

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MÉCANICA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR Jaime Alvares  
Spim Junior E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 27/01/93.

Jaime Spim Junior  
ORIENTADOR

APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA DA  
SOLIDIFICAÇÃO NO CONTROLE ÓTIMO DO  
LINGOTAMENTO CONTÍNUO DE AÇOS

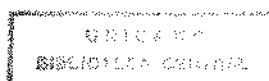
JAIME ALVARES SPIM JUNIOR 5/45

04/93

Trabalho apresentado à comissão de pós-graduação  
da Faculdade de Engenharia Mecânica da  
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos  
requisitos para a obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Mecânica.

CAMPINAS

1993



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de: MESTRADO

Título da tese: APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA DA SOLIDIFICAÇÃO  
NO CONTROLE ÓTIMO DO LINGOTAMENTO CONTÍNUO DE AÇOS

Autor: JAIME ALVARES SPIM JUNIOR

Orientador: PROF. DR. AMAURI GARCIA

Aprovado por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. AMAURI GARCIA

Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof.ª Dra. MARIA CLARA F. IERARDI

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. JOSÉ ROBERTO GONÇALVES DA SILVA

Campinas, 27 de Janeiro de 1993

## AGRADECIMENTOS

Ao encerrar mais uma etapa de minha vida com o término deste trabalho, gostaria de deixar registrado meus sinceros agradecimentos:

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - pela bolsa concedida;

Ao Prof. Dr. Amauri Garcia, pela orientação, apoio, amizade e dedicação ao longo de todo o decorrer deste trabalho;

À Prof<sup>a</sup> Dra. Maria Clara F. Ierardi, ao Prof. Dr. Rubens Caram Jr. e ao Prof. Dr. Sergio T. Button pelas colaborações, discussões e conselhos técnicos, os quais foram de grande valia para a elaboração de muitos blocos deste trabalho;

Ao meu cunhado Mauro Castaldelli pelo empréstimo de seu equipamento, dentro do qual foram escritos grande parte deste trabalho;

Aos meus amigos pelo agradável convívio diário e inestimável espírito de solidariedade e companheirismo;

E a todas as pessoas que diretamente ou indiretamente participaram do desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Desenvolveu-se um modelo numérico baseado no método de diferenças finitas bidimensional que permite prever o comportamento térmico da solidificação de ligas no processo de lingotamento.

Na elaboração do modelo trabalhou-se com uma analogia entre circuitos térmicos e circuitos elétricos de capacitores e resistores, resultando em simplificações matemáticas e computacionais, além da maior compreensão física do método de diferenças finitas, permitindo maleabilidade das malhas nodais sem a perda de precisão.

Analisou-se o sistema de lingotamento contínuo de aços em função das principais regiões de troca térmica que ocorrem ao longo do processo, mapeando-se os pontos críticos sob ponto de vista de um sistema de controle.

O modelo desenvolvido foi aplicado a diferentes situações do processo de lingotamento contínuo, comparando-se alguns resultados com resultados experimentais e outros modelos já avaliados da literatura. As boas concordâncias observadas demonstraram a confiabilidade do modelo.

Finalmente mostraram-se os passos da utilização do modelo para a aplicação em um sistema de controle, analisando-se os diversos pontos críticos de sensoriamento do equipamento e os segmentos que devem ser controlados ou ser submetidos a ajustes contínuos, para estabelecer-se as condições básicas essenciais ao desenvolvimento de um sistema de controle automático no equipamento de Lingotamento Contínuo de placas de aço.

## ABSTRACT

A numerical model based on the finite difference technique was developed, permitting the description of the thermal behaviour during solidification of binary alloys in casting processes.

The analysis incorporates an analogy between thermal circuits and electrical circuits resulting on mathematical and computation simplifications and giving a better physical comprehension of the finite difference approach. An increase of flexibility in mesh size was observed preserving the accuracy of results.

The continuous casting equipment was analysed in terms of the different heat exchange regions, with a view of identification of the critical points for a control system.

The developed model applied to different operating situations of continuous casting of steel, and the theoretical predictions were compared to experimental and theoretical results from the literature, giving a good agreement in all cases examined.

Finally, the steps of model application to a control system is presented. These includes the analysis of critical points for detectors location, the machine parts which must be submitted to control or continuous adjustment, in order to permit the development of an automatic control system for a slab continuous casting equipment.

A minha filha Marina, a minha  
esposa Márcia, a meus irmãos Flavio e  
Fabiola e a meus pais Jaime e Walderez.

## ÍNDICE GERAL

CAPITULO 01 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO.....	2
CAPITULO 02 - O SISTEMA DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	6
2.1. ASPECTOS BÁSICOS DO EQUIPAMENTO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO..	6
2.2. ASPECTOS DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO LINGOTAMENTO CONTÍNUO	
2.2.1. Fluxo de calor no lingotamento contínuo.....	16
2.2.2. Resfriamento primário (MOLDE).....	18
2.2.2.1 - Transferência newtoniana.....	20
2.2.3. Resfriamento secundário (CHUVEIRO).....	24
2.2.4. Resfriamento terciário (RADIACÃO E CONVECCÃO).....	28
2.3. PONTOS DE SENSORIAMENTO PARA O CONTROLE DO EQUIPAMENTO DE	
LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	32
CAPITULO 03 - DESENVOLVIMENTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROCESSO DE	
SOLIDIFICAÇÃO NO LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	40
3.1. MODELOS MATEMÁTICOS.....	40
3.2 CONCEITOS GERAIS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS NA SOLUÇÃO	
DE EQUAÇÃO A DIFERENCIAIS PARCIAIS.....	42
3.2.1. Substituição de Derivadas Parciais por Diferenças	
Finitas.....	42
3.3. CONCEITOS SOBRE ESTABILIDADE, CONVERGÊNCIA E ERROS DE	
APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS APLICADAS A SISTEMAS DE	
COMPUTADOR.....	44
3.3.1. Erro obtido em soluções numéricas.....	45

3.3.2. Estabilidade de um método numérico.....	46
3.3.3. Convergência.....	48
3.4. DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO DE SOLIDIFICAÇÃO.....	48
3.4.1. A Forma Unidimensional.....	51
3.4.1.1) Analogia de Sistemas Térmicos com a Teoria de Circuitos Elétricos Aplicado ao M.D.F.....	56
3.4.1.2- Aplicação Prática do M.D.F. no Efeito de Transferência de Calor Via Analogia a Circuitos Elétricos.....	61
3.4.2. A Forma Bidimensional.....	66
3.4.3. A Aplicação do Efeito de Linearidade em analogia Elétrica para a Solução da Forma Bidimensional.....	74
3.4.3.1- Aplicação Prática do M.D.F. Via Analogia a Circuitos Elétricos para a Solução da Forma Bidimensional.....	82
3.4.4. A Aplicação do Modelo Numérico Desenvolvido no Problema da Solidificação do Aço-C.....	89
3.4.4.1- Temperatura Solidus ( $T_s$ ) e Temperatura Liquidus ( $T_l$ ).....	90
3.4.4.2- Propriedades Termofísicas de cada Fase.....	91
3.4.4.3- Evolução da Fração Sólida ( $f_s$ ) no Intervalo de Solidificação.....	97

CAPITULO 04 - APLICAÇÃO AO LINGOTAMENTO CONTINUO, VALIDAÇÕES E SIMULAÇÃO.....	104
4.1. APLICAÇÃO DO MODELO NUMERICO AO LINGOTAMENTO CONTINUO....	104
4.2. VALIDAÇÕES.....	114
4.2.1. No Molde.....	114
4.2.2. Na Região de Chuveiros.....	123
4.3 - SIMULAÇÕES.....	134



CAPITULO 05 - APLICAÇÃO DO MODELO NO CONTROLE DO PROCESSO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	145
5.1. O SISTEMA DE CONTROLE.....	145
5.2. O CONTROLE DO EQUIPAMENTO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	151
5.2.1. No Molde.....	153
5.2.2. Na Região de Chuveiros.....	156
5.2.3. No Equipamento Global.....	157
5.3. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA ENGENHARIA DE CONTROLE E SISTEMAS DE CONTROLE REALIMENTADOS.....	158
5.3.1. Introdução.....	158
5.3.2. Análise de Resposta Transitória.....	161
5.3.3. Sensoriamento e Sistemas Controlados.....	165
5.3.3.1. Sensores no controle do processo.....	165
5.3.3.2. Sistemas controlados.....	167
5.4. RESUMO GLOBAL DO CONTROLE NO PROCESSO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	168
 CAPITULO 06 - CONCLUSÕES.....	 172
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 174
 APÊNDICE A (Malhas Nodais).....	 182
APÊNDICE B (Propriedades Termofísicas Utilizadas).....	186
APÊNDICE C (Simbologia).....	186

## CAPITULO 01 - INTRODUÇÃO

---

### 1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Com o avanço da informática e a automação, a indústria moderna vem evoluindo, reimplementando técnicas e equipamentos de processo, buscando melhor desempenho e economia de produção com o aumento da qualidade dos produtos manufaturados.

Atualmente a tendência de abertura do mercado e o conseqüente aumento na competitividade, tem exigido das indústrias que se utilizam dos processos de fundição e lingotamento, implementações técnicas fundamentadas na modelagem matemática da solidificação, com o objetivo de se otimizar o sistema de produção.

No processo de Lingotamento Contínuo de metais e ligas, particularmente do aço, é essencial a implementação de sistemas de controle ao longo das diferentes etapas de processamento. O mapeamento dos parâmetros de interesse prático dos efeitos das trocas térmicas que ocorrem durante o processo, bem como o sensoriamento contínuo de pontos estratégicos do equipamento, pode permitir que se estabeleça um controle informatizado *em-linha* de todo o sistema.

A identificação das variáveis essenciais do equipamento de Lingotamento Contínuo e dos pontos críticos de sensoriamento, devem ser amplamente conhecidas, como por exemplo:

- 1- Temperatura e volume do metal líquido no distribuidor;
- 2- Nível de metal líquido no molde;
- 3- Temperatura e fluxo da água de refrigeração do molde;
- 4- Espessura da casca solidificada na saída do molde;
- 5- Temperatura e fluxo da água de refrigeração dos chuveiros;
- 6- Reaquecimento entre as diversas regiões de chuveiros;

7- Ponto de fechamento do poço líquido finalizando a solidificação e;

8- Velocidade de produção.

Um método que procure sistematicamente alcançar as condições ótimas de operação em um equipamento de Lingotamento Contínuo de aços, deve necessariamente atender a critérios metalúrgicos e as limitações tecnológicas envolvidas. Um critério metalúrgico representa sob ponto de vista da transferência de calor, as exigências metalúrgicas que tem que ser atingidas para preservar a qualidade do produto. Como exemplo, na etapa secundária de resfriamento, os critérios metalúrgicos serão representados por uma faixa de temperatura que se permite que a superfície do lingote possa atingir sem que haja a formação de trincas internas ou de superfície. O modelo de otimização, atendendo este critério metalúrgico, deverá em condições de regime permanente de operação ajustar o conjunto de coeficientes de transferência de calor de cada região de chuveiros e a velocidade máxima de produção. A limitação tecnológica, neste caso, fica por conta das capacidades mínimas e máximas de cada circuito hidráulico, responsável pelo resfriamento secundário.

Para o controle ótimo do processo é necessário o sensoriamento contínuo dos pontos estratégicos, a figura 1.1 mostra um fluxograma geral dos pontos bases de sensoriamento com o barramento de entrada do sistema de computador levando os sinais de resposta dos sensores e o barramento de saída com os ajustes no equipamento. Para a viabilização deste controle deve-se projetar circuitos eletrônicos adequados, que acoplados aos sensores permitem a geração de dados em tempo real de operação, que devidamente comparados com os resultados gerados em simulações obtidas através de modelos numéricos de solidificação permite identificar a necessidade ou não de uma

realimentação nas condições de operação. Esta realimentação é feita através da emissão de um sinal na saída de um comparador numérico, que representa a quantidade positiva ou negativa que deve ser ajustado o sistema controlado (motores, bombas, etc.).

## 1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO

Tendo em vista a importância do controle automático, para a produtividade e a qualidade final do produto no Lingotamento Contínuo de aços, e que este controle deve ser exercido a partir de informações a respeito da evolução da solidificação do lingote, geradas continuamente ao longo de todo o equipamento, estabeleceu-se os seguintes objetivos para o presente trabalho:

A- Revisão crítica e atualizada da literatura no que diz respeito aos sistemas de Lingotamento Contínuo e sistemas de controle, à critérios metalúrgicos de qualidade e as limitações de operação inerentes ao processo;

B- Levantamento das atuais condições de controle no Lingotamento Contínuo de placas em uma siderúrgica de grande porte;

C- Mapeamento dos pontos estratégicos do equipamento que necessitam de sensores localizados e dos pontos onde o controle automático irá atuar, desde a panela de vazamento até a estação de corte;

D- Desenvolvimento de um modelo numérico de solidificação de aços, que descreva o comportamento térmico durante as várias etapas do processo de Lingotamento Contínuo;

E- Validação do modelo proposto, através de comparações com resultados experimentais existentes na literatura e com modelos de eficiência comprovada;

F- Simulação de condições limites de operação, baseado em critérios metalúrgicos exigidos pela qualidade do produto;

G- Proposição de um sistema automático de controle, com realimentação contínua de dados e correção imediata das condições de operação nas unidades de controle setorial.

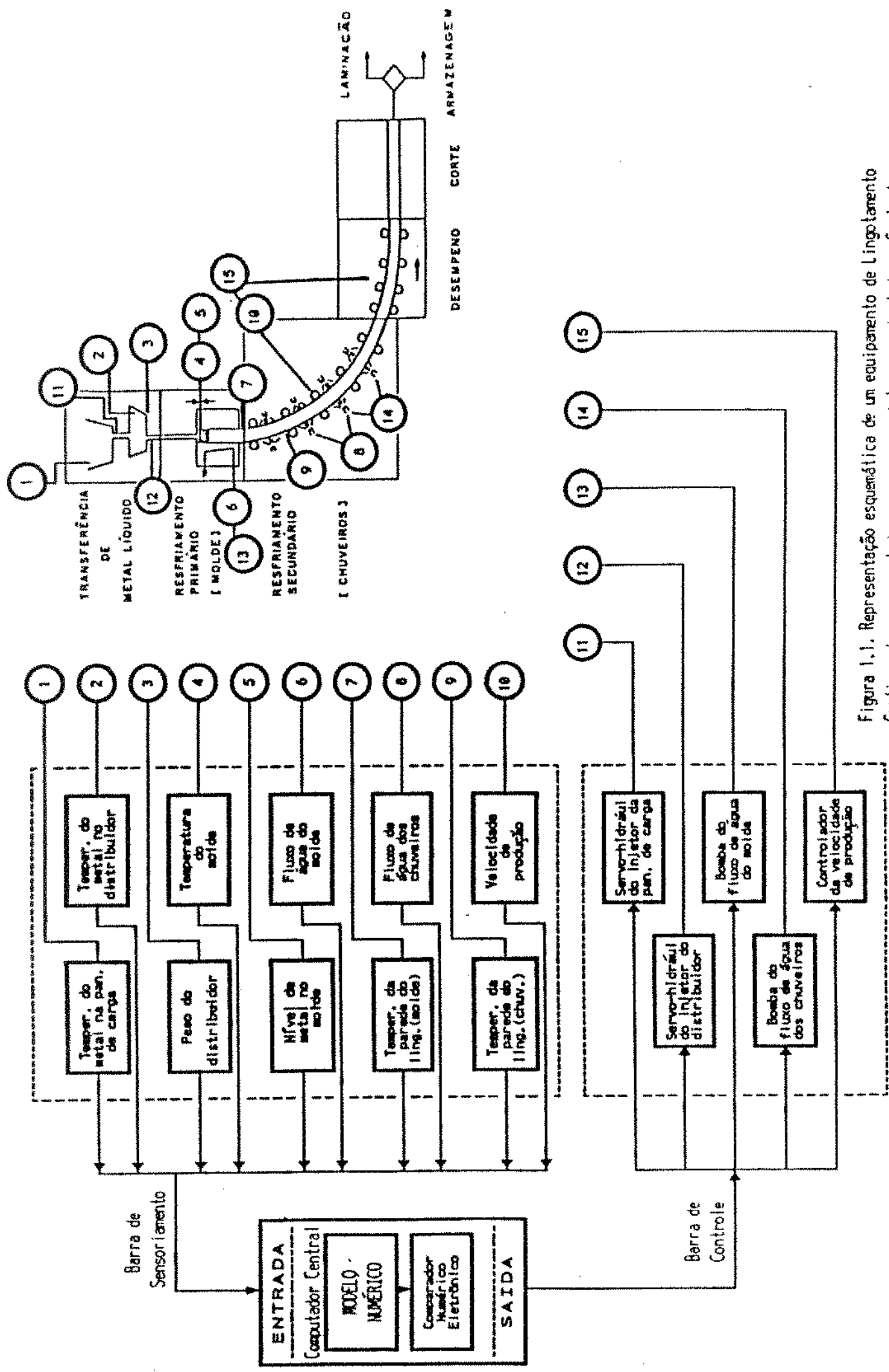


Figura 1.1. Representação esquemática de um equipamento de Lingotamento Contínuo de aço, acoplado a sensores e sistemas controlados - Controle via simulação de modelo numérico

## 2.1. ASPECTOS BÁSICOS DO EQUIPAMENTO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO

A representação esquemática de um equipamento de Lingotamento Contínuo pode ser visto na figura 2.1.<sup>[1]</sup> As partes essenciais ao sistema são descritas como segue:

### 2.1.1. Painela de Carregamento:

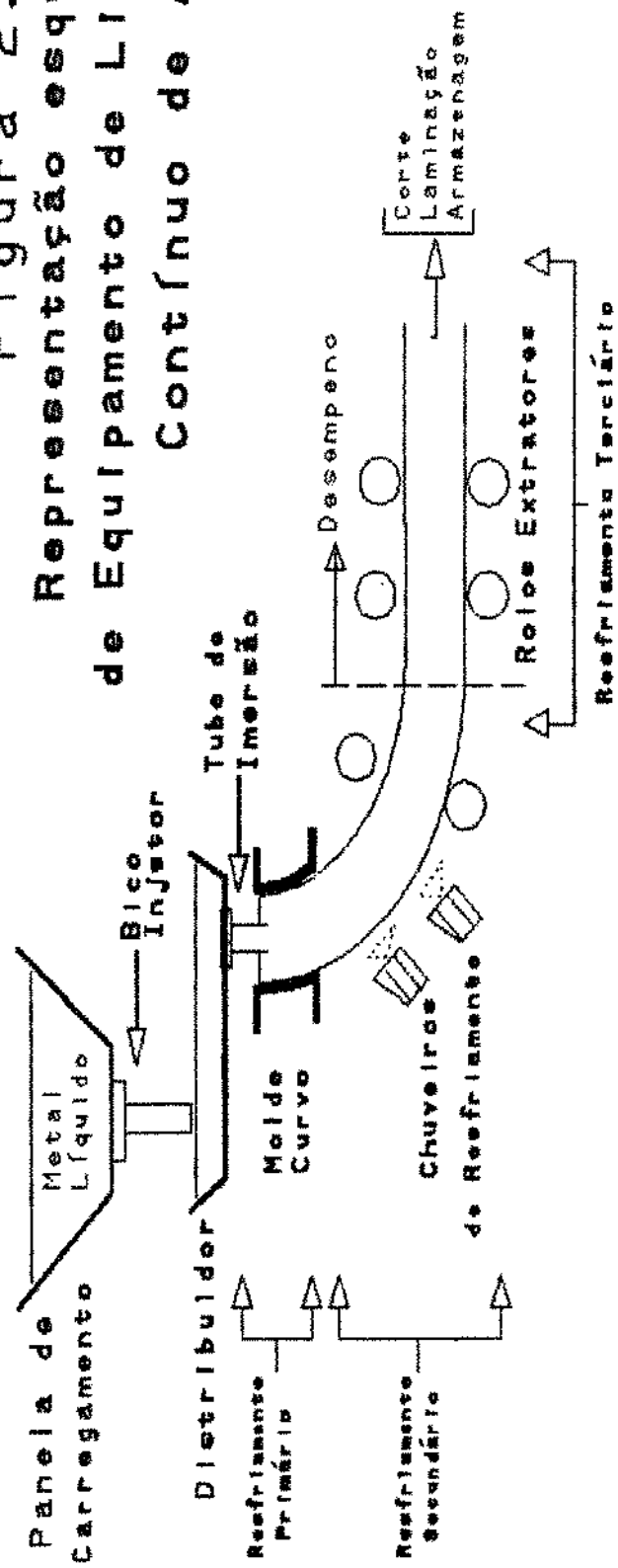
Painela de distribuição primária do metal líquido, recebe o material, diretamente do alto forno. No objetivo de se manter o processo contínuo, sem interrupção, é interessante ter painelas de carregamento com o maior tamanho possível. O vazamento do aço líquido, é feito através de válvulas tipo gaveta,<sup>[2]</sup> onde duas tiras que deslizam uma sobre a outra, possuem furos concêntricos da ordem de 35 a 120 mm. A medida que as tiras se movimentam os furos descentralizam, reduzindo o fluxo de saída do material, até o fechamento total de vazão. As partes móveis do sistema são montadas sobre placas refratárias, acopladas a superfície da painela, resultando assim em eficiência e velocidade no deslizamento de abertura e fechamento da válvula.

Durante a operação de abertura ou fechamento, a presença de ar frio na região pode levar a solidificação de material na válvula, impedindo assim a continuidade do processo. Um bico injetor acoplado a saída da válvula evita este tipo de problema, além de auxiliar a vazão do metal para o distribuidor.

### 2.1.2. Distribuidor:

Recebe o metal líquido da painela de vazamento, alimentando o molde. Um distribuidor pode alimentar vários moldes, contudo os

Figura 2.1  
 Representação esquemática  
 de Equipamento de Lingotamento  
 Contínuo de Aço





injetores de alimentação de molde devem ser mantidos distantes da região de turbulência provocada pela vazão a partir das painelas de carregamento, já que as bôlhas geradas nesta região influem na qualidade final do lingote.

O distribuidor consiste numa carcaça de aço revestida com material refratário, pré-aquecida a altas temperaturas ( $>1500\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) a fim de receber o metal líquido. O tamanho do distribuidor é um parâmetro importante no projeto de um sistema de Lingotamento Contínuo, pois quanto maior sua área, melhor para o efeito de homogeneização da liga em seu interior exercendo também o efeito de flotar inclusões contidas no metal, melhorando assim a qualidade final do produto.

O vazamento do aço líquido a partir do distribuidor é feito através de válvulas do tipo tampão, que são maleáveis em relação à implantação de um controle automático por sistemas eletromagnéticos ou de um controle totalmente manual.

A temperatura do metal líquido no distribuidor é um parâmetro de importância em um sistema automático, já que temperaturas elevadas nesta região do sistema podem causar a solidificação de uma casca de metal muito fina na saída do molde levando o lingote a ruptura, parализando o processo.

A velocidade de produção depende da altura da coluna de metal líquido, já que a pressão de vazamento é dada em função da gravidade terrestre.

### 2.1.3. Tubo de Imersão:

São tubos de metal ou material refratário acoplados à válvula de saída do distribuidor, e alimentam diretamente o molde. Seu diâmetro dependente do fluxo de líquido necessário para a velocidade máxima de lingotamento requerida, e pode ser estimado através do

teorema de Benouilli<sup>[3]</sup>:

$$Q = c.a.\sqrt{2.g.l} \quad (2.1)$$

onde: Q = Fluxo de líquido

a = Área de jato do tubo

l = Altura da coluna de metal líquido no distribuidor

g = Aceleração da gravidade terrestre ( $\cong 9.81 \text{ m/s}^2$ )

c = Coeficiente de contração, assume-se igual a 0.62 para orifícios circulares.

Entretanto o teorema de Bernouilli não leva em conta a viscosidade e a tensão superficial e, portanto o valor de diâmetro de tubo obtido para um molde de área 'A' e velocidade de produção máxima de 'umax', deve ser corrigido.

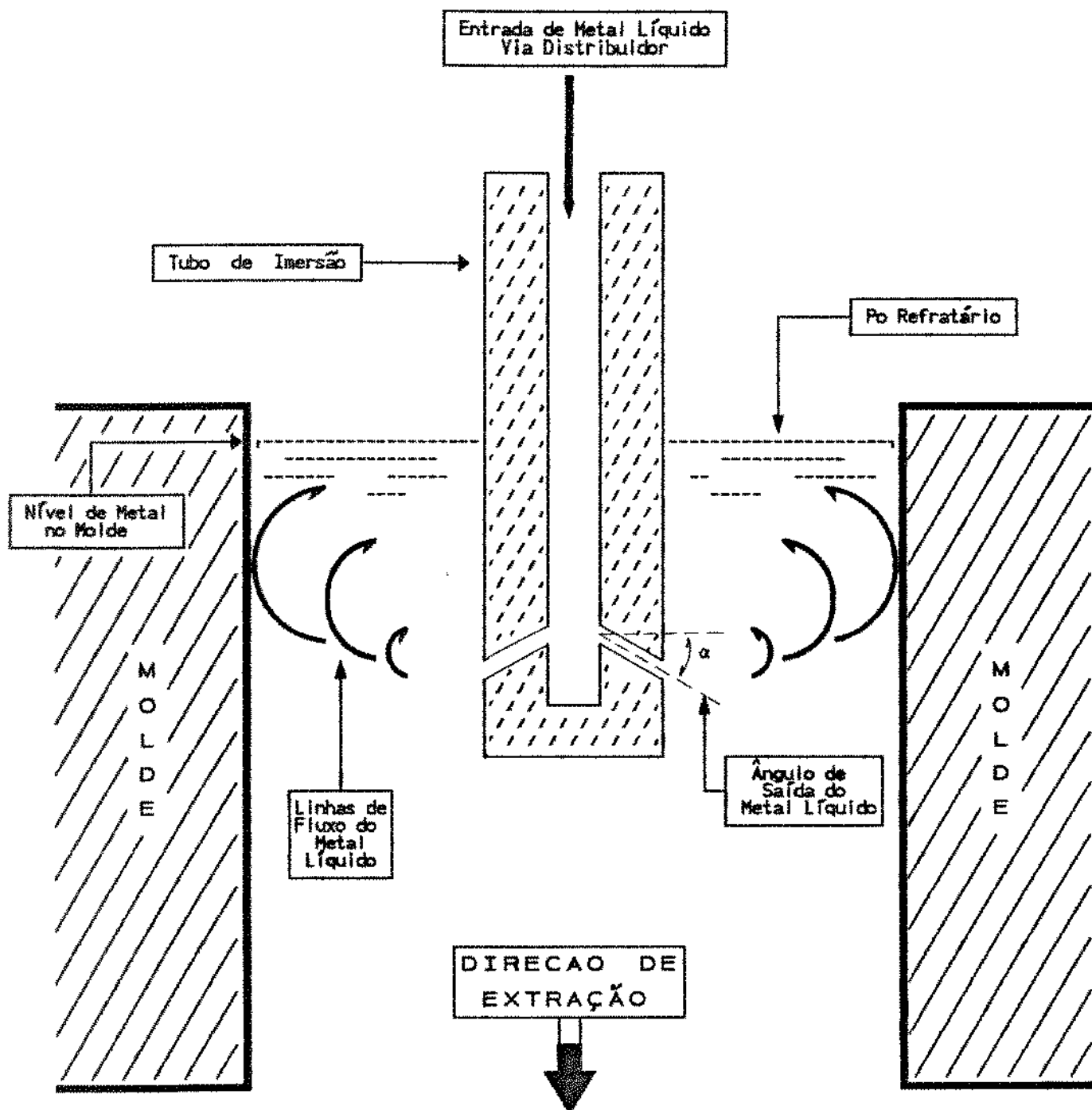
A saída do tubo é feita através de orifícios inclinados em ângulo ' $\alpha$ ' (Ver figura 2.2), sendo que esta inclinação favorece a flotação de inclusões contidas no metal devido ao perfil de vazamento obtido neste tipo de saída, melhorando assim a qualidade final de produto e gerando um bom desempenho do fluxo na entrada do molde.<sup>[4]</sup> O tubo é pré-aquecido antes de receber o metal líquido, evitando que o material se solidifique em seu interior.

#### 2.1.4. Molde ou Resfriamento Primário:

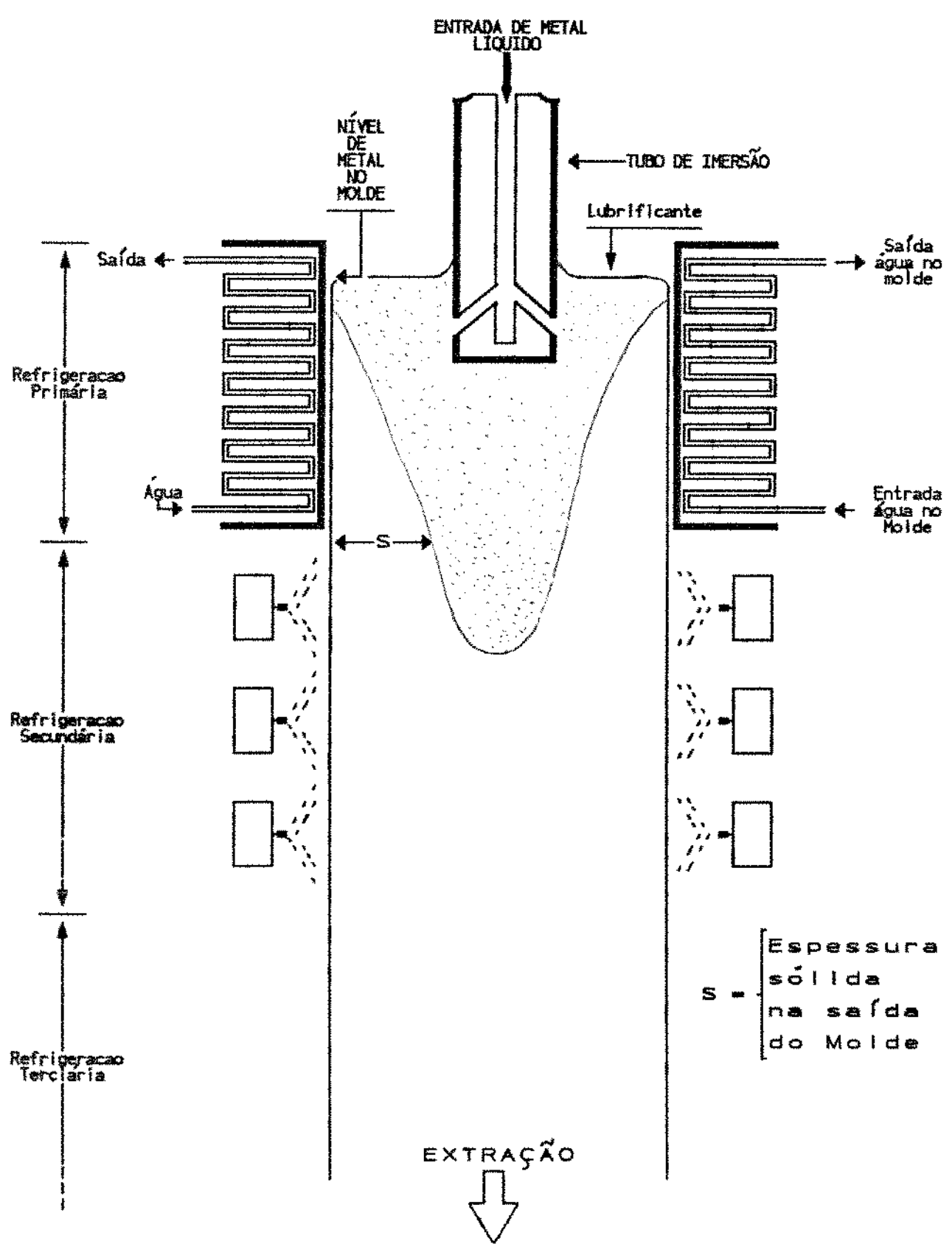
Consiste na primeira etapa de retirada de calor, e objetiva formar uma casca sólida de espessura 'S'(Ver figura 2.3) em sua saída, com resistência mecânica suficiente para suportar a pressão metalostática e as tensões de extração (casca sólida crítica).

A fim de evitar o atrito do metal com a parede do molde, no início da formação da camada sólida, o mesmo possui uma oscilação com a velocidade de descida igual a velocidade de produção e velocidade de subida igual a pelo menos 2 vezes esta velocidade, quando então a

Figura 2.2 - Sistema de entrada de Metal Líquido no Molde via Tubo de Imersão



**Figura 2.3 - ESPESSURA DE CASCA SOLIDIFICADA  
NA SAÍDA DO MOLDE**



camada solidificada já apresenta uma determinada resistência mecânica. A oscilação do molde no processo, procura desta forma evitar a ruptura da casca sólida aliviando as tensões de extração, com a redução do atrito do metal solidificado sobre a parede do molde (Ver figura 2.4).

A lubrificação das paredes do molde é feita através de um pó refratário, o qual é depositado na superfície do nível de metal no molde. Este pó possui além da lubrificação a propriedade de reter as inclusões flotadas no metal pelo fluxo gerado na saída do tubo de imersão além de formar um capa térmica na superfície do nível de metal.

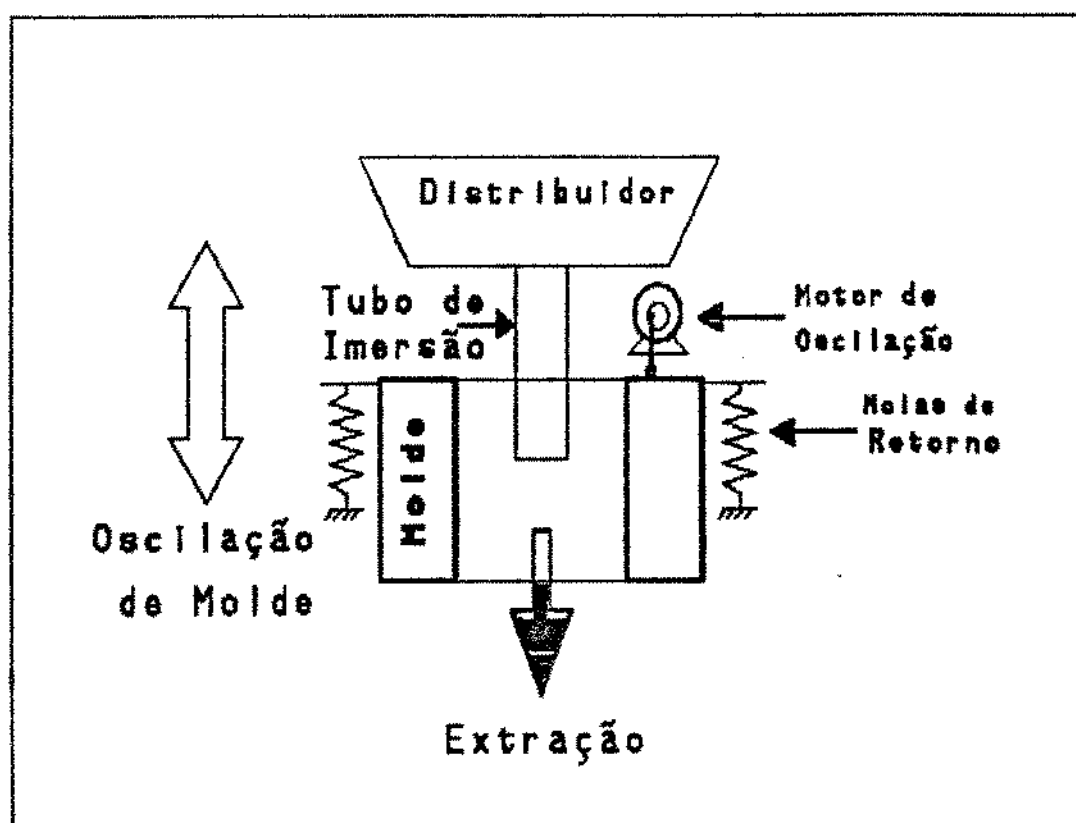


Figura 2.4 - Sistema de oscilação do molde no equipamento de Lingotamento Contínuo

O nível de metal no molde é um parâmetro importante ao controle do processo, sendo este o regulador da válvula tampão da

saída do distribuidor que controla a quantidade de metal vazado para o molde e evita que o mesmo transborde com o excesso de alimentação ou esvazie em demasia podendo causar ruptura do lingote na saída, devido a fina casca solidificada. O controle do nível de molde influe na qualidade de produto final.<sup>[5,6]</sup>

O comprimento efetivo do molde é um parâmetro de importância no projeto de um sistema de Lingotamento Contínuo, sendo que moldes muito longos se deformam com mais facilidade diminuindo sua vida útil, e moldes muito curtos não permitem uma retirada de calor suficiente para a formação de uma casca sólida crítica<sup>[7]</sup>.

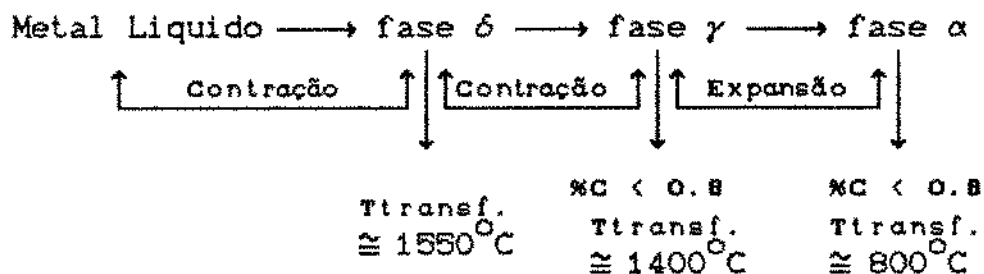
A solidificação inicial do metal líquido no interior do molde constitui um parâmetro de base ao produto final desejado, já que a espessura de casca solidificada e a qualidade superficial do lingote ao longo do processo, dependem inteiramente do trabalho iniciado nesta região de resfriamento.<sup>[5]</sup> Distúrbios gerados na solidificação da espessura da casca podem levar a ruptura do lingote na saída do molde, parализando o processo contínuo, além de equivaler a custos e danos ao equipamento e alterar a estrutura interna e a qualidade superficial. Deste modo a solidificação no molde depende fundamentalmente da temperatura de entrada do metal líquido, da velocidade de produção, da taxa de retirada de calor nesta região, do nível de metal, além de outros parâmetros que serão analisados posteriormente.

#### **2.1.5. Região de Chuveiros ou Resfriamento Secundário:**

A segunda etapa de retirada de calor é composta por uma série de chuveiros que borrifam água na superfície pré-solidificada do lingote, auxiliando a retirada de calor, objetivando a solidificação final do poço líquido no interior do lingote ou placa, antes da região de desempenho (Vide figura 2.1).

O projeto de um sistema de resfriamento por chuveiros é determinado em função de parâmetros operacionais pré-estabelecidos via condições térmicas mais adequadas ao processo de solidificação. A minimização do aparecimento de trincas nos lingotes e a manutenção de uma velocidade de solidificação relativamente elevada, consistem nos critérios básicos de projeto.

No caso particular do Aço, o sistema deve atuar de forma a minimizar o reaquecimento da superfície do lingote após a saída do molde, e ao mesmo tempo deve ser tal que permita uma temperatura mínima da superfície do lingote que não provoque alteração estrutural  $\gamma \rightarrow \alpha$  (a temperatura da superfície do lingote sendo mais baixa possível provocaria uma maior velocidade de solidificação, enquanto que a impossibilidade de alterações estruturais devido ao polimorfismo do Ferro evitaria alterações volumétricas diferenciais, que existindo podem provocar a formação de trincas)<sup>(8)</sup>:



A figura 2.5 esboça um perfil de temperatura na superfície do lingote dentro da região de chuveiros. Os parâmetros de reaquecimento na saída de cada região é um valor de importância no projeto, sendo este utilizado como uma variável na análise teórica do fluxo térmico feito através de modelos matemáticos de transferência de calor.

A utilização de modelos numéricos voltados ao projeto da região de resfriamento secundário é validada como uma forte ferramenta de trabalho sendo que isto é feito através da mudança da condição de

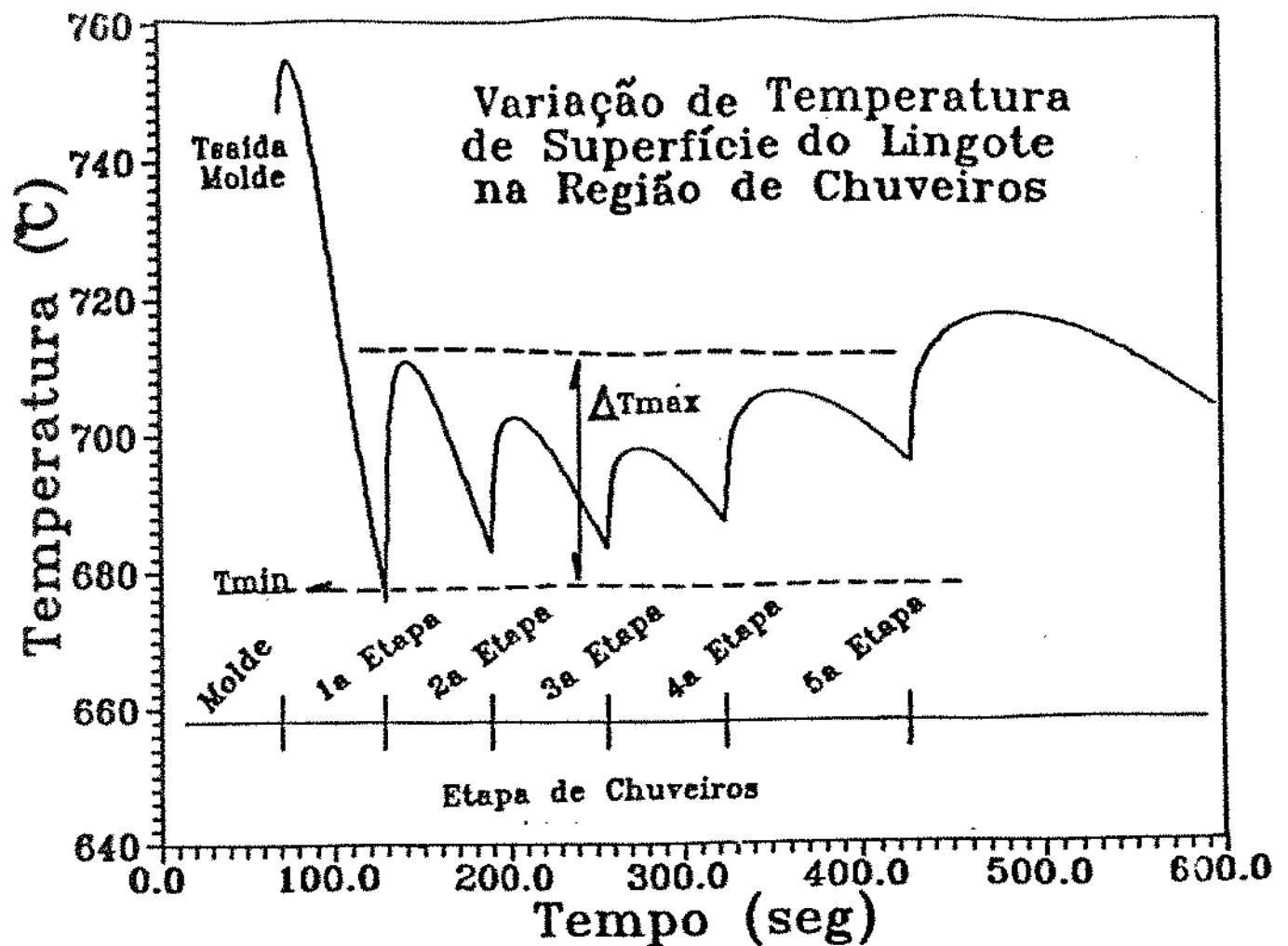


Figura 2.5 - Esquema da variação da temperatura da superfície do lingote/placa na região de chuveiros

contorno nesta etapa, substituindo a condição de contorno de fluxo de calor para uma condição de temperatura conhecida, imposta ao modelo.

Para um controle eficiente e maleável cada região de chuveiro deve ser controlada individualmente. Permitindo assim um maior desempenho em relação as variações de velocidade de produção e tipo de aço produzido.

A disposição dos bicos injetores dos chuveiros na direção transversal, bem como na direção longitudinal do lingote, além da abertura do jato de água sobre a superfície, são alguns dos parâmetros estudados nesta etapa de resfriamento do equipamento, sendo estes, fatores responsáveis ao mapeamento da taxa de retirada de calor nesta



região. A figura 2.6 ilustra uma disposição aplicada segundo Gerald Josep.<sup>19)</sup>

### 2.1.6. Rolos Extratores:

São responsáveis diretos da velocidade de produção. Tocam a superfície do lingote puxando o mesmo na direção de extração. Os rolos são resfriados a água e auxiliam em parte a retirada de calor. O alinhamento coerente dos rolos extratores corresponde a um importante fator no projeto e construção de um equipamento de Lingotamento Contínuo, pois a não simetria em relação a colocação destes rolos pode levar o lingote a sofrer esforços de tensão não desejados, e em alguns casos até mesmo a ruptura do mesmo ao longo do processo.

## 2.2. ASPECTOS DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO LINGOTAMENTO CONTÍNUO

### 2.2.1. Fluxo de calor no Lingotamento Contínuo:

As diferentes etapas do processo de retirada de calor no equipamento de Lingotamento Contínuo asseguram um fluxo térmico adequado entre o produto e o meio ambiente, levando a uma produção mais eficiente e um aumento de qualidade. Tais etapas são analisadas no objetivo de se levantar as características de funcionamento ótimo do sistema. A utilização de um molde refrigerado a água, seguido de um conjunto de chuveiros de resfriamento, são alguns pontos importantes de estudo, os quais devem preencher requisitos térmicos importantes caso se pretenda obter um produto lingotado, de modo eficiente e com um mínimo de defeitos externos e internos.

O molde deve ser capaz de retirar uma quantidade de calor do metal, tal que permita a solidificação de uma camada que possa suportar a solicitação mecânica à qual está submetida na saída do molde. A continuidade do processo de extração de calor é executada por um conjunto de chuveiros, os quais devem retirar calor do metal de tal

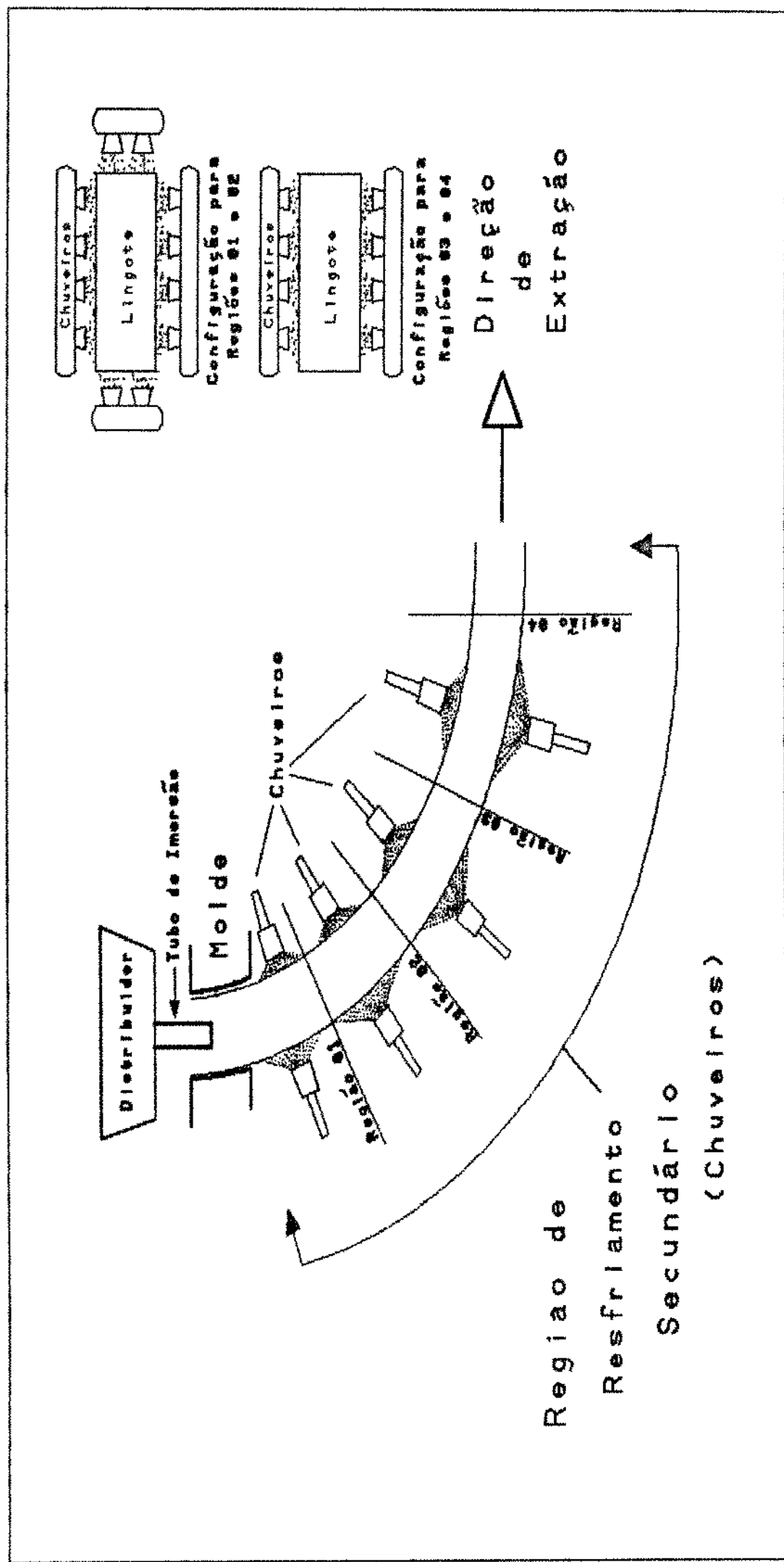


Figura 2.6 - Disposição dos chuveiros no resfriamento secundário

forma a praticamente completar a solidificação da secção do lingote.

A taxa de extração de calor do metal é um parâmetro de grande importância no processo, pois a eficiência, a confiabilidade e principalmente o controle, dependem fundamentalmente de como o calor é retirado do sistema. Um resfriamento deficiente implica, no caso de lingotamento de aço, na presença de um poço de metal líquido excessivamente longo, enquanto que um resfriamento excessivo pode conduzir à formação de trincas prejudicando a qualidade do produto. Ainda no caso específico do aço, a extração de calor através dos chuveiros de resfriamento deve ser convenientemente estabelecida de modo a não provocar uma variação brusca na temperatura da superfície do lingote na passagem entre dois conjuntos de chuveiros adjacentes, o que também provocaria o aparecimento de trincas. Como em qualquer processo de solidificação, a taxa de extração de calor influi diretamente na velocidade de solidificação, a qual por outro lado define o arranjo estrutural e a distribuição de inclusões e elementos de liga e finalmente a qualidade interna do produto. Nota-se que uma série de fatores influem diretamente na taxa da retirada de calor do metal, que por sua vez reflete aspectos importantes do Lingotamento Contínuo. Isto torna fundamental a análise sistemática da transferência de calor neste processo, tal que permita obter informações essenciais para o dimensionamento e operação de equipamentos de Lingotamento Contínuo.

### **2.2.2. Etapa de Resfriamento Primário (MOLDE):**

Os instantes iniciais da solidificação do metal líquido no interior do molde são fundamentais para a qualidade superficial do produto final. Os mecanismos que regem o processo de transferência de calor nesta etapa do sistema, são analisados com o objetivo de mapear os problemas intrínsecos a um modelo de controle do equipamento.

A etapa de resfriamento primário no Lingotamento Contínuo de metais, é caracterizada pela utilização de um molde refrigerado a água, sendo este responsável por duas importantes funções:

- Suportar a casca de metal solidificado durante o início do processo de solidificação;

- Permitir a retirada de calor do metal ao fluido de refrigeração, mantendo uma taxa de transporte de calor tal que solidifique até a saída do molde uma camada suficientemente espessa que suporte o metal líquido e as tensões externas ao processo.

Tais condições são necessárias para impedir a ruptura da casca sólida na saída do molde e conseqüentemente a interrupção do processo de lingotamento.

No projeto da região de resfriamento primário, o comprimento efetivo máximo do molde é um parâmetro de importância, pois moldes muito longos podem se deformar prejudicando a qualidade final de produto, e moldes pequenos podem não solidificar a casca mínima de saída do metal, levando em conseqüência, à ruptura do lingote.

A camada de metal sólido que se forma ao longo do molde, constitui uma barreira crescente à remoção do calor latente de solidificação, o que faz com que a condução térmica na camada sólida vá adquirindo uma influência relativa sobre o fluxo global de calor cada vez maior com o transcorrer do processo. Por outro lado, a condução térmica através das paredes do molde e no metal líquido representam uma parcela bastante menos significativa do fluxo de calor. No caso do metal líquido, a convecção térmica natural ou forçada incumbe-se de eliminar gradientes térmicos, que de qualquer forma nunca se apresentam elevados tendo em vista os baixos valores de superaquecimento normalmente utilizados. As paredes do molde, dada a ordem de grandeza das espessuras normalmente empregadas, não chegam a constituir uma resistência térmica importante à condução térmica,

principalmente no caso de moldes constituído de Cobre eletrolítico ou de ligas de Cobre, como é o caso da maioria dos moldes utilizados em sistemas de lingotamento contínuo.<sup>[10,11]</sup>

No metal líquido existem movimentos de convecção induzidos pela corrente de vazamento, que asseguram a homogeneização da temperatura e transferência de calor do líquido ao sólido com a consequente remoção do superaquecimento.

A formação de uma fenda de ar entre a parede do molde e a superfície pré-solidificada do metal, afeta o mecanismo de retirada de calor do lingote, e deve ser conhecido. Esta fenda é formada pelo efeito de contração do material ao passar do estado líquido ao sólido<sup>[12]</sup>.

#### 2.2.1.1. Transferência Newtoniana:

A transferência Newtoniana de calor na etapa de resfriamento primário é caracterizada por três resistências térmicas: a resistência térmica da interface metal/molde, a resistência térmica da parede do molde e a resistência térmica da interface molde/fluido de refrigeração. As resistências térmicas da parede do molde e da interface molde/fluido de refrigeração são normalmente muito pequenas comparadas com a resistência térmica metal/molde, a qual consequentemente controla a transferência Newtoniana do sistema metal/molde. Ao longo do molde, são definidas três secções de contato entre metal e molde, conforme pode ser visto na figura 2.7.A.

- Do menisco até o ponto de início de solidificação formando uma casca de metal sólido. Nesta região o metal líquido se encontra separado do molde por uma camada de pó lubrificante (refratário) ou escória.

- A região na qual a camada solidificada já está adquirindo resistência suficiente para afastar-se do molde através da contração volumétrica, caracterizada entretanto por um contato intermitente dada

a características da superfície do lingote.

- A região onde existe uma separação física bem definida entre o metal e o molde, e a transferência de calor ocorre por radiação e convecção através do filme de gás formado entre metal e molde.

O efeito do mecanismo de retirada de calor ao longo do molde passando pelas diferentes regiões, é importante no estudo de projeto de moldes, sendo que na região de separação física do molde/metal, existe uma perda na eficiência da retirada de calor, conforme visto na figura 2.7-B.

