

ESTABILIDADE DE MOVIMENTO EM CENTRÍFUGA

DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

43/78

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
SETOR DE PROJETO

ESTABILIDADE DE MOVIMENTO EM CENTRÍFUGA
DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Luiz Roberto Xavier Ribeiro

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
de Campinas - UNICAMP como parte dos requis
sitos necessários para obtenção do título
de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA, modali-
dade MECÂNICA DOS SÓLIDOS E PROJETO MECÂNIC
CO.

Aos meus pais

Luiz e Alice

TÍTULO: "ESTABILIDADE DE MOVIMENTO EM CENTRÍFUGA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE".

R E S U M O

Apresenta-se resultados teóricos e experimentais para o estudo de estabilidade de um corpo com um ponto fixo e que não necessariamente apresenta simetria de rotação. Este corpo vem a ser um modelo simplificado de uma centrífuga de dois graus de liberdade. Analisa-se dois casos aparentemente semelhantes, um possuindo no ponto fixo uma junta cardânica, outro uma suspensão rotulada, mostra-se que existe uma diferença considerável.

TITLE: "STABILITY OF THE MOTION OF A CENTRIFUGE WITH
TWO DEGREES OF FREEDOM".

A B S T R A C T

Theoretical and experimental results are presented for the stability of a rigid body with a fixed point that is not necessarily symmetrical with respect to the rotation axis. This body is a simplified model of a centrifuge with two degrees of freedom. Two apparently similar cases are analyzed, one that has a cardan coupling on the fixed point, the other has a pinned joint, and it is shown that there is a considerable difference concerning the resulting stability.

ÍNDICE

CAPÍTULO	PÁGINA
1. INTRODUÇÃO	1
2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	3
3. TRIÂNGULO DE FORMA	7
3.1. INTRODUÇÃO	7
3.2. FUNDAMENTOS DO TRIÂNGULO DE FORMA ...	7
3.2.1. DETERMINAÇÃO DOS PONTOS Q's NO TRIÂN- GULO DE FORMA	12
3.2.2. COORDENADAS PROJETADAS	12
3.2.3. COORDENADAS SEGUNDO MAGNUS	13
3.2.4. COORDENADAS SEGUNDO SCHIEHLEN	13
3.2.5. COORDENADAS CARTESIANAS	16
4. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	20
4.1. INTRODUÇÃO	20
4.2. SUSPENSÃO POR JUNTA CARDÂNICA	23
4.3. NORMALIZAÇÃO	32
4.4. SUSPENSÃO ROTULADA	33
5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE	35
5.1. INTRODUÇÃO	35
5.2. ESTUDO DOS MÉTODOS	35
5.3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE PELO ESTUDO DAS MATRIZES	36
5.3.1. SISTEMA M-K	36
5.3.2. SISTEMA M-G-K	36
5.3.3. SISTEMA M-D-G-K	37
5.3.4. SISTEMA M-D-G-K-N	38
5.4. CRITÉRIO DE AUTOVALORES	38
6. MONTAGENS EXPERIMENTAIS	40
6.1. INTRODUÇÃO	40
6.2. MONTAGEM EXPERIMENTAL COM SUSPENSÃO POR JUNTA CARDÂNICA	40
6.3. MONTAGEM EXPERIMENTAL COM SUSPENSÃO ROTULADA	43

CAPÍTULO	PÁGINA
7. CÁLCULOS DOS MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA	47
8. MEDIÇÕES E RESULTADOS	51
8.1. INTRODUÇÃO	51
8.2. SUSPENSÃO CARDÂNICA	51
8.3. SUSPENSÃO ROTULADA	61
9. CONCLUSÕES	71
BIBLIOGRAFIA	73

1. INTRODUÇÃO

A separação de substâncias de densidades diferentes, em determinados processos químicos e técnicos, exige o método de centrifugação, que promove a separação através da força centrífuga, pela rotação da mistura. Com a necessidade de se separar substâncias de densidades muito próximas, como é o caso do urânio 235 e 238, tem-se aumentado consideravelmente a velocidade de rotação na centrifugação. O aumento de rotação nas centrífugas está intimamente relacionado com a evolução da tecnologia de fabricação e com a possibilidade de estudos mais sofisticados na análise dinâmica do sistema.

Enquanto, anteriormente, usava-se no projeto de uma centrífuga, a hipótese de corpos simétricos em mancais rígidos, atualmente, a análise é mais aprofundada; faz-se um estudo, em computador, de forma e de suspensão ótima das centrífugas. Para baixa rotação, construam-se centrífugas com dois pontos fixos, os mancais, em estruturas rígidas, que suportavam os possíveis desbalanceamentos provocados pelo deslocamento e concentração de massa em alguns pontos da centrífuga.

No entanto, com o advento das ultra-centrífugas, os níveis de vibrações nestas estruturas alcançariam valores que os sistemas destas suspensões não suportariam. Assim, as análises dinâmicas mostraram que é mais conveniente dar uma liberdade ao elemento girante, garantindo-se, todavia, uma tendência estabilizante ao sistema. Em centrífugas comerciais, a suspensão do sistema é normalmente feita por material do tipo borracha (Fig. 1.1) e para se trabalhar com segurança existe um sistema automático de parada quando os níveis de vibrações ultrapassam um valor determinado.

Certas soluções de projeto fazem uso de apenas um ponto fixo como suspensão do sistema, que coincide com o mancal, e procura-se projetar o sistema de maneira a se garantir sua auto-centragem.

Os modelos matemáticos, nos estudos de análises dinâmicas, passam a ser mais sofisticados; e para que se tenha uma garantia total de auto-centragem, eles levam em conta a

assimetria em centrífugas, efeitos não lineares etc, o que tem gerado vários trabalhos sobre o assunto [1-6].

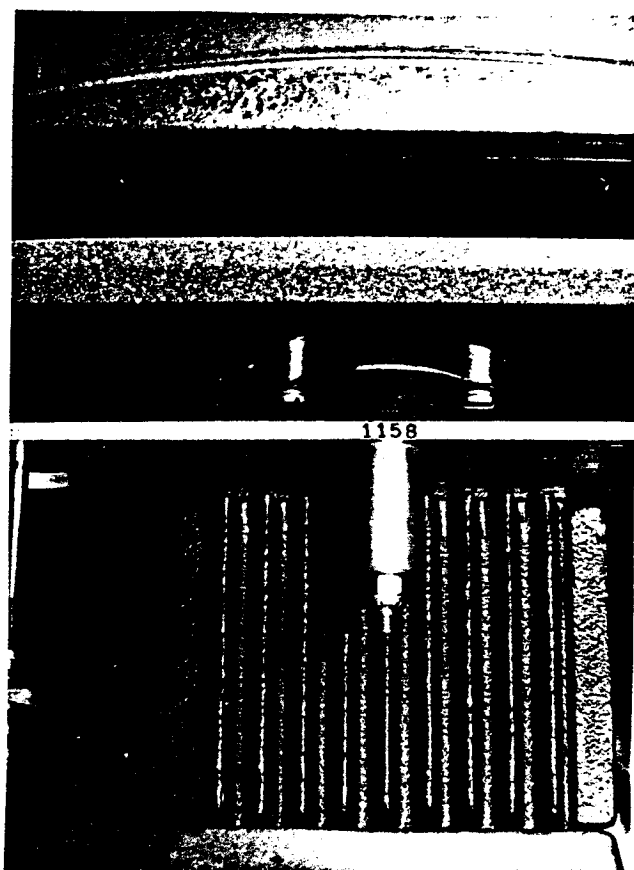


Fig.1.1. Detalhe da suspensão de uma ultra-centrífuga.

Neste trabalho é feito o desenvolvimento de modelos matemáticos para centrífugas em que o centro de massa se encontra acima dos pontos fixos, em dois diferentes pontos de suspensão do sistema: através de mancais rotulados e de junta cardânica, para os quais se montaram modelos físicos para ensaios experimentais e comparação dos mesmos com o estudo de estabilidade teórico, em cada caso.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Pretende-se neste trabalho fazer a análise dinâmica de centrífugas de dois graus de liberdade, sem limitações de simetria, com a finalidade de se determinarem as regiões de estabilidade do sistema, teórica e experimentalmente.

Basicamente, uma centrífuga consta de um corpo com movimento de rotação em torno de um eixo vertical, que é acionado por um motor elétrico através de um eixo, onde se tem a suspensão do sistema. Esta suspensão é identificada pelo tipo de mancalização do sistema. Os mancais são ligados à estrutura de fixação e caracterizam o tipo de centrífuga. Neste trabalho, interessam basicamente dois tipos de suspensão do sistema, sendo um a mancalização através de junta cardânica, e outro, a utilização de uma rótula.

A Fig. 2.1 mostra o modelo físico esquematizado, onde os componentes são definidos. Pela figura, o corpo da centrífuga é apresentado em forma de cruz; trata-se de um corpo rígido, sem simetria de rotação, acoplado ao eixo suspenso pela junta cardânica, onde se vê a caracterização dos mancais, que, eventualmente, além de apresentarem efeitos de amortecimento, poderiam ser elásticos, desta forma tendo também efeito de mola.

No caso em que se usa suspensão pela junta cardânica, o acionamento é fornecido por um motor elétrico acoplado a um redutor, o qual tem em seu eixo de saída a junta cardânica que contém o ponto fixo do sistema, no qual se encontram os sistemas de referências usados no desenvolvimento do modelo matemático (Fig. 2.1).

O outro tipo de suspensão, que se vai analisar, está apresentado na Fig. 2.2. Trata-se de uma junta rotulada, na qual se encontra o ponto fixo do sistema onde se tem a origem dos referenciais usados para a formulação e análise do modelo matemático.

No caso do uso de junta rotulada como mancal do sistema, o corpo da centrífuga é colocado diretamente no eixo de acionamento do motor e, como este tem liberdade no sentido horizontal, é necessário um limitador deste movimento,

