

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE FLUXO DE POTÊNCIA EM VIGAS

Autor: **José Inácio Piva**

Orientador: **Prof. Dr. José Roberto de França Arruda**

89/00

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR José Inácio Piva
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 20.12.2000

José Roberto de França Arruda
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE FLUXO DE POTÊNCIA EM VIGAS

Autor: José Inácio Piva

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica Computacional

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2000

S.P. - Brasil

11/50/00

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P688d

Piva, José Inácio

Determinação experimental de fluxo de potência em vigas / José Inácio Piva.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: José Roberto de França Arruda
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Vigas. 2. Vibração. 3. Ondas elásticas. I. Arruda,
José Roberto de França. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Dissertação de Mestrado

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE FLUXO DE POTÊNCIA EM VIGAS

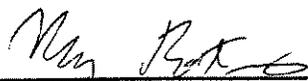
Autor: José Inácio Piva

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente

Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Ney Roitman

Universidade Federal do Rio de Janeiro



Prof. Dr. Robson Pederiva

Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 20 de dezembro de 2000

“Se você sopra uma fagulha, ela se inflama, e se você lhe cospe em cima, ela se apaga.
Note bem que as duas coisas saem da mesma boca.”

(Antigo Testamento – Eclesiástico cap. 28, vv 12)

Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu pai (em memorium), à minha amada esposa Denise e aos meus queridos filhos Maria Bethânia e João Vítor, pelo muito que fizeram para que eu pudesse concluir este trabalho.

Agradecimentos

Por este trabalho ter levado um tempo muito maior que eu esperava e desejasse para ser concluído, muitas pessoas foram envolvidas no seu decorrer, porém algumas delas foram importantes em algumas fases e outras em todas elas.

Primeiramente gostaria de agradecer a antiga empresa na qual trabalhava, a Equipamentos Clark Ltda, que posteriormente foi adquirida pela Eaton Corporation – Divisão de Transmissões, na pessoa do Marco Antônio Nardeli Diniz, pelo incentivo que me deu na fase inicial do trabalho. Nesta fase final, gostaria de agradecer a General Motors do Brasil, na pessoa de meu atual superior José Celso Mazarim, pelas horas que me dispensou para que pudesse concluir esta dissertação.

Agradeço também ao Departamento de Mecânica Computacional pelo apoio e a todos os professores, que sempre que cruzavam comigo pelos corredores me incentivaram a finalizar este trabalho, e aos colegas do grupo de acústica pelas dicas e saudável convivência.

Meu muito obrigado a diversos amigos pelo incentivo, apoio moral e pela amizade, que me ajudaram a perseverar.

Duas pessoas foram porém muito importantes em todas as fases desta empreitada, e merecem meu especial agradecimento, pois sem elas não me seria possível terminá-la. A primeira delas é o meu orientador, professor Arruda, ao qual agradeço pela paciência, incentivo, presteza em me ajudar e pela confiança depositada em mim. A segunda pessoa é minha esposa Denise, pela sua força passada para mim nas horas difíceis para que eu não desanimasse, pela paciência em ficar com nossos filhos nos finais de semana sem a minha presença, para que eu pudesse estudar, e finalmente pelo seu auxílio na revisão final do texto.

Agradeço também aos professores Ney Roitman e Robson Pederiva, pela gentileza em aceitarem o convite para participarem da banca de minha defesa e pelas sugestões as quais foram de grande valia para melhorar este texto.

Resumo

Piva, José Inácio. *Determinação experimental de fluxo de potência em vigas*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000, Tese (mestrado).

Este trabalho se propõe a fazer uma revisão do equacionamento matemático envolvido em métodos de cálculo de fluxo de potência para vigas sob flexão. Vários métodos são apresentados e suas diferenças são comentadas. Alguns dos métodos apresentados são mais tradicionais e se utilizam da aproximação por diferenças finitas para calcular o fluxo de potência. Outros, porém, se utilizam de modelos paramétricos para este mesmo cálculo. Uma formulação alternativa para estes modelos paramétricos é apresentada, utilizando uma aproximação pela série discreta regressiva de Fourier unidimensional para modelar o campo de vibração e calcular então o fluxo de potência em uma viga sob flexão. A avaliação dos diversos métodos é feita através da comparação da relação de dispersão obtida pelas várias técnicas com o valor teórico. Devido ao fato do amortecimento interno da viga ser muito pequeno, a potência propagativa estimada pelos vários métodos é comparada com a potência injetada no sistema. Estas comparações são realizadas para um sistema simples constituído por uma viga sob flexão, na qual uma extremidade é excitada por um vibrador eletrodinâmico com uma força aleatória ou senoidal e a outra extremidade é enterrada parcialmente em uma caixa de areia, simulando uma terminação *quasi* anecóica. Para validação dos métodos estudados as comparações realizadas foram aplicadas tanto aos dados experimentais como ao modelo numérico representativo do sistema experimental.

Palavras chaves:

Intensidade estrutural, Intensimetria vibracional, Fluxo de potência, Vigas.

Abstract

Piva, José Inácio. *Experimental Determination of Power Flow in Beams*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000, Tese (mestrado).

The objective of this work is to review the mathematical equations involved in the methods of calculation of power flow in beams under bending vibration. Several methods are presented and compared. Some of these methods are traditionally employed and use approximation through finite differences in order to calculate power flow. Other methods use parametric models for the same calculations. This paper also presents an alternative formulation for such methods, which is based on an approximation through Unidimensional Regressive Discrete Fourier Series, in order to model the vibration field and compute the power flow in a beam subjected to bending vibration. The evaluation of the various methods is done by comparing the theoretical value of the dispersion relation against the ones obtained through the several implemented techniques. As the internal damping of the beam is very low, the power flow can also be compared with the input power in the system. Such comparisons are made for a simple system composed by a beam under bending vibration, in which one end is excited by an electromagnetic shaker driven by random or sinusoidal force, and the other is partially buried into a sandbox, which simulates a *quasi* anechoic termination. The comparisons conducted were applied to experimental data as well as to a numerical model which is representative of the experimental system, in order to provide validation of the methods studied.

Keywords:

Structural intensity, Vibration intensimetry, Power flow, Beams.

CONTEÚDO

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xi
Nomenclatura	xix
1- INTRODUÇÃO	1
1.1- Motivação	1
1.2- Trabalhos relacionados	1
1.3- Objetivos e organização	5
2- TEORIA BÁSICA	8
2.1- Introdução	8
2.2- Potência e intensidade	8
2.3- Revisão da teoria de vibração em vigas sob flexão	14
2.4- Potência em uma viga sob flexão	18
3- MÉTODOS DE CÁLCULO DO FLUXO DE POTÊNCIA	22
3.1- Introdução	22
3.2- Método das Diferenças Finitas	22
3.2.1- Medidas com 4 e 2 acelerômetros	25
3.2.2- Medidas com 3 acelerômetros - formulação de Carniel	28
3.2.3- O uso da FRF no cálculo do fluxo de potência	33
3.2.4- Implementação do método	36
3.3- Ajustes Paramétricos	40
3.3.1- Interpolação pelas funções de forma do modelo dos elementos finitos (MEF)	41
3.3.1.1- Implementação do método	42
3.3.2- Identificação dos coeficientes da solução analítica da equação de propagação de onda	46
3.3.2.1- Implementação do método	48

3.3.3- Aproximação pela série de Fourier discreta regressiva (RDFS)	55
3.3.3.1- A série de Fourier discreta regressiva	56
3.3.3.2- Implementação do método	58
4- ANÁLISE DOS RESULTADOS	65
4.1- Introdução	65
4.2- Simulação numérica	65
4.2.1- Descrição do modelo	65
4.2.1.1- Implementação do modelo teórico	69
4.2.2- Discussão dos resultados da simulação	71
4.2.2.1- Diferenças finitas	71
4.2.2.2- Elementos finitos	80
4.2.2.3- Propagação de ondas – método ABCD	91
4.2.2.4- Aproximação pela RDFS	108
4.3- Exemplo Experimental	129
4.3.1- Descrição do experimento	129
4.3.2- Discussão dos resultados experimentais	131
4.3.2.1- Diferenças finitas	132
4.3.2.2- Propagação de ondas – método ABCD	137
4.3.2.2- Aproximação pela RDFS	145
5- CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	156
Referências Bibliográficas	158
Apêndice A: Equação da viga de Euler-Bernoulli	162
Apêndice B: Equação de ondas Longitudinais e Transversais	166
Apêndice C: Descrição dos equipamentos usados no experimento	174
Apêndice D: Referências de trabalhos publicados	176

Lista de Figuras

2.1	Mapa típico de fluxo de potência	9
2.2	Componentes de onda de flexão A,B,C e D	17
3.1	Representação gráfica do método das diferenças finitas para as derivadas espaciais	23
3.2	Esquema conceitual dos métodos de regressões paramétricas do campo de deslocamento, velocidade ou acelerações da viga sob flexão	40
4.1	Modelo do sistema usado na simulação	65
4.2	Acelerância do sistema simulado no ponto de excitação	67
4.3	Esquema de coordenadas da viga para uso dos programas de simulação	72
4.4	Variação da distância de campo próximo com a frequência	73
4.5	Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	73
4.6	Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	75
4.7	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	75
4.8	Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos $\Delta x = 0.1\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	76
4.9	Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.1\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	76
4.10	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.1\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	77
4.11	Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$	78
4.12	Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$	79
4.13	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$	79
4.14	Comparação da relação de dispersão analítica com k_{MEF} - Eq. (3.24) - 4 pontos, $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	81

4.15	Comparação do fluxo de potência por MEF usando k teórico e hipótese de campo distante, e a potência injetada - 4 pontos, $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	82
4.16	Comparação do fluxo de potência por MEF sem hipótese de campo distante e a potência injetada - 4 pontos, $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	82
4.17	Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$ com 4 pontos	83
4.18	Comparação da relação de dispersão analítica com k_{MEF} - Eq. (3.24) - 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	85
4.19	Comparação do fluxo de potência por MEF usando k teórico e hipótese de campo distante, e a potência injetada - 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	85
4.20	Comparação do fluxo de potência por MEF sem hipótese de campo distante e a potência injetada - 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	86
4.21	Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$ com 14 pontos	86
4.22	Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 1.02$ (aplicação da força) - com 14 pontos	87
4.23	Comparação da relação de dispersão analítica com k_{MEF} - Eq. (3.24) - 27 pontos, $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$	88
4.24	Comparação do fluxo de potência por MEF usando k teórico e hipótese de campo distante, e a potência injetada - 27 pontos, $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$	88
4.25	Comparação do fluxo de potência por MEF sem hipótese de campo distante e a potência injetada - 27 pontos, $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$	89
4.26	Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$ com 27 pontos	89
4.27	Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 1.02$ (aplicação da força) - com 27 pontos	90
4.28	a-f): Número de condicionamento da matriz dos parâmetros A,B,C e D em função da distância entre os sensores	92

4.29	a-d): Número de condicionamento da matriz dos parâmetros A, B, C e D em função da frequência	93
4.30	Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD em 5 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	94
4.31	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	95
4.32	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	95
4.33	Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD com 10 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	96
4.34	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 10 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	97
4.35	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 10 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	97
4.36	Comparação da relação de dispersão teórica com o método AB com 3 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	98
4.37	Comparação do fluxo de potência pelo método AB com 3 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	99
4.38	Erros envolvidos no fluxo de potência pelo método AB em 3 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	99
4.39	Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD com 5 pontos, $\Delta x = 0.07\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	100
4.40	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.07\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	101
4.41	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.07\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	101
4.42	Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD com 5 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$	103
4.43	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$	103

4.44	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$	104
4.45	Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD com 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	105
4.46	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 14 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	105
4.47	Erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 14 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	106
4.48	Parâmetros A, B, C, e D obtidos com 14 pontos - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	107
4.49	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	109
4.50	Comparação em baixa frequência da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	109
4.51	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	110
4.52	Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	110
4.53	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 4 (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	112
4.54	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	112
4.55	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	113
4.56	Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	113
4.57	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	114
4.58	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	114

4.59	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	115
4.60	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	115
4.61	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$	116
4.62	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	117
4.63	Comparação em baixa frequência da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	118
4.64	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	118
4.65	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	119
4.66	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 4 (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	119
4.67	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	120
4.68	Comparação em baixa frequência da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	121
4.69	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	121
4.70	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	122
4.71	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	122
4.72	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	123
4.73	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	124

4.74	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	124
4.75	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$	125
4.76	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	126
4.77	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	126
4.78	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	127
4.79	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$	127
4.80	Esquema da montagem experimental	129
4.81	Esquema de montagem da calibração de fase dos acelerômetros	130
4.82	Esquema de numeração da viga	131
4.83	Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos e ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	133
4.84	Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	134
4.85	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	134
4.86	Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos e ref. acel. 3 a 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	135
4.87	Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	136
4.88	Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	136
4.89	Comparação da relação de dispersão analítica com o método ABCD com 5 pontos e ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	138
4.90	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	139

4.91	Comparação dos erros no fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	139
4.92	Comparação da relação de dispersão analítica com o método ABCD com 5 pontos e ref. acel. 3 a 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	140
4.93	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 3 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	141
4.94	Comparação dos erros no fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 3 a 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$	141
4.95	Comparação da relação de dispersão analítica com o método ABCD com 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	142
4.96	Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	143
4.97	Comparação dos erros no fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	143
4.98	Parâmetros A, B, C, e D obtidos com 14 pontos - $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0,50\text{m}$	144
4.99	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{cm}$ do final da viga (acel. 8)	146
4.100	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{ cm}$ do final da viga (acel. 8)	147
4.101	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{ cm}$ do final da viga (acel. 8)	147
4.102	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – acel. 8 referência, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{ cm}$ do final da viga	148
4.103	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no acel. 8 referência (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	148
4.104	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{cm}$ do final da viga (acel. 4)	149
4.105	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{ cm}$ do final da viga (acel. 4)	150
4.106	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{ cm}$ do final da viga (acel. 4)	150

4.107	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – acel. 4 referência, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{ cm}$ do final da viga	151
4.108	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no acel. 4 referência (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	151
4.109	Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	152
4.110	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – com 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	153
4.111	Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – com 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	153
4.112	Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. - (3.17b) com a potência injetada – acel. 7 referência, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 50\text{ cm}$ do final da viga	154
4.113	Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no acel. 7 referência (com e sem hipótese de campo próximo) com 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$	154
A.1	Deslocamento e deformação de um elemento de viga em flexão	162
B.1:	Deslocamentos, deformações e esforços em ondas longitudinais	166
B.2:	Configuração dos acelerômetros para medida de acelerações longitudinais	168
B.3:	Deslocamentos, deformações e esforços em ondas transversais	169
B.4:	Configuração dos acelerômetros para medida de acelerações transversais	171
B.5:	Configuração dos acelerômetros para medida de acelerações tangenciais	173

Nomenclatura

Latinas

$a(t), b(t)$: funções no tempo
A, B, V	: amplitude de uma função harmônica
$A(\omega)$ e $B(\omega)$: amplitudes complexas
$A(\omega), B(\omega), C(\omega), D(\omega)$: amplitudes complexas de onda
$\bar{A}(\omega)$ e $\bar{B}(\omega)$: transformada de Fourier das funções $a(t), b(t)$
A	: aceleração
A	: área da seção transversal da viga
A, B	: matrizes da ordem dobrada do sistema
b, h	: dimensões da seção retangular da viga
c	: velocidade de propagação da onda
C	: matriz de amortecimento
dt	: diferencial da variável t
e	: função exponencial
E	: módulo de Young
F, f	: força de excitação
F	: transformada de Fourier
$G_{BA}(\omega)$: espectro cruzado de potência entre os sinais $A(\omega)$ e $B(\omega)$ ("one-sided") [watts]
$G_{BA}(\omega)$: densidade espectral de potência entre os sinais $A(\omega)$ e $B(\omega)$ [watts/Hz]
G	: módulo de cisalhamento
H	: função de resposta na frequência
i	: número complexo: $\sqrt{-1}$
i, j	: sensor ou resposta na posição i, j respectivamente
I	: momento de inércia
k	: número de onda
K	: matriz de rigidez

L	: comprimento do elemento de MEF
L	: comprimento da viga
M	: matriz de massa
M	: momento fletor
N	: deslocamento transversal
N, P	: limites de discretização
N	: número de modos considerado na superposição modal
P	: potência instantânea, fluxo de potência
p	: ponto de aplicação da força de excitação
Q	: força de cisalhamento
r	: coeficiente de reflexão da onda
r, R	: raio
s	: autovalor
$S_{BA}(\omega)$: espectro cruzado de potência (“two-sided”) = $2G_{BA}(\omega)$
t	: tempo
T	: período de uma equação ou de integração
u	: vetor de força
V, v	: velocidade
x	: posição na viga, ou dentro do elemento de MEF
x	: sinal discretizado no domínio do tempo
X	: coeficientes da série de Fourier
z	: vetor deslocamento e sua derivada
W_N	: raiz N -ésima da unidade
W_i	: resposta à força de excitação no ponto i

Gregas

α, β	: fase
β	: deslocamento angular
δ	: delta de Dirac
δ	: diferencial

ψ	: função de forma cúbica de interpolação por MEF
Φ	: matriz de autovetores, ou modos
ϕ	: vetor da matriz de autovetores
Δf	: resolução em frequência
Δx	: distância entre dois pontos ou sensores
ε	: erro
ε	: deformação
κ	: fator da seção transversal do modelo de viga de Timoshenko
λ	: comprimento de onda
μ	: coeficiente de Poisson
η	: deslocamento transversal
ω	: frequência [rad/s]
Ω	: velocidade angular
π	: 3,1415....
ρ	: densidade volumétrica de massa
θ	: deslocamento angular
σ	: tensão normal

Superscritos

H	: hermitiana (conjugado complexo transposta)
T	: transposta
\cdot	: 1 ^a derivada temporal
$\bullet\bullet$: 2 ^a derivada temporal
$*$: complexo conjugado

Subscritos

ff	: campo distante (“far field”)
L	: longitudinal
min, max	: mínimo e máximo respectivamente
m, n	: ponto de resposta e excitação respectivamente

nf	: campo próximo (“near field”)
n, k	: índice de sinais discretizados
i	: ponto de resposta na viga
in	: injetada
p	: polar
r	: ponto de referência
r	: elemento “ r ” de um vetor
S	: transversal
s	: solução
T	: torsional
1,2,3.....	: ponto ou sensor na posição 1,2,3.... respectivamente
1,2,3 e 4	: função de forma do modelo de MEF
2ac, 3ac e 4ac	: método das diferenças finitas com 2,3 e 4 medidas respectivamente

Outros

$\langle \rangle_t$: média temporal
$\langle \rangle_e$: média de conjunto
\Re	: parte real de uma variável complexa
\Im	: parte imaginária de uma variável complexa
\int	: integral
∂	: derivada parcial
cos	: função coseno
sen	: função seno
tan	: função tangente tan
arcsen	: função arcoseno
∞	: infinito

Abreviaturas

Fig.	: figura
Eq.	: equação

Siglas

ABCD	: método de fluxo de potência usando coeficientes da onda de flexão
DC	: desvio constante (analogia com “direct current”)
DFT	: transformada de Fourier discreta
DFS	: série de Fourier discreta complexa
MEF	: modelo de elementos finitos
FFT	: transformada rápida de Fourier
FRF	: função resposta em frequência
GL	: grau de liberdade
IDFT	: transformada discreta de Fourier inversa
RDFS	: série regressiva discreta de Fourier
SEA	: análise estatística de energia
SLE	: sistema linear de equações

1- INTRODUÇÃO

1.1- Motivação

A medição de ruído gerado por um sistema consiste em geral em detectar as ondas acústicas no fluido que o envolve. Normalmente, mede-se o fluxo de energia das ondas de compressão no interior do fluido para estimar a potência sonora irradiada pelo sistema. Entretanto, esta medição não leva em conta a potência transmitida sob a forma de ondas elásticas no meio sólido, que pode radiar longe da fonte. O estudo da propagação de energia na forma de ondas elásticas no interior de estruturas é denominado de fluxo de potência, intensimetria vibratória ou intensimetria estrutural, sendo estas duas últimas denominações derivadas da analogia com a intensimetria acústica [1]. Através de mapas do fluxo de potência na estrutura obtêm-se informações sobre os caminhos preponderantes de transmissão desta energia e das posições de fontes ou sorvedouros de energia vibratória. Através do uso de elementos dissipativos, modificações mecânicas e controle ativo de vibração pode-se alterar estes caminhos do fluxo de energia dentro da estrutura, o que pode ser de fundamental importância na solução de problemas vibroacústicos. Outras aplicações de interesse prático são a determinação do fluxo de energia através de conexões para avaliar fatores de perda de transmissão, e a validação das predições de fluxo de potência através de modelos de Elementos Finitos (MEF) ou modelos estatísticos de fluxo de energia (SEA) em estruturas de grande porte.

1.2- Trabalhos relacionados

Uma técnica muito próxima à intensimetria vibratória é a intensimetria acústica. A técnica de medida experimental de intensidade acústica em meios fluidos teve sua primeira patente requerida para o dispositivo de medição em 1932, por Hary Olson da RCA Co. nos USA, porém seu grande desenvolvimento se deu no final da década de 70 e no início da década de 80 através de trabalhos desenvolvidos por Fahy [1] sendo hoje, uma técnica bem estabelecida. A intensidade acústica é geralmente medida através de sondas multi-microfones que, a partir dos sinais de pressão, estabelece a intensidade acústica das ondas de compressão que se propagam no meio, normalmente o ar, e que são responsáveis pelo ruído. Entretanto, para as estruturas, além das

ondas de compressão, é necessário considerar as ondas de cisalhamento e suas combinações na forma de outras famílias de ondas, tais como flexão e torção [2],[3], para se levar em conta toda a energia propagativa. Portanto, a grande complexidade do campo de ondas mecânicas e a dificuldade de acesso ao interior da estrutura fazem com que surjam grandes dificuldades na medição do fluxo de energia e restringem a aplicação da técnica de intensidade estrutural a estruturas relativamente simples, tais como vigas, placas e cascas. Nestas estruturas, as ondas de flexão são de significativa importância no processo de acoplamento fluido-estrutura, pois envolvem consideráveis deslocamentos na direção transversal à superfície, o que facilita a troca de energia entre os dois meios. Portanto, as ondas de flexão são, nestes casos, essencialmente as responsáveis pela radiação sonora.

De maneira análoga à intensidade acústica, também a intensidade vibratória está relacionada à fase relativa entre os sinais medidos, neste caso entre acelerações, velocidades ou deslocamentos em pontos vizinhos. As primeiras contribuições na área da intensimetria de vibração datam também da década de 70. Noiseux [4] obteve expressões para estimar a potência nas ondas de flexão em termos de vibrações superficiais para vigas e placas. Este procedimento requer o uso de dois acelerômetros. Porém, as aproximações usadas restringem o uso do método às regiões de medidas longe de descontinuidades ou condições de contorno, ou seja, somente são válidas para ondas se propagando em campo distante. Pavic [5] obteve expressões mais completas para o fluxo de potência das ondas de flexão, e formulou um método de medida no qual um vetor de transdutores é usado para satisfazer as condições gerais de vibração em vigas e placas, incluindo os efeitos de campo próximo. Verheij [6] descreveu a técnica para medida de potência transportada por ondas de flexão, compressão e torção em vigas, na qual a multiplicação e o processamento de médias no domínio do tempo são substituídos por operações de espectros cruzados no domínio da frequência. Outras variações de métodos para estimar o fluxo de potência em vigas sob flexão que incluem, por exemplo, o uso de transdutores de deformação (extensômetros elétricos ou "strain gages") também são registradas na literatura [4],[7]. No caso de vigas, Carniel e Pascal [8] propuseram um método de medida da intensidade das ondas de flexão com 3 acelerômetros o qual elimina a necessidade de um fator de correção dependente do coeficiente de reflexão das ondas. Linjama e Lahti [9] estimaram o fluxo de potência em vigas sob flexão usando a técnica da resposta em frequência, que tem como principal vantagem reduzir

o erro de fase entre os transdutores, pois se utiliza um único acelerômetro sucessivamente colocado em duas ou mais posições. A FRF é medida tendo como referência a força aplicada na fonte ou um outro acelerômetro. Este método, porém, apresenta uma desvantagem devido ao fato da mudança de posição do sensor a cada medição alterar o comportamento dinâmico da estrutura e a condição estacionária durante a aquisição dos dados, desvantagem esta que pode ser contornada com a colocação de massas equivalentes nas posições dos sensores (“dummies”).

Usualmente, as técnicas para a obtenção do fluxo de potência envolvem alguma forma de aproximação, através de diferenças finitas, na estimativa das derivadas espaciais envolvidas na formulação. No caso de ondas de flexão em vigas, abordado neste trabalho, o número mínimo de medidas ou transdutores necessários varia entre 2 e 5, dependendo da suposição feita [4],[5]. Bauman [10] recentemente comparou os diversos métodos que utilizam diferenças finitas para estimar o fluxo de potência e concluiu que nenhum deles é adequado para estimar os efeitos de campo próximo.

Trabalhos mais recentes têm investigado a obtenção do fluxo de potência sem o uso da aproximação por diferenças finitas. Estes métodos visam interpolar curvas suaves, a fim de obter as derivadas espaciais, ou ajustar os coeficientes da solução analítica de propagação de onda para o cálculo do fluxo de potência. Algumas das vantagens destes enfoques são que: 1) não há a necessidade das medidas dos transdutores serem próximas, o que normalmente aumenta os desvios devidos ao erro de fase entre os transdutores; 2) os erros de fase são minimizados por ser feito um maior número de medidas, que tendem a casualizar estes erros; 3) alguns destes métodos não restringem as posições em que podem ser feitas as medidas, pois levam em consideração os efeitos de campo próximo.

Hamburic e Taylor [11] propuseram uma abordagem utilizando-se da própria solução analítica para vigas em flexão para construir um sistema linear de equações e obter os seus coeficientes. Com os coeficientes da solução analítica, o fluxo de potência é obtido no domínio da frequência através das fórmulas estabelecidas por Verheij [6].

Halkyard e Mace [12], de maneira semelhante, determinaram os coeficientes da solução analítica, mas através da solução por mínimos quadrados de um sistema sobre-determinado de equações. Obtiveram então o fluxo de potência através das expressões estabelecidas por Pavic [5] no domínio do tempo. Investigaram também, em termos de mal condicionamento da matriz do sistema linear, os erros de precisão de medidas experimentais devidos ao efeito do pequeno espaçamento entre os transdutores e propuseram o uso de medidas híbridas (acelerômetros e extensômetros) para melhorar o desempenho destas medidas [13].

Blotter e West [14] propuseram o uso de “B-splines” para ajuste dos dados de velocidade obtidos experimentalmente por vibrômetro laser para poderem estimar as derivadas espaciais necessárias para o cálculo do fluxo de potência.

Usando a propriedade de que a solução analítica do campo vibratório é do tipo somatória de exponenciais complexas, Arruda et al. [15] utilizaram-se do método de Prony (modificado) para, através da solução de mínimos quadrados de um sistema de equações, estimar o valor do número de ondas e os coeficientes da solução analítica, e assim, obter o fluxo de potência através das expressões estabelecidas por Pavic [5].

Pascal, Loyau e Carniel [16],[17], têm utilizado vibrômetros a laser e holografia acústica para obter a velocidade de vibração de superfície e, com isto, estimar a intensidade estrutural em placas através da transformada de Fourier espacial, através da qual as derivadas parciais são calculadas no domínio do número de ondas.

Arruda, Campos e Piva [18], também no domínio do número de ondas, propuseram uma metodologia alternativa para o cálculo do fluxo de potência em vigas, na qual as derivadas espaciais são obtidas através do uso da série de Fourier discreta regressiva. Esta metodologia faz parte deste trabalho e está detalhada nos capítulos seguintes.

Alguns pesquisadores, como Hambric e Taylor [11],[19] e Gavric e Pavic [20], têm feito uso do modelo de Elementos Finitos (MEF) como modelo paramétrico para previsão do fluxo de potência.

O assunto continua sendo pesquisado tendo em vista obter métodos experimentais simples e robustos que permitam disseminar o uso da medida do fluxo de potência como uma ferramenta de análise de vibração e ruído principalmente em estruturas mais complexas.

1.3- Objetivos e organização

O uso de ajuste e interpolação de curvas às medidas, e o posterior uso das derivadas espaciais analíticas na obtenção do fluxo de potência, tem mostrado ser melhor enfoque que o uso da aproximação por diferenças finitas. O ajuste de curvas permite o alívio do problema do erro de fase, causado pela medida com transdutores muito próximos, pelo efeito de filtragem através de médias sobre os erros aleatórios de fase.

Dentre inúmeras possibilidades de ajustes, a utilização da série de Fourier nos parece uma boa escolha pois sabemos que, em campo distante, a distribuição espacial da vibração transversal em vigas e placas finas é senoidal [2].

Este trabalho procura comparar várias técnicas de estimativa da medida de intensidade estrutural em vigas sob flexão e apresenta uma proposta alternativa de formulação, na qual se utiliza a série regressiva discreta de Fourier (RDFS - "Regressive Discrete Fourier Series"), proposta por Arruda [21,22], para estimar as derivadas espaciais do campo de vibrações. Com este método minimiza-se o problema de "leakage" associado à transformada discreta de Fourier tradicional e ainda permite-se o uso em dados não igualmente espaçados. A técnica pode ser aplicada a medidas de aceleração de um conjunto de acelerômetros ou, alternativamente, a medidas de velocidade provenientes de vibrômetros com varredura a laser, sendo muito útil quando existe uma grande densidade espacial de dados.

Uma vez obtido o modelo e as derivadas espaciais, o fluxo de potência é facilmente obtido. Neste texto a análise é restrita a medidas de fluxo de potência em vigas submetidas à flexão onde o modelo de Euler-Bernoulli pode ser considerado aplicável.

A técnica proposta é exposta e aplicada tanto a dados simulados como também a dados experimentais usando um sistema simples, que consiste de uma viga que é excitada na sua extremidade livre por uma força aleatória ou senoidal e a outra extremidade é conectada a uma caixa de areia, na tentativa de aproximar uma terminação *quasi* anecóica. Os dados simulados são obtidos usando um modelo de Elementos Finitos com um amortecimento concentrado simulando a caixa de areia. Os dados experimentais são obtidos de medidas de um conjunto de acelerômetros. Para validação do método, o fluxo de potência obtido é então comparado com a potência injetada no sistema pelo excitador eletrodinâmico, e o número de onda calculado é comparado com seu valor teórico.

O texto, desta dissertação que procura apresentar de forma clara todas as etapas estudadas está organizado em 5 capítulos, 4 apêndices e uma lista de referências bibliográficas. Uma breve descrição dos capítulos e apêndices é apresentada a seguir:

Inicialmente, no capítulo 2, são definidos os conceitos de potência e intensidade transmitidas por um campo de ondas elásticas e, através da teoria de Euler-Bernoulli para vibração em vigas sob flexão, obtêm-se as expressões do fluxo de potência a serem utilizadas nos capítulos seguintes.

No capítulo 3 são descritos os métodos usados para cálculo do fluxo de potência, que se dividem em dois grupos. O primeiro deles engloba os métodos que fazem uso de aproximações por diferenças finitas e o segundo pelos que fazem uso de interpolações obtidas de modelos paramétricos.

A seguir, no capítulo 4, são discutidos os resultados obtidos pelos vários métodos estudados, tanto na simulação numérica como aqueles obtidos com dados experimentais.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho e comentadas as perspectivas para trabalhos futuros.

Nos apêndices 1 e 2 são apresentados tópicos sobre a formulação da viga sob flexão do modelo de Euler-Bernoulli e a propagação de ondas longitudinais e transversais em viga, respectivamente. No apêndice 3 faz-se uma breve descrição dos equipamentos utilizados nos experimentos, e no apêndice 4 são listadas referências de artigos publicados pelo autor.

Para finalizar o trabalho, são citadas as referências bibliográficas utilizadas.

2- TEORIA BÁSICA

2.1- Introdução

Neste capítulo são revistos os conceitos de intensidade e potência transmitida por um campo de ondas elásticas. O equacionamento para a avaliação do fluxo de potência é desenvolvido no domínio do tempo e no domínio da frequência, que tem vantagens pelo fato do uso de analisadores FFT (“Fast Fourier Transform”) ser muito difundido no campo de análises e diagnósticos em vibrações e acústica.

Ainda neste capítulo, é revisado o equacionamento de vibração para vigas em flexão, assumindo a teoria de Euler-Bernoulli. É definido o conceito de campo próximo e campo distante e, utilizando-se o modelo proposto e desprezando-se os efeitos de campo próximo, chega-se à solução do campo do deslocamento ao qual a viga está submetida.

Finalmente, é desenvolvido o equacionamento do fluxo de potência envolvido no campo de deslocamentos, levando-se em conta as simplificações discutidas no item 2.3.

2.2- Potência e Intensidade

No contexto deste trabalho, a intensidade de um campo de ondas tridimensional é definida como a potência, transmitida através de ondas elásticas num fluido ou sólido, que passa por um determinado ponto por unidade de área perpendicular à direção do fluxo. Por ser uma entidade vetorial, pode-se, através de vários pontos de medida de intensidade, construir mapas do fluxo de potência, como exemplificados pela Fig. 2.1, que identificam fontes e sorvedouros de energia, e determinam os caminhos ou direções, e as amplitudes envolvidas na propagação desta energia. No caso de sólidos elásticos, a intensidade pode ser uma importante informação na solução de problemas vibro-acústicos.

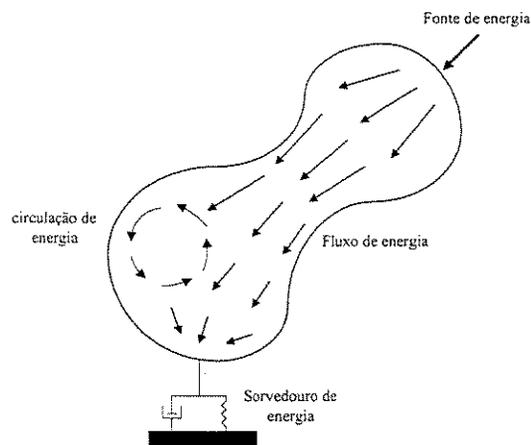


Fig. 2.1: Mapa típico de fluxo de potência

Em mecânica estrutural, os estudos de fluxo de potência se concentram principalmente em placas e vigas; isto porque o acesso ao interior do sólido é muito difícil. Em duas dimensões, como no caso de placas finas ou cascas, é feita uma normalização por uma dimensão da placa e a intensidade é dada por potência/unidade de largura [Watts/metro]. Finalmente, para vigas, é assumido um campo de ondas unidimensional, nenhuma normalização é necessária e a potência se confunde com a intensidade.

A potência mecânica instantânea medida num ponto é definida como [23]:

$$P(t) = f(t)v(t) \quad (2.1)$$

onde $f(t)$ e $v(t)$ são valores instantâneos de força e velocidade no dado ponto.

Para estruturas vibrando, o fluxo é mais importante que o valor instantâneo de potência, e portanto é feita uma média temporal sobre a potência instantânea [6]:

$$\langle P(t) \rangle_t = \langle f(t)v(t) \rangle_t \quad (2.2)$$

onde $\langle \rangle_t$ denota média no tempo.

Para obter a média temporal e a média de conjunto no domínio da frequência são desenvolvidas algumas expressões que serão úteis quando da obtenção das fórmulas para cálculo da potência nos capítulos seguintes [25].

Considerando-se que funções harmônicas $a(t)$ e $b(t)$, possam ser expressas por:

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos(\omega t + \alpha) \\ b(t) &= B \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos(\omega t + \alpha) = \Re\{Ae^{i(\omega t + \alpha)}\} \\ a(t) &= \Re\{Ae^{i\alpha} e^{i\omega t}\} = \Re\{A(\omega)e^{i\omega t}\} \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} b(t) &= B \cos(\omega t + \beta) = \Re\{Be^{i(\omega t + \beta)}\} \\ b(t) &= \Re\{Be^{i\beta} e^{i\omega t}\} = \Re\{B(\omega)e^{i\omega t}\} \end{aligned}$$

onde $A(\omega)$ e $B(\omega)$ são as amplitudes complexas das funções $a(t)$ e $b(t)$, \Re é a parte real do número complexo e i denota $\sqrt{-1}$.

O produto das funções $a(t)$ e $b(t)$ pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} a(t)b(t) &= AB[\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)] = \\ a(t)b(t) &= \frac{AB}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] = \\ a(t)b(t) &= \frac{AB}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t)\cos(\alpha + \beta) - \text{sen}(2\omega t)\text{sen}(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Para média temporal tem-se por definição:

$$\langle x(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Porém na prática, para sinais aleatórios, são feitas médias em um período suficientemente grande ou, no caso de sinais senoidais sobre um número de períodos inteiros de modo que a expressão acima pode assumir a seguinte forma:

$$\langle x(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Portanto se aplicarmos este conceito de média ao produto $a(t)b(t)$, obtém-se:

$$\langle a(t)b(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T a(t)b(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{AB}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t) \cos(\alpha + \beta) - \sin(2\omega t) \sin(\alpha + \beta)] dt$$

Para as integrais definidas em um número inteiro de períodos, os termos em $\cos(2\omega t)$ e $\sin(2\omega t)$ se anulam e ficamos com:

$$\langle a(t)b(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{AB}{2} \cos(\alpha - \beta) dt = \frac{AB}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\langle a(t)b(t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ A e^{i\alpha} B e^{-i\beta} \} = \frac{1}{2} \Re \{ A(\omega) B(\omega)^* \} = \frac{1}{2} \Re \{ A(\omega)^* B(\omega) \}$$

onde * denota o complexo conjugado.

Utilizando as séries de Fourier dos sinais no tempo tem-se:

$$a(t) \xrightarrow{F} \bar{A}(\omega)$$

onde \xrightarrow{F} denota a série ou a transformada de Fourier conforme for apropriado, e portanto pode-se escrever para as freqüências positivas e negativas a expressão abaixo:

$$a(t) = \bar{A}(\omega) e^{i\omega t} + \bar{A}(-\omega) e^{-i\omega t}$$

Tem-se então que, $A(\omega) = 2\bar{A}(\omega)$ e $A(\omega)^* = 2\bar{A}(-\omega)$, ou seja, a amplitude complexa, $A(\omega)$, é duas vezes o coeficiente complexo da série de Fourier do sinal periódico $a(t)$ ou duas vezes a transformada finita do sinal aleatório $a(t)$, ambos usualmente aproximados pela transformada discreta de Fourier (DFT).

Analogamente, para $b(t)$ tem-se:

$$b(t) \xrightarrow{F} \bar{B}(\omega) = \frac{B(\omega)}{2}; \bar{B}(-\omega) = \frac{B(\omega)^*}{2}$$

Portanto pode-se escrever:

$$\langle a(t)b(t) \rangle_t = 2\Re\{\bar{A}(\omega)\bar{B}(\omega)^*\} \quad (2.3)$$

Para o caso de vibrações aleatórias estacionárias ergódicas, a média de espectros ou média de conjunto das DFTs $\bar{A}(\omega)$ e $\bar{B}(\omega)$ dos sinais $a(t)$ e $b(t)$, denotadas por $\langle \rangle_e$, é dada por [26]:

$$S_{BA} = \langle \bar{A}(\omega)\bar{B}(\omega)^* \rangle_e$$

ou ainda, lembrando da relação entre as amplitudes complexas $A(\omega)$ e $B(\omega)$, e as DFTs $\bar{A}(\omega)$ e $\bar{B}(\omega)$ chega-se a:

$$2G_{BA} = \langle A(\omega)B(\omega)^* \rangle_e$$

onde $G_{BA}(\omega)$ é o espectro cruzado de potência entre os sinais $A(\omega)$ e $B(\omega)$ (“one-sided”) com unidades de [watts]; $S_{BA}(\omega) = G_{BA}(\omega)/2$ e conhecida como “two-sided” [26]. Para sinais aleatórios deve-se expressar o espectro cruzado de potência em termos de densidade espectral de potência, dividindo-se o resultado do processamento das médias de conjunto por Δf [Hertz], que é a resolução em frequência quando processada a DFT sobre os blocos de amostragem dos sinais aleatórios.

Aplicando-se estas definições à Eq.(2.3) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \langle \langle a(t)b(t) \rangle_t \rangle_e &= 2\Re\{\langle \bar{A}(\omega)\bar{B}(\omega)^* \rangle_e\} \\ \langle \langle a(t)b(t) \rangle_t \rangle_e &= 2\Re\{S_{BA}(\omega)\} \\ \langle \langle a(t)b(t) \rangle_t \rangle_e &= \Re\{G_{BA}(\omega)\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para obter-se a expressão para a potência média ativa ou injetada por uma força externa harmônica, utiliza-se, de maneira análoga, os resultados no domínio do tempo obtidos em (2.3) aplicados a (2.2):

$$\langle P(t) \rangle_t = \langle f(t)v(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)v(t)dt = \frac{1}{2} \Re\{F(\omega)V(\omega)^*\} = 2\Re\{\bar{F}(\omega)\bar{V}(\omega)^*\} \quad (2.5)$$

No domínio da frequência, a expressão da potência injetada é obtida aplicando-se a Eq. (2.4) em (2.5), largamente utilizada em função do uso de equipamentos como os analisadores FFT [9]:

$$\langle \langle P(t) \rangle_t \rangle_e = \Re\{G_{VF}(\omega)\} = P_{in} \quad (2.6)$$

Na Eq.(2.6) a parte imaginária do espectro cruzado $G_{VF}(\omega)$ consiste na potência reativa, que é responsável pelas ondas estacionárias na estrutura (“standing waves”), e a parte real é a parte da potência ativa, ou seja, aquela que se propaga e é responsável pelo fluxo de potência.

Através da relação existente entre a velocidade e aceleração no domínio da frequência, onde $V(\omega) = A(\omega) / i\omega$, pode-se obter da Eq. (2.6) um resultado que possibilita o uso direto de sinais adquiridos de acelerômetros [9]:

$$P_{in}(\omega) = \frac{1}{\omega} \Im\{G_{FA}(\omega)\} \quad (2.7)$$

onde \Im denota a parte imaginária de um número complexo.

Uma outra abordagem interessante, a partir da Eq. (2.5), é dada por Goyder e White [23], que usam a mobilidade H , que é uma propriedade intrínseca do sistema, definida como a razão entre a velocidade e a força, ambas complexas e harmônicas. Assim sendo, pode-se escrever:

$$P = \frac{I}{2} |F|^2 \Re\{H\} = \frac{I}{2} |V|^2 \frac{\Re\{H\}}{|H|^2} \quad (2.8)$$

2.3- Revisão da teoria de vibração em vigas sob flexão

Nesta seção a teoria básica de vibração em vigas sob flexão é revisada e um conjunto coerente de equações é estabelecido. As fórmulas são bem estabelecidas na literatura, porém há usualmente pequenas diferenças nas definições usadas por diferentes autores que, algumas vezes, dificultam as comparações entre medidas experimentais e dados simulados utilizando modelos matemáticos.

Uma viga delgada submetida à flexão é razoavelmente bem modelada pela teoria de Euler-Bernoulli, onde os efeitos de inércia de rotação e deformação por cisalhamento são desprezados, se considerada a faixa de baixas frequências, que compreende os primeiros modos de vibração [24].

Neste caso, pode-se escrever para um segmento de viga retilínea e homogênea (vide apêndice A) [2],[24]:

$$EI \frac{\partial^4 \eta(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = f(t) \delta(x_0) \quad (2.9)$$

onde

E = módulo de Young do material [N/m²];

I = momento de inércia da seção transversal de viga [m⁴];

ρ = densidade volumétrica de massa do material [Kg/m³];

A = área da seção transversal da viga [m²];

η = deslocamento transversal da viga [m];

$f(t)$ = força de excitação pontual [N], sendo $\delta(x_0)$ o Delta de Dirac espacial no ponto de excitação, $x=x_0$.

A Eq.(2.9) tem como solução homogênea, tanto para a direita ($x > x_0$) como para a esquerda ($x < x_0$) da localização do ponto de aplicação da força e, considerando uma dependência senoidal com o tempo, uma função do tipo [4], [5]:

$$\eta(x,t) = \Re\{\eta(x,\omega) e^{i\omega t}\} \quad (2.10)$$

onde

$$\eta(x,\omega) = A(\omega) e^{-ikx} + B(\omega) e^{ikx} + C(\omega) e^{-kx} + D(\omega) e^{kx} \quad (2.11)$$

onde k é o número de onda, definido por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (2.12)$$

onde

λ = comprimento de onda [m];

ω = frequência em radianos/segundo, e

c = velocidade de propagação da onda no meio [m/s].

A relação analítica do número de onda (dispersivo) para ondas de flexão em vigas é obtida substituindo as expressões (2.10) e (2.11) em (2.9) [4], [5]:

$$k_{analitico}^4 = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

É importante lembrar que a Eq.(2.13) somente é válida para o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Porém para as faixas de frequência baixa e média, nas quais a densidade modal é pequena, o modelo adotado é plenamente satisfatório.

Uma expressão mais precisa para a relação de dispersão pode ser obtida usando o modelo de viga de Timoshenko no qual os efeitos da inércia de rotação e a deformação por cisalhamento são levados em consideração [24]:

$$\frac{EI}{A\rho} k^4 - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) k^2 \omega^2 + \frac{\rho I}{\kappa G A} \omega^4 - \omega^2 = 0 \quad (2.14a)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.14b)$$

onde κ é um fator que depende do tipo de seção transversal da viga ($\kappa=0.833$ para seção retangular) e μ é o coeficiente de Poison. Isto demonstra que a relação de dispersão teórica depende das suposições e simplificações assumidas com respeito ao comportamento estrutural do material. Utilizando-se a Eq.(2.14a) é possível obter $k(\omega)$, através da solução da equação característica abaixo, que neste caso tem quatro raízes ou dois pares de soluções [25]:

$$(\kappa GEI)k^4 - (\kappa G\rho I\omega^2 + EI\rho\omega^2)k^2 + (\rho I\omega^2 - \kappa GA)\rho\omega^2 = 0$$

Da comparação da solução desta equação com a expressão (2.13) pode-se determinar objetivamente em que faixa de frequência a teoria de Euler-Bernoulli é aplicável.

Alternativamente, é possível através da Eq.(2.11), obter a seguinte expressão para a relação de dispersão:

$$k^4 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \quad (2.15)$$

Para novos materiais, tais como compósitos não isotrópicos, é muito importante a obtenção experimental da relação de dispersão, que pode ser obtida através da Eq.(2.15) acima.

Na Eq.(2.11), os dois primeiros termos correspondem a componentes que se propagam, ou seja, correspondem à solução em campo distante (“far field”), onde $A(\omega)$ está associada à onda se propagando no sentido positivo de x e, $B(\omega)$ a onda propagativa no sentido negativo de x . Os dois últimos termos são componentes que correspondem ao campo próximo (“near field”), onde $C(\omega)$ está associada à onda evanescente no sentido positivo de x , e $D(\omega)$ à onda evanescente no sentido negativo de x como representados na Fig. 2.2.

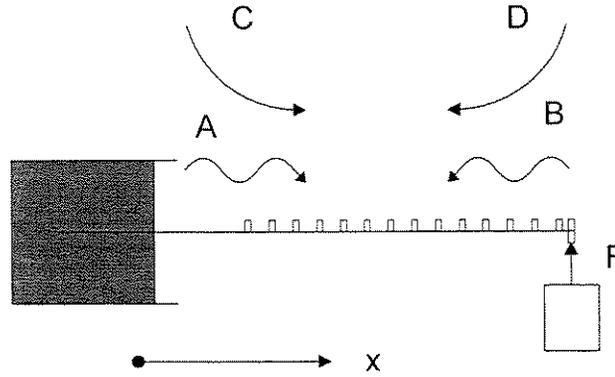


Fig. 2.2: Componentes de onda de flexão A, B, C e D

Em campo próximo ocorre um amortecimento nas ondas e, em um material que não possua amortecimento, o campo próximo pode ser encarado como a região onde o número de onda é complexo. O campo próximo consiste nas regiões próximas às aplicações de força ou descontinuidades e, embora tendam a desaparecer rapidamente pelo seu decaimento exponencial na solução geral da equação, podem, próximo a estes contornos, formar uma parte essencial do fluxo total de potência.

Segundo Noiseux [4], para se garantir a validade de campo distante deve-se estar a uma distância de pelo menos meio comprimento de onda da condição de contorno, ou seja $kx > \pi$. Nesta situação, o efeito de campo próximo, associados aos termos C e D , seria reduzido de aproximadamente 96% ($e^{-kx} = e^{-\pi} = 0.04$, com $k = 2\pi/\lambda$ e $x = \lambda/2$) do valor no ponto de excitação ou contorno, sendo então desprezível para aquela frequência.

Desprezando os termos de campo próximo, tem-se então a seguinte solução:

$$\eta_{ff}(x,t) = \Re\{[A(\omega)e^{-ikx} + B(\omega)e^{ikx}]e^{i\omega t}\} \quad (2.16)$$

onde ff denota que a hipótese de campo distante foi adotada, e que pode também ser escrita como:

$$\eta_{ff}(x,t) = \Re\{V[e^{-ikx} + r e^{ikx}]e^{i\omega t}\} \quad (2.17)$$

que é a soma de um onda incidente se propagando para direção positiva de x e outra refletida se propagando em direção contrária com coeficiente de reflexão r . Quando $r = 1$, ou $A(\omega) = B(\omega)$,

as ondas se combinam para gerar uma onda estacionária. Quanto menor for r menor será a onda refletida e maior será a energia propagativa na viga. Embora a Eq.(2.11) ou (2.17) represente a solução homogênea da Eq.(2.9), pode-se mostrar que ela também é válida para uma força pontual $f(t)\delta(x_0)$.

2.4- Potência em uma viga sob flexão

O fluxo de potência através de uma viga é constituído de uma componente resultante do produto da força de cisalhamento, Q , com a velocidade linear, v , e outra do produto do momento fletor, M , com a velocidade angular, Ω [4]:

$$P = Qv + M\Omega \quad (2.18)$$

Usando o modelo de viga de Euler-Bernoulli, deduzido em detalhes no apêndice A, podem-se obter as seguintes relações:

$$M = -EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$$

e, ainda:

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.19)$$

$$\Omega = \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (2.20)$$

mas sabe-se que, para β pequeno, pode-se considerar $\beta \cong \tan(\beta)$ e então:

$$\beta \cong \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.21)$$

e, finalmente, obtém-se:

$$\Omega = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} \quad (2.22)$$

Portanto, na Eq.(2.18), onde não é feita nenhuma consideração de campo distante, tem-se:

$$P(x,t) = EI \left(\frac{\partial^3 \eta(x,t)}{\partial x^3} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \quad (2.23)$$

Para uma média temporal, a equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle P(x,t) \rangle_t = EI \left\langle \frac{\partial^3 \eta(x,t)}{\partial x^3} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x \partial t} \right\rangle_t \quad (2.24)$$

Utilizando-se da Eq.(2.17), na qual os termos de campo próximos são desprezados, tem-se:

1. Para derivadas temporais:

$$\frac{\partial \eta_{ff}}{\partial t} = +i\omega \eta_{ff}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta_{ff}$$

onde ff denota que a hipótese de campo distante foi adotada.

2. Para derivas espaciais:

$$\frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x} = [-ikV(e^{-ikx} - r e^{ikx})] e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x^2} = [-k^2 V(e^{-ikx} + r e^{ikx})] e^{i\omega t} = -k^2 \eta_{ff} \quad \text{ou seja}$$

$$k^2 = -\frac{1}{\eta_{ff}} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^3 \eta_{ff}}{\partial x^3} = [+ik^3 V(e^{-ikx} - r e^{ikx})] e^{i\omega t} = -k^2 \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x}$$

3. Para as derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x \partial t} = i\omega[-ikV(e^{-ikx} - r e^{ikx})]e^{i\omega t} = +i\omega \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x}$$

Usando as expressões acima e o resultado da Eq.(2.3) na equação da potência média (2.24), e lembrando que $(i\omega A)^* = (-i\omega)A^*$ e $\Re\{AB^*\} = \Re\{A^*B\}$, pode-se obter uma expressão simplificada do fluxo de potência:

$$\left\langle \frac{\partial^3 \eta_{ff}}{\partial x^3} \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial t} \right\rangle_t = 2\Re \left[(-k^2 \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x})(+i\omega \eta_{ff})^* \right] = 2\Re \left[(-k^2 \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x})(-i\omega) \eta_{ff}^* \right] = 2\Re \left[i\omega k^2 \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x} \eta_{ff}^* \right]$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t = 2\Re \left[(-k^2 \eta_{ff})(i\omega \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x})^* \right] = 2\Re \left[(i\omega \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x})(-k^2 \eta_{ff})^* \right] = -2\Re \left[i\omega k^2 \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial x} \eta_{ff}^* \right]$$

ou seja, para campo distante, o termo relativo ao momento no fluxo de potência, e o termo relativo à força cortante são iguais em módulo:

$$\left\langle \frac{\partial^3 \eta_{ff}}{\partial x^3} \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial t} \right\rangle_t = - \left\langle \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t \quad (2.26)$$

Portanto, usando-se somente os termos de momento e, alternativamente, utilizando-se a expressão (2.25) pode-se escrever:

$$\langle P \rangle_t = -2EI \left\langle \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t \quad (2.27a)$$

$$\langle P \rangle_t = 2EI k^2 \left\langle \eta_{ff} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t \quad (2.27b)$$

Ainda, se somente os termos de força forem usados, tem-se:

$$\langle P \rangle_t = 2EI \left\langle \frac{\partial^3 \eta_{ff}}{\partial x^3} \frac{\partial \eta_{ff}}{\partial t} \right\rangle_t \quad (2.28)$$

3- MÉTODOS DE CÁLCULO DO FLUXO DE POTÊNCIA

3.1- Introdução

O princípio da medida de intensidade estrutural é uma extensão da abordagem desenvolvida para a intensidade acústica. A energia é dividida entre estacionária e propagativa. A técnica da análise modal nos permite conhecer com uma certa facilidade a parte estacionária, porém a medida da componente propagativa é mais laboriosa, isto porque a formulação para obtê-la muda com o tipo de onda (longitudinal, torcional, de flexão) e com o tipo de estrutura (viga, placa, etc.), o que não acontece com a intensidade acústica no ar, que apresenta somente ondas de compressão.

