

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR João Candido
Baptista de Campos E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 06/07/95.

Euclides de Mesquita Neto

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

*Dissertação apresentada ao Curso de Doutorado
da Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Estadual de Campinas como
requisito parcial para obtenção do título de
Doutor em Engenharia Mecânica*

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS POROELÁSTICOS
ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

*Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e
Projeto Mecânico*

Orientador: Euclides de Mesquita Neto

JOAO CANDIDO BAPTISTA DE CAMPOS

06 de julho de 1995

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	UNICAMP
C157s	
VOL	E
25541	
PROG.	433/95
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	20/09/95
N.º CPD	

CM-00076546-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C157s

Campos, João Candido Baptista de
Solução de problemas poroelásticos através do método
dos elementos de contorno / João Candido Baptista de
Campos. --Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica de rochas. 2. Mecânica dos solos.
3. Elasticidade. 4. Engenharia do petróleo. 5. Métodos de
elementos de contorno. I. Mesquita Neto, Euclides de.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

TÍTULO: SOLUÇÃO DE PROBLEMAS POROELÁSTICOS ATRAVÉS
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

AUTOR: Joao Candido Baptista de Campos

ORIENTADOR: Euclides Mesquita Neto

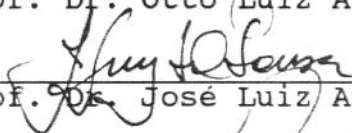
APROVADO POR:



Prof. Dr. Euclides Mesquita Neto, Presidente



Prof. Dr. Otto Luiz Alcântara Santos



Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini



Prof. Dr. Fernando Iguti

Campinas, 06 de julho de 1995

SUMÁRIO

A teoria poroelástica de Biot é sintetizada de modo a torná-la mais facilmente aplicável a problemas práticos. Os parâmetros usados por Biot são explicitados em função de outros, que têm uma interpretação física mais simples e mais fácil, o que facilita a determinação deles em laboratório e o entendimento dos fenômenos poroelásticos.

As equações que governam a teoria da poroelasticidade linear quase-estática, acoplando completamente deformação elástica e difusão de fluido em um meio poroso saturado, são solucionadas através do método dos elementos de contorno (MEC). Neste trabalho, a discretização espacial das equações integrais resultantes do MEC é feita considerando-se elementos constantes e lineares. A formulação quase-estática é resolvida no domínio da variável de Laplace com posterior inversão numérica para o domínio do tempo.

O método é aplicado em problemas clássicos tais como o cilindro de Lamé, a placa infinita com um furo circular, consolidação sob carga unidimensional, etc, apresentando resultados que confirmam aqueles encontrados na literatura. Outros resultados obtidos têm aplicação imediata na análise da estabilidade e no fraturamento hidráulico de poços petrolíferos.

Os resultados, obtidos no modelamento de um furo em uma formação poroelástica, permitem a interpretação da perda de estabilidade de suas paredes, por lascamento, como consequência de fraturas circunferenciais, perpendiculares à direção da menor tensão tectônica, causadas por tensões radiais efetivas de tração, devidas a uma pressão baixa dentro do furo. Estas fraturas criam pequenos pilares que rompem por flambagem ou por compressão.

As operações de estimulação de poços petrolíferos, por fraturamento hidráulico, mostram que a formação poro-permeável é mais facilmente quebrada quando há fluxo do fluido de fraturamento, ou seja, quando é usado um fluido com comportamento penetrante. Este fato é comprovado nesta tese.

A evolução do fator de intensidade de tensão, modo I, de uma fratura pressurizada, em um meio poroso, é simulada, ocorrendo uma redução com o tempo, tendendo a um valor mínimo estabilizado.

ABSTRACT

The Biot's theory of poroelasticity is revisited making it more easily applicable to practical problems. The parameters used by Biot are redefined as functions of other ones with an easier and simpler physical interpretation. This helps their determination and the understanding of poroelastic phenomena.

The equations that govern the theory of quasi-static linear poroelasticity, coupling elastic strain and fluid diffusion in a saturated porous medium, are solved using the boundary element method (BEM). In this work, the spatial discretization of the BEM integral equations is done considering constant and linear elements. The quasi-static formulation is solved in the domain of Laplace's variable with a posterior numerical inversion to the time domain.

The method is applied to classical problems like the Lamé's cylinder, the infinite plate with a circular hole, the consolidation under a unidimensional load, etc., giving results that confirm those found in the literature. Other results that were achieved have immediate applicability in the study of oil wells stability and in their stimulation by hydraulic fracturing.

The results that were obtained in the modelling of a borehole in a poroelastic formation allow the interpretation of the loss of its walls stability, by breakout, as a consequence of circumferential fractures, normal to the direction of the minor tectonic stress, caused by tension effective radial stresses, due to a low pressure in the borehole. Those fractures create small piles that collapse by buckling and/or compression.

The hydraulic fracturing operations made for oilwells stimulation show that it is easier to break the porous-permeable formation when there is flux of the fracturing fluid. This means that the fluid presents a penetrating behavior. This fact is comprovred in this thesis.

The stress intensity factor, mode I, of a pressurized fracture in a porous medium is simulated. It is observed that it decreases with time tending to a constant minimum value.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Dr. Euclides de Mesquita Neto pela sugestão do tema, pelas orientações sempre oportunas e pela liberdade que me foi dada para desenvolver este trabalho.

Agradeço aos membros da banca examinadora pelas sugestões, que muito enriqueceram esta dissertação.

Agradeço à Petróleo Brasileiro S. A. - PETROBRAS - por ter liberado-me para atuar, como professor, no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, o que me deu a oportunidade de realizar este trabalho.

Agradeço o auxílio, em termos de suporte computacional, fornecido pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP - através do processo 93/4346-3.

Neste ponto é tradicional agradecer à várias pessoas que, de uma forma ou de outra, fizeram com que este projeto atingisse seus objetivos. Citá-las nominalmente também é costume comum. Não seguirei esta última prática. Primeiro porque todas aquelas pessoas sabem o quanto são importantes e, segundo, porque tenho medo de ser traído pela memória. Prefiro simplesmente deixar registrado meu

MUITO OBRIGADO

SEMPRE EXISTE UMA SOLUÇÃO MELHOR

Eu

PARA MEUS FILHOTES
GUTO,
IQUE E
FELIPE.

C O N T E Ú D O

VOLUME I

Lista de apêndices

Lista de figuras

1. Introdução

1.1	Objetivos	I-01
1.2	Hipóteses	I-01
1.3	Convenções	I-03
1.4	Poroelasticidade	I-04
1.5	Solução numérica	I-05
1.6	Aplicações	I-06
1.7	Fechamento	I-07

2. A teoria da elasticidade em meios porosos

2.1	Introdução	II-01
2.2	Formulação matemática da teoria de Biot	II-02
2.3	Outras formulações da poroelasticidade	II-12
2.4	Coeficientes elásticos em meios porosos	II-29
2.5	Resumo	II-40

3. O método dos elementos de contorno

3.1	Métodos numéricos em mecânica do contínuo	III-01
3.2	Histórico do MEC	III-02
3.3	O método dos elementos de contorno	III-02
3.4	Vantagens e desvantagens do MEC	III-04
3.5	O MEC em poroelasticidade	III-05

4. Equações integrais

4.1	Objetivo	IV-01
4.2	Teorema da reciprocidade no campo de Laplace	IV-01
4.3	Equações do deslocamento e da pressão	IV-05

4.4	Equação das tensões	IV-10
4.5	Equação do fluxo	IV-22
4.6	Resumo	IV-23
5.	Implementação numérica	
5.1	Elementos constantes	V-01
5.2	Elementos lineares	V-05
5.3	Derivadas e normal	V-11
5.4	Singularidades	V-12
5.5	Movimento de corpo rígido	V-13
5.6	Integração numérica	V-15
5.7	Funções de Bessel	V-15
5.8	Inversão numérica das transformadas de Laplace	V-16
5.8.1	O método de Stehfest	V-16
5.8.2	O método de Crump	V-28
5.8.3	Comparação do método de Stehfest com o método de Crump	V-35
5.8.4	Outros métodos de Inversão	V-40
5.9	O problema de nós em cantos	V-40
5.10	Pontos internos	V-42
5.11	Elementos constantes x elementos lineares	V-43
5.12	Influência da discretização	V-53
5.13	Resumo	V-62

VOLUME II

6.	Aplicações e resultados	
6.1	Introdução	VI-01
6.2	Placa infinita com furo circular	VI-01
6.3	Cilindro de paredes espessas	VI-23
6.4	O problema de Mandel	VI-37
6.5	Coluna unidimensional	VI-52
6.6	Semi-espaco poroelástico	VI-64
6.7	Poço circular vertical	VI-68
6.7.1	Efeitos do tensor tensão hidrostático	VI-71
6.7.2	Efeitos da pressão de poros original	VI-72

6.7.3	Campo das tensões de desvio	VI-75
6.8	Poço circular vertical - Um exemplo real	VI-81
6.8.1	Efeitos do tensor tensão hidrostático	VI-83
6.8.2	Efeitos do diferencial de pressão	VI-95
6.8.3	Efeitos das tensões de desvio	VI-107
6.8.4	Solução simultânea	VI-124
6.9	Fluido não penetrante	VI-152
6.10	Fator de intensidade de tensão	VI-154
6.11	Resumo	VI-160
7.	Conclusões	VII-01
8.	Recomendações	VIII-01

Nomenclatura e simbologia

Referências

VOLUME I

LISTA DE APÊNDICES

Apêndice A

Soluções fundamentais do fluxo e do vetor
tensão

Apêndice B

Validação das soluções fundamentais na equação
de Navier

Apêndice C

Teorema da reciprocidade

C.1 Balanço de energia

C.2 Princípio do trabalho virtual

C.3 Teorema da reciprocidade

C.4 Meios porosos

C.5 Sistemas dependentes do tempo

Apêndice D

Singularidades - elementos lineares

D.1 Soluções fundamentais com singularidade

D.2 Soluções fundamentais com singularidade
multiplicadas pelos fatores de forma

Apêndice E

Alguns conceitos matemáticos

E.1 Introdução

E.2 Jacobiano de transformação

E.3 Notação indicial

E.4 O delta de Kronecker

E.5 O delta de Dirac

E.6 Equações integrais

E.7 Problemas de valores no contorno

E.8 Formulação integral no contorno

E.9 Teoremas de Green

E.10 Solução fundamental

E.11 Identidade de Somogiana

- E.12 Funções de Bessel modificadas
- E.13 Integração gaussiana

Apêndice F

Algumas figuras ilustrativas

- F.1 Introdução
- F.2 Bloco poroelástico
- F.3 Coluna unidimensional
- F.4 Semi-espaço poroelástico

LISTA DE FIGURAS

Figura 5.2.01	Coordenada local	V-06
Figura 5.3.01	Derivadas e normal	V-11
Figura 5.8.01	Aplicação do método de Stehfest Exemplo 1	V-18
Figura 5.8.02	Aplicação do método de Stehfest Exemplo 2	V-19
Figura 5.8.03	Aplicação do método de Stehfest Exemplo 3	V-20
Figura 5.8.04	Aplicação do método de Stehfest Exemplo 4	V-21
Figura 5.8.05	Aplicação do método de Stehfest Exemplo 5	V-22
Figura 5.8.06	Método de Stehfest Deslocamento radial Variação com o número de coeficientes	V-23
Figura 5.8.07	Método de Stehfest Pressão de poros Variação com o número de coeficientes	V-24
Figura 5.8.08	Método de Stehfest Tensão radial Variação com o número de coeficientes	V-25
Figura 5.8.09	Método de Stehfest Tensão circunferencial Variação com o número de coeficientes	V-26
Figura 5.8.10	Método de Stehfest Vazão específica Variação com o número de coeficientes	V-27
Figura 5.8.11	Aplicação do método de Crump Exemplo 1	V-30
Figura 5.8.12	Aplicação do método de Crump Exemplo 2	V-31
Figura 5.8.13	Aplicação do método de Crump Exemplo 3	V-32
Figura 5.8.14	Aplicação do método de Crump Exemplo 4	V-33

Figura 5.8.15	Comparação dos métodos de inversão Problema de Mandel Pressão de poros normalizada	V-36
Figura 5.8.16	Comparação dos métodos de inversão Semi-espaco Carga linear Pressão de poros normalizada	V-37
Figura 5.8.17	Comparação dos métodos de inversão Furo circular Tensor deviatórico Pressão de poros normalizada	V-38
Figura 5.8.18	Comparação dos métodos de inversão Furo circular Tensor deviatórico Tensão circunf. total normalizada	V-39
Figura 5.9.01	Nós em cantos	V-42
Figura 5.11.01	Cilindro de paredes espessas Deslocamento radial Elemen. linears x elem. constantes	V-45
Figura 5.11.02	Cilindro de paredes espessas Deslocamento radial - Prox. do contorno Elemen. linears x elem. constantes	V-46
Figura 5.11.03	Cilindro de paredes espessas Tensão radial Elemen. linears x elem. constantes	V-47
Figura 5.11.04	Cilindro de paredes espessas Tensão radial - Prox. do contorno Elemen. linears x elem. constantes	V-48
Figura 5.11.05	Cilindro de paredes espessas Tensão circunferencial Elemen. linears x elem. constantes	V-49
Figura 5.11.06	Cilindro de paredes espessas Tensão circunf. - Prox. do contorno Elemen. linears x elem. constantes	V-50
Figura 5.11.07	Cilindro de paredes espessas Tensão de cisalhamento máxima Elemen. linears x elem. constantes	V-51
Figura 5.11.08	Cilindro de paredes espessas Tensão cis. máx. - Prox. do contorno Elemen. linears x elem. constantes	V-52

Figura 5.12.01	Cilindro de paredes espessas Deslocamento radial Influência da discretização	V-54
Figura 5.12.02	Cilindro de paredes espessas Deslocamento radial - Prox. do contorno Influência da discretização	V-55
Figura 5.12.03	Cilindro de paredes espessas Tensão radial Influência da discretização	V-56
Figura 5.12.04	Cilindro de paredes espessas Tensão radial Prox. do contorno Influência da discretização	V-57
Figura 5.12.05	Cilindro de paredes espessas Tensão circunferencial Influência da discretização	V-58
Figura 5.12.06	Cilindro de paredes espessas Tensão circunf. -Prox. do contorno Influência da discretização	V-59
Figura 5.12.07	Cilindro de paredes espessas Tensão de cisalhamento máxima Influência da discretização	V-60
Figura 5.12.08	Cilindro de paredes espessas Tensão de cis. máx. - Prox. do contorno Influência da discretização	V-61
Figura 6.2.01	Placa infinita com furo circular	VI-01
Figura 6.2.02	Placa infinita com furo circular Deslocamento radial adimensional	VI-07
Figura 6.2.03	Placa infinita com furo circular Deslocamento radial adimensional Proximidades do furo	VI-08
Figura 6.2.04	Placa infinita com furo circular Pressão de poros adimensional	VI-09
Figura 6.2.05	Placa infinita com furo circular Pressão de poros normalizada Proximidades do furo	VI-10
Figura 6.2.06	Placa infinita com furo circular Tensão radial total normalizada	VI-11

Figura 6.2.07	Placa infinita com furo circular Tensão radial total adimensional Proximidades do furo	VI-12
Figura 6.2.08	Placa infinita com furo circular Tensão radial efetiva normalizada	VI-13
Figura 6.2.09	Placa infinita com furo circular Tensão radial efetiva adimensional Proximidades do furo	VI-14
Figura 6.2.10	Placa infinita com furo circular Tensão circunf. total adimensional	VI-15
Figura 6.2.11	Placa infinita com furo circular Tensão circunf. total adimensional Proximidades do furo	VI-16
Figura 6.2.12	Placa infinita com furo circular Tensão circunf. efetiva adimensional	VI-17
Figura 6.2.13	Placa infinita com furo circular Tensão circunf. efetiva adimensional Proximidades do furo	VI-18
Figura 6.2.14	Placa infinita com furo circular Tensão de cisalhamento adimensional	VI-19
Figura 6.2.15	Placa infinita com furo circular Tensão de cisalhamento adimensional Proximidades do furo	VI-20
Figura 6.2.16	Placa infinita com furo circular Vazão específica radial adimensional	VI-21
Figura 6.2.17	Placa infinita com furo circular Vazão específica radial adimensional Proximidades do furo	VI-22
Figura 6.3.01	Cilindro de paredes espessas	VI-23
Figura 6.3.02	Cilindro de paredes espessas Deslocamento radial adimensional	VI-27
Figura 6.3.03	Cilindro de paredes espessas Deslocamento radial adimensional Proximidades do contorno	VI-28
Figura 6.3.04	Cilindro de paredes espessas Tensão radial adimensional	VI-29
Figura 6.3.05	Cilindro de paredes espessas Tensão radial adimensional Proximidades do contorno	VI-30

Figura 6.3.06	Cilindro de paredes espessas Tensão circunferencial adimensional	VI-31
Figura 6.3.07	Cilindro de paredes espessas Tensão circunferencial adimensional Proximidades do contorno	VI-32
Figura 6.3.08	Cilindro de paredes espessas Tensão de cisalhamento adimensional	VI-33
Figura 6.3.09	Cilindro de paredes espessas Tensão de cisalhamento adimensional Proximidades do contorno	VI-34
Figura 6.3.10	Cilindro de paredes espessas Vazão radial específica adimensional	VI-35
Figura 6.3.11	Cilindro de paredes espessas Vazão radial específica adimensional Proximidades do contorno	VI-36
Figura 6.4.01	Bloco poroelástico Força vertical normalizada	VI-40
Figura 6.4.02	Bloco poroelástico Pressão normalizada Plano horizontal central	VI-41
Figura 6.4.03	Bloco poroelástico Pressão normalizada Plano vertical central	VI-42
Figura 6.4.04	Bloco poroelástico Pressão normalizada Proximidades do topo	VI-43
Figura 6.4.05	Bloco poroelástico Deslocamento horizontal Face lateral vertical	VI-44
Figura 6.4.06	Bloco poroelástico Tensão vertical total normalizada Plano horizontal central	VI-45
Figura 6.4.07	Bloco poroelástico Tensão vertical total normalizada Proximidades da face lateral	VI-46
Figura 6.4.08	Bloco poroelástico Tensão vertical efetiva normalizada Plano horizontal central	VI-47

Figura 6.4.09	Bloco poroelástico Tensão vertical efetiva normalizada Proximidades da face lateral	VI-48
Figura 6.4.10	Bloco poroelástico Tensão vertical total normalizada Plano vertical central	VI-49
Figura 6.4.11	Bloco poroelástico Tensão vertical total normalizada Proximidades do topo	VI-50
Figura 6.4.12	Bloco poroelástico Vazão normal específica Face lateral vertical	VI-51
Figura 6.5.01	Coluna unidimensional Deslocamento no topo normalizado Base rígida e fixa	VI-54
Figura 6.5.02	Coluna unidimensional Pressão normalizada	VI-55
Figura 6.5.03	Coluna unidimensional Tensão normal normalizada Face lateral	VI-56
Figura 6.5.04	Coluna unidimensional Vazão normal normalizada Topo da coluna	VI-57
Figura 6.5.05	Coluna unidimensional Pressão na base em MPa	VI-60
Figura 6.5.06	Coluna unidimensional Deslocamento no topo em mm	VI-61
Figura 6.5.07	Coluna unidimensional Tensão normal na face lateral	VI-62
Figura 6.5.08	Coluna unidimensional Vazão normal no topo	VI-63
Figura 6.6.01	Carregamento linear Pressão de poros normalizada $X/A = 0$ $T^* = 0,1$	VI-65
Figura 6.6.02	Carregamento linear Evolução da pressão normalizada $Z/A = 0,5$ Vários T^*	VI-66

Figura 6.6.03	Carregamento linear Pressão de poros normalizada $Z/A = 0,5$ $X/A = 0. \text{ e } 1.$	VI-67
Figura 6.7.01	Furo circular	VI-68
Figura 6.7.02	Furo circular Pressão de poros normalizada Módulo 2	VI-73
Figura 6.7.03	Furo circular Vazão radial normalizada Módulo 2	VI-74
Figura 6.7.04	Furo circular Pressão de poros normalizada Módulo 3	VI-78
Figura 6.7.05	Furo circular Tensão circunferencial normalizada Módulo 3	VI-79
Figura 6.7.06	Furo circular Deslocamento radial normalizado Módulo 3	VI-80
Figura 6.8.01	Furo circular Carregamento	VI-81
Figura 6.8.02	Furo circular Carregamento hidrostático	VI-83
Figura 6.8.03	Poço circular Carregamento hidrostático Pressão de poros (MPa)	VI-85
Figura 6.8.04	Poço circular - proximidades do furo Carregamento hidrostático Pressão de poros (MPa)	VI-86
Figura 6.8.05	Poço circular Carregamento hidrostático Tensão radial total (MPa)	VI-87
Figura 6.8.06	Poço circular -Proximidades do furo Carregamento hidrostático Tensão radial total (MPa)	VI-88
Figura 6.8.07	Poço circular Carregamento hidrostático Tensão radial efetiva (MPa)	VI-89

Figura 6.8.08	Poço circular -Proximidades do furo Carregamento hidrostático Tensão radial efetiva (MPa)	VI-90
Figura 6.8.09	Poço circular Carregamento hidrostático Tensão circunferencial total (MPa)	VI-91
Figura 6.8.10	Poço circular -Proximidades do furo Carregamento hidrostático Tensão circunferencial total (MPa)	VI-92
Figura 6.8.11	Poço circular Carregamento hidrostático Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-93
Figura 6.8.12	Poço circular -Proximidades do furo Carregamento hidrostático Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-94
Figura 6.8.13	Furo circular Diferencial de pressão	VI-95
Figura 6.8.14	Poço circular Efeitos do diferencial de pressão Pressão de poros (MPa)	VI-97
Figura 6.8.15	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do diferencial de pressão Pressão de poros (MPa)	VI-98
Figura 6.8.16	Poço circular Efeitos do diferencial de pressão Tensão radial total (MPa)	VI-99
Figura 6.8.17	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do diferencial de pressão Tensão radial total (MPa)	VI-100
Figura 6.8.18	Poço circular Efeitos do diferencial de pressão Tensão radial efetiva (MPa)	VI-101
Figura 6.8.19	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do diferencial de pressão Tensão radial efetiva (MPa)	VI-102
Figura 6.8.20	Poço circular Efeitos do diferencial de pressão Tensão circunferencial total (MPa)	VI-103

Figura 6.8.21	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do diferencial de pressão Tensão circunferencial total (MPa)	VI-104
Figura 6.8.22	Poço circular Efeitos do diferencial de pressão Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-105
Figura 6.8.23	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do diferencial de pressão Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-106
Figura 6.8.24	Furo circular Tensor deviatórico	VI-107
Figura 6.8.25	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Pressão de poros (MPa)	VI-109
Figura 6.8.26	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Pressão de poros (MPa)	VI-110
Figura 6.8.27	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do tensor deviatórico Pressão de poros (MPa)	VI-111
Figura 6.8.28	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão radial total (MPa)	VI-112
Figura 6.8.29	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão radial total (MPa)	VI-113
Figura 6.8.30	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do tensor deviatórico Tensão radial total (MPa)	VI-114
Figura 6.8.31	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão radial efetiva (MPa)	VI-115
Figura 6.8.32	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão radial efetiva (MPa)	VI-116
Figura 6.8.33	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do tensor deviatórico Tensão radial efetiva (MPa)	VI-117

Figura 6.8.34	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão circunferencial total (MPa)	VI-118
Figura 6.8.35	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão circunferencial total (MPa)	VI-119
Figura 6.8.36	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do tensor deviatórico Tensão circunferencial total (MPa)	VI-120
Figura 6.8.37	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-121
Figura 6.8.38	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Efeitos do tensor deviatórico Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-122
Figura 6.8.39	Poço circular - Proximidades do furo Efeitos do tensor deviatórico Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-123
Figura 6.8.40	Furo circular Carregamento total	VI-124
Figura 6.8.41	Poço circular Deslocamento radial Variação com o tempo	VI-127
Figura 6.8.42	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Pressão de poros (MPa)	VI-128
Figura 6.8.43	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Pressão de poros (MPa) Proximidades do furo	VI-129
Figura 6.8.44	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Pressão de poros (MPa)	VI-130
Figura 6.8.45	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Pressão de poros (MPa) Proximidades do furo	VI-131
Figura 6.8.46	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão radial total (MPa)	VI-132
Figura 6.8.47	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão radial total (MPa) Proximidades do furo	VI-133

Figura 6.8.48	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão radial total (MPa)	VI-134
Figura 6.8.49	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão radial total (MPa) Proximidades do furo	VI-135
Figura 6.8.50	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão radial efetiva (MPa)	VI-136
Figura 6.8.51	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão radial efetiva (MPa) Proximidades do furo	VI-137
Figura 6.8.52	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão radial efetiva (MPa)	VI-138
Figura 6.8.53	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão radial efetiva (MPa) Proximidades do furo	VI-139
Figura 6.8.54	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão circunferencial total (MPa)	VI-140
Figura 6.8.55	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão circunferencial total (MPa) Proximidades do furo	VI-141
Figura 6.8.56	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão circunferencial total (MPa)	VI-142
Figura 6.8.57	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão circunferencial total (MPa) Proximidades do furo	VI-143
Figura 6.8.58	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-144
Figura 6.8.59	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Tensão circunferencial efetiva (MPa) Proximidades do furo	VI-145
Figura 6.8.60	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão circunferencial efetiva (MPa)	VI-146
Figura 6.8.61	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Tensão circunferencial efetiva (MPa) Proximidades do furo	VI-147
Figura 6.8.62	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Vazão radial $(m^3/s)/m^2$	VI-148

Figura 6.8.63	Poço circular $\theta = 0^\circ$ Vazão radial $(\text{m}^3/\text{s})/\text{m}^2$ Proximidades do furo	VI-149
Figura 6.8.64	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Vazão radial $(\text{m}^3/\text{s})/\text{m}^2$	VI-150
Figura 6.8.65	Poço circular $\theta = 90^\circ$ Vazão radial $(\text{m}^3/\text{s})/\text{m}^2$ Proximidades do furo	VI-151
Figura 6.9.01	Poço circular Fluido penetrante x não penetrante Tensão circunferencial efetiva	VI-153
Figura 6.10.01	Bloco cúbico com fratura	VI-154
Figura 6.10.02	Fator de intensidade de tensão Método da intersecção	VI-157
Figura 6.10.03	Fator de intensidade de tensão Método da inclinação	VI-158
Figura 6.10.04	Fator de intensidade de tensão Variação com o tempo Fratura pressurizada	VI-159
Figura D.1.01	Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r (25 pontos na abcissa)	D-02
Figura D.1.02	Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r (50 pontos na abcissa)	D-03
Figura D.1.03	Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r (100 pontos na abcissa)	D-04
Figura D.1.04	Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r (200 pontos na abcissa)	D-05
Figura D.1.05	Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r (100 pontos na abcissa)	D-06
Figura D.1.06	Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r (200 pontos na abcissa)	D-07
Figura D.2.01	Integrais dos vetores tensão t_{11}^* e t_{22}^* multiplicados por $N1$ (FF1) em função do número de pontos de integração	D-13
Figura D.2.02	Integrais dos vetores tensão t_{12}^* e t_{21}^* multiplicados por $N1$ (FF1) em função do número de pontos de integração	D-14

Figura D.2.03	Integrais do vetor tensão t_{ij}^* multiplicado por N_2 (FF2) em função do número de pontos de integração	D-15
Figura E.7.01	Um problema de valores de contórno	E-08
Figura E.12.01	Gráfico de $I_n(x)$	E-14
Figura E.12.02	Gráfico de $K_n(x)$	E-15
Figura E.13.01	Integração gaussiana	E-16
Figura F.2.01	Bloco poroelástico	F-01
Figura F.3.01	Coluna unidimensional	F-02
Figura F.3.02	Coluna unidimensional	F-03
Figura F.4.01	Semi-espaco poroelástico	F-04

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Objetivos

O objetivo principal desta tese é modelar o comportamento totalmente acoplado da deformação do meio sólido e da difusão de fluido em um meio poroelástico saturado, usando o método dos elementos de contorno, para condições de deformação plana. Assume-se comportamento quase-estático, isto é, as forças de inércia não são consideradas.

A partir de tal modelamento há condições de se determinar o vetor tensão, os deslocamentos, a pressão e a vazão normal específica no contorno; é possível, também, calcular o tensor tensão, as vazões, os deslocamentos e a pressão em qualquer ponto do meio poroso.

O segundo objetivo é sintetizar a teoria poroelástica, que se acha muito difusa na literatura, de modo a torná-la mais digerível.

O terceiro objetivo é dar um significado físico às constantes poroelásticas, geralmente provenientes da solução de equações diferenciais, de modo a tornar possível a medida delas em laboratório e a facilitar a interpretação física de problemas poroelásticos.

Outro objetivo é fazer um estudo dos diversos métodos de inversão numérica das transformadas de Laplace, pois as soluções encontradas estão no campo de Laplace.

Por último, porém não menos importante, é mostrar a aplicação do método dos elementos de contorno para diferentes problemas poroelásticos e assim mostrar a simplicidade deste método baseado na discretização do contorno e não do domínio.

1.2 Hipóteses

A teoria poroelástica, tal como a teoria elástica, lança mão de uma série de hipóteses sem as quais a solução de um problema qualquer, por mais simples que fosse, seria impossível.

As hipóteses utilizadas são as seguintes:

1. O meio poroso é considerado homogêneo e isotrópico.
A hipótese de homogeneidade é totalmente aceitável para o objetivo desta tese. A não existência de homogeneidade é um problema relativo. Relativo à relação entre a geometria da estrutura que está em estudo e à maior ou menor falta de homogeneidade. Poucos corpos podem ser considerados homogêneos em em todas as escalas, mas se a geometria da estrutura é grande comparada à escala em que é clara a falta de de homogeneidade, a hipótese é válida.
Já a hipótese de isotropia é válida para problemas bidimensionais. Para o caso tridimensional, ela introduz uma limitação muito grande em meios porosos com planos de sedimentação definidos, situação em que as propriedades poroelásticas na direção dos planos de sedimentação são bem diferentes daquelas na direção perpendicular a eles.
2. Os deslocamentos e as deformações são pequenas, de modo que podem ser linearizadas.
Se esta hipótese não fosse considerada ocorreriam equações matemáticas com soluções muito trabalhosas.
3. As deformações variam linearmente com as tensões.
Muito provavelmente esta hipótese não é totalmente válida para a maioria dos meios porosos naturais, apesar disto ela foi aqui suposta válida. Um estudo mais específico poderá determinar a maior ou menor influência desta hipótese na teoria poroelástica.
4. As forças de volume não são consideradas.
Esta hipótese é aceitável, pois são estudados apenas problemas quase-estáticos. Qualquer variação temporal é devida à difusão do fluido.
5. Considera-se apenas a porosidade efetiva.
Os poros não interconectados não interferem no fluxo de fluidos através do meio poroso. Eles são vistos como parte da estrutura sólida do meio poroso, porém influenciando nas propriedade mecânicas do mesmo.
6. O meio poroso se acha completamente saturado de fluido.
Isto quer dizer que não há espaço poroso efetivo vazio, ou existe líquido ou gas, ou uma mistura dos

dois. A influência desta mistura se reflete na maior ou menor compressibilidade do meio poroso.

7. A parte líquida do fluido existente no meio poroso é incompressível e tem um comportamento newtoniano. Aqui se aplicam a observação e a recomendação feitas ao se analisar a terceira hipótese.
8. Existe apenas interação mecânica entre o fluido injetado e o meio poroso e/ou fluidos nele contidos. Isto quer dizer que as possíveis reações químicas não são consideradas. Esta hipótese não é válida no caso de tratamento de poços petrolíferos com misturas que alteram as propriedades do meio poroso e/ou do fluido nele contido. Servem como exemplos os tratamentos com misturas acidificantes e as injeções de solventes.
9. Todos os fenômenos considerados são isotérmicos. Isto significa que os efeitos termoelásticos não são considerados. A consideração destes efeitos é muito difícil, pois pouco se conhece sobre os efeitos da variação de temperatura nas propriedades do meio poroso. Particularmente em engenharia de petróleo, esta hipótese é muito frustradora, pois na maioria das operações feitas em poços petrolíferos injeta-se, mais cedo ou mais tarde, algum fluido que certamente não estará na mesma temperatura do meio poroso. Esta diferença de temperatura pode ser bastante grande, como é o caso da injeção de vapor para aumentar a mobilidade do petróleo. Isto é um assunto que merece um estudo bastante aprofundado. O tema é difícil e trabalhoso, porém com frutos de inestimável valor.

1.3 Convenções

Nesta tese os esforços de tração são definidos como positivos e, conseqüentemente, os de compressão, negativos.

Um deslocamento é definido como positivo se for no mesmo sentido do eixo coordenado correspondente.

Certo componente do vetor tensão é definido como positivo se seu sentido coincidir com o do eixo coordenado correspondente. O vetor tensão é positivo se tiver o mesmo sentido da normal à superfície.

1.4 Poroelasticidade

Os meios porosos têm um comportamento mecânico bem diferente dos meios não porosos, principalmente se contiverem algum fluido nos poros, seja ele compressível ou não.

As rochas porosas na subsuperfície quase sempre contém fluido no espaço poroso. A presença deste fluido móvel transforma problemas que normalmente seriam independentes do tempo em outros dependentes do tempo. Por exemplo, um meio poroso saturado com algum fluido, ao sofrer um carregamento brusco, sofre uma deformação inicial menor do que aquela prevista considerando-se apenas a estrutura sólida. Isto porque a pressão no fluido sobe, quase instantaneamente, a fim de suportar o carregamento. O material se comporta mais rigidamente devido a resistência combinada do fluido e do sólido. Com o passar do tempo, a pressão dissipa-se, se isto for possível, e a deformação cresce atingindo um valor assintótico ao previsto pela elasticidade clássica. Caso o carregamento fosse lento, de modo a permitir a dissipação da pressão, o material se comportaria como se não houvesse fluido, parecendo ser mais complacente.

Uma outra ilustração é o caso da injeção de fluido no meio poroso. Por menor que seja a quantidade injetada, cria-se uma zona pressurizada bastante grande. O tamanho e a velocidade de difusão desta zona são funções das compressibilidades do sólido e do fluido e da mobilidade do fluido através do espaço poroso.

Um aumento da pressão de poros traz um alívio na tensão atuante no sólido, ou seja, há uma redução da tensão efetiva. Este aumento pode causar também uma dilatação do material. A presença de fluidos no espaço poroso pode modificar o comportamento da tensão efetiva, que é intimamente ligada ao início de alguns mecanismos de ruptura.

Em engenharia de petróleo, nos projetos de estimulação por fraturamento hidráulico e nos problemas de estabilidade das paredes do poço, geralmente é usada a teoria elástica clássica. Esta não consideração dos fenômenos poroelásticos conduz a soluções menos precisas e seguramente mais caras. Talvez esta simplificação se dê devido à complexidade das equações poroelásticas e, no caso de geometrias mais complexas, à não existência de soluções analíticas, necessitando-se apelar para

algum método numérico.

No capítulo 2 desta tese é feita uma síntese da teoria poroelástica. A formulação matemática teórica é apresentada e são deduzidas as equações mais importantes, ou menos óbvias. Todos os parâmetros poroelásticos são abordados, explicitando-se o seu significado físico e o intervalo usual de variação, do modo que se possa ter uma melhor sensibilidade dos fenômenos poroelásticos.

1.5 Solução numérica

Como já foi dito, são poucos os problemas poroelásticos que possuem solução analítica, principalmente se a geometria for complexa. O método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC) são as ferramentas matemáticas mais usadas na solução de problemas elásticos e, conseqüentemente, também nos problemas poroelásticos.

Nesta tese optou-se pelo método dos elementos de contorno por se achar que ele é mais simples e mais prático para os tipo de problema proposto, que como já se disse, é o de um furo em um meio poroso. Este método tem a grande vantagem de necessitar apenas da discretização do contorno, sem haver a exigência da criação de malhas para a discretização do domínio, por vezes bastante trabalhosas. Outra grande vantagem é a simplicidade da análise de pontos no domínio.

No capítulo 3 são feitos um histórico do MEC, uma descrição do mesmo e uma comparação dele com o MEF. No capítulo 4 apresenta-se o teorema de Betti no campo de Laplace e as soluções fundamentais utilizadas nesta tese. O teorema da reciprocidade se acha bem pormenorizado no apêndice C. As equações para o tensor tensão e para o fluxo no domínio são deduzidas detalhadamente no capítulo 4.

No capítulo 5 é feita a descrição completa da implementação numérica. Inicialmente apresenta-se o MEC usando elementos constantes, passo a passo. Depois é mostrado o caso da utilização de elementos lineares. Nesta tese, todos os casos apresentados no capítulo 6 foram resolvidos usando elementos lineares. As dificuldades apresentadas pelas singularidades e por nós em cantos são abordadas e mostra-se como foram resolvidas.

Outras duas dificuldades foram a integração das soluções fundamentais ao longo dos elementos de colocação e a inversão

numérica das soluções obtidas no campo de Laplace.

A integração foi feita numericamente usando-se o método de Gauss com polinômios de Legendre. Este método se acha descrito no apêndice E, item E13. Para a integração de funções com singularidade fraca foram usados 16 pontos de integração e daquelas sem singularidade, apenas 8 pontos.

A inversão numérica foi feita usando o método de Stehfest, que é muito popular em engenharia de petróleo para a solução de problemas de fluxo em meios porosos. Outro método estudado foi o de Crump, que é mais poderoso, porém é bem mais demorado e ocupa consideravelmente mais memória, pois trabalha com variáveis complexas. Estes métodos estão descritos e comparados no item 5.8 do capítulo 5.

1.6 Aplicações

No capítulo 6 aborda-se alguns problemas clássicos da elasticidade aplicados em meios porosos usando-se a teoria poroelástica. Observe-se que a solução dada pela última tende à solução clássica devido a dissipação, com o passar do tempo, da pressão de poros gerada.

Inicialmente estuda-se o caso clássico de um furo circular em uma placa infinita e logo a seguir o caso de um cilindro de paredes espessas.

O chamado problema de Mandel, que descreve o caso de uma amostra porosa comprimida entre duas placas impermeáveis rígidas sob um deslocamento constante, é mostrado no item 6.4.

O comportamento de uma coluna unidimensional porosa se encontra analisado no item 6.5. Mostra-se a evolução do deslocamento no topo ao longo do tempo. A variação de outras grandezas com o tempo e com a profundidade também é mostrada.

No item 6.6 é estudado o comportamento da pressão de de poros, em um meio poroso submetido a um carregamento em linha.

O caso ideal de um poço circular furado em um meio poroso sujeito a um campo de tensões não hidrostático é tratado no item 6.7. Este é um problema de deformação plana. O carregamento é decomposto em 3 módulos. O primeiro é o campo gerado pelo tensor tensão hidrostático, o segundo é o campo gerado pela pressão de poros original e o último, aquele gerado pelo tensor tensão de desvio. Este problema é ideal porque o furo é

suposto vazio.

O caso real de um poço perfurado em certo meio poroso é estudado no item 6.8. Inicialmente o problema é abordado decompondo-se o carregamento como já descrito. Depois ele é visto sem a decomposição. A solução assim obtida é a superposição das obtidas usando-se a decomposição. Mostra-se a evolução da pressão de poros, das tensões radiais total e efetiva, das tensões circunferenciais radial e efetiva, do fluxo e do deslocamento radial ao longo do tempo.

Nos dois casos anteriores há fluxo do poço para a formação, ou vice-versa, ou seja o fluido tem um comportamento de fluido penetrante. O caso em que não há fluxo (fluido não penetrante) é descrito em 6.9. Mostra-se a variação da tensão circunferencial efetiva para estes comportamentos, comprovando-se que a ocorrência de fraturas por tração é facilitada quando há fluxo.

O fator de intensidade de tensão de uma fratura pressurizada, em um meio poroso, é abordado no final do capítulo 6. Mostra-se que ele varia com o tempo, decrescendo até atingir um valor mínimo assintoticamente.

1.7 Fechamento

Finalmente, no capítulo 7 apresenta-se as conclusões e no capítulo 8, as recomendações, decorrentes desta tese.

Assuntos importantes, ou pouco populares, são abordados em seis apêndices, com o objetivo de facilitar e tornar agradável a leitura deste trabalho.

CAPÍTULO 2

A TEORIA DA ELASTICIDADE EM MEIOS POROSOS

2.1 Introdução

Este capítulo trata da aplicação da teoria da elasticidade [1-8] a meios porosos [9-20].

O primeiro a apresentar uma teoria sobre consolidação de meios porosos foi Terzaghi [9] em 1923. Em 1941, Biot publicou uma outra teoria sobre o mesmo assunto [10]. Este mesmo autor já havia em 1935 apresentado um artigo concernente ao uso da teoria da elasticidade a meios porosos [11].

Estas duas teorias são analisadas e comparadas por Cryer [12]. Em seu artigo, ele resolve o problema de uma esfera de solo saturada por água, sob pressão hidrostática, usando as duas teorias e compara os resultados.

Um meio poroso ao ser submetido a tensões de compressão sofre uma redução volumétrica, basicamente devido à redução da quantidade de fluido contida nos poros. Assim acontece se a variação do volume do arcabouço sólido for desprezível. As mudanças na quantidade de fluido ocorrem com uma velocidade que depende da permeabilidade do meio poroso. Esta velocidade, em geral, é baixa.

Terzaghi, em 1923, apresentou uma teoria sobre a consolidação unidimensional, que desempenhou um papel importante na mecânica dos solos. Infelizmente, esta teoria não casa muito bem com os resultados experimentais.

A segunda teoria, devida a Biot, foi publicada em uma série de artigos [10,11,13,14,16,17] e é a mais aceita atualmente. Nesta tese usar-se-á apenas a teoria de Biot.

Além do estudo de consolidação, esta teoria cobre também o problema do fluxo de um fluido compressível em um meio poroso sob o ponto de vista da determinação de trajetórias e/ou tensões causadas pelo fluxo através do sólido elástico. Ela é aplicável, por exemplo, a problemas associados com o processo de carregamento de barragens e a problemas fundamentais de engenharia de petróleo.

A notação indicial (apêndice E) foi usada ao longo desta

tese, menos no item 2.2 onde se preservou a usada por Biot.

2.2 Formulação matemática da teoria de Biot

A parte sólida do meio poroso é considerada elástica e com uma distribuição estatística de poros interconectados. A porosidade do meio é definida como a relação entre o volume de poros interconectados e o volume total.

$$\phi = \frac{V_p}{V_b} \quad (2.2.01)$$

ϕ - porosidade

V_p - volume dos poros interconectados

V_b - volume total

Pela definição se vê que esta é uma porosidade efetiva, pois os poros não conectados são considerados como parte do arcabouço sólido do meio poroso. Esta porosidade representa, também, a relação entre a área de poros em uma secção e a área total desta mesma secção.

$$\phi = \frac{S_p}{S_b} \quad (2.2.02)$$

S_p - área de poros interconectados

S_b - área total da secção

O tensor tensão em um meio poroso é

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} + \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} + \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} + \sigma \end{pmatrix} \quad (2.2.03)$$

Este tensor é simétrico tal como em um meio contínuo.

Os componentes σ_{ij} representam forças atuantes na parte sólida das faces de um cubo unitário. A tensão σ é a força atuante na parte fluida (poros interconectados) das faces do cubo unitário.

A pressão no fluido, p , está relacionada com a tensão σ através da porosidade, como se vê em (2.2.04)

$$\sigma = -\phi p \quad (2.2.04)$$

O sistema fluido-sólido é considerado como um sistema elástico com propriedades conservativas. A parte sólida é suposta compressível e rígida ao cisalhamento e o fluido pode ser compressível.

O deslocamento é determinado pelos tensores de deformação na parte sólida e na parte líquida.

Na parte sólida, tem-se os componentes da deformação:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad e_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.2.05)$$

e_{xy} - deformação na face perpendicular a x na direção y

u_x - deslocamento médio da parte sólida, na direção x

Em relação à parte fluida a única deformação relevante é a deformação volumétrica, ou seja, a dilatação ϵ .

$$\epsilon = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \nabla \cdot U \quad (2.2.06)$$

U_x é o deslocamento médio do fluido na direção x.

A dilatação do sólido, e , é dada por

$$e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \nabla \cdot u \quad (2.2.07)$$

A energia potencial elástica, por unidade de volume, pode ser obtida generalizando-se o procedimento usado na teoria clássica da elasticidade [1,15]. Assim

$$V = (\sigma_{xx} e_{xx} + \sigma_{yy} e_{yy} + \sigma_{zz} e_{zz} + \sigma_{xy} e_{xy} + \sigma_{xz} e_{xz} + \sigma_{yz} e_{yz} + \sigma \epsilon) / 2$$

Conforme a lei de Hooke e sabendo-se que

$$\epsilon = -p/K = \sigma/\phi K$$

Obtém-se

$$V = \frac{1}{2E} \left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 \right) - \frac{\nu}{E} \left(\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} \right) + \\ + \frac{1}{2G} \left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \right) + \frac{\sigma^2}{2\phi K}$$

O parâmetro E é módulo de elasticidade linear.

O parâmetro G é módulo de rigidez.

O parâmetro ν é módulo de Poisson.

O parâmetro K é módulo de deformação volumétrica.

Entre eles existem as relações seguintes [4]

$$E = 2G(1+\nu) \qquad K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

Obtem-se, igualmente

$$V = \lambda e^2/2 + G(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + G(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{xz}^2)/2 + \\ + \phi \epsilon^2 K/2 \qquad (2.2.08)$$

O parâmetro λ é uma das chamadas constantes de Lamé, que se relaciona com E e ν através da equação abaixo [2]

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

A equação 2.2.08 é uma função quadrática homogênea das deformações, pois se assume que os componentes das tensões são funções lineares dos 7 componentes da deformação. Além disto esta é uma forma positivo definida com 28 componentes distintos.

Tem-se, assim

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \vdots \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{17} \\ c_{21} & \dots & \dots & c_{27} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{71} & \dots & \dots & c_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \vdots \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes, c_{ij} , é simétrica, pois representa uma forma quadrática.

Os componentes da tensão são as derivadas parciais da energia elástica em relação às deformações [5,6], ou seja

$$\frac{\partial V}{\partial e_{xx}} = \lambda e + 2Ge_{xx} = \sigma_{xx} \quad \text{etc}$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_{xy}} = Ge_{xy} = \sigma_{xy} \quad \text{etc}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \epsilon} = \phi \epsilon K = -\phi p = \sigma$$

O campo total da tensões, (2.2.03), deve satisfazer as condições de equilíbrio, equações 2.2.09, abaixo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} + \sigma) + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy} + \sigma) + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0 \quad (2.2.09)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz} + \sigma) + \rho Z = 0$$

ρ - massa específica do meio poroso, em Kg/m^3

X, Y, Z - forças de corpo por unidade de massa, em N/Kg

Introduzindo (2.2.08) em (2.2.09) obtém-se 3 equações para os 6 deslocamentos desconhecidos $u_x, \dots, u_x, \dots$. Ainda faltam, para se poder resolver o sistema, 3 equações. Estas são obtidas

usando-se a forma generalizada da equação de Darcy, que governa o fluxo de fluidos em um meio poroso não necessariamente isotrópico.

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f X \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_f Y \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_f Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_x - \dot{u}_x \\ \dot{U}_y - \dot{u}_y \\ \dot{U}_z - \dot{u}_z \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

ρ_f - massa específica do fluido, em Kg/m³

k_{ij} - constante de Darcy, em Pa.s/m²

$\dot{U}_x$ - velocidade média do fluido na direção x, em m/s

$\dot{u}_x$ - velocidade média do sólido na direção x, em m/s

No parâmetro k_{ij} já está incluído o efeito da viscosidade do fluido. Este coeficiente é simétrico, pois existe uma função dissipação tal que a razão de dissipação de energia em um meio poroso em repouso é expressa pela forma quadrática positivo definida abaixo [13].

$$2D = \sum_{i,j} k_{ij} \dot{U}_i \dot{U}_j \quad (2.2.11)$$

A equação 2.2.10 pode ser multiplicada pela porosidade e, usando-se a equação 2.2.04, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho_1 X \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \rho_1 Y \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho_1 Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_x - \dot{u}_x \\ \dot{U}_y - \dot{u}_y \\ \dot{U}_z - \dot{u}_z \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

$\rho_1 = \phi \rho_f$ (massa de fluido por unidade de volume total, em Kg/m³)

$b = \phi k$, em Pa.s/m²

Para o caso de um meio poroso isotrópico a energia de deformação, V, é dada pela equação abaixo, conforme [13].

$$2V = (A+2N)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + N(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2 - 4e_{xx}e_{yy} - 4e_{xx}e_{zz} - 4e_{zz}e_{yy}) + 2Qe\epsilon + R\epsilon^2 \quad (2.2.13)$$

Como já se viu as tensões serão dadas pelas derivadas parciais de V em relação às deformações.

$$\frac{\partial V}{\partial e_{xx}} = (A+2N)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2N(-e_{yy} - e_{zz}) + Q\epsilon$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_{xx}} = 2Ne_{xx} + Ae + Q\epsilon = \sigma_{xx}$$

E assim, do mesmo modo

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 2Ne_{yy} + Ae + Q\epsilon \\ \sigma_{zz} &= 2Ne_{zz} + Ae + Q\epsilon \\ \sigma_{xy} &= Ne_{xy} \\ \sigma_{xz} &= Ne_{xz} \\ \sigma_{zy} &= Ne_{zy} \\ \sigma &= Qe + R\epsilon \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Observe-se que, para $\epsilon = 0$, fluido incompressível, as equações 2.2.14 transformam-se em uma forma generalizada da lei de Hooke [9]. Pode-se dizer que esta equação representa a lei de Hooke para um meio poroso.

Assim, para $\epsilon = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2Ne_{xx} + Ae + Q\epsilon \quad .'. \\ \sigma_{xx} &= 2Ne_{xx} + Ae \end{aligned}$$

Como se vê as constantes N e A correspondem às constantes G e λ , respectivamente. Esta correspondência entre λ e A é válida para $\epsilon = 0$.

Como se sabe, as constantes λ e G estão relacionadas com

o módulo de Poisson, ν , e com o módulo de elasticidade linear, E , segundo as relações abaixo [3].

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

As forças de corpo podem ser desprezadas e, ainda para um meio poroso isotrópico, as equações 2.2.12 se reduzem às equações 2.2.15 com apenas uma constante b .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= b \frac{\partial}{\partial t} (U_x - u_x) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= b \frac{\partial}{\partial t} (U_y - u_y) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= b \frac{\partial}{\partial t} (U_z - u_z) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Usando as equações 2.2.14 nas equações de equilíbrio 2.2.09 e, desprezando as forças de corpo, chega-se a equação 2.2.16 conforme se desenvolverá a seguir.

$$\begin{aligned} 2N \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + N \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + N \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \\ + A \frac{\partial e}{\partial x} + Q \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + Q \frac{\partial e}{\partial x} + R \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \\ \\ 2N \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + N \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + N \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \\ + A \frac{\partial e}{\partial y} + Q \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + Q \frac{\partial e}{\partial y} + R \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$2N \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + N \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + N \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) +$$

$$+ A \frac{\partial e}{\partial z} + Q \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + Q \frac{\partial e}{\partial z} + R \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0$$

Somando estas três expressões:

$$N \nabla^2 \mathbf{u} + N \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) +$$

$$+ (A+Q) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) e + (Q+R) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon = 0$$

$$N \nabla^2 \mathbf{u} + N \nabla e + (A+Q) \nabla e + (Q+R) \nabla \varepsilon = 0$$

$$N \nabla^2 \mathbf{u} + (N+A+Q) \nabla e + (Q+R) \nabla \varepsilon = 0$$

$$N \nabla^2 \mathbf{u} + (P-N+Q) \nabla e + (Q+R) \nabla \varepsilon = 0 \quad (2.2.16)$$

$$N \nabla^2 \mathbf{u} + (P-N) \nabla e + \nabla(Qe+R\varepsilon) + Q \nabla \varepsilon = 0$$

Onde se definiu

$$P = A + 2N$$

Da mesma maneira obtem-se a equação 2.2.17 usando 2.2.15 e lembrando que

$$\sigma = Qe + R\varepsilon$$

$$\nabla(Qe+R\varepsilon) = b(\partial/\partial t)(\mathbf{U}-\mathbf{u}) \quad (2.2.17)$$

Os vetores u e U são, como já foi definido, os deslocamentos da parte sólida e da parte fluida, respectivamente. É conveniente lembrar que ∇e é o gradiente de e .

Tomando-se o divergente de 2.2.17 tem-se

$$Q\nabla^2 e + R\nabla^2 \varepsilon = b(\partial/\partial t)(\varepsilon - e) \quad (2.2.18)$$

Eliminando-se a variável ε nas equações 2.2.14, fica-se com as equações 2.2.19 abaixo

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2Ne_{xx} + (A - Q^2/R)e + Q\sigma/R \\ \sigma_{yy} &= 2Ne_{yy} + (A - Q^2/R)e + Q\sigma/R \\ \sigma_{zz} &= 2Ne_{zz} + (A - Q^2/R)e + Q\sigma/R \\ \sigma_{xy} &= Ne_{xy} \\ \sigma_{xz} &= Ne_{xz} \\ \sigma_{zy} &= Ne_{zy} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Novamente, substituindo estas relações nas condições de equilíbrio, equações 2.2.09, deduz-se

$$N\nabla^2 u + (P - N - Q^2/R)\nabla e + \frac{Q+R}{R}\nabla\sigma = 0 \quad (2.2.20)$$

A equação 2.2.18 fica

$$\nabla^2 \sigma = b \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon - e) = \frac{b\partial\sigma}{R\partial t} - b \frac{Q+R}{R} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.2.21)$$

Considere-se o caso de um material incompressível. Esta hipótese corresponde a condição abaixo

$$e(1-\phi) + \phi\varepsilon = 0 \quad (2.2.22)$$

Esta expressão diz simplesmente que a variação do volume de sólidos é igual, em valores absolutos, à variação do volume de

poros.

Como esta condição deve ser satisfeita para todos os valores de σ , inclusive zero, conclui-se, usando a última das equações 2.2.14, que tanto R como Q devem tender a infinito seguindo a condição imposta pela relação seguinte [13]:

$$Q/R = (1-\phi)/\phi \quad (2.2.23)$$

Definindo

$$A-Q^2/R = S$$

As relações 2.2.19 transformam-se em

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2Ne_{xx} + Se + \frac{1-\phi}{\phi}\sigma \\ \sigma_{yy} &= 2Ne_{yy} + Se + \frac{1-\phi}{\phi}\sigma \\ \sigma_{zz} &= 2Ne_{zz} + Se + \frac{1-\phi}{\phi}\sigma \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$\sigma_{xy} = Ne_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = Ne_{xz}$$

$$\sigma_{zy} = Ne_{zy}$$

Das condições de equilíbrio, equações 2.2.09, deduz-se

$$N\nabla^2 u + (N+S)\nabla e + (1/\phi)\nabla\sigma = 0 \quad (2.2.25)$$

Esta equação pode ser obtida a partir da equação 2.2.20 usando a 2.2.23

A equação 2.2.21 torna-se

$$\nabla^2\sigma = -\frac{b}{\phi} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.2.26)$$

Tomando-se o divergente da equação 2.2.25, tem-se

$$(2N+S)\nabla^2 e + \frac{1}{\phi}\nabla^2 \sigma = 0 \quad (2.2.27)$$

Assim, a equação 2.2.26 pode ter a seguinte forma

$$\phi^2(2N+S)\nabla^2 e = b\frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.2.28)$$

A equação 2.2.28 é a equação da condução de calor, sendo a difusividade dada por

$$\phi^2(2N+S)/b$$

2.3 Outras formulações da poroelasticidade

Os coeficientes e as variáveis vistas não são únicas.

A análise descrita no item 2.2 pode ser feita através de outras variáveis, como se verá a seguir.

A tensão total nas faces do meio poroso é definida por

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij} \quad (2.3.01)$$

Como se sabe

$$\sigma = -\phi p$$

As equações 2.2.14, generalizadas, são as seguintes

$$\sigma_{ij} = 2Ne_{ij} + Ae\delta_{ij} + Qc\delta_{ij} \quad (2.3.02)$$

$$\sigma = Qe + Rc$$

Onde, σ'_{ij} , é a tensão na parte sólida e σ , na parte fluida, conforme a equação 2.2.04.

Assim, através das equações 2.3.01 e 2.3.02, obtém-se

$$\sigma'_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2Ne_{ij} + Ae\delta_{ij} + Qc\delta_{ij}$$

$$= 2Ne_{ij} + Ae\delta_{ij} + Q\delta_{ij}(\sigma - Qe)/R$$

$$= 2Ne_{ij} + (A - Q^2/R)e\delta_{ij} + Q\sigma\delta_{ij}/R$$

$$\sigma'_{ij} + \sigma(-1 - Q/R)\delta_{ij} = 2Ne_{ij} + (A - Q^2/R)e\delta_{ij}$$

Da equação 2.2.04 e da equação anterior e comparando-se com a lei de Hooke, verifica-se que

$$A - Q^2/R = \lambda$$

$$N = G$$

Então fica-se com

$$\sigma'_{ij} - \phi p(-1 - Q/R)\delta_{ij} = 2Ge_{ij} + \lambda e\delta_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} + \alpha p\delta_{ij} = 2Ge_{ij} + \lambda e\delta_{ij} \quad (2.3.03)$$

Onde

$$\alpha = \phi(Q + R)/R$$

Da última das equações 2.3.02 vem

$$-\phi p = R(Qe/R + \epsilon)$$

$$= R(Qe/R + e - \zeta/\phi)$$

$$-\phi^2 p/R = \phi e(Q + R)/R - \zeta \quad \therefore$$

$$\zeta = \alpha e + p/M$$

Sendo

$$\zeta = \phi(e - \epsilon)$$

$$M = R/\phi^2$$

O parâmetro ζ é o volume de líquido que sai da amostra por unidade de volume (no caso de fluido incompressível, é

variação do volume poroso, considerando-se a porosidade constante).

Assim das equações 2.3.02 chega-se a

$$\sigma'_{ij} + \alpha p \delta_{ij} = 2G e_{ij} + \lambda e \delta_{ij} \quad (2.3.04)$$

$$\zeta = \alpha e + p/M$$

As equações 2.3.04 podem ser retrabalhadas obtendo-se

$$\sigma'_{ij} = 2G e_{ij} + (\lambda + \alpha^2 M) e \delta_{ij} - \alpha M \zeta \delta_{ij} \quad (2.3.05)$$

$$p = M \zeta - \alpha M e = M(\zeta - \alpha e)$$

A primeira equação acima mostra as tensões totais em função dos componentes da deformação, e_{ij} , da deformação volumétrica, e , e da variação do volume de fluido, ζ . A segunda expressa a pressão de poros em função da variação do volume de fluido e da deformação volumétrica.

Rice e Cleary [19] usam outros coeficientes na abordagem deste mesmo problema, a partir da teoria de Biot [10], conforme será mostrado a seguir.

As equações apresentadas por Biot podem ser reduzidas a expressão seguinte

$$2G e_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma'_{kk} \delta_{ij} + \frac{2G}{3H} p \delta_{ij}$$

Onde H é um parâmetro físico, que relaciona a deformação volumétrica com a variação da pressão de poros sob carregamento constante. Então, somando e subtraindo o produto $p \delta_{ij}$, de modo conveniente e, após algumas manipulações algébricas, chega-se à equação 2.3.06, como detalhado abaixo.

$$2G e_{ij} = \sigma'_{ij} + p \delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma'_{kk} + 3p) \delta_{ij} + \frac{2G}{3H} p \delta_{ij} - (1 - \frac{3\nu}{1+\nu}) p \delta_{ij}$$

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma'_{kk}+3p)\delta_{ij} + \frac{2G}{3H}p\delta_{ij} - \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\right)p\delta_{ij}$$

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma'_{kk}+3p)\delta_{ij} + \frac{2G}{3H}p\delta_{ij} - \frac{2G}{3K}p\delta_{ij}$$

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma'_{kk}+3p)\delta_{ij} +$$

$$+ \frac{2G}{3}\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{K}\right)p\delta_{ij} \quad (2.3.06)$$

Esta é a equação usada por Rice e Cleary [19]. Onde ν é o módulo de Poisson do material quando deformado em condições drenadas (pressão de poros constante), G é o módulo de rigidez e K é o módulo de deformação volumétrica drenado. É conveniente lembrar que σ'_{ij} é a tensão total e que [2,10,19].

$$K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

$$1/K_u = 1/K - 1/H$$

Esta última relação é obtida a partir da equação 2.3.06, bastando aplicá-la a um teste não drenado, situação em que se tem:

$$\sigma'_{ij} = -p'\delta_{ij} \quad p = p' \quad p'/e = -K_u$$

O parâmetro K_u é o módulo de deformação volumétrica não drenado.

Então, o último termo da 2.3.06 fica sendo

$$-\frac{2G}{3}\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{K}\right) = -\frac{1-2\nu}{1+\nu}K\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{K}\right) = -\frac{(1-2\nu)K}{(1+\nu)K_u}$$

A pressão de poros e a tensão confinante relacionam-se

através da expressão

$$B = -\frac{p}{\sigma'_{kk}/3}$$

A constante B é o coeficiente de Skempton, que pode ser obtido em um teste não drenado, relacionando-se a pressão nos poros com a tensão total hidrostática confinante.

Substituindo-se na equação 2.3.06

$$2G\epsilon_{ij} = \sigma'_{ij} - B\sigma'_{kk}\delta_{ij}/3 - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma'_{kk}\delta_{ij} + \frac{B\nu}{1+\nu}\sigma'_{kk}\delta_{ij} + \\ + \frac{(1-2\nu)K}{(1+\nu)K_u}B\sigma'_{kk}\delta_{ij}/3$$

$$2G\epsilon_{ij} = \sigma'_{ij} - \left[B/3 - \frac{\nu}{1+\nu} + \frac{B\nu}{1+\nu} + \frac{(1-2\nu)KB}{(1+\nu)3K_u} \right] \sigma'_{kk}\delta_{ij}$$

$$2G\epsilon_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{3\nu+B(1-2\nu)(1-K/K_u)}{3(1+\nu)}\sigma'_{kk}\delta_{ij}$$

A conhecida equação elástica é

$$2G\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

Então, se pode definir um novo parâmetro, ν_u , tal que

$$\frac{3\nu+B(1-2\nu)(1-K/K_u)}{3(1+\nu)} = \frac{\nu_u}{1+\nu_u} \quad \dots$$

$$\nu_u = \frac{3\nu+B(1-2\nu)(1-K/K_u)}{3-B(1-2\nu)(1-K/K_u)}$$

Este novo parâmetro é o módulo de Poisson não drenado, que será abordado oportunamente.

Durante um ensaio drenado, a variação de massa, m , do fluido nos poros, por unidade de volume de material, é dada, aproximadamente, por

$$m - m_0 = dm = v d\rho + \rho dv$$

Isto porque

$$m = \rho v$$

Assim sendo

$$m - m_0 = (\rho - \rho_0) v_0 + \rho_0 (v - v_0)$$

A variação exata é

$$m - m_0 = \rho v - \rho_0 v_0$$

Esta variação de massa também é dada por [19]

$$\begin{aligned} m - m_0 = & \rho_0 v_0 p / K_f + \rho_0 (1/K - 1/K_u) (\sigma'_{kk} + 3p) / 3 + \\ & - \rho_0 v_0 p / K_u \end{aligned} \quad (2.3.07)$$

Onde

$$K_f = -p/\epsilon = p\rho/(\rho - \rho_0)$$

é o módulo de deformação volumétrica do fluido, m é a massa de fluido por unidade de volume, v é o fração volumétrica aparente de fluido e K_u é o módulo de deformação volumétrica não drenado.

$$v = V_l/V_b = S_l V_p/V_b = \phi S_l$$

$$S_l = V_l/V_p$$

$$\rho v = m$$

sendo S_l a saturação de fluido

m_0 e v_0 são as grandezas acima em determinado estado de referência.

A equação 2.3.06 pode se retrabalhada do seguinte modo

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma'_{kk} + 3p)\delta_{ij} + \\ + \frac{2G}{3}\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{K}\right)p\delta_{ij}$$

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma'_{kk}\delta_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}p\delta_{ij} - \frac{(1-2\nu)K}{(1+\nu)K_u}p\delta_{ij}$$

Da definição do modulo de Poisson não drenado, ν_u , tem-se

$$\frac{(1-2\nu)K}{(1+\nu)K_u} = \frac{3}{B}\left[\frac{3\nu + (1-2\nu)B}{3(1+\nu)} - \frac{\nu_u}{1+\nu_u}\right]$$

Então

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma'_{kk}\delta_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}p\delta_{ij} + \\ - \frac{3}{B}\left[\frac{3\nu + (1-2\nu)B}{3(1+\nu)} - \frac{\nu_u}{1+\nu_u}\right]p\delta_{ij}$$

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma'_{kk}\delta_{ij} + \left[1 - \frac{3\nu}{1+\nu} - \frac{3\nu + (1-2\nu)B}{B(1+\nu)} + \frac{3\nu_u}{B(1+\nu_u)}\right]p\delta_{ij}$$

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma'_{kk}\delta_{ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)}p\delta_{ij} \quad (2.3.08)$$

O mesmo pode ser feito com a equação 2.3.07, repetida

abaixo

$$m-m_0 = \rho_0 v_0 p / K_f + \rho_0 (1/K - 1/K_u) (\sigma'_{kk} + 3p) / 3 - \rho_0 v_0 p / K_u$$

Agrupando termos obtem-se

$$m-m_0 = \rho_0 p (v_0 / K_f - v_0 / K_u) + \rho_0 (1/K - 1/K_u) (\sigma'_{kk} + 3p) / 3$$

Usando convenientemente a relação $(1/K - 1/K_u)$ tem-se

$$\begin{aligned} v_0 / K_f - v_0 / K_u &= \frac{v_0 / K_f + 1/K - 1/K_u - v_0 / K_u - 1/K + 1/K_u}{1/K - 1/K_u} (1/K - 1/K_u) \\ &= \left(\frac{v_0 / K_f + 1/K - 1/K_u - v_0 / K_u}{1/K - 1/K_u} - 1 \right) (1/K - 1/K_u) \\ &= (1/B - 1) (1/K - 1/K_u) \end{aligned}$$

Esta última igualdade pode ser provada do seguinte modo.

Da equação 2.3.07, para $\Delta m = 0$ (teste não drenado), obtém-se uma expressão para o parâmetro B, ou seja

$$\rho_0 v_0 p / K_f + \rho_0 (1/K - 1/K_u) (\sigma'_{kk} + 3p) / 3 - \rho_0 v_0 p / K_u = 0$$

$$p (v_0 / K_f + 1/K - 1/K_u - v_0 / K_u) = - (1/K - 1/K_u) \sigma'_{kk} / 3$$

$$-\frac{p}{\sigma'_{kk}/3} = \frac{1/K - 1/K_u}{v_0 / K_f + 1/K - 1/K_u - v_0 / K_u} \quad \dots$$

$$B = \frac{1/K - 1/K_u}{v_0 / K_f + 1/K - 1/K_u - v_0 / K_u}$$

Voltando

$$v_0/K_f - v_0/K_u = (1/B-1)(1/K-1/K_u)$$

$$m-m_0 = \rho_0 p (1/B-1)(1/K-1/K_u) + \rho_0 (1/K-1/K_u) (\sigma'_{kk} + 3p)/3$$

$$= \rho_0 (1/K-1/K_u) \sigma'_{kk}/3 + \rho_0 (1/K-1/K_u) (3p+3p/B-3p)/3$$

$$= \rho_0 (1/K-1/K_u) (\sigma'_{kk} + 3p/B)/3$$

Da definição do módulo de Poisson não drenado obtém-se uma expressão para $(1/K-1/K_u)$, ou seja

$$1/K - 1/K_u = (1-K/K_u)/K$$

$$(1/K-1/K_u) = \frac{1}{(1-2\nu)B} \left[\frac{3\nu_u(1+\nu)}{1+\nu_u} - 3\nu \right] \frac{1}{K}$$

Sabe-se que [3]

$$K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

Então

$$(1/K-1/K_u) = \frac{9(\nu_u-\nu)}{2G(1+\nu)(1+\nu_u)B}$$

Obtem-se, finalmente, a expressão da variação de massa por unidade de volume total, que é a equação 2.3.09

$$m-m_0 = \frac{3\rho_0(\nu_u-\nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)} (\sigma'_{kk} + 3p/B) \quad (2.3.09)$$

Observe-se que nas equações 2.3.08 e 2.3.09 necessita-se de apenas duas constantes elásticas, G e ν , e de duas constantes

poroelásticas, ν_u e B.

A equação 2.3.08 pode se manuseada de modo a explicitar as tensões, como se fará a seguir.

$$2Ge_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma'_{kk} \delta_{ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = 2Ge_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \sigma'_{kk} \delta_{ij} - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij}$$

Para $i = j$, fica-se com

$$\begin{aligned} \sigma'_{kk} &= 2Ge + \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma'_{kk} - \frac{9(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \\ &= \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left[2Ge - \frac{9(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \right] \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= 2Ge_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[2Ge - \frac{9(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \right] \delta_{ij} + \\ &\quad - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\sigma'_{ij} = 2Ge_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \left[\frac{9(\nu_u - \nu)\nu}{B(1+\nu)(1+\nu_u)(1-2\nu)} + \right.$$

$$\left. + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} \right] p \delta_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = 2Ge_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij} \quad (2.3.10)$$

Comparando-se com a equação 2.3.03, vê-se que

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}$$

O coeficiente α é o parâmetro poroelástico de Biot [22].

A equação 2.3.09 também pode ser manuseada de modo que a pressão p fique explícita. Assim

$$m - m_0 = \frac{3\rho_0(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)} (\sigma'_{kk} + 3p/B)$$

$$\zeta = (m - m_0)/\rho_0 = \frac{3(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)} (\sigma'_{kk} + 3p/B)$$

Introduzindo-se a equação 2.3.10, para $i = j$

$$\zeta = \frac{3(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)} \left\{ \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left[2Ge - \frac{9(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \right] + 3p/B \right\}$$

$$\zeta = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-2\nu)} e - \left[\frac{27(\nu_u - \nu)^2}{2GB^2(1+\nu)(1+\nu_u)^2(1-2\nu)} + \right. \\ \left. - \frac{9(\nu_u - \nu)}{2GB^2(1+\nu)(1+\nu_u)} \right] p$$

$$\zeta = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-2\nu)} e - \frac{27(\nu_u - \nu)^2 - 9(\nu_u - \nu)(1+\nu_u)(1-2\nu)}{2GB^2(1+\nu)(1+\nu_u)^2(1-2\nu)} p$$

$$= \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-2\nu)} e - \frac{9(\nu_u - \nu)(3\nu_u - 3\nu - 1 + 2\nu - \nu_u + 2\nu\nu_u)}{2GB^2(1+\nu)(1+\nu_u)^2(1-2\nu)} p$$

$$= \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-2\nu)} e - \frac{9(\nu_u - \nu)(2\nu_u - 1)}{2GB^2(1+\nu_u)^2(1-2\nu)} p \quad \therefore$$

$$p = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} e + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u - \nu)(1-2\nu_u)} \zeta \quad (2.3.11)$$

Comparando a equação 2.3.11 com a 2ª das equações 2.3.05 conclui-se que

$$M = \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u - \nu)(1-2\nu_u)}$$

M é o inverso do coeficiente de estocagem [63].

Observe-se que para componentes incompressíveis tem-se os os valores abaixo

$$\nu_u = 0,5$$

$$B = 1$$

$$\alpha = 1$$

$$M = \infty$$

$$\zeta = e$$

As equações 2.3.10 e 2.3.11 são as usadas por Cheng e Detournay[20]. Como já foi visto B é a relação entre a pressão de

poros induzida inicial e a variação da pressão de confinamento em condições não drenadas. Esta constante é chamada de coeficiente de Skempton[21].

A equação 2.3.11 mostra que a pressão nos poros depende tanto da deformação do sólido como da variação do conteúdo de fluido, ζ .

A combinação das equações 2.3.10 e 2.3.11 mostra que para as condições iniciais, $t=0^+$, instante em que $\zeta=0$, o excesso de pressão de poros é dado por

$$p = -B\sigma'_{kk}/3$$

Em um tempo muito grande, já com todo o excesso de pressão nos poros dissipado, a equação 2.3.11 fornece

$$\zeta = \alpha e \quad (2.3.12)$$

A equação 2.3.11 pode ser escrita do seguinte modo

$$p = -\frac{2G(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}Be + \frac{2G(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}B \frac{(1-2\nu)(1+\nu_u)B}{3(\nu_u-\nu)}\zeta$$

Colocando em evidência os termos comuns

$$p = -\frac{2G(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}B \left[-e + \frac{(1-2\nu)(1+\nu_u)B}{3(\nu_u-\nu)}\zeta \right]$$

Como já foi mostrado

$$\frac{(1-2\nu)(1+\nu_u)B}{3(\nu_u-\nu)} = 1/\alpha$$

Então

$$p = -\frac{2G(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}B(-e + \zeta/\alpha)$$

A variação de pressão é nula em um teste drenado, ou em qualquer fenômeno poroelástico após um longo tempo [20,24]. Assim

sendo a equação anterior gera a equação 2.3.12

$$0 = -\frac{2G(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}B(-e + \zeta/\alpha) \quad \dots$$

$$\alpha = \zeta/e$$

As equações governantes adicionais para completar a teoria da poroelasticidade são as seguintes[20]:

Equação de equilíbrio

$$\sigma'_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2.3.13)$$

Lei de Darcy

$$q_i = -k(p_{,i} - f_i) \quad (2.3.14)$$

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \beta \quad (2.3.15)$$

Nestas equações as novas variáveis são as seguintes:

- F_i - força de corpo por unidade de volume de meio poroso (sólido+fluido), na direção i , em N/m^3
- f_i - força de corpo por unidade de volume de fluido, na direção i , em N/m^3
- q_i - vazão, na direção i , por unidade de área, em $(m^3/s)/m^2$
- k - coeficiente de permeabilidade, em $m^2/(Pa \cdot s)$
- β - vazão da fonte por unidade de volume, em $(m^3/s)/m^3$

Como se vê os processos poroelásticos são descritos pelas equações 2.3.10, 2.3.11, 2.3.13, 2.3.14, e 2.3.15 .

Cinco constantes do material são necessárias [24]:

Duas constantes elásticas, G e ν

Duas constantes poroelásticas, ν_u e B (ou α)

Uma constante relacionada com o fluxo, k

Estas equações podem ser combinadas [20] obtendo-se, em função de u_i e de p , uma equação elástica com um termo de

acoplamento para o fluido, que será obtida mais tarde.

$$G\nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu} e_{,i} - \alpha p_{,i} = -F_i \quad (2.3.16)$$

e em uma equação de difusão com um termo de acoplamento para o sólido. Esta equação será deduzida mais tarde.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{2kGB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} \nabla^2 p = & -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{\partial e}{\partial t} + \\ & + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} (\beta - kf_{i,i}) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Há, também, uma equação de difusão de massa não acoplada para a variável ζ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - c\nabla^2 \zeta = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} F_{i,i} + \beta - kf_{i,i} \quad (2.3.18)$$

Onde

$$c = \frac{2kGB^2(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-\nu_u)} \quad (2.3.19)$$

c é o coeficiente generalizado de consolidação [19].

Este coeficiente também é conhecido como coeficiente de difusão.

Observe-se que, para forças de corpo desprezíveis e ausência de fontes ($\beta=0$), tem-se

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - c\nabla^2 \zeta = 0$$

Esta equação é do mesmo tipo da equação 2.2.28.

A equação 2.3.16 é deduzida do seguinte modo.

$$\sigma'_{ij,j} = -F_i$$

$$\sigma'_{ij,j} = 2Ge_{ij,j} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}e_{,j}\delta_{ij} - \alpha p_{,j}\delta_{ij} = -F_i$$

$$\sigma'_{ij,j} = 2G\left(\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}\right)_{,j} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}e_{,i} - \alpha p_{,i} = -F_i$$

$$= Gu_{i,jj} + Gu_{j,ij} + \dots = -F_i$$

$$= G\nabla^2 u_i + Ge_{,i} + \dots = -F_i$$

$$= G\nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu}e_{,i} - \alpha p_{,i} = -F_i$$

A equação 2.3.17 é deduzida do seguinte modo.

Derivando-se (2.3.11), em relação ao tempo, t, obtém-se

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}e_{,t} + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)}\zeta_{,t}$$

Das equações 2.3.14 e 2.3.15 obtém-se [20]

$$\zeta_{,t} = \beta - q_{i,i} = \beta + k(p_{,ii} - f_{i,i})$$

$$p_{,t} = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}e_{,t} + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)}\left(\beta + kp_{,ii} - kf_{i,i}\right)$$

$$p_{,t} - \frac{2kGB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)}\nabla^2 p = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}e_{,t} +$$

$$+ \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} \left(\beta - k f_{i,i} \right)$$

A equação 2.3.18 é deduzida do seguinte modo.

$$\zeta_{,t} = \beta - q_{i,i} = \beta + k(p_{,ii} - f_{i,i})$$

Porém, das equações 2.3.11 e 2.3.16

$$p_{,ii} = \nabla^2 p = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \nabla^2 e + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} \nabla^2 \zeta$$

$$\begin{aligned} (\alpha p_{,i})_{,i} &= \alpha \nabla^2 p = G \nabla^2 u_{i,i} + \frac{G}{1-2\nu} e_{,ii} + F_{i,i} \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla^2 e + F_{i,i} \end{aligned}$$

Pois

$$u_{i,i} = e \qquad e_{,ii} = \nabla^2 e$$

Assim

$$\nabla^2 e = (\alpha \nabla^2 p - F_{i,i}) \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \quad \dots$$

$$\nabla^2 p \left(1 + \frac{(1-2\nu)2GB(1+\nu_u)}{2G(1-\nu)3(1-2\nu_u)} \alpha \right) = \frac{(1-2\nu)2GB(1+\nu_u)}{2G(1-\nu)3(1-2\nu_u)} F_{i,i} + \dots$$

$$\nabla^2 p \left(1 + \frac{(1-2\nu)2GB(1+\nu_u)3(\nu_u-\nu)}{2G(1-\nu)3(1-2\nu_u)B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \right) = \frac{(1-2\nu)2GB(1+\nu_u)}{2G(1-\nu)3(1-2\nu_u)} F_{i,i} +$$

$$+ \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-2\nu_u)} \nabla^2 \zeta \quad \dots$$

$$\nabla^2 p = \frac{(1+\nu_u)B}{3(1-\nu_u)} F_{i,i} + \frac{2GB^2(1+\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-\nu_u)} \nabla^2 \zeta \quad \dots$$

$$\zeta_{,t} - c \nabla^2 \zeta = \frac{k(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} B F_{i,i} + \beta - k f_{i,i}$$

2.4 Coeficientes elásticos em meios porosos

Em meios porosos, as constantes elásticas são de duas espécies: drenadas e não drenadas[21-39].

As constantes não drenadas representam o comportamento instantâneo do meio poroso e as drenadas, o comportamento após certo tempo.

As constantes drenadas são determinadas no chamado teste drenado (revestido). Neste tipo de teste a amostra é envolvida por uma cápsula plástica impermeável fina e submetida à uma pressão externa. Para garantir que a pressão nos poros permaneça constante, o interior da cápsula comunica-se com a atmosfera através de um tubo fino.

As constantes não drenadas são determinadas no chamado teste não drenado (não revestido). Neste tipo de teste a amostra é imersa em um fluido ao qual é aplicada uma pressão p . Após a pressão se ter difundido completamente pelos poros se efetuam as medições. Neste teste não há variação de massa do fluido nos poros. Neste caso a pressão confinante age tanto na parte sólida, $(1-\phi)$, como na parte fluida, ϕ , das superfícies externas da amostra

Como já se viu (2.3.02)

$$\sigma_{ij} = 2Ne_{ij} + Ae\delta_{ij} + Qe\delta_{ij}$$

$$\sigma = Qe + Re \quad (2.4.01)$$

onde, como se sabe, σ_{ij} , é a tensão na parte sólida e σ , na parte fluida, conforme as equações 2.2.04 e 2.3.02.

É necessário, de alguma maneira, determinar as constantes A , N , Q e R para que se possa aplicar as equações 2.4.01 na

prática. Talvez a maneira mais conveniente seja uma combinação das determinações do módulo de rigidez G , dos módulos volumétricos K e K_u , da porosidade ϕ e de um coeficiente que reflita o conteúdo de fluido não confinado, γ [22].

O módulo volumétrico K é também conhecido como módulo revestido ou módulo drenado e o módulo K_u , como módulo não revestido ou módulo não drenado. O módulo K é aquele determinado com o meio poroso sem pressão, ou com pressão constante, nos poros.

Comparando-se as equações 2.4.01 com a lei de Hooke para meios contínuos[3] vê-se que a constante N equivale ao módulo de rigidez G , ou seja

$$N \equiv G \quad (2.4.02)$$

como já foi visto.

Em um teste de compressibilidade drenado, sob uma pressão externa p' , a dilatação, e , da amostra é medida e determina-se o módulo volumétrico drenado K

$$K = -\frac{p'}{e} \quad (2.4.03)$$

Neste teste toda a pressão do fluido confinante é aplicada à parte sólida das faces da amostra. Então

$$\sigma_{ij} = -p' \quad i = j$$

$$\sigma = 0$$

$$e_{ij} = \frac{-p'}{3K} \quad i = j$$

Das equações 2.4.01

$$\sigma_{ii} = 2Ne_{ii} + 3Ae + 3Q\epsilon$$

$$0 = Qe + R\epsilon$$

Ou seja,

$$-3p' = 2Ne + 3Ae + 3Q(-Qe/R)$$

$$= -2Np'/K - 3Ap'/K + 3Q^2p'/(KR) \quad . \quad .$$

$$K = 2N/3 + A - Q^2/R \quad (2.4.04)$$

Na equação acima a quantidade $A-Q/R^2$ é equivalente ao coeficiente de Lamé, λ , do meio poroso em condições de pressão constante nos poros (drenado).

No teste de compressibilidade não revestido (não drenado), com uma pressão de poros p , mede-se a dilatação e calcula-se o módulo k_u .

$$K_u = -\frac{p}{e} \quad (2.4.05)$$

Tem-se, então

$$\sigma_{ij} = -(1-\phi)p\delta_{ij}$$

$$\sigma = -\phi p$$

$$e_{ij} = \frac{-p}{3K_u}\delta_{ij}$$

Das equações 2.4.01, usando a equação 2.4.04

$$\sigma_{ii} = 2Ne + 3Ae + 3Qe$$

$$\sigma_{ii} = 2Ne + 3Ae + 3Q(\sigma - Qe)/R$$

$$\sigma_{ii} = (2N + 3A - 3Q^2/R)e + 3Q\sigma/R$$

$$-3(1-\phi)p = -(2N+3A+3Q^2/R)p/K_u - 3Q\phi p/R$$

$$1-\phi = (2N/3+A-Q^2/R)/K_u + Q\phi/R$$

$$1 = K/K_u + \phi(Q/R+1) \quad . \quad .$$

$$1-K/K_u = \phi(Q+R)/R \quad (2.4.06)$$

O intervalo de variação de K_u é

$$K \leq K_u \leq \infty$$

O limite superior ocorre quando os constituintes são incompressíveis e o inferior, quando o fluido nos poros é altamente compressível.

O módulo de deformação volumétrica do fluido, K_f , é dado por

$$K_f = -p/\epsilon = p\rho/(\rho-\rho_0)$$

Em um teste drenado, o volume de água por unidade de volume que sai da amostra é dado por

$$\zeta = \phi(e-\epsilon)$$

que é a variação de volume poroso, considerando-se a porosidade constante.

Colocando-se $\sigma = 0$ na última das equações 2.4.01 tem-se

$$0 = Qe + R\epsilon$$

$$e - \epsilon = e + Qe/R = (Q+R)e/R \quad \therefore$$

$$\phi(e-\epsilon)/e = \phi(Q+R)/R = \alpha \quad (2.4.07)$$

Como se conhece ϕ , e e ζ , obtém-se assim o valor de

$$(Q+R)/R$$

É necessária alguma medição que envolva a deformação do fluido. Considere-se o volume de fluido que entra nos poros por unidade de volume de meio poroso, $\phi(e-\epsilon)$, em um teste não drenado. Considerando-se a porosidade constante, define-se um parâmetro que reflita a variação da quantidade de fluido contido com a variação de pressão, γ , pela expressão

$$\gamma = \phi(e-\epsilon)/p = \zeta/p \quad (2.4.08)$$

Então

$$\varepsilon = e - \gamma p / \phi$$

$$= -(1/K_u + \gamma/\phi)p \quad (2.4.09)$$

Novamente, usando-se as equações 2.4.01

$$\sigma = Qe + Rc$$

$$-\phi p = -Qp/K_u - R(1/K_u + \gamma/\phi)p$$

$$\phi = Q/K_u + R/K_u + R\gamma/\phi \quad (2.4.10)$$

Um método de se determinar o coeficiente γ é descrito detalhadamente em [22].

Resumindo o que já se viu, até aqui, tem-se das equações 2.4.02, 2.4.04, 2.4.06 e 2.4.08

$$N \equiv G$$

$$K = 2N/3 + A - Q^2/R$$

$$1 - K/K_u = \phi(Q+R)/R$$

$$\phi = Q/K_u + R/K_u + R\gamma/\phi$$

Este sistema pode ser resolvido para obter-se N , A , Q e R em função dos coeficientes medidos K , K_u , ϕ , γ . e G .

Ou seja

$$N = G$$

$$A = \frac{\gamma K + \phi^2 + (1-2\phi)(1-K/K_u)}{\gamma + 1/K_u - K/K_u^2} - 2G/3$$

$$Q = \frac{\phi(1-\phi-K/K_u)}{\gamma + 1/K_u - K/K_u^2} \quad (2.4.11)$$

$$R = \frac{\phi^2}{\gamma + 1/K_u - K/K_u^2}$$

Todas as grandezas nas equações 2.4.11, com exceção de γ e de ϕ , têm dimensão de tensão (pressão). O coeficiente γ tem dimensão de inverso de tensão (pressão) e ϕ é adimensional.

Observe-se que, em um teste drenado, $p = 0$, as equações 2.3.04 dão

$$\alpha = \zeta/e \quad (2.4.12)$$

α pode ser visto como a razão entre a variação de volume poroso e a dilatação, em um teste drenado.

Ainda com a pressão externa p' , porém em um teste drenado (revestido), tem-se

$$\sigma'_{ij} = -p'\delta_{ij}$$

$$p = 0$$

$$e = -p'/K$$

Usando-se as equações 2.3.04, para $i = j$

$$\sigma'_{ii} = 2Ge_{ii} + 3\lambda e$$

$$-3p' = (2G+3\lambda)e$$

$$= -(2G+3\lambda)p'/K \quad \therefore$$

$$K = 2G/3 + \lambda$$

A relação acima pode ser deduzida a partir da equação 2.4.04, comparando-se com a relação elástica entre K , G e λ .

No caso de um teste não drenado ocorre o seguinte

$$\sigma'_{ij} = -p'\delta_{ij}$$

$$p = p'$$

$$e = -p'/K_u$$

Para $i = j$, tem-se, de 2.3.04

$$\sigma'_{ii} + 3\alpha p' = 2Ge_{ii} + 3\lambda e$$

$$-3p' + 3\alpha p' = 2Ge_{ii} + 3\lambda e$$

$$-p'(1-\alpha) = (2G/3+\lambda)(-p'/K_u)$$

$$1-\alpha = K/K_u \quad \therefore$$

$$\alpha = 1 - K/K_u \quad (2.4.13)$$

Esta expressão também pode ser obtida a partir da equação 2.4.06.

O que mostra novamente que

$$\alpha = \phi(Q+R)/R$$

A interpretação física da equação 2.4.13 é diferente daquela dada pela equação 2.4.12. Elas fornecem o mesmo valor devido à simetria dos coeficientes das equações 2.3.04 o que, por sua vez, é consequência da hipótese de haver uma energia potencial elástica para o sistema sólido-fluido [15,16].

O coeficiente M , que aparece nas equações 2.3.04 e 2.3.05, pode ser determinado através de γ em um teste não drenado. Das equações 2.3.05, 2.4.08, 2.4.11 e 2.4.13, tem-se

$$\zeta = \gamma p' = p'/M - \alpha p'/K_u \quad \therefore$$

$$M = \frac{1}{\gamma + 1/K_u - K/K_u^2} \quad (2.4.14)$$

$$= R/\phi^2$$

O parâmetro M é o inverso do coeficiente de estocagem.

O uso das constantes G , λ , α e M é mais conveniente nos casos em que as forças de corpo podem ser desprezadas, como ocorre nas aplicações em engenharia de petróleo. G e λ são obtidas diretamente em laboratório. Já α e M são calculadas pelas equações 2.4.13 e 2.4.14.

Em um teste não drenado, $\Delta m = 0$, obtém-se da equação 2.3.09.

$$\Delta p = -B \Delta \sigma'_{kk} / 3$$

Sendo, como já foi visto

$$B = \frac{1/K - 1/K_u}{v_0/K_f + 1/K - 1/K_u - v_0/K_u} \quad (2.4.15)$$

B é o coeficiente de Skempton[21]. Este coeficiente varia de 1 (componentes incompressíveis) a 0 (fluido compressível/gas).

O módulo de Poisson não drenado, como já foi visto, está relacionado com outros parâmetros elásticos através da expressão abaixo

$$\nu_u = \frac{3\nu + B(1-2\nu)(1-K/K_u)}{3-B(1-2\nu)(1-K/K_u)} \quad (2.4.16)$$

O parâmetro ν_u , módulo de Poisson não drenado, ou melhor, obtido em um teste não drenado, tem o seguinte intervalo de variação:

$$\nu \leq \nu_u \leq 0,5$$

O limite superior ocorre quando os constituintes são incompressíveis e o inferior, quando o fluido nos poros é bastante compressível.

Em rochas, o valor de ν varia de 0,15 a 0,45. A presença de fissuras aumenta o valor de ν_u e diminui o valor de ν [26].

Como se vê, é mais prático usar B e ν_u , pois possuem uma interpretação física mais óbvia.

Comparando-se a equação 2.3.10 com a equação 2.3.04 vê-se que

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}$$

Pois [2].

$$\frac{2G}{3} + \lambda = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad \therefore \quad \lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$$

O coeficiente poroelástico α é muito controverso [30] e depende tipo de problema em que é aplicado.

Em problemas de mudanças de porosidade

$$\alpha = 1.$$

Em problemas de deformação volumétrica da parte sólida

$$\alpha = \phi$$

Em problemas de deformação volumétrica total

$$\alpha = 1 - K/K_u$$

O coeficiente α é determinado em um teste drenado e calculado por

$$\alpha = \zeta/e = \frac{\Delta V_p}{e}$$

Pode, também, ser calculado por

$$\alpha = 1 - K/K_u$$

Os máximos de α , de B e de ν_u são simultaneamente atingidos em casos nos quais os constituintes sólido e líquido são incompressíveis.

No caso de consolidação de solos granulares rasos o fluido é muito mais compressível do que o sólido, principalmente se o ar preso nos poros for considerado. Neste caso tem-se [24]:

$$B = K_f / (K_f + \phi K) \quad K_u = K_f / \phi + K \quad \alpha = 1$$

Um outro caso interessante é aquele em que se tem um fluido infinitamente compressível (gas), ou seja, $K_f = 0$. No caso α

não é afetado e, além disto

$$B = 0$$

$$K_u = K$$

O modelo acima é, matematicamente, equivalente à teoria da termoelasticidade desacoplada. A pressão de poros é governada por uma equação de difusão homogênea e interage com o sólido como uma força de corpo através do coeficiente α . A deformação do sólido não gera pressão alguma e é desacoplada da equação da pressão.

No caso de baixíssima porosidade, $\phi \approx 0$, o coeficiente B não é afetado e tem-se [30]

$$\alpha \approx 0$$

$$K_u \approx K$$

Neste caso, a pressão de poros não tem efeito algum na deformação do sólido, entretanto é gerado um campo de pressão nos poros, governado por uma lei de difusão, pois $B \neq 0$.

A dilatação do meio poroso induzida por uma variação da pressão de poros é controlada pelo coeficiente de Biot, α , e pelo coeficiente de deformação volumétrica drenado, K . O aumento de pressão de poros devido a aplicação de uma pressão confinante em condições não drenadas é controlado pelo coeficiente de Skempton, B .

As deformações são sensíveis a velocidade de aplicação do carregamento. Uma aplicação rápida não permite a dissipação da pressão de poros gerada e o meio poroso comporta-se mais rigidamente. O máximo e o mínimo desta rigidez correspondem aos módulos volumétricos medidos em condições não drenadas e drenadas.

O coeficiente de difusão é dado por [19]

$$c = \frac{2kGB^2(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u-\nu)(1-\nu_u)} \quad (2.4.17)$$

c é, também, conhecido como coeficiente generalizado de consolidação. Manipulando a equação 2.4.17 obtém-se

$$c = k \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \right] \left[\frac{(1-2\nu)B^2(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)} \right] \quad (2.4.18)$$

O primeiro colchete da equação 2.4.18 representa o módulo volumétrico K para uma deformação unidimensional drenada. Observe-se que, para constituintes incompressíveis, o segundo colchete é unitário, pois neste caso $B = 1$ e $\nu_u = 0,5$ [19].

Em rochas o coeficiente c varia de 10^{-4} a $1,6 \text{ m}^2/\text{s}$ [26].

Observe-se que c também é expresso por

$$c = \frac{k}{\alpha^2} (K_u - K) \frac{4G+3K}{4G+3K_u} \quad (2.4.19)$$

A deformação de espaço poroso é considerada na definição do coeficiente de consolidação c , por esta razão ele é bem mais baixo do que aquele usado em engenharia de reservatórios [38].

O coeficiente de difusão, c , controla a velocidade de difusão do fluido no meio poroso.

O coeficiente de permeabilidade, ou constante de Darcy, é a relação entre a permeabilidade do meio poroso k' e a viscosidade μ do fluido nele existente. A permeabilidade de rochas petrolíferas varia de 10^{-18} m^2 a $3 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$, o que equivale a uma variação de $1\mu\text{D}$ a 3D (1 microDarcy a 3 Darcy), que é unidade mais popular. Quanto a viscosidade do fluido pode se dizer que varia de frações de Paxs (gases) a alguns Paxs (óleos pesados). A unidade mais conhecida de viscosidade é o centipoise, que é equivalente a 10^{-3} Paxs . Este coeficiente também é conhecido como coeficiente de mobilidade.

O coeficiente η , que aparece em algumas equações da poroelasticidade, é definido por [26.38]:

$$\eta = \frac{3(\nu_u - \nu)}{2B(1+\nu_u)(1-\nu)} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$$

Este coeficiente varia de 0 a 0,5. O limite inferior corresponde a materiais de baixíssima porosidade, pois neste caso K e K_u tendem ao mesmo valor e, conseqüentemente, α tende a 0. O

coeficiente η reflete o efeito conjunto da deformação e da difusão. O valor de η *in situ* pode ser bem maior do que o medido em laboratório, principalmente em rochas de baixa porosidade [26].

Observe-se que este coeficiente é função apenas de α e de ν , ficando assim claro que ele é uma propriedade do meio poroso, apenas.

Alguns autores definem o coeficiente η pela expressão abaixo [26]

$$\eta = (1-\nu)/(1-\nu_u)$$

O coeficiente η , assim definido, varia de 1,10 a 1,25 para as condições de campo.

As constantes K , ν e G já são conhecidas da elasticidade e são medidas em testes drenados.

2.5 Resumo

Neste capítulo foi feito um breve histórico da teoria poroelástica.

Apresentou-se, com detalhes, a formulação matemática da teoria poroelástica de Biot. Outras formulações poroelásticas também foram mostradas e analisadas. A formulação apresentada por Rice e Cleary foi enfatizada, pois é a usada neste trabalho.

Os coeficientes elásticos (E , ν , G , K , λ) e poroelásticos (B , c , α , γ , ζ , η , K_u , K_f , k , ν_u) foram definidos. O intervalo de variação de cada coeficiente foi apresentado, bem como as relações entre eles.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 Métodos numéricos em mecânica do contínuo

A maioria dos métodos numéricos partem do princípio de que é possível deduzir algumas equações e relações que descrevam com precisão o comportamento de uma parte infinitesimal de um corpo. Dividindo-se o corpo em um grande número destas pequenas partes e usando-se relações que as unam é possível prever, com alguma precisão, o comportamento do corpo como um todo. Quanto menor o tamanho destas pequenas partes mais precisa é a solução numérica e maior o custo de computação. Apenas a experiência na solução de certo problema pode dizer o quão pequenas devam ser estas partes para uma determinada precisão da solução.

Na mecânica do contínuo os métodos numéricos mais usados são o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC).

No MDF as derivadas nas equações diferenciais parciais que governam o problema são substituídas por diferenças finitas. Em um domínio bidimensional, este é subdividido em um conjunto de células e uma aproximação diferencial é aplicada em cada ponto do interior. O sistema de equações algébricas lineares resultante fornece uma solução única, desde que se conheça as condições de contorno. Não funciona bem em geometrias irregulares e em problemas onde as variáveis mudam rapidamente, como em problemas de concentrações de tensões. O MDF é muito popular em problemas de fluxo de fluidos e em problemas de transmissão de calor.

No MEF, todo o domínio é subdividido em elementos finitos. Em cada elemento o comportamento é descrito pelas equações diferenciais que descrevem o problema. Todos estes elementos são acoplados e condições de equilíbrio e de continuidade são impostas entre elementos vizinhos. O sistema de equações algébricas lineares global gerado fornece uma solução única, que satisfaz as condições de contorno impostas. O MEF funciona bem em geometrias complexas e/ou em problemas onde ocorram variações rápidas nas variáveis físicas que descrevem o meio em questão.

O MEC será descrito mais detalhadamente, pois é o método numérico usado neste trabalho.

3.2 Histórico do MEC

Apesar de já ser conhecido há algum tempo [40] o método dos elementos de contorno começou a ser mais amplamente usado na década de 60. Em 1963 foi publicado o, já clássico, artigo de Jawson, [41]. Nele, as equações integrais de potencial bidimensional governadas pela equação de Laplace foram discretizadas usando elementos retos sobre os quais as funções potenciais eram consideradas constantes. Os elementos eram descritos em termos de pontos nodais e as integrações numéricas eram feitas pela regra de Simpson.

O primeiro artigo a usar o método direto foi o de Rizzo em 1967 [42]. Este artigo foi o primeiro a usar a analogia entre a teoria do potencial e a teoria da elasticidade clássica e a vislumbrar uma solução numérica para o problema. Foram usados elementos retos para discretizar o contorno sobre os quais as funções eram consideradas constantes. As integrações foram feitas pela regra de Simpson.

A utilização do MEC direto para problemas tridimensionais foi feita por Cruse [43,44] em 1969. Em trabalhos posteriores [45,46], Cruse sofisticou um pouco mais, utilizando uma variação linear sobre os elementos.

Posteriormente o MEC foi usado na solução de problemas elastodinâmicos, de problemas elastoplásticos, na teoria de fraturas, em meios não homogêneos, em meios não isotrópicos, etc.. Estes trabalhos foram muito importantes, pois eles fundamentaram firmemente o MEC como uma técnica numérica poderosa e precisa.

3.3 O método dos elementos de contorno

No MEC, as equações diferenciais que governam o problema são transformadas em identidades integrais aplicáveis no contorno. Estas integrais são numericamente avaliadas no contorno, o qual foi antes subdividido em pequenos segmentos (elementos de contorno). Ao se introduzir as condições de contorno, obtém-se um sistema de equações algébricas lineares, cuja solução, única, é

possível de ser obtida.

O MEC fornece bons resultados em geometrias complexas e modela bem regiões onde as variáveis de campo variam rapida e fortemente, com resultados melhores do que os fornecidos pelo MEF.

A formulação do MEC segue basicamente os passos abaixo:

- a. Obtém-se as equações diferenciais que governam o problema. No caso da elasticidade, as equações de Navier;
- b. Obtém-se as soluções fundamentais (apêndice E) para as equações diferenciais. Elas são consequência de uma força de corpo instantânea e puntual, especificada como um delta de Dirac, em um domínio considerado infinito sem consideração de quaisquer condições de contorno;
- c. Usa-se o teorema de Betti, ou alguma extensão dele, (apêndice C). Este teorema diz que, no caso da elasticidade, se dois estados de tensão (a) e (b) existem e satisfazem as condições de equilíbrio, então o trabalho feito pelas forças do sistema (a) sobre os deslocamentos do sistema (b) é igual ao trabalho feito pelas forças do sistema (b) nos deslocamentos do sistema (a).

$$\sum_p F_p^{(a)} u_p^{(b)} = \sum_p F_p^{(b)} u_p^{(a)}$$

onde p é um ponto qualquer onde está aplicada a força F. Escolhido o sistema(a) como aquele das soluções fundamentais (conhecido) e o sistema (b) como aquele das incógnitas obtém-se uma equação integral na qual se relacionam forças e deslocamentos [40,49,58];

- d. O contorno é dividido em segmentos (elementos). Fatores de forma são usados para descrever a geometria e as variáveis sobre cada elemento. Estes fatores de forma podem ser constantes, lineares, quadráticos, etc.. A integração é, em geral, feita numericamente, usando quadratura de Gauss (apêndice E), pois a integração analítica é complexa e nem sempre possível.
- e. Forma-se um sistema de N equações repetindo o processo

de integração com o ponto de colocação cada vez em cada um dos elementos. Inicia-se o sistema com o ponto de colocação no ponto 1 o que dá apenas um conjunto de equações relacionando todas as variáveis no contorno. A seguir o ponto de colocação é posto no segundo ponto gerando outro conjunto de equações e assim por diante até o enésimo ponto obtendo-se assim os N conjuntos de equações. No caso da elasticidade, com variáveis vetor tensão t e deslocamento u o sistema de equações obtido tem a forma abaixo

$$[A][u] = [B][t]$$

- f. Aplica-se as condições de contorno. Reorganiza-se o sistema de tal forma que variáveis conhecidas fiquem à direita e as incógnitas, à esquerda, obtendo-se

$$[A'][x] = [B'][y] = [C]$$

- g. Soluciona-se o sistema global de equações usando-se algum método numérico [47,48];
h. Conhecendo-se os valores no contorno, calculam-se os valores no domínio, usando a identidade de Somigliana, apêndice E

3.4 Vantagens e desvantagens do MEC

O MEC apresenta algumas vantagens em relação o MEF, e , naturalmente certas desvantagens.

As vantagens mais importantes são as seguintes:

1. Redução em um grau na ordem da discretização necessária ;
2. Possibilidade de tratamento de domínios ilimitados, a partir da discretização de contornos limitados;
3. Preparação de dados mais fácil;
4. Maior precisão onde há variação brusca das variáveis de campo;
5. Necessidade de memória menor para armazenamento de dados;
6. Facilmente aplicável a materiais elásticos

1. Uso de uma matemática não popular na engenharia;
2. Em problemas não lineares, geralmente, é preciso modelar os pontos do domínio;

Considerando-se as vantagens e desvantagens relacionadas, os seguintes pontos devem ser considerados em uma decisão entre o uso do MEF ou do MEC na solução de determinado problema:

- o MEC é melhor em problemas lineares, principalmente em 3D com variáveis de campo com fortes variações, como em problemas de fratura e de contato;
- o MEC é muito recomendado para projetos preliminares devido ao pouco tempo necessário para o modelamento;
- o MEF é mais conhecido e bem mais difundido na solução de problemas não lineares complexos;
- a matemática utilizada no MEF é mais familiar do que a usada no MEC;
- os geradores de malhas para o MEF podem ser usados no MEC, diretamente.

3.5 O MEC em poroelasticidade

Em problemas poroelásticos o número de variáveis é maior, pois agora se tem a influência do fluido existente no espaço poroso.

Uma das matrizes é composta pelas integrais das soluções fundamentais do deslocamento e do fluxo ao longo dos elementos e a outra contém as integrais das soluções fundamentais do vetor tensão e da pressão. A primeira multiplica os valores do vetor tensão e da pressão no contorno. A segunda matriz multiplica os valores dos deslocamentos e da vazão normal específica no contorno.

As citadas soluções fundamentais serão apresentadas e analisadas no próximo capítulo.

A montagem das matrizes e toda a estrutura do sistema é mostrada pormenorizadamente no capítulo 5.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES INTEGRAIS

4.1 Objetivo

As soluções fundamentais utilizadas nesta tese são as apresentadas e usadas por Cheng e Detournay [20]. Todas as equações apresentadas nesta referência foram verificadas, encontrando-se alguns pequenos erros de impressão. As equações integrais das tensões e do fluxo no domínio foram deduzidas pormenorizadamente.

Todo este trabalho analítico é mostrado detalhadamente neste capítulo.

4.2 Teorema da reciprocidade no campo de Laplace

Em um meio poroelástico, uma extensão do teorema de Betti no domínio do tempo, apêndice C, tem a seguinte forma [20]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\chi;t)e'_{ij}(\chi;t-\tau) + p(\chi;t)\zeta'(\chi;t-\tau) = \\ = \sigma'_{ij}(\chi;t-\tau)e_{ij}(\chi;t) + p'(\chi;t-\tau)\zeta(\chi;t) \end{aligned} \quad (4.2.01)$$

onde as quantidades com e sem plicas descrevem dois estados poroelásticos independentes existentes em dois tempos diferentes.

A integral

$$\int_0^t \sigma_{ij}(\chi;t)e'_{ij}(\chi;t-\tau)dt = \sigma_{ij}(\chi;t)*e'_{ij}(\chi;t)$$

é uma convolução e, como se sabe, a sua transformada de Laplace é o produto das transformadas, ou seja

$$\mathcal{L}[\sigma_{ij}(\chi;t)*e'_{ij}(\chi;t)] = \tilde{\sigma}_{ij}(\chi;s)\tilde{e}'_{ij}(\chi;s)$$

O símbolo $\mathcal{L}$ representa uma transformação para o espaço de

Laplace, * significa uma convolução e ~ , uma transformada.

O parâmetro de Laplace é s.

Integrando a equação 4.2.01 em relação ao tempo e depois transformando para o espaço de Laplace obtem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}(\chi;s)\tilde{e}'_{ij}(\chi;s) + \tilde{p}(\chi;s)\tilde{\zeta}'(\chi;s) = \\ = \tilde{\sigma}'_{ij}(\chi;s)\tilde{e}_{ij}(\chi;s) + \tilde{p}'(\chi;s)\tilde{\zeta}(\chi;s) \end{aligned} \quad (4.2.02)$$

que é a equação 14 da referência 20.

Deduzir-se-á agora a equação 15 da referência 20, que é o teorema da reciprocidade generalizado.

As variáveis e grandezas, que serão utilizadas ao longo deste capítulo são as relacionadas abaixo

- σ'_{ij} - tensor tensão total, em Pa
- σ_{ij} - tensor tensão efetiva, em Pa
- t_i - componente, na direção i, do
vetor tensão t no contórno, em Pa
- p - pressão nos poros, em Pa
- e_{ij} - tensor de deformação do sólido
- e - dilatação
- ζ - variação de conteúdo de fluido, em m^3/m^3
- u_i - componente, na direção i, do
vetor deslocamento u do sólido, em m
- U_i - componente, na direção i, do
vetor de deslocamento relativo U do fluido, em m
- F_i - componente, na direção i, da
força de corpo total F , em N/m^3
- f_i - componente, na direção i, da
força de corpo f do fluido, em N/m^3
- β - vazão da fonte, em $(m^3/s)/m^3$
- n_i - componente, na direção i, do

vetor unitário n normal ao contorno

q_i - componente, na direção i , do

vetor descarga específica q , em $(m^3/s)/m^2$

k - coeficiente de permeabilidade, em $m^2/(Pa \cdot s)$

Estas grandezas se relacionam através das seguintes expressões:

$$t_i = \sigma'_{ij} n_j$$

$$u = u_i n_i$$

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$$

$$e = u_{i,i}$$

$$q = q_i n_i$$

$$U = U_i n_i$$

Repete-se a seguir as equações básicas que serão usadas.

Equação de equilíbrio, equação 2.3.13

$$\sigma'_{ij,j} = -F_i$$

Lei de Darcy, equação 2.3.14

$$q_i = -k(p_{,i} - f_i)$$

Equação da continuidade, equação 2.3.15

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \beta$$

As relações seguintes são obtidas facilmente usando-se relações entre integrais de contorno e de domínio (apêndice E).

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma}'_{ij} \bar{e}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\sigma}'_{ij} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_s \bar{\sigma}'_{ij} \bar{u}_i n_j dS - \int_{\Omega} \bar{\sigma}'_{ij,j} \bar{u}_i d\Omega$$

$$= \int_s \bar{t}_i \bar{u}_i dS + \int_{\Omega} \bar{F}_i \bar{u}_i d\Omega$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \tilde{p} \tilde{\zeta} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p} (\tilde{\beta} - \tilde{q}_{i,i} + \zeta_0) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p} \tilde{\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p} \zeta_0 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p} \tilde{q}_{i,i} d\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p} \tilde{q}_{i,i} d\Omega &= \int_s \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p} \tilde{q}_i n_i ds - \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p}_{,i} \tilde{q}_i d\Omega \\ &= \int_s \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p} \tilde{q} ds + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\tilde{q}_i}{k} \tilde{q}_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{f}_i \tilde{q}_i d\Omega\end{aligned}$$

Substituindo na equação 4.2.02, chega-se a equação abaixo

$$\begin{aligned}\int_s \tilde{t}_i(\chi;s) \tilde{u}'_i(\chi;s) ds + \int_{\Omega} \tilde{F}_i(\chi;s) \tilde{u}'_i(\chi;s) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p}(\chi;s) \tilde{\beta}'(\chi;s) d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p}(\chi;s) \zeta'(\chi;0) d\Omega - \int_s \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p}(\chi;s) \tilde{q}'(\chi;s) ds + \\ - \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\tilde{q}_i(\chi;s)}{k} \tilde{q}'_i(\chi;s) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{f}_i(\chi;s) \tilde{q}'_i(\chi;s) d\Omega = \\ \int_s \tilde{t}'_i(\chi;s) \tilde{u}_i(\chi;s) ds + \int_{\Omega} \tilde{F}'_i(\chi;s) \tilde{u}_i(\chi;s) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p}'(\chi;s) \tilde{\beta}(\chi;s) d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p}'(\chi;s) \zeta(\chi;0) d\Omega - \int_s \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{p}'(\chi;s) \tilde{q}(\chi;s) ds + \\ - \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\tilde{q}'_i(\chi;s)}{k} \tilde{q}_i(\chi;s) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{f}'_i(\chi;s) \tilde{q}_i(\chi;s) d\Omega \quad (4.2.03)\end{aligned}$$

Reorganizando a equação 4.2.03 obtém-se a seguinte forma para o teorema da reciprocidade (teorema de Betti, apêndice C)

$$\begin{aligned}
& \int_s [\tilde{t}_i(\chi;s) \tilde{u}_i'(\chi;s) - \tilde{t}_i'(\chi;s) \tilde{u}_i(\chi;s)] ds + \\
& - \int_s \frac{1}{s} [\tilde{p}(\chi;s) \tilde{q}'(\chi;s) - \tilde{p}'(\chi;s) \tilde{q}(\chi;s)] ds + \\
& + \int_{\Omega} [\tilde{F}_i(\chi;s) \tilde{u}_i'(\chi;s) d\Omega - \tilde{F}_i'(\chi;s) \tilde{u}_i(\chi;s)] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{s} [\tilde{f}_i(\chi;s) \tilde{q}_i'(\chi;s) - \tilde{f}_i'(\chi;s) \tilde{q}_i(\chi;s)] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{s} [\tilde{p}(\chi;s) \tilde{\beta}'(\chi;s) - \tilde{p}'(\chi;s) \tilde{\beta}(\chi;s)] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{s} [\tilde{p}(\chi;s) \zeta'(\chi;0) - \tilde{p}'(\chi;s) \zeta(\chi;0)] d\Omega = 0 \quad (4.2.04)
\end{aligned}$$

A equação 4.2.04 é a equação número 15 do artigo de Cheng et al [20], que é o teorema da reciprocidade generalizado.

4.3 Equações integrais do deslocamento e da pressão

Uma representação integral, do tipo Somigliana (apêndice E), para o componente $\tilde{u}_j$ do deslocamento em um ponto qualquer do domínio pode ser obtida a partir do teorema de Betti. Para isto substitui-se as grandezas do estado primo ('), na equação 4.2.04, por aquelas conseqüentes de uma força instantânea puntual na direção j, aplicada em um ponto qualquer x, no interior do domínio, com intensidade igual a 2π [20,40]:

$$\tilde{F}_{ij}' = 2\pi \delta_{ij} \delta(\chi-x)$$

O índice i indica a direção do componente da força $\tilde{F}'$ aplicada na direção j.

Esta força corresponde, no domínio do tempo, à

$$F_{ij}' = 2\pi \delta_{ij} \delta(\chi-x) \delta(t)$$

Onde

δ_{ij} - delta de Kronecker (apêndice E)

$\delta(\chi-x)$ - função delta de Dirac (apêndice E)

Admite-se as seguintes condições:

As forças de corpo no fluido não são consideradas.

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}'_i = 0$$

Não existem fontes.

$$\tilde{\beta} = \tilde{\beta}' = 0$$

Não há variação do conteúdo de fluido inicial, ou seja, no instante 0^+ não existe desequilíbrio algum de pressão em qualquer ponto do meio poroso.

$$\zeta = \zeta' = 0$$

A força de corpo total, no estado não primo ($'$), é desprezada.

$$\tilde{F}_i = 0$$

Deste modo o teorema da reciprocidade, equação 4.2.04, se reduz à expressão abaixo

$$\begin{aligned} & \int_s [\tilde{t}_i(\chi;s) \tilde{u}_{ij}^*(\chi-x;s) - \tilde{t}_{ij}^*(\chi-x;s) \tilde{u}_i(\chi;s)] dS + \\ & - \int_s \frac{1}{s} [\tilde{p}(\chi;s) \tilde{q}_j^*(\chi-x;s) - \tilde{p}_j^*(\chi-x;s) \tilde{q}(\chi;s)] dS + \\ & - \int_{\Omega} 2\pi \delta_{ij} \delta(\chi-x) \tilde{u}_i(\chi;s) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.3.01)$$

Segundo as propriedades da função delta de Dirac tem-se

$$\int_{\Omega} 2\pi \delta_{ij} \delta(\chi-x) \tilde{u}_i(\chi;s) d\Omega = 2\pi \tilde{u}_j(x;s)$$

Então

$$2\pi\tilde{u}_j(x;s) = \int_s [\tilde{t}_i(\chi;s)\tilde{u}_{ij}^*(\chi-x;s) - \tilde{t}_{ij}^*(\chi-x;s)\tilde{u}_i(\chi;s)]ds + \\ - \int_s \frac{1}{s} [\tilde{p}(\chi;s)\tilde{q}_j^*(\chi-x;s) - \tilde{p}_j^*(\chi-x;s)\tilde{q}(\chi;s)]ds \quad (4.3.02)$$

As grandezas envolvidas acima significam:

- $\tilde{t}_{ij}^*$ - componente na direção i do vetor tensão gerado por uma força puntual instantânea em x na direção j
- $\tilde{u}_{ij}^*$ - componente na direção i do vetor deslocamento gerado por uma força puntual instantânea em x na direção j
- $\tilde{p}_j^*$ - pressão de poros gerada por uma força puntual instantânea em x na direção j
- $\tilde{q}_j^*$ - descarga específica na direção da normal gerada por uma força puntual instantânea em x na direção j

As grandezas marcadas com * são as chamadas soluções fundamentais, que serão vistas nos próximos itens e que também são abordadas no apêndice E.

Do mesmo modo pode-se obter a representação integral para a pressão de poros. Agora as grandezas do estado primo (') são aquelas conseqüentes de uma fonte puntual instantânea um ponto x qualquer no interior do domínio, cuja intensidade é 2π .

$$\tilde{\beta}' = 2\pi\delta(\chi-x)$$

Agora as condições impostas são as seguintes:

As forças de corpo no fluido não são consideradas.

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}'_i = 0$$

Não existe fonte, no estado não primo (').

$$\tilde{\beta} = 0$$

A não há variação do conteúdo de fluido inicial, ou

seja, no instante 0^+ não existe desequilíbrio algum de pressão em qualquer ponto do meio poroso.

$$\zeta = \zeta' = 0$$

As forças de corpo totais são desprezadas.

$$\bar{F}_i = \bar{F}'_i = 0$$

Assim sendo, agora a equação 4.2.04 fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_s [\bar{t}_i(\chi; s) \bar{u}_i^*(\chi-x; s) - \bar{t}_i^*(\chi-x; s) \bar{u}_i(\chi; s)] dS + \\ & - \int_s \frac{1}{s} [\bar{p}(\chi; s) \bar{q}^*(\chi-x; s) - \bar{p}^*(\chi-x; s) \bar{q}(\chi; s)] dS + \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{s} \bar{p}(\chi-x; s) 2\pi \delta(\chi-x) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.3.03)$$

Conforme a função delta de Dirac tem-se

$$\int_{\Omega} \frac{1}{s} \bar{p}(\chi-x; s) 2\pi \delta(\chi-x) d\Omega = 2\pi \bar{p}(x; s)/s$$

Substituindo em 4.3.03 obtem-se a equação 4.3.04

$$\begin{aligned} -2\pi \bar{p}(x; s) &= \int_s [\bar{t}_i(\chi; s) \bar{u}_i^*(\chi-x; s) - \bar{t}_i^*(\chi-x; s) \bar{u}_i(\chi; s)] dS + \\ & - \int_s [\bar{p}(\chi; s) \bar{q}^*(\chi-x; s) - \bar{p}^*(\chi-x; s) \bar{q}(\chi; s)] dS \end{aligned} \quad (4.3.04)$$

Onde

$\bar{t}_i^*$ - componente na direção i do vetor tensão gerado por uma fonte puntual instantânea em x

$\bar{u}_i^*$ - componente na direção i vetor deslocamento gerado por uma fonte puntual instantânea em x

$\bar{p}^*$ - pressão de poros gerada por uma fonte puntual instantânea em x

$\bar{q}^*$ - descarga específica na direção da normal gerada

por uma fonte puntual instantânea em x .

As grandezas marcadas com * são as chamadas soluções fundamentais, que serão vistas nos próximos itens e que também são abordadas no apêndice E.

As equações 4.3.02 e 4.3.04 podem ser consideradas como extensões da identidade de Somigliana para poroelasticidade.

As equações 4.3.02 e 4.3.04 são representações integrais para as grandezas $\tilde{u}_j$ e $\tilde{p}$, respectivamente, para qualquer ponto do domínio, inclusive no contorno, em função das condições de contorno $\tilde{t}_i$, $\tilde{u}_i$, $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$. Elas são o ponto de partida para toda a formulação do MEC aplicado à poroelasticidade.

Observe-se que quando o ponto χ coincide com o ponto x , ou seja, quando a distância r entre eles é 0, as soluções fundamentais são singulares, o que exige um esquema especial para as integrações. O se faz é encapsular o ponto x com uma esfera de raio infinitesimal ε (3D), ou cercá-lo por um círculo de raio ε em 2D, e tomar o limite da integral com ε tendendo a 0 [49]. Pode-se assim provar que as equações 4.3.02 e 4.3.04, mesmo para esta situação continuam com a mesma forma [20,40,49].

No MEC, o ponto interior x é deslocado para o contorno de modo que somente os parâmetros no contorno estão presentes nas equações integrais 4.3.02 e 4.3.04. As integrais que contém núcleos com singularidade forte devem ser vistas no sentido do valor principal de Cauchy [20]. Então, as equações 4.3.02 e 4.3.04 ficam com as seguintes formas, respectivamente:

$$\begin{aligned} C\tilde{u}_j(x;s) = & \int_s [\tilde{t}_i(\chi;s)\tilde{u}_{ij}^*(\chi-x;s) - \tilde{t}_{ij}^*(\chi-x;s)\tilde{u}_i(\chi;s)]dS + \\ & - \int_s \frac{1}{S} [\tilde{p}(\chi;s)\tilde{q}_j^*(\chi-x;s) - \tilde{p}_j^*(\chi-x;s)\tilde{q}(\chi;s)]dS \end{aligned} \quad (4.3.05)$$

$$\begin{aligned} -C\tilde{p}(x;s) = & \int_s s [\tilde{t}_i(\chi;s)\tilde{u}_i^*(\chi-x;s) - \tilde{t}_i^*(\chi-x;s)\tilde{u}_i(\chi;s)]dS + \\ & - \int_s [\tilde{p}(\chi;s)\tilde{q}^*(\chi-x;s) - \tilde{p}^*(\chi-x;s)\tilde{q}(\chi;s)]dS \end{aligned} \quad (4.3.06)$$

Agora o coeficiente C não mais é igual a 2π como na

equações 4.3.02 e 4.3.04, ele depende da forma geométrica do contorno no ponto de colocação x .

O coeficiente C é o ângulo θ , dentro do domínio, cujo vértice é o ponto x , expresso em radianos [20].

No interior do domínio θ é igual a 2π .

Em um contorno suave, que é o caso de discretização com elementos constantes, ele vale π .

Em pontos fora do domínio vale, logicamente, 0.

É bom registrar que estes valores de C são válidos para soluções fundamentais geradas por uma força instantânea puntual, cuja intensidade é 2π . No caso de uma força unitária, por exemplo, o coeficiente C seria igual ao ângulo θ dividido por 2π . Esta análise é abordada também no apêndice E.

4.4 Equação integral das tensões

A equação 18 da referência 20 é a equação integral para tensões. Ela é obtida derivando a equação 4.3.02 em relação a x_i e substituindo o resultado na equação constitutiva, equação 2.3.10 repetida abaixo.

$$\sigma'_{ij} = 2G e_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e - \alpha p \delta_{ij} \quad (4.4.01)$$

A equação de equilíbrio, equação 2.3.13, a lei de Darcy, equação 2.3.14, e a equação da continuidade, equação 2.3.15, são implicitamente consideradas em todas as deduções que se seguem.

