

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Um Sistema de Refinamento H-P Adaptativo Utilizando Elementos Finitos Hierárquicos Multidimensionais

Autor: Cedric Marcelo Augusto Ayala Bravo
Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
Coorientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Cedric Marcelo Augusto
Ayala Bravo E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 21/11/2000

92/00


ORIENTADOR

UNIDADE CE
N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
Ay 14s
V. Ex
TOMBO PC/ 45132
PROC. 16.392104
C D X
PREÇO R\$ 11,00
DATA 05/07/04
N.º CPD

CM0015784B-9

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Um Sistema de Refinamento H-P Adaptativo Utilizando Elementos Finitos Hierárquicos Multidimensionais

Autor: Cedric Marcelo Augusto Ayala Bravo
Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
Coorientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Curso: Engenharia Mecânica
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2000
S. P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Ay14s Ayala Bravo, Cedric Marcelo Augusto
Um sistema de refinamento H e P adaptativo utilizando
elementos finitos hierárquicos multidimensionais /
Cedric Marcelo Augusto Ayala Bravo.--Campinas, SP:
[s.n.], 2000.

Orientadores: Philippe Remy Bernard Devloo, Renato
Pavanello

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Programação
orientada a objetos. 3. Análise numérica. I. Devloo,
Philippe Remy Bernard. II. Pavanello, Renato. III.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. IV. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

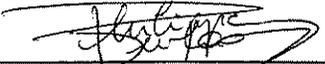
TESE DE DOUTORADO

**Um Sistema de Refinamento H – P Adaptativo
Utilizando Elementos Finitos Hierárquicos
Multidimensionais**

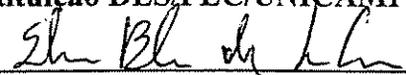
Autor: Cedric Marcelo Augusto Ayala Bravo

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

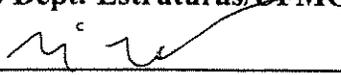
Coorientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



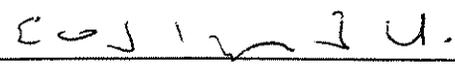
Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
instituição DES/FEC/UNICAMP



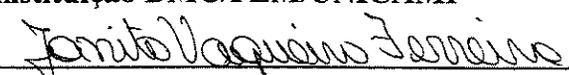
Prof. Dr. Estevam Barbosa de las Casas
instituição Dept. Estruturas/UFMG



Prof. Dr. Luiz Fernando Campos Ramos Martha
instituição DEC/PUC-RIO



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
instituição DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira
instituição DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 21 de novembro de 2000

Dedicatória:

Dedico esta obra como mostra de afeto e gratidão, aos meus pais Victor e Eliana, aos meus irmãos Victor, Claudio e Ximena, a minha esposa Edna e meu filho Marcio.

Agradecimentos

Agradeço aos professores do departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica pelos seus ensinamentos e pela amizade demonstrada.

Agradeço ao professor Renato Pavanello pela amizade e cooperação no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos professores Francisco A. M. e Flavio O. C., aos colegas Cesar e Gustavo da Faculdade de Engenharia Civil pelo companheirismo e apoio manifestado.

Agradeço especialmente ao meu orientador Philippe R. B. Devloo, pelo auxílio na progressão deste trabalho e pela assistência do meu aprendizado no desenvolvimento de software orientado a objetos em computação científica.

Agradeço ao meu irmão Victor A. Ayala B. que sempre me ensinou desde a época do primário e que me incentivou e ajudou para prosseguimento dos meus estudos superiores.

Agradeço aos meus pais por seu infinito amor e por ensinar-me em todos os momentos da minha vida o caminho da honestidade e da felicidade.

Sobre tudo agradeço ao meu senhor Jesus Cristo por mostrar-me o caminho da humildade e da vida e a Deus pela graça de permitir-nos compreender a sua maravilhosa criação através das ciências.

*A ciência é a mais elevada das artes
mas a sabedoria mais sublime está
no amor e na justiça de Deus*

Cedric M. A. Ayala B.

Resumo

Ayala Bravo, Cedric Marcelo Augusto, *Um Sistema de Refinamento h e p Adaptativo Utilizando Elementos Finitos Hierárquicos Multidimensionais*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 247 p. Tese (Doutorado)

Descrevem-se de uma maneira formal os conceitos matemáticos que permitem implementar um refinamento multidimensional h - p adaptativo para o método dos elementos finitos. Os conceitos são implementados em código orientado para objetos num ambiente de programação de elementos finitos denominado PZ. O conceito de transformação geométrica define o mapeamento entre um elemento de referência uni, bi ou tridimensional e o elemento deformado em \mathfrak{R}^3 . Estende-se o conceito de "lado" de um elemento finito representando canto, aresta, face ou volume. Associa-se funções de forma hierárquicas a lados de um elemento e para uma malha refinada, define-se uma dependência entre as bases associadas a lados adjacentes de níveis distintos. Descreve-se detalhadamente a definição dos elementos hierárquicos e a construção das suas funções de forma. Demonstra-se que os elementos assim definidos possuem a ordem p completa para o espaço de interpolação associado, independente da ordem p escolhida. Através da introdução dos "parâmetros variacionais" e das restrições entre funções de forma associadas a lados de elementos, consegue-se combinar de forma adaptativa qualquer um destes elementos. Mostra-se de forma teórica e prática que uma combinação adaptativa de elementos, ainda que de distintas dimensões, implica na obtenção de um espaço de elementos finitos de funções contínuas. Relacionam-se os testes de qualificação para as ferramentas desenvolvidas.

Palavras Chave

Adaptatividade, Elementos Hierárquicos, Estimador de Erro, Programação Orientada a Objetos

Abstract

Ayala Bravo, Cedric Marcelo Augusto, *An environment for hp Adaptive Finite Element Programming*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000, 247 p. Ph. D. Thesis

A formal description of the multidimensional *hp* adaptive refinement process is developed. The concepts are implemented within the PZ object oriented environment for finite element programming. The concept of the geometric transformation defines the mapping between a one-, two- or three dimensional master element and its deformed configuration in \mathcal{R}^3 . The concept of a *side* is extended to include corners, lines, faces and volumes. Hierarchical shape functions are associated with *sides* and for adaptively refined meshes, the concept of restrained shape functions is introduced. A detailed description of the construction process is given for the complete family of finite element. It is shown for each element that the space of interpolation for arbitrary order p is complete. Using variational parameters associated with the sides of the elements and the restraints between shape functions of adaptive finite element meshes, it is possible to use *hp* adaptivity on heterogeneous meshes. It is shown that shape functions of elements of different dimensions maintain continuity at their interfaces. Qualification tests and numerical examples are included to demonstrate the correctness of the approach.

Key Words

Adaptivity, Error Estimate, Hierarchical Elements, Object Oriented Programming

Índice

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvi
Nomenclatura	xix
1 Introdução	1
1.1 Objetivos e escopo do trabalho	2
1.2 Estrutura do trabalho	5
2 Revisão da Literatura	7
3 Método dos Elementos Finitos	13
3.1 Método dos resíduos ponderados	13
3.2 Formulação fraca ou variacional	16
3.2.1 Estimador de erro	19
3.2.2 Estratégia adaptativa	20
4 Funções de Forma Hierárquicas de Alta Ordem	22
4.1 Aspectos preliminares	22
4.1.1 Fixando uma notação	23
4.1.2 A sequência básica de funções ortogonais	24
4.2 Funções de forma do elemento unidimensional	25
4.3 Funções de forma do elemento quadrilateral	27
4.4 Funções de forma do elemento triangular	29
4.5 Funções de forma do elemento hexaedro	32
4.6 Funções de forma do elemento tetraedro	35
4.6.1 Determinação do parâmetro variacional de aresta para o elemento tetraedro	36
4.6.2 Funções de forma de arestas, faces e volume	38
4.6.3 Determinação dos parâmetros variacionais das funções de face	39
4.7 Funções de forma do elemento pirâmide	44

4.8	Funções de forma do elemento prisma	48
4.9	Geometria e funções de forma dos elementos hierárquicos	51
4.9.1	Elementos de uma e duas dimensões	51
4.9.2	Elemento hexaedro	53
4.9.3	Elemento tetraedro	57
4.9.4	Elemento prisma	63
4.9.5	Elemento pirâmide	64
4.10	Propriedades das funções de forma hierárquicas	66
4.10.1	Independência linear das funções de forma hierárquicas	66
4.10.2	Espaço polinomial completo	69
4.11	Elemento prisma hierárquico	74
4.11.1	Funções base do prisma de ordem p	74
4.11.2	Número de funções de forma do prisma de ordem p	75
4.11.3	Termos presentes nas funções base: prisma completo	76
4.12	Elemento pirâmide hierárquica	80
4.12.1	Lados e funções de forma associadas	80
4.12.2	Número de funções de forma da pirâmide de ordem p	83
4.12.3	Elemento pirâmide é completo	84
4.13	Parâmetros variacionais e continuidade das funções de forma entre lados vizinhos	91
4.13.1	Continuidade e ordem de interpolação do elemento hierárquico	91
4.13.2	Continuidade entre bases hierárquicas vizinhas	93
4.13.3	Derivadas das funções de forma	104
5	Divisão/Refinamento dos Elementos	107
5.1	Divisão do elemento de linha	108
5.2	Divisão do triângulo	109
5.3	Divisão do quadrilátero	111
5.4	Divisão do hexaedro	112
5.4.1	Vizinhança dos subelementos	113
5.4.2	Associação de lados de dimensão maior	116
5.5	Divisão do prisma	120
5.5.1	Divisão unificada do prisma, tetraedro e pirâmide	122
5.5.2	Divisão do tetraedro	124
5.5.3	Divisão da pirâmide	125
5.5.4	Menor ângulo da subdivisão	126
5.6	Divisão do tetraedro	127
5.6.1	Tetraedro de referência	127
5.6.2	Divisão do tetraedro de referência	128
5.6.3	Lados de dimensão maior	130
5.6.4	Conectividade associada ao lado de um subelemento	133

5.6.5	Indexação de dados do elemento mestre	134
5.7	Divisão da pirâmide	136
5.7.1	Divisão da pirâmide de referência	137
6	Refinamento h-p adaptativo	140
6.1	Refinamento p adaptativo	140
6.2	Refinamento h adaptativo	141
6.3	Elementos geométricos	142
6.4	Lados de um elemento	144
6.5	Conectividade de um elemento	147
6.6	Correspondência entre funções de forma e lados do elemento	149
6.7	Conectividades e espaços paramétricos	151
6.7.1	Divisão/refinamento de elementos: malhas $h - p$ adaptativas	152
6.8	Restrições entre conectividades	153
6.8.1	Transformação paramétrica entre conectividades vizinhas	154
6.8.2	Transformação entre os lados de um subelemento e o elemento pai	155
6.8.3	Transformação entre lados de diferente dimensão	155
6.9	Transformações paramétricas entre lados vizinhos	156
6.10	Transformações entre lados paramétricos	163
6.10.1	Transformação paramétrica entre um canto e uma aresta	164
6.10.2	Transformação paramétrica entre um canto e uma face	166
6.10.3	Transformação entre um canto e o volume	166
6.10.4	Transformação da aresta do subelemento para a aresta do elemento	167
6.10.5	Transformação paramétrica entre uma aresta e uma face	168
6.10.6	Transformação entre aresta e volume	170
6.10.7	Transformação da face do subelemento para a face do elemento	171
6.10.8	Transformação da face para o volume	172
6.10.9	Transformação entre subelemento e elemento	173
6.11	Partição unitária do domínio computacional	174
6.12	Espaço C^0 sobre uma malha refinada	176
6.13	Restrições entre espaços de funções	179
6.13.1	Restrições em uma malha computacional refinada	180
6.13.2	Restrições entre lados de diferentes tamanhos/níveis	180
7	Estrutura de Classes do Ambiente PZ	185
7.1	Introdução : programação orientada a objetos	185
7.2	Classe da geometria do elemento : TPZGeoEl	186
7.2.1	Elementos geométricos : implementação	188
7.3	Classe do elemento computacional : TPZCompEl	189
7.4	Elemento computacional interpolante : TPZInterpolatedElement	191

7.4.1	Elementos computacionais : implementação	192
7.5	TPZGeoMesh : classe malha geométrica	194
7.6	TPZCompMesh : classe malha computacional	195
7.7	Classe que implementa a equação diferencial	196
7.7.1	Classe material genérica : TPZMaterial	198
7.7.2	Alguns materiais derivados e implementados no ambiente PZ	199
8	Testes Numéricos de Qualificação	201
8.1	Soluções polinomiais exatas	201
8.1.1	Desenhador de malhas <i>hp</i> -adaptativo	204
8.2	Material hiperelástico não linear	207
8.2.1	Definição do funcional, do problema e do algoritmo	207
8.2.2	Cálculo da matriz gradiente de G e vetor gradiente de W	211
8.2.3	Validação da implementação do material hiperelástico	215
8.2.4	Teste computacional	216
9	Conclusões	223
9.1	Objetivos alcançados	223
9.2	Trabalhos futuros	225
	Bibliografia	227
A	Apêndice A	235
A.1	Transformação geométrica	235
B	Apêndice B	243
B.1	Restrições entre lados adjacentes	243

Lista de Figuras

2.1	Triangulação Delaunay: engrossamento da malha	9
2.2	Refinamento conforme	10
2.3	Divisão de triângulos	10
2.4	Refinamento misto	11
2.5	Divisão não conforme	11
3.1	Teste de derivabilidade fraca	18
4.1	Elemento de referência unidimensional	25
4.2	Funções de forma lineares unidimensionais	26
4.3	Funções da seqüência: polinômios de Chebyshev	26
4.4	Funções de aresta do elemento mestre linear	26
4.5	Geometria do quadrilátero mestre	27
4.6	Funções de forma da aresta r_0	28
4.7	Funções de forma de face	29
4.8	O triângulo e seu espaço paramétrico	30
4.9	Parâmetros variacionais	31
4.10	Configuração geométrica do hexaedro de referência	32
4.11	Geometria do tetraedro de referência	36
4.12	Condições do parâmetro variacional	37
4.13	Condições dos parâmetros da face F_0	40
4.14	Espaço paramétrico do elemento pirâmide	45
4.15	Geometria do prisma	48
4.16	Lados do elemento tetraedro	57
4.17	Lados do prisma	63
4.18	Numeração local dos lados da pirâmide	64
4.19	Parâmetro variacional do elemento linear	95
4.20	Parâmetros variacionais de aresta : quadrilátero	96
4.21	Parâmetro variacional de aresta : cubo	97
4.22	Parâmetros variacionais de aresta: triângulo	98
4.23	Parâmetros variacionais de aresta : tetraedro	99
4.24	Parâmetros das arestas de faces triangulares : pirâmide	101
4.25	Parâmetros de aresta : prisma	101
4.26	Condições dos parâmetros de face	102
4.27	Parâmetros da face F_3 : tetraedro	103

4.28 Parâmetros variacionais de face: pirâmide	104
5.1 Divisão do elemento de linha: numeração local	109
5.2 Divisão do triângulo: numeração local	109
5.3 Divisão do quadrilátero: numeração local	111
5.4 Divisão do cubo	113
5.5 Dependência entre bases de lados adjacentes	116
5.6 Prisma geométrico	120
5.7 Divisão do prisma : numeração local	121
5.8 Um prisma = um tetraedro + uma pirâmide	122
5.9 Divisão conjunta incompleta do tetraedro e pirâmide	123
5.10 Divisão do fragmento tetraedro	125
5.11 Divisão completa do fragmento pirâmide	126
5.12 Tetraedro de referência	128
5.13 Divisão do tetraedro : numeração local	129
5.14 Fragmentação dos subelementos do tetraedro	129
5.15 Conectividades locais dos subelementos 0,1,2 e 3	131
5.16 Conectividades locais dos subelementos 4 e 5	132
5.17 Lados de dimensão 2 dos subelementos 0,1,2 e 3	133
5.18 Pirâmide de referência	136
5.19 Divisão da pirâmide mestre	138
5.20 Pirâmide fragmentada - fracionamento preliminar	138
5.21 Decomposição do fragmento central da figura 5.20	139
6.1 Refinamento de dois elementos lineares superpostos	141
6.2 Refinamento do elemento quadrilátero	141
6.3 Divisão do hexaedro	142
6.4 Lados de elementos	145
6.5 Lado de dimensão 1	146
6.6 Diferentes lados de um elemento prismático	147
6.7 Elementos vizinhos de diferentes dimensões	148
6.8 Conectividades/lados do quadrilátero	150
6.9 Função de forma do lado 0	150
6.10 Função de forma do lado 4	151
6.11 Função de forma do lado 8	151
6.12 Conectividades restritas	153
6.13 Faces com transformações paramétricas diferentes	154
6.14 Escolha dos eixos : faces triangulares	158
6.15 Posição dos eixos : faces quadrilaterais	160
6.16 Espaço paramétrico associado à face deformada F_d	162
6.17 Espaços paramétricos associados às faces de referência F_r	162
6.18 Transformações entre espaços paramétricos, canto para aresta	165
6.19 Transformações dos cantos 2 e 3 para arestas 5,6,7,8 e 9	166

6.20	Transformações entre arestas da face F0	167
6.21	Transformações paramétricas : arestas para faces	168
6.22	Transformação paramétrica entre lados de dimensões distintas	169
6.23	Posição do sistema de referência linear para a transformação aresta-volume	170
6.24	Transformações da face F10 do tetraedro	171
6.25	Sistemas paramétricos locais do tetraedro: faces F11, F12 e F13	172
6.26	Transformação face-interior	173
6.27	Abertos topológicos de um elemento	175
6.28	Elementos de um mesmo nível	177
6.29	Lados restritos	178
6.30	Lados superpostos entre elementos de dimensões iguais ou distintas	181
6.31	Lados contíguos de elementos adjacentes	182
6.32	Lados pertencentes a elementos de níveis diferentes	183
7.1	Classes de elementos geométricos	190
7.2	Estrutura de classes do elemento computacional	194
7.3	Classes materiais implementadas	199
7.4	Árvore de classes matriciais	200
8.1	Solução conhecida: equação 8.21	205
8.2	Refinamento h-adaptativo : malha geométrica final	206
8.3	Evolução do p-refinamento adaptativo, malha final	206
8.4	Taxa de convergência da estratégia h-p adaptativa	207
8.5	Movimento de corpo rígido	216
8.6	Tensões de Von Mises: material elástico	219
8.7	Material hiperelástico: diagrama de tensões	220
8.8	Material hipertelástico: tensões de Von Mises	220
8.9	Diagrama de tensões: giro de 1.8 radianos	221
8.10	Diagrama de tensões: giro de 2.3 radianos	221
8.11	Distribuição de tensões: passo 4	222
8.12	Distribuição de tensões: passo 5	222
A.1	Carta do elemento geométrico deformado EG	237
A.2	Cone tangente ao vértice x	239
A.3	Elementos do cone em x e em $f(x)$	240
B.1	Caso 1 : só existem lados iguais	243
B.2	caso 2: só há lados grandes	244
B.3	Caso 3 : só há lados pequenos	245
B.4	Caso 4 : há lados iguais e pequenos, não há lados grandes	245
B.5	caso 5: há lados iguais e grandes, não há lados pequenos	246
B.6	caso 6: há lados pequenos e grandes, não há lados iguais	247
B.7	caso 7: há lados pequenos, iguais e grandes	247

Lista de Tabelas

4.1	Coordenadas do quadrilátero mestre	27
4.2	Nós de canto para cada lado	28
4.3	Coordenadas nodais do triângulo mestre	29
4.4	Definição das aresta do triângulo	30
4.5	Coordenadas dos cantos do hexaedro	32
4.6	Cantos de cada aresta : hexaedro	33
4.7	Definição das faces e escolha de cantos	34
4.8	Coordenadas dos cantos do tetraedro	35
4.9	Arestas e parâmetros variacionas designados	37
4.10	Cantos e parâmetros variacionais das faces do tetraedro	38
4.11	Obtenção do primeiro parâmetro da face F0	41
4.12	Obtenção do segundo parâmetro da face F0	41
4.13	Obtenção do primeiro parâmetro da face F1	42
4.14	Obtenção do segundo parâmetro da face F1	42
4.15	Obtenção do primeiro parâmetro da face F2	43
4.16	Obtenção do segundo parâmetro da face F2	43
4.17	Obtenção do primeiro parâmetro da face F3	44
4.18	Obtenção do segundo parâmetro da face F3	44
4.19	Coordenadas dos cantos da pirâmide	45
4.20	Cantos e parâmetros variacionais das arestas da pirâmide	46
4.21	Cantos e parâmetros variacionais das faces da pirâmide	47
4.22	Coordenadas dos nós geométricos do elemento prisma	48
4.23	Parâmetros variacionais de aresta do elemento prisma	49
4.24	Parâmetros de face do elemento prisma	49
4.25	Lados do elemento quadrilátero	52
4.26	Lados do elemento triângulo	53
4.27	Lados do elemento hexaedro	54
4.28	Valores de n para funções de aresta	55
4.29	Valores de n_1 e n_2 para funções de face	55
4.30	Valores de n_1 , n_2 e n_3 para as funções de interior	56
4.31	Funções de forma associadas à ordem p , $p < 7$, elemento hexaedro	56
4.32	Definição dos lados do elemento tetraedro	57
4.33	Valores de n_1 e n_2 para funções de face	58

4.34	Valores de n_1 , n_2 e n_3 para as funções de interior	59
4.35	Número de funções de forma por lado	60
4.36	Definição dos lados do elemento prisma	64
4.37	Definição dos lados do elemento mestre pirâmide	65
4.38	Grupos de termos reduzidos	79
4.39	Termos polinomiais aportados pelas bases da pirâmide de ordem p	86
4.40	Termos racionais da pirâmide de ordem p	87
4.41	Termos racionais : grupos simplificados	88
4.42	Contagem dos termos remanescentes	90
4.43	Pares de inteiros expoentes de termos polinomiais	90
4.44	Parâmetros variacionais de aresta : quadrilátero	96
4.45	Parâmetros variacionais das arestas do cubo	97
4.46	Parâmetros variacionais de aresta: pirâmide	97
4.47	Parâmetros variacionais de arestas: triângulo	98
4.48	Parâmetros variacionais de aresta : tetraedro	99
4.49	Parâmetros variacionais de aresta : pirâmide	100
4.50	Arestas de faces triangulares : prisma	100
4.51	Parâmetros variacionais de faces quadrilaterais	102
4.52	Parâmetros de faces triangulares	103
5.1	Numeração local dos subelementos	110
5.2	Conectividades entre subelementos	110
5.3	Conectividade de dimensão 1 associada a canto	110
5.4	Conectividade pai associada a uma conectividade do subelemento	111
5.5	Numeração local dos subelementos	111
5.6	Conectividades entre subelementos	112
5.7	Conectividade de dimensão maior associada ao lado de um subelemento	112
5.8	Conectividade pai associada a uma conectividade do subelemento	112
5.9	Numeração local dos subelementos	113
5.10	Conectividades entre subelementos	114
5.11	Conectividade de dimensão maior associadas a cantos	117
5.12	Conectividade de dimensão maior para cantos e arestas	118
5.13	Conectividade pai associada ao canto do subelemento	119
5.14	Conectividade do elemento pai associada com aresta do subelemento	119
5.15	Coordenadas do prisma de referência	120
5.16	Numeração local dos subelementos do prisma	121
5.17	Cantos de definição da fragmentação do prisma	122
5.18	Divisão do fragmento tetraedro	124
5.19	Divisão do fragmento pirâmide	124
5.20	Divisão do tetraedro	125
5.21	Divisão da pirâmide	126
5.22	Nós de canto do tetraedro padrão	128

5.23	Numeração local dos subelementos	128
5.24	Conectividades entre subelementos	130
5.25	Lados de dimensão maior para subelementos tetraedros	131
5.26	Lados de dimensão maior para subelementos pirâmides	132
5.27	Conectividade associada a um canto	133
5.28	Conectividade associada a uma aresta	134
5.29	Conectividade associada a uma face	134
5.30	Nós de canto da pirâmide padrão	137
5.31	Numeração local dos subelementos da pirâmide mestre	137
6.1	Número de lados e respectivas dimensões para cada elemento mestre	147
6.2	Transformações paramétricas : faces triangulares	159
6.3	Transformações paramétricas : faces quadrilaterais	161
6.4	Transformações de cantos para arestas	165
6.5	Transformações entre cantos e faces	166
6.6	Vetor de transformação canto-volume	167
6.7	Transformações de aresta, entre subelementos e elemento	168
6.8	Transformações entre espaços paramétricos: aresta para face	169
6.9	Transformação aresta-volume	171
6.10	Transformações entre faces	172
6.11	Transformação da face para o espaço paramétrico do elemento	173
6.12	Transformação entre elementos filho e pai	174
8.1	Erros residuais : problema 1	217
8.2	Erros residuais : malha refinada	217
8.3	Erro residual : problema 2	218

Nomenclatura

Letras Latinas

a_i^{el} - coeficiente multiplicador da função de forma do elemento el associada ao lado l

C - elemento de referência cúbico

$\overset{\circ}{C}$ - interior do conjunto C

\bar{C} - fecho do conjunto C

$C(\xi), C(\xi, \eta)$ - parâmetros variacionais

$C(\xi, \eta, \zeta)$ - combinação linear das variáveis do espaço paramétrico do elemento

C_x - cone tangente no ponto x

$C^0(\Omega)$ - espaço das funções contínuas definidas sobre Ω

ci - i -ésimo canto ou vértice do elemento

$[Df(x)]_{can}^{can}$ - matriz mudança de coordenadas com uso da base canônica

f_n - função polinomial real de grau n

Fi - i -ésima face do elemento

f^{-1} - inversa de uma função f

l_A - um dos lados do elemento A

ℓ_{EG}^i - i -ésimo lado do elemento geométrico EG

L - elemento finito de referência linear

M_Ω - malha do domínio Ω formada por elementos mistos

\wp - partição de Ω

p - ordem do elemento hierárquico

Pi - elemento de referência piramidal

P_n - espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n

Pr - elemento de referência prismático
 Pt - elemento de referência pontual
 Q - elemento de referência quadrilateral
 r_i - i -ésima aresta do elemento
 \mathfrak{R}^s - espaço vetorial real de dimensão $s = 1, 2, 3$
 S^1 - círculo de raio unitário e centro $(0,0)$
 T - elemento de referência triangular
 Te - elemento de referência tetraédrico
 T_g - transformação geométrica, segundo definida no apêndice A
 u_{hp} - solução de elementos finitos
 $V_{hp}(\Omega)$ - espaço de funções h-p adaptativo definidas sobre uma partição \wp do domínio Ω
 V_n - espaço de elementos finitos de dimensão n
 \exists - existe, denota a existência de
 \vee - escolha entre duas opções ou ambas, ou
 $\underline{\vee}$ - somente umas das opções é válida, ou exclusivo
 \wedge - considera duas afirmações, e
 \subsetneq - propriamente contido
 $\not\subset$ - não contido
 \supset - contenção de conjuntos, contém
 \cap - interseção de conjuntos
 \circ - composição de funções
 $\{E, i\}$ - conectividade ou par lado i do elemento E
 $\|\cdot\|$ - qualquer uma das normas $\|\cdot\|_{L^2}$, energia $\|\cdot\|_{H^1}$ ou semi norma $|\cdot|_{H^1}$

Letras Gregas

δ_{ij} - delta de Kronecker, vale um se $i = j$ e zero em caso contrario
 λ, μ - constantes de Lamé
 β_{jk}^p - coeficiente multiplicador na combinação linear de funções de forma
 ν - coeficiente de Poisson

ψ_{ci}^{1d} - função de forma unidimensional associada ao canto i
 $\psi_{r0(n)}^{1d}$ - função de forma unidimensional associada à aresta $r0$, de grau $n + 2$
 ψ_{ci}^c - função base do hexaedro associada ao canto ci
 ψ_{ri}^c - função base do hexaedro associada à aresta ri
 ψ_{fi}^c - função base do hexaedro associada à face fi
 ψ_{v0}^c - função base do hexaedro associada ao volume do elemento
 ψ_{ci}^{pi} - função base da pirâmide associada ao canto ci
 ψ_{ri}^{pi} - função base da pirâmide associada à aresta ri
 ψ_{fi}^{pi} - função base da pirâmide associada à face fi
 ψ_{v0}^{pi} - função base da pirâmide associada ao interior do elemento
 ψ_{ci}^{pr} - função base do prisma associada ao canto ci
 ψ_{ri}^{pr} - função base do prisma associada à aresta ri
 ψ_{fi}^{pr} - função base do prisma associada à face fi
 ψ_{v0}^{pr} - função base do prisma associada ao interior do elemento
 ψ_{ci}^q - polinômio base do elemento quadrilátero associado ao canto ci
 ψ_{ri}^q - função de forma do quadrilátero associada à aresta ri
 $\psi_{f0(n1,n2)}^q$ - função base associada à face $f0$ do quadrilátero, de grau $n1 + n2 + 2$
 ψ_{ci}^{te} - função base do tetraedro associada ao canto ci
 ψ_{ri}^{te} - função base do tetraedro associada à aresta ri
 ψ_{fi}^{te} - função base do tetraedro associada à face fi
 ψ_{v0}^{te} - função base do tetraedro associada ao lado interior do elemento
 ψ_{ci}^{tr} - polinômio base do triângulo associado ao vértice ci
 ψ_{ri}^{tr} - função base do triângulo associada à aresta ri
 ψ_{f0}^{tr} - função base do triângulo associada à face
 ϕ - conjunto vazio
 ϕ_i, Φ_j - funções de forma
 φ_l^{el} - função de forma do elemento el associada ao lado l
 $\varphi_{l_A}^A|_{l_A}$ - restrição da função de forma $\varphi_{l_A}^A$ ao lado l_A do elemento A

Ω - conjunto domínio contido em \mathcal{R}^s , $s = 1, 2, 3$

Superescritos

\circ - interior de conjunto

-1 - inversa de função

$1d$ - dimensão 1

A - elemento A

c - refere-se ao elemento hexaedro

el - elemento finito

pi - elemento pirâmide

pr - elemento prisma

q - elemento quadrilátero

s - dimensão do espaço Euclidiano

te - elemento tetraedro

tr - elemento triangular

Subscritos

can - base canônica

ci - i -ésimo canto do elemento

fi - i -ésima face do elemento

h - tamanho do elemento

H^1 - espaço de Sobolev de ordem 1

i, j, k - índices inteiros

l - lado de um elemento finito

l_A - lado do elemento A

L^2 - espaço das funções de quadrado integrável

n - grau de polinômio

p - grau de interpolação do elemento

r_i - i -ésima aresta do elemento
 v - volume ou interior do elemento
 x - ponto no espaço Euclidiano

Abreviações

CC - condições de contorno
 $conv A$ - envoltura convexa do conjunto A
 EG - elemento geométrico
 ER - elemento de referência
 LI - independência linear

Siglas

MEF - método dos elementos finitos

Capítulo 1

Introdução

Num problema envolvendo equações diferenciais parciais pretende-se achar uma solução, isto é, achar uma função u definida sobre um domínio Ω que, junto com algumas das suas derivadas, satisfaça o conjunto de equações e condições de contorno^[44]. Esta solução pode ser as vezes obtida de forma analítica^[41] ou por métodos numéricos de aproximação^[26]. Sabe-se que o número de equações diferenciais cuja solução analítica pode ser obtida é bem restrito e em geral referem-se a situações e domínios simplificados. Por outra parte, métodos numéricos podem ser aplicados para obter soluções aproximadas daquelas equações cuja solução pode ser obtida por métodos analíticos além de outras equações cuja solução tem existência garantida mas não é conhecida ou simplesmente não pode ser obtida. O que torna os métodos numéricos mais atraentes é que a sua solução aproximada muitas vezes pode ser tão precisa quanto seja requerido, e esta é a meta a ser atingida por estes métodos.

Atualmente, com o extraordinário aumento das capacidades dos computadores, os métodos aproximados tem se tornado cada vez mais procurados. Dentre outros, o MEF tem sido um dos mais utilizados.

Vários passos devem ser observados num processo de utilização do método dos elementos finitos^[14]:

- Discretização do domínio Ω : o domínio deve ser preenchido total ou parcialmente por meio de elementos.

- ▶ Utiliza-se em geral uma formulação variacional da equação ou do problema.
- ▶ Definir o espaço onde o problema equivalente é posto.
- ▶ Determinar a norma a ser usada e o que se quer conhecer da solução.

Para efeito de implementação de algoritmos e cálculos no presente trabalho utiliza-se o ambiente de programação de elementos finitos orientado a objetos PZ^[20],^[18].

Assim, serão propostas, implementadas e testadas técnicas para a aproximação geral de elementos finitos.

1.1 Objetivos e escopo do trabalho

Criar uma sistemática para definir um conjunto de funções de forma hierárquicas associadas com cada geometria. A forma geométrica dos elementos que aqui são tratados: linha para dimensão 1, triângulo e quadrilátero para dimensão 2 e tetraedro, pirâmide, prisma, hexaedro para dimensão 3. Esta sistemática pretende a utilização de uma malha mista M_Ω de qualquer combinação destes elementos dentro de um domínio Ω e de um dado problema a ser discretizado por elementos finitos. Numa malha inicial esta combinação segue as regras para uma correta triangulação do domínio Ω ^[14]. O espaço de elementos finitos V_{hp} de $h - p$ aproximação, é um espaço de funções polinomiais por partes e contínuas, isto é $V_{hp} \subseteq C^0(\Omega)$.

Propõe-se uma divisão geométrica para cada um destes elementos. Com isto, uma malha $h - p$ adaptativa permite uma combinação de elementos de várias dimensões, como M_Ω , com diferentes ordens de interpolação e sujeitos a divisão geométrica. Em uma malha refinada deste tipo existirão elementos contendo seus lados nos lados de elementos contíguos, como por exemplo, faces contidas em faces. Conseguem-se continuidade no espaço de interpolação baseado nesta malha adaptativa, impondo restrições ou dependências entre as funções de forma de elementos envolvidos nos lados adjacentes. A compatibilização na ordem de interpolação entre estes lados consiste em poder-lhe atribuir uma determinada ordem.

Mostra-se como se consegue continuidade na interface de elementos adjacentes de um mesmo nível por meio da introdução de "parâmetros variacionais". Demonstra-se que as funções de forma definidas sobre o elemento são linearmente independentes para qualquer ordem p de interpolação. Demonstra-se que o elemento hierárquico de ordem p contém pelo menos o espaço de polinômios de grau p , para qualquer ordem p do elemento. E assim o elemento de ordem p tem a propriedade de representar qualquer polinômio de grau p . Isto é feito para cada um dos elementos enumerados anteriormente.

Atinge-se com isto uma forma de abordar a questão de aproximar soluções pouco suaves ou com singularidades em certas regiões do domínio. Desta forma refina-se a malha mas intensamente na região do domínio onde isso acontece. Isto dispensa o uso de uma malha regular muito fina e portanto dispendiosa. Para localizar a região da irregularidade da solução usam-se estimadores de erro [3] e critérios para refinamento de malhas. Além dos elementos tridimensionais enumerados, alguns dos algoritmos mais importantes implementados são :

- ▶ Os métodos que efetuam a divisão de cada um dos elementos
- ▶ O algoritmo de cálculo de restrições multidimensional.
- ▶ Regras de integração específicas para os elementos tridimensionais.
- ▶ O cálculo de várias normas baseado em integração numérica.
- ▶ Um critério de refinamento de malhas $h - p$ adaptativas devido a Novotny et al^[43].
- ▶ Classe material hiperelástico não linear dado por um funcional densidade de energia^[28].

Com o objetivo de testar e validar as ferramentas desenvolvidas, foram implementados os seguintes algoritmos :

- ▶ Cálculo da projeção L^2 de soluções polinomiais conhecidas.
- ▶ Cálculo e remoção de restrições por meio de ciclos de refinamento e agrupamento aleatórios de elementos.
- ▶ Algoritmo para testar numericamente a continuidade das funções de forma nas interfaces dos elementos que geram este tipo de espaços.
- ▶ Testes numéricos para verificação do que o elemento de ordem p contenha um conjunto completo de polinômios de grau p , condição necessária para obter uma boa aproximação com o elemento.
- ▶ Testes para verificação das transformações utilizadas para o cálculo de restrições entre ele-

mentos e seus lados.

- ▶ Verificação de se o menor ângulo dos elementos obtidos por sucessivas divisões de um dado elemento não diminui.
- ▶ Verificação da convergência quadrática do algoritmo de Newton implementado para aproximar soluções por meio da classe do material hiperelástico.
- ▶ Várias equações materiais já implementadas no ambiente por outros pesquisadores com uso de soluções conhecidas.
- ▶ Comparação com resultados publicados e obtidos com outros programas.

Refinamento $h - p$ adaptativo existia somente para elementos hexaédricos. O projeto de pesquisa que motivou o presente trabalho generaliza o refinamento $h - p$ adaptativo obtido com a divisão geométrica dos elementos, apresentando uma estrutura de classes que permite gerar espaços de interpolação $h - p$ adaptativos para qualquer combinação de elementos topologicamente compatíveis.

Neste trabalho descreve-se uma formulação matemática da topologia de malhas de elementos finitos adaptativas e das restrições que precisam ser aplicadas nesses espaços de aproximação. Assim o objetivo da presente pesquisa é a implementação da técnica $h - p$ adaptativa para malhas de elementos finitos contendo elementos uni, bi e tridimensionais, isto é malhas heterogêneas. A implementação do refinamento $h - p$ adaptativo num contexto tão geral é viabilizada graças à programação orientada para objetos [48].

Em projetos de software orientados para objetos, o comportamento dos objetos determina o funcionamento do sistema como um todo¹. Na presente implementação o comportamento dos objetos do software $h - p$ adaptativo segue a risca os conceitos matemáticos elaborados. Esta abordagem tem as seguintes vantagens :

- ▶ A formulação matemática serve como documentação do comportamento dos objetos.
- ▶ O comportamento dos objetos é definido rigorosamente numa linguagem objetiva.

¹ Isto é diferente dos projetos de software estruturados, onde a estrutura de dados e as operações sobre as mesmas são centrais na definição de software [17], [45].

1.2 Estrutura do trabalho

As principais etapas deste trabalho são primeiramente a definição das funções de forma para cada um dos elementos com os quais aplica-se refinamento adaptativo. Em seguida detalham-se as questões relativas ao refinamento ou divisão de cada um destes elementos. Mostram-se alguns aspectos teóricos relacionados. Desenvolvem-se a terminologia e conceitos relativos ao refinamento adaptativo propriamente dito. Determina-se o procedimento para o cálculo das restrições entre os diferentes lados de elementos adjacentes. Testa-se a validação das ferramentas.

No capítulo 2 faz-se uma revisão da literatura, mencionam-se alguns padrões de refinamento encontrados em trabalhos publicados e faz-se uma comparação com o padrão de refinamento aqui desenvolvido.

No capítulo 3 ressaltam-se alguns aspectos importantes da aplicação do método dos elementos finitos e como eles são utilizados e introduzidos. Menciona-se também alguns aspectos teóricos do MEF.

No capítulo 4 definem-se funções de forma hierárquicas associadas a elementos de linha (também chamado aqui de linear), triângulo, quadrilátero, hexaedro, tetraedro, prisma e pirâmide, com os quais trabalha-se no desenvolvimento de adaptatividade $h - p$.

No capítulo 5 detalha-se a divisão geométrica destes elementos.

No capítulo 6 desenvolve-se a adaptatividade baseada na divisão dos elementos geométricos e restrições entre as funções de forma hierárquicas sobre eles definidas, assim como uma terminologia apropriada.

No capítulo 7 dá-se uma descrição do ambiente PZ, de alguma das suas principais classes, variáveis e métodos e a sua funcionalidade, destacando-se a classe material que implementa a

equação diferencial.

O capítulo 8 refere-se aos testes de qualificação das ferramentas e algoritmos implementados no ambiente PZ.

No capítulo 9 são dadas as conclusões e extensões para trabalhos futuros.

No apêndice A é feito um estudo rigoroso da transformação entre um elemento de referência uni, bi ou tridimensional e o elemento deformado em \mathcal{R}^3 .

No apêndice B detalha-se a análise dos diferentes casos em que identifica-se ocorrência de restrições entre os lados de elementos.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Mostrou-se na literatura que o refinamento $h - p$ adaptativo é um dos métodos mais eficientes para aproximar equações diferenciais parciais por elementos finitos^[5]. Atualmente o principal motivo para que esta técnica não seja muito difundida é a complexidade da sua implementação num código de elementos finitos.

O conceito de estimar o erro de aproximação para se adaptar a malha de elementos finitos foi inicialmente apresentado por Babuska e Rheinboldt em 1978^[3]. Logo em seguida Bank e Sherman apresentaram um método adaptativo e a estrutura de dados associada para refinamentos triangulares¹.

Uma estrutura de dados simples para refinamentos quadrilaterais lineares foi apresentada por Demkowicz, Devloo e Oden em 1985^[16]. Esta estrutura de dados foi generalizada para refinamentos $h - p$ adaptativos por Devloo em 1987^[19]. O refinamento h adaptativo para hexaedros lineares foi apresentada em 1988 por Devloo. A extensão do refinamento $h - p$ adaptativo para hexaedros foi apresentado por Demkowicz, Oden, Rachowicz e Hardy em 1989^[17].

Todas as pesquisas de conhecimento do autor trabalham com malhas onde o tipo de elemento é único. Não consideram-se malhas bidimensionais espaciais ou malhas com ele-

¹ A estrutura de dados da implementação de Bank e Sherman nunca foi publicada.

mentos unidimensionais acopladas a elementos bi e tridimensionais. Este tipo de acoplamento é útil em análise estrutural tridimensional, como por exemplo modelagem de turbinas e problemas que utilizam vigas, cascas e sólidos.

Atualmente é amplamente aceito que um procedimento adaptativo é necessário para cálculos práticos com elementos finitos. Um estimador de erro é fundamental num procedimento adaptativo [21]. Um estimador de erro provê informação sobre a qualidade global da solução e a distribuição do erro sobre o domínio Ω . Se o erro estimado não é admissível, uma nova malha deverá ser criada baseada na distribuição do erro sobre os elementos contidos no domínio.

Elementos deverão concentrar-se onde a solução estimada é menos precisa do que o esperado. A meta é o cálculo de uma nova solução com uma distribuição uniforme do erro e um erro global específico preestabelecido. Isto é, a malha é refinada de tal forma que o erro apresentado por cada elemento não ultrapassa uma dada tolerância.

Estimativas de erro a priori são a principal ferramenta para o estudo teórico do método dos elementos finitos, no entanto elas não provêm resultados práticos pois em geral dependem de constantes que não podem ser calculadas. Para obter aproximações numéricas do erro atual é necessário o uso de estimadores de erro a posteriori. Estimativas de erro a posteriori são calculáveis dado que elas são expressas em termos de resíduos. Por outro lado, uma estimativa a priori é calculada em função da solução exata que geralmente é desconhecida [62].

A forma do estimador depende geralmente do problema a ser discretizado e seu uso é restrito ao algoritmo adaptativo empregado [15], [21], [32], [34], [35], [49], [50], [52], [58], [62], [65].

Quanto maior precisão é requerida em certa região do domínio, geralmente onde a solução tem gradientes elevados ou torna-se singular, é necessário aumentar a distribuição dos nós e conseqüentemente o número de funções de forma torna-se mais densa. Isto é conseguido introduzindo maior número de elementos nesta região. Este processo é denominado de h refinamento

da malha ou refinamento h dos elementos.

O caso contrário, quando uma região do domínio possui mais elementos do que o necessário para atingir uma dada precisão, elementos deverão ser eliminados. Através deste processo, a malha fica mais grosseira. Em ambos os casos parte do procedimento adaptativo consiste em tomar a decisão de se refinar ou tornar mais grosseira uma determinada região da malha.

Algumas técnicas de refinamento foram introduzidas na literatura mas seu uso tem sido restrito geralmente a problemas uni e bidimensionais e alguns poucos tipos de elementos^[10], ^[36]. Uma técnica de refinamento bastante usada na literatura é a triangulação de Delaunay^[67] que aplica-se a triângulos e tetraedros.

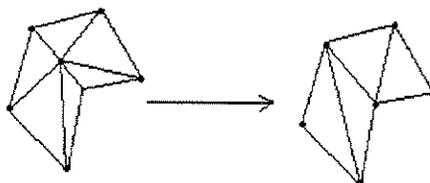


Figura 2.1: Triangulação Delaunay: engrossamento da malha

Por definição uma triangulação deste tipo tem a propriedade de que o circuncírculo de cada triângulo, ou a circum-esfera de cada tetraedro, não inclui qualquer nó da malha fora daqueles do próprio elemento. Neste procedimento, nós e elementos são continuamente criados e descartados a cada iteração. Neste caso, resta ainda a necessidade de se verificar se estas propriedades são suficientes para garantir a boa qualidade da malha ou do procedimento. E mais ainda, é preciso estudar se esta seqüência de malhas é ótima^[4].

Num processo de refinamento deve-se levar em conta que o menor ângulo dos elementos da malha não deve diminuir a cada iteração. Isto está diretamente ligado com as propriedades de convergência da solução aproximada^[14].

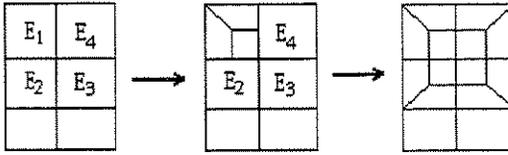


Figura 2.2: Refinamento conforme

Da mesma forma o agrupamento de elementos descarta uns para criar outros em menor número^[67], veja figura 2.1. Em alguns casos como nos trabalhos de Brink^[10] e Tessler^[65], o refinamento de um elemento ou região do domínio implica no refinamento de vários elementos adjacentes aumentando com isto a precisão onde não foi requisitado ou é desnecessário.

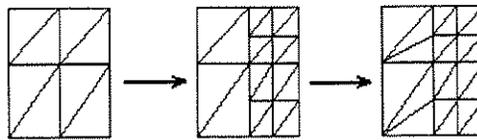


Figura 2.3: Divisão de triângulos

Nas figuras 2.2 e 2.3 a malha intermediária é não conforme, as outras duas inicial e final são conformes. Numa malha não conforme um vértice, uma aresta ou uma face de um elemento podem estar contidas estritamente, consideradas como conjunto de pontos, em arestas e faces, respectivamente. Em uma malha conforme isto não acontece. Na figura 2.2 o elemento E_1 é dividido em 3 subelementos; como consequência e para manter uma malha conforme E_2 , E_3 , E_4 devem ser divididos. Uma extensão desta forma é feita para dividir hexaedros. Da mesma forma, um refinamento com triângulos implica no refinamento de elementos "vizinhos", como é o caso ilustrado na figura 2.3, onde a malha da esquerda é a malha a ser refinada, e aquela da direita será usada para o cálculo de uma nova solução. Uma extensão óbvia para tetraedros e uma utilização desta divisão acha-se em^[2]. Isto ainda traz o problema da diminuição do menor ângulo da malha atual.

Uma outra tentativa de refinar ou engrossar uma malha mistura triângulos e retângulos^[59]

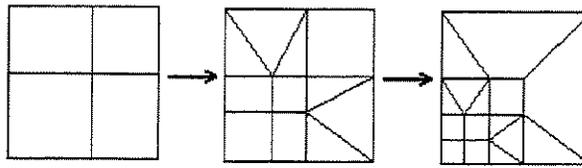


Figura 2.4: Refinamento misto

mas o problema da diminuição do menor ângulo e a divisão desnecessária de elementos contíguos persiste, figura 2.4.

Ainda não considera-se a possibilidade da utilização simultânea de elementos distintos e de diferentes dimensões. Um trabalho recente nessa direção utiliza elementos de volume aliados a elementos de contorno envolvendo o problema de interação solo estrutura num meio contínuo viscoelástico^[61].

Uma forma de contornar estes problemas consiste na divisão/refinamento de elementos localizados impondo-se restrição das funções de forma de elementos adjacentes de diferentes níveis de refinamento, figura 2.5. Os novos elementos introduzidos por divisão são semelhantes ao elemento dividido resolvendo o problema da diminuição dos ângulos, além de não ter que dividir elementos vizinhos sem necessidade.

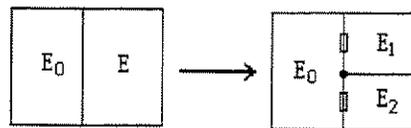


Figura 2.5: Divisão não conforme

Com uma definição adequada das funções de forma hierárquicas, para os elementos aqui trabalhados, consegue-se ainda qualquer combinação mista e adaptativa destes elementos gerando espaços de elementos finitos de funções contínuas. Assim, a definição adequada das funções de forma, o cálculo de restrições entre funções base de elementos adjacentes, embora de dimensões distintas e a divisão dos elementos geométricos aliados a estimadores de erro, formam a

base para o processo adaptativo multidimensional aqui desenvolvido.

A técnica de refinamento h e p adaptativo aqui proposta é provavelmente mais vantajosa. De fato, o cálculo das restrições entre algumas das funções base de elementos contíguos, na divisão localizada, figura 2.5, acarretam um custo computacional bem menor que a integração do problema variacional de todas as funções de forma dos vários elementos introduzidos pela divisão conforme, como é o caso esboçado nas figuras 2.2, 2.3 e 2.4. Como será mostrado neste trabalho, estas restrições são feitas em espaços de Sobolev L^2 ^[39], [44].

Devido à crescente complexidade de programas de análise de elementos finitos, o interesse em técnicas orientadas a objetos começou no final da década de 80. Os primeiros trabalhos devido a Forde et al ^[25] e Zimmermann et al^[70] introduzem os conceitos da programação orientada a objetos. Eles mostraram que implementações usando orientação a objetos requerem menos tempo, resultam em programas menores e em um melhor gerenciamento que quando usam-se programas equivalentes desenvolvidos em uma linguagem a procedimentos tal como Fortran^[48]. Existem várias vantagens em aplicar técnicas orientadas a objetos:

- ▶ O uso de orientação a objetos resulta em um alto nível de abstração, provendo um melhor entendimento das partes necessárias em uma implementação geral.
- ▶ Os dados do programa são melhor organizados que em implementações prévias, permitindo uma fácil manutenção e extensão do programa.
- ▶ A divisão do programa em módulos e classes, as quais são reutilizáveis, permitem maior facilidade para modificar os algoritmos e também reutilizar partes do código em outros programas de computador.
- ▶ Estruturas são fáceis de modelar usando orientação a objetos devido a que as classes necessárias são facilmente identificadas. Mostra-se que um objeto modelo simples é poderoso o suficiente para modelar estruturas complexas com restrições arbitrárias.

A linguagem de programação C++ pode ser usada com preferência em aplicações numéricas especialmente quando dispõe-se de uma biblioteca de classes matriciais^[48], como é o caso do ambiente PZ. Varias aplicações do método dos elementos finitos usando orientação a objetos são encontradas em^[8], [22], [23], [33], [37].

Capítulo 3

Método dos Elementos Finitos

Conforme mencionado no capítulo anterior, propõe-se neste trabalho uma metodologia geral de refinamento $h - p$ adaptativo para aproximar equações diferenciais parciais utilizando o Método dos Elementos finitos. O objetivo deste capítulo, é apresentar um breve resumo sobre o método dos elementos finitos, na sua formulação clássica, ressaltando-se os pontos fundamentais do método, relacionados com a presente pesquisa, como os espaços de colocação do problema, a definição das funções que são utilizadas, a construção das bases do espaço de interpolação de elementos finitos, estimadores de erros, estratégias adaptativas, etc.

3.1 Método dos resíduos ponderados

Seja Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^s , considere um operador diferencial ordinário L e a seguinte equação :

$$Ly = f(x) , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^s \quad (3.1)$$

sujeita a condições de contorno ($C.C.$) homogêneas. De acordo com o método dos resíduos ponderados procura-se uma solução y da forma

$$y \approx y_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x) \quad (3.2)$$

onde as funções testes ϕ_j são linearmente independentes (LI) e satisfazem as mesmas condições de contorno homogêneas que y . Assim as funções $y_n(x)$ satisfazem as $C.C.$ para qualquer

escolha dos coeficientes c_j . O resíduo da aproximação é dado pela equação 3.3.

$$R(c_j, x) = Ly_n - f \quad (3.3)$$

Se o operador L é linear, a equação 3.3 pode ser rescrita em função da aproximação definida na equação 3.2, da seguinte maneira,

$$R(c_j, x) = \sum_{j=1}^n c_j L\phi_j(x) - f \quad (3.4)$$

Escolhendo-se os coeficientes c_j tal que a integral ponderada do resíduo

$$(w_i, R) = \int_{\Omega} w_i R dx \quad (3.5)$$

seja nula para cada $i = 1, \dots, n$, pode-se definir o seguinte conjunto de equações:

$$(w_i, R) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

Impondo as igualdades definidas na equação 3.4 obtém-se um sistema linear algébrico.

$$\sum_{j=1}^n (L\phi_j, w_i) c_j = (w_i, f), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.7)$$

A escolha dos pesos w_i determina o método dos resíduos ponderados particular a ser usado^[26].

► Aproximação de Galerkin

A aproximação de Galerkin (1915), é caracterizada pelo fato de tomar-se as funções peso ou de ponderação no mesmo espaço que contém as funções testes onde a solução é procurada. Este método também foi usado por I. G. Bubnov em 1913^[24]. Assim a equação 3.7 fica

$$\sum_{j=1}^n (L\phi_j, \phi_i) c_j = (\phi_i, f), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Se o conjunto formado pela seqüência enumerável $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \dots$ é completo e o resíduo é ortogonal às funções base $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ então $R \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato fixa-se n , mas o ponto é que para ε arbitrário podemos obter $\|R\| < \varepsilon$ para n suficientemente grande, ou

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \exists N \mid \|R\| < \varepsilon, \forall n > N \quad (3.9)$$

o que caracteriza a convergência do método de Galerkin.

► Elementos finitos

O método dos elementos finitos é caracterizado pela forma como as funções ϕ_i 's usadas na equação 3.8 são construídas. A função de forma ϕ_i é definida como sendo polinomial por partes sobre o seu domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ela tem um pequeno **suporte** contido em Ω ^[44]. O suporte, neste caso, é por exemplo um intervalo na reta, triângulos ou quadriláteros no plano, hexaedros ou tetraedros no espaço tridimensional. Assim, a função de forma ϕ_i do espaço V_{hp} de elementos finitos, é definida por um polinômio de grau maior que zero, e portanto não nula, neste suporte geométrico e é nula fora dele.

Com uma malha conforme uma função Φ_k , do espaço de elementos finitos V_h , é construída associando-se bases ψ_i de um grupo respectivo $\{E_i\}_{i=1}^n$ de elementos adjacentes. Este grupo de elementos tem, por exemplo, um vértice, uma aresta ou uma face em comum. Então, Φ_k é definida por partes da seguinte maneira:

$$\Phi_k|_{E_i} = \psi_i \quad \wedge \quad \Phi_k|_{V_h - \cup E_i} = 0 \quad (3.10)$$

Em caso de que a base Φ_k precise ser de classe C^s , isto é Φ_k possui derivadas contínuas até ordem s , deve-se considerar que a justaposição das bases ψ_i seja da mesma classe C^s sobre a interseção não vazia $E_i \cap E_j : 1 \leq i, j \leq n$ e sobre a fronteira do conjunto $\cup_{i=1}^n E_i$. Em particular as funções base construídas e utilizadas neste trabalho são contínuas ou de classe C^0 sobre o domínio Ω .

Quando uma malha é não conforme, como aquelas malhas adaptativas que são definidas e utilizadas aqui, para a construção da base Φ_k tem-se ainda:

$$\Phi_k|_{E_i} = \sum \alpha_j \psi_j^{E_i} \quad (3.11)$$

onde $\psi_j^{E_i}$ são funções base do elemento E_i . Esta forma será explicitada mais adiante.

3.2 Formulação fraca ou variacional

Existem algumas maneiras de se obter uma formulação fraca para aproximar a solução de um problema que modela um fenômeno. Uma forma é partindo de uma equação clássica, ou formulação forte, de equações diferenciais parciais. Geralmente exigem-se várias derivadas contínuas da solução sobre todo o domínio do problema. Aplicando certas técnicas de integração, como o teorema de divergência de Gauss, e princípios variacionais, consegue-se reduzir a ordem das derivadas envolvidas obtendo-se uma formulação fraca do problema^[14],^[55]. Um exemplo detalhado da aplicação desta técnica é dado no trabalho de Bravo^[9].

Uma outra forma de se obter uma formulação variacional é dada na seção 8.2. O problema teste a ser tratado nesta pesquisa refere-se as equações que modelam o comportamento de um material capaz de sofrer grandes deformações, definido de material hiperelástico^[28], como por exemplo a borracha. A formulação é obtida utilizando uma função escalar W que define a densidade da energia de deformação deste material. A formulação é obtida integrando-se primeiras e segundas derivadas de W e usando o processo iterativo de Newton para minimizar o valor da integração da função de densidade W .

A formulação variacional é tem as seguintes propriedades:

- ▶ A forma fraca é equivalente ao problema na sua formulação forte ou clássica. Quando a solução do problema forte existe esta também é solução do problema variacional. A recíproca nem sempre é verdadeira.
- ▶ O espaço onde o novo problema é colocado é mais abrangente e exige-se uma solução menos suave que a solução do problema na sua formulação forte.

Assim um problema variacional abstrato, como aquele que aqui será utilizado e obtido desta maneira, é dado pela seguinte equação:

$$\text{Achar } u \in H^1(\Omega) \mid a(u, v) = f(v), \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.12)$$

E o problema variacional aproximado é dado por:

$$\text{Achar } u_h \in V_h \mid a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h \subset H^1(\Omega) \quad (3.13)$$

Onde as formas bilinear $a(\cdot, \cdot)$ e linear $f(\cdot)$ satisfazem certas propriedades e são dadas em termos de integrais sobre o domínio Ω e sobre a fronteira $\Gamma = \partial\Omega$.

A seguir citam-se alguns aspectos teóricos do espaço $H^1(\Omega)$ onde este problema e colocado e das funções utilizados nesta formulação, conforme equação 3.12. Analisam-se alguns exemplo que ajudam a caracterizar melhor estas funções.

O espaço de Sobolev de ordem 1, $H^1(\Omega)$, definido na equação 3.15 mostra- da a seguir, é definido como o conjunto das funções de quadrado integrável, equação 3.14, cuja primeira **derivada fraca**^[39], definição 3.2.1, também é de quadrado integrável. A definição de derivada fraca é dada a seguir.

$$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \mid \int_{\Omega} |v|^2 dx < +\infty\} \quad (3.14)$$

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\} \quad (3.15)$$

Definição 3.2.1 $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ é a derivada fraca de v com respeito a x_i se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (3.16)$$

Aqui $C_0^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções reais indefinidamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em Ω ^[44]. Nota-se que a definição de derivada fraca na equação 3.16 é baseada na integração por partes e o fato que ϕ é nula na fronteira Γ de Ω , $\Gamma = \partial\Omega$. A diferença da derivada fraca para derivada forte ou no sentido usual clássico é que na igualdade 3.16 a função v pode não ter derivada no sentido forte ou ainda não estar definida sobre um conjunto de medida nula contido em Ω . Ilustram-se a seguir estas idéias com exemplos.

Exemplo 3.2.2 Considere as funções f, g e h abaixo cujos gráficos são mostrados na figura 3.1.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & : 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & : 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & : 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} x & : 0 \leq x < 1 \\ 1 & : 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (3.17)$$

A função f não tem derivada fraca. As funções g e h são fracamente deriváveis.

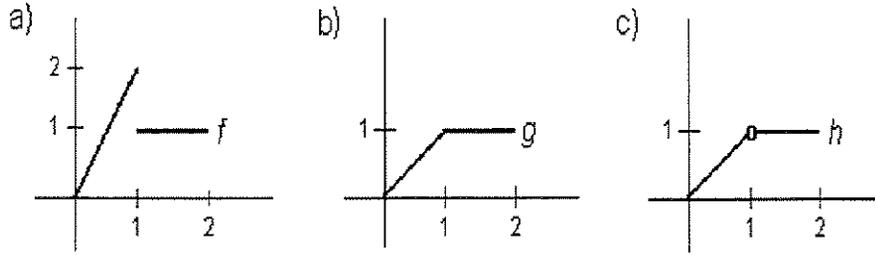


Figura 3.1: Teste de derivabilidade fraca

Considerando-se a fórmula da derivada do produto de funções

$$\frac{d(u\phi)}{dx} = \frac{du}{dx}\phi + u\frac{d\phi}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx}\phi = \frac{d(u\phi)}{dx} - u\frac{d\phi}{dx} \quad (3.18)$$

e integrando-se a equação 3.18 no intervalo $[0, 2]$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{du}{dx} \phi dx &= \int_0^1 \frac{du}{dx} \phi dx + \int_1^2 \frac{du}{dx} \phi dx = \\ &= u\phi|_0^1 - \int_0^1 u \frac{d\phi}{dx} dx + u\phi|_1^2 - \int_1^2 u \frac{d\phi}{dx} dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{du}{dx} \phi dx &= [u(1)\phi(1)]^- - [u(1)\phi(1)]^+ - \int_0^2 u \frac{d\phi}{dx} dx = \\ &= -[|u(1)\phi(1)|] - \int_0^2 u \frac{d\phi}{dx} dx \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\phi(2) = \phi(0) = 0, \quad \phi \in C_0^\infty([0, 2]) \quad (3.21)$$

Onde $[u(1)\phi(1)]^-$ e $[u(1)\phi(1)]^+$ denotam os valores limites esquerdo e direito de $u\phi$ no ponto 1 respectivamente. E $[|u(1)\phi(1)|] = [u(1)\phi(1)]^+ - [u(1)\phi(1)]^-$ é o salto de $u\phi$ no ponto 1. Olhando para a definição 3.2.1 e equação 3.20, se $u = f$ então $[|u(1)\phi(1)|] = -\phi(1) \neq 0$ e não existe a derivada fraca de f . Se $u = g$ ou $u = h$ então o salto de $u\phi$ em 1 é nulo, $[|u(1)\phi(1)|] = 0$, e g e h possuem derivada fraca. Ainda mais, as derivadas fracas de g e h são de quadrado integráveis e portanto g e h são funções de $H^1([0, 2])$.

No entanto f , g e h não são deriváveis no sentido clássico. De fato os limites esquerdo e direito das derivadas de g e h são dados por

$$\left[\frac{dg}{dx}(1) \right]^- = 1, \quad \left[\frac{dg}{dx}(1) \right]^+ = 0; \quad \left[\frac{dh}{dx}(1) \right]^- = 1, \quad \left[\frac{dh}{dx}(1) \right]^+ = 0 \quad (3.22)$$

E a função f sendo descontínua não é derivável no sentido clássico.

3.2.1 Estimador de erro

Um estimador de erros é imprescindível para poder definir uma estratégia adaptativa. Uma estratégia adaptativa indicará, baseada na estimativa para o erro da solução sobre o elemento, que elemento deverá ser agrupado ou qual deverá ser dividido. A finalidade de um processo adaptativo é construir ou modificar uma malha por um processo iterativo de refinamento e resolução do sistema para que o erro calculado a posteriori seja distribuído uniformemente sobre os elementos da malha adaptada e de acordo com a precisão global que precisa ser atingida.

Devido a que a norma energia é uma quantidade absoluta utiliza-se mais convenientemente o erro relativo

$$\eta = \frac{\|e\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \quad (3.23)$$

Como a solução exata u é supostamente desconhecida pode-se fazer a seguinte substituição:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|u_{hp} + e\|_{H^1(\Omega)}^2 = a(u_{hp} + e, u_{hp} + e) \\ &= a(u_{hp}, u_{hp}) + a(e, e) + 2a(u_{hp}, e) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dado que a solução de elementos finito é uma projeção da solução $u \in H^1(\Omega)$ sobre $V_{hp}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ tem-se $a(u_{hp}, e) = 0 \forall u_{hp} \in V_{hp}(\Omega)$ [9], [29], e então,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left(\|u_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

Considerando que se procura uma solução aproximada que atinja um erro admissível $e_{ad} =$

$u - u_{hp}$, substituindo a expressão 3.25 na equação 3.23, o erro relativo admissível global é obtido como:

$$\eta_{ad} = \frac{\|e_{ad}\|_{H^1(\Omega)}}{\left(\|u_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e\|_{H^1(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.26)$$

Supondo que se deseja que o erro se apresente uniformemente distribuído para cada um dos m elementos da malha, considerando que $\|e_{ad}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum \|e_{ad}^K\|_{H^1(K)}^2$, com K percorrendo os elementos da malha, então pode-se considerar o erro admissível elementar deduzido como na seguinte equação:

$$\|e_{ad}^K\|_{H^1(K)} = \eta_{ad} \frac{\left(\|u_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e\|_{H^1(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m}} \quad (3.27)$$

Assim, o erro admissível elementar $\|e_{ad}^K\|_{H^1(K)}$ pode ser calculado do erro admissível global η_{ad} geralmente dado pelo usuário. Se a solução é conhecida toma-se $e = u - u_{hp}$ para completar o cálculo da equação 3.27, caso contrario deve-se desenvolver um estimador para este erro de acordo com o modelo do problema ou utilizar um estimador conhecido, veja como exemplo^{[62], [68]}.

3.2.2 Estratégia adaptativa

Uma estratégia adaptativa geralmente é baseada no principio da distribuição do erro dos elementos da malha. Para um número fixo de elementos a malha ótima é aquela onde a medida do erro é distribuído equitativamente entre todos os elementos. Assim uma malha adaptada deverá apresentar uma concentração de elementos pequenos na região do domínio onde a solução apresenta uma variação maior ou um gradiente elevado e uns poucos elementos onde a solução se apresenta mais suave. Ao mesmo tempo os elementos de h pequeno poderão ter uma ordem de interpolação p maior que os elementos de h relativamente grande.

Exemplifica-se uma estratégia simples de refinamento adaptativo dada pelo seguinte algoritmo:

1. Calcule uma solução sobre uma malha inicial grossa
2. Estime o erro para cada elemento denotando por e_{\max} o maior erro cometido por algum dos elementos
3. Refine a malha incluindo os elementos K para os quais o erro local indicado por $\|e_K\|_i$ satisfaz

$$\|e_K\|_i \geq \theta_{\max} e_{\max} \quad : \quad 0 \leq \theta_{\max} \leq 1 \quad (3.28)$$

Agrupe os elementos L_i para os quais

$$\|e_{L_i}\|_i \leq \theta_{\min} e_{\max} \quad : \quad 0 < \theta_{\min} \leq 1 \quad (3.29)$$

onde θ_{\max} , θ_{\min} são tolerâncias prefixadas e e_{\max} é o máximo erro considerando todos os elementos da malha.

4. Caso qualquer elemento for engrossado ou refinado prossiga-se com o passo 1. Caso contrário o procedimento para.

Este algoritmo deve levar para uma malha ótima, como definida no começo, após um certo número de refinamentos. Embora é possível melhorar o processo para atingir a malha ótima num menor número de iterações.

Na literatura já mencionada encontram-se várias estratégias adaptativas desenvolvidas para alguns problemas e estimadores de erros específicos baseados no resíduo da equação que é discretizada.

Após a breve apresentação de alguns conceitos do Método dos Elementos finitos que aqui são empregados, no próximo capítulo definem-se as funções de forma que são adotadas neste trabalho e que são fundamentais para o funcionamento do refinamento h ou p adaptativo aqui desenvolvido.

