

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR _____

_____ E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 21 / 12 / 92


ORIENTADOR

FUSÃO DOMINADA POR CONVECÇÃO DE UM MATERIAL DE MUDANÇA
DE FASE NUMA CAVIDADE VERTICAL ANULAR

AUTOR : Carlos Alberto de Melo *CM*

ORIENTADOR : Kamal Abdel Radi *Ismail*
A. R.

Public. n° 48 / 92

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

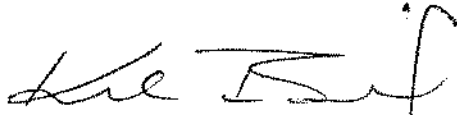
Tese de: Doutorado

Título da Tese: Fusão Dominada por Convecção de um Material de Mudança de
Fase numa Cavidade Vertical Anular.

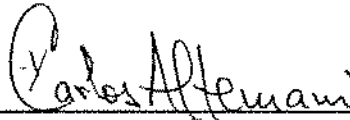
Autor: Carlos Alberto de Melo

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail

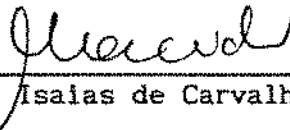
Aprovado por:



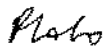
Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail



Prof. Dr. Carlos Alberto C. Altemani



Prof. Dr. Isaias de Carvalho Macedo



Prof. Dr. Plo Caetano Lobo



Prof. Dr. Carlos Roberto Ribeiro

Campinas, 21 de dezembro de 1992.

Dedico este trabalho a minha minha esposa Tereza

Cristina e a minha filha Luna Karla

AGRADECIMENTOS

Quero deixar os meus sinceros agradecimentos a todos os meus colegas, funcionários e técnicos que, direta e indiretamente, ajudaram no desenvolvimento do presente trabalho.

Agradeço aos desenhistas Júlio F. Rodrigues e Márcio Melazo pela confecção das Figuras.

Agradeço a dedicação e a compreensão de minha esposa durante o desenvolvimento desta obra.

Agradeço ao meu colega e amigo, Prof. Ricardo Fortes de Miranda, pelo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Kamal , pelas discussões, que me fizeram crescer mais um pouco e pela amizade dedicada.

Agradeço sobretudo a Deus, que sempre me protege nas horas difíceis, aos anos vividos e as falhas, que me fazem refletir e me ajudam a crescer.

CONTEÚDO

I - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Classificação do problema	1
1.2 - Revisão bibliográfica	1
1.3 - Contribuições no presente trabalho	4
II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	6
II.1 - Definição do problema	6
II.2 - Equações Fundamentais	7
II.3 - Condições de contorno	13
II.4 - Condição inicial, Calor armazenado, Taxa de calor global que entra no cilindro interno e efetividade	14
III - MÉTODO NUMÉRICO DE SOLUÇÃO	19
III.1 - Princípio de Conservação	19
III.2 - Critérios para a discretização das equações	21
III.3 - Equações discretizadas	26
III.4 - Algoritmo de solução do sistema de equações	26
III.5 - Análise Global	26
III.6 - Sequência Geral para a solução do Problema	27
III.7 - Otimização da Malha	27
III.8 - Critério de parada no processo iterativo	27
IV - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	29
IV.1 - Número de Stefan constante ao longo da	

altura do armazenador	29
IV.2 - Número de Stefan variável ao longo da altura do armazenador	45
V - CONCLUSÕES	55
VII - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
ANEXO 1 - EQUAÇÕES DISCRETIZADAS	62
a) - Equação da Função corrente	62
b) - Equação da energia	63
c) - Equação de transporte de vorticidade	70
d) - Velocidades nas interfaces dos volumes de controle	73
e) - Cálculo dos números de Peclet nas interfaces dos volumes de controle	76
f) - Posição radial adimensional da interface líquido-sólido	76
g) - Quantidade de calor sensível armazenado	77
h) - Quantidade de calor latente armazenado	77
i) - Taxa de calor que entra no cilindro interno	78
j) - Cálculo da quantidade de calor que entra no cilindro interno	78
k) - Condições iniciais	79
ANEXO 2 - SEQUÊNCIA GERAL PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA	80

RESUMO

A entalpia adimensional média do volume de controle discretizado permite determinar, de forma iterativa, a posição da interface móvel líquido-sólido. As condições de contorno nesta interface são determinadas sem a necessidade da transformação de coordenadas usando uma simples grade fixa. As linhas de corrente são determinadas diretamente da função corrente e elas representam as correntes convectivas na fase líquida. As formas das interfaces líquido-sólido e o calor armazenado em função do tempo são comparados com dados teóricos e experimentais para a validação dos resultados. São também analisados os gráficos da taxa de calor global e da efetividade em função do número de unidades de transferência (NUT).

ABSTRACT

The mean dimensionless enthalpy of the discretized control volume permit to determine the moving liquid-solid interface position. The boundary conditions in the interface are determined without the necessity of the transformation of coordinates by using a simple fixed grid. From the function $\psi(r,z)$ the stream lines are determined which represent the convective currents in the liquid phase. Shapes of the liquid-solid interfaces and the stored heat are compared with theoretical and experimental data in the literature for the validation of the model. It was also analysed in the present work curves of the global rate of heat transfer and the effectiveness as a function of the number of transfer units (NTU).

NOMENCLATURA

a) - Simbologia usada na formulação analítica

A - Área de troca de calor

Bi - Número de Biot = $\frac{\bar{h} H}{K}$

c - Calor específico à pressão constante

Fo - Número de Fourier = $\frac{\alpha t}{H^2}$

g - Aceleração da gravidade

h - Entalpia

$\bar{h}$ - Coeficiente médio de transferência de calor entre o fluido de aquecimento e a parede do cilindro interno

H - Altura do armazenador

m - Massa

$\dot{m}$ - Taxa de massa

NUT - número de unidades de transferência

p - Pressão

P - Número de Peclet

Pr - Número de Prandtl

Q - Taxa de transferência de calor

r - Coordenada radial

R - Coordenada radial adimensional

Raio - Raio do armazenador

Ra - Número de Rayleigh = $\frac{g \beta H^3 \text{Pr} (T_{fe} - T_{sat})}{\nu^2}$

$$Ra^* - \text{Número de Rayleigh modificado} = \frac{\lambda g \beta H^3 Pr}{c \nu^2}$$

$$Ra^* = \frac{Ra}{Ste}$$

r_o - Raio do cilindro interno

$$Ste - \text{Número de Stefan} = \frac{c}{\lambda} (T_f - T_{sat})$$

T - Temperatura

T_f - Temperatura do fluido de aquecimento

T_{sat} - Temperatura de saturação

t - Tempo

U - Coeficiente global de transferência de calor

V_r - Velocidade na direção radial

V_z - Velocidade na direção axial

w - Parede do cilindro interno

z - Coordenada axial

α - Difusibilidade térmica

β - Coeficiente de expansão térmica

ϵ - Efetividade do armazenador

ΔT - Diferença média logaritmica de temperatura

ϕ - Temperatura adimensional

ψ - Função corrente

Ψ - Função corrente adimensional

λ - Calor latente de fusão

θ - Entalpia adimensional

ρ - Densidade

τ Tempo adimensional

ξ - Altura adimensional

Índices :

e - Entrada para a temperatura e para o número de Stefan

f - Fluido de aquecimento

s - Saída para a temperatura e para o número de Stefan

b) - Simbologia usada na formulação numérica

AD - Área adimensional da interface direita do volume de controle

Ae - Área adimensional da interface esquerda do volume de controle

ATI - Área adimensional da interface transversal inferior do volume
de controle

ATS - Área adimensional da interface transversal superior do volume
de controle

a - Coeficiente de determinado nó

D - Nó à direita de P (usado na Figura 2)

E - Nó à esquerda de P (usado na Figura 2)

I - Nó colocado na parte inferior a P (usado na Figura 2)

IM - Número de nós na direção radial

IN - Número de nós na direção axial

INT - Nó referente ao volume de controle que contém a interface
líquido-sólido

P - Número de Peclet (usado com os índices d, e, i, e s)

RD - Posição radial adimensional da interface direita do V C
RE - Posição radial adimensional da interface esquerda do V C
RP - Posição radial adimensional do nó P
S - Termo fonte
S - Nó colocado na parte superior a P (usado na Figura 2)
UR - Velocidade radial adimensional
 U_{ξ} - Velocidade axial adimensional
V C - Volume de controle
 ΔR - Incremento adimensional na direção radial
 $\Delta \xi$ - Incremento adimensional na direção axial
 Γ - Coeficiente de difusão

índices :

d - Interface direita do volume de controle
e - Interface esquerda do volume de controle
i - Interface inferior do volume de controle
s - Interface superior do volume de controle
D - Coeficiente relativo ao nó D
E - Coeficiente relativo ao nó E
I - Coeficiente relativo ao nó I
P - Coeficiente relativo ao nó P
S - Coeficiente relativo ao nó S
viz - Coeficiente relativo ao nó vizinho de P

I - INTRODUÇÃO

I.1 - Classificação do Problema

A fusão e a solidificação são encontradas nos processos industriais como na fusão e solidificação de metais e vidros e na armazenagem de energia térmica. Um número muito grande de aplicações em fusão e solidificação tem motivado o aparecimento de diversas publicações nesta área. Matematicamente, o problema de mudança de fase sólido/líquido pertence a classe de problemas de contornos móveis, porque a interface líquido-sólido é função do tempo. Tais problemas oferecem desafio e são resolvidos numericamente [1], exceto para poucos casos.

I.2 - Revisão Bibliográfica

O exame de uma vasta literatura revela que a maioria das análises dos problemas de mudança de fase leva em consideração somente a condução como o mecanismo de transferência de calor [2-4]. Estas análises são válidas somente quando a temperatura da fase líquida é uniforme e igual a temperatura de fusão do sólido, ou quando são colocados dispositivos, como aletas, conforme observado por Ismail [5], para reduzir as correntes convectivas na fase líquida. Tais situações físicas, nas quais a condução de calor predomina sobre a convecção durante a mudança de fase, não é frequentemente observada. Uma pequena variação da temperatura na região de líquido pode provocar a convecção natural, devido às forças de empuxo.

Nos processos de mudança de fase a convecção natural é detectada

em diversos trabalhos experimentais [6-12]. Nestes trabalhos há grande evidência que, exceto para os primeiros instantes de fusão ou para material de mudança de fase com baixo número de Prandtl, o processo de fusão é controlado pela convecção natural na fase líquida.

Na avaliação da bibliografia são detectados poucos trabalhos teóricos sobre fusão e solidificação, que levam em conta a convecção natural. Isto é devido a complexidade do problema, surgida das equações de derivadas parciais, para os balanços de massa, momentum e energia, e que devem ser resolvidas para contornos irregulares e variáveis no tempo.

Sparrow et al. [13] foram, provavelmente, os primeiros investigadores a analisarem a fusão bidimensional na presença da convecção natural. A solução por diferença finita, para o problema da fusão em torno de um cilindro vertical, foi obtida após a simplificação de um conjunto de equações governantes, oriundas do tratamento da interface líquido-sólido.

Foi usado por Gartling [14] o método dos elementos finitos para resolver problemas de obstruções em tubos e para investigar processos de fusão em materiais com fontes internas de calor.

Gadgil e Gobin [15], Ho e Viskanta [16] e Okada [17] propuseram esquemas de diferenças finitas, associadas com transformações de coordenadas, para resolverem problemas de mudança de fase com convecção.

Para eliminar o problema causado pela forma irregular e variável no tempo da interface líquido-sólido, Rieger et al. [18] usaram a transformação de coordenada, associada a aproximação por diferenças finitas das equações de transporte de vorticidade, função corrente e energia. Eles obtiveram bons resultados, com alto custo computacional, devido a geração numérica de um novo sistema de coordenadas a cada passo de tempo.

Webb e Viskanta [19] propuseram uma metodologia computacional

similar, entretanto as equações governantes são resolvidas em cada volume de controle, obtido pelo sistema de discretização usado. As coordenadas coincidentes com o contorno são geradas algebricamente.

No estudo numérico de Benard e Gobin [20], a convecção natural do líquido é acoplada com a condução de calor na fase sólida. Os termos não ortogonais, resultantes do uso da transformação de coordenadas na interface móvel, são desprezados.

Voller et al. [21] e Hibbert et al. [22] usam a formulação de Voller [4], para o calor latente, para resolverem problemas de mudança de fase com convecção; entretanto eles não usam transformação de coordenadas para tornar o contorno irregular da interface líquido-sólido em contorno regular e não usam esta interface como condição de contorno móvel.

Lacroix [23] usa a função corrente e a vorticidade para a formulação do problema e inclui os termos transiente e não ortogonal nas equações transformadas; entretanto elas não estão na forma conservativa.

Rego [24] usa a formulação tradicional de Bonacina [2] para o calor latente, para a análise da fusão e da solidificação em torno de um cilindro vertical; entretanto ele não usa a transformação de coordenadas para a interface móvel líquido-sólido. No seu trabalho não são usadas as condições de contorno nesta interface móvel. São usadas as condições no contorno físico do material de mudança de fase. Ele obtém bons resultados, com alto custo computacional, devido ao pequeno passo de tempo exigido pelo modelo de Bonacina e por não usar o contorno móvel.

Kim e Kaviany [25] emprega uma equação geral transformada, que preserva as formas conservativas das equações governantes originais e as condições da interface móvel são encontradas diretamente da continuidade dos fluxos nas equações transformadas.

1.3 -Contribuições no Presente Trabalho

O objetivo do presente trabalho é a análise da fusão num armazenador cilíndrico vertical, onde o material de mudança de fase envolve o cilindro interno e é limitado pelas tampas inferior e superior e pelo cilindro externo. Nesta análise são considerados os efeitos da convecção natural.

Neste trabalho são usadas a função corrente e a vorticidade, para a formulação do problema e a entalpia adimensional usada, proposta por Shamsundar [4], conduz a fusão contínua nos volumes de controle discretizados.

A cada iteração, a interface móvel líquido-sólido é localizada e as condições de contorno nesta interface são usadas para as variáveis função corrente e vorticidade.

Para a equação da energia, os contornos são os que limitam o material de mudança de fase e as condições de contornos são as do cilindro interno, das tampa inferior e superior e do cilindro externo.

Não se usa a mudança de coordenadas para modificar o domínio irregular (causado pela forma irregular da interface líquido-sólido) em domínio regular; entretanto as condições de contorno nesta interface estão na forma conservativa.

Com esta metodologia, obtém-se bons resultados quando comparados com outros trabalhos teóricos e um experimental. Provavelmente, o tempo computacional é ainda menor, quando comparado com qualquer outro trabalho acima.

A redução do tempo computacional deve-se ao fato de não ser necessária a geração de uma malha regular no novo sistema de

coordenadas, a cada iteração e em cada passo de tempo.

Através das curvas de níveis da superfície $\psi(r,z)$, as linhas de corrente são determinadas e elas representam, a cada instante, as correntes convectivas no armazenador com mudança de fase. Estas linhas de corrente permitem descrever, com mais segurança, o comportamento da taxa de calor global na parede do cilindro interno do armazenador.

Na primeira fase não se considera a variação da temperatura do fluido de aquecimento ao longo da altura do armazenador.

A seguir, é considerada a variação da temperatura do fluido de aquecimento e verifica-se o efeito desta variação sobre o comportamento do armazenador.

Posteriormente foi introduzido o conceito da efetividade e do número de unidades de transferência no armazenador e foram analisados o comportamento desta efetividade e do número de unidades de transferência em função do tempo, assim como o comportamento da efetividade em função do número de unidades de transferência.

II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

II.1 - Definição do Problema

O esquema do armazenador, que consta de um cilindro interno, envolvido pelo material de mudança de fase, limitado pelas tampas inferior e superior e pelo cilindro externo, estão ilustradas na Figura 1.

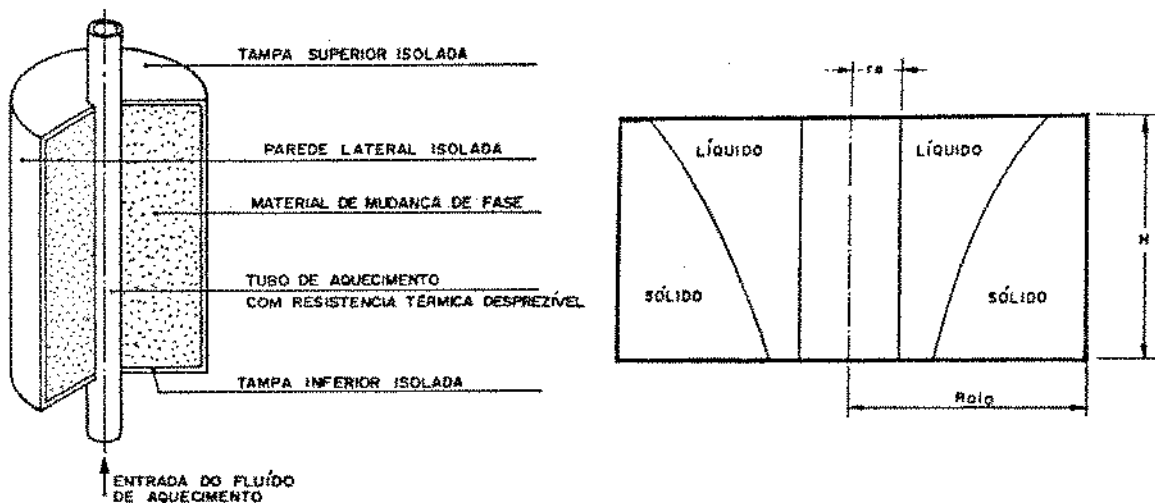


Figura 1 - Modelo Físico do Armazenador

As condições iniciais e as condições de contornos, as quais condicionam a solução do problema, são definidas como:

Inicialmente todo o material de mudança de fase do armazenador está à temperatura uniforme e igual à temperatura de saturação. Logo a seguir, no cilindro interno escoam fluido de aquecimento, com coeficiente de transferência de calor médio entre este e a superfície interna do tubo

igual a h e com a temperatura média de mistura, na entrada, igual a T_{fe} .
As tampas do armazenador e o cilindro externo são considerados isolados.