Antes de prosseguir listar-se-á variáveis, grandezas e relações que serão de grande utilidade para a dedução das equações integrais das tensões e do fluxo.

$$e_{kj} = (u_{k,j} + u_{j,k})/2$$

$$e = e_{11} = u_{1,1}$$

$$C = \frac{2kB^2G(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)}$$

$$\alpha = \frac{3(\nu_u-\nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}$$

$$r = |\chi - x| \quad \xi = r\sqrt{\frac{s}{c}} \quad r^{-1} = \xi^{-1}\sqrt{\frac{s}{c}}$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial \chi_i} = (\chi_i - x_i)/r \quad x_{i,j} = \delta_{ij} \quad r_{,l} r_{,l} = 1$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = -r_{,i} \quad \xi_{,i} = \xi_{,r} r_{,i} = \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,i}$$

$$(r^{-1})_{,i} = (\xi^{-1})_{,i} \sqrt{\frac{s}{c}} = -\frac{s}{c} \xi^{-2} r_{,i} = -\frac{r_{,i}}{r^2}$$

$$r_{,il} = (\delta_{il} - r_{,i} r_{,l})/r$$

$$r_{,ll} = (\delta_{ll} - r_{,l} r_{,l})/r = (2-1)/r = 1/r \quad (\text{caso bidimensional})$$

$$= (3-1)/r = 2/r \quad (\text{caso tridimensional})$$

$$n_l r_{,il} = n_l (\delta_{il} - r_{,i} r_{,l})/r = (n_i - r_{,i} r_{,l} n_l)/r$$

$$n_i r_{,ll} = n_i (\delta_{ll} - r_{,l} r_{,l})/r = n_i/r \quad (\text{caso 2D})$$

$$= 2n_i/r \quad (\text{caso 3D})$$

$$r_{,i} r_{,k} r_{,jl} = r_{,i} r_{,k} (\delta_{jl} - r_{,j} r_{,l})/r = (r_{,i} r_{,k} \delta_{jl} - r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l})/r$$

$$r_{,i} r_{,l} r_{,jl} = r_{,i} r_{,l} (\delta_{jl} - r_{,j} r_{,l})/r = (r_{,i} r_{,j} - r_{,i} r_{,j})/r = 0$$

$$r_{,i} r_{,j} n_l = r_{,i} n_l (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) / r = (r_{,i} n_j - r_{,i} r_{,j} r_{,l} n_l) / r$$

$$r_{,ij} r_{,l} n_l = r_{,l} n_l (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) / r = (\delta_{ij} r_{,l} n_l - r_{,i} r_{,j} r_{,l} n_l) / r$$

$K_\vartheta(x)$ - função de Bessel modificada de 2^o espécie de ordem ϑ (apêndice E)

$$K_{-\vartheta}(x) = K_\vartheta(x)$$

$$[K_\vartheta(x)]_{,x} = -[K_{\vartheta-1}(x) + K_{\vartheta+1}(x)]/2$$

$$= -[K_{\vartheta-1}(x) + \vartheta x^{-1} K_\vartheta(x)]$$

$$= -[K_{\vartheta+1}(x) - \vartheta x^{-1} K_\vartheta(x)]$$

$$2\vartheta x^{-1} K_\vartheta(x) = -[K_{\vartheta-1}(x) - K_{\vartheta+1}(x)]$$

$$[K_0(x)]_{,x} = -K_1(x)$$

As equações 4.3.02 e 4.3.04 serão apresentadas agora de um modo mais sucinto a fim de se economizar tempo nas deduções.

$$2\pi \tilde{u}_j = \int_s (\tilde{t}_i \tilde{u}_{ij}^* - \tilde{t}_{ij}^* \tilde{u}_i) ds - \int_s \frac{1}{s} (\tilde{p} \tilde{q}_j^* - \tilde{p}_j^* \tilde{q}) ds \quad (4.4.02)$$

$$-2\pi \tilde{p} = \int_s s (\tilde{t}_i \tilde{u}_i^* - \tilde{t}_i^* \tilde{u}_i) ds - \int_s (\tilde{p} \tilde{q}^* - \tilde{p}^* \tilde{q}) ds \quad (4.4.03)$$

Derivando-se o deslocamento obtém-se:

$$2\pi \tilde{u}_{k,j} = \int_s (\tilde{t}_i \tilde{u}_{ik,j}^* - \tilde{t}_{ik,j}^* \tilde{u}_i) ds - \int_s \frac{1}{s} (\tilde{p} \tilde{q}_{k,j}^* - \tilde{p}_{k,j}^* \tilde{q}) ds \quad (4.4.04)$$

As deformações são dadas pelas expressões abaixo.

$$4\pi\tilde{e}_{kj} = \int_s [(\tilde{u}_{ik,j}^* + \tilde{u}_{ij,k}^*)\tilde{t}_i - (\tilde{t}_{ik,j}^* + \tilde{t}_{ij,k}^*)\tilde{u}_i] ds + \\ - \int_s \frac{1}{s} [(\tilde{q}_{k,j}^* + \tilde{q}_{j,k}^*)\tilde{p} - (\tilde{p}_{k,j}^* + \tilde{p}_{j,k}^*)\tilde{q}] ds \quad (4.4.05)$$

$$2\pi\tilde{e} = \int_s (\tilde{u}_{il,l}^* \tilde{t}_i - \tilde{t}_{il,l}^* \tilde{u}_i) ds - \int_s \frac{1}{s} (\tilde{q}_{l,l}^* \tilde{p} - \tilde{p}_{l,l}^* \tilde{q}) ds \quad (4.4.06)$$

Substituindo na equação 4.4.01 fica-se com

$$2\pi\tilde{\sigma}'_{kj} = G \int_s [(\tilde{u}_{ik,j}^* + \tilde{u}_{ij,k}^*)\tilde{t}_i - (\tilde{t}_{ik,j}^* + \tilde{t}_{ij,k}^*)\tilde{u}_i] ds + \\ - G \int_s \frac{1}{s} [(\tilde{q}_{k,j}^* + \tilde{q}_{j,k}^*)\tilde{p} - (\tilde{p}_{k,j}^* + \tilde{p}_{j,k}^*)\tilde{q}] ds + \\ + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \left[\int_s (\tilde{u}_{il,l}^* \tilde{t}_i - \tilde{t}_{il,l}^* \tilde{u}_i) ds - \int_s \frac{1}{s} (\tilde{q}_{l,l}^* \tilde{p} - \tilde{p}_{l,l}^* \tilde{q}) ds \right] + \\ + \alpha \delta_{kj} \left[\int_s s (\tilde{t}_i \tilde{u}_i^* - \tilde{t}_i^* \tilde{u}_i) ds - \int_s (\tilde{p} \tilde{q}^* - \tilde{p}^* \tilde{q}) ds \right] \quad (4.4.07)$$

Reorganizando esta equação obtém-se uma forma mais explícita como se verá a seguir.

$$2\pi\tilde{\sigma}'_{kj} = \int_s \left[(G\tilde{u}_{ik,j}^* + G\tilde{u}_{ij,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \tilde{u}_{il,l}^* + s\alpha \delta_{kj} \tilde{u}_i^*) \tilde{t}_i + \right. \\ \left. - (G\tilde{t}_{ik,j}^* + G\tilde{t}_{ij,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \tilde{t}_{il,l}^* + s\alpha \delta_{kj} \tilde{t}_i^*) \tilde{u}_i \right] ds + \\ - \int_s \left[\left(\frac{G}{s} \tilde{q}_{k,j}^* + \frac{G}{s} \tilde{q}_{j,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \frac{1}{s} \tilde{q}_{l,l}^* + \alpha \delta_{kj} \tilde{q}^* \right) \tilde{p} + \right.$$

$$-\left(\frac{G}{s}\tilde{p}_{k,j}^* + \frac{G}{s}\tilde{p}_{j,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\frac{1}{s}\tilde{p}_{l,l}^* + \alpha\delta_{kj}\tilde{p}^*\right)\tilde{q}\Big]ds \quad (4.4.08)$$

Esta equação pode ser compactada ficando com a seguinte forma:

$$2\pi\tilde{\sigma}'_{kj} = \int_s (\tilde{d}_{ikj}^* \tilde{t}_i - \tilde{s}_{ikj}^* \tilde{u}_i) ds - \int_s (\tilde{d}_{3kj}^* \tilde{p} - \tilde{s}_{3kj}^* \tilde{q}) ds \quad (4.4.09)$$

Comparando a equação 4.4.09 com a equação 4.4.08 pode-se ver que os tensores de 3ª ordem naquela equação são dados por

$$\tilde{d}_{ikj}^* = G\tilde{u}_{ik,j}^* + G\tilde{u}_{ij,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\tilde{u}_{il,l}^* + s\alpha\delta_{kj}\tilde{u}_i^*$$

$$\tilde{s}_{ikj}^* = G\tilde{t}_{ik,j}^* + G\tilde{t}_{ij,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\tilde{t}_{il,l}^* + s\alpha\delta_{kj}\tilde{t}_i^*$$

$$\tilde{d}_{3kj}^* = \frac{G}{s}\tilde{q}_{k,j}^* + \frac{G}{s}\tilde{q}_{j,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\frac{1}{s}\tilde{q}_{l,l}^* + \alpha\delta_{kj}\tilde{q}^*$$

$$\tilde{s}_{3kj}^* = \frac{G}{s}\tilde{p}_{k,j}^* + \frac{G}{s}\tilde{p}_{j,k}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\frac{1}{s}\tilde{p}_{l,l}^* + \alpha\delta_{kj}\tilde{p}^*$$

Como já foi dito as grandezas com o superescrito * são as soluções fundamentais, as quais se acham em apêndice na referência 20 e serão reproduzidas abaixo. Estas equações deverão ser trabalhadas e depois substituídas na equação 4.4.08. Os núcleos $\tilde{d}_{ikj}^*$, $\tilde{s}_{ikj}^*$, $\tilde{d}_{3kj}^*$ e $\tilde{s}_{3kj}^*$ serão todos eles deduzidos.

A solução fundamental para o deslocamento na direção i devido à uma força puntual instantânea na direção j é a seguinte

$$\tilde{u}_{ij}^* = \frac{-(3-4\nu_u)}{4G(1-\nu_u)}\delta_{ij}\ln r + \frac{1}{4G(1-\nu_u)}r_{,i}r_{,j} + \frac{\nu_u-\nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)}\{\delta_{ij}[\xi^{-2} +$$

$$-\xi^{-1}K_1(\xi)] + r_{,i}r_{,j}[K_2(\xi)-2\xi^{-2}]] \quad (4.4.10)$$

A solução fundamental para o componente na direção i do vetor tensão devido à uma força puntual instantânea na direção j tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ij}^* = & \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)}(n_i r_{,j} - n_j r_{,i} - \delta_{ij} r_{,l} n_l) \frac{1}{r} - \frac{1}{1-\nu_u} r_{,i} r_{,j} r_{,l} n_l \frac{1}{r} + \\ & + \frac{\nu_u - \nu}{(1-\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} \{ \delta_{ij} r_{,l} n_l [\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + \\ & + r_{,i} r_{,j} r_{,l} n_l [8\xi^{-3} - K_3(\xi)] + n_i r_{,j} [K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3}] + \\ & + n_j r_{,i} [\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}] \} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

A solução fundamental para a vazão específica devido à uma força puntual instantânea é dada pela expressão abaixo

$$\begin{aligned} \bar{q}_j^* = & \frac{3(\nu_u - \nu)s}{2BG(1-\nu)(1+\nu_u)} \{ n_j [\xi^{-1} K_1(\xi) - \xi^{-2}] + \\ & + r_{,j} r_{,l} n_l [2\xi^{-2} - K_2(\xi)] \} \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

A pressão tem a solução fundamental dada pela equação 4.4.13, para uma força unitária instantânea na direção j .

$$\bar{p}_j^* = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,j} [\xi^{-1} - K_1(\xi)] \quad (4.4.13)$$

A solução fundamental para o deslocamento na direção i devido à uma fonte puntual instantânea é a seguinte

$$\tilde{u}_i^* = \frac{B(1+\nu_u)}{3s(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,i} [\xi^{-1} - K_1(\xi)] \quad (4.4.14)$$

A solução fundamental para o componente na direção i do vetor tensão devido à uma fonte puntual instantânea é expressa por

$$\begin{aligned} \tilde{t}_i^* = & \frac{BG(1+\nu_u)}{3c(1-\nu_u)} \{ n_i [2\xi^{-2} - K_0(\xi) - K_2(\xi)] + \\ & - r_{,i} r_{,l} n_l [4\xi^{-2} - 2K_2(\xi)] \} \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

A solução fundamental para a vazão específica devido à uma fonte puntual instantânea é dada pela expressão abaixo

$$\tilde{q}^* = \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,l} n_l K_1(\xi) \quad (4.4.16)$$

A pressão tem a solução fundamental dada pela equação 4.4.17, para uma fonte puntual instantânea.

$$\tilde{p}^* = \frac{1}{K} K_0(\xi) \quad (4.4.17)$$

Agora serão obtidos os termos contidos nos tensores $\tilde{d}_{ikj}^*$, $\tilde{s}_{ikj}^*$, $\tilde{d}_{3kj}^*$ e $\tilde{s}_{3kj}^*$.

Primeiramente obtem-se as derivadas da expressão do deslocamento $\tilde{u}^*$ devido à uma força puntual instantânea, equação 4.4.10.

$$\begin{aligned} -\tilde{u}_{ik,j}^* = & -\frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \delta_{ik} \frac{r_{,j}}{r} + \frac{1}{4G(1-\nu_u)} (r_{,ij} r_{,k} + r_{,i} r_{,kj}) + \\ & + \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \left[\delta_{ik} (-2\xi^{-3} + \xi^{-1} K_2) \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,j} + \right. \\ & \left. + (r_{,ij} r_{,k} + r_{,i} r_{,kj}) (K_2 - 2\xi^{-2}) + \right. \end{aligned}$$

$$+ r_{,i} r_{,k} (4\xi^{-3} - 2\xi^{-1}K_2 - K_1) \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,j} \Big] \quad (4.4.18)$$

$$\begin{aligned} -G(u_{ij,k}^* + u_{ik,j}^*) &= -\frac{3-4\nu_u}{4(1-\nu_u)} \left(\delta_{ik} \frac{r_{,j}}{r} + \delta_{ij} \frac{r_{,k}}{r} \right) + \\ &+ \frac{1}{4(1-\nu_u)} (r_{,ij} r_{,k} + r_{,ik} r_{,j} + 2r_{,i} r_{,kj}) + \\ &+ \frac{\nu_u - \nu}{2(1-\nu)(1-\nu_u)} \left[(-2\xi^{-3} + \xi^{-1}K_2) \sqrt{\frac{S}{C}} (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k}) + \right. \\ &+ (\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j} + 2\delta_{kj} r_{,i} - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \frac{1}{r} (K_2 - 2\xi^{-2}) + \\ &\left. + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} (4\xi^{-3} - 2\xi^{-1}K_2 - K_1) \sqrt{\frac{S}{C}} \right] \quad (4.4.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} u_{il,l}^* &= -\frac{(3-4\nu_u)\nu \delta_{kj} r_{,i}}{2(1-\nu_u)(1-2\nu)r} + \frac{\nu \delta_{kj} r_{,i}}{2(1-\nu_u)(1-2\nu)r} + \\ &+ \frac{(\nu_u - \nu)\nu \delta_{kj}}{(1-\nu)(1-\nu_u)(1-2\nu)} \left[(-2\xi^{-3} + \xi^{-1}K_2) \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,i} + (K_2 - 2\xi^{-2}) \frac{r_{,i}}{r} + \right. \\ &\left. + r_{,i} (4\xi^{-3} - 2\xi^{-1}K_2 - K_1) \sqrt{\frac{S}{C}} \right] \quad (4.4.20) \end{aligned}$$

Foram assim obtidos todos os termos do tensor $\tilde{d}_{ikj}^*$.

Os termos da expressão do tensor s_{ikj}^* são obtidos conhecendo-se as derivadas da equação 4.4.11

$$\begin{aligned} -\tilde{t}_{ik,j}^* &= \frac{(1-2\nu_u)s}{2(1-\nu_u)c} \left[(\delta_{kj} - r_{,j} r_{,k}) n_i - n_k (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) + \right. \\ &\left. - \delta_{ik} (\delta_{,lj} - r_{,l} r_{,j}) n_l - r_{,j} (n_i r_{,k} - n_k r_{,i} - \delta_{ik} r_{,l} n_l) \right] \xi^{-2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{1-\nu_u} \xi^{-2} \frac{s}{c} \left[(\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) r_{,k} r_{,l} n_l + r_{,i} (\delta_{kj} - r_{,k} r_{,j}) r_{,l} n_l + r_{,i} r_{,k} (\delta_{jl} - \right. \\
& \left. - r_{,l} r_{,j}) n_l - r_{,i} r_{,k} r_{,l} r_{,j} n_l \right] + \frac{(\nu_u - \nu) s}{(1-\nu)(1-\nu_u) c} \left\{ \delta_{ik} (\delta_{lj} - r_{,j} r_{,l}) n_l (\xi^{-1} K_2 + \right. \\
& \left. - 2\xi^{-3}) \xi^{-1} + \delta_{ik} r_{,l} n_l (-\xi^{-1} K_1 - 3\xi^{-2} K_2 + 6\xi^{-4}) r_{,j} + \right. \\
& \left[(\delta_{ij} - r_{,j} r_{,i}) r_{,k} r_{,l} n_l + (\delta_{kj} - r_{,j} r_{,k}) r_{,i} r_{,l} n_l + (\delta_{lj} - r_{,j} r_{,l}) r_{,k} r_{,i} n_l \right] \times \\
& (8\xi^{-3} - K_1 - 4\xi^{-1} K_2) \xi^{-1} + r_{,i} r_{,k} r_{,l} n_l (-24\xi^{-4} + K_0 + 5\xi^{-1} K_1 + 12\xi^{-2} K_2) r_{,j} + \\
& + n_i (\delta_{kj} - r_{,k} r_{,j}) (K_1 + \xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) \xi^{-1} + n_i r_{,k} (-K_0 - 2\xi^{-1} K_1 - 3\xi^{-2} K_2 + 6\xi^{-4}) r_{,j} + \\
& + n_k (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) \xi^{-1} + \\
& \left. + n_k r_{,i} (-\xi^{-1} K_1 - 3\xi^{-2} K_2 + 6\xi^{-4}) r_{,j} \right\} \quad (4.4.21)
\end{aligned}$$

Coletando os termos semelhantes obtém-se

$$\begin{aligned}
-\tilde{t}_{ik,j}^* = & \left\{ \frac{(1-2\nu_u) s}{2(1-\nu_u) c} \left[\delta_{kj} n_i - \delta_{ij} n_k - \delta_{ik} n_j + \delta_{ik} r_{,j} r_{,l} n_l - r_{,j} r_{,k} n_i + r_{,i} r_{,j} n_k - \right. \right. \\
& \left. (r_{,k} n_i - r_{,i} n_k - \delta_{ik} r_{,l} n_l) r_{,j} \right] - \frac{s}{(1-\nu_u) c} (\delta_{ij} r_{,k} r_{,l} n_l + \delta_{kj} r_{,i} r_{,l} n_l + r_{,i} r_{,k} n_j + \\
& \left. - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} n_l) \right\} \xi^{-2} + \frac{(\nu_u - \nu) s}{(1-\nu)(1-\nu_u) c} (r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} n_l - r_{,j} r_{,k} n_i) K_0 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\nu_u - \nu)s}{(1-\nu)(1-\nu_u)c} \left[(-\delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k} - \delta_{kj}r_{,i} + 8r_{,i}r_{,j}r_{,k})r_{,l}n_l - r_{,i}r_{,j}n_k + \right. \\
& + \delta_{kj}n_i - 3r_{,k}r_{,j}n_i - r_{,k}r_{,i}n_j \left. \right] \xi^{-1}K_1 + \frac{(\nu_u - \nu)s}{(1-\nu)(1-\nu_u)c} \left[\delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i + \delta_{ij}n_k + \right. \\
& - 4r_{,i}r_{,k}n_j - 4r_{,j}r_{,k}n_i - 4r_{,j}r_{,i}n_k + (24r_{,j}r_{,i}r_{,k} - 4\delta_{ik}r_{,j} - 4\delta_{ij}r_{,k} + \\
& \left. - 4\delta_{jk}r_{,i})r_{,l}n_l \right] (\xi^{-2}K_2 - 2\xi^{-4}) \quad (4.4.22)
\end{aligned}$$

Os termos $\tilde{t}_{ij,k}^*$ e $\tilde{t}_{il,l}^*$ são obtidos fazendo-se as devidas substituições, semelhante ao que feito em relação ao deslocamento. Estão assim obtidos os termos do tensor $\tilde{s}_{ikj}^*$.

A seguir serão obtidos os termos do tensor $\tilde{d}_{3kj}^*$, através das derivadas da equação 4.4.12.

$$\begin{aligned}
-\tilde{q}_{k,j}^* &= \frac{3(\nu_u - \nu)s}{2GB(1-\nu)(1+\nu_u)} \left\{ n_k (-\xi^{-1}K_2 + 2\xi^{-3}) \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,j} + \left[(\delta_{kj} - 2r_{,j}r_{,k})r_{,l}n_l + \right. \right. \\
& + r_{,k}n_j \left. \right] (2\xi^{-2} - K_2) \xi^{-1} \sqrt{\frac{s}{c}} + r_{,k}r_{,j}r_{,l}n_l (-4\xi^{-3} + K_1 + 2\xi^{-1}K_2) \sqrt{\frac{s}{c}} \left. \right\} \quad (4.4.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\tilde{q}_{k,j}^* &= \frac{3(\nu_u - \nu)s}{2GB(1-\nu)(1+\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} \left[r_{,j}r_{,k}r_{,l}n_l K_1 - (n_k r_{,j} + r_{,k}n_j + \delta_{kj}r_{,l}n_l + \right. \\
& \left. - 4r_{,j}r_{,k}r_{,l}n_l) (\xi^{-1}K_2 - 2\xi^{-3}) \right] \quad (4.4.24)
\end{aligned}$$

Novamente, com as substituições convenientes, obtem-se $\tilde{q}_{j,k}^*$ e $\tilde{q}_{l,l}^*$. Assim o tensor $\tilde{d}_{3kj}^*$ está completo.

Finalmente, obtem-se os termos do tensor $\tilde{s}_{3kj}^*$, através das derivadas da equação 4.4.13.

$$\begin{aligned}
-\tilde{p}_{k,j}^* = & \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \left[(\xi^{-1} - K_1) (\delta_{kj} - r_{,k} r_{,j}) \sqrt{\frac{S}{C}} \xi^{-1} + \right. \\
& \left. + r_{,k} (-\xi^{-2} + K_0 + \xi^{-1} K_1) \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,j} \right] \quad (4.4.25)
\end{aligned}$$

Os termos $\tilde{p}_{j,k}^*$ e $\tilde{p}_{1,1}^*$ são obtidos pela manipulação dos índices e assim ficam determinados os termos do tensor $\tilde{s}_{3kj}^*$.

As expressões finais para os tensores (núcleos) são dadas a seguir, após ter sido feita a coleta dos termos semelhantes e terem sido colocados em evidência os termos comuns.

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{ikj}^* = & \left[\frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} (\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j}) - \frac{1-4\nu+4\nu\nu_u}{2(1-2\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \delta_{jk} r_{,i} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1-\nu_u} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \xi^{-1} + \left[\frac{\nu_u - \nu}{(1-\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} r_{,i} r_{,j} r_{,k} + \right. \\
& \left. + \frac{\nu(\nu_u - \nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \delta_{jk} r_{,i} \right] K_1 + \left[\frac{\nu_u - \nu}{(1-\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} (4r_{,i} r_{,j} r_{,k} - \delta_{ij} r_{,k} + \right. \\
& \left. - \delta_{ik} r_{,j} - \delta_{kj} r_{,i}) \right] (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) + \alpha \delta_{jk} \tilde{u}_i^* \quad (4.4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{3kj}^* = & - \left[\frac{3(\nu_u - \nu)}{(1-\nu)(1+\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} (r_{,j} r_{,k} r_{,l} n_l) + \right. \\
& \left. + \frac{3\nu(\nu_u - \nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)(1+\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \delta_{jk} r_{,l} n_l \right] K_1 + \frac{3(\nu_u - \nu)}{(1-\nu)(1+\nu_u)} \sqrt{\frac{S}{C}} \left[r_{,j} n_k + r_{,k} n_j + \right. \\
& \left. + r_{,l} n_l (\delta_{jk} - 4r_{,j} r_{,k}) \right] (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) + \alpha \delta_{kj} \tilde{q}^* \quad (4.4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{ikj}^* = & - \left\{ \frac{SG(1-2\nu_u)}{c(1-\nu_u)} \left[r_{,l} n_l (\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j}) - \delta_{ij} n_k - \delta_{ik} n_j + \delta_{jk} n_i + r_{,i} r_{,j} n_k + \right. \right. \\
& + r_{,i} r_{,k} n_j - 2r_{,k} r_{,j} n_i \left. \right] - \frac{SG}{c(1-\nu_u)} \left[r_{,l} n_l (\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j} + 2\delta_{kj} r_{,i} + \right. \\
& - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k}) + r_{,i} r_{,j} n_k + r_{,i} r_{,k} n_j \left. \right] + \frac{2SG\nu(1-2\nu_u)}{c(1-2\nu)(1-\nu_u)} (-\delta_{kj} n_i + \\
& + 2\delta_{kj} r_{,i} r_{,l} n_l) \left. \right\} \xi^{-2} - \left[\frac{2Gs(\nu_u - \nu)}{c(1-\nu)(1-\nu_u)} (r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} n_l - r_{,j} r_{,k} n_i) + \right. \\
& + \frac{2SG\nu(\nu_u - \nu)}{c(1-\nu)(1-\nu_u)(1-2\nu)} (-\delta_{kj} n_i + \delta_{jk} r_{,i} r_{,l} n_l) \left. \right] K_0 + \\
& - \left\{ \frac{2Gs(\nu_u - \nu)}{c(1-\nu)(1-\nu_u)} \left[\delta_{jk} n_i - r_{,i} r_{,j} n_k - r_{,i} r_{,k} n_j - 3r_{,j} r_{,k} n_i + \right. \right. \\
& + r_{,l} n_l (8r_{,i} r_{,j} r_{,k} - \delta_{,ik} r_{,j} - \delta_{,ij} r_{,k} - \delta_{,jk} r_{,i}) \left. \right] + \\
& + \frac{2SG\nu(\nu_u - \nu)}{c(1-\nu)(1-\nu_u)(1-2\nu)} (2\delta_{jk} r_{,i} r_{,l} n_l - \delta_{jk} n_i) \left. \right\} \xi^{-1} K_1 + \\
& - \frac{2Gs(\nu_u - \nu)}{c(1-\nu)(1-\nu_u)} \left[-4(r_{,i} r_{,j} n_k + r_{,i} r_{,k} n_j + r_{,j} r_{,k} n_i) + 4r_{,l} n_l (6r_{,i} r_{,j} r_{,k} + \right. \\
& - \delta_{ij} r_{,k} - \delta_{ik} r_{,j} - \delta_{kj} r_{,i}) + \delta_{ij} n_k + \delta_{ik} n_j + \delta_{kj} n_i \left. \right] (\xi^{-2} K_2 - 2\xi^{-4}) + \\
& + s\alpha\delta_{jk} \tilde{t}_i^*
\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{3kj}^* = & - \left[\frac{2GB(1+\nu_u)}{3c(1-\nu_u)} r_{,j} r_{,k} + \frac{2GB\nu(1+\nu_u)}{3c(1-\nu_u)(1-2\nu)} \delta_{jk} \right] K_0 + \\ & + \frac{2GB(1+\nu_u)}{3c(1-\nu_u)} (\delta_{jk} - 2r_{,j} r_{,k}) (\xi^{-1} K_1 - \xi^{-2}) + \alpha \delta_{kj} \tilde{p}^* \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

4.5 Equação integral do fluxo

A equação 19 da referência 20 é a equação integral do fluxo, que é obtida derivando-se a equação 4.3.04 em relação a x_i e substituindo-se o resultado na equação 2.3.14, que é a lei de Darcy, reproduzida abaixo

$$\tilde{q}_j = -k \tilde{p}_{,j}$$

A equação 4.3.04 será representada mais compactamente a fim de se economizar tempo nas deduções.

$$-2\pi \tilde{p} = \int_s (\tilde{t}_i \tilde{u}_i^* - \tilde{t}_i^* \tilde{u}_i) ds - \int_s (\tilde{p} \tilde{q}^* - \tilde{p}^* \tilde{q}) ds \quad (4.5.01)$$

Então

$$2\pi \tilde{q}_j = sk \int_s (\tilde{t}_i \tilde{u}_{i,j}^* - \tilde{u}_i \tilde{t}_{i,j}^*) ds - k \int_s (\tilde{p} \tilde{q}_{,j}^* - \tilde{q} \tilde{p}_{,j}^*) ds \quad (4.5.02)$$

$$= \int_s (\tilde{d}_{ij}^* \tilde{t}_i - \tilde{s}_{ij}^* \tilde{u}_i) ds - \int_s (\tilde{d}_{3j}^* \tilde{p} - \tilde{s}_{3j}^* \tilde{q}) ds \quad (4.5.03)$$

De modo semelhante ao que foi feito para as tensões foram obtidas as expressões dos tensores de 2ª ordem, que aparecem na equação 4.5.03, derivando-se convenientemente as equações 4.4.14, 4.4.15, 4.4.16 e 4.4.17.

$$sk \tilde{u}_{i,j}^* = -\frac{kB(1+\nu_u)s}{3(1-\nu_u)c} \left[r_{,j} r_{,i} K_0 - (\xi^{-1} K_1 - \xi^{-2}) (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \right]$$

$$= \tilde{d}_{ij}^* \quad (4.5.04)$$

$$\begin{aligned} sk\tilde{t}_{i,j}^* = & -\frac{2kB(1+\nu_u)SG}{3c(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} \left[(r_{,j}n_i - r_{,i}r_{,j}r_{,l}n_l)K_1 + (\delta_{ij}r_{,l}n_l + \right. \\ & \left. + r_{,i}n_j + r_{,j}n_i - 4r_{,i}r_{,j}r_{,l}n_l)(\xi^{-1}K_2 - 2\xi^{-3}) \right] = \tilde{s}_{ij}^* \end{aligned} \quad (4.5.05)$$

$$k\tilde{q}_{,j}^* = \frac{sk}{c} \left[r_{,j}r_{,l}n_l K_0 - (n_j - 2r_{,j}r_{,l}n_l)\xi^{-1}K_1 \right] = \tilde{d}_{3j}^* \quad (4.5.06)$$

$$k\tilde{p}_{,j}^* = \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,j}K_1 = \tilde{s}_{3j}^* \quad (4.5.07)$$

4.6 Resumo

Neste capítulo foi mostrada uma extensão do teorema de Betti no domínio do tempo aplicada à poroelasticidade [20].

Foram deduzidas as representações integrais para as grandezas $\tilde{u}_j$ e $\tilde{p}$, para qualquer ponto do domínio em função das variáveis no contorno $\tilde{t}_i$, $\tilde{u}_i$, $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$, que são o ponto de partida para toda a formulação do método dos elementos de contorno aplicado à poroelasticidade.

Depois foram deduzidas as equações integrais para tensões e para fluxos, detalhadamente.

E bom lembrar que todas as soluções fundamentais, neste capítulo mostradas, são provenientes de uma sollicitação de intensidade igual a 2π .

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

5.1 Elementos constantes

Como já foi dito no capítulo anterior, no MEC o contorno é dividido em segmentos (elementos). Fatores de forma são utilizados para descrever a geometria e as variáveis sobre estes elementos.

No caso de elementos constantes, como o próprio nome já sugere, as variáveis são consideradas constantes sobre cada elemento. Cada elemento tem apenas 1 nó, que se encontra no meio do mesmo [39,49].

As equações 4.3.05 e 4.3.06, sucintamente, têm a forma:

$$c\tilde{u}_j = \int_s \tilde{u}_{ij}^* \tilde{t}_i ds - \int_s \tilde{t}_{ij}^* \tilde{u}_i ds - \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_j^* \tilde{p} ds + \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}_j^* \tilde{q} ds \quad (5.1.01)$$

$$-c\tilde{p} = \int_s s \tilde{u}_i^* \tilde{t}_i ds - \int_s s \tilde{t}_i^* \tilde{u}_i ds - \int_s \tilde{q}^* \tilde{p} ds + \int_s \tilde{p}^* \tilde{q} ds \quad (5.1.02)$$

Expandindo as equações acima tem-se

$$\begin{aligned} c\tilde{u}_1 = & \int_s \tilde{u}_{11}^* \tilde{t}_1 ds + \int_s \tilde{u}_{21}^* \tilde{t}_2 ds - \int_s \tilde{t}_{11}^* \tilde{u}_1 ds - \int_s \tilde{t}_{21}^* \tilde{u}_2 ds + \\ & - \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_1^* \tilde{p} ds + \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}_1^* \tilde{q} ds \end{aligned} \quad (5.1.03)$$

$$\begin{aligned} c\tilde{u}_2 = & \int_s \tilde{u}_{12}^* \tilde{t}_1 ds + \int_s \tilde{u}_{22}^* \tilde{t}_2 ds - \int_s \tilde{t}_{12}^* \tilde{u}_1 ds - \int_s \tilde{t}_{22}^* \tilde{u}_2 ds + \\ & - \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_2^* \tilde{p} ds + \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}_2^* \tilde{q} ds \end{aligned} \quad (5.1.04)$$

$$\begin{aligned}
-C\bar{p} = & \int_s s\tilde{u}_1^* \tilde{t}_1 ds + \int_s s\tilde{u}_2^* \tilde{t}_2 ds - \int_s s\tilde{t}_1^* \tilde{u}_1 ds - \int_s s\tilde{t}_2^* \tilde{u}_2 ds + \\
& - \int_s \tilde{q}^* \tilde{p} ds + \int_s \tilde{p}^* \tilde{q} ds
\end{aligned} \tag{5.1.05}$$

Reorganizando estas equações obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_s \tilde{u}_{11}^* \tilde{t}_1 ds + \int_s \tilde{u}_{21}^* \tilde{t}_2 ds - \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_1^* \tilde{p} ds = & \int_s \tilde{t}_{11}^* \tilde{u}_1 ds + c\tilde{u}_1 + \int_s \tilde{t}_{21}^* \tilde{u}_2 ds + \\
& - \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}_1^* \tilde{q} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s \tilde{u}_{12}^* \tilde{t}_1 ds + \int_s \tilde{u}_{22}^* \tilde{t}_2 ds - \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_2^* \tilde{p} ds = & \int_s \tilde{t}_{12}^* \tilde{u}_1 ds + \int_s \tilde{t}_{22}^* \tilde{u}_2 ds + c\tilde{u}_2 + \\
& - \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}_2^* \tilde{q} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s s\tilde{u}_1^* \tilde{t}_1 ds + \int_s s\tilde{u}_2^* \tilde{t}_2 ds - \int_s \tilde{q}^* \tilde{p} ds + Cp = & \int_s s\tilde{t}_1^* \tilde{u}_1 ds + \int_s s\tilde{t}_2^* \tilde{u}_2 ds + \\
& - \int_s \tilde{p}^* \tilde{q} ds
\end{aligned}$$

Colocando fora das integrais as variáveis no contorno:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_1 \int_s \tilde{u}_{11}^* ds + \tilde{t}_2 \int_s \tilde{u}_{21}^* ds - \tilde{p} \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_1^* ds = & \tilde{u}_1 \int_s \tilde{t}_{11}^* ds + c\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \int_s \tilde{t}_{21}^* ds + \\
& - \tilde{q} \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}_1^* ds
\end{aligned} \tag{5.1.06}$$

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 \int_s \bar{u}_{12}^* ds + \bar{t}_2 \int_s \bar{u}_{22}^* ds - \bar{p} \int_s \frac{1}{S} \bar{q}_2^* ds = \bar{u}_1 \int_s \bar{t}_{12}^* ds + \bar{u}_2 \int_s \bar{t}_{22}^* ds + C \bar{u}_2 + \\ - \bar{q} \int_s \frac{1}{S} \bar{p}_2^* ds \end{aligned} \quad (5.1.07)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 \int_s s \bar{u}_1^* ds + \bar{t}_2 \int_s s \bar{u}_2^* ds - \bar{p} \int_s \bar{q}^* ds + C p = \bar{u}_1 \int_s s \bar{t}_1^* ds + \bar{u}_2 \int_s s \bar{t}_2^* ds + \\ - \bar{q} \int_s \bar{p}^* ds \end{aligned} \quad (5.1.08)$$

Organizando-as em forma de matricial tem-se

$$\begin{vmatrix} \int_s \bar{u}_{11}^* ds & \int_s \bar{u}_{21}^* ds & -\int_s \frac{1}{S} \bar{q}_1^* ds \\ \int_s \bar{u}_{12}^* ds & \int_s \bar{u}_{22}^* ds & -\int_s \frac{1}{S} \bar{q}_2^* ds \\ \int_s s \bar{u}_1^* ds & \int_s s \bar{u}_2^* ds & -\int_s \bar{q}^* ds + C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_s \bar{t}_{11}^* ds + C & \int_s \bar{t}_{21}^* ds & -\int_s \frac{1}{S} \bar{p}_1^* ds \\ \int_s \bar{t}_{12}^* ds & \int_s \bar{t}_{22}^* ds + C & -\int_s \frac{1}{S} \bar{p}_2^* ds \\ \int_s s \bar{t}_1^* ds & \int_s s \bar{t}_2^* ds & -\int_s \bar{p}^* ds \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{q} \end{vmatrix}$$

Onde

$\bar{t}_i$ - vetor tensão no nó do elemento na direção i

$\bar{p}$ - pressão no nó do elemento (escalar)

$\tilde{u}_i$ - deslocamento no nó do elemento na direção i

$\tilde{q}$ - descarga (vazão) no nó do elemento, na direção normal

O índice i varia de 1 a 2 (caso bidimensional)

Generalizando, para N elementos, as matrizes e vetores acima, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \int_{sl} \tilde{u}_{11}^* ds & \int_{sl} \tilde{u}_{21}^* ds & -\int_{sl} \frac{1}{s} \tilde{q}_1^* ds \\ \int_{sl} \tilde{u}_{12}^* ds & \int_{sl} \tilde{u}_{22}^* ds & -\int_{sl} \frac{1}{s} \tilde{q}_2^* ds \\ \int_{sl} s \tilde{u}_1^* ds & \int_{sl} s \tilde{u}_2^* ds & -\int_{sl} \tilde{q}^* ds + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1^j \\ \tilde{t}_2^j \\ \tilde{p}^j \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \int_{sl} \tilde{t}_{11}^* ds + C & \int_{sl} \tilde{t}_{21}^* ds & -\int_{sl} \frac{1}{s} \tilde{p}_1^* ds \\ \int_{sl} \tilde{t}_{12}^* ds & \int_{sl} \tilde{t}_{22}^* ds + C & -\int_{sl} \frac{1}{s} \tilde{p}_2^* ds \\ \int_{sl} s \tilde{t}_1^* ds & \int_{sl} s \tilde{t}_2^* ds & -\int_{sl} \tilde{p}^* ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^j \\ \tilde{u}_2^j \\ \tilde{q}^j \end{bmatrix}$$

Onde

sl - integração no elemento l

$\tilde{t}_i^j$ - vetor tensão no nó do elemento j na direção i

$\tilde{p}^j$ - pressão no nó do elemento j (escalar)

$\tilde{u}_i^j$ - deslocamento no nó do elemento j na direção i

$\tilde{q}^j$ - descarga no nó do elemento j na direção normal

Os índices j e l variam de 1 a N e o índice i varia de 1 a 2 (caso bidimensional).

Observe-se que quando o índice j é diferente do índice 1 , o que significa integração em elemento que não aquele onde se encontra o ponto de colocação, a constante C é nula. Esta constante é diferente de zero apenas nas submatrizes diagonais.

A constante C é o ângulo interno (dentro do domínio) formado pelos elementos convergentes no nó. No caso de elementos constantes ela vale π . Para pontos no domínio, vale 2π .

A seguir monta-se o sistema

$$[G][TP] = [H][UQ] \quad (5.1.09)$$

G e H são matrizes $(3N \times 3N)$. TP e UQ são vetores $(3N)$.

Em um problema bem posto, em cada nó da discretização, conhece-se o vetor tensão ou o deslocamento e a pressão ou a vazão.

A seguir as variáveis conhecidas, que são as condições de contorno, são todas colocadas em um dos membros da equação 5.1.09 ficando as incógnitas no outro. As colunas de G e de H são intercambiadas convenientemente obtendo-se o sistema abaixo

$$[A][x] = [b]$$

A seguir o sistema é resolvido numericamente [47, 48], obtendo-se as incógnitas no contorno. As variáveis no domínio são obtidas usando-se a identidade de Somigliana (apêndice E item E11) com C igual a 2π .

Uma descrição bem detalhada do MEC, com elementos constantes, é encontrada na referência 39.

5.2 Elementos lineares

No caso de elementos lineares a geometria do elemento e as variáveis sobre os mesmos variam linearmente. Os fatores de forma são dados por [40,55,58,67].

$$N1 = (1-\psi)/2 \quad N2 = (1+\psi)/2$$

$$\psi = \frac{z}{L/2} \quad -1 \leq \psi \leq 1$$

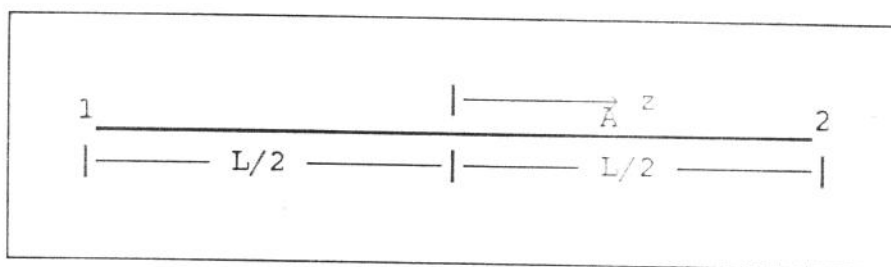


Figura 5.2.01 - Coordenada local

Cada elemento têm 2 nós, um cada extremidade. O valor das variáveis, em um ponto qualquer A, é dado por

$$\bar{t}_i = N_1 \bar{t}_1^1 + N_2 \bar{t}_1^2$$

$$\bar{p} = N_1 \bar{p}^1 + N_2 \bar{p}^2$$

$$\bar{u}_i = N_1 \bar{u}_1^1 + N_2 \bar{u}_1^2$$

$$\bar{q} = N_1 \bar{q}^1 + N_2 \bar{q}^2$$

Substituindo-se nas equações 5.1.06 , 5.1.07 e 5.1.08, obtém-se

$$\int_s \bar{u}_{11}^* (N_1 \bar{t}_1^1 + N_2 \bar{t}_1^2) ds + \int_s \bar{u}_{21}^* (N_1 \bar{t}_2^1 + N_2 \bar{t}_2^2) ds - \int_s \frac{1}{s} \bar{q}_1^* (N_1 \bar{p}^1 + N_2 \bar{p}^2) ds =$$

$$\int_s \bar{t}_{11}^* (N_1 \bar{u}_1^1 + N_2 \bar{u}_1^2) ds + C \bar{u}_1^1 + \int_s \bar{t}_{21}^* (N_1 \bar{u}_2^1 + N_2 \bar{u}_2^2) ds - \int_s \frac{1}{s} \bar{p}_1^* (N_1 \bar{q}^1 + N_2 \bar{q}^2) ds$$

$$\int_s \bar{u}_{12}^* (N_1 \bar{t}_1^1 + N_2 \bar{t}_1^2) ds + \int_s \bar{u}_{22}^* (N_1 \bar{t}_2^1 + N_2 \bar{t}_2^2) ds - \int_s \frac{1}{s} \bar{q}_2^* (N_1 \bar{p}^1 + N_2 \bar{p}^2) ds =$$

$$\int_s \bar{t}_{11}^* (N_1 \bar{u}_1^1 + N_2 \bar{u}_1^2) ds + \int_s \bar{t}_{22}^* (N_1 \bar{u}_2^1 + N_2 \bar{u}_2^2) ds + C \bar{u}_2^1 - \int_s \frac{1}{s} \bar{p}_2^* (N_1 \bar{q}^1 + N_2 \bar{q}^2) ds$$

$$\int_s s \bar{u}_1^* (N_1 \bar{t}_1^1 + N_2 \bar{t}_1^2) ds + \int_s s \bar{u}_2^* (N_1 \bar{t}_2^1 + N_2 \bar{t}_2^2) ds - \int_s \bar{q}^* (N_1 \bar{p}^1 + N_2 \bar{p}^2) ds + C \bar{p}^1 =$$

$$\int_s s \tilde{t}_1^* (N_1 \tilde{u}_1^1 + N_2 \tilde{u}_1^2) ds + \int_s s \tilde{t}_2^* (N_1 \tilde{u}_2^1 + N_2 \tilde{u}_2^2) ds - \int_s \tilde{p}^* (N_1 \tilde{q}^1 + N_2 \tilde{q}^2) ds$$

Matricialmente tem-se

$$G = \begin{vmatrix} \int_s N_1 \tilde{u}_{11}^* ds & \int_s N_1 \tilde{u}_{21}^* ds & -\int_s \frac{1}{s} N_1 \tilde{q}_1^* ds & \int_s N_2 \tilde{u}_{11}^* ds & \int_s N_2 \tilde{u}_{21}^* ds & -\int_s \frac{1}{s} N_2 \tilde{q}_1^* ds \\ \int_s N_1 \tilde{u}_{12}^* ds & \int_s N_1 \tilde{u}_{22}^* ds & -\int_s \frac{1}{s} N_1 \tilde{q}_2^* ds & \int_s N_2 \tilde{u}_{12}^* ds & \int_s N_2 \tilde{u}_{22}^* ds & -\int_s \frac{1}{s} N_2 \tilde{q}_2^* ds \\ \int_s s N_1 \tilde{u}_1^* ds & \int_s s N_1 \tilde{u}_2^* ds & -\int_s N_1 \tilde{q}^* ds + C & \int_s s N_2 \tilde{u}_1^* ds & \int_s s N_2 \tilde{u}_2^* ds & -\int_s N_2 \tilde{q}^* ds \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} \int_s N_1 \tilde{t}_{11}^* ds + C & \int_s N_1 \tilde{t}_{21}^* ds & -\int_s \frac{1}{s} N_1 \tilde{p}_1^* ds & \int_s N_2 \tilde{t}_{11}^* ds & \int_s N_2 \tilde{t}_{21}^* ds & -\int_s \frac{1}{s} N_2 \tilde{p}_1^* ds \\ \int_s N_1 \tilde{t}_{12}^* ds & \int_s N_1 \tilde{t}_{22}^* ds + C & -\int_s \frac{1}{s} N_1 \tilde{p}_2^* ds & \int_s N_2 \tilde{t}_{12}^* ds & \int_s N_2 \tilde{t}_{22}^* ds & -\int_s \frac{1}{s} N_2 \tilde{p}_2^* ds \\ \int_s s N_1 \tilde{t}_1^* ds & \int_s s N_1 \tilde{t}_2^* ds & -\int_s N_1 \tilde{p}^* ds & \int_s s N_2 \tilde{t}_1^* ds & \int_s s N_2 \tilde{t}_2^* ds & -\int_s N_2 \tilde{p}^* ds \end{vmatrix}$$

$$TP = \begin{vmatrix} \tilde{t}_1^1 \\ \tilde{t}_2^1 \\ \tilde{p}^1 \\ \tilde{t}_1^2 \\ \tilde{t}_2^2 \\ \tilde{p}^2 \end{vmatrix}$$

$$UQ = \begin{vmatrix} \tilde{u}_1^1 \\ \tilde{u}_2^1 \\ \tilde{q}^1 \\ \tilde{u}_1^2 \\ \tilde{u}_2^2 \\ \tilde{q}^2 \end{vmatrix}$$

Onde

$\vec{t}_i^k$ - vetor tensão no nó k na direção i

$\tilde{p}^k$ - pressão no nó k (escalar)

$\tilde{u}_i^k$ - deslocamento no nó k na direção i

$\tilde{q}^k$ - descarga (vazão) no nó k (na direção da normal)

Os índices i e k variam de 1 a 2

Generalizando-se, para N elementos, as matrizes e vetores acima, obtém-se

$$G = \begin{vmatrix} \int_{s_1} N_1 \tilde{u}_{11}^* ds & \int_{s_1} N_1 \tilde{u}_{21}^* ds & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_1 \tilde{q}_1^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{u}_{11}^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{u}_{21}^* ds & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_2 \tilde{q}_1^* ds \\ \int_{s_1} N_1 \tilde{u}_{12}^* ds & \int_{s_1} N_1 \tilde{u}_{22}^* ds & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_1 \tilde{q}_2^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{u}_{12}^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{u}_{22}^* ds & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_2 \tilde{q}_2^* ds \\ \int_{s_1} s N_1 \tilde{u}_1^* ds & \int_{s_1} s N_1 \tilde{u}_2^* ds & -\int_{s_1} N_1 \tilde{q}^* ds + C & \int_{s_1} s N_2 \tilde{u}_1^* ds & \int_{s_1} s N_2 \tilde{u}_2^* ds & -\int_{s_1} N_2 \tilde{q}^* ds \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} \int_{s_1} N_1 \tilde{t}_{11}^* ds + C & \int_{s_1} N_1 \tilde{t}_{21}^* ds & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_1 \tilde{p}_1^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{t}_{11}^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{t}_{21}^* ds & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_2 \tilde{p}_1^* ds \\ \int_{s_1} N_1 \tilde{t}_{12}^* ds & \int_{s_1} N_1 \tilde{t}_{22}^* ds + C & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_1 \tilde{p}_2^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{t}_{12}^* ds & \int_{s_1} N_2 \tilde{t}_{22}^* ds & -\int_{s_1} \frac{1}{s} N_2 \tilde{p}_2^* ds \\ \int_{s_1} s N_1 \tilde{t}_1^* ds & \int_{s_1} s N_1 \tilde{t}_2^* ds & -\int_{s_1} N_1 \tilde{p}^* ds & \int_{s_1} s N_2 \tilde{t}_1^* ds & \int_{s_1} s N_2 \tilde{t}_2^* ds & -\int_{s_1} N_2 \tilde{p}^* ds \end{vmatrix}$$

$$TP = \begin{bmatrix} \tilde{t}_1^{1j} \\ \tilde{t}_2^{1j} \\ \tilde{p}^{1j} \\ \tilde{t}_1^{2j} \\ \tilde{t}_2^{2j} \\ \tilde{p}^{2j} \end{bmatrix} \quad UQ = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{1j} \\ \tilde{u}_2^{1j} \\ \tilde{q}^{1j} \\ \tilde{u}_1^{2j} \\ \tilde{u}_2^{2j} \\ \tilde{q}^{2j} \end{bmatrix}$$

Onde

$\tilde{t}_i^{kj}$ - vetor tensão no nó k do elemento j na direção i

$\tilde{p}^{kj}$ - pressão no nó k do elemento j (escalar)

$\tilde{u}_i^{kj}$ - deslocamento no nó k do elemento j na direção i

$\tilde{q}^{kj}$ - descarga(vazão) no nó k do elemento j (na direção da normal)

Os índices j e l variam de 1 a N. O índice k varia de 1 a 2 e o índice i, no caso bidimensional, também de 1 a 2.

Observe-se que quando o índice j é diferente do índice l, o que significa integração em elemento que não aquele onde se encontra o ponto de colocação, a constante C é nula. Esta constante é diferente de zero apenas nas submatrizes diagonais.

A constante C é o ângulo interno (dentro do domínio) formado pelos elementos convergentes no nó. Para pontos no domínio ela é igual a 2π .

Na presente situação as matrizes G e H tem dimensões (3Nx6N) e os vetores TP e UQ, (6N).

Monta-se, então, a equação matricial abaixo

$$[G][TP] = [H][UQ] \quad (5.2.01)$$

Em um problema bem posto, em cada nó da discretização, conhece-se o vetor tensão ou o deslocamento e a pressão ou a vazão. Os vetores tensão em geral são conhecidos e, supondo a pressão dada, fica-se com as constantes no vetor TP multiplicando a matriz G e as incógnitas no vetor UQ, que multiplica a matriz H. Quando isto não ocorrer, intercambia-se as colunas de G e H,

convenientemente, de tal modo que as condições de contorno conhecidas (dados) fiquem multiplicadas por G e as incógnitas, por H.

Necessita-se remontar a matriz H tornando-a quadrada, para que se possa solucionar o sistema.

Observe-se que, pelas condições de compatibilidade (continuidade nos nós), necessariamente, tem-se

$$u_i^{2j} = u_i^{1(j+1)} \quad j = 1, N$$

Ou seja, o deslocamento na direção i no nó 2 do elemento j deve ser igual ao deslocamento na mesma direção no nó 1 do elemento (j+1).

Além disto, considerando que a pressão é um escalar

$$p^{2j} = p^{1(j+1)} \quad j = 1, N$$

Ou seja, a pressão no nó 2 do elemento j deve ser igual a pressão no nó 1 do elemento (j+1).

Assim a matriz H que era (3Nx6N) reduz-se a uma matriz quadrada (3Nx3N), ao se somar duas a duas, convenientemente suas colunas. O vetor UQ também é remontado reduzindo-se sua dimensão a 3N, seguindo as mesmas considerações anteriores. Deste modo é montado o sistema abaixo

$$[A][x] = [b]$$

A seguir o sistema é resolvido numericamente [47, 48], obtendo-se as incógnitas no contorno. As variáveis no domínio são obtidas usando-se a identidade de Somigliana (apêndice E item E11) com C igual a 2π .

Em cada nó pode-se ter as seguintes situações:

- Os vetores tensão na direção i, antes e depois do nó são dados. Calcula-se os deslocamentos na direção i, à esquerda e à direita, que são, necessariamente, iguais.
- O vetor tensão na direção i, à esquerda (ou à direita), e o deslocamento na direção i, à direita (ou à esquerda) do nó são dados. Calcula-se o vetor tensão na direção i,

- à direita (ou à esquerda) do nó. O deslocamento não dado é igual ao fornecido, necessariamente.
- Os deslocamentos na direção i , à esquerda e à direita, necessariamente iguais, são dados. Calcula-se os vetores tensão na direção i , à esquerda e à direita, supostos iguais.
 - As pressões, à esquerda e à direita, necessariamente iguais, são dadas. Calcula-se as vazões, à esquerda e à direita, supostas iguais.
 - A pressão à esquerda (ou à direita) e a vazão à direita (ou à esquerda) são dadas. Calcula-se a vazão à esquerda (ou à direita) do nó. A pressão desconhecida é igual à dada, necessariamente.
 - As vazões, à esquerda e à direita, são conhecidas. As pressões, nos 2 lados do nó, são calculadas, obtendo-se valores necessariamente iguais.

5.3 Derivadas e normal

As derivadas e a normal são calculadas numericamente conforme a formulação a seguir.

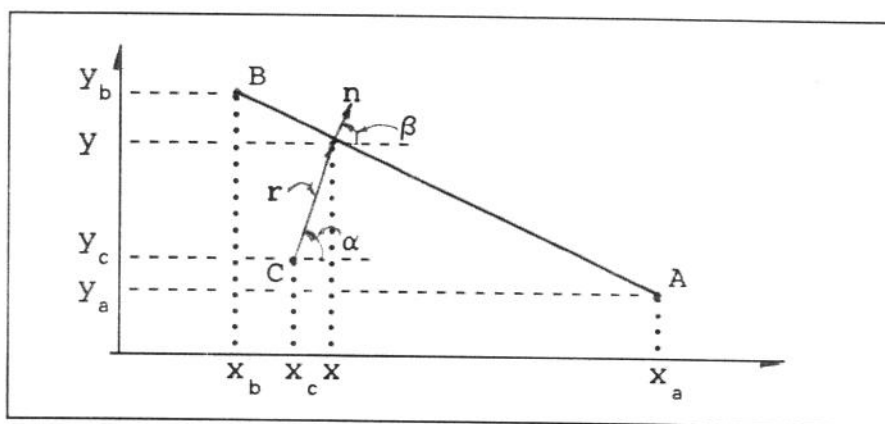


Figura 5.3.01 - Derivadas e normal

$$r = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}$$

$$r_{,x} = (x-x_c)/r = \cos \alpha$$

$$CE = \sqrt{(x_a-x_b)^2 + (y_a-y_b)^2}$$

$$r_{,y} = (y-y_c)/r = \sin \alpha$$

$$n_x = (y_b - y_a)/CE = \cos \beta$$

$$n_y = (x_a - x_b)/CE = \sin \beta$$

Quando o ponto de colocação (C) está em um dos nós do elemento de integração, para elementos constantes ou lineares, tem-se no 1º nó

$$\alpha = \beta + \pi/2$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = -\cos \beta$$

No 2º nó, as relações são

$$\alpha = \beta - \pi/2$$

$$\cos \alpha = -\sin \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

Nos 2 nós tem-se, portanto

$$r_{,1} n_1 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \sin \beta \cos \beta - \sin \beta \cos \beta = 0$$

Esta derivada direcional, nula para discretizações com elementos lineares ou constantes, faz com que a integral de algumas soluções fundamentais singulares seja identicamente nula.

5.4 Singularidades

Ao se integrar ao longo do elemento onde se acha o ponto de colocação, o raio (distância do ponto de colocação ao ponto de integração) tenderá a zero com a aproximação destes dois pontos. Algumas das soluções fundamentais utilizadas apresentam singularidade nesta situação. Existem algumas maneiras de resolver este problema [49,68,70,73].

As soluções fundamentais foram agrupadas em singulares e não singulares. As singulares podem apresentar singularidade fraca (integrável) ou singularidade forte (não integrável). Segundo análise feita por Borba [39], as soluções fundamentais para poroelasticidade aqui usadas, equações (4.4.10) a (4.4.17), com o contorno discretizado em elementos constantes ou lineares podem ser agrupadas do seguinte modo:

-Soluções fundamentais sem singularidade

$$\bar{t}_{11}^*, \bar{t}_{22}^*, \bar{u}_{12}^*, \bar{u}_{21}^*, \bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \bar{p}_1^*, \bar{p}_2^*, \bar{q}^*$$

-Soluções fundamentais com singularidade fraca

$$\bar{u}_{11}^*, \bar{u}_{22}^*, \bar{t}_1^*, \bar{t}_2^*, \bar{q}_1^*, \bar{q}_2^*, \bar{p}^*$$

-Soluções fundamentais com singularidade forte

$$\bar{t}_{12}^*, \bar{t}_{21}^*$$

A análise da singularidade forte apresentada por $\bar{t}_{12}^*$ e $\bar{t}_{21}^*$ é feita no Apêndice D. Lá é demonstrado que o fator de forma N2 elimina a singularidade ao se efetuar a integração, restando singulares apenas $N1\bar{t}_{12}^*$ e $N1\bar{t}_{21}^*$.

Na solução numérica usou-se a analogia do movimento de corpo rígido para se determinar os termos singulares, como será visto a seguir [20, 49, 83].

5.5 Movimento de corpo rígido

As soluções fundamentais para poroelasticidade utilizadas neste trabalho, com o contorno discretizado com elementos lineares ou constantes, apresentam singularidade forte somente nos componentes t_{12} e t_{21} [39]. As possíveis outras singularidades são eliminadas pela condição da direção da normal ser perpendicular à direção do raio, conforme mostrado no item 5.3 ou pela multiplicação pelo fator de forma, como mostrado no apêndice D.

Na implementação numérica os elementos singulares foram obtidos usando-se a analogia do movimento de corpo rígido constante [20,46], como será descrito a seguir.

Se um movimento de corpo rígido constante for aplicado tanto ao sólido como ao líquido, em um domínio interior de um meio poroso, tal que não ocorra movimento relativo algum entre o líquido e o sólido, pode ser demonstrado que não há geração alguma nem de tensões, nem de trações (vetor tensão) e nem de pressão no domínio.

As condições impostas são as seguintes:

$$\tilde{u}_i = A_i/s \qquad \tilde{q}_i = 0$$

Onde A_i é um deslocamento constante na direção i e s é o parâmetro de Laplace.

As condições resultantes são:

$$\tilde{t}_i = 0 \qquad \tilde{p} = 0 \qquad \tilde{q} = 0$$

Observe-se a equação matricial abaixo

$$[G'] [TQ] = [H'] [UP]$$

As matrizes G' e H' são as matrizes G e H da equação 5.2.01, com colunas conveniente intercambiadas de modo a trocar de membro as variáveis no contorno, $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$

Os componentes do vetor TQ são todos nulos conforme as condições resultantes, conseqüentemente o 1º membro é nulo. No 2º membro todos os componentes do vetor UP , que representam os deslocamentos em determinada direção, são constantes, iguais e diferentes de 0, segundo as condições impostas.

Devido ao acima exposto a soma dos elementos de uma mesma linha na matriz H' que multiplicam o deslocamento constante e igual na direção i , deve ser nula. Assim sendo a integral do termo singular, o qual se acha na submatriz diagonal é igual a soma dos termos correspondentes fora desta submatriz, com o sinal trocado [20].

No caso de domínio exterior esta analogia do movimento de corpo rígido constante não mais pode ser aplicada. Pode ser demonstrado [20,39] que neste caso a soma dos termos referidos no parágrafo anterior é igual a $2\pi I$, sendo I a matriz identidade mostrada abaixo.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe-se que todas as considerações e conclusões deste item são válidas só e somente só para discretizações com elementos

constantes ou lineares. Caso se use elementos de ordem superior é necessário que seja feita uma análise completa de todos os termos com singularidade forte e como eles podem ser obtidos.

5.6 Integração numérica

As integrações das soluções fundamentais, ao longo de cada elemento, quando possíveis de serem feitas analiticamente são muito trabalhosas. Normalmente são calculadas numericamente. Neste trabalho elas foram calculadas usando-se o método de integração de Gauss com polinômios de Legendre [47,48,110].

No apêndice E, item E13, descreve-se sucintamente este método.

Na integração das funções com singularidade fraca foram usados 16 pontos de integração e daquelas sem singularidade apenas 8 pontos.

Para a integração das funções com singularidade fraca, Borba [39] subdivide o elemento onde é feita a integração em quatro sub-elementos iguais dois a dois. Os dois menores, que equivalem a 2% do comprimento do elemento, são simetricamente dispostos junto ao nó. Estes dois elementos menores são integrados usando integração Gaussiana com 32 pontos cada um. Nos maiores são usados também, 32 pontos. Borba trabalhou apenas com elementos constantes. Este modo de integrar a funções com singularidade fraca não foi usado nesta tese e obteve-se resultados com a mesma precisão com apenas 16 pontos tanto com elementos constantes como lineares.

5.7 Funções de Bessel

Nas soluções fundamentais, equações (4.4.10) a 4.4.17), aparecem as funções de Bessel modificadas de 2º espécie K_0 de ordem ν [111, 112]. Algumas propriedades destas funções são fornecidas no Apêndice E, item E12.

Estas funções foram calculadas numericamente usando-se um desenvolvimento em série [48, 105], reproduzido no Apêndice D item D2.

5.8 Inversão numérica das transformadas de Laplace

Como já foi dito, as soluções fundamentais para a poroelasticidade aqui usadas se encontram no campo de Laplace. De algum modo precisa-se inverte-las numericamente, pois a inversão analítica é impossível.

Vários métodos são encontrados na literatura [75, 76, 77, 79, 80, 81]. Um estudo comparativo destes métodos é feito em [80], onde eles são classificados segundo alguns critérios.

Na realidade não existe um método que sirva para todas as situações e esta operação de inversão numérica ainda é mais arte do que técnica [80, 83].

5.8.1 O método de Stehfest

O método apresentado por Stehfest [77] é muito popular em engenharia de petróleo nos problemas de fluxo de fluidos em meios porosos [62]. Este método obteve um conceito muito bom no estudo comparativo feito por Davis & Martin [80] pela sua precisão, eficiência e estabilidade.

O método baseia-se em amostrar os dados a serem invertidos de acordo com uma série delta. A solução aproximada no tempo é dada por

$$f(t) = (\ln 2)/t * \sum_{n=1}^N C_n \tilde{f}[n * (\ln 2)/t]$$

O coeficiente C_n é calculado através do somatório abaixo

$$C_n = (-1)^{n+N/2} \sum_{k=(n+1)/2}^{\min(n, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(n/2-k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!}$$

Normalmente são usados entre 10 e 20 coeficientes na fórmula de interpolação, sendo N sempre um número par. Nas inversões efetuadas nesta tese foram utilizados 10 coeficientes.

Este método fornece bons resultados para a inversão de funções suaves. Já para outras funções, principalmente para

aquelas que apresentam variações bruscas na derivada, os resultados são ruins, como se verá nas figuras seguintes.

A figura 5.8.01 mostra a inversão de uma reta com um resultado excelente.

Na figura 5.8.02 é mostrada a inversão da função

$$f(t) = \frac{e^{-1/(16t)}}{4(\pi t^3)^{.5}}$$

Na figura 5.8.03 mostra-se a inversão da função

$$f(t) = e^{-t} \text{seno } t$$

Nas figura 5.8.04 e 5.8.05 mostra-se as inversões das funções seno e coseno com resultados pouco satisfatórios.

Fez-se também um estudo do efeito do número de coeficientes usados nos resultados obtidos. Para isto usou-se o problema de um cilindro de paredes espessas com raio externo muito maior do que o interno, carregado radialmente com 10 MPa. O contorno foi discretizado com 128 elementos lineares.

Este problema se acha minuciosamente estudado no item 6.3.

As figuras de 5.8.06 a 5.8.10 mostram os resultados deste estudo. Como se pode ver acima de 16 coeficientes este método de inversão começa a não funcionar bem. Nas variáveis derivadas problemas começam a ocorrer a partir de 14 coeficientes. A causa disto é que os coeficientes começam a diferenciar-se muito uns dos outros criando problemas numéricos.

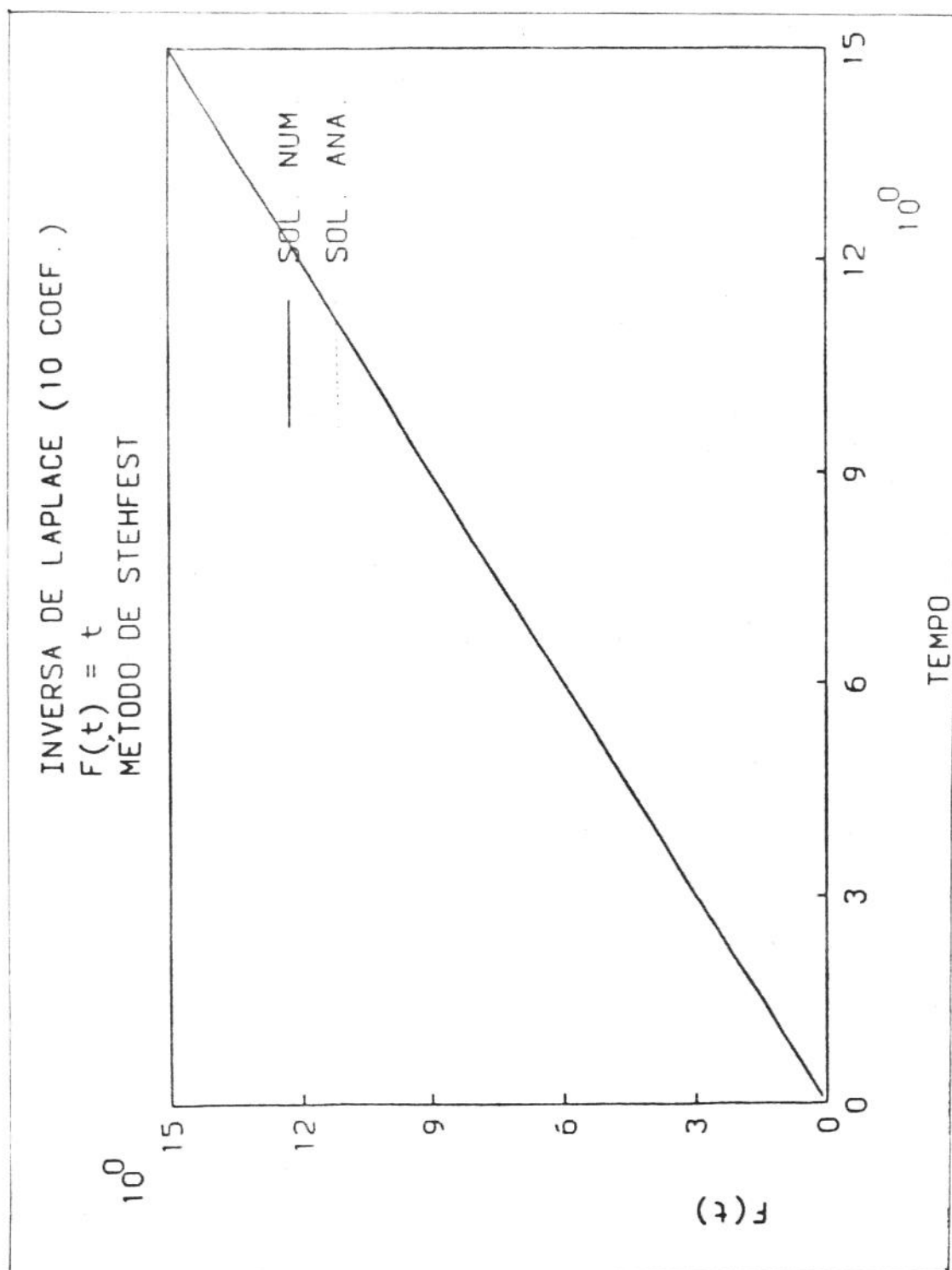


Figura 5.8.01 - Aplicação do método de Stehfest
 Exemplo 1

INVERSA DE LAPLACE (10 COEF.)
 $F(t) = \exp(-1/(16*t)) / (4*\sqrt{PI*t**3})$
 MÉTODO DE STEHFEST

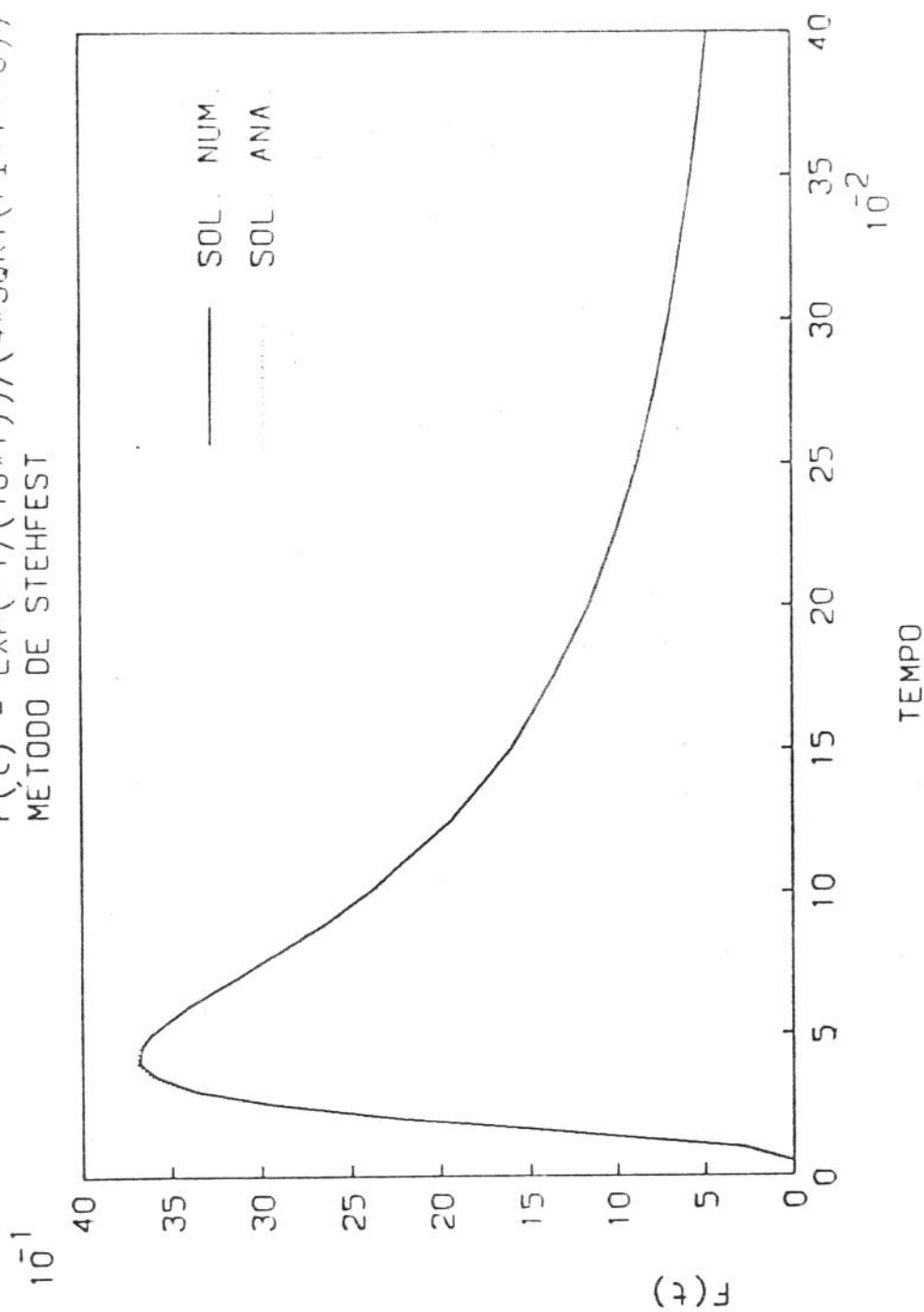


Figura 5.8.02 - Aplicação do método de Stehfest
 Exemplo 2

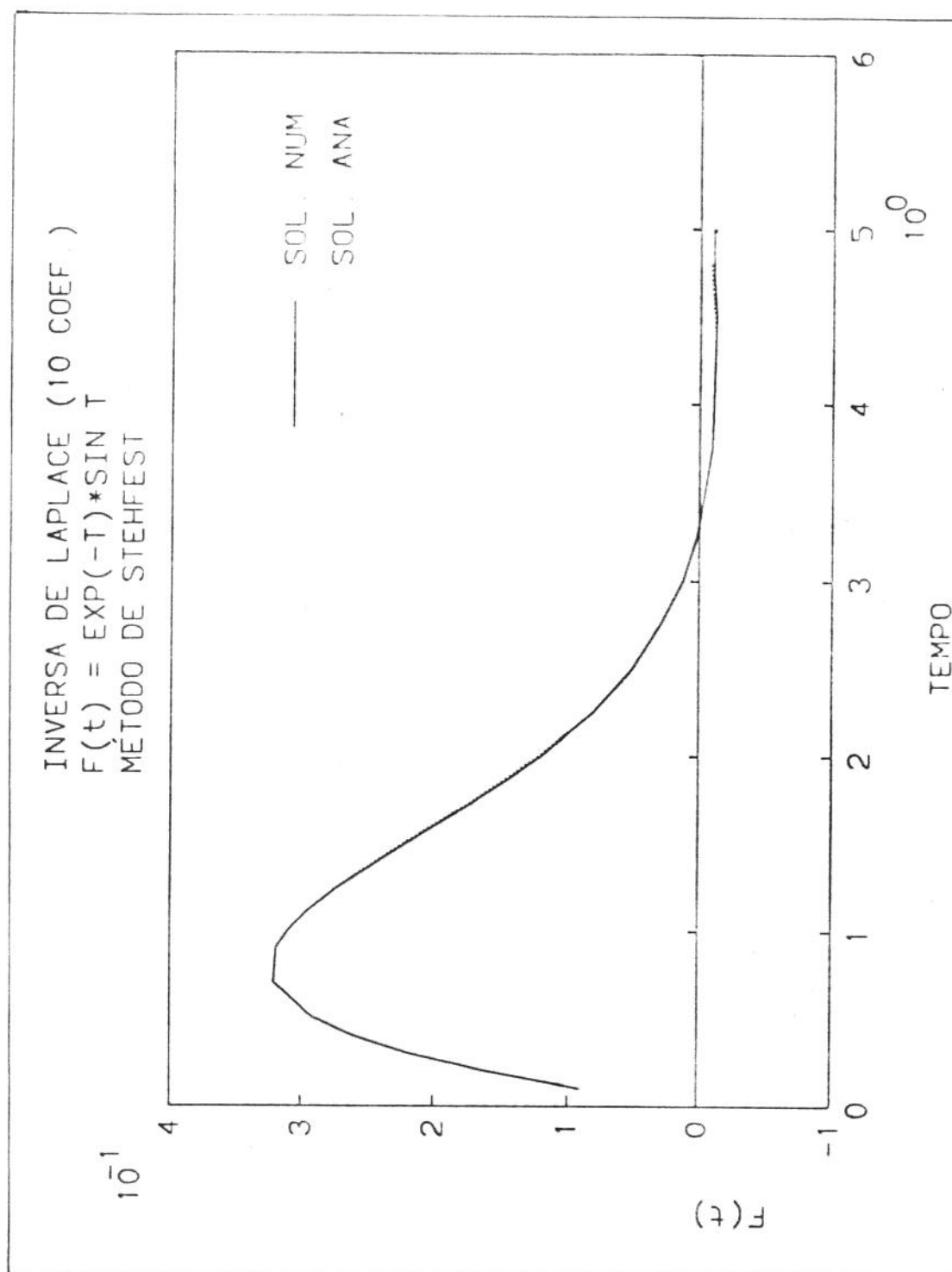


Figura 5.8.03 - Aplicação do método de Stehfest
 Exemplo 3

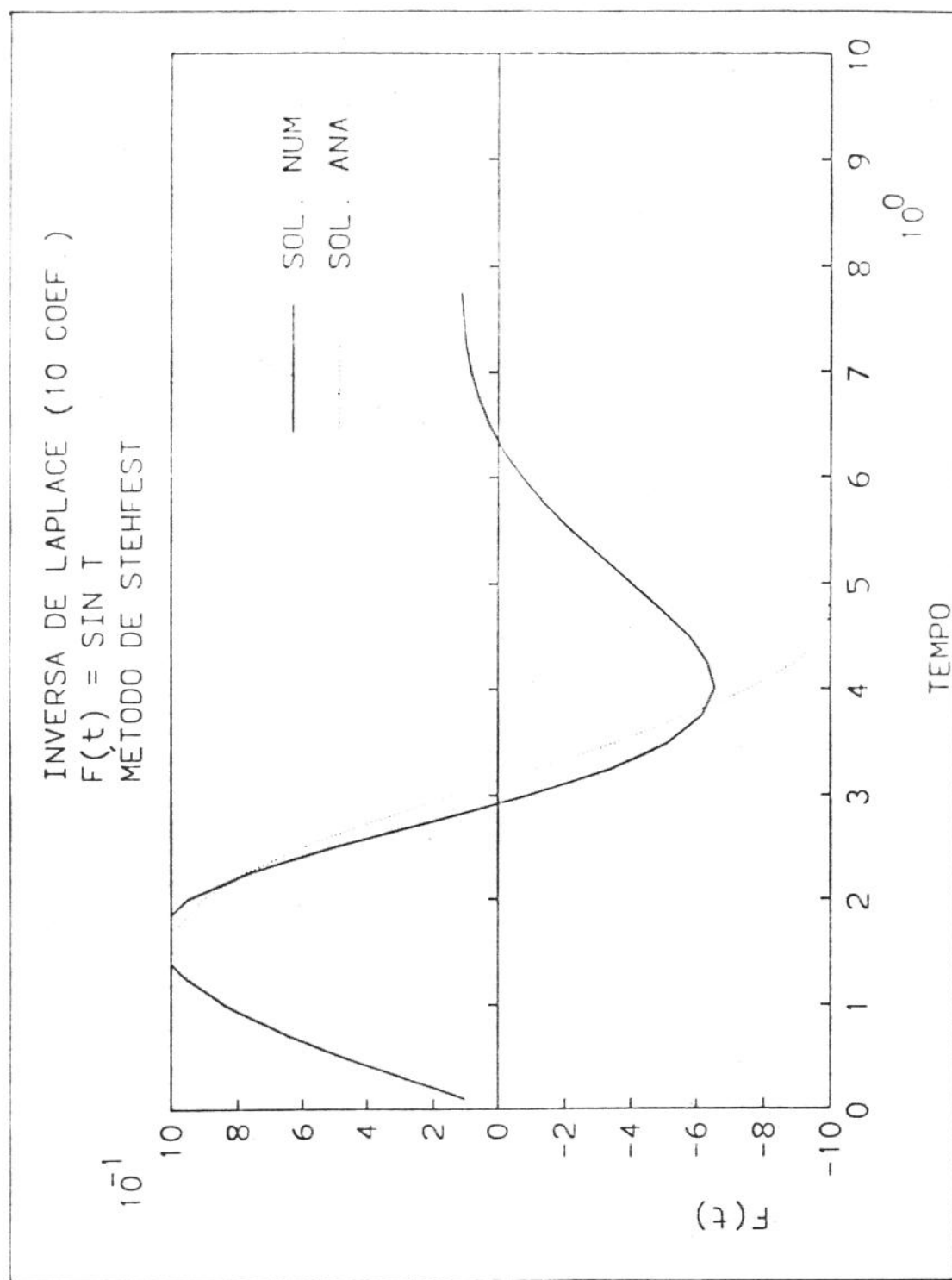


Figura 5.8.04 - Aplicação do método de Stehfest
 Exemplo 4

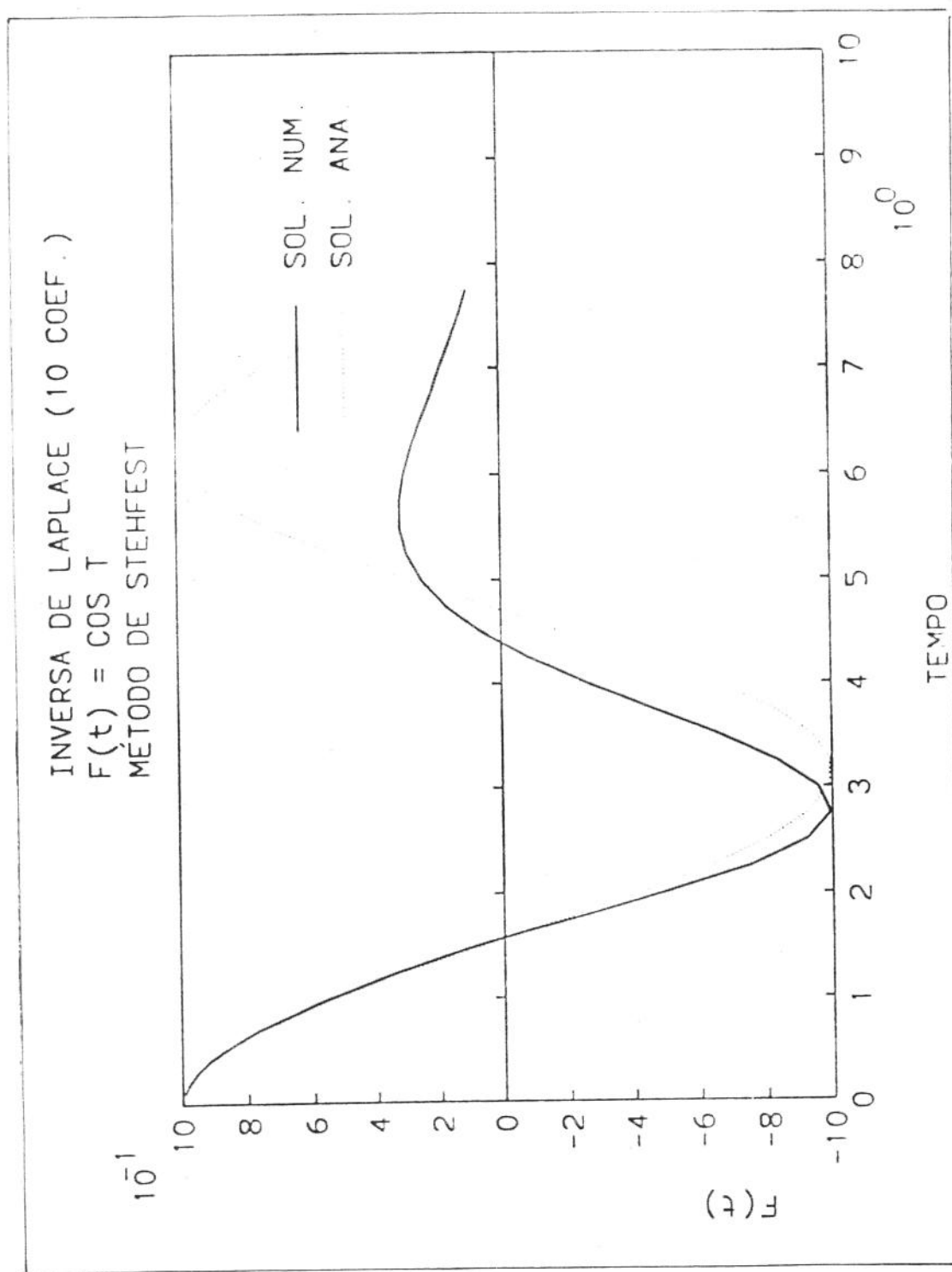


Figura 5.8.05 - Aplicação do método de Stehfest
 Exemplo 5

CILINDRO DE PAREDES ESPESSAS - INVERSÃO NUMÉRICA
 DESLOCAMENTO RADIAL NORMALIZADO
 SIGR = -10 MPa

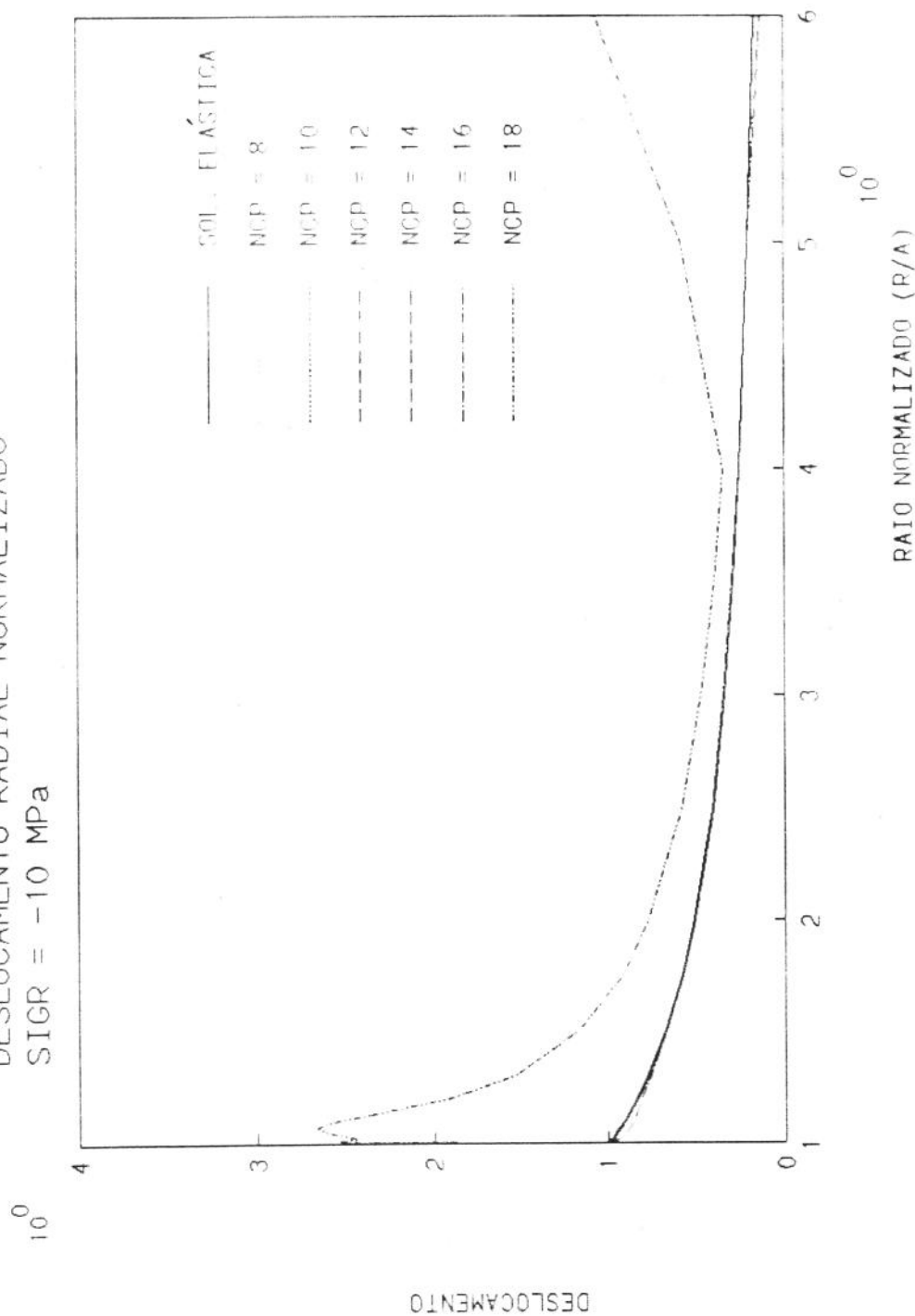


Figura 5.8.06 - Método de Stehfest
 Deslocamento radial
 Variação com o número de coeficientes

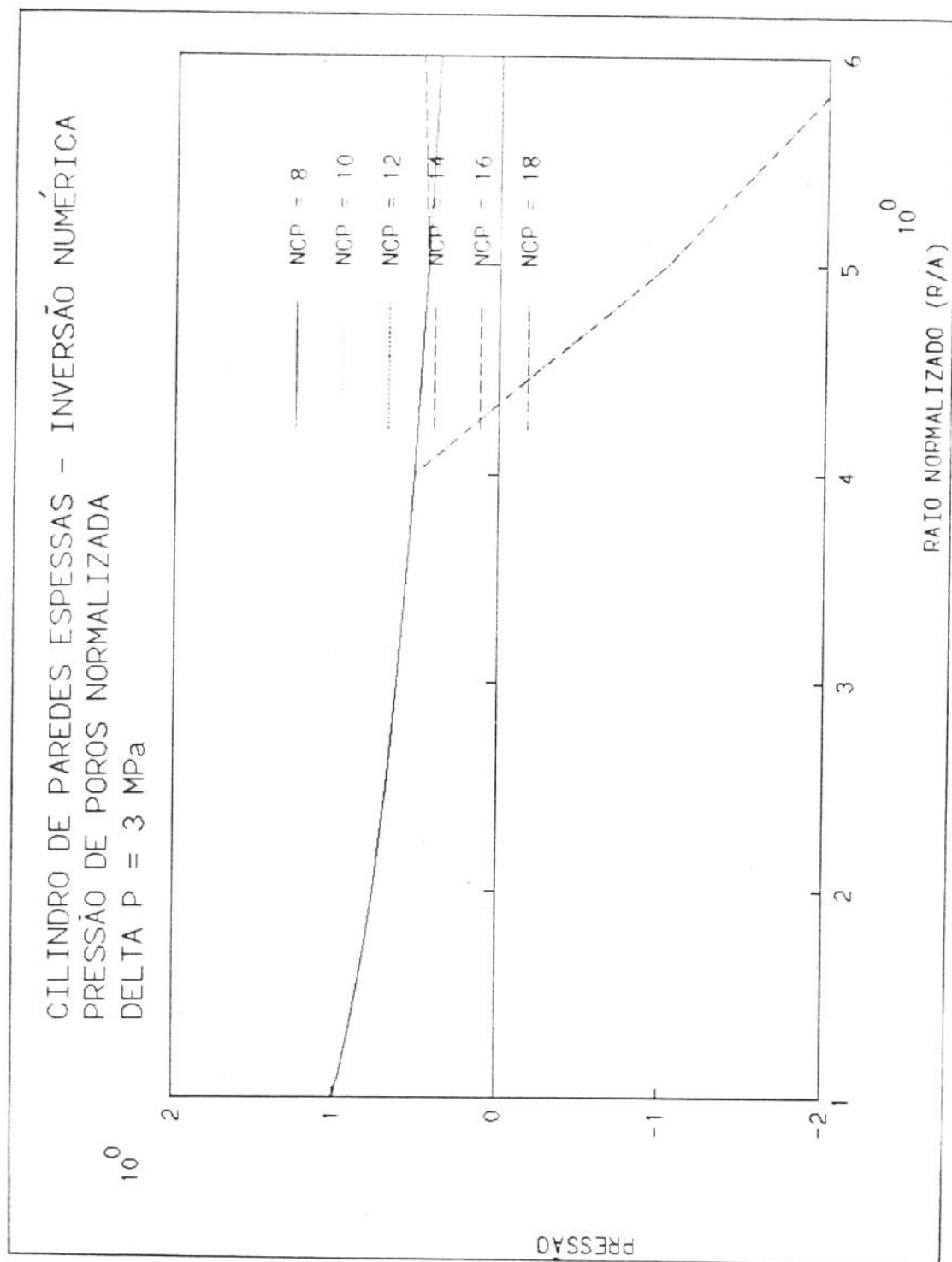


Figura 5.8.07 - Método de Stehfest
Pressão de poros
Variação com o número de coeficientes

CILINDRO DE PAREDES ESPESSAS - INVERSÃO NUMÉRICA
TENSÃO RADIAL NORMALIZADA

SIGR = -10 MPa $T^* = 100$

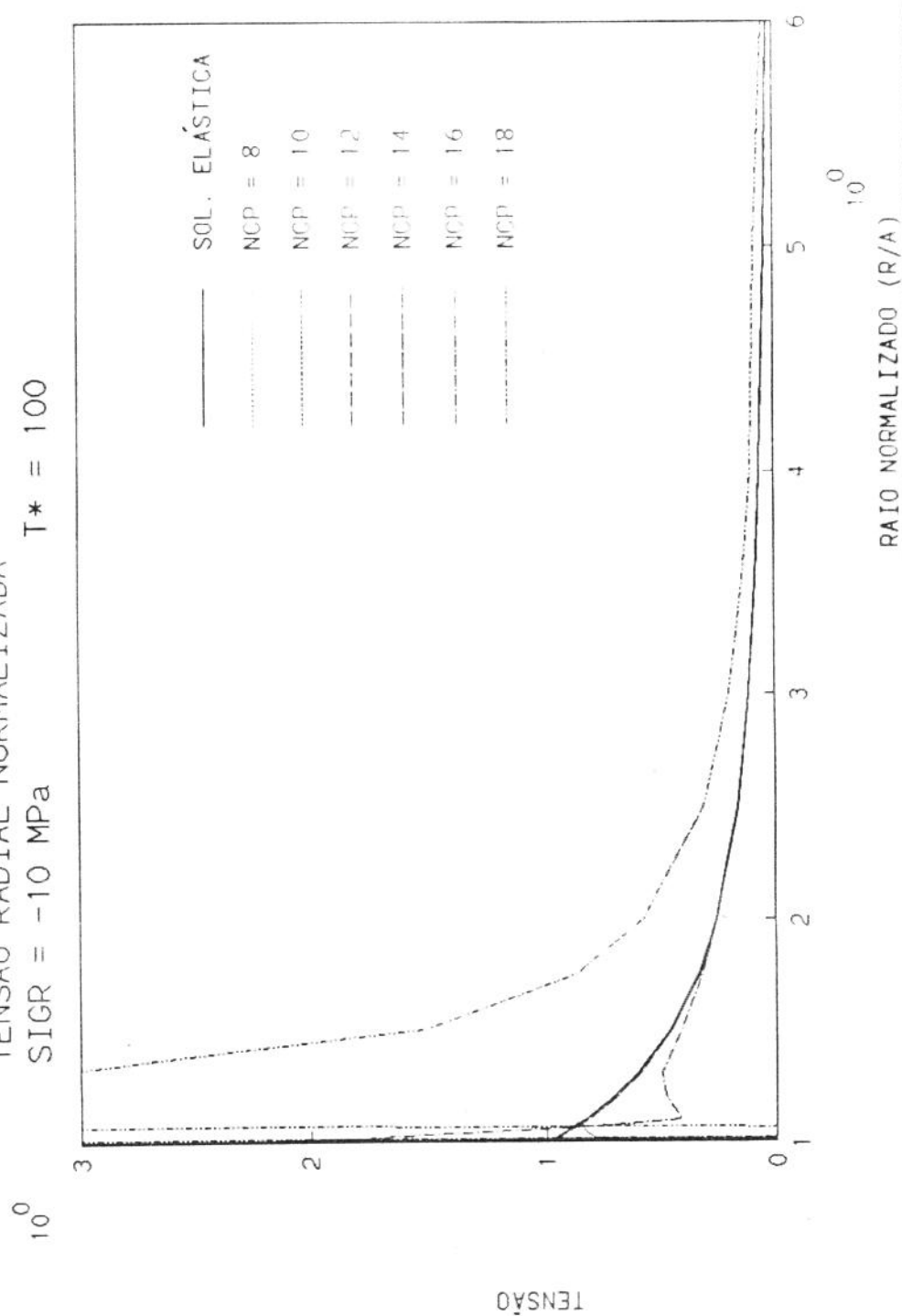


Figura 5.8.08 - Método de Stehfest

Tensão radial

Variação com o número de coeficientes

CILINDRO DE PAREDES ESPESSAS - INVERSÃO NUMÉRICA
 TENSÃO CIRCUNFERENCIAL NORMALIZADA
 $SIGR = -10 \text{ MPa}$ $T^* = 100$

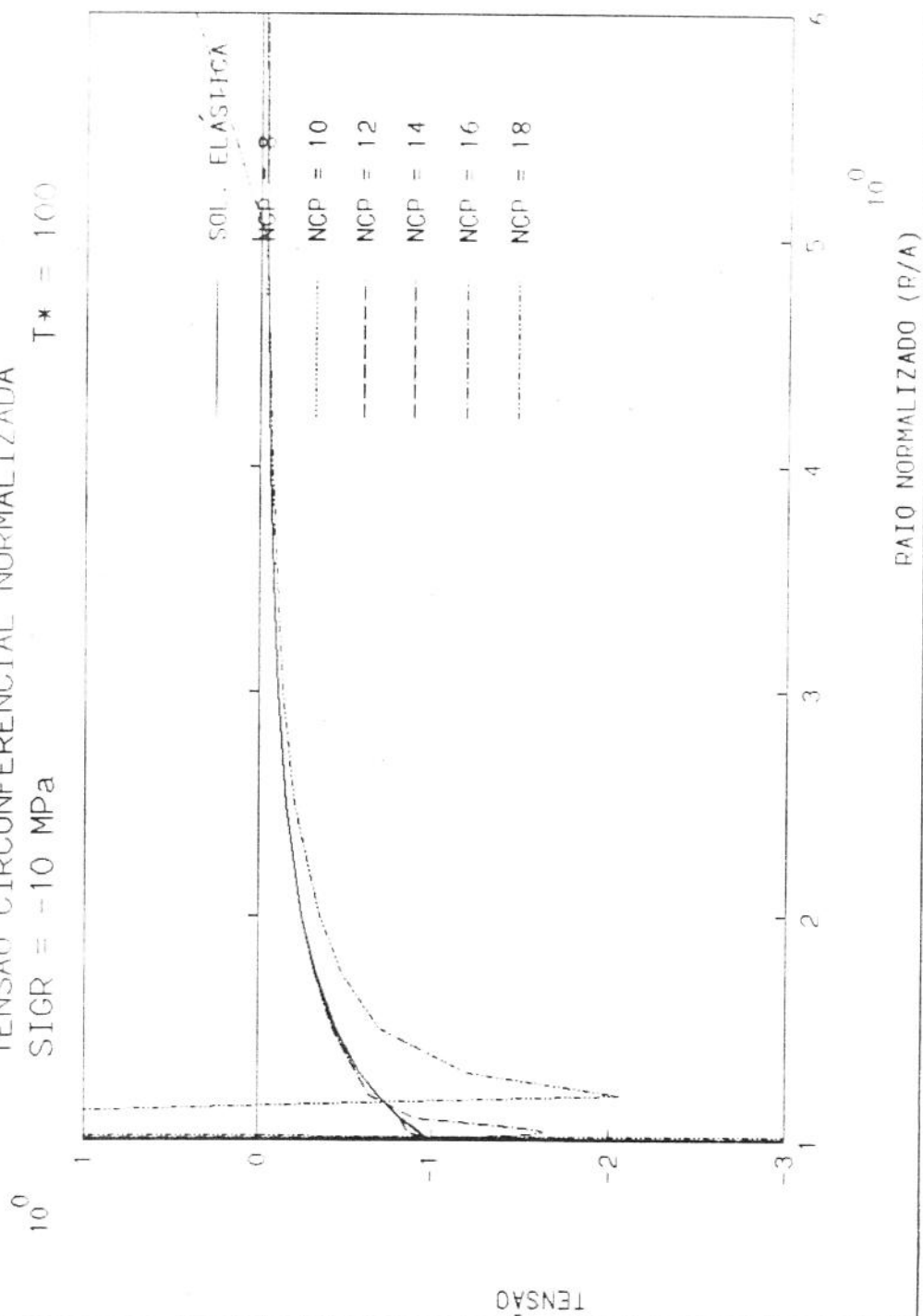


Figura 5.8.09 - Método de Stehfest
 Tensão circunferencial
 Variação com o número de coeficientes

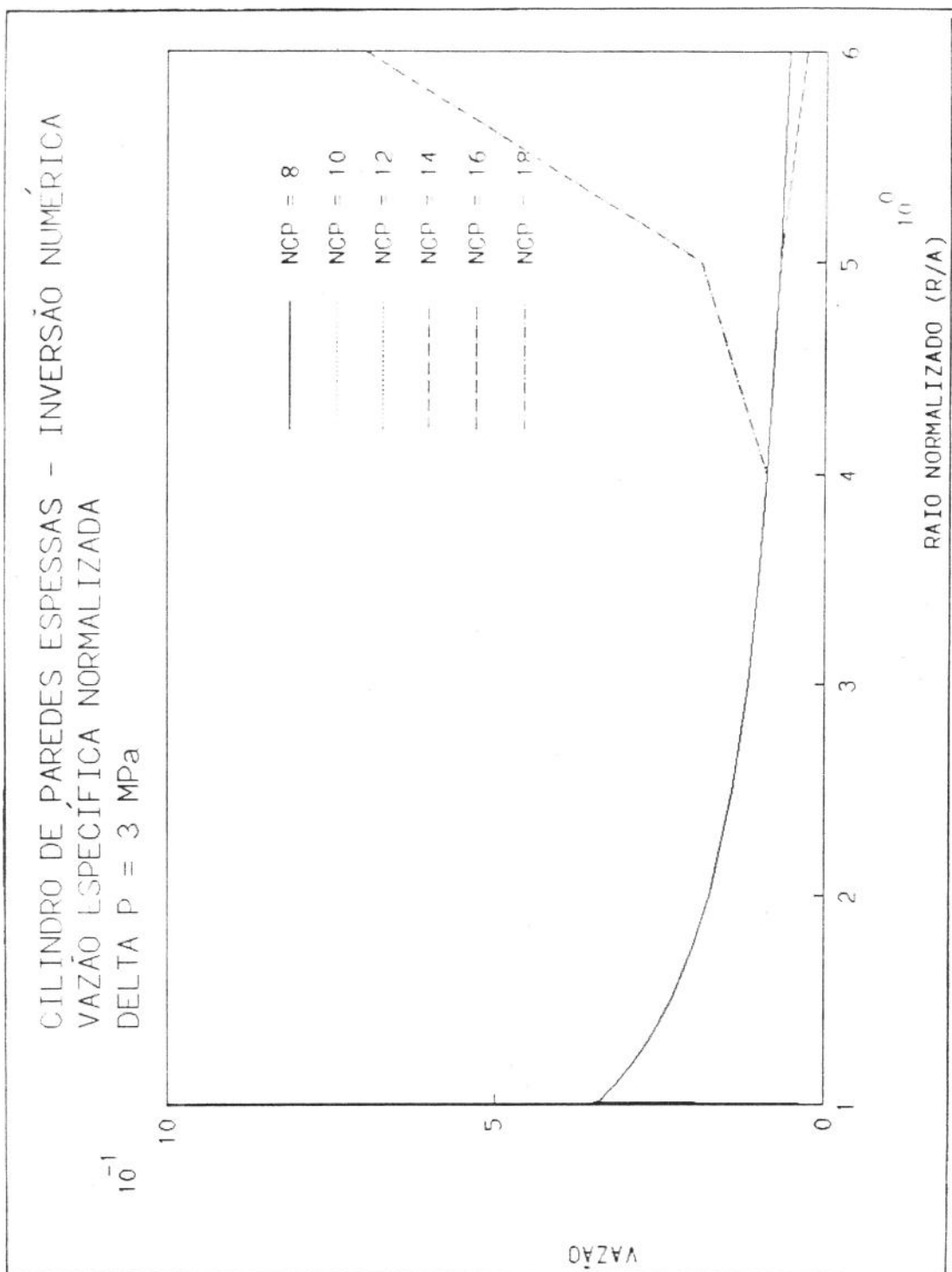


Figura 5.8.10 - Método de Stehfest
Vazão específica
Variação com o número de coeficientes

5.8.2 O método de Crump

O método de inversão numérica das transformadas de Laplace proposto por Crump [79] usa uma aproximação por série de Fourier. O valor aproximado da função em certo tempo t é dado por:

$$f(t) \approx (e^{at}/T) \left\{ \tilde{f}(a)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \operatorname{Re}[\tilde{f}(a+k\pi i/T)] \cos(k\pi t/T) + \right. \\ \left. - \{ \operatorname{Im}[\tilde{f}(a+k\pi i/T)] \sin(k\pi t/T) \} \right\}$$

$$a = \alpha - \operatorname{Ln}(E)/(2T)$$

$$T = 0,8t$$

$$i = \sqrt{-1}$$

A constante α deve ser um pouco maior do que a parte real de um dos polos de $\tilde{f}(s)$. Um bom valor para o erro relativo, E , é 10^{-8} .

Neste método de inversão existem 2 fontes de erro, além do erro de arredondamento. Primeiramente, há um erro devido aos coeficientes da série de Fourier não serem exatos, sendo apenas aproximações obtidas usando-se $\tilde{f}(s)$. A outra causa de erro é o fato da série não ser somada até o infinito (erro de truncamento).

Este método é sem dúvidas o que fornece melhores resultados em quase todas as situações [79, 80]. Seu grande inconveniente é o tempo de computação, que é grande e bem maior do que o gasto pelo método de Stehfest. Um outro inconveniente é o espaço de memória ocupado, que é grande, pois são usadas variáveis complexas. Em situações em que não haja um grande número de dados a serem invertidos este deve ser o método utilizado.

As figuras seguintes mostram claramente a eficiência do método.

A figura 5.8.11 mostra a inversão da função

$$f(t) = (\pi e^{-t/5} \text{seno } t)/4$$

A figura 5.8.12 mostra a inversão da função seno e a figura 5.6.13, a inversão da função coseno.

Na figura 5.8.14 mostra-se a inversão da função de Heaviside.

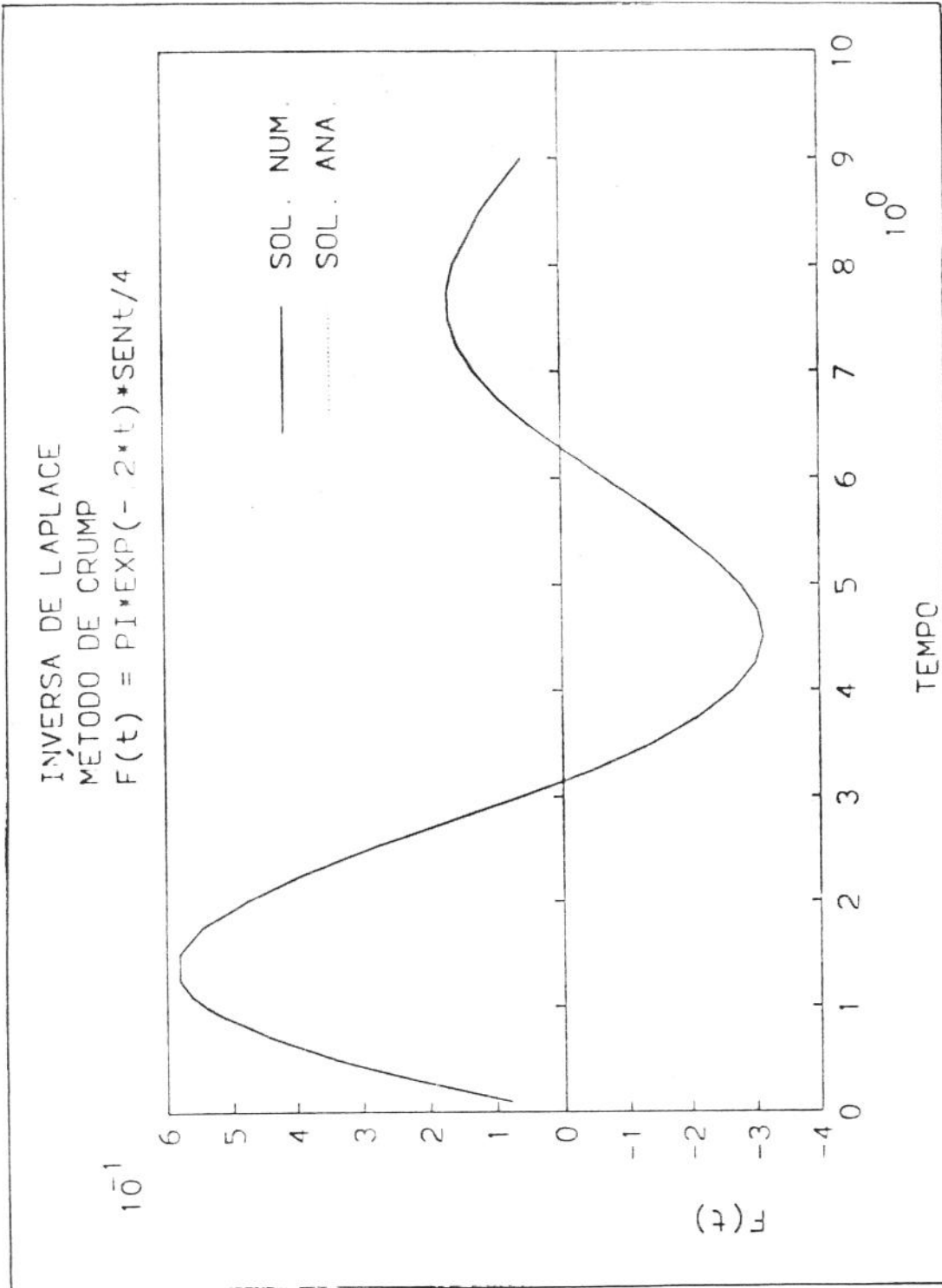


Figura 5.8.11 - Aplicação do método de Crump
Exemplo 1

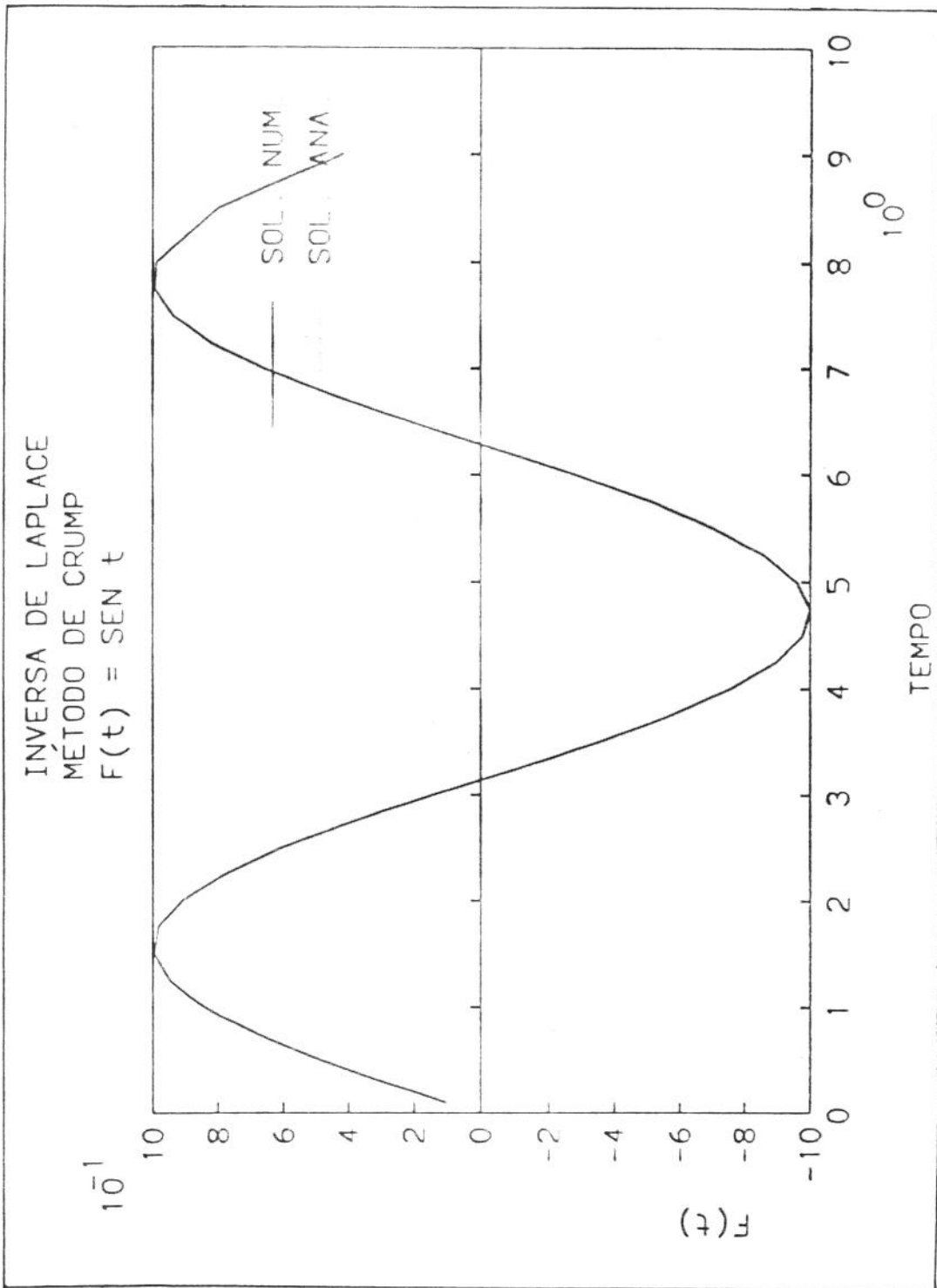


Figura 5.8.12 - Aplicação do método de Crump
Exemplo 2

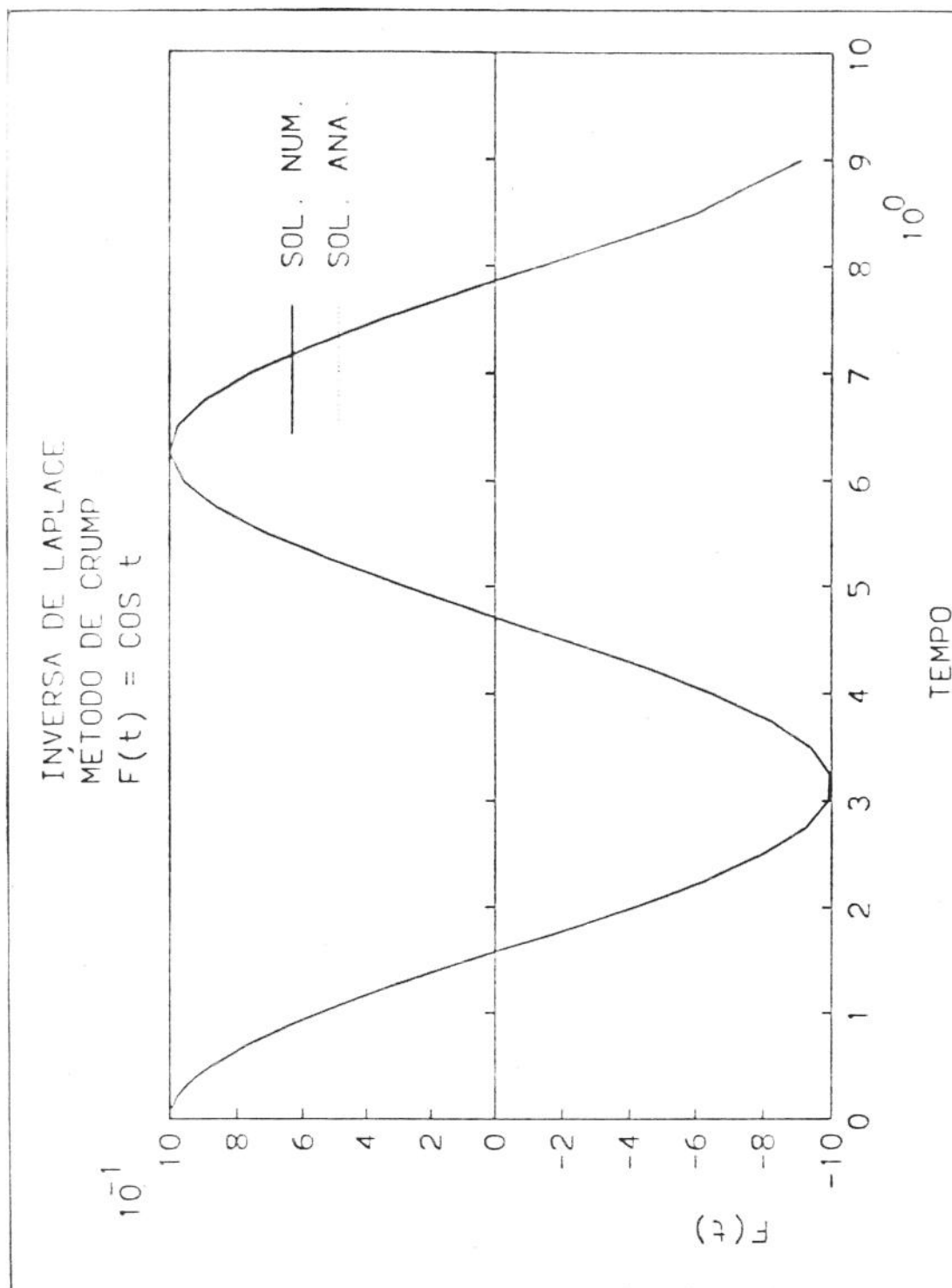


Figura 5.8.13 - Aplicação do método de Crump
Exemplo 3

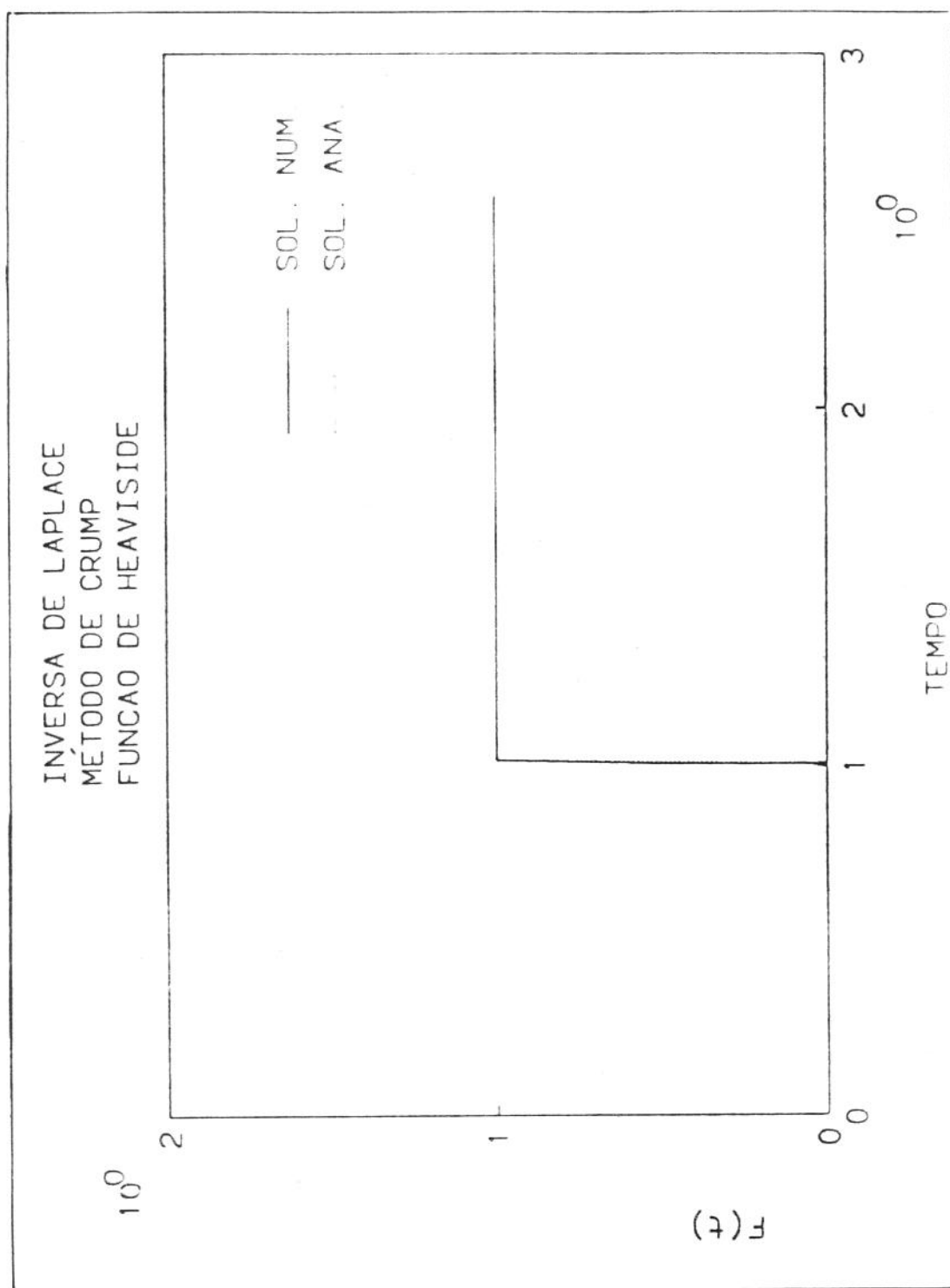


Figura 5.8.14 - Aplicação do método de Crump
Exemplo 4

A tabela abaixo mostra a força deste método testada na inversão da função delta de Dirac (Apêndice E, item E5).

x	$\delta(x)$
.01	8.90209479E-60
.02	-7.17464816E-36
.03	7.06174315E-27
.04	7.62039637E-21
.05	-9.69352284E-21
.06	1.46479900E-18
.07	-2.36337318E-17
.075	-2.20581498E-18
.08	5.79026430E-17
.085	1.62244179E-14
.09	-2.07346607E-14
.092	6.68074222E-14
.094	1.45809063E-13
.095	-5.01031135E-13
.096	3.12194507E-12
.097	-5.24505506E-12
.098	2.45428878E-11
.099	-2.63332063E-11
1.000	1.14531212E+16 ←
1.100	-4.12436056E-13
1.200	-1.62347982E-14
1.300	5.62951130E-13
1.400	-1.69406590E-14
1.500	1.35525272E-14
1.600	8.47032950E-15
1.700	1.35525272E-13
1.800	1.58112817E-13
1.900	-4.27974543E-14
2.000	-2.30392963E-13
2.500	2.16840435E-13
3.000	-4.40908885E-12

5.8.3 Comparação do método de Stehfest com o de Crump

Os problemas poroelásticos resolvidos nesta tese foram todos invertidos pelo método de Stehfest, conforme já foi comentado e justificado. Foi feita a inversão de alguns destes problemas pelo método de Crump, com o objetivo de comparar os resultados e assim validá-los.

Na figura 5.8.15 compara-se os resultados obtidos na solução do problema de Mandel, que se acha descrito no capítulo 6, item 6.4. Como se vê as soluções são praticamente iguais, com uma pequena diferença próximo ao contorno.

A figura 5.8.16 mostra os resultados obtidos através dos dois métodos de inversão, na análise da pressão sob um carregamento unidimensional. Este problema poroelástico está descrito no capítulo 6, item 6.6. Novamente as duas soluções quase coincidem, variando um pouco apenas nas proximidades contorno.

Na figura 5.8.17 mostra-se a variação da pressão de poros nas vizinhanças de um furo circular sob os efeitos de um tensor tensão deviatórico. Esta situação se acha descrita e analisada no item 6.7.3 no capítulo 6. Como se vê, os 2 métodos de inversão em comparação fornecem os mesmos resultados.

Na figura 5.8.18 a comparação é feita na inversão da tensão circunferencial total na mesma situação anterior com idênticas conclusões.