Assim pode-se levantar as resistências relativas ao mecanismo de transferência de calor ao longo do molde<sup>(13-15)</sup>:

1- Resistência térmica entre fluido de refrigeração e parede do molde ( $R_{\text{fluido/molde}}$ ):

$$R_{\text{fluido/molde}} = \frac{1}{h_1} \quad (2.2)$$

onde  $h_1$  é calculado pela expressão:

$$h_1 = \frac{k_{\text{fluido}}}{l} \cdot 0.023 \cdot \left( \frac{d_{\text{fluido}} \cdot V_{\text{fluido}} \cdot l}{\eta_{\text{fluido}}} \right)^{0.8} \cdot \left( \frac{c_{\text{fluido}} \cdot \eta_{\text{fluido}}}{k_{\text{fluido}}} \right)^{0.4} \quad (2.3)$$

sendo:

$k_{\text{fluido}}$  = Condutibilidade térmica do fluido refrigerante;

$d_{\text{fluido}}$  = Densidade do fluido refrigerante;

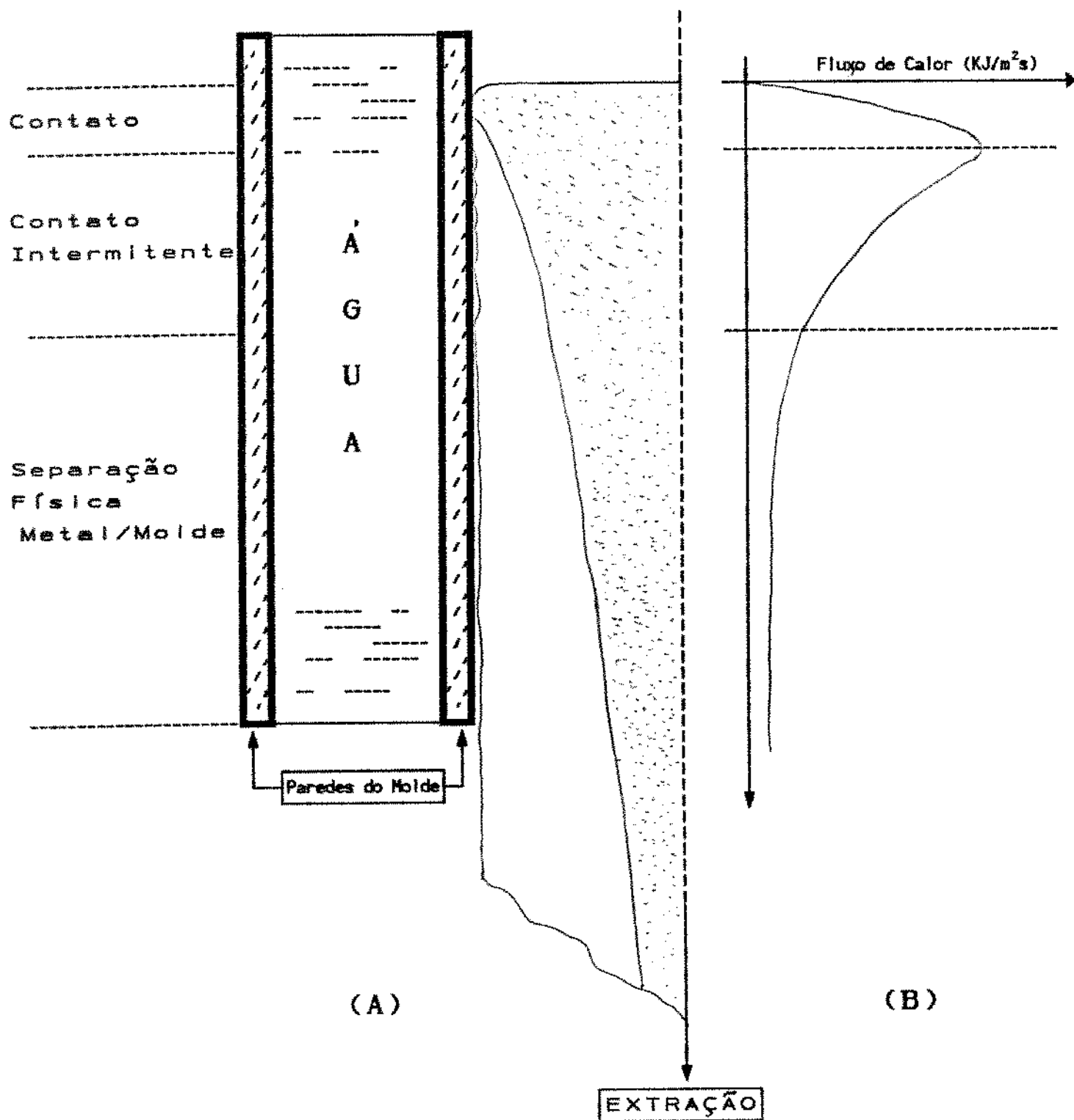
$c_{\text{fluido}}$  = Calor específico do fluido refrigerante;

$\eta_{\text{fluido}}$  = Viscosidade do fluido refrigerante;

$V_{\text{fluido}}$  = Velocidade do fluido no molde;

$l$  = Largura ou diâmetro do canal de refrigeração.

Figura 2.7 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DAS TRÊS  
DIFERENTES REGIÕES DE CONTATO METAL/MOLDE



2- Resistência térmica da parede do molde ( $R_{\text{par. molde}}$ ):

$$R_{\text{par. molde}} = \frac{\delta_m}{k_m} \quad (2.4)$$

sendo:

$\delta_m$  = espessura da parede do molde;

$k_m$  = condutividade térmica do material do molde.

3- Resistência térmica entre a parede do molde e a superfície do lingote ( $R_{\text{molde/sup. metal}}$ ):

Esta resistência ao fluxo de calor é basicamente formada pela fenda existente entre a parede de metal sólido e a parede do molde,<sup>[16]</sup> sendo esta composta pela condução térmica do ar envolvido na fenda e o efeito de radiação entre a parede fria do molde e a superfície quente do lingote. Também inclui nesta resistência a condução da camada de lubrificante envolvendo a superfície do metal, assim, tem-se que:

$$R_{\text{molde/sup. metal}} = R_{\text{fenda}} + R_{\text{lubrificante}} \quad (2.5)$$

$$\text{onde: } R_{\text{fenda}} = \frac{1}{hk + hr} \quad (2.6)$$

$$\text{sendo: } hk = \frac{\delta_{\text{ar}}}{k_{\text{ar}}} \quad (2.7)$$

$$\text{e } hr = \alpha \cdot \epsilon \cdot (T_s + T_m) \cdot (T_s^2 + T_m^2) \quad (2.8)$$

$$\text{e } R_{\text{lubrific.}} = \frac{\delta_{\text{lubrific.}}}{k_{\text{lubrific.}}} \quad (2.9)$$

as constantes denominadas:

$hk$  = Coeficiente de condutância térmica para a condução;

$hr$  = Coeficiente de condutância térmica para a convecção;

$\delta_{\text{ar}}$  = Espessura da fenda;

$k_{\text{ar}}$  = Condutividade térmica do ar na fenda;



$\sigma$  = Constante de Stefan-Boltzman =  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ ;

$\epsilon$  = Emissividade da superfície ( $\cong 0.8$  para o aço);

$T_s$  = Temperatura da superfície do lingote;

$T_m$  = Temperatura da superfície interna do molde;

$\delta_{\text{lubrific.}}$  = Espessura da camada lubrificante;

$k_{\text{lubrific.}}$  = Condutividade térmica do lubrificante;

A transferência Newtoniana global entre o fluido refrigerante e a superfície externa do metal sólido é caracterizada pela soma das resistências definidas anteriormente:

$$R_{\text{newton.}} = R_{\text{fluid/molde}} + R_{\text{par. molde}} + R_{\text{molde/sup. metal}} \quad (2.10)$$

ou

$$R_{\text{newton.}} = \frac{1}{h_{\text{global}}} \quad (2.11)$$

sendo  $h_{\text{global}}$  a condutância térmica global metal/fluido de refrigeração.

Este coeficiente de condutância térmica global constitui um importante parâmetro de projeto, uma vez que indica a quantidade de calor extraída através do molde, sendo este um medidor da espessura da casca solidificada na base do molde. O efeito de fatores tais como material do molde, velocidade do fluido de refrigeração, lubrificação do molde e velocidade de extração do lingote, podem ser sintetizados neste parâmetro.

### 2.2.3. Etapa de Resfriamento Secundário (CHUVEIROS):

Esta etapa de resfriamento do processo de lingotamento contínuo caracteriza-se por uma região de chuveiros os quais borrifam água na superfície do lingote, determinando a taxa de retirada de calor. Objetiva o fechamento total do poço líquido no interior da

casca sólida, antes do desempenho. A análise e projeto desta etapa de resfriamento é facilitada em relação ao molde, devido a flexibilidade e controle dos blocos individuais de chuveiros ao longo do processo, além de que conhece-se mais a respeito entre as relações de taxas de retirada de calor por chuveiros e seus parâmetros relativos, do que no caso do molde. No entanto, ao se estruturar um projeto de um sistema de resfriamento por chuveiros deve-se levantar condições ótimas e aceitáveis de taxas de retirada de calor. O desenvolvimento de um resfriamento uniforme e coerente com a temperatura da superfície do lingote objetiva eliminar a formação de trincas superficiais, sem que com isto venha-se perder a manutenção de uma velocidade de solidificação relativamente elevada, já que o objetivo final consiste no fechamento do poço líquido no menor tempo e de forma mais eficiente possível.

O reaquecimento da superfície do lingote devido a redução da taxa de retirada de calor, pode ocorrer quando o lingote passa do molde a etapa de resfriamento por chuveiros e desta etapa a etapa de radiação livre, ou ainda entre os diferentes grupos de chuveiros de refrigeração. Deste modo deve-se impor ao projeto uma temperatura mínima de superfície ( $T_{min}$ ) e monitorar o reaquecimento entre as regiões de chuveiros ( $\Delta T$ ) até o fechamento total do poço, conforme já ilustrado na figura 2.5.

A temperatura da superfície do lingote e a vazão de água dos chuveiros diminuem gradativamente do primeiro ao último conjunto, sendo que, com o aumento da casca sólida, a resistência ao fluxo de calor do metal líquido para o exterior também aumenta, pois o aço sólido não atua como um bom condutor térmico.

A disposição transversal dos bicos de chuveiros dentro de cada região de resfriamento, também deve ser observada, de forma a minimizar a variação da taxa de retirada de calor na mesma seção

transversal. Ueta et al.<sup>[17]</sup> sugere um fluxo de ar misturado ao fluxo de água, dispondo os bicos de chuveiros conforme figura 2.8, e o coeficiente de transferência de calor para a névoa de borrifo formada, calculada por:

$$h = \frac{10^{2.34} \cdot W^{0.32} \cdot Q_a^{0.20}}{T_s^{0.136}} \quad (\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C. Injetor}) \quad (2.12)$$

onde:  $W$  = Fluxo de água ( $\text{l/m}^2 \cdot \text{min}$ );  
 $Q_a$  = Taxa do fluxo de ar ( $\text{N.m}^3/\text{h.bico}$ );  
 $T_s$  = Temperatura de superfície ( $600 \text{ }^\circ\text{C} \leq T_s \leq 1000 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

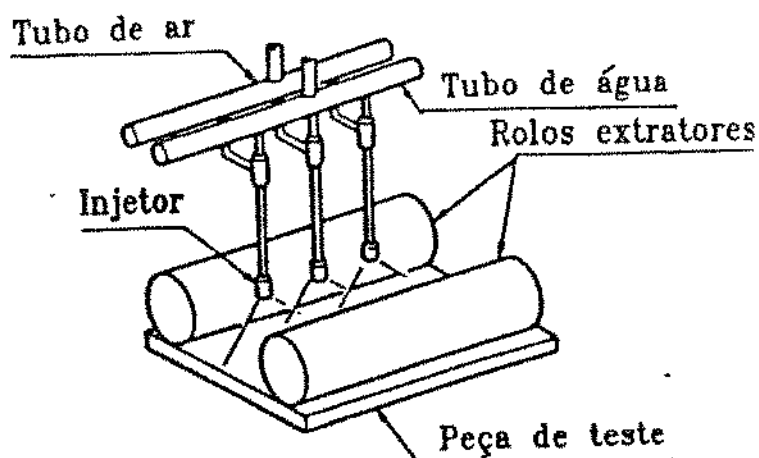


Figura 2.8 - Disposição dos injetores dos chuveiros na secção transversal da superfície da placa<sup>[17]</sup>

A eficiência da homogeneização da taxa de extração de calor na secção depende do fluxo de ar imposto ao grupo de chuveiros conforme mostra a figura 2.9.

Entretanto para os casos onde não se trabalham a mistura de ar e água, uma relação experimental tem sido utilizada para a determinação do valor de 'h' nesta região de resfriamento, é a relação desenvolvida por Nozaki e outros,<sup>[18-20]</sup> e representada por:

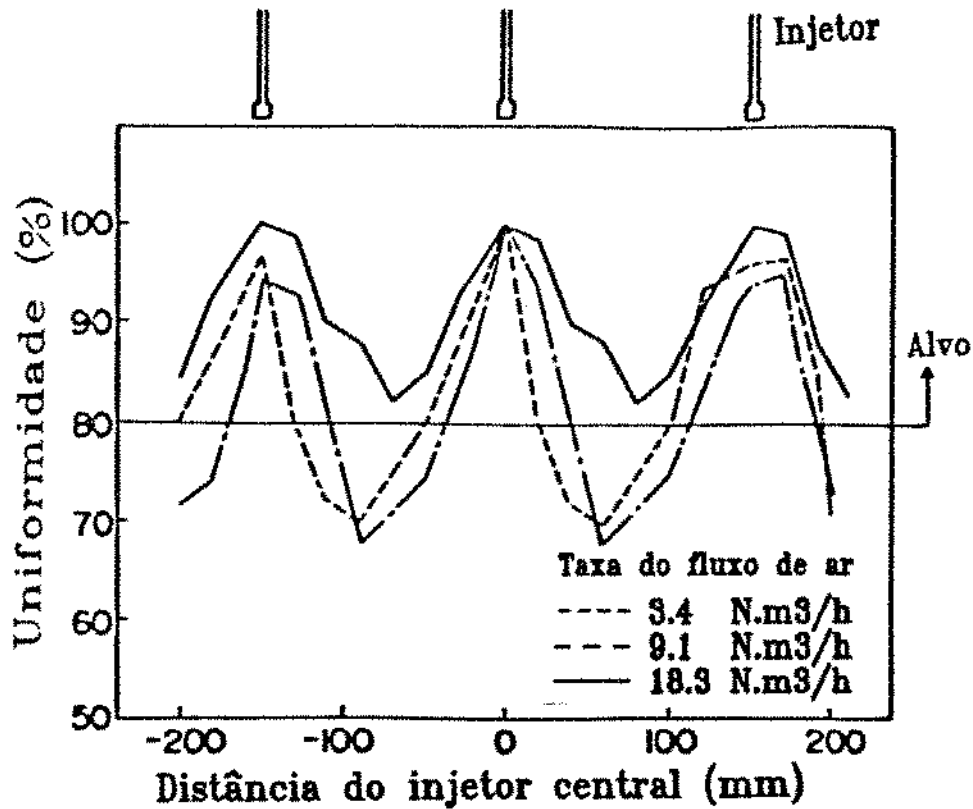


Figura 2.9 - Influência do fluxo de ar na homogeneização da taxa de retirada de calor da secção transversal da placa<sup>117)</sup>

$$h = 0.333 \cdot W^{0.55} \quad (\text{Kw/m}^2\text{K}) \quad (2.13)$$

sendo:

$$W = \text{fluxo de água (Kg/m}^2\text{.s)}$$

A disposição longitudinal das diferentes secções de chuveiros é determinada pela obrigatoriedade de se manter um fluxo de água uniforme em toda a zona de resfriamento. Distâncias muito elevadas podem causar um reaquecimento muito alto na superfície do lingote, levando a formação de trincas; sendo que uma distância curta

entre os blocos poderá causar um resfriamento brusco gerando também um efeito de trincamento superficial.

O projeto eficiente desta etapa de resfriamento do lingotamento contínuo deve levar em conta os fatores mencionados anteriormente, além do conhecimento prévio do tipo de chuveiro mais adequado em relação ao coeficiente de transmissão de calor necessário, entretanto a literatura especializada não correlaciona estas informações, sendo então necessário levantamentos experimentais obtidos a diversos tipos diferentes de chuveiros, como por exemplo o trabalho desenvolvido por Mizikar<sup>[24]</sup> para o spray 1/4 GG 10.

#### 2.2.4. Etapa de Resfriamento Terciário (Radiação Livre):

A etapa de resfriamento terciário é caracterizada pelo resfriamento livre do lingote, onde os fenômenos de radiação e convecção atuam de forma natural ao sistema. Nesta etapa de resfriamento, apesar de não ser exercido nenhum tipo de controle forçado, deve-se conhecer os fatores físicos envolvidos no objetivo de se mapear as condições térmicas do material antes de ser cortado e eventualmente laminado.

Ao sair da etapa de resfriamento secundário, com os coeficientes de transmissão de calor controlados via o fluxo de chuveiros, o lingote nesta região de resfriamento é exposto a uma troca térmica com o meio ambiente via um coeficiente global de transmissão de calor, no qual inclui o termo relativo a radiação e o termo relativo a convecção:

$$h_{\text{global}} = h_{\text{rad.}} + h_{\text{convec.}} \quad (2.14)$$

Sendo que o termo relativo a radiação é dado por<sup>[24,25]</sup>:

$$h_{\text{rad.}} = \sigma \cdot \epsilon \cdot (T_i + T_o) \cdot (T_i^2 + T_o^2) \quad (2.15)$$

onde  $\sigma$  - Constante de Stefan-Boltzman =  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

$\epsilon$  - Emissividade da superfície (= 0.8 para o aço)

$T_i$  - Temperatura de superfície do lingote

$T_o$  - Temperatura ambiente

e o termo relativo a convecção calculado pelo número de Nusselt (Nu) e os números de Grashof (Gr) e Prandtl (Pr):

$$h_{\text{convec}} = \text{Nu} \cdot \frac{k}{X} \quad (\text{W/m}^2 \cdot \text{K}) \quad (2.16)$$

$$\text{Nu} = K \cdot C \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^n \quad (\text{adimensional}) \quad (2.17)$$

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot \gamma \cdot d^2 \cdot X^3 \cdot (T_i - T_o)}{\eta^2} \quad (\text{adimensional}) \quad (2.18)$$

$$\text{Pr} = \frac{\eta \cdot c}{k} \quad (\text{adimensional}) \quad (2.19)$$

onde:

X - Dimensão característica que se refere à distância coberta pelo fluido ao passar pela superfície (m)

k - Condutibilidade térmica do fluido ( $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ )

C e n - Constantes experimentais dependentes da geometria do lingote

K - Fator corretivo

g - aceleração da gravidade ( $\cong 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$\gamma$  - Coeficiente de expansão térmica volumétrica =  $1/T_o$  para gases ( $\text{K}^{-1}$ )

$\rho$  - densidade do fluido ( $\text{Kg/m}^3$ )

$\eta$  - Viscosidade do fluido ( $\text{Kg/m} \cdot \text{s}$ )

c - Calor específico do fluido ( $\text{J/Kg} \cdot \text{K}$ )

Dependendo do tipo de sistema de Lingotamento Contínuo, a etapa de resfriamento por radiação e convecção livre pode se dar com o

lingote na posição vertical ou na posição horizontal. Como os coeficientes K, C e n dependem não só do formato, mas também da posição do lingote, conseqüentemente o coeficiente de transmissão de calor por convecção também será dependente da posição. A figura 2.10 apresenta o esquema de duas placas nas posições horizontal e vertical com os respectivos valores dos coeficientes K, C e n para as condições de fluxos laminar e turbulento.

Considerando que para o ar a 300 K tem-se os seguintes valores<sup>[26]</sup>:

$$k = 1.60 \times 10^{-2} \text{ W/m.K}$$

$$d = 1.17 \text{ Kg/m}^3 \text{ (1 atm)}$$

$$\eta = 3.50 \times 10^{-5} \text{ Kg/s.m (1 atm)}$$

$$c = 1006.30 \text{ J/Kg.K}$$

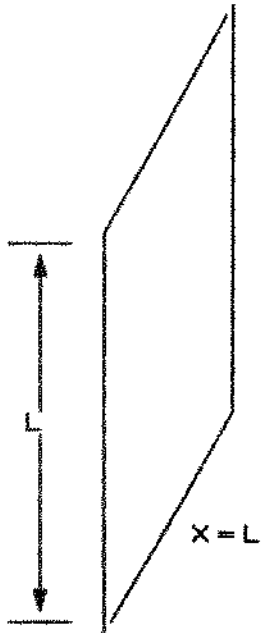
E admitindo um lingote de 1100 mm de largura, valor bastante significativo, com temperatura de superfície da ordem de 800K que se resfria na posição horizontal, então o cálculo de  $h_{convec}$  será  $7.82 \text{ W/m}^2.\text{K}$  e o valor de  $h_{rad}$  será  $36.4 \text{ W/m}^2.\text{K}$ . Desse modo observa-se que o valor de  $h_{convec}$  para o caso do Lingotamento Contínuo de aços pode realmente ser desprezado, podendo para efeito de simplificação prática considerar:

$$R_{3a-etapa} = \frac{1}{h_{global}} = \frac{1}{h_{rad}} \quad (2.20)$$

Já que nesta etapa de resfriamento as condições de estado crítico do produto final se encontram relativamente distantes

**Figura 2.10 - VALORES DOS COEFICIENTES DE CÁLCULO  
'K', 'C' e 'n' EM DIFERENTES POSIÇÕES DE  
RESFRIAMENTO CONDIÇÕES DE FLUXO**

**Placa Vertical**

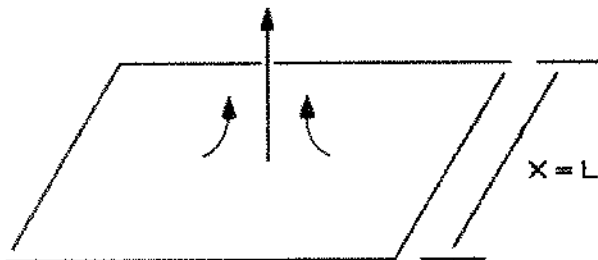


C	n	K	Condições Operacionais
0.8	1/4	$\left[ 1 + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{Pr}} \right)^2 \right]^{-1/4}$	Fluxo Laminar
0.0246	2/5	$\left[ Pr^{1/6} / (1 + 0.494.Pr^{2/3}) \right]^{2/5}$	Fluxo Turbulento

Fluxo laminar  $10^4 < Gr.Pr < 10^9$

Fluxo turbulento  $Gr.Pr > 10^9$

**Placa Horizontal**



C	n	K	Condições Operacionais
0.54	1/4	1	Fluxo Laminar
0.14	1/3	1	Fluxo Turbulento



## 2.3 - PONTOS DE SENSORIAMENTO PARA O CONTROLE DO EQUIPAMENTO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO

Um sistema de instrumentação e controle do processo de lingotamento contínuo deve possuir como aspectos básicos os seguintes itens:

- 1 - Controle de temperatura e nível de aço no distribuidor;
- 2 - Controle do nível de aço no molde;
- 3 - Controle da temperatura e vazão da água de resfriamento no molde;
- 4 - Controle da frequência de oscilação do molde;
- 5 - Controle da velocidade de produção;
- 6 - Controle da pressão e temperatura da água dos chuveiros no resfriamento secundário;
- 7 - Controle da temperatura da superfície do lingote na saída de cada região de chuveiro, no resfriamento secundário;
- 8 - Monitoração da temperatura de superfície do lingote no resfriamento terciário;
- 9 - Monitoração dos esforços de tração ao longo do lingote, no processamento contínuo, em função da velocidade de produção.

Entretanto para que tais itens possam funcionar de forma eficiente objetivando um controle coerente com a velocidade de produção requerida, o sistema automático deve gerar respostas frente a situação física em processo, sob pontos estratégicos de sensoriamento. Estes pontos posicionados no equipamento de Lingotamento Contínuo, atuando com transdutores que geram respostas ao sistema central de controle, permitem que se realize o chamado *controle ótimo do sistema* de Lingotamento Contínuo.

A seguir tais itens são detalhados, objetivando o conhecimento dos pontos funcionais de sensoriamento para o controle ótimo do sistema.

### 2.3.1. Medida da temperatura de metal líquido no distribuidor:

Nesta região do processo, são necessários dois sistemas de medida térmica. Um que verifica a temperatura do metal líquido na panela de carregamento, decidindo quanto a vazão ou o desvio das panelas que chegam ao distribuidor, baseado na faixa limite de temperatura, prescrita para a produção. E o outro sistema que verifica a temperatura do metal líquido dentro do distribuidor, controlando assim a velocidade de produção e a decisão do encerramento do processo, determinado pela faixa de temperatura aceitável neste ponto do processo.

Estas medidas são feitas com termopares que suportem as temperaturas relativamente elevadas ( $\approx 1600$  °C) do metal líquido, nesta região do processo.

### 2.3.2. Nível de aço no molde:

O controle do nível de aço no molde é necessário devido a alta velocidade requerida no Lingotamento Contínuo. Um sistema hidráulico que controla a abertura e fechamento do bico injetor no distribuidor é monitorado pelo computador central via dados recebidos do detector de nível no molde. Existem dois métodos básicos para este tipo de medida:

Irradiação por raios  $\gamma$  : Este tipo de medida é feito através de uma fonte radioativa (Co-60) posicionada em um dos lados do molde, e no lado oposto do é colocado um contador Geiger-Müller refrigerado. Os raios  $\gamma$  são absorvidos pelo molde em maior ou menor grau, conforme o nível de metal líquido. O contador registra a quantidade de raios  $\gamma$  que atingem seu sensor, conhecendo deste modo se o nível do molde se encontra dentro da faixa aceitável, atuando então no sistema hidráulico que aciona a abertura ou o fechamento da válvula do distribuidor.

Método termoelétrico: Este tipo de medida utiliza a temperatura da parede do molde como o indicador do nível de metal líquido.

O sistema consiste em uma série de termopares acoplados sequencialmente no comprimento do molde, dentro da região de monitoração de nível, conforme ilustra a figura 2.11. O metal resfria no molde gerando uma casca sólida ao redor de um poço líquido. O processo de remoção de calor causa um gradiente térmico na parede do molde que resulta em uma força eletromotriz (f.e.m.) na saída dos termopares de medida, o gradiente térmico atinge um valor máximo na região de nível de líquido no molde, gerando uma f.e.m. máxima neste ponto. Este valor é comparado com o valor de referência na entrada de um amplificador diferencial, que tem acoplado um pequeno motor de corrente contínua. Caso a f.e.m. de medida tenha um valor inferior a de referência, a saída do amplificador diferencial assume um valor positivo, e o motor conduz a pena de medida para baixo. Caso a f.e.m. possua um valor superior a referência, a saída do amplificador gera um valor negativo e o motor conduz a pena para cima. O valor de referência equivale ao valor de máximo, caso em que o motor permanece desligado, e a pena indica o nível de molde, além de emitir um sinal elétrico para o sistema central de controle.<sup>[9]</sup>

### 2.3.3 - Contrôles de temperatura e vazão da água no molde:

O fluxo de água fria nos diferentes setores do molde, é controlado por meio de transmissores de pressão diferencial acoplados diretamente na linha de vazão. O ajuste do fluxo de água é geralmente monitorado por válvulas de fechamento e abertura automática localizadas na entrada da linha de vazão.

Termopares ou termistores são instalados para medir de forma independente a temperatura de descarga da água para cada setor do

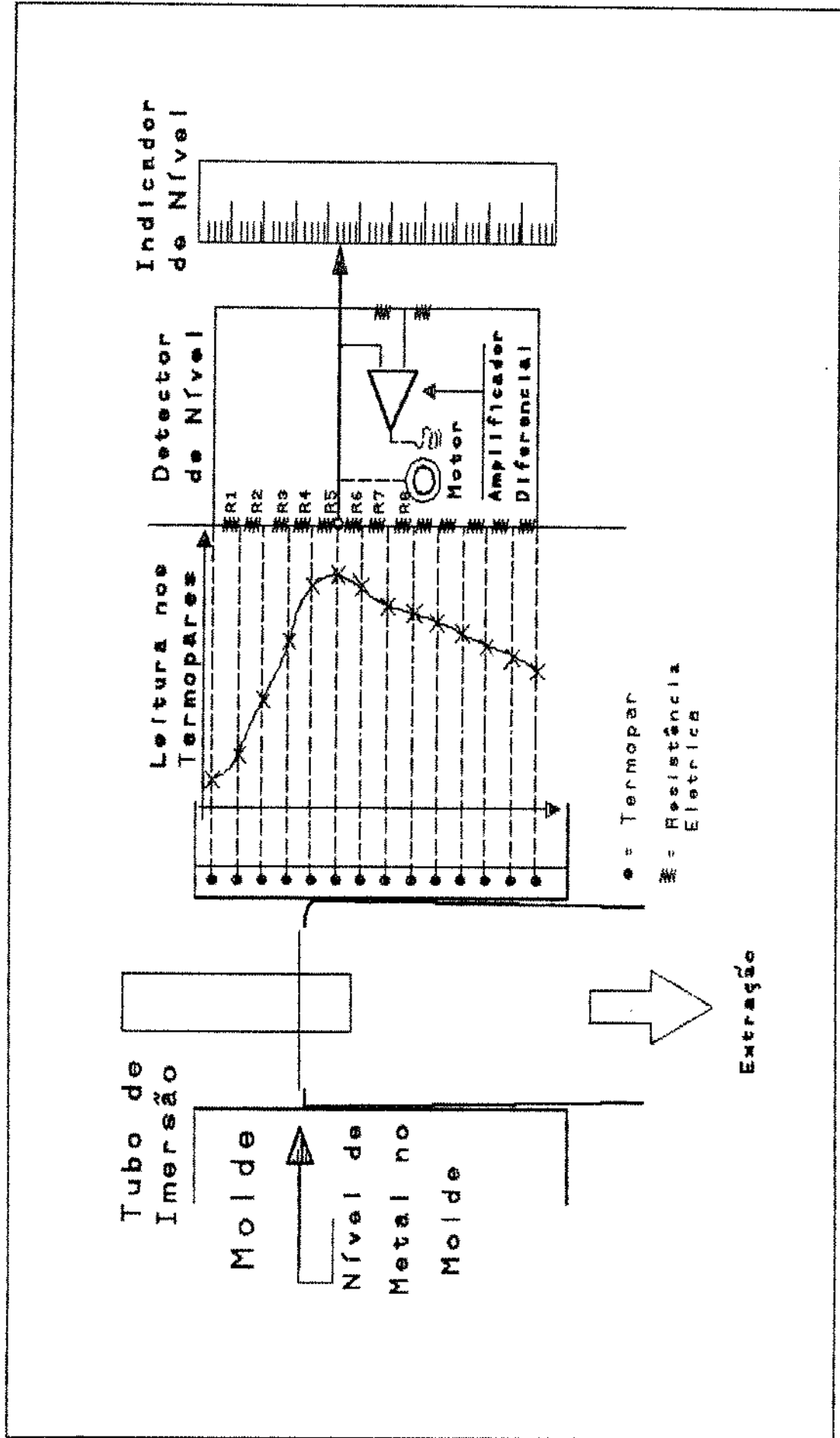


Figura 2.11 - Esquema do sensor termoeletrico de nível do molde

molde. Cada medida de temperatura de descarga é comparado com a leitura de um termopar no braço de entrada da água no molde, e o aumento de temperatura é registrado.

Medidas de pressão são realizadas na direção da água fria do molde, controlando o circuito de descarga da água no molde.

Um desvio de alguma medida de pressão do valor normal é considerada uma indicação da existência de problemas no resfriamento do molde.

#### **2.3.4 - Contrôlo da frequência de oscilação do molde:**

A oscilação do molde é feita por um dispositivo mecânico motorizado, minimizando assim o problema de aderência do lingote ao molde. O movimento descendente acompanha a velocidade de produção do lingote e a velocidade ascendente é pelo menos duas vezes maior.

A frequência de oscilação é função da velocidade de produção sendo esta um fator controlado pelo sinal de indicação da velocidade de produção na linha de controle de tração. Para eventuais mudanças da velocidade de produção, a frequência de oscilação do molde é automaticamente ajustada para manter a característica de não permitir que o metal se cole ao molde.

#### **2.3.5 - Contrôlo da velocidade de produção no molde:**

O lingote é retirado do molde por uma série de roletes, numa taxa correspondente a adição de metal no molde pelo distribuidor.

A velocidade dos roletes é dada através de motores de corrente contínua, que são alimentados pelo computador central e interligados a um sistema de regulação da corrente contínua de alimentação.

O sistema de contrôlo da velocidade de produção processa dados da temperatura de superfície e através deste regula a velocidade

de produção dentro de faixas aceitáveis à remoção de calor do lingote, ao longo da linha de resfriamento.

### 2.3.6 - Contrôles da pressão e temperatura da água dos chuveiros de resfriamento secundário:

O controle preciso do resfriamento secundário, no lingotamento contínuo é fator de importância para a alta produção de lingotes.

A eficiência dos chuveiros é combinada com a remoção de calor requerida, para garantir uma base na configuração das zonas de resfriamento. São usadas de 4 à 10 zonas, independentes e dispostas em conjunto, cobrindo toda a superfície do lingote. Cada zona disposta ao longo do comprimento são separadas em 11 à 16 segmentos permitindo uma distribuição de água em toda a face.

A instrumentação de cada segmento de chuveiros inclui controladores do tipo *Proporcional Integral* ajustando o fluxo de água através do computador central.

Os ajustes de saída são feitos em válvulas elétricas necessárias à manutenção do fluxo de água para os valores de controle. As válvulas elétricas são ideais para estas aplicações devido a segurança de suas posições.

As variáveis usadas como controle de entrada incluem a configuração dos segmentos de resfriamento, temperatura de superfície desejada, temperatura da água dos chuveiros, velocidade de lingotamento e história do resfriamento do lingote.

### 2.3.7 - Medidas da temperatura superficial:

Medidas na superfície do lingote ao longo da solidificação, são de importância elevada para um bom efeito de controle no resfriamento secundário e terciário.

Desde que o lingote se mantenha em constante movimento de retirada no processo, este tipo de medida deve ser feito por instrumentos que não toquem sua superfície. Um tipo de instrumento muito usado é o *pirometro ótico de medição*, que consiste num dispositivo de medida de radiação emitida e através desta conhece a temperatura da superfície do material emissor. Possui uma estreita banda de radiação pirométrica, com uma célula de silício detectora que recebe a radiação emitida por um jogo de lentes, e direciona esta energia ao centro da célula.

Sensores óticos são utilizados para a monitoração da temperatura superficial do lingote na saída de cada região de chuveiros. Este tipo de sensor é preferido pelo fato de não ter a necessidade de estar em contacto físico com o lingote, pois o mesmo se encontra em movimento nesta região do processo. Estes medidores são distribuídos ao longo do lingote, localizados em pontos estratégicos, como na saída das regiões de chuveiros. Cada pirometro é montado sobre um equipamento que possui um bico de escape de ar, posicionado na direção das lentes, facilitando assim sua limpeza sem a necessidade de retirada física do sistema.

Resultados com este tipo de aparelho, mostraram erros da ordem de  $\pm 28^{\circ}\text{C}.$

#### 2.3.8 - Medidas nas tensões de tração no lingote:

Regulação da velocidade e carga de balanço são usadas para distribuir os esforços de tração total de maneira homogênea ao longo do comprimento do lingote.

Indicadores de *corrente-direta* de carga são colocados nos motores de puxamento, oscilação, guias de roletes para o curvamento e estiramento do lingote. Estes indicadores são usados para ajustar a força de trabalho total que é exercida no produto lingotado.

Deste modo pode-se trabalhar as velocidades de produção sem que com isto venha-se prejudicar o desempenho do equipamento ou do produto final.



## CAPITULO 03 - DESENVOLVIMENTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO NO LINGOTAMENTO CONTÍNUO

---

### 3.1. MODELOS MATEMÁTICOS

A maioria dos fenômenos físicos encontrados em problemas de engenharia, podem ser descritos em termos de equações diferenciais, em geral sob a forma de equações que envolvem mais de uma variável, conhecidas como "Equações a Diferenciais Parciais (E.D.P.)".

Apesar da importância das E.D.P. na engenharia, devido a praticidade em se equacionar um fenômeno físico, nem sempre a resolução de tais equações é uma tarefa fácil. Grande parte destas equações não podem ser solucionadas analiticamente, sendo portanto necessário o emprego de técnicas numéricas.

As técnicas numéricas são ferramentas muito poderosas permitindo grande flexibilidade de sua utilização. Na literatura pode-se encontrar uma imensa variedade destas técnicas, contudo, casos particulares de problemas envolvendo a variação das condições de contorno, tornam sua utilização limitada pela necessidade de uma nova programação a cada vez que se variam as condições, requerendo muito tempo de cálculo.

No caso particular de problemas que envolvem fluxo de calor através de interfaces entre diferentes materiais ou fases distintas, tem-se o acréscimo de efeitos que podem dificultar ainda mais a utilização de um método numérico aplicado a manipulação de uma E.D.P..

O problema da solidificação, envolvendo o fenômeno de transferência de calor dentro do processo de Lingotamento Contínuo consiste num importante aspecto de estudo para o controle ótimo do sistema. A simulação numérica deste problema, permite o conhecimento prévio do efeito físico que ocorre no sistema real.

Taxas elevadas da retirada de calor do sistema podem levar a formação de trincas superficiais depreciando o produto, e taxas muito baixas podem causar a quebra do lingote na saída do molde devido a formação insuficiente de casca solidificada neste ponto do processo. As propriedades físicas do molde também exercem considerável influência na taxa de solidificação, sendo então necessário incluir estas propriedades na modelagem matemática do sistema. A fenda de ar formada entre o metal solidificado e o molde, devido as contrações geradas na passagem do metal líquido para o estado sólido, equivale a um aumento da resistência de passagem de calor do metal para o exterior. As influências dos fenômenos de condução, convecção e radiação que regem o processo de solidificação dentro do equipamento de Lingotamento Contínuo variam nas diferentes etapas do equipamento, variando deste modo as condições de contorno do modelo aplicado. Variações das propriedades térmicas dos materiais em função da temperatura, além da geração interna de calor, variando no tempo e espaço incluem dificuldades ao modelo de trabalho.

As técnicas numéricas que se utilizam de diferenças finitas tem-se mostrado eficientes e flexíveis e têm apresentado boa aplicabilidade em fenômenos que envolvem transferência de calor, caracterizando-se por:

- Aplicação em sistemas uni, bi e tridimensionais;
- Aplicação em sistemas com propriedades físicas variáveis no espaço e/ou tempo;
- Facilidade de implementação em sistemas com variações das condições de contorno;
- Subdivisão do corpo físico em nós de tamanhos e formas distintas, permitindo um mapeamento espacial total;
- Facilidade de implementação em programas numéricos, solúveis por um computador digital.

A escolha do método de diferenças finitas e não o método de elemento finitos deve-se principalmente a simplicidade da geometria dos produtos lingotados continuamente (secções quadradas, circulares ou retangulares principalmente). O método de diferenças finitas, apresentado neste capítulo, consiste basicamente numa técnica que discretiza o tempo e o espaço, de um fenómeno físico contínuo, descrito por uma E.D.P.. A resolução discreta, se dá por equações lineares de fácil solução, aplicadas sucessivamente para cada ponto do espaço dentro de cada intervalo de tempo.

### 3.2. CONCEITOS GERAIS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS (M.D.F.) NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS (E.D.P.)

#### 3.2.1. Substituição de derivadas parciais por diferenças finitas<sup>[24, 25]</sup>:

Consideremos uma função dependente  $\theta = \theta(\theta)$  a qual admite-se ser contínua e suficientemente derivável em relação ao ponto  $\theta_i$ . Podemos expandi-la em série de Taylor para valores da função  $\theta$  nos pontos  $(\theta_i)$  e  $(\theta_i + \Delta\theta)$  ou nos pontos  $(\theta_i)$  e  $(\theta_i - \Delta\theta)$ , onde  $\Delta\theta$  representa o subintervalo de derivação. Assim:

$$\begin{aligned} \theta(\theta_i + \Delta\theta) = \theta(\theta_i) + \Delta\theta \left. \frac{\partial\theta}{\partial\theta} \right|_i + \frac{\Delta\theta^2}{2!} \left. \frac{\partial^2\theta}{\partial\theta^2} \right|_i + \dots \\ \dots + \frac{\Delta\theta^{n-1}}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1}\theta}{\partial\theta^{n-1}} \right|_i + \mathbb{E}(\Delta\theta^n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ou:

$$\begin{aligned} \theta(\theta_i - \Delta\theta) = \theta(\theta_i) - \Delta\theta \left. \frac{\partial\theta}{\partial\theta} \right|_i + \frac{\Delta\theta^2}{2!} \left. \frac{\partial^2\theta}{\partial\theta^2} \right|_i + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \frac{\Delta\theta^{n-1}}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1}\theta}{\partial\theta^{n-1}} \right|_i + \mathbb{E}(\Delta\theta^n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

O termo  $E(\Delta\theta^n)$  corresponde ao erro de truncamento do  $n$ -ésimo termo da equação dado por<sup>(27)</sup>:

$$E(\Delta\theta^n) = \frac{\Delta\theta^n}{n!} \frac{\partial^n \theta(x_i + \xi\Delta\theta)}{\partial\theta^n} \quad (3.3)$$

onde:  $0 < \xi < 1$

Somando as equações (3.1) e (3.2) truncadas no termo de 3º-grau, obtêm-se:

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial\theta^2} \right|_i = \frac{\theta(x_i + \Delta\theta) - 2\theta(x_i) + \theta(x_i - \Delta\theta)}{\Delta\theta^2} + E(\Delta\theta^3) \quad (3.4)$$

Chamando  $\begin{cases} \theta(x_i) = \theta_i \\ \theta(x_i + \Delta\theta) = \theta_{i+1} \\ \theta(x_i - \Delta\theta) = \theta_{i-1} \end{cases}$

reescrevemos (3.4) como:

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial\theta^2} \right|_i = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta\theta^2} + E(\Delta\theta^3) \quad (3.5)$$

A equação (3.5) é chamada de *diferença finita central a 3-pontos do ponto i*.

Truncando a série da equação (3.1) no termo de 2º-grau obtêm-se:

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial\theta} \right|_i = \frac{\theta(x_i + \Delta\theta) - \theta(x_i)}{\Delta\theta} + E(\Delta\theta^2) \quad (3.6)$$

ou:

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial\theta} \right|_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta\theta} + E(\Delta\theta^2) \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é chamada de *1ª diferença de avanço do ponto i*.

Truncando a série da equação (3.2) no termo de 2º-grau

obtêm-se:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right|_i = \frac{\theta(\theta_i) - \theta(\theta_i - \Delta\theta)}{\Delta\theta} + \mathbb{E}(\Delta\theta^2) \quad (3.8)$$

ou:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right|_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta\theta} + \mathbb{E}(\Delta\theta^2) \quad (3.9)$$

A equação 3.9 é chamada de 1ª diferença de retorno do ponto  $i$ .

O erro de truncamento das equações (3.5), (3.7) e (3.9) representados respectivamente por  $\mathbb{E}(\Delta\theta^3)$  e  $\mathbb{E}(\Delta\theta^2)$  pode ser minimizado com a utilização de intervalos de derivação menores, assim:

$$\mathbb{E}(\Delta\theta^n) \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad \Delta\theta \rightarrow 0$$

O próprio conceito de derivada já é requisito suficiente para se verificar a realidade da minimização do erro através da redução do intervalo de derivação, onde:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left. \frac{\theta(\theta_i + \Delta\theta) - \theta(\theta_i)}{\Delta\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right|_i \quad (3.10)$$

### 3.3. CONCEITOS SOBRE ESTABILIDADE, CONVERGÊNCIA E ERROS DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS APLICADAS A SISTEMAS DE COMPUTADOR

Ao se estudar um fenômeno físico, através de um modelo numérico que aproxime matematicamente a realidade física, deve-se considerar alguns fatores de importante escala na soluções via métodos numéricos.

Os fatores mais importantes são<sup>[24]</sup>:

- 1 - Erro obtido
- 2 - Estabilidade
- 3 - Convergência

A seguir discute-se um pouco a respeito a cada um destes fatores.

### 3.3.1. Erro obtido em soluções numéricas:

O erro obtido em soluções numéricas, basicamente consiste de dois tipos:

- i) Erro de arredondamento
- ii) Erro de truncamento

3.3.1.1. O erro de arredondamento ocorre quando limita-se o número de valores significativos após a vírgula.

Para um número pequeno de iterações realizadas em um dado modelo, o erro de arredondamento pode ser desprezível, mas no entanto se forem realizadas iterações da ordem de milhares ou até mesmo milhões, este erro pode tornar-se desastroso, levando o modelo numérico a valores totalmente errôneos em relação ao fenômeno físico estudado.

Para tentar evitar este tipo de erro, deve-se previamente conhecer o computador ou a máquina numérica utilizada, para saber a capacidade de valores significativos após a vírgula que o mesmo pode armazenar, e refletir sobre esta capacidade em relação ao número de iterações que se pretende executar. Levando-se em consideração estes dois parâmetros pode-se conseguir uma minimização do erro de arredondamento no modelo utilizado.

3.3.1.2. O erro de truncamento ocorre como resultado da aproximação de derivadas parciais por diferenças finitas devido ao truncamento da *série de Taylor*. Como visto anteriormente a quantidade designada por  $E(\Delta\theta^n)$ , corresponde ao erro de truncamento da série após o *n*-ésimo termo. Podemos reduzir este erro com a diminuição de ' $\Delta\theta$ ' o qual corresponde ao intervalo de diferença da série.

### 3.3.2. Estabilidade de um método numérico:

Podemos classificar a solução obtida por um método numérico em três tipos:

- 1 - Solução instável divergente
- 2 - Solução instável convergente
- 3 - Solução estável

3.3.2.1. Solução instável divergente, ocorre quando o resultado apresentar uma instabilidade de crescimento numérico ilimitado, tendendo a valores infinitos. Observe o efeito ilustrativo do perigo deste erro na figura 3.1.

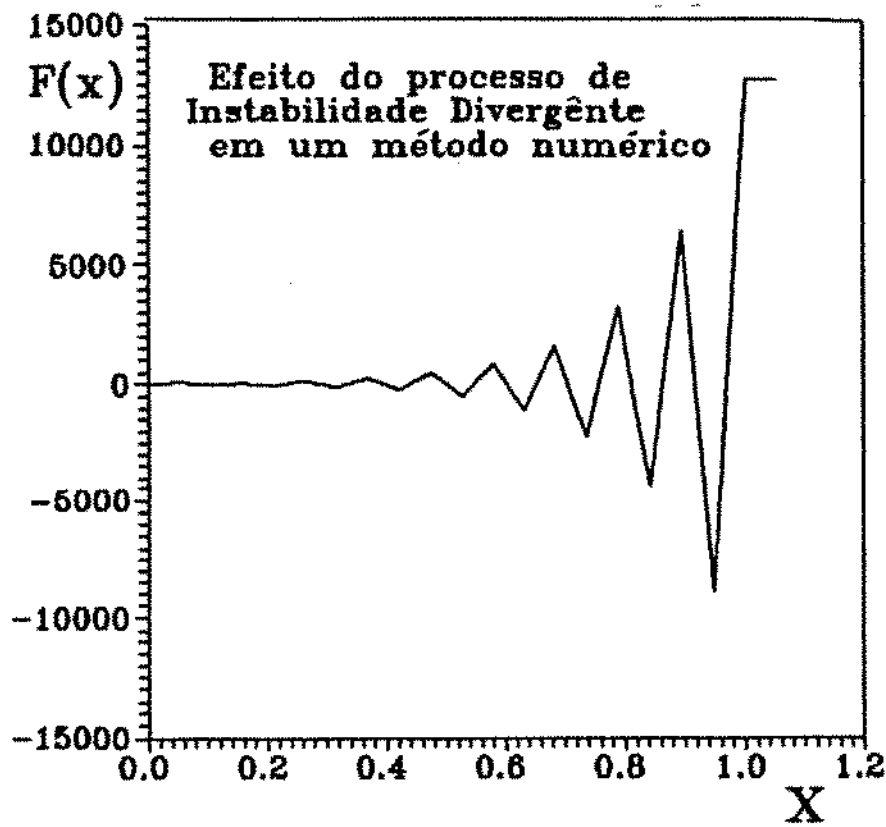


Figura 3.1 - Instabilidade divergente de um método numérico

3.3.2.2. Solução instável convergente, ocorre quando o resultado apresentar uma instabilidade inicial convergindo a um resultado limite que corresponde a solução do modelo. Veja o exemplo na figura 3.2.

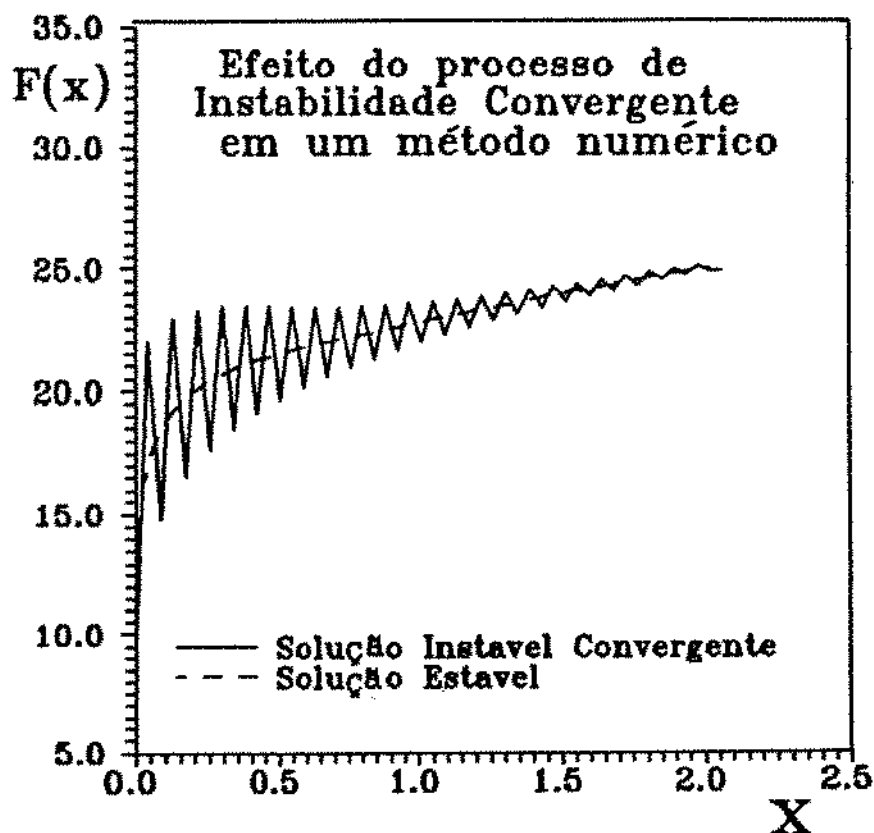


Figura 3.2 - Instabilidade Convergente de um método numérico

3.3.2.3. Solução estável, ocorre quando o modelo comporta-se de maneira convergente desde o início das iterações, resultando numa solução limite.

O conhecimento prévio do comportamento do modelo numérico em relação a estabilidade, pode evitar resultados desastrosos, o que no entanto não garante que o modelo matemático utilizado represente corretamente o sistema físico em estudo. Isto geralmente ocorre devido a outros fatores como por exemplo a equação diferencial não estar adequadamente representada pela equação de diferenças finitas, ou outros tipos de erros estarem atuando no resultado.



### 3.3.3. Convergência:

Um dos maiores problemas que surgem, ao se trabalhar com um método numérico, é basicamente o comportamento do mesmo frente a variação dos parâmetros que geram as equações numéricas.

Na utilização do Método de Diferenças Finitas (M.D.F.), a substituição de derivadas de 1<sup>a</sup> ordem por *diferença finita de avanço* gera equações de convergência numérica limitada. Nestas equações deve-se evitar coeficientes negativos, pois os mesmos podem levar o método a resultados errôneos, como visto nas figuras 3.1 e 3.2.

Apesar da utilização de *diferença finita de avanço* gerar equações onde o resultado pode ser encontrado de forma direta (definido como modo explícito), o limite de estabilidade deve ser conhecido, e condições comparativas em alguns parâmetros devem ser realizados garantindo assim que o modelo numérico venha trabalhar de forma conveniente.

A substituição de derivadas de 1<sup>a</sup> ordem por *diferença finita de retorno*, leva o M.D.F. a trabalhar no modo implícito onde as equações não podem ser resolvidas de forma direta, mas em compensação estas equações serão sempre convergentes, não possuindo nenhum limite de estabilidade.

Na sequência deste capítulo serão apresentados os dois modos de trabalho do M.D.F. (Explícito e Implícito), acrescentando detalhes de suas aplicações.

### 3.4. DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO DE SOLIDIFICAÇÃO

O fenômeno de transferência de calor envolvido no problema da solidificação é dado por uma E.D.P. conhecida como 'Equação Geral de Condução de Calor em Regime Transitório'<sup>[24,25]</sup>, dada por:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla (k \cdot \nabla T) - \dot{q} = 0 \quad (3.11)$$

As constantes da equação são ' $\rho$ ,  $c$  e  $k$ ' que correspondem respectivamente a densidade, calor específico e condutividade térmica do material no qual ocorre o fenômeno de transferência de calor.

O termo ' $\partial T / \partial t$ ' equivale ao gradiente térmico no tempo e o termo ' $\nabla T$ ' equivale aos gradientes térmicos dados nas direções de espaço:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.12)$$

O valor de ' $\dot{q}$ ' equivale ao termo de geração interna de calor de um material na transformação de fase. Pode ser aproximado, no caso da solidificação de uma liga binária, por <sup>[28,29]</sup>:

$$\dot{q} = \rho \cdot H \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (3.13)$$

onde ' $H$ ' equivale ao calor latente de fusão do material e ' $\partial f_s / \partial t$ ' corresponde a variação da fração solidificada no tempo, e pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{\partial f_s}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.14)$$

Aplicando a equação 3.14 na equação 3.13 e o resultado na equação 3.11, tem-se:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \rho \cdot H \cdot \frac{\partial f_s}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.15)$$

O termo ' $H \cdot \partial f_s / \partial T$ ' na equação 3.15 pode ser entendido como um pseudo calor específico para o caso particular da solidificação de uma liga binária, onde para  $H \cdot \partial f_s / \partial T \ll c$ , a velocidade de solidificação é fortemente desacelerada pela liberação do calor latente do material.

Chamando 
$$\left[ c - H. \frac{\partial f_s}{\partial T} \right] = \bar{c} \quad (3.16)$$

e admitindo o material sendo isotrópico:  $k_x = k_y = k_z = k$  então pode-se reescrever a equação 3.15 na forma:

$$\rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (3.17)$$

O Método Numérico de Diferenças Finitas discretiza um corpo físico no espaço em diferenças finitas de dimensões ' $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ ' no qual ocorre um fenômeno físico, conforme visto na figura 3.3, linearizando a equação a Derivadas Parciais que descreve o fenômeno, com substituição das derivadas parciais pelas diferenças finitas, conforme as equações 3.5, 3.7 e 3.9. O centro de cada volume finito definido por ' $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ ' recebe o nome de ponto nodal. Desta forma a equação linear gerada é aplicada a cada ponto para cada intervalo discreto de tempo (' $\Delta t$ ').

A substituição da Derivada Parcial de 1<sup>a</sup> ordem da equação geral do calor ( $\partial T / \partial t$ ) pode ser feita pela 1<sup>a</sup> diferença de avanço (equação 3.7) ou pela 1<sup>a</sup> diferença de retorno (equação 3.9). A substituição da derivada parcial de 1<sup>a</sup> ordem pela 1<sup>a</sup> diferença de avanço define o '*Modo Explícito*' de trabalho do Método de Diferenças Finitas, e a substituição pela 1<sup>a</sup> diferença de retorno define o '*Modo Implícito*'.

A seguir descrevemos o trabalho matemático de ambos os modos para as formas Unidimensional e Bidimensional acrescentando detalhes de suas utilizações.