II.2 - Equações Fundamentais

As equações de conservação de massa, momentum nas direções radial e axial e energia em termos da entalpia em coordenadas axissimétricas são:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_zV_r)}{\partial r} + \frac{\partial (V_z^2)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta^2 V_z \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial (V_rV_z)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hrV_r)}{\partial r} + \frac{\partial (hV_z)}{\partial z} = \frac{K}{\rho} \Delta^2 T \quad (4)$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Os termos de dissipação viscosa da equação (4) foram desprezados, devido às baixas velocidades encontradas na convecção natural.

Para a formulação do termo de empuxo, considera-se o gradiente de pressão vertical e a força gravitacional que aparece na equação da

quantidade de movimento na direção z, que é:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \quad (5)$$

A densidade que aparece na expressão (5) é colocada em função da temperatura, por intermédio do modelo de Boussinesq, no qual as variações desta densidade são consideradas somente devidos à força de empuxo; nos outros casos ela permanece constante.

O coeficiente de expansão volumétrica β é definido por:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (6)$$

Neste caso, tem-se:

$$-dp = \rho \beta dT \quad (7)$$

Tomando-se ρ_{sat} como o ponto de referência, tem-se:

$$\rho = \rho_{sat} - \beta \rho_{sat} (T - T_{sat}) \quad (8)$$

A pressão total é definida, a seguir, por:

$$p_* = p + \rho_{sat} g z \quad (9)$$

Neste caso, a expressão (5) transforma-se em:

$$- \frac{\partial p^*}{\partial z} + g\beta\rho_{\text{sat}} (T - T_{\text{sat}}) \quad (10)$$

Considera-se agora, nas equações de conservação, as propriedades constantes e o índice sat é suprimido. Diante de tais considerações, as equações de (1) à (4) transformam-se em :

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_zV_r)}{\partial r} + \frac{\partial (V_z^2)}{\partial z} = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} \\ & + g\beta(T - T_{\text{sat}}) + \nu \nabla^2 V_z \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial (V_rV_z)}{\partial z} = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \\ & + \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_rh)}{\partial r} + \frac{\partial (hV_z)}{\partial z} = \frac{K}{\rho} \nabla^2 T \quad (14)$$

Eliminando a pressão total das equações (12) e (13) e usando a vorticidade e a função corrente como variáveis, as equações de (11) à (14) transformam-se em:

$$\omega r = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \omega \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \omega \right) + \frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ \nu \left(\nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) - g\beta \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} h \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} h \right) = \frac{K}{\rho} \nabla^2 T \quad (17)$$

Nas equações (15) à (17) a função corrente ψ e a vorticidade ω foram definidas como:

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (18.a)$$

$$V_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (18.b)$$

$$\omega = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (18.c)$$

É idealizada a forma de adimensionalização abaixo:

$$W = \frac{\omega H}{\alpha} \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \quad (19.a)$$

$$\Psi = \frac{\psi}{\alpha H} \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \quad (19.b)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{H^2} (Ra \cdot Pr)^{1/2} \quad (19.c)$$

$$R = \frac{r}{H} \quad (19.d)$$

$$\xi = \frac{z}{H} \quad (19.e)$$

$$\phi = \frac{c}{\lambda} (T - T_{sat}) \quad (19.f)$$

$$\theta = \frac{1}{\rho v} \int_v \frac{\rho (h - h_i^*)}{\lambda} dv \quad (19.g)$$

i^* indica o líquido saturado.

θ é a entalpia adimensional média do volume de controle discretizado v . Para $\theta < 0$, o valor absoluto de θ representa a fração de sólido no volume de controle v .

Das equações (19.f) e (19.g), conclui-se:

$$\phi = \theta \quad \text{para } \theta > 0 \quad (20.1)$$

neste caso a temperatura do volume de controle v está acima de T_{sat} .

$$\phi = 0 \quad \text{para } 0 \geq \theta \geq -1 \quad (20.2)$$

neste caso a temperatura do volume de controle v é igual a T_{sat} e este está em mudança de fase.

$$F = 1 - |\theta| \quad (20.3)$$

F indica a fração deste volume de controle v fundido.

Com as variáveis adimensionais dadas, as equações de (15) a (17), transforma-se em:

$$WR = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right) \quad (21)$$

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} W \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} W \right) +$$

$$\frac{W}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \left(\frac{Pr}{Ra^*} \right)^{1/2} \left(\nabla^2 W - \frac{W}{R^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial R} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \int_v \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dv + \int_v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \theta \right) dv - \int_v \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \theta \right) dv \\ & - \frac{1}{(Ra^*Pr)^{1/2}} \int_v \nabla^2 \phi dv = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

A equação (23) já está integrada ao longo do volume de controle discretizado v , a ser definido na Fig. 2, a seguir.

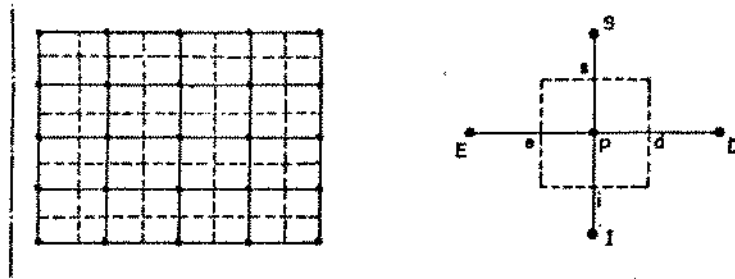


Figura 2 - Detalhe da malha e dos volumes de controle

II.3 - Condições de contorno

As condições de contorno para a temperatura adimensional podem ser colocadas na forma analítica, entretanto para as variáveis adimensionais função corrente e vorticidade, estas condições de contorno só podem ser colocadas nas formas discretizadas.

As condições de contorno para a temperatura adimensional são:

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial R} \right|_{R=\frac{r_0}{H}} = Bi (Ste - \phi_w) \quad (24.1)$$

ϕ_w é o valor de ϕ na parede do cilindro interno

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial R} \right|_{R=\frac{R_{a10}}{H}} = 0 \quad (24.2)$$

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (24.3)$$

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\xi = 1} = 0 \quad (24.4)$$

As condições de contorno para as variáveis adimensionais função corrente e vorticidade serão colocadas nas formas discretizadas no Anexo 1 do Método Numérico de Solução.

II.4 - Condição inicial, Calor armazenado, Taxa de calor global que entra no cilindro interno e Efetividade do armazenador.

Será considerada como condição inicial aquela que correspondente ao instante que já foi fundida toda a região anular compreendida entre a superfície externa do cilindro interno e a geratriz de raio $r_o + \Delta r/2$.

Este instante inicial é calculado pela seguinte expressão:

$$t_o = \frac{(\Delta r/2)^2 + r_o \Delta r}{2 \alpha \text{ Bi Ste } (r_o/H)} \quad (25)$$

Na forma adimensional este instante é calculado por:

$$\tau_o = \frac{(\Delta R/2)^2 + (r_o/H) \Delta R}{2 \text{ Bi Ste } (r_o/H) [1/(Ra \cdot Pr)]^{1/2}} \quad (25.1)$$

A fração da massa fundida no instante inicial é calculada por :

$$FMFo = \frac{\left(\frac{\Delta r}{2 H} \right)^2 + \left(\frac{r_0}{H} \right)}{\left(\frac{Ra_{10}}{r_0} \right)^2 - 1} \left(\frac{H}{r_0} \right)^2 \quad (26)$$

O calor latente já armazenado no instante inicial é calculado por:

$$CALo = 2 \pi r_0^3 \rho \lambda Bi Ste \left(\frac{1}{Ra * Pr} \right)^{1/2} \quad (27)$$

A taxa de calor global (Q) que entra no cilindro interno é calculada por :

$$\frac{\frac{Q}{H}}{2 \rho \lambda \alpha Bi \pi \left(\frac{r_0}{H} \right)} = \int_0^1 (Ste - \phi_w) d\xi \quad (28)$$

A taxa de calor global (Qo) que entra no cilindro interno no instante inicial é calculada por :

$$\frac{\frac{Qo}{H}}{2 \rho \lambda \alpha Bi \pi \left(\frac{r_0}{H} \right)} = Ste \quad (29)$$

A quantidade de calor que entra no cilindro interno entre os instantes t_0 e t_1 é calculada por :

$$CAL = CAL_0 + \int_{t_0}^{t_1} Q dt \quad (30)$$

A quantidade de calor sensível (CALS) armazenado num período de tempo correspondente a $\Delta\tau$ é calculada por:

$$\frac{CALS}{2 \pi \rho H^3 \lambda} = \int_{v^*} (\phi_1 - \phi_0) dv \quad (31)$$

ϕ_0 - Valor de ϕ no instante τ .

ϕ_1 - Valor de ϕ no instante $\tau + \Delta\tau$

v^* - região fundida com temperatura acima de T_{sat} .

A quantidade de calor latente (CALL) armazenada até um instante t é calculada por :

$$\frac{CALL}{2 \pi \rho H^3 \lambda} = \int_{v_f} dv \quad (32)$$

v_f - toda a região fundida do armazenador até o instante t .

A efetividade de troca no armazenador ϵ é definida por:

$$\epsilon = \frac{\text{Taxa de calor que efetivamente entra no armazenador}}{\text{Taxa de calor máxima possível}}$$

$$\epsilon = \frac{Q_e}{Q_{\max}} \quad (33)$$

Q_e representa a taxa de calor que entra no cilindro interno, é cedida pelo fluido de aquecimento e é recebida pelo material de mudança de fase.

$$Q_e = \dot{m}_f c_f (T_{fe} - T_{fs})$$

$$Q_{\max} = \dot{m}_f c_f (T_{fe} - T_{\text{sat}})$$

$$\epsilon = \frac{T_{fe} - T_{fs}}{T_{fe} - T_{\text{sat}}} \quad (34)$$

$$\epsilon = \frac{\text{Ste}_e - \text{Ste}_s}{\text{Ste}_e} \quad (35)$$

T_{fe} e T_{fs} representam, respectivamente, as temperaturas de entrada e saída do fluido de aquecimento do armazenador.

Ste_e e Ste_s representam, respectivamente, os números de Stefan na entrada e saída do armazenador.

Onde:

$$Ste_e = \frac{c(T_{fe} - T_{sat})}{\lambda} \qquad Ste_s = \frac{c(T_{fs} - T_{sat})}{\lambda}$$

Conforme a definição da efetividade do armazenador, o comportamento desta, em função do tempo, deve ser análogo ao da taxa de calor global entrando no cilindro interno.

O número de unidades de transferência no armazenador (NUT) é definido por:

$$NUT = \frac{U A}{m_f c_f} \qquad (36)$$

$$UA = \frac{Q_e}{\Delta T} \qquad (37)$$

ΔT representa a diferença média logarítmica de temperatura no armazenador.

$$\Delta T = \frac{T_{fe} - T_{fs}}{\ln \frac{T_{fe} - T_{sat}}{T_{fs} - T_{sat}}} \qquad (38)$$

$$\Delta T = \frac{Ste_e - Ste_s}{\ln \frac{Ste_e}{Ste_s}} \qquad (39)$$

III - MÉTODO NUMÉRICO DE SOLUÇÃO

III.1 - Princípio de Conservação

Para a solução do problema, as equações de conservação são integradas nos volumes de controle que contém os contornos e nos volumes de controle internos.

Com esta técnica o princípio de conservação é assegurado em cada volume de controle e a ordem da derivada de cada equação de conservação é reduzida de uma unidade.

O princípio de conservação é assegurado da seguinte maneira:
A taxa de transferência de determinada propriedade que entra no V.C mais a taxa que é gerada neste V.C é igual a taxa que sai deste V.C mais a taxa acumulada neste V.C.

A equação geral de conservação é escrita na seguinte forma:

$$-\nabla \cdot J + S = \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} \quad (40)$$

$$J = -\Gamma \nabla \phi + \rho U \phi \quad (41)$$

Onde:

J - Fluxo de uma determinada propriedade

S - Taxa de geração da propriedade por unidade de volume ou termo fonte

ϕ - Propriedade que está sendo transferida

$$U = U_R + U_\xi \quad (42)$$

$$U_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (42.1)$$

$$U_\xi = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (42.2)$$

Comparando as equações (40) e (41) com as equações (21) à (23) tem-se:

- Equação (21) da Função Corrente

$$\phi = \psi \quad \Gamma = 1 \quad U = 0$$

$$S = - \left(\frac{2}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + W R \right)$$

- Equação (22) de transporte de vorticidade

$$\phi = W \quad \Gamma = \left(\frac{Pr}{Ra^*} \right)^{1/2} \quad \rho = 1$$

$$S = S_p + S_c$$

$$S_p = - \left[\left(\frac{Pr}{Ra^*} \right)^{1/2} \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right]$$

$$S_c = - \frac{\partial \phi}{\partial R}$$

- Equação (23) da Energia

$$\phi = \theta \qquad \Gamma = \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \qquad \rho = 1$$

$$S = 0$$

III.2 - Critérios para a discretização das equações

O teorema da divergência é usado para a integração de cada equação de conservação ao longo de cada volume de controle. Desta forma tem-se :

$$\int_v \nabla \cdot J \, dv = \int_{sc} J \cdot dA \qquad (43)$$

dA representa o vetor perpendicular ao elemento de área dA

SC representa a superfície total que envolve o volume de controle v .

Quando se integra cada equação de conservação em cada volume de controle, os fluxos difusivo e convectivo devem ser avaliados em cada interface deste volume de controle.

Estes fluxos são estimados com base na solução analítica de um sistema unidimensional estacionário com fluxos convectivo e difusivo.

Considere-se, agora, o sistema unidimensional com fluxo convectivo e difusivo, tal que:

$$\frac{d}{dx} (\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (44)$$

e com condições de contorno :

$$x = 0, \quad \phi = \phi_0 \quad \text{e} \quad x = L, \quad \phi = \phi_1$$

Sua solução é :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_1 - \phi_0} = \frac{e^{\frac{P}{L} x} - 1}{e^P - 1} \quad (45)$$

$$P = \frac{(\rho u)L}{\Gamma} \quad \text{representa o número de Peclet}$$

A figura 3 representa a solução (45) em forma de gráfico .

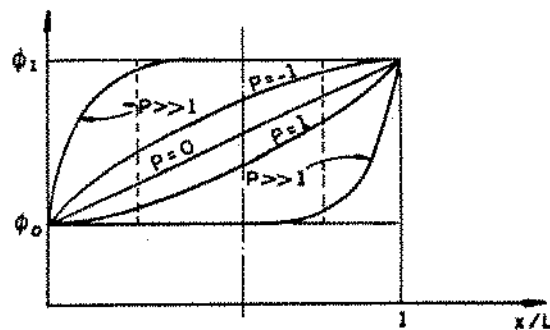


Figura 3 - Solução analítica

Conforme se pode observar na Figura, para $|P|$ elevado, o valor de ϕ no ponto médio (interface entre dois volumes de controle vizinhos),

representa o valor de ϕ à montante em relação ao escoamento.

Os valores dos fluxos nas interfaces dos volumes de controle são avaliados pela função exponencial acima, tomando como base os valores das variáveis nos nós vizinhos à respectiva interface.

Como a geração de uma exponencial é cara, em termos computacionais, Patankar [26] usou um polinômio que se aproxima da solução analítica. Tal solução é chamada de esquema "Power-Law", o qual será usado no presente trabalho.

Um dos esquemas usado para estimar os fluxos convectivos e difusivos nas interfaces dos volumes de controle é o esquema "up-wind".

Neste esquema é considerado o seguinte:

O fluxo difusivo é estimado considerando a variação linear entre os nós vizinhos à respectiva interface.

Considera-se para o fluxo convectivo, na interface de cada volume de controle, o fluxo do nó vizinho situado à montante ("up-wind") em relação ao escoamento.

Para $|P|$ elevado, o esquema "up-wind" superestima o termo difusivo, pois $\frac{\partial \phi}{\partial X} = 0$ na interface.