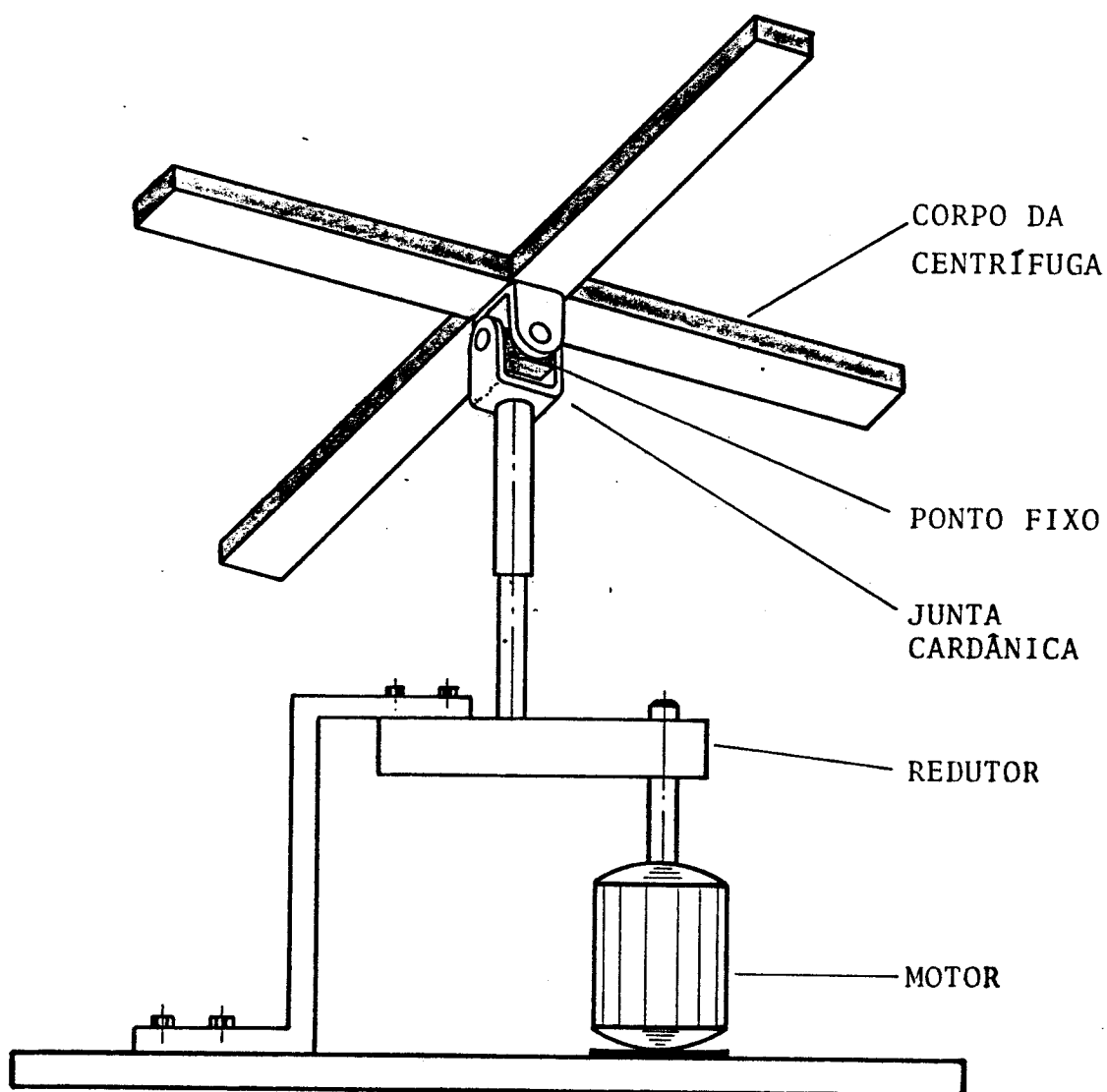


Fig. 2.1. Modelo de centrífuga com suspensão por junta cardânica

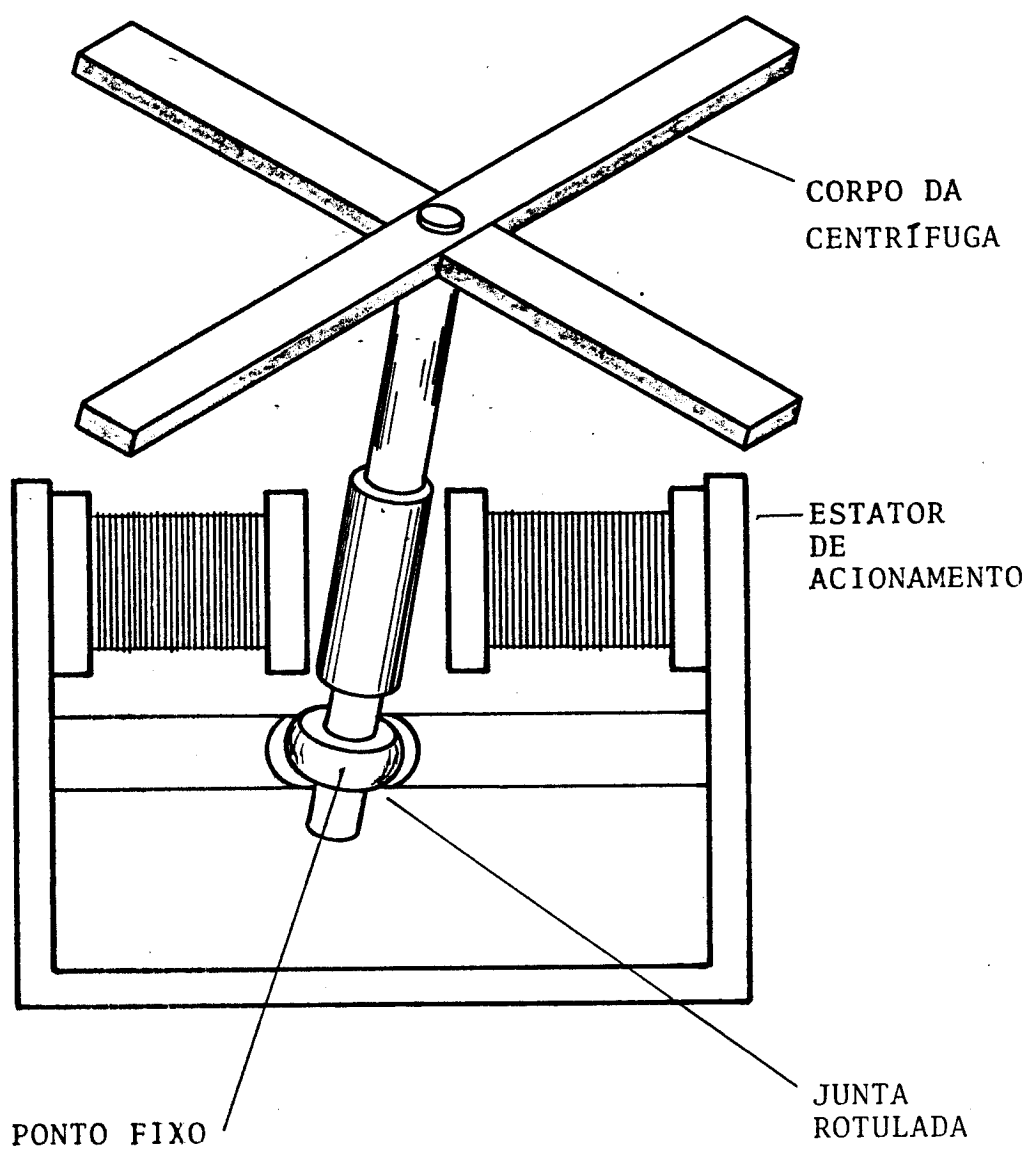


Fig. 2.2. Modelo de centrífuga com suspensão por junta rotulada.

para que não ocorra choque do eixo com o estator do motor.

Para cada tipo de suspensão serão desenvolvidos modelos matemáticos para sistemas de coordenadas no ponto fixo das suspensões, tomando-se a velocidade de rotação do corpo da centrífuga como constante. Isto significa que se têm apenas 2 rotações independentes, possíveis em relação aos eixos horizontais x e y das Figs. 2.1 e 2.2, que caracterizam o sistema como de dois graus de liberdade. As equações do movimento serão desenvolvidas pelo sistema referencial de eixos cardânicos, definido por deslocamentos subsequentes em cada eixo, como se detalhará durante o desenvolvimento do modelo matemático.

Com os resultados experimentais, através das equações dos movimentos, serão feitas análises de estabilidade, usando-se os critérios de estabilidade de HURWITZ e THOMSON, TAIT-CHETAEV [2-3], apresentados no capítulo 5 e, com a análise teórica, serão comparados os resultados. Para isso, será usada a representação gráfica do triângulo de forma de MAGNUS [4] para momentos principais de inércia de corpos rígidos, na qual, como se verá, são definidas regiões de estabilidade dos sistemas, dependendo da forma e do tipo de suspensão.

3. TRIÂNGULO DE FORMA

3.1. INTRODUÇÃO

Fundamentalmente, a distribuição de massa de um corpo rígido pode ser descrita por parâmetros em um espaço tri-dimensional, onde os momentos principais de inércia A, B e C são as coordenadas de um sistema cartesiano. Mas, nesta representação existem duas desvantagens: primeiramente, a descrição espacial é complicada e pouco ilustrativa e, em segundo lugar, a construção não representa de maneira satisfatória as condições de estabilidade.

Como se verá no estudo de estabilidade, o grau de estabilidade não depende dos momentos principais da inércia A, B e C, mas somente da razão A:B:C; têm-se, na realidade, dois parâmetros essenciais, que, assim, podem ser colocados no espaço bi-dimensional.

Várias são as formas planas e equivalentes de representar a distribuição de massa de um corpo rígido. No entanto, somente a descrição dos três momentos principais de inércia no triângulo de forma de MAGNUS [4], é simétrica em relação a todos os momentos, justamente pela sua forma, como se verá a seguir.

3.2. FUNDAMENTOS DO TRIANGULO DE FORMA

Para se ter idéia de um triângulo de forma [4], tem-se que imaginar os principais momentos de inércia do corpo rígido como coordenadas de um ponto P, no sistema de coordenadas retangulares {X, Y, Z}

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

A variação tri-dimensional do ponto P pode ser induzida para uma variação bi-dimensional de um ponto Q, no plano definido por

$$x + y + z = 1 \quad (3.2)$$

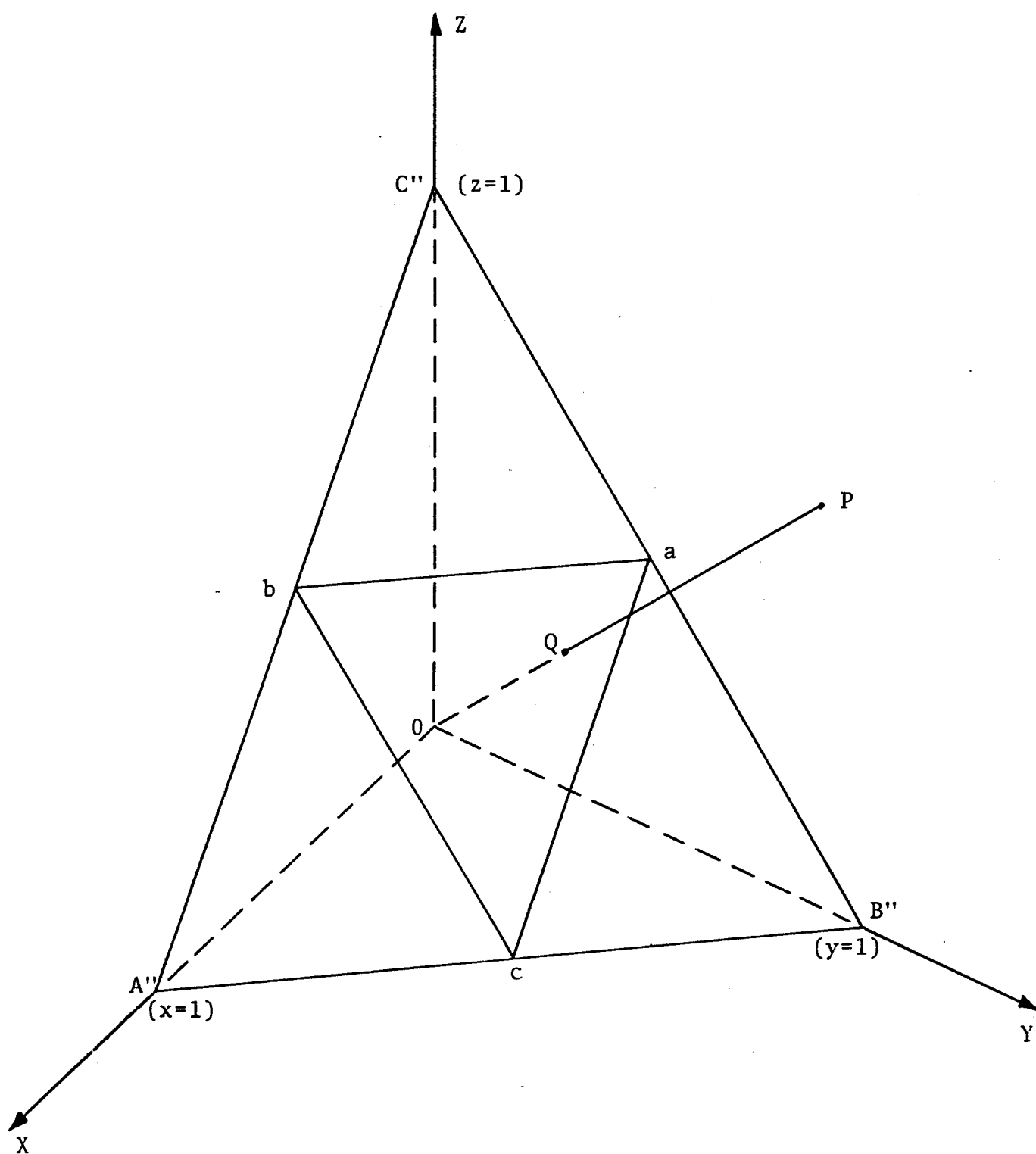


Fig. 3.1 Triângulo fundamental $A''B''C''$ e triângulo de forma abc

O ponto Q é obtido do ponto P pela projeção central, através da origem do plano (3.2) que, por este procedimento, fica

$$Q = \frac{1}{A + B + C} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Como não existem momentos negativos, os pontos Q's estão contidos no triângulo fundamental A'', B'', C'' (Fig. 3.1).

Devido às desigualdades triangulares satisfeitas pelos momentos de inércia principais de um corpo rígido

$$A \leq B + C, \quad B \leq C + A, \quad C \leq A + B \quad (3.4)$$

os possíveis Q's estão restritos ao triângulo abc da Fig. 3.1, que é o triângulo de forma.

No triângulo de forma abc (Fig. 3.2) são representados os momentos principais de inércia dos corpos e, alguns pontos são característicos e identificam corpos de formas particulares, como:

- os vértices correspondem a barras,
- os lados correspondem a discos,
- as medianas correspondem a corpos simétricos,
- a intersecção das medianas, o ponto médio do triângulo, corresponde aos momentos principais de inércia de um corpo esférico,
- e todas as outras partes do triângulo, entre duas medianas e um lado, estão caracterizadas pelas relações de momentos de inércia mostrados na Fig. 3.2.

Embora se tenham definido no triângulo de forma as regiões e limites das relações dos momentos principais de inércia dos corpos rígidos, para a análise de estabilidade é necessário um sistema de coordenadas para a determinação do ponto Q em cada caso.