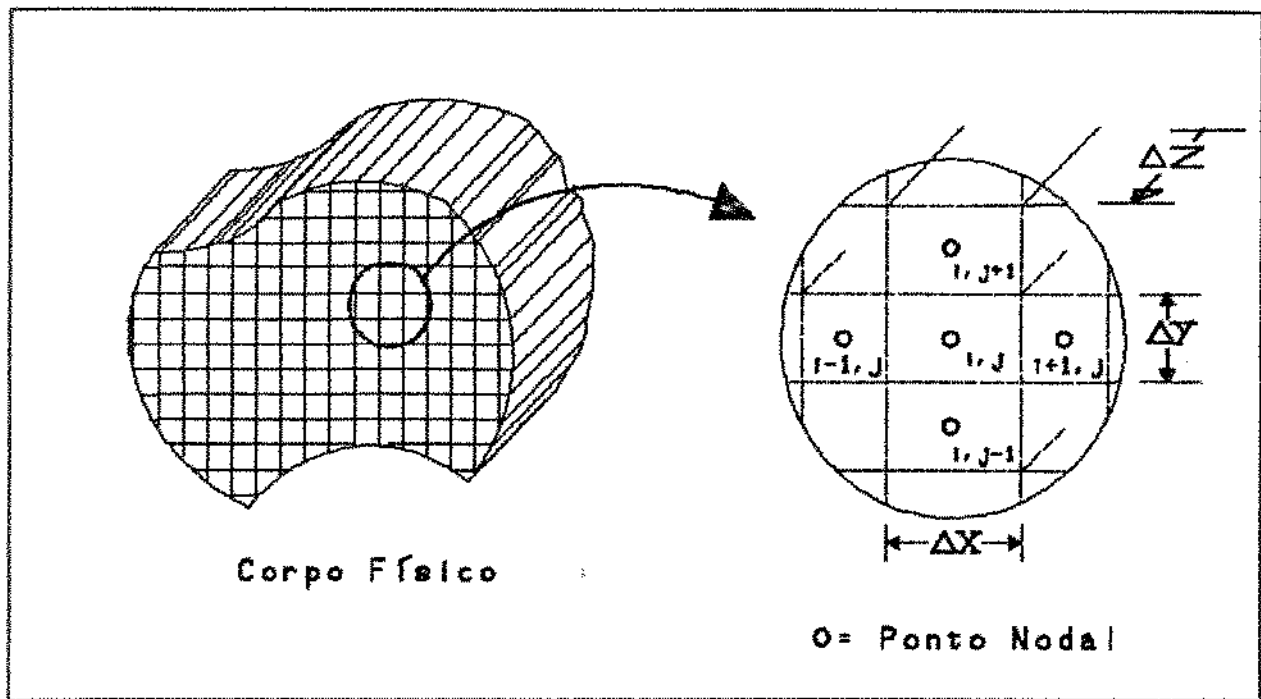


Figura 3.3 - Discretização de um corpo físico no espaço via o Método de Diferenças Finitas

#### 3.4.1. A Forma Unidimensional do M.D.F.:

Apresentaremos inicialmente a forma unidimensional de trabalho do Método de Diferenças Finitas, por facilitar a compreensão em relação a aplicação bidimensional, a qual será realmente utilizada para o modelo do Equipamento de Lingotamento Contínuo. Assim admitindo, na equação 3.17, que não exista gradiente térmico nos eixos 'Y' e 'Z', onde:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.18)$$

Tem-se:

$$\rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad (3.19)$$

Aplicando na equação 3.19 a substituição das derivadas parciais pelos termos de diferenças finitas, resulta a seguinte equação:

$$\rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \cdot \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.20)$$

Onde os superíndices ' $n$ ' e ' $n+1$ ' representam o tempo conhecido e o tempo incrementado de ' $\Delta t$ ' respectivamente e os subíndices ' $i$ ,  $i-1$  e  $i+1$ ' representam o ponto de trabalho, o ponto anterior no intervalo de ' $\Delta x$ ' e o ponto posterior no intervalo de ' $\Delta x$ ' respectivamente.

Observar que para a equação acima a derivada parcial de 1ª ordem ' $\partial T / \partial t$ ' foi substituída pela 1ª diferença de avanço  $((T_i^{n+1} - T_i^n) / \Delta t)$  → Equação 3.7. Assim a equação final gerada por esta substituição será do '*Modo Explícito*' do Método de Diferenças Finitas.

Multiplicando a equação 3.20 por ' $\Delta t \cdot \Delta x$ ', onde ' $\Delta t$ ' é a área de passagem do fluxo térmico dado por ' $\Delta y \cdot \Delta z$ ' (conforme mostrado na figura 3.4), chega-se em:

$$\Delta t \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \Delta t \cdot k \cdot \frac{(T_{i-1}^n - T_i^n) + (T_{i+1}^n - T_i^n)}{\Delta x} \quad (3.21)$$

A equação 3.21 pode ser escrita semanticamente por:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Aumento da energia} \\ \text{interna associada} \\ \text{ao nó 'i'} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \sum \text{fluxos líquidos de calor de todos} \\ \text{os nós vizinhos, em direção ao nó} \\ \text{'i', durante o tempo } \Delta t \end{array} \right] \quad (3.22)$$

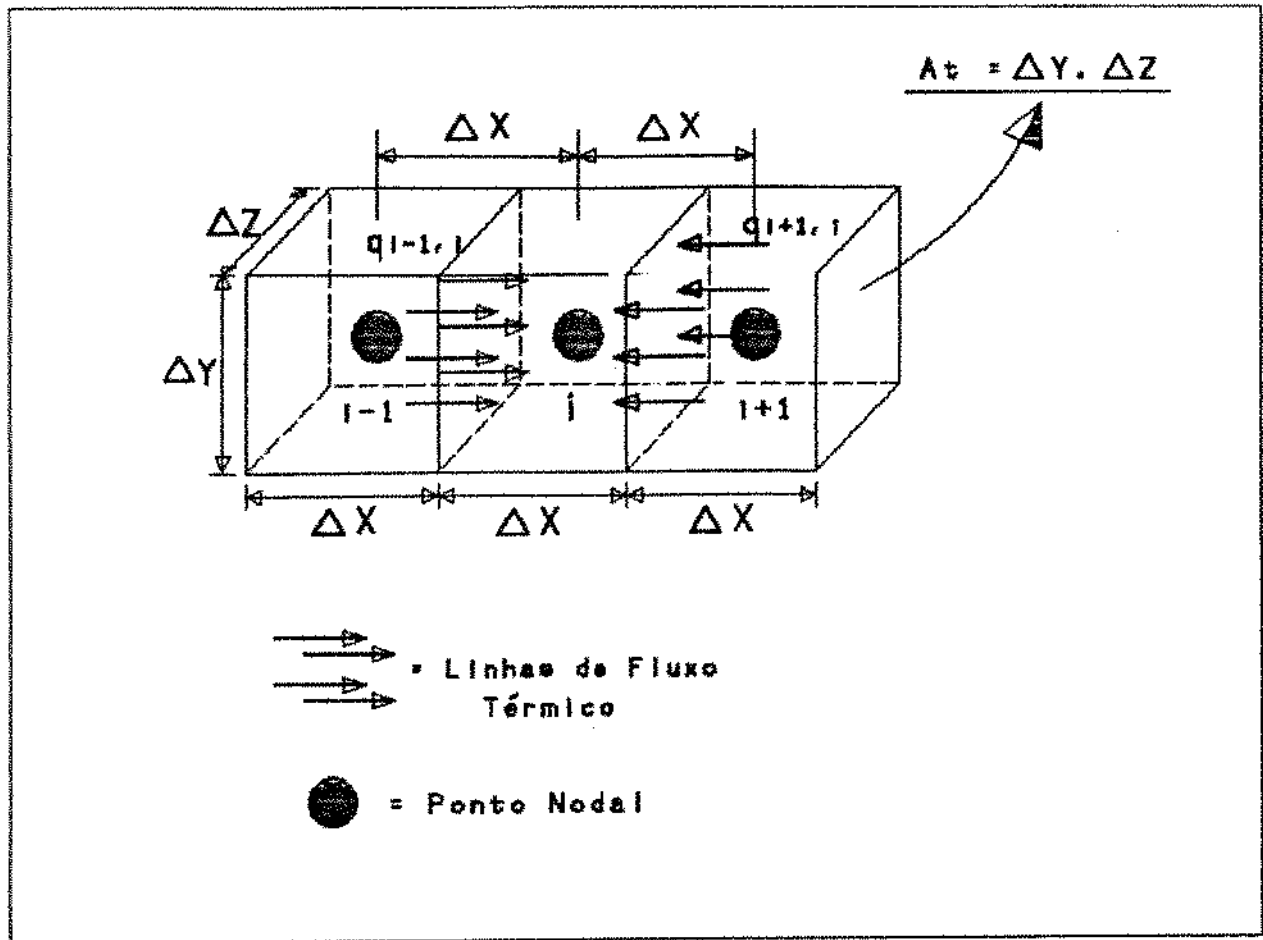


Figura 3.4 - Representação esquemática do M.D.F. aplicado ao fenômeno de transferência de calor

O aumento da energia é dado pelo termo a esquerda da equação 3.21 onde ' $\Delta t \cdot \Delta x$ ' é o volume finito do ponto ' $i$ ' e  $T_i^{n+1} - T_i^n = \Delta T_i^{\Delta n}$  é a variação térmica do ponto ' $i$ ' no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Tendo que a capacidade térmica ( $Ct$ ) de um material é dada por ' $\rho \cdot c \cdot Vol.$ ', sendo ' $Vol$ ' o volume do material, então o acúmulo de energia no ponto ' $i$ ' pode ser escrito por:

$$Ct_i \cdot \frac{\Delta T_i^{\Delta n}}{\Delta t} \tag{3.23}$$

O fluxo de calor 'q' associado a um ponto 'i' é dado por <sup>[24]</sup>:

$$\frac{At.k}{\Delta x} \cdot \Delta T_{\Delta i}^n \quad (3.24)$$

onde o termo 'At.k/Δx' equivale a condutância térmica ( $G_t = \frac{1}{R_t}$ ) no eixo do fluxo de calor ('X'), influente na variação de temperatura ' $\Delta T_{\Delta i}^n$  ( = ' $T_{i-1}^n - T_i^n$  ' ou ' $T_{i+1}^n - T_i^n$  ' )' dentro do intervalo de espaço 'Δx'. Assim a equação 3.21 pode ser reescrita de modo genérico como:

$$Cti \cdot \frac{\Delta T_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\Delta T_{-\Delta i}^n}{R_{t_{i-1,i}}} + \frac{\Delta T_{+\Delta i}^n}{R_{t_{i+1,i}}} \quad (3.25)$$

Sendo  $R_{t_{i-1,i}}$  e  $R_{t_{i+1,i}}$  as resistências térmicas associadas ao ponto 'i' em direção ao ponto 'i-1' e em direção ao ponto 'i+1' respectivamente, dadas por:

$$R_{t_{i-1,i}} = R_{t_{i+1,i}} = \frac{\Delta x}{At.k} \quad (3.26)$$

$$\Delta T_{-\Delta i}^n = T_{i-1}^n - T_i^n \quad \rightarrow \text{1}^{\text{a}} \text{ diferença de retorno} \quad (3.27)$$

$$\Delta T_{+\Delta i}^n = T_{i+1}^n - T_i^n \quad \rightarrow \text{1}^{\text{a}} \text{ diferença de avanço} \quad (3.28)$$

A equação 3.25 corresponde a equação do *Modo Explícito* do M.D.F. e é escrita na sua forma mais conhecida por:

$$T_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{Cti \cdot R_{t_{i-1,i}}} \cdot T_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{Cti \cdot R_{t_{i+1,i}}} \cdot T_{i+1}^n + \dots$$

$$\dots + \left[ 1 - \Delta t \cdot \left( \frac{1}{Cti \cdot R_{t_{i-1,i}}} + \frac{1}{Cti \cdot R_{t_{i+1,i}}} \right) \right] * T_i^n \quad (3.29)$$

A equação 3.29 é estável para valores onde:

$$\frac{1}{\Delta t} \leq \left[ \frac{1}{C l_i \cdot R_{t_{i-1,i}}} + \frac{1}{C l_i \cdot R_{t_{i+1,i}}} \right] \quad (3.30)$$

Pode-se observar pela figura 3.4 que a dimensão nodal ' $\Delta x$ ' é um valor constante, fixo, imposto ao modelo de trabalho, logo se desejarmos aumentar a precisão do modelo deve-se reduzir o valor de ' $\Delta x$ ', onde conseqüentemente perder-se-á em velocidade de processamento computacional, pois a redução de ' $\Delta x$ ' implica no aumento de pontos para o mapeamento total do corpo físico em estudo. Também pela definição anterior dos valores analíticos de  $R_{t_{i-1,i}}$  e  $R_{t_{i+1,i}}$  como funções da condutividade térmica do material ( $k$ ), verifica-se que a equação 3.25 apenas pode ser aplicada nos pontos internos do corpo que sofre o fenômeno de transferência de calor. Para os pontos de contorno, tem-se o efeito do convecção e/ou radiação, sendo portanto necessário modificar esta equação para as condições de contorno do corpo físico.

Entretanto observando a equação 3.25 verifica-se semelhanças com a teoria de circuitos elétricos formados por malhas de resistores e capacitores. Com o auxílio desta teoria elétrica, e a analogia com sistemas térmicos, pode-se eliminar os problemas citados anteriormente, pois cada ponto nodal pode ser visto como um circuito resistivo e capacitivo individualmente, possuindo dimensões próprias. Isto elimina a necessidade de se elevar a precisão com o necessário aumento geral do número de nós, pois independentemente das dimensões finitas de cada nó, reduz-se apenas os pontos nas regiões do corpo físico onde deseja-se maior precisão. Além disso, o problema da transferência de calor via convecção também pode ser visto como uma resistência à passagem do fluxo de calor para o material, mantendo com a analogia a consistência das equações aplicadas ao modelo.



Na seqüência deste trabalho serão expostos os detalhes da analogia a circuitos elétricos dentro do M.D.F. para a solução do problema de transferência de calor, explicando de forma mais clara suas vantagens reais.

#### 3.4.1.1. Analogia de Sistemas Térmicos com a Teoria de Circuitos Elétricos Aplicados ao Método de Diferenças Finitas:

Utilizando-se de um circuito elétrico RC, como o da figura 3.5, pode-se equacioná-lo da seguinte forma<sup>(30,31)</sup> :

$$I_{i,i-1} = I_{ci} + I_{i+1,i} \longrightarrow I_{ci} = I_{i,i-1} - I_{i+1,i} \quad (3.31)$$

onde:

$$I_{i,i-1} = \frac{V_{i-1} - V_i}{(R_{i-1,i} + R_{i,i-1})} \quad (3.32)$$

$$I_{i+1,i} = \frac{V_i - V_{i+1}}{(R_{i,i+1} + R_{i+1,i})} \quad (3.33)$$

$$I_{ci} = C_i \cdot \frac{\Delta V_i^{\Delta n}}{\Delta t} \quad (3.34)$$

sendo:  $I_{i,j}$  = Corrente elétrica

$V_i$  = Tensão elétrica

$R_{i,j}$  = Resistência elétrica

$C_i$  = Capacitância elétrica

A equação 3.34 para o modo explícito do M.D.F. é escrita como:

$$I_{ci} = C_i \cdot \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} \longrightarrow \text{diferença de avanço} \quad (3.35)$$

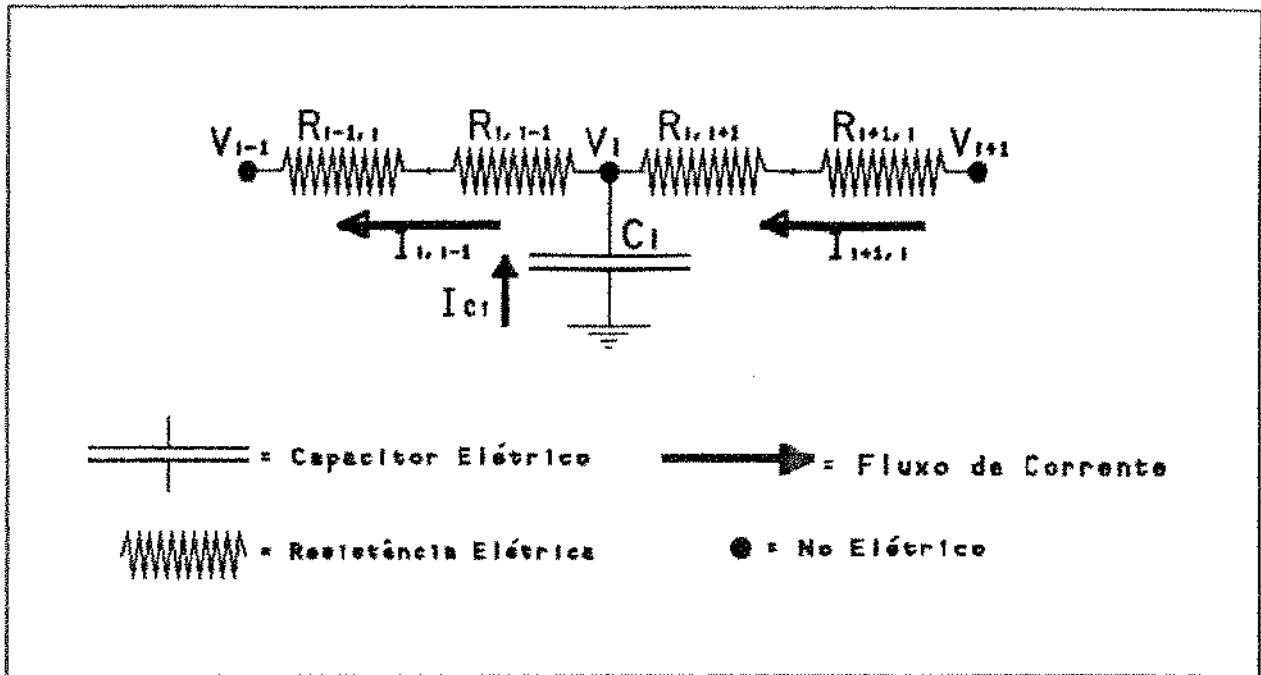


Figura 3.5 - Circuito elétrico para a aplicação analógica a sistemas térmicos pelo M.D.F.

e para o modo implícito do M.D.F., como:

$$I_{ci} = C_i \cdot \frac{V_i^p - V_i^{p-1}}{\Delta t} \rightarrow \text{diferença de retorno} \quad (3.36)$$

Trabalhando inicialmente para o modo explícito, substituímos as equações 3.32, 3.33 e 3.35 em 3.31 chegando em:

$$V_i^{p+1} = \frac{\Delta t}{\tau_{i,i-1}} \cdot V_{i-1}^p + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_{i,i}}\right) \cdot V_i^p + \frac{\Delta t}{\tau_{i,i+1}} \cdot V_{i+1}^p \quad (3.37)$$

onde o parâmetro ' $\tau$ ' equivale a constante de carga de um circuito RC, e são dados por:

$$\tau_{i,i-1} = C_i \cdot (R_{i,i-1} + R_{i-1,i}) \quad (3.38)$$

$$\tau_{i,i+1} = C_i \cdot (R_{i,i+1} + R_{i+1,i}) \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{\tau_{i,i}} = \frac{1}{\tau_{i,i-1}} + \frac{1}{\tau_{i,i+1}} \quad (3.40)$$

Observando a analogia elétrica entre as equações 3.37 e 3.29 pode-se equivaler alguns parâmetros térmicos:

Volt (V)	→ [V]	→	Temperatura (T)	→ [K]
Corrente (I)	→ [A]	→	Fluxo térmico (q)	→ [W]
Resistência elétrica (R)	→ [V/A]	→	Resistência térmica (Rt)	→ [K/W]
Capacitância elétrica (C)	→ [F]	→	Capacidade térmica (Ct)	→ [J/Kg.K]

Dentro da analogia acima os valores da resistência térmica, e da capacitância térmica são escritos pelas equações abaixo (conforme a representação nodal térmica via analogia mostrada na figura 3.6):

$$R_{t,i,i-1} = \frac{\Delta x_i / 2}{k_i \cdot A_t} \rightarrow \text{Para o efeito de condução;} \quad (3.41)$$

$$R_{t,i,i+1} = \frac{\Delta x_i / 2}{k_i \cdot A_t} \rightarrow \text{Para o efeito de condução;} \quad (3.42)$$

$$R_{t,i-1,i} = \frac{\Delta x_{i-1} / 2}{k_{i-1} \cdot A_t} \rightarrow \text{Para o efeito de condução;} \quad (3.43)$$

$$R_{t,i+1,i} = \frac{\Delta x_{i+1} / 2}{k_{i+1} \cdot A_t} \rightarrow \text{Para o efeito de condução;} \quad (3.44)$$

$$R_{t,i} = \frac{1}{h_c \cdot A_t} \rightarrow \text{Para o efeito de convecção;} \quad (3.45)$$

$$C_{t,i} = \rho_i \cdot c_i \cdot \Delta x_i \cdot A_t \quad (3.46)$$

$$A_t = \Delta y \cdot \Delta z \quad (3.47)$$

onde:

- $k_i$  = Condutividade térmica do ponto 'i'
- $\rho_i$  = Densidade do material do ponto 'i'
- $c_i$  = Calor específico do ponto 'i'
- $h_c$  = Coeficiente de convecção térmica
- $\Delta x_i$  = Parâmetro de rede nodal do ponto 'i'
- $At$  = Área de passagem do fluxo de calor
- $(\Delta x_i \cdot At)$  = Volume nodal do ponto 'i'

#### 3.4.1.1. A) Modo Explícito:

Assim a equação 3.37, via analogia, é reescrita do seguinte modo:

$$T_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\tau_{i,i-1}} \cdot T_{i-1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_{i,i}}\right) \cdot T_i^n + \frac{\Delta t}{\tau_{i,i+1}} \cdot T_{i+1}^n \quad (3.48)$$

$$\tau_{i,i-1} = C t_i \cdot (R t_{i,i-1} + R t_{i-1,i}) \quad (3.49)$$

$$\tau_{i,i+1} = C t_i \cdot (R t_{i,i+1} + R t_{i+1,i}) \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{\tau_{i,i}} = \frac{1}{\tau_{i,i-1}} + \frac{1}{\tau_{i,i+1}} \quad (3.51)$$

Observe que a equação 3.48 é semelhante a equação 3.29 dada anteriormente para a aplicação do M.D.F. no modo explícito dentro da equação geral de condução de calor. A única diferença é que na figura 3.4 (utilizada para a equação 3.29) a resistência entre dois pontos nodais é única e a figura 3.6 (utilizada para a equação 3.48) a resistência entre dois nós é dividida em duas resistências (uma para cada ponto do sistema), deste modo representa-se um ponto nodal de um sistema térmico como o dado na figura 3.6.

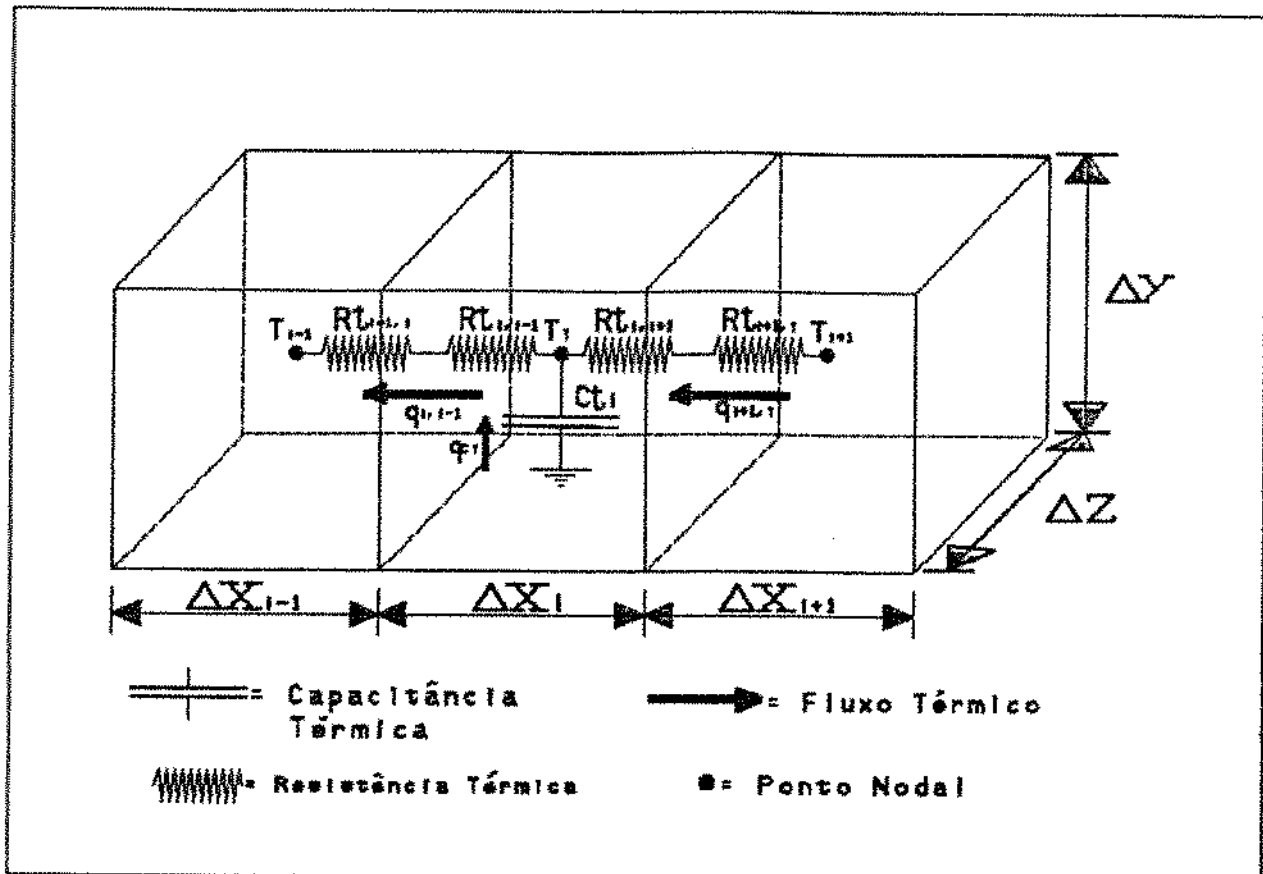


Figura 3.6 - Circuito térmico analógico a um circuito elétrico em representação nodal para o M.D.F.

Deste modo, através da analogia elétrica, cada elemento pode possuir dimensões finitas distintas.

A equação 3.48 é a solução do M.D.F., no *Modo Explícito*, para a equação de condução de calor, sendo o critério de estabilidade desta equação dado por:

$$\Delta t \leq \tau_i \quad (3.52)$$

O parâmetro ' $\tau$ ' introduzido no equacionamento acima equivale analogicamente a constante de tempo de um circuito elétrico RC, onde:

$$\tau = R \cdot C \text{ [seg.]} \quad (3.53)$$

#### 3.4.1.1.B) Modo Implícito:

Aplicando agora as equações 3.32, 3.33 e 3.36 em 3.31 e substituindo a analogia térmica chega-se na equação nodal para o modo implícito do M.D.F., dada por:

$$T_i^n = - \frac{\Delta t}{\tau_{i,i-1}} \cdot T_{i-1}^{n+1} + \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{i,i}} \right] \cdot T_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\tau_{i,i+1}} \cdot T_{i+1}^{n+1} \quad (3.54)$$

Na equação 3.54, apenas para o efeito de se manter a mesma linguagem numérica, o superíndice ' $n+1$ ' da equação 3.36 que equivale ao tempo conhecido, foi substituído pelo superíndice ' $n$ ' e o superíndice ' $n$ ' da equação 3.36 que equivale ao tempo conhecido incrementado de ' $\Delta t$ ', foi substituído por ' $n+1$ '.

Para o modo implícito do M.D.F. não existe limite de estabilidade (Ver item 3.3.3).

#### 3.4.1.2. Aplicações Práticas do M.D.F. no Efeito de Transferência de Calor Via Analogia com Circuitos Elétricos:

Apenas para efeito ilustrativo serão levantamos os passos para a utilização do modelo numérico em um efeito simples de transferência de calor (sem mudança de fase do material), utilizando os modos explícitos e implícitos do M.D.F..

Considere o sistema mostrado na figura 3.7. Para o modelo analógico este sistema é visto pela forma da figura 3.8.

#### Modo Explícito:

Passo 01: Encontrar os valores de ' $\tau$ ' da figura 3.8 para um número de nós inicialmente imposto (no caso particular tem-se 3 nós internos e 2 nós de contorno):

$$\tau_{1,0} = Ct_1 \cdot (Rt_{1,0} + Rt_{0,1}) \quad (3.55)$$

$$\tau_{1,2} = Ct_1.(Rt_{1,2} + Rt_{2,1}) \quad (3.56)$$

$$\tau_{1,1} = \frac{\tau_{1,0} * \tau_{1,2}}{\tau_{1,0} + \tau_{1,2}} \quad (3.57)$$

$$\tau_{2,1} = Ct_2.(Rt_{2,1} + Rt_{1,2}) \quad (3.58)$$

$$\tau_{2,3} = Ct_2.(Rt_{2,3} + Rt_{3,2}) \quad (3.59)$$

$$\tau_{2,2} = \frac{\tau_{2,1} * \tau_{2,3}}{\tau_{2,1} + \tau_{2,3}} \quad (3.60)$$

$$\tau_{3,2} = Ct_3.(Rt_{3,2} + Rt_{2,3}) \quad (3.61)$$

$$\tau_{3,4} = Ct_3.(Rt_{3,4} + Rt_{4,3}) \quad (3.62)$$

$$\tau_{3,3} = \frac{\tau_{3,2} * \tau_{3,4}}{\tau_{3,2} + \tau_{3,4}} \quad (3.63)$$

onde:

$$Rt_{c,1} = \frac{1}{h_0 * At} \quad (3.64)$$

$$Rt_{i,i-1} = Rt_{i,i+1} = \frac{\Delta x_i / 2}{k_i * At} \quad \rightarrow \text{para } i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (3.65)$$

e

$$Ct_i = \rho_i * c_i * \Delta x_i * At \quad \rightarrow \text{para } i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (3.66)$$

Passo 02: Resolver a malha.

Inicialmente será aplicado o modo explícito; utilizando a equação 3.48:

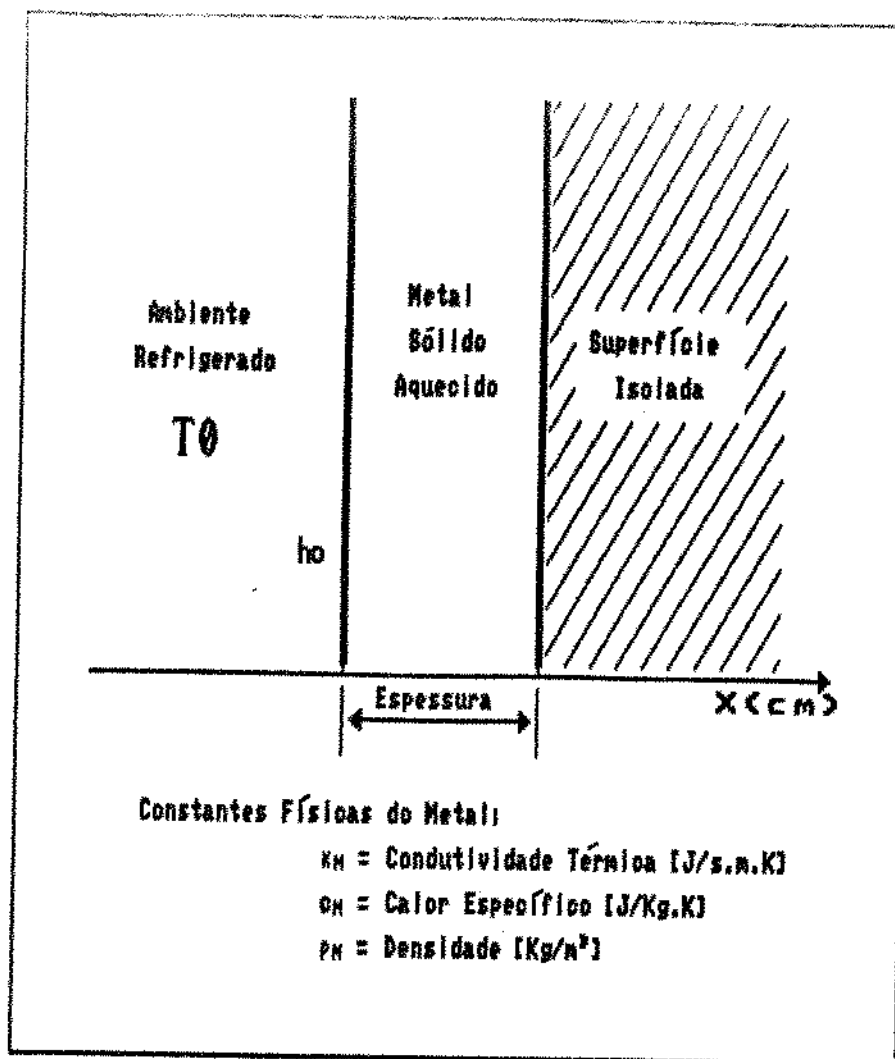


Figura 3.7 - Sistema térmico para aplicação prática do M.D.F.

$$T_1^{n+1} = \frac{\Delta t}{\tau_{1,0}} \cdot T_0^n + \left[ 1 - \frac{\Delta t}{\tau_{1,1}} \right] \cdot T_1^n + \frac{\Delta t}{\tau_{1,2}} \cdot T_2^n \quad (3.67)$$

$$T_2^{n+1} = \frac{\Delta t}{\tau_{2,1}} \cdot T_1^n + \left[ 1 - \frac{\Delta t}{\tau_{2,2}} \right] \cdot T_2^n + \frac{\Delta t}{\tau_{2,3}} \cdot T_3^n \quad (3.68)$$

$$T_3^{n+1} = \frac{\Delta t}{\tau_{3,2}} \cdot T_2^n + \left[ 1 - \frac{\Delta t}{\tau_{3,3}} \right] \cdot T_3^n + \frac{\Delta t}{\tau_{3,4}} \cdot T_4^n \quad (3.69)$$

O valor de  $T_4^n$  é igual ao valor de  $T_3^n$ , pois pela figura 3.8 tem-se uma superfície isolada após o nó de número '3'. Assim para efeito de aproximação da condição de contorno considera-se o ponto de número '4' como sendo um ponto simétrico ao ponto anterior, tendo  $T_4^n = T_3^n$  e  $R_{t4,3} = R_{t3,4}$ .

As equações 3.67, 3.68 e 3.69 podem ser expressas na forma matricial:



$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\Delta t}{\tau_{1,0}} & \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_{1,1}}\right) & \frac{\Delta t}{\tau_{1,2}} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\Delta t}{\tau_{2,1}} & \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_{2,2}}\right) & \frac{\Delta t}{\tau_{2,3}} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\Delta t}{\tau_{3,2}} & \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_{3,3}}\right) & \frac{\Delta t}{\tau_{3,4}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_0^n \\
 T_1^n \\
 T_2^n \\
 T_3^n \\
 T_4^n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 T_0^{n+1} \\
 T_1^{n+1} \\
 T_2^{n+1} \\
 T_3^{n+1} \\
 T_4^{n+1}
 \end{pmatrix}
 \quad (3.70)$$

Em forma mais compacta:  $[1/\tau]_{\text{exp}} * [T]^n = [T]^{n+1} \quad (3.71)$

Resolvendo o sistema acima para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n_{\text{max}}$ , tem-se a variação do perfil térmico no tempo, para o sistema da figura 3.7.

A estabilidade do sistema é dado por  $\longrightarrow \Delta t \leq \tau_{i,i}$

Modo Implícito:

Para a resolução no modo implícito do M.D.F. modifica-se apenas o passo anterior utilizando a equação 3.54, assim:

$$T_1^n = - \frac{\Delta t}{\tau_{1,0}} \cdot T_0^{n+1} + \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_{1,1}}\right) \cdot T_1^{n+1} - \frac{\Delta t}{\tau_{1,2}} \cdot T_2^{n+1} \quad (3.72)$$

$$T_2^n = - \frac{\Delta t}{\tau_{2,1}} \cdot T_1^{n+1} + \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_{2,2}}\right) \cdot T_2^{n+1} - \frac{\Delta t}{\tau_{2,3}} \cdot T_3^{n+1} \quad (3.73)$$

$$T_3^n = - \frac{\Delta t}{\tau_{3,2}} \cdot T_2^{n+1} + \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_{3,3}}\right) \cdot T_3^{n+1} - \frac{\Delta t}{\tau_{3,4}} \cdot T_4^{n+1} \quad (3.74)$$

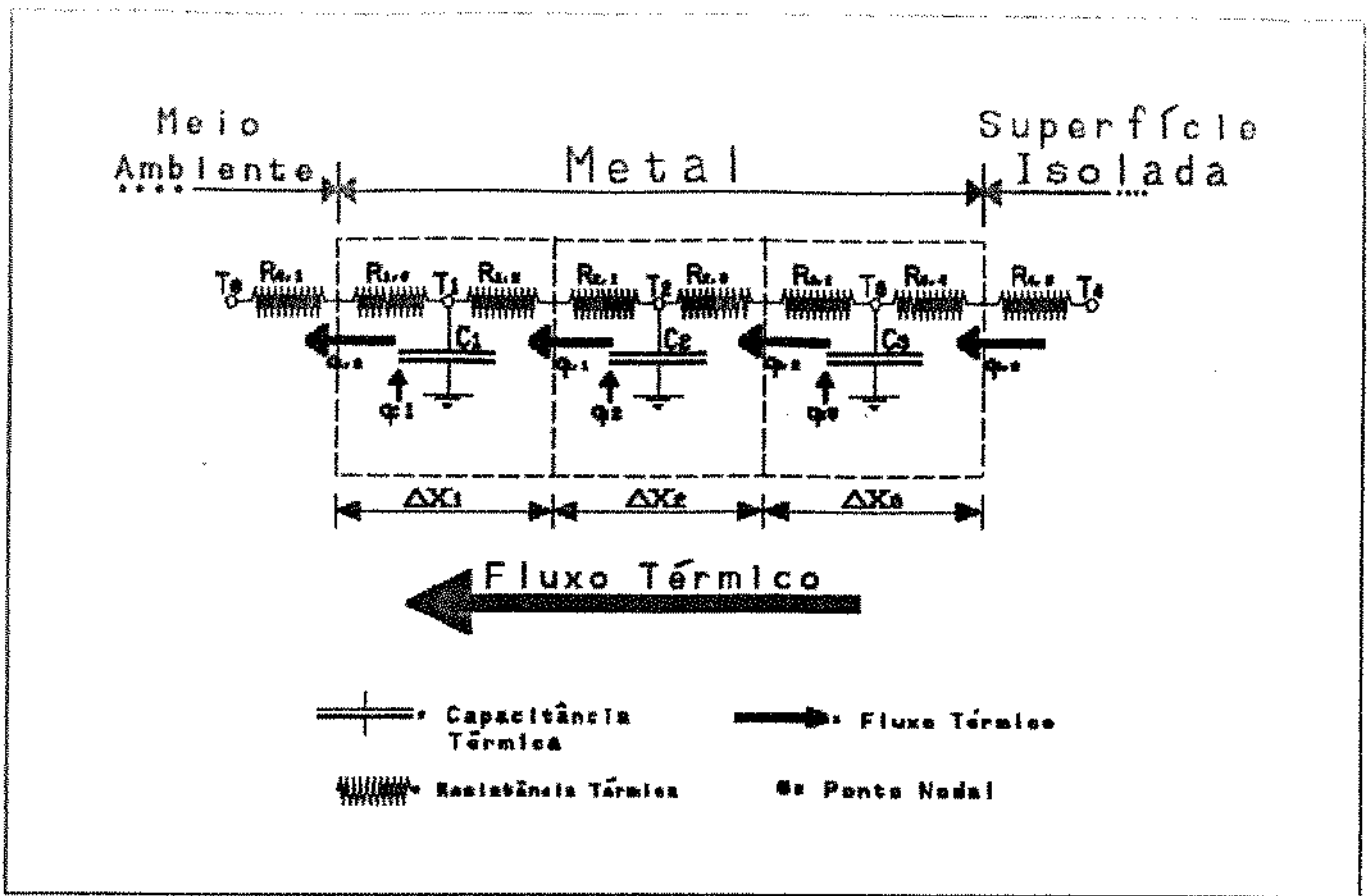


Figura 3.8 - Representação esquemática de um sistema térmico frente aos circuitos elétricos análogos

Expressando as equações 3.72, 3.73 e 3.74 na forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{-\Delta t}{\tau_{1,0}} & \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_{1,1}}\right] & \frac{-\Delta t}{\tau_{1,2}} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-\Delta t}{\tau_{2,1}} & \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_{2,2}}\right] & \frac{-\Delta t}{\tau_{2,3}} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-\Delta t}{\tau_{3,2}} & \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_{3,3}}\right] & \frac{-\Delta t}{\tau_{3,4}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_0 \\
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 T_0 \\
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4
 \end{bmatrix}
 \quad (3.75)$$

Em forma mais compacta:  $[1/\tau]_{imp} * [T]^{n+1} = [T]^n \quad (3.76)$

A solução do sistema acima consiste na inversão da matriz  $[1/\tau]_{imp}$

onde 
$$[T]^{n+1} = [T]^n * [1/\tau]_{imp}^{-1} \quad (3.77)$$

Existem inúmeros métodos numéricos voltados a inversão de matrizes. Dentro do escopo deste trabalho utilizou-se a construção de um sistema triangular superior pelo *Método da Eliminação de Gauss* e em seguida resolveu-se o sistema triangular superior. Este modo de trabalho foi escolhido por ser de fácil aplicabilidade e de alta confiança.

Resolve-se então o sistema para  $n = 0, 1, 2, \dots, n_{max}$  e têm-se a variação do perfil térmico no tempo para o do sistema da figura 3.7.

Na sequência deste trabalho serão discutidas curvas comparativas do M.D.F. para a aplicação do modo implícito e explícito, observando-se resultados idênticos. Entretanto na aplicação do modo explícito tem-se a estabilidade do sistema valendo para  $\Delta t < \tau_{i,i}$  e na aplicação do modo implícito, o método é sempre estável, não possuindo este limite. As discussões em respeito as vantagens oferecidas por cada modo em relação a aplicação em simulação para o controle do Lingotamento Contínuo são feitas mais a frente. De momento nos reservamos apenas em expor a matemática do modelo de trabalho.

#### 3.4.2. A Forma Bidimensional do M.D.F.:

No Lingotamento Contínuo de aços, pode-se admitir que não existe fluxo de calor na direção de extração do lingote.<sup>(29,32,33)</sup> Desta forma para a equação 3.17, admite-se que o gradiente térmico na direção do eixo 'Z' é igual a zero, assim:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.78)$$

e então:

$$\rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.79)$$

Os termos a derivadas parciais da equação 3.7.9 são dados em substituição a diferenças finitas por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (3.81)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.82)$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \quad (3.83)$$

Os subíndices ' $i-1,j$ ', ' $i+1,j$ ', ' $i,j-1$ ', e ' $i,j+1$ ' nas equações 3.80 e 3.81, correspondem ao endereço bidimensional dos pontos vizinhos ao ponto de cálculo ' $i,j$ '. Os superíndices ' $n$ ' e ' $n+1$ ' na equação 3.82, equivalem ao tempo conhecido e o tempo incrementado de ' $\Delta t$ ' respectivamente, e os superíndices ' $n-1$ ' e ' $n$ ' na equação 3.83, equivalem ao tempo conhecido e o tempo incrementado de ' $\Delta t$ ' respectivamente.

### 3.4.2.A) O Modo Explícito Bidimensional

Substituindo 3.80, 3.81 e 3.82 em 3.79, chega-se em:

$$\rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = k \cdot \left[ \frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right] \quad (3.84)$$

multiplicando ambos os lados da equação 3.84 por ' $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ', chega-se em (Ver figura 3.9):

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \Delta t x \cdot k \cdot \frac{(T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n) + (T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n)}{\Delta x} + \\ \dots + \Delta t y \cdot k \cdot \frac{(T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n) + (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n)}{\Delta y} \quad (3.85)$$

onde  $\Delta t x = \Delta y \cdot \Delta z$  e  $\Delta t y = \Delta x \cdot \Delta z$  (3.86)

O acúmulo de energia no ponto ' $i, j$ ' pode ser escrito por:

$$C_{ti,j} \cdot \frac{\Delta n_{\Delta T_{i,j}}}{\Delta t} \quad (3.87)$$

Os fluxos de calor ' $q$ ' associados ao ponto ' $i, j$ ' são dados por:

$$q_{i-1,j} = \frac{\Delta t x \cdot k}{\Delta x} (T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n) \quad (3.88)$$

$$q_{i+1,j} = \frac{\Delta t x \cdot k}{\Delta x} (T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) \quad (3.89)$$

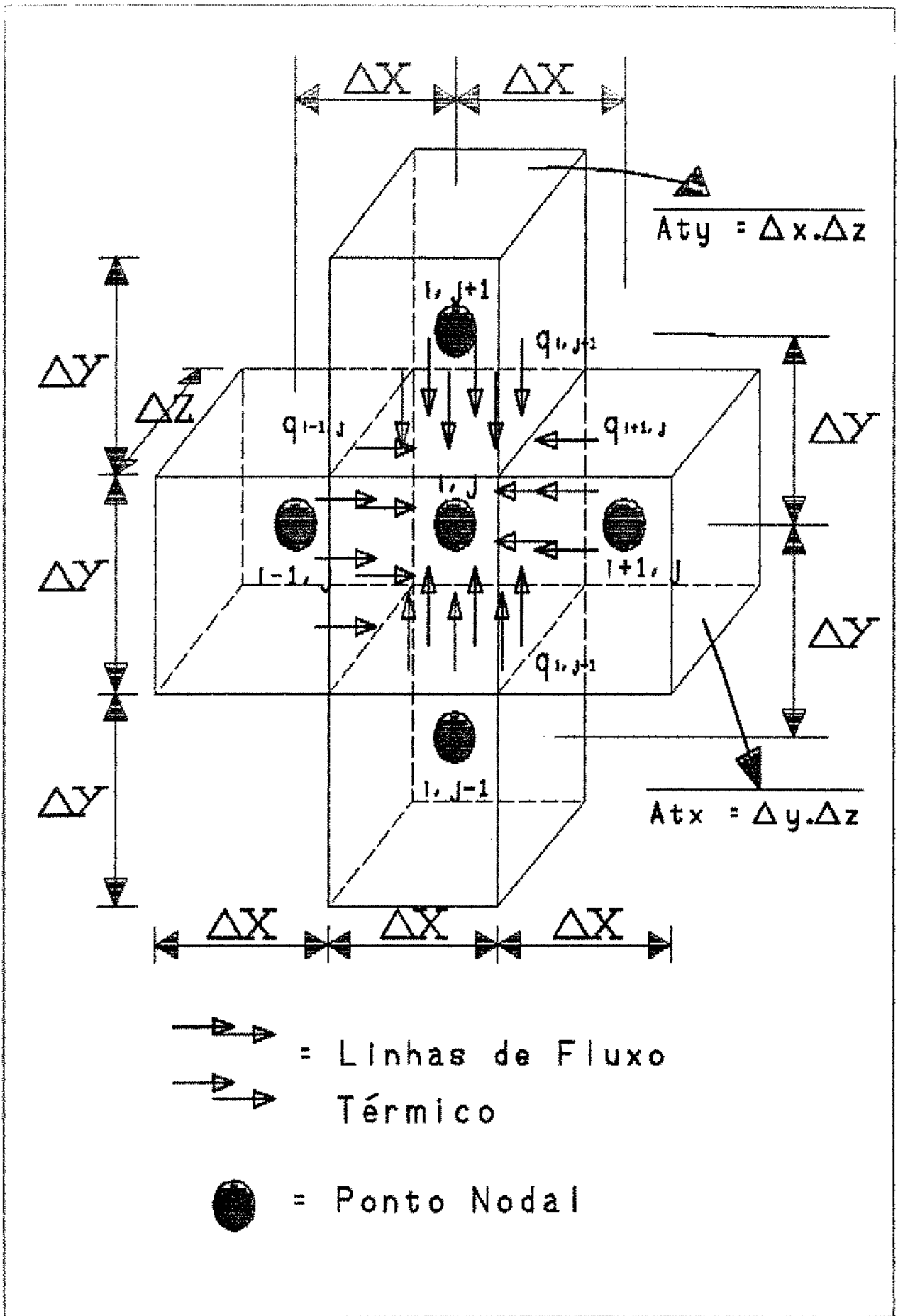


Figura 3.9 - Representação esquemática do M.D.F. na forma bidimensional aplicado ao fenômeno de transferência de calor

$$q_{i,j-1} = \frac{A_{ly} \cdot k}{\Delta y} (T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n) \quad (3.90)$$

$$q_{i,j+1} = \frac{A_{ly} \cdot k}{\Delta y} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) \quad (3.91)$$

sendo:

$A_{lx} = \Delta y \cdot \Delta z \rightarrow$  Área de passagem do fluxo térmico na direção 'X';

$A_{ly} = \Delta x \cdot \Delta z \rightarrow$  Área de passagem do fluxo térmico na direção 'Y';

$\Delta x =$  Distância entre pontos nodais na direção 'X';

$\Delta y =$  Distância entre pontos nodais na direção 'Y';

Trabalhando as equações 3.87, 3.88, 3.89, 3.90 e 3.91 na equação 3.85 da mesma forma que a apresentada para a forma unidimensional e observando a analogia elétrica, conforme apresentada na figura 3.10, chega-se na equação geral do M.D.F. no *Modo Explícito*, para a forma Bidimensional:

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} = \Delta t \cdot & \left[ \frac{T_{i-1,j}^n}{\tau_{(i,j),(i-1,j)}} + \frac{T_{i,j-1}^n}{\tau_{(i,j),(i,j-1)}} + \dots \right. \\ & \dots + \frac{T_{i+1,j}^n}{\tau_{(i+1,j),(i,j)}} + \left. \frac{T_{i,j+1}^n}{\tau_{(i,j+1),(i,j)}} \right] + \dots \\ & \dots + \left[ 1 - \frac{\Delta t}{\tau_{(i,j),(i,j)}} \right] \cdot T_{i,j}^n \end{aligned} \quad (3.92)$$

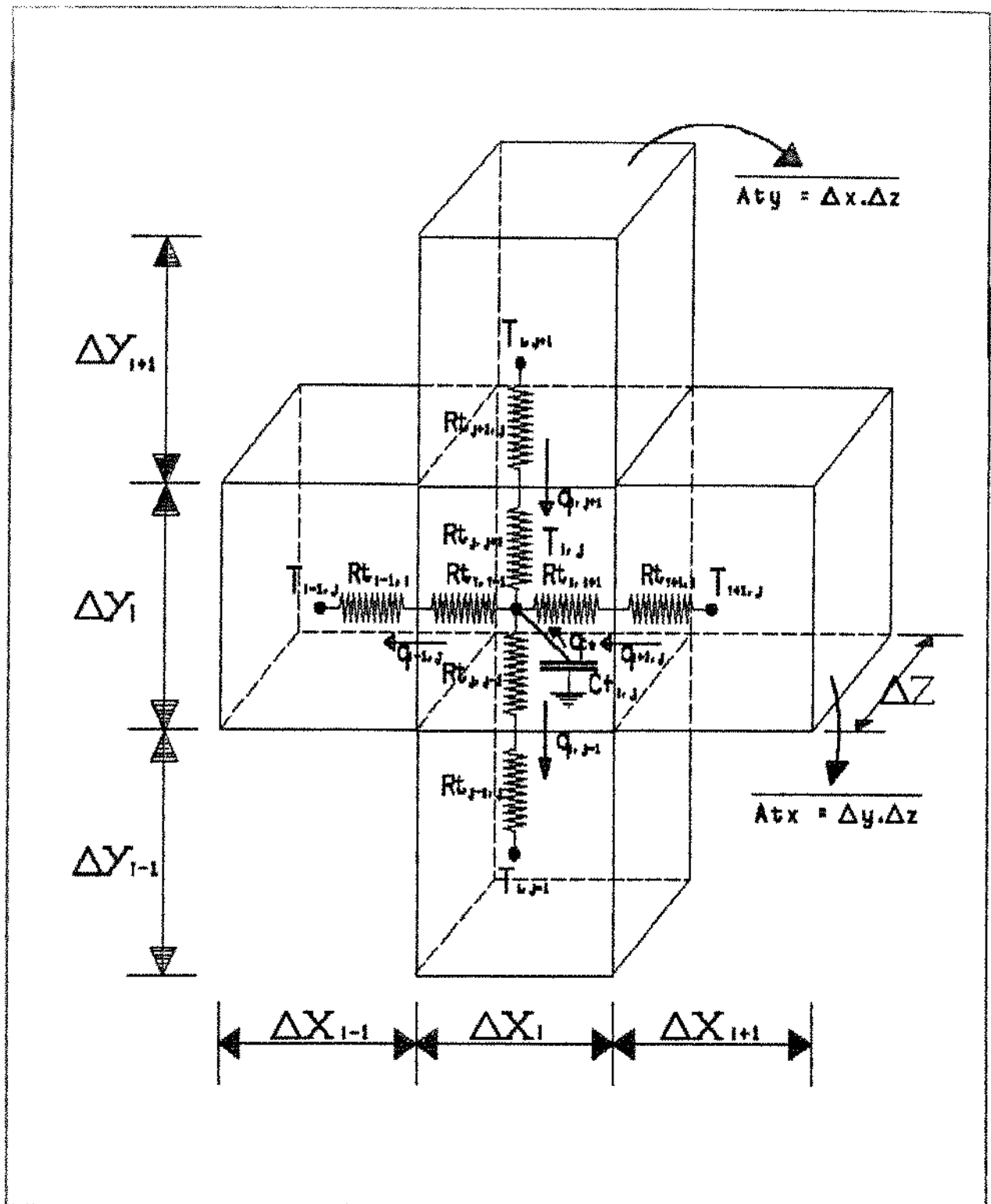


Figura 3.10 - Representação analógica a circuito elétrico de um elemento nodal para o M.D.F. na forma bidimensional



onde:

$$\frac{1}{\tau(i,j), (i,j)} = \frac{1}{\tau(i,j), (i-1,j)} + \frac{1}{\tau(i,j), (i,j-1)} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\tau(i+1,j), (i,j)} + \frac{1}{\tau(i,j+1), (i,j)} \quad (3.93)$$

sendo:

$$\left. \begin{aligned} \tau(i,j), (i-1,j) &= C_{i,j} \cdot (R_{ti,i-1} + R_{ti-1,i}) \\ \tau(i,j), (i,j-1) &= C_{i,j} \cdot (R_{tj,j-1} + R_{tj-1,j}) \\ \tau(i+1,j), (i,j) &= C_{i,j} \cdot (R_{ti,i+1} + R_{ti+1,i}) \\ \tau(i,j+1), (i,j) &= C_{i,j} \cdot (R_{tj,j+1} + R_{tj+1,j}) \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

As resistências térmicas são dadas como segue:

$$\begin{aligned} R_{ti+1,i} &= \frac{\Delta x_{i+1}}{2 \cdot k_{i+1,j} \cdot A_{tx}} \rightarrow k_{i+1,j} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Condutividade térmica} \\ \text{do ponto posterior na} \\ \text{direção 'x'}. \end{array} \right. \\ R_{ti-1,i} &= \frac{\Delta x_{i-1}}{2 \cdot k_{i-1,j} \cdot A_{tx}} \rightarrow k_{i-1,j} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Condutividade térmica} \\ \text{do ponto anterior na} \\ \text{direção 'x'}. \end{array} \right. \\ R_{tj+1,j} &= \frac{\Delta y_{j+1}}{2 \cdot k_{i,j+1} \cdot A_{ty}} \rightarrow k_{i,j+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Condutividade térmica} \\ \text{do ponto posterior na} \\ \text{direção 'y'}. \end{array} \right. \\ R_{tj-1,j} &= \frac{\Delta y_{j-1}}{2 \cdot k_{i,j-1} \cdot A_{ty}} \rightarrow k_{i,j-1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Condutividade térmica} \\ \text{do ponto anterior na} \\ \text{direção 'y'}. \end{array} \right. \\ \\ R_{ti,i-1} &= \frac{\Delta x_i}{2 \cdot k_{i,j} \cdot A_{tx}} \\ R_{ti,i+1} &= \frac{\Delta x_i}{2 \cdot k_{i,j} \cdot A_{tx}} \\ R_{tj,j-1} &= \frac{\Delta y_j}{2 \cdot k_{i,j} \cdot A_{ty}} \\ R_{tj,j+1} &= \frac{\Delta y_j}{2 \cdot k_{i,j} \cdot A_{ty}} \end{aligned} \left. \right\} \rightarrow k_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Condutividade térmica} \\ \text{do ponto nodal.} \end{array} \right. \quad (3.95)$$

E a capacitância térmica dada por:

$$C_{(i,j)} = \rho_{i,j} \cdot \bar{c}_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \rightarrow \begin{cases} \rho_{i,j} = \text{densidade do} \\ \text{ponto nodal.} \\ c_{i,j} = \text{Calor especí-} \\ \text{fico nodal.} \end{cases} \quad (3.96)$$

Para o caso particular da solidificação de liga binária  $\bar{c}_{i,j}$  é dado por:

$$\bar{c}_{i,j} = \left[ c_{i,j} - H \cdot \frac{\partial f_{s_{i,j}}}{\partial T_{i,j}} \right] \quad (3.97)$$

onde:

$c_{i,j}$  = Calor específico do ponto nodal

$H$  = Calor latente de fusão da liga

$\frac{\partial f_{s_{i,j}}}{\partial T_{i,j}}$  = Gradiente de fração sólida do ponto nodal

Observe que para o modelo proposto cada elemento pode possuir dimensões finitas próprias permitindo maleabilidade as malhas nodais, de tal forma que a precisão pode ser aumentada nos pontos de interesse do mapeamento geral, sem que com isto venha-se perder em "velocidade de processamento computacional " (Ver Malhas Nodais no Apêndice A).

$$\text{Para a estabilidade do modelo: } \Delta t \leq \tau_{(i,j), (i,j)} \quad (3.98)$$

#### 3.4.2.1. O Modo Implícito Bidimensional:

Substituindo 3.80, 3.81 e 3.83 em 3.79, chega-se em:

$$\rho \cdot \bar{c} \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = k \cdot \left[ \frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] \quad (3.99)$$

Trabalhando a equação 3.99 da mesma forma que para o caso explícito e utilizando a analogia elétrica pela figura 3.10, chega-se na equação geral do *Modo Implícito* dada por:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^n = \Delta t. & \left[ \frac{T_{i-1,j}^{n+1}}{\tau(i,j), (i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1}}{\tau(i,j), (i,j-1)} + \dots \right. \\
 & \dots + \frac{T_{i+1,j}^{n+1}}{\tau(i+1,j), (i,j)} + \left. \frac{T_{i,j+1}^{n+1}}{\tau(i,j+1), (i,j)} \right] + \dots \\
 & \dots + \left( 1 + \frac{\Delta t}{\tau(i,j), (i,j)} \right) \cdot T_{i,j}^{n+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.100}$$

Onde todos os parâmetros da equação 3.100 são os mesmos já mostrados nas equações 3.93, 3.94, 3.95, 3.96 e 3.97, contudo para este modo de trabalho não existe limite de estabilidade, sendo esta equação sempre convergente.

