o aumento da complexidade, tanto da malha quanto das equações que governam ou modelam um problema físico. Em compensação, as condições de contorno tornam-se mais fáceis de se especificar. As técnicas aqui desenvolvidas, buscam resolver problemas com a ajuda de malhas que são adaptadas à forma da geometria do corpo, i.e., que o contorno seja uma das coordenadas do sistema; isto implica que se tenha fronteiras inteiramente adaptadas ao cálculo das variáveis físicas, evitando a necessidade de alguma forma de interpolação na fronteira, o que pode levar a resultados menos precisos nos valores da variável em estudo.

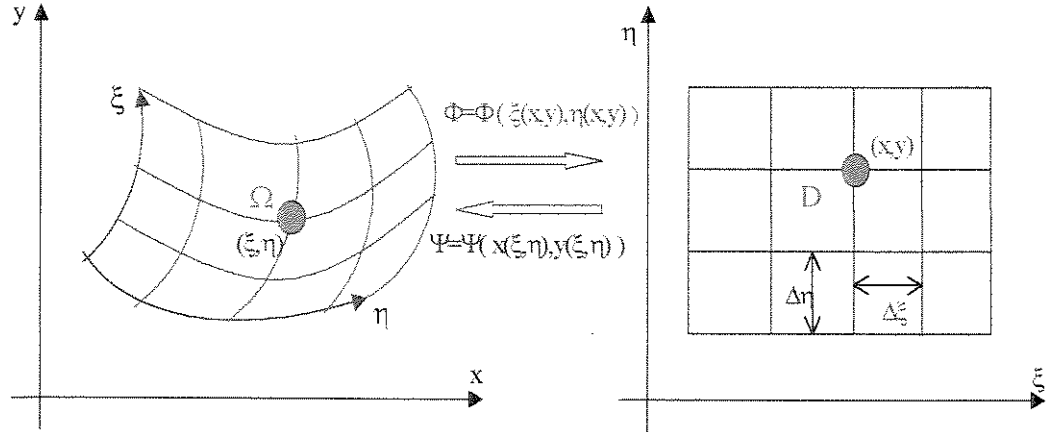


Figura 1.1: Transformação de coordenadas, planos físico e lógico (computacional)

Em muitas aplicações é possível transformar a região física para um quadrado, de forma que os contornos do quadrado correspondam aos contornos da região física. A região transformada é denominada de região lógica ou computacional; esta transformação dá origem a um sistema de coordenadas ajustadas ao contorno. As linhas coordenadas neste sistema são dadas por imagens de linhas coordenadas uniformes na região lógica (computacional), conforme Figura 1.1.

Daqui por diante as terminologias plano físico ou domínio físico descrevem a mesma coisa; assim como domínio computacional, plano lógico ou domínio lógico são usados no mesmo sentido. Idem para os termos transformação e mapeamento, os quais têm o mesmo significado. Uma propriedade muito desejável em toda transformação é que ela seja bijetiva, i.e., inversível. Em outras palavras, que seja possível passar de um domínio para outro diretamente, preservando as qualidades geométricas entre os domínios. A condição necessária para que isto ocorra é que o Jacobiano da transformação seja não nulo. Conforme veremos no decorrer deste trabalho, a transformação realmente ocorre do domínio computacional para o domínio físico. Todos os cálculos são efetuados no plano lógico e depois, ocorre sua transformação para o plano físico. Da mesma forma, todo o algoritmo é implementado no plano lógico. Se um

conjunto de pontos é escolhido no espaço lógico, então a transformação inversa leva estes pontos a pontos correspondentes no espaço físico, onde eles formam uma malha (Figura 1.1). Se estes pontos no espaço lógico são criados em forma de quadrados através de retângulos idênticos, então a malha será retangular. Em todo este trabalho a malha na região computacional é retangular.

Se o Jacobiano assume valor nulo em algum ponto da malha, então a transformação falha na preservação de propriedades matemáticas (ou físicas) essenciais das equações governantes neste ponto, e ocorre uma dobra¹ na geometria. Evitar dobras numa transformação é um dos principais objetivos das técnicas de geração de malhas. É também sabido que erros de aproximação nas equações governantes dependem não apenas da ordem de aproximação das derivadas e do espaçamento da malha, mas também da taxa de variação do espaçamento da malha e do afastamento da malha da ortogonalidade² [18].

Para um dado espaçamento de malha, malhas suaves e ortogonais conduzem a erros menores. Assim, um outro objetivo essencial nos algoritmos de geração de malhas é que eles produzam malha suaves, i.e., o espaçamento entre as linhas coordenadas varie suavemente, sem variações bruscas ou sem existência de dobras, e que os ângulos entre as linhas coordenadas não se tornem muito pequenos (agudos) nem muito grandes (obtusos).

Uma outra característica que deve ser buscada sempre que possível na solução de problemas envolvendo estas metodologias, é determinar as regiões onde ocorrem altos gradientes e, nestas regiões, criar uma malha mais refinada de forma a reduzir erros de aproximação numérica. As formas de se definir (gerar) uma malha variam bastante com o problema a ser resolvido. Nos casos onde a geometria pode ser subdividida em outras mais simples e ortogonais, muito do trabalho de transformar coordenadas desaparece; nestes casos as métricas são conhecidas a priori em todo o

¹Cruzamento entre linhas de coordenadas semelhantes, por exemplo $\eta = \eta_0$ e $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$

²Para um afastamento de até 2^o a malha é considerada ortogonal [17]

domínio.

As técnicas de geração de malhas tiveram um grande avanço nas últimas duas décadas graças, em parte, ao desenvolvimento de computadores de alto desempenho como também das linguagens de programação, passando de métodos algébricos a métodos difero-integrais, que conferem maior consistência à transformação efetuada, garantindo que os cálculos das variáveis de campo tenham elevada precisão. Portanto, a geração de malhas se constitui num passo essencial para se compreender a evolução de uma variável de campo; por isso existem muitas técnicas com tal finalidade e é uma área que continua a desenvolver-se intensamente.

Conforme descrito acima, problemas envolvendo equações diferenciais parciais em domínios de forma arbitrária são encontrados em muitos campos da física, tais como: mecânica dos fluidos, transferência de calor, estruturas, campos eletromagnéticos, entre outros. Como forma natural de se evitar o surgimento de erros nas soluções desses problemas, oriundos da má distribuição (em relação ao domínio físico) dos pontos no domínio, a tendência atual tem sido a de *envolver* a geometria do corpo por um *sistema de coordenadas ajustadas às fronteiras* do mesmo (sistema de coordenadas curvilineares). Desta forma, se faz necessário a construção de um conjunto de pontos que venha reduzir erros, oriundos da forma que os mesmos cobrem o domínio físico, nas aproximações das funções e suas derivadas no campo em estudo. A este processo dá-se a denominação de *geração de malha*. Numa das técnicas mais desenvolvidas ultimamente, se faz com que as coordenadas curvilíneas sejam soluções para um problema (de valor de contorno) tipo Laplace ou Poisson (ambos elípticos).

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Geração Elíptica

Embora sistemas de equações diferenciais parabólicas ou hiperbólicas possam ser usadas, apenas os sistemas elípticos permitem a especificação da distribuição da malha em todos os contornos do domínio.

Um dos primeiros pesquisadores a introduzir tal abordagem foi Crowley [3], que em 1962, sugeriu que a solução das equações de Laplace ($\nabla^2 \xi = 0$, $\nabla^2 \eta = 0$) fossem usadas como coordenadas curvilineares. Contudo, um dos principais avanços nas técnicas de geração foi propiciado por Winslow [27], reconstruindo o sistema inicial $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ a partir das equações transformadas $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, i.e., as variáveis dependentes e independentes foram permutadas. As equações resultantes no novo sistema de coordenadas são mais complexas tanto na forma (pois são equações não-lineares) quanto no método de solução; porém, numericamente mais simples, pois, no novo sistema as condições de contorno tornam-se mais simples de se implementar.

No início da década de 80, um outro grande passo foi dado por Thompson *et al.* [18], que propuseram uma abordagem mais fundamentada e concisa sobre gera-

dores de malha para sistemas de coordenadas ajustados à fronteira do corpo. Em seu estudo, Thompson *et al.* [21] estenderam o método de Laplace para problemas tendo domínios multiplamente conectados, tornando seu método aplicável a várias geometrias. Em adição, eles propuseram a incorporação de funções, de forma exponencial decrescente, com a finalidade de controlar o espaçamento e a inclinação entre as linhas coordenadas. Matematicamente a introdução de tais termos, transforma um problema de Laplace em um problema de Poisson, i.e., $(\nabla^2 \xi = P, \nabla^2 \eta = Q)$.

A distribuição dos pontos da malha pode ser melhorada assinalando valores às funções $P = P(\xi, \eta)$ e $Q = Q(\xi, \eta)$. O efeito das funções de controle sobre o sistema de coordenadas curvilíneas tem sido extensivamente estudado por Thompson *et al.* [21]. Outras características foram propostas por Thompson *et al.* [18], como controle da ortogonalidade e espaçamento nas fronteiras. Tomas&Middlecoff [12] propuseram uma outra forma de cálculo para as funções P e Q .

Mais recentemente Steger e Sorenson [15] propuseram uma recorrência para controle do espaçamento nas fronteiras. Na última década Hsu&Lee [6] se apoiaram nestes desenvolvimentos e construíram uma metodologia extremamente eficiente, diferindo das demais por propor, na fase de discretização, o uso não do esquema de diferenças centrais, mas de uma solução "quase" analítica, onde são obtidas funções interpolantes bidimensionais exponenciais (ver apêndice A).

Conforme a literatura citada, uma análise mais "física" destas equações nos conduz a um paralelo entre elas e uma equação tipo difusivo-convectiva (da transferência de calor), onde $(J^2 P x_\xi + J^2 Q x_\eta)$ e $(J^2 P y_\xi + J^2 Q y_\eta)$ (ver apêndice A) representariam os termos convectivos da equação. Conforme os cálculos efetuados em campos deste tipo, existe um compromisso do campo de velocidades e o tamanho da malha, representado pelo número de Peclet (razão convecção/condução) conforme Maliska [11], se $Pe > 2$, na célula, então problemas de convergência poderão ocorrer; por isto se testa esta grandeza. No caso da geração de malha o número Peclet está associado aos quocientes $\frac{PJ^2}{\alpha}$ e $\frac{QJ^2}{\gamma}$.

Quando se discretiza tais equações via diferenças centrais, estes termos surgem nos coeficientes e, quando $\frac{PJ^2}{\alpha}$ e $\frac{QJ^2}{\gamma}$ assumem valores absolutos elevados, instabilidades numéricas surgem no processo de solução.

Em face desta indesejável característica do método de solução que usa diferenças centrais para aproximar as derivadas das funções $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$, uma metodologia que usa funções peso será também implementada.

Esta metodologia não sofre este tipo de instabilidade, já que se baseia numa solução analítica (ver apêndice A) bem comportada numa dada região Ω . Os valores assumidos pela função peso são sempre positivos e sempre satisfazem às leis de conservação conforme Hsu&Lee [6].

2.2 Geração Multiblocos

Esta técnica consiste em subdividir uma geometria complexa em partes menores, independentes na sua geração, e fazer-se um acoplamento entre as sub-malhas. Esta metodologia, conhecida por *Técnica de Mutiblocos*, tem como vantagens, por exemplo, a concentração da malha nas regiões de maior interesse (maiores gradientes da função) assim como menor tempo de CPU. Um aspecto crucial na solução de sistemas de malhas justapostas é a comunicação dos dados entre as duas geometrias nas regiões de interface.

Em 1978, Launder&Massey [9] investigaram a qualidade da solução numérica em problemas de escoamento e transferência de calor em geometria tipo banco de tubos, utilizando diferentes malhas. Eles notaram que quanto melhor a malha adequar-se à geometria, uma melhor solução da grandeza física em estudo era obtida. Com base neste trabalho e uma real demanda em estudos desta natureza, i.e., geometrias complexas em problemas físicos, surgiu a idéia de se desenvolver algoritmos numéricos que fossem capazes de mensurar a real importância da malha sobre a qual desenvolve-se um dado campo físico, neste caso, um campo de temperaturas.

Mais recentemente Bisvas&Mitral [1] utilizaram uma forma de interpolação, que é empregada neste trabalho, isto é, para malhas justapostas. Neste caso, uma malha principal (polar e cartesiana) contorna a região física, enquanto uma fronteira fictícia é criada entre as duas sub-malhas, de forma a transferir as informações (temperaturas na interface) de um campo ao outro.

Devido às características de alguns problemas físicos, onde configurações com muitos objetos interagem criando domínios com geometrias irregulares, é que técnicas onde o domínio de cálculo possa ser subdividido, e ainda, de forma ajustada à fronteira, se tornam particularmente atraentes. Considerando tais características, um método de geração de malha tipo multiblocos torna-se muito útil, já que permite tratar zonas diferentes dentro da mesma configuração (malha), sem necessidade que as linhas coordenadas sejam contínuas.

Além de poder ser implementada por abordagens numéricas bem distintas como são as formulações por volumes estruturados (método dos volumes finitos) e não estruturados (método dos elementos finitos). As malhas estruturadas por esta técnica são amplamente classificadas como: casadas (*patched*) Rai [13] ou sobrepostas /justapostas (*overlapped*) [15] conforme mostra a Figura 2.1.

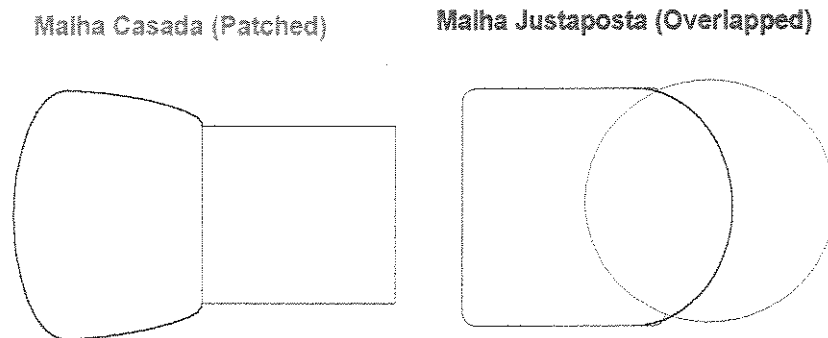


Figura 2.1: Topologias tipo multiblocos

Nas primeiras temos blocos individuais, nos quais dois blocos vizinhos quais-

quer são unidos juntamente, em linhas comuns, sem sobreposição. Na última (sobreposta) os blocos de malha podem ser arbitrariamente sobrepostos um sobre o outro, de forma a cobrir o domínio de interesse (ver Thompson *et. al* [18] e Wang [25]).

Comparadas às malhas casadas, as malhas sobrepostas são mais flexíveis de se gerar e podem ser facilmente adaptadas à geometrias complexas, no entanto, a transferência de dados entre os blocos da interface é uma área importante e difícil. Porém, para ambas as configurações, os resultados do tratamento das interfaces, observando-se simultaneamente as leis de conservação e a precisão espacial, necessitam ser melhor estudados.

Para problemas envolvendo descontinuidades ou fortes gradientes das variáveis do escoamento, é bem sabido da vantagem de se usar um esquema numérico na forma conservativa. Rai [13] desenvolveu um tratamento de interface conservativa para malhas casadas e efetuou cálculos demonstrando a capacidade de capturar ondas de choque com a interface da malha descontínua. Berger [2] apresenta uma discussão sobre interpolação conservativa em malhas sobrepostas.

Cheshire&Henshaw [5] conduziram análises sobre o tratamento da interface da malha e desenvolveram estruturas de dados para interpolação conservativa sobre malhas sobrepostas. Eles resolveram problemas de ondas de choque com interpolação conservativa e não-conservativa e encontraram que ambos os esquemas (na interface) podem levar a bons resultados.

Das literaturas citadas pode ser visto que vários fatores, como ordem da precisão da interpolação, interpolação conservativa ou não-conservativa e resolução da malha, podem afetar a qualidade da solução de problemas de escoamentos envolvendo fortes gradientes e descontinuidades nas interfaces das malhas.

Qual fator (ou combinação de diferentes fatores) tem o efeito mais crítico ainda não é claro. Teoricamente, as leis de conservação física seriam satisfeitas em todo domínio, mas quando malhas descontínuas são encontradas, ainda existe uma

certa dúvida quanto a isso. Para alguns problemas, o compromisso tem de ser feito entre manter conservação dos fluxos e precisão da interpolação, consistentemente, em ambas as interfaces da malha e regiões interiores.

2.3 Este Trabalho

As motivações principais deste trabalho estão relacionadas: primeiro, o uso da técnica de geração de malhas ajustadas às fronteiras do corpo, as quais durante as últimas décadas tem se mostrado eficientes com relação à precisão de soluções de campos físicos, e também quanto a sua automática implementação numérica, já que são raros os casos em que dispomos das relações analíticas entre uma geometria arbitrária e uma geometria ortogonal conhecida. Segundo, fazer um estudo comparativo entre a metodologia elíptica e a técnica de multiblocos.

Buscou-se neste trabalho o desenvolvimento de duas técnicas numéricas para discretização de domínios arbitrários, com o objetivo de aplicá-los à solução de problemas de condução de calor bidimensional e, principalmente, estudar comparativamente as soluções obtidas pelas duas estratégias de discretização do domínio. A primeira discretização em curso e, também, a mais elaborada das duas, é a técnica elíptica, pois baseia-se na solução de um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares. Do outro lado, temos a discretização tipo multiblocos, onde divide-se o domínio principal em sub-malhas independentes.

A implementação desenvolvida aqui, subdividiu a malha principal em duas, uma polar e a outra cartesiana. As implementações são bastante distintas, pois, na metodologia multiblocos nenhuma equação é resolvida, pois dispomos das métricas da transformação (fatores de escala) das sub-malhas. Na abordagem elíptica, buscou-se tornar o código computacional mais automático, isto é, poucas entradas são necessárias para calcular as variáveis da malha.

Conforme ver-se-á nos próximos capítulos, na técnica elíptica pode-se variar

significativamente a forma final da malha resultante. Outro aspecto a seu favor é sua regularidade quando um sistema de Laplace é resolvido, pois sempre há uma solução bem comportada (para esse sistema), satisfazendo o Princípio do Máximo.

Apesar de ter que se resolver um par de equações diferenciais parciais não-lineares independentes, a metodologia numérica desenvolvida é bastante robusta e flexível. Robusta, porque na maioria dos casos a solução é bem comportada, mesmo quando termos fonte são incluídos às equações; flexível, pois permite uma automatização no processo numérico de cálculo, pois a geometria interna depende das condições de contorno, as quais são uma das únicas entradas na implementação numérica.

A partir da introdução de novos elementos para controle da malha, como ortogonalidade nas fronteiras e espaçamento entre duas linhas coordenadas, a técnica de geração elíptica ganhou mais força. Ao mesmo tempo, outras metodologias não necessariamente antagônicas, surgiram com muita intensidade, como é o caso da técnica de multiblocos.

Neste trabalho procura-se mostrar a versatilidade desta técnica, a qual é baseada na forma independente em que as sub-malhas são arranjadas e, principalmente, na forma de transferir dados de uma sub-malha a outra na região de justaposição. Isto exige a criação de uma rotina numérica de interpolação. Esta é talvez a tarefa mais complexa desta técnica, o casamento entre os dois campos, ou seja, a sua comunicação, de forma a garantir uma transição suave das informações físicas.

Uma das grandes vantagens desta técnica é a não-necessidade de se solucionar um sistema de equações diferenciais parciais para obter-se os pontos nodais (malha), o que facilita muito o trabalho computacional, pois esta é uma parte onde um tempo computacional substancial é consumido pela técnica elíptica.

Capítulo 3

Conceitos Básicos

3.1 Introdução

A transformação do sistema cartesiano para um sistema geral curvilinear quando desenvolvida, nos leva diretamente ao uso de conceitos básicos da geometria diferencial. Assim acontece quando uma geometria arbitrária (irregular) é mapeada para o sistema cartesiano (espaço euclideo). A geometria diferencial estuda curvas ou superfícies a partir dos conceitos do cálculo diferencial.

Uma vez construída esta base, é possível garantir a possibilidade das transformações entre dois sistemas de coordenadas, e até sua invertibilidade. Alguns desses conceitos serão descritos ainda neste capítulo, de forma sumária. Portanto, a adequada colocação do problema de geração de malhas via solução de equações diferenciais, dependerá de parâmetros geométricos, os quais descrevem o comportamento local da transformação.

Alguns autores têm contribuído sensivelmente na formulação e na obtenção dos parâmetros de transformação envolvidos em um mapeamento de uma geometria cartesiana para uma geometria arbitrária e vice-versa, entre eles se destacam Thompson, Warsi *et al.* [22] e Knupp&Steinbreg [8]. Uma representação esquemática de

um sistema geral de coordenadas pode ser visto na Figura 3.1. Na transição de um sistema de coordenadas cartesiana (neste trabalho foram abordadas apenas transformações bidimensionais):

$$x = x(\xi, \eta) \text{ e } y = y(\xi, \eta) \quad (3.1)$$

para um sistema de coordenadas curvilineares genérica, no plano:

$$\xi = \xi(x, y) \text{ e } \eta = \eta(x, y) \quad (3.2)$$

surtem parâmetros de transformação, os quais envolvem propriedades específicas do espaço (denominadas métricas da transformação) que sofre a transformação. Por exemplo, no plano cartesiano, uma área de dimensão $\Delta x \Delta y$ não será geometricamente idêntica àquela correspondente no plano transformado $\Delta \xi \Delta \eta$.

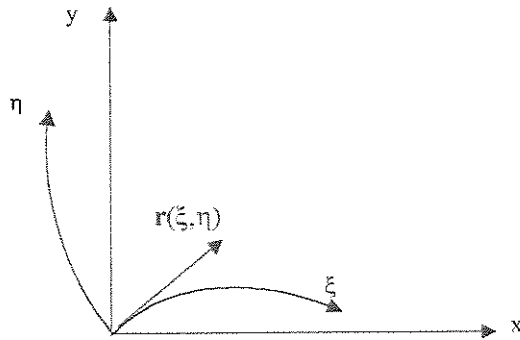


Figura 3.1: Sistema de coordenadas generalizadas bidimensional (ξ, η)

A grandeza geométrica responsável pela invariância das medidas, numa transformação de coordenadas, é o Jacobiano (ou determinante Jacobiano) da transformação, o qual será descrito a seguir. Outras métricas de importância envolvem

derivadas de várias ordens em relação às coordenadas curvilineares e, assim, um trabalho especial é dedicado à obtenção destas métricas.

Como na prática é necessário resolver-se problemas mais complexos, os quais estão relacionados à ordem do espaço métrico¹ em que se está trabalhando (no nosso estudo apenas espaços euclidianos bidimensionais são abordados); algumas grandezas, do tipo tensorial estarão presentes com a finalidade de conferir, em alguns casos, uma notação mais compacta às grandezas que se originam.

Por isto, sumariizaremos alguns dos principais conceitos concernentes à geometria diferencial, que fornece os principais elementos para interpretação geométrica da transformação, e à análise tensorial, que sintetiza os componentes básicos resultantes da transformação via símbolos.

3.2 Regra da Cadeia e Bases

A regra da cadeia é largamente empregada em problemas que tratam de transformações de coordenadas. Assim, sejam x^j e ξ^i coordenadas no sistema cartesiano e curvilinear, respectivamente, isto é, $x^j = x^j(\xi^i)$. Tomando-se $j = 2$ e $i = 2$ teremos:

$$\begin{aligned}x^1 &= x^1(\xi^1, \xi^2) = x(\xi, \eta) \\x^2 &= x^2(\xi^1, \xi^2) = y(\xi, \eta)\end{aligned}$$

Se $F = F(x^j) = F(x^j(\xi^i))$ é uma função escalar real, ou seja, $F : D_F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pelo teorema da função composta, define-se derivada parcial de F em relação à variável ξ^i por:

$$F_{\xi^i} = \sum_{j=1}^2 F_{x^j} (x_j)_{\xi^i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi^i} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi^i}, \quad (j = 1, 2), \quad (3.3)$$

¹Espaço no qual uma norma (distância) está definida e garante, entre outras coisas, a diferenciabilidade.

em particular, se $i = 1$ ($\xi^1 = \xi$), ter-se-á:

$$F_{\xi^1} = \sum_{j=1}^2 F_{x_j} (x_j)_{\xi^1} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = F_x x_{\xi} + F_y y_{\xi}$$

Neste caso, as métricas desta transformação são as derivadas $(x_j)_{\xi^i}$. A forma da métrica que relaciona as variáveis da transformação irá depender do tipo de base do sistema que está sendo usado, isto é, base covariante ou contravariante.

Para sistemas coordenados bidimensionais, linhas de coordenadas curvilíneas são curvas unidimensionais que se interceptam em um ponto. Assim como em sistemas tridimensionais, as linhas de coordenadas são superfícies sobre as quais uma coordenada é constante. Em qualquer caso podemos tomar como base do sistema coordenado tanto tangentes à curva (ou à superfície) quanto seus vetores normais.

A escolha de um ou de outro sistema a adotar depende do tipo do problema a resolver. Quando o sistema de base é derivado dos vetores tangentes às linhas coordenadas recebe a denominação de sistema de Base Covariante. A Figura 3.2 mostra um esboço deste sistema de base. Neste caso a base é representada por:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right)$$

Em situações bidimensionais opta-se por usar o sistema de base covariante, pois é comum ter-se condições de fluxo nas fronteiras de problemas físicos. Na geração de malhas em geometrias irregulares, pode-se especificar fronteiras onde os vetores tangentes sejam ortogonais, implicando em um menor erro de truncamento.

3.3 Mapeamento e Invertibilidade

Como base teórica para obter-se uma malha matematicamente, deve-se observar o domínio e a imagem da transformação em curso, e sob que condições essa transformação é possível. Neste trabalho estaremos interessados basicamente em mapeamentos de um objeto geométrico para outro que preserve suas características topológicas, isto é, de continuidade e vizinhança.

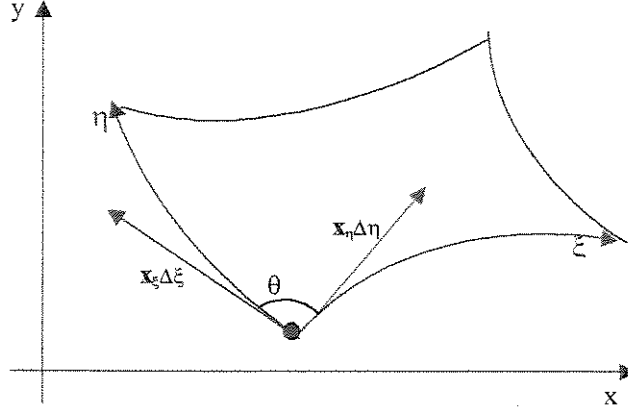


Figura 3.2: Sistema de vetores de base covariante

Os conjuntos aqui desenvolvidos (geometrias) são subconjuntos do *Espaço Euclidiano* E^2 , os quais têm como coordenadas genéricas o par cartesiano (x, y) . As variáveis (x, y) estão definidas no espaço físico (aqui, a imagem da transformação), enquanto as variáveis-coordenadas (ξ, η) (o domínio do mapeamento) são definidas no espaço lógico. Uma forma vetorial de representar estas diferentes coordenadas é : $x = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ e $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots, \xi^n)$. Para uma situação bidimensional $x^1 = x$ e $x^2 = y$, do mesmo modo $\xi^1 = \xi$ e $\xi^2 = \eta$.

Estaremos interessados nas transformações bijetivas, isto é, onde se passe do plano lógico para o plano físico indistintamente. Como não há um conhecimento a priori da forma da transformação, dado que a geometria não é definida analiticamente, a possibilidade da existência da transformação dependerá do não anulamento do Jacobiano no domínio; já que as principais métricas (derivadas) dependem do cálculo do mesmo como veremos no próximo capítulo.

Um requerimento importante é que os mapeamentos usados para gerar mal-

has levem o contorno da região lógica para o contorno da região física.

3.3.1 Especificação do Contorno

Antes de uma malha poder ser gerada, a geometria sobre a qual focalizamos nosso estudo (objeto físico) deve ser matematicamente descrita; isto pode ser feito pela especificação de sua fronteira conforme a Figura 3.3. O contorno de tal objeto pode ser escrito em três formas fundamentalmente diferentes: parametricamente, implicitamente ou numericamente. Por exemplo, segundo Knupp *et al.* [8], o contorno do disco circular pode ser dado por:

$$\begin{aligned} 1 - \textit{Parametricamente} : & \quad \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \\ 2 - \textit{Implicitamente} : & \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ 3 - \textit{Numericamente} : & \quad \begin{cases} x_i = \cos(\theta_i), & y_i = \sin(\theta_i) \\ \theta_i = 2\pi i/M, & 0 < i \leq M \end{cases} \end{aligned}$$

A necessidade de que os contornos sejam mapeados integralmente é de suma importância pois, a partir disto, é que se modelará as linhas de coordenadas (pontos internos), as quais, em geral, são obtidas por alguma forma de interpolação do contorno. Isto pode ser feito, primeiro, dando o contorno parametricamente, usando o mapeamento e, então, estendendo este mapeamento para o interior da região.

Deve-se assumir uma propriedade básica, geométrica, para que a transformação não falhe, isto é, que a região em estudo seja simplesmente conexa, isto é, que se pode reduzir qualquer curva (fechada simples) interior à região, a um ponto, sem cruzar nenhuma fronteira da região, ou seja, é formada de uma única parte. Pode acontecer que a região não seja feita de uma única parte, neste caso a região é dita multiplamente conexa (ver Figura 3.4).

No presente trabalho a geometria estudada apresenta o caráter duplamente conexo, já que temos um furo. No entanto, em função da simetria desta geometria, optou-se por considerar apenas um quarto do domínio, tomando esta configuração a

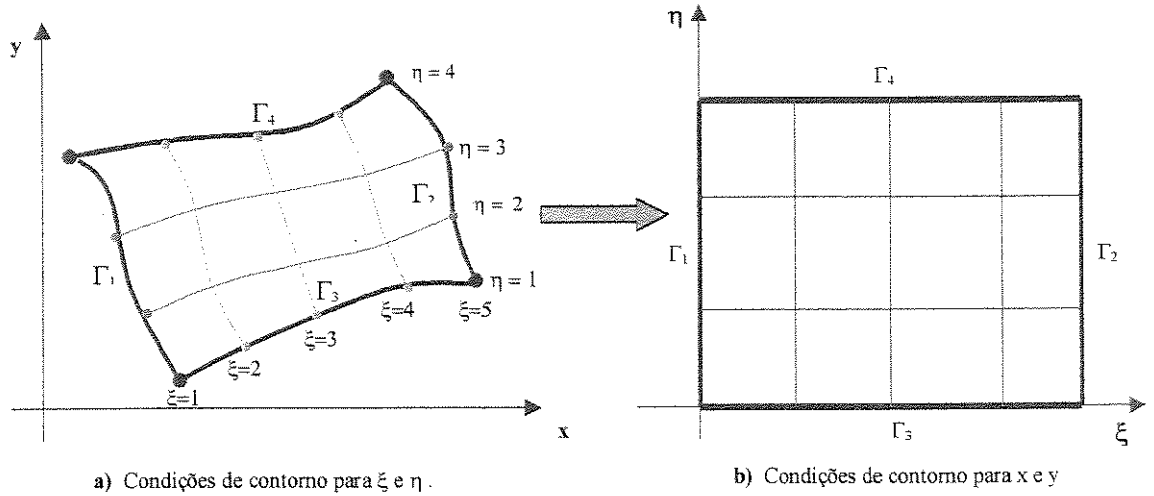


Figura 3.3: Condições de contorno nos planos físico e transformado.

característica de domínio simplesmente conexo.

Situações onde o domínio é multiplamente conexo, quando surgem, devem ser tratadas com algumas nuances. Por exemplo, numa cavidade com um furo, ou numa geometria anular (círculos concêntricos), fronteiras especiais devem ser criadas de forma que tais regiões sejam transformadas numa nova região computacional única. As fronteiras onde esses cortes são feitos, recebem a denominação (na literatura especializada) de '*Branch-Cut*'. A Figura 3.4 ilustra este tipo de geometria e a posição do corte.

Nas fronteiras AF e CD não se especificam condições de contorno, pois são pontos internos à região. O algoritmo deve prescrever uma condição de continuidade para que esses pontos fiquem bem definidos na transformação. Detalhes pormenorizados sobre estes tipos de regiões e como tratá-las, encontram-se na referência [22].

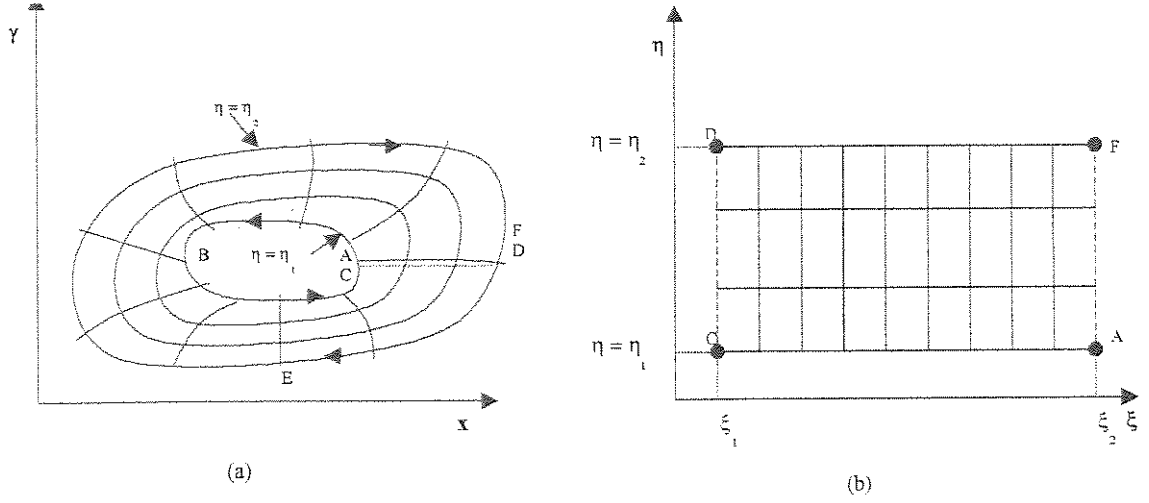


Figura 3.4: Mapeamento do plano físico para o lógico: geometria duplamente conexa.

3.4 Elementos Métricos

Seja o sistema de coordenadas descrito na Figura 3.2, o qual tem como vetores de base $\vec{r}_\xi$ e $\vec{r}_\eta$. Esta base irá determinar como cada volume elementar no domínio discreto será definido. Para este tipo de construção, podemos usar da propriedade de ortogonalidade entre dois vetores para definir fronteiras perpendiculares.

3.4.1 Comprimento de Arco

Seja um incremento infinitesimal, definido por : $d\vec{r} = \sum_i \sum_j r_{\xi^j} dr_{\xi^i}$, onde : $\vec{r}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, então, define-se comprimento de arco por:

$$ds^2 = ||d\vec{r}||^2 = ||(dx, dy) \cdot (dx, dy)||^2 \quad (3.4)$$

$$dx^2 + dy^2 = (x_\xi \Delta\xi + x_\eta \Delta\eta)^2 + (y_\xi \Delta\xi + y_\eta \Delta\eta)^2, \quad (3.5)$$

$$ds^2 = ||d\vec{r}||^2 = \sum_i \sum_j (r_{\xi^i} \cdot r_{\xi^j}) dr_{\xi^i} dr_{\xi^j} \quad (3.6)$$

definindo o produto interno ou escalar $r_{\xi^i} \cdot r_{\xi^j}$ por g_{ij} (tensor métrico) teremos:

$$ds^2 = ||d\vec{r}||^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} dr_{\xi^i} dr_{\xi^j} \quad (3.7)$$

Para um sistema ortogonal se escreve:

$$ds^2 = ||d\vec{r}||^2 = \sum_i h_i^2 dr_{\xi^i}^2,$$

onde os h_i são os fatores de escala. Se o sistema de coordenadas for cartesiano, o comprimento de arco é dado diretamente pelo teorema de Pitágoras, pois neste caso, $h_1 = h_2 = 1$.

O tensor métrico g_{ij} é descrito por suas componentes g_{11} , g_{12} e g_{22} , as quais recebem denominações especiais (α , β e γ):

$$\begin{aligned} g_{11} &= r_{\xi^1} \cdot r_{\xi^1} = (x_\xi, y_\xi) \cdot (x_\xi, y_\xi) = x_\xi^2 + y_\xi^2 = \gamma \\ g_{12} &= r_{\xi^1} \cdot r_{\xi^2} = (x_\xi, y_\xi) \cdot (x_\eta, y_\eta) = x_\xi y_\xi + x_\eta y_\eta = \beta \\ g_{22} &= r_{\xi^2} \cdot r_{\xi^2} = (x_\eta, y_\eta) \cdot (x_\eta, y_\eta) = x_\eta^2 + y_\eta^2 = \alpha \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.4.2 Incremento numa dada direção:

O incremento numa dada direção é calculado fazendo-se a variável naquela direção constante, isto é:

- para uma linha de $\eta = Cte$

$$(ds^2)_{\eta=Cte} = \sum_i \sum_{j=fixo} g_{ij} dr_{\xi^i} dr_{\xi^j} = (x_\xi \Delta \xi)^2 + (y_\xi \Delta \xi)^2 = g_{11} \Delta \xi^2 \quad (3.9)$$

$$\text{ou seja} \quad : \quad ds = \sqrt{g_{11}} \Delta \xi, \quad (3.10)$$

- para uma linha de $\xi = Cte$

$$(ds^2)_{\xi=Cte} = \sum_{i=fixo} \sum_j g_{ij} dr_{\xi^i} dr_{\xi^j} = (x_\eta \Delta \eta)^2 + (y_\eta \Delta \eta)^2 = g_{22} \Delta \eta^2 \quad (3.11)$$

$$\text{ou seja} \quad : \quad ds = \sqrt{g_{22}} \Delta \eta, \text{ para uma linha de } \xi = Cte \quad (3.12)$$

O comprimento de arco será importante mais a frente, na definição do espaçamento nas fronteiras, na qual se deseja exercer um controle especificado.

3.4.3 Jacobiano

Este é talvez o mais importante dos conceitos na matemática de uma transformação de uma geometria para outra. Ele nos informa da possibilidade de existência da transformação, isto é, se o mapeamento é possível, garantindo assim, que a transformação possua uma inversa. Se o Jacobiano se anula no interior do domínio, então a transformação pode sofrer problemas de existência e unicidade, criando dobras nos pontos internos do domínio transformado e gerando soluções irrealistas para as equações estudadas.

A transformação aqui desenvolvida ocorre do plano lógico para o físico, que em linguagem matemática escreve-se:

$$\Psi (x(\xi, \eta) , y(\xi, \eta)) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad (3.13)$$

De forma análoga pode-se escrever a transformação inversa (se existir) como:

$$\Phi^{-1}(\xi(x, y) , \eta(x, y)) = (x(\xi, \eta) , y(\xi, \eta))$$

Sendo, $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$, de acordo com a Figura 3.5 podemos escrever:

$$dx = x_\xi \Delta \xi + x_\eta \Delta \eta \quad (3.14)$$

$$dy = y_\xi \Delta \xi + y_\eta \Delta \eta \quad (3.15)$$

Usando uma notação vetorial, pode-se expressar os comprimentos ao longo das linhas ξ e η , respectivamente, por:

$$d\vec{r}_\xi = x_\xi \Delta \xi \vec{i} + y_\xi \Delta \xi \vec{j}$$

$$d\vec{r}_\eta = x_\eta \Delta \eta \vec{i} + y_\eta \Delta \eta \vec{j}$$

Como é sabido, o produto vetorial (no plano) é numericamente igual a área de um paralelogramo, assim, se formamos o produto entre os vetores $d\vec{r}_\xi$ e $d\vec{r}_\eta$ obteremos:

$$\begin{aligned}
 dA &\simeq |d\vec{r}_\xi \times d\vec{r}_\eta| = |(x_\xi \Delta\xi, y_\xi \Delta\xi) \times (x_\eta \Delta\eta, y_\eta \Delta\eta)| \quad (3.16) \\
 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_\xi \Delta\xi & x_\eta \Delta\eta & 0 \\ y_\xi \Delta\xi & y_\eta \Delta\eta & 0 \end{vmatrix} &= |(x_\xi \Delta\xi \ y_\eta \Delta\eta - x_\eta \Delta\eta \ y_\xi \Delta\xi)| = |(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta| \\
 &= \left| \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} \right| \Delta\xi \Delta\eta
 \end{aligned}$$

A última matriz encontrada é denominada matriz jacobiana ou simplesmente Jacobiano da transformação, o qual tem as seguintes notações bastante usuais:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \\
 A &\simeq |J \Delta\xi \Delta\eta| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \Delta\xi \Delta\eta \right| = |(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta|
 \end{aligned}$$

Uma parte essencial nas transformações contínuas é que sempre seja possível retornar às coordenadas originais; e isto acontece desde que o jacobiano da transformação (T) seja não nulo na região de interesse. Um resultado bem estabelecido, denominado Teorema da Função Inversa, é que o jacobiano da inversa é o inverso do jacobiano da transformação, isto é,:

$$\begin{aligned}
 J(\Phi^{-1}) &= \frac{1}{J(\Psi)}. \text{ Assim, sendo } J(\Psi) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (3.17) \\
 \text{Temos } J(\Phi^{-1}) &= \frac{1}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)} = (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)
 \end{aligned}$$

Tomando a forma matricial para este sistema obtemos:

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \text{ ou ainda } (d^T) = (A) (d^F) \quad (3.18)$$

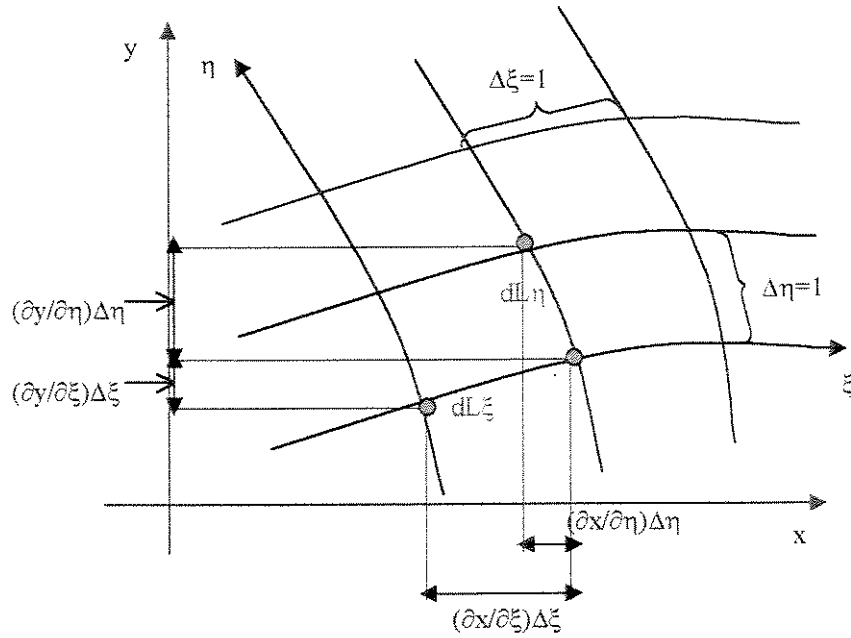


Figura 3.5: Relações entre comprimentos e métricas no plano físico.

Nos cálculos desenvolvidos foi adotado como Jacobiano da transformação a Equação 3.17, que é o jacobiano do ponto de vista da transformação do espaço lógico para o físico. No problema aqui abordado, não conhecemos, a priori, as relações funcionais entre as coordenadas curvilineares $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$, e isto nos levará a buscar soluções numéricas para o problema de geração da malha, ou seja, usar-se-á como base de cálculo a informação $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$ a partir das fronteiras.