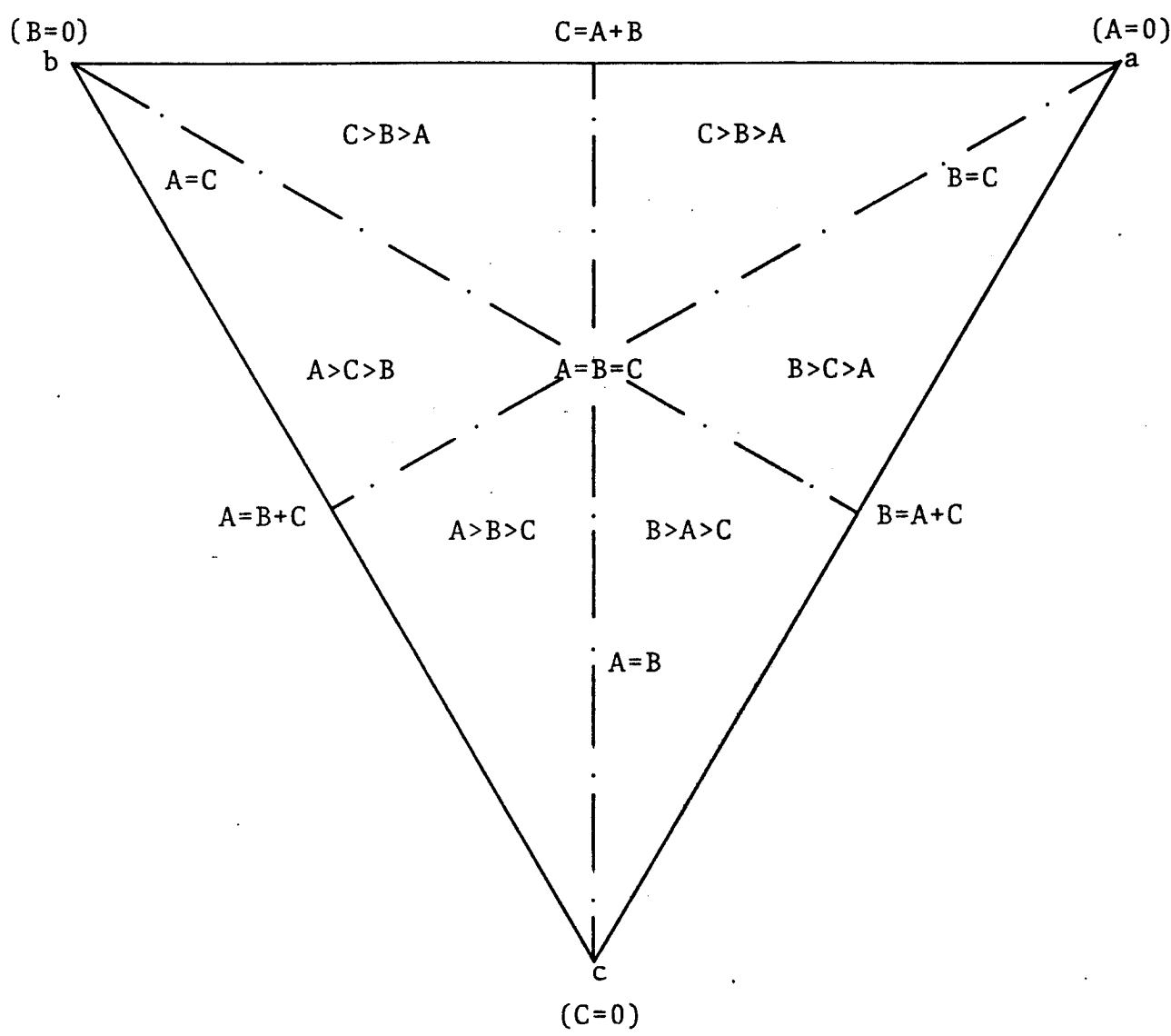


Fig. 3.2 Regiões características do triângulo de forma

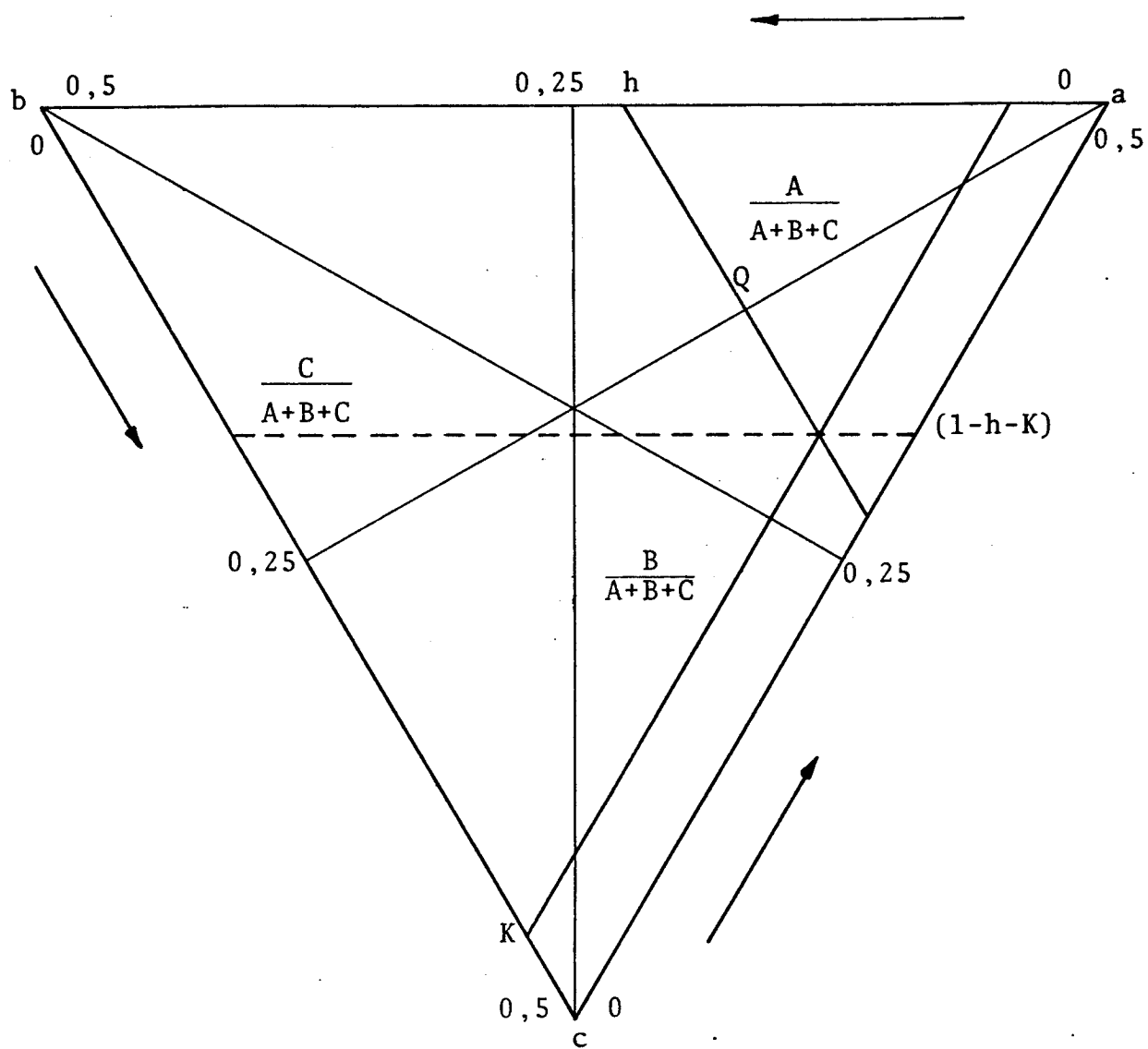


Fig. 3.3 Construção de Q por coordenadas projetadas

3.2.1. DETERMINAÇÃO DOS PONTOS Q's NO TRIÂNGULO DE FORMA

Matematicamente, os pontos Q's são descritos pelas coordenadas do Baricentro (A, B, C), significando que Q seria o centro de massa se nos vértices A'', B'', C'' do triângulo fundamental se fixassem três massas A, B, C, respectivamente. Mas esta caracterização de Q não é um caminho muito simples de calcular.

A seguir, ver-se-ão alguns métodos de determinação do ponto Q.

3.2.2. COORDENADAS PROJETADAS

Da equação 3.3 é fácil demonstrar duas coordenadas de Q como parâmetros de estabilidade. Por exemplo, escreve-se

$$h = \frac{A}{A + B + C}, \quad 0 \leq h \leq \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

$$k = \frac{B}{A + B + C}, \quad 0 \leq k \leq \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

$$1-h-k = \frac{C}{A + B + C}, \quad \frac{1}{2} \leq h + k \leq 1 \quad (3.7)$$

então

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Um h fixo e um k variável geram uma linha paralela ao lado oposto do vértice a (a corresponde ao A, portanto, a h). As linhas coordenadas são paralelas às linhas dos lados. Portanto, a construção de Q pode ser feita como foi mostrado na Fig. 3.3. Duas razões de $A/(A+B+C)$, $B/(A+B+C)$, $C/(A+B+C)$ são calculadas e marcadas na escala linear (0...0,5), sobre a linha do lado correspondente à relação tomada. Desenhando-se as correspondentes paralelas aos lados, por estes pontos, a intersecção será o ponto Q.

3.2.3. COORDENADAS SEGUNDO MAGNUS [4]

Frequentemente, as razões dos momentos de inércia são conhecidas como parâmetros de estabilidade. Portanto, é conveniente ver, para um sistema de coordenadas, estes parâmetros. Por exemplo:

$$d = \frac{A}{B}, \quad 0 \leq d \leq \infty \quad (3.9)$$

$$e = \frac{C}{A}, \quad 0 \leq e \leq \infty \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{e d} = \frac{B}{C}, \quad 0 \leq ed \leq \infty \quad (3.11)$$

Assim, a representação de Q fica

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1 + d + de} \begin{bmatrix} d \\ 1 \\ -(1+d) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

A variação dos Q's para um d fixo e um e variável é dada por uma linha que passa pelo vértice C" do triângulo fundamental. Geralmente, aquela linha coordenada passa pelo vértice relativo ao momento que não aparece na razão fixada. A intersecção da linha coordenada com o lado do triângulo dá um ponto-escala; por exemplo, para Q, dado por (3.12), a intersecção com e=0 leva a

$$Q_d = \frac{1}{d + 1} \begin{bmatrix} d \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

o qual significa que a escala é não linear com $s.d/(d+1)$, onde s é o comprimento de um lado do triângulo. Na Fig. 3.4 a construção de Q é mostrada como o ponto de intersecção das duas linhas coordenadas. Esta construção requer o uso do triângulo fundamental e não somente o triângulo de forma.

3.2.4. COORDENADAS SEGUNDO SCHIEHLEN [2]

O sistema proposto introduz os seguintes parâmetros:

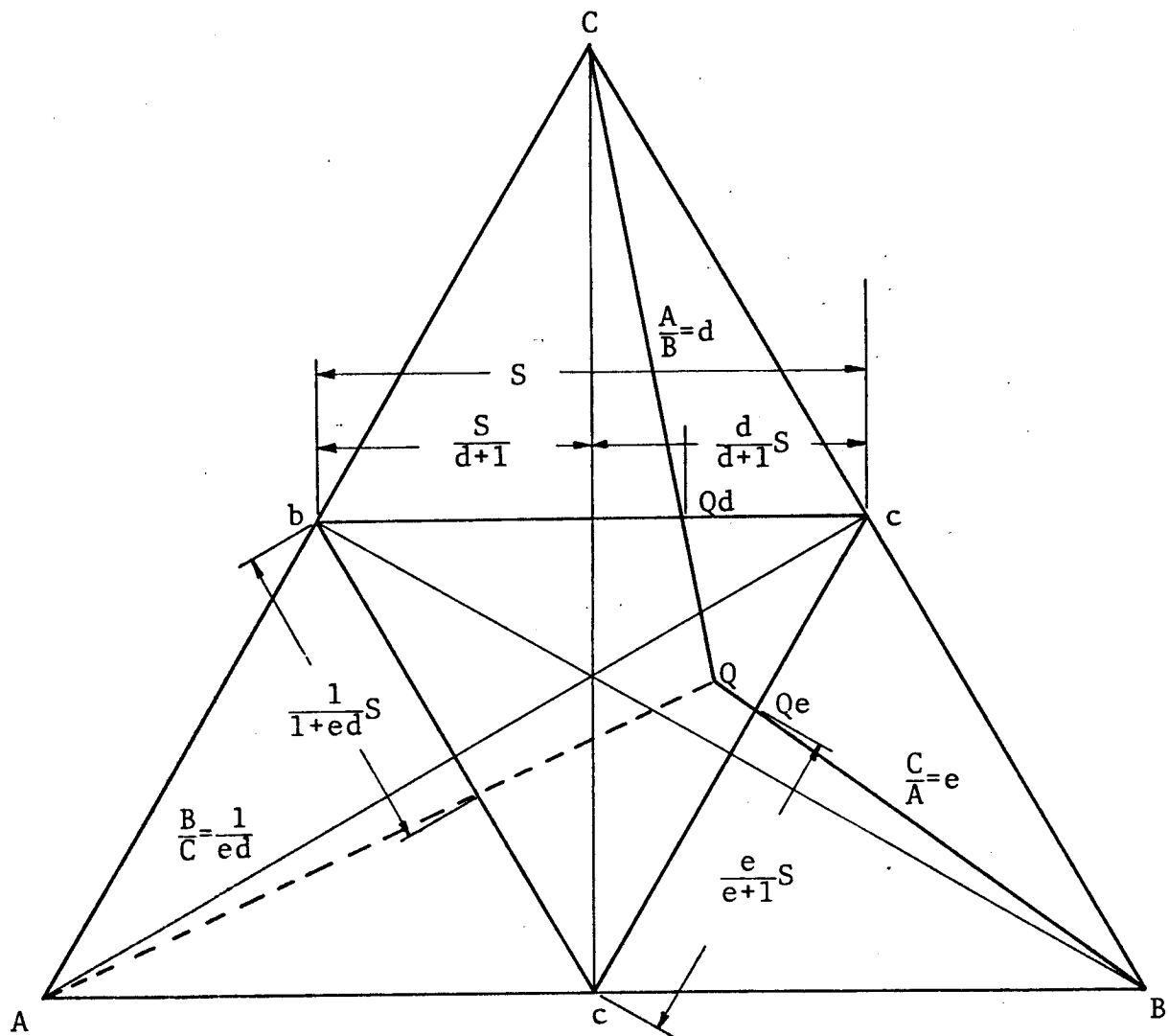


Fig. 3.4 Construção de Q pelas coordenadas de MAGNUS.

$$f = \frac{A - B}{C} \quad -1 \leq f \leq 1 \quad (3.14)$$

$$g = \frac{C - A}{B} \quad -1 \leq g \leq 1 \quad (3.15)$$

$$-\frac{f + g}{1 + fg} = \frac{B - C}{A} \quad -1 \leq -\frac{f - g}{1 + fg} \leq 1 \quad (3.16)$$

O cálculo de Q determina

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1 + g}{3 + fg + g - f} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (1-f) \\ -\frac{1}{2} (1+f) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A variação dos Q's para f constante e g variável é linear. Esta é uma linha que passa pelo vértice C e intercepta o lado oposto g=1 em

$$Q_f = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + f \\ 1 - f \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Portanto, f é um fator de escala linear sobre esta linha.

Para a construção de Q tomam-se duas razões dentre (B-C)/A, (C-A)/B e (A-B)/C, e marca-se, sobre a escala linear daquelas linhas laterais, os valores que correspondem aos divisores das razões. A linha que liga o ponto encontrado no lado com o vértice oposto é a linha coordenada. Duas linhas coordenadas independentes se interceptarão no ponto Q. A equação (3.17) de Q pode ser difícil mas a construção de Q é bastante fácil.

3.2.5. COORDENADAS CARTESIANAS

Frequentemente, o contorno de estabilidade é determinado por computadores, sendo, portanto, traçadas as linhas por plotter. Este aparelho é preparado para coordenadas retangulares e, desta forma, a caracterização de Q deve ser feita por coordenadas cartesianas.