Neste trabalho é adotado o esquema totalmente implícito para a derivada no tempo.

É usado o critério de Scarborough, como o critério de convergência.

O critério de Scarborough estabelece que:

$$\frac{\sum |a_{viz}|}{|a_p|} \left\{ \begin{array}{ll} \leq 1 & - \text{Para todas as equações} \\ < 1 & - \text{Para no mínimo numa equação} \end{array} \right.$$

Como o conjunto de equações é não linear e as variáveis estão acopladas entre si, a solução do sistema é totalmente iterativa e para que o critério de Scarborough seja satisfeito, sempre que for necessário usa-se o valor da variável da iteração anterior no termo fonte até a convergência.

Para cada altura ($J=\text{cte}$), é feita a busca iterativa da posição da interface líquido-sólido. O volume de controle que contém esta interface é associado com o nó INT na horizontal, para esta altura J .

Com este procedimento é encontrado, de forma iterativa, o domínio de cálculo para as variáveis função corrente e vorticidade.

Este domínio de cálculo é a fase líquida do material de mudança de fase e esta região está situada a esquerda da interface líquido-sólido, à direita da superfície do cilindro interno e entre as tampas superior e inferior.

Na Figura 4 está ilustrado o domínio de cálculo para as variáveis função corrente e vorticidade.

A busca iterativa dos valores médios das variáveis em cada nó e da posição da interface líquido-sólido é feita do seguinte modo:

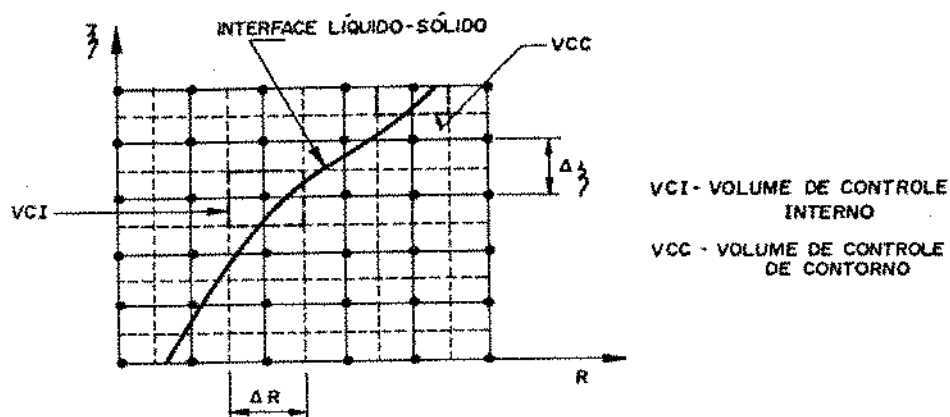


Figura 4 - Interface líquido-sólido e domínio de cálculo

Na equação da energia, o valor de ϕ será igual a θ se $\theta > 0$. Será igual a zero se $\theta \leq 0$.

Para cada altura ($J=\text{cte}$), verifica-se o volume de controle onde se tem $\theta < 0$. Neste encontrar-se-à a interface líquido-sólido.

Se o correspondente nó deste volume de controle for diferente de IM (último nó na horizontal), a posição radial da interface será:

$$R_{INT} = \left(\frac{r_0}{H} \right) + 0,5 (2I - 3 + 2F) \Delta R$$

$$F = 1 - |\theta|$$

F representa a fração fundida do volume de controle v

Se o correspondente nó deste volume de controle for igual a IM, a posição da interface será calculada por:

$$R_{INT} = \left(\frac{r_0}{H} \right) + 0,5 (2I - 3 + F) \Delta R$$

Nos volumes de controle de contornos, inclusive aqueles que contém a interface móvel líquido-sólido, a vorticidade é encontrada pela integração da equação (21) ao longo deste volume e considerando a condição de não deslizamento na parede. Nestes volumes de controle é fixado para a função corrente o valor zero.

O domínio de cálculo para a equação da energia (variável θ) é todo o material de mudança de fase e as condições de contorno são as dos cilindros interno e externo e das tampas inferior e superior.

III.3 - Equações discretizadas.

No Anexo 1 estão indicadas as equações discretizadas para as variáveis função corrente, vorticidade e entalpia, nas formas adimensionais, para todos os volumes de controle inclusive os que contém os contornos e a interface líquido-sólido.

III.4 - Algoritmo de solução do sistema de equações :

Para a solução do sistema de equações, usa-se o algoritmo da matriz tri-diagonal (TDMA) .

Este algoritmo tem a vantagem de encontrar a solução da variável discretizada ao longo de uma linha completa de nós. Esta solução, além de ser analítica, para um sistema unidimensional com propriedades constantes, não é iterativa.

Para sistemas bi e tri dimensionais, os termos vizinhos nas outras direções entram no termo fonte.

III.5 - Análise Global .

Para o problema proposto, toda a energia que entra no cilindro interno deverá ser integralmente acumulada no armazenador, pois ele é todo isolado em suas tampas e no cilindro externo.

Uma das maneiras de avaliar a metodologia usada é comparar a inte-

gração numérica no tempo, da taxa de energia global que entra no cilindro interno com a soma das energias armazenadas em todos os volumes de controle.

III.6 - Sequência Geral para a solução do Problema .

A sequência Geral para a solução do problema (Algoritmo de Solução) está detalhado no ANEXO 2 .

III.7 - Otimização da Malha

Vários testes foram realizados para otimizarem os cálculos numéricos e foi encontrada a grade de 41 nós na direção radial e de 51 nós na direção axial, como satisfatória em termos de precisão e de tempo computacional .

III.8 - Critério de parada no processo iterativo

Adotou-se a média dos valores absolutos dos resíduos em todos os volumes de controle, como critério de parada.

O resíduo em cada nó do volume de controle é calculado por :

$$\text{Res} = a_P \phi_P^* - a_D \phi_D^* - a_E \phi_E^* - a_S \phi_S^* - a_I \phi_I^* - S \quad (86)$$

ϕ^* representa, neste caso, o valor de uma variável genérica da iteração anterior e a representa o coeficiente do respectivo nó recentemente calculado .

S representa o termo fonte.

IV - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os trabalhos designados pelas referências [29,30 e 31] foram publicados , tomando como base os resultados parciais obtidos desta obra .

Para simular o armazenador em questão e comparar os resultados deste trabalho com outros teóricos e um experimental , é usado como material de mudança de fase (MMF) a parafina tipo , "n-eicosane", com 99% de pureza .

Os parâmetros que influenciam no comportamento do armazenador são : número de Rayleigh, número de Stefan, as relações geométricas H/r_o e $Raio/r_o$ e o número de Biot .

Foi estudado número de Rayleigh na faixa de $4,5 \times 10^6$ à $5,4 \times 10^9$. Variou-se a relação geométrica H/r_o de 4 à 20,45 , a relação $Raio/r_o$ de 2 à 8,8 e o número de Stefan de 0,1 à 0,387 .

Na primeira etapa de análise considera-se que a temperatura do fluido de aquecimento, ou o número de Stefan, não varia ao longo da altura do armazenador e na segunda etapa é considerado esta variação e o efeito dela sobre o comportamento do armazenador.

Para a condição de análise da primeira etapa, são inicialmente comparadas as formas das interfaces líquido-sólido e o calor armazenado com dados teóricos e experimental para a validação do respectivo modelo, em seguida são analisados os parâmetros de comportamento, como as relações geométricas, os números de Rayleigh, de Stefan e de Biot.

IV.1 - Número de Stefan constante ao longo da altura do armazenador.

Neste caso, número de Biot acima de 120 simula, aproximadamente, a condição de temperatura da parede constante no tubo interno.

A Figura 5 mostra as interfaces líquido-sólido em função do tempo, para $H/r_o = 4$, $Raio/r_o = 10$, $Ra = 4,49 \times 10^6$ e $Ste = 0,05$, as quais indicam pequeno avanço à direita, quando comparadas com o trabalho numérico de Sparrow (1978). Este pequeno avanço das frentes de fusão é devido, principalmente, a maior acuidade do modelo físico apresentado em relação ao trabalho de Sparrow. Este faz simplificação na equação da interface líquido-sólido. Ele desprezou o quadrado da derivada da posição da interface em relação ao eixo do armazenador.

Na Figura 6 estão representadas as linhas de corrente, para o instante adimensional $\tau = 0,21$. Estas linhas de corrente representam, neste instante, as correntes convectivas na fase líquida do armazenador.

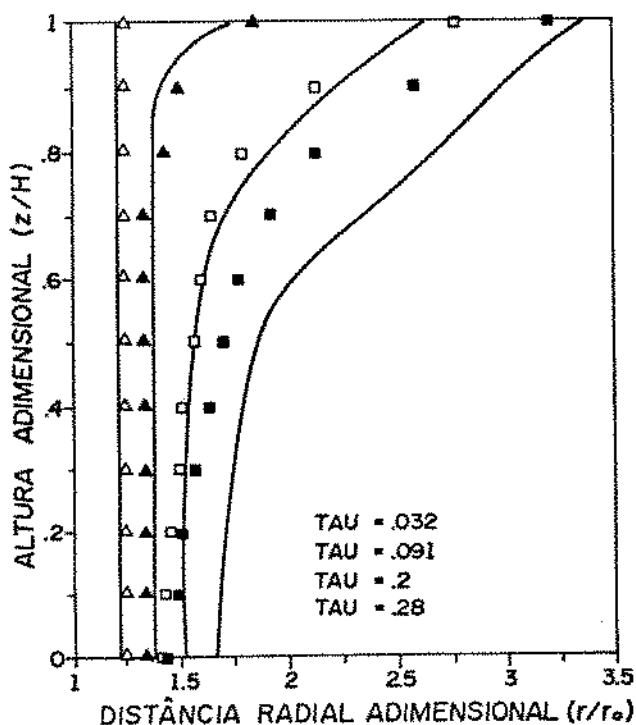


Figura 5 - Interfaces líquido-sólido em função do tempo

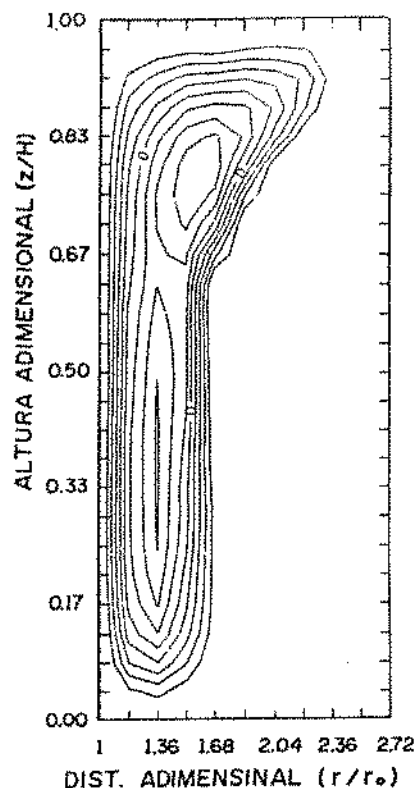


Figura 6 - Linhas de corrente para $\tau = 0,21$

Na Figura 7 estão representadas as interfaces líquido-sólido, em função do tempo, para os números de Fourier indicados, para $H/r_o = 5$, $Raio/r_o = 1,95$, $Ra = 9.4 \times 10^9$ e $Ste = 0,387$, as quais apresentam boa concordância quando comparadas com o trabalho numérico de Rego [24].

Na Figura 8 estão indicadas as interfaces líquido-sólido, em função do tempo e na Figura 9 está representado o calor total armazenado, em função do tempo, para as seguintes condições: $Raio/r_o = 8,76$, $H/r_o = 20,45$ e $T_{fe} - T_{sat} = 11^{\circ}C$. O fluido de aquecimento é a água.

As curvas contínuas indicam os resultados no presente modelo, enquanto que os pontos espalhados são os resultados experimentais de Kalhori [10].

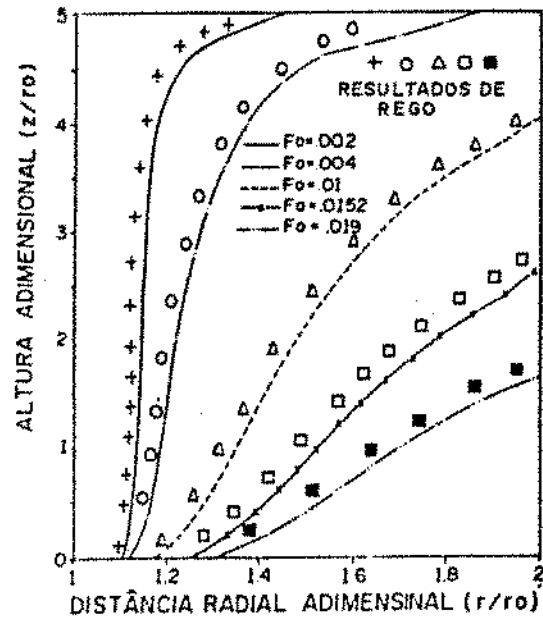


Figura 7 - Interfaces líquido-sólido, comparadas com Rego.

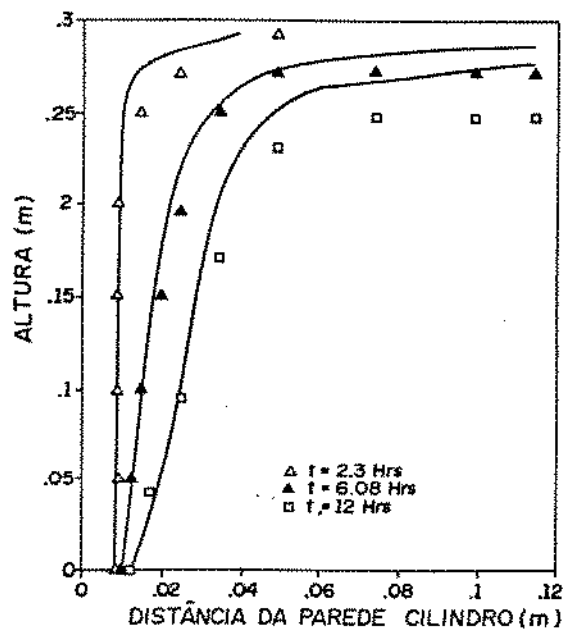


Figura 8 - Interfaces líquido-sólido, comparadas com Kalhori

A concordância entre os resultados do presente modelo e o experimental de Kalhori é muito boa, exceto para grande distância radial onde os efeitos convectivos parecem dominar um importante papel e o presente modelo parece não prever corretamente a posição da interface líquido-sólido. Para o calor armazenado, a concordância é muito boa, o que confirma a validade do modelo.

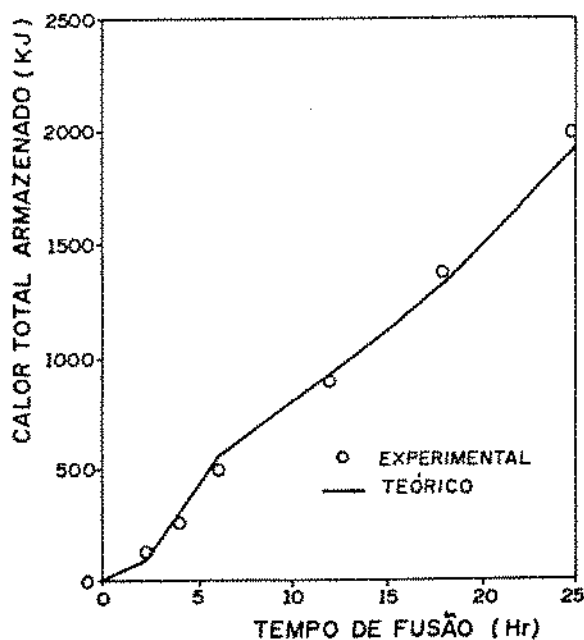


Figura 9 - Calor total armazenado, comparado com Kalhori

Após verificado a confiabilidade do presente modelo numérico elaborado, foram construídas curvas para vários parâmetros de influência do armazenador.

Os parâmetros que foram variados para a obtenção das curvas seguintes foram: as relações geométricas, o número de Rayleigh e o número de Stefan na entrada do armazenador.

Na figura 10 estão representadas as posições das interfaces líquido-sólido, para a condição de temperatura de parede constante no cilindro interno, para os instantes 150 s , 600 s , 1000 s , 2000 s e 3000 s , para $H/r_o = 4$, $Raio/r_o = 2$, $Ra = 2,86 \times 10^7$ e $Ste = 0,1$.

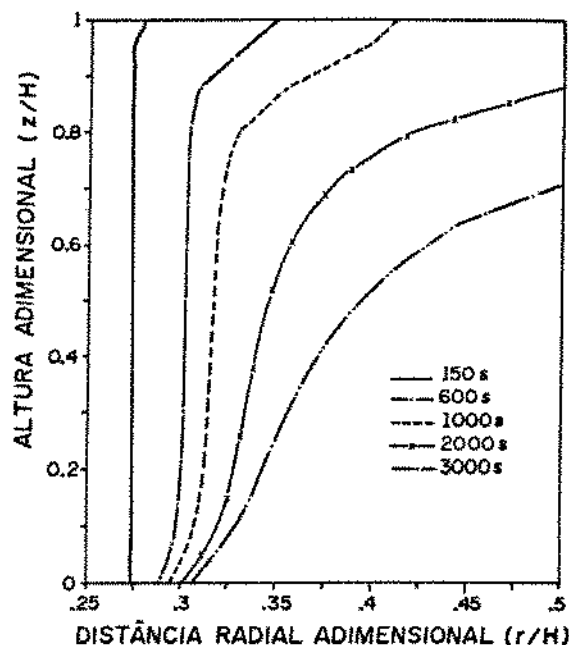


Figura 10 - Interfaces líquido-sólido em função do tempo

Na figura 11 estão representadas as linhas de corrente para os instantes 1000 s e 2000 s, para as condições da figura 10 .

Como era de se esperar, estas linhas de corrente circulam internamente o contorno do armazenador e a interface líquido-sólido e representam, a cada instante, tanto nos contornos como no interior do líquido, as correntes convectivas no armazenador.

A Figura 12 representa a fração da massa fundida no armazenador, em função do tempo, para as condições da figura 10 .

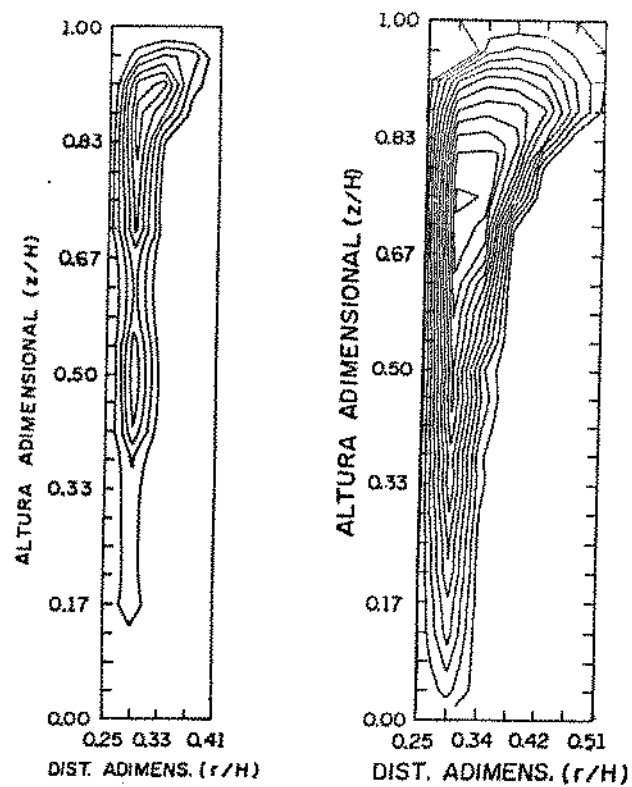


Figura 11 - Linhas de corrente para 1000 s e 2000 s

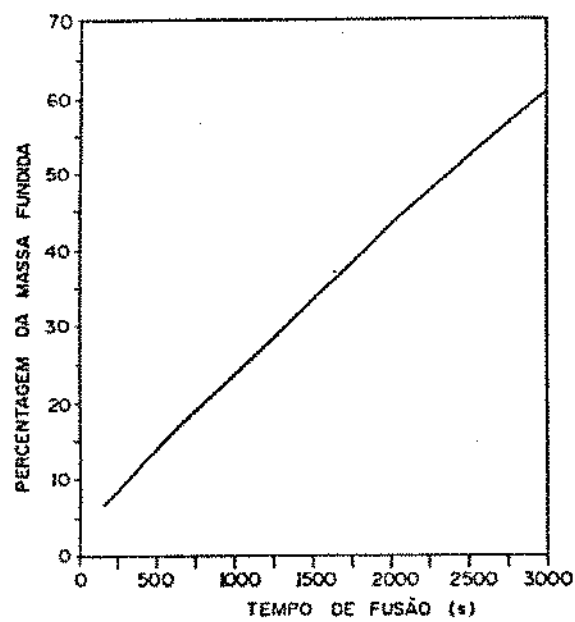


Figura 12 - Fração da massa fundida em função do tempo

Na figura 13 está representado o calor total armazenado, em função do tempo, para as condições da Figura 10.

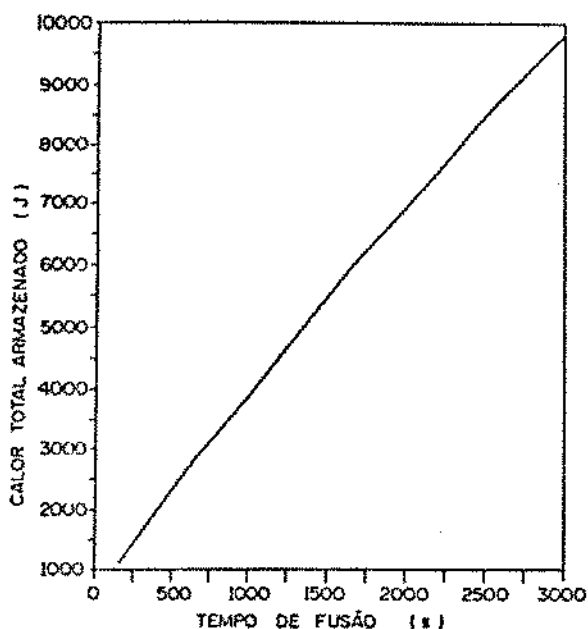


Figura 13 - Calor total armazenado em função do tempo

A quantidade de calor latente armazenada é proporcional a massa fundida no armazenador, neste caso os comportamentos do calor latente armazenado e da fração da massa fundida em função do tempo devem ser semelhantes.

Como o calor total é a soma do calor sensível e do latente e o comportamento da Figura 13 é similar ao da Figura 12; isto indica que a contribuição do calor sensível para o calor total armazenado é praticamente desprezível.

Na figura 14 estão representadas as posições das interfaces líquido-sólido, para a condição de temperatura de parede constante no

cilindro interno, para os instantes 1000 s, 2000 s, 3000 s, 4000 s e 6000 s, para $H/r_o = 8$, $Raio/r_o = 2$, $Ra = 2,3 \times 10^8$ e $Ste = 0,1$.

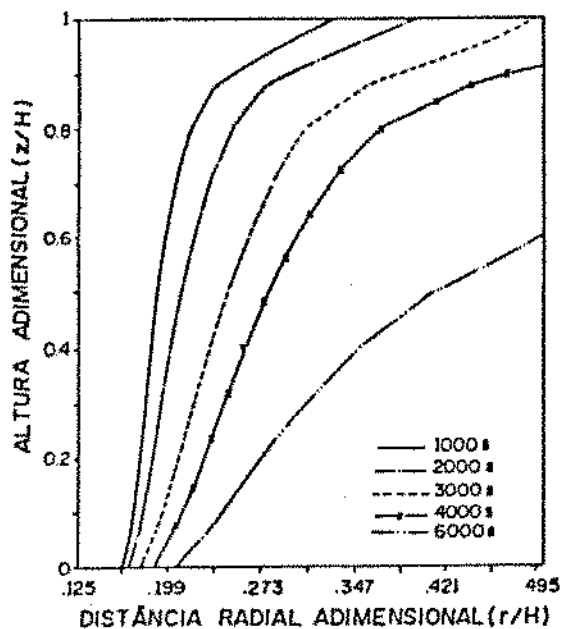


Figura 14 - Interfaces líquido-sólido em função do tempo

A variação do número de Rayleigh, da condição da figura 10 para a figura 14, se deve somente à variação de H/r_o . O número de Stefan é o mesmo para ambos os casos.

A figura 15 representa a fração da massa fundida no armazenador, em função do tempo, para as condições da figura 14. Como era de se esperar e comparando a figura 12 com a figura 15, verifica-se que o aumento da relação H/r_o faz diminuir a fração da massa fundida no armazenador.

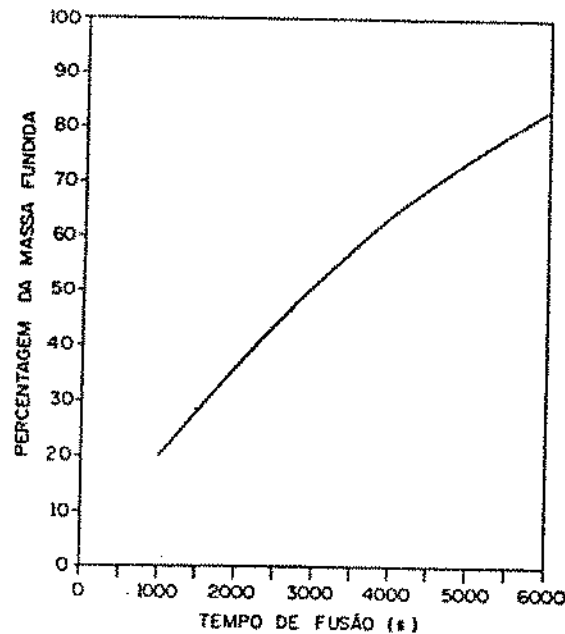


Figura 15 - Fração da massa fundida em função do tempo

Na figura 16 estão representadas as posições das interfaces líquido-sólido, para a condição de temperatura de parede constante no cilindro interno para os instantes 3000 s, 4000 s, 6000 s, 9000 s e 12000 s, para $H/r_o = 8$, $Raio/r_o = 4$, $Ra = 2,3 \times 10^8$ e $Ste = 0,1$.

A figura 17 representa a fração da massa fundida do armazenador, em função do tempo para as condições da figura 16.

Como era de se esperar e comparando a figura 15 com a figura 11, verifica-se que o aumento da relação $Raio/r_o$ faz diminuir a fração da massa fundida do armazenador.

Na figura 18 estão representadas as posições das interfaces líquido-sólido, para a condição de temperatura de parede constante no cilindro interno, para os instantes 3000 s, 4000 s, 6000 s

e 8000 s, para $H/r_0 = 8$, $R_{alo}/r_0 = 4$, $Ra = 7,7 \times 10^8$ e $Ste = 0,331$.

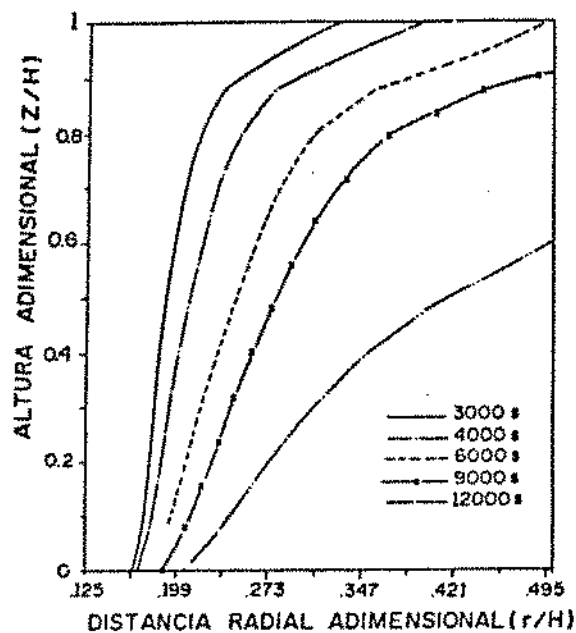


Figura 16 - Interfaces líquido-sólido em função do tempo

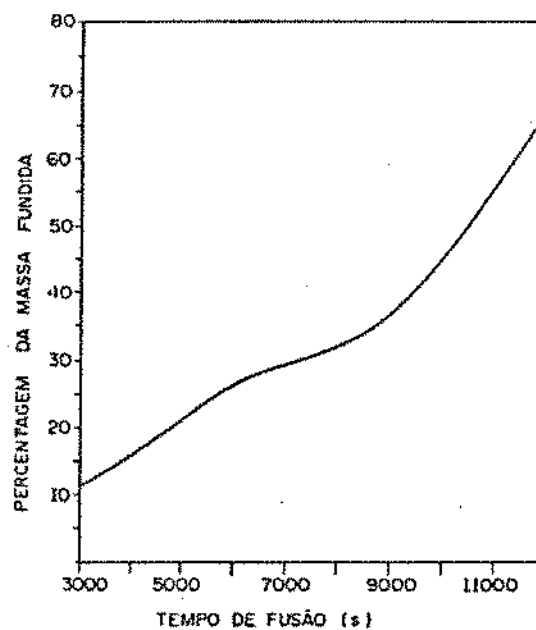


Figura 17 - Fração da massa fundida em função do tempo

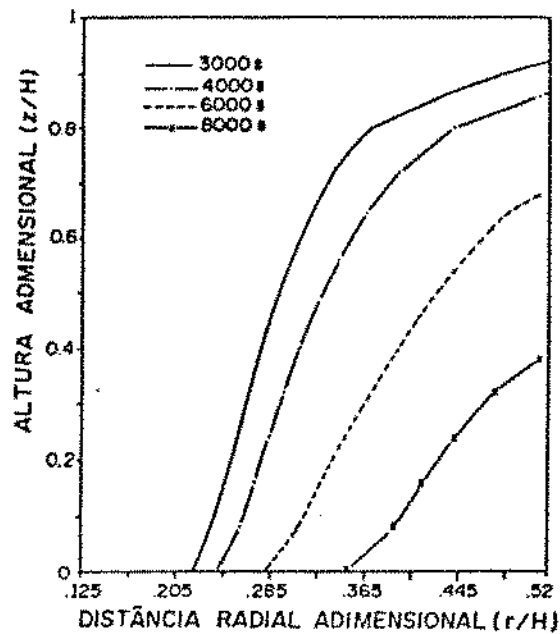


Figura 18 - Interface líquido-sólido em função do tempo

A variação do número de Rayleigh, da condição da figura 16 para a figura 18, se deve somente à variação do número de Stefan.

A figura 19 representa a fração da massa fundida no armazenador em função do tempo, para as condições da figura 18.

Comparando a figura 17 com a figura 19, verifica-se que o aumento do número de Rayleigh faz aumentar a fração da massa fundida no armazenador.

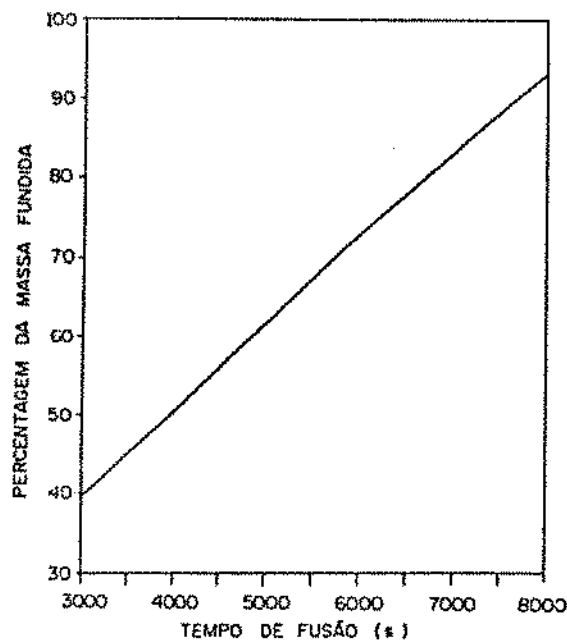


Figura 19 - Fração da massa fundida no armazenador

Na figura 20 estão representadas as interfaces líquido-sólido em função do tempo, para a condição de temperatura de parede constante no cilindro interno, para os instantes 1, 4, 6, 8 e 10 horas, para $H/r_o = 12$, $Raio/r_o = 5$, $Ra = 7,7 \times 10^8$ e $Ste = 0,1$.

Das condições da figura 18 para a figura 14, o número de Rayleigh permanece constante, entretanto a relação H/r_o é aumentada. Isto é devido a redução do número de Stefan.

A figura 21 representa a fração da massa fundida do armazenador, em função do tempo, para as condições da figura 20.

Comparando a figura 19 com a figura 21, verifica-se que o aumento das relações H/r_o e $Raio/r_o$ faz diminuir a fração da massa fundida no armazenador.

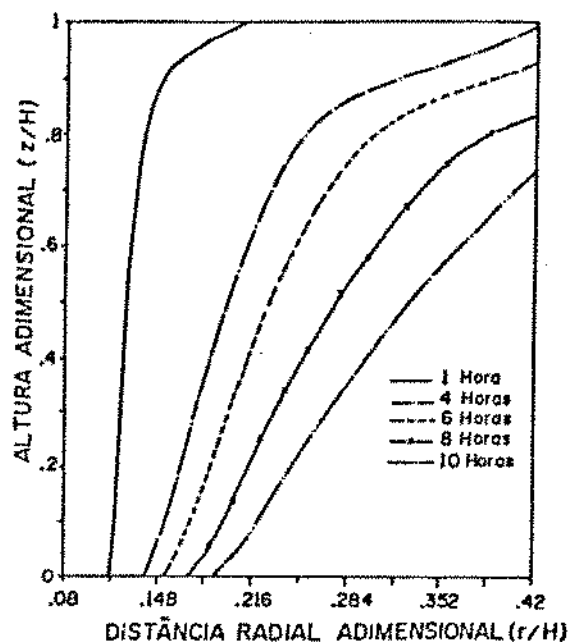


Figura 20 - Interfaces líquido-sólido em função do tempo

Observando as figuras 10, 14 e 18, verifica-se que o aumento do número de Rayleigh acarreta aumento do efeito da convecção natural, devido as forças de empuxo em decorrência das diferenças de temperatura ao longo do material de mudança de fase. Este efeito é notado pelo aumento do poder de rotação da interface líquido-sólido em relação ao eixo vertical.

Este efeito é chamado de pivotamento, ou seja a interface líquido-sólido gira em torno do pivô (eixo vertical que passa pela base da interface líquido-sólido).

Na figura 22 estão representadas as linhas de corrente para o instante 6 horas de fusão, para as condições da figura 20.

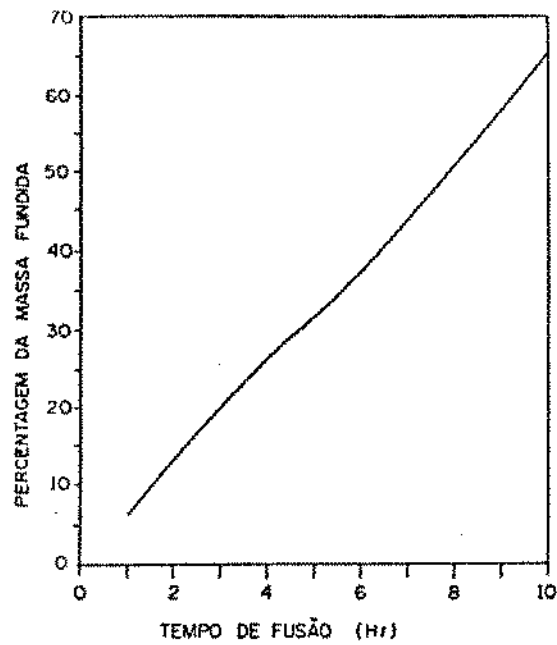


Figura 21 - Fração da massa fundida em função do tempo

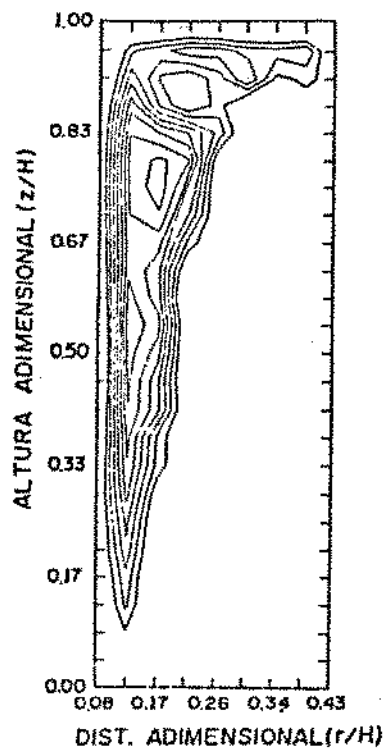


Figura 22 - Linhas de corrente para 6 horas de fusão

Estas linhas de corrente representam a circulação interna do contorno físico do armazenador (cilindro interno e tampas inferior e superior) do armazenador e da interface líquido-sólido e representam, tanto no contorno como no interior do líquido as correntes convectivas.

A Figura 23 representa o tempo gasto para a fusão total do material de mudança de fase do armazenador, em função da relação geométrica $Raio/r_o$, para a condição da temperatura da parede constante no cilindro interno, para $H/r_o = 8$, $Ra = 7,12 \times 10^9$ e $Ste = 0,1$.

A Figura 24 representa o tempo gasto para a fusão total do material de mudança de fase do armazenador, em função da relação geométrica H/r_o , para a condição da temperatura da parede constante no cilindro interno, para $Raio/r_o = 8$, $Ra = 8,9 \times 10^7$ e $Ste = 0,31$.

Com o aumento da relação H/r_o , esta curva tende a ser paralela ao eixo (H/r_o). Isto significa que o efeito de circulação, devido as correntes convectivas, é somente no núcleo do armazenador.

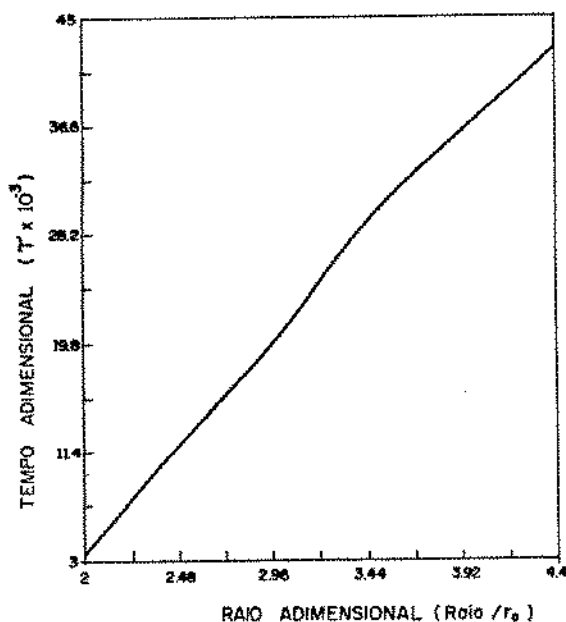


Figura 23 - Tempo para a fusão total em função do $Raio/r_o$

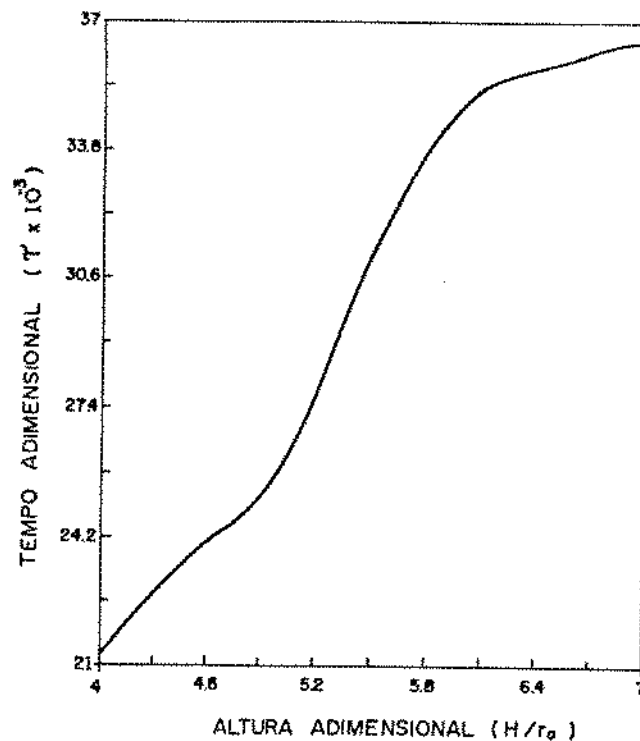


Figura 24 - Tempo para a fusão total em função de H/r_0

IV.2 - Número de Stefan variável ao longo da altura do armazenador

A taxa de calor global recebida pelo material de mudança de fase é igual a taxa de calor cedida pelo fluido de aquecimento no cilindro interno, pois o armazenador é isolado em suas tampas e no cilindro externo.

A hipótese inicial de que a temperatura do fluido de aquecimento permanece constante ao longo da altura do armazenador só é verdadeira quando a taxa de capacidade térmica ($\dot{m}c$) deste fluido for muito grande.

a) - Fluido de aquecimento com alta taxa de capacidade térmica.

Na figura 25 estão representadas as posições das interfaces líquido-sólido, em função do tempo, para os instantes 500 s , 1000 s e 2000 s, para $H/r_o = 12$, $Raio/r_o = 2$, $Ra = 2,4 \times 10^9$ e $Stee = 0,312$. Para a geração da Figura 25, considerou-se a água como o fluido de aquecimento, com uma vazão que corresponde a um número de Biot igual a 137.

A linha contínua indica os resultados com a temperatura do fluido constante ao longo da altura do armazenador, enquanto que os pontos espalhados foram gerados para a condição da temperatura do fluido variável.

Na Figura 26 está representada a efetividade do armazenador, em função do tempo e na figura 27 a taxa de calor global recebida pelo material de mudança de fase em função do tempo.

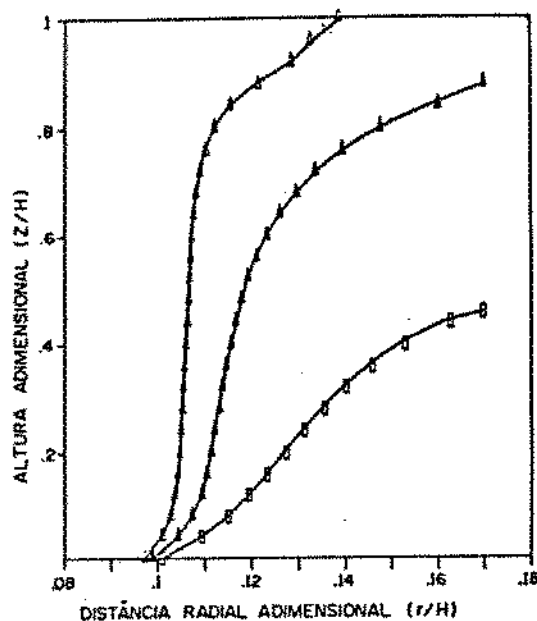


Figura 25 - Interfaces líquido-sólido em função do tempo

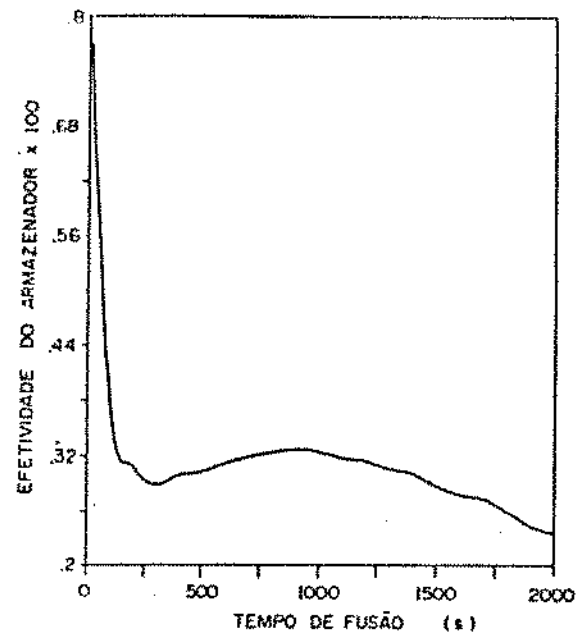


Figura 26 - Efetividade do armazenador em função do tempo

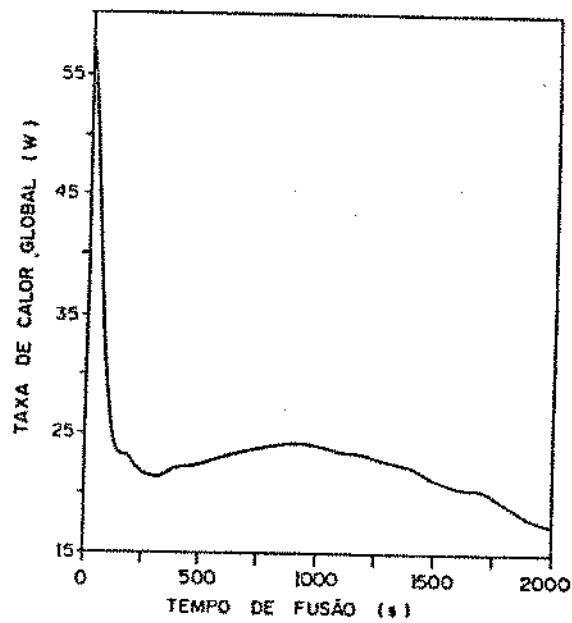


Figura 27 - Taxa de calor global em função do tempo

O comportamento com o tempo das Figuras 26 e 27 são similares, como era de se esperar da definição da efetividade.

Na análise da figura 26, verifica-se que a efetividade tem o seu valor máximo no início da fusão e este valor é menor que 1% . Isto indica que a temperatura do fluido de aquecimento permanece praticamente constante ao longo da altura do armazenador.

b) - Fluido de aquecimento com baixa taxa de capacidade térmica

A Figura 28 foi gerada para as mesmas condições de relações geométricas, número de Rayleigh e número de Stefan na entrada do armazenador, que da Figura 25, entretanto considerou-se o ar , como fluido de aquecimento com uma velocidade média de 5,5 m/s . Para simular o mesmo fluxo de calor na entrada, considerou-se o número de Biot igual a 137 .

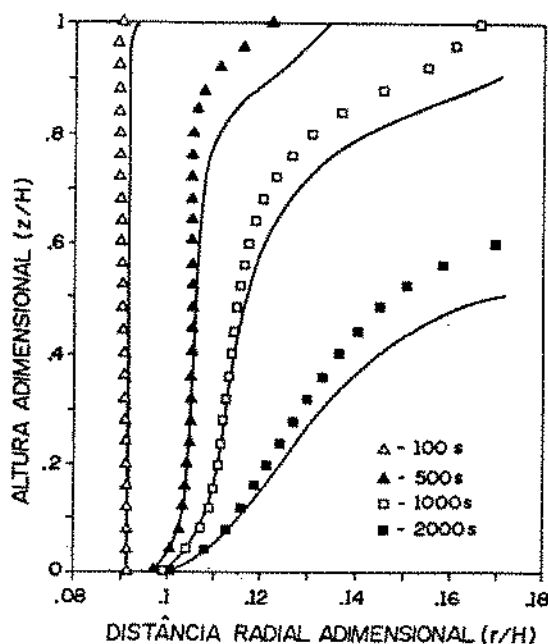


Figura 28 - Interfaces líquido-sólido em função do tempo

As interfaces líquido-sólido foram traçadas, respectivamente, para os instantes 100 s , 500 s , 1000 s e 2000 s .

As linhas contínuas indicam os resultados com a temperatura do ar constante e os pontos espalhados foram gerados para a condição da temperatura do ar variável.

Conforme se verifica na Figura 28, a diminuição da temperatura do fluido de aquecimento, ao longo da altura do armazenador, acarreta na diminuição do efeito da convecção natural, conforme se verifica pela rotação para a esquerda, em relação ao eixo do armazenador, das interfaces líquido-sólido.

Para o instante 100 s , onde o efeito da condução de calor predomina sobre a convecção, a interface líquido-sólido está ligeiramente girada para a esquerda, ao invés de ser vertical, como é o caso para a condição de número de Stefan constante ao longo da altura do armazenador.

Para os instantes 500s , 1000 s e 2000 s , onde o efeito da convecção natural é predominante sobre a condução de calor, estas linhas são também giradas para a esquerda, indicando a diminuição do efeito da convecção natural. A massa fundida também diminui.

No caso real, onde deve ser considerado o efeito da variação da temperatura do fluido de aquecimento, a massa fundida diminui e, conseqüentemente, o calor total armazenado.

As Figuras 29 e 30 indicam, respectivamente, a fração da massa fundida e o calor total armazenado, em função do tempo, para a condição real.

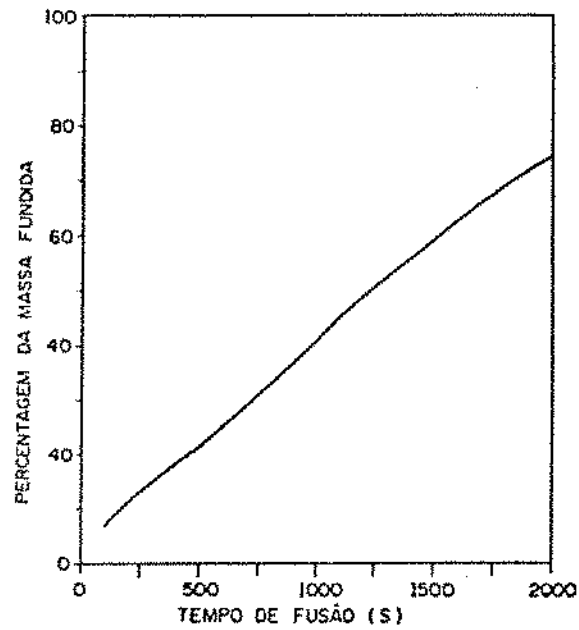


Figura 29 - Fração da massa fundida em função do tempo

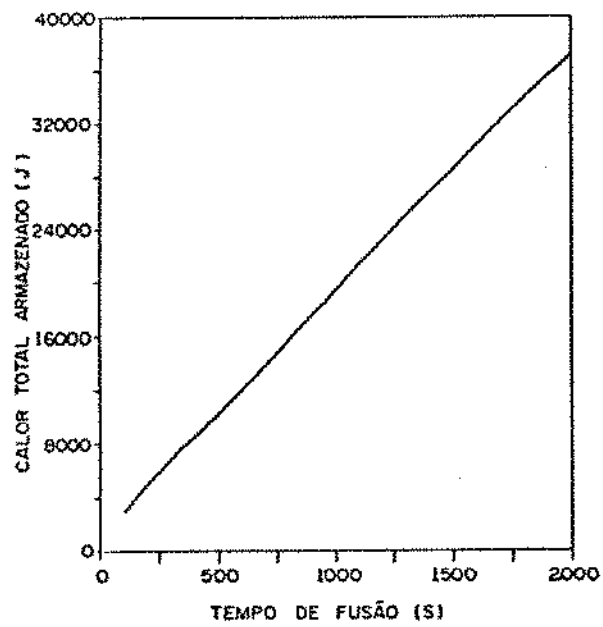


Figura 30 - Calor total armazenado em função do tempo

Na Figura 31 está indicada a efetividade do armazenador em função do tempo, na Figura 32 o número de unidades de transferência em função do tempo e na Figura 33 a efetividade em função do número de unidades de transferência, para o caso real.

Na figura 34 está indicada a taxa de calor global entrando no armazenador, em função do tempo.

A efetividade, o número de unidades de transferência e a taxa de calor global tem o mesmo comportamento com o tempo, como era de se esperar de suas definições.

A efetividade tem o seu valor máximo (acima de 50%) no início da fusão e posteriormente ela se comporta como a taxa de calor global.

É possível determinar o valor médio da efetividade para um tempo total de carga (fusão) ou de descarga (solidificação) do armazenador, pela integração numérica da efetividade em função do tempo.

A mudança de comportamento com o tempo da taxa de calor global se deve à mudança dos mecanismos de troca de calor.

O comportamento da taxa de calor global é analisado da seguinte forma:

Decorrido os primeiros instantes, após o início da fusão, o efeito da convecção natural é ainda desprezível, conforme se nota na Figura 28 , com as interfaces líquido-sólido praticamente verticais . O processo de transferência de calor que predomina aí é o de condução pura, com a correspondente queda da taxa de transferência de calor com o tempo. Com o aumento da camada fundida, as correntes convectivas crescem e resistem à diminuição da taxa de calor. O crescimento dessas correntes causa o aumento da transferência de calor.

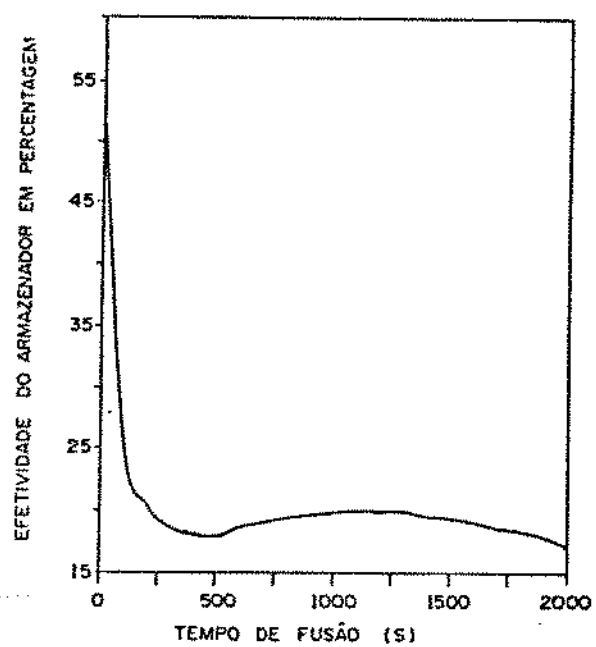


Figura 31 - Efetividade do armazenador em função do tempo

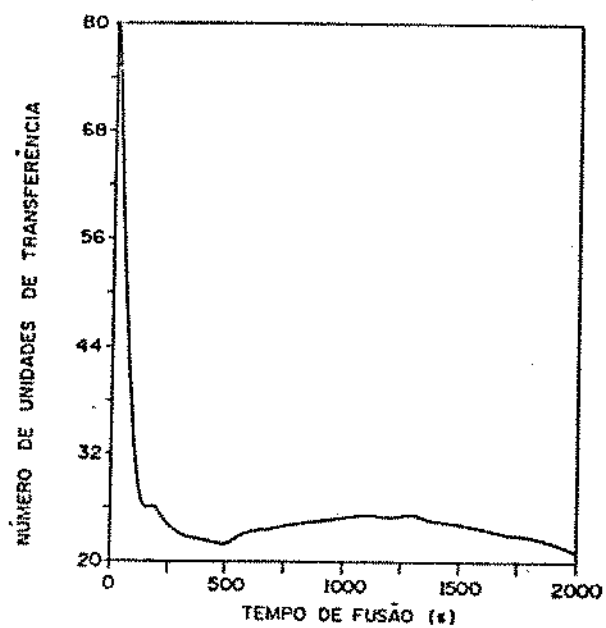


Figura 32 - Número de unidades de transferência com o tempo

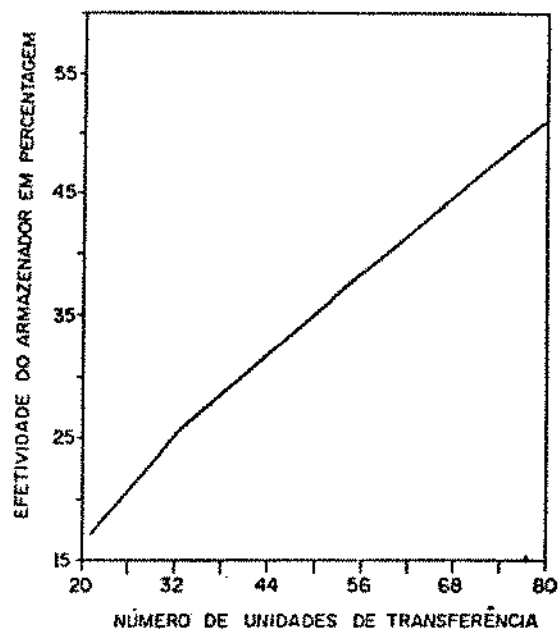


Figura 33 - Efetividade em função do (NUT)

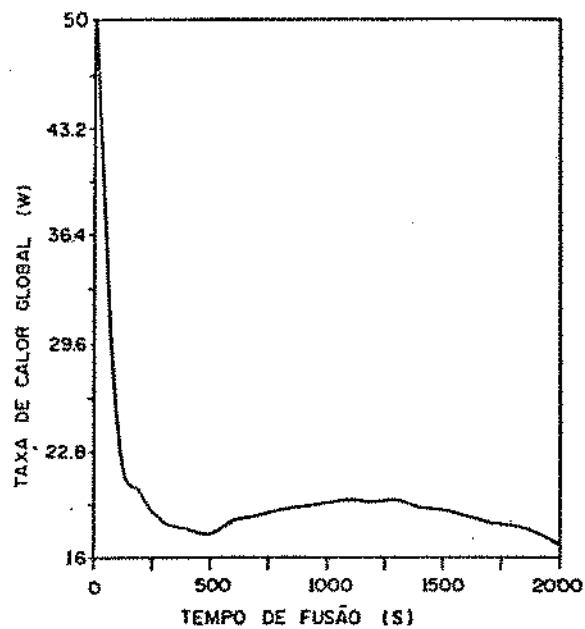


Figura 34 - Taxa de calor global em função do tempo

Durante este período calor é transportado tanto por convecção natural como por condução, através da camada fundida. Quando a camada fundida torna suficientemente larga, calor não é mais transportado diretamente através da camada fundida, mas carregado pelas correntes convectivas da parede do tubo interno à interface líquido-sólido. O aumento da resistência oferecida pelo escoamento por recirculação, ao longo do topo e do fundo, principalmente do topo, tende a impedir o movimento do fluido e reduzir a transferência de calor.

V - CONCLUSÕES

V.1 - Características do método

Da análise dos resultados permite-se concluir as seguintes características do método :

- Como a fusão é contínua em cada volume de controle, as interfaces líquido-sólido são determinadas diretamente sem nenhum processo de interpolação ou de regressão polinomial .
- Os resultados apresentados são coerentes e apresentam boa concordância, quando comparados com outros trabalhos teóricos e um experimental .
- A análise média local é compatível com a análise global, pois, a soma do calor sensível e do latente, respectivamente, armazenados até um determinado instante, em todos os volumes de controle, é praticamente coincidente com a integral da taxa de calor global que entra no cilindro interno entre 0 e o instante determinado .
- Obtém-se resultados precisos e de baixo custo computacional, quando é usado uma simples grade fixa de 41 nós na direção radial e de 51 nós na direção axial .
- Permite-se visualizar as correntes convectivas no armazenador, através das curvas de níveis da superfície $\psi(r,z)$, a cada instante .
- Estas linhas de corrente permitem analisar, com mais segurança, o comportamento da taxa de calor global entrando no cilindro interno do armazenador .
- A efetividade em função do tempo e a efetividade em função do número de unidades de transferência permitem analisar o comportamento do

armazenador .

- É possível determinar o valor médio da efetividade do armazenador para um tempo total de carga (fusão) ou de descarga (solidificação), através da integração numérica da efetividade com o tempo.

V.2 - Sugestões para continuação do presente trabalho

Usando a mesma metodologia o autor sugere a simulação do armazenador cilíndrico horizontal, onde as equações de conservação devem ser analisadas para as variáveis radial e azimutal.

VI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CRANK, J. "Free and Moving Boundary Problems", Claredon Press, 1984.
2. BONACINA, C. and COMINI, G., "Numerical Solution of Phase-Change Problems", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 16, pp. 1825-1832, 1973.
3. SHAMSUNDAR, N. and SPARROW, E.M., "Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change Via The Enthalpy Model", ASME - Journal of Heat Transfer, pp. 333-340, 1975.
4. VOLLER, V.R., "Implicit Finite-difference Solutions of the Enthalpy Formulation of Stefan Problems", IMA - Journal of Numerical Analysis, pp. 201-214, 1985.
5. ISMAIL, K.A.R., "A Comparative Study on Finned and Finless Tubes Immersed in Phase Change Material", Computational Mechanics Publications Elsevier Applied Science, vol. I, pp. 281-292, 1992.
6. HALE, N.W. and VISKANTA, R., "Photographic Observation of the Solid-Liquid Interface Motion during Melting of a Solid from an Isothermal Vertical Wall", Lett Heat Mass Transfer, vol. 5, pp. 329-337, 1978.
7. SPARROW, E.M.; SCHMIDT, R.R. and RAMSEY, J.W., "Experiments on the role of natural convection in melting of solids", J. Heat Transfer,

vol. 100, pp. 11-16, 1978.

8. BATHELT, A.G.; VISKANTA, R. and LEIDENFROST, W., "An experimental investigation of natural convection in the melted region around a heated horizontal cylinder", J. Fluid Mech. 90, pp. 227-239, 1979.
9. VAN BUREN, P.D. and VISKANTA, R., "Interferometric measurement of heat transfer during melting from a vertical surface", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 23, pp. 568-571, 1980.
10. KALHORI, B. and RAMADHYANI, S., "Studies on Heat Transfer From a Vertical Cylinder, with ou without Fins, Embedded in a Solid Phase Change Medium", J. Heat Transfer, vol. 107, pp. 44-51, 1985.
11. BENARD, C., GOBIN, A. and ZANOLI, A. "Moving boundary problem: heat conduction in the solid phase of a phase change material during melting driven by natural convection in the liquid", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 29, pp. 1669-1681, 1986.
12. SOUZA MENDES, P.R. and PINHO BRASIL, A.C., "Heat Transfer During Melting Around an Isothermal Vertical Cylinder", J. Heat Transfer, vol. 109, pp. 961-964, 1987.
13. SPARROW, E.M., PATANKAR, S.V AND RAMADHYANI, S., "Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region", J. Heat Transfer, vol. 99, pp. 520-526, 1978.

14. GARTLING, D.K., "Finite Element Analysis of Convective Heat Transfer Problems with Change of Phase", Proc. First Int.Conf. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, pp. 17-21, 1978.
15. GADGIL, A. and GOBIN, D., "Analysis of Two-Dimensional Melting in Rectangular Enclosures in the Presence of Convection", J. Heat Transfer, vol. 106, pp. 20-26, 1984.
16. HO, C.H. and VISKANTA, R., "Heat Transfer during Melting from an Isothermal Vertical Wall", J. Heat Transfer, vol. 106, pp. 12-19, 1984.
17. OKADA, M., "Analysis of Heat Transfer during Melting from a Vertical Wall", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 27, pp. 2057-2066, 1984.
18. RIEGER, H.; PROJAHN, U. and BEER, H., "Analysis of Heat Transport Mechanisms during Melting around a Horizontal Circular Cylinder", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, pp. 135-147, 1982.
19. WEBB, B.W. and VISKANTA, R., "Analysis of Heat Transfer during Melting of a Pure Metal from an Isothermal Vertical Wall", Numer. Heat Transfer, vol. 9, pp. 539-558, 1986.
20. BENARD, C. and GOBIN, D., "Moving boundary problem: heat conduction in the solid phase of a phase change material during melting driven by natural convection in the liquid", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 29, pp. 1669-1681, 1986.

21. VOLLER, V.R., "An Enthalpy Method for Convection Difusion Phase Change", Int. Journal. for Num. Meth. in Engineering, vol. 24, pp. 271-284, 1987.
22. HIBBERT, S.E.; MARKATOS, N.C. and VOLLER, V.R., "Computer Simulations of Moving-Interface, convective, phase-change processes", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 31, pp. 1785-1795, 1988.
23. LACROIX, M., "Computation of Heat transfer during melting of a pure substance from an isothermal wall", Num. Heat Transfer, vol. 15B, pp. 191-210, 1989.
24. REGO, O.A.A., "Análise do Desempenho de Armazenadores Térmicos por Calor Latente de Eixo Vertical", Tese de Doutorado, ITA - CTA, São José dos Campos, maio, 1991.
25. KIM, C.J. and KAVIANY, M. "A numerical method for phase change problems with convection and difusion", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 35, pp. 457-467, 1992.
26. PATANKAR, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill, 1980.
27. GOSMAN, A.D., PUN, W.M., RUNCHAL, A.K., SPALDING, D.B., and WOLFSTEIN, M., "Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows", Academic Press, 1969.

28. ROACHE, P.J., "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers, 1970
29. MELO, C.A. & ISMAIL, K. A. R. , "Análise da fusão em Armazenadores Cilíndricos Verticais" , II Congresso de engenharia Mecânica Norte-Nordeste, vol. II, pp. 1-8 , João Pessoa - Pb , junho, 1992
30. ISMAIL, K. A. R. & MELO, C. A. , "Fusion of PCM Around Vertical Cylinder in the Presence of Natural convection", Advanced Computational Methods in Heat Transfer II , pp. 75-89 , Milan, July, 1992
31. MELO, C. A. & ISMAIL K. A. R., "Visualização das Correntes Convectivas no Armazenador Cilíndrico Vertical com Mudança de Fase" , IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas, pp. 645-648 , Rio de Janeiro, dez., 1992

ANEXO 1 - EQUAÇÕES DISCRETIZADAS.

a) - Equação (21) da Função Corrente.

a.1) - Volumes de controle internos

$$\left[\frac{AD_{I,J}}{\Delta R} + \frac{1}{\Delta R} \left(AE_{I,J} + \frac{V_{I,J}}{RP} \right) + \frac{ATS_{I,J}}{\Delta \xi} + \frac{ATI_{I,J}}{\Delta \xi} \right] \Psi_{I,J} =$$

$$\frac{AD_{I,J}}{\Delta R} \Psi_{I+1,J} + \frac{1}{\Delta R} \left(AE_{I,J} + \frac{V_{I,J}}{RP} \right) \Psi_{I-1,J} + \frac{ATS_{I,J}}{\Delta \xi} \Psi_{I,J+1}$$

$$+ \frac{ATI_{I,J}}{\Delta \xi} \Psi_{I,J-1} + W_{I,J} RP V_{I,J} \quad (46)$$

$$(I = 2, 3, \dots, INT-1) \quad , \quad (J = 2, 3, 4, \dots, IN-1)$$

INT- Nó que corresponde ao volume de controle que contém a interface líquido-sólido para a altura J investigada

a.2) - Volumes de Controle que contém o Cilindro Interno

$$\Psi_{1,J} = 0 \quad (47)$$

$$(J = 2, 3, \dots, IN-1)$$

a.3) - Volumes de controle que contém a interface líquido-sólido.

$$\Psi_{I,J} = 0 \quad (44)$$

$$(I = INT) \quad , \quad (J = 2,3, \dots , IN-1)$$

a.4) - Volumes de controle que contém a tampa superior.

$$\Psi_{I,IN} = 0 \quad (49)$$

$$I = 2,3, \dots , IM-1$$

a.5) - Volumes de controle que contém a tampa inferior

$$\Psi_{I,1} = 0 \quad (50)$$

$$I = 2,3, \dots , IM - 1$$

b) - Equação (23) da energia

Nas equações discretizadas da energia, que se seguem, a variável ϕ será zero ou igual a θ no respectivo nó, conforme especificado nas equações (20.1) e (20.2).