Existem, portanto, limitações, tanto por simplificações ao nível teórico como ao nível das restrições experimentais [27]. Uma delas vem das aproximações das derivadas espaciais, largamente usadas nas técnicas usuais de medida de intensidade estrutural e também usadas neste trabalho, que serão descritas em detalhes neste capítulo.

Finalmente, serão revistas as formulações no domínio da frequência das técnicas que utilizam 2, 3 e 4 acelerômetros com o método das diferenças finitas, bem como novas expressões para cálculo da potência obtidas através da série discreta regressiva de Fourier (RDFS), do modelo de elementos finitos (MEF), e dos coeficientes da solução analítica da equação de propagação de onda em vigas sob flexão.

3.2- Método das Diferenças Finitas

Como pode ser visto na expressão do cálculo do fluxo de potência, Eq. (2.23), há a necessidade de se estimarem as derivadas temporais, espaciais e cruzadas. As derivadas temporais podem ser facilmente obtidas por manipulação matemática ou através de circuitos eletrônicos, a partir dos dados obtidos no domínio do tempo. O mesmo não ocorre com as derivadas espaciais,

que devem ser medidas diretamente. Por esta razão, uma das maneiras usadas para obtê-las é o método das diferenças finitas.

Para ondas de flexão em vigas, que é o problema abordado neste trabalho, o número mínimo de medidas ou transdutores necessários varia entre 2 e 5, dependendo da suposição feita [4], [5]. Se a condição de campo distante é assumida, então 2 medidas são suficientes para obter o fluxo de potência. Se a relação de dispersão (número de onda em função da frequência) é estimada, três medidas são necessárias. Se os efeitos de campo próximo são levados em conta precisamos de 4 medidas, e este caso se eleva para 5 se a relação de dispersão for também estimada. Esta afirmação ficará mais clara no item 3.3.2, no uso do método da identificação dos coeficientes da solução analítica de propagação de ondas de flexão em vigas.

Como definição, a primeira derivada espacial de uma dada função será aproximada pela diferença dos valores desta mesma função em dois pontos vizinhos dividida pela distância que separa estes dois pontos. As derivadas de ordem superior podem ser também obtidas aplicando-se o mesmo princípio. Se os valores da função forem exatos este método fornece melhores aproximações quanto menor for a distância entre os pontos medidos.

Usando-se de uma representação gráfica do método, explica-se a obtenção das expressões aproximadas das derivadas espaciais.

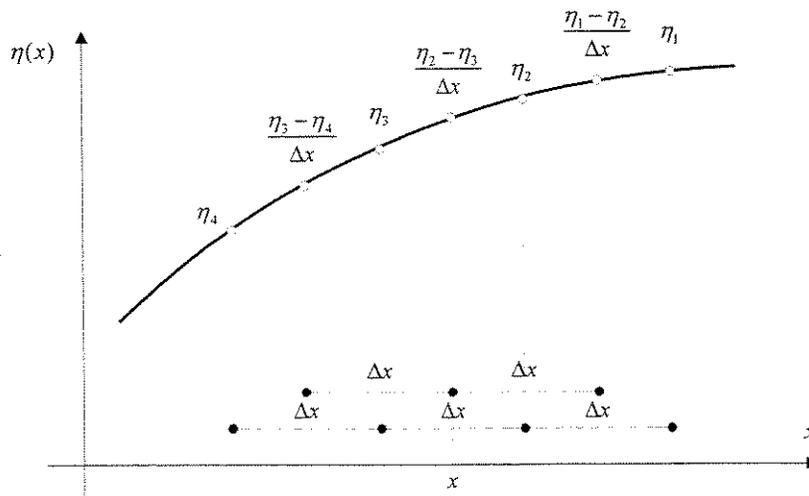


Fig. 3.1: Representação gráfica do método das diferenças finitas para as derivadas espaciais

Inicialmente, para a definição da variável em estudo, utiliza-se do valor médio entre 2 pontos vizinhos:

$$\eta = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3) \quad (3.1)$$

Para obter a primeira derivada espacial usam-se os valores e as distâncias que separam 2 pontos vizinhos ou seja:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta_2 - \eta_3}{\Delta x} \quad (3.2)$$

Para obter a segunda derivada espacial utilizam-se os pontos intermediários entre 1 e 2 e entre 3 e 4:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\frac{\eta_1 - \eta_2}{\Delta x} - \frac{\eta_3 - \eta_4}{\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + \eta_4}{2\Delta x^2} \quad (3.3)$$

De maneira análoga, na obtenção da terceira derivada espacial usam-se dos pontos intermediários 1 e 2, 2 e 3 e 3 e 4:

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{\frac{\frac{\eta_1 - \eta_2}{\Delta x} - \frac{\eta_2 - \eta_3}{\Delta x}}{\Delta x} - \frac{\frac{\eta_2 - \eta_3}{\Delta x} - \frac{\eta_3 - \eta_4}{\Delta x}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\eta_1 - 3\eta_2 + 3\eta_3 - \eta_4}{\Delta x^3} \quad (3.4)$$

Substituindo estas expressões na equação (2.23) obtém-se o seguinte resultado, o qual corresponde ao valor da potência instantânea:

$$P = \frac{EI}{\Delta x^3} [\dot{\eta}_3(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) - \dot{\eta}_2(\eta_2 - 2\eta_3 + \eta_4)] \quad (3.5)$$

onde a primeira derivada temporal é denotada por um ponto acima da variável de interesse:

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Porém, o que normalmente nos interessa não é a potência instantânea e sim a sua média temporal e que, portanto, deve ser obtida.

3.2.1- Medidas com 4 e 2 acelerômetros

Normalmente, em laboratórios, é muito comum o uso de acelerômetros como transdutores de vibração e, também, o uso de analisadores FFT para executar as análises no domínio da frequência dos sinais adquiridos no domínio do tempo.

Neste item obtêm-se, então, as expressões do fluxo de potência no domínio da frequência para sinais de aceleração.

Usando as definições obtidas no capítulo 2 nas relações (2.3) e (2.4), e aplicando-as na Eq. (3.5), tem-se que a potência média pode assim ser escrita:

$$\langle P \rangle_t = \frac{EI}{\Delta x^3} \langle \dot{\eta}_3 \eta_1 - 2\dot{\eta}_3 \eta_2 + \dot{\eta}_3 \eta_3 - \dot{\eta}_2 \eta_2 + 2\dot{\eta}_2 \eta_3 - \dot{\eta}_2 \eta_4 \rangle_t$$

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = \frac{EI}{\Delta x^3} 2\Re \{ \langle \dot{N}_3 N_1^* - 2\dot{N}_3 N_2^* + \dot{N}_3 N_3^* - \dot{N}_2 N_2^* + 2\dot{N}_2 N_3^* - \dot{N}_2 N_4^* \rangle_e \}$$

Passando velocidades e deslocamentos para acelerações, considerando-se que $\dot{N} = -i \frac{\ddot{N}}{\omega}$ e

$$N = -\frac{\ddot{N}}{\omega^2} \text{ tem-se:}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle P \rangle\rangle_e &= \frac{EI}{\Delta x^3} 2\Re\left\{\left\langle +(-i \frac{\ddot{N}_3}{\omega} (\frac{-\ddot{N}_1^*}{\omega^2})) - 2(-i \frac{\ddot{N}_3}{\omega} (\frac{-\ddot{N}_2^*}{\omega^2})) + (-i \frac{\ddot{N}_3}{\omega} (\frac{-\ddot{N}_3^*}{\omega^2})) \right\rangle_e\right\} + \\ &\frac{EI}{\Delta x^3} 2\Re\left\{\left\langle -(-i \frac{\ddot{N}_2}{\omega} (\frac{-\ddot{N}_2^*}{\omega^2})) + 2(-i \frac{\ddot{N}_2}{\omega} (\frac{-\ddot{N}_3^*}{\omega^2})) + (-i \frac{\ddot{N}_2}{\omega} (\frac{-\ddot{N}_4^*}{\omega^2})) \right\rangle_e\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle P \rangle\rangle_e &= \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} 2\Re\left\{\left\langle +(+i\ddot{N}_3\ddot{N}_1^*) - 2(+i\ddot{N}_3\ddot{N}_2^*) + (+i\ddot{N}_3\ddot{N}_3^*) \right\rangle_e\right\} + \\ &\frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} 2\Re\left\{\left\langle -(+i\ddot{N}_2\ddot{N}_2^*) + 2(+i\ddot{N}_2\ddot{N}_3^*) - (+i\ddot{N}_2\ddot{N}_4^*) \right\rangle_e\right\} \end{aligned}$$

Lembrando-se da identidade $\Re\{iA\} = -\Im\{A\}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle\langle P \rangle\rangle_e &= -2 \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im\left\{\left\langle +(\ddot{N}_3\ddot{N}_1^*) - 2(\ddot{N}_3\ddot{N}_2^*) + (\ddot{N}_3\ddot{N}_3^*) \right\rangle_e\right\} + \\ &-2 \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im\left\{\left\langle -(\ddot{N}_2\ddot{N}_2^*) + 2(\ddot{N}_2\ddot{N}_3^*) - (\ddot{N}_2\ddot{N}_4^*) \right\rangle_e\right\} \end{aligned}$$

Usando-se a definição de espectro cruzado de potência da relação (2.4) tem-se:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = -2 \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im\{S_{13} - 2S_{23} + S_{33} - S_{22} + 2S_{32} - S_{42}\}$$

Lembrando que $\Im\{S_{AB}\} = -\Im\{S_{BA}\}$ e que $\Im\{S_{AA}\} = 0$ então a potência ativa calculada com 4 acelerômetros, P_{4ac} pode ser escrita como [6],[9]:

$$P_{4ac} = \langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 2 \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im \{ 4S_{23} - S_{24} - S_{13} \} \quad (3.6a)$$

$$P_{4ac} = \langle \langle P \rangle_t \rangle_e = \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im \{ 4G_{23} - G_{24} - G_{13} \} \quad (3.6b)$$

Para o cálculo com 2 acelerômetros, o procedimento é semelhante, porém os efeitos de campo próximo são desprezados. Neste caso, como já visto na Eq. (2.27b), tem-se:

$$\langle P \rangle_t = 2EI k^2 \left\langle \eta_{ff} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t \quad (2.27b)$$

Utilizando-se das expressões das diferenças finitas (3.1) e (3.2) obtém-se:

$$\langle P \rangle_t = 2EI k^2 \left\langle \frac{1}{2} (\eta_{2ff} + \eta_{3ff}) \left(\frac{\dot{\eta}_{2ff} - \dot{\eta}_{3ff}}{\Delta x} \right) \right\rangle_t$$

$$\langle P \rangle_t = \frac{EI k^2}{\Delta x} \left\langle \eta_{2ff} \dot{\eta}_{2ff} - \eta_{2ff} \dot{\eta}_{3ff} + \eta_{3ff} \dot{\eta}_{2ff} - \eta_{3ff} \dot{\eta}_{3ff} \right\rangle_t$$

Com as relações obtidas na equação (2.4) chega-se a:

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = \frac{EI k^2}{\Delta x} 2\Re \left\{ \left\langle N_2 \dot{N}_2^* - N_2 \dot{N}_3^* + N_3 \dot{N}_2^* - N_3 \dot{N}_3^* \right\rangle_e \right\}$$

Passando a expressão acima para acelerações tem-se:

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = \frac{EI k^2}{\Delta x \omega^3} 2\Re \left\{ \left\langle (+i\ddot{N}_2 \dot{N}_2^*) - (+i\ddot{N}_2 \dot{N}_3^*) + (+i\ddot{N}_3 \dot{N}_2^*) - (+i\ddot{N}_3 \dot{N}_3^*) \right\rangle_e \right\}$$

Lembrando-se novamente que $\Re\{iA\} = -\Im\{A\}$, e ainda que $\Im\{S_{AB}\} = -\Im\{S_{BA}\}$ e $\Im\{S_{AA}\} = 0$ tem-se:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = 2 \frac{EI k^2}{\Delta x \omega^3} \Im\{S_{22} - S_{32} + S_{23} - S_{33}\}$$

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = 2 \frac{EI k^2}{\Delta x \omega^3} \Im\{2S_{23}\}$$

Como visto anteriormente na equação (2.13), o valor analítico da relação de dispersão é:

$$k_{analitico}^4 = \omega^2 \frac{A\rho}{EI}$$

ou

$$k_{analitico}^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$$

Substituindo este resultado na expressão da potência obtém-se igualmente a expressão de potência ativa medida com 2 acelerômetros [6], [9]:

$$P_{2ac} = \langle\langle P \rangle\rangle_e = 4 \frac{\sqrt{EI\rho A}}{\Delta x \omega^2} \Im\{S_{23}\} \quad (3.7a)$$

$$P_{2ac} = \langle\langle P \rangle\rangle_e = 2 \frac{\sqrt{EI\rho A}}{\Delta x \omega^2} \Im\{G_{23}\} \quad (3.7b)$$

3.2.2- Medidas com 3 acelerômetros - formulação de Carniel

No caso de vigas, Carniel e Pascal [8], [28] propuseram um método de medida do fluxo de potência das ondas de flexão usando três acelerômetros. Deste modo, embora eles continuem usando a hipótese de campo distante, na qual os termos de campo próximo são desprezados,

eliminaram a necessidade de um fator de correção que depende do coeficiente de reflexão das ondas.

A dedução da expressão do cálculo de potência para três acelerômetros é similar às anteriores, porém Carniel usa a definição de diferenças finitas centrais onde :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta_1 - \eta_3}{2\Delta x} \quad (3.8)$$

e

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\frac{\eta_1 - \eta_2}{\Delta x} - \frac{\eta_2 - \eta_3}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3}{\Delta x^2} \quad (3.9)$$

Usando os resultados da Eq. (3.8), aplicados novamente à Eq. (2.27b), com hipótese de campo distante, e fazendo o ponto 2 como ponto de referência, tem-se:

$$\langle P \rangle_i = 2EI k^2 \left\langle \eta_{ff} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_i \quad (2.27b)$$

$$\langle P \rangle_i = 2EI k^2 \left\langle \eta_{2ff} \left(\frac{\dot{\eta}_{1ff} - \dot{\eta}_{3ff}}{2\Delta x} \right) \right\rangle_i$$

$$\langle P \rangle_i = \frac{EI k^2}{\Delta x} \left\langle \eta_{2ff} \dot{\eta}_{1ff} - \eta_{2ff} \dot{\eta}_{3ff} \right\rangle_i$$

Usando a relação (2.4) na equação acima obtém-se:

$$\langle \langle P \rangle_i \rangle_c = \frac{EI k^2}{\Delta x} 2\Re \{ \langle N_2 \dot{N}_1^* - N_2 \dot{N}_3^* \rangle_c \}$$

Passando para aceleração, tem-se:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = +\frac{EI k^2}{\Delta x} 2\Re\left\{\left\langle\left\langle +i\ddot{N}_2\ddot{N}_1^* - (+i\ddot{N}_2\ddot{N}_3^*) \right\rangle\right\rangle_e\right\}$$

relembrando novamente as identidades $\Re\{iA\} = -\Im\{A\}$, e $\Im\{S_{AB}\} = -\Im\{S_{BA}\}$, tem-se:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = -2\frac{EI k^2}{\Delta x \omega^3} \Im\{S_{12} - S_{32}\}$$

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = +2\frac{EI k^2}{\Delta x \omega^3} \Im\{S_{21} - S_{23}\}$$

Manipulando a relação de dispersão dada por (2.13) pode-se obter a seguinte expressão:

$$k^2 EI = \frac{\omega^2 \rho A}{k^2}$$

Substituindo este resultado na equação anterior obtém-se a expressão de potência ativa medida com 3 acelerômetros [8], [28]:

$$P_{3ac} = \langle\langle P \rangle\rangle_e = 2\frac{\rho A}{k^2 \omega \Delta x} \Im\{S_{21} - S_{23}\} \quad (3.10a)^1$$

$$P_{3ac} = \langle\langle P \rangle\rangle_e = \frac{\rho A}{k^2 \omega \Delta x} \Im\{G_{21} - G_{23}\} \quad (3.10b)$$

Com este método é possível estimar também a relação de dispersão e então substituí-la na Eq. (3.10). Para calculá-la deve-se partir da Eq. (2.25):

¹ A expressão da potência ativa P_{3ac} difere ligeiramente da encontrada nas referências [8] e [28], em função da definição dos pontos usados no método das diferenças finitas. A total igualdade é obtida substituindo o índice 1 pelo 3 e vice-versa.

$$k^2 = -\frac{1}{\eta_{ff}} \frac{\partial^2 \eta_{ff}}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

usando a expressão da diferença finita central (3.9) na relação acima, e o ponto 2 como referência, tem-se:

$$k^2 = -\frac{1}{\eta_{2ff}} \left(\frac{\eta_{1ff} - 2\eta_{2ff} + \eta_{3ff}}{\Delta x^2} \right) = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{2\eta_{2ff} - \eta_{1ff} - \eta_{3ff}}{\eta_{2ff}} \right)$$

Se multiplicarmos o numerador e denominador da expressão acima por η_{2ff} , e aplicarmos a transformada de Fourier usando as relações (2.4), tem-se:

$$\langle k^2 \rangle_e = \frac{1}{\Delta x^2} \frac{2\Re\{2S_{22} - S_{12} - S_{32}\}}{2\Re\{S_{22}\}}$$

As grandezas S_{ij} com $i \neq j$ são complexas. Entretanto, para ondas de flexão se propagando sem amortecimento, as partes imaginárias dos termos S_{12} e S_{32} acima são iguais e de sinais contrários e o termo S_{22} é real, e portanto o número de onda é real. Inversamente, um resultado não nulo da parte imaginária da expressão acima, que considera propagação em campo distante, seria uma indicação de amortecimento das ondas de flexão [29].

Sabendo-se que $\Re\{S_{12}\} = \Re\{S_{21}\}$ e que $\Re\{S_{32}\} = \Re\{S_{23}\}$, finalmente, pode-se escrever a expressão para cálculo do número de onda obtido com 3 acelerômetros [8], [28], [29]:

$$k_{3ac} = \langle k \rangle_e = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{2S_{22} - S_{21} - S_{23}}{S_{22}}} \quad (3.11a)$$

$$k_{3ac} = \langle k \rangle_e = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{2G_{22} - G_{21} - G_{23}}{G_{22}}} \quad (3.11b)$$

Para melhorar a estimativa da relação de dispersão, em função dos erros intrínsecos do método das diferenças finitas, é necessário corrigir a equação acima. Para isso toma-se a equação dos deslocamentos (2.17):

$$\eta_{ff}(x,t) = \Re\{V[e^{-ikx} + r e^{ikx}]e^{i\omega t}\} \quad (2.17)$$

As acelerações nos pontos 1, 2 e 3 podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_{3,ff} &= C[e^{-ik(x-\Delta x)} + r e^{+ik(x-\Delta x)}] \\ \ddot{\eta}_{2,ff} &= C[e^{-ik(x)} + r e^{+ik(x)}] \\ \ddot{\eta}_{1,ff} &= C[e^{-ik(x+\Delta x)} + r e^{+ik(x+\Delta x)}] \end{aligned}$$

onde $C = -\omega^2 V e^{i\omega t}$

Calculando-se os autoespectros e os espectros cruzados tem-se:

$$S_{23} = \ddot{\eta}_{3,ff} (\ddot{\eta}_{2,ff})^* = C^2 [e^{+ik\Delta x} + 2r \cos(k(2x - \Delta x)) + r^2 e^{-ik\Delta x}]$$

$$S_{21} = \ddot{\eta}_{1,ff} (\ddot{\eta}_{2,ff})^* = C^2 [e^{-ik\Delta x} + 2r \cos(k(2x + \Delta x)) + r^2 e^{+ik\Delta x}]$$

$$S_{22} = \ddot{\eta}_{2,ff} (\ddot{\eta}_{2,ff})^* = C^2 [1 + r^2 + 2r \cos(2kx)]$$

Aplicando-se estes resultados na Eq. (3.11a) obtém-se:

$$k_{3ac} = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{2(1 - \cos(k_{\text{corrigido}} \Delta x))}$$

Usando relações trigonométricas adequadas chega-se à relação corrigida do número de onda [8], [28], [29]:

$$k_{\text{corrigido}} = \frac{2}{\Delta x} \arcsen\left(\frac{k_{3ac} \Delta x}{2}\right) \quad (3.12)$$

3.2.3- O uso da FRF no cálculo do fluxo de potência

Os métodos que envolvem o uso de diferenças finitas para o cálculo do fluxo de potência, utilizam os espectros cruzados e autoespectros dos pontos de medição. Isto exige que as medidas sejam feitas simultaneamente, pois a informação de fase entre os pontos medidos é de suma importância para a estimativa do fluxo de potência.

Uma alternativa a esta questão é o uso de estimadores dos espectros de potência cruzados necessários, que são obtidos através das relações abaixo envolvendo as FRFs, ou seja, as funções de resposta em frequência [26]:

$$G_{FW_i}(\omega) = H_{FW_i}(\omega)G_{FF}(\omega),$$

$$G_{W_iW_j}(\omega) = |H_{FW_i}(\omega)|^2 G_{FF}(\omega),$$

$$G_{W_iW_j}(\omega) = \frac{G_{FW_i}(\omega) * G_{FW_j}(\omega)}{G_{FF}(\omega)} = H_{FW_i}(\omega) * H_{FW_j}(\omega)G_{FF}(\omega)$$

onde F e W_i são a força de excitação e a resposta da estrutura no ponto i , que pode ser um deslocamento, velocidade ou aceleração. As relações acima também são válidas trocando-se os espectros de potência G_{BA} (“one sided”) pelos espectros de potência S_{BA} (“two sided”) pois $G_{BA} = 2S_{BA}$ [26].

A principal vantagem desta técnica é o cancelamento dos erros de fase da instrumentação, o qual permite o uso de acelerômetros e equipamentos com fases não necessariamente “casadas”, pois um único acelerômetro é sucessivamente colocado nas posições de medida. Outra vantagem é o uso de analisadores com somente 2 canais de aquisição.

Assim sendo, a estimativa do fluxo de potência com 2 acelerômetros dada pela Eq. (3.7b) pode ser escrita da seguinte forma [9]:

$$P_{2ac} = \langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 2 \frac{\sqrt{EI\rho A}}{\Delta x \omega^2} \Im\{(H_{F2}^* H_{F3})G_{FF}\} \quad (3.13)$$

Analogamente, para as estimativas da potência com 3 e 4 acelerômetros, dadas pelas Eqs.(3.10b) e (3.6b) respectivamente, tem-se [9]:

$$P_{3ac} = \langle \langle P \rangle_t \rangle_e = \frac{\rho A}{k^2 \omega \Delta x} \Im\{(H_{F2}^* H_{F1} - H_{F2}^* H_{F3})G_{FF}\} \quad (3.14)$$

$$P_{4ac} = \langle \langle P \rangle_t \rangle_e = \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im\{(4H_{F2}^* H_{F3} - H_{F2}^* H_{F4} - H_{F1}^* H_{F3})G_{FF}\} \quad (3.15)$$

Nos casos acima, a função de resposta em frequência usada é a aceleração [33], e portanto as respostas medidas são acelerações.

Em situações práticas, nas quais normalmente não são conhecidos o sinal da fonte de vibração, ou a força de excitação, é possível o uso de um dos pontos de medição como referência, e nas expressões acima, o subscrito “*F*” é substituído por “*r*”. Isto é possível porque, embora a referência medida seja aceleração ao invés de força, as unidades da FRF obtidas também mudam, mantendo um resultado final condizente. Obtêm-se então a expressão abaixo como exemplo:

$$\hat{G}_{P_{4ac}} = (4H_{r2}^* H_{r3} - H_{r2}^* H_{r4} - H_{r1}^* H_{r3})G_{rr}$$

Mais adiante no trabalho, no qual outros métodos se utilizam das expressões como as Eqs. (3.20), (3.21a), (3.21b) e (3.22) para a estimativa do fluxo de potência, pode-se aplicar a mesma linha de raciocínio do uso das funções de resposta em frequência.

Para a Eq. (3.20) obtém-se a seguinte expressão associada:

$$\langle\langle P(x,t) \rangle\rangle_t_e = 2EI\Re\left\{\left(\frac{\partial^3 H_{Fx}}{\partial x^3} \frac{\partial H_{Fx}^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 H_{Fx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t}\right) S_{FF}\right\} \quad (3.16)$$

Para as Eqs (3.21 a) e (3.21 b) associam-se, respectivamente:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_t_e = -4EI\Re\left\{\left(\frac{\partial^2 H_{Fx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t}\right) S_{FF}\right\} \quad (3.17a)$$

$$\langle\langle P \rangle\rangle_t_e = 4EI k^2 \Re\left\{\left(H_{Fx} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t}\right) S_{FF}\right\} \quad (3.17b)$$

E, finalmente, para a Eq. (3.22) associa-se:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_t_e = 4EI\Re\left\{\left(\frac{\partial^3 H_{Fx}}{\partial x^3} \frac{\partial H_{Fx}^*}{\partial t}\right) S_{FF}\right\} \quad (3.18)$$

Note que, nas expressões acima, a função de transferência usada H_{Fx} é a inertância [33], ou seja, a resposta medida é o deslocamento.

Como no caso anterior, caso não seja conhecida a força de excitação, deve-se proceder da mesma maneira, substituindo-se um dos pontos de medida como referência no lugar da força, e nas expressões acima, o subscrito “ F ” é alterado para “ r ”.

3.2.4- Implementação do método

Implementou-se o método das diferenças finitas para simulações numéricas e para dados experimentais somente para a excitação aleatória. Para o caso de excitação senoidal a formulação é análoga e seria, na prática, o equivalente a comparar um único valor da excitação aleatória correspondente à frequência de análise.

Desenvolveu-se um programa chamado DFIN_SIM.m para o caso de simulação e DFIN_EXP.m para os dados experimentais, ambos escritos em MatLab².

Em ambos os casos implementaram-se os métodos de medida do fluxo de potência com 2 e 4 acelerômetros e a formulação de Carniel de medida com 3 acelerômetros.

Para simulação utilizou-se um programa implementado em MatLab denominado VIGAMOD.m, detalhado no item 4.2.1 do capítulo 4. Com este modelo simula-se a resposta a uma excitação normalizada (amplitude unitária) senoidal ou aleatória de uma viga engastada a uma terminação *quasi* anecóica usando um modelo de elementos finitos.

Com os dados de aceleração de translação e de rotação fornecidos pelo modelo é possível, através de uma função denominada de NINTFIN.m, interpolar por MEF, usando a Eq. (3.19), quaisquer outros pontos do modelo da viga. Calculam-se então os espectros cruzados nos pontos desejados, que são utilizados para obter o fluxo de potência conforme as Eqs. (3.7a), (3.10a) e (3.6a), para 2, 3 ou 4 acelerômetros respectivamente, considerando o autoespectro da força $S_{FF} = 1$, que são então comparados com a potência injetada no sistema calculada pela Eq. (2.7). Compara-se também a relação de dispersão teórica, através do valor do número de ondas analítico $k_{\text{analítico}}$ dado pela Eq. (2.13), com o valor de k_{3ac} , estimado através da formulação de Carniel e corrigido conforme a Eq.(3.12).

²MatLab é um programa comercial para Engenharia e Marca Registrada da Mathworks, Inc.

Tem-se a seguir uma breve descrição das funções programadas:

DFIN_SIM.m

1. Carregar as FRFs (H_{fx}) em aceleração, numericamente iguais aos respectivos espectros cruzados $S_{fx} = H_{fx} S_{FF}$, considerando o autoespectro da força $S_{FF} = 1$ (VIGAMOD.m).
2. Escolher novos pontos de medida e distância entre os sensores virtuais.
3. Obter através de curvas cúbicas de interpolação de MEF novos valores de acelerações translacionais e angulares, e sintetizar novas FRFs (NINTFIN.m).
4. Estimar novos espectros cruzados S_{fx} conforme item 1 ($S_{FF} = 1$).
5. Calcular os autoespectros e espectros cruzados $S_{xij} = (S_{Fxi} S_{Fxi}^*) / S_{FF}$ considerando $S_{FF} = 1$.
6. Calcular os fluxos de potência conforme equações abaixo:

$$P_{2ac} = \langle \langle P \rangle \rangle_e = 4 \frac{\sqrt{EI\rho A}}{\Delta x \omega^2} \Im\{S_{23}\} \quad (3.7a)$$

$$P_{3ac} = \langle \langle P \rangle \rangle_e = 2 \frac{\rho A}{k^2 \omega \Delta x} \Im\{S_{21} - S_{23}\} \quad (3.10a)$$

$$P_{4ac} = \langle \langle P \rangle \rangle_e = 2 \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im\{4S_{23} - S_{24} - S_{13}\} \quad (3.6a)$$

7. Calcular a potência injetada conforme equação abaixo, considerando o espectro cruzado, S_{Fa} , entre a força e a resposta no ponto de excitação (grau de liberdade 39 no modelo):

$$P_m(\omega) = \frac{1}{\omega} \Im\{G_{FA}(\omega)\} \quad (2.7)$$

8. Estimar k_{3ac} pela Eq. (3.11a) e corrigido pela Eq. (3.12):

$$k_{3ac} = \langle k \rangle_e = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{2S_{22} - S_{21} - S_{23}}{S_{22}}} \quad (3.11a)$$

$$k_{corrigido} = \frac{2}{\Delta x} \arcsen\left(\frac{k_{3ac} \Delta x}{2}\right) \quad (3.12)$$

9. Calcular a relação de dispersão teórica:

$$k^4_{analitico} = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

10. Comparar o fluxo de potência e a relação de dispersão estimados com os valores teóricos.

No caso dos dados experimentais, o programa desenvolvido DFIN_EXP.m, segue um raciocínio análogo ao programa desenvolvido para o caso da simulação numérica, tomando-se alguns cuidados adicionais inerentes ao processamento de dados experimentais.

Primeiramente foram fornecidos os dados que caracterizam a viga e a montagem do experimento, descritos em detalhes no item 4.3.1 do capítulo 4.

Foram adquiridos 14 sinais de aceleração no domínio do tempo para serem usados nos métodos propostos, e sinais de uma célula de carga e de um acelerômetro para o cálculo da potência injetada no sistema. Estes sinais foram adquiridos a uma taxa de 2048 Hz, totalizando 8192 amostras.

Estas amostras foram divididas em blocos de 1024 pontos, nos quais aplicou-se o processo de “janelamento” usando-se a função de Hanning para minimizar o efeito de truncamento (“leakage”) [26]. Foram também processadas 8 médias entre os blocos para obter um efeito de filtragem sobre os dados adquiridos.

É facultativo ao programa mudar o tamanho do bloco de amostragem e o número de médias a serem processadas, sendo este limitado pela razão do total de amostras medidas pelo tamanho escolhido do bloco.

Calculam-se então os espectros cruzados nos pontos desejados para obtenção do fluxo de potência conforme as Eqs (3.6a), (3.7a) e (3.10a) referentes à formulação escolhida. Calcula-se, ainda, a potência injetada, que é comparada com o fluxo de potência obtido.

Como no caso da simulação, comparam-se também os valores teóricos da relação de dispersão versus o k_{3ac} estimado pela formulação de Carniel.

A seguir apresenta-se o resumo das funções programadas:

DFIN_EXP.m

- 1- Ler as características (material e geometria) da viga e de montagem do experimento.
- 2- Carregar as respostas no tempo dos sensores (15 acelerômetros e uma célula de carga).
- 3- Definir o tamanho do bloco de amostragem (1024) e no. de médias (8).
- 4- Escolher na viga o ponto de estimativa do fluxo de potência.
- 5- Zerar os acumuladores dos espectros a serem calculados.
- 6- Iniciar o processo de média:
 - Aplicar a janela de Hanning nos blocos dos sensores.
 - Calcular FFT dos sinais dividindo o resultado pelo tamanho do bloco (correção em função da definição do FFT do MatLab).
 - Calcular os espectros cruzados e autoespectros $S_{xixj} = X_j X_i^*$ onde $x_i \xrightarrow{F} X_i$ e somar aos acumuladores.
 - Finalizar do processo de média.
- 7- Calcular os espectros médios e ponderar estes valores por 8/3 (correção em função da janela de Hanning).
- 8- Calcular a potência injetada conforme expressão abaixo:

$$P_{in}(\omega) = \frac{1}{\omega} \Im\{G_{FA}(\omega)\} \quad (2.7)$$

- 9- Estimar a potência ativa pelas equações abaixo que são comparadas à potência injetada:

$$P_{2ac} = \langle\langle P \rangle\rangle_e = 4 \frac{\sqrt{EI\rho A}}{\Delta x \omega^2} \Im\{S_{23}\} \quad (3.7a)$$

$$P_{3ac} = \langle\langle P \rangle\rangle_e = 2 \frac{\rho A}{k^2 \omega \Delta x} \Im\{S_{21} - S_{23}\} \quad (3.10a)$$

$$P_{4ac} = \langle\langle P \rangle\rangle_e = 2 \frac{EI}{\Delta x^3 \omega^3} \Im\{4S_{23} - S_{24} - S_{13}\} \quad (3.6a)$$

- 10- Calcular a relação de dispersão teórica:

$$k^4_{analítico} = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

- 11- Estimar k_{3ac} pela Eq. (3.11a) que é corrigida pela Eq. (3.12) e comparar com a relação teórica:

$$k_{3ac} = \langle k \rangle_e = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{2S_{22} - S_{21} - S_{23}}{S_{22}}} \quad (3.11a) \quad k_{corrigido} = \frac{2}{\Delta x} \arcsen\left(\frac{k_{3ac} \Delta x}{2}\right) \quad (3.12)$$

3.3- Ajustes Paramétricos

A grande maioria dos trabalhos publicados sobre a medida experimental de intensidade estrutural envolve o uso de aproximações através de diferenças finitas na estimativa das derivadas espaciais envolvidas na formulação.

Geralmente, o uso de diferenças finitas como método para cálculo do fluxo de potência apresenta limitações de precisão na obtenção das derivadas espaciais nas baixas frequências, que estão ligadas aos erros de fase entre os sensores. Nas altas frequências, limitações relacionadas ao erro de espaçamento entre as medidas, exigem que a distância entre os sensores seja menor quanto maior for a frequência que se deseja analisar, o que nem sempre é factível.

Uma das técnicas para contornar este problema é o uso de ajustes paramétricos de curvas através de alguns dados conhecidos na estrutura, para a obtenção das derivadas espaciais, ou para a identificação dos coeficientes da solução analítica, usadas no cálculo do fluxo de potência, representado esquematicamente na Fig. 3.2.

Abordam-se neste texto três métodos: 1) interpolação por elementos finitos; 2) identificação de coeficientes da solução exata; 3) uma nova proposta de aproximação através de senóides via série discreta regressiva de Fourier (RDFS). Outros tipos de ajustes poderiam também ser usadas, tais como interpolação via DFT e “B-splines”, utilizadas por Blotter e West [14].

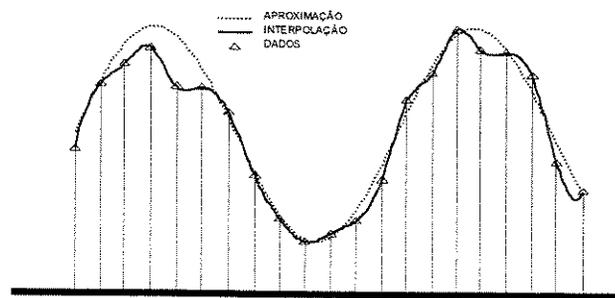


Fig. 3.2: Esquema conceitual dos métodos de regressões paramétricas do campo de deslocamento, velocidade ou acelerações da viga sob flexão

3.3.1- Interpolação pelas funções de forma do modelo dos elementos finitos (MEF)

O primeiro dos ajustes a ser proposto é o método de interpolação usando funções de forma de elementos finitos [11],[19],[20], que neste trabalho foi implementado como modelo teórico de simulação para validação dos demais métodos estudados.

A idéia consiste em utilizar as próprias funções de interpolação usadas no método de MEF para se obterem as derivadas necessárias na estimativa do fluxo de potência. Usam-se neste trabalho curvas de forma cúbicas obtidas em Craig [24] e apresentadas abaixo:

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\psi_2(x) = x - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\psi_4(x) = -L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

onde L é o comprimento do elemento e x é uma posição dentro deste elemento, ou seja, entre os nós do elemento. Com essas curvas obtém-se a interpolação dos deslocamentos através da equação abaixo:

$$\eta(x,t) = \eta_1(t)\psi_1(x) + \theta_1(t)\psi_2(x) + \eta_2(t)\psi_3(x) + \theta_2(t)\psi_4(x) \quad (3.19)$$

onde η_1 , η_2 e θ_1 , θ_2 são, respectivamente, os deslocamentos e as rotações nos nós 1 e 2 do elemento. Com a expressão acima é possível obter as derivadas necessárias para o cálculo do fluxo de potência conforme as Eqs. (2.24), (2.27a-b) e (2.28) adaptadas às médias de sinais de deslocamento no domínio da frequência, ou seja:

Sem hipótese de campo distante:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = 2EI\Re\left\{\left\langle\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\frac{\partial\eta^*}{\partial t} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\eta^*}{\partial x\partial t}\right\rangle_e\right\} \quad (3.20)$$

Com hipótese de campo distante, usando somente os termos de momento, e de maneira alternativa, utilizando-se a Eq. (2.25) pode-se ter:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = -4EI\Re\left\{\left\langle\frac{\partial^2\eta_{ff}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\eta_{ff}^*}{\partial x\partial t}\right\rangle_e\right\} \quad (3.21a)$$

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = 4EI k^2 \Re\left\{\left\langle\eta_{ff}\frac{\partial^2\eta_{ff}^*}{\partial x\partial t}\right\rangle_e\right\} \quad (3.21b)$$

Com hipótese de campo distante, usando somente os termos de força:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = 4EI\Re\left\{\left\langle\frac{\partial^3\eta_{ff}}{\partial x^3}\frac{\partial\eta_{ff}^*}{\partial t}\right\rangle_e\right\} \quad (3.22)$$

3.3.1.1- Implementação do método

Implementou-se o método somente para o caso de simulação, pois, para o caso experimental, não se tem os valores dos deslocamentos de rotação (θ), necessários para a interpolação conforme (3.19).

Desenvolveu-se um programa chamado MEF_SIM.m implementado em MatLab capaz de calcular, a partir de dados obtidos de um modelo teórico, o fluxo de potência para o caso em que se levam em conta os efeitos de campo próximo, ou naquele no qual desprezam-se o efeitos de campo próximo.

Obtém-se o modelo teórico a partir de um programa implementado em MatLab, denominado VIGAMOD.m, detalhado no item 4.2.1 do capítulo 4. Com este modelo simula-se a resposta a uma excitação normalizada (amplitude unitária) senoidal ou aleatória de uma viga engastada com uma terminação *quasi* anecóica. É possível, através do programa, avaliar o fluxo de potência em um número de pontos igual ou superior a 2, sendo sugerido o uso de 4 pontos para a estimativa do fluxo de potência, à semelhança do programa DFIN_SIM para 4 acelerômetros.

Com os dados de deslocamentos e rotações nodais fornecidos como saída do modelo, é possível, através da função NEFINITO.m desenvolvida em MatLab que se utiliza da Eq. (3.19), calcular, para quaisquer outros pontos da viga, as derivadas necessárias para obter o fluxo de potência. Este pode ser obtido conforme a Eq. (3.20) para o caso em que se levam em conta os efeitos de campo próximo ou usando-se da Eq. (3.21b), na qual desprezam-se o efeitos de campo próximo. O fluxo de potência é calculado utilizando relação de dispersão teórica, e então comparado com a potência injetada no sistema.

Também como saída do programa é possível escolher qualquer um dos pontos calculados conforme a Eq. (3.21b) com hipótese de campo distante, para comparação individual com a potência injetada, e ainda a comparação simultânea de todos os pontos calculados em relação à potência injetada dada uma frequência escolhida dentre aquelas admissíveis no modelo, em nosso caso de 0 a 400 Hz.

Para calcularmos a potência injetada no sistema utiliza-se a Eq. (2.7), onde é considerada uma força unitária aplicada no grau de liberdade 39 correspondente à extremidade livre da viga. Através da relação de velocidade e aceleração no domínio da frequência obtém-se a seguinte relação no ponto x_p de aplicação da força:

$$P_{in} = \frac{2}{\omega} \Im \left\{ \left\langle F(\omega) \ddot{\eta}(x_p, \omega)^* \right\rangle_e \right\} \quad (3.23)$$

sendo $F(\omega) = 1$ e $\ddot{\eta}$ a segunda derivada temporal do deslocamento ou seja, aceleração.

Calcula-se, ainda, o número de ondas k_{FEM} estimado a partir de dados interpolados pela subrotina NEFINITO.m, que é comparada com o número de ondas analítico calculado pela Eq. (2.13). Estima-se o número de onda para cada ponto medido e o valor médio, que é dado pela Eq. (3.24) obtida da relação (2.25) onde a hipótese de campo distante é admitida:

$$k_{MEF} = \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \eta_{ff}^T}{\partial x^2} \eta_{ff}}{\eta_{ff}^T \eta_{ff}}} \quad (3.24)$$

onde " T " denota um vetor transposto.

Segue abaixo a metodologia usada nas funções programadas:

MEF_SIM.m

1. Carregar as FRFs (H_{fx}) em deslocamento e posições dos sensores nos nós do modelo (VIGAMOD.m).
2. Escolher nova distância, quantidade, e posições onde serão localizados os sensores virtuais.
3. Calcular a relação de dispersão teórica:

$$k^4_{analítico} = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

4. Para cada frequência:

- Obter, através de curvas cúbicas de interpolação de MEF, os novos valores de acelerações translacionais e angulares e derivadas espaciais e temporais em função dos dados originais do modelo e da nova condição de medida (NEFINITO.m).
- Calcular os fluxos de potência conforme equações abaixo:

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = 2EIFR \left\{ \left\langle \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x \partial t} \right\rangle_e \right\} \quad \text{hipótese de campo próximo (3.20)}$$

$$\langle\langle P \rangle\rangle_e = 4EIk^2 \Re \left\{ \left\langle \eta_{ff} \frac{\partial^2 \eta_{ff}^*}{\partial x \partial t} \right\rangle_e \right\} \quad \text{hipótese de campo distante (3.21b)}$$

- Calcular a potência injetada considerando uma força unitária aplicada no final da viga (grau de liberdade 39 do modelo):

$$P_{in} = \frac{2}{\omega} \Im \left\{ \left\langle F(\omega) \dot{\eta}(x_p, \omega)^* \right\rangle_e \right\} \quad (3.23)$$

- Estimar a relação de dispersão média conforme expressão abaixo:

$$k_{MEF} = \left\langle \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \eta_{ff}^T}{\partial x^2} \eta_{ff}}{\eta_{ff}^T \eta_{ff}}} \right\rangle_e \quad (3.24)$$

5. Comparar o fluxo de potência e a relação de dispersão estimados com os valores teóricos.

3.3.2- Identificação dos coeficientes da solução analítica da equação de propagação de onda

Este método é aquele no qual utiliza-se a própria função da resposta analítica da Eq. (2.11) para calcular o fluxo de potência em função dos coeficientes A , B , C e D da mesma.

Este método se baseia na formulação inicialmente proposta por Pavic [5] e utilizada também por Halkyard e Mace [12] obtida em termos das amplitudes da onda, e posteriormente formulada por Hambric e Taylor [11] em termos dos espectros das amplitudes da onda.

A idéia básica do método é tomar a relação de dispersão teórica e pelo menos quatro respostas em quatro diferentes pontos da estrutura e, a partir destas, montar um sistema linear de equações (SLE), na qual as incógnitas são os próprios coeficientes A , B , C , e D da solução analítica, e portanto para cada frequência é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} e^{-ikx_0} & e^{ikx_0} & e^{-kx_0} & e^{kx_0} \\ e^{-ikx_1} & e^{ikx_1} & e^{-kx_1} & e^{kx_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{-ikx_n} & e^{ikx_n} & e^{-kx_n} & e^{kx_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_n \end{Bmatrix}$$

Caso k precise ser estimado, é necessário escolher um método para resolver uma equação não linear, como por exemplo o método de Prony modificado proposto por Arruda et al. [15].

A expressão para a estimativa do fluxo de potência utilizada neste método é obtida com a substituição das Eqs. (2.10) e (2.11) na Eq. (2.24) para então obter-se [5],[12]:

$$\langle P \rangle_i = EIk^3 \omega (|A(\omega)|^2 - |B(\omega)|^2 + 2\Re\{iC(\omega)D(\omega)^*\}) \quad (3.25)$$

Para o caso no qual o efeito de campo próximo é desprezado, o sistema linear de equação e a Eq. (3.25) acima é simplificada para [5],[12]:

$$\begin{bmatrix} e^{-ikx_0} & e^{ikx_0} \\ e^{-ikx_1} & e^{ikx_1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ e^{-ikx_n} & e^{ikx_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_n \end{Bmatrix}$$

$$\langle P \rangle_T = EIk^3 \omega \left(|A(\omega)|^2 - |B(\omega)|^2 \right) \quad (3.26)$$

No caso de vibrações aleatórias ergódicas estacionárias, e lembrando-se que $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$, e $D(\omega)$ são amplitudes complexas e portanto de amplitude 2 vezes maiores que as correspondentes transformadas discretas de Fourier, pode-se através das Eqs. (2.3) e (2.4), transformar as Eqs. (3.25) e (3.26) nas seguintes expressões [11]³

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 4EIk^3 \omega (S_{AA}(\omega) - S_{BB}(\omega) - 2\Im\{S_{DC}(\omega)\}) \quad (3.27a)$$

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 2EIk^3 \omega (G_{AA}(\omega) - G_{BB}(\omega) - 2\Im\{G_{DC}(\omega)\}) \quad (3.27b)$$

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 4EIk^3 \omega (S_{AA}(\omega) - S_{BB}(\omega)) \quad (3.28a)$$

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 2EIk^3 \omega (G_{AA}(\omega) - G_{BB}(\omega)) \quad (3.28b)$$

Note que as equações. (3.25), (3.26), (3.27a-b) e (3.28a-b) estão relacionadas a deslocamentos e, portanto, se usarmos sinais de acelerações, deve-se dividi-las por ω^4 .

Este método esclarece o número mínimo de sensores necessários para estimativa do fluxo de potência em vigas submetidas a ondas de flexão, o qual varia entre 2 e 5 dependendo das simplificações assumidas na formulação. Se são assumidas as condições de campo distante e a

³ As expressões abaixo diferem da referência somente em função de como o autor definiu os espectros de potência S_{AA} , S_{BB} e S_{DC} .

relação de dispersão teórica, somente 2 medidas são suficientes. Se a relação de dispersão deve ser estimada, 3 sensores são necessários, o que corresponde à formulação de Carniel [8], [28]. Se for levado em consideração o efeito de campo próximo, 4 medidas serão necessárias e elevadas para 5, caso se queira estimar também a relação de dispersão.

Este método permite ainda medidas de redundância, que podem melhorar a estimativa dos coeficientes A , B , C e D . Estas medidas redundantes podem melhorar um mal condicionamento da matriz do sistema, o qual pode ser ocasionado por erros de precisão, principalmente no caso experimental, devido ao efeito do pequeno espaçamento entre as medidas tomadas. Halkyard e Mace [13] propuseram medidas híbridas de vibração e deformação para aliviar este problema de mal condicionamento da matriz do SLE.

A formulação é válida para qualquer segmento da estrutura onde não haja qualquer descontinuidade de força ou geométrica, tal como força concentrada ou variação na seção ou uma extremidade, e não necessita que os pontos medidos sejam próximos, o que é uma vantagem sobre os métodos que utilizam diferenças finitas e são afetados pelo erro da diferença de fase entre os sinais proveniente dos sensores.

3.3.2.1- Implementação do método

O método foi implementado tanto para o caso de simulação como para o caso dos dados obtidos experimentalmente e, em ambos os casos, somente para excitação aleatória, pelas mesmas razões comentadas anteriormente no item 3.2.4 do capítulo 3.

Para simulação desenvolveu-se o aplicativo chamado de ABCD_SIM.m escrito em MatLab que se utiliza do mesmo modelo obtido pelo programa VIGAMOD.m já mencionado.

Com os dados de aceleração de translação e de rotação nodais fornecidos pelo modelo é possível, através de interpolação com MEF feita pela função NINTFIM.m, aplicar o método em qualquer posição da viga e para qualquer distância entre os sensores virtuais.

Também é possível variar o número dos pontos de simulação na viga para obtenção dos parâmetros A , B , C e D ; porém, como já dito anteriormente, o número mínimo pode variar de 2 a 5 em função das simplificações usadas.

A partir dos dados de aceleração interpolados, estima-se a relação de dispersão k_{ABCD} através da minimização da função ERROABCD.m, para cada frequência, que calcula o erro obtido entre os valores dos parâmetros A , B , C e D obtidos com a relação de dispersão estimada versus a teórica. A minimização da função é feita através do comando FFMIN.m, adaptado do comando FMIN.m, original do MatLab, no qual alterou-se a saída e a condição de parada da função, as quais são usadas como critério para impressão dos valores estimados da relação de dispersão. Caso a função não seja minimizada em um determinado número de iterações, ou não consiga estimar um valor diferente das condições iniciais do problema, considera-se que não houve convergência do resultado e não se deve considerar ou imprimir o valor encontrado. Com os valores da relação de dispersão estimados, obtêm-se os parâmetros A , B , C e D através da subrotina ABCD.m, que monta e resolve o SLE. Para efeito de comparação obtêm-se também estes mesmos parâmetros através da mesma função ABCD.m, porém usando-se a relação de dispersão teórica.

Calcula-se então o fluxo de potência conforme a Eq. (3.25) ou Eq. (3.26), que são ajustadas para a resposta em aceleração, levando-se em conta a relação entre amplitude complexa e a DFT dos parâmetros A , B , C e D estimados. Tem-se, então, a comparação com a potência injetada no sistema calculada pela Eq. (2.7). Compara-se, ainda, a relação teórica $k_{analítico}$ dada pela Eq. (2.13), com a relação de dispersão k_{ABCD} estimada.

Implementou-se, também, o programa AB_SIM.m, de maneira semelhante ao ABCD_SIM.m, no qual são desprezados os efeitos de campo próximo e os parâmetros A e B são estimados sem a influência dos outros dois parâmetros, C e D .

Neste caso, usou-se a função ERROAB.m para estimar k_{ABCD} , o qual foi usado para estimar os coeficientes A e B que, foram estimados também com a relação de dispersão teórica para comparação. Em ambos os casos, A e B foram estimados através da função AB.m, equivalente a ABCD.m.

Como no caso anterior, compara-se o fluxo de potência estimado pela Eq. (3.26) com a potência injetada dada pela Eq. (2.7), e a relação de dispersão estimada versus a analítica, dada pela Eq.(2.13).

Segue abaixo a metodologia usada nas funções programadas:

ABCD_SIM.m

1. Carregar as FRFs (H_{Fx}) em aceleração e posições dos sensores nos nós do modelo (VIGAMOD.m).
2. Escolher nova distância, quantidade, e posições onde serão localizados os sensores virtuais.
3. Obter através de curvas cúbicas de interpolação de MEF, novos valores de acelerações translacionais e angulares, e sintetizar novas FRFs (NINTFIN.m).
4. Calcular a relação de dispersão teórica:

$$k^4_{analítico} = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

5. Para cada frequência:

- Estimar k_{ABCD} através da minimização da função ERROABCD.m (FFMIN.m).
- Estimar os parâmetros A, B, C, D com $k_{analítico}$ ou opcionalmente com k_{ABCD} (ABCD.M).
- Calcular os fluxos de potência conforme Eqs. (3.25) e (3.26) alteradas para aceleração usando

$k_{analítico}$ (opcional k_{ABCD}):

$$\langle P \rangle_i = \frac{4EI k^3}{\omega^3} (|A(\omega)|^2 - |B(\omega)|^2 + 2\Re\{iC(\omega)D(\omega)^*\}) \quad \text{efeito de campo próximo}$$

$$\langle P \rangle_i = \frac{4EI k^3}{\omega^3} (|A(\omega)|^2 - |B(\omega)|^2) \quad \text{hipótese de campo distante}$$

6. Calcular a potência injetada conforme equação abaixo, considerando o espectro cruzado, S_{Fa} , entre a força e a resposta no ponto de excitação (grau de liberdade 39 no modelo):

$$P_m(\omega) = \frac{1}{\omega} \Im\{G_{FA}(\omega)\} \quad (2.7)$$

7. Comparar o fluxo de potência e a relação de dispersão estimada com os valores teóricos.

Para os dados experimentais, desenvolveu-se o programa ABCD_EXP.m implementado de maneira semelhante ao dados simulados, exceto pelos cuidados peculiares devido ao processamento de dados experimentais, como já comentado anteriormente.