3.4.4 Área

A Figura 3.6 descreve um elemento de área infinitesimal (dA) no plano físico (x, y) , e o seu par no plano transformado dS . Desejamos conhecer qual a relação entre estas áreas infinitesimais para os dois sistemas esboçados.

Conforme visto na seção anterior, a área no plano físico foi obtida a par-

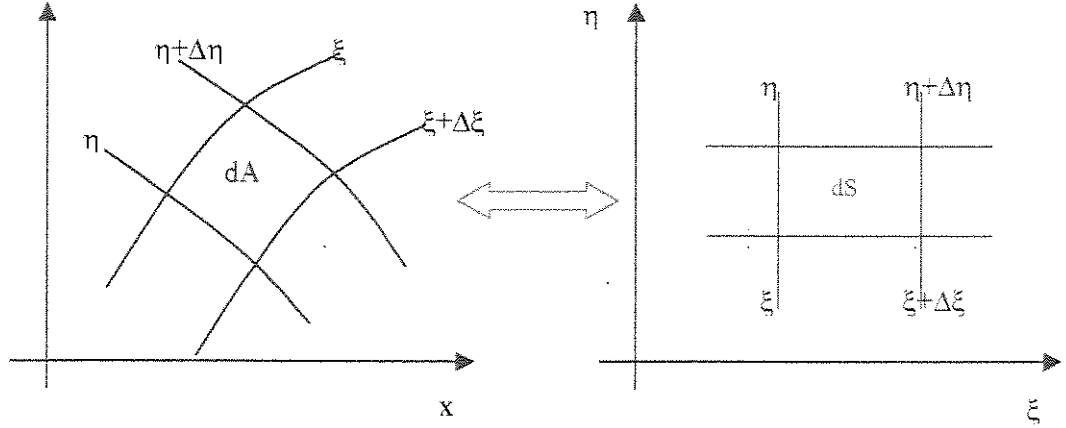


Figura 3.6: Relação entre as áreas no plano físico e transformado.

tir do produto vetorial entre os incrementos infinitesimais nas direções ξ ($d\vec{r}_\xi$) e η ($d\vec{r}_\eta$), conforme Equação 3.16, a qual resultou ser proporcional a área no plano lógico ($dS = \Delta\xi\Delta\eta$). A constante de proporcionalidade é exatamente o Jacobiano da transformação (no ponto considerado). Conclui-se daí que o jacobiano corrige áreas nas transformações bidimensionais, isto é:

$$\frac{dA}{dS} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = J \quad (3.19)$$

Como uma extensão, o jacobiano corrige volumes em situações tridimensionais. Uma outra relação importante existe entre o Jacobiano (J) e o tensor métrico (g_{ij}), é dada por:

$$\det |g_{ij}| = g = J^2 \Rightarrow J = \sqrt{g} \quad (3.20)$$

3.5 Operadores Diferenciais

Na solução de problemas em geometrias complexas, as métricas que surgem numa transformação de coordenadas também influenciarão os termos das equações

constitutivas. Dependendo do tipo de problema estudado, as equações são mais ou menos trabalhosas. Para o propósito deste trabalho, a variável é a temperatura, e a equação que governa a difusão térmica é do tipo Laplace.

Existem algumas formas usuais para se representar o *Laplaciano* em coordenadas generalizadas, as quais dependem diretamente das expressões do *gradiente* e do *divergente*. Vejamos algumas passagens úteis na obtenção de expressões para o Laplaciano.

Num sistema de coordenadas generalizadas ortogonal (x^1, x^2) , o *gradiente* de uma função escalar ϕ é dado por:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x^1} \vec{i} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x^2} \vec{j} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

O *divergente* de uma função vetorial bidimensional $\vec{V} = V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j}$, é expresso, no mesmo sistema de coordenadas, por:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 V_1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_1 V_2) \right\}$$

Da combinação destas duas equações, obtém-se:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi ,$$

chamando $\vec{V} = \nabla \phi$, ter-se-á:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 V_1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_1 V_2) \right\}$$

mas $\vec{V} = \nabla \phi$, logo:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 V_1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_1 V_2) \right\}$$

porém,

$$V_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x^1} \quad e \quad V_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x^2}$$

o que resulta em:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(h_2 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h_1 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \right) \right\},$$

a qual ainda pode ser posta na seguinte forma compacta:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{h_1 h_2}{h_j^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \right], \quad j = 1, 2$$

Para os sistemas que empregaremos temos as seguintes simplificações:

i) $x = x^1, y = x^2, h_1 = 1, h_2 = 1$ (laplaciano em coordenadas cartesianas)

assim:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \phi_{xx} + \phi_{yy} \quad (3.21)$$

ii) $r = x^1, \theta = x^2, h_1 = 1, h_2 = r$ (laplaciano em coordenadas polares) assim:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (3.22)$$

Estas últimas duas formas se aplicarão na geração de malha através da técnica de multiblocos. Para sistemas não-ortogonais, a forma do laplaciano é bem mais complexa, por considerar as métricas nas direções não-ortogonais; uma dessas formas (denominada forma conservativa) é dada por:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} [(\vec{r}_j \wedge \vec{r}_i) \bullet (\vec{r}_m \wedge \vec{r}_n) \phi]_{\xi^l} \right\}_{\xi^i} \quad (3.23)$$

Formas alternativas podem ser encontradas na referência [8]. A expressão seguinte, simplificada da Equação 3.23, é útil para problemas de geração de malhas, pois explicita os termos ortogonais (o primeiro) e não-ortogonais (o segundo):

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{g_{ij}}{g} \phi_{\xi^i \xi^j} + \sum_{j=1}^2 (\nabla^2 \xi^j) \phi_{\xi^j} \quad (3.24)$$

Expandindo estas duas somas, primeiro a soma dupla, por partes:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^2 \frac{g_{ij}}{g} \phi_{\xi^i \xi^j} &= \frac{g_{i1}}{g} \phi_{\xi^i \xi^1} + \frac{g_{i2}}{g} \phi_{\xi^i \xi^2} \\ \sum_{i=1}^2 \left(\frac{g_{i1}}{g} \phi_{\xi^i \xi^1} + \frac{g_{i2}}{g} \phi_{\xi^i \xi^2} \right) &= \frac{g_{11}}{g} \phi_{\xi^1 \xi^1} + \frac{g_{12}}{g} \phi_{\xi^1 \xi^2} + \frac{g_{21}}{g} \phi_{\xi^2 \xi^1} + \frac{g_{22}}{g} \phi_{\xi^2 \xi^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{g_{ij}}{g} \phi_{\xi^i \xi^j} &= \frac{g_{11}}{g} \phi_{\xi^1 \xi^1} + \frac{g_{12}}{g} \phi_{\xi^1 \xi^2} + \frac{g_{21}}{g} \phi_{\xi^2 \xi^1} + \frac{g_{22}}{g} \phi_{\xi^2 \xi^2} \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{g_{ij}}{g} \phi_{\xi^i \xi^j} &= \frac{g_{11}}{g} \phi_{\xi^1 \xi^1} + 2 \frac{g_{12}}{g} \phi_{\xi^1 \xi^2} + \frac{g_{22}}{g} \phi_{\xi^2 \xi^2}\end{aligned}$$

Avaliando o segundo termo da Equação 3.24:

$$\sum_{j=1}^2 (\nabla^2 \xi^j) \phi_{\xi^j} = (\nabla^2 \xi^1) \phi_{\xi^1} + (\nabla^2 \xi^2) \phi_{\xi^2} = \nabla^2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \nabla^2 \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

Como a transformação ocorrerá do plano transformado (ξ, η) para o plano físico (x, y) , onde $\xi^1 = \xi$ e $\xi^2 = \eta$, o laplaciano em coordenadas generalizadas (Equação 3.24) assumirá a forma:

$$\nabla^2 \phi = \frac{g_{11}}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{g_{12}}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{g_{22}}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \nabla^2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \nabla^2 \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

Ou ainda:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\alpha}{J} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \left(\frac{\beta}{J} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\gamma}{J} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \nabla^2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \nabla^2 \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta}. \quad (3.25)$$

Uma forma alternativa de se obter esta equação é dada na referência [26].

Esta última expressão leva a um maior esforço computacional na tarefa de discretização; desta forma é mais conveniente utilizar a forma conservativa, a qual é derivada da Equação 3.23, a qual pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\sqrt{g} g^{ij} \phi_{\xi^j})_{\xi^i}$$

Após expandir esta expressão, primeiro fazendo-se $i = 1$ e $j = 1, 2$, e em seguida fazendo-se $i = 2$ e $j = 1, 2$, chega-se a:

$$\sqrt{g}\nabla^2\phi = \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \sqrt{g}g^{12}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\sqrt{g}g^{21}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \sqrt{g}g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right)$$

mas sabendo que:

$$g^{ij} = \frac{g_{ij}}{g} \text{ para } i = j \quad \text{e} \quad g^{ij} = -\frac{g_{ij}}{g} \text{ para } i \neq j,$$

resulta:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right) \right]$$

ou ainda:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{\alpha}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - \frac{\beta}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\gamma}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{\beta}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right) \right] = 0$$

Esta última equação é que servirá de base para a discretização da equação da temperatura no capítulo cinco.

Capítulo 4

Técnicas de Geração de Malhas

4.1 Introdução

Muitas são as aplicações na engenharia onde ocorrem geometrias complexas e, nestes casos, há a necessidade de se descrever tal geometria afim de se resolver numericamente as equações que governam o fenômeno em estudo. A parte referente à escolha da configuração geométrica adequada é denominada técnica de geração de malhas.

Existem várias formas de se gerar um campo discreto de pontos que se adaptem a dada geometria. Uma divisão básica é quanto a forma, isto é, por métodos algébricos (que usam diversas formas de interpolação) ou métodos diferenciais (que resolvem sistemas de equações diferenciais). Na técnica de geração elíptica, um sistema de equações diferenciais parciais é resolvido, tendo como funções incógnitas as coordenadas cartesianas e variáveis independentes as coordenadas curvilineares.

Na abordagem por multiblocos aqui desenvolvida, os pontos da malha discreta foram calculados analiticamente pelo fato das sub-malhas serem simples. No restante deste capítulo será feita uma análise detalhada de cada uma das metodologias de geração de malhas, com vistas à utilização como base na solução de um prob-

lema de condução de calor bideimensional. A motivação para este estudo foi a forma geométrica tipo bancos de tubos (neste caso, arranjo em paralelo). O domínio de cálculo assume, portanto, uma forma mostrada na Figura 4.1. É sobre esta configuração que se gerada a malha e feitos os cálculos para determinação da temperatura.

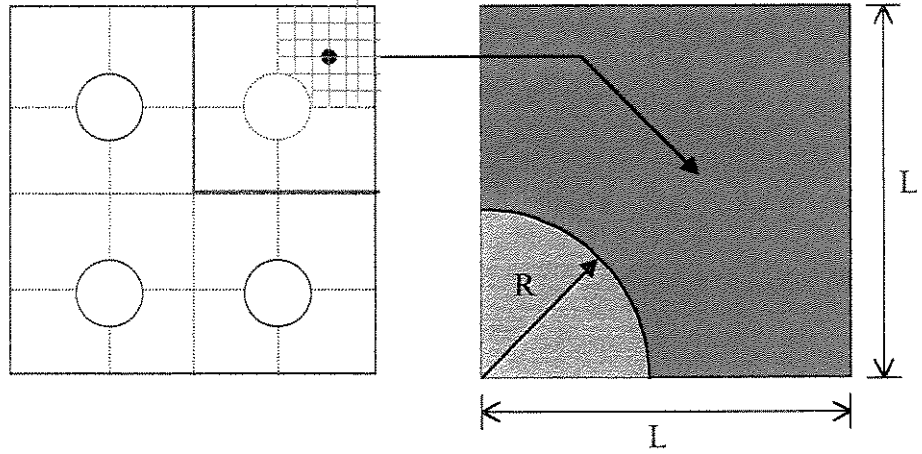


Figura 4.1: Domínio de cálculo para malha e temperatura.

4.2 Sistemas de Geração Elíptica de Malhas

4.2.1 Sistema de Laplace

Dos métodos que utilizam equações diferenciais para geração de malhas o mais simples é o sistema de Laplace, pois as equações diferenciais são tipo Laplace, isto é:

$$\nabla^2 \xi = 0 \text{ e } \nabla^2 \eta = 0 \quad (4.1)$$

Neste sistema de equações diferenciais, as variáveis dependentes são as coordenadas generalizadas (ξ, η) . Estaremos supondo que estamos diante de uma geometria arbitrária e complexa da qual se deseja conhecer sua relação com uma geometria simples, como por exemplo a cartesiana.

Como nem sempre é possível, para geometrias complexas, ter-se o conhecimento a priori das relações métricas entre um sistema de coordenadas arbitrário e um sistema usual (cartesiano, polar, cilíndrico, etc. ...) faz-se necessária uma transformação de cunho numérica. Dessa forma, a solução é obtida após a transformação ser efetuada.

Este tipo de gerador de malhas, em função das propriedades do operador Laplaciano, conduz a resultados bem comportados, já que são transformações inversíveis. Outra característica é que, para uma dada parametrização do contorno, uma única solução existe (as equações transformadas para este tipo de sistema podem ser obtidas como um caso especial do sistema de Poisson).

4.2.2 Sistema de Poisson

Ao passarmos de um sistema de coordenadas para outro, aparecem termos (coeficientes) envolvendo as derivadas parciais das coordenadas de um sistema em relação ao outro, que são as métricas da transformação. Se transformarmos as expressões $\nabla^2 \xi = 0$ e $\nabla^2 \eta = 0$, para o plano transformado, onde $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$, passa-se de equações tipo Laplace para equações tipo Poisson, conforme relata Thompson et al [22]. Aqui, esta propriedade pode ser vista quando transformamos o laplaciano da temperatura em coordenadas cartesianas para o equivalente em coordenadas generalizadas, Equação 3.25.

Com a finalidade de controlar a atração/repulsão das linhas coordenadas no interior da malha, um segundo sistema de geração elíptica de malhas foi proposto por Thompson et al.[22], os quais adicionaram termos extras às equações anteriores (Equação [4.1]), que assumiram a forma:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \xi^k &= P^k, \quad k = 1, 2, \text{ onde} \\ P^1 &= P \text{ e } P^2 = Q\end{aligned}$$

$$P^k = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g^{ij} x_{\xi^i \xi^j}^k + \sum_{j=1}^2 (\nabla^2 \xi^j) x_{\xi^j}^k, \quad k = 1, 2.$$

Nestas expressões, as variáveis ξ^i são coordenadas generalizadas, enquanto x^k são as coordenadas cartesianas. Os valores de P^k podem ser obtidos, também, resolvendo-se o sistema formado pelas Equações 4.8 e 4.9. Uma análise mais detalhada destes termos é feita na referência [22]. A finalidade das funções P e Q , é possibilitar, em regiões específicas do domínio de cálculo, concentração das linhas coordenadas onde haja maior gradiente da variável estudada e, assim, não haver necessidade de uma malha muito refinada em todo o campo. Dos sistemas de Poisson mais empregados, aquele de forma mais simples é:

$$\nabla^2 \xi = P \quad \text{e} \quad \nabla^2 \eta = Q \quad (4.2)$$

O controle obtido por este tipo de sistema é muito interessante, tanto para o cálculo da malha quanto para campos de interesse físico. Mesmo assim, as qualidades obtidas nestes sistemas de geração podem ser afetadas quanto à garantia de obtenção de malhas não-dobradas, quando as funções de controle são incorporadas ao sistema de equações.

O teorema de Rado apresentado na referência [8], fornece as bases teóricas para o método de geração tipo Laplace, porque ele implica que, no contínuo, a malha não sofre dobras. Todavia, isto não garante que a malha discreta (gerada) não esteja sujeita a dobras. Quando os termos não homogêneos (P e Q) são adicionados às equações, o teorema de Rado não mais se aplica, isto é, não existe mais garantia contra a dobra para este tipo de equação; mais ainda, a malha gerada para esta formulação não necessita ser suave, mesmo embora estarmos usando um gerador elíptico.

4.2.3 Equações no Plano Transformado

Como nem sempre é possível conhecermos de ante-mão, para uma geometria arbitrária qualquer, a forma funcional que relaciona as coordenadas curvilíneas com as coordenadas cartesianas, a busca de uma solução para a malha deve, necessariamente, passar pelas transformações das equações do plano físico para o transformado. Como foi visto na seção anterior, as equações no plano físico são equações tipo Poisson (Equação 4.2).

Para obtermos as equações transformadas, parte-se da definição de uma função genérica $f(x, y)$, ou $f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Supondo f duas vezes continuamente diferenciável, podemos calcular suas derivadas de até segunda ordem, isto é, f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} e f_{xy} ; assim, usando a regra da cadeia, teremos:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = f_{\xi} \cdot \xi_x + f_{\eta} \cdot \eta_x \quad (4.3)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = f_{\xi} \cdot \xi_y + f_{\eta} \cdot \eta_y \quad (4.4)$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial (f_{\xi} \cdot \xi_x + f_{\eta} \cdot \eta_x)}{\partial x} = \frac{\partial (f_{\xi} \cdot \xi_x)}{\partial x} + \frac{\partial (f_{\eta} \cdot \eta_x)}{\partial x}$$

$$f_{xx} = (f_{\xi\xi} \cdot \xi_x + f_{\xi\eta} \cdot \eta_x) \cdot \xi_x + (f_{\xi\eta} \cdot \xi_x + f_{\eta\eta} \cdot \eta_x) \cdot \eta_x + f_{\xi} \cdot \xi_{xx} + f_{\eta} \cdot \eta_{xx}$$

$$f_{xx} = f_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2 \cdot f_{\xi\eta} \cdot \eta_x \cdot \xi_x + f_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + f_{\xi} \cdot \xi_{xx} + f_{\eta} \cdot \eta_{xx} \quad (4.5)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial (f_{\xi} \cdot \xi_y + f_{\eta} \cdot \eta_y)}{\partial y} = \frac{\partial (f_{\xi} \cdot \xi_y)}{\partial y} + \frac{\partial (f_{\eta} \cdot \eta_y)}{\partial y} =$$

$$f_{yy} = (f_{\xi\xi} \cdot \xi_y + f_{\xi\eta} \cdot \eta_y) \cdot \xi_y + (f_{\xi\eta} \cdot \xi_y + f_{\eta\eta} \cdot \eta_y) \cdot \eta_y + f_{\xi} \cdot \xi_{yy} + f_{\eta} \cdot \eta_{yy}$$

$$f_{yy} = f_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2 \cdot f_{\xi\eta} \cdot \eta_y \cdot \xi_y + f_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + f_{\xi} \cdot \xi_{yy} + f_{\eta} \cdot \eta_{yy} \quad (4.6)$$

Fazendo $f = x$ nestas expressões, ter-se-á $x_{xx} = 0$ e $x_{yy} = 0$ e o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{\xi\xi}\cdot\xi_x^2 + 2\cdot x_{\xi\eta}\cdot\eta_x\cdot\xi_x + x_{\eta\eta}\cdot\eta_x^2 = -x_{\xi}\cdot\xi_{xx} - x_{\eta}\cdot\eta_{xx} \\ x_{\xi\xi}\cdot\xi_y^2 + 2\cdot x_{\xi\eta}\cdot\eta_y\cdot\xi_y + x_{\eta\eta}\cdot\eta_y^2 = -x_{\xi}\cdot\xi_{yy} - x_{\eta}\cdot\eta_{yy} \end{cases} \quad (4.7)$$

Somando-se estas duas expressões, e utilizando-se as métricas deduzidas no capítulo um, chega-se finalmente a:

$$\alpha\cdot x_{\xi\xi} - 2\cdot\beta x_{\xi\eta} + \gamma\cdot x_{\eta\eta} = -J^2(P\cdot x_{\xi} + Q\cdot x_{\eta}) \quad (4.8)$$

Seguindo passos análogos, chega-se à uma expressão para a coordenada y :

$$\alpha\cdot y_{\xi\xi} - 2\cdot\beta y_{\xi\eta} + \gamma\cdot y_{\eta\eta} = -J^2(P\cdot y_{\xi} + Q\cdot y_{\eta}) \quad (4.9)$$

Onde α , β e γ representam as métricas da transformação (conforme as Equações 3.8). Estas duas equações constituirão a base do sistema de geração elíptica procurado. Vale ressaltar que estas equações são não-lineares e devem ser resolvidas através de um processo iterativo.

Como pode ser visto, as equações resultantes são mais complexas, incorporando novos coeficientes, que apesar disso, sabe-se por [8], sua implementação numérica no plano transformado é mais vantajosa.

As formas de se discretizar as duas equações acima são várias. A mais comum é utilizar diferenças centrais na aproximação das derivadas. Porém, neste trabalho, um caminho alternativo foi implementado com o intuito de verificar as vantagens entre uma e outra discretização. Esta nova discretização é devido ao trabalho de Hsu-Lee [6], explicitada no apêndice A, onde o autor propõe funções de interpolação para as funções coordenadas.

4.2.4 Discretização das Equações da Malha

Usando diferenças centrais nas derivadas

Uma equação geral para as coordenadas $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$, na variável genérica ϕ , é escrita como:

$$\alpha\phi_{\xi\xi} + 2\beta\phi_{\xi\eta} + \gamma\phi_{\eta\eta} + PJ^2\phi_\xi + QJ^2\phi_\eta = 0 \quad (4.10)$$

As derivadas são aproximadas então por:

$$\phi_{\xi\xi} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}}{\Delta\xi^2} = \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} = \phi_E + \phi_S - 2\phi_P$$

$$\phi_{\eta\eta} = \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}}{\Delta\eta^2} = \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} = \phi_N + \phi_S - 2\phi_P$$

$$\phi_\eta = \frac{1}{2} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{\Delta\eta} = \frac{1}{2} (\phi_N - \phi_S)$$

$$\phi_\xi = \frac{1}{2} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta\xi} = \frac{1}{2} (\phi_E - \phi_W)$$

$$\begin{aligned} \phi_{\xi\eta} &= \frac{\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta\Delta\xi} = \\ &= \frac{\phi_{NE} + \phi_{SW} - \phi_{SE} - \phi_{NW}}{4} \end{aligned}$$

Levando estas expressões à Equação 4.10, obtemos a seguinte equação discretizada:

$$\begin{aligned} A_P\phi_P &= A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + A_{NE}\phi_{NE} + \\ &+ A_{SE}\phi_{SE} + A_{SW}\phi_{SW} + A_{NW}\phi_{NW} + S_P \end{aligned} \quad (4.11)$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} A_P &= 2(\alpha + \beta), \quad A_E = \alpha + \frac{PJ^2}{2}, \quad A_W = \alpha - \frac{PJ^2}{2}, \quad A_N = \gamma + \frac{QJ^2}{2} \\ A_S &= \gamma - \frac{QJ^2}{2}, \quad A_{SE} = A_{NW} = \frac{\beta}{2}, \quad A_{NE} = A_{SW} = \frac{-\beta}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

A solução deste sistema de equações pode ser obtida pelo método SOR ou TDMA. Neste trabalho, foi usado o TDMA com relaxação dos coeficientes. A imposição de coeficientes positivos no processo de solução das equações discretizadas, nos leva a:

$$A_W = \alpha - \frac{PJ^2}{2} > 0 \Rightarrow \frac{PJ^2}{\alpha} < 2$$

assim como:

$$A_S = \gamma - \frac{QJ^2}{2} > 0 \Rightarrow \frac{QJ^2}{\gamma} < 2 \quad (4.13)$$

Para os casos onde estes coeficientes assumam valores maiores que 2, existe uma acentuada possibilidade da metodologia numérica desenvolvida levar a problemas de convergência (ver referência [11]).

Usando as funções peso proposta por Hsu-Lee

Para contornar as dificuldades numéricas surgidas com o uso da aproximação por diferenças centrais, na discretização das equações da malha, uma metodologia mais recente proposta por Hsu&Lee [6], será abordada. Ela se baseia numa solução exata da equação diferencial dada abaixo:

$$A\omega_{xx} + B\omega_{yy} + C\omega_x + D\omega_y + E\omega_{xy} = 0 \quad (4.14)$$

Segundo Lee [10], sendo Ω um domínio e Ω_m uma pequena região de Ω $\{0 \leq x \leq a \cap 0 \leq y \leq b\}$. A subregião Ω_m é tomada muito pequena de forma que os coeficientes $(A, B, C, \dots)$ da Equação 4.14 possam ser considerados constantes.

Para estas considerações, a função:

$$\omega(x, y) = C_0 + C_1 e^{\frac{-C}{A}x} + C_2 e^{\frac{-D}{B}y} + C_3 e^{\frac{-C}{A}x - \frac{D}{B}y} \quad (4.15)$$

satisfaz a equação acima em Ω_m . A determinação dos coeficientes para dadas condições de contorno produz funções interpolantes do tipo exponencial que comporão a natureza da solução.

Para a discretização desta equação leva-se em consideração a continuidade da função e de suas derivadas até segunda ordem. Depois de obtidas é feita a implementação numérica. A equação discretizada assume a forma (ver apêndice A):

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_{NE} \phi_{NE} + A_{SE} \phi_{SE} + A_{SW} \phi_{SW} + A_{NW} \phi_{NW} \quad (4.16)$$

Onde os coeficientes acima são expressos por:

$$A_W = \alpha w_f(-Z_1), A_E = \alpha w_f(Z_1), \quad (4.17)$$

$$A_S = \gamma w_f(-Z_2), A_N = \gamma w_f(Z_2) \quad (4.18)$$

$$A_{SW} = -2\beta w_f^*(-Z_1) w_f^*(Z_2), \quad (4.19)$$

$$A_{NE} = A_{SW}, \quad A_{NW} = -A_{SW}, \quad A_{SE} = A_{NW} \quad (4.19)$$

$$A_P = \sum A_{vizinhos}, \quad Z_1 = \frac{PJ^2}{\alpha}, \quad Z_2 = \frac{QJ^2}{\gamma} \quad (4.20)$$

$$w_f(Z) = \frac{Z}{(1 - e^{-Z})}, \quad w_f^*(Z) = \frac{Z}{(e^Z - e^{-Z})} \quad (4.21)$$

As derivadas cruzadas $\phi_{\xi\eta}$ são aproximadas por:

$$\phi_{\xi\eta} = (\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i-1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}) w_f^*(Z_1) w_f^*(Z_2)$$

Uma vez obtidos os coeficientes, aplicamos o TDMA linha a linha para obtermos a solução do sistema. Com o intuito de reduzir o tempo de CPU, as funções peso, expressas por exponenciais, são simplificadas substituindo-se, respectivamente, aquelas funções ($w_f(Z)$ e $w_f^*(Z)$) por:

$$w_f(Z) \simeq [0, (1 - 0.1|Z|^5)] + [0, Z] e \quad (4.22)$$

$$w_f^*(Z) \simeq (2 + 0.3332Z^2 + 0.0172Z^4)^{-1} \quad (4.23)$$

Onde $[0, Z]$ retorna o maior entre os valores de 0 ou Z . A precisão destas expressões é discutida na referência [6].

Em estudos convencionais, a aproximação por diferenças centrais é usada para expressar as derivadas cruzadas. Isto implica que a função $w_f^*(Z)$ é tratada como uma constante, assumindo um valor de 0.5. Portanto, a contribuição dos termos de derivada cruzada são sub-estimados nos casos comuns.

Com a introdução dos termos fontes P e Q nas equações de geração, isto é, com a passagem da Equação 4.1 para a Equação 4.2, o Princípio do Máximo pode ser fracamente ou completamente perdido. Contudo, pode-se interpretar as equações de Poisson para a malha como equações de condução com geração de calor da forma P e Q se as variáveis ξ e η são vistas como temperaturas. Por isto, não poderia haver cruzamento de linhas isotérmicas entre si. No entanto, existe na literatura situações nas quais esta condição é violada.

No desenvolvimento do esquema de função peso, Lee [6] examinou a equação de Burger, apresentada na referência [4], sem o termo de geração. Para um problema de fronteira, com temperaturas 0 em uma delas e 1 nas demais, espera-se encontrar um campo entre estes dois valores, devido ao Princípio do Máximo.

Contudo, o esquema de diferenças centrais produziu temperaturas negativas quando a magnitude do parâmetro foi $Z \geq 2$. Esta instabilidade numérica é devida ao erro de truncamento do esquema de diferenças centrais conforme discutido na referência [13]. As Equações 4.8 e 4.9 são, de fato, equações de convecção no plano computacional (ξ, η) , com as funções de controle representando os termos convectivos. Portanto, o esquema de diferenças centrais produziria malhas que violaria o Princípio do Máximo, se os parâmetros $Z_1 = \frac{PJ^2}{\alpha}$ e $Z_2 = \frac{QJ^2}{\beta}$ têm magnitudes maiores que 2, ver detalhes na referência [11].

Felizmente, o esquema da função peso tem sido desenvolvido com muito sucesso através de uma solução analítica. Este esquema particular produz uma solução exata para qualquer equação diferencial ordinária homogênea a coeficientes

constantes. Um enfoque mais detalhado sobre a aplicação do esquema de função peso é descrito na referência [6].

4.2.5 Condição de Ortogonalidade nas Fronteiras

Uma das principais vantagens de se utilizar as funções de controle reside no fato de se poder ajustar a malha em pontos considerados importantes para dado problema físico. E um dos objetivos principais da geração de malhas ajustadas às fronteiras do domínio é justamente este, garantir uma malha refinada (para reduzir os erros de truncamento no domínio) e coerente (no sentido da malha desenhada ser muito próxima da geometria real do problema).

Estas propriedades são conseguidas através do uso das funções de controle nas regiões consideradas importantes. Como, em geral, as variações mais sensíveis ocorrem nas fronteiras do domínio, pode-se impor certas qualidades à malha nestas regiões como, por exemplo, ortogonalidade e espaçamento fixados nestas fronteiras.

Como as coordenadas podem ser vistas como variáveis de uma função posição (vetorial) $\vec{r} = (x, y)$, ter-se-á para suas derivadas:

$$\vec{r}_\xi = (x_\xi, y_\xi), \quad \vec{r}_{\xi\xi} = (x_{\xi\xi}, y_{\xi\xi}), \quad \vec{r}_\xi = (x_\xi, y_\xi), \quad (4.24)$$

$$\vec{r}_\eta = (x_\eta, y_\eta), \quad \vec{r}_{\eta\eta} = (x_{\eta\eta}, y_{\eta\eta}), \quad \vec{r}_{\xi\eta} = (x_{\xi\eta}, y_{\xi\eta}) \quad (4.25)$$

E assim, podemos escrever as Equações 4.8 e 4.9 na forma vetorial (compacta):

$$\alpha \vec{r}_{\xi\xi} + \beta \vec{r}_{\xi\eta} + \gamma \vec{r}_{\eta\eta} + P J^2 \vec{r}_\xi + Q J^2 \vec{r}_\eta = 0 \quad (4.26)$$

Como uma das características desejáveis da malha na fronteira (ou fronteiras) temos a ortogonalidade entre as linhas ξ e η . A aplicação da condição de ortogonalidade nas fronteiras, isto é, $\vec{r}_\xi \bullet \vec{r}_\eta = 0$, nos informa que os vetores tangentes às linhas coordenadas ξ e η são ortogonais. Assim, ao multiplicarmos a

Equação 4.26 por $\vec{r}_\xi$ e $\vec{r}_\eta$ respectivamente, os valores das funções de controle P e Q são automaticamente isolados. Com a condição de ortogonalidade imposta na fronteira ($\beta = 0$) tem-se, após alguma manipulação algébrica, os seguintes valores para as funções P e Q :

$$P = - \left[\frac{\alpha}{J^2 |\vec{r}_\xi|^2} \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{J^2 |\vec{r}_\xi|^2} \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_{\eta\eta} \right] \text{ ou} \quad (4.27)$$

$$P = - \left[\frac{\alpha}{J^2 g_{11}} \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{J^2 g_{11}} \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_{\eta\eta} \right] \text{ ou ainda} \quad (4.28)$$

$$P = - \left[\frac{g_{22}}{g g_{11}} \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_{\xi\xi} + \frac{g_{11}}{g g_{11}} \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_{\eta\eta} \right], \text{ e} \quad (4.29)$$

$$Q = - \left[\frac{\alpha}{J^2 |\vec{r}_\eta|^2} \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{J^2 |\vec{r}_\eta|^2} \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_{\eta\eta} \right] \text{ ou} \quad (4.30)$$

$$Q = - \left[\frac{\alpha}{J^2 g_{22}} \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{J^2 g_{22}} \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_{\eta\eta} \right] \text{ ou ainda} \quad (4.31)$$

$$Q = - \left[\frac{g_{22}}{g g_{22}} \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_{\xi\xi} + \frac{g_{11}}{g g_{22}} \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_{\eta\eta} \right] \quad (4.32)$$

Expandindo as duas últimas expressões para P e Q , obtemos as seguintes recorrências, implementadas numericamente no programa:

$$P(\xi, \eta) = \frac{(x_\eta B - y_\eta A)}{J^3} \quad \text{e} \quad Q(\xi, \eta) = \frac{(y_\xi A - x_\xi B)}{J^3}$$

$$\text{onde } A = \alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} \quad \text{e} \quad B = \alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta}$$

Ressaltando que todas estas quantidades serão calculadas nas fronteiras.

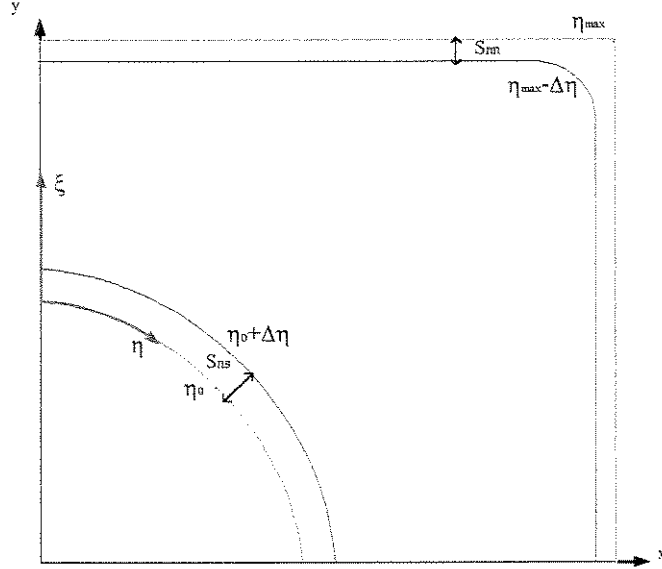


Figura 4.2: Linhas máximas: onde são especificados os espaçamentos S_{ns} e S_{nm} .

4.2.6 Controle do Espaçamento na Fronteira

As funções de controle são assim calculadas nas fronteiras nas quais uma condição de ortogonalidade é imposta. Como conhecemos apenas as fronteiras, as derivadas envolvendo η não são conhecidas a priori e, portanto são determinadas de modo iterativo.

Como estamos aplicando a condição de ortogonalidade apenas nas fronteiras $\eta = \eta_0$ e $\eta = \eta_{\max}$, as derivadas são conhecidas em relação a ξ , pois nas linhas $\eta = \eta_0$ e $\eta = \eta_{\max}$ dispomos das variações contínuas de ξ , mas não dispomos dos valores de $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$ e $\eta = \eta_{\max} - \Delta\eta$. Desta forma, uma segunda condição deve ser imposta nas fronteiras $\eta = \eta_0$ e $\eta = \eta_{\max}$ para obtermos os valores das derivadas entre duas linhas η e $\eta \pm \Delta\eta$, conforme Figura 4.2.

Com o intuito de tornar possível o cálculo destas derivadas, o espaçamento entre duas linhas adjacentes às fronteiras é imposto, isto é, a distância entre as linhas $\eta = \eta_0$ e $\eta_0 + \Delta\eta$ e entre $\eta_{\max}$ e $\eta_{\max} - \Delta\eta$, devem ser especificadas. Estes espaçamentos

são calculados através da seguinte expressão:

$$\Delta s_\eta (\xi) = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} |_{\eta_0 \text{ ou } \eta_{\max}} \quad (4.33)$$

Com Δs_η especificado¹ mais a condição de ortogonalidade nas fronteiras, deduz-se expressões para as derivadas $\vec{r}_\eta$ e $\vec{r}_{\eta\eta}$ conforme Sorenson&Steger [15]:

$$x_\eta = s_\eta y_\xi (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

$$y_\eta = -s_\eta x_\xi (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.35)$$

$$s_\eta = \frac{\Delta s_\eta (\xi)}{\Delta \eta} = \Delta s_\eta (\xi) \quad (4.36)$$

Os valores das derivadas $x_{\eta\eta}$ e $y_{\eta\eta}$ serão estimados da solução anterior $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ através das fórmulas, de segunda ordem, dadas por:

$$x_{\eta\eta} = \frac{(-3.5x_1 + 4x_2 - 0.5x_3)}{\Delta^2 \eta} - \frac{3(x_\eta)_1}{\Delta \eta} \quad (4.37)$$

$$y_{\eta\eta} = \frac{(-3.5y_1 + 4y_2 - 0.5y_3)}{\Delta^2 \eta} - \frac{3(y_\eta)_1}{\Delta \eta} \quad (4.38)$$

Os subscritos 1, 2 e 3 indicam, respectivamente, as posições $\eta = \eta_0$, $\eta = \Delta \eta$ e $\eta = 2\Delta \eta$. Os valores das funções de controle no contorno $\eta = \eta_{\max}$ podem ser obtidos de forma similar. Uma vez que as funções de controle nos dois contornos $\eta = \eta_0$ e $\eta = \eta_{\max}$ estão disponíveis, a distribuição das funções de controle dentro do domínio computacional, podem ser obtidas por interpolação, a partir de uma das seguintes formas:

$$P(\xi, \eta) = P(\xi, \eta_0) \left[1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}\right]^a + P(\xi, \eta_{\max}) \left[1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}\right]^b \quad (4.39)$$

$$Q(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta_0) \left[1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}\right]^c + Q(\xi, \eta_{\max}) \left[1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}\right]^d \quad (4.40)$$

As constantes a, b, c e d são usadas para expressar as variações das funções de controle dentro do domínio. Em geral, estes valores são assinalados na faixa de

¹ Δs_η ou s_η têm a mesma função e estão associados aos valores Sns e Snn que são os valores especificados no programa fonte.

2, 0 a 5, 0 , conforme Hsu&Lee [6]. Uma segunda forma de se obter as funções P e Q é dada por na referência [24] por:

$$\begin{aligned}
P(\xi, \eta) &= [P(\xi, \eta_0) [1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{a1} + P(\xi, \eta_{\max}) [\frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{b1}] + \\
&[P(\xi_0, \eta) [1 - \frac{\xi}{\xi_{\max}}]^{c1} + P(\xi_{\max}, \eta) [\frac{\xi}{\xi_{\max}}]^{d1}] - \\
&\{ [P(\xi_0, \eta_0) [1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}] + P(\xi_0, \eta_{\max}) [\frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{b1}] \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{\max}}\right)^{c1} + \\
&[P(\xi_{\max}, \eta_0) [1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{a1} + P(\xi_{\max}, \eta_{\max}) [\frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{b1}] \left(\frac{\xi}{\xi_{\max}}\right)^{d1} \} \\
Q(\xi, \eta) &= [Q(\xi, \eta_0) [1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{a2} + Q(\xi, \eta_{\max}) [\frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{b2}] + \\
&[Q(\xi_0, \eta) [1 - \frac{\xi}{\xi_{\max}}]^{c2} + Q(\xi_{\max}, \eta) [\frac{\xi}{\xi_{\max}}]^{d2}] - \\
&\{ [Q(\xi_0, \eta_0) [1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{a2} + Q(\xi_0, \eta_{\max}) [\frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{b2}] \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{\max}}\right)^{c2} + \\
&[Q(\xi_{\max}, \eta_0) [1 - \frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{a2} + Q(\xi_{\max}, \eta_{\max}) [\frac{\eta}{\eta_{\max}}]^{b2}] \left(\frac{\xi}{\xi_{\max}}\right)^{d2} \}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Para estas últimas expressões, os valores nos cantos são dados por:

$$\begin{aligned}
P(\xi_0, \eta_0) &= P(\xi_0, \Delta\eta), \quad P(\xi_0, \eta_{\max}) = P(\xi_0, \eta_{\max} - \Delta\eta), \\
P(\xi_{\max}, \eta_0) &= P(\xi_{\max}, \Delta\eta), \quad P(\xi_{\max}, \eta_{\max}) = P(\xi_{\max}, \eta_{\max} - \Delta\eta) \\
Q(\xi_0, \eta_0) &= Q(\Delta\xi, \eta_0), \quad Q(\xi_0, \eta_{\max}) = Q(\Delta\xi, \eta_{\max}), \\
Q(\xi_{\max}, \eta_0) &= Q(\xi_{\max} - \Delta\xi, \eta_0), \quad Q(\xi_{\max}, \eta_{\max}) = Q(\xi_{\max} - \Delta\xi, \eta_{\max})
\end{aligned}$$

No programa computacional desenvolvido os valores η_0 , $\eta_{\max}$, ξ_0 e $\xi_{\max}$ correspondem, respectivamente, a $J = 1$, $J = NJ$, $I = 1$ e $I = NI$, como mostra a Figura 4.3.

4.3 A Técnica de Multiblocos

Uma das limitações em dinâmica dos fluidos computacional é a dificuldade de discretização de domínios físicos ao redor de corpos de geometria complexa, através

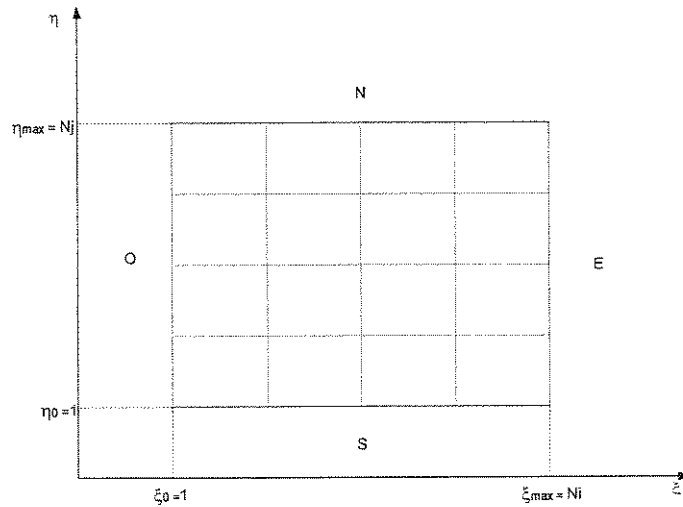


Figura 4.3: Plano computacional nas variáveis $1 \leq \xi \leq NI$ e $1 \leq \eta \leq NJ$.

de uma única malha. Esta tarefa se torna ainda mais complexa quando a configuração tem múltiplos componentes de formas distintas.

Os esforços atuais se dirigem para metodologias que usem malhas não-estruturadas (nas quais as células elementares não têm um conceito de contiguidade entre seus pontos vizinhos) e aquelas que fazem uso da decomposição do domínio principal em sub-domínios menores.

Cada sub-domínio (sub-malha) pode ser gerado independentemente através de umas das técnicas bem estabelecidas (desde as algébricas até as elípticas). Este método de obtenção de malhas é denominado técnica de multiblocos (MB). É também um método que tem como objetivo conformar a fronteira do corpo, isto é, as fronteiras coincidem com as coordenadas, evitando assim, o uso de interpolação nas mesmas. A Figura 4.4 nos dá uma idéia desta configuração.

A parte mais delicada da técnica de multiblocos é a passagem das informações, na região de justaposição, de um bloco para o outro, como mostra a Figura 4.5.