b.1) - Volume de controle que contém o cilindro interno e a tampa inferior (I=1 e J=1)

$$\begin{aligned}
 & \frac{V_{1,1}}{\Delta\tau} \theta_{1,1}^{m+1} + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AD_{1,1}}{\Delta R} + \frac{ATS_{1,1}}{\Delta\xi} + Bi \cdot AE_{1,1} \right) \phi_{1,1}^{m+1} \\
 &= \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AD_{1,1}}{\Delta R} \phi_{2,1}^{m+1} + \frac{ATS_{1,1}}{\Delta\xi} \phi_{1,2}^{m+1} + Bi \cdot Ste \cdot AE_{1,1} \right) \\
 &+ \frac{V_{1,1}}{\Delta\tau} \theta_{1,1}^m \quad (51)
 \end{aligned}$$

b.2) - Volumes de controle que contém a tampa inferior e não contém o cilindro externo (I=2,3, ..., IM-1), J=1.

$$\begin{aligned}
 & \frac{V_{I,1}}{\Delta\tau} \theta_{I,1}^{m+1} + \left\{ \text{Max}[(\rho U_r)_d, 0] AD_{I,1} + \text{Max}[(\rho U_r)_e, 0] AE_{I,1} \right. \\
 & \quad \left. + \text{Max}[(\rho U_\xi)_s, 0] ATS_{I,1} \right\} \theta_{I,1}^{m+1} \\
 &+ \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left\{ \frac{AD_{I,1}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{AE_{I,1}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ATSI,1}{\Delta\xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_s| \right)^5 \right] \phi_{I,1}^{m+1} = \\
& + ADI,1 \text{Max} \left[-(\rho UR)_d, 0 \right] \theta_{I+1,1}^{m+1} + AEI,1 \text{Max} \left[(\rho UR)_e, 0 \right] \theta_{I-1,1}^{m+1} \\
& + ATSI,1 \text{Max} \left[-(\rho U_\xi)_s, 0 \right] \theta_{I,2}^{m+1} \\
& + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left\{ \frac{ADI,1}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] \phi_{I+1,1}^{m+1} \right. \\
& + \frac{AEI,1}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] \phi_{I-1,1}^{m+1} \\
& + \left. \frac{ATSI,1}{\Delta\xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_s| \right)^5 \right] \phi_{I,2}^{m+1} \right\} \\
& + \frac{VI,1}{\Delta\tau} \theta_{I,1}^m \tag{52}
\end{aligned}$$

b.3) - Volume de controle que contém o cilindro externo e a tampa inferior (I=IM, J=1) .

$$\begin{aligned}
& \frac{VIM,1}{\Delta\tau} \theta_{IM,1}^{m+1} + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AEIM,1}{\Delta R} + \frac{ATSIM,1}{\Delta\xi} \right) \phi_{IM,1}^{m+1} \\
& = \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AEIM,1}{\Delta R} \phi_{IM-1,1}^{m+1} + \frac{ATSIM,1}{\Delta\xi} \phi_{IM,2}^{m+1} \right) \\
& + \frac{VIM,1}{\Delta\tau} \theta_{IM,1}^m \tag{53}
\end{aligned}$$

b.4) - Volumes de controle que contém o cilindro interno e não contém nem a tampa inferior nem a superior $I=1$, $(J=2,3, \dots, IN-1)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{1,J}}{\Delta \tau} \theta_{1,J}^{m+1} + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AD_{1,J}}{\Delta R} + \frac{ATS_{1,J}}{\Delta \xi} + \frac{ATI_{1,J}}{\Delta \xi} + Bi \ AE_{1,J} \right) \phi_{1,J}^{m+1} \\
 = \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AD_{1,J}}{\Delta R} \phi_{2,J}^{m+1} + \frac{ATS_{1,J}}{\Delta \xi} \phi_{1,J+1}^{m+1} \right. \\
 \left. + \frac{ATI_{1,J}}{\Delta \xi} \phi_{1,J-1}^{m+1} + Bi \ Ste \ AE_{1,J} \right) \\
 + \frac{V_{1,J}}{\Delta \tau} \theta_{1,J}^m
 \end{aligned} \tag{54}$$

b.5) - Volumes de controle internos

$(I=2,3, \dots, IM-1)$, $(J=2,3, \dots, IN-1)$

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{I,J}}{\Delta \tau} \theta_{I,J}^{m+1} + \left\{ \text{Max} \left[(\rho U_R)_d , 0 \right] AD_{I,J} + \text{Max} \left[(\rho U_R)_e , 0 \right] AE_{I,J} \right. \\
 \left. + \text{Max} \left[(\rho U_\xi)_s , 0 \right] ATS_{I,J} + \text{Max} \left[(\rho U_\xi)_i , 0 \right] ATI_{I,J} \right\} \theta_{I,J}^{m+1} \\
 + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left\{ \frac{AD_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0 , \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{AE_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] \\
& + \frac{ATSI_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_s| \right)^5 \right] \\
& + \frac{ATII_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_i| \right)^5 \right] \} \phi_{I,J}^{m+1} = \\
& + AD_{I,J} \text{Max} \left[-(\rho U_R)_d, 0 \right] \theta_{I+1,J}^{m+1} + AE_{I,J} \text{Max} \left[(\rho U_R)_e, 0 \right] \theta_{I-1,J}^{m+1} \\
& + ATSI_{I,J} \text{Max} \left[-(\rho U_\xi)_s, 0 \right] \theta_{I,J+1}^{m+1} + ATII_{I,J} \text{Max} \left[(\rho U_\xi)_i, 0 \right] \theta_{I,J-1}^{m+1} \\
& + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left\{ \frac{AD_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] \phi_{I+1,J}^{m+1} \right. \\
& + \frac{AE_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] \phi_{I-1,J}^{m+1} \\
& + \frac{ATSI_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_s| \right)^5 \right] \phi_{I,J+1}^{m+1} \\
& + \left. \frac{ATII_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_i| \right)^5 \right] \phi_{I,J-1}^{m+1} \right\} \\
& + \frac{VI_{I,J}}{\Delta \tau} \theta_{I,J}^m \tag{55}
\end{aligned}$$

b.6) - Volumes de controle que contém o cilindro externo e não contém nem a tampa inferior nem a superior
 $I = IM, (J=2,3, \dots, IN-1)$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{IM,J}}{\Delta \tau} \theta_{IM,J}^{m+1} + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AE_{IM,J}}{\Delta R} + \frac{ATS_{IM,J}}{\Delta \xi} + \frac{ATI_{IM,J}}{\Delta \xi} \right) \phi_{IM,J}^{m+1} \\
& = \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AE_{IM,J}}{\Delta R} \phi_{IM-1,J}^{m+1} + \frac{ATS_{IM,J}}{\Delta \xi} \phi_{IM,J+1}^{m+1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{ATI_{IM,J}}{\Delta \xi} \phi_{IM,J-1}^{m+1} \right) \\
& \quad + \frac{V_{IM,J}}{\Delta \tau} \theta_{IM,J}^m
\end{aligned} \tag{56}$$

b.7) - Volume de controle que contém o cilindro interno e a tampa superior ($I=1$, $J=IN$).

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{1,IN}}{\Delta \tau} \theta_{1,IN}^{m+1} + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AD_{1,IN}}{\Delta R} + \frac{ATI_{1,IN}}{\Delta \xi} + Bi \ AE_{1,IN} \right) \phi_{1,IN}^{m+1} \\
& = \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AD_{1,IN}}{\Delta R} \phi_{2,IN}^{m+1} + \frac{ATI_{1,IN}}{\Delta \xi} \phi_{1,IN-1}^{m+1} + Bi \ Ste \ AE_{1,IN} \right) \\
& \quad + \frac{V_{1,IN}}{\Delta \tau} \theta_{1,IN}^m
\end{aligned} \tag{57}$$

b.8) - Volumes de controle que contém a tampa superior e não contém o cilindro externo ($I=2,3, \dots, IM-1$), $J=IN$.

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{I,IN}}{\Delta \tau} \theta_{I,IN}^{m+1} + \left\{ \text{Max} \left[(\rho U_R)_d, 0 \right] AD_{I,IN} + \text{Max} \left[(\rho U_R)_e, 0 \right] AE_{I,IN} \right. \\
& \quad \left. + \text{Max} \left[(\rho U_\xi)_i, 0 \right] AT_{I,IN} \right\} \theta_{I,IN}^{m+1} \\
& + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left\{ \frac{AD_{I,IN}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] \right. \\
& \quad + \frac{AE_{I,IN}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] \\
& \quad \left. + \frac{AT_{I,IN}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_i| \right)^5 \right] \right\} \phi_{I,IN}^{m+1} = \\
& + AD_{I,IN} \text{Max} \left[-(\rho U_R)_d, 0 \right] \theta_{I+1,IN}^{m+1} + AE_{I,I} \text{Max} \left[(\rho U_R)_e, 0 \right] \theta_{I-1,IN}^{m+1} \\
& \quad + AT_{I,I} \text{Max} \left[-(\rho U_\xi)_i, 0 \right] \theta_{I,IN-1}^{m+1} \\
& + \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr} \right)^{1/2} \left\{ \frac{AD_{I,IN}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] \phi_{I+1,IN}^{m+1} \right. \\
& \quad + \frac{AE_{I,IN}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] \phi_{I-1,IN}^{m+1} \\
& \quad \left. + \frac{AT_{I,IN}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_s| \right)^5 \right] \phi_{I,IN-1}^{m+1} \right\} \\
& + \frac{V_{I,IN}}{\Delta \tau} \theta_{I,IN}^m \tag{58}
\end{aligned}$$

b.9) - Volume de controle que contém o cilindro externo e a tampa superior ($I=IM$, $J=IN$) .

$$\begin{aligned}
 & \frac{V_{IM,IN}}{\Delta\tau} \theta_{IM,IN}^{m+1} + \left(\frac{1}{Ra*Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AE_{IM,IN}}{\Delta R} + \frac{AT_{IM,IN}}{\Delta\xi} \right) \phi_{IM,IN}^{m+1} \\
 & = \left(\frac{1}{Ra*Pr} \right)^{1/2} \left(\frac{AE_{IM,IN}}{\Delta R} \phi_{IM-1,IN}^{m+1} + \frac{AT_{IM,IN}}{\Delta\xi} \phi_{IM,IN-1}^{m+1} \right) \\
 & \quad + \frac{V_{IM,IN}}{\Delta\tau} \theta_{IM,IN}^m \quad (59)
 \end{aligned}$$

c) - Equação (24) de transporte de Vorticidade.

c.1) - Volumes de controle internos

($I=2,3, \dots, INT-1$) , ($J=2,3, \dots, IN-1$)

$$\begin{aligned}
 & \frac{V_{I,J}}{\Delta\tau} W_{I,J}^{m+1} + \left\{ \text{Max} \left[(\rho U_R)_d, 0 \right] AD_{I,J} + \text{Max} \left[(\rho U_R)_e, 0 \right] AE_{I,J} \right. \\
 & \quad \left. + \text{Max} \left[(\rho U_\xi)_s, 0 \right] AT_{SI,J} + \text{Max} \left[(\rho U_\xi)_i, 0 \right] AT_{II,J} \right\} W_{I,J}^{m+1} \\
 & + \left(\frac{Pr}{Ra*} \right)^{1/2} \left\{ \frac{AD_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{AE_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] \\
& + \frac{ATS_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_s| \right)^5 \right] \\
& + \frac{ATI_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_i| \right)^5 \right] \} W_{I,J}^{m+1} + \\
& + \frac{V_{I,J}}{RP} \left\{ \text{Max} \left[-(UR)_p, 0 \right] + \text{Max} \left[(UR)_p, 0 \right] + \left(\frac{Pr}{Ra^*} \right)^{1/2} \right\} W_{I,J}^{m+1} = \\
& + AD_{I,J} \text{Max} \left[-(\rho UR)_d, 0 \right] W_{I+1,J}^{m+1} + AE_{I,J} \text{Max} \left[(\rho UR)_e, 0 \right] W_{I-1,J}^{m+1} \\
& + AT_{SI,J} \text{Max} \left[-(\rho U_\xi)_s, 0 \right] W_{I,J+1}^{m+1} + AT_{II,J} \text{Max} \left[(\rho U_\xi)_i, 0 \right] W_{I,J-1}^{m+1} \\
& + \left(\frac{Pr}{Ra^*} \right)^{1/2} \left\{ \frac{AD_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_d| \right)^5 \right] W_{I+1,J}^{m+1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{AE_{I,J}}{\Delta R} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_e| \right)^5 \right] W_{I-1,J}^{m+1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ATS_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_S| \right)^5 \right] W_{I,J+1}^{m+1} \\
& + \frac{ATI_{I,J}}{\Delta \xi} \text{Max} \left[0, \left(1 - \frac{1}{10} |(P)_1| \right)^5 \right] W_{I,J-1}^{m+1} \} \\
& + \frac{2 V_{I,J}}{RP} \text{Max} \left[(UR)_p, 0 \right] W_{I,J}^{*m+1} \\
& + \frac{V_{I,J}}{\Delta \tau} W_{I,J}^m \quad (60)
\end{aligned}$$

c.2) - Volumes de controle que contém o cilindro interno (condição de contorno no cilindro interno) :

$$W_{1,J} = - \frac{\Psi_{2,J}}{\left(-\frac{r_0}{H} \right) \Delta R V_{1,J}} AD_{1,J} \quad (61)$$

$$J = 2, 3, 4, \dots, IN-1$$

c.3) - Volumes de controle que contém a interface líquido-sólido (condição de contorno na interface líquido-sólido) :

$$W_{I,J} = - \frac{\Psi_{I-1,J}}{\Delta R} \left(AE_{I,J} + \frac{V_{I,J}}{RP} \right) \frac{1}{RP V_{I,J}} \quad (62)$$

$$I = INT \quad e \quad J = 2,3,4, \dots, IN-1$$

c.4) - Volumes de controle que contém a tampa superior (condição de contorno na tampa superior) :

$$W_{I,IN} = - \frac{\Psi_{I,IN-1}}{RP \Delta \xi V_{I,IN}} AT_{II,IN} \quad (63)$$

c.5) - Volumes de controle que contém a tampa inferior (condição de contorno na tampa inferior) :

$$\psi_{I,1} = - \frac{\Psi_{I,2}}{RP \Delta \xi V_{I,1}} AT_{SI,1} \quad (64)$$

d) - Velocidades nas interfaces dos volumes de controle

Estas velocidades são obtidas pela discretização da equação (18.a) e da equação (18.b). Esta discretização é feita de tal sorte que a equação da continuidade seja satisfeita em cada volume de controle.

d.1) - Velocidades nas interfaces dos volumes de controle que contém a tampa inferior até o volume de controle que contém a interface líquido-sólido.

$$(U_R)_d = - \frac{(\psi_{I+1,2} + \psi_{I,2} - \psi_{I,1} - \psi_{I+1,1})}{2 RD \Delta \xi} \quad (65)$$

$$(U_R)_e = - \frac{(\psi_{I-1,2} + \psi_{I,2} - \psi_{I,1} - \psi_{I-1,1})}{2 RE \Delta \xi} \quad (66)$$

$$(U_\xi)_s = \frac{(\psi_{I+1,1} + \psi_{I+1,2} - \psi_{I-1,1} - \psi_{I-1,2})}{2 RP \Delta R} \quad (67)$$

$$I = 2, 3, \dots, INT-1$$

INT representa o volume de controle da interface líquido-sólido .

d.2) - Velocidades nas interfaces dos volumes de controle internos até o volume de controle que contém a interface líquido-sólido.

$$(U_R)_d = - \frac{(\psi_{I,J+1} + \psi_{I+1,J+1} - \psi_{I,J-1} - \psi_{I+1,J-1})}{2 RD \Delta \xi} \quad (68)$$

$$(U_R)_e = - \frac{(\psi_{I,J+1} + \psi_{I-1,J+1} - \psi_{I,J-1} - \psi_{I-1,J-1})}{2 RE \Delta \xi} \quad (69)$$

$$(U_{\xi})_e = \frac{(\psi_{I+1,J} + \psi_{I+1,J+1} - \psi_{I-1,J} - \psi_{I-1,J+1})}{2 \text{ RP } \Delta \xi} \quad (70)$$

$$(U_{\xi})_i = \frac{(\psi_{I+1,J} + \psi_{I+1,J-1} - \psi_{I-1,J} - \psi_{I-1,J-1})}{2 \text{ RP } \Delta \xi} \quad (71)$$

$$I = 2, 3, 4, \dots, \text{INT}-1 \quad e \quad J = 2, 3, 4, \dots, \text{IN}-1$$

d.3) - Velocidades nas interfaces dos volumes de controle que contém a tampa superior até o volume de controle que contém a interface líquido-sólido.