Como no caso anterior de processamento dos dados experimentais, aqui também inicia-se o programa com a entrada dos dados da viga e posicionamento dos sensores. Carrega-se o mesmo arquivo usado no método das diferenças finitas, contendo os dados provenientes dos acelerômetros usados para aplicar o método e da célula de carga usada para obter a potência injetada na estrutura.

É possível escolher o tamanho do bloco de amostragem e o número de médias a serem utilizadas no programa e em nosso caso foram usados blocos de 1024 pontos e 8 médias. Como já enfatizado anteriormente, o processo de médias tem o efeito de filtragem sobre os dados experimentais.

Como na simulação, aqui também é possível escolher a quantidade de pontos e a posição dos mesmos na viga, ou seja, quais dos pontos medidos serão usados nos cálculos. A cada passo do processo de média aplicam-se aos blocos de amostragem a “janela” de Hanning, sendo então montada a matriz das respostas dos sensores nos pontos escolhidos, e calculada a potência injetada conforme a Eq. (2.7). A partir destes dados de aceleração estima-se, para cada frequência, a relação de dispersão k_{ABCD} através da minimização da função ERROABCD.m feita pela rotina FFMIN.m, adaptada do comando FMIN.m original do MatLab analogamente ao caso da simulação. Aqui, também, caso a convergência não seja obtida em um determinado número de iterações, ou o valor encontrado não seja diferente das condições iniciais (passadas como parâmetros à função), deve-se desconsiderar o valor encontrado. Com os valores da relação de dispersão estimados, obtêm-se os parâmetros A , B , C , e D desejados através da subrotina ABCD.m, que monta e resolve o SLE associado aos dados de aceleração dos pontos medidos. Seguindo a mesma linha de raciocínio que na simulação encontram-se estes mesmos parâmetros usando a relação de dispersão teórica.

Calcula-se então fluxo de potência conforme as Eqs. (3.25) e (3.26), ajustadas para sinais em aceleração, novamente levando-se em conta o fator 2 entre o valor da amplitude complexa, e a DFT dos parâmetros estimados.

Ponderam-se então os valores de potência pelo número de médias utilizadas e pelo valor de $8/3$, correspondente à correção devido ao uso da janela de Hanning, e faz-se a comparação entre os valores obtidos pelo método e a potência injetada.

Compara-se ainda a relação de dispersão k_{ABCD} , com o número de ondas analítico $k_{analítico}$ dado pela Eq. (2.13).

A seguir tem-se o resumo das funções programadas:

ABCD_EXP.m

1. Ler as características (material e geometria) da viga e de montagem do experimento.
2. Carregar as respostas no tempo dos sensores (15 acelerômetros e uma célula de carga).
3. Definir o tamanho do bloco de amostragem (1024) e número de médias (8).
4. Escolher o local na viga e o número de sensores para estimativa do fluxo de potência.
5. Zerar os acumuladores das potências a serem calculadas.
6. Calcular a relação de dispersão teórica:

$$k^4_{analítico} = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

7. Iniciar o processo de média:
 - Aplicar a janela de Hanning nos blocos dos sensores.
 - Calcular FFT dos sinais e dividir o resultado pelo tamanho do bloco (correção em função da definição do FFT do MatLab).
 - Calcular a potência injetada conforme equação abaixo e somar ao acumulador:

$$P_m(\omega) = \frac{1}{\omega} \Im\{G_{FA}(\omega)\} \quad (2.7)$$

- Para cada freqüência:
 - Estimar k_{ABCD} através da minimização da função ERROACBD.m (FFMIN.m).
 - Estimar os parâmetros A, B, C, D com $k_{analítico}$ ou opcionalmente com k_{ABCD} (ABCD.M).
 - Calcular os fluxos de potência conforme Eqs. (3.25) e (3.26) alteradas para aceleração usando-se $k_{analítico}$ (opcional k_{ABCD}) e somar aos acumuladores:

$$\langle P \rangle_t = \frac{4EIk^3}{\omega^3} (|A(\omega)|^2 - |B(\omega)|^2 + 2\Re\{iC(\omega)D(\omega)^*\}) \quad \text{efeito de campo próximo}$$

$$\langle P \rangle_t = \frac{4EIk^3}{\omega^3} (|A(\omega)|^2 - |B(\omega)|^2) \quad \text{hipótese de campo distante}$$

- Finalizar o processo de média.
8. Ponderar as potência pelo número de médias e por 8/3 (correção em função da janela de Hanning).
 9. Comparar o fluxo de potência à potência injetada e a relação de dispersão estimada com a teórica.

3.3.3- Aproximação pela série de Fourier discreta regressiva (RDFS)

O último método a ser estudado é o modelo de ajuste de curva através de exponenciais complexas. A escolha de exponenciais complexas no domínio espacial se deve à própria natureza da solução da Eq. (2.11), que é uma função deste tipo. Em campo distante, uma viga tem distribuição espacial de deslocamento representada por uma senóide ou uma superposição de senóides.

O uso da série de Fourier discreta regressiva (RDFS – “Regressive Discrete Fourier Series”) [21],[22] é proposto neste trabalho como uma metodologia alternativa para o cálculo das derivadas espaciais obtidas no domínio do número de ondas ou espacial.

Ao contrário do que ocorre com dados no domínio do tempo, no domínio espacial é usual termos pequena quantidade de dados, o que torna crítico o efeito do truncamento de dados e inapropriado o uso de técnicas de “janelamento”, fato este que dificulta o uso da transformada de Fourier discreta (DFT “Discrete Fourier Transform”). Este problema é razoavelmente contornado com o uso da RDFS através da “dilatação” artificial do período ajustado [22].

Outra restrição para o uso da DFT é a possibilidade dos dados não serem igualmente espaçados no domínio espacial ou temporal. Normalmente os sistemas de aquisição de dados adquirem sinais analógicos discretizando-os com uma frequência de aquisição constante, e, neste caso, pode-se utilizar da DFT para análise dos sinais; porém, com o crescimento do uso de vibrômetros laser para análise de vibrações, a probabilidade de se encontrar uma seqüência de dados não igualmente espaçados, especialmente no domínio espacial, tem aumentado, o que impossibilita o uso da DFT mas permite o uso da RDFS [21].

Está implícito no cálculo da DFT de um sinal um ajuste por mínimos quadrados de uma série de Fourier através de uma “interpolação” dos dados originais, o que reproduz exatamente o sinal. A RDFS [21] parte deste princípio e ajusta o sinal a uma série de Fourier, resolvendo explicitamente o problema de mínimos quadrados associado através de uma aproximação dos dados originais,

calculando um número muito inferior de linhas de frequência do que a DFT. Um efeito dessa aproximação é a suavização do sinal calculado e, sendo a série gerada pelo cálculo da RDFS uma curva suave, ela pode ser derivada sem problemas [22]. Obtendo-se as derivadas espaciais de ordem superior é imediato estimar o fluxo de potência através das equações (3.16), (3.17 a-b) ou (3.18).

De maneira análoga à DFT, as expressões abaixo podem ser utilizadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \eta(k, \omega)}{\partial x^3} &= -ik^3 \eta(k, \omega) ; \quad \frac{\partial^2 \eta(k, \omega)}{\partial x^2} = -k^2 \eta(k, \omega) ; \quad \frac{\partial^2 \eta(k, \omega)}{\partial x \partial t} = -k\omega \eta(k, \omega) ; \\ \frac{\partial \eta(k, \omega)}{\partial t} &= i\omega \eta(k, \omega) \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.3.3.1- A série de Fourier discreta regressiva

A DFT de um sinal discretizado $x_n = x(t = n\Delta t)$ pode ser definida como:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{-kn}, \quad k=0, \dots, N-1 \quad (3.30)$$

e sua inversa (IDFT):

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{nk}, \quad n=0, \dots, N-1 \quad (3.31)$$

onde $W_N = e^{-i2\pi kn/N}$ é a N -ésima raiz da unidade e $i = \sqrt{-1}$. Os elementos X_k são os coeficientes da Série de Fourier Discreta (DFS) complexa. Esta série reproduz exatamente os pontos da seqüência de dados x_n . Embora não exista redundância nos dados, a DFT pode ser interpretada como um ajuste de mínimos quadrados e a Eq. (3.31) pode ser escrita na notação matricial:

$$WX = x \quad (3.32)$$

com

$$\begin{aligned} W_{nk} &= W_N^{nk}, & n=0, \dots, N-1 & & k=0, \dots, N-1 \\ X_k &= X_k, & k=0, \dots, N-1 & & x_n = x_n, \quad n=0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

A solução da Eq. (3.32) por mínimos quadrados é dada por:

$$X = (W^H W)^{-1} W^H x \quad (3.33)$$

onde o sobrescrito “ H ” denota o complexo conjugado transposto.

A abordagem regressiva consiste em um modelo mais geral da DFS para ajustar por mínimos quadrados dados não igualmente espaçados, o qual pode ser expresso como:

$$x(t_n) = \sum_{k=-P}^P X_k e^{\left(\frac{-i2\pi kt_n}{T}\right)} + \varepsilon_n \quad n=1, \dots, N \quad (3.34)$$

onde t_n é um elemento do vetor “ t ” com valores arbitrários, não necessariamente $t_n = n\Delta t$. Na expressão da DFS complexa acima, tem-se um número P arbitrário de frequências positivas, a componente DC, e um número P correspondente de frequências negativas, necessários para representar os dados reais, sendo o período T de amostragem também arbitrário. Matricialmente a Eq. (3.34) pode ser escrita:

$$WX = x + \varepsilon \quad (3.35)$$

onde

$$\begin{aligned} W_{nk} &= e^{(-i2\pi k t_n / T)}, & n=1, \dots, N, & & k = -P, \dots, P, \\ X_k &= X_k, \quad k = -P, \dots, P; & x_n = x(t_n), & & n=1, \dots, N; & & \varepsilon_n = \varepsilon(t_n), \quad n=1, \dots, N. \end{aligned}$$

onde ε_n é o desvio do modelo da DFS. A solução para o modelo dos mínimos quadrados regressivo (RDFS) é dada por:

$$X_s = (W^H W)^{-1} W^H x \quad (3.36)$$

Se o número P de linhas de frequência for pequeno, o ajuste dos dados será suave com seu efeito de filtro passa-baixa. Os dados filtrados são obtidos de:

$$x_s = W X_s \quad (3.37)$$

O período T da RDFS é arbitrário e pode ser otimizado, de modo a minimizar o erro $\varepsilon^H \varepsilon$. O aumento artificial do período da RDFS tem o efeito de minimizar o problema de vazamento ou "leakage", e eventualmente eliminá-lo se os dados truncados forem realmente periódicos. Porém, o aumento do período T deve ser aplicado com critério, pois o mesmo degrada a condição da matriz W . O aumento pode ser maior quanto menor o número de linhas do número de ondas.

3.3.3.2- Implementação do método

Implementou-se o método da RDFS tanto para o caso de simulação numérica como para o caso de dados experimentais, em ambos os casos para excitação aleatória e periódica.

Para simulação, foi desenvolvido um programa em MatLab chamado RDFS_SIM.m que se utiliza do mesmo modelo gerado pelo programa VIGAMOD.m citado anteriormente.

Com os dados de acelerações lineares e de rotações nodais fornecidos pelo modelo, e levando-se em conta que o auto espectro da força $S_{FF} = 1$ é possível, através de interpolação com MEF, feita pela função NINTFIM.m, aplicar o método em qualquer posição da viga, sendo também possível escolher não só a distância entre os sensores virtuais, que deve ser no mínimo $1/4$ do menor comprimento de onda a ser analisada, ou seja $\Delta_{\min} = 1/4 \lambda_{\min}$ onde $\lambda_{\min} = 2\pi / k_{\max}$; como

também a quantidade deles, que pode ser maior ou igual a 5, porém no caso da RDFS que requer grande quantidades de dados, sugere-se que este número seja no mínimo igual a 10, para que se possa fazer o ajuste espacial adequadamente.

Com os novos dados de aceleração interpolados e a posição dos acelerômetros na viga, obtém-se o campo espacial de acelerações e suas derivadas espaciais de 1ª, 2ª e 3ª ordem através da função desenvolvida em MatLab denominada RDFS_1D.m.

Esta função necessita de outros dois parâmetros, T e P descritos no item 3.3.2.1, representados pelas variáveis “xvar” e “pvar” no programa, que são dados de entrada, características ao método de ajuste pela Série de Fourier Discreta Regressiva [21]. Normalmente, o valor de T deve ser tomado arbitrariamente maior ou igual ao tamanho do vetor de medição, ou seja “dilatado” artificialmente, e P , que correspondente ao número de linhas de harmônicas usadas para o ajuste, maior ou igual a 1, sendo maior quanto maior a frequência. Em nosso caso da viga sob flexão com a terminação anecóica, obtivemos os melhores resultados assumindo $xvar = \lambda(\omega)$, onde $\lambda(\omega)$ é o comprimento de onda em função da frequência e por este motivo foi suficiente assumir $P = 2$, independentemente da frequência. Assim sendo, ao invés de termos uma “dilatação” artificial em relação ao tamanho do vetor de medida, houve em algumas frequências um “encolhimento”, que apresentou bons resultados, talvez pelo bom comportamento do nosso caso específico. Este resultado, porém, poderá ser estendido para pequenos trechos de medidas, nos quais seja válido este tipo de comportamento.

É possível, também, visualizar o comparativo entre os valores do modelo e os valores ajustados pela RDFS, bem como suas derivadas, habilitando algumas partes do programa, desabilitadas opcionalmente para maior velocidade no processamento dos resultados.

Ajusta-se a saída em aceleração da função RDFS_1D.m para deslocamento e obtém-se então as derivadas, necessárias para o cálculo do fluxo de potência conforme a Eq. (3.16), que leva em conta o efeito de campo próximo. Quando o efeito de campo próximo é desprezado, utiliza-se a Eq. (3.17a) que se usa somente os termos provenientes de momento, ou a Eq. (3.17b), que usa a relação

de dispersão teórica, ou, finalmente, a Eq. (3.18), que usa somente os termos de força. O fluxo de potência é, então, comparado com a potência injetada, conforme a Eq. (3.23).

Para melhor análise, tem-se ainda, como saída, o comparativo em gráficos individuais, da potência injetada com a potência estimada pela Eq. (3.17b), em cada ponto de simulação e, dada uma frequência escolhida, o comparativo espacial na viga entre a potência injetada e a estimada.

Também com a saída da função RDFS_1D.m calcula-se o valor do número de onda k_{RDFS} para cada ponto de medida e o valor médio, que é dado pelas Eqs. (3.38a) e (3.38b) abaixo, provenientes da Eq. (2.25), com hipótese de campo distante, ou da Eq. (2.15), sem hipótese de campo distante, que são então comparadas com o valor analítico, conforme a Eq. (2.13):

$$k_{RDFS_{ff}} = \left\langle \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \ddot{\eta}_{ff}^T}{\partial x^2} \ddot{\eta}_{ff}}{\ddot{\eta}_{ff}^T \ddot{\eta}_{ff}}} \right\rangle_e \quad (3.38a)$$

$$k_{RDFS} = \left\langle \sqrt[4]{\frac{\frac{\partial^4 \ddot{\eta}^T}{\partial x^4} \ddot{\eta}}{\ddot{\eta}^T \ddot{\eta}}} \right\rangle_e \quad (3.38b)$$

Esquemáticamente tem-se a seguinte descrição das funções programadas:

RDFS_SIM.m

1. Carregar as FRFs (H_{Fx}) em aceleração, numericamente iguais aos respectivos espectros cruzados $S_{Fx} = H_{Fx}S_{FF}$, considerando o autoespectro da força $S_{FF} = 1$ e posições dos sensores (VIGAMOD.m).

2. Calcular a relação de dispersão teórica:

$$k^4_{analítico} = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

3. Escolher nova distância ($\Delta_{min} = 1/4\lambda_{min}$), quantidade, e posições onde serão localizados os sensores virtuais.

4. Obter através de curvas cúbicas de interpolação de MEF, novos valores de acelerações translacionais e angulares, e sintetizar novas FRFs considerando $S_{FF} = 1$ (NINTFIN.m).

5. Para cada frequência:

- Calcular os novos valores ajustados de aceleração e suas derivadas espaciais (RDFS_ID.m).
- Calcular a relação de dispersão conforme equações abaixo:

$$k_{RDFS_{ff}} = \left\langle \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \ddot{\eta}_{ff}^T}{\partial x^2} \ddot{\eta}_{ff}}{\ddot{\eta}_{ff}^T \ddot{\eta}_{ff}}} \right\rangle_e \quad (3.38a)$$

$$k_{RDFS} = \left\langle \sqrt[4]{\frac{\frac{\partial^4 \ddot{\eta}^T}{\partial x^4} \ddot{\eta}}{\ddot{\eta}^T \ddot{\eta}}} \right\rangle_e \quad (3.38b)$$

6. Calcular os valores de deslocamento ou velocidade para cálculo da potência.

7. Calcular o fluxo de potência conforme equações abaixo considerando $S_{FF} = 1$:

$$\langle \langle P(x,t) \rangle_t \rangle_e = 2EI\Re\left\{ \left(\frac{\partial^3 H_{Fx}}{\partial x^3} \frac{\partial H_{Fx}^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 H_{Fx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.16)$$

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = -4EI\Re\left\{ \left(\frac{\partial^2 H_{Fx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.17a)$$

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 4EI k^2 \Re\left\{ \left(H_{Fx} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.17b)$$

$$\langle \langle P \rangle_t \rangle_e = 4EI\Re\left\{ \left(\frac{\partial^3 H_{Fx}}{\partial x^3} \frac{\partial H_{Fx}^*}{\partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.18)$$

8. Calcular a potência injetada considerando uma força unitária aplicada no final da viga (GL 39 do modelo):

$$P_{in} = \frac{2}{\omega} \Im\left\{ \left\langle F(\omega) \dot{\eta}(x_p, \omega)^* \right\rangle_e \right\} \quad (3.23)$$

9. Comparar o fluxo de potência e a relação de dispersão estimados com os valores teóricos.

Para os dados experimentais, no caso de excitação aleatória, desenvolveu-se o programa chamado de RDFS_EXP.m, escrito em MatLab. Este programa segue praticamente a mesma linha de raciocínio do programa desenvolvido para o caso da simulação numérica, porém com os cuidados adicionais devido aos dados experimentais.

Primeiramente, são fornecidos como dados de entrada a geometria e as características da viga utilizada no experimento, descrita em detalhe no item 4.3.1 do capítulo 4.

Os dados experimentais foram os mesmos usados nos métodos anteriores, ou seja, os 15 sinais de aceleração e o sinal da célula de carga, adquiridos no domínio do tempo, que foram divididos novamente em blocos de 1024 amostras para o processamento de 8 médias.

O programa, porém, nos permite escolher o tamanho do bloco de amostragem e o número de médias a serem processadas, sendo este limitado pela razão do total de pontos adquiridos pelo tamanho do bloco escolhido, como nos demais casos. É ainda facultativa a escolha do número de sensores a serem usados nos cálculos e qual deles usar como referência central.

Inicia-se então o processamento da média, na qual, a cada passo, é aplicado a janela de Hanning e a FFT nos dados referentes à força, ao valor do acelerômetro usado para a estimativa da potência injetada e aos demais sinais dos acelerômetros. Ainda neste passo da média, estimam-se as funções de transferência entre o sinal da força e dos acelerômetros, a serem usadas pela RDFS, através da seguintes relação: $H_{Fx} = S_{Fx} / S_{FF}$, onde S_{FF} é o autoespectro da força.

Aplica-se então a função RDFS_1D.m sobre as funções de transferência dos sinais de aceleração, transformando os sinais dos sensores do domínio do espaço para o domínio do número de onda para cada frequência de análise.

Obtém-se então, como sinal de saída da função RDFS_1D.m, o campo espacial de aceleração (interpolado) ao qual está submetida a viga e, também, as derivadas espaciais de 1ª até a 3ª ordem.

A cada passo do processo da média, calcula-se também o número de onda pelas Eqs. (3.38a) e (3.38b), que é somado em acumuladores.

Como no caso da simulação, alguns destes dados no domínio da frequência foram divididos por $(i\omega)$ ou $(-\omega^2)$ para transformá-los em dados de velocidade ou deslocamento, respectivamente, para poderem ser utilizados na Eq. (3.16), que leva em conta o efeito de campo próximo, ou na Eqs. (3.17a), (3.17b) e (3.18), quando a contribuição de campo próximo é desprezada no cálculo do fluxo de potência. Estes resultados são colocados em acumuladores.

Ao término do processo da média, os valores dos acumuladores são divididos pelo número de médias, e multiplicados pelo valor de $8/3$, correspondente à correção devido ao uso da janela de Hanning. Os resultados dos fluxos de potência estimados pelos diversos métodos são comparados com a potência injetada obtida pela Eq. (2.7), e a relação de dispersão estimada pelos dois métodos, é comparada com a relação de dispersão teórica dada pela Eq. (2.13).

Esquemáticamente, pode-se descrever o programa da seguinte maneira:

RDFS_EXP.m

1. Ler as características (material e geometria) da viga e de montagem do experimento.
2. Carregar as respostas no tempo dos sensores (15 acelerômetros e uma célula de carga).
3. Definir o tamanho do bloco de amostragem (1024) e no. de médias (8).
4. Escolher o local na viga e o número de sensores para estimativa do fluxo de potência.
5. Zerar os acumuladores das potências e das relações de dispersão a serem calculadas.
6. Calcular a relação de dispersão teórica:

$$k^4_{analítico} = \omega^2 \frac{A\rho}{EI} \quad (2.13)$$

7. Iniciar o processo de média:

- Aplicar a janela de Hanning nos blocos dos sensores.
- Calcular FFT dos sinais e dividir o resultado pelo tamanho do bloco (correção em função da definição do FFT do MatLab).
- Calcular a potência injetada conforme equação abaixo e somar ao acumulador:

$$P_m(\omega) = \frac{1}{\omega} \Im\{G_{FA}(\omega)\} \quad (2.7)$$

- Estimar FRFs ($H_{Fx} = S_{Fx} / S_{FF}$) onde $S_{Fx} = F(\omega)^* X(\omega)$ (para cada acelerômetro).
- Para cada frequência:
 - Calcular os novos valores ajustados de aceleração e suas derivadas espaciais (RDFS_1D.m).
 - Calcular a relação de dispersão média conforme equações abaixo e somar ao acumulador:

$$k_{RDFS_{ff}} = \left\langle \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \ddot{\eta}_{ff}^T}{\partial x^2} \ddot{\eta}_{ff}}{\ddot{\eta}_{ff}^T \ddot{\eta}_{ff}}} \right\rangle_e \quad (3.38a)$$

$$k_{RDFS} = \left\langle \sqrt[4]{\frac{\frac{\partial^4 \ddot{\eta}^T}{\partial x^4} \ddot{\eta}}{\ddot{\eta}^T \ddot{\eta}}} \right\rangle_e \quad (3.38b)$$

- Calcular os valores de deslocamento ou velocidade para cálculo da potência.
- Calcular o fluxo de potência conforme equações abaixo e somar ao acumulador:

$$\langle\langle P(x,t) \rangle_t \rangle_e = 2EI \Re\left\{ \left(\frac{\partial^3 H_{Fx}}{\partial x^3} \frac{\partial H_{Fx}^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 H_{Fx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.16)$$

$$\langle\langle P \rangle_t \rangle_e = -4EI \Re\left\{ \left(\frac{\partial^2 H_{Fx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.17a)$$

$$\langle\langle P \rangle_t \rangle_e = 4EI k^2 \Re\left\{ \left(H_{Fx} \frac{\partial^2 H_{Fx}^*}{\partial x \partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.17b)$$

$$\langle\langle P \rangle_t \rangle_e = 4EI \Re\left\{ \left(\frac{\partial^3 H_{Fx}}{\partial x^3} \frac{\partial H_{Fx}^*}{\partial t} \right) S_{FF} \right\} \quad (3.18)$$

- Finalizar média.
8. Dividir acumuladores pelo no. de médias e ponderar este valor por 8/3 (correção em função da janela de Hanning).
 9. Comparar valores estimados de potência e relação de dispersão com valores teóricos.

4- ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1- Introdução

Neste capítulo iremos fazer uma descrição do modelo numérico e da montagem experimental utilizados para validação dos métodos.

São ainda apresentados e discutidos os resultados obtidos. Note-se que o objetivo deste capítulo não é realizar comparações entre os dados experimentais e os dados obtidos da simulação numérica, embora tenha-se tentado utilizar um modelo teórico qualitativamente semelhante ao sistema experimental.

4.2- Simulação numérica

4.2.1- Descrição do modelo

Para avaliar os resultados dos métodos estudados, utilizou-se um modelo de MEF de uma viga excitada em uma das extremidades e conectada a molas e amortecedores na outra. O esquema do modelo é apresentado na Fig. 4.1 abaixo:

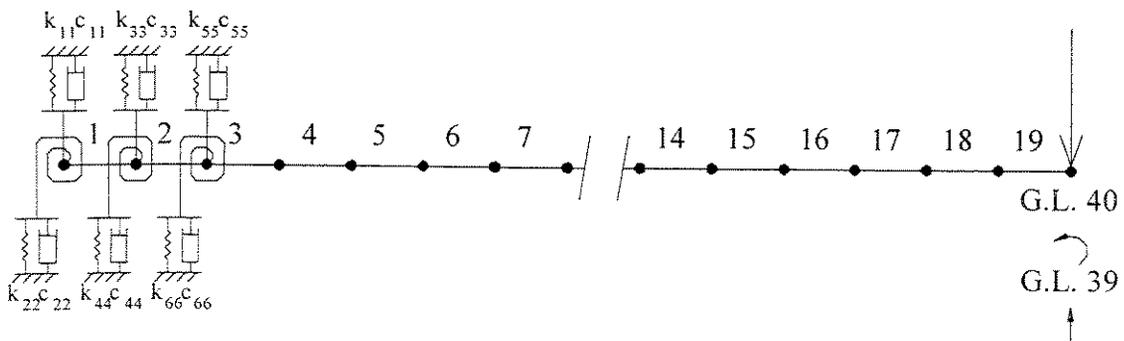


Fig. 4.1: Modelo do sistema usado na simulação

Simulou-se uma viga de aço com dimensões de comprimento 1,50 m e seção retangular de 0,003x0,020 m com módulo de elasticidade $E=2.07 \times 10^{11}$ N/m² e com densidade volumétrica $\rho = 7800$ kg/m³. Nenhum esforço foi feito no modelo para simular com precisão a barra usada no experimento, mas os parâmetros foram escolhidos de tal forma que os sistemas possam representar um ao outro, pelo menos qualitativamente. Assim, a comparação dos resultados e o potencial dos métodos são mais facilmente avaliados.

A viga foi modelada com 19 elementos de viga de Euler-Bernoulli, com 2 graus de liberdade por nó [24], totalizando 40 GLs. Este modelo é adequado para investigar vibrações de flexão no plano na faixa de frequência analisada neste trabalho, 0-400Hz, o qual engloba os primeiros 9 modos de flexão da viga em estudo.

Utilizaram-se molas e amortecedores para simular uma terminação *quasi* anecóica para a viga, qualitativamente semelhante à caixa de areia utilizada na montagem experimental. Molas lineares translacionais com coeficientes de rigidez $K_{Tij}=10000$ N/m, i ímpar, e molas lineares rotacionais com coeficientes de rigidez $K_{Rij}=1000$ Nm/rad, j par, foram conectadas aos nós 1, 2 e 3, como mostrado na Fig. 4.1. Amortecedores lineares translacionais com coeficientes de amortecimento $C_{Tij}=1000$ Ns/m e amortecedores lineares rotacionais com coeficientes de amortecimento $C_{Rij}=100$ Nms/rad foram também conectados aos nós 1, 2 e 3 e mostrados na Fig. 4.1. Para simular o efeito da fixação dos 14 acelerômetros, acrescentou-se uma massa de 6 gramas em todos os nós a partir do nó 7. Foram desconsiderados os efeitos provenientes da fixação da viga ao excitador eletrodinâmico (“shaker”) através do “stinger” e a massa acrescida pela célula de carga e pelo acelerômetro usados na medida da potência injetada no sistema.

Na Fig. 4.2 é mostrada a magnitude da função de resposta em frequência (FRF) simulada no ponto de localização do “shaker”, ou seja, o nó 20, GL 39 do modelo, correspondente à translação na extremidade livre da viga. As FRFs foram sintetizadas usando autovetores e autovalores computados pela equação de equilíbrio $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f$, onde M, K, C são as

matrizes de massa, rigidez e amortecimento, x , \dot{x} e \ddot{x} são vetores de deslocamento, velocidade e aceleração, f o vetor de força.

Como metodologia para a solução da equação de equilíbrio acima, coloca-se a mesma na forma de uma equação diferencial ordinária do tipo $A\dot{z} + Bz = u$, dobrando-se a ordem do problema onde:

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad z = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$$

sendo 0 , nas matrizes A e B , uma matriz de zeros de mesma dimensão das matrizes de massa, rigidez ou amortecimento, e no vetor u da mesma dimensão do vetor f .

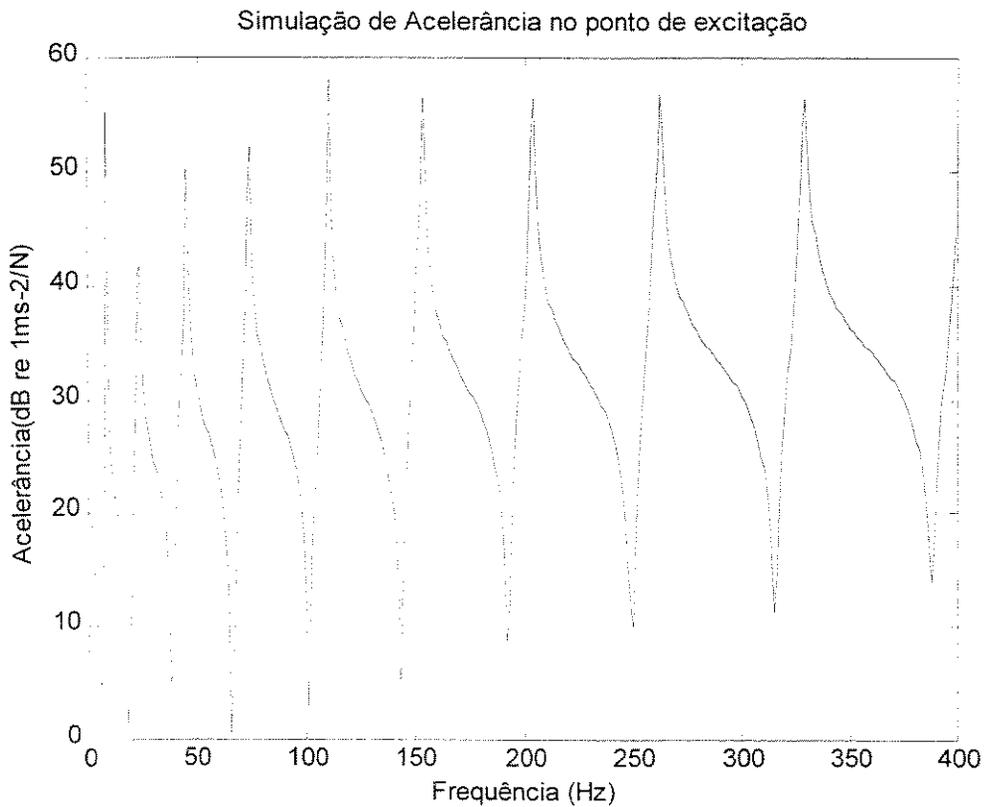


Fig. 4.2: Acelerância do sistema simulado no ponto de excitação

Esta formulação simétrica pode ser usada com modelos de amortecimento viscoso, proporcional ou não. Neste caso utilizou-se amortecimento não proporcional [30].

Através da superposição modal obtém-se a matriz de resposta em frequência H obtida em deslocamento e dada por [30]:

$$H_{mn}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\Phi_{nr} \Phi_{mr}}{a_r (i\omega - s_r)} \quad (4.1)$$

onde

$$a_r = \phi_r^T A \phi_r, \quad (4.2)$$

i é $\sqrt{-1}$,

ϕ_r é o r -ésimo autovetor ou modo, r -ésima coluna da matriz Φ

s_r é o r -ésimo autovalor (que contém a frequência natural e o fator de amortecimento modal),

m e n são os pontos de medida da resposta deslocamento e de aplicação da força, respectivamente,

N é o número máximo de modos considerados,

ω é a frequência de excitação.

Pelo fato do modelo proposto conter um número pequeno de elementos, foram considerados todos os modos na somatória da superposição modal. Porém, em modelos maiores, nos quais a consideração de todos os modos dependeria de um esforço computacional bastante elevado, normalmente trunca-se a somatória dos modos em um número às vezes bem inferior ao total considerado. Contudo, como demonstrado por Pavic [31], deve-se considerar o efeito residual de flexibilidade de modos de ordem superior [24], pois ele é uma parcela essencial quando o fluxo de potência é calculado a partir do campo de deslocamento obtido pela superposição modal.

Para obter os espectros de potência, citados anteriormente no item 3.2.3, usaram-se as seguintes relações [26]:

$$S_{FW_i}(\omega) = H_i(\omega)S_{FF}(\omega)$$

onde F e W_i são a força de excitação e a resposta da estrutura no ponto i , respectivamente. Na simulação, no caso de excitação senoidal, usou-se a formulação com amplitude normalizada $S_{FF}(\omega) = 1N^2$. Como já comentado no item 2.2 do capítulo 2, para sinais aleatórios discretizados, o resultado deve ser expresso em termos de densidade espectral de potência, ou seja, ponderar o resultado do espectro de potência pela resolução em frequência, Δf [Hz], usada no processamento da DFT e, neste caso, a normalização consiste em fazer $S_{FF}(\omega) = 1 \frac{N^2}{Hz}$ equivalente a um ruído branco [26]. Portanto, em ambos os casos, excitação aleatória ou senoidal, a formulação é análoga.

4.2.1.1- Implementação do modelo teórico

A implementação computacional do modelo foi feita em Matlab utilizando um programa denominado VIGAMOD.m . Utilizou-se uma rotina adaptada do livro de Junkins e Kim [32], também escrita em Matlab, chamada ffbeam.m, que fornece como dados de saída as matrizes de massa M e rigidez K de um modelo de MEF, o qual usa funções de interpolação de forma cúbica para modelar o comportamento de uma viga retilínea e homogênea. O programa necessita, como dados de entrada, as características de material e dimensões da viga, e o número de elementos do modelo.

Modificam-se as matrizes M e K obtidas e cria-se uma matriz de amortecimento C de modo a aproximar as condições de contorno do experimento, como detalhado anteriormente.

Com as matrizes M , K e C obtidas e a ordem do problema dobrada com as matrizes A e B , descritas anteriormente, calculam-se os autovalores (frequências naturais e fatores de

amortecimento) e autovetores (modos) da viga. É feito então um ordenamento por ordem crescente de autovalores.

Através da superposição modal, obtém-se a matriz H de resposta em frequência em deslocamento, que é dada pela Eq. (4.1). Devido à ordem do problema estar dobrada, esta matriz H é formada por colunas cujos os primeiros 40 elementos são os deslocamentos e as rotações de cada nó que aparecem nesta ordem, respectivamente. Os 40 elementos restantes são as suas respectivas derivadas temporais, ou seja, para cada frequência, tem-se uma coluna de H dada por:

$$\{x_1, \theta_1, x_2, \theta_2, \dots, x_{40}, \theta_{40}, \dot{x}_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{x}_{40}, \dot{\theta}_{40}\}^T \quad (4.6)$$

Levando-se em conta que H está no domínio da frequência, basta multiplicá-la por $-\omega^2$ para obter a matriz H de aceleração [33] na qual os valores encontrados são acelerações, as quais são mais facilmente obtidas em experimentos.

Pode-se também obter com o programa VIGAMOD.m, os espectros cruzados entre a força e a resposta, dados por $S_{FW_i} = H_{FW_i} S_{FF}$, usados em alguns dos programas de simulação na estimativa do fluxo de potência injetada no sistema.

As funções programadas podem ser assim descritas:

VIGAMOD.m

1. Montar matrizes elementares
 - Ler dados da viga (geometria e material)
 - Ler dados da malha de MEF
 - Calcular matrizes massa e rigidez (FFBEAM.m viga de Euler-Bernoulli por MEF)
2. Calcular autovalores e autovetores
 - Definir matriz de amortecimento
 - Montar matriz global
 - Calcular autovalores e autovetores
 - Ordenar os autovalores e autovetores
 - Normalizar autovalores e autovetores
3. Calcular FRFs
 - Calcular vetor de frequência
 - Ler posição de aplicação da força
 - Sintetizar FRFs por superposição modal
 - Derivar FRFs para resposta em aceleração
4. Calcular espectro cruzado $S_{FW_i} = H_{FW_i} S_{FF}$ assumindo $S_{FF} = 1$

4.2.2- Discussão dos resultados da simulação

4.2.2.1- Diferenças finitas

Para comparar os vários métodos estudados, simularam-se diversas situações para avaliar as potencialidades de cada abordagem.

Para a localização dos pontos x , de simulação na viga, adotou-se o sistema conforme mostrado na Fig. 4.3 abaixo, onde Δx é a distância entre os acelerômetros virtuais:

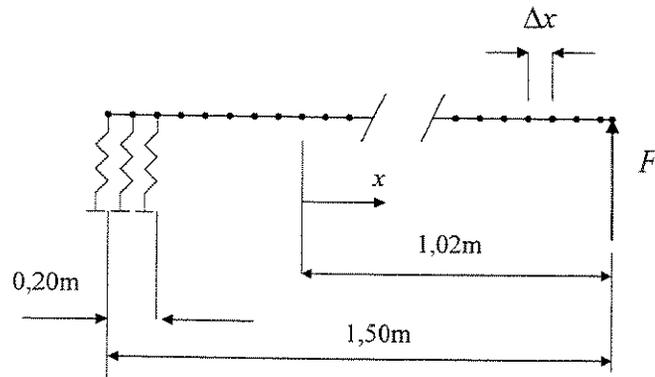


Fig. 4.3: Esquema de coordenadas da viga para uso dos programas de simulação

O primeiro método a ser avaliado é o das diferenças finitas, simulado através do programa DFIN_SIM.m descrito anteriormente.

Inicialmente, verificou-se o comportamento do método em campo distante, simulando-se o posicionamento dos acelerômetros virtuais próximo ao meio da viga, ou seja em $x = 0.5\text{m}$, onde, em teoria, o efeito de campo próximo estariam bastante atenuados. Pelo critério proposto por Noiseux [4], como discutido anteriormente, para estarmos em campo distante precisamos estar a pelo menos meio comprimento de onda da condição de contorno, ou seja $kx_{ff} > \pi$. Em nosso caso posicionar os acelerômetros virtuais em $x = 0.5\text{m}$, significa que as frequências acima de aproximadamente 28 Hz, já seriam consideradas em campo distante conforme nos mostra a Fig. 4.4 abaixo:

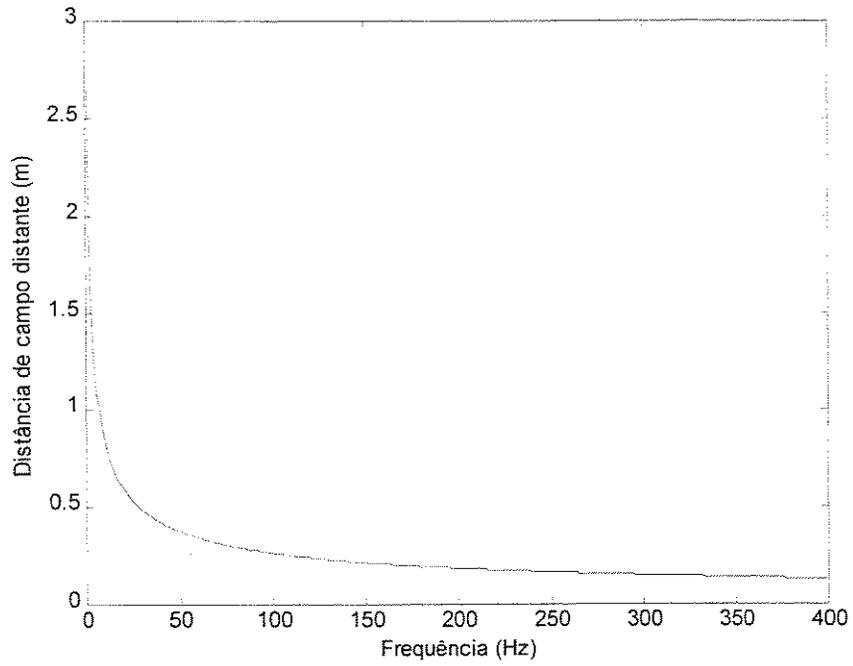


Fig.4.4: Variação da distância de campo próximo com a frequência

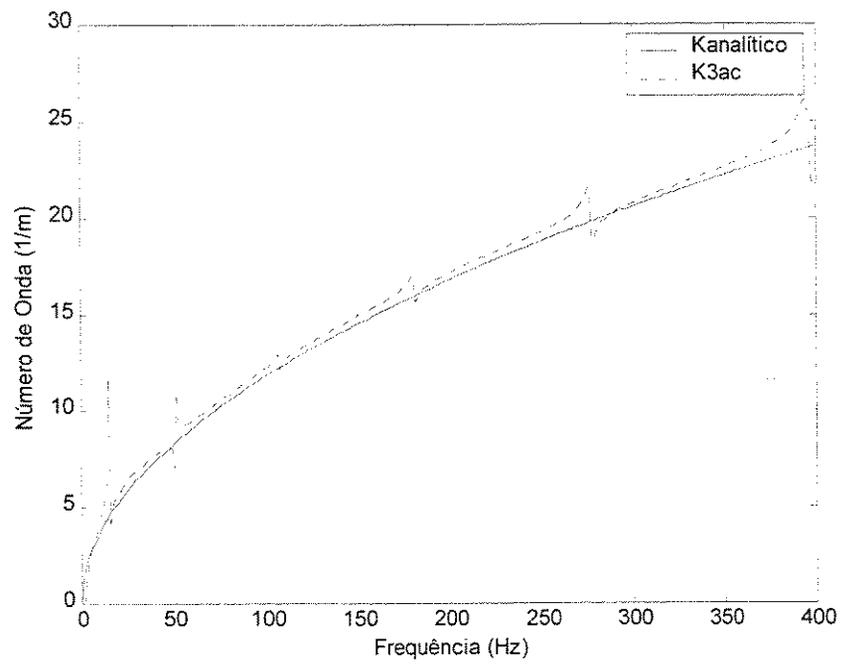


Fig. 4.5: Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos $\Delta x = 0.03m$ e $x = 0.5m$

A Fig. 4.5 mostra a comparação da relação de dispersão teórica Eq. (2.13) e a estimativa da mesma através do método dos três acelerômetros proposto por Pavic em $x = 0.5\text{m}$. Usou-se, neste caso e nas demais comparações do número de onda, a Eq. (3.15), que é uma correção da Eq. (3.14) original do método. O resultado obtido com a distância virtual entre os acelerômetros $\Delta x = 0.03\text{m}$ apresenta uma razoável proximidade com a curva teórica em quase toda faixa de frequência.

A Fig. 4.6 mostra a comparação entre a potência injetada no sistema dada pela Eq. (2.7) e as estimativas feitas através dos métodos com 2, 3 e 4 acelerômetros, equações (3.9), (3.13) e (3.6) respectivamente, onde em todos os casos usou-se a relação de dispersão analítica. Como pode ser notado em médias e baixas frequências, temos uma concordância muito boa entre os métodos e a potência injetada, exceto em frequências muito baixas, entre 0 e 30 Hz, nas quais o efeito do campo próximo é mais intenso. Esta observação fica mais clara na Fig 4.7 do erro entre a potência injetada e a estimada pelos vários métodos. Já em alta frequência temos uma tendência em aumentar a discordância em relação à potência injetada devido ao princípio do método, no qual a distância dos acelerômetros e a faixa de frequência a ser medida estão intimamente ligados, sendo que quanto maior a frequência a ser analisada, menor o comprimento de onda e, portanto, há uma necessidade de uma menor distância entre os acelerômetros para estimação da potência e do número de onda. As figuras 4.8 e 4.9 esclarecem esta afirmação. A distância dos acelerômetros foi aumentada para $\Delta x = 0.1\text{m}$ e então pode ser observado que os valores do número de onda e do fluxo de potência degeneraram em comparação com os valores esperados, aumentando os erros envolvidos nas estimativas, evidenciando assim a sensibilidade do método em relação à distância usada entre os acelerômetros principalmente nas altas frequências.

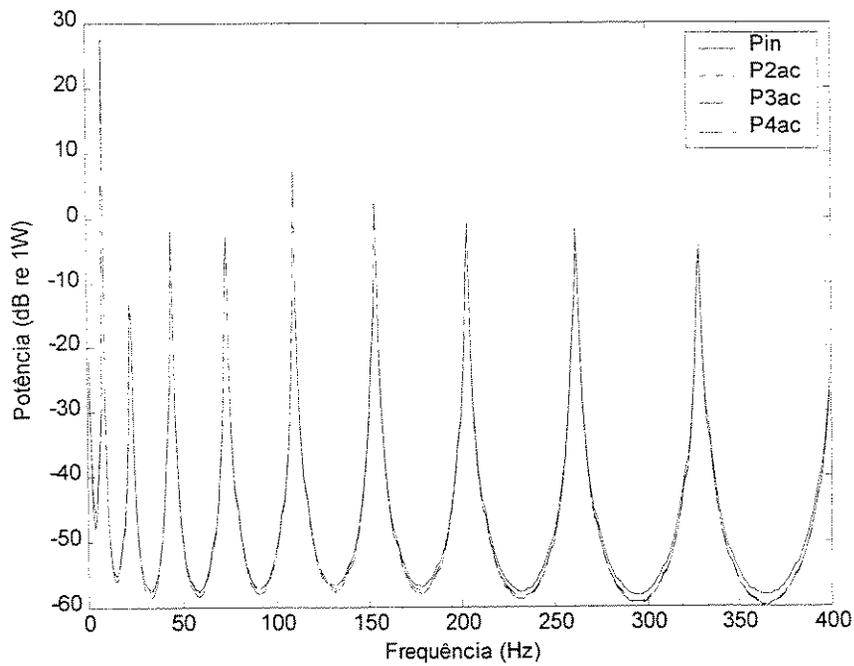


Fig. 4.6: Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

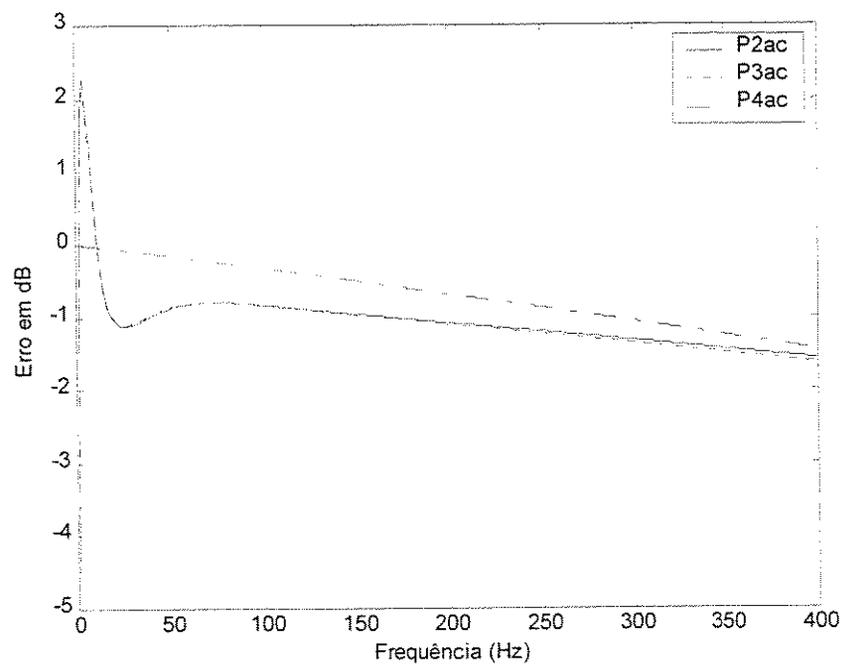


Fig. 4.7: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

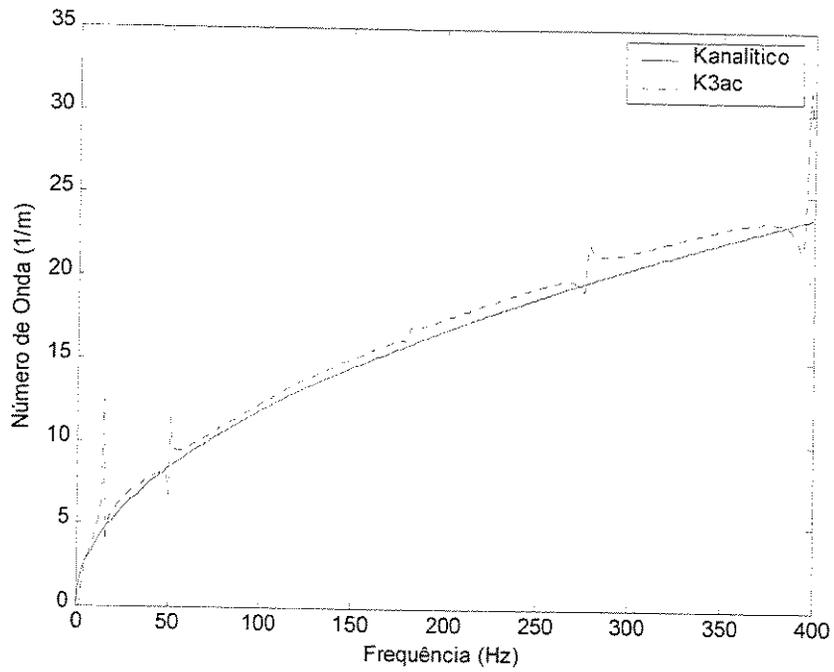


Fig. 4.8: Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos $\Delta x = 0.1m$ e $x = 0.5m$

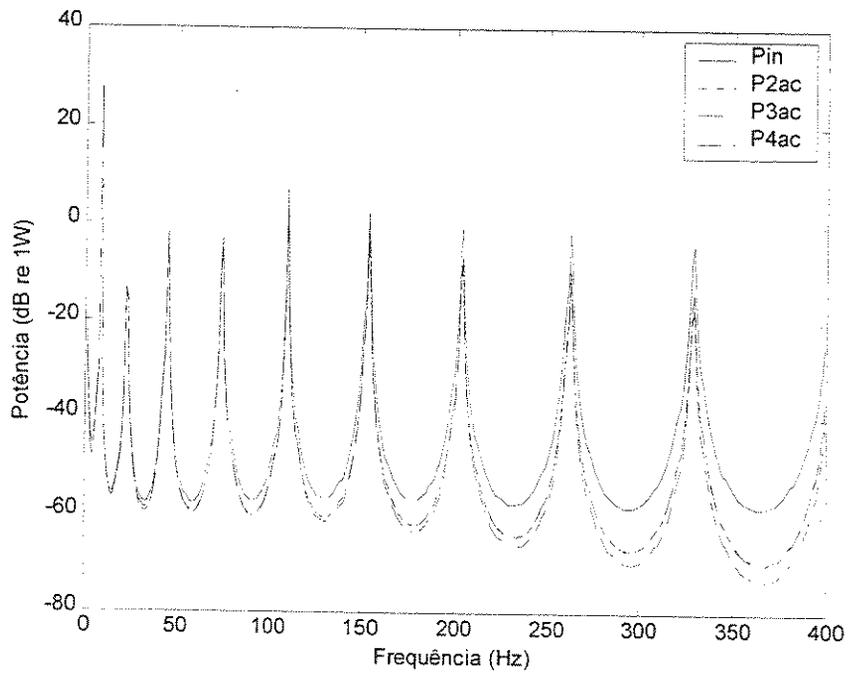


Fig.4.9: Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.1m$ e $x = 0.5m$

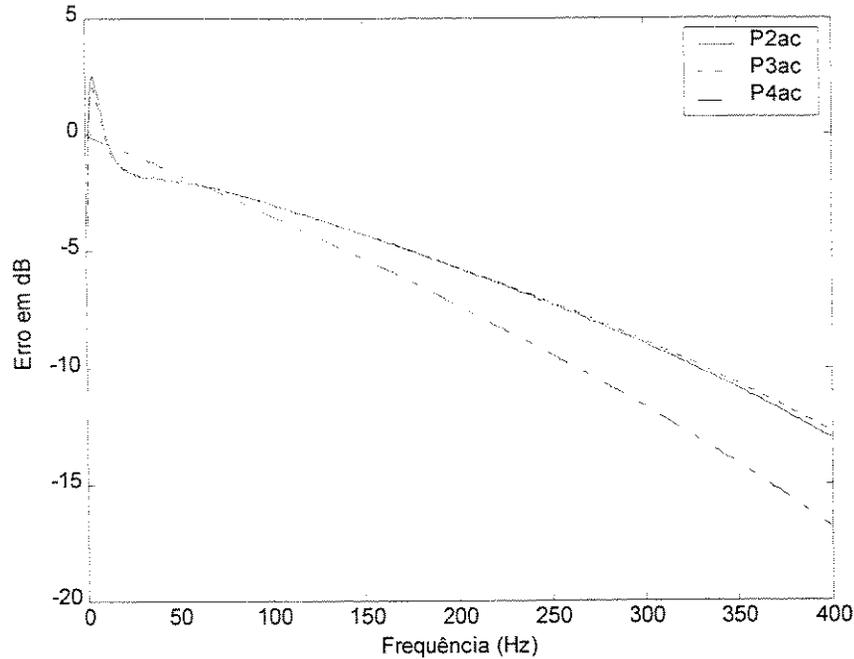


Fig. 4.10: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.1\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

É interessante observar que entre o método de 2 e 3 acelerômetros, a estimativa do fluxo de potência é muito próxima, em função das simplificações de campo próximo assumidas, já o método dos 4 acelerômetros, onde as contribuições do campo próximo são levadas em conta, pode-se observar um melhor comportamento em baixa frequência, em relação aos outros 2 métodos, observados nas Figs. 4.7 e 4.10.