A passagem das informações das variáveis do campo em estudo, devido à

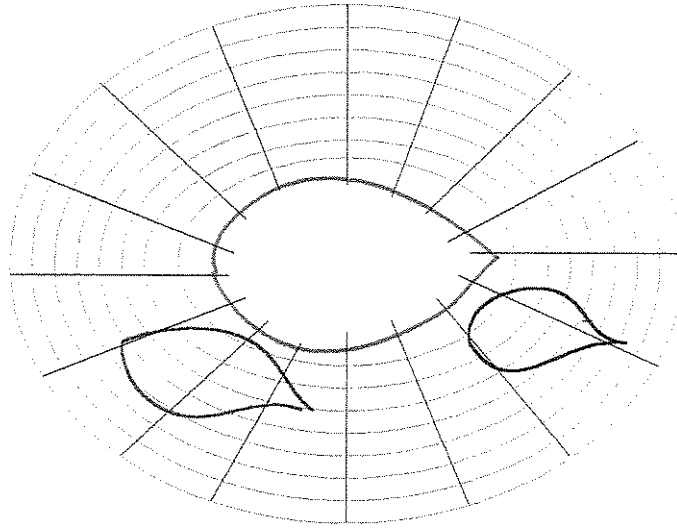


Figura 4.4: Malha principal e sub-malhas (MB).

descontinuidade criada pela presença de geometrias distintas, exige dois procedimentos: um para eliminar pontos da malha principal que caem dentro da malha menor, e outro de interpolação entre os dados calculados na fronteira das malhas resultantes, conforme Figura 4.6.

Uma fronteira externa em verde(Figura 4.5) define o limite de alcance da malha menor na malha principal. Internamente a este limite deixa de existir pontos da malha principal. Neste trabalho, a malha principal é identificada como a sub-malha cartesiana e a malha menor como a sub-malha polar.

Um dos principais objetivos desta técnica é a economia de tempo computacional, pois refina-se aquela sub-malha (ou sub-malhas) que for mais crítica, isto é, onde ocorrem os maiores gradientes no campo. Espera-se, assim, rapidez e precisão. No referente à precisão, deve-se levar em consideração o efeito da região de justaposição no campo como um todo.

Dois fatores decisivos nesta precisão são: o tipo de função de interpolação e o uso de esquemas conservativos nesta interface. Na aplicação da técnica de multiblocos,

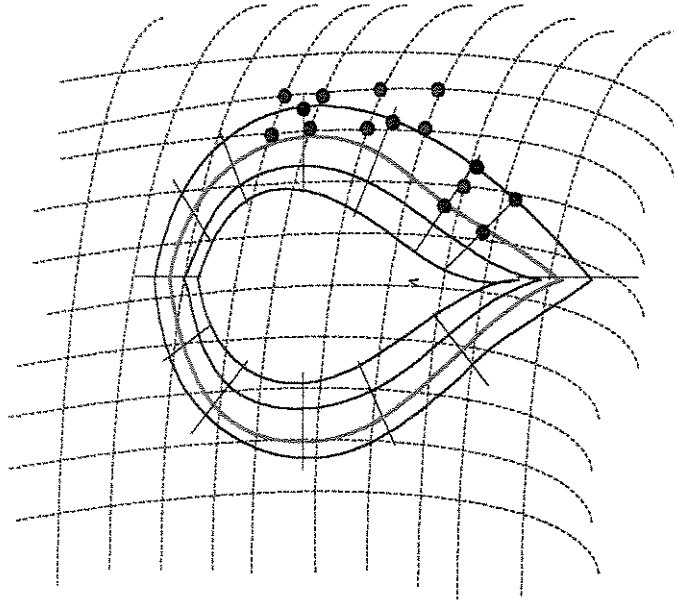


Figura 4.5: Sub-malha criada na malha principal e pontos de interpolação.

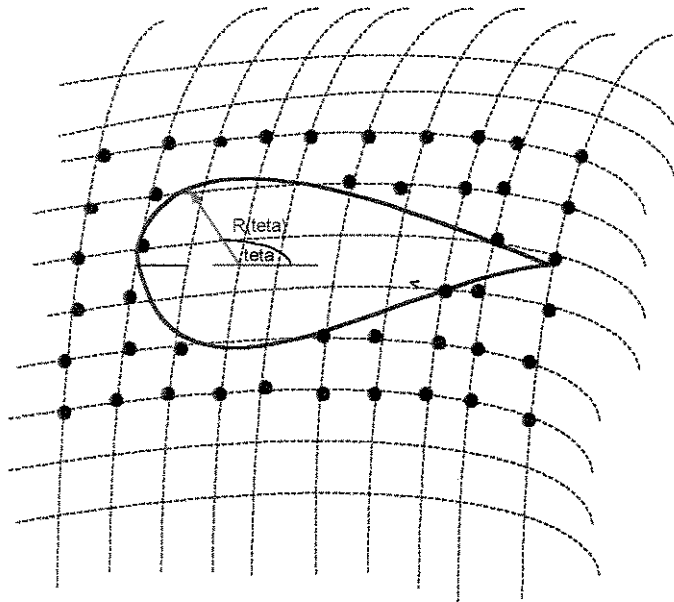


Figura 4.6: Eliminação dos pontos da malha principal que caem dentro sub-malha.

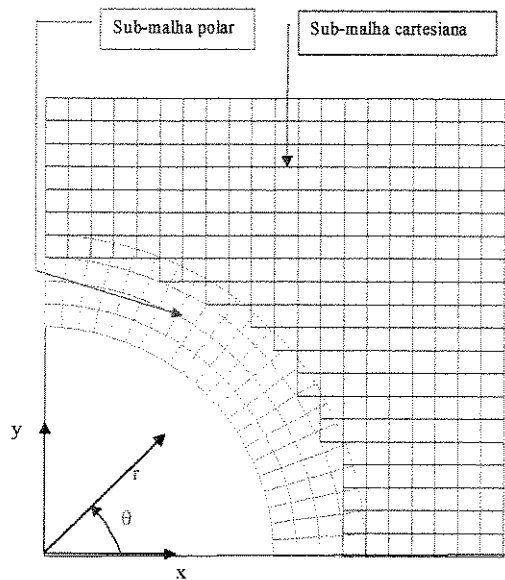


Figura 4.7: Região de cálculo na malha multiblocos : união das sub-malhas polar e cartesiana.

o domínio principal é decomposto em duas partes: uma sub-malha polar (em cor azul) e uma sub-malha cartesiana (em cor vermelha), como mostra a Figura 4.7. Esta figura exhibe, também, o detalhe da região de sobreposição entre as duas sub-malhas.

Em função da geometria aqui utilizada ser decomposta em duas geometrias conhecidas (a polar e a cartesiana), o trabalho de obtenção das mesmas ficou extremamente facilitado. Outro sim, é que a malha combinada foi construída de forma que os volumes na malha cartesiana e polar tivessem, aproximadamente, a mesma área.

4.3.1 Geração das Sub-malhas

A distribuição dos pontos na sub-malha polar é dada, por:

$$\begin{aligned} x_p &= R \cos(\theta_{i_p}) \\ y_p &= R \sin(\theta_{i_p}) \\ \text{onde} \quad : \quad \theta_{i_p} &= \theta_0 + i_p \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{\frac{\pi}{2}}{NDT}, \text{ onde:} \end{aligned} \quad (4.42)$$

i_p é o contador da variação angular, NDT é o número total de divisões na direção θ , calculado por: $NDT = \frac{\pi}{2} \frac{R_o}{\Delta R}$. R_o é o raio da linha mais externa e $\Delta R = \Delta x = \frac{L}{NI-1}$, L é a dimensão linear da malha cartesiana, de valor $L = 1$. Uma variável que faz a ligação entre estas sub-malhas é o termo FAT , que indica a extensão da malha polar na malha cartesiana, o qual satisfaz a equação:

$$R_o = FAT * (L - R) + R \quad (4.43)$$

Um valor de $FAT = 0$ significa uma única linha de malha polar, enquanto um valor de $FAT = 1$, significa que a malha polar ocupa toda a extensão do domínio de cálculo. O que nos interessa são os valores intermediários.

A distribuição dos pontos na sub-malha cartesiana é dada, por:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (i-1) \Delta x \text{ e } y_{ij} = (j-1) \Delta y \\ \text{com } \Delta x &= \frac{1}{NI-1} \text{ e } \Delta y = \frac{1}{NJ-1}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde NI e NJ representam as linhas máximas na malha cartesiana, isto é, $i_{\max} = NI$ e $j_{\max} = NJ$.

4.3.2 Interpolação entre as Sub-malhas

Duas rotinas específicas para a localização dos pontos que caem dentro de uma e outra região foram desenvolvidas. Estas rotinas são descritas no memorial de código computacional. Isto se fez necessário pois, ao resolvermos a equação da temperatura para a malha cartesiana, não consideramos a malha polar.

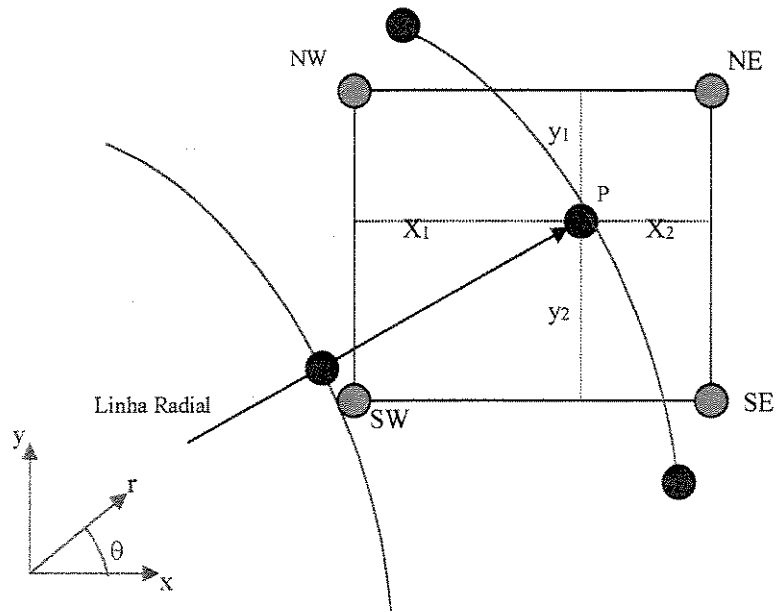


Figura 4.8: Célula de interpolação para sub-malha polar.

A informação da malha polar é obtida via interpolação dos pontos da malha cartesiana (pois supõe-se que esta última avance na malha polar até uma certa profundidade, o mesmo ocorrendo na fronteira externa da malha polar, isto é, a malha polar também atinge uma certa profundidade na malha cartesiana); a Figura 4.7 evidencia isto.

A técnica aqui empregada (ver referência [9]), cria pontos nodais fictícios em ambas as regiões de cálculo, a fim de servirem como fronteiras. Estes pontos tomarão valores da temperatura de uma configuração e passarão para a outra.

Desta forma, uma fileira fictícia de pontos da malha polar é criada na malha cartesiana, conforme mostra a Figura 4.8, estes pontos têm suas posições conhecidas em relação à origem através do ângulo formado com a horizontal, sendo possível calcular suas coordenadas "cartesianas" e por diferenças calcular-se as quantidades x_1 , x_2 , y_1 e y_2 .

Dois ou mais desses pontos podem cair dentro de uma mesma célula em

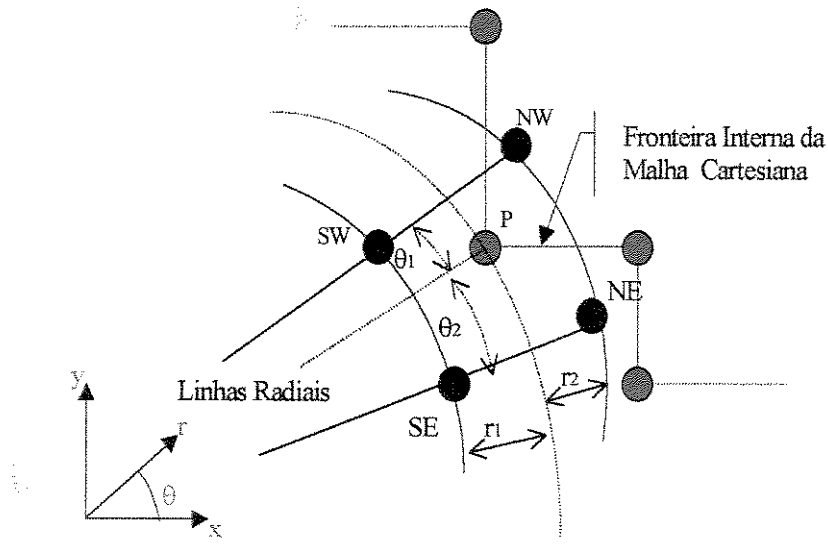


Figura 4.9: Célula de interpolação para a sub-malha cartesiana.

alguns casos. Uma vez localizado o ponto, a seguinte fórmula de interpolação linear é utilizada para aproximar o valor da temperatura no "contorno" da malha polar:

$$\phi_P = \frac{(\phi_{NE}x_1 + \phi_{NW}x_2)y_1 + (\phi_{SE}x_1 + \phi_{SW}x_2)y_2}{[(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)]} \quad (4.45)$$

A Figura 4.9 mostra esquematicamente como calcular os fatores θ_1 , θ_2 , r_1 e r_2 . Semelhantemente, calcula-se o ângulo entre P e a horizontal e, por diferença, calcula-se θ_1 e θ_2 ; já a distância de P aos seus vizinhos ao norte e sul diferem por ΔR , assim, obtendo r_1 e r_2 , pois $r_1 + r_2 = \Delta R$.

Uma fórmula semelhante é usada para o cálculo da temperatura nesta "fronteira cartesiana", que é computada por:

$$\phi_P = \frac{(\phi_{NE}r_1 + \phi_{NW}r_2)y_1 + (\phi_{SE}r_1 + \phi_{SW}r_2)y_2}{[(\theta_1 + \theta_2)(r_1 + r_2)]} \quad (4.46)$$

O ponto central da técnica de multiblocos reside no acoplamento adequado entre as duas malhas. A forma deste casamento é que garantirá, não só a continuidade dos dados no campo, como a transferência das informações (condições de contorno) para dentro do campo e vice-versa e, também, a precisão da aproximação.

A maior ou menor precisão nos resultados estará vinculada à qualidade da interpolação dos valores da variável dependente (neste caso, a temperatura), do número de pontos interpolados, e se é realizado um balanço de fluxo de calor na região de sobreposição das duas malhas. Esta metodologia leva à solução extremamente rápida do problema em estudo, pois suas equações são lineares.

Assim tem-se equações mais simples, que envolvem menores erros de discretização; além de fronteiras ortogonais, reduzindo-se os erros de truncamento. Uma tolerância de convergência comum é especificada nas duas sub-malhas, permitindo uma evolução homogênea do campo de temperatura no domínio como um todo.

O programa em curso refina as malhas retangular e polar através do aumento do número de pontos. Ressalte-se que existe uma pequena diferença entre os tamanhos das células computacionais. A sub-malha polar foi criada a partir da cartesiana, sendo seu número de pontos dependente desta última. E, para garantir a maior proximidade entre o tamanho de suas células, foi imposta a condição $\Delta x \simeq \Delta r$.

Capítulo 5

Aplicação das Técnicas de Geração de Malhas em Problemas de Condução Bidimensional Permanente

Neste trabalho, a validação das técnicas de geração de malhas é efetuada usando-se a equação de Laplace para um problema de condução bidimensional em coordenadas generalizadas, mostrado na Figura 4.1 com o objetivo de verificar o efeito da malha sobre o campo de temperatura. Com a confrontação entre as duas estratégias desenvolvidas, *geração elíptica* versus *técnica de multiblocos*, espera-se que sejam reveladas as principais diferenças, a nível numérico.

Na geração elíptica, dispomos de um operador laplaciano para as coordenadas curvilineares, onde as métricas são obtidas numericamente. Assim, a obtenção do campo de temperatura para cada uma das geometrias analisadas, depende das métricas envolvidas na solução da malha. Uma vez obtida a malha, passa-se à solução do campo de temperatura.

Na solução das malhas pela técnica de multiblocos aqui apresentada, as equações são as usuais, pois o laplaciano para as geometrias polar e cartesiana são bastante familiares e, desta forma, suas métricas são conhecidas a priori, não havendo necessidade de solucionar nenhum sistema de equações diferenciais parciais (como no caso da geração elíptica).

Na prática nem sempre é possível reduzir geometrias complexas em combinações de malhas ortogonais conhecidas, assim, a geração elíptica pode ser uma opção mais adaptável às necessidades do usuário.

5.1 Equações para o Campo de Temperatura

5.1.1 Malha Elíptica

Estaremos buscando solucionar, uma vez obtida a malha, o campo de temperatura para a geometria apresentada na Figura 4.1. Neste trabalho, o maior interesse foi investigar a influência da malha escolhida para discretizar o domínio de cálculo no campo de temperatura. Como ponto de partida para isto, resolvem-se as equações de Laplace em coordenadas curvilineares. A equação de geral de transporte, em qualquer sistema de coordenadas, é:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S_\phi \quad (5.1)$$

a qual simplifica-se no caso de condução pura ($\vec{u} \equiv 0$), para:

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S_\phi$$

Essa equação se reduz ao laplaciano da ϕ quando a difusividade Γ é constante em todo campo e $S_\phi = 0$. O método aqui utilizado para a discretização da equação acima é o método dos volumes finitos, já que se baseia numa formulação integral, que é conservativa.

Dispõem-se de duas formas, equivalentes, de se obter as equações discretizadas para o campo de temperatura. A primeira, a qual será aqui descrita pela simplicidade, usa uma das formas generalizadas do operador laplaciano, o qual pode ser expresso na forma conservativa ou não (referência [22]). Uma segunda forma de se obter a equação discretizada é proceder localmente, isto é, na equação integral:

$$\int_{\delta V} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_{\delta V} S_\phi dV$$

utilizarmos o *teorema de Gauss (da divergência)*, e as grandezas métricas locais de cada célula, de forma que sejam obtidos termos equivalentes à integração da forma conservativa do laplaciano. O laplaciano juntamente com as condições de contorno compõem o problema a ser analisado numericamente. As condições de contorno estão esboçadas na Figura 5.1. Detalhes dessa forma de integrar as equações são

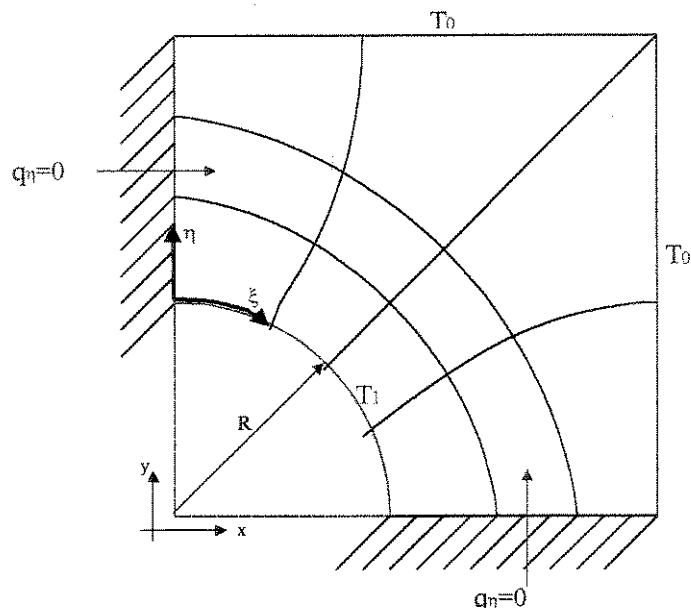


Figura 5.1: Condições de contorno para a temperatura (ME).

apresentados na referência [14]. A primeira forma é preferida por ser mais simples e conduzir, no processo de integração, ao aparecimento dos termos de fluxo nas direções

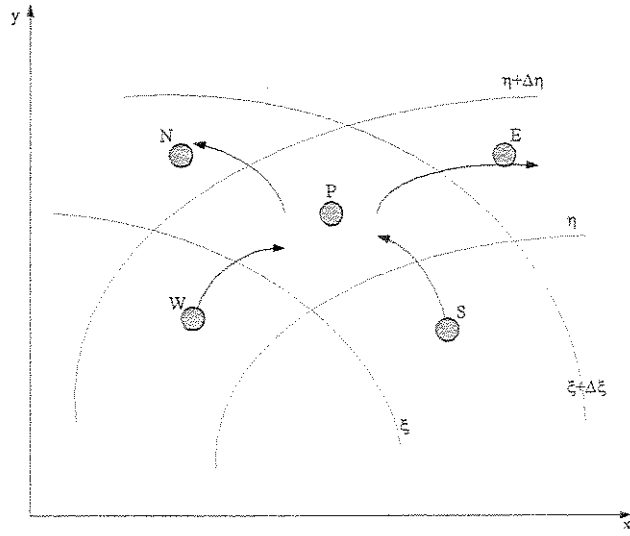


Figura 5.2: Fluxo através do volume de controle interno no plano físico.

normais às linhas coordenadas. O volume de controle no plano físico é mostrado na Figura 5.2, mas a integração é realizada no plano lógico, onde os volumes são da forma mostrada na Figura 5.3.

Como a expressão do Laplaciano, em coordenadas curvilineares, é conhecida, partiremos dela para a obtenção da equação discretizada da temperatura no domínio estudado. O operador laplaciano, num sistema de coordenadas curvilineares, é dependente dos fatores de escala ou métricas da transformação, em relação ao sistema cartesiano.

Uma vez disponível os dados da malha, quer seja esta obtida pela geração elíptica, quer seja pela *técnica de multiblocos*, o campo de temperatura será obtido conforme sua discretização.

Segundo Thompson [22], temos a seguinte expressão para o *laplaciano* numa geometria curvilinear arbitrária:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\sqrt{g} g^{ij} \phi_{\xi^j})_{\xi^i} \quad (5.2)$$

Usando do fato que:

$$g^{ij} = \frac{g_{ij}}{g} \quad \text{para } i = j \quad \text{e} \quad g^{ij} = -\frac{g_{ij}}{g} \quad \text{para } i \neq j,$$

expandindo as somas e as derivadas implícitas, a Equação 5.2 assume a seguinte forma (conservativa) para um campo de temperatura ($\phi = T$):

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right]$$

ou ainda:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] = 0, \quad \text{onde} \quad (5.3)$$

$$\alpha = g_{22} = (x_\eta^2 + y_\eta^2), \quad \gamma = g_{11} = (x_\xi^2 + y_\xi^2) \quad \text{e}$$

$$\beta = g_{12} = g_{21} = (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta).$$

Os termos $\left(\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)$ e $\left(\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)$ definem fluxos nas direções ξ e η , respectivamente. Conforme pode-se observar, há o surgimento de termos com derivadas mistas (ou cruzadas) ao operarmos as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{J} \right) \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \frac{\alpha}{J} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\beta}{J} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \frac{\beta}{J}$$

Exatamente os dois últimos termos é que indicam a não-ortogonalidade da transformação; termos semelhantes surgem na outra componente (direção η).

A integração¹ da Equação 5.3, para um volume elementar da forma mostrada na Figura 5.3, fornece:

¹Usando a mudança de variável na integral dupla, i.e., $\iint_{D_{xy}} \phi(x, y) dA = \iint_{D_{\xi\eta}} \phi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J d\xi d\eta$

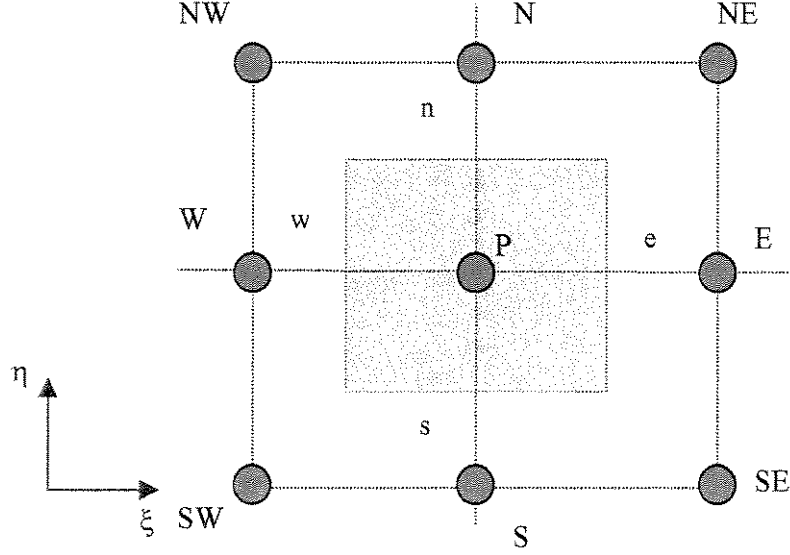


Figura 5.3: Volume de controle interno no domínio (ξ, η) .

$$\iint_A \sqrt{g} \nabla^2 T dA = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] J d\xi d\eta \quad (5.4)$$

$$\int_s^n \int_w^e \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] \right\} d\xi d\eta = 0 \quad (5.5)$$

Os termos entre colchetes representam os fluxos nas interfaces, sendo que o primeiro $\left(F_{no,\xi} = \frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)$ é normal a uma linha de $\xi = \text{cte}$, e o segundo $\left(F_{no,\eta} = \frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)$ é normal a uma linha de $\eta = \text{cte}$.

As métricas que necessitamos conhecer nas interfaces são : α, β, γ e J (Jacobiano). Para a face e tem-se:

$$J_e = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) |_e = x_\xi |_e y_\eta |_e - x_\eta |_e y_\xi |_e$$

Onde:

$$\begin{aligned}
x_\xi|_e &= \frac{x_E - x_P}{\Delta\xi} = \frac{x_E - x_P}{1} \\
y_\xi|_e &= \frac{y_E - y_P}{\Delta\xi} = \frac{y_E - y_P}{1} \\
x_\eta|_e &= \frac{x_N + x_{NE} - x_S - x_{SE}}{4\Delta\eta} \\
y_\eta|_e &= \frac{y_N + y_{NE} - y_S - y_{SE}}{4\Delta\eta} \\
\alpha|_e &= (x_\eta^2 + y_\eta^2)|_e = x_\eta^2|_e + y_\eta^2|_e
\end{aligned} \tag{5.6}$$

As outras métricas são calculadas de forma semelhante. Uma diferença no cálculo das métricas surgirá quando estivermos avaliando as mesmas nos volumes de fronteira. Os termos entre colchetes representam os fluxos nas interfaces. Tratando a integral dupla como integral iterada, podemos integrar em relação a ξ e η os termos de fluxo, e assim obteremos:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial\eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial\xi} \right] d\xi d\eta = \left[\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial\eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial\xi} \right] \Big|_w^e \Delta\eta = \tag{5.7}$$

$$\left[\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial\eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial\xi} \right] \Big|_w^e \tag{5.8}$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial\eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial\xi} \right] d\xi d\eta = \left[\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial\eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial\xi} \right] \Big|_s^n \Delta\xi = \tag{5.9}$$

$$\left[\frac{\gamma}{J} \frac{\partial T}{\partial\eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial\xi} \right] \Big|_s^n \tag{5.10}$$

Para simplificar as expressões acima faz-se a seguinte atribuição:

$$G_{11} = \frac{\alpha}{J}, G_{12} = \frac{\beta}{J}, G_{22} = \frac{\gamma}{J}$$

Conforme podemos notar, estes fluxos (compostos de dois termos), são avaliados nas interfaces dos volumes de controle. É a partir da integração das expressões

destes fluxos (no interior do domínio e nas fronteiras) e da aproximação dos termos que contêm derivadas, que chegamos à equação discretizada, a qual será resolvida para obter o campo de temperaturas no domínio dado.

Como passo seguinte, avalia-se cada termo entre colchetes nas interfaces explicitadas, de acordo com a célula mostrada na Figura 5.3.

Todos os termos entre parênteses possuem derivadas de pelo menos primeira ordem contínuas. Desta forma, uma aproximação deve ser feita no cálculo de todas as derivadas que estão presentes nestes termos. Diferenças centrais serão usadas para exprimir as derivadas da função $T(\xi, \eta)$. Ainda tomando como base a Figura 5.3, teremos:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_e &= \frac{T_E - T_P}{\Delta \eta} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_e &= \frac{T_N + T_{NE} - T_S - T_{SE}}{4\Delta \eta}\end{aligned}\quad (5.11)$$

As outras derivadas aproximam-se de forma semelhante. A equação que reproduz o balanço dos fluxos da propriedade na célula esquematizada é:

$$F_{no}(\xi) \big|_w^e = \left[G_{22e} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_e - G_{12s} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_e \right] - \left[G_{22w} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_w - G_{12w} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w \right] \quad (5.12)$$

Semelhantemente, o termo de fluxo na direção de $\eta = \text{cte}$, é dado por:

$$F_{no}(\eta) \big|_s^n = \left[G_{11n} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_n - G_{12n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_n \right] - \left[G_{11s} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_s - G_{12s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_s \right] \quad (5.13)$$

O balanço total na célula é, então, a soma destas duas contribuições, ou seja:

$$F_{no}(\xi) \big|_w^e + F_{no}(\eta) \big|_s^n = 0, \text{ ou} \quad (5.14)$$

$$\left[G_{22e} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_e - G_{12s} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_e \right] - \left[G_{22w} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_w - G_{12w} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w \right] + \quad (5.15)$$

$$\left[G_{11n} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_n - G_{12n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_n \right] - \left[G_{11s} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_s - G_{12s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_s \right] = 0 \quad (5.16)$$

E, por fim, chega-se à equação discretizada em cada um dos volumes de controle internos do domínio de cálculo.

A variável T será substituída pela variável genérica ϕ . A equação discretizada toma a forma:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + \quad (5.17)$$

$$A_{NE} \phi_{NE} + A_{SE} \phi_{SE} + A_{NW} \phi_{NW} + A_{SW} \phi_{SW}$$

$$A_E = (G_{12n} - G_{12s})/4 + G_{11e}, \quad A_W = (G_{12n} + G_{12s})/4 + G_{11w}$$

$$A_N = (G_{12e} - G_{12w})/4 + G_{22n}, \quad A_S = (G_{12w} - G_{12e})/4 + G_{22s}$$

$$A_{NE} = (G_{12e} + G_{12n})/4, \quad A_{SE} = -(G_{12e} + G_{12s})/4$$

$$A_{NW} = -(G_{12w} + G_{12n})/4, \quad A_{SW} = (G_{12w} + G_{12s})/4$$

$$A_P = G_{11e} + G_{11w} + G_{22n} + G_{22s} \quad (5.18)$$

Uma vez obtida a equação discretizada para T (no interior do domínio), necessitamos agora das equações nas fronteiras do domínio (onde são especificadas as condições de contorno), para fechar o problema, isto é, torná-lo bem posto.

Equações nas Fronteiras

O desenvolvimento visto até aqui, parte do suposto que nosso principal objetivo é resolver o problema esboçado pela Figura 5.1, isto é, com a condição de contorno do tipo Neumann (fluxo prescrito na fronteira). No entanto, não se conhece uma solução analítica de implementação direta, a partir da qual possamos comparar os resultados numéricos obtidos para esta situação. Desta forma, propõe-se um segundo problema, baseando-se no fato que esta geometria sendo contínua, se possa usar uma solução analítica a qual é solução de um problema de valor de contorno (com condições de contorno tipo Dirichlet) e, assim, se possa comparar efetivamente as soluções numérica e exata para esta configuração.

Em termos numéricos, este último problema é trivial já que apenas discretizaremos o interior do domínio, da mesma forma que a desenvolvida para o caso de fluxo nas fronteiras oeste e leste. A condição de contorno para o problema de temperatura prescrita é evidenciada na Figura 5.4. Em termos numéricos o coeficiente $A_P(i, j) = 1$ e o termo fonte $S(i, j) = T_{prescrita}$, sem necessidade de novas equações na fronteira (ver referência [23]).

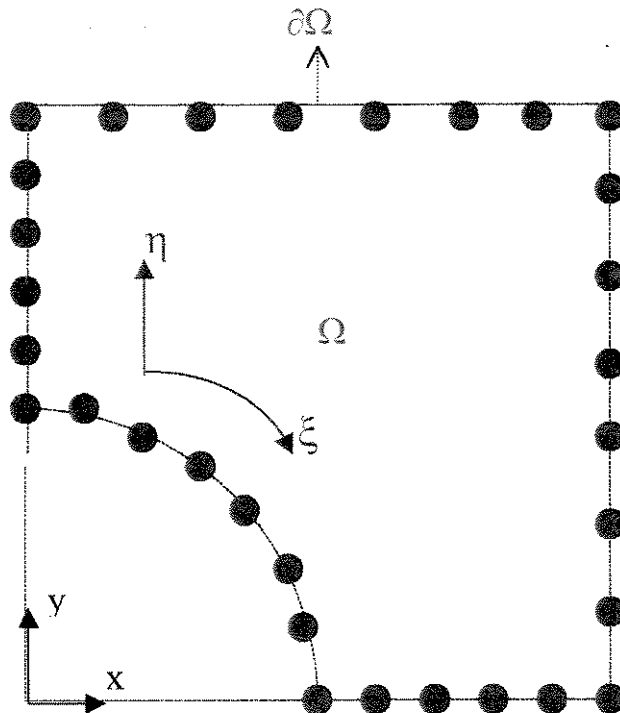


Figura 5.4: Condição de temperatura prescrita.

De acordo com a Figura 5.5, obtém-se os coeficientes para as fronteiras onde há uma condição de fluxo prescrito (condição de Neumann), fazendo-se uma integração no meio volume de controle destas fronteiras. Já para o problema com condições de fluxo, ter-se-á novas equações nas fronteiras, conforme será descrito a

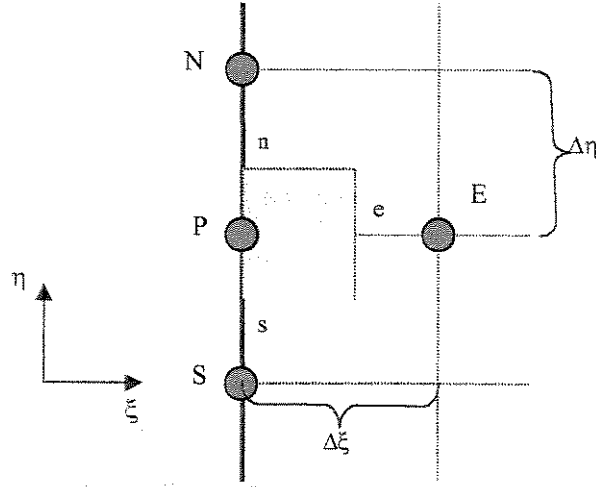


Figura 5.5: Volume de controle na fronteira no domínio (ξ, η) .

seguir.

Da Equação 5.5 temos que (fronteira oeste, $I=1$):

$$\int_s^n \int_P^e \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\alpha}{J} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\beta}{J} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] \right\} d\xi d\eta = 0, \text{ ou} \quad (5.19)$$

$$\int_s^n \int_P^e \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [F_{no,\xi}] + \frac{\partial}{\partial \eta} [F_{no,\eta}] \right\} d\xi d\eta = 0, \quad (5.20)$$

que após integrada obtém-se:

$$F_{no,\xi} \big|_P^e \cdot \Delta\eta + F_{no,\eta} \big|_s^n \cdot \frac{\Delta\xi}{2} = 0, \text{ ou ainda} \quad (5.21)$$

$$F_{no,\xi} \big|_e - F_{no,\xi} \big|_P + (F_{no,\eta} \big|_n - F_{no,\eta} \big|_s) \frac{\Delta\xi}{2} = 0 \quad (5.22)$$

Neste caso, o fluxo normal à fronteira oeste é nulo, isto é, $F_{no,\xi} \big|_P = 0$ e, assim, a equação anterior simplifica-se para:

$$F_{no,\xi} \big|_e + (F_{no,\eta} \big|_n - F_{no,\eta} \big|_s) \frac{\Delta\xi}{2} = 0. \quad (5.23)$$

Conforme vimos na seção anterior, os fluxos são formados de dois termos, um contendo a segunda derivada da variável dependente, e o outro uma derivada cruzada da mesma. As aproximações destes termos são feitas de uma das seguintes maneiras:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n \simeq \frac{\frac{T_{NE}+T_E}{2} - \frac{T_N+T_P}{2}}{\Delta \xi} = \frac{T_{NE} + T_E - T_N - T_P}{2} \quad (5.24)$$

De forma análoga calcula-se a derivada $\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_s$. A derivada de T em relação a η será calculada de forma semelhante ao já visto na seção anterior, isto é:

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e \simeq \frac{\frac{T_{NE}+T_N}{2} - \frac{T_S+T_{SE}}{2}}{2\Delta \eta} = \frac{T_{NE} + T_N - T_S - T_{SE}}{2}. \quad (5.25)$$

Substituindo-se estas expressões na Equação 5.23 , chega-se a:

$$G_{11e} \left(\frac{T_E - T_P}{1} \right) - G_{12e} \left(\frac{T_{NE} + T_N - T_S - T_{SE}}{4} \right) + \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{2} G_{22n} \left(\frac{T_N - T_P}{1} \right) - G_{12n} \left(\frac{T_{NE} + T_E - T_N - T_P}{2} \right) - \quad (5.27)$$

$$\frac{1}{2} G_{22s} \left(\frac{T_P - T_S}{1} \right) + G_{12s} \left(\frac{T_{SE} + T_E - T_S - T_P}{2} \right) = 0 \quad (5.28)$$

Re-arranjando o termos na forma padrão para volumes finitos teremos:

$$A_E = G_{11e} + \frac{G_{12s} - G_{12n}}{2}, \quad A_N = \frac{1}{2} G_{22n} + \frac{G_{12n} - G_{12e}}{2}, \quad (5.29)$$

$$A_S = \frac{1}{2} G_{22s} + \frac{G_{12e} - G_{12s}}{2}, \quad A_{NE} = -\frac{G_{12n} + G_{12e}}{4}, \quad (5.30)$$

$$A_{SE} = \frac{G_{12s} + G_{12e}}{2} \text{ e } A_P = A_E + A_W + A_S + A_N + A_{SE} + A_{NE} \quad (5.31)$$

De forma similar são obtidos os coeficientes para a fronteira leste ($J = 1$) e, assim, completa-se o quadro de condições necessárias para se determinar o campo de temperatura. O *TDMA* é o algoritmo utilizado para resolver iterativamente o sistema de equações obtidos.

5.1.2 Malha Multiblocos (MB)

Para a obtenção da solução do campo de temperatura procurado, por esta metodologia, conforme já descrito, o domínio de cálculo é dividido em dois domínios independentes, um definido por uma geometria polar, e outro, por uma geometria cartesiana, conforme já foi mostrado.

Nesta configuração, a parte mais delicada residirá na passagem de informações (temperaturas) entre as sub-malhas (geometrias), devido à descontinuidade.

Outro fator de importância é a forma de se averiguar a precisão dos resultados. A existência de uma solução exata é um fator significativo e decisivo na validação de qualquer metodologia numérica.

Em um dos problemas aqui abordados, dispõem-se de uma solução exata para todo o domínio, tendo-se, portanto, uma base para a avaliação do campo calculado.

A descrição detalhada da forma de interpolação dos dados obtidos após esta etapa, isto é, a solução do campo de temperatura conjunto, está descrita no item 3.7.

Esta divisão em dois domínios, leva-nos a dois problemas de valor de contorno, matematicamente distintos, pois o operador laplaciano tem formas distintas nestas duas geometrias.

Para a sub-malha polar, o laplaciano assume a forma da Equação 3.22:

$$\nabla^2 T|_{Sub-polar} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5.32)$$

Esta equação esta sujeita às seguintes condições de contorno:

$$T|_{r=R} = 1; \quad T|_{r=R_0} = T_{interpolada}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\forall r, \theta=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\forall r, \theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

estas condições de contorno são mostradas na Figura 5.7.

Na sub-malha cartesiana, o laplaciano é dado pela Equação 3.21:

$$\nabla^2 T|_{Sub-cartesiana} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

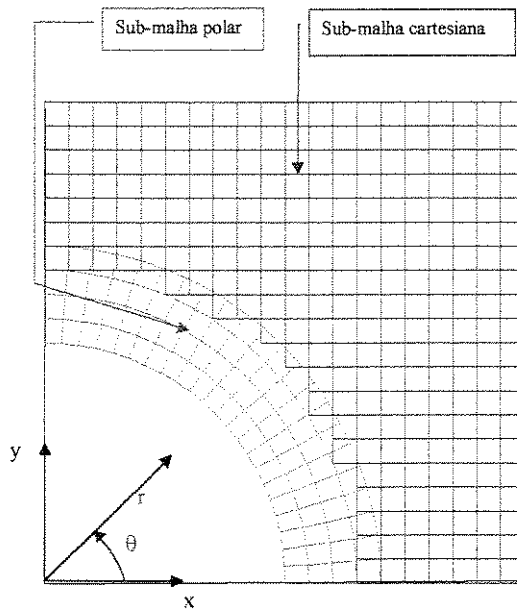


Figura 5.6: Regiões de cálculo na malha multiblocos.

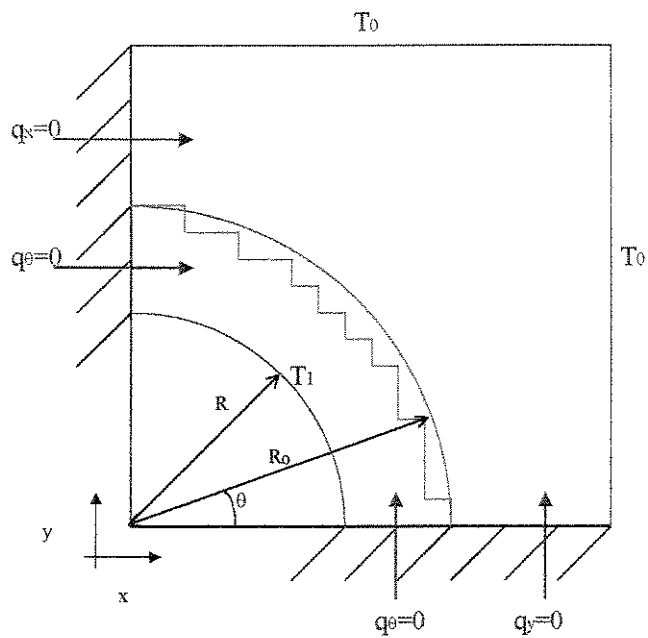


Figura 5.7: Condições de contorno para a temperatura (MB).

Esta equação está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \big|_{(x=0, \forall y)} = 0 ; T \big|_{(x=L, \forall y)} = T_1 ; \frac{\partial T}{\partial x} \big|_{(\forall x, y=0)} = 0 \text{ e } T \big|_{(\forall x, y=L)} = T_1.$$

A obtenção de uma solução para estes problemas requer que os domínios sejam discretizados. Esta discretização do domínio, como no caso anterior, é baseada na técnica dos volumes finitos. As equações após discretizadas² assumem a forma geral:

$$\begin{aligned} A_P \phi_P = & A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_{NE} \phi_{NE} + A_{SE} \phi_{SE} + \\ & + A_{SW} \phi_{SW} + A_{NW} \phi_{NW} + S_P \end{aligned} \quad (5.33)$$

²Os detalhes da discretização são mostrados no apêndice B

Capítulo 6

Resultados e Discussão

Uma análise numérica de malhas nos permite gerar uma grande quantidade de dados. Neste trabalho isto foi uma rotina, já que um ajuste contínuo se fez necessário até se obter resultados confiáveis. A geração de malha é só uma das etapas (deveras importante) na solução de um campo físico (pressão, temperatura, velocidades, etc. ...), mas, em grande extensão, a acuidade do campo é que referendará o quanto a metodologia de geração foi realizada com sucesso.