Capítulo 4

Funções de Forma Hierárquicas de Alta Ordem

Neste capítulo apresenta-se uma proposta de definição para uma seqüência de funções de forma polinomiais associadas com cada elemento geométrico. Elas permitem uma aproximação de elementos finitos hierárquicos de alta ordem. Mostra-se a construção sistemática das funções base com as quais definem-se os espaços de aproximação. São definidos, também, parâmetros variacionais que permitem a construção de um espaço de aproximação consistente. Assim o objetivo deste capítulo é explicitar as funções de forma hierárquicas definidas para elementos de linha, triângulos, quadriláteros, tetraedro, pirâmide, prisma e hexaedro. Maiores detalhes relacionados com a definição destas funções serão introduzidos conforme a evolução do texto.

4.1 Aspectos preliminares

Será mostrado, baseado na definição de uma seqüência de funções de forma, que um espaço de aproximação pode ser definido para elementos finitos uni, bi e tridimensionais.

A parte geométrica de um elemento finito pode ser caracterizada por cantos, arestas, faces e volume. Cantos são pontos, arestas são curvas unidimensionais, faces são superfícies bidimensionais e volumes são regiões tridimensionais. De acordo com esta caracterização e pela própria construção, cada função de forma hierárquica de elementos finitos, também chamada de base, pode ser classificada em:

- i) *Funções de forma de canto*
- ii) *Funções de forma de aresta*
- iii) *Funções de forma de face*
- iv) *Funções de forma de volume*

Desta maneira forma-se uma partição do conjunto de funções de forma do elemento. As funções de forma ψ_i de canto correspondem a funções Lagrangianas. Sua definição é tal que elas valem 1 no canto c_j ao qual estão associadas e valem zero nos demais cantos do elemento, equação 4.1. Estas funções têm um comportamento linear sobre as arestas e são não nulas somente nas arestas e faces que incluem o canto associado e no interior, nos casos bi e tridimensional respectivamente. Se o canto pertence a uma face triangular, a base de canto é de primeiro grau sobre esta face. Se o canto pertence a uma face quadrilateral, a base de canto é bilinear ou de primeiro grau em cada variável sobre esta face. A soma de todas as funções de forma de canto do elemento é um, conforme enunciado na equação 4.1.

$$\psi_i(c_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{k=1}^n \psi_k = 1 \quad (4.1)$$

Cada função de forma de aresta é associada com uma única aresta. Estas funções são nulas em todos os cantos e sobre todas as outras arestas. Estas bases são diferentes de zero somente sobre a aresta associada e nas faces que incluem esta aresta. Elas também são não nulas sobre o volume interior, no caso tridimensional. Cada função de forma de face é associada com uma única face do elemento. Elas são nulas em todos os cantos e arestas. Cada função é diferente de zero somente na face associada e sobre o volume interior. As funções de volume são não nulas exclusivamente no interior do elemento. As funções de volume se anulam em todos os cantos, sobre todas as arestas e sobre todas as faces do elemento.

4.1.1 Fixando uma notação

Tendo em vista o tratamento unificado e simultâneo dos vários elementos aqui trabalhados, faz-se necessário fixar uma notação específica, para a definição das funções base de cada um destes elementos.

O inteiro p estabelece a ordem de interpolação do elemento. A notação $\Psi_{r0(n)}^{1d}$ refere-se à função de forma do elemento finito. O superescrito $1d$ indica que a função é associada com um elemento unidimensional. O subscripto $r0$ significa que ela é uma função associada com a aresta $r0$. O subíndice n indica que ela é a n -ésima função do lado. Os tipos de elementos apontados pelos superescritos são:

- ▶ $1d$: elemento de linha ou unidimensional (linear)
- ▶ c : elemento cubo ou hexaedro
- ▶ pi : elemento pirâmide
- ▶ pr : elemento prisma
- ▶ q : elemento quadrilátero
- ▶ te : elemento tetraedro
- ▶ tr : elemento triângulo

O subscripto pode ainda denotar :

- ▶ c : função de forma de canto
- ▶ f : função de forma de face
- ▶ r : função de forma de aresta
- ▶ v : função de forma de volume

Quando necessário o índice n de uma função de forma se tornará múltiplo. Por exemplo, $\psi_{f(n1,n2)}^q$ indica que a função de forma de face de um elemento quadrilátero é indexada por $(n1, n2)$, que corresponde aos graus de dois polinômios que definem a base ψ_f^q .

4.1.2 A sequência básica de funções ortogonais

Assume-se que o usuário escolhe uma sequência de funções, equação 4.2, a qual deve formar o bloco construtor de um espaço de aproximação de elementos finitos.

$$f_n(\xi) : \xi \in [-1, 1], n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Se a união da sequência de funções $f_n(\xi)$ contém um espaço de polinômios de grau n , então o espaço de elementos finitos resultante sobre o elemento de referência é

completo^[26] como será mostrado neste capítulo. Qualquer uma destas funções no decorrer do texto será mencionada como função da seqüência. Dada a característica geométrica de cada elemento, convencionou-se uma nomenclatura local específica, que será introduzida ao longo deste trabalho.

I) Polinômios de Chebyshev

A seqüência básica que aqui será aplicada são os chamados polinômios de Chebyshev. Existe uma formula de recorrência que permite obter estes polinômios facilmente, conforme definido a seguir.

$$P_0 = 1, P_1 = x \quad (4.3)$$

$$\text{para } n \geq 2 : P_n = 2xP_{n-1} - P_{n-2} \quad (4.4)$$

No que segue apresenta-se o elemento de referência de cada um dos elementos já enumerados e as funções de forma hierárquicas sobre ele definidas. Cada elemento mestre é definido valendo-se de um "espaço paramétrico" da mesma dimensão do elemento.

4.2 Funções de forma do elemento unidimensional

O espaço paramétrico dos elementos unidimensionais é $[-1, 1]$, conforme é visualizado

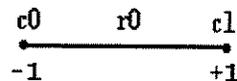


Figura 4.1: Elemento de referência unidimensional

na figura 4.1. O elemento de referência linear tem dois cantos c_0, c_1 e uma aresta r_0 . As suas funções de canto são dadas pelas equações 4.5 e 4.6, cujas representações gráficas podem ser vistas na figura 4.2.

$$\psi_{c_0}^{1d}(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad (4.5)$$

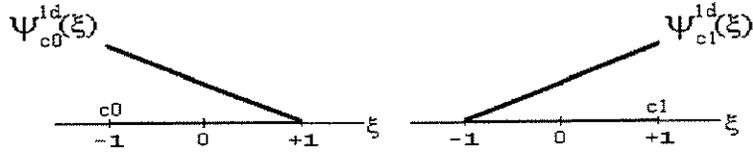


Figura 4.2: Funções de forma lineares unidimensionais

$$\psi_{c_1}^{1d}(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (4.6)$$

As funções de forma de aresta são definidas pela equação 4.7.

$$\psi_{r_0(n)}^{1d}(\xi) = \psi_{c_0}^{1d}(\xi) \psi_{c_1}^{1d}(\xi) f_n(\xi) \quad n = 0, 1, \dots, p-2 \quad (4.7)$$

Considerem-se as funções de Chebyshev para a seqüência f_n , para $p = 4$, isto é $n = 0, 1, 2$, figura 4.3. Neste caso a equação 4.7 resulta nas três funções de forma da figura 4.4.

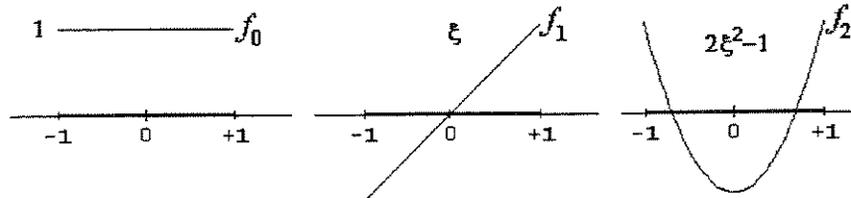


Figura 4.3: Funções da seqüência: polinômios de Chebyshev

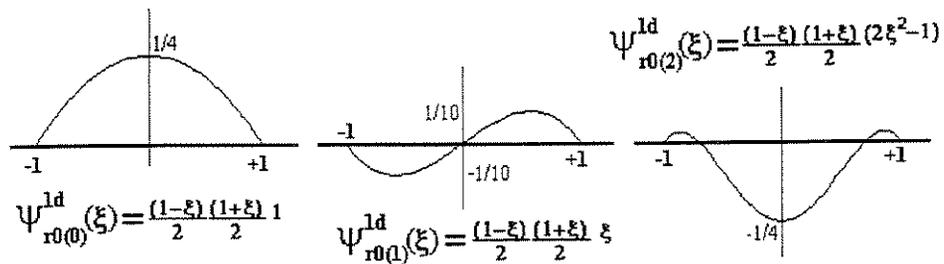


Figura 4.4: Funções de aresta do elemento mestre linear

4.3 Funções de forma do elemento quadrilateral

O elemento quadrilátero é formado por quatro cantos c_0 , c_1 , c_2 e c_3 , quatro arestas r_0 , r_1 , r_2 e r_3 e uma face f_0 , figura 4.5.

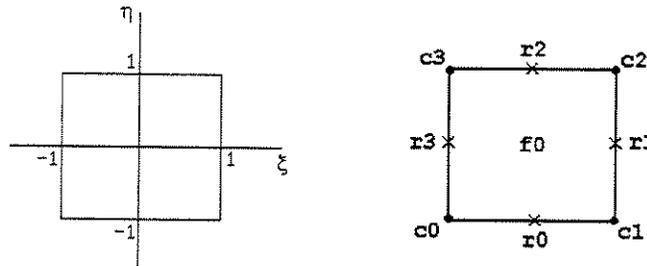


Figura 4.5: Geometria do quadrilátero mestre

O espaço paramétrico do elemento quadrilátero é $[-1, 1]^2$. As coordenadas dos cantos deste quadrilátero são dadas na tabela 4.1.

coordenadas	vértices			
	c_0	c_1	c_2	c_3
ξ	-1	1	1	-1
η	-1	-1	1	1

Tabela 4.1: Coordenadas do quadrilátero mestre

As funções de forma de canto são dadas nas equações 4.8-4.11. Estas bases são bilineares.

$$\psi_{c_0}^q(\xi, \eta) = \psi_{c_0}^{1d}(\xi) \psi_{c_0}^{1d}(\eta) \quad (4.8)$$

$$\psi_{c_1}^q(\xi, \eta) = \psi_{c_1}^{1d}(\xi) \psi_{c_1}^{1d}(\eta) \quad (4.9)$$

$$\psi_{c_2}^q(\xi, \eta) = \psi_{c_2}^{1d}(\xi) \psi_{c_2}^{1d}(\eta) \quad (4.10)$$

$$\psi_{c_3}^q(\xi, \eta) = \psi_{c_3}^{1d}(\xi) \psi_{c_3}^{1d}(\eta) \quad (4.11)$$

Os nós de canto associados com cada aresta são dados na tabela 4.2. As funções de forma de aresta são dadas nas equações 4.12 a 4.15.

$$\psi_{r_0(n)}^q(\xi, \eta) = \psi_{c_0}^q(\xi, \eta) \psi_{c_1}^q(\xi, \eta) f_n(\xi) \quad (4.12)$$

arestas	r0	r1	r2	r3
canto local 0	c0	c1	c2	c3
canto local 1	c1	c2	c3	c0

Tabela 4.2: Nós de canto para cada lado

$$\psi_{r1(n)}^q(\xi, \eta) = \psi_{c1}^q(\xi, \eta) \psi_{c2}^q(\xi, \eta) f_n(\eta) \quad (4.13)$$

$$\psi_{r2(n)}^q(\xi, \eta) = \psi_{c2}^q(\xi, \eta) \psi_{c3}^q(\xi, \eta) f_n(-\xi) \quad (4.14)$$

$$\psi_{r3(n)}^q(\xi, \eta) = \psi_{c3}^q(\xi, \eta) \psi_{c0}^q(\xi, \eta) f_n(-\eta) \quad (4.15)$$

$$n = 0, 1, \dots, p-2 \quad (4.16)$$

As funções de forma de face são mostradas na equação 4.17. Escolhendo-se o outro par de bases de canto em substituição resultará na mesma função de face.

$$\psi_{f0(n1, n2)}^q(\xi, \eta) = \psi_{c0}^q(\xi, \eta) \psi_{c2}^q(\xi, \eta) f_{n1}(\xi) f_{n2}(\eta) \quad (4.17)$$

$$0 \leq n1, n2 \leq p-2 \quad (4.18)$$

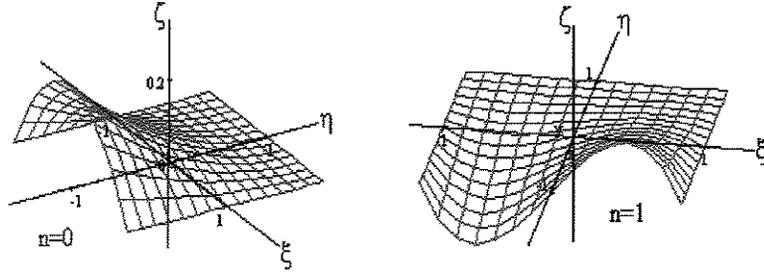


Figura 4.6: Funções de forma da aresta r0

$$\psi_{r0(0)}^q(\xi, \eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} 1, \quad n=0 \quad (4.19)$$

$$\psi_{r0(1)}^q(\xi, \eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \xi, \quad n=1 \quad (4.20)$$

As figuras 4.6 e 4.7 exemplificam funções de aresta e face do elemento quadrilátero para alguns valores de n , $n1$ e $n2$. Na figura 4.6 estão representadas as equações 4.19 e 4.20, isto é

funções de aresta para $n = 0$ e $n = 1$.

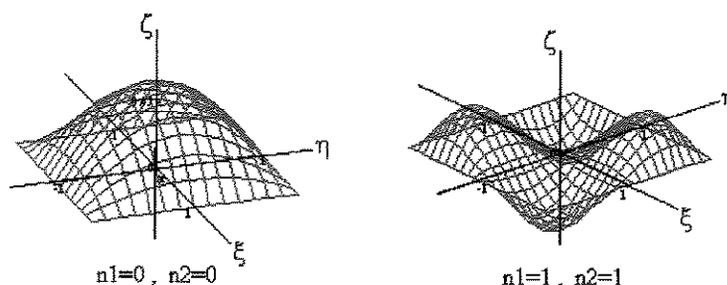


Figura 4.7: Funções de forma de face

$$\psi_{f0(0,0)}^q(\xi, \eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} 1 1 \quad (4.21)$$

$$n1 = n2 = 0$$

$$\psi_{f0(1,1)}^q(\xi, \eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \xi \eta \quad (4.22)$$

$$n1 = n2 = 1$$

Na figura 4.7 são mostradas as funções representadas pelas equações 4.21 e 4.22, isto é funções de face para $n1$ e $n2$ iguais a zero e a um respectivamente. A escolha das outras duas funções de canto define as mesmas bases de face.

4.4 Funções de forma do elemento triangular

O espaço paramétrico do triângulo é mostrado na figura 4.8-a. O elemento de referência triangular tem três cantos $c0$, $c1$, $c2$ três arestas $r0$, $r1$, $r2$ e uma face f_0 , como mostrado na figura 4.8-b. As coordenadas dos cantos do elemento triangular são dadas na tabela 4.3. As funções de canto são definidas pelas equações 4.23 a 4.25

cantos	$c0$	$c1$	$c2$
ξ	0	1	0
η	0	0	1

Tabela 4.3: Coordenadas nodais do triângulo mestre

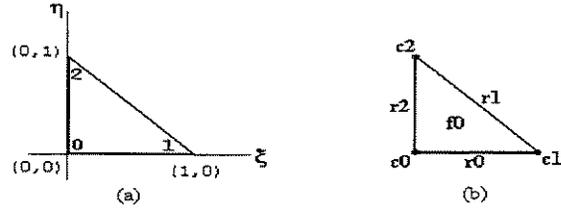


Figura 4.8: O triângulo e seu espaço paramétrico

$$\psi_{c0}^{tr}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (4.23)$$

$$\psi_{c1}^{tr}(\xi, \eta) = \xi \quad (4.24)$$

$$\psi_{c2}^{tr}(\xi, \eta) = \eta \quad (4.25)$$

Cada aresta é definida pelos dois vértices extremos (nós) como mostrado na tabela 4.4.

arestas	cantos da aresta	
	canto 0	canto 1
r0	c0	c1
r1	c1	c2
r2	c2	c0

Tabela 4.4: Definição das aresta do triângulo

As funções de forma de aresta do triângulo são representadas nas equações 4.26, 4.27 e 4.28.

$$\psi_{r0(n)}^{tr}(\xi, \eta) = \psi_{c0}^{tr}(\xi, \eta) \psi_{c1}^{tr}(\xi, \eta) f_n(\eta + 2\xi - 1) \quad (4.26)$$

$$\psi_{r1(n)}^{tr}(\xi, \eta) = \psi_{c1}^{tr}(\xi, \eta) \psi_{c2}^{tr}(\xi, \eta) f_n(\eta - \xi) \quad (4.27)$$

$$\psi_{r2(n)}^{tr}(\xi, \eta) = \psi_{c2}^{tr}(\xi, \eta) \psi_{c0}^{tr}(\xi, \eta) f_n(1 - \xi - 2\eta) \quad (4.28)$$

$$n = 0, 1, \dots, p - 2 \quad (4.29)$$

A face do triângulo é definida pelos cantos c0, c1 e c2 e as funções de forma de face do

elemento triangular são mostradas na equação 4.30.

$$\begin{aligned} \psi_{f_0(n_1, n_2)}^{tr}(\xi, \eta) &= \psi_{c_0}^{tr}(\xi, \eta) \psi_{c_1}^{tr}(\xi, \eta) \psi_{c_2}^{tr}(\xi, \eta) f_{n_1}(2\xi - 1) f_{n_2}(2\eta - 1) \\ &: 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

As combinações $C(\xi, \eta)$ dos parâmetros ξ e η como argumento das funções ortogonais f_n são chamadas de *parâmetros variacionais*. O parâmetro variacional da função da aresta ri é escolhido de tal forma que $C(\xi, \eta)$ não varia sobre a linha reta que une o ponto médio do lado ri e o canto oposto do triângulo, figura 4.9.

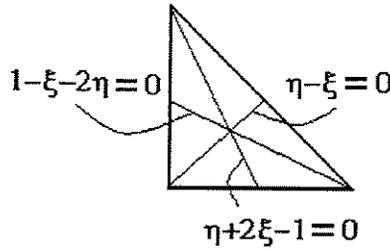


Figura 4.9: Parâmetros variacionais

Além disso, do canto local 0 para o canto local 1 da aresta tem-se:

$$-1 \leq C(\xi, \eta) \leq 1 \quad (4.31)$$

Isto permite obter um comportamento simétrico das funções de forma sobre o elemento, com respeito a esta porção de reta. Este comportamento simétrico trará como consequência a possibilidade de compatibilizar funções de forma de dois ou mais elementos, iguais ou diferentes ou ainda de dimensões distintas, quando estes são vizinhos compartilhando uma mesma aresta. Esta compatibilização resultará na continuidade sobre o lado comum de certas bases associadas às arestas compartilhadas. A mesma conclusão é válida para os parâmetros variacionais das funções de face. Na seção 6.9 será complementado a maneira como esta compatibilização é feita. A equação 4.32 também é satisfeita pelos parâmetros de face.

$$0 \leq \xi, \eta \leq 1 \implies -1 \leq C_1(\xi, \eta), C_2(\xi, \eta) \leq 1 \quad (4.32)$$

A ordem na escolha dos cantos de cada aresta ou face determina aqui a direção de variação do ou dos parâmetros variacionais. Por exemplo a aresta r_2 do triângulo é definida pelos cantos c_2 e c_0 nessa ordem, isto indica que para a aresta r_2 o canto local 0 é o canto c_2 e o canto local 1 é o c_0 e o parâmetro variacional desta aresta varia de -1 para +1 do canto c_2 para o canto c_0 .

4.5 Funções de forma do elemento hexaedro

O espaço paramétrico do elemento hexaedro é $[-1, 1]^3$ conforme mostrado na figura 4.10. As coordenadas dos cantos do hexaedro mestre são dadas na tabela 4.5. O hexaedro tem 8 cantos, 12 arestas, 6 faces. No que se segue F_i e f_i denotarão a face i do elemento. Usa-se também uma forma única para enumerar os diferentes cantos, arestas e faces do elemento. Assim, a enumeração dos cantos vai de 0 a 7, a enumeração das arestas vai de 8 a 19, os números associados às faces vão de 20 a 25. Como também existem bases associadas ao volume do elemento é prático associar o número 26 para o volume. Da mesma maneira para todos os outros elementos. No que se segue estas enumerações são usadas indistintamente.

As funções de forma de canto são dadas nas equações 4.33 a 4.40.

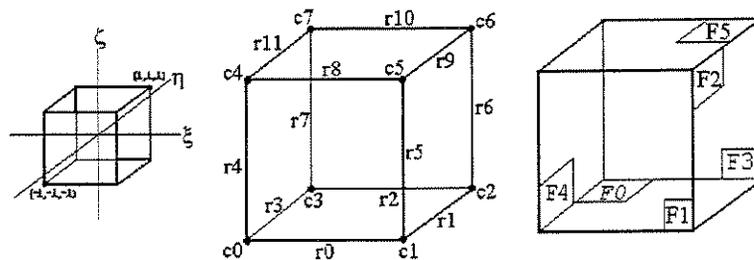


Figura 4.10: Configuração geométrica do hexaedro de referência

coordenadas	cantos ou vértices							
	c0	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
ξ	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
η	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
ζ	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

Tabela 4.5: Coordenadas dos cantos do hexaedro

$$\psi_{c0}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{1d}(\xi)\psi_{c0}^{1d}(\eta)\psi_{c0}^{1d}(\zeta) \quad (4.33)$$

$$\psi_{c1}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{1d}(\xi)\psi_{c0}^{1d}(\eta)\psi_{c0}^{1d}(\zeta) \quad (4.34)$$

$$\psi_{c2}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{1d}(\xi)\psi_{c1}^{1d}(\eta)\psi_{c0}^{1d}(\zeta) \quad (4.35)$$

$$\psi_{c3}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{1d}(\xi)\psi_{c1}^{1d}(\eta)\psi_{c0}^{1d}(\zeta) \quad (4.36)$$

$$\psi_{c4}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{1d}(\xi)\psi_{c0}^{1d}(\eta)\psi_{c1}^{1d}(\zeta) \quad (4.37)$$

$$\psi_{c5}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{1d}(\xi)\psi_{c0}^{1d}(\eta)\psi_{c1}^{1d}(\zeta) \quad (4.38)$$

$$\psi_{c6}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{1d}(\xi)\psi_{c1}^{1d}(\eta)\psi_{c1}^{1d}(\zeta) \quad (4.39)$$

$$\psi_{c7}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{1d}(\xi)\psi_{c1}^{1d}(\eta)\psi_{c1}^{1d}(\zeta) \quad (4.40)$$

Os nós de canto de cada aresta são dados na tabela 4.6.

aresta	r0	r1	r2	r3	r4	r5	r6	r7	r8	r9	r10	r11
canto 0	c0	c1	c2	c3	c0	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
canto 1	c1	c2	c3	c0	c4	c5	c6	c7	c5	c6	c7	c4
parâmetro	ξ	η	$-\xi$	$-\eta$	ζ	ζ	ζ	ζ	ξ	η	$-\xi$	$-\eta$

Tabela 4.6: Cantos de cada aresta : hexaedro

As funções de forma de aresta são definidas conforme a tabela 4.6, e podem ser escritas como mostrado nas equações 4.41 a 4.52.

$$\psi_{r0(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^c(\xi)\psi_{c1}^c(\eta)f_n(\xi) \quad (4.41)$$

$$\psi_{r1(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^c(\xi)\psi_{c2}^c(\eta)f_n(\eta) \quad (4.42)$$

$$\psi_{r2(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^c(\xi)\psi_{c3}^c(\eta)f_n(-\xi) \quad (4.43)$$

$$\psi_{r3(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c3}^c(\xi)\psi_{c0}^c(\eta)f_n(-\eta) \quad (4.44)$$

$$\psi_{r4(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^c(\xi)\psi_{c4}^c(\eta)f_n(\zeta) \quad (4.45)$$

$$\psi_{r5(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^c(\xi)\psi_{c5}^c(\eta)f_n(\zeta) \quad (4.46)$$

$$\psi_{r6(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^c(\xi)\psi_{c6}^c(\eta)f_n(\zeta) \quad (4.47)$$

$$\psi_{r7(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c3}^c(\xi)\psi_{c7}^c(\eta)f_n(\zeta) \quad (4.48)$$

$$\psi_{r8(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c4}^c(\xi)\psi_{c5}^c(\eta)f_n(\xi) \quad (4.49)$$

$$\psi_{r9(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c5}^c(\xi)\psi_{c6}^c(\eta)f_n(\eta) \quad (4.50)$$

$$\psi_{r10(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c6}^c(\xi)\psi_{c7}^c(\eta)f_n(-\xi) \quad (4.51)$$

$$\psi_{r11(n)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c7}^c(\xi)\psi_{c0}^c(\eta)f_n(-\eta) \quad (4.52)$$

$$n = 0, 1, \dots, p-2 \quad (4.53)$$

face	canto 0	canto 1	canto 2	canto 3	par. 0	par. 1	cantos opostos	
f0	c0	c1	c2	c3	ξ	η	c0	c2
f1	c0	c1	c5	c4	ξ	ζ	c0	c5
f2	c1	c2	c6	c5	η	ζ	c1	c6
f3	c3	c2	c6	c7	ξ	ζ	c3	c6
f4	c0	c3	c7	c4	η	ζ	c0	c7
f5	c4	c5	c6	c7	ξ	η	c4	c6

Tabela 4.7: Definição das faces e escolha de cantos

Escolhe-se duas funções de cantos opostos para cada face. A escolha das funções de cantos opostos é indiferente dado que a função de face obtida é idêntica. Seguindo a tabela 4.7, as funções de forma de face são dadas nas equações 4.54 a 4.59.

$$\psi_{f0(n1,n2)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^c(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^c(\xi, \eta, \zeta)f_{n1}(\xi)f_{n2}(\eta) \quad (4.54)$$

$$\psi_{f1(n1,n2)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^c(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c5}^c(\xi, \eta, \zeta)f_{n1}(\xi)f_{n2}(\zeta) \quad (4.55)$$

$$\psi_{f2(n1,n2)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^c(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c6}^c(\xi, \eta, \zeta)f_{n1}(\eta)f_{n2}(\zeta) \quad (4.56)$$

$$\psi_{f3(n1,n2)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c3}^c(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c6}^c(\xi, \eta, \zeta)f_{n1}(\xi)f_{n2}(\zeta) \quad (4.57)$$

$$\psi_{f4(n1,n2)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^c(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c7}^c(\xi, \eta, \zeta)f_{n1}(\eta)f_{n2}(\zeta) \quad (4.58)$$

$$\psi_{f5(n1,n2)}^c(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c4}^c(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c6}^c(\xi, \eta, \zeta)f_{n1}(\xi)f_{n2}(\eta) \quad (4.59)$$

$$0 \leq n1, n2 \leq p-2 \quad (4.60)$$

Finalmente, as funções de forma de volume do hexaedro são dadas pela equação 4.61. Observa-se neste caso, que embora as expressões sejam mais complexas, a sistemática de defini-

ção permanece inalterada.

$$\begin{aligned} \psi_{v0}^c(n_1, n_2, n_3)(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^c(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c6}^c(\xi, \eta, \zeta) f_{n_1}(\xi) f_{n_2}(\eta) f_{n_3}(\zeta) \\ 0 &\leq n_1, n_2, n_3 \leq p - 2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

O objetivo da escolha de duas funções de cantos é obter uma função de forma que seja nula no bordo do elemento. Isso também é conseguido com a escolha de duas outras bases de cantos opostos. A ordem na escolha dos cantos para definir uma face está relacionado diretamente com as direções de variação dos dois parâmetros variacionais desta face. Assim por exemplo a escolha dos cantos c_0 , c_3 , c_7 e c_4 nesta ordem para definir a face F_4 determinam os cantos locais dessa face. O cantos locais 0, 1, 2 e 3 da face F_4 são respectivamente c_0 , c_3 , c_7 e c_4 . A enumeração local da face determina os eixos locais de variação dos parâmetros variacionais. O primeiro eixo local $\tilde{\xi}$ é definido na direção que vai do canto local 0 para o canto local 1 e o segundo eixo local $\tilde{\eta}$ do canto local 0 para o canto local 3. O primeiro parâmetro variacional varia de -1 para +1 do canto local 0 para o canto local 1 da face e o segundo parâmetro variacional varia de -1 para +1 do canto local 0 para canto local 3 da mesma face. Isso será sempre assim para qualquer face quadrilateral.

4.6 Funções de forma do elemento tetraedro

O elemento geométrico tetraedro tem 4 cantos, 6 arestas e 4 faces. As coordenadas dos cantos do tetraedro mestre são dadas na tabela 4.8. O espaço paramétrico do elemento tetraedro é mostrado na figura 4.11.

coord.	c0	c1	c2	c3
ξ	0	1	0	0
η	0	0	1	0
ζ	0	0	0	1

Tabela 4.8: Coordenadas dos cantos do tetraedro

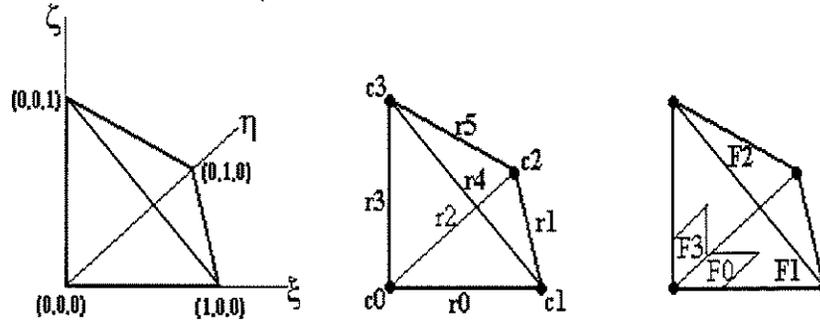


Figura 4.11: Geometria do tetraedro de referência

As funções de forma de canto são calculadas usando-se as equações 4.62 a 4.65.

$$\psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad (4.62)$$

$$\psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \xi \quad (4.63)$$

$$\psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \eta \quad (4.64)$$

$$\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \quad (4.65)$$

O cálculo dos parâmetros variacionais das funções ortogonais f_n associadas com cada função de forma de aresta r_i são detalhadas na sequência. Como já mencionou-se na seção 4.4, os parâmetros variacionais são determinados com o objetivo de obter continuidade entre as funções de forma de elementos vizinhos. Para estender esta idéia para tetraedros, o parâmetro variacional necessita ser escolhido de tal maneira que ele não varie sobre a face interna ao elemento, determinada pelo ponto médio do lado r_i e a aresta formada pelos cantos opostos. O parâmetro variacional também precisa ser -1 no canto local esquerdo da aresta e igual a $+1$ no canto direito da aresta. Estas condições estão desenhadas na figura 4.12.

4.6.1 Determinação do parâmetro variacional de aresta para o elemento tetraedro

Com o objetivo de ilustrar a metodologia da obtenção do parâmetro variacional, apresenta-se como exemplo o cálculo do parâmetro da primeira aresta, do elemento tetraédrico. Os outros parâmetros variacionais de aresta são obtidos satisfazendo-se condições similares.

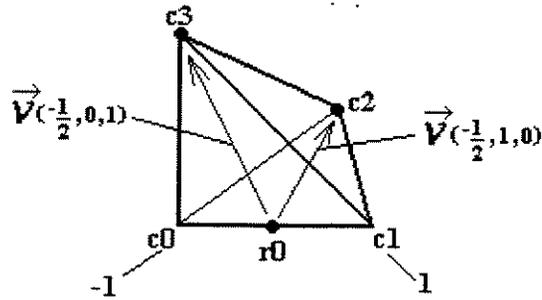


Figura 4.12: Condições do parâmetro variacional

O parâmetro tem a forma linear geral da equação 4.66 e é sujeito as condições 4.67 a 4.70.

$$C(\xi, \eta, \zeta) = a\xi + b\eta + c\zeta + d \quad (4.66)$$

$$(a, b, c) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) = 0 \quad (4.67)$$

$$(a, b, c) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) = 0 \quad (4.68)$$

$$(a, b, c) \cdot (0, 0, 0) + d = -1 \quad (4.69)$$

$$(a, b, c) \cdot (1, 0, 0) + d = +1 \quad (4.70)$$

A condição da equação 4.67 indica que o parâmetro não varia na direção $\vec{v}(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ que é a direção que vai do ponto médio da aresta r_0 definida na tabela 4.9, para o canto oposto c_2 , figura 4.12. O mesmo parâmetro não varia na direção que vai do meio da aresta r_0 para o canto c_3 . Das equações 4.69 e 4.70 segue-se que o parâmetro vale -1 no canto 0 e $+1$ no canto 1. Resolvendo-se 4.67 a 4.70 obtém-se o parâmetro variacional da aresta r_0 do tetraedro, mostrado na primeira linha da tabela 4.9. De maneira análoga chega-se aos parâmetros das demais arestas.

aresta	canto 0	canto 1	parâmetro variacional
r_0	c_0	c_1	$2\xi + \eta + \zeta - 1$
r_1	c_1	c_2	$\eta - \xi$
r_2	c_2	c_0	$1 - \xi - 2\eta - \zeta$
r_3	c_0	c_3	$\xi + \eta + 2\zeta - 1$
r_4	c_1	c_3	$\zeta - \xi$
r_5	c_2	c_3	$\zeta - \eta$

Tabela 4.9: Arestas e parâmetros variacionais designados

4.6.2 Funções de forma de arestas, faces e volume

Seguindo os dados da tabela 4.9, as funções de forma de aresta são calculadas a partir das equações 4.71 a 4.76.

$$\psi_{r0(n)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta)f_n(2\xi + \eta + \zeta - 1) \quad (4.71)$$

$$\psi_{r1(n)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\eta - \xi) \quad (4.72)$$

$$\psi_{r2(n)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta)f_n(1 - \xi - 2\eta - \zeta) \quad (4.73)$$

$$\psi_{r3(n)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\xi + \eta + 2\zeta - 1) \quad (4.74)$$

$$\psi_{r4(n)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\zeta - \xi) \quad (4.75)$$

$$\psi_{r5(n)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\zeta - \eta) \quad (4.76)$$

$$n = 0, 1, \dots, p - 2 \quad (4.77)$$

Depois de definir as funções de forma de face e de volume deste elemento, serão deduzidos os parâmetros variacionais para as funções de face.

face	canto 0	canto 1	canto 2	par. 0	par. 1
f0	c0	c1	c2	$2\xi - 1$	$2\eta - 1$
f1	c0	c1	c3	$2\xi - 1$	$2\zeta - 1$
f2	c1	c2	c3	$-\frac{2}{3}\xi + \frac{4}{3}\eta - \frac{2}{3}\zeta - \frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}\xi - \frac{2}{3}\eta + \frac{4}{3}\zeta - \frac{1}{3}$
f3	c0	c2	c3	$2\eta - 1$	$2\zeta - 1$

Tabela 4.10: Cantos e parâmetros variacionais das faces do tetraedro

A tabela 4.10 dá uma relação dos cantos de cada face como bem dos correspondentes parâmetros variacionais. As funções de face de acordo com a tabela 4.10 estão dadas nas equações 4.78 a 4.81.

$$\begin{aligned} \psi_{f0(n1,n2)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta) * \\ & f_{n1}(2\xi - 1)f_{n2}(2\eta - 1) \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f1(n1,n2)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta) * \\ & f_{n1}(2\xi - 1)f_{n2}(2\zeta - 1) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\psi_{f2(n1,n2)}^{te}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta) *$$

$$f_{n_1}\left(-\frac{2}{3}\xi + \frac{4}{3}\eta - \frac{2}{3}\zeta - \frac{1}{3}\right)f_{n_2}\left(-\frac{2}{3}\xi - \frac{2}{3}\eta + \frac{4}{3}\zeta - \frac{1}{3}\right) \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f3}^{te}(n_1, n_2)(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta) * \\ & f_{n_1}(2\eta - 1)f_{n_2}(2\zeta - 1) \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3 \quad (4.82)$$

As funções de forma de volume do tetraedro são dadas pela equação 4.83.

$$\begin{aligned} \psi_{v0}^{te}(n_1, n_2, n_3)(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c1}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{te}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{te}(\xi, \eta, \zeta) * \\ & f_{n_1}(2\xi - 1)f_{n_2}(2\eta - 1)f_{n_3}(2\zeta - 1) \\ & : \quad 0 \leq n_1 + n_2 + n_3 \leq p - 4 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Os parâmetros variacionais utilizados para definir as bases dadas pela equação 4.83 tem como única finalidade variar em linha reta (linearmente) entre -1 e +1 de um extremo ao outro dentro do elemento e na direção dos eixos. Desta forma estes parâmetros variaram dentro do domínio de definição das funções da seqüência para o domínio do elemento. Da mesma maneira que para a definição de uma aresta e de uma face quadrilateral a definição da face triangular por meio dos cantos do elemento está diretamente ligada com as direções de variação dos parâmetros variacionais dessa face. Por exemplo, a face F_2 é definida pelos cantos c_1 , c_2 e c_3 , isto significará que os cantos locais 0, 1 e 2 dessa face são respectivamente os cantos c_1 , c_2 e c_3 e que o primeiro eixo local $\tilde{\xi}$ vai na direção do canto local 0 para o canto local 1 e o segundo eixo local $\tilde{\eta}$ vai do canto local 0 para o canto local 2. Além disso o primeiro parâmetro variacional variará de -1 para +1 do canto local 0 para o canto local 1 e o segundo parâmetro variacional variará de -1 para +1 do canto local 0 para o canto local 2 como pode ser comprovado. Isto é assim relacionado para qualquer face triangular.

4.6.3 Determinação dos parâmetros variacionais das funções de face

As faces triangulares são caracterizadas pelos seus três cantos, como indicado na tabela 4.10, e pelos dois parâmetros das funções ortogonais. Com o intuito de se determinar estes

parâmetros a seguinte observação deve ser feita.

Observação 4.6.1 Cada face tem duas arestas que determinam a variação dos parâmetros. Do primeiro canto da face para o segundo, denomine-se **primeira aresta da face**, e do primeiro canto para o terceiro, denomine-se **segunda aresta da face**. O primeiro parâmetro variacional não varia ao longo da segunda aresta e o segundo parâmetro não varia ao longo da primeira aresta, conforme ilustrado na figura 4.13.

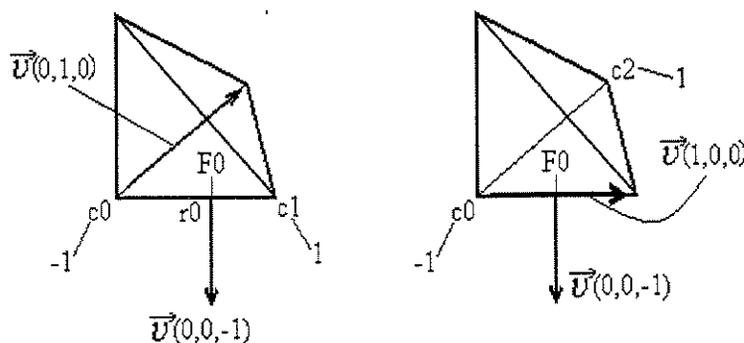


Figura 4.13: Condições dos parâmetros da face F0

► **Face 0 : primeiro parâmetro**

As quatro condições impostas para determinar-se o primeiro parâmetro variacional da face f0 são :

1. Ortogonalidade com a aresta $r2$, equação 4.84.
2. Paralelismo com a face $F0$, equação 4.85.
3. Vale -1 no canto $c0$ da aresta $r0$, equação 4.86.
4. Vale $+1$ no canto $c1$ da aresta $r0$, equação 4.87.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 1, 0) = 0 \quad (4.84)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, -1) = 0 \quad (4.85)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 0) + d = -1 \quad (4.86)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) + d = +1 \quad (4.87)$$

Com isto obtém-se, para este parâmetro, o sistema cuja solução é mostrada na tabela 4.11.

► **Face 0 : segundo parâmetro**

A				x		A ⁻¹				solução	var. ↓
0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	2	ξ
0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	η
0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	0	ζ
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	-1	←const.

Tabela 4.11: Obtenção do primeiro parâmetro da face F0

O segundo parâmetro satisfaz as condições das equações 4.88 a 4.91. A solução é apresentada na tabela 4.12.

1. Ortogonalidade com a aresta $r1$, equação 4.88.
2. Paralelismo com a face $F0$, equação 4.89.
3. Vale -1 no canto $c0$ da aresta $r2$, equação 4.90.
4. Vale $+1$ no canto $c2$ da aresta $r2$, equação 4.91.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) = 0 \quad (4.88)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, -1) = 0 \quad (4.89)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 0) + d = -1 \quad (4.90)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) + d = +1 \quad (4.91)$$

A				x		A ⁻¹				solução	var. ↓
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	ξ
0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	1	2	η
0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0	ζ
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	-1	←const.

Tabela 4.12: Obtenção do segundo parâmetro da face F0

► **Face 1 : primeiro parâmetro**

1. Ortogonalidade com a aresta $r3$, equação 4.92.
2. Paralelismo com a face $F1$, equação 4.93.
3. Vale -1 no canto $c0$ da aresta $r0$, equação 4.94.
4. Vale $+1$ no canto $c1$ da aresta $r0$, equação 4.95.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 1) = 0 \quad (4.92)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 1, 0) = 0 \quad (4.93)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 0) + d = -1 \quad (4.94)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) + d = +1 \quad (4.95)$$

Cujo sistema e solução são mostradas na tabela 4.13.

A				x	A ⁻¹				solução	var. ↓
0	0	1	0	0	0	0	-1	1	2	ξ
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	η
0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	ζ
1	0	0	1	1	0	0	1	0	-1	←const.

Tabela 4.13: Obtenção do primeiro parâmetro da face F1

► **Face 1 : segundo parâmetro**

1. Ortogonalidade com a aresta r_0 , equação 4.96.
2. Paralelismo com a face F_1 , equação 4.97.
3. Vale -1 no canto c_0 da aresta r_3 , equação 4.98.
4. Vale $+1$ no canto c_3 da aresta r_3 , equação 4.99.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) = 0 \quad (4.96)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 1, 0) = 0 \quad (4.97)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 0) + d = -1 \quad (4.98)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 1) + d = +1 \quad (4.99)$$

A tabela 4.14 mostra o sistema e solução dada pelas igualdades acima.

A				x	A ⁻¹				solução	var. ↓
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	ξ
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	η
0	0	0	1	-1	0	0	-1	1	2	ζ
0	0	1	1	1	0	0	1	0	-1	←const.

Tabela 4.14: Obtenção do segundo parâmetro da face F1

► **Face 2 : primeiro parâmetro**

1. Ortogonalidade com a aresta r_4 , equação 4.100.
2. Paralelismo com a face F_3 , equação 4.101.
3. Vale -1 no canto c_1 da aresta r_1 , equação 4.102.
4. Vale $+1$ no canto c_2 da aresta r_1 , equação 4.103.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(-1, 0, 1) = 0 \quad (4.100)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 1, 1) = 0 \quad (4.101)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) + d = -1 \quad (4.102)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 1, 0) + d = +1 \quad (4.103)$$

A				x	A ⁻¹				solução	var. ↓
-1	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	ξ
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	η
1	0	0	1	-1	1	0	0	-1	1	ζ
0	1	0	1	1	0	1	0	1	←const.	

Tabela 4.15: Obtenção do primeiro parâmetro da face F2

A tabela 4.15 mostra o sistema e solução resultantes das condições 1, 2, 3 e 4.

► **Face 2 : segundo parâmetro**

1. Ortogonalidade com a aresta r1, equação 4.104.
2. Paralelismo com a face F3, equação 4.105.
3. Vale -1 no canto c1 da aresta r4, equação 4.106.
4. Vale +1 no canto c3 da aresta r4, equação 4.107.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(-1, 1, 0) = 0 \quad (4.104)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 1, 1) = 0 \quad (4.105)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) + d = -1 \quad (4.106)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 1) + d = +1 \quad (4.107)$$

A				x	A ⁻¹				solução	var. ↓
-1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	ξ
1	1	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	η
1	0	0	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	ζ
0	0	1	1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	←const.

Tabela 4.16: Obtenção do segundo parâmetro da face F2

A tabela 4.16 apresenta o sistema e sua solução proveniente das equações 4.104 a 4.107.

► **Face 3 : primeiro parâmetro**

1. Ortogonalidade com a aresta r3, equação 4.108.
2. Paralelismo com a face F2, equação 4.109.
3. Vale -1 no canto c0 da aresta r2, equação 4.110.
4. Vale +1 no canto c2 da aresta r2, equação 4.111.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 1) = 0 \quad (4.108)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) = 0 \quad (4.109)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 0) + d = -1 \quad (4.110)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 1, 0) + d = +1 \quad (4.111)$$

A				x	A ⁻¹				solução	var. ↓
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	ξ
1	0	0	0	0	0	0	-1	1	2	η
0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	ζ
0	1	0	1	1	0	0	1	0	-1	←const.

Tabela 4.17: Obtenção do primeiro parâmetro da face F3

A tabela 4.17 mostra o sistema e solução resultante das imposições 1, 2, 3 e 4.

► **Face 3 : segundo parâmetro**

1. Ortogonalidade com a aresta r2, equação 4.112.
2. Paralelismo com a face F2, equação 4.113.
3. Vale -1 no canto c0 da aresta r3, equação 4.114.
4. Vale +1 no canto c3 da aresta r3, equação 4.115.

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 1, 0) = 0 \quad (4.112)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(1, 0, 0) = 0 \quad (4.113)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 0) + d = -1 \quad (4.114)$$

$$(a, b, c) \cdot \vec{v}(0, 0, 1) + d = +1 \quad (4.115)$$

Com estas igualdades obtém-se o sistema e solução dadas na tabela 4.18.

A				x	A ⁻¹				solução	var. ↓
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	ξ
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	η
0	0	0	1	-1	0	0	-1	1	2	ζ
0	0	1	1	1	0	0	1	0	-1	←const.

Tabela 4.18: Obtenção do segundo parâmetro da face F3

4.7 Funções de forma do elemento pirâmide

O espaço paramétrico e a definição de cantos, arestas, faces estão documentadas na figura 4.14. Este elemento tem 5 cantos, 8 arestas e 5 faces.

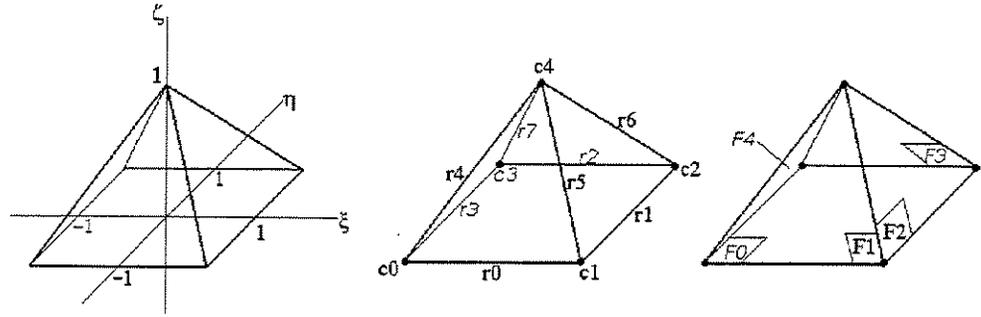


Figura 4.14: Espaço paramétrico do elemento pirâmide

Pela figura 4.14 as coordenadas dos cantos são os da tabela 4.19.

	c0	c1	c2	c3	c4
ξ	-1	1	1	-1	0
η	-1	-1	1	1	0
ζ	0	0	0	0	1

Tabela 4.19: Coordenadas dos cantos da pirâmide

As funções de forma de canto devem ser tais que elas são lineares sobre cada aresta e compatíveis com as funções de forma de elementos vizinhos. As funções de forma propostas satisfazem estas propriedades mas elas não são lineares sobre o elemento. Primeiro defina duas funções auxiliares, equações 4.116 e 4.117.

$$T_0(c, t) = \frac{(1-t) - c}{2(1-t)} \quad (4.116)$$

$$T_1(c, t) = \frac{(1-t) + c}{2(1-t)} \quad (4.117)$$

Então as funções de forma de canto são dadas pelas equações 4.118 a 4.122.

$$\psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = T_0(\xi, \zeta)T_0(\eta, \zeta)(1 - \zeta) \quad (4.118)$$

$$\psi_{c1}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = T_1(\xi, \zeta)T_0(\eta, \zeta)(1 - \zeta) \quad (4.119)$$

$$\psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = T_1(\xi, \zeta)T_1(\eta, \zeta)(1 - \zeta) \quad (4.120)$$

$$\psi_{c3}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = T_0(\xi, \zeta)T_1(\eta, \zeta)(1 - \zeta) \quad (4.121)$$

$$\psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \quad (4.122)$$

Embora as funções de forma sejam racionais, elas são bilineares sobre planos horizontais cortando a pirâmide, e elas são lineares ao longo de linhas que passam através do topo da pirâmide. Os cantos das arestas da pirâmide assim como os parâmetros variacionais das funções de forma de aresta são dadas na tabela 4.20.

arestas	par. var.	canto 0	canto 1
r0	ξ	c0	c1
r1	η	c1	c2
r2	$-\xi$	c2	c3
r3	$-\eta$	c3	c0
r4	$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta$	c0	c4
r5	$-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta$	c1	c4
r6	$-\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta$	c2	c4
r7	$\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta$	c3	c4

Tabela 4.20: Cantos e parâmetros variacionais das arestas da pirâmide

Seguindo os dados desta tabela as funções de forma de aresta são dadas pelas equações 4.123 a 4.130.

$$\psi_{r0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c1}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\xi) \quad (4.123)$$

$$\psi_{r1}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\eta) \quad (4.124)$$

$$\psi_{r2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n(-\xi) \quad (4.125)$$

$$\psi_{r3}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c3}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n(-\eta) \quad (4.126)$$

$$\psi_{r4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta\right) \quad (4.127)$$

$$\psi_{r5}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta\right) \quad (4.128)$$

$$\psi_{r6}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n\left(-\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta\right) \quad (4.129)$$

$$\psi_{r7}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c3}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta)f_n\left(\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta\right) \quad (4.130)$$

$$n = 0, 1, \dots, p-2 \quad (4.131)$$

Os parâmetros variacionais para faces triangulares são calculados de maneira similar aquelas do tetraedro. Os cantos das faces e seus parâmetros variacionais estão dados na tabela 4.21. Usando a tabela 4.21 as funções de forma de face são dadas pelas equações 4.132, 4.133, 4.134,

Faces	canto 0	canto 1	canto 2	canto 3	par. 1	par. 2
F0	c0	c1	c2	c3	ξ	η
F1	c0	c1	c4	-	$\xi - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$\eta + \zeta$
F2	c1	c2	c4	-	$\frac{1}{2}\xi + \eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$-\xi + \zeta$
F3	c3	c2	c4	-	$\xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$-\eta + \zeta$
F4	c0	c3	c4	-	$-\frac{1}{2}\xi + \eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$\xi + \zeta$

Tabela 4.21: Cantos e parâmetros variacionais das faces da pirâmide

4.135 e 4.136.

$$\begin{aligned} \psi_{f0(n1,n2)}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) f_{n1}(\xi) f_{n2}(\eta) \\ &: 0 \leq n1 + n2 \leq p - 2 \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f1(n1,n2)}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c1}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) * \\ &f_{n1}\left(\xi - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\right) f_{n2}(\eta + \zeta) \end{aligned} \quad (4.133)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f2(n1,n2)}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c1}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) * \\ &f_{n1}\left(\frac{1}{2}\xi + \eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\right) f_{n2}(-\xi + \zeta) \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f3(n1,n2)}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c3}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) * \\ &f_{n1}\left(\xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\right) f_{n2}(-\eta + \zeta) \end{aligned} \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f4(n1,n2)}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c3}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) * \\ &f_{n1}\left(-\frac{1}{2}\xi + \eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\right) f_{n2}(\xi + \zeta) \end{aligned} \quad (4.136)$$

$$0 \leq n1 + n2 \leq p - 3 \quad (4.137)$$

As funções de forma de volume são funções polinomiais de grau menor ou igual a p , e são calculadas a partir da equação 4.138.

$$\begin{aligned} \psi_{v0(n1,n2,n3)}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c0}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c2}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) \psi_{c4}^{pi}(\xi, \eta, \zeta) * \\ &f_{n1}(\xi) f_{n2}(\eta) f_{n3}(2\zeta - 1) \\ &: 0 \leq n1 + n2 + n3 \leq p - 3 \end{aligned} \quad (4.138)$$

4.8 Funções de forma do elemento prisma

Os nós geométricos de canto deste elemento são dados na tabela 4.22. O espaço paramétrico e o elemento de referência do prisma é mostrado na figura 4.15-(a). Este elemento tem 6 cantos, 9 arestas e 5 faces.

cantos→	c0	c1	c2	c3	c4	c5
ξ	0	1	0	0	1	0
η	0	0	1	0	0	1
ζ	-1	-1	-1	1	1	1

Tabela 4.22: Coordenadas dos nós geométricos do elemento prisma

As funções de forma de canto são dadas nas equações 4.139 a 4.144. Estas bases são obtidas pelo produto tensorial das funções de forma do elemento triangular no plano $\xi\eta$ com as funções de forma do elemento linear na variável ζ .

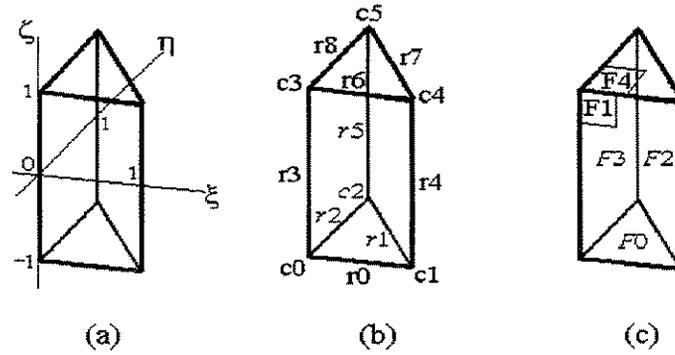


Figura 4.15: Geometria do prisma

$$\psi_{c0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{tr}(\xi, \eta)\psi_{c0}^{1d}(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta) \quad (4.139)$$

$$\psi_{c1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{tr}(\xi, \eta)\psi_{c0}^{1d}(\zeta) = \frac{1}{2}\xi(1 - \zeta) \quad (4.140)$$

$$\psi_{c2}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^{tr}(\xi, \eta)\psi_{c0}^{1d}(\zeta) = \frac{1}{2}\eta(1 - \zeta) \quad (4.141)$$

$$\psi_{c3}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{tr}(\xi, \eta)\psi_{c1}^{1d}(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta) \quad (4.142)$$

$$\psi_{c4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{tr}(\xi, \eta)\psi_{c1}^{1d}(\zeta) = \frac{1}{2}\xi(1 + \zeta) \quad (4.143)$$

$$\psi_{c5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^{tr}(\xi, \eta)\psi_{c1}^{1d}(\zeta) = \frac{1}{2}\eta(1 + \zeta) \quad (4.144)$$

Cada aresta é identificada dando-se dois cantos, tabela 4.23. A tabela 4.23 também apresenta os parâmetros variacionais de aresta. As funções de aresta são dadas pelas igualdades 4.145 a 4.153.

aresta →	r0	r1	r2	r3	r4	r5	r6	r7	r8
canto 0	c0	c1	c0	c0	c1	c2	c3	c4	c5
canto 1	c1	c2	c2	c3	c4	c5	c4	c5	c6
$C(\xi, \eta, \zeta)$	$2\xi + \eta - 1$	$\eta - \xi$	$-\xi - 2\eta + 1$	ζ	ζ	ζ	$2\xi + \eta - 1$	$\eta - \xi$	$-\xi - 2\eta + 1$

Tabela 4.23: Parâmetros variacionais de aresta do elemento prisma

$$\psi_{r0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(2\xi + \eta - 1) \quad (4.145)$$

$$\psi_{r1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\eta - \xi) \quad (4.146)$$

$$\psi_{r2}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c2}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(-\xi - 2\eta + 1) \quad (4.147)$$

$$\psi_{r3}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c3}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\zeta) \quad (4.148)$$

$$\psi_{r4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\zeta) \quad (4.149)$$

$$\psi_{r5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c2}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\zeta) \quad (4.150)$$

$$\psi_{r6}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c3}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(2\xi + \eta - 1) \quad (4.151)$$

$$\psi_{r7}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(\eta - \xi) \quad (4.152)$$

$$\psi_{r8}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c3}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_n(-\xi - 2\eta + 1) \quad (4.153)$$

$$n = 0, 1, \dots, p - 2 \quad (4.154)$$

face	cantos da face				$C_1(\xi, \eta, \zeta)$	$C_2(\xi, \eta, \zeta)$
F0	c0	c1	c2	—	$2\xi - 1$	$2\eta - 1$
F1	c0	c1	c4	c3	$2\xi - 1$	ζ
F2	c1	c2	c5	c4	$\eta - \xi$	ζ
F3	c2	c0	c3	c5	$2\eta - 1$	ζ
F4	c3	c4	c5	—	$2\xi - 1$	$2\eta - 1$

Tabela 4.24: Parâmetros de face do elemento prisma

Os cantos de cada face assim como os parâmetros variacionais associados são dados na tabela 4.24. Estes parâmetros são obtidos satisfazendo-se as mesmas condições das faces triangulares e quadrilaterais que aquelas dos elementos anteriores. As funções de forma de face são

dadas pelas equações 4.155, 4.156, 4.157, 4.158 e 4.160.

$$\begin{aligned}\psi_{f_0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c_0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_2}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_{n_1}(2\xi - 1)f_{n_2}(2\eta - 1) \\ &: 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3\end{aligned}\quad (4.155)$$

$$\psi_{f_1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c_0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_{n_1}(2\xi - 1)f_{n_2}(\zeta) \quad (4.156)$$

$$\psi_{f_2}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c_1}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_{n_1}(\eta - \xi)f_{n_2}(\zeta) \quad (4.157)$$

$$\psi_{f_3}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_{c_0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_{n_1}(2\eta - 1)f_{n_2}(\zeta) \quad (4.158)$$

$$0 \leq n_1, n_2 \leq p - 2 \quad (4.159)$$

$$\begin{aligned}\psi_{f_4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c_3}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_5}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)f_{n_1}(2\xi - 1)f_{n_2}(2\eta - 1) \\ &: 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3\end{aligned}\quad (4.160)$$

As funções de interior são dadas pela expressão 4.161. A função $\psi_{c_0}^{pr}\psi_{c_1}^{pr}\eta$ é a função de menor grau que se anula na fronteira do elemento.

$$\begin{aligned}\psi_{v_0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta) &= \psi_{c_0}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\psi_{c_4}^{pr}(\xi, \eta, \zeta)\eta * \\ &f_{n_1}(2\xi - 1)f_{n_2}(2\eta - 1)f_{n_3}(\zeta) \\ &: 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3, 0 \leq n_3 \leq p - 2\end{aligned}\quad (4.161)$$

Neste caso, figura 4.15, tem-se

$$0 \leq \xi, \eta \leq 1, \quad -1 \leq \zeta \leq +1 \quad (4.162)$$

Assim sempre satisfaz-se

$$-1 \leq C(\xi, \eta, \zeta) \leq 1 \quad (4.163)$$

Que é o intervalo de definição das funções f_n da seqüência. Em geral, os parâmetros de interior não precisam apresentar qualquer compatibilização, devido ao fato que as funções de interior são nulas na fronteira do elemento, e portanto a função base associada em V_{hp} é sempre continua. A única condição imposta para os parâmetros de volume é dada pela equação 4.163.

4.9 Geometria e funções de forma dos elementos hierárquicos

As definições das funções de forma dos elementos foi dada acima de forma sintetizada. Nesta seção faz-se algumas observações relativas à definição da geometria e das funções de base destes elementos. De agora em diante chama-se de modo uniforme de "lado" de um elemento qualquer vértice, aresta, face e volume interior do elemento.

4.9.1 Elementos de uma e duas dimensões

I) Elemento de linha

O elemento linear tem 3 lados, dois cantos enumerados localmente como 0, 1 e uma aresta $\overline{0-1}$ enumerada localmente como lado 2. As bases de canto são as funções de grau 1 $\psi_0(\xi)$ e $\psi_1(\xi)$. Qualquer função de aresta é obtida como o produto das duas bases de canto, e portanto uma função quadrática, vezes uma função ortogonal da sequência avaliada no parâmetro ξ . O elemento de ordem p tem associada uma função por canto e $p - 1$ funções à aresta. Total de $p + 1$ bases. O espaço de interpolação associado é dos polinômios de grau p em uma variável.

II) Elemento quadrilátero

O elemento quadrilateral apresenta 9 lados, sendo 4 vértices, 4 arestas e 1 face. Os lados são enumerados da seguinte maneira: 0, 1, 2, 3 para cantos, 4, 5, 6, 7 para arestas e 8 para a face, conforme figura 4.25. Esta numeração segue a sequência de cantos, arestas e face da figura 4.5 e tabela 4.25. A tabela 4.25 mostra a definição dos lados do elemento baseados na sequência de cantos do lado respectivo, a ordem dos cantos para definir o lado esta relacionada com os eixos locais onde variam os parâmetros variacionais como já foi mencionado. Por exemplo o lado 7 de dimensão 1, uma aresta, é definida pelos cantos números 3 e 0, isto significa que o parâmetro dessa aresta vale -1 no canto 3 e vale +1 no canto 0, portanto varia na direção do canto local 0 para o canto local 1 da aresta.

Lados do elemento quadrilátero					
lado n^0	0	1	2	3	cantos
dim 0	0	1	2	3	
lado n^0	4	5	6	7	arestas
dim 1	0-1	1-2	2-3	3-0	
lado n^0	8				face
dim 2	0-1-2-3				

Tabela 4.25: Lados do elemento quadrilátero

As funções de canto são bilineares. Elas são o produto de duas funções do elemento linear avaliadas em cada uma das variáveis ξ , η do elemento. As coordenadas do canto determinam quais as funções lineares a serem usadas. À coordenada -1 associa-se a base ψ_0 e à coordenada $+1$, a base ψ_1 . A primeira coordenada associa-se à variável ξ e a segunda, à η . Por exemplo, a base associada ao canto $c1(1, -1)$ é o produto $\psi_1(\xi)\psi_0(\eta)$.

Uma função base de aresta é obtida a partir do produto das duas bases de cantos dessa aresta, e portanto uma função quadrática, vezes uma função da seqüência avaliada na variável do eixo paralelo aquela aresta. O elemento de ordem p tem associada $p - 1$ bases a cada aresta, bases de grau 2 até grau p . De forma semelhante, cada função base de face pode ser obtida a partir do produto de duas bases de cantos opostos vezes duas funções da seqüência uma avaliada em ξ e a outra em η . O número de bases de face do elemento de ordem p é $(p - 1)^2$. Estas bases são nulas na fronteira deste elemento. O espaço associado é o dos polinômios de grau p em cada variável ξ e η .

III) Elemento triângulo

O triângulo geométrico tem 7 lados, 3 cantos, 3 arestas e 1 face. Os lados são enumerados da seguinte maneira: 0, 1, 2 para cantos, 4, 5, 6 para arestas e 7 para a face, conforme a figura 4.26 e tabela 4.26 que também mostra a definição dos lados baseada na seqüência de cantos. Esta numeração segue a seqüência de cantos, arestas e face da figura 4.8.

As bases de canto são de grau 1. Como antes, uma função de aresta é o produto das duas

Lados do elemento triângulo				
lado n^0	0	1	2	cantos
dim 0	0	1	2	
lado n^0	3	4	5	arestas
dim 1	0-1	1-2	2-0	
lado n^0	6			face
dim 2	0-1-2			

Tabela 4.26: Lados do elemento triângulo

bases de canto dessa aresta vezes uma função da seqüência avaliada numa combinação linear das variáveis ξ , η . Esta combinação é tal que ela varia de -1 a $+1$ do canto local 0 ao canto local 1 dessa aresta. Uma aresta de ordem p tem associada $(p - 1)$ bases, de grau 2 até grau p . Uma base de face define-se como o produto das três bases de canto desta face vezes duas funções da seqüência avaliadas nos parâmetros $2\xi - 1$ e $2\eta - 1$. Como ξ e η variam de 0 a $+1$ os parâmetros variacionais variam de -1 a $+1$, que é o intervalo de definição das funções ortogonais da seqüência. Pelo fato de ser baseadas no produto das três funções de canto, as bases de face são nulas no bordo do triângulo. As bases de face variam do grau 3 até grau p . O espaço de interpolação deste elemento é o espaço de polinômios de grau p em duas variáveis.

4.9.2 Elemento hexaedro

I) Geometria do hexaedro

O hexaedro é formado por 27 lados. Oito cantos ou vértices, 12 arestas, 6 faces e o interior. De agora em diante, denomine-se por *id* o número identificador global do nó de um elemento da malha de elementos finitos. O lado a de dimensão 0, isto é um canto, é identificado pelo número do nó (seu *id* global, $id = a$). O lado de dimensão 1 que une o canto a com outro b , isto é uma aresta, é denotado por $a-b$. O lado de dimensão 2, uma face, que contém os quatro nós de canto a , b , c e d é denotada por $a-b-c-d$. E o lado de dimensão 3 do elemento de nós a , b , c , d , e , f , g e h e que corresponde ao interior do elemento, por $a-b-c-d-e-f-g-h$. Um hexaedro é identificado quando são dados os 8 *id*'s globais de seus cantos na ordem estabelecida na figura 4.10. A tabela 4.27 resume todos os lados do elemento. Com mencionou-se a ordem dos cantos na definição do

lado do elemento determina as direções de variação dos parâmetros variacionais.

Lados do elemento hexaedro									
lado n^0	0	1	2	3	4	5	6	7	cantos
dim 0	0	1	2	3	4	5	6	7	
lado n^0	8	9	10	11	12	13			arestas
dim 1	0-1	1-2	2-3	3-0	0-4	1-5			
lado n^0	14	15	16	17	18	19			arestas
dim 1	2-6	3-7	4-5	5-6	6-7	7-4			
lado n^0	20	21	22	23	24	25			faces
dim 2	0-1-2-3	0-1-5-4	1-2-6-5	3-2-6-7	0-3-7-4	4-5-6-7			
lado n^0	26								interior
dim 3	0-1-2-3-4-5-6-7								

Tabela 4.27: Lados do elemento hexaedro

II) Construção das funções de forma hierárquicas do hexaedro

Dadas as funções do elemento linear $\psi_0(\xi)$ e $\psi_1(\xi)$ cada função de canto é dada como produto de três funções do elemento linear, cada uma avaliada num parâmetro diferente, $\pm\xi$, $\pm\eta$ ou ζ . Elas são trilineares. Elas são de grau 1 em cada variável. A escolha de ψ_0 ou ψ_1 depende da coordenada do eixo do canto respectivo. Se a coordenada é -1 use-se ψ_0 , se é $+1$ use-se ψ_1 . Assim a base associada ao canto $c4$ de coordenadas $c4(-1, -1, 1)$ é

$$\psi_{c4}(\xi, \eta, \zeta) = \psi_0(\xi)\psi_0(\eta)\psi_1(\zeta) \quad (4.164)$$

Uma função de aresta de grau $n + 2$ é obtida como o produto das duas funções de canto dessa aresta e um polinômio ortogonal f_n de grau n . Dado que as arestas do hexaedro são paralelas aos eixos do sistema e que cada variável ξ , η , e ζ está no intervalo $[-1, 1]$, o parâmetro variacional corresponde à variável do eixo ao qual a aresta é paralela, o sinal dependerá da numeração dos cantos locais da aresta. Esta função é de grau maior ou igual que 2 em cada variável. Ela é não nula no interior e nas duas faces que contém a aresta associada, e se anula nas outras 4 faces.