Na Fig. 4.10, observa-se também que em frequências mais altas, onde o efeito de campo próximo é desprezível, o método com 4 acelerômetros, quando usado com uma distância entre sensores não adequada, não apresenta um bom desempenho, por usar na sua formulação derivadas espaciais de maior ordem que, quando estimadas por diferenças finitas, não apresentam bons resultados. Quando, porém, a distância entre os sensores é adequada, o método dos 4 acelerômetros apresenta erros na estimativa do fluxo de potência melhores que os demais métodos, o que pode ser observado na Fig. 4.7.

Para melhor avaliar o efeito de campo próximo, os acelerômetros virtuais foram posicionados próximos à extremidade da viga, em $x=0.9\text{m}$, a somente 0.12m de onde foi simulada a aplicação da força. Nestas condições, conforme Noiseux [4] e a Fig. 4.4, praticamente toda a faixa de frequência até 400 Hz é considerada em campo próximo.

Na Fig. 4.11 pode ser observada a relação de dispersão avaliada pelo método dos três pontos, separados entre si por $\Delta x=0.03\text{m}$, comparada com a relação teórica. Na presença de forte efeito do campo próximo a estimativa da relação de dispersão fica bastante pobre em função das simplificações assumidas, sendo sensivelmente pior quando comparada com a Fig. 4.5. O fluxo de potência estimado em campo próximo, Fig. 4.12, também é pior quando comparado com a Fig. 4.6, porém ainda bastante aceitável. Na Fig. 4.13, até os 400 Hz , é notável a superioridade da estimativa do fluxo de potência pelo método dos 4 acelerômetros, em função da suposição da presença de campo próximo, como já havíamos observado anteriormente.

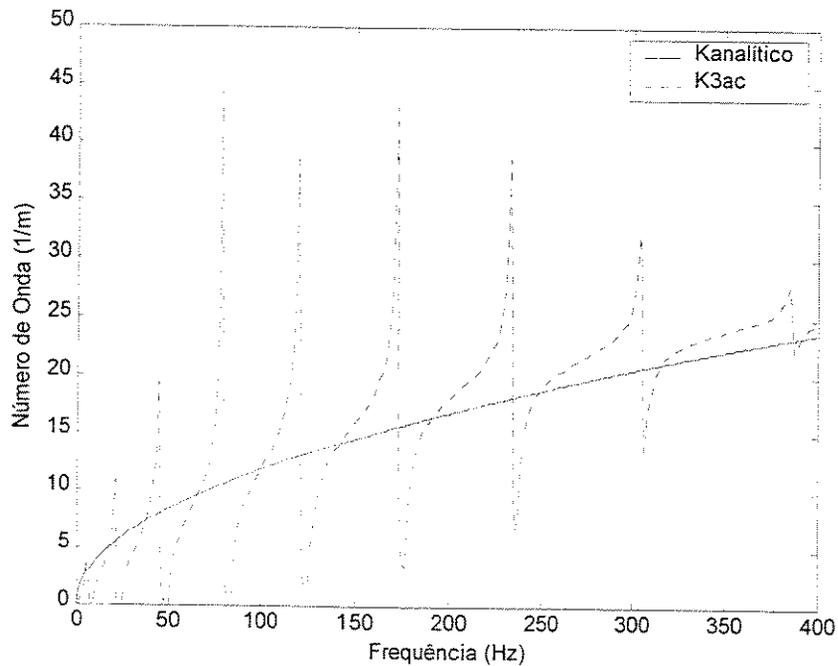


Fig. 4.11: Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos $\Delta x=0.03\text{m}$ e $x=0.9\text{m}$

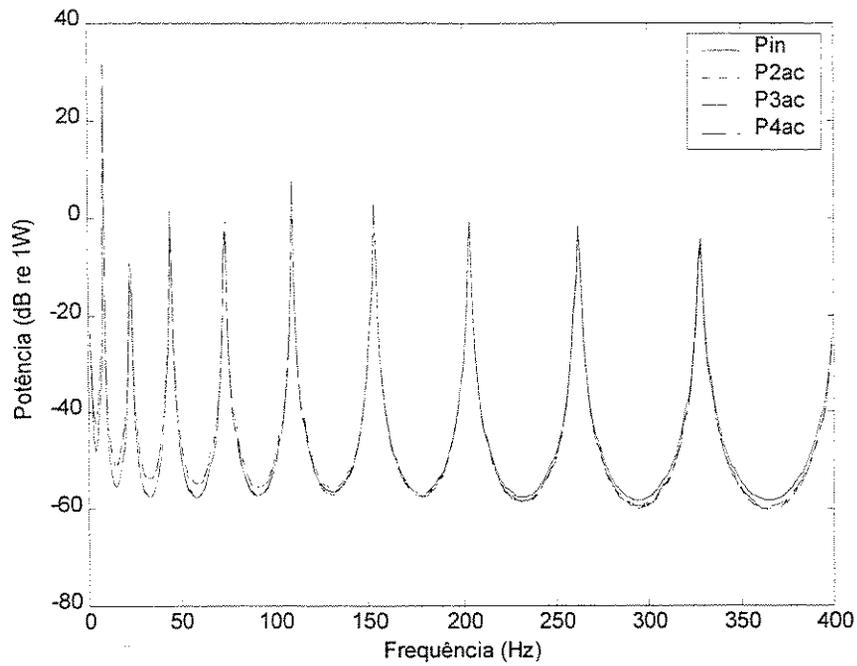


Fig. 4.12: Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$

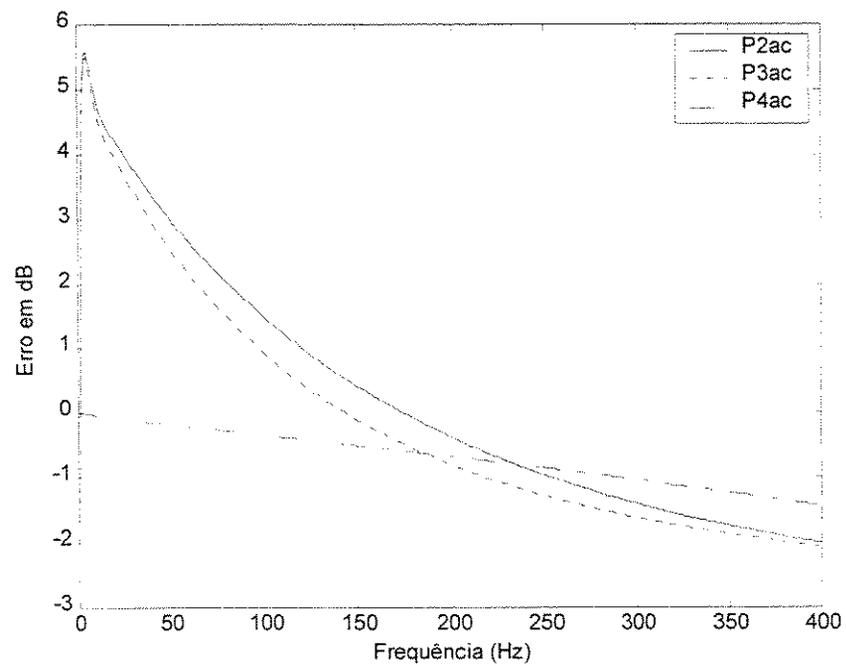


Fig. 4.13: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$

Como resumo do método podemos tirar as seguintes conclusões gerais: a) a estimativa da relação de dispersão é razoável em campo distante e piora muito em campo próximo, sendo pouco afetada pela distância entre os acelerômetros, uma vez que é usada uma fórmula de correção no seu cálculo; b) a estimativa da potência é razoável em campo distante e próximo, sendo muito afetada pela distância entre os acelerômetros, quanto maior a frequência, menor a distância entre os acelerômetros a ser usada; c) os métodos com 2 e 3 acelerômetros são bastante equivalentes em todas as situações simuladas; d) o método dos 4 acelerômetros é superior aos demais nas frequências nas quais o efeito de campo próximo é forte, sendo inferior nas frequências nas quais o efeito de campo próximo é desprezível, principalmente nas altas frequências, pelo uso das derivadas espaciais de ordem superior, quando a distância entre os sensores não é adequada à frequência analisada.

4.2.2.2- Elementos finitos

O segundo método a ser avaliado é a simulação através do modelo de elementos finitos, usando as funções cúbicas de interpolação para a obtenção das derivadas espaciais necessárias para as estimativas da relação de dispersão e o fluxo de potência, processadas através do programa MEF_SIM.m descrito no item 3.3.1.

Como no caso anterior, verificou-se, inicialmente, o comportamento do método em campo distante, ou seja, simulando-se a princípio o uso de somente 4 sensores virtuais posicionados próximos ao meio da viga, em $x = 0.5\text{m}$, onde, em teoria, o efeito de campo próximo estaria bastante atenuado para as frequências acima de aproximadamente 30 Hz.

A Fig. 4.14 mostra a comparação da relação de dispersão teórica dada pela Eq. (2.13) e a estimativa da mesma através da Eq. (3.24), na qual é suposta a hipótese de campo distante. O resultado obtido com a distância virtual entre os acelerômetros de $\Delta x = 0.08\text{m}$, que praticamente é a mesma distância entre os nós usada no modelo ($\Delta x = 0.0789\text{m}$), apresenta uma razoável proximidade com a curva teórica, que apresenta tendências de piora em alta frequência, onde se esperaria um

melhor desempenho por se ter um menor efeito de campo próximo. Isto é explicado pela dificuldade em estimar as derivadas espaciais em toda a faixa de frequência com o uso de poucos sensores.

A Fig. 4.15 mostra a comparação entre a potência injetada no sistema dada pela Eq. (3.23), e as estimativas feitas através do método com as funções de forma de elementos finitos, aplicados aos 4 pontos escolhidos, através da Eq. (3.21b), que usa o valor da relação de dispersão teórica e a hipótese de campo distante. Já na Fig. 4.16, expressa pela Eq. (3.20), o efeito de campo próximo são levados em conta. Nota-se, no geral, uma boa proximidade entre os valores estimados pelo método e a potência injetada, em ambos os casos.

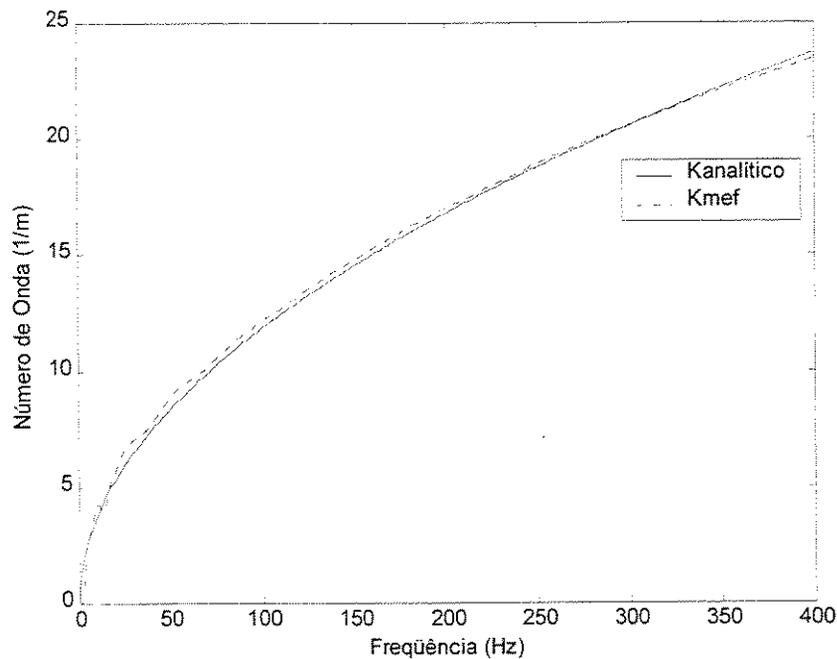


Fig. 4.14: Comparação da relação de dispersão analítica com k_{MEF} - Eq. (3.24)

4 pontos, $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

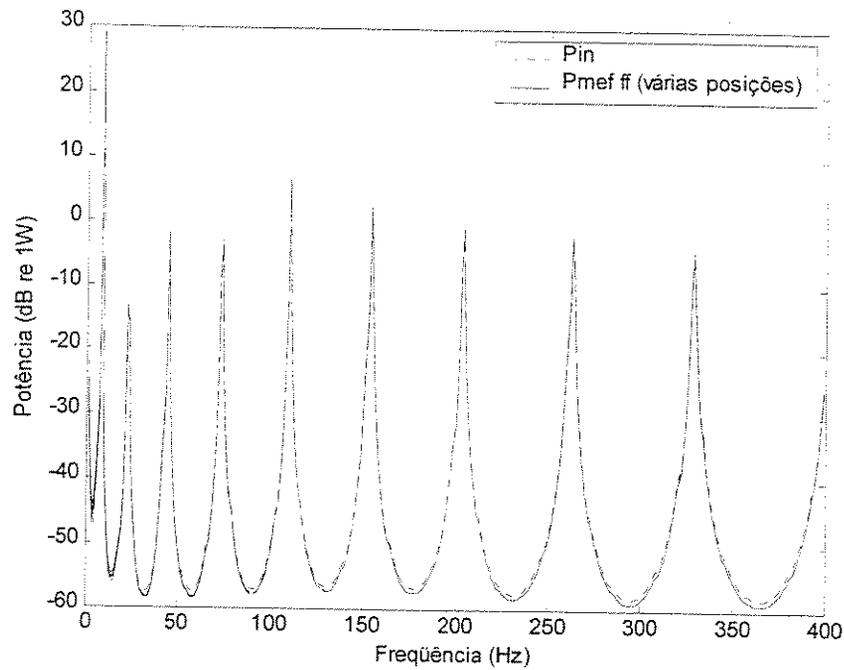


Fig. 4.15: Comparação do fluxo de potência por MEF usando k teórico e hipótese de campo distante, e a potência injetada – 4 pontos, $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

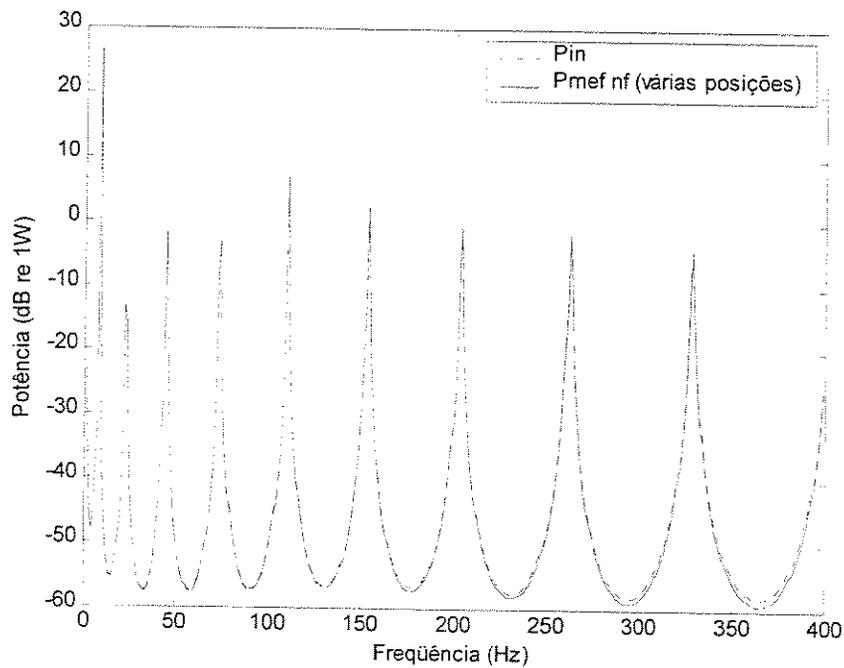


Fig.4.16: Comparação do fluxo de potência por MEF sem hipótese de campo distante e a potência injetada – 4 pontos, $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

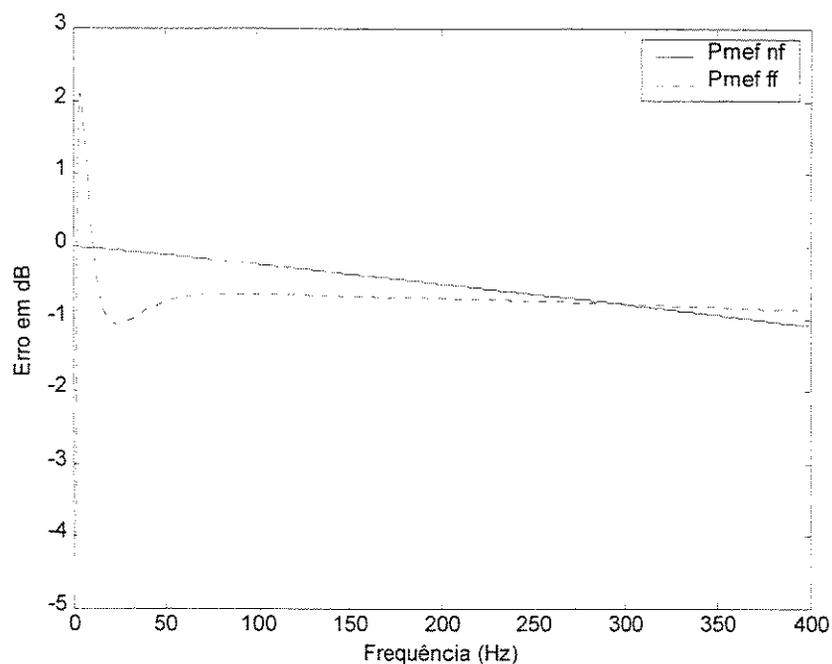


Fig. 4.17: Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$ com 4 pontos

Na Fig 4.17, que mostra a função dos erros envolvidos no ponto $x = 0.5\text{m}$, observa-se que o uso da hipótese de campo próximo para a estimativa do fluxo de potência apresentou um melhor comportamento em relação ao uso da hipótese de campo distante, principalmente nas baixas frequências, nas quais o efeito de campo próximo é mais notável; porém nas altas frequências esta tendência se inverte em função do uso das derivadas espaciais de ordem superior, observando-se então um melhor comportamento do erro para o uso da hipótese de campo distante.

Para avaliar um pouco mais a potencialidade do método, simulou-se o uso de 14 acelerômetros distanciados entre si de $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e centrados em $x = 0.4735\text{m}$, ou seja, localizados nos últimos 14 nós do modelo, que inclui o ponto de aplicação da força, onde o efeito de campo próximo é mais intenso.

Na Fig. 4.18 pode-se notar que os valores estimados da relação de dispersão foram bastante degenerados em toda a faixa de frequência, quando comparados a Fig. 4.14.

Na Fig. 4.19 observa-se a comparação entre a potência injetada e a estimativa do fluxo de potência através da Eq. 3.21b com hipótese de campo distante, onde observa-se uma divergência dos valores esperados, principalmente para os sensores próximos ao ponto de aplicação da força, devido ao efeito do campo próximo.

Já na Fig. 4.20, a comparação da potência injetada é feita com a Eq. 3.20, na qual é levado em conta o efeito de campo próximo. Nota-se uma boa concordância com os valores da potência injetada em toda a faixa de frequência e para todos os sensores.

Na Fig. 4.21, dos erros para o sensor central do vetor de medição, ou seja em $x = 0.4735\text{m}$, nota-se que em baixa frequência, na qual o efeito do campo próximo é mais proeminente, a estimativa do fluxo de potência feita com a expressão que admite o termo de campo próximo, é de boa qualidade e vai piorando com o aumento da frequência, em função das derivadas de ordem superior de que se utilizam. O comportamento do método neste ponto da viga foi, na prática, o mesmo encontrado na simulação anterior com 4 sensores, como mostrado na Fig. 4.17.

A Fig. 4.22 mostra a função dos erros envolvidos na estimativa do fluxo no final da viga, e ilustra o que foi comentado anteriormente sobre os valores ruins encontrados para o caso em que é admitido a condição de campo distante.

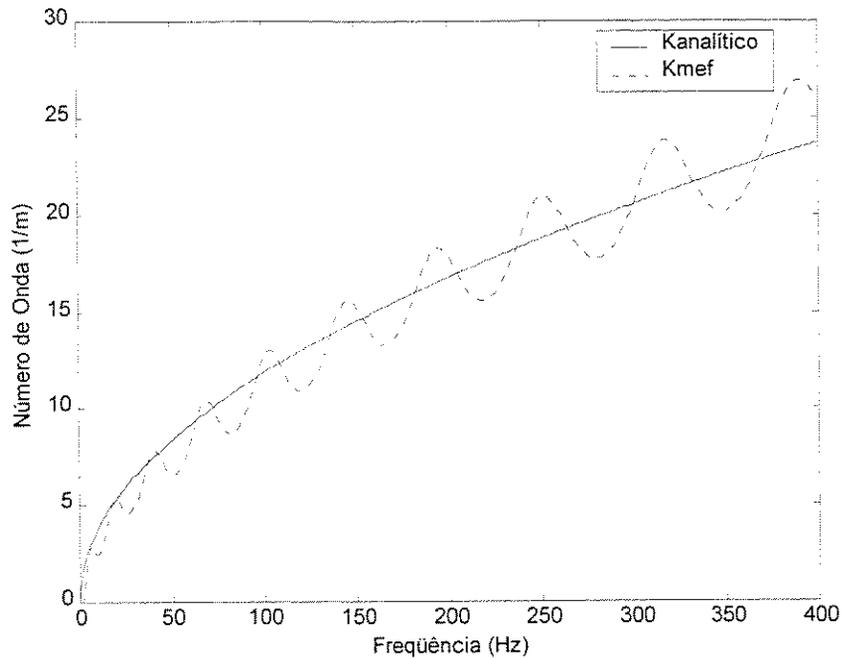


Fig. 4.18: Comparação da relação de dispersão analítica com k_{MEF} - Eq. (3.24) - 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

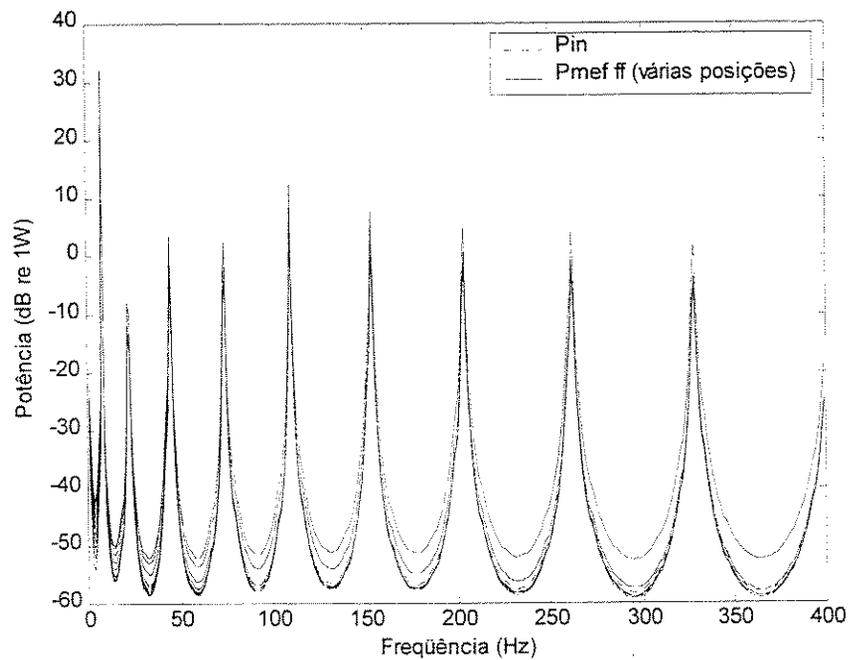


Fig. 4.19: Comparação do fluxo de potência por MEF usando k teórico e hipótese de campo distante, e a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

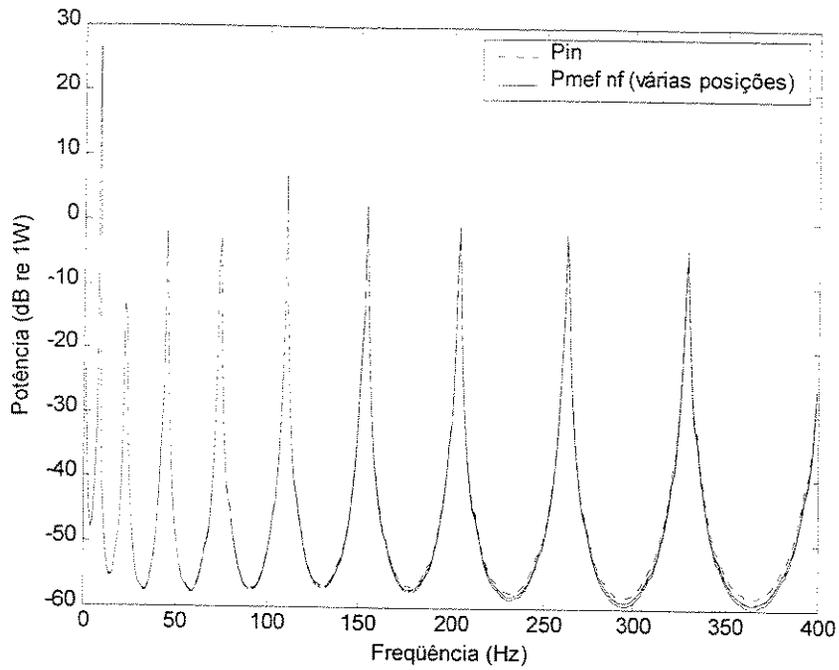


Fig.4.20: Comparação do fluxo de potência por MEF sem hipótese de campo distante e a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 0.0789m$ e $x = 0.4735m$

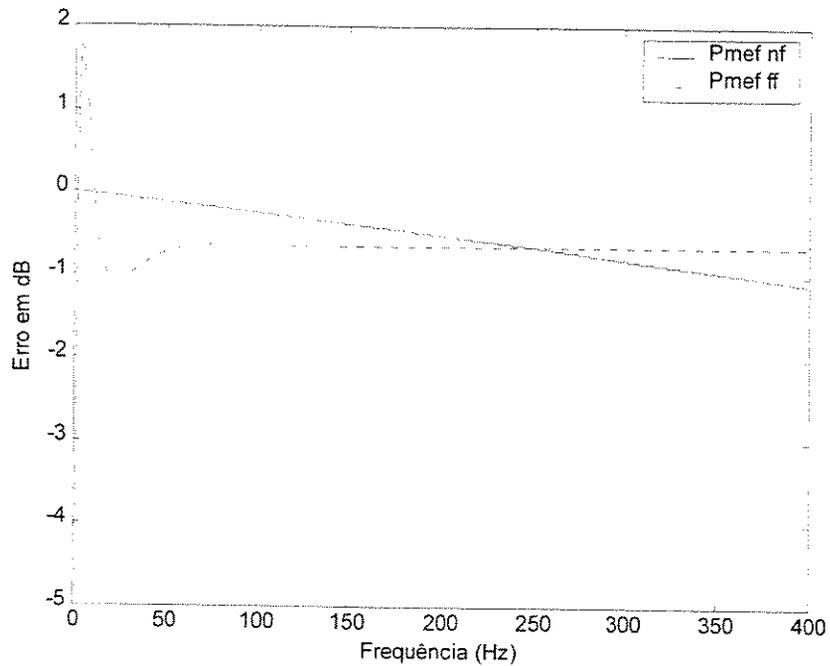


Fig. 4.21: Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0789m$ e $x = 0.4735m$ com 14 pontos

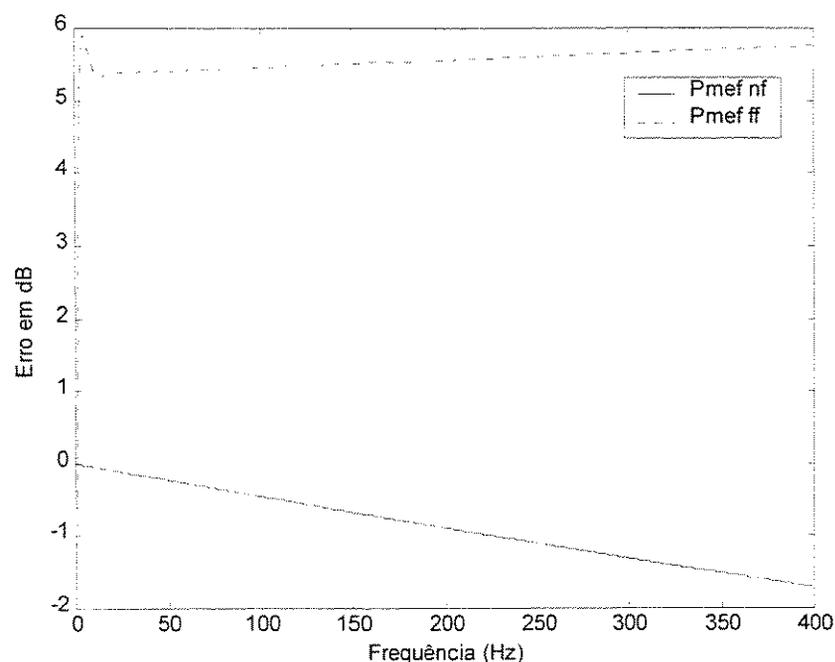


Fig. 4.22: Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 1.02\text{m}$ (aplicação da força) com 14 pontos

Para verificar o efeito do refinamento da malha de elementos finitos no resultado das estimativas do fluxo de potência e da relação de dispersão, dobrou-se o número de elementos do modelo, o qual passou para 38 elementos e 39 nós. Conservou-se, neste novo modelo, o mesmo local de aplicação da força na viga e os amortecimentos e rigidez usados para simular a caixa de areia.

Nas figuras seguintes são mostrados os resultados da simulação com 27 sensores separados entre si de $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e centrados em $x = 0.5122\text{m}$ correspondentes ao 27 últimos nós, incluindo aquele da aplicação da força externa.

Como pode ser observado, ocorreu uma melhoria dos resultados, porém somente no caso da estimativa do fluxo de potência com hipótese de campo próximo, melhor notada nas Figs. 4.26 e 4.27 dos erros.

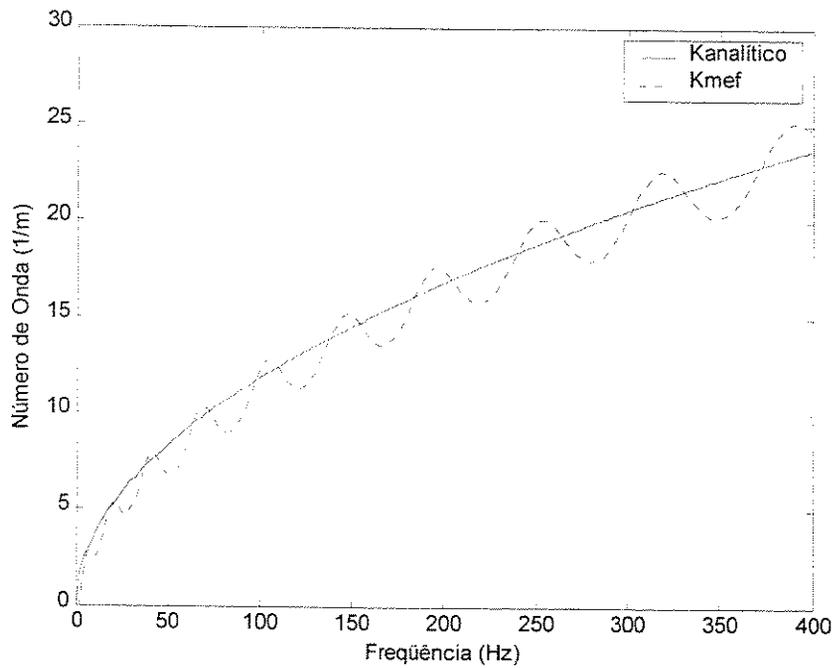


Fig. 4.23: Comparação da relação de dispersão analítica com k_{MEF} - Eq. (3.24) - 27 pontos, $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$

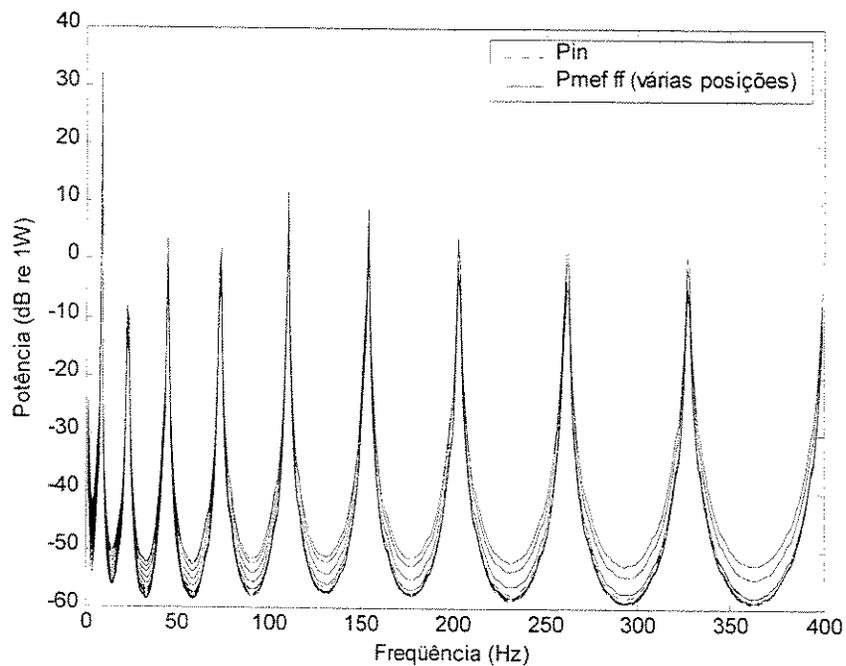


Fig. 4.24: Comparação do fluxo de potência por MEF usando k teórico e hipótese de campo distante, e a potência injetada - 27 pontos, $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$

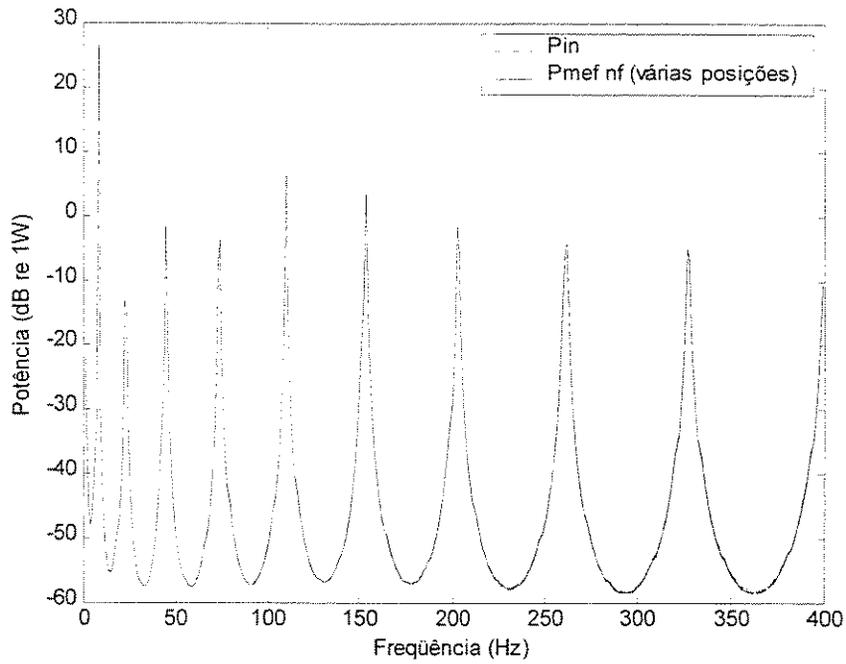


Fig.4.25: Comparação do fluxo de potência por MEF sem hipótese de campo distante e a potência injetada – 27 pontos, $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$

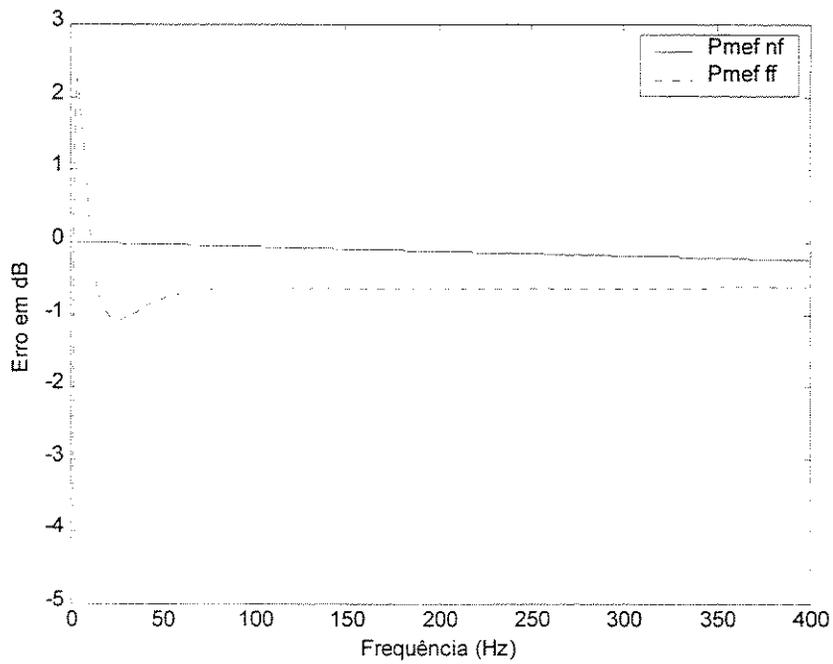


Fig. 4.26: Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x = 0.5122\text{m}$ com 27 pontos

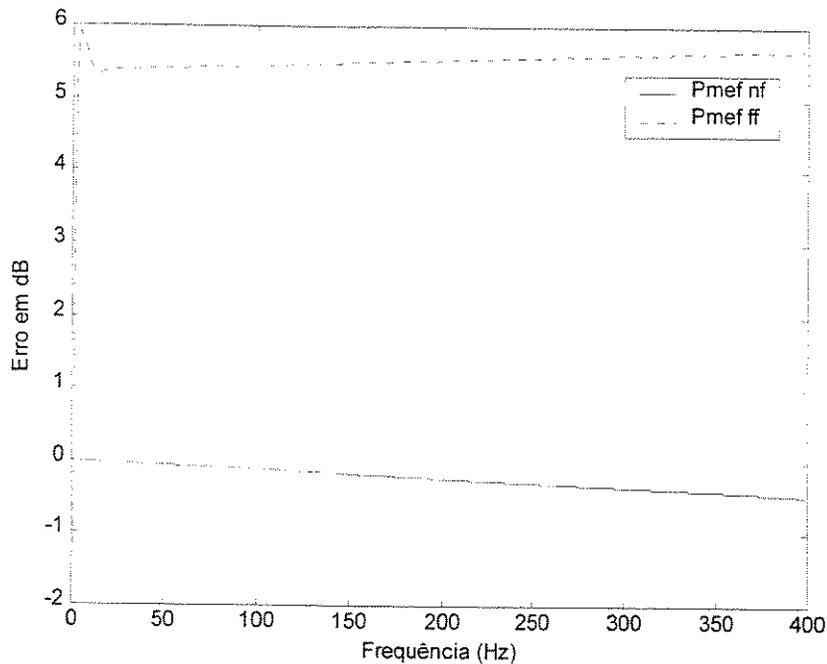


Fig. 4.27: Comparação dos erros na estimativa do fluxo de potência por MEF com e sem hipótese de campo distante - $\Delta x = 0.0394\text{m}$ e $x =$ próximo a aplicação da força - com 27 pontos

Portanto, em linhas gerais, pode-se concluir que: a) a estimativa do fluxo de potência pelo método usando as curvas de forma de MEF é bastante razoável, tanto em campo distante como em campo próximo; b) em campo próximo o fluxo de potência é melhor estimado pela Eq (3.20), que leva em conta sua influência, apresentando um melhor desempenho nas baixas e médias frequências com tendência de piora nas altas frequências, em função do uso das derivadas de ordem superior; c) o fluxo de potência estimado pela Eq. (3.21b), que considera somente a existência de campo distante e usa a relação de dispersão teórica em sua formulação, apresenta resultados ruins onde o campo próximo é mais intenso, ou seja em baixa frequência e próximo a aplicação da força externa; d) as estimativas da relação de dispersão, embora nos forneçam valores com ordem de grandeza do valor teórico, são bastante afetadas pela presença do campo próximo, pois para seu cálculo este efeito foi desprezado; e) o refinamento da malha de elementos finitos apresentou ganho de qualidade somente na estimativa do fluxo de potência feita pela Eq. (3.20), que considera o efeito de campo próximo.

4.2.2.3- Propagação de ondas – método ABCD

O próximo método a ser avaliado é aquele que faz a identificação dos coeficientes da solução analítica da equação de propagação de ondas em vigas, que foi implementado através dos programas ABCD_SIM.m e AB_SIM.m, descritos no item 3.3.2.

Sabendo-se da importância do condicionamento da matriz do sistema linear de equações (SLE) associado aos parâmetros A, B, C e D a serem estimados neste método, desenvolveu-se um programa denominado ABCDCE.m, e ABCDCE2.m que calculam, através de uma função interna do MatLab chamada COND(X), o número do condicionamento da matriz “X” de norma 2, dada pela razão entre o maior e o menor valores singulares de “X”. Quanto maior este número, pior o condicionamento da matriz, o que indica que ela está próxima da singularidade. Em nosso caso a matriz “X” é a matriz formada pelos coeficientes do SLE, para estimação dos parâmetros A, B, C e D, não sendo levada em conta a relação de dispersão que também pode ser estimada, e portanto nos fornece somente um indicador da qualidade do fluxo de potência estimado. O programa realiza o cálculo do condicionamento da matriz em função do posicionamento do vetor de sensores na viga e das distâncias entre eles.

As Figs. 4.28 e 4.29 mostram os resultados do cálculo do condicionamento da matriz dos parâmetros a serem estimados para um número de sensores de 5 e 10 em função da distância entre os sensores, da posição dos sensores na viga e da frequência. Algumas conclusões podem ser tiradas: a) para o mesmo conjunto de pontos de medida, quanto maior a frequência, pior o condicionamento; b) para a mesma frequência, quanto maior o número de pontos melhor o condicionamento; c) para a mesma frequência e número de pontos, quanto mais longe do efeito de campo próximo (considerado em $x=0.8m$) melhor o condicionamento da matriz; d) no geral, quanto menor a distância entre os sensores, maior é o problema do condicionamento; e) as curvas demonstram que parece existir uma distância ótima de separação entre os sensores, mais notadas nas altas frequências e observadas nas inflexões dos gráficos da Fig. 4.28 e nos cruzamentos dos gráficos da Fig. 4.29.

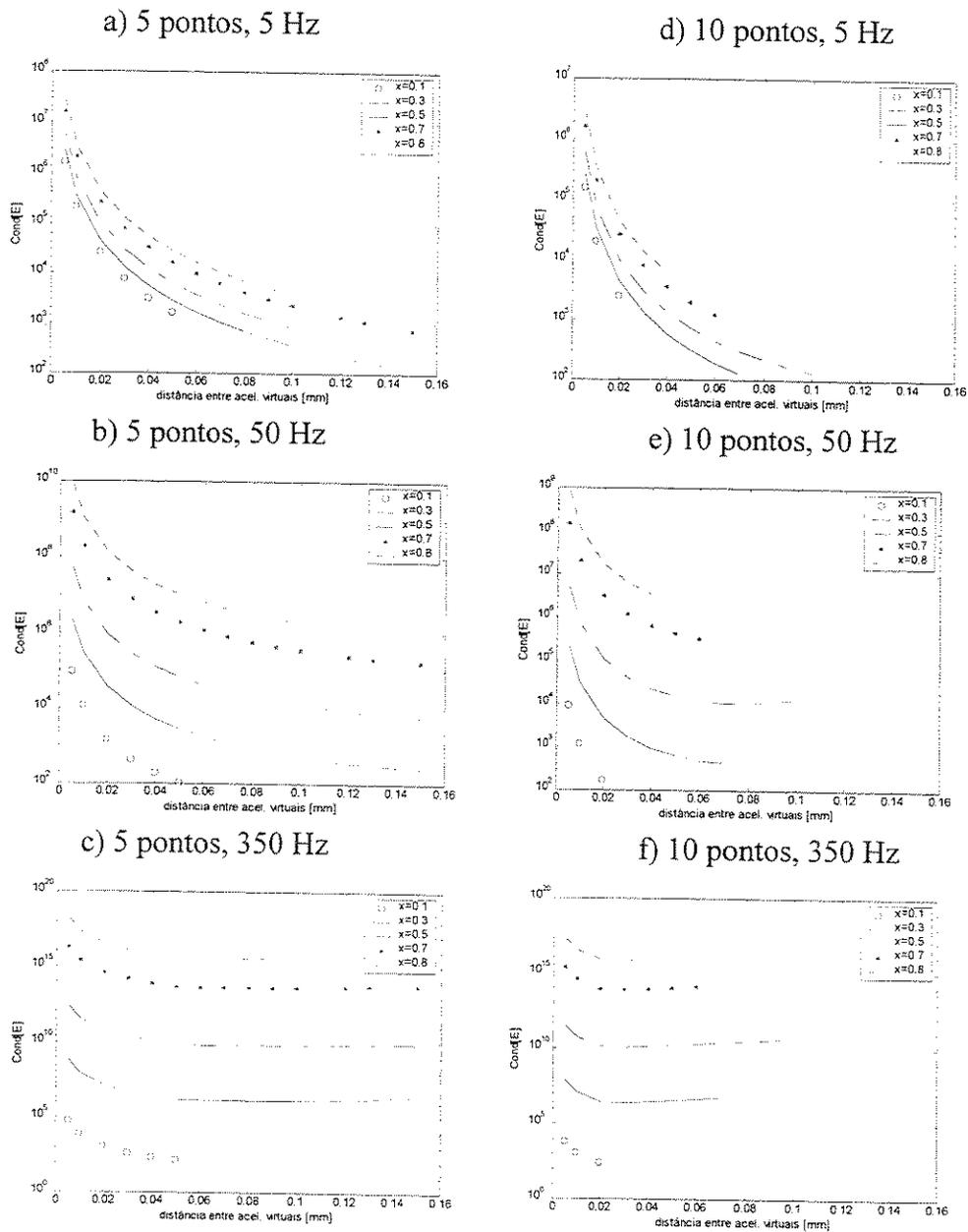
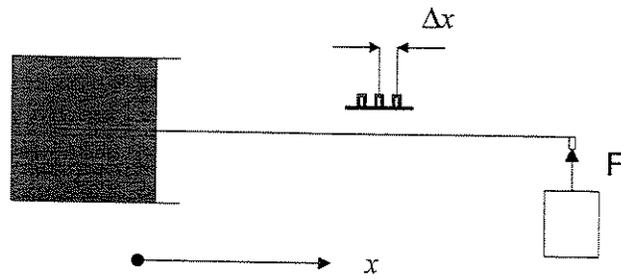


Fig.4.28 a-f): Número de condicionamento da matriz dos parâmetros A,B,C e D em função da distância entre os sensores

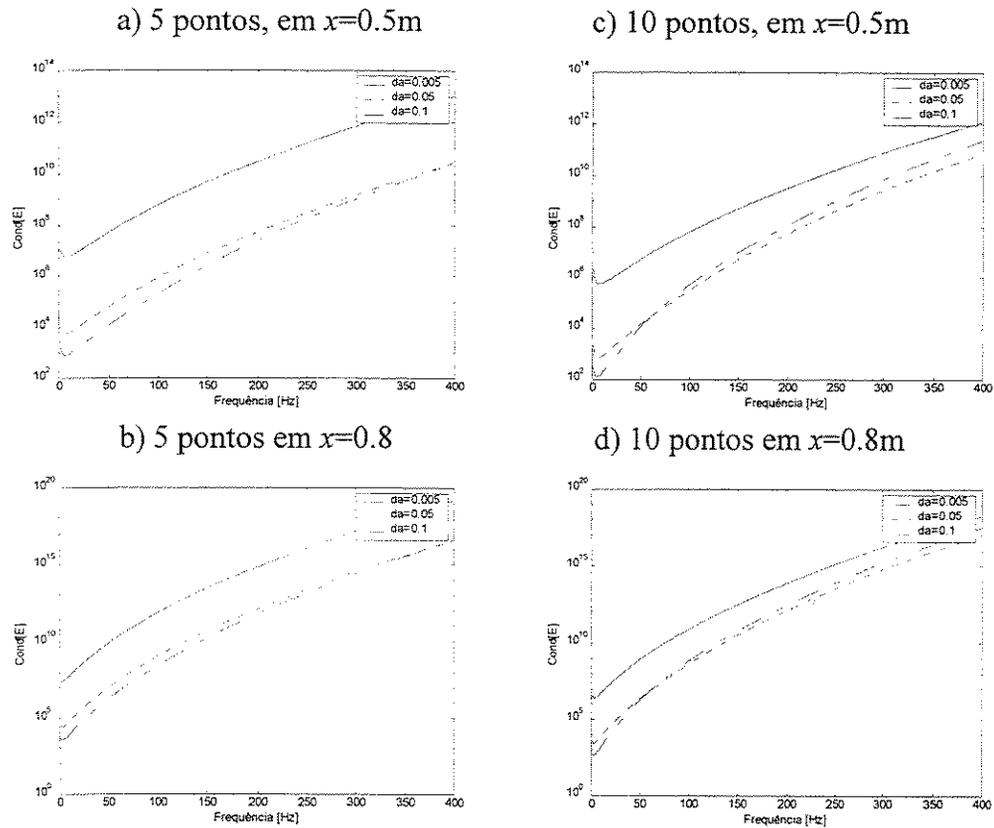
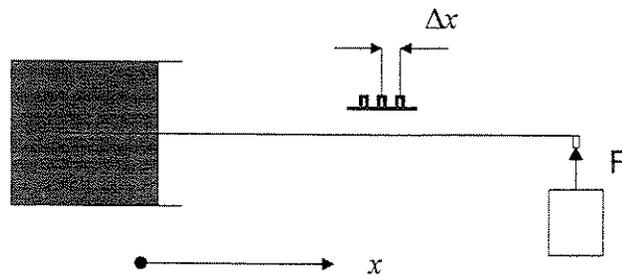


Fig.4.29 a-d): Número de condicionamento da matriz dos parâmetros A, B, C e D em função da frequência

Como nos casos anteriores, simulou-se o método em campo distante, localizando os sensores virtuais em $x = 0.5\text{m}$, para avaliação de seu desempenho.

Na Fig. 4.30 observa-se a comparação da relação de dispersão teórica, dada pela Eq. (2.13), versus a estimada pelo programa ABCD_SIM usando-se 5 pontos de medida e $\Delta x = 0.03\text{m}$.

A Fig. 4.31 mostra a comparação da potência injetada dada pela Eq. (2.7) e as estimativas da potência obtidas através das Eqs. (3.25) e (3.26), onde usou-se o $k_{analítico}$ para a estimação dos parâmetros A, B, C e D. Como pode ser notado, existe uma concordância muito boa entre os valores estimados e o teórico.

Na Fig. 4.32, observam-se os erros envolvidos na estimativa da potência injetada através dos dois métodos usados. Nota-se que acima de aproximadamente 12 Hz os erros obtidos são praticamente os mesmos para ambos os métodos.