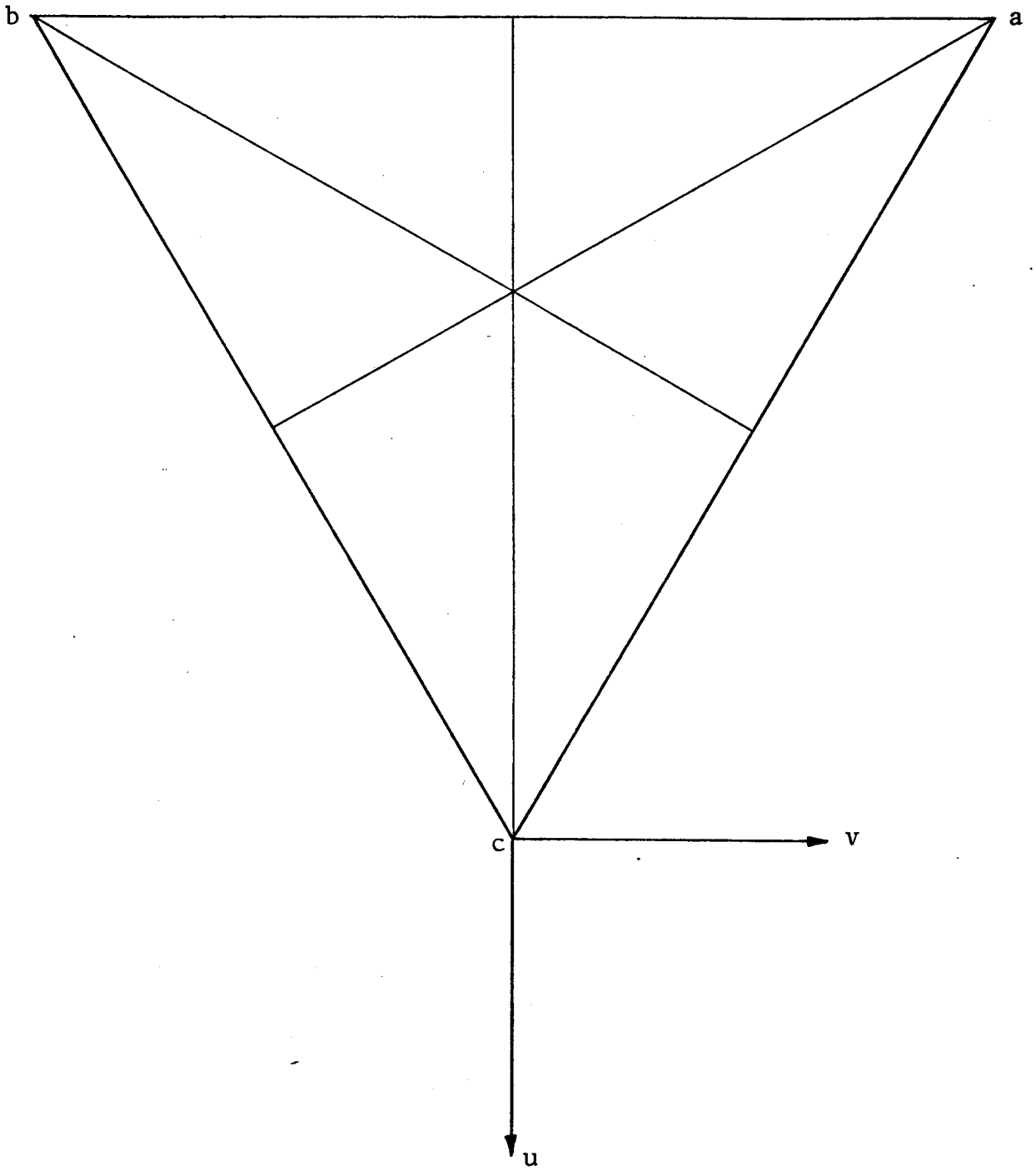


Fig. 3.6 Coordenadas cartesianas.

Existe uma quantidade muito grande de formas para se estabelecerem as coordenadas retangulares, mas é interessante usar alguma propriedade de simetria, o que torna as expressões mais fáceis de trabalhar. Por exemplo: pode-se tomar a linha mediana $A=B$ como coordenada e o vértice C como origem do sistema cartesiano $\{u, v\}$ Fig. 3.6.

As relações de momentos de inércia para o referencial são de forma:

$$u = -\sqrt{3} \frac{C}{A + B + C} \quad e, \quad (3.19)$$

$$v = \frac{B + A}{A + B + C} \quad (3.20)$$

Assim, o ponto Q fica definido por

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{v} - v\right) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{v} + v\right) \\ -\frac{u}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Uma construção geométrica de Q não é tão simples, à primeira vista, para os momentos principais de inércia, mas como se usam relações de momentos de inércia, há geralmente simplificações que facilitam a construção e determinação de regiões de estabilidade. Além disso, pode-se fazer um relacionamento entre as relações apresentadas nas seções anteriores.

a) relações para as coordenadas projetadas

$$\left. \begin{aligned} u &= -\sqrt{3} h \\ v &= 1 - h - 2k \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} h &= -\frac{u}{\sqrt{3}} \\ k &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}} - v\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

b) relações das coordenadas de MAGNUS

$$\left. \begin{aligned} u &= -\sqrt{3} \frac{d}{1 + d + de} \\ v &= \frac{de + 1}{1 + d + de} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{2u}{\sqrt{3} v - (u + \sqrt{3})} \\ \frac{1}{e} &= \frac{-2u}{\sqrt{3} v + (u + \sqrt{3})} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

c) relações das coordenadas de SCHIEHLEN

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{-\sqrt{3} (1 + fg)}{3 + fg + g - f} \\ v &= \frac{f + g}{3 + fg + g - f} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

$$\left. \begin{aligned} f &= \sqrt{3} \frac{v - (\sqrt{3} u + 1)}{\sqrt{3} v + (u + \sqrt{3})} \\ g &= -\sqrt{3} \frac{v + (\sqrt{3} u + 1)}{\sqrt{3} v - (u + \sqrt{3})} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

4. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

4.1. INTRODUÇÃO

Para a dedução das equações do movimento tomar-se-á um corpo rígido com momentos principais de inércia diferentes, portanto:

$$A \neq B \neq C \quad (4.1)$$

Desta forma, fica caracterizada a ausência de simetria de rotação em torno dos eixos fixos no próprio sistema bi-dimensional e a ausência dos produtos de inércia é explicada pelo formato do corpo rígido, que apresenta dois eixos de simetria.

O corpo rígido, acoplado ao eixo de acionamento do sistema, tem apoio em um ponto fixo, tomado como a origem dos sistemas de referência. Este corpo terá velocidade de rotação constante em torno do eixo vertical do referencial inercial (Fig. 2.1 e 2.2); em relação aos outros dois eixos do referencial, existe liberdade de movimento, caracterizando um sistema de dois graus de liberdade.

Como a rotação do sistema em torno de um eixo é constante, a dedução das equações do movimento será feita num referencial rotativo (Fig. 4.1), que é o sistema referencial com a mesma velocidade do corpo, com origem no ponto fixo (0). Este sistema é definido pelos ângulos cardânicos α , β e γ , em relação ao referencial inercial, onde α e β são considerados pequenos. Além disso, as informações partem de um sistema referencial solidário ao corpo, passando por um sistema intermediário proveniente das rotações cardânicas que definem o sistema rotativo.

A consideração de ângulos pequenos α e β permite, usando-se o conceito de estabilidade de LJAPUNOV [5], garantir que a estabilidade assintótica obtida para uma certa posição seja válida também em uma certa vizinhança, facilitando a análise através de uma linearização do sistema.

O terceiro ângulo cardânico representa o movimento

com a velocidade Ω constante

$$\gamma = \Omega t \quad (4.2)$$

Definidos os ângulos, têm-se os sistemas referenciais esquematizados na Fig. 4.1, onde:

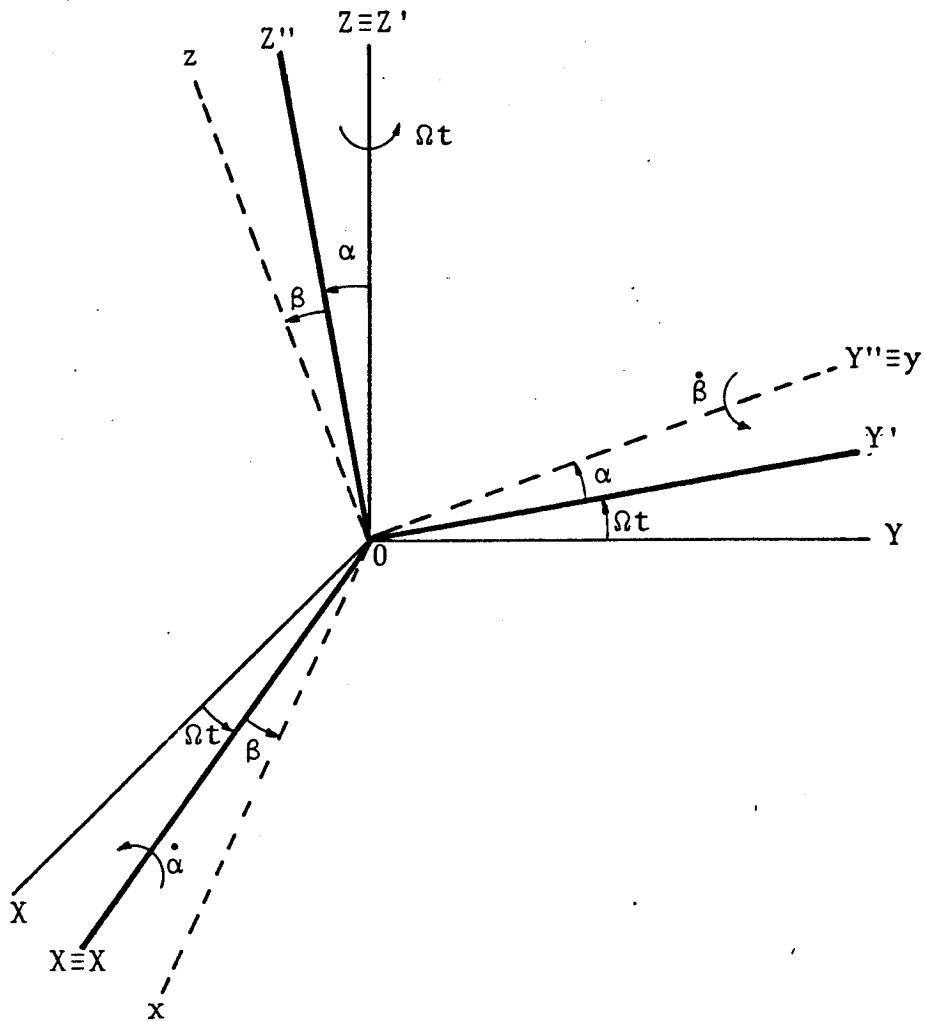


Fig. 4.1 Sistemas-referências e ângulos cardânicos

0 - ponto fixo,
 XYZ - I sistema inercial,
 X'Y'Z' - R sistema rotativo,
 X''Y''Z'' - I sistema intermediário e
 xyz - S sistema solidário.

Na figura, observa-se que a sequência de rotação dos eixos é, primeiramente, em torno de Z , depois, em torno de X' e, em seguida, em torno de Y'' . Esta sequência de rotação não é a mesma para os dois tipos de suspensão, mas somente para o de suspensão cardânica, onde, observando-se a Fig. 2.1, pode-se ver que o começo do movimento do corpo se dá com este em qualquer posição, num movimento de rotação em torno do eixo vertical do referencial inercial, que coincide com o do referencial rotativo.

Para a suspensão rotulada, representada na Fig. 2.2, o movimento de rotação do sistema se dá sobre o referencial solidário, sendo que o sistema tem rotação livre, primeiramente nos eixos horizontais, definindo a sequência: rotação em torno de X , depois em torno de Y' e, em seguida, em torno de Z'' , como mostra a Fig. 4.2.

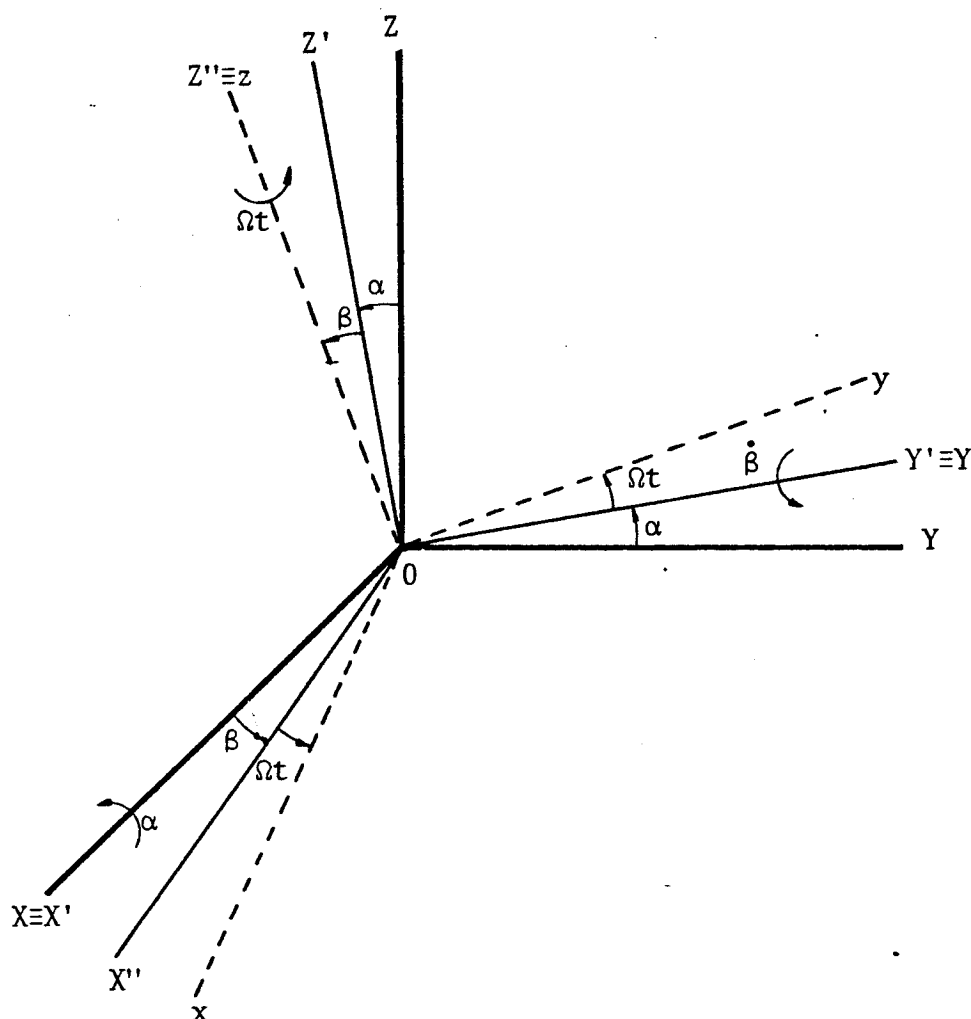


Fig. 4.2 Rotações dos ângulos cardânicos.