Para $n = 0, 1, \dots, p - 2$ tem-se funções de forma de graus 2, 3, \dots, p , um total de $p - 1$ funções de forma por aresta. Note-se que estas bases são todas de graus diferentes entre si o que garante que elas são *LI*. Na tabela 4.28, para alguns valores de p , exemplifica-se o número de

grau	valores de n
$p = 1$	só funções de canto
$p = 2$	$n = 0$ $p-1=1$ função $n = 0$
$p = 3$	$n = 0, 1$ $p-1=2$ funções $n = 0$ $n = 1$
$p = 4$	$n = 0, 1, 2$ $p-1=3$ funções $n = 0$ $n = 1$ $n = 2$

Tabela 4.28: Valores de n para funções de aresta

funções associadas a cada aresta. Uma função de face é o produto de duas funções de cantos opostos daquela face vezes o produto de duas funções f_{ni} avaliadas nas variáveis daqueles eixos que são paralelos aos lados da face.

grau	valores de n
$p=1$	→ só funções de canto
$p=2$	$0 \leq n_1, n_2 \leq 0$ $(p-1)^2=1$ $n_1=0$ $n_2=0$
$p=3$	$0 \leq n_1, n_2 \leq 1$ $(p-1)^2=4$ $n_1=0$ $n_1=1$ $n_1=0$ $n_1=1$ $n_2=0$ $n_2=0$ $n_2=1$ $n_2=1$
$p=4$	$0 \leq n_1, n_2 \leq 2$ $(p-1)^2=9$ combinações para $p=3$ + $n_1=2$ $n_1=0$ $n_1=2$ $n_1=1$ $n_1=2$ $n_2=0$ $n_2=2$ $n_2=1$ $n_2=2$ $n_2=2$

Tabela 4.29: Valores de n_1 e n_2 para funções de face

Ela é não nula na face associada e anula-se nas demais faces. A função obtida como produto das outras duas funções de canto da mesma face é idêntica à primeira. Uma função de face é de grau maior ou igual a 2 em cada variável. O número de funções de face é $(p-1)^2$, como exemplificado na tabela 4.29. Olhando-se para a definição das bases de face deste elemento, equações 4.54 a 4.59, pode ser notado que para cada face e para duas escolhas diferentes de (n_1, n_2) são obtidas também duas bases polinomiais distintas. Isso se deve ao fato de que estas bases apresentam termos polinomiais distintos uma da outra. A terminologia "bases de distintos graus entre si" refere-se a este fato. Isso prova que as bases associadas a uma face são todas *LI*.

grau	valores de n_1, n_2 e n_3
$p=1$	nenhuma função de interior
$p=2$	$0 \leq n_1, n_2, n_3 \leq 0 \quad (p-1)^3 = 1$ $n_1=0$ $n_2=0$ $n_3=0$
$p=3$	$0 \leq n_1, n_2, n_3 \leq 1 \quad (p-1)^3 = 8$ $n_1=0 \quad n_1=1 \quad n_1=0 \quad n_1=0 \quad n_1=1 \quad n_1=1 \quad n_1=0 \quad n_1=1$ $n_2=0 \quad n_2=0 \quad n_2=1 \quad n_2=0 \quad n_2=1 \quad n_2=0 \quad n_2=1 \quad n_2=1$ $n_3=0 \quad n_3=0 \quad n_3=0 \quad n_3=1 \quad n_3=0 \quad n_3=1 \quad n_3=1 \quad n_3=1$
$p=4$	$0 \leq n_1, n_2, n_3 \leq 2 \quad (p-1)^3 = 27$ todas as combinações para $p=3$ + $n_1=2 \quad n_1=0 \quad n_1=0 \quad n_1=2 \quad n_1=2 \quad n_1=1 \quad n_1=0 \quad n_1=0 \quad n_1=1$ $n_2=0 \quad n_2=2 \quad n_2=0 \quad n_2=1 \quad n_2=0 \quad n_2=2 \quad n_2=2 \quad n_2=1 \quad n_2=0$ $n_3=0 \quad n_3=0 \quad n_3=2 \quad n_3=0 \quad n_3=1 \quad n_3=0 \quad n_3=1 \quad n_3=2 \quad n_3=2$ $n_1=2 \quad n_1=2 \quad n_1=0 \quad n_1=2 \quad n_1=1 \quad n_1=1 \quad n_1=2 \quad n_1=2 \quad n_1=2 \quad n_1=2$ $n_2=2 \quad n_2=0 \quad n_2=2 \quad n_2=1 \quad n_2=2 \quad n_2=1 \quad n_2=2 \quad n_2=1 \quad n_2=2 \quad n_2=2$ $n_3=0 \quad n_3=2 \quad n_3=2 \quad n_3=1 \quad n_3=1 \quad n_3=2 \quad n_3=1 \quad n_3=2 \quad n_3=1 \quad n_3=2$

Tabela 4.30: Valores de n_1, n_2 e n_3 para as funções de interior

Uma função de interior do hexaedro é obtida como produto de duas funções de cantos opostos pelo centro do elemento vezes três funções f_n da seqüência avaliadas uma em cada variável ξ, η ou ζ . Como aquelas dos cantos 0 e 6 ou 1 e 7, etc.

ordem p	8 cantos	12 arestas	6 faces	volume	27 lados
	1	$p-1$	$(p-1)^2$	$(p-1)^3$	total f.f.
$p=1$	1	0	0	0	8
$p=2$	1	1	1	1	27
$p=3$	1	2	4	8	64
$p=4$	1	3	9	27	125
$p=5$	1	4	16	64	216
$p=6$	1	5	25	125	343
...

Tabela 4.31: Funções de forma associadas à ordem $p, p < 7$, elemento hexaedro.

A escolha de qualquer par resulta na mesma função de interior. Estas funções de base são de graus ≥ 2 . As bases são nulas em todas as faces do elemento. Estas funções são não nulas no interior. O número de funções de interior é $(p-1)^3$, como exemplificado na tabela 4.30. Uma contagem total do número de bases dos elementos de ordem p é feita na seção 4.10. A tabela 4.31 exemplifica o número de funções de forma por lado para algumas ordens.

4.9.3 Elemento tetraedro

O elemento tetraedro tem 15 lados sendo 4 cantos, 6 arestas, 4 faces e o interior. Cada lado do elemento é especificado na tabela 4.32 segundo a figura 4.16. A numeração seqüencial local dos cantos do tetraedro é dada na figura 4.16. A especificação dos diferentes lados deste elemento é definida da maneira similar como foi feita para o hexaedro.

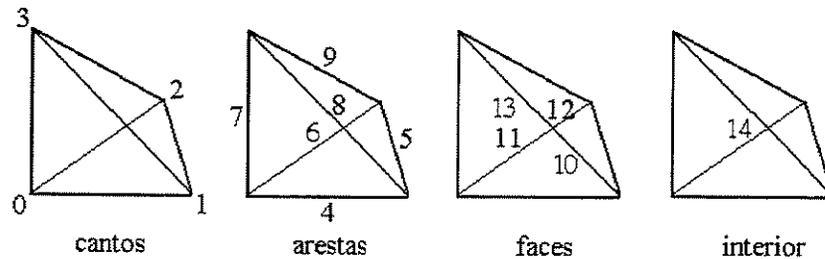


Figura 4.16: Lados do elemento tetraedro

A construção das funções de aresta segue a risca a mesma sistemática dos elementos anteriores. Cada aresta de ordem p tem associada $p - 1$ bases, de grau 2 até grau p . Para faces triangulares não é diferente daquelas da face do triângulo. A obtenção dos parâmetros variacionais de face é feita em detalhe na seção 4.6. Estas bases vão desde o grau 3 até grau p .

Enumeração dos lados do elemento tetraedro							
lado n^o	0	1	2	3			cantos
dimensão 0	0	1	2	3	4		
lado n^o	4	5	6	7	8	9	arestas
dimensão 1	0-1	1-2	2-0	0-3	1-3	2-3	
lado n^o	10	11	12	13			faces
dimensão 2	0-1-2	0-1-3	1-2-3	0-2-3			
lado n^o	14						interior
dimensão 3	0-1-2-3						

Tabela 4.32: Definição dos lados do elemento tetraedro

As funções de interior são obtidas pelo produto das 4 funções de canto, e portanto nulas no bordo do tetraedro, vezes 3 funções f_{ni} de grau menor ou igual a $p - 4$, avaliadas respecti-

vamente nos parâmetros $2\xi - 1$, $2\eta - 1$, $2\zeta - 1$. O grau destas base varia de 4 até p . Dado que as variáveis do elemento de referência estão entre 0 e 1, estes parâmetros variam entre -1 e $+1$, que é o intervalo de definição das funções da sequência completa.

Uma função de face é obtida pelo produto das três funções de canto dessa face e duas funções ortogonais f_{n_1} e f_{n_2} de graus n_1 e n_2 respectivamente. Os valores n_1 e n_2 devem satisfazer

$$n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3 \quad (4.165)$$

O produto das três funções de canto de uma face qualquer é um polinômio de grau 3. Logo qualquer função de forma de face tem um grau maior ou igual a três. Cada função de canto é nula na face que não contém o canto. Logo uma função de face é nula em todas as arestas, ela é não nula no interior e na face associada. Se o elemento precisa ter um grau de interpolação igual a p então o número de funções de face é dado por :

$$(p - 1)(p - 2)/2 \quad (4.166)$$

De fato para alguns valores de p na tabela 4.33 dá-se os valores de n_1 e n_2 .

grau	valores de n_1 e n_2					
$p < 3$	só funções de canto					
$p = 3$	$0 \leq n_1 + n_2 \leq 0 \quad (p-1)(p-2)/2 = 1$ $n_1 = 0$ $n_2 = 0$					
$p = 4$	$0 \leq n_1 + n_2 \leq 1 \quad (p-1)(p-2)/2 = 3$ $n_1 = 0 \quad n_1 = 1 \quad n_1 = 0$ $n_2 = 0 \quad n_2 = 0 \quad n_2 = 1$					
$p = 5$	$0 \leq n_1 + n_2 \leq 2 \quad (p-1)(p-2)/2 = 6$ $n_1 = 0 \quad n_1 = 1 \quad n_1 = 0 \quad n_1 = 1 \quad n_1 = 2 \quad n_1 = 0$ $n_2 = 0 \quad n_2 = 0 \quad n_2 = 1 \quad n_2 = 1 \quad n_2 = 0 \quad n_2 = 2$					
					

Tabela 4.33: Valores de n_1 e n_2 para funções de face

Uma função de interior é o produto das quatro funções de canto vezes o produto de três funções f_{n_i} avaliadas numa combinação dos parâmetros ξ, η, ζ , os subscritos das funções f_{n_i} satisfazem as desigualdades 4.167.

grau	valores de n_1, n_2 e n_3							
$p < 4$	nenhuma função de interior							
$p = 4$	$0 \leq n_1 + n_2 + n_3 = 0$ total=1 $n_1 = 0$ $n_2 = 0$ $n_3 = 0$							
$p = 5$	$0 \leq n_1 + n_2 + n_3 \leq 1$ total=4 $n_1 = 0$ $n_1 = 1$ $n_1 = 0$ $n_1 = 0$ $n_2 = 0$ $n_2 = 0$ $n_2 = 1$ $n_2 = 0$ $n_3 = 0$ $n_3 = 0$ $n_3 = 0$ $n_3 = 1$							
$p = 6$	$0 \leq n_1 + n_2 + n_3 \leq 2$ total=10 todas as combinações para $p=5$ + $n_1 = 1$ $n_1 = 1$ $n_1 = 0$ $n_1 = 2$ $n_1 = 0$ $n_1 = 0$ $n_2 = 1$ $n_2 = 0$ $n_2 = 1$ $n_2 = 0$ $n_2 = 2$ $n_2 = 0$ $n_3 = 0$ $n_3 = 1$ $n_3 = 1$ $n_3 = 0$ $n_3 = 0$ $n_3 = 2$							
...							

Tabela 4.34: Valores de n_1, n_2 e n_3 para as funções de interior

$$n_1, n_2, n_3 \geq 0 : 0 \leq n_1 + n_2 + n_3 \leq p - 4 \quad (4.167)$$

Uma função de interior é nula na fronteira do elemento pelo fato de ser obtida do produto de todas as funções de canto do elemento. Qualquer função de interior é de grau maior ou igual a 4. Caso a ordem de interpolação do elemento precise ser p , a quantidade de funções de interior é dado pelo valor total do laço a seguir

$$\begin{aligned} \text{soma} &= \text{total} = 0 \\ \text{para } i &= 1, \dots, p-3 \\ \text{soma} &= i * (i+1) / 2 \\ \text{total} &= \text{soma} + \text{total} \end{aligned}$$

Na tabela 4.34 apresenta-se o número de funções de forma de interior para alguns valores de p . A tabela 4.35 resume o número de funções de forma de canto, aresta, face e interior para vários valores de p . Os valores são dados para cada lado do elemento.

I) Independência linear de bases do elemento

Quando uma base na sua definição se utiliza de termos polinomiais diferentes aos termos polinomiais empregados na definição de uma outra base então tem-se certeza que ambas bases

grau	4 cantos	6 arestas	4 faces	interior	15 lados
	1	p-1	$(p-2)(p-1)/2$	$\sum_{i=1}^{p-3} i*(i+1)/2$	total f.f.
p=1	1	0	0	0	4
p=2	1	1	0	0	10
p=3	1	2	1	0	20
p=4	1	3	3	1	35
p=5	1	4	6	4	56
p=6	1	5	10	10	84

Tabela 4.35: Número de funções de forma por lado

são distintas, isto é, linearmente independentes ou *LI*. Quando o mesmo acontece com três, quatro ou mais bases, também este conjunto de bases é *LI*. Isto quer dizer que nenhuma das bases do conjunto pode ser expressa como uma combinação a coeficientes numéricos das bases restantes. Isto é baseado no fato do que, por exemplo, o termo x^2y não pode ser obtido do termo x^3 simplesmente multiplicando x^3 por uma constante numérica. O mesmo acontece se os graus de dois ou mais polinômios são diferentes, estes polinômios são *LI*. Quando algumas bases polinomiais na sua definição se utilizam dos mesmos termos polinomiais a independência linear não é garantida. Então é preciso provar que estas funções são *LI*.

O grau de uma base polinomial qualquer pode ser definida como o maior expoente que é obtido ao se substituir todas as variáveis por uma única variável, por exemplo, o polinômio $x^3yz + 2xyz + x^2y^2z^2$ é de grau 6 já que si substituem-se cada uma das variáveis x, y, z por a variável w obtém-se $5w^3ww + 2www + 3w^2w^2 w^2 = 5w^5 + 2w^3 + 3w^6$ e o maior expoente da última expressão é 6.

As bases de uma aresta fixa qualquer do tetraedro de ordem p são de diferentes graus entre si, logo as bases de uma dada aresta são *LI*. Uma base da face $F0$ na sua definição utiliza termos polinomiais distintos de uma outra base da mesma face $F0$, logo as bases da face $F0$ são *LI* apesar de que há bases que tem o mesmo grau segundo a definição acima. O mesmo acontece para as bases das faces $F1$ e $F2$. Isto é devido ao fato que os parâmetros variacionais, de uma dada face, não fazem uso das mesmas variáveis. Já para a face $F3$ nada disto acontece. Existem bases associadas a face $F3$ que utilizam os mesmos termos polinomiais na sua definição. Logo

para a face $F3$ é preciso provar que as bases associadas são LI . Esta prova é importante pois mais adiante será demonstrado que as bases de cada elemento são LI . Isto é fundamental para provar que cada elemento de ordem p possui um espaço de interpolação de grau ao menos p nas variáveis do elemento, fato que está ligado diretamente com as propriedades de convergência do elemento finito e da seqüência de soluções aproximadas definidas sobre este.

II) As bases da face $F3$ do tetraedro são LI

Como o objetivo desta prova é demonstrar que nenhuma destas bases pode ser expressida como uma combinação das restantes então toma-se uma combinação a coeficientes numéricos de todas estas bases e iguala-se a zero, em seguida prova-se que isto é verdadeiro somente si todas as constantes são nulas.

As bases da face $F3$ do tetraedro de ordem $p = q + 3$ tem a seguinte forma:

$$\psi_{f3} = x y z f_{n1}(s) f_{n2}(t), \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, \quad 0 \leq n1 + n2 \leq q \quad (4.168)$$

onde

$$s = ax + by + az + d, \quad t = ax + ay + bz + d \quad (4.169)$$

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad d = -\frac{1}{3} \quad (4.170)$$

A combinação linear igual a nulo das bases dadas pela equação 4.168 fica da seguinte forma:

$$\sum_{n1, n2 \geq 0}^{n1+n2 \leq q} A_{n1n2} x y z f_{n1}(s) f_{n2}(t) = 0 \quad (4.171)$$

onde A_{n1n2} são coeficientes numéricos, um para cada par de funções f_{n1}, f_{n2} da seqüência de graus $n1$ e $n2$ respectivamente. Da equação 4.171, para x, y, z não nulos, segue-se

$$C(x, y, z) = \sum_{n1, n2 \geq 0}^{n1+n2 \leq q} A_{n1n2} f_{n1}(s) f_{n2}(t) = 0 \quad (4.172)$$

onde q é o grau máximo que as funções f_{n1} e f_{n2} da seqüência podem atingir. As derivadas com

respeito a x , y e z da expressão 4.172 são dadas a seguir.

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = \sum A_{n_1 n_2} \frac{\partial f_{n_1}}{\partial s}(s) \frac{\partial s}{\partial x_i} f_{n_2}(t) + \sum A_{n_1 n_2} f_{n_1}(s) \frac{\partial f_{n_2}}{\partial t}(t) \frac{\partial t}{\partial x_i} = 0 \quad (4.173)$$

Das equações 4.169 e 4.173 segue-se:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \sum a A_{n_1 n_2} \frac{\partial f_{n_1}}{\partial s}(s) f_{n_2}(t) + \sum a A_{n_1 n_2} f_{n_1}(s) \frac{\partial f_{n_2}}{\partial t}(t) = 0 \quad (4.174)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \sum b A_{n_1 n_2} \frac{\partial f_{n_1}}{\partial s}(s) f_{n_2}(t) + \sum a A_{n_1 n_2} f_{n_1}(s) \frac{\partial f_{n_2}}{\partial t}(t) = 0 \quad (4.175)$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \sum a A_{n_1 n_2} \frac{\partial f_{n_1}}{\partial s}(s) f_{n_2}(t) + \sum b A_{n_1 n_2} f_{n_1}(s) \frac{\partial f_{n_2}}{\partial t}(t) = 0 \quad (4.176)$$

Combinando 4.174 e 4.175, com $a - b \neq 0$, segue-se

$$\sum A_{n_1 n_2} \frac{\partial f_{n_1}}{\partial s}(s) f_{n_2}(t) = 0 \quad (4.177)$$

Combinando 4.174 e 4.176 segue-se

$$\sum A_{n_1 n_2} f_{n_1}(s) \frac{\partial f_{n_2}}{\partial t}(t) = 0 \quad (4.178)$$

Aplicando recursivamente o mesmo processo agora à igualdade 4.177 obtém-se

$$\sum A_{n_1 n_2} \frac{\partial^2 f_{n_1}}{\partial s^2}(s) f_{n_2}(t) = 0 \quad (4.179)$$

$$\sum A_{n_1 n_2} \frac{\partial f_{n_1}}{\partial s}(s) \frac{\partial f_{n_2}}{\partial t}(t) = 0 \quad (4.180)$$

Assim em geral derivando um número q de vezes, $q = K + L$ com $K \geq 0$ e $L \geq 0$, chega-se a seguinte igualdade:

$$\sum A_{n_1 n_2} \frac{\partial^K f_{n_1}}{\partial s^K}(s) \frac{\partial^L f_{n_2}}{\partial t^L}(t) = 0 \quad (4.181)$$

Seja $K + L = q$ e $0 \leq n_1 + n_2 \leq q$, então sabendo-se que n_1 e n_2 são os graus dos polinômios f_{n_1} e f_{n_2} respectivamente, tem-se

$$\frac{\partial^K f_{n_1}}{\partial s^K}(s) = \begin{cases} 0 & n_1 < K \\ c_1 & n_1 = K \end{cases}, \quad \frac{\partial^L f_{n_2}}{\partial t^L}(t) = \begin{cases} 0 & n_2 < L \\ c_2 & n_2 = L \end{cases} \quad (4.182)$$

onde c_1 e c_2 são constantes não nulas. Caso $n_1 > K \Rightarrow n_2 < L$ ou se $n_2 > L \Rightarrow n_1 < K$ e em ambos os casos tem-se $\frac{\partial^K f_{n_1}}{\partial s^K} \frac{\partial^L f_{n_2}}{\partial t^L} = 0$, conforme equação 4.182. De 4.181 e 4.182 se segue

$$A_{kL} = 0, \forall K \geq 0, \forall L \geq 0 : K + L = q \quad (4.183)$$

Aplicando o mesmo procedimento sucessivamente para $K + L = q - 1, q - 2, \dots, 3, 2, 1, 0$ chega-se a

$$A_{n_1 n_2} = 0, \forall n_1, n_2 : 0 \leq n_1 + n_2 \leq p \quad (4.184)$$

O qual completa a prova. Esta prova independe da seqüência f_{ni} escolhida.

4.9.4 Elemento prisma

O elemento prisma tem 21 lados sendo 6 cantos, 9 arestas, 5 faces e interior conforme identificado na figura 4.17. Em nada se diferencia a construção das bases para arestas e faces deste elemento em relação à sistemática empregada para os elementos anteriores. As funções de interior obtém-se pelo produto das duas funções de canto da aresta r_0 e a variável η , isto é, o polinômio de menor grau que anula-se no bordo do prisma, vezes três funções f_{ni} , $1 \leq i \leq 3$ avaliadas em parâmetros que variam entre -1 e $+1$.

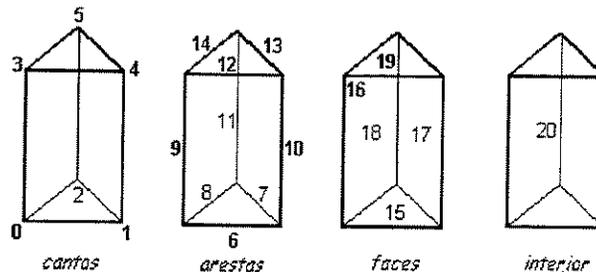


Figura 4.17: Lados do prisma

O produto das funções f_{ni} das variáveis ξ e η são de graus menor ou igual a $p - 3$. A função f_{ni} da variável ζ é de grau menor ou igual do que $p - 2$. Isto porque as bases de canto do prisma são obtidas como produtos das bases do canto do triângulo nas variáveis ξ e η e das bases de canto do elemento linear na variável ζ .

Os lados do elemento são convencionados na tabela 4.36. A numeração local dos lados

do elemento determina os eixos locais para a transformação que identifica este lado a um lado vizinho qualquer, na seção 6.9 são especificadas estas transformações.

lados do prisma							
lado n°	0	1	2	3	4	5	cantos
dimensão 0	0	1	2	3	4	5	
lado n°	4	5	6	7	8	9	arestas
dimensão 1	0-1	1-2	2-0	0-3	1-4	2-5	
lado n°	10	11	12	13	14		faces
dimensão 2	0-1-2	0-1-4-3	1-2-5-4	0-2-5-3	3-4-5		
lado n°	14						interior
dimensão 3	0-1-2-3-4-5						

Tabela 4.36: Definição dos lados do elemento prisma

4.9.5 Elemento pirâmide

Para a pirâmide adotou-se a convenção de lados dada na figura 4.18. Para identificar uma pirâmide qualquer mediante seus nós globais segue-se a seqüência de cantos 0 – 1 – 2 – 3 – 4 mostrada na figura 4.18.

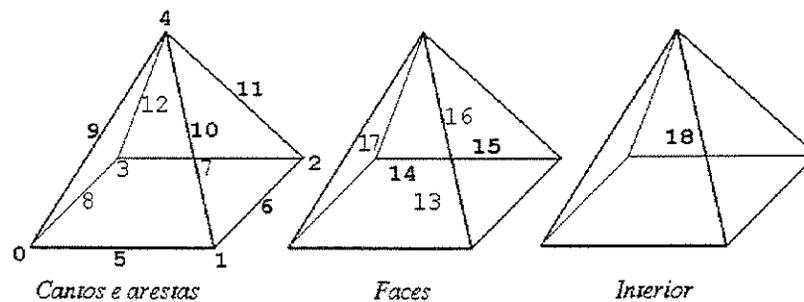


Figura 4.18: Numeração local dos lados da pirâmide

A tabela 4.37 define todos os lados do elemento pirâmide.

Este elemento tem 19 lados sendo 5 cantos, 8 arestas, 5 faces e interior. As bases deste elemento contém alguns dos termos racionais da forma representada nas expressões 4.185

Lados da pirâmide									
lado n^o	0	1	2	3	4				cantos
dimensão 0	0	1	2	3	4				
lado n^o	5	6	7	8	9	10	11	12	arestas
dimensão 1	0-1	1-2	2-3	3-0	0-4	1-4	2-4	3-4	
lado n^o	13	14	15	16	17				faces
dimensão 2	0-1-2-3	0-1-4	1-2-4	3-2-4	0-3-4				
lado n^o	18								interior
dimensão 3	0-1-2-3-4								

Tabela 4.37: Definição dos lados do elemento mestre pirâmide

$$\frac{\xi^k \eta^l}{1 - \zeta}, \frac{\xi^k \eta^l}{(1 - \zeta)^2} : k + l \leq p + 2, 0 \leq k, l \leq p \quad (4.185)$$

Seja o ponto (ξ, η, ζ) pertencente a pirâmide de referência, então

$$\forall \zeta : 0 \leq \zeta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\xi|, |\eta| \leq 1 - \zeta \leq 1 \quad (4.186)$$

$$\Rightarrow 0 \leq |\xi|^k \leq (1 - \zeta)^k \leq 1, 0 \leq |\eta|^l \leq 1 \Rightarrow \quad (4.187)$$

$$0 \leq \frac{|\xi|^k}{(1 - \zeta)^m} \leq (1 - \zeta)^{k-m} \leq 1, 0 \leq m \leq k \quad (4.188)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|\xi|^k |\eta|^l}{(1 - \zeta)^m} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\xi^k \eta^l}{(1 - \zeta)^m} \leq 1 \quad (4.189)$$

Quando $\zeta \rightarrow 1$ se tem $\xi, \eta \rightarrow 0$ e o limite das expressões racionais está entre -1 e 1 , como mostra a última expressão em 4.189.

A obtenção das bases de aresta, faces e interior segue a risca os passos dados nos elementos anteriores. Para as faces quadrilaterais dos elementos anteriores o grau atingido por cada função f_{ni} é sempre até $p - 2$. Para faces triangulares sempre a soma dos graus das duas funções f_{ni} não ultrapassa o grau $p - 3$. No caso da pirâmide, para a face quadrilateral, a soma dos graus das duas funções f_{ni} não ultrapassa de $p - 2$. Isto para que a pirâmide de ordem p seja completa, veja subseção 4.12.3. Para efeitos de compatibilização entre a face quadrilateral da pirâmide e a face quadrilateral de outros elementos toma-se o número suficiente de bases da face quadrilateral da pirâmide, isto é, as f_{ni} atingem até o grau $p - 2$ individualmente como é o caso dos outros elementos.

4.10 Propriedades das funções de forma hierárquicas

No elemento finito Lagrangiano convencional cada função de forma é associada a um nó geométrico. Quando a ordem de interpolação deste elemento cresce, aumenta também o número de nós geométricos do elemento. No elemento finito hierárquico o equivalente a nó geométrico, no sentido de associação de funções de forma, é definido como lado do elemento. A cada lado do elemento hierárquico associam-se funções de forma de determinado grau, grau este que depende da ordem de interpolação requerida. No entanto o número de lados permanece constante. Quando aumenta o grau de interpolação do elemento hierárquico aumenta também o número de funções de forma associadas a cada aresta, face e interior. O número de funções de forma associada a cada canto é sempre um.

No elemento finito hierárquico não há limite para o grau de interpolação, a não ser aqueles impostos por restrições numéricas, como por exemplo integração. As funções de forma do elemento são facilmente obtidas a partir do conhecimento da seqüência básica de funções ortogonais. Para as funções de Chebyshev há uma fórmula de recorrência que permite obtê-las facilmente, conforme as equações 4.3 e 4.4.

Quando aumenta a ordem de interpolação do elemento convencional as funções de forma mudam. Uma prova disto é que os únicos nós que não se deslocam de posição são os nós de canto, mas aumenta o grau da função associada a eles. No elemento hierárquico isso não acontece. Para aumentar o grau de interpolação do elemento hierárquico de ordem n basta acrescentar algumas funções de forma para obter um elemento de ordem $n+k$, $k \geq 1$. Por causa disto a matriz de rigidez de ordem $n+k$ é obtida a partir da matriz de ordem n acrescentando o cálculo relativo as funções de forma do elemento de ordem $n+k$ que não estão presentes no elemento de ordem n .

4.10.1 Independência linear das funções de forma hierárquicas

Prova-se que as funções de forma hierárquicas definidas anteriormente formam um con-

junto linearmente independente, qualquer que seja a ordem do elemento. Considere igual a zero uma combinação linear das funções de forma do elemento de referência ER de ordem p , agrupadas de acordo com os diferentes lados do elemento.

$$\sum_{k \text{ cantos}} C_i \Psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{l \text{ arestas}} A_i \Psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{m \text{ faces}} F_i \Psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{\text{interior}} I_i \Psi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in ER \quad (4.190)$$

Demonstra-se a seguir que caso a equação 4.190 seja válida, segue que todos os coeficientes multiplicadores são nulos. A equação 4.190 deve ser válida para todo ponto \mathbf{x} do elemento de referência. Usa-se isto para avaliar a combinação em pontos específicos do ER . Pela própria definição das funções de forma hierárquicas sabe-se que as funções de canto são lineares e não nulas só nas arestas e faces que emanam do canto associado. Cada função de aresta é nula em todos os cantos e arestas exceto na aresta de definição. As funções de face são nulas em todas as faces exceto na face de definição, então elas são nulas em todos os cantos e arestas do elemento. As funções de interior são não nulas somente no interior, estas bases são nulas na fronteira do elemento, elas são nulas nos cantos, nas arestas e nas faces. Baseado nisso, aplica-se a equação 4.190 no canto $\mathbf{x} = x_{c_j}$ do elemento que tem associada a função Ψ_j . Pelo exposto anteriormente todas as funções de aresta, face e interior são nulas em x_{c_j} , como são nulas todas as funções associadas aos outros cantos. Como consequência disto da equação 4.190 segue-se

$$C_j \Psi_j(x_{c_j}) = 0 \quad \wedge \quad \Psi_j(x_{c_j}) = 1 \implies C_j = 0 \quad (4.191)$$

Assim, aplicando a combinação 4.190 em cada um dos k cantos do elemento chega-se a

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{k-1} = 0 \quad (4.192)$$

Portanto a equação 4.190 implica a equação 4.193

$$\sum_{l \text{ arestas}} A_i \Psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{m \text{ faces}} F_i \Psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{\text{interior}} I_i \Psi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in ER \quad (4.193)$$

Em seguida toma-se um ponto genérico $\mathbf{x} = x_{a_j}$ da aresta j do elemento e aplica-se à

equação 4.193. As funções de face e de interior são nulas neste ponto, como são nulas também as funções associadas às outras arestas. Somente sobra a combinação relativa às n_a funções de forma da própria aresta j . Logo para qualquer ponto x_{a_j} da aresta j

$$\sum_{\text{aresta } j} A_i \Psi_i(x_{a_j}) = 0, \quad \forall x_{a_j} \quad (4.194)$$

Sabe-se ainda, que todas as funções de forma desta aresta são de graus diferentes entre si, portanto, para as n_a funções desta aresta

$$A_0 = A_1 = \dots = A_{n_a-1} = 0 \quad (4.195)$$

Se existe $k \leq n_a - 1$ com $A_k \neq 0$, tal que 4.194 é satisfeita, então isto significa que Ψ_k pode ser expressa como uma combinação linear de polinômios de graus diferentes ao grau de Ψ_k , o que é uma contradição.

Sabendo-se que os coeficientes A_i se anulam, pode-se escrever a partir da equação 4.193 a seguinte expressão

$$\sum_{m \text{ faces}} F_i \Psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{\text{interior}} I_i \Psi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in ER \quad (4.196)$$

Aplique-se um ponto $\mathbf{x} = x_{f_j}$ da face j do elemento na equação 4.196. Então todas as funções do interior e das outras faces se anulam em x_{f_j} . Na equação 4.196 sobra somente a combinação relativa as funções da face j , equação 4.197.

$$\sum_{\text{face } j} F_i \Psi_i(x_{f_j}) = 0, \quad \forall x_{f_j} \quad (4.197)$$

Todas as funções de uma face qualquer são de graus distintos entre si¹. Logo, usando o mesmo argumento anterior, para as n_f funções da face j

$$F_0 = F_1 = \dots = F_{n_f-1} = 0 \quad (4.198)$$

E da mesma maneira para as outras faces. Portanto da equação 4.196 decorre

¹ Para o caso particular das bases associadas à face F3 do tetraedro provou-se, no final da subseção 4.9.3, que estas bases são *LI*.

$$\sum_{interior} I_i \Psi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in ER \quad (4.199)$$

Neste caso, todas as funções de interior são de diferentes graus entre si e portanto para as n_i funções de interior

$$I_0 = I_1 = \dots = I_{n_i-1} = 0 \quad (4.200)$$

O que completa a prova. Nota-se que esta prova não depende da escolha da seqüência (f_{ni}) de funções.

4.10.2 Espaço polinomial completo

Neste trabalho demonstra-se a priori, teoricamente, que estes elementos são completos no sentido que o espaço gerado pelas funções de forma do elemento de ordem p contém o espaço de polinômios de grau p . Desta maneira, as funções hierárquicas definidas sobre o elemento de ordem n geram um espaço E_n de polinômios tal que :

$$E_n = P_n \quad \vee \quad E_n \supset P_n \quad (4.201)$$

Assim qualquer polinômio de grau $p \leq n$ pode ser obtido como uma combinação linear das funções de forma hierárquicas deste elemento. Condição esta essencial para a convergência do método dos elementos finitos^[14].

I) Elemento Lagrangiano convencional

O elemento quadrilátero convencional de ordem n é associado ao espaço de polinômios P_n de grau menor ou igual do que n em cada variável. Isso quer dizer que todos os monômios da forma $\xi^k \eta^l$ com $0 \leq k, l \leq n$ estão presentes em P_n . Isto representa um total de

$$(n + 1)^2 \quad (4.202)$$

termos polinomiais distintos que formam uma base deste espaço. Este total é igual ao número de nós escolhidos dentro do quadrilátero no elemento finito Lagrangiano convencional. De tal

maneira a função de forma Ψ_j associada ao nó n_i satisfaz :

$$\Psi_j(n_i) = \delta_{ij} \quad , \quad 0 \leq i \leq (n+1)^2 \quad (4.203)$$

Para o hexaedro tem-se uma definição análoga. O espaço de polinômios de grau n em cada variável inclui todos os termos $\xi^k \eta^l \zeta^m$ com $0 \leq k, l, m \leq n$. Um total de

$$(n+1)^3 \quad (4.204)$$

monômios distintos que formam uma base deste espaço.

O triângulo Lagrangiano convencional tem associado um espaço completo de polinômios de grau n . Ele contém todos os termos polinomiais $\xi^k \eta^l$ com $0 \leq k+l \leq n$, um total de

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (4.205)$$

termos monomiais distintos que formam uma base deste espaço. Observa-se que, para cada s , o número de pares (k, l) que satisfazem $k+l = s$ com $0 \leq k, l \leq s$ é igual a $s+1$. O resultado da expressão 4.205 é igual ao número de nós escolhidos dentro deste triângulo.

O tetraedro de ordem n é associado a um espaço completo de polinômios de grau n que contém todos os termos $\xi^k \eta^l \zeta^m$ com $0 \leq k+l+m \leq n$, um total de

$$\sum_{i=0}^n \frac{(i+1)(i+2)}{2} \quad (4.206)$$

termos distintos que formam uma base deste espaço. Observa-se que para cada s o número de ternos (k, l, m) que satisfazem $k+l+m = s$ com $0 \leq k, l, m \leq s$ é igual a $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$.

II) Elementos finitos hierárquicos

Os elementos estudados e implementados são os elementos hierárquicos linear, quadrilátero, triângulo, hexaedro, tetraedro, pirâmide e prisma. Também testa-se a posteriori, numericamente, que cada elemento de ordem p pode representar qualquer polinômio de grau p sobre ele definido.

III) Elemento hierárquico unidimensional (linear)

O elemento unidimensional de ordem p tem

- ▶ 1 função por canto (linear)
- ▶ $(p - 1)$ funções por aresta

Este elemento tem dois cantos e uma aresta, o que implica em um total de

$$2 + (p - 1) = p + 1 \quad (4.207)$$

funções de forma associadas e de graus distintos entre si, que é o mesmo número de funções LI do espaço de polinômios de grau p em uma variável. E, dado que nenhuma destas funções tem um grau maior do que p , o espaço gerado é o próprio espaço de polinômios de grau p .

IV) Elemento quadrilátero hierárquico

O elemento hierárquico quadrilátero de ordem p tem

- ▶ 1 função por canto (bilinear)
- ▶ $(p - 1)$ funções por aresta
- ▶ $(p - 1)^2$ funções de face

Dado que o quadrilátero tem 4 cantos, 4 arestas e 1 face, o total de funções de forma deste elemento é

$$\begin{aligned} 4 + 4(p - 1) + (p - 1)^2 &= 4 + 4p - 4 + p^2 - 2p + 1 \\ p^2 + 2p + 1 &= (p + 1)^2 \end{aligned} \quad (4.208)$$

Este número, equação 4.208, é a dimensão do espaço de polinômios em ξ, η de grau p em cada variável, expressão 4.202 com $n = p$. Nenhuma das funções deste elemento tem um grau maior do que p em cada variável. Como todas as funções deste elemento são linearmente independentes, o espaço gerado é o espaço completo de polinômios de grau p em cada variável.

Assim este elemento hierárquico é equivalente ao elemento finito convencional no sentido de ambos terem associado o mesmo espaço polinomial de aproximação.

V) Elemento hexaedro hierárquico

O elemento hexaedro hierárquico de ordem p tem

- ▶ 1 função de forma por canto (trilinear)
- ▶ $(p - 1)$ funções por lado
- ▶ $(p - 1)^2$ funções por face
- ▶ $(p - 1)^3$ funções de interior

Dado que o hexaedro tem 8 cantos, 12 arestas, 6 faces, o total de funções de forma é

$$\begin{aligned}
 & 8 + 12(p - 1) + 6(p - 1)^2 + (p - 1)^3 \\
 = & 8 + 12p - 12 + 6p^2 - 12p + 6 + p^3 - 3p^2 + 3p - 1 \\
 = & 1 + 3p + 3p^2 + p^3 = (p + 1)^3 \qquad (4.209)
 \end{aligned}$$

Este último número é a dimensão do espaço de polinômios em ξ, η, ζ de grau p em cada variável, expressão 4.204 com $n = p$. Nenhuma das funções deste elemento tem um grau maior do que p em cada variável. Como todas as funções deste elemento são linearmente independentes, o espaço gerado é o espaço de polinômios de grau p em cada variável. Assim o hexaedro hierárquico é equivalente ao elemento hexaedro convencional. Ambos tem associado o mesmo espaço polinomial de aproximação.

VI) Elemento triângulo hierárquico

O triângulo hierárquico de ordem p tem associado o seguinte número de bases

- ▶ 1 função por canto (linear)
- ▶ $(p - 1)$ funções por aresta
- ▶ $\frac{(p-2)(p-1)}{2}$ funções de face

Dado que o triângulo tem 3 cantos, 3 arestas e 1 face, o total de funções de forma deste elemento é

$$\begin{aligned} 3 + 3(p-1) + \frac{(p-2)(p-1)}{2} &= 3 + 3p - 3 + \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \\ \frac{p^2 + 3p + 2}{2} &= \frac{(p+1)(p+2)}{2} \end{aligned} \quad (4.210)$$

Este número é a dimensão do espaço de polinômios em ξ, η de grau p , expressão 4.205 com $n = p$. Nenhuma das funções deste elemento tem um grau maior do que p . Como todas as funções deste elemento são linearmente independentes, o espaço gerado é o espaço de polinômios de grau p em duas variáveis. Assim este elemento hierárquico é equivalente ao elemento finito triangular convencional. Ambos tem associado o mesmo espaço de aproximação/interpolação polinomial.

VII) Elemento tetraedro hierárquico

O tetraedro hierárquico de ordem p tem

- ▶ 1 função por canto (linear)
- ▶ $(p-1)$ funções por aresta
- ▶ $\frac{(p-2)(p-1)}{2}$ funções por face
- ▶ $\sum_{i=0}^{p-4} \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ funções de interior

Dado que o tetraedro tem 4 cantos, 6 arestas, 4 faces, o total de funções de forma deste elemento é

$$\begin{aligned} &4 + 6(p-1) + 4 \frac{(p-2)(p-1)}{2} + \sum_{i=0}^{p-4} \frac{(i+1)(i+2)}{2} \\ &= 4 + 6p - 6 + 2p^2 - 6p + 4 + \sum_{i=0}^{p-4} \frac{(i+1)(i+2)}{2} \\ &= 2 + 2p^2 + \sum_{i=0}^{p-4} \frac{(i+1)(i+2)}{2} = \sum_{i=0}^p \frac{(i+1)(i+2)}{2} \end{aligned} \quad (4.211)$$

A última igualdade acima é verdadeira dado que

$$2 + 2p^2 = \frac{(p-2)(p-1)}{2} + \frac{(p-1)p}{2} + \frac{p(p+1)}{2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2} \quad (4.212)$$

Este número, equação 4.211, é a dimensão do espaço de polinômios em ξ, η, ζ de grau p , expressão 4.206 com $n = p$. Nenhuma das funções deste elemento tem um grau maior do que p . Como todas as funções deste elemento são LI , o espaço gerado por estas funções é o espaço de polinômios de grau p nas variáveis ξ, η, ζ . Assim este elemento hierárquico e o elemento finito convencional tem o mesmo espaço de interpolação. Os elementos pirâmide e prisma precisam de um estudo mais apurado para demonstrar que são completos e este é dado a seguir.

4.11 Elemento prisma hierárquico

Na seqüência estudam-se os termos polinomiais presentes nas bases do elemento prisma.

4.11.1 Funções base do prisma de ordem p

As funções base do elemento obtém-se como produto de algumas das funções de canto vezes uma função f_{ni} de grau ni . Chame-se o produto das funções de canto de **função fixa**. Para maior clareza, as bases a seguir explicitam os termos das funções fixas.

► Funções de base de arestas

$$\psi_{r_0} = \frac{1}{4}(x - x^2 - xy - 2xz + 2x^2z + 2xyz + xz^2 - x^2z^2 - xyz^2) * f_n(2x + y - 1) \quad (4.213)$$

$$\psi_{r_1} = \frac{1}{4}(xy - 2xyz + xyz^2) * f_n(y - x) \quad (4.214)$$

$$\psi_{r_2} = \frac{1}{4}(y - xy - y^2 - 2yz + 2xyz + 2y^2z + yz^2 - xyz^2 - y^2z^2) * f_n(x + 2y - 1) \quad (4.215)$$

$$\psi_{r_3} = \frac{1}{4}(1 - 2x + x^2 - 2y + 2xy + y^2 - z^2 + 2xz^2 - x^2z^2 + 2yz^2 - 2xyz^2 - y^2z^2) * f_n(z) \quad (4.216)$$

$$\psi_{r_4} = \frac{1}{4}(x^2 - x^2z^2) * f_n(z) \quad (4.217)$$

$$\psi_{r_5} = \frac{1}{4}(y^2 - y^2z^2) * f_n(z) \quad (4.218)$$

$$\psi_{r6} = \frac{1}{4}(x - x^2 - xy + 2xz - 2x^2z - 2xyz + xz^2 - x^2z^2 - xyz^2) * f_n(2x + y - 1) \quad (4.219)$$

$$\psi_{r7} = \frac{1}{4}(xy + 2xyz + xyz^2) * f_n(y - x) \quad (4.220)$$

$$\psi_{r8} = \frac{1}{4}(y - xy - y^2 + 2yz - 2xyz - 2y^2z + yz^2 - xyz^2 - y^2z^2) * f_n(x + 2y - 1) \quad (4.221)$$

$$n = 0, 1, \dots, p - 2 \quad (4.222)$$

► **Funções de face**

$$\begin{aligned} \psi_{fo} &= \frac{1}{8}(xy - x^2y - xy^2 - 3xyz + 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 - 3x^2yz^2 \\ &\quad - 3xy^2z^2 - xyz^3 + x^2yz^3 + xy^2z^3) * f_{n1}(2x - 1) * f_{n2}(2y - 1) \\ &: 0 \leq n1 + n2 \leq p - 3 \end{aligned} \quad (4.223)$$

$$\psi_{f1} = \frac{1}{4}(x - x^2 - xy - xz^2 + x^2z^2 + xyz^2) * f_{n1}(2x - 1) * f_{n2}(z) \quad (4.224)$$

$$\psi_{f2} = \frac{1}{4}(xy - xyz^2) * f_{n1}(y - x) * f_{n2}(z) \quad (4.225)$$

$$\psi_{f3} = \frac{1}{4}(y - xy - y^2 - yz^2 + xyz^2 + y^2z^2) * f_{n1}(2y - 1) * f_{n2}(z) \quad (4.226)$$

$$0 \leq n1, n2 \leq p - 2 \quad (4.227)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f4} &= \frac{1}{8}(xy - x^2y - xy^2 + 3xyz - 3x^2yz - 3xy^2z + 3xyz^2 - 3x^2yz^2 \\ &\quad - 3xy^2z^2 + xyz^3 - x^2yz^3 - xy^2z^3) * f_{n1}(2x - 1) * f_{n2}(2y - 1) \\ &: 0 \leq n1 + n2 \leq p - 3 \end{aligned} \quad (4.228)$$

► **Funções de interior**

$$\begin{aligned} \psi_{vo} &= (xy - x^2y - xy^2 - 2xyz + 2x^2yz + 2xy^2z + xyz^2 - x^2yz^2 - xy^2z^2) * \\ &\quad f_{n1}(2x - 1) * f_{n2}(2y - 1) * f_{n3}(z) \\ &: 0 \leq n1 + n2 \leq p - 3, 0 \leq n3 \leq p - 2 \end{aligned} \quad (4.229)$$

4.11.2 Número de funções de forma do prisma de ordem p

Para cada lado de uma prisma de ordem p associa-se o seguinte número de funções de

forma

- ▶ 1 função por canto
- ▶ $(p - 1)$ funções por aresta
- ▶ $\frac{(p-2)(p-1)}{2}$ funções por face triangular
- ▶ $(p - 1)^2$ funções por face quadrilateral
- ▶ $\frac{(p-2)(p-1)}{2}(p - 1)$ funções para o interior

Dado que o prisma tem 6 cantos, 9 arestas, 2 faces triangulares e 3 faces quadrilaterais, o número total de funções base associadas ao prisma de ordem p é dado pela seguinte soma

$$6 + 9(p - 1) + (p - 2)(p - 1) + 3(p - 1)^2 + \frac{(p - 2)(p - 1)^2}{2} \quad (4.230)$$

Isto acarreta um total de funções de forma para o prisma de ordem p igual a

$$\frac{p^3}{2} + 2p^2 + \frac{5}{2}p + 1 = \frac{1}{2}(p + 1)^2(p + 2) \quad (4.231)$$

A seguir mostra-se que o prisma de ordem p é completo provando-se duas afirmações:

- ▶ que o número de termos polinomiais distintos (monômios) presentes nas funções de base deste elemento é igual ao número total de funções de forma, equação 4.231.
- ▶ que entre os termos destas funções acha-se um conjunto completo de polinômios de grau p em 3 variáveis.

Como as funções base do elemento são LI a primeira condição implica em que o espaço de interpolação deste elemento é igual ao espaço gerado por todos os termos polinomiais presentes nas funções de forma deste elemento. A segunda condição prova que o espaço de interpolação do prisma contém o espaço de polinômios de grau p e qualquer polinômio de grau p pode ser obtido como uma combinação linear das funções de forma do elemento.

4.11.3 Termos presentes nas funções base: prisma completo

Um polinômio como $f_n(2x + y - 1)$, com $n \leq p - 2$, contém o termo $(2x + y - 1)^n$. Estes termos garantem a presença de todos os termos do polinômio completo de grau n em x

e y . Portanto sem perda de generalidade pode-se substituir a expressão $f_n(2x + y - 1)$, com $n \leq p - 2$ pelo termo $(1 + x + y)^{p-2}$ que é equivalente neste sentido de representação ao termo $(2x + y - 1)^{p-2}$.

Com este objetivo em mente, as seguintes expressões são substituíveis (\leftrightarrow):

$$f_n(2x + y - 1), f_n(x + 2y - 1), f_n(y - x) : n \leq p - 2 \leftrightarrow (1 + x + y)^{p-2} \quad (4.232)$$

$$f_n(z) : 0 \leq n \leq p - 2 \leftrightarrow (1 + z)^{p-2} \quad (4.233)$$

$$f_{n_1}(2y - 1) f_{n_2}(z) : 0 \leq n_1, n_2 \leq p - 2 \leftrightarrow (1 + y)^{p-2} (1 + z)^{p-2} \quad (4.234)$$

$$f_{n_1}(2x - 1) f_{n_2}(z) : 0 \leq n_1, n_2 \leq p - 2 \leftrightarrow (1 + x)^{p-2} (1 + z)^{p-2} \quad (4.235)$$

$$f_{n_1}(2x - 1) f_{n_2}(2y - 1) : 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3 \leftrightarrow (1 + x + y)^{p-3} \quad (4.236)$$

$$\begin{aligned} f_{n_1}(2x - 1) f_{n_2}(2y - 1) f_{n_3}(z) : 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3, n_3 \leq p - 2 \\ \leftrightarrow (1 + x + y)^{p-3} (1 + z)^{p-2} \end{aligned} \quad (4.237)$$

Uma função fixa, como por exemplo aquela que acompanha a função da aresta r_0 ou r_8 , pode ser substituída pela expressão 4.238, já que contém os mesmos termos.

$$(x + y + xy + x^2 + y^2)(1 + z + z^2) \quad (4.238)$$

Segundo estas premissas as funções de forma de aresta, face e interior podem ser representadas pelos 5 grupos dados a seguir. Isto porque ambos conjuntos contém os mesmos termos polinomiais distintos.

► **Grupo I : arestas $r_0, r_1, r_2, r_6, r_7, r_8$**

$$(x + y + xy + x^2 + y^2)(1 + z + z^2)(1 + x + y)^{p-2} \quad (4.239)$$

► **Grupo II : arestas r_3, r_4, r_5**

$$(1 + x + y + xy + x^2 + y^2)(1 + z^2)(1 + z)^{p-2} \quad (4.240)$$

► **Grupo III : faces F_0 e F_4**

$$(xy + x^2y + xy^2)(1 + z + z^2 + z^3)(1 + x + y)^{p-3} \quad (4.241)$$

► **Grupo IV : faces F_1, F_2, F_3**

$$F_1 : (x + xy + x^2)(1 + z^2)(1 + x)^{p-2}(1 + z)^{p-2} \quad (4.242)$$

$$F2 : xy(1+z^2)(1+x+y)^{p-2}(1+z)^{p-2} \quad (4.243)$$

$$F3 : (y+xy+y^2)(1+z^2)(1+y)^{p-2}(1+z)^{p-2} \quad (4.244)$$

► **Grupo V : interior**

$$(xy+x^2y+xy^2)(1+z+z^2)(1+x+y)^{p-3}(1+z)^{p-2} \quad (4.245)$$

Para $p = 1, 2$ verifica-se facilmente, olhando nas funções fixas correspondentes, que o número de bases e o número de termos nelas presentes é o mesmo. Também observa-se nas funções de forma a presença de todos os termos do polinômios de grau p . Deixa-se a análise do caso geral para $p \geq 3$. Para $p \geq 3$ as expressões em 4.246 são equivalentes.

$$(1+z^2)(1+z)^{p-2} \leftrightarrow (1+z)^p ; (1+z+z^2)(1+z)^{p-2} \leftrightarrow (1+z)^p \quad (4.246)$$

Com isto vê-se que os termos do grupo **III** estão contidos no grupo **V** e podem ser suprimidos. Com exceção do termo constante 1, os termos do grupo **II** estão contidos nos termos do grupo **IV** e podem ser cancelados. Sobra do grupo **II** a parcela $(1+z)^p$.

O grupo **IV** face F2 pode ser rescrito como

$$xy(1+x+y)(1+x+y)^{p-3}(1+z)^p = (xy+x^2y+xy^2)(1+x+y)^{p-3}(1+z)^p \quad (4.247)$$

Os termos da direita da expressão 4.247 é equivalente ao grupo **V**. Logo o subgrupo **IV-F2** é suprimido. Os termos vezes xy do grupo **IV**, faces F1 e F3, estão contidos no grupo **V** e são suprimidos. A expressão $(x+x^2)(1+x)^{p-2}$ que resta em **IV-F1** pode ser escrita como

$$x(1+x)(1+x)^{p-2} = x(1+x)^{p-1} \leftrightarrow x^k : 1 \leq k \leq p \quad (4.248)$$

Assim o grupo **V** pode ser fatorado da seguinte forma

$$xy(1+x+y)(1+x+y)^{p-3}(1+z)^p = xy(1+x+y)^{p-2}(1+z)^p \quad (4.249)$$

A tabela 4.38 resume o que restou dos 5 grupos definidos anteriormente.

Os grupos B, C, D e E podem ser reduzidos a uma única expressão

$$(1+x+y)^p(1+z)^p \quad (4.250)$$

Grupos	termos polinomiais
A	$(x + y + xy + x^2 + y^2)(1 + x + y)^{p-2}(1 + z + z^2)$
B	$(1 + z)^p$
C	$x(1 + x)^{p-1}(1 + z)^p$
D	$y(1 + y)^{p-1}(1 + z)^p$
E	$xy(1 + x + y)^{p-1}(1 + z)^p$

Tabela 4.38: Grupos de termos reduzidos

Isto porque as seguintes equivalências são verificadas.

$$x(1 + x)^{p-1} \leftrightarrow x^k : 1 \leq k \leq p \quad (4.251)$$

$$y(1 + y)^{p-1} \leftrightarrow y^k : 1 \leq k \leq p \quad (4.252)$$

$$xy(1 + x + y)^{p-1} \leftrightarrow x^k y^l : 1 \leq k, l \leq p, 2 \leq k + l \leq p - 1 \quad (4.253)$$

Sendo que o grupo B contém o termo constante 1, que junto as expressões direitas das equivalências 4.251, 4.252 e 4.253 correspondem ao polinômio completo de grau p em x e y .

Os termos do grupo A estão contidos nos termos das seguintes expressões equivalentes ou iguais

$$\begin{aligned} & (1 + x + y + xy + x^2 + y^2)(1 + x + y)^{p-2}(1 + z + z^2) \\ \leftrightarrow & (1 + x + y)^2(1 + x + y)^{p-2}(1 + z + z^2) \leftrightarrow (1 + x + y)^p(1 + z + z^2) \end{aligned} \quad (4.254)$$

Sendo que a última expressão está contida na expressão 4.250 para os grupos A, B, C e D. Portanto todos os termos das bases do prisma de ordem p estão contidos na expressão 4.250. Assim, o número de termos presentes na expressão 4.250 é o produto do número de termos de cada fator de grau p , isto é

$$\frac{(p + 1)(p + 2)}{2} * (p + 1) \quad (4.255)$$

que é exatamente o valor calculado para o número de funções de forma do prisma de ordem p , equação 4.231. As bases são LI então, a quantidade de termos presentes nelas não pode ser menor que o número 4.255. Portanto a expressão 4.250 indica exatamente todos os termos polinomiais que o prisma de ordem p pode representar.

A expressão 4.250 é equivalente a

$$(1 + x + y)^p(1 + z)^p \leftrightarrow x^k y^l z^m : 0 \leq k, l, m \leq p, 0 \leq k + l \leq p \quad (4.256)$$

De onde também segue-se

$$x^k y^l z^m : 0 \leq k, l, m \leq p, 0 \leq k + l + m \leq p \quad (4.257)$$

Isto quer dizer que a expressão 4.250 sintetiza em parte todos os termos do polinômio de grau p em x , y e z . Isso encerra a prova dos dois itens enunciados na seção 4.11.2.

4.12 Elemento pirâmide hierárquica

Com um tratamento análogo ao caso do prisma, demonstra-se que a pirâmide de ordem p é completa. Este caso é mais trabalhoso que o anterior, devido à presença dos termos racionais.

4.12.1 Lados e funções de forma associadas

As bases dadas a seguir explicitam as funções fixas da pirâmide de ordem p .

► Funções base de cantos

Tem-se 5 funções de canto linearmente independentes.

$$\psi_{c0} = \frac{1}{4} \left(1 - x - y - z + \frac{xy}{1-z} \right) \quad (4.258)$$

$$\psi_{c1} = \frac{1}{4} \left(1 + x - y - z - \frac{xy}{1-z} \right) \quad (4.259)$$

$$\psi_{c2} = \frac{1}{4} \left(1 + x + y - z + \frac{xy}{1-z} \right) \quad (4.260)$$

$$\psi_{c3} = \frac{1}{4} \left(1 - x + y - z - \frac{xy}{1-z} \right) \quad (4.261)$$

$$\psi_{c4} = z \quad (4.262)$$

Os 5 termos distintos contidos nesta base são

$$1, x, y, z, \frac{xy}{1-z} \quad (4.263)$$

Estes termos formam um conjunto *LI* de funções. Logo o espaço gerado por combinações a coeficientes reais das funções de canto, equações 4.258 a 4.262, é o mesmo espaço gerado pelos 5 termos da expressão 4.263. Observa-se nesta expressão um conjunto completo de termos do polinômio de primeiro grau em x, y, z . Logo este conjunto de funções pode exprimir qualquer polinômio de primeiro grau em 3 variáveis. Neste conjunto há um único termo racional.

► **Funções de forma de aresta**

A pirâmide tem 8 arestas, da aresta r_0 até aresta r_7 . Este conjunto de funções está presente no prisma de ordem $p \geq 2$, equações 4.264 a 4.272. Observa-se neste grupo de funções fixas a presença de 4 termos racionais diferentes.

$$\psi_{r_0} = \frac{1}{16} \left\{ 1 - 2y - 2z + 2yz - x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2x^2y}{1-z} - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2} \right\} f_n(x) \quad (4.264)$$

$$\psi_{r_1} = \frac{1}{16} \left\{ 1 + 2x - 2z - 2xz + x^2 - y^2 + z^2 - \frac{2xy^2}{1-z} - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2} \right\} f_n(y) \quad (4.265)$$

$$\psi_{r_2} = \frac{1}{16} \left\{ 1 + 2y - 2z - 2yz - x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2x^2y}{1-z} - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2} \right\} f_n(-x) \quad (4.266)$$

$$\psi_{r_3} = \frac{1}{16} \left\{ 1 - 2x - 2z + 2xz + x^2 - y^2 + z^2 + \frac{2xy^2}{1-z} - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2} \right\} f_n(-y) \quad (4.267)$$

Usando a igualdade 4.268 as funções fixas das arestas r_4, r_5, r_6 e r_7 podem ser escritas como nas próximas equações.

$$\frac{xyz}{1-z} = -xy + \frac{xy}{1-z} \quad (4.268)$$

$$\psi_{r_4} = \frac{1}{4} \left(z - xy - xz - yz + z^2 + \frac{xy}{1-z} \right) f_n \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z \right) \quad (4.269)$$

$$\psi_{r_5} = \frac{1}{4} \left(z + xy + xz - yz - z^2 - \frac{xy}{1-z} \right) f_n \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z \right) \quad (4.270)$$

$$\psi_{r_6} = \frac{1}{4} \left(z - xy + xz + yz - z^2 + \frac{xy}{1-z} \right) f_n \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z \right) \quad (4.271)$$

$$\psi_{r_7} = \frac{1}{4} \left(z + xy - xz + yz - z^2 - \frac{xy}{1-z} \right) f_n \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z \right) \quad (4.272)$$

$$n = 0, 1, \dots, p-2 \quad (4.273)$$

► **Funções de face**

A pirâmide tem 5 faces, face f_0 à face f_4 . As funções da face quadrilateral F_0 estão presentes a partir da ordem $p \geq 2$. As das outras faces a partir de $p \geq 3$. Usando as relações dadas em 4.274 as funções fixas de face podem ser escritas da seguinte maneira.

$$\frac{x^2yz}{1-z} = -x^2y + \frac{x^2y}{1-z} ; \quad \frac{x^2y^2z}{(1-z)^2} = \frac{-x^2y^2}{1-z} + \frac{x^2y^2}{(1-z)^2} \quad (4.274)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f_0} &= \frac{1}{16} \left(1 - 2z - x^2 - y^2 + z^2 - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2} \right) * f_{n_1}(x)f_{n_2}(y) \\ &: \quad 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 2 \end{aligned} \quad (4.275)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f_1} &= \frac{1}{16} (z - 2x^2y - 2yz - 2z^2 - x^2z + y^2z + 2yz^2 + z^3 + \frac{2x^2y}{1-z} \\ &+ \frac{x^2y^2}{1-z} - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2}) * f_{n_1}(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2})f_{n_2}(y + z) \end{aligned} \quad (4.276)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f_2} &= \frac{1}{16} (z + 2xz - 2z^2 + 2xy^2 + x^2z - y^2z - 2xz^2 + z^3 - \frac{2xy^2}{1-z} + \frac{x^2y^2}{1-z} \\ &- \frac{x^2y^2}{(1-z)^2}) * f_{n_1}(\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2})f_{n_2}(-x + z) \end{aligned} \quad (4.277)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f_3} &= \frac{1}{16} (z + 2yz - 2z^2 + 2x^2y - x^2z + y^2z - 2yz^2 + z^3 - \frac{2x^2y}{1-z} + \frac{x^2y^2}{1-z} \\ &- \frac{x^2y^2}{(1-z)^2}) * f_{n_1}(-x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2})f_{n_2}(-y + z) \end{aligned} \quad (4.278)$$

$$\begin{aligned} \psi_{f_4} &= \frac{1}{16} (z - 2xz - 2z^2 - 2xy^2 + x^2z + 2xz^2 - y^2z + z^3 + \frac{2xy^2}{1-z} \\ &+ \frac{x^2y^2}{1-z} - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2}) * f_{n_1}(-\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2})f_{n_2}(x + z) \end{aligned} \quad (4.279)$$

$$0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3 \quad (4.280)$$

► **Funções de volume**

As funções associadas ao interior do elemento estão presentes a partir da pirâmide de ordem $p \geq 3$. Esta função fixa contém dois termos racionais que já existem nas funções de face.

$$\begin{aligned} \psi_{v_0} &= \frac{1}{16} \left(z - 2z^2 - x^2z - y^2z + z^3 + \frac{x^2y^2}{1-z} - \frac{x^2y^2}{(1-z)^2} \right) \\ &* f_{n_1}(2x - 1)f_{n_2}(2y - 1)f_{n_3}(z) \end{aligned} \quad (4.281)$$

$$0 \leq n_1 + n_2 + n_3 \leq p - 3 \quad (4.282)$$

4.12.2 Número de funções de forma da pirâmide de ordem p

A pirâmide de ordem 1 é constituída pelas 5 funções de canto. Pela expressão 4.263 esta ordem contém um conjunto completo P_1 de polinômios de primeiro grau. O prisma de ordem 2 é formado pelas 5 funções de canto mais uma função por aresta (8 arestas) e uma função para a face F_0 , o que dá um total de 14 funções de forma, que é o mesmo número de termos LI presentes no conjunto de funções base para esta ordem, como pode ser verificado olhando os termos das funções fixas. Dado que a pirâmide de ordem p tem 5 cantos, 8 arestas, 1 face quadrilateral, 4 faces triangulares e volume, a quantidade de funções associadas a cada um destes lados na pirâmide de ordem p é dado por.

- ▶ 1 função por canto
- ▶ $(p - 1)$ funções por aresta
- ▶ $\frac{(p-1)p}{2}$ funções na face F_0
- ▶ $\frac{(p-2)(p-1)}{2}$ para cada face triangular
- ▶ $\sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ para o interior

Somando as parciais, a quantidade total de funções de forma da pirâmide de ordem p é dada por.

$$\begin{aligned} & 5 + (p - 1) + \frac{(p - 1)p}{2} + 4 \frac{(p - 2)(p - 1)}{2} + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i + 1)(i + 2)}{2} \\ &= 1 + \frac{3}{2}p + \frac{5}{2}p^2 + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i + 1)(i + 2)}{2} \\ &= \sum_{i=0}^p \frac{(i + 1)(i + 2)}{2} + p^2 \end{aligned} \quad (4.283)$$

A seguir mostra-se que a pirâmide de ordem p contém exatamente um conjunto completo de termos do polinômio de grau p , mais um conjunto de p^2 termos racionais LI o que é verificado

pela expressão 4.283.

4.12.3 Elemento pirâmide é completo

A fim de demonstrar que a base polinomial da pirâmide é completa devem-se provar as seguintes afirmações:

- ▶ O número de termos distintos presentes nas funções de forma do elemento de ordem p , é igual a expressão 4.283.
- ▶ Todos os termos do polinômio de grau p em 3 variáveis estão presentes entre estes termos distintos.

A expressão termos distintos quer dizer que eles formam um conjunto LI . Dado que as funções de forma são LI a primeira condição implica que o espaço de interpolação V_{hp} gerado pelas funções base deste elemento é o mesmo que o gerado pelos termos distintos nelas presentes. A segunda condição significa que o conjunto V_{hp} contém o espaço de polinômios de grau p , e que qualquer polinômio de grau p pode ser aproximado pelas funções de forma da pirâmide de ordem p .

I) Contagem do número de termos distintos

Separam-se todos os termos em dois conjuntos. O primeiro conjunto é o dos termos polinomiais. O segundo conjunto é o dos termos racionais, especificamente aqueles com denominador $(1-z)$ ou $(1-z)^2$. A primeira tarefa consistirá em identificar todos os termos polinomiais distintos (termos não racionais). A segunda tarefa será identificar todos os termos racionais LI .