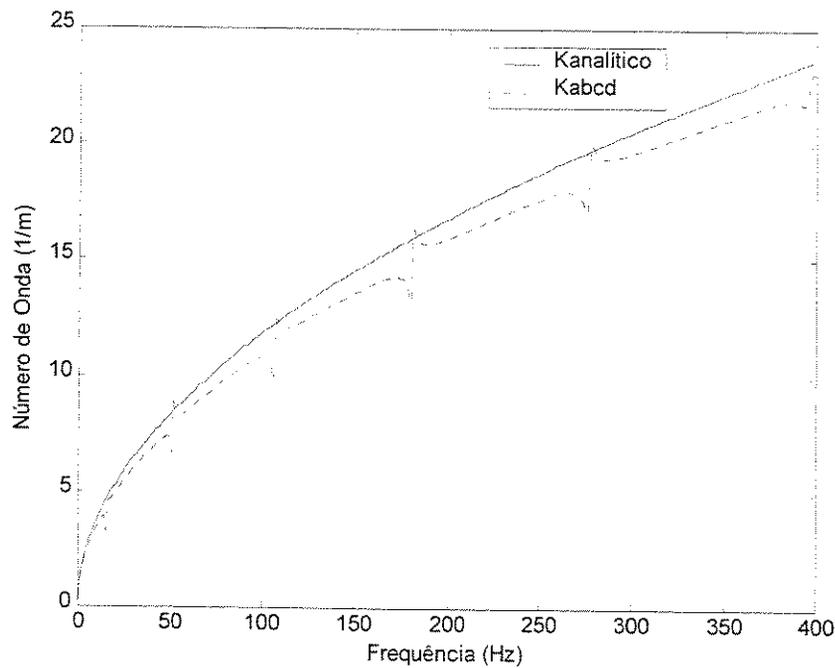


Fig. 4.30: Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD em 5 pontos,

$$\Delta x = 0.03\text{m e } x = 0.5\text{m}$$

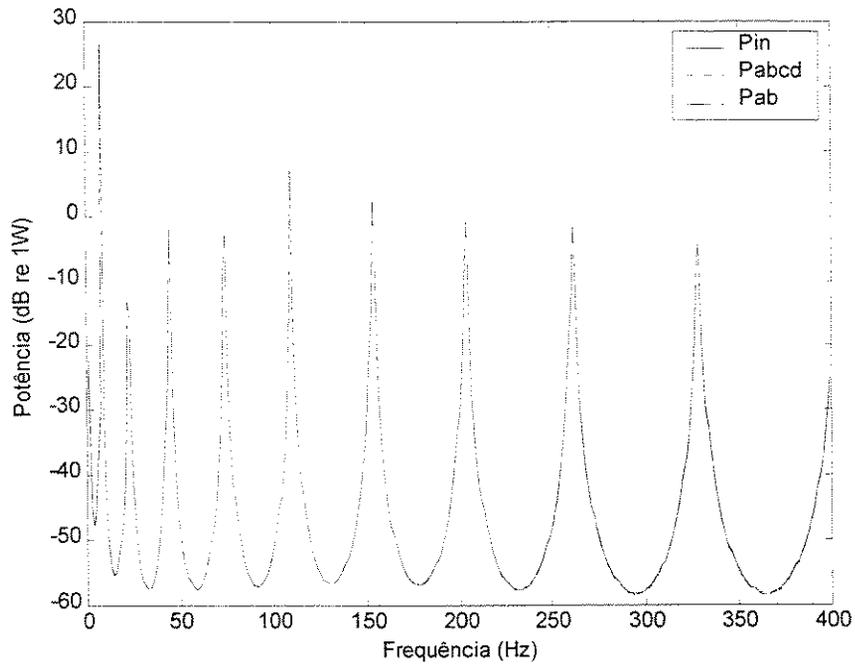


Fig. 4.31: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

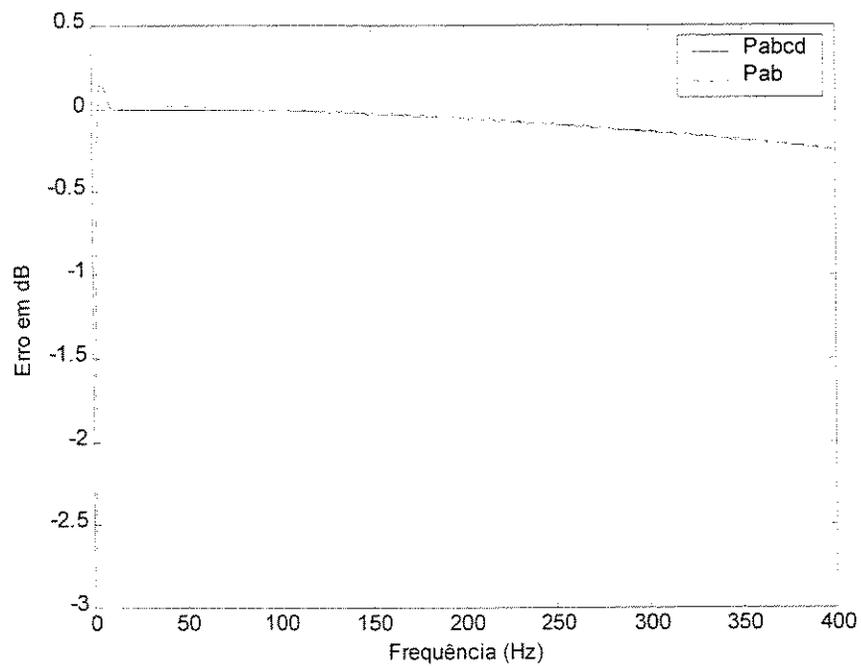


Fig. 4.32: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

Para avaliarmos a influência do número de pontos na qualidade dos resultados, simulou-se a mesma condição com $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$, mas com 10 pontos de medidas.

As Figs. 4.33, 4.34 e 4.35 mostram os resultados, onde obteve-se uma melhora na qualidade da estimativa da relação de dispersão, porém uma pequena piora na estimativa do fluxo de potência. A perda da qualidade nos resultados do fluxo de potência, provavelmente ocorreu pelo fato dos sensores, que compõem o vetor de medida, se aproximarem de regiões de campo próximo, e seu efeito ter sido maior que o acréscimo do número do condicionamento da matriz do SLE devido ao uso de um maior número de medidas.

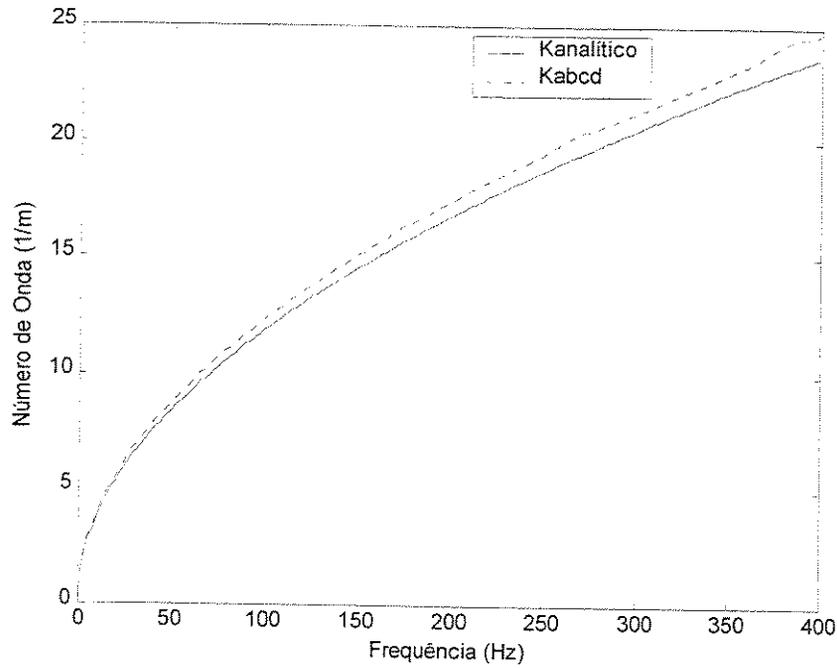


Fig. 4.33: Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD com 10 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

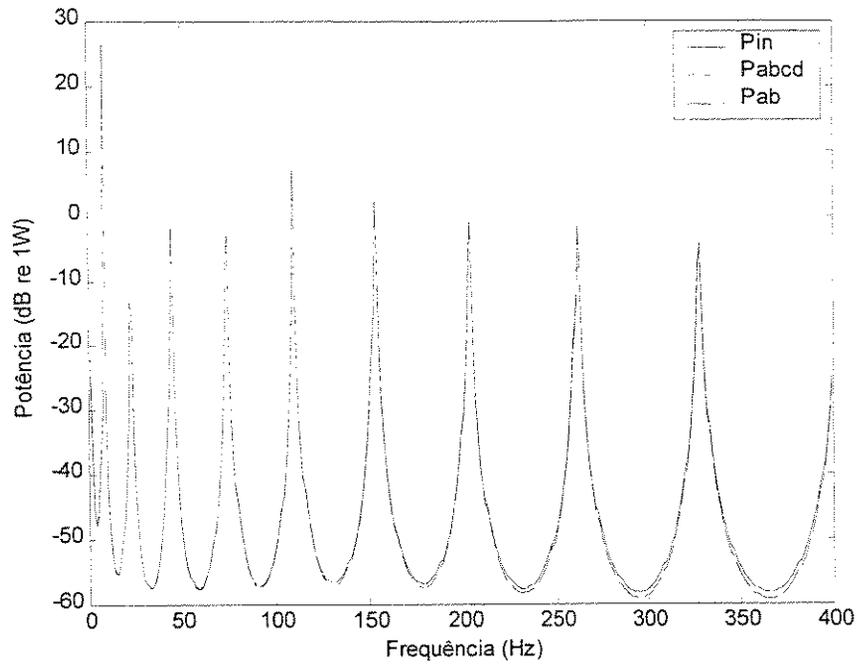


Fig. 4.34: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 10 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

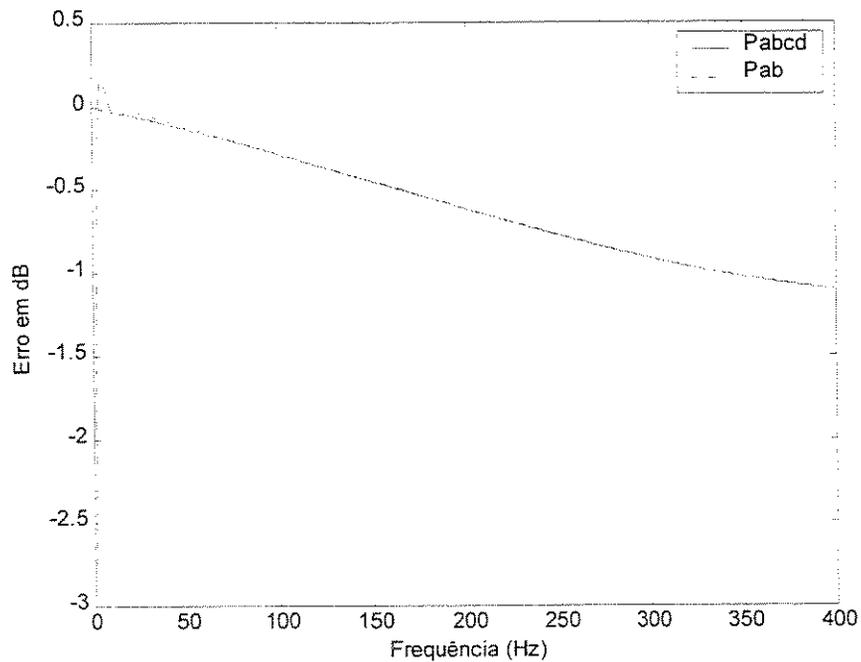


Fig. 4.35: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 10 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

Para compararmos o efeito da estimativa dos parâmetros A e B sem influência dos parâmetros C e D, os quais representam termos de campo próximo, avaliou-se através do programa AB_SIM.m, que despreza o efeito destes termos de campo próximo, as estimativas da relação de dispersão e o fluxo de potência.

Nas Figs. 4.36 e 4.37, observam-se os resultados da simulação para 3 pontos de medida, para a relação de dispersão e para o fluxo de potência respectivamente, nas mesmas condições anteriores de espaçamento, com $\Delta x = 0.03\text{m}$, e localização dos sensores em $x = 0.5\text{m}$. Nota-se que em campo distante, a estimativa da relação de dispersão, com somente os parâmetros A e B, mostrado na Fig. 4.36, foi melhor que a estimada com todos parâmetros, visto na Fig. 4.30, mesmo com um número menor de sensores.

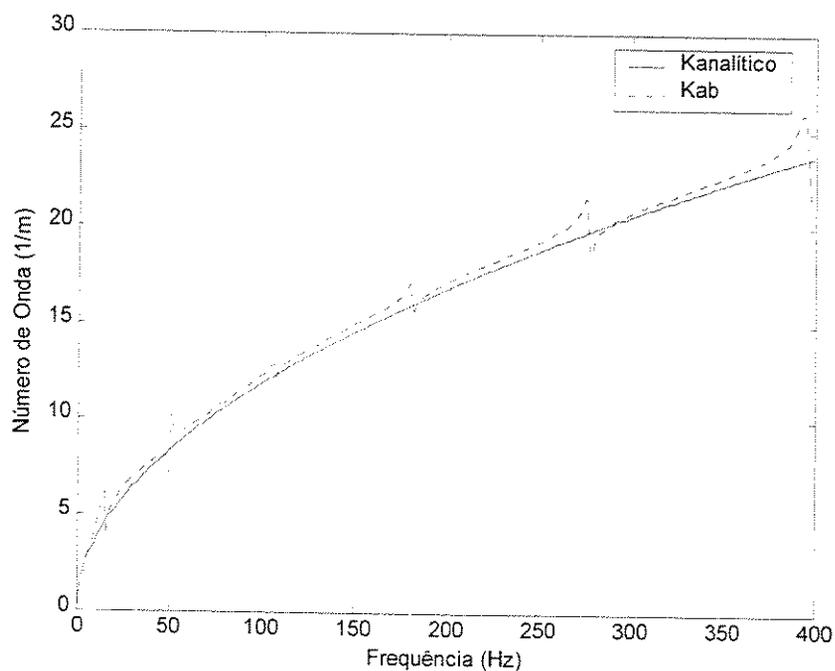


Fig. 4.36: Comparação da relação de dispersão teórica com o método AB com 3 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

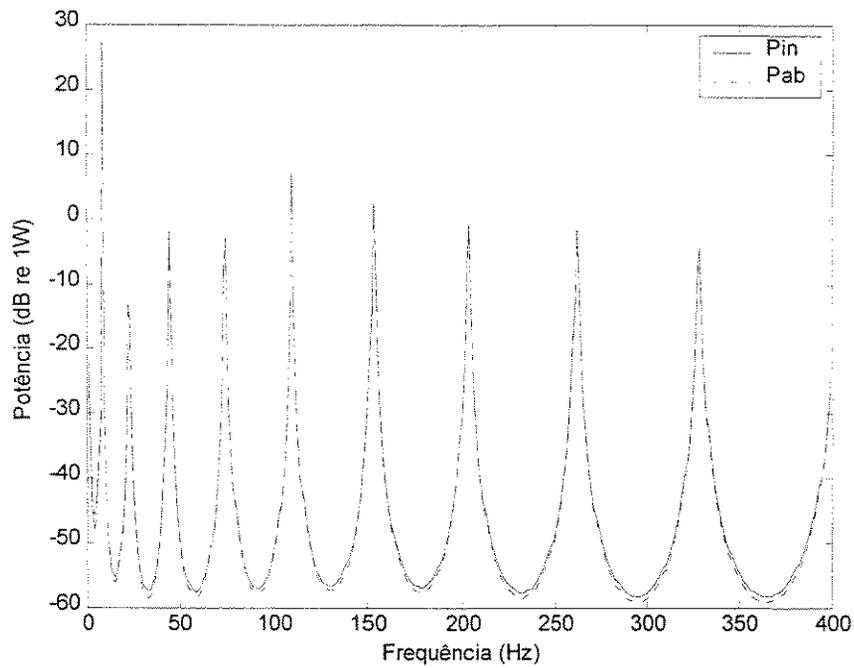


Fig. 4.37: Comparação do fluxo de potência pelo método AB com 3 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03m$ e $x = 0.5m$

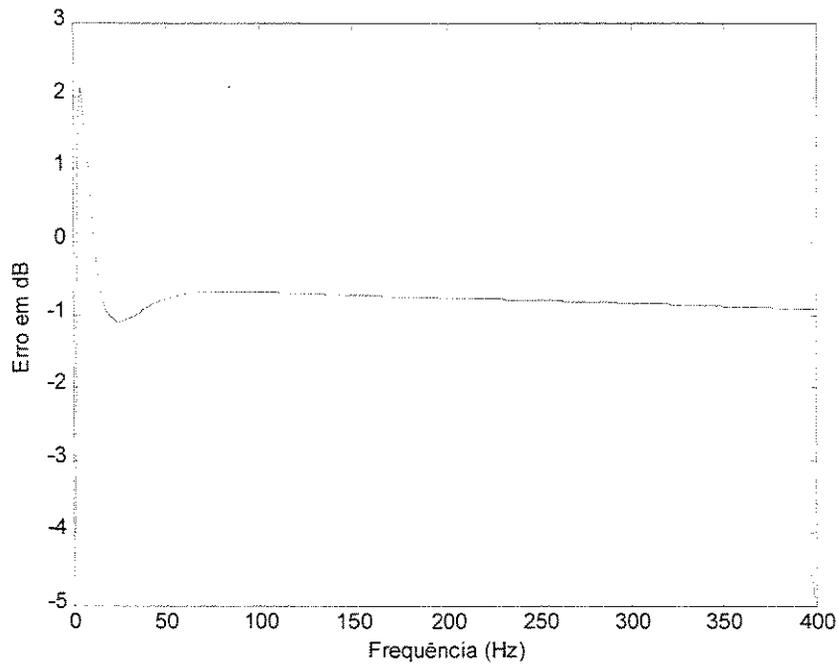


Fig. 4.38: Erros envolvidos no fluxo de potência pelo método AB em 3 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03m$ e $x = 0.5m$

Já para a estimativa do fluxo de potência mostrada na Fig. 4.37, houve uma perda de qualidade em relação à Fig. 4.31, que também pode ser observada comparando-se as Figs. 4.38 e 4.32, dos erros envolvidos na potência estimada. Porém esta perda de qualidade pode ser considerada aceitável, se comparada à necessidade de um menor número de sensores.

Para observar o comportamento do método com a distância dos sensores, e baseados na informação da Fig. 4.28, simulou-se a condição de 5 pontos de medidas, centrados em $x = 0.5\text{m}$, porém com sensores separados de $\Delta x = 0.07\text{m}$. A Fig. 4.39 mostra a comparação da relação de dispersão estimada versus a teórica, onde observa-se um melhor resultado que o mostrado na Fig. 4.30 com o espaçamento dos sensores de $\Delta x = 0.03\text{m}$.

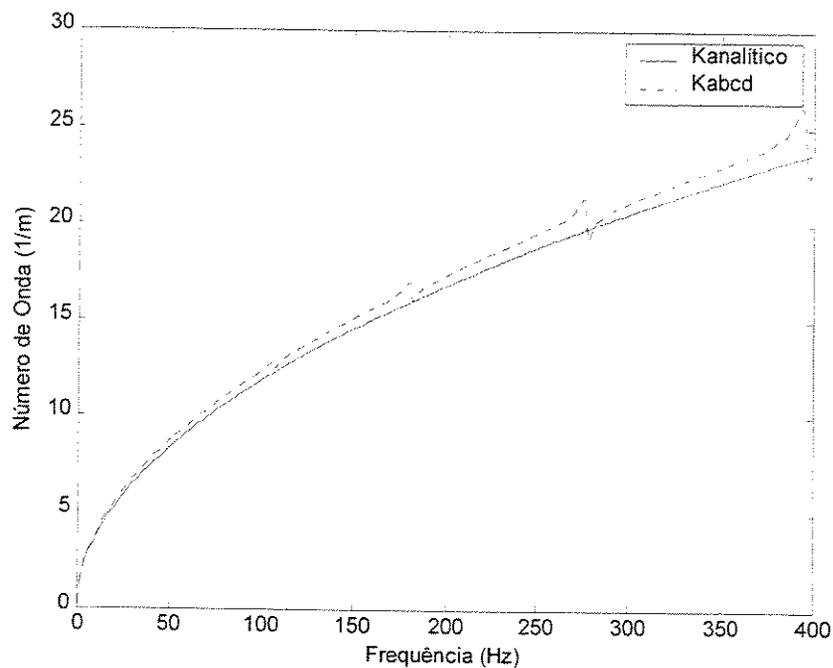


Fig. 4.39: Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD com 5 pontos, $\Delta x = 0.07\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

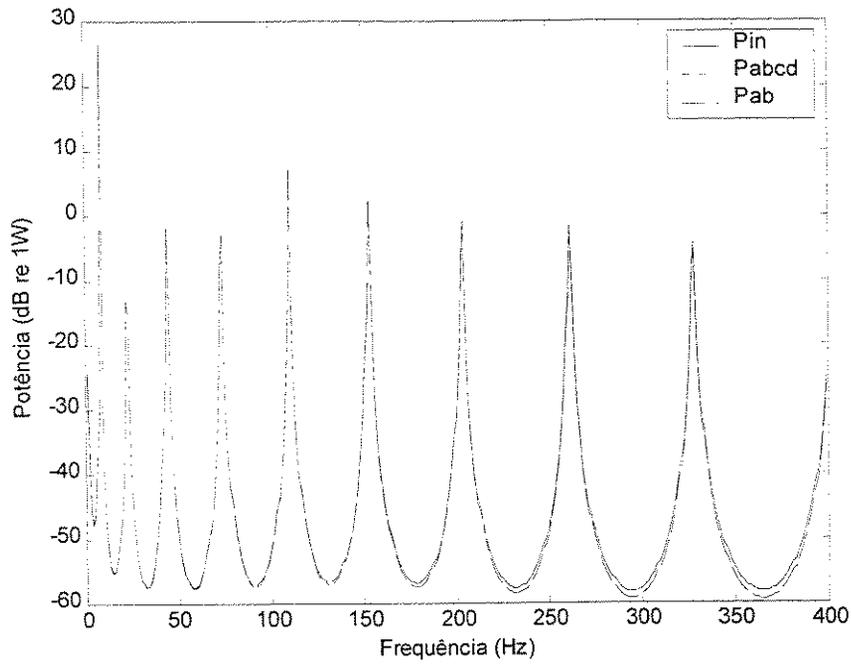


Fig. 4.40: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.07\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

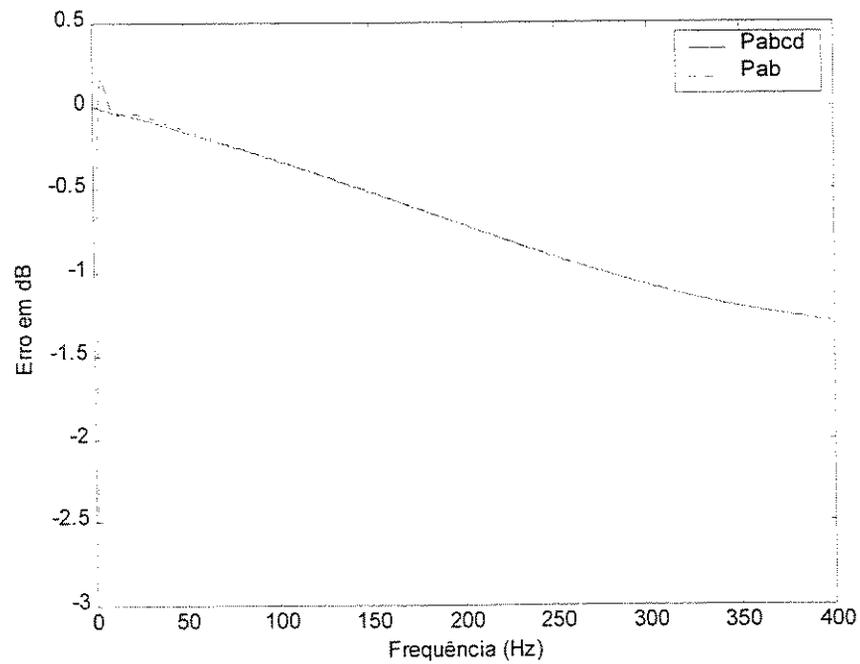


Fig. 4.41: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.07\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

Na Fig. 4.40 observa-se a comparação entre a potência injetada e o fluxo de potência estimado e na Fig. 4.41 o erro envolvido nesta estimativa. Pode ser notada uma perda de qualidade na estimativa da potência quando comparada com as Figs. 4.31 e 4.32, respectivamente, provavelmente pelo efeito dos sensores que compõem o vetor de medida se aproximarem de regiões de campo próximo, efeito este não compensado pelo pequeno ganho no número do condicionamento da matriz do SLE.

Como das vezes anteriores, para avaliar o comportamento do método em campo próximo localizou-se o centro do vetor de sensores em $x = 0.9\text{m}$, nas proximidades da aplicação da força no modelo da viga.

Na Fig. 4.42 compara-se a relação de dispersão teórica versus a estimada pelo programa ABCD_SIM com 5 pontos distanciados entre si de $\Delta x = 0.03\text{m}$. Nota-se que acima de aproximadamente 300 Hz encontrou-se dificuldade em estimar o número de onda e que houve uma piora geral dos resultados quando comparados com a Fig. 4.30, onde o mesmo número de sensores foram colocados longe do efeito do campo próximo, em $x = 0.5\text{m}$.

Como comentado no item 3.3.2.1 de implementação do método, valores da relação de dispersão que não conseguiram ser estimados não foram impressos, o que pode ser observado na Fig. 4.42 em alta frequência.

Na Fig. 4.43 verifica-se a comparação entre a potência estimada e a injetada no sistema, onde observa-se que, mesmo piorando-se o grau de condicionamento da matriz do sistema linear, obtém-se ainda um razoável resultado da estimativa do fluxo de potência.

Na Fig. 4.44 observam-se os erros na estimativa do fluxo de potência entre o uso dos parâmetros A e B para cálculo da potência com a Eq. (3.26), e o uso de todos os parâmetros para o cálculo da potência com a Eq. (3.25), onde nota-se que em geral o método AB se comportou pior, ocorrendo uma equivalência entre os métodos, acima de aproximadamente 180 Hz.

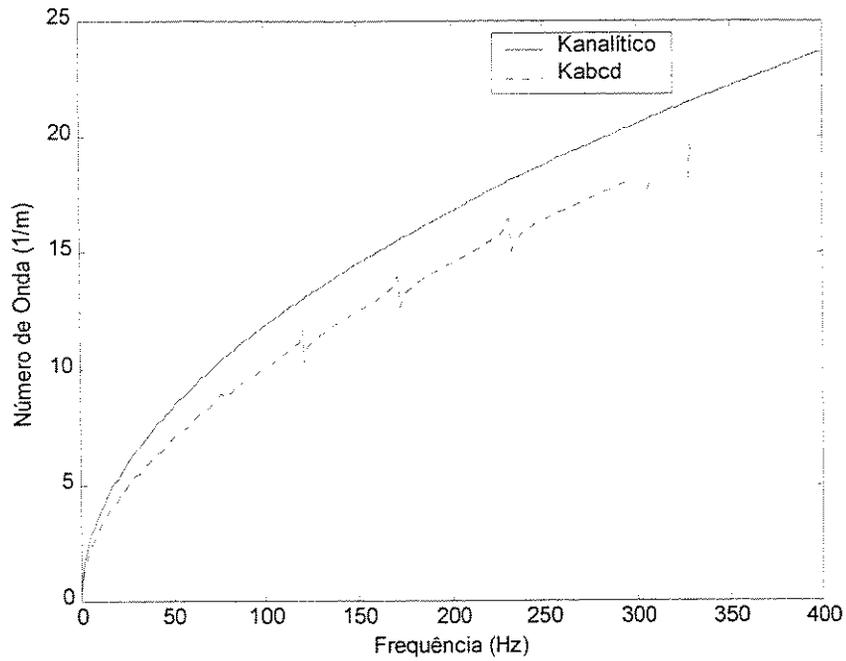


Fig. 4.42: Comparação da relação de dispersão teórico com o método ABCD com 5 pontos,
 $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$

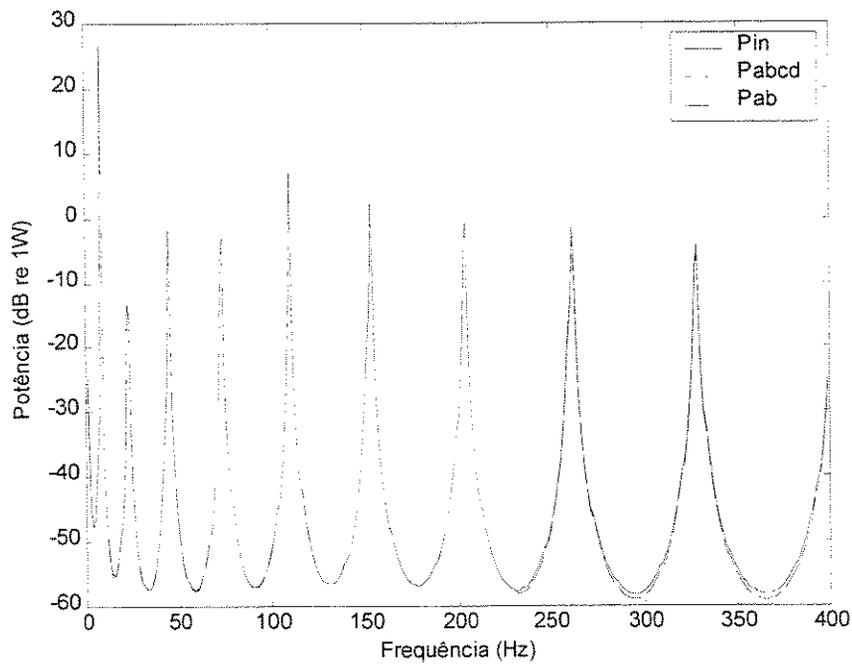


Fig. 4.43: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 5 pontos com a potência
injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$

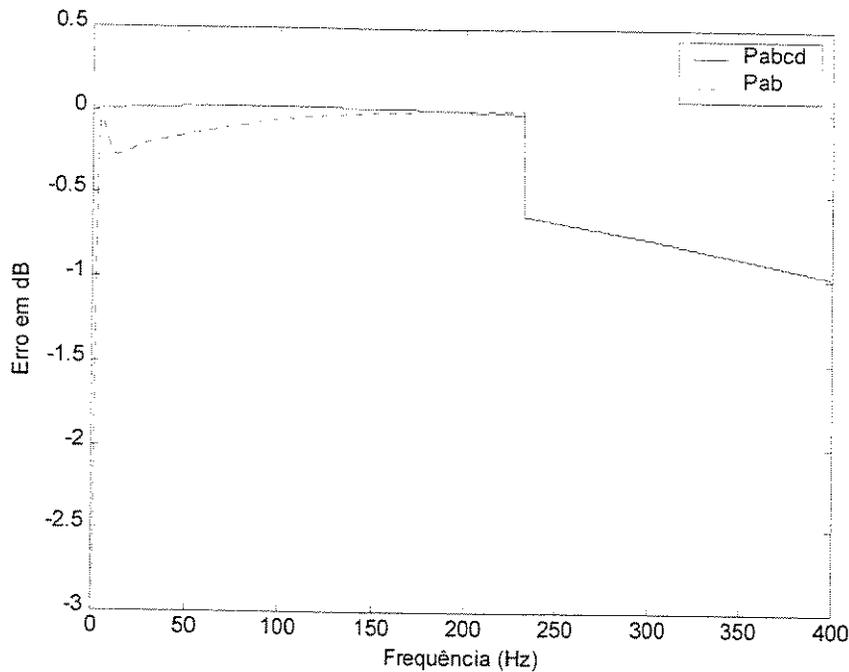


Fig.4.44: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 5 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.9\text{m}$

Nota-se também, na Fig 4.44, a existência de uma mudança de padrão no gráfico, próximo a 230 Hz, cuja razão é o valor zero encontrado na estimativa do parâmetro D, acima desta frequência. A explicação física para este fenômeno porém, deve ser melhor investigada.

Para finalizarmos nossas comparações, simulou-se o uso do programa ABCD_SIM com 14 pontos distanciados de $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e centrados em $x = 0.4735\text{m}$, correspondentes aos 14 últimos nós do modelo, incluindo o nó de aplicação da força externa.

A Fig. 4.45 mostra a comparação da relação de dispersão teórica e a estimada, onde pode-se observar que a estimativa é boa em toda a faixa de frequências com tendência de piora nas frequências mais altas.

Na Fig. 4.46 observa-se a comparação das potências estimadas e injetada, na qual nota-se uma pequena perda na qualidade do resultado, quando comparada com a Fig. 4.30.

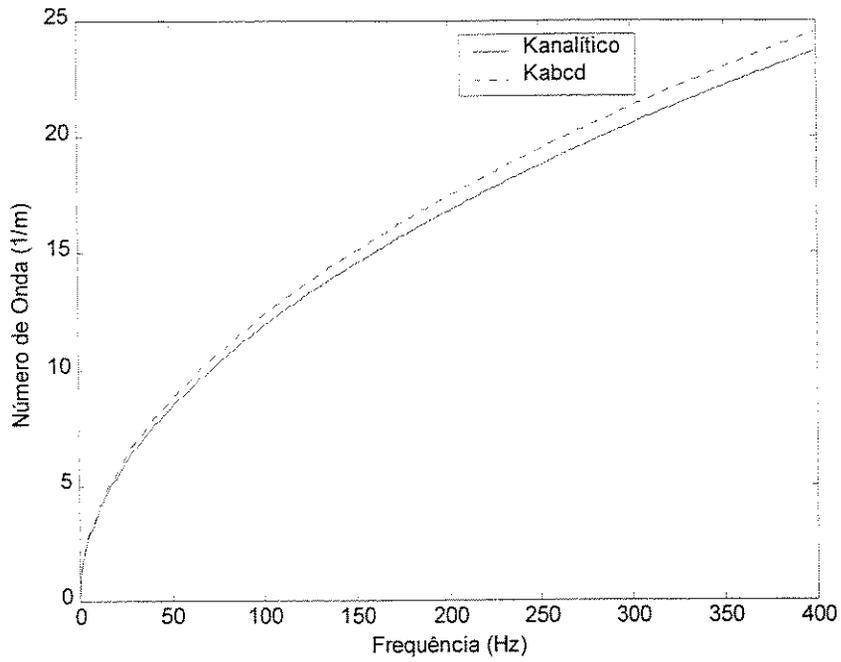


Fig. 4.45: Comparação da relação de dispersão teórica com o método ABCD com 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

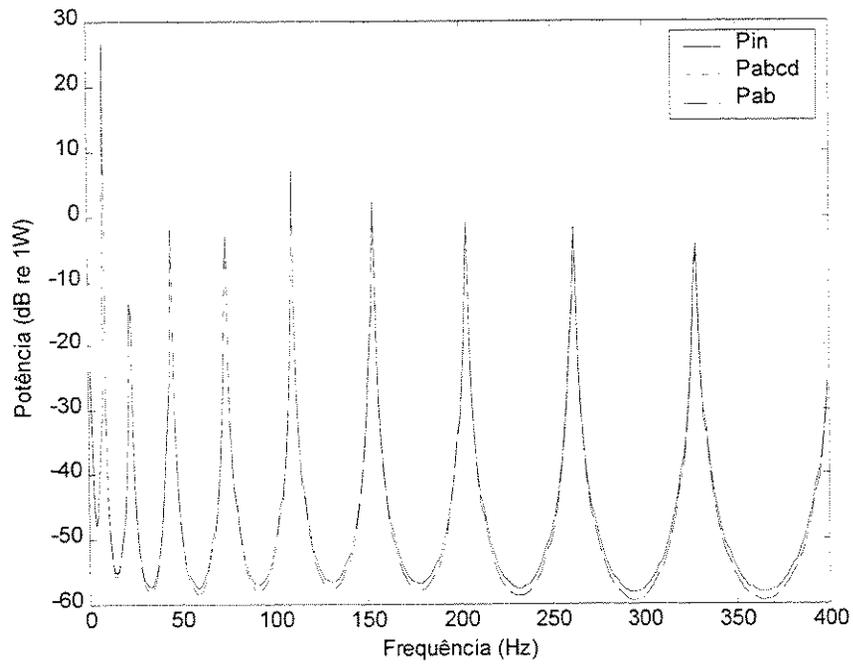


Fig. 4.46: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com 14 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

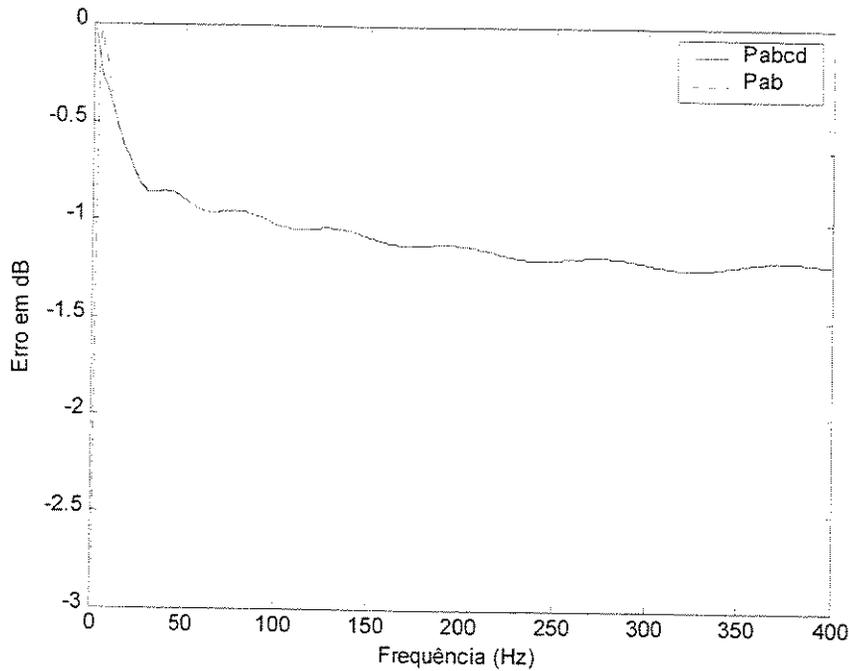


Fig. 4.47: Erros envolvidos no fluxo de potência pelo método ABCD em 14 pontos com a potência injetada - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

A Fig. 4.47 mostra que os erros resultantes nas estimativas da potência quando comparadas à potência injetada no sistema, são maiores nas altas frequências, em função da diminuição do condicionamento da matriz do SLE pela inclusão de pontos localizados em campo próximo, não compensados pela incremento do número e distância entre os sensores.

Com o objetivo de analisarmos as ordens de grandeza dos parâmetros A, B, C e D estimados, na Fig. 4.48 são mostrados os valores obtidos em função da frequência, para este último caso de simulação.

Nota-se que, somente em baixa frequência, o parâmetro D tem uma ordem de grandeza equivalente aos demais; portanto, em frequências mais altas, mesmo com o parâmetro C sendo significativo, o produto (CD) usado na Eq. (3.25) é pequeno, e não influencia a estimativa do fluxo de potência.

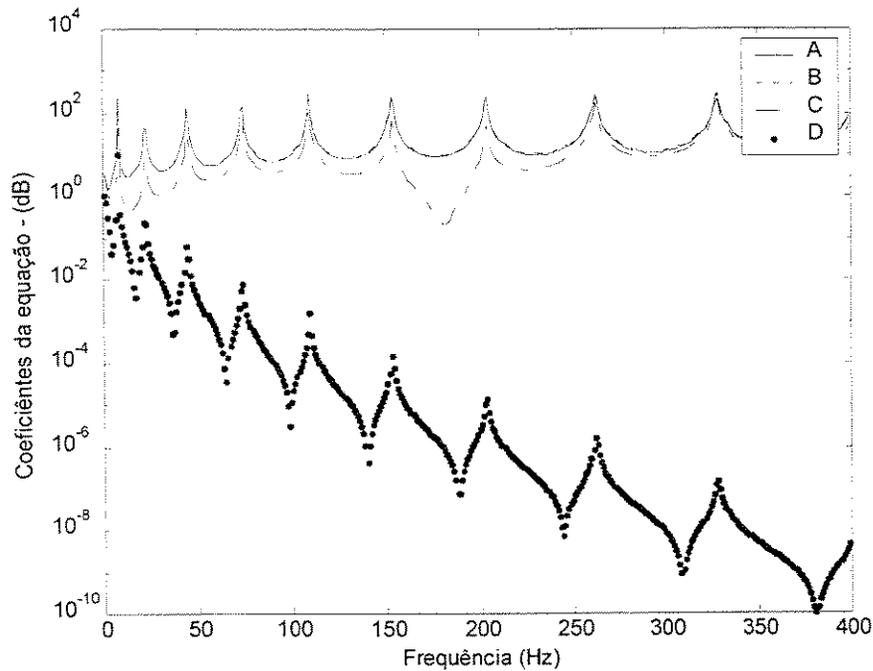


Fig. 4.48: Parâmetros A, B, C, e D obtidos com 14 pontos - $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

Como conclusões gerais para o modelo, nota-se que: a) o método é bastante robusto, mesmo em campo próximo, nas estimativas do fluxo de potência e da relação de dispersão; b) o aumento de sensores ou a distância entre eles melhora o condicionamento da matriz característica do SLE, porém a proximidade, ou inclusão de pontos localizados em campo próximo pode não compensar o ganho do condicionamento da matriz na qualidade dos resultados; c) a qualidade dos parâmetros estimados é fortemente influenciada pela degeneração do condicionamento da matriz do SLE causada pelas altas frequências; d) o uso somente dos parâmetros A e B pode representar um ganho na quantidade de sensores a serem usados, porém, em campo próximo, mais intenso em baixa frequência, existe a necessidade da inclusão dos termos C e D para melhorar as estimativas do fluxo de potência, o que implica automaticamente o aumento do número de sensores.

4.2.2.4- Aproximação pela RDFS

O último método a ser avaliado é a proposta baseada na técnica do uso da aproximação no domínio espacial do campo das acelerações medidas, ajustadas pela série regressiva discreta de Fourier (RDFS) para estimar o fluxo de potência, bem como a relação de dispersão na viga em flexão como descrito no item 3.3.3.

A verificação da metodologia em diversas condições foi feita através do programa de simulações RDFS_SIM.m anteriormente descrito.

Primeiramente verificou-se o desempenho do método em campo distante, simulando-se o posicionamento de 7 sensores virtuais centrados em $x = 0.5\text{m}$ e espaçados de $\Delta x = 0.03\text{m}$. Embora seja desejável um grande número de pontos de medição para se obterem bons resultados com o método da RDFS, em alguns casos usou-se um número mínimo deles para verificar seu comportamento.

A Fig. 4.49 mostra o resultado comparativo entre a relação de dispersão teórica e a estimada pela RDFS calculada pelas Eqs.(3.38a) e (3.38b), com e sem hipótese de campo distante. Na Fig. 4.50 pode-se observar que em baixa frequência, até aproximadamente 12 Hz, onde o efeito de campo próximo é mais forte, a Eq. (3.38b) estima melhor o valor do número de onda.

A Fig. 4.51, mostra o comparativo entre a potência injetada e as estimativas do fluxo de potência em cada um dos 7 pontos medidos, calculadas com a Eq. (3.16), onde não são feitas considerações de campo distante.

A Fig. 4.52 faz a mesma comparação usando a Eq. (3.17b), que considera a hipótese de campo distante e a relação de dispersão teórica.

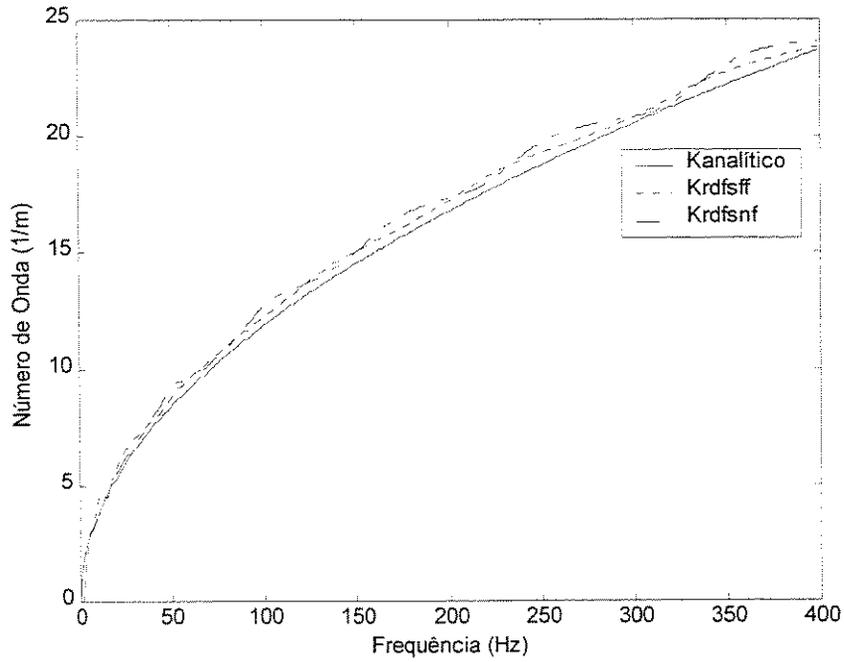


Fig. 4.49: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

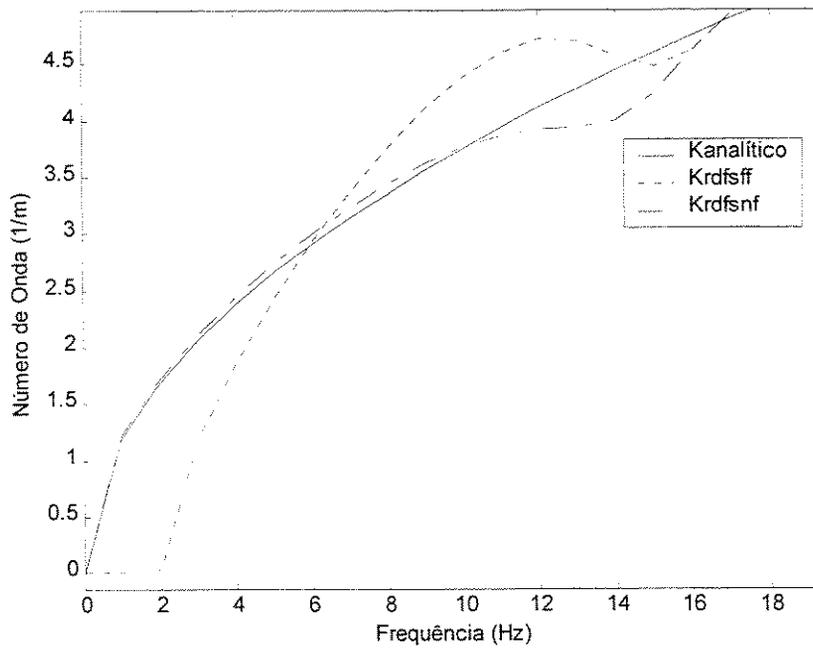


Fig. 4.50: Comparação em baixa frequência da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

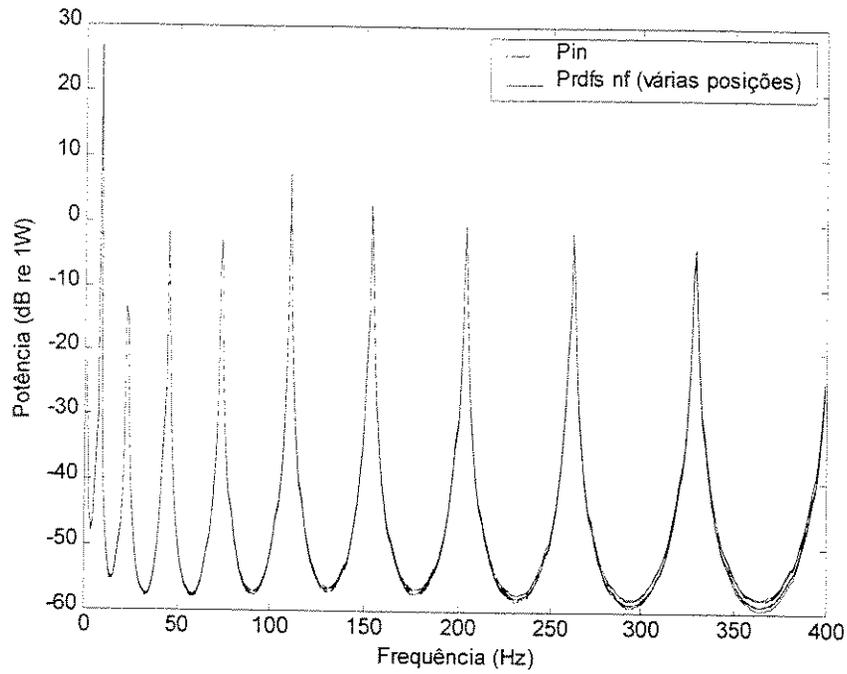


Fig. 4.51: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 0.03m$ e $x = 0.5m$

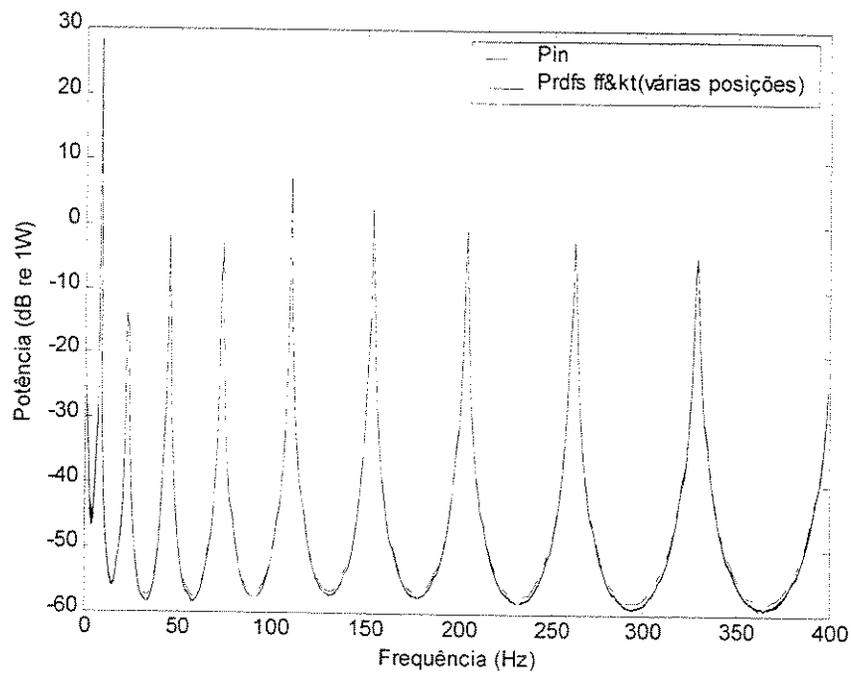


Fig. 4.52: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 0.03m$ e $x = 0.5m$

Na Fig 4.53 observam-se os erros envolvidos nas estimativas do fluxo de potência, calculadas com e sem a hipótese de campo distante para o ponto central ($x = 0.5\text{m}$). Nota-se que, em frequências bem baixas, onde o efeito do campo próximo é mais forte, a Eq. (3.16) que considera este efeito apresenta um melhor desempenho; já em frequências mais altas, ocorre o inverso, e o uso da Eq. (3.16), que usa derivadas espaciais de 2^o e 3^o ordens, apresenta uma tendência de perda de qualidade na estimativa da potência.

Com o objetivo de explorarmos o método ainda em campo distante, aumentou-se o número de sensores para 15, porém reduzindo-se a distância entre eles para $\Delta x = 0.014\text{m}$ a fim de mantermos o mesmo tamanho do vetor virtual de medição.

As Figs. 4.54 a 4.57 nos mostram um resultado bastante interessante, pois são iguais ou muito próximas das Figs 4.49, 4.51, 4.52 e 4.53 respectivamente, o que nos leva à conclusão de que, pelo menos para o caso em estudo, o método é sensível ao tamanho do vetor dos sensores, e não à distância e ao número de sensores diretamente.

Baseados na observação acima, simulou-se a condição de 15 sensores distanciados de $\Delta x = 0.03\text{m}$ e ainda centrados em $x = 0.5\text{m}$.

No gráfico comparativo da Fig. 4.58, podem-se observar ganhos de qualidade na estimativa da relação de dispersão onde são encontrados valores muito próximos aos teóricos e no geral nota-se uma melhoria em relação a Fig. 4.49.

Já nas Figs. 4.59 e 4.60 nota-se que houve perdas nas estimativas do fluxo de potência, que podem ser melhor observadas na Fig. 4.61, do comparativo dos erros destas estimativas em relação a potência injetada.