INVERSÃO NUMÉRICA STEHFESTxCRUMP
 PROBLEMA DE MANDEL
 PRESSÃO DE POROS NORMALIZADA

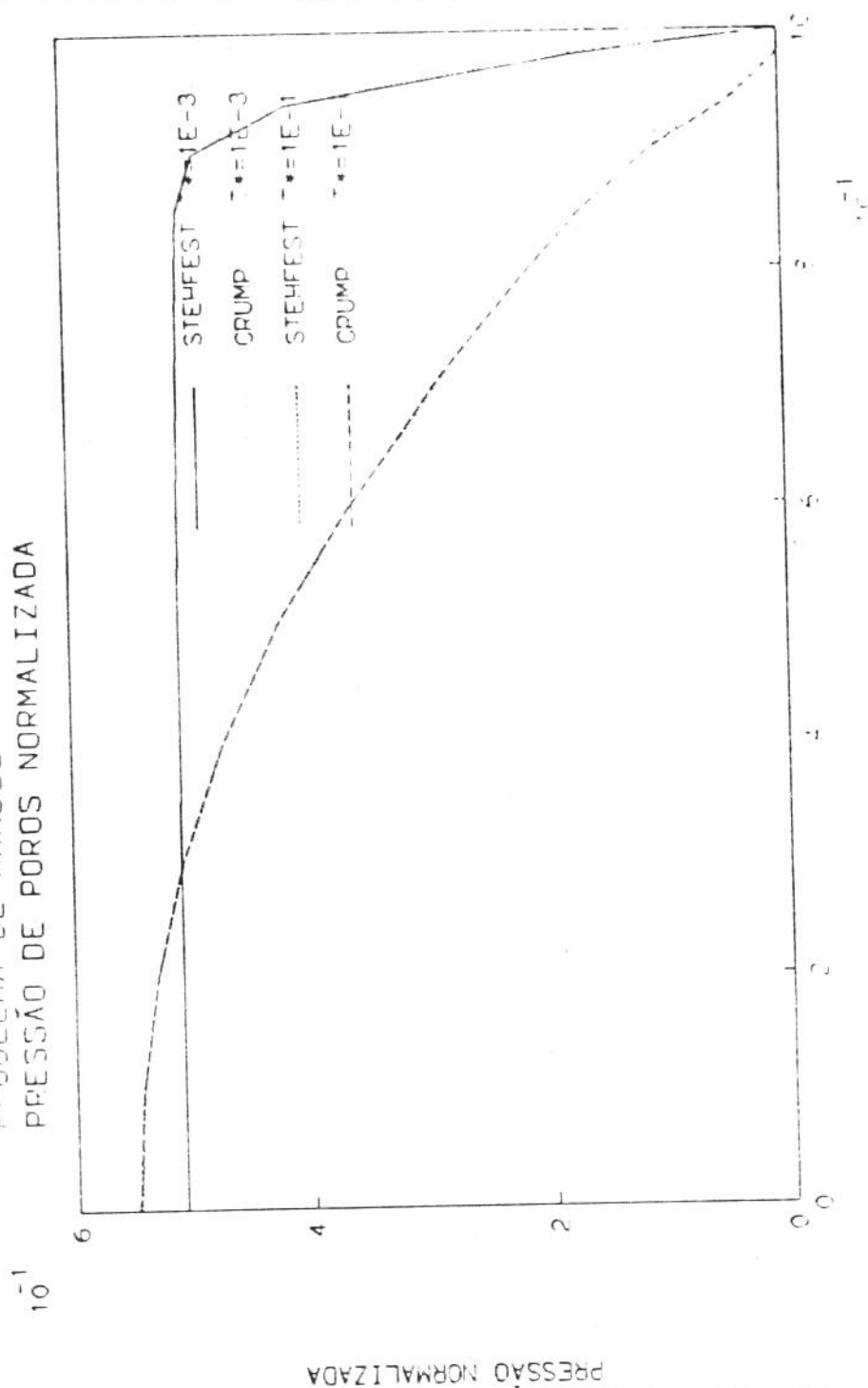


Figura 5.8.15 - Comparação dos métodos de inversão
 Bloco poroelástico
 Pressão de poros normalizada

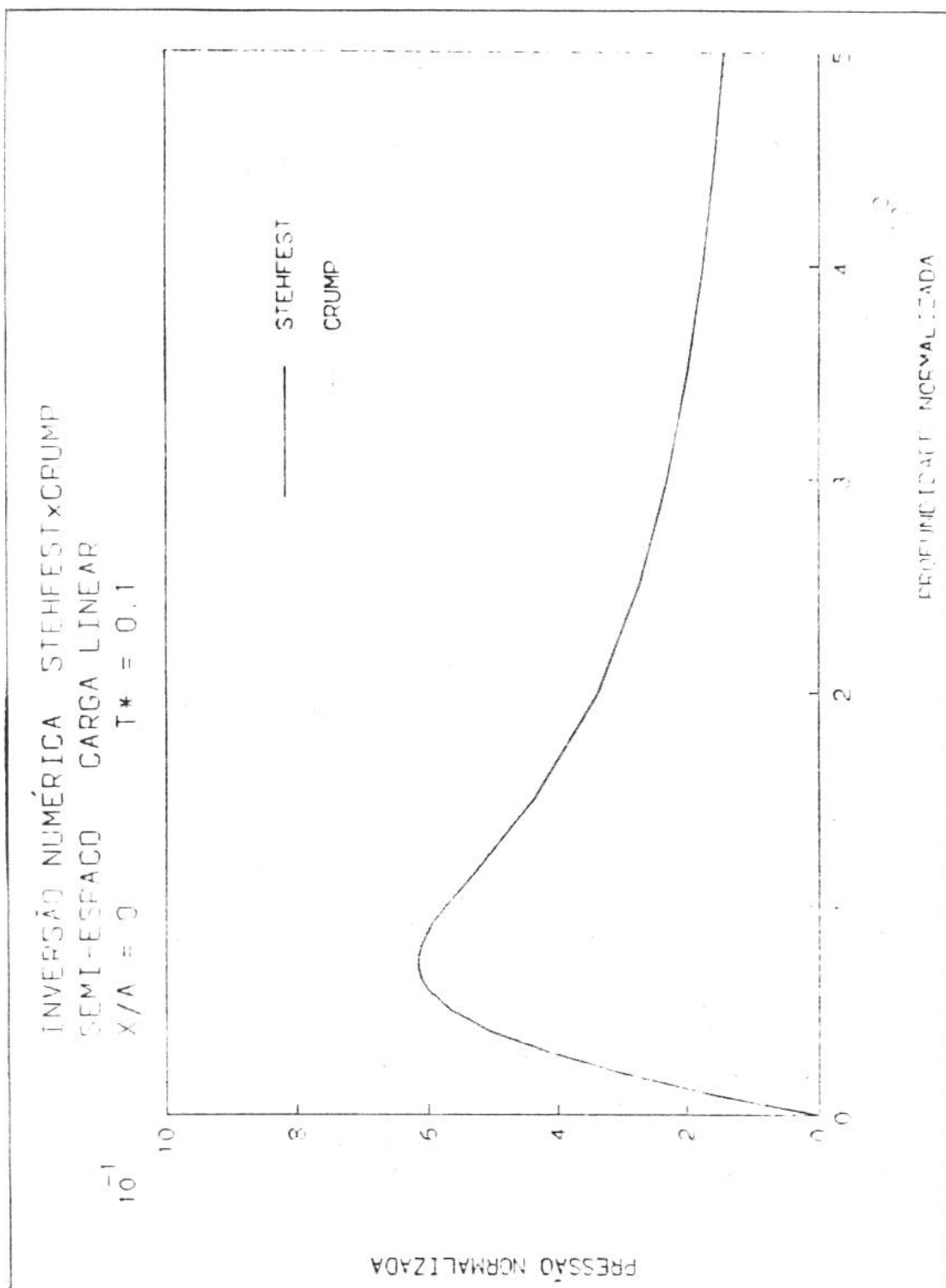


Figura 5.8.16 - Comparação dos métodos de inversão
Semi-espaco Carga unidimensional
Pressão de poros normalizada

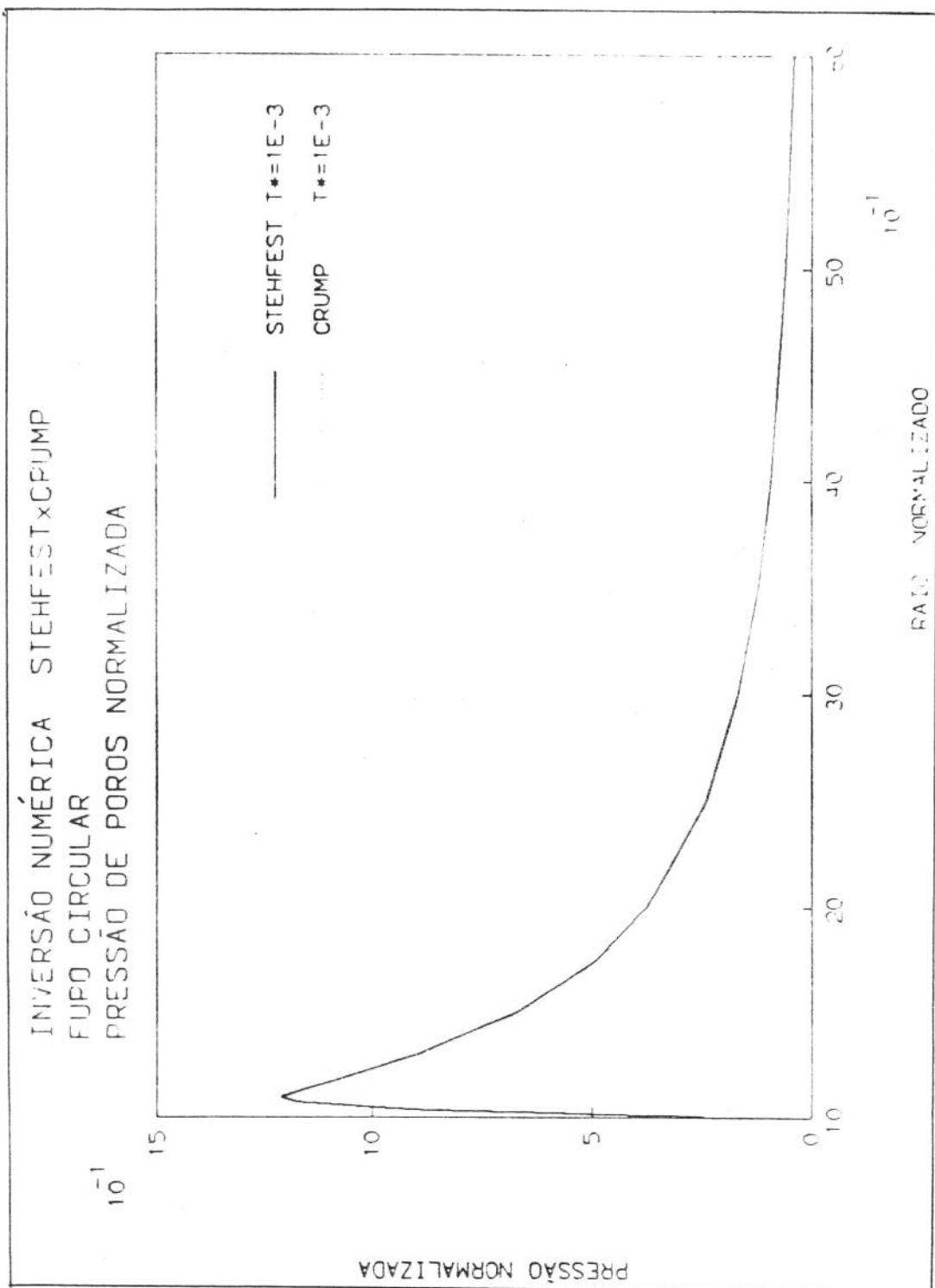


Figura 5.8.17 - Comparação dos métodos de inversão
Furo circular Tensor deviatórico
Pressão de poros normalizada

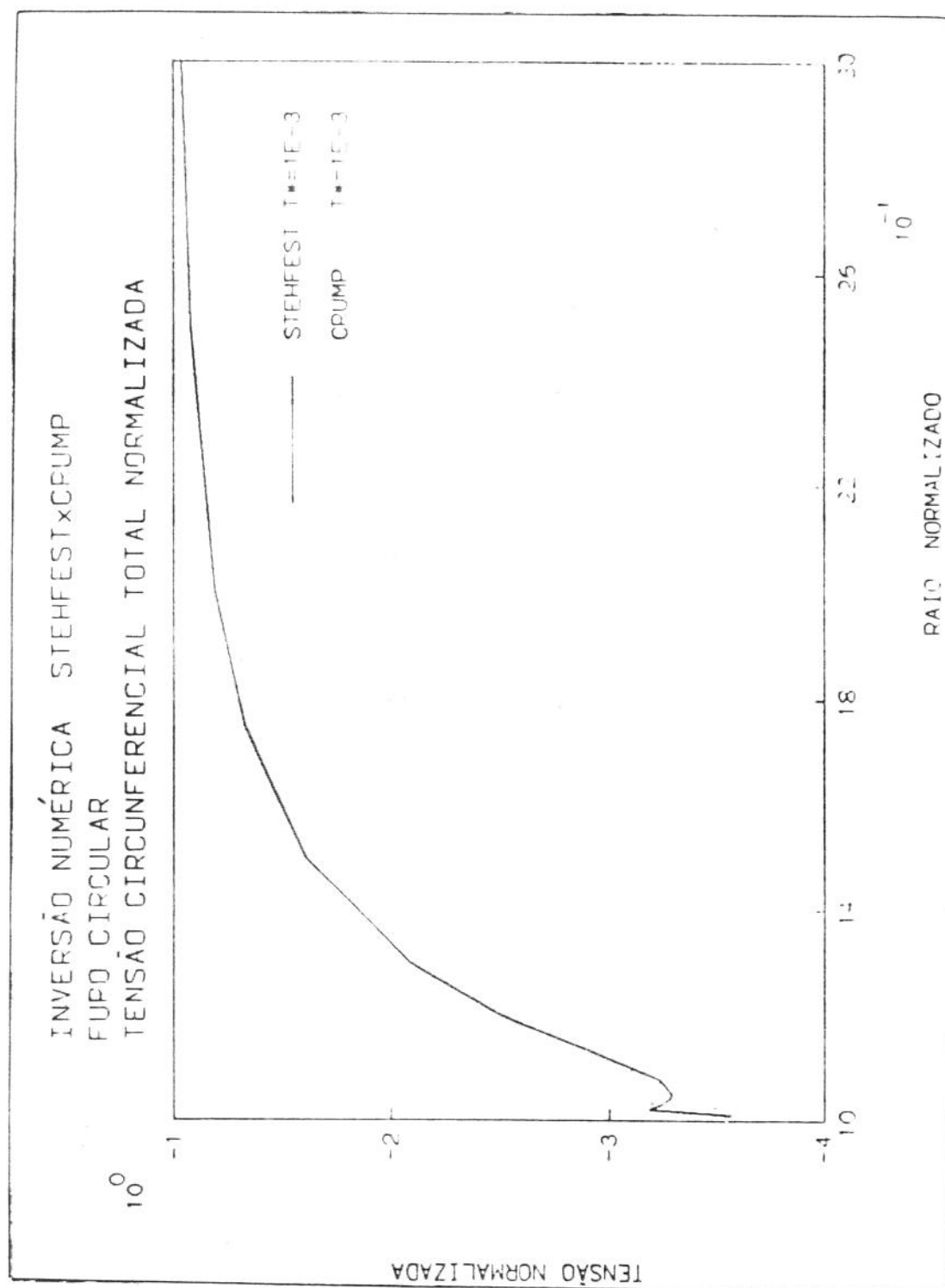


Figura 5.8.18 - Comparação dos métodos de inversão
Furo circular Tensor deviatorico
Tensão circunf. total normalizada

5.8.4 Outros métodos de inversão

Os outros métodos de inversão citados [75, 76, 78] são específicos para certas situações e requerem a determinação, na base de tentativas ou, pelo menos trabalhosa, de certos coeficientes.

Não se cogitou usar qualquer um deles neste trabalho.

Na realidade, nenhum método de inversão numérica serve para todos os casos e para todo e qualquer intervalo de tempo [81]. Para a inversão de determinado problema resolvido no espaço de Laplace, deve ser testados pelo menos dois métodos. Após comparados e analisados os resultados, opta-se pelo método mais eficaz. Esta eficácia deve levar em consideração o tempo de computação, o espaço de memória requerido, a precisão e algum outro parâmetro específico do problema.

5.9 O problema dos nós em cantos

Alguns problemas práticos de engenharia envolvem o modelamento de geometrias com cantos ou bordas, com o vetor e o tensor tensão descontínuos em ambos os lados do canto. Em poroelasticidade o mesmo pode acontecer com a vazão específica normal. No canto a normal externa muda bruscamente de valor ao passar de um lado para o outro. Um nó colocado em um canto poderá ter valores diferentes para as citadas variáveis, um em cada lado.

Assim sendo em um nó colocado em um canto se pode ter as seguintes situações:

- o vetor tensão é conhecido à esquerda e à direita do nó;
- o vetor tensão é conhecido apenas à esquerda;
- O vetor tensão é conhecido apenas à direita;
- O vetor tensão não é conhecido nem à esquerda nem à direita.

No primeiro caso não existe problema algum, pois os valores são dados e calcular-se-ão os deslocamentos, que são, necessariamente, iguais à esquerda e à direita, por imposição de continuidade do meio.

As 2 situações seguintes também são simples, pois basta

calcular-se o vetor tensão não conhecido. O deslocamento não conhecido é igual ao dado pela razão já citada.

Na última situação é onde está o problema. Necessita-se calcular os valores do vetor tensão antes e depois do nó, que poderão não ser iguais. Este caso precisa de um tratamento especial.

Quando são dados os deslocamentos em um nó colocado em canto precisa-se de mais duas equações extras, pois dois conjuntos de vetores tensão são desconhecidos. Algumas maneiras de resolver este problemas já foram sugeridas [40]. Assim:

- o canto é simplesmente arredondado introduzindo-se uma pequena curvatura. Isto pode dar resultados aceitáveis próximo ao canto, mas não é preciso no canto, o que torna necessário algum tipo de interpolação;

- dois nós, com uma pequena separação ϵ , são colocados no canto, como se vê na figura 5.9.01. Se o valor de ϵ for muito pequeno ocorrerão problemas de precisão numérica;

- coloca-se no canto um pequeno elemento de comprimento ϵ , mesma figura 5.9.01. Ocorrerão problemas de precisão numérica se ϵ for muito pequeno;

- uma outra maneira, mais sofisticada, de se obter as duas equações extras de modo a ter-se uma solução definida é a seguinte. Deriva-se os deslocamentos no elemento usando-se fatores de forma adequados de modo a se obter a deformação em cada elemento. A lei de Hooke e a relação entre o tensor e o vetor tensão são então usadas para se obter duas relações extras entre os deslocamentos e o vetores tensão [40].

- por último, Geng *et al* sugerem o chamado método do elemento de contorno puntual, que é apresentado e descrito na referência 70.

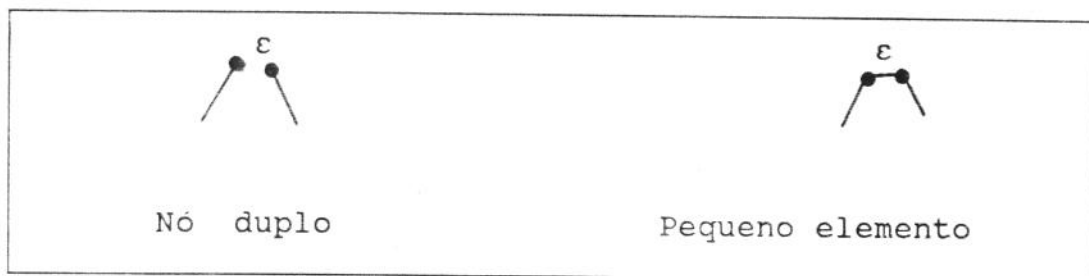


Figura 5.9.01 - Nós em cantos

Em poroelasticidade, é conveniente lembrar, que o problema apresentado pelo vetor tensão em um nó em canto, também ocorre no cálculo da vazão normal específica quando são conhecidas apenas as pressões antes e depois do nó.

Felizmente, para o problema principal que se está atacando, que é a estabilidade de poços petrolíferos circulares, o vetor tensão é sempre conhecido no contorno. Devido a este fato, o problema causado por nós em cantos não ocorreu em relação ao vetor tensão. Quanto à vazão normal específica, o que ocorre no caso é o seguinte. Como a geometria e o carregamento são axissimétricos a vazão normal é igual à esquerda e à direita de qualquer nó, e, não se tem problema algum com o cálculo dela em nós em cantos.

Quando se está resolvendo algum outro problema que não atenda as condições acima, é necessário se utilizar um dos quatro tratamentos anteriormente descritos.

5.10 Pontos internos

O cálculo das variáveis nos pontos internos é feito como a seguir será descrito.

O deslocamento é calculado através da equação 5.1.01

$$C\tilde{u}_j = \int_s \tilde{u}_{ij}^* \tilde{t}_i ds - \int_s \tilde{t}_{ij}^* \tilde{u}_i ds - \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_j^* \tilde{p} ds + \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}_j^* \tilde{q} ds$$

Agora a constante C é igual a 2π , ficando então

$$2\pi\tilde{u}_j = \int_s \tilde{u}_{ij}^* \tilde{t}_i ds - \int_s \tilde{t}_{ij}^* \tilde{u}_i ds - \int_s \frac{1}{s} \tilde{q}_j^* \tilde{p} ds + \int_s \frac{1}{s} \tilde{p}^* \tilde{q}_j ds$$

Isto para o caso de se estar trabalhando com elementos constantes. Caso se esteja usando elementos lineares necessário se torna fazer as adaptações descritas no item 5.2

A esta altura todas as variáveis no contorno já são conhecidas, bastando efetuar-se o somatório das integrações ao longo de todos os elementos da discretização, sendo o ponto de colocação o ponto interno analisado. O raio r é a distância do ponto interno ao ponto no contorno onde está sendo calculada a solução fundamental para a posterior integração ao longo do elemento que contém o este ponto.

Para o cálculo da pressão usa-se a equação 5.1.02, com a constante C valendo 2π .

$$2\pi\tilde{p} = -\int_s s\tilde{u}_i^* \tilde{t}_i ds + \int_s s\tilde{t}_i^* \tilde{u}_i ds + \int_s \tilde{q}^* \tilde{p} ds - \int_s \tilde{p}^* \tilde{q} ds$$

Para o cálculo do tensor tensão usa-se a equação 4.4.08 ou a 4.4.09.

A vazão específica normal é calculada através da equação 4.5.02 ou da 4.5.03.

Observe-se que em todos os cálculos acima não existe o problema da singularidade, pois a distância r jamais é nula. O problema é que quando o ponto interno está muito próximo do contorno os valores calculados não são confiáveis. No caso do estudo dos pontos próximos a um poço perfurado em um meio poroso chegou-se até a uma distância correspondente a $1/5$ do comprimento do elemento com um erro desprezível.

Finalmente, os valores determinados, que estão no campo de Laplace, são invertidos numericamente através de um dos métodos descritos anteriormente.

5.11 Elementos constantes x elementos lineares

O problema do cilindro de paredes espessas com o raio externo bem maior do que o interno foi utilizado para se comparar

os resultados obtidos com elementos constantes e com elementos lineares. O contorno foi discretizado, nos dois casos, com 128 elementos.

As figuras de 5.11.01 a 5.11.08 mostram os resultados. A variação da pressão com o tempo para este caso é muito pequena, razão pela qual não foi mostrada em gráfico algum.

A discretização com elementos lineares sempre fornece resultados melhores principalmente para as variáveis derivadas.

Uma outra grande vantagem do uso dos elementos lineares é que se obtém bons resultados até bem mais próximo do contorno.

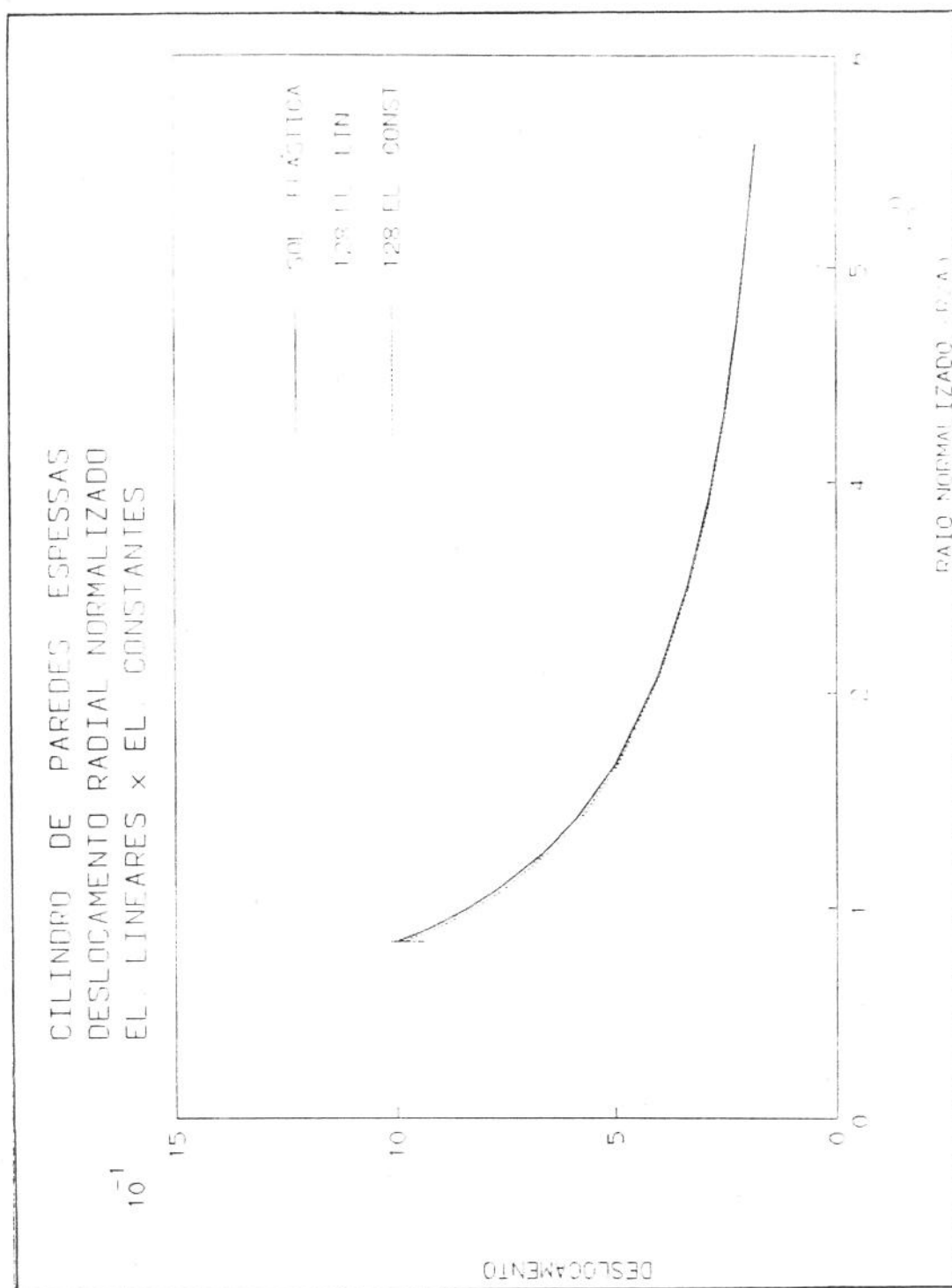


Figura 5.11.01 - Cilindro de paredes espessas
Deslocamento radial
El. lineares x El. constantes

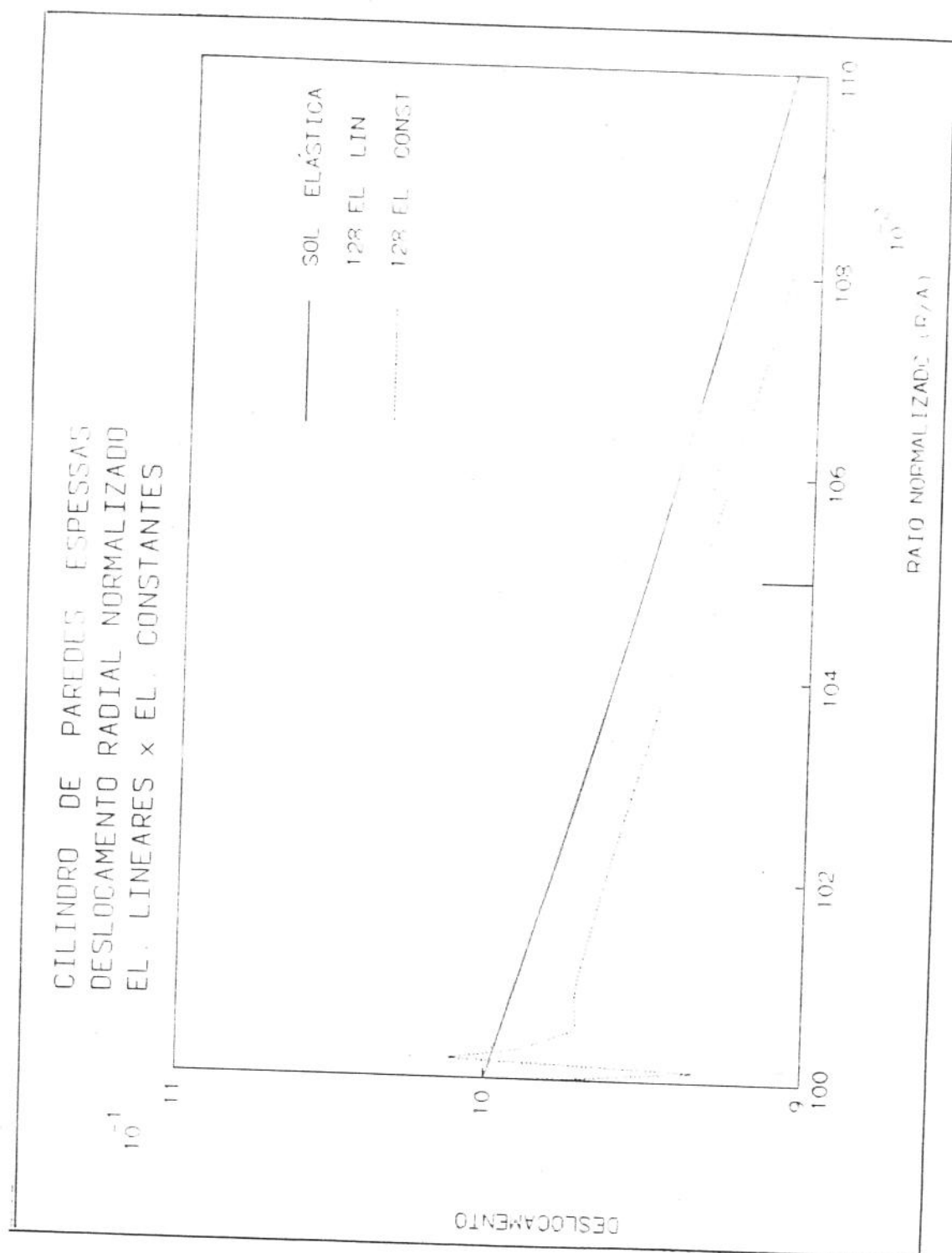


Figura 5.11.02 - Cilindro de paredes espessas
Deslocamento radial - Prox. do contorno
El. lineares x El. constantes

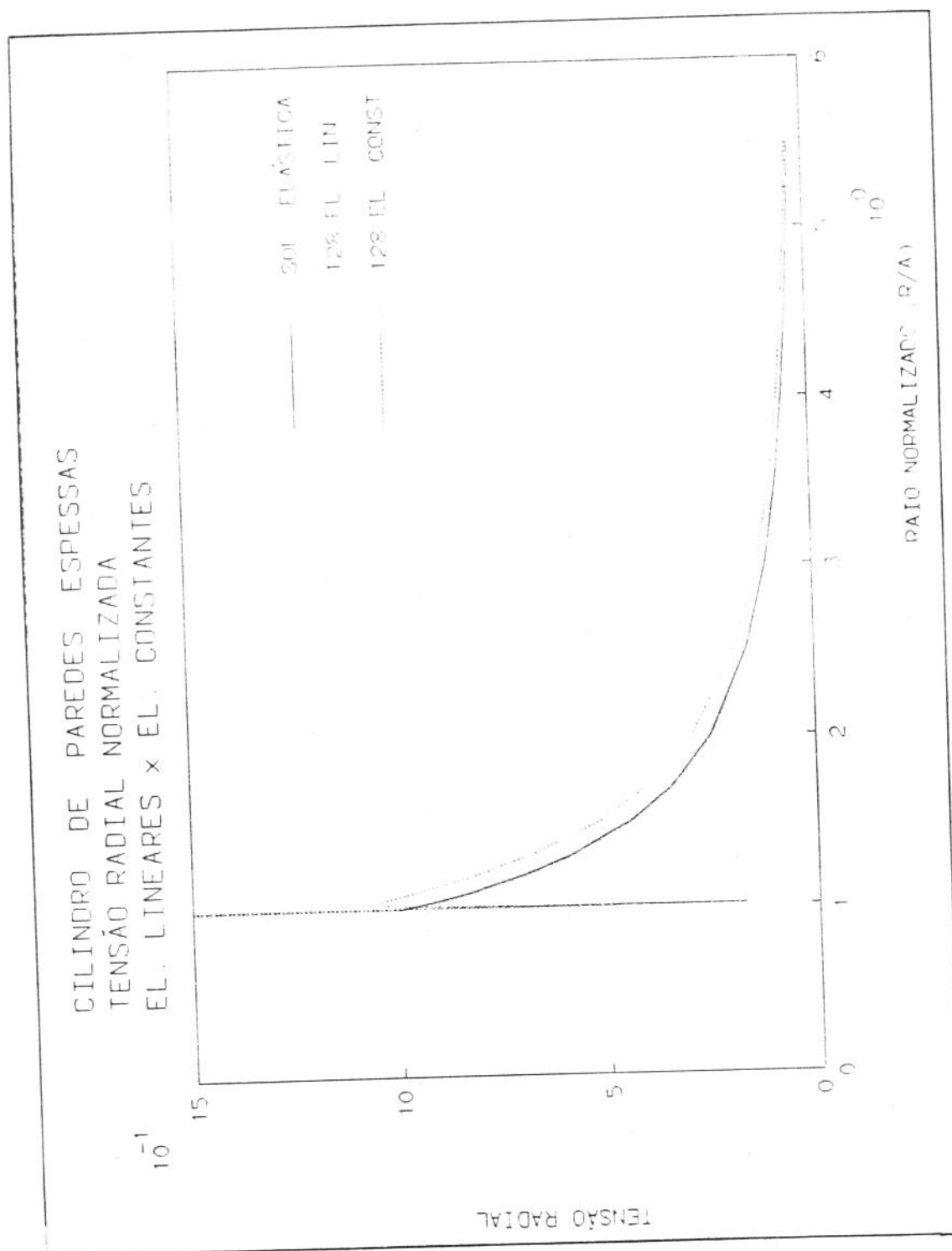


Figura 5.11.03 - Cilindro de paredes espessas
Tensão radial
El. lineares x El. constantes

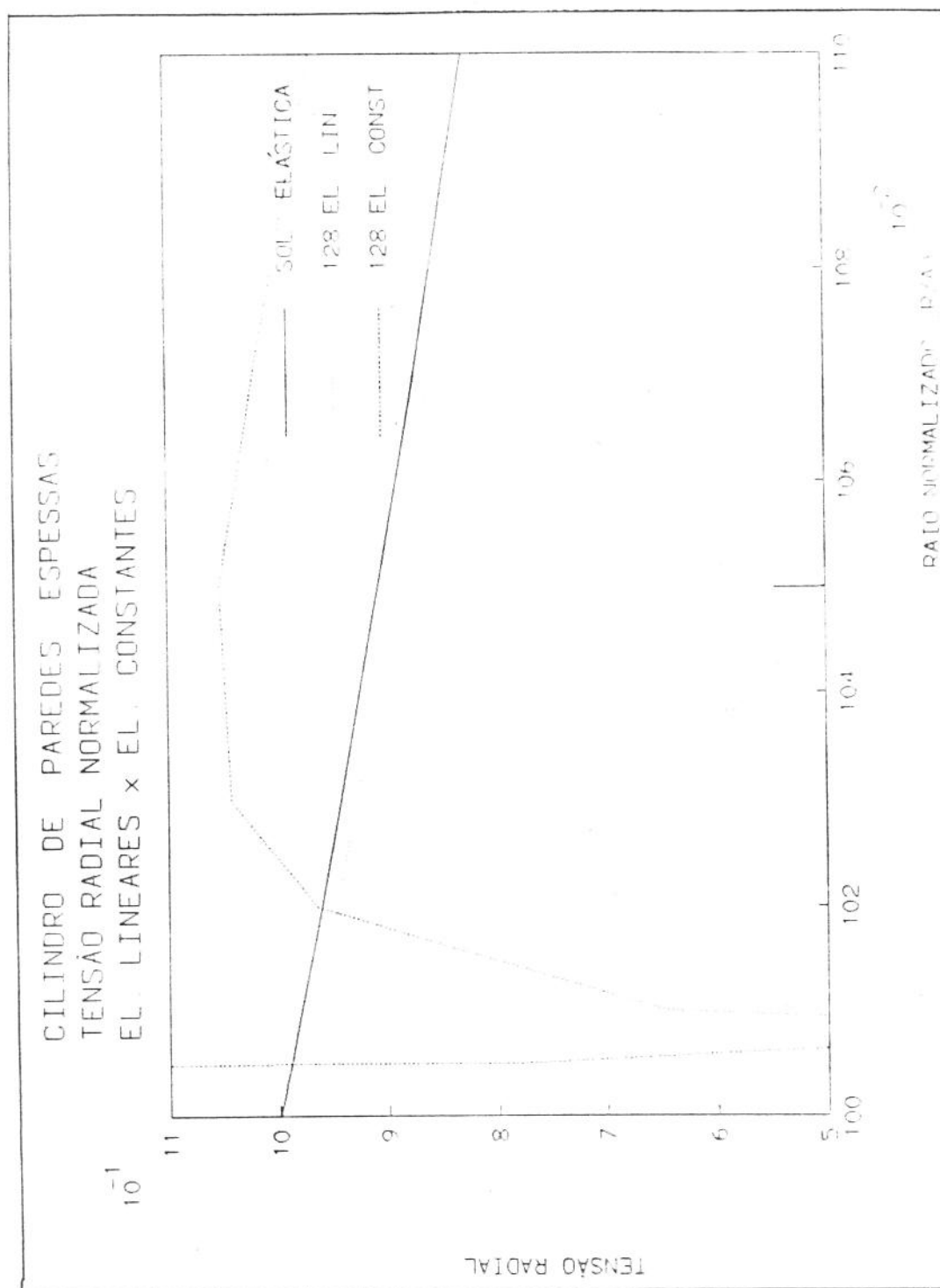


Figura 5.11.04 - Cilindro de paredes espessas
Tensão radial - Prox. do contorno
El. lineares x El. constantes

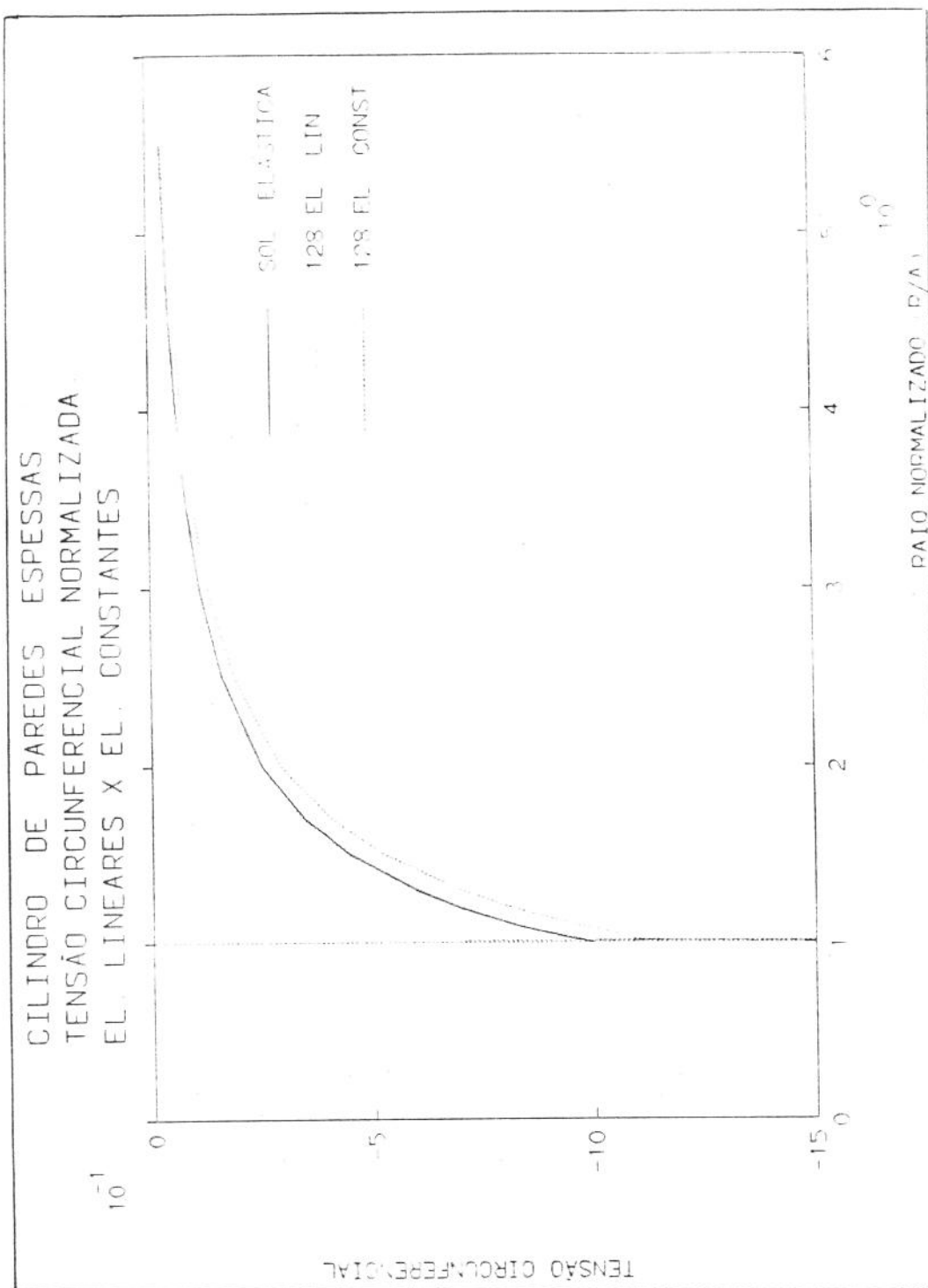


Figura 5.11.05 - Cilindro de paredes espessas
Tensão circunferencial
El. lineares x El. constantes

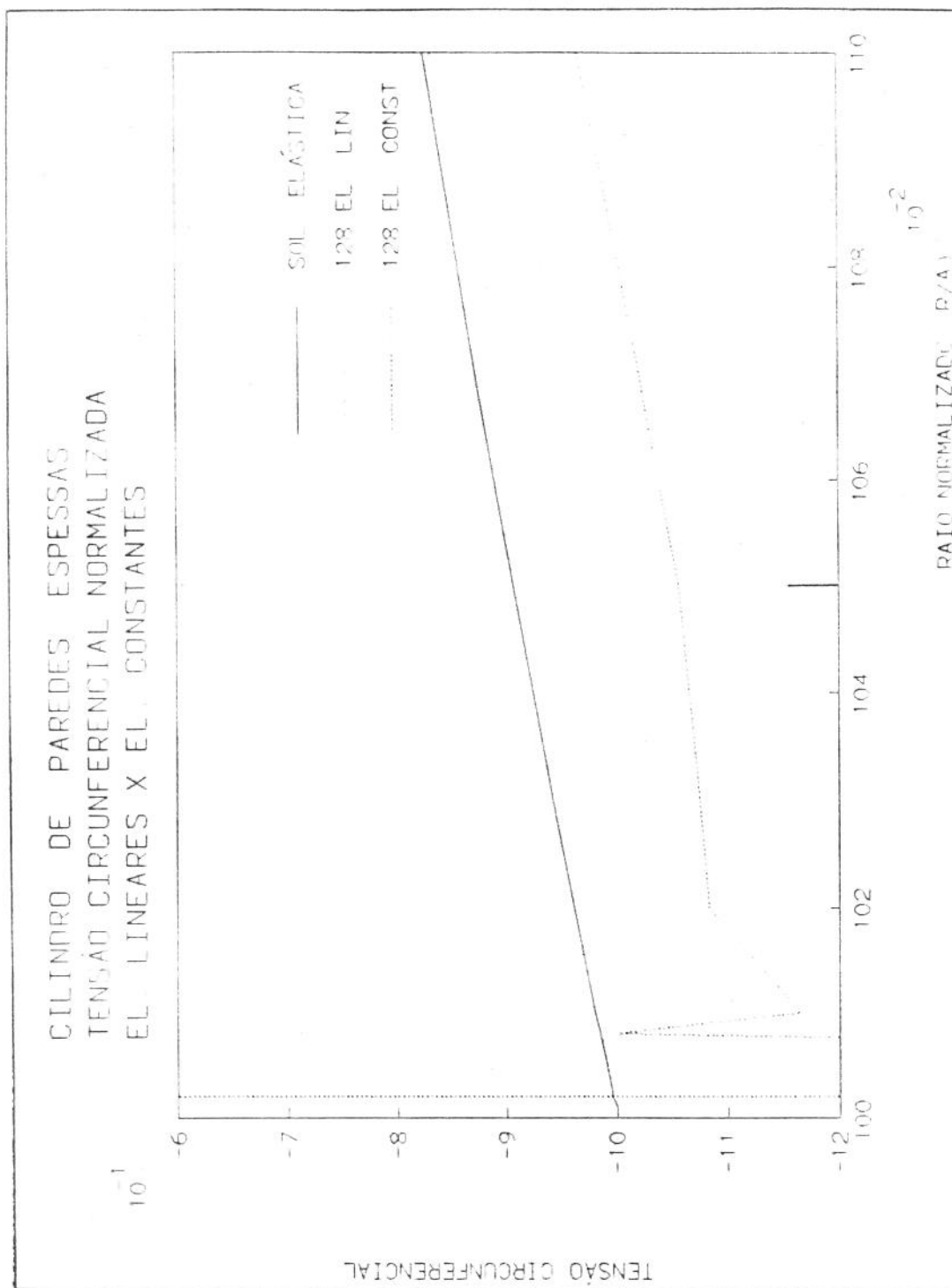


Figura 5.11.06 - Cilindro de paredes espessas
Tensão circunf. - Prox. do contorno
El. lineares x El. constantes

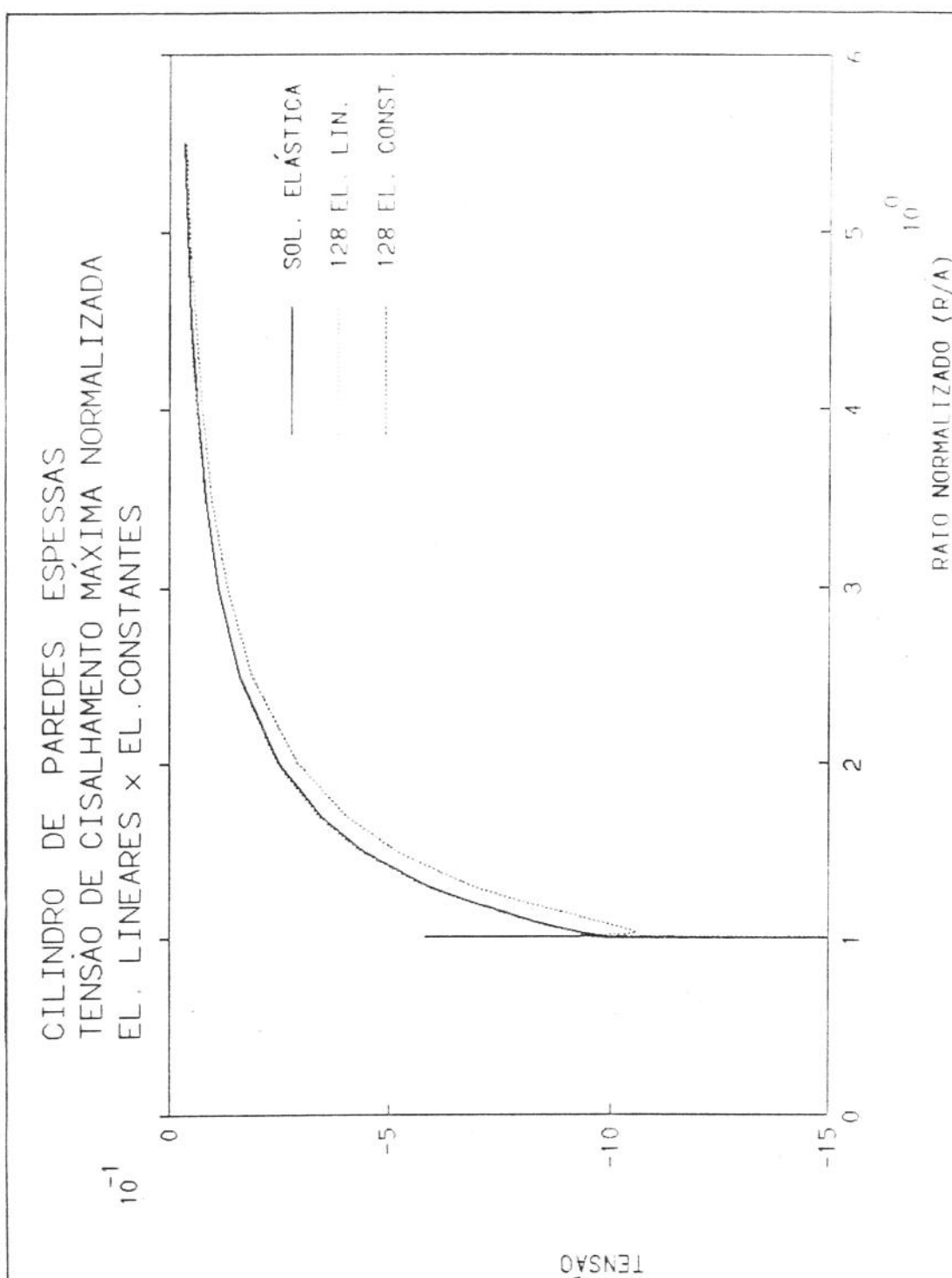


Figura 5.11.07 - Cilindro de paredes espessas
Tensão de cisalhamento máxima
El. lineares x El. constantes

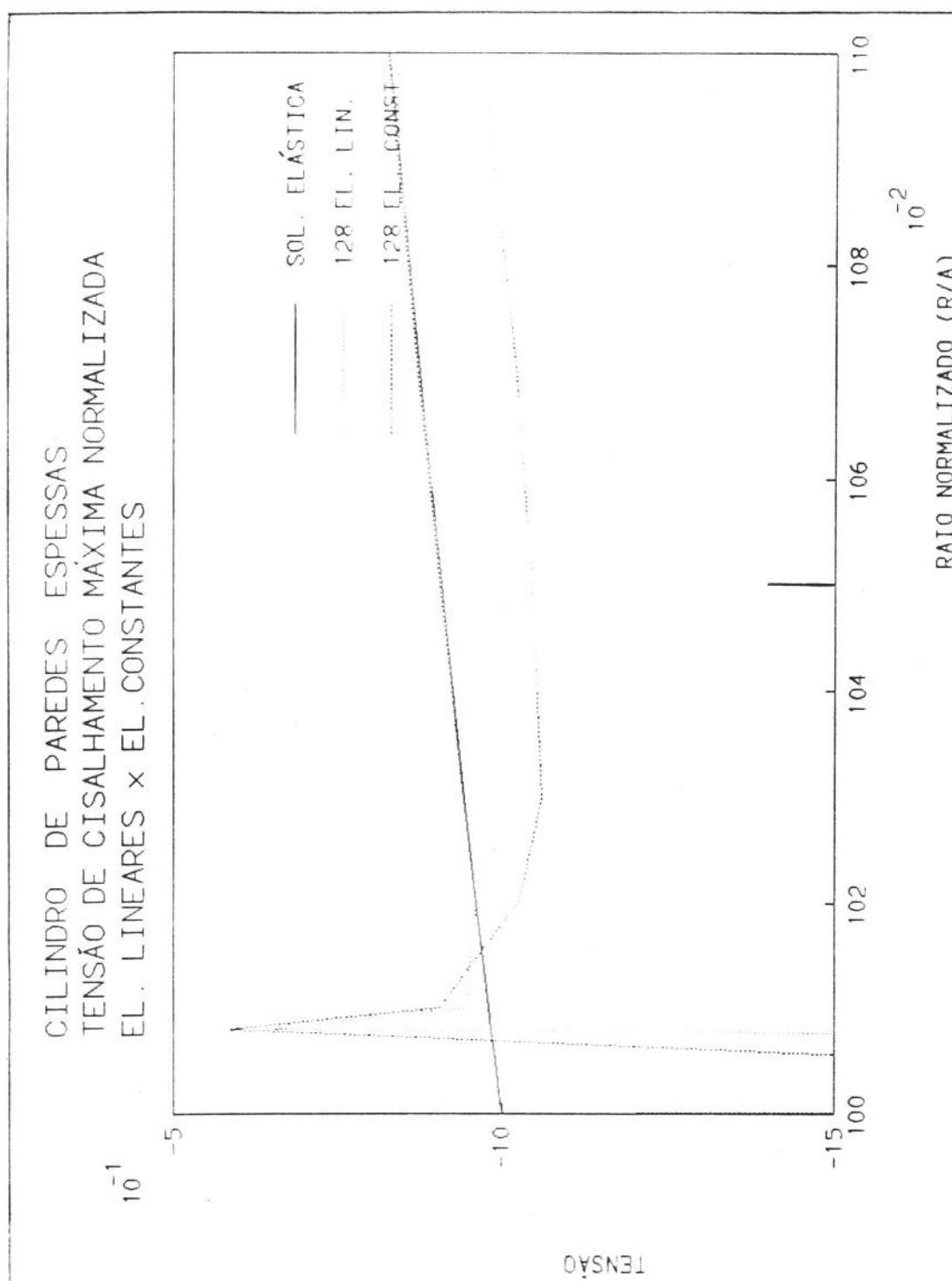


Figura 5.11.08 - Cilindro de paredes espessas
Tensão cis. máx. - Prox. do contorno
El. lineares x El. constantes

5.12 Influência da discretização

Um outro estudo feito, ainda usando o clássico problema do cilindro de paredes espessas, foi a influência da discretização nos resultados.

Nas figuras 5.12.01 a 5.12.09 mostra-se a influência da discretização nos resultados obtidos. Ela é bastante significativa em todas as grandezas calculadas. Nas proximidades do contorno o grau de precisão dos resultados depende do comprimento dos elementos utilizados na discretização. Quanto menor for o elemento mais perto do contorno se pode chegar, desde que ele não seja pequeno o suficiente para causar problemas numéricos.

As figuras 5.12.01 a 5.12.09 podem ser melhor analisadas conhecendo-se o comprimento dos elementos. Ao se discretizar uma circunferência de raio r com N elementos iguais, o comprimento l do elemento é dado por

$$l = 2r \sin(\alpha/2)$$

Sendo que o ângulo α é dado por:

$$\alpha = 360^\circ/N$$

O comprimento adimensional pode ser definido como:

$$l' = l/r = 2 \sin(\alpha/2)$$

Para várias discretizações tem-se a tabela abaixo.

N	α	l'
8	45,0000	0,7654
16	22,5000	0,3902
32	11.2500	0,1960
64	5.6250	0,0981
128	2.8125	0,0491

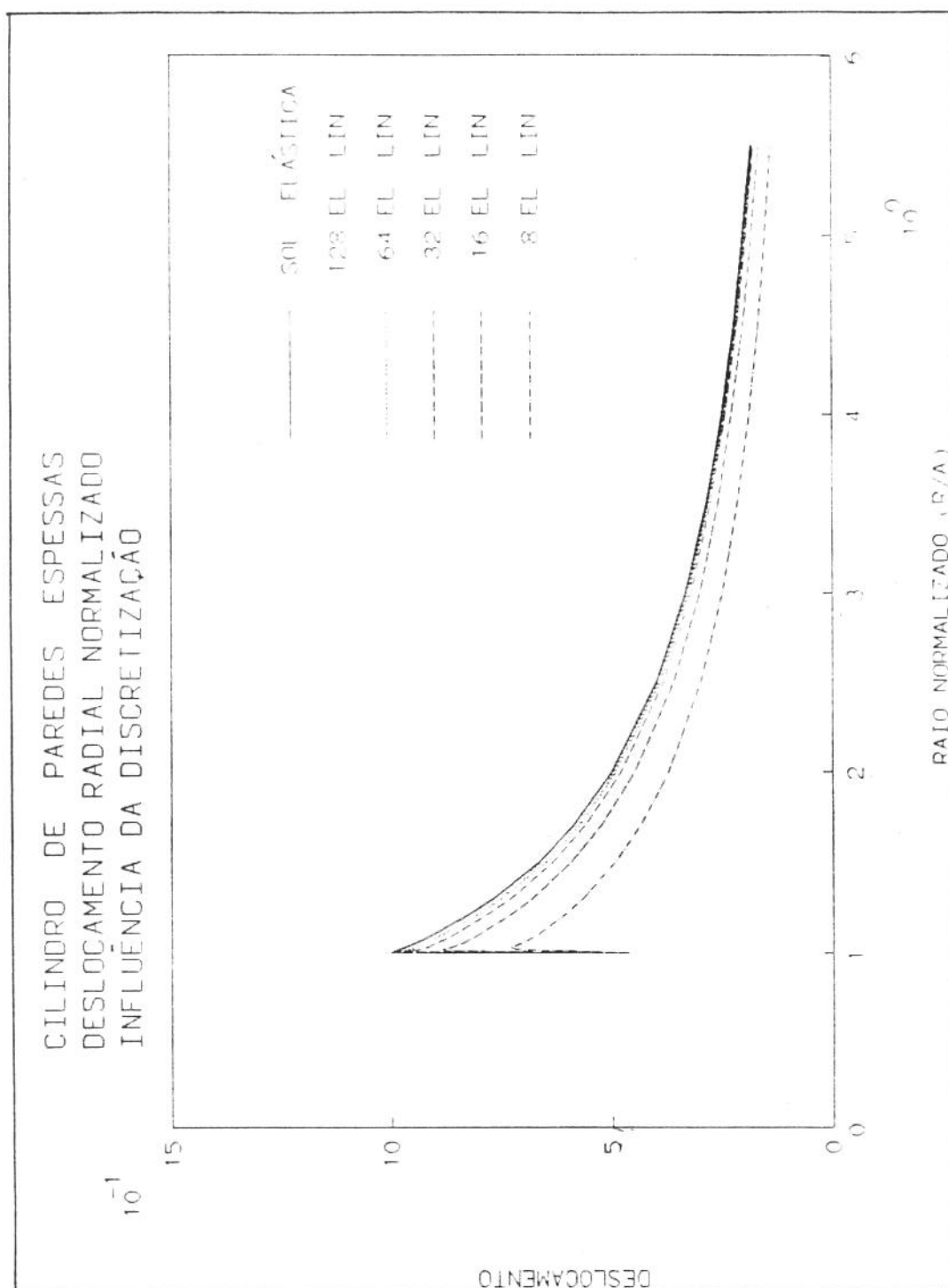


Figura 5.12.01 - Cilindro de paredes espessas
Deslocamento radial
Influência da discretização

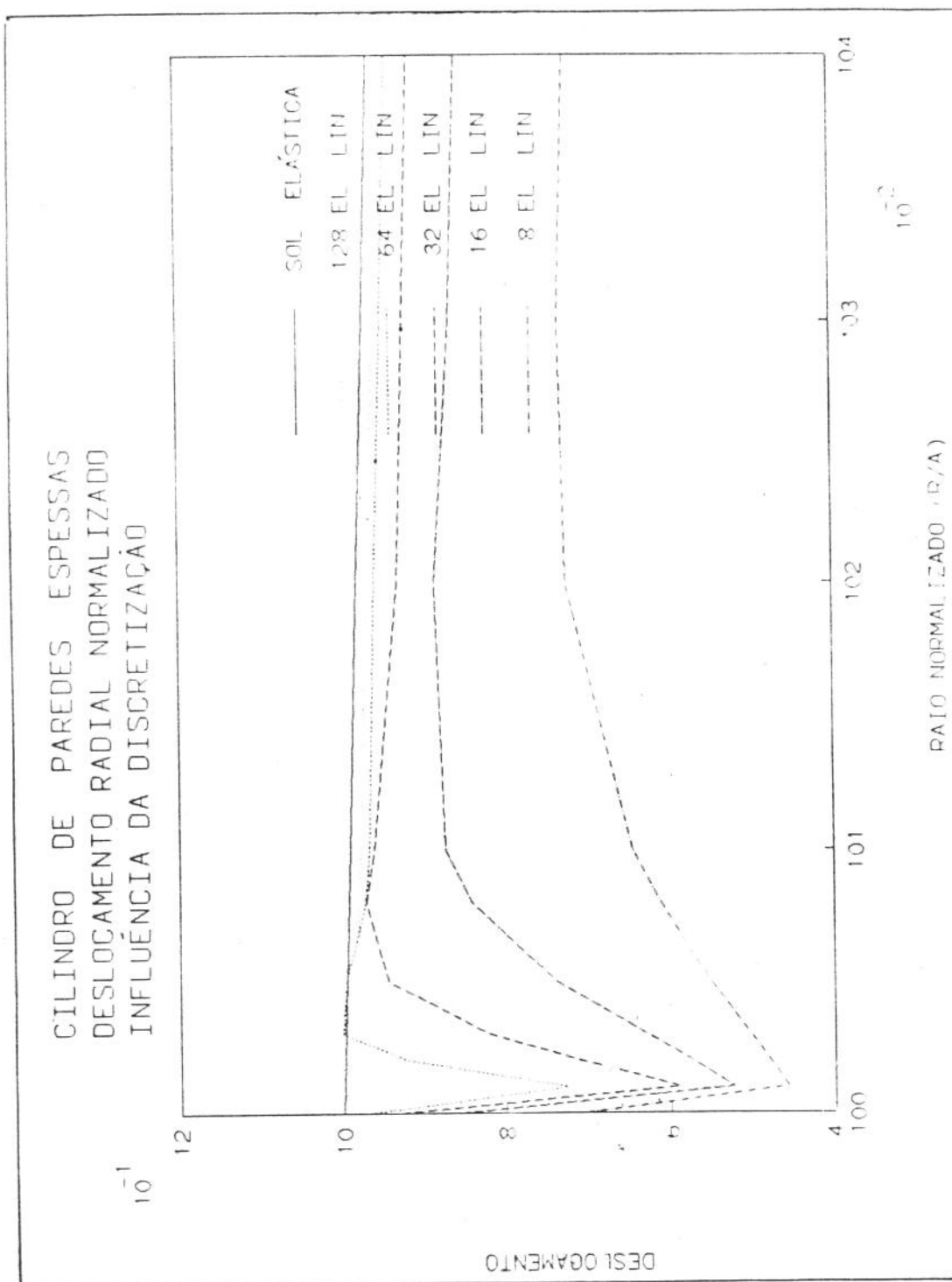


Figura 5.12.02 - Cilindro de paredes espessas
Desloc. radial - Prox. do contorno
Influência da discretização

CILINDRO DE PAREDES ESPESSAS
TENSÃO RADIAL NORMALIZADA
INFLUÊNCIA DA DISCRETIZAÇÃO

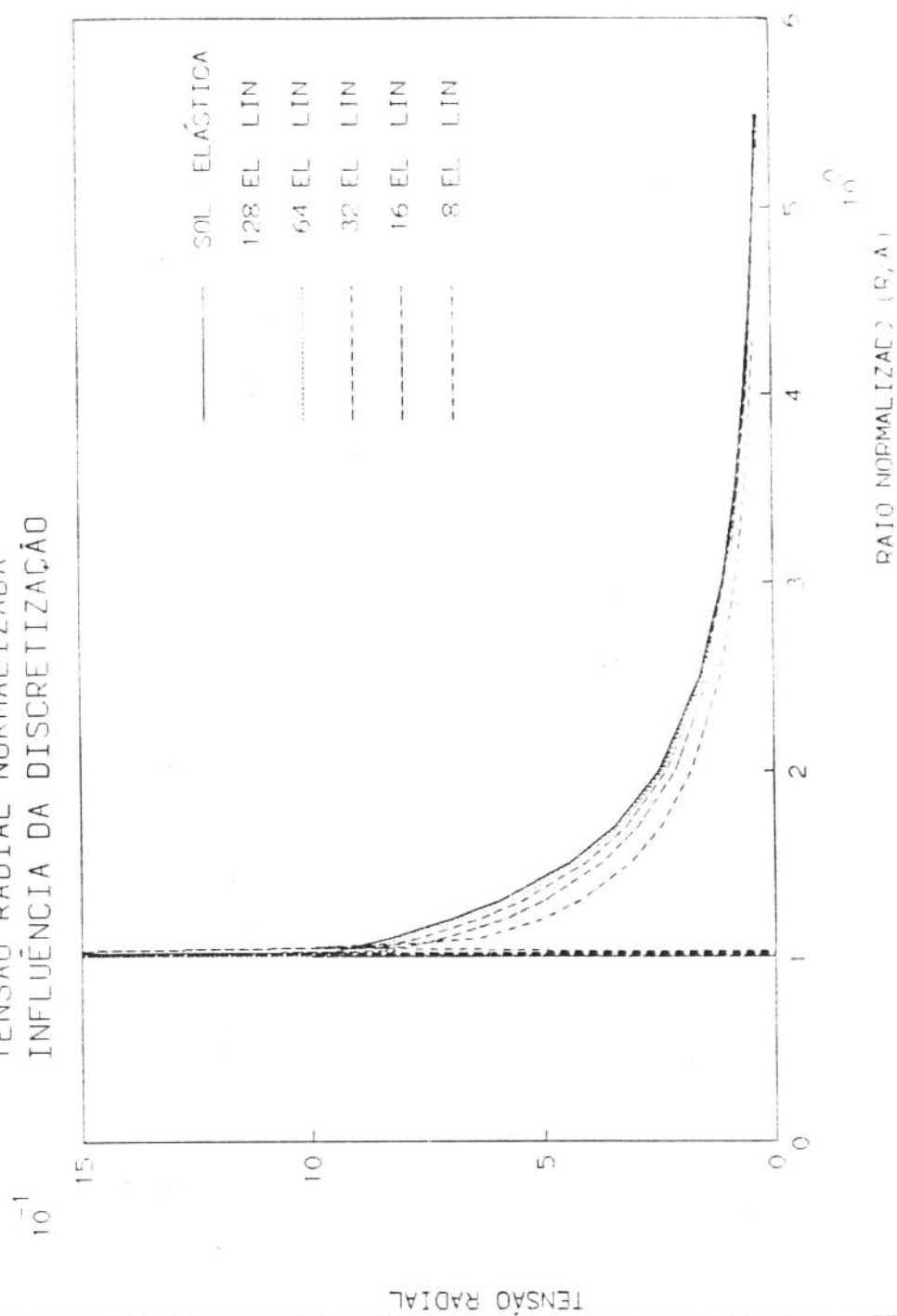


Figura 5.12.03 - Cilindro de paredes espessas
Tensão radial
Influência da discretização

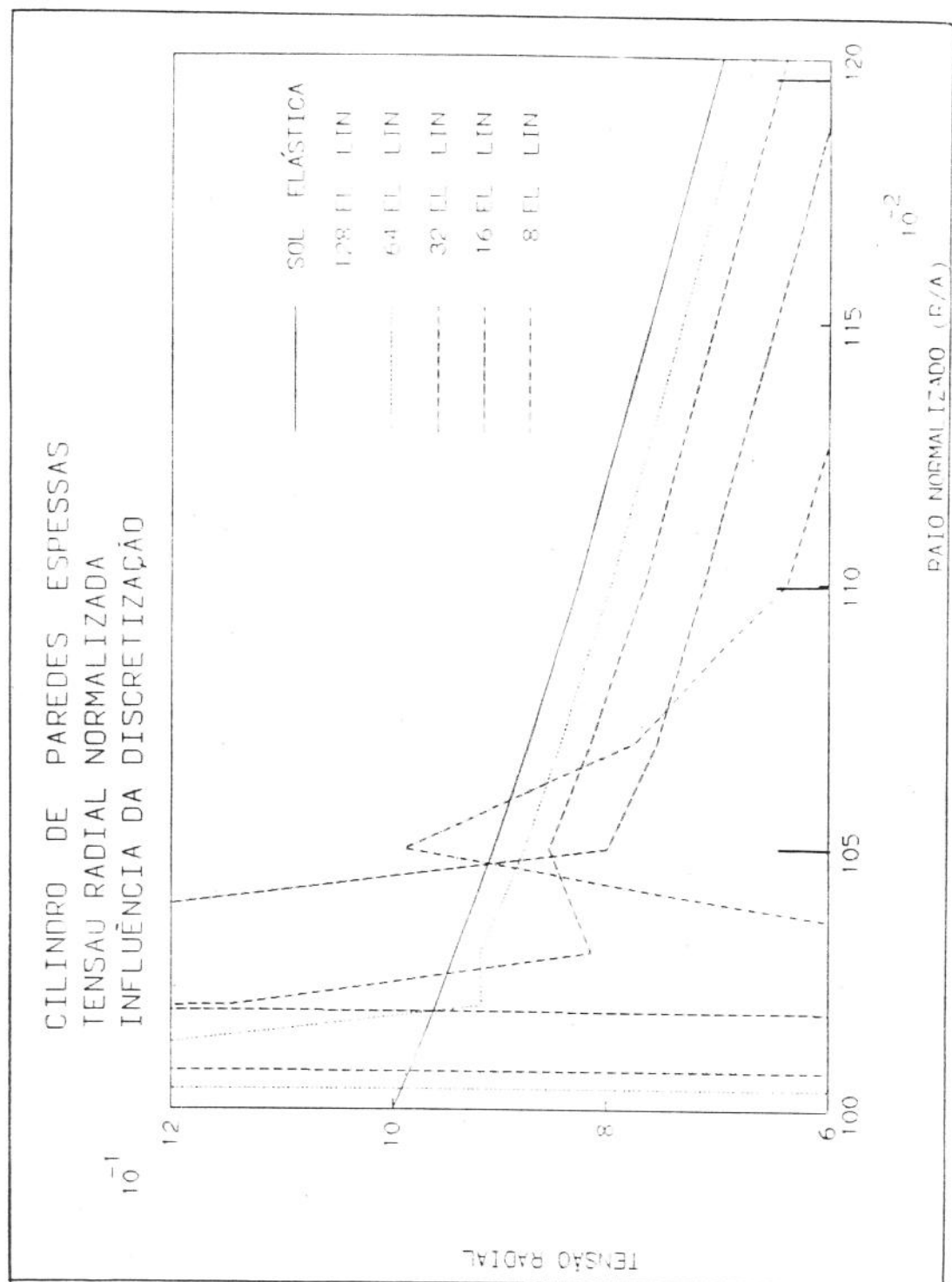


Figura 5.12.04 - Cilindro de paredes espessas
Tensão radial - Prox. do contorno
Influência da discretização

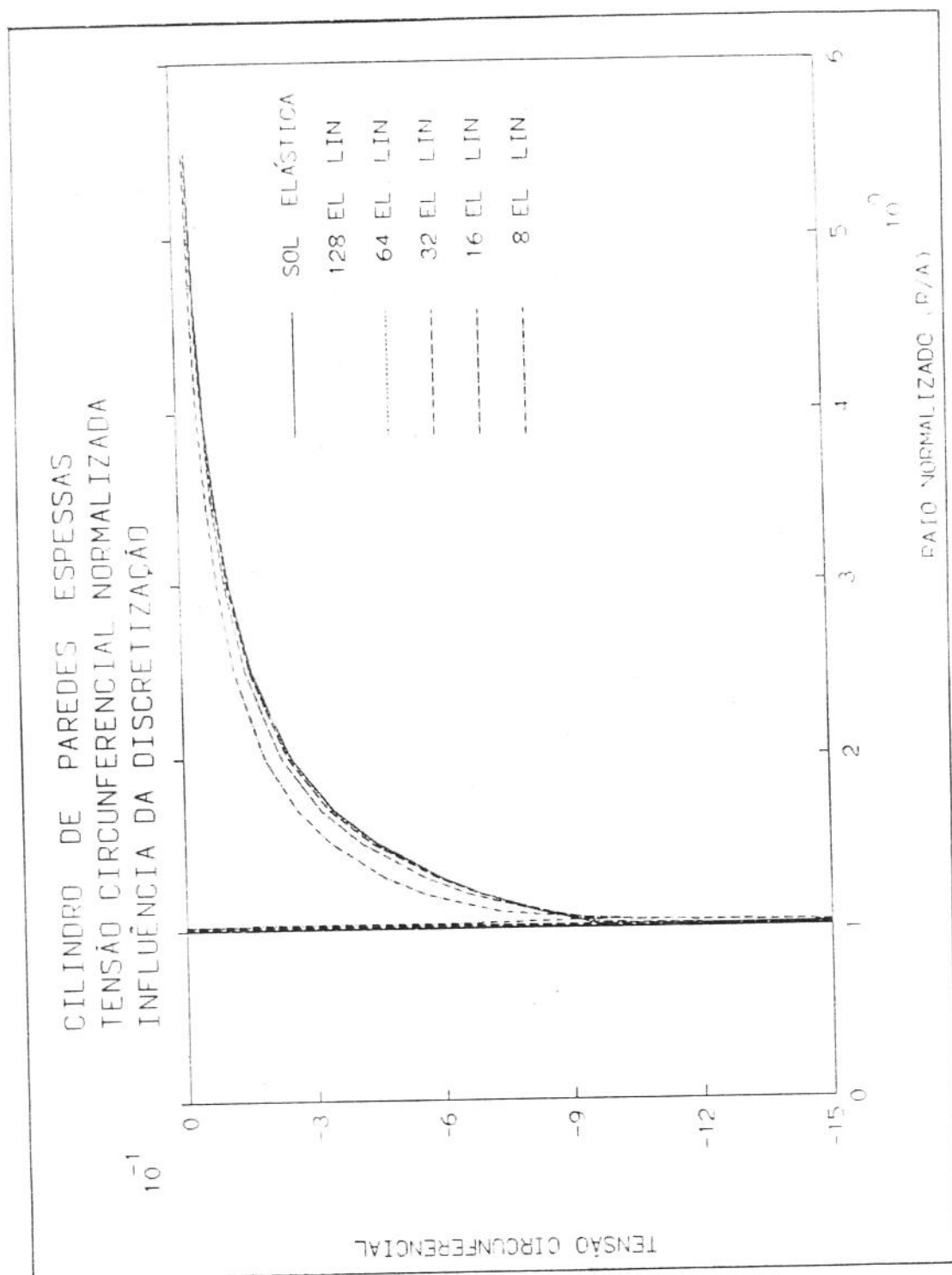


Figura 5.12.05 - Cilindro de paredes espessas
Tensão circunferencial
Influência da discretização

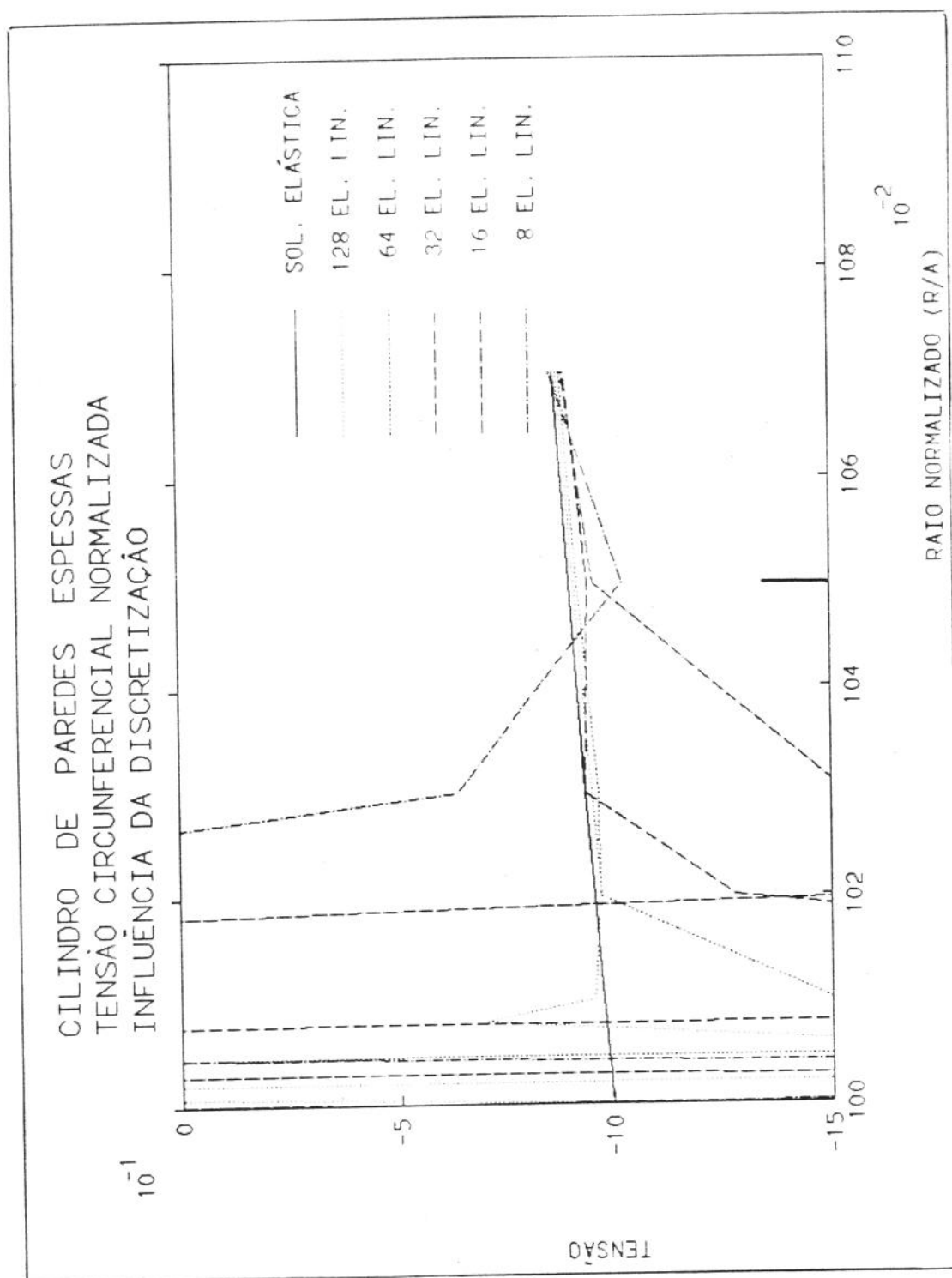


Figura 5.12.06 - Cilindro de paredes espessas
Tensão circunf. - Prox. do contorno
Influência da discretização

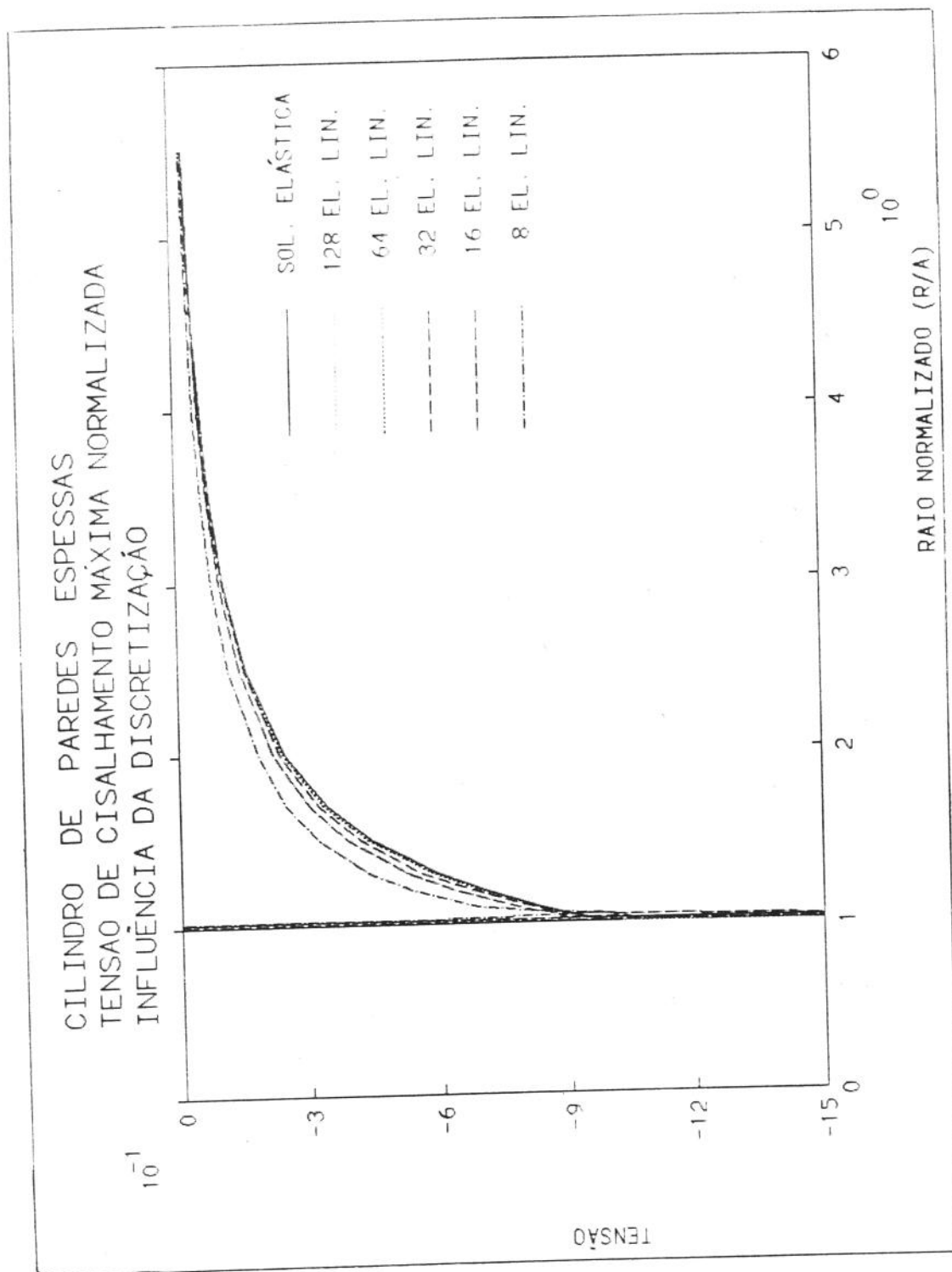


Figura 5.12.07 - Cilindro de paredes espessas
Tensão de cisalhamento máxima
Influência da discretização

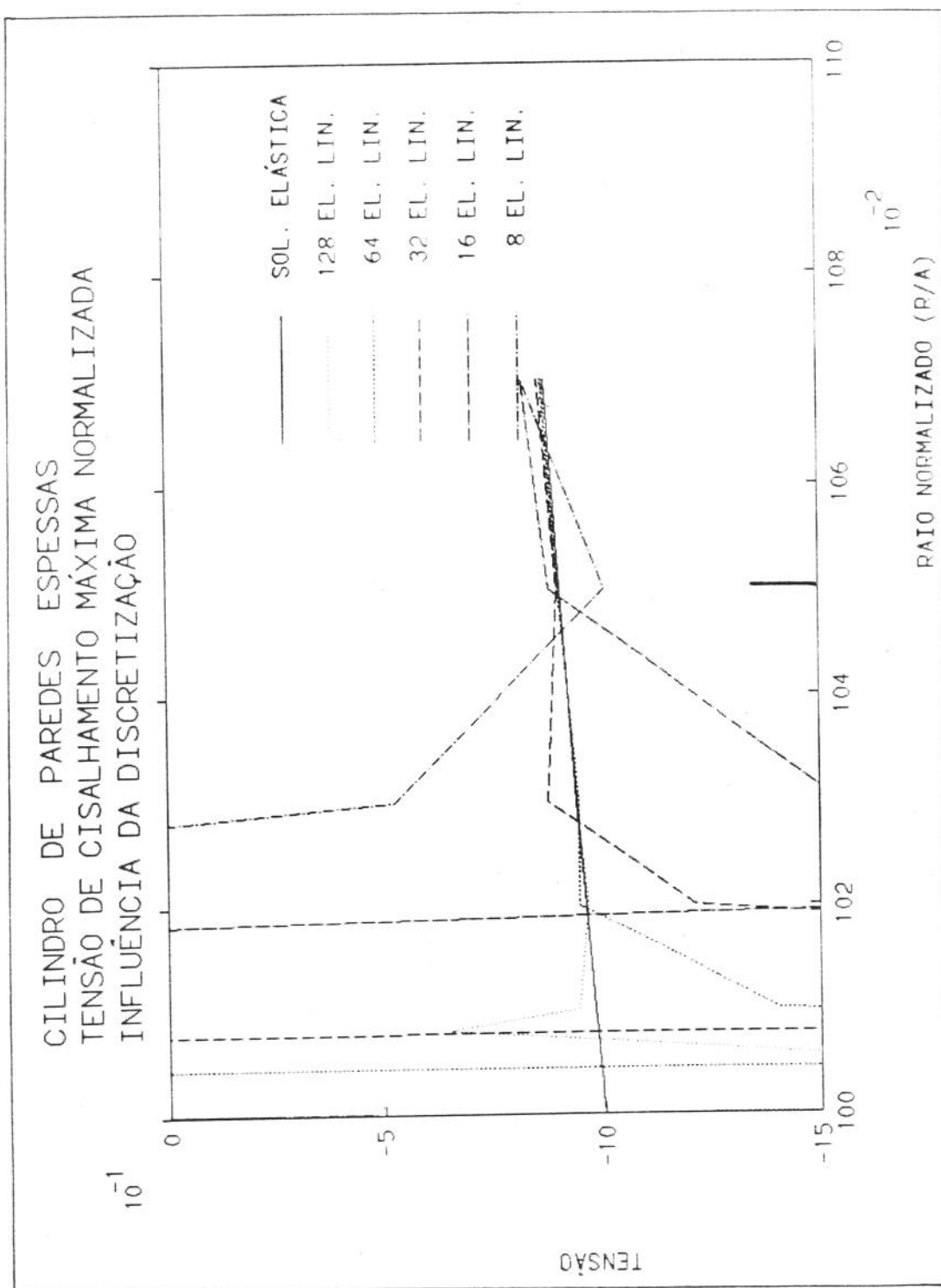


Figura 5.12.08 - Cilindro de paredes espessas
Tensão de cis. máx. - Prox. do contorno
Influência da discretização

5.13 Resumo

Neste capítulo mostrou-se como é feita a implementação numérica do MEC através da discretização com elementos constantes e com elementos lineares.

Mostrou-se como são obtidas numericamente as derivadas e a normal. Foram mostradas as singularidades e como foram abordadas e resolvidas. A aplicação da analogia do movimento de corpo rígido constante foi detalhada.

A integração numérica das soluções fundamentais através do método de Gauss-Legendre foi descrita, bem como a inversão numérica das transformadas de Laplace. A inversão numérica foi estudada detalhadamente, apresentando-se os métodos de Stehfest e de Crump, cujos resultados foram comoparados.

Analizou-se o problema de nós em cantos e como o mesmo foi resolvido.

A obtenção das variáveis no domínio (pontos internos) foi pormenorizada.

As soluções obtidas através de elementos constantes e através de elementos lineares foram comparadas e a influência da maior ou menor discretização foi estudada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR João Candido
Baptista de Campos E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 06 07 95
20517-14.
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

*Dissertação apresentada ao Curso de Doutorado
da Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Estadual de Campinas como
requisito parcial para obtenção do título de
Doutor em Engenharia Mecânica*

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS POROELÁSTICOS
ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

VOLUME II

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e
Projeto Mecânico
Orientador: Euclides Mesquita Neto

JOAO CANDIDO BAPTISTA DE CAMPOS

06 de julho de 1995

C O N T E Ú D O

VOLUME I

Lista de apêndices

Lista de figuras

1.	Introdução	
1.1	Objetivos	I-01
1.2	Hipóteses	I-01
1.3	Convenções	I-03
1.4	Poroelasticidade	I-04
1.5	Solução numérica	I-05
1.6	Aplicações	I-06
1.7	Fechamento	I-07
2.	A teoria da elasticidade em meios porosos	
2.1	Introdução	II-01
2.2	Formulação matemática da teoria de Biot	II-02
2.3	Outras formulações da poroelasticidade	II-12
2.4	Coeficientes elásticos em meios porosos	II-29
2.5	Resumo	II-40
3.	O método dos elementos de contorno	
3.1	Métodos numéricos em mecânica do contínuo	III-01
3.2	Histórico do MEC	III-02
3.3	O método dos elementos de contorno	III-02
3.4	Vantagens e desvantagens do MEC	III-04
3.5	O MEC em poroelasticidade	III-05
4.	Equações integrais	
4.1	Objetivo	IV-01
4.2	Teorema da reciprocidade no campo de Laplace	IV-01
4.3	Equações do deslocamento e da pressão	IV-05

4.4	Equação das tensões	IV-10
4.5	Equação do fluxo	IV-22
4.6	Resumo	IV-23
5.	Implementação numérica	
5.1	Elementos constantes	V-01
5.2	Elementos lineares	V-05
5.3	Derivadas e normal	V-11
5.4	Singularidades	V-12
5.5	Movimento de corpo rígido	V-13
5.6	Integração numérica	V-15
5.7	Funções de Bessel	V-15
5.8	Inversão numérica das transformadas de Laplace	V-16
5.8.1	O método de Stehfest	V-16
5.8.2	O método de Crump	V-28
5.8.3	Comparação do método de Stehfest com o método de Crump	V-35
5.8.4	Outros métodos de Inversão	V-40
5.9	O problema de nós em cantos	V-40
5.10	Pontos internos	V-42
5.11	Elementos constantes x elementos lineares	V-43
5.12	Influência da discretização	V-53
5.13	Resumo	V-62

VOLUME II

6.	Aplicações e resultados	
6.1	Introdução	VI-01
6.2	Placa infinita com furo circular	VI-01
6.3	Cilindro de paredes espessas	VI-23
6.4	O problema de Mandel	VI-37
6.5	Coluna unidimensional	VI-52
6.6	Semi-espaco poroelástico	VI-64
6.7	Poço circular vertical	VI-68
6.7.1	Efeitos do tensor tensão hidrostático	VI-71
6.7.2	Efeitos da pressão de poros original	VI-72

6.7.3	Campo das tensões de desvio	VI-75
6.8	Poço circular vertical - Um exemplo real	VI-81
6.8.1	Efeitos do tensor tensão hidrostático	VI-83
6.8.2	Efeitos do diferencial de pressão	VI-95
6.8.3	Efeitos das tensões de desvio	VI-107
6.8.4	Solução simultânea	VI-124
6.9	Fluido não penetrante	VI-152
6.10	Fator de intensidade de tensão	VI-154
6.11	Resumo	VI-160
7.	Conclusões	VII-01
8.	Recomendações	VIII-01

Nomenclatura e simbologia

Referências

VOLUME II

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES E RESULTADOS

6.1 Introdução

Este capítulo aborda a solução de alguns problemas clássicos da teoria da elasticidade [1,2,6] e da mecânica de rochas [121-129], usando o método dos elementos de contorno.

Faz, também um, estudo completo de um poço circular perfurado em uma formação poro-permeável

É conveniente lembrar que, como já foi dito no capítulo introdutório, convencionou-se como positiva a tensão de tração. O vetor tensão é positivo quando sua direção é igual à da normal externa. Determinado componente de um deslocamento é positivo se sua direção é a mesma do eixo coordenado correspondente.

6.2 Placa infinita com furo circular

O caso de uma placa infinita com um furo circular é clássico em teoria da elasticidade. A solução foi apresentada por G. Kirsch [121].

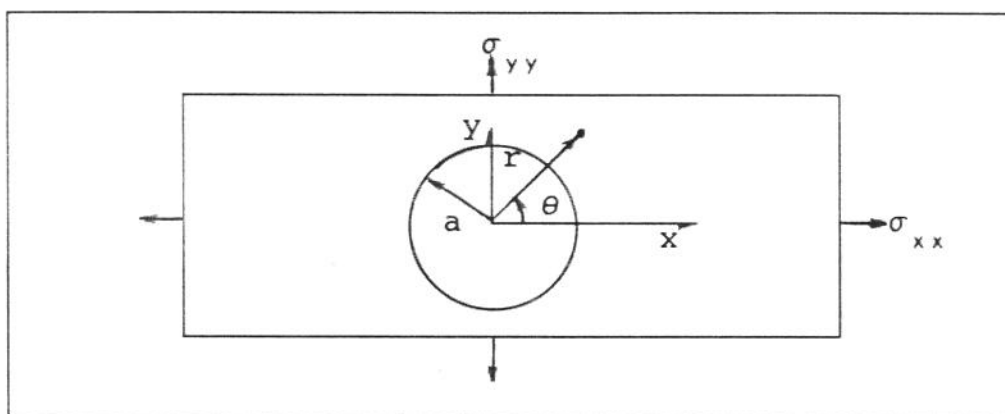


Figura 6.2.01 - Placa infinita com furo circular

A tensão radial é dada por

$$\sigma_{rr} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) (1 - a^2/r^2)/2 + \\ + 0,5(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) (1 + 3a^4/r^4 - 4a^2/r^2) \cos 2\theta$$

Observe-se que para

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$$

Tem-se

$$\sigma_{rr} = \sigma(1 - a^2/r^2) \quad (6.2.01)$$

O valor máximo ocorre longe do furo ($r \rightarrow \infty$) e é igual à tensão de carregamento. O valor mínimo ocorre na parede do furo e é igual a 0. Tudo isto em módulo.

A tensão circunferencial é dada por

$$\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) (1 + a^2/r^2)/2 - 0,5(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) (1 + 3a^4/r^4) \cos 2\theta$$

Observe-se que, novamente, para

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$$

Tem-se

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma(1 + a^2/r^2) \quad (6.2.02)$$

O máximo ocorre na parede do furo e é igual ao dobro da tensão solicitante. O mínimo ocorre longe do furo sendo, como esperado, igual ao carregamento. Tudo em valores absolutos.

Note-se que, para o caso hidrostático, a soma das tensões radial e circunferencial é constante e igual ao dobro do carregamento.

A tensão de cisalhamento é calculada por

$$\sigma_{r\theta} = -0,5(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) (1 - 3a^4/r^4 + 2a^2/r^2) \sin 2\theta$$

O deslocamento radial é calculado por

$$u = \frac{1-\nu}{2G} \left[\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) \left(r + \frac{a^2}{r} \right) + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \left(r - \frac{a^4}{r^3} + \frac{4a^2}{r} \right) \cos 2\theta \right] +$$

$$-\frac{\nu}{2G} \left[\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) \left(r - \frac{a^2}{r} \right) - \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right]$$

A equação anterior fornece o deslocamento radial para o caso de deformação plana.

Observe-se que para

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$$

Tem-se

$$u = \frac{1-\nu}{2G} \sigma (r + a^2/r) - \frac{\nu \sigma}{2G} (r - a^2/r)$$

$$u = \frac{\sigma r}{2G} [1 - \nu + (1 - \nu) a^2/r^2 - \nu + \nu a^2/r^2]$$

$$u = \frac{\sigma r}{2G} \left[1 - 2\nu + \frac{a^2}{r^2} \right] \quad (6.2.03)$$

Para o caso de tensão plana, modifica-se a equação (6.2.03), obtendo-se a expressão abaixo [121].

$$u = \frac{\sigma r}{2G} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (6.2.04)$$

O problema da placa infinita com um furo circular serve para modelar o efeito das tensões tectônicas em um poço circular vertical, supondo que a direção de uma das tensões principais coincida com o eixo do poço [123]. Este modelo é aceitável pois a espessura de uma rocha-reservatório é bem menor que as outras duas dimensões, tal qual uma placa.

A simulação foi feita com placa representada por um quadrado de lados iguais a 10m com um furo circular central com raio igual a 0,5m. O contorno externo foi discretizado com 48 elementos lineares iguais e o interno, com 81.

Na simulação deste caso foram usados os dados abaixo relacionados.

Tensão de carregamento σ_{xx} : -10 MPa

Tensão de carregamento σ_{yy} : 10 MPa

Pressão no poço $p_w = 0$.

Pressão de poros p_0 : 0.

Módulo de rigidez G : 6000 MPa

Módulo de Poisson drenado ν : 0,25

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,50

Coeficiente de Skempton B : 1.

Coeficiente de permeabilidade k : $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / (\text{MPa} \times \text{s})$

Raio do furo a : 0,5 m

Dimensão característica r_c : 0,5 m

O coeficiente de permeabilidade acima equivale ao fluxo de água doce (1 cp) em um meio poroso com uma permeabilidade à água igual a 20 mD, ou um meio poroso de 100 mD com um óleo de 5 cp.

As constantes ν_u e B utilizadas são características de um meio poroso cujos componentes são incompressíveis, situação em que os efeitos poroelásticos são mais acentuados.

A placa está descarregada e no instante 0^+ aplica-se as seguintes condições de contorno:

Contorno externo

$$t_x = \sigma_{xx} n_x = -10 \text{ MPa}$$

$$t_y = \sigma_{yy} n_y = 10 \text{ MPa}$$

$$\Delta p = p_w - p_0 = 0$$

Contorno interno

$$t_x = 0. \quad t_y = 0. \quad \Delta p = p_w - p_0 = 0.$$

O deslocamento radial foi adimensionalizado, sendo que nas figuras 6.2.02 e 6.2.03 representa-se

$$u' = \frac{2Gu}{a\sigma_{xx}}$$

Para um tempo 0^+ o que predomina são as condições não drenadas, $\nu_u = 0,5$. A solução elástica daria, na parede do poço, um deslocamento adimensional igual a 2. Obteve-se, numericamente, para um tempo adimensional t^* igual a 0.001, um valor de 2,002.

Para um tempo longo, ou seja, em condições drenadas, a

solução elástica daria um deslocamento radial adimensional na parede do furo igual a 3,0. Numericamente foi obtido um valor igual a 2,942 para t^* igual a 10.

A figura 6.2.03 amplia os resultados obtidos próximos ao contorno.

O tempo adimensional é definido por

$$t^* = ct/r_c^2 \quad (6.2.05)$$

Sendo

t - tempo em segundos

r_c - dimensão característica em m

c - coeficiente de consolidação em m^2/s

A dimensão característica depende do problema que está sendo estudado. No caso ela é o raio do furo. O coeficiente de consolidação é dado pela equação 2.4.18.

Como se pode ver, para um tempo adimensional maior do 100, os resultados tendem, ou melhor, praticamente coincidem com a com a solução elástica.

A evolução da pressão de poros ao longo do eixo dos x é mostrada na figura 6.2.04 e a figura 6.2.05 mostra detalhes nas proximidades do contorno. Como se vê ela sofre uma variação brusca próximo ao furo e depois cai rapidamente. Ao longo do eixos dos y a variação ocorre no sentido contrário. A pressão foi normalizada dividindo-se por σ_{xx} .

Todas as tensões mostradas nas figuras a seguir estão normalizadas, ou seja, foram divididas por σ_{xx} (-10 MPa).

A evolução da tensão radial total ao longo do eixo dos x é mostrada nas figuras 6.2.06 e 6.2.07. Ela tende à solução dada pela teoria elástica, que é zero na parede do furo e -10 MPa longe do mesmo. A figura 6.2.07 mostra detalhes nas vizinhanças do contorno interno. Observe-se que nesta região ela é de tração e mais para dentro do domínio, de compressão. Ao longo do eixo dos y o comportamento é reverso.

As figuras 6.2.08 e 6.2.09 mostram a evolução da tensão radial efetiva ao longo do eixo dos x . Inicialmente ela é compressiva devido à queda da pressão, depois retorna à tração próximo ao furo, mantendo-se sempre compressiva longe do mesmo, tendendo ao valor de σ_{xx} , pois a pressão é zero.

O comportamento da tensão circunferencial total

é mostrado nas figuras 6.2.10 e 6.2.11. Ao longo do eixo dos x ela é sempre tração e é sempre compressão ao longo do eixo dos y. Ela tende ao valor elástico, 40 MPa, próximo ao furo e, à σ_{yy} longe dele. A evolução da tensão circunferencial efetiva ao longo do eixo do x é mostrada nas figuras 6.2.12 e 6.2.13. Os efeitos da variação da pressão são significativos próximo ao furo.

A tensão de cisalhamento máxima no eixo dos x é mostrada nas figuras 6.2.14 e 6.2.15 e pouco varia ao longo do tempo.

A vazão radial específica no eixo dos x pode ser vista nas figuras 6.2.16 e 6.2.17. Ela é muito grande no tempo 0^+ e cai rapidamente. A vazão foi normalizada multiplicando-se pelo raio do furo e dividindo-se pela permeabilidade e pela tensão σ_{xx} .

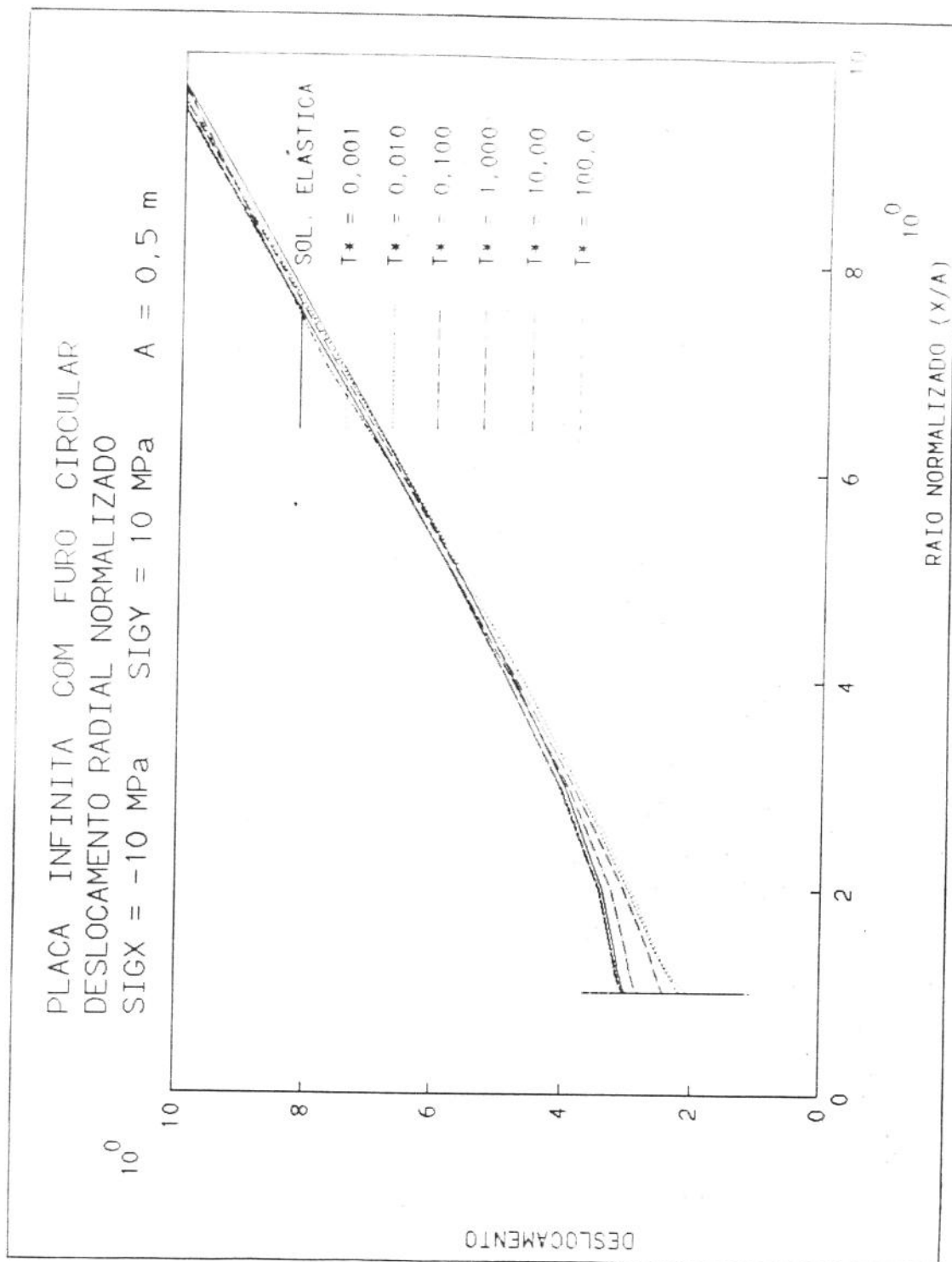


Figura 6.2.02 - Placa infinita com furo circular
 Deslocamento radial adimensional

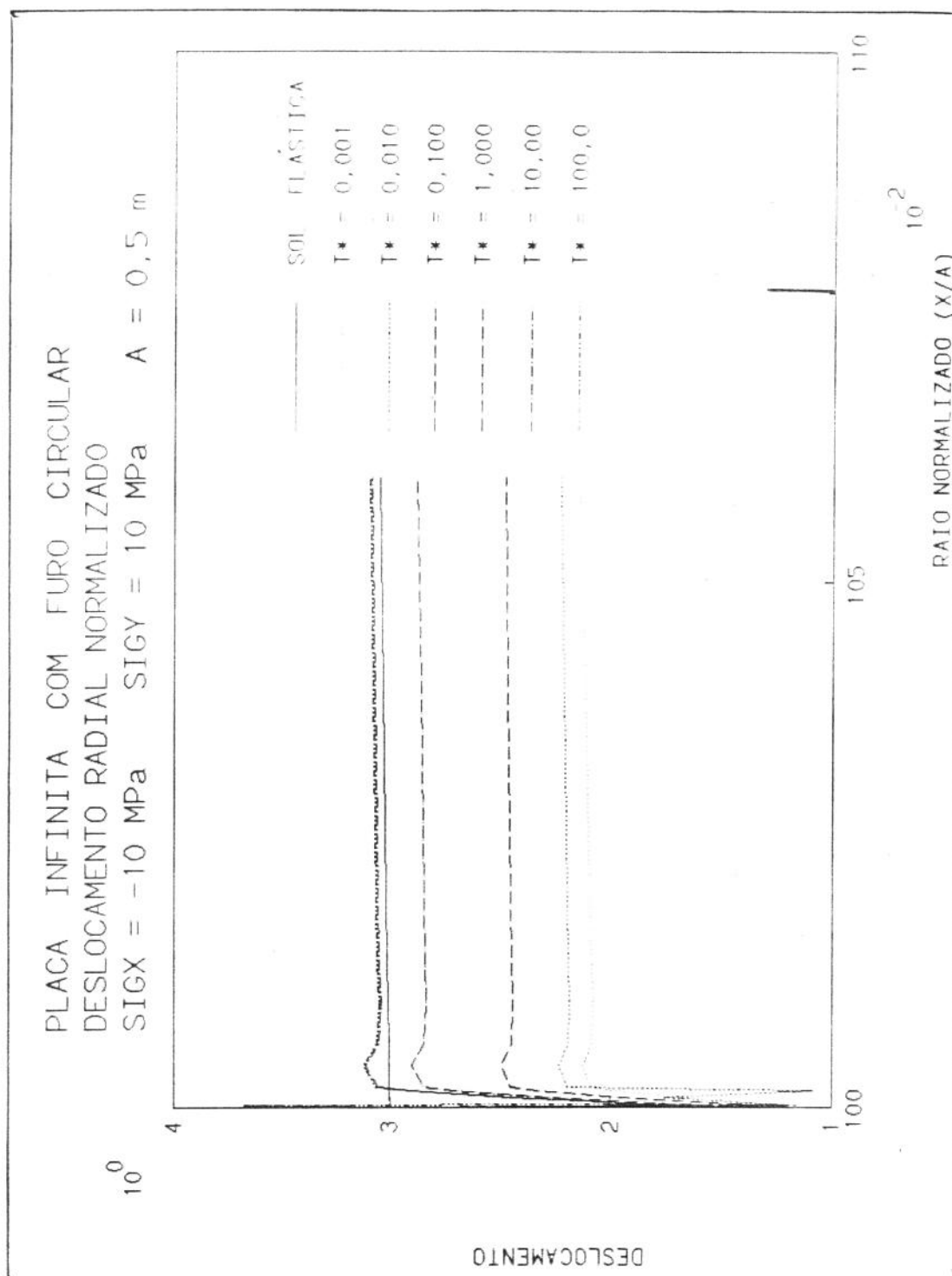


Figura 6.2.03 - Placa infinita com furo circular
 Deslocamento radial adimensional
 Proximidades do furo

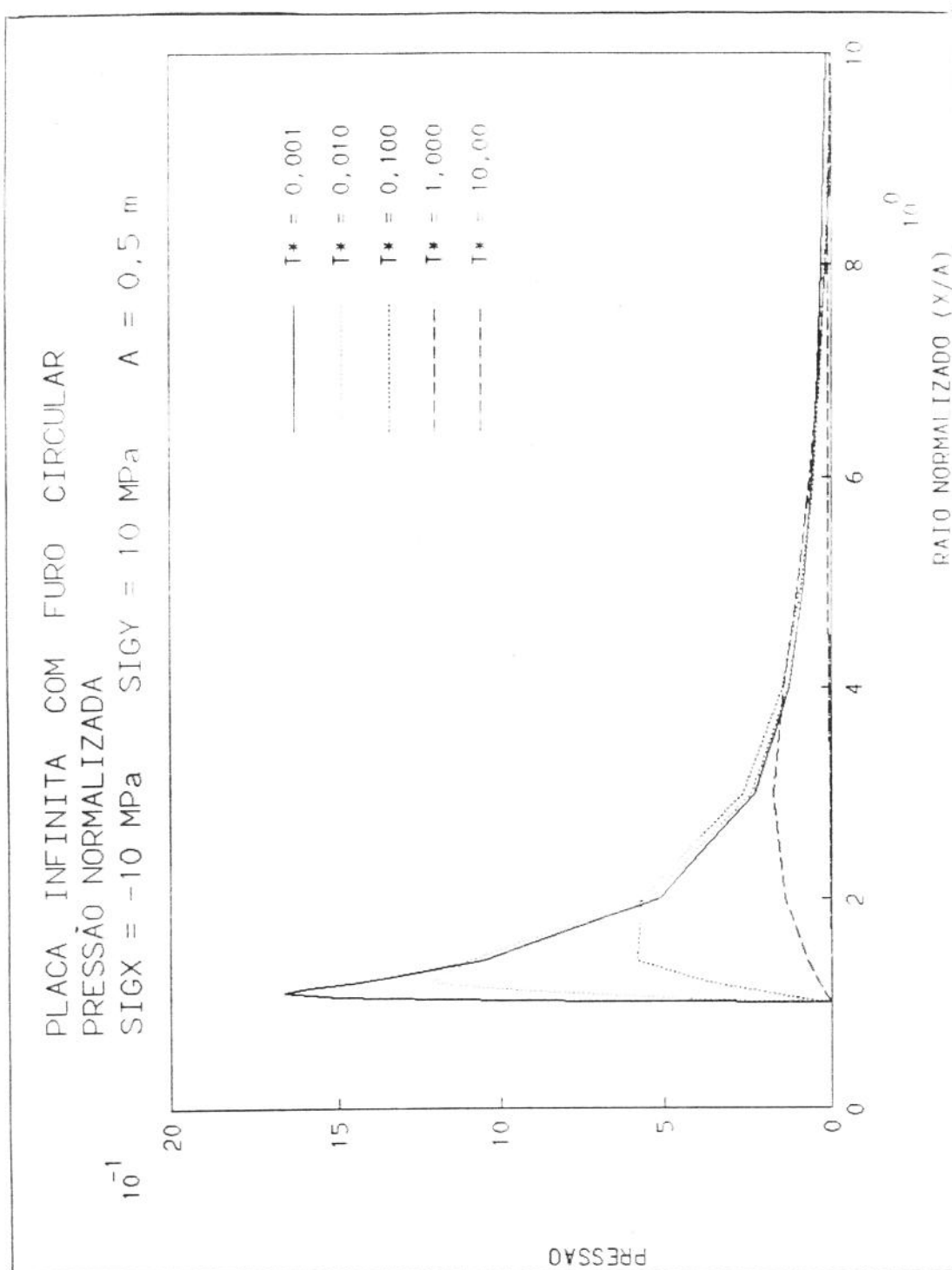


Figura 6.2.04 - Placa infinita com furo circular
Pressão de poros adimensional

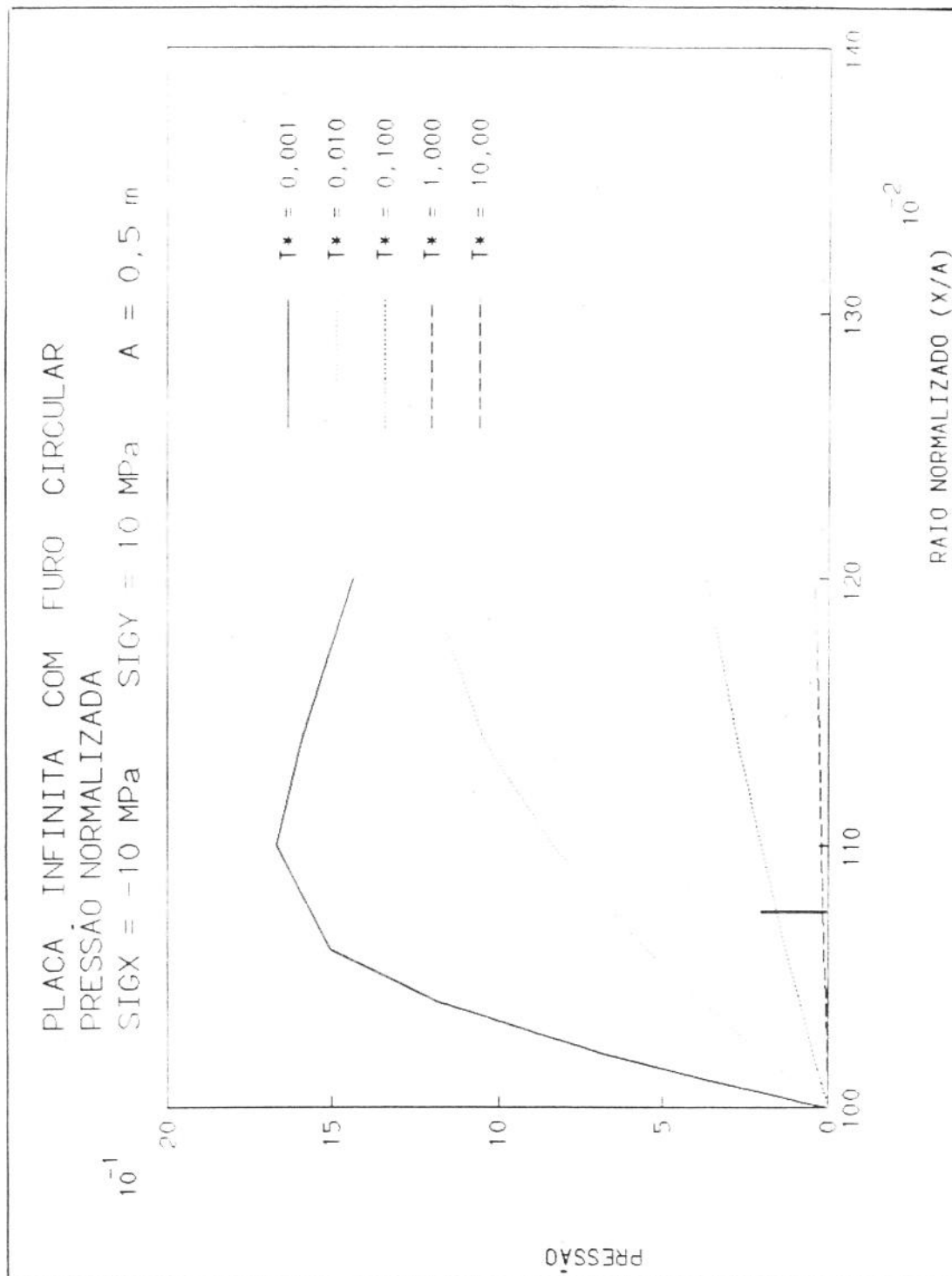


Figura 6.2.05 - Placa infinita com furo circular
Pressão de poros normalizada
Proximidades do furo

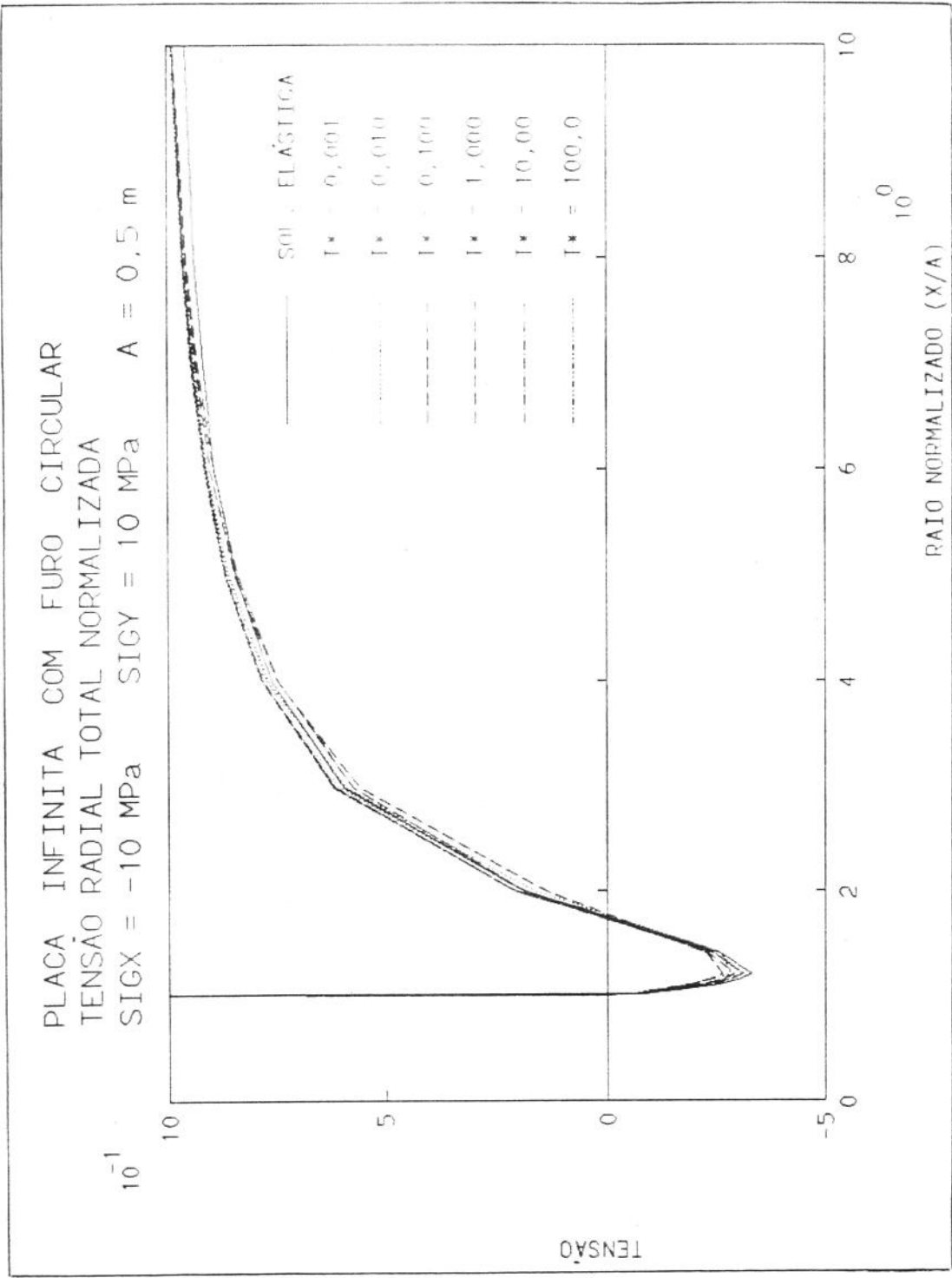


Figura 6.2.06 - Placa infinita com furo circular
 Tensão radial total normalizada

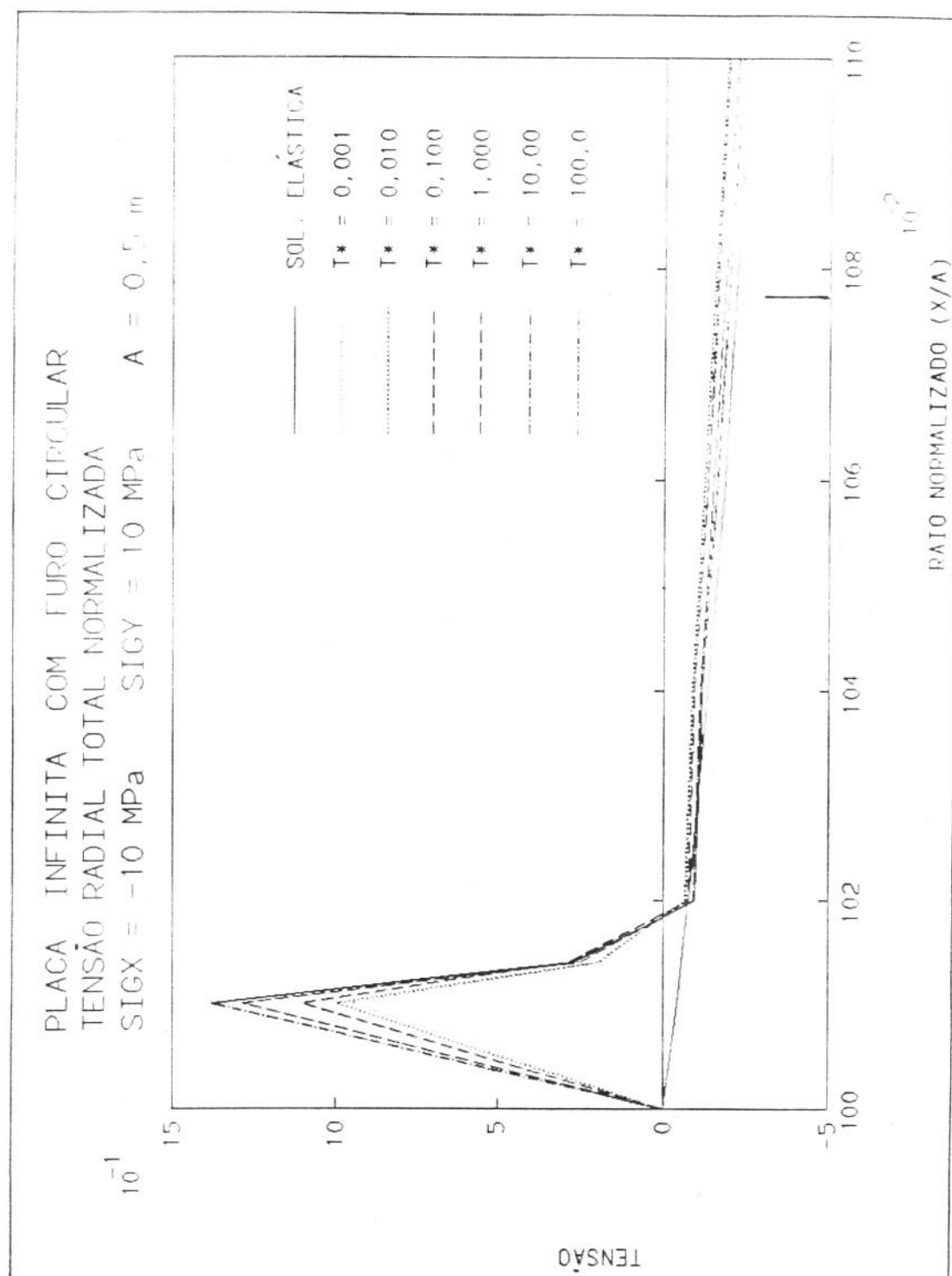


Figura 6.2.07 - Placa infinita com furo circular
Tensão radial total adimensional
Proximidades do furo

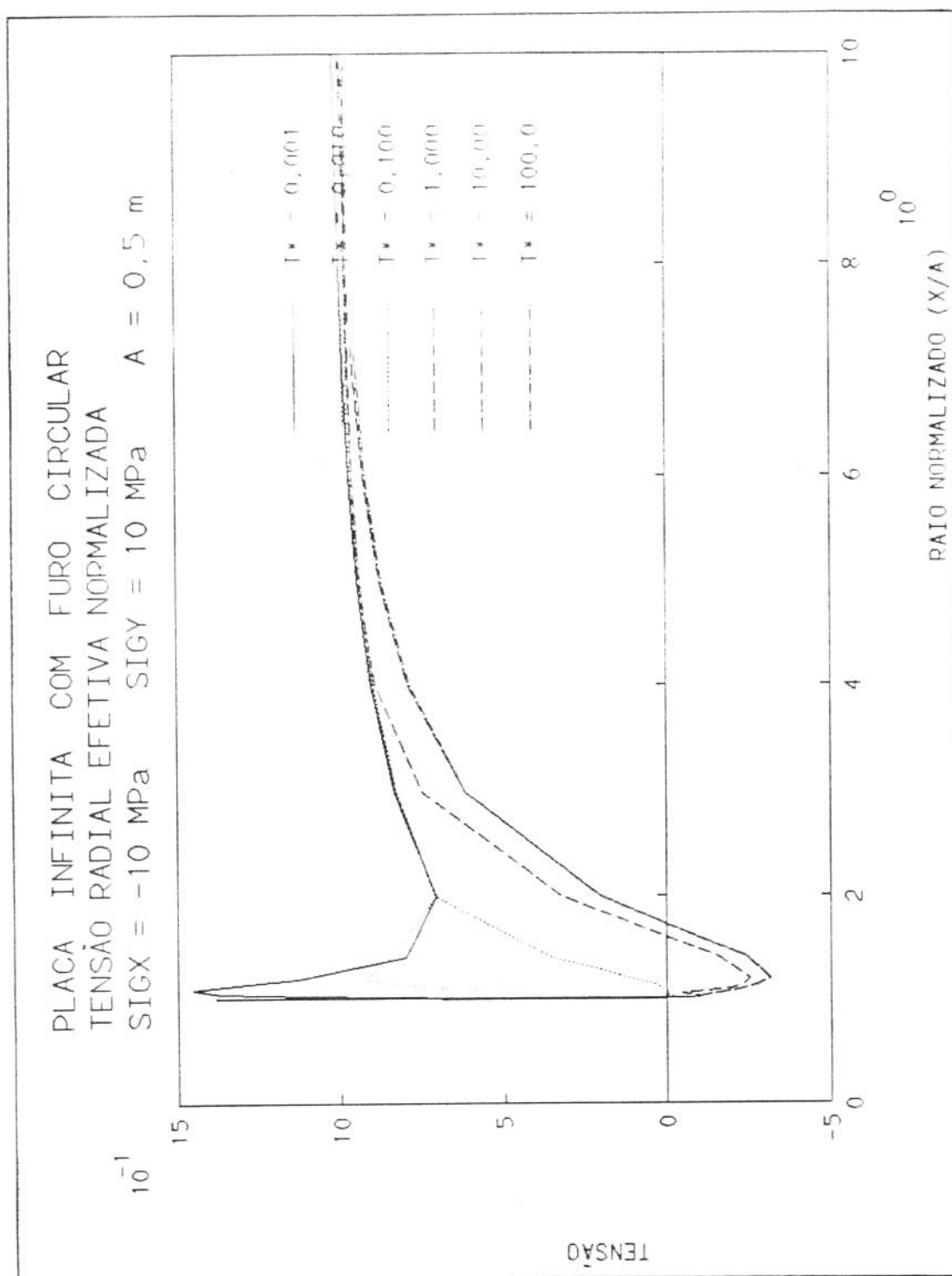


Figura 6.2.08 - Placa infinita com furo circular
Tensão radial efetiva adimensional

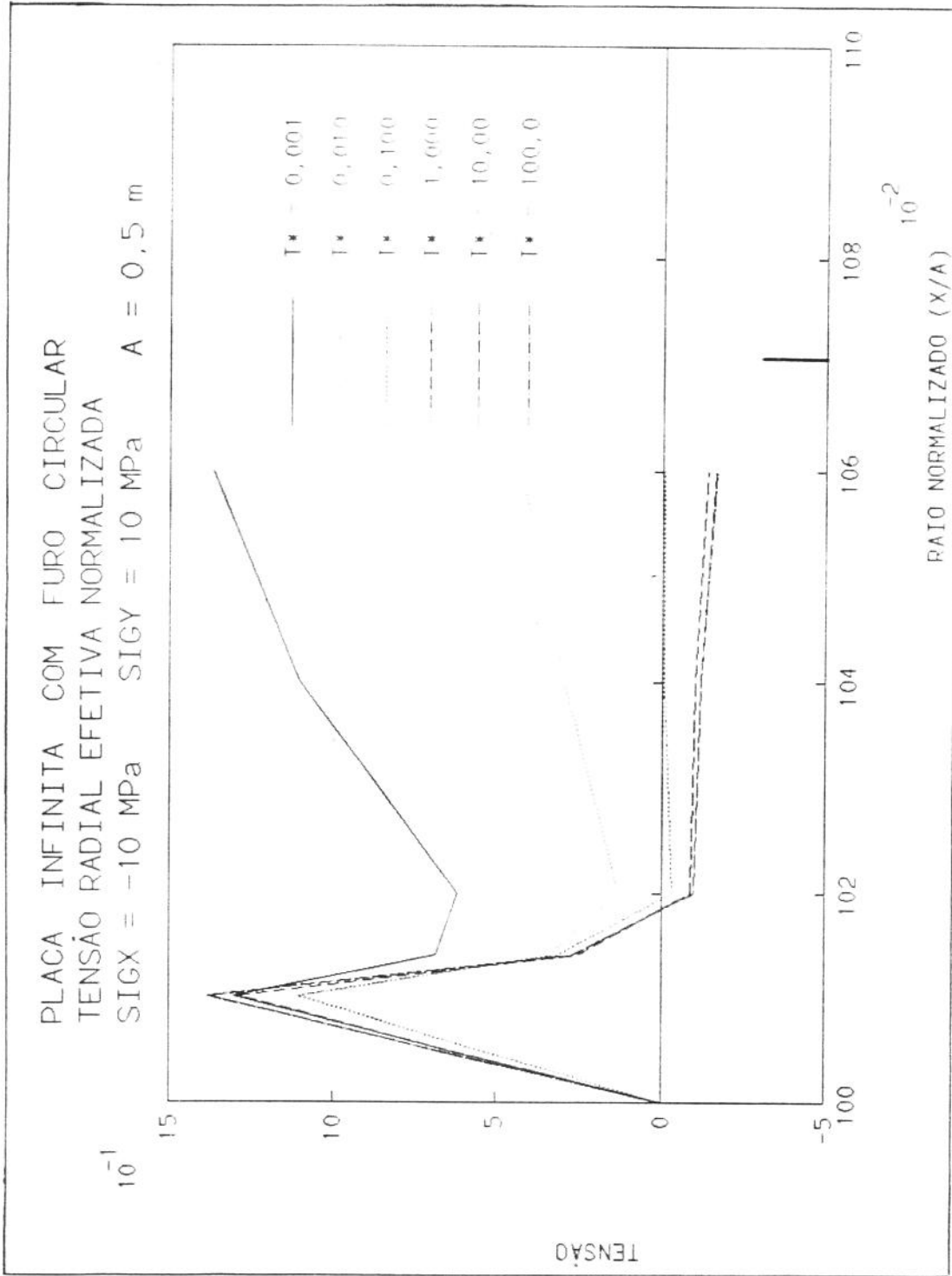


Figura 6.2.09 - Placa infinita com furo circular
Tensão radial efetiva adimensional
Proximidades do furo

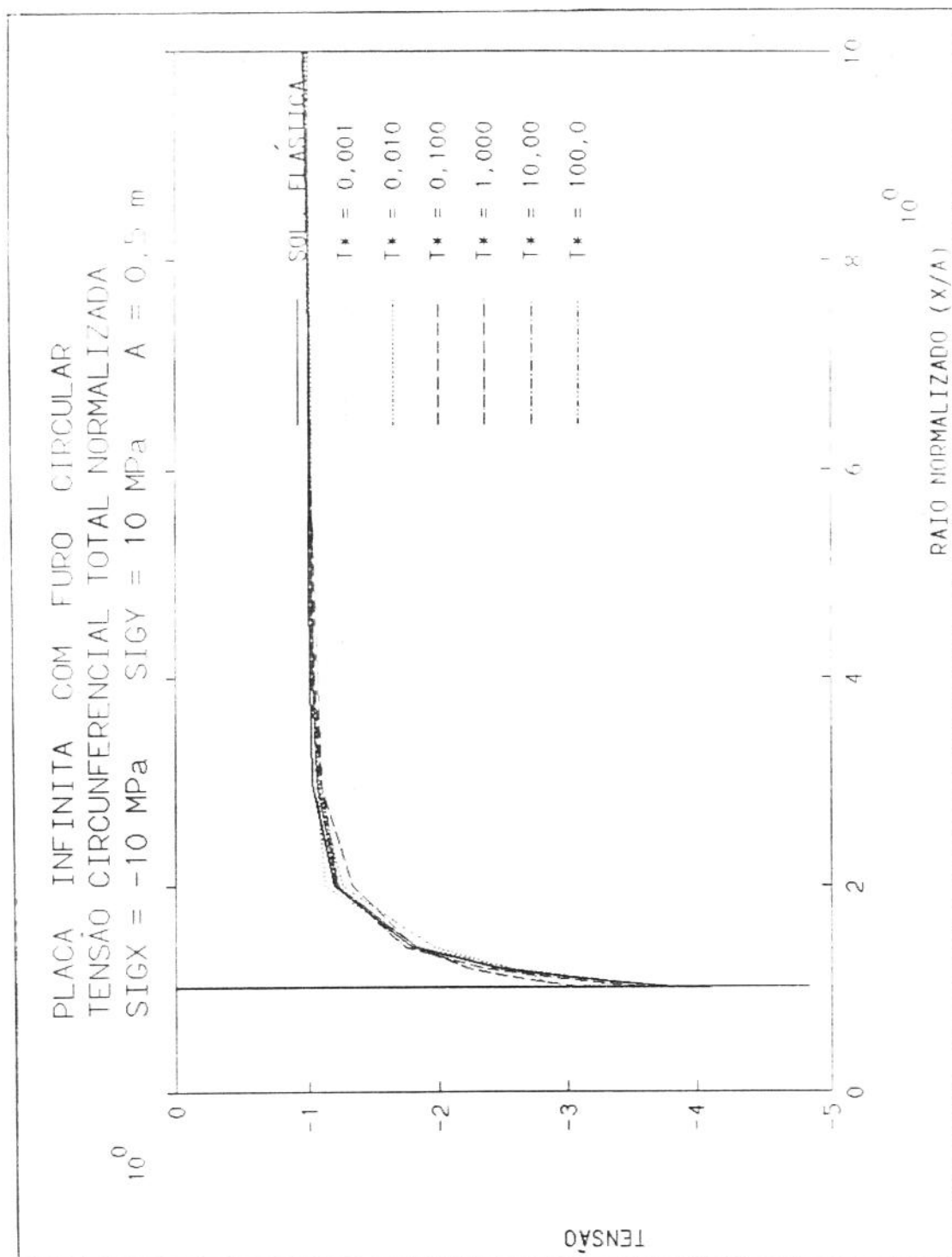


Figura 6.2.10 - Placa infinita com furo circular
 Tensão circunferencial total adimensional

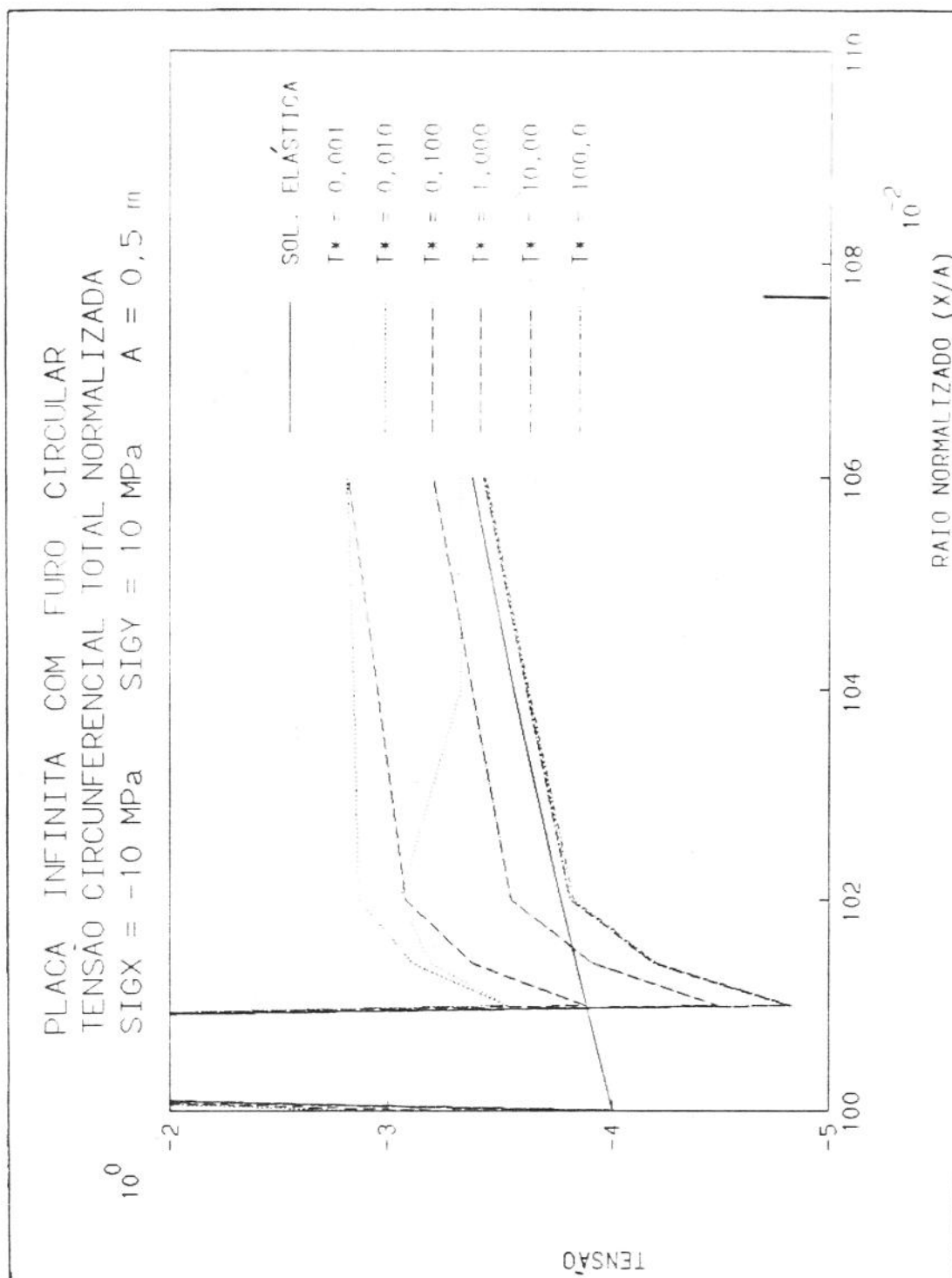


Figura 6.2.11 - Placa infinita com furo circular
Tensão circunferencial total adimensional
Proximidades do furo

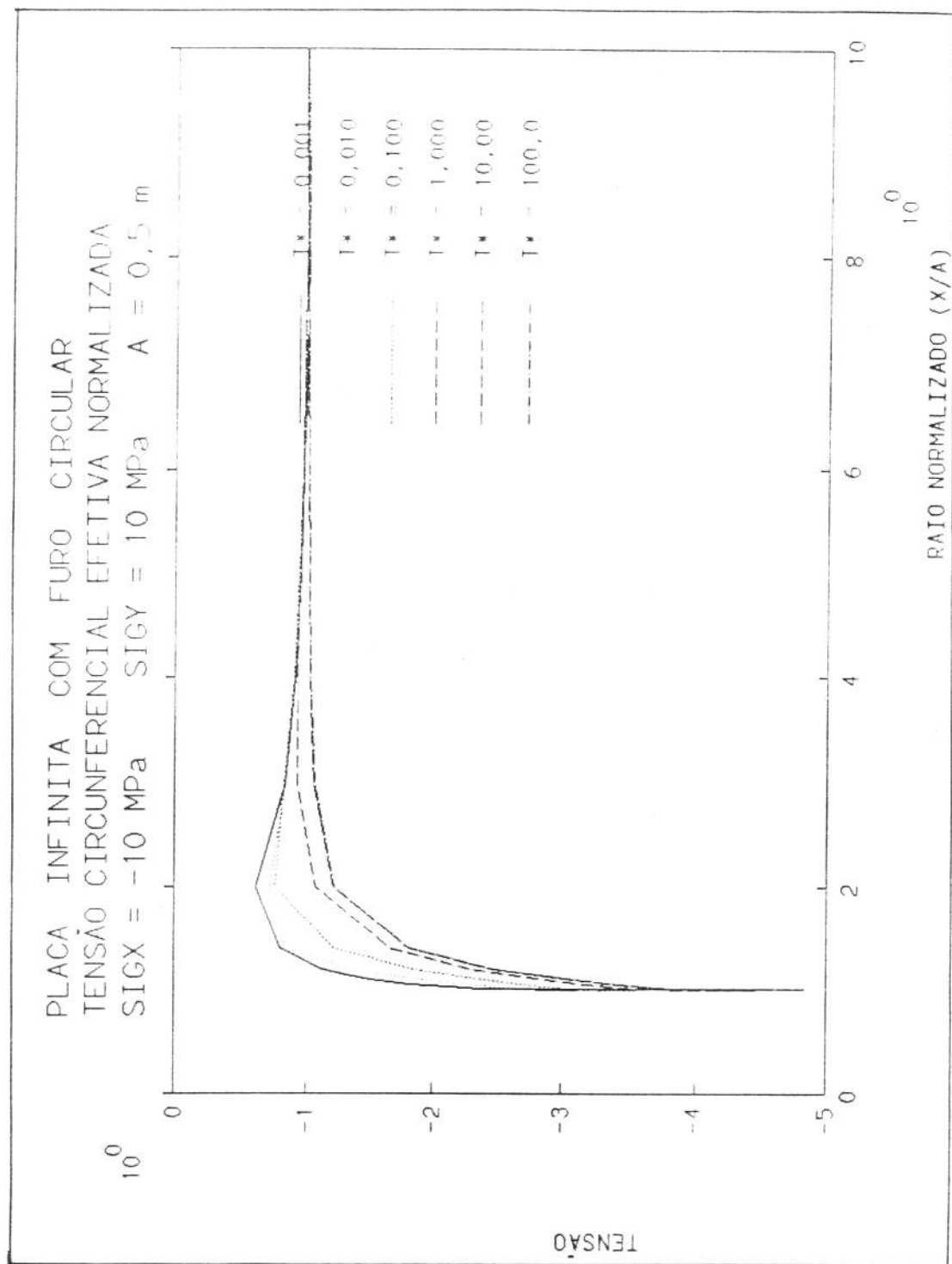


Figura 6.2.12 - Placa infinita com furo circular
Tensão circunf. efetiva adimensional

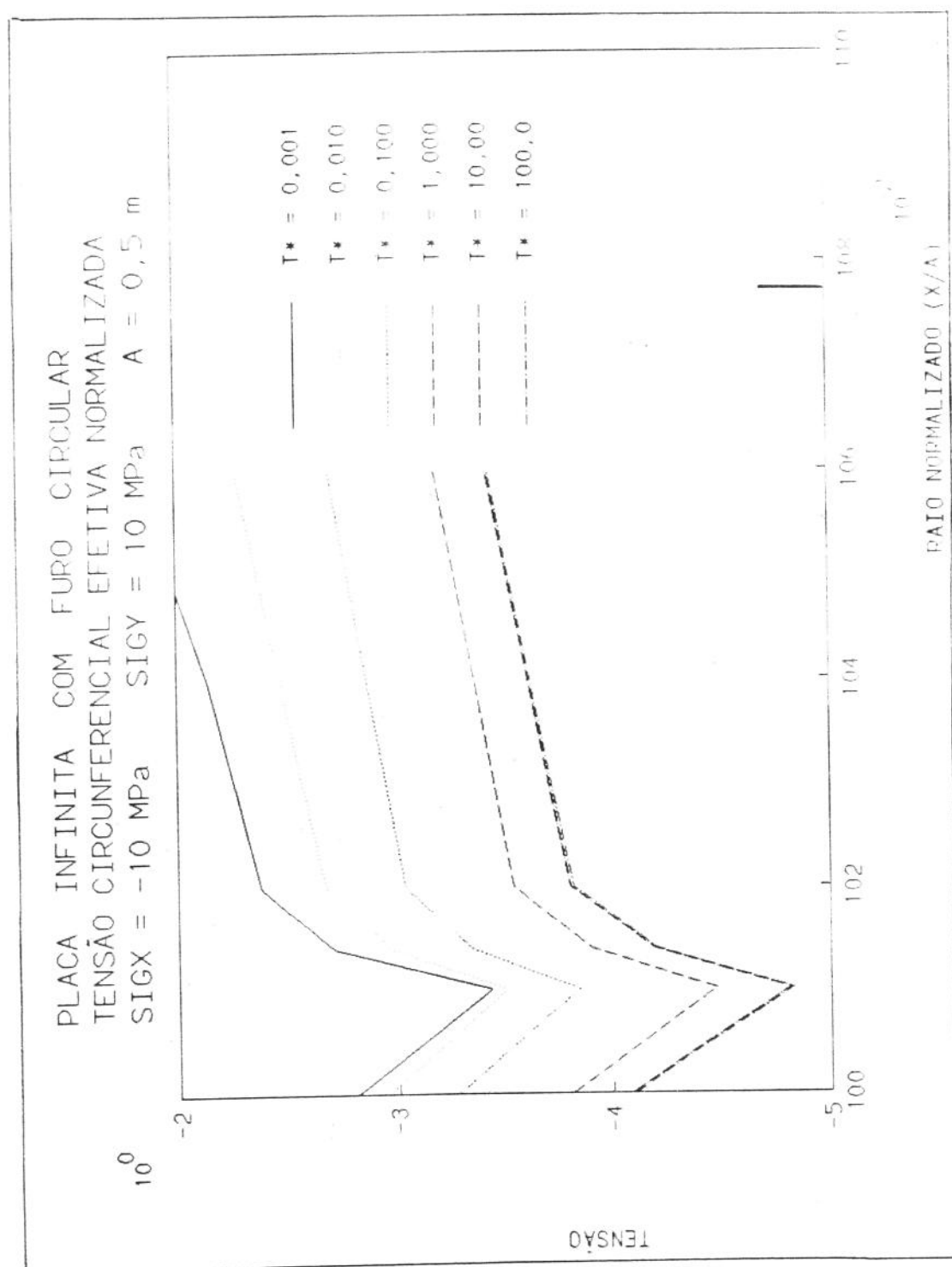


Figura 6.2.13 - Placa infinita com furo circular
Tensão circunf. efetiva adimensional
Proximidades do furo

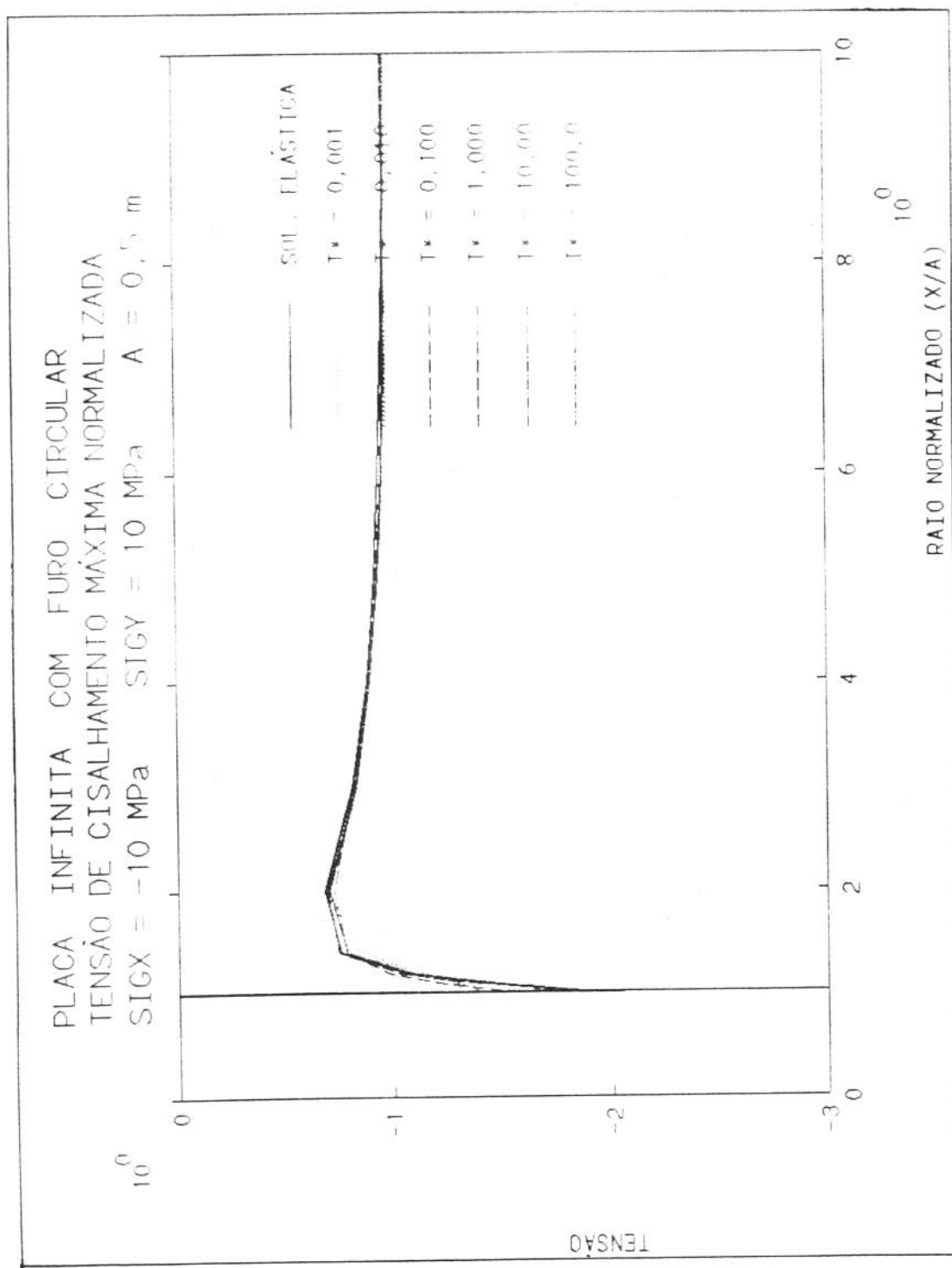


Figura 6.2.14 - Placa infinita com furo circular
Tensão de cisalhamento adimensional

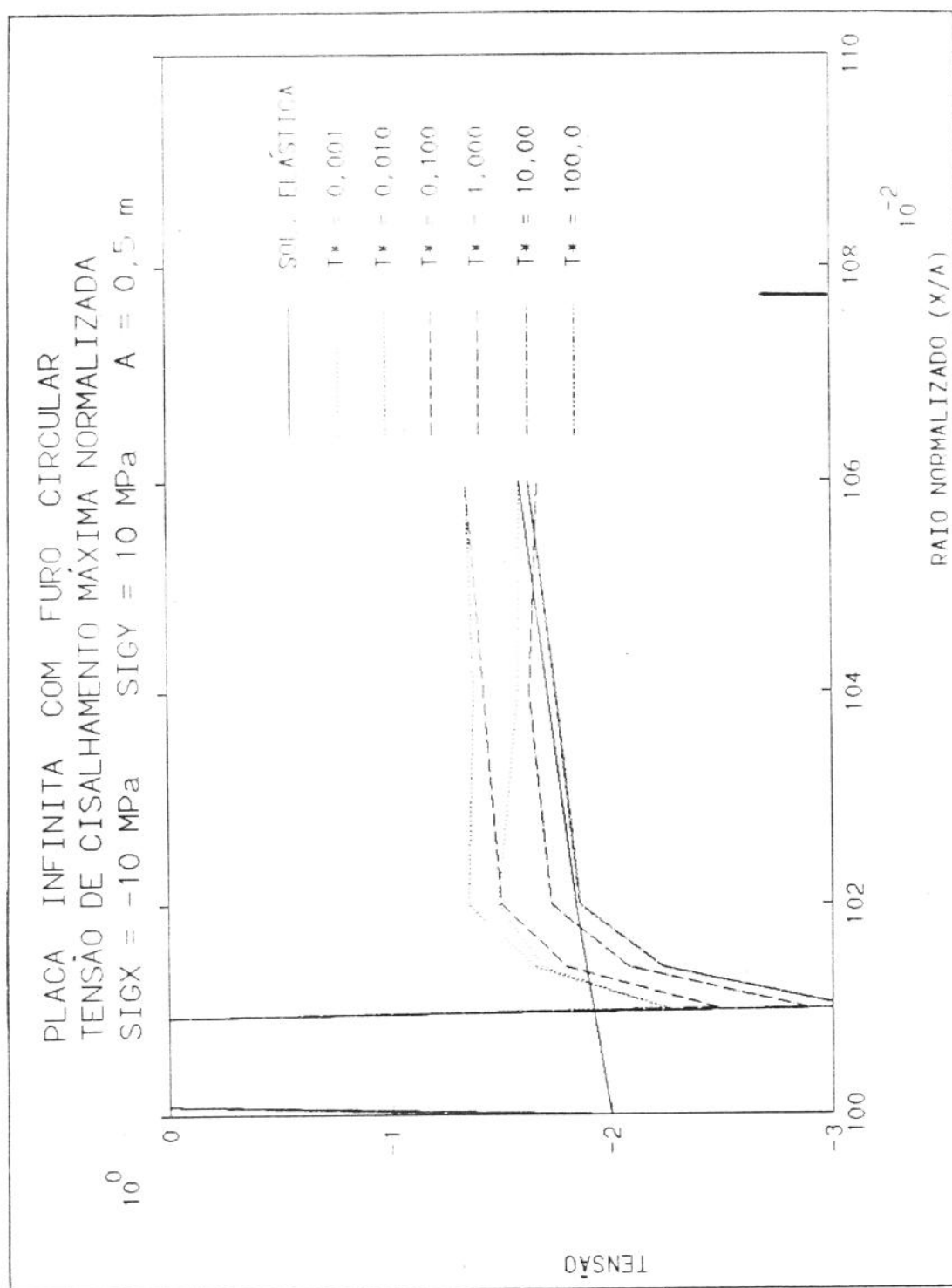


Figura 6.2.15 - Placa infinita com furo circular
Tensão de cisalhamento adimensional
Proximidades do furo

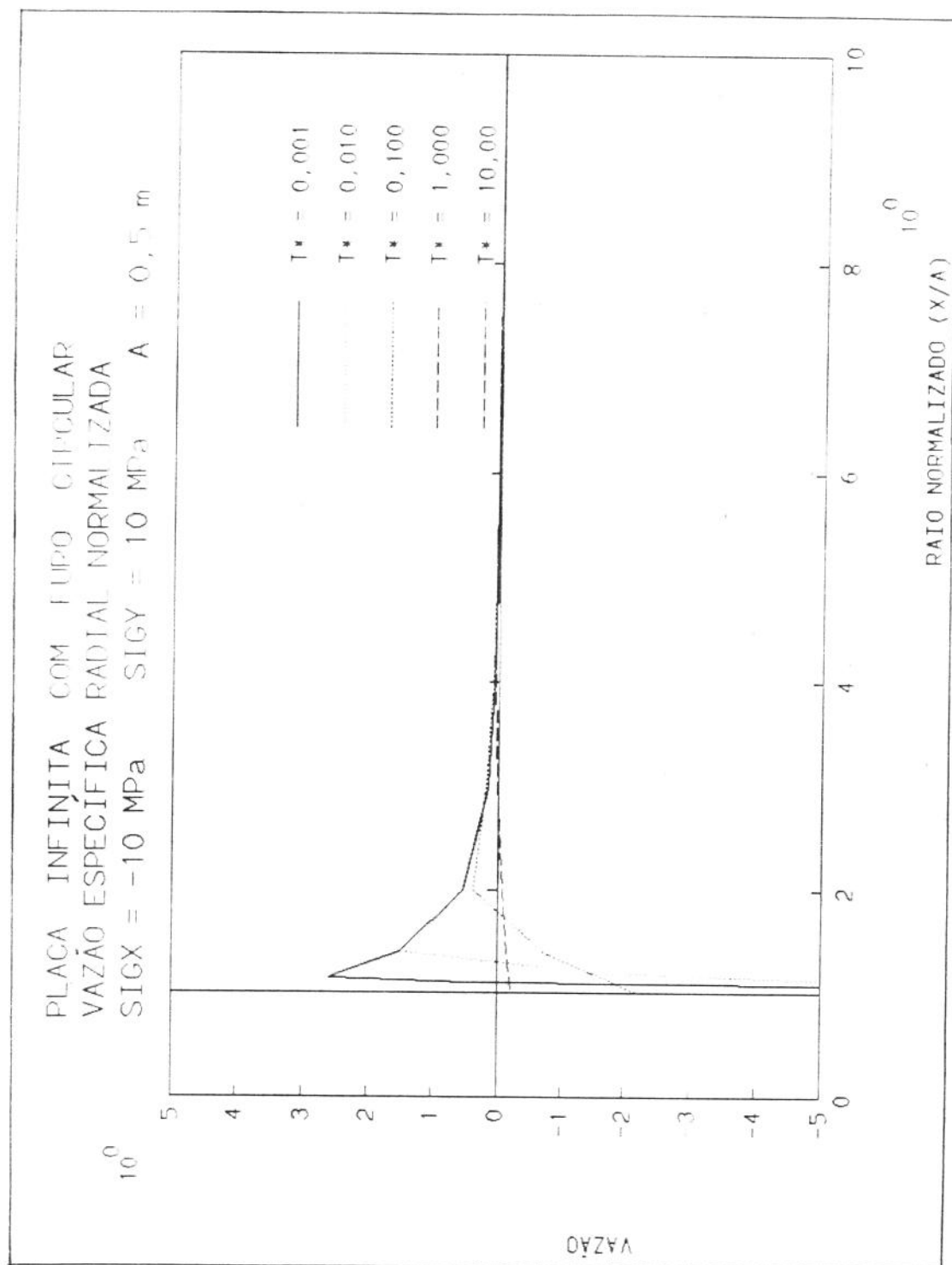


Figura 6.2.16 - Placa infinita com furo circular
 Vazão específica radial adimensional

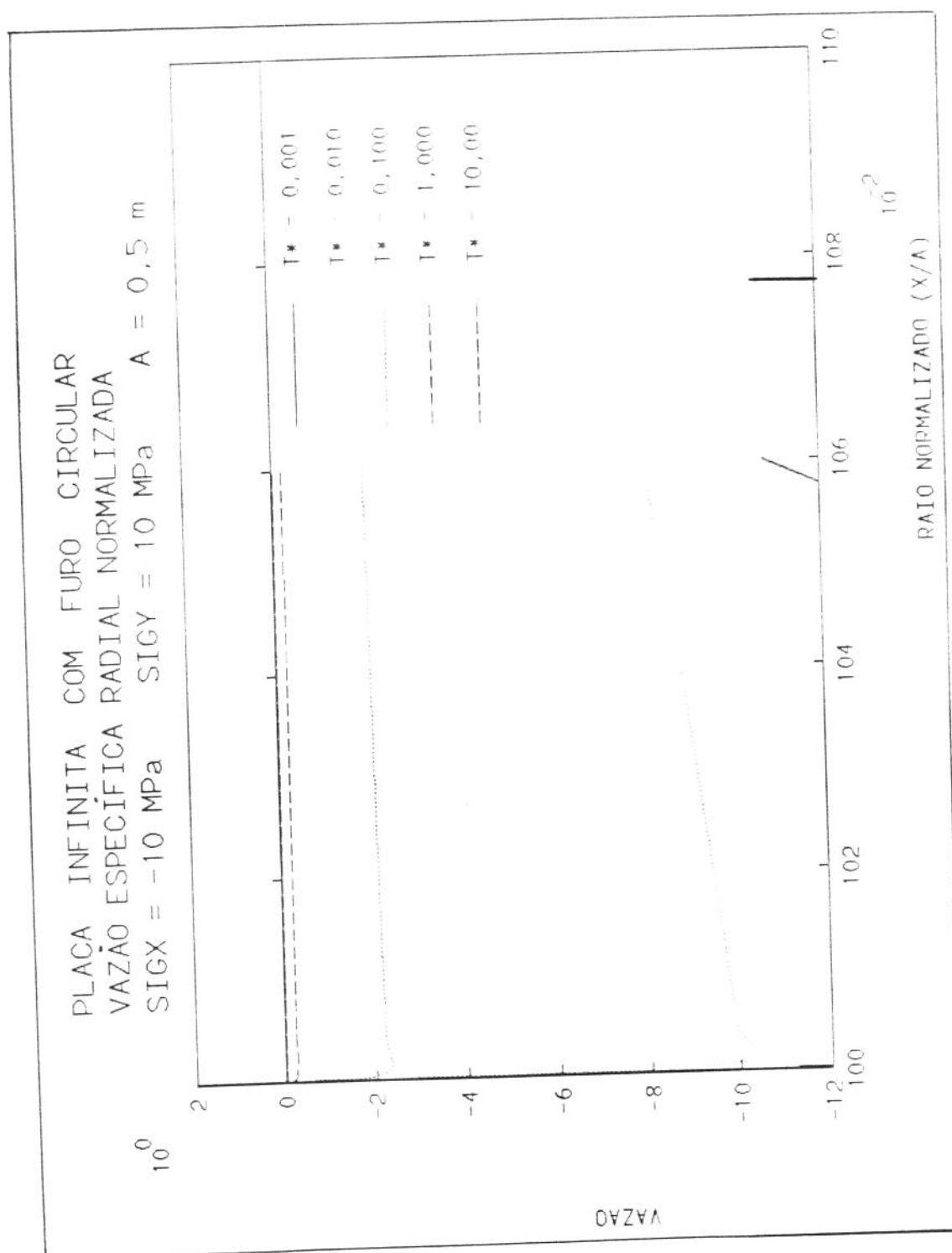


Figura 6.2.17 - Placa infinita com furo circular
 Vazão específica radial adimensional
 Proximidades do furo

6.3. Cilindro de paredes espessas

Um outro problema clássico da teoria da elasticidade é aquele de um cilindro de paredes espessas, também conhecido como cilindro de Lamé. Um cilindro é considerado de paredes espessas quando o raio externo é, no mínimo, 10% maior que o raio interno [2].

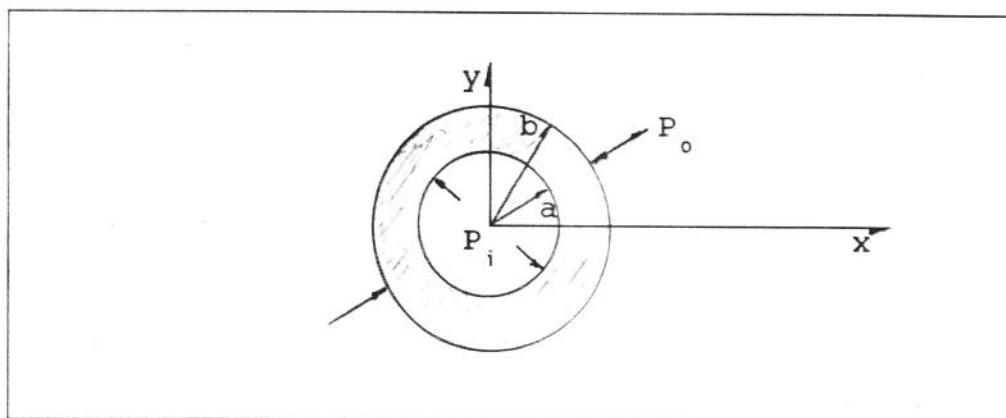


Figura 6.3.01 - Cilindro de paredes espessas

Este problema é um excelente exemplo de um caso de simetria axial.

O deslocamento radial pode ser calculado por [121]:

$$u = \frac{1+\nu}{E(b^2-a^2)} \left[(a^2 p_i - b^2 p_o) (1-2\nu) r - \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{r} \right] \quad (6.3.01)$$

Este problema é usado, em engenharia de petróleo, para simular o efeito da pressão dentro do poço [123]. Esta pressão é a soma da pressão hidrostática do fluido que se acha no poço e a pressão na superfície. Para esta modelagem o raio externo b do cilindro é considerado muito maior do que o interno, a .

Assim a equação 6.3.01 torna-se

$$u = \frac{1+\nu}{E} \left[-p_o (1-2\nu) r - \frac{a^2 (p_o - p_i)}{r} \right] \quad (6.3.02)$$

A pressão externa, p_o , para esta modelagem é nula,

ficando a equação anterior reduzida à

$$u = \frac{a^2 p_i (1+\nu)}{Er} \quad (6.3.03)$$

Trabalhando esta equação tem-se

$$u = \frac{a^2 p}{2Gr} \quad (6.3.04)$$

Onde a pressão interna foi chamada de p e o módulo de Young foi substituído pelo módulo de rigidez.

Note-se que para p_i igual a zero a equação 6.3.02 fica

$$u = \frac{1+\nu}{E} \left[-p_o (1-2\nu)r - \frac{a^2 p_o}{r} \right]$$

$$u = \frac{\sigma r}{2G} \left[1-2\nu + \frac{a^2}{r^2} \right] \quad (6.3.05)$$

Esta equação é igual a equação 6.2.03, como esperava-se, pois uma placa infinita com um furo circular pode ser vista como um cilindro de paredes espessas, cujo raio externo, b , é infinito

Voltando para a equação 6.3.03, pode ser observado que no tempo $t^* = 0^+$, quando predominam as condições não drenadas, o deslocamento radial na parede do furo é m vezes o mesmo deslocamento após um tempo longo. O valor de m é

$$m = (1+\nu_u)/(1+\nu)$$

Na simulação deste caso o contorno foi discretizado com 128 elementos lineares iguais e foram usados os seguintes dados:

Pressão de poros p_o : 0.

Pressão interna p_w : 0.

Tensão radial σ : -10 MPa

Módulo de rigidez G : 6000 MPa

Módulo de Poisson drenado ν : 0,25

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,50

Coeficiente de Skempton B : 1.

Coeficiente de permeabilidade k : $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / (\text{MPa} \times \text{s})$

Raio interno a : 1 m

Dimensão característica r_c : 1 m

Inicialmente o cilindro estava totalmente relaxado e no instante 0^+ foi aplicada a tensão radial de -10 MPa.

As condições de contorno são as seguintes:

$$\sigma_{rr} = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

$$\Delta p = p_w - p_o = 0.$$

O deslocamento radial foi adimensionalizado, sendo que nas figuras 6.3.02 e 6.3.03 representa-se

$$u' = \frac{2Gu}{pa} \quad (6.3.06)$$

O tempo também foi adimensionalizado conforme a equação 6.2.05.

Na equação 6.3.06 os efeitos poroelásticos não estão tão óbvios como na equação 6.2.03. Na equação 6.3.03 pode-se perceber melhor estes efeitos, pois o módulo de Poisson está explícito.

A constante m definida anteriormente tem o seguinte valor:

$$m = (1 + \nu_u) / (1 + \nu) = (1 + 0,5) / (1 + 0,25) = 1,2$$

Com os dados acima relacionados calcula-se que a solução elástica (tempo longo) é igual a 1. Esta solução representa a situação em predominam as em condições drenadas, ou seja toda a pressão gerada foi totalmente dissipada. No tempo 0^+ , quando predominam as condições não drenadas ela é m vezes menor, sendo m igual a 1,2.

Numericamente, como se pode ver na figura 6.3.02, obteve-se um deslocamento inicial de 0.834 para um t^* igual a 10^{-3} , analiticamente usando ν_u seria 0,833. O deslocamento final tende à solução elástica. Obteve-se, para t^* igual a 1, um deslocamento radial igual a 0,967. Para tempos adimensionais t^* maiores do que 1 os deslocamentos radiais não se alteram. A figura 6.3.03 mostra detalhes nas proximidades do contorno.

Nas figuras as tensões foram normalizadas dividindo-se pela tensão radial no contorno (-10 MPa).

A figura 6.3.04 mostra a evolução da tensão radial total. Ela tende à solução elástica, que é zero longe da parede interna e -10 MPa na mesma, conforme abaixo [121].

$$\sigma_{rr} = \sigma(a^2/r^2)$$

$$\sigma_{rr} = -(1/1) \times 10 \text{ MPa} = -10 \text{ MPa}$$

A figura 6.3.05 mostra as vizinhanças do contorno.

As figuras 6.3.06 e 6.3.07 mostram a evolução da tensão circunferencial total, que é 10 MPa no contorno e zero longe dele.

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma(a^2/r^2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (1/1) \times 10 \text{ MPa} = 10 \text{ MPa}$$

Para este problema e para as condições usadas a variação da pressão de poros é praticamente zero, ou seja as tensões efetivas são iguais às tensões totais. Observe-se que a tensão radial é sempre compressiva e a circunferencial, sempre tração.

A tensão de cisalhamento máxima é mostrada nas figuras 6.3.08 e 6.3.09.

A vazão radial específica normalizada é vista nas figuras 6.3.10 e 6.3.11. A normalização é mesma usada no item 6.2.

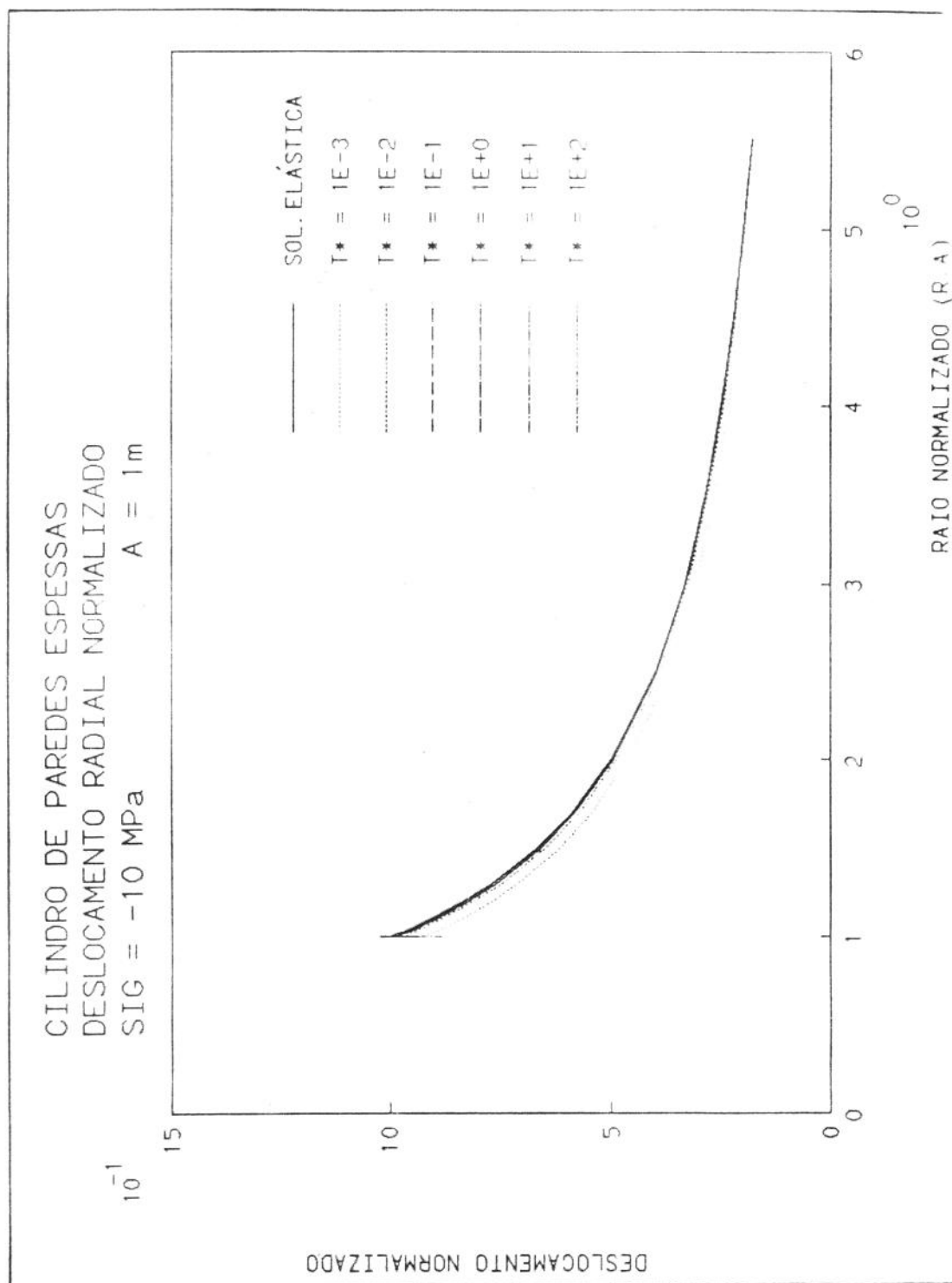


Figura 6.3.02 - Cilindro de paredes espessas
Deslocamento radial adimensional

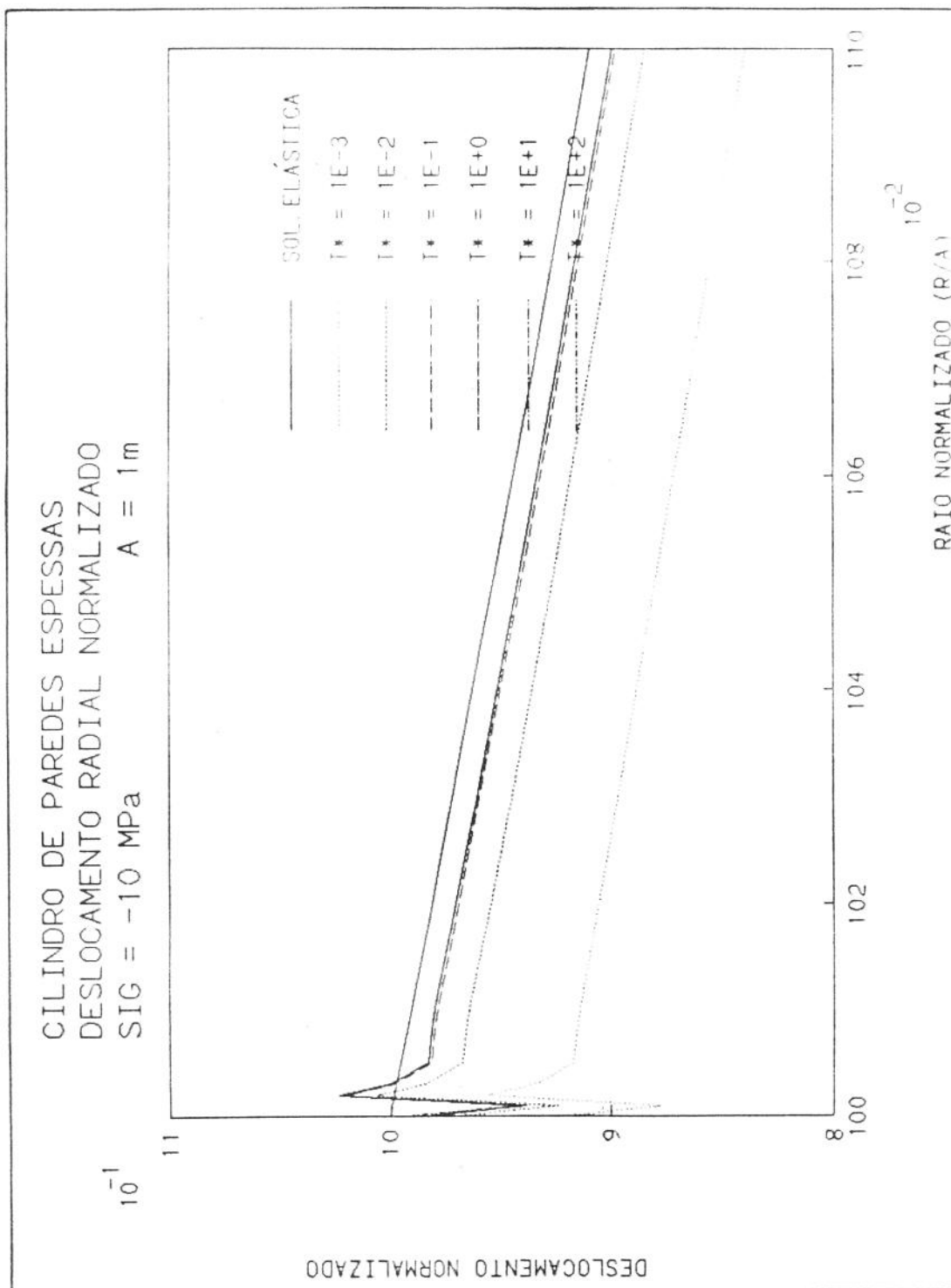


Figura 6.3.03 - Cilindro de paredes espessas
Deslocamento radial adimensional
Proximidades do contorno

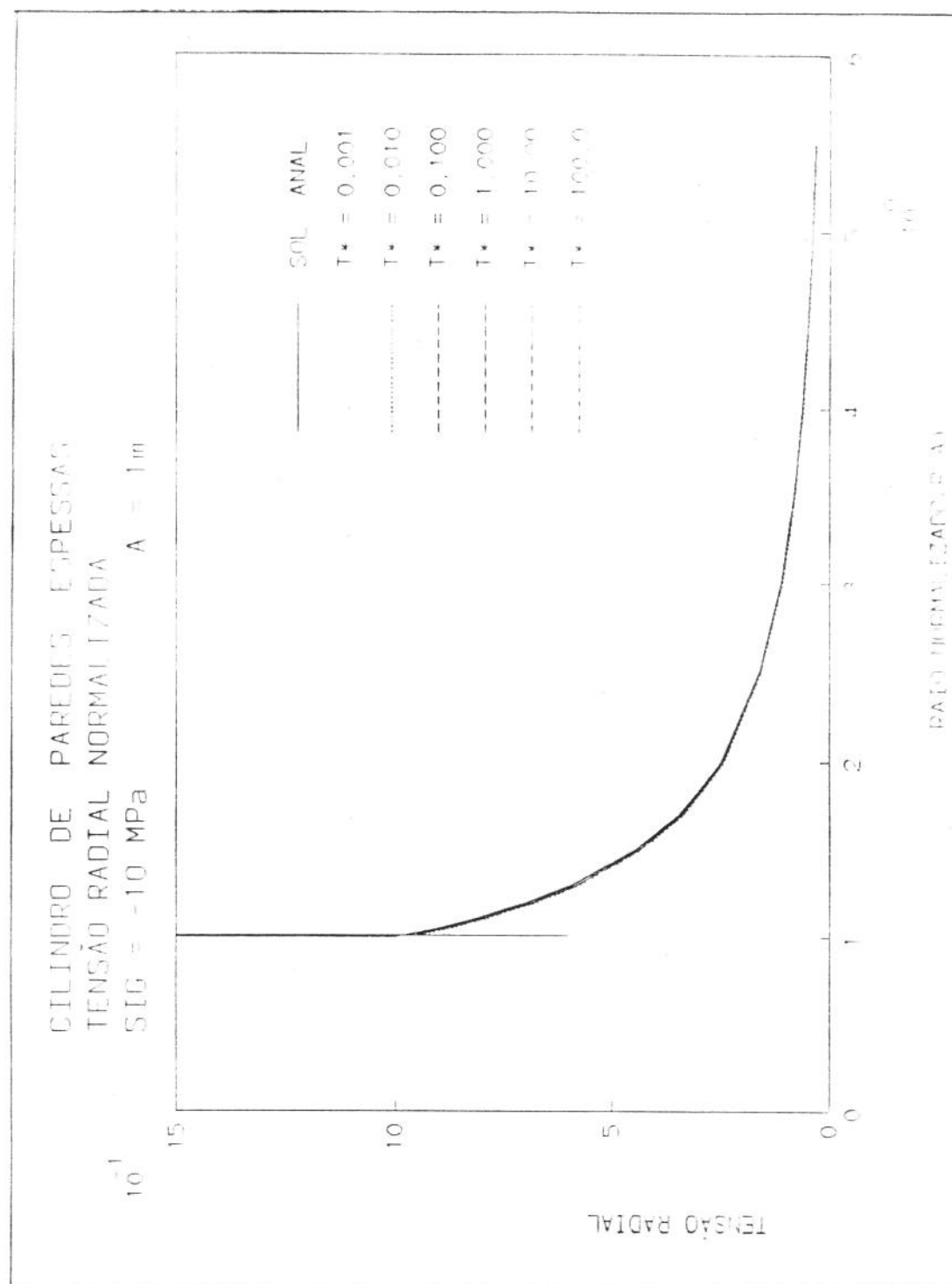


Figura 6.3.04 - Cilindro de paredes espessas
Tensão radial adimensional

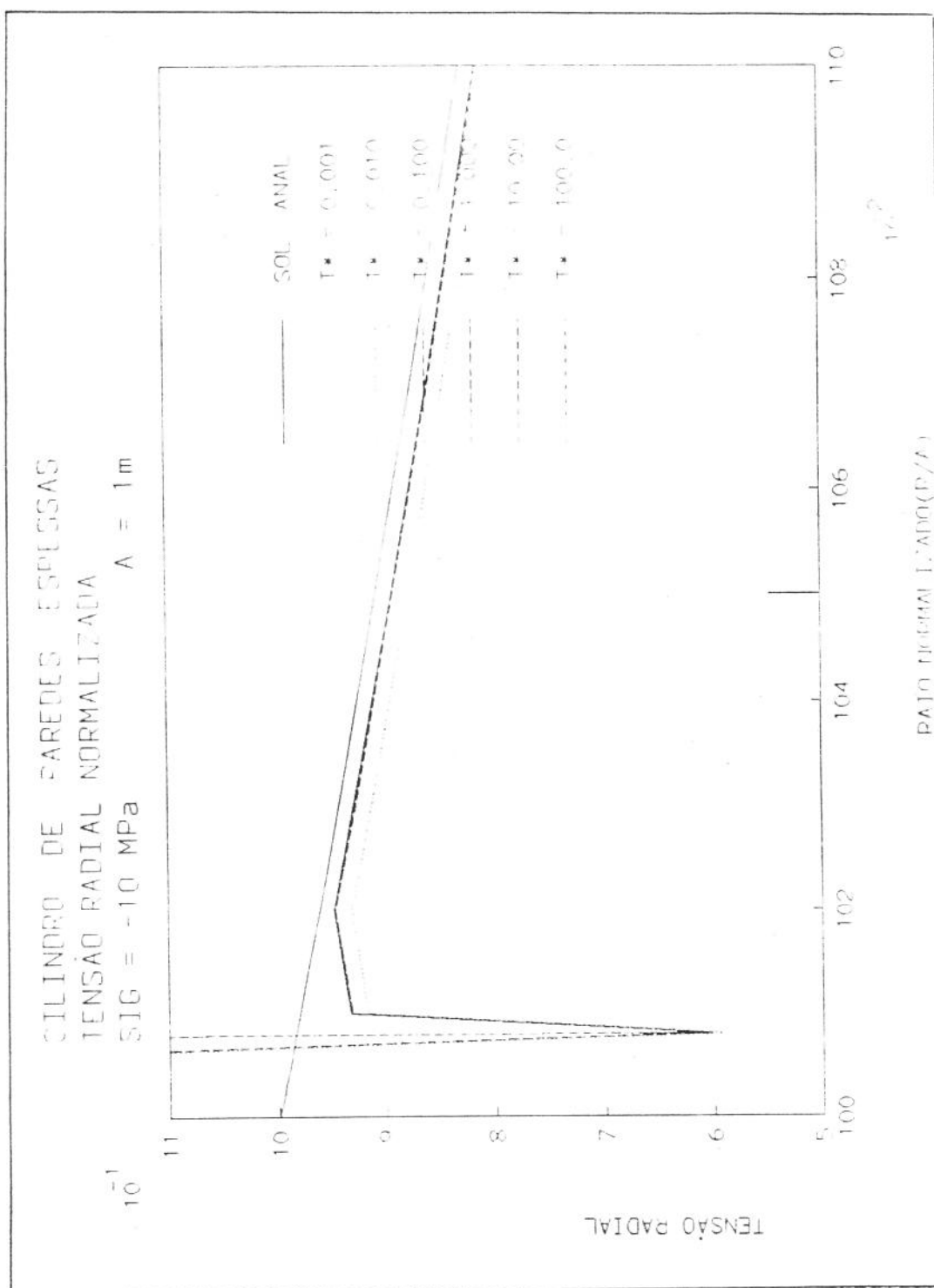


Figura 6.3.05 - Cilindro de paredes espessas
Tensão radial adimensional
Proximidades do contorno

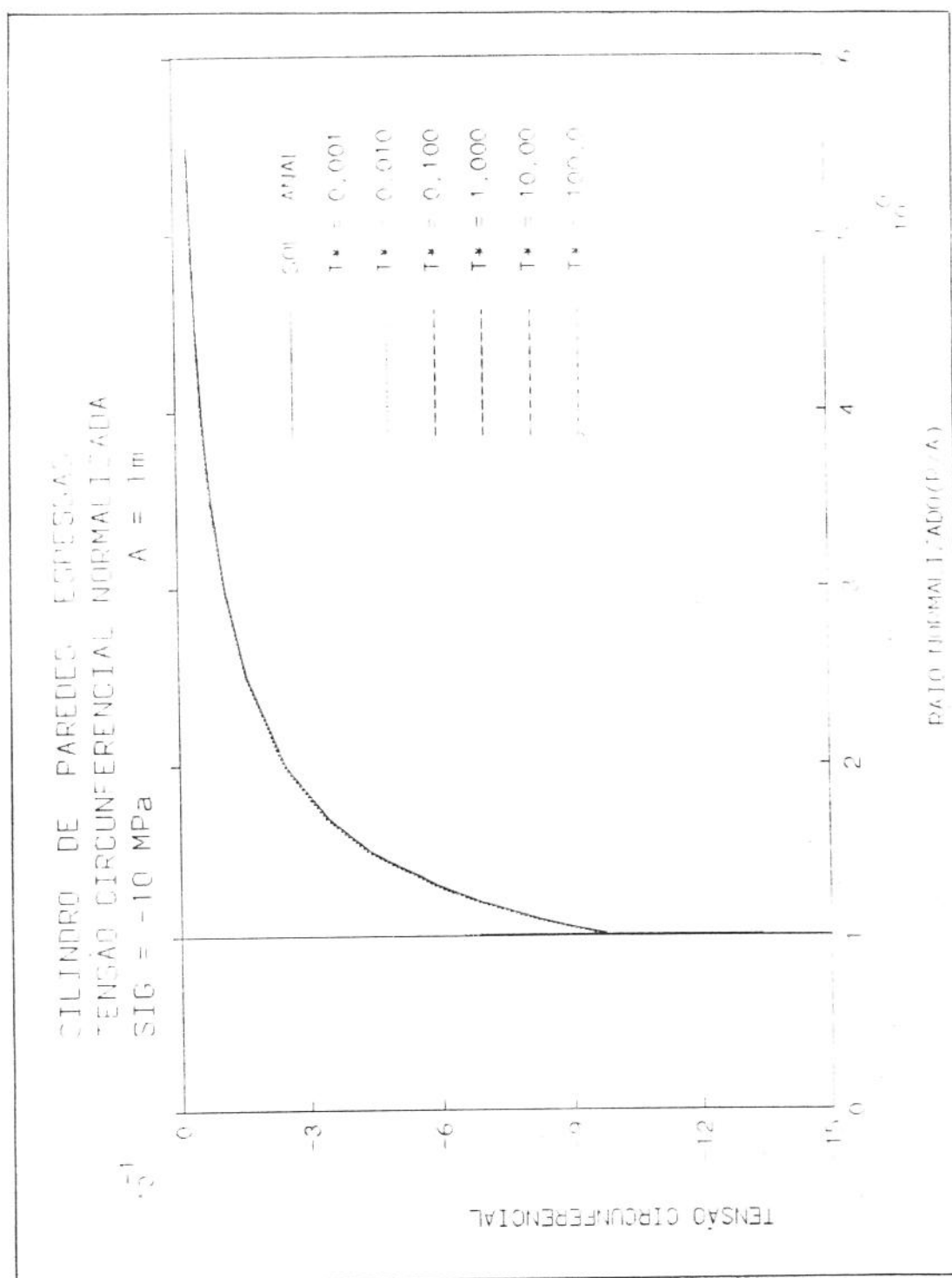


Figura 6.3.06 - Cilindro de paredes espessas
Tensão circunferencial adimensional

CILINDRO DE PAREDES ESPESAS
 TENSÃO CIRCUNFERENCIAL NORMALIZADA
 $\sigma_{\theta} = -10 \text{ MPa}$
 $A = 1 \text{ m}$

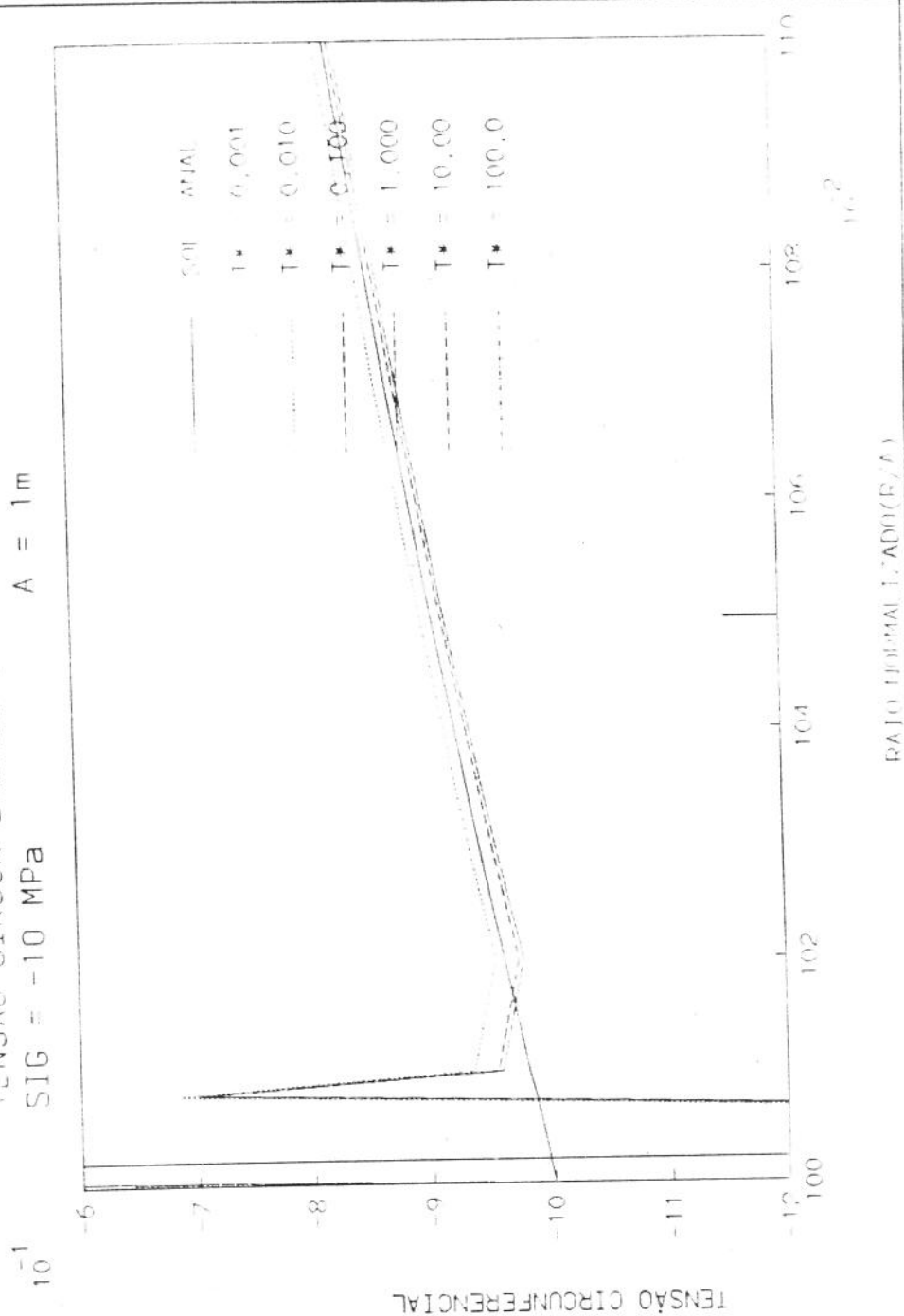


Figura 6.3.07 - Cilindro de paredes espessas
 Tensão circunferencial adimensional
 Proximidades do contorno

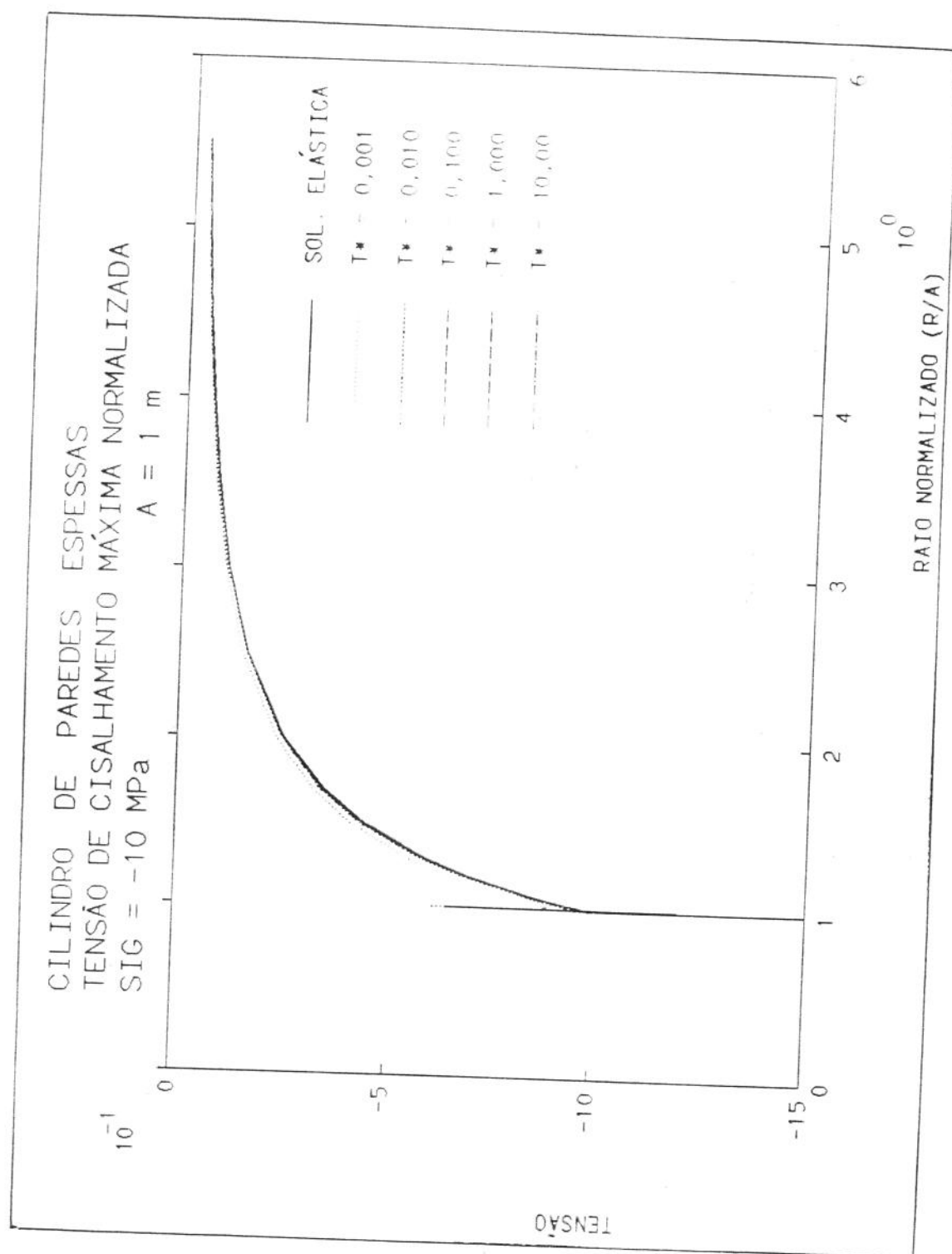


Figura 6.3.08 - Cilindro de paredes espessas
Tensão de cisalhamento adimensional

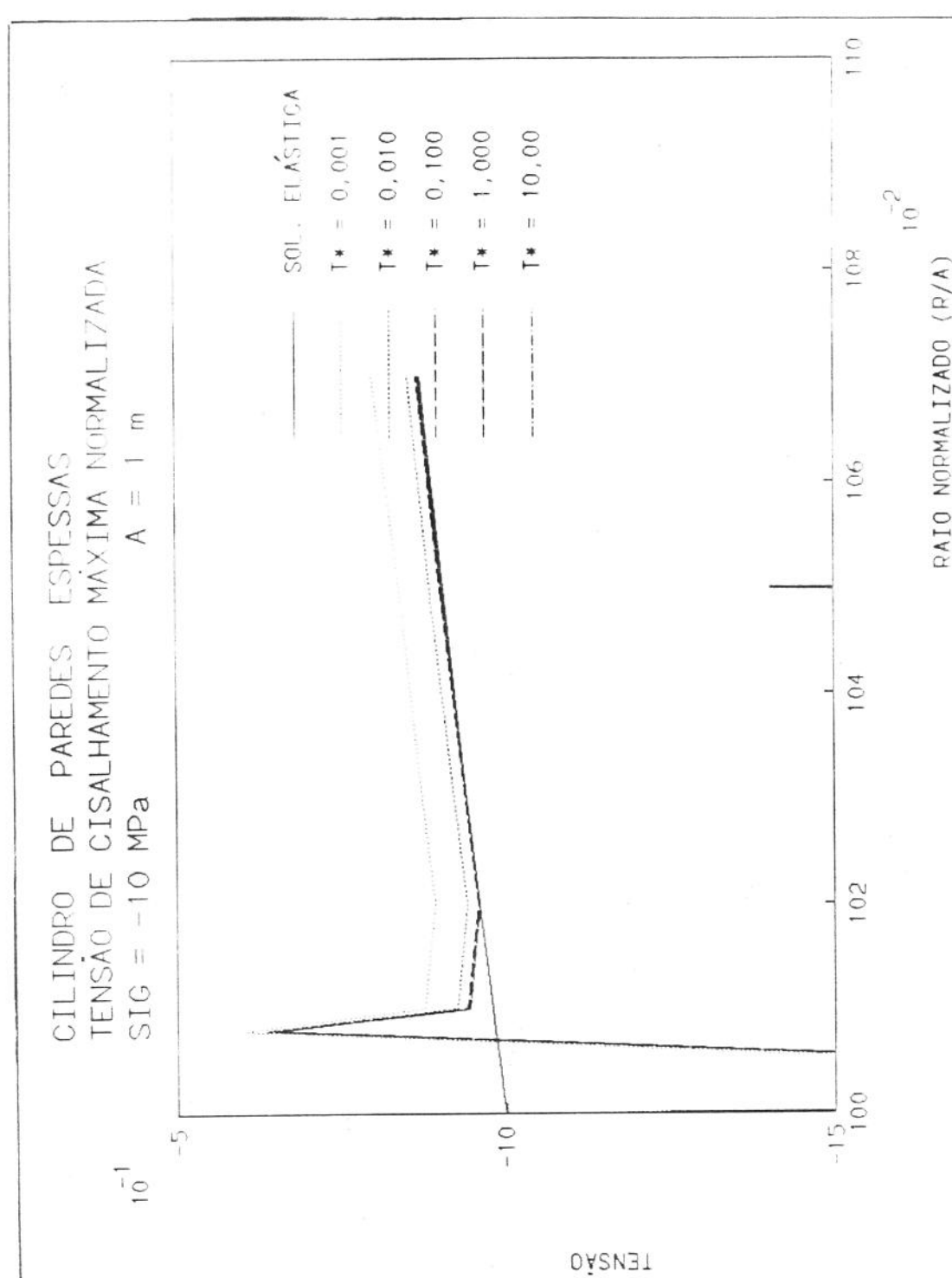


Figura 6.3.09 - Cilindro de paredes espessas
Tensão de cisalhamento adimensional
Proximidades do contorno

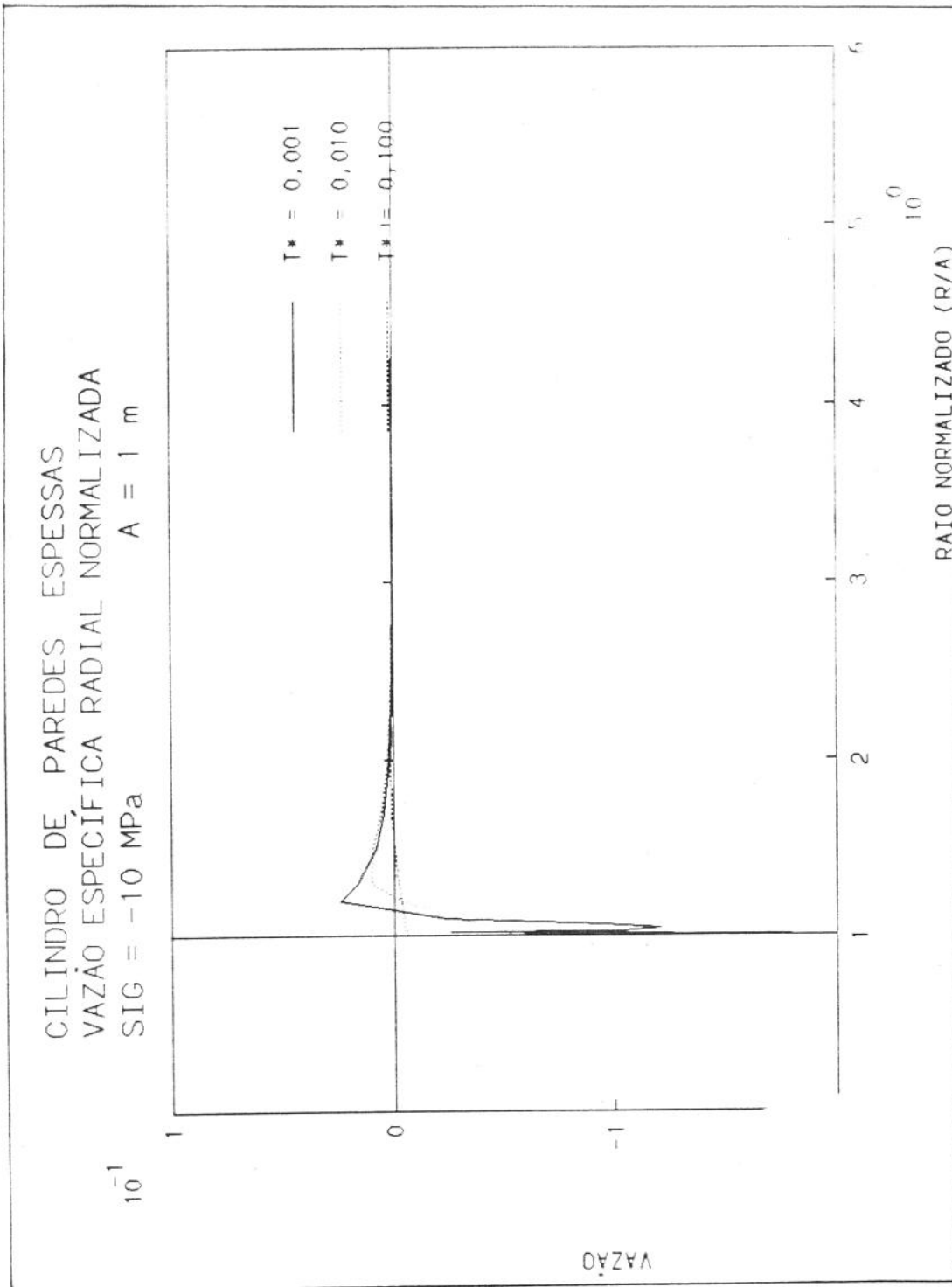


Figura 6.3.10 - Cilindro de paredes espessas
Vazão radial específica adimensional

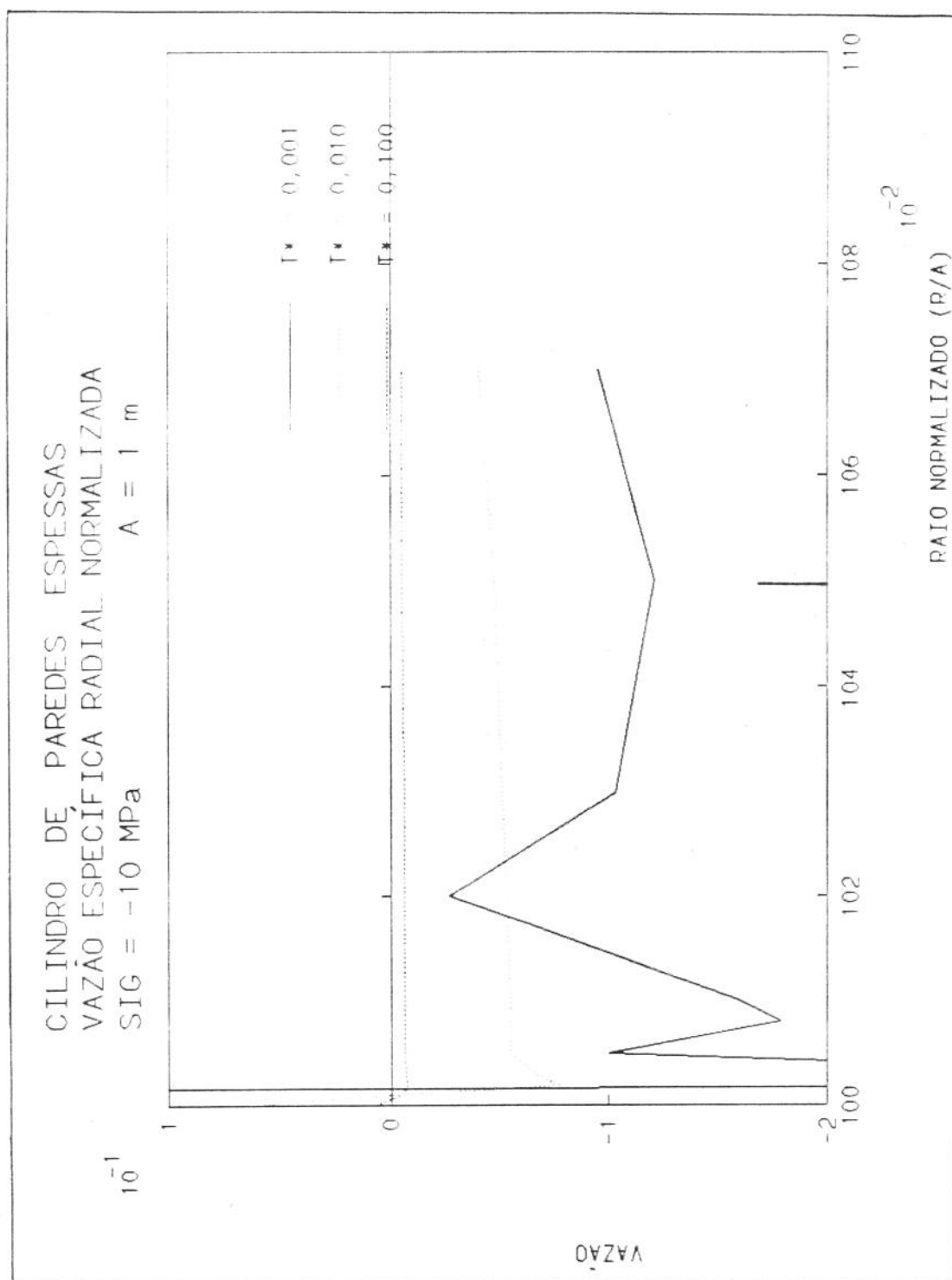


Figura 6.3.11 - Cilindro de paredes espessas
 Vazão radial específica adimensional
 Proximidades do contorno

6.4 O problema de Mandel

Em 1950, Mandel [124] provou, baseado em uma solução exata, que a equação não homogênea da difusão para a pressão de poros na teoria de Biot poderia ser responsável pela sua variação não monotônica, sob condições de contorno constantes. Este efeito é conhecido como efeito Mandel-Cryer, pois Cryer [12] fez uma previsão semelhante. Verruijt [125] comprovou experimentalmente este efeito.

O problema resolvido por Mandel refere-se à compressão de uma amostra porosa entre 2 placas impermeáveis rígidas sob uma deformação vertical constante. Lateralmente a drenagem é livre e as condições são de deformação plana.

A tensão vertical inicial é uniforme sobre a amostra. Nas proximidades das faces laterais a pressão de poros criada se ajusta rapidamente às condições de drenagem livre. Esta redução de rigidez do material próximo às bordas causa uma transferência da tensão vertical em direção à região central, que é mais rígida, então induzindo aí um aumento na pressão de poros. Conforme a pressão de poros se vai equilibrando a carga vertical vai se transmitindo mais uniformemente.

Este efeito foi simulado supondo-se um prisma reto, cuja secção vertical é um retângulo de base igual a 10m (2a) e altura igual a 5m (2b). O topo e a base foram discretizados com 10 elementos lineares e os lados com 20, como se vê na figura F.2.01.

Foram usados os parâmetros abaixo relacionados.

Módulo de rigidez G : 6000 MPa

Deslocamento vertical : 0,0001 m

Módulo de Poisson drenado ν : 0,2

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,50

Coefficiente de Skempton B : 1

Coefficiente de permeabilidade k : $5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 / (\text{MPa} \times \text{s})$

Dimensão característica a : 5 m

O coeficiente de permeabilidade acima equivale ao fluxo de água doce (1 cp) em um meio poroso com uma permeabilidade à água igual a 500 mD.

Foi imposta a condição de rigidez das placas aplicando-se um deslocamento vertical constante no topo e na base da amostra. A força vertical foi calculada integrando-se o vetor

tensão, gerado pelo citado deslocamento, sobre o topo. Observe-se que na simulação feita a força aplicada varia com o tempo, porém o deslocamento é mantido constante. Devido a isto os resultados obtidos diferem daqueles fornecidos por Mandel. Esta diferença ocorre após um certo tempo, sendo que no início quando predominam as condições não drenadas os resultados coincidem.

Inicialmente o bloco está saturado pelo líquido não pressurizado e totalmente descarregado. No instante 0^+ é imposto o deslocamento constante.

A figura 6.4.01 mostra a variação da força aplicada com o decorrer do tempo. A força foi normalizada dividindo-se pelo módulo de rigidez e pela dimensão característica. Conforme o fluido vai escoando e a pressão gerada caindo a força necessária para manter o deslocamento constante diminui.

A figura 6.4.02 mostra a evolução da pressão de poros no plano horizontal central do bloco poroelástico. Como o problema é simétrico mostra-se apenas o quadrante superior direito. A pressão foi normalizada multiplicando-se pela dimensão característica e dividindo-se pela metade da força vertical calculada. A pressão cresce rapidamente no interior do bloco e cai bruscamente perto das faces laterais devido a condição de drenagem livre. Para tempos pequenos, a pressão gerada é maior do que a prevista pelo efeito Skempton, conforme a equação 2.3.09, para condições não drenadas [20].

As figuras 6.4.03 e 6.4.04 mostram a variação da pressão ao longo do eixo y , ou seja, no plano vertical central. Como se vê ela é constante e o MEC fornece valores precisos até bem próximo do contorno. A figura 6.4.04 mostra detalhes nas proximidades do contorno.

A figura 6.4.05 mostra o deslocamento da face lateral. O deslocamento foi normalizado dividindo-se pela metade da força e multiplicando pelo módulo de rigidez. Como se observa as faces laterais se mantêm planas.

A figura 6.4.06 mostra a tensão vertical total, que foi normalizada dividindo-se pela metade da força e multiplicando-se pela dimensão característica. Ela é sempre compressiva e sofre uma redução nas vizinhanças do contorno, onde o material é menos rígido devido à drenagem livre. A figura 6.4.07 detalha as proximidades do contorno.

A evolução da tensão vertical efetiva normalizada é mostrada nas figuras 6.4.08 e 6.4.09. Nas proximidades do contorno ocorre inicialmente um aumento desta tensão devido à redução na pressão de poros, consequência da drenagem lateral livre. Nestas duas figuras mostra-se o que ocorre ao longo do eixo dos x.

O comportamento da tensão vertical normalizada ao longo do eixo dos y é mostrado nas figuras 6.4.10 e 6.4.11. Ela é constante ao longo deste eixo, sofrendo apenas perturbações perto do contorno, que é consequência do MEC.

A vazão normal específica nas faces laterais é vista na figura 6.4.12 . Ela foi normalizada dividindo-se pela metade da força e pela permeabilidade e multiplicando por ab . Como se vê ela rapidamente se torna constante ao longo da face.

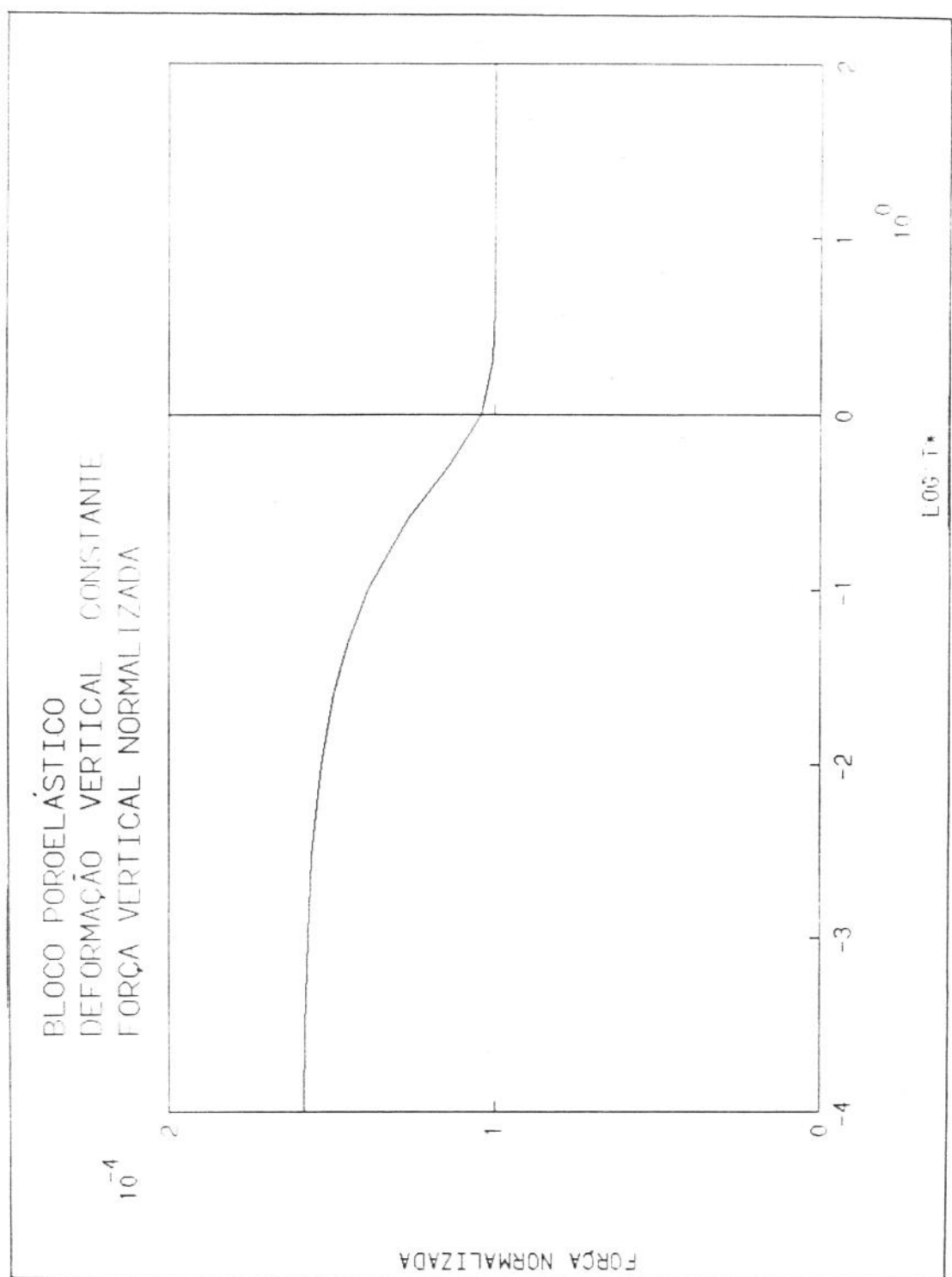


Figura 6.4.01 - Bloco poroelástico
Força vertical normalizada

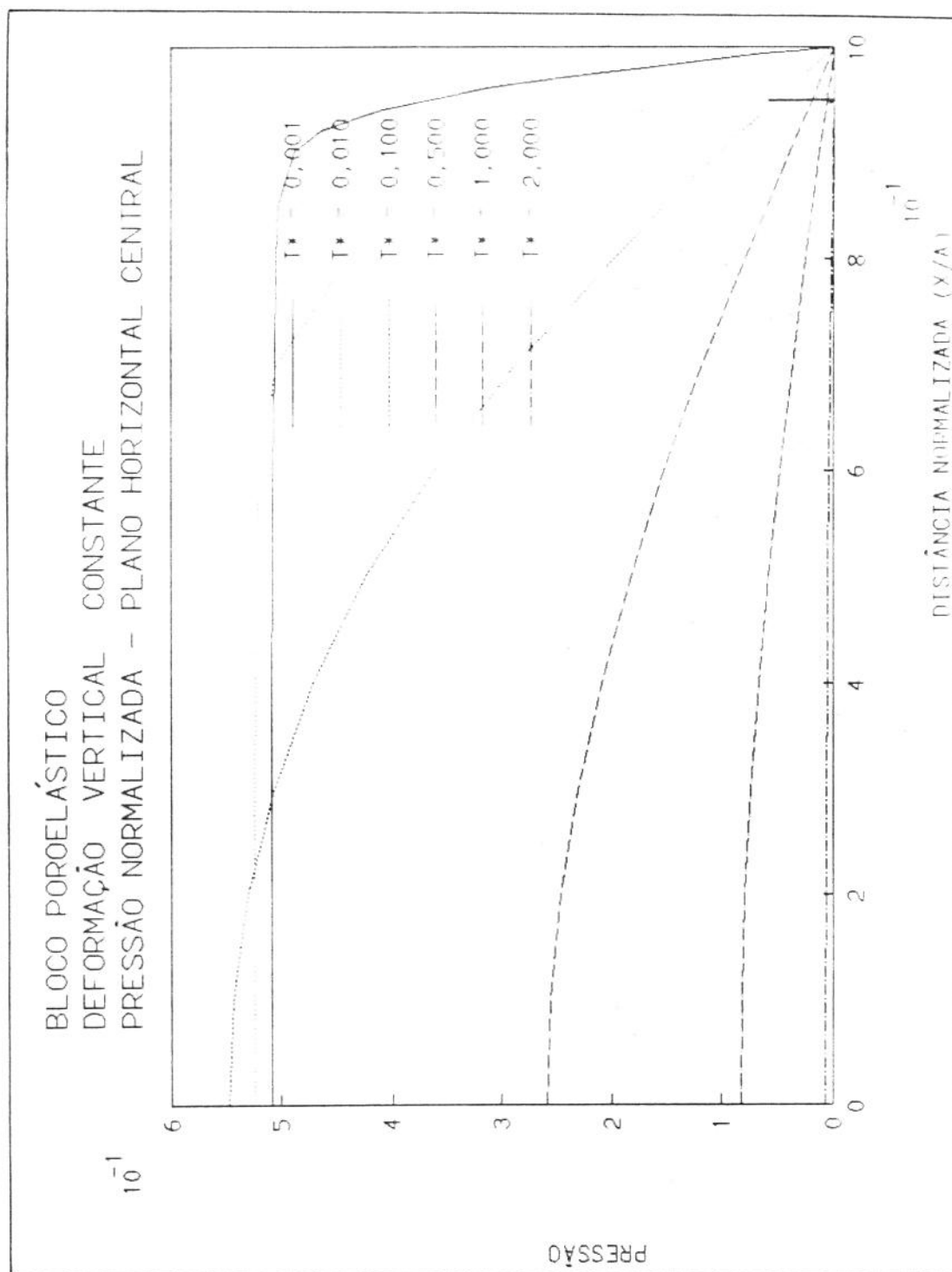


Figura 6.4.02 - Bloco poroelástico
Pressão normalizada
Plano horizontal central

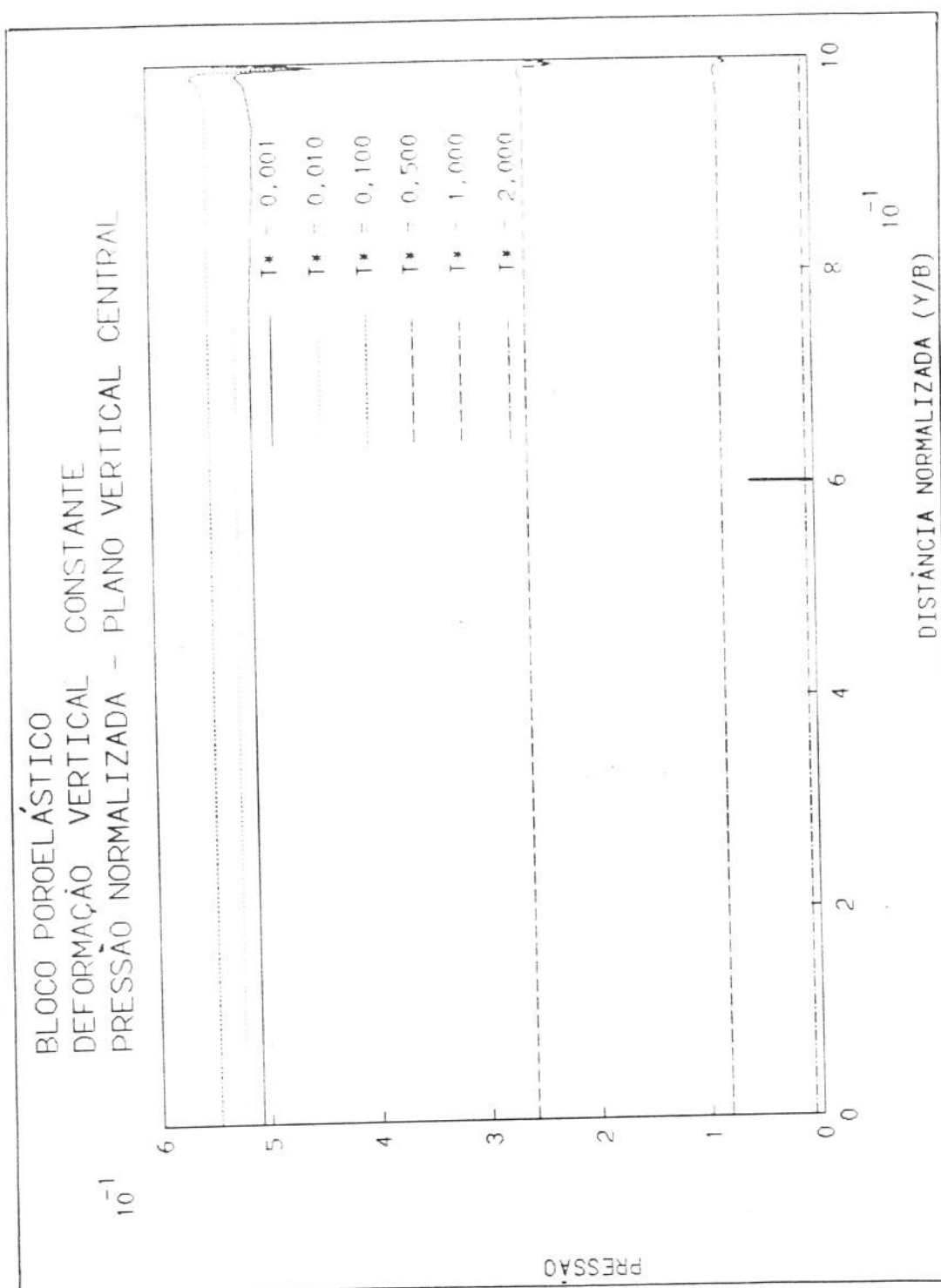


Figura 6.4.03 - Bloco poroelástico
Pressão normalizada
Plano vertical central

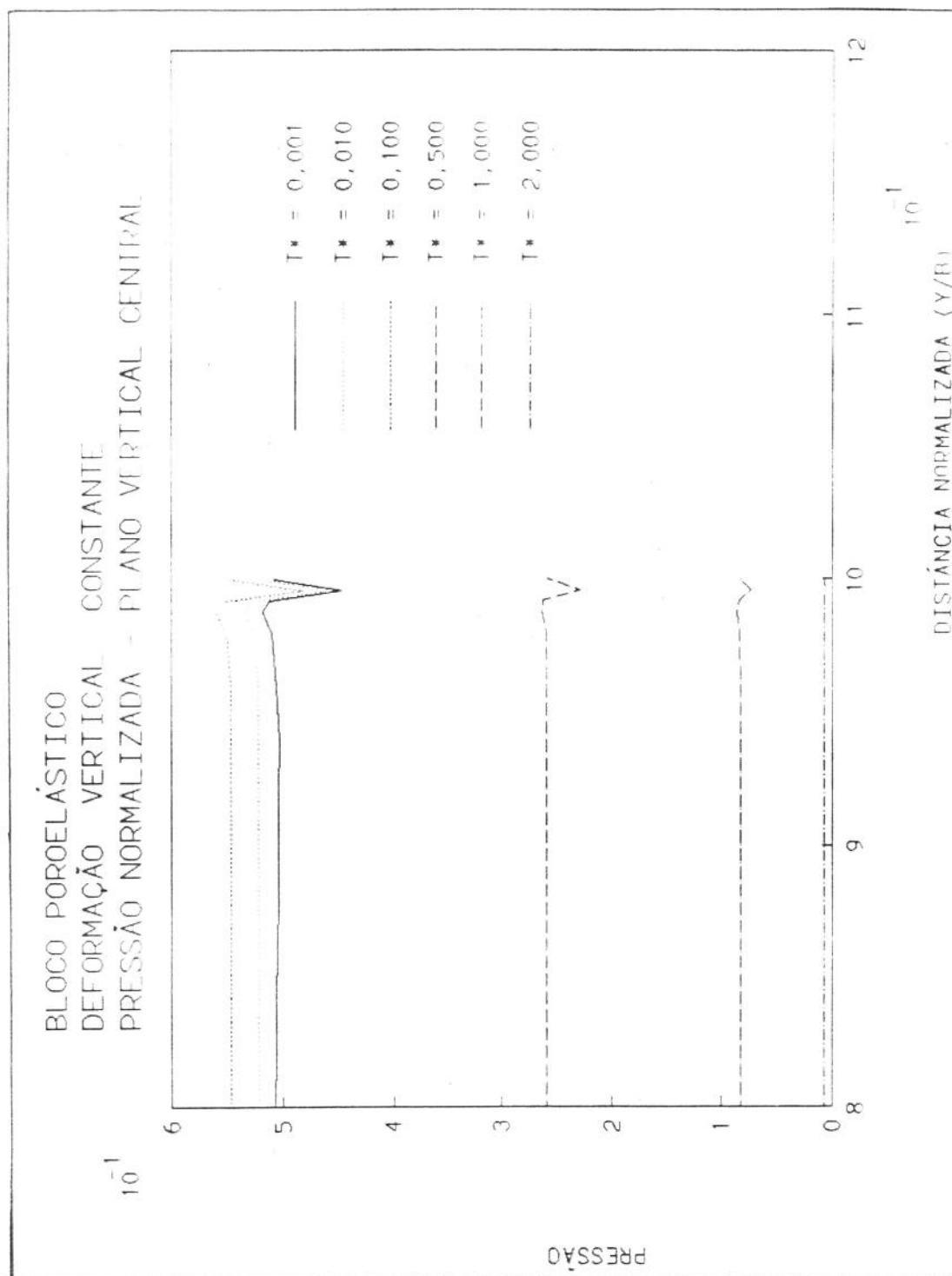


Figura 6.4.04 - Bloco poroelástico
Pressão normalizada
Proximidades do topo

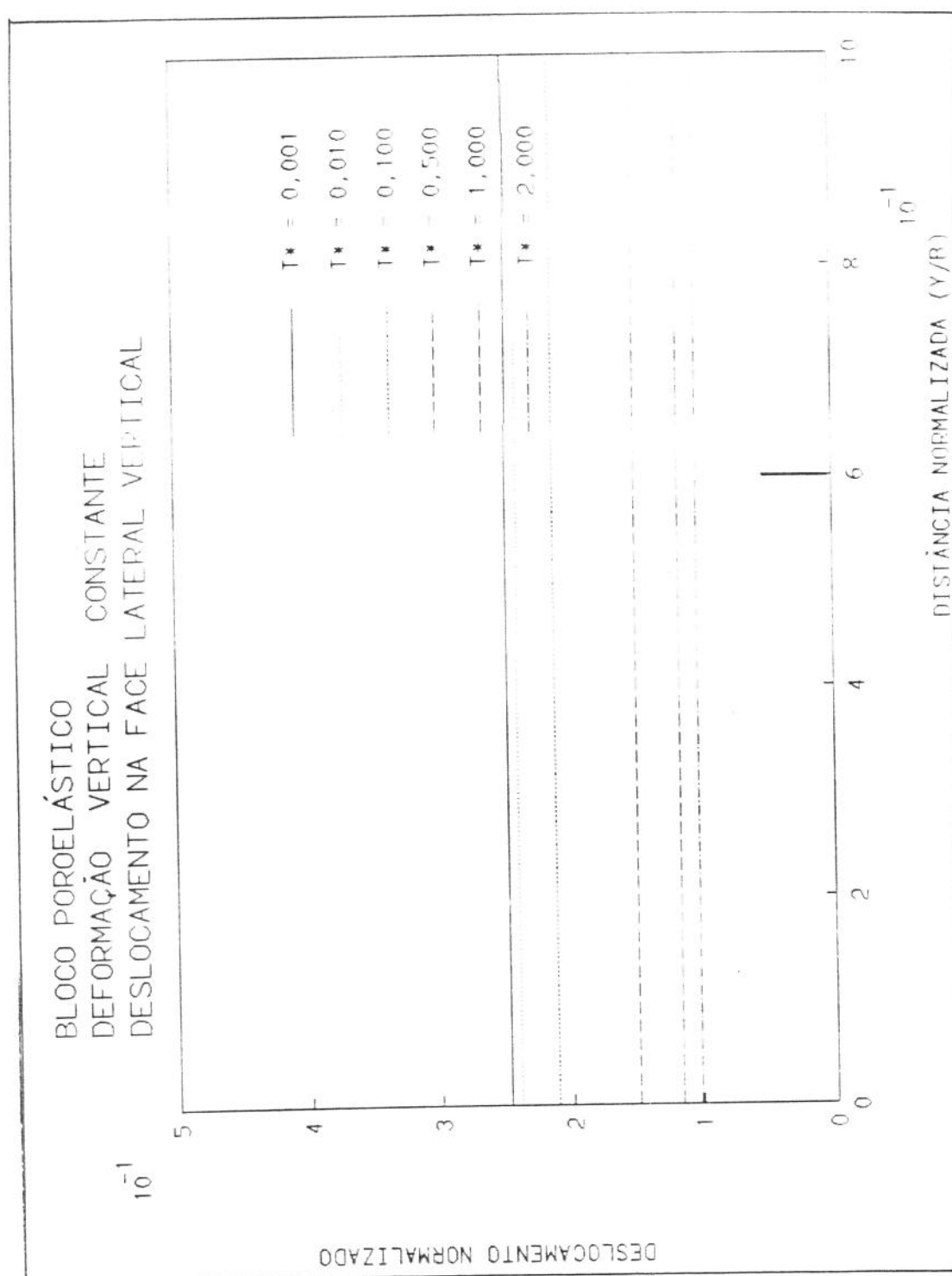


Figura 6.4.05 - Bloco poroelástico
Deslocamento horizontal
Face lateral vertical

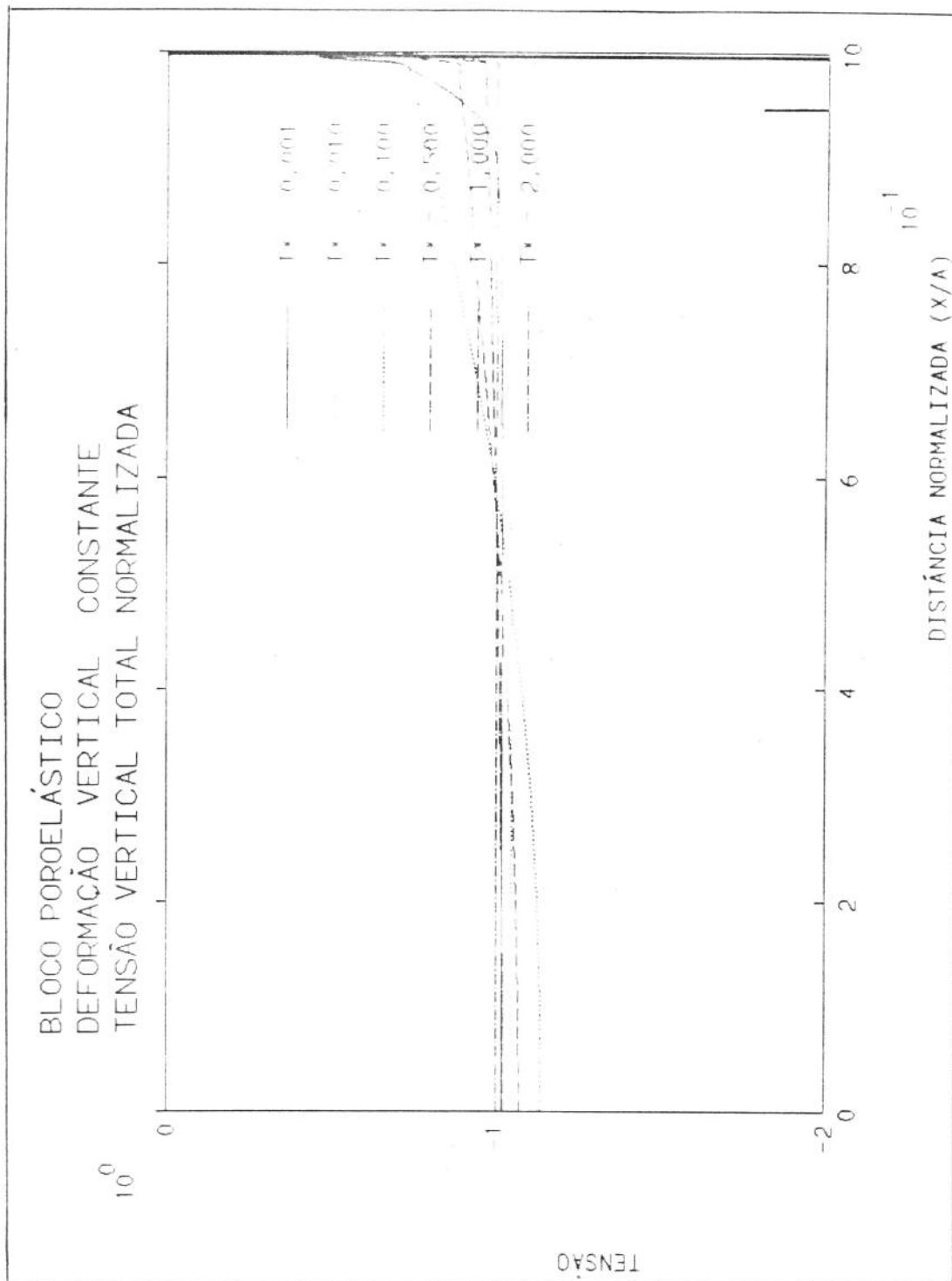


Figura 6.4.06 - Bloco poroelástico
Tensão vert. total normalizada
Plano horizontal central

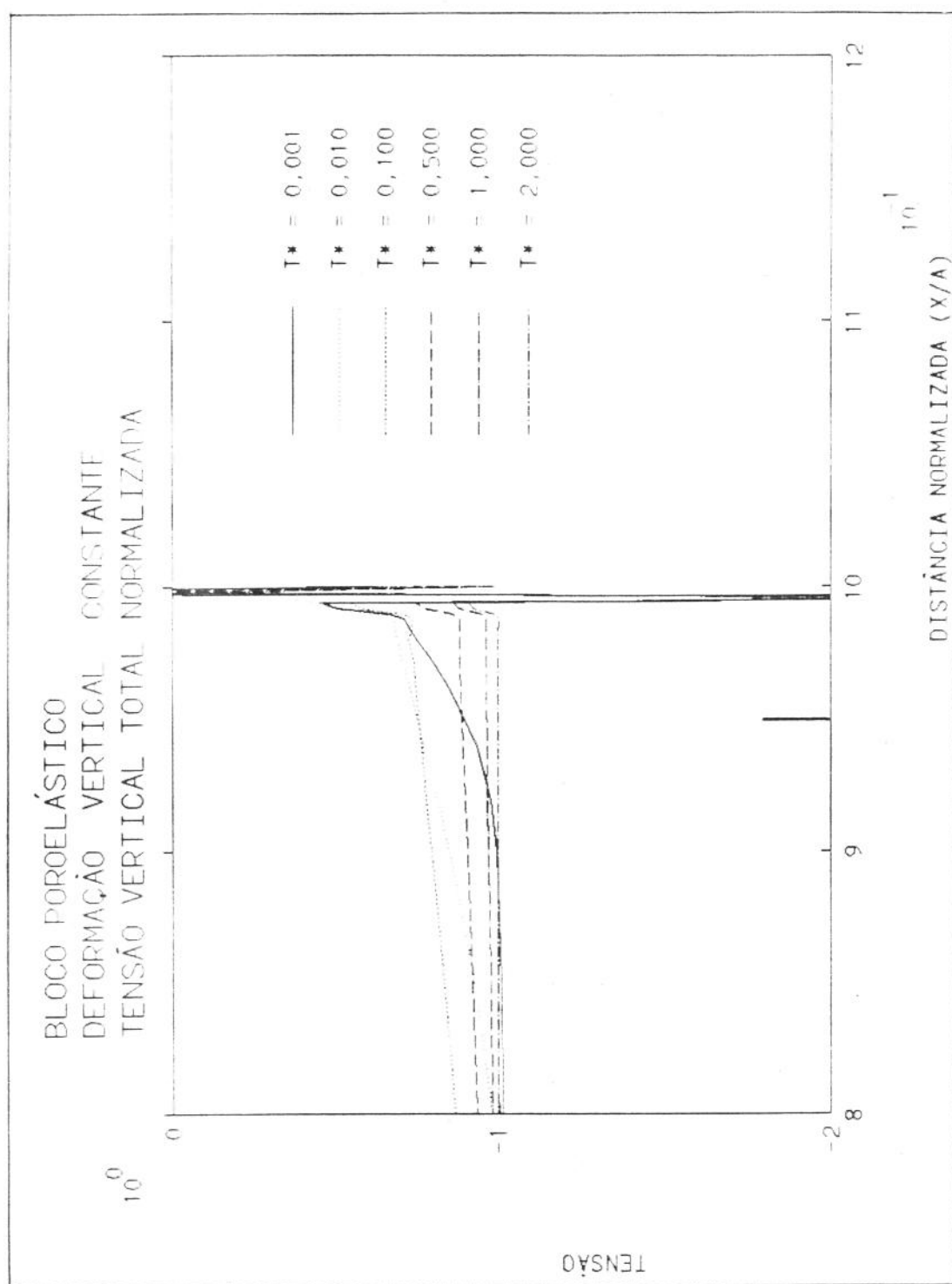


Figura 6.4.07 - Bloco poroelástico
Tensão vert. total normalizada
Proximidades da face lateral

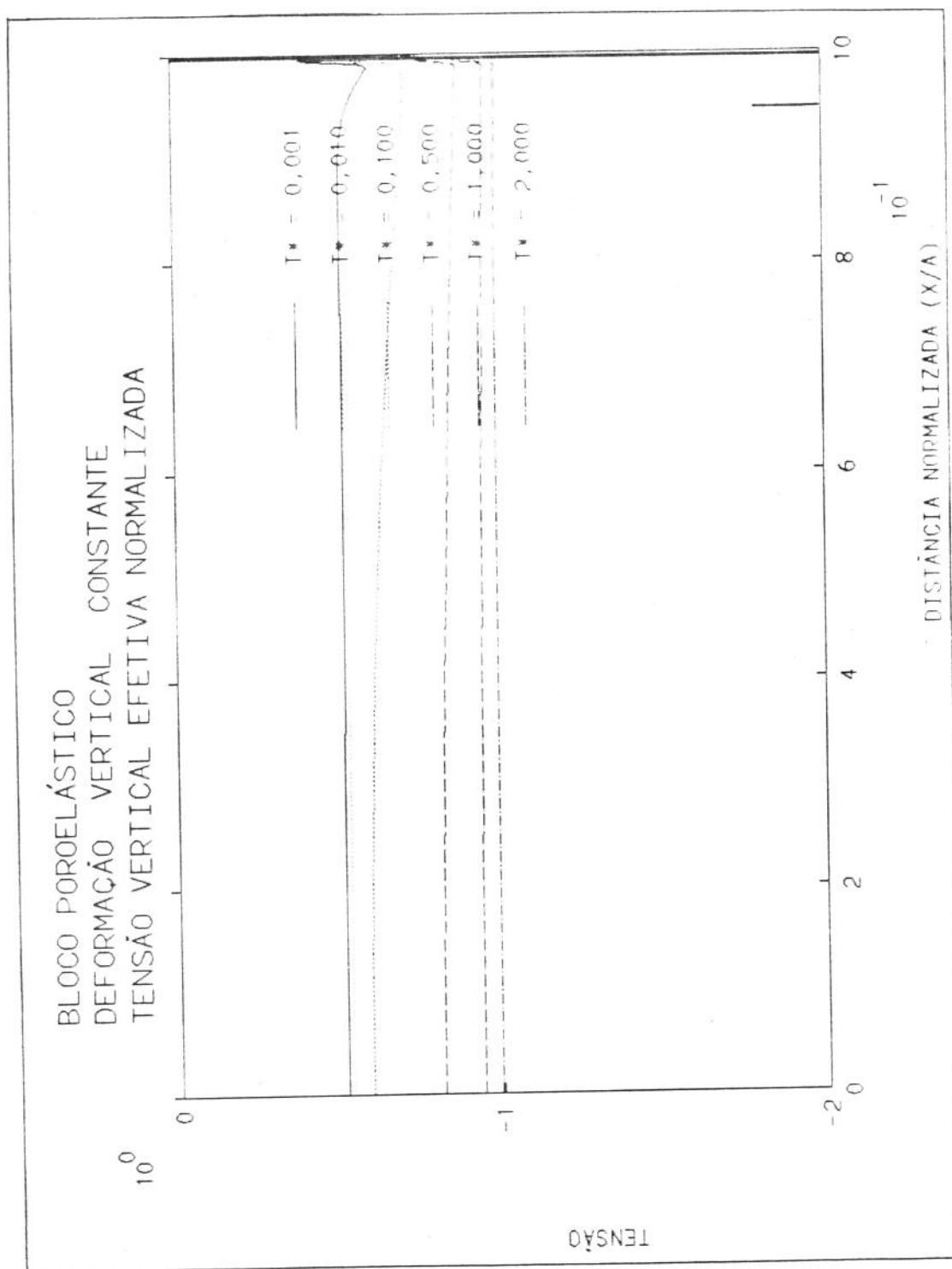


Figura 6.4.08 - Bloco poroelástico
Tensão vert. efetiva normalizada
Plano horizontal central

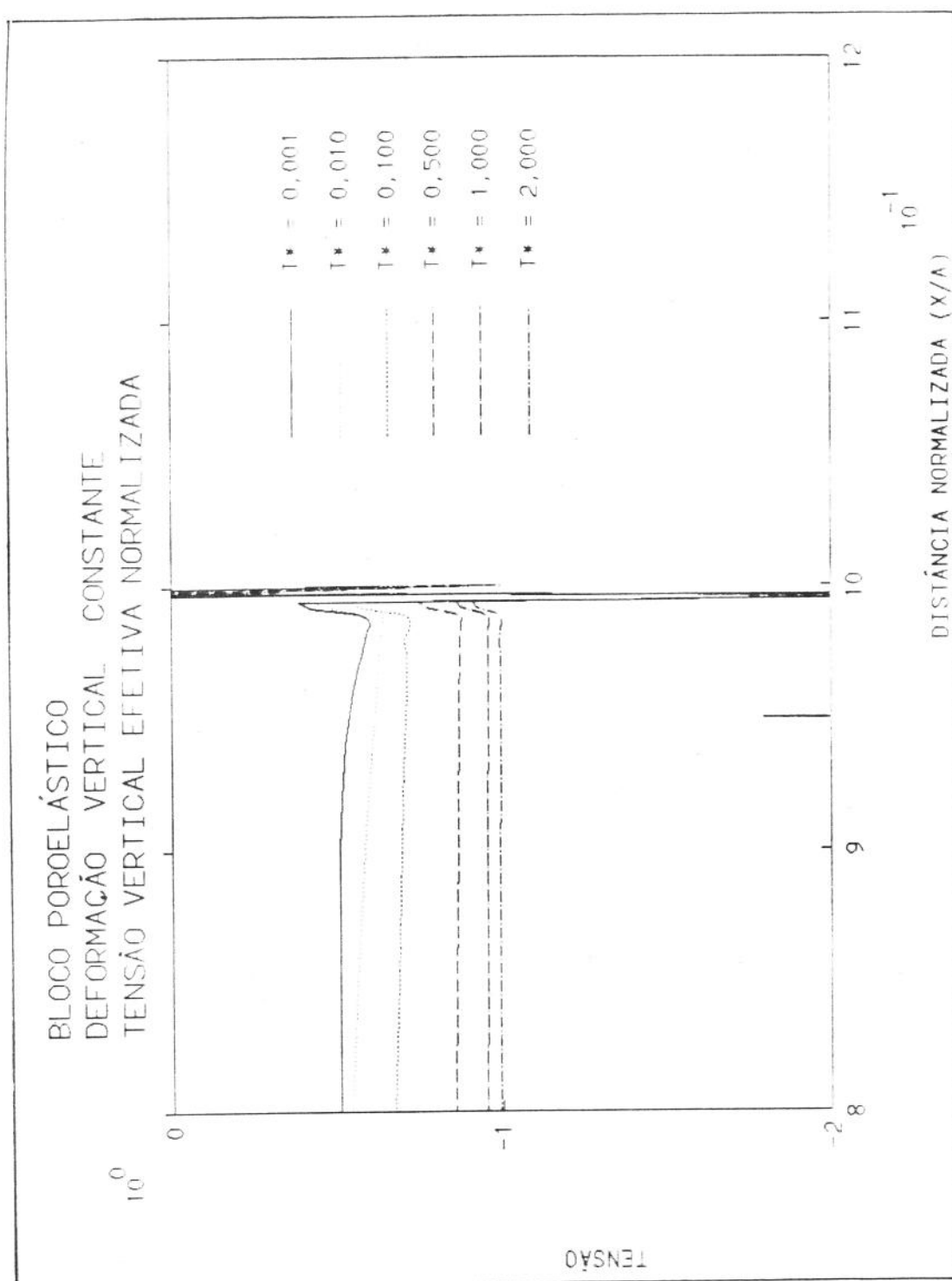


Figura 6.4.09 - Bloco poroelástico
Tensão vert. efetiva normalizada
Proximidades da face lateral

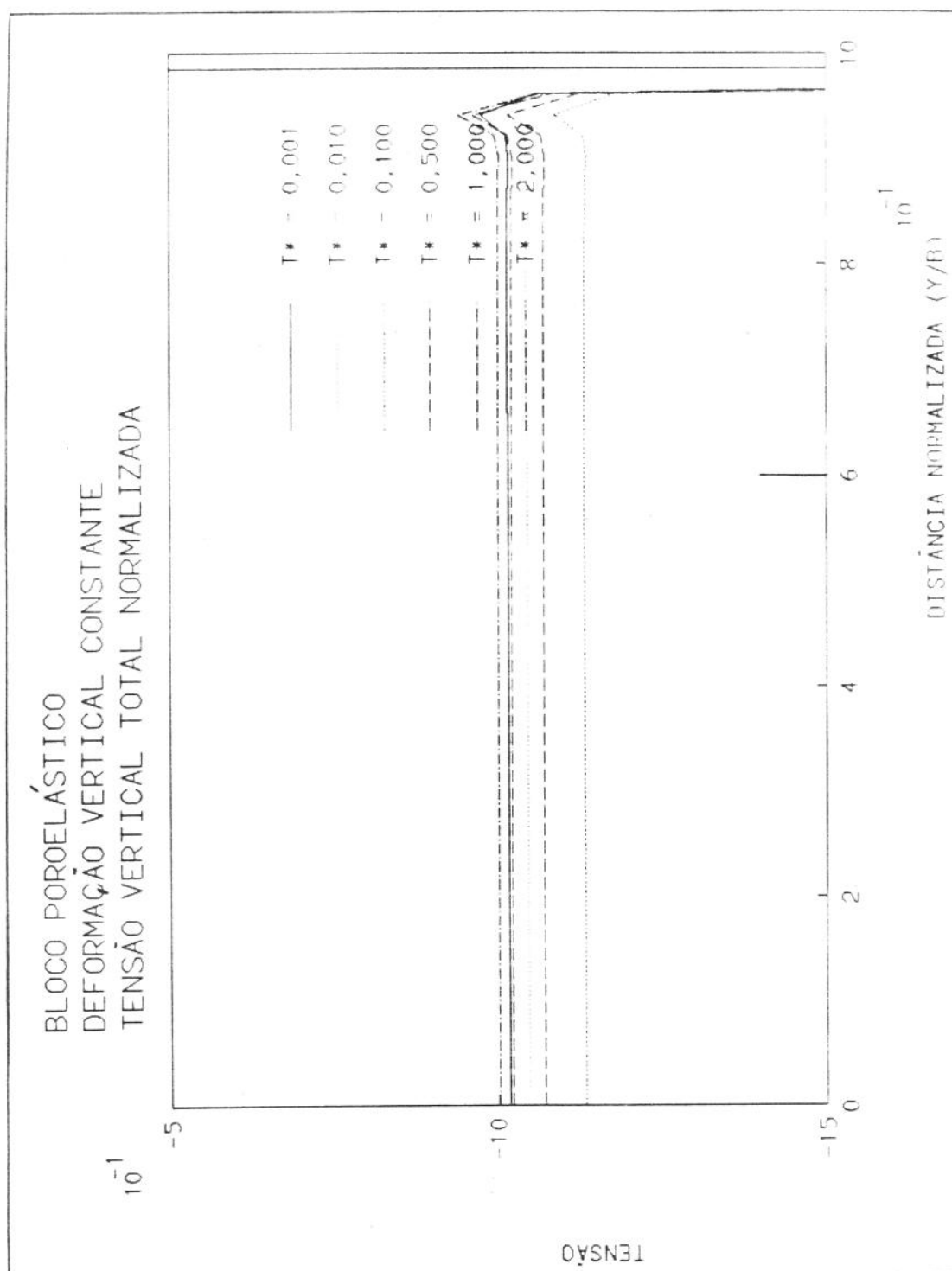


Figura 6.4.10 - Bloco poroelástico
Tensão vert. total normalizada
Plano vertical central

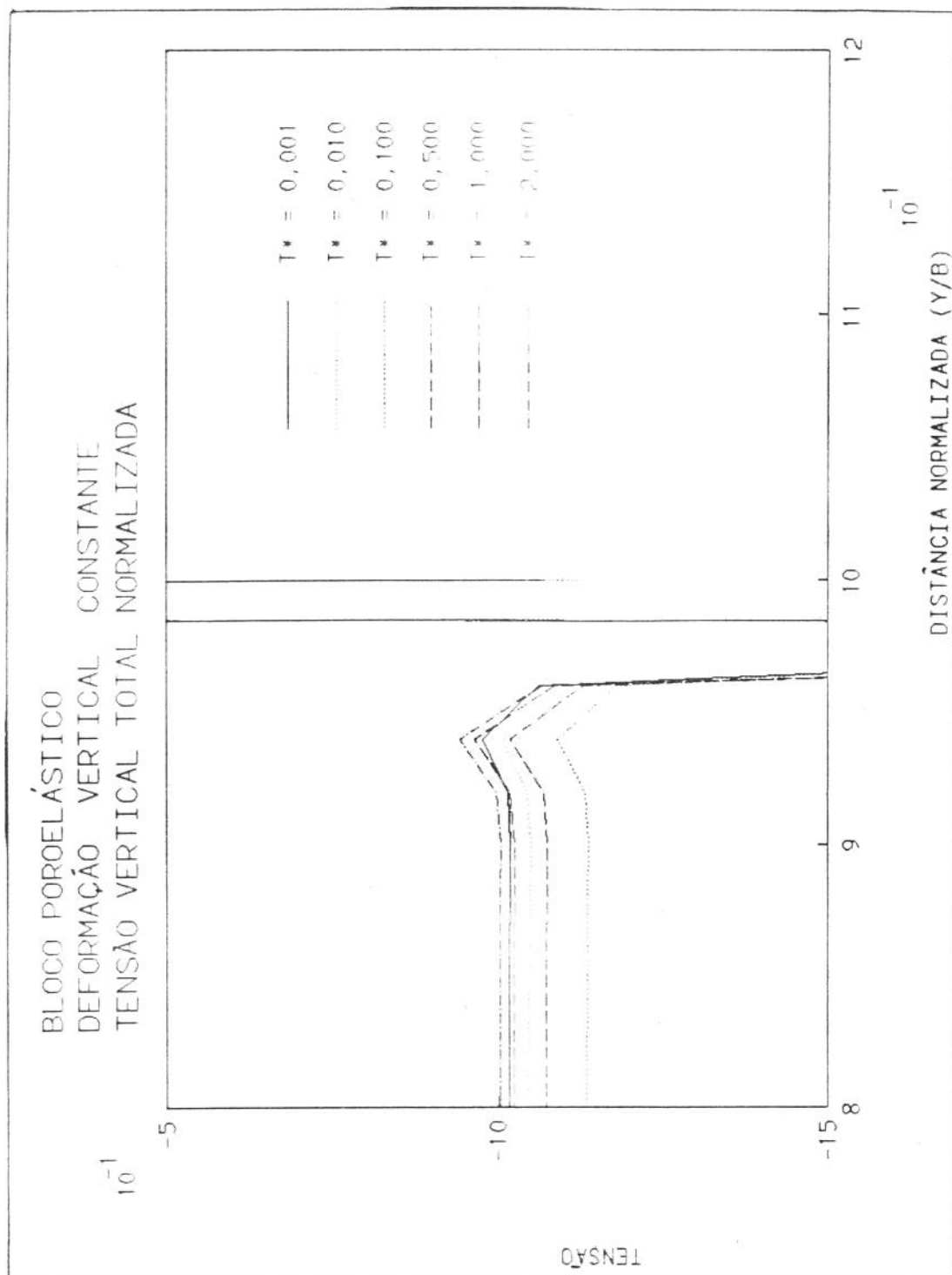


Figura 6.4.11 - Bloco poroelástico
Tensão vert. total normalizada
Proximidades do topo

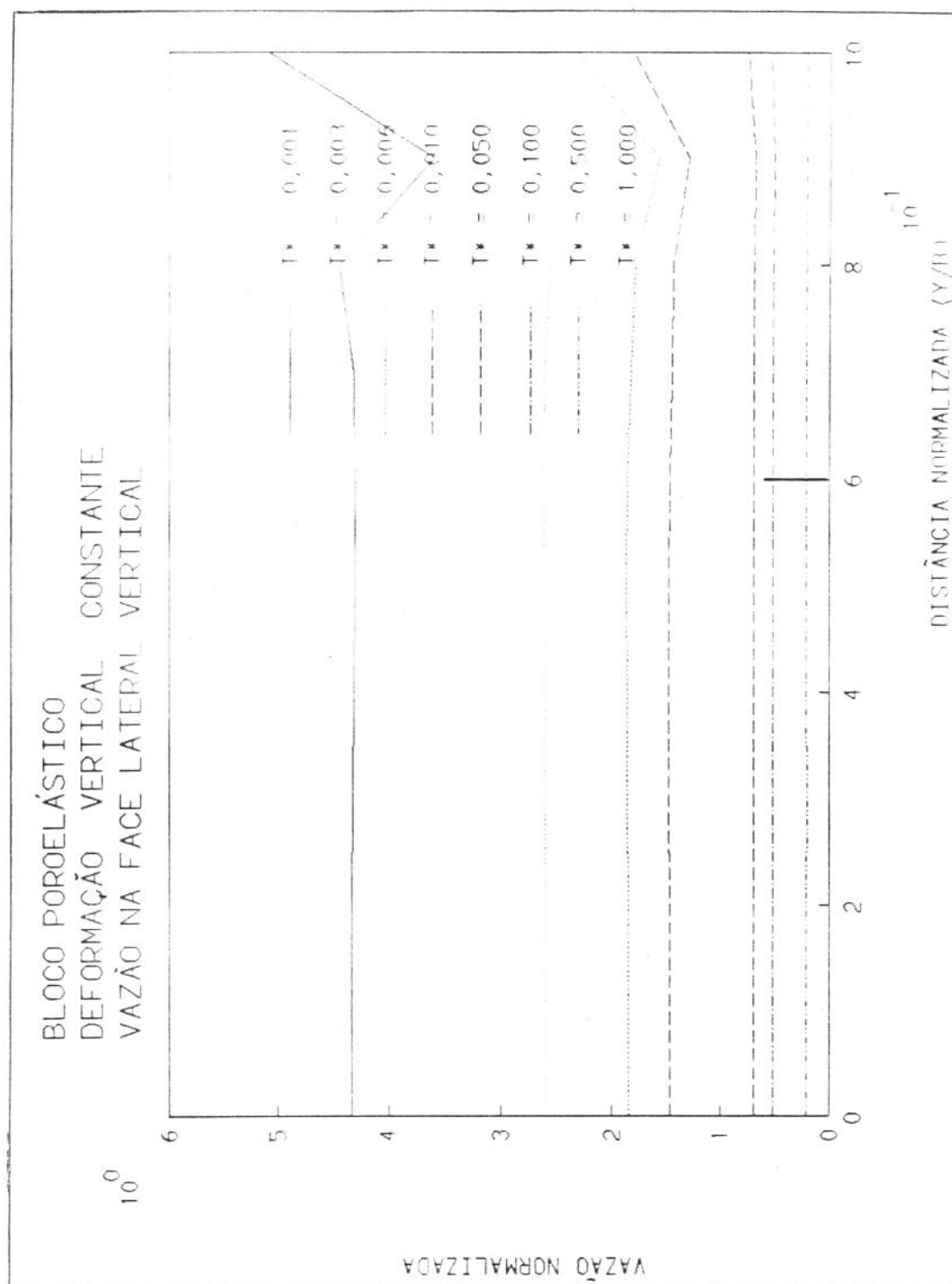


Figura 6.4.12 - Bloco poroelástico
Vazão normal específica
Face lateral vertical

6.5 Coluna unidimensional

O caso de uma coluna unidimensional, carregada no topo com uma carga P, foi um dos problemas clássicos usados para validar o programa criado para resolver problemas poroelásticos usando o método dos elementos de contorno [63,87]. A teoria da consolidação unidimensional pode ser encontrada em Lambe [37].

A coluna foi simulada como um cubo unitário discretizado em 16 elementos lineares, 4 em cada lado da secção. Usou-se os mesmos dados utilizados por Badmus et al [63] para fins de comparação. A coluna tem drenagem livre no topo e a base é rígida e impermeável. Inicialmente ela se encontra totalmente livre de qualquer carregamento e instantaneamente é carregada pela carga P. A coluna é lateralmente confinada por placas rígidas, fixas e impermeáveis. Estas condições são mostradas na figura F.3.01.

Os dados são:

Carga no topo P: -1 MPa

Diferencial de pressão no topo: 0

Módulo de rigidez G: 1 MPa

Módulo de Poisson drenado ν : 0,2

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,4

Coefficiente de Skempton B: 0,8

Coefficiente de consolidação c: 1 m²/s

Dimensão característica a: 1 m

A figura 6.5.01 mostra o deslocamento vertical no topo, normalizado, para vários tempos normalizados t^* . O deslocamento inicial, quando predominam as condições não drenadas, é [63]

$$u = \frac{PL(1-2\nu_u)}{2G(1-\nu_u)} = \frac{-1 \times 1 \times (1-2 \times 0,4)}{2 \times 1 \times (1-0,4)} = -0,1667m$$

Este deslocamento normalizado é

$$u' = \frac{Gu}{PL} = \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} = \frac{1-2 \times 0,4}{2 \times (1-0,4)} = 0,1667$$

Obteve-se 0.1700 para um t^* igual a 10^{-4} .

O deslocamento normalizado, para um tempo longo,

condições drenadas, tende para a solução elástica [3,6,7]:

$$\frac{Gu}{PL} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} = \frac{1-2 \times 0,2}{2 \times (1-0,2)} = 0,3750$$

O valor obtido foi 0,374 para um tempo normalizado igual a 10.

O variação da pressão de poros no meio da coluna, com a profundidade, é mostrado na figura 6.5.02, para alguns t^* . Devido à condição de contorno $p = 0$ no topo, há o desenvolvimento de um gradiente de pressão muito grande no tempo normalizado $t^* = 0^+$. A pressão neste instante em toda coluna é igual à [63]:

$$p = -\frac{PB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} = -\frac{-1 \times 0,8 \times (1+0,4)}{3 \times (1-0,4)} = 0,6222 \text{ Pa}$$

A pressão foi normalizada dividindo-se por $-P$. Numéricamente obteve-se um valor de 0,6200 para um t^* igual a 10^{-4} .

Na figura 6.5.02 mostra-se a variação da pressão normalizada com a profundidade normalizada, que é a profundidade dividida pelo comprimento da coluna.

Nas figuras 6.5.01 e 6.5.02 os pontos são os valores encontrados por Badmus et al [63].

Na figura 6.5.03 mostra-se a variação da tensão normal na face lateral. Ela foi normalizada dividindo-se por P . No instante 0^+ , condições não drenadas, esta tensão é dada por [123]:

$$\sigma = P\nu_u/(1-\nu_u) = -1 \times 0,4/(1-0,4) \text{ MPa} = -0,6667 \text{ MPa}$$

Já para tempos longos, condições drenadas, tem-se:

$$\sigma = P\nu/(1-\nu) = -1 \times 0,2/(1-0,2) \text{ MPa} = -0,2500 \text{ MPa}$$

A vazão específica normalizada no topo é vista na figura 6.5.04. A normalização foi feita multiplicando-se pela dimensão característica e dividindo-se pela permeabilidade e pelo modulo de P . Ela é positiva, ou seja, na direção da normal (drenagem).

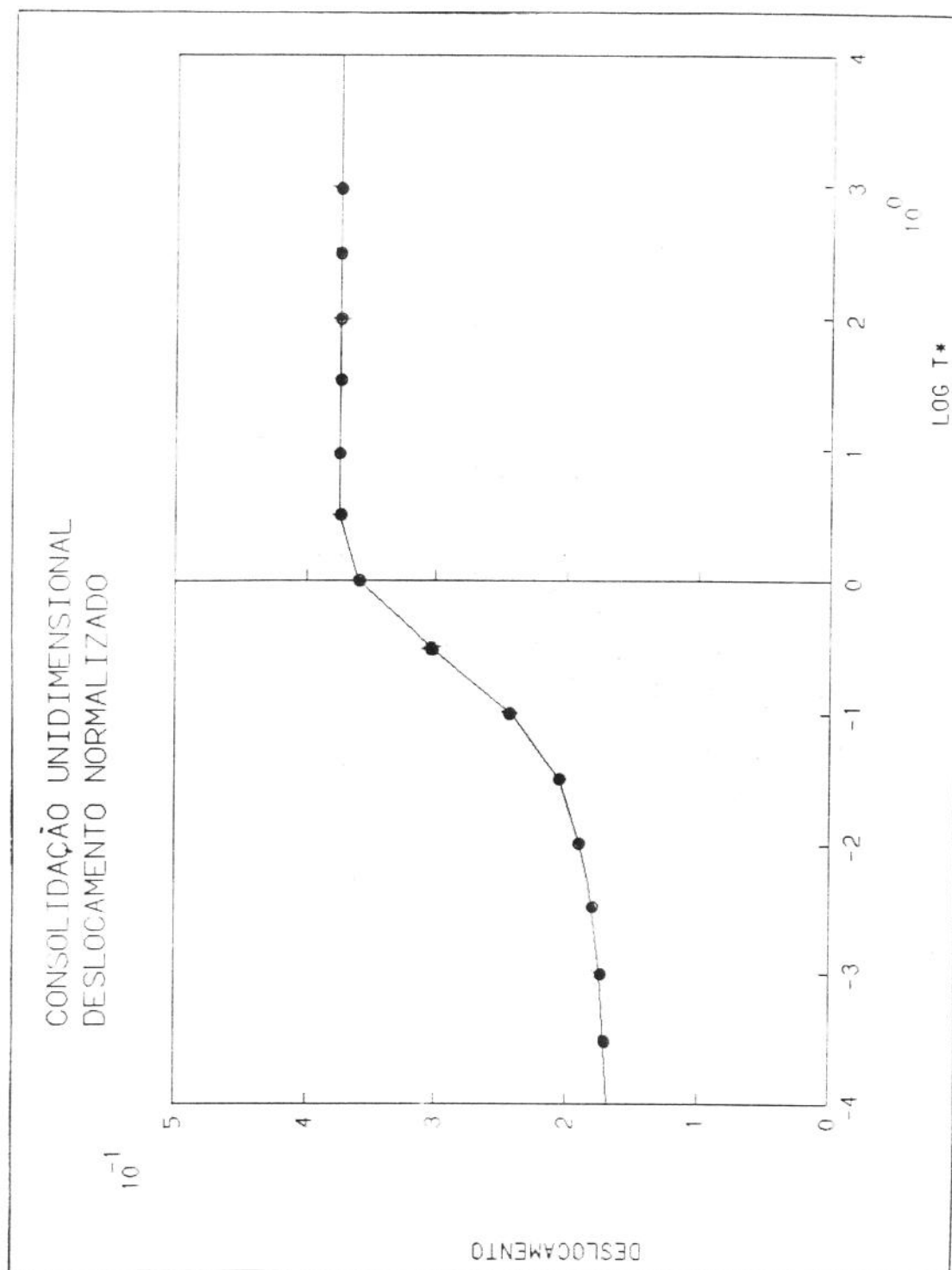


Figura 6.5.01 - Coluna unidimensional
Deslocamento no topo normalizado
Base rígida e fixa

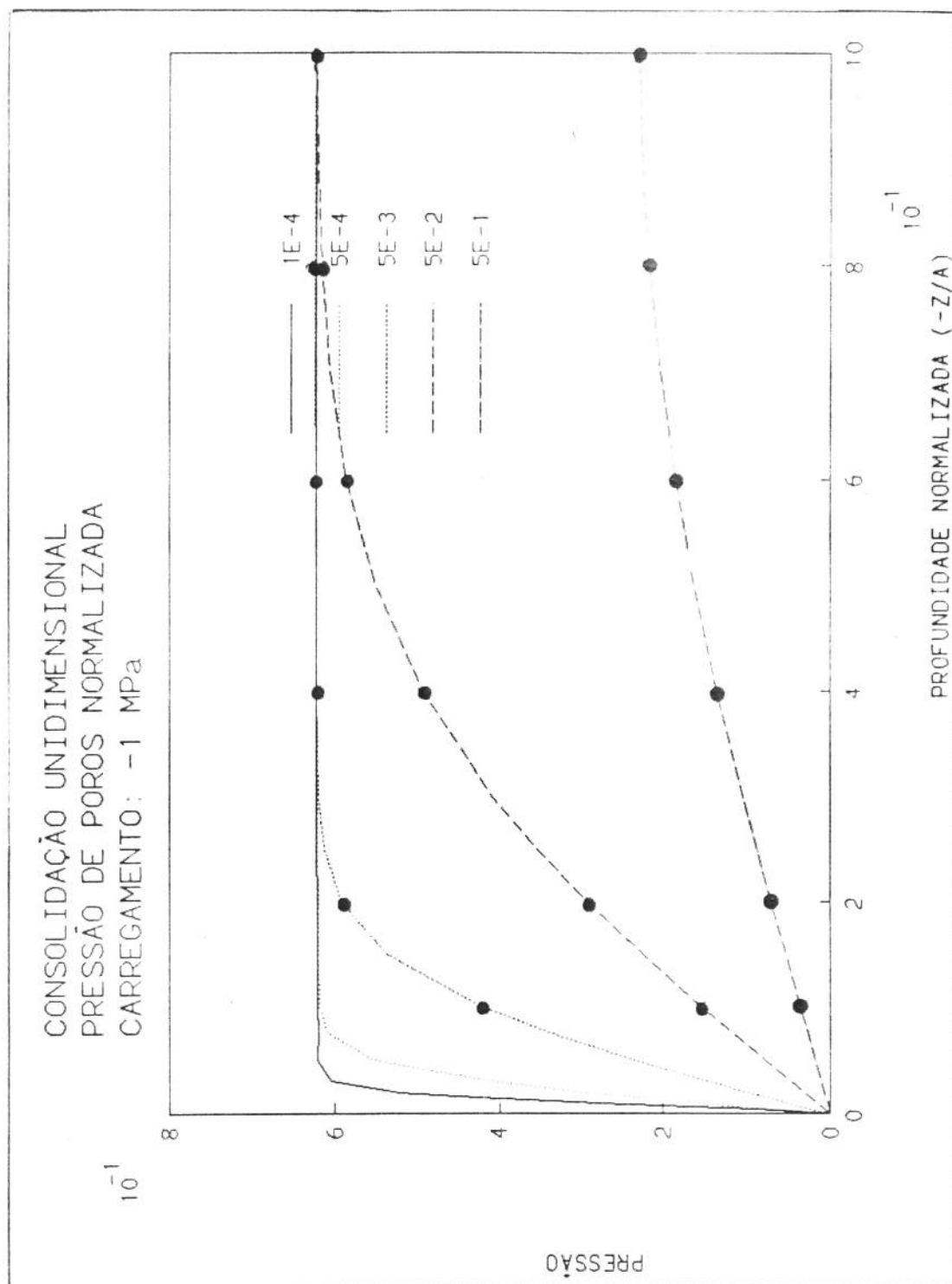


Figura 6.5.02 - Coluna unidimensional
Pressão normalizada

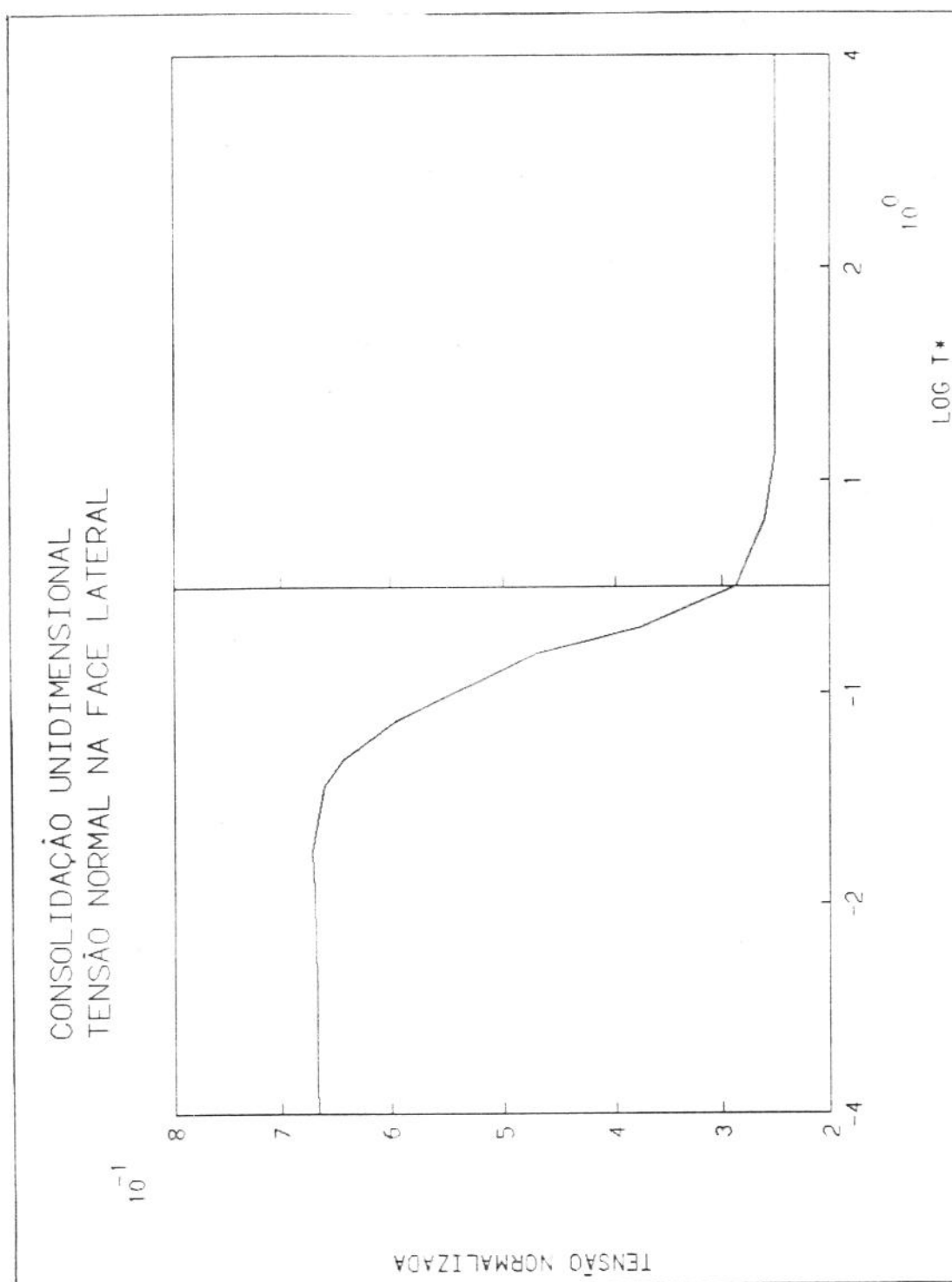


Figura 6.5.03 - Coluna unidimensional
Tensão normal normalizada
Face lateral

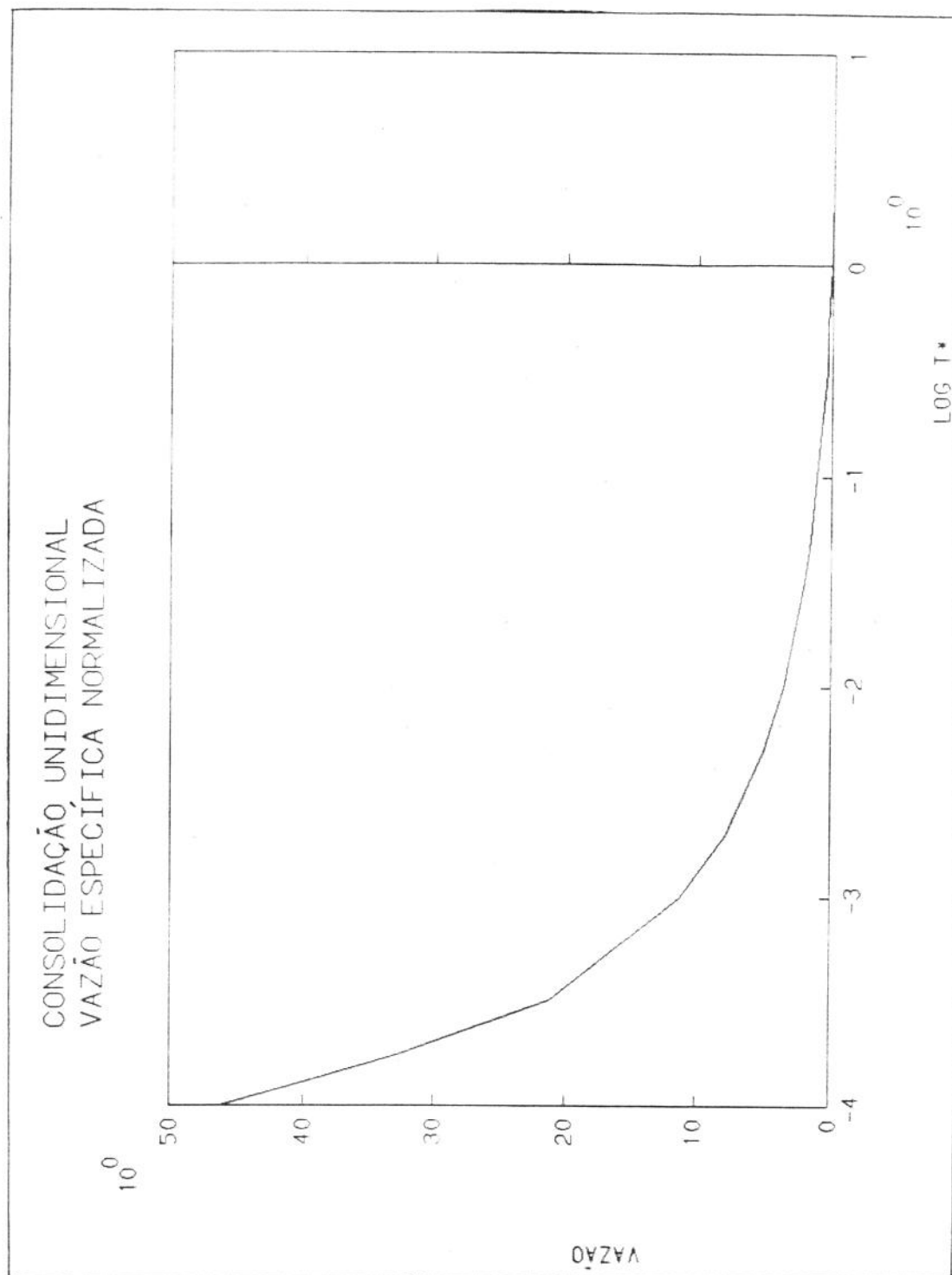


Figura 6.5.04 - Coluna unidimensional
Vazão normal normalizada
Topo da coluna

O problema da consolidação unidimensional também foi estudado por Boone [87]. Neste caso um carregamento instantâneo, P , é aplicada no topo, como uma tensão total e como pressão de poros, ou seja, neste instante a tensão efetiva é zero. Inicialmente a coluna estava totalmente descarrega sem pressão de poros.

A diferença fundamental entre o problema estudado por Badmus et al [63] e o estudado por Boone é que neste último há um diferencial de pressão aplicado no topo da coluna. No primeiro caso ocorre drenagem de fluido no topo e no segundo ocorre injeção. As demais condições de contorno são iguais.

Os dados são:

Carga no topo P : -1 MPa

Diferencial de pressão no topo p : 1 MPa

Módulo de rigidez G : 6000 MPa

Módulo de Poisson drenado ν : 0,2

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,33

Coefficiente de Skempton B : 0,62

Coefficiente de permeabilidade k : $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 / (\text{MPa} \cdot \text{s})$

Dimensão característica a : 6 m

Este problema foi resolvido simulando-se uma coluna de 6m de altura de secção reta quadrada de 1m de lado. O topo foi discretizado com 10 elementos lineares iguais, a base com 2 elementos e os lados com 9 elementos iguais, cada um.

A figura F.3.02 mostra um esquema deste caso.

O deslocamento instantâneo no topo é dado por

$$u^0 = \frac{(1-2\nu_u) PL}{(1-\nu_u) 2G} = - \frac{(1-2 \times 0,33) \times 1 \text{ MPa} \times 6 \text{ m}}{(1-0,33) \times 2 \times 6000 \text{ MPa}}$$

$$u^0 = -0,254 \text{ mm}$$

Com decorrer do tempo a coluna vai sendo preenchida pelo fluido e o deslocamento do topo é reduzido chegando a um valor final igual a [87]:

$$u^{\infty} = (1-\alpha) \frac{(1-2\nu) PL}{(1-\nu) 2G}$$

O valor de α é

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} = \frac{3(0,33-0,2)}{0,62(1-0,4)(1+0,33)} = 0,78826$$

Então o deslocamento final é

$$u^{\infty} = -(1-0,78826) \frac{(1-2 \times 0,2) 1 \text{MPa} \times 6 \text{m}}{(1-0,2) \times 2 \times 6000 \text{MPa}} = -0,0794 \times 10^3 \text{ m}$$

No instante inicial a pressão em toda a coluna, com exceção do topo, é

$$p^0 = \frac{B(1+\nu_u)p}{3(1-\nu_u)} = \frac{0,62 \times 1,33 \times 1 \text{MPa}}{3 \times (1-0,33)} = 0,4103 \text{ MPa}$$

A pressão final, logicamente, é igual a pressão de carregamento de 1 MPa.

A figura 6.5.05 mostra o comportamento da pressão de poros, na base da coluna, ao longo do tempo. Mostra também solução analítica fornecida por Boone [87].

Na figura 6.5.06 é mostrado o deslocamento do topo da coluna com o desenrolar do tempo.

A tensão normal na face lateral é mostrada na figura 6.5.07. Esta tensão foi normalizada dividindo-se pelo módulo do carregamento P.

A vazão de injeção específica no topo é apresentada na figura 6.5.08

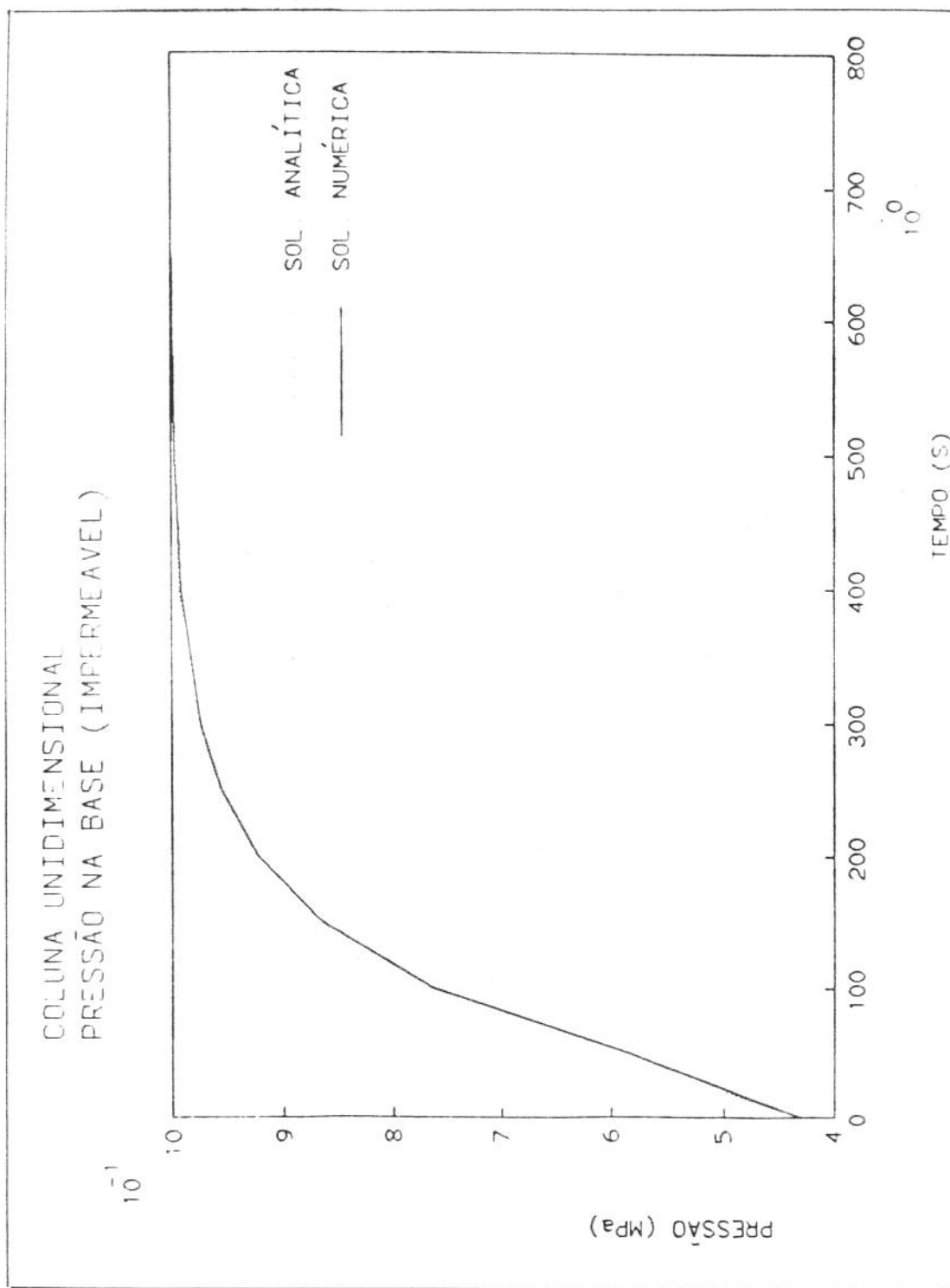


Figura 6.5.05 - Coluna unidimensional
Pressão na base em MPa

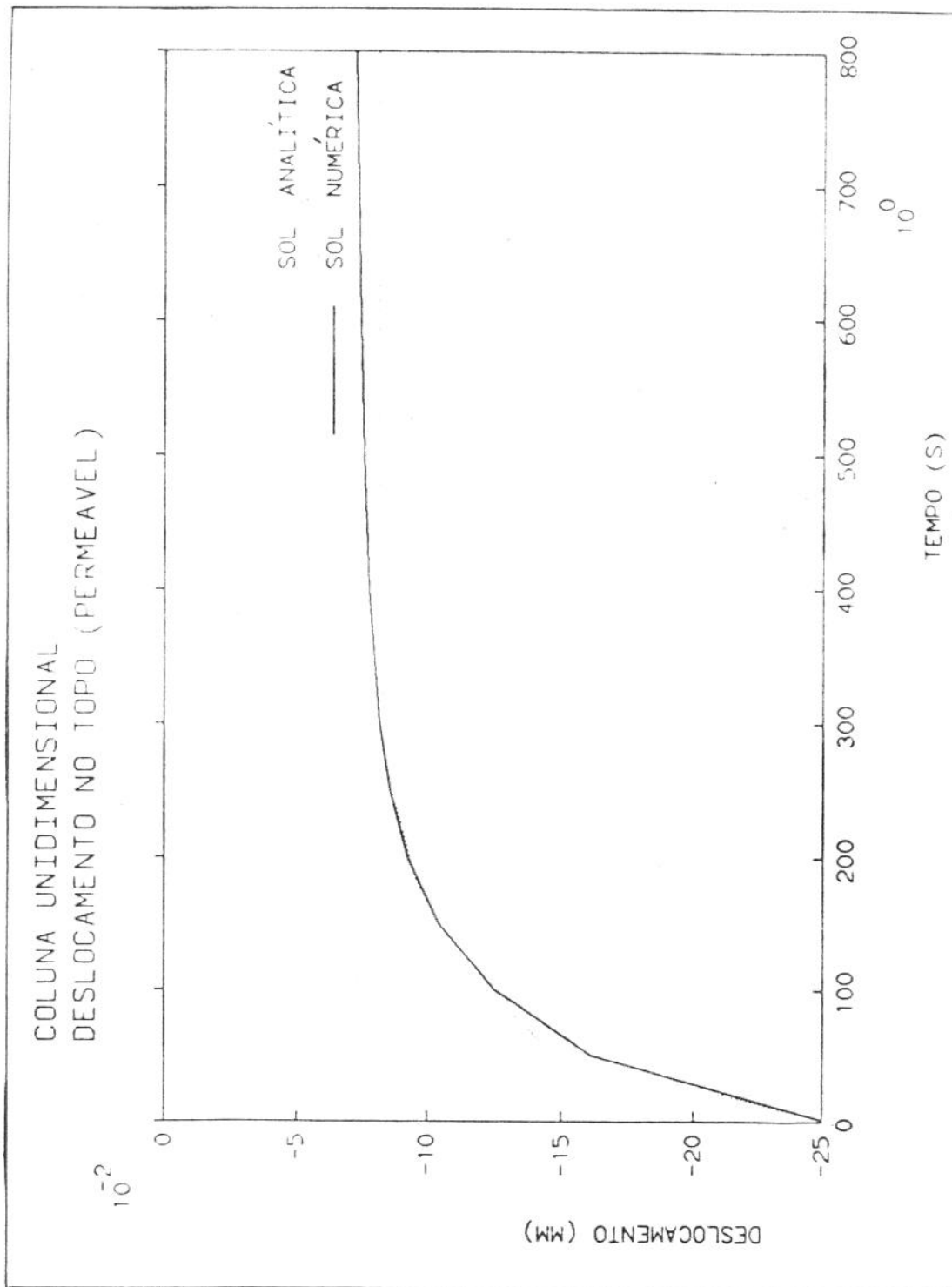


Figura 6.5.06 - Coluna unidimensional
Deslocamento do topo em mm

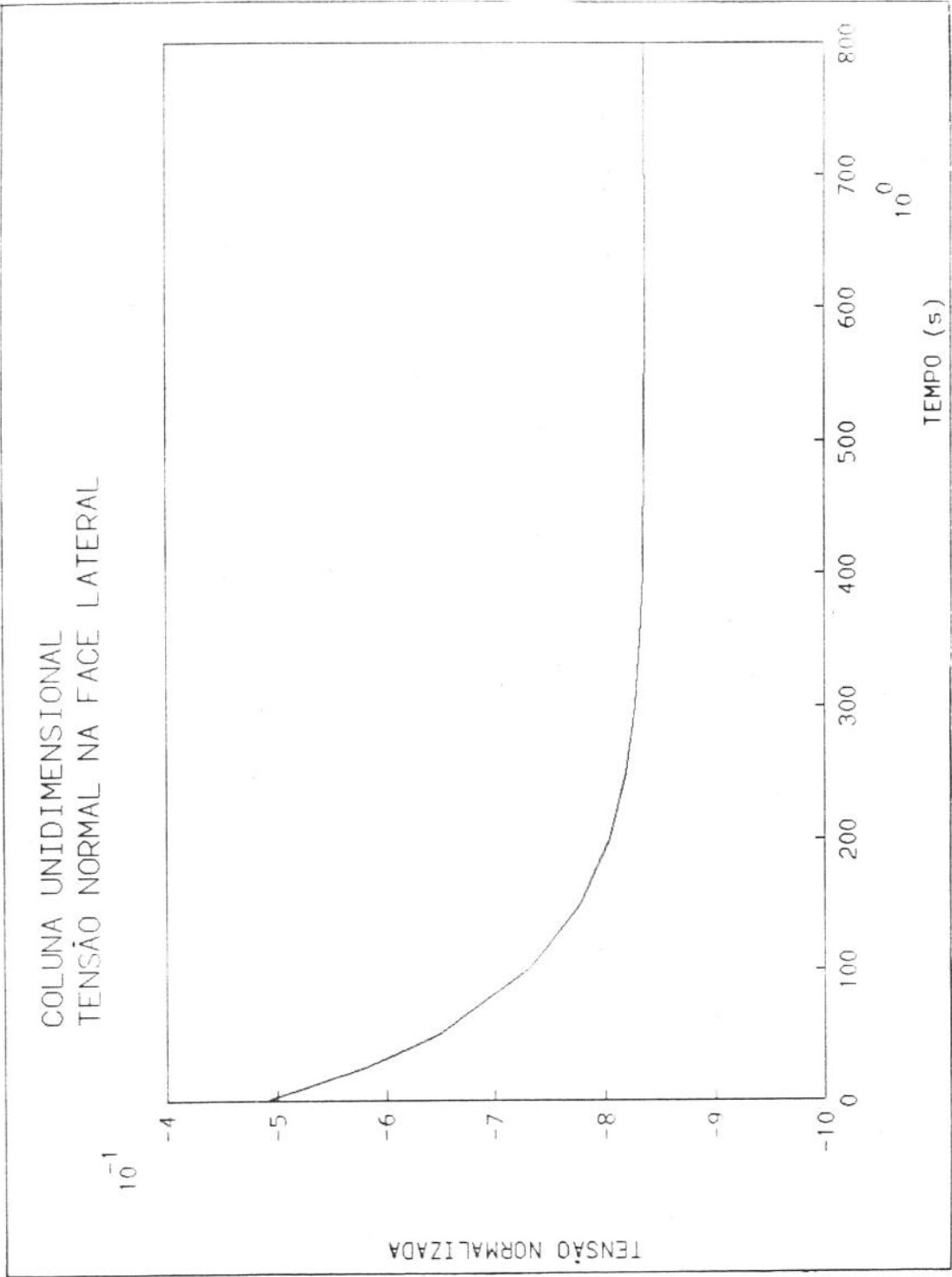


Figura 6.5.07 - Coluna unidimensional
Tensão normal na face lateral

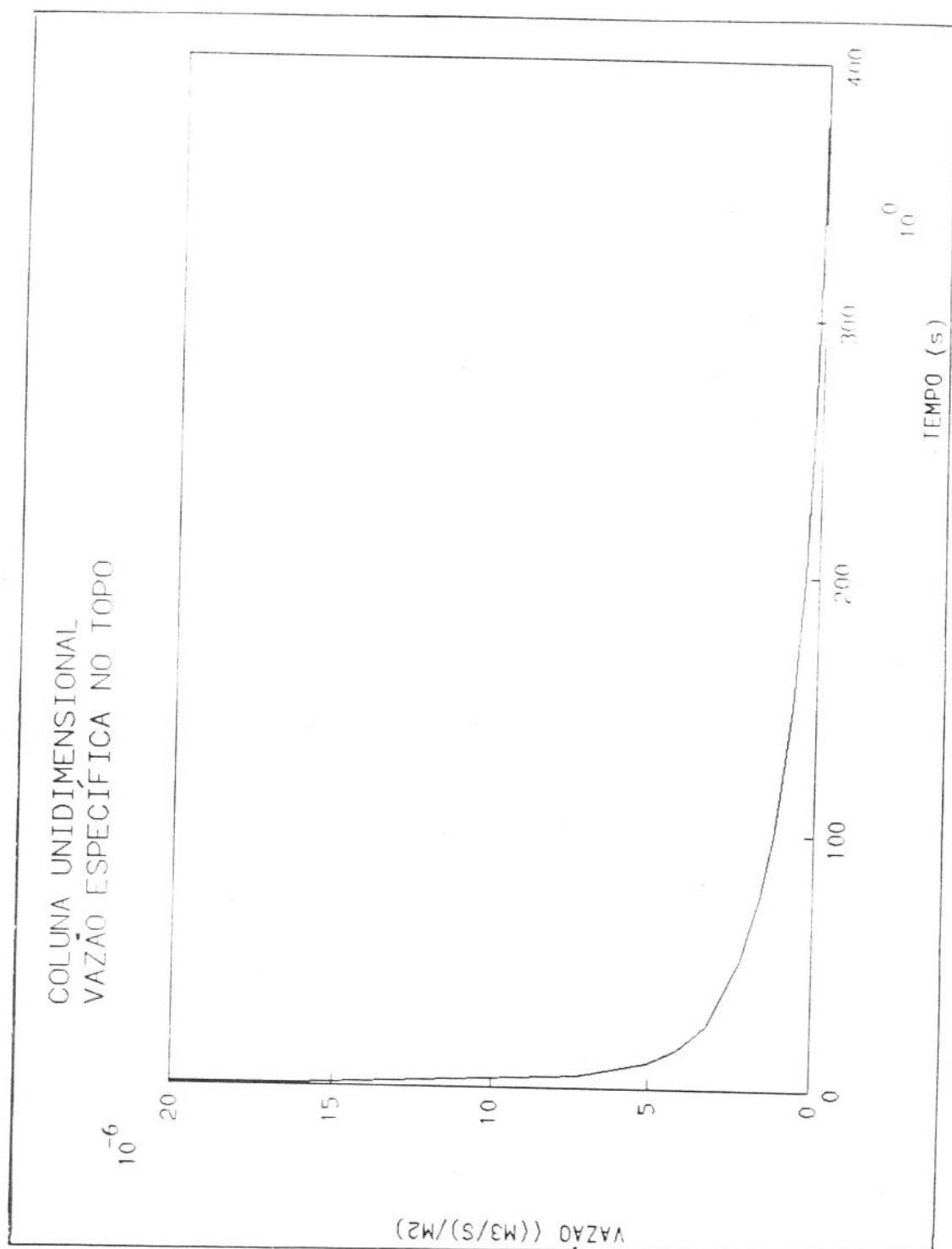


Figura 6.5.08 - Coluna unidimensional
Vazão normal no topo

6.6 Semi-espaco poroelástico

Schiffman et al [127] determinou as tensões, deformações e pressões em um semi-espaco poroelástico carregado unidimensionalmente sob condições de deformação plana. A solução analítica generalizada foi dada por McNamee e Gibson [128,129]. Este problema também foi apresentado em outros artigos técnicos [57,65,83,126,130].

Simulou-se esta situação supondo um bloco prismático poroelástico com uma secção vertical reta quadrada de lado igual a a 200m carregado unidimensionalmente no centro do topo. A faixa de carregamento suposta tem 2m de largura ($2a$) O contorno do quadrado foi discretizado com 64 elementos lineares convenientemente distribuídos. Há drenagem livre no topo e a base é fixa, rígida e impermeável. Lateralmente a drenagem é livre.

A figura F.4.01 mostra um esquema deste problema.

Os dados utilizados são os seguintes:

Módulo de rigidez G : 6000 MPa

Carregamento Q : 1000 MN/m

Módulo de Poisson drenado ν : 0

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,5

Coefficiente de Skempton B : 1

Dimensão característica a : 1 m

Na figura 6.6.01 representa-se a variação da pressão de poros normalizada (p/Q) em função da profundidade normalizada (z/a) para t^* igual a 0,1 no plano central do carregamento. O coeficiente de permeabilidade usado foi $10^{-5} \text{m}^2/(\text{MPa.s})$, o que representa uma rocha bem fechada. Os pontos mostram os valores apresentados por Schiffman [127].

Na figura 6.6.02 mostra-se a evolução da pressão de poros, no plano $z/a = 0,5$, com o tempo.

A figura 6.6.03 apresenta a variação da pressão de poros com o tempo em 2 pontos do domínio. Nesta figura os pontos mostram os valores achados por Hwang et al [126].

Nas 3 figuras o efeito Mandel-Cryer é claramente mostrado, representando uma pressão de poros crescente nos tempos iniciais do processo.

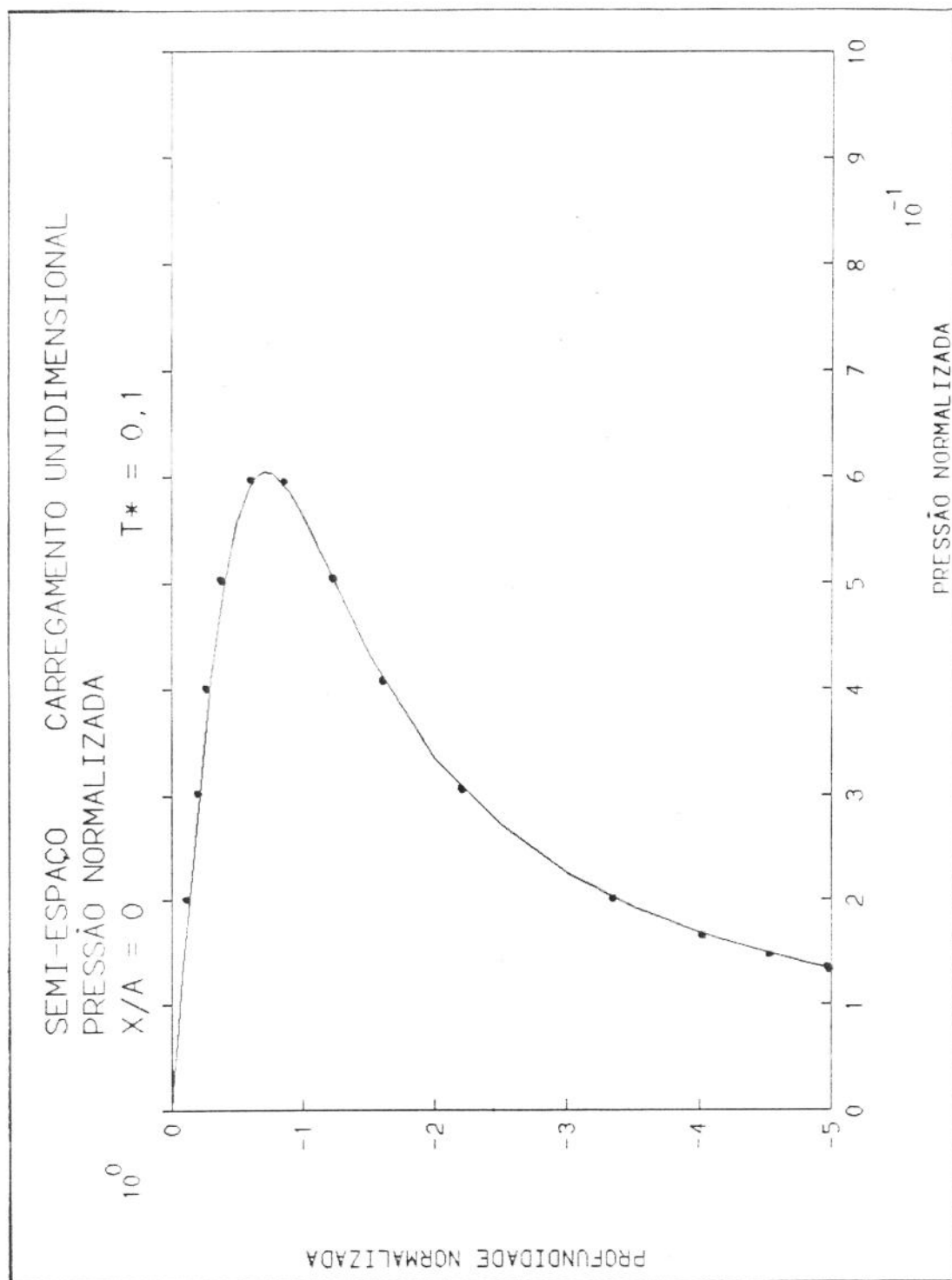


Figura 6.6.01 - Carregamento linear

Pressão de poros normalizada

$X/A = 0$ $T^* = 0,1$

SEMI-ESPAÇO CARGA LINEAR
PRESSÃO DE POROS
 $Z/A = 0.5$

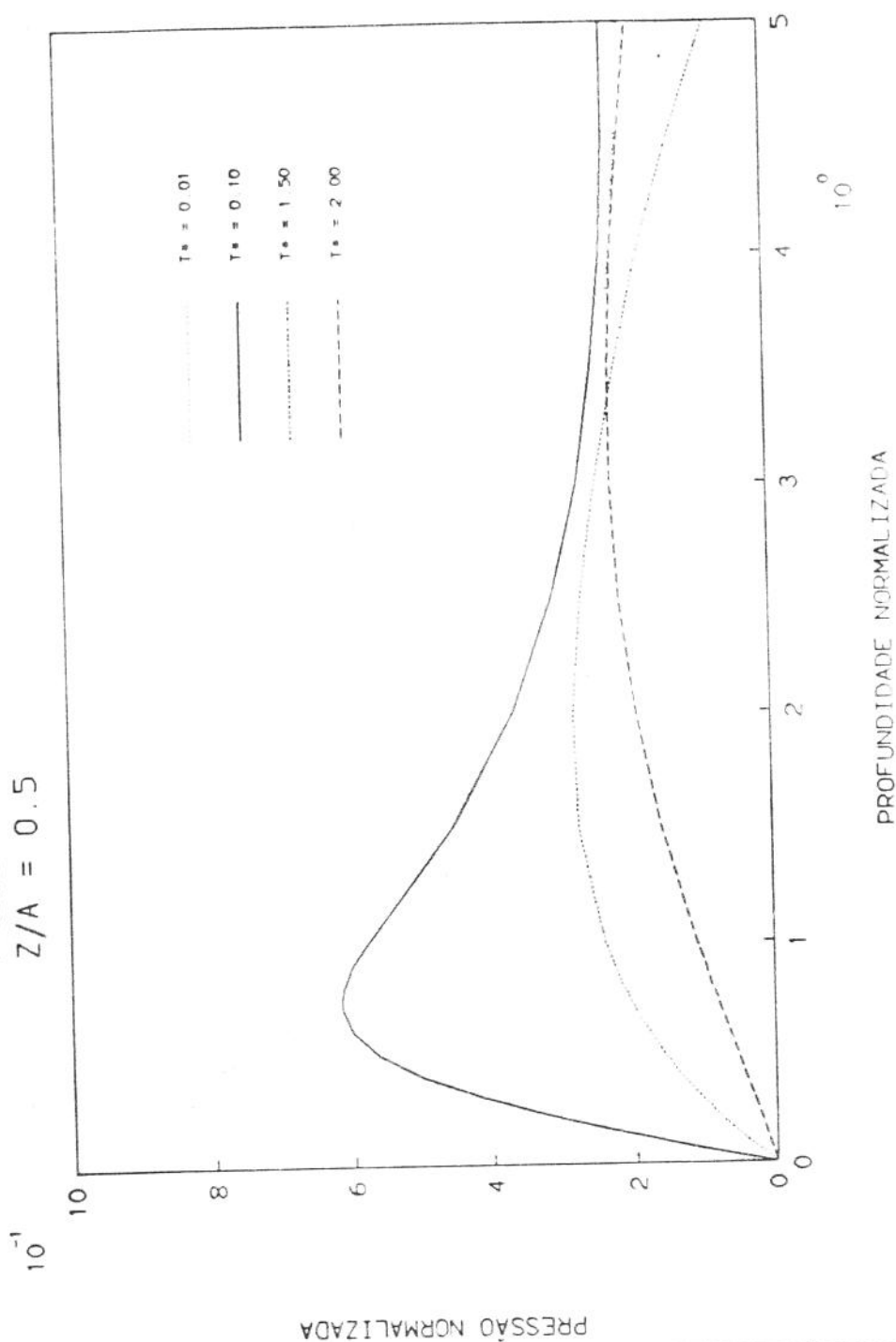


Figura 6.6.02 - Carregamento linear

Evolução da pressão normalizada
 $Z/A = 0,5$ Vários t^*

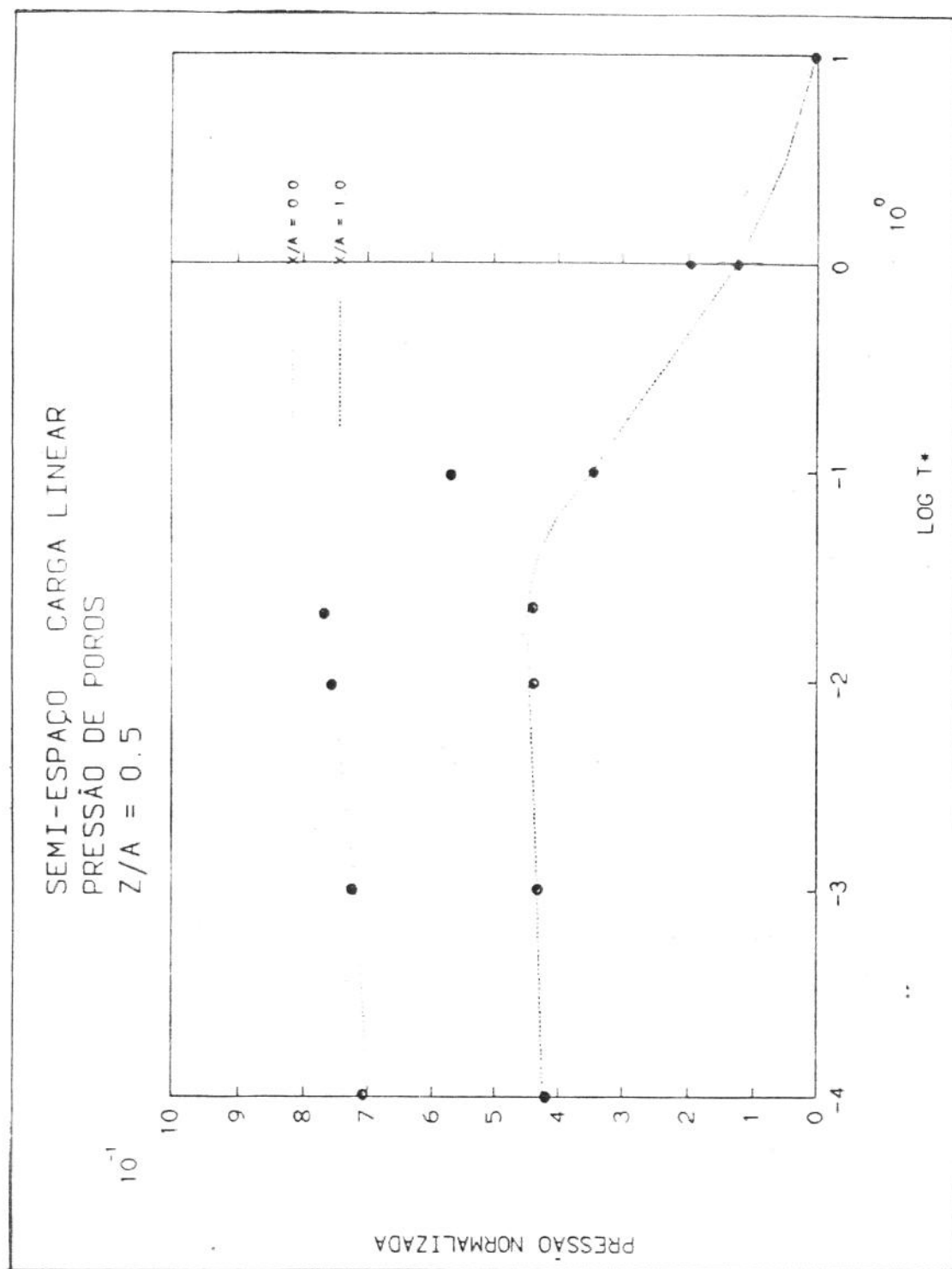


Figura 6.6.03 - Carregamento linear

Evolução da pressão normalizada

$Z/A = 0,5$ $X/A = 0$ e 1

6.7 Poço circular vertical

Considere-se um poço circular vertical perfurado em uma formação porosa sujeita a um campo de tensões tectônicas não hidrostático, conforme a figura seguinte.

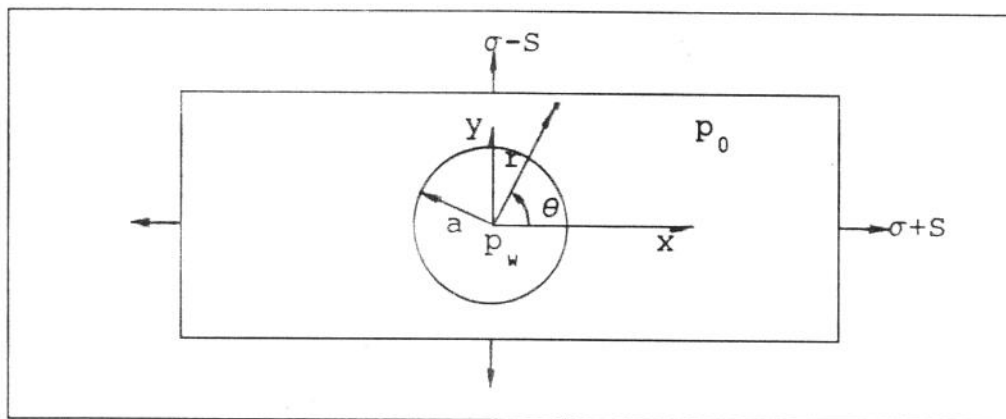


Figura 6.7.01 - Furo circular

Na figura 6.7.01, σ é o tensor tensão médio (hidrostático), S é o tensor tensão de desvio, p_0 é a pressão de poros original (longe do poço) e p_w é a pressão dentro do poço. Assume-se que o eixo do poço seja vertical e que a direção da tensão vertical principal coincida com ele.

Este problema pode ser considerado um caso de deformação plana. O efeito da perfuração do poço pode ser simulado pela remoção, no tempo $t = 0^+$, do material perfurado. Assim sendo, as tensões atuantes na parede do poço são aquelas que atuavam no material retirado, ou seja, são as reações às tensões de carregamento. O poço é considerado vazio, ou seja, atua na parede uma pressão oposta à pressão do reservatório. Assim se tem um diferencial de pressão negativo, com um fluxo da formação para o poço.

O modelo acima corresponde à uma situação ideal, isto é, seria o caso de um poço perfurado usando-se um fluido de perfuração sem peso.

Detournay e Cheng [24] decomposeram o campo das tensões em 3 módulos de carregamento:

Módulo 1 - Campo do tensor tensão hidrostático

Os componentes o tensor tensão hidrostático são representados por [2].

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{kk}/3) \delta_{ij} = \sigma \delta_{ij}$$

As condições de contorno na parede são

$$\sigma_{rr} = -\sigma$$

$$\sigma_{r\theta} = 0.$$

$$\Delta p = 0.$$

Módulo 2 - Campo da pressão de poros original

Para este carregamento as condições na parede do furo são

$$\sigma_{rr} = 0.$$

$$\sigma_{r\theta} = 0.$$

$$p_w = 0.$$

$$\Delta p = p_w - p_0 = -p_0$$

Módulo 3 - Campo do tensor tensão de desvio

Os componentes do tensor tensão de desvio, ou tensor deviatórico, são dados pela seguinte expressão:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$$

$$\sigma = \sigma_{kk}/3 \quad S = S_{xx}$$

As condições de contorno na parede do furo são

$$\sigma_{rr} = -S \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = S \sin 2\theta$$

$$p_w = 0.$$

$$\Delta p = 0.$$

$$S = \sigma_{xx} - \sigma$$

Foram utilizados os dados abaixo:

Pressão no furo p_w : 0.

Pressão de poros p_0 : 1.

Tensão de desvio S : 1.

Módulo de rigidez G : 1

Módulo de Poisson drenado ν : 0,2

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,4

Coefficiente de Skempton B : 0,8

Dimensão característica r_c : 1

Inicialmente, o contínuo poroelástico está carregado com as tensões e pressões acima e no instante 0^+ é retirado o material correspondente ao furo, ficando então aplicadas as condições de contorno já descritas.

Em todas figuras deste parágrafo 6.7 os pontos representam os resultados apresentados por Detournay e Cheng [24], que são os valores no eixo dos x , $\theta = 0^0$.

Neste item apresenta-se somente as variáveis mostradas pelos citados autores, para fins de comparação. Um estudo completo para um caso real é apresentado no item 6.8.

6.7.1 Efeitos do tensor tensão hidrostático

Neste módulo de carregamento não ocorrem fenômenos poroelásticos conforme afirmado por Detournay e Cheng [24]. Por esta razão ele não foi abordado neste item.

No item 6.8 é mostrada a solução completa de um exemplo real de um poço circular perfurado em certo meio poroso. Verificar-se-á então se a afirmativa acima é verdadeira ou não.

As condições de contorno na parede, repetindo, são

$$\sigma_{rr} = -\sigma$$

$$\sigma_{r\theta} = 0.$$

$$\Delta p = 0.$$

6.7.2 Efeitos da pressão de poros original

Neste campo de tensões tem-se os efeitos da diferença entre a pressão no poço p_w e a pressão nos poros da formação p_0 .

As condições de contorno na parede do furo são:

$$\sigma_{rr} = 0.$$

$$\sigma_{r\theta} = 0.$$

$$p_w = 0.$$

$$\Delta p = p_w - p_0 = -p_0$$

Na figura 6.7.02 mostra-se a variação da pressão normalizada (p/p_0) com o tempo t^* em vários pontos do domínio.

Na figura 6.7.03 é mostrada a variação da vazão radial normalizada ($-q_a/kp_0$) em alguns pontos do reservatório para vários tempos normalizados.

Como se pode ver, nos tempos iniciais, as curvas de pressão são uniformes (constantes), deduzindo-se que a área de drenagem se propaga com uma frente bem definida. Para as condições simuladas ($p_w=0$), o fluxo é da formação para o poço e é máximo na chegada da frente de drenagem. Este máximo cai rapidamente com a distância do furo. Na parede do poço a vazão tende a infinito no tempo $t = 0^+$.

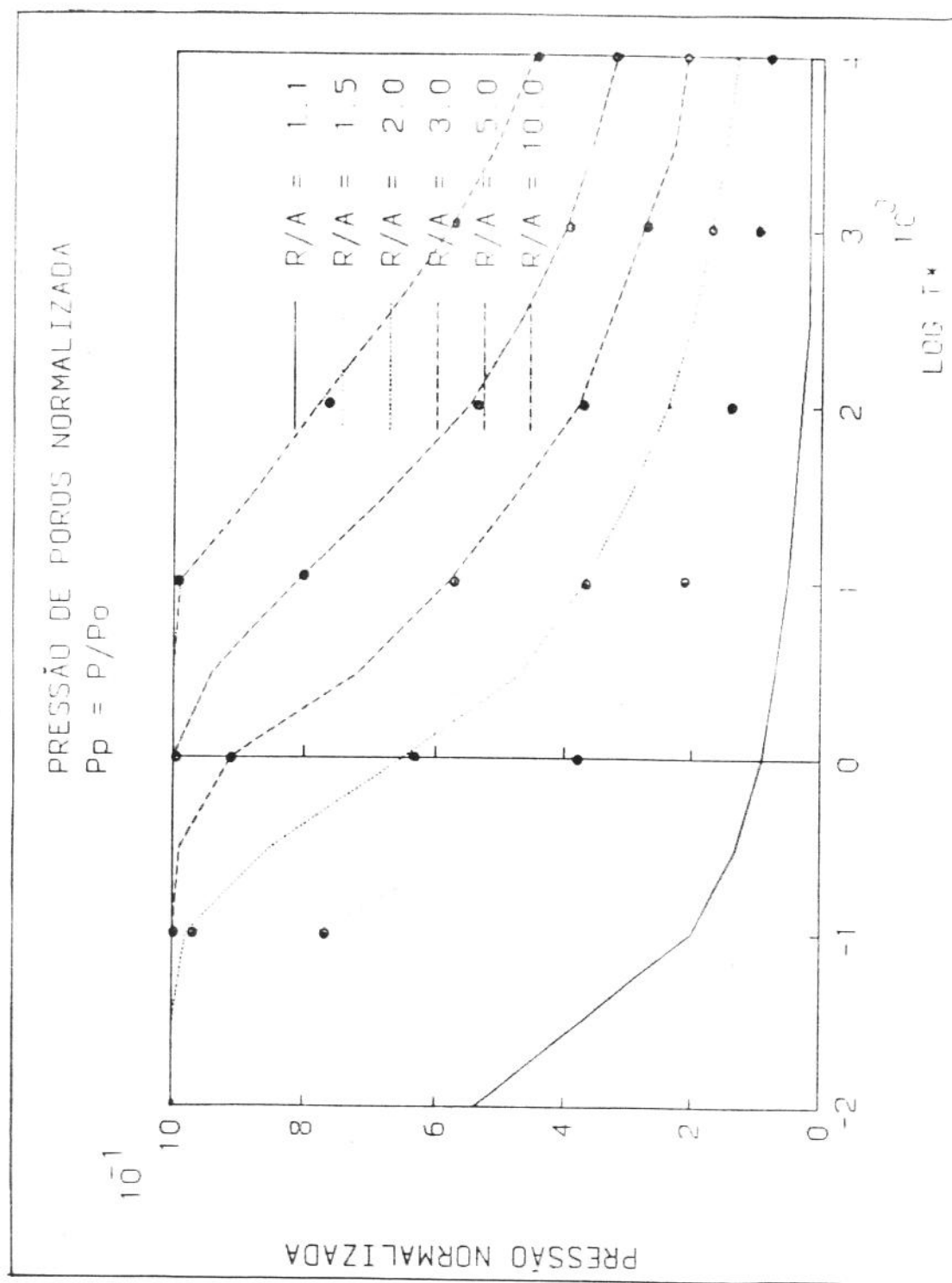


Figura 6.7.02 - Furo circular

Pressão de poros normalizada
 Módulo 2

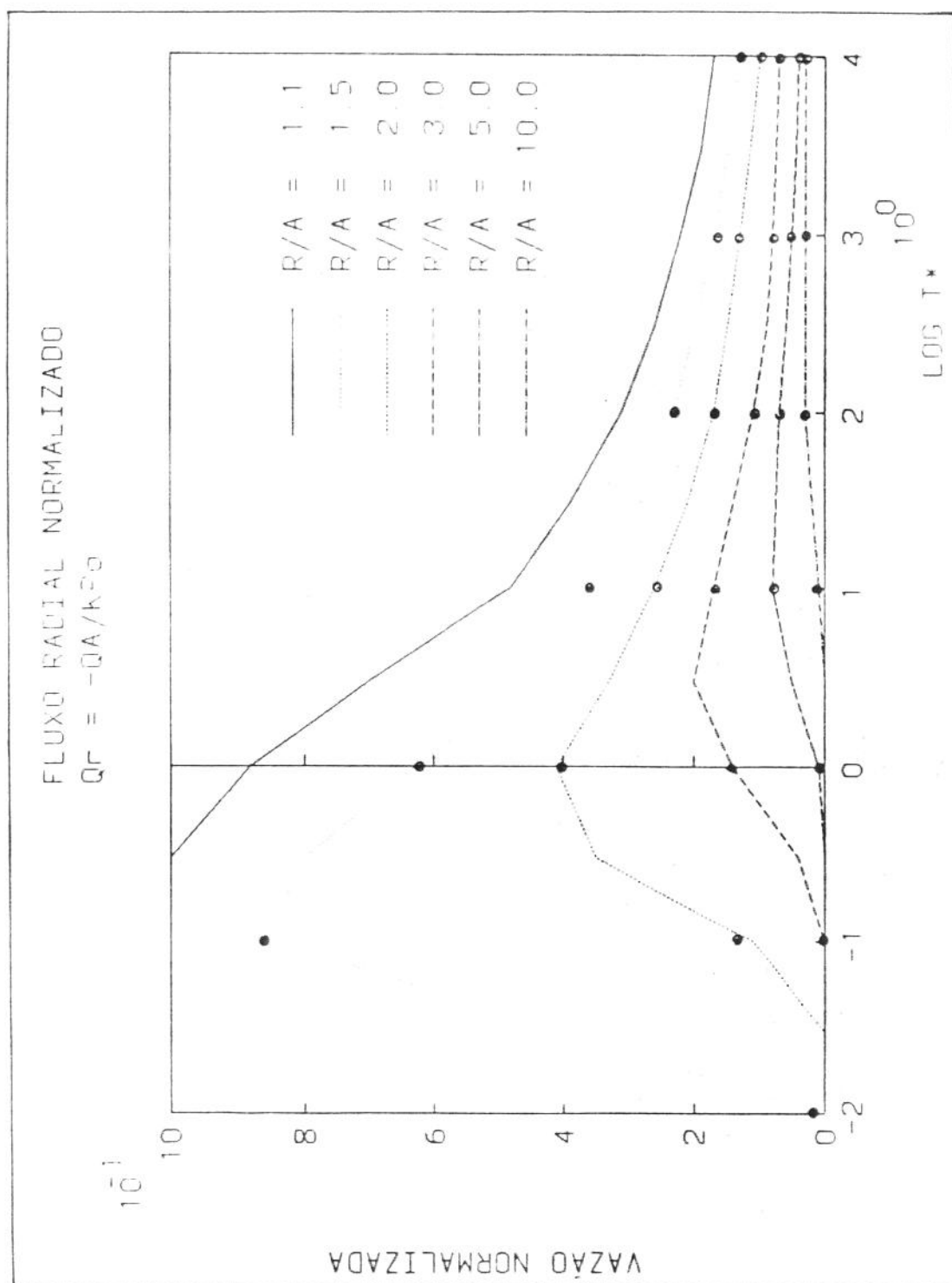


Figura 6.7.03 - Furo circular

Vazão radial normalizada

Módulo 2

6.7.3 Campo das tensões de desvio

Este módulo mostra o efeito da diferença entre as tensões tectônicas, representada pelo tensor tensão de desvio. As condições de contorno, na parede do furo, são:

$$t_x = S \cos \theta$$

$$t_y = -S \sin \theta$$

$$\sigma_{xy} = 0.$$

$$\Delta p = 0.$$

A a variação da pressão de poros normalizada (p/S) com a distância normalizada (r/a), para alguns t^* , pode ser vista na figura 6.7.04. Instantaneamente após a perfuração do poço a pressão de poros pode ser calculada por [24]:

$$p = \frac{4}{3} SB(1+\nu_u) \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta$$

$$p = \frac{4}{3} \times 1 \times 0,8 \times (1+0,4) \frac{a}{r^2} \cos 2\theta$$

$$p = 1,4933 \frac{a}{r^2} \cos 2\theta$$

Para

$$r = a$$

$$\theta = 0$$

$$p = 1,4933$$

Na figura esta tendência é mostrada claramente.

A condição de contorno $p=0$ cria, entretanto, um forte gradiente de pressão em $t = 0^+$, o qual é associado à uma rápida drenagem na parede do poço. Observe-se que, nas condições em apreço, a pressão varia com o ângulo θ e conseqüentemente a vazão não é apenas radial, como no módulo 2.

A drenagem rápida próximo ao poço tem um efeito muito forte na concentração de tensões. A rocha nas vizinhanças do furo é caracterizada por condições drenadas sendo, portanto, menos

rígida que nas regiões mais distantes, onde ainda permanecem as condições não drenadas. Deste modo nos tempos iniciais as proximidades de poço estão como que protegidas da concentração de tensões. Este fenômeno é mostrado na figura 6.7.05, onde se representa a variação da tensão circunferencial normalizada, $\sigma_{\theta\theta}/S$ com a distância normalizada em vários tempos t^* , na direção $\theta=0$. No tempo $t^* = 0^+$ esta tensão é, para $r = a$, igual a

$$\sigma_{\theta\theta} = -(1+3a^4/r^4)S\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -(1+3 \times 1/1) \times 1 \times 1 = -4$$

Esta tendência pode ser vista na mesma figura.

Como existe uma forte drenagem, esta tensão é, quase instantaneamente, reduzida a [24]

$$\sigma_{\theta\theta}/S = -4 \left(\frac{1-\nu_u}{1-\nu} \right) \cos \theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}/S = -4 \left(\frac{1-0,4}{1-0,2} \right) \times 1 = -3$$

Um fato a observar é que para os tempos iniciais o máximo absoluto da tensão circunferencial ocorre dentro do meio poroso e não na parede do poço, como esperado pela solução elástica [120].

Com o passar do tempo a concentração de tensões na parede aumenta atingindo a solução elástica

$$\sigma_{\theta\theta}/S = -4\cos 2\theta = -4$$

Tudo isto é mostrado na mesma figura 6.7.05.

A evolução do deslocamento radial para este módulo de carregamento é vista na figura 6.7.06, onde se mostra a variação do deslocamento radial normalizado ($2Gu/aS$) na parede para $\theta=0$.

No tempo $t^* = 0^+$ este deslocamento é dado por

$$\frac{2Gu}{aS} = 3-4\nu_u$$

$$= 3-4 \times 0,4 = 1,4$$

No tempo $t^* = \infty$ este deslocamento é dado por

$$\frac{2Gu}{aS} = 3-4\nu$$

$$= 3-4 \times 0,2 = 2,2$$

O deslocamento u é função, neste módulo de carregamento, do ângulo θ , ocorrendo um achatamento do furo na direção da menor tensão e um alargamento na direção da maior. Este fato foi primeiramente citado por Carter e Booker [85].

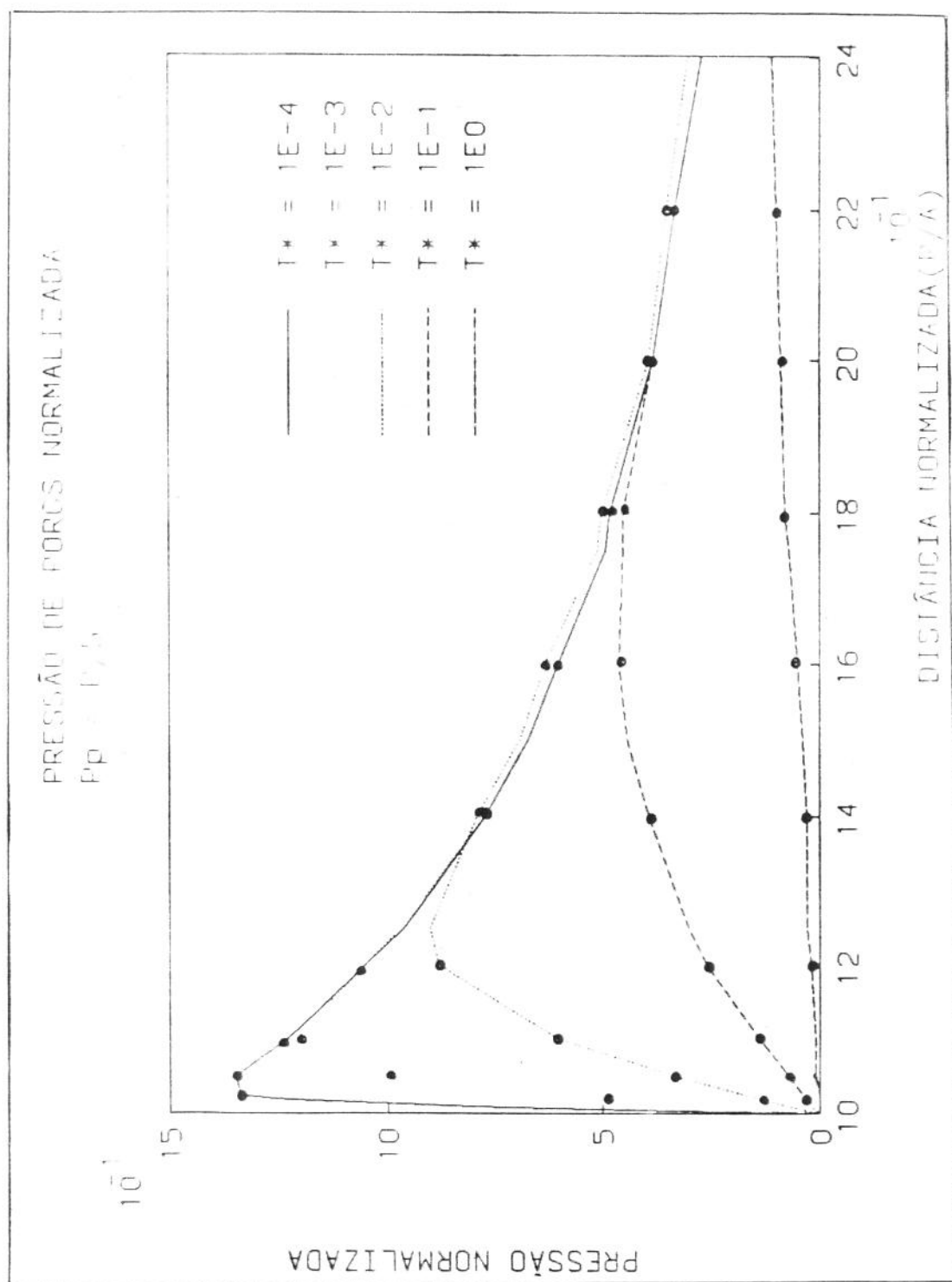


Figura 6.7.04 - Furo circular

Pressão de poros normalizada

Módulo 3

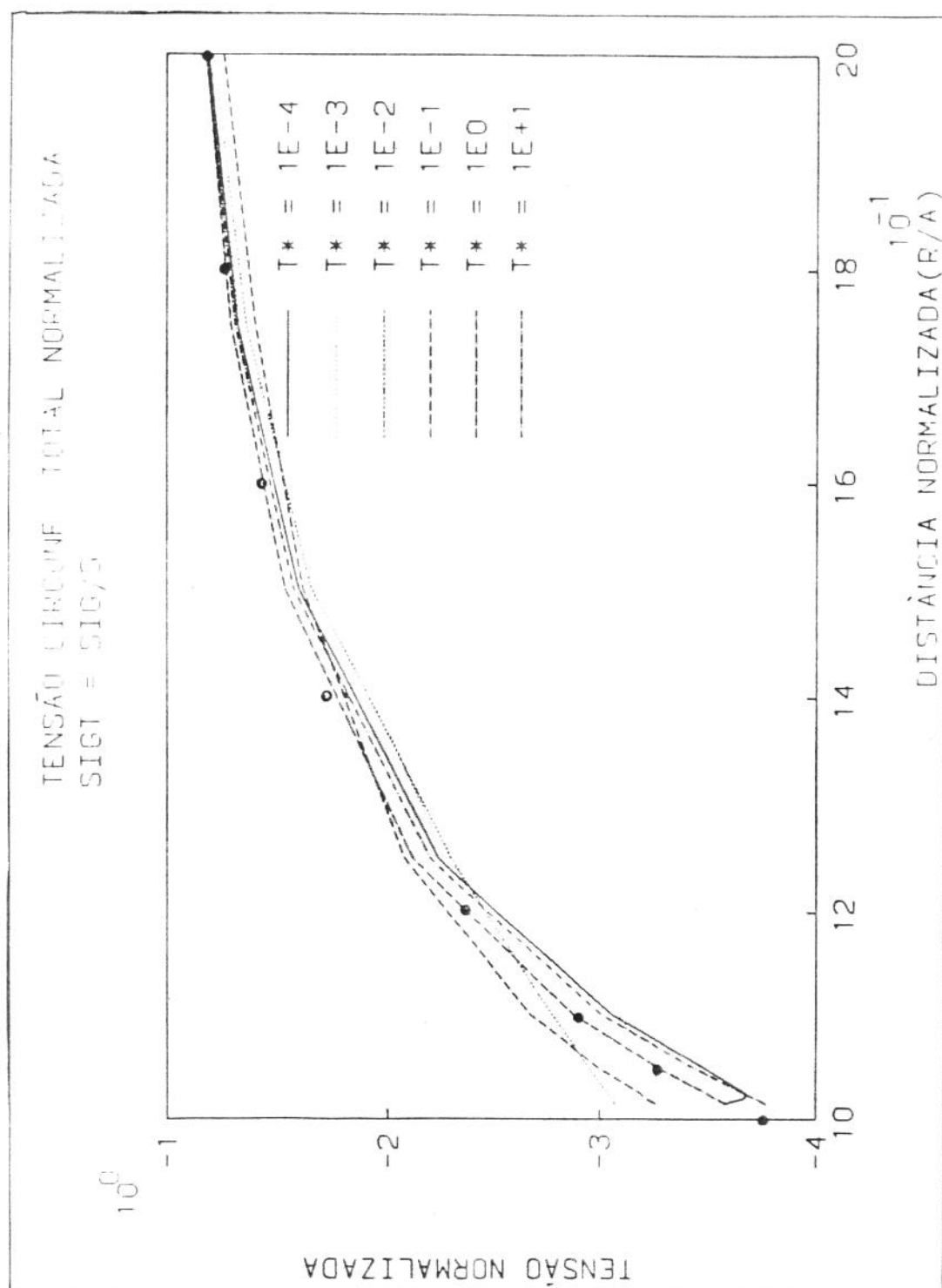


Figura 6.7.05 - Furo circular

Tensão circunferencial normalizada
Módulo 3

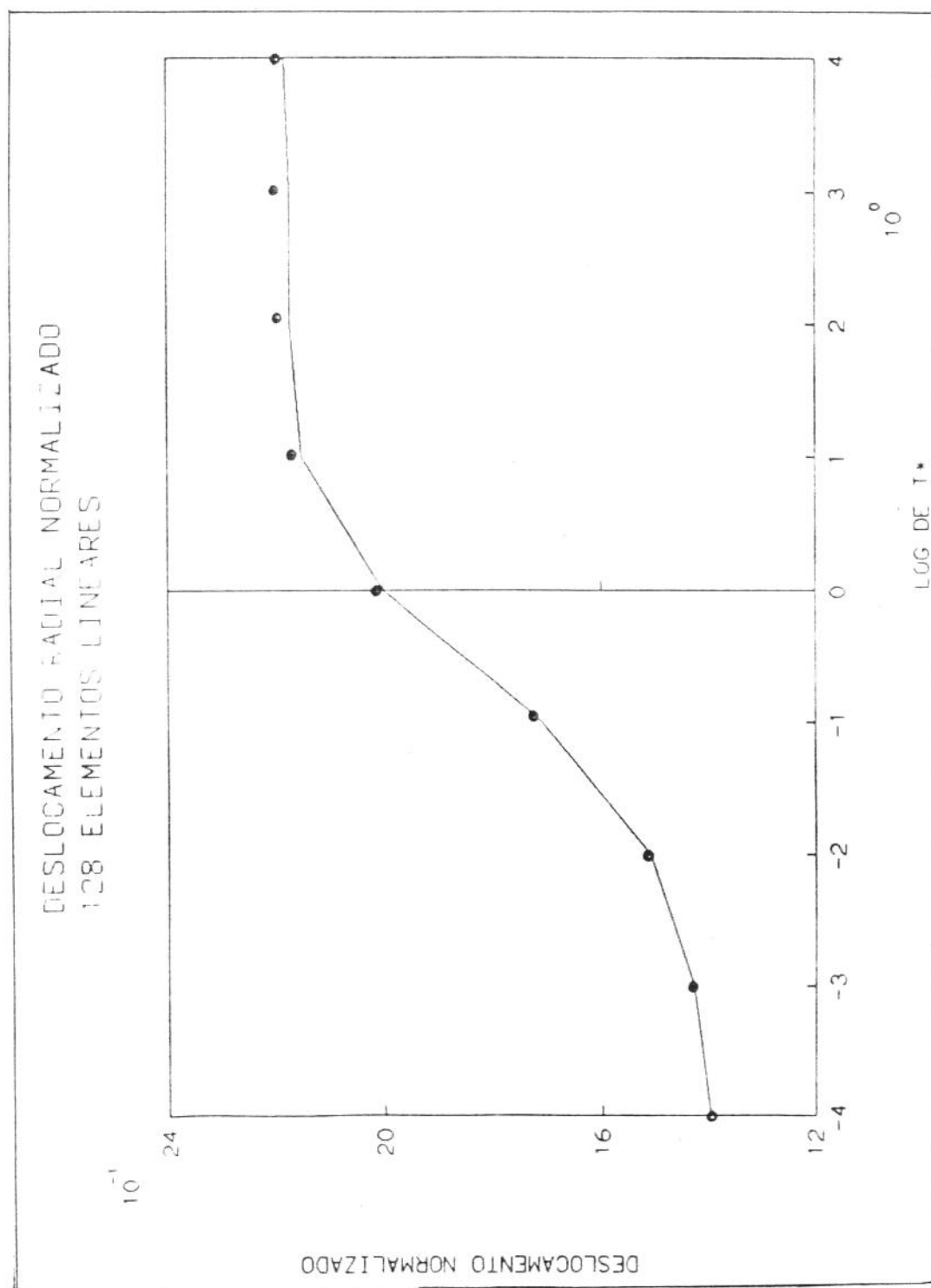


Figura 6.7.06 - Furo circular
Deslocamento radial normalizado
Módulo 3

6.8 Poço circular vertical. Um exemplo real

Resolver-se-á agora um exemplo real de um poço de 0.254m (10 pol) de diâmetro perfurado para atingir um reservatório de baixa pressão situado a 2000m com uma permeabilidade de 10^{-13} m²(100 mD) contendo um fluido de 5×10^{-3} Pa.s(5 cp). A formação é suposta ser tectonicamente não relaxada.

A figura seguinte mostra as condições de carregamento.

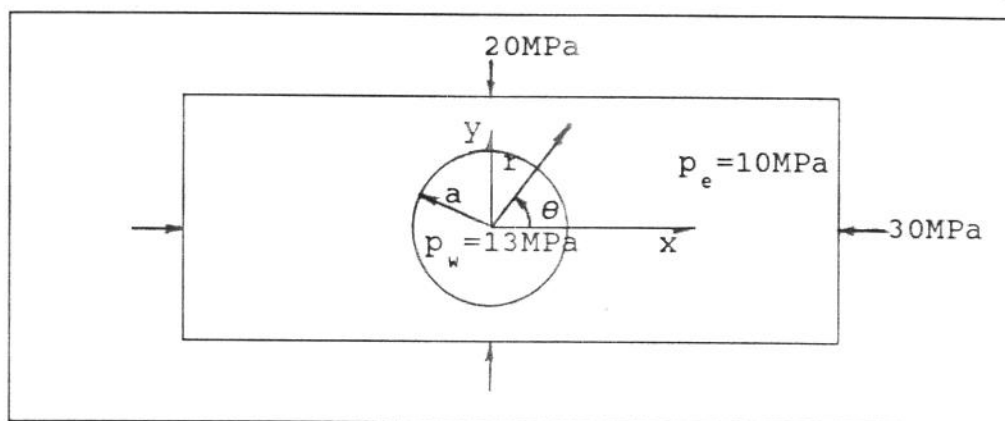


Figura 6.8.01 - Furo circular
Carregamento

Baseando-se nas condições descritas tem-se os seguintes dados

Tensão tectônica na direção x σ_{xx} : -30 MPa (4350 psi)

Tensão tectônica na direção y σ_{yy} : -20 MPa (2900 psi)

Pressão de poros p_e : 10 MPa (1450 psi)

Pressão no poço p_w : 13 MPa (1885 psi)

Módulo de Young E: 14400 MPa ($2,1 \times 10^6$ psi)

Módulo de rigidez G: 6000 MPa ($0,87 \times 10^6$ psi)

Módulo de Poisson drenado ν : 0,2

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,4

Coefficiente de Skempton B: 0,8

Coefficiente poroelástico α : 0,893

Coefficiente de permeabilidade k: 2×10^{-5} m²/(MPa.s)

Coefficiente de difusão c: 0,223 m²/s

Raio do poço r_w : 0,127 m (5 pol)

Dimensão característica r_c : 0,127 m

Inicialmente o contínuo poroelástico está carregado com as tensões acima e a pressão de poros é a citada. No instante 0^+ o poço é perfurado com fluido cuja pressão hidrostática é maior do que a pressão de poros, ocorrendo assim um fluxo inicial do poço para a formação até o equilíbrio das pressões.

Este exemplo, primeiramente, será resolvido fazendo-se a decomposição do carregamento nos 3 módulos como foi feito no exemplo anterior; depois ele será resolvido sem a decomposição citada. Obviamente chegar-se-á a um resultado que é a superposição dos 3 módulos.

6.8.1 Efeitos do tensor tensão hidrostático

O tensor hidrostático é composto por tensões normais iguais à média das tensões tectônicas e por tensões de cisalhamento nulas. A figura seguinte mostra as condições de carregamento neste módulo

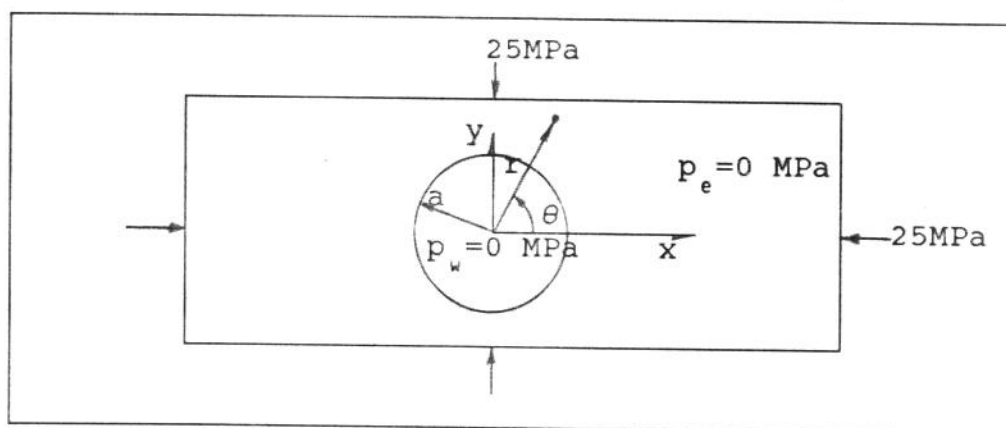


Figura 6.8.02 - Furo circular
Carregamento hidrostático

As condições de contórno na parede do poço são as seguintes:

$$\sigma_{rr} = -\sigma = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

$$p_e = p_w = 0$$

Este carregamento é axissimétrico, consequentemente os resultados também o serão. Por esta razão são mostrados apenas os resultados no eixo dos x.

Da figura 6.8.03 a figura 6.8.12 mostra-se os resultados obtidos. A pressão de poros pouco, ou quase nada, varia. O que confirma [24] que em um estado hidrostático não há geração de pressão. O que se observa é uma pequena perturbação próximo ao poço ($\pm 0,2 \text{ MPa}$ ou 30 psi).

As tensões radiais total e efetiva tendem a zero na parede do poço e à -25 MPa longe do mesmo, como esperado [121].

As tensões circunferenciais total e efetiva tendem a -50

MPa no poço e a -25 MPa longe dele, conforme previsto [123].

As proximidades do furo foi ampliada de modo a mostrar o o comportamento das variáveis nesta região.

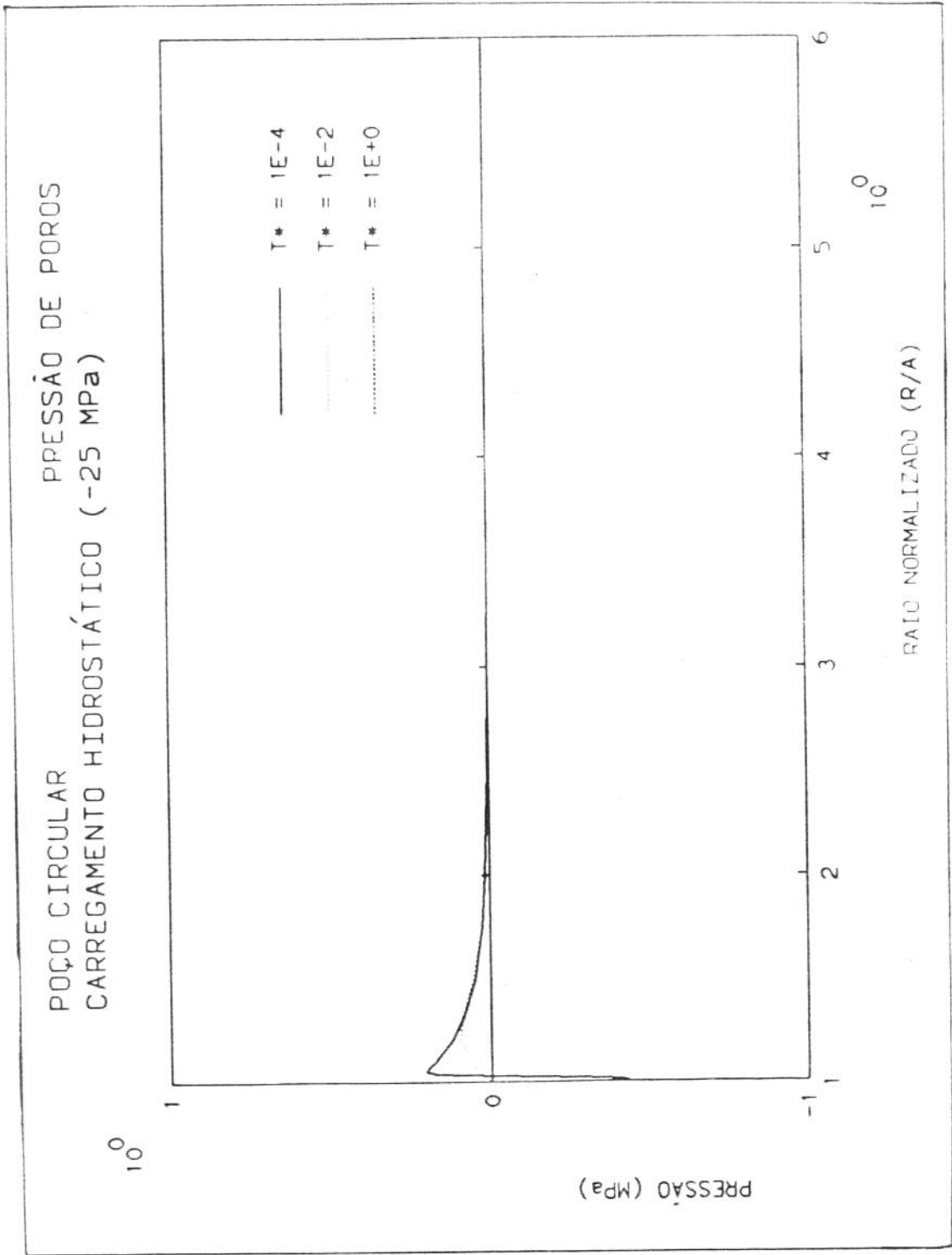


Figura 6.8.03 - Poço circular
Carregamento hidrostático
Pressão de poros (MPa)

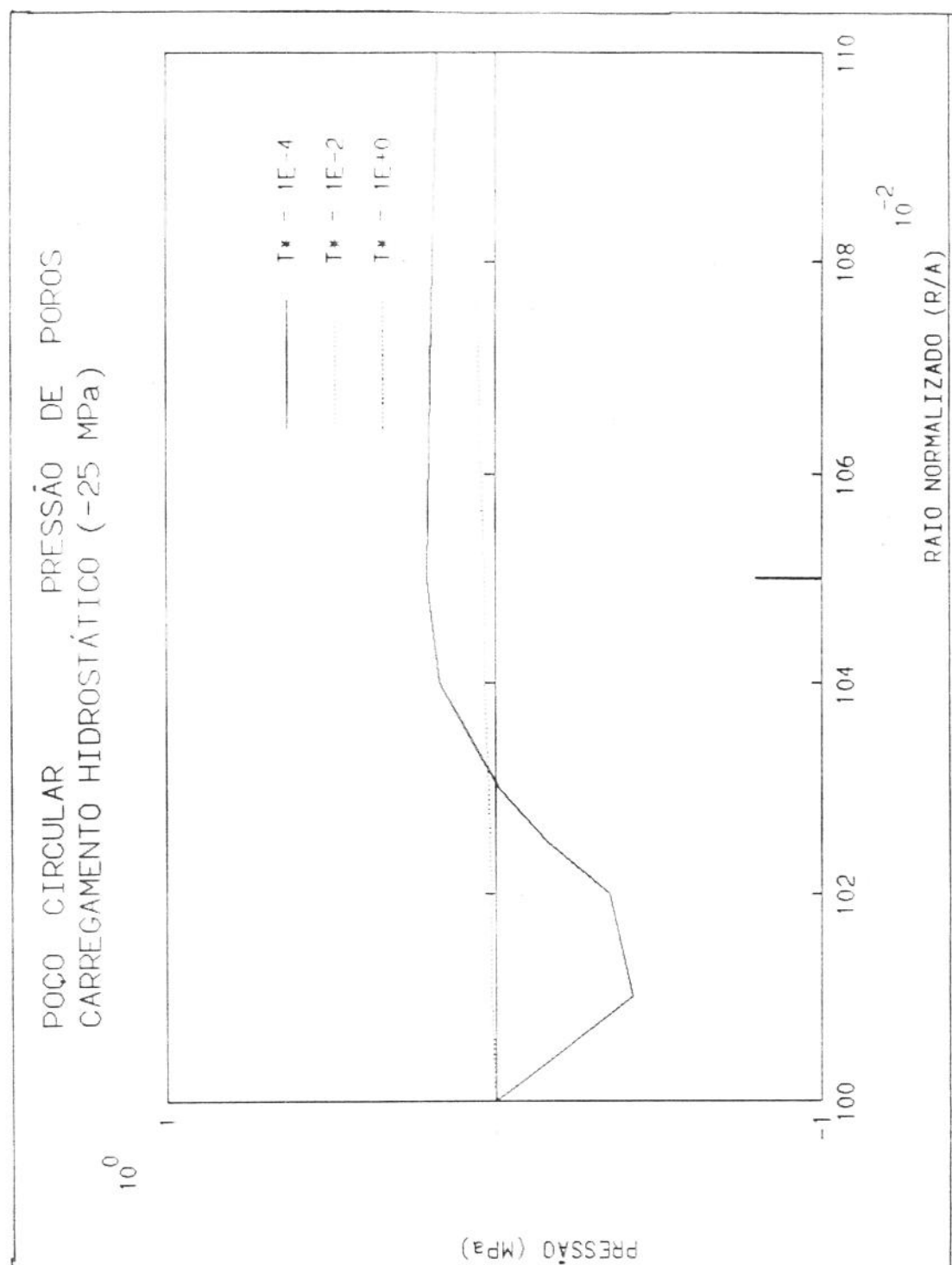


Figura 6.8.04 - Poço circular - Proximidades do furo
Carregamento hidrostático
Pressão de poros (MPa)

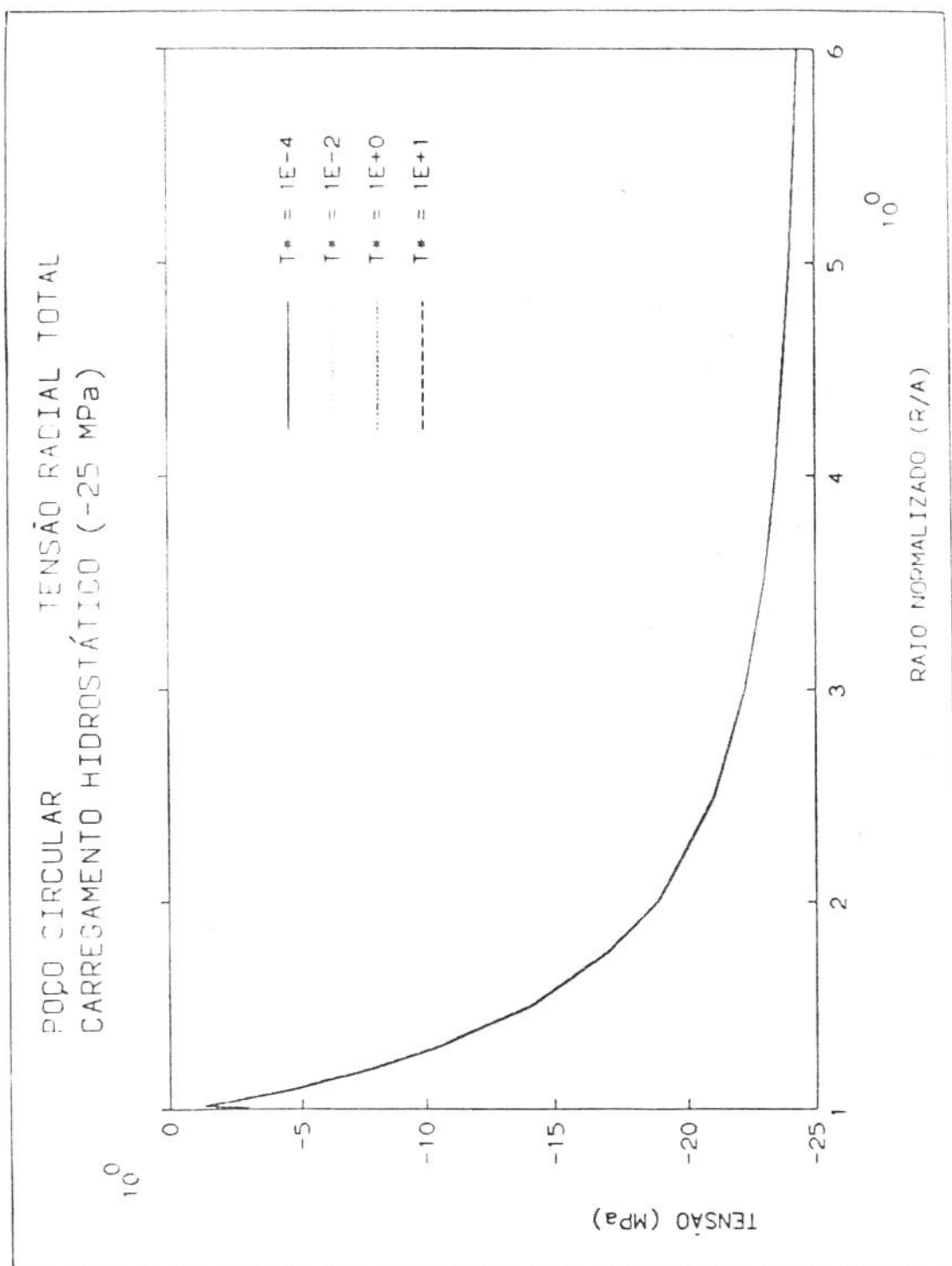


Figura 6.8.05 - Poço circular

Carregamento hidrostático

Tensão radial total (MPa)

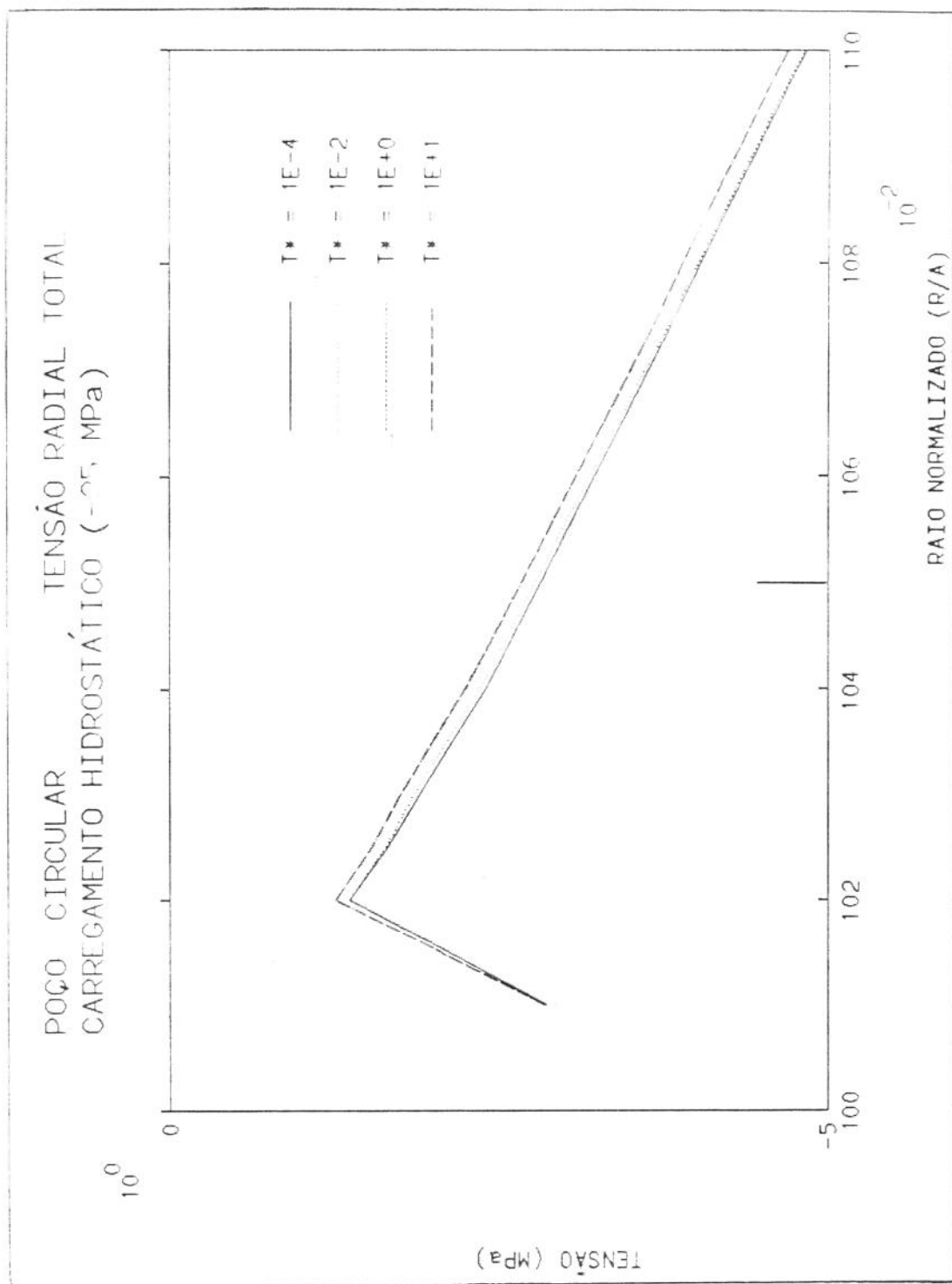


Figura 6.8.06 - Poço circular - Proximidades do furo
Carregamento hidrostático
Tensão radial total (MPa)

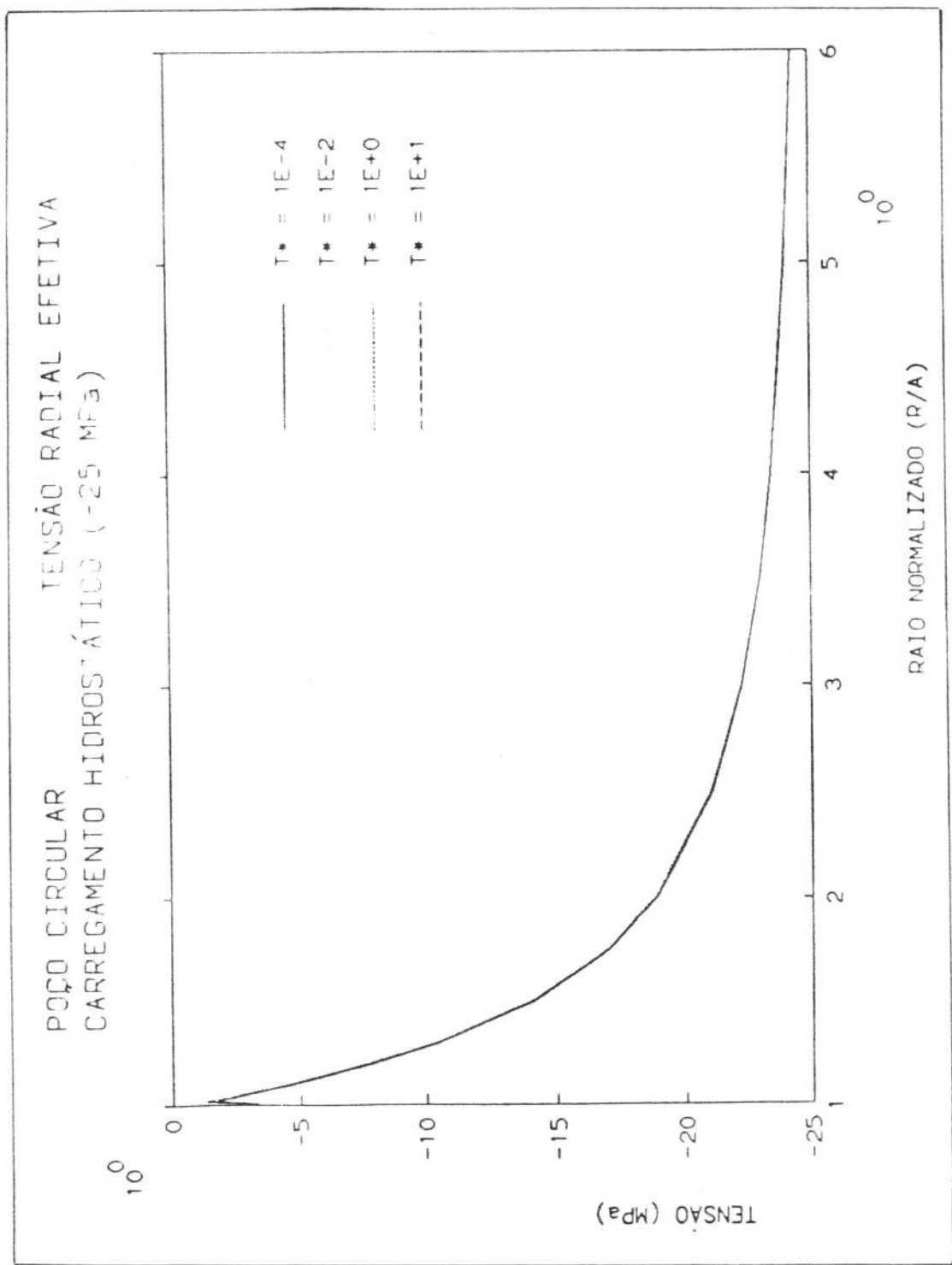


Figura 6.8.07 - Poço circular
Carregamento hidrostático
Tensão radial efetiva (MPa)

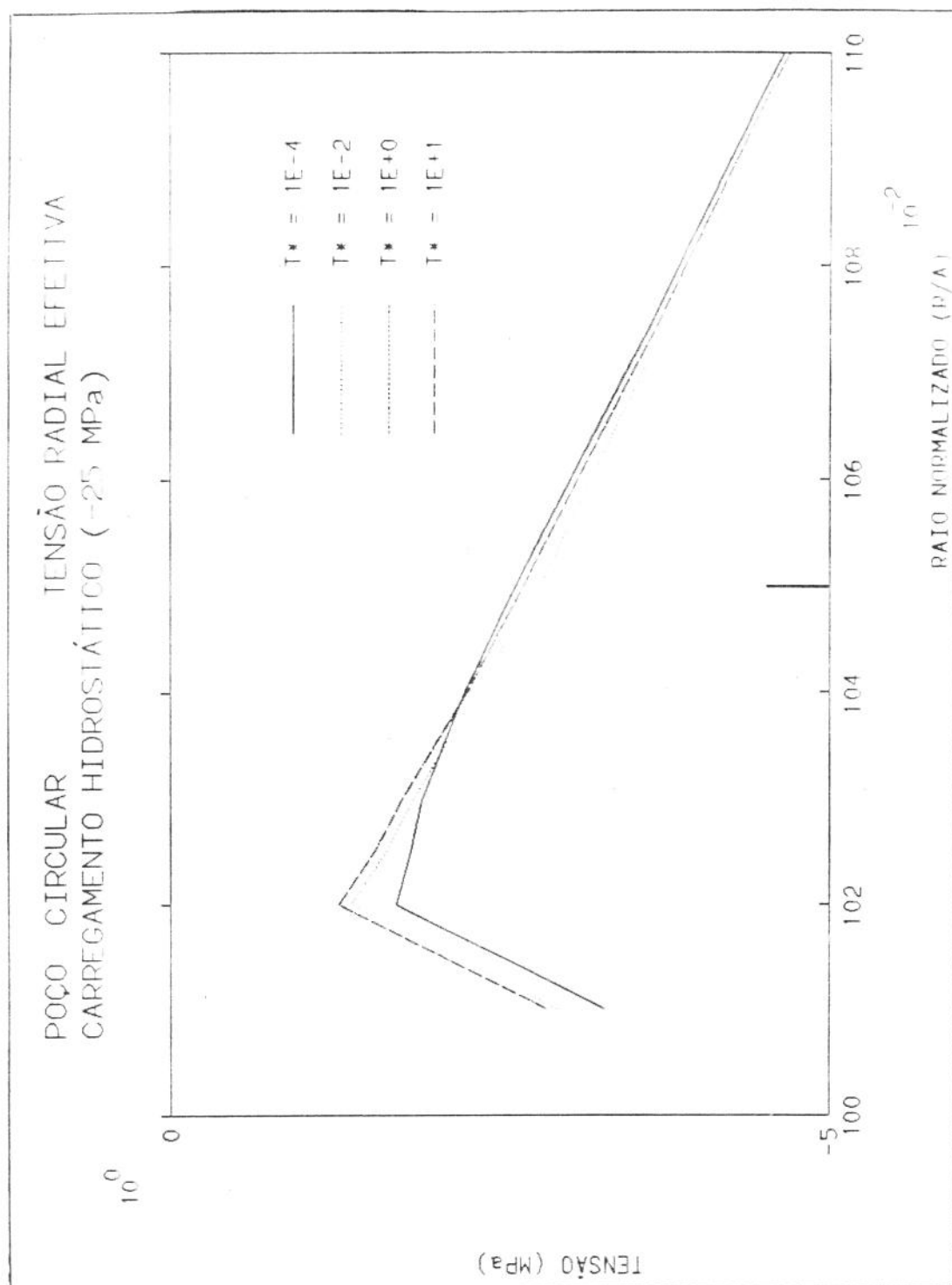


Figura 6.8.08 - Poço circular - Proximidades do furo
Carregamento hidrostático
Tensão radial efetiva (MPa)

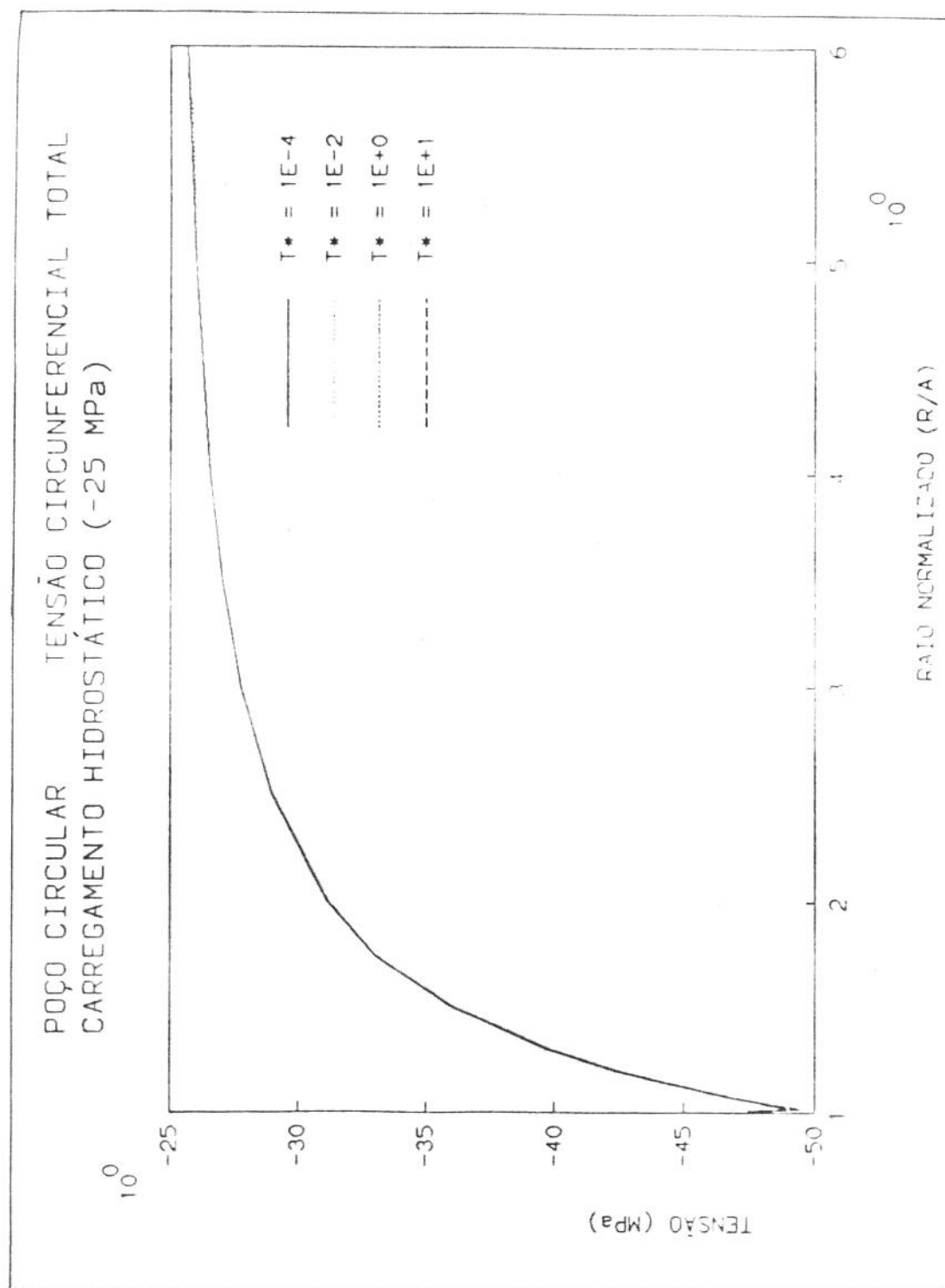


Figura 6.8.09 - Poço circular

Carregamento hidrostático

Tensão circunferencial total (MPa)

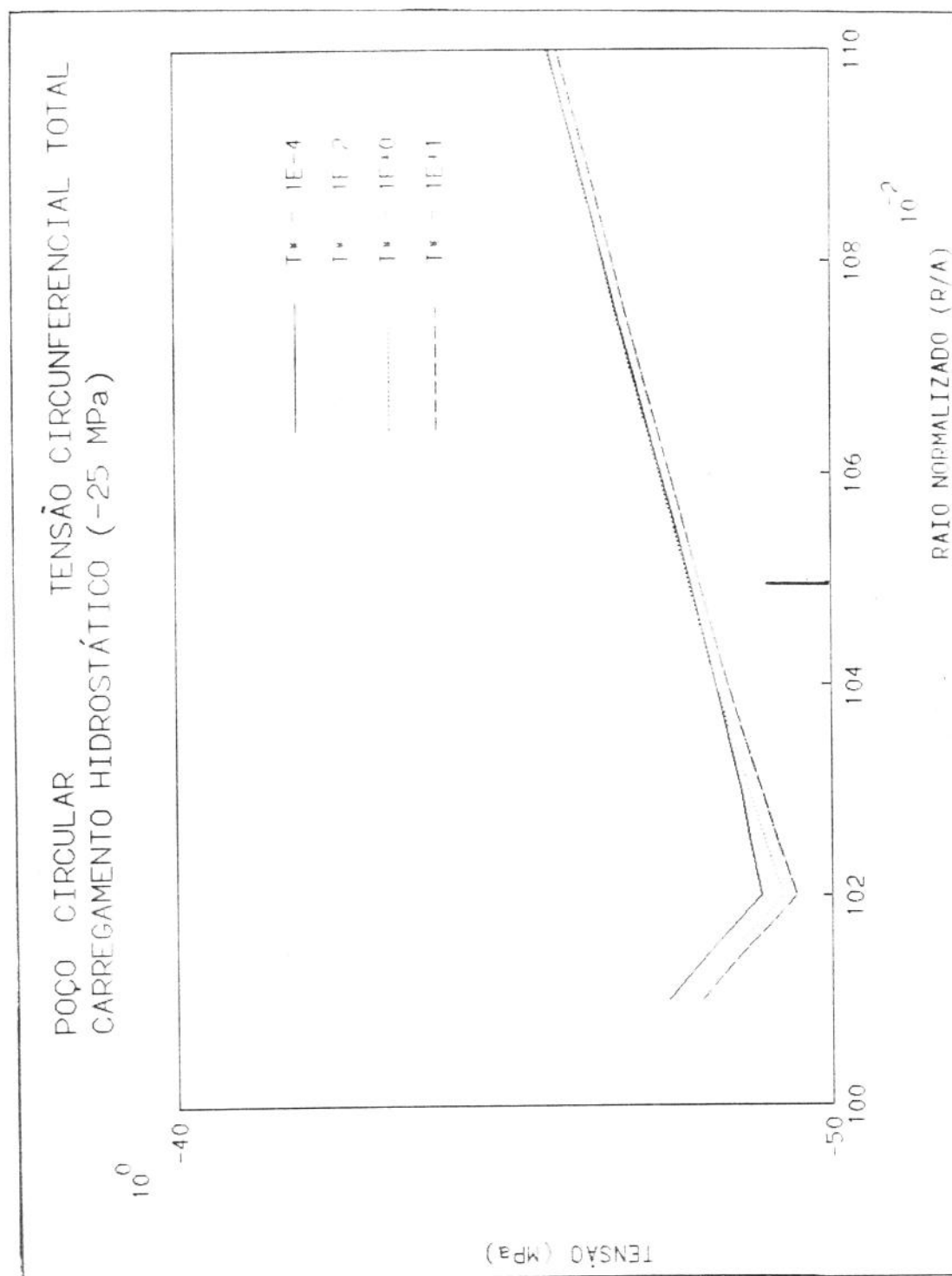


Figura 6.8.10 - Poço circular - Proximidades do furo
Carregamento hidrostático
Tensão circunferencial total (MPa)

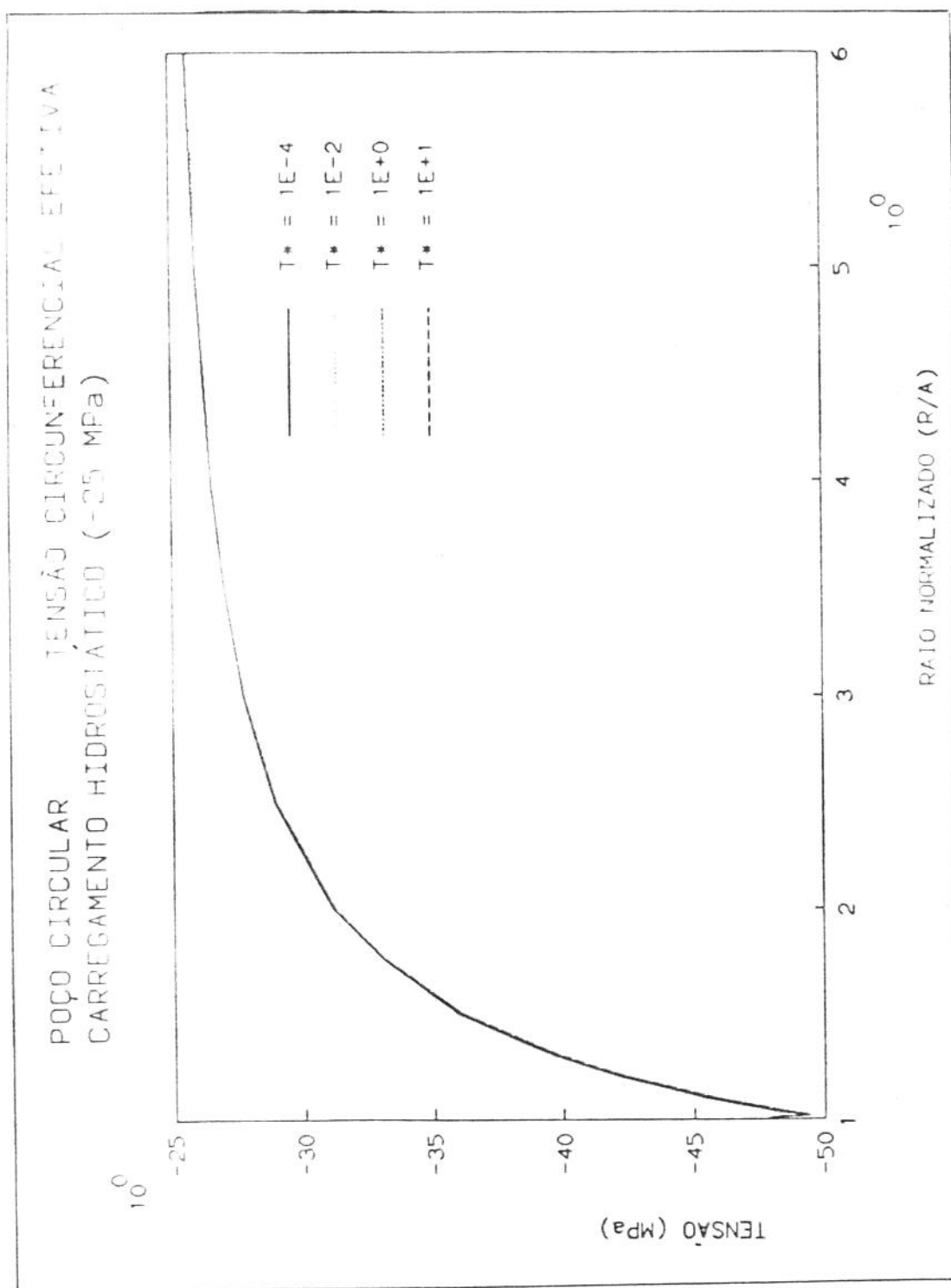


Figura 6.8.11 - Poço circular
Carregamento hidrostático
Tensão circunf. efetiva (MPa)

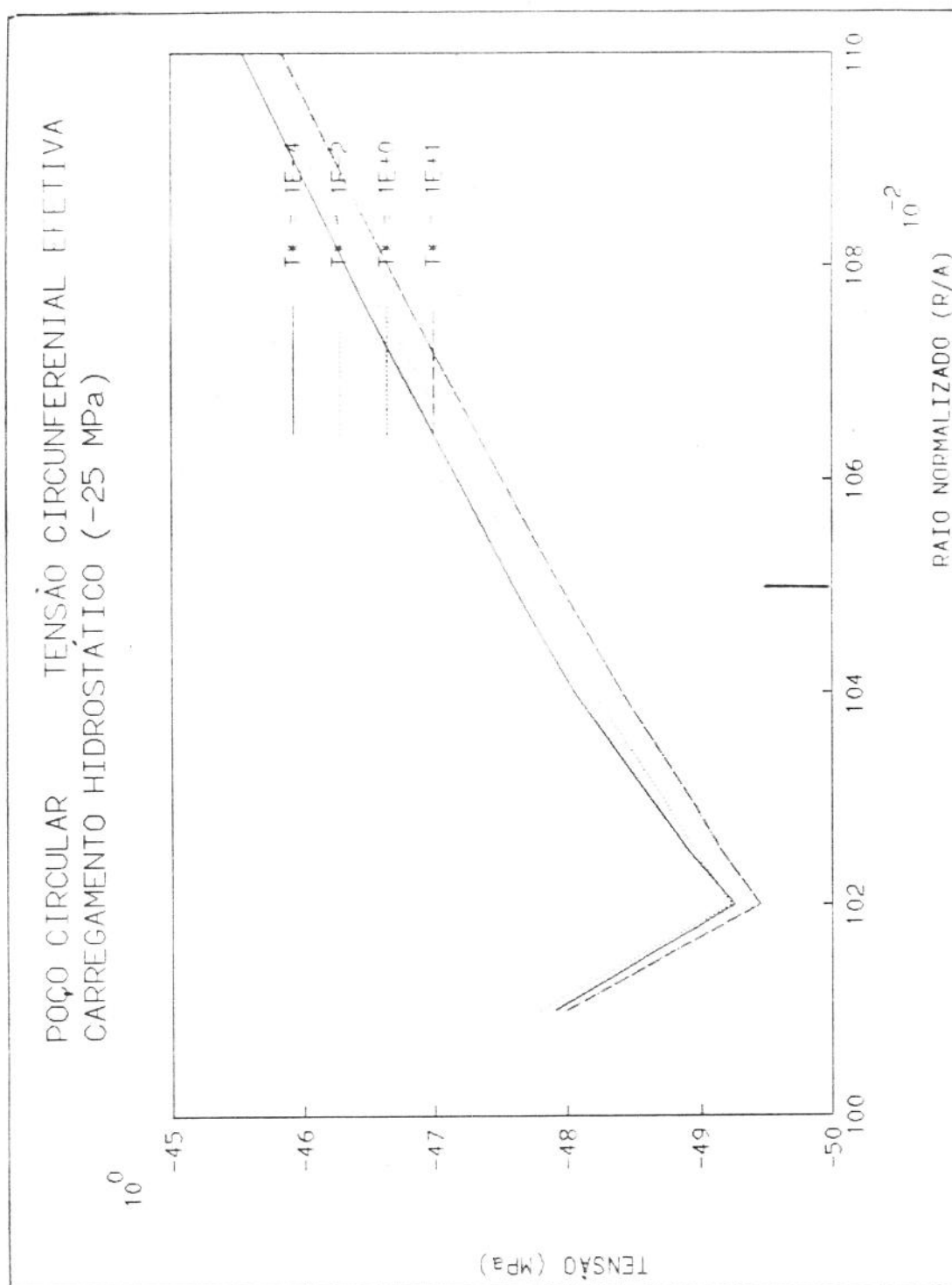


Figura 6.8.12 - Poço circular - Proximidades do furo
Carregamento hidrostático
Tensão circunf. efetiva (MPa)

6.8.2 Efeitos do diferencial de pressão

As condições de carregamento para esta situação estão mostradas na figura seguinte

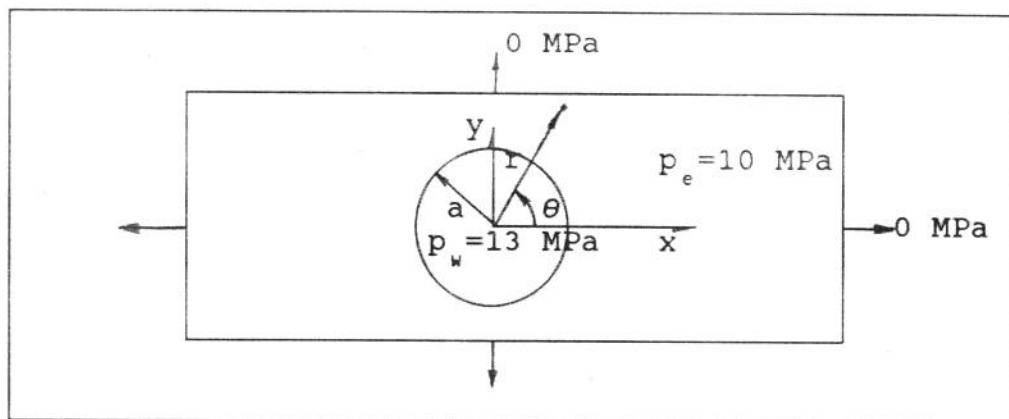


Figura 6.8.13 - Furo circular
Diferencial de pressão

As condições de contorno na parede do poço são as seguintes:

$$\sigma_{rr} = -p_w = -13 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

$$\Delta p = p_w - p_e = 3 \text{ MPa}$$

Este carregamento é axissimétrico, conseqüentemente os resultados também o serão. Por esta razão são mostrados apenas os resultados no eixo dos x.

Da figura 6.8.14 a figura 6.8.23 mostra-se os resultados obtidos.

A variação da pressão é mostrada na figura 6.8.14. Como se vê ela aumenta com o decorrer do tempo. Ela cresce rapidamente próximo ao poço tendendo à pressão p_w igual a 13 MPa. Longe do contorno ela sobe mais vagarosamente. A figura 6.8.15 mostra as proximidades do furo.

Na figura 6.8.16 vê-se a evolução da tensão radial total, que pouco varia com o tempo. Nas vizinhanças do poço ela tende a tensão radial de carregamento, -13 MPa e longe dele a zero que é a condição inicial, para este carregamento. A vizinhança do

furo é vista na figura 6.8.17.

A tensão radial efetiva varia bastante com o tempo, consequência do comportamento da pressão de poros já abordado. No início ela chega a ser negativa (compressão) próximo ao poço, isto devido a tensão radial imposta. Depois, com o crescimento da pressão, ela volta a ser positiva (tração) tendendo ao estado inicial, 10 MPa, dentro do domínio. Tudo isto pode ser visto nas figuras 6.8.18 e 6.8.19

O comportamento da tensão circunferencial total parece com o da tensão radial total, porém variando um pouco mais com o tempo. As figuras 6.8.20 e 6.8.21 mostram que no início ela tende a 13 MPa no contorno e depois a zero longe dele.

A tensão circunferencial efetiva, figura 6.8.22, é menos afetada pela variação da pressão do que a tensão radial efetiva. Nas distâncias pequenas ela tende à soma das pressões, 23 MPa. Depois ela cai, mais ou menos rápido, para o valor da pressão do reservatório, que é a condição inicial, para este carregamento. A figura 6.8.23 mostra as proximidades do contorno.

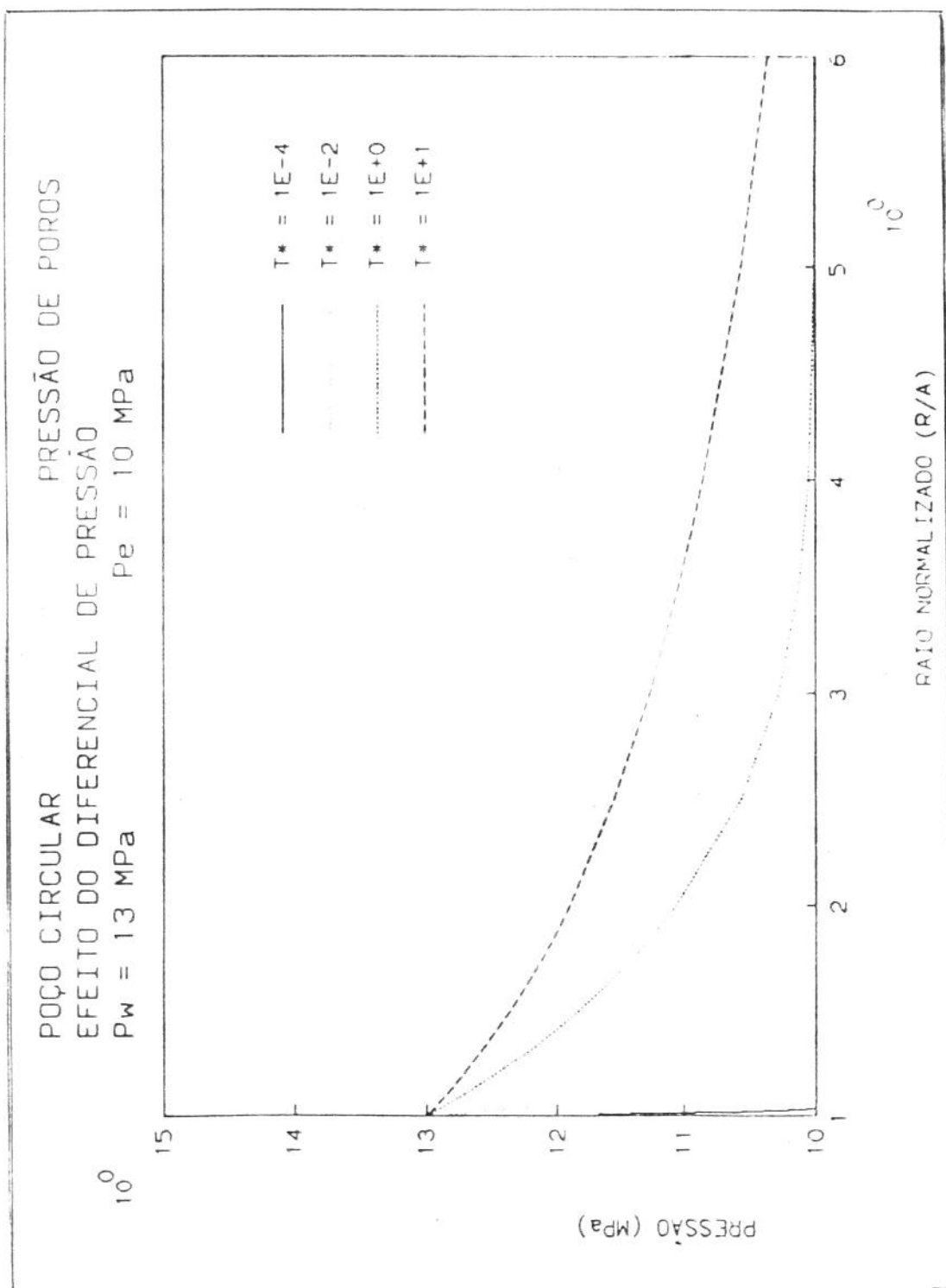


Figura 6.8.14 - Poço circular

Efeitos do diferencial de pressão
Pressão de poros (MPa)

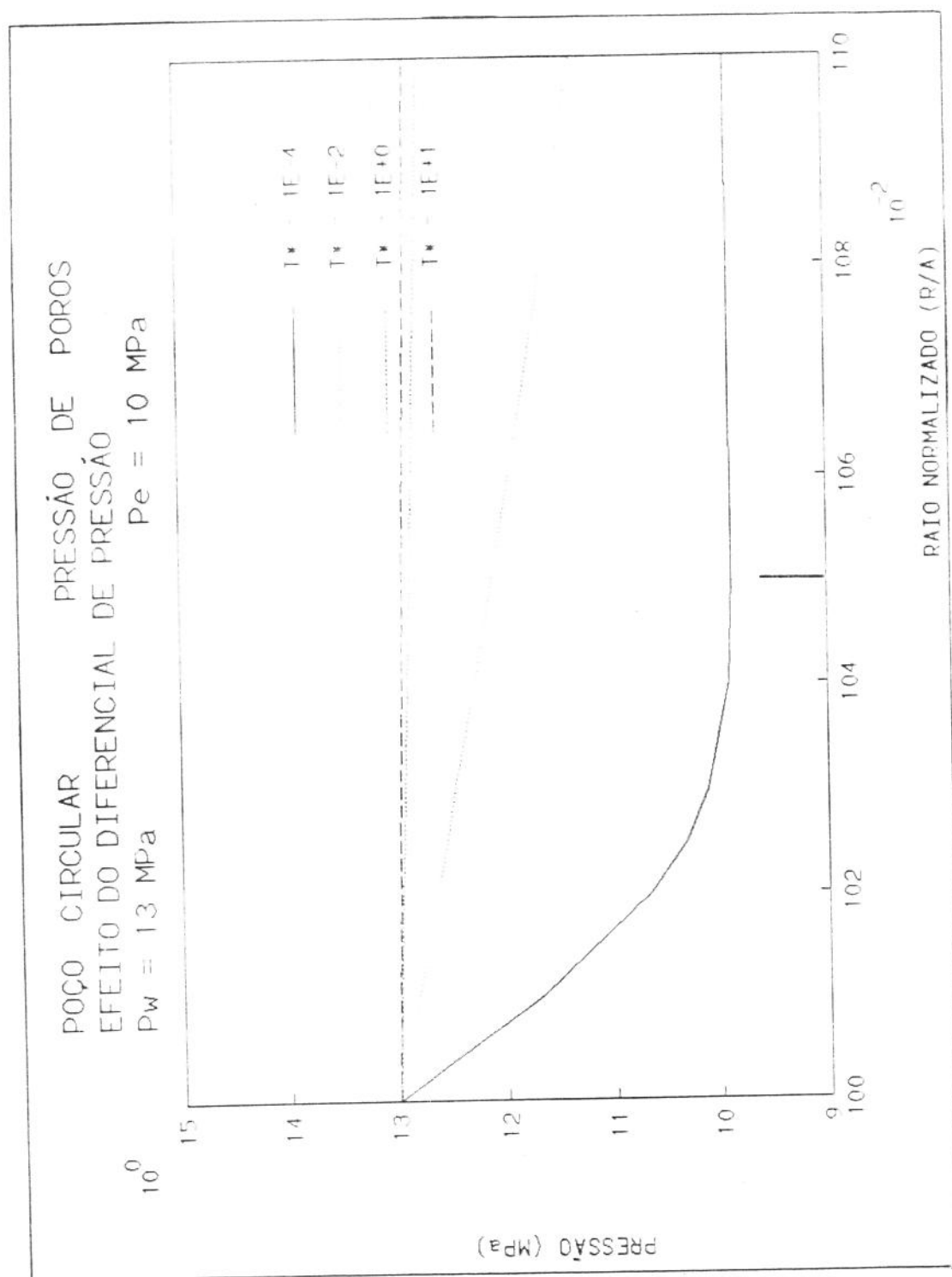


Figura 6.8.15 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do diferencial de pressão
Pressão de poros (MPa)

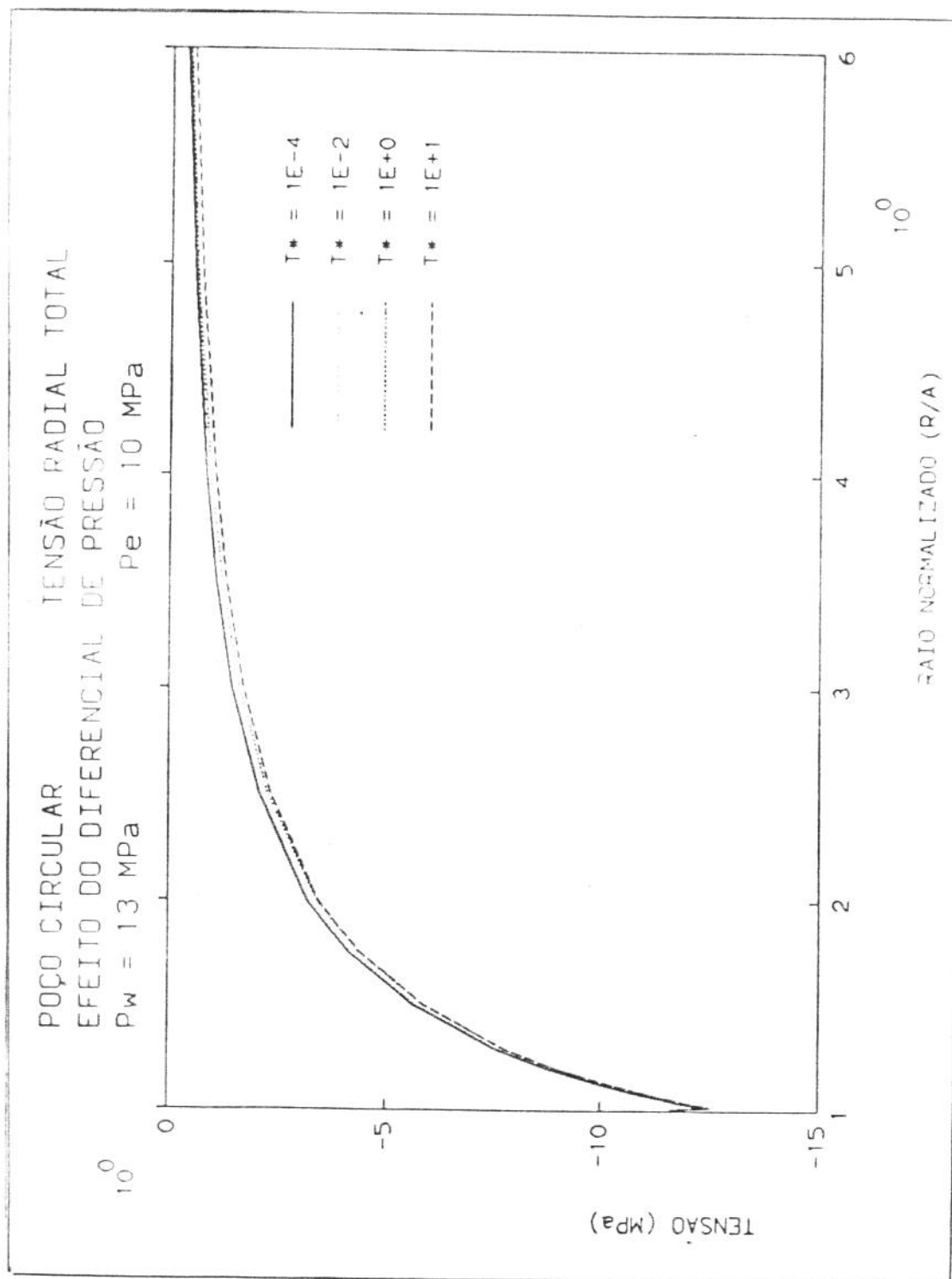


Figura 6.8.16 - Poço circular
Efeitos do diferencial de pressão
Tensão radial total (MPa)

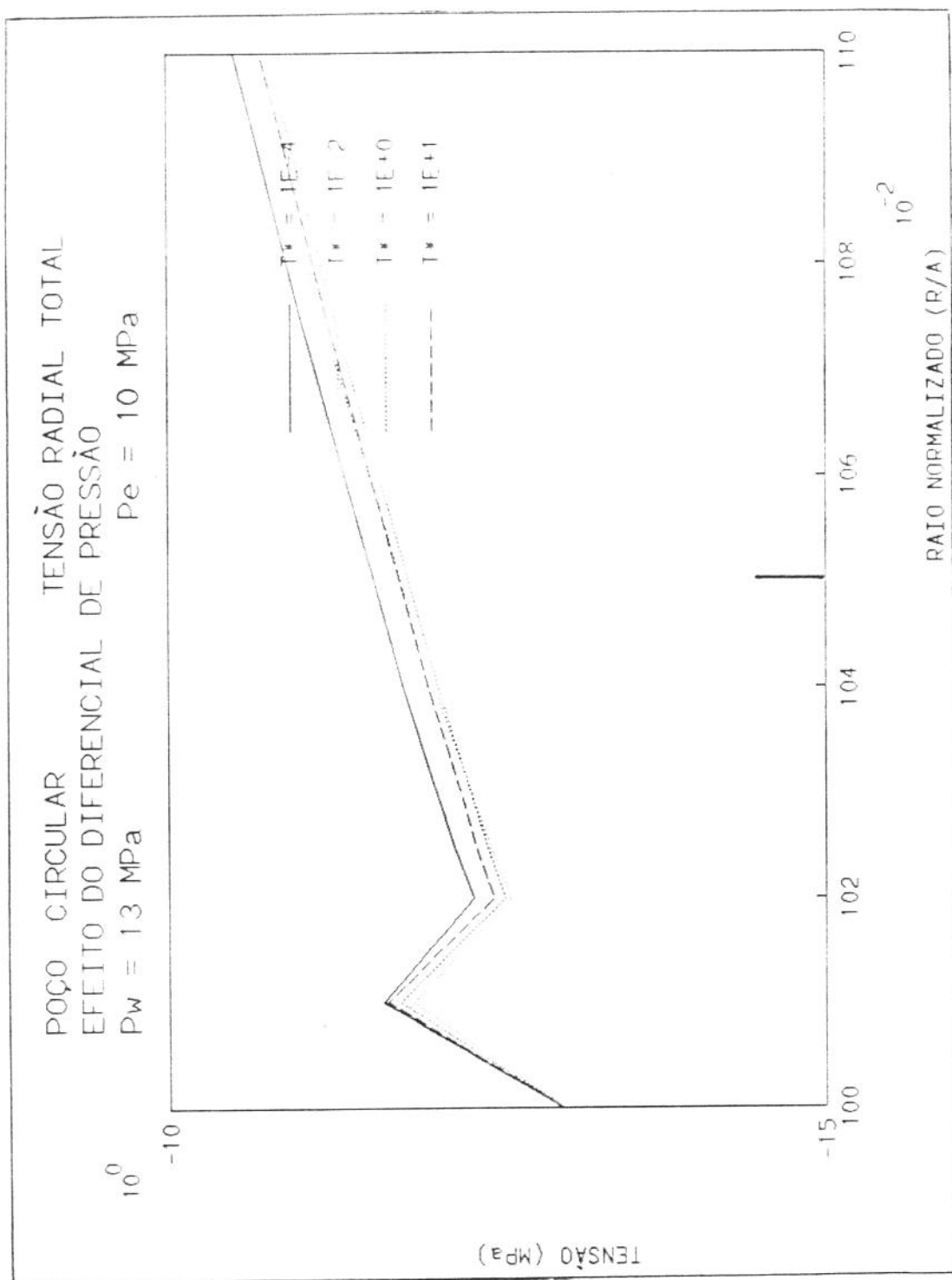


Figura 6.8.17 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do diferencial de pressão
Tensão radial total (MPa)

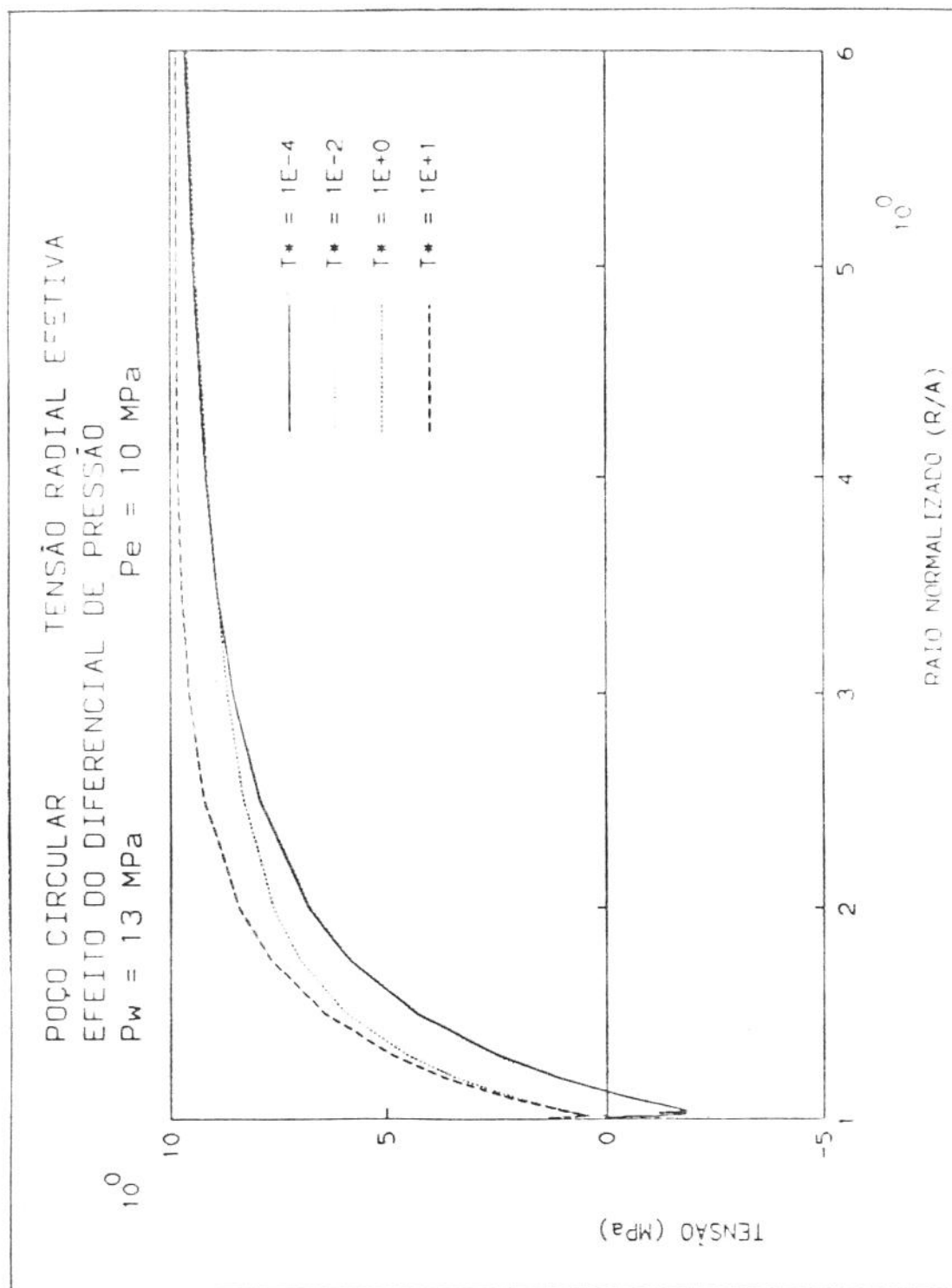


Figura 6.8.18 - Poço circular

Efeitos do diferencial de pressão
Tensão radial efetiva (MPa)

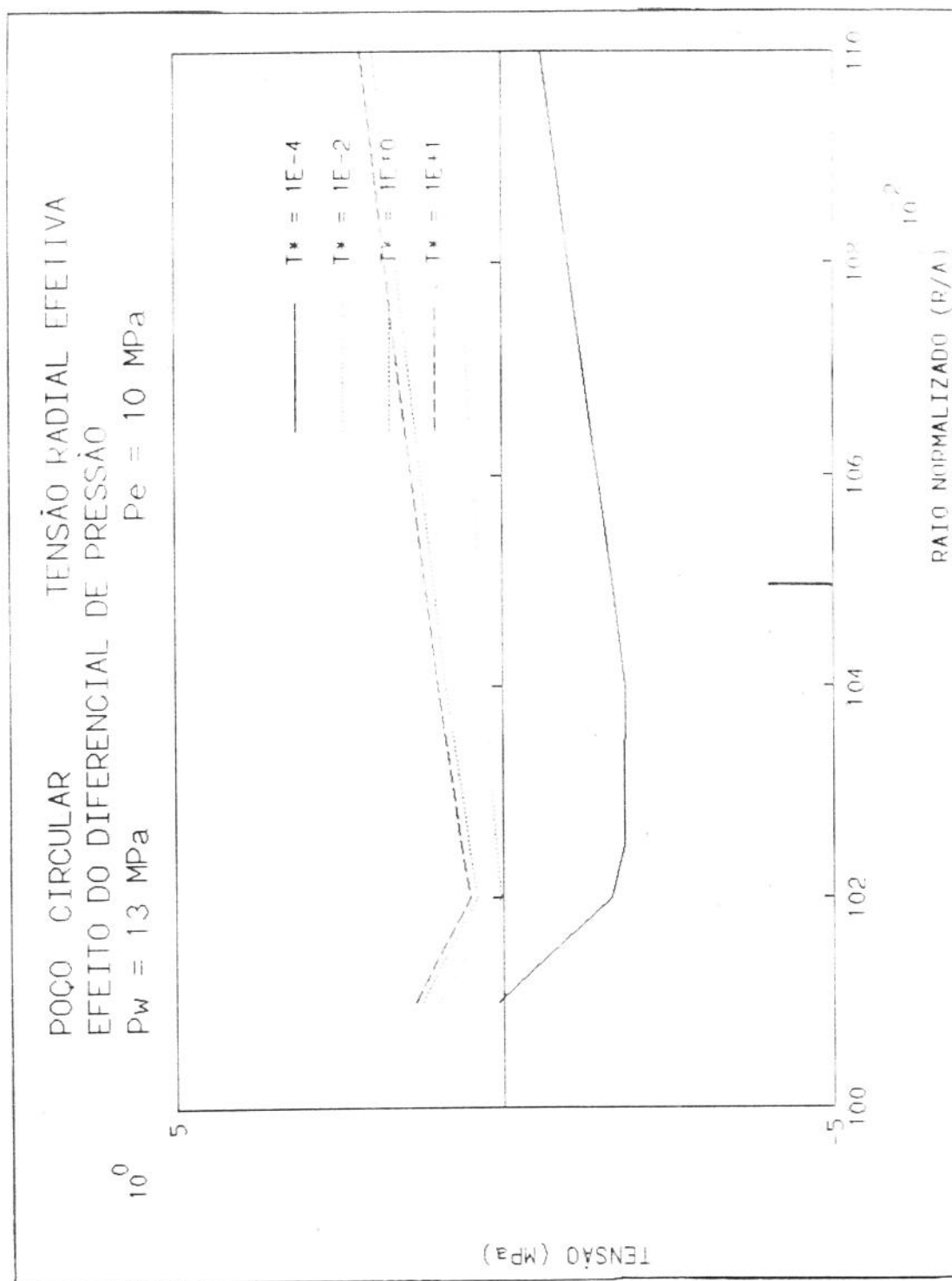


Figura 6.8.19 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do diferencial de pressão
Tensão radial efetiva (MPa)

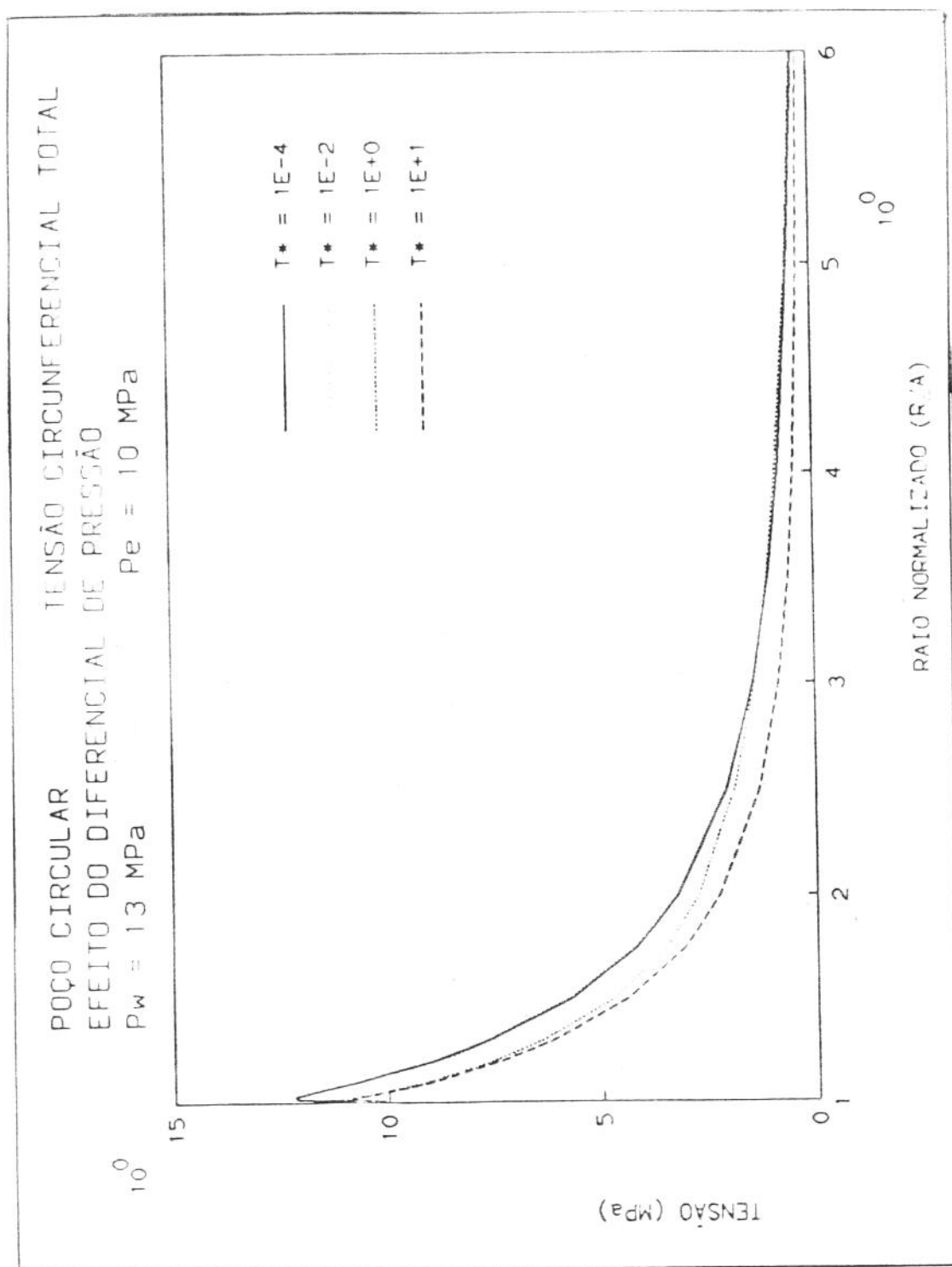


Figura 6.8.20 - Poço circular

Efeitos do diferencial de pressão
Tensão circunferencial total (MPa)

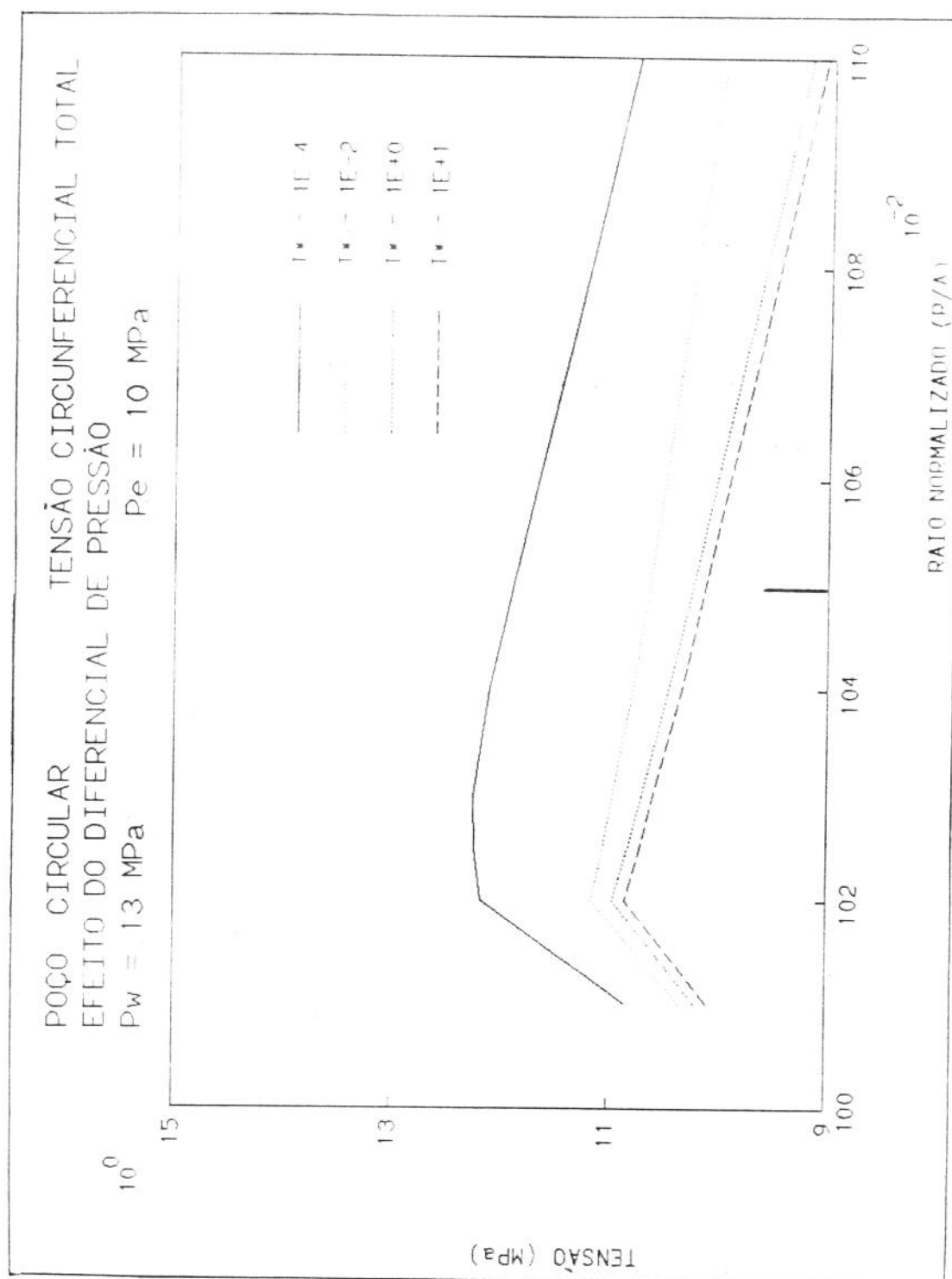


Figura 6.8.21 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do diferencial de pressão
Tensão circunferencial total (MPa)

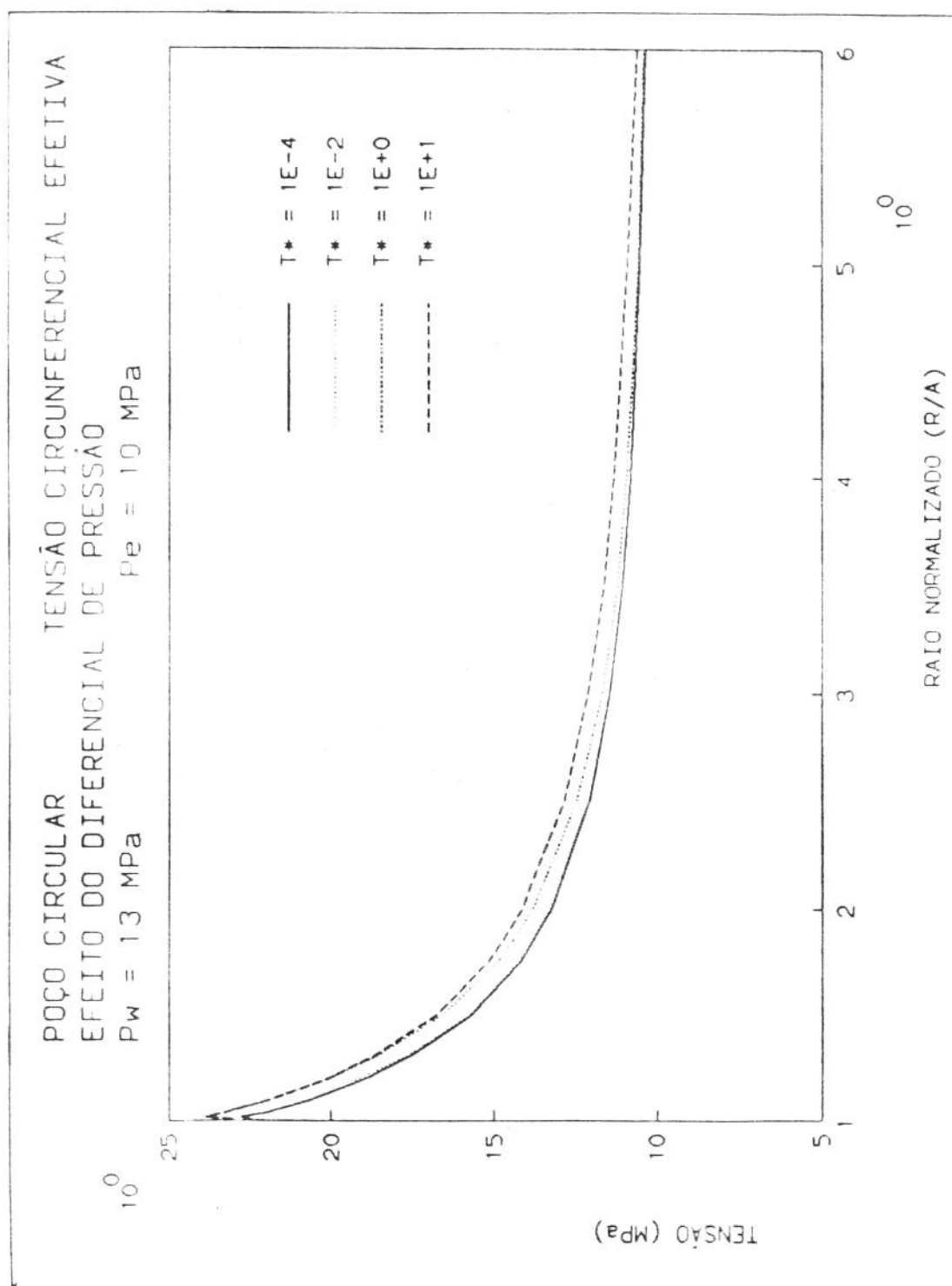


Figura 6.8.22 - Poço circular

Efeitos do diferencial de pressão
Tensão circunf. efetiva (MPa)

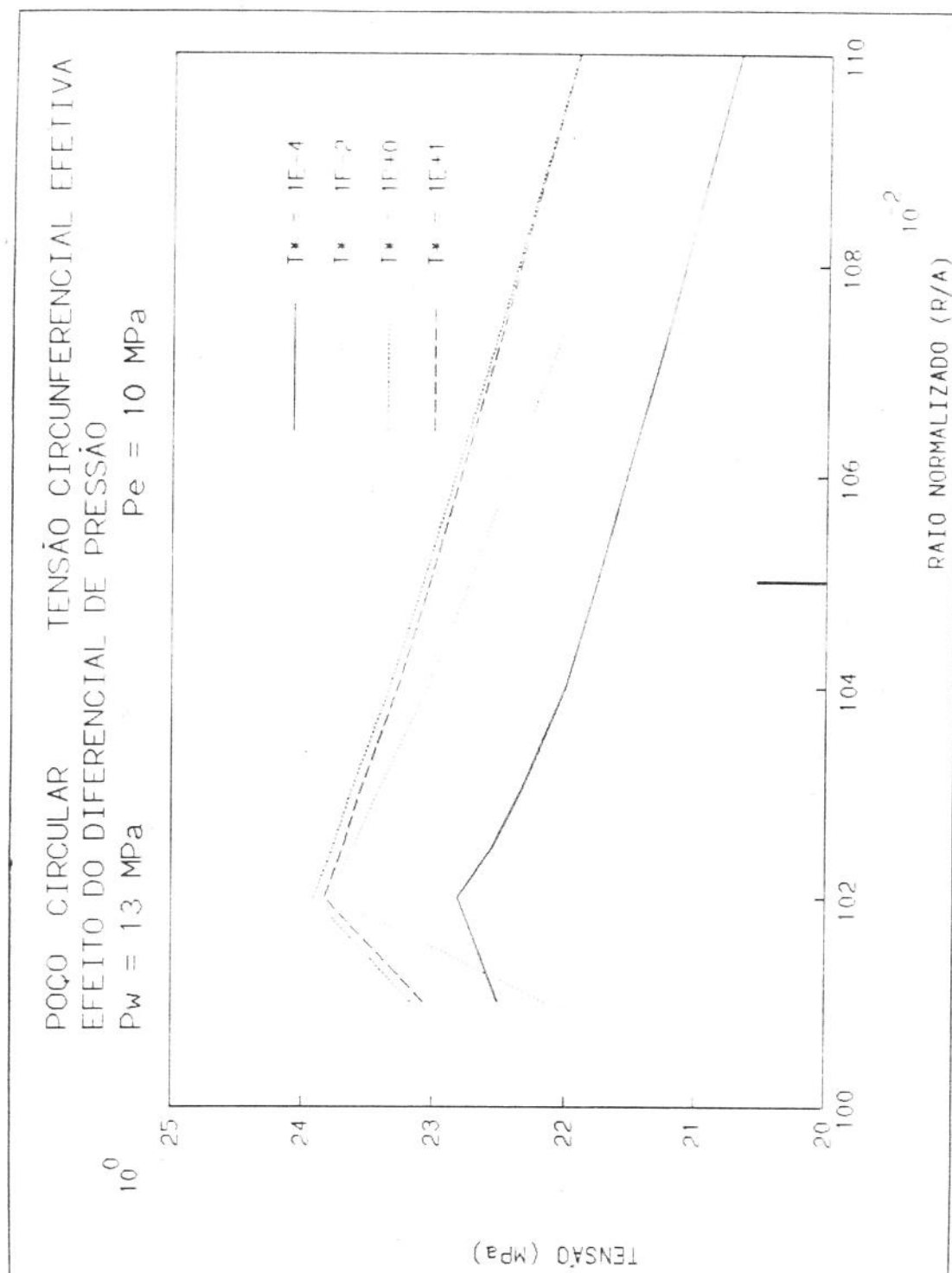


Figura 6.8.23 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do diferencial de pressão
Tensão circunf. efetiva (MPa)

6.8.3 Efeitos das tensões de desvio

Para este módulo as condições são mostradas abaixo.

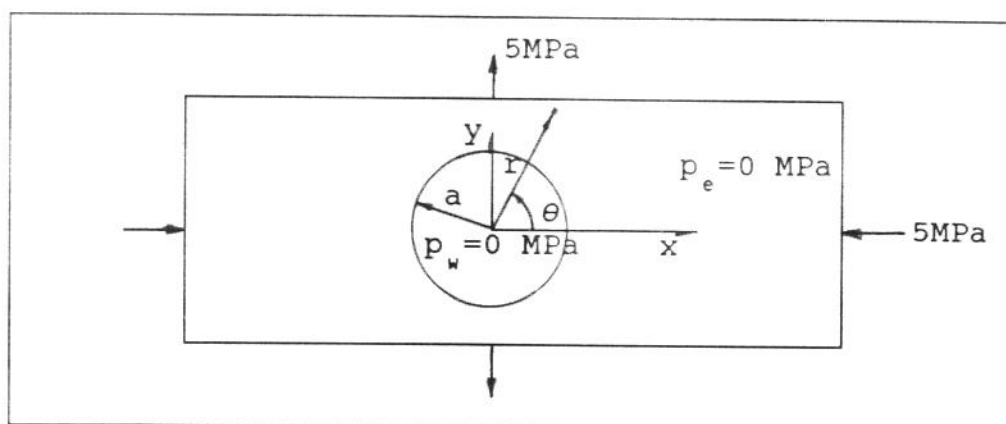


Figura 6.8.24 - Furo circular
Tensor deviatórico

As condições de contorno são as seguintes

$$\sigma_{rr} = -S \cos 2\theta = 5 \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = S \sin 2\theta = -5 \sin 2\theta$$

$$\Delta p = p_w - p_e = 0$$

Neste módulo o carregamento não mais é axissimétrico, razão porque apresentar-se-á os resultados no eixo do x, $\theta = 0^\circ$ e no eixo dos y, $\theta = 90^\circ$.

Na figura 6.8.25 mostra-se a evolução da pressão de poros no eixo dos x, que está comprimido com -5 MPa. Como há um achatamento do poço nesta direção, redução de diâmetro, ocorre um alívio na pressão, nas vizinhanças do furo, porém rapidamente retorna às condições iniciais. O valor inicial da pressão é, na parede do poço [24].

$$p = 4SB(1+\nu_u)a^2\cos 2\theta/(3r^2)$$

$$p = 4 \times (-5) \times 0,8 \times (1+0,4) \times 0,127^2 \times \cos 0 / (3 \times 0,127^2)$$

$$p = -7,47 \text{ MPa}$$

A evolução da pressão de poros no eixo dos y, $\theta = 90^\circ$,

pode ser visto na figura 6.8.26. Nesta direção o meio poroso se acha tracionado com 5 MPa, o que causa uma elongação do diâmetro do poço e um aumento da pressão. A pressão calculada, pela expressão anterior, agora é +7,47 MPa. A variação da pressão no eixo dos x nas proximidades do furo é vista na figura 6.8.27.

Os comentários feitos no item 6.7.3 são aplicáveis aqui.

As figuras 6.8.28 e 6.8.29 mostram a tensão radial total nos eixos dos x e dos y, respectivamente. No eixo dos x, ela é tração nas vizinhanças do furo, até, mais ou menos $1,075r_w$, passando então a compressão tendendo ao valor inicial de -5MPa. No eixo dos y a variação é inversa. Ao longo dos 2 eixos a tensão radial total pouco varia com o tempo. A evolução no eixo dos x nas vizinhanças do furo é mostrada na figura 6.8.30.

O comportamento da tensão radial efetiva é mostrado nas figuras 6.8.31 ($\theta=0^\circ$) e 6.8.32 ($\theta=90^\circ$). Nos 2 eixos ela varia bastante com o tempo, consequência da variação da pressão de poros, principalmente próximo ao poço. No eixo dos x ela é no começo toda negativa (compressão) e depois passa para positiva, nos arredores do furo. Na direção de $\theta = 90^\circ$ a evolução é inversa. A figura 6.8.33 mostra as proximidades do furo.

A figura 6.8.34 apresenta a tensão circunferencial total no eixo dos x. Como se vê ela é sempre positiva, tração, e pouco varia com tempo. No contorno ela tende à solução elástica, 20 MPa e depois cai para a condição inicial de 5 MPa. A variação no eixo dos y, é mostrada na figura 6.8.35; ela é sempre negativa, e evolui como no eixo dos x. O comportamento no eixo dos x perto do furo está apresentado na figura 6.8.36.

A tensão circunferencial efetiva é muito afetada pelo comportamento da pressão de poros, variando bastante com o tempo nas 2 direções. No eixo dos x na parede do furo ela tende ao valor inicial (5MPa) mais a variação da pressão (7,5MPa), ou seja, tende à 12,5 MPa. Depois com a recuperação da pressão ela vai para o valor da tensão total, 20 MPa. Longe do furo ela fica nas condições iniciais. Neste eixo ela é sempre positiva. No eixo dos y o comportamento é o inverso do descrito. Tudo isto é apresentado nas figuras 6.8.37, 6.8.38 e 6.8.39.

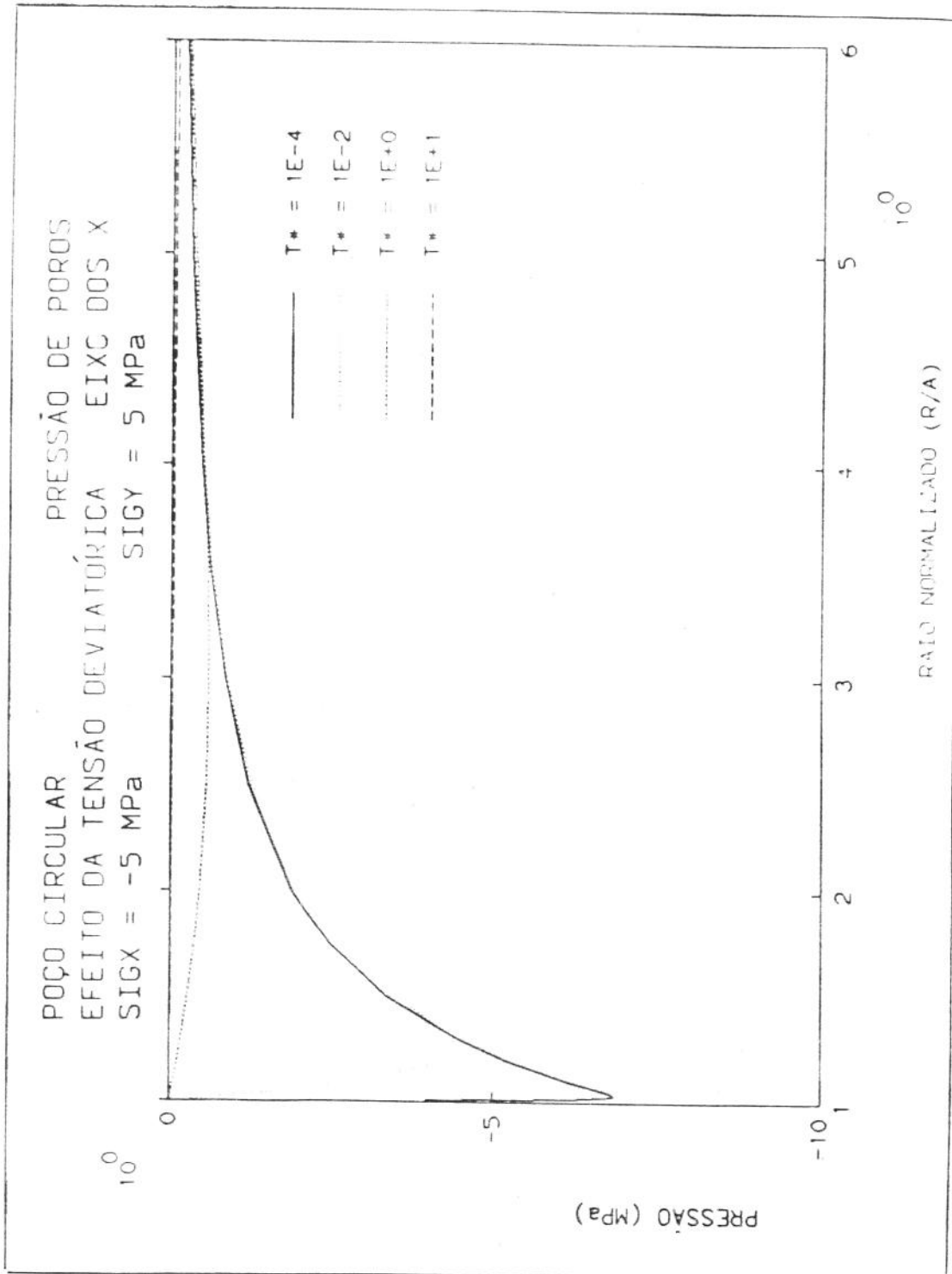


Figura 6.8.25 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Pressão de poros (MPa)

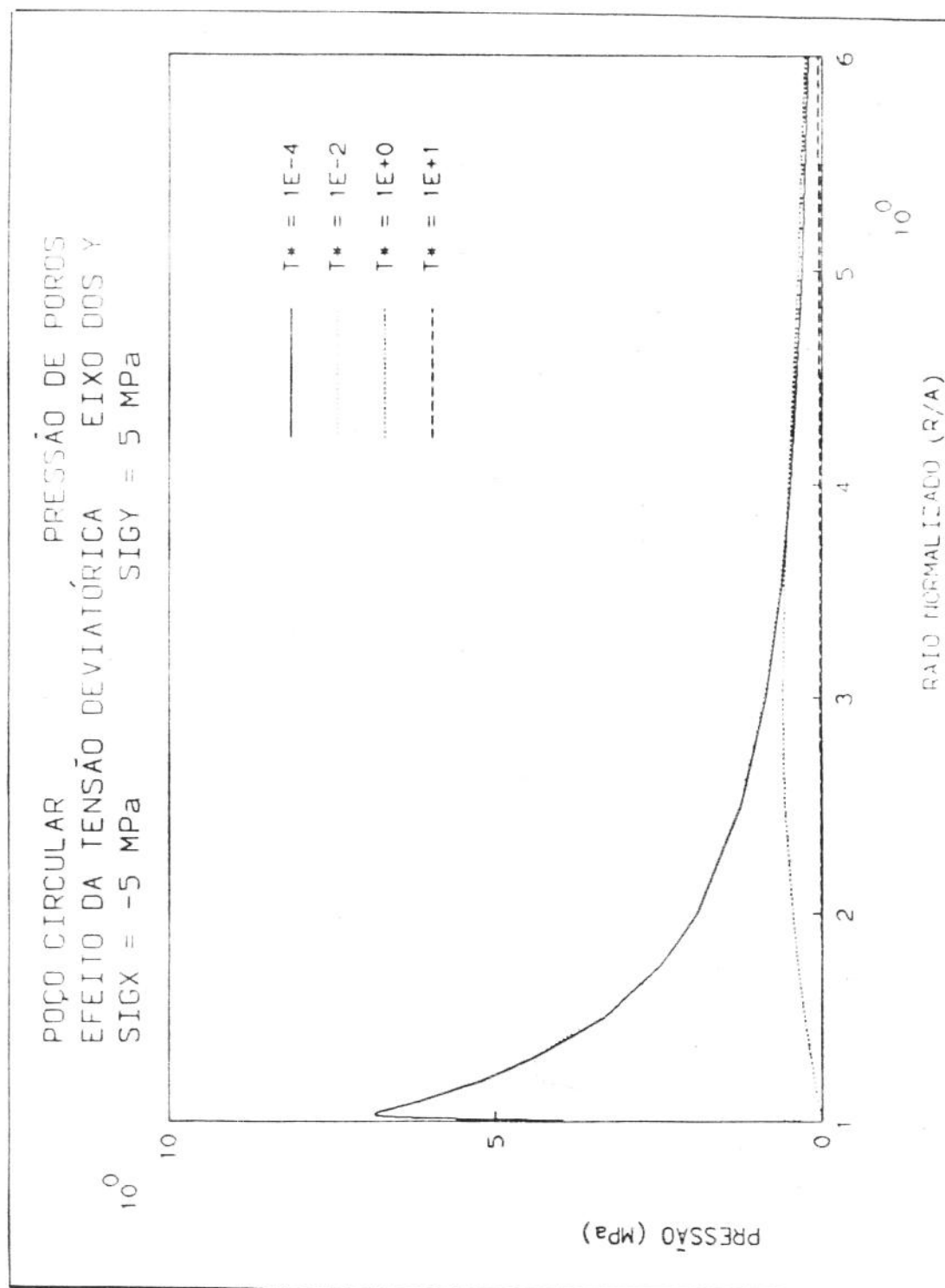
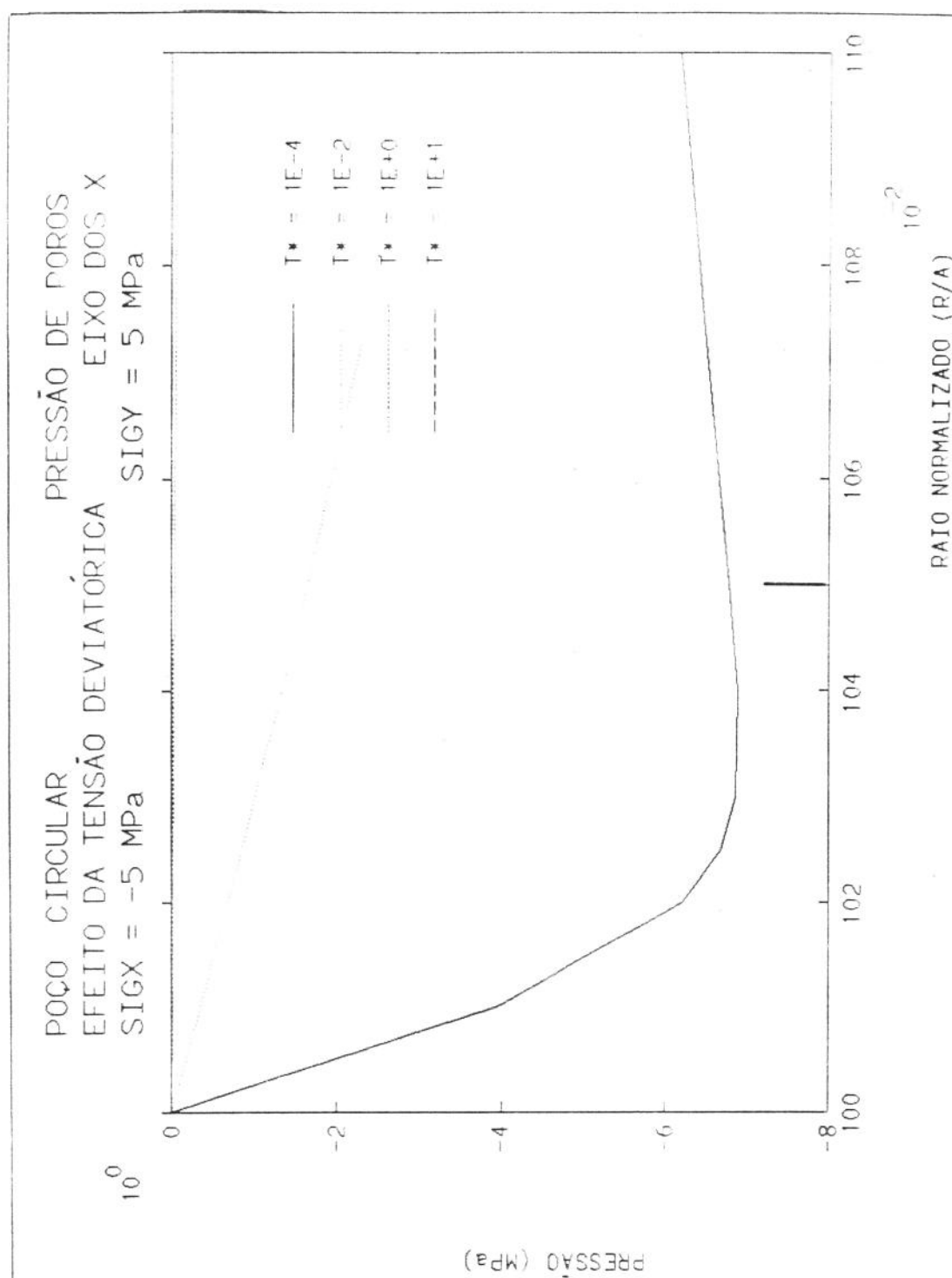


Figura 6.8.26 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Pressão de poros (MPa)



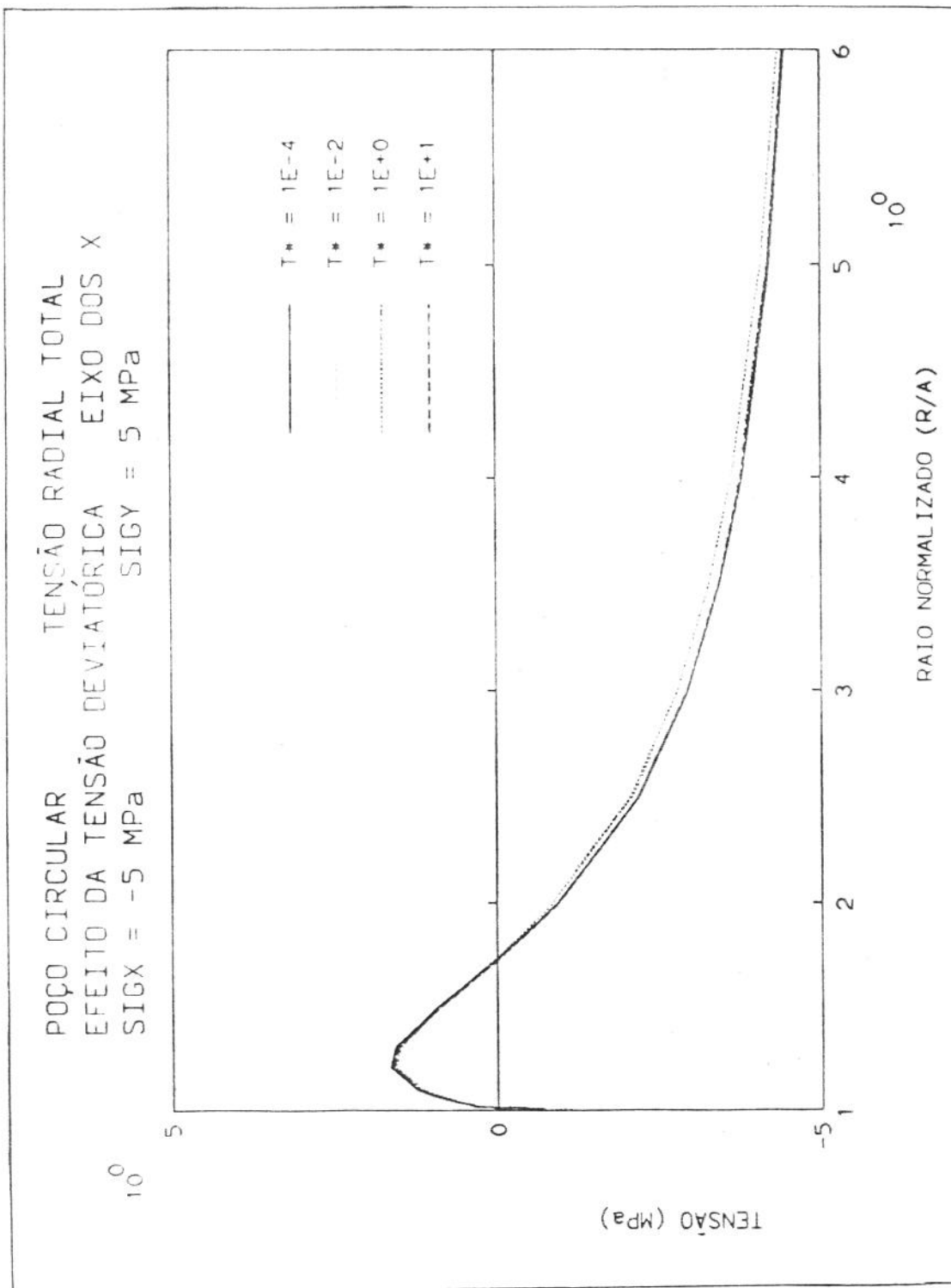


Figura 6.8.28 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão radial total (MPa)

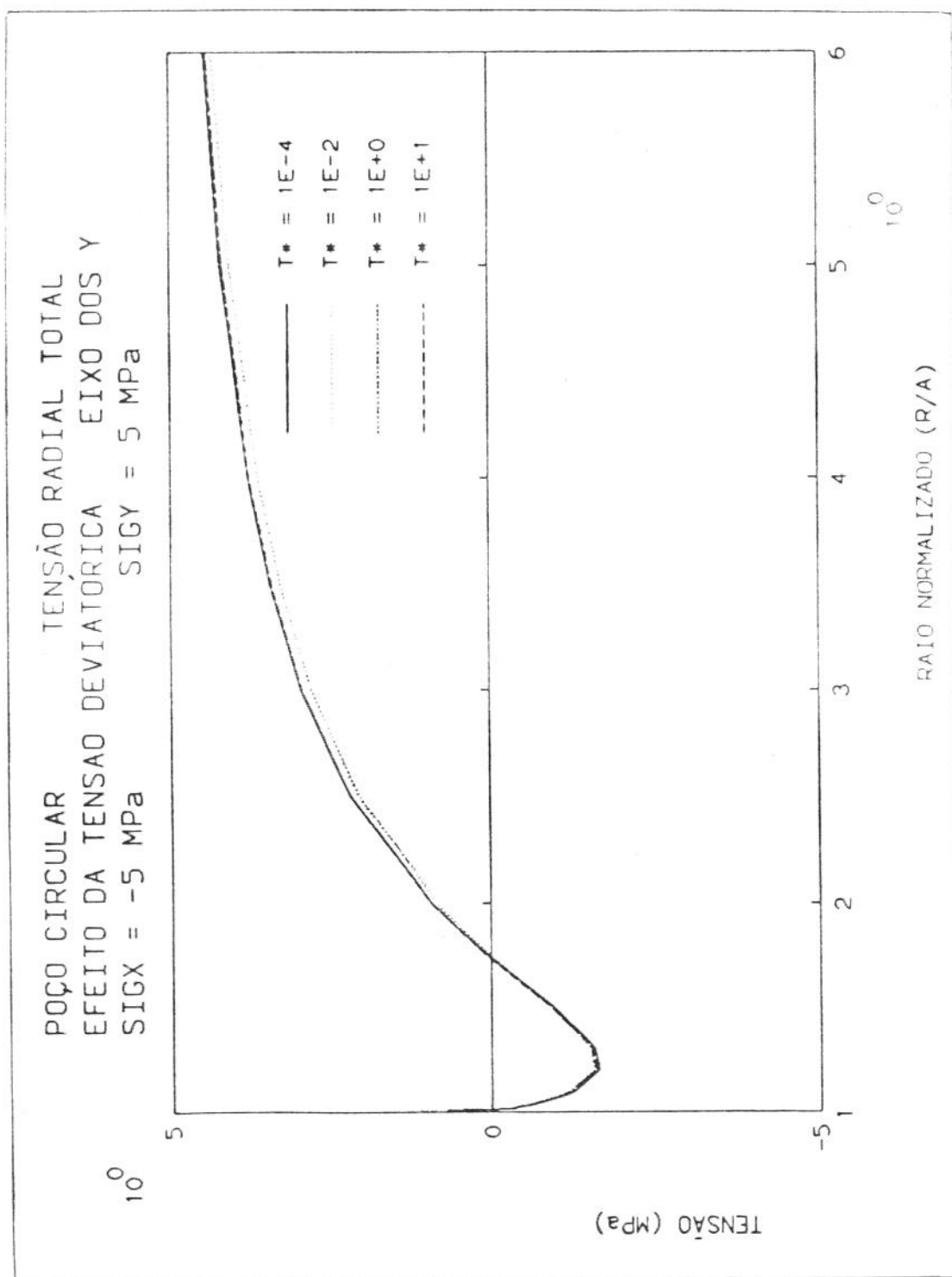


Figura 6.8.29 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão radial total (MPa)

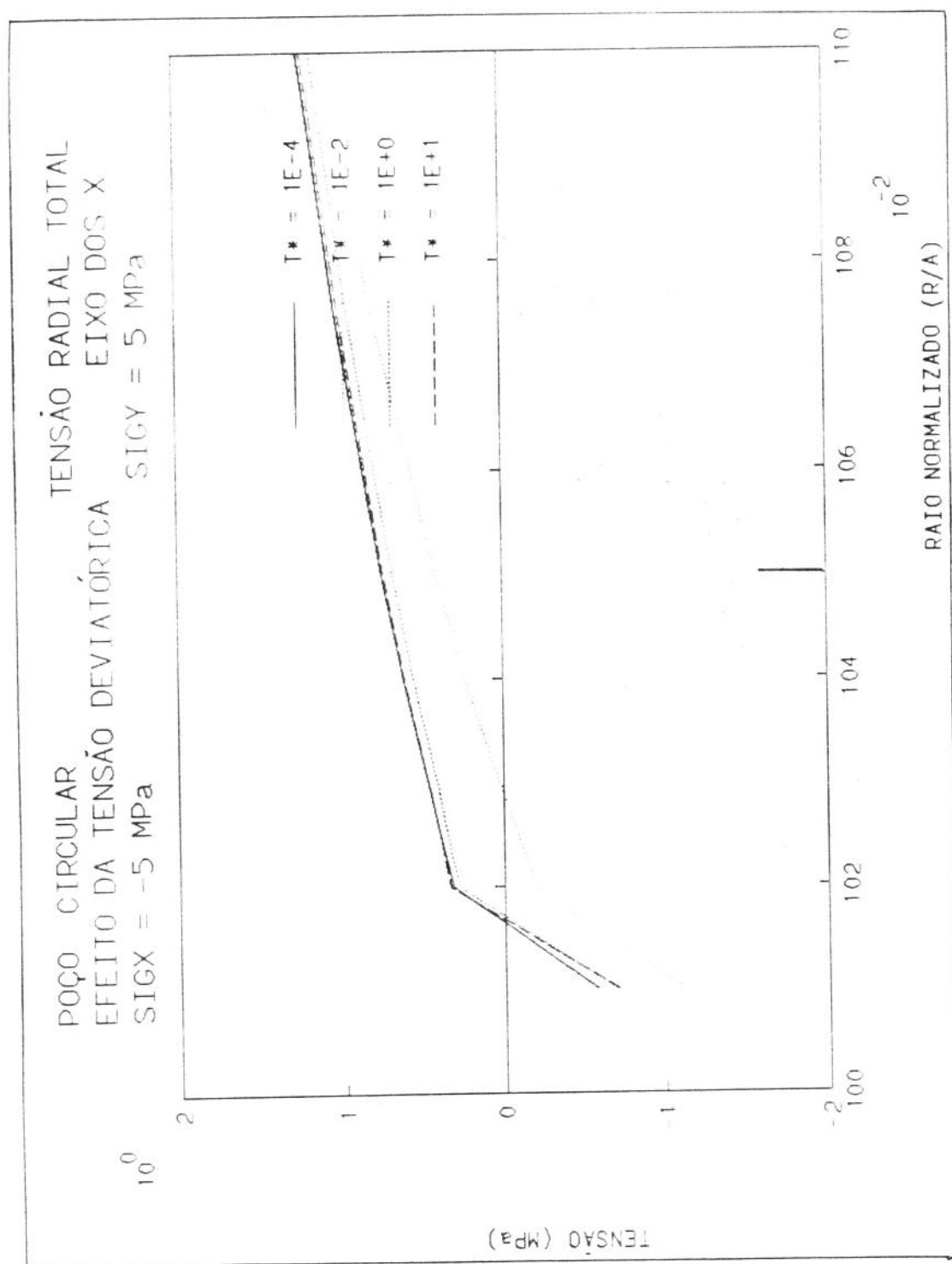


Figura 6.8.30 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do tensor deviatorico
Tensão radial total (MPa)

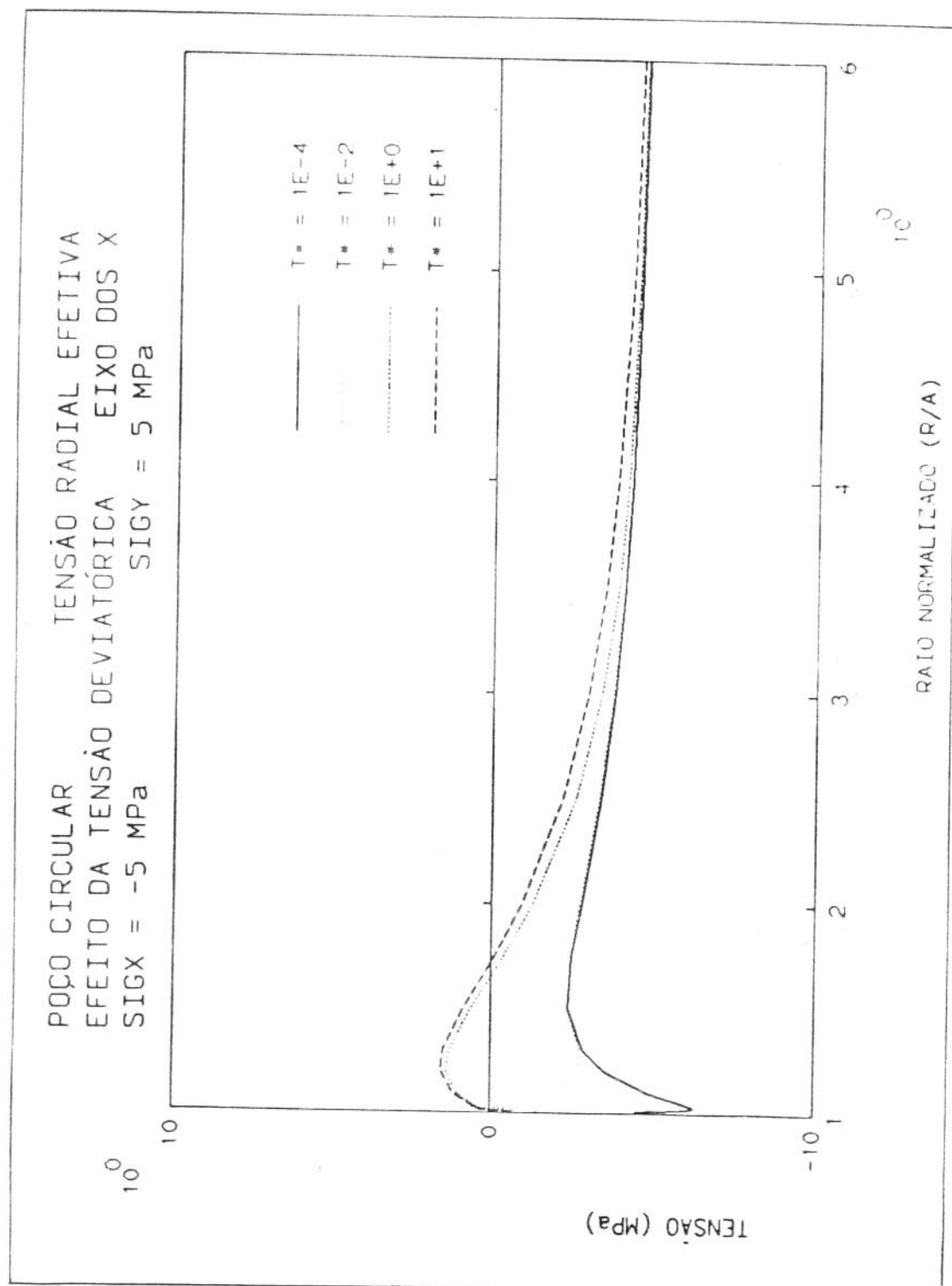


Figura 6.8.31 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão radial efetiva (MPa)

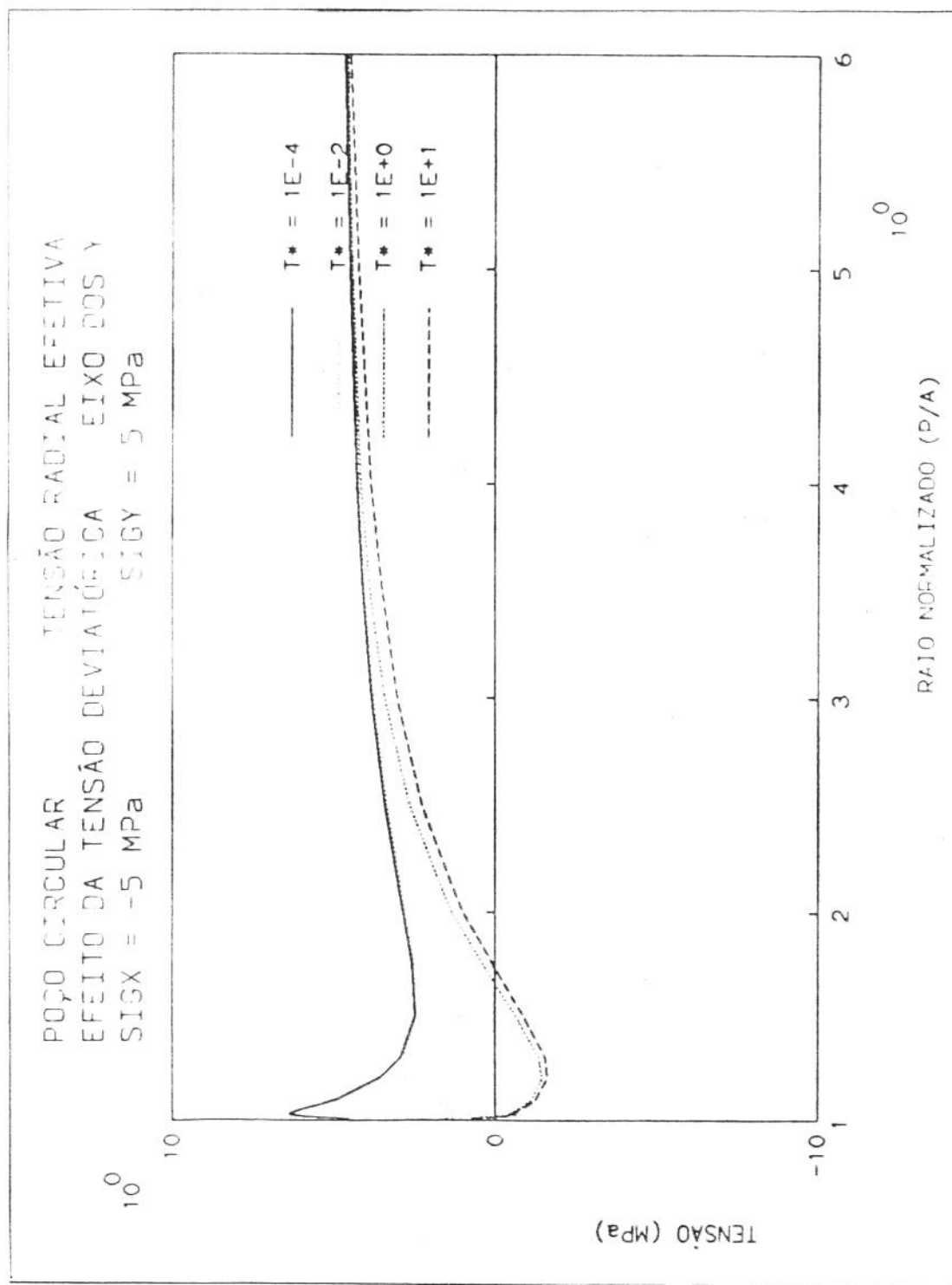


Figura 6.8.32 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão radial efetiva (MPa)

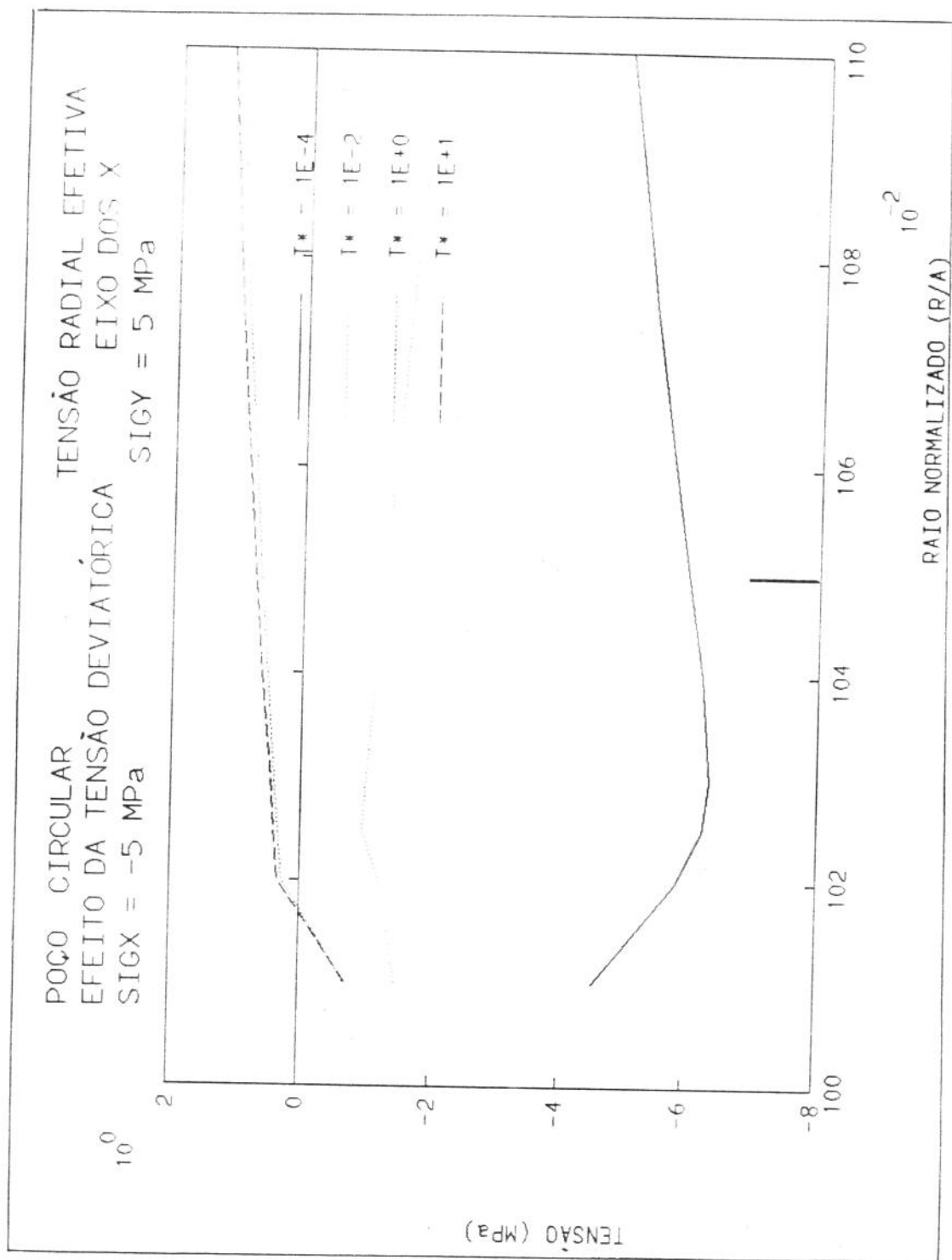


Figura 6.8.33 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão radial efetiva (MPa)

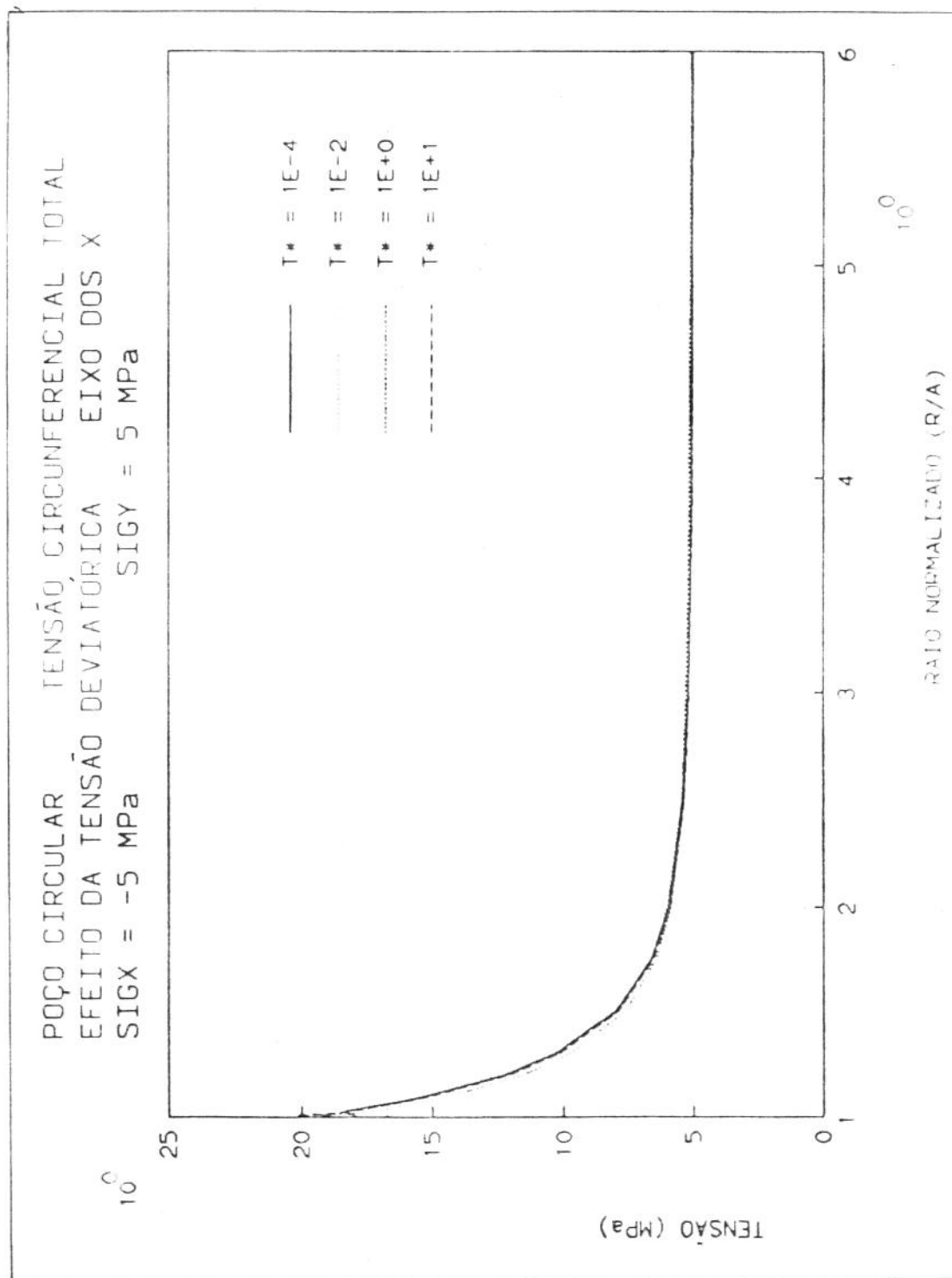


Figura 6.8.34 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
 Efeitos do tensor deviatórico
 Tensão circunf. total (MPa)

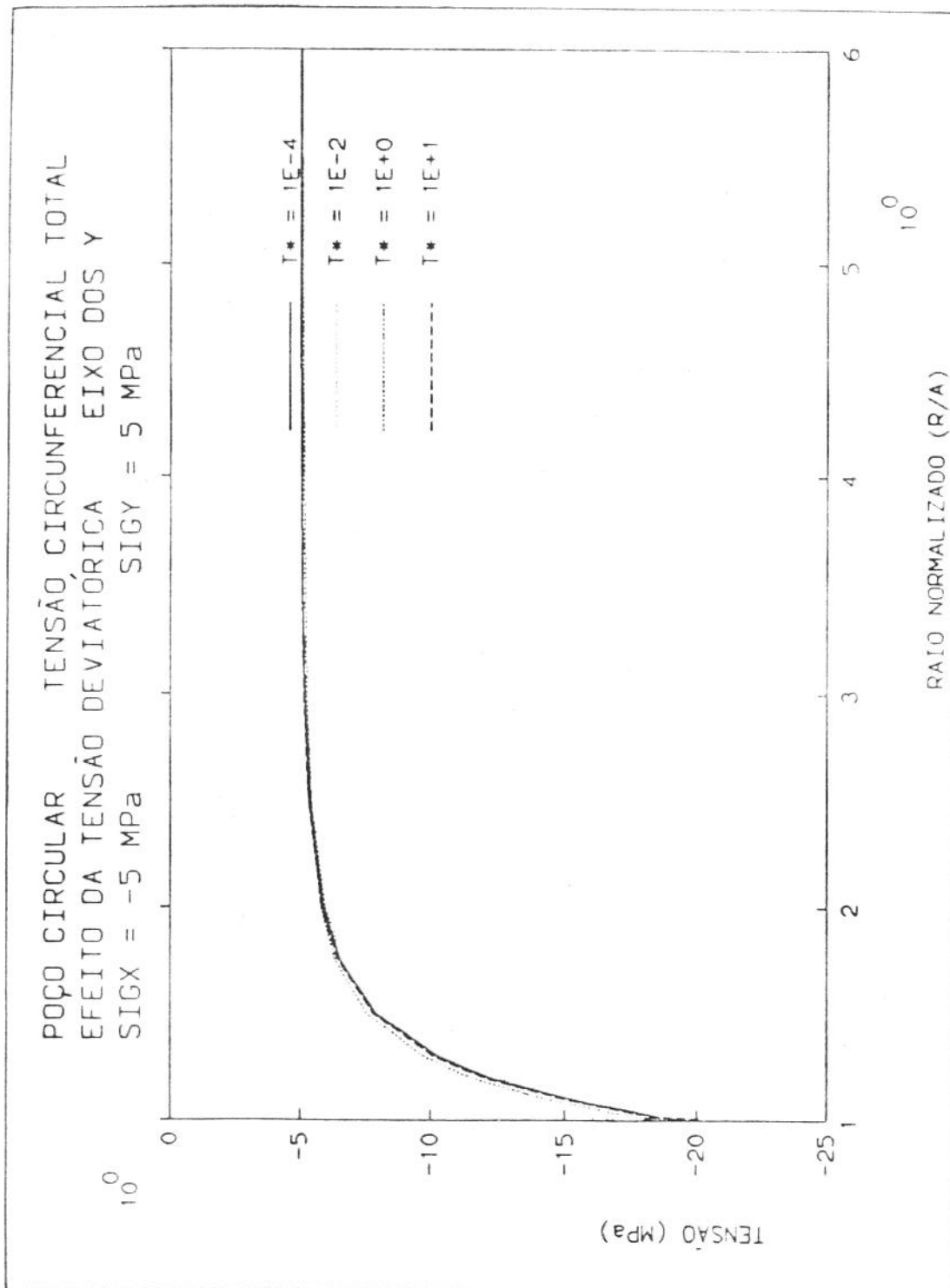


Figura 6.8.35 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão circunf. total (MPa)

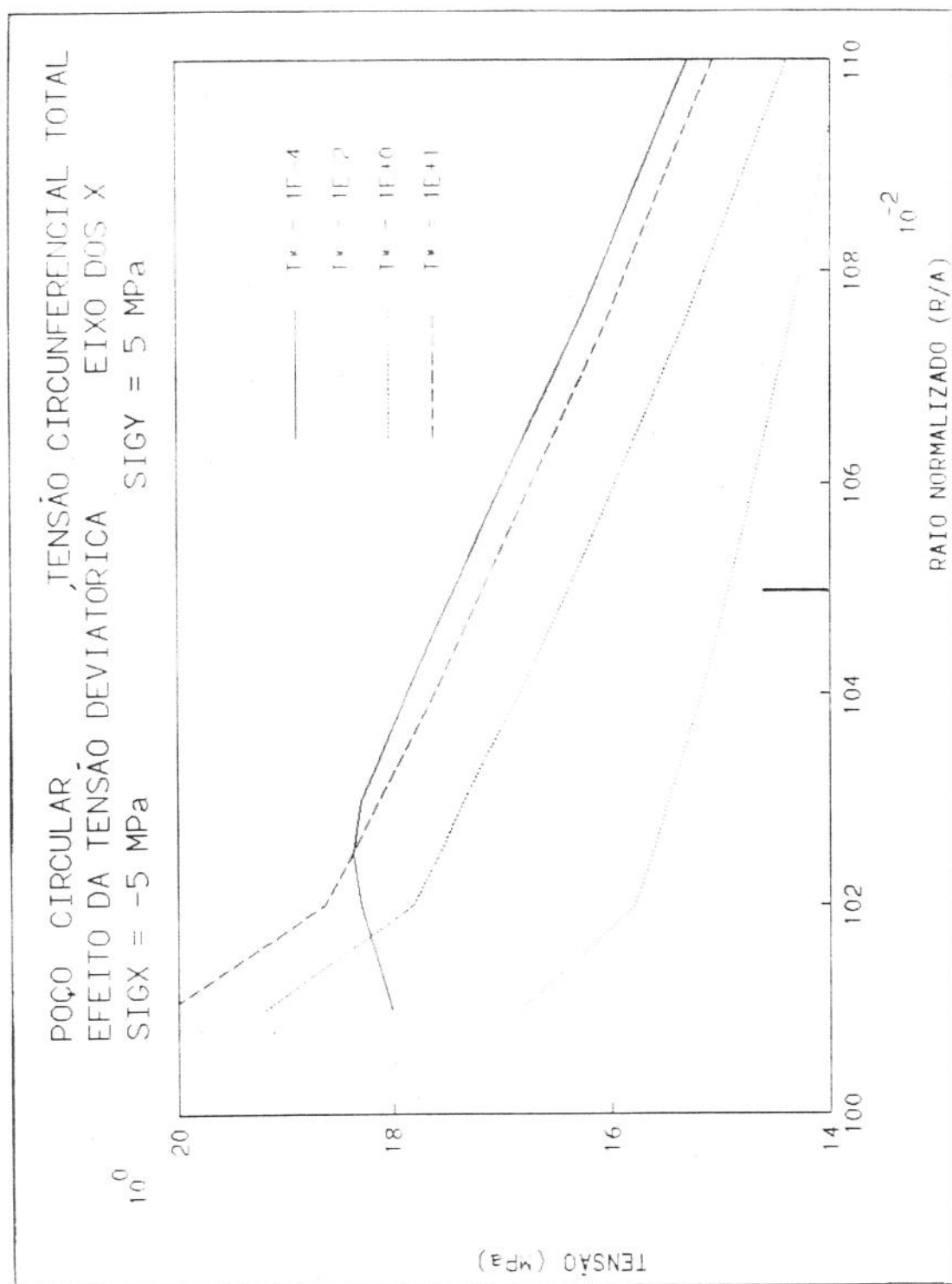


Figura 6.8.36 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão circunf. total (MPa)

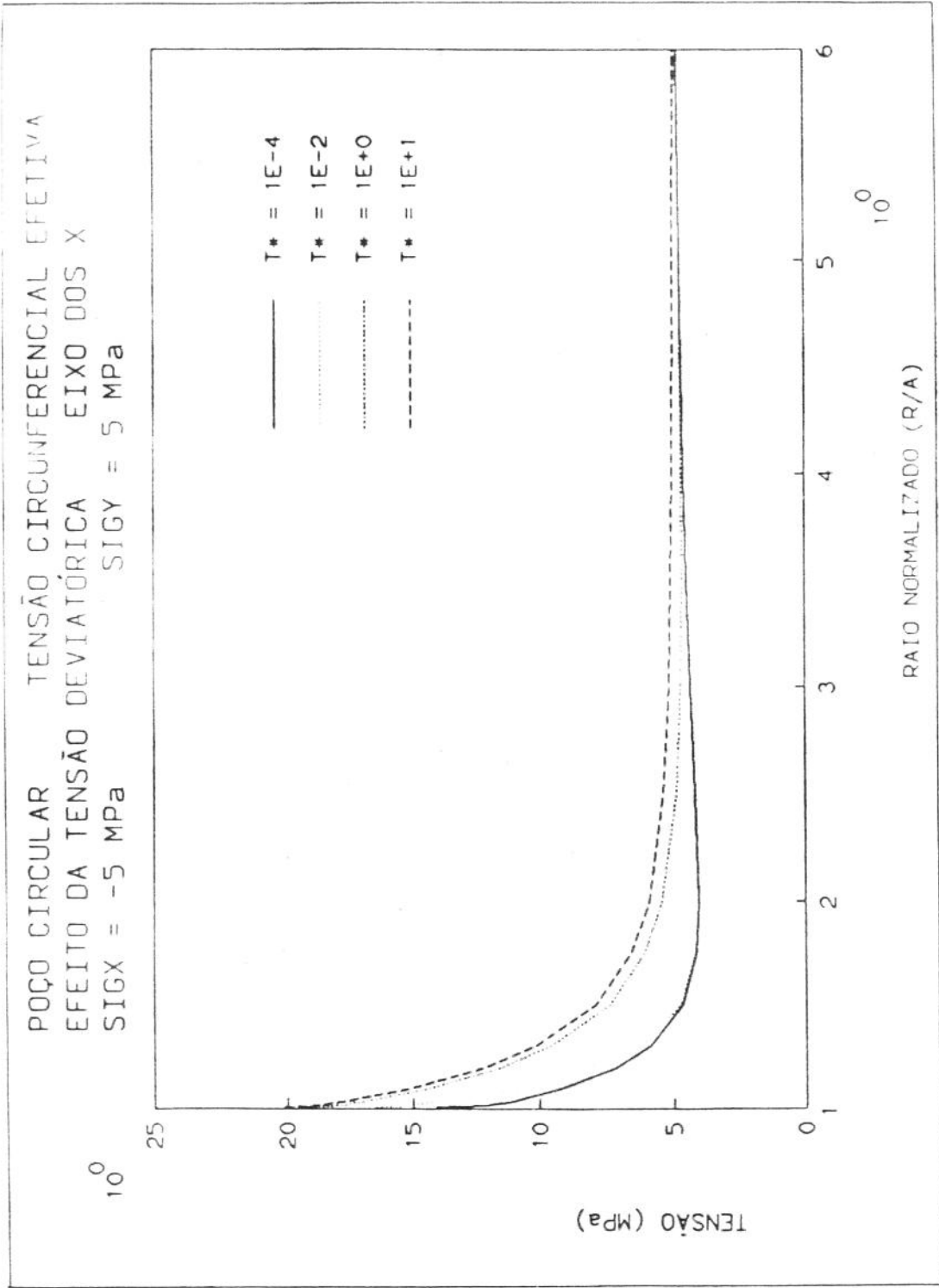


Figura 6.8.37 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
 Efeitos do tensor de viatório
 Tensão circunf. efetiva (MPa)

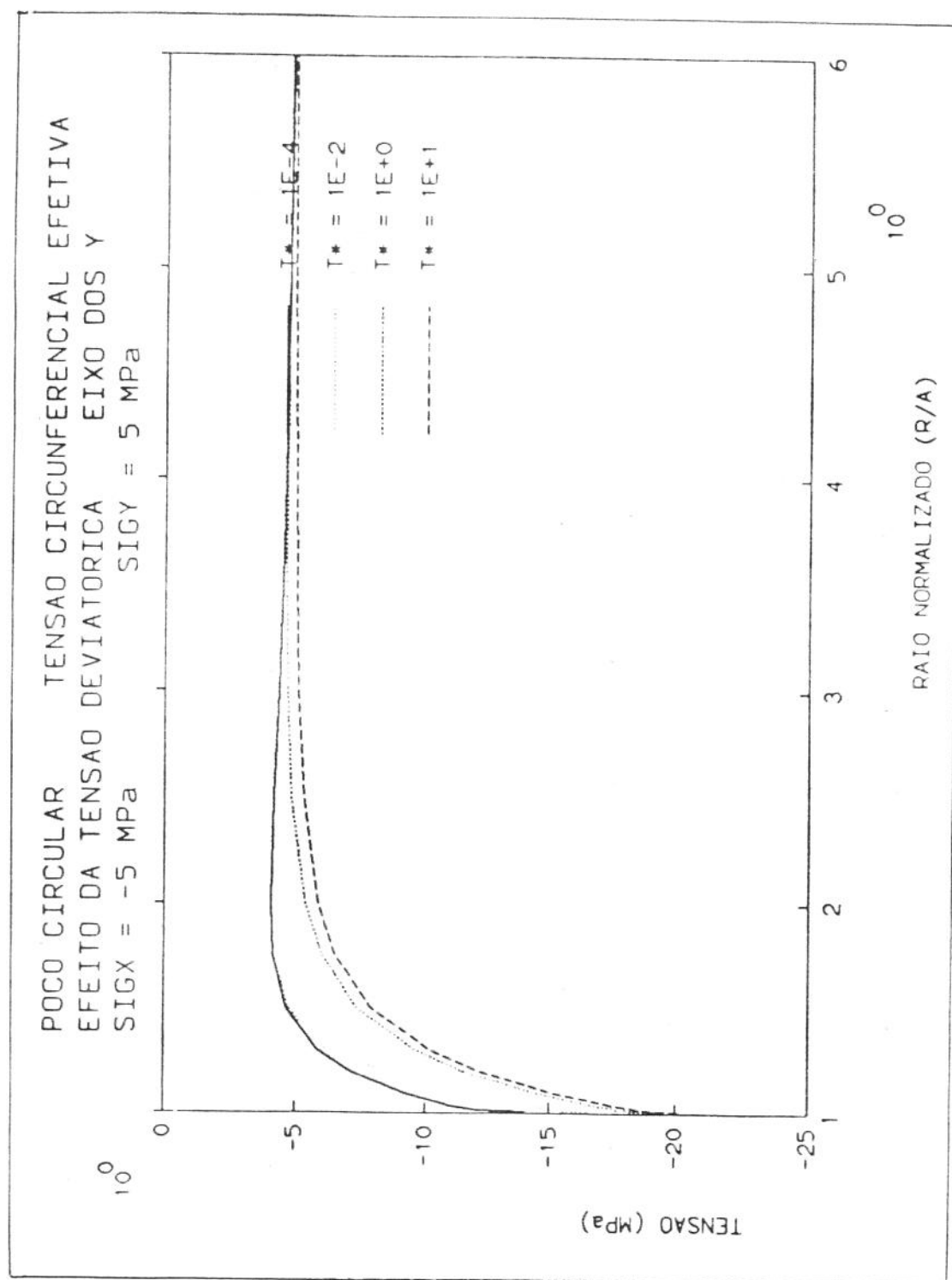


Figura 6.8.38 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão circunf. efetiva (MPa)

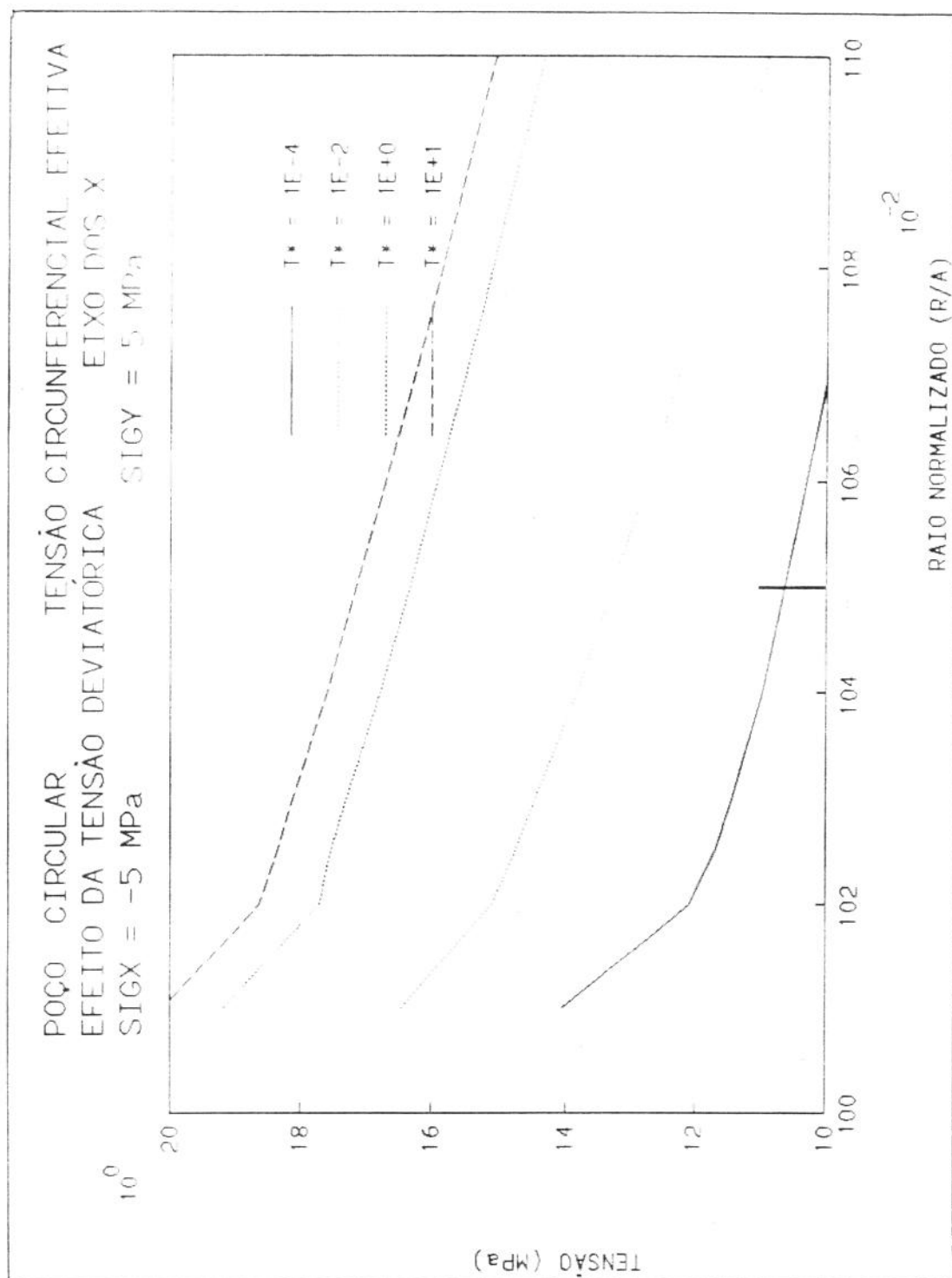


Figura 6.8.39 - Poço circular - Proximidades do furo
Efeitos do tensor deviatórico
Tensão circunf. efetiva (MPa)

6.8.4 Solução simultânea

Agora este exemplo será resolvido não mais decompondo-se o carregamento como foi feito nos três itens anteriores. As cargas serão aplicadas ao mesmo tempo. O resultado será igual a superposição dos já obtidos. Este carregamento é mostrado na figura seguinte.

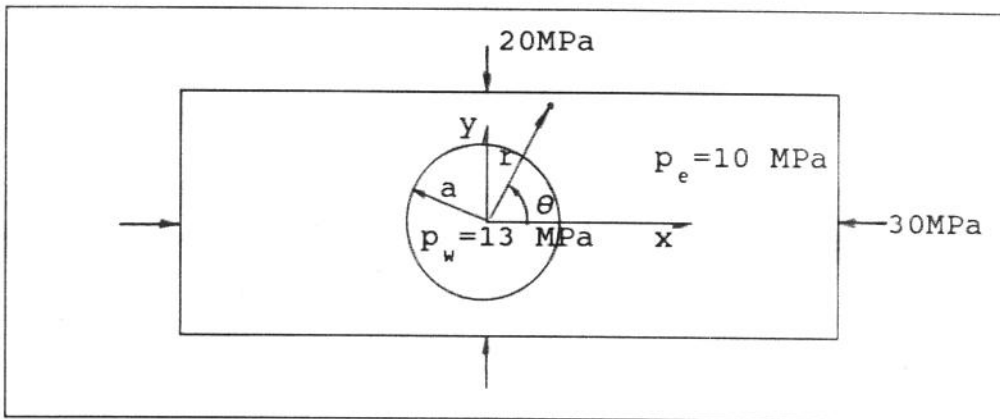


Figura 6.8.40 - Furo circular
Carregamento total

As condições na parede do furo são as seguintes

$$t_x = -17\cos\theta \text{ MPa}$$

$$t_y = -7\cos\theta \text{ MPa}$$

$$\Delta p = p_w - p_e = 3 \text{ MPa}$$

Inicialmente o contínuo poroelástico está sob a ação das tensões mostradas na figura acima e a pressão de poros uniforme é igual à mostrada. No instante 0^+ é perfurado o poço e se tem aplicadas as condições de contorno descritas.

O furo foi discretizado em 128 elementos lineares iguais e a direção da normal em cada elemento coincide com a direção do raio do furo.

Na figura 6.8.41 mostra-se o deslocamento radial na parede do furo na direção dos x e na dos y. Como se ve ele aumenta

com o tempo e ocorre uma ovalação do furo, ficando o diâmetro maior alinhado com a direção da menor tensão tectônica, que no caso é a direção dos y.

A figura 6.8.42 mostra a evolução da pressão de poros ao longo do eixo dos x. Os efeitos poroelásticos são grandes. No início a pressão cai bastante, próximo ao poço, mas com o passar do tempo ela vai para a pressão p_w igual a 13 MPa. A figura 6.8.44 mostra a evolução da pressão ao longo do eixo dos y. Ela tem um aumento rápido inicialmente e depois cai para o valor p_w . Em ambos os casos, longe do furo a pressão de poros tende para o valor inicial. Nas figuras 6.8.43 e 6.8.45 mostra-se a evolução da pressão nas proximidades do furo.

As figuras 6.8.46 e 6.8.48 mostram a evolução da tensão radial total ao longo do eixo dos x e dos y, respectivamente. Nos 2 casos os efeitos poroelásticos são desprezíveis e ela pouco ou nada varia com o tempo, e tende à tensão radial no contorno ao se aproximar do furo, que é -13 MPa. As figuras 6.8.47 e 6.8.49 mostram o comportamento desta tensão nos arredores do furo.

Na figura 6.8.50 se pode ver que a tensão radial efetiva na direção dos eixo dos x sofre efeitos poroelásticos fortes. Perto do poço, devido ao aumento da pressão, ela tende a zero com o passar do tempo. Ao longo do eixo dos y, a tensão radial efetiva apresenta efeitos poroelásticos menos acentuados (figura 6.8.52). Nos dois casos ocorre uma oscilação inicial devido às variações bruscas apresentadas pela pressão, como pode ser visto nas figuras 6.8.51 e 6.8.53. Observe-se que na parede do poço esta tensão tende a zero; caso a formação apresentasse uma resistência à tração nula, ocorreria desmoronamento. Este efeito seria ainda mais acentuado se a pressão dentro do poço fosse menor podendo inclusive ocorrerem fraturas tangenciais que levariam ao lascamento da parede (breakout), que é a ruptura por compressão e/ou flambagem dos minúsculos pilares formados. Esta tensão nesta região é maior ao longo do eixo dos y, que é a direção preferencial dos lascamento, neste exemplo.

A figura 6.8.54 apresenta o comportamento da tensão circunferencial total ao longo do eixo dos x. Ela sofre claramente os efeitos poroelásticos. Devido à pressurização do poço nas suas proximidades ela sofre uma redução, depois se recupera atingindo um valor máximo, em módulo, e então retorna lentamente ao valor

inicial. Ao longo do eixo dos y , figura 6.8.56, esta tensão é praticamente constante no tempo. Nos arredores do furo ela tende aos valores teóricos [123] -18 MPa ($\theta = 0^0$) e -58 MPa ($\theta = 90^0$), como pode ser visto nas figuras 6.8.55 e 6.8.57

A descrição da tensão circunferencial efetiva, figuras 6.8.58 e 6.8.60, é feita a seguir. Ao longo do eixo dos x a variação com o tempo é mais acentuada do que ao longo do eixo dos y. É interessante que o valor máximo, em módulo, não ocorre na parede do furo e sim um pouco mais para dentro do meio poroso, isto ao longo do eixo dos x. Na outra direção não se observa este fenômeno. Caso a pressão no poço fosse aumentada esta tensão tenderia crescer cada vez mais passando a partir certo valor de p_w a ser positiva (tração) podendo causar fraturas radiais a depender da resistência à tração da rocha. Observe-se que a tensão circunferencial efetiva é sempre maior ao longo do eixo dos x, que no caso, é a direção preferencial das fraturas. Detalhes próximos do furo são mostrados nas figuras 6.8.59 e 6.8.61.

A vazão radial no eixo dos X é mostrada na figura 6.8.62. No instante 0^+ ela é grande, pois a diferença de pressões é máxima, porém ela se ajusta rapidamente. Para este carregamento neste eixo o fluxo inicial é positivo, ou seja do poço para a formação. A certa distancia do poço ele reverte de sentido, isto para tempos bem pequenos. A figura 5.8.64 apresenta o comportamento da vazão radial ao longo do eixo dos y. Ela é menor neste eixo do que no outro e, tem sentido contrário, ou seja, do meio poroso para o poço. As figuras 6.8.63 e 6.8.65 mostram as condições perto do furo ampliadas.

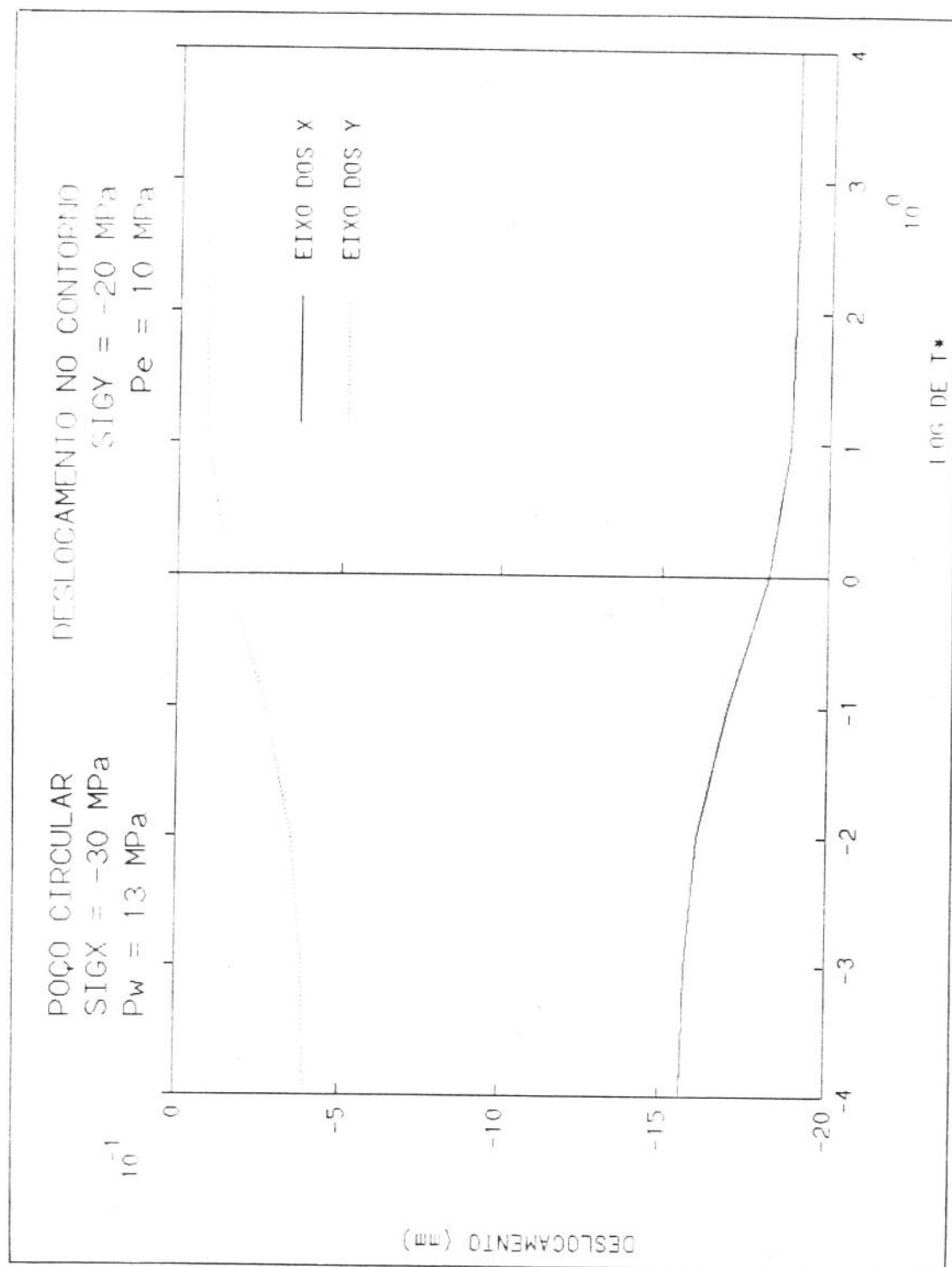


Figura 6.8.41 - Poço circular
Deslocamento radial
Variação com o tempo

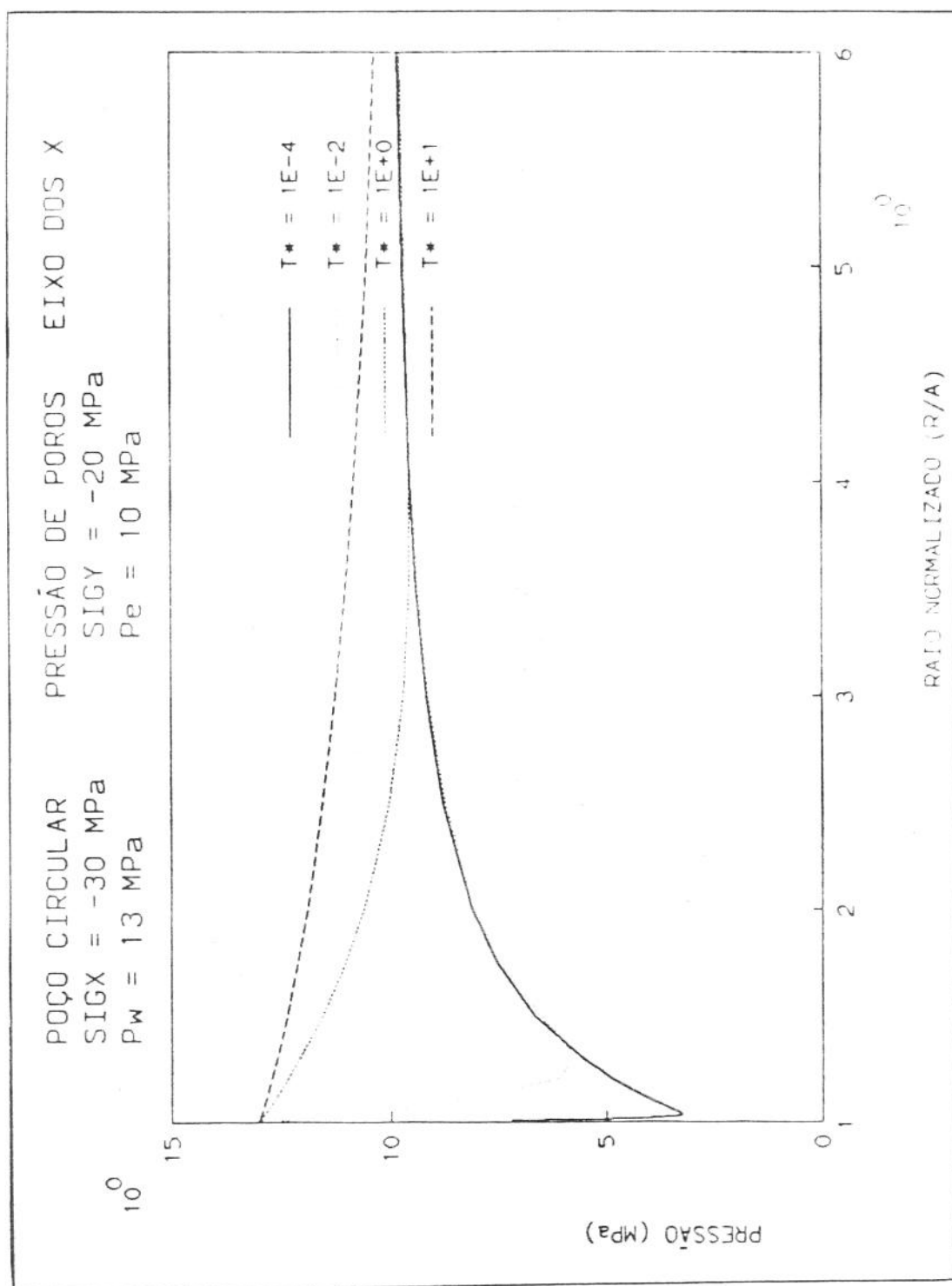


Figura 6.8.42 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
 Pressão de poros (MPa)

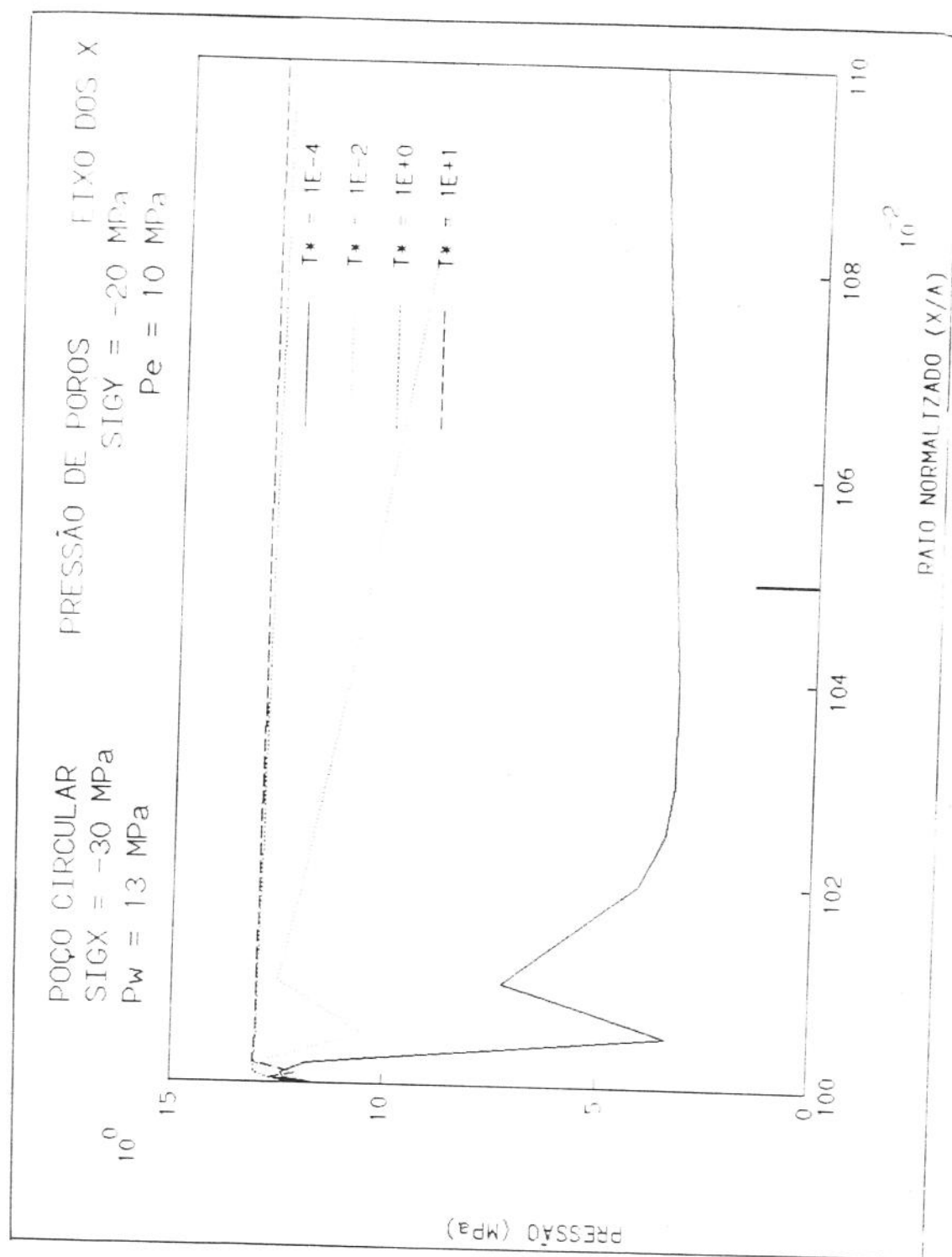


Figura 6.8.43 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
 Pressão de poros (MPa)
 Proximidades do furo

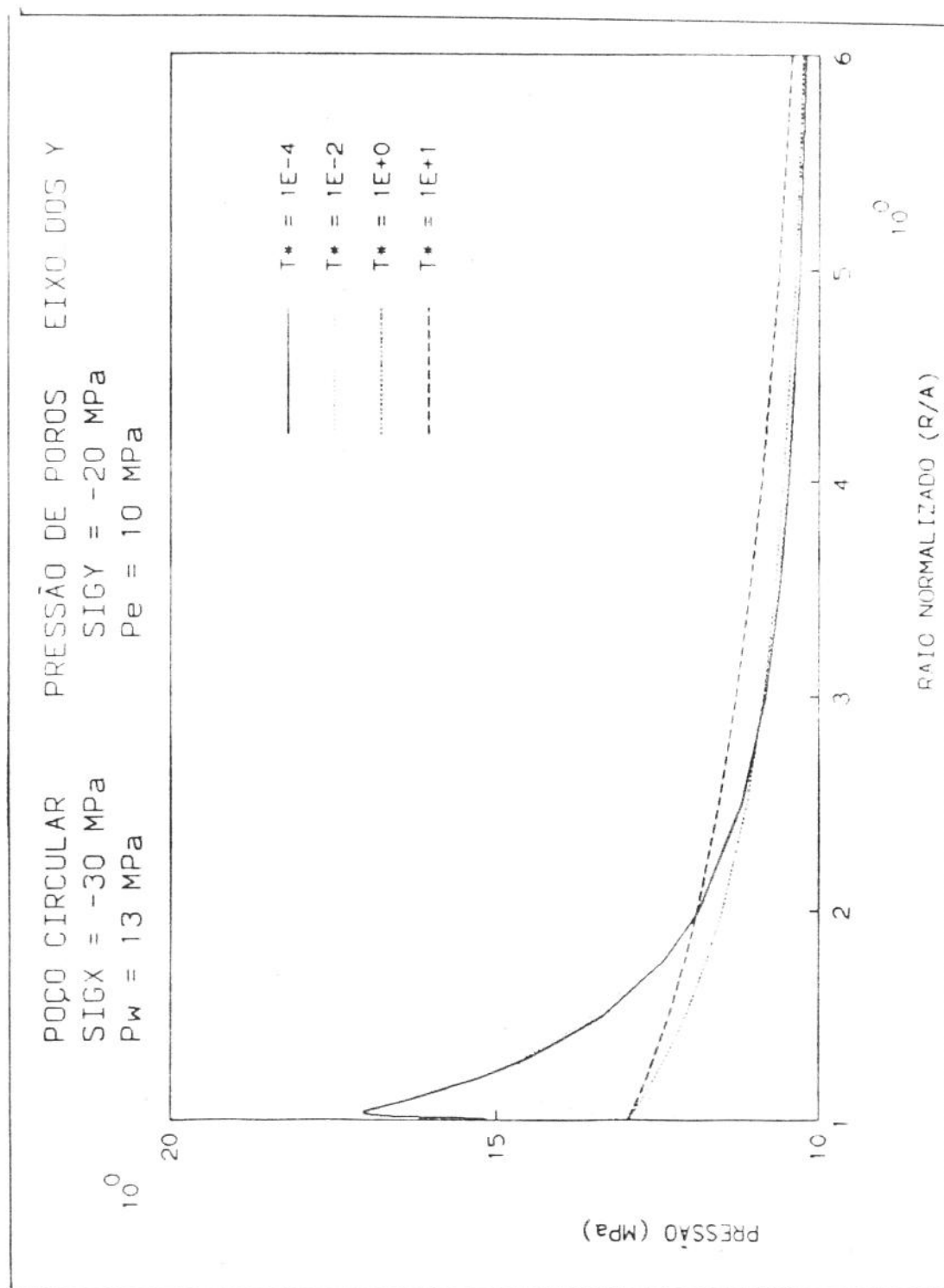


Figura 6.8.44 - Poço circular $\theta = 90^0$
Pressão de poros (MPa)

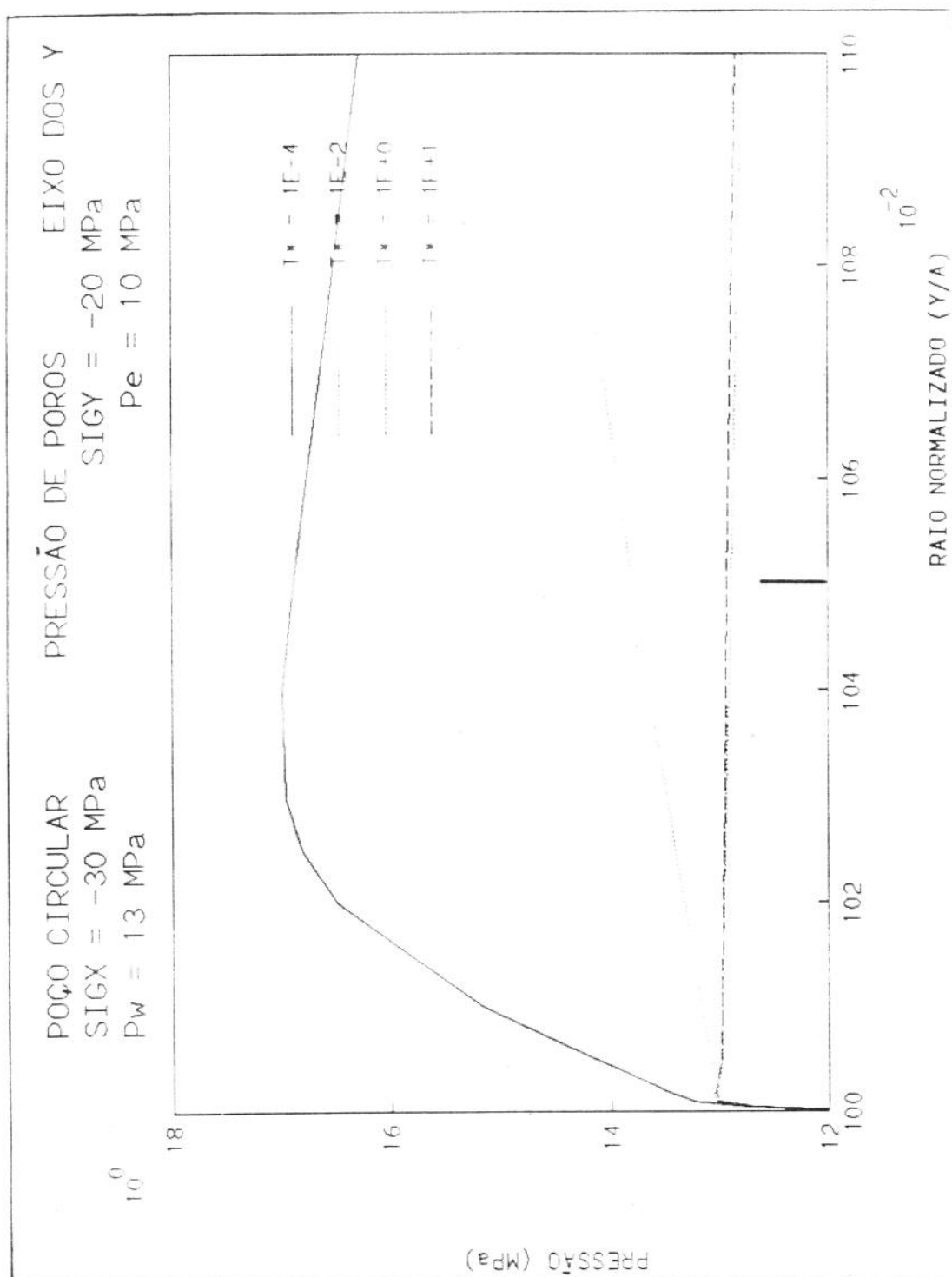


Figura 6.8.45 - Poço circular $\theta = 90^0$
Pressão de poros (MPa)
Proximidades do furo

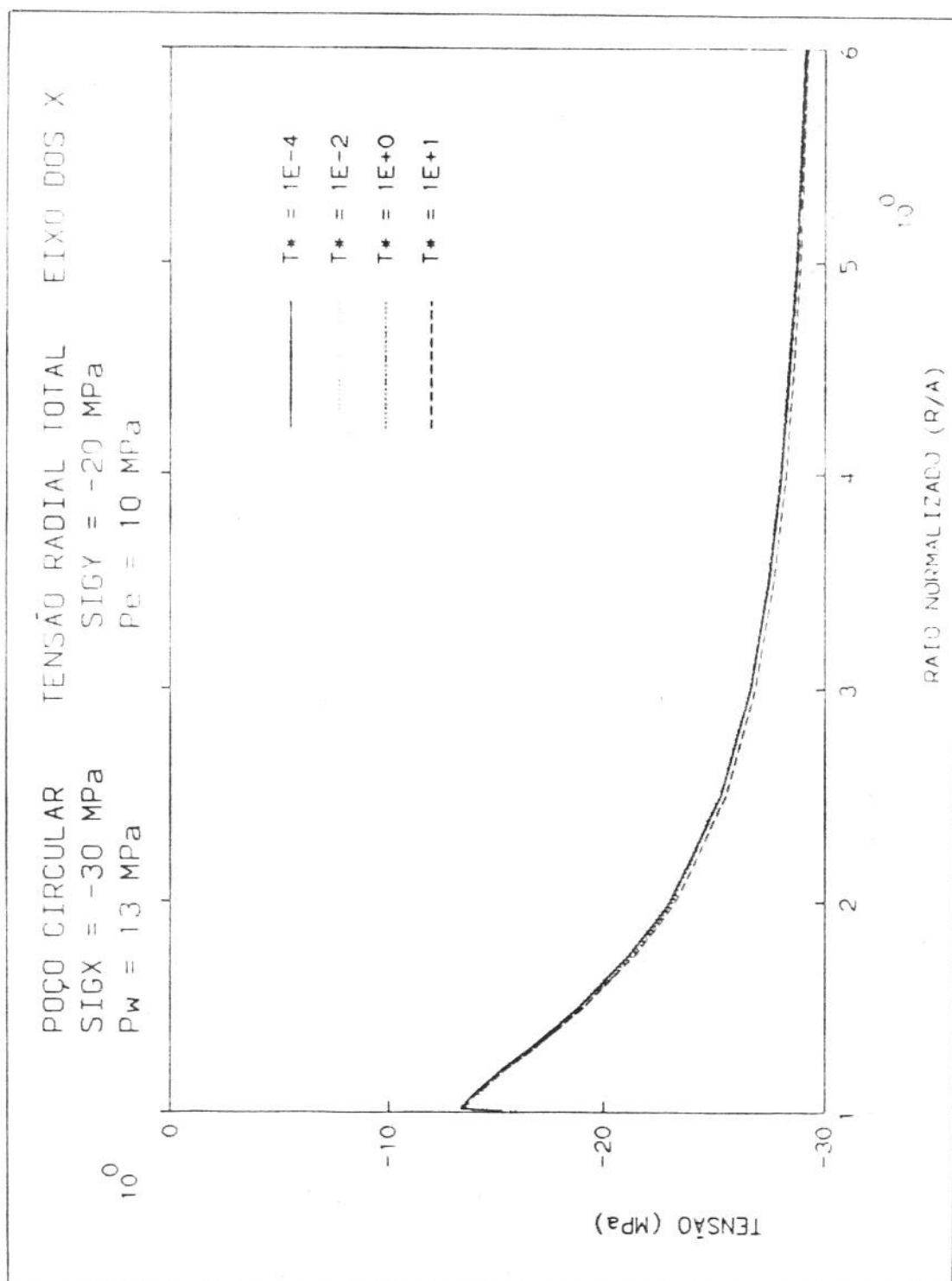


Figura 6.8.46 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
Tensão radial total (MPa)

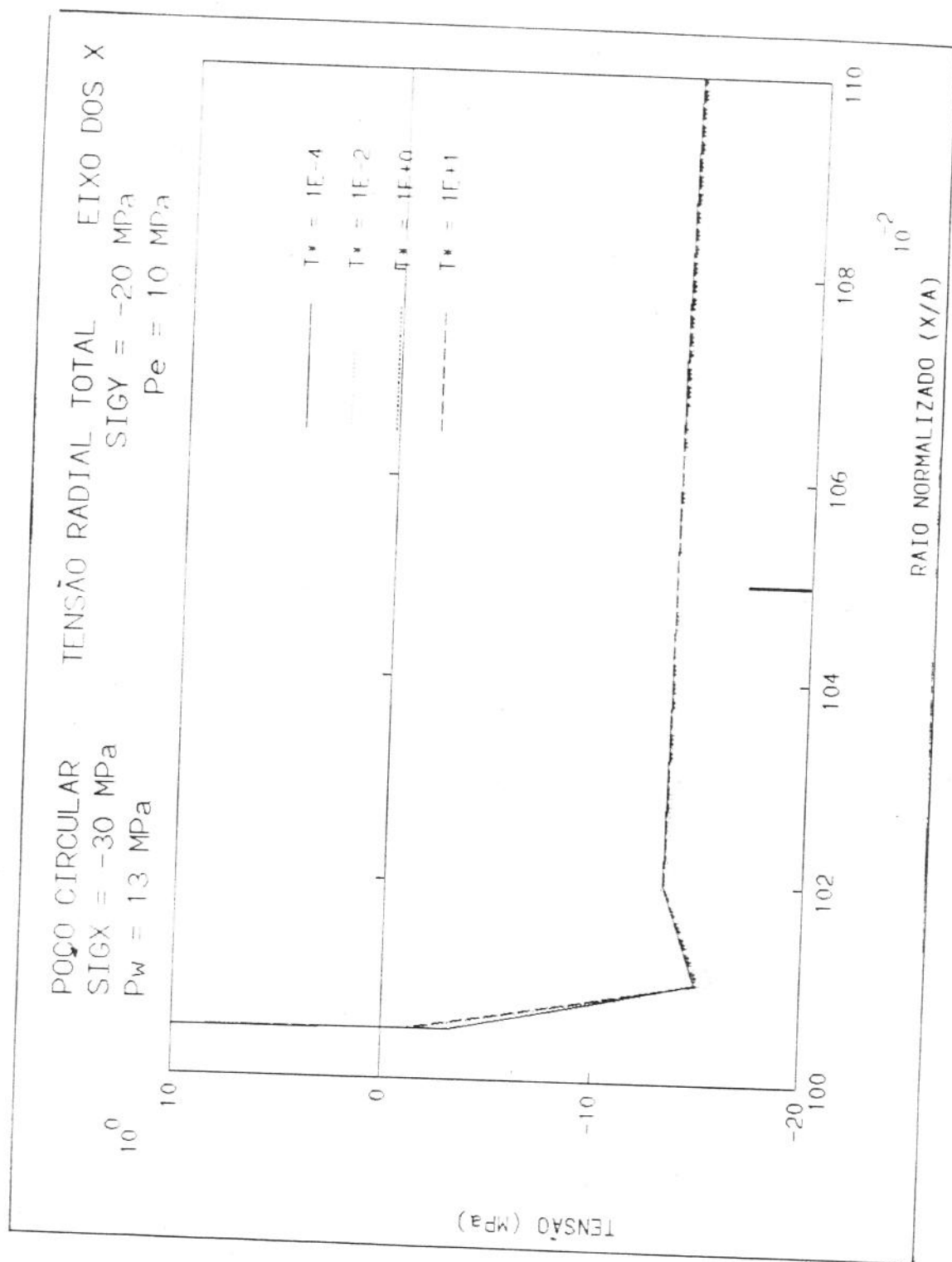


Figura 6.8.47 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
Tensão radial total (MPa)
Proximidades do furo

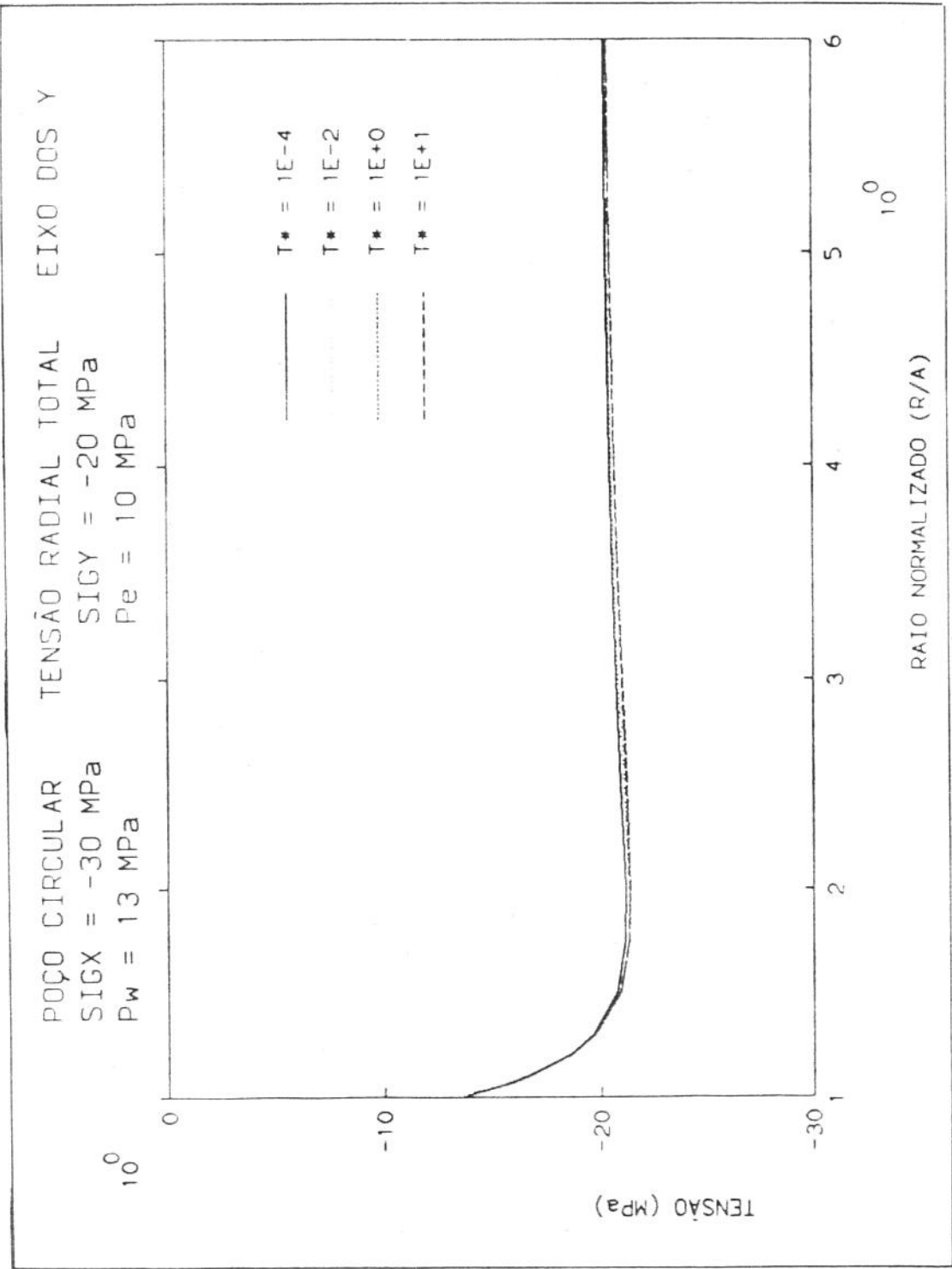


Figura 6.8.48 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Tensão radial total (MPa)

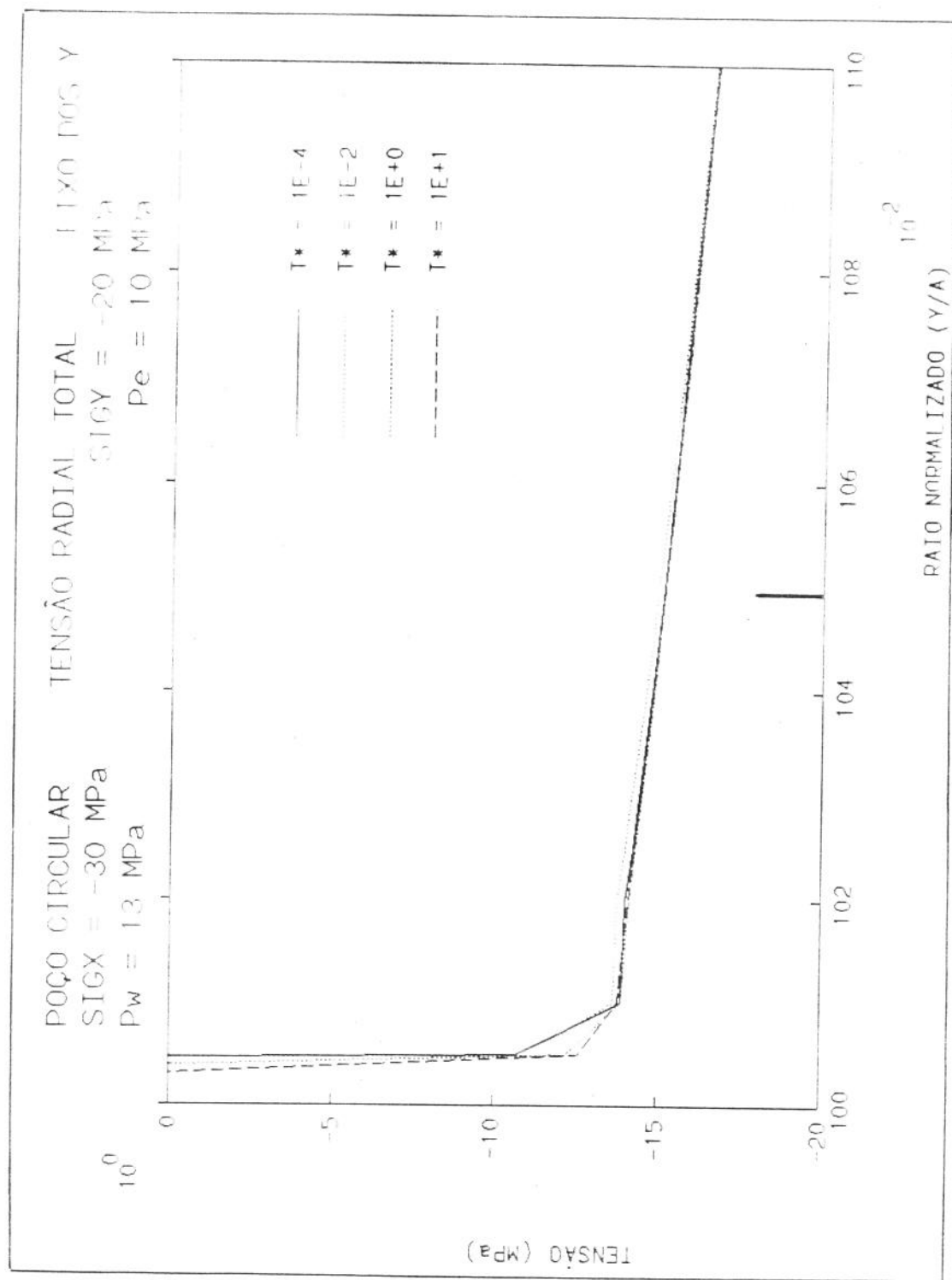


Figura 6.8.49 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Tensão radial total (MPa)
Proximidades do furo

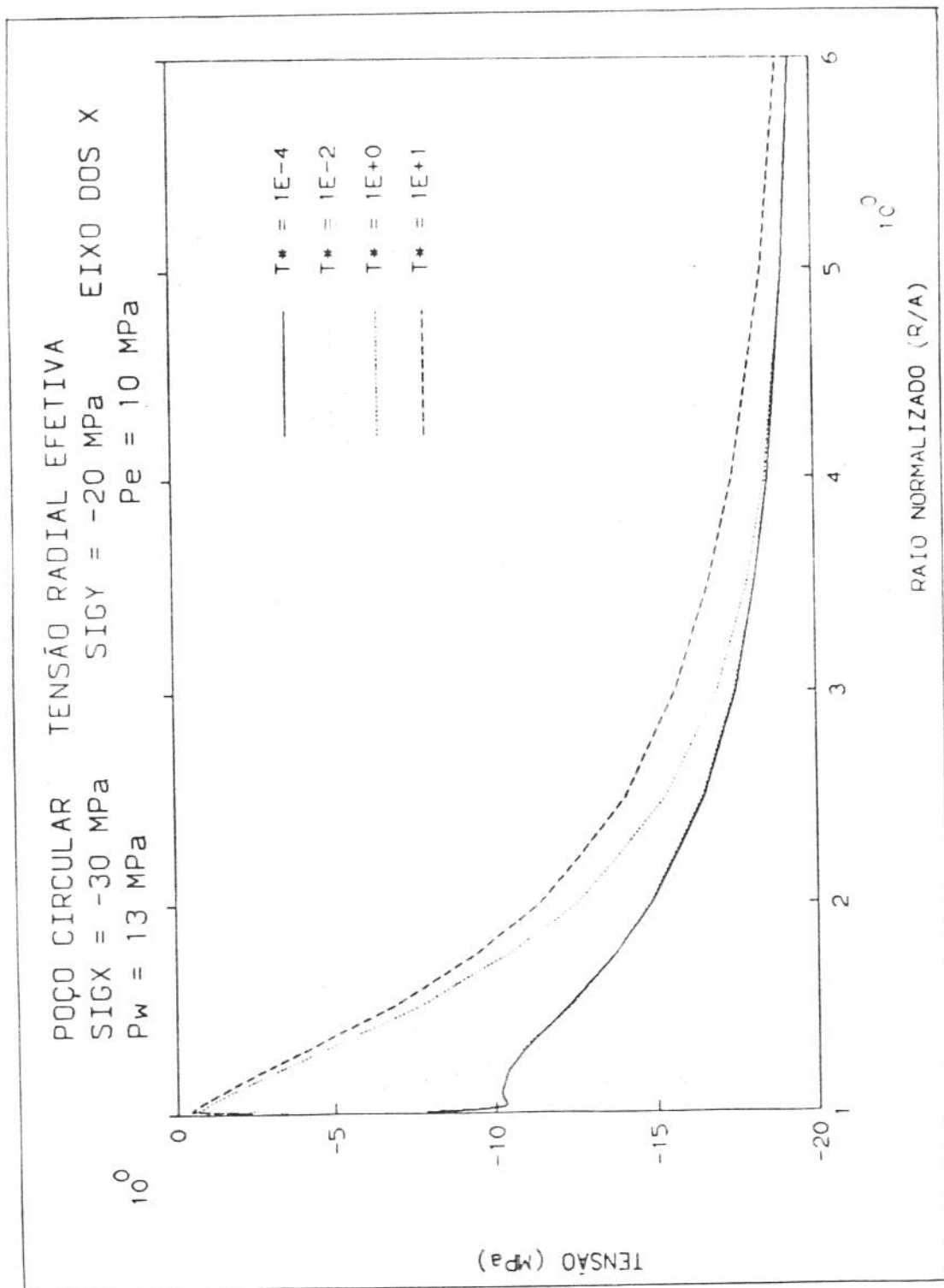


Figura 6.8.50 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
 Tensão radial efetiva (MPa)

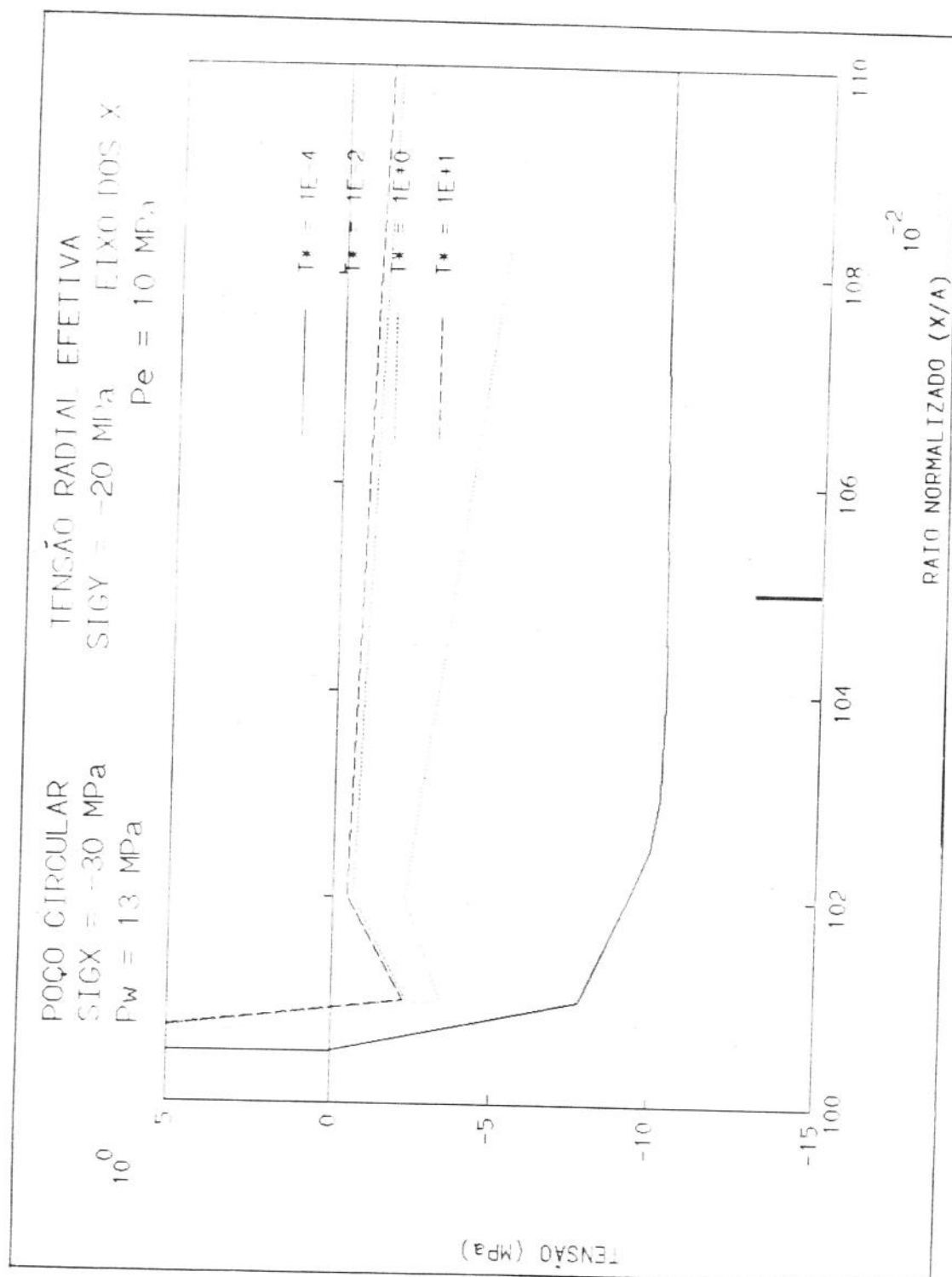


Figura 6.8.51 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
Tensão radial efetiva (MPa)
Proximidades do furo

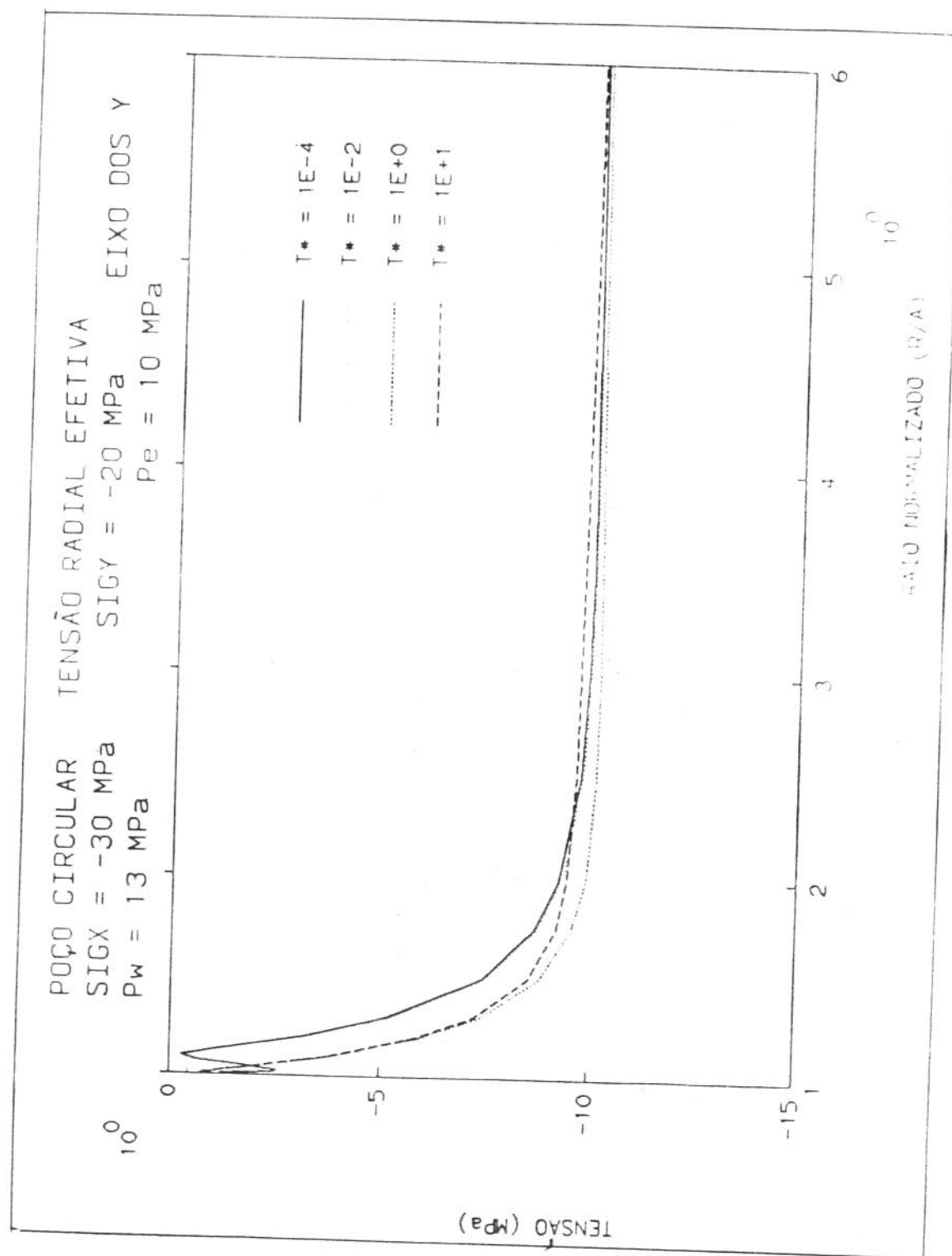


Figura 6.8.52 - Poço circular $\theta = 90^{\circ}$
 Tensão radial efetiva (MPa)

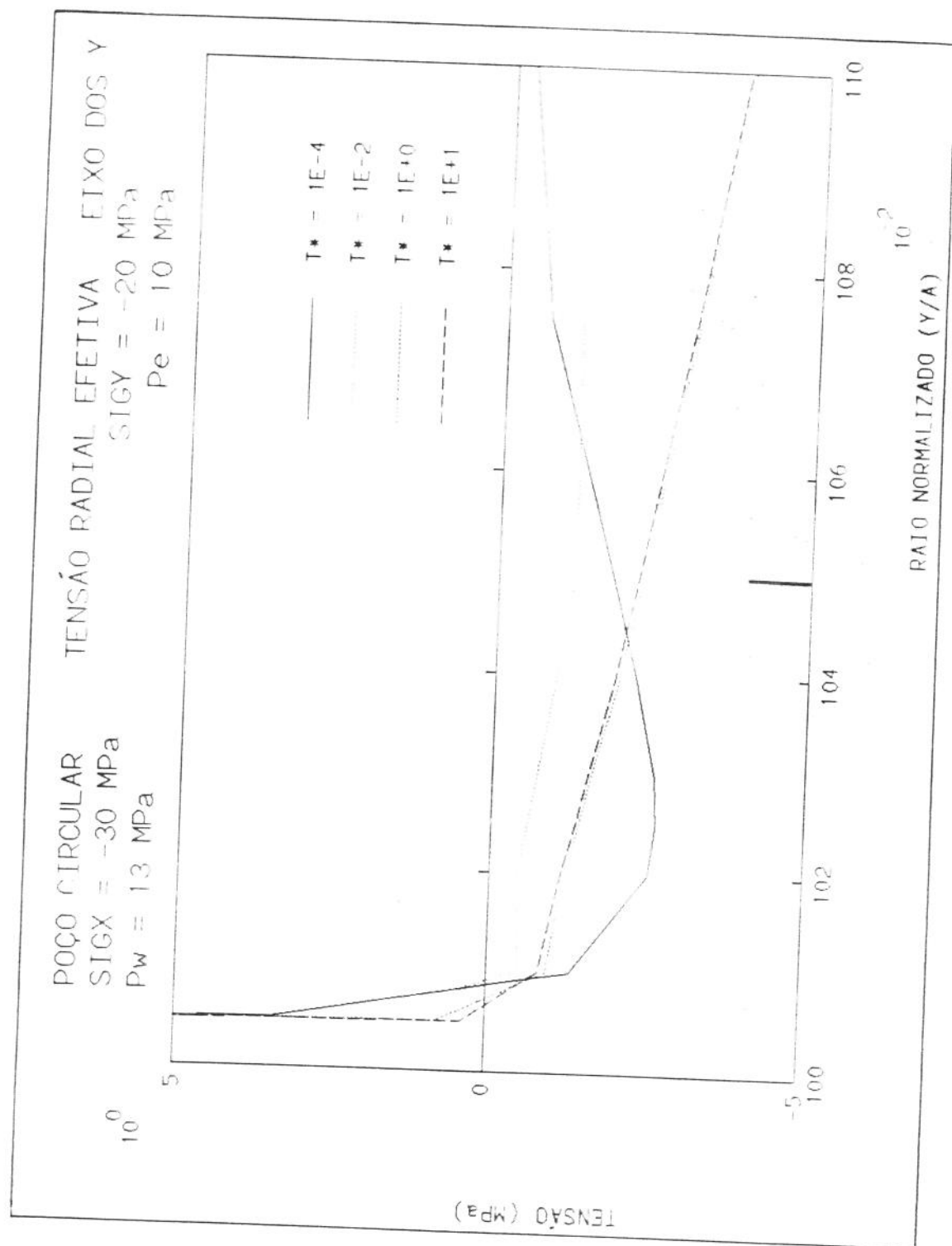


Figura 6.8.53 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Tensão radial efetiva (MPa)
Proximidades do furo

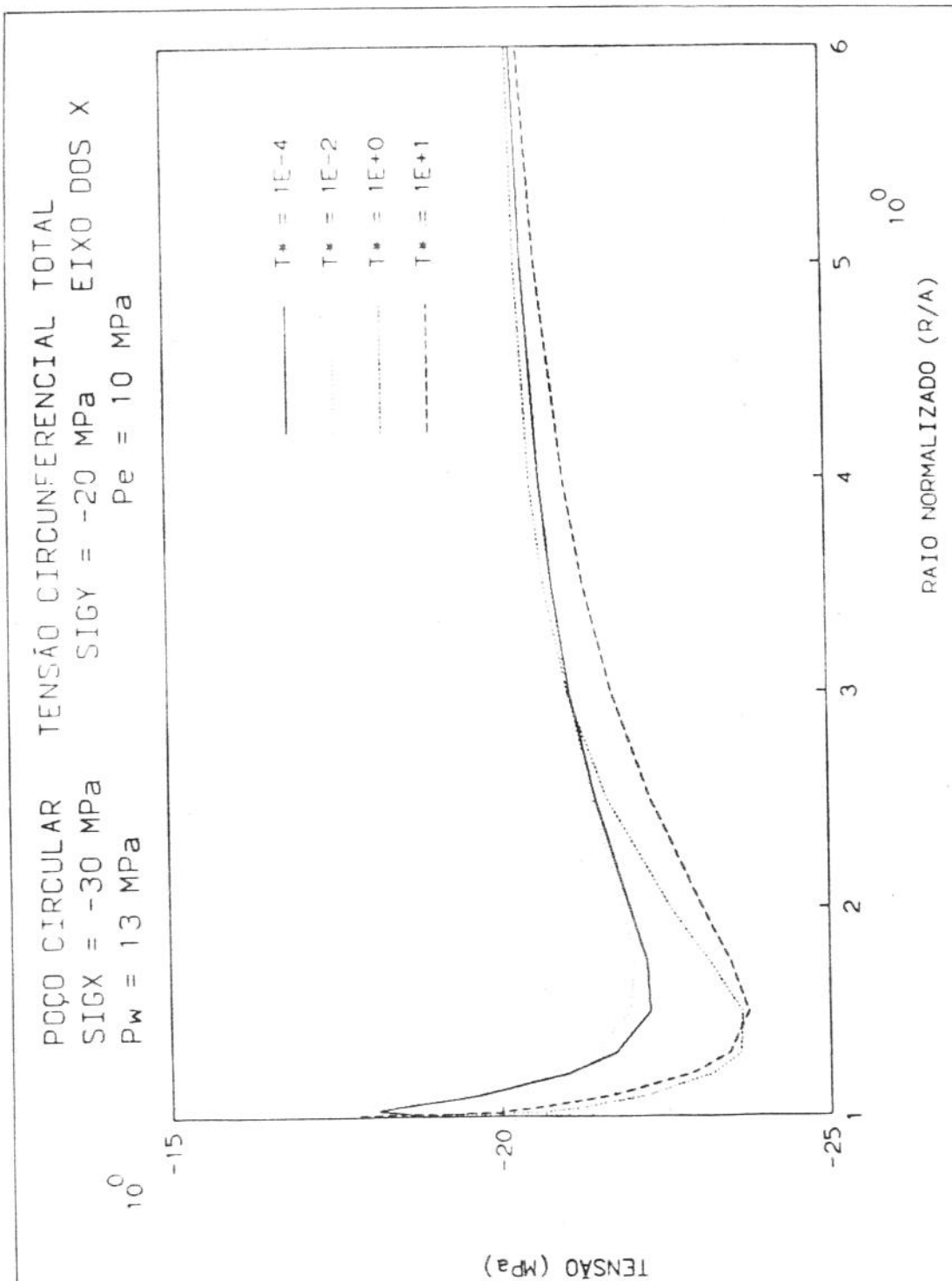


Figura 6.8.54 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
 Tensão circunf. total (MPa)

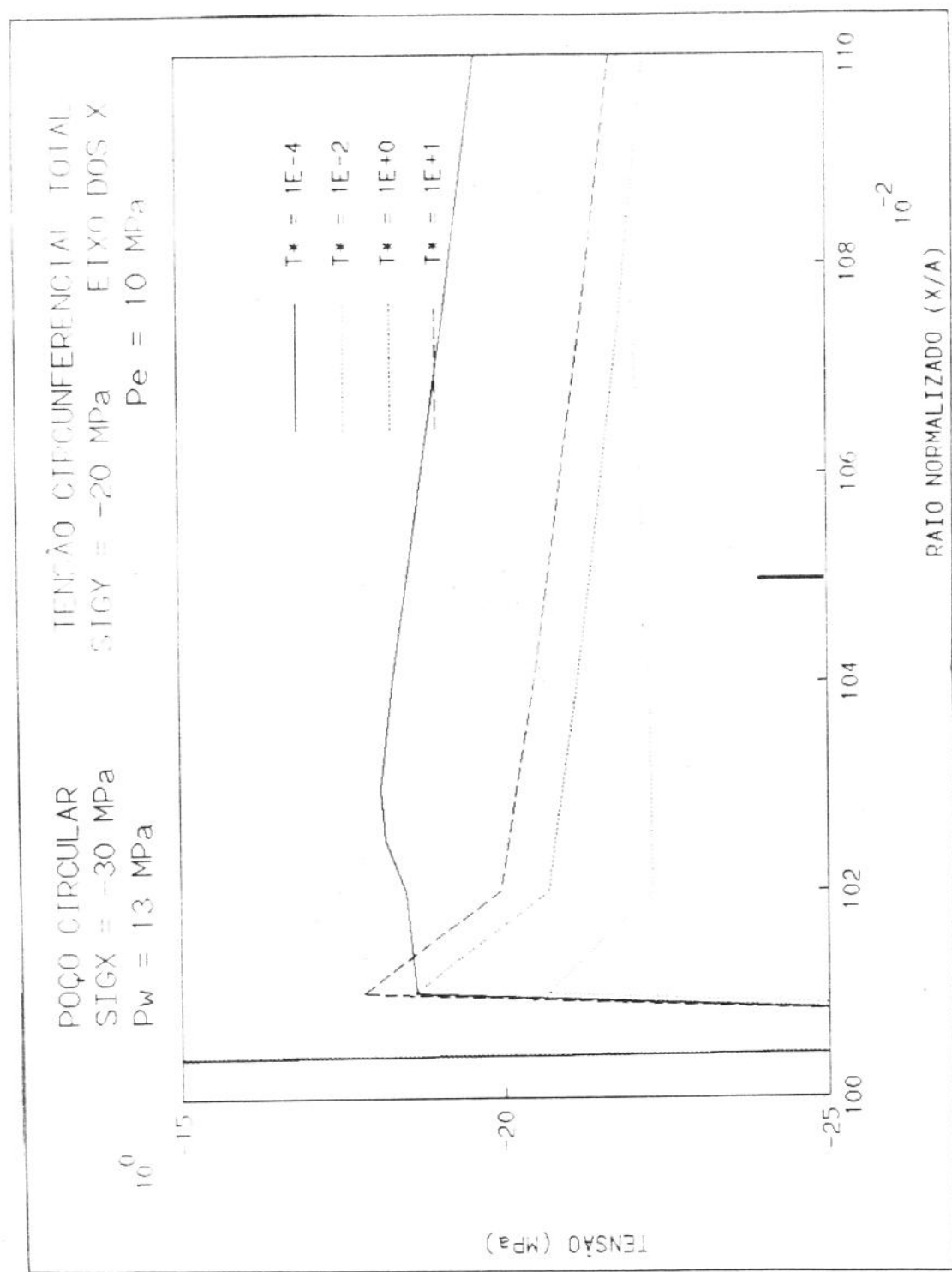


Figura 6.8.55 - Poço circular $\theta = 0^0$
Tensão circunf. total (MPa)
Proximidades do furo

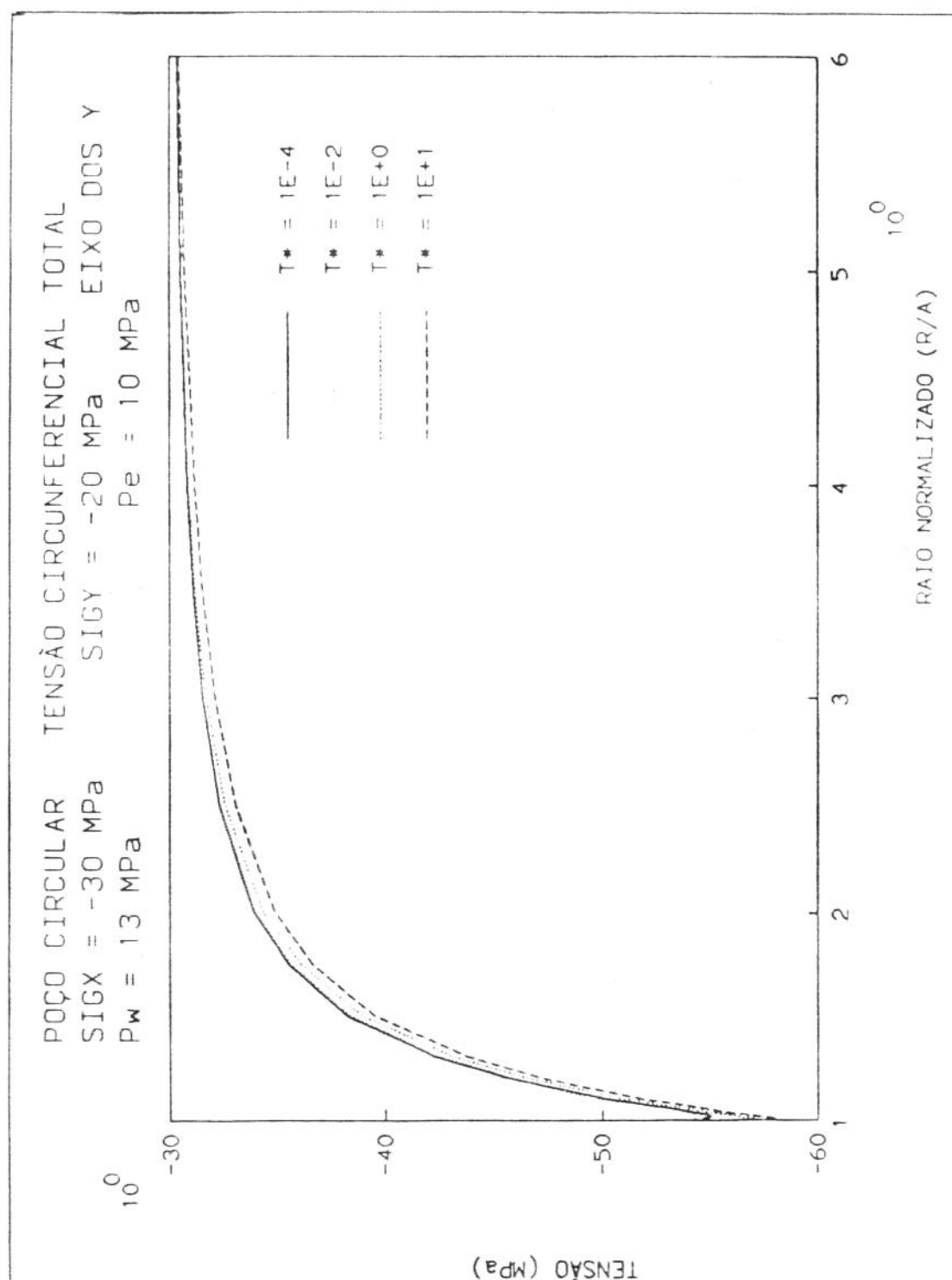


Figura 6.8.56 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
 Tensão circunf. total (MPa)

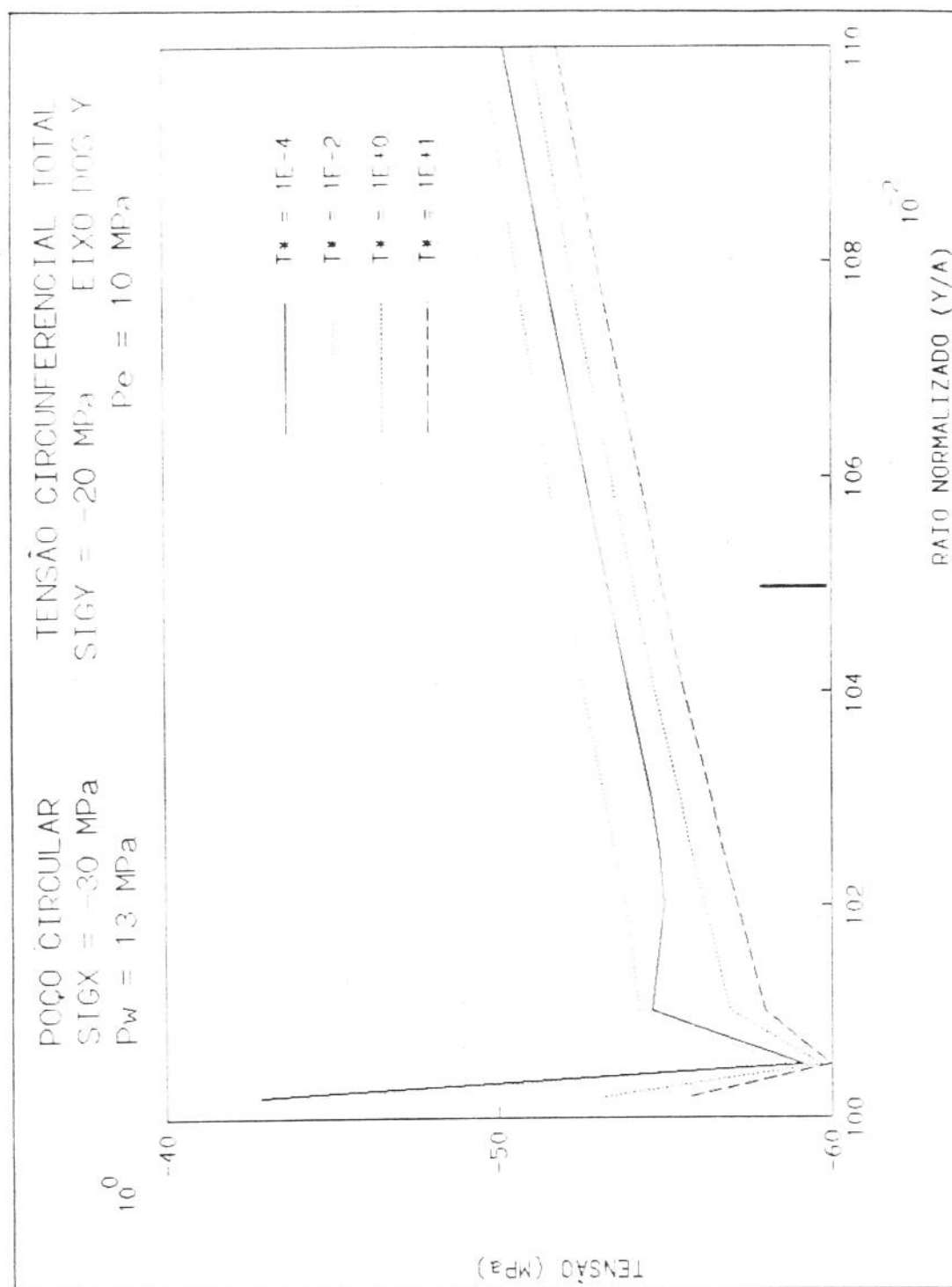


Figura 6.8.57 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Tensão circunf. total (MPa)
Proximidades do furo

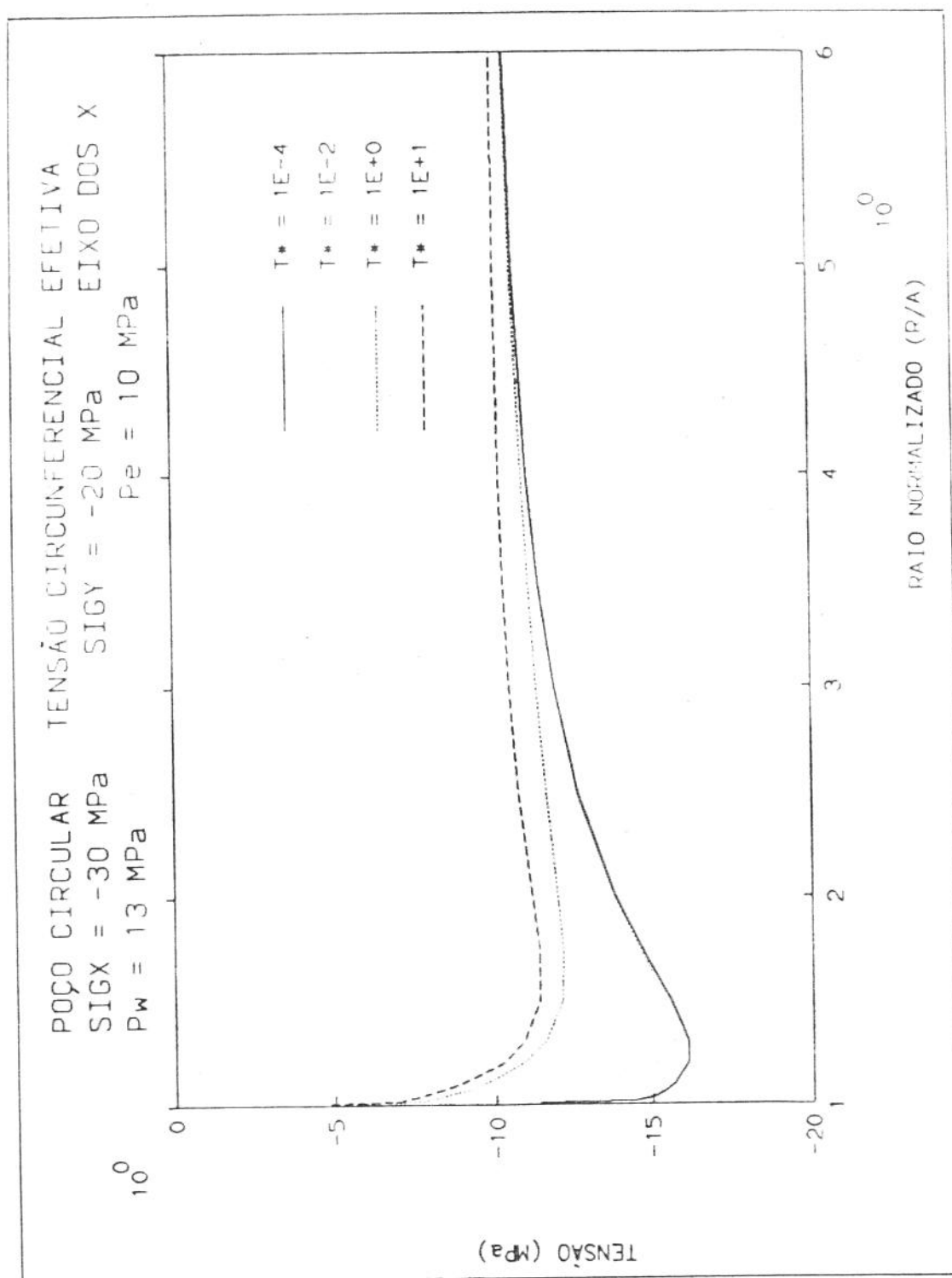


Figura 6.8.58 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
 Tensão circunf. efetiva (MPa)

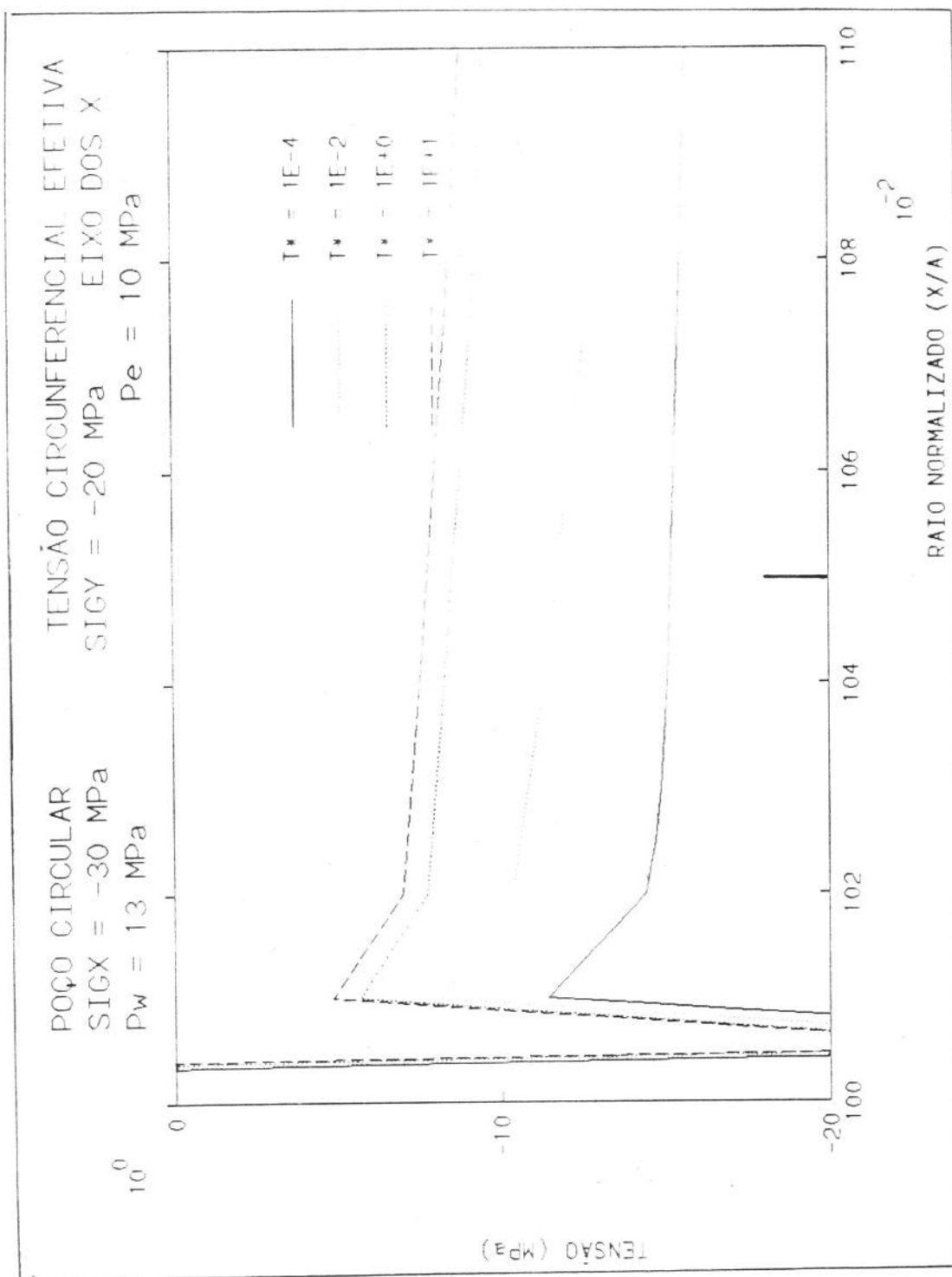


Figura 6.8.59 - Poço circular $\theta = 0^\circ$
Tensão circunf. efetiva (MPa)
Proximidades do furo

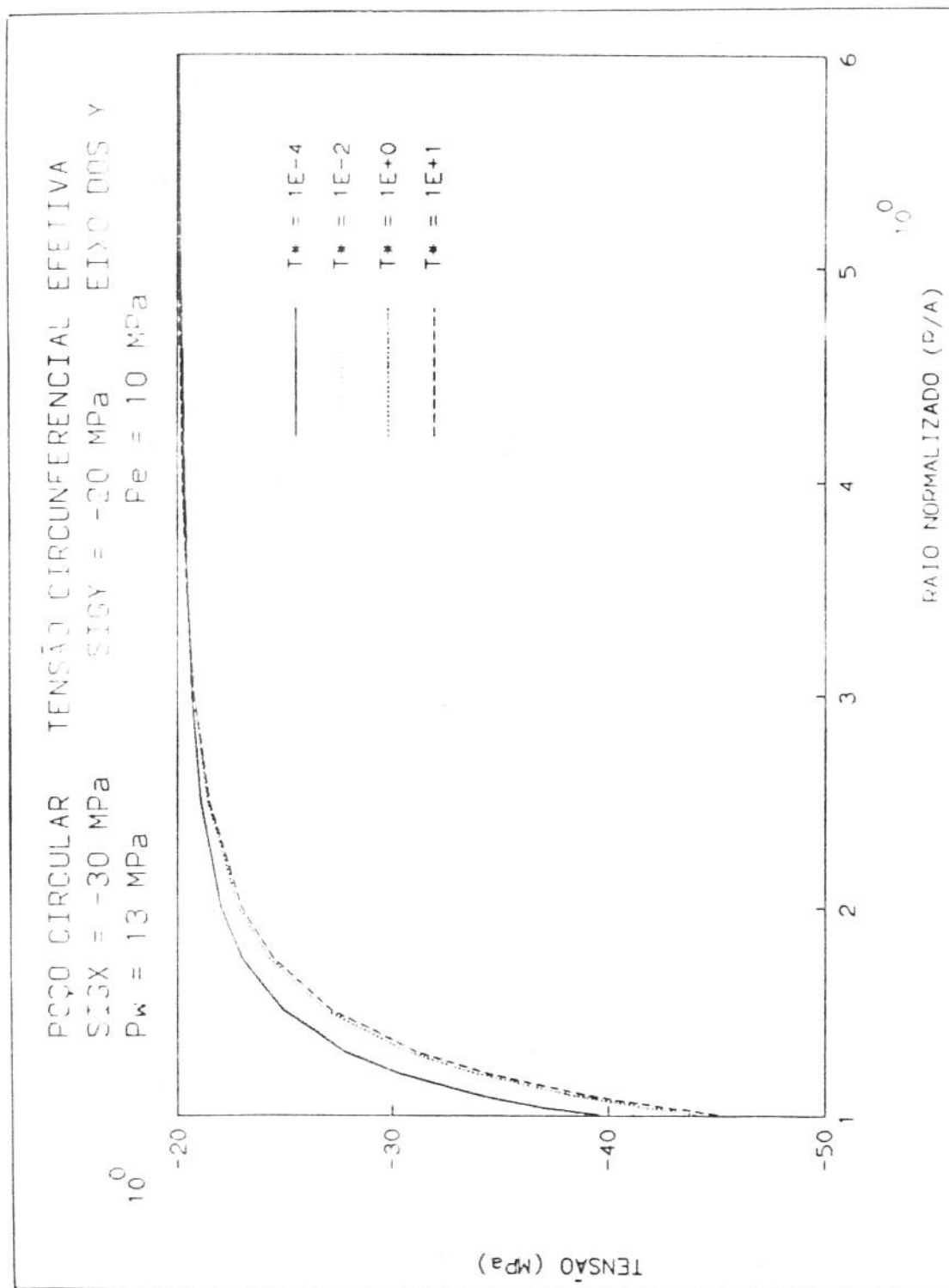


Figura 6.8.60 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
 Tensão circunf. efetiva (MPa)

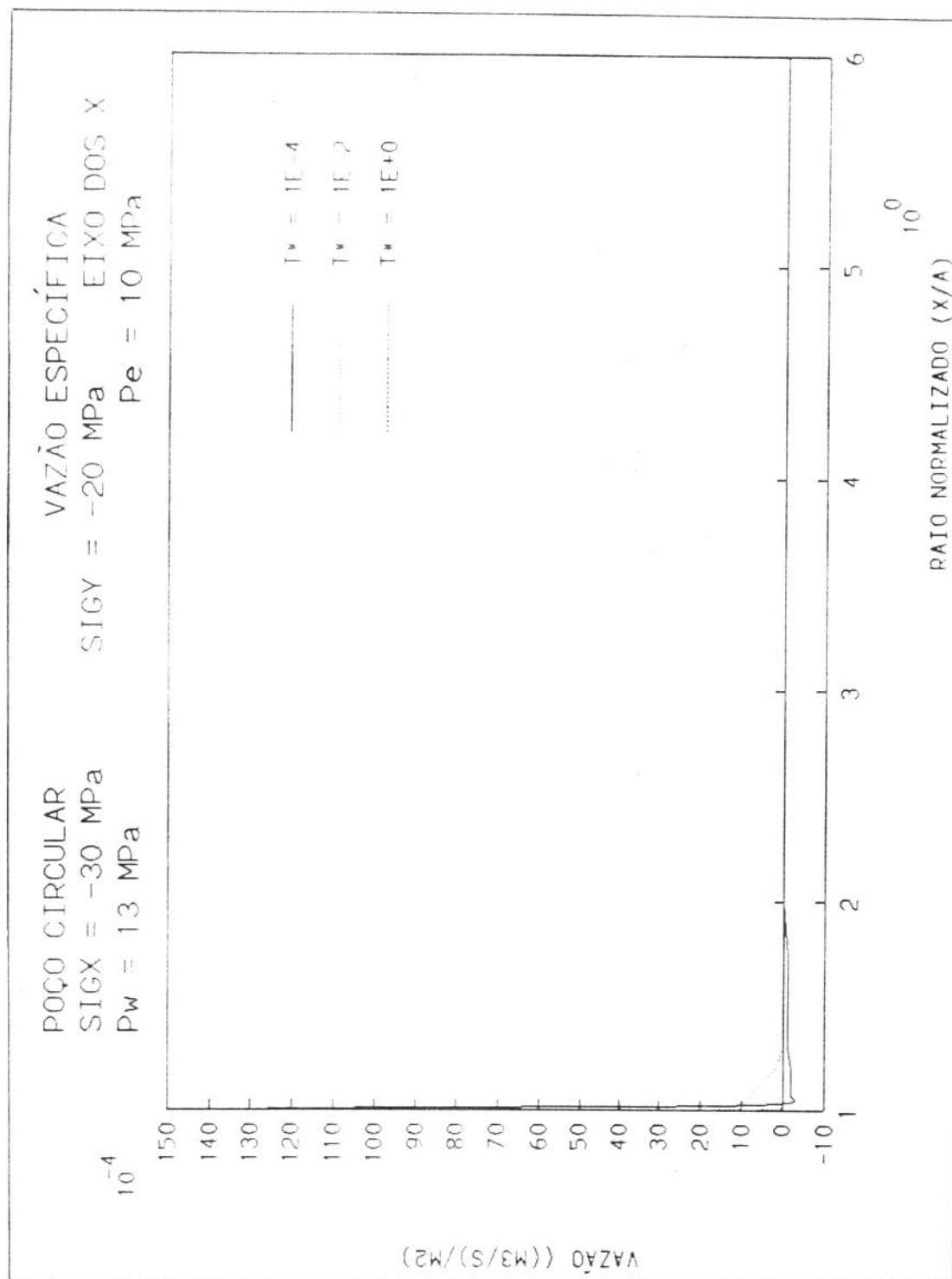


Figura 6.8.62 - Poço circular $\theta = 0^0$
 Vazão radial $((m^3/s)/m^2)$

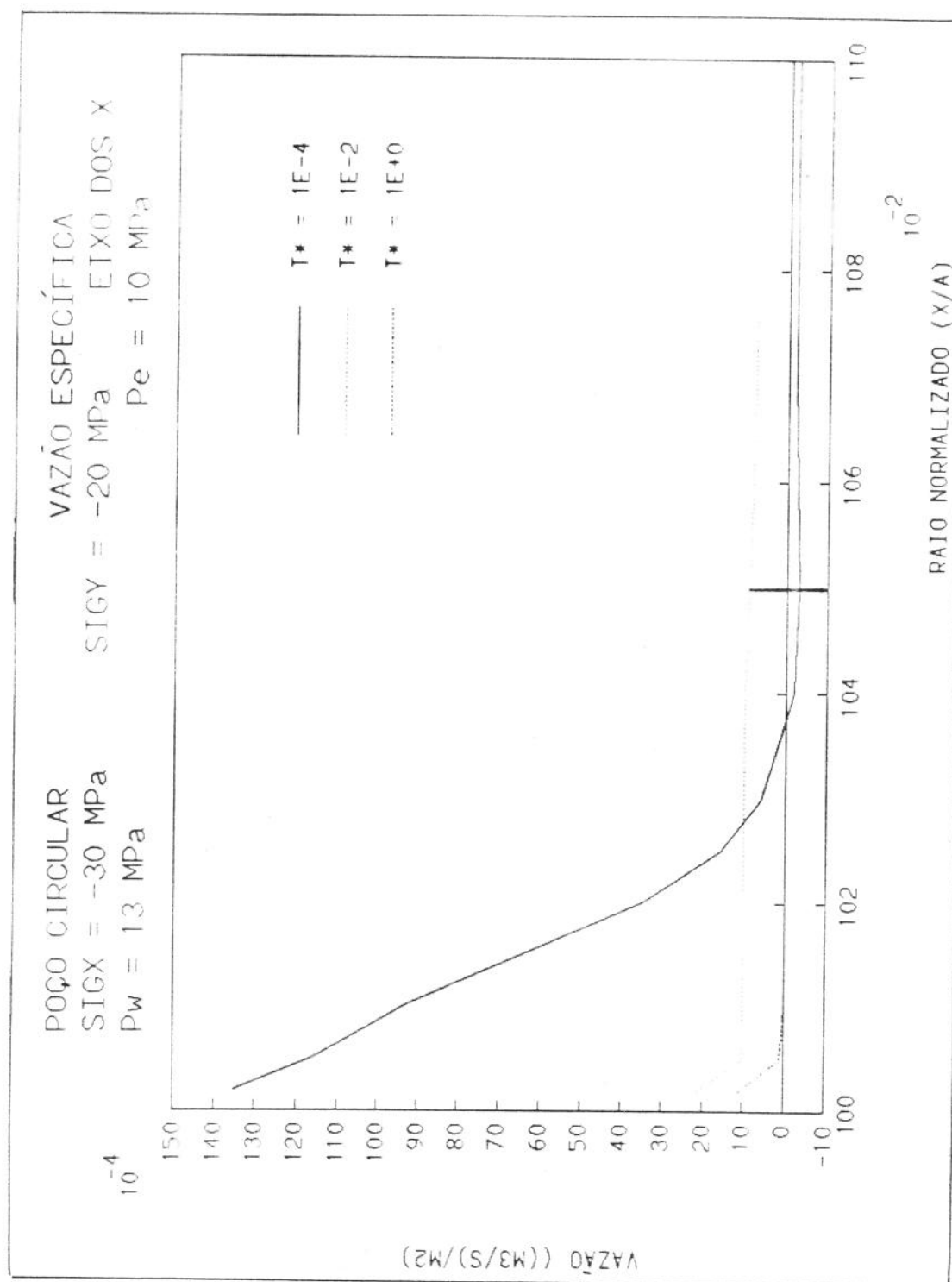


Figura 6.8.63 - Poço circular $\theta = 0^0$
Vazão radial ((m³/s)/m²)
Proximidades do furo

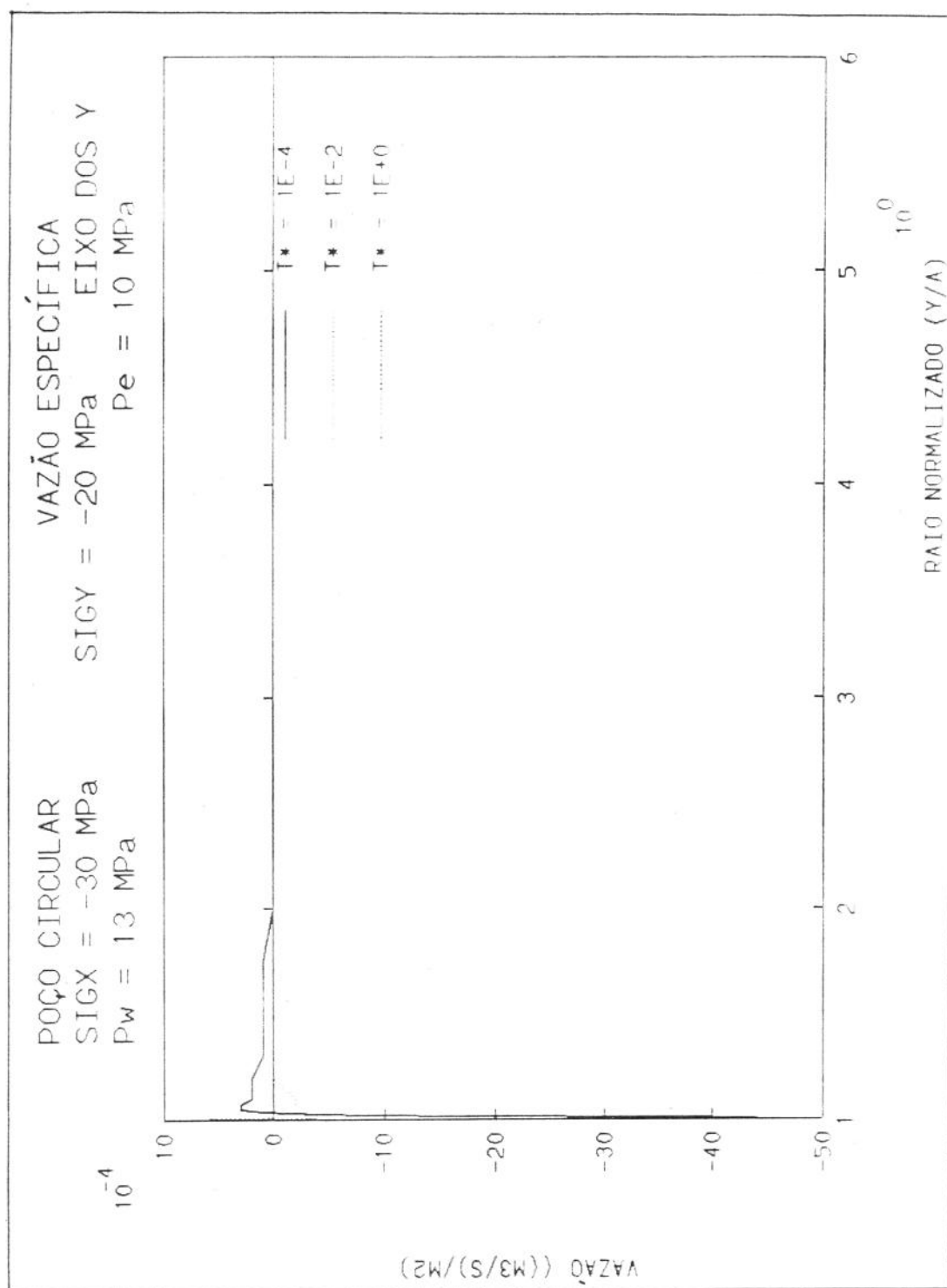


Figura 6.8.64 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Vazão radial $((m^3/s)/m^2)$

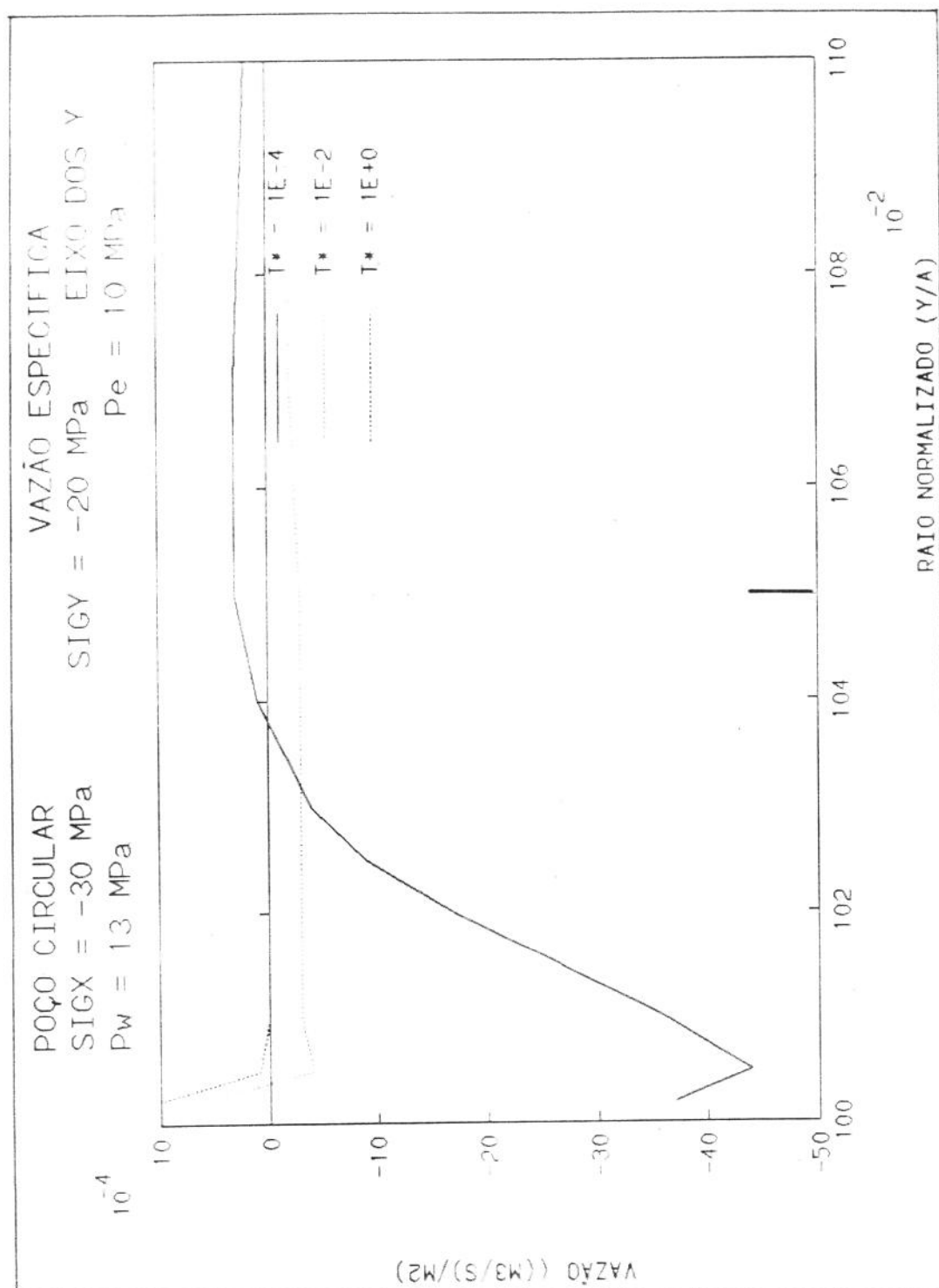


Figura 6.8.65 - Poço circular $\theta = 90^\circ$
Vazão radial $((m^3/s)/m^2)$
Proximidades do furo

6.9 Fluido não penetrante

Determinado fluido tem um comportamento não penetrante quando não ocorre fluxo do poço para a formação. A não ocorrência do fluxo pode ser fato natural, caso de uma formação com permeabilidade zero, ou induzido, caso dos fluidos de perfuração que formam um reboco impermeável na parede do poço.

Sabe-se [123] que a tensão circunferencial efetiva induzida por um fluido penetrante é maior do aquela criada por um fluido não penetrante.

Para verificar este fato foram usados os mesmos dados do item anterior, porém com uma pressão dentro do poço maior, 25 MPa, o que corresponde a 3626 psi. Teoricamente, tem-se os seguintes valores para a tensão circunferencial efetiva maior [123]:

Fluido não penetrante

$$\sigma_{\theta\theta_e} = 3\sigma_2 - \sigma_1 + p_w + p_e$$

$$\sigma_{\theta\theta_e} = 3(-20) - (-30) + 25 + 10 = 5 \text{ MPa (725 psi)}$$

Fluido penetrante

$$\sigma_{\theta\theta_e} = 3\sigma_2 - \sigma_1 + (p_w - p_e) \left(2 - \alpha \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) + 2p_e$$

$$\sigma_{\theta\theta_e} = 3(-20) - (-30) + 15[2 - 0.893(1-0,4)/(1-0,2)] + 20$$

$$\sigma_{\theta\theta_e} = 9,95 \text{ MPa (1444 psi)}$$

A figura 6.9.01 mostra a evolução da tensão circunferencial efetiva para os 2 casos, para um tempo adimensional t^* igual a 10. No caso de o meio poroso ter uma resistência à tração igual a 6 MPa (870 psi) ocorreria uma fratura radial com o fluido penetrante; já o fluido não penetrante não criaria fratura alguma.

Observe-se que esta tensão circunferencial efetiva maior ocorre no eixo dos x, criando fraturas perpendiculares ao eixo dos y, que é a direção da menor tensão tectônica.

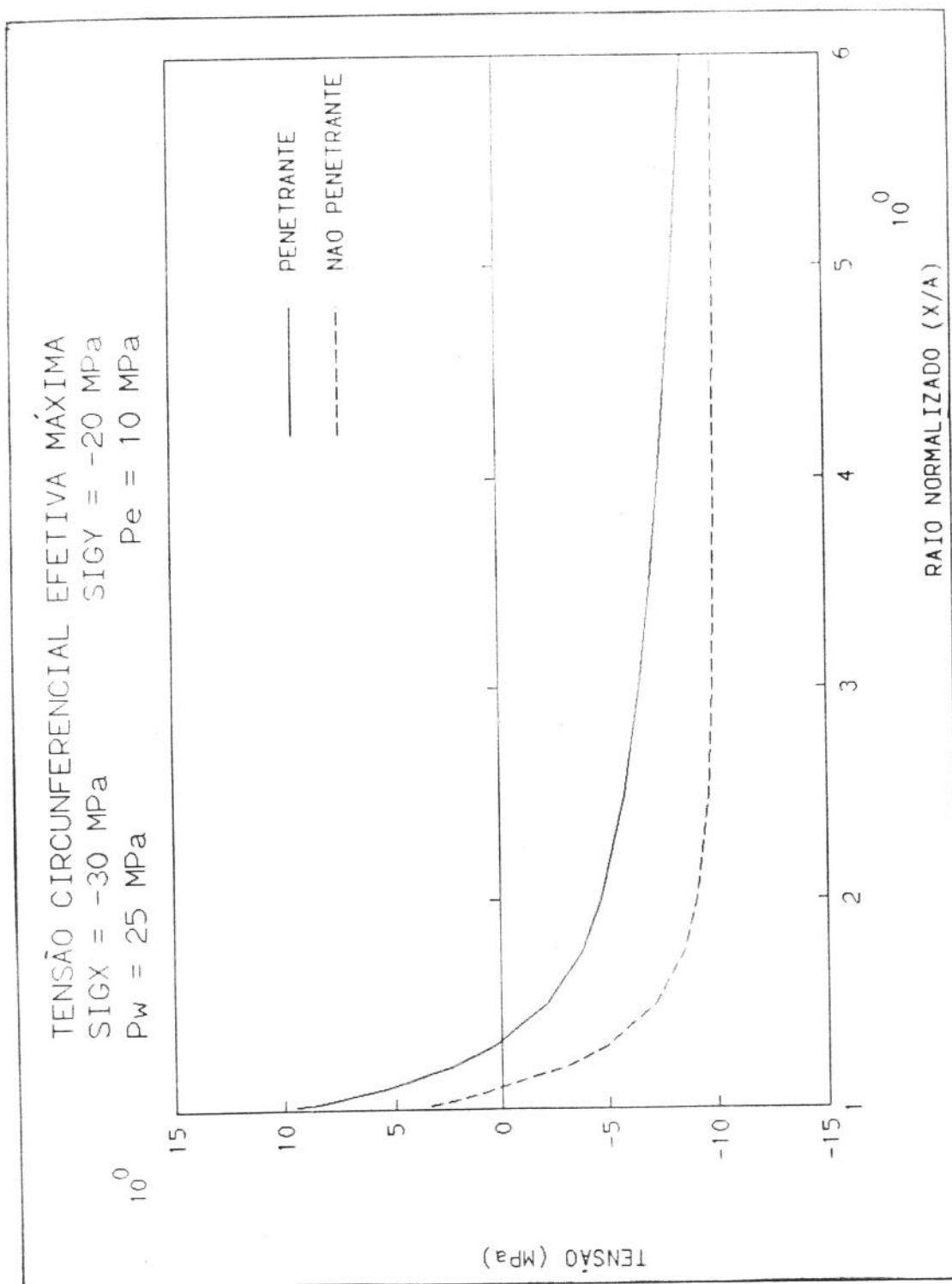


Figura 6.9.01 - Poço circular

Fluido penetrante x não penetrante

Tensão circunferencial efetiva

6.10 Fator de intensidade de tensão

A evolução do fator de intensidade de tensão, K_I , de uma fratura em um meio poroso, ao longo do tempo, não é muito conhecido na literatura [40, 87, 89, 90, 91, 93, 94, 138]. Este fator corresponde ao chamado modo I de fratura, que é a fratura por tração [139, 140, 141].

Por aquela razão, determinou-se o seu comportamento, simulando-se uma fratura plana de 1,0 m de comprimento e de espessura desprezível em relação ao comprimento, em um cubo de 2m de lado. Como o problema é simétrico simulou-se apenas uma das faces de uma das asas da fratura. O contorno foi discretizado com 27 elementos lineares convenientemente dispostos. As condições de contorno e a geometria são mostradas na figura 6.10.01.

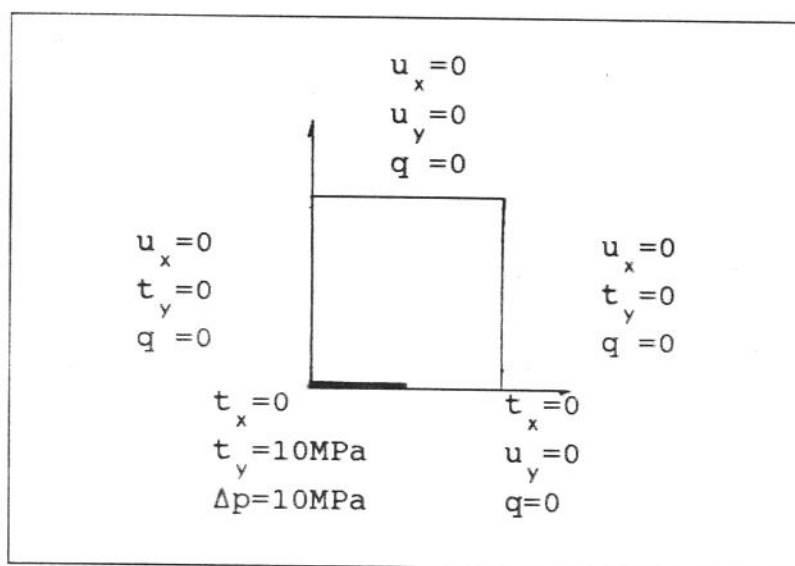


Figura 6.10.01 - Bloco cúbico com fratura

Inicialmente a fratura se achava totalmente descarregada e sem diferencial de pressão algum entre ela e o meio poroso. No tempo 0^+ ela foi pressurizada com 10 MPa.

As propriedades utilizadas são as seguintes:

Módulo de rigidez G : 6000 MPa

Módulo de Poisson drenado ν : 0,2

Módulo de Poisson não drenado ν_u : 0,4

Coefficiente de permeabilidade k : $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / (\text{MPa} \times \text{s})$

Dimensão característica r_c : 0,5 m

Para o calculo de K_I foi usado o método sugerido por Becker [40], no qual calcula-se-o através dos deslocamentos da parede da fratura.

O deslocamento normal na face de uma fratura em função da distancia r da ponta da mesma é dado por [139,140,141]

$$u_n = \frac{1-\nu}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_I = \frac{1-\nu}{G} \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_I r^{0,5}$$

$$u_n/r^{0,5} = \frac{1-\nu}{G} \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_I$$

Construindo-se o gráfico da variação de $u_n/r^{0,5}$ com a distância r obtém-se uma reta cuja intersecção com as ordenadas, r igual a 0, permite calcular o valor de K_I . A figura 6.10.02 mostra um conjunto de tais retas, cada uma correspondendo a um determinado tempo normalizado t^* .

Uma outra maneira de se obter K_I é construir o gráfico da variação do deslocamento u_n com a raiz quadrada do raio r . O coeficiente angular da reta assim obtida permite calcular o fator de intensidade de tensão K_I . Na figura 6.10.03 mostra-se um conjunto de tais retas para diversos t^* .

Os valores de K_I obtidos pelos dois métodos são vistos na figura 6.10.04. É esperado que este fator de intensidade de tensão caia com o tempo, pois no início ocorre o efeito do fluxo de fluido que vai diminuindo com o tempo, conforme a pressão de poros vai aumentando. Na figura 6.10.04 pode-se ver que é exatamente isto que ocorre.

É conveniente lembrar que o objetivo desta análise não foi determinar o valor mais correto, ou mais confiável, de K_I e sim conhecer-se o seu comportamento com o tempo.

A fratura propaga-se quando o fator de intensidade de tensão atinge um valor crítico K_{Ic} , que é uma propriedade do material chamada de fator de intensidade de tensão crítico ou tenacidade da fratura.

Abaixo relaciona-se alguns valores típicos para rochas poro-permeáveis mais comuns [142]:

Siltito - 1,04 a 1.81 MPa $\times$ m^{0,5}

Arenito - 0,44 a 1,76 MPa $\times$ m^{0,5}

Calcáreo - 0,44 a 1,04 MPa $\times$ m^{0,5}

Folhelho - 0,33 a 1,44 MPa $\times$ m^{0,5}

Os valores acima foram medidos sob uma tensão de confinamento baixa. *In situ* eles são provavelmente maiores [142].

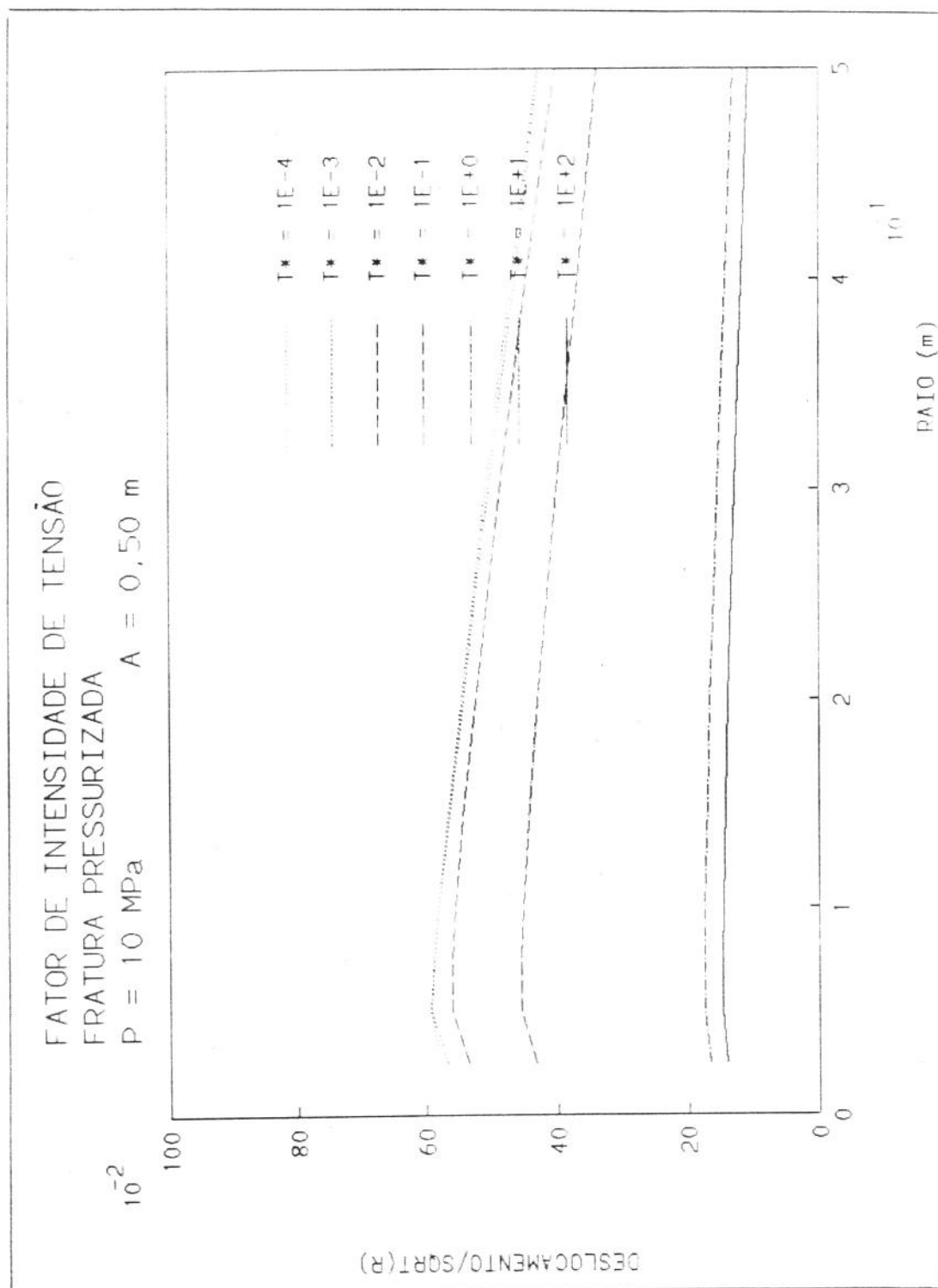


Figura 6.10.02 - Fator de intensidade de tensão
Metodo da intersecção

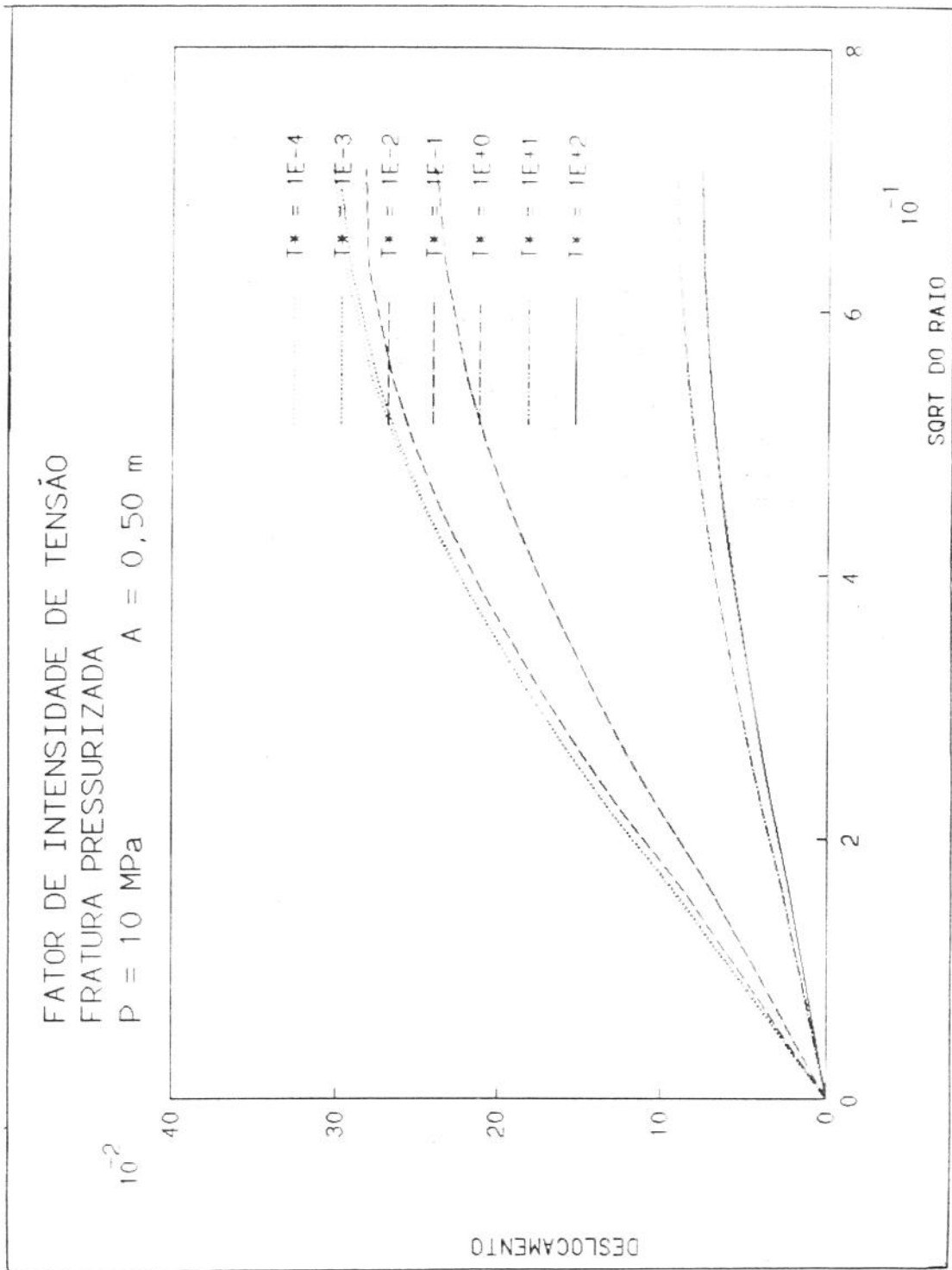


Figura 6.10.03 - Fator de intensidade de tensão
Método da inclinação

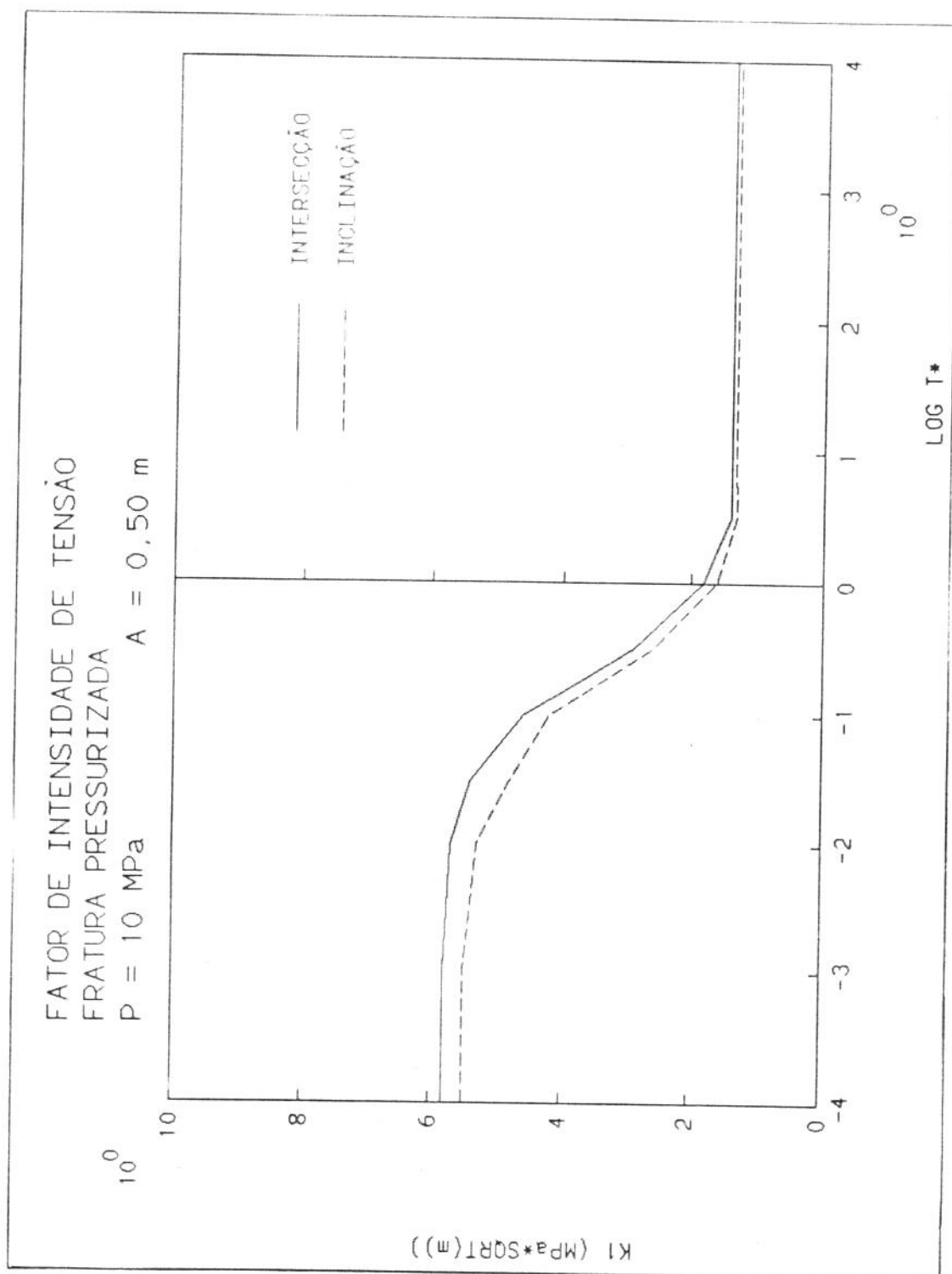


Figura 6.10.04 - Fator de intensidade de tensão
Variação com o tempo
Fratura pressurizada

6.11 Resumo

Neste capítulo apresenta-se a aplicação do MEC a alguns problemas poroelásticos com ênfase ao caso de um furo circular perfurado em um meio poroelástico.

Inicialmente, mostra-se a aplicação e os resultados relativos a dois problemas clássicos da teoria elástica: a placa infinita com um furo circular e o cilindro de Lamé.

O comportamento de um prisma poroelástico sob deformação constante (problema de Mandel) foi analisado. O caso de uma coluna poroelástica unidimensional foi apresentado e estudado. O exemplo de um semi-espaco poroelástico sob carregamento unidimensional também foi estudado.

Foi feita uma análise completa do caso de um poço circular vertical perfurado em um meio poroelástico.

O efeito do fluxo de fluido na tensão circunferencial em um poço circular vertical é mostrado.

A evolução do fator de intensidade de tensão K_I em um meio poroelástico é estudada.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Baseado em tudo que foi exposto nesta tese chega-se às conclusões relatadas a seguir.

- O método dos elementos de contorno é um método numérico que fornece bons resultados na solução de problemas poroelásticos e é de fácil utilização.
- O uso de elementos lineares apresenta melhores resultados na solução de problemas poroelásticos do que a utilização de elementos constantes. Isto é mais acentuado ainda em se tratando de variáveis derivadas, tais como as tensões e as vazões.
- Os elementos lineares permitem calcular o valor das variáveis em pontos mais próximos do contorno do que os constantes. Para as variáveis não derivadas é possível chegar-se até uma distância igual a um quarto do comprimento do elemento. Para as outras pode se chegar até a um meio do comprimento.
- Quanto mais discretizado é o contorno, melhores são os resultados obtidos.
- O algoritmo de Stehfest, para a inversão numérica das soluções obtidas no espaço de Laplace, fornece bons resultados para problemas poroelásticos, sendo que uma série com apenas 10 termos já é suficiente.
- O método de inversão numérica de Crump é também muito eficiente. Apresenta os inconvenientes de ser mais demorado e de ocupar mais memória, pois trabalha com variáveis complexas.
- Os efeitos poroelásticos são bastante importantes. Não considerá-los, no estudo do comportamento mecânico, de um meio poroso pode conduzir a erros significativos.
- A teoria poroelástica de Biot é totalmente aplicável aos problemas encontrados em engenharia de petróleo, tanto na análise da estabilidade do poço em si como no projeto de fraturas hidráulicamente criadas.

- As soluções obtidas, através da teoria poroelástica, tendem, assintoticamente, às dadas pela elasticidade clássica.
- Em um meio poroso carregado hidrostáticamente não há geração de pressão de poros, ocorrendo somente uma resposta elástica.
- A tensão radial total é pouco afetada por fenômenos poroelásticos; já a tensão circunferencial total é mais afetada, principalmente, na direção da maior tensão tectônica.
- A tensão radial efetiva é muito afetada, consequência da grande variação da pressão de poros. Caso a pressão dentro do furo seja baixa, ela poderá ser inicialmente uma tensão de tração o que possibilita a geração de de fraturas circunferenciais. Estas fraturas formam pequenos pilares, que rompem por compressão e/ou por flambagem, ocorrendo colapso do furo por lascamento. O furo se deforma alongando-se na direção da menor tensão tectônica.
- A tensão circunferencial efetiva também sofre bastante os efeitos poroelásticos. Caso a pressão dentro do furo seja alta esta tensão poderá vencer a resistência à tração do meio poroso, criando uma fratura radial perpendicular à direção da menor tensão tectônica. Esta ruptura por tração deve ser evitada durante a perfuração do furo e, pelo contrário, é buscada em uma estimulação por fraturamento hidráulico. A ruptura por tração é mais facilmente causada quando há fluxo de fluido do furo para o meio poroso (fluido penetrante). Em determinadas situações, a tensão circunferencial é maior dentro do meio poroso do que na parede do furo.
- O fator de intensidade de tensão, K_I , de uma fratura sob pressão, em um meio poroelástico, não é constante. Ele sofre os efeitos poroelásticos; varia com o tempo. Ele é decrescente atingindo um valor mínimo constante.

CAPÍTULO 8

RECOMENDAÇÕES

Espera-se que esta tese tenha mostrado a importância da poroelasticidade dentro da engenharia de petróleo e que sirva para divulgar a teoria de Biot. Ela é apenas um esforço inicial e muito ainda deverá ser feito, pois seria muita presunção achar que o tema foi total e completamente abordado. Assim sendo sugere-se o seguinte:

- Estudar os fenômenos poroelásticos em 3 dimensões. Um programa computacional com esta abordagem modelaria melhor o caso de poços não verticais e a estimulação por fraturamento hidráulico.
- Utilizar o método dos elementos de contorno com elementos quadráticos e assim verificar se há melhoria na precisão do resultados.
- Modelar a evolução de fraturas hidraulicamente criadas ao longo do tempo, simulando assim o seu crescimento, usando uma abordagem em 3D.
- Estudar a poroelasticidade não linear, ou seja, o caso em que as tensões não são linearmente dependentes das deformações. Esta condição reflete melhor a realidade, pois em rochas porosas o módulo de Young, geralmente, não é constante.
- Considerar os efeitos da variação de temperatura, no no comportamento do meio poroso em si como na medida dos parâmetros poroelásticos.
- Estudar a influência da compressibilidade do fluido ocupa o espaço poroso. Acredita-se que o comportamento de um meio poroso saturado varie conforme o fluido que o satura (água e/ou petróleo e/ou gas).
- Criar um banco de dados das propriedade elásticas e poroelásticas das formações petrolíferas brasileiras.

NOMENCLATURA E SIMBOLOGIA

LETRAS MAIÚSCULAS

A	-	Coeficiente poroelástico, Pa
B	-	Coeficiente de Skempton, Pa/Pa (adimensional)
C	-	Constante genérica
CE	-	Comprimento de determinado elemento
D	-	Porção genérica de um domínio Ω
E	-	Módulo de Young, Pa
E_f	-	Energia de deformação do fluido, J
E_e	-	Energia de deformação, J
F_i	-	Força de corpo por unidade de volume total, na direção i, N/m^3
$\bar{F}_i$	-	Força de corpo por unidade de volume total, na direção i, no campo de Laplace
F_p	-	Força genérica F aplicada no ponto p, N
G	-	Módulo de rigidez, Pa
	-	Matriz que contem as integrais das soluções fundamentais para os deslocamentos e para a vazão normal ao longo de cada elemento
H	-	Coeficiente poroelástico, Pa
	-	Matriz que contém as integrais das soluções fundamentais para o vetor tensão e para a pressão ao longo de cada elemento
J	-	Símbolo de Jacobiano
L	-	Comprimento de um elemento genérico
M	-	Coeficiente poroelástico, Pa
N	-	Coeficiente poroelástico, Pa
N1	-	Fator de forma do 1º nó
N2	-	Fator de forma do 2º nó
P	-	Coeficiente poroelástico, Pa
	-	Carregamento genérico
Q	-	Coeficiente poroelástico, Pa
R	-	Coeficiente poroelástico, Pa
S	-	Coeficiente poroelástico, Pa
S_{ij}	-	Tensor tensão de desvio, Pa
S_b	-	Area total de uma secção genérica, m^2

- S_l - Volume de fluido por unidade de volume poroso efetivo, m^3/m^3 (adimensional)
- S_p - Área de poros interconectados de uma secção genérica, m^2
- TIJ - Integral da solução fundamental $\bar{t}_{ij}^*$ ao longo de determinado elemento
- TP - Vetor que contém os componentes do vetor tensão e as pressões em cada nó do contorno
- U_x - Deslocamento médio do fluido na direção x, m
- UQ - Vetor que contém os deslocamentos e as vazões normais em cada nó do contorno
- V - Energia potencial elástica por unidade de volume, J/m^3
- V_b - Volume total, m^3
- V_l - Volume de líquido, m^3
- V_p - Volume poroso efetivo, m^3
- W_E - Trabalho realizado pelas forças externas, J
- W_I - Trabalho realizado pelas forças internas, J
- X - Força de corpo por unidade de massa na direção x, N/Kg
- Y - Força de corpo por unidade de massa na direção y, N/Kg
- Z - Força de corpo por unidade de massa na direção z, N/Kg

LETRAS MINÚSCULAS

- a - Raio do furo, m
- Dimensão característica
- c - Coeficiente de difusão (coeficiente generalizado de consolidação), m^2/s
- $\bar{d}_{ikj}^*$ - Função de influência (núcleo) para o tensor tensão no campo de Laplace
- $\bar{d}_{3kj}^*$ - Função de influência (núcleo) para o tensor tensão no campo de Laplace
- $\bar{d}_{ij}^*$ - Função de influência (núcleo) para a vazão no campo de Laplace
- $\bar{d}_{3j}^*$ - Função de influência (núcleo) para a vazão no campo de Laplace

e	- Dilatação da parte sólida, m^3/m^3 (adimensional)
e_j	- Vetor unitário na direção j
e_{ij}	- Tensor deformação, m/m (adimensional)
e_{xy}	- Deformação na direção y no plano perpendicular a x , m/m (adimensional)
$\tilde{e}_{ij}$	- Tensor deformação no campo de Laplace
f_i	- Força de corpo do fluido por unidade de volume de fluido na direção i , N/m^3
$\tilde{f}_i$	- Força de corpo do fluido por unidade de volume de fluido na direção i no campo de Laplace
m	- Massa de fluido por unidade de volume total, Kg/m^3
n	- Vetor normal unitário no contorno
n_i	- Componente do vetor n na direção i
p	- Pressão no fluido, Pa
p_e	- Pressão estática do reservatório
p_o	- Pressão externa, Pa
p_i	- Pressão interna, Pa
p_w	- Pressão no furo, Pa
p_0	- Pressão de poros original, Pa
p'	- Pressão confinante, Pa
$\tilde{p}$	- Pressão no contorno no campo de Laplace
$\tilde{p}^j$	- Pressão no contorno no campo de Laplace no nó do elemento j (elementos constantes)
$\tilde{p}^{kj}$	- Pressão no contorno no campo de Laplace no nó k do elemento j (elementos lineares)
$\tilde{p}^*$	- Solução fundamental para a pressão no espaço de Laplace, gerada por uma fonte puntual instantânea
$\tilde{p}_j^*$	- Solução fundamental para a pressão no espaço de Laplace, gerada por uma força puntual instantânea na direção j
q	- Carregamento linear, N/m
q_i	- Vazão na direção i por unidade de área, $(m^3/s)/m^2$
$\tilde{q}$	- Vazão no contorno na direção da normal no campo de Laplace
$\tilde{q}^j$	- Vazão no contorno na direção da normal no campo de Laplace no nó do elemento j (elementos constantes)

- $\tilde{q}^{kj}$ - Vazão no contorno na direção da normal no campo de Laplace no nó k do elemento j (elementos lineares)
- $\tilde{q}^*$ - Solução fundamental para a vazão na direção da normal no campo de Laplace, gerada por uma fonte puntual instantânea
- $\tilde{q}_j^*$ - Solução fundamental para a vazão na direção da normal no campo de Laplace, gerada por uma força puntual instantânea na direção j
- r - Distância do ponto de colocação ao ponto de integração
- r_c - Dimensão característica
- s - Parâmetro de Laplace
- $\tilde{s}_{ikj}^*$ - Função de influência (núcleo) para o tensor tensão no campo de Laplace
- $\tilde{s}_{3kj}^*$ - Função de influência (núcleo) para o tensor tensão no campo de Laplace
- $\tilde{s}_{ij}^*$ - Função de influência (núcleo) para a vazão no campo de Laplace
- $\tilde{s}_{3j}^*$ - Função de influência (núcleo) para a vazão no campo de Laplace
- t - Tempo, s
- t^* - Tempo adimensional
- t_i - Componente na direção i do vetor tensão no contorno, Pa
- $\bar{t}_i$ - Vetor tensão no contorno no campo de Laplace
- $\bar{t}_i^j$ - Vetor tensão no contorno no campo de Laplace no nó do elemento j (elementos constantes)
- $\bar{t}_i^{kj}$ - Vetor tensão no contorno no campo de Laplace no nó k do elemento j (elementos lineares)
- $\bar{t}_i^*$ - Solução fundamental para o vetor tensão no campo de Laplace gerado por uma fonte puntual instantânea
- $\bar{t}_{ij}^*$ - Solução fundamental para o vetor tensão no campo de Laplace gerado por uma força puntual instantânea na direção j
- u_p - Deslocamento médio da parte sólida no ponto p, m
- u_i - Componente na direção i do vetor deslocamento, m

- u_x - Deslocamento médio da parte sólida na direção x , m
- $\bar{u}_i$ - Deslocamento na direção i no campo de Laplace
- $\bar{u}_{ij}$ - Deslocamento na direção i no campo de Laplace no nó do elemento j (elementos constantes)
- $\bar{u}_{ij}^{kj}$ - Deslocamento na direção i no campo de Laplace no nó k do elemento j (elementos lineares)
- $\bar{u}_i^*$ - Solução fundamental para o deslocamento no campo de Laplace gerado por uma fonte puntual instantânea
- $\bar{u}_{ij}^*$ - Solução fundamental para o deslocamento no campo de Laplace gerado por uma força puntual instantânea na direção j
- v - Volume de líquido por unidade de volume total m^3/m^3 (adimensional)
- w - Pêso de ponderação na integração Gaussiana

LETRAS GREGAS

- α - Coeficiente poroelástico de Biot, adimensional
- β - Vazão da fonte por unidade de volume, $(m^3/s)/m^3$
- $\tilde{\beta}$ - Vazão da fonte no campo de Laplace
- γ - Variação do volume de líquido contido nos poros por unidade de volume total por unidade de pressão, $(m^3/m^3)/Pa$
- Γ - Contorno de um domínio genérico
- δ - Delta de Dirac
- δ_{ij} - Delta de Kronecker
- Δ - Símbolo de uma variação qualquer
- ∂ - Símbolo de derivada parcial
- ε - Dilatação no fluido, m^3/m^3 (adimensional)
- ζ - Variação do volume de líquido contido nos poros por unidade de volume total, m^3/m^3 (adimensional)
- $\tilde{\zeta}$ - Variação do volume de líquido contido nos poros por unidade de volume total no campo de Laplace
- η - Coeficiente poroelástico, adimensional
- θ - Coordenada angular em um sistema de coordenadas polares, $^\circ$

ϑ	- Ordem de uma função de Bessel modificada de 2 ^o espécie
k	- Mobilidade do fluido, $m^2/(Pa \times s)$
k'	- Permeabilidade do meio poroso, m^2
K_{ij}	- Coeficiente de Darcy, $(Pa \times s)/m^2$
K	- Módulo de compressibilidade volumétrica drenado, Pa
K_u	- Módulo de compressibilidade volumétrica não drenado, Pa
K_f	- Módulo de compressibilidade volumétrica do fluido, Pa
K_ϑ	- Função de Bessel modificada de 2 ^o espécie de ordem ϑ
λ	- Coeficiente elástico, Pa
μ	- Viscosidade dinâmica, $Pa \times s$
ν	- Módulo de Poisson drenado, m/m (adimensional)
ν_u	- Módulo de Poisson não drenado, m/m (adimensional)
ξ	- Distância entre o ponto de colocação e o ponto de integração normalizada no campo de Laplace
ρ	- Massa específica do meio poroso, Kg/m^3
ρ_f	- Massa específica do fluido, Kg/m^3
ρ_1	- Massa de fluido por unidade de volume total, Kg/m^3
σ	- Tensão no fluido, Pa - Tensor tensão médio (hidrostático), Pa - Tensor tensão genérico, Pa
σ_{ij}	- Tensor tensão, Pa
σ'_{ij}	- Tensor tensão total, Pa
$\tilde{\sigma}'_{ij}$	- Tensor tensão total no campo de Laplace
σ_{rr}	- Tensão radial total
$\sigma_{r\theta}$	- Tensão de cisalhamento, Pa
σ_{xy}	- Tensão na direção y no plano perpendicular a x, Pa
$\sigma_{\theta\theta}$	- Tensão circunferencial total, Pa
$\sigma_{\theta\theta e}$	- Tensão circunferencial efetiva, Pa
Σ	- Símbolo de somatório
ϕ	- Porosidade efetiva, m^3/m^3 (adimensional)
ψ	- Variável de transformação na integração Gaussiana
Ω	- Domínio genérico

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LOVE H. E., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*,
Dover Publications, Inc, New York, 19
- [2] UGURAL A. C., FENSTER. K., *Advanced Strength and Applied Elasticity*,
Elsevier, New York. 1979.
- [3] CHEN W. F., SALEEB A. F., *Constitutive Equations for Engineering Materials*,
John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [4] GOULD L. P., *Introduction to Linear Elasticity*,
Spring-Verlag, New York, 1983.
- [5] FENNER P. T., *Engineering Elasticity*,
John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [6] TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N., *Theory of Elasticity*
McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [7] VOLTERRA E., GAINES J. M., *Advanced Strength of Materials*,
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N J, 1971.
- [8] MUSKHELISHVILI N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*,
P. Noordhoff Ltd., Groningen-The Netherlands, 1963.
- [9] TERZAGHI K., *Theoretical Soil Mechanics*,
New York, 1943.
- [10] BIOT M. A., "General Theory of Three Dimensional Consolidation",
J. Appl. Physics, Vol 12,155-164, Feb/1941.
- [11] BIOT M. A., "Le Problème de la Consolidation de Matieres Argileuses sous une Charge",
Ann. Soc. Sci., Bruxelles, BSS, 110-113, 1935.
- [12] CRYER C. W., "A Comparision of the Three-Dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi",
Quart. J. Mech. and Appl. Math., Vol XVI, Pt 4, 1963
- [13] BIOT M. A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid",
J. Appl. Physics, Vol 26, 182-185, Feb/1955.

- [14] BIOT M. A., "General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material", *J. Appl. Mechanics*, Mar, 1956.
- [15] BOURBIE T., COUSSY O., ZINSENER B., *Acoustic of Porous Media*, Gulf Publ. Co., 1987.
- [16] BIOT M. A., "Consolidation Settlement Under a Rectangular Load Distribution", *J. Appl. Physics*, Vol 12, 426-430, May/1941.
- [17] BIOT M. A. , "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media", *J. Appl. Physics*, Vol 33, 1482-1498, Apr/1962.
- [18] BOUTECA M. "Elements of Poro-elasticity for Reservoir Engineering", *Revue de L'Institut Francais du Pétrole*, Vol 47, N.4 479-490, 1992.
- [19] RICE J. R., CLEARY M. P., "Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-saturated Elastic Porous Media with Compressible Constituents", *Reviews of Geophysics and Space Physics*, Vol 14, 227-241, 1976.
- [20] CHENG A. H.-D., DETOURNAY E., "A Direct BEM for Plane Strain Poroelasticity", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol 12, 551-572, 1988.
- [21] SKEMPTON A. W., "The Pore Pressure Coefficients A and B", *Geotechnique*, Vol 4, 143-147, 1954.
- [22] BIOT M. A., WILLIS D. G., "The Elastic coefficients of the Theory of Consolidation", *Journal of Applied Mechanics*, 594-601, Dec, 1959.
- [23] MORITA N., GRAY K. E., SROUJL F. A., JOGI P. N., "Rock Property Changes During Reservoir Compactation", *SPE Formation Evaluation*, 197-205, Sept/1992.
- [24] DETOURNAY E., CHENG A.H.-D., "Poroelastic Response of a Borehole in a Non-hydrostatic Stress Field", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol 25, 171-182, 1988.

- [25] NUR A., BYERLEE J. D., "An Exact Effective Stress Law for Elastic Deformation of Rock with Fluids", *J. Geophysical Research*, Vol 76, 26, 6414-6419, 1971.
- [26] RUDNICK J. W., "Effect of Pore Fluid Diffusion on Deformation and Failure of Rock", in *Mechanics of Geomaterials*, Chp 15, 315-347, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1985.
- [27] YEW C., JOGI P. N., "The Determination of Biot's Parameter for Sandstones", *Exper. Mech.*, Vol 18, 166-172, 1978.
- [28] FATT I., "The Biot-Willis Elastic Coefficients for a Sandstone", *J. Appl. Mech*, Vol 26, 296-297, 1959.
- [29] KIM Y. K., "Dynamic Characterisation of Poroelastic Materials", *Exper. Mech.*, 252-258 Jul/1979.
- [30] CARROLL M. M., "Mechanical Response of Fluid Saturated Porous Materials", *15th Int. Congr. Theoretical and Applied Mkechanics*, 251-262, Toronto, 1980.
- [31] KRIEF M., GARAT J., STELLINGWERFF J., VENTRE J., "A Petrophysical Interpretation Using the Velocities of P and S Waves (Full-waveform Sonic)", *The Log Analyst*, 355-369, Nov-Dec/1990.
- [32] ZIMMERMAN R. W., *Compressibility of Sandstones*, Elsevier, New York, 1991.
- [33] CHALATURNIK R. J., SCOTT J. D., "Evaluation of Reservoir Properties from Geomechanical Tests", *The J. Canad. Petr. Tech.*, Vol 31, 31-40, 1992.
- [34] GEERTSMA J., "The Effect of Fluid Pressure Decline on Volumetric Changes of Porous Rocks", *Petrol. Trans. Am. Inst. Min. Engrs.*, Vol 210, 331-340, 1957.
- [35] GEERTSMA J., "A Remark on the Analogy Between Thermoelasticity and the Elasticity of Saturated Porous Media", *J. Mech. Physics of Solids*, Vol 6 13-16, 1957.

- [36] GEERTSMA J., "Problems of Rock Mechanics in Petroleum Production Engineering",
Proc. First Cong. ISRM, Lisbon, Vol 3, 585-594, 1966
- [37] LAMBE T. W., WHITMAN R. V., *Soil Mechanics*,
John Wiley & Sons, Singapore, 1979.
- [38] DETOURNAY E., MCLENNAN J. D., ROOGIERS J. C.,
"Poroelastic Concepts Explain Some of the Hydraulic Fracture Mechanisms",
SPE 15262, 1985.
- [39] BORBA G. L., *Formulação Direta do BEM para Tratamento do Estado Plano da Poroelasticidade Acoplada*,
Tese Mestrado, UNICAMP, 1992.
- [40] BECKER A. A., *The Boundary Element Method in Engineering*,
McGraw-Hill Book Co., New York 1992.
- [41] JAWSON M. A., "Integral Equation Methods in Potential Theory. I",
Proc. Roy. Soc. London, Vol A273, 23-32, 1963.
- [42] RIZZO F. J., "An Integral Equation Approach to Boundary Values Problems of Classical Elastostatics",
Q. Appl. Math., vol 25, 83-95, 1967.
- [43] CRUSE T. A., RIZZO F. J., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem. I",
J. Math. Anal. and Applic., Vol 22, 244-259, 1968.
- [44] CRUSE T. A., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem. II",
J. Math. Anal. and Applic., Vol 22, 341-355, 1968.
- [45] CRUSE T. A., "Application of BIEM to Three-dimension Stress Analysis",
Computer and Structures, Vol 3, 509-527, 1973.
- [46] CRUSE T. A., "An Improved BIEM for Three-dimensional Elastic Stress Analysis",
Computer and Structures, Vol 4, 741-754, 1974.
- [47] CHAPRA S. C., *Numerical Methods for Engineers*,
Mcgraw-Hill Int. Editions, New York, 1990.

- [48] PRESS W. H., FLANNERY B. P., TEUKOLSKY S. A.,
VETTERLING W. T., *Numerical Recipes*,
Cambridge Univ. Press, 1991
- [49] BREBBIA C. A., DOMINGUEZ J., *Boundary Elements. An
Introductory Course*, Computational Mech. Publ., 1989.
- [50] HARTMAN F., *Introduction to Boundary Elements*,
Spring Verlag, Berlin, 1983.
- [51] BREBBIA C. A., *The BEM for Engineers*,
Pentech Press, London, 1984.
- [52] BREBBIA C. A., "Basic Principles and Applications",
in *Topics in BE Research*, Vol 1, ed C. A. Brebbia,
Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [53] BREBBIA C. A., "Applications in Geomechanics", in
Topics in BE Research, Vol 4, ed C. A. Brebbia,
Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [54] BREBBIA C. A., WROBEL L. C., "Application of BEM in
Fluid Flow",
Second Int. Conf. on FE in Water Resources, Pentech
Press, London, 1978.
- [55] BANERJEE P. K., BUTTERFIELD R., *BEM in Engineering
Sciences*,
McGraw-Hill Ltd., London, 1983.
- [56] TAIGBENU A. E., LIGGET J. A., "BE Calculation of
Diffusion Equation",
J. Eng. Mech. ASCE, Vol III, 311-328, 1985.
- [57] DARGUSH G. F., BANERJEE P. K., "A Time Domain BEM
for Poroelasticity",
Int. J. Num. Meth. in Engineering, Vol 28,
2423-2449, 1989.
- [58] GOMEZ-LERA M. S., ALARCON E., "Elastostatics", in
Boundary Element Methods in Mechanics, chp 3, Edt.
D. E. Beskos, Elsevier Science Publ. B. V., 1987.
- [59] LIGGET J. A., LIU P. L-F., *The BIEM for Porous Media
Flow*,
Georg Allen & Unwin, London, 1983.
- [60] MANOLIS G. B., BESKOS D. E., *BEM in Elastodynamics*,
Unwin Hyman Ltd., London, 1988.

- [61] KOBAYASHI S., 'Fundamentals of BIE Methods in Elastodynamics', in
Topics in BE Research, ed. C. A. Brebbia
Spring-Verlag.
- [62] KIKANI J., HORNE R. N., "Pressure-Transient Analysis of Arbitrarily Shaped Reservoir with the BEM",
SPE Formation Evaluation, 53-60, Mar/1992.
- [63] BADMUS T., CHENG A. H.-D., GRILLI S., "A Laplace Transform-based Three Dimensional BEM for Poroelasticity",
Int. J. Num. Meth. in Engineer., Vol 36, 67-85, 1993
- [64] ZIENKIEWICZ O. C., SHIOMI T., "Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media; the Generalized Biot Formulation and its Numerical Formulation",
Int. J. Num. and Analytical Meth in Geomechanics, Vol. 8, 71-96, 1984.
- [65] DARGUSH G. F., BANERJEE P. K., "BEM for Poroelastic and Thermoelastic Analysis", in
Industrial Applications of Boundary Elements Method, Elsevier Applied Science, Chp 4, 119- , 1989.
- [66] WIEBE T., ANTES H., "A Time Domain Integral Formulation of Dynamic Poroelasticity",
Acta Mechanica, Vol 90, 125-127, 1991.
- [67] SEGERLIND L. J., *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc New York, 1984.
- [68] GOMEZ-LERA M. S., PARIS E., ALARCON E., "Treatment of Singularities in 2-D Domains Using BIEM",
Appl. Math. Modelling, Vol 6, 111-118, 1982.
- [69] PREDELEANU M., "Development of BEM to Dynamic Problems for Porous Media",
Appl. Math. Modelling, Vol 8, 378-382, 1984.
- [70] YAN G., LIN F-B, "Treatment of Corner Node Problems and its Singularity",
Eng. Anal. with Boundary Elements, Vol 13, 75-81, 1994.
- [71] POLIZZOTTO C., "An Alternative Formulation of the Boundary Elements Method "
Appl. Math. Modelling, Vol 6, 97-99, 1982.

- [72] CERROLAZA M., ALARCON E., "A Bi-cubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in BE",
Int. J. Num. Meth. in Engineering, Vol 28, 987-999, 1989.
- [73] VABLE M., "Importance and use of Rigid Body Motion Mode in BEM",
Int. J. Num. Meth. in Engineering, Vol 29, 453-472, 1990.
- [74] PEIRCE A. P., SPOTTISWOODE S., NAPIER J. A. L., "The Spectral BEM: a New Window on BE in Rock Mechanics",
Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol 29, 379-400, 1992.
- [75] PAPOULIS A., "A New Method of Inversion of Laplace Transform",
Quart. Appl. math., Vol 14, 405-414, 1957.
- [76] MILLER M. K., GUY W. T., "Numerical Inversion of the Laplace Transform by Use of Jacobi Polynomials",
SIAM J. Numer. Anal., Vol 3, 624-635, 1966.
- [77] STEHFEST H., "Numerical Inversion of Laplace Transform",
Communications of the ACM, Vol 13, 47-48, 1970
Communications of the ACM, Vol 13, 624, 1970
- [78] COST T. L., BECKER E. E., "A Multidata Method of Approximate Laplace Transform Inversion",
Int. J. Num. Meth. in Engineering, Vol 2, 207-219, 1970.
- [79] CRUMP K. S., "Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation",
J. Assoc. Computing Machinery, Vol 23, 89-96, 1976.
- [80] DAVIS B., MARTIN B., "Numerical Inversion of the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods
J. of Comput. Physics, Vol 33, 1-32, 1979.
- [81] JUNQUEIRA S. L. M., *Aplicacao da Transformada de Laplace ao Problema Inverso da Conducao de Calor*, Tese de mestrado, UNICAMP/1979
- [82] CHENG A. H.-D., PREDELEANU M., "Transient Boundary Formulation for Linear Poroelasticity",
Appl. Math. Modelling, Vol 11, 285-290, 1987.

- [83] CHENG A. H.-D., LIGGET J. A., "BIEM for Linear Porous Elasticity with Applications to Soil Consolidation", *Int. J. Num. Meth. Engineer.*, Vol 20, 255-278, 1984
- [84] SLADEK V., SLADEK J., "Improved Computation of Stresses Using the BEM", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 10, 249-255, Aug/1986.
- [85] CARTER J. P., BOOKER J. R., "Elastic Consolidation Around a Deep Circular Tunnel", *Int. J. Solids Structures*, Vol 18, 1059-1074, 1982.
- [86] GIBSON R. E., SCHIFFMAN R. L., PU S. L., "Plane Strain and Axially Symetric Consolidation of a Clay Layer on a Smooth Impervious Base", *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, Vol XXIII, Part 4, 1970.
- [87] BOONE T. J., *Simulation and Visualization of Hydraulic Fracture Propagation in Poroelastic Rock*, Tese de Doutorado, Cornell University, 1989.
- [88] DETOURNAY E., CHENG A.H.-D., ROEGIERS J. C., MCLENNAN J. D., "Poroelasticity Consideration in In Situ Stress Determination by Hydraulic Fracturing", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol 26, 507-513, 1989.
- [89] YEW C. H., LIU G. F. 'Fracture Tip and Critical Stress Intensity Factor of a Hydraulically Induced Fracture", *SPE Production & Facilities*, Aug/1993.
- [90] CHENG A. H.-D., LIGGET J. A., "BIEM for Linear Porous Elasticity with Applications for Fracture Propagation", *Int. J. Num. Meth. Engineering*, Vol 20, 279-296, 1984.
- [91] BLANDFORD G. E., "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the BEM", *Int. J. Num. Meth. Engineering*, Vol 17, 387-404, 1981
- [92] ANTUNES J. L., *Three Dimensional Simulation of Near Wellbore Phenomena Related to Hydraulic Fracturing from a Perforated Wellbore*, Tese de doutorado, Cornell University, 1992.

- [93] GUIMARAES S., *Sobre o MEC Aplicado a Mecanica da fratura*,
Tese de mestrado, UFRJ, 1992.
- [94] DETOURNAY E., CHENG A.H.-D., "Plane Strain Analysis of a Stationary Hydraulic Fracture in a Poroelastic Medium",
Int. J. Solids Structures, Vol 27, 1645-1662, 1991
- [95] CLEARY M. P., "Fundamental Solutions for a Fluid Saturated Porous Solid.",
Int. J. Solids Structures, Vol 13, 785-806, 1977.
- [96] BAJPAI A. C., MUSTOE L. R., *Matemática Avançada Para Engenharia*,
Hemus Livraria Editora Ltda, S. Paulo, 1980.
- [97] PISKUNOV N., *Differential and Integral Calculus*,
MIR Publisher, Moscow, 1968.
- [98] CUSHING J. T., *Applied Analytical Mathematics for Physical Scientists*,
John Wiley & Sons, Inc, N. York, 1975.
- [99] KREYSZIG E., *Advanced Engineering Mathematics*,
John Wiley & Sons, Inc, New York, 1988.
- [100] BUTKOV E., *Fisica Matematica*,
Editôra Guanabara, Rio de Janeiro, 1990.
- [101] SPIEGEL M. R., *Analise de Fourier*,
McGraw-Hill, São Paulo, 1976.
- [102] SCHEY H. M., *Div, Grad, Curl, and All That*,
W. Norton & Co-Inc, New York, 1979.
- [103] COIMBRA A. L., *Mecanica dos Meios Continuos*,
Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, 1967.
- [104] BRONSTEIN I., SEMENDIAV K., *Manual de Matematicas*,
MIR Publishers, Moscow, 1979.
- [105] ABRAMOWITZ M., STEGUN I. A., *Handbook of Mathematical Functions*,
Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [106] BOAS M. L., *Mathematical Methods in the Physical Sciences*,
John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [107] BEYER W, H., *Standard Mathematical Tables*,
CRC Press, Inc., Fla., 1978.

- [108] SEGEL A., *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*
Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [109] WYLIE C. R., BARRET L. C., *Advanced Engineering Mathematics*,
McGraw-Hill Int. Editions, N. York, 1985
- [110] STROUD A. H., SECREST D., *Gaussian Quadrature Formulas*,
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1963
- [111] WATSON G. N., *Theory of Bessel Functions*,
Cambridge University Press, 1966.
- [112] ANDREWS L. C., *Special Functions of Mathematics for Engineers*,
McGraw-Hill Intl Edt, Singapore, 1992.
- [113] SPIEGEL M. R., *Vector Analysis*,
McGraw-Hill Book Co., New York, 1959.
- [114] MASE G. E., *Continuum Mechanics*,
McGraw-Hill Book Co., New York, 1970.
- [115] DEVRIES P. L. *Computational Physics*,
John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [116] VAZIRI H. H., BYRNE P. M., "Analysis of Stress, Flow and Stability Around Deep Wells",
Geotechnique, Vol 40, 63-77, 1990.
- [117] NISHIMURA N. "A BIE Formulation for Consolidation Problems",
Boundary Elements VII, 7th Int. Conf. Sept/1985.
Edt Brebbia & Maier.
- [118] RAJAPAKSE R. K. N. D., "Stress Analysis of Borehole in Poroelastic Medium",
Journal of Eng Mechanics, Vol 119, 1205-1227, Jun/1993.
- [119] MESQUITA E., CAMPOS J. C. B., BORBA G. L., *Boundary Elements Method Applied to Fully Coupled Transient Poroelasticity*, 12^o Congr. Brasil. de Eng Mec., Brasilia, Dez/1993.
- [120] RAJAPAKSE R. K. N. D., SENJUNTICHA T., "Fundamental Solutions for a Poroelastic Half-Space with Compressible Constituents",
Journal of Applied Mechanics, Vol 60, dec/1993.

- [121] OBERT L., DUVALL W. T. , *Rock Mechanics and Design of Structures in Rocks*,
John Wiley & Sons, Inc, New York, 1976.
- [122] JAEGER J. C., COOK N. G. W., *Fundamentals of Rock Mechanics*,
John Wiley & Sons, Inc, New York, 1977.
- [123] CAMPOS J. C. B., " Tensões na Parede de um Poço Circular Segundo a Teoria da Elasticidade",
Boletim Tecnico da Petrobras, Vol 26(3), 209-216, 1983.
- [124] MANDEL J., "Consolidation des Sols (Etude Mathématique)",
Geotechnique, Vol 3, 287-299, 1953.
- [125] VERRUIJT A., 'Discussion', Proc. 6th Int. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering,
Vol 2, pp 401-402, Montreal, 1965.
- [126] HWANG C. T., MORGENSTERN N. R., MURRAY D. W., "On Solution of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Elements Methods",
Canadian Geotechnical Journal, Vol 8, 109-118, 1971
- [127] SCHIFFMAN R. L., CHEN T-F, JORDAN J. C., "An Analysis of Consolidation Theories",
J. Soil Mech. Found. Div., ASCM 95, 285-312, 1969.
- [128] McNAMEE J., GIBSON R. E. "Plane Strain and Axially Symmetric Problems of the Consolidation of a Semi-infinite Clay Stratum",
Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol XIII, 210-227, 1960.
- [129] GIBSON R. E., McNAMEE J., "A Three-dimensional Problem of the Consolidation of a Semi-infinite Clay Stratum",
Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol XVI, 115-127, 1963
- [130] ASSZONUUY C., RICHTER R., *The Continuum Theory of Rock Mechanics*,
Trans Tech Publications, Rockport, USA, 1979.
- [131] CHARLES P. A., *Rock Mechanics*,
Editions Technip, Paris, 1991.

- [132] DREYER W., *The Science of Rock Mechanics*,
Part 1 The Strength Properties of Rocks,
Trans Tech Publications, Cleveland, USA, 1973.
- [133] GOODMAN R. E., *Introduction to Rock Mechanics*,
John Wiley & Sons, Inc, New York, 1989.
- [134] JAEGER C, *Rock Mechanics and Engineering*,
Cambridge University Press, 1979.
- [135] JUMIKIS A. R., *Rock Mechanis*,
Trans Tech Publications, Rockport, USA, 1983.
- [136] ABDULRAHEEM A., ZAMAN M., ROEGIERS J. -C.,
"A Finite-Element Model for Ekofisk Field
Subsidence",
Journal of Science and Engineering, Vol 10,
299-310, 1994.
Elsevier Science Publishers, B. V., Amsterdam
- [137] GUREVICH A. E., CHILIGARIAN G. V., "Subsidence
over Producing Oil and Gas Fields, and Gas Leakage
to the Surface",
Journal of Science and Engineering, Vol 9,
239-250, 1993.
Elsevier Science Publishers, B. V., Amsterdam
- [138] FJAER E., HOLT R. M., HORSRUD P., RAAN A. M.,
RISNES R, *Petroleum Related Rock Mechanics*
Elsevier Science Publishers, B. V., Amsterdam,
1992.
- [139] HELLAN K., *Introduction to Fracture Mechanics*,
McGraw-Hill Book Company, N Y, 1984.
- [140] BROEK D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*
Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- [141] ALIABADI M. A., ROOKE D. P., *Numerical Fracture
Mechanics*,
Kluwer Academic Publishers, London, 1991.
- [142] EEKELEN H. A. M., "Hydraulic Fracture Geometry:
Fracture Containment in Layered Formations",
Soc. Petr. Eng. J., 341-349, jun/82.
- [143] SIQUEIRA C. A. M., *Um Estudo Orientado por objetos
para a Análise Numérica da Poroelasticidade
Acoplada pela Técnica dos Elementos Finitos*,
Tese de Mestrado, UNICAMP, 1995.

APÊNDICE A

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO FLUXO E DO VETOR TENSÃO

A solução fundamental para o fluxo fornecida por Cheng et al [20], apresenta um pequeno erro de impressão. A forma correta é a seguinte:

$$\bar{q}_j^* = \frac{3(\nu_u - \nu)s}{2GB(1-\nu)(1+\nu_u)} \left[n_j (\xi^{-1} K_1 - \xi^{-2}) + r_{,j} r_{,l} n_l (2\xi^{-2} - K_2) \right]$$

A solução fundamental para o vetor tensão também está com um pequeno erro, ou seja, leia-se

$$\bar{t}_{ij}^* = \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} (n_i r_{,j} - n_j r_{,i} - \delta_{ij} r_{,l} n_l) / r - \frac{1}{1-\nu_u} r_{,i} r_{,j} r_{,l} n_l / r +$$

$$+ \frac{\nu_u - \nu}{(1-\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{s/c} \left\{ \delta_{ij} r_{,l} n_l \left[\xi^{-1} K_2(\xi) - 2 \xi^{-3} \right] + \right.$$

$$+ r_{,i} r_{,j} r_{,l} n_l \left[8\xi^{-3} - K_3(\xi) \right] + n_i r_{,j} \left[K_3(\xi) - 3\xi^{-1} K_2(\xi) - 2\xi^{-3} \right] +$$

$$\left. + n_j r_{,i} \left[\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3} \right] \right\}$$

Todas as equações derivadas das equações acima precisam, necessariamente, serem adaptadas.

APÊNDICE B

VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS NA EQUAÇÃO DE NAVIER

As soluções fundamentais devem satisfazer a equação de Navier

$$G\nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu} e_{,i} - \alpha p_{,i} = 0 \quad (B.01)$$

Onde

$$\nabla^2 u_i = \tilde{u}_{ij, kk}^* e_j \quad e_{,i} = \tilde{u}_{kj, ki}^* e_j \quad p_{,i} = \tilde{p}_{j, i}^* e_j$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ij, k}^* = & \frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \delta_{ij} \xi^{-1} \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,k} - \frac{1}{4G(1-\nu_u)} (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} + \\ & -2r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \xi^{-1} \sqrt{\frac{s}{c}} - \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} \left[(\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) (\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j} + \right. \\ & \left. + \delta_{jk} r_{,i} - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k}) - K_1 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \end{aligned} \quad (B.02)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ij, kk}^* = & -\frac{s}{4G(1-\nu_u)c} (2\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) \xi^{-2} - \frac{(\nu_u - \nu)s}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)c} (K_2 r_{,i} r_{,j} + \\ & -\delta_{ij} \xi^{-1} K_1) \end{aligned} \quad (B.03)$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{kj,k}^* &= \frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \xi^{-1} \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,j} - \frac{1}{4G(1-\nu_u)} \xi^{-1} \sqrt{\frac{s}{c}} r_{,j} + \\ &+ \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \sqrt{\frac{s}{c}} K_1 r_{,j}\end{aligned}\quad (B.04)$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{kj,ki}^* &= -\frac{(1-2\nu_u)s}{2G(1-\nu_u)c} \xi^{-2} (2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) + \frac{(\nu_u - \nu)s}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)c} (\delta_{ij} \xi^{-1} K_1 + \\ &- K_2 r_{,i} r_{,j})\end{aligned}\quad (B.05)$$

$$\tilde{p}_{j,i}^* = -\frac{B(1+\nu_u)s}{3(1-\nu_u)c} \left[\xi^{-2} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) - \delta_{ij} \xi^{-1} K_1 + K_2 r_{,i} r_{,j} \right] \quad (B.06)$$

Substituindo na equação B.01, obtem-se

$$\begin{aligned}& -\frac{s}{2(1-\nu_u)c} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \xi^{-2} - \frac{(\nu_u - \nu)s}{2(1-\nu)(1-\nu_u)c} (K_2 r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij} \xi^{-1} K_1) + \\ & -\frac{(1-2\nu_u)s}{2(1-\nu_u)(1-2\nu)c} \xi^{-2} (2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) + \frac{(\nu_u - \nu)s}{2(1-\nu)(1-\nu_u)(1-2\nu)c} (\delta_{ij} \xi^{-1} K_1 + \\ & - K_2 r_{,i} r_{,j}) - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \frac{B(1+\nu_u)s}{3(1-\nu_u)c} \left[\xi^{-2} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) - \delta_{ij} \xi^{-1} K_1 + \right. \\ & \left. + K_2 r_{,i} r_{,j} \right] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \xi^{-2} \left[-\frac{s}{2(1-\nu_u)c} + \frac{(1-2\nu_u)s}{2(1-\nu_u)(1-2\nu)c} + \right. \\
& \left. + \frac{(\nu_u - \nu)s}{(1-2\nu)(1-\nu_u)c} \right] + (\delta_{ij} \xi^{-1} K_1 - K_2 r_{,i}r_{,j}) \left[\frac{(\nu_u - \nu)s}{2(1-\nu)(1-\nu_u)(1-2\nu)c} + \right. \\
& \left. + \frac{(\nu_u - \nu)s}{2(1-\nu)(1-\nu_u)c} - \frac{(\nu_u - \nu)s}{(1-2\nu)(1-\nu_u)c} \right] =
\end{aligned}$$

$$(\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \xi^{-2}(0) + (\delta_{ij} \xi^{-1} K_1 - K_2 r_{,i}r_{,j})(0) = 0$$

O que satisfaz a equação B.01.

APÊNDICE C

TEOREMA DA RECIPROCIDADE

C.1 Balanço de energia

Suponha-se um corpo com um interior Ω (domínio) limitado por uma superfície Γ . Sabe-se que a potência é dada pelo produto escalar da força pela velocidade. Assim, em um intervalo de tempo $[0, T]$, o trabalho das forças externas W_E é dado por [43, 44].

$$W_E = \int_0^T \int_{\Gamma} t_i \dot{u}_i d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} F_i \dot{u}_i d\Omega dt \quad (C.1.01)$$

t_i - vetor tensão

$\dot{u}_i$ - velocidade na direção i

F_i - força de corpo por unidade de volume

O trabalho das forças internas W_I , no mesmo intervalo de tempo, é determinado como segue.

Considere-se uma porção D de Ω com o contórno ∂D . A componente i da força total em D é dada por

$$\int_D F_i dD + \int_{\partial D} t_i d\tau = \int_D F_i dD + \int_{\partial D} \sigma_{ji} n_j d\tau = \int_D (F_i + \sigma_{ji,j}) dD \quad (C.1.02)$$

σ_{ji} - tensor tensão

n_j - componente j da normal a ∂D

Como D é arbitrário conclui-se que

$$W_I = \int_0^T \int_{\Omega} (F_i + \sigma_{ji,j}) \dot{u}_i d\Omega dt \quad (C.1.03)$$

Integrando por partes e usando o teorema da divergência (apêndice E) tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma_{ji,j} \dot{u}_i d\Omega &= \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ji} \dot{u}_{i,j} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} t_{ji} \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ji} \dot{u}_{i,j} d\Omega
\end{aligned} \tag{C.1.04}$$

Além disto sabe-se que

$$\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} = \sigma_{ji} \dot{e}_{ij} \tag{C.1.05}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

u_i - deslocamento na direção i

e_{ij} - tensor de deformação

A relação C.1.05 é, facilmente, deduzida fazendo-se

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = e_{ij} + \omega_{ij} \tag{C.1.06}$$

Pois ω_{ij} é antissimétrico.

A equação constitutiva é

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} \tag{C.1.07}$$

G, λ - constantes de Lamé

δ_{ij} - delta de Kronecker

Usando C.1.05 e C.1.07, pode-se ter:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} \dot{e}_{ij} &= 2Ge_{ij} \dot{e}_{ij} + \lambda e_{kk} \dot{e}_{jj} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (2Ge_{ij} e_{ij} + \lambda e_{kk} e_{jj})
\end{aligned} \tag{C.1.08}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_{ij} e_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) \\
&= (u_{i,j} + u_{j,i})\dot{u}_{i,j}
\end{aligned} \tag{C.1.09}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_{kk}e_{jj}) = 2u_{k,k}\dot{u}_{j,j} \tag{C.1.10}$$

Então, usando as equações C.1.04 a C.1.09, a equação C.1.03 fica

$$W_I = \int_0^T \left(\int_{\Omega} F_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \dot{u}_i d\Gamma \right) dt - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[2Ge_{ij}e_{ij} + \lambda e_{kk}e_{jj} \right]_0^T d\Omega \tag{C.1.11}$$

A variação da energia de deformação, ΔE_e , é

$$\begin{aligned}
\Delta E_e &= W_E - W_I \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[2Ge_{ij}e_{ij} + \lambda e_{kk}e_{jj} \right]_0^T d\Omega
\end{aligned} \tag{C.1.12}$$

Assim, a energia de deformação é

$$E_e(T) = \Delta E_e + \text{constante}$$

Supondo a constante nula, ou seja, identificando-se o zero arbitrário de energia de deformação com um estado livre de deformações ($e_{ij} \equiv 0$), tem-se

$$E_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2Ge_{ij}e_{ij} + \lambda e_{kk}e_{jj}) d\Omega \tag{C.1.13}$$

Substituindo as constantes de Lamé pelo módulo de Poisson ν e pelo módulo de Young E , obtém-se

$$E_e = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} (e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} e_{kk} e_{jj}) d\Omega \quad (C.1.14)$$

A equação C.1.13 pode ser retrabalhada obtendo-se uma nova expressão para a energia de deformação

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2G e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij}) e_{ij} d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} e_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (C.1.15)$$

C.2 Princípio do trabalho virtual

Seja u_i^* um conjunto qualquer de deslocamentos virtuais, os quais podem ser qualquer função suave definida no domínio Ω . O conjunto de deformações virtuais é definido por [55].

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \quad (C.2.01)$$

Prosseguindo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma &= \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ji} u_i^*)_{,j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ji,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ji} u_{i,j}^* d\Omega \end{aligned} \quad (C.2.02)$$

Da equação de equilíbrio

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

obtem-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji,j} u_i^* d\Omega = - \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega$$

pois σ_{ij} é simétrico.

Assim a equação C.2.02 fica

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma &= \int_{\Omega} \sigma_{ji} u_{i,j}^* d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ji} u_{i,j}^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^*) d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) d\Omega \quad (C.2.03)
\end{aligned}$$

Assim sendo chega-se à equação C.2.04.

$$\int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} e_{ij}^* d\Omega \quad (C.2.04)$$

A equação C.2.04 é conhecida como o princípio do trabalho virtual.

C.3 Teorema da reciprocidade

Este teorema também é conhecido como teorema da reciprocidade de Betti-Rayleigh.

Considere-se 2 estados de equilíbrio em um corpo elástico Ω . As forças de corpo F_i e as trações de superfície (vetores tensão) t_i produzem os deslocamentos u_i . As forças F_i^* e as trações t_i^* (vetores tensão) produzem os deslocamentos u_i^* . Então da equação C.2.04, tem-se

$$\int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} e_{ij}^* d\Omega \quad (C.3.01)$$

$$\int_{\Omega} F_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* e_{ij} d\Omega \quad (C.3.02)$$

Usando-se a equação C.1.07, tem-se

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} e_{ij}^* &= (2G e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij}) e_{ij}^* \\
\sigma_{ij}^* e_{ij} &= 2G e_{ij}^* e_{ij} + \lambda e_{kk}^* e_{jj} \quad (C.3.03)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{ij}^* e_{ij} = (2Ge_{ij}^* + \lambda e_{kk}^* \delta_{ij}) e_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^* e_{ij} = 2Ge_{ij}^* e_{ij} + \lambda e_{kk}^* e_{jj} \quad \therefore \quad (C.3.04)$$

Das equações C.3.03 e C.2.04 conclue-se que

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* e_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* e_{ij} d\Omega \quad (C.3.05)$$

Usando as equações C.3.01 e C.3.02

$$\int_{\Omega} F_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (C.3.06)$$

O teorema de Betti é expresso tanto pela equação C.3.05 como pela C.3.06.

C.4 Meios porosos

Para um meio poroso de porosidade ϕ e com pressão nos poros igual a p , Biot generalizou o procedimento até aqui seguido e definiu uma energia de deformação no fluido dada por [14]

$$E_f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \epsilon$$

e - deformação volumétrica do fluido

$$\sigma = -\phi p$$

Então o teorema de Betti, equação C.3.05, fica

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* e_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \epsilon^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* e_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma^* \epsilon d\Omega \quad (C.4.01)$$

C.5 Sistemas dependentes do tempo

Neste caso tem-se o correspondente dinâmico do teorema da reciprocidade de Betti da elastostática [43,44,60,61]

Considere-se 2 estados elastodinâmicos e as seguintes

condições iniciais

$$u_i(x,0) = u_{i0}(x)$$

$$\dot{u}_i(x,0) = v_{i0}(x)$$

$$u'_i(x,0) = u'_{i0}(x)$$

$$\dot{u}'_i(x,0) = v'_{i0}(x)$$

Para um tempo t não negativo, o teorema é expresso pela equação C.5.01 abaixo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [t_i * u'_i] d\Gamma + \int_{\Omega} ([F_i * u'_i] + \rho (\dot{v}_{i0} u'_i + \dot{u}_{i0} \dot{u}'_i)) d\Omega = \\ = \int_{\Gamma} [t'_i * u_i] d\Gamma + \int_{\Omega} ([F'_i * u_i] + \rho (\dot{v}'_{i0} u_i + \dot{u}'_{i0} \dot{u}_i)) d\Omega \end{aligned} \quad (C.5.01)$$

Onde o símbolo $*$ significa convolução no tempo e ρ é a massa específica.

Quando as condições iniciais nos 2 sistemas são nulas tem-se

$$\int_{\Gamma} [t_i * u'_i] d\Gamma + \int_{\Omega} [F_i * u'_i] d\Omega = \int_{\Gamma} [t'_i * u_i] d\Gamma + \int_{\Omega} [F'_i * u_i] d\Omega \quad (C.5.02)$$

Nestas mesmas condições a equação C.3.05 fica

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij} * e_{ij}^*] d\Omega = \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^* * e_{ij}] d\Omega \quad (C.5.03)$$

E a equação C.4.01 tem a seguinte forma

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} * e_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma * \varepsilon^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* * e_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma^* * \varepsilon d\Omega \quad (C.5.04)$$

Apenas para lembrar: a convolução de ϕ e ψ é dada pela equação C.5.05 [108].

$$[\phi * \psi](x, t) = \int_0^t \phi(x, t-\tau) \psi(x, \tau) d\tau = \int_0^t \phi(x, \tau) \psi(x, t-\tau) d\tau \quad (C.5.05)$$

A transformada de Laplace da convolução, equação C.5.05, é igual ao produto das transformadas de ϕ e ψ . Assim o teorema de Betti, no caso dinâmico, transforma-se em um produto de transformadas no campo de Laplace.

APÊNDICE D

SINGULARIDADES - ELEMENTOS LINEARES

D.1 Soluções fundamentais com singularidades

A única das soluções fundamentais aqui usadas que apresenta singularidade forte é t_{ij}^* , para i diferente de j . Isto foi demonstrado por Genildo [39], para elementos constantes. As possíveis outras singularidades são eliminadas pelo fato da normal ser perpendicular ao raio, no caso de elementos constantes.

Esta perpendicularidade também ocorre ao se usar elementos lineares e, portanto, temos singularidade forte apenas no componentes t_{12}^* e t_{21}^* do vetor tensão..

As figuras D.1.01 a D.1.06 mostram que tanto t_{12}^* como t_{21}^* tendem a infinito quando r tende a zero

$$\lim_{r \rightarrow 0} t_{12}^* = \lim_{r \rightarrow 0} t_{21}^* = \infty$$

Os componentes t_{11}^* e t_{22}^* do vetor tensão são constantes.

As figuras D.1.05 e D.1.06 são as figuras D.1.03 e D.1.04 apenas com uma mudança da escala das ordenadas para acentuar mais a singularidade na origem.

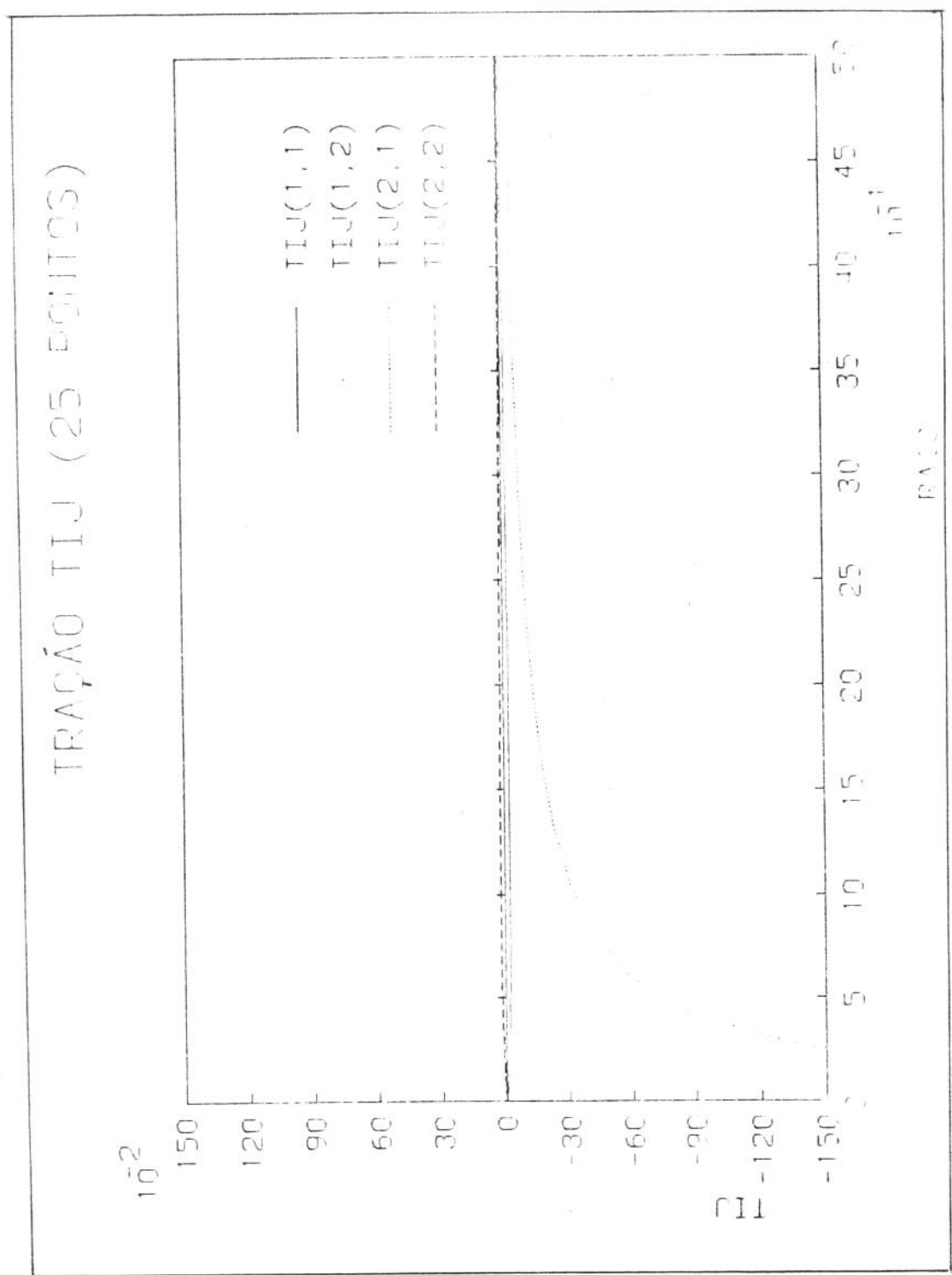


Figura D.1.01 - Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r
(25 pontos na abcissa)

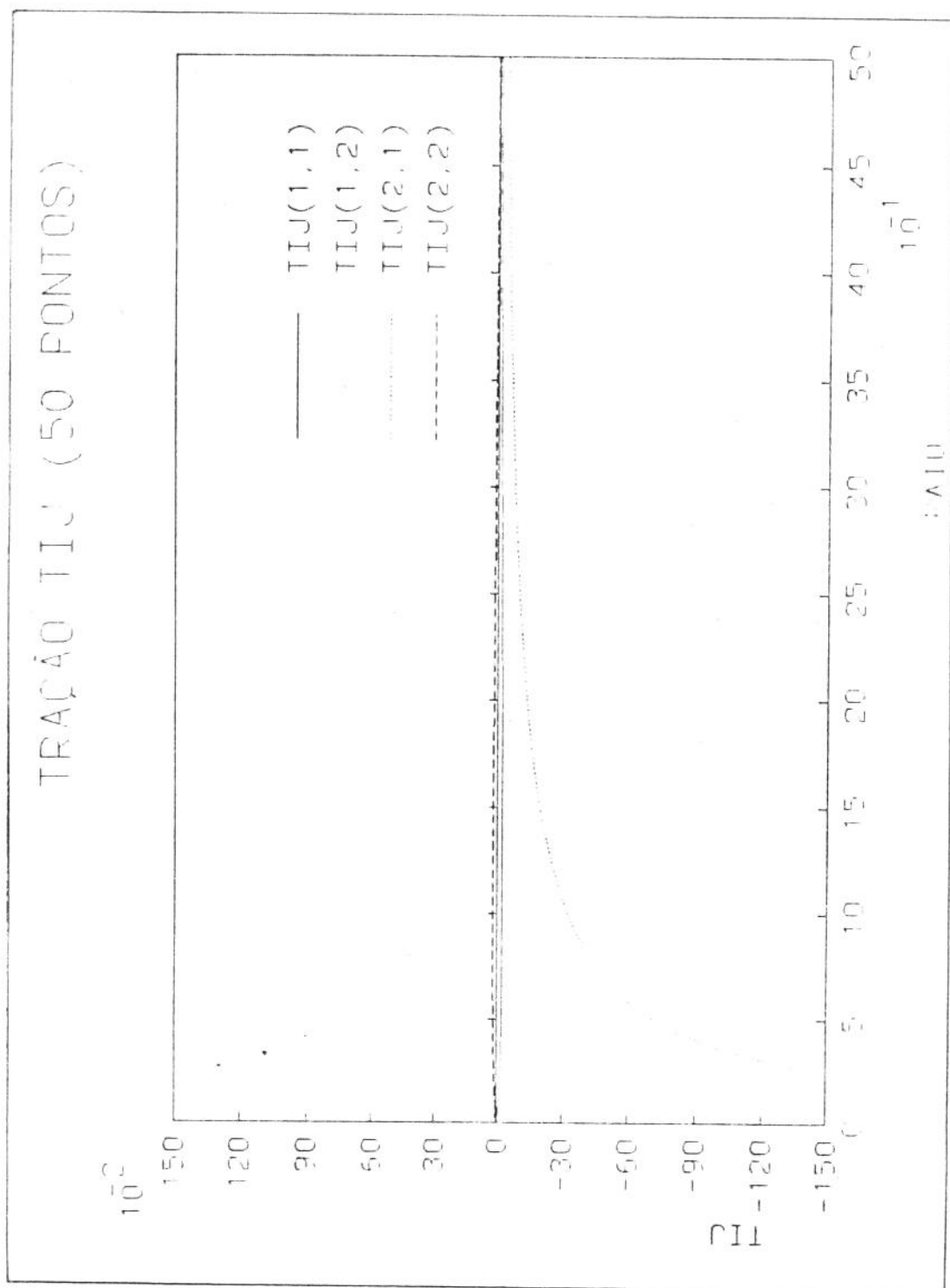


Figura D.1.02 - Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r
(50 pontos na abscissa)

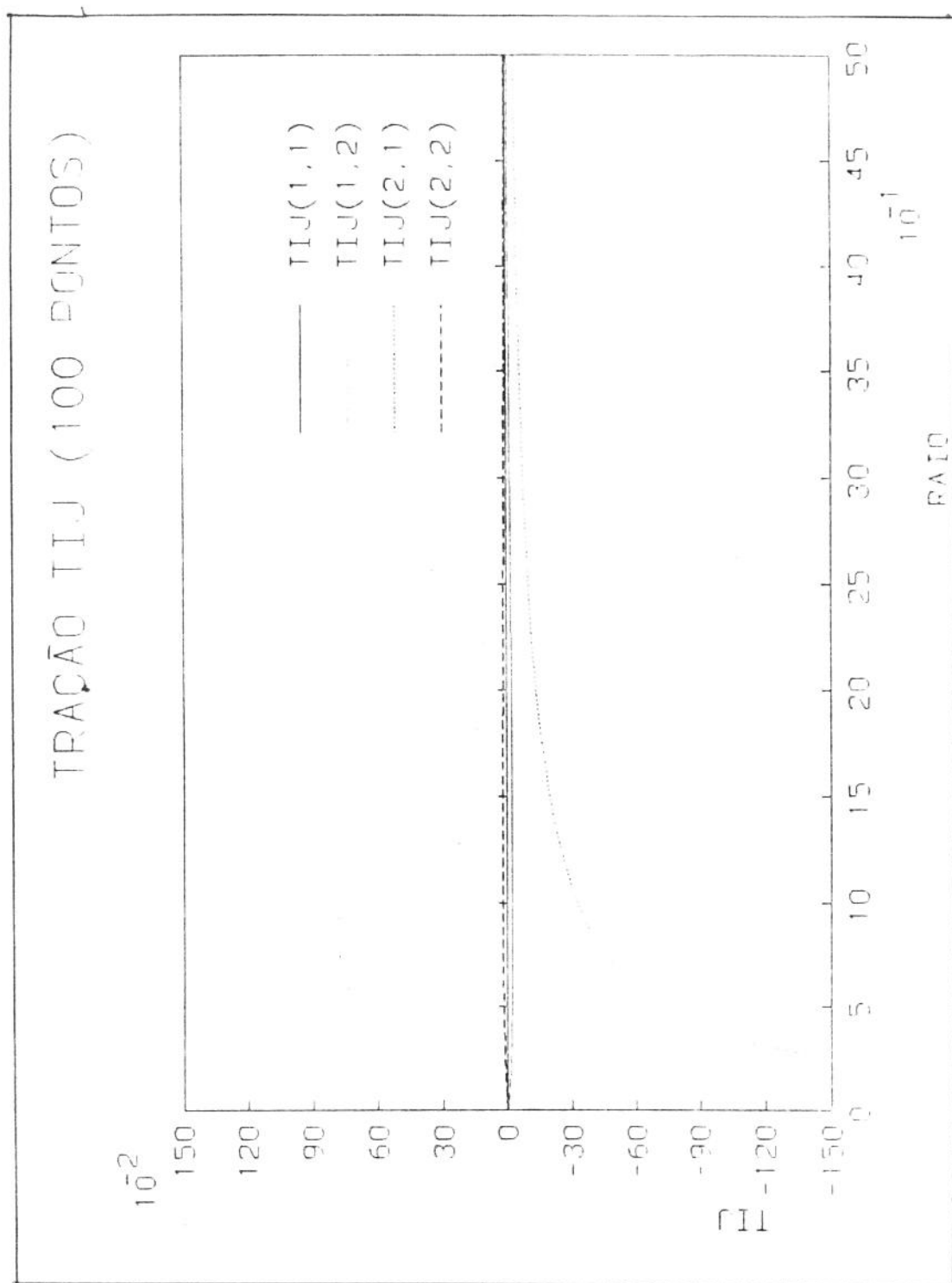


Figura D.1.03 - Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r
(100 pontos na abscissa)

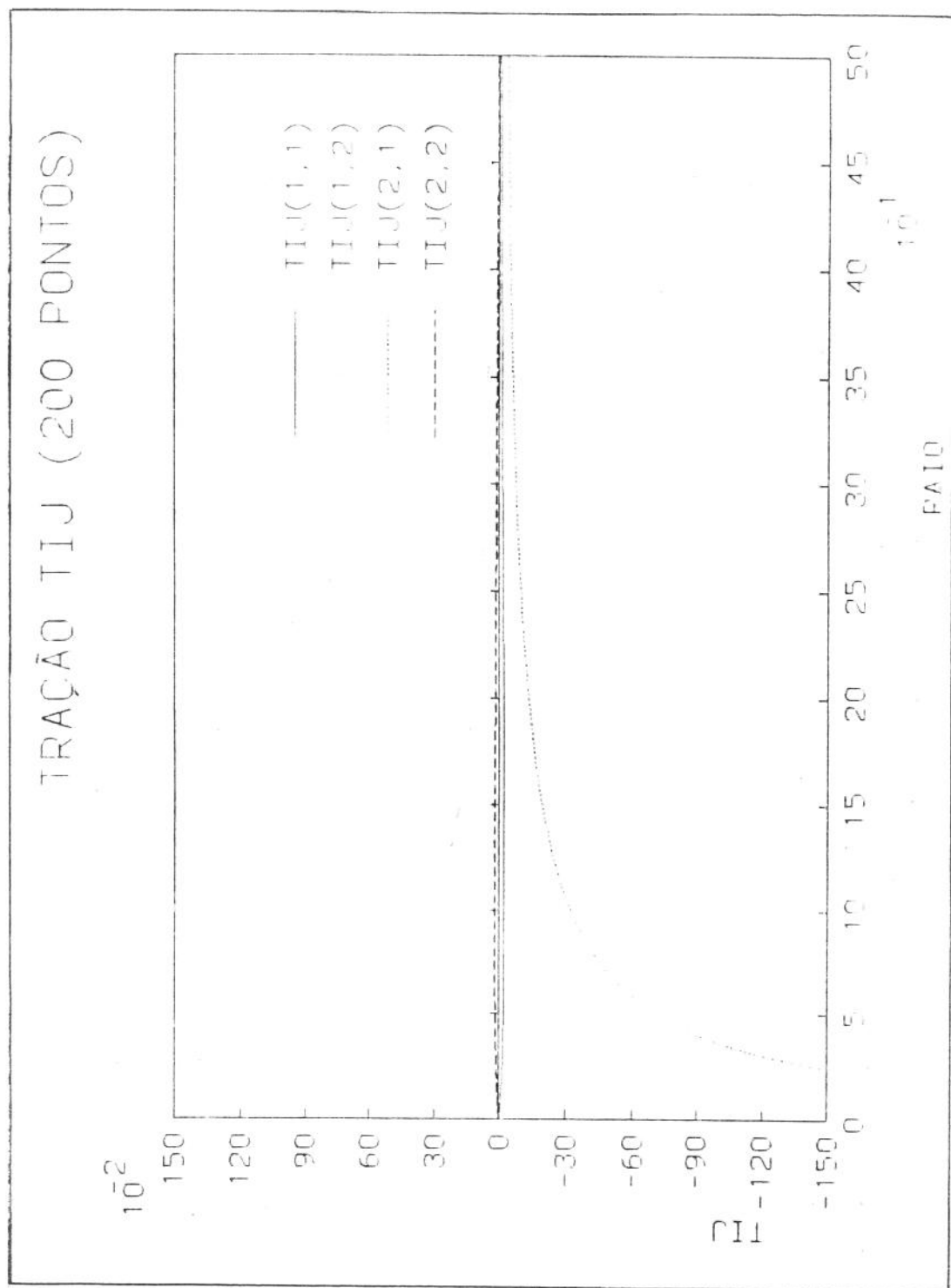


Figura D.1.04 - Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r
(200 pontos na abcissa)

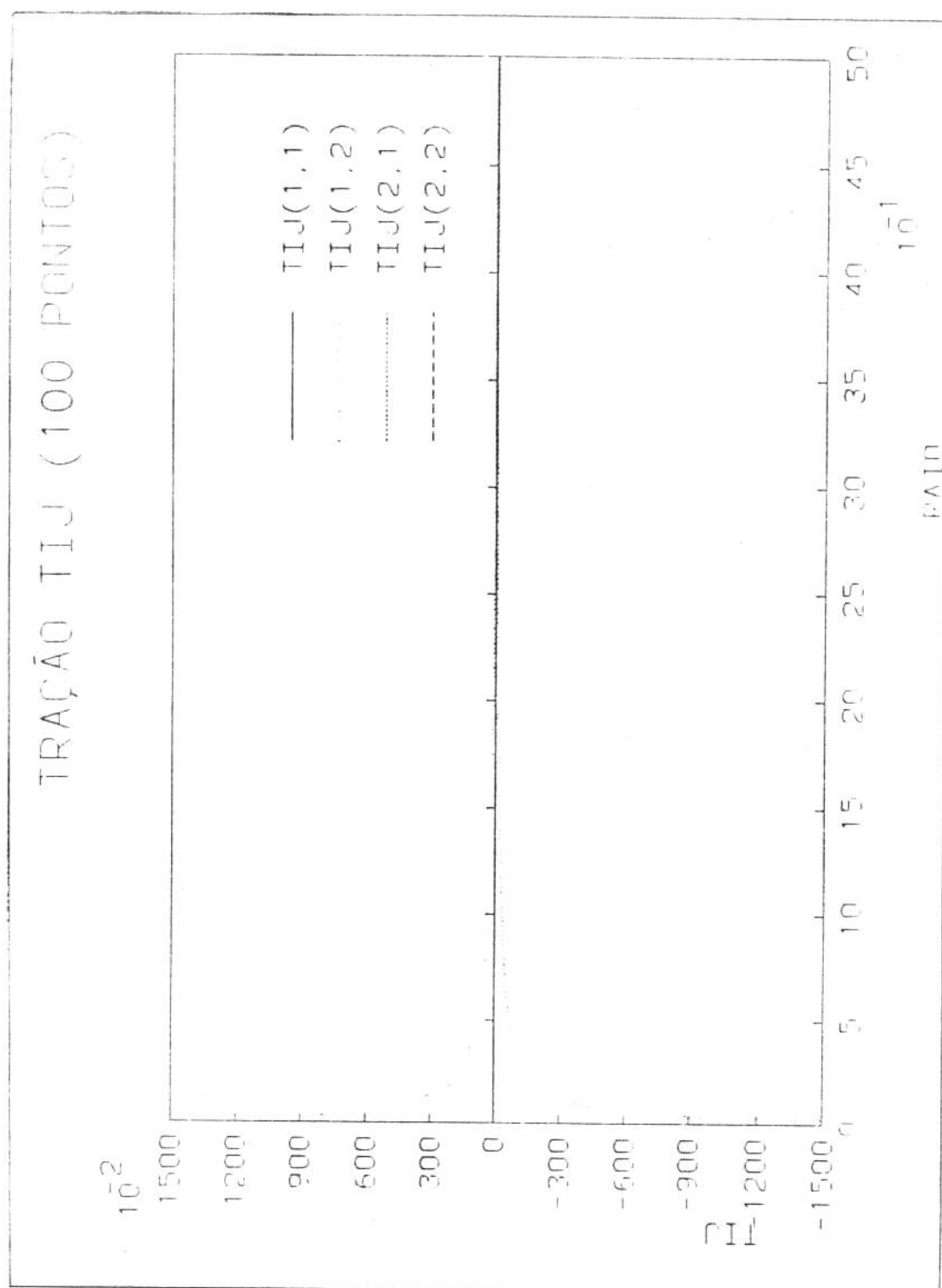


Figura D.1.05 - Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r
(100 pontos na abcissa)

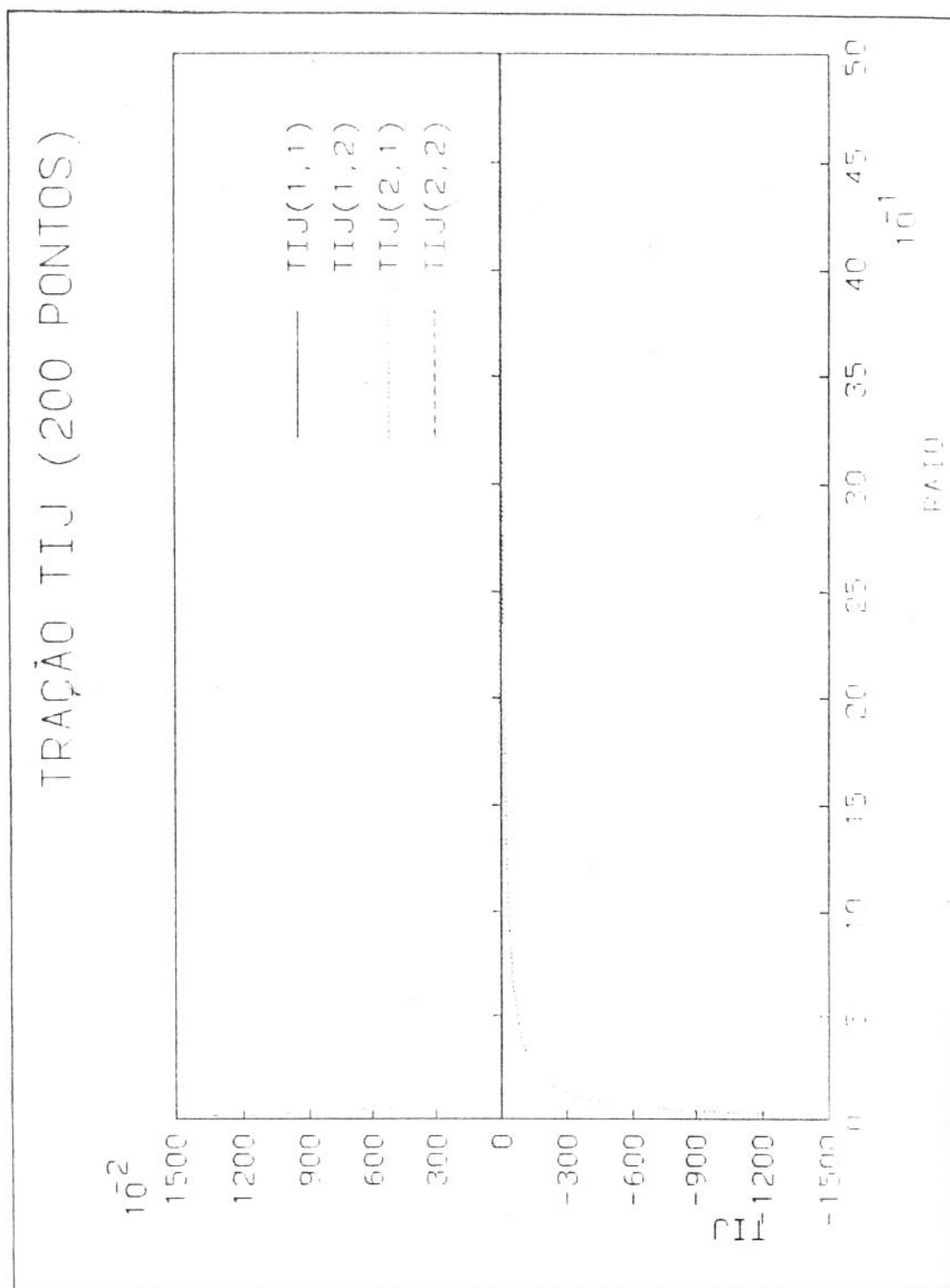


Figura D.1.06 - Vetor tensão t_{ij}^* em função do raio r (200 pontos na abcissa)

A integração gaussiana [96,110] será desmembrada em duas partes, uma para cada fator de forma (N1 e N2) [58,67].

$$TIJ1 = TIJ1 + N1 * t_{ij}^* * w * CE / 2$$

$$TIJ2 = TIJ2 + N2 * t_{ij}^* * w * CE / 2$$

$$N1 = (1 - \psi) / 2$$

$$N2 = (1 + \psi) / 2$$

Onde

TIJ - integral da solução fundamental ao longo de certo elemento

ψ - coordenada local do ponto de integração gaussiana ($-1 \leq \psi \leq 1$)

w - peso (apêndice E)

CE - comprimento do elemento

Quando o ponto de colocação está no elemento onde é feita a integração, sendo r a distância entre aquele ponto e o ponto de integração, tem-se as seguintes relações

$$r = CE / 2 + \psi * CE / 2$$

Ou seja

$$\psi = 2 * r / CE - 1$$

$$N1 = 1 - r / CE$$

$$N2 = r / CE$$

Ao se integrar, no elemento anterior ao elemento onde se encontra o ponto de colocação, tem-se

$$r = CE / 2 - \psi * CE / 2$$

$$r = (1 - \psi) * CE / 2$$

Ou seja

$$\psi = 1 - 2 * r / CE$$

$$N1 = r / CE$$

$$N2 = 1 - r / CE$$

As expressões com singularidade, para r tendendo a zero, são as seguintes, conforme a equação 4.4.11.

$$t_{12}^* = C_1(n_1 r_{,2} - n_2 r_{,1})/r - C_2 r_{,1} r_{,2} r_{,l} n_l /r +$$

$$+ C_3 \sqrt{s/c} [r_{,1} r_{,2} r_{,l} n_l (8\xi^{-3} - K_3) + n_1 r_{,2} (K_3 - 3\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) +$$

$$+ n_2 r_{,1} (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3})]$$

$$t_{21}^* = C_1(n_2 r_{,1} - n_1 r_{,2})/r - C_2 r_{,2} r_{,1} r_{,l} n_l /r +$$

$$+ C_3 \sqrt{s/c} [r_{,2} r_{,1} r_{,l} n_l (8\xi^{-3} - K_3) + n_2 r_{,1} (K_3 - 3\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) +$$

$$+ n_1 r_{,2} (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3})]$$

Considerando que, para elementos lineares e constantes, conforme mostrado no item 5.3 tem-se a relação abaixo

$$r_{,l} n_l = 0$$

As expressões anteriores têm as seguintes formas:

$$t_{12}^* = C_1(n_1 r_{,2} - n_2 r_{,1})/r +$$

$$+ C_3 \sqrt{s/c} [n_1 r_{,2} (K_3 - 3\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) + n_2 r_{,1} (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3})]$$

$$t_{21}^* = C_1(n_2 r_{,1} - n_1 r_{,2})/r + \\ + C_3 \sqrt{s/c} [n_2 r_{,1} (K_3 - 3\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) + n_1 r_{,2} (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3})]$$

Como se vê estas funções apresentam singularidade forte, não integráveis.

O que se verificará a seguir é se os fatores de forma eliminam a singularidade na integração..

D.2 Soluções fundamentais com singularidades multiplicadas pelos fatores de forma

Multiplicando-se as soluções fundamentais pelos fatôres de forma tem-se

$$N1t_{12}^* = (1-r/CE)t_{12}^* = t_{12}^* - (r/CE)t_{12}^* \\ N2t_{12}^* = (r/CE)t_{12}^*$$

Como se vê o primeiro fator de forma não elimina a singularidade. Vejamos o segundo.

$$N2t_{12}^* = C_1(n_1 r_{,2} - n_2 r_{,1})/CE + \\ + C_3 r \sqrt{s/c/CE} [n_1 r_{,2} (K_3 - 3\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3}) + n_2 r_{,1} (\xi^{-1} K_2 - 2\xi^{-3})]$$

Considerando que

$$\xi = r \sqrt{s/c}$$

$$N2t_{12}^* = C_1(n_1 r_{,2} - n_2 r_{,1})/CE +$$

$$+C_3/CE \left[n_1 r_{,2} (\xi K_3 - 3K_2 - 2\xi^{-2}) + n_2 r_{,1} (K_2 - 2\xi^{-2}) \right]$$

Esta equação depende das funções modificadas de Bessel de segunda espécie, que por sua vez, dependem das funções modificadas de Bessel de primeira espécie. Deve-se, portanto, analisar o comportamento destas funções para argumentos próximos a zero.

Conforme mostrado na referência 39 as funções modificadas de primeira espécie não possuem singularidade na origem; já as de segunda possuem singularidade fraca para ordem zero e, forte, para as demais ordens (apêndice E).

Para argumentos pequenos as funções modificadas de Bessel de segunda espécie podem ser aproximadas, conforme a expressão abaixo [48].

$$K_0(x) = -\ln(x/2) I_0(x) + (-0,577 + \frac{x^2}{4} (0,423 + \frac{x^2}{4} (0,231 + \frac{x^2}{4} (\dots))))$$

$$K_1(x) = \ln(x/2) I_1(x) + (1 + \frac{x^2}{4} (0,154 + \frac{x^2}{4} (-0,673 + \frac{x^2}{4} (\dots))))/x$$

Já as de primeira espécie podem ser dadas por

$$I_0(x) = 1 + y^2 (3,516 + y^2 (3,090 + y^2 (1,207 + y^2 (\dots))))$$

$$I_1(x) = x (0,5 + y (0,879 + y (0,515 + y (0,151 + y (\dots)))))$$

Onde

$$y = x/3,75$$

Usando a lei de recorrência das funções de Bessel [111, 112] conforme pode ser visto no apêndice E

$$\begin{aligned} xK_3 - 3K_2 - 2x^{-2} &= x(4K_2/x + K_1) - 3K_2 - 2x^{-2} \\ &= K_2 - xK_1 - 2x^{-2} \\ &= K_0 + 2K_1/x - xK_1 - 2x^{-2} \end{aligned}$$

$$K_2 - 2x^{-2} = K_0 + 2K_1/x - 2x^{-2}$$

Tem-se, assim, os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_0 = -\ln(x/2) - 0,577$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2K_1/x = \frac{2}{x} [\ln(x/2) I_1 + (1 + \frac{x^2}{4} (0,154 + \frac{x^2}{4} (-0,673 + \frac{x^2}{4} (\dots))))/x]$$

$$= \ln(x/2) + 2/x^2 + 0,154/2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xK_1 = x [\ln(x/2) I_1 + (1 + \frac{x^2}{4} (0,154 + \frac{x^2}{4} (-0,673 + \frac{x^2}{4} (\dots))))/x]$$

$$= 1$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow 0} (K_0 + 2K_1/x - xK_1 - 2x^{-2}) = -1,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (K_0 + 2K_1/x - 2x^{-2}) = -0,5$$

Com o que fica provado que o segundo fator de forma elimina a singularidade de t_{12}^* e de t_{21}^* .

As figuras anexas mostram claramente este fato.

A figura D.2.01 mostra que as integrais de t_{11}^* e de t_{22}^* multiplicados pelo primeiro fator de forma N1 têm um valor bem definido e independente do número de pontos usados na integração gaussiana, pois eles não são singulares.

A figura D.2.02 mostra que as integrais de t_{12}^* e de t_{21}^* multiplicados pelo primeiro fator de forma N1 não têm um valor constante e independente do número de pontos usados na integração gaussiana, o que confirma que a singularidade não foi eliminada.

A figura D.2.03 mostra que as integrais de t_{ij}^* , quando multiplicados pelo segundo fator de forma N2, têm um valor definido e independente do número de pontos usados na integração gaussiana, o que mostra que N2 elimina as singularidades.

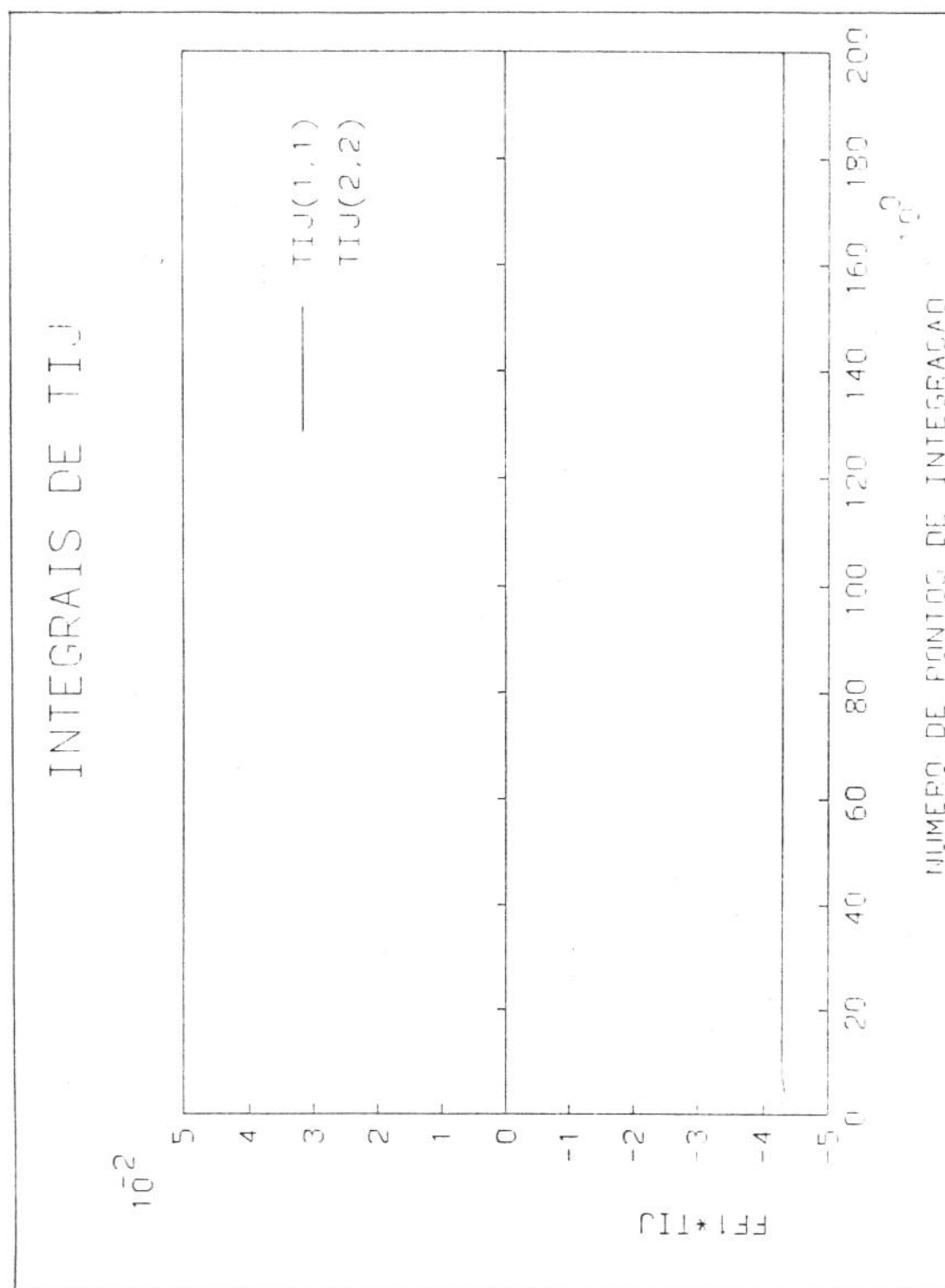


Figura D.2.01 - Integrales dos vetores tensão t_{11}^* e t_{22}^* multiplicados por $N1$ ($FF1$) em função do número de pontos de integração

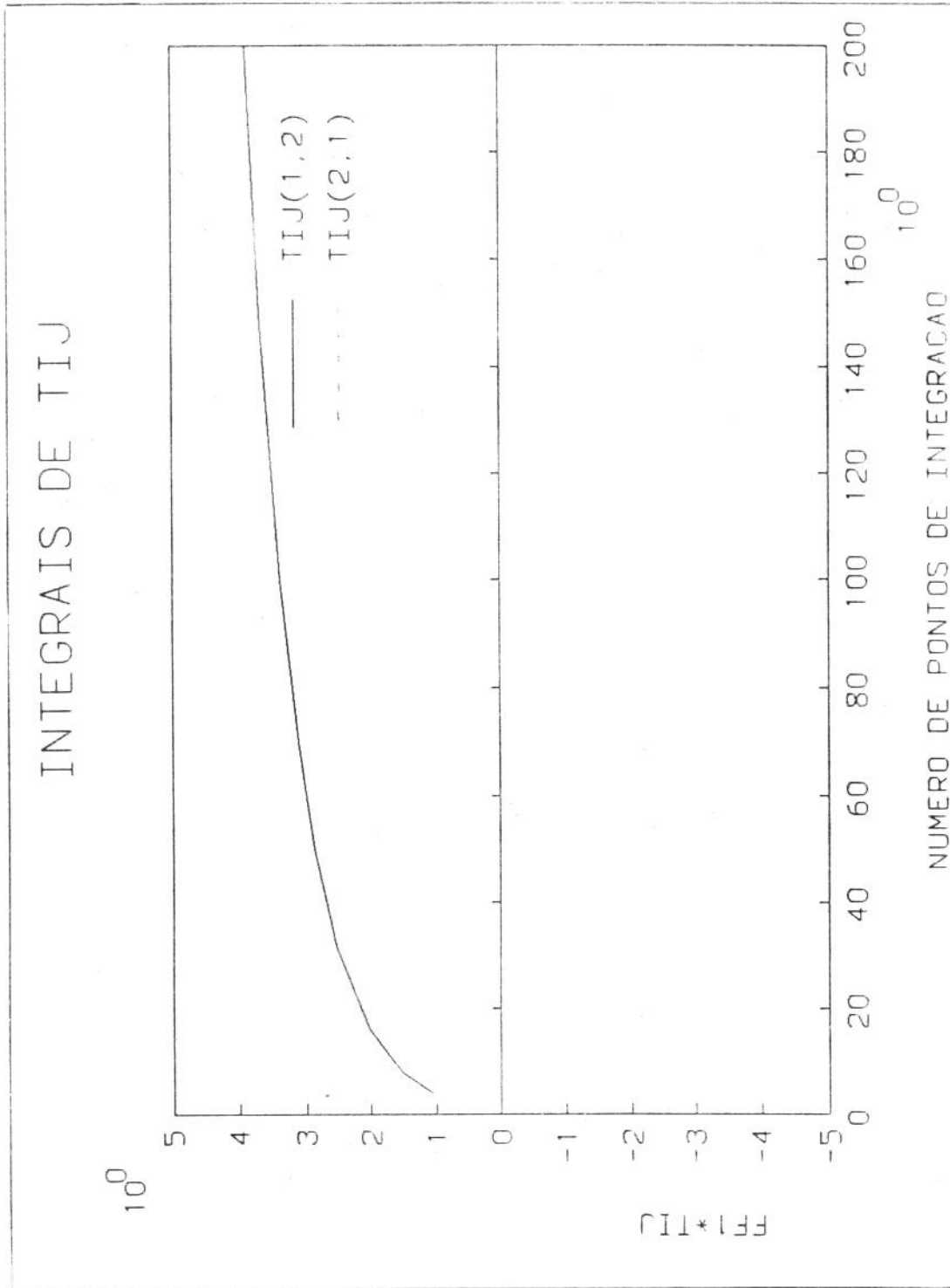


Figura D.2.02 - Integrais dos vetores tensao t_{12}^* e t_{21}^* multiplicados por N1 (FF1) em função do número de pontos de integração

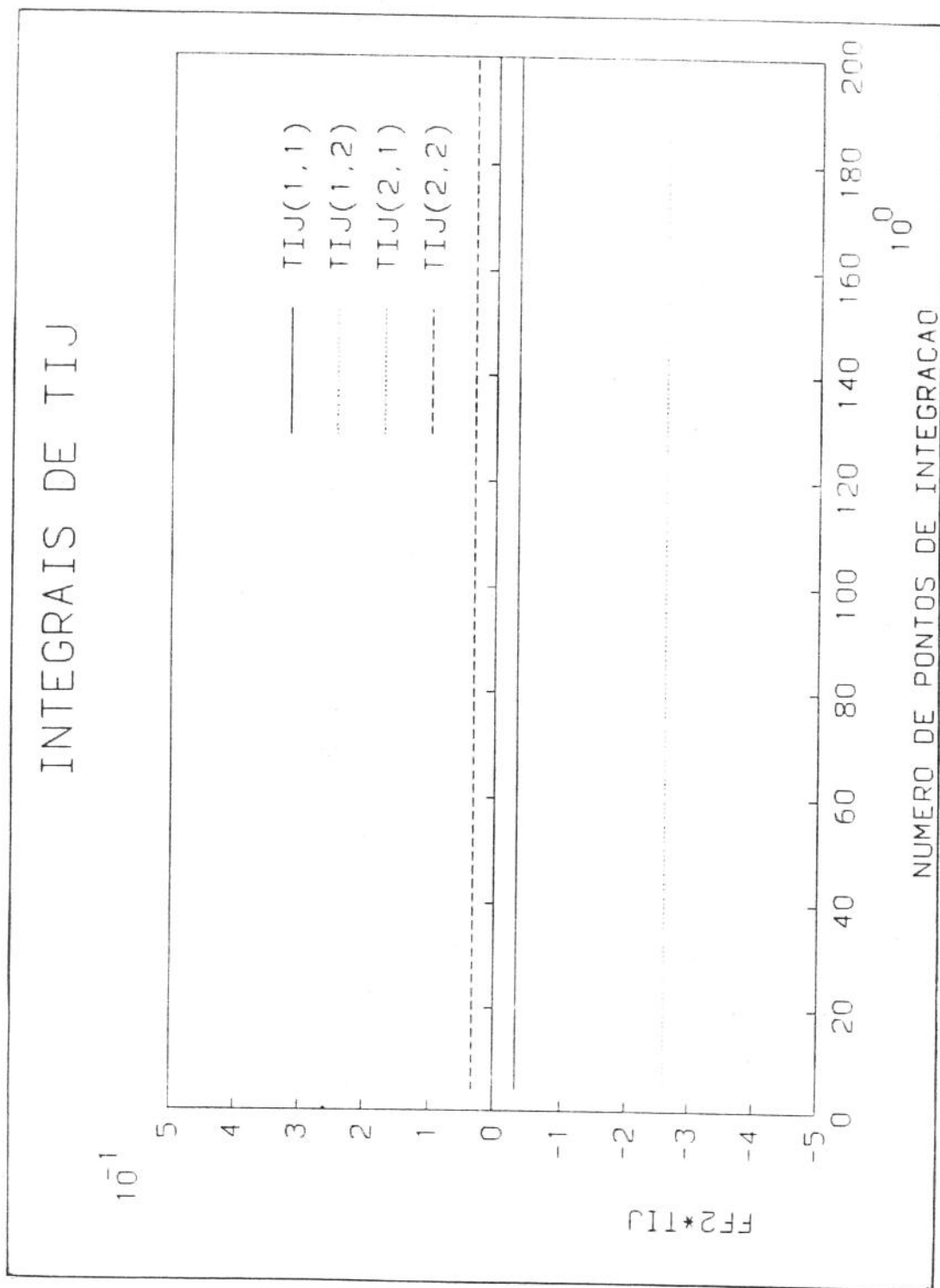


Figura D.2.03 - Integrais do vetor tensao t_{ij}^* multiplicado por N_2 (FF2) em função do número de pontos da integração gaussiana

APÊNDICE E

ALGUNS CONCEITOS MATEMATICOS

E.1 Introdução

Neste apêndice E, rever-se-á alguns conceitos matemáticos amplamente usados no método dos elementos de contorno.

Este assunto acha-se bem detalhado em [47,48,96-114].

E.2 Jacobiano de transformação

O Jacobiano é usado para transformar as variáveis de um sistema de coordenadas para outro. Assim tem-se

$$\int_b^a f(x) dx = \int_d^c f[x(\xi)] J(\xi) d\xi \quad (E.2.01)$$

onde a variável x foi substituída pela variável ξ e o jacobiano é definido por

$$J(\xi) = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} \quad (E.2.02)$$

No caso bidimensional tem-se

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} f[x(u,v), y(u,v)] J(u,v) du dv$$

onde as variáveis x e y foram substituídas por u e por v .

O Jacobiano é dado por

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial x \partial y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial x \partial y}{\partial v \partial u} \end{aligned}$$

As funções devem ser contínuas e ter as primeiras derivadas contínuas no intervalo de integração [40, 114].

E.3 Notação indicial

A notação indicial, ou notação tensorial, é muito utilizada em mecânica do contínuo e nas equações integrais no MEC.

As equações do contínuo são, em geral, expressas em termos das coordenadas cartesianas x , y e z e por vetores com componentes nestas direções. Assim um vetor F pode ser representado pelas componentes F_x , F_y e F_z . Na notação indicial ele será representado por F_1 , F_2 e F_3 , onde x , y , e z correspondem a 1, 2 e 3, respectivamente. Este é representado mais compactamente por F_i , onde i varia de 1 a 3 em 3D e de 1 a 2 em 2D. As coordenadas x , y e z são expressas por x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente.

Os índices, na notação indicial, podem tomar os valores 1, 2 e 3 (em 3D). Assim

U_i - indica 3 variáveis U_1 , U_2 e U_3

U_{ij} - indica 9 variáveis U_{11} , U_{12} , U_{13} , ..., U_{33}

U_{ijk} - indica 27 variáveis U_{111} , U_{112} , ..., U_{333}

Uma soma de variáveis é indicada pela repetição dos índices, ou seja

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

Por exemplo, o produto escalar dos vetores a e b pode ser representado por

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_i b_i \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

Um outro exemplo é o vetor tensão, que é função do tensor tensão e da direção da superfície e que pode se representado por

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

Particularmente, na direção 2, tem-se

$$t_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3$$

O índice repetido é chamado de índice mudo e não pode ser repetido mais do que 2 vezes. Não existe, por exemplo, a expressão A_{iii} .

A derivação é representada por uma vírgula antes do índice em relação ao qual é feita a derivada.

Exemplos:

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$U_{ij,j} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial U_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial U_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial U_{i3}}{\partial x_3}$$

Observe-se que, neste segundo exemplo, tem-se a indicação derivação e de somatório.

O operador laplaciano ∇^2 é representado por

$$\nabla^2 \phi = \phi_{,ii}$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}$$

Geralmente, a notação indicial não é utilizada quando se usa coordenadas cilíndricas ou polares.

E.4 O delta de Kronecker

O delta de Kronecker [103] é uma variável que pode tomar os valores 0 e 1, conforme os índices sejam diferentes ou iguais.

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Particularizando

$$\delta_{11} = 1$$

$$\delta_{23} = 0$$

O uso do delta de Kronecker é muito útil em algumas equações tensoriais onde certas variáveis são utilizadas apenas em alguns casos. Por exemplo

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij}p$$

Onde o último termo só é usado quando i for igual a j , ou seja

$$\sigma_{11} = \sigma'_{11} + p$$

$$\sigma_{12} = \sigma'_{12}$$

É conveniente observar que

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \quad (\text{em 3D})$$

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2 \quad (\text{em 2D})$$

O delta de Kronecker ao ser aplicado a um vetor, ou a um tensor, causa uma troca de índices.

$$\delta_{ij}b_j = \delta_{i1}b_1 + \delta_{i2}b_2 + \delta_{i3}b_3$$

Particularizando, para $i = 1, 2$

$$\delta_{1j} b_j = \delta_{11} b_1 + \delta_{12} b_2 + \delta_{13} b_3 = b_1$$

$$\delta_{2j} b_j = \delta_{21} b_1 + \delta_{22} b_2 + \delta_{23} b_3 = b_2$$

Ou seja

$$\delta_{ij} b_j = b_i$$

O índice da variável b foi trocado. Um outro exemplo:

$$\delta_{ij} S_{jkl} = \delta_{i1} S_{1kl} + \delta_{i2} S_{2kl} + \delta_{i3} S_{3kl}$$

Para $i = 3$, obtem-se

$$\delta_{3j} S_{jkl} = \delta_{31} S_{1kl} + \delta_{32} S_{2kl} + \delta_{33} S_{3kl} = S_{3kl}$$

Ou seja

$$\delta_{ij} S_{jkl} = S_{ikl}$$

E.5 O delta de Dirac

A função delta de Dirac, $\delta(x)$, representa uma função infinitamente concentrada e é dada, simbolicamente por [98,106].

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

de tal modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Na realidade o que se tem é

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) f(x) dx \approx f(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx$$

cujas aproximações melhoram quando ϵ tende a 0. Os limites $-\infty$ e ∞

podem ser substituídos por quaisquer números c e d , sendo $d > c$.
Considerando-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

tem-se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Esta integral é conhecida como propriedade de filtragem da função delta, pois ela seleciona dentre todos os valores da função $f(x)$ apenas o valor em $x=0$, $f(0)$.

As seguintes são algumas propriedades e relações envolvendo a função delta de Dirac.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & (x \neq a) \\ \infty & (x = a) \end{cases}$$

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

$$\delta(ax) = \delta(x)/|a| \quad a \neq 0$$

$$\delta(x^2 - a^2) = [\delta(x-a) + \delta(x+a)]/(2a) \quad a > 0$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

$$\delta[f(x)] = \delta(x-x_0)/|f'(x_0)| \quad f(x_0) = 0$$

$$\delta'(x) = -\delta'(-x)$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x) \delta(x-b) dx = \delta(a-b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m \delta(x)}{dx^m} f(x) dx = (-1)^m \frac{d^m f(0)}{dx^m}$$

$$\delta(x) = H'(x)$$

$$\mathcal{L}[\delta(x-a)] = e^{-sa}$$

Onde H é a função de Heaviside, $\mathcal{L}$ simboliza transformada de Laplace e s é o parâmetro de Laplace.

E.6 Equações integrais

Equações integrais são aquelas que contêm as funções incógnitas no integrando [40].

$$\int_{x_1}^{x_2} U(y, x) z(x) dx = \phi(y)$$

A equação acima é conhecida como equação integral de 1ª espécie, pois a incógnita $z(x)$ só aparece no integrando. Já a equação

$$z(y) + \int_{x_1}^{x_2} U(y, x) z(x) dx = \phi(y)$$

é chamada de equação integral de 2ª espécie, pois a incógnita aparece dentro e fora do integrando.

A função $U(y, z)$ que multiplica a incógnita no integrando é usualmente chamada de núcleo.

Os 2 exemplos anteriores são de equações integrais unidimensionais, pois a integração envolve apenas uma variável independente.

E.7 Problemas de valores no contorno

Problemas de valores no contorno são aqueles governados por uma equação diferencial parcial aplicável no volume V , de uma superfície fechada S [40].

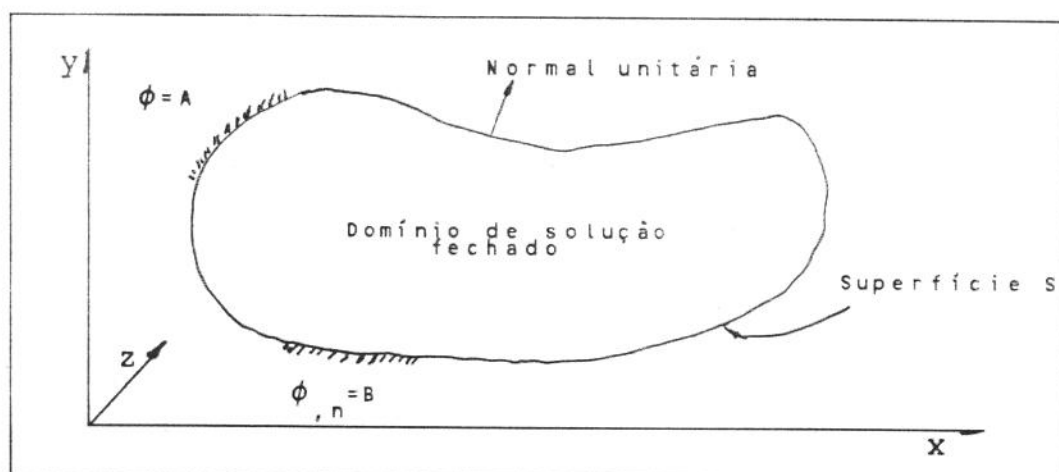


Figura E.7.01 - Um problema de valores no contorno

Por exemplo, a equação de Poisson

$$\phi_{,ii} = f(x)$$

onde ϕ é a função incógnita e $f(x)$ é uma função dada aplicável no volume.

Para se obter uma solução única de qualquer equação diferencial é necessário especificar algumas condições de contorno, onde a função incógnita é dada em alguns trechos da superfície S .

Estes valores de contorno podem ser de 3 tipos:

- tipo Dirichlet onde a função ϕ é dada;
- tipo Neumann onde a derivada normal da função, $\phi_{,ii,n}$, é dada;
- tipo misto, que é uma combinação destes 2 casos, tanto em diferentes partes do contorno como no mesmo.

Em problemas que envolvam o tempo se utilizam, além das condições de contorno, as condições iniciais.

E.8 Formulação integral no contorno

As equações integrais podem ser usadas para relacionar funções no domínio (volume).

É possível através de algumas transformações reduzir a dimensionalidade destas equações, ou seja, transformar integrais de volume em integrais de superfície.

As equações integrais que contém apenas integrais de

superfície são chamadas de equações integrais de contorno, pois relacionam variáveis no contorno do domínio da solução.

Os métodos de se obter as equações integrais de contorno podem ser agrupados em 3 classes [40]:

1. Método indireto

O problema é formulado usando-se funções-peso fictícias. Estas funções-peso não têm significado físico algum, mas podem ser integradas a fim de se obter os valores reais;

2. Método semi-indireto

As funções usadas para formular o problema estão relacionadas com funções que têm significado físico. Por exemplo, em mecânica do contínuo elas estão relacionadas com as funções tensão, que podem ser integradas para se obter deslocamentos e e tensões;

3. Método direto

Neste caso as quantidades físicas reais são usadas desde o começo para se formular o problema.

Por exemplo, em mecânica do contínuo, as equações diferenciais parciais da elasticidade são transformadas em equações integrais aplicáveis ao contorno usando o teorema de Betti.

E.9 Teoremas de Green

Considere-se um domínio arbitrário V , contido por uma superfície S , suave por trechos, onde a função f tem 1º derivadas contínuas.

A transformação integral abaixo permite passar de uma integral de volume para uma de superfície

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dv = \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) ds$$

Em notação tensorial tem-se [40,109]:

$$\int_V f_{i,i} dv = \int_S f_i n_i ds$$

Onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal à superfície S .

A relação acima é chamada de teorema da divergência ou

de teorema de Green [99,102,109].

No caso de duas variáveis ϕ e φ com 1º e 2º derivadas contínuas no volume V, tem-se

$$\int_V (\phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi) dv = \int_S (\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n}) ds$$

Onde $\partial/\partial n$ é a derivada na direção da normal.

A relação acima é conhecida como o 2º teorema de Green.

E.10 Solução fundamental

Tome-se, por exemplo, a equação de Navier-Cauchy[60],

$$(\lambda + G)u_{i,ij} + Gu_{j,ii} + \rho X_j = \rho \ddot{u}_j$$

A solução fundamental no ponto Q, para o deslocamento na direção i, devido a um pulso concentrado unitário no ponto P na direção j, em um sólido elástico tridimensional infinito é a solução da equação acima com uma força de corpo por unidade de massa, aplicada em P, dada por

$$X_j = \delta(Q-P)\delta(t-\tau)e_j$$

onde e é um vetor unitário constante.

A solução fundamental é uma solução que pode ser aplicada a qualquer geometria, que satisfaz as equações diferenciais e que tem propriedades físicas significativas

A solução fundamental é obtida sem levar em consideração as condições de contorno do problema[49]. As soluções fundamentais que satisfazem às condições de contorno e às equações governantes são chamadas de Funções de Green.

Quando o ponto Q coincide com o ponto P a solução fundamental é singular e quando a distância entre estes dois tende a ∞ ela tende a 0.

As soluções fundamentais para poroelasticidade obtidas por Cleary[95] são as usadas nesta tese.

E.11 Identidade de Somigliana

Para se chegar a um sistema de equações algébricas lineares com solução única, pode-se usar o teorema de Betti para derivar uma equação integral aplicável em qualquer ponto do domínio inclusive no contorno ligada a dois conjuntos de funções (a) e (b).

O conjunto (a) é o problema real a ser resolvido.

O conjunto (b) é o conjunto de variáveis conhecidas, que são válidas para qualquer geometria em equilíbrio (soluções fundamentais). Por exemplo, em meios contínuos, a solução de Kelvin para deslocamentos e trações, em um ponto Q qualquer do domínio devidos a uma carga unitária instantânea aplicada em um ponto qualquer P do domínio. Assim na equação:

$$\int_s t_i^a u_i^b ds + \int_v f_i^a u_i^b dv = \int_s t_i^b u_i^a ds + \int_v f_i^b u_i^a dv \quad (E.11.01)$$

Pode-se ter

$$u_i^a = u_i(Q) \quad t_i^a = t_i(Q) \quad f_i^a = 0$$

$$u_i^b = U_{ij}^*(P, Q) e_j \quad t_i^b = T_{ij}^*(P, Q) e_j \quad f_i^b = \delta(Q-P) e_i$$

Onde os núcleos U_{ij}^* e T_{ij}^* são obtidos das soluções fundamentais.

Então a equação E.11.01 fica da seguinte forma

$$\int_v u_i(Q) \delta(Q-P) e_i dv = \int_s U_{ij}^*(P, Q) e_j t_i(Q) ds - \int_s T_{ij}^*(P, Q) e_j u_i(Q) ds$$

A integral à esquerda, na equação anterior, conforme uma das propriedades do delta de Dirac, tem a seguinte expressão

$$\int_v u_i(Q) \delta(Q-P) e_i dv = u_i(P) e_i$$

Assim sendo fica-se com a seguinte equação:

$$u_i(P)e_i = \int_s U_{ij}^*(P,Q)e_j t_i(Q) ds - \int_s T_{ij}^*(P,Q)e_j u_i(Q) ds \quad (E.11.02)$$

A equação E.11.02 é conhecida como a identidade de Somoglianiana [40].

A identidade Somiglianiana extendida para a poroelasticidade tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} u_i(P)e_i = & \int_s U_{ij}^*(P,Q)e_j t_i(Q) ds - \int_s T_{ij}^*(P,Q)e_j u_i(Q) ds \\ & - \int_s Q_j^*(P,Q)e_j p(Q) ds + \int_s P_j^*(P,Q)e_j q(Q) ds \end{aligned} \quad (E.11.03)$$

As soluções fundamentais são singulares quando o ponto P coincide com o ponto Q. Para ser resolvido este problema envolve-se o ponto P por uma esfera (3D), ou por uma circunferência (2D), de raio infinitesimal ϵ e com uma superfície (ou arco, em 2D) S_ϵ [42,49]. Depois resolve-se as integrais no limite com ϵ tendendo a 0

As equações E.11.02 e E.11.03 são aplicáveis em qualquer ponto do domínio, inclusive no contorno.

Neste último caso ocorre mais um problema quando o ponto de P coincide com o ponto Q. Agora o ponto P não mais pode ser envolvido por uma esfera (3D), ou por uma circunferência (2D), de raio ϵ , que depois se faz tender a 0 e assim obtendo-se o valor principal de Cauchy. O sólido (3D), ou a superfície (2D) que poderia envolver o ponto P depende da geometria do contorno [42, 49,58]. Assim sendo, as equações E.11.02 e E.11.03 generalizadas têm as seguintes formas:

$$Cu_i(P)e_i = \int_s U_{ij}^*(P,Q)e_j t_i(Q) ds - \int_s T_{ij}^*(P,Q)e_j u_i(Q) ds \quad (E.11.04)$$

$$\begin{aligned}
C u_i(P) e_i &= \int_s U_{ij}^*(P, Q) e_j t_i(Q) ds - \int_s T_{ij}^*(P, Q) e_j u_i(Q) ds \\
&- \int_s Q_j^*(P, Q) e_j p(Q) ds + \int_s P_j^*(P, Q) e_j q(Q) ds
\end{aligned} \tag{E.11.05}$$

Como já foi dito o coeficiente C depende da geometria do contorno no ponto de colocação P .

Em poroelasticidade, para o caso bidimensional, C é igual ao valor do ângulo interno do vértice no nó onde está o ponto P dividido por 2π [20]. Nos pontos internos C vale 1. No caso de discretização com elementos constantes o nó fica no meio do elemento, que é reto, C tem um valor igual a $1/2$. Obviamente fora do contorno C tem um valor igual a 0. Os valores de C citados são válidos apenas para soluções fundamentais geradas por uma força puntual instantânea unitária. Quando se considera uma força não unitária os valores acima devem ser multiplicados pela intensidade da força.

E.12 Funções de Bessel modificadas

A função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem ϑ é definida por [111,112].

$$I_{\vartheta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\vartheta}}{k! \Gamma(k+\vartheta+1)} \quad \vartheta > 0 \quad \text{e} \quad \vartheta = 0$$

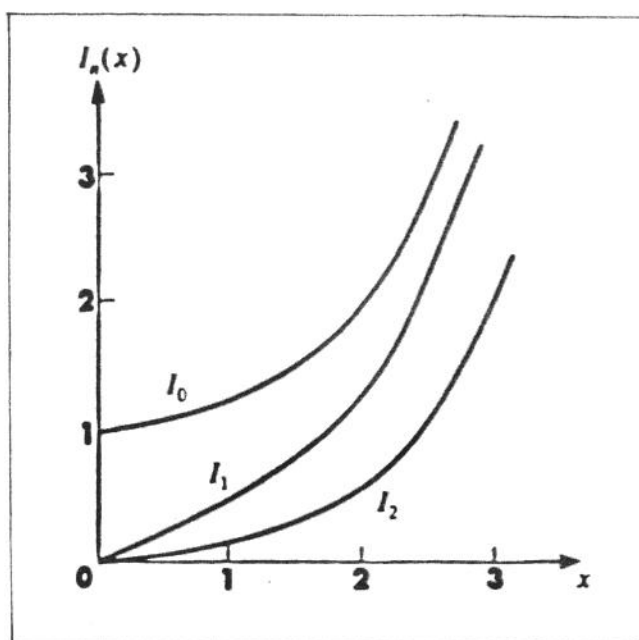


Figura E.12.01 - Gráfico de $I_n(x)$ conforme [112]

Uma relação importante é a seguinte

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem ν é definida por

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen} \pi \nu}$$

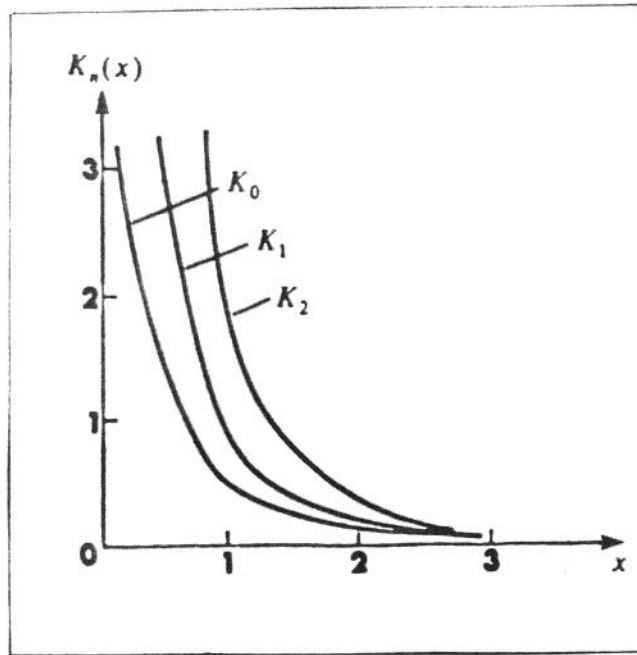


Figura E.12.02 - Gráfico de $K_n(x)$ conforme [112]

Algumas relações importantes entre estas funções são listadas a seguir.

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu I_\nu(x) \right] = x^\nu I_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} I_\nu(x) \right] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu K_\nu(x) \right] = -x^\nu K_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} K_\nu(x) \right] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x)$$

As relações entre as derivadas são mostradas abaixo.

$$\frac{d}{dx} \left[I_\nu(x) \right] + \frac{\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[I_\nu(x) \right] - \frac{\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu+1}(x)$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = \frac{2d}{dx} \left[I_\nu(x) \right]$$

$$I_{\vartheta-1}(x) - I_{\vartheta+1}(x) = \frac{2\vartheta}{x} I_{\vartheta}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [K_{\vartheta}(x)] + \frac{\vartheta}{x} K_{\vartheta}(x) = -K_{\vartheta-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [K_{\vartheta}(x)] - \frac{\vartheta}{x} K_{\vartheta}(x) = -K_{\vartheta+1}(x)$$

$$K_{\vartheta-1}(x) + K_{\vartheta+1}(x) = -\frac{2d}{dx} [K_{\vartheta}(x)]$$

$$K_{\vartheta-1}(x) - K_{\vartheta+1}(x) = -\frac{2\vartheta}{x} K_{\vartheta}(x)$$

E.13 Integração gaussiana

Na maioria das regras de integração numérica calcula-se os valores da função para valores igualmente espaçados da variável independente, incluindo os extremos do intervalo de integração. No método de integração gaussiana esta condição é relaxada e os valores de daquela variável são escolhidos de tal modo que, para um número fixado deles, o erro seja o menor possível [47,96,110].

Na figura seguinte são mostrados os nós da regra do trapézio e os nós da integração gaussiana, no caso para dois pontos.

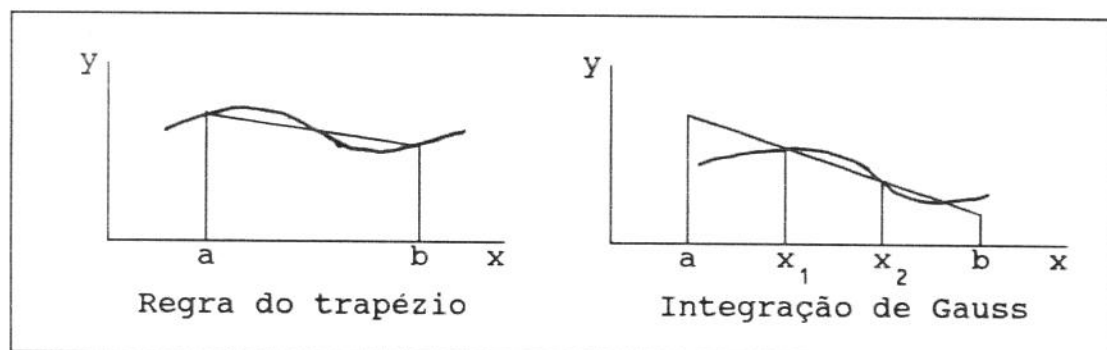


Figura E.13.01 - Integração gaussiana

Usou-se o método de integração numérica chamado Gauss-Legendre. Os polinômios de Legendre formam uma família de polinômios ortogonais. No caso de integrais mais específicas ou

mais trabalhosas, outros polinômios ortogonais podem ser usados. A abordagem de Gauss-Legendre requer que a integração seja feita no intervalo $[-1,1]$, sendo necessário uma mudança de variáveis se ele for diferente. Assim, usando E.2.01 e E.2.02, tem-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(u) J(u) du$$

Então

$$u = mx + n$$

Tal que

$$\text{para } x = a \quad \text{tenha-se} \quad u = -1$$

$$\text{para } x = b \quad \text{tenha-se} \quad u = 1$$

$$-1 = ma + n$$

$$1 = mb + n \quad \dots$$

$$m = 2/(b-a) \quad n = -(a+b)/(b-a)$$

$$u = [2x - (a+b)] / (b-a)$$

$$x = [(b-a)u + (a+b)] / 2$$

$$dx = [(b-a)/2] du$$

$$J(u) = (b-a)/2$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(u) J(u) du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f[(b-a)u/2 + (a+b)/2] du$$

Para o caso de 2 pontos de integração tem-se o seguinte:

$$\int_{-1}^1 \varphi(u) J(u) du \approx w_1 \varphi(x_1) + w_2 \varphi(x_2) \quad (\text{E.13.01})$$

Tem-se quatro incógnitas: as duas localizações x_1 e x_2 e os dois pesos w_1 e w_2 . Isto significa que se pode tentar obter resultados exatos para um polinômio de, até três graus, $\varphi(x)$. O grau, na regra do trapézio, é apenas um. Então, pode-se ter:

$$\varphi(x) = 1 \quad \varphi(x) = x \quad \varphi(x) = x^2 \quad \varphi(x) = x^3$$

Deste modo

$$\int_{-1}^1 1 dx = 2 = w_1 + w_2$$

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2$$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3$$

A solução deste sistema é

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$x_1 = -x_2 = -1/3^{1/2}$$

Observe-se que x_1 e x_2 são as raízes do polinômio de Legendre de grau 2.

Então a equação E.13.01 fica, para este caso, com a forma abaixo

$$\int_{-1}^1 \varphi(u) J(u) du \cong \varphi(-1/3^{1/2}) + \varphi(1/3^{1/2})$$

Por exemplo

$$f(x) = 3-2x \quad a = -2 \quad b = 4$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(u) J(u) du$$

$$I = \int_{-2}^4 (3-2x) dx = 6$$

$$u = [2x-(a+b)]/(b-a) = [2x-(4-2)]/(4+2) = (x-1)/3$$

$$x = [(b-a)u + (a+b)]/2 = [(4+2)u + (4-2)]/2 = 3u + 1$$

$$J(u) = (4+2)/2 = 3$$

$$\varphi(u) = 3 - 2(3u+1) = 1 - 6u$$

$$I = \int_{-1}^1 (1-6u) 3 du = \int_{-1}^1 (3-18u) du = 6$$

Numericamente tem-se

$$\varphi(-1/3^{1/2}) = 1 + 6/3^{1/2}$$

$$\varphi(1/3^{1/2}) = 1 - 6/3^{1/2}$$

$$I = 3(1+1) = 6$$

No caso geral de n pontos de integração os nós são localizados nas raízes do polinômio de Legendre de grau n . Estes valores dividem-se em pares simetricamente colocados em relação à origem com a inclusão de $x = 0$, se n for ímpar. Para n de 2 a 6, os valores das localização e dos pesos são os seguintes.

n	localização	peso
2	$\pm 0,5773502692$	1,0000000000
3	$\pm 0,7745966692$	0,5555555556
	0,0000000000	0,8888888889
4	$\pm 0,8611363116$	0,3478548451
	$\pm 0,3399810436$	0,6521451549
5	$\pm 0,9061798459$	0,2369268851
	$\pm 0,5384693101$	0,4786286705
	0,0000000000	0,5688888889
6	$\pm 0,9324695142$	0,1713244924
	$\pm 0,6612093865$	0,3667615730
	$\pm 0,2386191861$	0,4679139346

A soma dos pesos é sempre igual a 2.

Um outro exemplo usando, agora, 4 pontos de integração.

$$f(x) = e^x \quad a = 0 \quad b = 1$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(u) J(u) du$$

$$I = \int_0^1 e^x dx = 1.7182818284$$

$$u = [2x - (a+b)] / (b-a) = [2x - (1-0)] / (1+0) = 2x - 1$$

$$x = [(b-a)u + (a+b)] / 2 = [(1-0)u + (0+1)] / 2 = (u+1)/2$$

$$J(u) = (1-0)/2 = 1/2$$

$$\varphi(u) = e^{(u+1)/2}$$

$$I = \int_{-1}^1 (e^{(u+1)/2}) du/2 = 1,7182818284$$

Numericamente tem-se

$$I = [0.3478548451(e^{(-0.8611363116+1)/2} + e^{(0.8611363116+1)/2}) + \\ + 0.6521451549(e^{(-0.3399810436+1)/2} + e^{(0.3399810436+1)/2})]/2$$

$$I = 1,7182818284$$

Para aproximadamente a mesma precisão, a integração gaussiana requer a metade dos pontos necessários para a regra de Simpson. A integração gaussiana não é adequada para os casos em que a função não é conhecida, pois ela requer valores desta função em pontos não uniformemente distribuídos no intervalo de integração. Para dados experimentais a integração gaussiana não funciona bem, pois dificilmente os valores de x estarão na posição correta.

APÊNDICE F

ALGUMAS FIGURAS ILUSTRATIVAS

F.1 Introdução

Este apêndice apresenta algumas figuras com as condições de contorno de algumas das aplicações do MEC mostradas no capítulo 6.

F.2 Bloco poroelástico.

Este problema foi apresentado no item 6.4 e a figura abaixo o mostra esquematicamente.

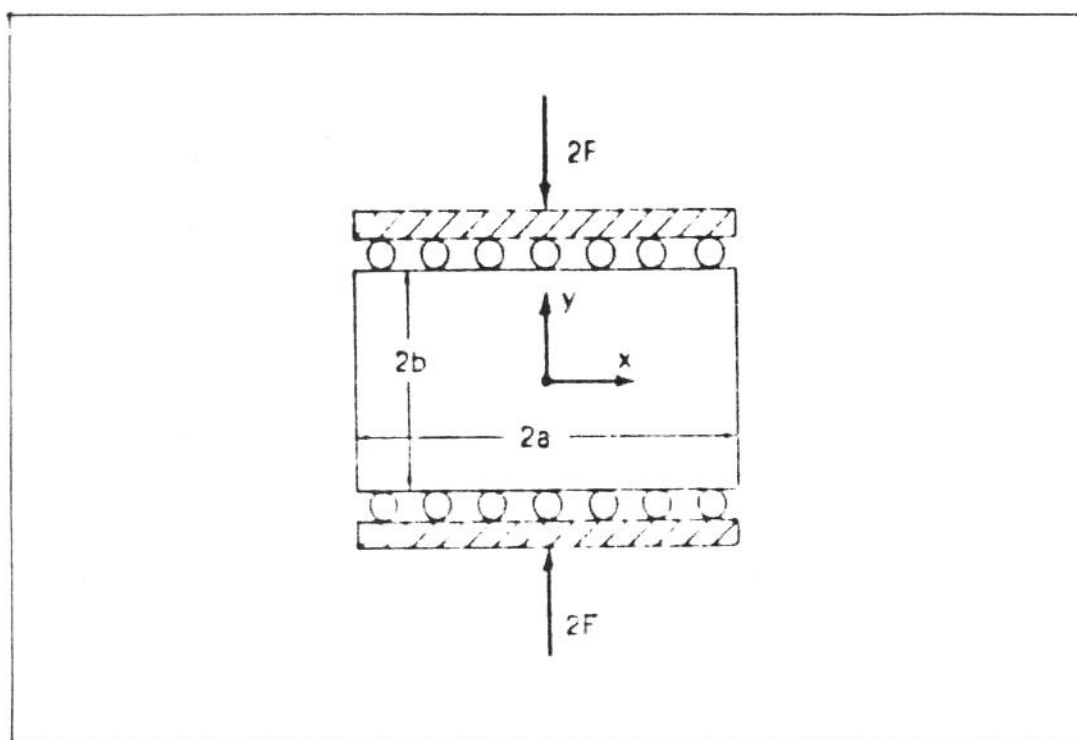


Figura F.2.01 - Bloco poroelástico conforme [20]

O topo e a base foram discretizados com 5 elementos lineares cada um e as laterais, com 20 cada uma.

A dimensão a foi fixada em 5 e a b , em 2,5.

F.3 Coluna unidimensional

Esta é aplicação analisada no item 6.5.

O caso apresentado por Badmus et al [63] é mostrado na figura F.3.01 e o apresentado por Boone [87] é visto na figura F.3.02.

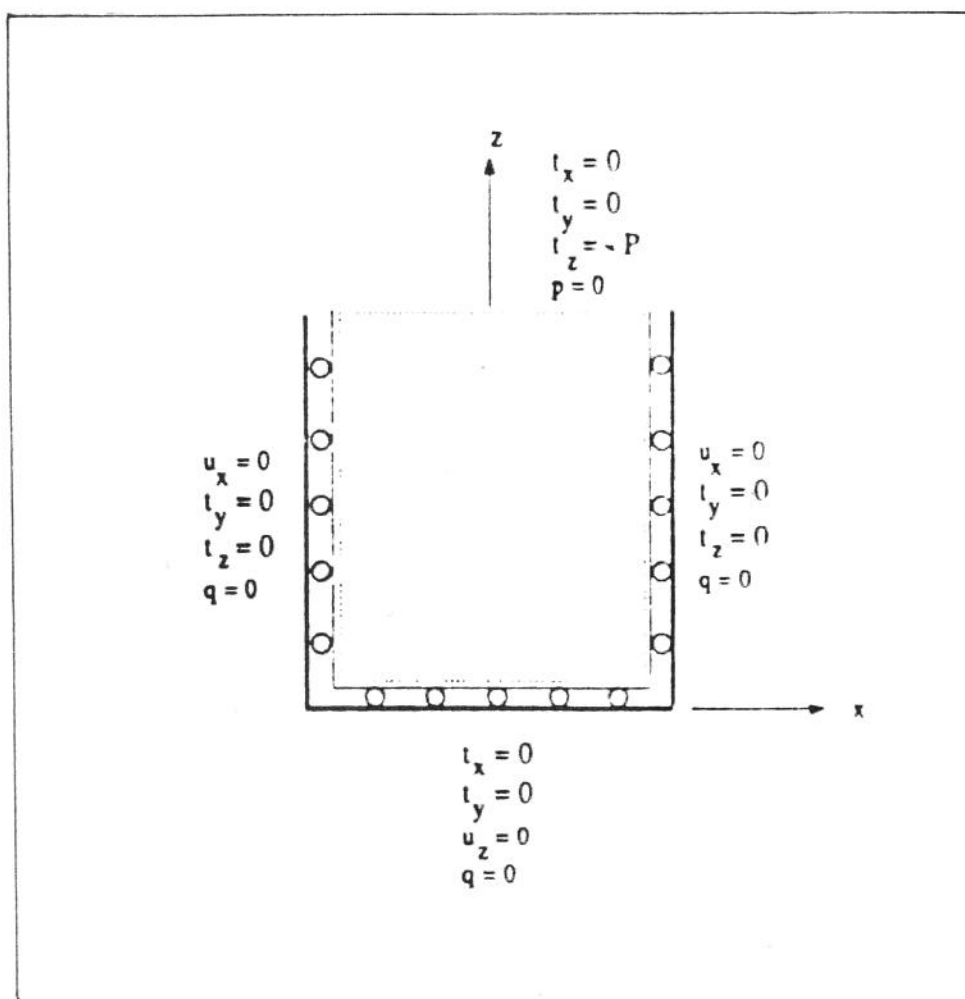


Figura F.3.01 - Coluna unidimensional conforme [63]

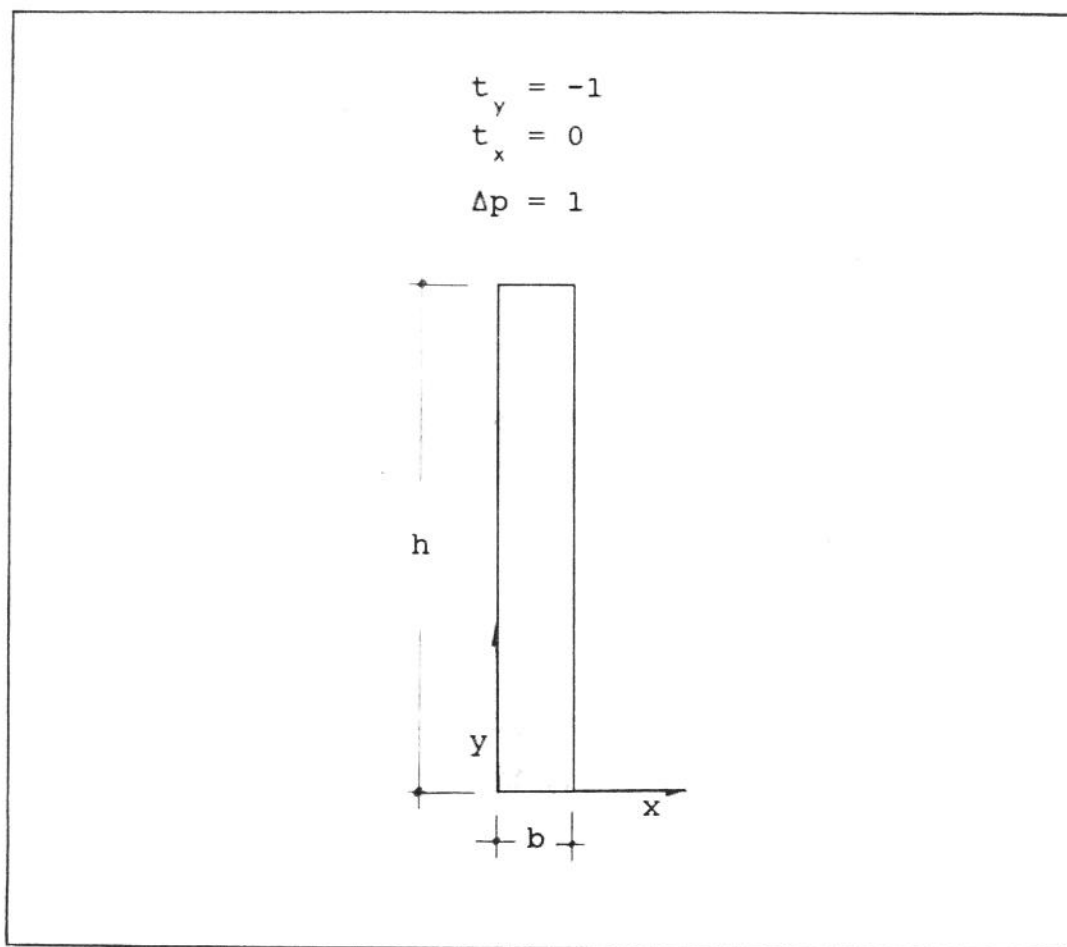


Figura F.3.02 - Coluna unidimensional conforme [87]

Usou-se:

$$h = 6$$

$$b = 1$$

Base e laterais impermeáveis e rígidas.

As outras condições de contorno são iguais às mostradas na figura F.3.01.

F.4 Semi-espço poroelástico

Este problema acha-se no item 6.6.

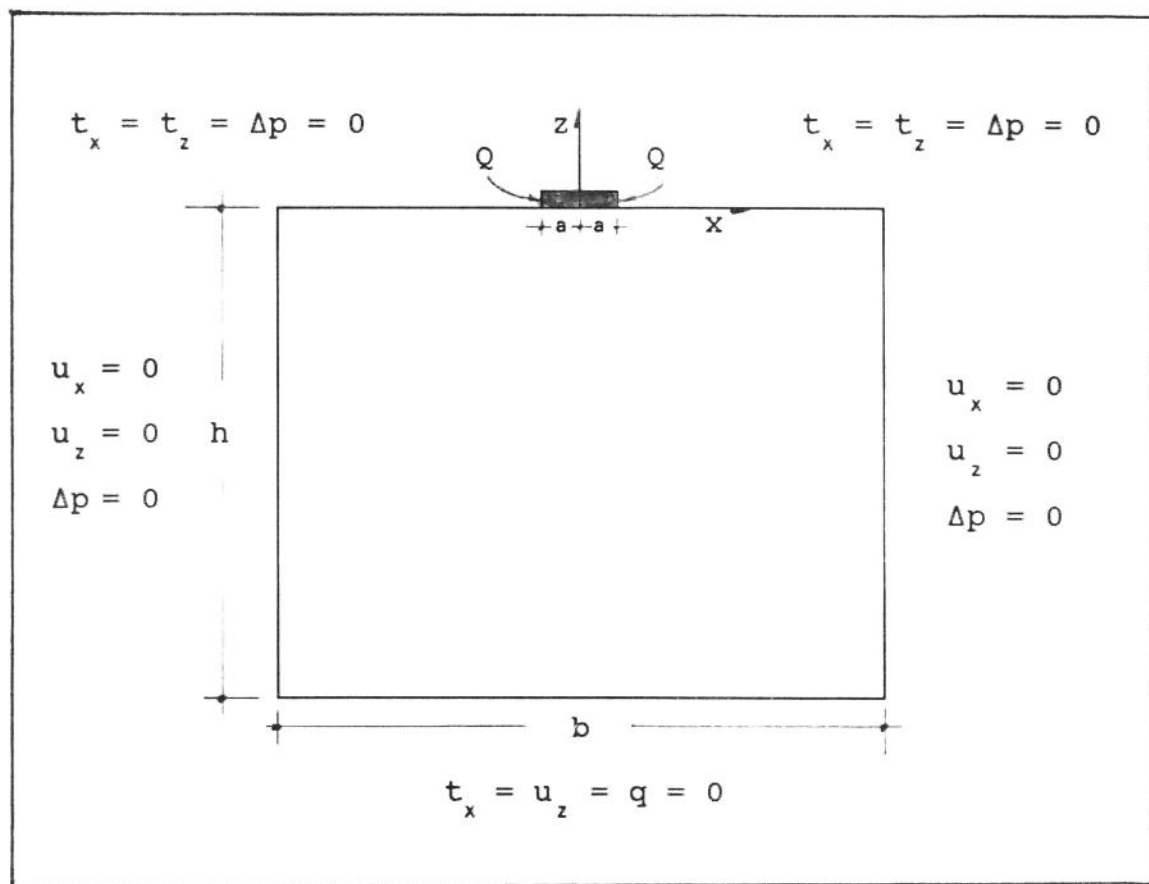


Figura F.4.01 - Semi-espço poroelástico

Foram usados os valores:

$$h = b = 200\text{m} \quad a = 1\text{m} \quad Q = 1000 \text{ MN/m}$$

Sob o carregamento tem-se:

$$t_x = 0 \quad t_z = -1000 \text{ MPa} \quad \Delta p = 0$$