A análise dos resultados será dividida em duas etapas, a saber:

$$1) \text{ Tipo de Malha } \left\{ \begin{array}{l} \text{Elíptica ou generalizada} \\ \text{Multiblocos} \end{array} \right.$$

Na geração elíptica temos a seguinte classificação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemas de Laplace (sem as funções de controle } P \text{ e } Q) \\ \text{Sistemas de Poisson (com } P \text{ e } Q) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{controle de espaçamento} \\ \text{e} \\ \text{ortogonalidade} \end{array} \right.$$

2) Enfoque comparativo entre as duas estratégias considerando (6.1)

dois problemas de condução de calor pura, a saber: (6.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Problema I:} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 T|_{\Omega} = 0, \Omega \text{ domínio de cálculo} \\ T_{\forall I, J=1} = 1, T_{\forall I, J=NJ} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n}|_{I=1, \forall J} = \frac{\partial T}{\partial n}|_{J=1, \forall I} = 0 \end{array} \right. \text{ em } \partial\Omega \\ \\ \text{Problema II:} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 T|_{\Omega} = 0, \Omega \text{ domínio de cálculo} \\ T_{\forall I, J=1} = T_{\text{exa}}(x, y), T_{\forall I, J=NJ} = T_{\text{exa}}(x, y) \\ T_{\forall J, I=1} = T_{\text{exa}}(x, y), T_{\forall J, I=NJ} = T_{\text{exa}}(x, y) \end{array} \right. \text{ em } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Como visto ao longo deste trabalho, utilizou-se duas estratégias para obtenção da malha: a abordagem por multiblocos (com métricas analíticas) e a elíptica (com métricas numéricas). Na técnica de multiblocos em função da escolha da combinação de uma malha polar (sub-malha 1) e uma cartesiana (sub-malha 2) para descrever o domínio de cálculo (malha principal), perdeu-se em flexibilidade geométrica. Em contra-partida, na técnica de geração elíptica, a flexibilidade quanto às diferentes formas da malha final é grande.

Existem vários parâmetros que conferem à malha gerada elipticamente aspectos distintos; desde sistemas tipo Laplace (Equação 4.1), sem as funções P e Q , podendo-se implementar condições de ortogonalidade nas fronteiras; até sistemas tipo Poisson (Equação 4.2), com a inclusão dos termos P e Q ; e, neste caso, ir além, ao se considerar distintas formas de se interpolar as funções P e Q , como também implementar características específicas nas fronteiras do domínio, tipo ortogonalidade e espaçamento. Vê-se assim, que muitas variações são possíveis.

A malha multiblocos tem como inconveniente o fato de não ser contínua, o que impõe a criação de um procedimento específico que permita a passagem dos dados

de uma malha para outra (da *polar* para a *cartesiana* e vice-versa). No programa principal isto é realizado pelas rotinas *Interpola* e *Coef*. Como importante vantagem, nesta abordagem, tem-se a ortogonalidade natural das sub-malhas

A análise desenvolvida entre as duas estratégias teve como parâmetros de comparação o número de pontos no domínio, o erro relativo na linha de centro e o erro (absoluto) global médio nas malhas.

Com relação ao número de pontos no domínio, faz-se necessário introduzir um número equivalente de pontos para a malha multiblocos, já que ela é composta de duas geometrias com números distintos de pontos. Um valor para este número é: $N_{eq} = (N_I \times N_J - N_{out} + N_T \times N_R)$; onde:

N_T é o número máximo de linhas ao longo da coordenada angular θ e N_R é o número máximo de linhas ao longo da coordenada radial (coincide com a fronteira externa da malha polar).

N_{out} é o total de pontos eliminados da malha cartesiana, isto é, da sua fronteira Sul à origem dos eixos.

A região compreendida entre a linha poligonal (tipo serra) e os eixos coordenados, define a região eliminada; conforme mostrado na Figura 5.1. A linha quebrada (poligonal) definida aqui, denomina-se fronteira Sul da sub-malha cartesiana, também ilustrada na figura citada anteriormente.

O erro relativo na linha de centro, isto é, $I = J$ (ME), $I_p = J_p$ e $k = l$ (MB), segundo a Figura 6.1, pode ser calculado por:

$$E_{i,j} = \left| \frac{T(i,j) - T_{Exa}(i,j)}{T_{Exa,max} - T_{Exa,min}} \right| = \left| \frac{T(i,j) - T_{Exa}(i,j)}{\Delta T_{Exa,max}} \right| \quad (6.3)$$

onde $T_{Exa,max}$ e $T_{Exa,min}$ são os valores máximo e mínimo da temperatura exata no domínio de cálculo. Isso implica que $\Delta T_{Exa,max}$ é um valor fixo em qualquer estratégia adotada.

Quanto aos erros médios (globais), foram utilizadas as seguintes expressões para o cálculo:

Malha Elíptica (ME):

$$E_{médio} = \frac{\sum_{j=2}^{NJ-1} \sum_{i=2}^{NI-1} |T(i, j) - T_{Exa}(i, j)|}{NI.NJ} \quad (6.4)$$

onde NI e NJ , correspondem aos números máximos de pontos, nas direções ξ e η do plano transformado na malha elíptica, respectivamente, visto nas Figuras 4.2 e 4.3.

Malha multiblocos (MB):

$$\begin{aligned} E_{a,p}^{i_p, j_p} &= \sum_{j_p=2}^{NR-1} \sum_{i_p=2}^{NT-1} |T_p(i_p, j_p) - T_{Exa}(i_p, j_p)| \\ E_{a,c}^{i,j} &= \sum_{k=2}^{Nx-1} \sum_{l=2}^{Ny-1} |T_c(k, l) - T_{Exa}(k, l)| \\ E_{médio} &= \frac{(E_{a,p}^{i,j} + E_{a,c}^{i,j})}{Neq} \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde: N_x e N_y são calculados por: $N_x, N_y \simeq (NI \times NJ - N_{out})$. Neq é o número equivalente de pontos na estratégia adotada, elíptica ou multiblocos.

Com o cálculo destas grandezas foi possível mostrar mais detalhadamente o que ocorreu em cada abordagem desenvolvida sendo, portanto, valores que apontam as tendências entre as duas técnicas.

A Figura 6.1 é um esboço das localizações das fronteiras Sul e Norte e da linha correspondente à diagonal (linha de centro ou de simetria) onde são realizados os cálculos comparativos entre as duas estratégias. Nesta figura aparece a linha poligonal, a qual indica a fronteira Sul da sub-malha cartesiana.

Uma terminologia adotada em algumas saídas gráficas e partes do texto foi:

$$\begin{cases} ME & \text{para malha tipo elíptica} \\ MB & \text{para malha tipo multiblocos} \end{cases} \quad (6.6)$$

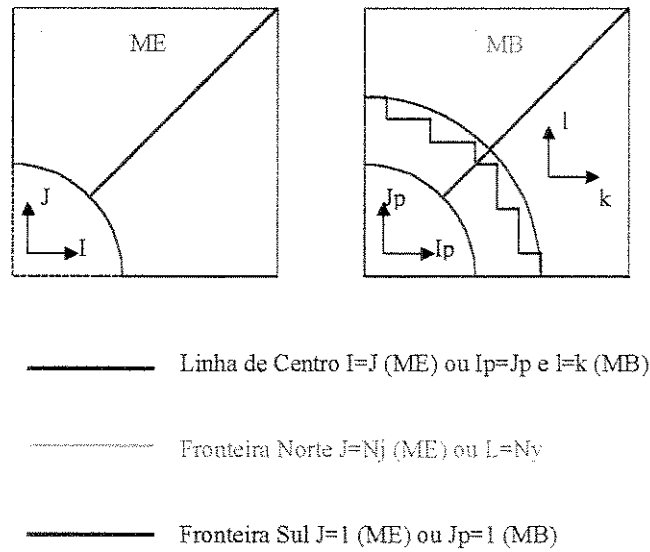


Figura 6.1: Linhas de referência para comparação da temperatura.

6.1 Malhas elípticas

Uma dos principais objetivos deste trabalho foi mostrar a importância das técnicas de geração de malha, particularmente na técnica elíptica, onde espera-se que com a implementação de condições especiais (ortogonalidade nas fronteiras e espaçamento especificado) se possa ganhar, realmente, uma precisão significativa no campo estudado.

O trabalho de implementação e sua posterior verificação envolveu um grande tempo de processamento, pois, apesar da automaticidade desejada, muitas são as variáveis que foram criadas para tal objetivo.

Como já foi enfatizado anteriormente, as equações aqui resolvidas são não-lineares e a inclusão dos termos P e Q torna o problema ainda mais complexo e, como observado, muito sensível a variáveis como espaçamento, número de pontos, forma das funções de interpolação, assim como a própria geometria.

Geometrias com concavidade acentuada, fazem com que as derivadas atinjam

valores elevados no contorno e valores elevados das métricas, que, por sua vez, influem nos valores das funções de controle, as quais são interpoladas a partir dos valores de fronteira. O ajuste, portanto, depende de uma combinação destes fatores.

Uma vez controlado estes fatores, poucas mudanças serão feitas para uma nova condição e/ou geometria. Os principais resultados foram classificados de acordo com o tipo de malha solucionada. A esses casos, associamos nomes que representam um conjunto de valores característicos (espaçamento, ortogonalidade, uso ou não de funções de controle e o tipo da função de interpolação utilizada) utilizados na geração da malha.

Pelo fato de, neste trabalho, ter-se usado a formulação proposta por Hsu&Lee [6], o parâmetro $HSU = 1$ indica o uso das funções interpolantes exatas, ao contrário de $HSU = 0$. Na maioria dos problemas aqui analisados usou-se $HSU = 1$.

Quanto à implementação das funções de controle, tem-se dois casos: $Laplace = 0$ sem as funções de controle e $Laplace = 1$, com implementação das funções de controle. Uma segunda forma usada para interpolar as funções de controle é dada pelas fórmulas de Jeng&Liou [24].

Assim, o parâmetro IFC indica a escolha entre as funções usadas por Jeng&Liou ($IFC = 0$) e Hsu&Lee ($IFC = 1$). Uma vez de posse dessas expressões, pode-se partir para as implementações da ortogonalidade e controle de espaçamento nas fronteiras.

A variável que controla a ortogonalidade é $LORTO$; se $LORTO = 0$ malha sem ortogonalidade nas fronteiras ($NO - Não Ortogonal$), se $LORTO = 1$ malha com ortogonalidade nas fronteiras ($O - Ortogonal$).

Os principais casos analisados, para a técnica elíptica, com uso das funções de controle foram:

$$JENG\ 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{ns} = 0.05 \\ s_{nn} = 1.0 \end{cases}, \quad JENG\ 1 \Rightarrow \begin{cases} s_{ns} = 0.5 \\ s_{nn} = 0.05 \end{cases},$$

$$\text{JENG 2} \Rightarrow \begin{cases} s_{ns} = 0.07 \\ s_{nn} = 0.05 \end{cases}, \text{JENG 3} \Rightarrow \begin{cases} s_{ns} = 0.5 \\ s_{nn} = 0.5 \end{cases}$$

Conforme foi descrito no capítulo três, há casos onde ocorrem instabilidades numéricas, quando do cálculo das funções de controle. Isto ocorre devido ao fato de usar-se diferenças centrais no cálculo das derivadas das incógnitas da malha no plano transformado $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

Nas figuras a seguir mostram-se alguns efeitos na malha final, em função dos diversos parâmetros analisados na fase de geração elíptica; variando desde malhas tipo Laplace até aquelas com controle e ortogonalidade nas fronteiras.

A Figura 6.2 exhibe uma malha não-ortogonal e outra ortogonal na fronteira sem funções de controle. Nesta figura, podemos notar uma diferença significativa entre as duas configurações. Na malha ortogonalizada são criados volumes de controle, no canto superior direito, maiores e mais deformados, isto é, diferentes de um retângulo, havendo assim, maior distância entre os pontos da malha, o que por sua vez implicará em perda de precisão no cálculo da temperatura.

Este comportamento também fica evidente na Figura 6.3, quando se usa funções de controle, atraindo a malha para próximo da fronteira Sul, e afastando-a da fronteira Norte.

Com as funções de controle modificadas proposta por Jeng&Liou [24], as malhas obtidas tiveram uma maior estabilidade (variações) e maior consistência; por isso ela foi tomada como padrão na maioria das análises aqui realizadas.

Na Figura 6.5, temos duas situações distintas (usou-se controle de espaçamento, dado pelo caso JENG 2, como também ortogonalidade e não-ortogonalidade) as quais mostram uma distribuição mais equilibrada dos pontos próximos à fronteira Norte ($\eta_{\max}$) sem negligenciar a fronteira Sul ($\eta_{\min} = \eta_o$). Um caso semelhante, com maior número de pontos, nos dá uma idéia das fronteiras e centro, é mostrado na Figura 6.4. Nota-se uma melhoria na distribuição dos pontos sobre a malha. Vê-se

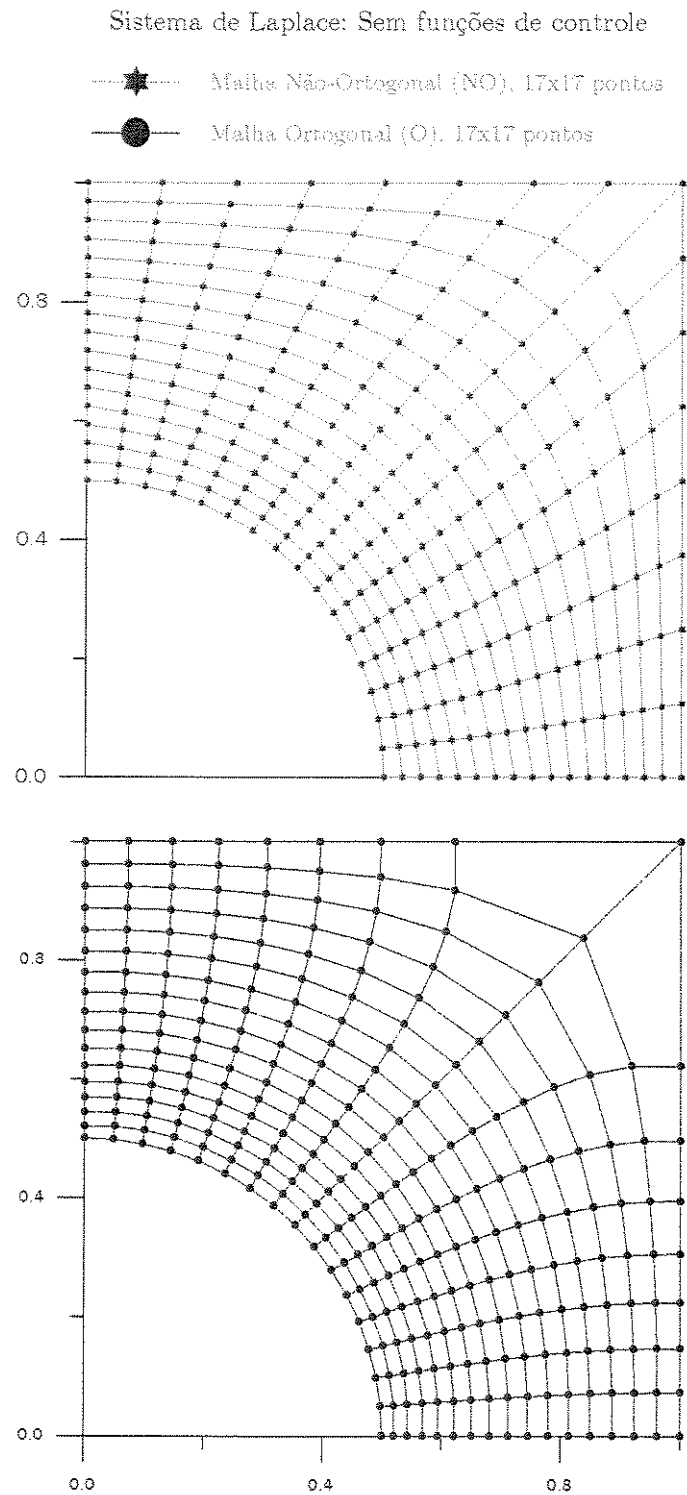


Figura 6.2: Sistema de Laplace com 17x17 pontos.

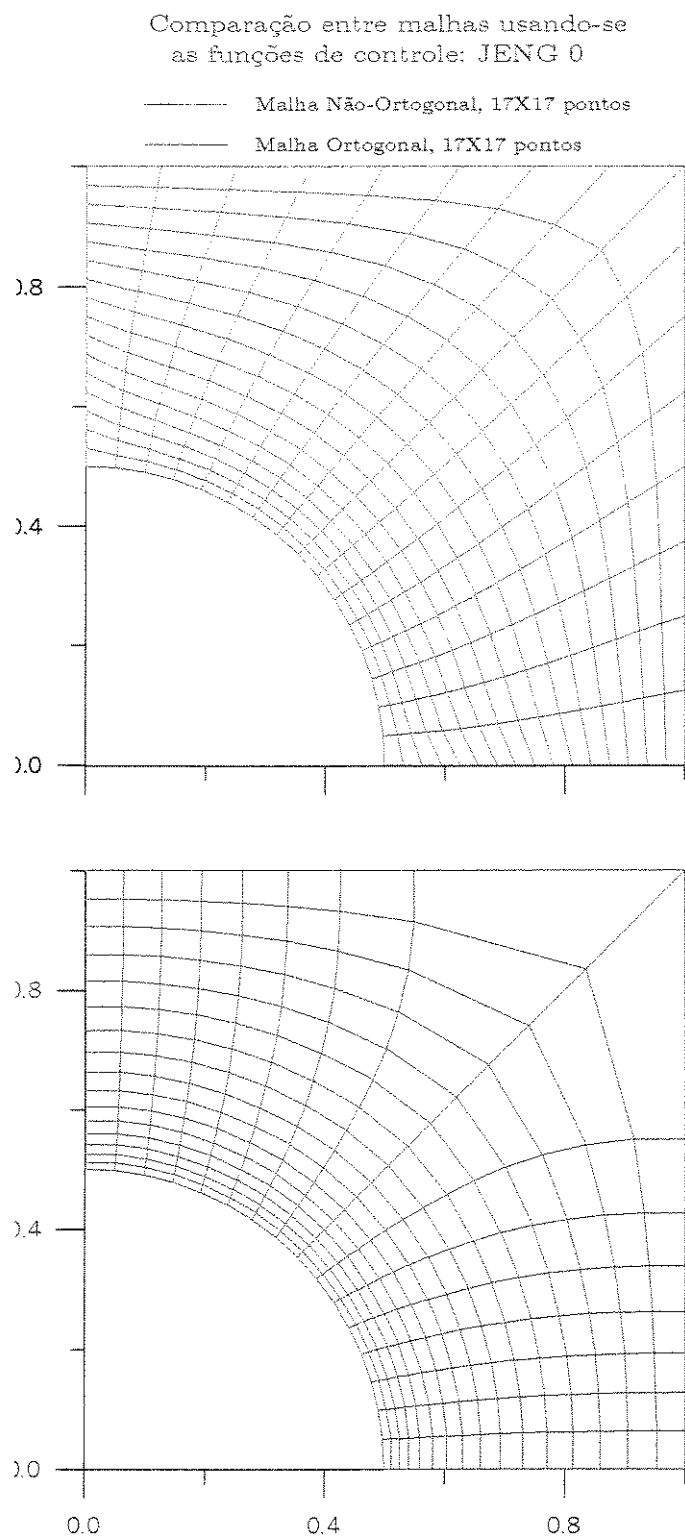


Figura 6.3: Malhas O e NO para JENG 0, 17x17 pontos

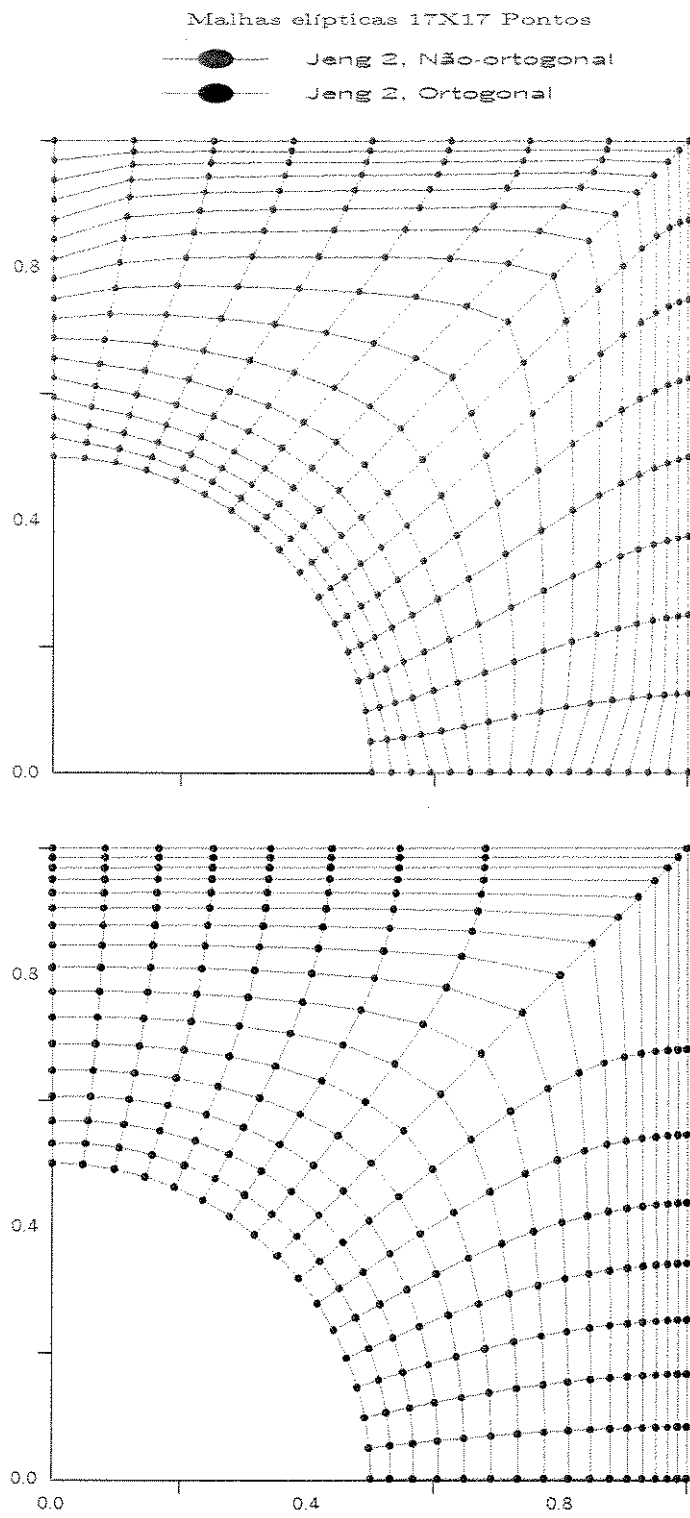


Figura 6.4: Malhas O e NO para JENG 2, 17x17 pontos.

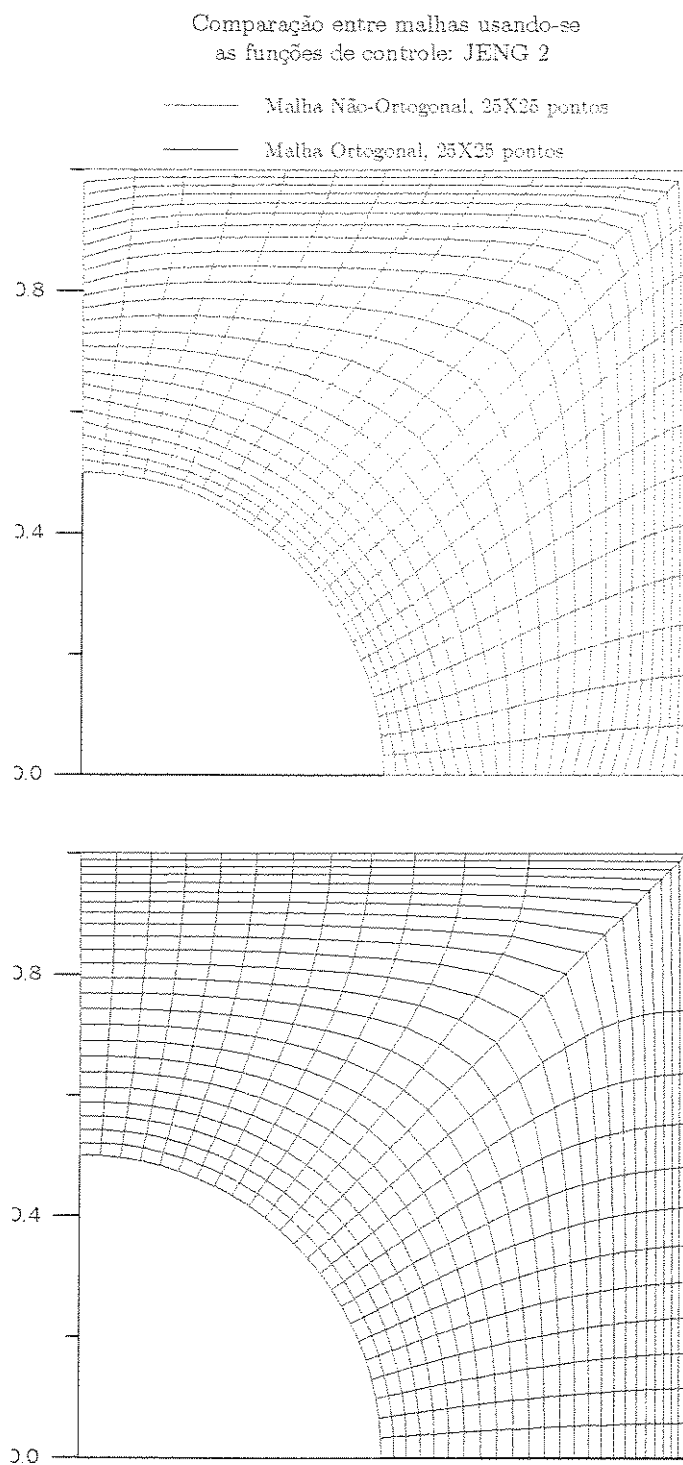


Figura 6.5: Malhas O e NO para JENG 2, 25x25 pontos.

assim a importância do espaçamento s_{nn} .

A característica final da malha depende do sistema resolvido e, no caso da adição das funções de controle, da forma de implementá-las, assim como dos espaçamentos nas fronteiras $\eta_{\min}$ e $\eta_{\max}$. Para o sistema de Laplace obtém-se, sempre, uma malha suave e com concentração nas regiões convexas do domínio. Para sistemas tipo Poisson é possível controlar a malha próximo às fronteiras, ou via ortogonalidade ou via espaçamento, ou ambos, o que lhe confere grande versatilidade.

Quando se especifica as funções no contorno, a convergência da malha é muito rápida; quando a condição na fronteira é de derivada, a malha converge mais lentamente. Nesta abordagem foi possível ortogonalizar todas as fronteiras. Na fronteira Sul ($J = 1$) há uma saída, em alguns pontos, ainda que pequena, da ortogonalidade. A implementação do espaçamento entre as linhas coordenadas próximas às fronteiras Sul ($J = 1$) e Norte ($J = NJ$) inclui nas equações a condição de ortogonalidade.

Este fato deveria implicar numa malha ortogonal nesta fronteira, mas isto numericamente não ocorre, devido a existência do canto. Para que se consiga este efeito é necessário impor, no programa fonte, um valor adequado para o termo fonte S_P .

Como se deduziu dos resultados, a convergência da malha depende dos diversos fatores estudados. O tipo de função de interpolação adotada exerce um papel importante na consistência do método, pois verificou-se que, quando se usa a forma dada pela Equação 4.2.6, o método fica menos sujeito a instabilidades na convergência e menos propenso a malhas com dobras. Segundo Jeng&Liou [24], esta melhoria decorre do fato desta função tender à função especificada na fronteira, isto é:

$$P \sim P(\xi, \eta_0) \text{ e } Q \sim Q(\xi, \eta_0) \text{ para } \eta \rightarrow \eta_0.$$

6.2 Malhas multiblocos

Na obtenção das malhas pela técnica de multiblocos, aqui tratada, não houve necessidade de se gerar as sub-malhas, pois foram obtidas a partir das Equações 4.42 e 4.44, repectivamente, para as sub-malhas polar e cartesiana, isto é, de uma forma puramente algébrica. Em face desse aspecto, utilizou-se nesse texto a denominação *obtenção* ao invés de *geração* da malha, que parece ser o mais razoável. Neste trabalho, usa-se o termo malha principal para a composição das sub-malhas polar e cartesiana; aqui um quadrado de lado um ($L = 1$).

Quando se eliminam os pontos abaixo da linha poligonal quebrada (aqui considerada a fronteira Sul da nova malha cartesiana), descreve-se o novo domínio através de duas sub-malhas: a polar, a qual ocupa parte da malha principal (canto inferior esquerdo), e a cartesiana que se estende desta fronteira Sul até os três cantos restantes. Como era de se esperar, a forma final da malha obtida influencia os valores do campo de temperatura no domínio de cálculo

As variações possíveis na forma final da malha tipo multiblocos estão relacionadas ao raio do tubo (R), ao comprimento entre os centros de dois tubos (L) e a extensão da malha polar (FAT), isto é, quanto a sub-malha polar ocupa do domínio total. Foram usados, para efeito de comparação no problema principal, $R = 0,5$, $L = 1$ e $FAT\ 3 = 0,3$, $FAT\ 1 = 0,5$ e $FAT\ 2 = 0,65$. Algumas malhas para esta geometria são mostradas nas Figuras 6.6, 6.7 e 6.8, as quais esclarecem os papéis das variáveis R e FAT . A obtenção destas malhas é extremamente rápida quando comparada com a técnica elíptica; sendo esta uma vantagem a favor deste tipo de configuração: rapidez e simplicidade.

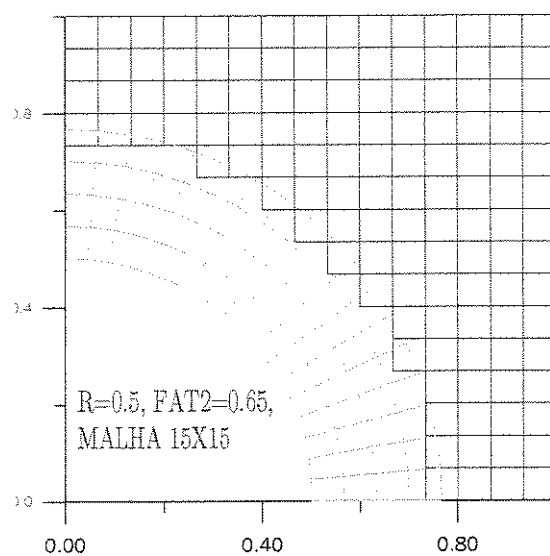
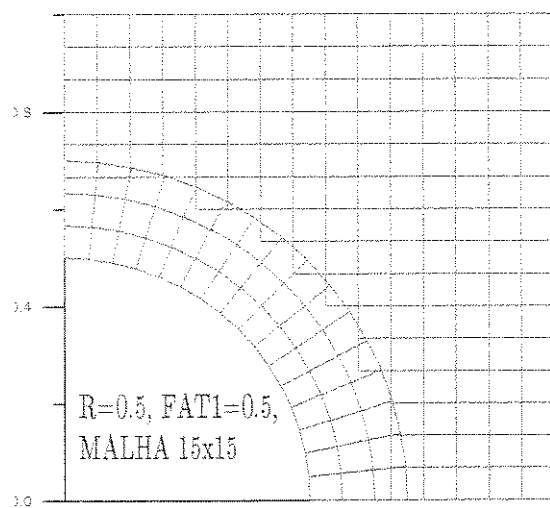


Figura 6.6: Malhas para fatores de extensão FAT 1 e FAT 2.

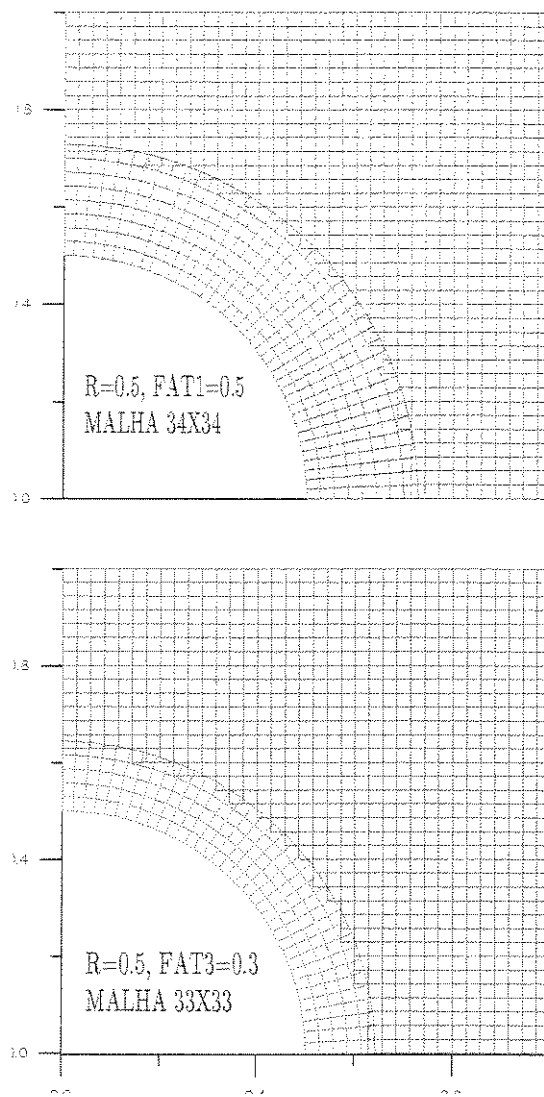


Figura 6.7: Malhas para fatores de extensão FAT1 e FAT3

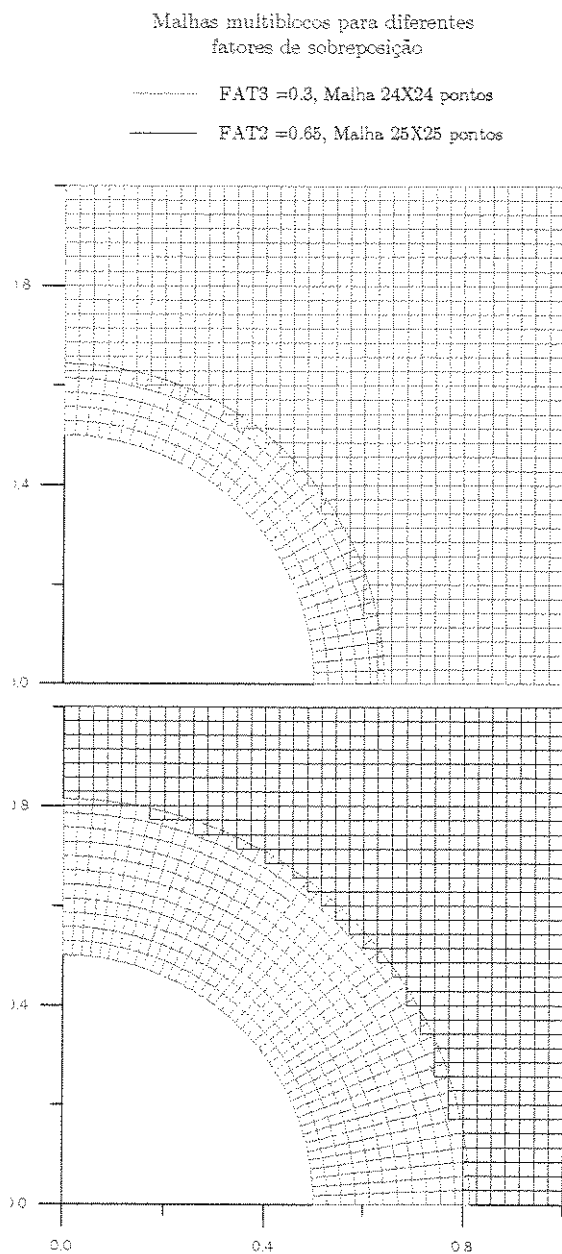


Figura 6.8: Malha para fatores de extensão FAT 2 e FAT 3.

6.3 Problema Teste I

Como se pôde ver na seção anterior, várias são as possibilidades de se controlar as características de uma malha gerada elipticamente. Mas, nosso objetivo durante o trabalho foi validar as técnicas de geração de malhas aqui implementadas (já que, ao transformarmos as equações do plano físico para o lógico, as equações de campo trazem nos seus coeficientes as informações inerentes ao campo de coordenadas, ou seja, as métricas).

O primeiro problema teste (de valor de contorno) aqui analisado, já citado anteriormente, é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 T|_{\Omega} = 0, \Omega \text{ domínio de cálculo (Figura 4.1)} \\ T_{\forall I, J=1} = 1, T_{\forall I, J=NJ} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n}|_{I=1, \forall J} = \frac{\partial T}{\partial n}|_{J=1, \forall I} = 0 \end{array} \right. \text{ em } \partial\Omega \quad (6.7)$$

Onde n é a normal à curva $\xi_i = cte, i = 1, 2$.

Como critério de parada do campo de temperatura adotou-se:

$$\begin{aligned} Erphi &= \left| \frac{T_{ij}^n - T_{ij}^{n-1}}{T_{ij}^n} \right| \leq Eps = 10^{-5} \text{ e } Re s_{ij}^n \leq Eps = 10^{-5}, \text{ onde:} \\ Re s_{ij}^n &= (A_N T_{i,j+1} + A_S T_{i,j-1} + A_E T_{i+1,j} + A_W T_{i-1,j} + A_{NW} T_{i-1,j} \\ &\quad + A_{SW} T_{i-1,j-1} + A_{NE} T_{i+1,j+1} + A_{SE} T_{i+1,j-1} + S_{i,j}) - A_P T_{i,j} \end{aligned}$$

$Erphi$ é a variável que determina em cada ponto interior e iteração, o grau de tolerância adotado.

Um procedimento numérico com esta variável verifica qual o maior $Erphi$ no domínio em cada iteração e o usa como a tolerância naquela iteração. Quando a maior das diferenças for atingida numa posição, então todo o campo já a terá alcançado. Um outro critério, usado paralelamente ao $Erphi$, é o cálculo do resíduo, $Re s_{ij}^n$, o qual avalia a precisão do sistema de equações.

6.3.1 Resultados pela técnica elíptica

Uma restrição importante nesta análise é o fato de não se dispor, neste primeiro problema, de uma solução exata. A principal diferença entre os dois problemas analisados é o tipo de condição de contorno; isto é, enquanto neste primeiro atribui-se valores padrões um e zero juntamente com a condição de simetria; no segundo atribui-se, em toda a fronteira, uma função conhecida.

Em função da restrição citada, buscou-se comparar as duas metodologias via características gerais, tais como isotermas e comportamento da temperatura na linha de centro; afim de verificar a consistência dos resultados numéricos. As isotermas deste campo podem ser vistas na Figura 6.9, onde se observa a concordância com a teoria, pois as tangentes às linhas de temperatura constante (derivadas) têm inclinação nula, devido à especificação de condições de contorno tipo Neumann nas fronteiras.

Já na Figura 6.10, tem-se o gráfico das temperaturas, para as diversas características implementadas; conclui-se daí que o perfil final é independente dos fatores envolvidos no cálculo da malha, mostrando portanto, consistência física. Os valores do resíduo, $Re s_{ij}^n$, sempre atingiram o critério de parada antes dos erros Er_{phi} .

6.3.2 Resultados obtidos usando a técnica de multiblocos

De acordo com a Figura 6.11, verifica-se a semelhança entre os perfis de temperatura, para malhas com distintos números de pontos. A região em destaque, revela o salto que ocorre ao se passar de uma sub-malha à outra, que é tanto maior quanto menor o número de pontos utilizados; suavizando quanto maior for o grau de refinamento da malha.

Tomou-se a linha de centro como um parâmetro de comparação entre as duas técnicas, já que nesta linha há dados das duas configurações, a polar e a cartesiana, assim como na elíptica, ela reflete a maior ou menor densidade de pontos. Como pode

Isotermas para malha elíptica
Parâmetros JENG 2, Malha O

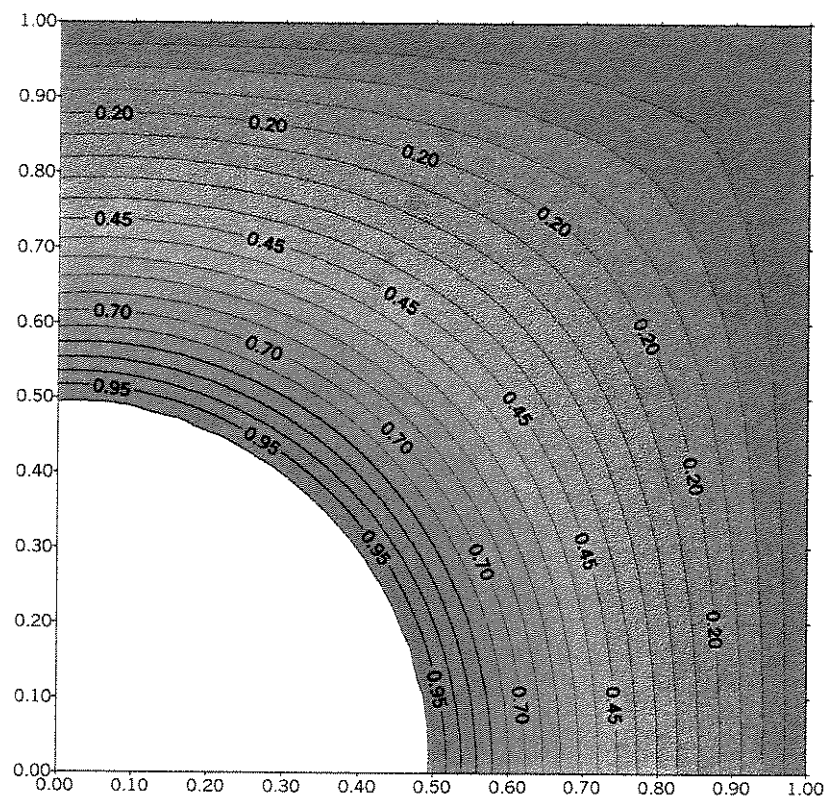


Figura 6.9: Linhas isotérmicas para malha elíptica JENG 2, ortogonal.

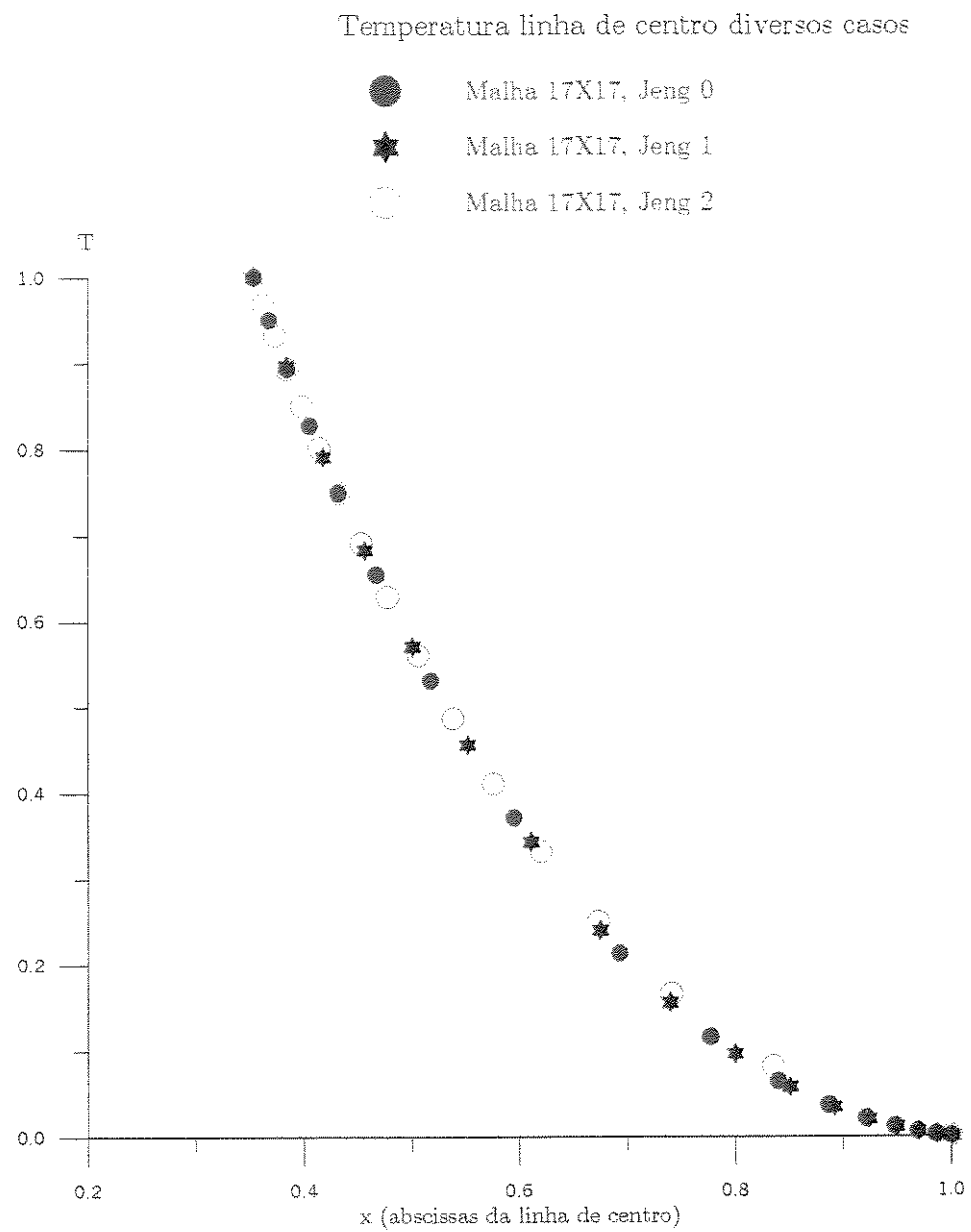


Figura 6.10: Temperatura na linha de centro para diversos casos, 17x17 pontos.