II) Termos polinomiais sem denominador

Como interessa identificar a presença dos termos distintos basta considerá-los como somas positivas de termos simples, sem coeficientes numéricos. Assim por exemplo, a presença dos

termos polinomiais da função fixa da aresta r_0 pode ser explicitada por

$$(1 + y + z + yz + x^2 + y^2 + z^2) \quad (4.284)$$

Os polinômios obtidos da aplicação das funções f_n sobre os parâmetros variacionais podem ser simplificados como a seguir. A função fixa da aresta r_0 é multiplicada por

$$f_n(x) : n = 0, 1, 2, \dots, p - 2 \quad (4.285)$$

onde n identifica o grau do polinômio $f_n(x)$. Isto quer dizer que os termos da função fixa da aresta r_0 serão multiplicados por coeficientes numéricos e pelos termos simples mostrados abaixo:

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^{p-2} \quad (4.286)$$

Para explicitar a presença destes termos basta então multiplicar esta função fixa por:

$$(1 + x)^{p-2} \quad (4.287)$$

que já contém embutido todos os termos da expressão 4.286 e 4.285. Assim diz-se que a expressão 4.285 é substituível (\leftrightarrow) pela expressão 4.287 já que para o objetivo a ser atingido ambas expressões são equivalentes. Ambas contém os mesmos termos polinomiais distintos. Assim, observando-se as funções de forma de aresta, face e interior, as seguintes expressões são equivalentes.

$$\{f_n(\pm x) : n = 0, 1, 2, \dots, p - 2\} \leftrightarrow (1 + x)^{p-2} \quad (4.288)$$

$$\{f_n(\pm y) : n = 0, 1, 2, \dots, p - 2\} \leftrightarrow (1 + y)^{p-2} \quad (4.289)$$

$$\left\{f_n\left(\pm \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}y + z\right) : n = 0, 1, 2, \dots, p - 2\right\} \leftrightarrow (1 + x + y + z)^{p-2} \quad (4.290)$$

$$\{f_{n_1}(x) f_{n_2}(y) : 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 2\} \leftrightarrow (1 + x + y)^{p-2} \quad (4.291)$$

$$\begin{aligned} \{f_{n_1}(k_0x + k_1y + k_2z + k_3) f_{n_2}(\pm x + z)\} &\leftrightarrow (1 + x + y + z)^{p-3} \\ &: 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3 \end{aligned} \quad (4.292)$$

$$\begin{aligned} \{f_{n_1}(k_0x + k_1y + k_2z + k_3) f_{n_2}(\pm y + z)\} &\leftrightarrow (1 + x + y + z)^{p-3} \\ &: 0 \leq n_1 + n_2 \leq p - 3 \end{aligned} \quad (4.293)$$

$$\{f_{n_1}(2x-1) f_{n_2}(2y-1) f_{n_3}(z) : 0 \leq n_1 + n_2 + n_3 \leq p-3\} \leftrightarrow (1+x+y+z)^{p-3} \quad (4.294)$$

onde k_0, k_1, k_2, k_3 são constantes numéricas não nulas. Partindo das funções fixas e das expressões 4.288 a 4.294, os grupos mostrados na tabela 4.39 apresentam todos os termos polinomiais aportados pelas bases do elemento de ordem p .

Verifica-se que todos os termos da tabela 4.39 estão presentes no conjunto de bases da pirâmide de ordem p . Assim como verifica-se que todos os termos polinomiais do conjunto de funções de forma estão presentes nos grupos da tabela 4.39. Logo ambos conjuntos geram o mesmo espaço de funções.

Grupos	lados	termos polinomiais aportados
I	$c0$ a $c4$	$1+x+y+z$
II	$r0, r2$	$(1+y+z+yz+x^2+y^2+z^2)(1+x)^{p-2}$
III	$r1, r3$	$(1+x+z+xz+x^2+y^2+z^2)(1+y)^{p-2}$
IV	$r4, r5, r6, r7$	$(z+xy+xz+yz+z^2)(1+x+y+z)^{p-2}$
V	$F0$	$(1+z+x^2+y^2+z^2)(1+x+y)^{p-2}$
VI	$F1, F2, F3, F4$	$(z+xz+yz+z^2+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+z^3)(1+x+y+z)^{p-3}$
VII	<i>interior</i>	$(z+z^2+x^2z+y^2z+z^3)(1+x+y+z)^{p-3}$

Tabela 4.39: Termos polinomiais aportados pelas bases da pirâmide de ordem p

Nenhum dos termos da tabela 4.39 é de grau maior do que p . Do grupo II seguem-se os termos:

$$1, x, x^2, \dots, x^p \quad (4.295)$$

Do grupo III se seguem os termos:

$$y, y^2, \dots, y^p \quad (4.296)$$

Do grupo IV seguem-se os termos:

$$z, z^2, \dots, z^p \quad (4.297)$$

Do grupo IV seguem-se ainda os termos:

$$x^k y^l, x^k z^l, y^k z^l : 1 \leq k, l \leq p-1 : 2 \leq k+l \leq p \quad (4.298)$$

Do grupo VI se segue:

$$x^k y^l z^m : 3 \leq k+l+m \leq p, 1 \leq k, l, m \leq p-2 \quad (4.299)$$

Das expressões 4.295, 4.296, 4.297, 4.298, 4.299 conclui-se que os grupos da tabela 4.39 possuem um conjunto completo de polinômios de grau p . Do fato que nenhum termo da tabela 4.39 é de grau maior do que p e que esta tabela inclui todos os termos do polinômio de grau p então todos os termos polinomiais presentes nas funções de forma deste elemento é exatamente o conjunto de termos polinomiais de grau menor ou igual a p em x, y e z . Para $p = 1, 2$ verifica-se por inspeção direta nas funções fixas de base do elemento que estas ordens possuem nada mais que os termos dos polinômios de grau 1 e 2 respectivamente. A soma total de termos distintos do polinômio de grau p é dada por:

$$\sum_{i=0}^p \frac{(i+1)(i+2)}{2} \quad (4.300)$$

Isto completa uma parte da primeira hipótese.

III) Termos racionais

A seguir distinguimos todos os termos racionais LI presentes no grupo de bases da pirâmide ordem p . Os grupos da tabela 4.40 mostram os termos racionais presentes nas bases da pirâmide de ordem p .

Grupos	termos racionais	lados
I	$\frac{xy}{1-z}$	cantos
II	$\left(\frac{x^2 y}{(1-z)} + \frac{x^2 y^2}{(1-z)^2} \right) (1+x)^{p-2}$	r0, r2
III	$\left(\frac{xy^2}{(1-z)} + \frac{x^2 y^2}{(1-z)^2} \right) (1+y)^{p-2}$	r1, r3
IV	$\frac{xy}{(1-z)} (1+x+y+z)^{p-2}$	r4, r5, r6, r7
V	$\frac{x^2 y^2}{(1-z)^2} (1+x+y)^{p-2}$	F0
VI	$\left(\frac{x^2 y}{(1-z)} + \frac{xy^2}{(1-z)} + \frac{xy^2}{(1-z)} + \frac{x^2 y^2}{(1-z)^2} \right) (1+x+y+z)^{p-3}$	F1, F2, F3, F4 e interior

Tabela 4.40: Termos racionais da pirâmide de ordem p

O segundo termo fixo de II e III estão em V. Logo, dos grupos I, II e III sobram os termos mostrados a seguir:

$$\frac{xy}{(1-z)}, \frac{x^k y}{(1-z)}, \frac{xy^k}{(1-z)} : 2 \leq k \leq p \quad (4.301)$$

Os parcelas provenientes dos dois primeiros termos fixos do grupo VI estão contidos no grupo IV.

Grupos	termos racionais
A	$\frac{xy}{(1-z)}, \frac{x^k y}{(1-z)}, \frac{xy^k}{(1-z)} : 2 \leq k \leq p$
B	$\frac{xy}{(1-z)}(1+x+y+z)^{p-2}$
C	$\frac{x^2 y^2}{(1-z)^2}(1+x+y)^{p-2}$
D	$\left(\frac{x^2 y^2}{(1-z)} + \frac{x^2 y^2}{(1-z)^2}\right)(1+x+y+z)^{p-3}$

Tabela 4.41: Termos racionais : grupos simplificados

O novos grupos reduzidos são dados na tabela 4.41.

Neste caso as seguintes equivalências são válidas:

$$(1+x+y)^{p-2} \leftrightarrow x^k y^l : 0 \leq k+l \leq p-2, 0 \leq k, l \leq p-2 \quad (4.302)$$

$$(1+x+y+z)^{p-2} \leftrightarrow x^k y^l z^m : 0 \leq k+l+m \leq p-2, 0 \leq k, l, m \leq p-2 \quad (4.303)$$

$$(1+x+y+z)^{p-3} \leftrightarrow x^k y^l z^m : 0 \leq k+l+m \leq p-3, 0 \leq k, l, m \leq p-3 \quad (4.304)$$

O grupo C é equivalente as expressões 4.305 e 4.306.

$$\frac{x^{k+2} y^{l+2}}{(1-z)^2} : 0 \leq k+l \leq p-2, 0 \leq k, l \leq p-2 \quad (4.305)$$

$$\frac{x^k y^l}{(1-z)^2} : 4 \leq k+l \leq p+2, 2 \leq k, l \leq p \quad (4.306)$$

Do grupo D podem ser extraídas as expressões 4.307 e 4.308, dado que a expressão $(1+x+y+z)^{p-3}$ contém os termos da polinômio $(1+x+y)^{p-3}$.

$$\frac{x^{k+2} y^{l+2}}{(1-z)^2} : 0 \leq k+l \leq p-3, 0 \leq k, l \leq p-3 \quad (4.307)$$

$$\frac{x^k y^l}{(1-z)^2} : 4 \leq k+l \leq p+1, 2 \leq k, l \leq p-1 \quad (4.308)$$

Comparando as expressões 4.306 e 4.308 do grupo C somente sobram os termos:

$$\frac{x^k y^l}{(1-z)^2} : k+l = p+2, 2 \leq k, l \leq p \quad (4.309)$$

já que os restantes termos estão contidos no grupo D. O grupo B é escrito como a seguir:

$$\frac{x^{k+1} y^{l+1} z^m}{(1-z)} : 0 \leq k+l+m \leq p-2, 0 \leq k, l, m \leq p-2 \quad (4.310)$$

$$\frac{x^k y^l z^m}{(1-z)} : 2 \leq k+l+m \leq p, 1 \leq k, l \leq p-1, 0 \leq m \leq p-2 \quad (4.311)$$

Para $m = p-2, p-3, \dots, 2, 1$ da expressão 4.311 segue-se:

$$\frac{x^k y^l z^{m-1}}{(1-z)} - \frac{x^k y^l z^m}{(1-z)} = x^k y^l z^{m-1}, \forall k, l \Rightarrow \quad (4.312)$$

$$\frac{x^k y^l z^m}{(1-z)} = \frac{x^k y^l z^{m-1}}{(1-z)} - x^k y^l z^{m-1}, \forall k, l \quad (4.313)$$

Dado que $k+l+m-1 \leq p$, o monômio da equação 4.312 existe dentro do grupo de termos polinomiais da pirâmide de ordem p . Os 3 termos racionais da equação 4.312 são linearmente dependentes e não podem coexistir dentro da mesma base. Eliminamos sucessivamente o termo racional da esquerda da equação 4.313. O termo racional que restou do grupo B, expressão 4.311, corresponde a $m = 0$

$$\frac{x^k y^l}{(1-z)} : 2 \leq k+l \leq p, 1 \leq k, l \leq p-1 \quad (4.314)$$

Da mesma forma do grupo D tem-se

$$\frac{x^{k+2} y^{l+2} z^m}{(1-z)}, \frac{x^{k+2} y^{l+2} z^m}{(1-z)^2} : 0 \leq k+l+m \leq p-3, 0 \leq k, l, m \leq p-3 \quad (4.315)$$

$$\frac{x^k y^l z^m}{(1-z)}, \frac{x^k y^l z^m}{(1-z)^2} : 4 \leq k+l \leq p+1, 2 \leq k, l \leq p-1, 0 \leq m \leq p-3 \quad (4.316)$$

Destas últimas expressões e fazendo uso de expressões análogas a 4.312, 4.313 e utilizando

o mesmo argumento anterior, restam do grupo D,

$$\frac{x^k y^l}{(1-z)} : 4 \leq k+l \leq p+1, 2 \leq k, l \leq p-1 \quad (4.317)$$

$$\frac{x^k y^l}{(1-z)^2} : 4 \leq k+l \leq p+1, 2 \leq k, l \leq p-1 \quad (4.318)$$

Observa-se que o que restou do grupo B, expressão 4.314, está contido no grupo A e o que restou do grupo D, expressão 4.317. Assim o grupo B foi eliminado. Contabilizando o que sobrou dos grupos da tabela 4.41, monta-se a tabela 4.42.

Grupos	termos racionais	número de termos
I	$\frac{xy}{(1-z)}, \frac{x^k y}{(1-z)}, \frac{xy^k}{(1-z)} : 2 \leq k \leq p$	$2(p-1) + 1$
II	$\frac{x^k y^l}{(1-z)^2} : k+l = p+2, 2 \leq k, l \leq p$	$p-1$
III	$\frac{x^k y^l}{(1-z)}, \frac{x^k y^l}{(1-z)^2} : 4 \leq k+l \leq p+1, 2 \leq k, l \leq p-1$	$(p-1)(p-2)$

Tabela 4.42: Contagem dos termos remanescentes

A quantidade de termos é dado pela soma das parciais da tabela 4.42. Isto dá um total de:

$$(2p-1) + (p-1) + (p^2 - 3p + 2) = p^2 \quad (4.319)$$

Pares (k, l)	conjunto de pares	número de termos
pares 1	$(k, l) : 4 \leq k+l \leq p+1, 2 \leq k, l \leq p-1$	$\frac{(p-1)(p-2)}{2}$
pares 2	$(k, l) : 0 \leq k+l \leq p, 0 \leq k, l \leq p$	$\frac{(p+1)(p+2)}{2}$
pares 3	$(k, l) : [(k=0, 1) \vee (l=0, 1)] \wedge (0 \leq k+l \leq p)$	$4p$
pares 4	$(k, l) : k+l = p+1, 0 \leq k, l \leq p$	p

Tabela 4.43: Pares de inteiros expoentes de termos polinomiais

Para entender a contagem dos termos do grupo III separem-se estes em três partes. Na tabela 4.43, pares 1 é separado em três partes exclusivas pares 2, pares 3 e pares 4. Os termos do polinômio de grau p , isto é pares 2, menos os termos onde $k = 0, 1$ ou $l = 0, 1$, pares 3, mas os termos onde $k+l = p+1$, pares 4. O resultado é o número de termos de pares 1.

IV) Número total de termos distintos para ordem p da pirâmide

A contagem total de termos distintos ou LI aportados pelas funções de forma da pirâmide

de ordem p é dada pelo número de termos polinomiais distintos, equação 4.300 mais o número de termos racionais LI , equação 4.319, isto conduz a um total de termos conforme a expressão abaixo:

$$\sum_{i=0}^p \frac{(i+1)(i+2)}{2} + p^2 \quad (4.320)$$

Esta quantidade de termos é exatamente igual ao número de funções de forma deste elemento, equação 4.283. No item anterior provou-se que o espaço interpolante deste elemento contém o espaço de polinômios de grau p e portanto o conjunto de bases deste elemento pode combinar-se para representar qualquer polinômio de grau p . O qual completa a prova.

4.13 Parâmetros variacionais e continuidade das funções de forma entre lados vizinhos

A seguir faz-se um estudo comparativo dos parâmetros variacionais dos diferentes elementos e as suas propriedades, que fazem com que as funções de base associadas aos lados dos elementos sejam compatíveis, quando os lados são vizinhos.

4.13.1 Continuidade e ordem de interpolação do elemento hierárquico

A construção das funções base Ψ_i do espaço de elementos finitos V_{hp} de polinômios por partes, pode ser pensada ao nível de lado do elemento, equação 4.321. Quando dois ou mais elementos são vizinhos por um lado L , estes elementos devem designar a mesma ordem para esse lado comum. Desta forma, estes elementos tem o mesmo número n de funções de forma associadas neste lado L . Isto é possível dado que a independência linear das bases dos elementos é válida para qualquer ordem p . Ainda, em uma malha deformada o espaço de interpolação associado a cada aresta de um elemento de ordem p é o espaço de polinômios de grau p . Para uma face triangular o espaço de interpolação associado a face é o espaço de polinômios de grau p . Para uma face quadrilateral o espaço de interpolação associado corresponde ao espaço de polinômios de grau p em cada variável. Assim, para cada base ψ_i^1 de um elemento E_1 existe uma base ψ_i^2 , do mesmo grau, para o elemento vizinho E_2 . E assim estas bases (ψ_i^1, ψ_i^2) estão

associadas. Elas correspondem às restrições de uma base Ψ_i de V_{hp} sobre o elemento ao qual pertencem, conforme equação 4.322. Assim, se as restrições destas bases sobre o lado comum L são idênticas, então a base Ψ_i é contínua sobre o lado L dos elementos vizinhos que contém este lado.

$$V_{hp} = \langle \Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_k, \dots, \Psi_{N-1} \rangle \quad (4.321)$$

$$\Psi_i/E_1 = \psi_i^1, \quad \Psi_i/E_2 = \psi_i^2 \quad (4.322)$$

$$\psi_i^1/L = \psi_i^2/L \quad (4.323)$$

O elemento hierárquico tem a vantagem de poder alterar o grau dos polinômios associados aos lados independentemente. Isto por causa das propriedades das suas bases, veja a seção 6.6. A alteração da ordem de um lado L do elemento hierárquico não afeta a ordem sobre os outros lados deste elemento. Assim para o lado L de um elemento de ordem p pode ser designada a ordem $p + k$, $k > 0$. A ordem sobre um lado pode também diminuir, mas não é uma vantagem já que isto vai em detrimento das propriedades de interpolação do elemento todo.

É claro que para preservar a compatibilização com um vizinho que contenha o lado L , este vizinho também têm designada a ordem $p + k$ neste lado. Assim ambos elementos tem o mesmo número de funções de forma de graus $q \leq p + k$ associadas ao lado L .

Tudo isto traz como conseqüência, a possibilidade de construir malhas de elementos com diferentes ordens de interpolação, bastando equilibrar a ordem entre lados compartilhados.

A finalidade da introdução dos parâmetros variacionais é obter continuidade entre funções bases de elementos vizinhos, isto é, entre as bases associadas a lados comuns. De tal forma que o parâmetro variacional depende ou é definido, de acordo com geometria do lado e não da geometria do elemento. Isto permite a construção de espaços de funções contínuas polinomiais por partes com qualquer combinação dos elementos aqui trabalhados. Pode-se terem malhas que contenham ao mesmo tempo elementos de linha com triângulos, quadriláteros, hexaedros, tetraedros, pirâmides e prismas, ou qualquer combinação destes. Assim uma

pirâmide pode ter um quadrilátero e um hexaedro como vizinhos pela face quadrilateral e um triângulo ou tetraedro conectado a uma das faces triangulares. Da mesma forma uma aresta qualquer pode ter como vizinho um elemento de linha. E apesar disso, e por causa dos parâmetros variacionais pode-se demonstrar que:

$$V_{hp}(\Omega) \subset C^0(\Omega) \quad (4.324)$$

4.13.2 Continuidade entre bases hierárquicas vizinhas

Somente a introdução dos parâmetros variacionais não é suficiente para garantir a continuidade entre as bases de lados vizinhos. Para completar a compatibilização de funções de forma de elementos vizinhos associadas a um lado comum se faz uso dos espaços paramétricos e "transformações paramétricas". A cada lado de um elemento, associam-se funções de forma, e cada função base é associada com um único lado de um elemento. As bases do elemento não nulas num de seus lados são as bases associadas aquele lado mais as bases associadas aos cantos desse lado, todas as outras bases do elemento são nulas nesse lado. Cada lado identifica-se de forma única com um espaço paramétrico da mesma dimensão do lado. Independentemente da dimensão do elemento, as únicas funções de forma de canto são funções polinomiais de grau 1 sobre a aresta que contem o canto. Logo, as funções de arestas obtém-se a partir do produto das funções de canto, vezes uma função da seqüência, avaliada num parâmetro variacional. Este procedimento aplica-se as funções de aresta dos elementos linear, triangular, quadrilateral, tetraédrico, hexaédrico, piramidal e prismático definidas neste trabalho. Assim o espaço de interpolação associado à aresta de um elemento qualquer de ordem p é sempre o espaço de polinômios de grau p . Este espaço é gerado considerando as bases de aresta mais as duas bases de canto dessa aresta. Por definição um parâmetro variacional $C(\xi)$, $C(\xi, \eta)$ ou $C(\xi, \eta, \zeta)$ é uma combinação linear das variáveis do espaço paramétrico do elemento.

A construção das funções de forma de face destes elementos é também feita de uma maneira sistemática. Para faces quadrilaterais, as funções de forma de face são montadas tomando o produto de duas funções de cantos opostos dessa face, vezes duas funções

f_{ni} avaliadas em parâmetros variacionais, onde n_1 e n_2 variam de 0 até $p - 2$ individualmente. Assim, dentro da malha o espaço de interpolação associado a uma face quadrilateral qualquer sempre é o espaço de polinômios de grau p em cada variável considerando também as bases de canto dessa face. Para faces triangulares as funções de face são construídas tomando o produto das três funções lineares dos cantos dessa face, vezes duas funções, cada uma avaliada num parâmetro variacional, onde neste caso a soma $n_1 + n_2$ varia de 0 até $p - 3$. Isso porque o espaço de interpolação associado a uma face triangular é sempre o espaço de polinômios de grau p , considerando também as bases de canto da face. O espaço associado a estas faces independe do elemento ao qual essa face pertença.

Os parâmetros variacionais são determinados satisfazendo-se certas condições de simetria impostas sobre a face do elemento, de tal forma que os parâmetros variacionais associados a qualquer aresta ou face satisfarão sobre a face vizinha condições análogas, seja esta face pertencente a um elemento bi ou tridimensional. Cada elemento vizinho contendo esta face comum tem em geral uma orientação diferente. Esta orientação é determinada pela forma como são identificados os cantos do elemento ao seu elemento de referência por meio da transformação que mapea o elemento de referência no elemento deformado. Portanto a face comum tem também uma orientação distinta para cada elemento vizinho que a contenha, e da mesma maneira para as arestas. Para compatibilizar esta orientação usam-se os espaços paramétricos e as transformações paramétricas referidas. Assim, para que os parâmetros variacionais de cada elemento vizinho satisfaçam estas condições de maneira idêntica sobre a face comum, será preciso identificar a face comum dos elementos com um único espaço paramétrico. Isto pode ser feito utilizando os id' s globais dos nós do lado comum. Para uma aresta, identifique-se o menor id global da aresta com o canto -1 do espaço paramétrico linear, e o outro nó com o canto $+1$. Desta forma para qualquer elemento que contenha esta aresta, o parâmetro variacional associado variará na mesma direção e tomará os mesmos valores. Para uma face, as duas direções associadas ao espaço paramétrico da face, determinam-se a partir da numeração global dos id' s dos nós desta face e de maneira única. Pode-se considerar o canto c_0 de menor id global da face e os dois cantos $c_1 < c_2$ conectados com ele por arestas, então, tome-se o primeiro eixo ξ na direção

do canto c_0 para o canto c_1 e o segundo eixo η na direção do canto c_0 para o canto c_2 . Então, para qualquer elemento conectado com esta face os dois parâmetros associados variarão nas mesmas direções e tomarão os mesmos valores. Desta forma esta compatibilização resulta na continuidade das funções de forma do mesmo grau de lados vizinhos de dois ou mais elementos.

Para verificar, que desta forma pode-se compatibilizar funções bases de elementos vizinhos, faz-se uma comparação direta dos parâmetros variacionais para os diferentes lados de elementos uni, bi e tridimensionais.

D) Parâmetros variacionais de aresta

► Aresta unidimensional

Para o elemento unidimensional, o parâmetro variacional de aresta é a própria variável do elemento linear, conforme é declarado na equação 4.325 e ilustrado na figura 4.19.

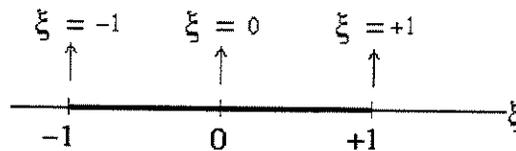


Figura 4.19: Parâmetro variacional do elemento linear

Os parâmetros variacionais de aresta de um elemento qualquer variam sempre linearmente entre -1 e +1, de um extremo ao outro da aresta, do canto local 0 para o canto local 1. Os parâmetros variacionais se anulam no meio da aresta.

$$C(\xi) = \xi \quad (4.325)$$

► Arestas de faces quadrilaterais

Para as arestas do quadrilátero, o parâmetro variacional de aresta é igual a variável do eixo

paralelo a aquela aresta, tabela 4.44, figura 4.20. Ele varia de -1 a +1 de um extremo ao outro da face do quadrilátero. Para as arestas do hexaedro, o parâmetro variacional corresponde a variável do eixo paralelo à aresta, segundo ilustrado na tabela 4.45, e figura 4.21.

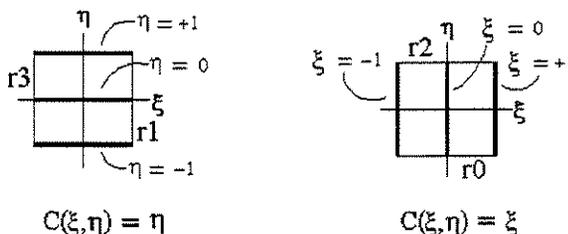


Figura 4.20: Parâmetros variacionais de aresta : quadrilátero

Para as arestas r_i, r_j, r_k e r_l paralelas ao eixo χ o parâmetro variacional é χ , equação 4.326. As faces que contém estas arestas satisfazem as mesmas condições que a face do quadrilátero, conforme pode ser acompanhado pelas figuras 4.20 e 4.21.

aresta →	r_0	r_1	r_2	r_3
par. var. $C(\xi, \eta)$	ξ	η	$-\xi$	$-\eta$

Tabela 4.44: Parâmetros variacionais de aresta : quadrilátero

O parâmetro varia linearmente de -1 a +1, de um extremo ao outro da face. Estas são as faces frontal, posterior, inferior e superior.

A face quadrilateral da pirâmide, no plano $\xi\eta$, coincide com o elemento quadrilátero de referência e os parâmetros variacionais de aresta são compatíveis, tabelas 4.44 e 4.46. O sinal negativo é corrigido aplicando a transformação $T = -1$, veja subseção 6.8.1 e seção 6.9.

$$\chi = \pm\xi \vee \chi = \pm\eta \vee \chi = \zeta \tag{4.326}$$

Isto mostra que os parâmetros variacionais de aresta satisfazem as mesmas condições sobre as faces que contém estas arestas.

Para as arestas r_3, r_4 e r_5 do prisma o parâmetro é ζ , e no plano que contém a face

aresta →	r0, r8	r2, r10	r1, r9	r3, r11	r4, r5, r6, r7
$C(\xi, \eta, \zeta) = \chi =$	ξ	$-\xi$	η	$-\eta$	ζ

Tabela 4.45: Parâmetros variacionais das arestas do cubo

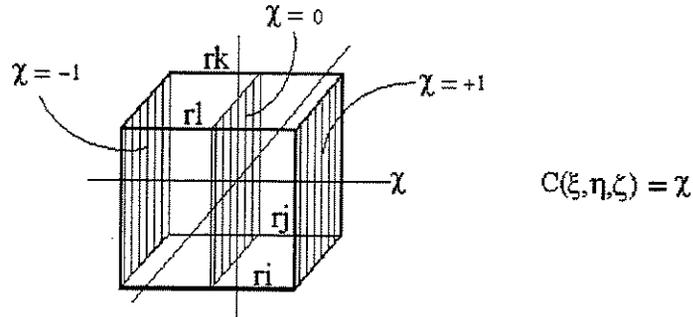


Figura 4.21: Parâmetro variacional de aresta : cubo

triangular inferior ele vale -1. Vale 0 no plano $\xi\eta$ e +1 no plano que contém a face triangular superior. Esta condição é equivalente ao parâmetro η da face do quadrilátero, figura 4.20.

face quadrilateral da pirâmide				
arestas	r0	r1	r2	r3
$C(\xi, \eta, \zeta) =$	ξ	η	$-\xi$	$-\eta$

Tabela 4.46: Parâmetros variacionais de aresta: pirâmide

Para as arestas destas faces tem-se sempre

$$-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq +1 \quad (4.327)$$

► Arestas de faces triangulares

As duas retas, equações 4.329, 4.330 são paralelas. Elas são perpendiculares ao vetor (a, b) . O valor que o parâmetro variacional $C(\xi, \eta)$, equação 4.328, assume num ponto da reta 4.330 é $K - L$. De fato para qualquer ponto da reta 4.330, $a\xi + b\eta = -L$. Usamos este fato para analisar o comportamento dos parâmetros de aresta.

$$C(\xi, \eta) = a\xi + b\eta + K \quad (4.328)$$

$$a\xi + b\eta + K = 0 \quad (4.329)$$

$$a\xi + b\eta + L = 0 \quad (4.330)$$

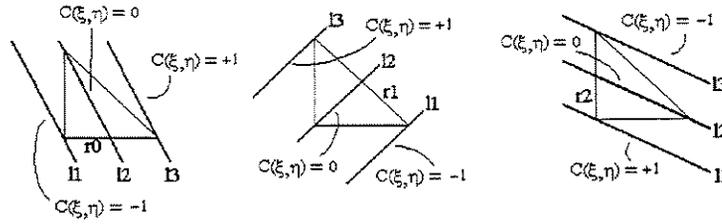


Figura 4.22: Parâmetros variacionais de aresta: triângulo

Para o elemento triangular, os parâmetros variacionais dados na tabela 4.47 satisfazem as condições declaradas na figura 4.22. As três linhas retas l_1 , l_2 , l_3 são paralelas como pode-se apreciar na tabela 4.47. Em qualquer ponto da reta intermediária l_2 , o parâmetro é nulo. Em qualquer ponto da reta l_1 o parâmetro assume o valor -1 e em qualquer ponto da reta l_3 o valor $+1$, tabela 4.47. Assim o parâmetro $C(\xi, \eta)$ varia linearmente de -1 a $+1$ desde a reta l_1 para a reta l_3 , passando por zero sobre a reta l_2 . Por exemplo, para a aresta r_0 na tabela 4.47, a reta l_1 é definida pela equação $\eta + 2\xi = 0$, substituindo este valor em $C(\xi, \eta, \zeta) = \eta + 2\xi - 1$ segue-se $C(\xi, \eta, \zeta) = 0 - 1 = -1$.

		valor do parâmetro varacional em cada ponto da reta l_i		
aresta	$C(\xi, \eta, \zeta)$	-1	0	$+1$
r_0	$\eta + 2\xi - 1$	$l_1: \eta + 2\xi = 0$	$l_2: \eta + 2\xi - 1 = 0$	$l_3: \eta + 2\xi - 2 = 0$
r_1	$\eta - \xi$	$l_1: \eta - \xi + 1 = 0$	$l_2: \eta - \xi = 0$	$l_3: \eta - \xi - 1 = 0$
r_2	$1 - \xi - 2\eta$	$l_1: 2 - \xi - 2\eta = 0$	$l_2: 1 - \xi - 2\eta = 0$	$l_3: -\xi - 2\eta = 0$

Tabela 4.47: Parâmetros variacionais de arestas: triângulo

Caso a função da seqüência seja simétrica entre -1 e 1 , esta simetria é acrescentada sobre a face do triângulo para cada função de aresta, como acontece com os polinômios de Chebyshev, veja as figuras 4.3, 4.6 e 4.7.

$$C(\xi, \eta, \zeta) = a\xi + b\eta + c\zeta + K \quad (4.331)$$

$$a\xi + b\eta + c\zeta + K = 0 \quad (4.332)$$

$$a\xi + b\eta + c\zeta + L = 0 \quad (4.333)$$

Os dois planos, equações 4.332, 4.333 são paralelos. Eles são ortogonais ao vetor (a, b, c) . O valor que o parâmetro variacional $C(\xi, \eta, \zeta)$ assume em qualquer ponto do plano 4.333 é $K - L$. De fato para qualquer ponto do plano 4.333, $a\xi + b\eta + c\zeta = -L$. Usamos este fato para analisar o comportamento dos parâmetros de aresta de elementos tridimensionais.

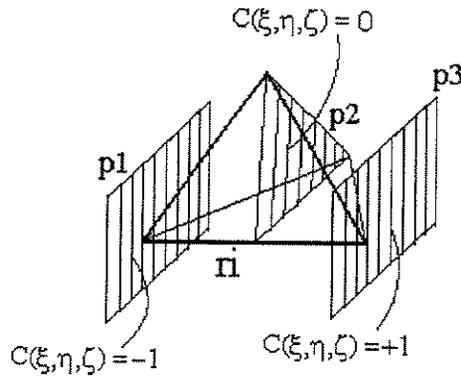


Figura 4.23: Parâmetros variacionais de aresta : tetraedro

Na tabela 4.48 resumem-se os parâmetros variacionais associados às arestas das faces triangulares do tetraedro mestre. Os três planos p1, p2, p3 da tabela 4.48, representados na figura 4.23, são paralelos.

aresta	$C(\xi, \eta, \zeta)$	valor do parâmetro variacional em cada ponto do plano pi		
		-1	0	+1
r0	$2\xi + \eta + \zeta - 1$	p1: $2\xi + \eta + \zeta = 0$	p2: $2\xi + \eta + \zeta - 1 = 0$	p3: $2\xi + \eta + \zeta - 2 = 0$
r1	$\eta - \xi$	p1: $\eta - \xi + 1 = 0$	p2: $\eta - \xi = 0$	p3: $\eta - \xi - 1 = 0$
r2	$1 - \xi - 2\eta - \zeta$	p1: $2 - \xi - 2\eta - \zeta = 0$	p2: $1 - \xi - 2\eta - \zeta = 0$	p3: $-\xi - 2\eta - \zeta = 0$
r3	$\xi + \eta + 2\zeta - 1$	p1: $\xi + \eta + 2\zeta = 0$	p2: $\xi + \eta + 2\zeta - 1 = 0$	p3: $\xi + \eta + 2\zeta - 2 = 0$
r4	$\zeta - \xi$	p1: $\zeta - \xi + 1 = 0$	p2: $\zeta - \xi = 0$	p3: $\zeta - \xi - 1 = 0$
r5	$\zeta - \eta$	p1: $\zeta - \eta + 1 = 0$	p2: $\zeta - \eta = 0$	p3: $\zeta - \eta - 1 = 0$

Tabela 4.48: Parâmetros variacionais de aresta : tetraedro

O parâmetro variacional é nulo em qualquer ponto do plano p2 que passa pelo ponto médio da aresta r1 e os dois cantos opostos. O parâmetro variacional vale -1 em qualquer ponto do plano p1 que corta ao elemento no canto esquerdo da aresta r1. O parâmetro vale +1 em qualquer ponto do plano p3 que passa pelo canto direito da aresta r1, figura 4.23 e tabela 4.48. Assim o parâmetro

$C(\xi, \eta, \zeta)$ varia linearmente de -1 para +1 do plano p1 para o plano p3, passando por zero sobre o plano p2. Como pode ser observado para as faces contendo a aresta ri, as condições satisfeitas são idênticas que aquelas satisfeitas pelos parâmetros de aresta do triângulo, figura 4.22.

aresta	$C(\xi, \eta, \zeta)$	valor do parâmetro variacional em cada ponto dos planos p1,p2,p3		
		-1	0	+1
r4	$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta$	$p1: \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta + 1 = 0$	$p2: \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta = 0$	$p3: \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta - 1 = 0$
r5	$-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta$	$p1: -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta + 1 = 0$	$p2: -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta = 0$	$p3: -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \zeta - 1 = 0$
r6	$-\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta$	$p1: -\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta + 1 = 0$	$p2: -\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta = 0$	$p3: -\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta - 1 = 0$
r7	$\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta$	$p1: \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta + 1 = 0$	$p2: \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta = 0$	$p3: \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \zeta - 1 = 0$

Tabela 4.49: Parâmetros variacionais de aresta : pirâmide

Os parâmetros variacionais das arestas de faces triangulares da pirâmide satisfazem condições análogas aos parâmetros de arestas do triângulo e do tetraedro.

aresta	$C(\xi, \eta, \zeta)$	valor do parâmetro em cada ponto dos planos p1,p2,p3		
		-1	0	+1
r0,r6	$2\xi + \eta - 1$	$p1: 2\xi + \eta = 0$	$p2: 2\xi + \eta - 1 = 0$	$p3: 2\xi + \eta - 2 = 0$
r1,r7	$\eta - \xi$	$p1: \eta - \xi + 1 = 0$	$p2: \eta - \xi = 0$	$p3: \eta - \xi - 1 = 0$
r2,r8	$-\xi - 2\eta + 1$	$p1: -\xi - 2\eta = 0$	$p2: -\xi - 2\eta + 1 = 0$	$p3: -\xi - 2\eta + 2 = 0$

Tabela 4.50: Arestas de faces triangulares : prisma

O parâmetro vale -1 no plano p1 paralelo a p2 e que passa pelo canto esquerdo da aresta, vale 0 no plano que corta a aresta no ponto médio e os dois cantos opostos, figura 4.24, e vale +1 no plano p3 paralelo a p2 e que corta o canto direito da aresta.

O canto direito da aresta é o canto local 0 e o canto esquerdo o canto local 1. As duas faces que contém esta aresta satisfazem condições análogas aquelas do triângulo e portanto também as do tetraedro.

Os parâmetros das arestas das faces triangulares do prisma satisfazem sobre as faces que emanam da aresta condições análogas, seja esta face um triângulo ou quadrilátero, tabela 4.50 e figura 4.25.

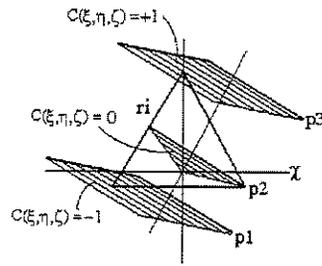


Figura 4.24: Parâmetros das arestas de faces triangulares : pirâmide

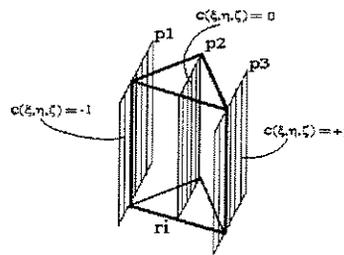


Figura 4.25: Parâmetros de aresta : prisma

II) Parâmetros variacionais de face

A continuidade da função de forma de face só depende dos valores que esta função assume sobre a face associada, dado que ela é o produto de um função bolha sobre esta face e duas funções ortogonais, isto é, ela é nula sobre as arestas desta face. Ela é nula nas demais faces.

► Faces quadrilaterais

Os parâmetros variacionais das faces do quadrilátero, hexaedro e faces quadrilaterais da pirâmide e prisma são dois e correspondem as variáveis do plano paralelo à face do elemento. Eles correspondem aos parâmetros variacionais de duas arestas ortogonais dessas faces. Portanto a compatibilização é óbvia, tabela 4.51.

Já para as faces do prisma o primeiro parâmetro varia horizontalmente de -1 a +1 da aresta vertical esquerda para a aresta vertical direita. O segundo varia verticalmente da aresta inferior

	par. var. 1 : $C_1(\xi, \eta, \zeta)$	par. var. 2 : $C_2(\xi, \eta, \zeta)$
face	quadrilátero	
F0	ξ	η
face	hexaedro	
F0	ξ	η
F1	ξ	ζ
F2	η	ζ
F3	ξ	ζ
F4	η	ζ
F5	ξ	η
face	pirâmide	
F0	ξ	η
face	prisma	
F1	$2\xi-1$	ζ
F2	$\eta-\xi$	ζ
F3	$2\eta-1$	ζ

Tabela 4.51: Parâmetros variacionais de faces quadrilaterais

para a superior de -1 a +1 respectivamente.

► Faces triangulares

Para faces triangulares os parâmetros são dois e são dados na tabela 4.52. Para o triângulo os parâmetros estão representados na figura 4.26. Os valores dos parâmetros são constantes sobre os hiperplanos l1, l2 e l3. Os parâmetros variam linearmente sobre qualquer reta que corte as 3 linhas l1, l2, l3.

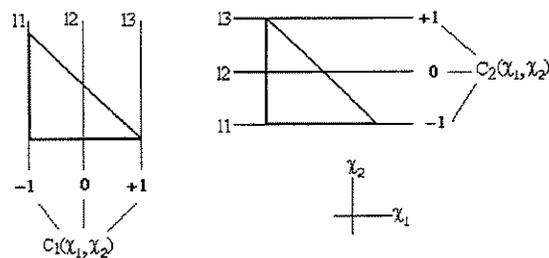


Figura 4.26: Condições dos parâmetros de face

Para as faces F0, F1, F2 do tetraedro cada parâmetro é uma combinação linear de uma das variáveis do plano (x_1, x_2) que contém a face, tabela 4.52. A situação sobre estas faces é

triângulo		
face	$C_1(\xi, \eta, \zeta)$	$C_2(\xi, \eta, \zeta)$
F0	$2\xi-1$	$2\eta-1$
tetraedro		
face	$C_1(\xi, \eta, \zeta)$	$C_2(\xi, \eta, \zeta)$
F0	$2\xi-1$	$2\eta-1$
F1	$2\xi-1$	$2\zeta-1$
F2	$-\frac{2}{3}\xi + \frac{4}{3}\eta - \frac{2}{3}\zeta - \frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}\xi - \frac{2}{3}\eta + \frac{4}{3}\zeta - \frac{1}{3}$
F3	$2\eta-1$	$2\zeta-1$
pirâmide		
face	$C_1(\xi, \eta, \zeta)$	$C_2(\xi, \eta, \zeta)$
F1	$\xi - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$\eta + \zeta$
F2	$\frac{1}{2}\xi + \eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$-\xi + \zeta$
F3	$\xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$-\eta + \zeta$
F4	$-\frac{1}{2}\xi + \eta - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$	$\xi + \zeta$
prisma		
face	$C_1(\xi, \eta, \zeta)$	$C_2(\xi, \eta, \zeta)$
F0	$2\xi - 1$	$2\eta - 1$
F4	$2\xi - 1$	$2\eta - 1$

Tabela 4.52: Parâmetros de faces triangulares

representada na figura 4.27. Para a face F3 a situação se repete, mas agora os três hiperplanos paralelos são diagonais, figura 4.27. Para a pirâmide, as condições satisfeitas são análogas as dos outros elementos, figura 4.28. Para as faces triangulares do prisma os parâmetros são idênticos aos da face do triângulo, figura 4.26 com $\chi_1 = \xi$ e $\chi_2 = \eta$.

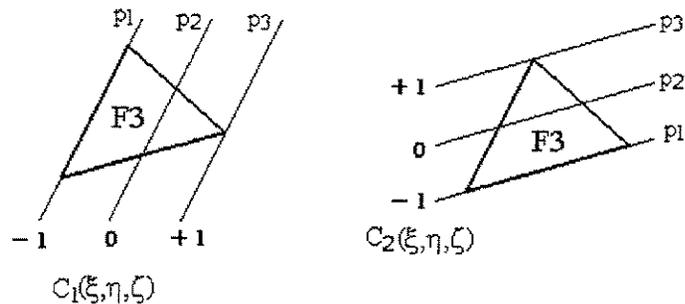


Figura 4.27: Parâmetros da face F3 : tetraedro

I) Parâmetro variacional de interior

Para o elemento tridimensional, uma função de interior é multiplicada por três funções

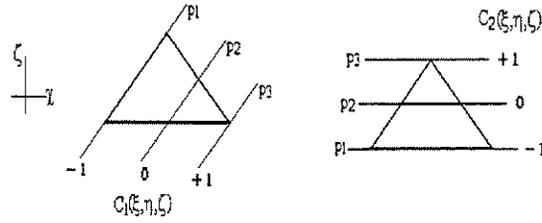


Figura 4.28: Parâmetros variacionais de face: pirâmide

f_n da seqüência. Cada função f_n depende de uma variável distinta do espaço paramétrico do elemento. O parâmetro variacional de interior não apresenta qualquer problema de continuidade entre elementos, dado que uma função de forma de interior é nula na fronteira do elemento. Mas o parâmetro variacional de interior é escolhido de tal maneira que ele varia entre -1 e +1 de um extremo a outro do elemento e em cada direção dos eixos.

4.13.3 Derivadas das funções de forma

Como exemplo tome-se as funções de forma de face do tetraedro. Estas bases dependem de duas funções f_1 e f_2 da seqüência que por sua vez dependem dos parâmetros variacionais, $s(\xi, \eta, \zeta)$ e $t(\xi, \eta, \zeta)$ respectivamente. A derivada de uma função S de face depende da derivada das funções f_i e da derivada dos parâmetros s e t . Isto pode ser escrito em forma indexada como feito a seguir:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = f_1(s)f_2(t) \quad , \quad s = s(\xi, \eta, \zeta), \quad t = t(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.334)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \chi} = \frac{\partial f_1(s)}{\partial s} \frac{\partial s(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \chi} f_2(t) + f_1(s) \frac{\partial f_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \chi} \quad , \quad \chi = \xi, \eta, \zeta \quad (4.335)$$

Para a face F0

$$s = 2\xi - 1 \quad , \quad t = 2\eta - 1 \quad (4.336)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{\partial f_1(s)}{\partial s} 2 f_2(t) \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} = f_1(t) 2 \frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \quad (4.337)$$

Para a face F1

$$s = 2\xi - 1, \quad t = 2\zeta - 1 \quad (4.338)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{\partial f_1(s)}{\partial s} 2 f_2(t), \quad \frac{\partial S}{\partial \zeta} = f_1(t) 2 \frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \quad (4.339)$$

E para a face F32

$$s = \frac{1}{3}(-2\xi + 4\eta - 2\zeta - 1), \quad t = \frac{1}{3}(-2\xi - 2\eta + 4\zeta - 1) \quad (4.340)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{\partial f_1(s)}{\partial s} \frac{\partial s(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} f_2(t) + f_1(s) \frac{\partial f_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad (4.341)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial f_1(s)}{\partial s} \frac{\partial s(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} f_2(t) + f_1(s) \frac{\partial f_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad (4.342)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta} = \frac{\partial f_1(s)}{\partial s} \frac{\partial s(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} f_2(t) + f_1(s) \frac{\partial f_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \zeta} \quad (4.343)$$

Para a face F3

$$s = 2\eta - 1, \quad t = 2\zeta - 1 \quad (4.344)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial f_1(s)}{\partial s} 2 f_2(t), \quad \frac{\partial S}{\partial \zeta} = f_1(t) 2 \frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \quad (4.345)$$

Isto conduz ao gradiente do produto $f_1 f_2$ na face f_i , ou seja

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial \xi} \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} \\ \frac{\partial S}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \xi} & \frac{\partial s}{\partial \eta} & \frac{\partial s}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial t}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \eta} & \frac{\partial t}{\partial \zeta} \end{bmatrix}_{f_i} \quad (4.346)$$

A indexação das derivadas $[...]_{f_i}$ dos parâmetros variacionais é dada na matriz 4.347.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.347)$$

A matriz 4.347 acha-se atualmente definida no programa que implementa as funções de forma do elemento. De maneira similar calcule-se a derivada das funções de forma associadas

aos outros lados do elemento.

No capítulo 6 são formalizados todos os conceitos até agora introduzidos. No próximo capítulo são apresentados os padrões de refinamento para cada um dos elementos até aqui definidos.

I) Elementos isoparamétricos

Sintetizando, se um elemento E_r tem a propriedade isoparamétrica então a transformação geométrica T_g , cuja imagem é o elemento deformado $E_d = T_g(E_r)$, pode ser descrita pelas funções de forma do elemento de referência isto é:

$$T_g(\xi, \eta, \varsigma) = \sum_i c_i \psi_i(\xi, \eta, \varsigma) \quad (4.348)$$

onde c_i são os cantos do elemento deformado e ψ_i a base do elemento de referência associada ao nó correspondente.

Os elementos linha, triângulo, quadrilátero, tetraedro, prisma e hexaedro tem a propriedade enunciada na equação 4.348. O elemento pirâmide não é isoparamétrico, mas si se considera uma pirâmide deformada com as arestas opostas da face quadrilateral paralelas então demonstra-se que as bases da pirâmide mestre podem ser utilizadas para obter a transformação geométrica do elemento deformado segundo equação 4.348. Para provar esta afirmação proceda-se da seguinte maneira: considere-se os cinco cantos $\tilde{x}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\tilde{x}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\tilde{x}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\tilde{x}_3(x_3, y_3, z_3)$ e $\tilde{x}_4(x_4, y_4, z_4)$ de uma pirâmide deformada. Se as arestas opostas da face quadrilateral são paralelas tem-se a seguinte relação

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 - \tilde{x}_0 \quad (4.349)$$

Utilizando-se a equação 4.348, as bases de canto da pirâmide definidas nas equações 4.258 a 4.262 e as relações dadas por 4.349 obtém-se a transformação geométrica (transformação linear) que mapea a pirâmide de referência na pirâmide deformada definida pelos 5 cantos $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$, e \tilde{x}_4 (\tilde{x}_4 esta fora do plano que contém $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ e \tilde{x}_3).

Capítulo 5

Divisão/Refinamento dos Elementos

Neste capítulo são detalhadas questões relativas ao refinamento h dos elementos. Este tipo de refinamento é baseado na divisão geométrica dos elementos. Assim, a divisão do elemento linear consiste na divisão geométrica deste elemento em duas partes iguais. Quando um triângulo ou um quadrilátero é dividido, são obtidos 4 subelementos, chamados de "elementos filhos", com exatamente as mesmas propriedades geométricas que o elemento do qual foi obtido por divisão, este último denominado de "elemento pai". O que muda é o tamanho do elemento, isto é, o parâmetro h . A divisão aqui utilizada foi escolhida com o propósito de que o menor ângulo dos subelementos não seja menor que o menor ângulo do elemento pai. Sabe-se que a diminuição do menor ângulo da malha afeta as propriedades de convergência da solução tornando-a mais lenta.

O processo de refinamento para se adaptar uma malha implica também na possibilidade de se agrupar elementos. Uma razão para se fazer isto está no fato de que se um grupo de elementos adjacentes apresenta um erro bem menor que o erro admissível, então otimizar a malha para ter-se um custo computacional mais baixo implicará em retirar estes elementos e substituí-los por um número menor de elementos. Uma forma simples de fazer isto é agrupando vários elementos que foram obtidos por divisão, retirando-os da malha e substituindo-os pelo elemento pai.

Quando se dividem elementos dentro de uma malha obtém-se uma malha não conforme. Neste caso para garantir a continuidade do espaço de interpolação de elementos finitos designa-

se uma dependência entre as bases associadas ao lado pequeno l_p de um elemento e as bases associadas ao lado grande l_g do elemento adjacente que contém o lado pequeno, isto é $l_p \subset l_g$. Assim, como se verá depois, é preciso fazer associações entre os distintos lados do próprio elemento, entre lados dos subelementos e elemento pai para identificar os lados que apresentaram "restrição" neste sentido. Uma explicação mais apurada deixa-se para o caso de um elemento tridimensional. Como será notado existiram lados que não apresentam associação, isto deve-se ao fato que por estes lados não consegue-se identificar uma certa restrição.

No que se segue serão convencionados os diferentes dados relativos aos subelementos obtidos por divisão geométrica, como a enumeração de seus diferentes lados. Designando-se o termo "conectividade" à associação entre o elemento e seu lado, fixa-se o "ciclo de conectividades" dos subelementos e exemplifica-se a indexação dos diferentes dados inerentes. Cada elemento guarda uma lista com a vizinhança de suas conectividades, isto é, por esta lista o elemento conhece algum elemento vizinho que contém o mesmo lado. Desta forma cada lado da malha tem associado um ciclo de conectividades da mesma dimensão, dimensão esta igual a dimensão do lado. Estabelece-se a relação entre as conectividades dos subelementos e as conectividades do elemento pai. Estes dados estão todos implementados no ambiente PZ, na respectiva classe derivada para o elemento geométrico específico.

5.1 Divisão do elemento de linha

O elemento de linha L é dividido em dois subelementos L_0 e L_1 introduzindo um novo nó c_2 no meio do elemento, conforme mostrado na figura 5.1. A linha pontilhada da figura indica o canto c_2 por onde os dois subelementos estão unidos. A numeração global de cada subelemento é c_0-c_2 para L_0 , c_2-c_1 para L_1 . A numeração local de cada elemento de linha é sempre 0, 1 para os dois cantos e 2 para a aresta $\overline{0-1}$, conforme indicado pela numeração superior na figura.

As únicas conectividades locais associadas entre os subelementos são 0/1 e 1/0, isto é, o lado 1 do subelemento 0 (ou L_0) está conectado com o lado 0 do subelemento 1 (ou L_1), e



Figura 5.1: Divisão do elemento de linha: numeração local

vice-versa. Uma função de canto do nó global $c2$ é passível de sofrer dependência com respeito a um elemento vizinho que contenha L como aresta. Logo deve considerar-se a relação entre as seguintes conectividades: $0/0$ para $0/2$, $0/1$ para $0/2$, $1/0$ para $1/2$, $1/1$ para $1/2$ isto associa cantos com a aresta do próprio elemento.

O "nível" de um elemento é igual ao número de divisões que foram feitas para obtê-lo. Para fazer o cálculo da dependência entre lados de elemento de níveis distintos também é preciso associar a uma conectividade do subelemento uma conectividade do elemento pai. Neste caso a "conectividade pai" associada a $0/0$ é $L/0$, a $1/1$ é $L/1$, e para $0/2$ e $1/2$ associa-se $L/2$. A conectividade pai associada ao nó $c2$ do elemento não existe dado que $c2$ não é uma conectividade de L . Desta forma conhecendo a conectividade de L associada à conectividade do subelemento identifica-se o vizinho que contém a aresta $\overline{c0 - c1}$ e identifica-se uma restrição.

5.2 Divisão do triângulo

Um triângulo é dividido em 4 triângulos semelhantes introduzindo novos nós nos pontos meios de cada aresta. Na figura 5.2-(a) mostra-se a numeração local dos lados do elemento.

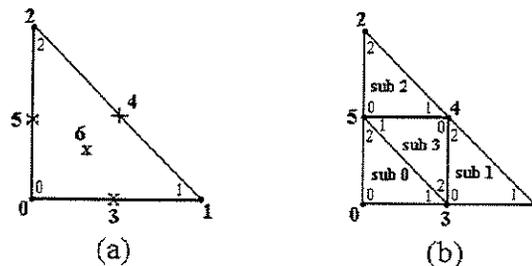


Figura 5.2: Divisão do triângulo: numeração local

subelementos	nó local 0	nó local 1	nó local 2
sub 0	0	3	5
sub 1	3	1	4
sub 2	5	4	2
sub 3	4	5	3

Tabela 5.1: Numeração local dos subelementos

A figura 5.2-(b) mostra a numeração local para os novos nós introduzidos pela divisão, com os quais definem-se os subelementos, conforme a tabela 5.1.

Subelementos			
0	1	2	3
1-1-0	0-3-2	0-0-2	0-1-2
2-3-1	2-2-1	1-3-0	1-2-0
			2-0-1

Tabela 5.2: Conectividades entre subelementos

O ciclo de conectividades entre subelementos é dado na tabela 5.2. Os lados desconsiderados não tem conectividades associadas, como por exemplo 0/0. Acompanhe-se com a figura 5.2.

A associação entre lados ou conectividades de dimensão 1 para os cantos dos subelemento é dada na tabela 5.3. A conectividade de dimensão 2 associadas a cantos e arestas de um subelemento é o proprio subelemento e sua face ou lado 6.

sub 0		sub 1		sub 2		sub 3	
conectiv	dim 1						
0/1	0/3	1/0	1/3	2/0	2/5	3/0	1/4
0/2	0/5	1/2	1/4	2/1	2/4	3/1	0/5
						3/2	0/3

Tabela 5.3: Conectividade de dimensão 1 associada a canto

Também é preciso definir a conectividade do elemento pai associada a uma conectividade do subelemento para levar o cálculo das dependências adiante, já que este cálculo é efetuado com uso de um acúmulo de transformações entre estas conectividades e finalmente entre conectividades vizinhas. A tabela 5.4 apresenta estas associações para os subelementos do triângulo.

sub 0		sub 1		sub 2		outras	
sub 0/3	F/3	sub 1/3	F/3	sub 2/4	F/4	sub i/6, i=0,1,2,3	F/6
sub 0/5	F/5	sub 1/4	F/4	sub 2/5	F/5	sub s/s, s=0,1,2	F/s

Tabela 5.4: Conectividade pai associada a uma conectividade do subelemento

A letra F indica o elemento pai.

5.3 Divisão do quadrilátero

Um quadrilátero é dividido em 4 quadriláteros semelhantes introduzindo novos nós nos pontos meios de cada aresta e um nó no centro da face. Na figura 5.3-(a) mostra-se a numeração local dos lados do elemento.

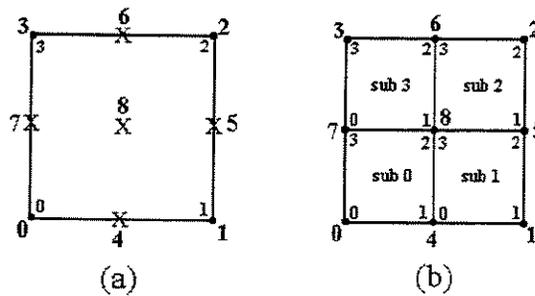


Figura 5.3: Divisão do quadrilátero: numeração local

A figura 5.3-(b) mostra a numeração local para os novos nós introduzidos pela divisão, com os quais definem-se os subelementos, conforme a tabela 5.5.

subelementos	nó local 0	nó local 1	nó local 2	nó local 3
sub 0	0	4	8	7
sub 1	4	1	5	8
sub 2	8	5	2	6
sub 3	7	8	6	3

Tabela 5.5: Numeração local dos subelementos

O ciclo de conectividades entre subelementos é dado na tabela 5.6. Os lados desconsiderados não tem conectividades associadas. Acompanhe-se estas definições com a figura 5.3.

Subelementos			
0	1	2	3
1-1-0	0-0-1	0-3-1	0-0-3
2-1-3	2-2-1	1-1-2	1-0-2
3-3-0	3-2-0	3-3-2	2-2-3

Tabela 5.6: Conectividades entre subelementos

A associação entre lados ou conectividades de dimensão 1 para os cantos dos subelementos é dada na tabela 5.7. A conectividade de dimensão 2 associadas a cantos e arestas de um subelemento é o próprio subelemento e sua face ou lado 8.

sub 0		sub 1		sub 2		sub 3	
conectiv	dim 1	conectiv	dim 1	conectiv	dim 1	conectiv	dim 1
0/1	0/4	1/0	1/4	2/1	2/5	3/2	3/6
0/3	0/7	1/2	1/5	2/3	2/6	3/0	3/7
conectiv	dim 2	conectiv	dim 2	conectiv	dim 2	conectiv	dim 2
0/k	0/8	1/k	1/8	2/k	2/8	3/k	3/8
k=0,1,2,3,4,5,6,7							

Tabela 5.7: Conectividade de dimensão maior associada ao lado de um subelemento

A conectividade do elemento pai associada a uma conectividade do subelemento é dada na tabela 5.8.

sub 0		sub 1		sub 2		sub 3		outras	
sub 0/4	F/4	sub 1/4	F/4	sub 2/5	F/5	sub 3/6	F/6	sub i/8, i=0,1,2,3	F/8
sub 0/7	F/7	sub 1/5	F/5	sub 2/6	F/6	sub 3/7	F/7	sub s/s, s=0,1,2,3	F/s

Tabela 5.8: Conectividade pai associada a uma conectividade do subelemento

5.4 Divisão do hexaedro

Um hexaedro é dividido em 8 hexaedros semelhantes, figura 5.4. A numeração local de cada subelemento é dada na tabela 5.9. A numeração foi expandida para incluir os cantos dos subelementos. Desta forma, cada lado de um subelemento que esteja incluído no lado do pai da mesma dimensão, herda o mesmo *id* local, como mostram os exemplos a seguir. O lado 4 (canto 4) do subelemento 4 é o canto 4 do elemento pai.

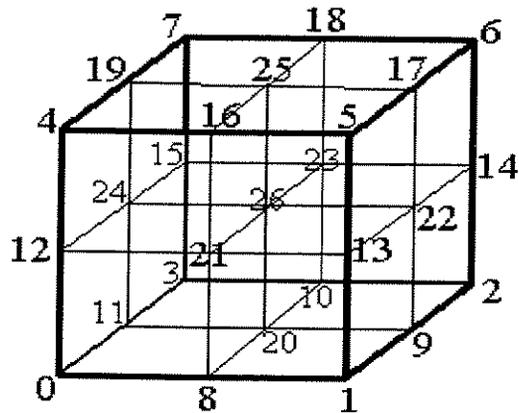


Figura 5.4: Divisão do cubo

O lado 8 (aresta r_0) do subelemento 1 está contido no lado 8 (aresta r_0) do pai. O lado 21 (face F_1) do subelemento 5 está contido no lado 21 (face F_1) do pai, conforme mostra a figura 5.4.

filhos	nó 0	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6	nó 7
sub 0	0	8	20	11	12	21	26	24
sub 1	8	1	9	20	21	13	22	26
sub 2	20	9	2	10	26	22	14	23
sub 3	11	20	10	3	24	26	23	15
sub 4	12	21	26	24	4	16	25	19
sub 5	21	13	22	26	16	5	17	25
sub 6	26	22	14	23	25	17	6	18
sub 7	24	26	23	15	19	25	18	7

Tabela 5.9: Numeração local dos subelementos

5.4.1 Vizinhança dos subelementos

Como mencionou-se, cada lado compartilhado por subelementos formam ciclos fechados de conectividades. Estas conectividades foram fixadas na tabela 5.10. Quando existem lados compartilhados por subelementos vizinhos, as conectividades respectivas estão incluídas em ciclos contendo lados da mesma dimensão.

Na tabela 5.10 designa-se uma vizinhança para cada lado dos subelementos. Para o subele-

mento 0 a primeira linha mostra os valores $1 - 1 - 0$. Isto quer dizer que o subelemento 0 pelo

$$0/1 \rightarrow 1/0 \quad (5.1)$$

lado 1 tem como vizinho o subelemento 1 pelo seu lado 0. Isto pode ser denotado como na equação 5.1.

Subelementos							
0	1	2	3	4	5	6	7
1-1-0	0-0-1	0-3-1	0-0-3	0-0-4	0-4-1	0-7-1	0-4-3
2-1-3	2-2-1	1-1-2	1-0-2	1-0-5	1-1-5	1-5-2	1-0-6
3-3-0	3-2-0	3-3-2	2-2-3	2-5-3	2-1-6	2-2-6	2-3-6
4-4-0	4-5-0	4-3-5	4-7-0	3-0-7	3-6-0	3-7-2	3-3-7
5-1-4	5-5-1	5-6-1	5-4-2	5-5-4	4-4-5	4-7-5	4-4-7
6-1-7	6-2-5	6-6-2	6-2-7	6-5-7	6-6-5	5-5-6	5-4-6
7-3-4	7-2-4	7-6-3	7-7-3	7-7-4	7-6-4	7-7-6	6-6-7
9-1-11	10-2-8	8-1-10	8-0-10	8-0-16	8-1-16	8-5-10	8-4-10
10-3-8	11-0-9	11-3-9	9-2-11	9-0-17	9-1-17	9-2-17	9-3-17
13-1-12	12-0-13	12-3-13	12-0-15	10-0-18	10-1-18	10-2-18	10-3-18
14-1-15	14-2-13	13-1-14	13-0-14	11-0-19	11-4-9	11-7-9	11-3-19
15-3-2	15-2-12	15-3-14	14-2-15	13-5-12	12-4-13	12-7-13	12-4-15
16-4-8	16-5-8	16-6-8	16-7-8	14-5-15	14-6-13	13-5-14	13-4-14
17-1-19	17-5-9	17-6-9	17-2-19	15-7-12	15-6-12	15-7-14	14-6-15
18-3-16	18-2-16	18-6-10	18-7-10	17-5-19	18-6-16	16-5-18	16-4-18
19-4-11	19-5-11	19-6-11	19-7-11	18-7-16	19-4-17	19-7-17	17-6-19
22-1-24	23-2-21	21-1-23	21-0-23	20-0-25	20-1-25	20-2-25	20-3-25
23-3-21	24-0-22	24-3-22	22-2-24	22-5-24	23-6-21	21-5-23	21-4-23
25-4-20	25-5-20	25-6-20	25-7-20	23-7-21	24-4-22	24-7-22	22-6-24

Tabela 5.10: Conectividades entre subelementos

Na terminologia usual a conectividade $0/1$ aponta para a conectividade $1/0$. Isto pode ser acompanhado pela figura 5.4. Seguindo a seqüência de conectividades da tabela 5.10 percebe-se que elas formam um ciclo fechado. Por exemplo na tabela 5.10 observa-se o seguinte ciclo.

$$2/0 \rightarrow 3/1 \rightarrow 0/2 \rightarrow 1/3 \rightarrow 2/0 \quad (5.2)$$

Este é um ciclo de conectividades de dimensão 0, inclui cantos. Para acompanhar este ciclo na tabela 5.10 utilize o significado dado à equação 5.1 aplicado a cada par de conectividades da seqüência dada na expressão 5.2. O seguinte ciclo de dimensão 1, incluindo arestas, também é observado na tabela 5.10.

$$0/14 \rightarrow 1/15 \rightarrow 2/12 \rightarrow 3/13 \rightarrow 0/14 \quad (5.3)$$

O ciclo fechado

$$0/22 \rightarrow 1/24 \rightarrow 0/22 \quad (5.4)$$

é de dimensão 2, contendo faces. O fato de que existem lados que não são considerados na tabela, indica que não existe vizinho para este lado. Por exemplo, 0/0 não tem vizinho associado. Este ciclo será preenchido quando consideram-se as vizinhanças do elemento dentro da malha. Ainda assim poderão existir lados apontando para nulo.

Elemento finito hierárquico hexaedro

O elemento finito hexaédrico de ordem p é construído a partir do elemento geométrico hexaedro, definido na seção 4.9.2 considerando os 27 lados dados na tabela 4.27 e figura 4.10, junto com as correspondentes funções de forma associadas e definidas pelas equações 4.33 a 4.61 de acordo com o parâmetro p , como exemplificado nas tabelas da seção 4.9.2.

Constroem-se de forma análoga os outros elemento finitos aqui trabalhados. De forma geral um elemento finito hierárquico também denomina-se "elemento computacional".