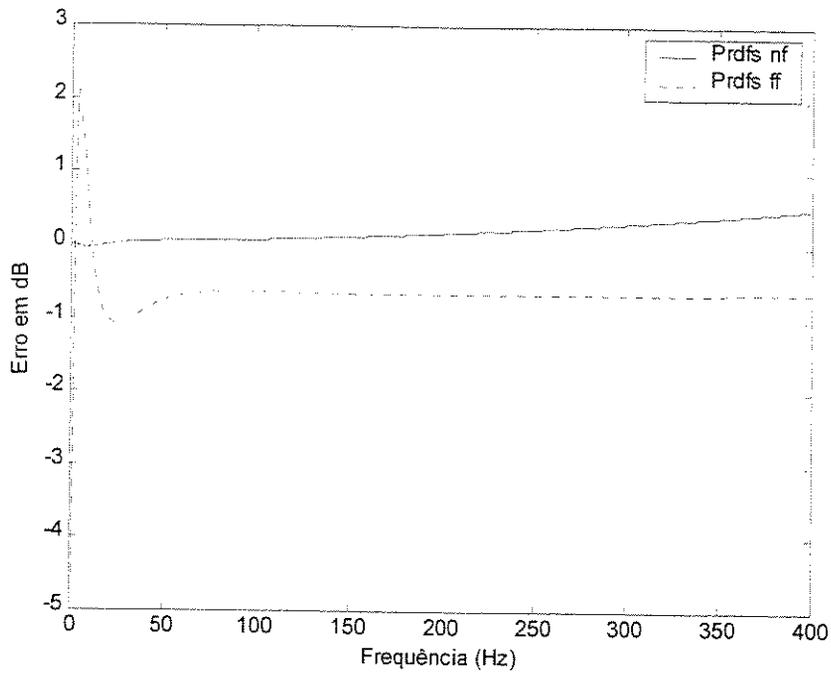


Fig. 4.53: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 4 (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

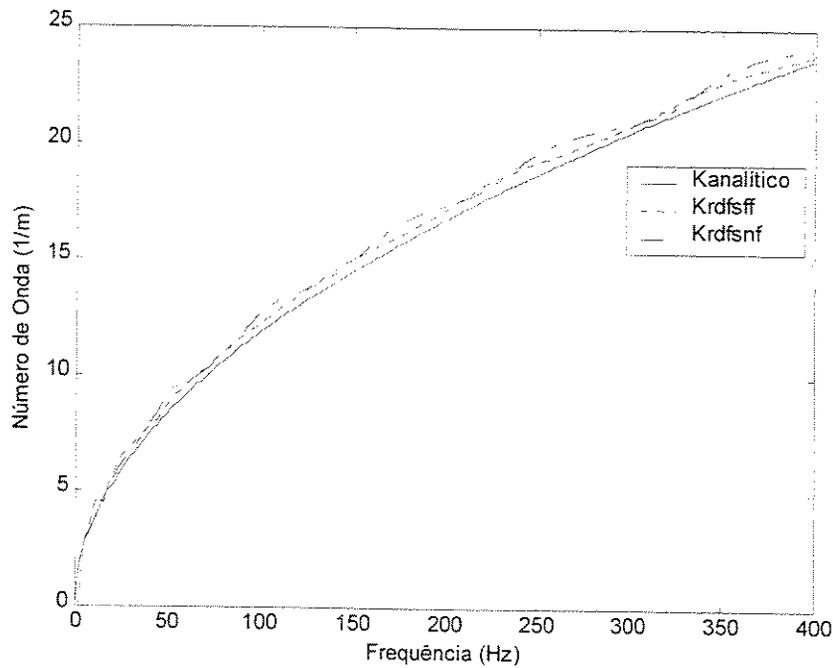


Fig. 4.54: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

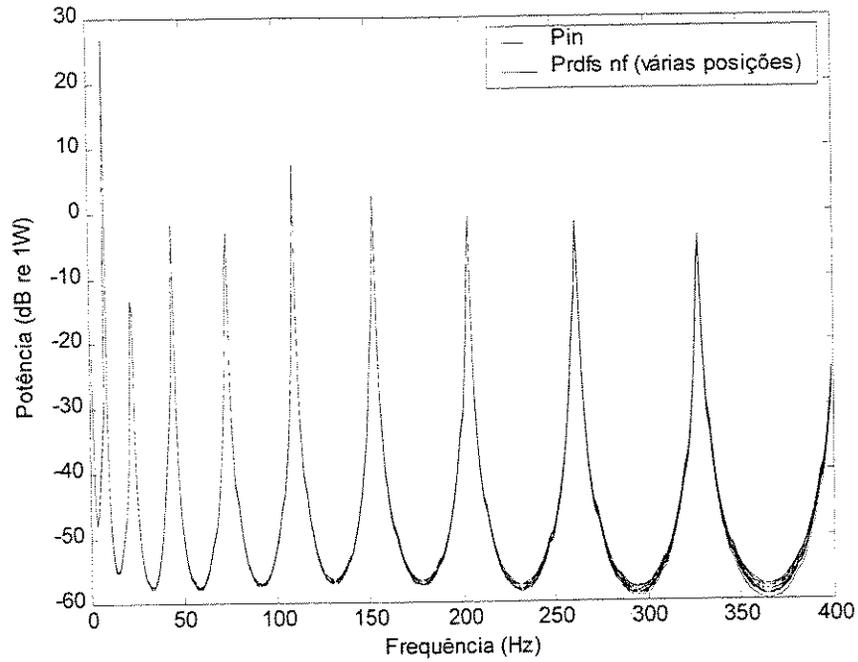


Fig. 4.55: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

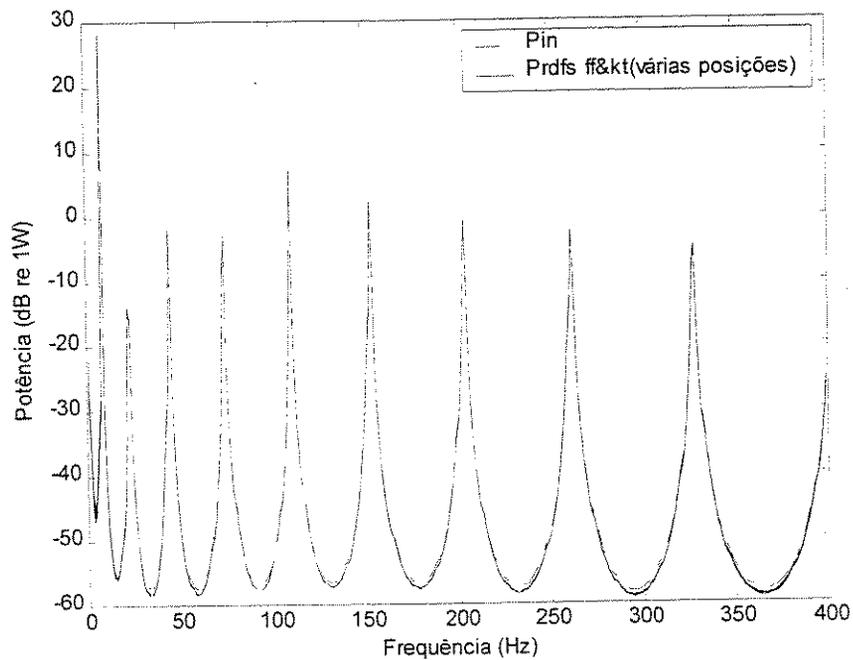


Fig. 4.56: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

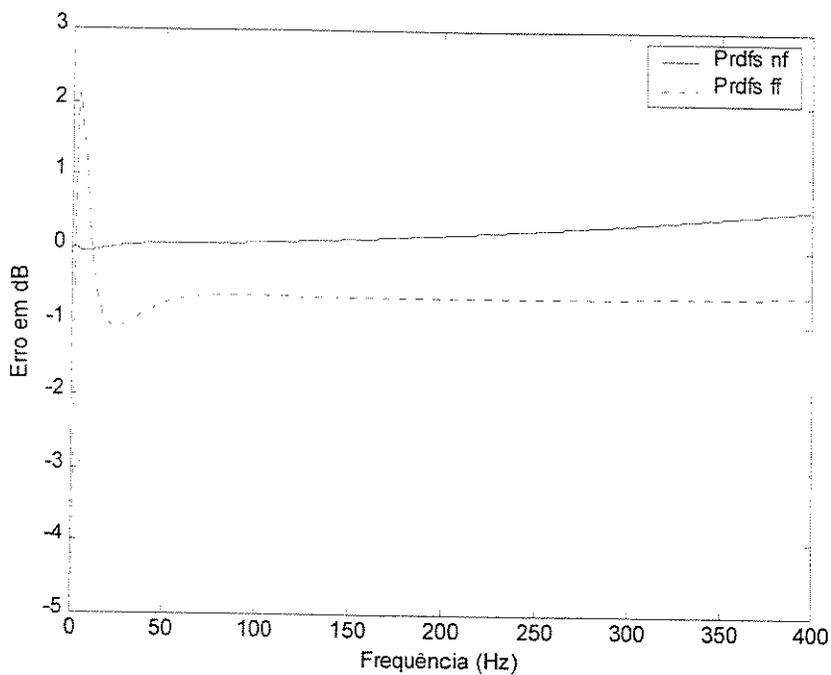


Fig. 4.57: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.014\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

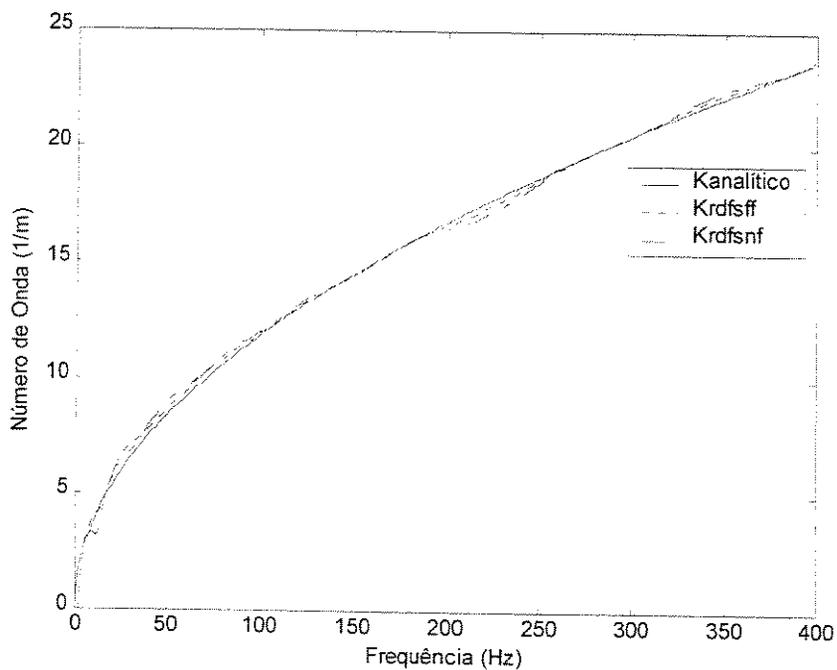


Fig. 4.58: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

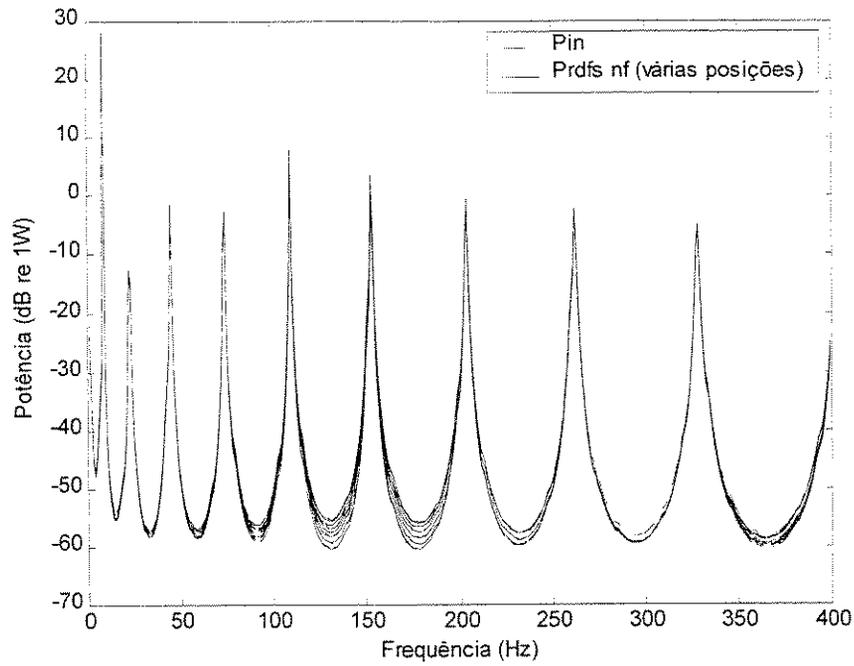


Fig. 4.59: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

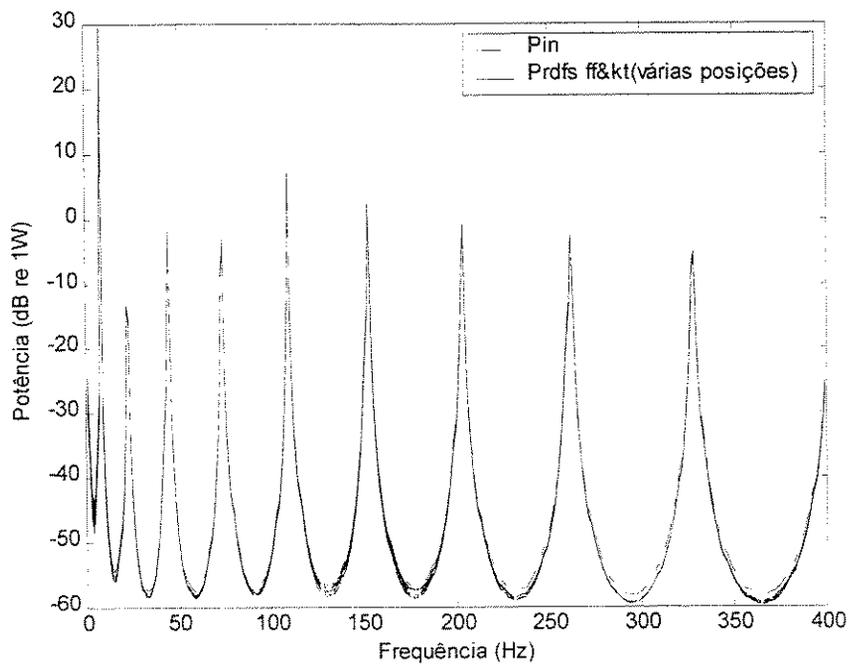


Fig. 4.60: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

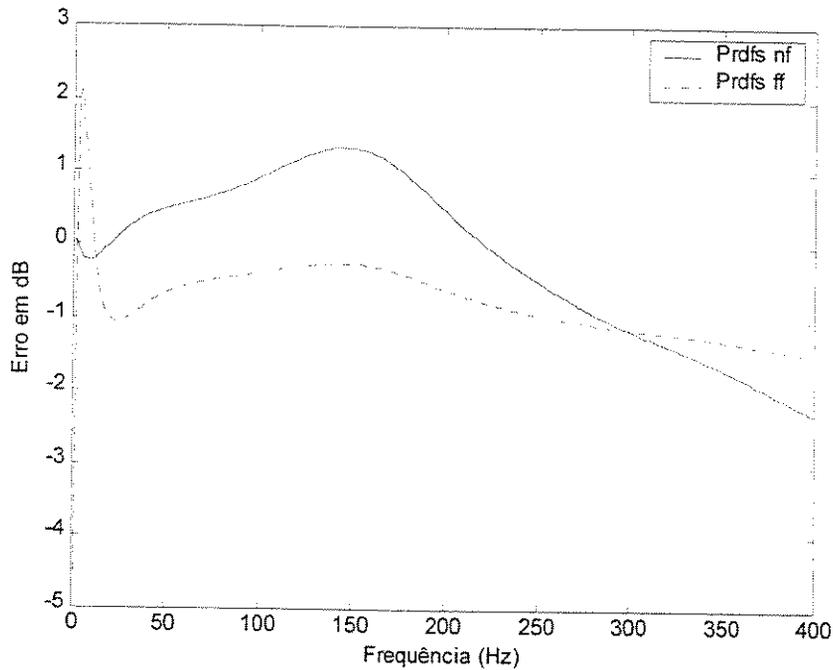


Fig. 4.61: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.5\text{m}$

Avaliou-se também o método da RDFS nas proximidades do ponto de aplicação da força, onde há uma maior influência do campo próximo. Para tal condição simulou-se um conjunto de 7 sensores, espaçados de $\Delta x = 0.03\text{m}$ centrados em $x = 0.8\text{m}$.

Na Fig. 4.62 observa-se a comparação entre a relação de dispersão teórica e a estimada pela RDFS, onde pode ser observado a forte influência do campo próximo nos resultados, principalmente em baixa frequência, mesmo para a estimativa feita com hipótese de campo próximo calculada pela Eq. (3.38b), que apresenta porém uma qualidade nos dados estimados ligeiramente superior à calculada pela Eq. (3.38a), como mostra a Fig. 4.63.

Nas Figs. 4.64 e 4.65 mostra-se o comparativo entre o fluxo de potência estimado pelas Eqs. (3.16) e (3.17b) respectivamente versus a potência injetada. Pode ser observado que, mesmo em campo próximo, a estimativa da potência é bastante razoável. O que também se pode observar é que, em geral, as estimativas nos diversos pontos de medidas, feitas com a Eq. (3.16),

apresentam uma maior dispersão entre os resultados, o que pode ser provavelmente explicado pelo uso de derivadas espaciais de ordem superior nesta formulação.

A Fig. 4.66 mostra os erros envolvidos nas estimativas da potência, na qual observa-se com clareza o melhor comportamento, principalmente em frequências baixas, nas quais o efeito do campo próximo é mais notável, do uso da Eq. (3.16), que leva este efeito em conta, quando comparada com a hipótese de campo distante, dada pela Eq. (3.17b).

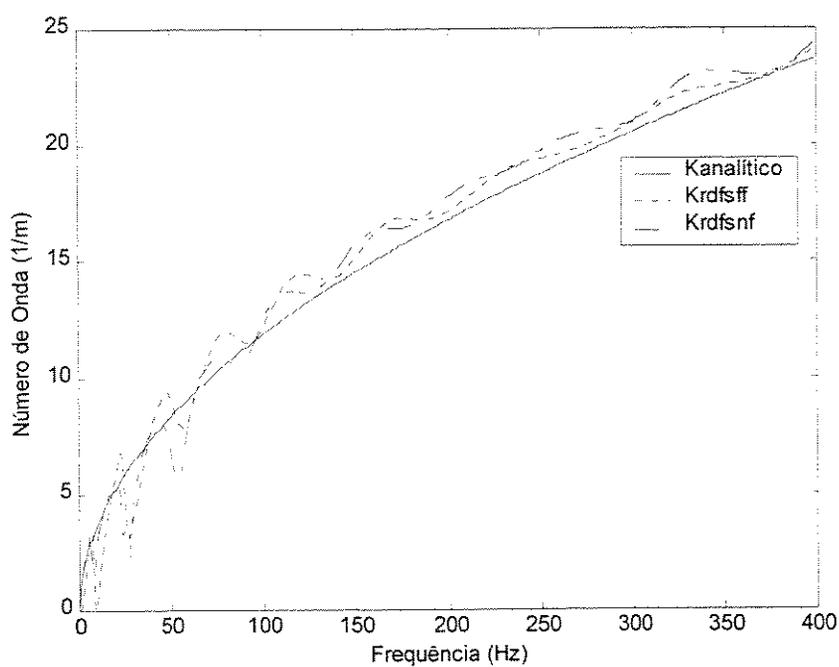


Fig. 4.62: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

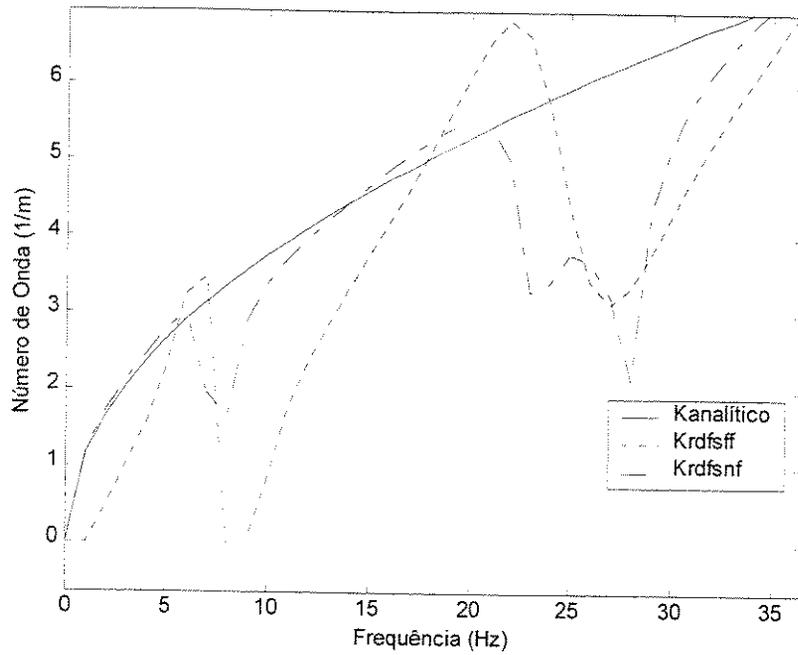


Fig. 4.63: Comparação em baixa frequência da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

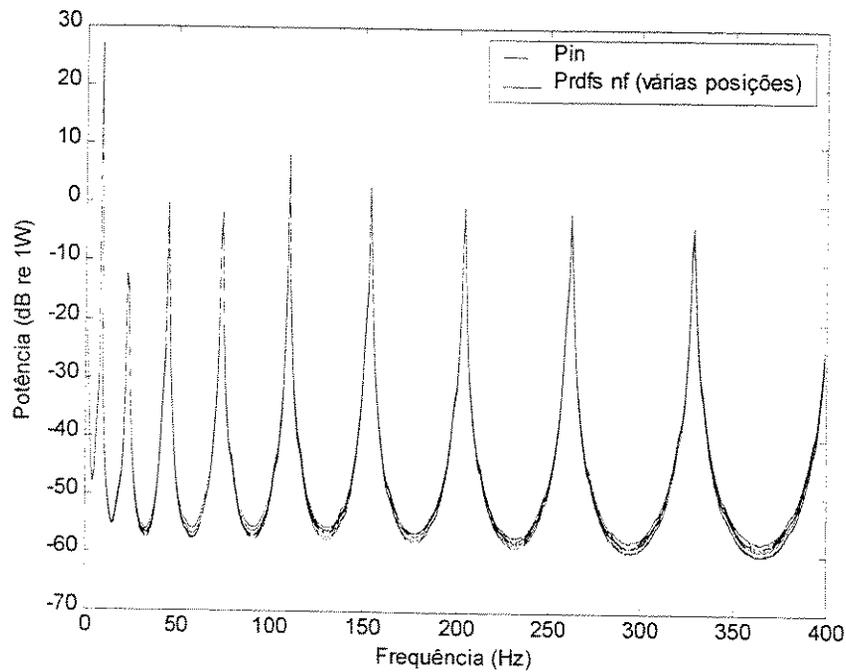


Fig. 4.64: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada - 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

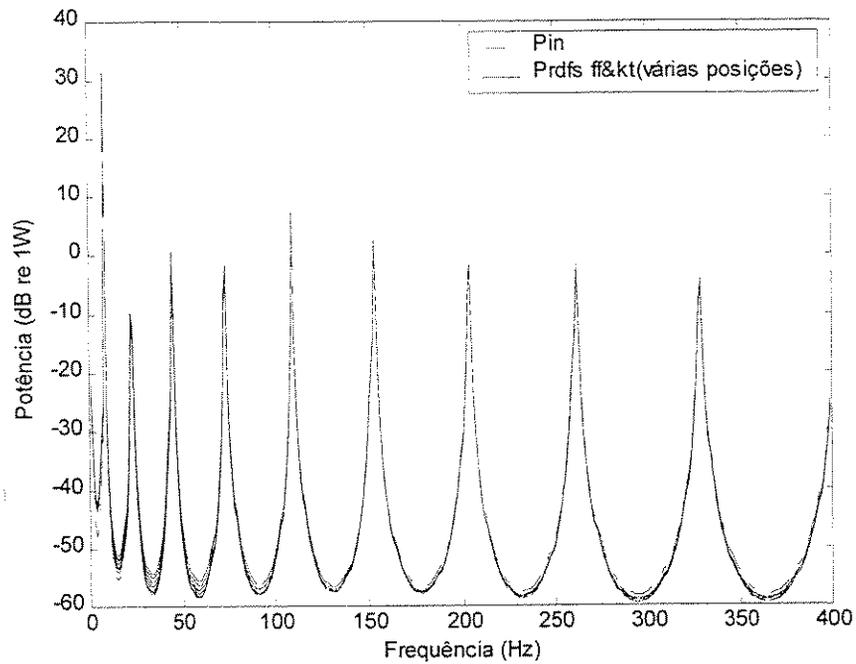


Fig. 4.65: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

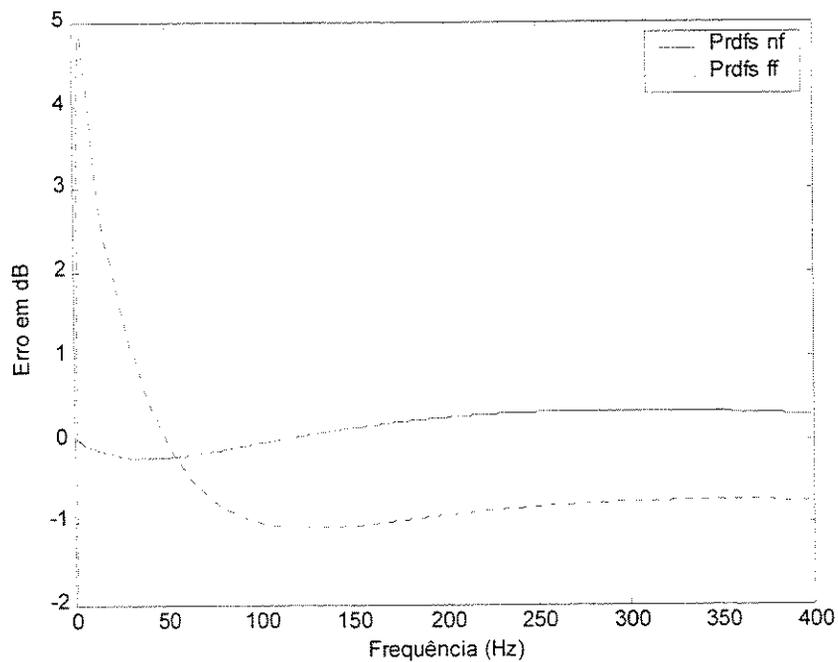


Fig. 4.66: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 4 (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

Na tentativa de explorar um pouco mais os resultados em campo próximo, simulou-se o uso de 15 sensores separados por $\Delta x = 0.03\text{m}$ centrados em $x = 0.8\text{m}$.

Para a relação de dispersão, o resultado pode ser visto na Fig. 4.67, que mostra a comparação com o valor teórico, onde observa-se uma melhoria, principalmente em frequências mais baixas, explicada pelo tamanho do vetor virtual de sensores ser mais compatível com os comprimentos de ondas maiores, o que pode ser melhor observado na Fig. 4.68.

Nas Figs. 4.69 e 4.70, que mostram as estimativas do fluxo de potência, observa-se uma maior dispersão entre os valores obtidos e uma perda de qualidade no resultado, melhor notado na Fig. 4.71, dos erros envolvidos nestas estimativas.

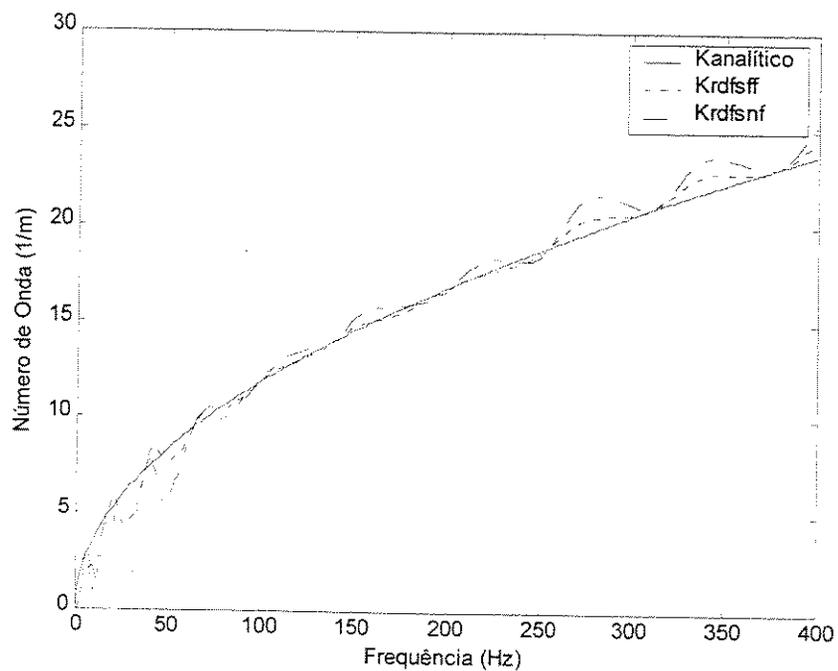


Fig. 4.67: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

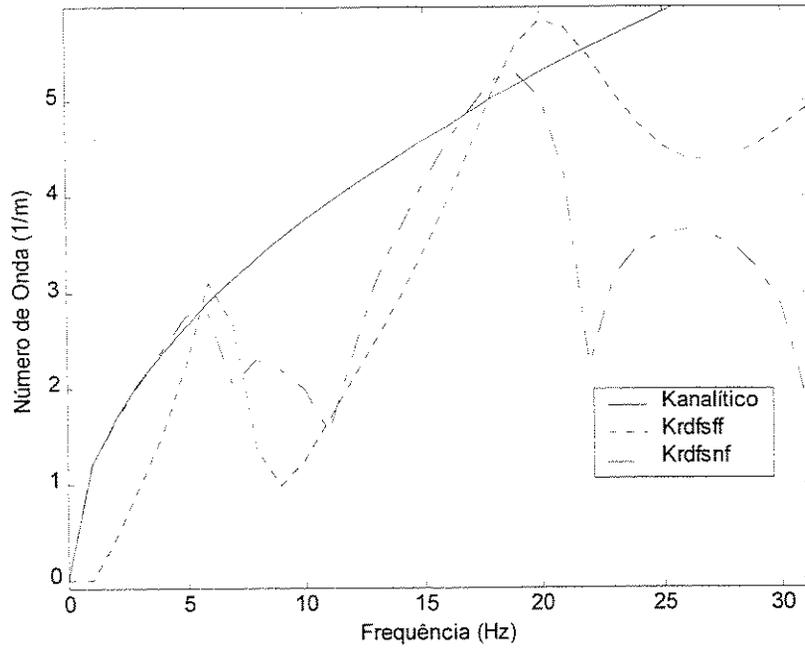


Fig. 4.68: Comparação em baixa frequência da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

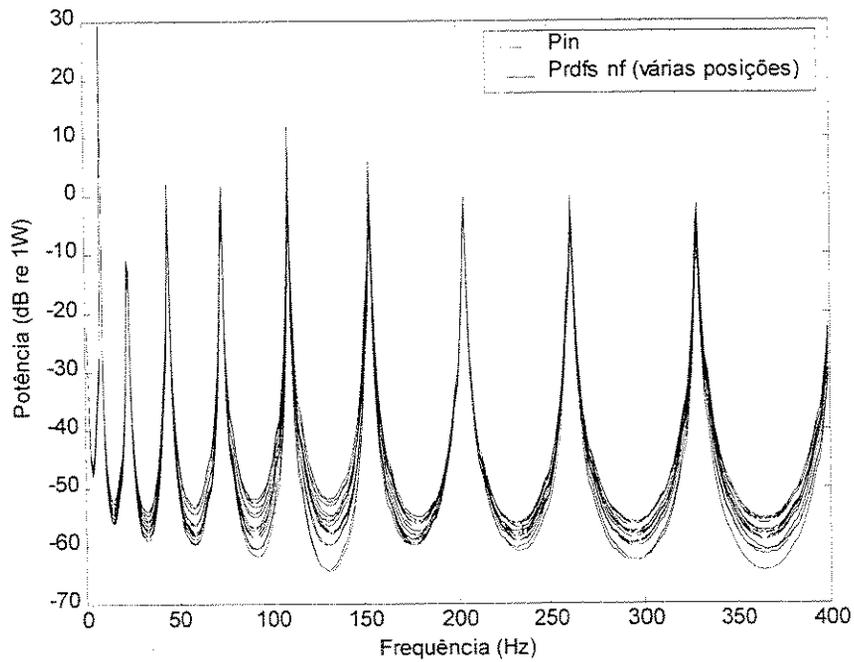


Fig. 4.69: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

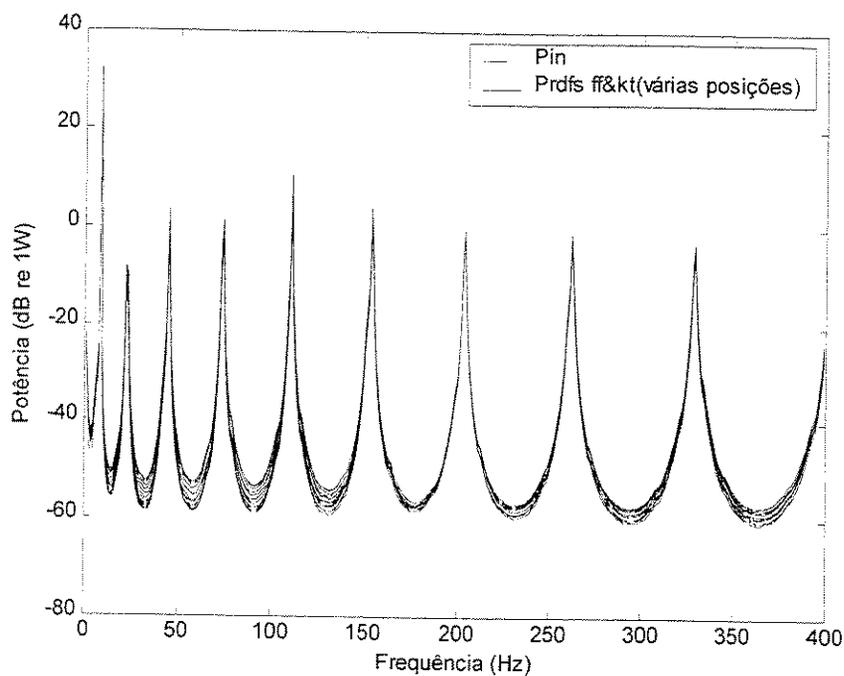


Fig. 4.70: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

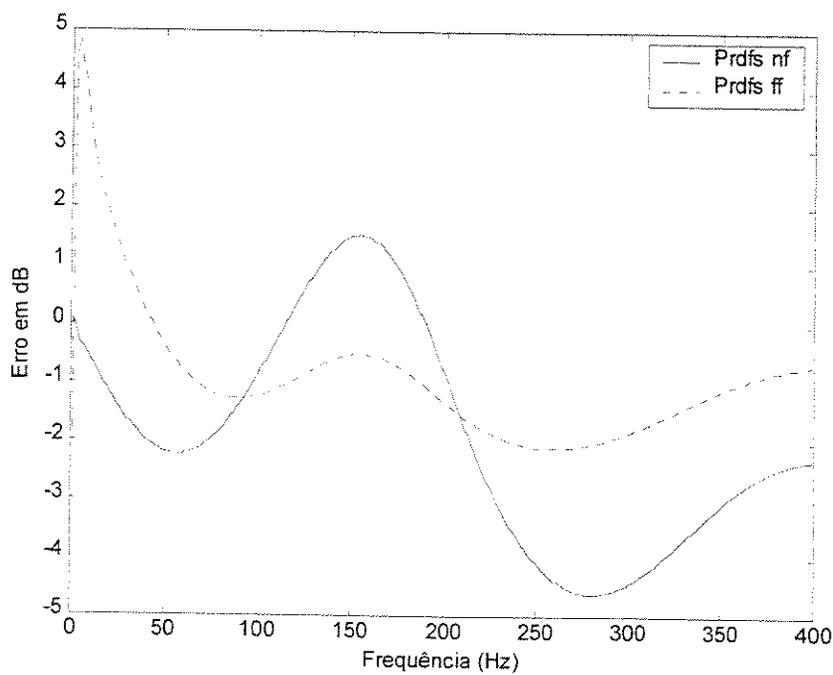


Fig. 4.71: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.03\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

Como observado anteriormente, o aumento do vetor de medição leva a uma melhora na estimação da relação de dispersão e uma piora na estimativa do fluxo de potência. Tentou-se então, nesta localização da viga de $x = 0.8\text{m}$, diminuir o tamanho do vetor de medição, diminuindo a distância entre sensores para $\Delta x = 0.005\text{m}$, com 15 sensores.

A Fig. 4.72 mostra o resultado da relação de dispersão estimada comparada com a teórica. Nota-se uma piora nos resultados principalmente em baixas frequências, onde o tamanho do vetor de medição se torna muito pequeno em relação ao comprimento de onda.

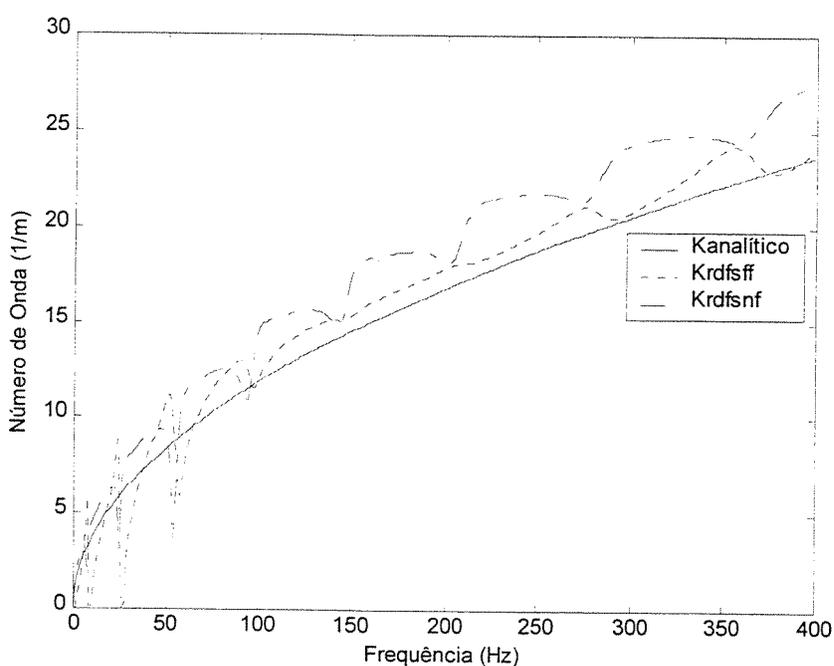


Fig. 4.72: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

Nas Figs. 4.73 e 4.74 vê-se que os valores estimados do fluxo de potência estão bastante próximos entre si e ao valor da potência injetada, apresentando uma estimativa de qualidade superior quando comparados as Figs 4.69 e 4.70.

Na Fig. 4.75 observa-se os erros envolvidos nas estimativas da potência no ponto central do vetor de medição em $x = 0.8\text{m}$ e comprova as conclusões tiradas em relação às Figs. 4.73 e 4.74.

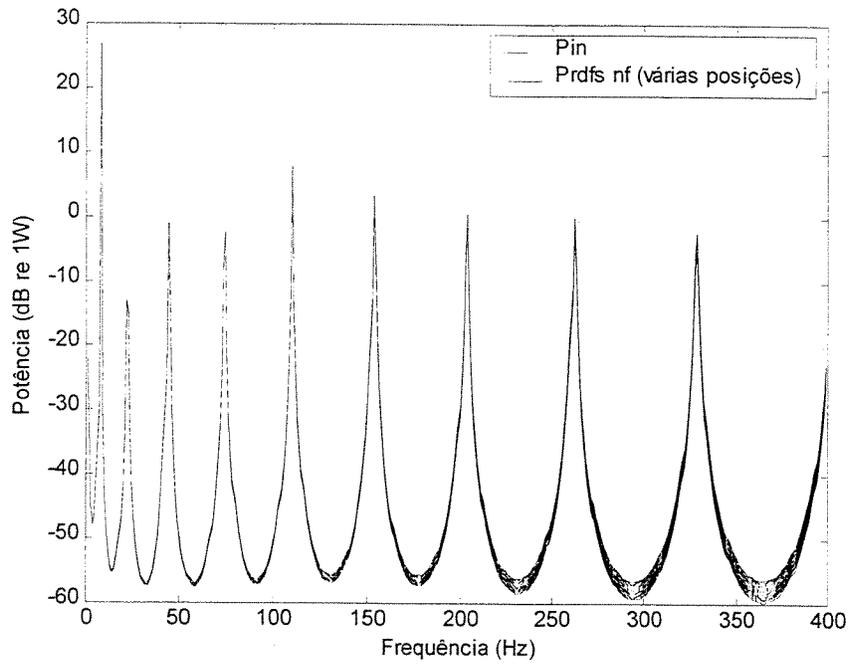


Fig. 4.73: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

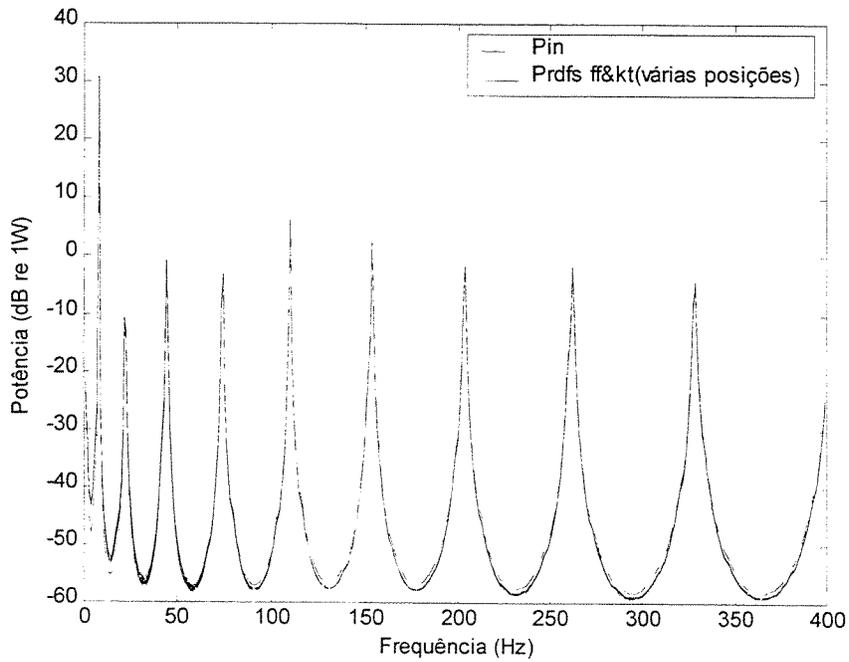


Fig. 4.74: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

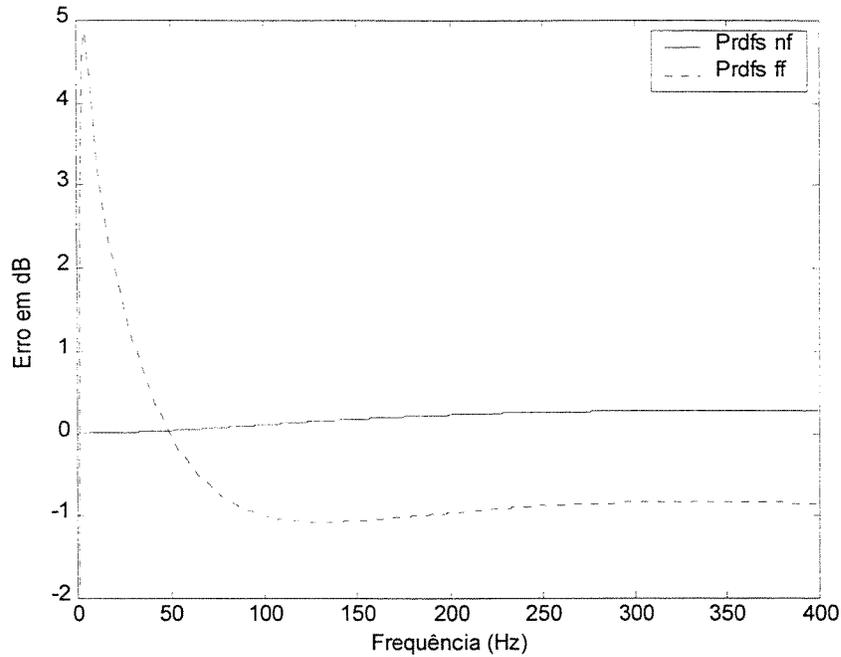


Fig. 4.75: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 15 pontos, $\Delta x = 0.005\text{m}$ e $x = 0.8\text{m}$

Na tentativa de se usar os 14 últimos nós do modelo, simulou-se, como nos casos anteriores, a utilização de 14 sensores distanciados entre si de $\Delta x = 0.0789\text{m}$ centrados em $x = 0.4735\text{m}$. Porém com este espaçamento entre os sensores virtuais, a condição de $\Delta_{\min} = 1/4\lambda_{\min} = 0.0663$ onde $\lambda_{\min} = 2\pi/k_{\max}$ é violada e a frequência máxima de análise cai para aproximadamente 270 Hz. Como pode ser observado nas Figs. 4.77 a 4.79, relativas as estimativas do fluxo de potência e seus erros, acima de aproximadamente 270 Hz ocorrem distúrbios causados por esta violação.

Na Fig. 4.76 observa-se comparação da estimativa da relação de dispersão com a relação teórica, onde nota-se uma razoável proximidade entre os valores.

Nas Figs. 4.77 e 4.78 mostra-se a comparação do fluxo de potência injetada com as estimativas obtidas e, como já comentado, nas proximidades de 270 Hz observam-se problemas na obtenção dos valores obtidos, em função da distância usada entre os sensores.

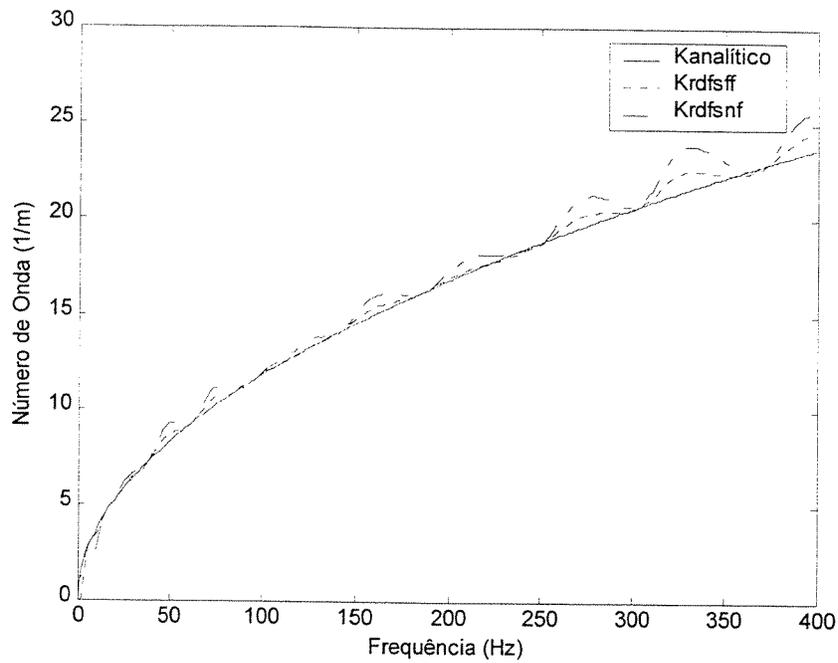


Fig. 4.76: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

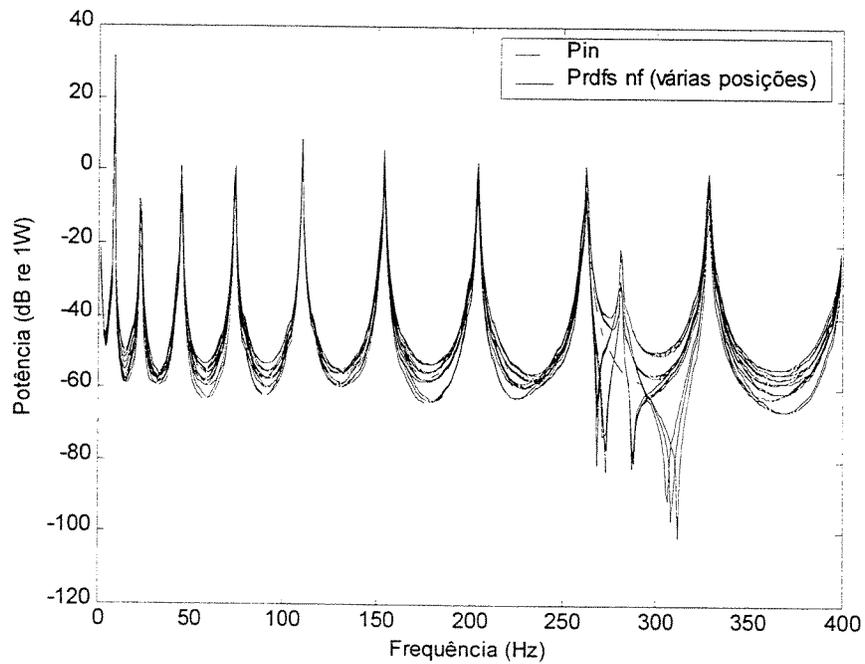


Fig. 4.77: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

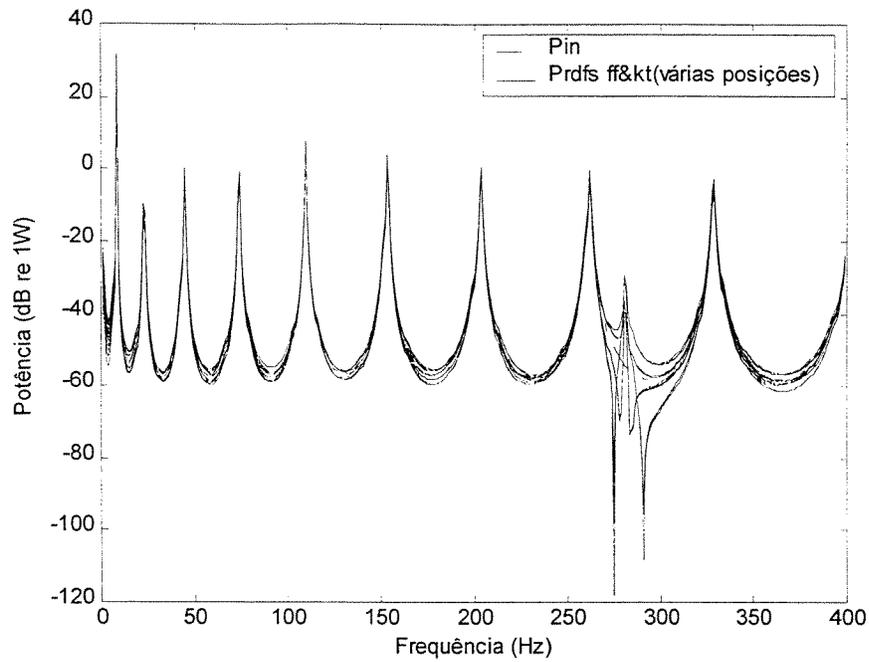


Fig. 4.78: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

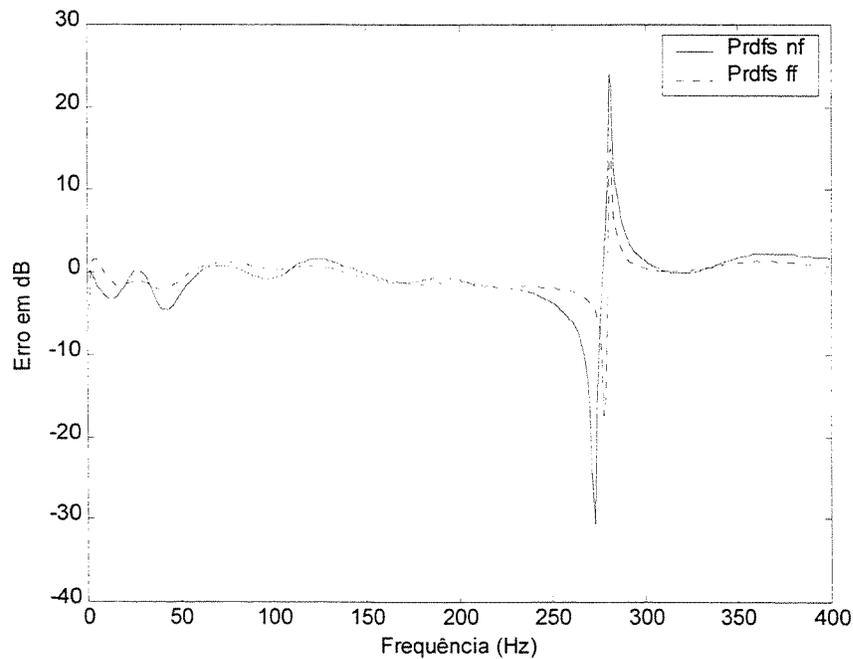


Fig. 4.79: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no ponto 8 (com e sem hipótese de campo próximo) 14 pontos, $\Delta x = 0.0789\text{m}$ e $x = 0.4735\text{m}$

Das simulações realizadas, pode-se tirar as seguintes conclusões: a) o aumento do tamanho do vetor de medição melhora a estimativa da relação de dispersão, principalmente em baixa frequência, e piora a estimativa do fluxo de potência, e vice-versa; b) o método tende a superestimar os valores da relação de dispersão; c) em frequências bem baixas, o uso da hipótese de campo próximo dada pela Eq. (3.38a) apresentou um melhor desempenho na estimativa da relação de dispersão; d) os valores de fluxo de potência, para cada ponto, estimados pela Eq. (3.16) que leva em conta o efeito de campo próximo, apresentam uma maior dispersão quando comparados com os estimados com a Eq. (3.17b); e) normalmente, em baixa frequência, a Eq. (3.16) estima melhor o fluxo de potência que a Eq. (3.17b); f) observou-se uma maior velocidade nas estimativas dos parâmetros com este método, quando comparado ao método ABCD.