Temperatura na Linha de Centro na Malha Multibloco, FAT1=0.5

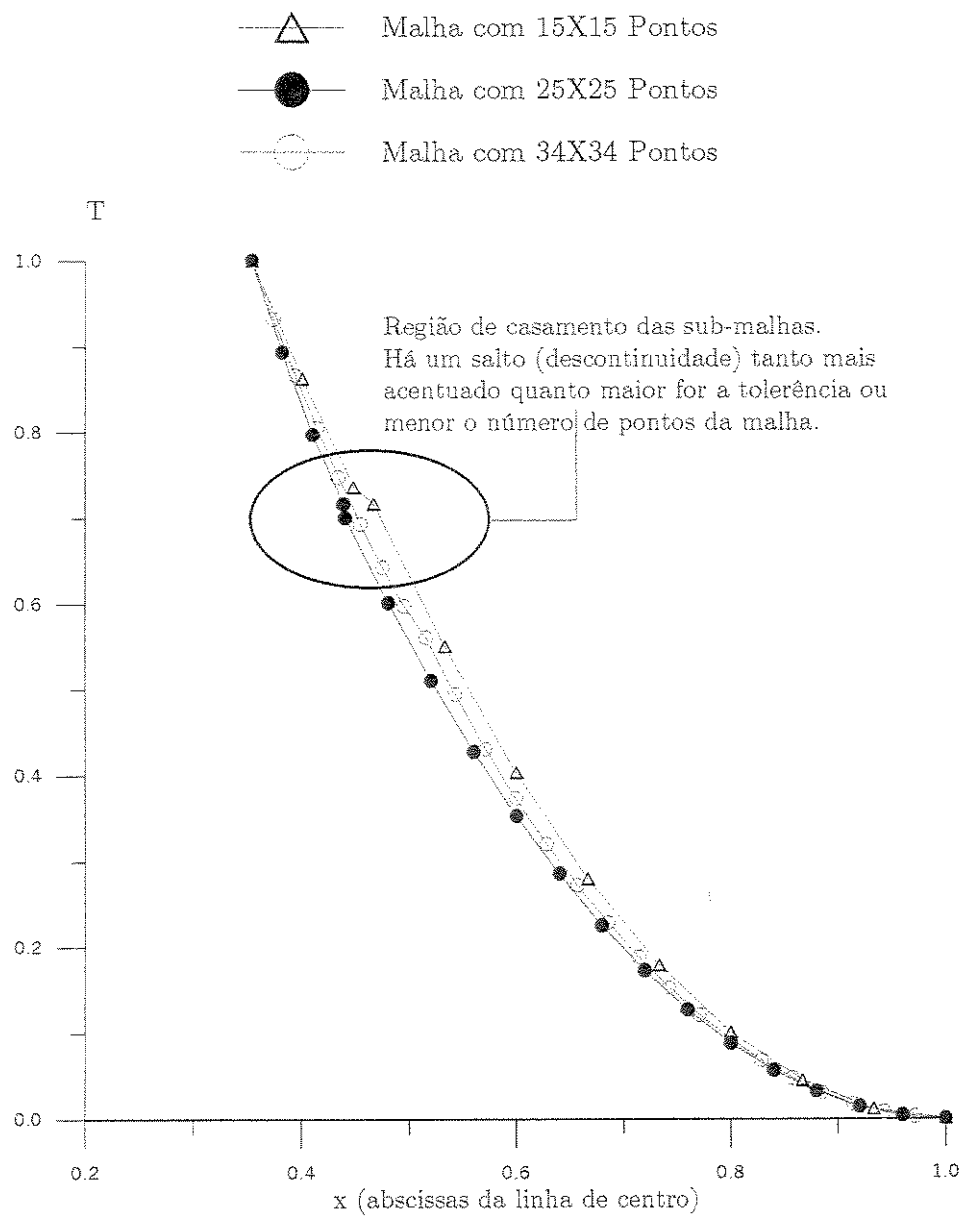


Figura 6.11: Temperatura na linha de centro com a malha multiblocos.

ser visto nas malhas exibidas nas figuras anteriores (Figuras 6.6, 6.7 e 6.8), pode-se variar o raio da geometria polar (superfície do tubo) e o quanto a geometria polar se estende sobre a geometria cartesiana (*FAT*).

Existem limites para que este último fator possa produzir uma malha, pois pode ocorrer que o número máximo de pontos na direção angular (*NT*) da malha polar, ($I_P = 1, NT$) ultrapasse o maior tamanho (*NI* ou *NJ*) dos vetores da variável que armazena as coordenadas cartesianas e as outras variáveis do programa fonte, indexadas pelo valor máximo de *NI*; este fato é consequência da íntima relação entre as duas malhas, conforme descrito no capítulo 3.

A Figura 6.11, apresenta o mesmo perfil que aquele da malha elíptica, dada na Figura 6.10, mostrando que, apesar das diferentes configurações utilizadas, os métodos levam a campos fisicamente similares. Observar que a distribuição de temperatura no canto superior ($x = 1, y = 1$) para este caso é mais uniforme, em função da sub-malha cartesiana, o mesmo não ocorrendo na malha elíptica.

Com relação ao primeiro problema, pode-se dizer que o campo de temperatura comportou-se dentro do esperado, com saltos nos pontos de acoplamento das malhas. Obviamente, tais descontinuidades levam a resultados com menor precisão se a malha não for suficientemente refinada. Conforme a literatura consultada, uma fonte de erro significativa nestas zonas, advém do fato de não se realizar um balanço das variáveis de interesse, no nosso caso um balanço de calor.

Neste trabalho não foi implementada nenhuma estratégia de conservação dos fluxos de calor na região de acoplamento entre as sub-malhas, o que pode ter sido uma fonte de erro. O uso de um algoritmo que leve em conta a conservação das propriedades relevantes tornaria, sem dúvida, a metodologia mais geral e confiável.

Em todos os exemplos analisados, a convergência do campo de temperatura para esta técnica foi sempre muito rápida, em comparação com a técnica elíptica. Esta rapidez se deve em grande parte à não necessidade de se calcular a malha nu-

mericamente; apesar das rotinas específicas (para localização de pontos comuns, como da eliminação de pontos de uma sub-malha que cai na outra) desenvolvidas no código computacional (programa fonte).

Como pode acontecer do campo de temperatura numa sub-malha convergir mais rápido que na outra, o ciclo de convergência adotado impõe que, ao ser deixado, ambos os campos já tenham atingido no critério de parada utilizado.

6.4 Problema Teste II

Conforme visto no início deste capítulo, este segundo problema satisfaz::

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 T|_{\Omega} = 0, \Omega \text{ domínio de cálculo (Figura 4.1)} \\ T_{\forall I, J=1} = T_{\text{exa}}(x, y), T_{\forall I, J=NJ} = T_{\text{exa}}(x, y) \\ T_{\forall J, I=1} = T_{\text{exa}}(x, y), T_{\forall J, I=NI} = T_{\text{exa}}(x, y) \end{array} \right. \text{ em } \partial\Omega. \quad (6.8)$$

com condições de contorno em toda fronteira prescrita (tipo Dirichlet) $T_{\text{exa}}(x, y)$, dada por:

$$T_{\text{exa}}(x, y) = \frac{1}{2} (e^{-\lambda x} \cos(\lambda y) + e^{-\lambda y} \cos(\lambda x)), \quad (6.9)$$

onde $\lambda = 0.675$. Este valor permite ter-se temperaturas simétricas em relação à linha de centro. A adoção deste perfil, reside da necessidade de se ter um padrão de comparação entre os dados gerados pelas duas técnicas desenvolvidas.

A Figura 6.12 exhibe o comportamento desta função. Este perfil é adequado por representar a solução de um problema de Laplace num quadrado, cujas soluções $u(x, y)$, podem ser tomadas como combinações lineares de funções produto do tipo $\cos(\lambda x) \exp(-\lambda y)$, $\cos(\lambda y) \exp(-\lambda x)$; como por exemplo:

$$u(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} C_1 \cos(\lambda x) \exp(-\lambda y) + C_2 \cos(\lambda y) \exp(-\lambda x) \\ \text{entre outras combinações possíveis.} \end{array} \right.$$

$$\text{Texa}(x,y) = \text{Exp}(-0.675*x)*\text{Cos}(0.675*y) + \text{Exp}(-0.675*y)*\text{Cos}(0.675*x)$$

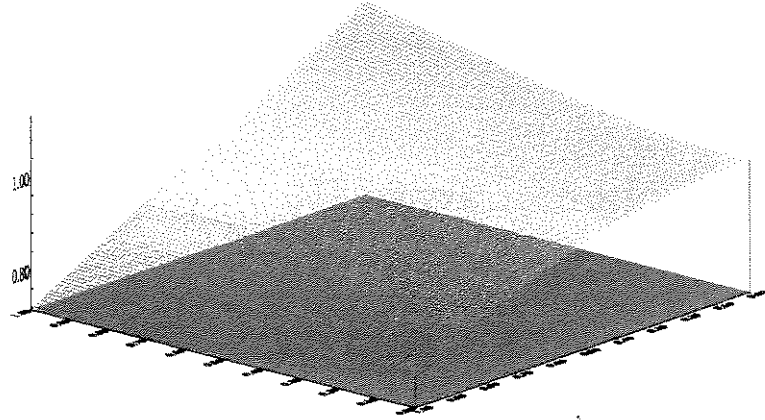


Figura 6.12: Temperatura exata para o problema II.

O problema proposto (6.8) possui uma solução exata, já que estamos impondo o valor desta função em todas as fronteiras e, desta forma, induzindo o mesmo campo interno. Conforme descrito no início deste capítulo, estaremos avaliando as técnicas elíptica e de multiblocos, com base naqueles parâmetros, isto é, erros analítico e médio, número de pontos e as qualidades da malha (funções de interpolação, ortogonalidade, espaçamento, etc. ...).

6.4.1 Resultados obtidos pela técnica elíptica

Como primeiro resultado tem-se a Figura 6.13, onde é mostrado o perfil da temperatura na linha de centro. Neste gráfico foi usado o caso descrito por JENG 0; assim, temos na fronteira Sul uma densidade de pontos maior devido ao pequeno valor de s_{ns} , isto é, há uma atração das linhas η em direção à linha $\eta_{\min}(\eta_o)$. Este campo pode ter uma boa aplicação onde a região de interesse seja a fronteira Sul.

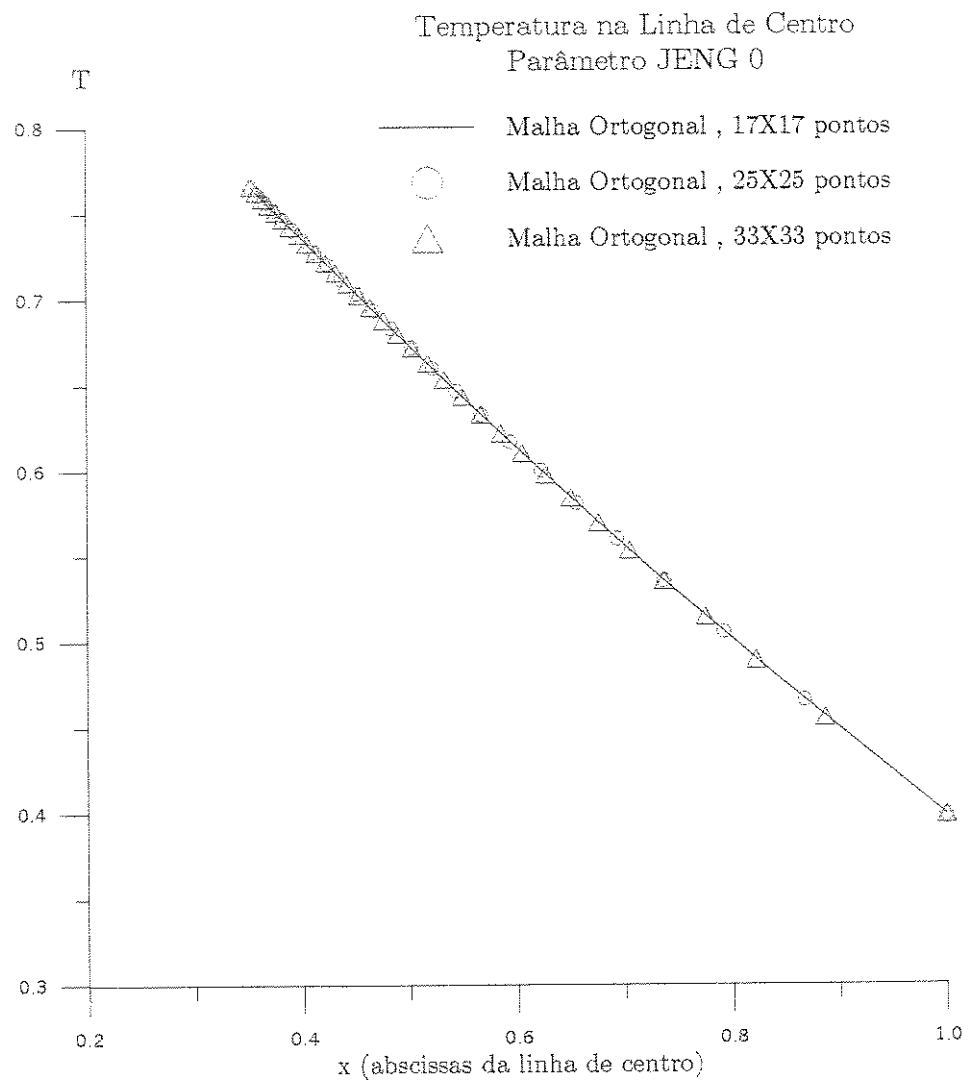


Figura 6.13: Temperatura na linha de centro: problema teste II, para JENG 0.

Na técnica elíptica, foi verificada diferenças significativas para um mesmo s_{nn} e variando s_{ns} , da seguinte forma: ao especificarmos espaçamentos menores para s_{ns} o erro médio global decresce, e este comportamento fica mais evidenciado se a ortogonalidade é negligenciada (Figura 6.14).

Um resultado relevante, exibido na Figura 6.15, mostra o melhor desempenho das malhas não-ortogonais com os parâmetros JENG 2 e JENG 1. Isto tem duas razões: a primeira porque ao atrair-se as linhas para a fronteira $\eta_{\max}$ (Norte) os volumes de controle diminuem naquela região, diminuindo, portanto, os erros de truncamento nas aproximações nas derivadas; a segunda é que nas malhas sem imposição de ortogonalidade, os volumes de controle são menores (ver Figura 6.4), implicando também na redução do erro de truncamento.

Buscou-se verificar, por esta técnica, o comportamento do campo de temperatura quando se fixa as linhas de η ($J = \text{fixo}$) e varia-se as linhas ξ (isto é., I) referentes aos parâmetros espaçamento e ortogonalidade. Dos resultados mostrados nas Figuras 6.15 e 6.16, vê-se mais uma vez o melhor resultado para as malhas não-ortogonais, e, semelhantemente, as malhas com menor espaçamento na fronteira Norte levam ao decréscimo do erro médio.

Os resultados do campo de temperatura na linha de centro podem nos dar uma outra forma de analisar os resultados já obtidos, pois nesta linha, temos informações da fronteira Sul, do meio do campo e da fronteira Norte.

Na Figura 6.17 vemos um aumento do erro relativo na direção da linha $\eta_{\max}$ ($J = NJ$); na vizinhança desta linha ocorre um salto em função da maior distância entre os pontos nodais, para a configuração JENG 0 (conforme Figura 6.3).

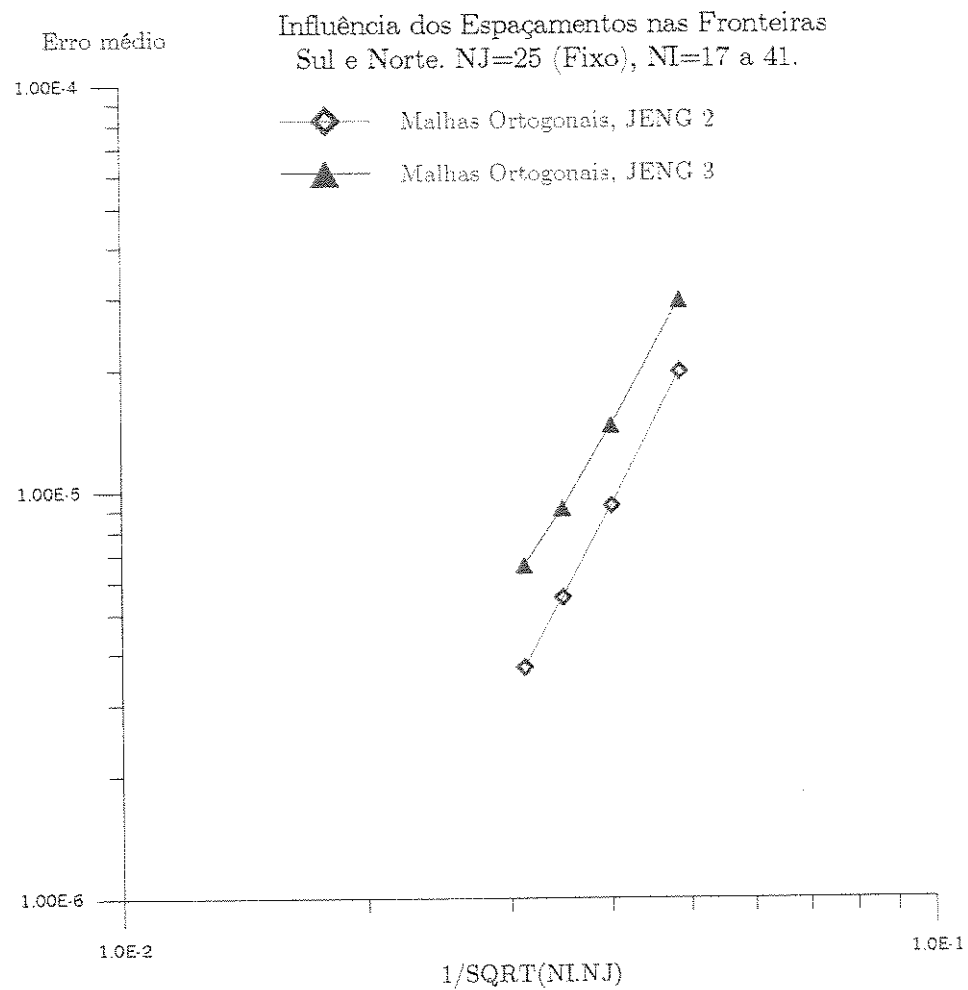


Figura 6.14: Influência do espaçamento no erro médio.

Varição do erro médio com o espaçamento e a ortogonalidade nas fronteiras. Malhas 17X17, 25X25, 33X33 e 41X41 pontos.

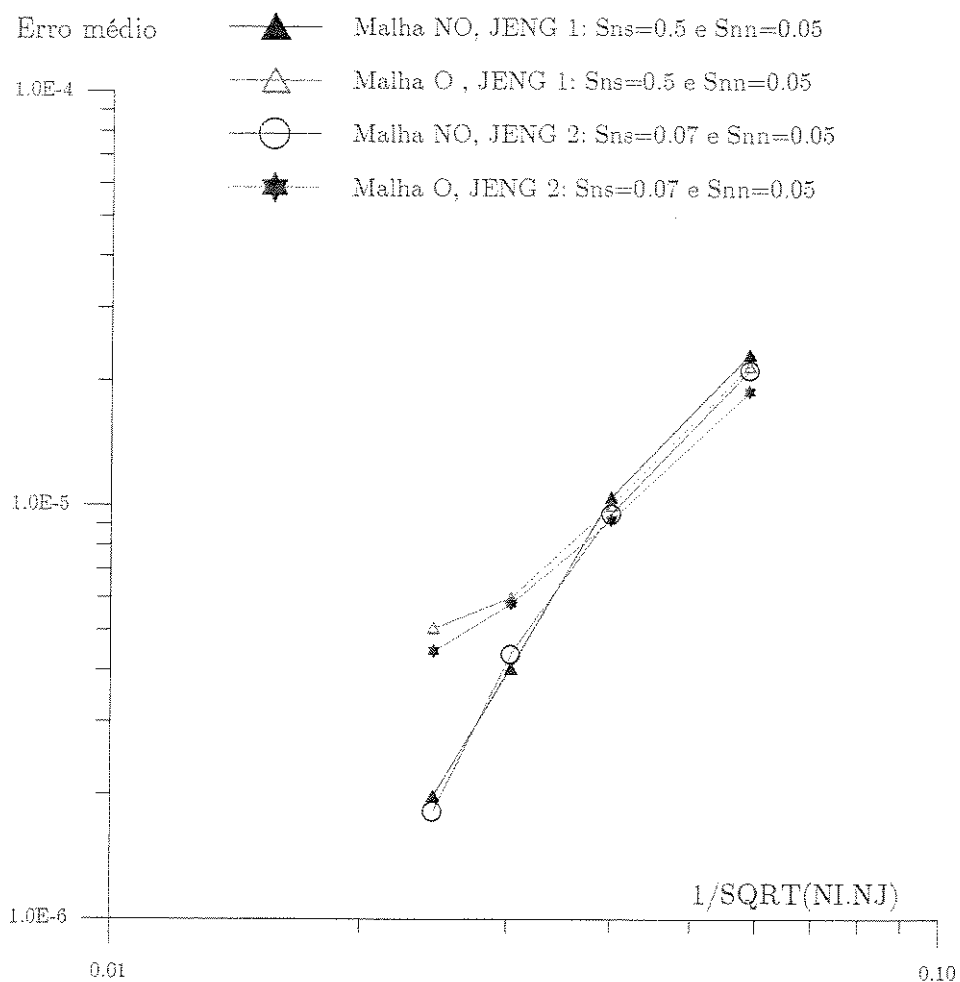


Figura 6.15: Influência da ortogonalidade e espaçamento no erro médio.

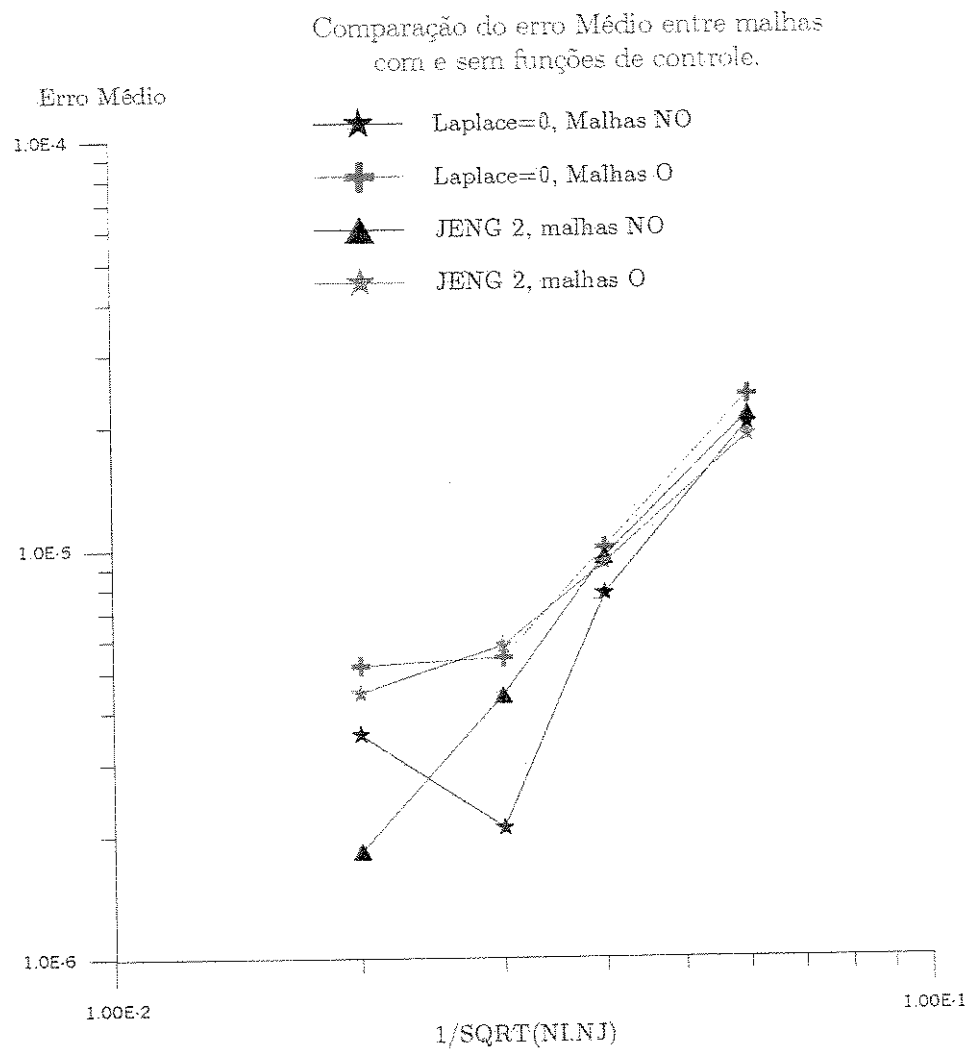


Figura 6.16: Erro médio em função do uso ou não das funções de controle P e Q .

Um resultado onde observamos uma melhor distribuição para o erro relativo é dado pela Figura 6.18, com a imposição de um valor para a distância entre as linhas (NJ e $NJ - 1$), isto é, $s_{nn} = \eta_{\max} - \Delta\eta = 0,05$, concentrando desta forma, um número maior de pontos nesta posição.

Se não impormos ortogonalidade na fronteira, o perfil do erro relativo fica mais atenuado, agora ocorrendo o máximo do erro no meio da linha $I = J$, conforme mostram as Figuras 6.19 e 6.4, onde a última refere-se à malha.

Foram comparados os efeitos, no erro médio, de usar-se ou não as funções de controle no cálculo do campo de temperatura. Para isto se usaram os casos "extremos" (para o programa) que ocorrem para $Laplace = 0$ (sem uso das funções de controle P e Q) e JENG 2 (com os menores espaçamentos especificados).

Conforme vem se evidenciando, as malhas sem ortogonalidade tem levado aos menores erros (quer relativo ou médio), por isto foi usada como parâmetro deste caso. Assim, a Figura 6.16 nos mostra que uma malha tipo $Laplace = 0$ tem um desempenho considerável em relação àquelas com controle; o que pode explicar isto é a uniformidade dos volumes de controle na malha e a uma maior precisão da malha gerada.

No entanto, ao refinarmos a malha, a fronteira Sul ($J = 1$ ou $\eta = \eta_{\min}$) atrai as linhas coordenadas pelo efeito do laplaciano mas, ao mesmo tempo, a fronteira Norte ($J = NJ$ ou $\eta = \eta_{\max}$) não sofre variação na mesma ordem, implicando na manutenção de um valor acentuado para o erro (ver Figura 6.2) levando, desta forma, ao aumento do erro médio (global) em relação ao das malhas com parâmetro JENG 2, as quais levaram em todas as análises a erros decrescentes.

Os resultados para este segundo problema são bastante elucidativos, mas revelaram que nas configurações sem ortogonalidade nas fronteiras, o erro médio global foi levemente inferior àquelas onde se impôs ortogonalidade. Quanto à especificação do espaçamento, observou-se que, ao refinar-se a fronteira Norte, os erros diminuem sensivelmente.

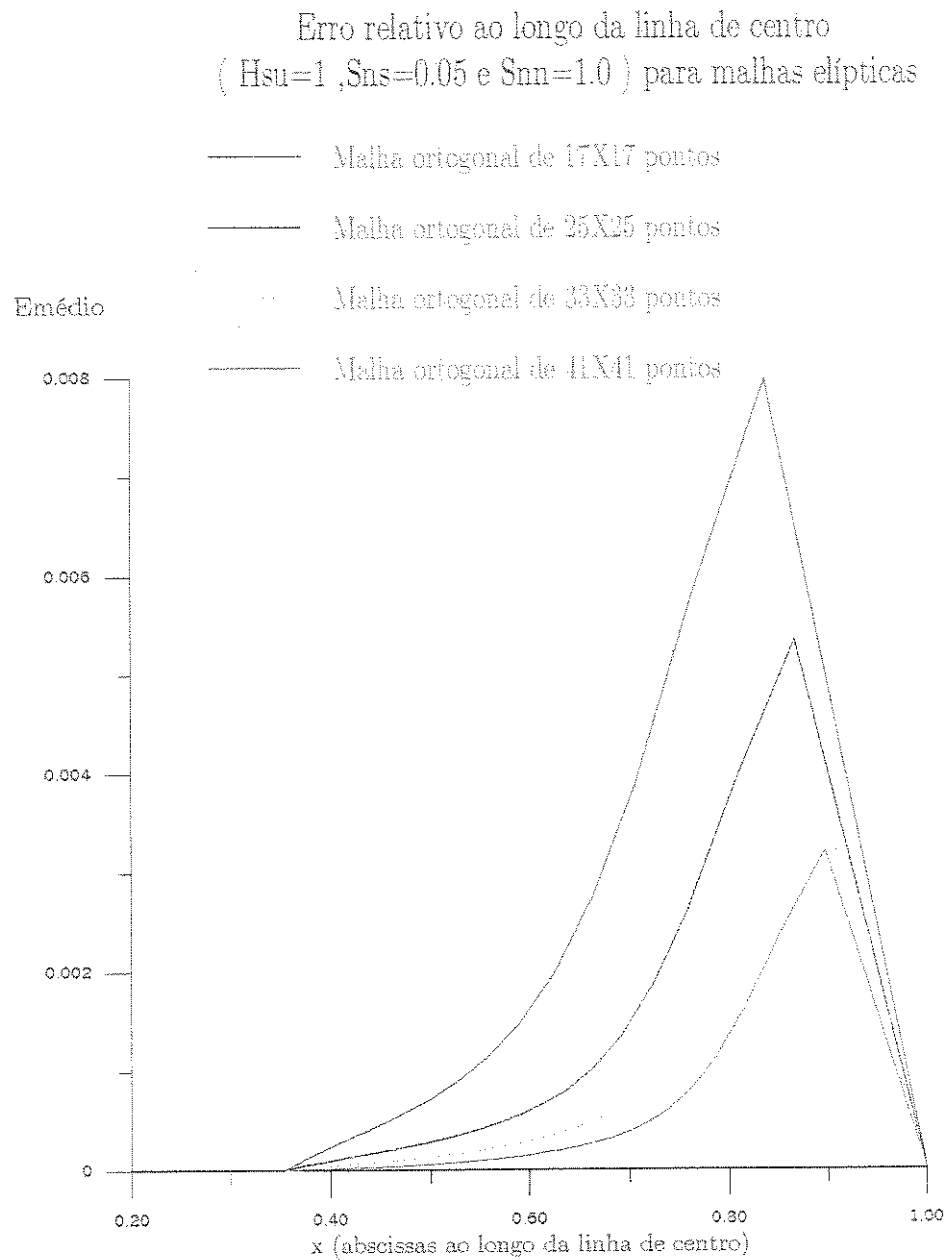


Figura 6.17: Erro relativo na linha de centro (malhas elípticas).

Erro relativo na linha de centro para
Malhas ortogonais : JENG 2.

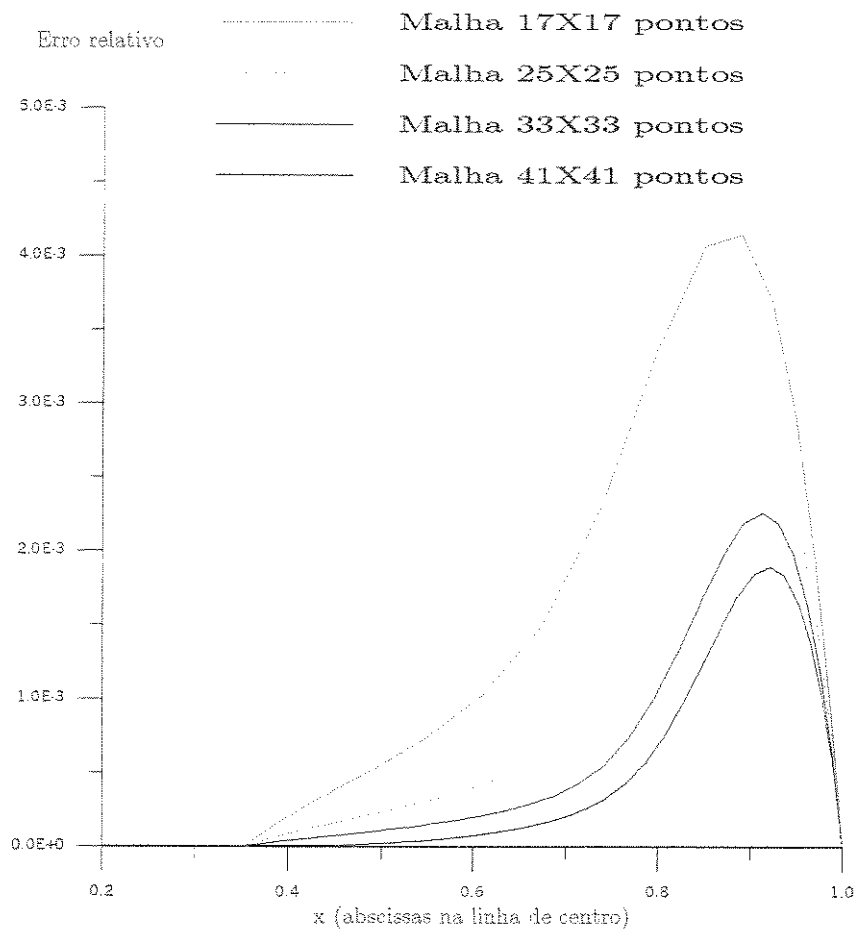


Figura 6.18: Erro relativo na linha de centro (malhas elípticas).

Erro relativo na linha de centro
Malhas não-ortogonais com JENG 2.

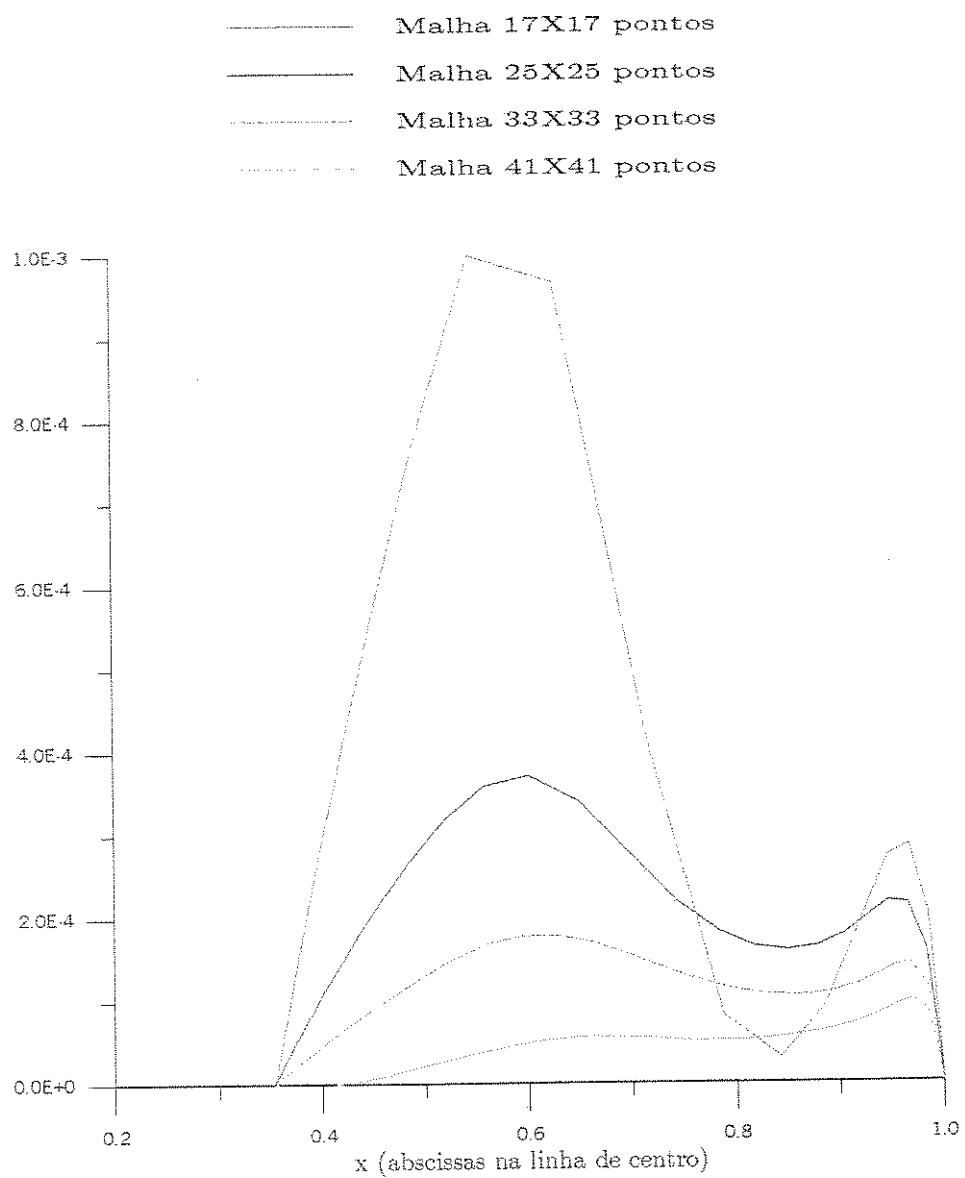


Figura 6.19: Erro relativo na linha de centro (malhas não-ortogonais).

6.4.2 Resultados usando a técnica de multiblocos

A aplicação da técnica de multiblocos para este problema, nos propiciará uma base comparativa para mensurar a eficácia desta técnica em relação à geração elíptica.

Como primeiro resultado, tem-se a temperatura na linha de centro apresentada na Figura 6.20, onde observa-se também que, à medida que se refina as sub-malhas, o perfil da temperatura converge rapidamente para o valor exato. Este perfil concorda com aqueles obtidos para a malha elíptica. O que se destaca nestes perfis é um maior desalinhamento na região de interface entre as sub-malhas; nos pontos longe desta interface as temperaturas calculadas convergem com fidelidade à solução exata; assim como ao refinar-se a malha há uma significativa aproximação dos valores exatos do campo.

Quanto ao erro relativo na linha de centro, observa-se na Figura 6.21, que o mesmo atinge um valor máximo na zona de sobreposição. Este fato está relacionado com a forte variação da temperatura na mesma região. Longe desta região, o campo tem comportamento suave.

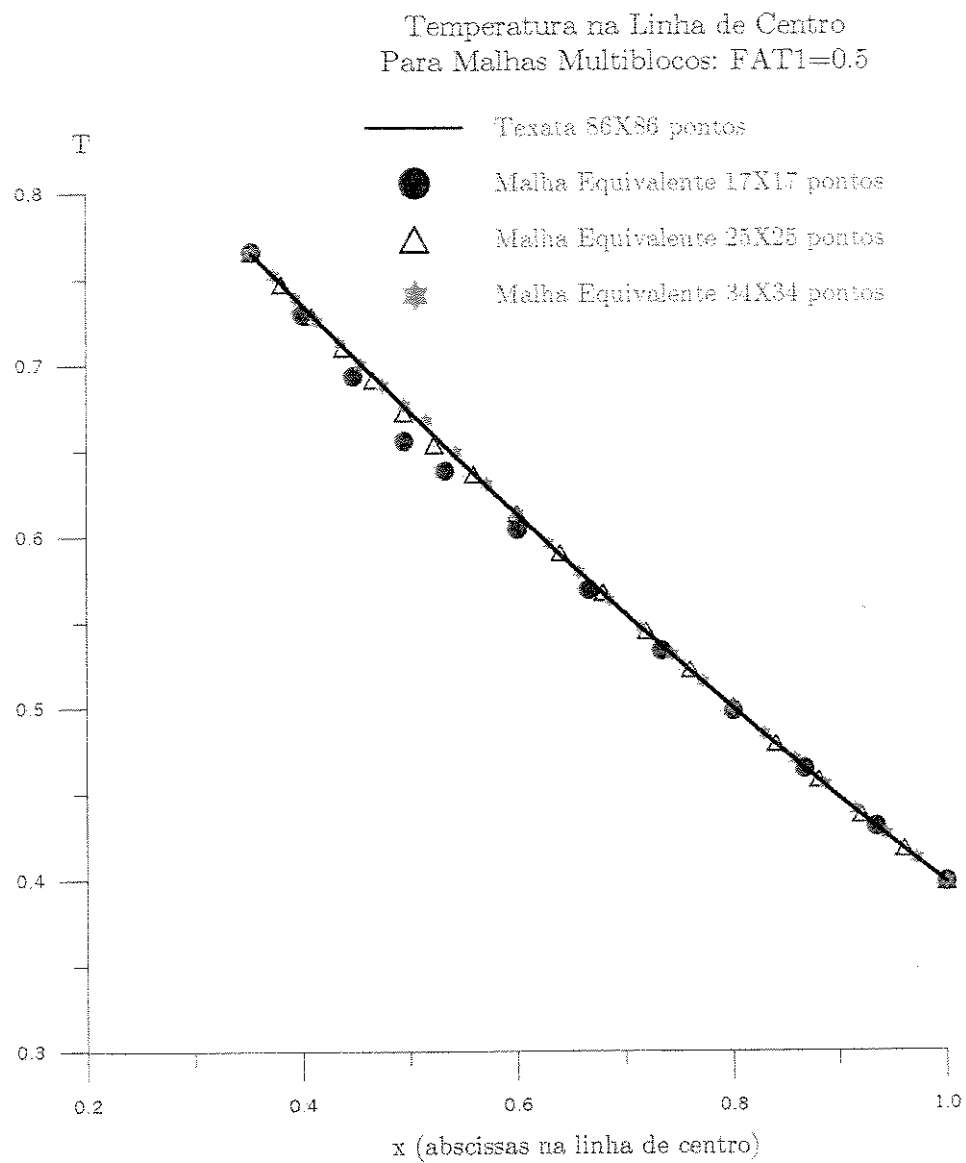


Figura 6.20: Temperatura na linha de centro (MB).