No entanto, apesar do modelo elétrico representar favoravelmente um sistema térmico, a resolução direta do modelo para a aplicação do efeito de redes bidimensionais torna-se excessivamente complicado gerando matrizes de ordens extremamente elevadas, para uma quantidade relativamente pequena de pontos nodais na malha. Entretanto pode-se otimizar o equacionamento, dividindo os efeitos direcionais de corrente elétrica (no caso da rede RC elétrica) e de fluxo térmico (no caso da rede RC térmica), conhecendo o princípio de superposição que ocorre em circuitos lineares. Esta é mais uma das vantagens oferecidas pela analogia aqui abordada.

### 3.4.3. A Aplicação do Efeito de Linearidade em Analogia Elétrica para a solução da Forma Bidimensional

O princípio da superposição estabelece que a resposta (corrente ou tensão desejada) em qualquer ponto de um circuito linear

que tenha mais de uma fonte independente, pode ser obtida com a soma das respostas originadas pela ação de cada fonte independente agindo sozinha.<sup>[31]</sup>

A diferença entre linearidade e não linearidade pode ser mostrada, primeiramente, por um exemplo não elétrico. Coloquemos um caminhão carregado (a função força) no meio de uma ponte suspensa e vamos medir a deflexão (resposta) da ponte. Seja ela de 3cm. Um segundo caminhão pode produzir uma nova deflexão de 3cm, indicando um sistema linear. Se tentarmos continuar nossa experiência, poderemos, eventualmente, estender a ponte em demasia. O sistema se torna não linear e a resposta não mais será proporcional à força ou excitação.

Define-se elemento linear como sendo um elemento passivo que apresenta uma relação *voltagem-corrente* linear, ou pela analogia *temperatura-fluxo térmico*. Por 'relação *voltagem-corrente* linear' simplesmente queremos dizer que a multiplicação por uma constante K de uma corrente (ou fluxo térmico) dependente do tempo e que passe pelo elemento, resulta numa multiplicação pela mesma constante da tensão (ou temperatura) existente no elemento. Apenas dois elementos passivos foram definidos, o resistor, e o capacitor, assim a relação *voltagem-corrente* (ou *temperatura-fluxo térmico*) é linear. Contudo é interessante observar que para a solidificação de ligas, a região de transformação de fase não possui um efeito linear, mas a analogia com um circuito linear é funcional, pois nesta etapa da solidificação considera-se pelo M.D.F. um efeito de linearidade instantânea com a modificação dos parâmetros térmicos a cada incremento de ' $\Delta t$ '.

Pode-se então imaginar, para o caso bidimensional, duas fontes de energia distintas, onde cada uma age individualmente em uma única direção do plano cartesiano. Desta forma, em respeito a analogia elétrica, um sistema térmico no M.D.F. para um modelo bidimensional, é encarado como um modelo unidimensional para cada direção do plano,

sendo a solução final igual a soma das respostas originadas em cada direção.

A figura 3.11 esboça a solução de um ponto nodal, para os efeitos bidirecionais distintos.

Assim trabalhou-se as equações 3.92 e 3.100 (Modo Explícito e Modo Implícito respectivamente) objetivando separar os efeitos direcionais de temperatura. Deste modo o equacionamento final será tratado como um modelo unidimensional, somando-se ao final os resultados obtidos para cada direção do plano carteziano.

*Para o Modo Explícito*

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} = & \frac{\Delta t}{\tau_{(i,j),(i-1,j)}} \cdot (T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau_{(i+1,j),(i,j)}} \cdot (T_{i,j}^n - T_{i+1,j}^n) \\
 & + \frac{\Delta t}{\tau_{(i,j),(i,j-1)}} \cdot (T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau_{(i,j+1),(i,j)}} \cdot (T_{i,j}^n - T_{i,j+1}^n) \\
 & + T_{i,j}^n
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Pode-se subdividir linearmente a equação 3.101 em duas equações, uma para direção do plano carteziano:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} \Big|_X = & \frac{\Delta t}{\tau_{(i,j),(i-1,j)}} \cdot T_{i-1,j}^n + \\
 & + \frac{\Delta t}{\tau_{(i+1,j),(i,j)}} \cdot T_{i+1,j}^n + \left[ \frac{1}{2} - \frac{\Delta t T}{\tau_{(i,j),(i,j)}(X)} \right] \cdot T_{i,j}^n
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

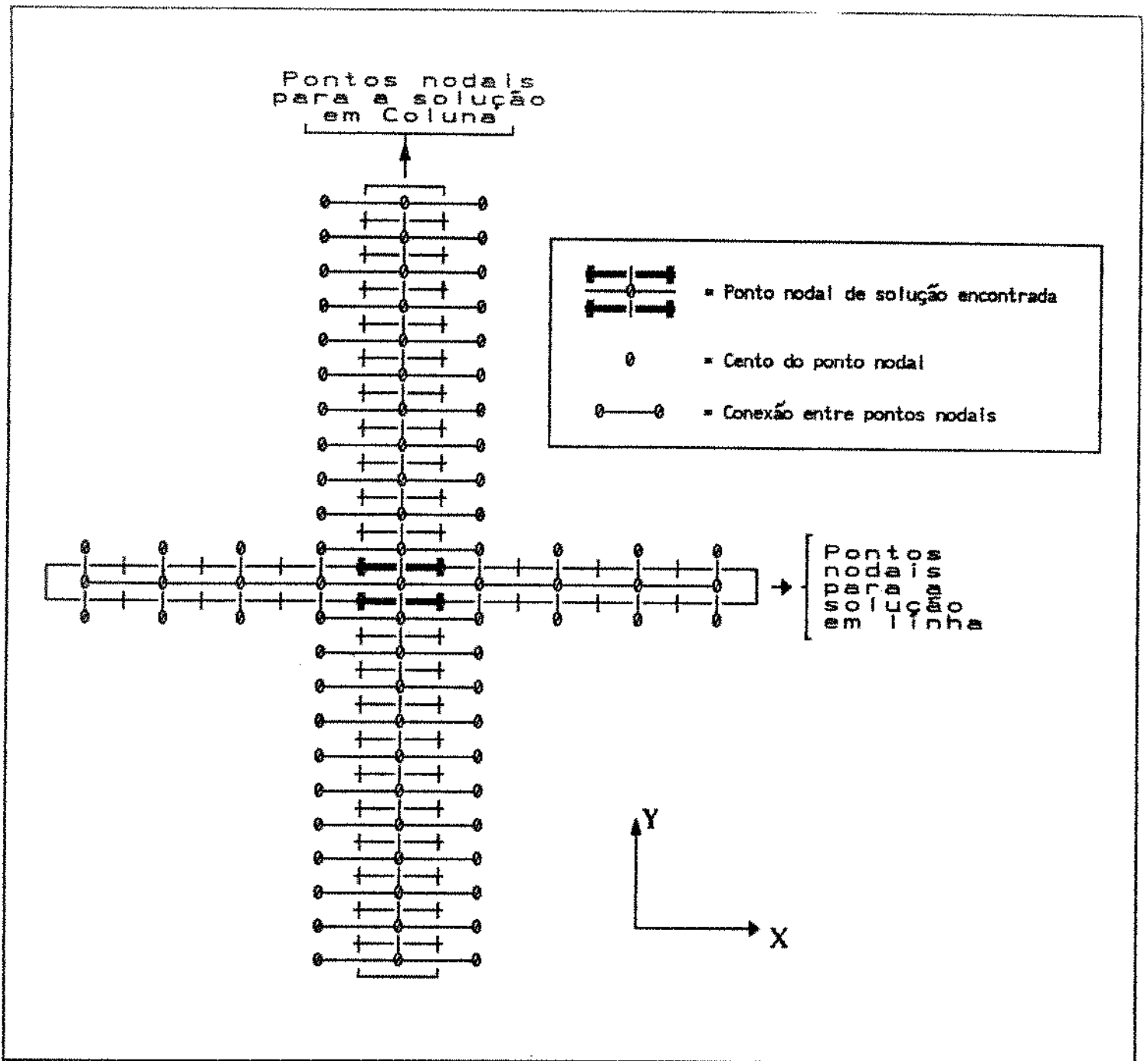


Figura 3.11 - Representação esquemática de sistema nodal no M.D.F. bidimensional para separação linear de efeitos (linhas e colunas)

e:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} \Big|_Y &= \frac{\Delta t}{\tau(i,j),i,j-1} \cdot T_{i,j-1}^n + \\
 &+ \frac{\Delta t}{\tau(i,j+1),i,j} \cdot T_{i,j+1}^n + \left[ \frac{1}{2} - \frac{\Delta t}{\tau(i,j),i,j|y|} \right] \cdot T_{i,j}^n
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

A solução do sistema será:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+1} \Big|_X + T_{i,j}^{n+1} \Big|_Y \tag{3.104}$$

onde:

$$\frac{1}{\tau(i,j),i,j|x|} = \frac{1}{\tau(i,j),i-1,j} + \frac{1}{\tau(i+1,j),i,j}$$

e

$$\frac{1}{\tau(i,j),i,j|y|} = \frac{1}{\tau(i,j),i,j-1} + \frac{1}{\tau(i,j+1),i,j}$$

(3.105)

Tendo que  $T_{i,j}^n \Big|_X$  equivale ao efeito de temperatura dado na direção "X" e  $T_{i,j}^n \Big|_Y$  ao efeito de temperatura dado na direção "Y" (Ver representação nodal dado na figura 3.10).

A estabilidade do modo é dada por:

$$\frac{1}{\Delta t} \leq \frac{1}{\tau(i,j),i,j|x|} + \frac{1}{\tau(i,j),i,j|y|} \tag{3.106}$$

Para o Modo Implícito

Trabalhando a equação 3.100:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} = & \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i-1,j)} \cdot (T_{i-1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau(i+1,j),(i,j)} \cdot (T_{i,j}^{n+1} - T_{i+1,j}^{n+1}) \\
 & + \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i,j-1)} \cdot (T_{i,j-1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau(i,j+1),(i,j)} \cdot (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j+1}^{n+1}) \\
 & + T_{i,j}^n
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Isolando o termo de superíndice 'n' em relação aos de superíndice 'n+1', chega-se em:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^n = & - \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i-1,j)} \cdot (T_{i-1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) \\
 & + \frac{\Delta t}{\tau(i+1,j),(i,j)} \cdot (T_{i,j}^{n+1} - T_{i+1,j}^{n+1}) \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i,j-1)} \cdot (T_{i,j-1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) \\
 & + \frac{\Delta t}{\tau(i,j+1),(i,j)} \cdot (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j+1}^{n+1}) \\
 & + T_{i,j}^{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Abrindo a equação 3.108, tem-se:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^n = & - \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i-1,j)} \cdot T_{i-1,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i-1,j)} \cdot T_{i,j}^{n+1} \dots \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau(i+1,j),(i,j)} \cdot T_{i+1,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\tau(i+1,j),(i,j)} \cdot T_{i,j}^{n+1} \dots \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i,j-1)} \cdot T_{i,j-1}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i,j-1)} \cdot T_{i,j}^{n+1} \dots \\
 & - \frac{\Delta t}{\tau(i,j+1),(i,j)} \cdot T_{i,j+1}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\tau(i,j+1),(i,j)} \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j}^{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.109}$$



Unindo os termos em  $T_{i,j}^{n+1}$  na equação 3.109, chega-se em:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^n &= -\frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i-1,j)} \cdot T_{i-1,j}^{n+1} - \dots \\
 \dots &= -\frac{\Delta t}{\tau(i+1,j),(i,j)} \cdot T_{i+1,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i,j-1)} \cdot T_{i,j-1}^{n+1} \dots \\
 \dots &= -\frac{\Delta t}{\tau(i,j+1),(i,j)} \cdot T_{i,j+1}^{n+1} + \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau(i,j),(i,j)} \right] \cdot T_{i,j}^{n+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.110}$$

onde ' $\tau(i,j),(i,j)$ ' é dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau(i,j),(i,j)} &= \frac{1}{\tau(i,j),(i-1,j)} + \frac{1}{\tau(i,j),(i,j-1)} + \dots \\
 \dots &+ \frac{1}{\tau(i+1,j),(i,j)} + \frac{1}{\tau(i,j+1),(i,j)}
 \end{aligned}
 \tag{3.111}$$

Devido ao fato da linearidade do sistema numérico, pode-se abrir  $T_{i,j}^n$  e  $T_{i,j}^{n+1}$  da seguinte forma:

$$T_{i,j}^n = \frac{T_{i,j}^n}{2} + \frac{T_{i,j}^n}{2}
 \tag{3.112}$$

e

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+1} \Big|_X + T_{i,j}^{n+1} \Big|_Y
 \tag{3.113}$$

substituindo 3.112 e 3.113 em 3.110 chega-se em:

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{i,j}^n}{2} + \frac{T_{i,j}^n}{2} = & - \frac{\Delta t}{\tau(i,j), (i-1,j)} \cdot T_{i-1,j}^{n+1} \dots \\
 & \dots - \frac{\Delta t}{\tau(i+1,j), (i,j)} \cdot T_{i+1,j}^{n+1} \dots \\
 & \dots - \frac{\Delta t}{\tau(i,j), (i,j-1)} \cdot T_{i,j-1}^{n+1} \dots \\
 & \dots - \frac{\Delta t}{\tau(i,j+1), (i,j)} \cdot T_{i,j+1}^{n+1} \dots \\
 & \dots + \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau(i,j), (i,j)} \right] \cdot \left[ T_{i,j}^{n+1} \right]_X + \left[ T_{i,j}^{n+1} \right]_Y
 \end{aligned}
 \tag{3.114}$$

Desse modo pode-se subdividir a equação 3.114 em duas outras:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^n = & - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau(i,j), (i-1,j)} \cdot T_{i-1,j}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau(i+1,j), (i,j)} \cdot T_{i+1,j}^{n+1} \dots \\
 & \dots + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau(i,j), (i,j)} \right] \cdot T_{i,j}^{n+1} \Big]_X
 \end{aligned}
 \tag{3.115}$$

e:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^n = & - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau(i,j), (i,j-1)} \cdot T_{i,j-1}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau(i,j+1), (i,j)} \cdot T_{i,j+1}^{n+1} \dots \\
 & \dots + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau(i,j), (i,j)} \right] \cdot T_{i,j}^{n+1} \Big]_Y
 \end{aligned}
 \tag{3.116}$$

Somando-se as equações 3.115 e 3.116 chega-se a equação geral do Modo Implícito 3.110.

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+1} \Big]_X + T_{i,j}^{n+1} \Big]_Y \quad (3.117)$$

A solução das equações 3.102, 3.103 no Modo Explícito, e as equações 3.115 e 3.116 no Modo Implícito são solucionadas da mesma maneira que a apresentada para a forma unidimensional do método numérico.

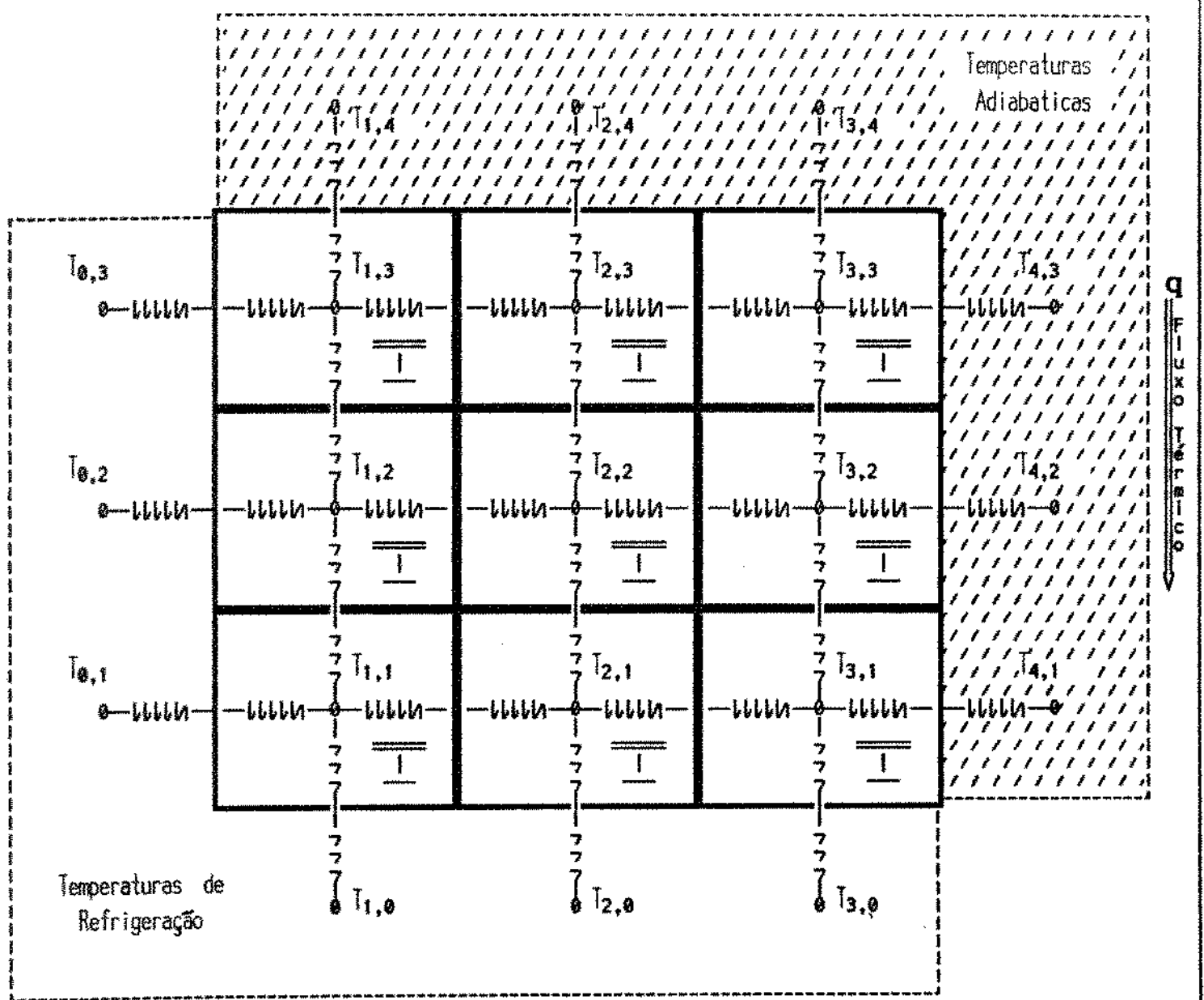
Afim de facilitar a compreensão do equacionamento, e ilustrar a utilização aplicada do modelo numérico na simulação do efeito de transferência de calor, mostramos a resolução de um pequeno exemplo, na solução da malha nodal da figura 3.12.

#### 3.4.3.1 - Aplicação Prática do M.D.F. via analogia a Circuitos Elétricos para a Solução da Forma Bidimensional:

Na figura 3.12 tem-se um corpo físico subdividido em pontos nodais representados pelo modelo analógico de resistências e capacitores térmicos. As condições de contorno são determinadas pelas condições limites do corpo, onde as temperaturas de refrigeração são todas iguais a temperatura refrigerante do corpo não modificando seu valor, e as temperaturas adiabáticas são iguais aos pontos nodais de interface no interior do corpo.

Deste modo, utilizando as equações 3.115 e 3.116 (*Modo Implícito*), faz-se um levantamento equacional dos pontos em linha e em coluna, representando em seguida tais equações na forma matricial, sendo que todos os valores das matrizes em linha e coluna são conhecidos, pois os valores de ' $\tau$ ' são dados pela equação 3.94 e as

(Fluxo Térmico)  $q$



Componentes de Malha	
$\begin{array}{c}   \\ \text{---} \\   \end{array}$	Resistencia Vertical
$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$	Resistencia Horizontal
$\circ$	Centro Nodal
$\begin{array}{c}   \\ \text{---} \\   \end{array}$	Capacitância Nodal

**Figura 3.12**  
**Malha nodal bidimensional em analogia de sistema térmico com sistema elétrico**

Para o 'Modo Implícito'

Utilizando a equação 3.115, tem-se:

Equacionamento da linha 1:

$$T_{[1][1]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][1], [0][1]}} \cdot T_{[0][1]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[1][1], [1][1]}} \right] \cdot T_{[1][1]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][1], [1][1]}} \cdot T_{[2][1]}^{n+1}$$

$$T_{[2][1]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][1], [1][1]}} \cdot T_{[1][1]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[2][1], [2][1]}} \right] \cdot T_{[2][1]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][1], [2][1]}} \cdot T_{[3][1]}^{n+1}$$

$$T_{[3][1]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][1], [2][1]}} \cdot T_{[2][1]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[3][1], [3][1]}} \right] \cdot T_{[3][1]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[4][1], [3][1]}} \cdot T_{[4][1]}^{n+1}$$

Equacionamento da linha 2:

$$T_{[1][2]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][2], [0][2]}} \cdot T_{[0][2]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[1][2], [1][2]}} \right] \cdot T_{[1][2]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][2], [1][2]}} \cdot T_{[2][2]}^{n+1}$$

$$T_{[2][2]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][2], [1][2]}} \cdot T_{[1][2]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[2][2], [2][2]}} \right] \cdot T_{[2][2]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][2], [2][2]}} \cdot T_{[3][2]}^{n+1}$$

$$T_{[3][2]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][2], [2][2]}} \cdot T_{[2][2]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[3][2], [3][2]}} \right] \cdot T_{[3][2]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[4][2], [3][2]}} \cdot T_{[4][2]}^{n+1}$$

Equacionamento da linha 3:

$$T_{[1][3]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][3], [0][3]}} \cdot T_{[0][3]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[1][3], [1][3]}} \right] \cdot T_{[1][3]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][3], [1][3]}} \cdot T_{[2][3]}^{n+1}$$

$$T_{[2][3]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][3], [1][3]}} \cdot T_{[1][3]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[2][3], [2][3]}} \right] \cdot T_{[2][3]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][3], [2][3]}} \cdot T_{[3][3]}^{n+1}$$

$$T_{[3][3]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][3], [2][3]}} \cdot T_{[2][3]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[3][3], [3][3]}} \right] \cdot T_{[3][3]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[4][3], [3][3]}} \cdot T_{[4][3]}^{n+1}$$

Utilizando a equação 3.116, tem-se:

Equacionamento da coluna 1:

$$T_{[1][1]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][1], [1][0]}} \cdot T_{[1][0]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[1][1], [1][1]}} \right] \cdot T_{[1][1]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][2], [1][1]}} \cdot T_{[1][2]}^{n+1}$$

$$T_{[1][2]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][2], [1][1]}} \cdot T_{[1][1]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[1][2], [1][2]}} \right] \cdot T_{[1][2]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][3], [1][2]}} \cdot T_{[1][3]}^{n+1}$$

$$T_{[1][3]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][3], [1][2]}} \cdot T_{[1][2]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[1][3], [1][3]}} \right] \cdot T_{[1][3]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[1][4], [1][3]}} \cdot T_{[1][4]}^{n+1}$$

Equacionamento da coluna 2:

$$T_{[2][1]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][1], [2][0]}} \cdot T_{[2][0]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[2][1], [2][1]}} \right] \cdot T_{[2][1]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][2], [2][1]}} \cdot T_{[2][2]}^{n+1}$$

$$T_{[2][2]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][2], [2][1]}} \cdot T_{[2][1]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[2][2], [2][2]}} \right] \cdot T_{[2][2]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][3], [2][2]}} \cdot T_{[2][3]}^{n+1}$$

$$T_{[2][3]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][3], [2][2]}} \cdot T_{[2][2]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[2][3], [2][3]}} \right] \cdot T_{[2][3]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[2][4], [2][3]}} \cdot T_{[2][4]}^{n+1}$$

Equacionamento da coluna 3:

$$T_{[3][1]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][1], [3][0]}} \cdot T_{[3][0]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[3][1], [3][1]}} \right] \cdot T_{[3][1]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][2], [3][1]}} \cdot T_{[3][2]}^{n+1}$$

$$T_{[3][2]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][2], [3][1]}} \cdot T_{[3][1]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[3][2], [3][2]}} \right] \cdot T_{[3][2]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][3], [3][2]}} \cdot T_{[3][3]}^{n+1}$$

$$T_{[3][3]}^n = -\frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][3], [3][2]}} \cdot T_{[3][2]}^{n+1} + 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\tau_{[3][3], [3][3]}} \right] \cdot T_{[3][3]}^{n+1} - \frac{2 \cdot \Delta t}{\tau_{[3][4], [3][3]}} \cdot T_{[3][4]}^{n+1}$$

ara LINHAS:

LINHA 1:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[1]E[1],E[0]E[1]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[1]E[1],E[1]E[1]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[2]E[1],E[1]E[1]} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[2]E[1],E[1]E[1]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[2]E[1],E[2]E[1]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[3]E[1],E[2]E[1]} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[3]E[1],E[2]E[1]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[3]E[1],E[3]E[1]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[4]E[1],E[3]E[1]} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_{[0]E[1]}^{(n+1)} \\
 T_{[1]E[1]}^{(n+1)} \\
 T_{[2]E[1]}^{(n+1)} \\
 T_{[3]E[1]}^{(n+1)} \\
 T_{[4]E[1]}^{(n+1)}
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 T_{[0]E[1]}^{(n)} \\
 T_{[1]E[1]}^{(n)} \\
 T_{[2]E[1]}^{(n)} \\
 T_{[3]E[1]}^{(n)} \\
 T_{[4]E[1]}^{(n)}
 \end{bmatrix}
 \times$$

LINHA 2:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[1]E[2],E[0]E[2]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[1]E[2],E[1]E[2]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[2]E[2],E[1]E[2]} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[2]E[2],E[1]E[2]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[2]E[2],E[2]E[2]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[3]E[2],E[2]E[2]} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[3]E[2],E[2]E[2]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[3]E[2],E[3]E[2]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[4]E[2],E[3]E[2]} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_{[0]E[2]}^{(n+1)} \\
 T_{[1]E[2]}^{(n+1)} \\
 T_{[2]E[2]}^{(n+1)} \\
 T_{[3]E[2]}^{(n+1)} \\
 T_{[4]E[2]}^{(n+1)}
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 T_{[0]E[2]}^{(n)} \\
 T_{[1]E[2]}^{(n)} \\
 T_{[2]E[2]}^{(n)} \\
 T_{[3]E[2]}^{(n)} \\
 T_{[4]E[2]}^{(n)}
 \end{bmatrix}
 \times$$

LINHA 3:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[1]E[3],E[0]E[3]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[1]E[3],E[1]E[3]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[2]E[3],E[1]E[3]} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[2]E[3],E[1]E[3]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[2]E[3],E[2]E[3]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[3]E[3],E[2]E[3]} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[3]E[3],E[2]E[3]} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r[3]E[3],E[3]E[3]} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r[4]E[3],E[3]E[3]} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_{[0]E[3]}^{(n+1)} \\
 T_{[1]E[3]}^{(n+1)} \\
 T_{[2]E[3]}^{(n+1)} \\
 T_{[3]E[3]}^{(n+1)} \\
 T_{[4]E[3]}^{(n+1)}
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 T_{[0]E[3]}^{(n)} \\
 T_{[1]E[3]}^{(n)} \\
 T_{[2]E[3]}^{(n)} \\
 T_{[3]E[3]}^{(n)} \\
 T_{[4]E[3]}^{(n)}
 \end{bmatrix}
 \times$$

Para COLUMNAS:

COLUMNA 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(1)E(1),E(1)C(1)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(1)E(1),E(1)C(1)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(1)E(2),E(1)C(1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(1)E(2),E(1)C(1)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(1)E(2),E(1)C(2)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(1)E(3),E(1)C(2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(1)E(3),E(1)C(2)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(1)E(3),E(1)C(3)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(1)E(4),E(1)C(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} (n+1) \\ T_{(1)0} \\ T_{(1)1} \\ T_{(1)2} \\ T_{(1)3} \\ T_{(1)4} \end{matrix} = \begin{matrix} (n) \\ T_{(1)0} \\ T_{(1)1} \\ T_{(1)2} \\ T_{(1)3} \\ T_{(1)4} \end{matrix}$$

COLUMNA 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(2)E(1),E(2)C(1)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(2)E(1),E(2)C(1)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(2)E(2),E(2)C(1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(2)E(2),E(2)C(1)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(2)E(2),E(2)C(2)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(2)E(3),E(2)C(2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(2)E(3),E(2)C(2)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(2)E(3),E(2)C(3)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(2)E(4),E(2)C(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} (n+1) \\ T_{(2)0} \\ T_{(2)1} \\ T_{(2)2} \\ T_{(2)3} \\ T_{(2)4} \end{matrix} = \begin{matrix} (n) \\ T_{(2)0} \\ T_{(2)1} \\ T_{(2)2} \\ T_{(2)3} \\ T_{(2)4} \end{matrix}$$

COLUMNA 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(3)E(1),E(3)C(1)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(3)E(1),E(3)C(1)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(3)E(2),E(3)C(1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(3)E(2),E(3)C(1)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(3)E(2),E(3)C(2)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(3)E(3),E(3)C(2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(3)E(3),E(3)C(2)} & 2 \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta t}{r(3)E(3),E(3)C(3)} \right] & -\frac{2 \cdot \Delta t}{r(3)E(4),E(3)C(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} (n+1) \\ T_{(3)0} \\ T_{(3)1} \\ T_{(3)2} \\ T_{(3)3} \\ T_{(3)4} \end{matrix} = \begin{matrix} (n) \\ T_{(3)0} \\ T_{(3)1} \\ T_{(3)2} \\ T_{(3)3} \\ T_{(3)4} \end{matrix}$$



Solucao Final Encontrada para cada 'Ponto Nodal'  
via Equacao 3.117

Solucao do Ponto [1][1]	$T_{[1][1]}^{n+1} = T_{[1][1]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[1][1]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [2][1]	$T_{[2][1]}^{n+1} = T_{[2][1]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[1][2]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [3][1]	$T_{[3][1]}^{n+1} = T_{[3][1]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[1][3]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [1][2]	$T_{[1][2]}^{n+1} = T_{[1][2]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[2][1]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [2][2]	$T_{[2][2]}^{n+1} = T_{[2][2]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[2][2]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [3][2]	$T_{[3][2]}^{n+1} = T_{[3][2]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[2][3]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [1][3]	$T_{[1][3]}^{n+1} = T_{[1][3]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[3][1]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [2][3]	$T_{[2][3]}^{n+1} = T_{[2][3]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[3][2]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$
Solucao do Ponto [3][3]	$T_{[3][3]}^{n+1} = T_{[3][3]}^{n+1} \underset{X}{\curvearrowright} + T_{[3][3]}^{n+1} \underset{Y}{\curvearrowright}$

resistências térmicas e capacitâncias de cada ponto dados pelas equações 3.95 e 3.96. Basta então resolver os sistemas lineares trabalhando com a inversão das matrizes principais utilizando-se de qualquer método existente. Como dito anteriormente, utilizou-se a *Construção de Sistemas Triangulares Superiores pelo Método da Eliminação de Gauss* resolvendo-se em seguida os Sistemas Triangulares Superiores, sendo este método de fácil aplicabilidade e alta confiança. Somando-se então os resultados obtidos em cada sistema, tem-se a solução final.

Para um acompanhamento da evolução térmica do sistema, deve-se repetir iterativamente os passos descritos, lembrando que a cada passo tem-se os resultados das temperaturas nodais do tempo incrementado em ' $\Delta t$ '.

#### 3.4.4. A Aplicação do Modelo Numérico Desenvolvido no Problema da Solidificação do Aço-Carbono

Na solidificação de uma liga binária, enquanto o material se encontrar no estado líquido ou no estado sólido, a aplicação do modelo numérico proposto é simples, como já mostrado anteriormente. Na fase líquida as constantes do material serão:

$c_l$  = Calor específico do líquido

$\rho_l$  = Densidade do líquido

$k_l$  = Condutividade térmica do líquido

e na fase sólida serão:

$c_s$  = Calor específico do sólido

$\rho_s$  = Densidade do sólido

$k_s$  = Condutividade térmica do sólido

O problema então se resume em modelar a faixa na qual ocorre a transformação de fase. Os limites desta faixa são  $T_l \rightarrow$  *Temperatura liquidus* e  $T_s \rightarrow$  *Temperatura solidus*.  $T_l$  e  $T_s$  são funções da

porcentagem de soluto (material dopante) definido por  $C_0$ , dentro do solvente (material de base).

3.4.4.1 - Temperatura 'Solidus ( $T_s$ )' e Temperatura 'Liquidus ( $T_l$ )':

No caso particular do aço-C, a nível de modelo numérico e implementação computacional linearizou-se as curvas do diagrama de equilíbrio do Fe-C (Ver figura 3.13), através do método dos mínimos quadrados.<sup>[34]</sup> Utilizou-se uma faixa de maior interesse prático para o caso específico do Lingotamento Contínuo ( $C_0 < 0.20$ ) chegando-se as seguintes equações:

$$T_l \approx 1537,9685 - 81,1293 * C_0 \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (3.118)$$

para  $0\% \leq C_0 < 0.20\%$

e

$$T_s \approx \begin{cases} 1537,9685 - 477,7831 * C_0 & \text{para } C_0 \leq 0.09\% \\ 1495 & \text{para } 0.09\% \leq C_0 \leq 0.17\% \\ 1524,6512 - 174,4186 * C_0 & \text{para } C_0 > 0.17\% \end{cases} \quad (3.119)$$

O resultado gerado pelas equações anteriores foram comparados com resultados tabelados,<sup>[35,36,37]</sup> mostrando erros desprezíveis (Ver tabela 3.1).

% CAR. (%)	Ts - (°C)		Tl - (°C)	
	Tabelado	Calculado	Tabelado	Calculado
0.05	1515	1514	1535	1533
0.10	1495	1495	1530	1530
0.18	1495	1493	1525	1523
0.20	1490	1489	1521	1521

Tabela 3.1 - Relação entre valores de  $T_s$  e  $T_l$  tabelados e via equações linearizadas

#### 3.4.4.2 - Propriedades termofísicas de cada fase<sup>[28]</sup>:

A precisão do perfil de resultados que se obtém na análise da solidificação dos metais através de modelos matemáticos, depende fortemente da exatidão das propriedades termofísicas do metal analisado. Entretanto a literatura especializada apresenta-se bastante restrita quanto a abordagem de tais propriedades, quando se trata de ligas de diferentes concentrações de soluto. Em função desta carência de informações, é inevitável que na solidificação de ligas metálicas, cada caso seja analisado separadamente em função das informações disponíveis.

As propriedades termofísicas que constituem dados essenciais para a análise matemática acima mencionada são as seguintes:

- Calor latente de solidificação (  $H$  )
- Condutividade térmica de cada fase (  $k$  )
- Calor específico de cada fase (  $c$  )
- Densidade de cada fase (  $\rho$  )

#### 3.4.4.2.A) Calor latente de solidificação ( $H$ ):

Para a grande maioria das ligas metálicas, somente estão

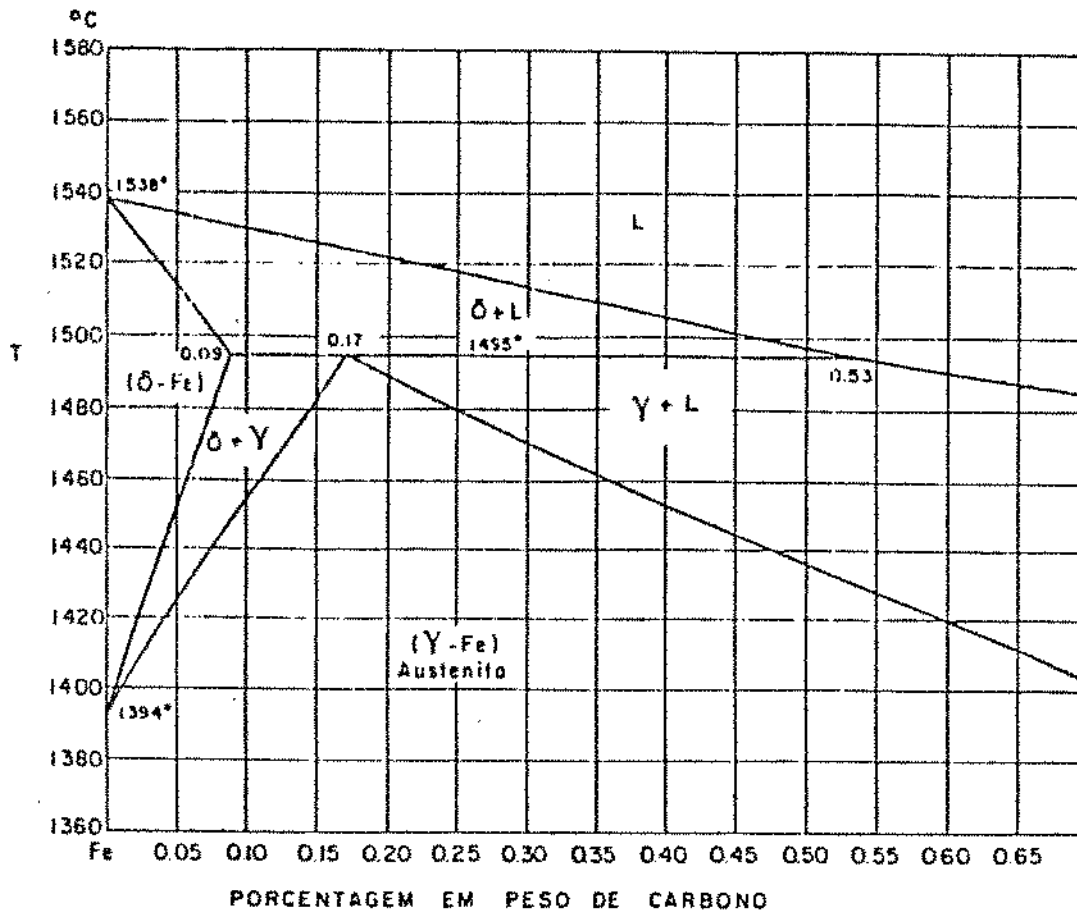


Figura 3.13 - Diagrama de equilíbrio Fe-Fe<sub>3</sub>C

disponíveis informações relativas ao calor latente dos metais envolvidos na formação da mesma. Nestes casos, é preciso considerar cada diagrama de equilíbrio de fases em separado e fazer-se uma estimativa do calor latente global em função da quantidade relativa das fases presentes na concentração nominal da liga em questão. No caso particular de aços, esta dificuldade é contornada tendo em vista que dentro do campo de definição de aços (máximo de 2% de carbono em

peso) a baixa concentração de carbono não chega a alterar de forma significativa o valor do calor latente do metal base. O valor de 'H' pode ser assumido constante, restando de fundamental a análise da forma com que é liberado este calor dentro do intervalo de solidificação.

#### 3.4.4.2.B) Condutividade térmica ( k ):

É importante considerar que esta propriedade pode variar em grande quantidade com a temperatura e, principalmente, para cada estado de agregação. No caso de transformações alotrópicas (alterações do reticulado cristalino em determinadas temperaturas) esta propriedade também pode variar. A figura 3.14 mostra a variação desta propriedade com a temperatura para o aço 1010.

Tratando-se de uma liga e sendo conhecidas as condutividades térmicas dos metais que constituem a liga, é necessário recorrer ao diagrama de fases para que possa ser feita uma estimativa dessa propriedade para cada concentração de soluto. Assim de forma geral pode-se escrever:

-Para o sólido:

$$k_s = k_s(T) \longrightarrow T < T_s \quad (3.120)$$

-Para o intervalo de solidificação:

$$k_p = k_s(T) \cdot f_s + k_l(T) \cdot f_l \longrightarrow T_s < T < T_l \quad (3.121)$$

Para este caso o valor local da condutividade térmica vai depender da abordagem adotada para a evolução da fração sólida ( $f_s$ ), e fração líquida ( $f_l$ ), no intervalo de solidificação ( $T_l$  a  $T_s$ ).

$$\text{Como} \quad f_s + f_l = 1 \quad (3.122)$$

$$\text{então tem-se que} \quad f_l = 1 - f_s \quad (3.123)$$

assim pode-se reescrever 3.121 apenas como função de  $f_s$ :

$$k_p = ( k_s(T) - k_l(T) ) \cdot f_s + k_l(T) \quad (3.124)$$

-Para o líquido:

$$k_l = k_l(T) \quad \longrightarrow \quad T > T_l \quad (3.125)$$

O meio líquido, na prática do Lingotamento Contínuo, está sujeito à presença de correntes de convecção, naturais e forçadas, que modificam as condições de fluxo de calor. Em algumas abordagens costuma-se modificar 'k<sub>l</sub>' para levar em consideração o efeito destas correntes.

#### 3.4.4.2.C) Calor específico ( c ):

Praticamente a mesma análise que foi feita para a condutividade térmica pode ser estendida ao calor específico. Esta propriedade pode variar de forma significativa com a temperatura, estado de agregação e, quando for o caso, com as transformações alotrópicas. A figura 3.15 mostra a variação desta propriedade com a temperatura para o aço 1010.

De modo semelhante pode-se escrever:

-Para o sólido:

$$c_s = c_s(T) \quad \longrightarrow \quad T < T_s \quad (3.126)$$

-Para o intervalo de solidificação:

$$c_p = c_s(T) \cdot f_s + c_l(T) \cdot f_l \quad \longrightarrow \quad T_s < T < T_l \quad (3.127)$$

De maneira semelhante a condutividade térmica, pode-se escrever a relação 3.127 como função apenas da fração sólida (  $f_s$  ):

$$c_p = ( c_s(T) - c_l(T) ) \cdot f_s + c_l(T) \quad (3.128)$$

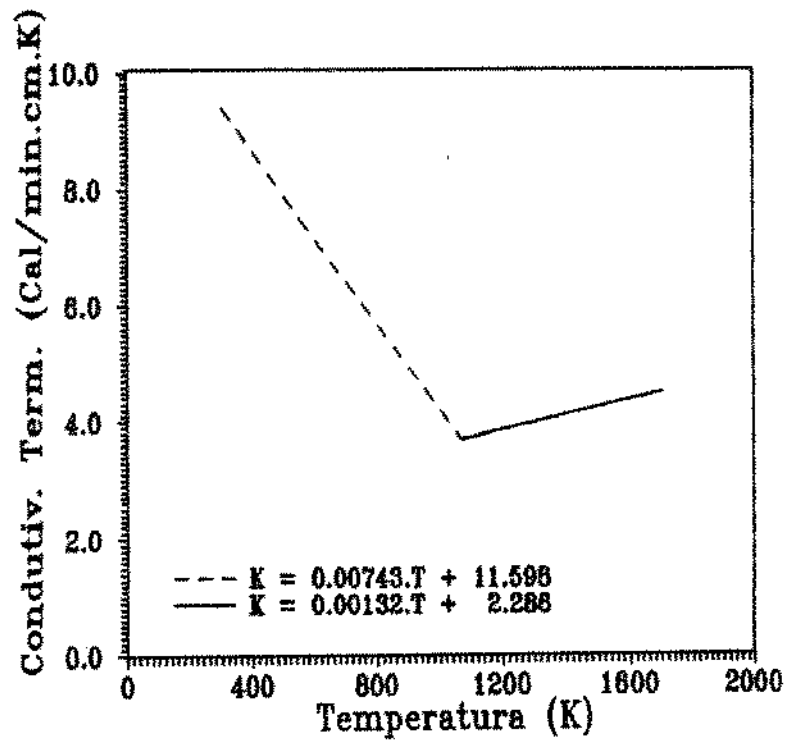


Figura 3.14 - Variação da condutividade térmica com a temperatura para o aço 1010

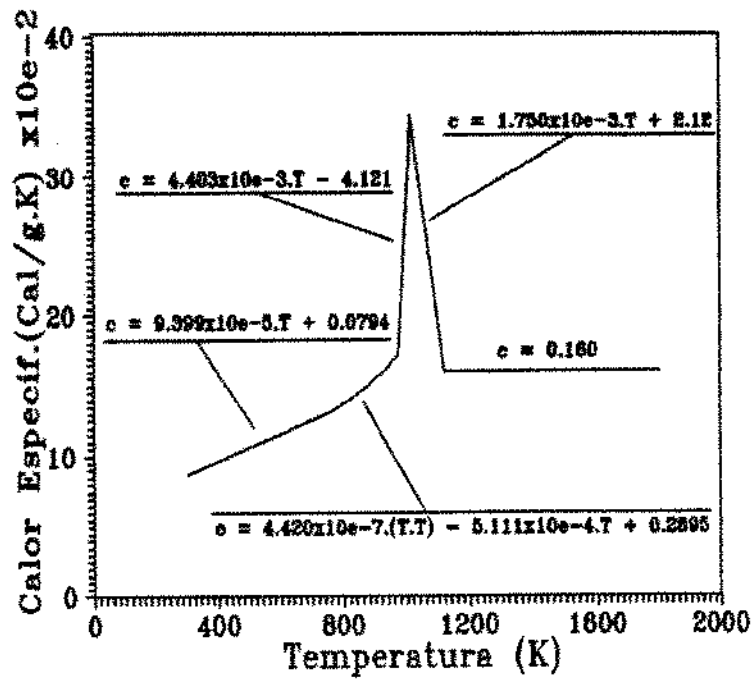


Figura 3.15 - Variação do calor específico com a temperatura para o aço 1010



Com o intuito de facilitar o tratamento numérico da liberação de calor latente no intervalo de solidificação, modifica-se artificialmente o calor específico dentro do intervalo de solidificação introduzindo o calor latente, conforme já mostrado anteriormente:

$$\bar{c}_p = (c_s(T) - c_l(T)) \cdot f_s + c_l(T) - H \cdot \frac{\partial f_s}{\partial T} \quad (3.129)$$

-Para o líquido:

$$c_l = c_l(T) \quad \longrightarrow \quad T > T_i \quad (3.130)$$

Neste caso, o efeito das correntes convectivas só encontra reflexos em uma menor variação de temperaturas no líquido (tendência à homogeneização).

#### 3.4.4.2.D) Densidade ( $\rho$ ):

Esta propriedade também varia com os mesmos fatores citados anteriormente para a condutividade térmica e o calor específico, embora de forma menos significativa. Entre diferentes estados de agregação sua variação pode até ser significativa. Entretanto, adotar sua variação com a temperatura dentro de cada meio, ao invés de um valor constante, não conduz necessariamente a resultados mais precisos quando o processo de solidificação é modelado matematicamente. Da mesma forma pode-se escrever:

-Para o sólido:

$$\rho_s = \rho_s(T) \quad \longrightarrow \quad T < T_s \quad (3.131)$$

-Para o intervalo de solidificação  $\longrightarrow T_s < T < T_i$ :

$$\rho_p = ( \rho_s(T) - \rho_l(T) ) \cdot f_s + \rho_l(T) \quad (3.132)$$

-Para o líquido:

$$\rho_l = \rho_l(T) \longrightarrow T > T_l \quad (3.133)$$

3.4.4.3 - Evolução da fração sólida (  $f_s$  ) no intervalo de solidificação<sup>[38-41]</sup>;

A forma de liberação do calor latente (  $H$  ) e consequentemente a natureza da redistribuição do soluto que ocorre durante a solidificação é extremamente importante devido a seus efeitos determinantes sobre as características do resfriamento e a estrutura do metal sólido.

No caso de ligas, a liberação do calor latente tem início quando, durante o resfriamento, o metal líquido atinge a temperatura *liquidus* ( $T_l$ ) e termina quando alcança a temperatura *solidus* ( $T_s$ ), estando consequentemente diretamente ligada à evolução da fração sólida ( $f_s$ ) no intervalo de solidificação.

Para o cálculo da fração sólida existem várias abordagens que foram desenvolvidas, levando-se em consideração: tipo da liga, sistema metal/molde e eventuais condições de resfriamento. As várias abordagens são detalhadas a seguir:

3.4.4.3.A) Regra da alavanca:

Quando se considera que o sistema está em equilíbrio termodinâmico, ou seja, que a composição química permanece uniforme dentro de cada fase, o comportamento da solidificação pode ser descrito pela clássica regra da alavanca.

Considerando-se que as linhas *solidus* e *liquidus* como linhas retas, a composição do sólido junto à fronteira sólido/líquido ( $C_s$ ) pode ser descrita por:

$$C_s = \frac{k' \cdot C_o}{f_s \cdot (k' - 1) + 1} \quad (3.134)$$

onde:

$C_0$  = Composição nominal da liga;

$k'$  = Coeficiente de redistribuição do soluto

Através de modificações da equação acima, ' $f_s$ ' pode ser expressa em função das temperaturas do sistema:

$$f_s = \left[ \frac{1}{1 - k'} \right] \cdot \left[ \frac{T_l - T}{T_f - T} \right] \quad (3.135)$$

onde ' $T_f$ ' representa a temperatura de fusão do elemento base.

#### 3.4.4.3.B) Equação de Scheil:

As condições de solidificação verificadas na prática não conduzem a situações de equilíbrio termodinâmico em todo o sistema metálico. Para situações em que a difusão do soluto no sólido pode ser desprezada e que a ação da convecção no metal líquido assegura completa mistura do soluto, o tratamento clássico de 'Scheil' permite calcular a concentração do sólido na fronteira sólido/líquido através da relação:

$$C_s = k' \cdot C_0 \cdot (1 - f_s)^{k'-1} \quad (3.136)$$

ou ainda em função das temperaturas do sistema:

$$f_s = 1 - \left[ \frac{T_f - T}{T_f - T_l} \right]^{1/(k' - 1)} \quad (3.137)$$

Esta abordagem conduz a resultados muito próximos de situações práticas que conduzem a solidificação dendrítica. Entretanto, a hipótese de ausência de difusão no sólido formado faz

com que esta abordagem seja utilizada com mais precisão em casos de solução sólida substitucional. Deve-se esperar que a maioria das situações práticas de solidificação ocorram na faixa compreendida entre abordagens da regra da alavanca e da equação de 'Scheil' sendo o fator determinante de posição entre estes dois casos limites exatamente a intensidade da difusão no estado sólido.

#### 3.4.4.3.C) Modelo de Brody e Flemings:

A hipótese de ausência de difusão de soluto no estado sólido é certamente uma restrição muito forte quando são abordados casos com solução sólida intersticial. Nesses casos, devido à elevada mobilidade atômica do soluto intersticial, é preciso que sejam também quantificadas as modificações no perfil de concentração de soluto em cada instante, levando-se em conta também o sentido de migração de soluto em direção ao sólido formado (difusão de retorno). Brody e Flemings propuseram duas soluções que levam em consideração a difusão no estado sólido, representadas pelas seguintes expressões:

-Crescimento constante da ramificação dendrítica na direção perpendicular à direção de deslocamento da interface sólido/líquido:

$$C_s = k' \cdot C_o \cdot \left[ 1 - \frac{f_s}{1 - k'} \right]^{(k' - 1)} \quad (3.138)$$

e em termos de temperaturas do sistema:

$$f_s = (1 + \alpha \cdot k') \cdot \left[ 1 - \frac{T_f - T}{T_f - T_L} \right]^{1/(k' - 1)} \quad (3.139)$$

-Crescimento parabólico da ramificação dendrítica na direção perpendicular à direção de deslocamento da interface sólido/líquido:

$$C_s = k' C_o. [1 - (1 - 2. \alpha. k') . f_s]^{(k'- 1)/(1 - 2. \alpha. k')} \quad (3.140)$$

e em termos das temperaturas do sistema:

$$f_s = \left[ \frac{1}{1 - 2. \alpha. k'} \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T_l - T}{T_l - T_s} \right) \right]^{(1 - 2. \alpha. k')/(k'- 1)} \quad (3.141)$$

sendo:

$$\alpha = \frac{4. D_s. t_{sl}}{\lambda^2} \quad (3.142)$$

onde:

$D_s$  = Difusividade do soluto no sólido

$t_{sl}$  = Tempo de solidificação local

$\lambda$  = Espaçamento dendrítico

sendo que para o caso de aços a difusividade do carbono no sólido pode ser estimada pela expressão:

$$D_s = 10^7. \exp \left[ - \frac{16300}{T} \right] \quad (3.143)$$

onde ' $T$ ' pode ser tomado como uma temperatura média no intervalo de solidificação, embora esta simplificação possa ser desnecessária em tratamentos numéricos.

Quando se tratar de crescimento dendrítico, as expressões de Brody e Flemings representadas pelas equações 3.141 a 3.143 são mais precisas que a regra da alavanca, ou a equação de Scheil.