4.3- Exemplo Experimental

4.3.1- Descrição do experimento

Usou-se para o ensaio uma viga de aço com dimensões de 1,50m de comprimento com seção retangular de 0,003x0,020m, montada verticalmente, com a extremidade inferior enterrada 20cm em uma caixa de areia de forma a simular uma terminação *quasi* anecóica. Um esquema da montagem experimental pode ser visto na figura abaixo:

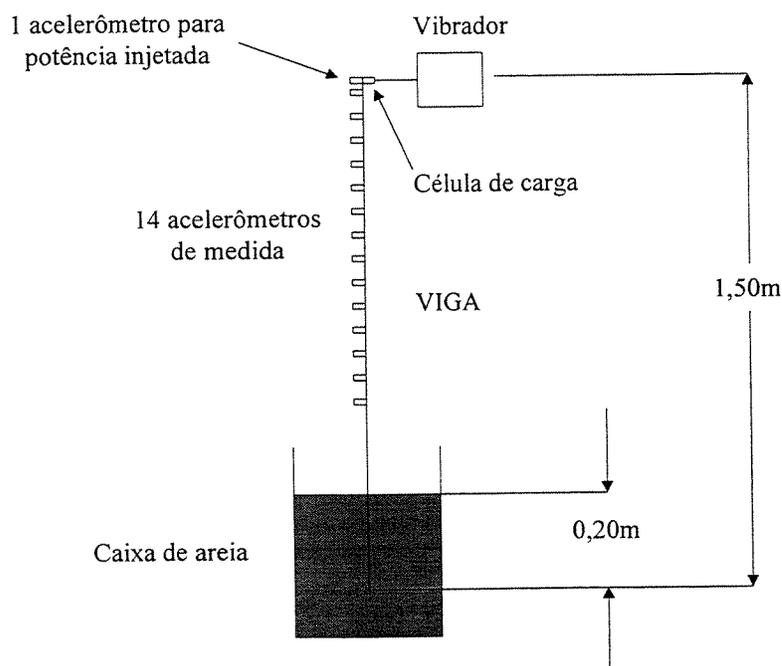


Fig. 4.80: Esquema da montagem experimental

A viga foi excitada com sinais aleatórios e senoidais através de um vibrador conectado à extremidade superior da viga através de um “stinger” e de um transdutor de força. Um acelerômetro foi então montado, colinearmente oposto ao transdutor de força, no ponto de excitação a fim de possibilitar o cálculo da potência injetada usando a Eq. (2.7). Para a medição do fluxo de potência através da viga, foram colados 14 acelerômetros espaçados de 8cm entre si, tendo sido o primeiro deles colado a 2 cm da extremidade superior da viga.

Todos os sinais foram adquiridos simultaneamente por um sistema de aquisição de dados com 16 canais, comandado por um microcomputador. Adquiriram-se os sinais a uma taxa de amostragem de 2048 Hz, totalizando 8192 amostras. Os espectros de potência foram computados usando 8 blocos, que determina o número de médias, de 1024 amostras cada, o que implica numa resolução em frequência de 2 Hz. Estes valores, porém, podem ser alterados em função do número de médias e tamanho de bloco escolhidos. Para amenizar os problemas de “leakage” [26], utilizou-se a janela de Hanning nos dados obtidos.

Na medição de fluxo de potência, o fator experimental mais importante para obtenção de bons resultados é a diferença de fase entre os diversos canais de aquisição dos sinais. Por isso, é aconselhável a utilização de acelerômetros que possuam características de resposta de fase semelhantes. Utilizaram-se acelerômetros de baixo peso usados para Análise Modal. Através de uma medição de diferença de fase em função da frequência, medida entre dois acelerômetros, escolheram-se aqueles que possuíam características de fase semelhantes. Esta diferença de fase foi obtida através de uma montagem, mostrada na Fig. 4.81, na qual os acelerômetros foram colados dois-a-dois, face-a-face em uma viga excitada por um sinal aleatório.

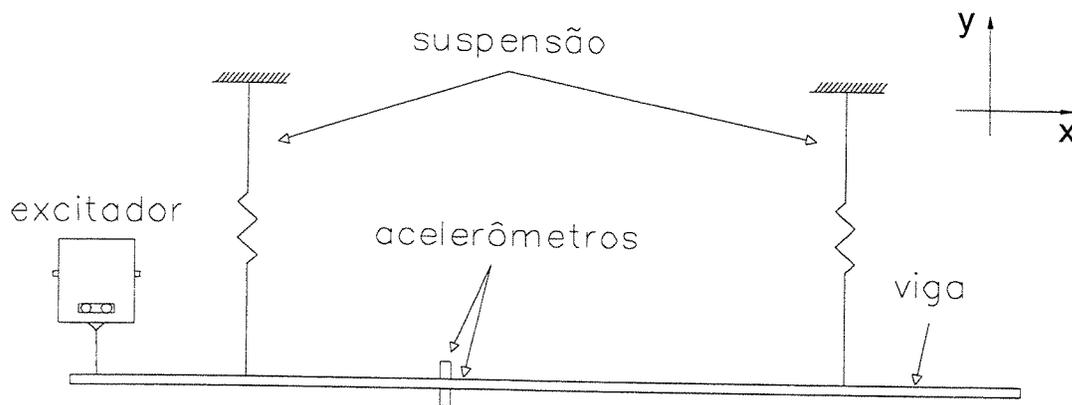


Fig. 4.81: Esquema de montagem da calibração de fase dos acelerômetros

Outro fator importante para a obtenção de bons resultados é o espaçamento entre os acelerômetros. O espaçamento ideal é função da faixa de frequências de análise e da qualidade do erro de fase dos acelerômetros. Ao aumentar-se o espaçamento entre os acelerômetros, aumenta-se a magnitude da fase que se está medindo. Isso melhora a qualidade das medidas pois a relação entre a magnitude do erro de fase dos acelerômetros e a grandeza medida começa a diminuir. Por outro lado, ao se aumentar o espaçamento entre os acelerômetros aumenta-se o chamado erro de “aliasing” espacial e os erros de aproximação das derivadas obtidas por diferenças finitas. O espaçamento ideal é aquele que mantém um compromisso entre esses vários fatores. Embora não se tenha usado nenhuma regra para otimização de espaçamento entre os acelerômetros, é possível obtê-la através do conhecimento dos erros de fase envolvidos na montagem experimental, e da faixa de frequência de análise. Em nosso caso obteve-se um bom compromisso na faixa de frequência entre 50-500 Hz com o espaçamento entre os acelerômetros de 8 cm.

Para permitir maior precisão dos dados, o conjunto dos 15 acelerômetros usados teve suas amplitudes calibradas, e no apêndice C, faz-se uma breve descrição dos equipamentos utilizados no experimento realizado.

4.3.2- Discussão dos resultados experimentais

Para a localização dos pontos medidos na viga, adotou-se o sistema de numeração conforme a figura abaixo, no qual o primeiro acelerômetro está montado a 2 cm da extremidade da viga e também da aplicação da força, conforme anteriormente comentado:

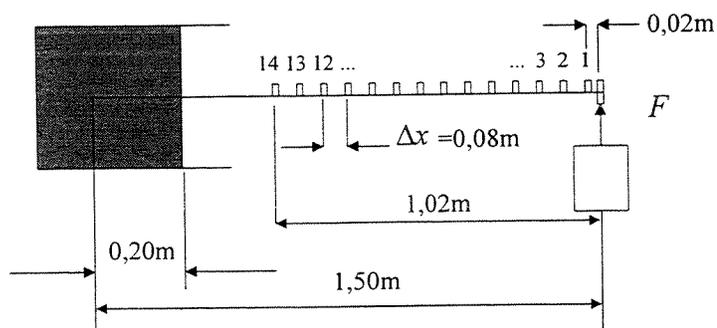


Fig. 4.82: Esquema de numeração da viga

4.3.2.1- Diferenças finitas

Como no modelo numérico, o primeiro método a ser avaliado é o das diferenças finitas, implementado através do programa DFIN_EXP.m comentado anteriormente no item 3.2.3 do capítulo 3.

As aproximações com diferenças finitas apresentam melhores resultados quando diminuem-se as distâncias entre os sensores. Porém, como já comentado antes, distâncias menores implicam em menores diferenças de fase a serem medidas, e, portanto, começamos a ter influência dos erros de fase entre os sensores na qualidade dos resultados. Em nosso caso, observou-se que um bom compromisso nos resultados na faixa de frequência de 50 a 500 Hz, com a distância entre os acelerômetros de $\Delta x = 0.08\text{m}$.

Inicialmente, verificou-se o comportamento do método em campo distante, utilizando-se dos acelerômetros localizados próximo ao meio da viga, tendo como referência central do vetor de medição o acelerômetro de número 8, localizado a 0.58m da extremidade livre da viga. Nesta posição, novamente conforme o critério proposto por Noiseux [4] ($kx_{ff} > \pi$; Fig 4.4), as frequências acima de aproximadamente 20 Hz seriam consideradas em campo distante.

A Fig. 4.83 mostra a comparação da relação de dispersão teórica obtida com a Eq. (2.13) e a estimativa da mesma através do método dos três acelerômetros proposto por Pavic.

Neste caso, e nas demais comparações da relação de dispersão, usou-se a Eq. (3.12), que é uma correção da Eq. (3.11a) original do método. O resultado obtido com a distância entre os acelerômetros de $\Delta x = 0.08\text{m}$ apresenta uma razoável proximidade com a curva teórica da relação de dispersão em quase toda a faixa de frequência.

A Fig. 4.84 mostra a comparação entre a potência injetada no sistema dada pela Eq. (2.7) e as estimativas feitas através dos métodos com 2, 3 e 4 acelerômetros, obtidas com das equações

(3.7a), (3.10a) e (3.6a) respectivamente, nas quais, em todos o casos, usou-se a relação de dispersão teórica.

Na Fig. 4.85 observam-se os erros envolvidos nas estimativas da potência em relação à potência estimada. Notam-se erros bastante grandes em baixa freqüência, e uma grande divergência entre os métodos. A partir de aproximadamente 100 Hz todos os métodos apresentam praticamente os mesmos erros.

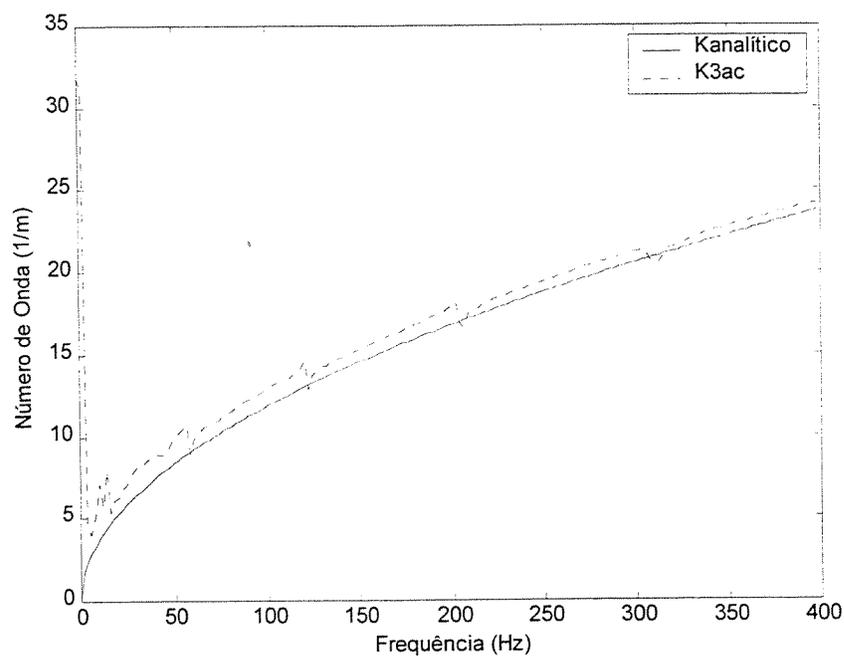


Fig. 4.83: Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos e ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

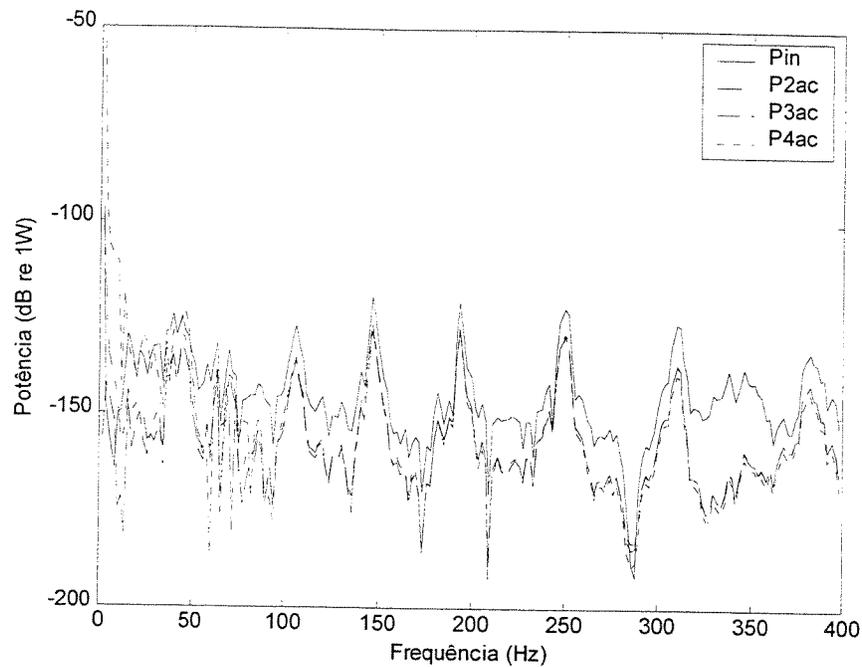


Fig. 4.84: Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

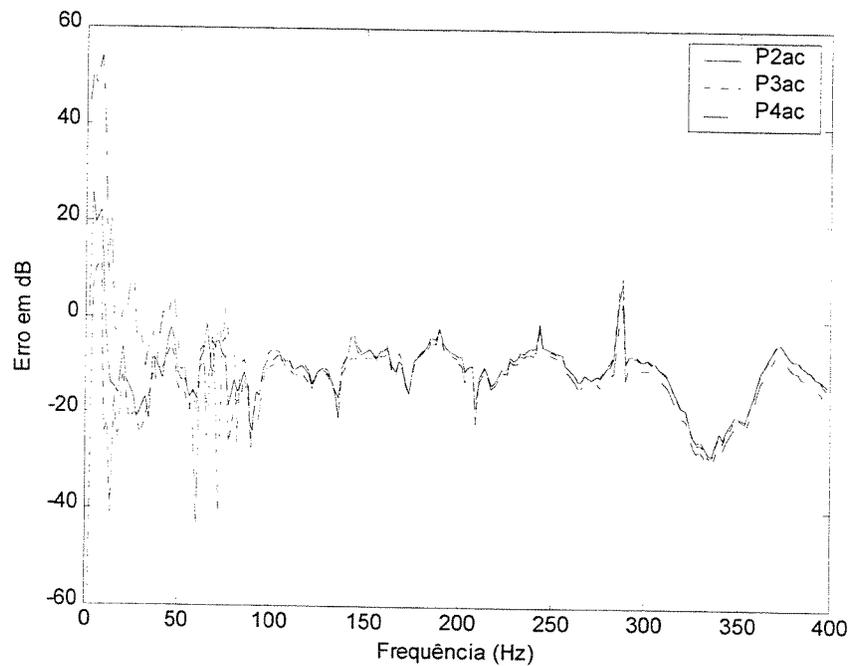


Fig. 4.85: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

Para avaliar mais profundamente os efeitos de campo próximo, usou-se o acelerômetro central de número 3 localizado a 18 cm da extremidade da viga. Nestas condições, praticamente, toda a faixa de frequência até 400 Hz é considerada em campo próximo.

Na Fig. 4.86 pode ser observada a relação de dispersão avaliada pelo método dos três pontos, comparada com a relação teórica. Nota-se, que na presença forte do efeito do campo próximo, a estimativa da relação de dispersão fica bastante afetada em função das simplificações de campo distante assumidas, sendo sensivelmente pior quando comparada com a Fig. 4.83.

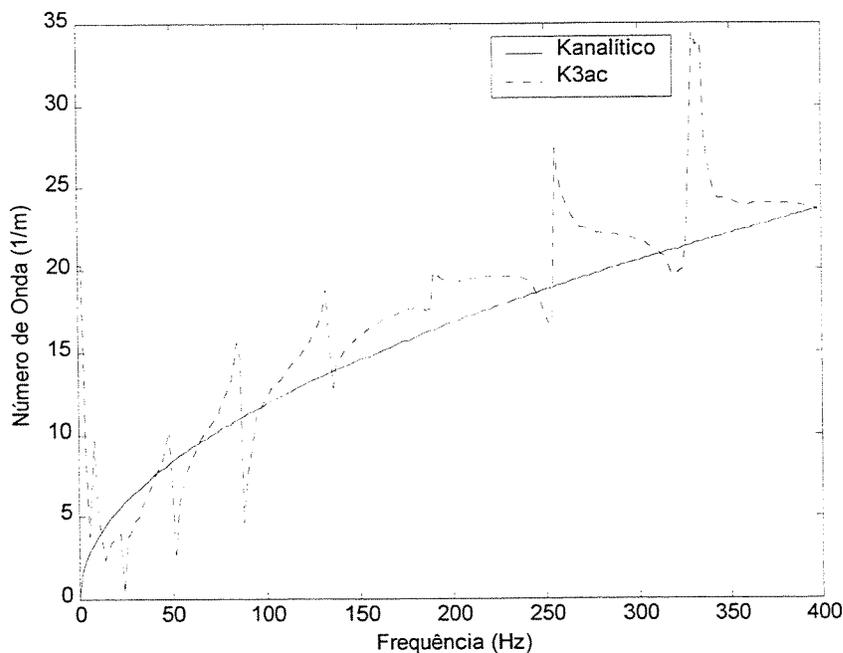


Fig. 4.86: Comparação da relação de dispersão analítica com o método dos três pontos e ref. acel. 3 a 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

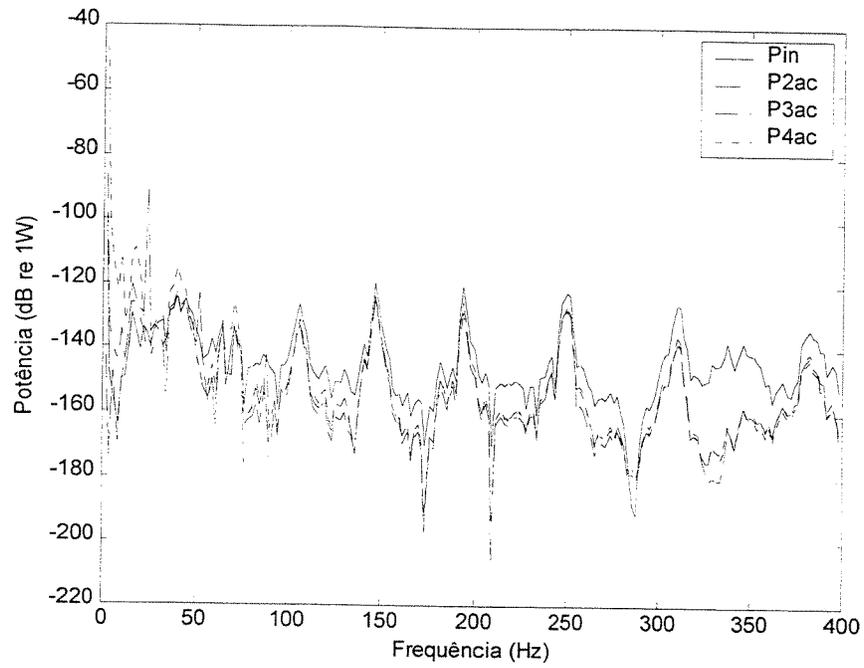


Fig. 4.87: Comparação do fluxo de potência pelo método dos 2, 3 e 4 acelerômetros com a potência injetada - 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

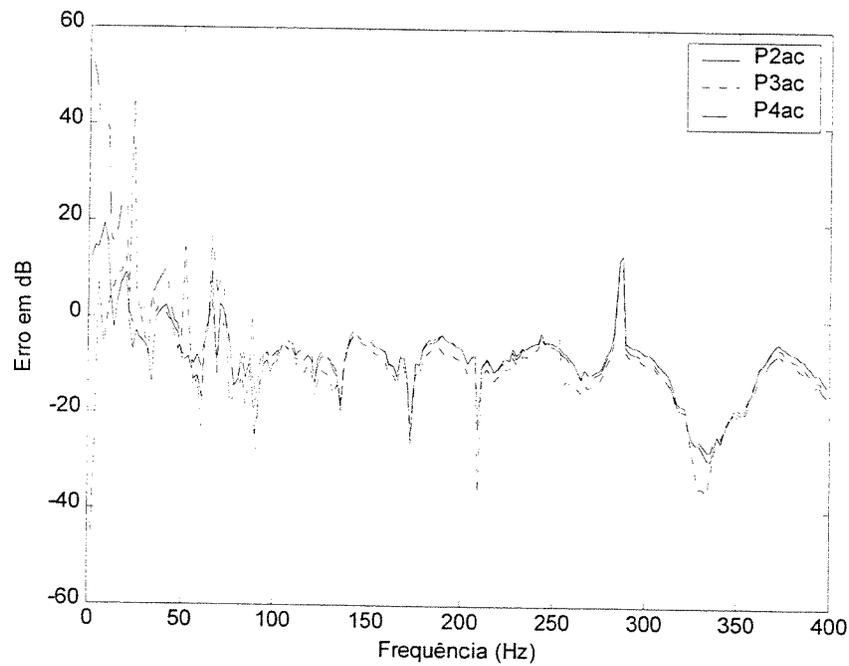


Fig. 4.88: Comparação dos erros envolvidos no fluxo de potência pelo método dos 2, 3, e 4 acelerômetros com a potência injetada - 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

O comportamento do fluxo de potência estimado em campo próximo, mostrado na Fig. 4.87 e seus erros envolvidos, observados na Fig 4.88, no geral, exceto por pontos específicos, mantiveram-se no mesmo patamar de qualidade, sendo válidas as mesmas observações feitas para os resultados em campo distante.

Como resumo do método das diferenças finitas, podemos tirar as seguintes conclusões gerais dos resultados experimentais: a) a estimativa da relação de dispersão é razoável em campo distante e piora muito em campo próximo, assim como ocorreu no caso numérico; b) quanto à estimativa do fluxo de potência, diferentemente do que ocorreu na simulação, em média e alta frequência, todos os métodos apresentaram praticamente os mesmos resultados, porém em baixa frequência a divergência entre eles foi bastante grande e não foi possível identificar claramente qual deles obteve um melhor comportamento.

4.3.2.2- Propagação de ondas – método ABCD

O segundo método a ser processado é o da identificação dos parâmetros A, B, C e D da solução analítica da propagação de ondas em vigas sob flexão.

Inicialmente aplicou-se o método usando-se somente 5 dos 14 sensores, usando como referência o acelerômetro 8, localizado a 0,58m do ponto de aplicação da força e final da viga. Como já comentado, nesta localização as frequências acima de 20 Hz são consideradas em campo distante.

A Fig. 4.89 mostra a comparação entre a relação de dispersão estimada e a teórica dada pela Eq. (2.13), na qual observa-se um resultado, no geral, pior que o conseguido pela aproximação das diferenças finitas, observada na Fig. 4.83.

Na Fig. 4.90 observa-se o comparativo entre a potência injetada, dada pela Eq. (2.7), e os resultados da estimativa do fluxo de potência através da Eq. (3.25), que usa somente os

parâmetros A e B, ou seja, admitindo a hipótese de campo distante, e através da Eq. (3.26) com o uso também dos parâmetros C e D, ou seja, considerando os efeitos de campo próximo.

Os erros envolvidos na estimativa do fluxo de potência podem ser observados na Fig. 4.91, onde nota-se que a consideração dos termos de campo próximo, apresenta, nas baixas frequências nas quais o efeito do campo próximo é mais intenso, um melhor resultado quando comparado ao método que considera somente os termos de campo distante. Nas médias e altas frequências, os métodos comparados são praticamente idênticos.

Na próxima condição testada, utilizaram-se ainda somente 5 sensores, porém centrados no acelerômetro 3, distante a 0.18m do final livre da viga. Nesta condição de localização, toda faixa de frequência, até 400 Hz, é considerada em campo próximo.

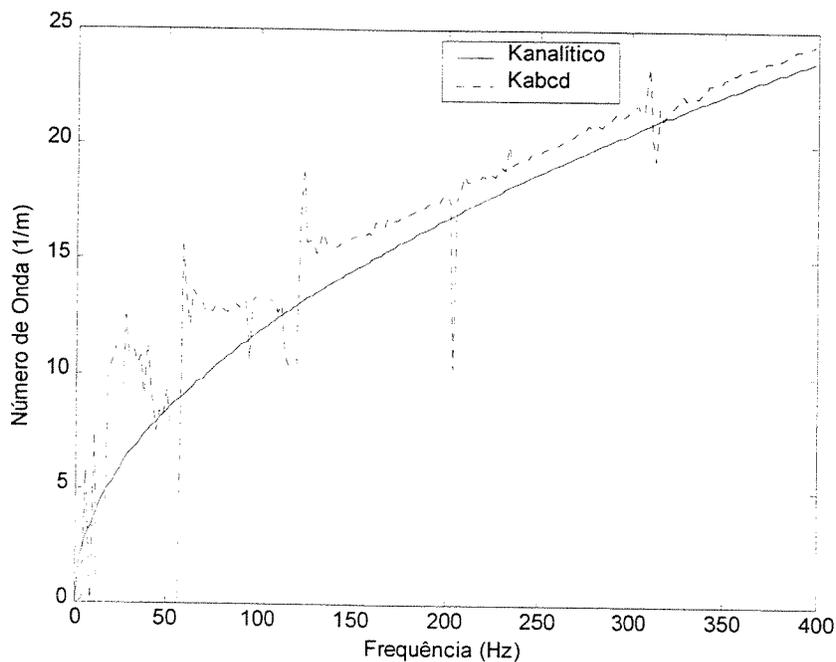


Fig. 4.89: Comparação da relação de dispersão analítica com o método ABCD com 5 pontos e ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

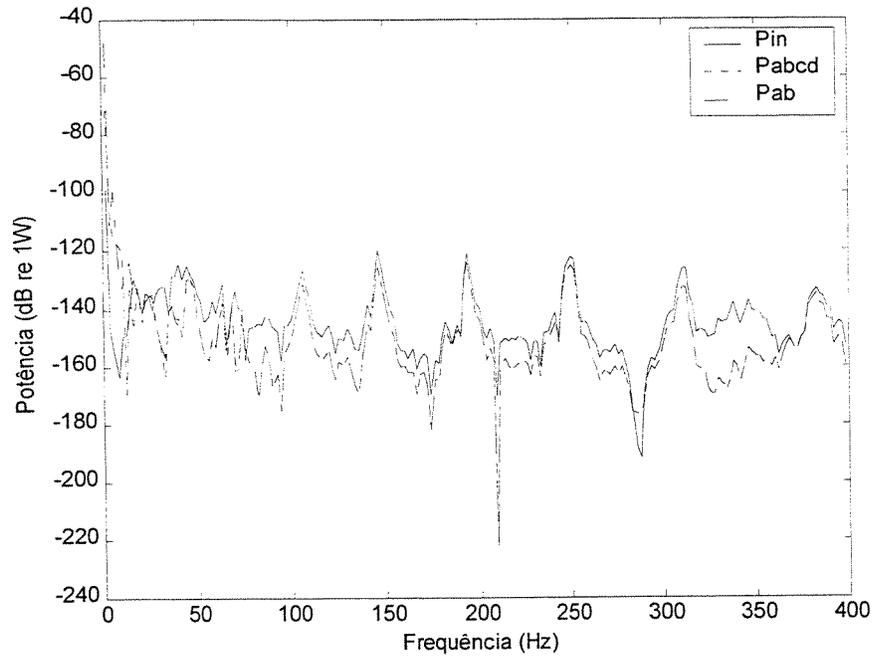


Fig. 4.90: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

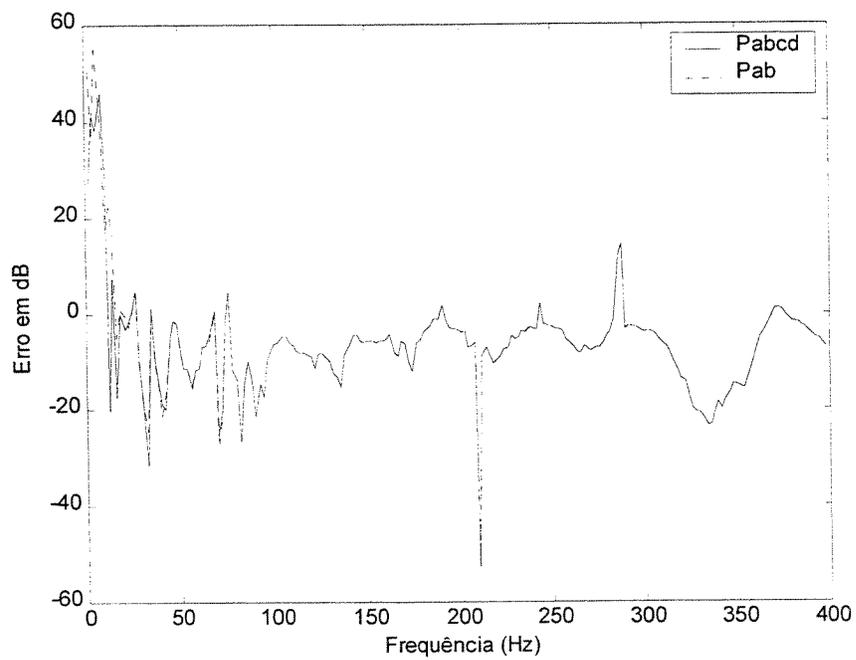


Fig. 4.91: Comparação dos erros no fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 8 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

Na Fig. 4.92 observa-se a comparação entre a relação de dispersão estimada e a teórica, e nota-se um resultado pior quando comparado ao mesmo método aplicado em campo distante, demonstrando a dificuldade de estimar o número de onda em campo próximo.

A comparação do fluxo de potência estimado contra o injetado nesta condição, na qual o efeito de campo próximo é mais intenso, é mostrado na Fig. 4.93, e os erros envolvidos na Fig. 4.94, na qual observam-se praticamente os mesmos resultados obtidos em campo distante, mostrados nas Figs 4.90 e 4.91, exceto nas frequências bem baixas. Observa-se ainda que, como no caso anterior, nas frequências muito baixas, tende-se a ter um melhor resultado quando são considerados o termos de campo próximo. Em relação ao método das diferenças finitas, o desempenho parece ser bastante similar.

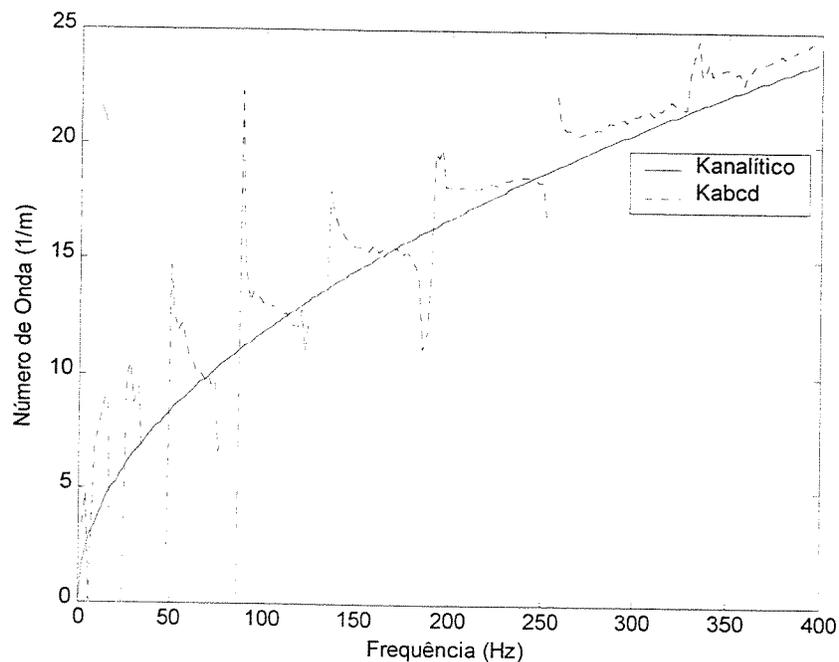


Fig. 4.92: Comparação da relação de dispersão analítica com o método ABCD com 5 pontos e ref. acel. 3 a 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

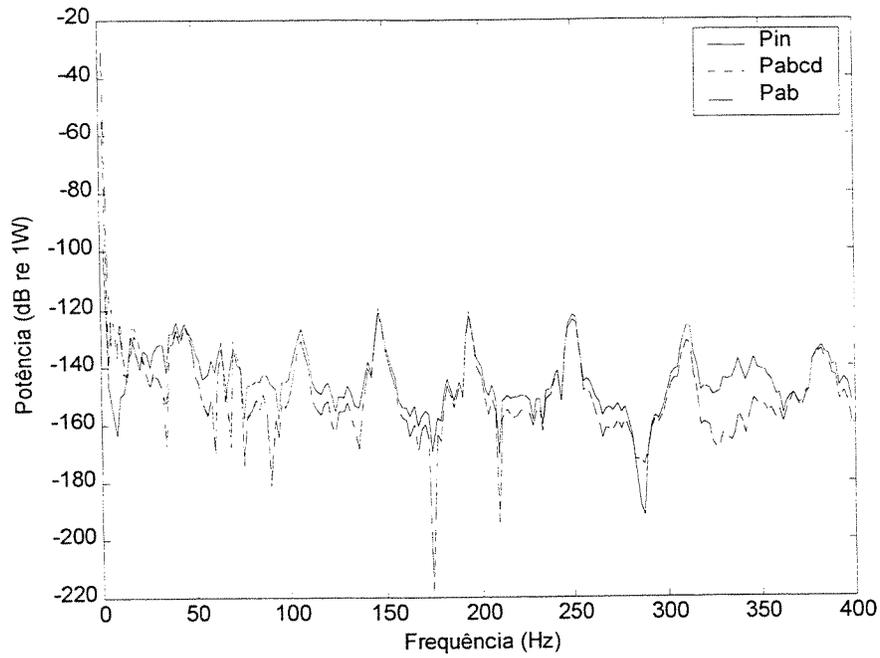


Fig. 4.93: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 3 a 58cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

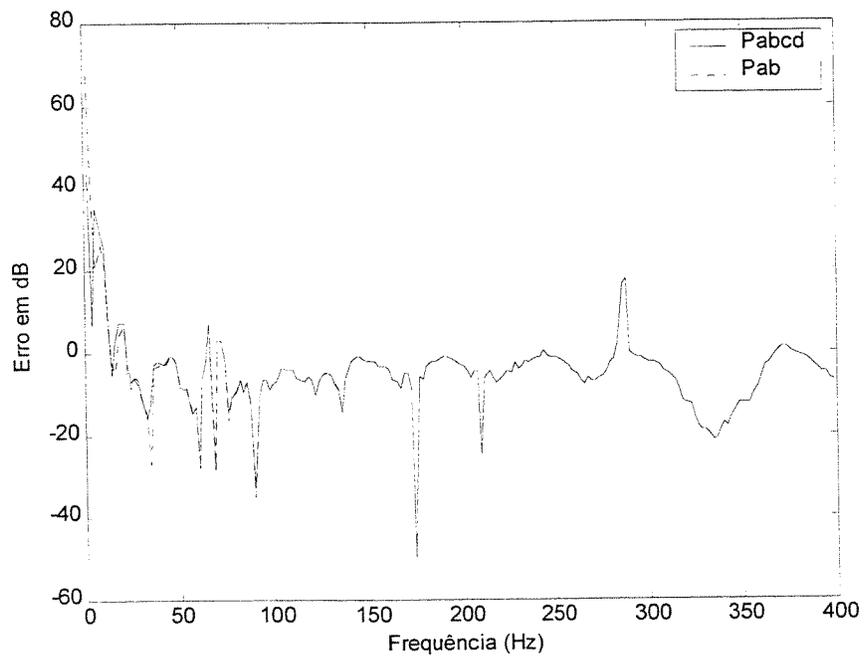


Fig. 4.94: Comparação dos erros no fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 5 pontos ref. acel. 3 a 18cm do final da viga, $\Delta x = 8\text{cm}$

Para finalizar, aplicamos ao método ABCD todos os acelerômetros medidos.

Na Fig 4.95 é mostrada a comparação entre a relação de dispersão teórica e a estimada pelo método. Observa-se uma grande melhoria nos resultados obtidos, em toda a faixa de frequência, porém observa-se ainda uma dificuldade em estimar valores em baixa frequência.

Nas Figs. 4.96 e 4.97, observam-se a comparação entre o fluxo de potência estimado e a injetada, e os erros encontrados nesta estimativa. Nota-se uma pequena melhoria de qualidade dos resultados nas baixas e médias frequências, em relação aos casos anteriores, provavelmente explicado pelo aumento no valor do condicionamento da matriz do SLE associado ao problema. Na Fig 4.97, dos erros, observa-se também que quase não existem diferenças entre a utilização ou não da hipótese de campo distante, sendo notadas somente nas frequências muito baixas.

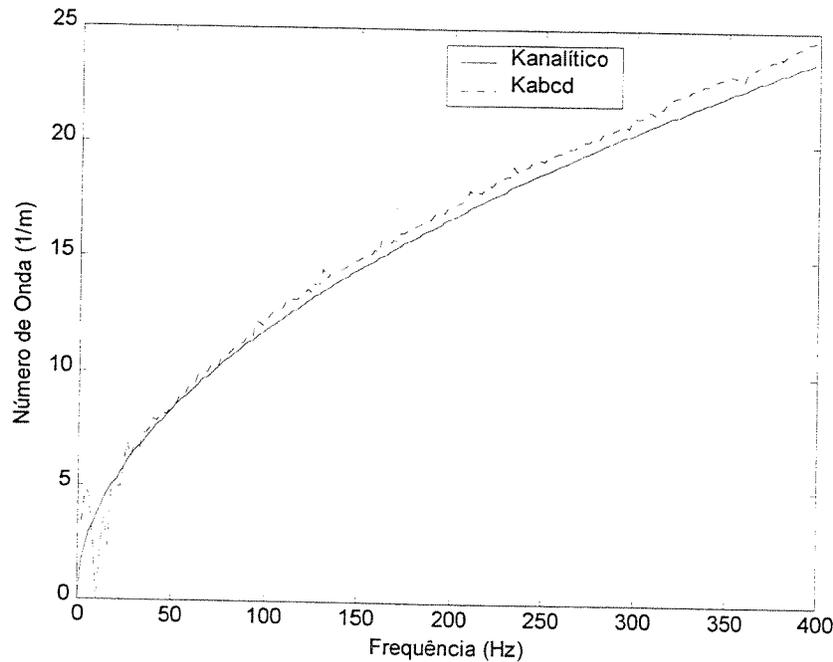


Fig. 4.95: Comparação da relação de dispersão analítica com o método ABCD com 14 pontos,
 $\Delta x = 8\text{cm}$

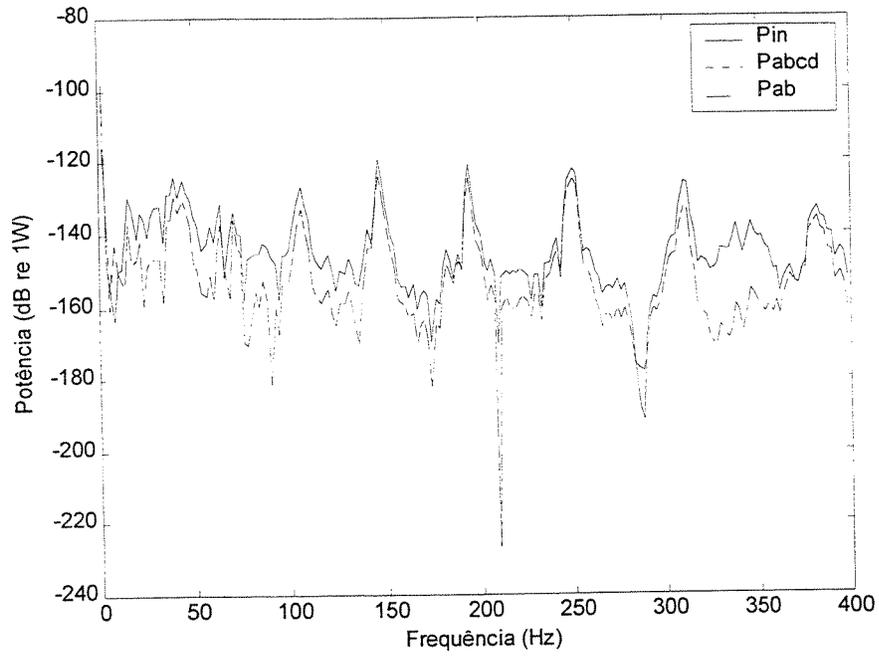


Fig. 4.96: Comparação do fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

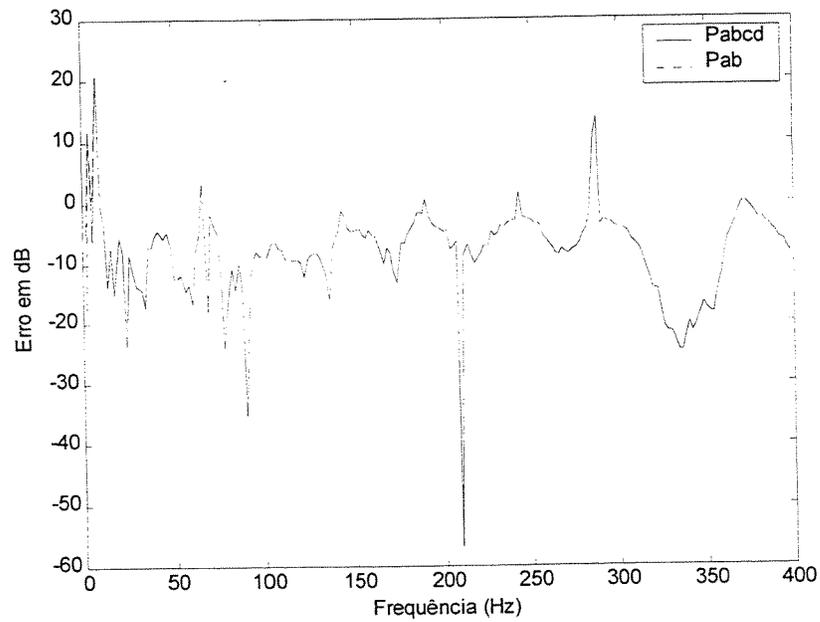


Fig. 4.97: Comparação dos erros no fluxo de potência pelo método ABCD com a potência injetada – 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

Como no caso da simulação analisamos as ordens de grandeza dos parâmetros A, B, C e D estimados, na Fig. 4.98 são mostrados os valores obtidos em função da frequência, para este último caso utilizaram-se os 14 acelerômetros.

Nota-se que, como ocorreu no caso do modelo, somente em baixa frequência, o parâmetro D, tem uma ordem de grandeza equivalente aos demais, e portanto, em frequências mais altas, mesmo com o parâmetro C sendo significativo, o produto (CD) usado na Eq. (3.25) é pequeno, e não influencia na estimativa do fluxo de potência.

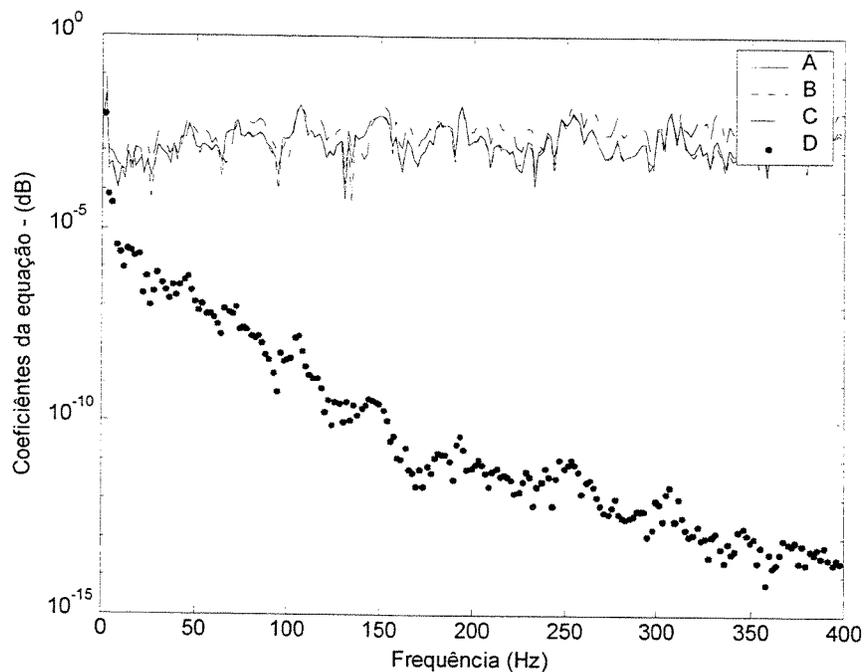


Fig. 4.98: Parâmetros A, B, C, e D obtidos com 14 pontos - $\Delta x = 0.08\text{m}$ e $x = 0.50\text{m}$

Como conclusão geral em relação à aplicação do método ABCD aos dados experimentais tem-se que: a) a estimativa da relação de dispersão é muito afetada pelo campo próximo e melhora muito com o aumento do número de sensores usados; b) mesmo com o uso de todos os sensores não se conseguiu um bom resultado na estimativa do número de onda em baixa frequência; c) a estimativa do fluxo de potência parece ser razoavelmente insensível à presença do campo próximo; d) o uso dos termos de campo próximo, usados na Eq. (3.25), tende a melhorar a estimativa do fluxo de potência em frequências muito baixas, e acima destas

freqüências é indiferente usar ou não estes termos; e) o aumento do número de sensores melhorou a estimativa da relação de dispersão, e os resultados da estimativa do fluxo de potência em baixa e média freqüência, provavelmente pela melhora ocorrida no condicionamento da matriz do SLE associado ao problema; f) o método apresentou um desempenho semelhante, na estimativa do fluxo de potência, ao método das diferenças finitas.

4.3.2.2- Aproximação pela RDFS

O último método a ser avaliado experimentalmente é o método alternativo proposto da RDFS. Como nos casos anteriores verificou-se o comportamento do método em campo distante, usando os acelerômetros posicionados próximo ao meio da viga, ou seja utilizando o acelerômetro de número 8, a 0.58m da extremidade livre da viga como referência central do vetor de medição. Como citado anteriormente, este é um método típico a ser aplicado a uma grande densidade espacial de medidas, porém para tentarmos expor as potencialidades do método usaram-se inicialmente somente 7 pontos de medidas separados por $\Delta x = 0.08m$.

A Fig. 4.99 mostra a comparação da relação de dispersão teórica dada pela Eq. (2.13) e as estimadas pelas Eqs. (3.38a) e (3.38b), com e sem a hipótese de campo distante.

Na Fig. 4.100 observam-se as comparações da potência injetada dada pela Eq. (2.7) com as estimativas do fluxo de potência calculadas nos 7 pontos através da Eq. (3.16), que considera o efeito do campo próximo.

As mesmas comparações com a potência injetada são mostradas na Fig. 4.101, porém com as estimativas do fluxo de potência obtidas através da Eq. (3.17b) na qual é usada a relação de dispersão teórica e a hipótese de campo distante. A Fig 4.102 mostra esta comparação somente para o acelerômetro 8, usado como referência central do vetor de medição.

Para finalizar as comparações em campo distante, observam-se na Fig. 4.103, os erros envolvidos na estimativa do fluxo de potência, feitas com as Eqs. (3.16) e 3.17b), calculada para o acelerômetro 8.

Na próxima condição testada consideraram-se ainda 7 pontos, porém centrados no acelerômetro 4 distante 0.26m do final da viga, tentando-se colocar o vetor de medição nas proximidades da aplicação da força sob forte efeito do campo próximo.

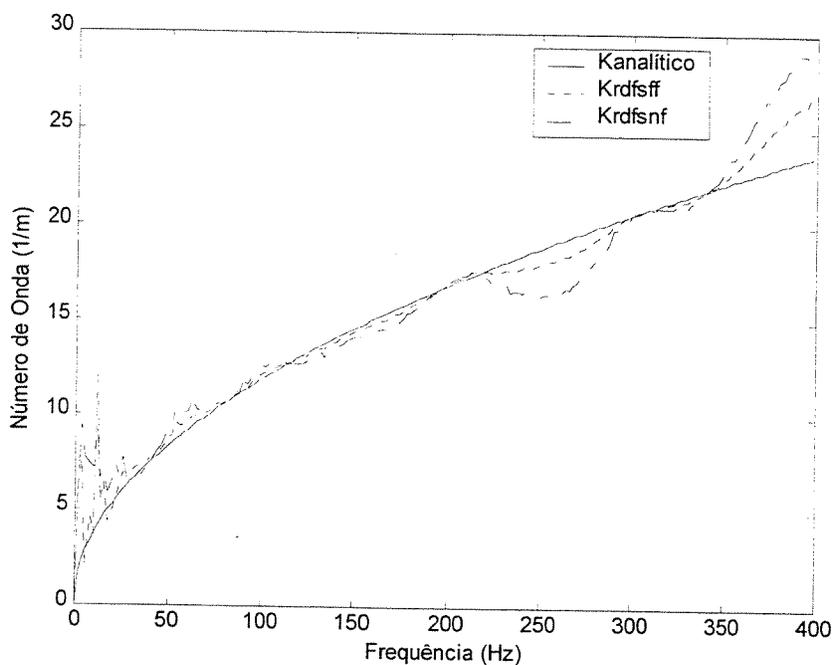


Fig. 4.99: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{cm}$ do final da viga (acel. 8)

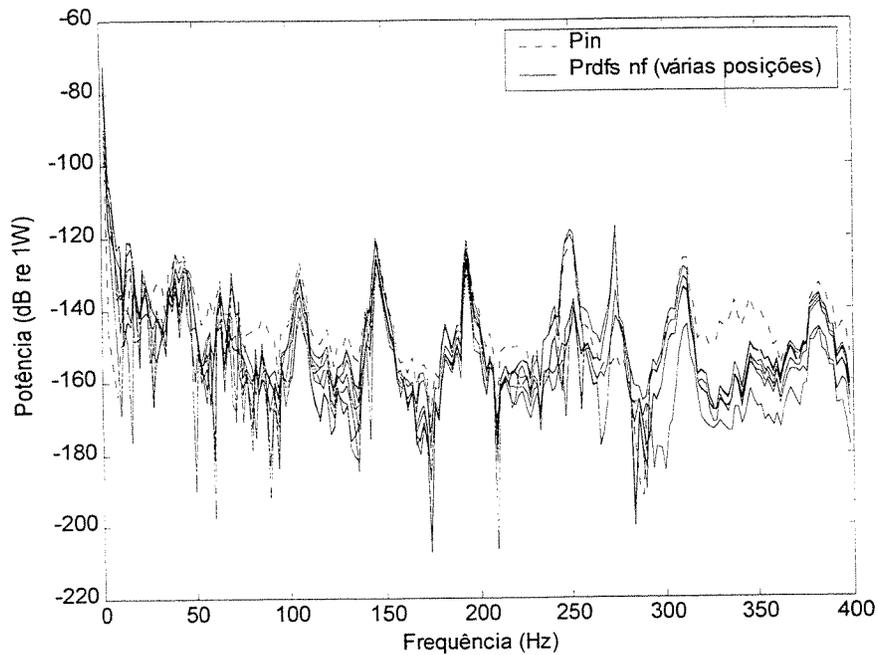


Fig. 4.100: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{ cm}$ do final da viga (acel. 8)

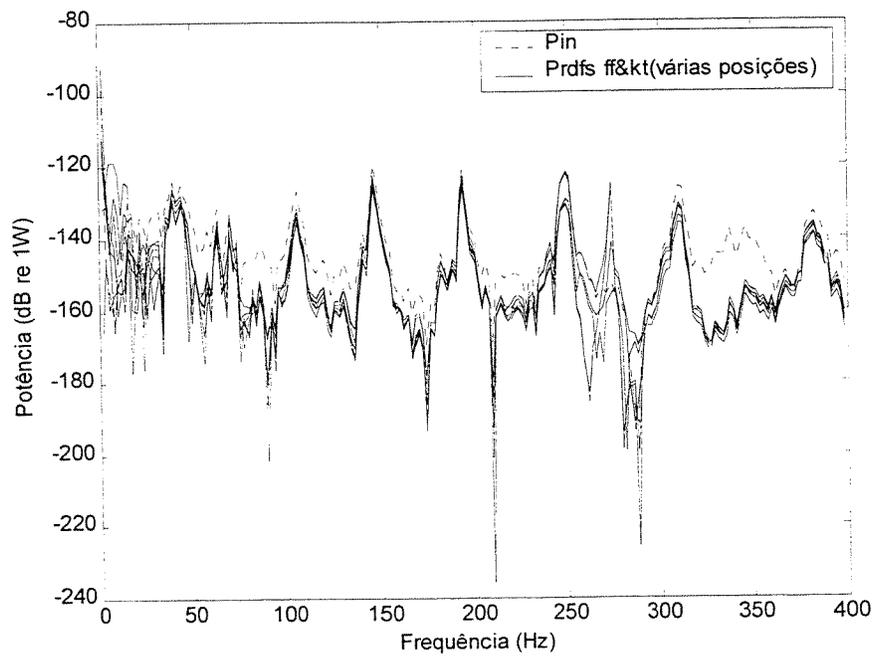


Fig. 4.101: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{ cm}$ do final da viga (acel. 8)

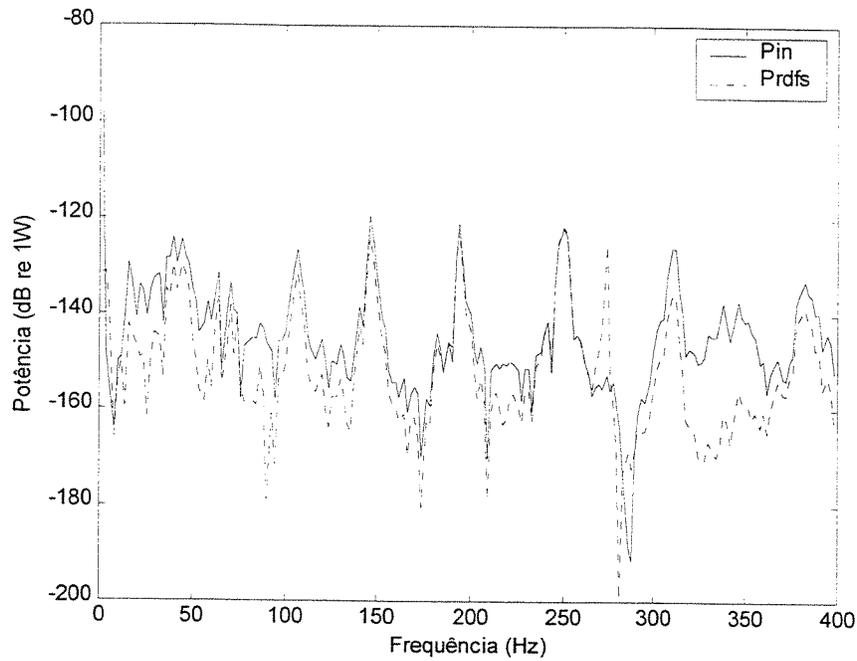


Fig. 4.102: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – acel. 8 referência, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 58\text{ cm}$ do final da viga

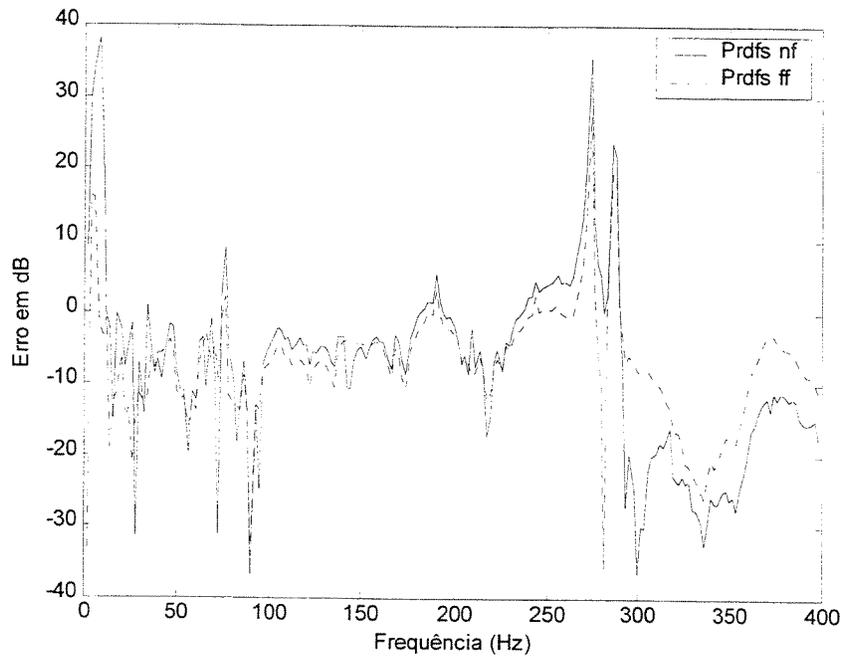


Fig. 4.103: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no acel 8 referência (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

A Fig. 4.104 mostra a comparação entre a relação de dispersão estimada, pelas Eqs. (3.38a) e (3.38b) e os valores teóricos. Nota-se a dificuldade em estimar os valores da relação de dispersão em baixa frequência, porém em médias e altas frequências, observa-se uma razoável qualidade nos valores encontrados em relação aos valores analíticos, mesmo estando sob efeito de campo próximo.