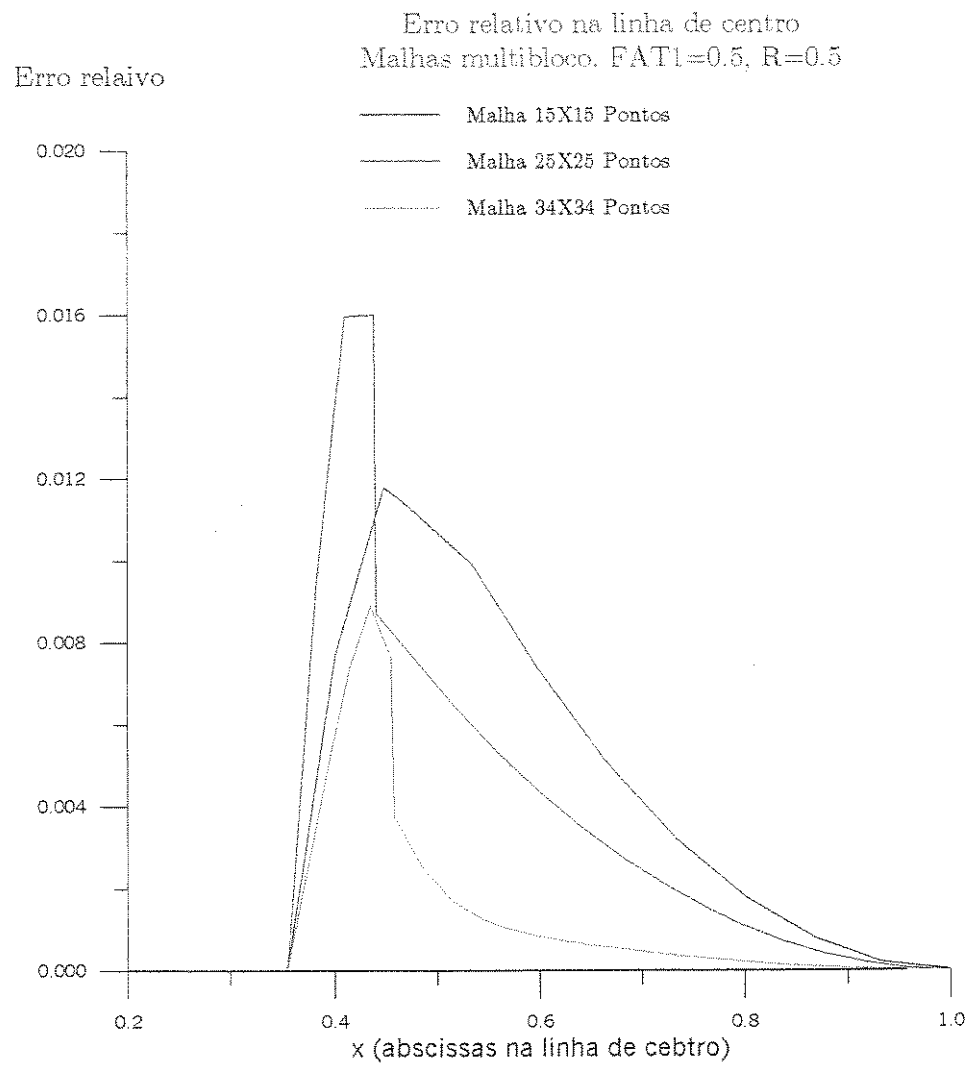


Figura 6.21: Perfis do erro relativo pela técnica multiblocos

6.5 Comparação dos resultados

Como etapa final da análise, será feita uma comparação dos resultados obtidos, a nível da precisão numérica, ou seja, como o campo de temperatura nos dois problemas de condução se comportou com relação ao tipo de estratégia de obtenção das malhas.

Conforme já comentado no início do capítulo, esta análise tem como ponto estratégico a linha de centro ($I = J$), pois nesta localização se varre partes importantes da malha, que são as fronteiras Sul e Norte, assim como a região central, que na malha multiblocos atinge a zona de transição entre as sub-malhas. Nesta posição, se avaliam o erro relativo e o erro médio, assim como os perfis de temperatura.

Vimos que, para o problema I não se dispunha de uma solução exata, portanto não houve possibilidade de uma análise comparativa pontual. No entanto, viu-se que os campos obtidos pelas duas abordagens foram fisicamente similares, evidenciando uma consistência física.; isto pode ser visualizado na Figura 6.22, onde se observa uma pequena diferença no perfil, na parte do domínio, na malha multiblocos, onde ocorre a transição de uma sub-malha à outra.

Para o problema II, com relação à linha de centro, as duas estratégias apresentaram um perfil convergente, com realce para a região de acoplamento das sub-malhas, onde mais uma vez, o campo sofre um salto, sendo mais próximo da fronteira quanto menor o FAT usado; a região da interface entre as sub-malhas cria um descompasso nos valores da temperatura como se pode ver, tendo um comportamento similar ao campo elíptico nas fronteiras Sul e Norte conforme mostrado na Figura 6.23.

Com resultado mais expressivo de toda a análise, tem-se o erro médio obtido para as duas estratégias ao refinarmos as malhas, Figura 6.24. Conclui-se então que, ao aumentarmos o número de pontos, por ambas as técnicas, o erro médio decai mais acentuadamente, mas, com um coeficiente angular bem maior, para as malhas geradas

pela metodologia elíptica.

Este fato é principalmente, devido a não continuidade da fronteira entre as sub-malhas polar e cartesiana onde, como vimos, uma rotina específica de interpolação foi desenvolvida com a finalidade de fazer o acoplamento. Um outro fator que certamente influenciou neste comportamento, é a não conservação dos fluxos de calor na região de acoplamento.

O número de pontos equivalente à malha elíptica, para a malha multiblocos, difere em função do FAT ; quanto maior o FAT menor a diferença. Existe uma diferença a favor da técnica multiblocos, pois o número de pontos foi sempre menor que aqueles na técnica elíptica, ou seja, o erro médio seria um pouco menor que o calculado.

Por exemplo, com $FAT = 0,5$ e malha $NI \times NJ = 17 \times 17$ (289 pontos), a malha multiblocos terá $N_{eq} = 241$ (aproximadamente 16×16). Portanto, uma diferença de 48 pontos. Para $FAT = 0,3$, ter-se-á uma malha multiblocos com $N_{eq} = 236$ (aproximadamente 15×15), uma diferença de 53 pontos.

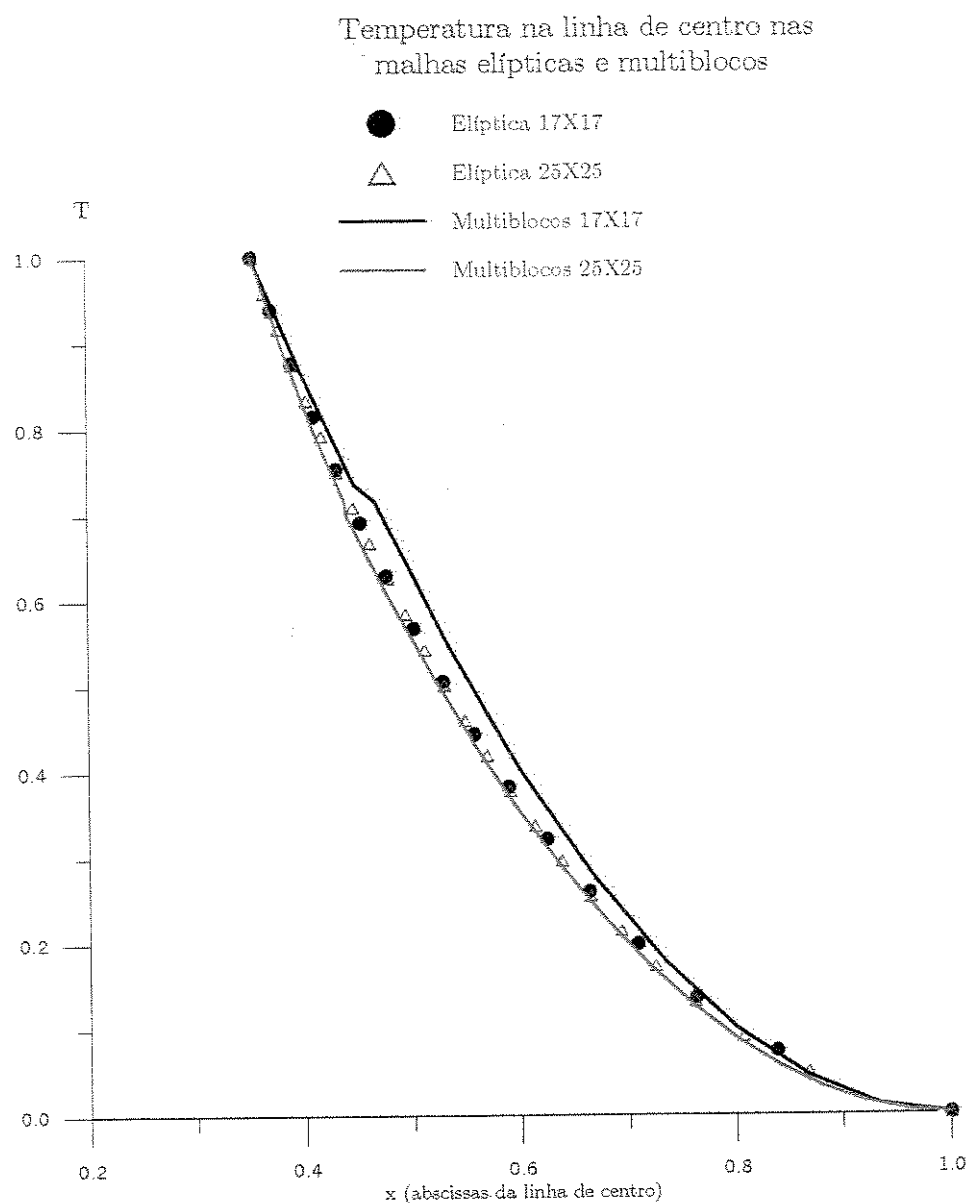


Figura 6.22: Temperaturas na linha de centro: ME versus MB.

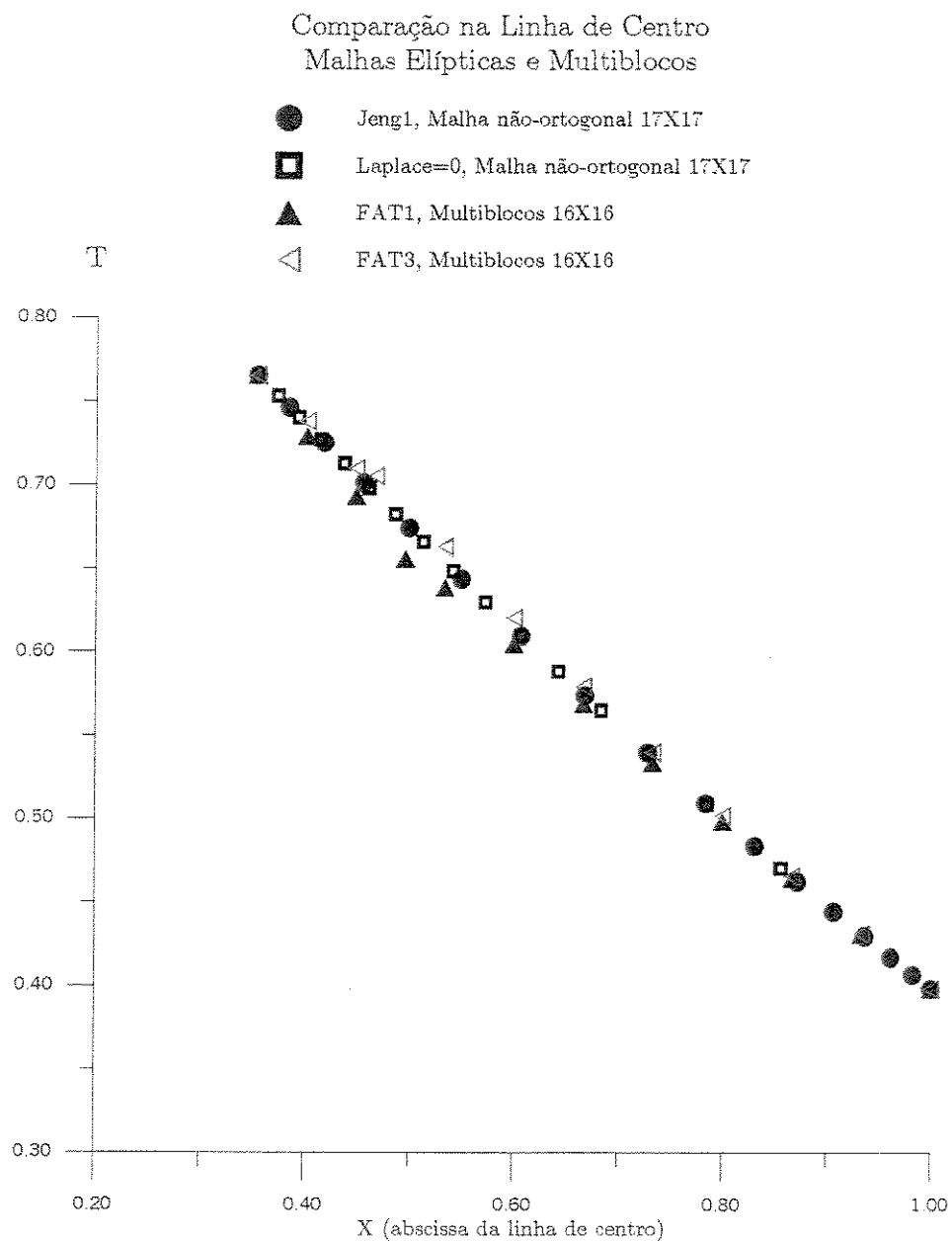


Figura 6.23: Comparação entre as temperaturas na linha de centro: ME *versus* MB

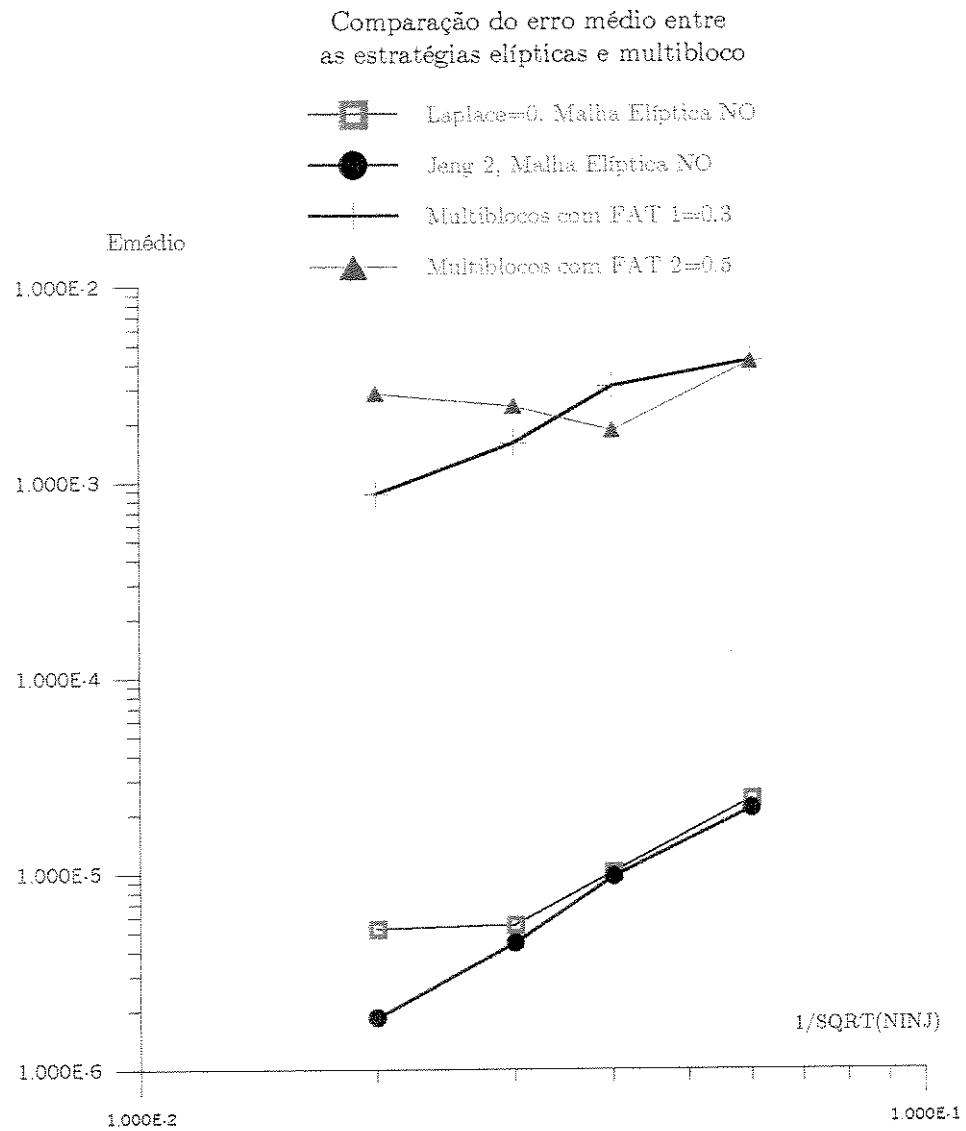


Figura 6.24: Erro médio entre as abordagens elíptica e multiblocos.

Capítulo 7

Conclusões

Com este trabalho espera-se evidenciar a importância da malha na solução de certos problemas de engenharia, onde sem dúvida, muitas são as aplicações propensas às análises aqui realizadas; ou seja, a precisa colocação dos pontos do domínio de cálculo (*geração da malha*) irá garantir uma maior confiabilidade aos dados calculados, o que implica que ter-se-á uma região matematicamente adequada aos propósitos numéricos.

Os principais objetivos deste trabalho foram alcançados, já que foram revelados fatos importantes sobre as metodologias aqui desenvolvidas. A técnica elíptica mostrou grande flexibilidade, assim como dificuldade em tratar termos fontes elevados, mesmo nos casos onde não se usou diferenças centrais na aproximação das derivadas, dado que as funções de Hsu-Lee (Equações 4.39) também falham para certas condições de espaçamento, ortogonalidade e número de pontos.

Na técnica de multiblocos, tem-se uma grande velocidade de convergência (em função do tipo de operador), assim como a simplicidade de obtenção da malha. No entanto, esta metodologia tem como grande desvantagem a não continuidade. Desvantagem esta que, para poder ser minorada, necessita-se de um código computacional mais elaborado na região de acoplamento entre as duas sub-malhas.

Nesta sentido devem ser implementadas duas rotinas básicas, a saber: uma com funções interpolantes mais fortes, e outra que garanta a conservação dos fluxos nestas interfaces. É provável que, a não implementação destes fatores, influenciaram os resultados numéricos, induzindo erros significativos na região de acoplamento das sub-malhas.

Para os problemas aqui resolvidos, não se encontrou dados discordantes fisicamente, sendo este fato muito importante, já que permitiu a validação dos dados para as duas metodologias estudadas.

Embora inicialmente bastante trabalhoso, o programa da malha multiblocos revelou-se pouco efetivo numericamente apesar da sua convergência muito atrativa; por outro lado, a geometria aqui é muito específica, em problemas reais sua implementação poderia envolver rotinas numéricas (para obter as métricas) juntamente com uma rotina de interpolação dos pontos de casamento, o que certamente levaria a resultados semelhantes (com relação à convergência) aos obtidos na malha generalizada (elíptica); esta, por sua vez, para outro problema ou geometria, sofreria poucas mudanças, variando a entrada da geometria (contornos) e alguns termos extras para problemas envolvendo campos dependentes de velocidades.

A análise feita no capítulo anterior mostrou, portanto, uma supremacia a favor da estratégia elíptica em relação à estratégia por multiblocos. A análise também mostrou que, para esta geometria específica, malhas sem a condição de ortogonalidade são mais adequadas que aquelas com a ortogonalidade imposta. Um fato interessante é que, dependendo da geometria e/ou do problema a estudar, as funções de controle não levarão necessariamente a ganhos numéricos.

Algumas implementações que não foram desenvolvidas neste trabalho e que certamente podem enriquecer o estudo comparativo entre as técnicas multiblocos e elípticas são:

- *o uso de um esquema conservativo para balanço dos fluxos na metodologia multiblocos;*
- *o uso de funções de interpolações mais refinadas para o cálculo das funções de controle;*
- *considerar aplicações envolvendo campos de velocidade.*

Referências Bibliográficas

- [1] Bisvas, G., Mitra, N. K. and Fiebig, M. *Heat transfer enhancement in fin tube heat exchangers by winglet type vortex generators*. Int. J. Heat Mass Transfer, v. 37, n. 2, p. 283-291, 1994.
- [2] Berger, Marsha J. *On conservation at grid interfaces*. SIAM J. Numer. Analysis, v. 24, n.5, October, 1987.
- [3] Crowley, W. P. *Memorandum*. Lawrence livermore national laboratory, 1962.
- [4] Fletcher, C. A., J. Computational techniques for fluid dynamics 1: Fundamental and general techniques. Second edition, Springer-Verlag, 1991.
- [5] Henshaw, W. D. and Chesshire, G. *Multigrid on composite meshes*. SIAM J. Numer. Analysis, v. 8, n. 6, p. 914-923, November, 1987.
- [6] Hsu, K. and Lee, S. L. *A numerical technique for two-dimensional grid generation with grid control at all of the boundaries*. Journal of Computational Physics, v. 96, p. 451-469, 1991.
- [7] Knupp, P. M. *A robust elliptic grid generator*. Journal of Computational Physics, v. 100, p. 409-418, 1992.
- [8] Knupp, P. M. and Steinbreg, S. . *The fundamentals of grid generation*. CRC Press, 1993.

- [9] Launder, B. E. and Massey, T. H. *The prediction of viscous flow and heat transfer in tube banks*. Journal of Heat Transfer, v. 100, p. 565-571, November, 1978.
- [10] Lee, S.L. *Weighting function scheme and its application on multidimensional conservation equations*. Int. J. Heat Mass Transfer, v. 32, n. 11, p. 2065-2073, 1989.
- [11] Maliska, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. LTC, 1995.
- [12] Middlecoff, J. F. and Thomas, P. D. *Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations*. AIAA Journal, v. 18, n. 6, June, 1980.
- [13] Rai, M. M. *A conservative treatment of zonal boundaries for Euler equation calculations*. Journal of Computational Physics, v. 62, p. 472-503, 1986.
- [14] Silva, V. J. *Estudo Numérico de um Escoamento Bifásico, Laminar: Padrões Anular e Estratificado*. Dissertação de Mestrado, Unicamp, SP, Março, 1995.
- [15] Sorenson, R. L. and Steger, J. L. *Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations*. Journal of Computational Physics (Note), v. 33, p. 405-410, 1979.
- [16] Steger, J. L., Dougherty, F. C. and Benek, J. A. *A chimera grid scheme*. In advances in grid generation, edited by K. N. Ghia, ASME FED, v. 5 (ASME, New York, 1985).
- [17] Tamamidis, P. and Assanis, D. N. *Generation of orthogonal grids with control of spacing*. Journal of Computational Physics, v. 94, p. 437-453, 1991.
- [18] Thompson, J. F., Mastin, C. W. and Thames, F.C. *Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinates system for field*

- containing any number of arbitrary two-dimensional bodies.* Journal of Computational Physics, v. 15, p. 299-319, 1974.
- [19] Thompson, J. F., Mastin, C. W. and Thames, F. C. *TOMCAT-A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinates system on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies.* Journal of Computational Physics, v. 24, p. 274-302, 1976.
- [20] Thompson, J. F., Mastin, C. W., Thames, F. C. and Walker, R. L. *Numerical solutions for viscous and potential flow about arbitrary two-dimensional bodies using body-fitted coordinates system.* Journal of Computational Physics, v. 24, p. 245-273, 1977.
- [21] Thompson, J. F. *Grid generation techniques in computational fluid dynamics.* AIAA Journal, v. 22, n. 11, November, 1984.
- [22] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W. *Numerical grid generation: Foundations and applications.* Elsevier Science Publishing Co., 1985.
- [23] Versteeg, H. K and Malalasekera, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics.* Longman, 1995.
- [24] Yih, N. J. and Yuan, C. Lu. *Two modified versions of Hsu-Lee's elliptic solver of grid generation.* Numerical Heat Transfer, Part B, v. 22, p. 125-140, 1992.
- [25] Wang, Z. J. *A fully conservative interface algorithm for overlapped grids.* Journal of Computational Physics, v. 122, p. 96-106, 1995.
- [26] Wendt, J. F. *Computational fluid dynamics: An introduction.* Springer-Verlag, 1985.
- [27] Winslow, A.M. Journal of Computational Physics, v. 2, p. 149-, 1967.

Apêndice A

Funções de Interpolação

A.1 Esquema de Interpolação

As equações de transporte, em geral, são equações diferenciais parciais de segunda ordem a coeficientes não constantes, as quais são analiticamente de difícil solução. Assim, as metodologias numéricas surgem como uma ferramenta muito eficaz na obtenção de soluções aproximadas para estes tipos de equações.

No caso específico da geração elíptica de malhas, temos, após a transformação de coordenadas, equações muito semelhantes àquelas de uma equação de transporte. Devido a esta semelhança é que se justifica adotar as funções de peso interpolantes obtidas da metodologia a seguir:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S_\phi$$

ou ainda:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi - \Gamma \nabla \phi) = S_\phi$$

Fazendo:

$$\vec{J} = \rho \vec{u} \phi - \Gamma \nabla \phi$$

obtém-se $\nabla \cdot \vec{J} = S_\phi$. Se desenvolvermos a equação acima, teremos os seguintes termos:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S_\phi$$

Para uma campo de velocidade constante, $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$ e difusividade $\Gamma = \text{constante}$, podemos escrever:

$$\phi \nabla \cdot (\rho \vec{u}) + (\rho \vec{u}) \cdot \nabla(\phi) - \Gamma \nabla \cdot (\nabla \phi) = S_\phi$$

Com as hipóteses feitas, chega-se a:

$$\frac{(\rho \vec{u})}{\Gamma} \cdot \nabla(\phi) - \nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{S_\phi}{\Gamma}$$

Nesta última equação, a função ϕ é um escalar que, no caso em análise, são as coordenadas cartesianas, isto é, as coordenads no plano computacional $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Abrindo o gradiente e o Laplaciano, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Gamma} (u_x \vec{i} + u_y \vec{j}) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{j} \right) - \nabla \cdot (\nabla \phi) &= \frac{S_\phi}{\Gamma}, \\ \left(\frac{\rho}{\Gamma} u_x \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \left(\frac{\rho}{\Gamma} u_y \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= \frac{S_\phi}{\Gamma}, \\ \text{chega-se finalmente a } \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= \left(\frac{\rho}{\Gamma} u_x \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \left(\frac{\rho}{\Gamma} u_y \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{S_\phi}{\Gamma} \\ \text{ou de forma mais compacta } x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} &= \left(\frac{\rho}{\Gamma} u_x \right) x_\xi + \left(\frac{\rho}{\Gamma} u_y \right) x_\eta - \frac{S_\phi}{\Gamma} \end{aligned}$$

Comparando a última equação com a Equação A.1, vemos que são equações semelhantes e mais ainda, os termos $(\frac{\rho}{\Gamma} u_x)$ e $(\frac{\rho}{\Gamma} u_y)$ podem ser comparados aos termos $J^2.P$ e $J^2.Q$ respectivamente. Em notação vetorial podemos escrever:

$$\alpha \vec{r}_{\xi\xi} + \gamma \vec{r}_{\eta\eta} + J^2.P.\vec{r}_\xi + J^2.Q.\vec{r}_\eta = -\beta \vec{r}_{\xi\eta} \quad (\text{A.1})$$

nesta notação vetorial, $\vec{r}$ é substituído por $x(\xi, \eta)$ ou $y(\xi, \eta)$.

É desta comparação que surgiu a possibilidade de se buscar soluções semelhantes para as equações da malha, já que na área de problemas tipo condutivo-difusivo existe um apoio teórico bastante desenvolvido, tornando o problema de malhas passível de comparação.

Numa perspectiva numérica, deseja-se obter funções de interpolação que garantam uma maior estabilidade. Tais funções de interpolação são obtidas considerando-se uma equação similar à equação da malha, sem o termo cruzado $-\beta \vec{r}_{\xi\eta}$:

$$A\omega_{xx} + B\omega_{yy} + C\omega_x + D\omega_y = 0 \quad (\text{A.2})$$

Esta equação é válida numa região Ω . Aqui Ω é um conjunto aberto e conexo; tomando dentro de Ω um subconjunto Ω_m suficientemente pequeno de forma que possamos considerar os coeficientes A , B , C e D aproximadamente constantes, uma solução possível para a Equação A.2 tem a forma:

$$\omega(x, y) = C_1 + C_2 e^{-\gamma x} + C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{-(\gamma x + \lambda y)} \quad (\text{A.3})$$

onde: $\gamma = \frac{A}{C}$, $\lambda = \frac{B}{D}$.

Considerando uma célula de quatro vértices (não uniformemente espaçada), conforme mostrado na Figura A.1, poderemos obter os valores das constantes C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , a partir das seguintes condições de contorno:

$$\omega(0, 0) = \omega_{sw}; \omega(0, a) = \omega_{se}; \omega(0, b) = \omega_{nw}; \omega(a, b) = \omega_{ne} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando estas condições de contorno e fazendo um escalonamento no sistema resultante, chega-se aos seguintes valores:

$$C_1 = \frac{\alpha\beta\omega_{sw} + \omega_{ne} - \beta\omega_{se} - \alpha\omega_{nw}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \quad (\text{A.5})$$

$$C_2 = \frac{\beta\omega_{se} + \omega_{nw} - \omega_{ne} - \beta\omega_{nw}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \quad (\text{A.6})$$

$$C_3 = \frac{\omega_{se} + \alpha\omega_{nw} - \omega_{ne} - \alpha\omega_{sw}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \quad (\text{A.7})$$

$$C_4 = \frac{\omega_{sw} + \omega_{ne} - \omega_{nw} - \omega_{se}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \quad (\text{A.8})$$

$$\text{onde } \alpha = e^{-\frac{A}{C}} \text{ e } \beta = e^{-\frac{B}{D}}. \quad (\text{A.9})$$

Como no problema de geração tem-se a presença de termos cruzados, tipo $\vec{r}_{\xi\eta}$, deve-se obter as derivadas θ_{xy} para a função $\omega(x, y)$. Ao derivarmos esta função duas

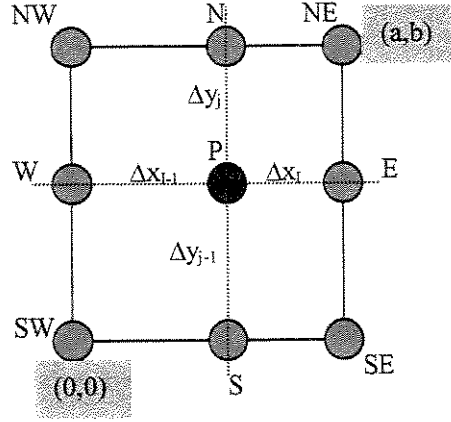


Figura A.1: Célula para Obtenção das Funções de Interpolação

vezes obtem-se:

$$\omega_{xy} = (\omega_{sw} + \omega_{ne} - \omega_{nw} - \omega_{se}) \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot w_f^*(Z_1) w_f^*(Z_2) \quad (\text{A.10})$$

$$\text{onde } w_f^*(Z) = \frac{Z}{(e^Z - e^{-Z})} \text{ e } Z_1 = \gamma \Delta x, \quad Z_2 = \lambda \Delta y \quad (\text{A.11})$$

Na discretização da equação da malha, utiliza-se as funções de interpolação como se resolvessemos problemas unidimensionais, isto é, tomamos a equação nas variáveis dependentes $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ da seguinte forma:

$$(\alpha \cdot x_{\xi\xi} + J^2 P \cdot x_\xi) + (\gamma \cdot x_{\eta\eta} + J^2 Q \cdot x_\eta) = 2\beta x_{\xi\eta}$$

Resolver-se-à as equações entre parênteses, as quais são unidimensionais nas direções ξ , η , respectivamente, sem levar em consideração o termo $2\beta x_{\xi\eta}$. Conforme Lee [6], resolve-se cada conjunto de equações diferenciais ordinárias, isto é:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x_{\xi\xi} + P J^2 x_\xi &= 0, \text{ ou } x_{\xi\xi} + \frac{P J^2}{\alpha} x_\xi = 0 \\ \gamma \cdot x_{\eta\eta} + Q J^2 x_\eta &= 0, \text{ ou } x_{\eta\eta} + \frac{Q J^2}{\gamma} x_\eta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Estas equações são casos particulares da Equação A.2. Suas soluções são da

forma:

$$\begin{aligned}x &= C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{PJ^2}{\alpha}\right) \\ y &= C_3 + C_4 \exp\left(-\frac{QJ^2}{\gamma}\right)\end{aligned}$$

Estas são as formas básicas usadas na solução da Equação A.2. Substituindo-se as soluções destas equações, na equação da malha (Equação 4.10) e usando o valor de $\theta_{\xi\eta}$, obtém-se a equação geral discretizada pelas funções peso proposta por Lee [6], cujos coeficientes foram determinados no capítulo três.

Apêndice B

Discretização das Equações do Campo de Temperatura para as Malhas Polar e Cartesiana

B.1 Malha Polar

A integração da Equação 3.22 nos dará os coeficientes para a implementação da solução numérica via TDMA. A qual será brevemente desenvolvida aqui:

$$\iint_R \nabla^2 \phi r dr d\theta = \iint_R \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right\} r dr d\theta = 0, \text{ ou ainda}$$

$$\iint_R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) r dr d\theta + \iint_R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) r dr d\theta = 0$$

$$\iint_R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dr d\theta + \iint_R \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) dr d\theta = 0$$

Estes dois últimos termos representam os fluxos nas direções r e θ , respectivamente, através da área infinitesimal R . Usando integral iterada para cálculo das

integrais duplas podemos escrever:

$$\int_{\theta} \int_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dr \right) d\theta + \int_r \int_{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta \right) dr = 0, \text{ integrando:}$$

$$\int_{\theta} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_s^n d\theta + \int_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Big|_w^e dr = 0, \text{ aproximando estes fluxos chega-se:}$$

$$\left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_s^n \Delta\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Big|_w^e \Delta r = 0, \text{ ou:}$$

$$\left(\left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n - \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_s \right) \Delta\theta + \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w \right) \Delta r = 0$$

Como a $\phi \equiv T$, teremos:

$$\left(\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_n - \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_s \right) \Delta\theta + \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_w \right) \Delta r = 0, \text{ ou ainda:}$$

$$r_n \Delta\theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_n - r_s \Delta\theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_s + \left(\frac{\Delta r}{r_e} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_e - \left(\frac{\Delta r}{r_w} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_w = 0 \quad (\text{B.1})$$

Temos dois volumes de cálculo, um interno e outro de fronteira, os internos são descritos na Figura ??.

Calculando as derivadas nas fronteiras e, w, n e s tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_n &= \frac{T_N - T_P}{(\delta r)_n} = \frac{T_N - T_P}{\Delta r} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_s &= \frac{T_P - T_S}{(\delta r)_s} = \frac{T_P - T_S}{\Delta r} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_w &= \frac{T_P - T_W}{(\delta \theta)_w} = \frac{T_P - T_W}{\Delta \theta} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_e &= \frac{T_E - T_P}{(\delta \theta)_e} = \frac{T_E - T_P}{\Delta \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Levando estas expressões para a Equação ??, e isolando os termos para T_P , obtem-se:

$$\left(\frac{r_n \Delta\theta}{\Delta r} + \frac{r_s \Delta\theta}{\Delta r} + \frac{\Delta r}{r_e \Delta\theta} + \frac{\Delta r}{r_w \Delta\theta} \right) T_P = \frac{r_n \Delta\theta}{\Delta r} T_N + \frac{r_s \Delta\theta}{\Delta r} T_S + \frac{\Delta r}{r_e \Delta\theta} T_E + \frac{\Delta r}{r_w \Delta\theta} T_W \quad (\text{B.3})$$

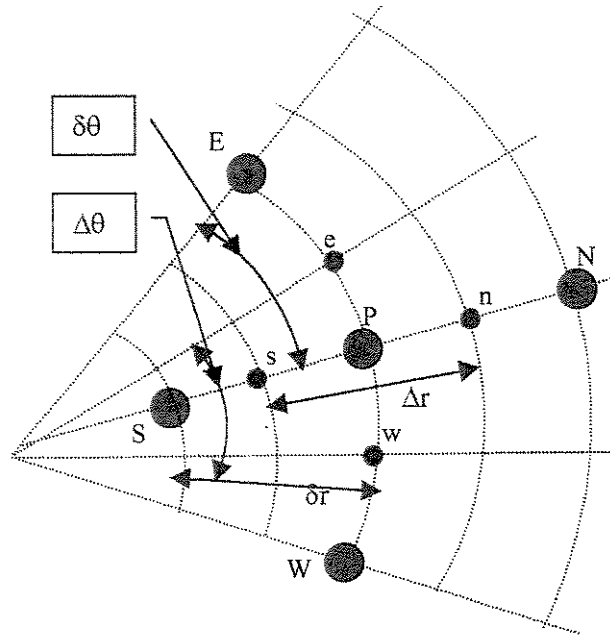


Figura B.1: Volume de controle para sub-malha polar.

Na nomenclatura de volumes finitos, o coeficiente de T_P é a_P e os outros seguem o mesmo padrão, assim ter-se-á:

$$a_P T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T'_W$$

onde : $a_P = a_N + a_S + a_E + a_W$

Esta é a equação discretizada para os pontos interiores da malha polar. Para os volumes de fronteira as únicas mudanças se referem às áreas de fluxo que no interior valem sempre $\Delta r.1$ e $r\Delta\theta.1$, já nas fronteiras estes valores serão divididos por dois ou quatro (nos cantos duplos).

B.2 Malha Cartesiana

A integração da Equação 3.21 fornecerá os coeficientes da equação discretizada desejada, para isto façamos sua integração:

$$\iint_{R_2} \nabla^2 \phi dx dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) dx dy = 0$$

$$\int_s^n \left(\int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx \right) dy + \int_w^e \left(\int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy \right) dx = 0$$

$$\iint_{R_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \iint_{R_2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = 0, \text{ utilizando integrais iteradas:}$$

$$\int_s^n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^e dy + \int_w^e \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s^n dx = 0, \text{ aproximando os fluxos chega-se a:}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^e \Delta y + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s^n \Delta x = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^n \Delta y - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \Delta y + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^e \Delta x - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_w \Delta x = 0$$

Substituindo-se a variável ϕ por T , teremos, de forma semelhante ao caso anterior, a seguinte equação:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^e \Delta y - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \Delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^n \Delta x - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \Delta x = 0$$

Os fluxos são aproximados da mesma forma que a Equação B.2. A equação discretizada final toma a forma:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) T_P = \frac{\Delta x}{\Delta y} T_N + \frac{\Delta x}{\Delta y} T_S + \frac{\Delta y}{\Delta x} T_E + \frac{\Delta y}{\Delta x} T_W,$$

ou:

$$a_P T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W$$

Para os volumes de fronteira, os coeficientes serão divididos por dois ou quatro (se for nos cantos duplos).

Nos volumes de fronteira, a formulação impõe que ao termo fonte seja atribuído um valor prescrito ou uma equação semelhante aos pontos internos, mas com número menor de termos, pois nos contornos a vizinhança é sempre menor.

Uma ênfase maior foi dada à discretização polar, pois a cartesiana é encontrada na referência [23], sendo uma formulação clássica.

Apêndice C

Principais Rotinas e Listagens dos Códigos Fontes

As principais rotinas de cálculo que tornaram possíveis a construção das malhas esboçadas ao longo deste trabalho foram:

Para a malha elíptica (ou generalizada):

- DERIVE $\Rightarrow$ a qual determina as derivadas de primeira e segunda ordem para todo o campo no plano computacional $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, assim como as derivadas com espaçamento imposto nas fronteiras
- FRONTEIRAS $\Rightarrow$ a qual determina a entrada, numericamente, das coordenadas nas fronteiras
- CONTROL $\Rightarrow$ na metodologia apresentada é a mais importante, pois a partir dela é que se controlam as fronteiras, com diferentes formas de cálculo
- MÉTRICAS $\Rightarrow$ calcula as métricas da transformação do plano físico para o transformado: α, β, γ e J , e,

Para a malha Multiblocos:

- TRAÇO $\Rightarrow$ determina a posição de um ponto da malha cartesiana em relação a malha polar, isto é, suas coordenadas polares, assim como os fatores exibidos na Figura 4.9
- COEF $\Rightarrow$ a qual determina além dos coeficientes das equações, um procedimento lógico que permite a comunicação entre as duas geometrias, que por sua vez permite a interpolação dos valores nesta fronteira.

Seguem as listagem dos programas fontes desenvolvidos.

PRIMEIRO :Programa de Geração Elíptica

SEGUNDO :Programa de Geração Multiblocos.