As equações do movimento podem ser deduzidas pela equação de EULER para o referencial rotativo [2], que é:

$$\begin{aligned} & \underline{R_I} \underline{P} \dot{\underline{\Omega}} + \underline{R_I} \underline{\Omega} \times \underline{R_I} \underline{R_I} \underline{\Omega} + \underline{R_I} \underline{\Omega} \times \underline{R_I} \underline{\omega} \text{ tr } \underline{R_I} + \\ & + 2 \underline{R_I} \underline{\omega} \times \underline{R_I} \underline{R_I} \underline{\Omega} + \underline{R_I} \underline{R_I} \dot{\underline{\omega}} + \underline{R_I} \underline{\omega} \times \underline{R_I} \underline{R_I} \underline{\omega} = \\ & = \underline{R_L} \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2. SUSPENSÃO POR JUNTA CARDÂNICA

Para as deduções das equações do movimento em que se tem o modelo físico apoiado em uma suspensão do tipo universal (Fig. 2.1), será feito uso do sistema rotativo R. Como as informações físicas estão no referencial S, que é referencial solidário ao corpo, é necessária uma matriz de transferência que, pela sequência de movimentos dos ângulos cardânicos, descritos anteriormente, se consubstancia na seguinte matriz 3x3:

$$\underline{R_T^S} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta \\ \text{sen}\alpha \text{ sen}\beta & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \cos\beta \\ -\text{sen}\beta \cos\alpha & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Os símbolos R e S são relativos aos sistemas rotativo e solidário, respectivamente. Da maneira como estão colocados, os índices da matriz indicam a transferência de um vetor do sistema S para o sistema R, através de

$$\underline{R_V} = \underline{R_T^S} \underline{S_V} \quad (4.5)$$

Na matriz de transferência não aparece a rotação Ωt , pois ambos os referenciais têm a mesma velocidade de rotação, que é constante. Assim, pode-se representar o vetor velocidade do sistema como:

$$\underline{R_{\Omega}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix}, \quad (4.6)$$

que é a velocidade de rotação do corpo e do referencial rotativo sobre o eixo vertical do sistema.

Fisicamente, este vetor velocidade mostra que não existe velocidade relativa ao eixo principal de rotação do sistema.

Deduz-se, da Fig. 2.1, a velocidade do sistema solidário, através de

$$\underline{S}_{\omega} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix} \quad e, \quad (4.7)$$

do sistema rotativo, usando-se a matriz de transferência (4.4), através de

$$\underline{R}_{\omega} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \cos \alpha \\ \dot{\beta} \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Para se determinar o tensor de inércia do sistema, toma-se um referencial auxiliar com origem em G (Fig. 4.3), que é o centro de massa. Assim, neste referencial, o tensor de inércia é representado como:

$$\underline{I}_G = \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde: A', B' e C' são os momentos principais de inércia em relação ao centro de massa.

Da Fig. 4.3, como o referencial auxiliar G é paralelo ao referencial solidário, e sendo e a distância entre eles, pode-se determinar o tensor de inércia no sistema solidário, levando-se em conta os possíveis desbalanceamentos, como:

$$\underline{S}_I = \begin{bmatrix} A' + m(e^2 + E_y^2) & 0 & 0 \\ 0 & B' + m(e^2 + E_x^2) & 0 \\ 0 & 0 & C' + m E^2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

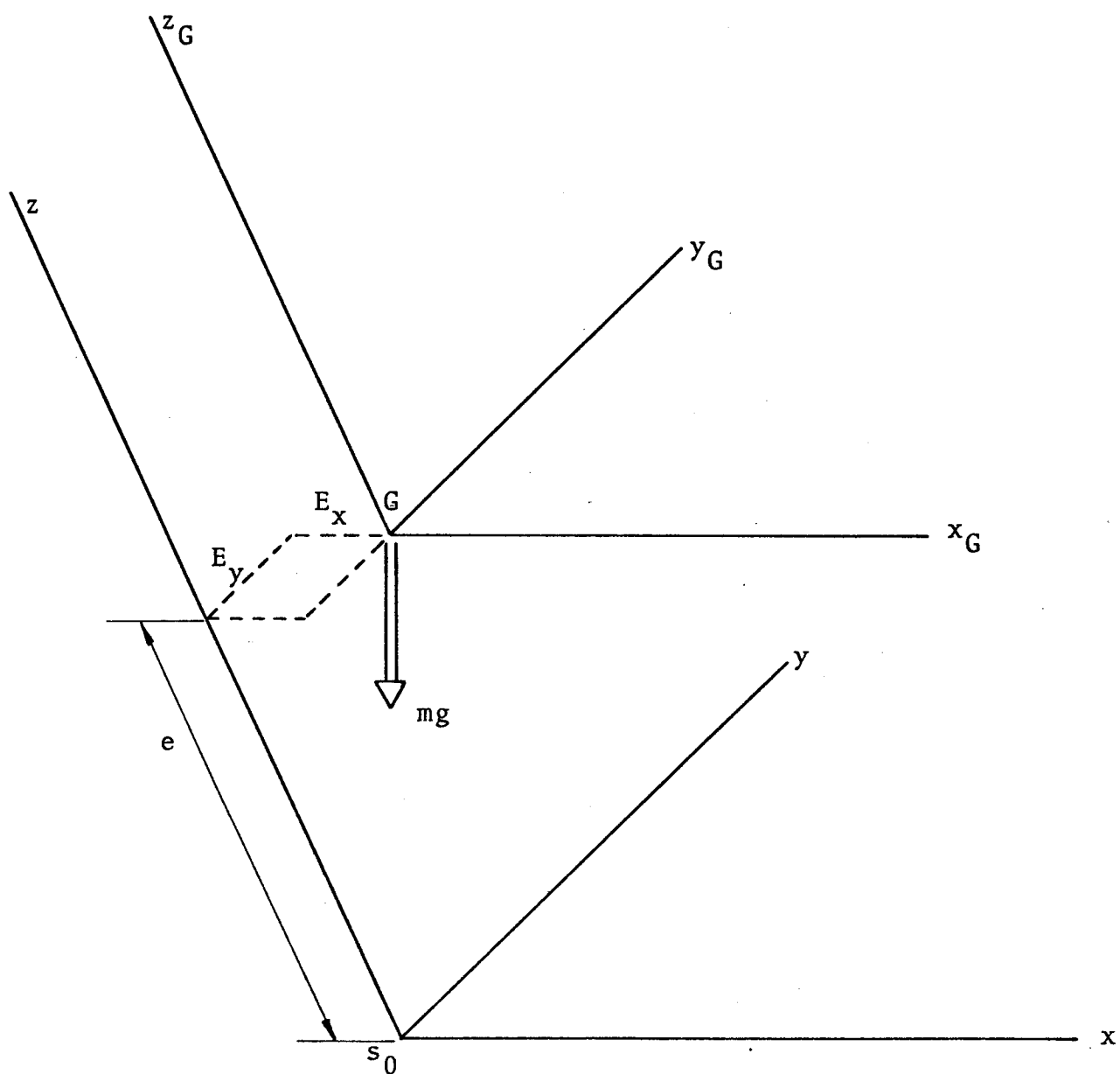


Fig. 4.3 Representação do referencial auxiliar G em relação ao referencial solidário S , com origem no ponto fixo 0 .

onde: m - massa do corpo rígido

e - distância do centro de massa ao ponto fixo

E - excentricidade

A excentricidade referida é levada em conta pela não homogeneidade dos materiais, que podem causar desbalanceamento. Este será um ponto de análise nos experimentos.

Para simplificar, passa-se a tratar o tensor de inércia, como:

$$S_I = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde: $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ são os momentos de inércia em relação ao ponto fixo no referencial S .

O tensor de inércia em R é dado pela expressão:

$$R_I = R_I S \quad S_I \quad S_T R \quad (4.12)$$

onde

$$S_T R = (R_T S)^T \quad (4.13)$$

Assim, o tensor de inércia em R fica:

$$R_I = \begin{bmatrix} \tilde{A} \cos^2 \alpha + \tilde{C} \sin^2 \beta \\ (\tilde{A} - \tilde{C}) \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \\ -(\tilde{A} - \tilde{C}) \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\ (\tilde{A} - \tilde{C}) \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \\ \tilde{A} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \tilde{B} \cos^2 \alpha + \tilde{C} \sin \alpha \cos^2 \beta \\ (-\tilde{A} \sin^2 \beta + \tilde{B} - \tilde{C} \cos \beta) \sin \alpha \cos \alpha \\ -(\tilde{A} - \tilde{C}) \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\ (-\tilde{A} \sin^2 \beta + \tilde{B} - \tilde{C} \cos^2 \beta) \sin \alpha \cos \alpha \\ \tilde{A} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \tilde{B} \sin^2 \alpha + \tilde{C} \cos^2 \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Para o desenvolvimento do termo à direita, R_L , na equação (4.3), levam-se em conta o peso e os efeitos de mola e amortecimento que aparecem no sistema.

Os momentos que agem no sistema podem ser determinados a partir da Fig. 4.3, por:

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} \quad (4.15)$$

que, no referencial R, é dado por:

$${}^R \underline{M}_0 = ({}^R \underline{S} \ \underline{S}_R) \times \underline{R}_F \quad (4.16)$$

onde,

$$\underline{S}_R = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ e \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

e

$$\underline{R}_R = \begin{bmatrix} E_x \cos\beta + e \sin\beta \\ E_x \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + E_y \operatorname{cosec}\alpha - e \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \\ -E_x \operatorname{cosec}\alpha \operatorname{sen}\beta + E_y \operatorname{sen}\alpha + e \operatorname{cosec}\alpha \cos\beta \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Substituindo-se em 4.15, tem-se:

$${}^R \underline{M}_0 = \begin{vmatrix} e_{x'} & e_{y'} & e_{z'} \\ r_{x'} & r_{y'} & r_{z'} \\ 0 & 0 & mg \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -mg & r_{y'} \\ mg & r_{x'} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Portanto,

$${}^R \underline{M}_0 = \begin{bmatrix} -mg (E_x \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + E_y \operatorname{cosec}\alpha - e \operatorname{sen}\alpha \cos\beta) \\ mg (E_x \cos\beta + e \operatorname{sen}\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde mg é a força da gravidade.

As forças de mola e amortecimento podem ser introduzidas no sistema e, efetivamente, o amortecimento sempre a parece nos mancais da junta cardânica.

Para a análise a ser feita, o amortecimento será tomado como viscoso e a força que representa o efeito de mola

e amortecedor $\tilde{e}$ dada por:

$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} -c\dot{\alpha} & -d\ddot{\alpha} \\ 0 & \\ 0 & \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ (-c\beta & -d\dot{\beta}) \cos\alpha \\ (-c\beta & -d\dot{\beta}) \sin\alpha \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

onde: c e d são, respectivamente, coeficientes de mola e amortecimento.

Levando-se em consideração os efeitos extremos atuantes no sistema, o lado direito da equação 4.3 fica:

$$R_L = \begin{Bmatrix} -mg(E_x \sin\alpha \sin\beta + E_y \cos\alpha - e \sin\alpha \cos\beta) - c\dot{\alpha} - d\ddot{\alpha} \\ mg(E_x \cos\beta + e \sin\beta) - c\beta \cos\alpha - d\dot{\beta} \cos\alpha \\ -c\beta \sin\alpha - d\dot{\beta} \sin\alpha \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Tendo-se determinado o termo do lado direito da equação 4.3 passa-se a resolver cada um dos termos à esquerda daquela equação.

1º termo:

$$R_I R_{\dot{\Omega}} = 0 \quad (4.23)$$

Este termo se anula, pois a velocidade $\tilde{e}$ constante.

2º termo:

$$R_{\Omega} R_I R_{\Omega} = \begin{Bmatrix} -(\tilde{A} \sin^2\beta + \tilde{B} - \tilde{C} \cos\beta) \Omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \\ -(\tilde{A} - \tilde{C}) \Omega^2 \cos\alpha \sin\beta \cos\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

3º termo:

$$R_{\Omega} \times R_{\omega tr} R_I = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta} \Omega \cos\alpha \\ \dot{\alpha} \Omega \\ 0 \end{Bmatrix} (\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C}) \quad (4.25)$$

4º termo:

$$2^{R_{\omega} \times R_I R_{\Omega}} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \Omega \cos \alpha (\bar{A} \sin^2 \beta + \bar{C} \cos^2 \beta) \\ -\Omega \{ \dot{\beta} (\bar{A} - \bar{C}) \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \alpha [(\bar{A} \sin^2 \beta + \\ \quad + \bar{C} \cos^2 \beta) \cos^2 \alpha + \bar{B} \sin^2 \alpha] \} \\ \Omega \cos \alpha [\dot{\beta} (\bar{A} - \bar{C}) \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \dot{\alpha} (\bar{A} \sin^2 \beta + \\ \quad + \bar{B} - \bar{C} \cos^2 \beta) \sin \alpha] \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

5º termo:

$$R_I R_{\omega} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha} (\bar{A} \cos^2 \beta + \bar{C} \sin \beta) - \ddot{\alpha} \dot{\beta} (\bar{A} - \bar{C}) \sin \beta \cos \beta \\ \ddot{\alpha} (\bar{A} - \bar{C}) \sin \alpha \sin \beta \cos \beta + \ddot{\beta} \bar{B} \cos \alpha - \dot{\beta} \ddot{\alpha} \sin \alpha [\bar{A} \sin^2 \beta + \\ \quad + \bar{C} \cos^2 \beta] \\ -\ddot{\alpha} (\bar{A} - \bar{C}) \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \ddot{\beta} \sin \alpha \bar{B} - \dot{\beta} \ddot{\alpha} \cos \alpha [\bar{A} \sin^2 \beta + \\ \quad + \bar{C} \cos^2 \beta] \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

6º termo:

$$R_{\omega \times} R_I R_{\omega} = \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\alpha} \dot{\beta} (\bar{A} - \bar{C}) \sin \beta \cos \beta \\ \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \alpha [\bar{A} \cos^2 \beta - \bar{B} + \bar{C} \sin^2 \beta] + \dot{\alpha}^2 (\bar{A} - \bar{C}) \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\ \dot{\alpha}^2 (\bar{A} + \bar{C}) \sin \alpha \sin \beta \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \alpha (\bar{A} \cos^2 \beta - \bar{B} + \bar{C} \sin \beta) \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

Substituindo os termos e resolvendo a equação, chega-se a três equações escalares, da seguinte forma:

1ª equação:

$$\begin{aligned} & (\bar{A} \cos^2 \beta + \bar{C} \sin^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2(\bar{A} - \bar{C}) \sin \beta \cos \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} + \ddot{\alpha} - \\ & - [\bar{A}(1 - 2\sin^2 \beta) + \bar{B} + \bar{C}(1 - 2\cos^2 \beta)] \cos \alpha \Omega \beta + c \alpha - \\ & - (-\bar{A} \sin^2 \beta + \bar{B} - \bar{C} \cos^2 \beta) \Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + mgE_x \sin \alpha \sin \beta + \\ & + mgE_y \cos \alpha - mg \sin \alpha \cos \beta = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

2ª equação:

$$\begin{aligned}
& (\bar{A}-\bar{C}) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta \ddot{\alpha} + \bar{B} \cos \alpha \ddot{\beta} + (\bar{A}-\bar{C}) \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta \dot{\alpha}^2 + \\
& + [\bar{A}-\bar{B}+\bar{C}] \operatorname{sen} \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} + \\
& + [\bar{A}(1-2 \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2 \alpha) + \bar{B}(1-2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + \bar{C}(1-2 \cos^2 \beta \cos^2 \alpha)] \Omega \dot{\alpha} + \\
& + [d \cos \alpha - 2(\bar{A}-\bar{C}) \Omega \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta] \dot{\beta} - (\bar{A}-\bar{C}) \Omega^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \\
& + c \cos \alpha \beta - m g E_x \cos \beta - m g \text{ e } \operatorname{sen} \beta = 0
\end{aligned} \tag{4.29b}$$

3.^a equação:

$$\begin{aligned}
& -(\bar{A}-\bar{C}) \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta \ddot{\alpha} + \bar{B} \operatorname{sen} \alpha \ddot{\beta} + (\bar{A}-\bar{C}) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta \dot{\alpha}^2 + \\
& + [\bar{A}(\operatorname{sen}^2 \beta - \cos^2 \beta) + \bar{B} + \bar{C}(\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta)] \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} + \\
& + [d \operatorname{sen} \alpha + 2(\bar{A}-\bar{C}) \Omega \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta] \dot{\beta} + \\
& + 2(-\bar{A} \operatorname{sen}^2 \beta + \bar{B} - \bar{C} \cos^2 \beta) \Omega \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} + c \operatorname{sen} \alpha \beta = 0
\end{aligned}$$

As equações completas não lineares, que incluem um possível desbalanceamento, foram deduzidas para que se tenham condições de verificação numérica dos efeitos presentes nos ensaios. Durante a realização destes, notam-se certas perturbações que caracterizam muito mais uma estabilidade oscilante que um equilíbrio assintoticamente estável. A perturbação causada por um possível desbalanceamento pode resultar na explicação mais plausível deste movimento. Neste caso, o modelo numérico completo permite a análise do efeito. Por outro lado, garantida a estabilidade do modelo linearizado, o conjunto de equações não lineares permite a análise de como são absorvidas pelo sistema perturbações mais fortes e qual o instante em que os resultados do modelo linearizado perdem a validade.

Para o estudo que se segue, basta o desenvolvimento permitido pelo modelo linearizado.

$$\bar{A} \ddot{\alpha} + d \dot{\alpha} - (\bar{A} + \bar{B} - \bar{C}) \Omega \dot{\beta} + [(\bar{C} - \bar{B}) \Omega^2 + c - m g e] \alpha + m g E_y = 0 \tag{4.30a}$$

$$\bar{B} \ddot{\beta} + d \dot{\beta} + (\bar{A} + \bar{B} - \bar{C}) \Omega \dot{\alpha} + [(\bar{C} - \bar{A}) \Omega^2 + c - m g e] \beta - m g E_x = 0 \tag{4.30b}$$

$$\text{e } 0 = 0 \tag{4.30c}$$

Como foi dito anteriormente, os termos em E serão considerados nulos, supondo-se a priori que não exista excentricidade. Colocando-se as equações simplificadas na forma

matricial, passa-se a considerar o tensor de inércia, no referencial solidário, como:

$$S_I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Os termos em me^2 , que apareciam anteriormente, também estão incluídos nesta representação em A, B e C.

As equações do movimento, na forma matricial, são dadas por

$$M\ddot{Z}(t) + (D + G)\dot{Z}(t) + KZ(t) = 0 \quad (4.32)$$

onde:

$$Z(t) = \begin{Bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

é o vetor posição,

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = M^T \quad (4.34)$$

é a matriz de massa,

$$D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = D^T \quad (4.35)$$

é a matriz de amortecimento

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -(A+B+C)\Omega \\ (A+B+C)\Omega & 0 \end{bmatrix} = -G^T \quad (4.36)$$

é a matriz giroscópica e

$$K = \begin{bmatrix} (C-B)\Omega^2 + c - mge & 0 \\ 0 & (C-A)\Omega^2 + c - mge \end{bmatrix} = K^T \quad (4.37)$$

é a matriz de rigidez.

4.3. NORMALIZAÇÃO

A equação 4.32 pode ser normalizada para simplificar a análise numérica, com a introdução do adimensional de tempo

$$\tau = \Omega t \quad (4.38)$$

ficando

$$\dot{Z} = \frac{dZ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = Z' \frac{1}{\Omega^{-1}} \quad (4.39)$$

e, normalizando-se as coordenadas

$$Z'(\tau) = C Z(\tau) \quad (4.40)$$

onde C é o momento principal de inércia. Assim:

$$M Z''(\tau) + (\bar{D} + \bar{G}) Z'(\tau) + K Z(\tau) = 0 \quad (4.41)$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{M} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{B} \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \bar{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \\ \text{c) } \bar{G} &= \begin{bmatrix} 0 & -(\bar{A} + \bar{B} - 1) \\ (\bar{A} + \bar{B} - 1) & 0 \end{bmatrix} e \\ \text{d) } \bar{K} &= \begin{bmatrix} K + (1 - \bar{B}) & \\ 0 & K + (1 - \bar{A}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{A} &= \frac{A}{C}, \quad \text{b) } \bar{B} = \frac{B}{C}, \quad \text{c) } D = \frac{d}{C\Omega} \quad e \\ \text{d) } K &= \frac{c - mge}{C \Omega^2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.4. SUSPENSÃO ROTULADA

Da mesma forma como se procedem na dedução das equações do movimento para o caso de suspensão por junta cardânica, passa-se a tratar do caso de suspensão por junta rotulada (Fig. 2.2). No entanto, conhecidas as equações não lineares do sistema anterior, que possibilitarão uma análise mais completa, se houver necessidade, passa-se a tratar do sistema rotulado diretamente na forma linearizada, uma vez que é possível a linearização.

A matriz de transformação, na forma linearizada, neste caso, é desenvolvida da forma descrita anteriormente (Fig. 4.2), em que a primeira rotação se dá em torno do eixo X, a segunda, em torno de Y', e a seguinte, em torno de Z'', resultando em:

$$R_{TS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

As equações podem ser apresentadas na forma matricial, como:

$$M \ddot{Z}(t) + (D+G)\dot{Z}(t) + (K+N)Z(t) = 0 \quad (4.45)$$

onde:

$$Z(t) = \begin{Bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

que é o vetor posição

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = M^T \quad (4.47)$$

é a matriz de massa,

$$D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = D^T \quad (4.48)$$

é a matriz de amortecimento,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -(A+B-C)\Omega \\ (A+B-C)\Omega & 0 \end{bmatrix} = -G^T \quad (4.49)$$

é a matriz giroscópica

$$K = \begin{bmatrix} (C-B)\Omega^2 + C - mge & \\ 0 & (C-A)\Omega^2 + C - mge \end{bmatrix} = K^T \quad (4.50)$$

é a matriz de rigidez e

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -d\Omega \\ d\Omega & 0 \end{bmatrix} = -N^T \quad (4.51)$$

é a matriz de forças não conservativas.

Introduzindo-se o adimensional de tempo, definido em 4.38, e normalizando-se as coordenadas por 4.40, pode-se reescrever a equação 4.45, como:

$$\bar{M} \bar{Z}''(\tau) + (\bar{D} + \bar{G}) \bar{Z}'(\tau) + (\bar{K} + \bar{N}) \bar{Z}(\tau) = 0 \quad (4.52)$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{M} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{B} \end{bmatrix}, & \text{b) } \bar{D} &= \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \\ \text{c) } \bar{G} &= \begin{bmatrix} 0 & -(\bar{A} + \bar{B} - 1) \\ (\bar{A} + \bar{B} - 1) & 0 \end{bmatrix}, & & \\ \text{d) } \bar{K} &= \begin{bmatrix} K + (1 - \bar{B}) & 0 \\ 0 & K + (1 - \bar{A}) \end{bmatrix}, & \text{e) } \bar{N} &= \begin{bmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.53)$$

sendo que, $\bar{A}$, $\bar{B}$, D e K foram definidos anteriormente em 4.43.

Para a análise de estabilidade das equações desenvolvidas serão estudados os tipos das equações e os critérios de estabilidade, que permitem determinar as condições de estabilidade do sistema.

5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

5.1. INTRODUÇÃO

A palavra estabilidade nos sistemas mecânicos, caracteriza o equilíbrio de um corpo rígido. O equilíbrio é chamado estável quando o sistema, após ter sofrido uma perturbação volta a ocupar a mesma posição inicial. O sistema é instável quando, após uma perturbação vier a ocupar uma posição que não seja aquela inicial [7]. O conceito de estabilidade, desta forma, é absoluto, mas, pelo conceito de LJAPUNOV [8], num sistema mecânico o equilíbrio de um corpo rígido pode ocorrer em um certo contorno da posição inicial, definindo uma faixa-contorno de equilíbrio estável; mesmo que oscile dentro desta faixa, o sistema é considerado estável, no sentido de LJAPUNOV. O sistema é considerado instável somente se, após uma perturbação, não retornar para dentro deste contorno.

A análise de estabilidade neste trabalho será feita baseada no conceito de LJAPUNOV.

5.2. ESTUDO DOS MÉTODOS

Como se está trabalhando com sistema de corpo rígido com dois graus de liberdade, pode-se representar a equação de movimento, linearizada [3], numa forma geral, com:

$$M\ddot{x} + (D+G)\dot{x} + (K+N)x = f \quad (5.1)$$

onde:

- x - é o vetor deslocamento, n-dimensional, da posição de equilíbrio
- M - matriz de massa, simétrica, positiva definida,
- D - matriz de amortecimento, simétrica,
- G - matriz de forças giroscópicas,
- K - matriz de rigidez, simétrica
- N - matriz de forças não conservativas e
- f - vetor que representa os esforços externos.

A análise de estabilidade desta equação é feita por dois métodos:

- 1) Estudando as matrizes de equação,
- 2) Estudando os autovalores da equação característica.

No primeiro caso, usam-se teoremas do tipo THOMSON-TAIT-CHETAEV [3], e no segundo, os critérios do tipo ROUTH, HURWITZ, LIENARD-CHIPART [2]. Embora haja vários critérios de análise de estabilidade, não se pretende, contudo, fazer uma análise extensiva do problema, mas, apenas, apresentar resultados de interesse para o trabalho.

5.3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE PELO ESTUDO DAS MATRIZES

Na análise de estabilidade do sistema, pelo estudo de suas matrizes, tomar-se-ão, primeiro, os sistemas mais simples, expondo-se as condições de estabilidade em cada caso, até o sistema mais geral (5.1).

5.3.1. SISTEMA M-K

Os sistemas M-K, que são os mais simples, com,

$$M = M^T > 0, \quad (5.2)$$

são estáveis, no sentido de LJAPUNOV, se

$$K = K^T > 0 \quad (5.3)$$

Se isto não for obedecido, o sistema é instável.

5.3.2. SISTEMA M-G-K

Os sistemas giroscópicos conservativos são assintoticamente estáveis quando

$$K = K^T \geq 0 \quad (5.4)$$

Além disso, a matriz K deve estar em tal combinação com a matriz giroscópica, G, que, na parte do sistema onde não existe força de mola, isto é, onde a matriz de rigidez

apresenta um autovalor nulo ($K=0$), a matriz giroscópica estabelece um acoplamento no sistema, permitindo a transferência de efeito proporcional à velocidade. Este fenômeno é chamado de estabilização giroscópica, conseguida quando se aplica uma quantidade de movimento angular suficientemente alta. É necessário que $\det G_0 \neq 0$ em

$$G = h G_0 \quad (5.5)$$

onde h é a quantidade de movimento angular.

5.3.3. SISTEMA M-D-G-K

A condição de estabilidade deste sistema foi proposta por THOMSON-TAIT em teorema demonstrado por CHETAEV, que diz: se $D > 0$, o sistema é assintoticamente estável quando $K > 0$. Isto é, se a matriz de amortecimento é positiva definida, o sistema é estável somente quando a matriz de rigidez K também for positiva definida.

Com os conceitos de estabilidade dos sistemas M-K e M-G-K, podem-se escrever as condições de estabilidade do sistema M-G-D-K de uma forma mais geral. O sistema é estável quando:

$$M = M^T > 0, \quad D = D^T \geq 0 \quad \text{e} \quad K = K^T > 0 \quad (5.6)$$

A matriz giroscópica não tem influência no sistema pois, como foi visto no item anterior (5.3.2), para $K > 0$ o sistema é sempre estável.

Como este sistema identifica o de equação do movimento, desenvolvido para suspensão por junta cardânica, pode-se fazer um estudo das condições de estabilidade, através de análise da matriz $\bar{K}$ (4.42d), donde se determina as condições de estabilidade. Assim, para se ter um sistema estável, tem-se que fazer:

$$K = \bar{A} - 1 \quad (5.7)$$

$$K = \bar{B} - 1 \quad (5.8)$$

para $\bar{K} > 0$.

5.3.4. SISTEMA M-D-G-K-N

Neste caso, o sistema instável

$$M\ddot{z} + Nz = 0 \quad (5.9)$$

pode ser estabilizado acrescentando-se forças $(D+G)\dot{z}$.

Se $\det N \neq 0$, pode-se obter estabilidade assintótica.

Este sistema é mais simples de se resolver pelo critério de autovalores da expressão característica.

5.4. CRITÉRIO DE AUTOVALORES

Embora haja vários métodos que usam o critério de autovalores, não é de interesse do trabalho detalhá-los e, assim, aplicar-se-á somente o critério de HURWITZ [2], que se baseia na análise do polinômio característico de equação matricial do movimento. Então, de (5.1), tem-se:

$$\det[\lambda^2 M + \lambda(D+G) + (K+N)] = 0 \quad (5.10)$$

resultando em

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (5.11)$$

Para o teorema de HURWITZ, na formulação de LIENÁRD - CHIPART [2], a estabilidade assintótica é garantida, no caso de polinômio de quarta ordem, se:

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4 \quad e \quad (5.12)$$

$$H = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0 \quad (5.13)$$

Aplicando-se estas condições a (4.52), equação do movimento para a centrífuga de suspensão rotulada, tem-se:

$$a_0 = \bar{A} \bar{B} > 0 \quad (5.14)$$

$$a_1 = (\bar{A} + \bar{B})D > 0 \quad (5.15)$$

$$a_2 = (2\bar{A}\bar{B} - \bar{A} - \bar{B} + 1) + (\bar{A} + \bar{B})K + D^2 > 0 \quad (5.16)$$

$$a_3 = [(\bar{A} + \bar{B}) + 2K]D > 0 \quad (5.17)$$

$$a_4 = (\bar{A}\bar{B} - \bar{A} - \bar{B} + 1) + (-\bar{A} - \bar{B} + 2)K + K^2 + D^2 > 0 \quad (5.18)$$

$$H = D^2 K [2(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + \bar{B} - 1)^2 + (\bar{A} - \bar{B})^2 K + 2(\bar{A} + \bar{B})D^2] > 0 \quad (5.19)$$

Nestas equações, para que as condições sejam satisfeitas, as soluções de a_0 e a_1 , são triviais porque $\bar{A}$, $\bar{B}$ e D são sempre maiores que zero. A condição a_3 é facilmente calculada e é satisfeita com:

$$K > -\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} \quad \text{para } D > 0 \quad (5.20)$$

Esta condição e mais

$$a_2 = 2\bar{A}\bar{B} - (\bar{A} + \bar{B} - 1) + (\bar{A} + \bar{B})K + D^2 > 0, \quad (5.21)$$

$$a_4 = \bar{A}\bar{B} - (\bar{A} + \bar{B}) - (\bar{A} + \bar{B})K + (K + 1)^2 + D^2 > 0 \quad \text{e} \quad (5.22)$$

$$H = D^2 K [2(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + \bar{B} - 1)^2 + (\bar{A} - \bar{B})^2 K + 2(\bar{A} + \bar{B})D^2] > 0 \quad (5.23)$$

sendo satisfeitas, então o sistema M-G-D-K-N é considerado estável no conceito de LJAPUNOV.

Sobre a análise do critério de autovalores existem trabalhos, que tratam o assunto com mais profundidade [2].

6. MONTAGENS EXPERIMENTAIS

6.1. INTRODUÇÃO

As montagens experimentais foram feitas procurando-se representar o mais próximo possível os esquemas físicos das Figs. 2.1 e 2.2.

O corpo da centrífuga, em ambos os casos, foi tomado na forma de cruz, em que os braços opostos são iguais no comprimento e diferentes dos outros, para caracterizar a assimetria de rotação existente nas análises teóricas propostas. Os cálculos dos momentos de inércia deste corpo rígido serão vistos mais adiante, onde serão apresentados os valores dos momentos de cada corpo testado, em cada um dos casos experimentais.

Como a análise experimental será feita sobre dois modelos, passar-se-á a descrever cada um deles detalhadamente.

6.2. MONTAGEM EXPERIMENTAL COM SUSPENSÃO POR JUNTA CARDÂNICA

Anteriormente, definiu-se de uma maneira geral o que é basicamente uma centrífuga. No caso de centrífuga em que se tem uma suspensão por junta universal, tipo Cardan (Fig. 6.1), o corpo está apoiado sobre a junta, que lhe transmite o movimento de rotação e permite movimento angular em relação aos dois eixos horizontais.

O movimento de rotação da centrífuga é fornecido por um motor elétrico universal, acionado por corrente contínua que facilita o controle de rotação. Este motor é acoplado a um redutor que tem em seu eixo de saída o acoplamento por junta cardânica, no qual se apóia o corpo da centrífuga (Fig. 6.2).

A rotação do motor acoplado no sistema chega a 12.000 RPM e, como o redutor é de 36:1, tem-se uma velocidade de rotação na saída de, no máximo, 330 RPM.

As medidas a serem feitas experimentalmente são valores de rotação, quando ocorre a estabilização do corpo

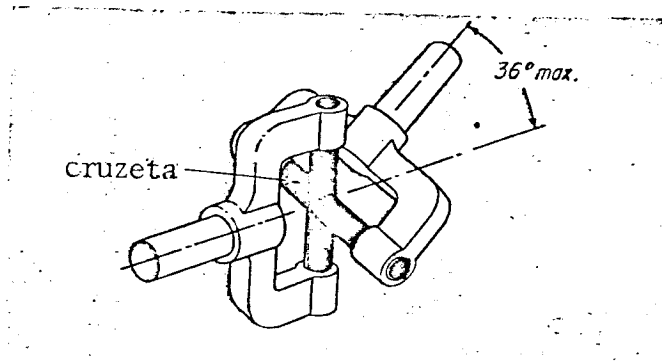


Fig. 6.1. Junta universal, tipo Cardan.

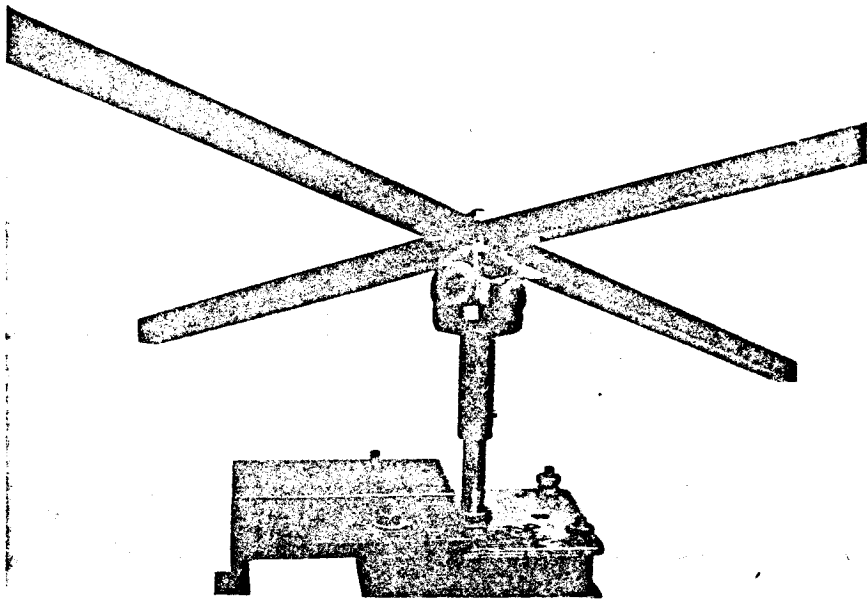


Fig. 6.2. Corpo da centrífuga apoiado na junta cardânica.

girante. Assim, o equipamento de medida é um tacômetro, que registra a velocidade do eixo de entrada do redutor (Fig. 6.3), para uma melhor confiabilidade da leitura, pois se medem velocidades maiores.

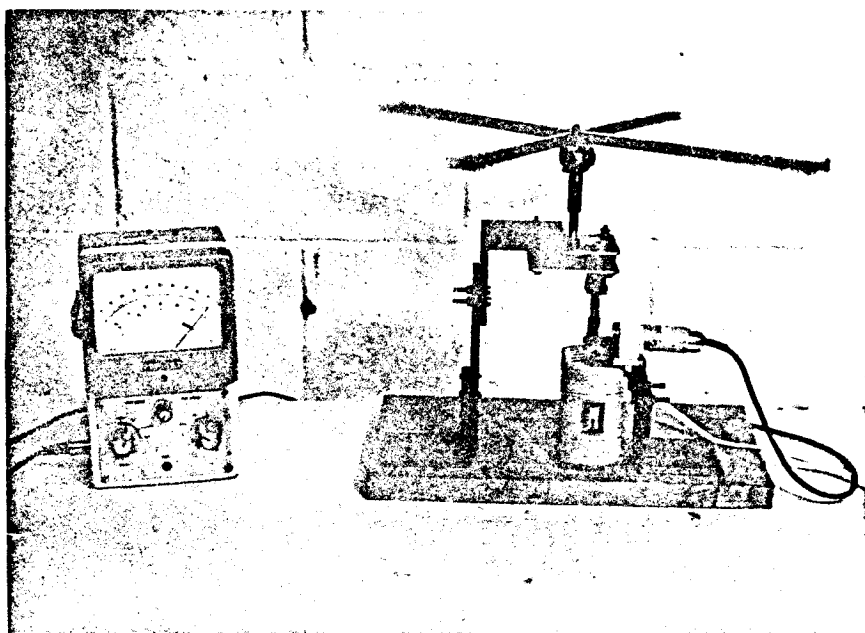


Fig. 6.3. Uso do Tacômetro na montagem experimental.

Considera-se que o corpo tem um comportamento estável quando o eixo Z' do referencial rotativo, R , passa a coincidir com o eixo Z do referencial inercial, I , isto é, quando se tem os braços da cruz girando na horizontal. No entanto, existe sempre oscilações no movimento, que são levados em conta pela aplicação do conceito de estabilidade de LJAPUNOV [7], provocados por pequenos desbalanceamentos do corpo, ou mesmo por atrito dos mancais da junta cardânica.

Para se registrar a rotação em que ocorre a estabilidade, como se considerou, faz-se uma observação visual

do comportamento do corpo da centrífuga, sendo que este na posição estática estava inclinado para um dos lados, pois, o seu centro de gravidade está acima do ponto fixo do sistema.

6.3. MONTAGEM EXPERIMENTAL COM SUSPENSÃO ROTULADA

Da maneira como se propôs na Fig. 2.2, a construção do sistema seria bastante difícil, tendo-se que desenvolver um motor com características especiais. Desta forma, a centrífuga construída (Fig. 6.4) tem seu acionamento promovido por um motor universal acoplado à parte superior do corpo rígido; o motor é desacoplado numa velocidade em que seja possível fazer as medidas.

A montagem deste sistema de suspensão rotulada é bastante diferente do sistema anterior, começando pela suspensão do mesmo, que é uma junta de apoio rotulada (Fig. 6.5), com características próprias permanentes, para uma variação de inclinação do eixo até 15° na horizontal.

O semi-eixo, que se acopla ao corpo em forma de cruz (Fig. 6.5), está ajustado à rótula. Com o objetivo de evitar o contato da borda da pista externa da rótula com o semi-eixo, existe um anel anteparo na mesma estrutura onde se encontra a rótula, que impede uma inclinação muito grande da cruz e, ao mesmo tempo, delimita a região de estabilidade do corpo da centrífuga, pois funciona como contato elétrico do ponto limite de estabilidade da cruz.

O circuito eletrônico (Fig. 6.6), que alimenta o anel anteparo, mantém carregado um capacitor que, quando algum braço da cruz toca o anel, se descarrega, provocando um pulso na tela do osciloscópio, que permite identificar em que velocidade ocorreu o toque e, portanto, em que velocidade o movimento deixou de ser estável, pois, o anel anteparo está colocado a uma distância do corpo que define o círculo contorno, em que o movimento é estável, pelo conceito de LJAPUNOV.

O sistema de acoplamento do motor à centrífuga se dá por atrito, sendo que, no eixo do motor existe um acoplamento de borracha com cavidade para encaixar na cabeça do parafuso de fixação da cruz ao semi-eixo (Fig. 6.5).