Nas Figs 4.105 e, 4.106 observam-se as estimativas dos 7 pontos do fluxo de potência através das Eqs. (3.16) e (3.17b) respectivamente e a potência injetada, e na Fig. 4.107 a estimativa da potência pela Eq. (3.17b) para o acelerômetro 4, usado como referência central do vetor de medição.

O gráfico dos erros envolvidos na estimativa do fluxo de potência pelas Eqs. (3.16) e (3.17b) para o acelerômetro de referência é mostrado na Fig. 4.108.

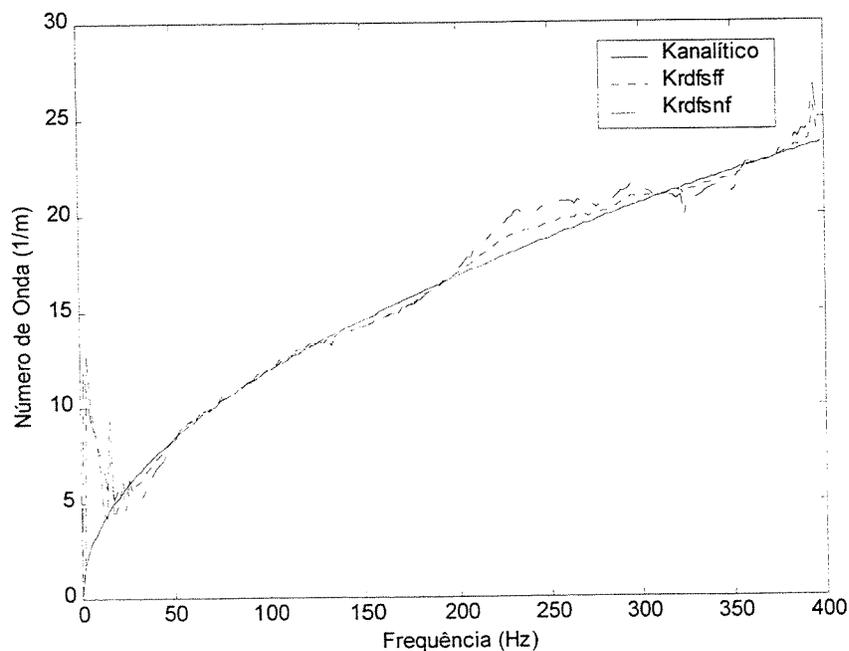


Fig. 4.104: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com 7 pontos,

$\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{cm}$ do final da viga (acel. 4)

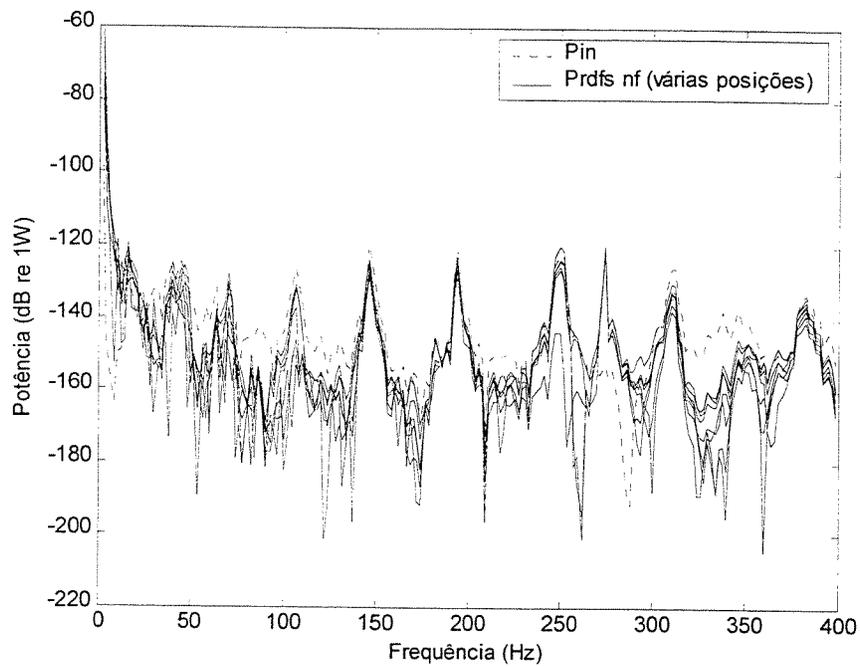


Fig. 4.105: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{ cm}$ do final da viga (acel. 4)

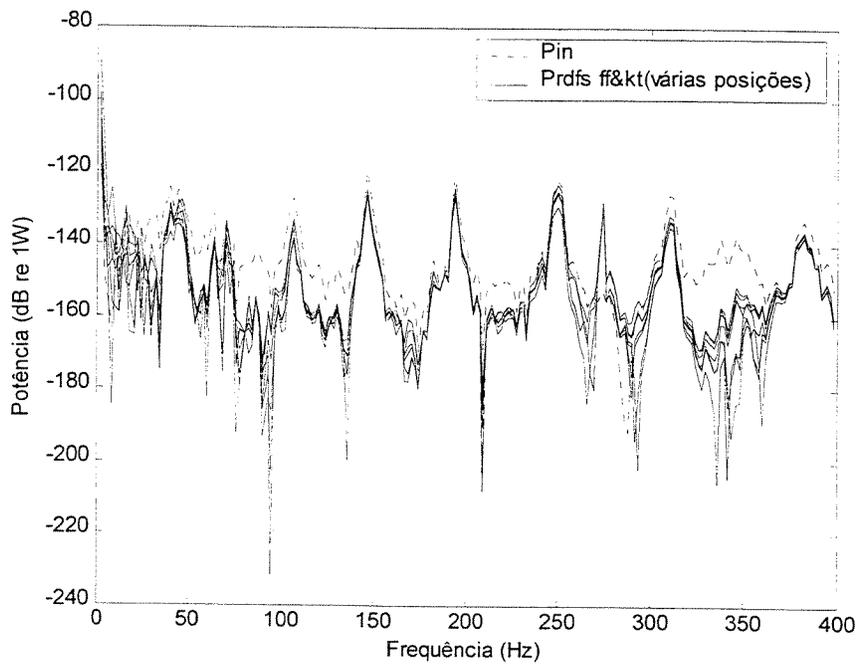


Fig. 4.106: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{ cm}$ do final da viga (acel. 4)

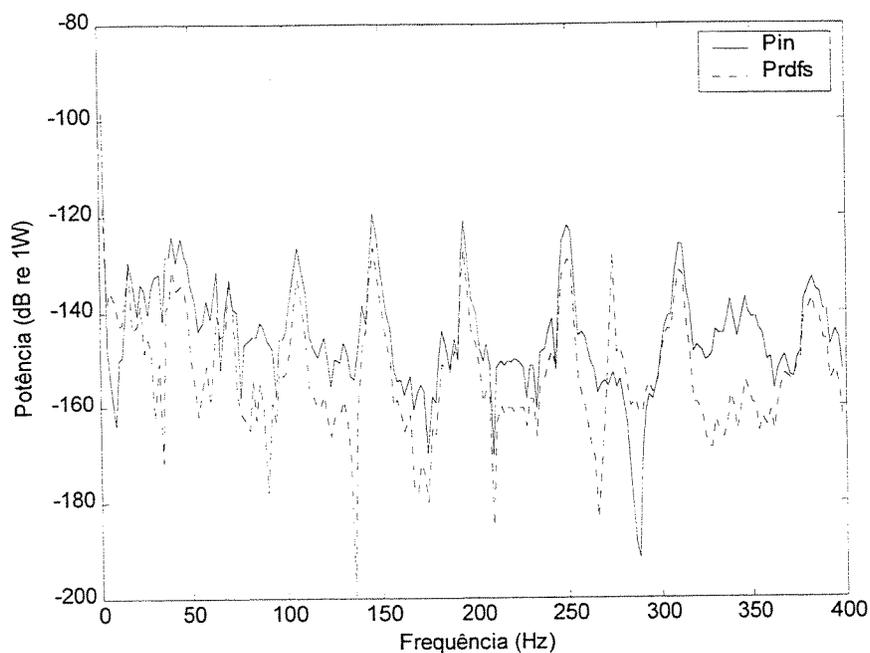


Fig. 4.107: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – acel. 4 referência, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 26\text{ cm}$ do final da viga

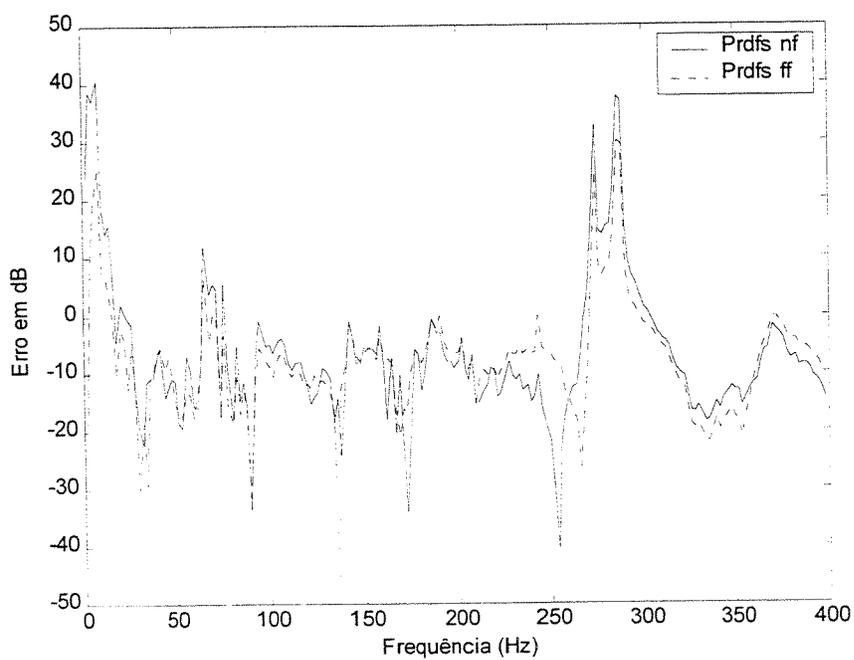


Fig. 4.108: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no acel 4 referência (com e sem hipótese de campo próximo) 7 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

Para finalizar este estudo, utilizaram-se todos os pontos medidos.

A comparação da relação de dispersão teórica com as estimadas pelo método é vista na Fig. 4.109, na qual observa-se uma grande melhoria na qualidade dos valores obtidos.

Os resultados da comparação das estimativas do fluxo de potência calculados para os 14 pontos com ambas as Eqs. (3.16) e (3.17b) são mostrados nas Figs. 4.100 e 4.101 respectivamente. Na Fig. 4.112 mostra-se o comparativo da estimativa do fluxo de potência para o acelerômetro central de número 7 obtida pela Eq. (3.17b).

A Fig. 4.113 mostra os erros obtidos nas estimativas dos fluxos de potência, considerando a os termos de campo próximo usados na Eq. (3.16) e sem o uso desta hipótese, na Eq. (3.17b).

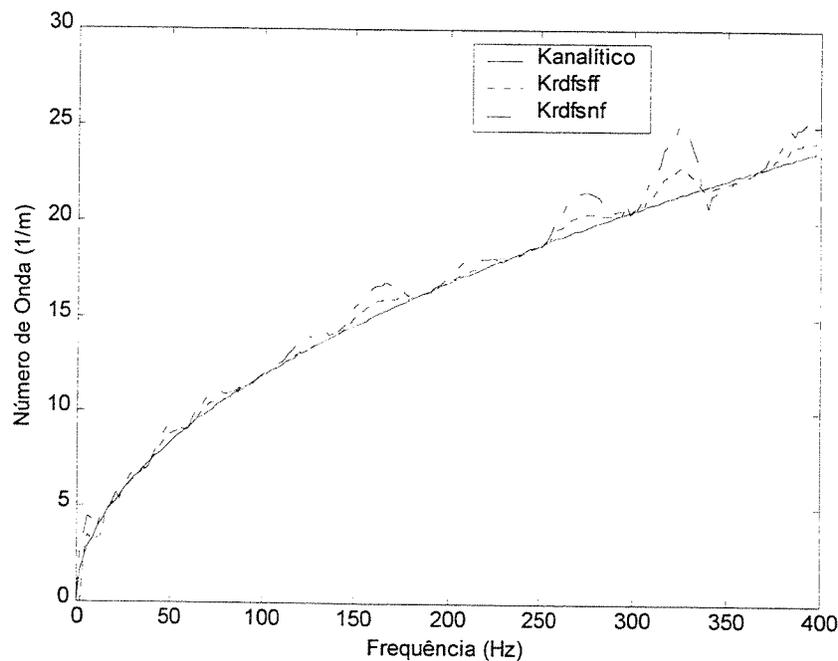


Fig. 4.109: Comparação da relação de dispersão analítica com o método RDFS com os 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

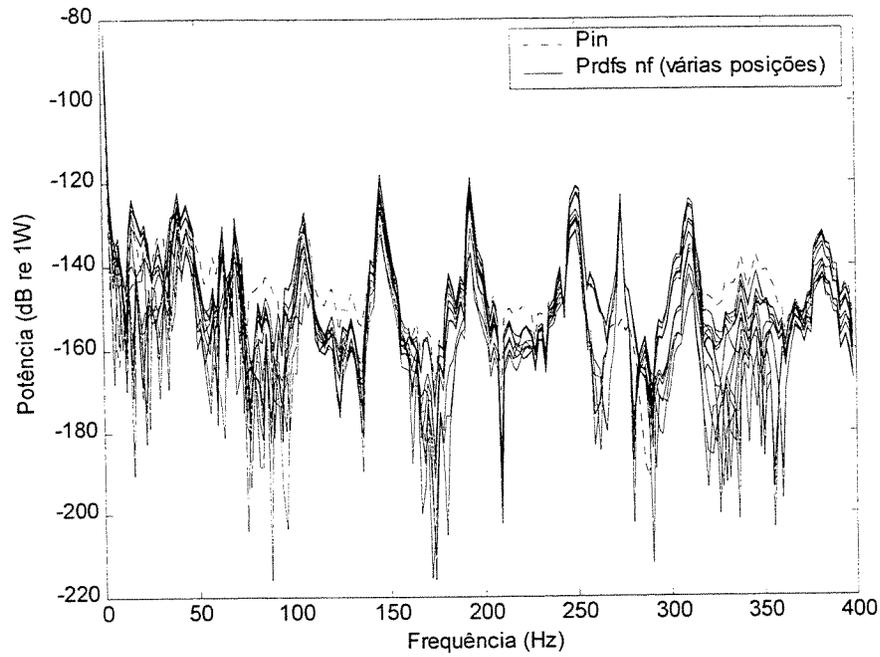


Fig. 4.110: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.16) com a potência injetada – com os 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

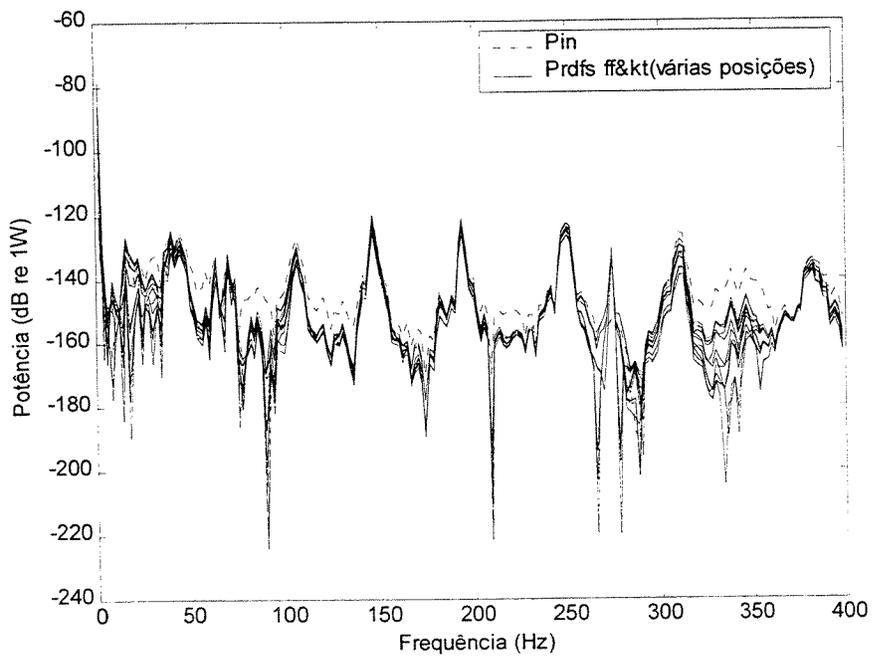


Fig. 4.111: Comparação do fluxo de potência pela RDFS - Eq. (3.17b) com a potência injetada – com os 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

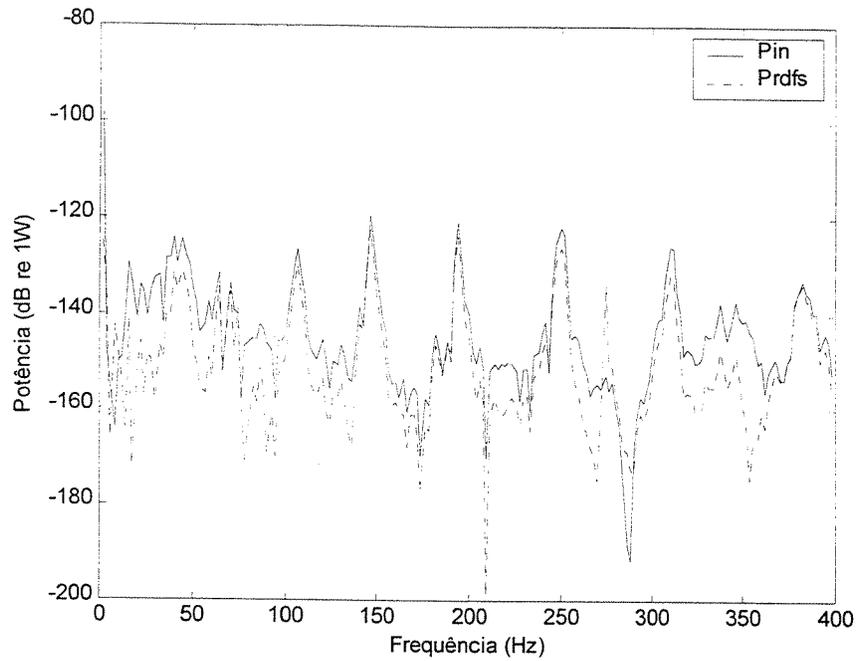


Fig. 4.112: Comparação do fluxo de potência pela RDFS Eq. (3.17b) com a potência injetada – acel. 7 referência, $\Delta x = 8\text{cm}$ e $x = 50\text{ cm}$ do final da viga

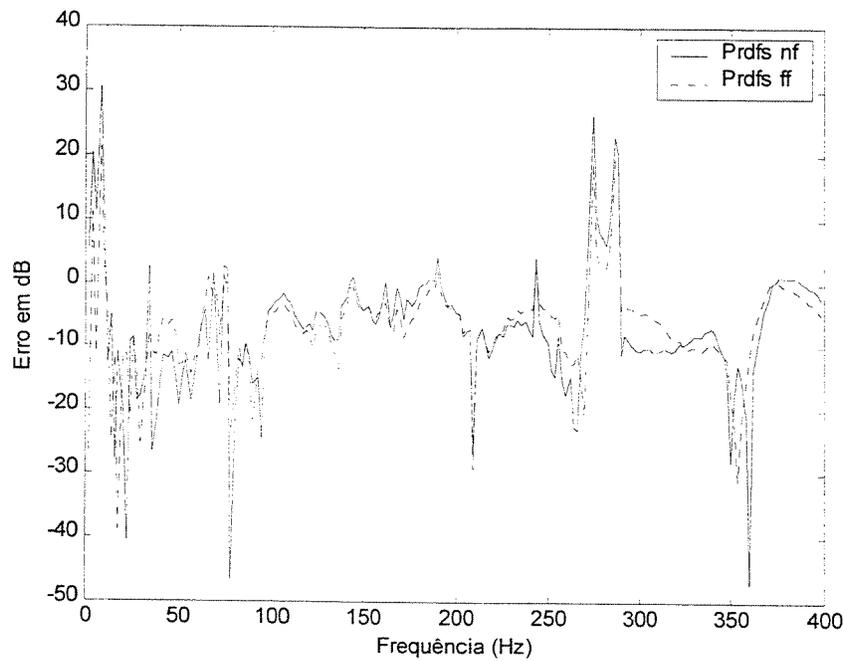


Fig. 4.113: Erros na estimativa do fluxo de potência pela RDFS no acel 7 referência (com e sem hipótese de campo próximo) com os 14 pontos, $\Delta x = 8\text{cm}$

Em função da pouca quantidade de pontos medidos na estrutura, tiraram-se as seguintes conclusões gerais do método da RDFS aplicado aos dados experimentais: a) a qualidade da estimativa da relação de dispersão foi muito superior aos demais métodos, principalmente quando todos os pontos foram usados; b) a estimativa da relação de dispersão foi sensível ao número de sensores, ou ao tamanho do vetor de medida, o mesmo não ocorrendo com as estimativas do fluxo de potência; c) a ordem de grandeza dos erros na estimativa do fluxo de potência foi compatível aos outros métodos; d) o método mostrou-se capaz de estimar os valores de potência e da relação de dispersão mesmo em campo próximo; e) pela sua formulação, o método é capaz de mostrar o fluxo de potência em cada ponto em que foi feita a medição; f) como a distância entre os sensores é de $\Delta x = 0.08\text{m}$, acima de aproximadamente de 270 Hz temos uma deficiência nos valores estimados, pois acima desta frequência estamos violando a condição de $\Delta_{\min} = 1/4\lambda_{\min} = 0.0663$ onde $\lambda_{\min} = 2\pi / k_{\max}$ requerida pela método, o que também ocorreu nos dados simulados e pode ser visto principalmente nos gráficos de erros nas Figs. 4.103, 4.108 e 4.113.

Propõe-se ainda um estudo mais detalhado sobre a influência dos parâmetros T , o período artificial da RDFS, e P , o número de harmônicas necessárias para o ajuste da RDFS. Como comentado anteriormente, por teoria, o valor de T deve ser tomado arbitrariamente maior ou igual ao tamanho do vetor de medição, ou seja, “dilatando” artificialmente o período, e P deve ser maior ou igual a 2, sendo maior quanto maior a frequência. Em nosso caso, obtivemos resultados muito bons assumindo $T = \lambda(\omega)$, onde $\lambda(\omega)$ é o comprimento de onda em função da frequência e, por conta disto, $P=2$, independentemente da frequência. Este resultado deveria, como estudo, ser aplicado em vigas com outras condições de contorno, e também nos estudos em placas.

Na parte experimental, seria importante aumentar bastante o número de pontos onde são feitas as medidas, aumentando assim a resolução espacial, o que seria possível através do uso do vibrômetro laser com sistema de varredura ótica (“scanner”). Sugere-se, também, que o cálculo da intensidade seja feito diretamente com funções de resposta em frequência, extraídas com grande número de médias e alta resolução em frequência. Neste estudo partiu-se de dados no domínio do tempo para possibilitar a regressão espacial dos dados antes de passar para o domínio da frequência; com isto devido a limitações de capacidade de processamento de dados, os espectros ficaram com resolução em frequência pobre. Acredita-se que se poderiam obter melhores resultados experimentais desta forma.

Uma outra proposta de trabalho que parece ser promissora é a tentativa de se obter experimentalmente, pois existem no mercado sensores aptos a fazê-lo, as acelerações angulares necessárias na formulação para a obtenção do fluxo de potência através das curvas de forma de interpolação de Elementos Finitos.

Finalmente, seria de grande interesse a aplicação desta técnica em situações mais realistas, de interesse industrial.

- [10] Bauman P.D., Measurement of Structural Intensity : analytic and experimental evaluation of various techniques for the case of flexural waves in one-dimensional structures. *Journal of Sound and Vibration* 174 (5), 677-694. 1994.
- [11] Hambric S.A., Taylor P.D.. Comparison of experimental and finite element structure-borne flexural power measurements for a straight beam. *Journal of Sound and Vibration* 170 (5), 595-605. 1994.
- [12] Halkyard C.R., Mace B.R., A wave component approach to structural intensity in beams. *Proceedings of the 4th Int. Congress on Intensity Techniques*, Selins, France, 183-190. 1993.
- [13] Halkyard C.R., Mace B.R., Structural intensity in beams - waves, transducer systems and the conditioning problem. *Journal of Sound and Vibration* 185 (2), 279-298. 1995.
- [14] Blotter J.D., West R.L., Experimental and analytical energy and power flow using a scanning laser Doppler vibrometer. *SPIE vol. 2358 Vibration Measurements* 266-275. 1994.
- [15] Arruda J.R.F., Campos J.P., Piva J.I., Experimental Determination of Flexural Power Flow in Beams Using a Modified Prony Method. *Journal of Sound and Vibration* 197 (3), 309-328. 1996.
- [16] Pascal J.C., Loyau T., Man III J.A., Structural Intensity from spatial Fourier transformation and BAHIM acoustical holography method. *Proceedings of the Congress on Structural Intensity and Vibration Energy Flow*, Selins, France, 27-29 August 1990, 197-204. 1990.
- [17] Pascal J.C., Loyau T., Carniel X., Complete determination of structural intensity in plates using laser vibrometers. *Journal of Sound and Vibration* 161 (3), 527-531. 1993.

- [18] Arruda J.R.F., Campos J.P., Piva J.I., Measuring flexural power flow in beams using a spatial-domain regressive discrete Fourier series. *Proceedings ISMA 21th- Noise and Vibration Engineering* – Vol 1 641-653 1996.
- [19] Hambric S.A., “Influence of diferent wave motion types on finite element power flow calculations”. *International Congress on Intensity Techniques*, Cetim, Selins, 215-222. 1990.
- [20] Gavric L., Pavic G., A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach. *Journal of Sound and Vibration* 164 (1), 29-43. 1993.
- [21] Arruda J.R.F., Analysis of non-equally spaced data using a regressive discrete fourier series. *Journal of Sound and Vibration* 156 (3), 571-574. 1992.
- [22] Arruda J.R.F., Surface smoothing and partial spatial derivatives computation using a regressive discrete Fourier series. *Mechanical Systems and Signal Processing* 6, 41-50. 1992.
- [23] Goyder H.G.D., White R.G., Vibrational power flow from machines into built-up structures, part I: introduction and approximate analyses of beam and plate-like foundations. *Journal of Sound and Vibration* 68 (1), 59-75. 1980.
- [24] Craig R.R.Jr., Structural Dynamics. An Introduction to Computer Methods. *New York: John Wiley & Sons*. 1981.
- [25] Doyle J.F., Wave Propagation in Structures: a spectral analysis approach. *New York, blabla*. 2nd Edition 1996.
- [26] Bendat J.S., Pierson A.G., Randon Data: Analysis and Measurement Procedures. *New York: John Wiley*. 1986.

- [27] Carniel X., Limitations théoriques et expérimentales sur la mesure accélérométrique de l'intensité vibratoire dans les poutres. *J. Acoustique* 1 (1988) 189-195. 1988.
- [28] Carniel X., Mesure de la propagation de l'énergie vibratoire dans les barres, méthodes intensimétriques. *Tese de doutorado em Acoustique Appliqueé na Université du Maine, França*, 1987.
- [29] Meyer B., Thomasson D., L'intensimétrie vibratoire: description, mise en oeuvre, résultats. *EDF bulletin de la direction des études et recherches - Série A, Nucleaire Hydraulique Thermique*. vol.3 suppl.4, 69-86. 1989.
- [30] Ewins D.J., Modal Testing: Theory and Practice. Letchworth: *Research Studies Press (Wiley)*. 1985.
- [31] Pavic G., Computation of Strutral Intensity in Beam-Plate Structures by Numerical Modal Analysis Using FEM. *Proceedings of the 3rd Intenational Congress on Intensity Thechniques*, Senlis, France, 207-214. 1990.
- [32] Junkins & Kim, ffbeam.m , *Dyn. & Ctrl of structures*. chapter 4. Programmed by Youdan Kim, Dep. of Airspace Enginnering Texas A&M University Rev. Nov 12,1992.
- [33] ISO 7626/1, *Vibration and Shock - Experimental Determination of Mechanical Mobility. Part 1: Basic Definitions and Transducers*. 1986 (E).

Apêndice A: Equação da viga de Euler-Bernoulli

O objetivo deste apêndice é a obtenção da Eq. (2.9) conhecida como equação de Euler-Bernoulli.

O modelo da viga em flexão de Euler-Bernoulli assume que a deflexão da linha de centro da viga é pequena e somente transversal, e mesmo assumindo a presença de força cortante transversal, negligencia a deformação devido a este tipo de esforço.

Considerando-se um elemento diferencial de uma viga esbelta, submetida a esforços conforme mostrado na Fig. A.1, podem-se tirar as seguintes relações:

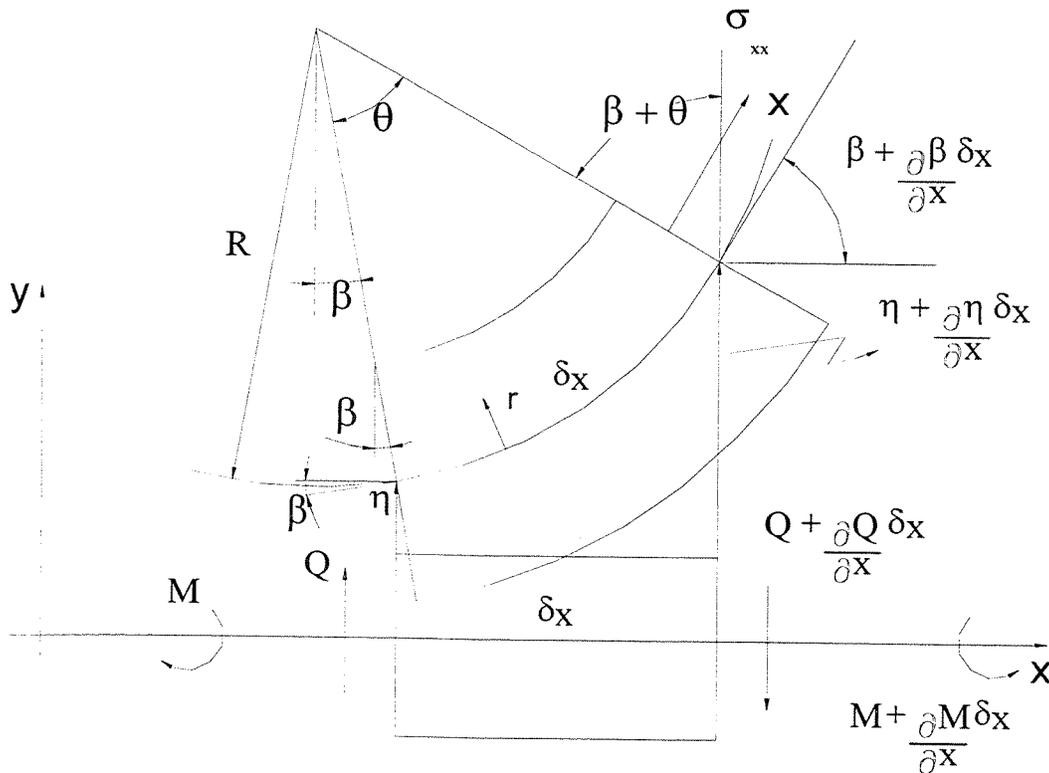


Fig. A.1: Deslocamento e deformação de um elemento de viga em flexão

Como definição de deformação tem-se:

$$\varepsilon_x(r) = \frac{(R-r)\theta - \delta x}{\delta x} \quad (\text{A.1})$$

Da Fig. A.1 tem-se:

$$\frac{1}{R} = \frac{\theta}{\delta x} \quad (\text{A.2})$$

$$\beta + \theta = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} \delta x \quad \text{ou} \quad \frac{\theta}{\delta x} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

Usando (A.2) em (A.3) obtém-se:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

e, de acordo com a Fig. A.1:

$$\text{tag} \beta \cong \frac{\left(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x \right) - \eta}{\delta x} \cong \beta \cong \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

Usando (A.5) em (A.4) tem-se:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.2), (A.3) e (A.6) em (A.1) obtém-se:

$$\varepsilon_x(r) = \frac{R\theta - r\theta - \delta x}{\delta x} = \frac{+\delta x - r\theta - \delta x}{\delta x} = -r \frac{\partial \beta}{\partial x} = -r \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{A.7})$$

Por definição, a tensão normal é dada por:

$$\sigma_{xx}(r) = E\varepsilon_x(r)$$

de onde, com (A.7), tem-se:

$$\sigma_{xx}(r) = -Er \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{A.8})$$

onde E é o módulo de Young.

Sabe-se também que o diferencial de momento é dado por:

$$dM = \sigma_{xx}(r)r dA \quad (\text{A.9})$$

e, então tem-se:

$$dM = -E \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} r^2 dA \quad (\text{A.10})$$

onde dA é o diferencial de área da seção transversal ($A = bh$) da viga

Integrando-se a Eq. (A.10) tem-se:

$$\int dM = -E \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \int r^2 dA$$

$$M = -EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{A.11})$$

onde I é o momento de inércia de área da viga dado por:

$$\int r^2 dA = I, \text{ que para barra retangular é dada por: } I = \frac{bh^3}{12}$$

Por definição a força cortante Q é dada por:

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$

Obtém-se então:

$$Q = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = +EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando-se a primeira lei de Newton ao elemento diferencial da viga tem-se:

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \delta x \right) = \rho \delta x A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (\text{A.14})$$

onde $\rho \delta x A$ é a massa do elemento, com ρ sendo a densidade ou massa por unidade de volume do material, e $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ a aceleração.

Da Eq. (A.14) pode-se tirar:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

Aplicando (A.13) em (A.15) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = -\rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.16})$$

que é a equação da viga em flexão na qual as hipóteses de de Euler-Bernoulli são válidas [2, 26].

Apêndice B: Equação de ondas Longitudinais e Transversais

O objetivo deste apêndice é a obtenção da equação de propagação de ondas de compressão e de cisalhamento e suas combinações (longitudinais, transversais e torsionais) em vigas, assim como a estimativa do fluxo de potência para cada tipo de onda.

B.1 - Ondas longitudinais

Em sólidos, como em líquidos e gases, pode ocorrer a propagação de ondas longitudinais puras, nas quais a direção do deslocamento da partícula coincide com a direção de propagação da onda.

Considerando-se um elemento diferencial de uma viga esbelta, submetida a esforços axiais em relação ao eixo “x” como mostrado na Fig. B.1, podem-se tirar as seguintes relações:

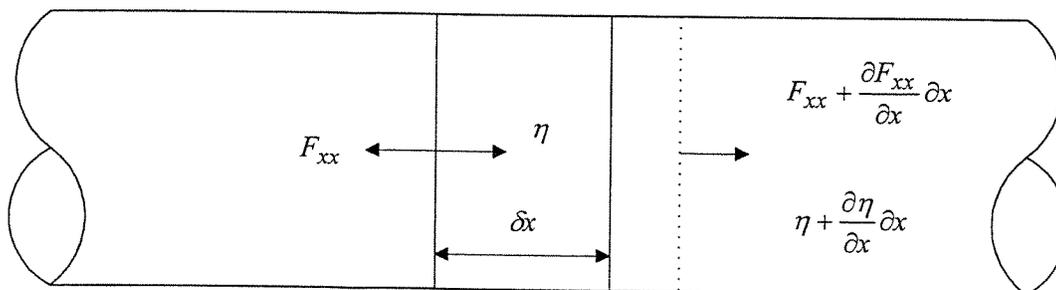


Fig. B.1: Deslocamentos, deformações e esforços em ondas longitudinais

A deformação axial do elemento é definida como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x) - \eta}{\delta x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.1})$$

Pela 1ª lei de Hooke, a tensão axial é dada pela seguinte relação:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$$

e portanto com (B.1) tem-se:

$$\sigma_{xx} = E \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

onde E é o módulo de Young.

Pode-se mostrar também que :

$$F_{xx} = \int \sigma_{xx} dA = EA \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.3})$$

onde dA é o diferencial da área transversal A da viga

Pela equação de equilíbrio das forças:

$$(F_{xx} + \frac{\partial F_{xx}}{\partial x} \delta x) - F_{xx} = \rho \delta x A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial F_{xx}}{\partial x} \delta x = \rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (\text{B.4})$$

Derivando-se a Eq. (B.3) em relação a “ x ” e igualando-se a (B.4), tem-se a equação de propagação das ondas longitudinais em vigas:

$$E \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$
$$c_L^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.5})$$

onde $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ é a velocidade de propagação da onda no material [2].

Para computar-se o fluxo de potência médio transportado através das ondas longitudinais utiliza-se a seguinte expressão:

$$\langle P_L \rangle_t = \left\langle F_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\rangle_t = \left\langle EA \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\rangle_t \text{ no domínio do tempo} \quad (\text{B.6})$$

ou no domínio da frequência:

$$\langle P_L \rangle_t = -2 \frac{EA}{\Delta x \omega^3} \Im \{ S_{a_1, a_2} \} \quad (\text{B.7})$$

onde ω é frequência e \Im denota a parte imaginária do espectro cruzado (S_{a_1, a_2} “double sided”) das acelerações medidas nos pontos separados pela distância Δx conforme mostrado na Fig. B.2 [6].

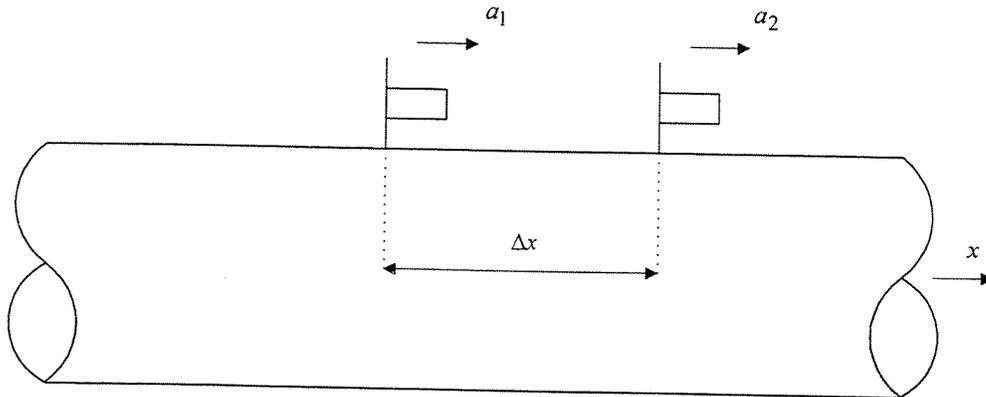


Fig. B.2: Configuração dos acelerômetros para medida de acelerações longitudinais

B2 - Ondas transversais / torcionais

Assim como os líquidos e gases, os sólidos podem também suportar não somente mudanças de volume, como também mudanças de forma através da sollicitação de cisalhamento. Isto

permite a ocorrência da propagação das ondas transversais nos sólidos, na qual a direção de propagação da onda é perpendicular a direção de deformação.

Para a obtenção das equações abaixo, considera-se um elemento diferencial de uma viga esbelta submetida a esforços de cisalhamento. O elemento originalmente retangular, toma a forma de um paralelepípedo, conforme mostra a Fig. B.3 abaixo:

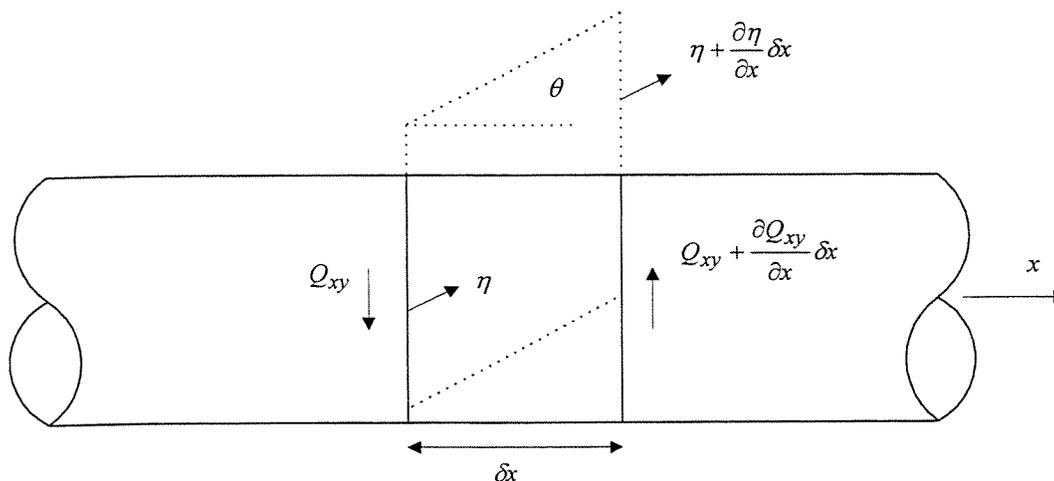


Fig. B.3: Deslocamentos, deformações e esforços em ondas transversais

A deformação tangencial do elemento é definida como:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x) - \eta}{\delta x} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

onde para pequenas deformações: $\frac{\partial \eta}{\partial x} \cong \theta$ (B.8)

A relação entre a tensão de cisalhamento e sua deformação é dada por:

$$\sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy} \tag{B.9}$$

onde G é a constante de proporcionalidade conhecida como módulo de cisalhamento e se relaciona com o módulo de Young, E , como mostrado a seguir:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

onde μ é o coeficiente de Poisson.

Portanto com (B.8) tem-se:

$$\sigma_{xy} = G \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.10})$$

Pela 1ª lei de Newton:

$$(Q_{xy} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} \delta x) - Q_{xy} = \rho \delta x A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} \delta x = \rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (\text{B.11})$$

De maneira análoga à tensão axial é possível mostrar que:

$$Q_{xy} = \int \sigma_{xy} dA = GA \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.12})$$

Derivando-se a Eq. (B.12) em relação a “x” e igualando-se a (B.11), tem-se a equação de propagação das ondas transversais em vigas:

$$G \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$c_S^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.13})$$

onde $c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ é a velocidade de propagação da onda transversal no material [2].

Para obter-se o fluxo de potência médio transportado através das ondas transversais utiliza-se a seguinte expressão:

$$\langle P_S \rangle_t = \left\langle Q_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\rangle_t = \left\langle GA \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\rangle_t \text{ no domínio do tempo} \quad (\text{B.14})$$

ou no domínio da frequência:

$$\langle P_S \rangle_t = -2 \frac{GA}{\Delta x \omega^3} \Im \{ S_{a_1, a_2} \} \quad (\text{B.15})$$

onde ω é frequência e \Im denota a parte imaginária do espectro cruzado (S_{a_1, a_2} “double sided”) das acelerações medidas nos pontos separados pela distância Δx conforme mostrado na Fig. B.4.

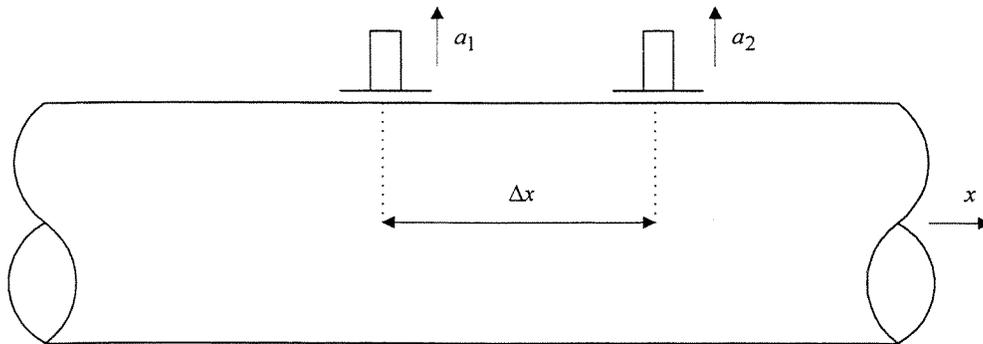


Fig. B.4: Configuração dos acelerômetros para medida de acelerações transversais

Outro tipo de onda transversal que ocorre em vigas esbeltas, são aquelas excitadas por torque, ou por momento torsional, onde as seções transversais rodam em torno do eixo da viga. Portanto, a equação da onda que a governa é semelhante a (B.13):

$$c_T^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.16})$$

onde $c_T = \sqrt{\frac{GJ}{I_p}}$ é a velocidade de propagação da onda torsional no material; θ é o deslocamento rotacional; I_p o momento polar de inércia por unidade de comprimento da barra em relação ao eixo longitudinal; e GJ a rigidez torsional, que é função da geometria transversal da viga.

Para barras com perfil redondo $GJ = \frac{\pi}{2} Gr^4$ e $I_p = \frac{\pi}{2} \rho r^4$ onde r é o raio da barra, e portanto a velocidade de propagação da onda torsional é $c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, a mesma para a onda transversal [2],[3].

Utilizam-se as seguintes expressões para obter o fluxo de potência médio transportado através das ondas torsionais:

$$\langle P_T \rangle_t = \left\langle M_x \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\rangle_t = \left\langle GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\rangle_t \text{ no domínio do tempo} \quad (\text{B.17})$$

onde M_x é o momento torsor agindo no eixo “x” longitudinal da barra, e θ o deslocamento angular da seção transversal em relação a posição anterior a aplicação do esforço.

ou no domínio da frequência:

$$\langle P_T \rangle_t = -2 \frac{GJ}{\Delta x \omega^3} \Im \{ S_{\alpha 1, \alpha 2} \} \quad (\text{B.18})$$

$$\text{ou ainda:} \quad \langle P_T \rangle_t = -8 \frac{GJ}{\Delta x \omega^3 D^2} \Im \{ S_{\alpha 1, \alpha 2} \} \quad (\text{B.19})$$

onde a relação entre aceleração angular (α) e tangencial (a) é $\alpha = \frac{2}{D} a$; ω é frequência e \Im denota a parte imaginária do espectro cruzado (S_{a_1, a_2} “double sided”) das acelerações tangenciais medidas nos pontos separados pelas distâncias Δx e D conforme mostrado na Fig. B.5 [6].

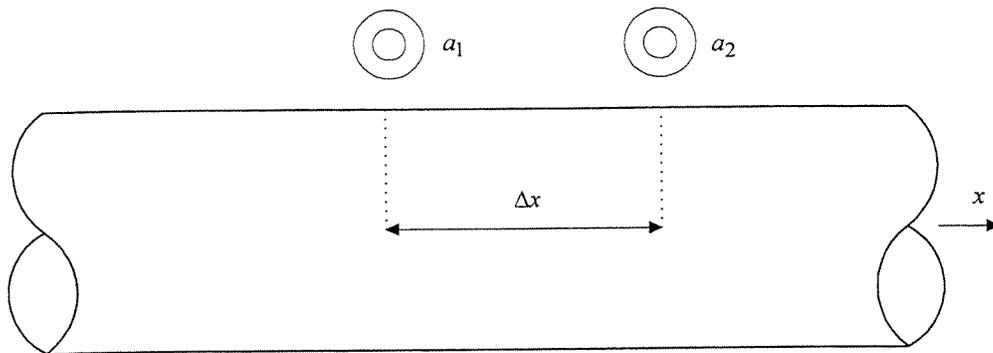


Fig. B.5: Configuração dos acelerômetros para medida de acelerações tangenciais

Apêndice C: Descrição dos equipamentos usados no experimento

O objetivo deste apêndice é apresentar uma descrição sucinta dos equipamentos utilizados na aquisição dos dados experimentais, conforme descrito no item 4.3.1 Descrição do Experimento, do capítulo 4.

Acredita-se que, com estas informações, complementares às do item 4.3.1, deva ser possível reproduzir com uma certa facilidade a parte experimental.

A aquisição dos dados foi feita através do analisador Hewlett-Packard-5365S, com 16 canais simultâneos de coleta de dados, conectado a um microcomputador PC via interface de comunicação GPIB para controle do sistema.

Os 14 acelerômetros utilizados foram os “Structcel” modelo 330A da marca PCB, usados normalmente para Análise Modal pelo seu baixo peso e custo, com sensibilidade nominal de 200 mv/g; +/- 5% de tolerância na amplitude na faixa de 1 a 1000 Hz; desvio de fase menor que 5° na faixa de 1 a 500 Hz e peso de 2 gramas.

Como fonte de alimentação destes acelerômetros foi usado o “Differential Power Supply” modelo 533A com 16 canais da PCB.

Para estimativa da potência injetada na viga foi usada uma célula de carga PCB modelo 208-A02 com 50 mv/lbs de sensibilidade nominal e força máxima de compressão de 1000 lbs, e um acelerômetro PCB do tipo ICP modelo 353B68 com sensibilidade nominal de 100 mv/g e 1.9 gramas de peso, que foram alimentados com duas fontes de potência PCB modelo 480E09.

Para calibração de amplitude dos acelerômetros usou-se o calibrador PCB modelo 394B06 que tem uma amplitude de calibração de 1.0g rms a 79.6Hz.

Para a excitação do sistema utilizou-se o excitador eletrodinâmico (“shaker”) da LDS modelo V201 que tem como características básicas: 17.8 N de força máxima; máximo

deslocamento de +/- 2.5 mm; máxima aceleração de 13g e frequência de trabalho de 0 a 13KHz.
Como fonte de alimentação do “shaker” utilizou-se o amplificador PA25E também da LDS.

Apêndice D: Referências de trabalhos publicados

Arruda J.R.F., Campos J.P., Piva J.I., Vibration Intensity Measurements in Beams. *Proceedings VI symposium on Dynamic Problems of Mechanics DINAME 95*. 1995.

Arruda J.R.F., Campos J.P., Piva J.I., Measuring flexural power flow in beams using a spatial-domain regressive discrete Fourier series. *Proceedings ISMA 21th- Noise and Vibration Engineering – Vol 1* 641-653 1996.

Arruda J.R.F., Campos J.P., Piva J.I., Experimental Determination of Flexural Power Flow in Beams Using a Modified Prony Method. *Journal of Sound and Vibration* 197 (3), 309-328. 1996.