- Os programas foram desenvolvidos no Fortran Power Station 4.0.

```

*****
****          GERAÇÃO ELÍPTICA DE MALHA          ****
****          1/4 DE QUADRADO COM 1/4 DE FURO          ****
*****
PROGRAMA MODIFICADO EM 02.09.98
*****
PROGRAM TFIMOUT
*****
TEMPERATURA NUMÉRICA COND. EXATAS
IFC=1: INTERPOLAÇÃO DAS FUNÇÕES DE CONTROLE POR HSU-LEE ;
IFC=0: INTERPOLAÇÃO DAS FUNÇÕES DE CONTROLE POR JENG LIOU
LP =0: SISTEMA DE LAPLACE => P=Q=0 ; LP=1 SISTEMA DE POISSON USA P E Q
HSU=1: USA FUNÇÕES PESO NO CÁLCULO DAS DERIVADAS ;
HSU=0: SEM FUNÇÕES PESO NO CÁLCULO DAS DERIVADAS
LORTO=1: USA ORTOGONALIDADE NAS FRONTEIRAS W ou E, CASO CONTRARIO LORTO=0
*****
IMPLICIT REAL*4 (A-H,P-Z)
PARAMETER(Nx=81,Ny=81)
COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),
* REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO
COMMON/BL4/W1,W2,W3,PI,RESXY,ERPHI,EPSM,EPST,NITER,IX,IY,IT,HSU
COMMON/LCSI/SN(Nx,Ny),DIST(Nx,Ny),Stot(Nx,Ny)
COMMON/EXA/SExa(Nx,Ny),EAna(Nx,Ny),E(Nx,Ny),EPS
DATA N,M,p/2,2,1/,W1,W2,W3/1.0,1.0,1.0/,
* R,AL/0.5,1./,NITER,NPXY,NPT/1,4,20/,ORTO/0.0/,LORTO/1/,
* ERPHI/1./,IEQX,IEQY,IEQT/0,1,2/,HSU/1.0/LP/1.0/,IFC/0/,
* SNS,SNN/0.5,0.05/,IM,IT,IB2/1,2,1/,Alambda/0.675/
INÍCIO DE CÁLCULO DO PROGRAMA
NI=8*N+1 ; NJ=p*(8*M+1)+(1-p)*(8*M)
DETA=(AL-R)/(NJ-1) ; DCSI=1./(NI-1)
PI=4.*ATAN(1.)
EPSM=2.5E-3
EPS=1.E-5
*****
***** CÁLCULO DA MALHA *****
*****
WRITE(*,120)
120 FORMAT(/,22X,'SOLUCAO DA MALHA ELIPTICA',/)
CALL FRONTEIRAS(IM,IB2)
DO WHILE (ERPHI.GE.EPS.AND..NOT.NITER.GE.MAXIT)
DO WHILE (ERPHI.GE.EPSM.OR.RESXY.GE.EPSM)
CALL DERIVE ; CALL METRICAS ;
CALL CONTROL(IFC) ; CALL COEF(IEQX,IB2)
DO K1=1,NPXY ; CALL TDMA(1,X) ; CALL TDMA(3,X) ; ENDDO

CALL COEF(IEQY,IB2)
DO K2=1,NPXY ; CALL TDMA(1,Y) ; CALL TDMA(3,Y) ; ENDDO

CALL RESIDUO(1,X,X OLD)
END DO ! FIM DE DO WHILE
Write(*,21)NITER,NI,NJ
21 FORMAT(/,10X,'A MALHA CONVERGIU APOS',I4,2X,'ITERACOES',/,
*10X,'COM UM MESH SIZE DE',I3,1X,'X',I3,/)
CALL SAIDA(IM)
PAUSE
GOTO 81
*****
***** CÁLCULO DO CAMPO DE TEMPERATURA *****
*****
WRITE(*,122)
122 FORMAT(10X,'SOLUCAO DO CAMPO DE TEMPERATURA ELIPTICO ',/)
NITER=1
CALL FRONTEIRAS(IT,IB2)
DO WHILE (ERPHI.GE.EPS.OR.REST.GE.EPS)
DO WHILE (ERPHI.GT.REST)
CALL COEF(IEQT,IB2);
DO K3=1,NPT ; CALL TDMA(1,T) ; CALL TDMA(3,T) ; ENDDO

CALL RESIDUO(2,T,T OLD)
END DO ! FIM DE DO WHILE
write(*,31)(NITER-1)
31 FORMAT(/,10X,'A TEMPERATURA CONVERGIU APOS',I4,2X,'ITERACOES')

```

```

CALL SAIDA(IT)
PAUSE
81 STOP
END
C *****
SUBROUTINE RESIDUO (ISET,TAU,TAU OLD)
C *****
PARAMETER (Nx=81,Ny=81)
DIMENSION TAU(Nx,Ny),TAU OLD(Nx,Ny),DIF(Nx,Ny)
COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),
* REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO
COMMON/BL2/AP(Nx,Ny),AN(Nx,Ny),AS(Nx,Ny),AE(Nx,Ny),AW(Nx,Ny),
* S(Nx,Ny),ANE(Nx,Ny),ANW(Nx,Ny),ASE(Nx,Ny),ASW(Nx,Ny)
COMMON/BL4/W1,W2,W3,PI,RESXY,ERPHI,EPSM,EPST,NITER,IX,IY,IT,HSU
COMMON/EXA/SExa(Nx,Ny),EAna(Nx,Ny),E(Nx,Ny)
INTEGER ISET
C CÁLCULO DO RESÍDUO DA VARIÁVEL TAU={X ,Y OU T }.
RESXY=0.
DO 300 I=2,NI-1 ;DO 300 J=2,NJ-1
RESX=AN(I,J)*TAU(I,J+1)+AS(I,J)*TAU(I,J-1)+AE(I,J)*TAU(I+1,J)+
*AW(I,J)*TAU(I-1,J)+ANW(I,J)*TAU(I-1,J+1)+ANE(I,J)*TAU(I+1,J+1)
*+ASW(I,J)*TAU(I-1,J-1)+ASE(I,J)*TAU(I+1,J-1)+S(I,J)
*-AP(I,J)*TAU(I,J)
RESX=SQRT(RESX*RESX)
IF(RESX.GE.RESXY)RESXY=RESX
300 CONTINUE
DIFF=0.0
DO 450 I=2,NI-1 ;DO 450 J=2,NJ-1
DIF(I,J)=ABS(( TAU(I,J)-TAU OLD(I,J) )/TAU(I,J))
IF( DIF(I,J).GT.DIFF )THEN
DIFF=DIF(I,J)
ELSE
ENDIF
450 CONTINUE
DO 21 I=1,NI ; DO 21 J=1,NJ
TAU OLD(I,J)=TAU(I,J)
21 CONTINUE
ERPHI=DIFF
IF(ISET.EQ.1)THEN
WRITE(*,22)NITER,ERPHI,RESXY
22 FORMAT(10X,'NITER=',I4,2X,'ERPHI=',2X,E9.4,4X,'RESXY=',2X,E9.4)
Else
REST=RESXY
WRITE(*,23)NITER,ERPHI,REST
23 FORMAT(10X,'NITER=',I4,2X,'ERPHI=',2X,E9.4,4X,'REST=',E9.4)
Endif
NITER=NITER+1
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE SAIDA (IOUT)!IMPRESSÃO DA MALHA E DO CAMPO DE TEMPERATURA
C *****
PARAMETER (Nx=81,Ny=81)
COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),
* REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO
COMMON/BL4/W1,W2,W3,PI,RESXY,ERPHI,EPSM,EPST,NITER,IX,IY,IT,HSU
COMMON/EXA/SExa(Nx,Ny),EAna(Nx,Ny),E(Nx,Ny),EPS
IF(IOUT.EQ.1)THEN
C ABERTURA DE ARQUIVO PARA MALHA
C OPEN(UNIT=5,FILE='c:\GRAPHER\CC1\HSU2\MO41.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=5,FILE='C:\CC1\LIXO\M.DAT',STATUS='UNKNOWN')
DO 600 I=1,NI ; DO 601 J=1,NJ
WRITE(5,*)X(I,J),Y(I,J)
601 CONTINUE
WRITE(5,610)
600 CONTINUE
DO 700 J=1,NJ ; DO 701 I=1,NI
WRITE(5,*)X(I,J),Y(I,J)
701 CONTINUE
WRITE(5,610)
700 CONTINUE
610 FORMAT(/)
C *****

```

```

ELSE
IF (IOUT.EQ.2) THEN
*****
OPEN (UNIT=5, FILE='C:\CC1\LIXO\TC17j1.DAT', STATUS='UNKNOWN')
DO 15 J=1, NJ
IM=(NI+1)/2
WRITE (5, *) X (IM, J), T (IM, J)
15 CONTINUE
OPEN (UNIT=5, FILE='C:\CC1\LIXO\TJ2.DAT', STATUS='UNKNOWN')
DO J=1, Nj
Im=2
TLE2= T (Im, J)
SLE2=SExa (Im, J)
WRITE (5, *) X (Im, J), TLE2, SLE2
ENDDO
WRITE (5, 115)
115 FORMAT (/)
PRINT 110, EMEDIO, DMESH, EPS
110 FORMAT (/, 10X, 'EMEDIO=', E9.4, 1X, 'DMESH=', E9.4, 1X, 'EPS=', E9.4, /)
OPEN (UNIT=5, FILE='C:\SURFER\CC1\TAD.DAT', STATUS='UNKNOWN')
DO 140 J=1, NJ
DO 130 I=1, NI
WRITE (5, *) X (I, J), Y (I, J), T (I, J)
130 CONTINUE
WRITE (5, 150)
150 FORMAT (/)
140 CONTINUE
ENDIF ; ENDIF
22 RETURN
END
*****
SUBROUTINE FRONTEIRAS (IBOUND, ICCT)
*****
PARAMETER (Nx=81, Ny=81)
COMMON/BL1/X (Nx, Ny), Y (Nx, Ny), X OLD (Nx, Ny), T (Nx, Ny), T OLD (Nx, Ny),
* REST, N, M, NI, NJ, DETA, DCSI, R, ORTO, LP, SNS, SNN, ALAMBDA, LORTO
COMMON/BL4/W1, W2, W3, PI, RESXY, ERPHI, EPSM, EPST, NITER, IX, IY, IT, HSU
COMMON/EXA/SExa (Nx, Ny), EAna (Nx, Ny), E (Nx, Ny), EPS
INTRINSIC COS, SIN
IF (IBOUND.EQ.1) THEN
C MALHA INICIAL (CHUTE)
DO 8 J=1, NJ ; DO 8 I=1, NI
Teta=(PI/2.)*FLOAT (I-1)/FLOAT (NI-1)
X (I, J)=ABS (( R+(J-1)*DETA ) *COS (Teta))
Y (I, J)=ABS (( R+(J-1)*DETA ) *SIN (Teta))
X (NI, J)=0.0
8 CONTINUE
C FRONTEIRA NORTE
DO 72 I=1, NI
IF (I.GE.1.AND.I.LE.4*N+1) THEN
X (I, NJ)=1.0 ; Y (I, NJ)=ABS ( 1.+2*(I-4*N-1)*DCSI )
Y (NI, NJ)=1.0
ELSE IF (I.GT.4*N+1.AND.I.LE.8*N+1) THEN
X (I, NJ)=ABS (1.-2*(I-4*N-1)*DCSI) ; Y (I, NJ)=1.0
END IF
72 CONTINUE
ELSE
*****
C CONDIÇÃO INICIAL E DE CONTORNO PARA A TEMPERATURA
*****
C CONDIÇÃO INICIAL
DO 9 J=1, NJ ; DO 9 I=1, NI
T (I, J)=0.2
9 CONTINUE
*****
C CONDIÇÕES DE CONTORNO
*****
IF (ICCT==1) THEN
DO I=1, NI ; J=1 ; T (I, J)=1.0 ; ENDDO ! SUL
*****
DO I=1, NI ; J=NJ ; T (I, J)=0.0 ; ENDDO ! NORTE
*****
C ELSE ! CONDIÇÕES P/PROBLEMA 2 : CONTORNO EXATO

```

```

C *****
DO I=1,NI ; J=1
Pcos1=Exp(-Alambda*X(I,J))*COS(Alambda*Y(I,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(I,J))*COS(Alambda*X(I,J)) ! SUL
SExa(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2 ; T(I,J)=SExa(I,J)
ENDDO
C *****
DO I=1,NI ; J=NJ
Pcos1=Exp(-Alambda*X(I,J))*COS(Alambda*Y(I,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(I,J))*COS(Alambda*X(I,J)) ! NORTE
SExa(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2 ; T(I,J)=SExa(I,J)
ENDDO
C *****
DO J=1,NJ ; I=NI
Pcos1=Exp(-Alambda*X(I,J))*COS(Alambda*Y(I,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(I,J))*COS(Alambda*X(I,J)) ! OESTE
SExa(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2 ; T(I,J)=SExa(I,J)
ENDDO
C *****
DO J=1,NJ ; I=1
Pcos1=Exp(-Alambda*X(I,J))*COS(Alambda*Y(I,J)) ! LESTE
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(I,J))*COS(Alambda*X(I,J))
SExa(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2 ; T(I,J)=SExa(I,J)
ENDDO; ENDIF
ENDIF ; ERPHI=0.5
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE DERIVE
C *****
PARAMETER(Nx=81,Ny=81)
COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),
* REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO
COMMON/BL4/W1,W2,W3,PI,RESXY,ERPHI,EPSM,EPST,NITER,IX,IY,IT,HSU
COMMON/DV1/D1XCSI(Nx,Ny),D1YCSI(Nx,Ny),D1XETA(Nx,Ny),D1YETA(Nx,Ny)
COMMON/DV2/D2XCSI(Nx,Ny),D2YCSI(Nx,Ny),D2XETA(Nx,Ny),
* D2YETA(Nx,Ny),DXCSIETA(Nx,Ny),DYCSIETA(Nx,Ny)
COMMON/LCSI/SN(Nx,Ny),DIST(Nx,Ny),Stot(Nx,Ny)
C DERIVADAS PRIMEIRAS NO INTERIOR DO CAMPO
DO 10 I=2,NI-1 ; DO 10 J=2,NJ-1
D1XCSI(I,J)=(X(I+1,J)-X(I-1,J))/2.
D1YCSI(I,J)=(Y(I+1,J)-Y(I-1,J))/2.
D1XETA(I,J)=(X(I,J+1)-X(I,J-1))/2.
D1YETA(I,J)=(Y(I,J+1)-Y(I,J-1))/2.
C DERIVADAS SEGUNDAS NO INTERIOR DO CAMPO
D2XETA(I,J)=(8*X(I,J+1)-7*X(I,J)-X(I,J-1))/2-3*D1XETA(I,J)
D2YETA(I,J)=(8*Y(I,J+1)-7*Y(I,J)-Y(I,J-1))/2-3*D1YETA(I,J)
D2XCSI(I,J)=(X(I+1,J)-2*X(I,J)+X(I-1,J))
D2YCSI(I,J)=(Y(I+1,J)-2*Y(I,J)+Y(I-1,J))
10 CONTINUE
C DERIVADAS PRIMEIRAS NAS FRONTEIRAS SUL E NORTE
DO 12 J=1,NJ,NJ-1 ; DO 11 I=2,NI-1
C IF(J.EQ.1) THEN
C Base
D1XCSI(I,J)=(X(I+1,J)-X(I-1,J))/2.
D1YCSI(I,J)=(Y(I+1,J)-Y(I-1,J))/2.
D1XCSI(NI,J)=(X(NI,J)-X(NI-1,J))
D1YCSI(NI,J)=(Y(NI,J)-Y(NI-1,J))
D1XCSI(1,J)=(X(2,J)-X(1,J))
D1YCSI(1,J)=(Y(2,J)-Y(1,J))
ELSE
C Topo
D1XCSI(I,J)=(X(I+1,J)-X(I-1,J))/2.
D1YCSI(I,J)=(Y(I+1,J)-Y(I-1,J))/2.
D1XCSI(NI,J)=(X(NI,J)-X(NI-1,J))
D1YCSI(NI,J)=(Y(NI,J)-Y(NI-1,J))
D1XCSI(1,J)=(X(2,J)-X(1,J))
D1YCSI(1,J)=(Y(2,J)-Y(1,J))

```

```

ENDIF
11 CONTINUE
12 CONTINUE
C CÁLCULO DAS DERIVADAS EM D1XETA,D1YETA
C CALL OFFBOUNDARY
DO 14 J=1,NJ,NJ-1 ; DO 13 I=1,NI
IF(J.EQ.1) THEN
SnCSI0=SQRT(( D1XCSI(I,J)**2+D1YCSI(I,J)**2 ))
D1XETA(I,J)=(SNS/SnCSI0)*D1YCSI(I,J)
D1YETA(I,J)=-(SNS/SnCSI0)*D1XCSI(I,J)
ELSE
SnCSI1=SQRT(( D1XCSI(I,J)**2+D1YCSI(I,J)**2 ))
D1XETA(I,J)=(SNN/SnCSI1)*D1YCSI(I,J)
D1YETA(I,J)=-(SNN/SnCSI1)*D1XCSI(I,J)
ENDIF
13 CONTINUE ; 14 CONTINUE

C DERIVADAS SEGUNDAS NAS FRONTEIRAS SUL E NORTE

DO 16 J=1,NJ,NJ-1 ; DO 15 I=2,NI-1
IF(J.EQ.1) THEN
Base
D2XCSI(I,J)= ( X(I+1,J)-2*X(I,J)+X(I-1,J) )
D2YCSI(I,J)= ( Y(I+1,J)-2*Y(I,J)+Y(I-1,J) )
D2XETA(I,J)= ( 8*X(I,J+1)-7*X(I,J)-X(I,J+2) )/2. -3*D1XETA(I,J)
D2YETA(I,J)= ( 8*Y(I,J+1)-7*Y(I,J)-Y(I,J+2) )/2. -3*D1YETA(I,J)
D2XCSI(1,J)= ( 8*X(2,J)-7*X(1,J)-X(3,J) )/2. -3*D1XCSI(1,J)
D2YCSI(1,J)= ( 8*Y(2,J)-7*Y(1,J)-Y(3,J) )/2. -3*D1YCSI(1,J)
D2XCSI(NI,J)= ( 8*X(NI-1,J)-7*X(NI,J)-X(NI-2,J) )/2-3*D1XCSI(NI,J)
D2YCSI(NI,J)= ( 8*Y(NI-1,J)-7*Y(NI,J)-Y(NI-2,J) )/2-3*D1YCSI(NI,J)
D2XETA(NI,J)= ( 8*X(NI,J+1)-7*X(NI,J)-X(NI,J+2) )/2-3*D1XETA(NI,J)
D2YETA(NI,J)= ( 8*Y(NI,J+1)-7*Y(NI,J)-Y(NI,J+2) )/2-3*D1YETA(NI,J)
ELSE
Topo
D2XCSI(I,J)= ( X(I+1,J)-2*X(I,J)+X(I-1,J) )
D2YCSI(I,J)= ( Y(I+1,J)-2*Y(I,J)+Y(I-1,J) )
D2XETA(I,J)= ( 8*X(I,J-1)-7*X(I,J)-X(I,J-2) )/2 +3*D1XETA(I,J)
D2YETA(I,J)= ( 8*Y(I,J-1)-7*Y(I,J)-Y(I,J-2) )/2 +3*D1YETA(I,J)
D2XCSI(1,J)= ( 8*X(2,J)-7*X(1,J)-X(3,J) )/2 +3*D1XCSI(1,J)
D2YCSI(1,J)= ( 8*Y(2,J)-7*Y(1,J)-Y(3,J) )/2 +3*D1YCSI(1,J)
D2XCSI(NI,J)= ( 8*X(NI-1,J)-7*X(NI,J)-X(NI-2,J) )/2+3*D1XCSI(NI,J)
D2YCSI(NI,J)= ( 8*Y(NI-1,J)-7*Y(NI,J)-Y(NI-2,J) )/2+3*D1YCSI(NI,J)
D2XETA(NI,J)= ( 8*X(NI,J-1)-7*X(NI,J)-X(NI,J-2) )/2+3*D1XETA(NI,J)
D2YETA(NI,J)= ( 8*Y(NI,J-1)-7*Y(NI,J)-Y(NI,J-2) )/2+3*D1YETA(NI,J)
ENDIF
15 CONTINUE
16 CONTINUE
RETURN
END
*****
C SUBROUTINE METRICAS
C *****
PARAMETER(Nx=81,Ny=81)
COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),
* REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO

COMMON/BL3/ALFA(Nx,Ny),BETA(Nx,Ny),GAMA(Nx,Ny),DJACOB(Nx,Ny)
COMMON/BL4/W1,W2,W3,PI,RESXY,ERPHI,EPST,NITER,IX,IY,IT,HSU
COMMON/DV1/D1XCSI(Nx,Ny),D1YCSI(Nx,Ny),D1XETA(Nx,Ny),D1YETA(Nx,Ny)
C CÁLCULO DAS MÉTRICAS ALFA=g11, GAMA=g22 E BETA=g12
DO 17 I=1,NI ; DO 17 J=1,NJ
X OLD(I,J)=X(I,J)
17 CONTINUE
C MÉTRICAS : ALFA , BETA , GAMA E O JACOBIANO .
DO 18 I=1,NI ; DO 18 J=1,NJ
ALFA(I,J)=(D1XETA(I,J)**2+D1YETA(I,J)**2)*W3+(1.-W3)*ALFA(I,J)

BETA(I,J)=(W3*( D1XCSI(I,J)*D1XETA(I,J)+D1YCSI(I,J)*D1YETA(I,J) )
* +(1.-W3)*BETA(I,J) )*(1-ORTO)

GAMA(I,J)=( D1XCSI(I,J)**2 + D1YCSI(I,J)**2 )*W3+(1.-W3)*GAMA(I,J)
DJACOB(I,J)=W3*((D1XCSI(I,J)*D1YETA(I,J)-D1XETA(I,J)*D1YCSI(I,J)))
* +(1.-W3)*DJACOB(I,J)

```

```

C      DJACOB(I,J)=ABS( DJACOB(I,J) )
18  CONTINUE
    RETURN
    END
C      *****
C      SUBROUTINE CONTROL(JFC)
C      *****
    PARAMETER(Nx=81,Ny=81)
    COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),
*      REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO
    COMMON/BL3/ALFA(Nx,Ny),BETA(Nx,Ny),GAMA(Nx,Ny),DJACOB(Nx,Ny)
    COMMON/DV1/D1XCSI(Nx,Ny),D1YCSI(Nx,Ny),D1XETA(Nx,Ny),D1YETA(Nx,Ny)
    COMMON/DV2/D2XCSI(Nx,Ny),D2YCSI(Nx,Ny),D2XETA(Nx,Ny),
*      D2YETA(Nx,Ny),DXCSIETA(Nx,Ny),DYCSIETA(Nx,Ny)
    COMMON/CTRL/FP(Nx,Ny),FQ(Nx,Ny)
    IF(LP==0)GOTO 4
C      CALCULO DAS FUNÇÕES DE CONTROLE NAS FRONTEIRAS
    DO J=1,NJ,NJ-1 ; DO I=1,NI
C      RECORRENCIA DE HSU-LEE
    EQA=( ALFA(I,J)*D2XCSI(I,J)+GAMA(I,J)*D2XETA(I,J) )
    EQB=( ALFA(I,J)*D2YCSI(I,J)+GAMA(I,J)*D2YETA(I,J) )

    FP1=( EQB*D1XETA(I,J) ) ; FP2=( EQA*D1YETA(I,J) )
    FP(I,J)=( FP1-FP2 )/(DJACOB(I,J)**3)
C      *****
    FQ1=( EQA*D1YCSI(I,J) ) ; FQ2=( EQB*D1XCSI(I,J) )
    FQ(I,J)=( FQ1-FQ2 )/(DJACOB(I,J)**3)
    ENDDO ; ENDDO
C      CANTOS
C      INTERPOLAÇÃO DAS FUNÇÕES DE CONTROLE FP E FQ NO INTERIOR DO DOMÍNIO
    A1=3.5 ; B1=3.5 ; C1=3.5 ; D1=3.5
    A2=3.5 ; B2=3.5 ; C2=0.1 ; D2=0.1
C      *****
    IF(JFC.EQ.1)THEN
    DO J=2,NJ-1 ; DO I=2,NI-1
    ETA=J ; CSI=I ; CSI MAX=NI ; ETA MAX=NJ
    RJ1=(1-(ETA/ETA MAX)**A1 ; RJ2=(ETA/ETA MAX)**B1
    RI1=(1-(CSI/CSI MAX)**C1 ; RI2=(CSI/CSI MAX)**D1
C      FUNÇÕES INTERPOLAÇÃO DE HSU-LEE
    FP(I,J)=( RJ1*FP(I,1)+RJ2*FP(I,NJ) )*LP
    FQ(I,J)=( RI1*FQ(I,1)+RI2*FQ(I,NJ) )*LP
    ENDDO; ENDDO
    ELSE
C      *****
C      FUNÇÕES INTERPOLAÇÃO DE JENG E LIOU
C      *****
    DO I=2,NI-1 ; DO J=2,NJ-1
    ETA=J ; CSI=I ; CSI MAX=NI ; ETA MAX=NJ
    RJ11=(1-(ETA/ETA MAX)**A1 ; RJ21=(ETA/ETA MAX)**B1
    RI11=(1-(CSI/CSI MAX)**C1 ; RI21=(CSI/CSI MAX)**D1
    RJ1=(1-(ETA/ETA MAX)**A2 ; RJ2=(ETA/ETA MAX)**B2
    RI1=(1-(CSI/CSI MAX)**C2 ; RI2=(CSI/CSI MAX)**D2
C      *****
    FP(I,J)=((FP(I,1)*RJ11+FP(I,NJ)*RJ21+FP(1,J)*RI11+FP(NI,J)*RI21)
*      -( FP(1,1)*RJ11 + FP(1,NJ)*RJ21 )*RI11
*      -( FP(NI,1)*RJ11 + FP(NI,NJ)*RJ21 )*RI21 )*LP
C      *****
    FQ(I,J)=(( FQ(I,1)*RJ1+FQ(I,NJ)*RJ2 + FQ(1,J)*RI1 + FQ(NI,J)*RI2 )
*      -( FQ(1,1)*RJ1 + FQ(1,NJ)*RJ2 )*RI1
*      -( FQ(NI,1)*RJ1 + FQ(NI,NJ)*RJ2 )*RI2 )*LP
C      ***** VALOR NAS FRONTEIRAS *****
    FP(1,1)=FP(1,2) ; FP(1,NJ)=FP(1,NJ-1)
    FP(NI,1)=FP(NI,2) ; FP(NI,NJ)=FP(NI,NJ-1)
    FQ(1,1)=FQ(2,1) ; FQ(1,NJ)=FQ(2,NJ)
    FQ(NI,1)=FQ(NI-1,1) ; FQ(NI,NJ)=FQ(NI-1,NJ)
C      *****
    ENDDO; ENDDO
    ENDIF
4  RETURN
    END
C      *****
C      SUBROUTINE COEF(IEQ,ICCT)
C      *****

```

```

PARAMETER (Nx=81, Ny=81)
COMMON/BL1/X(Nx, Ny), Y(Nx, Ny), X OLD(Nx, Ny), T(Nx, Ny), T OLD(Nx, Ny),
*   REST, N, M, NI, NJ, DETA, DCSI, R, ORTO, LP, SNS, SNN, ALAMBDA, LORTO
COMMON/BL2/AP(Nx, Ny), AN(Nx, Ny), AS(Nx, Ny), AE(Nx, Ny), AW(Nx, Ny),
*   S(Nx, Ny), ANE(Nx, Ny), ANW(Nx, Ny), ASE(Nx, Ny), ASW(Nx, Ny)
COMMON/BL3/ALFA(Nx, Ny), BETA(Nx, Ny), GAMA(Nx, Ny), DJACOB(Nx, Ny)
COMMON/CTRL/FP(Nx, Ny), FQ(Nx, Ny)
COMMON/BL4/W1, W2, W3, P1, RESXY, ERPHI, EPSM, EPST, NITER, IX, IY, IT, HSU
COMMON/JACOB/DJo e, DJo w, DJo n, DJo s
COMMON/M2/G11 e, G11 w, G11 n, G11 s, G22 e, G22 w, G22 n, G22 s,
*   G12 e, G12 w, G12 n, G12 s
*****
IF(IEQ.EQ.0.OR.IEQ.EQ.1)THEN
----- MONTAGEM DOS COEFICIENTES PARA SOLUÇÃO DA MALHA (X,Y)
DO 22 I=2, NI-1 ; DO 22 J=2, NJ-1
----- CÁLCULO DOS COEFICIENTES NOS PONTOS INTERNOS
      UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES PESO PROPOSTAS POR HSULEE
      Z1 =HSU*( FP(I,J)*DJACOB(I,J)**2 )/ALFA(I,J)
      Z2 =HSU*( FQ(I,J)*DJACOB(I,J)**2 )/GAMA(I,J)
      AW(I,J) = HSU*ALFA(I,J)*PES01( -Z1 ) +
*           (1-HSU)*( ALFA(I,J)-0.5*FP(I,J)*DJACOB(I,J)**2 )

      AE(I,J) = HSU*ALFA(I,J)*PES01( Z1 )+
*           (1-HSU)*( ALFA(I,J)+0.5*FP(I,J)*DJACOB(I,J)**2 )

      AN(I,J) = HSU*GAMA(I,J)*PES01( Z2 ) +
*           (1-HSU)*( GAMA(I,J)+0.5*FQ(I,J)*DJACOB(I,J)**2 )

      AS(I,J) = HSU*GAMA(I,J)*PES01( -Z2 ) +
*           (1-HSU)*( GAMA(I,J)-0.5*FQ(I,J)*DJACOB(I,J)**2 )

      ASW(I,J)=-2*BETA(I,J)*PES02(Z1)*PES02(Z2)*(1/4-HSU/4)
      ANE(I,J)= ASW(I,J) ; ANW(I,J)= -ASW(I,J)
      ASE(I,J)= -ASW(I,J) ; S(I,J)= 0.
      AP(I,J) = ( AW(I,J)+AE(I,J)+AS(I,J)+AN(I,J)+
*           ANW(I,J)+ASW(I,J)+ASE(I,J)+ANE(I,J) )

22 CONTINUE
----- CÁLCULO DOS COEFICIENTES NAS FRONTEIRAS -----
----- FRONTEIRAS OESTE E LESTE -----
DO 23 I=1, NI, NI-1 ; DO 23 J=1, NJ
IF(I.EQ.1)aux=1. ; IF(I.EQ.NI)aux=0.
AN(I,J) =0. ; AS(I,J) =0.
AE(I,J) =0. ; AW(I,J) =0.
ANE(I,J)=0. ; ANW(I,J)=0.
ASE(I,J)=0. ; ASW(I,J)=0. ; AP(I,J)=1.
IF(LORTO.EQ.1)THEN
  S(I,J)=(1-IEQ)*( aux*X(I+1,J)+(1-aux)*X(I,J) )
*   + IEQ*( aux*Y(I,J)+(1-aux)*Y(NI-1,J) )
  ELSE
  S(I,J)=(1-IEQ)*aux*X(I,J)+ IEQ*aux*Y(I,J)+
*   (1-IEQ)*(1-aux)*X(I,J)+ IEQ*(1-aux)*Y(I,J)
ENDIF
23 CONTINUE
----- FRONTEIRAS SUL E NORTE -----
DO J=1, NJ, NJ-1 ; NII=(NI+1)/2; DO I=1, NI
AN(I,J) =0. ; AS(I,J) =0. ; AE(I,J) =0.
AW(I,J) =0. ; ANE(I,J)=0. ; ANW(I,J)=0.
ASE(I,J)=0. ; ASW(I,J)=0. ; AP(I,J) =1.

IF(J.EQ.1)then
  S(I,J)=(1-IEQ)*X(I,J)+ IEQ*Y(I,J)

ELSE ! J=NJ
  IF(I.LE.NII)THEN
    IF(LORTO==0)THEN
      S(I,J)=(1-IEQ)*X(I,J)+ IEQ*Y(I,J)
    ELSE
      S(I,J)=(1-IEQ)*X(I,J) + IEQ*Y(I,J-1) ! ortogonalidade
    ENDIF
  ELSE
    IF(LORTO==0)THEN

```

```

      S(I,J)=(1-IEQ)*X(I,J)+ IEQ*Y(I,J)
    ELSE
      S(I,J)=(1-IEQ)*X(I,J-1) + IEQ*Y(I,J) ! ortogonalidade
    ENDIF
    S(NII,NJ)=1.
  ENDIF
ENDDO ; ENDDO

```

```

ELSE
*****
CÁLCULO DOS COEFICIENTES PARA O CAMPO DE TEMPERATURA
*****

```

```

PONTOS INTERNOS

```

```

DO 32 I=2,NI-1 ; DO 32 J=2,NJ-1
CALL METRI1(1,i,j)
AW(I,J) = G11 w+(G12 s-G12 n)/4
AE(I,J) = G11 e+(G12 n-G12 s)/4
AN(I,J) = G22 n+(G12 e-G12 w)/4
AS(I,J) = G22 s+(G12 w-G12 e)/4
ASW(I,J)=(G12 w+G12 s)/4
ANE(I,J)=(G12 n+G12 e)/4
ANW(I,J)=-(G12 w+G12 n)/4
ASE(I,J)=-(G12 e+G12 s)/4
S(I,J)= 0.
AP(I,J) =( AW(I,J)+AE(I,J)+AS(I,J)+AN(I,J)+
* ASE(I,J)+ASW(I,J) + ANE(I,J)+ANW(I,J) )

```

```

32 CONTINUE

```

```

*****
PONTOS DE FRONTEIRA (FLUXO NULO)
*****
FRONTEIRA OESTE (W)
*****

```

```

IF(ICCT==1)THEN
DO J=1,NJ ; I=1
CALL METRI1(2,i,j)
AE(I,J) = 2*G11 e+(G12 n-G12 s)/2
AW(I,J) = 0.
AN(I,J) = G22 n+(G12 e-G12 n)/2
AS(I,J) = G22 s+(G12 s-G12 e)/2
ASE(I,J)= -(G12 e+G12 s)/2
ASW(I,J)= 0.
ANE(I,J)= (G12 e+G12 n)/2
ANW(I,J)= 0.
S(I,J)= 0.
AP(I,J) =( AW(I,J)+AE(I,J)+AS(I,J)+AN(I,J)+
* ASE(I,J)+ASW(I,J) + ANE(I,J)+ANW(I,J) )
ENDDO

```

```

*****
FRONTEIRA LESTE (E)
*****

```

```

DO J=1,NJ ; I=NI
CALL METRI1(3,i,j)
AE(I,J) = 0.
AW(I,J) = 2*G11 w+(G12 n-G12 s)/2
AN(I,J) = G22 n+(G12 w-G12 n)/2
AS(I,J) = G22 s+(G12 s-G12 w)/2
ASW(I,J)= -(G12 w+G12 s)/2
ANE(I,J)= 0.
ANW(I,J)= (G12 n+G12 w)/2
ASE(I,J)= 0.
S(I,J)= 0.
AP(I,J) =( AW(I,J)+AE(I,J)+AS(I,J)+AN(I,J)+
* ASE(I,J)+ASW(I,J) + ANE(I,J)+ANW(I,J) )
ENDDO

```

```

ELSE ! FRONTEIRAS COM T PRESCRITA
DO J=1,NJ ; I=1
AN(I,J)=0.; AS(I,J)=0.; AE(I,J)=0.; AW(I,J)=0.
ANE(I,J)=0.; ANW(I,J)=0.; ASE(I,J)=0.; ASW(I,J)=0.
AP(I,J)=1.; S(I,J)=T(I,J)
ENDDO
DO J=1,NJ ; I=NI

```

```

AN(I,J) =0.; AS(I,J) =0. ; AE(I,J) =0. ;   AW(I,J) =0.
ANE(I,J)=0.; ANW(I,J)=0. ; ASE(I,J)=0. ;   ASW(I,J)=0.
AP(I,J)=1.;   S(I,J)=T(I,J)

```

```

ENDDO

```

```

ENDIF

```

```

*****

```

```

FRONTEIRAS SUL E NORTE

```

```

*****

```

```

DO J=1,NJ,NJ-1 ; DO I=1,NI

```

```

AN(I,J) =0.; AS(I,J) =0. ; AE(I,J) =0. ;   AW(I,J) =0.

```

```

ANE(I,J)=0.; ANW(I,J)=0. ; ASE(I,J)=0. ;   ASW(I,J)=0.

```

```

AP(I,J)=1.;   S(I,J)=T(I,J)

```

```

ENDDO ; ENDDO

```

```

ENDIF

```

```

***** SOBRERELAXAÇÃO DOS COEFICIENTES *****

```

```

DO 27 J=2,NJ-1 ; DO 27 I=2,NI-1

```

```

AP(I,J)=AP(I,J)/W2

```

```

IF(IEQ.NE.2) THEN

```

```

S(I,J)=S(I,J)+(1.-W2)*AP(I,J)*(IEQ*Y(I,J)+(1-IEQ)*X(I,J) )

```

```

ELSE

```

```

S(I,J)=S(I,J)+(1.-W2)*AP(I,J)*T(I,J)

```

```

ENDIF

```

```

27 CONTINUE

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

*****

```

```

CÁLCULO DAS FUNÇÕES PESO

```

```

*****

```

```

REAL FUNCTION PESO1(Z)

```

```

PESO1=AMAX1( 0. , ( 1-0.1*ABS(Z) )**5 )+AMAX1(0.,Z)

```

```

END

```

```

REAL FUNCTION PESO2(W)

```

```

PESO2=( 2+0.3332*W**2 + 0.0172*W**4 )**(-1.0)

```

```

END

```

```

*****

```

```

SUBROUTINE TDMA(LDV, PHI)

```

```

*****

```

```

PARAMETER(Nx=81,Ny=81)

```

```

DIMENSION PHI(Nx,Ny),A(Nx),B(Nx),C(Nx),D(Nx),P(Nx),Q(Nx)

```

```

COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),

```

```

* REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO

```

```

COMMON/BL2/AP(Nx,Ny),AN(Nx,Ny),AS(Nx,Ny),AE(Nx,Ny),AW(Nx,Ny),

```

```

* S(Nx,Ny),ANE(Nx,Ny),ANW(Nx,Ny),ASE(Nx,Ny),ASW(Nx,Ny)

```

```

GO TO(10,12,11,13)LDV

```

```

10 JST=1 ; JFIN=NJ ; LAPJ=1 ; GO TO 14

```

```

11 JST=NJ ; JFIN=1 ; LAPJ=-1 ;

```

```

14 IFIN=NI ; KF=1 ; GO TO 41

```

```

12 JST=1 ; JFIN=NI ; LAPJ=1 ; GO TO 16

```

```

13 JST=NI ; JFIN=1 ; LAPJ=-1

```

```

16 IFIN=NJ ; KF=0

```

```

***** SOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS *****

```

```

41 DO 300 J=JST,JFIN,LAPJ

```

```

JMAX=MAX0(JST,JFIN)

```

```

DO 310 I=1,IFIN

```

```

A(I)=KF*AP(I,J)+(1-KF)*AP(J,I) ;

```

```

B(I)=KF*AE(I,J)+(1-KF)*AN(J,I)

```

```

C(I)=KF*AW(I,J)+(1-KF)*AS(J,I)

```

```

IF(J.EQ.1) THEN

```

```

D(I)=KF*( AN(I,J)*PHI(I,J+1)+S(I,J)

```

```

* + ANW(I,J)*PHI(I-1,J+1)+ANE(I,J)*PHI(I+1,J+1) )

```

```

* + (1-KF)*( AE(J,I)*PHI(J+1,I)+S(J,I) )

```

```

ELSE

```

```

IF(J.EQ.JMAX) THEN

```

```

D(I)=KF*( AS(I,J)*PHI(I,J-1)+S(I,J)

```

```

* +ASW(I,J)*PHI(I-1,J-1)+ASE(I,J)*PHI(I+1,J-1) )

```

```

* + (1-KF)*( AW(J,I)*PHI(J-1,I)+S(J,I) )

```

```

ELSE

```

```

IF(J.NE.1.OR.J.NE.JMAX) THEN

```

```

D(I)=KF*( AN(I,J)*PHI(I,J+1)+

```

```

*   AS(I,J)*PHI(I,J-1)+S(I,J)+ANW(I,J)*PHI(I-1,J+1)+
*   ANE(I,J)*PHI(I+1,J+1)+ASW(I,J)*PHI(I-1,J-1)+
*   ASE(I,J)*PHI(I+1,J-1) )+
*   (1-KF)*( AE(J,I)*PHI(J+1,I)+AW(J,I)*PHI(J-1,I)+S(J,I) )
      ENDIF
    ENDIF
  ENDIF
  IF(I.GT.1)GO TO 350
  P(1)=B(1)/A(1); Q(1)=D(1)/A(1)
  GO TO 310
350  P(I)=B(I)/( A(I)-C(I)*P(I-1) )
      Q(I)=( D(I)+C(I)*Q(I-1) )/( A(I)-C(I)*P(I-1) )
310  CONTINUE
      IF(KF.EQ.0)GO TO 36
      PHI(IFIN,J)=Q(IFIN)
      DO 37 I=IFIN-1,1,-1
37   PHI(I,J)=P(I)*PHI(I+1,J)+Q(I); GO TO 300

36   PHI(J,IFIN)=Q(IFIN)
      DO 38 I=IFIN-1,1,-1
38   PHI(J,I)=P(I)*PHI(J,I+1)+Q(I)
300  CONTINUE
      RETURN

```

END

SUBROTINA MÉTRICA

Subroutine METRI1(IME,i,j)

PARAMETER(Nx=81,Ny=81)

COMMON/BL1/X(Nx,Ny),Y(Nx,Ny),X OLD(Nx,Ny),T(Nx,Ny),T OLD(Nx,Ny),

* REST,N,M,NI,NJ,DETA,DCSI,R,ORTO,LP,SNS,SNN,ALAMBDA,LORTO

COMMON/JACOB/DJo e,DJo w,DJo n,DJo s

COMMON/M2/G11 e,G11 w,G11 n,G11 s,G22 e,G22 w,G22 n,G22 s,

* G12 e,G12 w,G12 n,G12 s

Expressões das Métricas para Interfaces

IF(IME.EQ.1)THEN

PONTOS INTERNOS

xcsi e=x(i+1,j)-x(i,j)

ycsi e=y(i+1,j)-y(i,j)

xeta e=(x(i,j+1)+x(i+1,j+1)-x(i,j-1)-x(i+1,j-1))/4

yeta e=(y(i,j+1)+y(i+1,j+1)-y(i,j-1)-y(i+1,j-1))/4

xcsi w=x(i,j)-x(i-1,j)

ycsi w=y(i,j)-y(i-1,j)

xeta w=(x(i-1,j+1)+x(i,j+1)-x(i-1,j-1)-x(i,j-1))/4

yeta w=(y(i-1,j+1)+y(i,j+1)-y(i-1,j-1)-y(i,j-1))/4

xeta n=x(i,j+1)-x(i,j)

yeta n=y(i,j+1)-y(i,j)

xcsi n=(x(i+1,j+1)+x(i+1,j)-x(i-1,j+1)-x(i-1,j))/4

ycsi n=(y(i+1,j+1)+y(i+1,j)-y(i-1,j+1)-y(i-1,j))/4

xeta s=x(i,j)-x(i,j-1)

yeta s=y(i,j)-y(i,j-1)

xcsi s=(x(i+1,j)+x(i+1,j-1)-x(i-1,j)-x(i-1,j-1))/4

ycsi s=(y(i+1,j)+y(i+1,j-1)-y(i-1,j)-y(i-1,j-1))/4

ELSE

FRONTEIRA OESTE

IF(IME.EQ.2)THEN

xcsi e=x(i+1,j)-x(i,j)

ycsi e=y(i+1,j)-y(i,j)

xeta e=(x(i,j+1)+x(i+1,j+1)-x(i,j-1)-x(i+1,j-1))/4

yeta e=(y(i,j+1)+y(i+1,j+1)-y(i,j-1)-y(i+1,j-1))/4

```

xeta n=x(i,j+1)-x(i,j)
yeta n=y(i,j+1)-y(i,j)
xcsi n=(x(i+1,j+1)+x(i+1,j)-x(i,j+1)-x(i,j))/2
ycsi n=(y(i+1,j+1)+y(i+1,j)-y(i,j+1)-y(i,j))/2

xeta s=x(i,j)-x(i,j-1)
yeta s=y(i,j)-y(i,j-1)
xcsi s=(x(i+1,j)+x(i+1,j-1)-x(i,j)-x(i,j-1))/2
ycsi s=(y(i+1,j)+y(i+1,j-1)-y(i,j)-y(i,j-1))/2

ELSE
*****
FRONTEIRA LESTE
*****
xeta s=x(i,j)-x(i,j-1)
yeta s=y(i,j)-y(i,j-1)
xcsi s=(x(i,j)+x(i,j-1)-x(i-1,j)-x(i-1,j-1))/2
ycsi s=(y(i,j)+y(i,j-1)-y(i-1,j)-y(i-1,j-1))/2

xcsi w=x(i,j)-x(i-1,j)
ycsi w=y(i,j)-y(i-1,j)
xeta w=(x(i-1,j+1)+x(i,j+1)-x(i-1,j-1)-x(i,j-1))/4
yeta w=(y(i-1,j+1)+y(i,j+1)-y(i-1,j-1)-y(i,j-1))/4

xeta n=x(i,j+1)-x(i,j)
yeta n=y(i,j+1)-y(i,j)
xcsi n=(x(i,j+1)+x(i,j)-x(i-1,j)-x(i-1,j+1))/2
ycsi n=(y(i,j+1)+y(i,j)-y(i-1,j)-y(i-1,j+1))/2

ENDIF
ENDIF
Cálculo das Métricas nas Interfaces

DJo e=( xcsi e*yeta e - xeta e*ycsi e )
DJo w=( xcsi w*yeta w - xeta w*ycsi w )
DJo n=( xcsi n*yeta n - xeta n*ycsi n )
DJo s=( xcsi s*yeta s - xeta s*ycsi s )

G11 e=((xeta e)**2+(yeta e)**2)/(DJo e)
G11 w=((xeta w)**2+(yeta w)**2)/(DJo w)
G11 n=((xeta n)**2+(yeta n)**2)/(DJo n)
G11 s=((xeta s)**2+(yeta s)**2)/(DJo s)

G22 e=((xcsi e)**2+(ycsi e)**2)/(DJo e)
G22 w=((xcsi w)**2+(ycsi w)**2)/(DJo w)
G22 n=((xcsi n)**2+(ycsi n)**2)/(DJo n)
G22 s=((xcsi s)**2+(ycsi s)**2)/(DJo s)

IF(ORTO.EQ.0)THEN

G12 e=- (xeta e*xcsi e + yeta e*ycsi e)/(DJo e)
G12 w=- (xeta w*xcsi w + yeta w*ycsi w)/(DJo w)
G12 n=- (xeta n*xcsi n + yeta n*ycsi n)/(DJo n)
G12 s=- (xeta s*xcsi s + yeta s*ycsi s)/(DJo s)

ELSE

G12 e=0
G12 w=0
G12 n=0
G12 s=0

ENDIF

Return
End

```


ESTE PROGRAMA CALCULA UMA MALHA MISTA, Polar E CARTESiana,
 NUMA CAVIDADE QUADRADA com UM FURO CENTRAL. PARA EFEITO DE
 SIMPLiCIDADE apenas UM QUARTO DA MALHA É UTILIZADA. (17.03.98)
 00:38 hs

hoje 12/02/99
 hoje 13/03/99
 hoje 13/03/99
 HOJE 02/04/99
 HOJE 25/07/99
 hoje 02/03/2000
 hoje 31/03/2000

{ Inicio do Programa Multibloco }

Program Multibloco

Implicit Real*4 (A-H,P-Z)

Parameter(Ni=106,Nj=106)

Common/BL1/X(Ni,Nj),Y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
 * Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
 Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,
 * Res,AL,Pi,k,dV,Sf,Sl,NR,NT,WI,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA,
 Data W2/1.0/,k/1.0/,IT1,IT2/1,2/,AL,R,FAT/1.,0.5,0.65/,
 * NITER,NPT/10,20/,MAXIT/2000/,ERRO/5.E-1/,
 * sf,sl,DV/0,0,1/IEXA/0/ALAMBDA/0.675/

Parametros Geométricos

Pi=4.*Atan(1.)