#### 3.4.4.3.D) Modelo de Clyne e Kurz:

A observação de que o modelo de Brody e Flemings conduz a resultados precisos somente em uma faixa de valores de ' $\alpha$ ', apresentando resultados que contrariam as condições de solidificação à medida que os valores de ' $\alpha$ ' se tornam elevados, levou a uma modificação no modelo de Brody e Flemings que pudesse quantificar o efeito da difusão de retorno em toda a faixa de valores de ' $\alpha$ ' ( $0 \rightarrow \infty$ ).

Esta modificação proposta por Clyne e Kurz conduziu às seguintes expressões:

$$C_s = k' \cdot C_o \cdot [1 - (1 - 2 \cdot \Omega \cdot k' \cdot f_s)]^{(k' - 1)/(1 - 2 \cdot \Omega \cdot k')} \quad (3.144)$$

ou em termos das temperaturas do sistema:

$$f_s = \left[ \frac{1}{1 - 2 \cdot \Omega \cdot k'} \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T_f - T}{T_f - T_i} \right) \right]^{(1 - 2 \cdot \Omega \cdot k')/(k' - 1)} \quad (3.145)$$

onde:

$$\Omega = \alpha \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \right] - \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \alpha}\right) \quad (3.146)$$

#### 3.4.4.3.E) Modelo de Ohnaka<sup>[42]</sup>:

Outra proposta que modifica a equação original de Brody-Flemings, foi formulada por Ohnaka, e é baseada na solução da equação de difusão através do método do perfil integral, admitindo-se para tanto que a distribuição de soluto no sólido formado seja representada por uma expressão quádratica.

A solução obtida pelo autor difere da análise de Brody-Flemings através da definição de um novo parâmetro ' $\alpha_c$ ' que deve substituir ' $\alpha$ ' na expressão de Brody-Flemings, e é dado por:

$$\alpha_c = \frac{1}{(1 + 2 \cdot \alpha)} \quad (3.147)$$

#### 3.4.4.3.E) Análise Conclusiva<sup>[28]</sup>:

A melhor maneira de avaliar qual das abordagens mencionadas seria a mais conveniente para ser adotada na modelagem numérica da solidificação de aços, seria utilizar abordagens entre os casos limites de valores de ' $\alpha$ ', quais sejam:

$\alpha = 0$        $\longrightarrow$       Equação de Scheil  
 $\alpha = \infty$       $\longrightarrow$       Regra da alavanca

Para facilitar a visualização comparativa entre os resultados das diferentes abordagens, é interessante adotar um aço com intervalo de solidificação grande, por exemplo com 1% de carbono.

O carbono é um soluto intersticial de elevada mobilidade atômica (altos valores de  $D_s$ ), o que implica em valores altos para ' $\alpha$ ' geralmente pouco acima de 5 para condições de solidificação observadas na prática de lingotamento. Nessas condições, a utilização do modelo de Brody e Flemings não é indicada já que para este valor o modelo apresenta uma divergência muito grande das condições reais de solidificação. Nesse caso, por exemplo, o modelo prevê no final do intervalo de solidificação, temperaturas bem acima da temperatura *solidus* ( $T_s$ ), o que constitui uma condição física completamente fora da realidade. Para analisar a região intermediária de valores de ' $\alpha$ ', pode-se, por exemplo, aplicar-se a abordagem de Clyne e Kurz.

Devido aos valores desta alta mobilidade do carbono no sistema 'Fe-C', e devido às maiores facilidades de manipulação e simplicidade de trabalho, recomenda-se para casos de solidificação de aços, determinar-se a formação da fração sólida no intervalo de solidificação através da abordagem da Regra da Alavanca, já que

conforme mostra a figura 3.16, esta última abordagem e a de Clyne e Kurz praticamente coincidem.

A figura 3.16 mostra, para o caso do aço com 1% de carbono a evolução da fração sólida ao longo do intervalo de solidificação para vários valores de ' $\alpha$ ', inclusive os limites representados pela equação de Scheil e a regra da alavanca.

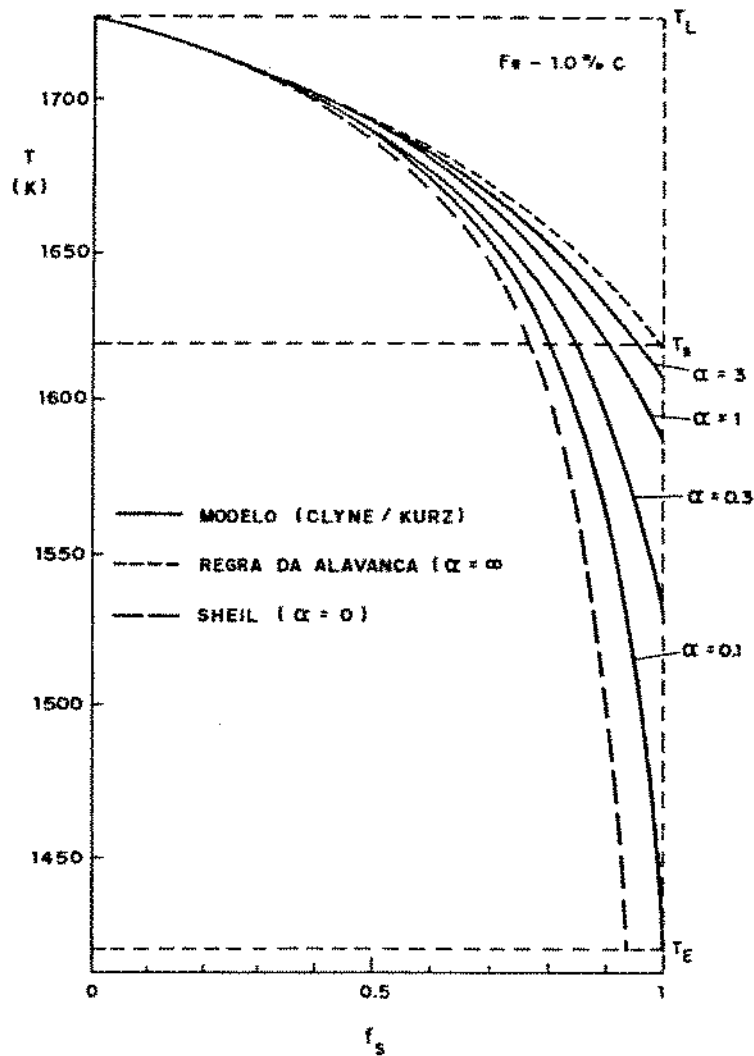


Figura 3.16 - Variação da fração sólida ( $f_s$ ) com a temperatura



## CAPITULO 04 - APLICAÇÕES AO LINGOTAMENTO CONTÍNUO, VALIDAÇÕES E SIMULAÇÕES

---

### 4.1. APLICAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO AO LINGOTAMENTO CONTÍNUO

Para verificar a validade e eficiência do modelo desenvolvido, foram feitas várias simulações de solidificação em moldes refrigerados dentre as quais algumas foram confrontadas com resultados experimentais da literatura. Vale enfatizar que o método de diferenças finitas aplicado à solidificação de ligas em diversas situações físicas, possui validade comprovada por extensa verificação experimental, apresentada na literatura por diversos autores do assunto.<sup>[49-50]</sup>

Utilizando o modelo numérico de Diferenças Finitas, com a analogia de resistores e capacitores, conforme apresentado anteriormente, tratou-se um sistema Molde/Metal subdividido em pontos nodais, para um mapeamento bidimensional, conforme pode ser visto na figura 4.1. Entretanto, apesar das simulações desenvolvidas terem sido feitas apenas utilizando moldes refrigerados, por ser o caso particular do equipamento de Lingotamento Contínuo, apresentamos o tratamento geral de um sistema Molde/Metal para moldes maciços, para compreensão teórica do desenvolvimento e utilização global do modelo. Nas simulações desenvolvidas os parâmetros do molde como um material maciço não são considerados mas apenas o coeficiente de transferência de calor na interface Molde/Metal ( $h_{new}$ ).

Com variações dos parâmetros de entrada do modelo, como o coeficiente de transferência de calor na interface Molde/Metal e na região de chuveiros, velocidade de produção e diferentes temperaturas de vazão no molde, analisou-se a evolução das isoterms 'solidus' e 'liquidus' ao longo do processo de solidificação no sistema de

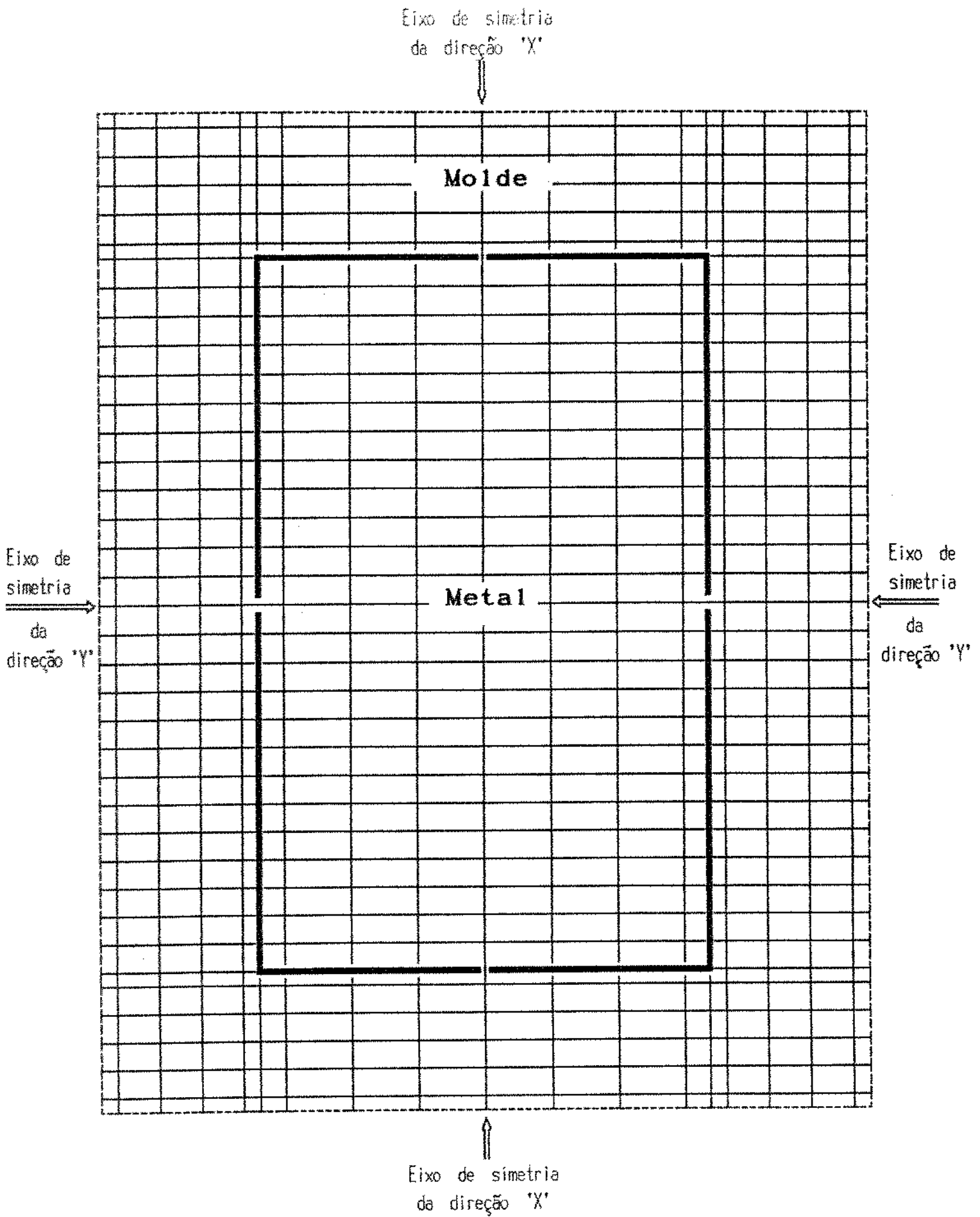


Figura 4.1 - Sistema Metal/Molde subdividido em elementos nodais para mapeamento no M.D.F.

Lingotamento Contínuo, objetivando estruturar um mapeamento em relação aos parâmetros críticos do sistema, sob ponto de vista de controle do equipamento.

Como os efeitos térmicos em relação aos eixos de simetria da figura 4.1 podem ser considerados equivalentes, então pode-se tratar todo o sistema analisando apenas uma partição do todo, conforme mostra a figura 4.2. Voltamos a lembrar que as simulações geradas foram feitas para moldes refrigerados, desconsiderando os parâmetros físicos de molde maciço, mas para efeito de validade didática mostramos os passos para casos globais de solidificação dentro do tratamento numérico. Desta forma em relação à analogia de resistores e capacitores a resistência convectiva na interface Meio-Ambiente/Molde e a resistência newtoniana na interface Molde/Metal serão tratadas conforme figuras 4.3 e 4.4 respectivamente, e para o caso de molde refrigerado conforme visto na figura 4.5. Nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 não esboçamos os capacitores acoplados aos nós das malhas apenas para simplificação visual dos desenhos. Para as figuras em questão as resistências Convectivas e Newtonianas são dadas conforme segue:

$$\text{Resistência Convectiva} = \frac{1}{h_{ox} \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z} \rightarrow \text{Para a direção 'X'}$$

$$\text{Resistência Convectiva} = \frac{1}{h_{oy} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta z} \rightarrow \text{Para a direção 'Y'}$$

$$\text{Resistência Newtoniana} = \frac{1}{h_{nev_x} \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z} \rightarrow \text{Para a direção 'X'}$$

$$\text{Resistência Newtoniana} = \frac{1}{h_{nev_y} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta z} \rightarrow \text{Para a direção 'Y'}$$

(4.1)

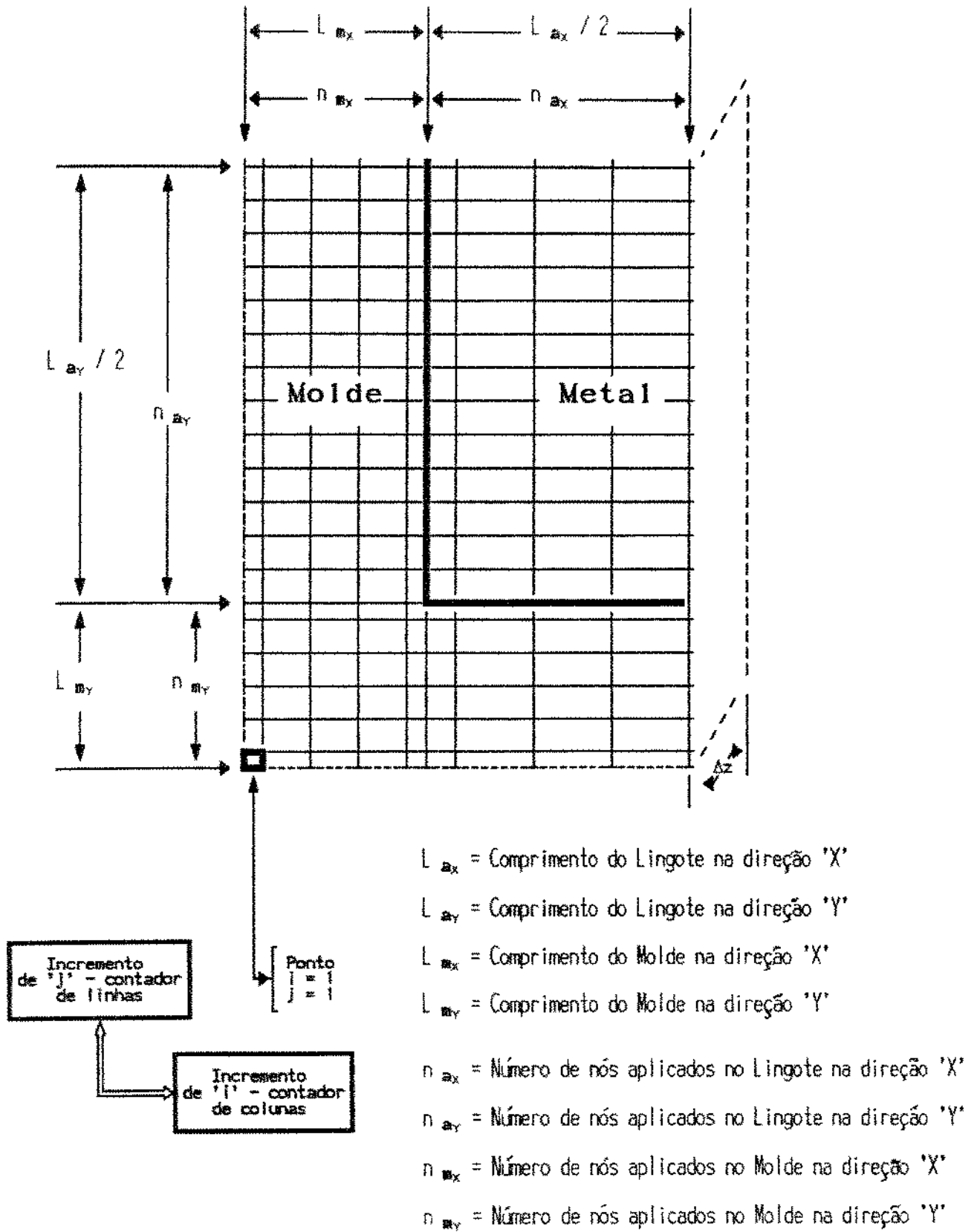


Figura 4.2 - Esquema para o tratamento numérico do sistema Metal/Molde no Lingotamento Contínuo

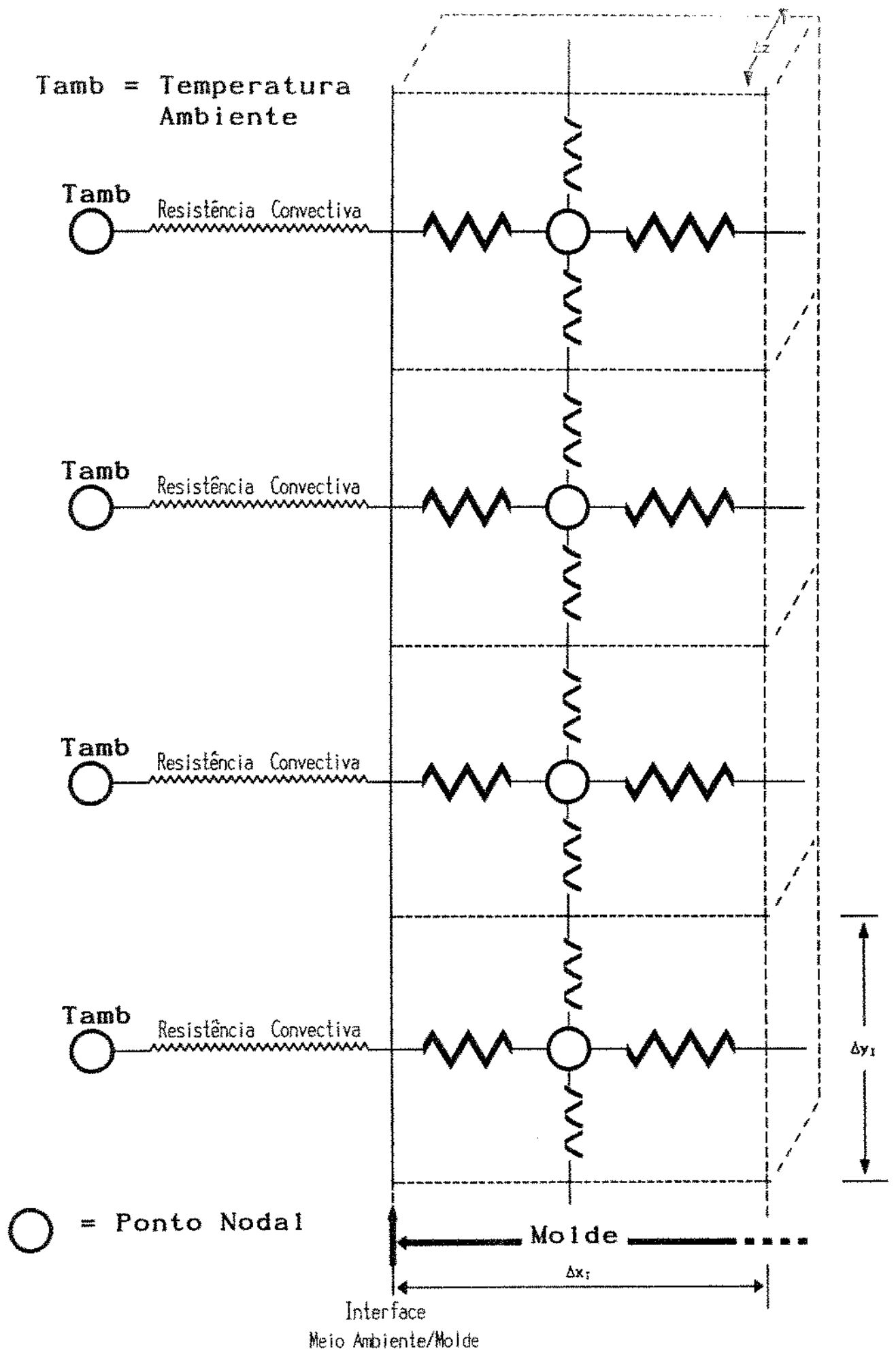


Figura 4.3 - Esquema para o tratamento da resistência Convectiva na interface Meio-Ambiente/Molde

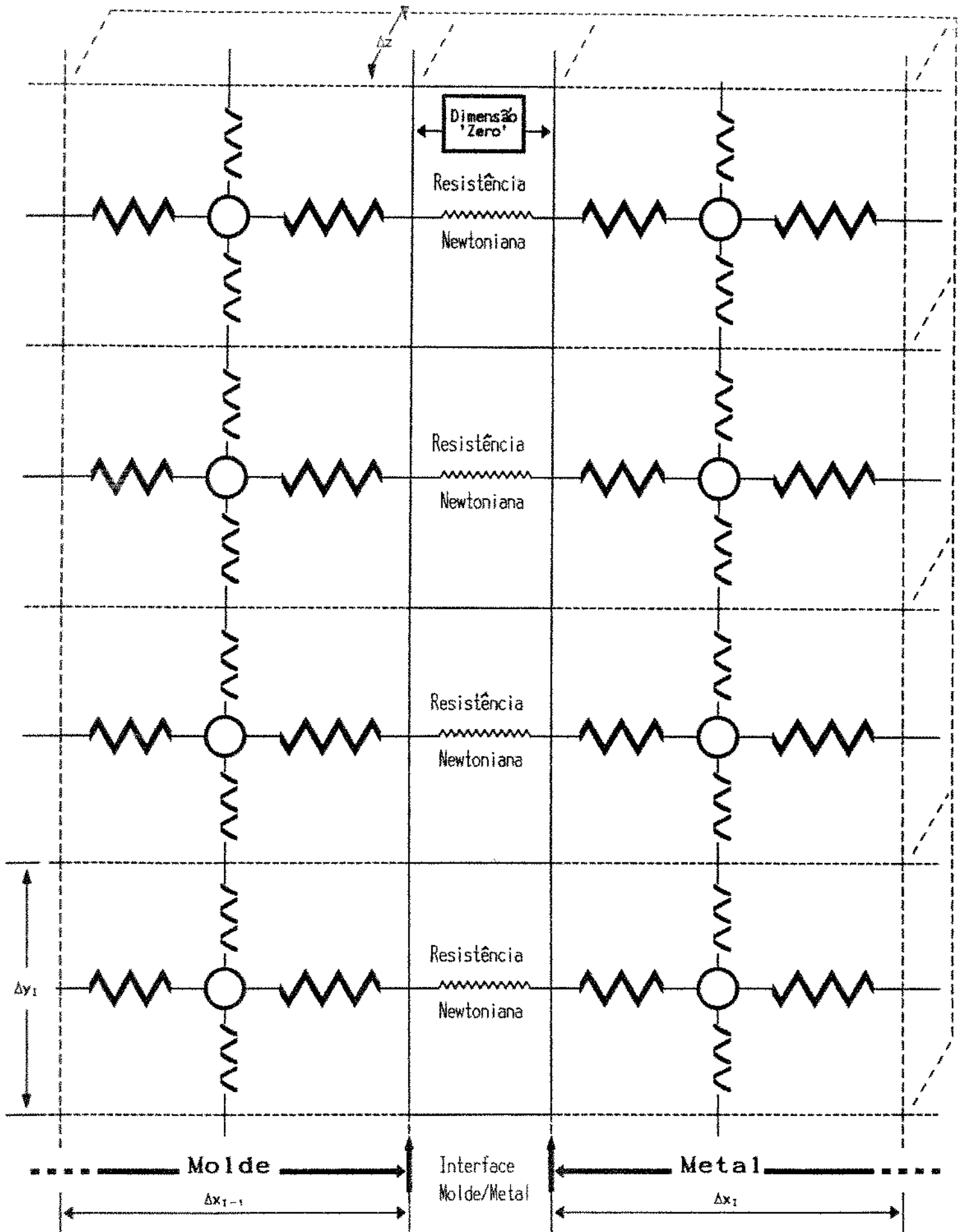


Figura 4.4 - Esquema para o tratamento da resistência Newtoniana na interface Molde/Metal  
 Para moldes maciços

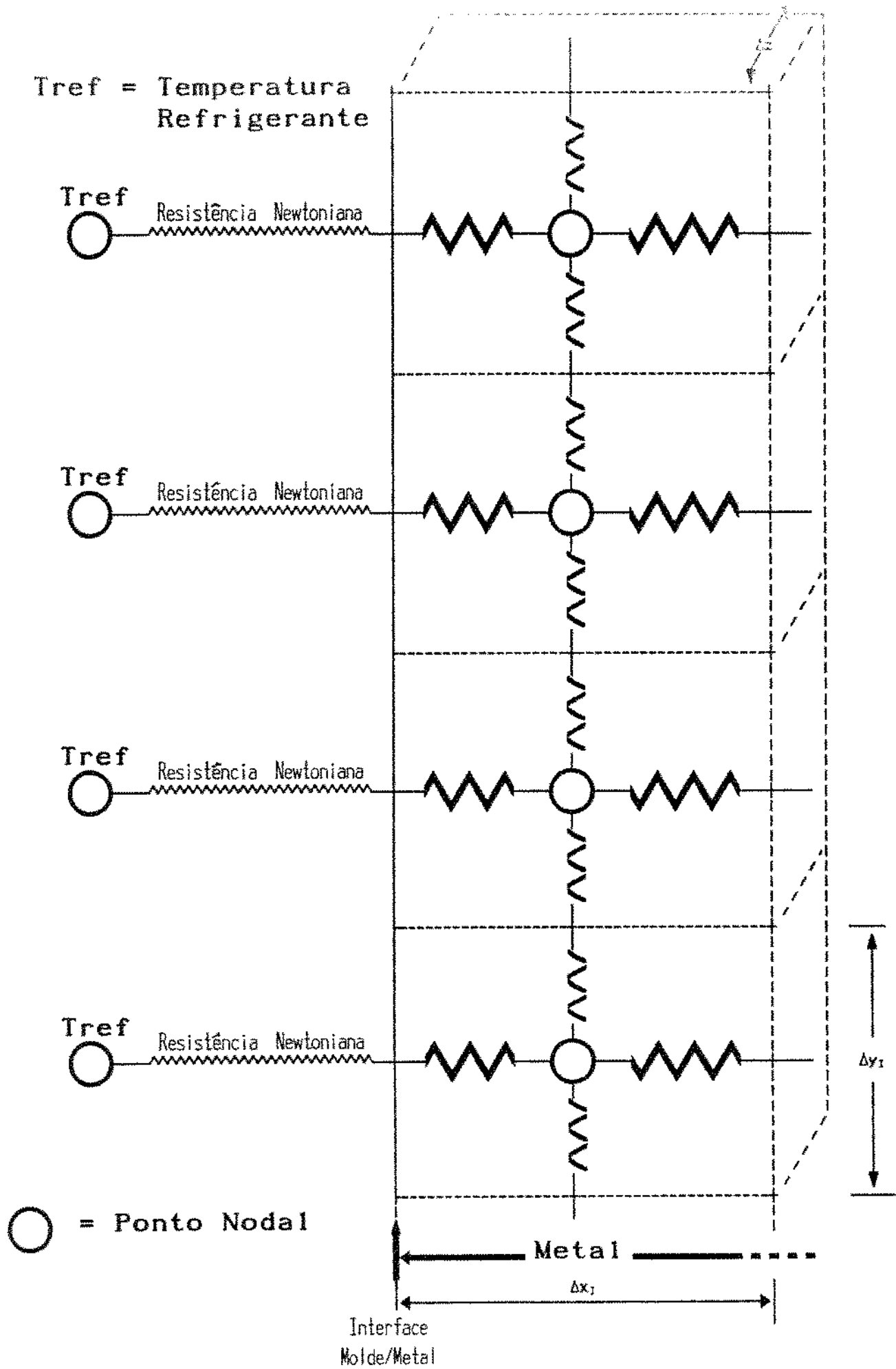


Figura 4.5 - Esquema para o tratamento da resistência Newtoniana na interface Molde/Metal  
Para moldes refrigerados

Sendo:

$h_{ox}$  = Coeficiente de convecção térmica externo ao molde maciço - na direção 'x';

$h_{oy}$  = Coeficiente de convecção térmica externo ao molde maciço - na direção 'y';

$h_{nev x}$  = Coeficiente de transferência de calor na interface Molde/Metal - na direção 'x';

$h_{nev y}$  = Coeficiente de transferência de calor na interface Molde/Metal - na direção 'y';

A seguir mostramos um algoritmo básico utilizando o modelo para aplicação no Lingotamento Contínuo:

### INÍCIO

1- Recebe parâmetros de trabalho

$T_v$  = Temperatura de vazão

$T_{ref}$  = Temperatura de refrigeração

$n_{ox}$ ,  $n_{oy}$ ,  $L_{ax}$ ,  $L_{ay}$ ,  $h_{ox}$ ,  $h_{oy}$ ,  $h_{nev x}$ ,  $h_{nev y}$

$t_{max}$  = Máximo tempo de iteração

$\Delta t$  = Incremento de tempo

$C_o$  = Porcentagem de carbono

2- Cálcula:

$\Delta x = L_{ax}/n_{ox}$

$\Delta y = L_{ay}/n_{oy}$

$T_l$ ,  $T_s$  → Equação 3.118 e 3.119

3- Inicializa temperaturas da malha nodal

4- tempo =  $\Delta t$

5- Faça  $j = 1$  até  $n_{oy}$

<

Faça  $i = 1$  até  $n_{ox}$

<



Testa temperatura  $T_{i,j}$

Se:  $T_{i,j} > T_l$  (Temperatura Liquidus)

Assume parâmetros do material igual  
aos parâmetros do líquido (item  
3.4.4.2)

Se não:  $T_{i,j} < T_s$

Assume parâmetros do material igual  
aos parâmetros do sólido (item  
3.4.4.2)

Se não  $T_s < T_{i,j} < T_l$

<

5.a. Calcula Valor de ' $f_s$ '

5.b. Calcula  $\partial f_s / \partial T$

5.b. Calcula parâmetros do material

>

6- Faça  $j = 1$  até  $n_{xy}$

<

Faça  $i = 1$  até  $n_{ox}$

<

6.a. Calcula as resistências nodais (eq. 3.95)

6.b. Calcula a capacitância nodal (eq. 3.96)

6.c. Calcula valores de ' $\tau_{i,j}$ ' (eq. 3.93 e  
3.94)

6.d. Montar as matrizes de trabalho:

eq. 3.102 para modo Explícito

eq. 3.115 para modo Implícito

6.e. Resolver o sistema e guardar os valores  
de  $T_{i,j}^{n+1}$

>

```

    }
7- Faça i = 1 até nax
    {
        Faça j = 1 até nay
            {
                7.a. Calcula as resistências nodais (eq. 3.95)
                7.b. Calcula a capacitância nodal (eq. 3.96)
                7.c. Calcula valores de 'ri,j' (eq. 3.93 e
                    3.94)
                7.d. Montar as matrizes de trabalho:
                        eq. 3.102 para modo Explícito
                        eq. 3.115 para modo Implícito
                7.e. Resolver o sistema e guardar os valores
                    de Tn+1i,jy
            }
        }
8-Faça j = 1 até nay
    {
        Faça i = 1 até nax
            {
                1- Encontrar valores de Temperatura nodal:
                    Tn+1i,j = Tn+1i,jx + Tn+1i,jy
            }
        }
    Se tempo < tmax
        {
            Então: tempo = tempo + Δt
            Vá para o item 4
        }
    }
Senão: FIM

```

## 4.2 - VALIDAÇÕES

### 4.2.1. No Molde:

A comparação dos resultados obtidos com a utilização do modelo e com resultados experimentais no molde de um sistema de Lingotamento Contínuo é visto na figura 4.6. A simulação foi feita para um lingote de secção transversal 0.10 X 0.10 m, com velocidade de produção igual a 2.0m/min, sendo o coeficiente global de transferência de calor (superfície de metal/fluido de refrigeração) dado por  $h_{nev} = 2700 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , e aço com 0.1% de carbono. Temperatura de vazamento no molde de 1580 °C e temperatura de refrigeração igual a 20 °C e constante, para um molde de comprimento efetivo de 0.6 m. As constantes do metal são dadas no Apêndice B.

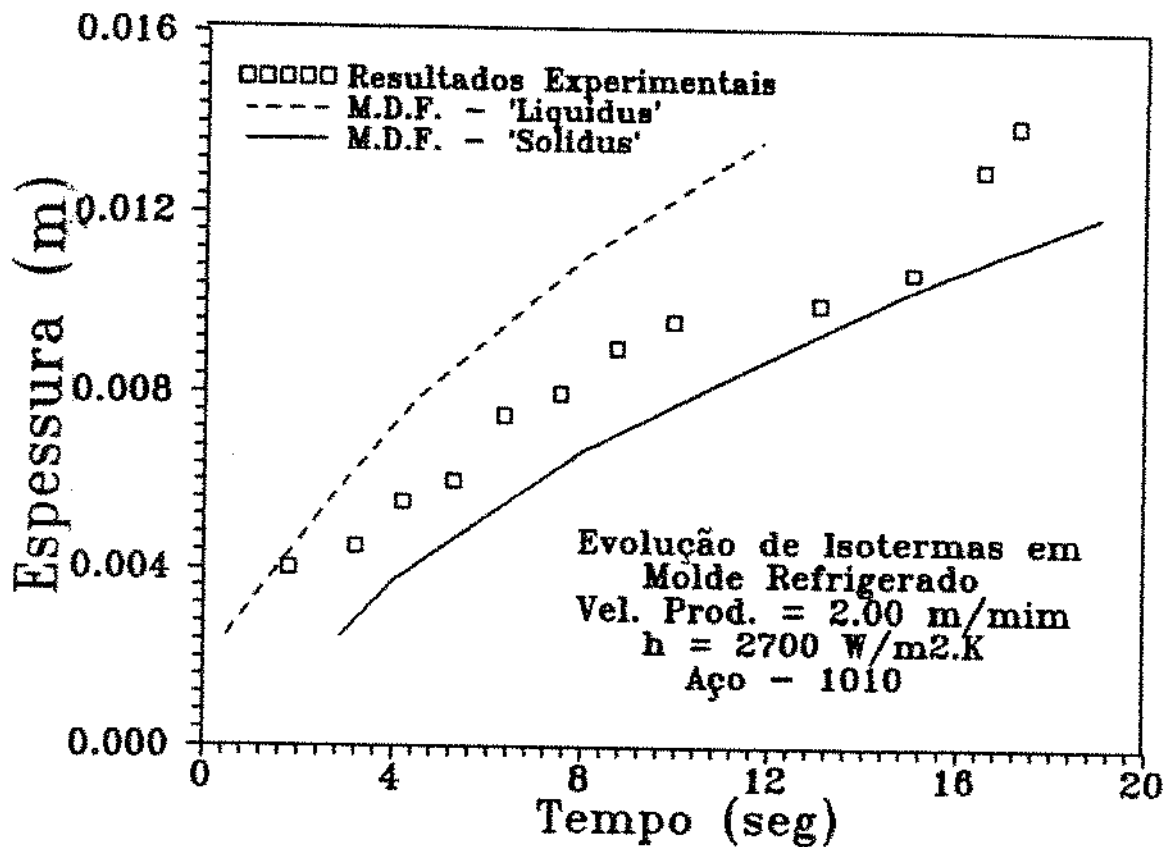


Figura 4.6 - Comparação de resultados experimentais com o modelo numérico para a evolução das isothermas 'solidus' e 'liquidus' <sup>[95]</sup>

Os pontos experimentais apresentados na figura representam o perfil de solidificação obtido através da injeção de traçadores radiativos no poço de metal líquido.<sup>[51,52]</sup>

Os traçadores radiativos difundem-se com maior ou menor grau no interior da zona pastosa, dependendo de uma série de fatores, tais como: intensidade de correntes convectivas entre os ramos dendríticos, evolução da fração sólida dentro da zona pastosa e espaçamentos interdendríticos. Os dois últimos fatores são dependentes da composição química do aço e, portanto deve-se esperar uma diferença razoável no grau de difusão dos traçadores com a variação da concentração de carbono do aço.

Outro fator que influencia a posição desses traçadores é a diminuição do fluxo de calor na interface Molde/Metal devido à formação de ondulações periódicas na superfície do lingote, o que não ocorre em aços de alto carbono, onde se deve esperar um perfil de solidificação mais regular.

O perfil delineado pelos traçadores deve representar um perfil abaixo da isoterma 'liquidus' e, em condições extremamente favoráveis de movimentação atômica, posições próximas da isoterma 'solidus'.

Analisando-se a figura 4.6 observa-se boa concordância da previsão do modelo com os resultados experimentais, uma vez que todos os pontos experimentais encontram-se dentro dos limites fixados pelas isotermas 'solidus' e 'liquidus'.

A figura 4.7 apresenta outra comparação do modelo com resultados experimentais para um lingote de 0.15 x 0.15 m com velocidade de produção igual a 1.27 m/min, coeficiente de transferência de calor  $h_{nev} = 1400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  com 0.2% de carbono, e temperatura de vazamento igual a 1580 °C e temperatura de refrigeração

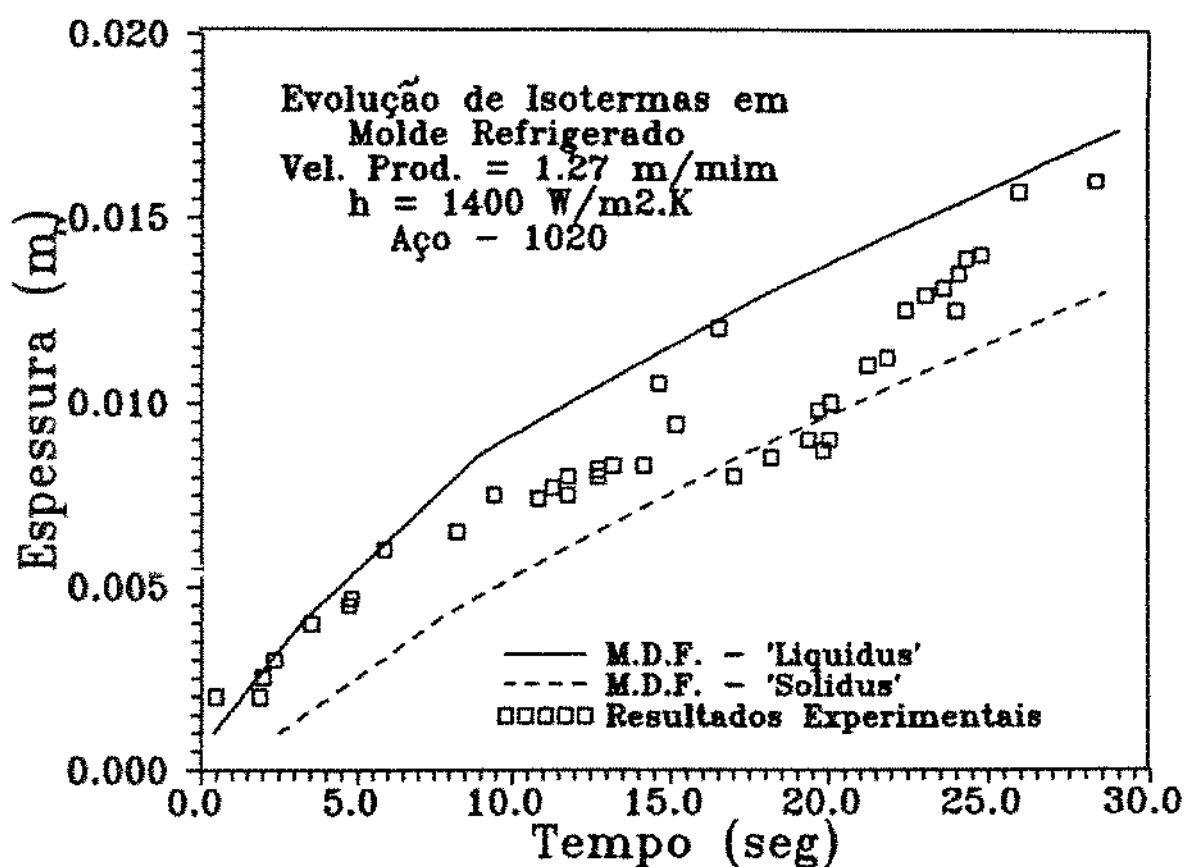


Figura 4.7 - Comparação de resultados experimentais com o modelo numérico para a evolução das isotermas 'solidus' e 'liquidus'.<sup>(22)</sup>

igual a  $20^\circ\text{C}$  em molde de comprimento efetivo de 0.6 m. A utilização do modelo apresenta ótima concordância com os resultados experimentais, sendo que a maioria destes pontos encontram-se nos limites das isotermas.

A figura 4.8 apresenta outra comparação experimental para uma placa de  $1.2 \times 0.15 \text{ m}$  para um aço de 0.08% de carbono em molde de comprimento efetivo igual a 0.6 m. A concordância com os resultados experimentais mostram a validade do modelo no efeito de cálculo da evolução da solidificação. Para esta simulação gerou-se a variação da temperatura de superfície do ponto dado na figura 4.9. A variação da

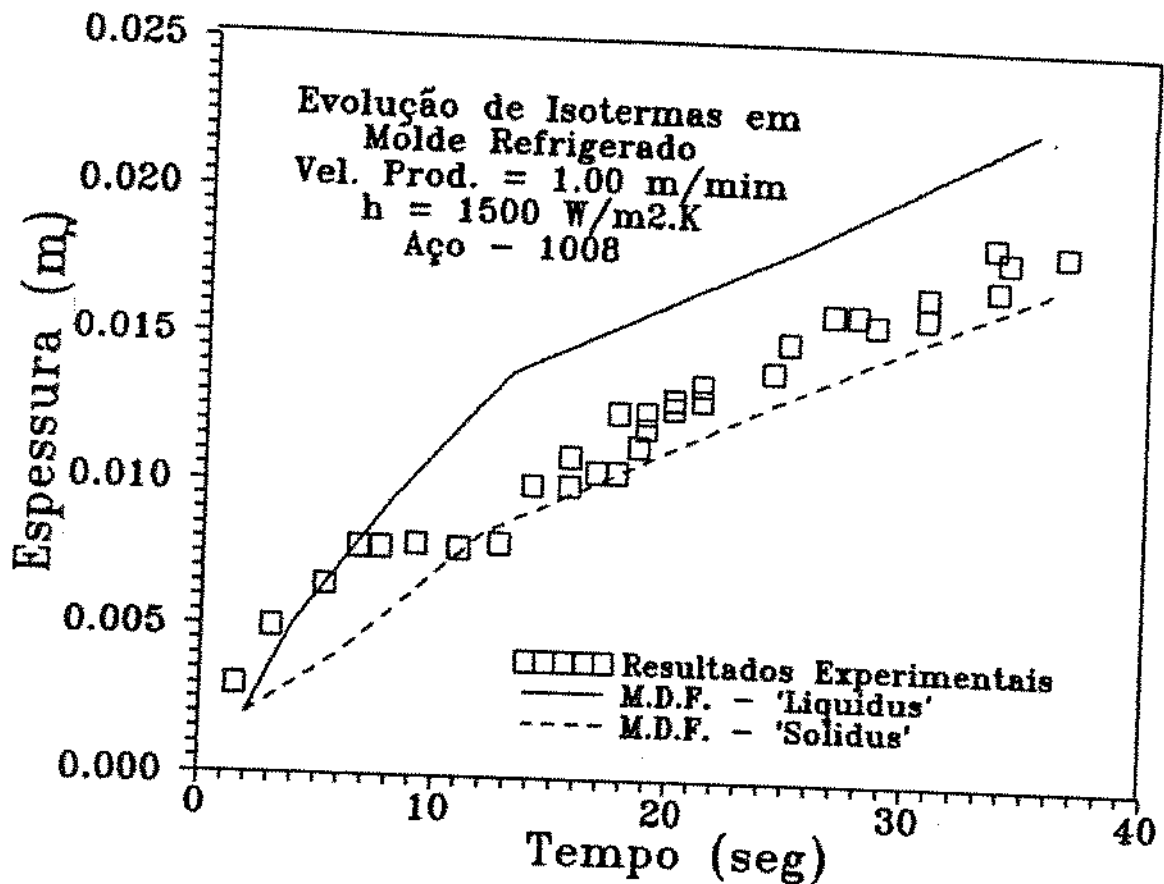


Figura 4.8 - Comparação de resultados experimentais com o modelo numérico para a evolução das isotermas 'solidus' e 'liquidus' <sup>[22]</sup>

temperatura da parede neste ponto pode ser vista na figura 4.10. Sendo que o modelo na forma bidimensional permite o conhecimento simultâneo das temperaturas pontuais de toda a área transversal do lingote. Pode-se estender a figura 4.10 para uma varredura térmica da parede ao longo da largura conforme mostra a figura 4.11. Observar que a temperatura tende a uma diminuição gradativa na direção da borda do lingote, o que é justo devido a influência da retirada de calor da superfície esquerda da placa. Este tipo de figura é de grande importância para o projeto de um sistema de controle do equipamento, sendo que através desta e com o confronto direto de dados reais

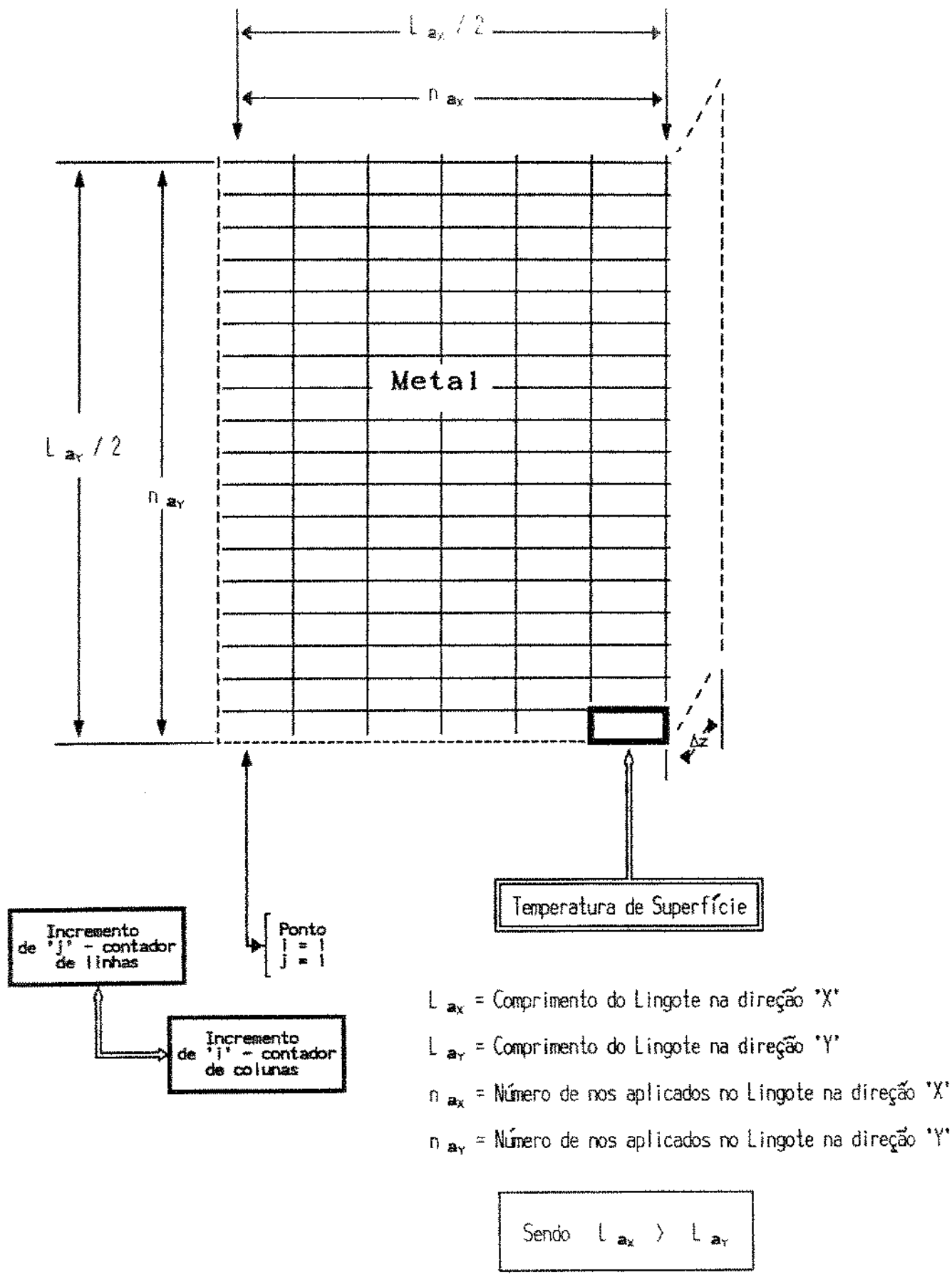


Figura 4.9 - Ponto de referência para o cálculo da temperatura de superfície através do modelo desenvolvido

obtidos via o sensoriamento em alguns pontos desta parede, pode-se estimar a espessura de casca solidificada ao longo do molde, conforme visto na figura 4.8.

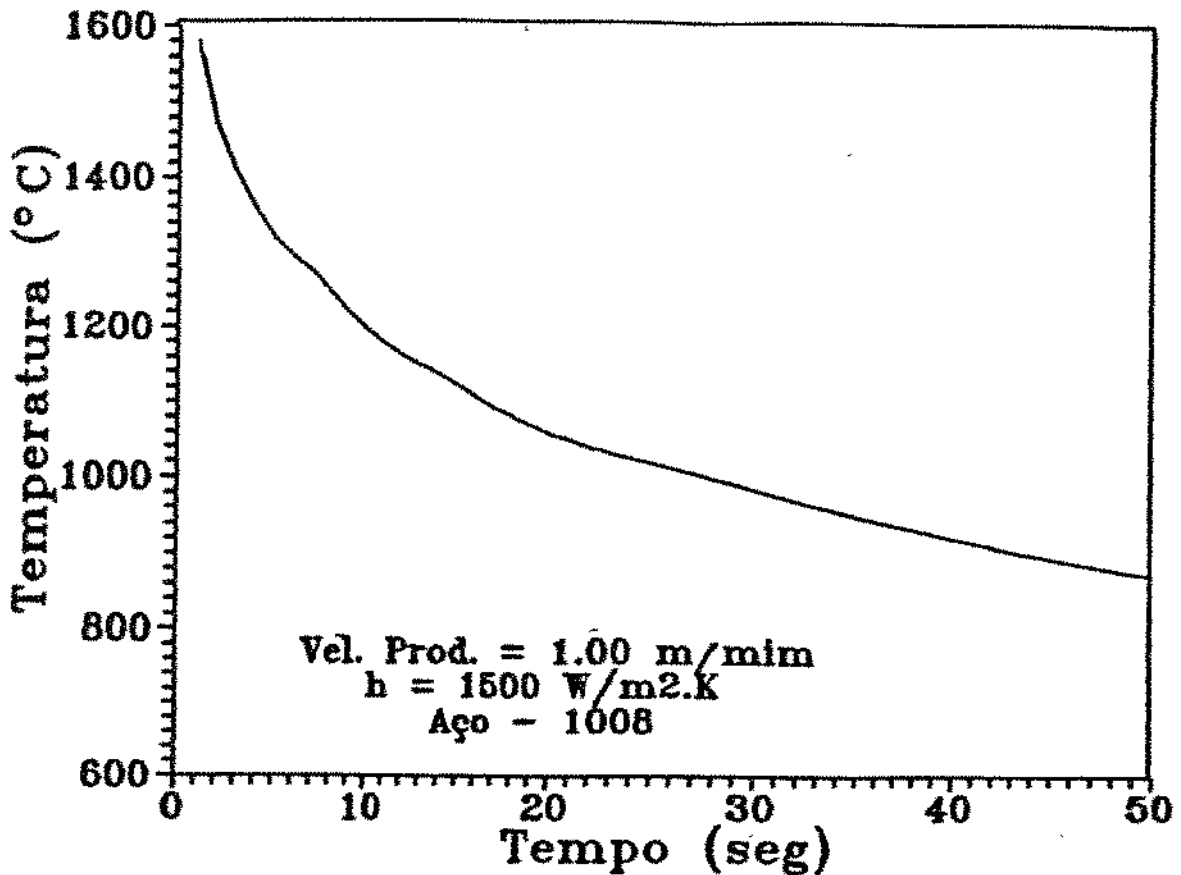


Figura 4.10 - Variação de temperatura da superfície da placa no molde

Nas figuras apresentadas anteriormente o valor do coeficiente newtoniano na interface Molde/Metal, foi considerado constante. Na prática este valor é variável devido as regiões de contato Molde/Metal conforme visto anteriormente na figura 2.7 e devido as diferentes regiões de refrigeração do molde. Para o tratamento deste valor no molde pode-se adotar uma divisão de 'n' regiões conforme a seguinte equação<sup>(28)</sup>:



$$h_{nev} \cdot L_o = \sum_{i=1}^n [L_i \cdot E \cdot h_o] \quad (4.2)$$

onde:

$h_{nev}$  = Coeficiente de transferência de calor global na interface Molde/Metal ( $W/m^2 \cdot K$ )

$L_o$  = Comprimento efetivo do molde (m)

$E$  = Fração do valor máximo de ' $h_{nev}$ '

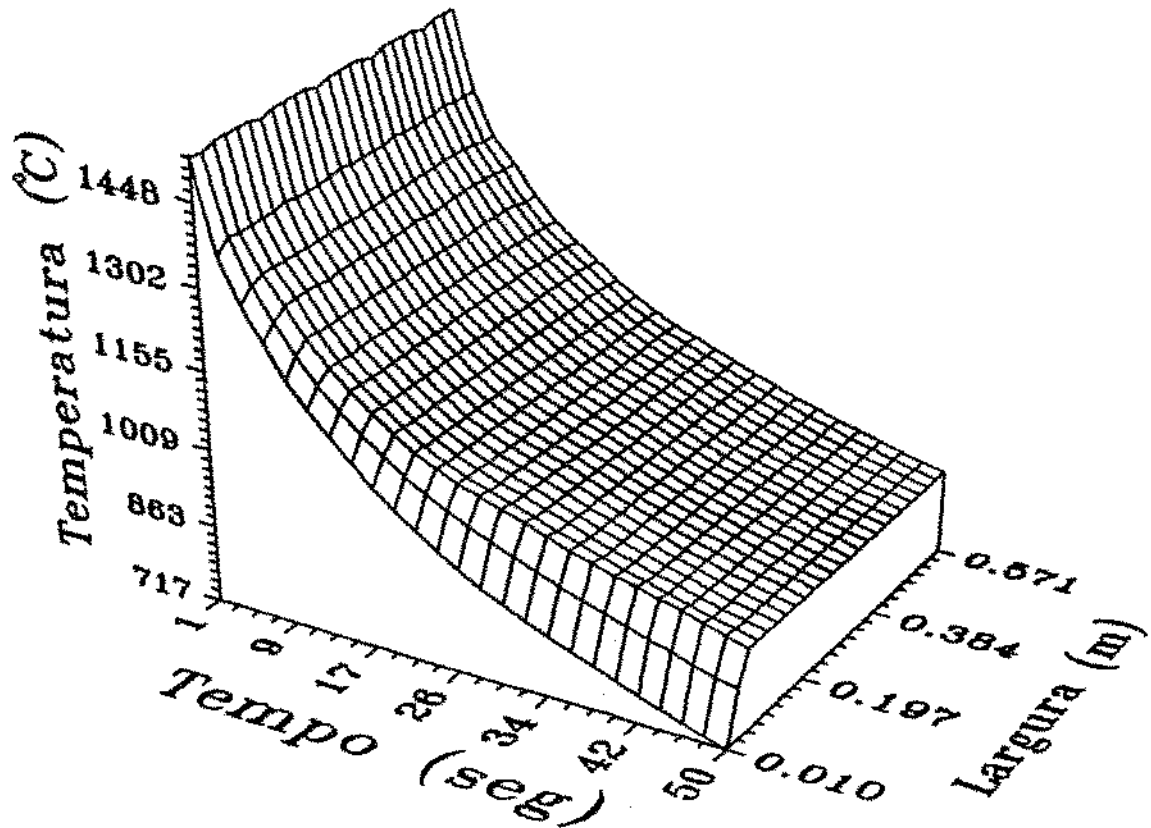


Figura 4.11 - Varredura térmica na placa ao longo da largura

Estimando uma proporção para ' $L_i$ ' baseada na alteração do fluxo e para  $n = 3$ , tem-se:

$$h_{nev} \cdot L_o = h_o \cdot L_1 + \frac{3}{4} \cdot h_o \cdot L_2 + \frac{1}{2} \cdot h_o \cdot L_3 \quad (4.3)$$

que para moldes convencionais com  $L_0 = 0.6$  m, resulta em:

$$h_0 = \frac{16}{11} \cdot h_{nev} \quad (4.4)$$

A figura 4.12 sugere uma variação em 3 pontos de 'h' no molde para  $h_{nev} = 1800 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  onde a simulação para esta variação de 'hnev' para um valor constante no molde foram comparados com a camada solidificada de resultados experimentais para um aço de 0.18% de carbono conforme a figura 4.13. Pode-se notar que a diferença entre variar ou manter 'hnev' constante ao longo do molde praticamente não produz efeito no cálculo da camada sólida do mesmo. A mesma observação foi feita por Perkins e Irving.<sup>[53]</sup>

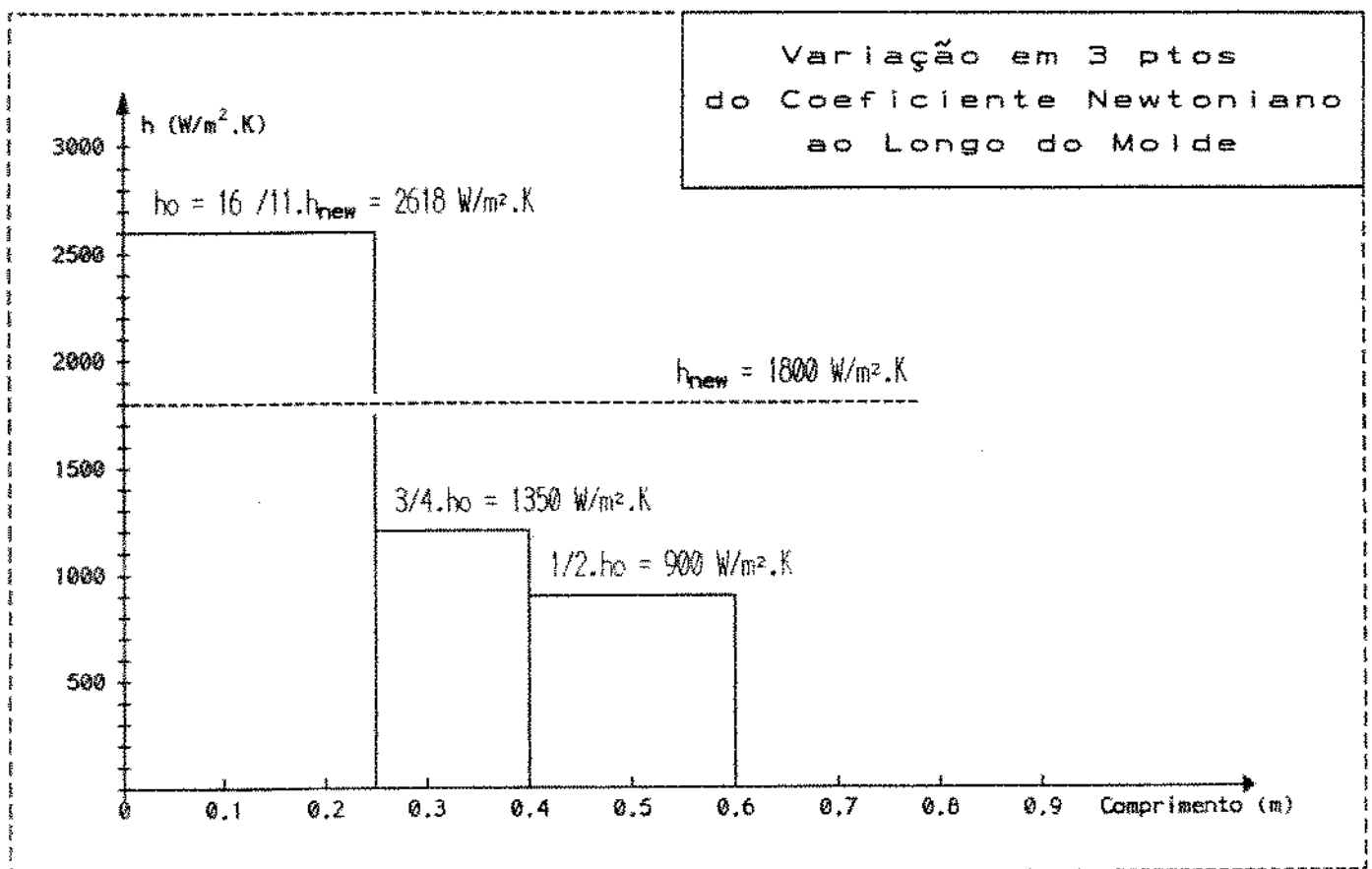


Figura 4.12 - Variação de 'hnev' para simulação do modelo de solidificação em molde refrigerado

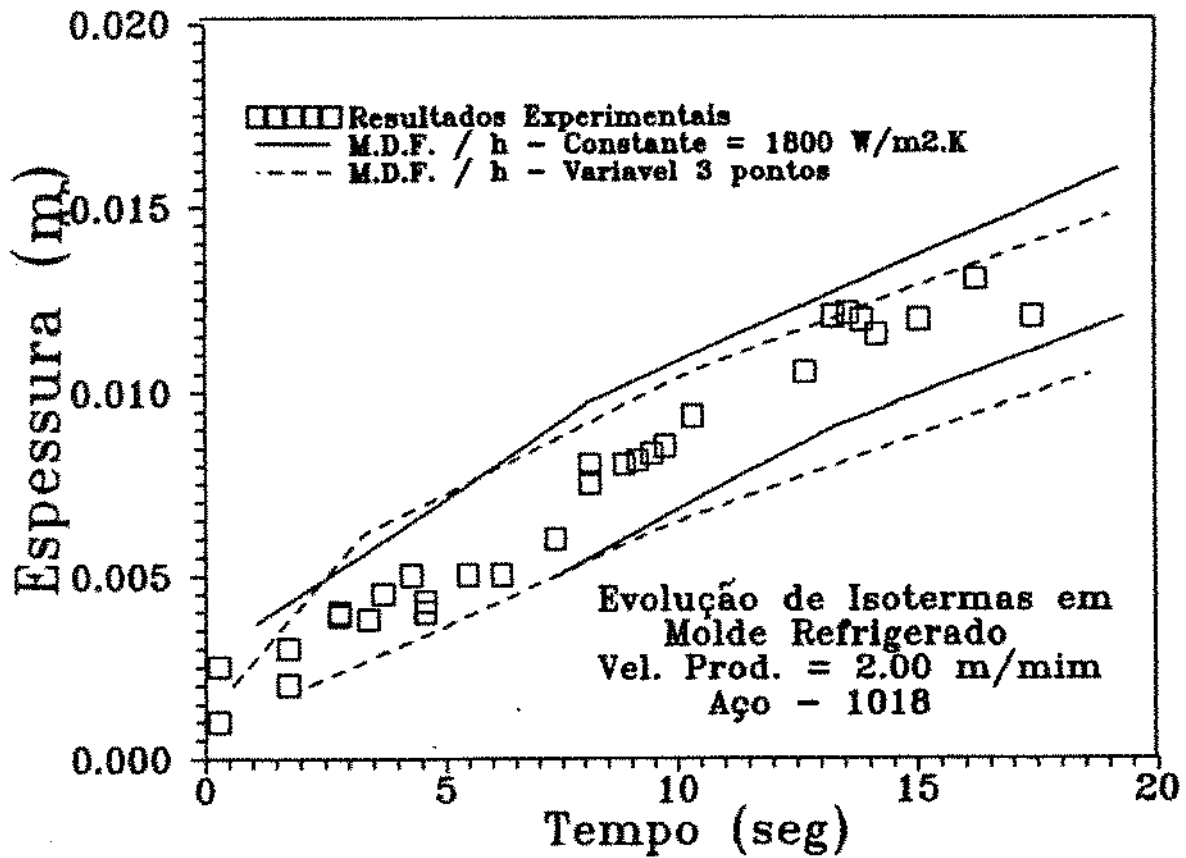


Figura 4.13 - Comparação da evolução das isotermas 'solidus' e 'liquidus' no molde, entre 'h<sub>new</sub>' constante, 'h<sub>new</sub> - variável' e resultados experimentais

Contudo a imposição de 'h<sub>new</sub>' constante no molde pode gerar problemas a um sistema de controle devido a erros de cálculo realizado pelo modelo para a temperatura de superfície do lingote na saída do molde, sendo esta informação muito importante para um mapeamento coerente do cálculo das vazões, e dimensões das regiões de chuveiros do resfriamento secundário.

A aplicação de modelos matemáticos para determinar o comportamento térmico da solidificação do aço no molde do Lingotamento Contínuo exige uma condição de contorno que possa expressar o mais realisticamente possível o fluxo de calor no molde, de tal forma que

os resultados obtidos na saída deste possam servir de parâmetros confiáveis no planejamento e controle de resfriamento secundário.

É evidente que a medida experimental de ' $h_{nev}$ ' ao longo do molde, para cada concentração de carbono na faixa crítica (até 0.2% de Carbono) e para cada condição operacional, é a providência mais interessante. Isso, no entanto, nem sempre é compatível com as condições de lingotamento em uma indústria siderúrgica, o que implica na necessidade da adoção de condições de contorno experimentalmente analisadas, ou de tomar-se como referência alguma medida experimental já realizada para uma operação semelhante. Neste último caso, uma vez que os valores medidos são valores médios ao longo do molde, é essencial a simulação da variação de ' $h_{nev}$ '. Entretanto, qualquer que seja a condição de contorno adotada, é necessário ter sempre ressaltada a forte influência da velocidade de produção e da concentração de carbono na faixa cuja variação do fluxo de calor no molde é mais significativa.

A figura 4.14 sugere uma variação linear de 10 pontos de ' $h_{nev}$ ' ao longo do molde e a figura 4.15 e 4.16 mostram respectivamente a variação da temperatura da superfície e o perfil da camada solidificada ao longo do processo. Observe a diferença entre as temperaturas de saída do molde para o caso de ' $h_{nev}$ ' variável e ' $h_{nev}$ ' constante.

#### 4.2.2. Na Região de Chuveiros:

A validação de resultados obtidos em um modelo teórico pode ser feita seguindo três caminhos distintos:

- 1- Comparando resultados teóricos com resultados experimentais próprios;
- 2- Comparando resultados teóricos com resultados

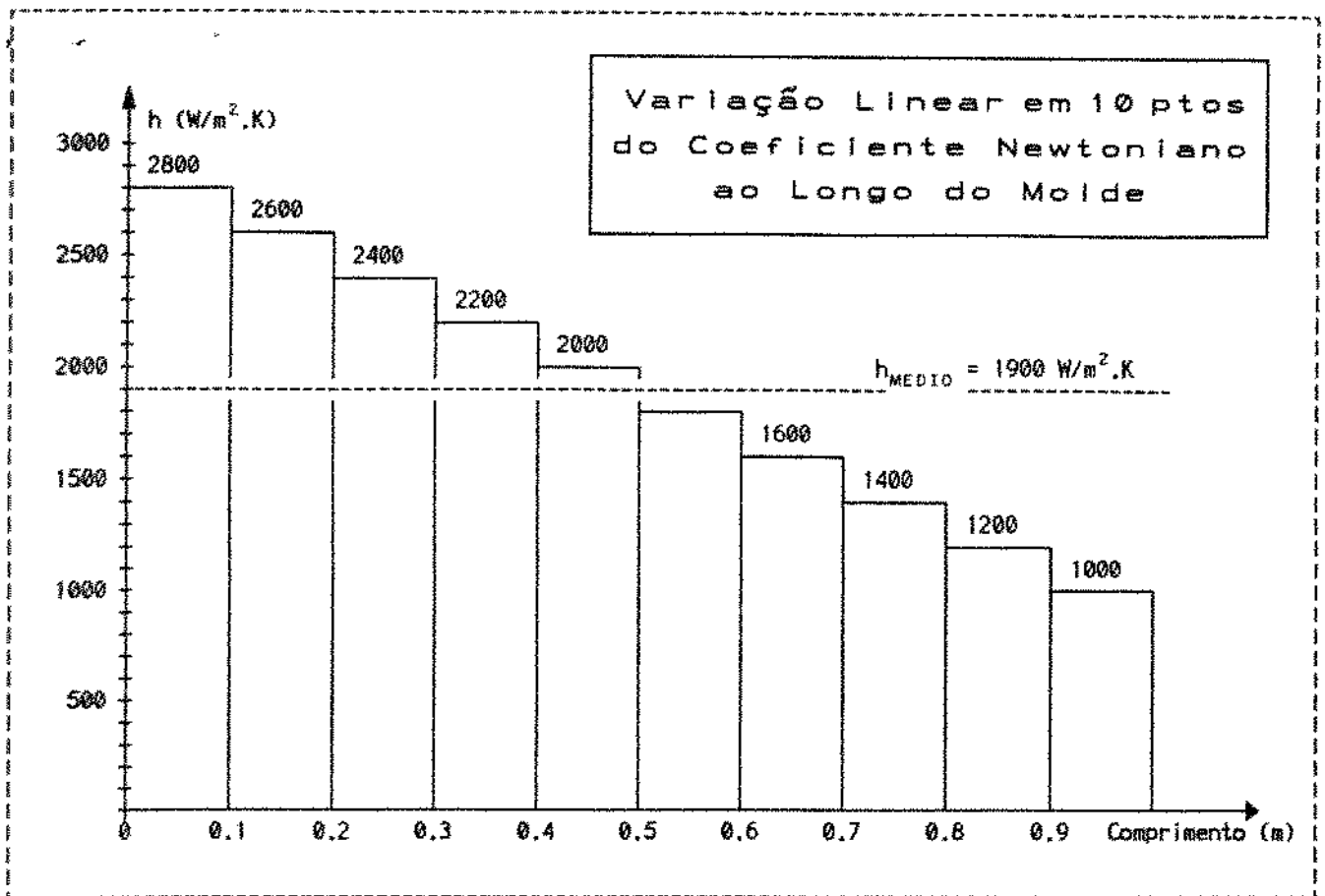


Figura 4.14 - Variação de ' $h_{\text{nev}}$ ' no molde refrigerado para 10 (dez) regiões de resfriamento

experimentais de terceiros;

3- Comparando resultados teóricos com outros resultados teóricos comprovados na literatura.

Como o trabalho em questão deve refletir a solidificação de placas de aço em a um equipamento industrial de grande porte e o desenvolvimento do mesmo foi realizado totalmente dentro de uma Universidade, a validação dos resultados teóricos com resultados experimentais próprios é praticamente impossível.

A comparação dos resultados teóricos com resultados experimentais de terceiros foi realizado para a região do molde devido

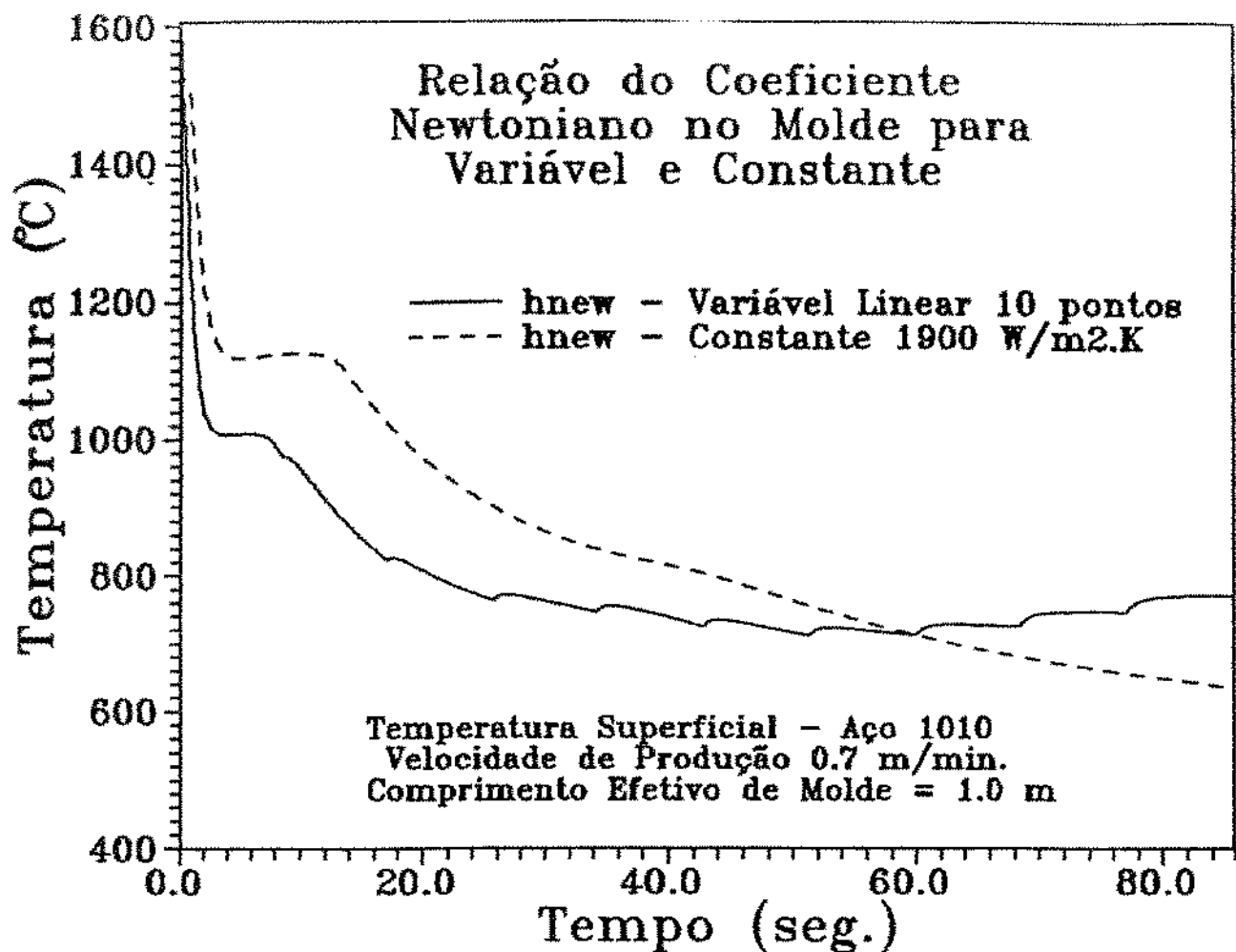


Figura 4.15 - Variação da temperatura de superfície do lingote para ' $h_{nev}$ ' variável a 10 (dez) pontos e ' $h_{nev}$ ' constante

a literatura ser farta em relação a resultados práticos nesta região do processo de Lingotamento Contínuo. Contudo para a região de chuveiros a comparação com resultados experimentais é dificultada devido a escassez, na literatura especializada, de resultados práticos nesta etapa do processo, ou devido a falta de informação em relação às condições de contorno fornecido por autores para os poucos resultados práticos encontrados.

Desta forma para validar o modelo na região de chuveiros comparou-se os resultados obtidos com resultados simulados por outro modelo<sup>[28]</sup> e com curvas de aferição de equipamento utilizadas por empresa específica em uma instalação industrial de Lingotamento Contínuo de placas de aço.<sup>[54]</sup>

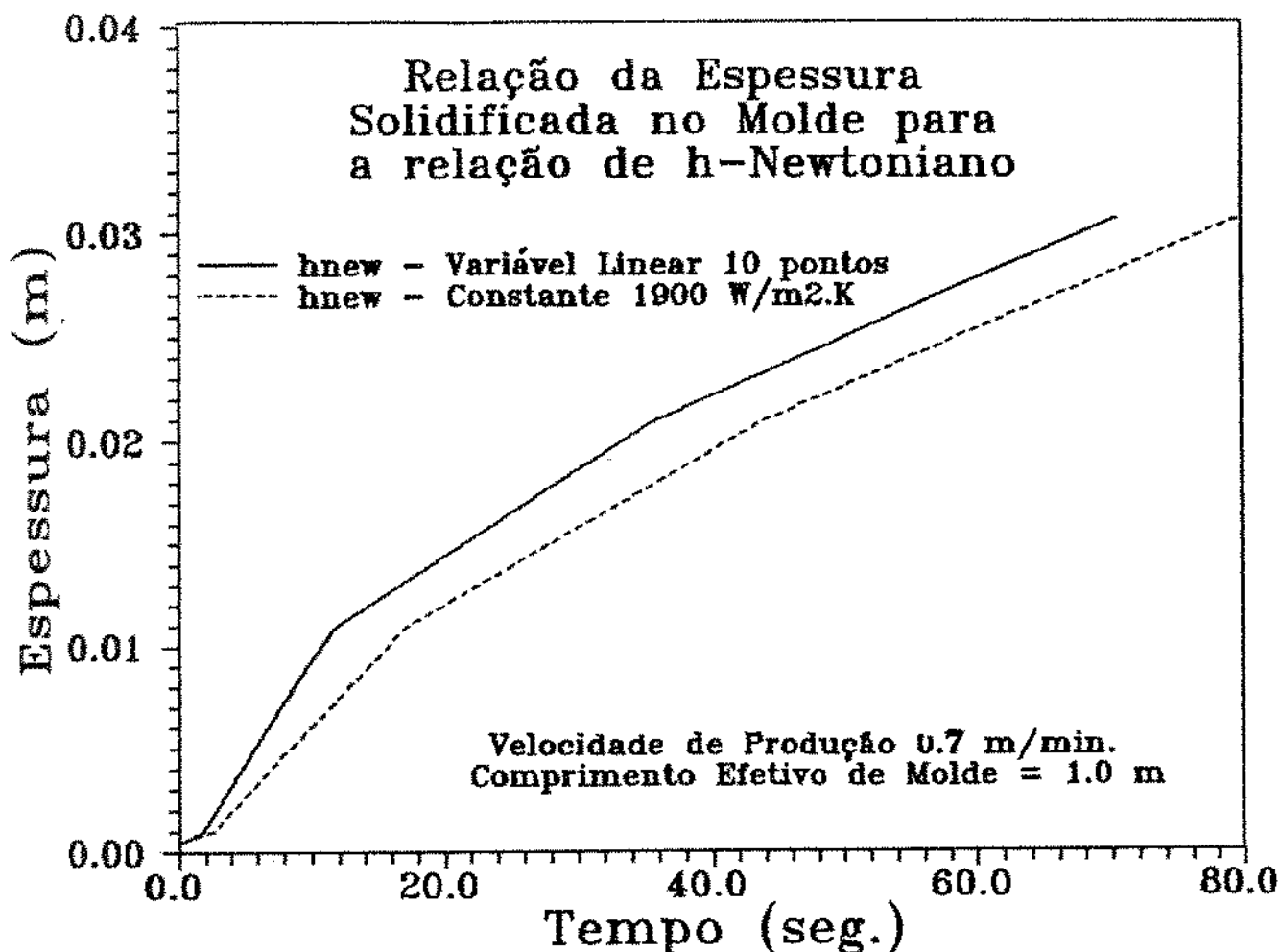


Figura 4.16 - Evolução da isoterma 'solidus' no interior do lingote para a relação de ' $h_{new}$ ' variável a 10 (dez) pontos e ' $h_{new}$ ' constante

A figura 4.17 compara resultados da temperatura da superfície da placa, gerado no modelo desenvolvido, com resultados de outro modelo da literatura, mostrando uma concordância muito boa. O ponto de medida é o mesmo dado na figura 4.9. A figura 4.18 mostra a evolução das isotermas 'solidus' e 'liquidus' para este ensaio. Na tabela 4.1 apresentamos as condições da simulação gerada e as comparações com os resultados do modelo desenvolvido para o aço 1010.

TABELA 4.1 - Características dimensionais, dados de entrada e resultados de saída do modelo de solidificação

Dimensões da Placa	1.9 x 0.26	m
Comprimento Efetivo do Molde	0.6	m
$\lambda_{nev}$ no Molde	1800	$W/m^2.K$
Temperatura de Vazamento	1560	$^{\circ}C$
Temperatura de Refrigeração	20	$^{\circ}C$
Velocidade de Produção	0.9	m/min
Região de Chuveiros $\longrightarrow$ Resfriamento Secundário		
Distância do Menisco	Comprimento da Zona	Coef. de calor
1.90 m	1.30 m	780 $W/m^2.K$
3.40 m	1.50 m	550 $W/m^2.K$
6.38 m	2.98 m	400 $W/m^2.K$
7.80 m	1.42 m	350 $W/m^2.K$
10.50 m	2.70 m	300 $W/m^2.K$
11.60 m	1.10 m	280 $W/m^2.K$
14.70 m	3.10 m	250 $W/m^2.K$
Lei de Vazão[] $\longrightarrow h = 0.33 \cdot W^{0.55}$		
Região de Radiação Livre $\longrightarrow$ Resfriamento Terciário		
Literatura	Desenvolvido	
$h = \sigma \cdot \epsilon \cdot (T_i - T_o) \cdot (T_i^4 - T_o^4)$	100 $W/m^2.K$	
Espessura solidificada na saída do molde		
Literatura	Desenvolvido	
19 mm	$\cong$ 20 mm	

Continua na folha seguinte



Continuação da tabela 4.1

Temperatura Superficial na saída do Molde	
Literatura	Desenvolvido
893 °C	905 °C
Ponto onde a solidificação foi completada	
Literatura	Desenvolvido
14.6 m	15.2 m

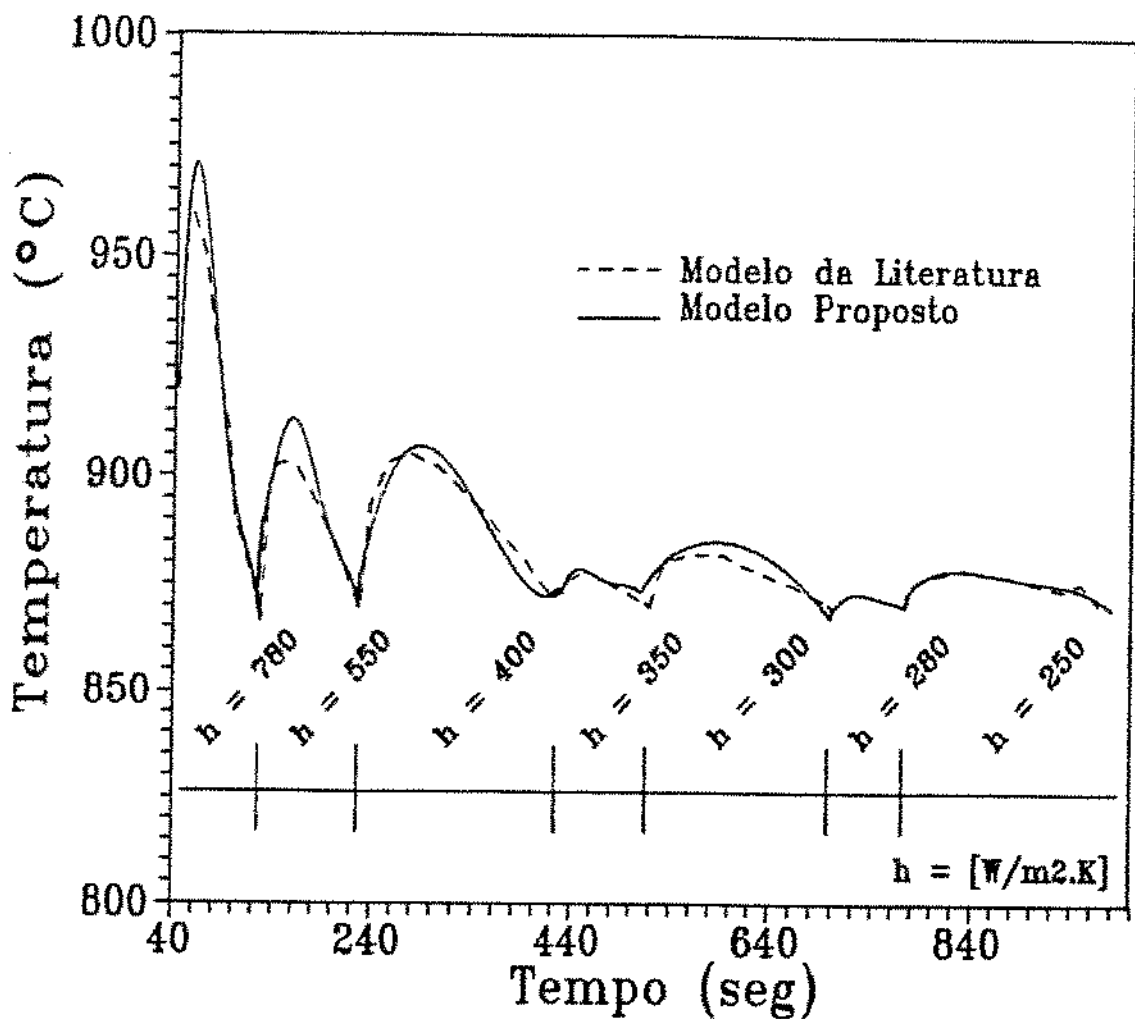


Figura 4.17 - Comparação da variação de temperatura da superfície da placa para o modelo proposto e o modelo de literatura<sup>(28)</sup>

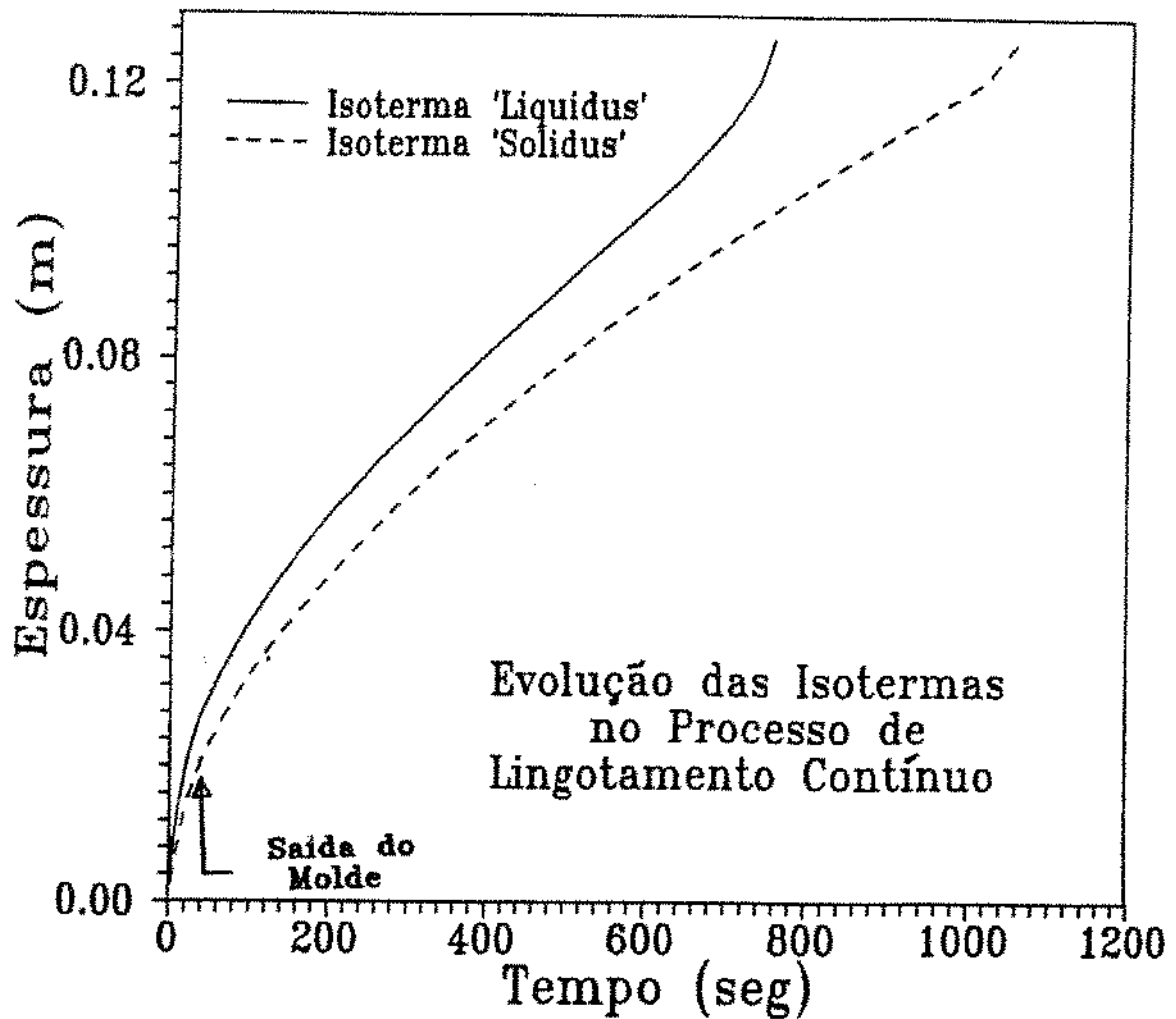


Figura 4.18 - Evolução das isoterma 'solidus' e 'liquidus' no processo de Lingotamento Contínuo de acordo com o modelo proposto

Analisando o resultado da figura 4.18 observa-se o efeito terminal das solidificação gerada ao final do processo. O efeito terminal ocorre devido a diminuição progressiva da quantidade de calor retirada tanto do metal líquido quanto pela liberação do calor latente na zona pastosa a medida em que as isoterma ('Solidus' e 'Liquidus') se aproximam da linha central do lingote. Como consequência as curvas representativas das isoterma 'solidus' e 'liquidus' sofrem efeito de aceleração em seus deslocamentos.

Vale enfatizar que as previsões de um modelo analítico ou semi-analítico, <sup>[55,56]</sup> não consideram o efeito terminal, o que implica em sistemas superdimensionados devido ao prolongamento das condições de resfriamento impostas na etapa de resfriamento secundária, quando na realidade o processo de solidificação já terminou em decorrência da aceleração das isothermas. A figura 4.19 esboça uma comparação qualitativa para o poço líquido gerado entre um método analítico e o M.D.F..

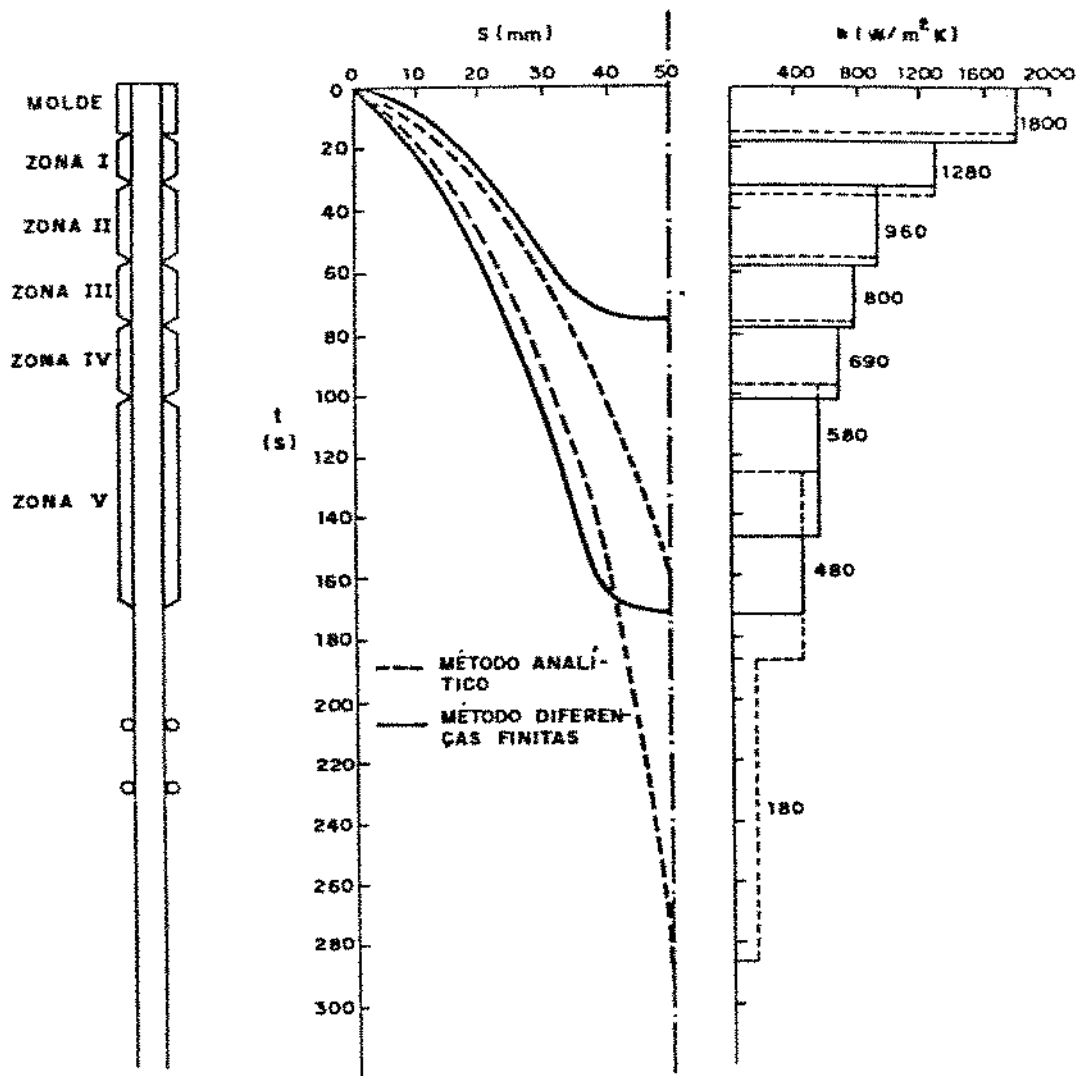


Figura 4.19 - Comparação qualitativa entre o método de diferenças finitas e um método analítico, mostrando o cálculo do efeito terminal

As figuras 4.20 e 4.21 comparam o modelo com os resultados de curvas de aferição geradas industrialmente para o aço 1008 sob as condições dadas na tabela 4.2.

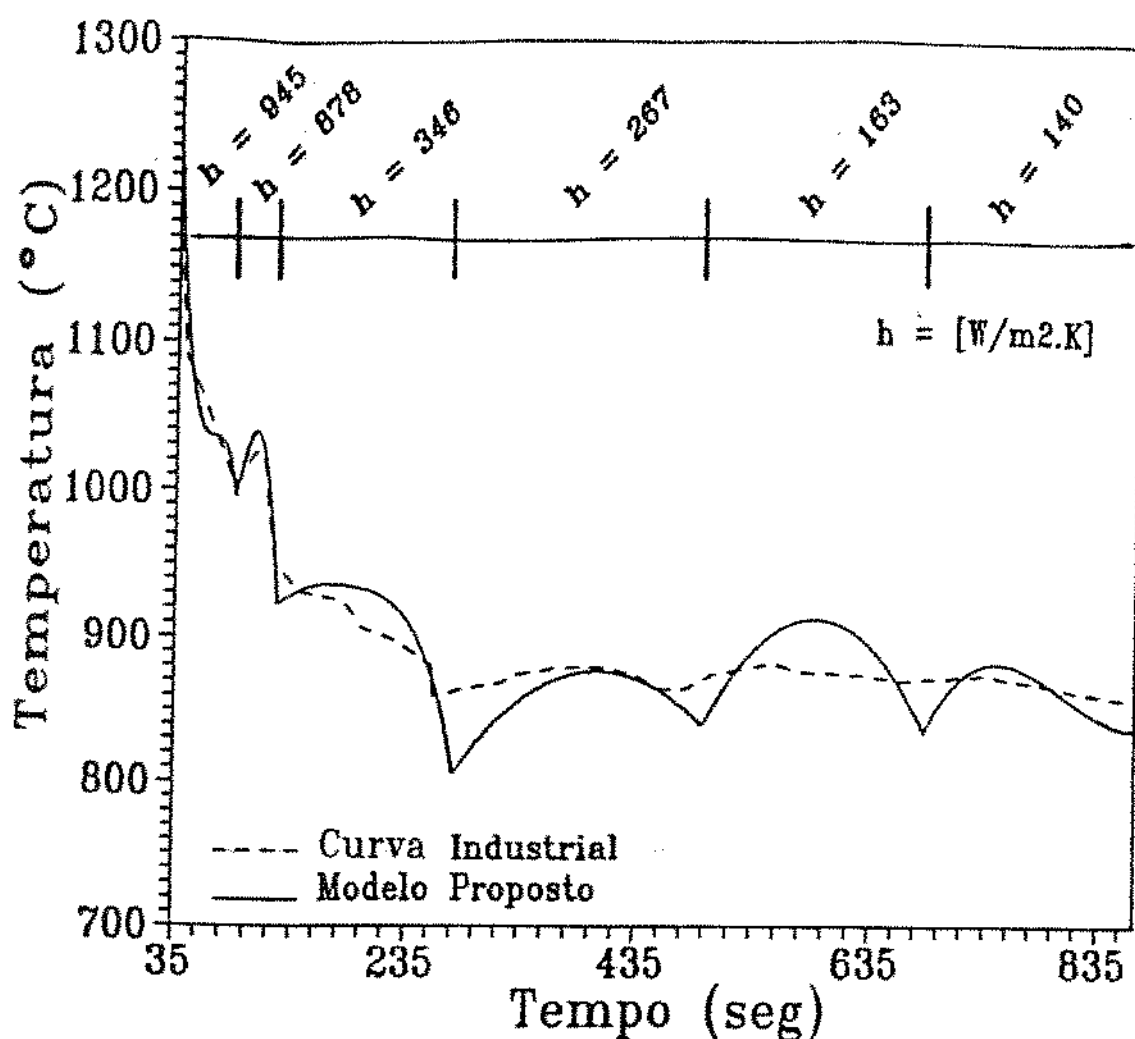


Figura 4.20 - Comparação da variação de temperatura da superfície da placa para o modelo proposto e uma curva industrial<sup>[54]</sup>

TABELA 4.2 - Características dimensionais, dados de entrada e resultados de saída do modelo de solidificação

Dimensões da Placa	1.9 x 0.241	m
Comprimento Efetivo do Molde	0.6	m
$h_{nev}$ no Molde	1000	$W/m^2.K$
Temperatura de Vazamento	1580	$^{\circ}C$
Temperatura de Refrigeração	20	$^{\circ}C$
Velocidade de Produção	1.0	m/min
Região de Chuveiros $\longrightarrow$ Resfriamento Secundário		
Distância do Menisco	Comprimento da Zona	Coef. de calor
1.435 m	0.825 m	945 $W/m^2.K$
2.330 m	0.925 m	878 $W/m^2.K$
5.372 m	3.042 m	346 $W/m^2.K$
8.400 m	3.028 m	267 $W/m^2.K$
11.447 m	3.047 m	163 $W/m^2.K$
14.526 m	3.079 m	140 $W/m^2.K$
Região de Radiação Livre $\longrightarrow$ Resfriamento Terciário		
Literatura	Desenvolvido	
100 $W/m^2.K$	100 $W/m^2.K$	
Espessura solidificada na saída do molde		
Literatura	Desenvolvido	
20 mm	$\cong$ 22 mm	

Continua na folha seguinte

Continuação da tabela 4.2

Ponto onde a solidificação foi completada	
Literatura	Desenvolvido
12.5 m	13.0 m

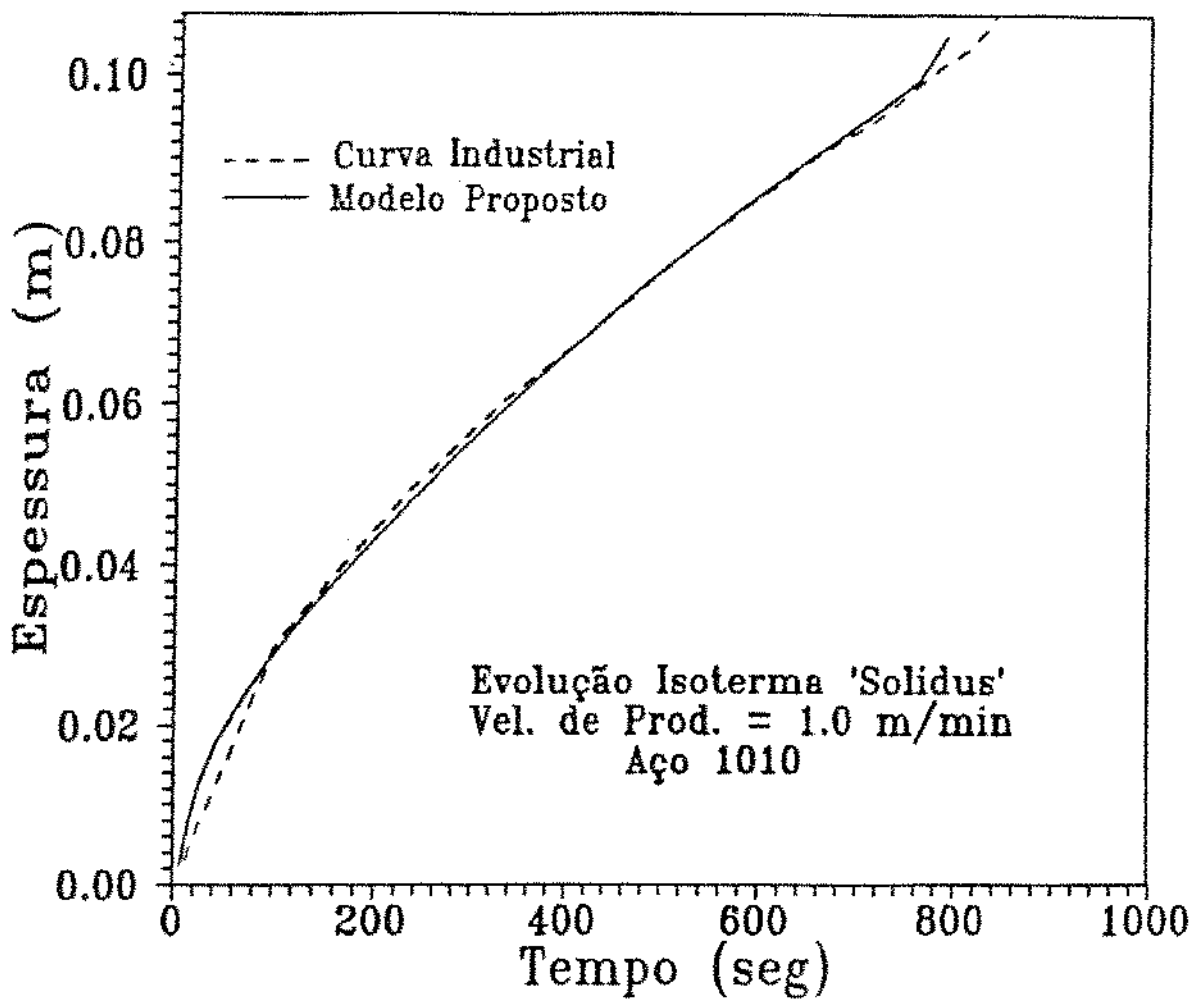


Figura 4.21 - Comparação da evolução da isoterma 'solidus' para o modelo proposto e uma curva industrial<sup>[54]</sup>

A curva industrial referente à temperatura superficial é apresentada na forma de pulsos térmicos de amplitude média em torno de 200°C e períodos praticamente nulos, o que permite uma comparação apenas aproximada. Para executar tal comparação optou-se pelas temperaturas mais destacadas, que são as temperaturas superiores dos pulsos. Mesmo nestas condições a concordância com a expectativa térmica do modelo numérico desenvolvido é satisfatória.

#### 4.3 - SIMULAÇÕES

Tendo em vista o bom desempenho das comprovações realizadas simulou-se, a título de exemplo, sob as condições da tabela 4.3 um processo completo do Lingotamento Contínuo.

TABELA 4.3 - Características dimensionais, dados de entrada e resultados de saída do modelo de solidificação

Dimensões da Placa	1.2 x 0.18	m
Comprimento Efetivo do Molde	0.80	m
Velocidade de Produção	0.70	m/min
Temperatura de Vazamento	1580	°C
Temperatura de Refrigeração	20	°C
Aço 1010 - 0.1% de Carbono		
Coeficiente de Convecção térmica da interface Molde/Metal		
$h_{nev x} = 1800 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$	$h_{nev y} = 1800 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$	
Coeficiente de Transferência de calor após o Molde ( $h_o$ )		
para a direção 'y' $\longrightarrow h_{oy} = 800 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$		

Continua na folha seguinte

Continuação da tabela 4.9

Região de Chuveiros → Resfriamento Secundário (Fig.4.22)		
Distância do Menisco	Comprimento da Zona	Coef. de calor
1.50 m	0.70 m	1280 W/m <sup>2</sup> .K
2.20 m	0.70 m	960 W/m <sup>2</sup> .K
3.00 m	0.80 m	800 W/m <sup>2</sup> .K
3.80 m	0.80 m	690 W/m <sup>2</sup> .K
5.00 m	1.20 m	580 W/m <sup>2</sup> .K
7.00 m	2.00 m	480 W/m <sup>2</sup> .K

Região de Radiação Livre → h = 180 W/m<sup>2</sup>.K

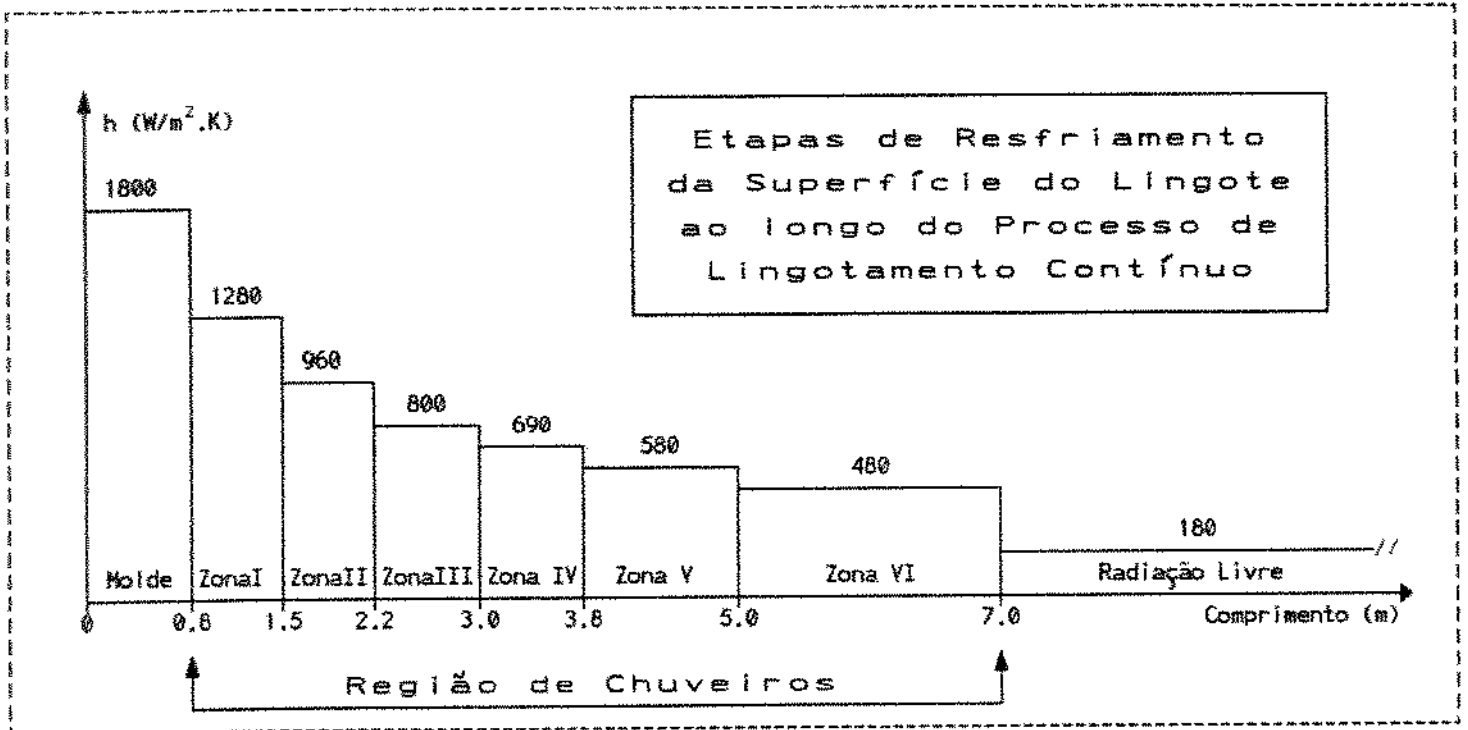


Figura 4.22 - Variação das regiões de retirada de calor no processo de Lingotamento Contínuo



A figura 4.23 mostra a variação da temperatura de superfície ao longo do processo, podendo observar que a variação desta temperatura na região de chuveiros deve manter-se dentro das condições limites de temperatura, evitando a transformação polimórfica do metal e atendendo critérios metalúrgicos para não trincar a superfície do produto. A figura 4.24 amplia em termos de escala apenas a região de chuveiros podendo-se observar um reaquecimento máximo da ordem de  $30^{\circ}\text{C}$ .

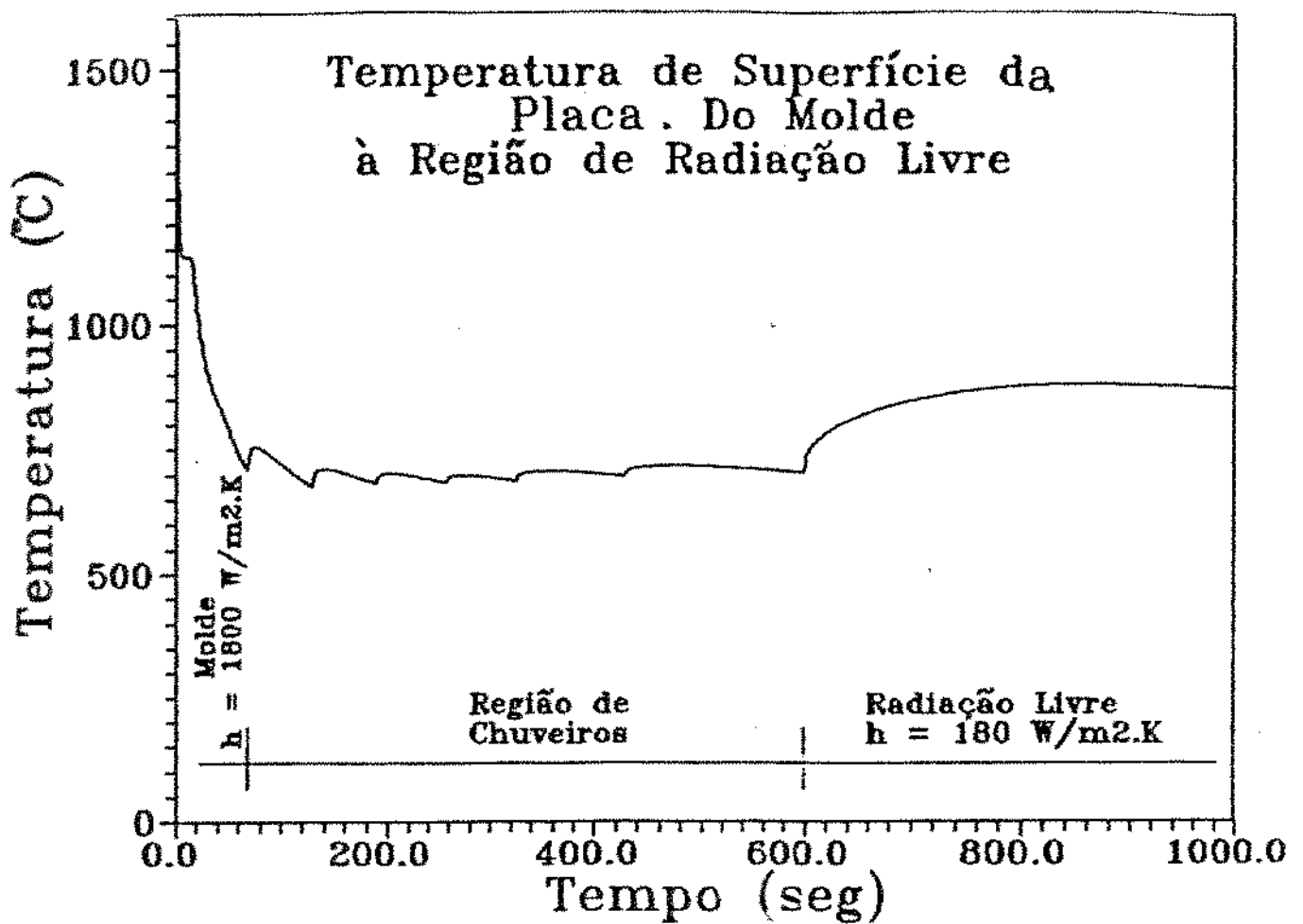


Figura 4.23 - Variação da temperatura de superfície da placa ao longo do processo de Lingotamento Contínuo

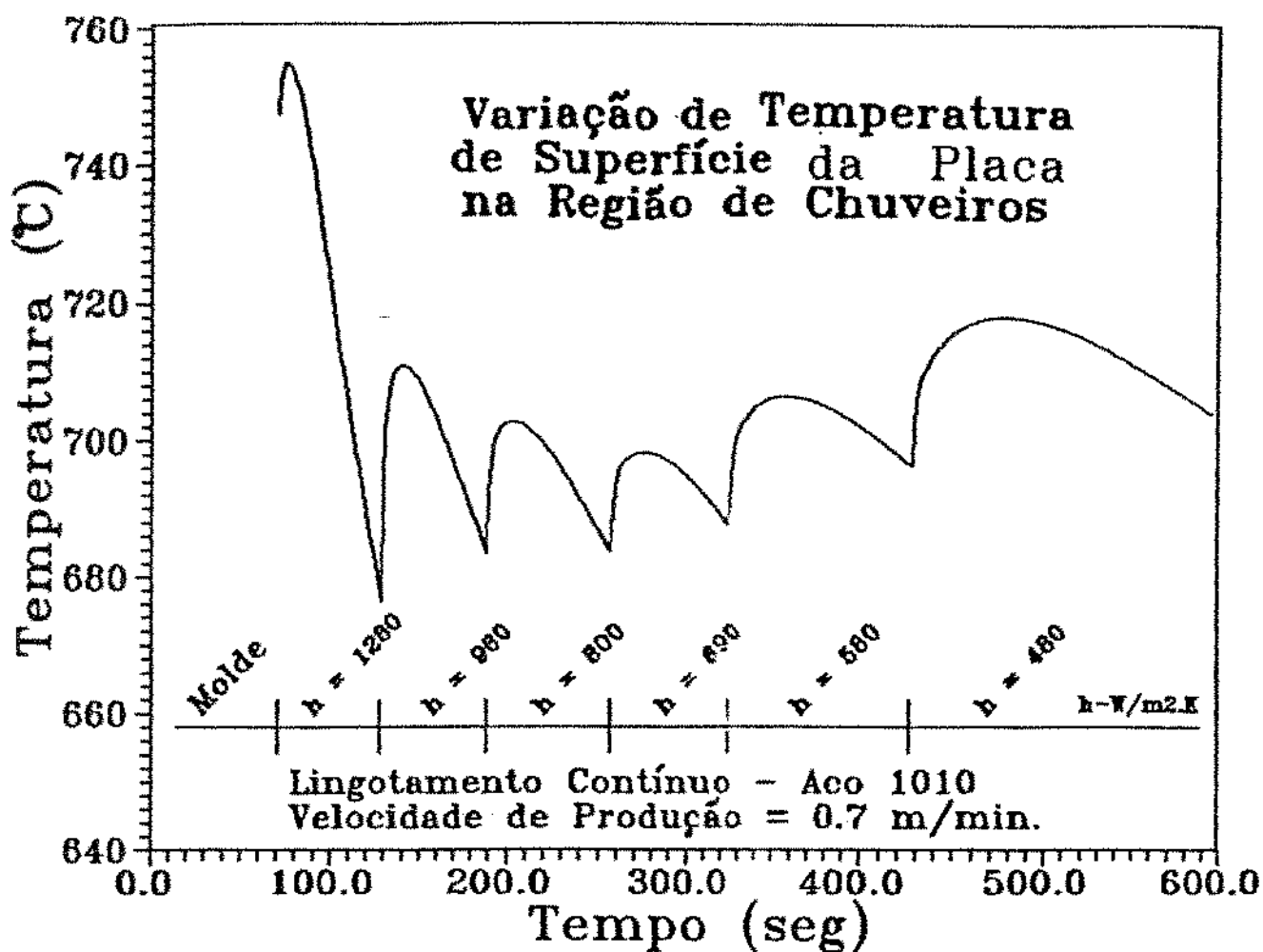


Figura 4.24 - Variação da temperatura de superfície da placa na região de chuveiros

A figura 4.25 mostra a evolução das isoterms 'solidus' e 'liquidus' onde observa-se o final da solidificação após 560 segundos do processo, que para uma velocidade de 0.7 m/min equivale a um comprimento de 6.53 metros, próximo do final da última etapa de resfriamento por chuveiros e antes do desempenho do lingote.

A nível de controle é interessante conhecer a evolução das isoterms no interior de todo o lingote, deste modo gerou-se uma varredura no acompanhamento das isoterms possibilitando o

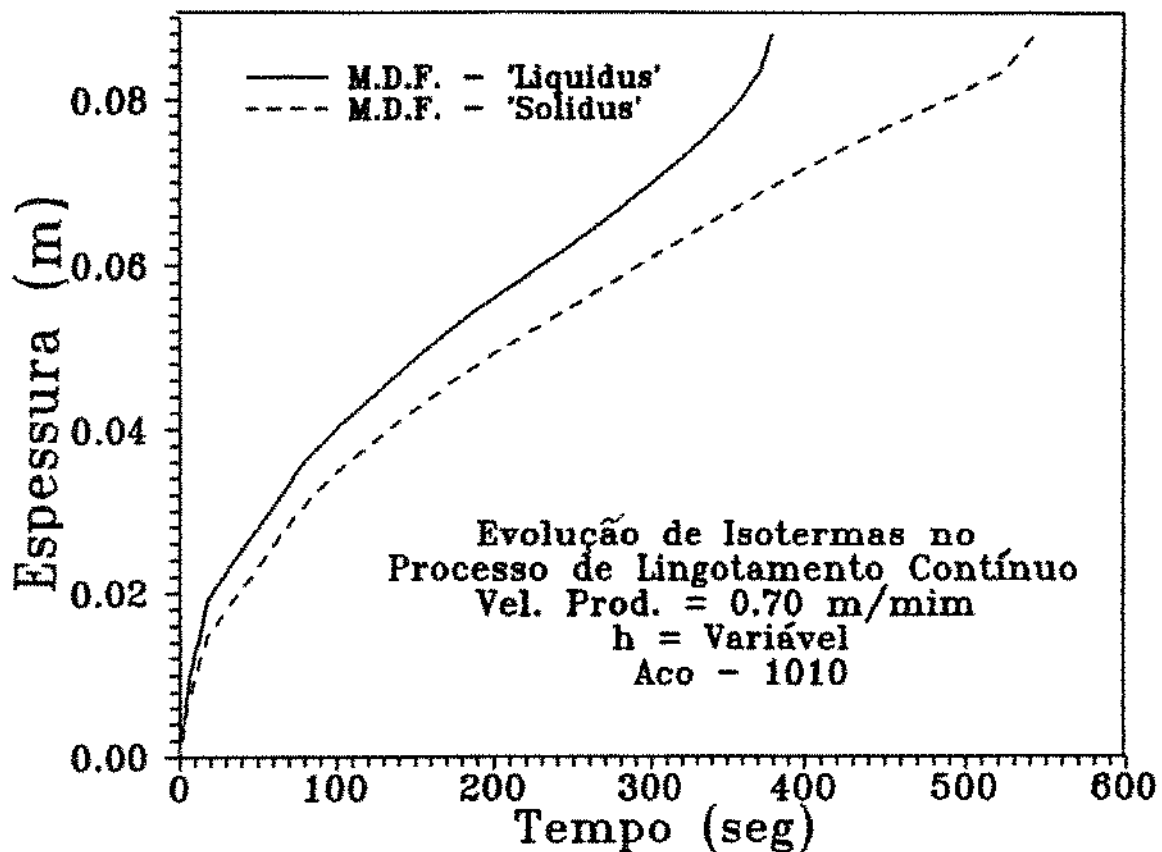


Figura 4.25 - Evolução das isothermas 'solidus' e 'liquidus' ao longo do processo de Lingotamento Contínuo

conhecimento total de sua evolução. As figuras 4.26.A e 4.26.B mostram o efeito da isoterma 'liquidus' ao longo do processo e as figura 4.27.A e 4.27.B o efeito da isoterma 'solidus'. Observe pelas figuras topográficas (curvas de nível) o avanço da isoterma 'liquidus' dentro da isoterma 'solidus'. As figuras 4.26 e 4.27 são de grande importância no controle do processo, podendo fornecer a área solidificada no interior do lingote em relação as taxas de retirada de calor da superfície sendo estas de grande valia para um projeto adequado do equipamento.

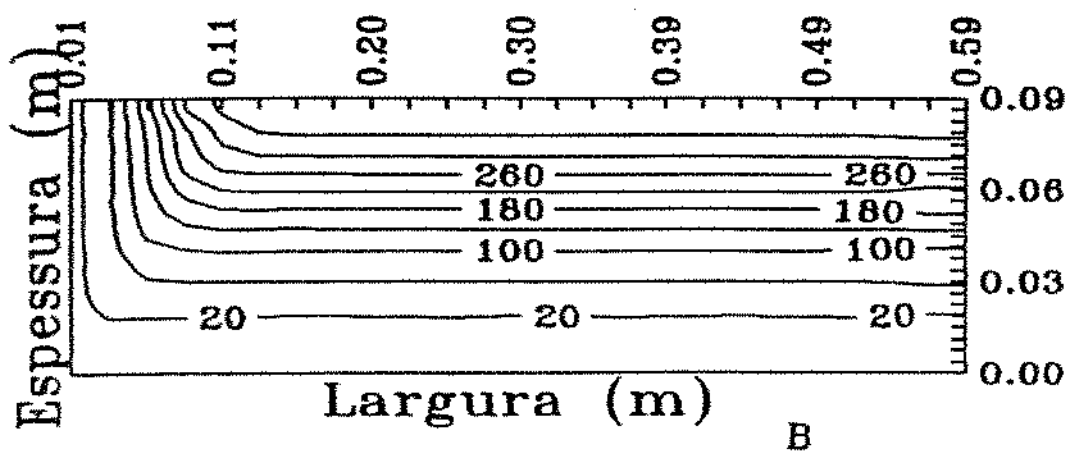
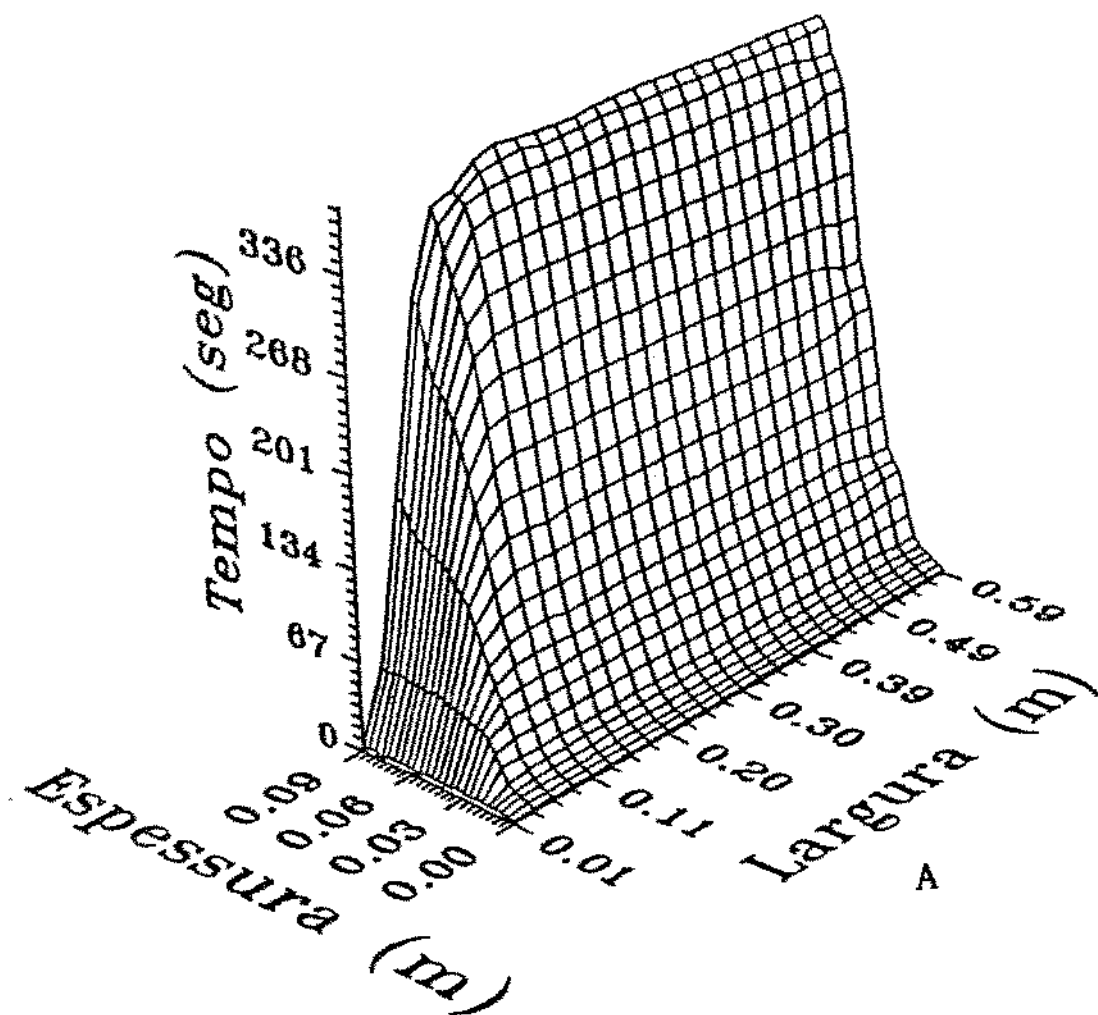
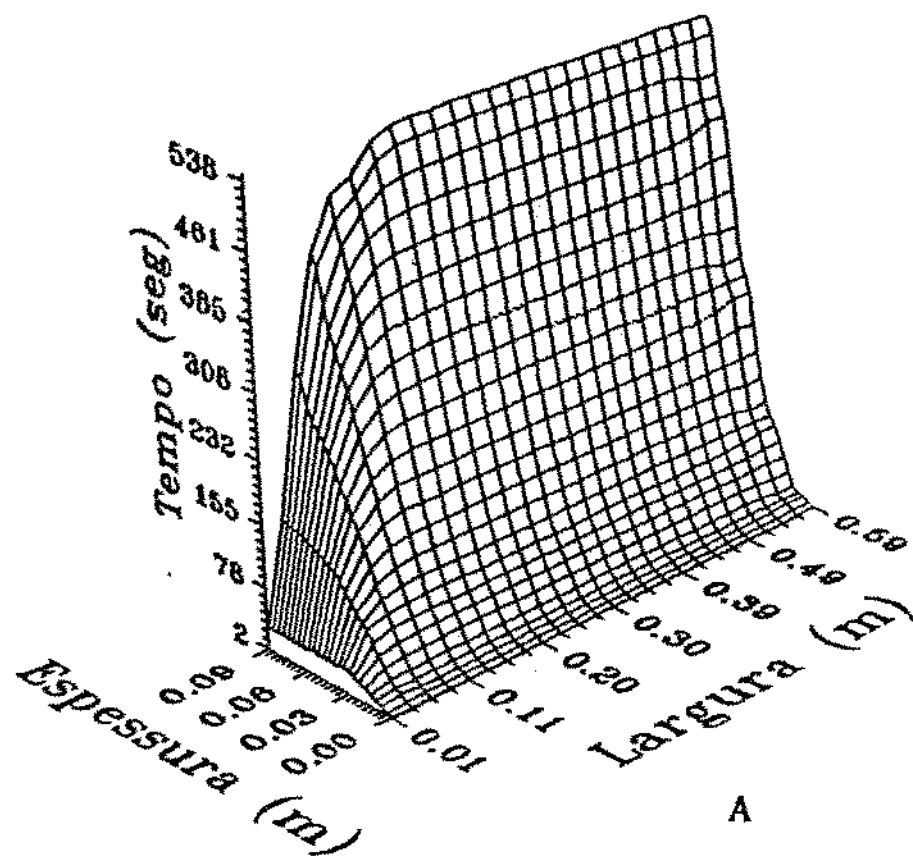
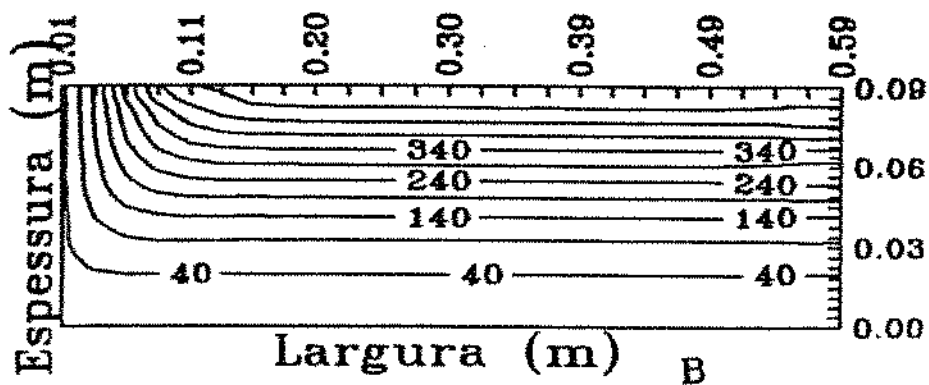


Figura 4.26 - Evolução da isoterma 'liquidus' ao longo da placa no processo de Lingotamento Contínuo. (A) - Visão tridimensional, (B) - Curvas de nível



A



B

Figura 4.27 - Evolução da isoterma 'solidus' ao longo da placa no processo de Lingotamento Contínuo. (A) - Visão tridimensional, (B) - Curvas de nível

Não se pode pensar, mesmo em termos de carácter aproximado em prever através de modelos mais simplificados, qualquer temperatura da região de chuveiros, assumindo um coeficiente de retirada de calor 'h' constante. As figuras 4.28 e 4.29 mostram erro grosseiros em tais tipos de simplificações.

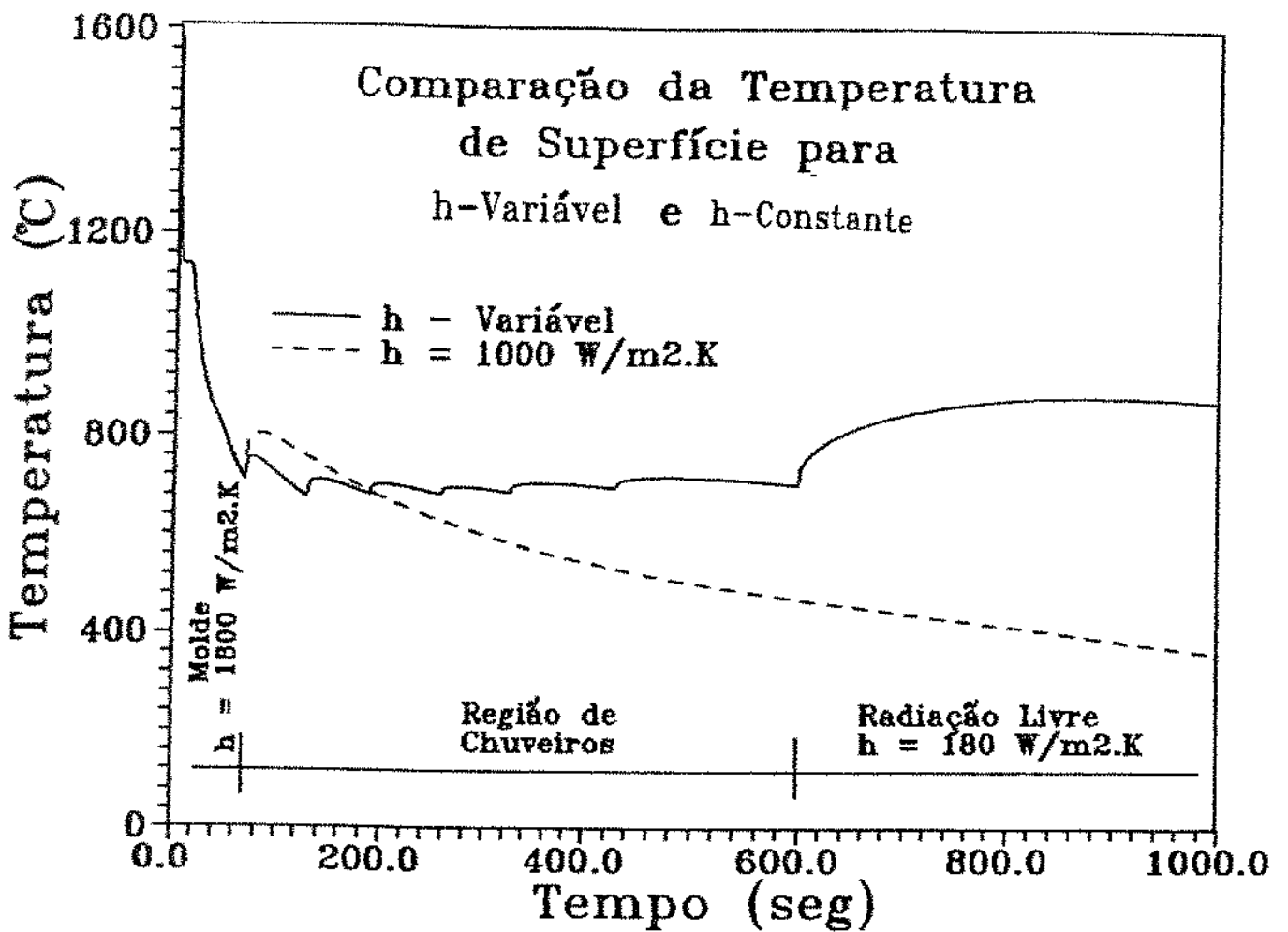


Figura 4.28 - Comparação da variação de temperatura da superfície da placa para 'h'-variável e 'h'-constante ao longo do processo de Lingotamento Contínuo

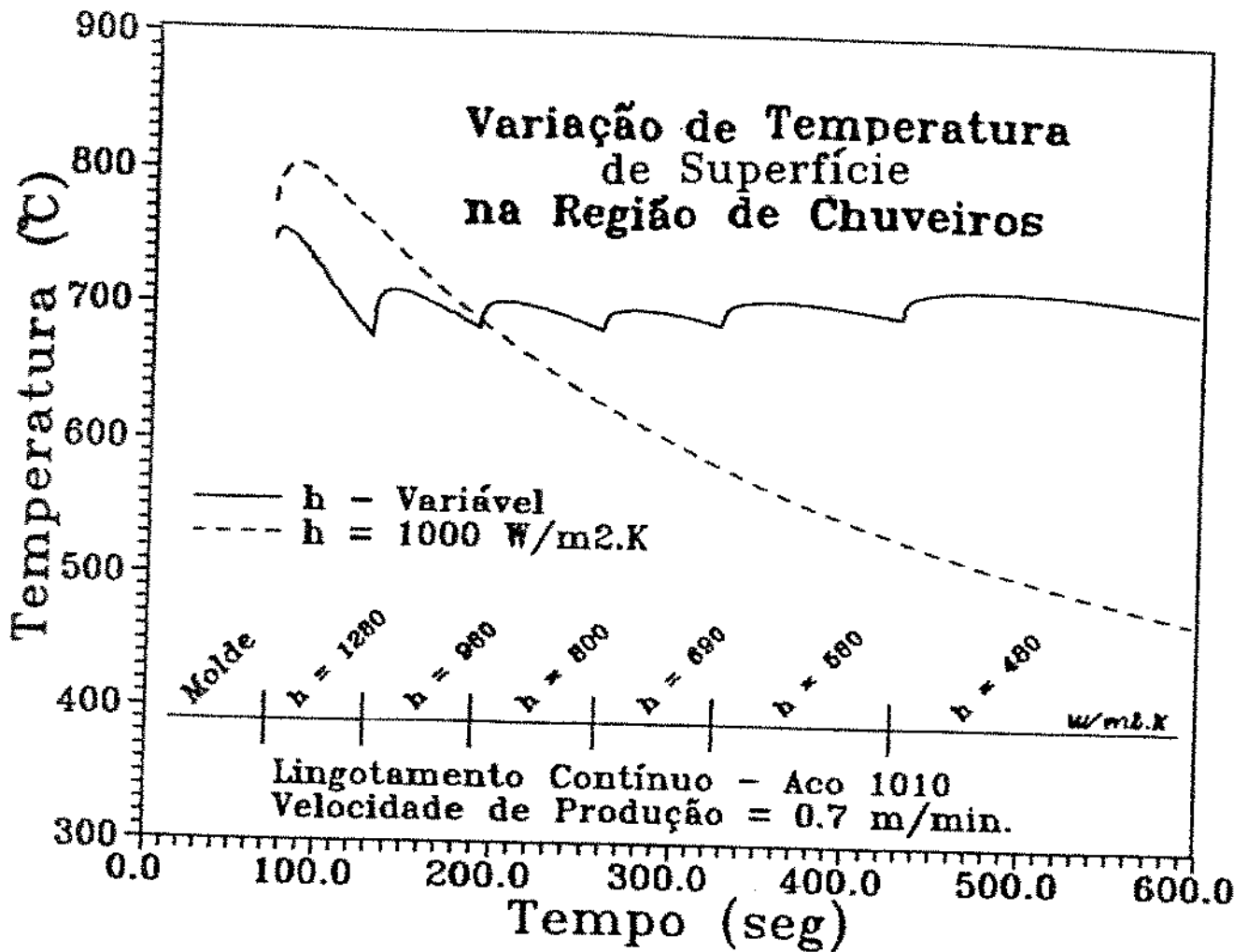


Figura 4.29 - Comparação da variação de temperatura da superfície da placa para ' $h$ '-variável e ' $h$ '-constante ao longo da região de chuveiros

Da mesma forma deve-se conhecer a faixa de velocidades de produção que o equipamento poderá assumir, uma vez em operação. A figura 4.30 mostra que dependendo da velocidade, a curva de temperatura da superfície da parede é deslocada para faixas de temperaturas maiores ou menores, podendo atingir regiões críticas de trabalho. Assim a velocidade de produção é um parâmetro que a nível de controle, deve atuar na realimentação das bombas hidráulicas dos chuveiros, modificando as condições de resfriamento para cada

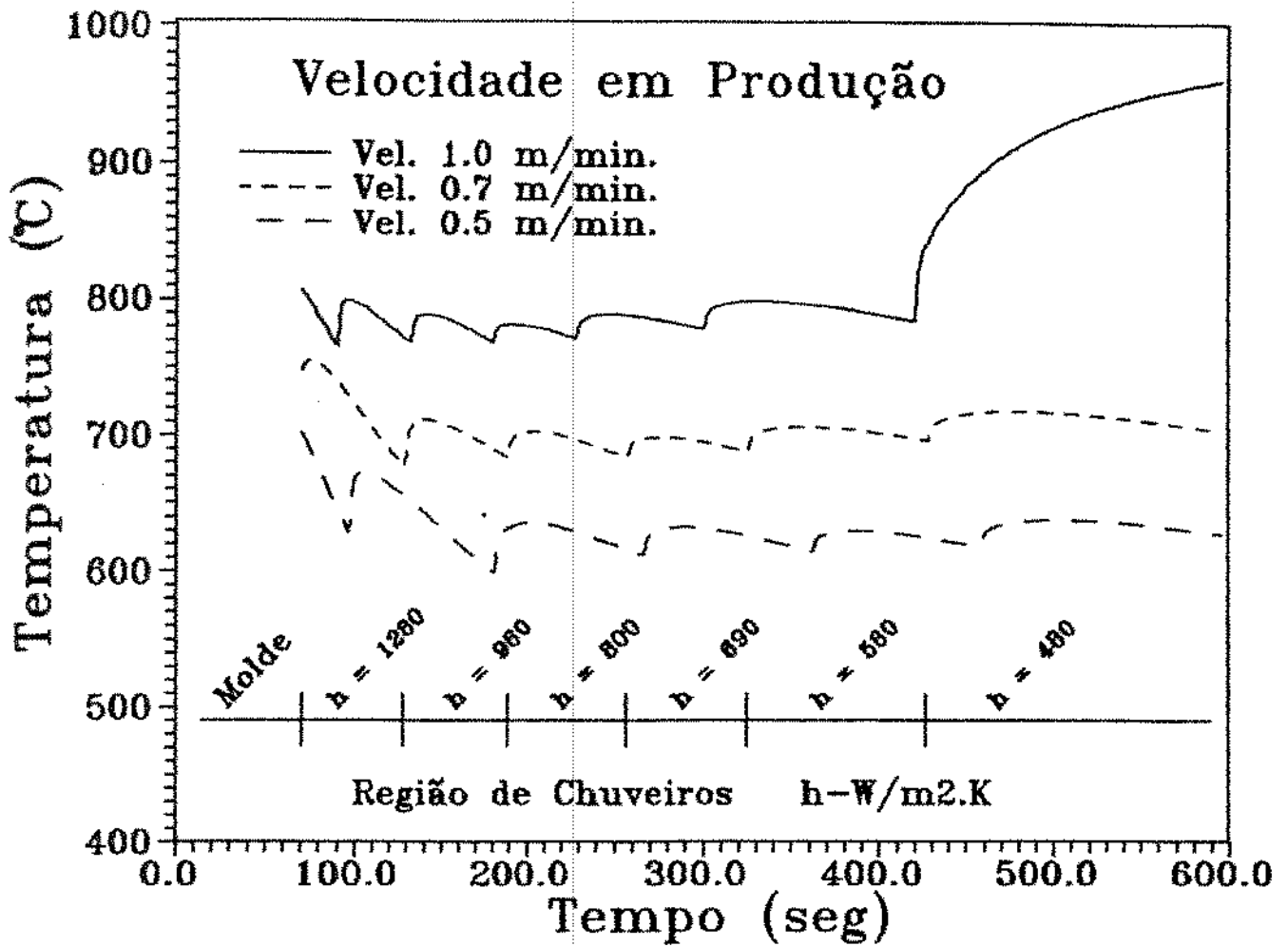


Figura 4.30 - Relação da variação de temperatura da superfície da placa com a velocidade de produção

velocidade específica, mantendo assim a mesma faixa de temperatura para diferentes velocidades de produção.

Finalmente mostramos o efeito causado na evolução das isoterms no interior do molde para diferentes temperaturas de vazamento, como pode ser visto na figura 4.31. Observar que com o aumento das temperaturas de vazamento a casca sólida diminui, podendo atingir valores críticos na saída do molde causando a ruptura do lingote. Assim é muito importante para um sistema de controle a



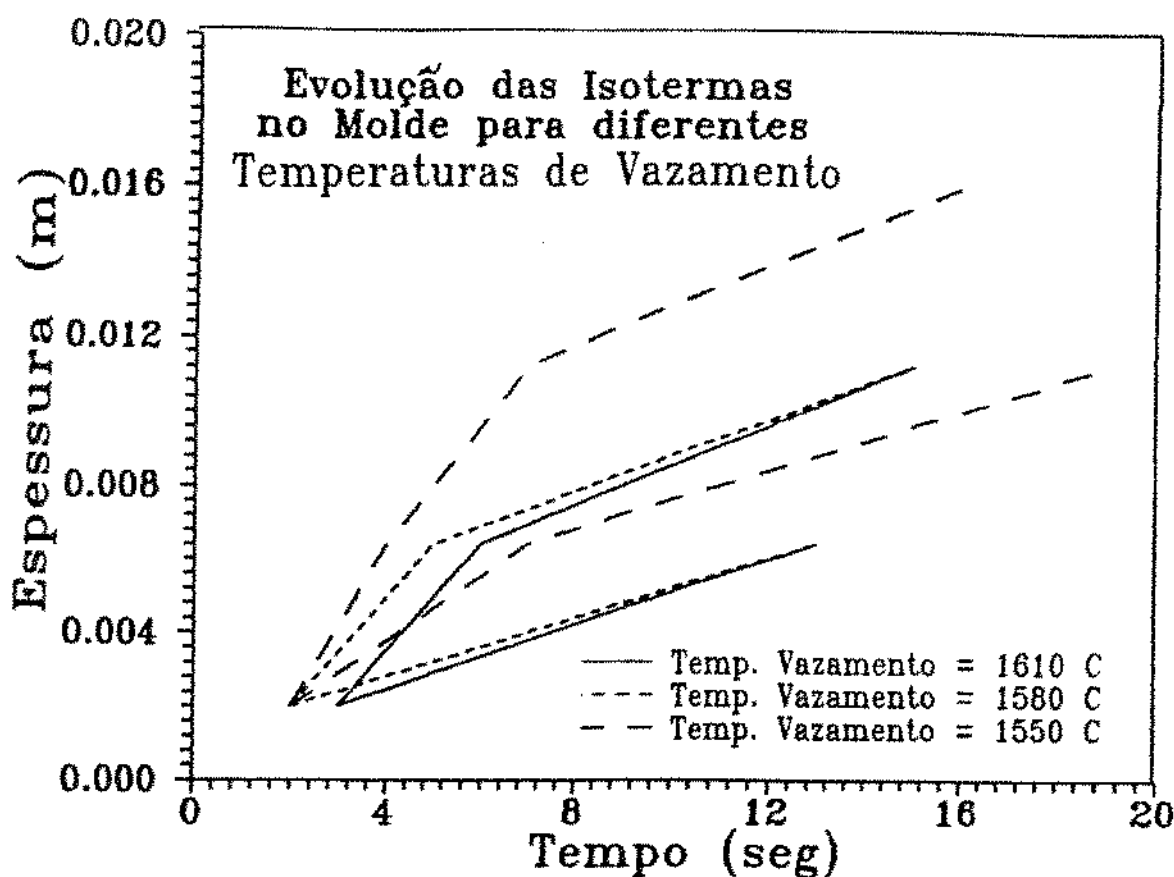


Figura 4.31 - Relação da evolução das isotermas, no molde, para diferentes temperaturas de vazamento

monitoração da temperatura no interior do distribuidor, evitando problemas drásticos.

É interessante observar a figura 4.31 a nível gráfico onde pode-se identificar nas curvas das isotermas, pontos de canto, como se fossem cruzamentos de linhas retas. Isto se deve ao programa gráfico utilizado, que trabalha a série de pontos, unindo sobre linhas retas ponto a ponto coletado. Como para esta figura foi pequena a iteração numérica gerou-se uma série de pontos relativamente pequena para a evolução das isotermas, provocando o efeito mencionado. O mesmo não ocorreu com as outras figuras mostradas neste capítulo devido a serem implementadas com quantidades de pontos muito superiores.

### 5.1. O SISTEMA DE CONTROLE

Um fluxograma de base para um sistema de controle automático que exerça efeito de ajustes contínuos num sistema físico qualquer, pode ser dado conforme a figura 5.1, onde tem-se como elemento central um computador.

O processo físico trabalhando sobre os efeitos naturais tende a desajustes reais, causados por inumeros efeitos instantaneos, como temperatura ambiente, umidade relativa do ar, pressão atmosférica, condições de depreciação do equipamento, além de muitos outros fatores não previsíveis ou analisados no projeto. As mudanças destes parâmetros muitas vezes causam a variação das condições de contorno de um processo físico, levando o sistema a trabalhar de forma não prevista no projeto causando, em inumeros casos, consequências indesejáveis ao produto final do processo.

Na modelagem de um sistema físico, visando a implementação eletrônica de automatização, o fator essencial é se conhecer os efeitos reais do funcionamento físico envolvido, objetivando encontrar pontos críticos ao sensoriamento do mesmo. Tais pontos devem acoplar respostas significativas a um modelo numérico que simule os efeitos reais do processo.

O objetivo base de um equipamento controlado é trazer as condições de '*Operação Real*' do sistema físico, para as condições de '*Operação Ideal*' do modelo numérico. No Lingotamento Contínuo, o sensoriamento *em-linha* permite uma leitura contínua das condições físicas do sistema. Condições de contorno (Como: Temperatura de vazamento do molde, Velocidade de produção), e resultados de processo (Como: Temperatura da superfície na saída do molde, Temperatura da superfície na região de chuveiros) são monitorados com o auxílio de

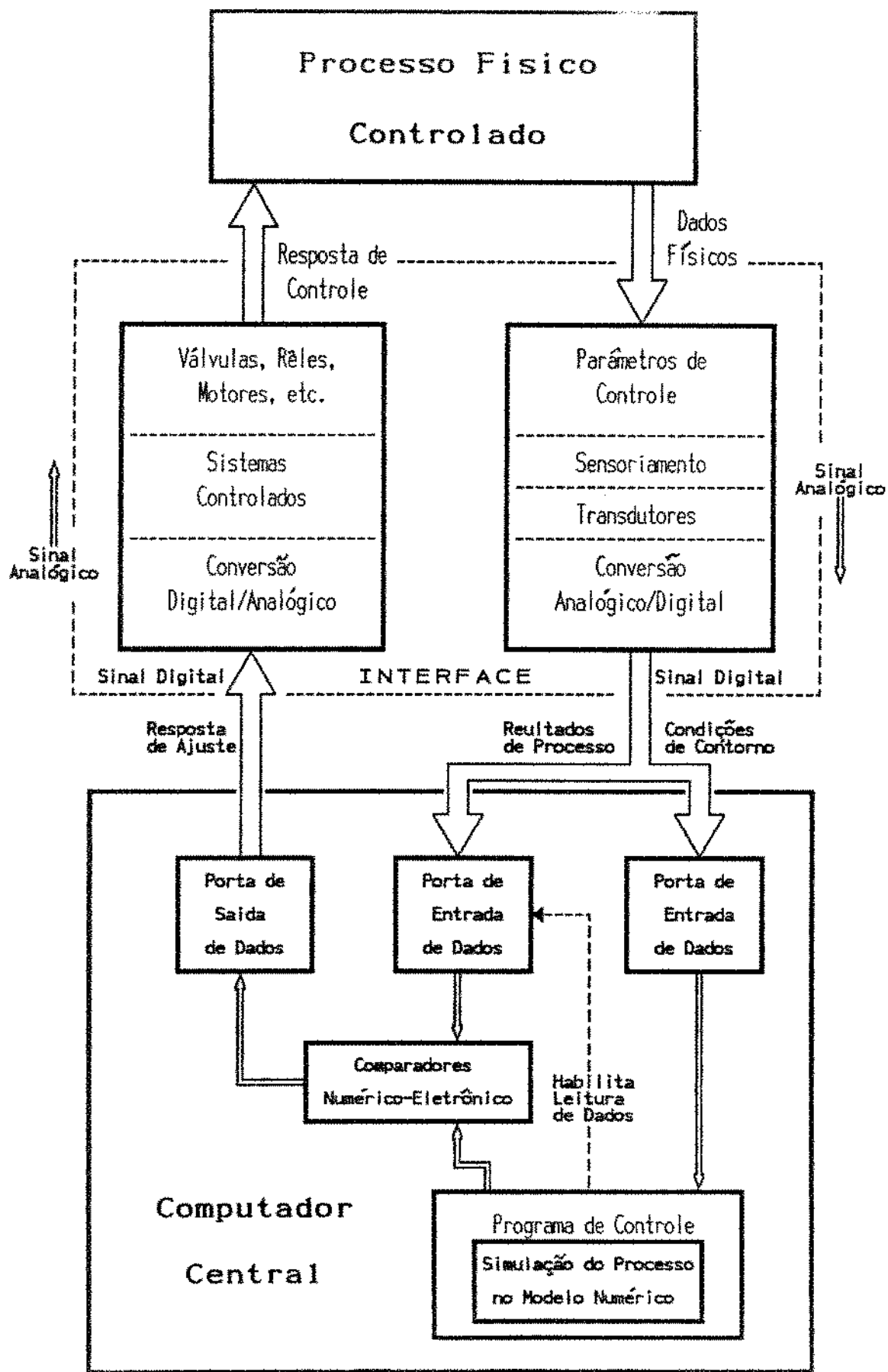


Figura 5.1 - Fluxograma base para o controle automático de um processo físico

transdutores, específicos ao tipo de leitura física desejada. O sinal (analógico) emitido por estes transdutores, é convertido em um sinal digital e levado para o computador central de controle.

As condições de contorno implementam o programa de controle, que simula no modelo numérico os resultados ideais de trabalho do sistema físico. O modelo numérico necessita de um tempo de processamento de máquina para gerar uma resposta de controle, sendo que após este tempo o programa principal emite um sinal a porta de entrada dos resultados de processo, autorizando a passagem destes dados para os comparadores numéricos, recebendo simultaneamente os resultados gerados pelo modelo.

A comparação numérica de um resultado real com um resultado ideal (simulado no modelo) permite aferir o sistema real frente ao sistema ideal. Os comparadores numérico-eletrônico, dentro do computador, devem receber simultaneamente as respostas reais dos sensores e as respostas simuladas do modelo numérico, afim de realimentar o sistema físico com os ajustes necessários.

O desenvolvimento de um modelo numérico, que trabalhe de forma iterativa dentro de um sistema de computador objetivando um equipamento de controle, tem como maior problema a necessidade de gerar as respostas de simulação no menor tempo de processamento possível, já que os sensores emitem dados em tempo real de captação. O conhecimento prévio do modelo numérico além da otimização do tratamento matemático, são bases iniciais para implementação de um sistema automático.

Um sistema de controle desenvolvido sobre a base de um método numérico que trabalhe sobre condições reais do processo, implementado dentro de um controlador central ou um computador, tem como pontos iniciais de partida o estudo da máquina de controle e o método numérico em trabalho dentro desta máquina.

Para o sistema de computador os problemas a serem analisados em relação aos seus limites são:

- Velocidade de processamento
- Capacidade de armazenamento de dados

E quanto ao modelo numérico, trabalhando sobre o efeito de iterações sucessivas, são:

- Erro de arredondamento e erro de truncamento
- Estabilidade
- Convergência

O modelo numérico desenvolvido sobre o Método de Diferenças Finitas (M.D.F) em analogia a teoria de circuitos elétricos, mostrou-se extremamente versátil e de fácil aplicabilidade no processo de solidificação. Entretanto o M.D.F. permite dois modos distintos de implementação:

- O Modo Explícito
- O Modo Implícito

É claro que se o método numérico funciona para um modo de implementação (Explícito ou Implícito), também funcionará para o outro modo (Implícito ou Explícito). Assim sobre as mesmas condições de trabalho ambos os modos devem gerar os mesmos resultados. Contudo ao se pensar sobre um sistema de controle, os modos de trabalho do M.D.F. devem ser individualmente analisados no objetivo de se conhecer qual é o mais interessante de se aplicar ao controle do processo, de forma a minimizar os problemas intrínsecos à máquina de controle e ao modelo numérico.

O modo explícito do M.D.F. apesar de gerar um equacionamento de fácil solução, possui limites em relação aos parâmetros de entrada das equações podendo instabilizar o resultado final gerando dados absurdos. Com a análise feita em capítulos anteriores chegou-se ao *limite de estabilidade* das equações geradas por este modo de trabalho,

dada por:

$$\Delta t \leq \tau_{i,i} \quad (5.1)$$

onde ' $\tau_{i,i}$ ' é função da dimensão dos elementos finitos da malha nodal e dos parâmetros do material. Assim para valores de ' $\Delta t$ ' de ordem superior a ' $\tau_{i,i}$ ', pode-se chegar aos resultados mostrados anteriormente nas figuras 3.1 e 3.2.

O modo implícito do M.D.F. não possui *limite de estabilidade* sendo que qualquer que sejam os valores numéricos de entrada das equações, o modelo será sempre estável. Contudo este modo de trabalho gera um equacionamento de solução mais complicada que o primeiro, solúvel apenas com a aplicação de métodos matemáticos de inversão matricial e solução de sistemas lineares.

Inumeros autores<sup>[58, 59, 60]</sup> relatam que o M.D.F. trabalhando no modo explícito possui um tempo de processamento inferior ao modo implícito. Tal afirmação realmente é válida se pensarmos apenas em termos do número de operações realizadas por uma máquina para o processamento geral do sistema. Contudo para um sistema de controle o modelo deve possuir a eficiência de gerar resultados em *tempo real* de comparação, de forma a permitir ajustes rápidos no equipamento controlado.

Desta forma estudando os modos de aplicação do M.D.F. concluiu-se que o '*Modo Implícito*' possui maior eficiência em relação a utilização, para o modelo do sistema de solidificação, no controle do equipamento de Lingotamento Contínuo.

Suponhamos que a implementação de um programa para a utilização do M.D.F. no modo explícito, trabalhando em uma máquina de características conhecidas, necessite de um tempo de processamento útil, para gerar respostas de controle, igual a ' $t_{pme}$ ' e que trabalhando dentro da mesma máquina com um programa utilizando o M.D.F. no modo implícito necessite de um tempo ' $t_{pmi}$ '. Então sabe-se

que:  $t_{pmi} > t_{pme}$  (5.2)

Contudo o modo explícito exige um limite do valor de ' $\Delta t$ ' nas equações de trabalho, onde:

$$\Delta t \leq \tau_{ii}$$

dependendo das condições da liga e do número de nós, no mapeamento matemático do sistema Molde/Metal, não é raro atingir condições limites de ' $\Delta t$ ' onde:  $'\Delta t < t_{pme}'$  (5.3)

Assim para o modo explícito do M.D.F., levaríamos um tempo de processamento de máquina ' $t_{pme}$ ' para saber as condições do sistema no tempo ' $\Delta t$ ' a frente do conhecido, sendo ' $t_{pme} > \Delta t$ ', em termos do controle, não seria possível uma comparação numérica em tempo real de aquisição de dados. Entretanto o modo implícito não possuindo limite de estabilidade pode-se fazer:  $'\Delta t = t_{pmi}'$  (5.4)

de tal forma que a comparação com os dados adquiridos no sistema físico será feita após intervalos de ' $t_{pmi}$ ' no tempo real de aquisição.

A figura 5.2 mostra a comparação dos modos de trabalho (Implícito e Explícito) para o resfriamento simples de uma chapa de chumbo, utilizando os passos de equacionamento dados no exemplo 1 do capítulo 3. O intervalo de tempo  $\Delta t = 0.05$  seg. equivale ao intervalo de tempo máximo permitido para o modo explícito, sendo que a implementação numérica ocorreu até 30 segundos, sendo necessários 600 ( $= 30/0.05$ ) passos de iteração para o levantamento da curva mostrada. Utilizando o modo implícito, aumentou-se o valor de ' $\Delta t$ ' para 1 segundo, sendo então necessário apenas 30 ( $= 30/1$ ) passos de iteração para o levantamento da curva neste modo. Pode-se observar na figura 5.2 que o erro causado pelo aumento de ' $\Delta t$ ' no modo implícito é desprezível.

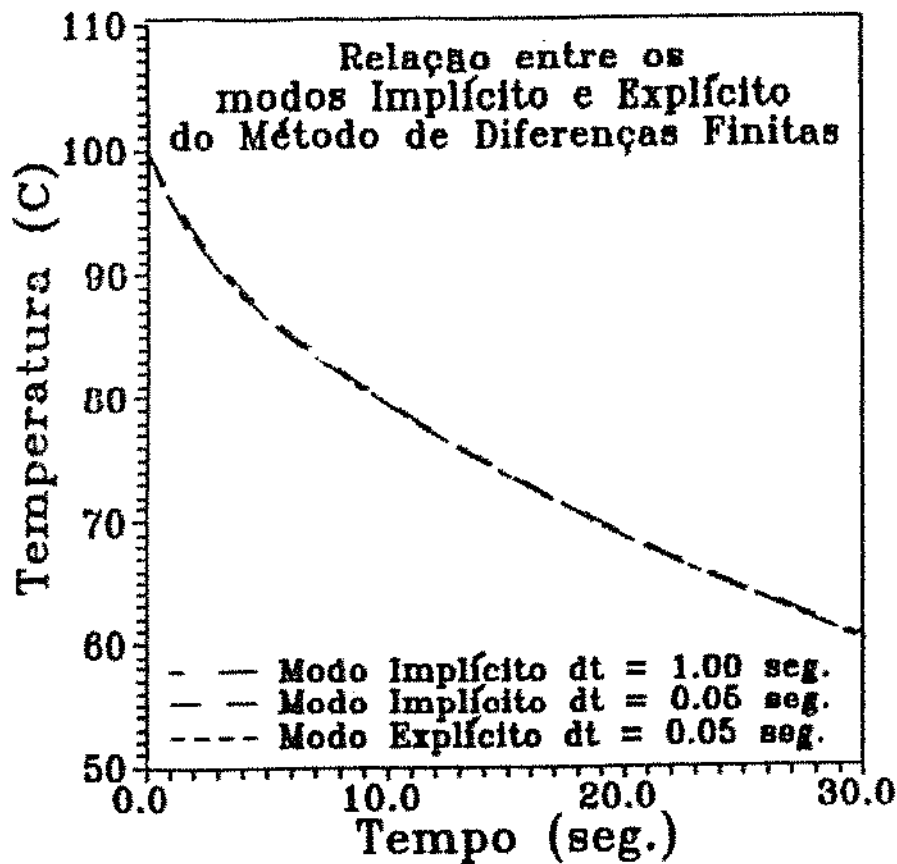


Figura 5.2 - Comparação entre os modos 'Explícito' e 'Implícito' do M. D. F.

## 5.2. O CONTROLE DO EQUIPAMENTO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO<sup>[61-74]</sup>

Ao elaborar um sistema de controle voltado ao equipamento de Lingotamento Contínuo, é necessário um levantamento global das fases gerais no projeto do equipamento, mapeando os pontos básicos necessários ao sensoriamento do mesmo, além do conhecimento dos setores isolados, onde o controle realimentado irá atuar.

No desenvolvimento de um programa de controle que atue sobre o equipamento de Lingotamento Contínuo, é necessário para o processamento, o conhecimento de dois tipos de informações intrínsecas ao sistema físico:



1- Informações permanentes

2- Informações de processo

As informações permanentes equivalem as características do equipamento, correspondem aos dados imutáveis ao longo do processo e para o caso particular do Lingotamento Contínuo, tem-se como principais:

1- Altura e área do distribuidor;

2- Comprimento efetivo do molde;

3- Largura e espessura do lingote

4- Número de regiões de resfriamento do molde;

5- Número e comprimento das etapas de resfriamento por chuveiros;

6- Tipo e características dos chuveiros;

7- Comprimento efetivo do lingotamento até o início do desempenho.

As informações de processo correspondem aos dados coletados por sensores específicos, nos pontos críticos do equipamento. São informações variantes ao longo do processo, e podem ser divididas em dois grupos:

1- Condições de contorno

2- Resultados de processo

As condições de contorno são aquelas diretamente responsáveis pelos resultados de processo. Em geral são informações pré-fixadas no início do processamento através dos critérios adotados para o tipo de aço lingotado. Tais informações devem ser conhecidas pelo programa de controle a fim de exercer ajustes caso haja modificações naturais ao processamento. As condições de contorno do equipamento de Lingotamento Contínuo são:

1- Temperatura do metal líquido no distribuidor;

2- Temperatura de refrigeração do molde;

- 3- Fluxo de água de refrigeração do molde
- 4- Temperatura e fluxo de água dos chuveiros de refrigeração;
- 5- Velocidade de produção;
- 6- Tipo de aço lingotado (Não sensoriado).

Os resultados de processo correspondem aos resultados obtidos ao longo do processamento sendo os responsáveis diretos pela qualidade do produto final. São ajustados continuamente, através da monitoração dos parâmetros críticos ao processo.

Ao mapear o sistema de controle, vale pensar em termos de blocos individuais de ajustes, objetivando um conhecimento global do equipamento em relação aos pontos críticos de sensoriamento e os sistemas de atuação do controle no equipamento.

#### 5.2.1. No Molde:

Em relação as características de equipamento que devem ser conhecidas nesta etapa do processo de Lingotamento Contínuo, tem-se como principais:

- 1- Altura e área do distribuidor
- 2- Comprimento efetivo do molde
- 3- Largura e espessura do lingote
- 4- Números de regiões de refrigeração do molde

sendo que as condições de contorno que devem ser conhecidas pelo programa de controle do processo são:

- 1- Temperatura do metal no distribuidor
- 2- Temperaturas de entrada e saída da água de refrigeração do molde
- 3- Fluxo da água de refrigeração no molde

Com o conhecimento dos dois últimos parâmetros pode-se saber o fluxo de calor proveniente do metal. Este parâmetro é analisado em

confronto com a temperatura do metal líquido no distribuidor e com a velocidade de produção requerida pelo processo. O programa de controle pode então prever a espessura da casca solidificada além da temperatura da superfície do lingote na saída do molde. O funcionamento adequado do sistema é então aferido com a leitura real da temperatura da superfície do lingote na saída do molde. Caso esta temperatura no processo se encontre acima da temperatura simulada no programa, ou caso o programa de controle tenha previsto uma espessura de casca sólida inferior a espessura crítica, com as condições de contorno do processo, então o programa passa a atuar no controle das bombas hidráulicas do fluxo de água do molde, aumentando assim o fluxo da retirada de calor, garantindo a espessura de casca mínima na saída do molde.

O fluxo de calor que chega até o fluido de refrigeração ( $q$ ), pode ser determinado por:

$$q = \frac{\dot{m} \cdot c_a \cdot (T_i - T_f)}{A} \quad (5.5)$$

onde:

$\dot{m}$  = Fluxo de água de refrigeração

$c_a$  = Calor específico da água

$T_i$  = Temperatura inicial da água (na entrada do circuito de refrigeração)

$T_f$  = Temperatura final da água (na saída do circuito de refrigeração)

$A$  = Área efetiva de troca térmica

Por outro lado, o fluxo de calor ' $q$ ' pode também ser expresso em função de ' $h_g$ ', na forma dada pela seguinte equação:

$$q = h_g \cdot (T_s - T_a) \quad (5.6)$$

sendo:

$T_a$  = Temperatura média da água

$T_s$  = Temperatura da superfície do lingote no interior

do molde

Considerando-se as equações 5.5 e 5.6, tem-se:

$$h_g = \frac{\dot{m} \cdot c_a}{A} \cdot \frac{(T_f - T_i)}{(T_s - T_a)} \quad (5.7)$$

A determinação de ' $h_g$ ' no molde em cada instante do processo de Lingotamento Contínuo, ou para cada posição no molde, depende do conhecimento de ' $T_i$ ,  $T_f$ ,  $T_s$  e  $T_a$ ', além evidentemente de medidas do fluxo de água que alimenta o sistema de refrigeração do molde.

As medidas de ' $T_i$ ,  $T_f$ ' e a aferição de ' $T_a$ ' não apresentam dificuldades de organização experimental. Por outro lado, a determinação de ' $T_s$ ' ao longo do molde depende do posicionamento correto do termopar junto à superfície do lingote, o que para o lingotamento estático não é crítico, mas que para o Lingotamento Contínuo é impossível uma leitura contínua de valores de ' $T_s$ ' ao longo do molde, já que o termopar, além da dificuldade de posicionamento deve se movimentar com o lingote de acordo com a velocidade de produção. Isto inviabiliza em condições práticas este tipo de medida experimental, a qual é estimada a partir de modelos matemáticos.

O volume de metal líquido no distribuidor também pode ser analisado isoladamente. Para o carregamento, um sensor de peso (balança hidráulica) atua no controle do volume, emitindo um sinal a uma unidade servo-hidráulica acoplada às válvulas da panela de carregamento. Ao ser atingido o peso máximo a unidade servo hidráulica fecha as válvulas impedindo a continuidade do carregamento no distribuidor. No peso mínimo as válvulas da panela são reabertas carregando novamente.

O sensor de nível do molde (Fonte radioativa → Co-60 versus Contador Geiger-Müller) atua no controle de vazamento do distribuidor, levando um sinal de resposta a unidade servo-hidráulica de controle da válvula de saída deste. Esta abre ou fecha conforme o carregamento do molde, evitando que o mesmo transborde ou baixe em demasia o nível do metal líquido.

### 5.2.2. Na Região de Chuveiros:

Na saída de cada região de chuveiros deve-se conhecer a temperatura superficial a fim de controlar a vazão dos mesmos, reduzindo ou aumentando a taxa de retirada de calor. Para tal, tem-se sensores de temperatura (pirômetros óticos) acoplados ao término de cada região.

Características do equipamento como:

- 1- Número e comprimento das etapas de chuveiros;
  - 2- Tipo e características dos chuveiros;
  - 3- Comprimento efetivo do lingotamento até o início do desempenho.
- correspondem aos parâmetros básicos para o modelo numérico desta etapa de processamento, e a condição de contorno necessária:

1- A Temperatura e o fluxo da água dos chuveiros de refrigeração, o que permite calcular o coeficiente de transferência de calor dentro de cada região.

Por outro lado o modelo numérico analisa os coeficientes dados a cada setor de chuveiros e verifica se o reaquecimento entre as etapas de chuveiros e a variação máxima da temperatura dentro de cada etapa correspondem aos critérios metalúrgicos exigidos pelo tipo de aço lingotado.

Com o sensoriamento contínuo da temperatura da superfície do lingote na saída do molde e na saída de cada região de chuveiros, o processo pode ser aferido com a comparação dos resultados gerados no

modelo. Contudo é importante observar que a atuação do controle independente, em cada região de chuveiros, é mais eficiente em termos de ajustes, do que um controle único em todo o resfriamento secundário. A siderúrgica nacional cujo equipamento de lingotamento contínuo de placas serviu como ancoragem operacional ao desenvolvimento deste trabalho, utiliza este tipo de controle único em seu equipamento. A implantação de um controle independente devidamente apoiado em um modelo numérico, não consiste alteração complexa aumentando a eficiência do processo de forma significativa.

O controle único é feito sobre curvas padrões, que consistem em pré-simulações geradas por empresas específicas a instalação da etapa de resfriamento por chuveiros, do equipamento de Lingotamento Contínuo. Controladores Lógicos Programáveis (CLP) recebem a programação, baseada nas curvas padrões, amarrando as diversas regiões de chuveiros sob condições de retirada de calor constantes. Com este tipo de atuação controlada, perde-se a maleabilidade de um controle ótimo do sistema global.

O controle individual permite a modificação da velocidade de produção, sem a necessidade de interromper o processo, sendo que cada região é ajustada objetivando manter a temperatura da superfície dentro dos critérios adotados e o fechamento do poço líquido dentro desta etapa.

### 5.2.3. No Equipamento Global:

Variações na velocidade de produção, equivalem a variações de ajuste em quase todo o sistema, sendo que um controlador de velocidade de produção deve realimentar os servo controladores das vazões dos chuveiros e da refrigeração do molde (Bombas hidráulicas), além do motor de oscilação do molde e da atuação no sistema de abertura e fechamento da válvula do distribuidor, garantindo a continuidade do processo.

A figura 5.3 esboça um diagrama básico de um sistema de Lingotamento Contínuo com suas respectivas regiões de controle. O desenho foi feito com o lingote na posição vertical apenas para facilitar a visualização dos sensores e das unidades servo-hidráulicas, contudo um sistema real apresenta-se curvo desde o molde, conforme visto anteriormente no capítulo 2 na figura 2.1.

Na figura 5.4 apresentamos um fluxograma geral de um programa de controle para o processo de Lingotamento Contínuo.

### 5.3. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA ENGENHARIA DE CONTROLE E SISTEMAS DE CONTROLE REALIMENTADOS

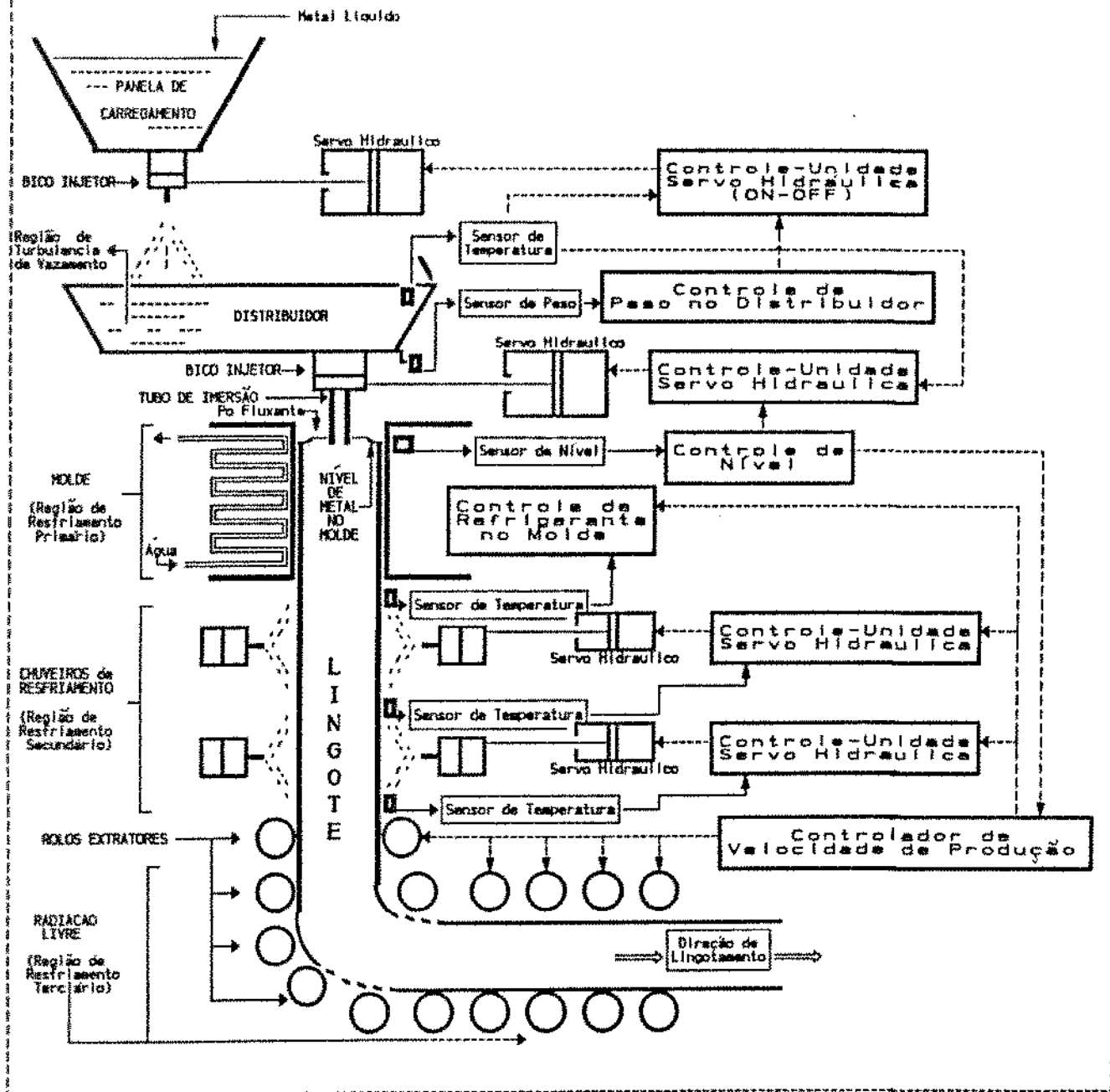
#### 5.3.1. Introdução:

O controle automático representa um papel vital no avanço da engenharia na produtividade industrial.

Desde que os avanços na teoria e na prática de controle automático propiciam meios para atingir-se desempenho ótimo de sistemas dinâmicos, bem como melhoria na qualidade e diminuição do custo de produção, aumento da taxa de produção, operações manuais e repetitivas, é fundamental sua inserção em todos os campos da engenharia.

O controle automático por programa envolve a existência de um programa de ações, que se cumpre com base no decurso do tempo ou a partir de modificações eventuais em variáveis externas ao sistema. Em princípio qualquer grandeza física pode ser controlada, isto é, pode ter seu valor intencionalmente alterado. Obviamente, há limitações práticas; uma das inevitáveis é a restrição da energia de que dispomos para afetar os fenômenos, por exemplo a maioria das variáveis climatológicas podem ser medidas mas não controladas, por causa da ordem de grandeza da energia envolvida, contudo o controle automático

Figura 5.3 - DIAGRAMA BÁSICO DE UM SISTEMA DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO E SUAS RESPECTIVAS REGIÕES DE CONTROLE





localizado pode ser feito modificando condições de contorno intrínsecas ao sistema de produção.

A automação envolve um sistema capaz de escolher os programas e os valores desejados das variáveis do processo, baseado nas medidas das saídas, das entradas e das perturbações naturais. sendo o objetivo atingir certa qualidade global do processo; geralmente este objetivo é alcançado através da maximização de funcionais ligados diretamente a custo, qualidade, duração do processo.

### 5.3.2. Análise de resposta transitória:

Na análise e projeto de sistemas de controle, devemos ter uma base para comparar o desempenho de vários sistemas a serem controlados, tais como: válvulas, relês, motores e muitos outros tipos de servomecanismos. Esta base pode ser obtida especificando-se sinais de teste de entrada particulares e comparando-se as respostas de vários sistemas a estes sinais de entrada.

Devemos esclarecer no início deste texto que o estudo analítico de sistemas controlados deve-se ao mapeamento das condições de trabalho do bloco de interface entre o processo físico controlado e o computador central mostrado na figura 5.1. Os sinais de entrada são aqueles definidos como sendo o sinal físico do processo recebido por algum transdutor específico ou a resposta de ajuste emitida pelo computador central para alguma válvula, motor ou bomba hidráulica do processo.

O comportamento dos transdutores ou dos sistemas controlados frente ao sinal de entrada até o ajuste final do processo físico, são alguns dos importantes fatores que devem ser analisados ao se projetar um sistema de controle automático.

A resposta temporal de um sistema de controle consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. Entendemos por resposta transitória, aquela que vai do estado inicial até o estado final, e por resposta estacionária, entendemos a maneira como a saída do sistema se comporta quando o tempo tende a infinito.

Definições de especificação de resposta transitória<sup>[75,76]</sup> Em muitos casos práticos, as características de desempenho desejadas de sistema de controle são especificadas em termos e grandezas no domínio do tempo. Sistemas com armazenamento de energia não podem responder instantaneamente e terão respostas transitórias sempre que sujeitos a entradas ou perturbações.

Freqüentemente, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos da resposta transitória para uma entrada degrau unitário (tipo de entrada onde no tempo ' $t$ ' mudamos sua condição de um valor ' $V_1$ ' para um valor ' $V_2$ '), pois esta entrada é fácil de se gerar e é suficientemente severa (Se a resposta a uma entrada em degrau é conhecida, é matematicamente possível computar a resposta para qualquer entrada).

A resposta transitória de um sistema para uma entrada degrau unitário depende das condições iniciais. Para conveniência na comparação de respostas transitórias de vários sistemas, costuma-se usar a condição inicial padrão de que o sistema esta inicialmente em repouso com a saída e todas as suas derivadas nulas. Desta forma as características de resposta podem ser facilmente comparadas.

A resposta transitória de um sistema de controle na prática geralmente apresenta oscilações amortecidas antes de alcançar o estado ou regime estacionário. Ao especificar as características de resposta transitória de um sistema de controle para uma entrada degrau unitário, é comum se especificar o seguinte:

- 1- Tempo de atraso ( $t_d$ )
- 2- Tempo de subida ( $t_r$ )
- 3- Instante de pico ( $t_p$ )
- 4- Sobre-sinal máximo ( $M_p$ )
- 5- Tempo de acomodação ( $t_s$ )

Estas especificações são definidas a seguir e mostradas graficamente na figura 5.5.

1- Tempo de atraso ( $t_d$ ): É o tempo necessário para a resposta alcançar pela primeira vez a metade do valor final.

2- Tempo de subida ( $t_r$ ): É o tempo necessário para a resposta passar de 10% a 90% ou 5% a 95% ou 0% a 100% do seu valor final.

3- Instante de pico ( $t_p$ ): É o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico do sobre-sinal.

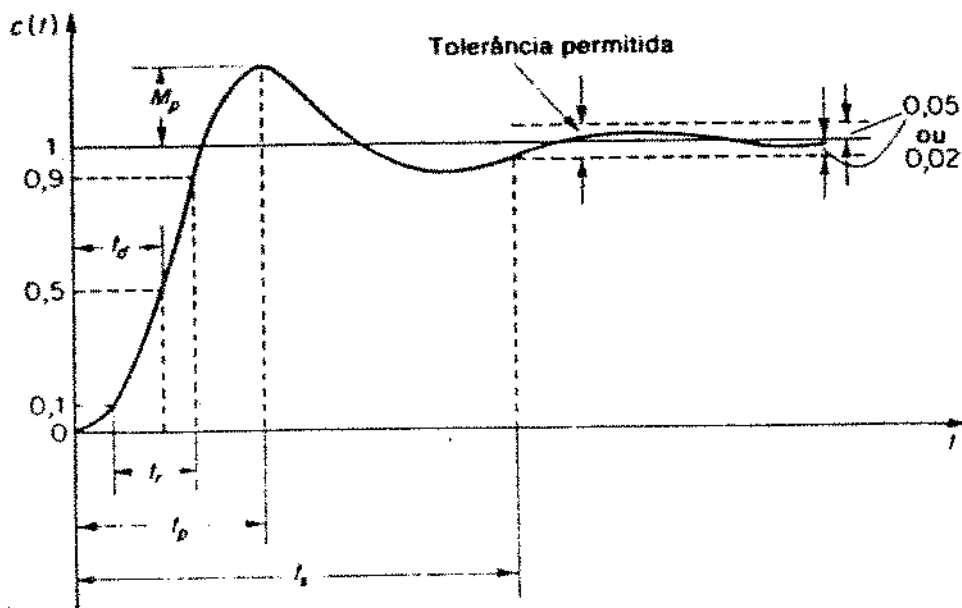


Figura 5.5 - Curva de resposta a degrau unitário<sup>[75]</sup>

4- Sobre-sinal máximo ( $M_p$ ): É o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário ( $u_m$ ). Se o valor final de regime estacionário de resposta difere da unidade, então comumente se usa o máximo sobre-sinal percentual. É definido por:

$$M_p (\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (5.8)$$

O valor do sobre-sinal máximo (percentual) indica diretamente a estabilidade relativa do sistema controlado.

5- Tempo de acomodação ( $t_s$ ): É o tempo necessário para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final, faixa esta de magnitude especificada por uma porcentagem absoluta do valor final (normalmente 5% ou 2%). O tempo de acomodação está relacionado com a maior constante de tempo do sistema de controle. A escolha de que porcentagem usar no critério de erro pode ser determinada a partir dos objetivos do projeto de sistema em questão.

Em engenharia de controle, usualmente, valem as seguintes considerações:

- 1- Grandes erros, imediatamente após a aplicação de um degrau unitário à entrada do sistema, são inevitáveis e irredutíveis;
- 2- Um sobre-sinal grande equivale, em qualidade do servomecanismo;
- 3- Componentes transitórias de longa duração são muito prejudiciais;
- 4- Redução muito lenta do erro ao valor estacionário é prejudicial, e provavelmente será interrompida pela entrada de novo sinal de entrada.

As especificações no domínio do tempo são bastante importantes, visto que a maioria dos sistemas de controle são sistemas

de domínio do tempo (e não da frequência); isto é, eles devem apresentar respostas temporais aceitáveis (Isto significa que o sistema de controle deve ser modificado até que a resposta transitória seja satisfatória). Note que se especificamos os valores de  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_s$ ,  $M_p$ , então a forma da curva de resposta está virtualmente determinada. Isto pode ser visto claramente na figura 5.6.

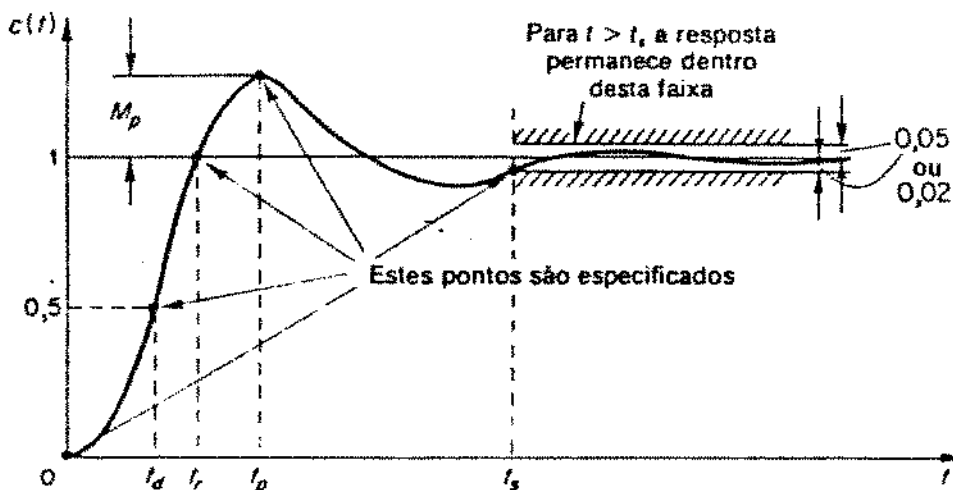


Figura 5.6 - Especificações de resposta transitória<sup>[75]</sup>

### 5.3.3. Sensoriamento e sistemas controlados:

Com os conceitos vistos nos itens anteriores, é possível um levantamento básico dos pontos críticos a serem sensoriados no equipamento de Lingotamento Contínuo, além de uma discussão inicial em relação aos tipos de transdutores utilizados e os respectivos sistemas controlados.

#### 5. 3.1- Sensores no controle do processo:

A literatura especializada é escassa em relação às informações básicas de controle para os diversos tipos de transdutores utilizados no equipamento de Lingotamento Contínuo, contudo alguns autores descrevem uma análise primária em relação a aplicação prática do sensoriamento em algumas regiões críticas do equipamento.

Transdutores térmicos como termopares e sensores óticos, são muito utilizados ao longo do sistema. Os termopares são preferidos nos locais onde a movimentação do processo não dificulte sua instalação, São utilizados para a leitura da temperatura do metal líquido no distribuidor e a temperatura de refrigeração do molde. Apresentam baixo tempo de resposta além de suportarem altas temperaturas. Os termopares também são utilizados para o sensoriamento da temperatura da água dos chuveiros.

Os sensores óticos são mais utilizados nas leituras de temperatura da superfície do lingote, onde não seriam possíveis a instalação de termopares. Os sensores óticos são extremamente rápidos em relação ao tempo de resposta e muito sensíveis a variações. Entretanto a sua instalação é relativamente delicada em relação aos termopares devido a manutenção exigida e a limpeza das lentes. A leitura da temperatura da superfície do lingote na saída do molde e a temperatura da superfície do lingote na saída de cada região de chuveiros é feita com a aplicação destes sensores, contudo a utilização na leitura da temperatura na saída do molde em alguns casos pode ser dificultada devido à pouca disponibilidade de espaço físico nesta área do processo para a instalação deste tipo de sensor.

Na leitura de nível de aço no molde o sensoriamento radioativo e o sensoriamento diferencial por termopares pode ser utilizado. Entretanto o sensor radioativo composto de uma fonte de emissão (normalmente o Co-60) acoplada em um dos lados do molde, tendo do outro lado um contador Geiger-Müller, oferece um tempo de resposta muito superior ao tempo de resposta do sensor de termopares; sendo este atualmente o mais utilizado industrialmente.

As válvulas de pressão hidrostáticas são utilizadas para a leitura do fluxo de água de refrigeração do molde e dos chuveiros. Apesar de oferecerem tempos de resposta e tempo de acomodação

relativamente elevados, devido a trabalharem sobre molas de amortecimento, são preferidos em relação a estabilidade oferecida após alcançado o tempo de estabilização.

Para o acompanhamento do volume de metal líquido no distribuidor, é utilizado uma balança hidráulica regulada entre os limites máximos e mínimos de carga. A dificuldade inerente a este tipo de sensoriamento e as elevadas temperaturas nesta região do processo, fazem da balança hidráulica o sensor mais conveniente.

#### 5.3.3.2- Sistemas controlados:

O estudo dos sistemas controlados é mais crítico que o dos sensores utilizados no equipamento, pois é através dos ajustes nestes que o processo físico mudará realmente sua condição de trabalho. Além de que estes sistemas, para o Lingotamento Contínuo, serão motores, bombas hidráulicas, válvulas de abertura e fechamento hidráulico, enfim mecanismos que trabalham sobre as condições de resposta transitória em relação aos sinais de ajuste emitidos pelo computador central, conforme mostrado no item 5.4.2.

No projeto e desenvolvimento de um sistema global de controle automático do equipamento de Lingotamento Contínuo, as condições de resposta e tempo de estabilidade de cada bloco do equipamento frente aos sinais de ajuste, devem ser individualmente estudados, no cuidado de não levar o sistema global a trabalhar de forma caótica. Uma pré-análise em relação aos tempos de resposta e tempo de acomodação para cada tipo de sistema controlado pode dizer se o processo trabalhará de forma adequada.

Um sinal de ajuste em um sistema controlado que venha gerar uma resposta transitória, dentro de um tempo limite, suficiente para que um determinado sensor capte a instabilidade gerada, pode levar o programa de controle a emitir novos ajustes sem a real necessidade,

fazendo com que o sistema global venha trabalhar de forma completamente errônea.

A engenharia de controle oferece inumeros métodos para a análise e projeto de sistemas de controle realimentado os quais devem ser pesquisados objetivando o projeto global do sistema de controle. Contudo por sair em demasia do escopo deste trabalho deixamos de lado a descrição destes métodos que devem ser analisados em trabalhos específicos de projeto de controle para cada sistema individual de Lingotamento Contínuo.

#### 5. 4. RESUMO GLOBAL DO PROGRAMA DE CONTROLE DO PROCESSO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO

##### PROGRAMA DE CONTROLE

- 1- Informação Permanente
  - 1.1. Características de equipamento
- 2- Informação de Processo
  - 2.1. Condições de contorno
  - 2.2. Resultados de processo

##### 1- INFORMAÇÃO PERMANENTE

- 1.1. Características de Equipamento
  - 1.1.1. Altura e área do distribuidor
  - 1.1.2. Comprimento efetivo do molde
  - 1.1.3. Largura e espessura do lingote
  - 1.1.4. Número de regiões de refrigeração do molde
  - 1.1.5. Número e comprimento das etapas de resfriamento por chuveiros
  - 1.1.6. Tipo e características dos chuveiros
  - 1.1.7. Comprimento efetivo até o desempenho



## 2- INFORMAÇÃO DE PROCESSO

### 2.1. Condições de Contorno

- 2.1.1. Temperatura do metal no distribuidor
- 2.1.2. Nível de aço no molde
- 2.1.3. Temperatura da água de refrigeração do molde
- 2.1.4. Fluxo da água de refrigeração no molde
- 2.1.5. Temperatura e fluxo da água dos chuveiros de refrigeração
- 2.1.6. Velocidade de produção
- 2.1.7. Tipo de aço lingotado

### 2.2. Resultados de Processo

- 2.2.1. Volume de metal líquido no distribuidor
- 2.2.2. Nível de metal no molde
- 2.2.3. Frequência de oscilação do molde em função da velocidade de produção
- 2.2.4. Temperatura da superfície do lingote na saída do molde
- 2.2.5. Temperatura da superfície do lingote na saída de cada região de chuveiros
- 2.2.6. Esforços de tração ao longo do lingote, como função da velocidade de produção

## SENSORES NO CONTROLE DO PROCESSO

### 1- Sensor Térmico (Termopar)

- 1.A. Temperatura do metal líquido no distribuidor
- 1.B. Temperatura de refrigeração do molde
- 1.C. Temperatura da água dos chuveiros

### 2- Válvulas de Pressão Hidrostáticas

- 2.A. Fluxo da água de refrigeração do molde

- 2.B. Fluxo da água de refrigeração dos chuveiros
- 3- Balança Hidráulica
  - 3.A. Volume de metal líquido no distribuidor
- 4- Sensor Radioativo (Co-60 versus Contador Gaiger-Müller)
  - 4.A. Nível de metal no molde
- 5- Sensor ótico
  - 5.A. Temperatura da superfície do lingote na saída do molde
  - 5.B. Temperatura da superfície do lingote na saída de cada região de chuveiros

#### SISTEMAS DE ATUAÇÃO DO CONTROLE NO EQUIPAMENTO

- 1- Sistemas de abertura e fechamento da válvula de vazamento do distribuidor e da panela de carregamento
- 2- Motor de oscilação do molde
- 3- Bombas hidráulicas do fluxo de água do molde
- 4- Bombas hidráulicas do fluxo de água dos chuveiros
- 5- Motores dos rolos extratores

#### MONITORAÇÃO DO PROCESSO VIA MODELO NUMÉRICO

- 1- No Molde (Resfriamento Primário)
  - 1.1. Espessura de casca sólida na saída do molde
- 2- Na Região de Chuveiros (Resfriamento Secundário)
  - 2.1. Reaquecimento na mudança da eficiência de refrigeração entre as etapas de chuveiros
  - 2.2. Variação da temperatura transversal dentro de uma etapa de chuveiros
  - 2.3. Variação máxima da temperatura longitudinal dentro de uma etapa de chuveiros

### 3- Radiação Livre (Resfriamento Terciário)

3.1. Temperatura de início da zona de radiação livre, de acordo com os critérios metalúrgicos adotados

3.2. Fechamento do poço líquido antes do desempenho do lingote

## CAPITULO 06 - CONCLUSÕES

Os resultados obtidos decorrentes do desenvolvimento de um modelo de diferenças finitas, modificado através da analogia entre circuitos térmicos e elétricos, e sua aplicação na análise da solidificação no lingotamento contínuo de aços, permitem que sejam extraídas as seguintes conclusões:

6.1- O modelo desenvolvido permite analisar o comportamento térmico da solidificação de aços nas diversas etapas de refrigeração do processo de Lingotamento Contínuo, adaptando-se com versatilidade ao cálculo de precisão nos pontos críticos de processo;

6.2- O confronto entre as expectativas teóricas do modelo desenvolvido com resultados experimentais e outros modelos já comprovados na literatura, demonstrou sua confiabilidade na previsão do campo térmico durante a solidificação no processo de Lingotamento Contínuo de aços;

6.3- O modelo foi utilizado na simulação, de diversas condições de operação do processo de Lingotamento Contínuo, e dentro de severos requisitos metalúrgicos de preservação da qualidade do produto, mostrando-se potencialmente adequado para a aplicação em programas de controle automático do equipamento;

6.4- A utilização da analogia térmico/elétrica, demonstrou seu potencial como forte ferramenta para a otimização de programas numéricos voltados a sistemas de computador de pequeno e médio porte;

6.5- A análise global dos pontos de sensoriamento e dos segmentos do equipamento que devem ser submetidos ao controle, mostrou a viabilidade da aplicação do modelo desenvolvido na implantação de sistemas de controle em equipamentos de lingotamento contínuo de aços;

6.6- A análise individual dos diferentes blocos de controle do processo, sua integração em rede com os sinais de sensoriamento e o computador central com o modelo numérico devidamente inserido, permitiu que se estabelecesse um planejamento preliminar de um controle ótimo em linha para o Lingotamento Contínuo de placas de aço.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - Metals Handbook, Casting, ASM International, Ninth Edition, V.15,1988;
- 2 - Jaffuel, A. and Robyns, J.P., "FLO CON slide nozzles", Int. Iron and Steel Congress, 1989;
- 3 - Geiger, G. H. and Poirier, D. R., "Transport Phenomena in Metallurgy", Addison-Wesley, 1973;
- 4 - Johansen, S.T., Boysan, F. & Ayers, W.H., "Mathematical modelling of Bubble driven flows in metallurgical processes", Applied Scientific Research 44: 197-207, 1987;
- 5 - Wolf, M. and W. Kurz, "Solidification of Steel in Continuous-Casting Moulds", Int. Iron and Steel Congress, 1989;
- 6 - Larrecq, M. et al., "Optimization of casting and cooling conditions on steel continuous caster", Application of mathematical and physical models in the iron and steel industry, iron and steel society of AIME, 1982;
- 7 - Brimacombe, J. K., "Design of Continuous Casting Machines Based on a Heat Flow Analysis State of the Art Review", Canadian Metallurgical Quarterly, v.15, p.1-13, 1976;
- 8 - J.K. Brimacombe, I.V. Samarasekera, and J.E.Lait, "Continuous Casting", vol. 2, Heat Flow, "Solidification and Crak Formation", Book Crafter Inc. Chelsea, MI, 1984;
- 9 - Readal, G.J., "Controlling a Continuous-Continuous Casting Operation", Automation in the Iron and Steel Industry,AIME,1977;
- 10- Alberny, R. "Heat transfer and solidification in continuous casting", Casting and solidification of steel, v.1 p. 277-336, IPC Science and Technology Press, Ltd, 1977;

- 11- Marti, H. & Barbe, J. "Moulds: Key Element in Continuous Casting", Iron and Steel International, v.51, p. 167-177, 1978;
- 12- Smith, T. J. et al., "On the sensitivity simulations of solidification to the physical properties of the melt and the mold", Applied Scientific Research 44, 93-109, 1987;
- 13- Alberny, R. et alli "La lingotiere de coulée continue de brames et Son bilan thermique", Revue de Metalurgie, p.545-557, julho/agosto, 1976;
- 14- Vogt, G. & Wunnenberg, K. "Distribution du flux thermique dans les lantières de coulée continue, Klepzig Fachberichte, v.80, p.491-494, 1972;
- 15- Inouye, T. et alli, "Heat transfer in the continuous casting mold", Nippon Steel Technical Report, n<sup>o</sup> 12, p. 86-96, dezembro, 1978;
- 16- Nishida, Y., Droste, W. & Engler S., "The Air-Gap Formation Process at the Casting-Mold Interface and the Heat Transfer Mechanism through the Gap", Metallurgical Transaction B, 17B, p.833-844, 1986;
- 17- Ueta, H., et alli, "Development of Uniform Secondary Mist Cooling Technology for Slab Continuous Casting", La Revue de Métallurgie - CIT, p. 573-580, Juin 1990;
- 18- Nemoto, H., "Development of Continuous Casting Operation", Transaction of the Iron and Steel Institute of Japan, v.16, p.51, 1976;
- 19- Bolle, L. and Moureau, J. C. "Experimental Study of Heat Transfer by Spray Cooling", Heat Transfer and Mass Transfer in Metallurgical Systems, p. 527, 1979;

- 20- Nozaki, T. and Matsuno, J. and Murata, K. "A Secondary Cooling for Preventing Surface Cracks of Continuous Casting Slab", Transaction of the Iron and Steel Institute, v. 18, p. 330, 1978;
- 21- Mizikar, E. A. "Spray Cooling Investigation for Continuous Casting of Billets and Blooms", Iron and Steel Engineer, p. 53-60, junho, 1970;
- 22- Dusinberre, G. M., "Numerical Analysis of Heat Flow", ed. McGraw-Hill, New York, 1949;
- 23- Kreith, F., "Princípios de Transmissão de Calor", ed. Edgard Blücher, 1977;
- 24- Welty, James R., "Engineering Heat Transfer", J.Wiley and Sons, Inc. N. Y., 1976;
- 25- Wong, H.Y., "Heat Transfer for Engineers", Longman Inc., New York, 1977;
- 26- Perry, J. H. "Chemical Engineers' Handbook", 42 Ed., Mc Graw-Hill Book Company, 1963;
- 27- Carnahan, B.; Luther, H.A. & Wilkes, J.O., "Applied Numerical Methods", J.Wiley and Sons, Inc. N. Y., 1969;
- 28- Ierard, M. C. - "Modelagem matemática e simulação do processo de lingotamento contínuo de aços, TESE DE DOUTORADO. Unicamp/FEC/DEMA, 1989;
- 29- Ynoue, M. - "Modelagem matemática da solidificação de ligas binárias com aplicação no cálculo da macrossegregação inversa", TESE DE MESTRADO. Unicamp/FEC/DEMA, 1992;
- 30- Millman, J. & Halkias, C.C., "Eletrônica-Dispositivos e Circuitos", ed. McGraw-Hill, 1981;
- 31- Hayt, W.H. Jr. & Kemmerly, J.E., "Análise de Cicuitos em Engenharia", ed. McGraw-Hill, 1975;



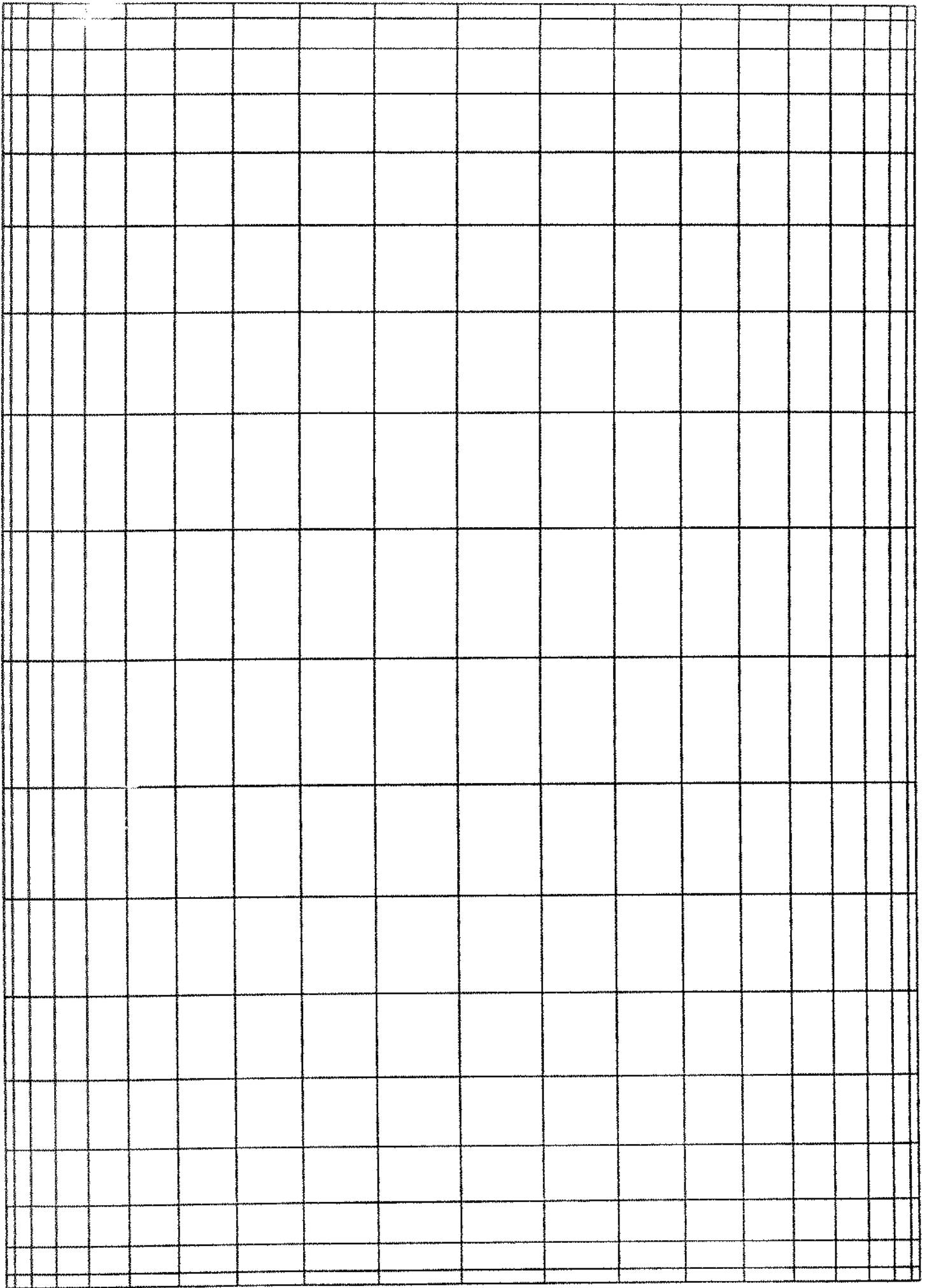
- 32- Garcia, A. and Prates M. "The application of a mathematical model to analyse ingot thermal behaviour during continuous casting", Proceedings of the 4th IFAC Symposium Helsinki, Finland, 22-25, August, 1983;
- 33- Garcia, A. & Prates, M., "Mathematical Model for the Unidirectional Solidification of Metals: I - Cooled Molds", Metallurgical Transaction, V.9B, pp.449-457,1978;
- 34- Barros, I. Q., "Introdução ao Cálculo Numérico", Ed. Edgard Blücher, LTDA., EDUSP, 1972;
- 35- Brimacombe, J.K. & Weinberg, F. "Continuous Casting of Steel/Part 2, Journal of the Iron and Steel Institute, p.25-33, janeiro, 1973;
- 36- Wolf, M. and W. Kurz, "Solidification of Steel in Continuous-Casting Moulds", In: Solidification and Casting of Metals, p.287-294, The Metals Society, London, 1979;
- 37- Smithells, C. J. - Metals Reference Book, Butterworths, London, 1976;
- 38- A.B. Crowley, "Numerical Solutions of Phase Change Problems", Int. Heat Mass Transfer, 21, 215-219, 1988;
- 39- J.R. Ockendon and W.R. Hodgkins, "Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion", University Press, Oxford, 1975;
- 40- W.R. Irving and A. Perkins, "Continuous Casting of Steel", 107, 1977, London, The Metals Society, S. Myoshi, *ibid.*, 286;
- 41- H.H. Kuiken, "Solidification of a Liquid on a Moving Sheet", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 20, pp. 309-314, 1977;
- 42- Ohnaka, I. "Mathematical analysis of solute redistribution during solidification with diffusion in solid phase", TRANS. ISIJ, 26, 1045-1051,1986;

- 43- Pham, Q.T., "A fast, unconditionally stable finite-difference scheme for heat conduction with phase change", Int. J. Heat Mass Transfer, v.28, n<sup>o</sup> 11, pp. 2079-2084, 1985;
- 44- Lally, B., Biegler, L. and Henein H., "Finite Diffence Heat-Transfer Modeling for Continuous Casting", Metallurgical Transactions B, v.21B, pp. 761-770, august 1990;
- 45- Hansen, P. N. "Modelling of solidification process in casting using FDM-Techniques, E-MRS - Strasbourg, june 1986;
- 46- Thomas, B. G., Samarasekera, I.V. and Brimacombe, J. K., "Comparison of Numerical Modeling Techniques for Complex, Two-Dimensional, Transiente Heat-Conduction Problems", Metallurgical Transaction B, V. 15B, p.307-318, june 1984;
- 47- Flood, S.C. and Hunt, J.D., "A model of a casting", Applied Scientific Reseach 44: 27-42, 1987;
- 48- Crowley, A. B. and Ockendon, J.R., "Modelling mushy regions", Applied Scientific Reseach 44: 1-7, 1987;
- 49- Caram, R., Ierard, M. C. and Garcia A. "Modelagem numérica aplicada à solidificação de peças metálicas no processo de fundição", Metalurgia-ABM, v.44, n<sup>o</sup> 366, maio 1988;
- 50- Hamar, R., "Numerical simulation in precision castings", Int. J. for numerical methods in engineering, v.24, 219-229, 1987;
- 51- Garcia, A., "Transferência de calor e solidificação no Lingotamento Contínuo", TESE DE LIVRE DOCÊNCIA apresentada à Unicamp, 1981;
- 52- Lait, J. E. et alli, "Mathematical modelling of heat flow in the continuous casting of stell", Ironmaking and Steelmaking, n<sup>o</sup> 2, p. 90, 1974;

- 53- Perkins, A. and Irving, W. R., "Two dimensional heat transfer model for continuous casting of steel", Mathematical process Model in Iron and Steelmaking, The Metals Society, p.187, 1973;
- 54- Confidential Information;
- 55- Hills, A. W. D., "Simplified theoretical treatment for the transfer of heat in continuous casting machine moulds", Journal of the Iron and Steel Institute, p.18-26, janeiro, 1965;
- 56- Hills, A. W. D., "A generalized Integral - Profile Method for the Analysis of Unidirectional Heat Flow During Solidification", Transactions of Metallurgical Societ of AIME, v.245, p.1471-1479, 1969;
- 57- Savage, J. & Pritchard, W.H., "The Problem of Rupture of the Billet in the Continuous Casting of Steel", Journal of the Iron and Steel Institute, v.178, p.269-277, 1954;
- 58- Harris, M. B. (Univ. of Auckland, N.Z.), Mallingson, G.D. "Mathematical modeling ang visualization technique of flow in a continuous casting mather model", CHEMECA 90 Australasian Chem. Eng. Conf. Parte 2, N.Z./Auckland, p.922-929, August 1990;
- 59- Jinfu, Y, Leyuan, L., "Computer Simulation of two-dimensional temperature fiel for casting solidification", Chen. J. China Text Engl., Ed. v.7 n<sup>o</sup> 3, p. 17-22, Sep 1990;
- 60- West, R.; Persson, M., "Numerical Simulation of Ingot Solidification", Mats. Scand. J. Metll, v.15 n<sup>o</sup> 5, 1986, p.233-237;
- 61- Smart, R.F., "Investiment Casting the Future", Foundry Trade J., v.161, pp. 184-187, n. 3344, Mar 12, 1987;
- 62- Prinz, B., "Criteria for Secondary Cooling During Continuous Casting of Mialel Containing Alloys", Metallgesellschaft A. G., Frankfurt, West Ger. W., Z. metallkd, v. 78, n. 5, May 1987;

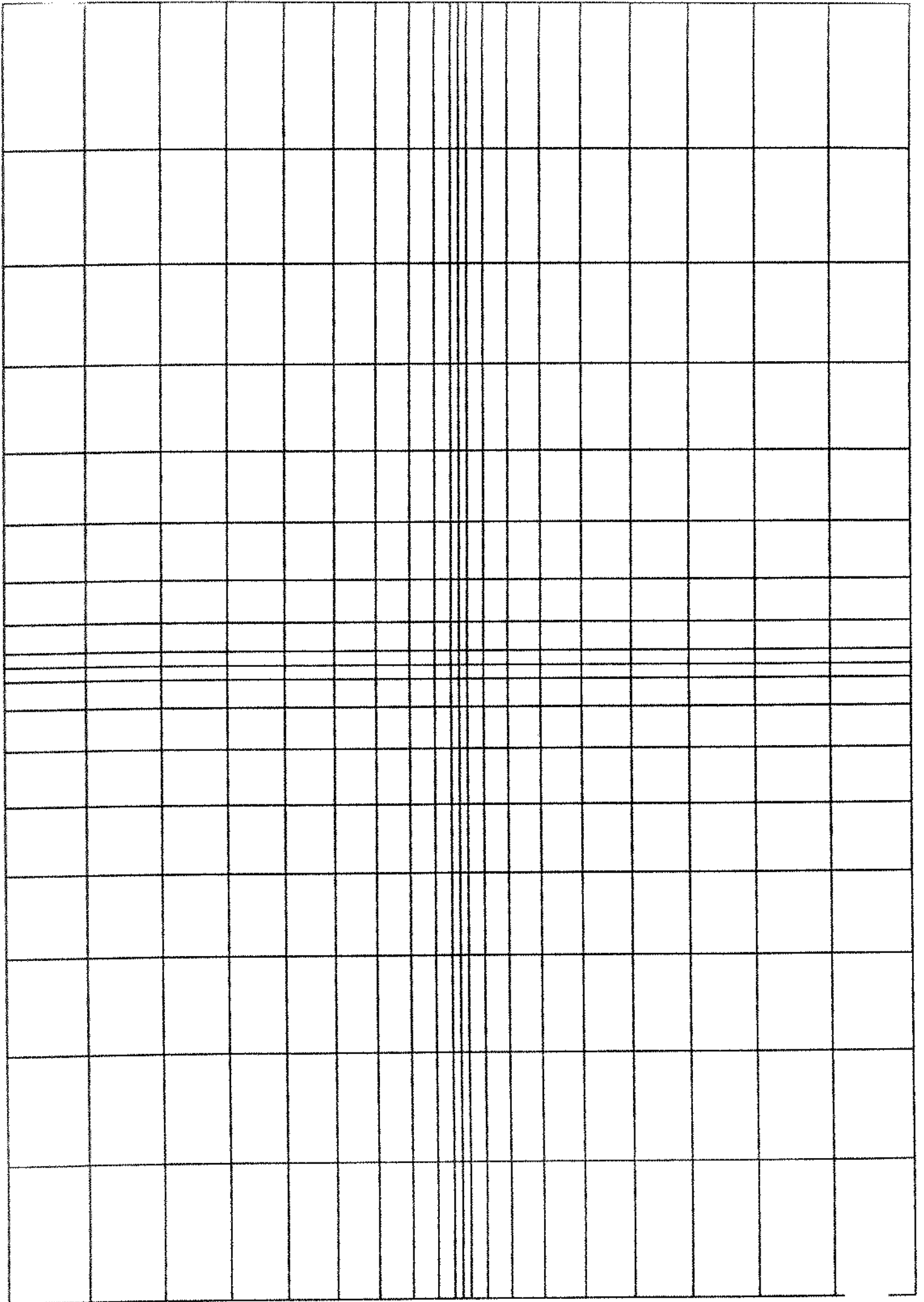
- 63- Hoeffken, E., Kappes, P. and Lax, H., "Production of Strip in the Pilot Continuous Casting Plant at Buschhuetten", Stahl Eisen, v.106, n. 23, p.27-33, Nov.17, 1986;
- 64- Steinbauer, G. and Siefert, W., "Data processing in diagnosis of casting defects and its adaptation to computer aided production control", Giessereiforschung, v.40, n. 3, p.81-94, 1988;
- 65- Brown, S.G.R. and Spittle, J.A., "Computer Simulation of Grain Growth and Macrostructure development during solidification", v.5, n. 4 p.362-368, Apr 1989;
- 66- Laitinen, E. and Neittanwaki, P., "On numerical solution of the control of the secondary cooling in the continuous casting process", Control-Theory and Adv. Technol., v.4, n. 3, p. 285-305, 1988;
- 67- Caygill, R. B. and Reynolds, T., "Continuous Casting and its Control", T. Contin Cast. Suppl., Mar 1987;
- 68- Gregoraszczyk, M. et alii, "Optimization of the process of operation of automatic casting lines", Pol. Akad Nauk Oddzial Krakowie Pr. Kom. Metall Odlew Metalurg, n.36, p.81-91, 1987;
- 69- Iversen, T. "Control elements in mechanism simulation", Model Ident Control v.10, n.3, p.165-172, 1989;
- 70- Denisov, Y.; Druzhinina, T.; Karlinskii, S.E., "Strand Straightening on Continuous Casting Machines", V.M. Steel VSSR v.19 n.3 ,p.130-132, Mar 1989;
- 71- Bogatov, A.A.; Krotov, S.P.; Migacheva, G.N., "Evaluation of the damage to continuous cast steel in bulging of the crust of the billet between the support of the continuous casting machine", A.V. Strength of Mater, p. 371-377, Nov. 1988;

- 72- Jani, K. "projet application to a PLC continuous casting control system", IEE Service Center Piscataway, N.J. USA, p.13A1.411-13A1.415, 1988;
- 73- Liu, O. and Kang, T., "Prospect of Developmet of Continuous casting-Rolling of Metals", v.25, n.5, p.67-72, 1990;
- 74- Murai, Y. et alli "Development of welding material for continuous casting rolls", R&S Res. Dev. Kobe Steel, Ltd., v.40, n.3, p.101-104, jul 1990;
- 75- Ogata, Katsuhiko, "Engenharia de Controle" ,42 Ed., Mc Graw-Hill Book Company, 1972;
- 76- Castrucci, P. and Batista, L. "Controle Linear Método basico", Ed. Edgard Blücher, LTDA., EDUSP, 1980;



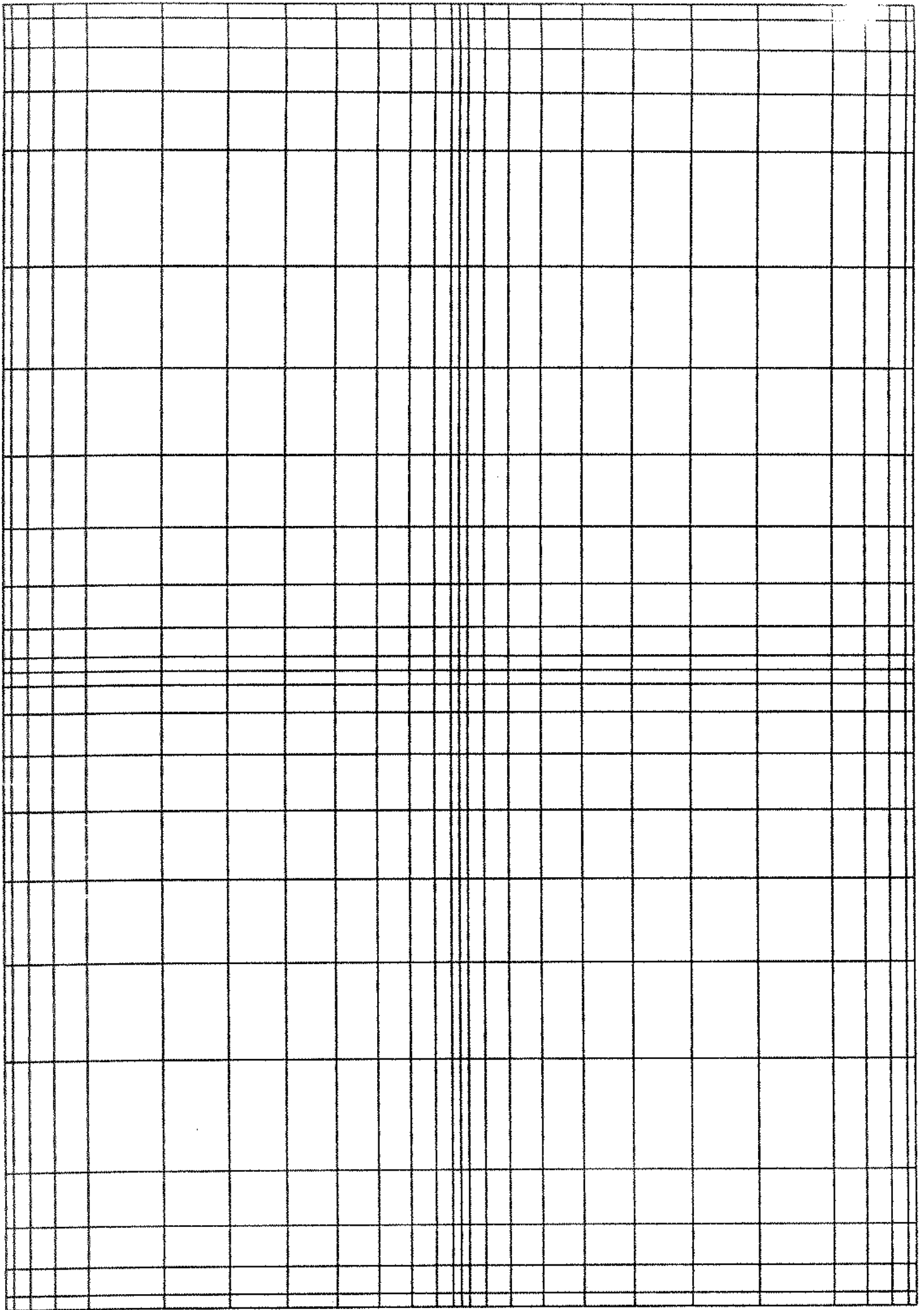
Malhas nodais - Apêndice A


Aumento de precisão na borda esquerda e inferior



Aumento de precisão nas regiões centrais





Aumento de precisão nas regiões centrais e de contornos

APÊNDICE B

PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS UTILIZADAS

AÇO %C < 0.2 %

	H(J/Kg)	k(W/m.K)	c(J/Kg.K)	d (Kg/m <sup>3</sup> )
líquido	260x10 <sup>3</sup>	29.3	670	7.4x10 <sup>3</sup>
sólido	260x10 <sup>3</sup>	25.4	679	7.0x10 <sup>3</sup>

APÊNDICE C

SIMBOLOGIA UTILIZADA

PARÂMETROS - descrição (unidades)

1) LETRAS ROMANAS

C - concentração	(%)
c - calor específico	(J/Kg K)
D - constante de difusão	(m <sup>2</sup> /s)
$\rho$ - densidade	(Kg/m <sup>3</sup> )
e - constante $\approx 2,71828$	
f <sub>s</sub> - fração sólida	(adimensional)
H - calor latente de fusão	(J/Kg)
h - coeficiente de transferência de calor	(W/m <sup>2</sup> K)
K - constante de velocidade	(m/s <sup>1/2</sup> )
k' - coeficiente de distribuição do soluto	(adimensional)
k - condutibilidade térmica	(J/msK)
L - comprimento	(m)

PARÁMETROS - descrição (unidade)

q - fluxo de calor	(W/m <sup>2</sup> )
R <sub>t</sub> - resistência térmica	(m <sup>2</sup> K/W)
C <sub>t</sub> - capacitância térmica	(cal/K)
R - resistência elétrica	(Ω)
C - capacitância elétrica	(F)
A <sub>t</sub> - área térmica	(m <sup>2</sup> )
S - espessura solidificada	(m)
T - temperatura	(K)
t - tempo	(s)
x - coordenada (posição)	
y - coordenada (posição)	
z - coordenada (posição)	

2) LETRAS GREGAS

Δ - diferença	
ρ - densidade	(Kg/m <sup>3</sup> )
Σ - indicador de somatório	
Ω - parâmetro de ajuste de Clyne-Kurz = $\gamma / (1 + \gamma)$	
λ - espaçamento dendrítico	

3) SINAIS

∂ - diferencial parcial
Δ - gradiente

4) SUBSCRITOS E SUPERCRITOS

l - referente à <i>liquidus</i>
s - referente à <i>solidus</i>
l - referente a líquida
s - referente a sólido