Continuidade em uma malha não conforme

Quando alguns elementos de uma malha são divididos, obtendo-se uma malha não conforme, a continuidade do espaço de interpolação de elementos finitos associado é garantida impondo uma restrição de dependência entre algumas bases. Por exemplo, sejam dois elementos E_1 e E_2 com uma aresta A_r em comum e seja E_1 dividido em dois subelementos e_1 e e_2 , conforme descrito na figura 5.5, então existirá uma aresta pequena a_r de um subelemento e_1 de E_1 contida na aresta grande A_r de E_2 . Neste caso, para uma base ψ_r^A de E_2 associada à aresta A_r , não existirá uma base ψ_r^a de e_1 associada ao lado pequeno a_r de modo que ambas sejam contínuas sobre $a_r \subset A_r$. Para resolver este problema primeiro designe-se a mesma ordem de

mite mudar para uma conectividade pai ou para uma conectividade de dimensão maior. Posto que restrições acontecem entre lados distintos deve-se associar de forma conveniente, para cada conectividade ou lado, uma conectividade ou lado de nível menor (lado grande) ou dimensão maior.

arestas associadas a cantos				
	conectiv	dim 1	conectiv	dim 1
1	0/1	0/8	1/0	1/8
2	0/3	0/11	1/2	1/9
3	0/4	0/12	1/5	1/13
4	2/1	2/9	3/0	3/11
5	2/3	2/10	3/2	3/10
6	2/6	2/14	3/7	3/15
7	4/0	4/12	5/1	5/13
8	4/5	4/16	5/4	5/16
9	4/7	4/19	5/6	5/17
10	6/2	6/14	7/3	7/15
11	6/5	6/17	7/4	7/19
12	6/7	6/18	7/6	7/18

Tabela 5.11: Conectividade de dimensão maior associadas a cantos

Com o objetivo de identificar as restrições que ocorrem entre lados de diferentes dimensões de elementos adjacentes, ou melhor dito, entre as funções de forma desses lados, associam-se lados de dimensão maior aos lados de um elemento. Assim, por exemplo, para uma aresta de um elemento, associa-se a face desse elemento que contém essa aresta. Porém, pode existir mais de uma face associada para uma dada aresta a . Por exemplo, para o caso de um hexaedro dividido, figura 5.4, há duas faces possíveis de se associar à aresta $r1$ do subelemento 0 (conectividade 0/9), acompanhe-se a figura 4.10 e a tabela 4.27, estas são as faces F0 ou lado 20, e a face F2 ou lado 22. A face F2 do subelemento 0 aponta para a face F4 do vizinho subelemento 1, e portanto não haverá qualquer restrição por este lado. Já a face F0 do elemento pai, que contém a face F0 do subelemento 0, pode ter um vizinho ao qual a aresta $r1$ do subelemento 0 será restrita.

O mesmo acontece quando quer-se associar a um dado canto, uma aresta do mesmo elemento que o contenha. Deve-se estabelecer um critério apropriado para esta escolha. Isto deve

ser baseado no fato de que as restrições devem ter uma hierarquia:

- a) de maior para menor nível de elementos e
- b) de lado de dimensão menor para lado de dimensão maior

faces associadas a cantos e arestas				
	conectiv	dim 2	conectiv	dim 2
1	0/1,0/8	0/M(20,21)	1/0,1/8	1/M(20,21)
2	0/3,0/11	0/M(20,24)	1/2,1/9	1/M(20,22)
3	0/4,0/12	0/M(21,24)	1/5,1/13	1/M(21,22)
4	0/2,0/9,0/10	0/20	1/3,1/10,1/11	1/20
5	0/5,0/13,0/16	0/21	1/4,1/12,1/16	1/21
6	0/7,0/15,0/19	0/24	1/6,1/14,1/17	1/22
7	2/1,2/9	2/M(20,22)	3/2,2/10	3/M(20,23)
8	2/3,2/10	2/M(20,23)	3/0,2/11	3/M(20,24)
9	2/6,2/14	2/M(22,23)	3/7,2/15	3/M(23,24)
10	2/0,2/8,2/11	2/20	3/1,3/8,3/9	3/20
11	2/5,2/13,2/17	2/22	3/6,3/14,3/18	3/23
12	2/7,2/15,2/18	2/23	3/4,3/12,3/19	3/24
13	4/0,4/12	4/M(21,24)	5/1,5/13	5/M(21,22)
14	4/5,4/16	4/M(21,25)	5/4,5/16	5/M(21,25)
15	4/7,4/19	4/M(24,25)	5/6,5/17	5/M(22,25)
16	4/1,4/8,4/13	4/21	5/0,5/8,5/12	5/21
17	4/3,4/11,4/15	4/24	5/2,5/9,5/14	5/22
18	4/6,4/17,4/18	4/25	5/7,5/18,5/19	5/25
19	6/2,6/14	6/M(22,23)	7/3,7/15	7/M(23,24)
20	6/5,6/17	6/M(22,25)	7/6,7/18	7/M(23,25)
21	6/7,6/18	6/M(23,25)	7/4,7/19	7/M(24,25)
22	6/1,6/9,6/13	6/22	7/0,7/11,7/12	7/23
23	6/3,6/10,6/15	6/23	7/2,7/10,7/14	7/24
24	6/4,6/16,6/19	6/25	7/5,7/16,7/17	7/25

Tabela 5.12: Conectividade de dimensão maior para cantos e arestas

A tabela 5.11 transfere lados de dimensão 0 para lados de dimensão 1. A tabela 5.12 associa lados de dimensão 0 e 1 para lados de dimensão 2. Para determinar quando uma face pode ser restrita, precisa-se analisar a posição relativa do elemento pai dentro do elemento "avô", ou do elemento avô dentro do elemento "bisavô", etc.

Para determinar a face pela qual o canto ou aresta pode ser restrita, aplica-se o seguinte critério. Calcula-se para cada face quantos níveis pode-se subir pela face, aplicando a associação entre conectividades. A face com maior número de níveis associados contém as arestas e cantos

possíveis de serem restritos. Este é o significado do símbolo $M(F, G)$, onde F e G denotam duas faces do elemento com uma aresta comum.

D) Elemento pai de um subelemento por um de seus lados

O lado l de um elemento e deve ser restrito quando existe um lado L de um outro elemento E adjacente que o contém, isto é $l \subset L$. Neste caso ambos elementos e e E devem fazer parte da malha computacional. Onde, uma "malha computacional" é uma partição unitária do domínio formada por elementos computacionais. Pelo exposto na seção 5.4.1, percorrendo o ciclo de conectividades que contém o lado l , não é possível achar o lado L para quem l deve ser restrito.

cantos								
subelementos 0,1,2,3,4,5,6,7								
conectiv.	0/0	1/1	2/2	3/3	4/4	5/5	6/6	7/7
Pai	F/0	F/1	F/2	F/3	F/4	F/5	F/6	F/7

Tabela 5.13: Conectividade pai associada ao canto do subelemento

Uma forma de chegar a L a partir de e/l é associando convenientemente à conectividade e/l uma conectividade pai P_e/l_p onde e é um subelemento de P_e e l_p um lado de P_e escolhido adequadamente e que contém l , isto é $l \subset l_p$.

arestas			
sub 0			
conectiv.	0/4	0/6	0/7
Pai	F/4	F/6	F/7
sub 1			
conectiv.	1/4	1/5	1/8
Pai	F/4	F/5	F/8
sub 2			
conectiv.	2/5	2/6	2/8
Pai	F/5	F/6	F/8
sub 3			
conectiv.	3/7	3/8	3/9
Pai	F/7	F/8	F/9

Tabela 5.14: Conectividade do elemento pai associada com aresta do subelemento

As tabelas 5.13, 5.14 mostram a relação entre conectividades dos subelementos e conec-

tividades pai associadas. Na terminologia usual, o pai do elemento e pelo seu lado l existe e é igual a P_e pelo lado l_p . Nas tabelas, F indica o pai do subelemento. Na tabela 5.13 são dados os cantos dos subelementos que tem conectividade pai associada.

5.5 Divisão do prisma

A figura 5.6-a mostra a numeração local dos nós de canto de um prisma. Um elemento geométrico pirâmide é declarado dando-se os 6 nós de canto na seqüência mostrada na figura 5.6. A tabela 5.15 mostra a definição dos cantos do prisma de referência.

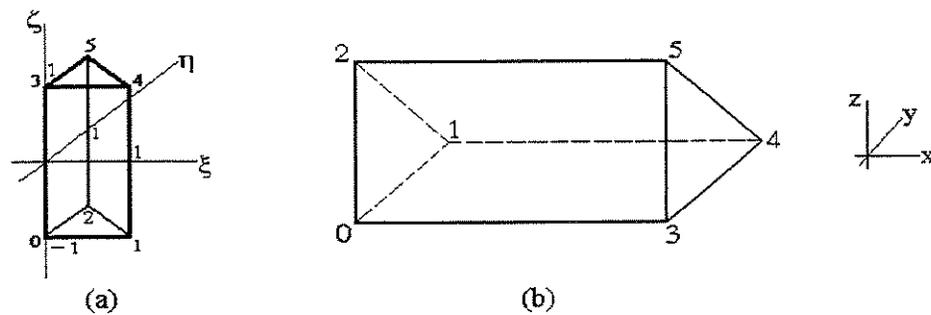


Figura 5.6: Prisma geométrico

Os elementos deformados são obtidos como uma imagem do elemento mestre por meio de uma transformação. Então, existe uma transformação entre o prisma de referência 5.6-a e o prisma da figura 5.6-b, e que esta leva cantos em cantos segundo a numeração local respectiva.

cantos	0	1	2	3	4	5
ξ	0	1	0	0	1	0
η	0	0	1	0	0	1
ζ	-1	-1	-1	1	1	1

Tabela 5.15: Coordenadas do prisma de referência

Por exemplo, uma transformação T como esta pode ser calculada por meio da identificação dos respectivos vértices seguindo a numeração local dos cantos, isto é $T(c_i) = \bar{c}_i$,

onde c_i é o canto local i do elemento mestre e \bar{c}_i é o canto local i do elemento deformado a ser obtido por meio de T .

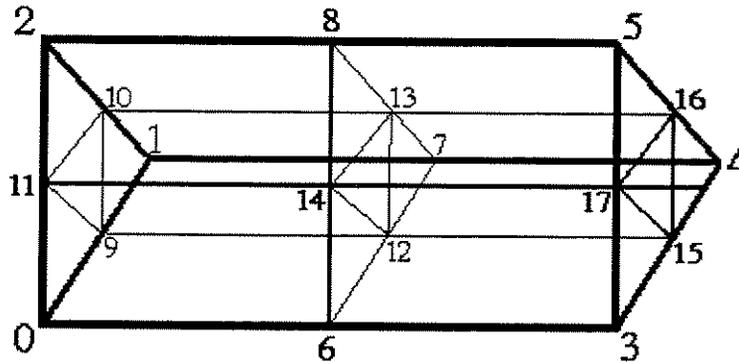


Figura 5.7: Divisão do prisma : numeração local

A figura 5.7, mostra como um prisma geométrico é dividido em 8 prismas semelhantes. Todos os cantos dos subelementos são localizados no meio de cada lado do prisma pai. A tabela 5.16 especifica os 8 subelementos prismáticos.

subelemento	cantos					
	0	1	2	3	4	5
0	0	9	11	6	12	14
1	9	1	10	12	7	13
2	11	10	2	14	13	8
3	14	13	12	11	10	9
4	6	12	14	3	15	17
5	12	7	13	15	4	16
6	14	13	8	17	16	5
7	17	16	15	14	13	12

Tabela 5.16: Numeração local dos subelementos do prisma

Os dados relativos à vizinhança entre subelementos, associação a lados de maior dimensão e elemento pai de um subelemento por um lado seguem-se facilmente através da implementação do elemento prisma feita no ambiente PZ. As idéias são similares aquelas exemplificadas para o elemento hexaedro, com algumas variações devido à particular geometria do elemento.

5.5.1 Divisão unificada do prisma, tetraedro e pirâmide

Nesta seção, documenta-se a divisão conjunta dos elementos tridimensionais tetraedro, prisma e pirâmide. Esta proposta traz como consequência que o menor ângulo dos subelementos não é inferior ao menor ângulo do elemento dividido.

I) Fragmentação do prisma

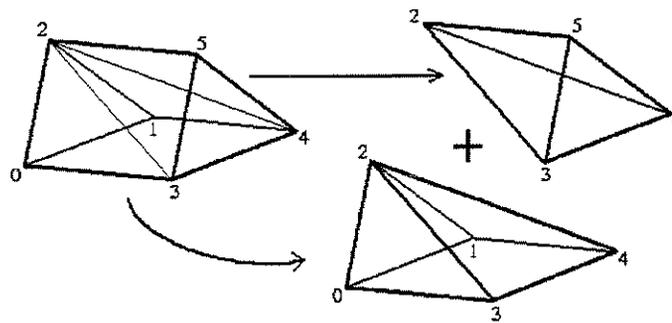


Figura 5.8: Um prisma = um tetraedro + uma pirâmide

Como observa-se na figura 5.8 o prisma pode ser decomposto em um tetraedro e uma pirâmide por um plano de corte passando por 3 cantos não contidos numa mesma face. Na figura 5.8 o plano corta os cantos 2, 3 e 4 do prisma para P_p , obtendo-se o tetraedro T_{2345} de cantos 2, 3, 4 e 5 e a pirâmide P_{03412} de cantos 0, 1, 2, 3 e 4, de acordo com a tabela 5.17 e equação 5.5. A interseção destes dois subelementos é a face determinada pelo plano de corte que passa pelos cantos 2, 3 e 4. Reciprocamente, qualquer elemento tetraedro ou pirâmide pode ser completado desta maneira para formar um prisma.

$$P_p = T_{2345} \cup P_{03412} \quad ; \quad T_{2345} \cap P_{03412} = \phi \quad (5.5)$$

elemento	cantos de definição					
prisma	0	1	2	3	4	5
tetraedro	2	3	4	5		
pirâmide	0	3	4	1	2	

Tabela 5.17: Cantos de definição da fragmentação do prisma

II) Divisão incompleta do tetraedro e da pirâmide

É possível compor a divisão conjunta do tetraedro e da pirâmide a partir de um prisma dividido. Considera-se primeiro um prisma dividido segundo a seção 5.5. Em seguida fragmenta-se o prisma pai em um tetraedro e uma pirâmide, segundo o item anterior I, figura 5.8.

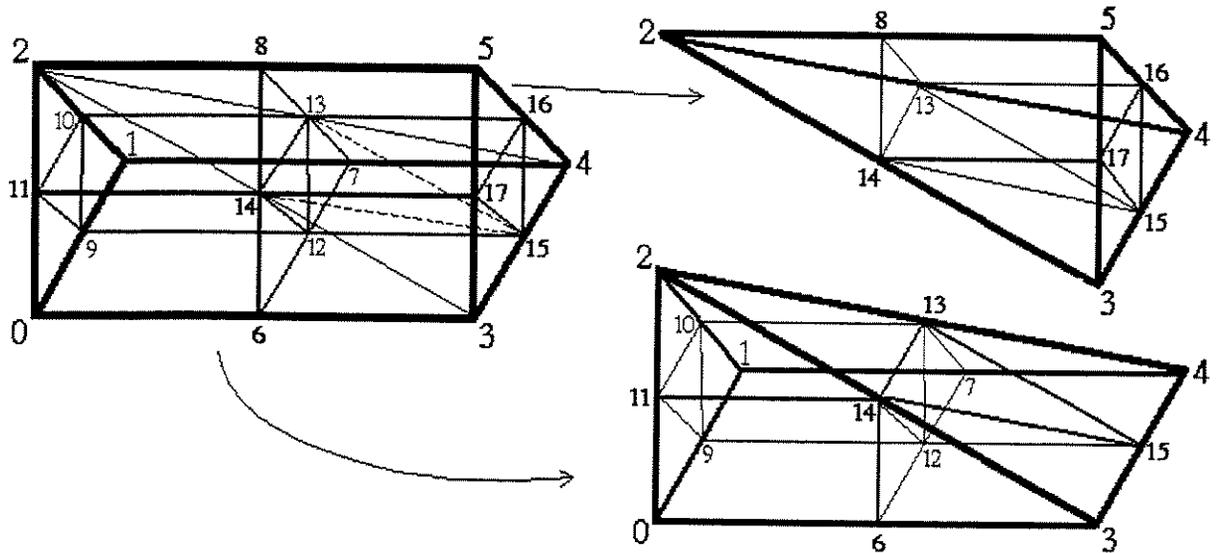


Figura 5.9: Divisão conjunta incompleta do tetraedro e pirâmide

A figura 5.9 mostra o prisma $\overline{012345}$ dividido e fragmentado. Este prisma está dividido em 8 subprismas segundo a tabela 5.16, que acompanha a figura 5.7. Um plano de corte passa-se através dos cantos 2, 3, 4 do prisma, segundo a seção I. Este plano de corte fraciona o prisma dividido em um tetraedro e uma pirâmide, ambos também divididos por causa da divisão original do prisma e do plano de corte da fragmentação.

O plano de corte fragmenta os subprismas 2, 4, 5 e 7, tabela 5.16, dividindo cada um deles em um tetraedro e uma pirâmide. A subdivisão do tetraedro, mostrada na figura 5.9, é dada na tabela 5.18. A subdivisão da pirâmide da figura 5.9 é dada na tabela 5.21.

Desta forma obtêm-se um tetraedro dividido em 3 tetraedros, 1 prisma e 1 pirâmide, e

tetraedro							
sub n ^o	tipo	numero do canto					
		0	1	2	3	4	5
0	tetraedro	2	14	13	8		
1	tetraedro	14	3	15	17		
2	tetraedro	13	15	4	16		
3	prisma	14	13	8	17	16	5
4	pirâmide	17	14	13	16	15	

Tabela 5.18: Divisão do fragmento tetraedro

obtêm-se uma pirâmide dividida em 1 tetraedro, 3 prismas e 3 pirâmides, segundo a figura 5.9. A partir desta decomposição toma-se a divisão definitiva do tetraedro e da pirâmide como é mostrado a seguir.

pirâmide							
sub n ^o	tipo	numero do canto					
		0	1	2	3	4	5
0	prisma	0	9	11	6	12	14
1	prisma	9	1	10	12	7	13
2	pirâmide	11	14	13	10	2	
3	prisma	14	13	12	11	10	9
4	pirâmide	6	3	15	12	14	
5	pirâmide	12	15	4	7	13	
6	tetraedro	15	14	13	12		

Tabela 5.19: Divisão do fragmento pirâmide

5.5.2 Divisão do tetraedro

A figura 5.10-a mostra o tetraedro obtido pela fragmentação do prisma dividido. A partir do tetraedro dividido resultante do fracionamento do prisma, seção 5.5.1 e figura 5.9, obtêm-se a divisão definitiva do tetraedro geométrico, figura 5.10-b.

Para isto basta fragmentar mais uma vez o único prisma $\overline{14-13-8-17-16-5}$ contido no tetraedro da figura 5.10-a, em um tetraedro e uma pirâmide, linhas 4 e 5 da tabela 5.20. Assim a divisão definitiva do tetraedro tem 6 subelementos, sendo 4 tetraedros semelhantes, e duas pirâmides. Os subelementos são identificados dando-se a numeração de seus cantos na tabela 5.20.

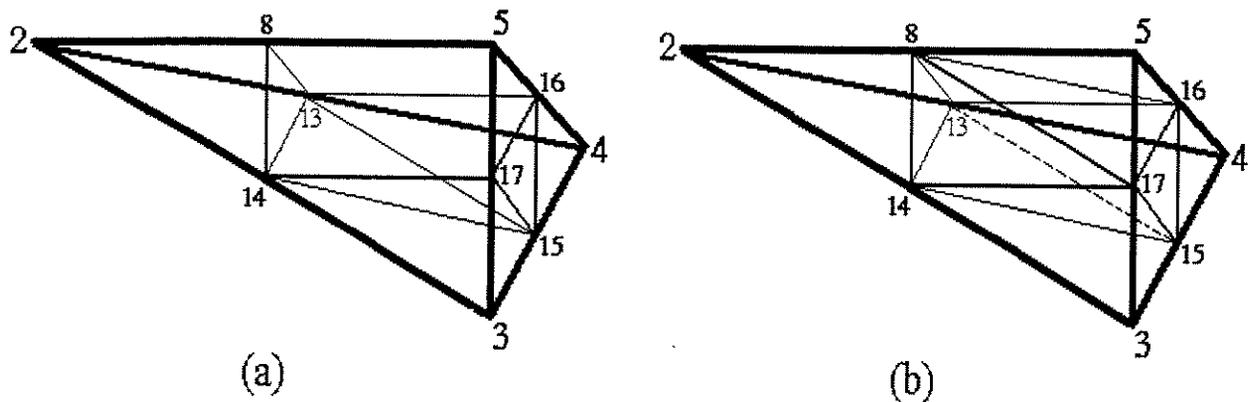


Figura 5.10: Divisão do fragmento tetraedro

subelementos do tetraedro						
sub n ^o	tipo	número do canto				
		0	1	2	3	4
0	tetraedro	2	14	13	8	
1	tetraedro	14	3	15	17	
2	tetraedro	13	15	4	16	
3	tetraedro	8	17	16	5	
4	pirâmide	14	17	16	13	8
5	pirâmide	17	14	13	16	15

Tabela 5.20: Divisão do tetraedro

5.5.3 Divisão da pirâmide

Na figura 5.11-a mostra-se a pirâmide obtida pela fragmentação do prisma dividido. A partir da pirâmide dividida resultante do fracionamento do prisma dividido, seção 5.5.1, obtêm-se a divisão definitiva da pirâmide geométrica, figura 5.11-b. Basta fragmentar os três prismas contidos na pirâmide, mediante um plano de corte passando pelos nós 6, 12, 7, 10 e 11.

A divisão destes prismas pode ser identificada na tabela 5.21. O prisma definido pelos cantos $\overline{0-9-11-6-12-14}$ é dividido nos subelementos 0 e 6 da tabela 5.21. O prisma $\overline{9-1-10-12-7-13}$ é dividido nos subelementos 3 e 8 e o prisma $\overline{14-13-12-11-10-9}$ nos subelementos 5 e 9. A divisão definitiva do tetraedro tem 10 subelementos, sendo 6 pirâmides e 4 tetraedros. A relação de subelementos é dada na tabela 5.21.

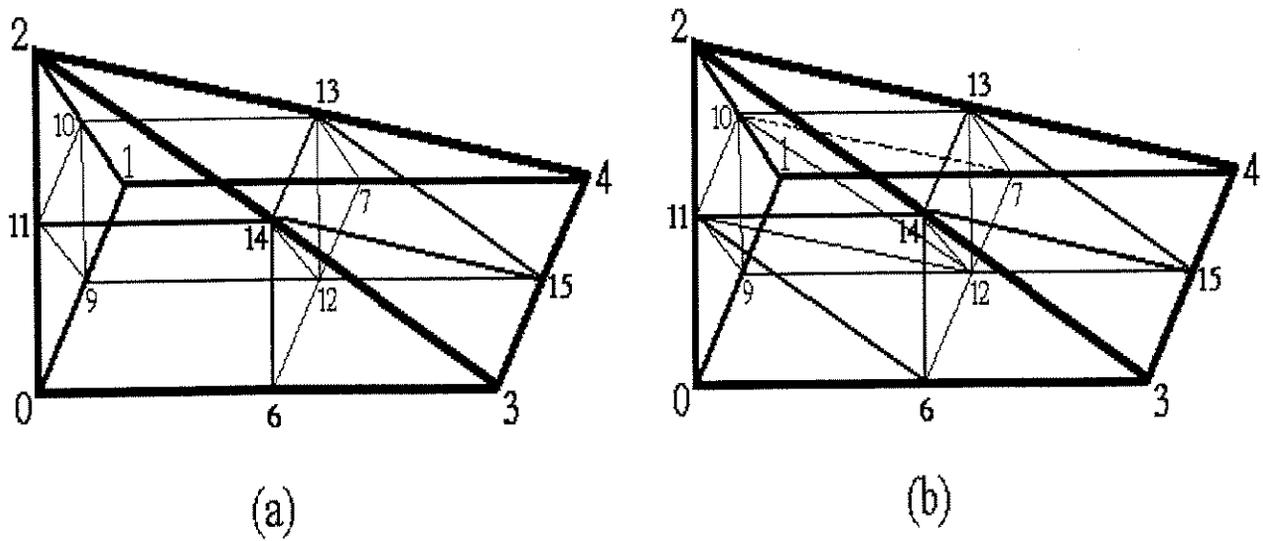


Figura 5.11: Divisão completa do fragmento pirâmide

subelementos da pirâmide							
sub n ^o	tipo	número do canto					
		0	1	2	3	4	5
0	pirâmide	0	6	12	9	11	
1	pirâmide	6	3	15	12	14	
2	pirâmide	12	15	4	7	13	
3	pirâmide	9	12	7	1	10	
4	pirâmide	11	14	13	10	2	
5	pirâmide	14	11	10	13	12	
6	tetraedro	11	6	12	14		
7	tetraedro	15	14	13	12		
8	tetraedro	10	12	7	13		
9	tetraedro	12	11	10	9		

Tabela 5.21: Divisão da pirâmide

5.5.4 Menor ângulo da subdivisão

Considere um prisma P de faces triangulares equiláteras iguais e paralelas. Então todos os subprismas são idênticos entre si e semelhantes ao prisma pai P . Considere as divisões completas do tetraedro e da pirâmide fragmentados do prisma. Então se o prisma é reto, isto é as faces quadrilaterais são retangulares e ortogonais às faces triangulares, todos os subelementos tetraedros são iguais e todos os subelementos pirâmides são iguais. Mesmo que as faces trian-

gulares do prisma não sejam equiláteras, o conjunto de todos os ângulos planos do elemento pai repete-se para todos os subelementos. Isto é facilmente provado levando em conta o paralelismo entre as arestas dos subelementos. Como consequência o menor ângulo dos subelementos obtidos por sucessivas divisões não diminui. Ainda há outros casos em que isto acontece.

I) Limite inferior do menor ângulo do refinamento

Considere um prisma P de faces triangulares iguais e paralelas. Seja D_P o conjunto de todos os subelementos obtidos pela divisão de P , da divisão dos subelementos de P , dos filhos dos subelementos de P etc. Seja ainda, P fragmentado em um tetraedro T e uma pirâmide P_i . Então, obviamente, qualquer tetraedro ou pirâmide obtidos por sucessivas divisões de T ou P_i ou de seus subelementos, corresponderá à fragmentação de algum prisma contido em D_P . Como todos os prismas em D_P são semelhantes, também são semelhantes os tetraedros ou pirâmides obtidos destes por fragmentação. De fato qualquer elemento pirâmide ou tetraedro contido em T ou P_i pode ser completado para obter-se um prisma em D_P .

Observa-se também, que cada canto de um subelemento é tomado no ponto médio das arestas que são paralelas às arestas do elemento pai. Portanto o menor ângulo γ dos subelementos, neste caso, é limitado inferiormente, isto é, γ não é menor que um determinado ângulo constante para todas as divisões e subdivisões de elementos.

5.6 Divisão do tetraedro

Baseada na divisão conjunta do prisma tetraedro e pirâmide define-se a divisão do tetraedro mestre seguindo uma numeração local consistente com aquela da divisão fragmentada.

5.6.1 Tetraedro de referência

O tetraedro mestre T_e definido pela equação 5.6 é mostrado na figura 5.12. Os vértices deste elemento estão declarados na tabela 5.22

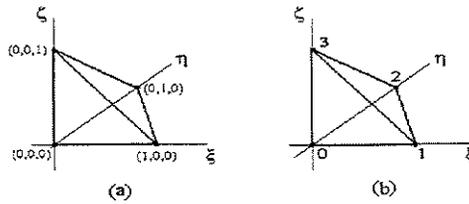


Figura 5.12: Tetraedro de referência

Um tetraedro não degenerado¹ é identificado quando são dados os 4 nós globais de canto na ordem mostrada na figura 5.12-b.

$$Te = \{(\xi, \eta, \zeta) / 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, 0 \leq \zeta \leq 1 - \xi - \eta\} \quad (5.6)$$

coordenadas	cantos			
—	0	1	2	3
ξ	0	1	0	0
η	0	0	1	0
ζ	0	0	0	1

Tabela 5.22: Nós de canto do tetraedro padrão

5.6.2 Divisão do tetraedro de referência

O tetraedro mestre é dividido em 4 tetraedros e duas pirâmides. A divisão geométrica é mostrada na figura 5.13. A numeração local de cada elemento filho é dada na tabela 5.23.

Divisão completa do tetraedro						
Subelementos	tipo	nó 0	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4
filho 0	tetraedro	0	4	6	7	
filho 1	tetraedro	4	1	5	8	
filho 2	tetraedro	6	5	2	9	
filho 3	tetraedro	7	8	9	3	
filho 4	pirâmide	4	8	9	6	7
filho 5	pirâmide	8	4	6	9	5

Tabela 5.23: Numeração local dos subelementos

¹ Um tetraedro é não degenerado somente se os 4 cantos são não co-planares.

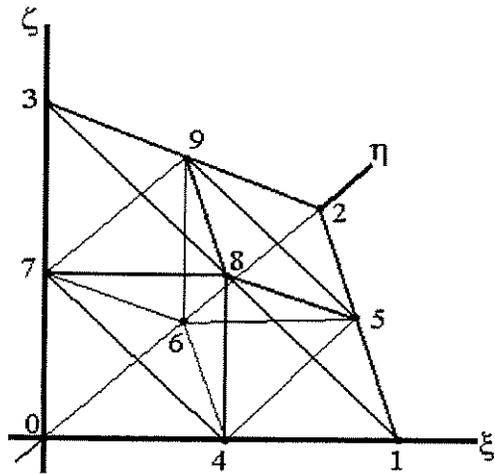


Figura 5.13: Divisão do tetraedro : numeração local

Esta divisão é consistente com a divisão completa do tetraedro fragmentado do prisma dividido, de acordo com a tabela 5.20 e figura 5.10-b.

A figura 5.14 mostra a divisão do tetraedro em fragmentos elementares.

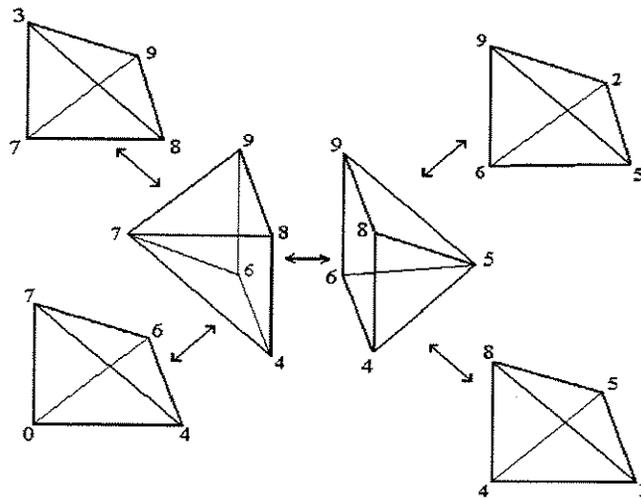


Figura 5.14: Fragmentação dos subelementos do tetraedro

I) Vizinhaça dos subelementos

Da mesma maneira, conforme foi estabelecido para o caso do hexaedro, seção 5.4.1, é definida a relação cíclica entre as conectividades dos subelementos do tetraedro. A tabela 5.24 reúne a relação de conectividades entre os subelementos dos tetraedros para cantos arestas e faces.

Subelementos					
tetraedros				pirâmides	
0	1	2	3	4	5
1-1-0	0-5-1	0-0-2	0-0-3	0-0-1	0-1-3
2-4-3	2-2-1	1-5-4	1-4-1	1-5-0	1-4-0
3-4-4	3-3-1	3-3-2	2-4-2	2-5-3	2-2-0
5-5-6	6-5-10	4-5-11	4-4-10	3-5-2	3-2-3
8-4-9	7-5-5	7-4-7	5-4-6	4-3-0	4-1-2
9-4-12	9-5-9	8-5-12	6-4-11	5-1-7	5-4-5
12-4-17	13-5-14	11-5-16	10-4-15	6-5-8	6-4-8
				7-5-7	7-2-7
				8-0-5	8-3-5
				9-0-8	9-1-9
				10-3-4	10-1-6
				11-3-6	11-2-4
				12-0-9	12-2-8
				13-5-13	13-4-13
				15-3-10	14-1-13
				17-0-12	16-2-11

Tabela 5.24: Conectividades entre subelementos

5.6.3 Lados de dimensão maior

A definição para os lados de dimensão maior, pode ser melhor acompanhada observando as figuras 5.15 e 5.16. Segundo a numeração local adotada para os 5 subelementos, figuras 5.15 e 5.16, as tabelas 5.25 e 5.26 mostram as conectividades de dimensão maior designadas para cada lado dos subelementos.

As linhas contendo as conectividades são numeradas. Assim a linha 1 da tabela 5.25 indica que a conectividade 1, de dimensão 0 do elemento 0, tem associada a conectividade 4 de dimensão 1 do elemento 0. Desta forma se a conectividade 0/1 não depende de uma

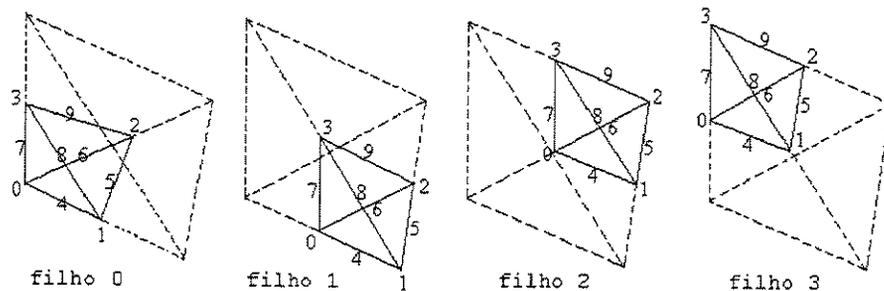


Figura 5.15: Conectividades locais dos subelementos 0,1,2 e 3

conectividade da mesma dimensão 0, procura-se uma dependência entre as conectividades de dimensão 1 que a contenham. Dentro do ciclo que contém 0/4 é pesquisada uma possível dependência da conectividade 0/1. Se todavia não existe uma conectividade de dimensão um de

subelementos : tetraedros				
arestas associadas a cantos				
	conectiv	dim 1	conectiv	dim 1
1	0/1	0/4	1/0	1/4
2	0/2	0/6	1/2	1/5
3	0/3	0/7	1/3	1/8
4	2/0	2/6	3/0	3/7
5	2/1	2/5	3/1	3/8
6	2/3	2/9	3/2	3/9
faces associadas a cantos e arestas				
	conectiv	dim 2	conectiv	dim 2
7	0/1 e 0/4	0/M(10,11)	1/0 e 1/4	1/M(10,11)
8	0/2 e 0/6	0/M(10,13)	1/2 e 1/5	1/M(10,12)
9	0/3 e 0/7	0/M(12,13)	1/3 e 1/8	1/M(11,12)
10	0/5	0/10	1/6	1/10
11	0/8	0/11	1/7	1/11
12	0/9	0/13	1/9	1/12
13	2/1 e 2/5	2/M(10,12)	3/0 e 3/7	3/M(11,13)
14	2/0 e 2/6	2/M(10,13)	3/1 e 3/8	3/M(11,12)
15	2/2 e 2/9	2/M(12,13)	3/2 e 3/9	3/M(12,13)
16	2/4	2/10	3/4	3/11
17	2/7	2/13	3/5	3/12
18	2/8	2/12	3/6	3/13

Tabela 5.25: Lados de dimensão maior para subelementos tetraedros

quem 0/1 dependa, pesquisa-se uma dependência de 0/1 entre as conectividades de dimensão 2

que contenham 0/1. Na linha número 7, da tabela 5.25, aparece uma conectividade de dimensão 2 associada a 0/1. O símbolo M(10,11) indica que deverá escolher-se a melhor entre as faces 10 ou 11 do subelemento 0. Este "melhor" significa qual das faces tem um número maior de pais associados, como já mencionado.

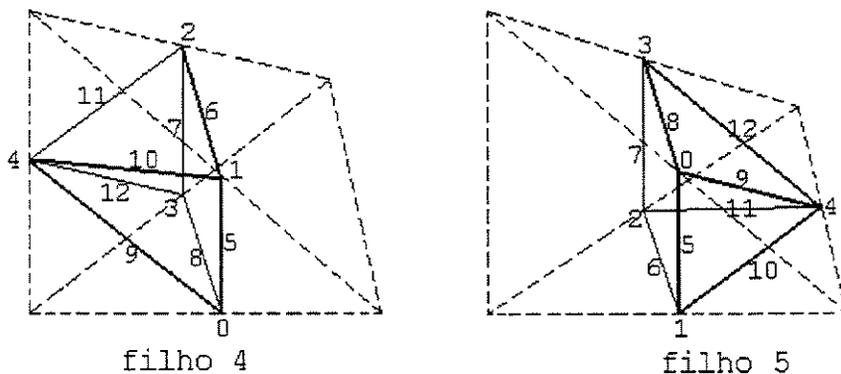


Figura 5.16: Conectividades locais dos subelementos 4 e 5

Na figura 5.15 mostra-se a numeração local de cantos e arestas dos 4 primeiros subelementos. Os lados dos subelementos contidos nos lados da mesma dimensão do pai, tem a mesma numeração local que este, como pode ser visto quando são comparadas a tabela 5.23 com as figuras 5.12, 4.11, 5.15 e 5.17.

subelementos : pirâmides				
faces associadas a cantos e arestas				
	conectiv	dim 2	conectiv	dim 2
1	4/0	0/M(10,11)	5/0	1/M(11,12)
2	4/1	3/M(11,12)	5/1	1/M(10,11)
3	4/2	3/M(12,13)	5/2	2/M(10,13)
4	4/3	0/M(10,13)	5/3	2/M(12,13)
5	4/4	0/M(11,13)	5/4	1/M(10,12)
6	4/5 e 4/9 e 4/10	4/14	5/5	1/11
7	4/6	3/12	5/6 e 5/10 e 5/11	5/15
8	4/7 e 4/11 e 4/12	4/16	5/7	2/13
9	4/8	0/10	5/8 e 5/9 e 5/12	5/17

Tabela 5.26: Lados de dimensão maior para subelementos pirâmides

A figura 5.16 mostra a numeração local de cantos e arestas dos subelementos 4 e 5.

Observa-se que estas conectividades são coerentes com as conectividades da pirâmide segundo a tabela 4.37 e figura 4.18.

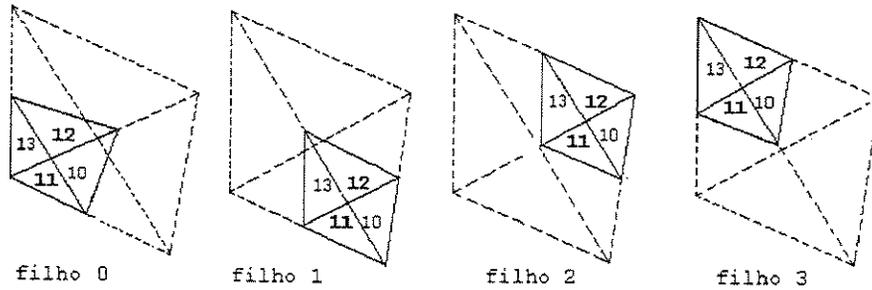


Figura 5.17: Lados de dimensão 2 dos subelementos 0,1,2 e 3

A tabela 5.26 apresenta as faces associadas a lados de dimensão 0 e 1.

5.6.4 Conectividade associada ao lado de um subelemento

A associação da conectividade pai de um subelemento acompanha as tabelas 5.27 e 5.28 e a figura 5.15. Para as arestas, cada subelemento tem 3 conectividades associadas para tetraedros e 5 para pirâmides. As conectividades ignoradas não tem associação.

cantos				
subelementos 0,1,2,3				
conectiv.	0/0	1/1	2/2	3/3
Pai	F/0	F/1	F/2	F/3

Tabela 5.27: Conectividade associada a um canto

Para os subelementos 4 e 5 não há como associar um canto ou aresta do pai que contenha o correspondente lado do filho. Nenhum canto do pai contém algum canto do subelemento 4 ou 5. Nenhuma aresta do pai contém alguma aresta do subelemento 4 ou 5. Existem faces do pai que contém alguma das faces dos filhos 4 ou 5.

As conectividades associadas às faces dos subelementos 4 e 5, mostradas na figura 5.16, são dadas na tabela 5.29. Como definido nas tabelas 4.32 e 4.37, observa-se na figura 4.18

arestas												
subelementos	sub 0			sub 1			sub 2			sub3		
conectividade	0/4	0/6	0/7	1/4	1/5	1/8	2/5	2/6	2/9	3/7	3/8	3/9
conec. pai	F/4	F/6	F/7	F/4	F/5	F/8	F/5	F/6	F/9	F/7	F/8	F/9

Tabela 5.28: Conectividade associada a uma aresta

que para os subelementos 0, 1, 2 e 3, as faces contidas nas faces da pirâmide pai tem a mesma numeração que este. A face inferior, é o lado número 10, a face frontal esquerda, é o lado número 11, a frontal direita o lado número 12 e a posterior o número 13, olhar a figura 5.17.

faces			
	sub 0		
conectiv.	0/10	0/11	0/13
Pai	F/10	F/11	F/13
	sub 1		
conectiv	1/10	1/11	1/12
Pai	F/10	F/11	F/13
	sub 2		
conectiv	2/10	2/12	2/13
Pai	F/10	F/12	F/13
	sub 3		
conectiv	3/11	3/12	3/13
Pai	F/11	F/12	F/13
	sub 4		
conectiv	4/14	4/16	-
Pai	F/11	F/13	-
	sub 5		
conectiv	5/15	5/17	-
Pai	F/10	F/12	-

Tabela 5.29: Conectividade associada a uma face

5.6.5 Indexação de dados do elemento mestre

Os dados associados a elementos tridimensionais são variados. Convém a utilização de indexação matricial para uma boa manipulação dos mesmos, pois estes dados são usados repetidamente por diferentes métodos. A seguir apresenta-se vários exemplos para o caso do tetraedro. A matriz dada na expressão 5.7, relaciona os cantos dos subelementos associados à numeração local do elemento pai. A linha i corresponde ao subelemento i , a coluna j ao canto j do subelemento i . A entrada (i, j) igual a -1 indica que o canto j do subelemento i não existe. Aqui

sempre se usa $i, j \geq 0$. Acompanhe com a figura 5.13 a indexação a seguir, que corresponde ao elemento mestre dividido.

Este dado, por exemplo, se usa para determinar a numeração global dos cantos dos subelementos no método que divide o elemento geométrico. No capítulo 7 serão mencionados os métodos que implementam e utilizam esta indexação, como por exemplo *Divide(argumentos...)*.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 2 & 9 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 6 & 9 & 5 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Segundo a divisão adotada neste trabalho, a cada face de um elemento dividido correspondem 4 subelementos. As linha i da matriz 5.8 refere-se à face i do elemento pai e cada coluna a um subelemento dele, tendo uma das faces contida na face i do pai. Deste modo, o subelemento 5 intercepta as faces 0 e 2 do elemento pai, matriz 5.8.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

As coordenadas dos pontos médios das arestas não constituem necessariamente nós geométricos. Quando um elemento é dividido, estes pontos passam a ser nós geométricos. A linha i da matriz 5.9 é o nó do meio da aresta i ou lado $i + 4$ do elemento mestre.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Particione-se cada face do elemento segundo a numeração dos lados que esta tem. A matriz 5.10 agrupa os lados da face i na linha i . Assim, cada lado de dimensão 2 tem associado 3 cantos 3 arestas e uma face, total de 7 lados. Na matriz 5.10, por exemplo, indica-se que a

face 1 tem associada os cantos 0, 1, 3 as arestas 4, 8, 7 e a face 11 do tetraedro.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 8 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 9 & 7 & 13 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Atualmente, as matrizes de indexação foram implementadas na correspondente classe do elemento computacional.

5.7 Divisão da pirâmide

Baseada na divisão conjunta do prisma tetraedro e pirâmide define-se a divisão da pirâmide referencial, seguindo uma numeração local consistente com aquela da divisão fragmentada.

D) Pirâmide de referência

A pirâmide mestre P_i definida pela equação 5.11 é mostrada na figura 5.18. Identifica-se uma pirâmide deformada (não degenerada) quando são dados os 5 nós globais de canto na seqüência mostrada na figura 5.18.

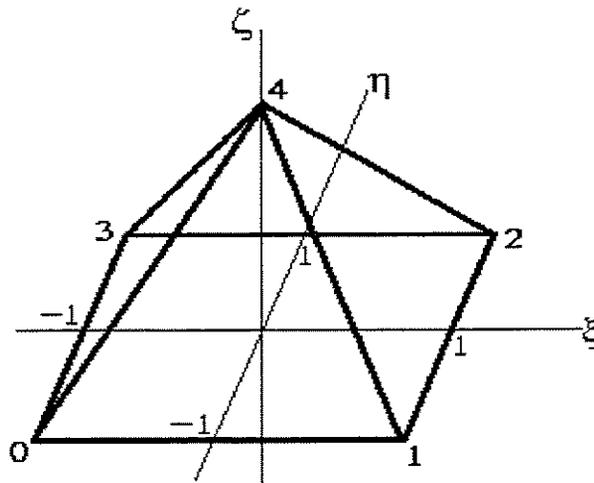


Figura 5.18: Pirâmide de referência

$$P_i = \{(\xi, \eta, \zeta) / \zeta - 1 \leq \xi, \eta \leq 1 - \zeta, 0 \leq \zeta \leq 1\} \quad (5.11)$$

A tabela 5.30 relaciona as coordenadas nodais da pirâmide de referência.

coordenadas	cantos				
-	0	1	2	3	4
ξ	-1	1	1	-1	0
η	-1	-1	1	1	0
ζ	0	0	0	0	1

Tabela 5.30: Nós de canto da pirâmide padrão

5.7.1 Divisão da pirâmide de referência

A pirâmide é dividida em 6 pirâmides e 4 tetraedros. A divisão é mostrada na figura 5.19. Esta divisão corresponde a divisão completa da pirâmide fragmentada do prisma. Da mesma forma que para a divisão do tetraedro a divisão da pirâmide é consistente com a divisão completa da pirâmide fragmentada do prisma dividido, de acordo com a tabela 5.21 e figura 5.11-b. Assim uma pirâmide pode ser completada com um tetraedro para formar um prisma e reciprocamente um tetraedro pode ser completado com uma pirâmide para formar um prisma.

subelementos	tipo	nó 0	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4
filho 0	pirâmide	0	5	13	8	9
filho 1	pirâmide	5	1	6	13	10
filho 2	pirâmide	13	6	2	7	11
filho 3	pirâmide	8	13	7	3	12
filho 4	pirâmide	9	10	11	12	4
filho 5	pirâmide	10	9	12	11	13
filho 6	tetraedro	9	5	13	10	
filho 7	tetraedro	6	10	11	13	
filho 8	tetraedro	12	13	7	11	
filho 9	tetraedro	13	9	12	8	

Tabela 5.31: Numeração local dos subelementos da pirâmide mestre

A numeração local de cada filho é dada na tabela 5.31. A figura 5.20 mostra fragmentos da divisão em subelementos piramidais. O fragmento central ainda contém 4 tetraedros e uma pirâmide com o canto local 4 para abaixo. A figura 5.21, mostra o fragmento central da figura 5.20 desacoplado nos subelementos restantes.

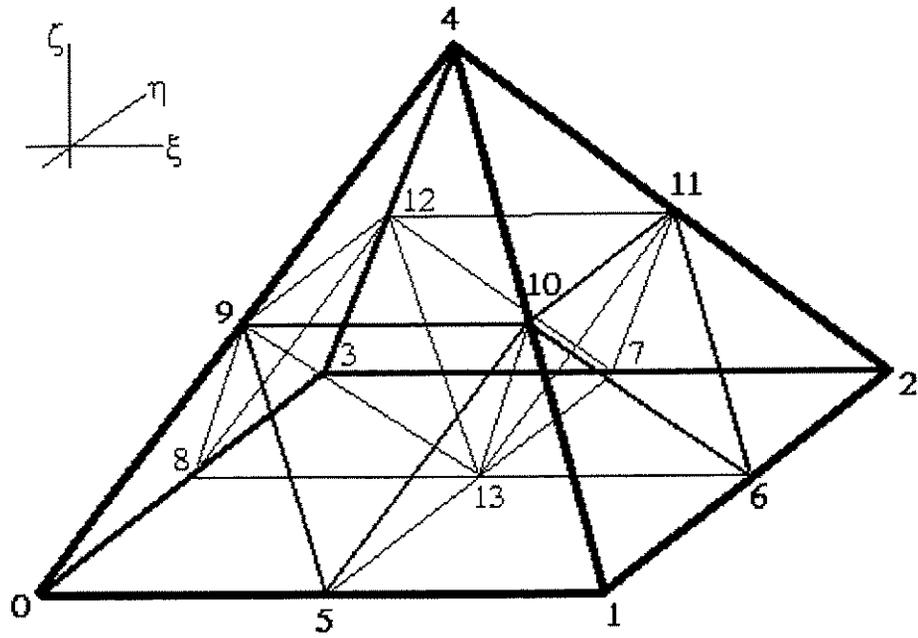


Figura 5.19: Divisão da pirâmide mestre

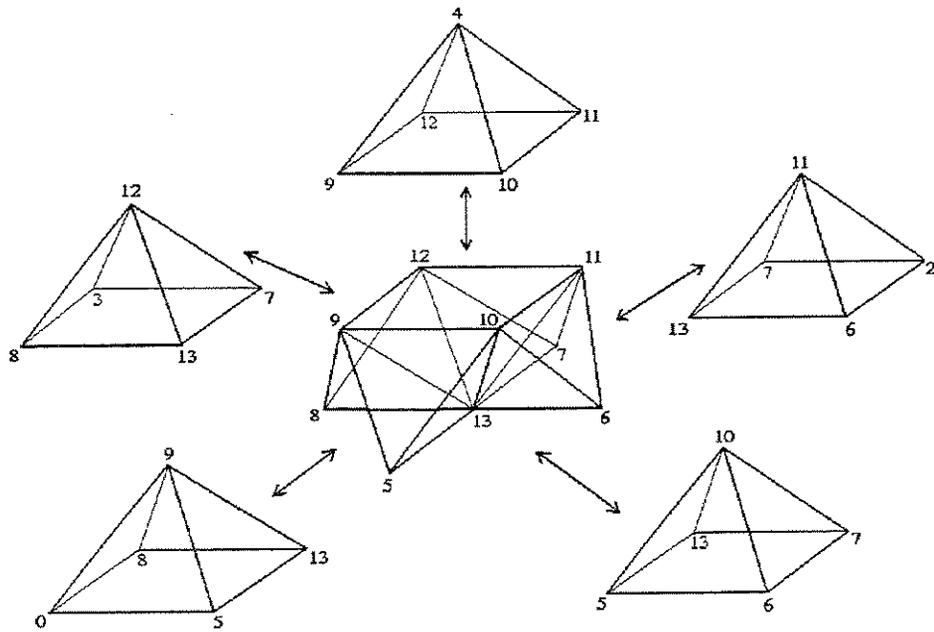


Figura 5.20: Pirâmide fragmentada - fracionamento preliminar

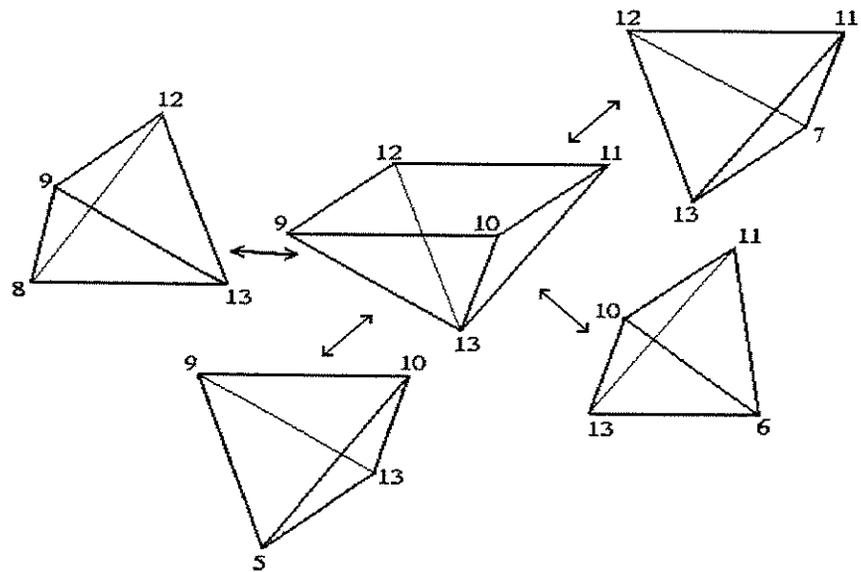


Figura 5.21: Decomposição do fragmento central da figura 5.20

Os demais dados estáticos relativos a este elemento podem ser observados na sua implementação no ambiente PZ.

Com isso conclui-se a apresentação dos procedimentos de refinamento das malhas gerais que serão utilizadas neste trabalho. A maneira como foram implementadas, permite o uso totalmente geral da versão h - p -adaptativa do Método dos Elementos finitos.

Capítulo 6

Refinamento h - p adaptativo

Neste capítulo faz-se uma revisão dos aspectos matemático teóricos relacionados com o refinamento $h - p$ adaptativo. Formalizam-se os conceitos relativos às restrições entre os espaços gerados pelas funções de forma associadas aos lados de um elemento. Definem-se as transformações utilizadas para o cálculo das restrições entre cantos, arestas e faces. É deduzido o cálculo dos coeficientes de dependências entre bases para ordem p genérico.

6.1 Refinamento p adaptativo

Sabe-se que cada aresta, face ou volume de um elemento hierárquico de ordem p tem associadas funções de forma de grau p . Como foi mostrado, as funções de forma do elemento hierárquico são linearmente independentes, qualquer que seja a ordem de aproximação finita p do elemento. Para um elemento de ordem p completo pode-se aumentar o número de funções de forma hierárquicas associadas a uma aresta, uma face ou interior do elemento. Na refinamento p adaptativo dois elementos vizinhos podem ter ordens diferentes de aproximação. Isto significa que o espaço de funções de interpolação entre elementos adjacentes é distinto. Para obter a compatibilização entre arestas ou faces de dois elementos vizinhos de graus de interpolação distintos considera-se o mesmo número de funções de forma sobre o lado comum. Isto é conseguido aumentando o número de funções do lado comum para o elemento vizinho de menor ordem, equilibrando assim o grau de interpolação desse lado. Isto é feito atribuindo-se a ordem de interpolação ao nível de lado de elemento. Obviamente, o elemento conterá o espaço polino-

mial de ordem p completo somente se a ordem de interpolação de cada lado é pelo menos igual a p .

6.2 Refinamento h adaptativo

A adaptatividade h , proposta neste trabalho, consiste no agrupamento ou divisão de elementos finitos em uma malha ou partição de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. A adaptatividade p consiste

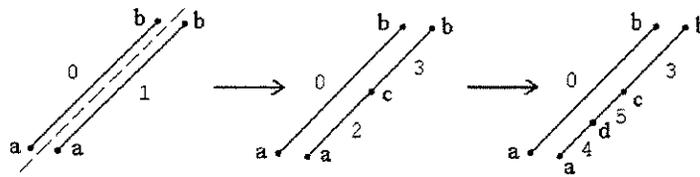


Figura 6.1: Refinamento de dois elementos lineares superpostos

em escolher livremente a ordem de interpolação e compatibilizar o grau dos polinômios para a interface de elementos adjacentes.

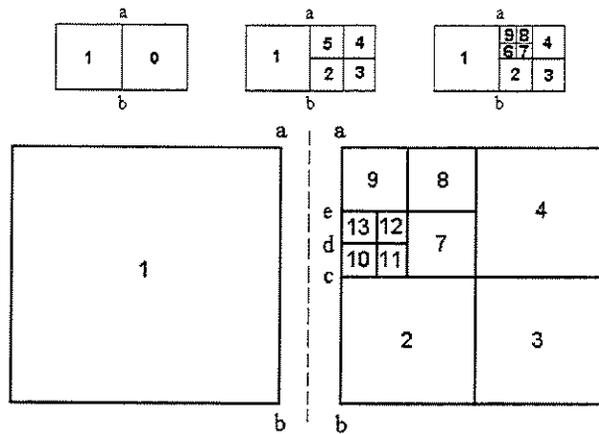


Figura 6.2: Refinamento do elemento quadrilátero

Uma malha $h - p$ adaptativa conterá elementos de diferentes tamanhos e níveis de divisão. Existirão elementos compartilhando seus cantos, arestas e faces com os cantos, arestas e faces

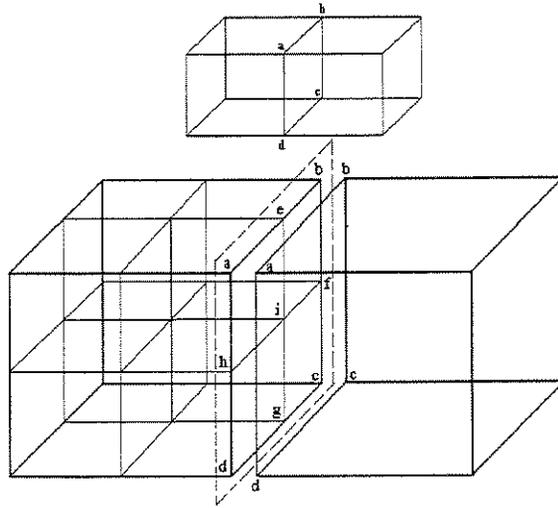


Figura 6.3: Divisão do hexaedro

de vários elementos adjacentes de menor tamanho, como exemplificado nas figuras, 6.1 , 6.2 , 6.3 . A linha pontilhada indica por onde os elementos estão justapostos.

Para que uma malha gere um espaço de funções pelo menos contínuas (funções de classe $C^0(\Omega)$) as funções base dos elementos menores, que não são nulas no canto, aresta ou face comum ao elemento de maior tamanho, deverão apresentar uma dependência (deverão ser restritas) com respeito às funções de base da aproximação do elemento maior contíguo. Certamente, isto constitui um dos fatores de vital importância no desenvolvimento numérico deste trabalho e será o tema central deste capítulo.

6.3 Elementos geométricos

Um elemento geométrico EG é uma entidade topológica tal como um intervalo (elemento de linha), triângulo, quadrilátero, hexaedro (cubo), tetraedro, prisma, pirâmide. Constituem-se elementos geométricos por meio de uma bijeção contínua f (não necessariamente linear) e um elemento de referência geométrico ERG contido no espaço \mathfrak{R}^s de dimensão $0 \leq s \leq 3$.

Neste trabalho consideram-se os seguintes elementos de referência: o elemento pontual Pt (eq 6.1), elemento de linha L (eq 6.2), triângulo T (eq 6.3), quadrilátero Q (eq 6.4), hexaedro H (eq 6.5), tetraedro Te (eq 6.6), prisma Pr (eq 6.7) e pirâmide Pi (eq 6.8). Também chama-se o elemento de referência de elemento mestre.

$$Pt = \{0\} = \mathbb{R}^0 \quad (6.1)$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq +1\} \subsetneq \mathbb{R} \quad (6.2)$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq +1, 0 \leq y \leq 1 - x\} \subsetneq \mathbb{R}^2 \quad (6.3)$$

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x, y \leq +1\} \subsetneq \mathbb{R}^2 \quad (6.4)$$

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x, y, z \leq +1\} \subsetneq \mathbb{R}^3 \quad (6.5)$$

$$Te = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \quad (6.6)$$

$$Pr = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, -1 \leq z \leq 1\} \quad (6.7)$$

$$Pi = \{(x, y, z) / z - 1 \leq x \leq 1 - z, z - 1 \leq y \leq 1 - z, 0 \leq z \leq 1\} \quad (6.8)$$

Considera-se o elemento pontual Pt , como uma extensão incluída na definição de elemento geométrico para dimensão zero. Tal consideração será útil no desenvolvimento deste trabalho. A definição \mathbb{R}^0 faz sentido posto que $\{0\}$ é um subespaço linear sobre o campo dos reais^[31], sendo que sua dimensão é nula, isto é, \mathbb{R}^0 não contém vetores linearmente independentes.

Para obter um elemento geométrico deformado utiliza-se uma função contínua e bijetora. Várias propriedades topológicas importantes^[31] como fechamento, limitação (compacidade), convexidade, inclusão do bordo do elemento são preservadas por um tal operador f . De fato a inversa f^{-1} de uma função contínua e bijetora f é também contínua e bijetora e f e f^{-1} levam conjuntos abertos (ou fechados) a conjuntos abertos (ou fechados), considerando a imagem de f com a topologia induzida^[46] de \mathbb{R}^3 .

Neste trabalho as funções f que geram elementos, mapeam os diferentes lados do elemento mestre em lados da mesma dimensão no elemento imagem. Os cantos do elemento mestre são mapeados nos cantos do elemento geométrico, as arestas em arestas, faces para faces

e interior para o interior do elemento imagem por f , remita-se ao apêndice A. A existência deste tipo de funções é facilmente exemplificada. Tome-se o caso de um elemento isoparamétrico. O elemento imagem é obtido como combinação das funções de canto do elemento de referência sendo os coeficientes as coordenadas dos cantos do elemento deformado. Uma função com estas propriedades será chamada de **transformação geométrica**.

Para efeitos de cálculo numérico o tratamento dos elementos é sempre feito no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , usando-se as definições abaixo relacionadas.

Definição 6.3.1 *Um elemento geométrico em \mathbb{R}^3 é a imagem de uma transformação geométrica f cujo domínio é um elemento de referência.*

Por extensão, um elemento geométrico em \mathbb{R}^3 terá a mesma denominação que o seu elemento de referência, isto é linear, triangular, quadrilateral etc. Naturalmente toma-se a dimensão do elemento de referência como a dimensão do espaço no qual é definido, isto é a dimensão s do menor espaço \mathbb{R}^s que o contenha.

Dado que todos os elementos geométricos encontram-se imersos no espaço \mathbb{R}^3 e são mapeados de elementos de referência de diferentes dimensões, define-se a dimensão de um elemento geométrico em \mathbb{R}^3 , da seguinte maneira.

Definição 6.3.2 *A dimensão de um elemento geométrico é igual a dimensão do seu elemento de referência.*

Desta forma o elemento ponto tem dimensão 0, o elemento de linha dimensão 1, o triângulo e o quadrilátero dimensão 2, o hexaedro, tetraedro, prisma e pirâmide dimensão 3.

6.4 Lados de um elemento

Denomina-se **lado de um elemento**, qualquer um dos cantos, arestas, faces e volume interior do elemento. Dado que cantos são pontos, arestas são curvas e faces são superfícies define-se :

Definição 6.4.1 Canto de um elemento é um lado de dimensão 0.

Definição 6.4.2 Aresta de um elemento é um lado de dimensão 1.

Definição 6.4.3 Face de um elemento é um lado de dimensão 2.

Definição 6.4.4 Volume de um elemento é um lado de dimensão 3.

O conceito de **espaço paramétrico** associado ao lado do elemento é útil para compatibilizar funções de forma sobre lados contíguos de elementos adjacentes. Estes espaços paramétricos são mapeados por uma transformação geométrica que identifica o lado de dimensão n do elemento com um elemento de referência da mesma dimensão. Desta forma :

$T_g(\xi)$ é a transformação geométrica associada a um lado de dimensão 1 (6.9)

$T_g(\xi, \eta)$ é a transformação geométrica associada a um lado de dimensão 2 (6.10)

$T_g(\xi, \eta, \zeta)$ é a transformação geométrica associada a um lado de dimensão 3 (6.11)

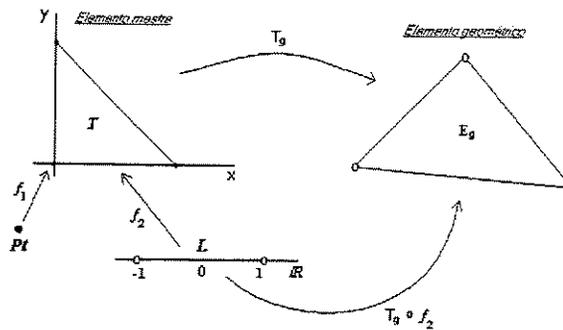


Figura 6.4: Lados de elementos

A definição das transformações geométricas é feita em dois passos. Primeiro definem-se estas transformações geométricas entre elementos de referência. Na figura 6.4 ilustra-se a definição de f_1 e f_2 para o caso de triângulos. Em seguida define-se a transformação geométrica para um lado de um elemento qualquer como a composição de duas transformações geométricas, conforme mostrado na figura 6.4, $T_g \circ f_2$.

Uma vez identificadas as transformações geométricas, pode-se definir :

Definição 6.4.5 O lado de dimensão n de um elemento de referência é definido como a imagem de uma transformação geométrica do interior de um elemento de referência de dimensão n .

O objetivo de definir cada lado do elemento como sendo a imagem de um conjunto aberto é garantir uma partição do elemento em lados de dimensões diferentes. Cada canto de um elemento mestre pode ser identificado com o elemento pontual Pt , cada aresta é associada ao intervalo $L =] - 1, 1[$ e cada face ao interior do elemento triangular T ou quadrilateral Q . finalmente, o lado correspondente ao interior do elemento, é identificado ao seu elemento mestre por meio da transformação geométrica identidade.

Dado que uma transformação geométrica leva cada lado do elemento mestre a um lado de igual dimensão no elemento imagem, toma-se o lado de um elemento geométrico como a imagem da transformação geométrica $T_g \circ f_i$ conforme mostrado na figura 6.4. A partir desta premissa, pode-se definir um lado de dimensão n de um elemento.

Definição 6.4.6 O lado de dimensão n de um elemento geométrico é a imagem da transformação geométrica composta $T_g \circ f_i$ do interior do correspondente elemento de referência de dimensão n .

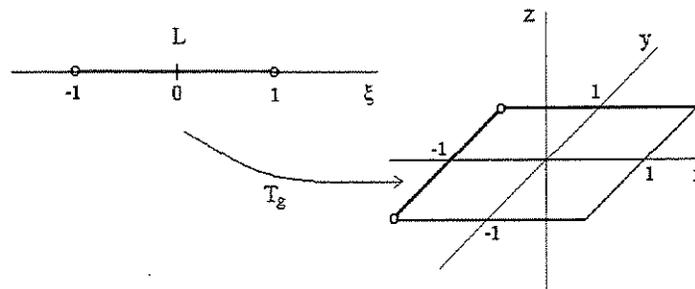


Figura 6.5: Lado de dimensão 1

Exemplo 6.4.7 Considere a transformação geométrica T_g definida sobre o elemento linear L . O conjunto $T_g(L)$ define um lado de dimensão 1 do elemento quadrilátero da figura 6.5.

$$T_g : L =] - 1, 1[\longrightarrow EG \subset \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } T_g(\xi) = (-1, \xi, 0) : T_g(L) = \{T_g(\xi) / -1 < \xi < 1\}$$

Deste modo, o conjunto de lados de um elemento geométrico EG qualquer, forma uma partição do elemento :

$$\cup \ell_{EG} = EG \quad ; \quad \ell_{EG}^i \cap \ell_{EG}^j = \phi \quad \forall i, j \quad (6.12)$$

Exemplo 6.4.8 Para um elemento prismático observam-se os lados mostrados na figura 6.6.

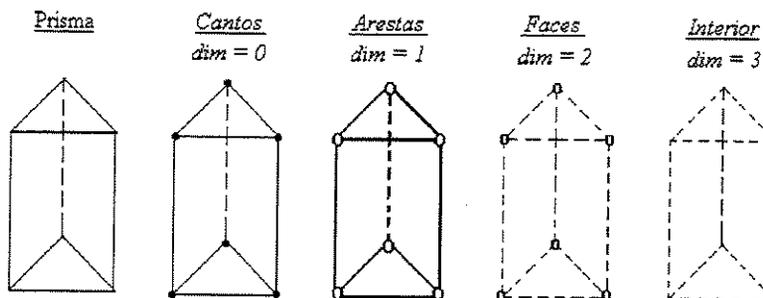


Figura 6.6: Diferentes lados de um elemento prismático

A tabela 6.1 mostra para cada elemento mestre implementado o número de lados e suas correspondentes dimensões.

Elementos	Numero de lados do elemento				Total lados
	dim 0	dim 1	dim 2	dim 3	
Ponto	1	0	0	0	1
Linear	2	1	0	0	3
Triângulo	3	3	1	0	7
Quadrilátero	4	4	1	0	9
Tetraedro	4	6	4	1	15
Pirâmide	5	8	5	1	19
Prisma	6	9	5	1	21
Hexaedro	8	12	6	1	27

Tabela 6.1: Número de lados e respectivas dimensões para cada elemento mestre

6.5 Conectividade de um elemento

Em uma malha de elementos finitos, dois elementos A e B são chamados **vizinhos** caso existam lados l_A e l_B tal que o lado l_A do elemento A coincida com o lado l_B do elemento B , isto é

$$l_A = l_B \quad (6.13)$$

Segue que o elemento A pelo lado l_A de A é vizinho do elemento B pelo lado l_B de B .

Definição 6.5.1 O conjunto {elemento, lado} chama-se *conectividade do elemento*.

Nada impede que um elemento unidimensional seja vizinho de um elemento tridimensional ou que um elemento ponto seja vizinho de um elemento bidimensional, etc. Na figura 6.7 mostram-se alguns possíveis elementos vizinhos de um elemento prisma.

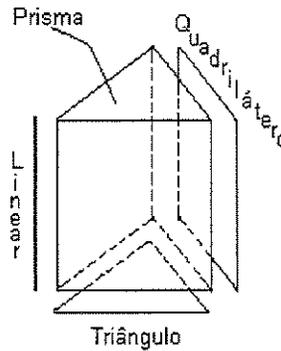


Figura 6.7: Elementos vizinhos de diferentes dimensões

Dois elementos podem ser vizinhos por vários lados. Se por exemplo dois elementos tem uma face triangular em comum então ambos elementos compartilham 3 cantos, 3 arestas e uma face. Há portanto 7 conectividades que relacionam um com outro elemento.

Sempre que menciona-se uma conectividade considere-se o conjunto de pontos do elemento pertencentes a esse lado.

Definição 6.5.2 A dimensão de uma conectividade é igual a dimensão do lado associado.

A cada conectividade associa-se um conjunto de conectividades de dimensão menor. Os lados de dimensão menor associados a uma conectividade C são lados contidos no fecho \bar{C} da conectividade.

6.6 Correspondência entre funções de forma e lados do elemento

O espaço de interpolação $V_{hp}(\Omega)$ de elementos finitos é formado por funções polinomiais por partes de diferentes graus. Cada função base deste espaço é construída pela justaposição de funções de forma de elementos adjacentes. Para que este espaço esteja contido em $C^0(\Omega)$ as funções de $V_{hp}(\Omega)$ devem ser contínuas sobre os lados pelos quais os elementos são adjacentes.

Uma função de forma é associada a um lado do elemento se ela é não nula nesse lado e é nula nos lados de dimensão menor. Assim denomina-se funções de canto, funções de aresta, face ou interior àquelas funções associadas ao lado respectivo. Uma função de forma associada a uma dada conectividade é também associada ao lado correspondente. Formalmente a associação entre uma função de forma e uma conectividade pode ser descrita ou caracterizada da seguinte maneira.

1. Existe exatamente uma conectividade do elemento para a qual uma função de forma dele pode ser associada.
2. Em um espaço de elementos finitos contínuo (C^0), existe uma única função de forma associada com uma conectividade de dimensão zero. Podem existir zero ou mais funções associadas a cada uma das outras conectividades do elemento. Isto depende da ordem de aproximação escolhida para o elemento.
3. Se uma função de forma é associada a uma conectividade de dimensão n , então ela é não nula nessa conectividade, e é nula sobre todas as outras conectividades de dimensão menor ou igual a n .
4. O conjunto das funções de forma do elemento é particionado pela correspondência entre funções de forma e as conectividades do elemento.

A seguir exemplifica-se a associação entre funções de forma e lados de um elemento. A figura 6.8 mostra uma enumeração dos lados do elemento quadrilátero. Os lados 0, 1, 2, 3 são de dimensão 0, os lados 4, 5, 6, 7 são de dimensão 1 e o lado 8 tem dimensão 2.

A figura 6.9 mostra a função de forma associada ao lado 0. Esta função não pode ser associada ao lado 4, segundo a terceira propriedade, porque ela não é nula no lado 7. Ela é nula sobre todos os outros lados de dimensão 0 do elemento. A figura 6.10 mostra uma função de

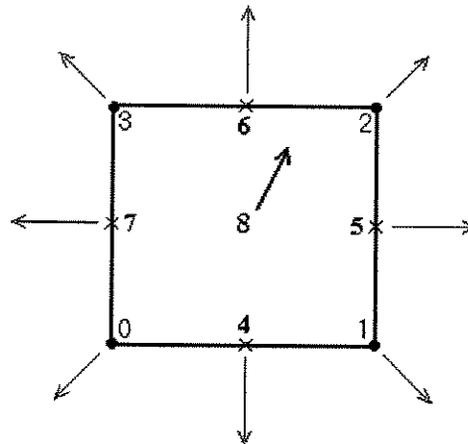


Figura 6.8: Conectividades/lados do quadrilátero

forma associada ao lado 4. Essa função é nula sobre os lados 0, 1, 2, 3 e é também nula sobre os lados 5, 6 e 7, terceira propriedade. A figura 6.11 mostra uma função de face (bolha). Ela é nula sobre todos os lados de dimensão menor que 2.

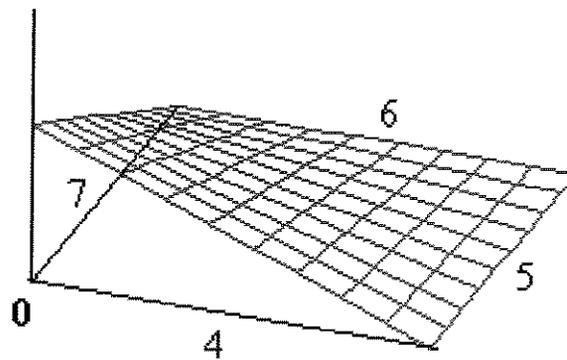


Figura 6.9: Função de forma do lado 0

Multiplicando-se uma função como aquela da figura 6.10 (ou 6.11) por um polinômio de grau maior ou igual a 1, obtém-se uma função de forma do lado 4 (lado 8) de grau maior e com as mesmas propriedades enunciadas.

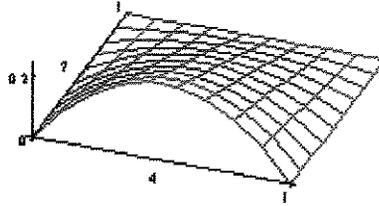


Figura 6.10: Função de forma do lado 4

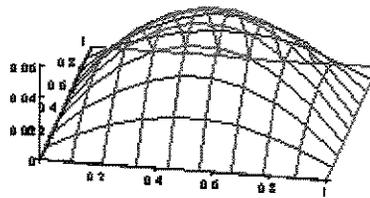


Figura 6.11: Função de forma do lado 8

6.7 Conectividades e espaços paramétricos

A cada ponto p de uma conectividade de dimensão n associam-se n valores $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_n$ que indicam o ponto \hat{p} correspondente no elemento mestre. Os valores $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_n$ identificam o **espaço paramétrico** da conectividade. O ponto p é identificado ao ponto \hat{p} do espaço paramétrico por meio de uma **transformação paramétrica**.

Por exemplo, a face de um tetraedro tem dimensão $n = 2$. A qualquer ponto da face correspondem dois valores $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ que definem um ponto do elemento de referência triangular T . Para um lado de dimensão $n = 1$ o espaço paramétrico é o elemento de linha. O espaço paramétrico associado ao lado de dimensão n corresponde ao elemento mestre de dimensão n . A cada elemento mestre associa-se um conjunto de funções base definidas de forma **hierárquica**

e com as propriedades enunciadas na seção 6.6.

6.7.1 Divisão/refinamento de elementos: malhas $h - p$ adaptativas

Em uma malha sujeita a refinamento h , malha não conforme, existirá uma conectividade $\{e, l\}$ estritamente contida numa conectividade adjacente $\{E, L\}$. Neste caso para uma base ψ_L^E de E associada a L não existirá uma base ψ_l^e de e associada a l tal que a justaposição de ambas bases apresentem continuidade sobre a interseção das conectividades, $L \cap l = l$. Neste caso para construir uma base sobre o elemento pequeno justaposta e contínua com ψ_L^E impõe-se em primeiro lugar que estes elementos tenham a mesma ordem p de interpolação sobre os lados L e l , em seguida construe-se uma combinação linear das bases ψ_l^e que seja contínua com ψ_L^E . Isto é possível já que a restrição de ψ_L^E ao lado l é de grau p e o espaço de interpolação associado ao lado pequeno l também é p .

D) Identificação de lados restritos

Qualquer elemento pode ser dividido em um conjunto de subelementos. Neste caso, cada subelemento refere-se ao elemento que foi dividido como elemento **pai**. Em uma malha refinada os subelementos, também chamados de elementos **filhos**, formam uma partição do elemento pai. Para efeito de identificação de restrições define-se:

Definição 6.7.1 Uma conectividade de um subelemento é associada a uma conectividade pai caso o elemento pai tenha um lado da mesma dimensão que contém a conectividade do subelemento.

Por exemplo, na figura 6.12, o elemento A foi dividido em 4 subelementos. O lado 2 do elemento E , i.e. a conectividade $\{E, 2\}$, tem associada a conectividade pai $\{A, 2\}$. $\{E, 1\}$ não tem conectividade pai associada, dado que o lado 1 de E não está contido num lado do pai A da mesma dimensão. Da mesma forma a conectividade $\{D, 4\}$ tem conectividade pai $\{A, 4\}$, dado que $\{D, 4\} \subseteq \{A, 4\}$ e a dimensão dessas conectividades é a mesma. $\{F, 4\}$ não tem conectividade pai associada, já que $\{F, 4\} \not\subseteq \{A, i\}$ para algum $i = 4, 5, 6, 7$. Todavia $\{F, 4\} \subseteq$

$\{A, 8\}$ mas a dimensão dessas conectividades é diferente.

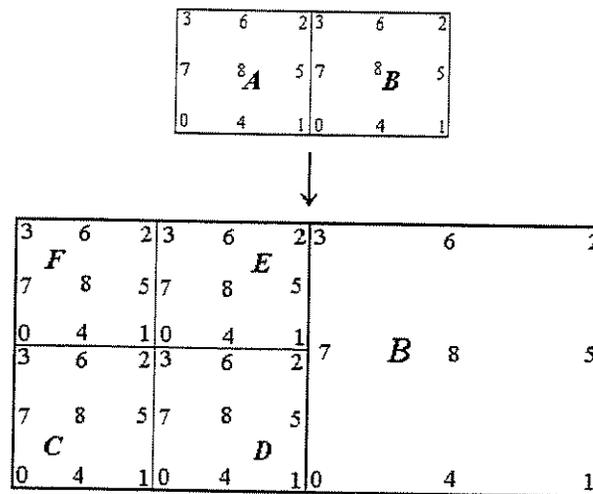


Figura 6.12: Conectividades restritas

Da mesma maneira, o conjunto das **conectividades** dos **filhos associadas a uma conectividade** do **pai** são aquelas conectividades dos subelementos que estão contidas e são da mesma dimensão que a conectividade do elemento pai. Na figura 6.12 as conectividades dos subelementos associadas a conectividade do elemento pai $\{A, 5\}$ são $\{D, 5\}$ e $\{E, 5\}$. A conectividade filho de $\{A, 3\}$ é $\{F, 3\}$.

Observam-se na figura 6.12 as seguintes relações entre conectividades adjacentes.

- ▶ $\{D, 5\} \subsetneq \{B, 7\}$, $\{D, 2\} \subsetneq \{B, 7\}$, $\{E, 1\} \subsetneq \{B, 7\}$, $\{E, 5\} \subsetneq \{B, 7\}$
- ▶ $\{D, 1\} \not\subset \{B, 7\}$, $\{E, 2\} \not\subset \{B, 7\}$, $\{D, 1\} = \{B, 0\}$, $\{E, 2\} = \{B, 3\}$

6.8 Restrições entre conectividades

O **nível de um elemento** é igual ao número de divisões que devem ser feitas para obter-se este elemento a partir da malha inicial (nível 0). Numa malha inicial os lados ou conectividades comuns a elementos adjacentes são vizinhos, seção 6.5. Numa malha refinada isto não acontece. Numa malha onde os elementos foram subdivididos existem conectividades ou lados

estritamente contidos nos lados ou conectividades de elementos adjacentes.

Quando a malha é refinada obtém-se a continuidade das bases do espaço de elementos finitos designando uma dependência entre conectividades adjacentes de níveis distintos, isto é, entre as funções de forma dos lados correspondentes. O coeficiente da solução do *MEF* da base dependente é calculada combinando os coeficientes de dependência e o coeficiente multiplicador da solução do *MEF* da base independente associada. Os coeficientes multiplicadores das funções independentes, isto é, aquelas bases que não apresentam dependência, são os coeficientes respectivos da solução de elementos finitos. Quando duas conectividades, com lados que apresentam interseção não vazia, pertencem a elementos de níveis diferentes identifica-se uma restrição.

6.8.1 Transformação paramétrica entre conectividades vizinhas

Quando dois elementos são vizinhos por um lado, não há restrições ou dependências neste lado. Neste caso, os elementos são do mesmo nível e a compatibilização fica por conta das funções de forma hierárquicas dos elementos, dos parâmetros variacionais e os espaços paramétricos. A compatibilidade das funções de forma entre elementos vizinhos é sempre feita entre os correspondentes espaços paramétricos dos lados adjacentes. Duas conectividades vizinhas da mesma dimensão possuem o mesmo espaço paramétrico associado porém as funções paramétricas podem ser diferentes, veja subseção 6.7. Isto último depende da orientação local dos nós do lado comum para cada elemento.

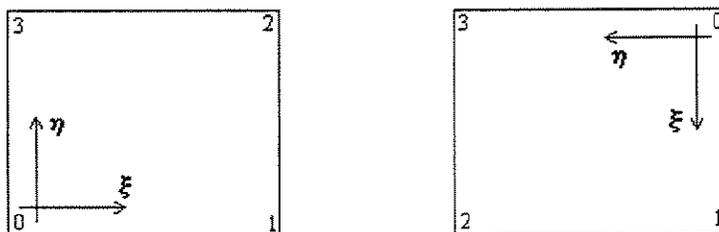


Figura 6.13: Faces com transformações paramétricas diferentes

A figura 6.13, mostra dois lados de dimensão 2 com correspondentes funções paramétricas diferentes.

6.8.2 Transformação entre os lados de um subelemento e o elemento pai

Se a conectividade atual pertence a um subelemento cujo pai tem uma conectividade da mesma dimensão que a contém, então existe uma transformação geométrica entre o elemento de referência da conectividade atual para o elemento de referência da conectividade do pai.

6.8.3 Transformação entre lados de diferente dimensão

Uma conectividade é restrita por uma conectividade de dimensão maior nos seguintes casos :

- ▶ A conectividade refere-se a um subelemento.
- ▶ A conectividade não tem pai, isto é, o pai do subelemento não tem conectividade da mesma dimensão que contém a conectividade atual, e
- ▶ O pai do subelemento tem uma conectividade que contém a conectividade atual.

No caso das conectividades terem dimensões distintas também existe uma transformação paramétrica entre o elemento de referência da conectividade do subelemento e o elemento de referência da conectividade do elemento maior. Esta transformação é feita entre espaços paramétricos de dimensões diferentes.

Exemplo 6.8.1 Sejam dois elementos E e G com duas faces triangulares vizinhas E_F e G_F respectivas, na qual E_F foi dividida. Isto é, o elemento E que contém a face E_F foi dividido. Considere uma aresta A contida no interior da face E_F e um subelemento e de E que contenha essa aresta. Então existe uma face e_F de e contida em E_F e que contém A , isto é, $A \subset e_F \subset E_F$. A transformação entre a aresta A e a face vizinha G_F é obtida como um acúmulo de transformações. Três transformações são acumuladas:

1. transformação entre a aresta A e a face e_F do subelemento e que contém ambas
2. transformação entre a face e_F do subelemento e e a face E_F do elemento E

3. transformação entre a face E_F do elemento E e a face vizinha G_F do elemento G

Exemplo 6.8.2 *Transformações paramétricas entre conectividades de diferentes dimensões ou níveis. As transformações paramétricas podem ocorrer entre :*

1. Um lado de dimensão 0 e um lado de dimensão 1. Canto para lado.
2. Um lado de dimensão 0 e um lado de dimensão 2. Canto para face.
3. Um lado de dimensão 1 e um lado de dimensão 1. Aresta para aresta.
4. Um lado de dimensão 1 e um lado de dimensão 2. Aresta para face.
5. Um lado de dimensão 2 e um lado de dimensão 2. Face para face.

A seguir explicitam-se as transformações mencionadas para os diferentes casos que acontecem em uma malha refinada hp -adaptativa.

6.9 Transformações paramétricas entre lados vizinhos

Os elementos unidimensionais possuem dois cantos localmente enumerados como canto 0 e canto 1. Este elemento é identificado ao seu elemento de referência associando o canto local 0 ao extremo -1 e o canto local 1 ao extremo +1. Da mesma maneira esta identificação é feita para a aresta de um elemento qualquer. Desta forma se a numeração local de duas conectividades vizinhas é invertida a transformação paramétrica entre elas é -1. Caso contrario a numeração local coincide é a transformação é +1. Para associar de forma única um mesmo espaço paramétrico de linha a uma aresta qualquer usa-se a numeração global dos nós da malha, identifica-se o canto -1 do elemento linear com o menor número nodal global da aresta e o canto +1 com o maior valor nodal dessa aresta. Portanto isto resolve a compatibilização entre funções de aresta. Só resta transformar o parâmetro variacional de cada orientação local prefixada no elemento de referência para está única orientação no novo sistema local de referência definido pelos valores nodais globais. As transformações paramétricas neste caso são $T = +1$ quando a orientação local da aresta coincide com a orientação do espaço paramétrico definido pelos nós globais dos cantos da aresta e $T = -1$ quando isto não acontece.

Para compatibilizar funções de face, cada face do elemento de referência é associada de forma única com duas direções e a cada direção corresponde um parâmetro variacional. Cada

parâmetro varia linearmente na direção associada, independente do tipo de elemento e a sua dimensão. Portanto para compatibilizar estes lados, é suficiente identificar as faces com um mesmo espaço paramétrico. Para obter continuidade identifica-se cada face compartilhada por elementos vizinhos com o mesmo espaço paramétrico.

Um elemento geométrico qualquer é obtido por meio de uma transformação geométrica do seu elemento de referência. Portanto uma face compartilhada por elementos vizinhos tem uma enumeração local diferente para seus cantos dependendo do elemento ao qual esta face é considerada. A numeração local de uma face é definida de maneira que a primeira direção $\tilde{\xi}$ é tomada do canto local 0 para o canto local 1. A segunda direção $\tilde{\eta}$ é tomada do canto local 0 para o canto local 2, para face triangular ou do canto local 0 para o canto local 3 na face quadrilateral, figuras 6.14, 6.15. Para identificar de maneira única um espaço paramétrico a uma face dentro da malha utiliza-se a numeração nodal global dos cantos da face. Considerem-se o menor canto c_0 dessa face e os dois cantos c_1, c_2 ligados a este por arestas tal que $c_0 < c_1 < c_2$. Então os cantos locais 0, 1 e 2 (ou 0, 1 e 3) são respectivamente c_0, c_1 e c_2 . Associe-se os eixos locais $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ de acordo como explicado acima. Portanto para obter continuidade entre as funções de face de elementos vizinhos basta identificar, da forma mencionada, cada face da malha ao espaço paramétrico triangular ou quadrilateral respectivo definido de forma única pelos valores nodais globais da face deformada.

D) Transformações entre faces triangulares

O espaço paramétrico da face triangular é esquematizado na figura 6.14. Cada uma das faces triangulares dos elementos são identificadas com ela de maneira única. A figura 6.14 mostra claramente a identificação de cada face com a face de referência através dos cantos 0, 1, 2 e dos eixos locais ξ, η . O menor id local canto 0 dessa face, está no extremo de duas arestas que o conectam com os cantos 1 e 2 da mesma face.

Tome-se o primeiro eixo ξ na direção de 0 para 1, tome-se o segundo eixo η na direção

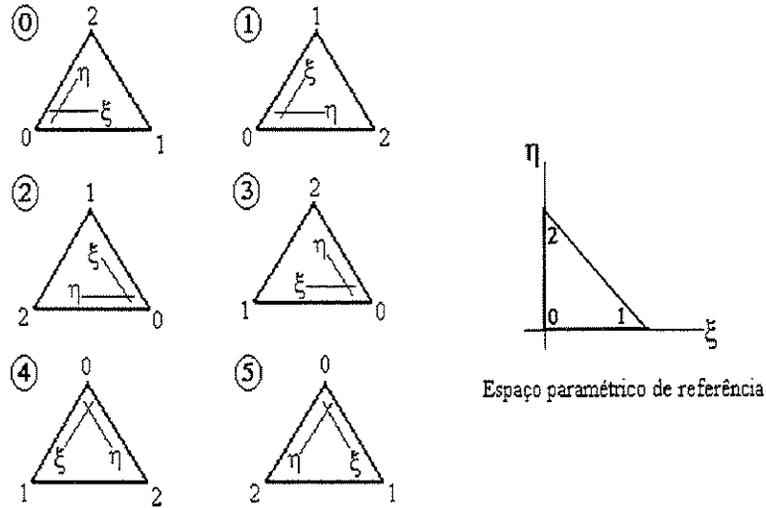


Figura 6.14: Escolha dos eixos : faces triangulares

de 0 para 2. O primeiro parâmetro variacional varia de -1 para +1 do canto local 0 para o canto local 1, o segundo parâmetro variacional varia de -1 para +1 do canto local 0 para o canto local 2. Todas as possíveis posições destes eixos em uma face triangular estão representadas na figura 6.14. Ao todo 6 transformações. A tabela 6.2 enumera todas as transformações entre o espaço paramétrico de referência e uma face triangular qualquer. Para determinar esta transformação identificam-se os cantos locais correspondentes. O seguinte exemplo determina a transformação T_2 de número 2 da tabela identificando os cantos conforme as relações dadas a seguir: o canto 0 é mapeado no canto 2, o canto 1 é mapeado no canto 0 e o canto 2 é mapeado no canto 1, compare com a figura 6.14, então

$$T(0,0) = (0,1) , T(1,0) = (0,0) , T(0,1) = (1,0) \Rightarrow T(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \eta \\ 1 - \xi - \eta \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Desta forma cada face determina por si mesma como identificar-se com o seu sistema de referência. Este fato é útil em computação em paralelo, dado que não precisa-se de troca de informação entre processadores para a compatibilização de lados vizinhos distribuídos.

Para garantir a continuidade das bases associadas a dois elementos vizinhos A e B com uma face triangular comum F_d proceda-se como explicado a seguir. Dado um ponto no elemento

n°	transformação					
0		$\hat{\varepsilon}$	=	1 0	ε	
		$\hat{\eta}$	=	0 1	η	
1		$\hat{\varepsilon}$	=	0 1	ε	
		$\hat{\eta}$	=	1 0	η	
2	$\hat{\varepsilon}$	=	0 1	ε	+	0
	$\hat{\eta}$	=	-1 -1	η	+	1
3	$\hat{\varepsilon}$	=	-1 -1	ε	+	1
	$\hat{\eta}$	=	0 1	η	+	0
4	$\hat{\varepsilon}$	=	-1 -1	ε	+	1
	$\hat{\eta}$	=	1 0	η	+	0
5	$\hat{\varepsilon}$	=	1 0	ε	+	0
	$\hat{\eta}$	=	-1 -1	η	+	1

Tabela 6.2: Transformações paramétricas : faces triangulares

de referência E_A do elemento deformado A, projeta-se este ponto para a face F_r do elemento de referência E_A que é mapeada na face deformada F_d . Isto é, calculem-se os dois parâmetros variacionais associados a F_r . Existe uma correspondência biunívoca entre os nós da face F_r e os nós contidos na conectividade (A, F_d) por meio da transformação geométrica com a qual obteve-se o elemento deformado A. Então um novo sistema local S_n em F_r é definido pela numeração global dos cantos da face deformada e esta correspondência, como foi explicitado anteriormente. Transforme-se o ponto projetado no sistema predefinido da face F_r para o novo sistema local S_n . O ponto transformado é o ponto no qual é calculada a base associada à conectividade (A, F_d) . Da mesma maneira calculam-se os parâmetros variacionais associados à conectividade (B, F_d) do elemento vizinho. Este procedimento resultará na continuidade das bases de A e B associadas a face F_d , bases que utilizam as mesmas duas funções da seqüência. O que aqui foi dito será completado com um exemplo para o caso de uma face quadrilateral.

II) Transformações entre faces quadrilaterais

O espaço paramétrico da face quadrilateral é esboçado na figura 6.15. Cada uma das faces quadrilaterais dos elementos é identificada com ela de maneira única. A figura 6.15 mostra claramente a identificação de cada face com a face de referência através dos cantos 0, 1, 3 e os eixos locais ξ, η . O menor *id* local ou canto 0 dessa face, está no extremo de duas arestas que o

conectam com os cantos locais 1 e 3 da mesma face.

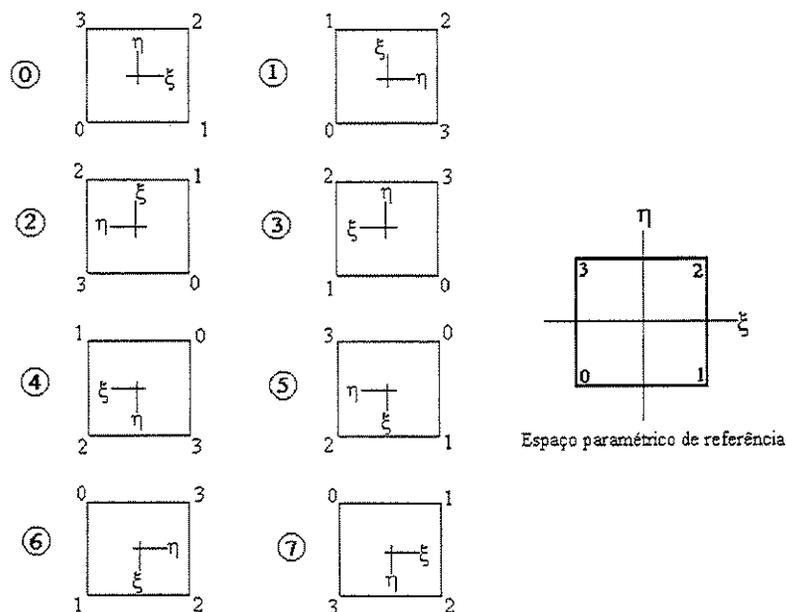


Figura 6.15: Posição dos eixos : faces quadrilaterais

Tome-se o primeiro eixo ξ na direção de 0 para 1, tome-se o segundo eixo η na direção de 0 para 3. Todas as possíveis posições destes eixos na face quadrilateral estão desenhados na figura 6.15. Ao todo 8 transformações, determinadas conforme explicitado anteriormente para o caso de uma face triangular.

Para completar o que foi dito para o caso de uma face triangular da-se um exemplo da obtenção da continuidade entre bases associadas de elementos vizinhos. A continuidade destas bases dependem dos valores que estas assumem nos lados em comum. Seja T a transformação que mapeia o elemento deformado no elemento de referência, se φ_i é uma base do elemento mestre então $\varphi_i \circ T$ é base do elemento deformado. Para um exemplo específico sera mostrado que dado um ponto $p(x, y, z)$ em uma face quadrilateral deformada F_d pertencente a dois elementos vizinhos, um prisma e uma pirâmide, os parâmetros variacionais obtidos da forma antes mencionada para cada elemento são iguais. A figura 6.16-(b) esboça a face de contato entre um prisma (do lado esquerdo) e uma pirâmide (lado direito). A face de contato é só uma. As ou-

n ^o	transformação			
0	$\widehat{\varepsilon}$	=	1 0	ε
	$\widehat{\eta}$		0 1	η
1	$\widehat{\varepsilon}$	=	0 1	ε
	$\widehat{\eta}$		1 0	η
2	$\widehat{\varepsilon}$	=	0 1	ε
	$\widehat{\eta}$		-1 0	η
3	$\widehat{\varepsilon}$	=	-1 0	ε
	$\widehat{\eta}$		0 1	η
4	$\widehat{\varepsilon}$	=	-1 0	ε
	$\widehat{\eta}$		0 -1	η
5	$\widehat{\varepsilon}$	=	0 -1	ε
	$\widehat{\eta}$		-1 0	η
6	$\widehat{\varepsilon}$	=	0 -1	ε
	$\widehat{\eta}$		1 0	η
7	$\widehat{\varepsilon}$	=	1 0	ε
	$\widehat{\eta}$		0 -1	η

Tabela 6.3: Transformações paramétricas : faces quadrilaterais

tras duas faces 6.16-(a) e 6.16-(c) foram desenhadas para especificar como a numeração local da face F_r do elemento de referência foi mapeada na face deformada F_d . Na figura 6.16-(b) os eixos locais $(\widehat{\xi}, \widehat{\eta})$ da face F_d foram determinados pelos valores nodais globais 10(1,0,0), 21(0,1,0) e 33(0,0,1) como já mencionado. A face esquerda, figura 6.16-(a), mostra a numeração local da face F_d relativa ao prisma deformado e a face direita, figura 6.16-(c), mostra a numeração local da face F_d relativa à pirâmide deformada. As transformações P_r e P_i definidas por

$$P_r(x, y, z) = (y, x + z, x + y - z), \quad P_i = (-x - y + z, x - y + z, 0) \quad (6.15)$$

mapeam a face F_d às faces de referência F_r , do prisma e da pirâmide respectivamente, identificando os correspondentes nós locais.

Três passos serão efetuados para a obtenção do parâmetro variacional a ser utilizado pela função de forma da face F_d do elemento deformado.

1. Transformar o ponto $p(x, y, z)$ da face F_d do elemento deformado para a face F_r do elemento de referência obtendo-se $(\xi, \eta, \zeta) = P(x, y, z)$
2. Calcular os parâmetros variacionais C_1 e C_2 da face F_r baseados no ponto (ξ, η, ζ) , isto é

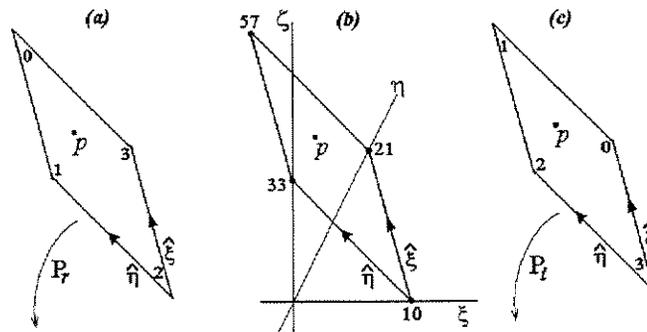


Figura 6.16: Espaço paramétrico associado à face deformada F_d

projetar este ponto para face F_r

3. Aplicar a transformação correspondente, figura 6.15 e tabela 6.3, entre o espaço paramétrico (predefinido) da face de referência F_r , definido pelos eixos locais $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ e o espaço paramétrico determinado pelos nós globais e definidos pelos eixos locais $\hat{\xi}$ e $\hat{\eta}$, sobre o ponto (C_1, C_2) obtendo-se (c_1, c_2)

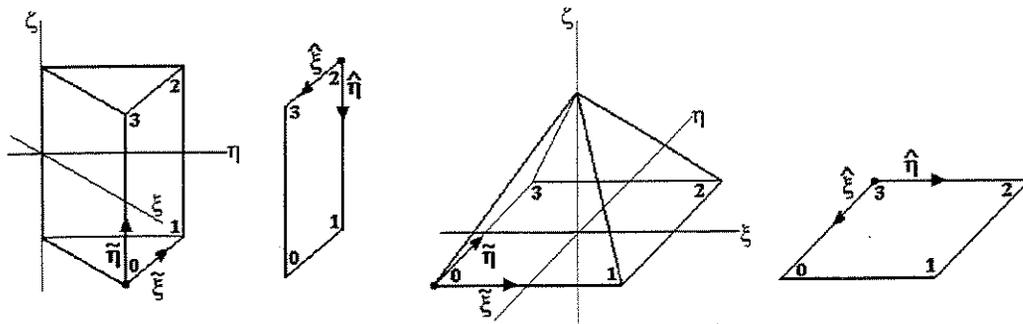


Figura 6.17: Espaços paramétricos associados às faces de referência F_r

A seguir calculam-se os parâmetros variacionais para ambos os elementos seguindo os 3 passos acima. A transformação a utilizar para o caso do prisma é a número 4, segundo a figura 6.15 e tabela 6.3, e para o caso da pirâmide é a número 6 da mesma tabela.

Para o prisma a seqüência de cálculos é a seguinte:

1. $P(x, y, z) = P_r(x, y, z) = (y, x + z, x + y - z) = (\xi, \eta, \zeta)$
2. $C_1 = \eta - \xi = x - y + z, C_2 = \zeta = x + y - z$

$$3. \quad T_4(C_1, C_2) = T_4(x - y + z, x + y - z) = (-x + y - z, -x - y + z) = (c_1, c_2)$$

Para a pirâmide a seqüência de cálculos é a seguinte:

1. $P(x, y, z) = P_i(x, y, z) = (-x - y + z, x - y + z, 0) = (\xi, \eta, \zeta)$
2. $C_1 = \xi = -x - y + z, C_2 = \eta = x - y + z$
3. $T_6(C_1, C_2) = T_6(-x - y + z, x - y + z) = (-x + y - z, -x - y + z) = (c_1, c_2)$

O valor dos parâmetros variacionais em ambos os casos é $(c_1, c_2) = (-x + y - z, -x - y + z)$. Como a continuidade das bases de canto é garantida também é garantida a continuidade da base obtida como produto das duas bases de cantos opostos da face. Uma base associada à face F_d escreve-se $\varphi_i \circ T = \psi_i(T) \psi_j(T) f_{n1}(c_1) f_{n2}(c_2)$ com ψ_i e ψ_j bases de cantos opostos da face F_r do elemento mestre, f_{n1} e f_{n2} funções da seqüência, equação 4.2, e T mapea o elemento deformado no elemento de referência, $T/F_d = P$. As duas funções base associadas, uma para cada elemento, utilizam os mesmos polinômios f_{n1} e f_{n2} da seqüência, dado que os parâmetros variacionais c_1 e c_2 são únicos segue-se que estas funções apresentam continuidade na interface comum a ambos elementos.

Na prática as transformações T , P_r e P_i nunca são calculadas, somente são aplicadas as transformações paramétricas, dadas na tabela 6.3, entre os espaços paramétricos do lado respectivo, como exemplificado na figura 6.17, no ponto de integração.

A tabela 6.3 enumera todas as transformações entre os elementos de referência de duas faces vizinhas. Desta forma cada face determina por si mesma como identificar-se com o seu sistema de referência.

6.10 Transformações entre lados paramétricos

Como mencionado na seção 6.7, cada lado de um elemento geométrico é associado com um espaço paramétrico de dimensão igual à dimensão desse lado.

Quando dois elementos geométricos E_{g1} e E_{g2} são vizinhos por um lado e um deles é dividido, por exemplo seja E_{g2} dividido em e_1, e_2, \dots, e_n , dá-se o caso em que E_{g1} e os subelementos e_i de E_{g2} fazem parte da malha computacional. Neste caso aparecem restrições de lados de elementos e_i para lados de E_{g1} . Estas restrições são feitas com o intuito de obter uma malha refinada de pelo menos classe $C^0(\Omega)$. Para compatibilizar estas restrições utilizam-se os espaços paramétricos mencionados, pelo mesmo fato que calcula-se a equação diferencial sobre o elemento de referência ao invés de diretamente sobre o elemento deformado. Assim as restrições são calculadas entre os respectivos espaços paramétricos dos lados envolvidos. Deve-se convencionar cada lado de um elemento com um espaço paramétrico da mesma dimensão e de forma unívoca.

Em geral uma transformação linear T entre conjuntos B e D contidos em espaços de dimensão finita pode ser definida em termos matriciais por :

$$T : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n \quad (6.16)$$

$$T(x_1, \dots, x_m) = A_{n \times m} \bar{X}_{mx1} + b_{nx1} = (x_1, \dots, x_n) = T_{(n,m)} \quad (6.17)$$

$$\bar{X}_{mx1} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \dots, x_n), b_{nx1} \in \mathbb{R}^n \quad (6.18)$$

onde $A_{n \times m}$ é uma matriz de n linhas por m colunas. Em termos das dimensões dos lados envolvidos, se $dim\,from$ denota a dimensão do lado domínio e $dim\,to$ a dimensão do lado do contradomínio ou imagem tem-se :

$$T = T_{(dim\,to, dim\,from)} \quad (6.19)$$

Estas transformações devem ser calculadas para cada elemento. A seguir exemplificam-se as transformações paramétricas para o caso do tetraedro.

6.10.1 Transformação paramétrica entre um canto e uma aresta

Neste caso cada aresta é identificada com o elemento linear $[-1, 1]$. Os cantos, então, se corresponderam com os valores -1 ou $+1$. Para o tetraedro cada canto está unido com três

arestas. A convenção de como o espaço linear se corresponde com cada aresta é mostrada nas figuras 6.18-(b), 6.18-(c) e 6.19-(a), 6.19-(b). A transformação é então óbvia.

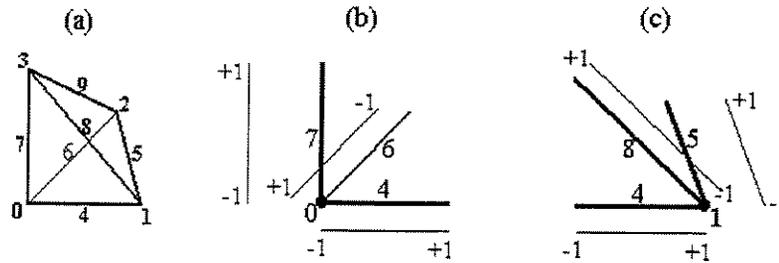


Figura 6.18: Transformações entre espaços paramétricos, canto para aresta

A figura 6.18 mostra como cada canto de uma aresta é levado no canto do elemento linear. Por exemplo, o lado de dimensão 0, canto $c_0(0, 0, 0)$, da aresta r_0 , lado 4 de dimensão 1, é transformado no extremo -1 do espaço paramétrico de dimensão 1, elemento linear. A tabela 6.4 resume as transformações dos cantos do tetraedro para as arestas que a incluem. Em geral, e dado que um canto tem dimensão zero, a transformação que leva o canto de uma aresta num extremo do elemento linear segundo a equações 6.16-6.19 é da forma,

$$T : Pt \equiv \mathbb{R}^0 \longrightarrow L \subset \mathbb{R}^1 \quad (6.20)$$

$$T_{1x0} = T\xi^0 = A_{1x0}\xi^0 + b_{1x1} = b \in \mathbb{R}^1 \quad (6.21)$$

Assim, cada aresta é identificada de forma única com o elemento de referência linear.

canto c_0		canto c_1		canto c_2		canto c_3	
lado	transf.	lado	transf.	lado	transf.	lado	transf.
4	-1	4	1	5	1	7	1
6	1	5	-1	6	-1	8	1
7	-1	8	-1	9	-1	9	1

Tabela 6.4: Transformações de cantos para arestas

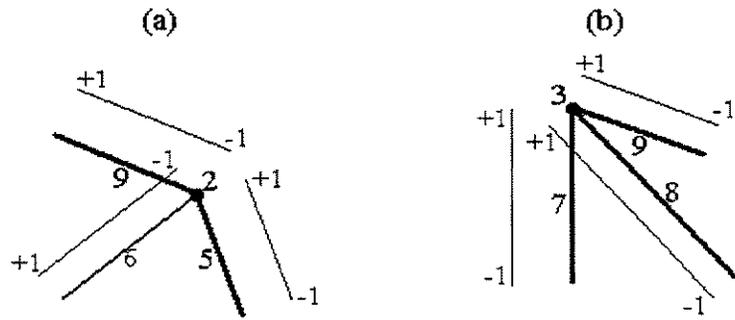


Figura 6.19: Transformações dos cantos 2 e 3 para arestas 5,6,7,8 e 9

6.10.2 Transformação paramétrica entre um canto e uma face

Associando a cada face triangular o espaço paramétrico, segundo é descrito na seção 6.9, conforme é esboçado na figura 6.22, escrevem-se as transformações entre os cantos do elemento e suas faces, como mostrado na tabela 6.5. Dado que um canto tem dimensão 0 e uma face dimensão 2, as dimensões da transformação são :

$$T : Pt \equiv \mathbb{R}^0 \longrightarrow T \subset \mathbb{R}^2, \quad T_{2 \times 0} = T\xi^0 = A_{2 \times 0}\xi^0 + b_{2 \times 1} \in \mathbb{R}^2 \quad (6.22)$$

canto 0		canto 1		canto 2		canto 3	
face	transf.	face	transf.	face	transf.	face	transf.
F10	0 0	F10	1 0	F10	0 1	F11	0 1
F11	0 0	F11	1 0	F12	1 0	F12	0 1
F13	0 0	F12	0 0	F13	1 0	F13	0 1

Tabela 6.5: Transformações entre cantos e faces

6.10.3 Transformação entre um canto e o volume

Resume-se na tabela 6.6 a transformação do canto do elemento para o espaço paramétrico do volume do elemento, conforme mostrado figura 5.12. A transformação é feita entre o espaço paramétrico de dimensão zero (um ponto) e o espaço tridimensional do elemento tetraedro de

referência.

cantos	$c0$	$c1$	$c2$	$c3$
transformação	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	1

Tabela 6.6: Vetor de transformação canto-volume

$$T : Pt \equiv \mathbb{R}^0 \longrightarrow Te \subset \mathbb{R}^3, \quad T_{3x0} = T(\xi^0) = A_{3x0}\xi^0 + b_{3x1} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.23)$$

6.10.4 Transformação da aresta do subelemento para a aresta do elemento

Já que os *id*'s dos cantos locais das arestas do elemento e de seus subelementos coincidem, então os sistemas locais também coincidem. Cada aresta do elemento tem dois cantos enumerados localmente, o canto 0 e o canto 1. Cada face tem ainda dois subelementos associados por aresta, enumerados localmente como os subelementos 0 e 1.

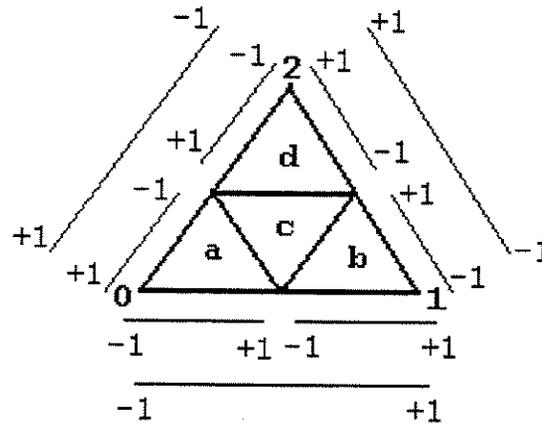


Figura 6.20: Transformações entre arestas da face \$F_0\$

O primeiro subelemento é o que contém o canto local 0 e o segundo é o que contém o canto local 1. Para a aresta \$r_2\$ da face \$F_0\$, figura 6.20, o canto local 0 é o canto 2 do elemento e o canto local 1 é o canto 0 do elemento, os dois subelementos são o \$d\$ e o \$a\$ respectivamente.

aresta r0		aresta r1		aresta r2	
sub 0	$\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}$	sub 1	$\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}$	sub 2	$\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}$
sub 1	$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}$	sub 2	$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}$	sub 0	$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}$

Tabela 6.7: Transformações de aresta, entre subelementos e elemento

A figura 6.20 mostra os sistemas de referência associados as arestas do elemento e as arestas dos subelementos contidas na face $F0$. Para as outras faces tem-se uma situação análoga aquela da figura 6.20, e portanto as transformações associadas são aquelas da tabela 6.7. Na equação 6.24, L é o elemento de referência linear, no domínio L é associado à aresta do elemento pequeno e no contradomínio à aresta do elemento grande.

$$T : L \subset \mathbb{R}^1 \longrightarrow L \subset \mathbb{R}^1 \quad : \quad T_{1x1} = T\xi = A_{1x1}\xi + b_{1x1} \in \mathbb{R}^1 \quad (6.24)$$

6.10.5 Transformação paramétrica entre uma aresta e uma face

Primeiramente cada face é identificada de forma única com o elemento de referência triangular. Neste caso a transformação vai do elemento mestre linear de dimensão 1 para o elemento mestre triangular de dimensão 2, designado para cada face.

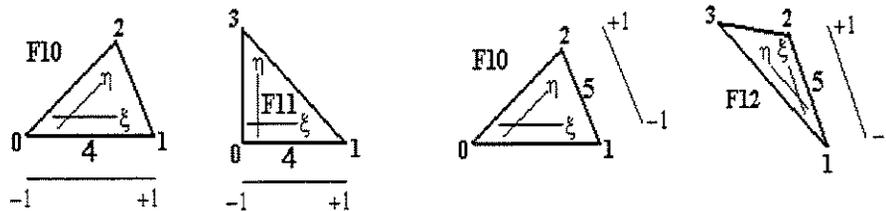


Figura 6.21: Transformações paramétricas : arestas para faces

A notação $F10$ indica que a face corresponde ao lado 10. A notação $F0$ indica que a face é a primeira, $F1$ indica que é a segunda, etc. De modo que ambas notações são equivalentes e podem ser usadas sem distinção.

Dada as dimensões desses lados a transformação requerida é da forma

face	aresta r0=lado 4			face	aresta r1=lado 5		
F10	$\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$	F10	$-\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$
	0		0		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
F11	$\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$	F12	$\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$
	0		0		0		0
face	aresta r2=lado 6			face	aresta r3=lado 7		
F13	$\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$	F11	0	$\xi +$	0
	0		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
F10	0	$\xi +$	0	F13	0	$\xi +$	0
	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
face	aresta r4=lado 8			face	aresta r5=lado 9		
F11	$-\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$	F12	$-\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
F12	0	$\xi +$	0	F13	$-\frac{1}{2}$	$\xi +$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$

Tabela 6.8: Transformações entre espaços paramétricos: aresta para face

Dada as dimensões desses lados a transformação requerida é da forma

$$T : L \subset \mathbb{R}^1 \longrightarrow T \subset \mathbb{R}^2, \quad T_{2x1} = T(\xi) = A_{2x1}\xi + b_{2x1} \in \mathbb{R}^2 \quad (6.25)$$

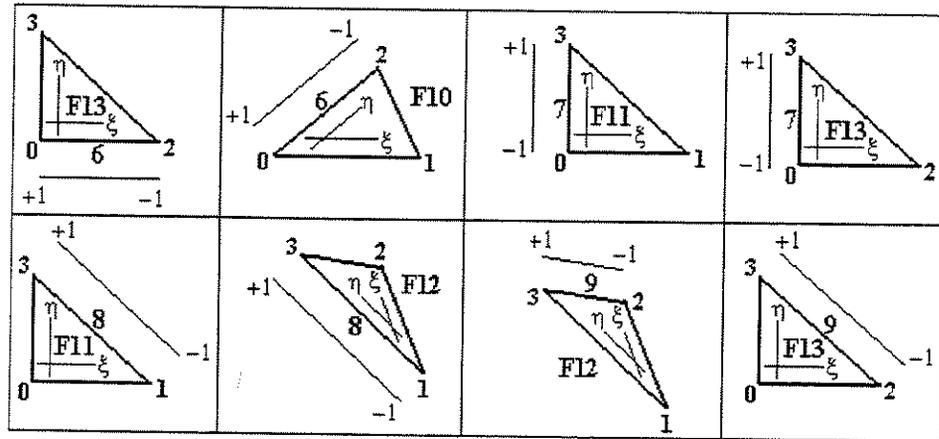


Figura 6.22: Transformação paramétrica entre lados de dimensões distintas

Sejam os cantos da face enumerados pelos *id*'s inteiros c_0 , c_1 e c_2 e tal que $c_0 < c_1 < c_2$, então para cada face convencionar-se a seguinte posição para os eixos ξ e η :

- O eixo ξ vai de c_0 para c_1
- O eixo η vai de c_0 para c_2

- Os eixos ξ e η cruzam-se em c_0

Cada aresta está incluída em duas faces, logo para cada aresta tem-se duas transformações paramétricas. A tabela 6.8 resume as transformações das 6 arestas para as 4 faces do tetraedro. As figuras 6.21 e 6.22 mostram os espaços paramétricos assumidos para as arestas do tetraedro.

6.10.6 Transformação entre aresta e volume

A transformação entre a aresta do elemento e o volume do elemento é feita entre um espaço paramétrico unidimensional e um espaço paramétrico tridimensional. Cada caso é esboçado na figura 6.23, onde os números positivos correspondem à numeração local da aresta e os dois cantos dessa aresta no tetraedro de referência.

A equação 6.26 descreve as dimensões das matrizes que definem a transformação.

$$T : L \subset \mathbb{R}^1 \longrightarrow T_e \subset \mathbb{R}^3, \quad T_{3 \times 1} = T(\xi) = A_{3 \times 1} \xi + b_{3 \times 1} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.26)$$

A tabela 6.9 reúne todas as transformações que ocorrem entre as arestas do elemento e o volume do elemento.

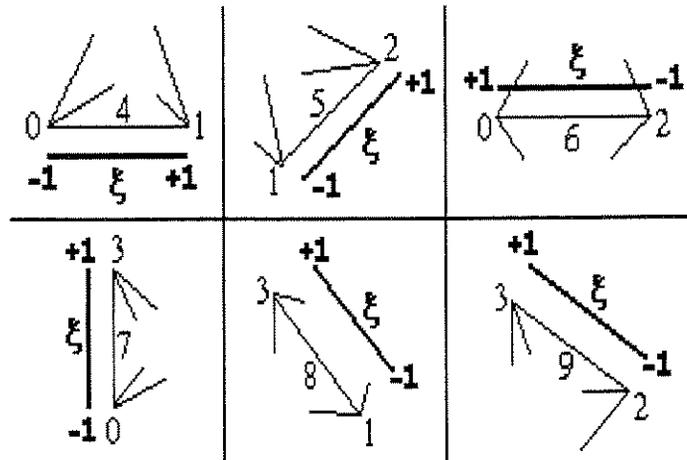


Figura 6.23: Posição do sistema de referência linear para a transformação aresta-volume

aresta	transformação			aresta	transformação		
r0	$\frac{1}{2}$	$[\xi] +$	$\frac{1}{2}$	r3	0	$[\xi] +$	0
	0		0		0		0
	0		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
r1	$-\frac{1}{2}$	$[\xi] +$	$\frac{1}{2}$	r4	$-\frac{1}{2}$	$[\xi] +$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		0		0
	0		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
r2	0	$[\xi] +$	0	r5	0	$[\xi] +$	0
	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
	0		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$

Tabela 6.9: Transformação aresta-volume

6.10.7 Transformação da face do subelemento para a face do elemento

As restrições sempre ocorrem entre elementos de diferentes níveis de divisão. A transformação entre o lado de um subelemento e o lado de um elemento adjacente é obtida por um processo de acumulação de transformações.

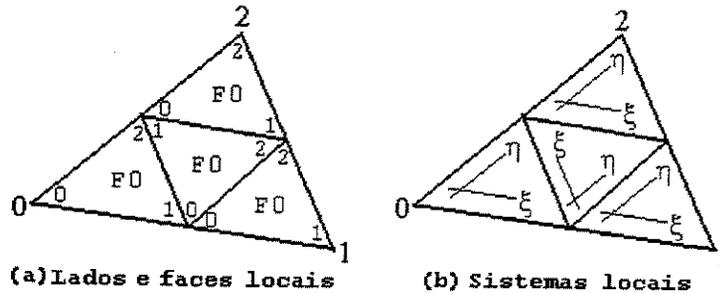


Figura 6.24: Transformações da face F10 do tetraedro

Acumulam-se as transformações entre lados aninhados de subelementos e elementos pais e por último entre elementos vizinhos.

A tabela 6.10 resume as transformações entre as faces do subelemento e a face do pai que a contém. Na figura 6.24 se representam os sistemas locais adotados para tal propósito, para o caso da face $F0$, lado 10. Para as outras faces adotou-se sistemas locais análogos, figura 6.25.

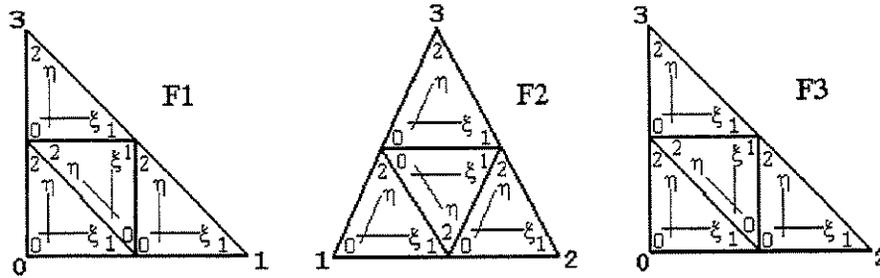


Figura 6.25: Sistemas paramétricos locais do tetraedro: faces F1, F2 e F3

6.25. Devido a escolha da enumeração de cantos e sistemas locais associados aos elementos tetraedro e pirâmide algumas transformações são idênticas. Na tabela 6.10, F_i indica a face do elemento e a transformação T_{ij} vai da face do subelemento sub j , contida na face F_i , para F_i .

Fases do elemento tetraedro																						
F0				F1				F2				F3										
$T_{00} =$	$\frac{1}{2}$	0	ξ	+	0	$T_{01} = T_{00}$				$T_{12} = T_{00}$				$T_{03} = T_{00}$								
	0	$\frac{1}{2}$	η		0																	
$T_{10} =$	$\frac{1}{2}$	0	ξ	+	$\frac{1}{2}$	$T_{11} = T_{10}$				$T_{22} = T_{10}$				$T_{23} = T_{10}$								
	0	$\frac{1}{2}$	η		0																	
$T_{20} =$	$\frac{1}{2}$	0	ξ	+	0	$T_{31} = T_{20}$				$T_{32} = T_{20}$				$T_{33} = T_{20}$								
	0	$\frac{1}{2}$	η		$\frac{1}{2}$																	
$T_{50} =$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$		ξ	+	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$	$T_{41} =$				$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$		ξ	+	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$	$T_{52} =$		$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$		ξ	+	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$T_{43} = T_{41}$
			η																			

Tabela 6.10: Transformações entre faces

A equação 6.27 identifica as dimensões destas transformações assim como os espaços de definição.

$$T : T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow T \subset \mathbb{R}^2, \quad T_{2 \times 2} = T(\xi, \eta) = A_{2 \times 2} \tilde{\xi} + b_{2 \times 1} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.27)$$

6.10.8 Transformação da face para o volume

A transformação entre uma face e um volume é feita entre o espaço paramétrico da face

do elemento e o espaço paramétrico do elemento.

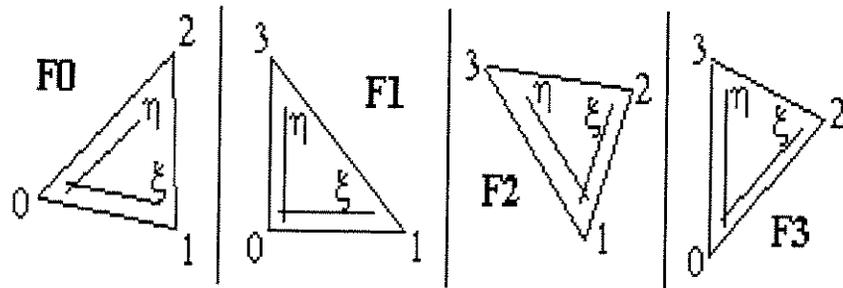


Figura 6.26: Transformação face-interior

A figura 6.26 descreve os sistemas locais associados a cada face, e a tabela 6.11 define estas transformações. A equação 6.28 mostra as dimensões do mapeamento e das respectivas matrizes que a definem.

$$T : T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_e \subset \mathbb{R}^3, \quad T_{3 \times 2} = T(\xi, \eta) = A_{3 \times 2} \tilde{\xi} + b_{3 \times 1} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.28)$$

face	transformação				face	transformação			
F0	1	0	$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	F2	-1	-1	$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
F1	1	0	$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	F3	0	0	$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	0	1				1	0		
	0	0				0	1		

Tabela 6.11: Transformação da face para o espaço paramétrico do elemento

6.10.9 Transformação entre subelemento e elemento

A transformação entre o espaço paramétrico do subelemento filho e o espaço paramétrico do elemento pai é descrita pela equação 6.29. Todas as possíveis transformações deste tipo são

$$T : T_e \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_e \subset \mathbb{R}^3, \quad T_{3 \times 3} = T(\xi, \eta, \zeta) = A_{3 \times 3} \tilde{\xi} + b_{3 \times 1} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.29)$$

definidas na tabela 6.12. Acompanhe os dados da tabela 6.12 com as figuras 5.15 e 5.16.

subelemento	transformação					
sub 0	$\frac{1}{2}$	0	0	ξ		0
	0	$\frac{1}{2}$	0	η	+	0
	0	0	$\frac{1}{2}$	ζ		0
sub 1	$\frac{1}{2}$	0	0	ξ		$\frac{1}{2}$
	0	$\frac{1}{2}$	0	η	+	0
	0	0	$\frac{1}{2}$	ζ		0
sub 2	$\frac{1}{2}$	0	0	ξ		0
	0	$\frac{1}{2}$	0	η	+	$\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	ζ		0
sub 3	$\frac{1}{2}$	0	0	ξ		0
	0	$\frac{1}{2}$	0	η	+	0
	0	0	$\frac{1}{2}$	ζ		$\frac{1}{2}$
sub 4	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	ξ		$\frac{1}{4}$
	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	η	+	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	ζ		$\frac{1}{4}$
sub 5	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	ξ		$\frac{1}{4}$
	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	η	+	$\frac{1}{4}$
	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	ζ		$\frac{1}{4}$

Tabela 6.12: Transformação entre elementos filho e pai

6.11 Partição unitária do domínio computacional

Denomina-se **malha computacional** qualquer partição unitária \wp_u do domínio Ω do problema, composta de elementos computacionais. Uma partição unitária é definida pelas duas propriedades i e ii a seguir.

i. A união dos elementos da partição \wp_u é igual a Ω :

$$\cup \Omega_i = \Omega, \quad \Omega_i \in \wp_u \quad (6.30)$$

ii. A interseção dos interiores de dois elementos quaisquer de \wp_u é vazia :

$$\overset{\circ}{\Omega}_i \cap \overset{\circ}{\Omega}_j = \phi, \quad \forall \Omega_i, \Omega_j \in \wp_u \quad (6.31)$$

Se o elemento é de dimensão 1 ou 2 considera-se o interior destes elementos com a topologia induzida¹ de \mathfrak{R}^3 [46]. Assim por exemplo, a interseção C da bola aberta B em \mathfrak{R}^3 , da figura

¹ Uma topologia é definida num conjunto quando são definidos os abertos deste conjunto. Topologia induzida de \mathfrak{R}^3 quer dizer que os abertos de um conjunto C de \mathfrak{R}^3 são obtidos de abertos de \mathfrak{R}^3 intersectados com C .

6.27-(a), com um triângulo T de \mathbb{R}^3 , está contida no triângulo e C é um aberto do triângulo T . Desta maneira o interior de T é o triângulo sem os lados de dimensão 0 e 1, isto é o próprio lado de dimensão 3 do elemento. Isso também pode ser visto se consideramos T como sendo uma seção de um prisma, então o interior do prisma é uma vizinhança aberta e quando intersectado com T corresponde ao interior do triângulo $\overset{\circ}{T}$, figura 6.27-(b).

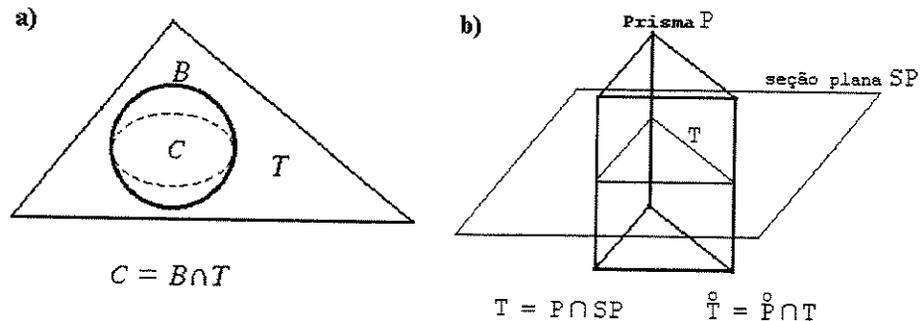


Figura 6.27: Abertos topológicos de um elemento

Com isto a definição de malha computacional inclui malhas refinadas.

Em uma malha computacional refinada pais e subelementos computacionais não podem coexistir. Ou considera-se um elemento formando parte de uma partição do domínio ou seus subelementos obtidos por divisão. Com uma dada malha geométrica refinada podem-se associar várias malhas computacionais, porém para efetuar o cálculo de uma solução aproximada pelo método dos elementos finitos escolhe-se só uma malha computacional.

A definição de malha computacional inclui ainda todas as possíveis combinações entre elementos uni, bi e tridimensionais. Considere-se Ω , por exemplo, como sendo um elemento quadrilátero superposto na face de um elemento hexaedro. Então ainda as propriedades *i* e *ii* continuam válidas. O interior do hexaedro não intersecta o quadrilátero. O mesmo acontece se considera-se um elemento linear superposto à aresta de um elemento triângulo. A interseção do interior do triângulo com o elemento linear é vazia, dado que o elemento linear coincide com uma das arestas do triângulo e o interior topológico deste não contém suas arestas.

I) Malhas Adaptativas

Uma malha M de elementos finitos é uma partição unitária P do domínio computacional. Seja $\wp(M)$ o conjunto das partes de M ; então

$$P \subseteq \wp(M), M = \{E_i \in P / 0 \leq i \leq n\} \quad (6.32)$$

$$\cup_{i=0}^n E_i = M, \overset{\circ}{E}_i \cap \overset{\circ}{E}_j = \phi \quad \forall i, j : 0 \leq i, j \leq n \quad (6.33)$$

Para efetuar o refinamento adaptativo da malha de elementos recorre-se a um **redese- nhador de malhas**^[43] ou **estimador de erros** ^[45], ^[69] junto a uma estratégia adaptativa adequada para cada problema. Um estimador de erro indicará, de acordo com uma análise da solução aproximada u_h , que elementos deverão ser divididos e quais deverão ser agrupados. A análise feita resultará numa estimativa para o erro $\|u - u_h\|$ sobre cada elemento da malha com uma norma $\|\cdot\|$ adequada, onde u é a solução exata geralmente não conhecida. Esta estimativa é comparada com um erro percentual dado a priori pelo usuário. Esta comparação ajudará a decidir se o elemento deve ser dividido ou se ele pertence a um grupo de subelementos que devem ser agrupados.

6.12 Espaço C^0 sobre uma malha refinada

A continuidade do espaço de interpolação entre elementos vizinhos precisa ser garantida, mesmo se esses elementos tem dimensão distinta. Por isto, a restrição do conjunto de funções de forma associadas ao elemento de dimensão maior para o domínio do lado precisa ser idêntica à restrição das funções de forma do elemento vizinho ao lado correspondente.

A figura 6.28 mostra um exemplo onde elementos de dimensão distinta são vizinhos : o triângulo, quadrilátero e o elemento linear são vizinhos, do mesmo nível, do elemento pirâmide. Para garantir a continuidade do espaço de interpolação, as funções de forma do elemento pi- ramide e as funções de forma do triângulo, quadrilátero e elemento de linha devem coincidir para os lados que esses tem em comum.

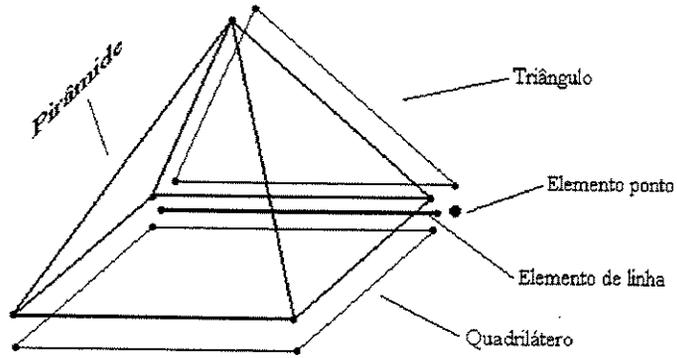


Figura 6.28: Elementos de um mesmo nível

A expressão da solução aproximada sobre uma malha é construída em termos de somas sobre elementos e seus lados.

$$u_h = \sum_{el} \sum_l \alpha_i^{el} \varphi_i^{el}(x, y) \quad (6.34)$$

A expressão $\varphi_i^{el}(x, y)$ representa um elemento do conjunto de funções de forma associadas ao lado l do elemento el e α_i^{el} são os coeficientes multiplicadores correspondentes a solução.

Quando A e B são vizinhos do mesmo nível, A é vizinho de B pelo lado l_A e B é vizinho de A pelo lado l_B tem-se

$$u_h|_{l_A} = \sum_{l_A} \alpha_{l_A}^A \varphi_{l_A}^A|_{l_A}, \quad u_h|_{l_B} = \sum_{l_B} \alpha_{l_B}^B \varphi_{l_B}^B|_{l_B} \quad (6.35)$$

Se houver continuidade então

$$\alpha_{l_A}^A = \alpha_{l_B}^B \quad (6.36)$$

Caso o espaço de interpolação associado à malha de elementos finitos precisa ser C^0 e uma conectividade l_A é restrita por uma conectividade l_B , isto é $l_A \subset l_B$, os coeficientes das funções de forma da conectividade restrita l_A serão dependentes dos coeficientes das funções de forma do lado grande l_B . Por exemplo, caso a interpolação seja bilinear observam-se na figura 6.29 as seguintes dependências entre coeficientes da solução aproximada:

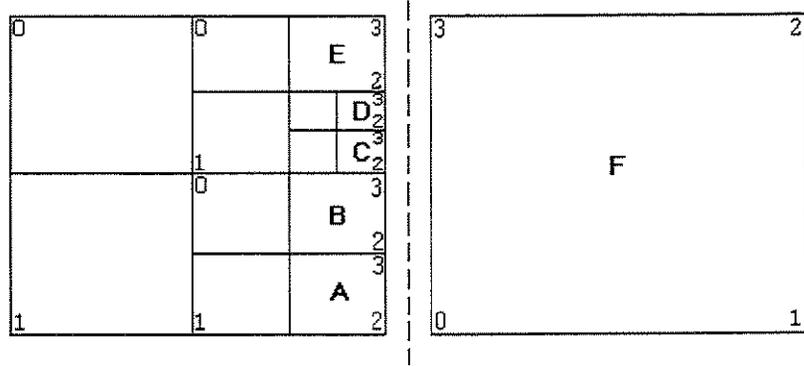


Figura 6.29: Lados restritos

$$\alpha_2^A = \alpha_0^F \quad (6.37)$$

$$\alpha_3^A = 0.75 \alpha_0^F + 0.25 \alpha_3^F \quad (6.38)$$

$$\alpha_2^B = \alpha_3^A = 0.75 \alpha_0^F + 0.25 \alpha_3^F \quad (6.39)$$

$$\alpha_3^B = \alpha_2^C = 0.5 \alpha_0^F + 0.5 \alpha_3^F \quad (6.40)$$

$$\alpha_3^C = \alpha_2^D = 0.375 \alpha_0^F + 0.625 \alpha_3^F \quad (6.41)$$

$$\alpha_3^D = \alpha_2^E = 0.25 \alpha_0^F + 0.75 \alpha_3^F \quad (6.42)$$

$$\alpha_3^E = \alpha_3^F \quad (6.43)$$

Para uma ordem de interpolação maior, quando existe restrição entre lados de elementos adjacentes, a relação entre os coeficientes das funções de forma do lado restrito para as funções de forma do lado maior não é tão simples e é calculada numericamente.

De forma geral, seja o lado l_p do elemento pequeno P restrito ao lado l_G do elemento contíguo G de maior tamanho, $l_p \subset l_G$. Seja ϕ_i uma função de forma do lado l_p do elemento P e Φ_j uma função de forma do lado l_G do elemento G . Se ϕ_p^i denota a restrição da função ϕ_i ao lado l_p e Φ_p^j denota a restrição da função Φ_j ao lado l_p contido em l_G tem-se :

$$\phi_p^i = \phi_i|_{l_p} ; \quad \Phi_p^j = \Phi_j|_{l_p} ; \quad l_p \subset l_G \quad (6.44)$$

Obtém-se continuidade sobre o lado l_p igualando-se uma combinação das funções ϕ_p^i com

cada função Φ_p^j . Considera-se o espaço V_n de dimensão n gerado pelas funções ϕ_p^i , $1 \leq i \leq n$.

$$V_n = \langle \phi_p^1, \phi_p^2, \dots, \phi_p^n \rangle \quad (6.45)$$

Qualquer função Φ_p^j definida sobre o lado $l_p \subset l_G$ pode ser descrita como uma combinação linear das funções ϕ_p^i de V_n , sendo:

$$\Phi_p^j = \sum_{k=1}^n \beta_{jk}^p \phi_p^k, \quad 1 \leq j \leq n \quad (6.46)$$

Nesta situação para obter-se continuidade, calcula-se a projeção L^2 sobre o espaço V_n das funções Φ_p^j associadas à conectividade restrita $\{P, l_p\}$, equação 6.47 (veja a seção 8.1).

$$\text{para } j = 1, 2, \dots, n : \int_{l_p} \phi_p^k \phi_p^i dx dy = \int_{l_p} \Phi_p^j \phi_p^i dx dy, \quad 1 \leq i, k \leq n \quad (6.47)$$

A restrição $u_h|_{l_p}$ é expressa em função dos coeficientes multiplicadores da solução das bases do elemento G . Seja u_h a solução de elementos finitos. Seja o j -ésimo coeficiente da solução do MEF sobre o elemento el é denotado por α_j^{el} , então, os coeficientes multiplicadores

$$\alpha_k^P = \sum_{j=1}^n \alpha_j^G \beta_{jk}^p \quad (6.48)$$

das funções do lado l_p do elemento P , são obtidos pela equação 6.48. Os valores β_{jk}^p seguem-se da solução do sistema 6.47. Assim, u_h é continua sobre o lado l_p e

$$u_h|_{l_p} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^G \beta_{jk}^p \phi_p^k \quad (6.49)$$

Para obter isto considere-se $\sum_{j=1}^n \alpha_j^G \Phi_p^j$ e substitua Φ_p^j segundo a equação 6.46.

6.13 Restrições entre espaços de funções

Quando elementos adjacentes não são mais vizinhos, a continuidade é garantida mediante aplicação de restrições entre as funções de forma associadas aos lados envolvidos. O lado do elemento cujas bases devem ser dependentes, deve ter uma ordem no mínimo igual ao lado de menor nível envolvido na restrição, dado que estas bases devem combinar-se para exprimir a restrição da base do lado de menor nível.

6.13.1 Restrições em uma malha computacional refinada

Quando um elemento é subdividido, ele ainda pode fazer parte da malha geométrica mas não fará parte da malha computacional. Agora os subelementos substituirão o elemento pai e eles farão parte da malha computacional em troca. A função de forma do lado 1 do subelemento 0, figura 5.15, é uma forte candidata a ser restrita se o lado 4 do elemento pai tiver um vizinho por este lado que faz parte da malha computacional.

Este elemento vizinho pode ser um elemento linear, um quadrilátero, um triângulo ou qualquer outro elemento tridimensional que compartilhe esta aresta com ele. Seguindo este exemplo, se o vizinho do elemento pai pelo lado 4 não estiver dividido, ele fará parte da malha computacional ou partição unitária do domínio. Então a conectividade 0/1 é dependente. O lado do qual dependerá, está certamente associado ao elemento vizinho do pai pelo lado 4. Então o lado de dimensão maior associado à conectividade $\{\text{filho } 0,1\}$ é $\{\text{filho } 0,4\}$. O próximo passo é percorrer o ciclo de vizinhanças do lado 4 do pai. Se não houver nenhum elemento vizinho dividido então, é certeza de que deve-se calcular a restrição para 1/0. Se houver um vizinho dividido, então, a restrição já existe e foi calculada. Resta somente identificar a restrição existente para a função de forma do lado 1 do subelemento 0.

6.13.2 Restrições entre lados de diferentes tamanhos/níveis

Analisa-se as diferentes situações entre lados restritos que aparecem em um processo de refinamento aninhado em uma malha $h - p$ adaptativa de elementos finitos. Sem perda de generalidade, este estudo é feito baseado nas restrições aparecendo entre lados de dimensão 0 e 1. Esta análise estendem-se diretamente para lados de dimensão 2. As mesmas situações entre cantos e arestas, podem ser também encontradas entre faces, ou entre arestas e faces ou ainda entre cantos e faces.

A figura 6.30 ilustra a justaposição de lados entre elementos. A linha pontilhada indica que os elementos são superpostos. O ponto indica o lado de dimensão zero, um canto. O x no

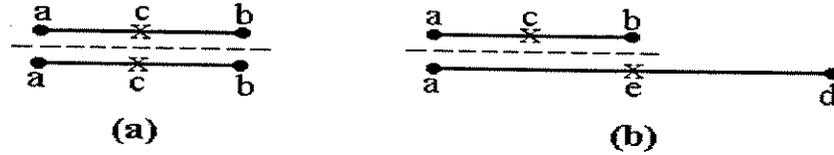


Figura 6.30: Lados superpostos entre elementos de dimensões iguais ou distintas

centro do elemento associa-se ao lado c de dimensão 1, isto é uma aresta. Dado que o nó de canto é o mesmo em ambos elementos, o seu número global dentro da malha também é igual. Já o lado c refere-se a aresta unindo os extremos a e b dos elementos.

Num processo adaptativo, elementos são agrupados e elementos são divididos. Logo duas situações são identificadas no processo adaptativo :

- (i) Remoção de elementos
- (ii) Inserção de elementos

Os elementos sendo agrupados ou divididos retiram-se da malha computacional, caso (i). Os elementos obtidos por agrupamento ou divisão constituem novos elementos computacionais, caso (ii). Com isto restrições devem ser retiradas no primeiro caso e no segundo caso restrições devem ser calculadas. Algumas mudanças ainda podem ocorrer na ordem de interpolação, provocada pela inserção ou remoção de elementos computacionais.

Lembre-se que dois elementos são vizinhos por um lado quando o lado é comum e os elementos são do mesmo nível, isto é pertencem a um mesmo estágio de divisões. Tome como exemplo deste fato o caso da figura 6.30. Quando dois elementos são adjacentes por um lado, eles podem ser vizinhos ou pertencer a níveis diferentes.

Se não são vizinhos então um dos lados adjacentes está contido no outro lado. Como exemplo disto tome-se o caso da figura 6.31, onde observam-se lados adjacentes de três elementos $el-1$, $el-2$ e $el-3$. Os elementos $el-2$ e $el-3$ estão superpostos ao elemento $el-1$, como indicam as linhas pontilhadas. Os três lados a , e , d do elemento $el-3$ são vizinhos dos lados a , e , d do

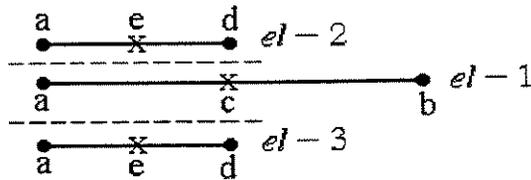


Figura 6.31: Lados contíguos de elementos adjacentes

elemento $el-2$ respectivamente. Os lados e e d estão contidos no lado c do elemento $el-3$.

Esta figura bem pode representar as arestas de 3 elementos uni, bi ou tridimensionais ou uma combinação destes. Por exemplo, os lados a , e , d do elemento $el-2$ podem pertencer a uma aresta de um triângulo e o elemento 1 pode ser linear. Ao mesmo tempo, os lados a , e , d do elemento $el-3$ podem pertencer a uma aresta de um hexaedro. Cada um destes elementos pode por sua vez ter uma ordem de interpolação diferente um do outro, mas esta ordem deve ser compatível para os lados da figura 6.31.

Várias situações são identificadas para lados contíguos de elementos adjacentes quando estes elementos são divididos ou agrupados. Entre lados adjacentes podem acontecer os seguintes casos :

1. Somente existem lados vizinhos (lados iguais ou do mesmo nível), isto é, lados superpostos de igual tamanho entre elementos adjacentes do mesmo nível.
2. Somente existem lados de menor nível, isto é, lados grandes
3. Somente existem lados de maior nível, isto é, lados pequenos
4. Existem lados de igual tamanho, existem lados pequenos e não existem lados grandes
5. Existem lados iguais, existem lados grandes e não existem lados pequenos
6. Existem lados pequenos, grandes e não existem iguais
7. Existem lados iguais, pequenos e grandes

Se não há elemento adjacente algum, também não há nenhuma decisão a ser tomada. Quando elementos são divididos ou agrupados as ações de remoção e inserção deverão acontecer, sendo que cada ação deverá ser aplicada sequencialmente.

I) Generalidades

Primeiro veja-se um exemplo. A figura 6.32-a mostra os lados **a**, **b**, **c**, **d**, **e** de dois elementos adjacentes $el-0$ e $el-1$. A figura 6.32-b mostra o elemento $el-1$ após a sua divisão. Duas situações observam-se na figura 6.32.

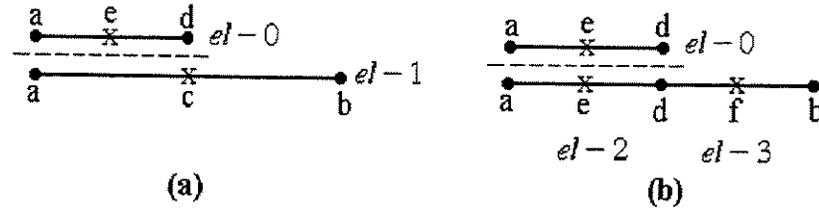


Figura 6.32: Lados pertencentes a elementos de níveis diferentes

1. Agrupando-se os elementos $el-2$ e $el-3$ de lados **a**, **d**, **e**, e **d**, **b**, **f** respectivamente, figura 6.32, obtém-se o elemento $el-1$ de lados **a**, **b** e **c**. Ou vice-versa,
2. Dividindo-se o elemento $el-1$ obtém-se os elementos $el-2$ e $el-3$.

O elemento $el-1$ ao ser dividido deixa de existir como elemento computacional. Quando um elemento $h - p$ adaptativo é dividido, os seus subelementos automaticamente herdam a ordem de interpolação do elemento pai. Como os elementos são hierárquicos, cada lado tem associada funções de certo grau, grau que varia de lado para lado dentro de um mesmo elemento como também varia concordantemente a ordem de interpolação desses lados.

Quando o elemento 2 está sendo inserido e encontra um vizinho como $el-0$, deve-se reconsiderar a ordem de interpolação dos lados **a**, **d**, **e**. Isto porque a ordem dos lados do elemento $el-0$ poderia ter mudado, quando foram calculadas as restrições de $el-0$ para $el-1$. A ordem de interpolação dos cantos sempre é compatível porque é de primeiro grau sobre a aresta, qualquer que seja o elemento e a sua dimensão.

Na figura 6.32-a as funções de forma associadas aos lados do elemento pequeno $el-0$ são restritas pelas funções de forma dos lados adjacentes do elemento grande $el-1$. Quando $el-1$

for dividido devem retirar-se as restrições, associadas aos lados **a**, **e**, **d** do elemento *el-0*, com respeito ao elemento *el-1*. Isto porque numa malha adaptativa aninhada, as dependências entre as funções de forma de elementos fazem parte de uma cadeia de restrições. Remeta-se ao apêndice B para uma análise específica de cada um dos sete casos enunciados acima.

Capítulo 7

Estrutura de Classes do Ambiente PZ

Neste capítulo são ressaltados alguns aspectos relevantes da programação orientada a objetos assim como a estrutura de árvore das classes do ambiente PZ. Destaca-se a classe material que implementa a equação diferencial.

7.1 Introdução : programação orientada a objetos

Uma diferença fundamental entre a programação orientada a dados e procedimentos e programação orientada a objetos é que na primeira, dados e procedimentos são coisas declaradas separadamente, na segunda o objeto tem associado a seus dados os métodos ou funções que deverão manipula-los. Deste modo, na segunda forma existe um único tipo de identidade: o objeto que representa ambos, dados e procedimentos. Quando define-se um objeto de alguma espécie, este conhece os métodos ou funções que os manipularão. Por sua vez, a função invocada por um objeto particular conhece ou tem acesso aos dados que este guarda.

Na programação orientada a objetos, a classe raiz define o comportamento genérico que os objetos específicos, definidos pelas classes derivadas, precisam implementar. Assim por exemplo, a classe raiz TPZGeoEl, que define a geometria de um elemento (próximo item), seja este qualquer um dos elementos implementados no ambiente, declara um objeto elemento geométrico genérico como uma entidade contendo várias informações. Este objeto contém informações tais como um número inteiro identificador de um elemento geométrico particular,

um ponteiro como uma variável que indica a malha geométrica a qual pertence, uma variável que identifica o elemento pai ou elemento do qual foi obtido por divisão, se este for o caso. O objeto possui também métodos generalizados, aplicáveis a todos os elementos sejam estes uni, bi ou tridimensionais como `WhichSide(TPZVec<int> &SideNodeIds)`, que identifica o lado do elemento com dadas conectividades 'SideNodeIds' e que é usado para construir a vizinhança dos lados de um elemento qualquer da malha inicial, e métodos ou funções que deverão ser implementadas pela classe derivada ou objeto elemento específico como a função construtora do objeto com os dados iniciais, as funções de forma usadas para calcular a geometria do elemento, a função que calcula o jacobiano da transformação em um ponto, etc.

No ambiente de programação científica denominado PZ o elemento finito tem duas árvores de classes principais: os elementos geométricos e os elementos computacionais. Os elementos geométricos são encarregados de definir a transformação geométrica, e serão apresentados no próximo item. Os elementos computacionais definem o espaço de interpolação de cada elemento baseados nas funções de forma hierárquica. A seguir dá-se uma definição mais completa destas duas classes.

Refinamento adaptativo num ambiente orientado a objetos

Apresenta-se um programa de elementos finitos adaptativo que permite implementar simulações em uma, duas e três dimensões espaciais. O programa é desenvolvido na linguagem C++ e é estruturado de tal forma que separam-se a aproximação geométrica do domínio, a definição do espaço de interpolação e a aplicação da formulação variacional que define o problema físico a ser aproximado. Neste capítulo mostra-se a estrutura de classes que permitiu escrever um código tão geral.

7.2 Classe da geometria do elemento : TPZGeoEl

Variáveis genéricas da classe TPZGeoEl

- ▶ TPZGeoMesh *fMesh : uma variável identificadora da malha geométrica do elemento
- ▶ int fid : um inteiro como próprio identificador que o diferencia dos objetos do mesmo tipo
- ▶ int fMatId : um índice dado à equação diferencial ou material a qual é associada
- ▶ TPZCompEl *fReference : um ponteiro identificador referente ao elemento computacional que define o espaço de interpolação associado
- ▶ TPZGeoEl *fFather : uma variável ponteiro que indica o elemento do qual foi dividido, se é que foi obtido por divisão
- ▶ static TPZFMMatrix gGlobalAxes : uma matriz 3x3 com os eixos do sistema, se este elemento tem uma orientação particular

Principais métodos da classe TPZGeoEl

▶ Métodos genéricos

Os próximos métodos são implementados na classe raiz e são usados por todos os elementos geométricos derivados desta classe.

- ▶ Id() : retorna o número identificador do elemento ou *id*
- ▶ TPZGeoEl(int materialid, TPZGeoMesh &mesh) : construtor de objetos desta classe
- ▶ WhichSide(TPZVec<int> &SideNodeIds) : dado o vetor de inteiros com dados id's nodais, esta função identifica o lado correspondente do elemento, mencionado na introdução
- ▶ NeighbourExists(int side, const TPZGeoElSide &gel) : procura a existência de um elemento geométrico 'gel' pelo seu lado número 'side' na vizinhança do elemento atual, a classe TPZGeoElSide define um objeto conectividade
- ▶ Level() : retorna o nível do elemento como o número de elementos que foram divididos para obtê-lo
- ▶ TPZGeoNode* NodePtr(int i) : devolve o i-ésimo objeto nó do elemento
- ▶ MaterialId() : devolve o *id* material designado a equação diferencial a aproximar
- ▶ TPZCompEl *Reference() : retorna um ponteiro para o elemento computacional respectivo

Esta classe contém ainda outros métodos que não serão apresentados, dado que objetivo aqui é dar uma visão global da estrutura de classes do ambiente PZ, enfatizando a grande flexibilidade para resolução de equações diferenciais pelo método dos elementos finitos.

▶ Outros métodos em TPZGeoEl

Apesar de serem definidos na classe raiz TPZGeoEl estes métodos são implementados

pela classe derivada ou elemento específico.

- ▶ `int NNodes()` : dá o número de nós do elemento. Obviamente este valor só pode ser determinado por cada elemento particular
- ▶ `TPZCompEl *CreateCompEl(TPZCompMesh &cmesh,int &index)` : cria o elemento computacional com base no elemento geométrico atual. O elemento computacional terá associado tantas funções de forma como a sua ordem requisitar
- ▶ `Neighbour(int side)` : dado que o elemento específico guarda a informação relativa a sua vizinhança esta função retorna o elemento geométrico vizinho pelo lado 'side'
- ▶ `X(TPZVec<REAL> &coordinate,TPZVec<REAL> &result)` : transforma o ponto 'coordinate' do elemento de referência para o elemento deformado
- ▶ `Jacobian(TPZVec<REAL> &coordinate,TPZFMMatrix &jac,TPZFMMatrix &axes,REAL &detjac, TPZFMMatrix &jacinv)` : calcula o jacobiano do elemento no ponto 'coordinate', calcula também a inversa do jacobiano e seu determinante. O jacobiano é retornado na matriz 'jac'

7.2.1 Elementos geométricos : implementação

Os elementos geométricos implementados são todos os elementos apresentados nas equações 6.1 a 6.8. Eles contém dados relativos à informações específicas tais como:

- ▶ `fNodeIndexes['número de nós']` : vetor de índices da lista que contém os objetos associados aos seus nós. Esta lista está definida na classe da malha geométrica
- ▶ `fNeighbours['número de lados']` : lista dos elementos vizinhos para cada um de seus lados
- ▶ `TPZGeoEl *fSubEl['número de subelementos']` : lista de ponteiros para seus subelementos se ele é dividido

Elemento geométrico como classe derivada de `TPZGeoEl`

Vários métodos que são implementados nesta classe derivada são mencionados na seção anterior. Se necessário a classe derivada pode definir e implementar funções que não necessitam ser declaradas na classe raiz `TPZGeoEl`.

- ▶ `TPZGeoElPoint` : elemento geométrico pontual
- ▶ `TPZGeoEl1d` : elemento geométrico unidimensional
- ▶ `TPZGeoEl2d` : elemento geométrico triangular bidimensional

- ▶ TPZGeoElQ2d : elemento geométrico quadrilátero, bidimensional
- ▶ TPZGeoElC3d : elemento geométrico hexaedro (cubo), tridimensional
- ▶ TPZGeoElT3d : elemento geométrico tetraedro, tridimensional
- ▶ TPZGeoElPi3d : elemento geométrico pirâmide, tridimensional
- ▶ TPZGeoElPr3d : elemento geométrico prisma, tridimensional

Algumas funções implementadas pela classe destes elementos

- ▶ Shape(TPZVec<REAL> &pt,TPZFMMatrix &phi,TPZFMMatrix &dphi) : funções de forma próprias do elemento e a sua derivada no ponto 'pt'
- ▶ NodeIndex(int node) : retorna o índice do nó número 'node' do elemento. Este índice é a localização deste objeto nó dentro da lista de nós da malha geométrica
- ▶ NSideNodes(int side) : devolve o número de nós associados ao lado 'side' do elemento
- ▶ HigherDimensionSides(int side,int targetdimension) : retorna o lado de dimensão 'targetdimension' associado ao lado 'side' do elemento onde 'targetdimension' é maior que 'side'. Este método é útil na determinação de restrições entre lados de elementos adjacentes
- ▶ LowerDimensionSides(int side,TPZStack<TPZGeoElSide> &smallsides) : devolve todos os lados de dimensão menor do próprio elemento, tem a mesma finalidade do método anterior
- ▶ Divide(TPZVec<TPZGeoEl*> &SubElVec) : divide o elemento geométrico atual. É usado no processo de refinamento adaptativo
- ▶ GetSubElement(int side,TPZVec<int> &refnode,TPZVec<TPZGeoElSide> &sub) : procura os subelementos do lado 'side' e na ordem referida por 'refnode'
- ▶ BuildTransform(int side,TPZGeoEl *father,TPZTransform &t) : devolve a transformação 't' do lado entre o subelemento atual (filho) e o elemento 'father' do qual foi obtido por divisão
- ▶ SideToSideTransform(int sidefrom,int sideto) : retorna a transformação entre os lados de referência de elementos vizinhos

A figura 7.1 mostra a estrutura de classes do elemento geométrico.

7.3 Classe do elemento computacional : TPZCompEl

A classe base genérica TPZCompEl define o comportamento do elemento computacional. Esta classe calcula essencialmente as funções de forma hierárquicas do elemento finito de acordo com a sua ordem. As funções de forma dos elementos hierárquicos são baseadas numa sequência de funções polinômiais reais. Elas são obtidas como produto entre as funções lineares associadas

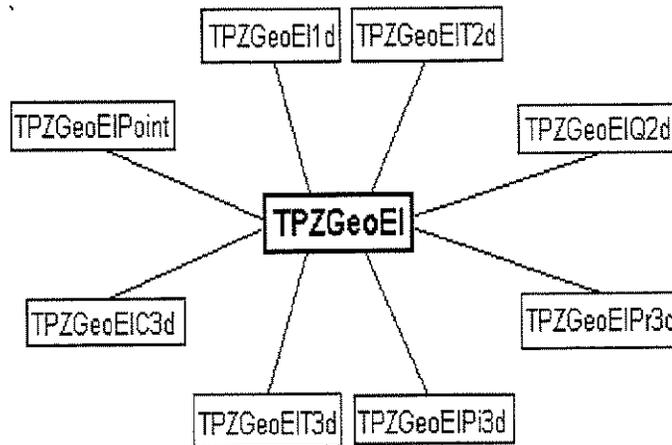


Figura 7.1: Classes de elementos geométricos

aos vértices do elemento e os polinômios da sequência. Desta classe são derivadas as classes do elemento interpolante e do elemento descontínuo.

Principais variáveis da classe TPZCompEl

- ▶ TPZCompMesh *fMesh : ponteiro para a malha contendo a lista de elementos computacionais
- ▶ static int gOrder : inteiro que identifica a ordem de interpolação do elemento

Alguns métodos da classe TPZCompEl

- ▶ fOrthogonal(REAL x,int num,TPZFMatrix & phi,TPZFMatrix & dphi) : implementa as funções ortogonais do lado unidimensional do elemento (aresta). Ela retorna o valor 'num' funções de forma e suas derivadas parciais no ponto 'x'. A orientação da função de forma depende de 'id', os dois identificadores globais dos nós de canto da aresta
- ▶ ShapeCornerTriang(TPZVec<REAL> &pt, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &dphi) : calcula o valor das funções de forma e suas derivadas associadas aos vértices do triângulo no ponto 'pt'
- ▶ ShapeTriang(TPZVec<REAL> &pt, TPZVec<int> &id, TPZVec<int> &order, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &dphi) : retorna valores das funções de forma do triângulo no ponto 'pt'. O número de valores depende de 'order'
- ▶ ShapeCornerCube(TPZVec<REAL> &pt, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &dphi) : calcula valores das funções de forma de canto do elemento hexaedro. As funções de forma

- hierárquica deste elemento são montadas na classe derivada para o hexaedro
- ▶ HasDependency() : determina se o elemento atual tem associadas funções de forma dependentes
 - ▶ ApplyConstraints(TPZElementMatrix &ekmat, TPZElementMatrix &efmat) : calcula as restrições ocasionadas pelas funções de forma de elementos adjacentes de níveis ou tamanhos distintos

7.4 Elemento computacional interpolante : TPZInterpolatedElement

A classe TPZInterpolatedElement é derivada da classe TPZCompEl. Ela tem por finalidade trabalhar com malhas *hp*-adaptativas que geram subespaços $V_{hp}(\Omega)$ de elementos finitos contínuos, isto é $V_{hp}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$. Esta é a classe base de qualquer elemento computacional interpolante. Além das variáveis herdadas da classe base TPZCompEl os objetos desta classe possuem as seguintes variáveis e métodos.

Variáveis da classe TPZInterpolatedElement

- ▶ TPZGeoEl *fReference : variável ponteiro do elemento geométrico associado
- ▶ TPZMaterial *fMaterial : ponteiro da classe material que define a equação diferencial do problema

Alguns métodos genéricos

- ▶ TPZInterpolatedElement(TPZCompMesh &mesh, TPZGeoEl *reference, int &index) : construtor de objetos da classe. Declara um novo objeto desta classe
- ▶ TPZGeoEl *Reference() : devolve o ponteiro do elemento geométrico associado, fReference
- ▶ int MaterialId() : retorna o identificador numérico do material do elemento que invoca esta função
- ▶ TPZMaterial *Material() : retorna o ponteiro do objeto material, *fMaterial
- ▶ CalcStiff(TPZElementMatrix &ek, TPZElementMatrix &ef) : aciona a montagem da matriz elementar
- ▶ Divide(int index, TPZVec<int> &sub, int interpolatesolution) : divide o elemento computacional valendo-se do método *Divide(..)* geométrico e atualizando as restrições cabíveis, interpolando a solução e atualizando a partição unitária ou malha computacional
- ▶ IdentifySideOrder(int side) : Atualiza a ordem de interpolação dos elementos que compar-

tilham o mesmo lado 'side'

- ▶ PRefine(int order) : muda a ordem de interpolação dos lados do elemento e atualiza todas as restrições
- ▶ Solution(TPZVec<REAL> &qsi,int var,TPZManVector<REAL> &sol) : retorna a solução convencionalizada por 'var' construída a partir da solução de elementos finitos no ponto 'qsi' do domínio. A solução tipo 'var' é definida na classe material do problema
- ▶ EvaluateError(void (*fp)(TPZVec<REAL> &loc, TPZVec<REAL> &val, TPZFMMatrix &deriv), REAL &>true_error, REAL &L2_error, TPZBlock *flux, REAL &estimate) : Avalia erros na aproximação de elementos finitos sobre o elemento. Erros em norma energia, norma L^2 , erro no fluxo, erro em semi norma. Se a solução exata é conhecida esta é transferida como um ponteiro para o escopo desta função, argumento (*fp), senão fp=0.

Outros métodos da classe TPZInterpolatedElement

Há outras funções que devem ser implementadas exclusivamente pelo elemento computacional derivado desta classe. Funções que manipulam dados que dependem das características peculiares de cada elemento.

- ▶ NConnectShapeF(int inod) : retorna o número de funções de forma associadas com uma dada conectividade do elemento, isto depende da ordem de interpolação 'gOrder' do elemento, variável definida na classe base TPZCompEl
- ▶ NSideConnects(int iside) : devolve a quantidade de nós do lado 'iside' do elemento
- ▶ int Dimension() : retorna a dimensão topológica do elemento
- ▶ TPZIntPoints &GetIntegrationRule() : devolve uma referência para a regra de integração do elemento. A regra de integração é uma variável própria do tipo de elemento e é declarada na classe derivada
- ▶ TPZIntPoints *CreateSideIntegrationRule(int side) : cria uma regra de integração apropriada para o lado do elemento e de acordo com a sua ordem e dimensão
- ▶ Shape(TPZVec<REAL> &x,TPZFMMatrix &phi,TPZFMMatrix &dphi) : implementa e calcula as funções de forma do elemento e suas derivadas parciais
- ▶ SideShapeFunction(int side, TPZVec<REAL> &point, TPZFMMatrix &phi, TPZFMMatrix &dphi) : calcula o valor das funções de forma do lado do elemento e as suas derivadas no ponto 'point' desse lado

7.4.1 Elementos computacionais : implementação

Para cada uma das classe dos elementos geométricos declara-se uma classe elemento com-

putacional associada. Cada um destes elementos computacionais é uma classe derivada de TPZInterpolatedElement.

- ▶ TPZCompElPoint : a classe computacional associada ao elemento pontual
- ▶ TPZCompEl1d : classe computacional do elemento unidimensional
- ▶ TPZCompElT2d : classe do elemento computacional triangular bidimensional
- ▶ TPZCompElQ2d : elemento computacional quadrilateral, bidimensional
- ▶ TPZCompElC3d : elemento computacional hexaedro, tridimensional
- ▶ TPZCompElT3d : elemento tetraedro, tridimensional
- ▶ TPZCompElPi : elemento pirâmide, tridimensional
- ▶ TPZCompElPr3d : elemento prisma, tridimensional

Variáveis da classe do Elemento Computacional

- ▶ fintRule : regra de integração Gaussiana do elemento, depende de cada elemento e da sua ordem
- ▶ int fConnectIndexes['número de conectividades do elemento'] : vetor de índices, cada índice inteiro indica a posição do objeto conectividade dentro da lista de conectividades da malha computacional
- ▶ int fSideOrder['número de lados de dimensão não nula'] : ordem de interpolação atual de cada aresta, face e interior do elemento. Pode variar de lado para lado de acordo com os valores ditados pelo refinamento p
- ▶ int fPreferredSideOrder[n] : ordem de interpolação preferida pelo elemento para cada um de seus lados, onde n é o número de lados do elemento, de dimensão não nula

Métodos da classe do Elemento Computacional

Além dos métodos enunciados no item anterior tem-se :

- ▶ int NConnects() : retorna o número de conectividades do elemento
- ▶ GetInterpolationOrder(TPZVec<int> &ord) : devolve uma lista com a ordem de interpolação de cada lado do elemento
- ▶ TPZCompEl'TIPO'(TPZCompMesh &mesh, TPZGeoEl'TIPO' *ref, int &index) : construtor do elemento computacional baseado no elemento geométrico *ref, tipo refere-se ao elemento específico
- ▶ NConnectShapeF(int side) : retorna o número de funções de forma associadas a conectividade do lado 'side' do elemento computacional
- ▶ CreateGraphicalElement(TPZGraphMesh &grmesh, int dimension) : cria o objeto gráfico

para a visualização dos resultados do modelo

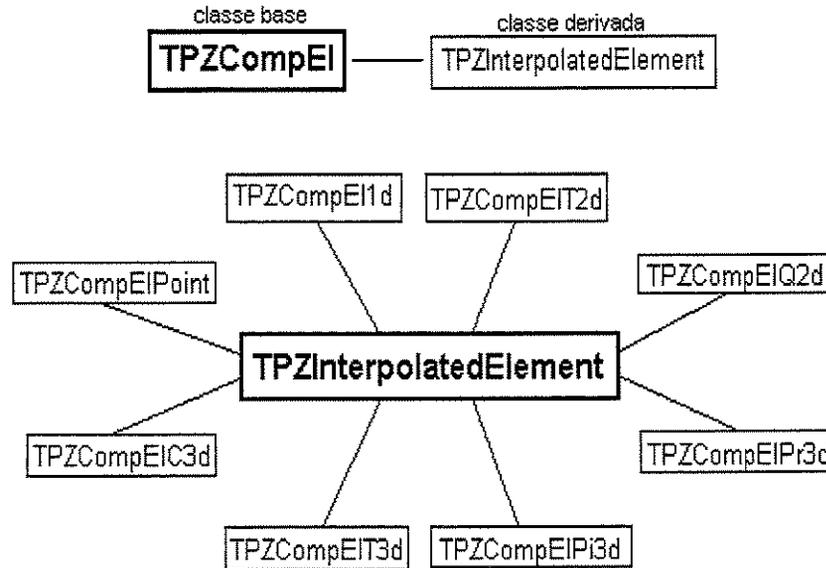


Figura 7.2: Estrutura de classes do elemento computacional

7.5 TPZGeoMesh : classe malha geométrica

A classe malha geométrica contém várias listas relativas a objetos como nós geométricos, elementos geométricos, elementos com condições de contorno associados etc., assim como métodos apropriados que manipulam estas listas e outros dados.

Variáveis da classe TPZGeoMesh

- ▶ char fName[63] : nome para identificação do modelo
- ▶ TPZCompMesh *fReference : ponteiro para a malha computacional associada
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZGeoEl *> fElementVec : lista de ponteiros para elementos geométricos
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZGeoNode> fNodeVec : lista de nós da malha
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZCosys *> fCosysVec : tipo de sistema de referência global usado pelo método como sistema retangular, polar, cilíndrico, esférico, etc.
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZGeoElIBC> fBCElementVec : lista de objetos tipo condição de contorno

- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZGeoNodeBC> fBCNodeVec : lista de objetos tipo condição de contorno nodal
- ▶ int fNodeMaxId : máximo identificador de todos os nós da malha, serve para designar um id quando um novo nó geométrico é criado
- ▶ int fElementMaxId : máximo id de todos os elementos da malha, para designar um id quando um novo elemento é gerado

Alguns métodos da classe TPZGeoMesh

- ▶ TPZGeoMesh() : construtor da malha
- ▶ CleanUp() : apaga todos os itens da malha
- ▶ int NNodes() : devolve o número de nós da malha
- ▶ int NElements() : retorna a quantidade de elementos da respectiva lista
- ▶ NodeVec() : devolve a lista de nós da malha geométrica
- ▶ ElementVec() : retorna a lista de elementos da malha
- ▶ BuildConnectivity() : constrói as conectividades dos elementos da malha
- ▶ TPZCompMesh *Reference() : retorna um ponteiro para a malha computacional associada
- ▶ void GetNodePtr(TPZVec<int> &nos, TPZVec<TPZGeoNode *> &nodep) : procura na lista de nós aqueles com *ids* referidos por 'nos'

7.6 TPZCompMesh : classe malha computacional

A classe que define a malha computacional também contém várias listas relativas a objetos computacionais como conectividades, elementos etc., e algumas variáveis como a estrutura em blocos da solução e a matriz de rigidez.

Variáveis da classe TPZCompMesh

- ▶ TPZGeoMesh *fReference : variável apontando para a malha geométrica associada
- ▶ char fName[127] : nome para identificação do modelo
- ▶ char fChecked : variável usada para indicar se a malha foi checada
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZCompEl *> fElementVec : lista de elementos computacionais
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZConnect> fConnectVec : lista de conectividades da malha
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZMaterial *> fMaterialVec : lista de materiais do problema
- ▶ TPZAdmChunkVector<TPZConnectBC> fBCConnectVec : lista de conectividades com condição de contorno associada

- ▶ TPZBlock fSolutionBlock : guarda a estrutura em blocos da solução
- ▶ TPZFMMatrix fSolution : vetor com a solução do sistema de elementos finitos
- ▶ TPZBlock fBlock : divisão em blocos da matriz de rigidez

Métodos da classe TPZCompMesh

- ▶ TPZCompMesh(TPZGeoMesh* gr) : construtor do objeto malha computacional
- ▶ CleanUp() : apaga todas as estruturas de dados criados dinamicamente
- ▶ NConnects() : retorna a quantidade de conectividades da malha
- ▶ NElements() : devolve o número de elementos computacionais da lista
- ▶ char* Name() : retorna o título dado ao modelo computacional
- ▶ ElementVec() : devolve uma referência para a lista de elementos desta classe
- ▶ ConnectVec() : retorna uma referência para a lista de conectividades da classe
- ▶ InsertMaterialObject(TPZMaterial *mat) : insere um novo material a lista de materiais
- ▶ InitializeBlock() : dimensiona a estrutura em blocos da solução
- ▶ Solution() : para acessar a solução do sistema linear
- ▶ Skyline(TPZVec<int> &skyline) : calcula o skyline do sistema de equações
- ▶ Assemble(TPZMatrix &stiffness, TPZFMMatrix &rhs) : efetua a montagem da matriz de rigidez e vetor carga com as matrizes elementares calculadas a partir da integração da equação diferencial ou material sobre o elemento
- ▶ AutoBuild() : cria os elementos computacionais baseado na malha geométrica e chama InitializeBlock()
- ▶ EvaluateError(void (*fp)(TPZVec<REAL> &loc, TPZVec<REAL> &val, TPZFMMatrix &deriv), REAL &>true_error, REAL &L2_error, REAL &estimate) : avalia erros na aproximação de elementos finitos sobre a malha toda. Erros em norma energia, norma L^2 , erro no fluxo, erro em semi norma. Se a solução exata é conhecida esta é transferida como um ponteiro para uma função, argumento (*fp), senão fp=0

7.7 Classe que implementa a equação diferencial

Elementos computacionais calculam as funções de forma, suas derivadas e integram funções sobre o elemento geométrico deformado. O elemento computacional ignora a simulação que está sendo executada. Os coeficientes da equação diferencial ou forma bilinear são de responsabilidade da classe material. Considere o seguinte problema de valor de contorno abstrato:

$$\text{achar } u \in H^1(\Omega) : a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (7.1)$$

Um grande número de equações diferenciais podem ser reduzidas à formulação variacional 7.1 onde as formas bilinear $a(u, v)$ e linear $f(v)$ dependem de integrais sobre o domínio Ω e sobre a fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. A aproximação de elementos finitos escreve-se

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_{hp}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \quad (7.2)$$

onde $V_{hp}(\Omega)$ é o espaço das funções polinomiais por partes e pode-se escrever

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} F(u_h, v_h, \nabla u_h, \nabla v_h, x) d\Omega + \int_{\partial\Omega} G(u_h, v_h, x) d\Gamma \quad (7.3)$$

$$f(v_h) = \int_{\Omega} f v_h d\Omega \quad (7.4)$$

Considerando $u_h = \sum u_i \psi_i$ e usando integração numérica sobre o elemento, as parcelas nas equações 7.3 e 7.4 ficam respectivamente

$$K_{ij} = \sum_{p. int.} F(\psi_i, \psi_j, \nabla \psi_i, \nabla \psi_j, x) \text{ weight } |Jac| \quad (7.5)$$

$$f_i = \sum_{p. int.} f \psi_j \text{ weight } |Jac| \quad (7.6)$$

$$f_{BC} = \sum_{p. int.} G(\psi_i, \psi_j, x) \text{ weight } |Jac| \quad (7.7)$$

As expressões sob a somatória nas equações 7.5 , 7.6 e 7.7 são avaliadas em pontos de integração. A matriz de rigidez e vetor carga elementar são K_{ij} e f_i respectivamente. As somas, equações 7.5 , 7.6 e 7.7, são calculadas no método CalcStiff da classe TPZInterpolatedElement. Este método pode ser aplicado a todos os elementos computacionais implementados como classes derivadas de TPZInterpolatedElement, subsecção 7.4.1.

A classe material tem como finalidade calcular a contribuição para matriz de rigidez elementar dos valores das funções de forma, suas derivadas parciais e o determinante do jacobiano no ponto de integração. Deste modo os valores das expressões sob a somatória das equações 7.5 , 7.6 e 7.7 são implementados na classe material que define assim a equação diferencial a discretizar.

7.7.1 Classe material genérica : TPZMaterial

A classe TPZMaterial define o comportamento básico que qualquer material derivado precisa implementar. A única variável numérica desta classe genérica é o id inteiro. É claro que todos os materiais derivados desta classe herdam esta variável.

- ▶ int fid : identificador numérico do material. Um problema pode trabalhar com vários materiais
- ▶ (*fForcingFunction)(TPZVec<REAL> &loc,TPZVec<REAL> &result) : ponteiro para uma função fonte ou carga conhecida, ela pode ser atribuída ao material no programa principal.

Métodos da classe TPZMaterial

A maioria destes métodos são implementados nas classes materiais derivadas de TPZMaterial, pois são elas que implementam a equação diferencial particular a ser discretizada.

- ▶ TPZMaterial(int id) : construtor do objeto designando-lhe a identificação numérica 'id'
- ▶ char *Name() : retorna o nome do material ou da classe
- ▶ int Dimension() : retorna a dimensão integrável do material
- ▶ int NStateVariables() : retorna o número de graus de liberdade ou variáveis de estado do material
- ▶ int Nfluxes() : devolve o número de componentes da função fluxo do problema
- ▶ int VariableIndex(char *name) : retorna o índice designado a variável de nome 'name'
- ▶ Solution(TPZVec<REAL> &Sol,TPZFMatrix &DSol,TPZFMatrix &axes,int var,TPZVec<REAL> &Solout) : calcula a solução indexada por 'var' baseada na aproximação de elementos finitos
- ▶ TPZBndCond *CreateBC(int id, int typ, TPZFMatrix &val1, TPZFMatrix &val2) : cria um objeto condição de contorno, classe TPZBndCond. Os valores das condições de contorno são dadas pelas matrizes 'val1' e 'val2'
- ▶ Contribute(TPZVec<REAL> &x, TPZVec<REAL> &sol, TPZFMatrix &dsol, REAL weight, TPZFMatrix &axes, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &dphi, TPZFMatrix &ek, TPZFMatrix &ef) : calcula a contribuição da matriz de rigidez e vetor carga no ponto de integração
- ▶ ContributeBC(TPZVec<REAL> &x, TPZVec<REAL> &sol, REAL weight, TPZFMatrix &axes, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &ek, TPZFMatrix &ef, TPZBndCond &bc) : calcula a contribuição da matriz de rigidez e carga para a condição de contorno do problema, no ponto de integração

- ▶ `Errors(TPZVec<REAL> &x,TPZVec<REAL> &sol,TPZFMatrix &dsol, TPZFMatrix &axes, TPZVec<REAL> &flux, TPZVec<REAL> &uexact,TPZFMatrix &duexact, TPZVec<REAL> &val)` : calcula a contribuição no ponto de integração para o cálculo de erros em várias normas

7.7.2 Alguns materiais derivados e implementados no ambiente PZ

- ▶ `TPZMat` : implementa o problema de Poisson
- ▶ `TPZElasticityMaterial` : material elástico linear bidimensional
- ▶ `TPZMatBiot` : equação que modela o fluxo através de um meio poroso
- ▶ `TPZPlateMat` : problema tipo 'plate'
- ▶ `TPZPlaca` : material de placa
- ▶ `TPZMatHyperElastic` : material hiperelástico

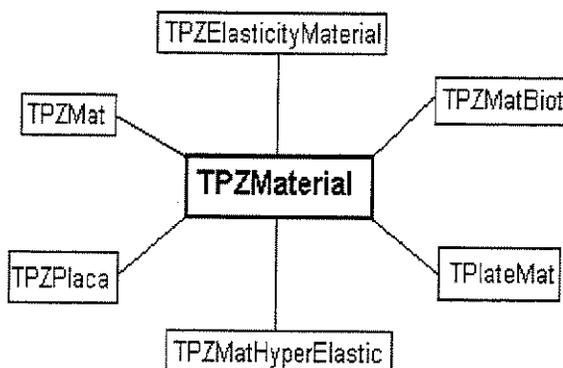


Figura 7.3: Classes materiais implementadas

Desta forma qualquer novo problema pode ser facilmente incorporado ao ambiente PZ implementando a classe material e os métodos declarados na classe base `TPZMaterial`.

I) Outras classes do ambiente PZ

O ambiente de computação científica PZ conta ainda com várias ferramentas inerentes ao uso do método dos elementos finitos. Entre elas, cabe destacar o diretório das classes matriciais. Nele são definidos os vários tipos de matrizes e métodos de resolução utilizados. Matrizes cheias, esparsas, bandas (cheias e esparsas) e skylines entre outros. E métodos de resolução

diretos, iterativos, multigrid etc. A flexibilidade na programação devido a linguagem orientado a objetos e a estrutura de classes do PZ permite um variedade de combinações na utilização destas ferramentas. A figura 7.4 mostra uma visão estrutural das principais classes matriciais derivadas aqui mencionadas, com nomenclaturas óbvias, a classe base é TPZMatrix.

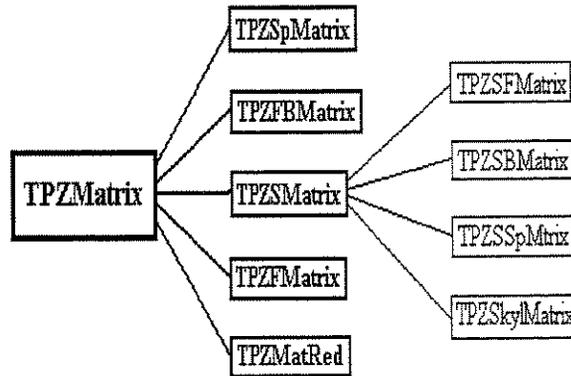


Figura 7.4: Árvore de classes matriciais

Tem-se ainda a classe TPZIntRule que define regras de integração numérica de vários graus para cada um dos elementos implementados no ambiente, classes baseadas no conceito *template* que gerenciam e manipulam diferentes listas de objetos, a classe TPZAnalysis que executa a resolução do sistema linear e que junto com as classes 'gráficas' preparam arquivos de dados pós-processados com ajuda da classe material e utilizados para a visualização dos resultados com o Data Explorer e outros.

Todos os métodos estão comentados junto com a definição do código respectivo dentro do ambiente de classes do PZ.

Capítulo 8

Testes Numéricos de Qualificação

Vários testes numéricos foram efetuados para avaliar o desempenho dos elementos, assim como dos algoritmos que foram implementados usando-se a técnica de refinamento $h-p$ adaptativo proposto neste trabalho.

Neste capítulo apresenta-se uma síntese dos principais testes realizados.

8.1 Soluções polinomiais exatas

A primeira avaliação proposta refere-se ao teste de representação polinomial onde verifica-se para uma solução polinomial de grau p , se o elemento hierárquico de ordem p consegue representar esta solução de forma exata. Isto verifica-se quando, assumido precisão dupla, o erro obtido por integração numérica em várias normas é da ordem 10^{-15} . Utiliza-se projeção L^2 integrando-se as próprias funções de forma e soluções exatas. A obtenção das equações é feita a seguir.

Projeta-se, com o uso da norma $\|\cdot\|_{L^2}$, uma solução polinomial conhecida sobre o espaço V_h respectivo. Para a ordem de interpolação p , usa-se a solução polinomial u , conforme especificado na seqüência:

$$u = u_p = \sum_{k=0}^p b_{lmn} x^l y^m z^n, \quad l + m + n = k, \quad l, m, n \geq 0 \quad (8.1)$$

Como a ordem do elemento é p , a solução exata $u_p = u_h$ existe dentro do espaço de elementos finitos V_h de dimensão finita N , veja seções 4.10, 4.11, 4.12. Isto é baseado no seguinte argumento. Se $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ é uma base de V_h , a solução polinomial exata u é dada por

$$u = u_p = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \quad (8.2)$$

Os elementos de V_h são funções polinomiais por partes definidas sobre o domínio Ω de u , domínio discretizado com elementos hierárquicos. O erro da solução é dado por

$$erro^2 = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(\mathbf{x}) - u_h \right)^2 d\mathbf{x} = 0 \quad (8.3)$$

$$\mathbf{x} = (x, y, z), \quad d\mathbf{x} = dx dy dz \quad (8.4)$$

Dado que a solução u_p está em V_h , da equação 8.3 segue-se

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (\|u - u_p\|_{L^2(\Omega)}) = 0 \quad (8.5)$$

$$2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i - u_p \right) \varphi_j d\mathbf{x} = 0 \quad (8.6)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u_p \varphi_j d\mathbf{x} \quad (8.7)$$

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{x}, \quad f_j = \int_{\Omega} u_p \varphi_j d\mathbf{x} \quad (8.8)$$

Os coeficientes α_i da solução do sistema dado por 8.8 são os coeficientes da solução conhecida, equação 8.2. Para o domínio Ω usam-se elementos uni, bi ou tridimensionais do mesmo tipo, ou uma combinação heterogênea destes. Para elementos lineares, triangulares, quadrilaterais, hexaédricos, tetraédricos, piramidais e prismáticos, com ordem de interpolação p , toma-se como solução conhecida termos polinomiais da forma

$$u_p = x^p, \quad u_p = y^p, \quad u_p = z^p \quad (8.9)$$

$$u_p = x^l y^m, \quad l + m = p, \quad l, m \geq 0 \quad (8.10)$$

$$u_p = x^l y^m z^n, \quad l + m + n = p, \quad l, m, n \geq 0 \quad (8.11)$$

Foram testados todos os elementos até pelo menos ordem $p = 7$. Para cada um dos

elementos testaram-se todas as possíveis combinações dadas pelas equações 8.9, 8.10 e 8.11 do grau 0 até o grau p . Se vários destes termos são representados separadamente, então a soma deles também é representada, já que os coeficientes da solução da soma dos termos é a soma dos coeficientes da solução de cada termo.

Utiliza-se integração numérica de Gauss para o cálculo do erro em normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $|\cdot|_{H^1}$, $\|\cdot\|_{H^1}$ para os diferentes testes efetuados, sendo que os resultados obtidos podem ser vistos na seqüência:

$$\|u_p - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C 10^{-15} \quad (8.12)$$

$$\|u_p - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C 10^{-10} \quad (8.13)$$

$$|u_p - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C 10^{-10} \quad (8.14)$$

com C constante. Observa-se neste caso que a regra de integração usada é de precisão no mínimo 10^{-10} . Os erros citados não dependem do tipo do elemento nem da sua ordem.

Outro teste efetuado para considerar CC mistas utiliza a abstração do material de Poisson, isto é o operador diferencial de Poisson equação 8.19, que pode ser representado conforme a equação clássica 8.17, por meio da formula de Green 8.16. A matriz e vetor carga elementares são calculados com o uso das expressões dadas na equação 8.19. Para testes use-se a solução polinomial conhecida u_p de grau p , conforme mostrados nas equações 8.9, 8.10, 8.11.

$$-\beta \nabla^2 u = f \quad (8.15)$$

$$-\beta \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_k^2} \Psi_j d\mathbf{x} = \beta \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} d\mathbf{x} - \beta \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \eta} \Psi_j d\Gamma \quad (8.16)$$

$$f = -\beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) \quad , \quad u = u_p \quad (8.17)$$

$$\beta \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \Psi_j d\mathbf{x} + \beta \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \eta} \Psi_j d\Gamma \quad (8.18)$$

$$a_{ij} = \beta \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} dx, \quad \mathbf{f}_j = \int_{\Omega} f \Psi_j dx + \beta \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \eta} \Psi_j d\Gamma \quad (8.19)$$

Utiliza-se integração numérica para o cálculo de erros em normas $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, energia $\|\cdot\|_{H^1}$ e seminorma $|\cdot|_{H^1}$. Estes erros, denotado em geral por $\|u_p - u_h\|$, sempre é igual à ordem de precisão da regra de integração numérica, isto é, aproximadamente

$$\|u_p - u_h\| \in (10^{-15}, 10^{-10}) \quad (8.20)$$

para regras com pontos e pesos ao menos com 10 dígitos decimais.

Para testar a interação entre elementos de dimensões distintas utiliza-se elementos lineares acoplados as arestas de elementos bi e tridimensionais. Também usa-se triângulos e quadriláteros justapostos às faces respectivas de elementos tridimensionais. Nos testes também foram introduzidas condições de contorno por meio de elementos de dimensão menor, justapostos nas faces de elementos que fazem parte da fronteira com condições de contorno associada. As condições de contorno são integradas utilizando-se as bases do elemento de menor dimensão que é da mesma ordem do elemento vizinho ao qual é acoplado. Os erros obtidos com normas $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\cdot|_{H^1}$ são dados pelas equações 8.12, 8.13, 8.14 e 8.20.

O material de Poisson também foi usado para testar soluções polinomiais conhecidas aplicando-se *CC* mistas, obtendo-se erro em normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{H^1}$ e semi norma $|\cdot|_{H^1}$ com precisão ao menos da ordem esperada para a regra de integração empregada. Para avaliar os algoritmos como o cálculo e remoção de restrições, e as transformações utilizadas, usa-se um ciclo aleatório de divisões e agrupamentos de elementos. Várias malhas adaptadas aleatoriamente foram obtidas para resolver os problemas citados anteriormente e o resultado dos erros foram os mesmos já mencionados. Efetuaram-se também os testes referidos na seção 1.1, como o teste de continuidade das bases em malhas heterogêneas conformes.

8.1.1 Desenhador de malhas *hp*-adaptativo

Foi implementada uma estratégia de refinamento *h-p* desenvolvida por Novotny

et. al. Os detalhes desta estratégia podem ser encontrados em [43]. Aplicando certos critérios para a obtenção dos parâmetros h e p a estratégia é baseada em um problema de minimização dos graus de liberdades dentro da malha, sujeito a condição que a norma do erro seja igual a um erro admissível. Para testes utiliza-se uma função conhecida dada pela equação 8.21. O problema a ser resolvido é o problema de Poisson com CC homogêneas.

$$u(x, y) = xy(1 - x)(1 - y) \tan^{-1} \left[60 \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}} - 0.8 \right) \right] \quad (8.21)$$

Esta função apresenta grande variação a medida que a variável aproxima-se da diagonal central do domínio, conforme mostrado na figura 8.1. As figuras 8.2 e 8.3 mostram em detalhe a saída gráfica utilizando os arquivos gerados com as classes que efetuam o pós-processamento.

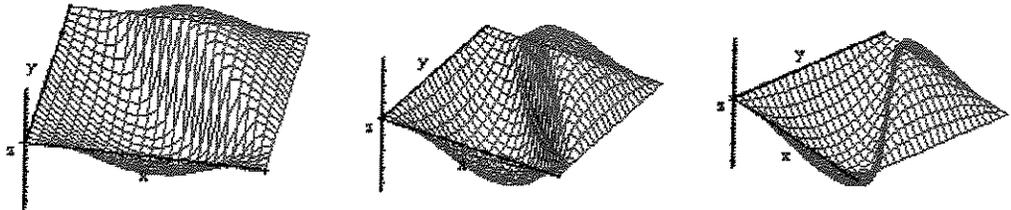


Figura 8.1: Solução conhecida: equação 8.21

A figura 8.2 mostra a malha h -adaptativa obtida, e a figura 8.3 a adaptividade p para a mesma malha. Estas figuras avaliam claramente o bom desempenho da estratégia. O grau dos polinômios de aproximação aumenta quando a variável se aproxima da diagonal central.

Da mesma forma o tamanho do elemento diminui nas proximidades desta diagonal, figura 8.2. É importante notar que a diagonal é o lugar do domínio onde a solução conhecida apresenta um grande gradiente.

No gráfico da figura 8.4 pode-se ver a taxa de convergência para vários testes deste mesmo problema. A curva superior mostra a convergência quando é usado refinamento p puro e com uma malha uniforme. As outras curvas correspondem a refinamento $h-p$ com 3, 4 e 5 iterações respectivamente.

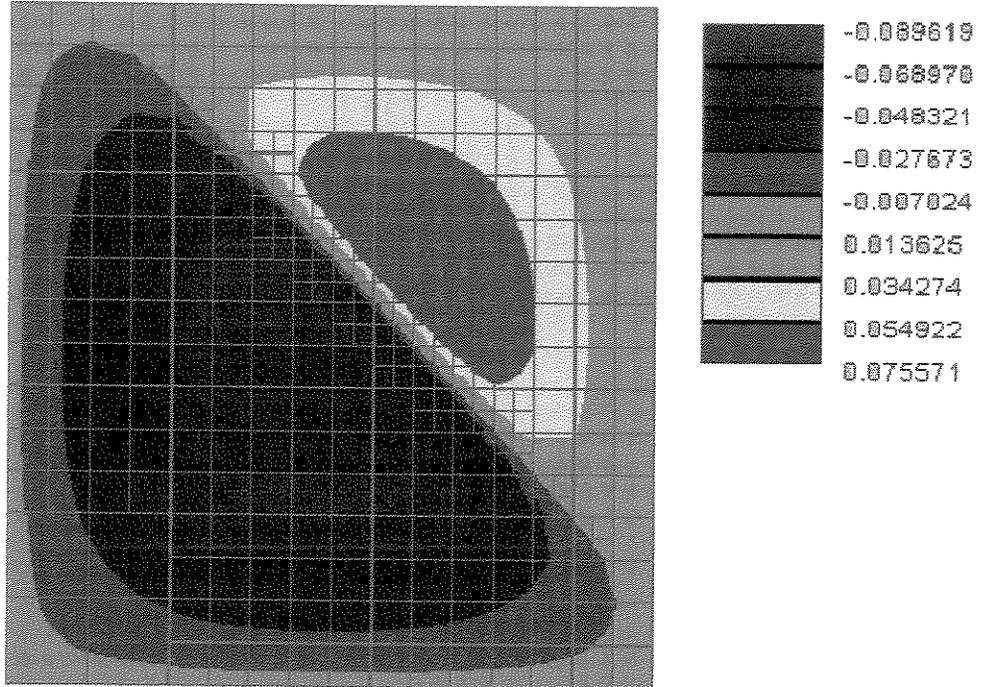


Figura 8.2: Refinamento h-adaptativo : malha geométrica final

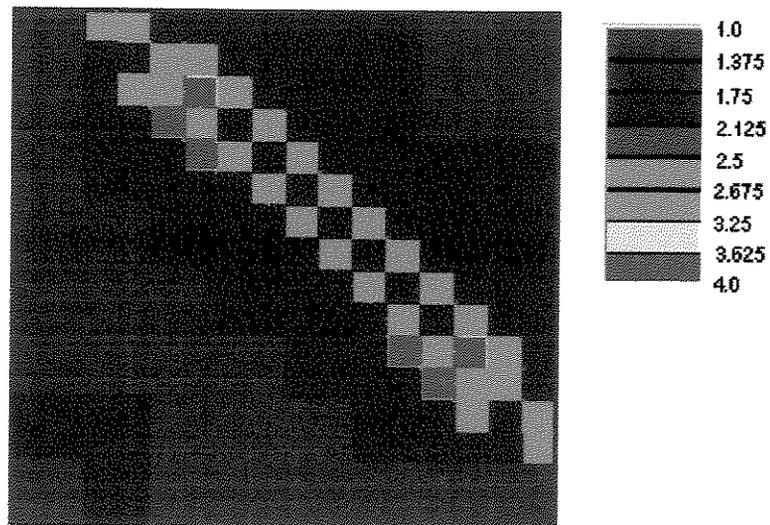


Figura 8.3: Evolução do p-refinamento adaptativo, malha final

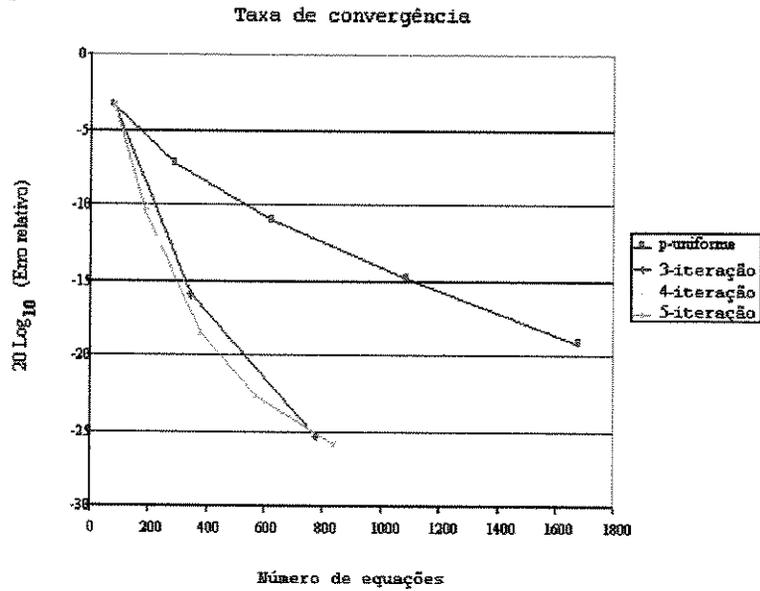


Figura 8.4: Taxa de convêrgencia da estratégia h-p adaptativa

8.2 Material hiperelástico não linear

Nesta seção descreve-se o procedimento para aproximar a solução do mínimo de um funcional não linear dado por uma função de densidade de deformação de um material hiperelástico não linear W . Para aproximar a solução utiliza-se o método iterativo de Newton que tem uma convergência quadrática.

8.2.1 Definição do funcional, do problema e do algoritmo

Seja a função **densidade de deformação** W definida por

$$W = \lambda \frac{(J^2 - 1)}{4} - \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \ln(J) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr } C - 3) \quad (8.22)$$

$$C = F^T F \quad (8.23)$$

$$J^2 = \det C = (\det F)^2, \det F > 0 \quad (8.24)$$

$$F = \nabla U + I_3 \quad (8.25)$$

$$U : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \rightsquigarrow U(x, y, z) \quad (8.26)$$

$$U(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \quad (8.27)$$

Na equação 8.25 U é uma função vetorial de deslocamentos, não necessariamente pequenos, e I_3 o tensor identidade. As constantes de *Lamé* λ e μ são dadas por

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \quad (8.28)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)} \quad (8.29)$$

onde E é o módulo de *Young*, v o coeficiente de *Poisson*.

O tensor de Piola Kirchoff^[28] S é dado pela seguinte igualdade

$$S(F) = \nabla_F W(F) = \frac{\partial W(F)}{\partial F} \quad (8.30)$$

O tensor de Cauchy é relacionado ao tensor de Piola Kirchoff por

$$\sigma(F) = \frac{S(F)F^T}{|F|} \quad (8.31)$$

O tensor de Cauchy é igual a

$$\sigma(F) = \frac{1}{J} \left[\mu B + \left(\frac{\lambda}{2} (J^2 - 1) - \mu \right) I \right] \quad (8.32)$$

$$B = FF^T \quad (8.33)$$

Com uso das propriedades do análise tensorial segue-se^[28] :

$$\nabla_K \det K = \frac{1}{\det K} K^{-T} \quad (8.34)$$

$$\nabla_F \text{tr}(F^T F) = 2F \quad (8.35)$$

Observa-se a seguinte identidade

$$J^2 - 1 = (\det F)^2 - 1 = (\det(\nabla u + I))^2 - 1 \quad (8.36)$$

Use-se a expansão em serie de Taylor do determinante da matriz para achar a seguinte

aproximação

$$\det(I + \nabla u) = \det I + \nabla \det I \cdot \nabla u + \theta(\nabla u) \quad (8.37)$$

Logo

$$J^2 - 1 \simeq (1 + \operatorname{div}(u))^2 - 1 \simeq 2 \operatorname{div}(u) \quad (8.38)$$

Observação 8.2.1 Demonstra-se que a relação tensão deformação apresentada se reduz a relação tensão deformação para pequenos deslocamentos, quando desprezam-se os termos $\theta(\nabla u)$.

Os termos J , J^2 , $\ln(J)$ determinam o carácter não linear do funcional e do problema. O problema atual consiste em achar a função vetorial de deslocamentos $U(u, v, w)$ que minimiza o funcional escalar W ou

$$\int_{\Omega} W(U) dV \text{ é mínimo} \quad (8.39)$$

O funcional W depende de J e C e ambos dependem de F . Como F depende do gradiente de U , então W é função das derivadas parciais das componentes do deslocamento (u, v, w) . Isto é dado a seguir.

$$W = W(U) = W(u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z) \quad (8.40)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8.41)$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, v_y = \frac{\partial v}{\partial y}, v_z = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (8.42)$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, w_y = \frac{\partial w}{\partial y}, w_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8.43)$$

$$u, v, w : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (8.44)$$

Se U^* minimiza W então uma condição necessária é

$$\nabla W(U^*) = 0 \quad (8.45)$$

Defina a função G por

$$G(U) = \int \nabla W(U) dV \quad (8.46)$$

Aplique-se o método de Newton para achar uma solução U_n aproximada a U^* . Para U_h próximo a U^* tem-se

$$0 = G(U^*) = G(U_h) + \nabla G(U_h)(U^* - U_h) + \epsilon(U_h, U^*) \quad (8.47)$$

$$\nabla G(U_h)(U^* - U_h) = -G(U_h) \quad , \quad \epsilon(U_h, U^*) \rightarrow 0 \quad (8.48)$$

A expressão $\epsilon(U_h, U^*)$ representa os termos da expansão de grau superior, que aproximam-se rapidamente de zero e são desprezíveis. Então introduz-se o processo iterativo a partir da equação 8.48.

$$U_0 \text{ dado} \quad (8.49)$$

$$\nabla G(U_n) \Delta U_n = -G(U_n) \quad (8.50)$$

$$U_{n+1} = U_n + \Delta U_n \quad (8.51)$$

Escolhe-se o valor inicial U_0 de modo apropriado. Em seguida resolvem-se os seguintes passos:

P1 : Dado U_0 resolve-se o sistema 8.50 ($n = 0$), vai para *P2*

P2 : Conhecidos U_n e ΔU_n calcula-se U_{n+1} pela equação 8.51, vai para *P3*

P3 : Atualize $\nabla G(U_n)$, $G(U_n)$ para $n + 1$ e resolva o sistema 8.50, vai para *P2*

Se a *CC* inicial é dada por $U^\Gamma - U_0$, então em cada iteração a *CC* imposta é dada por $U^\Gamma - U_n^\Gamma$, onde U_n^Γ é a restrição da solução do sistema na iteração n , à superfície Γ contida em $\partial\Omega$.

O algoritmo iterativo pára quando atinge-se um número de iterações dado de antemão ou uma tolerância preestabelecida. Por exemplo, quando a norma do resíduo, equação 8.58, faz-se menor que uma dada tolerância $\varepsilon > 0$.

Com o uso de elementos finitos construi-se uma partição unitária $\wp(\Omega)$ do domínio Ω e define-se o espaço $V_{hp}(\Omega)$ de funções polinomiais por partes definidas sobre Ω . Coloca-se o

problema de minimização do funcional W sobre $V_{hp}(\Omega)$. Assim sendo tem-se

$$V_{hp}(\Omega) = \langle \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle, \quad \varphi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall i \quad (8.52)$$

$$u_h = \sum_{i=0}^n u_i \varphi_i, \quad v_h = \sum_{i=0}^n v_i \varphi_i, \quad w_h = \sum_{i=0}^n w_i \varphi_i \quad (8.53)$$

$$U_h = (u_h, v_h, w_h) \quad (8.54)$$

O conhecimento da solução aproximada U_h e as suas derivadas parciais depende do cálculo dos coeficientes $u_i, v_i, w_i : 0 \leq i \leq n$. De fato, denotem-se as derivadas parciais de u_h por

$$u_x = \frac{\partial u_h}{\partial x} = \sum_{i=0}^n u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u_h}{\partial y} = \sum_{i=0}^n u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial u_h}{\partial z} = \sum_{i=0}^n u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \quad (8.55)$$

e da mesma forma para v_h, w_h . Deste modo W passa a ser considerado dependente destes coeficientes e o funcional a ser minimizado sobre $V_{hp}(\Omega)$ é

$$G(U_h) = \nabla W(U_h) = 0 \quad (8.56)$$

O gradiente calcula-se em relação aos coeficientes u_i, v_i, w_i . Aplica-se o processo iterativo de Newton, conforme as equações 8.49, 8.50, 8.51, onde

$$\begin{aligned} \nabla G &= \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \varkappa_i \partial \varkappa_j} \right], \quad G = \nabla W = \left[\frac{\partial W}{\partial \varkappa_i} \right] \\ \varkappa_k &\in \{u_k, v_k, w_k\}, \quad k = i, j \end{aligned} \quad (8.57)$$

Como $\nabla W = 0$ o resíduo devido a aproximação U_h é dado por

$$Res(U_h) = \int_{\Omega} \nabla_U W(U_h) dV \quad (8.58)$$

8.2.2 Cálculo da matriz gradiente de G e vetor gradiente de W

Por simplicidade tome-se

$$W = a(J^2 - 1) + b \ln(J) + c(\text{tr } C - 3) \quad (8.59)$$

$$a = \frac{\lambda}{4}, \quad b = -\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right), \quad c = \frac{1}{2}\mu \quad (8.60)$$

Das equações 8.23 a 8.27 e com uso da notação 8.55 segue-se

$$F = \nabla U + I = \begin{bmatrix} u_x + 1 & v_x & w_x \\ u_y & v_y + 1 & w_y \\ u_z & v_z & w_z + 1 \end{bmatrix} \quad (8.61)$$

$$J = \det F = (u_x + 1)(v_y + 1)(w_z + 1) - (u_x + 1)w_y v_z - v_x u_y (w_z + 1) + v_x u_z w_y + w_x u_y v_z - w_x (v_y + 1)u_z \quad (8.62)$$

$$\begin{aligned} \text{tr } C &= (u_x + 1)^2 + u_y^2 + u_z^2 + v_x^2 + (v_y + 1)^2 + v_z^2 \\ &\quad + w_x^2 + w_y^2 + (w_z + 1)^2 \end{aligned} \quad (8.63)$$

Primeira e segunda derivada de W

Exemplifica-se a seguir o cálculo das primeiras e segundas derivadas parciais de W e J .

$$\frac{\partial W}{\partial v_j} = 2aJ \frac{\partial J}{\partial v_j} + \frac{b}{J} \frac{\partial J}{\partial v_j} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial v_j} = \left(2aJ + \frac{b}{J}\right) \frac{\partial J}{\partial v_j} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial v_j} \quad (8.64)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial v_j} = \left(2a - \frac{b}{J^2}\right) \frac{\partial J}{\partial u_i} \frac{\partial J}{\partial v_j} + \left(2aJ + \frac{b}{J}\right) \frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial v_j} + c \frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial u_i \partial v_j} \quad (8.65)$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_j} = \frac{\partial J}{\partial v_x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial v_y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial v_z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \quad (8.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial v_j} &= \frac{\partial^2 J}{\partial u_x \partial v_x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 J}{\partial u_x \partial v_y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial^2 J}{\partial u_x \partial v_z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \\ &\quad \frac{\partial^2 J}{\partial u_y \partial v_x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 J}{\partial u_y \partial v_y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial^2 J}{\partial u_y \partial v_z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \\ &\quad \frac{\partial^2 J}{\partial u_z \partial v_x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 J}{\partial u_z \partial v_y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial^2 J}{\partial u_z \partial v_z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \end{aligned} \quad (8.67)$$

Fazendo

$$A = 2aJ + \frac{b}{J}, \quad B = 2a - \frac{b}{J^2} \quad (8.68)$$

a equação 8.65 rescreve-se

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial v_j} = B \frac{\partial J}{\partial u_i} \frac{\partial J}{\partial v_j} + A \frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial v_j} + c \frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial u_i \partial v_j} \quad (8.69)$$

Por semelhança com as equações 8.64 a 8.67 escrevem-se as derivadas parciais primeira e segunda de W , J e $\text{tr } C$ com respeito às outras componentes. A derivada de W depende das

derivadas de J e de $\text{tr } C$. A segunda derivada de W depende das parcelas que são obtidas do produto das derivadas de J , isto é, segundas derivadas de J e segundas derivadas de $\text{tr } C$. O gradiente de W é um vetor 3×1 e a segunda derivada de W é um tensor 3×3 . Pondo em evidência as derivadas das funções de forma φ_j , o gradiente de W é dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial u_j} \\ \frac{\partial W}{\partial v_j} \\ \frac{\partial W}{\partial w_j} \end{bmatrix} &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left\{ \begin{bmatrix} A \frac{\partial J}{\partial u_x} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial u_x} \\ A \frac{\partial J}{\partial v_x} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial v_x} \\ A \frac{\partial J}{\partial w_x} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial w_x} \end{bmatrix} \right\} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left\{ \begin{bmatrix} A \frac{\partial J}{\partial u_y} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial u_y} \\ A \frac{\partial J}{\partial v_y} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial v_y} \\ A \frac{\partial J}{\partial w_y} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial w_y} \end{bmatrix} \right\} + \\ &\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left\{ A \begin{bmatrix} A \frac{\partial J}{\partial u_z} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial u_z} \\ A \frac{\partial J}{\partial v_z} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial v_z} \\ A \frac{\partial J}{\partial w_z} + c \frac{\partial \text{tr } C}{\partial w_z} \end{bmatrix} \right\} = \nabla W \end{aligned} \quad (8.70)$$

Denote-se a matriz, cujas entradas são produtos das derivadas de J com respeito às componentes de $(\partial u_x, \partial v_x, \partial w_x, \partial u_y, \partial v_y, \partial w_y)$, por

$$\left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_x \partial_y (u, v, w)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial u_x} \frac{\partial J}{\partial u_y} & \frac{\partial J}{\partial u_x} \frac{\partial J}{\partial v_y} & \frac{\partial J}{\partial u_x} \frac{\partial J}{\partial w_y} \\ \frac{\partial J}{\partial v_x} \frac{\partial J}{\partial u_y} & \frac{\partial J}{\partial v_x} \frac{\partial J}{\partial v_y} & \frac{\partial J}{\partial v_x} \frac{\partial J}{\partial w_y} \\ \frac{\partial J}{\partial w_x} \frac{\partial J}{\partial u_y} & \frac{\partial J}{\partial w_x} \frac{\partial J}{\partial v_y} & \frac{\partial J}{\partial w_x} \frac{\partial J}{\partial w_y} \end{bmatrix} \quad (8.71)$$

O tensor que segue da primeira parcela da equação 8.65, com uso da equação 8.66, escreve-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_i \partial_j (u, v, w)} \right] = \\ &\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_x \partial_x (u, v, w)} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_x \partial_y (u, v, w)} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_x \partial_z (u, v, w)} \right] \\ &\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_y \partial_x (u, v, w)} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_y \partial_y (u, v, w)} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_y \partial_z (u, v, w)} \right] \\ &\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_z \partial_x (u, v, w)} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_z \partial_y (u, v, w)} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_z \partial_z (u, v, w)} \right] \end{aligned} \quad (8.72)$$

Denote-se a matriz Hessiana de J conforme é dado a seguir

$$\left[\frac{\partial^2 J}{\partial (u, v, w)_{x,y}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial u_x \partial u_y} & \frac{\partial^2 J}{\partial u_x \partial v_y} & \frac{\partial^2 J}{\partial u_x \partial w_y} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_x \partial u_y} & \frac{\partial^2 J}{\partial v_x \partial v_y} & \frac{\partial^2 J}{\partial v_x \partial w_y} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial w_x \partial u_y} & \frac{\partial^2 J}{\partial w_x \partial v_y} & \frac{\partial^2 J}{\partial w_x \partial w_y} \end{bmatrix} \quad (8.73)$$

Então o tensor que corresponde à segunda parcela da igualdade 8.65 escreve-se da seguinte

maneira:

$$\left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{i,j}} \right] =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{x,x}} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{x,y}} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{x,z}} \right] \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{y,x}} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{y,y}} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{y,z}} \right] \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{z,x}} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{z,y}} \right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{z,z}} \right] \end{aligned} \quad (8.74)$$

A terceira parcela que segue da equação 8.65 é obtida como na igualdade 8.74, substituindo J por $\text{tr } C$.

A matriz elementar Hessiana de W fica

$$\nabla G = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial(u, v, w)_{i,j}} \right]_{3 \times 3} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_x \partial_x(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{x,x}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{x,x}} \right] \right\} + \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_x \partial_y(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{x,y}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{x,y}} \right] \right\} + \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_x \partial_z(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{x,z}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{x,z}} \right] \right\} + \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_y \partial_x(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{y,x}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{y,x}} \right] \right\} + \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_y \partial_y(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{y,y}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{y,y}} \right] \right\} + \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_y \partial_z(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{y,z}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{y,z}} \right] \right\} + \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_z \partial_x(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{z,x}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{z,x}} \right] \right\} + \\ & \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left\{ B \left[\frac{\partial J \partial J}{\partial_z \partial_y(u, v, w)} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial(u, v, w)_{z,y}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{z,y}} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \left\{ B \left[\frac{\partial J}{\partial z} \frac{\partial J}{\partial z} \right] + A \left[\frac{\partial^2 J}{\partial (u, v, w)_{z,z}} \right] + c \left[\frac{\partial^2 \text{tr} C}{\partial (u, v, w)_{z,z}} \right] \right\} \quad (8.75)$$

Utilizam-se as equações 8.62 e 8.63 para calcular explicitamente as matrizes das equações 8.70 e 8.75.

8.2.3 Validação da implementação do material hiperelástico

Para arbitrários U e ΔU a equação 8.47 escreve-se da seguinte maneira:

$$G(U + \alpha \Delta U) = G(U) + \nabla G(U) \alpha \Delta U + \epsilon(\alpha \Delta U) \quad (8.76)$$

Para $\Delta u \rightarrow 0$ e $\alpha < 1$ tem-se

$$\|G(U + \alpha \Delta U) - G(U) - \nabla G(U) \alpha \Delta U\| = o(\alpha) \quad (8.77)$$

$$ou, \quad \|R(\alpha)\| = o(\alpha) \quad (8.78)$$

Comparando a norma do resíduo, equação 8.77, para dois valores de α tem-se

$$\|G(U + \alpha_1 \Delta U) - G(U) - \nabla G(U) \alpha_1 \Delta U\| = C \alpha_1^n + \epsilon(\alpha_1 \Delta U) \quad (8.79)$$

$$\|G(U + \alpha_2 \Delta U) - G(U) - \nabla G(U) \alpha_2 \Delta U\| = C \alpha_2^n + \epsilon(\alpha_2 \Delta U) \quad (8.80)$$

Subtraindo-se os logaritmos das equações 8.79 e 8.80, e desprezando os termos de alta ordem $\epsilon(\alpha_i \Delta u)$ obtém-se

$$\log \|R(\alpha_1)\| - \log \|R(\alpha_2)\| \simeq n \log \alpha_1 - n \log \alpha_2 \quad (8.81)$$

A taxa de convergência é estimada como

$$n \simeq \frac{\log \|R(\alpha_1)\| - \log \|R(\alpha_2)\|}{\log \alpha_1 - \log \alpha_2} \quad (8.82)$$

Se o cálculo de $G(U)$ e $\nabla G(U)$ é correto, a taxa de convergência n deve tender para 2.

Ambos, o vetor $G(U)$ e o tensor $\nabla G(U)$ dependem do gradiente do deslocamento U , veja a equação 8.46 e seção 8.2.2. A atual implementação para o material hiperelástico é testada

para valores iniciais aleatórios do gradiente de U , com o qual obtém-se a taxa de convergência $n = 2 \pm \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$.

8.2.4 Teste computacional

Problema 1

Tome-se o cubo unitário no octante positivo I com um vértice na origem. As equações a seguir explicitam o movimento de corpo rígido deste domínio. Efetua-se um giro em sentido horário de ângulo θ ao redor do eixo η , conforme esboçado na figura 8.5.

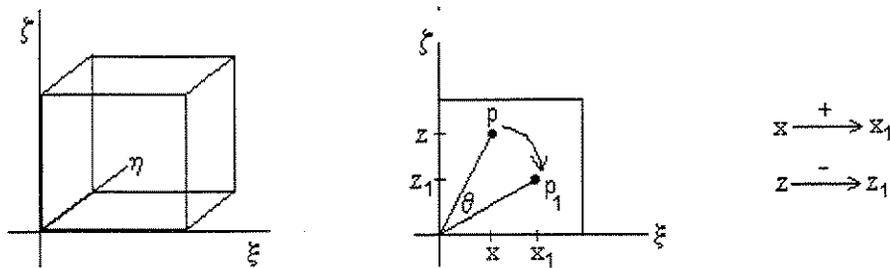


Figura 8.5: Movimento de corpo rígido

Os deslocamentos u , v , w nas direções dos eixos de um ponto $p(\xi, \eta, \zeta)$ do domínio são dados pelas seguintes equações

$$u = \xi(\cos \theta - 1) + \zeta \sin \theta \quad (8.83)$$

$$v = 0 \quad (8.84)$$

$$w = \zeta(\cos \theta - 1) - \xi \sin \theta \quad (8.85)$$

No algoritmo iterativo de Newton escolhe-se $U_0 = 0$. Então tanto os deslocamentos como suas derivadas são nulas. Mas o sistema não é nulo por causa das matrizes constantes, como por exemplo a parcela.

$$\left[\frac{\partial^2 \text{tr } C}{\partial(u, v, w)_{x,x}} \right] \quad (8.86)$$

Com a solução do sistema 8.50 são conhecidos os coeficientes u_i, v_i, w_i , também é conhecida uma solução aproximada para a função de deslocamento $U(x, y, z)$ e suas derivadas. Com estas derivadas calculam-se $F, \det F, C, \text{tr } C$ e J . Com estes valores atualizam-se as matrizes do sistema elementar dadas pelas expressões 8.70 e 8.75.

Com as CC impostas pelos deslocamentos conhecidos, na face contida no plano $X = 1$, igualdades 8.83, 8.84, 8.85, a solução do problema de minimização deve ser a própria solução deste movimento de corpo rígido, equações 8.83, 8.84, 8.85. Isto é devido a que nas condições atual do problema a energia de deformação é nula, o corpo não apresenta deformações.

iteração	Erros			
	residuo	Norma L^2	Semi- H^1	Norma H^1
1	4.2e-2	9.4e-4	1.97e-3	2.2e-3
2	9.4e-4	9.5e-7	2.9e-6	3.0e-6
3	9.5e-7	1.3e-12	4.7e-12	4.9e-12
4	1.3e-12	1.4e-17	4.4e-17	4.7e-17
5	9.8e-18	8.5e-18	3.1e-17	3.2e-17

Tabela 8.1: Erros residuais : problema 1

Para $\theta = 3^\circ$ e uma tolerância de $1e - 15$ o processo convergiu em 5 iterações. Em cada iteração, os erros dado pelo resíduo, equação 8.58, e outras normas, são apresentados na tabela 8.1. Usou-se uma malha com 1 cubo dividido, isto é, 8 cubos. Usa-se ordem 1 de interpolação, o que é suficiente dado que a solução é de primeiro grau. A tabela 8.2 apresenta os resultados usando-se as mesmas condições mas agora com uma malha de 5 tetraedros divididos, isto é, 20 tetraedros e 10 pirâmides.

iteração	Erros			
	residuo	Norma L^2	Semi- H^1	Norma H^1
1	4.3e-2	9.5e-4	2.0e-3	2.2e-3
2	9.5e-4	9.8e-7	3.2e-6	3.4e-6
3	9.8e-7	3.5e-12	1.4e-11	1.5e-11
4	3.5e-12	1.2e-17	4.9e-17	5.1e-17
5	9.9e-18	8.9e-18	3.1e-17	3.2e-17

Tabela 8.2: Erros residuais : malha refinada

Problema 2

Considere-se o mesmo domínio anterior com as seguintes CC impostas. Face no plano $x = 0$ com os três deslocamentos u, v e w nulos. Aplique-se um giro para cada ponto da face $x = l = 1$, giro com centro no ponto (l, a, b) do plano que contém esta face. Para um giro de ângulo θ , o ponto (ξ, η, ζ) é deslocado para o ponto (ξ_1, η_1, ζ_1) equações 8.87, 8.88 e 8.89.

$$\xi_1 = \xi \quad (8.87)$$

$$\eta_1 = (\zeta - b) * \sin \theta + (\eta - a) * \cos \theta + a \quad (8.88)$$

$$\zeta_1 = (\zeta - b) * \cos \theta - (\eta - a) * \sin \theta + b \quad (8.89)$$

$$U(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1 - \xi, \eta_1 - \eta, \zeta_1 - \zeta) = \tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi} \quad (8.90)$$

Com uma solução inicial $U_0 = 0$, e com um giro aplicado de $\theta = 1^\circ$ em torno do ponto centro da face $(1, 1/2, 1/2)$, a convergência do processo mostra-se na tabela 8.3.

iteração	norma do resíduo				
	5 tetraedros		5 tetraedros divididos	1 cubo	1 cubo dividido
	ordem 1	ordem 2	ordem 1	ordem 2	ordem 1
1	4.5e-3	7.9e-2	7.7e-2	7.6e-2	7.2e-2
2	4.5e-13	1.2e-2	2.86e-2	4.9e-3	5.1e-3
3	4.8e-19	2.6e-3	6.2e-3	1.97e-3	1.46e-3
4		7.8e-5	1.67e-3	1.4e-5	8.1e-6
5		1.79e-7	7.6e-5	1.4e-8	3.05e-9
6		6.4e-13	2.7e-7	1.2e-11	1.5e-11
7		1.16e-15	2.7e-12	5.2e-12	1.07e-11
8		7.8e-16	3.88e-17	2.2e-12	7.38e-12

Tabela 8.3: Erro residual : problema 2

Problema 3

O problema a ser simulado consiste em uma barra reta de medidas $1 \times 1 \times 10$, com uma malha de 10 elementos hexaédricos dispostos ao longo da barra. A barra é submetida a condições de contorno nas duas faces extremas. Engasta-se em uma das faces e na outra aplica-se uma força de cisalhamento de 100 unidades na direção positiva do eixo z .

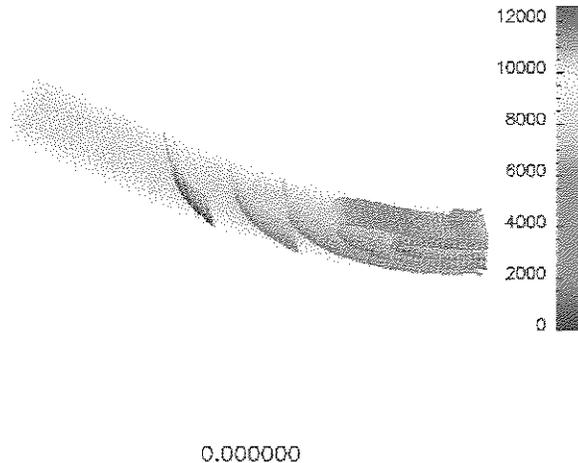


Figura 8.6: Tensões de Von Mises: material elástico

A figura 8.6 mostra a solução do problema obtida com as equações do material elástico. Compara-se esta última com a solução das equações do material hiperelástico, figura 8.7, onde a solução final foi atingida após uma seqüência de passos onde se aumentou a força sendo aplicada em 10 unidades até atingir o valor 100.

Aprecia-se no gráfico de tensões, feito com o Data Explorer (DX), que a distribuição de tensões de Von Mises é diferente para os casos do material elástico e o hiperelástico.

Para a resolução gráfica cada elemento finito hexaedro dividiu-se em $8 \times 8 \times 8$ hexaedros conforme pode ser apreciado nas figuras. A ordem utilizada para o elemento é três.

Problema 4

Considere o problema teste de número 3. Agora, mantendo-se a face engastada, uma das faces e submetida a uma torção de $\pi/6$ em $\pi/6$ graus, até atingir um giro completo. Pela distribuição das tensões de Von Mises observadas nos gráficos obtidos com o DX, percebe-se claramente as propriedades hiperelásticas do material, devido as grandes deformações presentes.

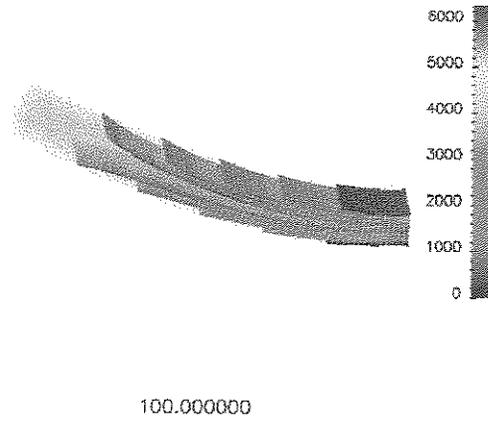


Figura 8.7: Material hiperelástico: diagrama de tensões

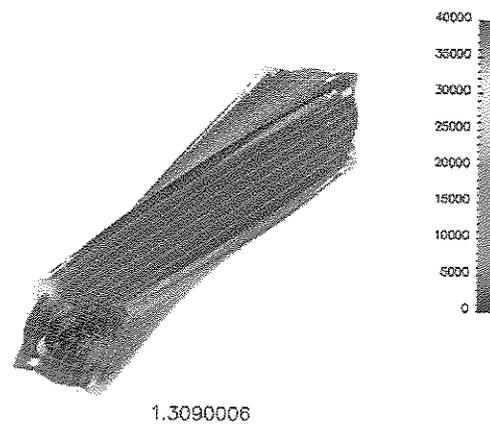


Figura 8.8: Material hipertelástico: tensões de Von Mises

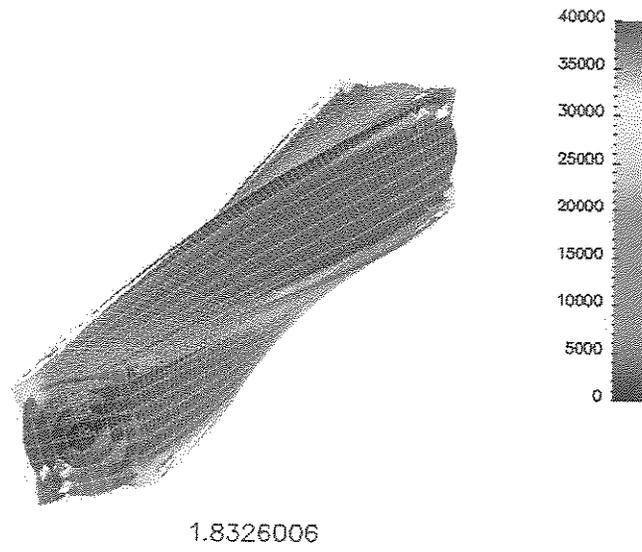


Figura 8.9: Diagrama de tensões: giro de 1.8 radianos

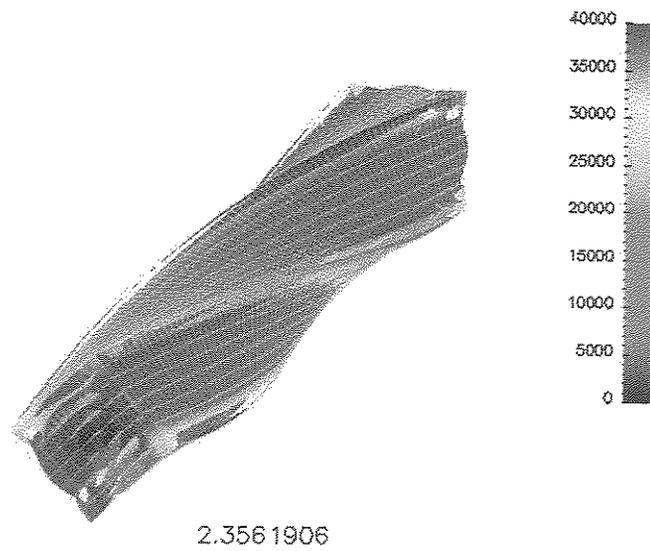


Figura 8.10: Diagrama de tensões: giro de 2.3 radianos

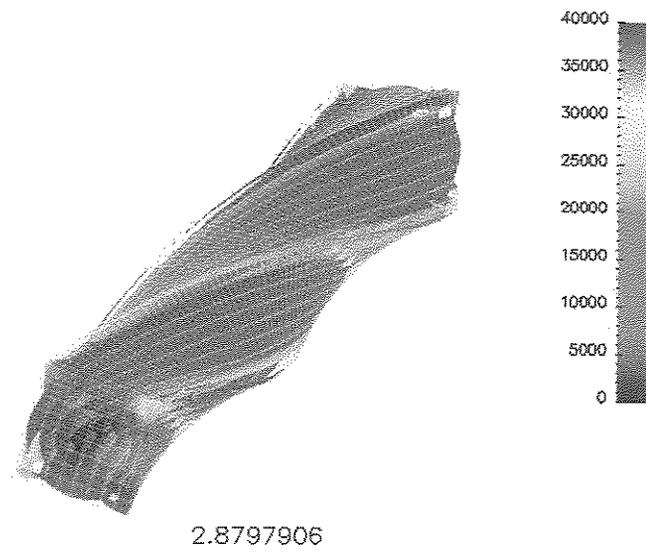


Figura 8.11: Distribuição de tensões: passo 4

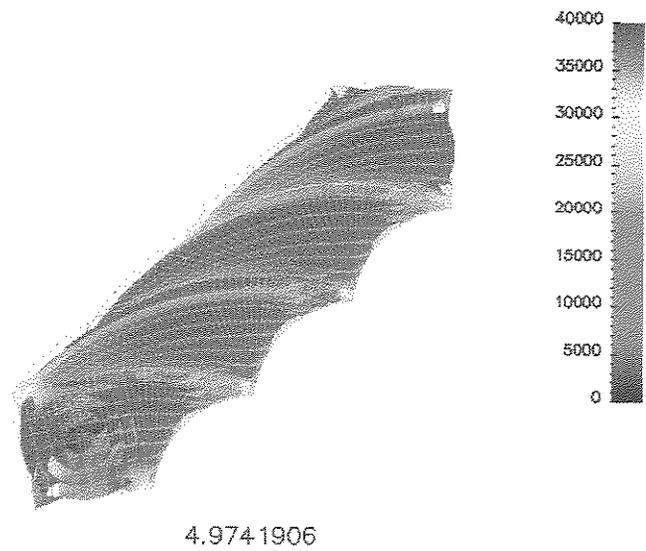


Figura 8.12: Distribuição de tensões: passo 5

Capítulo 9

Conclusões

9.1 Objetivos alcançados

Desenvolveu-se um formalismo para descrever os aspectos topológicos e funcionais da criação de espaços de elementos finitos adaptativos. Esta descrição serviu como modelo para um programa desenvolvido numa linguagem orientada a objetos. Os objetos utilizados referem-se a entidades matemáticas tais como sistema de coordenadas, malha de elementos, elementos geométricos, elementos computacionais, nós geométricos, etc.

Definiu-se um conjunto de funções de forma hierárquicas para os elementos geométricos de linha, triângulo, quadrilátero, tetraedro, hexaedro, pirâmide e prisma baseados em uma sequência ortogonal de funções. Mostrou-se que as bases assim definidas são linearmente independentes, qualquer seja a ordem p de interpolação do elemento. Provou-se na teoria e na prática que os elementos de linha, triângulo, quadrilátero, tetraedro, hexaedro, pirâmide e prisma de ordem p são completos no sentido de que as bases do elemento de ordem p podem combinar-se para representar qualquer polinômio de grau p . Definiu-se uma divisão geométrica para cada um destes elementos de tal forma que o menor ângulo do elemento obtido por divisão não é mais pequeno que qualquer ângulo do elemento pai. Com esta divisão consegue-se a geração automática de malhas em uma duas ou três dimensões com os respectivos elementos ou combinações destes. Bastando definir uns poucos elementos captando a geometria essencial do domínio e refinar a malha até atingir a gradação requerida obtendo uma malha conforme se for

desejado. A implementação também permite a construção de malhas com elementos de linha em duas ou três dimensões e elementos bidimensionais em três dimensões.

Utilizando os conceitos do análise funcional estendeu-se a noção de partição unitária de um domínio para incluir malhas heterogêneas adaptativas contendo simultaneamente elementos uni, bi e tridimensionais no espaço Euclidiano \mathfrak{R}^3 . A definição das funções de forma baseadas no conceito de parâmetro variacional e a introdução de dependência entre as bases de elementos adjacentes, permitiu a utilização de malhas heterogêneas refinadas adaptativamente contendo qualquer combinação destes elementos, obtendo-se um espaço de interpolação de elementos finitos de funções contínuas. O refinamento adaptativo aqui desenvolvido utiliza o agrupamento e divisão geométrica dos elementos. A refinamento auto-adaptativo é realizado com o uso de estimadores de erros ou desenhadores de malhas e com estratégias adaptativas adequadas.

Descreveu-se o mapeamento geométrico, os espaços paramétricos e associação de funções de forma às conectividades dos elementos e as restrições das mesmas num espaço de elementos finitos adaptativos. Definiu-se matematicamente quais são as transformações geométricas que preservam todas as características do elemento de referência como o número de vértices é a dimensão dos seus lados.

Consegue-se continuidade entre elementos vizinhos de dimensões iguais ou distintas através da introdução dos parâmetros variacionais e as transformações paramétricas. Quando os elementos adjacentes são de níveis diferentes, a continuidade é obtida através da dependência das funções de forma dos elementos pequenos para os elementos grandes. Esta dependência é baseada na projeção em norma $\| \cdot \|_{L^2}$, sobre o espaço gerado pelas funções de forma associadas ao lado do elemento pequeno contido no lado do elemento grande, das funções de forma do lado grande restritas sobre o lado pequeno.

A estrutura de classes do ambiente PZ mostrou grande eficácia e flexibilidade permitindo trabalhar com variados tipos de elementos hierárquicos em uma duas e três dimensões. O ambiente também consegue incorporar facilmente qualquer equação diferencial implementan-

do a classe que define o comportamento material do problema, isto é, formulação variacional, condições de contorno e pós-processamento da solução. O grau de generalidade destas classes é palpável na medida que permite aplicar determinados métodos definidos na classe raiz a qualquer objeto que possa por este método ser processado, como por exemplo, aplicar restrições entre elementos de diferentes dimensões. A estruturação de classes do ambiente PZ é feita em módulos permitindo desacoplar as ferramentas implementadas com facilidade para adapta-los a outros programas ou linguagens de programação.

A implementação da técnica do refinamento de malhas adaptativas dentro da filosofia de programação orientada para objetos mostrou-se altamente eficaz na medida em que permitiu implementar o refinamento de elementos uni, bi e tridimensionais simultaneamente no espaço vetorial \mathcal{R}^3 .

9.2 Trabalhos futuros

Algumas das classes a serem implementadas futuramente para a utilização da h-p adaptatividade aqui desenvolvida são materiais tridimensionais e estimadores de erro apropriados.

A implementação das classes necessárias para a saída gráfica é também desejável para todos os elementos tridimensionais aqui implementados.

O desempenho dos elementos em comparação com o tempo de processamento e a ordem p de aproximação.

Utilização do ambiente OOPAR para o uso da h e p adaptatividade em máquinas paralelas. O ambiente OOPAR é uma paralelização do ambiente PZ. A adaptatividade aqui trabalhada e as funções de forma hierárquicas aqui definidas são especialmente apropriadas para a distribuição da malha em diferentes processadores. Tanto a definição das funções de forma, através dos parâmetros variacionais, como das transformações utilizadas para a restrição das bases entre lados adjacentes de níveis distintos, dispensa a troca de informação entre processadores. Isto

é possível já que, para a obtenção de um espaço de elementos finitos de funções contínuas, o cálculo das bases associadas a cada lado do elemento dependem dos id' 's do lado do próprio elemento.

Implementação de outros padrões de refinamento como refinamento direcionado.

Bibliografia

- [1] Ainsworth, M., Senior, B. Aspects of an adaptive hp-finite element method: Adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150:65–87, Dezembro 1997.
- [2] Andrä, H. Integration of singular integrals for the Galerkin-type boundary element method in 3d elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157:239–249, Maio 1998.
- [3] Babuska, I., Rheinboldt, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:736–754, Agosto 1978.
- [4] Babuska, I., Strouboulis, T., Copps, K. Hp optimization of finite element approximations: Analysis of the optimal mesh sequences in one dimension. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150:89–108, Dezembro 1997.
- [5] Babuska, I., Suri, M. The p and h-p versions of the finite elements approximations: Analysis of the optimal mesh sequences in one dimension. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 80:5–26, 1990.
- [6] Bank, R. E., Sherma, A. H. An adaptive, multi-level method for elliptic boundary value problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 26:91–105, 1981.
- [7] Becker, E. B., Carey, G. F., Oden, J. T. *Finite Element, An Introduction*, volume I. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [8] Bose, A., Carey, G. F. A class of data structures and object-oriented implementation for finite element methods on distributed memory systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*,

171:109–121, Março 1999.

- [9] Bravo, C. M. A. A. *A Tentativa de Obter Um Novo Elemento Finito Lagrangiano: Análise Numérica e Comparação*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1995.
- [10] Brink, U., Stein, E. A posteriori error estimation in large-strain elasticity using equilibrated local Neumann problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 161:77–101, Agosto 1998.
- [11] Carey, G. F., Oden, J. T. *Finite elements: A Second Course*, volume II. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1983.
- [12] Carey, G. F., Oden, J. T. *Finite Elements: Computational Aspects*, volume III. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [13] Carranza, F. L., Fang, B., Haber, R. B. An adaptive space-time finite element model for oxidation-driven fracture. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157:399–423, Maio 1998.
- [14] Ciarlet, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, N. Y., Oxford, 1978.
- [15] Cirak, F., Ramm, E. A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 156:351–362, Abril 1998.
- [16] Demkowics, L., Devloo, P. R. B., Oden, J. T. On an h-type mesh refinement strategy based on minimization of interpolation errors. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 35:67–90, 1985.
- [17] Demkowics, L., Oden, J. T., Rachowicz, W., Hardy, O. Toward a universal hp adaptive finite element strategy - part1. Constrained approximation and data structure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 77:79–112, 1989.
- [18] P. R. B. Devloo. *Object Oriented Programming Applied to the Development of Scientific Software*. In E. Dvorkin, S. Idelsohn, E. Oñate, editor, *Computational Mechanics*, New

- Trends and Applications, Fourth World Congress on Computational Mechanics (IV WCCM), Edificio C-1 Campus Nord UPC, Gran Capità, s/n, 08034 Barcelona, España, 1998. CIMNE.
- [19] P. R. B. Devloo. *An h-p Adaptive Finite Element Method for Steady Compressible Flow*. Tese de Doutorado, University of Texas at Austin, Agosto, 1987.
- [20] Devloo, P. R. B. PZ: An object oriented environment for scientific programming. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150:133–153, Dezembro 1997.
- [21] Diez, P., Egozcue, J. J., Huerta, A. A posteriori error estimation for standard finite element analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 163:141–157, Setembro 1998.
- [22] Dubois-Pèlerin, Y., Pegon, P. Linear Constraints in Object-oriented finite Element Programming. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 154:31–39, Fevereiro 1998.
- [23] Eyheramendy, D., Zimmermann, T. Object-oriented finite elements III. theory and application of automatic programming. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 154:41–68, Fevereiro 1998.
- [24] Fairweather, G. *Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations*. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.
- [25] Forde, B. W. R., Foschi, R. O., Stienes, S. F. Object-oriented finite element analysis. *Comput. Struct.*, 34:355–374, 1990.
- [26] Greenberg, M. D. *Foundations of Applied Mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- [27] Guo, B., Cao, W. Domain decomposition method for the h-p version finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157:425–440, Maio 1998.
- [28] Gurtin, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- [29] Johnson, C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne,

Sydney, 1987.

- [30] Kazberuk, A., Miedzialowsky, C. Tribillo, R. Finite element discretization by minimization of elastic strain energy method. *Finite Elem. Anal. Des.*, 32:63–70, Abril 1999.
- [31] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.
- [32] Ladevèze, P., Moës, N. A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157:45–68, Abril 1998.
- [33] Lage, C. The application of object-oriented methods to boundary elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157:205–213, Maio 1998.
- [34] Lee, C. K., Lo, S. H. A full 3d finite element analysis adaptive refinement and PCG solver with back interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 170:39–64, Fevereiro 1999.
- [35] Li, X. D., Wiberg, N. E. Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 156:211–229, Abril 1998.
- [36] Lindgren, L. E., Haggblad, H. A., McDill, J. M. J., Oddy, A. S. Automatic remeshing for three-dimensional finite element simulation of welding. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 147:401–409, Agosto 1997.
- [37] Liszka, T. J., Tworzidlo, W. W., Bass, J. M., Sharma, S. K., Westermann, T. A., Yavari, B. B. ProPHLEX-an hp-adaptive finite element kernel for solving coupled systems of partial differential equations in computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150:251–271, Dezembro 1997.
- [38] Malhotra, M., Pinsky, P. M. Parallel preconditioning based on h-hierarchical finite element with application to acoustics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155:97–117, Março 1998.
- [39] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações*

- Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro, R. J., 1989.
- [40] Michel, J. C., Moulinec, H., Suquet, P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: A computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 172:109–143, Abril 1999.
- [41] Mijailov, V. P. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Mir, Moscou, 1978.
- [42] Noor, A. K., Babuska, I. Quality assessment and control of finite element solutions. *Finite Elem. Anal. Des.*, 3:1–26, 1987.
- [43] Novotny, A. A., Pereira, J. T., Fancello, E. A., Barcellos, C. S. A fast hp adaptive finite element mesh design. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:133–148, Outubro 2000.
- [44] Oden, J. T., Carey, G. F. *Finite Element: Mathematical Aspects*, volume IV. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York, 1983.
- [45] Oden, J. T., Demkowics, L., Rachowicz, W., Westermann, T. A. Toward a universal hp adaptive finite element strategy - part2. Constrained approximation and data structure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 77:113–180, 1989.
- [46] Oden, J. T., Demkowicz, L. F. *Applied Functional Analysis*. CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo, 1996.
- [47] Oh, H., Batra, R. C. Application of Zienkiewics-Zhu's error estimate with superconvergent patch recovery to hierarchical p-refinement. *Finite Elem. Anal. Des.*, 31:273–280, Fevereiro 1999.
- [48] Olsson, A. An object-oriented implementation of structural path-following. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 161:19–47, Agosto 1998.
- [49] Owens, R. G. A posteriori error estimates for spectral element solutions to viscoelastic flow problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 164:375–395, Outubro 1998.
- [50] Peraire, J., Patera, A. T. Asymptotic a posteriori finite element bounds for the outputs of non-

- coercive problems: The Helmholtz and Burgers equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 171:77–863, Março 1999.
- [51] Prudhomme, S., Oden, J. T. A posteriori error estimation and error control for finite element approximations of the time-dependent Navier-Stokes equations. *Finite Elem. Anal. Des.*, 33:247–262, Novembro 1999.
- [52] Radovitzky, R., Ortiz, M. Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 172:203–240, Abril 1999.
- [53] Rao, K. R., Nehrbass, J., Lee, R. Discretization errors in finite methods: Issues and possible solutions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 169:219–236, Fevereiro 1999.
- [54] Raviart, P. A., Thomas, J. M. *Méthodes des Éléments Finis*. Université de Paris IV, Laboratoire D'Analyse Numérique, 1971-1972.
- [55] Raviart, P. A., Thomas, J. M. *Introduction à L'analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, México, 1983.
- [56] Reddy, B. D. *Functional Analysis and Boundary-Value Problems: An Introductory Treatment*. Longman Scientific & Technical, 1986.
- [57] Reddy, M. P., Deb, M. K., Bass, J. M., Ning, H. Numerical simulation of non-conventional wells using adaptive finite element analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150:109–124, Dezembro 1997.
- [58] Sandboge, R. Adaptive finite element methods for systems of reaction-diffusion equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 166:309–328, Novembro 1998.
- [59] Schwab, C., Suri, M., Xenophontos, C. The hp finite element method for problems in mechanics with boundary layers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157:311–333, Maio 1998.
- [60] Sheu, T. W. H., Fang, C. C., Tsai, S. F., Huang, C. On adaptive monotonic convection-

- diffusion flux discretization scheme. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 173:201–215, Abril 1999.
- [61] Sousa, E. A. C. *Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno Aplicados a Problemas Visco-Elastodinâmicos Transientes: Pré-requisitos Para o Acoplamento*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 1999.
- [62] Stewart, J. R., Hughes, T. J. R. A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and posteriori error estimates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 158:1–22, Maio 1998.
- [63] Strouboulis, T., Haque, K. A. Recent experiences with error estimation and adaptivity, part II: Error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 100:359–430, Novembro 1992.
- [64] Szabó, B., Babuska, I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [65] Tessler, A., Riggs, H. R., Freese, C. E., Cook, G. M. An improved variational method for finite element stress recovery and a posteriori error estimation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155:15–30, Março 1998.
- [66] Vardapetyan, L., Demkowicz, L. Hp-adaptive finite element in electromagnetics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 169:331–344, Fevereiro 1999.
- [67] Xu, X., Pain, C. C., Goddard, A. J. H., Oliveira, C. R. E. An automatic adaptive meshing technique for Delaunay triangulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 161:297–303, Agosto 1998.
- [68] Zhu, J. Z. A posteriori error estimation-the relation between different procedures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150:411–422, Dezembro 1997.
- [69] Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for a practical engineering analysis. *Int. J. Num. Methods Engrg.*, 24:337–357, 1987.

- [70] Zimmermann, T., Dubois-Pélerin, Y., Bomme, P. Object-oriented finite Element Programming: I. governing principles. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 98:291–303, 1992.

Apêndice A

A.1 Transformação geométrica

Neste apêndice faz-se um estudo matemático rigoroso para definir de forma exata qual é o mapeamento usado para obter um elemento finito deformado.

► Descrição matemática do mapeamento geométrico

É possível definir o espaço topológico do elemento geométrico como a envoltura convexa de certos pontos especiais, os nós. Seja n um número inteiro positivo e $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definição A.1.1 A é dito ser **convexo** se para cada $x, y \in A$ tem-se

$$tx + (1 - t)y \in A, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{A.1})$$

Isto é, A contém o segmento que une dois pontos quaisquer de A .

Definição A.1.2 A **envoltura convexa** de A , denotada $\text{conv } A$, define-se como o menor conjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém A .

Observação A.1.3 Da definição anterior, segue-se que a envoltura convexa de A é dada por:

$$\text{conv } A = \cap F \quad (\text{A.2})$$

onde F é a família de todos os conjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contenham o conjunto A .

Definição A.1.4 Elementos geométricos referenciais:

$$Pt = \text{conv } \{0\} \quad (\text{A.3})$$

$$L = \text{conv} \{-1, 1\} \quad (\text{A.4})$$

$$T = \text{conv} \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \quad (\text{A.5})$$

$$Q = \text{conv} \{(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)\} \quad (\text{A.6})$$

$$H = \text{conv} \{(-1, -1, -1), (1, -1, -1), (1, 1, -1), (-1, 1, -1), \\ (-1, -1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 1), (-1, 1, 1)\} \quad (\text{A.7})$$

$$Te = \text{conv} \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad (\text{A.8})$$

$$Pr = \text{conv} \{(0, 0, -1), (1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \quad (\text{A.9})$$

$$Pi = \text{conv} \{(-1, -1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad (\text{A.10})$$

De fato é possível provar o seguinte resultado:

Proposição A.1.5 A envoltura convexa de $A \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos em A , isto é,

$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{j=1}^k a_j x_j : x_j \in A \text{ e tal que } \sum_{j=1}^k a_j = 1 \right\} \quad (\text{A.11})$$

Definição A.1.6 Sejam X e Y dois espaços topológicos. Uma aplicação bijetora e contínua $f : X \rightarrow Y$ diz-se um **homeomorfismo** se a aplicação inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua.

Observações A.1.7

1. Note-se que cada elemento geométrico de referência é compacto.
2. Considere a aplicação $f : L - \{1\} \rightarrow S^1$ definida por $f(x) = e^{2\pi i x}$. Claramente f é bijetora e contínua. Embora a aplicação f^{-1} não é contínua em $(1, 0)$. Com efeito, existem pontos do círculo S^1 próximos ao ponto $(1, 0)$ separados de f^{-1} por uma distancia maior do que $\frac{1}{2}$. Para ver isto considere os pontos $(1 - \epsilon, +\sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2})$ e $(1 - \epsilon, -\sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2})$ do círculo, com ϵ suficientemente pequeno.

Neste trabalho está-se interessado no estudo dos elementos finitos como entes geométricos que constroem-se a partir de deformações obtidas dos elementos de referência explicitados nas equações A.3 a A.10. Em particular, deseja-se que a topologia dos elementos geométricos deformados seja determinada pela topologia do seu referencial. Então é necessário e suficiente considerar as aplicações de deformação como sendo homeomorfismos.

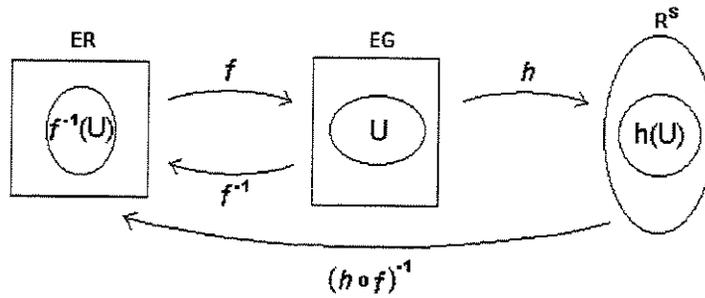


Figura A.1: Carta do elemento geométrico deformado EG

Em particular, as variedades topológicas obtidas são compactas e a dimensão topológica de qualquer elemento geométrico deformado EG obtido pelo homeomorfismo f é a dimensão da variedade com bordo $f^{-1}(EG)$. De fato, seja (U, h) uma **carta** de EG , isto é, U é um aberto da topologia de EG e h

$$h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^s \quad (\text{A.12})$$

é um homeomorfismo para algum $s \in \{1, 2, 3\}$. Então

$$(f^{-1}(U), h \circ f^{-1}) \quad (\text{A.13})$$

é uma carta para $f^{-1}(EG)$. Com efeito, $f^{-1}(U)$ é um aberto do referencial e

$$h \circ f : f^{-1}(U) \rightarrow h(U) \quad (\text{A.14})$$

é um homeomorfismo. Assim as dimensões coincidem. Observa-se que isto é uma consequência da definição das possíveis deformações que tem-se considerados, as transformações geométricas, que a continuação explicitam-se em detalhe. Observa-se que por exemplo, o círculo S^1 pode ser construído via um homeomorfismo, desde a fronteira de um triângulo ou de um retângulo ou em geral, desde um polígono planar de $k - \text{lad os}$, para cada $k \geq 3$. Como não quer-se este tipo de anomalia, somente consideram-se certos subespaços de homeomorfismos : *aqueles que conservam as características essenciais dos elementos de referência*. Mas precisamente, a idéia é considerar as classes de funções bijetoras e diferenciáveis com inversa diferenciável, isto é, **difeomorfismos** globais que deformem os elementos geométricos de referência em superfícies

com bordo em \mathfrak{R}^3 mantendo em essência o número de vértices.

Denote-se por O um elemento geométrico de referência qualquer e $f(O)$ o elemento deformado em \mathfrak{R}^3 , construído a partir do difeomorfismo f

$$f : O \subset \mathfrak{R}^s \rightarrow f(O) \subset \mathfrak{R}^3, \quad s = 1, 2, 3 \quad (\text{A.15})$$

onde s depende da dimensão de O . A continuação define-se um objeto matemático apropriado para definir vértice, aresta, face e interior de um elemento deformado $f(O)$. Em primeiro lugar, para $x \in O$ introduz-se o conceito de **Cone Tangente** gerado por x , e denotado por C_x como segue-se:

$$C_x = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow O, \text{ contínua, diferenciável em } t = 0, \text{ e } \gamma(0) = x\} \quad (\text{A.16})$$

Em palavras: o cone C_x gerado por x , é o conjunto cujos elementos são as derivadas em $t = 0$, das curvas γ (vetores) diferenciáveis em 0, contínuas no seu domínio, que passam por x , isto é $\gamma(0) = x$, e tal que existe um número ϵ não negativo, suficientemente pequeno de maneira que a imagem $\gamma(-\epsilon, \epsilon)$ esteja contida no elemento referencial O . É importante observar o seguinte:

$$v \in C_x \iff \lambda v \in C_x, \forall \lambda \geq 0. \quad (\text{A.17})$$

Questão que justifica o nome de cone.

Um cone tangente diz-se **cone próprio** se ele não contém nenhum subespaço não trivial, isto é diferente de $\{0\}$.

Exemplo A.1.8 Para clarear algumas idéias tome-se como exemplo o caso do triângulo T .

- ▶ Caso $x \in \overset{\circ}{T}$ (interior de T) então tem-se $C_x = T_x \mathfrak{R}^2$, isto é, o cone tangente coincide com o plano tangente no ponto $x \in \mathfrak{R}^2$, (o próprio \mathfrak{R}^2).
- ▶ Se x pertence a uma aresta de T mas não é um vértice, então C_x é um semi plano de $T_x \mathfrak{R}^2$.
- ▶ Se x é um vértice então C_x é um cone próprio, isto é, C_x não contém nenhum subespaço não trivial de $T_x \mathfrak{R}^2$. De fato esse cone é gerado pelas combinações lineares com coeficientes não negativos dos vetores construídos com os lados do triângulo cuja interseção determina o vértice em questão, figura A.2.

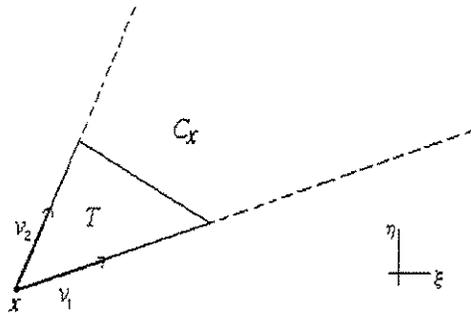


Figura A.2: Cone tangente ao vértice x

Exemplo A.1.9 No caso do tetraedro tem-se :

- ▶ Se $x \in \overset{\circ}{Te}$ então $C_x = Te_x \mathfrak{R}^3$, isto é, o cone tangente coincide com todo o espaço tangente a $x \in \mathfrak{R}^3$, (o próprio \mathfrak{R}^3).
- ▶ Se x pertence a uma face de Te mas não encontra-se em uma aresta ou vértice, então C_x é um semi espaço de $T_x \mathfrak{R}^3$, um plano.
- ▶ Se x pertence a uma aresta de Te mas não é um canto de Te então C_x é um cone que contém um único subespaço de dimensão 1 de $T_x \mathfrak{R}^3$, uma reta. De fato este cone é construído com combinações lineares não negativas de vetores iniciando-se em x e que pertencem as faces cuja interseção determina a aresta em questão e coeficientes arbitrários de qualquer vetor não nulo que pertence a esta aresta.
- ▶ Se x é um vértice de Te então C_x é um cone próprio, isto é, só contém o espaço $\{0\}$. Este cone é gerado pelas combinações lineares com coeficientes não negativos de três vetores construídos com as 3 arestas cuja interseção determina o vértice em questão.

Visto que $f(O)$ é uma superfície compacta com bordo, pode-se definir em forma análoga a C_x o cone tangente a $f(O)$ no ponto $f(x)$ de uma forma natural como segue-se.

$$C_{f(x)} = \left\{ f \circ \dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow O \text{ contínua, diferenciável em } t = 0 \text{ e } \gamma(0) = x \right\} \quad (\text{A.18})$$

Logo $C_{f(x)}$ é o conjunto de elementos que se iniciam em $f(x)$ e que são obtidos como vetores tangentes à curvas contínuas do tipo $f \circ \gamma$ sobre um intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ e cuja derivada existe em $t = 0$.

Em outras palavras o cone em $f(x)$ é a imagem do cone em x pela transformação jacobiano, ou

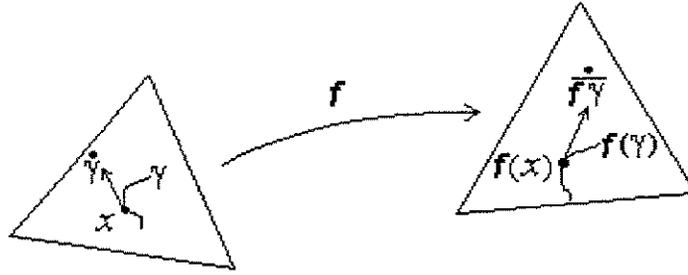


Figura A.3: Elementos do cone em x e em $f(x)$

$$C_{f(x)} = Jac(f)(x)(C_x) \quad (\text{A.19})$$

onde

$$Jac(f)(x) = [Df(x)]_{can}^{can} \quad (\text{A.20})$$

e a transformação linear

$$Df(x) : T_x \mathcal{R}^s \rightarrow T_x \mathcal{R}^3 \quad (\text{A.21})$$

é a derivada de f no ponto x , isto é, a aproximação linear de f em x . Pela definição de derivada tem-se

$$v \in T_x \mathcal{R}^s \implies Df(x)(v) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} \quad (\text{A.22})$$

onde $\gamma(t)$ é justamente uma curva contínua definida sobre um intervalo do tipo $(-\epsilon, \epsilon)$ diferenciável em $t = 0$ e tal que $\gamma(0) = x$. Isto prova que o jacobiano de f leva qualquer cone tangente em um cone tangente. Visto que $f : O \rightarrow f(O)$ assume-se um difeomorfismo, em particular obtém-se para cada $x \in O$,

$$Df(x) : T_x \mathcal{R}^s \rightarrow T_{f(x)} f(O) \quad (\text{A.23})$$

é um isomorfismo entre espaços tangentes. Em particular, se S é um subespaço de dimensão k de $T_x \mathcal{R}^s$, $0 \leq k \leq s$, então $Df(x)(S)$ é um subespaço de dimensão k . Consequentemente, se f é um difeomorfismo, para cada $x \in O$ tem-se :

► $x \in \overset{\circ}{O}$

Considere-se $f(O)$ um espaço topológico com a topologia induzida de \mathfrak{R}^3 , então

$$C_x = T_x \mathfrak{R}^s \Rightarrow Df(x)(T_x \mathfrak{R}^s) = T_{f(x)} f(O) \Rightarrow f(x) \in \overset{\circ}{f(O)} \quad (\text{A.24})$$

► Se $x \in \partial O$ tem-se os seguintes casos

- para $s = 1$

1 C_{-1} e C_1 são semi-retas e o mesmo acontece com $C_{f(-1)}$ e $C_{f(1)}$.

- para $s = 2$

1 caso x pertence ao interior de uma aresta A de O . Então C_x é um semi plano de $T_x \mathfrak{R}^2$ com suporte a reta L_A gerada pela aresta A . Logo, $C_{f(x)}$ é um semi plano de $T_{f(x)} f(O)$ com suporte o subespaço $Df(x)(L_A)$.

2 se x é um vértice, neste caso o cone próprio C_x é levado por $Df(x)$ no cone próprio $C_{f(x)}$. Com efeito, se $C_{f(x)}$ contém um subespaço não trivial então $Df^{-1}(f(x))(C_{f(x)}) = C_x$ conteria um subespaço não trivial.

- para $s = 3$

1 se x pertence ao interior de uma face F de O . Então C_x é um semi espaço de $T_x \mathfrak{R}^3$ e contém um único subespaço bidimensional S . Logo, $C_{f(x)}$ é um semi espaço que encontra-se em uma das componentes conexas de $T_{f(x)} f(O)$ que determina o subespaço $Df(x)(S)$.

2 se x pertence ao interior de uma aresta A de O . Então, C_x é um cone que contém um único subespaço unidimensional L_A , o gerado pela aresta A . Logo, o mesmo sucede com $C_{f(x)}$, isto é, é um cone em $T_{f(x)} f(O)$ que contém um único subespaço unidimensional $Df(x)(L_A)$.

3 se x é um vértice. Neste caso, tanto C_x como $C_{f(x)}$ são cones próprios. Com efeito, nenhum dos dois cones contém subespaços não triviais.

Baseados nas deduções anteriores, conclui-se que as classes admissíveis das deformações de elementos geométricos referenciais é exatamente a classe dos difeomorfismos.

Definição A.1.10 Seja $f : O \subset \mathfrak{R}^s \rightarrow f(O) \subset \mathfrak{R}^3$ um elemento geométrico.

- 1 Um ponto $x \in f(O)$ diz-se um vértice se, $C_x \subset T_x f(O)$ é um cone próprio.
- 2 Uma curva $a : [0, 1] \rightarrow O$ diz-se uma aresta de $f(O)$ se,
 - i $a(0)$ e $a(1)$ são vértices
 - ii para cada ponto x no interior de uma aresta A , o cone tangente C_x contém um único subespaço de $T_x f(O)$ de dimensão 1.
- 3 Um conjunto $F \subset f(O)$ diz-se uma face de $f(O)$ se :
 - i para cada ponto $x \in \overset{\circ}{F}$, o cone tangente C_x contém um único subespaço de dimensão 2.
 - ii ∂F consiste exatamente de $n - \text{vértices}$ e $n - \text{arestas}$, no caso de uma face $n - \text{poligonal}$ ¹.

¹ Uma face triangular tem 3 vértices e 3 arestas. Uma face quadrilateral tem 4 vértices e 4 arestas, etc.

Com isto tem-se provado o seguinte resultado.

Teorema A.1.11 Seja O um elemento de referência e $f : O \subset \mathbb{R}^s \rightarrow f(O) \subset \mathbb{R}^3$. Então, o difeomorfismo f leva vértice em vértice, aresta em aresta, face em face e volume em volume. Em particular, a cardinalidade de vértices, arestas e faces dos elementos O e $f(O)$ coincidem.

Observação A.1.12 Apesar de que tanto Q como T^e tenham a mesma cardinalidade de vértices, não existe ambigüidade com a definição anterior. Isto deve-se ao fato de que os elementos de referência pertencem a espaços ambientes de dimensões diferentes, dimensão que é mantida pelo difeomorfismo f como explicado anteriormente. Obviamente, f é um homeomorfismo. Em outras palavras, $f(Q)$ não pode ser difeomorfo a $g(Te)$ para qualquer par de difeomorfismos f e g , por causa do teorema de invariança de **Brouwer**.

Apêndice B

B.1 Restrições entre lados adjacentes

Explicitam-se a seguir todos os possíveis casos de restrições que ocorrem entre os lados adjacentes em uma malha h e p adaptativa. As situações se apresentam quando quer-se dividir um elemento ou quando um grupo de elementos está sendo agrupado para formar um outro.

D) Caso 1 : só existem lados de igual tamanho

A figura B.1 mostra os lados vizinhos a , b , c de dois elementos $el-0$ e $el-1$. Duas situações são observadas. Em uma delas o elemento $el-0$ está sendo inserido. Na outra situação o elemento $el-0$ é removido. Veja que atitude deve ser tomada em cada caso.

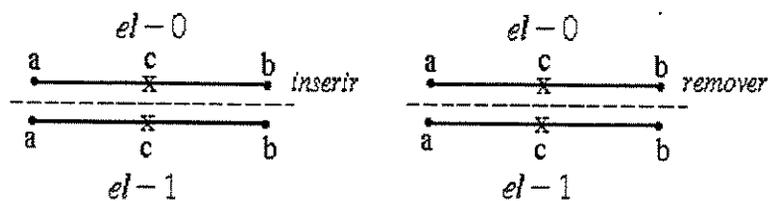


Figura B.1: Caso 1 : só existem lados iguais

► Modo inserção

Se os lados de um elemento sendo inserido só acha lados vizinhos. A única ação a ser executada é atualizar a ordem de interpolação de todos os lados vizinhos.

► **Modo remoção**

O elemento $el-0$ está sendo removido. Também nesta situação deve-se atualizar a ordem de interpolação dos lados iguais. Neste caso a ordem dos lados vizinhos contidos no ciclo do lado c .

II) **Caso 2 : só existem lados de maior tamanho**

► **Modo inserção**

Colocar a ordem dos lados pequenos igual à ordem do lado grande. Restringir os lados pequenos para o lado grande, figura B.2.

► **Modo remoção**

Remover as restrições dos pequenos com respeito ao grande. Atualizar a ordem dos pequenos. Isto porque por exemplo no caso atual de inserção esta ordem poderia ter mudado. Então a ordem antiga pode ser restabelecida.

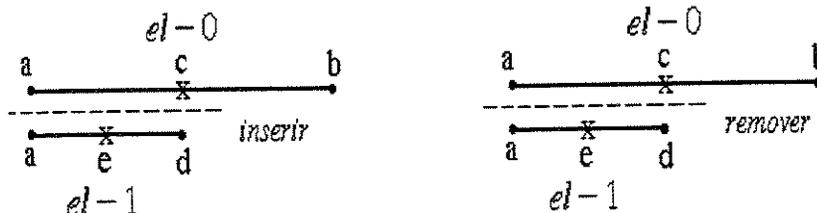


Figura B.2: caso 2: só há lados grandes

III) **Caso 3 : só existem lados de menor tamanho**

► **Modo inserção**

Colocar a ordem do lado $el-1$ igual a ordem do lado grande $el-0$. Isto é feito porque $el-1$ deve ser restrito por $el-0$, figura B.3.

► **Modo remoção**

Devem-se retirar as restrições do elemento $el-1$, restrições estas com respeito a $el-0$. Atualizar a ordem de $el-1$.

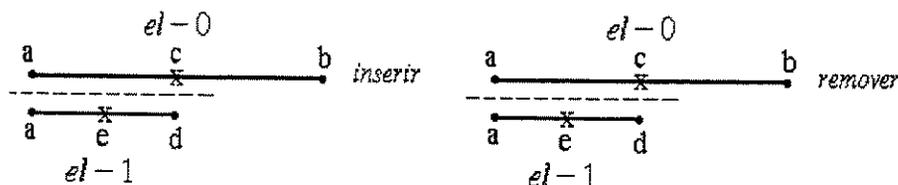


Figura B.3: Caso 3 : só há lados pequenos

IV) **Caso 4 : existem lados igual e menor, não há lado grande**

► **Modo inserção**

Recalcular a ordem dos lados iguais. Se esta ordem mudar, recalcular a ordem dos lados menores e restringir os elementos menores para qualquer um do ciclo de $el-0$. Caso contrario não há mais nada a fazer, figura B.4.

► **Modo remoção**

Atualizar a ordem dos lados iguais que permanecem. Se a ordem mudou, atualizar a ordem dos lados pequenos e restringi-los para o elemento $el-0$.

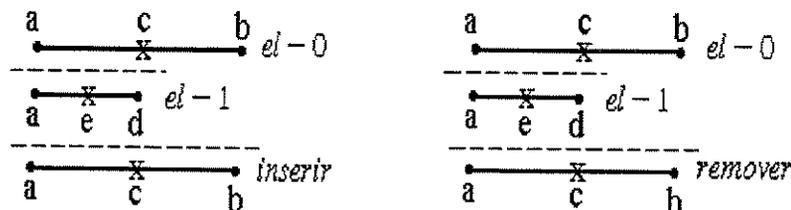


Figura B.4: Caso 4 : há lados iguais e pequenos, não há lados grandes

V) Caso 5 : existem lados iguais e grandes, não há lados pequenos

► **Modo inserção**

Fazer a ordem do lado inserido igual a ordem do lado grande, figura B.5.

► **Modo remoção**

A ordem que prevalece é a ordem do lado grande. Como permanece um igual a ele, isto é $el-1$, não há mais nada a fazer.

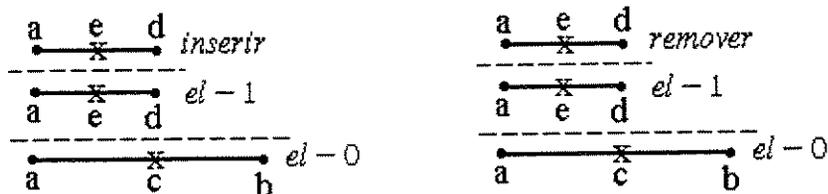


Figura B.5: caso 5: há lados iguais e grandes, não há lados pequenos

VI) Caso 6 : existem lados pequenos e grandes

► **Modo inserção**

Remover as restrições do lado pequeno, $el-1$ para o lado grande, $el-0$. Fazer a ordem do lado inserido igual a ordem do lado grande. Restringir $el-1$ para o elemento inserido. Restringir o lado/elemento inserido para $el-0$, figura B.6.

► **Modo remoção**

Retirar as restrições daquele elemento/lado que está sendo removido. Retirar as restrições do $el-1$ para o lado que está sendo removido. A ordem do pequeno já é igual a ordem do $el-0$. Restringir o elemento pequeno $el-1$ para o grande $el-0$.

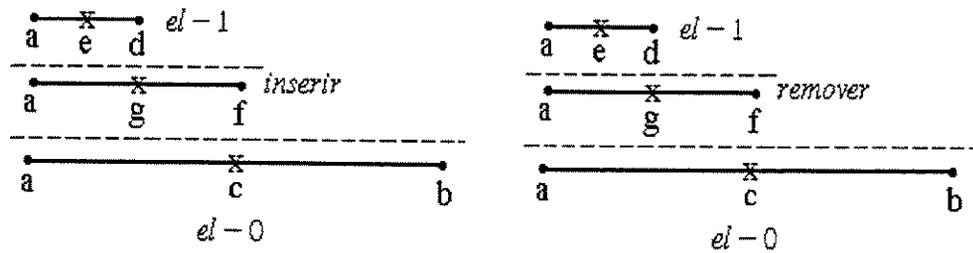


Figura B.6: caso 6: há lados pequenos e grandes, não há lados iguais

VII) Caso 7 : existem lados de tamanhos pequeno, igual e grande

► Modo inserção

Fazer a ordem do lado inserido igual a ordem do lado de igual tamanho, el-1, figura B.7.

► Modo remoção

Dado que existe um lado igual ao que está sendo removido, não há mais nada a fazer.

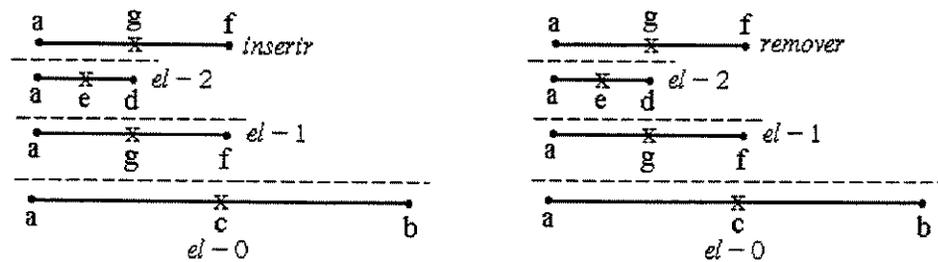


Figura B.7: caso 7: há lados pequenos, iguais e grandes