Nx=Ni-60

Ny=Nj-60

Call MALHA(1) ! determina os pontos para a malha combinada

Call ChuteT(IEXA)

NZERO=NPP-NT*NR

NEQ=(Nx*Ny-NZERO)

REQ=SQRT(1.*NEQ); NEQ=IFIX(REQ)

EPS=1E-5

WRITE(*,120)

120 FORMAT(//,20X,'SOLUCAO DO CAMPO DE TEMPERATURA',//,
 *15X,'PARA MALHA COMBINADA : POLAR E CARTESIANA ',//)

WRITE(*,*)NITER,ERRO,VAR1,VAR2

DO WHILE (ERRO.GE.EPS.OR.Res.GE.EPS)

DO WHILE (ERRO.GT.RES)

CALL COEFF(IT1,IEXA) !

Do k=1,NPT; ! Solução da malha polar

Call Tdma(1,1,Tp,1); !

Call Tdma(1,2,Tp,1); !

End Do

CALL COEFF(IT2,IEXA) !

Do k1=1,NPT; ! Solução da malha cartesiana

Call Tdma(2,1,Tc,2); !

Call Tdma(2,2,Tc,2); !

End Do

Call Residuo(1,NT,NR,Tp,Tpo,Erro)

Call Residuo(2,Nx,Ny,Tc,Tco,Erro)

ERRO=AMAX1(VAR1,VAR2)

DO I=1,NT ; DO J=1,NR

Tpo(I,J)=Tp(I,J)

ENDDO;ENDDO

DO I=1,Nx;DO J=1,Ny;Tco(I,J)=Tc(I,J);ENDDO;ENDDO

WRITE(*,*)NITER,ERRO,RES

NITER=NITER+1

END DO !FIM DO WHILE

WRITE(*,7)

7 FORMAT(//)

8 Call EXIT(1,Nx,Ny,1);

Call MALHA(2)

Call EXIT(1,NT,NR,2)

Call EXIT(2,NT,NR,2)

Call EXIT(2,Nx,Ny,1)

Call EXIT(2,NT,NR,2)

CALL ERROMEDIO

Write(*,9)NITER,NT,NR,NX,NY,NEQ

9 FORMAT(// 10X 'O CAMPO DE T CONVERGIU' 1X 'APÓS' 14 2X 'ITERACOES'

```

*/ ,10X,'E UMA MALHA CARTESIANA DE',1X,'MESH ',I3,'X',I3,
*/ ,10X,'COM NEQ =' ,I4,/)
PAUSE
STOP
END      ! {Fim Programa Pricipal }
*****
C Subroutine EXIT(Iout,Ix,Iy,Jset)
C *****
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/BL1/x(Ni,Nj),y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
*      Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,
*      Res,AL,Pi,k,dv,Sf,Sl,NR,NT,WI,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
COMMON/BLEXA/EC(Ni,Nj),Ep(Ni,Nj),SExac(Ni,Nj),SExap(Ni,Nj)
C DIMENSION XJ2(Ni,Nj),YJ2(Ni,Nj),TJ2(Ni,Nj)
C INTEGER IC,JK
! ABERTURA DE ARQUIVO PARA MALHA
OBTENÇÃO DOS PONTOS DA FRONTEIRA SUL DA MALHA CARTESIANA
IF(Iout.Eq.1)THEN ! IF DE SAIDA P/ MALHA OU TEMPERATURA
OPEN(UNIT=5,file='C:\MBCC1\MBC.DAT',STATUS='unknown')
IF(JSET.Eq.1)THEN ! IF P/MALHA CARTESIANA
DO 4 I=1,Ix ; DO 3 J=1,Iy
IF(Iplot(i,j).eq.1)THEN
WRITE(5,*)X(I,J),Y(I,J)
ELSE
ENDIF
3 CONTINUE
WRITE(5,61)
4 CONTINUE
DO 7 J=1,Iy ; DO 6 I=1,Ix
IF(Iplot(i,j).eq.1)THEN
WRITE(5,*)X(I,J),Y(I,J)
ELSE
ENDIF
6 CONTINUE
WRITE(5,61)
7 CONTINUE
ELSE ! IF P/MALHA POLAR
OPEN(UNIT=5,File='C:\MBCC1\MBR.DAT',STATUS='unknown')
DO 14 I=1,Ix ; DO 13 J=1,Iy
WRITE(5,*)Xp(I,J),Yp(I,J)
13 CONTINUE
WRITE(5,61)
14 CONTINUE
DO 17 J=1,Iy ; DO 16 I=1,Ix
WRITE(5,*)Xp(I,J),Yp(I,J)
16 CONTINUE
WRITE(5,61)
17 CONTINUE
61 FORMAT(/)
OPEN(UNIT=5,File='C:\SURFER\MB\TADR.DAT',STATUS='unknown')
DO J=1,Iy ; DO I=1,Ix
WRITE(5,*)Xp(i,j),Yp(i,j),Tp(i,j)
ENDDO
WRITE(5,64)
ENDDO
64 FORMAT(/)
ENDIF ! FIM DE JSET PARA MALHA
ELSE ! ELSE-IF DO IOUT
IF(JSET.Eq.1)THEN ! IF DA TEMPERATURA
WRITE(5,9) ! ABERTURA DE ARQUIVO PARA TEMPERATURA
9 Format(//,20X,'CAMPO DE TEMPERATURA NA MALHA CARTESIANA',/)
OPEN(UNIT=5,FILE='C:\SURFER\MB\TADC.DAT',STATUS='unknown')
DO J=1,Iy ; DO I=Ix,1,-1
IF(Iplot(i,j).EQ.1)then
IF(I==J) THEN I=J
WRITE(5,*)X(i,j),Y(i,j),Tc(i,j)
ELSE ; ENDIF ; ENDDO
WRITE(5,25) ; ENDDO
DO I=1,Ix ; DO J=1,Iy
IF(Iplot(i,j).EQ.1)then
IF(J==I) THEN J=I

```

```

WRITE(5,25) ; ENDDO
25  FORMAT(/)
DO I=1,I2
DO J=1,J2
Dxy=SQRT(X(I,J)**2+Y(I,J)**2)
IF( Dxy <= Rp(NR) )THEN
TC(I,J)=0.0
ELSE
ENDIF
ENDDO; ENDDO
ELSE
OPEN(UNIT=5,file='C:\MBCC1\T.DAT',STATUS='unknown')
Im=(NT+1)/2
DELTAT=ABS( SExap(Im,1) - SExac(Nx,Ny) )
ERRO NA LINHA J=2
DO 37 Ir=NT,1,-1 ! OBSERVAR ALTERACAO DE VALOR QUANDO SE FAZ NR+1.
Jr=2
Pcos1=Exp(-Alambda*Xp(Ir,Jr))*COS(Alambda*Yp(Ir,Jr))
Pcos2=Exp(-Alambda*Yp(Ir,Jr))*COS(Alambda*Xp(Ir,Jr))
SExap(Ir,Jr)=(Pcos1+Pcos2)/2
Ang=(Ir-1)*d_TETA
WRITE(5,*)Xp(Ir,Jr),Tp(Ir,Jr)
37 CONTINUE
DELTAT=ABS( SExap(Im,1) - SExac(Nx,Ny) )
OPEN(UNIT=5,file='C:\MBCC1\TLCexa.DAT',STATUS='UNKNOWN')
TEMPERATURA NA LINHA DE CENTRO DA MALHA combinada
DO 38 J=1,NR ! OBSERVAR ALTERACAO DE VALOR QUANDO SE FAZ NR+1.
Pcos1=Exp(-Alambda*Xp(Im,J))*COS(Alambda*Yp(Im,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*Yp(Im,J))*COS(Alambda*Xp(Im,J))
SExap(Im,J)=(Pcos1+Pcos2)/2
WRITE(5,*)Xp(Im,J),SExap(Im,J)
38 CONTINUE
DO 39 Jk=1,NX
ds=SQRT( x(jk,jk)**2+y(jk,jk)**2 )
IF( ds >= Rp(NR-1) )THEN
Pcos1=Exp(-Alambda*X(Jk,Jk))*COS(Alambda*Y(Jk,Jk))
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(Jk,Jk))*COS(Alambda*X(Jk,Jk))
SExac(Jk,Jk)=(Pcos1+Pcos2)/2
WRITE(5,*)X(Jk,Jk),SExac(Jk,Jk)
ELSE
ENDIF
39 Continue
OPEN(UNIT=5,file='C:\MBCC1\TLC.DAT',STATUS='REPLACE')
TEMPERATURA NA LINHA DE CENTRO DA MALHA combinada
Im=(NT+1)/2
DO J=1,NR ! OBSERVAR ALTERACAO DE VALOR QUANDO SE FAZ NR+1.
WRITE(5,*)Xp(Im,J),Tp(Im,J)
ENDDO
DO Jk=1,NX
IF( X(Jk,Jk) > XP(Im,NR) )THEN
WRITE(5,*)X(Jk,Jk),TC(Jk,Jk)
ELSE
ENDIF
ENDDO

ENDIF ! FIM DO JSET P/ TEMPERATURA
ENDIF !FIM DO IOUT
RETURN
END
*****
SUBROUTINE ERROMEDIO
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/BL1/x(Ni,Nj),y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
* Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,
* Res,AL,Pi,k,dV,Sf,Sl,NR,NT,W1,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
COMMON/BLEXA/EC(Ni,Nj),Ep(Ni,Nj),SExac(Ni,Nj),SExap(Ni,Nj)
*****
SOMAp=0;SOMAc=0
DO J=2,NR-1; DO I=2,NT-1
Pcos1=Exp(-Alambda*XP(I,J))*COS(Alambda*YP(I,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*YP(I,J))*COS(Alambda*XP(I,J))
SExap(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2
Ep(I,J)=ABS(Tp(I,J)-SExap(I,J))!/Tp(I,J)_3

```

```

SOMAp=SOMAp+Ep(I,J)
ENDDO;ENDDO
DO J=2,Ny-1; DO I=2,Nx-1
Dxy=SQRT(X(I,J)**2+Y(I,J)**2)
IF( Dxy <= Rp(NR-1) )THEN
  TC(I,J)=0.0
  Ec(i,j)=0.
  Goto 23
Else
Pcos1=Exp(-Alambda*X(I,J))*COS(Alambda*Y(I,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(I,J))*COS(Alambda*X(I,J))
SExac(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2
Ec(I,J)=ABS( Tc(I,J)-SExac(I,J) )!/Tc(I,J)
23 SOMAc=SOMAc+Ec(I,J)
  EndIF
ENDDO; ENDDO
NZERO=NPP-NT*NR
NEQP=Nx*Ny-NZERO
EMEDIO=(SOMAp+SOMAc)/NEQP
REQ=SQRT(1.*NEQP)
DMESH=1/REQ ! MESH DA MALHA
WRITE(*,24)EMEDIO,REQ,DMESH
24 FORMAT(/,10X,'EMEDIO=',1X,E9.4,1X,'REQ=',1X,E9.4,1X,'DMESH=',E9.4)
RETURN
END
*****
SUBROUTINE MALHA(IMT)
*****
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/BL1/X(Ni,Nj),Y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
* Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,
* Res,AL,Pi,k,dV,Sf,Sl,NR,NT,W1,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
Integer Ip,Jp

IF(IMT.EQ.1)THEN

DY=AL/(Ny-1)
DX=AL/(Nx-1)
C MALHA RETANGULAR INICIAL (CHUTE)
C FRONTEIRA OESTE
DO J=1,Ny
  Y(1,J)=(J-1)*DY;X(1,J)=0.0
ENDDO
C FRONTEIRA LESTE
DO J=1,Ny
  X(Ny,J)=AL;Y(Nx,J)=(J-1)*DY
ENDDO
C FRONTEIRA SUL
DO I=1,Nx
  X(I,1)=(I-1)*DX ;Y(I,1)=0
C FRONTEIRA NORTE
  X(I,Ny)=(I-1)*DX ;Y(I,Ny)=AL
ENDDO
C PONTOS INTERIORES
DO 76 J=2,Ny-1 ; DO 76 I=2,Nx-1
  X(I,J)=X(I-1,J-1)+DY
  Y(I,J)=Y(I-1,J-1)+DX
76 CONTINUE
! OBTENÇÃO DOS PONTOS DA FRONTEIRA SUL DA MALHA CARTESIANA
DR=DX
R_LIM=FAT*(AL-R)+R
NDR=IFIX((R_LIM-R)/DR)
NR=NDR+1 ; Ro=R+NDR*DR
C Ro=R_LIM-DR
NDT=IFIX(Ro*PI/(2*DR))
NT=NDT+1
IF( MOD(NT,2)==0 )THEN
NT=NT+1
ELSE
ENDIF
D_TETA=(PI/2)/(NT-1)
kR=(Ro/DX); I2=kR+2 ; J2=I2

```

```

Do ip=1,NT
Ang=(ip-1.)*d_TETA
Do jp=1,NR+1
Rp(jp)=( R+(jp-1)*DR )
Xp(ip,jp)=ABS(Rp(jp)*CoS(Ang))
Yp(ip,jp)=ABS(Rp(jp)*SiN(Ang))
Xp(NT,jp)=0.; Yp(1,jp)=0.
Enddo
Enddo
DO J=1,Ny
DO I=1,Nx
Dl=sqrt( x(i,j)**2 + y(i,j)**2 )
IF( Dl >= Rp(NR-1) )Then
  Iplot(i,j)=1
Else
  IF( Dl < Rp(NR-1) )Then
    Iplot(i,j)=0
    npp=npp+1
  endif
endif
ENDDO
ENDDO
ELSE ! Impressão da Malha Polar

Do Ip=1,NT
Do Jp=1,NR+1
AngP=(Ip-1.)*d_TETA
xP(Ip,Jp)=ABS( (R+(Jp-1)*DR)*COS(AngP) )
yP(Ip,Jp)=ABS( (R+(Jp-1)*DR)*SIN(AngP) )
xP(NT,Jp)=0.
yP(1,Jp)=0.
Enddo
Enddo

ENDIF
RETURN
END
*****
Subroutine Residuo(IPLUG,Nk,Mk,T,To,Erro)
*****
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,
* Res,AL,Pi,k,dV,Sf,Sl,NR,NT,WI,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
Common/Coefi/ap(Ni,Nj),an(Ni,Nj),as(Ni,Nj),ae(Ni,Nj),aw(Ni,Nj),
* s(Ni,Nj),ane(Ni,Nj),anw(Ni,Nj),ase(Ni,Nj),asw(Ni,Nj)
Common/BL1/X(Ni,Nj),Y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
* Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
INTRINSIC Exp,Cos,Sin
DIMENSION T(Ni,Nj),To(Ni,Nj),DT(Ni,Nj)
*****
***** CÁLCULO DO Residuo PARA O CAMPO DE TEMPERATURA.
Errol=0.0 !EPS
Res0=0.
DO 300 i=2,Nk-1
DO 300 j=2,Mk-1
Res=an(i,j)*T(i,j+1)+as(i,j)*T(i,j-1)+ ae(i,j)*T(i+1,j)+
*aw(i,j)*T(i-1,j)+anw(i,j)*T(i-1,j+1)+ane(i,j)*T(i+1,j+1)+
*asw(i,j)*T(i-1,j-1)+ase(i,j)*T(i+1,j-1)+S(i,j)-ap(i,j)*T(i,j)
RES=SQRT(RES*RES)
IF(RES.GE.RES0)RES0=RES
300 CONTINUE
DO 45 i=2,Nk-1
DO 45 j=2,Mk-1
DT(I,J)=ABS( ( T(i,j) - To(i,j) )/T(i,j) )
IF(DT(I,J).GE.ERROL)THEN
  ERROL=DT(I,J)
  Erro=Errol
ELSE
  ENDF
45 CONTINUE
DO 22 i=1,Nk ! Atualizacao de T.
DO 22 j=1,Mk

```

```

IF (IPLUG.EQ.1) THEN
VAR1=ERRO
ELSE
VAR2=ERRO
ENDIF
RETURN
END
*****
Subroutine ChuteT(ICCEXA)
*****
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/BL1/x(Ni,Nj),y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
* Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,
* Res,AL,Pi,k,dV,Sf,Sl,NR,NT,WI,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
COMMON/BLEXA/Ec(Ni,Nj),Ep(Ni,Nj),SExac(Ni,Nj),SExap(Ni,Nj)
Integer i,j
do i=1,Nx
do j=1,Ny
Tc(i,j)=0.0 ; Tco(i,j)=Tc(i,j)
end do
end do
do io=1,NT
do jo=1,NR+1
Tp(io,jo)=1.0 ; Tpo(io,jo)=Tp(io,jo)
end do
end do
*****
IF(ICCEXA.EQ.1) THEN !ESCOLHA DA CONDIÇÃO DE CONTORNO
*****
DO I=1,Nx ;DO J=1,Ny,Ny-1;
Pcos1=Exp(-Alambda*X(I,J))*COS(Alambda*Y(I,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(I,J))*COS(Alambda*X(I,J))
SExac(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2 ; Tc(I,J)=SExac(I,J)
ENDDO; ENDDO
DO J=1,Ny; DO I=1,Nx,Nx-1
Pcos1=Exp(-Alambda*X(I,J))*COS(Alambda*Y(I,J))
Pcos2=Exp(-Alambda*Y(I,J))*COS(Alambda*X(I,J))
SExac(I,J)=(Pcos1+Pcos2)/2 ; Tc(I,J)=SExac(I,J)
ENDDO; ENDDO
DO Io=1,NT; DO Jo=1,NR+1
Pcos1=Exp(-Alambda*XP(Io,Jo))*COS(Alambda*YP(Io,Jo))
Pcos2=Exp(-Alambda*YP(Io,Jo))*COS(Alambda*XP(Io,Jo))
SExap(Io,Jo)=(Pcos1+Pcos2)/2 ; Tp(Io,Jo)=SExap(Io,Jo)
ENDDO; ENDDO
ELSE
ENDIF
Return
End
*****
Subroutine Interpola(ik,im,k,m,Tpp,Tcc,INI)
*****
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/Fatores/x1,x2,y1,y2,r1,r2,teta1,teta2,ix1,jx1
Common/Coeffi/ap(Ni,Nj),an(Ni,Nj),as(Ni,Nj),ae(Ni,Nj),aw(Ni,Nj),
* s(Ni,Nj),ane(Ni,Nj),anw(Ni,Nj),ase(Ni,Nj),asw(Ni,Nj)
Dimension Tpp(Ni,Nj),Tcc(Ni,Nj)
Common Sp(Ni,NJ),app(Ni,Nj)
Integer k,m

if(INI.eq.1)then
Tpp(Ik,Im)=((Tcc(k,m)*x1+Tcc(k+1,m)*x2)*y1
* + (Tcc(k,m+1)*x1+Tcc(k+1,m+1)*x2)*y2)/
* ((x1+x2)*(y1+y2))
else
Tcc(Ik,Im)=((Tpp(k,m)*r1+Tpp(k+1,m)*r2)*teta1
* + (Tpp(k,m+1)*r1+Tpp(k+1,m+1)*r2)*teta2)/
* ((r1+r2)*(teta1+teta2))
ENDIF
Return
End
*****
Subroutine Traco(m,n,isim)

```

```

Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/BL1/x(Ni,Nj),y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
*   Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,
*   Res,AL,Pi,k,dV,Sf,Sl,NR,NT,WI,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
Common/Fatores/x1,x2,y1,y2,r1,r2,tetal,teta2,ix1,jx1
Integer i,j,m,n,isim
i=m ; j=n
Dxy=sqrt( x(i,j)**2 + y(i,j)**2 )
IF( Dxy >= Rp(NR-1).and. Dxy < Rp(NR) ) then
  If(x(i,j).eq.0) then
    ang_C=Pi/2
  else
    ang_C=atan( y(i,j)/x(i,j) )
  ENDIF
  jr=ifix((dxy-R)/DR)+1
  ir=ifix(ang_C/D_Teta)+1
  Teta_P=(ir-1)*d_teta
  Rp(jr)=(R+(jr-1)*DR)
  dPolar=sqrt( Xp(ir,jr)**2+Yp(ir,jr)**2 )
  r1=abs(dxy-dPolar) ; r2=(DR-r1)
  tetal=abs(ang_C-Teta_P)
  teta2=(D_Teta-tetal)
  isim=1 ; ix1=ir ; jx1=jr
ELSE
  isim=0
ENDIF
Return
End
*****
Subroutine Fator(l,m,p,q)
*****
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/BL1/x(Ni,Nj),y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
*   Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
Common/Fatores/x1,x2,y1,y2,r1,r2,tetal,teta2,ix1,jx1
Common/Deltas/xo,yo,xa,ya,xb,yb
Integer p,q,l,m

  xo=Xp(p,q) ; yo=Yp(p,q) ; xa=x(l,m)
  xb=x(l+1,m) ; ya=y(l,m) ; yb=y(l,m+1)
  Cálculo dos Fatores

  x1=abs(xo-xa) ; x2=abs(xb-xo)
  y1=abs(yo-ya) ; y2=abs(yb-yo)
  Return
End
*****
SUBROUTINE POLO (m,n)
*****
Parameter(Ni=106,Nj=106)
Common/BL1/x(Ni,Nj),y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
*   Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,,
*   Res,AL,Pi,k,dV,Sf,Sl,NR,NT,WI,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
INTEGER m,n
Pi=4.*Atan(1.)
DC2 = SQRT( X(m,n)**2+Y(m,n)**2 )
IF( X(m,n)==0 ) THEN
  Ang_C=Pi/2
ELSE
  Ang_C= Atan( Y(m,n)/X(m,n) )
ENDIF
IF( Ang_C == 0 ) then
  m=m
ELSE
  IF( Ang_C==Pi/2.and.DC2==Yp(NT,NR+1) ) THEN
    n=n-1
  ELSE
    ENDIF
ENDIF
Return

```

```

!   ROTINA Translação
!   *****
!   SUBROUTINE Trans(m,CHAVE,iFlat)
!   *****
      INTEGER m, chave, IFLAT
      IF (Chave==1.and.IFlat/=1) THEN
        m=m+1
      ELSE
        ENDIF
      RETURN
      END
!   *****
!   ROTINA COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DISCRETIZADA
!   *****
      Subroutine COEFF(LAP, ICCEXA)
!   *****
      Parameter (Ni=106, Nj=106)
      Common/BL1/x(Ni,Nj), y(Ni,Nj), Tc(Ni,Nj), Tco(Ni,Nj), Iplot(Ni,Nj),
*      Xp(Ni,Nj), Yp(Ni,Nj), Rp(Ni), Tp(Ni,Nj), Tpo(Ni,Nj)
      Common/Geo/I2, J2, DR, d_teta, dx, dy, R, Ro, NITER, VAR1, VAR2, npp,,
*      Res, AL, Pi, k, dV, Sf, Sl, NR, NT, WI, W2, FAT, Nx, Ny, ALAMBDA
      Common/Coeff/ap(Ni,Nj), an(Ni,Nj), as(Ni,Nj), ae(Ni,Nj), aw(Ni,Nj),
*      s(Ni,Nj), ane(Ni,Nj), anw(Ni,Nj), ase(Ni,Nj), asw(Ni,Nj)
      Common/Fatores/x1,x2,y1,y2,r1,r2,teta1,teta2,ix1,jx1
      Common/Deltas/xo,yo,xa,ya,xb,yb
      Common Sp(Ni,Nj), app(Ni,Nj)
      LOGICAL COM1, COM2
      Integer i,j,ip,jp,sim
!   ESCOLHA POR QUAL DAS MALHAS SE INICIA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES
      IF (LAP.EQ.1) THEN
!   MONTAGEM DOS COEFICIENTES PARA SOLUÇÃO do CAMPO DE
!   TEMPERATURAS NA MALHA POLAR(r,teta)
        do 10 i=2, NT-1
          do 10 j=2, NR
!   ----- CÁLCULO DOS COEFICIENTES NOS PONTOS INTERNOS
c      Teta_Po=(I-1)*D_TETA ! ANGULO POLAR
          as(i,j) = k*( Rp(j)-DR/2 ) *D_Teta/DR
          an(i,j) = k*( Rp(j)+DR/2 ) *D_Teta/DR
          aw(i,j) = k*DR/( Rp(j)*D_Teta )
          ae(i,j) = aw(i,j)
          ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
          ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0. ;
          Sp(i,j)= (sf/k) *dV
          app(i,j)= aw(i,j)+ae(i,j)+as(i,j)+an(i,j)-(sl/k)*dV
10      Continue
          IF (ICCEXA.EQ.1) THEN
            DO I=1, NT, NT-1 ; DO J=2, NR+1
              AS(I,J)=0; AN(I,J)=0; AE(I,J)=0; AW(I,J)=0
              ANW(I,J)=0; ANE(I,J)=0; ASE(I,J)=0; ASW(I,J)=0
              App(I,J)=1; Sp(I,J)=Tp(I,J); ENDDO; ENDDO
            ELSE
!   ----- CÁLCULO DOS COEFICIENTES NAS FRONTEIRAS -----
              Do 20 i=1, NT, NT-1

                Do 20 j=2, NR
!   ----- FRONTEIRA OESTE ( Ip=1 ) -----
!   IF (I.EQ.1) THEN
                    as(i,j) = K*( Rp(J)-DR/2 ) * (D_TETA/2.) /DR
                    an(i,j) = K*( Rp(J)+DR/2 ) * (D_TETA/2.) /DR
                    ae(i,j) = K*DR/( Rp(J)*D_TETA )
                    aw(i,j)=0 ;
                    ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0. ; ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
                    Sp(i,j)= 0.
                    app(i,j) = ae(i,j)+as(i,j)+an(i,j)

c      CANTO INFERIOR ESQUERDO
                    ane(1,2)= 0. ; anw(1,2)= 0. ; ase(1,2)= 0. ; asw(1,2)= 0.
                    ae(1,2) = 0.
                    as(1,2) = 0.
c      as(1,2) = K*( Rp(2)-DR/2 ) *D_TETA/2*DR
                    aw(1,2) = k*DR/2*D_TETA*( Rp(2) )
                    an(1,2) = K*( Rp(2)+DR/2 ) *D_TETA/2*DR
                    Sp(1,2) = K*( Rp(2)-DR/2 ) *D_TETA*TP(1,1) /2*DR

```

```

app(1,2)= aW(1,2)+aN(1,2)+aS(1,2)
CANTO INFERIOR DIREITO
ane(1,NR)= 0. ; anw(1,NR)= 0.;
ase(1,NR)= 0. ; asw(1,NR)= 0.
as(1,NR) = K*( Rp(NR)-DR/2 )*D_TETA/2*DR
aw(1,NR) = k*DR/2*D_TETA*( Rp(NR) )
an(1,NR) = 0.
ae(1,NR) = 0.
Sp(1,NR) = Sp(1,2)
app(1,NR)= aW(1,NR)+aS(1,NR)+aN(1,NR)
----- FRONTEIRA LESTE (Ip=NT) -----
ELSE
an(i,j) = K*( Rp(J)+DR/2 )*(D_TETA/2.)/DR
as(i,j) = K*( Rp(J)-DR/2 )*(D_TETA/2.)/DR
aw(i,j) = K*DR/( Rp(J)*D_TETA )
ae(i,j) = 0.
ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0. ; ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
Sp(i,j) = 0.
app(i,j)= ae(i,j)+an(i,j)+as(i,j)
Endif
20 Continue
CANTO VERTICAL INFERIOR
ane(NT,2)= 0. ; anw(NT,2)= 0.; ase(NT,2)= 0. ; asw(NT,2)= 0.
aw(NT,2) = 0.
as(NT,2) = 0.
ae(NT,2) = K*DR/2*( Rp(2)*D_TETA )
an(NT,2) = K*( Rp(2)+DR/2 )*D_TETA/2.*DR
Sp(NT,2) = Sp(1,2)
app(NT,2)= ae(NT,2)+an(NT,2) !+as(NT,2)
CANTO VERTICAL SUPERIOR
ane(NT,NR)= 0. ; anw(NT,NR)= 0.; ase(NT,NR)= 0.
as(NT,NR) = K*( Rp(NR)-DR/2 )*D_TETA/2.*DR
ae(NT,NR) = K*DR/2*( Rp(NR)*D_TETA )
an(NT,NR) = 0.
aw(NT,NR) = 0.
asw(NT,NR)= 0.
Sp(NT,NR) = Sp(1,2)
app(NT,NR)= ae(NT,NR)+aS(NT,NR) !+aN(NT,NR)

ENDIF ! FIM DO CICLO PARA ICCEXA
FRONTEIRA SUL
DO i=1,NT
j=1
an(i,j) = 0. ; as(i,j) = 0. ; ae(i,j) = 0.
aw(i,j) = 0. ; ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
app(i,j) = 1. ; Sp(i,j)= TP(I,J)
ENDDO
! ----- FRONTEIRA NORTE -----
jp=NR+1
ip=1
DO While( ip <= NT )
DO 34 J=1,J2
DO 33 I=I2,1,-1
Interseção entre as mALhas, interior da mALha cartesiana
DIST = SQRT( x(I,J)**2+y(I,J)**2 )
IF( Dist>=(Rp(NR)-DR/2) .AND. Dist<= Rp(NR+1) )THEN ! VELHO
CALL FATOR(i,j,ip,jp)
COMP1=( Xo>=Xa .AND. Xo<=Xb );
COMP2=( Yo>=Ya .AND. Yo <=Yb )
IF( COMP1.AND.COMP2 )THEN
Call Interpola(ip,jp,i,j,Tp,Tc,1)
an(IP,JP) = 0. ; as(IP,JP) = 0. ; ae(IP,JP) = 0.
aw(IP,JP) = 0. ; ane(IP,JP)= 0. ; anw(IP,JP)= 0.
ase(IP,JP)= 0. ; asw(IP,JP)= 0.
Sp(IP,JP)= Tp(IP,JP)
app(IP,JP) = 1.
ip=ip+1
CALL FATOR(i,j,ip,jp)
IF(Yo<Yb)THEN
Call Interpola(ip,jp,i,j,Tp,Tc,1)
an(IP,JP) = 0. ; as(IP,JP) = 0. ; ae(IP,JP) = 0.
aw(IP,JP) = 0. ; ane(IP,JP)= 0. ; ganw(IP,JP)= 0.

```

```

ase(IP,JP)= 0. ; asw(IP,JP)= 0.
Sp(IP,JP)= Tp(IP,JP)
app(IP,JP) = 1.
ip=ip+1
ELSE
ENDIF
ELSE
ENDIF
ENDIF
IF(ip>NT)goto 35
33 Continue
34 Continue
C 35 ENDDO
35 CONTINUE
*****
C MONTAGEM DOS COEFICIENTES PARA SOLUÇÃO do CAMPO DE
C TEMPERATURAS DA MALHA CARTESIANa(X,Y)
ELSE
do 100 i=2,Nx-1
do 100 j=2,Ny-1
an(i,j) = dx/(2*dy) ; as(i,j) = dx/(2*dy)
ae(i,j) = dy/(2*dx) ; aw(i,j) = dy/(2*dx)
ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
S(i,j) = (sf/k)*dx*dy
ap(i,j) = aw(i,j)+ae(i,j)+as(i,j)+an(i,j)-(sl/k)*dx*dy
100 continue
C ----- CÁLCULO DOS COEFICIENTES Nas FRONTEIRas -----
C ----- Fronteira OESTE (I=1)-----
do 101 j=j2-1,NY-1
do 101 j=j2,NY-1
IF(ICCEXA.EQ.1)THEN
DO J=1,Ny; I=1
an(i,j) = 0. ; as(i,j) = 0. ; ae(i,j) = 0.
aw(i,j) = 0. ; ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
S(i,j) = TC(I,J) ; ap(i,j)= 1. ; ENDDO
DO I=1,Nx; J=1
an(i,j) = 0. ; as(i,j) = 0. ; ae(i,j) = 0.
aw(i,j) = 0. ; ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
S(i,j) = TC(I,J) ; ap(i,j)= 1. ; ENDDO
else
do 101 j=1,NY-1
i=1
an(i,j) = dx/(2*dy)
as(i,j) = dx/(2*dy)
ae(i,j) = dy/dx
aw(i,j) = 0. ; ane(i,j)= 0. ; ane(i,j)= 0.
ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0. ;
S(i,j)= 0.
ap(i,j)= ae(i,j)+as(i,j)+an(i,j)
101 continue
C ----- Fronteira OESTE (J=1)-----
do 102 i=1,Nx-1 ; j=1
an(i,j) = dx/dy
ae(i,j) = dy/(2*dx)
aw(i,j) = dy/(2*dx)
ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0. ; ase(i,j)= 0.
asw(i,j)= 0. ; as(i,j) = 0. ;
S(i,j)= 0.
ap(i,j)= aw(i,j)+ae(i,j)+an(i,j)
102 continue
Endif
IF(ICCEXA.EQ.1)GOTO 22
C CANTO SUPERIOR ESQUERDO
an(1,j2) = dx/(2*dy)
C as(1,j2) = dx/(2*( y(1,J2)-xp(NT,NR-1) ) )
C S(1,j2) = dx*TP(NT,NR-1)/(2*( y(1,J2)-xp(NT,NR-1) ) )
ae(1,j2) = dy/(2*dx)
aw(1,j2)= 0. ; ane(1,j2)= 0. ; ane(1,j2)= 0.
ase(1,j2)= 0. ; asw(i,j)= 0. ;
S(1,j2)= Sp(NT,2)

```

```

ap(1,j2)= ae(1,j2)+as(1,j2)+an(1,j2)
CANTO INFERIOR DIREITO
an(i2,1) = dx/(2*dy)
ae(i2,1) = dy/2*dx
aw(i2,1) = dy/2*dx
ane(i2,1)= 0. ; anw(i2,1)= 0. ; ase(i2,1)= 0.
asw(i2,1)= 0. ; as(i,j) = 0. ;
S(i2,1)=Sp(NT,2)
S(i2,1)= dy*TP(1,NR-1)/(2*( x(i2,1)-xp(1,NR-1) ) )
ap(i2,1)= aw(i2,1)+ae(i2,1)+an(i2,1)
----- FRONTEIRA NORTE -----
22  do 103 i=1,Nx ; j=Ny
    an(i,j) = 0. ; as(i,j) = 0. ; ae(i,j) = 0.
    aw(i,j) = 0. ; ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
    ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
    S(i,j) = TC(I,J) ; ap(i,j)= 1.
103 continue

do 104 j=1,Ny ; i=Nx
    an(i,j) = 0. ; as(i,j) = 0. ; ae(i,j) = 0.
    aw(i,j) = 0. ; ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.
    ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
    S(i,j) = TC(I,J) ; ap(i,j)= 1.
104 continue
----- Fronteira Sul DA MALHA CARTESIANA -----
Interseção entre as Malhas, Interior da Malha Polar
Do 105 ii=I2,2,-1
  Do 105 jj=2,J2
Do 105 ii=I2,1,-1  ANTES
  Do 105 jj=1,J2
    Call Traco(ii,jj,sim)
    IF(sim.eq.1)then
      Call Interpola(ii,jj,ix1,jx1,Tp,Tc,2)
      an(ii,jj) = 0.; as(ii,jj) = 0.; ae(ii,jj) = 0.; aw(ii,jj) = 0.
      ane(ii,jj)= 0.; anw(ii,jj)= 0.; ase(ii,jj)= 0.; asw(ii,jj)= 0.
      S(ii,jj) = Tc(ii,jj)
      ap(ii,jj)= 1.
    Else
      ENDIF
105 continue
do i=1,i2-1
do i=1,i2-2
do j=1
  an(i,j) = 0. ; as(i,j) = 0. ; ae(i,j) = 0. ; aw(i,j) = 0.
  ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0. ; ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
  S(i,j) = 1. ; ap(i,j)= 1.
  enddo
do j=1,j2-1
do j=1,j2-2
  i=1
  an(i,j) = 0. ; as(i,j) = 0.; ae(i,j) = 0. ; aw(i,j) = 0.
  ane(i,j)= 0. ; anw(i,j)= 0.; ase(i,j)= 0. ; asw(i,j)= 0.
  S(i,j) = 1. ; ap(i,j)= 1.
  enddo
FIM DA MALHA CARTESIANA
ENDIF
----- SOBRERELAXAÇÃO DOS coeficientes -----
IF(LAP.Eq.1)THEN
  DO 106 j=1,NR+1
  DO 106 i=1,NT
    app(i,j)= app(i,j)/w2
    Sp(i,j)= Sp(i,j)+(1.-w2)*app(i,j)*Tp(i,j)
106 Continue
  ELSE
    DO 107 j=1,Ny
    DO 107 i=1,Nx
      ap(i,j)= ap(i,j)/w2
      S(i,j)= S(i,j)+(1.-w2)*ap(i,j)*Tc(i,j)
107 Continue
    ENDIF
  Return
End
*****
Subroutine Tdma(ISOLVE,LDV,Phi,kapa)11

```

Parameter (Ni=106,Nj=106)

```

Common/BL1/x(Ni,Nj),y(Ni,Nj),Tc(Ni,Nj),Tco(Ni,Nj),Iplot(Ni,Nj),
*   Xp(Ni,Nj),Yp(Ni,Nj),Rp(Ni),Tp(Ni,Nj),Tpo(Ni,Nj)
Common/Geo/I2,J2,DR,d_teta,dx,dy,R,Ro,NITER,VAR1,VAR2,npp,,
*   Res,AL,Pi,k,dv,Sf,Sl,NR,NT,WI,W2,FAT,Nx,Ny,ALAMBDA
Common/Coeffi/ap(Ni,Nj),an(Ni,Nj),as(Ni,Nj),ae(Ni,Nj),aw(Ni,Nj),
*   s(Ni,Nj),ane(Ni,Nj),anw(Ni,Nj),ase(Ni,Nj),asw(Ni,Nj)
Common Sp(Ni,Nj),app(Ni,Nj)

```

Dimension Phi(Ni,Nj),A(Ni),B(Ni),C(Ni),D(Ni),P(Ni),Q(Ni)

Integer i,j

```

IF(ISOLVE.EQ.1) THEN
GoTo(10,11)LDV
10 JFST=1 ; JFiN=NR+1 ; Lapj=1
GO To 14
11 JFST=NR+1 ; JFiN=1 ; Lapj=-1
14 IFiN=NT ; KF=1
GO To 41

```

ELSE

```

GoTo(15,17)LDV
15 JFST=1 ; JFiN=Ny ; Lapj=1
GO To 18
17 JFST=Ny ; JFiN=1 ; Lapj=-1
18 IFiN=Nx
KF=1

```

ENDIF

```

41 DO 300 j=JFST,JFiN,Lapj
jMAX=MAX0(JFST,JFiN)
DO 310 i=1,IFiN

```

IF(KAPA==1) THEN !COEFICIENTES PARA MALHA POLAR

IF(I /= 1 .AND. I/= NT) Then

A(i)=KF*app(i,j)+(1-KF)*app(j,i);

B(i)=KF*ae(i,j)+(1-KF)*ae(j,i)

C(i)=KF*aw(i,j)+(1-KF)*aw(j,i)

Else

if(i==1)then

A(i)=KF*app(i,j)+(1-KF)*app(j,i)

B(i)=KF*ae(i,j)+(1-KF)*ae(j,i)

C(i)=0

else

A(i)=KF*app(i,j)+(1-KF)*app(j,i);

C(i)=0

C(i)=KF*aw(i,j)+(1-KF)*ae(j,i)

B(i)=KF*aw(i,j)+(1-KF)*ae(j,i)

endif

Endif

```

IF(j.EQ.1)D(i)=KF*( an(i,j)*Phi(i,j+1)+Sp(i,j)
*   + ane(i,j)*Phi(i-1,j+1)+anw(i,j)*Phi(i+1,j+1) )
*   +(1-KF)*( ae(j,i)*Phi(j+1,i)+Sp(j,i) )

```

```

IF(j.NE.1.OR.j.NE.JMAX)D(i)=KF*( an(i,j)*Phi(i,j+1)+
*   as(i,j)*Phi(i,j-1)+Sp(i,j)+anw(i,j)*Phi(i+1,j+1)+
*   ane(i,j)*Phi(i-1,j+1)+asw(i,j)*Phi(i+1,j-1)+
*   ase(i,j)*Phi(i-1,j-1) )+
*   (1-KF)*( ae(j,i)*Phi(j+1,i)+aw(j,i)*Phi(j-1,i)+Sp(j,i) )

```

```

IF(j.EQ.JMAX)D(i)=KF*( as(i,j)*Phi(i,j-1)+Sp(i,j)
*   +anw(i,j)*Phi(i+1,j-1)+ase(i,j)*Phi(i-1,j-1) )
*   +(1-KF)*( aw(j,i)*Phi(j-1,i)+Sp(j,i) )

```

COEFICIENTES PARA MALHA CARTESIANA

ELSE

A(i)=KF*ap(i,j)+(1-KF)*ap(j,i);

B(i)=KF*ae(i,j)+(1-KF)*an(j,i)

C(i)=KF*aw(i,j)+(1-KF)*as(j,i)

IF(j.EQ.1)D(i)=KF*(an(i,j)*Phi(i,j+1)+S(i,j)

```

*      + anw(i,j)*Phi(i-1,j+1)+ane(i,j)*Phi(i+1,j+1) )
*      +(1-KF)*( ae(j,i)*Phi(j+1,i)+S(j,i) )

IF(j.EQ.JMAX)D(i)=KF*( aw(i,j)*Phi(i,j-1)+S(i,j)
*      +asw(i,j)*Phi(i-1,j-1)+ase(i,j)*Phi(i+1,j-1) )
*      +(1-KF)*( aw(j,i)*Phi(j-1,i)+S(j,i) )

IF(j.NE.1.OR.j.NE.JMAX)D(i)=KF*( an(i,j)*Phi(i,j+1)+
*      as(i,j)*Phi(i,j-1)+S(i,j)+anw(i,j)*Phi(i-1,j+1)+
*      ane(i,j)*Phi(i+1,j+1)+asw(i,j)*Phi(i-1,j-1)+
*      ase(i,j)*Phi(i+1,j-1) )+
*      (1-KF)*( ae(j,i)*Phi(j+1,i)+aw(j,i)*Phi(j-1,i)+S(j,i) )
ENDIF

IF(i.GT.1)GOTO 350
P(1)=B(1)/A(1) ; Q(1)=D(1)/A(1)
GOTO 310
350 P(i)=B(i)/( A(i)-C(i)*P(i-1) )
Q(i)=( D(i)+C(i)*Q(i-1) )/( A(i)-C(i)*P(i-1) )
310 CONTINUE
IF(KF.EQ.0)GO To 36
Phi(IFiN,j)=Q(IFiN)
DO 37 i=IFiN-1,1,-1
37 Phi(i,j)=P(i)*Phi(i+1,j)+Q(i)
GOTO 300
36 Phi(j,IFiN)=Q(IFiN)
DO 38 i=IFiN-1,1,-1
38 Phi(j,i)=P(i)*Phi(j,i+1)+Q(i)
300 CONTINUE
RETURN

END

```


UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE