UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS DE NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E HIPERELASTICIDADE NÃO-LINEAR QUASI-INCOMPRESSÍVEL

Autor: Carlos Eduardo Leite Pereira
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

31/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS DE NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E HIPERELASTICIDADE NÃO-LINEAR QUASI-INCOMPRESSÍVEL

Autor: Carlos Eduardo Leite Pereira
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para a obtenção de título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P414a

Pereira, Carlos Eduardo Leite
Análise de sensibilidade topológica em problemas de não-linearidade geométrica e hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível / Carlos Eduardo Leite Pereira.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Marco Lúcio Bittencourt
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Analise de sensibilidade. 2. Otimização estrutural. 3. Método dos elementos finitos. 4. Elasticidade. I. Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Topological sensitivity analysis in problems with geometric non-linearities and nonlinear nearly-incompressible hiperelasticity
Palavras-chave em Inglês: Topological optimization, Finite elements, Linear and nonlinear elasticity, Sensitivity analysis, Topological derivate
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Eduardo Alberto Fancello, Emílio Carlos Nelli Silva, Vinicius Arcaro e Alberto Luiz Serpa
Data da defesa: 24/02/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS DE NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E HIPERELASTICIDADE NÃO-LINEAR QUASI-INCOMPRESSÍVEL

Autor: Carlos Eduardo Leite Pereira
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello
UFSC/SC

Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva
EP/USP

Prof. Dr. Vinicius Arcaro
FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 24 de Fevereiro de 2006.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt pelas oportunidades que me proporcionou e pela confiança depositada em mim neste tema de tese realmente desafiador, além do suporte dado na reimplementação do código de otimização topólogica.

Aos meus pais Carlos Alberto Leite Pereira e Claudete Pasqualeto Leite Pereira e demais membros da minha família, pelo amor, carinho, motivação e incentivo dado em toda a minha vida acadêmica.

Aos colegas de laboratório, Pedro Henrique Baptistella, Edilson Borges, Mariana Godoy Vazquez Miano, Thais Godoy Vazquez, Rodrigo Alves Augusto, Rodrigo Ceccatto Gerardin e Eduardo Carvalho pelo companherismo, amizade e ajuda na parte de informática além do ótimo clima de trabalho durante os anos em que trabalhamos juntos.

Aos colegas que já tabalharam comigo Wallace Gusmão Ferreira, Luciano Santos Driemeier, Maurício Barbatto, Alberto Costa Nogueira e Cláudio Alexandro de Carvalho Silva pela amizade, companherismo e ótimo ambiente de trabalho no período em que trabalhamos juntos.

Aos amigos e colegas de sala Roberto Bezerra e Sérgio Guanaes Cosso pela amizade, companherismo e motivação durante o período em compartilhamos a mesma sala.

Ao Dr. Antonio André Novotny pela atenção e dicas no início do meu trabalho.

Ao governo brasileiro pelo apoio financeiro concedido através das bolsas de Mestrado e de Doutorado fornecidas através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

À Universidade Estadual de Campinas - Unicamp pela oportunidade me oferecida.

E especialmente à Simone Andréa Navarro dos Santos pelo amor, carinho, companherismo, paciência e atenção que tornou esta jornada mais amena.

"Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado".

Albert Einstein

Resumo

PEREIRA, Carlos Eduardo Leite, *Análise de Sensibilidade Topológica em Problemas de Não-Linearidade Geométrica e Hiperelasticidade Não-Linear Quasi-Incompressível,* Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006, 115p., Tese (Doutorado).

No presente trabalho, tem-se como objetivo realizar a otimização topológica em problemas de elasticidade envolvendo não-linearidade geométrica (grandes deslocamentos e rotações) e não-linearidade de material, no caso, hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível, aplicando o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica (AST) através de uma formulação Lagrangiana total. A AST é caracterizada por uma função escalar, denominada Derivada Topológica, que fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade de uma determinada função quando um pequeno furo é criado no domínio. Assim, considerando a impossibilidade em se obter uma solução analítica para os problemas considerados no presente trabalho, uma expressão aproximada da Derivada Topológica é obtida através de uma análise assintótica numérica para o problema envolvendo somente não-linearidade geométrica e posteriormente para o problema envolvendo hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível. Resultados numéricos para ambos os tipos de problema e as limitações quanto à aplicabilidade da Derivada Topológica aproximada obtida para tais problemas são apresentados.

Palavras-chave

Otimização Topológica, Elementos Finitos, Elasticidade Linear e Não-Linear, Análise de Sensibilidade Topológica, Derivada Topológica

Abstract

PEREIRA, Carlos Eduardo Leite, *Topological Sensitivity Analysis in Problems with Geometric Non-Linearities and Nonlinear Nearly-Incompressible Hiperelasticity,* Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006, 115p., Tese (Doutorado).

The aim of the present work is to optimize the topology of elasticity problems with geometric nonlinearities (large displacement and rotation) and material nonlinearities, in this case, nonlinear nearly-incompressible hyperelasticity applying the concept of Topological Sensitivity Analysis (TSA) and a total Lagrangian formulation. The TSA results in a scalar function, denominated Topological Derivative, that gives for each point of the domain the sensitivity of a given cost function when a small hole is created. As an analytical solution is impossible for the considered problems in the present work, an approximated expression for the Topological Derivative is obtained by numerical asymptotic analysis first for geometric nonlinearities and after for nonlinear nearly-incompressible hyperelasticity. Numerical results for both problems and the limitations of the approximated Topological Derivative are presented.

Keywords

Topological Optimization, Finite Elements, Linear and Nonlinear Elasticity, Sensitivity Analysis, Topological Derivative

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Nomenclatura

Operadores

$(\dot{\ })$ - Derivação de um campo material em relação a um parâmetro escalar. Se aplicado a campo espacial indica a derivada *total* do campo em relação ao parâmetro

$(\ ')$ - Derivação de um campo espacial em relação a um parâmetro escalar mantendo-se fixo $\mathbf{x}$

∇ - Gradiente de um campo

Div - Divergente de campo na configuração de referência

div - Divergente de campo na configuração espacial

Letras Latinas

$a(\cdot,\cdot)$ - Forma bilinear, limitada e coerciva para problemas lineares ou forma linear na segunda entrada em problemas não-lineares

A_{10}, A_{01} - Constantes do funcional de Mooney-Rivlin

$b_1(\cdot,\cdot)$ - Forma linear na primeira entrada, utilizada em enunciado variacional misto

$b_2(\cdot,\cdot)$ - Forma linear na segunda entrada, utilizada em enunciado variacional misto

B - Bola aberta na configuração espacial

$\bar{B}$ - Fecho da bola B

B^0 - Bola aberta na configuração de referência

$\bar{B}^0$ - Fecho da bola B^0

$\mathbf{b}$ - Forças de corpo na configuração espacial

$\mathbf{b}_0$ - Forças de corpo na configuração de referência

C - Tensor (quarta ordem) constitutivo do material

$\mathbf{C}$ - Tensor de deformação direito de Cauch-Green

$\bar{\mathbf{C}}$ - Parcela de distorção do tensor de Cauch-Green

$\tilde{\mathbf{C}}$ - Parcela de dilatação do tensor de Cauch-Green

C - Constante assintótica na derivada topológica

C^* - Constante na expressão aproximada da derivada topológica

dim - Dimensão do domínio

$d_T(\mathbf{u})$ - Derivada topológica a menos do limite

$D_T(\hat{\mathbf{x}})$ - Derivada topológica redefinida em um ponto $\hat{\mathbf{x}}$ do domínio

$D_T^*(\hat{\mathbf{x}})$ - Derivada topológica original em um ponto $\hat{\mathbf{x}}$ do domínio

E - Módulo de Young

$\mathbf{E}$ - Tensor de deformação de Green-Lagrange

$\mathbf{f}(\cdot)$ - Mapeamento entre o domínio deformado e não-deformado

$f(\cdot)$ - Função regularizadora monotônica decrescente

$\hat{\mathbf{f}}_{int}$ - Força interna

$\hat{\mathbf{f}}_{ext}$ - Força externa

F - Força concentrada

$\mathbf{F}$ - Gradiente de deformação

$\bar{\mathbf{F}}$ - Parcela de distorção do gradiente de deformação

$\tilde{\mathbf{F}}$ - Parcela de dilatação do gradiente de deformação

$G(J)$ - Função de compressibilidade

h^e - Tamanho da malha

$h(\cdot)$ - Função escalar de restrição

$H^1(\cdot)$ - Espaço de Sobolev das funções com derivadas quadrado integráveis até a ordem 1

$\bar{\mathbf{I}}_1, \bar{\mathbf{I}}_2$ - Primeiro e segundo invariante de $\bar{\mathbf{C}}$

$\mathbf{I}_3$ - Terceiro invariante de $\mathbf{C}$

$\mathbf{I}$ - Tensor unitário de segunda ordem

I - Tensor unitário de quarta ordem

J - Determinante de $\mathbf{F}$

$\tilde{k}$ - Bulk modulus

$\mathbf{K}(\mathbf{u})$ - Matriz de rigidez tangente

$l(\cdot)$ - Funcional linear limitado

L - Função Lagrangiana

m_1, m_2 - Multiplicadores de Lagrange

$\mathbf{n}$ - Vetor normal ao contorno na configuração espacial

$\mathbf{n}_0$ - Vetor normal ao contorno na configuraçãode referência

NE - Número de elementos da malha

ne - Número de elementos em torno do furo $\bar{B}^0$

$\mathcal{O}$ - Termos de alta ordem da espansão em série de Taylor

p - Pressão hidrostática

$\mathbf{P}$ - Primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff

q - Multiplicador de Lagrange da equação constitutiva restrita

$\mathcal{Q}$ - Espaço de pressões admissíveis

$\mathcal{R}$ - Conjunto dos números reais

$\mathbf{s}$ - Variável do problema de hiperelasticidade incompressível

$\mathbf{S}$ - Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff

$\tilde{\mathbf{S}}$ - Parcela de dilatação de $\mathbf{S}$

$\bar{\mathbf{S}}$ - Parcela de distorção de $\mathbf{S}$

t - Tempo final

t_0 - Tempo inicial

$\mathbf{t}$ - Força de superfície na configuração espacial

$\mathbf{t}_0$ - Força de superfície na configuração de referência

$\mathbf{T}$ - Tensor de tensão de Cauchy

$\mathbf{u}$ - Deslocamento, função vetorial do espaço $\mathcal{U}$

$\bar{\mathbf{u}}$ - Valor de deslocamento prescrito no contorno de Dirichlet

$\mathbf{u}_h$ - Aproximação de $\mathbf{u}$ no espaço de dimensão finita $\mathcal{U}_h$

$\mathcal{U}$ - Espaço das funções admissíveis

$\mathcal{U}_h$ - Subespaço de dimensão finite de $\mathcal{U}$

$\mathcal{V}$ - Espaço das variações admissíveis

$\mathcal{V}_h$ - Subespaço de dimensão finita de $\mathcal{V}$

v_n - Módulo da componete normal do campo de velocidade espacial

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ - Descrição espacial do campo de velocidade

V_n - Módulo da componete normal do campo de velocidade material

$\mathbf{V}(\mathbf{X})$ - Descrição material do campo de velocidade

$\bar{V}$ - Volume ou área final

V_0 - Volume ou área inical

V_r - Volume ou área a ser retirada por iteração

$\hat{\mathbf{x}}$ - Ponto do domínio, centro da bola $\bar{B}$

$\hat{\mathbf{X}}$ - Ponto do domínio de referência, centro da bola $\bar{B}$

$\mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau)$ - Mapeamento suave e inversível entre um domínio perturbado e não-perturbado

W - Densidade de energia de deformação

$\bar{W}$ - Densidade de energia de distorção

$\tilde{W}$ - Densidade de energia de dilatação

W_{ext} - Trabalho das forças externas

Letras Gregas

$\psi(\Omega)$ - Função objetivo em função do domínio espacial

$\psi(\Omega^0)$ - Função objetivo em função do domíno de referência

$\Psi\left(\mathbf{u}\right)$ - Funcional de performance

Ω - Domínio aberto e limitado na configuração espacial

Ω^0 - Domínio aberto e limitado na configuração de referência

ρ - Espessura

$\bar{\lambda}$ - Coeficiente de Lamé

$\bar{\mu}$ - Coeficiente de Lamé

ν - Coeficiente de Poisson

ε - Raio da bola $\bar{B}$

τ - Parãmetro escalar de modificação do domínio

ϵ - Parâmetro de incompressibilidade

θ - Elemento de $\mathcal{Q}$

$\boldsymbol{\beta}$ - Elemento de $\mathcal{V}$

$\boldsymbol{\xi}$ - Elemento de $\mathcal{U}$

γ - Precisão no processo de Newton-Raphson

Π - Funcional energia potencial total

$\boldsymbol{\Sigma}$ - Tensor de Eshelby na configuração espacial

$\boldsymbol{\Sigma}^0$ - Tensor de Eshelby na configuração de referência

Γ - Contorno de um determinado domínio na configuração espacial

Γ^0 - Contorno de um determinado domínio na configuração de referência

Γ_D - Contorno na configuração espacial submetido a condições de contorno de Dirichlet

Γ_N - Controno na configuração espacial submetido a condições de contorno de Neumann

Γ_D^0 - Contorno na configuração de referência submetido a condições de contorno de Dirichlet

Γ_N^0 - Controno na configuração de referência submetido a condições de contorno de Neumann

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Em muitos projetos de engenharia é interesse do projetista conhecer a forma ótima da estrutura, de tal modo que a mesma desempenhe, da melhor maneira possível, a sua tarefa. Muitas técnicas baseadas em métodos da programação matemática surgiram, principalmente nas décadas de 70 e 80, e constituem atualmente uma área de intensa pesquisa.

As técnicas de otimização topológica[1] permitem obter a forma ótima de uma determinada estrutura que minimize uma determinada função custo, de tal forma que respeite determinadas restrições impostas ao problema físico com pouca ou nenhuma informação sobre a morfologia inicial da estrutura, ver Figura 1.1.

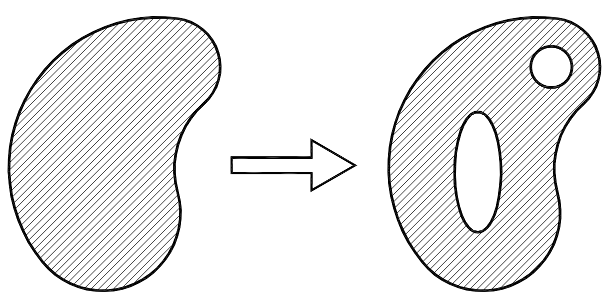


Figura 1.1: Otimização topológica.

[1]É importante mencionar que o presente trabalho não versa sobre otimização topológica no sentido estrito da terminologia. Visto que não é apresentado nenhuma aplicação de algoritmos de programação matemática na obtenção dos resultados. Para uma visão geral dos métodos de otimização topológica, ver (Eschenauer e Olhoff, 2001).

Por sua vez, as técnicas que se baseiam em Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma (ASMF) requerem um conhecimento prévio da morfologia, sendo a forma ótima obtida através de mudanças na geometria do contorno do domínio considerado, ver Figura 1.2. Contudo, a ASMF está atualmente em um estágio bem avançado, sendo possível encontrar um grande número de publicações visando o desenvolvimento das expressões de análise de sensibilidade ou aplicações da otimização de forma em diversos problemas de engenharia. Pode se citar problemas envolvendo não linearidade geométrica (grandes deslocamentos, rotações e deformações), não linearidades de material (plasticidade, hiperelasticidade, viscoplasticidade) e não linearidades de contorno (contato sem atrito e com atrito), etc.

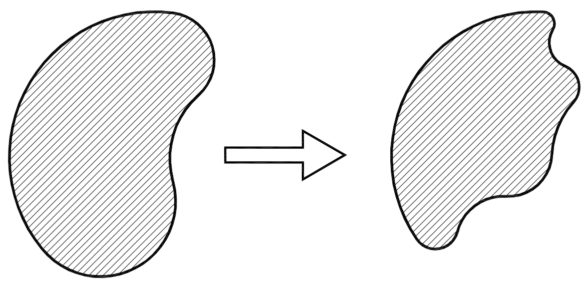


Figura 1.2: Otimização de forma.

Várias técnicas de otimização topológica foram propostas ao longo dos anos. Recentemente, uma nova aboradagem baseada na ASMF tem despertado o interesse de vários pesquisadores nos meios acadêmicos em diversos países. Este novo conceito, se beneficia do arcabouço matemático desenvolvido para a ASMF e têm sido citado pelos pesquisadores como Análise de Sensibilidade Topológica. É caracterizada por um função escalar denominada *Derivada Topológica* que dá a sensibilidade de uma determinada funcão custo quanto à criação de pequenos furos no domínio de definição do problema. Portanto, esta nova metodologia abre caminho para aplicações de otimização topológica em uma vasta gama de problemas lineares e não-lineares da engenharia e da física matemática.

1.2 Revisão Bibliográfica

A primeira tentativa de se procurar a forma ótima de elementos estruturais aparece no trabalho de Galileo Galilei (Galilei, 1638). Neste livro, foi realizada a primeira investigação sistemática no processo de fratura de corpos frágeis. Neste contexto, descreveu-se a influência da forma de um corpo em sua resistência, propôs-se e respondeu-se questões atribuída a “Teoria dos corpos com igual resistência”.

Também pode-se citar os trabalhos do estudioso James Clerk Maxwell (1831-1879) dedicados a formulações do problema de otimização estrutural apud (Timoshenko, 1953).

Visando o aumento de demanda por eficiência, confiabilidade e ciclos de desenvolvimento de produtos mais curtos, têm-se tornado inevitável o uso de técnicas e procedimentos computacionais para resolver os atuais problemas de Engenharia. Grandes progressos têm sido obtidos na análise computacional de estruturas e componentes, especialmente por meio do versátil Método dos Elementos Finitos (MEF).

Neste sentido, técnicas de otimização baseadas na Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma (ASMF) têm desempenhado um papel bastante importante desde a segunda metade da década de 70. Houve um grande desenvolvimento no sentido de fundamentar as bases matemáticas da ASMF, principalmente pela publicação da peculiar tese de doutorado (Murat e Simon, 1976). Posteriormente, grandes contribuições foram realizadas no sentido da fundamentação matemática e aplicações a problemas de Engenharia, (ver por exemplo, os anais do Congresso *Optimization of Distributed Parameters Structures*, realizado em Iowa no ano de 1981 (Haug e Céa, 1981)).

Atualmente a ASMF está com suas bases matemáticas bem postas (ver, por exemplo, (Sokolowski e Zolésio, 1992) e (Pironneau, 1984)) e aplicações a diversos problemas lineares e não-lineares têm sido desenvolvidos ao longo dos anos, (ver por exemplo, (Kim, 1999) e (Silva, 2003)). No entanto, o inconveniente desta técnica é de apenas permitir mudanças na fronteira da configuração inicial, exigindo hipóteses prévias sobre a topologia inicial do domínio de definição do problema, ver Figura 1.2. Para uma revisão detalhada sobre técnicas de otimização e ASMF ver a Seção 1.2 da tese de doutorado (Silva, 2003).

Em muitas aplicações, procedimentos de otimização de dimensões de componentes têm se tornado de uso geral. Entretanto, o desenvolvimento de métodos e estratégias aplicáveis ainda estão em progresso no sentido de gerar topologias iniciais melhores possíveis para componentes estruturais. Uma revisão dos diferentes procedimentos é dada em (Bergmann e (eds), 1989), (Eschenauer *et al.*, 1982), (Eschenauer *et al.*, 1991), (Gallagher *et al.*, 1973) e (Sobieszczanski-Sobieski, 1989).

Nos últimos anos, grandes esforços têm sido feito no desenvolvimento de procedimentos de otimização topológica. Há várias diferentes estratégias cujo uso em muitos casos dependem altamente do problema em questão. Tais estratégias visam determinar a topologia ótima de acordo com o problema de otimização definido, independentemente do projetista. Este, no entanto, deve avaliar e controlar o trabalho iterativo do processo de projeto, pois um cálculo de otimização isolado freqüentemente não leva à um resultado ótimo. Assim, é importante incluir a criatividade do projetista, especialmente naqueles caso que não podem ser modelados suficientemente no processo de otimização.

Michell (Michell, 1904) desenvolveu uma teoria de projeto para a topologia de estruturas de barras esbeltas que são ótimas em relação ao peso. As barras nestas estruturas são todas perpendiculares uma em relação às outras e formam um sistema ótimo em termos de máxima tensão de tração e compressão. Generalizações subseqüentes foram feitas por Prager (Prager, 1969), (Prager, 1974) e Rozvany e Prager (Rozvany e Prager, 1976), que resolveu um grande número de problemas de otimização topológica por processos analíticos baseados em critérios de otimalidade. Para uma revisão geral, ver (Rozvany *et al.*, 1993) e (Rozvany *et al.*, 1989).

Otimização topológica é freqüêntemente chamada de *otimização de layout* ou *otimização de forma generalizada* na literatura, conforme (Olhoff e Taylor, 1983), (Kirsch, 1990), (Bendsϕe *et al.*, 1993), (Rozvany *et al.*, 1995), (Bendsϕe e Soares, 1993), (Cherkaev, 2000) e (Rozvany e Olhoff, 2001). A importância deste tipo de otimização está no fato que a escolha da topologia apropriada da estrutura na fase conceitual é geralmente o fator mais decisivo para a eficiência do novo produto. Além do mais, a otimização de parâmetros e forma não pode mudar a topologia da estrutura durante o processo de otimização. Assim, uma solução obtida por meio de um destes métodos terá a mesma topologia que o projeto inicial, (ver Figura 1.2). A otimização topológica é por isso mais valiosa como ferramenta de pré-processamento para otimização de parâmetros e forma (Fleury, 1986), (Bremicker *et al.*, 1991) e (Olhoff *et al.*, 1991).

Existem dois tipos de otimização topológica, discreta e contínua, dependendo do tipo de estrutura. Para estruturas inerentemente discretas, a topologia ótima consiste na determinação do número ótimo, posição e conectividade dos membros estruturais. Esta área de pesquisa foi ativa por várias décadas e intensamente desenvolvida por Prager e Rozvany. Uma revisão completa sobre otimização topológica de estruturas discretas pode ser encontrada nos artigos de revisão (Rozvany *et al.*, 1992) e (Rozvany *et al.*, 1995), na monografia de Bendsϕe (Bendsϕe, 1995) e nos trabalhos (Eschenauer *et al.*, 1982), (Olhoff e Rozvany, 1995), (Gutkowski e Mroz, 1997), (Rozvany, 1997).

Na otimização topológica de estruturas contínuas, a forma dos contornos externos bem como dos contornos internos e o número de furos internos são simultaneamente otimizados com respeito à função objetivo pré-definida. É assumido que o carregamento é prescrito e que uma dada quantidade de material é especificada em um domínio 2D ou 3D com dadas condições de contorno. Há várias pesquisas ativas concentrando-se nestes problemas e diferentes procedimentos de solução têm sido desenvolvidos, desde a publicação dos artigos (Bendsϕe e Kirkuchi, 1988) e (Bendsϕe, 1989). Exemplos de publicações mais recentes que oferecem uma revisão geral sobre o assunto são (Atrek, 1993), (Kirsch, 1990), (Maute *et al.*, 1999), (Novotny *et al.*, 2003), (Labanowiski, 2004) e (Amstutz e Andrä, 2005).

Genericamente, a otimização topológica de estruturas contínuas pode ser classificada em duas classes de abordagem, a abordagem Material ou Micro e a abordagem Geométrica ou Macro. Como exemplo de técnica pertencente à abordagem Material ou Micro, pode-se citar o método SIMP (Solid Isotropic Microstructures with Penalization). Os métodos ESO (Evolutionary Structural Optimization) e TSA (Topological Sensitivity Analysis) pertencem à classe da abordagem Geométrica ou Macro.

Na abordagem SIMP, um campo de densidade $\rho(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ é definido como variável de projeto e as derivadas totais são calculadas na forma tradicional. Já no método ESO é definida uma sensibilidade aproximada baseada na diferença finita da função custo quando um elemento é removido da malha, para maiores detalhes, ver (Labanowiski, 2004). Finalmente, o método TSA calcula a sensibilidade de uma função custo quando um pequeno furo é criado em determinado ponto do domínio de definição do problema (Novotny *et al.*, 2003).

A primeira abordagem de otimização topológica, à partir da otimização de forma, foi proposta por Céa et al. em 1973 (Céa *et al.*, 1973; Céa *et al.*, 1974), através da combinação de um método de ponto fixo e a sensibilidade de forma para todo o domínio. A forma e a topologia ótima são ambos obtidos em um único processo. Posteriormente, Schumacher introduziu a primeira definição de gradiente topológico (Schumacher, 1995). O propósito de Schumacher era introduzir um pequeno furo no domínio de definição do problema e aumentá-lo com as ferramentas de otimização de forma clássicas, citada como *método bolha*. Sokolowski et al. deram as primeiras justificativas matemáticas deste método (Sokolowski e Żochowski, 1997). Posteriormente, Masmoudi estendeu a definição de gradiente topológico para o caso de condição de contorno de Dirichlet no contorno do furos (Masmoudi, 1998).

No entanto, este conceito, embora extremamente geral, mostra-se, de certa forma, restritivo, devido à dificuldade matemática na obtenção da derivada topológica. Tentando superar tais dificuldades, Garreau et al. propôs o Método do Domínio Truncado para o cálculo da derivada topológica (Garreau *et al.*, 1998). Porém este método não se mostrou eficaz pelo fato de exigir várias hipóteses simplificadoras, sendo a mais severa, a limitação da teoria apenas para funções custo que não dependem explicitamente do domínio de definição do problema. Por exemplo, se o funcional de energia potencial total do sistema for escolhido como função custo, o Método do Domínio Truncado conduz a um resultado absurdo, resultando a derivada topológica nula em todo o domínio do problema.

Seguindo o mesmo caminho, nos trabalhos (Sokolowski e Żochowski, 1999) e (Céa *et al.*, 1998), a derivada topológica foi calculada via Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma. Porém, apenas se mostrou correta para o caso particular de condição de contorno de Neumann homogênea nos furos. Enquanto que para outros tipos de condição de contorno nos furos (Neumann não-homogênea, Dirichlet e Robin) a abordagem resultou incorreta. Em conseqüência, nos trabalhos (Garreau *et al.*, 1998) e (Garreau *et al.*, 2001) afirmou-se que a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma conduz a resultados incorretos quando utilizada no cálculo da Derivada Topológica. Esta questão foi resolvida no trabalho de doutorado de Novotny (Novotny, 2003), no qual se demonstrou formalmente a relação entre a Derivada Topológica e Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma. Tal relação foi formalmente demonstrada através de um teorema, que conduz a uma nova metodologia que permite aplicar a Análise de Sensibilidade Topológica para uma vasta classe de problemas da Engenharia e da Física.

Partindo desta metodologia, a derivada topológica para problemas de condução de calor em regime estacionário (Novotny *et al.*, 2003) e elasticidade plana e 3D lineares (Novotny, 2003) foi determinada. No caso de problemas não-lineares, a única publicação até o momento, é o trabalho de Novotny (Novotny *et al.*, 2005a), no qual a derivada topológica é obtida para o problema de torção não-linear de uma barra prismática sujeita à fluência estacionária, caracterizada pela equação de p-Poisson. Portanto, o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica tem sido aplicado somente em problemas lineares ou não-lineares no caso potencial. Até o presente trabalho, nenhuma aplicação à problemas vetoriais não-lineares foi apresentada.

1.3 Objetivos

Baseando-se no atual estágio de pesquisa em Análise de Sensibilidade Topológica exposto na seção anterior, o presente trabalho têm os seguintes objetivos:

- Aplicar o conceito de derivada topológica desenvolvido em (Novotny, 2003), para problemas vetoriais não-lineares, descritos por uma formulação Lagrangiana total;

- Desenvolver uma expressão aproximada da derivada topológica para problemas de elasticidade envolvendo não linearidade geométrica (grandes deslocamentos e grandes rotações), com material linear, homogêneo e isotrópico (Lei de Hooke). Uma expressão analítica para a derivada topológica para tal problema se mostra inviável, devido à não existência de uma solução analítica para as equações não-lineares que descrevem o problema. Conseqüentemente, experimentações numéricas é adotada com o objetivo de obter uma expressão aproximada para a derivada topológica, tal como proposto em (Novotny, 2003);

- Mostrar a validade da expressão aproximada da derivada topológica para o problema envolvendo não linearidade geométrica através de exemplos numéricos e discutir suas limitações;

- Desenvolver uma expressão aproximada da derivada topológica para problemas envolvendo não linearidade geométrica e não linearidade material. Neste caso, o material a ser considerado apresenta um comportamento hiperelástico não-linear quase-incompressível, caracterizado pelo funcional densidade de energia de distorção de Mooney-Rivlin de dois parâmetros mais o termo da densidade de energia dilatação do material, conforme descrito por (Silva, 2003). Seguindo o mesmo procedimento para o problema envolvendo somente não linearidade geométrica, a expressão final da derivada topológica aproximada será obtida por meio de experimentações numéricas;

- Mostrar a validade da expressão aproximada da derivada topológica para o problema de hiperelasticidade não-linear quase-incompressível através de exemplos numéricos e discutir suas limitações.

1.4 Organização do Texto

De acordo com Seção 1.3, o objetivo deste trabalho é realizar a otimização topológica em problemas estruturais não-lineares de grandes deslocamentos e hiperelasticidade quase-incompressível aplicando o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica.

Assim sendo, no Capítulo 2 é apresentado o conceito de Derivada Topológica e sua conexão com a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma formalizada na tese de doutorado (Novotny, 2003). Além disso, o conceito é aplicado ao problema de elasticidade plana linear, conforme (Novotny, 2003), e uma expressão exata para a Derivada Topológica é obtida. Além do mais, é apresentado um algoritmo para otimização topológica visando utilizar o conceito em questão. Por fim, exemplos numéricos são apresentados.

No Capítulo 3, o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica (AST) é aplicado ao problema de deformação envolvendo não-linearidade geométrica, no caso, grandes deslocamentos, formulado através de uma formulação Lagrangiana total. Para isso, a análise de sensibilidade à mudança de forma é determinada para o problema e posteriormente, uma expressão aproximada para a Derivada Topológica é obtida através de experimentos numéricos. Em seguida, uma análise em relação à Derivada Topológica aproximada obtida é realizada e suas limitações discutidas. Por fim, é apresentado um exemplo ilustrando a aplicação do conceito de AST ao problema de uma viga longa sujeita à grandes deslocamentos, porém, com material linear, homogêneo e isotrópico.

No Capítulo 4, o conceito de AST é aplicado ao problema de deformação envolvendo não linearidade de material, no caso, hiperelasticidade não-linear quase-incompressível. Da mesma forma que no Capítulo 3, primeiramente é desenvolvida a análise de sensibilidade à mudança de forma para o problema com base em (Silva, 2003) e em seguida uma expressão aproximada para a Derivada Topológica é obtida por meio de experimentos numéricos. De forma similar ao Capítulo 3, uma análise sobre as limitações da Derivada Topológica aproximada obtida é realizada. Por fim, exemplos numéricos ilustrando a aplicação de tal conceito em problemas de deformação plana envolvendo material hiperelastico não-linear quase-incompressível é apresentado.

No Capítulo 5, apresentam-se as conclusões finais e as perspectivas de futuras pesquisas para o assunto em questão.

Capítulo 2

Análise de Sensibilidade Topológica (AST) em Elasticidade Linear

2.1 Definição de Derivada Topológica

De acordo com (Novotny, 2003), a derivada topológica é uma função escalar, estabelecida em todo o domínio de definição do problema, que fornece a sensibilidade de uma determinada função custo quando um pequeno furo é criado em determinado ponto.

Na definição original da derivada topológica (ver, por exemplo, (Garreau *et al.*, 1998)), após o furo ser criado no processo de otimização, não é mais possível estabelecer um homeomorfismo entre o domínio perturbado (com furo) e o não perturbado (sem furo), ou seja, não é mais possível estabelecer um mapeamento bijetivo contínuo entre os domínios considerados de tal forma que o mapeamento tenha uma inversa contínua, (ver (Kreyszig, 1989)).

Considere os domínios Ω e $\Omega_\varepsilon \in \Re^n$, sendo $\Omega_\varepsilon = \Omega - \bar{B}_\varepsilon$. O contorno de Ω_ε é denotado por $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \partial B_\varepsilon$ e $\bar{B}_\varepsilon = B_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon$ é uma bola de raio ε centrada em $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$, cuja medida tende à zero quando $\varepsilon \to 0$ (reduzindo-se praticamente à um ponto). Desta forma, Ω representa o domínio não perturbado (sem furo) e Ω_ε representa o domínio perturbado (com um pequeno furo), conforme pode ser visto na Figura 2.1. A definição original da derivada topológica para uma função custo ψ pode ser escrita matematicamente da seguinte forma (Masmoudi, 1998)

$$D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\psi(\Omega_\varepsilon) - \psi(\Omega)}{f(\varepsilon)}, \tag{2.1}$$

sendo $f(\varepsilon)$ uma função *regularizadora* negativa, monotônica e decrescente, de tal modo que $f(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$ e que dependerá do problema em análise. Essa definição está ilustrada na Figura 2.1.

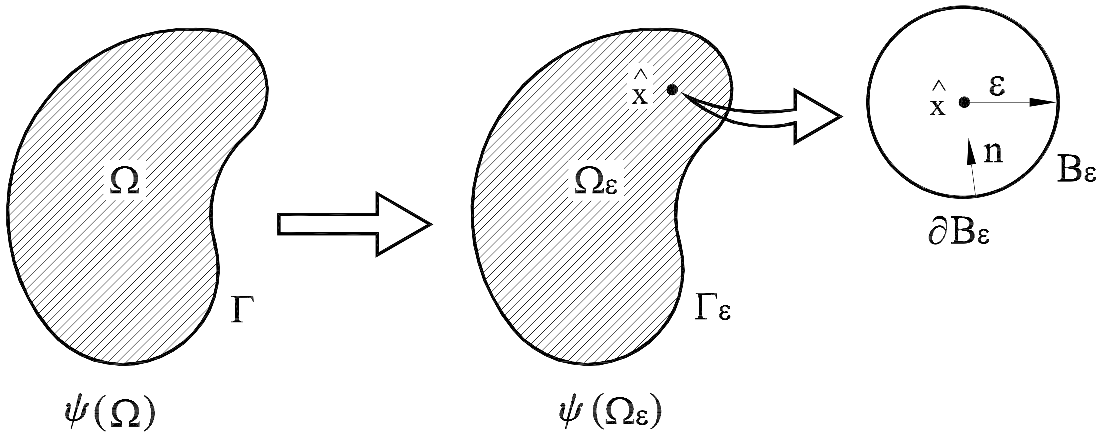


Figura 2.1: Definição original da derivada topológica, (Novotny, 2003).

Portanto, como pode ser observado, os domínios considerados não possuem a mesma topologia. Sendo assim, a derivada (2.1) não pode ser calculada de forma convencional.

Novotny em seu trabalho de doutorado (Novotny, 2003) propôs uma nova definição para a derivada topológica. A idéia é partir de um problema em que o furo B_ε já existe, ou seja, definir um mapeamento entre $\Omega_\varepsilon \in \Re^n$ e um outro domínio $\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon} \in \Re^n$, sendo $\delta\varepsilon$ uma variação do raio ε de B_ε, dando origem ao furo $B_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$ em $\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$. Assim, pode-se definir um novo domínio perturbado $\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon} = \Omega - \bar{B}_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$, sendo o contorno escrito como $\Gamma_{\varepsilon+\delta\varepsilon} = \Gamma \cup \partial B_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$, conforme ilustrado na Figura 2.2. Desta maneira, torna-se possível estabelecer um mapeamento bijetivo contínuo entre Ω_ε e $\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$ que possua inversa contínua. Portanto, Ω_ε e $\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$ passam a ser homeomórficos, conforme (Kreyszig, 1989).

Desta forma, Novotny demonstrou que a Derivada Topológica pode ser redefinida da seguinte forma

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \lim_{\delta\varepsilon \to 0} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon)}{f(\varepsilon+\delta\varepsilon) - f(\varepsilon)} \right\} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta\varepsilon \to 0}} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon)}{f(\varepsilon+\delta\varepsilon) - f(\varepsilon)}. \tag{2.2}$$

Convêm observar que a nova definição da derivada topológica, dada em (2.2), fornece a sensibilidade da função custo ψ quando o furo B_ε centrado no ponto $\hat{\mathbf{x}}$ e com $\varepsilon \to 0$ aumenta de tamanho e não quando este é efetivamente criado, conforme a definição original da derivada topológica (2.1). Porém, Novotny provou que expandir um furo de raio ε, quando $\varepsilon \to 0$, é equivalente à criá-lo. Entretanto, a

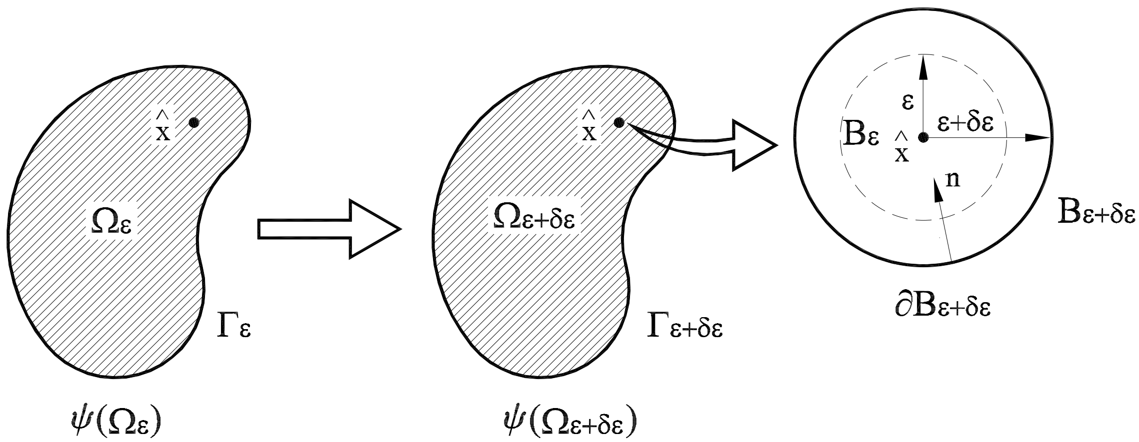


Figura 2.2: Definição modificada da derivada topológica, (Novotny, 2003).

ação de aumentar o furo B_ε pode ser interpretada como uma seqüência de configurações, denotada pelo parâmetro τ. Considerando que o domínio sofra uma perturbação (aumento do furo), esta pode ser representada por um mapeamento suave e inversível dependente do parâmetro τ, definido como $\mathcal{X}(\mathbf{x},\tau)$ com $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \subset \Re^n$ e $\tau \in \Re$. Assim, a seqüência de domínios perturbados Ω_τ e contornos perturbados Γ_τ pode ser definida como

$$\Omega_\tau = \{\mathbf{x}_\tau \in \Re^n |\, \exists\, \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon,\ \mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x},\tau)\,, \quad \mathbf{x}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{x} \text{ e } \Omega_\tau|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon\}\,,$$

$$\Gamma_\tau = \{\mathbf{x}_\tau \in \Re^n |\, \exists\, \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon,\ \mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x},\tau)\,, \quad \mathbf{x}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{x} \text{ e } \Gamma_\tau|_{\tau=0} = \Gamma_\varepsilon\}\,.$$

Desta forma, o domínio $\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$, perturbado por uma expansão suave $\delta\varepsilon$ da bola B_ε, e o seu respectivo contorno $\Gamma_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$ podem ser escritos em relação à τ como

$$\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon} = \Omega_\tau \Longrightarrow \Omega_\varepsilon = \Omega_\tau|_{\tau=0} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\varepsilon+\delta\varepsilon} = \Gamma_\tau \Longrightarrow \Gamma_\varepsilon = \Gamma_\tau|_{\tau=0}\,. \tag{2.3}$$

Através de uma expansão em série de Taylor até o termo de primeira ordem em torno de $\tau = 0$, o mapemanento $\mathcal{X}(\mathbf{x},\tau)$ é escrito explicitamente como

$$\mathcal{X}(\mathbf{x},\tau) = \mathcal{X}(\mathbf{x},0) + \frac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{x},0)}{\partial \tau}\tau + \mathcal{O}(\tau)\,.$$

Desprezando os termos de alta ordem $\mathcal{O}(\tau)$ e lembrando que $\mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x},\tau)$ e $\mathbf{x} = \mathcal{X}(\mathbf{x},0)$, para τ suficientemente pequeno, a relação anterior torna-se

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} + \tau \mathbf{v}(\mathbf{x})\,, \tag{2.4}$$

sendo $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{x},0)}{\partial \tau}$ uma *ação de mudança de forma*, fazendo uma analogia com a Mecânica do

Contínuo (Gurtin, 1981). A expressão anterior pode ser entendida como a *descrição material do campo de velocidade.*

De acordo com (Zolézio, 1981) somente a componente do campo de velocidade $\mathbf{v}$ na direção normal ao contono Γ_ε, denotada por v_n, é significativa nos cálculos de sensibilidade. Portanto, o campo de velocidade para produzir uma expansão uniforme na bola B_ε é definido como

$$\begin{cases} \mathbf{v} = v_n \mathbf{n} & \text{com } v_n < 0 \text{ e constante sobre } \partial B_\varepsilon \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma \text{, considerando que } \Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \partial B_\varepsilon \end{cases} . \tag{2.5}$$

Considerando o campo de velocidade dado pelas equações (2.5) e (2.4), a seguinte relação é válida

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} + \tau v_n \mathbf{n}, \quad \forall\ \mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon. \tag{2.6}$$

Através da equação (2.6) e das relações dadas em (2.3), é possível associar a perturbação $\delta\varepsilon$ com o parâmetro τ como

$$\delta\varepsilon = \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}\| = \|\tau v_n \mathbf{n}\| = \tau\,|v_n|\,, \quad \forall\ \mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon \text{ e } \forall\ \mathbf{x}_\tau \in \partial B_{\varepsilon+\delta\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Assim, com base nas definições dadas acima, a equivalência perfeita entre as definições de Derivada Topológica dadas pelas equações (2.1) e (2.2) é formalizada através do seguinte teorema (Novotny, 2003).

Teorema 2.1 *Seja $f(\varepsilon)$ uma função regularizadora escolhida de modo que $0 < |D_T^*(\hat{\mathbf{x}})| \leq \infty$. Logo, ambas as definições de Derivada Topológica dadas pelas equações (2.1) e (2.2) são equivalentes, podendo ainda ser escritas da seguinte forma*

$$D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{|v_n|} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \left. \frac{d\psi(\Omega_\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}. \tag{2.8}$$

Demonstração 2.1 *Ver Seção 2.4 de (Novotny, 2003).*

2.2 Derivada Topológica para Elasticidade Linear

Nesta seção, a derivada topológica para o funcional de energia potencial total será determinada para o problema de elasticidade linear, conforme discutido em (Novotny, 2003).

Considere um domínio aberto, limitado e não perturbado $\Omega_\varepsilon \in \Re^n$, cujo contorno Γ_ε é suficientemente regular. O seguinte problema variacional pode ser definido na configuração não perturbada Ω_ε:

Encontre $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon$, tal que

$$a_\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon\right) = l_\varepsilon\left(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\right), \qquad \forall\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \tag{2.9}$$

sendo $\mathcal{U}_\varepsilon = \left\{\mathbf{u}_\varepsilon \in \left[H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)\right]^{\dim} \mid \mathbf{u}_\varepsilon|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}}\right\}$ e $\mathcal{V}_\varepsilon = \left\{\boldsymbol{\eta}_\varepsilon \in \left[H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)\right]^{\dim} \mid \boldsymbol{\eta}_\varepsilon|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\right\}$, respectivamente, os espaços dos deslocamentos cinematicamente admissíveis e das variações admissíveis em um domínio de dimensão $\dim \leq 3$; $H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)$ é o espaço de Sobolev das funções com derivada primeira quadrado integrável no sentido de Lebesgue; $\bar{\mathbf{u}}$ é o deslocamento prescrito sobre o contorno de Dirichlet Γ_D. Além do mais, $a_\varepsilon\left(\cdot,\cdot\right) : \mathcal{U}_\varepsilon \times \mathcal{V}_\varepsilon \to \Re$ é uma forma bilinear simétrica, limitada e coerciva e $l_\varepsilon\left(\cdot\right) : \mathcal{V}_\varepsilon \to \Re$ é uma forma linear e contínua. Para o problema em questão, as formas abstratas $a_\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon\right)$ e $l_\varepsilon\left(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\right)$ podem ser escritas como

$$a_\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon\right) = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathsf{C} : \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^S \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}_\varepsilon^S \, d\Omega_\varepsilon \ , \tag{2.10}$$

$$l_\varepsilon\left(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\right) = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \, d\Omega_\varepsilon + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \, d\Gamma_\varepsilon \ , \tag{2.11}$$

sendo C o tensor (de quarta ordem) constitutivo do material. Para o problema em questão, C é dado por

$$\mathsf{C} = \frac{E\rho}{\left(1-\nu^2\right)}\left[\left(1-\nu\right)\mathsf{I} + \nu\left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right)\right], \tag{2.12}$$

com $\mathbf{I}$ e I os tensores identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente; E o módulo de elasticidade longitudinal; ν o coeficiente de Poisson; ρ a espessura do domínio. Além disso, $\mathbf{b}$ é o vetor de força de corpo uniforme e sobre Ω_ε e $\mathbf{t}$ é o vetor de carregamento prescrito sobre o contorno de Neumann Γ_N com $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Também será considerado que, o módulo de Young E, a densidade ρ e o coeficiente de Poisson ν são considerados constantes em relação à perturbação representada por τ.

A expressão (2.9) representa a equação de equilíbrio na configuração não perturbada Ω_ε. Porém, após à perturbação $\delta\varepsilon$ sobre o furo B_ε, a equação de equilíbrio também deve ser satisfeita para qualquer configuração perturbada Ω_τ, ou seja, para $\forall \tau \geq 0$, pois, é exigido que o corpo esteja em equilíbrio em qualquer configuração Ω_τ. Dessa maneira, um novo problema variacional equivalente ao descrito pela equação (2.9) pode ser definido sobre Ω_τ da seguinte forma:

Encontre $\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{U}_\tau$, tal que

$$a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\eta}_\tau\right) = l_\tau\left(\boldsymbol{\eta}_\tau\right), \qquad \forall\ \boldsymbol{\eta}_\tau \in \mathcal{V}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0. \tag{2.13}$$

Adotando como função custo a energia potencial total definida para toda configuração τ, a seguinte relação pode ser escrita

$$\begin{aligned}\psi\left(\Omega_\tau\right) &= \Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\mathsf{C}:\nabla\mathbf{u}_\tau^S\cdot\nabla\mathbf{u}_\tau^S\,d\Omega_\tau-\int_{\Omega_\tau}\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_\tau\,d\Omega_\tau-\int_{\Gamma_N}\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}_\tau\,d\Gamma_\tau\\ &= \frac{1}{2}a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\mathbf{u}_\tau\right)-l_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Através do conceito de Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma, a sensibilidade da função custo (2.14) em relação à perturbação criada pelo campo de velocidade definido em (2.5) é caracterizada pela derivada total de $\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)$ em relação à τ em $\tau=0$ da seguinte forma

$$\left.\frac{d\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)}{d\tau}\right|_{\tau=0}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)-\Psi_0\left(\mathbf{u}_0\right)}{\tau}, \tag{2.15}$$

sendo $\mathbf{u}_\tau$ uma função implícita de τ através da equação de estado (2.13) e $\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_\tau|_{\tau=0}=\mathbf{u}_\varepsilon$ a solução da equação de estado (2.9) definida na configuração não perturbada Ω_ε.

Formalmente, o cálculo da derivada total do funcional $\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)$ em relação à τ em $\tau=0$, representado pela equação (2.15), pode ser posto da seguinte forma (Novotny, 2003)

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Calcule:} & \left.\dfrac{d\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)}{d\tau}\right|_{\tau=0}\\ \text{Sujeito à:} & a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\boldsymbol{\eta}_\tau\right)=l_\tau\left(\boldsymbol{\eta}_\tau\right)\quad\forall\,\boldsymbol{\eta}_\tau\in\mathcal{V}_\tau\text{ e }\forall\,\tau\geq 0\end{array}\right.. \tag{2.16}$$

Isto é, a derivada total de $\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)$ em relação à τ em $\tau=0$ sobre o plano tangente à restrição dada pela equação de estado.

O primeiro passo é montar a função lagrangiana associada à equação (2.16) na configuração perturbada Ω_τ. Logo,

$$L_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\boldsymbol{\lambda}_\tau\right)=\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)+a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\boldsymbol{\lambda}_\tau\right)-l_\tau\left(\boldsymbol{\lambda}_\tau\right),\qquad\forall\,\boldsymbol{\lambda}_\tau\in\mathcal{V}_\tau. \tag{2.17}$$

Considerando que a equação de equilíbrio (2.13) é satisfeita para todo τ, então a derivada total da função lagrangiana (2.17) em relação ao parâmetro τ é

$$\frac{dL_\tau}{d\tau}=\frac{d\Psi_\tau}{d\tau}=\frac{\partial L_\tau}{\partial\tau}+\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle+\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\boldsymbol{\lambda}_\tau},\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau\right\rangle, \tag{2.18}$$

com

$$\dot{\mathbf{u}}_\tau=\frac{d\mathbf{u}_\tau}{d\tau}\in\mathcal{V}_\tau\quad\text{e}\quad\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau=\frac{d\boldsymbol{\lambda}_\tau}{d\tau}\in\mathcal{V}_\tau\ .$$

De acordo com a equação (2.17), a derivada parcial $\dfrac{\partial L_\tau}{\partial \tau}$ pode ser escrita como

$$\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau} = \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle + a_\tau\left(\dot{\mathbf{u}}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau\right) + a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau\right) - l_\tau\left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau\right), \tag{2.19}$$

onde se considerou a bilinearidade de $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau)$ e a linearidade de $l_\tau(\boldsymbol{\lambda}_\tau)$.

Através das equações (2.18) e (2.19), as derivadas direcionais $\left\langle \dfrac{\partial L_\tau}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau \right\rangle$ e $\left\langle \dfrac{\partial L_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle$ dão origem à seguintes condições:

1. Para $\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{U}_\tau$ solução da equação de estado (2.9) e considerando que $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau$, então

$$\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau \right\rangle = a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau\right) - l_\tau\left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\tau\right) = 0. \tag{2.20}$$

2. Para $\boldsymbol{\lambda}_\tau \in \mathcal{V}_\tau$ solução da equação adjunta, tem-se

$$\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = a_\tau\left(\dot{\mathbf{u}}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau\right) + \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = 0,$$

ou considerando a simetria da forma bilinear

$$a_\tau\left(\boldsymbol{\lambda}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau\right) = -\left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle, \qquad \forall\ \dot{\mathbf{u}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau. \tag{2.21}$$

Portanto, se as equações de estado (2.20) e adjunta (2.21) são satisfeitas, a seguinte relação é válida

$$\frac{dL_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau\right)}{d\tau} = \frac{\partial L_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau\right)}{\partial \tau}, \tag{2.22}$$

pois neste caso $\mathbf{u}_\tau$ e $\boldsymbol{\lambda}_\tau$ tornam-se fixos.

Assim, a sensibilidade do lagrangiano dada na equação (2.17) para o funcional energia potencial total (2.14), considerando que $\mathbf{u}_\tau$ satisfaça a equação de estado do problema (2.20) e $\boldsymbol{\lambda}_\tau$ a solução da equação adjunta (2.21) (que para o funcional em questão, $\boldsymbol{\lambda}_\tau = \mathbf{0}$, ver (Novotny, 2003)), pode ser escrita como

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau\right)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} - \left.\frac{\partial l_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}. \tag{2.23}$$

Como pode ser visto em (Novotny, 2003), as derivadas parciais das formas bilinear e linear da equação (2.23), em relação à τ em $\Omega_\tau|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon$, podem ser calculadas através do Teorema de Transporte de Reynolds (Gurtin, 1981), respectivamente, como

$$\left.\frac{\partial a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau\right)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\left(\mathbf{T}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^S\right)\mathbf{I} - 2\nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \mathbf{T}_\varepsilon\right] \cdot \nabla \mathbf{v}\ d\Omega_\varepsilon\ , \tag{2.24}$$

$$\left.\frac{\partial l_\tau(\mathbf{u}_\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_\varepsilon)\,\mathbf{I}\cdot\nabla\mathbf{v}\; d\Omega_\varepsilon\ , \tag{2.25}$$

sendo $\mathbf{T}_\varepsilon$ e $\nabla\mathbf{u}^S_\varepsilon$, respectivamente, o tensor de tensão de Cauchy e o tensor de deformação de Green-Lagrange linearizado definidos na configuração não perturbada Ω_ε.

Substituindo as equações (2.24) e (2.25) em (2.23), a derivada do langrangiano resulta em

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{v}\; d\Omega_\varepsilon\ . \tag{2.26}$$

$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ pode ser interpretado como o tensor momento energia de Eshelby (Eshelby, 1975) que para este problema é escrito como

$$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}_\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{u}^S_\varepsilon - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}^T_\varepsilon\mathbf{T}_\varepsilon. \tag{2.27}$$

Através do Teorema da Divergência e da relação tensorial $\operatorname{div}\left(\mathbf{T}^T_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon\right) = \operatorname{div}(\mathbf{T}_\varepsilon)\cdot\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{T}_\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{u}_\varepsilon$, a equação (2.26) pode ser escrita como

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\; d\Gamma_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\mathbf{\Sigma}_\varepsilon\cdot\mathbf{v}\; d\Omega_\varepsilon\ . \tag{2.28}$$

Pode-se provar (ver Proposição 4.1 em (Novotny, 2003)), que se $\mathbf{u}_\tau$ e $\boldsymbol{\lambda}_\tau$, são, respectivamente, soluções das equações de estado e adjunta, então,

$$\operatorname{div}\mathbf{\Sigma}_\varepsilon = \mathbf{0}. \tag{2.29}$$

Assim, considerando a condição de contorno de Neumann homogênea ($\mathbf{T}_\varepsilon\mathbf{n} = \mathbf{0}$) sobre ∂B_ε, o campo de velocidade definido por (2.5), a relação (2.18) e a equação (2.8) do Teorema 2.1, a derivada topológica, à menos do limite, resulta em

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{f'(\varepsilon)}\int_{\partial B_\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\mathbf{T}_\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{u}^S_\varepsilon - \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_\varepsilon\right) d\partial B_\varepsilon\ . \tag{2.30}$$

A equação (2.30) representa a derivada topológica, à menos de um limite, que deve ser calculada. Para o problema em questão, é possível calcular este limite através de uma análise assintótica do termo integrando, (ver Apêndice A de (Novotny, 2003)). Assim, considerando a ausência de força de corpo ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), a derivada topológica para elasticidade linear em estado plano de tensão pode ser escrita como

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = D^*_T(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{2}{(1+\nu)}\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu^2)}\operatorname{tr}\mathbf{T}\ \operatorname{tr}\nabla\mathbf{u}^S. \tag{2.31}$$

Para o estado plano de deformação, tem-se

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = D^*_T(\hat{\mathbf{x}}) = 2(1-\nu)\,\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \frac{(1-\nu)(4\nu-1)}{2(1-2\nu)}\operatorname{tr}\mathbf{T}\ \operatorname{tr}\nabla\mathbf{u}^S, \tag{2.32}$$

sendo $\mathbf{T}$ e $\nabla\mathbf{u}^S$ respectivamente, os tensores de tensão de Cauchy e deformação de Green-Lagrange linearizado, definidos no domínio sem furo Ω.

Para os casos particulares de tensão e deformação planas, respectivamente, com $\nu = 1/3$ e $\nu = 1/4$, ambas as equações (2.31) e (2.32) reduzem-se a

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{3}{2}\mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{u}^S. \tag{2.33}$$

2.3 Análise de Resposta

No presente trabalho, o problema variacional dado pela equação (2.13) foi discretizado e resolvido pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Obter uma solução analítica para tal problema torna-se impraticável devido à complexidades envolvidas no problema, tais como geometria complexa, condições de contorno e carregamento.

Entre os vários métodos numéricos de resolução de resolução de equações diferenciais existentes (tais como, Método dos Elementos de Contorno, Método das Diferenças Finitas, etc.), o MEF é o mais difundido atualmente. Tal método pode ser entendido como uma maneira sistemática e geral de se construir famílias de subespaços de dimensão finita $\mathcal{U}_{hp} \subset \mathcal{U}$. Assim, o problema dado pela equação (2.13) pode ser reescrito da seguinte forma

Encontre $\mathbf{u}_{hp_\tau} \in \mathcal{U}_{hp_\tau}$, tal que

$$a_\tau\left(\mathbf{u}_{hp_\tau}, \boldsymbol{\eta}_{hp_\tau}\right) = l_\tau\left(\boldsymbol{\eta}_{hp_\tau}\right), \qquad \forall\ \boldsymbol{\eta}_{hp_\tau} \in \mathcal{V}_{hp_\tau} \subset \mathcal{V}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0, \tag{2.34}$$

sendo $\mathcal{U}_{hp_\tau}$ o espaço das funções admissíveis discretizado; $\mathcal{V}_{hp_\tau}$ o espaço das funções teste admissíveis discretizado; o índice $h \in (0,1] \subset \Re$ o parâmetro de dependência da aproximação ao tamanho da malha; o índice $p \in \Re$ o parâmetro de dependência da ordem polinomial das funções de base utilizadas para gerar o espaço de elementos finitos.

Como pode ser visto em vasta literatura referente ao MEF, (por exemplo, (Becker *et al.*, 1981), (Carey e Oden, 1983), (Oden e Carey, 1983), (Szabó e Babuška, 1991), (Zienkiewicz e Taylor, 1989) e (Reddy, 1986)), a equação (2.34) conduz a um sistema de equações lineares, escrito na seguinte forma matricial

$$\mathbf{K}_{hp}\bar{\mathbf{u}}_{hp_\tau} = \mathbf{f}_{hp}, \tag{2.35}$$

sendo $\bar{\mathbf{u}}_{hp_\tau}$, para o problema elástico linear em questão, um vetor representando os deslocamentos nodais; $\mathbf{f}_{hp}$ o vetor de carregamento externo equivalente; $\mathbf{K}_{hp}$ a matrix de rigidez global do problema. Além disso, é comum no MEF considerar que $\mathcal{U}_{hp_\tau}$ e $\mathcal{V}_{hp_\tau}$ sejam topologicamente equivalentes. Assim, as mesmas funções de base são utilizadas para gerar ambos os espaços $\mathcal{U}_{hp_\tau}$ e $\mathcal{V}_{hp_\tau}$, dando origem à uma formulação variacional simétrica (Becker *et al.*, 1981). Tal consideração é conhecida na literatura como método de Bubnov-Galerkin e nos casos em que o operador diferencial do problema é auto-adjunto, a matrix de rigidez do problema $\mathbf{K}_{hp}$ resulta simétrica, facilitando, portanto, a resolução do sistema representado pela equação (2.35).

2.4 Algoritmo de Otimização Topológica

A função derivada topológica fornece a sensibilidade de um determinado funcional quanto à criação de pequenos furos no domínio de definição do problema. Além disso, a derivada topológica pode ser utilizada como direção de descida em um processo de otimização topológica, (ver (Céa *et al.*, 1998), (Garreau *et al.*, 2001) e (Eschenauer e Olhoff, 2001)). Portanto, um algoritmo de otimização topológica que utilize a derivada topológica deve obedecer a um determinado procedimento de criação de furos no domínio em questão. Além do mais, uma restrição adicional do tipo

$$\int_\Omega d\Omega \leq \bar{V}, \tag{2.36}$$

sendo $\bar{V}$ o volume ou a área mínima do domínio, é considerada afim de evitar que o algoritmo tente levar à solução trivial do problema, ou seja, $meas\,(\Omega) = 0$. Assim, a restrição (2.36) não é relaxada na função lagrangiana (2.17), sendo imposta como um *critério de parada* do processo de otimização. Sendo assim, no presente trabalho, o processo iterativo implementado pode ser esquematizado através do seguinte algoritmo (Novotny, 2003).

Considere uma seqüência de domínios $\{\Omega^j\}$, sendo j a j-ésima iteração, então:

1. Fornecer o domínio inicial Ω e o *Critério de Parada*, caracterizado pela primeira restrição de (2.16), sendo $\bar{V}$ a área ou volume final desejado e Vr valor da área ou volume a ser retirado por iteração.

2. Enquanto o *Critério de Parada* não é satisfeito, ou seja, enquanto $\int_\Omega d\Omega \leq \bar{V}$, faça:

   (a) Resolver os problemas (2.20) e (2.21) via MEF;

(b) Calcular $D_T(\hat{\mathbf{x}}_k)^j$ na forma discretizada em todos os nós $\hat{\mathbf{x}}_k$ da malha de elementos finitos;

(c) Criar os furos nos pontos $\hat{\mathbf{x}}_k$ da malha nos quais os valores da derivada topológica assumem o *menor* valor, até que se atinja a área ou volume Vr especificado a ser retirado por iteração;

(d) Definir o novo domínio Ω^{j+1};

(e) Fazer $j = j + 1$ e retornar ao início do passo 2.

3. Ponto onde se espera obter a topologia final satisfatória.

Em relação à criação dos furos no item (c) do algoritmo acima, adotou-se o mesmo procedimento sugerido em (Novotny, 1998). Ao invés de adotar o ponto $\hat{\mathbf{x}}_k$ como sendo o baricentro do k-ésimo elemento da malha, conhecida na literatura como método *hard kill*, (ver (Céa *et al.*, 1998) e (Garreau *et al.*, 2001)), adotou-se o ponto $\hat{\mathbf{x}}_k$ como sendo o k-ésimo ponto nodal da malha[1]. Portanto, os elementos a serem retirados são aqueles que pertencem a uma determinada *célula* na malha, ou seja, a composição de todos os elementos que compartilham o mesmo nó da malha, conforme ilustrado na Figura 2.3. Desta forma, segundo (Novotny, 1998), instabilidades numéricas são evitadas e a aparência tipo dente de serra no domínio final é minimizada. Alguns resultados, utilizando tal medologia podem ser encontrados em (Novotny *et al.*, 1998).

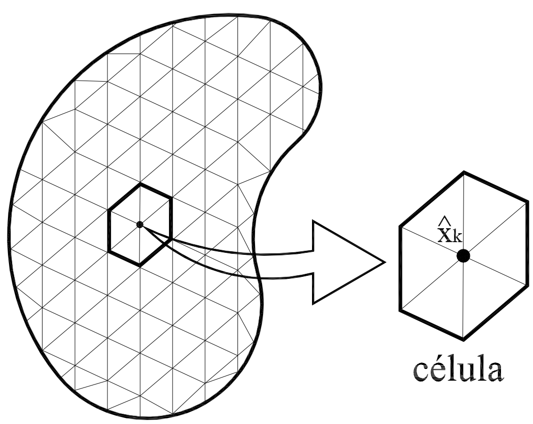


Figura 2.3: Procedimento de geração de furos na malha.

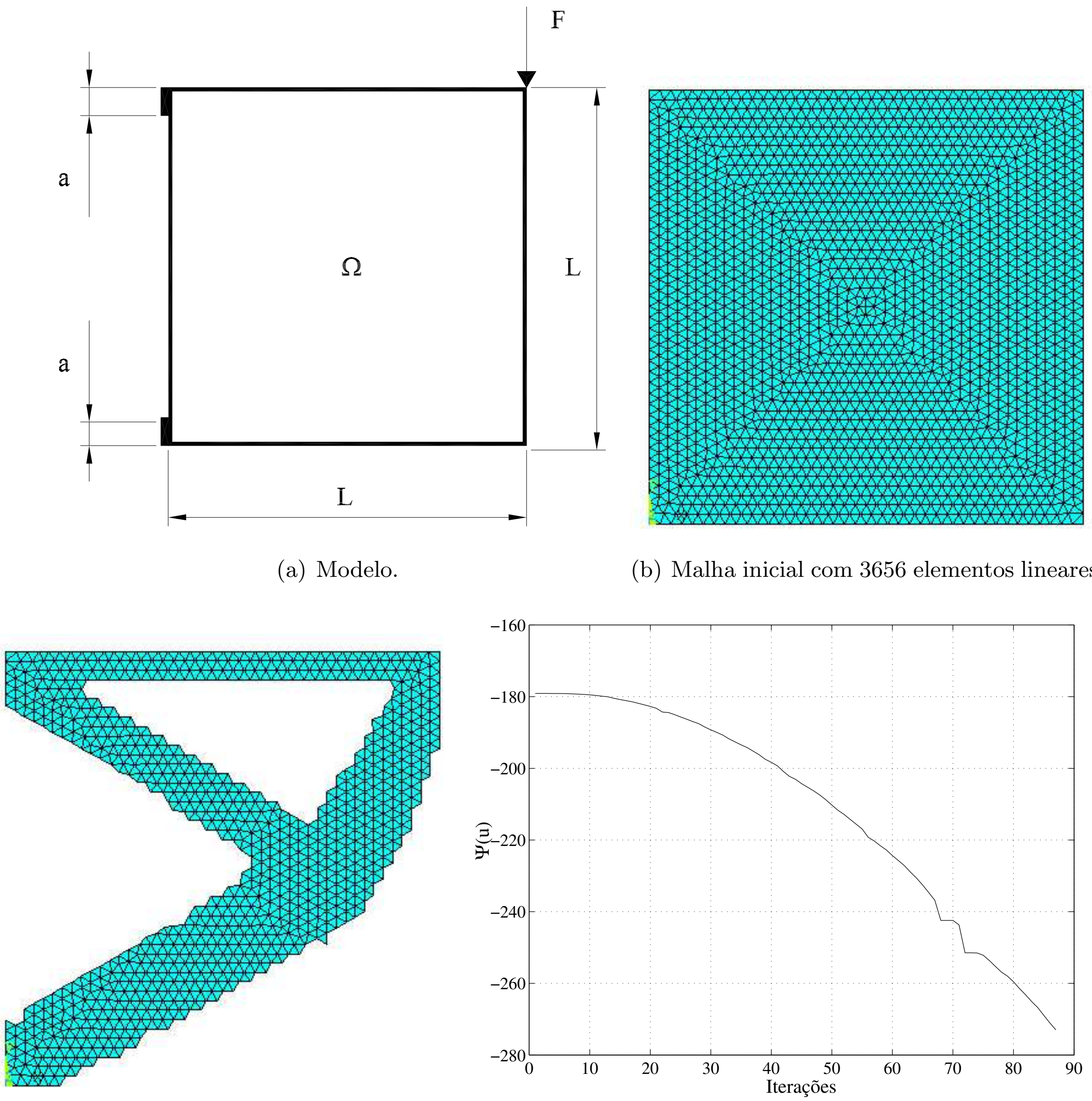
[1]Os valores nodais da derivada topológica são obtidos, quando necessários, através de um processo de suavização global dos campos de tensão e deformação, tal como proposto por (Hinton e Campbell, 1973). Ver também, Seção 3.2 de (Bittencourt, 1996).

2.5 Estudo de Casos

Para ilustrar o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica para problemas de elasticidade plana linear, serão apresentados nesta seção alguns exemplos de estruturas modeladas como estado plano de tensões. Portanto, considere um componente estrutural plano, caracterizado por um domínio $\Omega \in \Re^2$ e por uma espessura $\rho \in \Re^+$ que nestes casos será considerada constante. Tais exemplos têm sido utilizados na literatura para a convalidação do algoritmo de otimização (Novotny *et al.*, 1998; Driemeier, 2002).

2.5.1 Viga Curta Engastada

Neste exemplo, o modelo é representado por um domínio inicial retangular de dimensões $L = 50$ mm, espessura $\rho = 5\ mm$, módulo de Young $E = 210 \times 10^3\ N/mm^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$. A placa está engastada na região denotada por $a = 5\ mm$ e submetida a uma carga concentrada de $F = 5000\ N$, conforme ilustrado na Figura 2.4(a). Para discretizar o problema foi utilizada uma malha com 3656 elementos finitos triangulares lineares (ver Figura 2.4(b)). Além disso, foi considerado como *critério de parada* que a área final $\bar{V} = 0,40V_0$, sendo V_0 a área inicial do domínio, retirando-se 1% de área em cada iteração. A topologia final foi atingida após 86 iterações do algoritmo de otimização topológica descrito na Seção 2.4. A Figura 2.4(d) ilustra o decaimento do valor do funcional de energia potencial total em função da iteração j. A topologia final é a mesma obtida em (Novotny, 2003), porém com um número maior de iterações devido à característica de retirada de elementos do algoritmo empregado.



(a) Modelo.

(b) Malha inicial com 3656 elementos lineares.

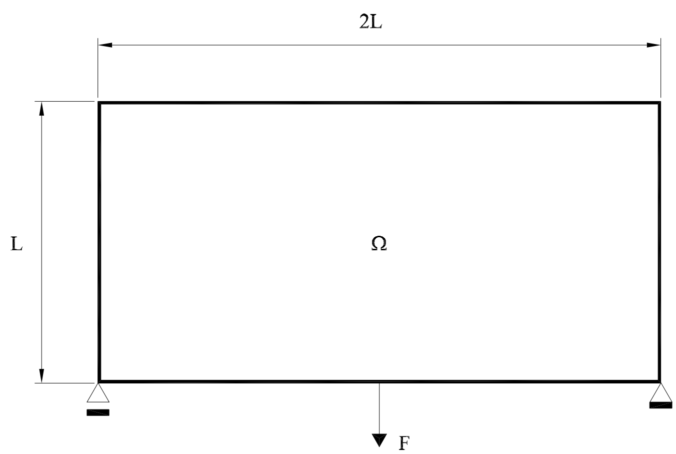
(c) Topologia em $j = 86$.

(d) Energia potencial total x Iteração j.

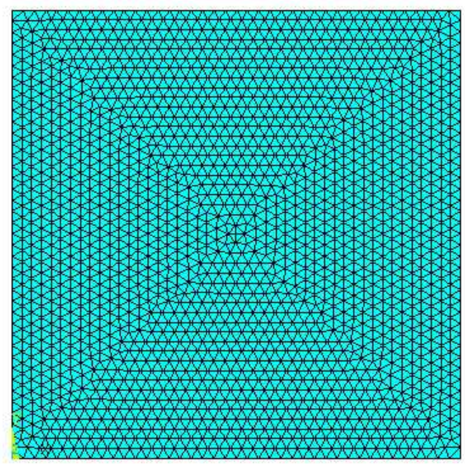
Figura 2.4: Viga engastada.

2.5.2 Estrutura de Michell

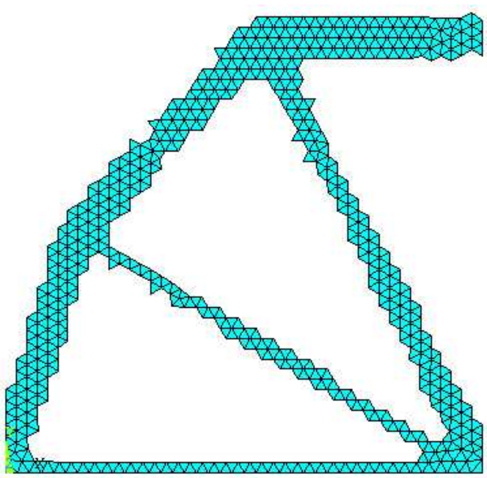
Neste exemplo, o domínio inicial está ilustrado na Figura 2.5(a), sendo $L = 50\ mm$, $\rho = 5\ mm$, $E = 210 \times 10^3\ N/mm^2$ e $\nu = 1/3$. A estrutura está submetida à uma força concentrada $F = 5000\ N$. Além disso, foi considerada a simetria do problema e uma malha com 3656 elementos finitos triangulares lineares foi gerada, (ver Figura 2.5(b)). Como *critério de parada*, tomou-se a área final $\bar{V} = 0,22V_0$, retirando-se 1% de área em cada iteração. A topologia final é obtida após 139 iterações do algoritmo da Seção 2.4. A Figura 2.5(d) ilustra o comportamento decrescente do funcional energia potencial total



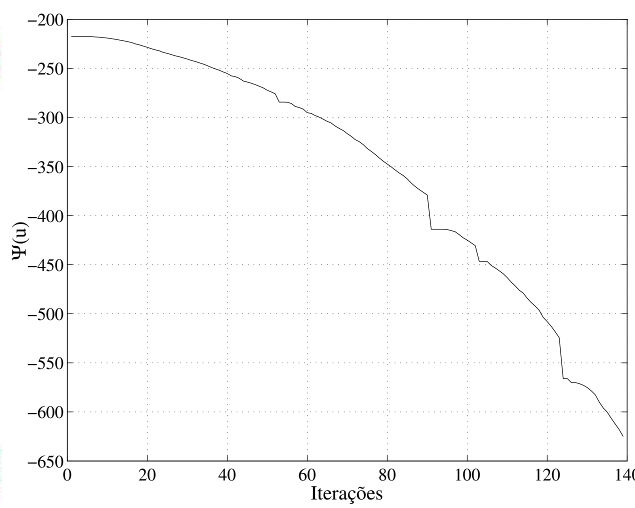
(a) Modelo.



(b) Malha inicia com 3656 elementos lineares.



(c) Topologia em $j = 139$.



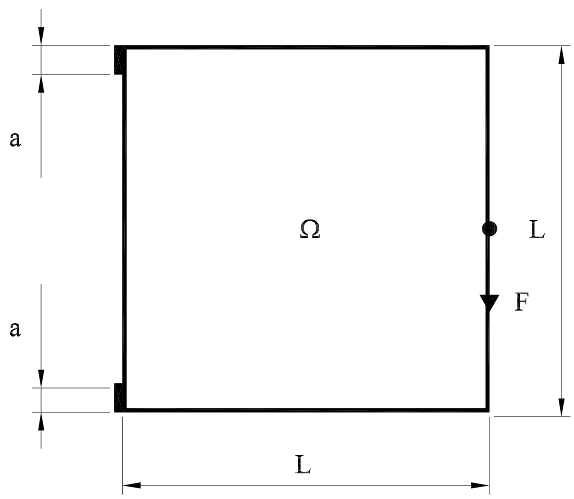
(d) Energia potencial total x Iteração j.

Figura 2.5: Estrutura de Michell.

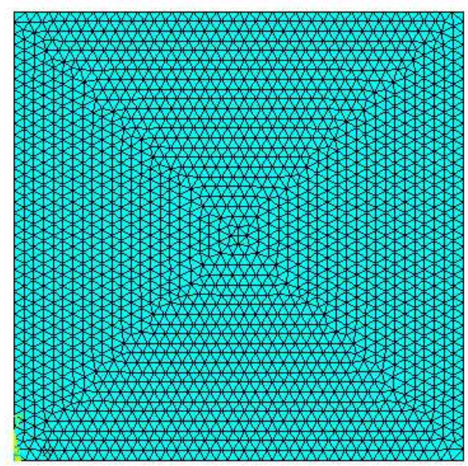
em função da iteração j. As mesmas observações feitas para o exemplo anterior relativas à topologia final são válidas para o presente exemplo.

2.5.3 Problema da Duas Barras

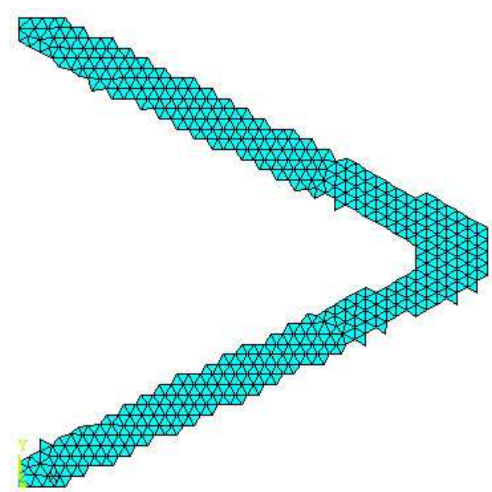
Neste exemplo, o domínio inicial, ilustrado na Figura 2.6(a), está submetido à uma força concentrada aplicada no meio da placa, sendo os demais dados idênticos ao problema da viga engastada, com exceção que a área final é $\bar{V} = 0,20V_0$. Neste problema, a topologia final é obtida com 149 iterações e o decréscimo do funcional de energia potencial total está ilustrado na Figura 2.6(d). A topologia final é a mesma obtida em (Driemeier, 2002).



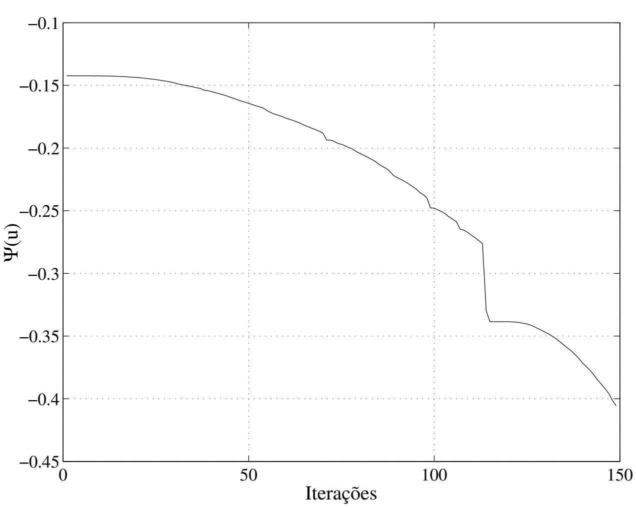
(a) Modelo.



(b) Malha inicial com 3656 elementos lineares.



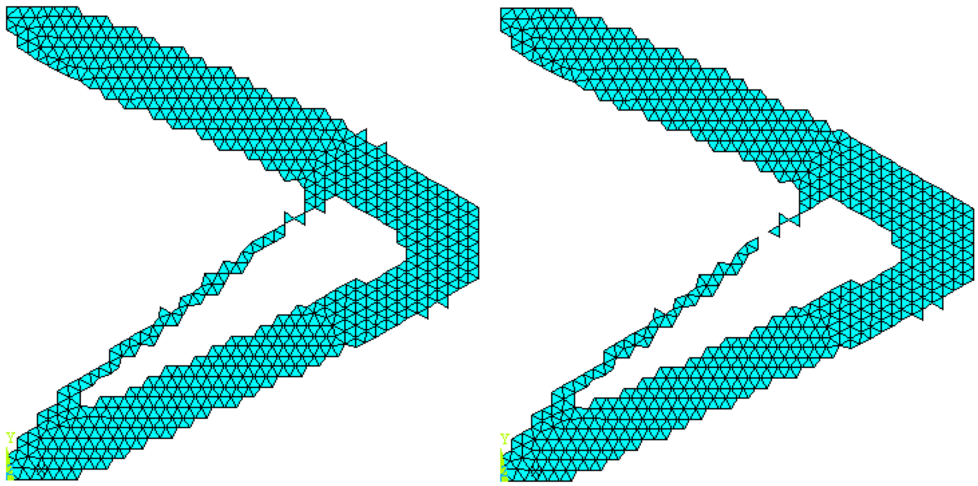
(c) Topologia em $j = 149$.



(d) Energia potencial total x Iteração j.

Figura 2.6: Problema de duas barras.

Uma observação interessante a ser feita, é a respeito da descontinuidade apresentada na Figura 2.6(d) em $j = 115$. Tal descontinuidade surge quando a barra comprimida presente na topologia em $j = 114$ se rompe, conforme pode ser visto nas Figuras 2.7(a) e 2.7(b). Tal rompimento resulta em um elevado decréscimo da energia potencial total do sistema.



(a) Topologia em $j = 114$. (b) Topologia em $j = 115$.

Figura 2.7: Rompimento de barra.

Capítulo 3

AST em Problemas com Não Linearidade Geométrica

3.1 Definição do Problema

Neste capítulo, o problema a ser considerado envolve não linearidade geométrica, no caso, grandes deslocamentos. Neste tipo de problema a configuração final do corpo, caracterizada pelo domínio deformado $\Omega \in \Re^n$, difere bastante em relação à configuração inicial, que neste trabalho será adotada como configuração de referência, e é caracterizada pelo domínio $\Omega^0 \in \Re^n$.

Matematicamente, um corpo é deformado via um mapeamento injetivo $\mathbf{f}$ que relaciona cada ponto material $\mathbf{X} \in \Omega^0$ a um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, ou seja,

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \in \Omega. \tag{3.1}$$

O vetor $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$ representa o deslocamento do ponto $\mathbf{X}$, conforme ilustrado na Figura 3.1. Além do mais, é exigido que o corpo não penetre em si mesmo, o que resulta na hipótese de $\mathbf{f}$ ser uma função injetora, ou seja, uma relação um para um entre os pontos $\mathbf{X} \in \Omega^0$ e os pontos $\mathbf{x} \in \Omega$. Como $\nabla\mathbf{f}$ representa localmente o volume deformado por unidade de volume não-deformado (ver (Gurtin, 1981)), a condição de $\mathbf{f}$ ser injetora é satisfeita quando

$$\det \nabla\mathbf{f} > 0. \tag{3.2}$$

No presente capítulo, considera-se a lei de Hooke generalizada para um material elástico, linear

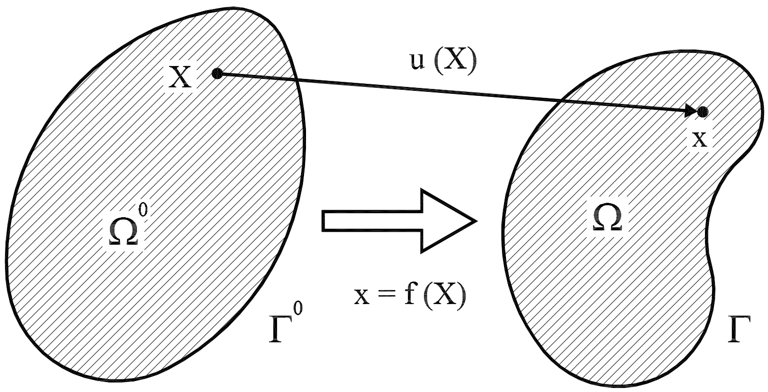


Figura 3.1: Mapeamento entre domínio de referência não-deformado Ω^0 e o domínio deformado Ω.

(com a deformação), homogêneo e isotrópico. Portanto, para uma Formulação Lagrangiana Total, a relação tensão-deformação pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{S} = \mathsf{C} : \mathbf{E}, \tag{3.3}$$

sendo $\mathbf{S}$ o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff; $\mathbf{E}$ o tensor de deformação finita de Green-Lagrange escrito em relação à $\mathbf{u}$ da seguinte forma

$$\mathbf{E} = \nabla\mathbf{u}^S + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u}; \tag{3.4}$$

C é um tensor de quarta ordem com simetrias maior ($\mathsf{C}_{ijkl} = \mathsf{C}_{klij}$) e menor ($\mathsf{C}_{ijkl} = \mathsf{C}_{jilk}$). Representa o tensor de elasticidade do material e é escrito da seguinte forma

$$\mathsf{C} = 2\bar{\mu}\mathsf{I} + \bar{\lambda}\left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right), \tag{3.5}$$

com $\bar{\mu}$ e $\bar{\lambda}$ as constantes de Lamé e I é o tensor unitário de quarta ordem.

Considera-se que o domínio de referência $\Omega^0 \in \Re^n$ seja aberto e limitado e seu contorno $\Gamma^0 = \Gamma^0_N \cup \Gamma^0_D$, $(\Gamma^0_D \cap \Gamma^0_N = \emptyset)$ seja suficientemente regular, admitindo a existência de um vetor unitário normal $\mathbf{n}$ em quase todos os pontos de Γ^0, exceto possivelmente em um conjunto finito de medida nula, conforme ilustrado na Figura 3.2. Nesse caso, o Problema de Valor de Contorno (PVC) de equilíbrio a ser resolvido sobre $\bar{\Omega}^0 = \Omega^0 \cup \Gamma^0$, no sentido clássico, pode ser escrito como:

Encontre $\mathbf{u} \in C^2$, tal que

$$\begin{cases} \mathrm{Div}\mathbf{P}(\mathbf{u}) + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} & \text{em } \Omega^0 \\ \mathbf{P}\mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0 & \text{em } \Gamma_N^0 \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_D^0 \end{cases}, \tag{3.6}$$

sendo C^2 o espaço das funções com derivada segunda contínua em Ω^0; $\mathbf{P}$ é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff; $\mathbf{b}_0$ é um vetor na configuração de referência Ω^0, suficientemente suave e constante, representando as forças de corpo; $\mathbf{t}_0$ é um vetor na configuração de referência representando o carregamento prescrito no contorno Γ_N^0; e $\bar{\mathbf{u}}$ o deslocamento prescrito em Γ_D^0.

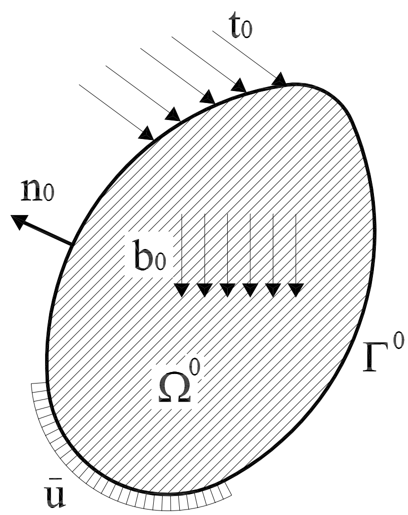


Figura 3.2: Domínio de referência não-deformado do PVC.

Conforme (Bonet e Wood, 1997) e (Belytschko *et al.*, 2001), o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ pode ser relacionado com o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff da seguinte forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \tag{3.7}$$

sendo $\mathbf{F} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})$ o tensor gradiente de deformação. Além disso, como $\mathbf{F}$ é não simétrico, $\mathbf{P}$, ao contrário de $\mathbf{S}$, também é um tensor não simétrico. Portanto, devido à esta carência de simetria, o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ será utilizado para representar o estado de tensão na configuração de referência Ω^0 no presente trabalho.

O problema variacional correspondente à forma forte da equação (3.6) é:

Encontre $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, tal que

$$a(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) = l(\delta\mathbf{u}), \qquad \forall\ \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \tag{3.8}$$

sendo $\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{u} \in \left[H^1\left(\Omega^0\right)\right]^{\dim} \mid \mathbf{u}|_{\Gamma_D^0} = \bar{\mathbf{u}} \right\}$ e $\mathcal{V} = \left\{ \delta\mathbf{u} \in \left[H^1\left(\Omega^0\right)\right]^{\dim} \mid \delta\mathbf{u}|_{\Gamma_D^0} = \mathbf{0} \right\}$ e $\dim \leq 3$.

A equação (3.8) representa o *Princípio do Trabalho Virtual* para o problema não linear em questão, uma vez que, $\delta\mathbf{u}$ representa uma variação virtual da solução $\mathbf{u}$. Cabe salientar ainda que a forma abstrata $a(\mathbf{u},\delta\mathbf{u})$ é limitada, linear em $\delta\mathbf{u}$, porém não linear em $\mathbf{u}$ e $l(\delta\mathbf{u})$ é uma forma linear e limitada. Tais formas podem ser escritas da seguinte forma (Bonet e Wood, 1997)

$$a(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega^0} \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{F}\ d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{E}\ d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \mathsf{C} : \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{E}\ d\Omega^0\ , \tag{3.9}$$

$$l(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega^0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u}\ d\Omega^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u}\ d\Gamma^0\ . \tag{3.10}$$

O termo $\delta\mathbf{E}$ na equação (3.9) representa uma variação virtual do campo de deformação e se relaciona à $\delta\mathbf{u}$ através da seguinte relação (Belytschko *et al.*, 2001; Bonet e Wood, 1997)

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\delta\mathbf{F} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\right) = \nabla\delta\mathbf{u}^S + \frac{1}{2}\nabla\delta\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^T\nabla\delta\mathbf{u}. \tag{3.11}$$

3.2 Análise de Resposta para Problemas Não-Lineares

O problema variacional representado pela equação (3.8) é não-linear em relação ao vetor solução $\mathbf{u}$. Portanto, uma estratégia básica de solução consiste no particionamento do problema original numa seqüência de subproblemas lineares consecutivos. Cada subproblema é então resolvido, sendo sua solução o estado inicial do subproblema seguinte (Simo e Hughes, 1998).

Em problemas não-estacionários, esse particionamento corresponde à discretização do período pela qual o fenômeno ocorre em incrementos de tempo por algum método de integração. Em problemas estacionários, ou seja, independentes da variável tempo, procedimento análogo é aplicado, porém, ao invés de incrementos no tempo, o particionamento se traduz na aplicação de incrementos de carregamentos e deslocamentos prescritos. Assim, numericamente, todos os problemas são tratados como se ocorressem em um intervalo de tempo finito discretizado em incrementos.

De uma maneira formal, considera-se $I = \left[0, \hat{t}\right] \subset \Re$ o intervalo total de ocorrência do fenômeno, sendo conhecido o estado do sistema em $t = 0$ e $\hat{t}$ denotando o estado final do sistema. O processo de solução consiste em particionar o intervalo total do fenômeno I em N subintervalos de comprimento $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$, sendo $n = 0, ..., N-1$, de tal forma que $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = \hat{t}$.

De acordo com o problema estrutural definido pela equação (3.6), o processo de particionamento dá origem a uma seqüência de problemas não-lineares

$$\begin{cases} \text{Div}\mathbf{P}_{n+1} + \mathbf{b}_{0_{n+1}} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega^0 \\ \mathbf{P}_{n+1}\mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_{0_{n+1}} & \text{em } \Gamma_N^0 \\ \mathbf{u}_{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1} & \text{em } \Gamma_D^0 \end{cases} , \tag{3.12}$$

sendo conhecida a solução anterior $\mathbf{u}_n$, correspondente ao intervalo anterior.

Similarmente, um problema variacional correspondente à forma fraca (3.12), equivalente à equação (3.8), pode ser definido para cada intervalo I_{n+1}:

Encontre $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$, tal que

$$a\left(\mathbf{u}_{n+1}, \delta\mathbf{u}\right) = l\left(\delta\mathbf{u}\right), \quad \forall\ \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \tag{3.13}$$

sendo

$$a\left(\mathbf{u}_{n+1}, \delta\mathbf{u}\right) = \int_{\Omega^0} \mathbf{S}_{n+1} \cdot \delta\mathbf{E}\ d\Omega^0 , \tag{3.14}$$

$$l\left(\delta\mathbf{u}\right) = \int_{\Omega^0} \mathbf{b}_{0_{n+1}} \cdot \delta\mathbf{u}\ d\Omega^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_{0_{n+1}} \cdot \delta\mathbf{u}\ d\Gamma^0 . \tag{3.15}$$

Dessa forma, cada intervalo t_{n+1} está associado a um par de esforços externos $\mathbf{b}_{0_{n+1}}$ e $\mathbf{t}_{0_{n+1}}$, bem como aos espaços de deslocamentos cinematicamente admissíveis $\mathcal{U}_{n+1} = \left\{ \mathbf{u}_{n+1} \in \left[H^1\left(\Omega^0\right)\right]^{\dim} \mid \mathbf{u}_{n+1}|_{\Gamma_D^0} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1} \right\}$ e de variações admissíveis $\mathcal{V}$, para $\dim \leq 3$.

No presente trabalho, a solução do problema variacional não-linear (3.13) é obtida pelo MEF (Belytschko *et al.*, 2001). Similarmente à Seção 2.3, o problema variacional (3.13) é substituído pelo pelo seguinte problema:

Encontre $\mathbf{u}_{hp_{n+1}} \in \mathcal{U}_{hp_{n+1}} \subset \mathcal{U}_{n+1}$, tal que

$$a\left(\mathbf{u}_{hp_{n+1}}, \delta\mathbf{u}_{hp}\right) = l\left(\delta\mathbf{u}_{hp}\right), \quad \forall\delta\mathbf{u}_{hp} \in \mathcal{V}_{hp}, \tag{3.16}$$

sendo $\mathcal{U}_{hp_{n+1}}$ e $\mathcal{V}_{hp}$, respectivamente, os espaços de deslocamentos admissíveis discretizado no intervalo de solução $n+1$ e o espaço das variações discretizado, definidos da mesma forma que na Seção 2.3.

Em problemas lineares, a solução pelo MEF conduz a um sistema de equações lineares resolvido através de um único passo. Obviamente, a introdução de qualquer não-linearidade, seja geométrica, de material ou de condição de contorno, altera essa situação, exigindo um procedimento de solução diferente.

No presente trabalho, o problema variacional (3.16) no intervalo I_{n+1} é resolvido através do método de Newton-Raphson que consiste de uma seqüência de carregamento incremental, no qual a estimativa inicial é refinada a cada iteração. Tal estratégia de solução é denominada *solução em passos de carregamento* (Oden, 1972). Formalmente, o método de Newton-Raphson é um procedimento iterativo de ponto fixo (Kreyszig, 1989) que aproxima a solução do problema original através de uma seqüência de soluções de aproximações lineares.

A aplicação do método de Newton-Raphson à forma variacional (3.16), considerando que o carregamento no contorno seja independente da deformação e omitindo o subescrito hp em $\mathbf{u}$ da equação (3.16), resulta no seguinte processo iterativo (Silva, 2003)

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta a\left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1};{}^{(k+1)}\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}\right) = l_{n+1}\left(\delta\mathbf{u}\right) - a\left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1},\delta\mathbf{u}\right), \\ \\ {}^{(k+1)}\mathbf{u}_{n+1} = {}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1} + {}^{(k+1)}\Delta\mathbf{u}, \\ \\ k = k+1 \quad \text{até que} \ \left\|{}^{(k+1)}\Delta\mathbf{u}_{n+1}\right\| \leq \gamma > 0, \end{array}} \tag{3.17}$$

sendo k o número da iteração de equilíbrio no intervalo $n+1$ e γ a precisão.

Omitindo os parâmetros k e $n+1$ da equação acima, a forma abstrata $\delta a\left(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}\right)$ é bilinear e simétrica em $\Delta\mathbf{u}$ e $\delta\mathbf{u}$, que resulta da linearização da forma abstrata $a\left(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}\right)$ em (3.16), conforme (Silva, 2003), e pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta a\left(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}\right) &= \int_{\Omega^0} \mathsf{C} : \left\langle \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\Delta\mathbf{u}\right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\delta\mathbf{u}\right\rangle d\Omega^0 + \\ & \int_{\Omega^0} \mathbf{S}\left(\mathbf{u}\right) \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\nabla\left(\Delta\mathbf{u}\right)^T \nabla\delta\mathbf{u} + \nabla\delta\mathbf{u}^T\nabla\left(\Delta\mathbf{u}\right)\right)\right] d\Omega^0 \ , \end{aligned} \tag{3.18}$$

sendo

$$\left\langle \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\Delta\mathbf{u}\right\rangle = \Delta\mathbf{E} = \left(\nabla\left(\Delta\mathbf{u}\right)^S + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^T\nabla\left(\Delta\mathbf{u}\right) + \frac{1}{2}\nabla\left(\Delta\mathbf{u}\right)^T\nabla\mathbf{u}\right), \tag{3.19}$$

$$\left\langle \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\delta\mathbf{u}\right\rangle = \delta\mathbf{E} = \left(\nabla\delta\mathbf{u}^S + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^T\nabla\delta\mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla\delta\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u}\right). \tag{3.20}$$

Como $l_{n+1}\left(\delta\mathbf{u}\right) - a\left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1},\delta\mathbf{u}\right)$ no processo iterativo (3.17) é linear em $\delta\mathbf{u}$, a solução ${}^{(k+1)}\Delta\mathbf{u}$

em cada passo $k+1$ resulta em um sistema linear, que matricialmente assume a seguinte forma (ver (Bonet e Wood, 1997; Belytschko *et al.*, 2001))

$$\mathbf{K}(\mathbf{u})\ \Delta\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}}_{ext} - \hat{\mathbf{f}}_{int}, \tag{3.21}$$

sendo $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez tangente do problema, $\hat{\mathbf{f}}_{ext}$ um vetor representando as forças externas e $\hat{\mathbf{f}}_{int}$ um vetor representando as forças internas.

O critério de convergência indicado decorre da formulação usual de algoritmo de ponto fixo (Kreyszig, 1989). Porém, devido à diversidade de problemas estruturais não-lineares, outros critérios alternativos podem ser aplicados, tais como (Bathe, 1996)

$$\left\| \left[\hat{\mathbf{f}}_{ext}\right]_{n+1} -^{(k)} \left[\hat{\mathbf{f}}_{int}\right]_{n+1} \right\| / \left\| \left[\hat{\mathbf{f}}_{ext}\right]_{n+1} -^{(0)} \left[\hat{\mathbf{f}}_{int}\right]_{n+1} \right\| \leq \gamma, \tag{3.22}$$

ou

$$\left| \left\| \left[\hat{\mathbf{f}}_{ext}\right]_{n+1} -^{(k)} \left[\hat{\mathbf{f}}_{int}\right]_{n+1} \right\| \cdot^{(k+1)} [\Delta\mathbf{u}] \right| / \left| \left\| \left[\hat{\mathbf{f}}_{ext}\right]_{n+1} -^{(0)} \left[\hat{\mathbf{f}}_{int}\right]_{n+1} \right\| \cdot^{(1)} [\Delta\mathbf{u}] \right| \leq \gamma, \tag{3.23}$$

que monitoram o módulo relativo direcional do problema de minimização descrito por (3.17).

3.3 AST para a Formulação Lagrangiana Total

Seguindo o mesmo procedimento da Seção 2.1, o conceito de derivada topológica pode ser definido para problemas envolvendo não-linearidade geométrica com formulação Lagrangiana total.

Considere um novo domínio $\Omega_\varepsilon^0 \in \Re^n$, $\Omega_\varepsilon^0 = \Omega^0 - \bar{B}_\varepsilon^0$, cujo contorno é denotado $\Gamma_\varepsilon^0 = \Gamma^0 \cup \partial B_\varepsilon^0$ e $\bar{B}_\varepsilon^0 = B_\varepsilon^0 \cup \partial B_\varepsilon^0$ uma bola de raio ε e centro no ponto material $\hat{\mathbf{X}} \in \Omega_\varepsilon^0$, conforme ilustrado na Figura 3.3.

Considerando a redefinição da equação (2.2), uma descrição lagrangiana total para a derivada topológica é possível, e pode ser escrita da seguinte forma

$$D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\lim_{\delta\varepsilon\to 0} \frac{\psi\left(\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}^0\right) - \psi\left(\Omega_\varepsilon^0\right)}{f(\varepsilon+\delta\varepsilon) - f(\varepsilon)}\right\} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\varepsilon\to 0}} \frac{\psi\left(\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}^0\right) - \psi\left(\Omega_\varepsilon^0\right)}{f(\varepsilon+\delta\varepsilon) - f(\varepsilon)}. \tag{3.24}$$

Da mesma forma como foi descrito na Seção 2.1, a equação (3.24) representa a sensibilidade da função custo quando o furo B_ε^0, centrado no ponto material $\hat{\mathbf{X}} \in \Omega_\varepsilon^0$ e com raio $\varepsilon \to 0$, aumenta de tamanho e não quando este é efetivamente criado, como na definição original (2.1) da derivada topológica.

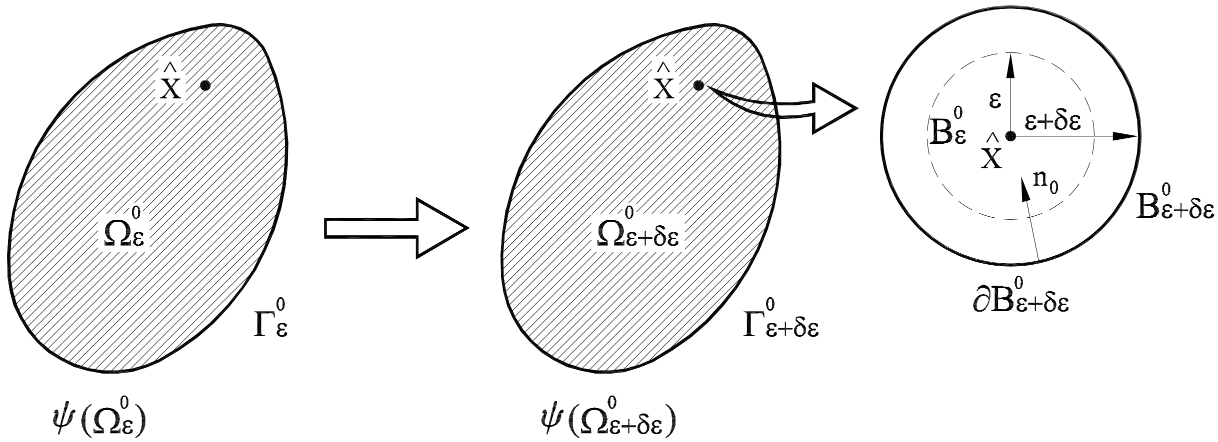


Figura 3.3: Definição modificada da derivada topológica para formulação lagrangiana total.

A ação de aumentar o furo pode ser considerada como uma seqüência de configurações perturbadas, caracterizada pelo parâmetro τ e descrita por uma função suave e inversível $\mathcal{T}(\mathbf{X},\tau)$ com $\mathbf{X} \in \Omega_\varepsilon^0 \subset \Re^n$ e $\tau \in \Re$. Assim, a seqüência de domínios e respectivos contornos de referência perturbados Ω_τ^0 e Γ_τ^0 podem ser definidos como

$$\Omega_\tau^0 = \left\{ \mathbf{X}_\tau \in \Re^n | \; \exists \; \mathbf{X} \in \Omega_\varepsilon^0, \; \mathbf{X}_\tau = \mathcal{T}(\mathbf{X},\tau), \quad \mathbf{X}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{X} \text{ e } \left.\Omega_\tau^0\right|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon^0 \right\},$$

$$\Gamma_\tau^0 = \left\{ \mathbf{X}_\tau \in \Re^n | \; \exists \; \mathbf{X} \in \Gamma_\varepsilon^0, \; \mathbf{X}_\tau = \mathcal{T}(\mathbf{X},\tau), \quad \mathbf{X}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{X} \text{ e } \left.\Gamma_\tau^0\right|_{\tau=0} = \Gamma_\varepsilon^0 \right\}.$$

Desta forma, o domínio $\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}^0$, perturbado por uma expansão suave $\delta\varepsilon$ da bola B_ε^0 e o seu respectivo contorno $\Gamma_{\varepsilon+\delta\varepsilon}^0$ podem ser escritos em relação à τ como

$$\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}^0 = \Omega_\tau^0 \Longrightarrow \Omega_\varepsilon^0 = \Omega_\tau^0|_{\tau=0} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\varepsilon+\delta\varepsilon}^0 = \Gamma_\tau^0 \Longrightarrow \Gamma_\varepsilon^0 = \Gamma_\tau^0|_{\tau=0}\,. \tag{3.25}$$

Expandindo a função $\mathcal{T}(\mathbf{X},\tau)$ em série de Taylor em torno de $\tau_0 = 0$, considerando apenas o termo linear da expansão e $\mathcal{T}(\mathbf{X},\tau) = \mathbf{X}_\tau$ e $\mathcal{T}(\mathbf{X},0) = \mathbf{X}$, tem-se que para todo ponto material $\mathbf{X}_\tau$, considerando τ suficientemente pequeno, a função de mapeamento entre as configurações pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{X}_\tau(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{X}), \tag{3.26}$$

sendo $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \dfrac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{X},0)}{\partial \tau}$ a *ação de mudança de forma* definida no domínio de referência Ω_ε^0.

Portanto, um campo de velocidade equivalente ao definido em (2.5) é definido sobre o furo B_ε^0 da seguinte forma

$$\begin{cases} \mathbf{V} = V_n \mathbf{n}_0 & \text{com } V_n < 0 \text{ e constante sobre } \partial B_\varepsilon^0 \\ \mathbf{V} = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma^0\text{, considerando que } \Gamma_\varepsilon^0 = \Gamma^0 \cup \partial B_\varepsilon^0 \end{cases}, \tag{3.27}$$

sendo V_n a componente normal ao furo do campo de velocidade $\mathbf{V}$, na configuração de referência.

Substituindo o campo de velocidade, definido em (3.27) na equação (3.26), o mapeamento entre os domínios de referência não perturbado Ω_ε^0 e perturbado Ω_τ^0 pode ser escrito como

$$\mathbf{X}_\tau = \mathbf{X} + \tau V_n \mathbf{n}_0, \quad \forall\ \mathbf{X} \in \partial B_\varepsilon^0. \tag{3.28}$$

Similarmente à equação (2.7), a perturbação $\delta\varepsilon$ é associado ao parâmetro τ da seguinte forma

$$\delta\varepsilon = \|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}\| = \|\tau V_n \mathbf{n}_0\| = \tau \left| V_n \right|, \quad \forall\ \mathbf{X} \in \partial B_\varepsilon^0 \text{ e } \forall\ \mathbf{X}_\tau \in \partial B_{\varepsilon+\delta\varepsilon}^0. \tag{3.29}$$

Assim, o Teorema 2.1 pode ser aplicado para o problema não-linear descrito por uma formulação lagrangiana total, considerando somente que o domínio usado na análise de sensibilidade à mudança de forma é o domínio de referência Ω^0. Portanto, a equação (2.8) pode ser reescrita como

$$D_T^*\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \frac{1}{|V_n|} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \left. \frac{d\psi\left(\Omega_\tau^0\right)}{d\tau} \right|_{\tau=0}, \tag{3.30}$$

sendo $D_T^*\left(\hat{\mathbf{X}}\right)$ a derivada topológica original, definida entre o domínio de referência sem furo Ω^0 e o domínio de referência com furo Ω_ε^0; $D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right)$ a derivada topológica modificada dada por (3.24); e $f(\varepsilon)$ é a função regularizadora escolhida de modo que $0 < \left| D_T^*\left(\hat{\mathbf{X}}\right) \right| \leq \infty$.

3.4 Derivada Topológica para Elasticidade com Não Linearidade Geométrica

Análogo à Seção 2.2, a derivada topológica para o funcional de energia potencial total do sistema será calculada para o problema de elasticidade sujeita a não linearidade geométrica, no caso, grandes deslocamentos. Considerando que o domínio Ω_ε^0 é limitado e aberto e que Γ_ε^0 é suficientemente regular, o problema variacional definido pela equação (3.8) em Ω^0 pode ser redefinido no domínio de referência não perturbado Ω_ε^0 da seguinte forma:

Encontre $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon$, tal que

$$a_\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon, \delta\mathbf{u}_\varepsilon\right) = l_\varepsilon\left(\delta\mathbf{u}_\varepsilon\right), \quad \forall\ \delta\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \tag{3.31}$$

sendo $\mathcal{U}_\varepsilon$ e $\mathcal{V}_\varepsilon$, respectivamente, os espaços das funções e variações definidos da mesma maneira que na Seção 2.2. Assim, de acordo com as equações (3.9) e (3.10), a forma abstrata da equação (3.31) pode ser escrita da seguinte forma

$$\int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{S}_\varepsilon \cdot \delta \mathbf{E}_\varepsilon \, d\Omega_\varepsilon^0 = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_\varepsilon \, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_\varepsilon \, d\Gamma^0 \, . \tag{3.32}$$

De maneira similar, um problema variacional para o PVC (3.6) pode ser definido no domínio de referência perturbado Ω_τ^0, ou seja,

Encontre $\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{U}_\tau$, tal que

$$a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \delta\mathbf{u}_\tau) = l_\tau(\delta\mathbf{u}_\tau), \qquad \forall \, \delta\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{V}_\tau \text{ e } \forall \, \tau \geq 0, \tag{3.33}$$

sendo $\mathcal{U}_\tau$ e $\mathcal{V}_\tau$ os espaços de funções e variações, respectivamente, definidos em Ω_τ^0.

O funcional energia potencial total $\Psi_\tau(\mathbf{u}_\tau)$, definido na equação (2.14), é redefinido aqui como

$$\Psi_\tau(\mathbf{u}_\tau) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau^0} \mathbf{S}_\tau \cdot \mathbf{E}_\tau \, d\Omega_\tau^0 - \int_{\Omega_\tau} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\tau \, d\Omega_\tau^0 - \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_\tau \, d\Gamma_\tau^0 = \frac{1}{2} a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) - l_\tau(\mathbf{u}_\tau) \, . \tag{3.34}$$

Portanto, afim de obter a sensibilidade da função custo (3.34), a função lagrangiana para o problema não-linear na configuração perturbada Ω_τ^0 é escrita da seguinte forma

$$L_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau) = \Psi_\tau(\mathbf{u}_\tau) + a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau) - l_\tau(\boldsymbol{\beta}_\tau), \qquad \forall \, \boldsymbol{\beta}_\tau \in \mathcal{V}_\tau. \tag{3.35}$$

Observa-se que a forma abstrata $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \delta\mathbf{u}_\tau)$ da equação (3.33) é não-linear em $\mathbf{u}_\tau$, porém linear em $\delta\mathbf{u}_\tau$. Desse modo, $\boldsymbol{\beta}_\tau = m \, \delta\mathbf{u}_\tau$, sendo $m \in \Re$ o multiplicador de Lagrange para a restrição de igualdade $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \delta\mathbf{u}_\tau) - l_\tau(\delta\mathbf{u}_\tau) = 0$ na função lagrangiana (3.35) e $\boldsymbol{\beta}_\tau \in \mathcal{V}_\tau$.

Considerando que a equação (3.33) seja satisfeita para todo τ, a derivada total da função lagrangiana (3.35) será igual à derivada total do funcional de energia potencial total, ou seja,

$$\frac{dL_\tau}{d\tau} = \frac{d\Psi_\tau}{d\tau} = \frac{\partial L_\tau}{\partial \tau} + \left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle \tag{3.36}$$

com

$$\dot{\mathbf{u}}_\tau = \frac{d\mathbf{u}_\tau}{d\tau} \in \mathcal{V}_\tau \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau = \frac{d\boldsymbol{\beta}_\tau}{d\tau} \in \mathcal{V}_\tau \quad .$$

Levando-se em conta que na equação (3.35) o funcional $\Psi_\tau(\mathbf{u}_\tau)$ e a forma abstrata $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau)$ dependem explicitamente de $\mathbf{u}_\tau$, então a derivada direcional $\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle$ na equação (3.36) pode ser escrita como

$$\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle . \tag{3.37}$$

Considerando a dependência de $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau)$ e $l_\tau(\boldsymbol{\beta}_\tau)$ em relação à $\boldsymbol{\beta}_\tau$, a derivada direcional $\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle$ é escrita da seguinte forma

$$\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle - \left\langle \frac{\partial l_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle . \tag{3.38}$$

A derivada direcional da forma abstrata $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau)$ em relação à $\mathbf{u}_\tau$ na direção $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ presente na equação (3.37), considerando que para o problema em questão $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau)$ é definida de acordo com a equação (3.9), torna-se

$$\left\langle \frac{\partial a_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} \mathsf{C} : \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle \cdot \delta \mathbf{E}_\tau + \mathbf{S}_\tau \cdot \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle d\Omega_\tau^0 = \delta a_\tau(\mathbf{u}_\tau; \dot{\mathbf{u}}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau) . \tag{3.39}$$

As derivadas do tensor de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}_\tau$ e de sua variação $\delta\mathbf{E}_\tau$ em relação à $\mathbf{u}_\tau$ na direção $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ são expressas da seguinte forma

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^S + \frac{1}{2} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^T \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^T \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau, \tag{3.40}$$

$$\left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \frac{1}{2} \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^T \nabla_\tau \boldsymbol{\beta}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \boldsymbol{\beta}_\tau^T \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau, \tag{3.41}$$

e a variação do tensor de deformação de Gree-Lagrange é expressa em relação a $\mathbf{u}_\tau$ e $\delta\mathbf{u}_\tau$ como

$$\delta \mathbf{E}_\tau = \nabla_\tau \delta \mathbf{u}_\tau^S + \frac{1}{2} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^T \nabla_\tau \delta \mathbf{u}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \delta \mathbf{u}_\tau^T \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau . \tag{3.42}$$

Por outro lado, a derivada direcional da forma abstrata $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau)$ em relação à $\boldsymbol{\beta}_\tau$ na direção $\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau$ presente na equação (3.38) é escrita da seguinte maneira

$$\left\langle \frac{\partial a_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} \mathbf{S}_\tau \cdot \left[\nabla_\tau \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau^S + \frac{1}{2} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^T \nabla_\tau \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau^T \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau \right] d\Omega_\tau^0 = a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right) . \tag{3.43}$$

Similarmente, a derivada direcional do termo linear $l_\tau(\boldsymbol{\beta}_\tau)$ em relação à $\boldsymbol{\beta}_\tau$ na direção $\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau$ fica

$$\left\langle \frac{\partial l_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \, d\Omega_\tau^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \, d\Gamma_\tau^0 = l_\tau\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right) . \tag{3.44}$$

Portanto, análogo à Seção 2.2, o cálculo da derivada parcial da função lagrangiana $L_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau)$ em relação a τ coincidirá com o cálculo da derivada total em relação a τ se

$$\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle + \delta a_\tau(\mathbf{u}_\tau; \dot{\mathbf{u}}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau) = 0, \tag{3.45}$$

e

$$\left\langle \frac{\partial L_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle = a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right) - l_\tau \left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right) = 0, \tag{3.46}$$

levando-se em conta os resultados das equações (3.39), (3.43) e (3.44).

A equação (3.45) conduz ao seguinte problema adjunto:

Encontre $\boldsymbol{\beta}_\tau \in \mathcal{V}_\tau$, tal que

$$\delta a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau; \boldsymbol{\beta}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right) = - \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle, \quad \forall\ \dot{\mathbf{u}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau, \tag{3.47}$$

onde considerou-se a simetria da forma bilinear $\delta a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau; \dot{\mathbf{u}}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau \right)$.

Da mesma maneira, a equação (3.46) conduz à equação de estado do problema:

Encontre $\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{U}_\tau$, tal que

$$a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right) = l_\tau \left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right), \quad \forall\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau. \tag{3.48}$$

Portanto, se $\mathbf{u}_\tau$ e $\boldsymbol{\beta}_\tau$ forem, respectivamente, a solução das equações de estado (3.48) e adjunta (3.47), a seguinte relação é válida

$$\frac{\partial L_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau \right)}{\partial \tau} = \left. \frac{d L_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau \right)}{d\tau} \right|_{\mathbf{u}_\tau \text{ e } \boldsymbol{\beta}_\tau \text{ fixos}}. \tag{3.49}$$

No presente trabalho, a função custo considerada é o funcional de energia potencial total do sistema, que é escrito conforme a equação (3.34). Assim, tomando a derivada direcional do funcional $\Psi_\tau \left(\mathbf{u}_\tau \right)$ em relação à $\mathbf{u}_\tau$ na direção $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ e considerando a simetria de $a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau \right)$, conforme a equação adjunta (3.47), tem-se

$$\left\langle \frac{\partial \Psi_\tau \left(\mathbf{u}_\tau \right)}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau \right)}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle - \left\langle \frac{\partial l_\tau \left(\mathbf{u}_\tau \right)}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right) - l_\tau \left(\dot{\mathbf{u}}_\tau \right), \tag{3.50}$$

de tal forma que

$$a_\tau \left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right) = \int_{\Omega_\tau^0} \mathsf{C} : \mathbf{E}_\tau \cdot \left(\nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^S + \frac{1}{2} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^T \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^T \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau \right) d\Omega_\tau^0\ , \tag{3.51}$$

$$l_\tau \left(\dot{\mathbf{u}}_\tau \right) = \int_{\Omega_\tau^0} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau\ d\Omega_\tau^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau\ d\Gamma_\tau^0\ , \tag{3.52}$$

considerando que o vetor das forças de corpo $\mathbf{b}_0$ e o vetor das forças de superfície $\mathbf{t}_0$ não dependem de $\mathbf{u}_\tau$.

Para $\dot{\mathbf{u}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau$, as equações (3.51) e (3.52) são equivalentes às equações (3.9) e (3.10) escritas na configuração perturbada Ω_τ^0 e trocando $\delta\mathbf{u}$ por $\dot{\mathbf{u}}_\tau$. Conseqüentemente, as equações (3.51) e (3.52) representam a equação de estado do problema de modo que a equação adjunta (3.47) pode ser reescrita como

$$\delta a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau;\boldsymbol{\beta}_\tau,\dot{\mathbf{u}}_\tau\right)=a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\dot{\mathbf{u}}_\tau\right)-l_\tau\left(\dot{\mathbf{u}}_\tau\right)=0,\qquad\forall\ \dot{\mathbf{u}}_\tau\in\mathcal{V}_\tau. \tag{3.53}$$

Desta forma, a solução do problema adjunto para o funcional de energia potencial total para o problema em questão é $\boldsymbol{\beta}_\tau=0$.

Assim, através da relação (3.49) e da definição do funcional de energia potencial total (3.34) e considerando ainda o fato que a solução adjunta é $\boldsymbol{\beta}_\tau=\mathbf{0}$, a derivada parcial do lagrangiano (3.35) escrito na configuração não-perturbada $\Omega_\tau^0|_{\tau=0}=\Omega_\varepsilon^0$ é

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}-\left.\frac{\partial l_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}. \tag{3.54}$$

Aplicando o *Teorema do Transporte de Reynolds*, (Gurtin, 1981), a derivada parcial na configuração não-perturbada Ω_ε^0 da forma abstrata $a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\mathbf{u}_\tau\right)$ fica

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}&=\int_{\Omega_\varepsilon^0}\left[\left.\frac{\partial\left(\mathbf{S}_\tau\cdot\mathbf{E}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}+\left(\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon\right)\ \mathrm{Div}\mathbf{V}\right]d\Omega_\varepsilon^0\,,\\&=2\int_{\Omega_\varepsilon^0}\left[\mathsf{C}:\mathbf{E}_\tau\cdot\left.\frac{\partial\left(\mathbf{E}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon\right)\mathbf{I}\cdot\nabla\mathbf{V}\right]d\Omega_\varepsilon^0\,.\end{aligned} \tag{3.55}$$

A derivada do tensor de deformação de Green-Lagrange pode ser reescrita da seguinte forma

$$\left.\frac{\partial\left(\mathbf{E}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial\left(\nabla_\tau\mathbf{u}_\tau^S\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial\left(\nabla_\tau\mathbf{u}_\tau^T\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\nabla\mathbf{u}_\tau+\frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}_\tau^T\left.\frac{\partial\left(\nabla_\tau\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}. \tag{3.56}$$

Como pode ser visto no Apêndice B de (Novotny, 2003) e em (Fancello, 1993), a derivada parcial de um gradiente de um campo vetorial $\mathbf{u}_\tau$ em relação à τ na configuração não-perturbada, considerando que as equações de estado (3.48) e adjunta (3.47) são satisfeitas, ou seja, que $\mathbf{u}_\tau$ e $\boldsymbol{\beta}_\tau$ sejam fixos, pode ser escrito da seguinte maneira

$$\left.\frac{\partial\left(\nabla\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=-\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\nabla\mathbf{V}, \tag{3.57}$$

ou para o equivalente gradiente simétrico

$$\left.\frac{\partial\left(\nabla\mathbf{u}_\tau^S\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=-\left(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\nabla\mathbf{V}\right)^S. \tag{3.58}$$

Portanto, a derivada parcial do tensor de deformação $\mathbf{E}_\tau$ na configuração não-perturbada fica

$$\left.\frac{\partial\left(\mathbf{E}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = -\left(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\nabla\mathbf{V}\right)^S - \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\nabla\mathbf{V}\right)^T\nabla\mathbf{u}_\varepsilon - \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\nabla\mathbf{V}. \tag{3.59}$$

Substituindo (3.59) em (3.55) e após algumas manipulações algébricas, a derivada parcial de a_τ em relação à τ na configuração não-perturbada fica

$$\left.\frac{\partial a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 2\int_{\Omega_\varepsilon^0}\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon\right)\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\mathbf{S}_\varepsilon - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\mathbf{S}_\varepsilon\right]\cdot\nabla\mathbf{V}\, d\Omega_\varepsilon^0\,. \tag{3.60}$$

De forma semelhante, a derivada parcial da forma linear $l_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)$ em relação à τ na configuração não-perturbada $\tau = 0$, para $\mathbf{u}_\tau$ e $\boldsymbol{\beta}_\tau$ fixo é

$$\left.\frac{\partial l_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0}\left(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{u}_\varepsilon\right)\ \mathrm{Div}\mathbf{V}\, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_N^0}\left(\mathbf{t}_0\cdot\mathbf{u}_\varepsilon\right)\ \mathrm{Div}_\Gamma\mathbf{V}\, d\Gamma^0\,, \tag{3.61}$$

sendo

$$\mathrm{Div}_\Gamma = \left(\mathbf{I} - \mathbf{n}_0\otimes\mathbf{n}_0\right)\cdot\nabla\mathbf{V}, \tag{3.62}$$

o divergente superficial do campo de velocidade $\mathbf{V}$ (Fancello, 1993).

Lembrando da definição do campo de velocidade $\mathbf{V}$ dado por (3.27), $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ em Γ^0. Portanto, $\mathrm{Div}_\Gamma\mathbf{V} = 0$. Assim, a equação anterior fica

$$\left.\frac{\partial l_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0}\left(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{I}\cdot\nabla\mathbf{V}\, d\Omega_\varepsilon^0\,. \tag{3.63}$$

Substituindo a derivada das formas abstrata dadas por (3.60) e (3.63) na equação (3.54) e após algumas manipulações algébricas, a derivada parcial do lagrangiano em $\tau = 0$ fica

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0}\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon - 2\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\mathbf{S}_\varepsilon - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\mathbf{S}_\varepsilon\right]\cdot\nabla\mathbf{V}\, d\Omega_\varepsilon^0\,. \tag{3.64}$$

Similarmente à Seção 2.2, a equação anterior pode ser escrita da seguinte forma

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0}\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0\cdot\nabla\mathbf{V}\, d\Omega_\varepsilon^0\,, \tag{3.65}$$

sendo que $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0$ representa o tensor momento energia de Eshelby na configuração de referência para formulação lagrangiana total, e é denotado da seguinte forma

$$\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon - 2\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\mathbf{S}_\varepsilon - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\mathbf{S}_\varepsilon. \tag{3.66}$$

Através das relações, $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ e $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, o tensor de Eshelby da equação anterior pode ser escrito de uma forma mais compacta, ou seja,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0 &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon - 2\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\mathbf{S}_\varepsilon - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\left(\mathbf{F}_\varepsilon - \mathbf{I}\right)\mathbf{S}_\varepsilon \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon - 2\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\mathbf{P}_\varepsilon. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Além do mais, através da relação $W_\varepsilon = \frac{1}{2}\mathbf{P}_\varepsilon \cdot \mathbf{F}_\varepsilon = \frac{1}{2}\mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon$, que represnta a densidade de energia na configuração de referência não perturbada Ω_ε^0, (ver (Belytschko *et al.*, 2001; Holzapfel, 2000)), a equação (3.67) pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_\varepsilon \cdot \mathbf{F}_\varepsilon - 2\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}_\varepsilon^T\mathbf{P}_\varepsilon. \qquad (3.68)$$

Cabe observar a semelhança entre a expressão anterior e a equação (2.27) desenvolvida na Seção 2.2 para o caso linear. Na equação (3.68), o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}_\varepsilon$ está no lugar do tensor de tensão de Cauchy $\mathbf{T}_\varepsilon$ da equação (2.27) e o gradiente de deformação $\mathbf{F}_\varepsilon$ está no lugar do tensor de deformação de Green-Lagrange linearizado $\nabla\mathbf{u}_\varepsilon^S$.

Utilizando-se o *Teorema da Divergência*, (Gurtin, 1981) e a relação tensorial

$$\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0 \cdot \nabla\mathbf{V} = \mathrm{Div}\left[\left(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0\right)^T\mathbf{V}\right] - \mathrm{Div}\left(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0\right) \cdot \mathbf{V}, \qquad (3.69)$$

a equação (3.65) pode ser reescrita como

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathrm{Div}\left(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0\right) \cdot \mathbf{V}\, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}\, d\Gamma_\varepsilon^0 \,. \qquad (3.70)$$

Proposição 3.1 *Sejam $\mathbf{u}_\tau$ e $\boldsymbol{\beta}_\tau$, respectivamente, as soluções das equações de estado (3.48) e adjunta (3.47). Logo*

$$Div\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0 = \mathbf{0}. \qquad (3.71)$$

Demonstração 3.1 *Por simplicidade considera-se o tensor de Eshelby $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^0$ na forma da equação (3.67). Além do mais, a derivada de $\mathbf{u}_\tau$ em relação a τ pode ser feita na própria configuração perturbada Ω_τ^0, para depois avaliar em $\tau = 0$. Assim, através da regra da cadeia, tem-se*

$$\left.\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \left.\mathbf{u}_\tau'\right|_{\tau=0} + \left(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon\right)\mathbf{V} \quad com \quad (\cdot)' := \left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial \tau}\right|_{\mathbf{x}_\tau\ fixo} . \qquad (3.72)$$

Assim, através do Teorema do Transporte de Reynolds, *da equação (3.72) e do* Teorema da Divergência *(Novotny, 2003), as derivadas das formas abstrata $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau)$ e linear $l_\tau(\mathbf{u}_\tau)$, em $\tau = 0$, podem ser* *escritas, respectivamente, como*

$$\left.\frac{\partial a_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \left(\mathsf{C} : \mathbf{E}_\tau \cdot \mathbf{E}_\tau\right)'\Big|_{\tau=0} d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \left(\mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}\, d\Gamma_\varepsilon^0$$
$$= 2\int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon'\, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \left(\mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}\, d\Gamma_\varepsilon^0\ , \tag{3.73}$$

$$\left.\frac{\partial l_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon'\, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \left(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}\, d\Gamma_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon' + \mathbf{t}_0 \cdot \left(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\right) \mathbf{V}\, d\Gamma^0$$
$$= \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon'\, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon'\, d\Gamma^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \left[\left(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right) \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \mathbf{P}_\varepsilon\right] \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}\, d\Gamma_\varepsilon^0\ , \tag{3.74}$$

onde se considerou $\mathbf{b}_0$ *e* $\mathbf{t}_0$ *constantes em relação a* τ*. Assim, substituindo (3.73) e (3.74) em (3.54), tem-se*

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon'\, d\Omega_\varepsilon^0 - \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon'\, d\Omega_\varepsilon^0 - \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon'\, d\Gamma^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}\, d\Gamma_\varepsilon^0$$
$$= a_\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon'\right) - l_\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon'\right) + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}\, d\Gamma_\varepsilon^0\ , \tag{3.75}$$

sendo $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0$ *dado pela equação (3.67). Portanto, comparando (3.75) com (3.70) e considerando que* $\mathbf{u}_\varepsilon' \in \mathcal{V}_\varepsilon$*, e o* Teorema Fundamental do Cálculo Variacional *(ver por exemplo (Elsgoltz, 1969)), chega-se a*

$$\int_{\Omega_\varepsilon^0} Div\left(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0\right) \cdot \mathbf{V}\, d\Omega_\varepsilon^0 = 0 \quad \forall\ \mathbf{V} \quad \Longleftrightarrow \quad Div\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 = \mathbf{0}.$$

Assim, a proposição está demonstrada. □

Substituindo o resultado da Proposição 3.1, dado pela equação (3.71), em (3.70) e considerando a definição do campo de velocidades (3.27), obtém-se

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -V_n \int_{\partial B_\varepsilon^0} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0\, d\partial B_\varepsilon^0\ . \tag{3.76}$$

A partir de (3.67),

$$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon - \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{n}_0 \cdot \left(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0.$$

Considerando condição de contorno de Neumann homogênea no furo, ou seja, $\mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$ sobre ∂B_ε^0 e ausência de forças de corpo, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$, tem-se

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -V_n \int_{\partial B_\varepsilon^0} \left(\frac{1}{2}\mathbf{S}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon\right) d\partial B_\varepsilon^0\ . \tag{3.77}$$

A derivada topológica é obtida substituindo a equação (3.77) na expressão (3.30), ou seja

$$D_T^*\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{f'(\varepsilon)}\int_{\partial B_\varepsilon^0}\left(\frac{1}{2}\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon\right)d\partial B_\varepsilon^0\,. \tag{3.78}$$

3.5 Análise Assintótica Numérica

A equação (3.78) representa a derivada topológica a menos do limite com $\varepsilon \to 0$ para o problema de elasticidade envolvendo não-linearidade geométrica, e material linear, homogêneo e isotrópico. Portanto, afim de se obter a derivada topológica propriamente dita, é necessário que o limite para $\varepsilon \to 0$ em (3.78) seja calculado, de forma analítica ou aproximada.

No Capítulo 2, a derivada topológica foi deduzida para problemas de elasticidade plana linear. O limite com $\varepsilon \to 0$ da definição de derivada topológica pode ser calculado através de uma análise assintótica do termo integrando, conforme pode ser visto em detalhes em (Novotny, 2003). Para o presente problema não-linear, uma análise assintótica da equação (3.78) torna-se inviável, pois neste caso, não é possível obter uma solução analítica para o problema como descrito nos trabalhos (Novotny, 2003; Novotny *et al.*, 2003; Novotny *et al.*, 2005b). Conseqüentemente, um procedimento alternativo baseado em experimentos numéricos para o cálculo do limite com $\varepsilon \to 0$ em (3.78) é adotado, conforme sugerido na Seção 3.5 da tese de doutorado (Novotny, 2003).

Considere portanto, uma função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$ tal que

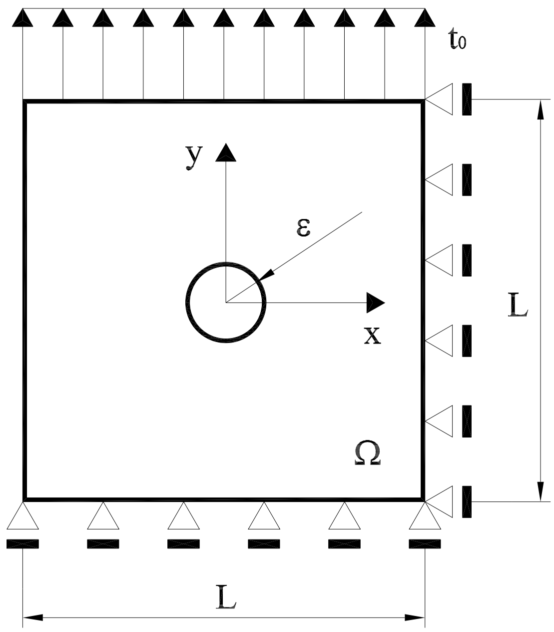
$$d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) = -\frac{1}{f'(\varepsilon)}\int_{\partial B_\varepsilon^0}\left(\frac{1}{2}\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon\right)d\partial B_\varepsilon^0\,, \tag{3.79}$$

de modo que

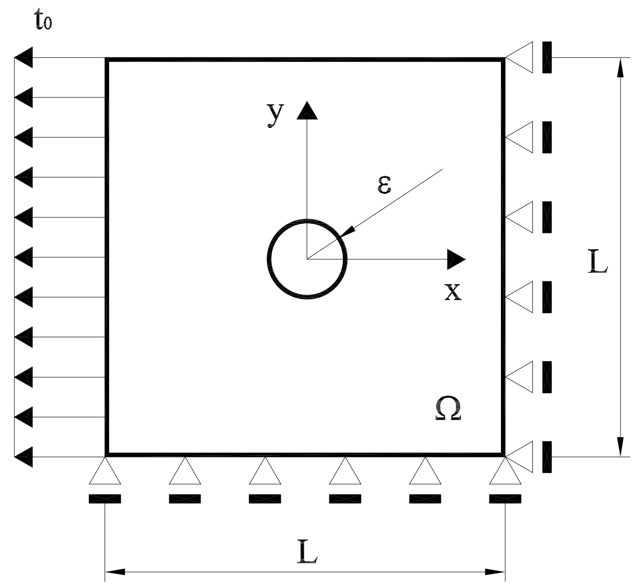
$$D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)\,. \tag{3.80}$$

Será realizado um estudo numérico do comportamento assintótico da função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$ em relação ao raio ε. Para isso, considere um domínio retangular plano, denotado por Ω, com dimensões $L = 2\ mm$ e com um furo de raio ε no centro do domínio, sujeito aos casos de carregamento com carga distribuída $\mathbf{t}_0$ ao longo das bordas laterais de Ω, conforme ilustrado nas Figuras 3.4.

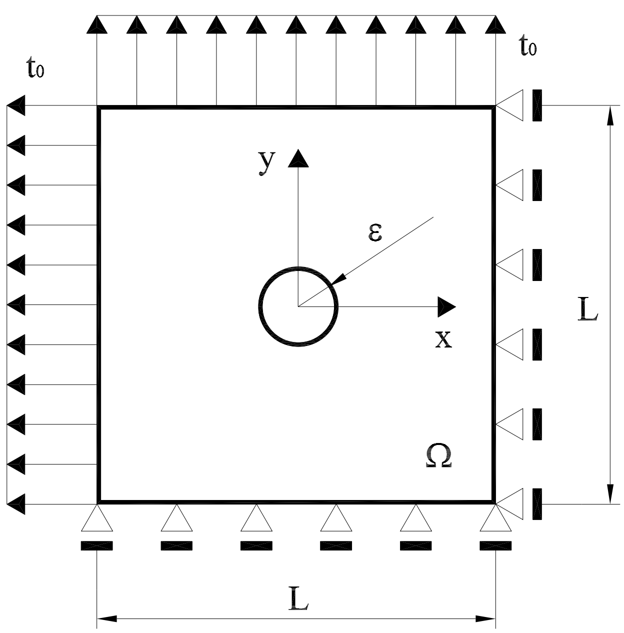
A equação de estado (3.48), representando o problema de elasticidade não-linear em questão, que será discretizada e resolvida pelo MEF, utilizando-se elementos triangulares quadráticos da família Serendipty. Além do mais, as malhas são construídas de modo a manter o mesmo número de elementos



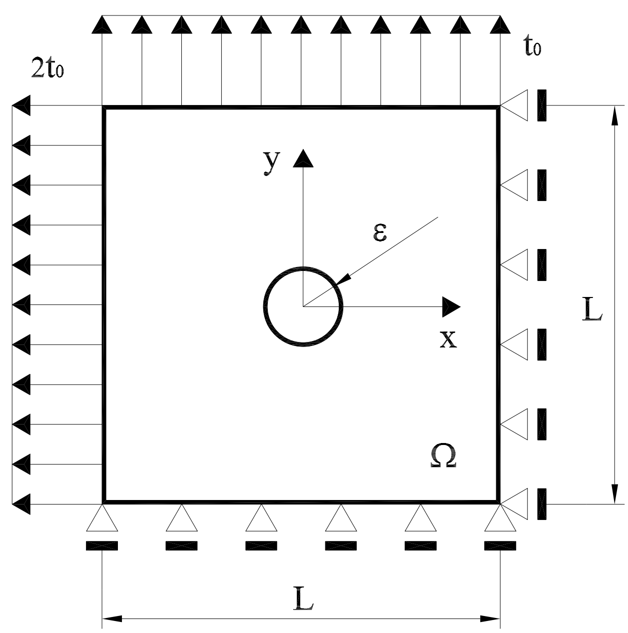
(a) Modelo do 1º caso.



(b) Modelo do 2º caso.

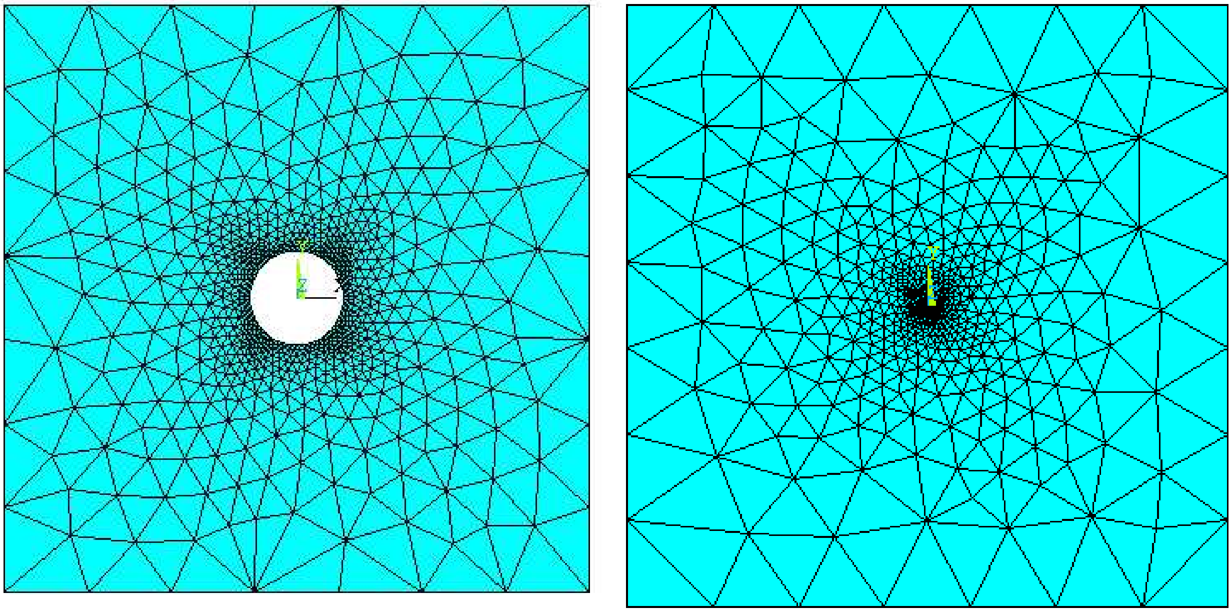


(c) Modelo do 3º caso.



(d) Modelo do 4º caso.

Figura 3.4: Modelos empregados na análise assintótica.



(a) Malha com furo de $\varepsilon = 0,16\ mm$.

(b) Malha sem furo.

Figura 3.5: Malhas de empregadas na análise assintótica.

no contorno do furo, independentemente do valor do raio ε. Conseqüentemente, é calculado o tamanho aproximado dos elementos mediante a relação

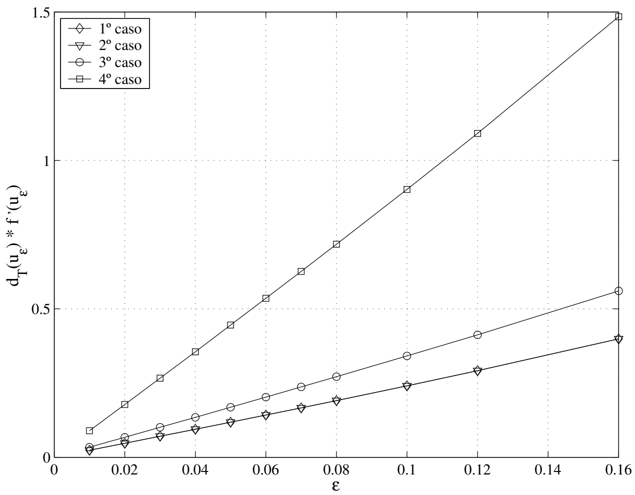
$$h^e \approx \frac{2\pi\varepsilon}{ne}, \tag{3.81}$$

sendo ne o número de elementos requerido sobre o contorno do furo. A Tabela 3.1 mostra o número total de elementos NE das malhas geradas no domínio Ω para diferentes valores do raio ε, considerando $ne = 60$.

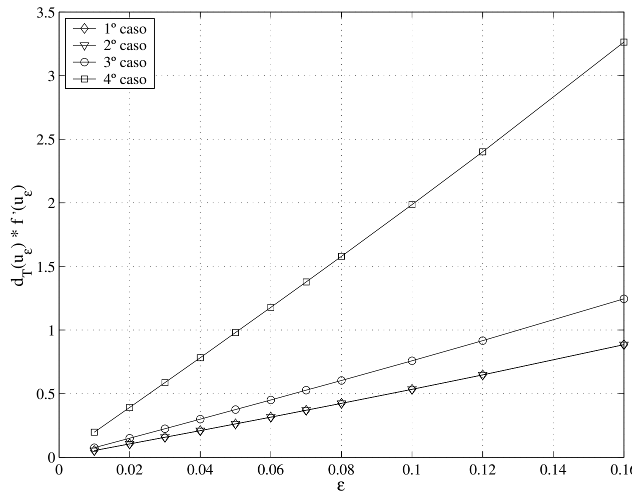
Tabela 3.1: Malhas empregadas na análise assintótica numérica.

$\varepsilon(mm)$	$0,01$	$0,02$	$0,03$	$0,04$	$0,05$	$0,06$	$0,07$	$0,08$	$0,10$	$0,12$	$0,16$
NE	3876	1968	1846	1760	1672	1644	1592	1576	1480	1408	1296

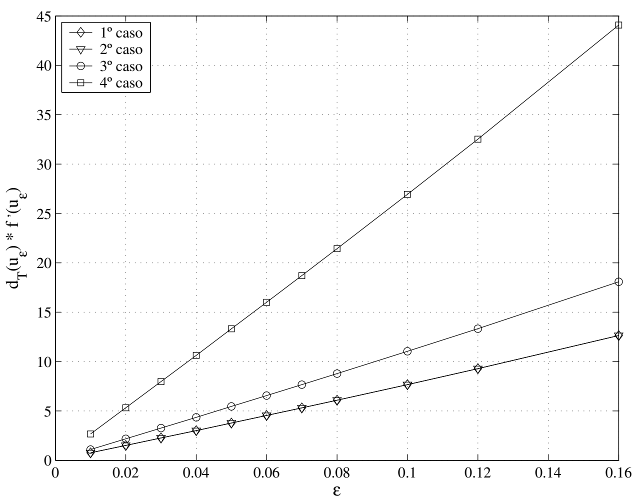
Portanto, considerando modelo de estado plano de deformação, coeficiente de Poisson $\nu = 1/4$ e módulo de Young $E = 2100\ N/mm^2$, pode-se construir os gráficos $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) f'(\varepsilon) \times \varepsilon$ para $\mathbf{t}_0 = \pm\{12,50; 25,00; 37,50; 150,0; 450,00\}\ N/mm^2$ conforme mostrado nas Figuras 3.6 e 3.7, respectivamente, para os casos de tração e compressão, sendo que neste último caso não foi possível obter a solução para compressão com carga de $\mathbf{t}_0 = 450,00\ N/mm^2$ por causa da distorção excessiva da malha. Mediante análise destes gráficos, é razoável supor a hipótese que estes se comportam como retas que passam pela origem, o que permite supor que o termo integrando da equação (3.79) se comporta como uma constante em relação a ε. Uma função $f(\varepsilon)$ que satisfaz a condição $0 \leq \left| D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) \right| < \infty$ do Teorema 2.1 é $f(\varepsilon) = -|B_\varepsilon| = -\pi\varepsilon^2$.



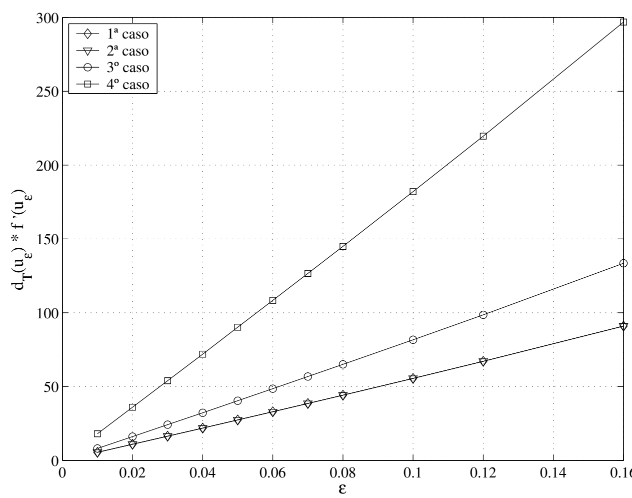
(a) Carga $\mathbf{t}_0 = 25,00 N/mm^2$.



(b) Carga $\mathbf{t}_0 = 37,50 N/mm^2$.



(c) Carga $\mathbf{t}_0 = 150,00 N/mm^2$.



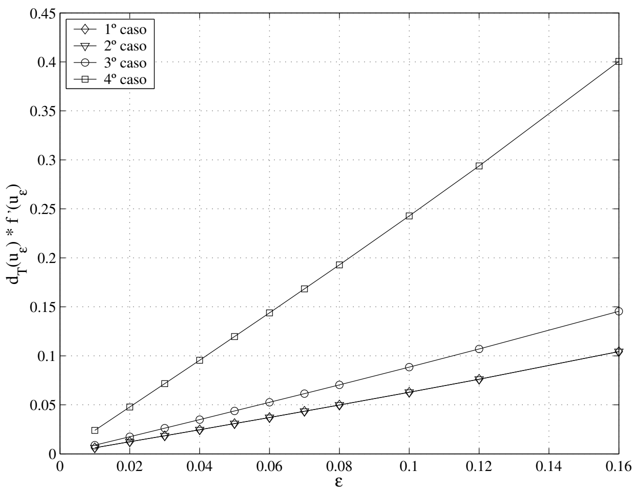
(d) Carga $\mathbf{t}_0 = 450,00 N/mm^2$.

Figura 3.6: Comportamento assintótico de $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) f'(\varepsilon)$ em relação ao raio ε na tração no problema com não-linearidade geométrica.

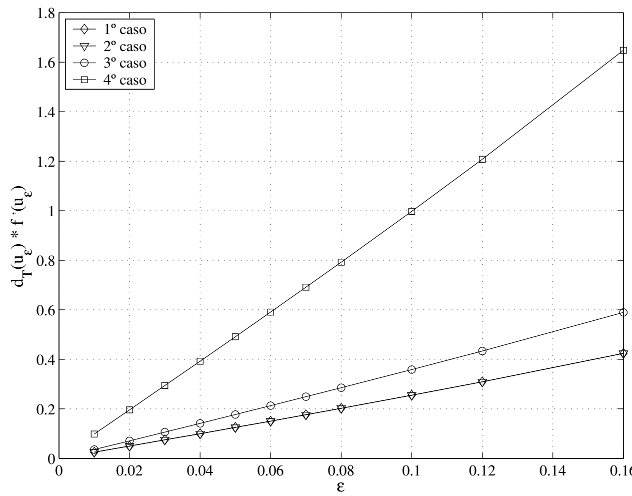
Conseqüentemente, as equações (3.80) e (3.79) conduzem a

$$D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) = C\frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \tag{3.82}$$

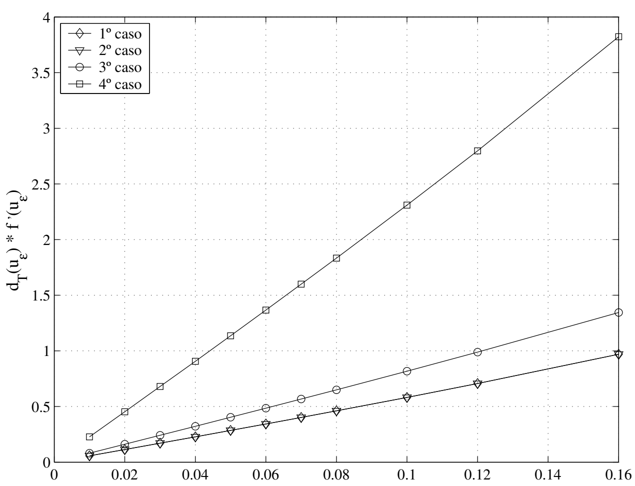
sendo C uma constante. Assim, a equação (3.82) é a expressão final da derivada topológica a menos de uma constante.



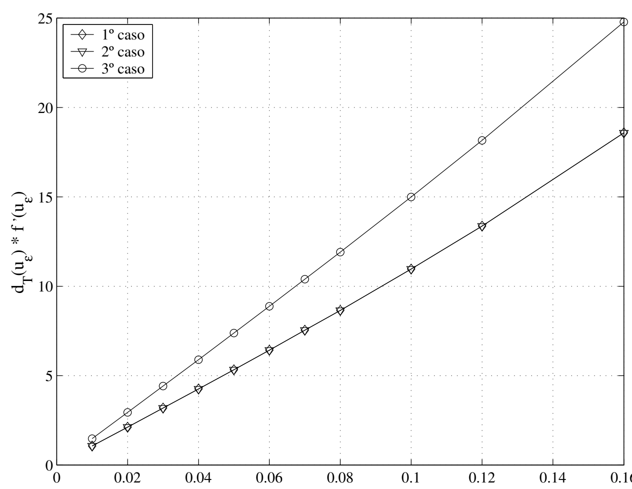
(a) Carga $\mathbf{t}_0 = -12,50N/mm^2$.



(b) Carga $\mathbf{t}_0 = -25,00N/mm^2$.



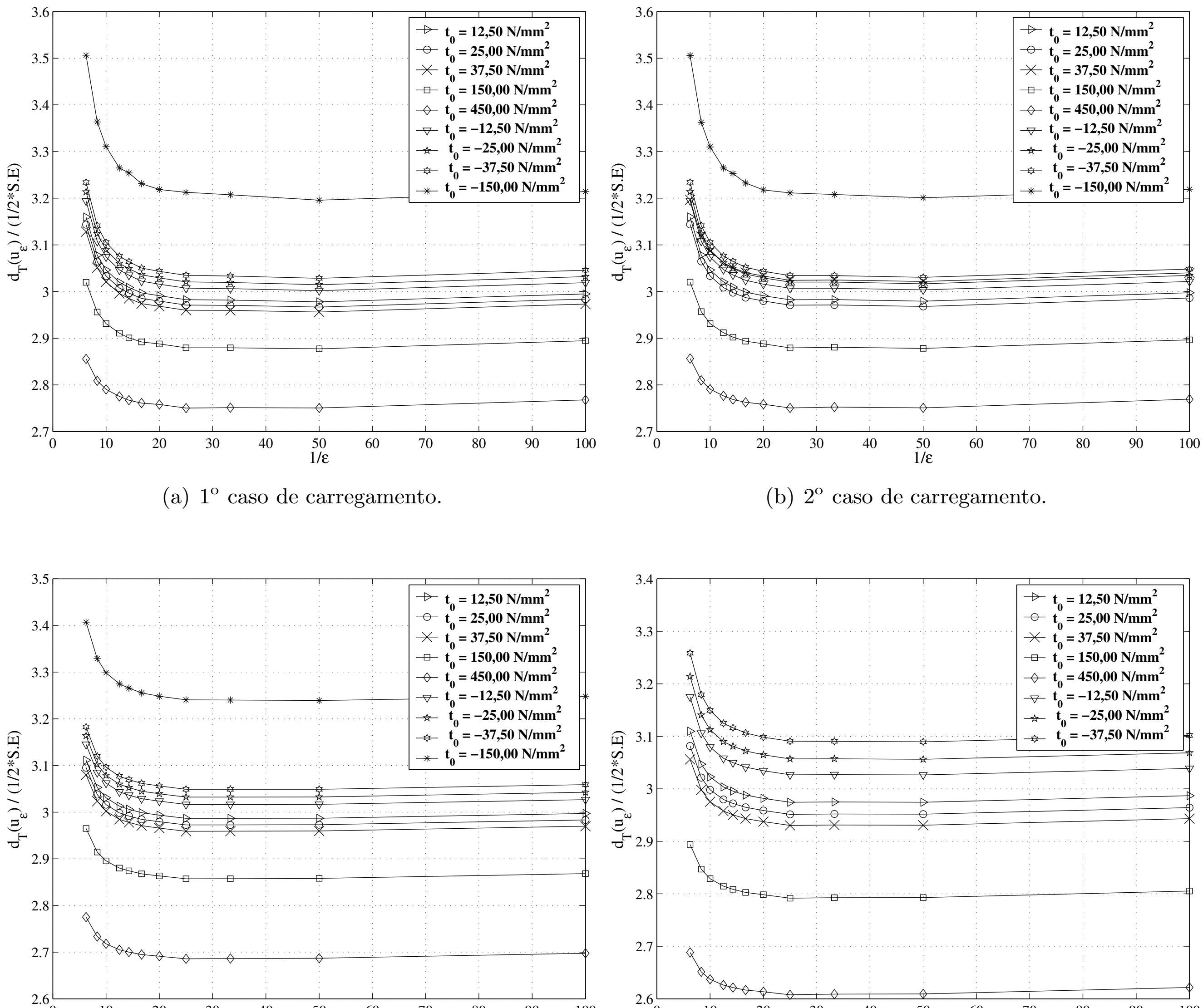
(c) Carga $\mathbf{t}_0 = -37,50N/mm^2$.



(d) Carga $\mathbf{t}_0 = -150,00N/mm^2$.

Figura 3.7: Comportamento assintótico de $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) f^{'}(\varepsilon)$ em relação ao raio ε na compressão no problema com não-linearidade geométrica.

A análise da constante C é realizada mediante o comportamento assintótico da função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$ em relação ao raio ε. Tal análise é realizada tomando o quociente entre a função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$ e o termo integrando calculado no nó de uma malha sem furo, cujas coordenadas coincidem com as coordenadas do centro do furo da malha com furo, já levando em conta a função $f(\varepsilon) = -\pi\varepsilon^2$, ou seja,



(a) 1º caso de carregamento.

(b) 2º caso de carregamento.

(c) 3º caso de carregamento.

(d) 4º caso de carregamento.

Figura 3.8: Comportamento assintótico do quociente $\dfrac{d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)}{\frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}}$ em relação ao raio ε no problema com não-linearidade geométrica.

$$\frac{\dfrac{1}{2\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon^0}\left(\frac{1}{2}\mathbf{S}_\varepsilon\cdot\mathbf{E}_\varepsilon\right)d\partial B_\varepsilon^0}{\dfrac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}}. \tag{3.83}$$

O resultado está ilustrado nos gráficos da Figura 3.8.

Mediante análise dos gráficos da Figura 3.8, observa-se um comportamento assintótico da equação (3.83) quando ε diminui, em todos os valores de carga $\mathbf{t}_0$, tanto no caso da tração, quanto no caso da compressão. No caso da tração, conforme o valor da carga $\mathbf{t}_0$ aumenta, o valor da constante C tende a ser menor do que 3; no caso da compressão, conforme o valor da carga $\mathbf{t}_0$ aumenta, o valor da constante C tende a ser maior do que 3.

A equação (2.30) representa a derivada topológica, a menos do limite com $\varepsilon \to 0$, para problemas lineares de tensão plana ($\nu = 1/3$) e deformação plana ($\nu = 1/4$). Uma análise assintótica numérica pode ser realizada afim de obter a expressão final da derivada topológica para o problema de elasticidade plana linear do Capítulo 2. Portanto, considere

$$d_T\left(\mathbf{u}_\varepsilon\right) = -\frac{1}{f'\left(\varepsilon\right)} \int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{2}\mathbf{T}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^S\right) d\partial B_\varepsilon \; . \tag{3.84}$$

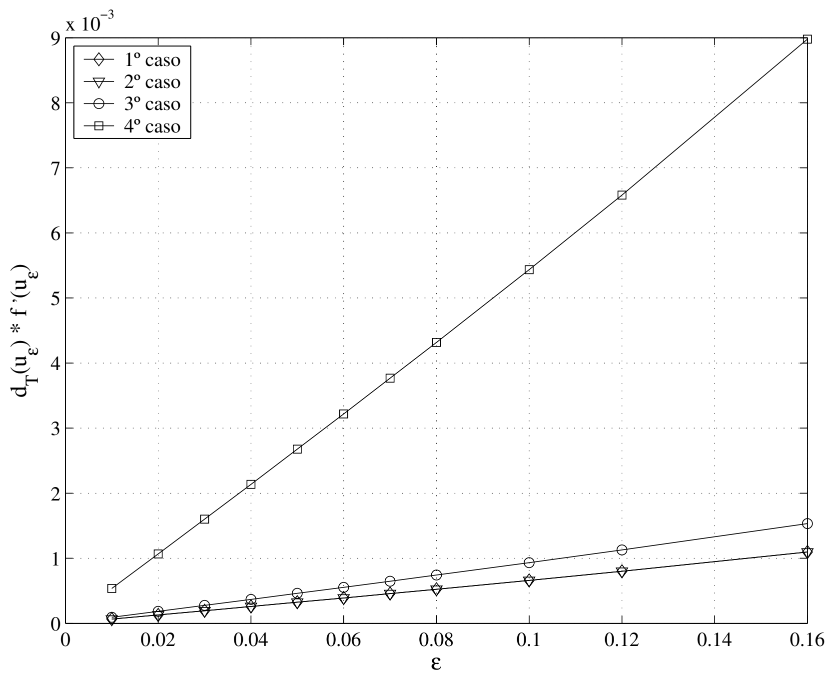
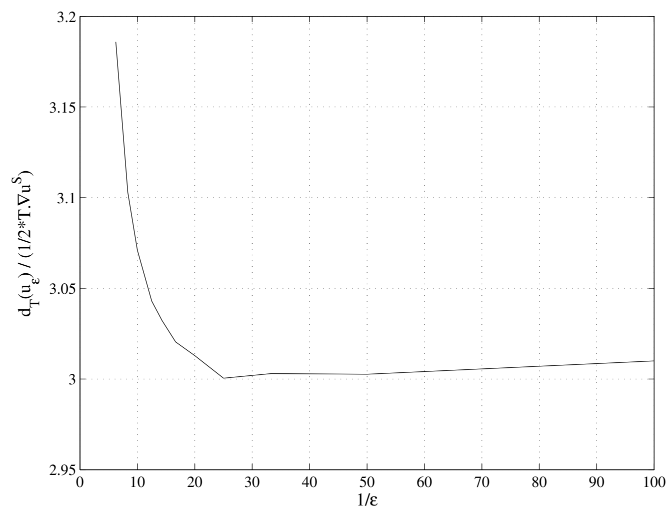


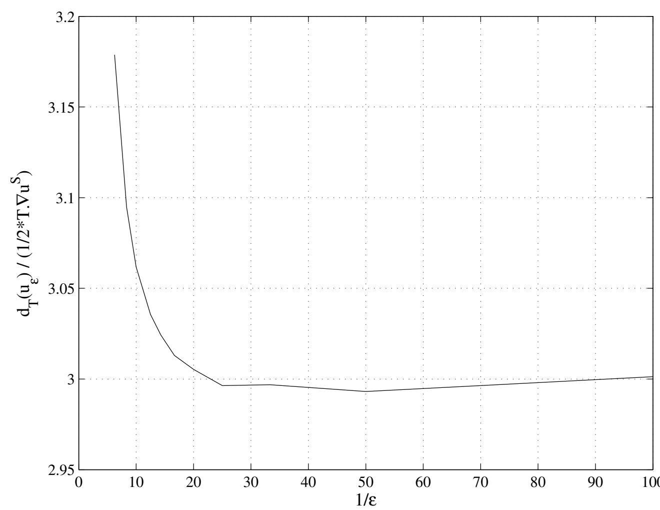
Figura 3.9: Comportamento assintótico de $d_T\left(\mathbf{u}_\varepsilon\right) f'\left(\varepsilon\right)$ em relação ao raio ε no problema de elasticidade plana linear.

Da mesma forma que no caso não-linear, a Figura 3.9 mostra uma reta passando pela origem. Conclui-se então que o termo integrando é uma constante em relação a ε e a função $f\left(\varepsilon\right) = -\pi\varepsilon^2$ satisfaz a condição do Teorema 2.1. Logo,

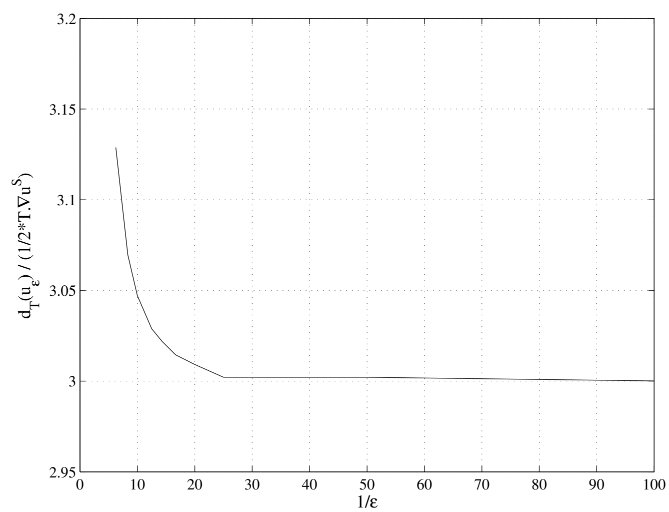
$$D_T\left(\hat{\mathbf{x}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} d_T\left(\mathbf{u}_\varepsilon\right) = C\frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u}^S.$$



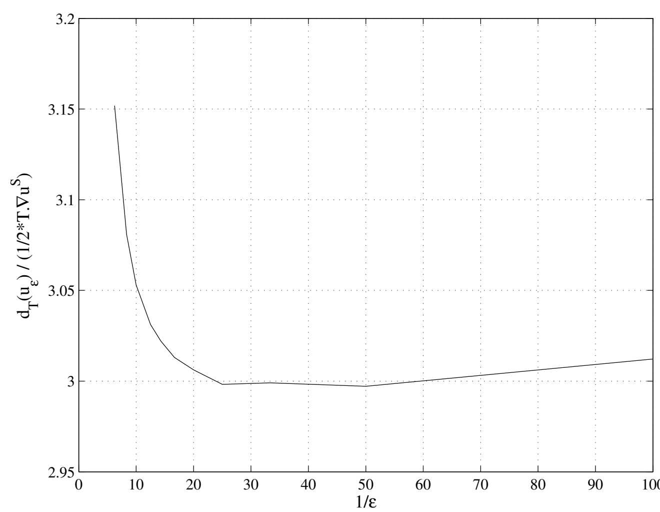
(a) 1º caso de carregamento.



(b) 2º caso de carregamento.



(c) 3º caso de carregamento.



(d) 4º caso de carregamento.

Figura 3.10: Comportamento assintótico do quociente $\dfrac{d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)}{\frac{1}{2}\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{u}^S}$ em relação ao raio ε para o problema de elasticidade plana linear.

Realizando o mesmo procedimento aplicado ao caso não-linear, a constante C para o caso linear pode ser obtida via procedimento numérico conforme ilustrado nos gráficos das Figuras 3.9 e 3.10, o que conduz ao valor de $C = 3$, o que está de acordo com a equação (2.33) deduzida analiticamente em (Novotny, 2003) mediante análise assintótica

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{3}{2}\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u}^S.$$

Portanto, para o caso especial onde $\nu = 1/3$ para problemas de tensão plana e $\nu = 1/4$ para problemas de deformação plana, conforme equações (2.31) e (2.32), respectivamente, foi possível recuperar a expressão exata da derivada topológica (2.33) por meio da análise assintótica numérica, conforme ilustram os gráficos da Figura 3.10. Porém, cabe observar que para o problema não-linear em questão, não é possível recuperar a expressão exata da derivada topológica, uma vez que, ao contrário do problema linear, o valor da constante C se altera conforme o valor do carregamento aplicado é alterado, como pode ser verificado no gráfico 3.8.

Cabe ainda observar que tanto os gráficos da Figura 3.8 quanto os da Figura 3.10, que representam, respectivamente, o comportamento assintótico das equações (3.79) e (3.84) sob os quatro casos de carregamento, sofrem uma variação em seu valor quando $\varepsilon = 0,01$ $\left(\frac{1}{\varepsilon} = 100\right)$. Exceto os gráficos 3.10(c) e 3.8(c) que representam, respectivamente, o comportamento assintótico das equações (3.79) e (3.84) sob o 3º caso de carregamento. Tal variação se deve à distorção dos elementos que estão próximos ao contorno do furo quando sujeitos ao 1º, 2º e 4º caso de carregamento. Por outro lado, o 3º caso de carregamento é o que menos implica em distorção para os elementos da malha e portanto não apresenta a variação existente nos demais casos de carregamentos.

Tabela 3.2: Análise da variação da constante C para o 1º caso de carregamento de tração para o problema de não linearidade geométrica.

$\mathbf{t}_0\ (N/mm^2)$	$12,50$	$25,00$	$37,50$	$150,00$	$450,00$	Máxima Variação (%)
$W\ (Nmm/mm^3)$	$0,03186$	$0,12624$	$0,28138$	$4,16262$	$31,69029$	$99367,33$
$\Vert\mathbf{E}\Vert_F$	$0,00559$	$0,01112$	$0,01661$	$0,06394$	$0,17667$	$3060,47$
$C \approx$	$3,00$	$2,97$	$2,96$	$2,88$	$2,75$	$-8,33$

Tabela 3.3: Análise da variação da constante C para o 2º caso de carregamento de tração para o problema de não linearidade geométrica.

$\mathbf{t}_0\ (N/mm^2)$	$12,50$	$25,00$	$37,50$	$150,00$	$450,00$	Máxima Variação (%)
$W\ (Nmm/mm^3)$	$0,03186$	$0,12621$	$0,28133$	$4,16171$	$31,68205$	$99341,46$
$\Vert\mathbf{E}\Vert_F$	$0,00559$	$0,01112$	$0,01661$	$0,06393$	$0,17665$	$3060,11$
$C \approx$	$3,00$	$2,97$	$2,96$	$2,88$	$2,75$	$-8,33$

Tabela 3.4: Análise da variação da constante C para o 3º caso de carregamento de tração para o problema de não linearidade geométrica.

$\mathbf{t}_0\ (N/mm^2)$	$12,50$	$25,00$	$37,50$	$150,00$	$450,00$	Máxima Variação (%)
$W\ (Nmm/mm^3)$	$0,04534$	$0,18005$	$0,40227$	$6,06545$	$47,85283$	$105418,94$
$\Vert\mathbf{E}\Vert_F$	$0,00520$	$0,01035$	$0,01548$	$0,06009$	$0,16878$	$3145,77$
$C \approx$	$3,00$	$2,99$	$2,98$	$2,86$	$2,70$	$-10,00$

Tabela 3.5: Análise da variação da constante C para o 4º caso de carregamento de tração para o problema de não linearidade geométrica.

$\mathbf{t}_0\ (N/mm^2)$	$12,50$	$25,00$	$37,50$	$150,00$	$450,00$	Máxima Variação (%)
$W\ (Nmm/mm^3)$	$0,12159$	$0,47907$	$1,06224$	$15,14929$	$109,83755$	$90234,36$
$\Vert\mathbf{E}\Vert_F$	$0,00919$	$0,01822$	$0,02711$	$0,10172$	$0,27091$	$2847,88$
$C \approx$	$2,99$	$2,97$	$2,94$	$2,80$	$2,61$	$-12,71$

Assim, o procedimento da análise assintótica numérica, permite no máximo encontrar uma expressão aproximada da derivada topológica para o problema vetorial com não-linearidade geométrica em questão. Resta no entanto, analisar a variação da constante C obtida através na Figura 3.8 em relação à variação do nível de deformação e densidade de energia de deformação no ponto sob o qual a derivada topológica será calculada, ou seja, no caso o nó na malha sem furo cujas as coordenadas coincidem com as coordenadas do centro do furo nas malhas com furo.

Nas Tabelas 3.2 à 3.5 a norma da matriz que representa o tensor de deformações de Green-Lagrange é definida da seguinte forma, ver (Golub e Van Loan, 1989),

$$\Vert\mathbf{E}\Vert_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |E_{ij}|^2}. \tag{3.85}$$

Observa-se nas Tabelas 3.2 à 3.5, que a variação percentual dos valores da densidade de energia de deformação W e da norma da matriz $\Vert\mathbf{E}\Vert_F$ do nó da malha sem furo, cuja coordenada coincide com as coordenadas do centro dos furo, é muito superior em relação à variação percentual dos valores obtidos para a constante C na Figura 3.8, para cada valor de carga de tração $\mathbf{t}_0$. Porém, como pode ser observado na Figura 3.8, a constante C assume valores diferentes para cargas tração e compressão de mesma intensidade.

Portanto, a derivada topológica para o problema em questão pode ser escrita da seguinte forma

$$D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) \approx C^* \frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}, \tag{3.86}$$

sendo C^* uma constante entre os valores obtidos para C.

Uma vez que o algoritmo para otimização topológica de problemas não-lineares difere apenas no cálculo da análise de resposta do problema, e o restante permanece o mesmo àquele apresentado na Seção 2.4, o valor efetivo de C^* torna-se de pouco interesse prático, pois a derivada topológica será calculada para todos os nós da malha e os furos serão criados onde a derivada topológica assume o menor valor.

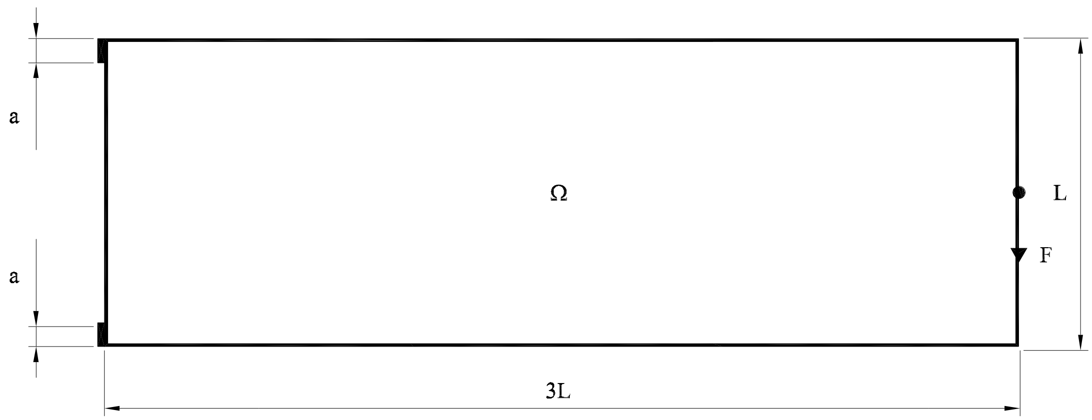
3.6 Estudo de Caso

Seguindo o mesmo procedimento da Seção 2.5, para ilustrar o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica para problemas de elasticidade plana envolvendo não linearidade geométrica, será apresentado nesta seção um exemplo de uma estruturas em estado plano de deformações. Portanto, considere um componente estrutural plano, caracterizado por um domínio $\Omega \in \Re^2$.

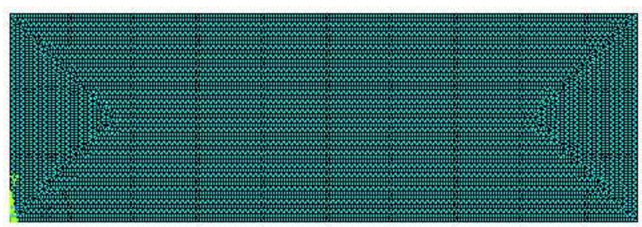
3.6.1 Viga Engastada

Neste exemplo, o objetivo é obter a topologia que minimiza o funcional de energia potencial total de um modelo de viga sujeita a grandes deslocamentos, porém pequenas deformações em seus pontos materiais. Para isso, toma-se um domínio inicial retangular Ω de dimensões $L = 50\ mm$, engastado nas regiões $a = 5\ mm$ e submetida a uma carga concentrada de valores $F = \{469, 1875, 3750, 7500\}\ N$, conforme ilustrado na Figura 3.11(a). O problema foi discretizado com uma malha de 11014 elementos lineares (ver Figura 3.11(b)), com módulo de Young $E = 210 \times 10^3\ N/mm^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 1/4$.

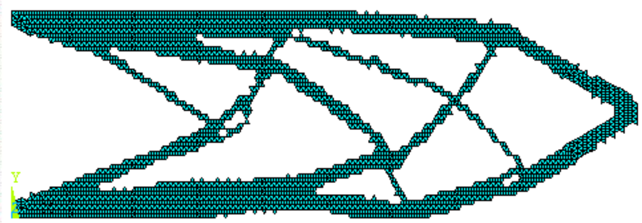
A área final $\bar{V}$ adotada foi $\bar{V} = 0,32V_0$ e a porcentagem de área a ser retirada em cada iteração foi 2%. Assim, as topologias finais foram atingidas após 56 iterações e estão mostradas nas Figuras 3.11(c) à 3.11(f). Observou-se um deslocamento máximo, respectivamente para cada valor de carga, de $\{-0,55; -2,49; -4,20; -10,96\}\ mm$ no ponto de aplicação da carga. Embora a viga sofra um deslocamento máximo de aproximadamente 22% da altura da viga para o caso de $F = 7500\ N$, a densidade de energia de deformação W se mantém em um nível razoável, tendo o valor máximo superior à 35 Nmm apenas perto da região de engastamento e aplicação da carga, e valores inferiores à $5,0\ Nmm$ em várias parte do domínio, conforme pode ser visto na Figura 3.12. Os gráficos da Figura 3.13 ilustram o decaimento do funcional de energia potencial total em função do número de iteração.



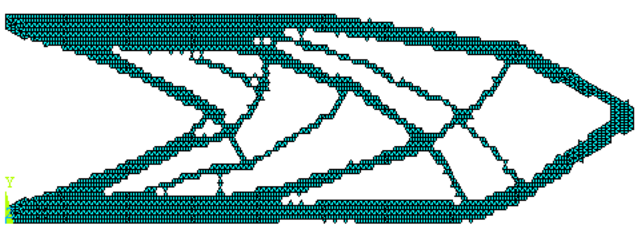
(a) Modelo.



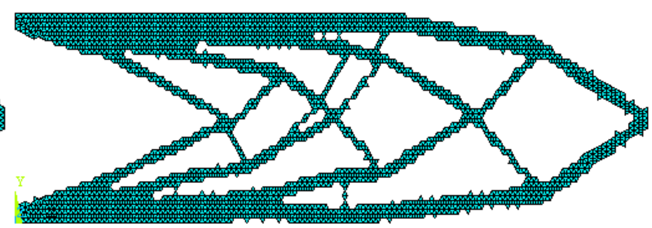
(b) Malha inicial com 11014 elementos lineares.



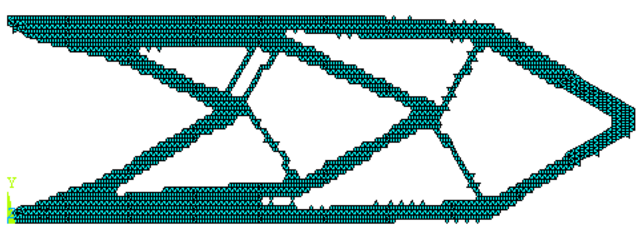
(c) Topologia final $j = 56$ para carga $F = 469\ N$.



(d) Topologia final $j = 56$ para carga $F = 1875\ N$.

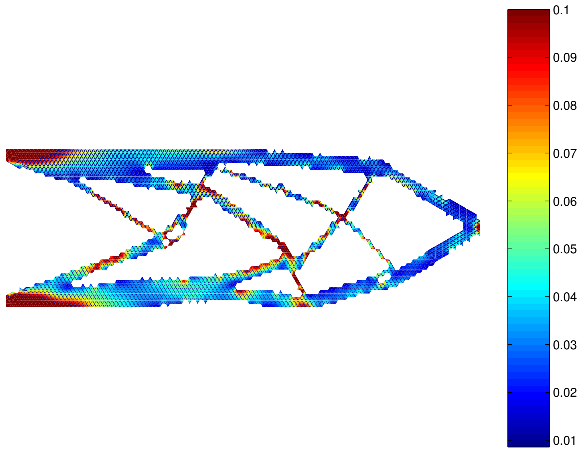


(e) Topologia final $j = 56$ para carga $F = 3750\ N$.

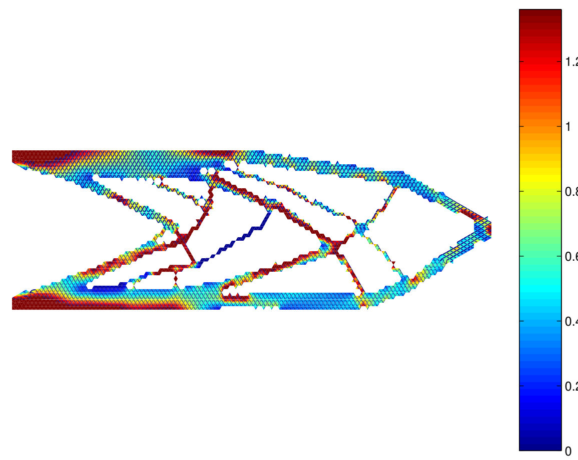


(f) Topologia final $j = 56$ para carga $F = 7500\ N$.

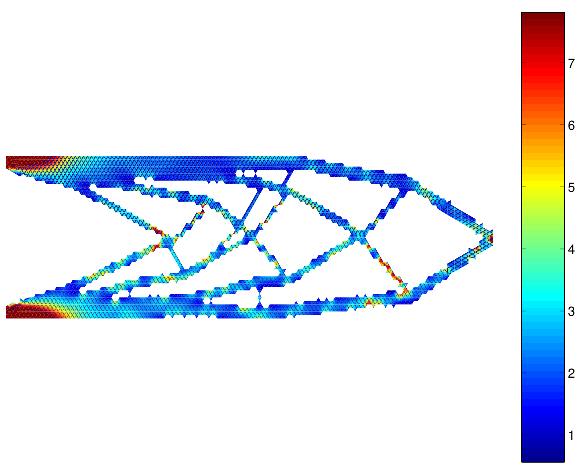
Figura 3.11: Viga Engastada.



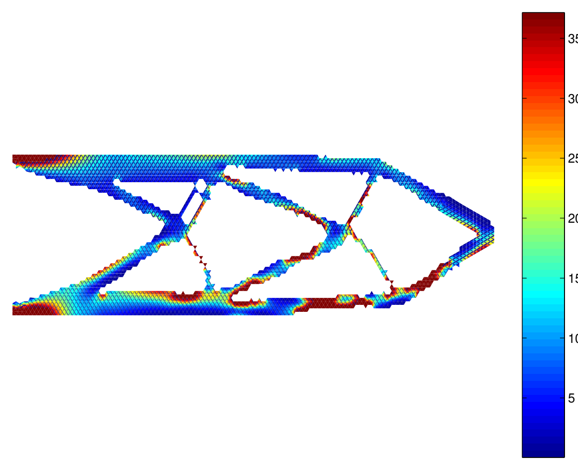
(a) Carga $F = 469\ N$.



(b) Carga $F = 1875\ N$.

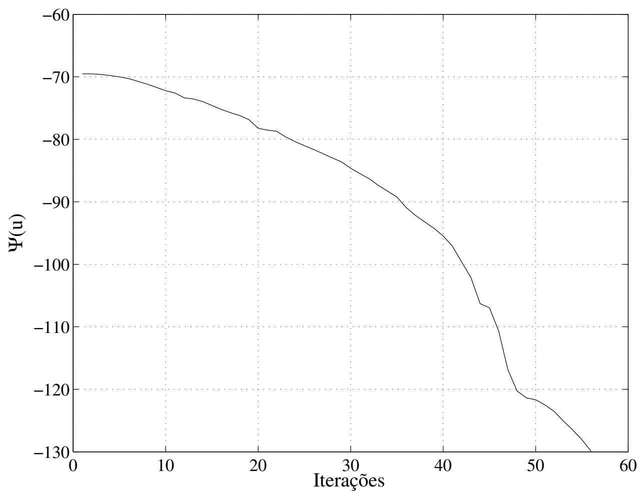


(c) Carga $F = 3750\ N$.

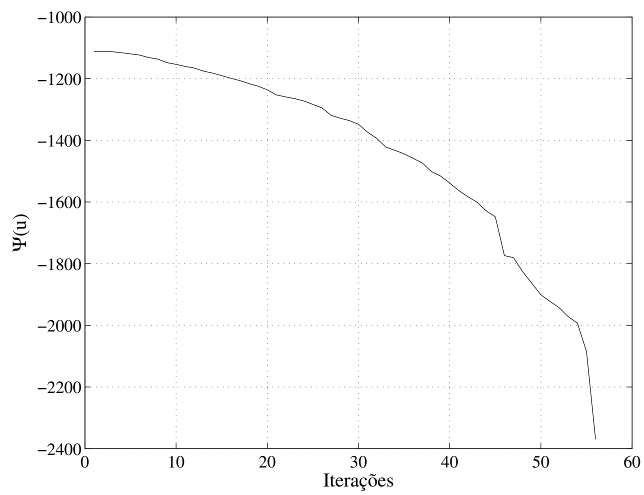


(d) Carga $F = 7500\ N$.

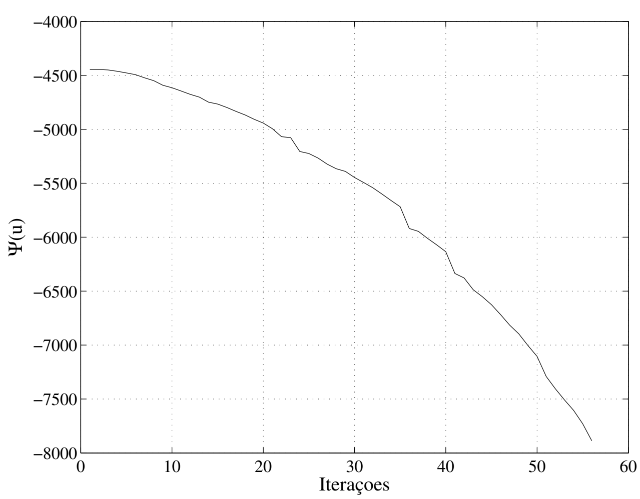
Figura 3.12: Densidade de energia de deformação na viga em $\dfrac{Nmm}{mm^3}$ na iteração $j = 56$.



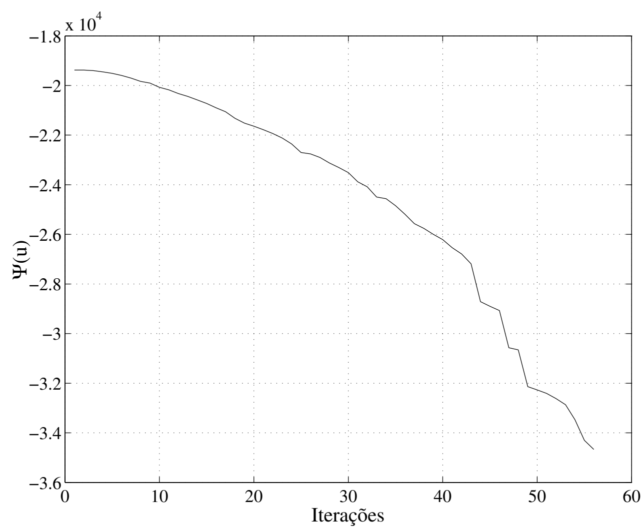
(a) Carga $F = 469\ N$.



(b) Carga $F = 1875\ N$.



(c) Carga $F = 3750\ N$.



(d) Carga $F = 7500\ N$.

Figura 3.13: Energia potencial total x Iteração.

3.6.2 Viga Biengastada

Neste exemplo é realizado o projeto de uma viga biengastada sob estado plano de tensão. O modelo é representado pelo domínio inicial Ω de dimensão $L = 20\ mm$, engastado em suas extremidades laterais e submetido a uma carga concentrada de $F = 30\ mm$ conforme mostrado na Figura 3.15(a) e o exemplo apresentado em (Jung e Gea, 2004). O problema é discretizado com uma malha de 11014 elementos lineares, (ver Figura 3.15(b)), sendo que a simetria do ploblema foi utilizada. Adotou-se módulo de Young $E = 30\ N/mm^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$.

Como *critério de parada*, tomou-se a área final $\bar{V} = 0,20V_0$ e a porcentagem de área a ser retirado em cada iteração foi 2%. Assim, a topologia final foi atingida após 64 iterações e está mostrada na Figura 3.15(c). Observa-se um deslocamento máximo de $-4,38\ mm$ no ponto de aplicação da carga que corresponde aproximadamente à 22% da altura da viga. O valor da densidade de energia de deformação W se mantém na faixa de $0,02\ Nmm$ à $0,2\ Nmm$ sendo que este último valor é assumido nas regiões de aplicação das condições de contorno. Já a Figura 3.17 ilustra o decaimento do funcional de energia potencial total em função do número de iteração.

A Figura 3.14 ilustra o resultado obtido por (Jung e Gea, 2004) através do método SIMP para o funcional densidade de trabalho externo. Assim, pode-se observar a semelhança entre os resultados, a menos do fato que no presente trabalho utilizou-se a simetria do problema, ou seja, apenas metade do domínio inicial foi discretizado.

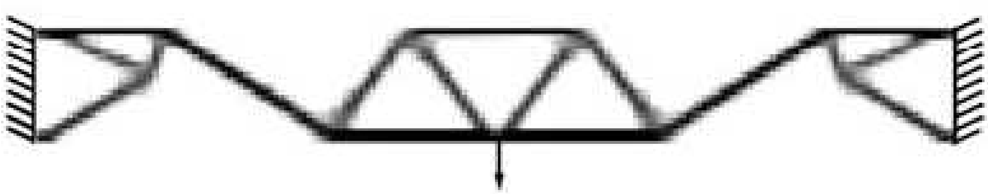
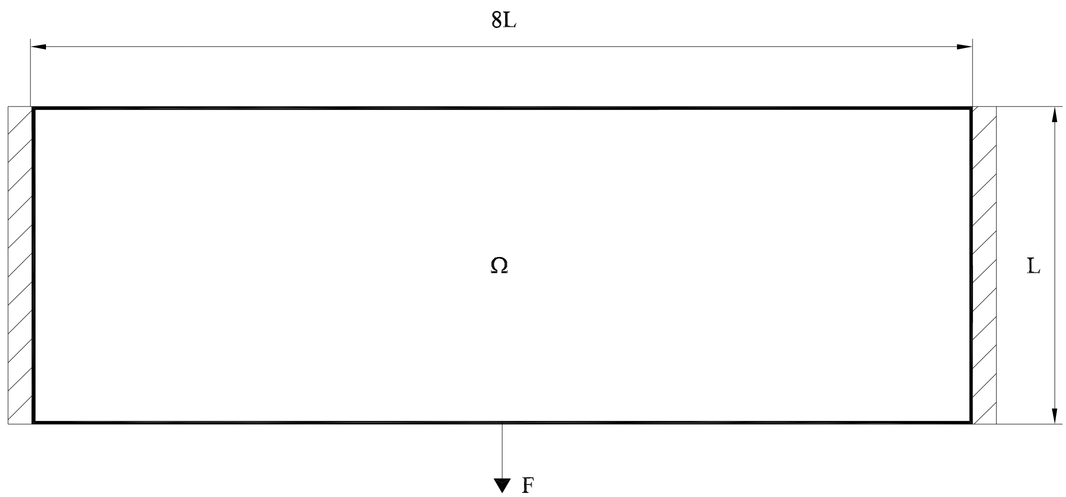
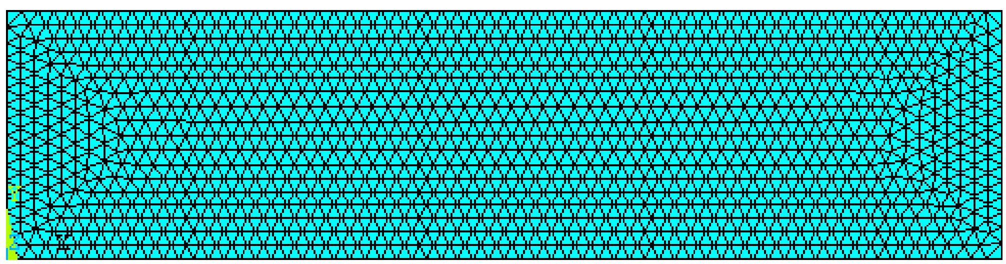


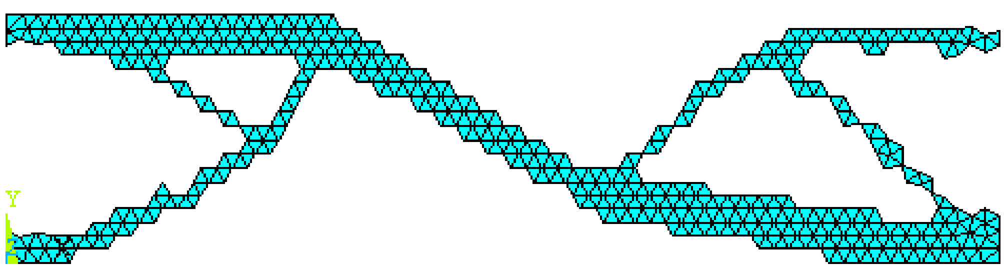
Figura 3.14: Modelo final de viga biengastada sujeita à não linearidade geométrica apresentada em (Jung e Gea, 2004).



(a) Modelo.



(b) Malha inicial com 11014 elementos lineares.



(c) Topologia final $j = 64$.

Figura 3.15: Viga Biengastada.

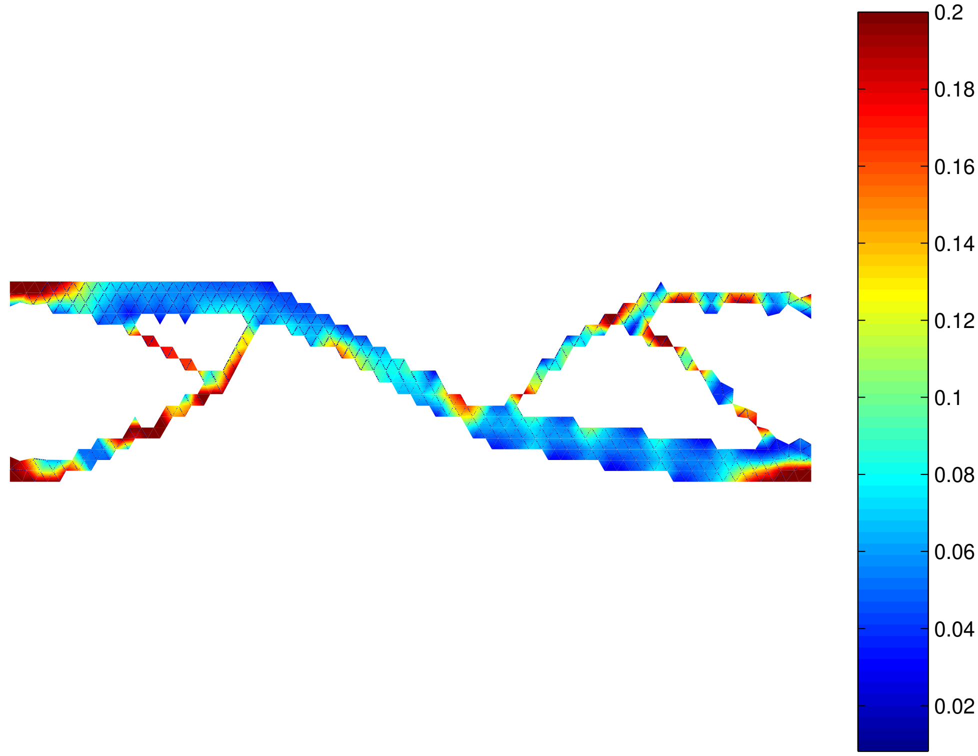


Figura 3.16: Densidade de energia de deformação na viga em $\dfrac{Nmm}{mm^3}$ na iteração $j = 64$.

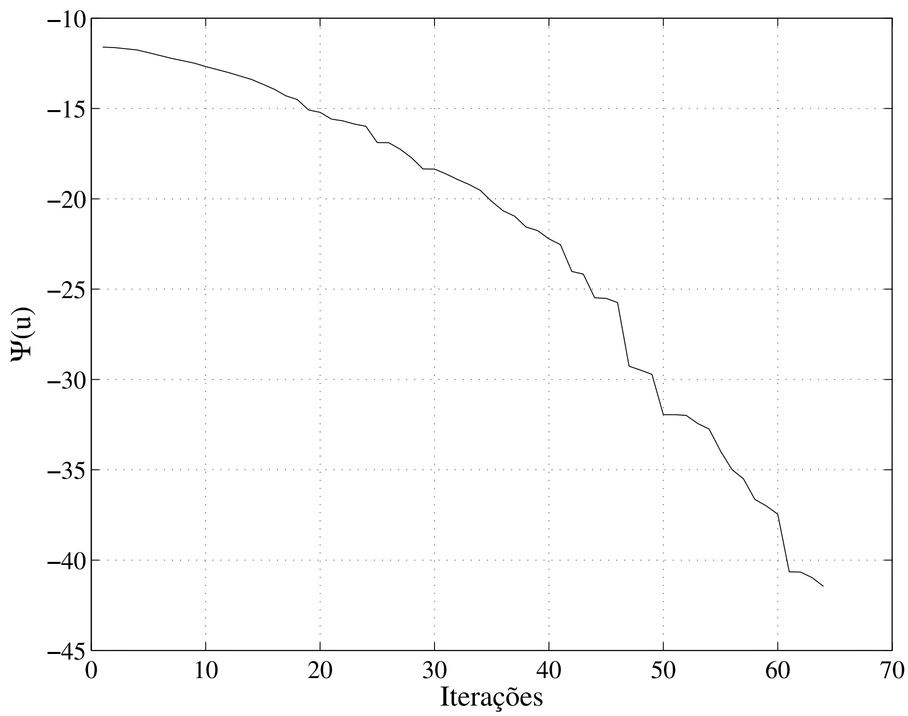


Figura 3.17: Energia potencial total x Iteração.

Capítulo 4

AST em Problemas Não-Lineares de Hiperelasticidade Quasi-Incompressível

4.1 Definição do Problema

No Capítulo 3 uma expressão aproximada para a derivada topológica foi encontrada para o problema de elasticidade envolvendo não-linearidade geométrica, no caso, grandes deslocamentos. Porém, o comportamento do material foi considerado linear, isotrópico e homogêneo, sendo representado pela lei de Hooke generalizada, conforme a equação (3.5).

No presente capítulo, a Análise de Sensibilidade Topológica é desenvolvida para o problema envolvendo não-linearidade geométrica e de material. No caso, o material é considerado ser hiperelástico não-linear incluindo a condição de quasi-incompressibilidade. Observa-se que a condição de incompressibilidade é uma idealização matemática para a situação limite, na qual certas grandezas físicas são consideradas infinitas.

4.1.1 Definição de Material Hiperelástico

De uma forma geral, um material é dito ser hiperelástico se o trabalho interno realizado pelas tensões durante um processo de deformação depende apenas do estado inicial no tempo t_0 e a configuração final no tempo t (Silva, 2003; Bonet e Wood, 1997). Nesse caso, o comportamento do material é independente do caminho das ações externas.

Para um material que apresente comportamento hiperelástico sem restrições internas, pode-se definir uma função escalar W, denominada densidade de energia de deformação, de modo que a seguinte relação entre o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ e seu conjugado, a taxa de variação do gradiente de deformação $\dot{\mathbf{F}}$, pode ser escrita da seguinte forma

$$W\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right),\mathbf{X}\right)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{P}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right),\mathbf{X}\right)\cdot\dot{\mathbf{F}}\,dt\ , \tag{4.1}$$

sendo que a dependência explícita de $\mathbf{X}$ permite o tratamento de materiais não-homogêneos. Neste trabalho, considera-se apenas o caso de materiais homogêneos. Portanto,

$$W\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{P}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right)\cdot\dot{\mathbf{F}}\,dt\ . \tag{4.2}$$

Conseqüentemente, a taxa de variação da densidade de energia de deformação pode ser escrita da seguinte forma

$$\dot{W}=\mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{F}}. \tag{4.3}$$

Assumindo que através de experimentos físicos é possível construir a função $W\left(\mathbf{F}\right)$, a qual define um dado material homogêneo, então a taxa de variação de $\dot{W}\left(\mathbf{F}\right)$ pode alternativamante ser expressa como

$$\dot{W}=\frac{\partial W\left(\mathbf{F}\right)}{\partial\mathbf{F}}\cdot\dot{\mathbf{F}}. \tag{4.4}$$

Comparando as equações (4.3) e (4.4), a seguinte relação é válida

$$\mathbf{P}=\frac{\partial W\left(\mathbf{F}\right)}{\partial\mathbf{F}}. \tag{4.5}$$

Similarmente, lembrando que o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ é conjugado com o tensor de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}$ (Bonet e Wood, 1997), defini-se que uma equação constitutiva totalmente lagrangiana análoga a (4.5), ou seja,

$$\mathbf{S}=\frac{\partial W\left(\mathbf{E}\right)}{\partial\mathbf{E}}. \tag{4.6}$$

As equações constitutivas (4.5) e (4.6) representam o comportamento de um material hiperelástico geral, sem qualquer restrição interna. Uma hipótese clássica é a conservação de volume em sólidos, uma vez que a maioria dos processos práticos de grandes deformações acontece sob incompressibilidade ou mais precisamente sob quasi-incompressibilidade. Tal hipótese é feita através da inclusão de um conjunto de equações de restrição no modelo constitutivo do material.

A forma mais simples de restrição é um funcional suficientemente regular do tipo

$$h(\mathbf{F}) = 0. \tag{4.7}$$

No caso da incompressibilidade, a equação (4.7) é dada por

$$h(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1 = J - 1 = 0, \tag{4.8}$$

pois $J = \det \mathbf{F}$ representa localmente a variação de volume deformado por volume não-deformado.

Para derivar a equação constitutiva de um material hiperelástico homogêneo incompressível, uma nova função escalar W^* pode ser definida da seguinte forma (Holzapfel, 2000)

$$W^*(\mathbf{F}, p) = W(\mathbf{F}) - p(J - 1), \tag{4.9}$$

sendo $p \in \Re$ o multiplicador de Lagrange, que neste caso, corresponde à *pressão hidrostática*. Diferenciando a equação (4.9) em relação ao gradiente de deformação $\mathbf{F}$ e usando a seguinte identidade (Holzapfel, 2000)

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J\mathbf{F}^{-T},$$

a equação constitutiva para um material hiperelástico homogêneo e incompressível pode ser escrita como

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} + pJ\mathbf{F}^{-T}. \tag{4.10}$$

Para o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff, tem-se

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} + qJ\mathbf{C}^{-1}, \tag{4.11}$$

sendo $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}$ o tensor de deformação direito de Cauchy-Green (Lai *et al.*, 1996).

4.1.2 Modelo Hiperelástico de Mooney-Rivlin com Quasi-Incompressibilidade

A expressão (4.8) representa a equação constitutiva de um material hiperelástico incompressível. No entanto, verifica-se na prática que a condição de incompressibilidade é uma idealização matemática, pois todos os materiais apresentam um certo grau de compressibilidade. Por isso, a condição de incompressibilidade se mostra muito severa e não reproduz corretamente o comportamento real do material. Considera-se então uma certa compressibilidade, e tais materiais são denominados *quasi-incompressíveis*. Um exemplo deste tipo de material são os elastômeros ou borrachas.

Em problemas envolvendo incompressibilidade é interessante na maioria da vezes decompor o tensor gradiente de deformação $\mathbf{F}$ em uma parcela distorcional $\bar{\mathbf{F}}$ e outra volumétrica $\tilde{\mathbf{F}}$ de forma que (Bonet e Wood, 1997)

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}},$$

sendo

$$\tilde{\mathbf{F}} = J^{1/3}\mathbf{I} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{2/3}\mathbf{F} \ . \tag{4.12}$$

De forma semelhante, decomposições similares podem ser efetuadas para outros tensores de deformação. Por exemplo, para o tensor de Cauchy-Green $\mathbf{C}$, a seguinte decomposição também é válida

$$\tilde{\mathbf{C}} = J^{1/3}\mathbf{I} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}} = J^{2/3}\mathbf{F}^T\mathbf{F} \ . \tag{4.13}$$

Similarmente, segundo (Chen e Pan, 1996), o funcional densidade de energia de deformação W de um material hiperelástico isotrópico pode ser decomposto na soma de uma parcela referente à densidade de energia de distorção $\bar{W}$ e outra volumétrica $\tilde{W}$ da seguinte forma

$$W\left(\bar{I}_1, \bar{I}_2, I_3\right) = \bar{W}\left(\bar{I}_1, \bar{I}_2\right) + \tilde{W}\left(I_3\right), \tag{4.14}$$

sendo $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$, respectivamente, o primeiro e o segundo invariante da componente distorcional $\bar{\mathbf{C}}$ do tensor de deformação de Cauchy-Green dados por

$$\bar{I}_1 = I_1 I_3^{-1/3}, \quad \bar{I}_2 = I_2 I_3^{-2/3};$$

$I_3 = \det \mathbf{C}$ é o terceiro invariante de $\mathbf{C}$. Além do mais, a seguinte relação entre a pressão hidrostática p e a parcela volumétrica da densidade de energia de deformação $\tilde{W}$ é válida (Silva, 2003; Chen e Pan, 1996)

$$p = \frac{\partial \tilde{W}\left(I_3\right)}{\partial J}. \tag{4.15}$$

No presente trabalho, a parcela distorcional $\bar{W}$ da densidade de energia de deformação é escrita, segundo a forma de Mooney-Rivlin de 2 parâmetros, ou seja,

$$\bar{W}\left(\bar{I}_1, \bar{I}_2\right) = A_{10}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + A_{01}\left(\bar{I}_2 - 3\right), \tag{4.16}$$

sendo A_{10} e A_{01} constantes do material. Por sua vez, a parcela volumétrica da densidade de energia de deformação $\tilde{W}$ pode ser escrita da seguinte forma (Chen *et al.*, 1997)

$$\tilde{W}\left(I_3\right) = \frac{1}{\epsilon} G\left(J\right), \tag{4.17}$$

sendo ϵ um parâmetro pequeno indicando o grau de compressibilidade. Além do mais, $G(J) \to 0$ mais rapidamente do que $\epsilon \to 0$, o que corresponde à incompressibilidade.

No presente trabalho, a parcela volumétrica $\tilde{W}$ é escrita da seguinte forma (Silva, 2003; Kim, 1999; Chen e Pan, 1996; Chen *et al.*, 1996; Chen *et al.*, 2000)

$$\tilde{W}(I_3) = \frac{\tilde{k}}{2}(J-1)^2, \tag{4.18}$$

sendo $\tilde{k} = 1/\epsilon$ o módulo volumétrico (*bulk modulus*) e representa o grau de compressibilidade. Por sua vez,

$$G(J) = \frac{1}{2}(J-1)^2. \tag{4.19}$$

Portanto, substituindo as equações (4.16) e (4.18) em (4.14), tem-se

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = A_{10}(\bar{I}_1 - 3) + A_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{\tilde{k}}{2}(J-1)^2, \tag{4.20}$$

que é o funcional densidade de energia de deformação para um material hiperelástico homogêneo, isotrópico e quasi-incompressível, segundo à forma de Mooney-Rivlin de 2 parâmetros.

4.1.3 Formulação Variacional do Problema de Hiperelasticidade Não-Linear Quasi-Incompressível

No presente capítulo, o problema considerado envolve tanto não-linearidade geométrica, caracterizada por grandes deslocamentos, quanto não-linearidade de material, caracterizada pelas grandes deformações sofridas pelos pontos materiais do domínio. Portanto, para uma formulação lagrangiana total, o PVC associado é escrito pela equação (3.6), a menos do fato que no presente capítulo o material é considerado se comportar de forma não-linear. O campo de tensão, caracterizado pelo primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$, é determinado por (4.10) ou (4.11) no caso do segundo tensor de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$.

Além do mais, considerando o fato que o presente problema é conservativo, a solução de equilíbrio em um domínio de referência Ω^0 pode ser obtida através do seguinte problema variacional (Silva, 2003)

Encontre $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, tal que

$$\Pi(\mathbf{u}) = \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \Pi(\boldsymbol{\xi}), \tag{4.21}$$

sendo $\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{u} \in \left[H^1\left(\Omega^0\right)\right]^{\dim} \mid \mathbf{u}|_{\Gamma^0_D} = \bar{\mathbf{u}} \right\}$ com $\dim \leq 3$ e o funcional Π representa a energia potencial total do problema hiperelástico não-linear quasi-incompressível, dada por

$$\Pi\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \int_{\Omega^0} \left[\bar{W}\left(\bar{I}_1\left(\boldsymbol{\xi}\right), \bar{I}_2\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right) + \frac{1}{\epsilon} G\left(J\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right) \right] d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} \mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\Omega^0 + \int_{\Gamma^0_N} \mathbf{t}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\Gamma^0 \, . \tag{4.22}$$

No caso limite, de incompressibilidade ($\epsilon = 0$), o espaço $\mathcal{U}$ deve incorporar a restrição $\det \mathbf{F} = 1$ em sua construção.

Embora teoremas demonstrem a existência da solução para a forma variacional de único campo dada em (4.21) (Chen *et al.*, 1997), os mesmos não indicam nenhum procedimento para a sua solução. Além do mais, à medida que $\epsilon > 0$ se torna pequeno, a dificuldade envolvida na solução do problema discreto formulado a partir do enunciado variacional de único campo (4.21) torna-se grande, dando origem ao fenômeno conhecido na literatura como travamento volumétrico (*volumetric locking*). Além do mais, é difícil e desnecessário construir espaços $\mathcal{U}$ que satisfazem exatamente a restrição de incompressibilidade $\det \mathbf{F} = 1$ para o caso limite de incompressibilidade.

Portanto, segundo (Silva, 2003), é mais eficiente obter o enunciado quasi-incompressível através da seguinte forma variacional, que corresponde a um problema de ponto de sela em $(\mathbf{u}, p)$,

Encontre $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ e $p \in \mathcal{Q}$, tal que

$$\Pi\left(\mathbf{u}, p\right) = \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \sup_{q \in \mathcal{Q}} \Pi\left(\boldsymbol{\xi}, q\right), \tag{4.23}$$

sendo $\mathcal{Q} = \left\{ p \in L_2\left(\Omega^0\right) \right\}$.

Além do mais, o funcional $\Pi : \mathcal{U} \times \mathcal{Q} \rightarrow \Re$ é definido, conforme (Silva, 2003) da seguinte forma

$$\Pi\left(\boldsymbol{\xi}, q\right) = \int_{\Omega^0} \left[\bar{W}\left(\bar{I}_1\left(\boldsymbol{\xi}\right), \bar{I}_2\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right) + q\left(J\left(\boldsymbol{\xi}\right) - 1\right) - G^*\left(q\right) \right] d\Omega^0 - W_{ext}\left(\boldsymbol{\xi}\right), \tag{4.24}$$

sendo

$$W_{ext}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \int_{\Omega^0} \mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\Omega^0 + \int_{\Gamma^0_N} \mathbf{t}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\Gamma^0 \, , \tag{4.25}$$

$$G^*\left(q\right) = \frac{1}{2\tilde{k}} q^2. \tag{4.26}$$

O enunciado variacional (4.23) é denominado *Formulação Lagrangiana Perturbada*, pois relaxa a condição de incompressibilidade através da adição do termo de penalização $-G^*\left(q\right)$. Nesse caso, q é o multiplicador de Lagrange.

Afim de obter a solução $(\mathbf{u}, p)$ do problema variacional (4.23), a condição de ponto estacionário de $\Pi(\boldsymbol{\xi}, q)$ deve ser satisfeita, ou seja, $\delta\Pi(\mathbf{u}, p) = 0$. Portanto,

$$\int_{\Omega^0} \left[\frac{\partial \bar{W}(\mathbf{u})}{\partial \bar{I}_1} \delta \bar{I}_1 + \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{u})}{\partial \bar{I}_2} \delta \bar{I}_2 + p\delta J + (J(\mathbf{u}) - 1)\delta p - G^{*'}(p)\delta p \right] d\Omega^0 - \left\langle \frac{\partial W_{ext}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle = 0.$$

Como $\delta\mathbf{u}$ e δp são variáveis independentes, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{\Omega^0} \left[\frac{\partial \bar{W}(\mathbf{u})}{\partial \bar{I}_1} \delta \bar{I}_1 + \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{u})}{\partial \bar{I}_2} \delta \bar{I}_2 + p\delta J \right] d\Omega^0 - \left\langle \frac{\partial W_{ext}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle = 0 & \forall\ \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V} \\ \displaystyle\int_{\Omega^0} (J(\mathbf{u}) - 1)\,\delta p\, d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} G^{*'}(p)\,\delta p\, d\Omega^0 = 0 & \forall\ \delta p \in \mathcal{Q} \end{array} \right. , \tag{4.27}$$

considerando $\mathcal{V} = \left\{ \delta\mathbf{u} \in \left[H^1\left(\Omega^0\right)\right]^{\dim} \mid \delta\mathbf{u}|_{\Gamma_D^0} = \mathbf{0} \right\}$ com $\dim \leq 3$.

Considerando a variação das equações (4.20) e (4.15), tem-se

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1}\delta \bar{I}_1 + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2}\delta \bar{I}_2 + \frac{\partial W}{\partial J}\delta J = \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1}\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2}\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{E}} + p\frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \delta\mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{E}. \tag{4.28}$$

A partir de (4.26) e (4.28), o sistema (4.27) pode ser reescrito na seguinte forma abstrata

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + b_1(\delta\mathbf{u}, p) = l(\delta\mathbf{u}) & \forall\ \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V} \\ b_2(\mathbf{u}, \delta p) - g(p, \delta p) = 0 & \forall\ \delta p \in \mathcal{Q} \end{array} \right. , \tag{4.29}$$

sendo

$$a(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega^0} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1}\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2}\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{E}} \right] \cdot \delta\mathbf{E}\, d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \bar{\mathbf{S}} \cdot \delta\mathbf{E}\, d\Omega^0 , \tag{4.30}$$

$$b_1(\delta\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega^0} p\frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta\mathbf{E}\, d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \tilde{\mathbf{S}} \cdot \delta\mathbf{E}\, d\Omega^0 , \tag{4.31}$$

$$b_2(\mathbf{u}, \delta p) = \int_{\Omega^0} (J(\mathbf{u}) - 1)\,\delta p\, d\Omega^0 , \tag{4.32}$$

$$g(p, \delta p) = \int_{\Omega^0} \frac{p}{\bar{k}}\delta p\, d\Omega^0 , \tag{4.33}$$

$$l(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega^0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Omega^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Gamma^0 . \tag{4.34}$$

Através das equações (4.28),(4.30) e (4.31), pode-se escrever a seguinte relação

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{S}}, \tag{4.35}$$

sendo $\bar{\mathbf{S}}$ e $\tilde{\mathbf{S}}$, respectivamente, as componentes de distorção e dilatação do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.

4.2 Análise de Resposta

Seguindo a mesma metodologia da Seção 3.2, o problema estrutural é descrito através de uma formulação lagrangiana total e a respectiva solução não-linear é obtida através do MEF. No entanto, o enunciado variacional (4.23) conduz a uma formulação mista de elementos finitos.

Considerando o problema de ponto de sela (4.23) definido em um intervalo I_{n+1}, a solução é obtida resolvendo a condição de ponto estacionário representado pelo sistemas de equações variacionais não-lineares (4.29), da seguinte forma (Silva, 2003)

Encontre $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ e $p_{n+1} \in \mathcal{Q}_{n+1}$ tal que

$$\begin{cases} a\left(\mathbf{u}_{n+1}, \delta\mathbf{u}\right) + b_1\left(\delta\mathbf{u}, p_{n+1}\right) = l\left(\delta\mathbf{u}\right) & \forall\ \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V} \\ b_2\left(\mathbf{u}_{n+1}, \delta p\right) - g\left(p_{n+1}, \delta p\right) = 0 & \forall\ \delta p \in \mathcal{Q} \end{cases}, \tag{4.36}$$

sendo

$$a\left(\mathbf{u}_{n+1}, \delta\mathbf{u}\right) = \int_{\Omega^0} \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \cdot \delta\mathbf{E}\ d\Omega^0\ , \tag{4.37}$$

$$b_1\left(\delta\mathbf{u}, p_{n+1}\right) = \int_{\Omega^0} \tilde{\mathbf{S}}_{n+1} \cdot \delta\mathbf{E}\ d\Omega^0\ , \tag{4.38}$$

$$b_2\left(\mathbf{u}_{n+1}, \delta p\right) = \int_{\Omega^0} \left(J\left(\mathbf{u}_{n+1}\right) - 1\right) \delta p\ d\Omega^0\ , \tag{4.39}$$

$$g\left(p_{n+1}, \delta p\right) = \int_{\Omega^0} \frac{p_{n+1}}{\tilde{k}} \delta p\ d\Omega^0\ , \tag{4.40}$$

$$l\left(\delta\mathbf{u}\right) = \int_{\Omega^0} \mathbf{b}_{0_{n+1}} \cdot \delta\mathbf{u}\ d\Omega^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_{0_{n+1}} \cdot \delta\mathbf{u}\ d\Gamma^0\ . \tag{4.41}$$

Discretizando o sistema de equações variacionais (4.36) no intervalo I_{n+1} através do MEF, tem-se o problema variacional misto discretizado

Encontre $\mathbf{u}_{hp_{n+1}} \in \mathcal{U}_{hp_{n+1}}$ e $p_{hp_{n+1}} \in \mathcal{Q}_{hp}$ tal que

$$\begin{cases} a\left(\mathbf{u}_{hp_{n+1}}, \delta\mathbf{u}_{hp}\right) + b_1\left(\delta\mathbf{u}_{hp}, p_{n+1}\right) = l\left(\delta\mathbf{u}_{hp}\right) & \forall\ \delta\mathbf{u}_{hp} \in \mathcal{V}_{hp} \\ b_2\left(\mathbf{u}_{hp_{n+1}}, \delta p_{hp}\right) - g\left(p_{hp_{n+1}}, \delta p_{hp}\right) = 0 & \forall\ \delta p_{hp} \in \mathcal{Q}_{hp} \end{cases}, \tag{4.42}$$

sendo $\mathcal{U}_{hp_{n+1}}$ e $\mathcal{V}_{hp}$, respectivamente, o espaço de deslocamentos admissíveis discretizados no intervalo $n+1$ e o espaço das variações discretizadas definido da mesma forma que na Seção 3.2 e $\mathcal{Q}_{hp} = \left\{p_{hp_{n+1}}, \delta p_{hp} \in L_2\left(\Omega^0\right)\right\}$.

Adotando a notação $\mathbf{s} = [\mathbf{u}, p]^T$ e $\Delta\mathbf{s} = [\Delta\mathbf{u}, \Delta p]^T$ e considerando que o carregamento externo não depende da deformação, (Silva, 2003), o procedimento de Newton-Raphson aplicado ao sistema discretizado (4.42), omitindo o subescrito hp, conduz ao seguinte processo iterativo

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta a\left({}^{(k)}\mathbf{s}_{n+1};{}^{(k+1)}\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}\right)+\delta b_1\left({}^{(k)}\mathbf{s}_{n+1};\delta\mathbf{u},{}^{(k+1)}\Delta\mathbf{s}\right)=l_{n+1}\left(\delta\mathbf{u}\right)-a\left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1},\delta\mathbf{u}\right), \\ -b_1\left(\delta\mathbf{u},{}^{(k)}p_{n+1}\right) \\ \\ \delta b_2\left({}^{(k)}\mathbf{s}_{n+1};{}^{(k+1)}\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u},\right)-\delta g\left({}^{(k)}p_{n+1};{}^{(k+1)}\Delta p,\delta p,\right)=g\left({}^{(k)}p_{n+1},\delta p\right) \\ -b_2\left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1},\delta p\right) \\ \\ {}^{(k+1)}\mathbf{s}_{n+1}={}^{(k)}\mathbf{s}_{n+1}+{}^{(k+1)}\Delta\mathbf{s}, \\ \\ k=k+1 \quad \text{até que } \left\|{}^{(k+1)}\Delta\mathbf{s}_{n+1}\right\|\leq\gamma>0. \end{array}} . \tag{4.43}$$

De forma similar ao processo iterativo (3.17), os critérios de convergência (3.22) e (3.23) podem ser aplicados no processo iterativo (4.43). Os termos do processo iterativo (4.43) são dados, omitindo os parâmetros k e $n+1$, por (Silva, 2003)

$$\begin{aligned} \delta a\left(\mathbf{s};\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}\right) &= \int_{\Omega^0}\mathsf{C}\left(\mathbf{s}\right):\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\Delta\mathbf{u}\right\rangle\cdot\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\delta\mathbf{u}\right\rangle d\Omega^0 \\ &\quad+\int_{\Omega^0}\mathbf{S}\left(\mathbf{s}\right)\cdot\frac{1}{2}\left[\nabla\left(\Delta\mathbf{u}\right)^T\nabla\delta\mathbf{u}+\nabla\delta\mathbf{u}^T\nabla\left(\Delta\mathbf{u}\right)\right]d\Omega^0\ , \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\delta b_1\left(\mathbf{s};\delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{s}\right)=\int_{\Omega^0}\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\delta\mathbf{u}\right\rangle\cdot\frac{\partial J}{\partial\mathbf{E}}\Delta p\ d\Omega^0\ , \tag{4.45}$$

$$\delta b_2\left(\mathbf{s};\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u},\right)=\int_{\Omega^0}\delta p\left[\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\Delta\mathbf{u}\right\rangle\cdot\frac{\partial J}{\partial\mathbf{E}}\right]d\Omega^0\ , \tag{4.46}$$

$$\delta g\left(p;\Delta p,\delta p,\right)=\int_{\Omega^0}\delta p\left\langle\frac{\partial G^{*'}\left(p\right)}{\partial p},\Delta p\right\rangle d\Omega^0\ , \tag{4.47}$$

sendo as derivadas direcionais $\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\Delta\mathbf{u}\right\rangle$ e $\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{u}},\delta\mathbf{u}\right\rangle$ definidas respectivamente pelas equações (3.19) e (3.20).

A forma variacional mista representada pelo sistema de equações variacionais (4.42) conduz a uma formulação mista de elementos finitos. Entretanto, as formas matriciais mistas são diferentes daquelas decorrentes da formulação padrão de único campo (Silva, 2003; Brezzi e Fortin, 1991). Portanto, códigos desenvolvidos para a formulação padrão não podem ser aplicados às formas mistas.

Com o objetivo de tornar as formas matriciais compatíveis com os códigos de elementos finitos de único campo já existentes, diversas técnicas alternativas foram propostas de modo que reproduzissem a precisão na solução do problema da formulação mista. Entre as técnicas que foram desenvolvidas, citam-se a integração reduzida e os métodos de projeção (Brezzi e Fortin, 1991; Chen e Pan, 1996; Hughes, 1980).

No presente trabalho, a solução do problema variacional misto (4.42) é obtida pelo método de projeção da pressão, (Chen e Pan, 1996; Silva, 2003). Este método é uma generalização para hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível do método B-bar proposto para a elasticidade linear incompressível, (Hughes, 1980; Simo e Hughes, 1998). Estas técnicas são denominadas *método de deformação suposta*, pois assumem funções de forma *a priori* para os campos de tensão e deformação de forma independente à assumida para o campo de deslocamento. Assim, no presente contexto, a pressão hidrostática p do problema variacional misto (4.42) é projetada no sentido de mínimos quadrados num espaço funcional previamente escolhido e então reescrita em termos dos deslocamentos.

Formalmente, o método de projeção da pressão consiste no problema de aproximar por mínimos quadrados uma função escalar quadrado-intergrável de Lebesgue $p_e(\mathbf{X})$ no domínio do elemento e. Considere uma seqüência de funções representada pelo vetor $\mathbf{Q}(\mathbf{X}) = \{Q_1(\mathbf{X}), Q_2(\mathbf{X}), ..., Q_n(\mathbf{X})\}$. Logo, tem-se o seguinte problema:

Encontre o vetor $\mathbf{p}_e = \{p_1, p_2, ..., p_n\}^T$ que minimiza

$$\|p_e(\mathbf{X}) - \mathbf{Q}(\mathbf{X})\, \mathbf{p}_e\|^2_{L_2(\Omega_e)}, \tag{4.48}$$

sendo $\|\cdot\|_{L_2(\Omega_e)}$ a norma L_2 no domínio do elemento e.

Em problemas de quasi-incompressibilidade, nos quais a deformação volumétrica é muito pequena, é válido assumir a hipótese de que a relação pressão hidrostática/deformação volumétrica é linear, ou seja, $\tilde{k}$ é considerado constante. Além do mais, a aplicação do método da projeção no problema discretizado (4.43) permite realizar uma condensação estática em relação a variável p, tornando o sistema (4.43) função apenas do deslocamento.

Através das condições de Babuška-Brezzi, o espaço funcional das pressões e dos deslocamentos podem ser escolhidos de forma coerente, de maneira que se garanta a estabilidade numérica do problema (Szabó e Babuška, 1991; Brezzi e Fortin, 1991). Segundo (Silva, 2003; Kim, 1999; Chen *et al.*, 2000), a utilização de interpolação constante dentro de uma zona de integração para aplicações de hiperelasticidade é satisfatória. Além do mais, os elementos com interpolação quadrática de Serendipty do campo de deslocamentos e pressão constante também respeitam as condições de estabilidade de Babuška-Brezzi. Assim, esta escolha facilita a condensação da pressão dentro de cada elemento.

Considerando um domínio de integração $\Omega_e^0 \subset \Omega^0$, a equação (4.19) e pressão constante $\hat{p}_e$, a segunda equação do sistema (4.27) pode ser escrita como (Silva, 2003)

$$ {}^{(k)}p_{e_{n+1}} = \frac{\tilde{k}}{\int_{\Omega_e^0} d\Omega^0} \int_{\Omega_e^0} \left[J\left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1} \right) - 1 \right] d\Omega_e^0 \,, \tag{4.49} $$

que é a condensação estática da pressão hidrostática no domínio do elemento Ω_e^0. No procedimento iterativo (4.43), a variável ${}^{(k)}p_{e_{n+1}}$ é eliminada do sistema através da substituição do valor calculado por (4.49).

Como pode ser observado na em (4.49), o método de projeção é uma técnica de suavização usada para eliminar a oscilação pontual do valor da pressão. Portanto, é coerente com a formulação mista, a qual trata a pressão como uma restrição a ser respeitada no sentido da média.

Partindo-se das mesma condições para o cálculo de ${}^{(k)}p_{e_{n+1}}$, a variação Δp pode ser eliminada do sistema (4.27), pela expressão (Silva, 2003)

$$ {}^{(k+1)}\Delta\hat{p}_e = \frac{\tilde{k}}{\int_{\Omega_e^0} d\Omega^0} \int_{\Omega_e^0} \left\{ \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}}, {}^{(k+1)}\Delta\mathbf{u} \right\rangle \cdot \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} \left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1} \right) + J\left({}^{(k)}\mathbf{u}_{n+1} \right) - 1 - \frac{{}^{(k)}p_{e_{n+1}}}{\tilde{k}} \right\} d\Omega_e^0 \,. \tag{4.50} $$

4.3 AST para Problema com Hiperelasticidade Não-Linear Quasi-Incompressível

Na Seção 3.3, o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica, caracterizada pela função escalar denominda derivada topológica, foi redefinida para problemas envolvendo não-linearidade geométrica através da formulação lagrangiana total é adotada.

Seguindo a mesma metodologia do Capítulo 3, na presente seção é desenvolvida a expressão aproximada da derivada topológica para problemas envolvendo não-linearidades tanto geométrica quanto material. No caso, o material é considerado ser hiperelástico não-linear, isotrópico, homogêneo e quasi-incompressível, conforme descrito na Seção 4.1.2. A definição da derivada topológica dada na Seção 3.3 não impõem qualquer condição quanto à natureza da resposta do material. A redefinição dada pela equação (3.24) envolve apenas avaliar a sensibilidade de uma determinada função custo Ψ, definida na configuração não-deformada Ω_ε^0, quando um pequeno furo B_ε^0, centrado em $\mathbf{X} \in \Omega_\varepsilon^0$ e com $\varepsilon \to 0$, aumenta de tamanho. Assim, a mesma metodologia desenvolvida na Seção 3.3 é aqui adotada. A derivada topológica para o presente problema pode ser relacionada com a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma conforme a equação (3.30).

Para determinar a derivada topológica através da equação (3.30) para o presente problema resta determinar a sensibilidade à mudança de forma de uma determinada função custo $\Psi\left(\Omega_\varepsilon^0\right)$, no caso a energia potencial total do sistema, quando o furo B_ε^0 centrado em $\mathbf{X} \in \Omega_\varepsilon^0$ e com $\varepsilon \to 0$, aumenta de tamanho de acordo com o campo de velocidade definido em (3.27).

Assim, considere o problema de elasticidade sujeito a grandes deslocamentos e deformações com material hiperelastico não-linear, isotrópico, homogêneo e quasi-incompressível. Considerando que o domínio Ω_ε^0 é limitado e aberto e que Γ_ε^0 é suficientemente regular, o problema variacional misto, definido pelo sistema (4.36) em Ω^0, pode ser redefinido no domínio de referência não perturbado Ω_ε^0 da seguinte forma:

Encontre $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon$ e $p_\varepsilon \in \mathcal{Q}_\varepsilon$, tal que

$$\left\{\begin{array}{ll} a_\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon, \delta\mathbf{u}_\varepsilon\right) + b_{1\varepsilon}\left(\delta\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon\right) = l_\varepsilon\left(\delta\mathbf{u}_\varepsilon\right) & \forall\ \delta\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon \\ b_{2\varepsilon}\left(\mathbf{u}_\varepsilon, \delta p_\varepsilon\right) - g_\varepsilon\left(p_\varepsilon, \delta p_\varepsilon\right) = 0 & \forall\ \delta p_\varepsilon \in \mathcal{Q}_\varepsilon \end{array}\right., \tag{4.51}$$

sendo $\mathcal{U}_\varepsilon$, $\mathcal{V}_\varepsilon$ e $\mathcal{Q}_\varepsilon$, respectivamente, os espaços das funções cinematicamente admissíveis, e das variações e das pressões, definidos no domínio de referência com furo B_ε não-perturbado.

Similar ao que foi feito no Capítulo 3, um problema variacional misto equivalente ao definido pelo sistema (4.51) no domínio de referência não perturbado Ω_ε^0, pode ser definido numa família de domínios de referência perturbados Ω_τ^0, lembando-se que $\left.\Omega_\tau^0\right|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon^0$, ou seja,

Encontre $\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{U}_\tau$ e $p_\tau \in \mathcal{Q}_\tau$, tal que

$$\left\{\begin{array}{ll} a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \delta\mathbf{u}_\tau\right) + b_{1\tau}\left(\delta\mathbf{u}_\tau, p_\tau\right) = l_\tau\left(\delta\mathbf{u}_\tau\right) & \forall\ \delta\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{V}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0 \\ b_{2\tau}\left(\mathbf{u}_\tau, \delta p_\tau\right) - g_\tau\left(p_\tau, \delta p_\tau\right) = 0 & \forall\ \delta p_\tau \in \mathcal{Q}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0 \end{array}\right., \tag{4.52}$$

de modo que $\mathcal{U}_\tau$, $\mathcal{V}_\tau$ e $\mathcal{Q}_\tau$ são os espaços de funções cinematicamente admissíveis, variações e pressões definidos em Ω_τ^0, respectivamente.

Da mesma forma, considerando o funcional energia de deformação por unidade de volume não deformado, definido pela equação (4.20), o funcional de energia potencial total $\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)$ é escrito em Ω_τ^0

da seguinte forma

$$\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)=\int_{\Omega_\tau^0} W\left(\bar{I}_{1\tau},\bar{I}_{2\tau},J_\tau\right)\, d\Omega_\tau^0-\int_{\Omega_\tau}\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{u}_\tau\, d\Omega_\tau^0-\int_{\Gamma_N}\mathbf{t}_0\cdot\mathbf{u}_\tau\, d\Gamma_\tau^0 \,. \tag{4.53}$$

Portanto, afim de obter a sensibilidade da função custo (4.53), a função lagrangiana para o problema de hiperelasticidade na configuração pertubada Ω_τ^0, é escrita como

$$L_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\boldsymbol{\beta}_\tau,p_\tau,\theta_\tau\right)=\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)+a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\boldsymbol{\beta}_\tau\right)+b_{1\tau}\left(\boldsymbol{\beta}_\tau,p_\tau\right)+b_{2\tau}\left(\mathbf{u}_\tau,\theta_\tau\right)-g_\tau\left(p_\tau,\theta_\tau\right)-l_\tau\left(\boldsymbol{\beta}_\tau\right). \tag{4.54}$$

Sendo $\boldsymbol{\beta}_\tau=m_1\,\delta\mathbf{u}_\tau$ e $\theta_\tau=m_2\,\delta p_\tau$ (m_1 e $m_2\in\Re$) os multiplicadores de Lagrange referentes, respectivamente, à primeira e à segunda equações do sistema variacional misto (4.52). Portanto, considerando que a equação (4.52) seja satisfeita para todo τ, a derivada da função lagrangiana (4.54) será igual à derivada do funcional de energia potencial total, ou seja,

$$\frac{dL_\tau}{d\tau}=\frac{d\Psi_\tau}{d\tau}=\frac{\partial L_\tau}{\partial\tau}+\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle+\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\boldsymbol{\beta}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle+\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial p_\tau},\dot{p}_\tau\right\rangle+\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\theta_\tau},\dot{\theta}_\tau\right\rangle, \tag{4.55}$$

sendo

$$\dot{\mathbf{u}}_\tau=\frac{d\mathbf{u}_\tau}{d\tau}\in\mathcal{V}_\tau,\quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau=\frac{d\boldsymbol{\beta}_\tau}{d\tau}\in\mathcal{V}_\tau,\quad \dot{p}_\tau=\frac{dp_\tau}{d\tau}\in\mathcal{Q}_\tau,\quad \dot{\theta}_\tau=\frac{d\theta_\tau}{d\tau}\in\mathcal{Q}_\tau \;.$$

Seguindo o mesmo procedimento da Seção 3.4, as seguintes derivadas direcionais podem ser calculadas

$$\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle=\left\langle\frac{\partial\Psi_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle+\left\langle\frac{\partial a_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle+\left\langle\frac{\partial b_{2\tau}}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle, \tag{4.56}$$

$$\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\boldsymbol{\beta}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle=\left\langle\frac{\partial a_\tau}{\partial\boldsymbol{\beta}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle+\left\langle\frac{\partial b_{1\tau}}{\partial\boldsymbol{\beta}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle-\left\langle\frac{\partial l_\tau}{\partial\boldsymbol{\beta}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle, \tag{4.57}$$

$$\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial p_\tau},\dot{p}_\tau\right\rangle=\left\langle\frac{\partial b_{1\tau}}{\partial p_\tau},\dot{p}_\tau\right\rangle-\left\langle\frac{\partial g_\tau}{\partial p_\tau},\dot{p}_\tau\right\rangle, \tag{4.58}$$

$$\left\langle\frac{\partial L_\tau}{\partial\theta_\tau},\dot{\theta}_\tau\right\rangle=\left\langle\frac{\partial b_{2\tau}}{\partial\theta_\tau},\dot{\theta}_\tau\right\rangle-\left\langle\frac{\partial g_\tau}{\partial\theta_\tau},\dot{\theta}_\tau\right\rangle. \tag{4.59}$$

As derivadas direcionais presentes nas equações (4.56) à (4.59) são escritas, da seguinte forma (Silva, 2003)

$$\left\langle\frac{\partial a_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle=\int_{\Omega_\tau^0}\mathsf{C}\left(\mathbf{u}_\tau\right):\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle\cdot\delta\mathbf{E}_\tau+\mathbf{S}_\tau\cdot\left\langle\frac{\partial\delta\mathbf{E}_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\mathbf{u}}_\tau\right\rangle d\Omega_\tau^0=\delta a_\tau\left(\mathbf{s}_\tau;\dot{\mathbf{u}}_\tau,\boldsymbol{\beta}_\tau\right), \tag{4.60}$$

$$\left\langle\frac{\partial a_\tau}{\partial\boldsymbol{\beta}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle=\int_{\Omega_\tau^0}\bar{\mathbf{S}}_\tau\cdot\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle d\Omega_\tau^0=a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau,\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right), \tag{4.61}$$

$$\left\langle\frac{\partial b_{1\tau}}{\partial\boldsymbol{\beta}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle=\int_{\Omega_\tau^0}p_\tau\frac{\partial J\left(\mathbf{u}_\tau\right)}{\partial\mathbf{E}_\tau}\cdot\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle d\Omega_\tau^0=\int_{\Omega_\tau^0}\tilde{\mathbf{S}}_\tau\cdot\left\langle\frac{\partial\mathbf{E}_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau},\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right\rangle d\Omega_\tau^0=b_{1\tau}\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau,p_\tau\right), \tag{4.62}$$

$$\left\langle \frac{\partial b_{1\tau}}{\partial p_\tau}, \dot{p}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} \dot{p}_\tau \frac{\partial J(\mathbf{u}_\tau)}{\partial \mathbf{E}_\tau} \cdot \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \boldsymbol{\beta}_\tau \right\rangle d\Omega_\tau^0 = \delta b_{1\tau}(\mathbf{s}_\tau; \boldsymbol{\beta}_\tau, \dot{p}_\tau), \tag{4.63}$$

$$\left\langle \frac{\partial b_{2\tau}}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} \frac{\partial J(\mathbf{u}_\tau)}{\partial \mathbf{E}_\tau} \cdot \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle \theta_\tau \, d\Omega_\tau^0 = \delta b_{2\tau}(\mathbf{s}_\tau; \dot{\mathbf{u}}_\tau, \theta_\tau), \tag{4.64}$$

$$\left\langle \frac{\partial b_{2\tau}}{\partial \theta_\tau}, \dot{\theta}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} [J(\mathbf{u}_\tau) - 1] \, \dot{\theta}_\tau \, d\Omega_\tau^0 = b_{2\tau}\left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\theta}_\tau\right), \tag{4.65}$$

$$\left\langle \frac{\partial g_\tau}{\partial p_\tau}, \dot{p}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} \left\langle \frac{\partial G^{*'}}{\partial p_\tau}, \dot{p}_\tau \right\rangle \theta_\tau \, d\Omega_\tau^0 = \int_{\Omega_\tau^0} \frac{\dot{p}_\tau}{\tilde{k}} \theta_\tau \, d\Omega_\tau^0 = \delta g_\tau(p_\tau; \dot{p}_\tau, \theta_\tau), \tag{4.66}$$

$$\left\langle \frac{\partial g_\tau}{\partial \theta_\tau}, \dot{\theta}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau^0} G^{*'} \dot{\theta}_\tau \, d\Omega_\tau^0 = \int_{\Omega_\tau^0} \frac{p_\tau}{\tilde{k}} \dot{\theta}_\tau \, d\Omega_\tau^0 = g_\tau\left(p_\tau, \dot{\theta}_\tau\right), \tag{4.67}$$

$$\left\langle \frac{\partial l_\tau}{\partial \boldsymbol{\beta}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle = \int_{\Omega_\tau} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \, d\Omega_\tau^0 - \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \, d\Gamma_\tau^0 = l_\tau\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right). \tag{4.68}$$

Além do mais, as derivadas direcionais em relação a $\mathbf{u}_\tau$ nas direções $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ e $\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau$ contidas nas expressões anteriores são escritas como

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^S + \frac{1}{2} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^T \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^T \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau, \tag{4.69}$$

$$\left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = \frac{1}{2} \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau^T \nabla_\tau \boldsymbol{\beta}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \boldsymbol{\beta}_\tau^T \nabla_\tau \dot{\mathbf{u}}_\tau, \tag{4.70}$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \right\rangle = \nabla_\tau \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau^S + \frac{1}{2} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^T \nabla_\tau \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau + \frac{1}{2} \nabla_\tau \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau^T \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau. \tag{4.71}$$

Similarmente à Seção 3.4, a derivada parcial da função lagrangiana (4.54) em relação à τ coincidirá com a derivada total, conforme (3.49), se todas as equações (4.56) à (4.59) forem iguais a zero. Assim, através de (4.60) à (4.68), tem-se o seguinte problema variacional:

Encontre $\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{U}_\tau$ e $p_\tau \in \mathcal{Q}_\tau$, tal que

$$\begin{cases} a_\tau\left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right) + b_{1\tau}\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau, p_\tau\right) = l_\tau\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau\right) & \forall\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0 \\ b_{2\tau}\left(\mathbf{u}_\tau, \dot{\theta}_\tau\right) - g_\tau\left(p_\tau, \dot{\theta}_\tau\right) = 0 & \forall\ \dot{\theta}_\tau \in \mathcal{Q}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0 \end{cases}, \tag{4.72}$$

que corresponde à equação de estado do problema em questão. Para o problema adjunto:

Encontre $\boldsymbol{\beta}_\tau \in \mathcal{V}_\tau$ e $\theta_\tau \in \mathcal{Q}_\tau$, tal que

$$\begin{cases} \delta a_\tau(\mathbf{s}_\tau; \boldsymbol{\beta}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau) + \delta b_{2\tau}(\mathbf{s}_\tau; \dot{\mathbf{u}}_\tau, \theta_\tau) = -\left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle & \forall\ \dot{\mathbf{u}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0 \\ \delta b_{1\tau}(\mathbf{s}_\tau; \boldsymbol{\beta}_\tau, \dot{p}_\tau) - \delta g_\tau(p_\tau; \theta_\tau, \dot{p}_\tau) = 0 & \forall\ \dot{p}_\tau \in \mathcal{Q}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0 \end{cases}, \tag{4.73}$$

onde se considerou a simetria das formas bilineares $\delta a_\tau(\mathbf{s}_\tau; \dot{\mathbf{u}}_\tau, \boldsymbol{\beta}_\tau)$ e $\delta g_\tau(p_\tau; \dot{p}_\tau, \theta_\tau)$.

A derivada direcional do funcional de energia potencial total em relação à $\mathbf{u}_\tau$ na direção de $\dot{\mathbf{u}}_\tau$, de acordo com a (4.53), pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle &= \int_{\Omega_\tau^0} \left(\frac{\partial W_\tau}{\partial \bar{I}_{1\tau}} \frac{\partial \bar{I}_{1\tau}}{\partial \mathbf{E}_\tau} + \frac{\partial W_\tau}{\partial \bar{I}_{2\tau}} \frac{\partial \bar{I}_{2\tau}}{\partial \mathbf{E}_\tau} + \frac{\partial W_\tau}{\partial J_\tau} \frac{\partial J_\tau}{\partial \mathbf{E}_\tau} \right) \cdot \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle d\Omega_\tau^0 \\
&\quad - \int_{\Omega_\tau} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau \, d\Omega_\tau^0 - \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau \, d\Gamma_\tau^0 \,, \\
\left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle &= a_\tau (\mathbf{u}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau) + b_{1\tau} (\dot{\mathbf{u}}_\tau, p_\tau) - l_\tau (\dot{\mathbf{u}}_\tau) = 0 \qquad \forall \dot{\mathbf{u}}_\tau \in \mathcal{V}_\tau \text{ e } \forall\ \tau \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.74}$$

considerando que $\mathbf{u}_\tau$ e p_τ satisfaça a equação de estado (4.52). Conseqüentemente, a solução da equação adjunta (4.73) é $(\boldsymbol{\beta}_\tau, \theta_\tau) = (\mathbf{0}, 0)$ e a derivada parcial do lagrangiano (4.54) escrito na configuração perturbada Ω_τ^0 torna-se

$$\left. \frac{\partial L_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \Psi_\tau (\mathbf{u}_\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega_\tau^0} W (\mathbf{E}_\tau) \, d\Omega_\tau^0 \right|_{\tau=0} - \left. \frac{\partial l_\tau (\mathbf{u}_\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} . \tag{4.75}$$

Substituindo a definição de energia potencial total para o problema de hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível, dada pela equação (4.53), em (4.75) e aplicando o *Teorema do Transporte de Reynolds*, a derivada parcial da função lagrangiana na configuração não-perturbada $\Omega_\tau^0|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon^0$ é escrita como

$$\left. \frac{\partial L_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \left. \frac{\partial W (\mathbf{E}_\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} + W (\mathbf{E}_\varepsilon) \ \mathrm{Div} \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 - \left. \frac{\partial l_\tau (\mathbf{u}_\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} , \tag{4.76}$$

sendo $\left. \dfrac{\partial l_\tau (\mathbf{u}_\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}$ dado pela equação (3.63) para $\mathbf{u}_\tau$ e $\boldsymbol{\beta}_\tau$ fixos e o campo de velocidade $\mathbf{V}$ definido em (3.27). Portanto, a equação (4.76) é reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial L_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} &= \int_{\Omega_\varepsilon^0} \frac{\partial W (\mathbf{E}_\tau)}{\partial \mathbf{E}_\tau} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} + W (\mathbf{E}_\varepsilon) \mathbf{I} \cdot \nabla \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 - \int_{\Omega_\varepsilon^0} (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{I} \cdot \nabla \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 \,, \\
\left. \frac{\partial L_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} &= \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{S}_\tau \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Omega_\varepsilon^0} [(W (\mathbf{E}_\varepsilon) - \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon)] \, \mathbf{I} \cdot \nabla \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 \,.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Usando a definição da derivada parcial do tensor de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}_\tau$ na configuração não-perturbada Ω_ε^0, dada em (3.59), a equação (4.77), após algumas operações algébricas, torna-se

$$\left. \frac{\partial L_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \left\{ [W (\mathbf{E}_\varepsilon) - \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon] \, \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \mathbf{S}_\varepsilon - \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \mathbf{S}_\varepsilon \right\} \cdot \nabla \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 \,. \tag{4.78}$$

De forma similar ao que foi feito nos capítulos anteriores, a equação (4.78) pode ser escrita da seguinte forma

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \cdot \nabla \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 \,, \tag{4.79}$$

sendo $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0$ o tensor momento energia de Eshelby na configuração de referência não-perturbada Ω_ε^0 para formulação lagrangiana total, que no presente problema é definido como

$$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 = \left[W\left(\mathbf{E}_\varepsilon\right) - \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right] \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \mathbf{S}_\varepsilon - \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \mathbf{S}_\varepsilon. \tag{4.80}$$

De forma similar à Seção 3.4, tem-se

$$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 = \left[W\left(\mathbf{E}_\varepsilon\right) - \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right] \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \mathbf{P}_\varepsilon. \tag{4.81}$$

Através do *Teorema da Divergência* e da relação tensorial (3.69), a equação (4.79) é reescrita na seguinte forma

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \operatorname{Div}\left(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0\right) \cdot \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 \,. \tag{4.82}$$

Proposição 4.1 *Sejam $(\mathbf{u}_\tau, p_\tau)$ e $(\boldsymbol{\beta}_\tau, \theta_\tau)$, respectivamente, as soluções da equação de estado (4.72) e adjunta (4.73). Logo,*

$$Div \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 = \mathbf{0}. \tag{4.83}$$

Demonstração 4.1 *Seguindo o mesmo procedimento para provar a Proposição* 3.1*, considera-se o tensor de Eshelby $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0$ escrito na forma dada pela equação (4.81) e a derivação de $\mathbf{u}_\tau$ em relação a τ sendo feita na própria configuração perturbada Ω_τ^0, para depois avaliar em $\tau = 0$. Assim, através do* Teorema do Transporte de Reynolds*, da regra de derivação (3.72) e do* Teorema da Divergência *(Novotny, 2003), a derivada parcial do funcional de energia potencial total $\Psi_\tau\left(\mathbf{u}_\tau\right)$, dado pela equação (4.53), em $\tau = 0$ é calculado da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega_\tau^0} W\left(\mathbf{E}_\tau\right) d\Omega_\tau^0 \right|_{\tau=0} &= \int_{\Omega_\varepsilon^0} \left. W\left(\mathbf{E}_\tau\right)' \right|_{\tau=0} d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} W\left(\mathbf{E}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon^0} \frac{\partial W\left(\mathbf{E}_\tau\right)}{\partial \mathbf{E}_\tau} \cdot \left. \mathbf{E}_\tau' \right|_{\tau=0} d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} W\left(\mathbf{E}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon^0} \left(\bar{\mathbf{S}}_\tau + \tilde{\mathbf{S}}_\tau\right) \cdot \left. \mathbf{E}_\tau' \right|_{\tau=0} d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} W\left(\mathbf{E}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 \,.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\left.\frac{\partial l_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon' \, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \left(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\right) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon' + \mathbf{t}_0 \cdot \left(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\right) \mathbf{V} \, d\Gamma^0$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon^{'} \, d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon^{'} \, d\Gamma^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \left[(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \mathbf{P}_\varepsilon \right] \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 \,, \tag{4.85}$$

sendo $\mathbf{b}_0$ *e* $\mathbf{t}_0$ *constantes em relação a* τ. *Portanto, substituindo as equações (4.84) e (4.85) em (4.75), a derivada parcial da função lagrangiana torna-se*

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = & \int_{\Omega_\varepsilon^0} \left(\bar{\mathbf{S}}_\tau + \tilde{\mathbf{S}}_\tau \right) \cdot \left.\mathbf{E}_\tau^{'}\right|_{\tau=0} d\Omega_\varepsilon^0 + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} W(\mathbf{E}_\varepsilon) \, \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 - \int_{\Omega_\varepsilon^0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon^{'} \, d\Omega_\varepsilon^0 \\ & - \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon^{'} \, d\Gamma^0 - \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \left[(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^T \mathbf{P}_\varepsilon \right] \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 \,. \end{aligned}$$

Reescrevendo, a expressão acima, tem-se

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = a_\varepsilon \left(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon^{'} \right) + b_{1\varepsilon} \left(\mathbf{u}_\varepsilon^{'}, p_\varepsilon \right) - l_\varepsilon \left(\mathbf{u}_\varepsilon^{'} \right) + \int_{\Gamma_\varepsilon^0} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V} \, d\Gamma_\varepsilon^0 \,, \tag{4.86}$$

sendo

$$a_\varepsilon \left(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon^{'} \right) = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \bar{\mathbf{S}}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon^{'} \, d\Omega_\varepsilon^0 = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial \bar{W}(\mathbf{u}_\varepsilon)}{\partial \bar{I}_{1\varepsilon}} \frac{\partial \bar{I}_{1\tau}}{\partial \mathbf{E}_\tau} + \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{u}_\varepsilon)}{\partial \bar{I}_{2\varepsilon}} \frac{\partial \bar{I}_{2\tau}}{\partial \mathbf{E}_\tau} \right] \cdot \left.\frac{\partial \mathbf{E}_\varepsilon}{\partial \tau}\right|_{\mathbf{x}_\tau \ fixo} d\Omega_\varepsilon^0 \,, \tag{4.87}$$

$$b_{1\varepsilon} \left(\mathbf{u}_\varepsilon^{'}, p_\varepsilon \right) = \int_{\Omega_\varepsilon^0} \tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\varepsilon^{'} \, d\Omega_\varepsilon^0 = \int_{\Omega^0} p_\varepsilon \frac{\partial J(\mathbf{u}_\varepsilon)}{\partial \mathbf{E}_\varepsilon} \cdot \left.\frac{\partial \mathbf{E}_\varepsilon}{\partial \tau}\right|_{\mathbf{x}_\tau \ fixo} d\Omega_\varepsilon^0 \,, \tag{4.88}$$

e $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0$ *é dado pela equação (4.81). Portanto, comparando (4.86) com (4.82) e considerando a primeira equação do sistema (4.72) para* $\mathbf{u}_\varepsilon^{'} \in \mathcal{V}_\varepsilon$, *o* Teorema Fundamental do Cálculo Variacional *garante que*

$$\int_{\Omega_\varepsilon^0} Div \left(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \right) \cdot \mathbf{V} \, d\Omega_\varepsilon^0 = 0, \quad \forall \mathbf{V} \quad \Longleftrightarrow \quad Div \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 = \mathbf{0}.$$

Assim, a proposição está demonstrada. □

Substituindo o resultado da Proposição 4.1, dado por (4.83), em (4.82) e considerando a definição do campo de velocidade (3.27), obtém-se

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -V_n \int_{\partial B_\varepsilon^0} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \, d\partial B_\varepsilon^0 \,. \tag{4.89}$$

Através da definição do tensor de Eshelby $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0$ (4.81), a seguinte relação é válida

$$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = W(\mathbf{E}_\varepsilon) - \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{n}_0 \cdot (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon) \, \mathbf{n}_0.$$

Considerando a condição de contorno de Neumann homogênea no furo, ou seja, $\mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$ sobre ∂B_ε^0, e a ausência de forças de corpo, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$, a derivada parcial da função lagrangiana em $\tau = 0$, torna-se

$$\left.\frac{\partial L_\tau}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -V_n \int_{\partial B_\varepsilon^0} W(\mathbf{E}_\varepsilon) \, d\partial B_\varepsilon^0 \,. \tag{4.90}$$

A derivada topológica, a menos do limite com $\varepsilon \to 0$, é obtida substituindo (4.90) na expressão da derivada topológica para formulação lagrangiana total, (3.30), ou seja

$$D_T^*\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{f'(\varepsilon)}\int_{\partial B_\varepsilon^0} W(\mathbf{E}_\varepsilon)\, d\partial B_\varepsilon^0 \,. \tag{4.91}$$

4.4 Análise Assintótica Numérica

A equação (4.91) representa a derivada topológica a menos do limite com $\varepsilon \to 0$ para o problema de elasticidade envolvendo não-linearidade geométrica e hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível. Portanto, afim de se obter a derivada topológica propriamente dita é necessário que o limite presente na equação (4.91) com $\varepsilon \to 0$ seja calculado, de forma analítica ou aproximada.

Como não é possível realizar uma análise assintótica no presente problema, emprega-se o mesmo procedimento alternativo baseado em experimentos numéricos para o cálculo do limite com $\varepsilon \to 0$ realizado na Seção 3.4.1. Dessa maneira, obtem-se uma expressão final aproximada para a derivada topológica para o problema envolvendo hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível.

Por isso, seja a função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$ dada por

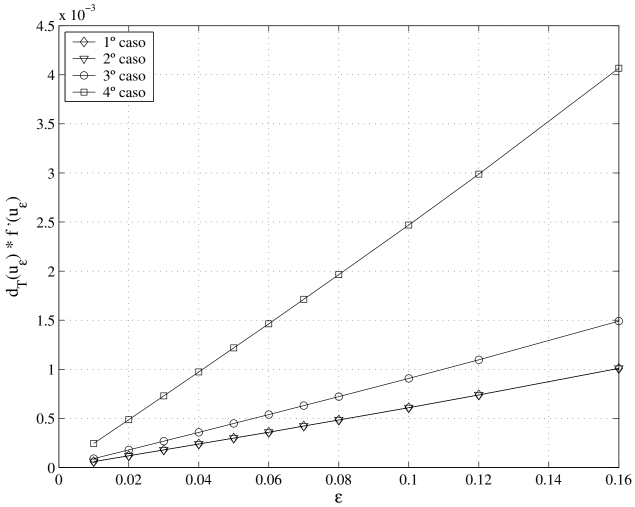
$$d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) = -\frac{1}{f'(\varepsilon)}\int_{\partial B_\varepsilon^0} W(\mathbf{E}_\varepsilon)\, d\partial B_\varepsilon^0 \,, \tag{4.92}$$

de modo que

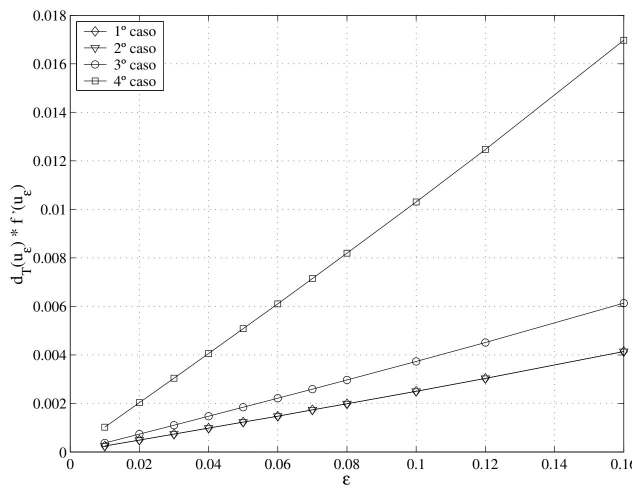
$$D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)\,. \tag{4.93}$$

De forma análoga ao Capítulo 3, considere um domínio retangular plano, denotado por Ω, com dimensões $L = 2\ mm$ e com um furo de raio ε no centro do domínio, sujeito aos casos de carregamento com carga distribuída $\mathbf{t}_0$ ao longo das bordas laterais de Ω, conforme ilustrado nas Figuras 3.4. Será realizado um estudo numérico do comportamento assintótico da função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$ em relação ao raio ε para vários valores de carga $\mathbf{t}_0$.

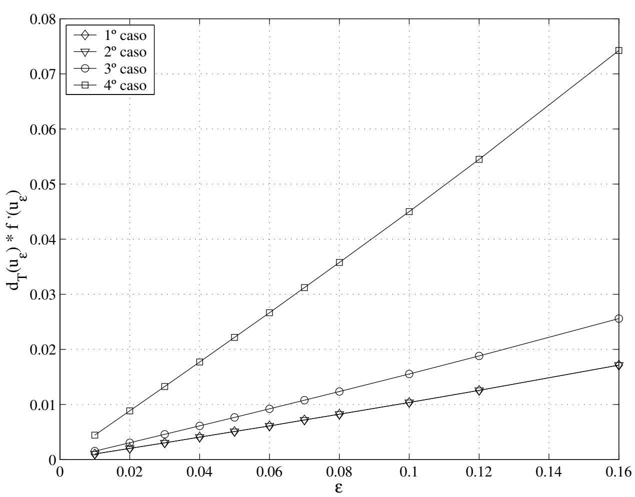
A equação de estado (4.72) representa o problema de hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível, o qual será resolvido pelo MEF na configuração de referência não-perturbada Ω_ε^0, utilizando-se elementos triangulares quadráticos da família de Serendipty para a interpolação do deslocamento $\mathbf{u}_\varepsilon$, de acordo com o procedimento descrito na Seção 4.2. As malhas são construídas de modo a manter o mesmo número de elementos no contorno do furo, independentemente do valor do raio ε. Conseqüentemente, o tamanho aproximado dos elementos h^e é calculado, conforme sugerido em (Novotny, 2003), através da



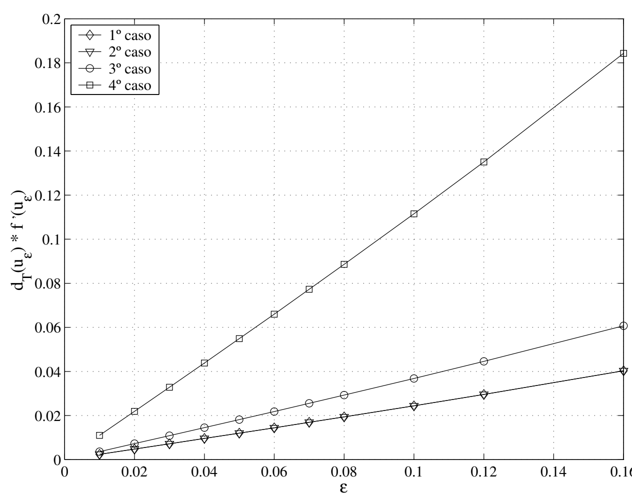
(a) Carga $\mathbf{t}_0 = 6,25 \times 10^{-3} N/mm^2$.



(b) Carga $\mathbf{t}_0 = 12,50 \times 10^{-3} N/mm^2$.

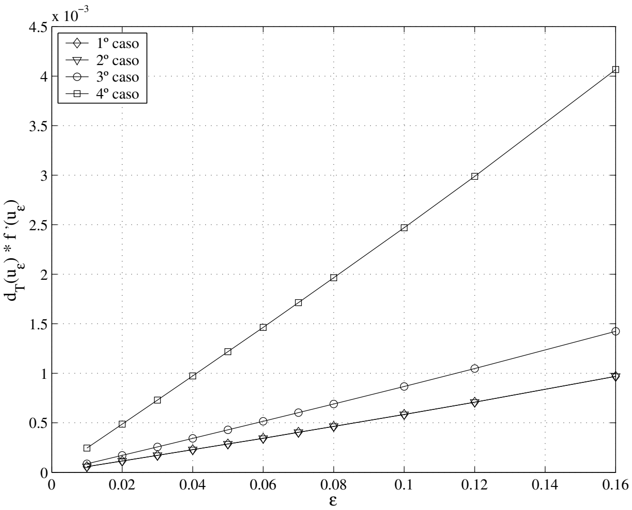


(c) Carga $\mathbf{t}_0 = 25,00 \times 10^{-3} N/mm^2$.

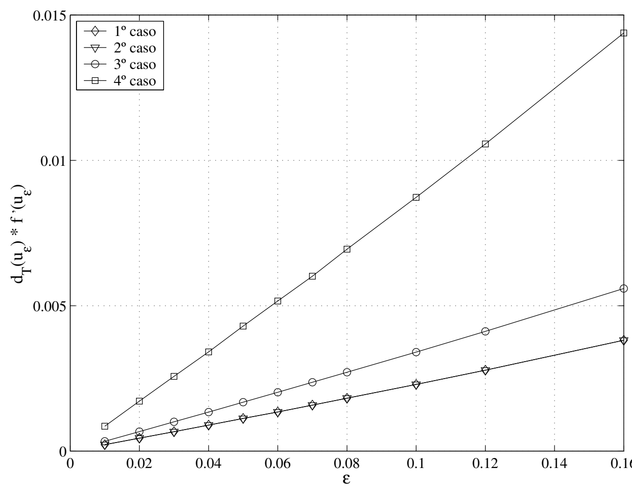


(d) Carga $\mathbf{t}_0 = 37,50 \times 10^{-3} N/mm^2$.

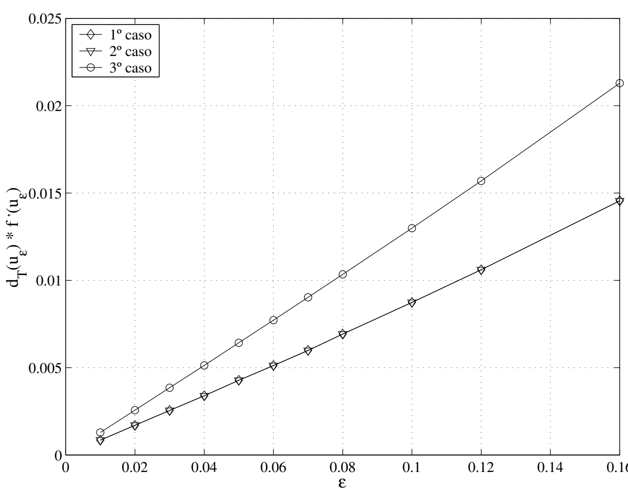
Figura 4.1: Comportamento assintótico de $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) f'(\varepsilon)$ em relação ao raio ε na tração no problema de hiperelasticidade não-linear.



(a) Carga $\mathbf{t}_0 = -6,25 \times 10^{-3} N/mm^2$.



(b) Carga $\mathbf{t}_0 = -12,50 \times 10^{-3} N/mm^2$.



(c) Carga $\mathbf{t}_0 = -25,00 \times 10^{-3} N/mm^2$.

Figura 4.2: Comportamento assintótico de $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) f^{'}(\varepsilon)$ em relação ao raio ε na compressão no problema hiperelasticidade não-linear.

relação (3.81) e a Tabela 3.1 mostra o número total de elementos NE das malhas geradas no domínio Ω para diferentes valores do raio ε e $ne = 60$.

Considera-se o modelo de estado plano de deformação e material de Mooney-Rivlin com ($A_{10} = 0,55\ N/mm^2$, $A_{01} = 0,138\ N/mm^2$ e $\tilde{k} = 666,66\ N/mm^2$). Constrõem-se os gráficos para as cargas de tração $\mathbf{t}_0 = \{6,25; 12,50; 25,00; 37,50\} \times 10^{-3}\ N/mm^2$ e de compressão $\mathbf{t}_0 = -\{6,25; 12,50; 25,00\} \times 10^{-3}\ N/mm^2$, conforme mostrado nos gráficos das Figuras 4.1 e 4.2, respectivamente. Mediante análise destes gráficos, é razoável supor a hipótese que estes se comportam como retas que passam pela origem, o que permite concluir que o termo integrando da equação (4.92) se comporta como uma constante em relação à ε. Novamente, devido à condição $0 \leq \left| D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right)\right| < \infty$ do Teorema 2.1, torna-se $f(\varepsilon) = -|B_\varepsilon| = -\pi\varepsilon^2$.

Conseqüentemente, as equações (4.92) e (4.93) conduzem a

$$D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} d_T(\mathbf{u}_\varepsilon) = CW(\mathbf{E}), \tag{4.94}$$

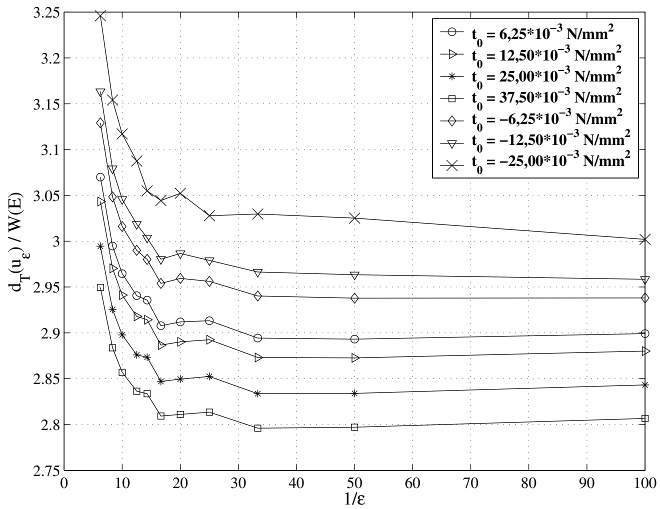
ou seja, tem-se a expressão final da derivada topológica a menos de uma constante C.

Similarmente à Seção 3.4.1, a análise da constante C é realizada mediante o comportamento assintótico da função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$ em relação ao raio ε. Tal análise é realizada tomando o quociente entre a função $d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)$, dada pela equação (4.92), e o termo integrando calculado no nó de uma malha sem furo, cujas coordenadas coincidem com as coordenadas do centro do furo das malhas com furos. Assim, levando em conta a função $f(\varepsilon) = -\pi\varepsilon^2$, tem-se o seguinte quociente

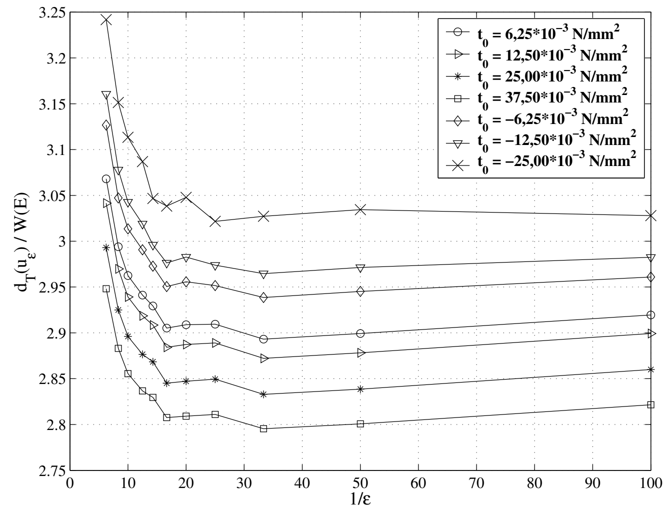
$$\frac{\dfrac{1}{2\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon^0} W(\mathbf{E}_\varepsilon)\, d\partial B_\varepsilon^0}{W(\mathbf{E})}. \tag{4.95}$$

Os gráficos da Figura 4.3 apresentam o comportamento desse quociente em função de $1/\varepsilon$ ilustrado para cada valor de $\mathbf{t}_0$ sob os quatro casos de carregamento.

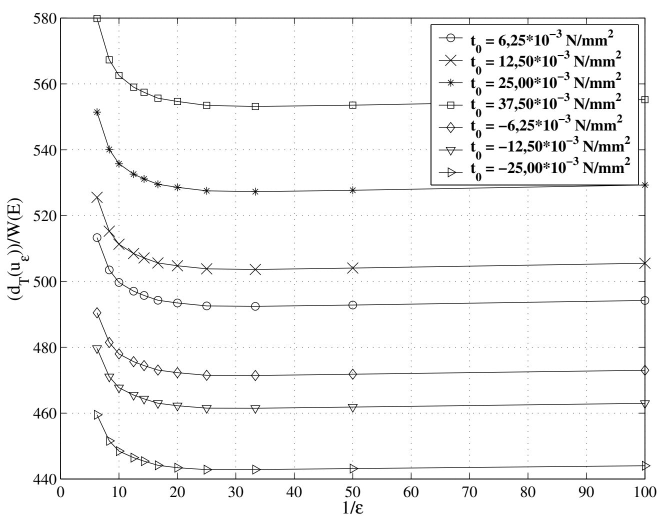
Análisando-se esses gráficos, observa-se um comportamento assintótico da equação (4.95), em função de ε para os quatro casos de carregamentos, tanto para tração, quanto compressão. Porém, no 1º, 2º e 4º caso de carregamento, os gráficos apresentam certa falta de suavidade além de um acréscimo no valor do quociente em $\varepsilon = 0,01$ $\left(\dfrac{1}{\varepsilon} = 100\right)$. Tal comportamento se deve à distorção dos elementos em torno do furo, se acentuando quando o valor de $\mathbf{t}_0$ assume valores mais elevados. No caso da compressão, o problema se mostrou mais acentuado, à ponto de não ser mais possível observar o comportamento assintótico do quociente para cargas $\mathbf{t}_0 \leq -25,00 \times 10^{-3}\ N/mm^2$. Já no 3º caso de



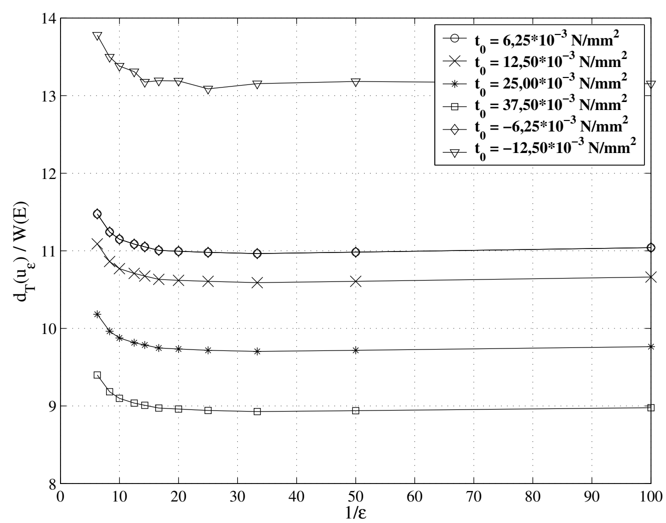
(a) 1º caso de carregamento.



(b) 2º caso de carregamento.



(c) 3º caso de carregamento.



(d) 4º caso de carregamento.

Figura 4.3: Comportamento assintótico do quociente $\dfrac{d_T(\mathbf{u}_\varepsilon)}{W(\mathbf{E})}$ em relação ao raio ε no problema de hiperelasticidade não-linear.

carregamento não é observado tal falta de suavidade.

Tabela 4.1: Análise da variação da constante C para o 1º caso de carregamento de tração para o problema de hiperelasticidade quasi-incompressível.

$\mathbf{t}_0\ (N/mm^2)$	$0,00625$	$0,0125$	$0,025$	$0,0375$	Máxima Variação (%)
$W\ (Nmm/mm^3)$	$0,000327$	$0,001353$	$0,005696$	$0,013592$	$4056,57$
$\Vert\mathbf{E}\Vert_F$	$0,015401$	$0,031344$	$0,064420$	$0,099810$	$548,07$
$C \approx$	$2,99$	$2,87$	$2,84$	$2,80$	$-6,35$

Tabela 4.2: Análise da variação da constante C para o 2º caso de carregamento de tração para o problema de hiperelasticidade quasi-incompressível.

$\mathbf{t}_0\ (N/mm^2)$	$0,00625$	$0,0125$	$0,025$	$0,0375$	Máxima Variação (%)
$W\ (Nmm/mm^3)$	$0,000327$	$0,001354$	$0,005699$	$0,013597$	$4058,10$
$\Vert\mathbf{E}\Vert_F$	$0,015405$	$0,031352$	$0,064434$	$0,099830$	$548,04$
$C \approx$	$2,99$	$2,87$	$2,84$	$2,80$	$-6,35$

Tabela 4.3: Análise da variação da constante C para o 3º caso de carregamento de tração para o problema de hiperelasticidade quasi-incompressível.

$\mathbf{t}_0\ (N/mm^2)$	$0,00625$	$0,0125$	$0,025$	$0,0375$	Máxima Variação (%)
$W\ (Nmm/mm^3)$	$0,000003$	$0,000012$	$0,000046$	$0,000104$	$3366,67$
$\Vert\mathbf{E}\Vert_F$	$0,000225$	$0,000456$	$0,000929$	$0,001423$	$532,44$
$C \approx$	495	515	530	555	$12,12$

De forma similar ao Capítulo 3, as Tabelas 4.1 à 4.2 comparam os valores de C com os valores da densidade de energia de deformação W e da norma-F (3.85) da matriz que representa o tensor de deformação $\mathbf{E}$. Considera-se o nó da malha sem furo, com coordenadas coincidentes com o centro dos furos. As Tabelas 4.1 à 4.2 mostram que a variação do nível de deformação e da densidade de energia de deformação W é muito superior à variação da constante C sob todos os casos de carregamentos analisados.

A partir da análise anterior, verifica-se que a derivada topológica para o problema de elasticidade envolvendo hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível pode ser escrita aproximadamente como

$$D_T\left(\hat{\mathbf{X}}\right) \approx C^* W\left(\mathbf{E}\right), \tag{4.96}$$

sendo C^* uma constante qualquer entre os valores obtidos para C. Portanto, considerando o algoritmo de otimização topológica apresentado na Seção 2.4, a função densidade de energia de deformação $W\left(\mathbf{E}\right)$ torna-se a derivada topológica aproximada para o problema de hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível, uma vez que o valor de C^* não influência na seqüência de células a serem removidas.

Tabela 4.4: Análise da variação da constante C para o 4º caso de carregamento de tração para o problema de hiperelasticidade quasi-incompressível.

$\mathbf{t}_0$ (N/mm^2)	$0,00625$	$0,0125$	$0,025$	$0,0375$	Máxima Variação (%)
W (Nmm/mm^3)	$0,000353$	$0,001522$	$0,007251$	$0,019504$	$5425,21$
$\|\mathbf{E}\|_F$	$0,015865$	$0,033010$	$0,072311$	$0,119284$	$651,87$
$C \approx$	$11,00$	$10,70$	$9,80$	$9,00$	$-18,18$

4.5 Estudo de Casos

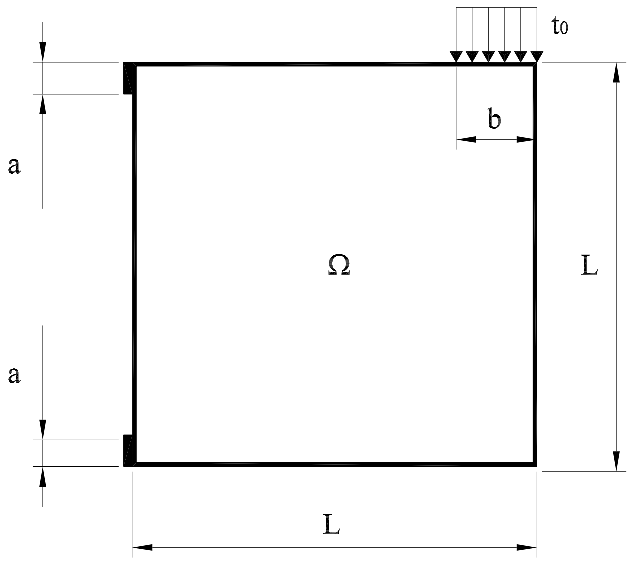
Para ilustrar o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica para problemas de elasticidade envolvendo hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível, apresentam-se nesta seção alguns exemplos de estruturas submetidas a estado plano de deformações. Portanto, considere componentes estruturais planos caracterizados por domínios $\Omega \in \Re^2$.

4.5.1 Viga Curta Engastada

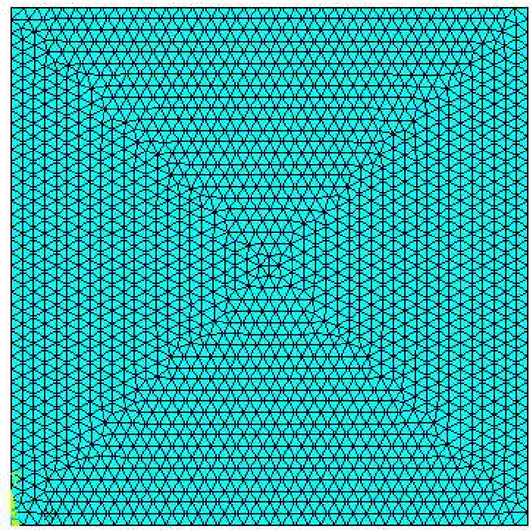
Neste exemplo, tem-se um domínio inicial retangular Ω com dimensão $L = 50$ mm, constantes do modelo de Mooney-Rivlin $A_{10} = 0,55$ N/mm^2, $A_{01} = 0,138$ N/mm^2 e $\tilde{k} = 666,66$ N/mm^2. A viga está engastada na região denotada por $a = 5$ mm e submetida a uma carga distribuída $\mathbf{t}_0 = -0,4444$ N/mm^2 sobre a região denotada por $b = 4,5$ mm, conforme ilustrado na Figura 4.4(a).

Neste exemplo foi utilizada uma malha com 3656 elementos finitos triangulares quadráticos ilustrada na Figura 4.4(b). Como *Critério de Parada*, adotou-se que a área final $\bar{V} = 0,40V_0$, sendo V_0 a área inicial do domínio, e foi retirado 1% de área em cada iteração. O resultado final é atingido após 89 iterações do algoritmo de otimização topológica e a deflexão máxima é de $-7,28$ mm na borda superior direita da viga.

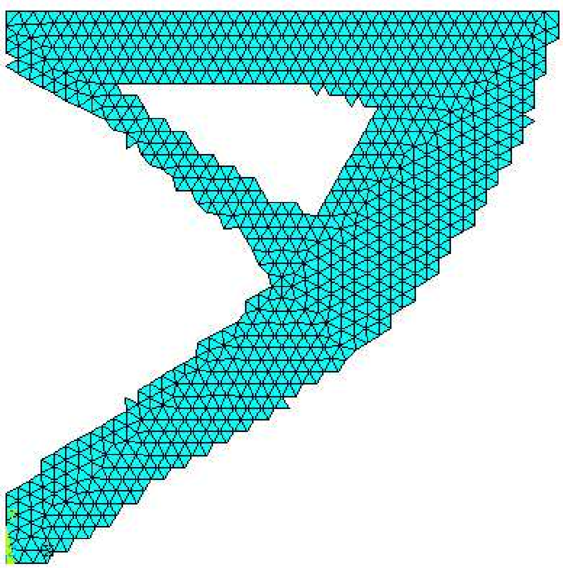
A Figura 4.5 ilustra a distribuição final da densidade de energia de deformação W. Como é possível observar, W assume valores da ordem $1,0 \times 10^{-2}$ Nmm/mm^3 nas regiões próximas às condições de contorno. No entanto, caso o processo de otimização continuasse, a região a ser removida seria aquela que apresenta o menor valor de W, a qual assume valores da ordem de $1,5 \times 10^{-3}$ Nmm/mm^3, como pode ser observado na Figura 4.5. A Figura 4.4(d) ilustra o decaimento do funcional de energia potencial total do sistema em relação ao número de iteração.



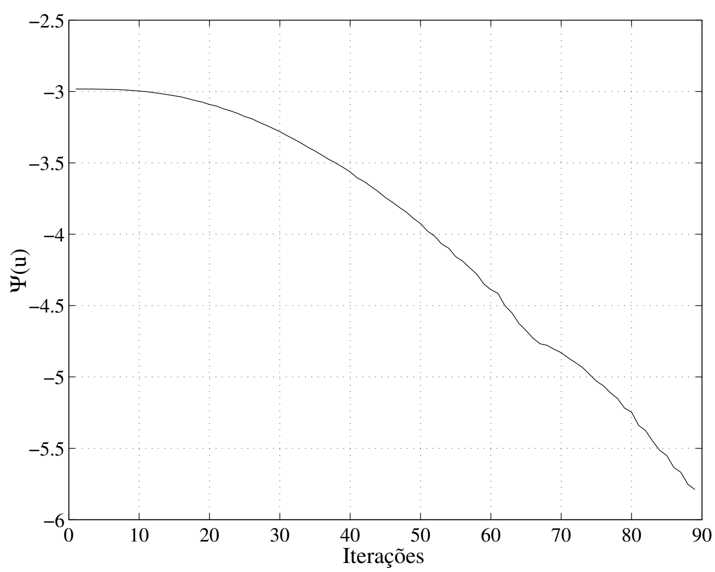
(a) Modelo.



(b) Malha inicial com 3656 elementos quadráticos.



(c) Topologia em $j = 89$.



(d) Energia potencial total x Iteração j.

Figura 4.4: Viga curta engastada envolvendo hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível.

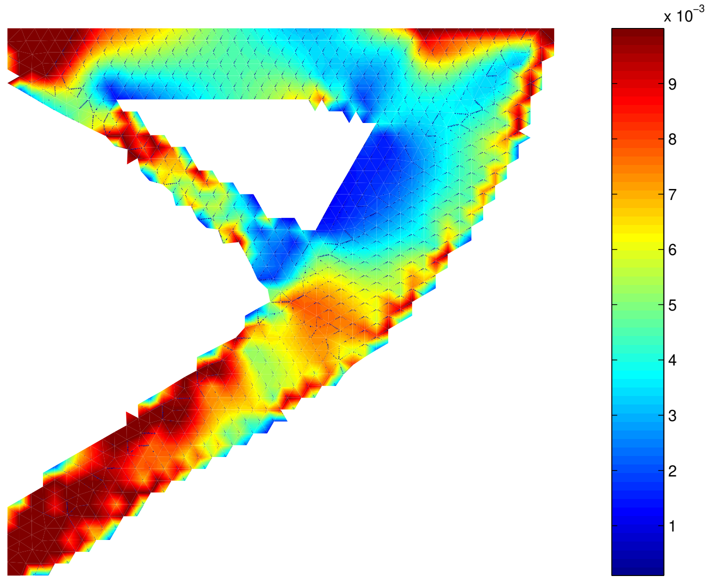
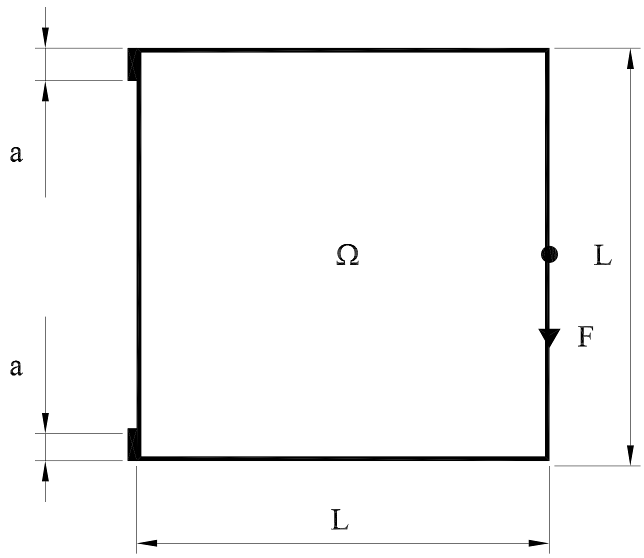


Figura 4.5: Densidade de energia de deformação para o problema de viga curta com hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível em $\dfrac{Nmm}{mm^3}$ na iteração $j = 89$.

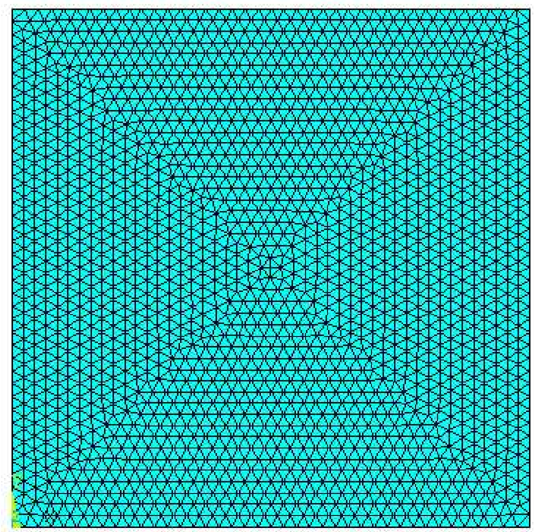
4.5.2 Problema das Duas Barras

Neste exemplo, o domínio inicial está submetido à uma força concentrada $F = -1,0\ N$, conforme ilustrado na Figura 4.6(a), sendo os demais dados idênticos ao problema anterior. Somente a área final é $\bar{V} = 0,36V_0$. O resultado final é obtido após 99 iterações do algoritmo de otimização topológica e a deflexão máxima é de $-3,75\ mm$ no ponto de aplicação da carga.

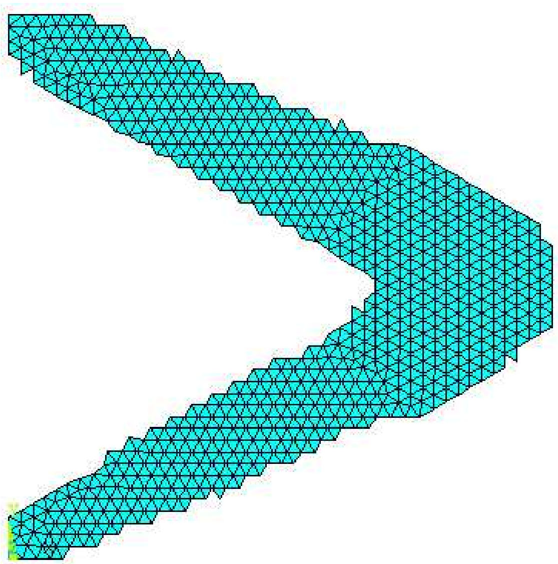
A Figura 4.7 ilustra o valor da densidade de energia de deformação W sobre o domínio obtido após 99 iterações do algoritmo de otimização topológica. Como é possível observar, W assume valores superiores à $5,0 \times 10^{-3}\ Nmm/mm^3$ nas regiões próximas às condições de contorno. No entanto, caso o processo de otimização continuasse, a região a ser removida seria aquela que apresenta o menor valor de W, no qual assume valores da ordem de $1,0 \times 10^{-3}\ Nmm/mm^3$, como pode ser observado na Figura 4.7. A Figura 4.6(d) ilustra o decaimento do funcional de energia potencial total do sistema em relação ao número de iteração.



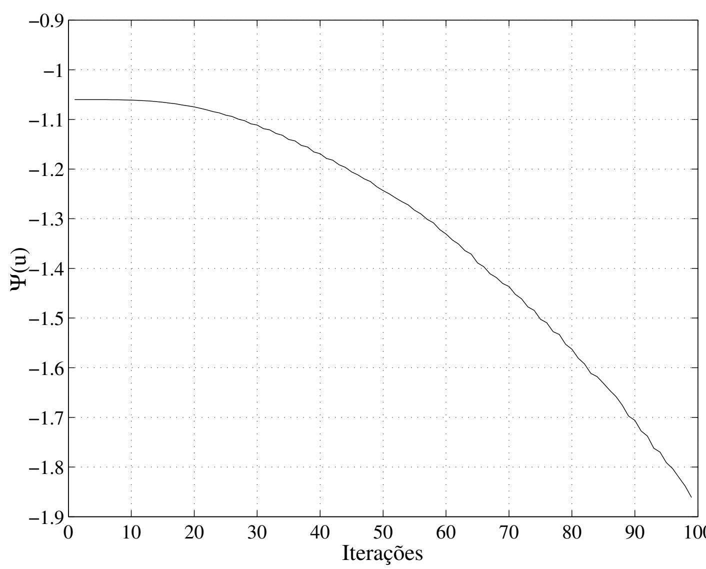
(a) Modelo.



(b) Malha inicial com 3656 elementos quadráticos.



(c) Topologia em $j = 99$.



(d) Energia potencial total x Iteração j.

Figura 4.6: Problema de duas barras envolvendo hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível.

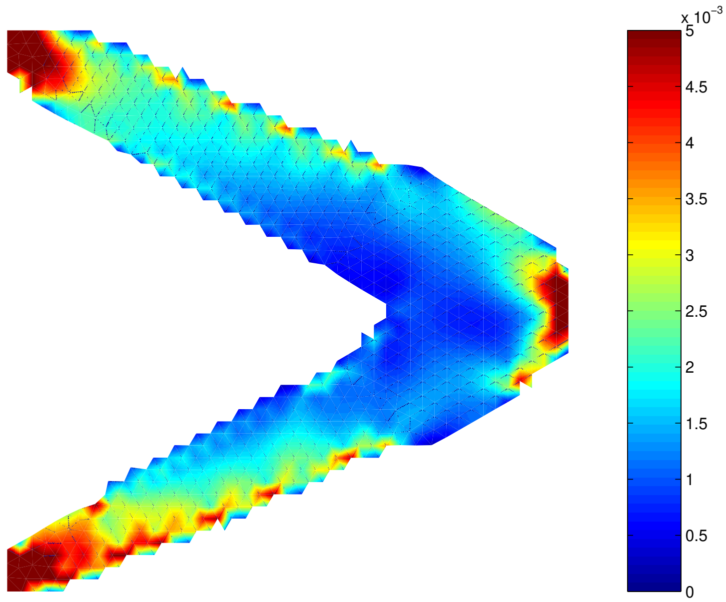


Figura 4.7: Densidade de energia de deformação para o problema de duas barras com hiperelasticidade não-linear quasi-incompressível em $\dfrac{Nmm}{mm^3}$ na iteração $j = 99$.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

5.1 Conclusões

O presente trabalho apresentou a aplicação do conceito de Análise de Sensibilidade Topológica para problemas de elasticidade envolvendo não-linearidade geométrica (grandes deslocamentos e rotações) e não-linearidade de material (hiperelasticidade não-linear quase-incompressível). O objetivo principal do trabalho consistiu em obter expressões para a Derivada Topológica de cada um destes problemas tratados através de uma formulação Lagrangiana Total.

Ao contrário dos problemas lineares tratados por Novotny em sua tese de doutorado (Novotny, 2003), nos problemas não-lineares do presente trabalho não é possível realizar uma análise assintótica analítica para o cálculo do limite presente na definição de Derivada Topológica, conforme a equação (3.30), quando $\varepsilon \to 0$, da mesma forma que foi realizada por Novotny. Conseqüentemente, uma abordagem númerica experimental foi adotada para o cálculo aproximado do limite quando $\varepsilon \to 0$, afim de obter uma expressão aproximada da Derivada Topológica para cada um dos problemas não-lineares tratados no trabalho.

Embora seja possível obter uma expressão aproximada da Derivada Topológica para os problemas em questão, a técnica de análise assintótica numérica não se mostrou uma ferramenta totalmente adequada para o cálculo do limite da equação (3.30) em problemas vetoriais não-lineares. De acordo com as análises realizadas no presente trabalho, a constante C das equações (3.86) e (4.96) se mostrou dependente de certa forma do estado de deformação do ponto considerado, sendo a variação maior no caso em que apenas o sentido do carregamento é alterado.

Por outro lado, através da análise assintótica numérica é possível recuperar a expressão exata da Derivada Topológica para o problema de elasticidade plana linear (ver Figuras 3.9 e 3.10), quando o coeficiente de Poisson é $\nu = 1/3$ para o caso de tensão plana ou $\nu = 1/4$ para o caso de deformação plana. Em ambos os casos, a densidade de energia de deformação (equação (2.33)) é multiplicada por uma constante $C = 3$. No entanto, a recuperação da Derivada Topológica para elasticidade linear quando ν é diferente de 1/3 ou 1/4 não parece ser possível. Neste caso, as expressões da Derivada Topológica em tensão e deformação plana são representadas pelas equações (2.31) e (2.32), respectivamente. Logo, a expressão da Derivada Topológica assume uma forma mais complexa, que não é mais um múltiplo da densidade de energia de deformação.

O algoritmo de otimização topológica se mostra severamente sensível em relação à quantidade de material a ser retirada em cada iteração, resultando em diferente topologias conforme se altera o valor a ser retirado por iteração, mesmo no caso linear em que a derivada topológica é exata. Além do mais, não há até o momento, uma conexão clara entre Análise de Sensibilidade Topológica e a teoria da programação matemática, da mesma forma que não há um critério formal que defina a quantidade de material que deve ser retirado do domínio em cada iteração. Essa quantidade é definida de forma totalmente heurística.

5.2 Perspectivas Futuras

Embora a Análise de Sensibilidade Topológica tenha se mostado uma ferramenta valiosa e interessante para a otimização topológica, algumas questões ainda permanecem em aberto e a aplicação em certos tipos de problemas tem se mostrado difícil de ser realizada, embora expressões aproximadas para a Derivada Topológica via experimentação numérica podem ser obtidas sob certas restrições para outros tipos de problemas. Portanto, ficam como sugestões para futuros trabalhos:

- Formalizar a relação entre a Análise de Sensibilidade Topológica e a teoria da programação matemática;
- Desenvolver uma técnica numérica mais geral para o cálculo da aproximado da Derivada Topológica;

- Desenvolver expressões da Derivada Topológica para outros problemas não-lineares, tais, como, plasticidade, viscoplasticidade, contato e em problemas transientes;

- Desenvolver um critério formal para a retirada de material em cada iteração.

Assim sendo, a Análise de Sensibilidade Topológica pode ser vista como uma área promissora e de intensa pesquisa, tanto aos aspectos matemáticos envolvidos quanto ao aspecto de aplicação em problemas de Engenharia, e Física Matemática.

Referências Bibliográficas

Amstutz, S., Andrä, H. (2005). A new algorithm for topology optimization using a level-set method. Research Report, Université Paul Sabatier, Toulouse Cedex 4, France.

Atrek, E. (1993). SHAPE: A program for shape optimization program. In: *Proc First Int Conf.: Opti'89*, Comp. Mechanics Publications, p. 135–144, Berlin. Springer Verlag.

Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures.* Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Becker, E. B., Carey, G. F. , Oden, J. T. (1981). *Finite Elements: An Introduction*, v. 1. Prentice-Hall.

Belytschko, T., Liu, W. K. , Moran, B. (2001). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.* John Wiley & Sons.

Bendsϕe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct. Optim.*, v. 1, p. 193–202.

Bendsϕe, M. P. (1995). *Optimization of Structural Topology, Shape and Material.* Springer, Heidelberg.

Bendsϕe, M. P., Diaz, A. , Kikuchi, N. (1993). Topology and generalized layout optimization of elastic strucutures. In: Bendsϕe, M. P., Soares, C. A. M., (Eds.), *Topology Design of Structure*, p. 159–205. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Bendsϕe, M. P., Kirkuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, v. 71, p. 197–224.

Bendsϕe, M. P., Soares, C. A. M., (Eds.) (1993). *Topology Design of Structures*, Dordrecht. NATO ASI, Kluwer Academic Publishers.

Bergmann, H. W., (eds) (1989). *Optimization: Methods and Applications, Possibilities and Limitations*. Springer, Berlin, Heiderlberg, New York.

Bittencourt, M. (1996). *Métodos multigrid e iterativos adaptáveis aplicados em malhas não-estruturadas*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Tese (Doutorado).

Bonet, J., Wood, R. (1997). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analisys*. Cambridge University Press, Cambridge.

Bremicker, M., Kirkuchi, N., Chirehdast, M. , Papalambros, P. Y. (1991). Integrated topology and shape optimization in structural design. *Mech. Struct. and Mach*, v. 19, n. 4, p. 551–587.

Brezzi, F., Fortin, M. (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, New York.

Carey, G. F., Oden, J. T. (1983). *Finite Element: A Second Course*, v. 2. Prentice-Hall.

Céa, J., Gioan, A. , Michel, J. (1973). Quelques résultats sur l'identification de domains. In: *CALCOLO*.

Céa, J., Gioan, A. , Michel, J. (1974). Adaptation de la méthode du gradient à um problème d'indentification de domaine. In: *Lectures Notes in Computer Science*, v. 11, p. 371–402, Berlin. Springer.

Céa, J., Guillaume, P. , Masmoudi, M. (1998). The shape and topological optimizations connection. Technical Report, UFR MIG, Université Paul Sabatier, Toulouse, French.

Chen, J., Han, W., Wu, C. , Duan, W. (1997). On the perturbed lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 142, p. 335–351.

Chen, J., Pan, C. (1996). A pressure projection method for nearly incompressible rubber hyperelasticity, Part I: Theory. *Journal of Applied Mechanics*, v. 63, p. 862–868.

Chen, J., Wu, C. , Pan, C. (1996). A pressure projection method for nearly incompressible rubber hyperelasticity, part II: Applications. *Journal of Applied Mechanics*, v. 63, p. 869–876.

Chen, J., Yoon, S., Wang, H. , Liu, W. K. (2000). An improved reproducing kernel particle method for nearly incompressible finite elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, p. 117–145.

Cherkaev, A. (2000). Variational methods for structural optimization. In: *Applied Mathematical Sciences*, v. 140. Springer-Verlag, New York.

Driemeier, L. (2002). Aplicação do conceito de derivada topológica na otimização estrutural de problemas da elasticidade. DPM/FEM/UNICAMP, Campinas. Dissertação (Mestrado).

Elsgoltz, L. (1969). *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Editorial MIR, Moscu.

Eschenauer, H., Olhoff, N. , (eds) (1982). Optimization methods in structural design. In: *EUROMECH-Colloquium*, v. 164, Wien. B.I.-Wissenschaftsverlag.

Eschenauer, H. A., Mattheck, C. , Olhoff, N. (1991). *Engineering Optimization in Design Processes*. Lecture Notes in Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

Eschenauer, H. A., Olhoff, N. (2001). Topology optimization of continuum structures: A review. *Applied Mechanics Review*, v. 54, p. 331–390.

Eshelby, J. D. (1975). The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, v. 5, n. 3-4, p. 321–335.

Fancello, E. A. (1993). *Análise de Sensibilidade, Geração Automática de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de Forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura*. COPPE/UFRJ, Tese (Doutorado).

Fleury, C. (1986). Shape optimal design by the convex linearization method. In: Bennet, J. A., Botkin, M. E., (Eds.), *The Optimum Shape: Automated Structural Design*, p. 297–320. Plenum Press, New York.

Galilei, G. (1638). *Discorsi e Dimonstrazioni Mathematiche, a Due Nuove Attenenti Alla Mecanica*. Moviment Locali, Leida.

Gallagher, R. H., Zienkiewicz, O. C. , (eds) (1973). *Optimum Structural Design-Theory and Applications*. John Wiley and Sons, London.

Garreau, S., Guillaume, P. , Masmoudi, M. (1998). The topological gradient. Technical Report, Université Paul Sabatier, Toulouse, French.

Garreau, S., Guillaume, P. , Masmoudi, M. (2001). The topological asymptotic for PDE systems: The elasticity case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 39, p. 1756–1778.

Golub, G. H., Van Loan, C. F. (1989). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Gurtin, M. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*, v. 158 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press.

Gutkowski, W., Mroz, Z. (1997). Second world congress of structural and multidisciplinary optimization. In: *WCSMO-2, Intitute of Fundamental Technological Research*, v. 182, Warsaw, Poland.

Haug, E. J., Céa, J. (1981). Optimization of distributed parameters structures. In: *Anais*, Iowa, EUA.

Hinton, E., Campbell, J. S. (1973). Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least square method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 8, p. 461–480.

Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons.

Hughes, T. J. R. (1980). Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, p. 1413–1418.

Jung, D., Gea, C. (2004). Topology optimization of nonlinear structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 1417 – 1427.

Kim, N. H. (1999). *Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Static/Dynamic Structures with Contact/Impact*. The University of Iowa, Tese (Doutorado).

Kirsch, U. (1990). On the relationship between optimum structural topologies and geometries. *Struct. Optim.*, v. 2, p. 39–45.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, New York.

Labanowiski, A. (2004). SIMP, ESO e derivada topológica. uma análise comparativa de métodos de otimização topológica em elasticidade 2D e 3D. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil. Dissertação (Mestrado).

Lai, W. M., Rubin, D. , Krempl, E. (1996). *Introduction to Continuum Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 3rd ed.

Masmoudi, M. (1998). A synthetic presentation of shape and topological optimization. Proceedings of the Inverse Problems, Picof, to appear.

Maute, K., Schwarz, S. , Ramm, E. (1999). Structural optimization, the interaction between form and mechanics. *ZAMM*, v. 79, n. 10, p. 651–673.

Michell, A. (1904). The limits of economy of material in frame structures. *Philosophical Magazine*, v. 8, n. 47, p. 589–595.

Murat, F., Simon, J. (1976). *Sur Le Contrôle Par un Domaine Géométrique*. Université Pierre et Marie Curie, Tese (Doutorado), Paris VI, França.

Novotny, A. A. (1998). Adaptatividade h na otimização topológica e projeto ótimo de malhas hp adaptativas. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. Dissertação (Mestrado).

Novotny, A. A. (2003). *Análise de Sensibilidade Topológica*. LNCC-MCT, Tese (Doutorado), Petrópolis, Brasil. (http://www.lncc.br/∼novotny/principal.htm).

Novotny, A. A., Fancello, E. A. , de Cursi, J. E. S. (1998). An h-adaptive topological optimization design in 2D elasticity. In: Oñate, E., Idelsohn, I. , Dvorkin, E., (Eds.), *Computational mechanics – new trends and applications*, p. 1–20, Barcelona. CIMNE.

Novotny, A. A., Feijóo, R. A., Taroco, E., Masmoudi, M. , Padra, C. (2005a). Topological sensitivity analysis for a nonlinear case: The p-Poisson problem. In: 6^{th} *World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil.

Novotny, A. A., Feijóo, R. A., Taroco, E. , Padra, C. (2003). Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 803–529.

Novotny, A. A., Feijóo, R. A., Taroco, E. , Padra, C. (2005b). Topological sensitivity analysis for three-dimensional linear elasticity problem. In: 6^{th} *World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil.

Oden, J., Carey, G. (1983). *Finite Elements Mathematical Aspects*, v. 4 de *Texas Finite Element Series*. Englewood Cliffis, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., USA.

Oden, J. T. (1972). *Finite Elements of Nonlinear Continua*. Advanced Engineering Series. McGraw-Hill, New York.

Olhoff, N., Bendsϕe, M. P. , Rasmussen, J. (1991). On CAD-integrated structural topology and design optimization. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, v. 89, p. 259–279.

Olhoff, N., Rozvany, G. I. N. (1995). Structural and multidisciplinary optimization. Proc of WCSMO-1, Oxford/UK.

Olhoff, N., Taylor, J. (1983). On structural optimization. *J. Appl. Mech.*, v. 50, p. 1134–1151.

Pironneau, O. (1984). *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York.

Prager, W. (1969). Optimality criteria derived from classical extremum principles. Technical report, Solid Mechanics Division, Univ of Waterloo, Ontario/CANADA.

Prager, W. (1974). A note on discretized michell structures. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, v. 3, p. 349–355.

Reddy, B. (1986). *Functional Analysis and Boundary-Value Problems: An Introductory Treatment*. Longman Scientific & Technical, Essex.

Rozvany, G. I. N., (Editor) (1997). *Topology Optimization in Structural Mechanics*, Vienna/Austria. Springer. Vol 374 of CISM Course and Lectures.

Rozvany, G. I. N., Bendsϕe, M. P. , Kirsch, U. (1995). Layout optimization of structures. *Applied Mechanics Reviews*, v. 48, p. 41–119.

Rozvany, G. I. N., Olhoff, N., (Eds.) (2001). *Topology Optimization of Structures and Composite Continua*, Budapest, Hungary. NATO ARW, Kluber Academic Publishers.

Rozvany, G. I. N., Prager, W. (1976). Optimal design of partially discretized grillages. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 24, p. 125–136.

Rozvany, G. I. N., Zhou, M., Birker, T. , Sigmund, O. (1993). Topology optimization using interactive continuum-type optimility criteria (COC) methods for discretized systems. In: Bendsϕe, M. P., Soares, C. A. M., (Eds.), *Topology Design of Structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Rozvany, G. I. N., Zhou, M., Rotthaus, M., Gollub, W. , Spengemann, F. (1989). Continuum-type optimality criteria methods for large finite element systems with displaement constraints, Part I and II. *Struct. Optim.*, v. 1, p. 47–72.

Rozvany, G. I. N., Zhou, M. , Sigmund, O. (1992). Topology optimization in structural design. Research Report in Civil Engineering, 59, Univ of Essen/Germany.

Schumacher, A. (1995). *Topologieoptimierung Von Bauteilstrukturen unter Verwendung Von Lopchpositionierungkrieterien*. Universität-Gesamthochschule-Siegen, Tese (Doutorado).

Silva, C. A. C. (2003). *Análise de Sensibilidade, Algoritmos de Otimização e Orientação por Objetos em Hiperelasticidade Não-Linear*. DPM/FEM/UNICAMP, Tese (Doutorado), Campinas.

Simo, J., Hughes, T. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer, New York.

Sobieszczanski-Sobieski, J. (1989). Multidisciplinary optimization for engineering systems. In: Bergmann, H. W., (Editor), *Optimization: Methods and Applications, Possibilities and Limitations*, p. 42–62. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

Sokolowski, J., Żochowski, A. (1997). On topological derivative in shape optimization. Technical Report, INRIA-Lorraine, French.

Sokolowski, J., Żochowski, A. (1999). Topological derivative for elliptic problems. *Inverse Problems*, v. 15, p. 123–134.

Sokolowski, J., Zolésio, J. P. (1992). *Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag.

Szabó, B., Babuška, I. (1991). *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.

Timoshenko, S. (1953). *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill, New York.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (1989). *The Finite Element Method*, v. 1. McGraw-Hill International Editions, fourth ed.

Zolézio, J. P. (1981). The material derivative (or speed) method for shape optimization. In: Haug, E. J., Céa, J., (Eds.), *Anais: Optimization of Distributed Parameters Strucutures*, Iowa, EUA.