$$(U_R)_d = - \frac{(\psi_{I,IN} + \psi_{I+1,IN} - \psi_{I+1,IN-1} - \psi_{I,IN-1})}{2 \text{ RD } \Delta \xi} \quad (72)$$

$$(U_R)_e = - \frac{(\psi_{I,IN} + \psi_{I-1,IN} - \psi_{I,IN-1} - \psi_{I-1,IN-1})}{2 \text{ RE } \Delta \xi} \quad (73)$$

$$(U_{\xi})_i = \frac{(\psi_{I+1,IN-1} + \psi_{I+1,IN} - \psi_{I-1,IN-1} - \psi_{I-1,IN})}{2 \text{ RP } \Delta R} \quad (74)$$

$$I = 2, 3, 4, \dots, \text{INT}-1$$

e) - Cálculo dos números de Peclet nas interfaces dos volumes de controle .

$$(P)_d = \frac{(\rho U_R)_d}{\frac{\Gamma}{\Delta R}} \quad (75)$$

$$(P)_e = \frac{(\rho U_R)_e}{\frac{\Gamma}{\Delta R}} \quad (76)$$

$$(P)_s = \frac{(\rho U_\xi)_s}{\frac{\Gamma}{\Delta \xi}} \quad (77)$$

$$(P)_i = \frac{(\rho U_\xi)_i}{\frac{\Gamma}{\Delta \xi}} \quad (78)$$

f) - Posição radial adimensional da interface líquido-sólido.

f.1) - A interface líquido sólido não está localizada no último volume de controle ($I = IM$) .

$$RINT_J = \left(\frac{r_o}{H} \right) + (2I - 3 + 2F) \frac{\Delta R}{2} \quad (79.1)$$

O último volume de controle contém o cilindro externo

f.2) - A interface líquido-sólido está localizada no último volume de controle.

$$RINT_J = \left(\frac{r_0}{H} \right) + (2I - 3 + F) \frac{\Delta R}{2} \quad (79.2)$$

F indica a fração fundida do volume de controle.

g) - Quantidade de calor sensível armazenado na linha radial .

$$\frac{CALS}{2\pi\rho H^3\lambda} = \sum_{I=1}^{INT} v_{I,J} (\phi_1 - \phi_i) \quad (80)$$

ϕ_1 - Valor de ϕ no instante $\tau + \Delta\tau$

ϕ_i - Valor de ϕ no instante τ

h) - Quantidade de calor latente armazenado na linha radial.

$$\frac{CALL}{2\pi\rho H^3\lambda} = \sum_{I=1}^{INT} v_{I,J} F \quad (81)$$

i) - Taxa de calor que entra no cilindro interno, numa determinada altura J .

$$\frac{Q/H}{2\rho\lambda\alpha Bi\Pi\left(\frac{r_0}{H}\right)} = (Ste - \phi_{1,J}) \frac{\Delta\xi}{2} \quad (82.1)$$

$$J = 1 \text{ ou } J = IN$$

$$\frac{Q/H}{2\rho\lambda\alpha Bi\Pi\left(\frac{r_0}{H}\right)} = (Ste - \phi_{1,J})\Delta\xi \quad (82.2)$$

$$J = 2, 3, 4, \dots IN-1$$

j) - Cálculo da quantidade de calor que entra no cilindro interno entre os instantes t e t + Δt

$$CALE = (Q_{0*} + Q) \frac{\Delta t}{2} \quad (83)$$

k) - Condições iniciais para a solução do problema.

Estas condições correspondem ao tempo adimensional igual a τ_0 .

k.1) - Volumes de controle inicialmente fundidos

$$\phi_{1,J} = 0 \quad (84.a) \quad \theta_{1,J} = 0 \quad (84.b)$$

$$\psi_{1,J} = 0 \quad (84.c) \quad W_{1,J} = 0 \quad (84.d)$$

$$J = 1, 2, 3, \dots, IN$$

k.2) - Outros volumes de controle do armazenador

$$\phi_{I,J} = 0 \quad (85.a) \quad \theta_{I,J} = -1 \quad (85.b)$$

$$\psi_{I,J} = 0 \quad (85.c) \quad W_{I,J} = 0 \quad (85.d)$$

$$I = 2, 3, \dots, IM \quad e \quad J = 1, 2, 3, \dots, IN$$

ANEXO 2 - SEQUÊNCIA GERAL PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA.

A sequência, que será descrita a seguir, é para a análise da fusão, a partir de qualquer condição inicial t_{0*} .

1 - Ler o número de nós na direção radial (IM) e na direção axial (IN), as relações $\frac{H}{r_0}$ e $\frac{\text{Raio}}{r_0}$, o tempo total de fusão t , o incremento Δt de tempo, a diferença $T_f - T_{\text{sat}}$, as propriedades do material de mudança de fase, as propriedades do fluido de aquecimento, a velocidade média deste no tubo, o raio do cilindro interno r_0 e o tempo de referência t_r .

2 - Gerar o número de Rayleigh Ra e o número de Rayleigh modificado Ra^* , o número de Stefan, o número de Biot, o incremento adimensional radial ΔR , o axial $\Delta \xi$, o instante inicial τ_0 , o tempo adimensional de referência τ_r , o tempo adimensional τ de fusão, assim como o incremento adimensional $\Delta \tau$.

3 - Calcular as áreas adimensionais AD , AE , ATS , e ATI dos volumes de controle, assim como de seus respectivos volumes adimensionais.

4 - Verificar se τ_r é maior que o valor de τ_0 .

- Se esta condição for satisfeita, ler as condições iniciais geradas no arquivo de dados "início", correspondentes ao tempo τ_{0*} . Neste arquivo de dados constam os valores das entalpias, das vorticidades e das função corrente e a posição radial da interface a cada altura. Constam também a taxa de calor global entrando no cilindro interno, a quantidade total de

calor que já entrou no cilindro interno até o instante inicial, a quantidade total de calor sensível já armazenada até este instante e o valor de τ_{0*} .

- Caso contrário, toma-se a seguinte decisão:

Toma-se para τ_{0*} o valor já calculado τ_0 . Calcula-se pela equação (29) a taxa de calor global entrando no cilindro interno, assim como pela equação (27) a quantidade de calor que já entrou neste instante. Toma-se para as condições iniciais as pré-estabelecidas nas equações (84) e (85) .

Os itens que se seguem se referem ao avanço no tempo da quantidade $\Delta\tau$, para as variáveis função corrente, entalpia e vorticidade e, consequentemente, para a posição da interface líquido-sólido a cada altura.

5 - Considera-se como primeira estimativa, para as entalpias, as vorticidades e a função corrente no instante $\tau_{0*} + \Delta\tau$, os valores do instante τ_{0*} .

6 - Considera-se para os valores das vorticidades da iteração anterior W^* , os atuais valores das vorticidades .

7 - Toma-se para os valores da função corrente nos volumes de controle de contornos, que correspondem aqueles que estão contidos no cilindro interno, tampas inferior e superior, aqueles das equações (47), (50) e (49) .

Para os itens 8 à 9 fazer $J=2$ até $IN-1$

8 - Verifica-se o valor da entalpia em cada um dos volumes de controle (com $I=2$ até IM). O volume de controle onde a entalpia é negativa, encontrar-se-á a interface líquido-sólido. Neste volume de controle e de todos que se encontram a sua direita, será atribuído à função corrente o valor zero, conforme equação (48) .

Para os volumes de controle internos à interface líquido sólido e ao cilindro interno, os coeficientes da função corrente são calculados pela equação (46) .

9 - Usa-se o algoritmo (TDMA) para calcular os valores da função corrente em cada nó, interno à interface líquido-sólido e ao cilindro interno.

Os itens 10 até 25 se referem a equação da energia.

10 - Calcula-se o coeficiente do ponto P, o do direito D e o do superior S para o primeiro volume de controle da linha radial inferior, da seguinte maneira:

10.a - O coeficiente do ponto P é igual ao da equação (51), sem nenhuma modificação .

10.b - Em cada um dos nós D e S é verificado se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita o coeficiente será igual ao da equação (51), no caso contrário ele será zero .

11 - Os coeficientes do ponto P, do direito D, do esquerdo E e do superior S, para os volumes de controle intermediários ($I=2$ até $IM-1$) da linha radial inferior, são calculados da seguinte maneira :

11.a - Verifica os valores das entalpias dos volumes de controle, cujas posições correspondem à ($I=2$ até IM). No volume de controle onde a entalpia é negativa, encontrar-se-á a interface líquido sólido. Neste volume de controle e de todos os que se encontram a sua direita, é atribuído para as velocidades nas interfaces direita, esquerda e superior, de cada volume de controle, assim como para os respectivos números de Peclet, o valor zero.

11.b - Para os volumes de controle à esquerda daquele que contém a interface líquido-sólido e à direita do cilindro interno, os valores das velocidades nas interfaces, direita, esquerda e superior são calculados, respectivamente pelas equações (65) à (67). Os respectivos números de Peclet são calculados pelas equações (75) à (77) .

12 - Para a variável ϕ , o coeficiente do ponto P, o do direito D, o do esquerdo E e o do superior S são calculados da seguinte maneira :

Verifica, em cada um destes nós, se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita, o coeficiente é igual ao da equação (52), no caso contrário ele será zero .

13 - Calcula-se o coeficiente do ponto P, o do esquerdo E e o do superior S, para o último volume de controle ($I=IM$) da linha inferior, da seguinte

maneira :

13.a - O coeficiente do ponto P é igual ao da equação (53), sem nenhuma modificação.

13.b - Em cada um dos nós E e S é verificado se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita o coeficiente será igual ao da equação (53), no caso contrário ele será zero .

14 - O algoritmo TDMA é usado para calcular os valores das entalpias em todos os nós da linha radial inferior.

Para os itens 15 à 16 fazer $J=2$ até $IN-1$

15 - Verifica os valores das entalpias dos volumes de controle, cujas posições correspondem à ($I=2$ até IM). No volume de controle onde a entalpia é negativa, encontrar-se-á a interface líquido-sólido. Neste volume de controle e de todos os que se encontram a sua direita, é atribuído para as velocidades nas interfaces direita, esquerda, superior e inferior de cada volume de controle, assim como para os respectivos números de Peclet, o valor zero.

16 - Para os volumes de controle à esquerda daquele que contém a interface líquido-sólido e à direita do cilindro interno, os valores das velocidades nas interfaces direita, esquerda, superior e inferior de cada volume de controle, são calculados, respectivamente pelas equações (68) à (71). Os

respectivos números de Peclet são calculados pelas equações (75) à (78).

Para os itens 17 à 20 fazer $J=2$ até $IN-1$

17 - O coeficiente do ponto P, o do direito D, o do superior S e do inferior I, para o primeiro volume de controle, é calculado da seguinte maneira :

17.a - O coeficiente do ponto P é calculado conforme a equação (54), sem nenhuma modificação .

17.b - Em cada um dos nós direito D, superior S e inferior I, é verificado se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita o coeficiente será igual ao da equação (54), caso contrário ele será zero.

18 - Para a variável ϕ , o coeficiente do ponto P, o do direito D, o do esquerdo E, o do superior S e o do inferior I são calculados como :

Verifica, em cada um destes nós, se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita, o coeficiente será igual ao da equação (55), no caso contrário ele será zero.

19 - Calcula-se o coeficiente do ponto P, o do esquerdo E, o do superior S e o do inferior I, para o último volume de controle, da seguinte maneira :

19.a - O coeficiente do ponto P será igual ao da equação (56), sem nenhuma modificação.

19.b - Em cada um dos nós E, S, e I é verificado se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita o coeficiente será igual ao da equação (56), no caso contrário ele será zero .

20 - o algoritmo TDMA é usado para calcular os valores das entalpias em todos os nós da linha radial J.

21 - Calcula-se o coeficiente do ponto P, do direito D, e o do inferior I, para o primeiro volume de controle da linha radial superior, da seguinte maneira :

21.a - O coeficiente do ponto P será igual ao da equação (57), sem nenhuma modificação.

21.b - Em cada um dos nós D e I é verificado se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita o coeficiente será igual ao da equação (57), no caso contrário ele será zero .

22 - Os coeficientes do ponto P, do direito D, do esquerdo E e do inferior I, para os volumes de controle intermediários ($I=2$ até I_M-1) da linha radial superior são calculados da seguinte maneira :

22.a - Verifica os valores das entalpias dos volumes de controle, cujas posições correspondem à ($I=2$ até I_M). No volume de controle onde a entalpia é negativa, encontrar-se-á a interface líquido-sólido. Neste volume de controle e de todos os que se encontram a sua direita, é atribuído para as

velocidades nas interfaces direita, esquerda e inferior, de cada volume de controle, assim como para os respectivos números de Peclet o valor zero.

22.b - Para os volumes de controle à esquerda daquele que contém a interface líquido-sólido e a direita do cilindro interno, os valores das velocidades nas interfaces direita, esquerda e inferior, de cada volume de controle, são calculados, respectivamente, pelas equações (72) à (74). Os respectivos números de Peclet são calculados pelas equações (75), (76) e (71).

23 - Para a variável ϕ , o coeficiente do ponto P, o do direito D, o da esquerda E e o do inferior I são calculados assim :

Verifica, em cada um destes nós, se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita, o coeficiente será igual ao da equação (58), no caso contrário ele será zero.

24 - Calcula-se o coeficiente do ponto P, o do esquerdo E e o do Inferior I, para o último volume de controle da linha superior, da seguinte maneira :

24.a - O coeficiente do ponto P é igual ao da equação (59), sem nenhuma modificação.

24.b - Em cada um dos nós E e I é verificado se o valor da entalpia é positivo. Onde a condição for satisfeita o coeficiente será igual ao da equação (59), no caso contrário ele será zero .

25 - O algoritmo TDMA é usado para calcular os valores das entalpias em todos os nós da linha radial superior.

26 - Toma-se para os valores das vorticidades nos volumes de controle de contornos, que correspondem àqueles que estão contidos no cilindro interno e nas tampas inferior e superior. Estas condições de contornos são encontradas, respectivamente, nas equações (61), (63) e (64).

Para os itens 27 até 29 fazer $J=2$ até $IN-1$.

27 - Verifica-se o valor da entalpia em cada um dos volumes de controle, que correspondem as posições ($I=2$ até IM). O volume de controle onde a entalpia é negativa, encontrar-se-á a interface líquido-sólido. Neste volume de controle é calculado, pela equação (20.3), a fração dele que foi fundida. Será atribuída à fração mínima o número 0,5, se I for diferente de IM , caso contrário esta fração mínima será igual a 1. Neste volume de controle que contém a interface líquido-sólido será verificado se a fração fundida é maior ou igual à fração mínima. Se esta condição for satisfeita, será atribuído à vorticidade deste volume de controle o valor calculado pela equação (62), no caso contrário esta vorticidade será igual a zero. Será atribuído o valor zero para todas as vorticidades de todos os volumes de controle à direita deste que contém a interface líquido-sólido.

28 - Para os volumes de controle internos àquele que contém a interface líquido-sólido e ao cilindro interno, os coeficientes da vorticidade, em cada nó, serão calculados pela equação (60).

29 - O algoritmo TDMA é usado para calcular os valores da vorticidade em cada nó interno aos contornos.

30 - Compara-se os valores das vorticidades calculadas com as estimadas no item 6. Caso a convergência tenha sido alcançada, continuar a sequência. Caso contrário voltar ao item 6.

Os itens que se seguem não são iterativos.

31 - Considerar para soma do calor sensível o valor lido ou calculado no item 4 . Considerar como zero a soma do calor latente e a taxa global de calor que entra no cilindro interno.

Para os itens 32 à 38 fazer $J=1$ até IN .

32 - Localiza-se em cada uma destas linhas radiais o volume de controle que contém a interface líquido-sólido e atribui-se a ele INT. Calcula-se, pela equação (20.3), a fração fundida neste volume de controle, pela equação (79.1) ou pela (79.2) a posição radial da interface líquido-sólido .

33 - Calcular para esta linha radial, pela equação (80), a quantidade de calor sensível armazenado entre os instantes τ e $\tau + \Delta\tau$.

34 - Considerar para a soma do calor sensível à anterior mais o calculado no item 33.

35 - Calcular para esta linha radial, pela equação (81) a quantidade de calor latente armazenado .

36 - Considerar para a soma do calor latente à anterior mais o calculado no item 35.

37 - Calcular, pela equação (82.1) ou pela (82.2), a taxa de calor que entra , na linha J, no cilindro interno, entre os instantes t e $t + \Delta t$.

38 - Considerar para a taxa de calor global que entra no cilindro interno à anterior mais o calculado no item 37.

39 - Calcular pela equação (83) a quantidade de calor que entra no cilindro interno entre os instantes t e $t + \Delta t$.

40 - Considerar para a quantidade total de calor que entra no cilindro interno à lida no item 4 mais o valor calculado no item 39.

41 - Para o próximo avanço no tempo da quantidade Δt , serão considerados como condições iniciais para as variáveis função corrente, entalpia, vorticidade e para a posição radial da interface líquido-sólido, a cada altura, a taxa de calor global entrando no cilindro interno e o tempo adimensional τ . Para as quantidades já totalizadas até o instante τ serão consideradas o calor que entra no cilindro interno e o calor sensível armazenado .

42 - Voltar ao item 5, até que o tempo t de fusão seja atingido.

43 - Rebobinar o arquivo de dados "inicio" e escrever nele todas as variáveis do item 41.