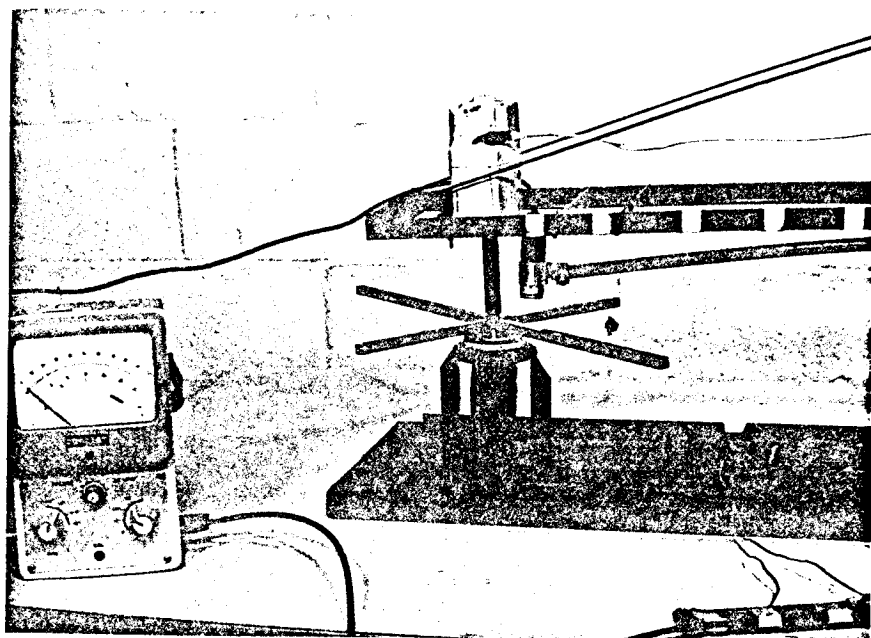


Fig. 6.4. Acionamento da centrífuga.

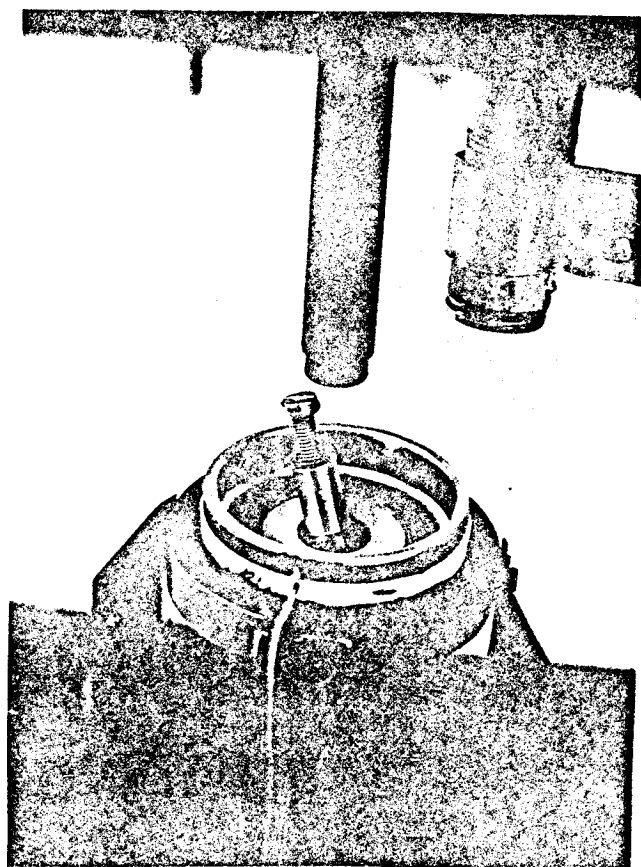


Fig. 6.5. Fixação do semi-eixo a rótula.

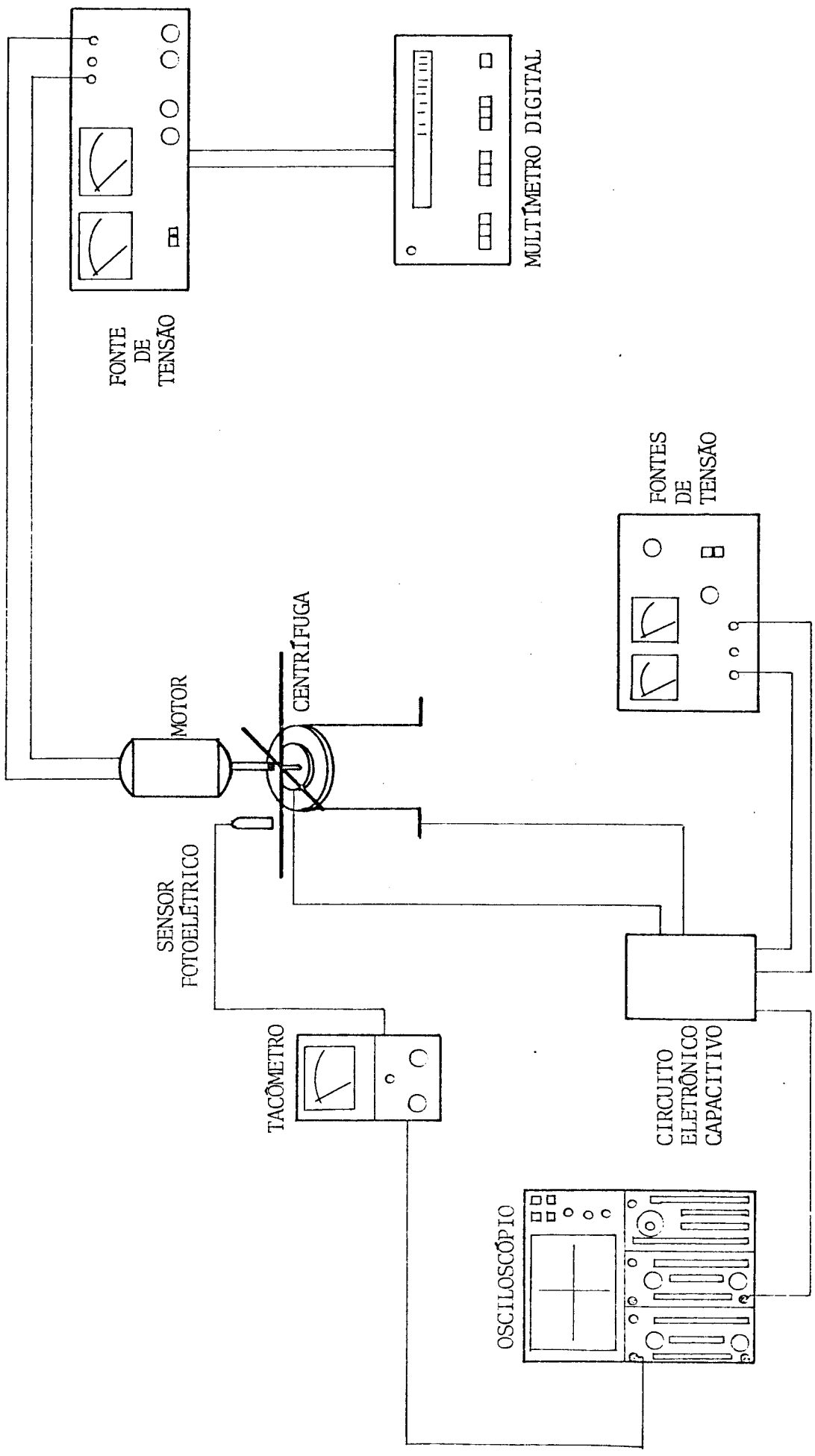


Fig. 6.6. Esquema da montagem experimental.

Para a medida de velocidade, tem-se um tacômetro ligado ao osciloscópio. Neste se grava o sinal recebido pelo sensor foto-elétrico acoplado a estrutura e registra a velocidade do corpo.

O sinal do tacômetro, gravado no osciloscópio, permite a leitura da velocidade no instante em que o corpo toca o anel limite através da descontinuidade da linha pela descarga do capacitor do circuito eletrônico, sendo esta linha independente da de velocidade.

7. CÁLCULOS DOS MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

Para os cálculos dos momentos principais de inércia do corpo em forma de cruz, determinar-se-ão primeiramente, os momentos principais de uma barra de seção retangular, em relação ao sistema referencial que passa pelo seu centro de gravidade, o qual coincide com o centro geométrico, supondo-se o material homogêneo.

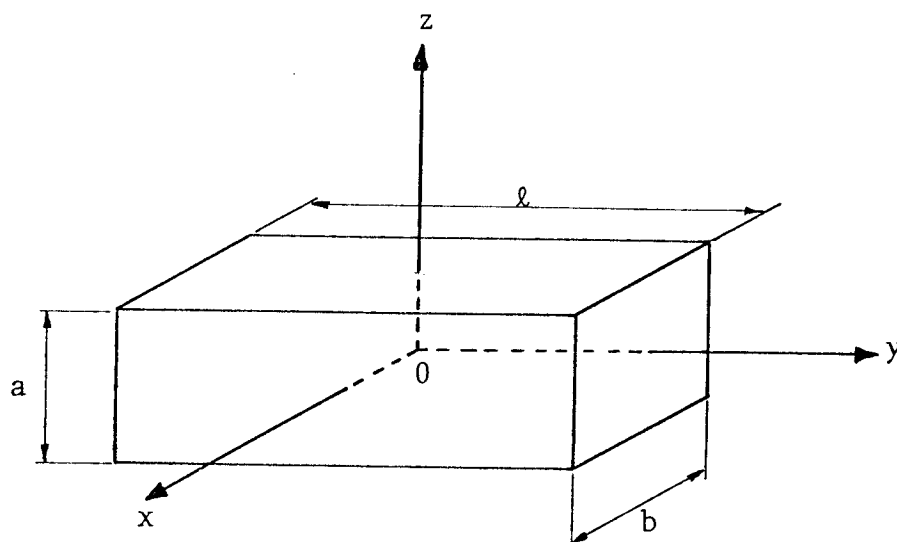


Fig. 7.1. Corpo rígido de secção retangular.

Pelo esquema acima, os momentos principais são definidos como:

$$I_{xx} = \frac{1}{12} m (b^2 + \ell^2) \quad (7.1)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \quad (7.2)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m (a^2 + \ell^2) \quad (7.3)$$

onde

b e a - lados da barra,
 ℓ - comprimento da barra e
 m - massa da barra

Para facilitar o cálculo de momentos da cruz, toma-se a mesma, modulada em seus braços, a partir da Fig. 7.2, onde a bitola usada é quadrada.

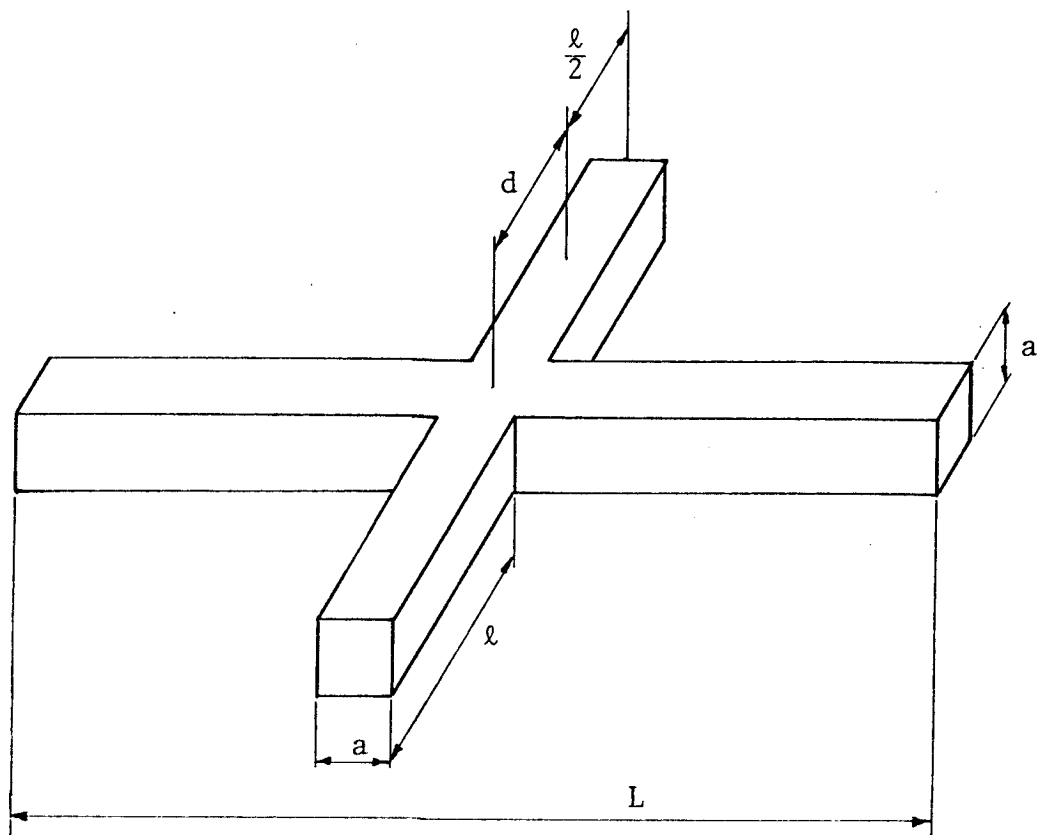


Fig. 7.2 onde:

L - comprimento total relativo aos braços maiores,
 ℓ - comprimento do braço menor,
 a - lado da barra e

$$d = \frac{\ell}{2} + \frac{a}{2} = \frac{\ell+a}{2} \quad - \text{distância do centro do braço ao centro do corpo.}$$

Considerando-se:

$$m = \rho a^2 \ell \quad - \text{massa do braço} \quad (7.4)$$

$$M = \rho a^2 L \quad - \text{ massa do maior comprimento} \quad (7.4b)$$

$$\bar{M} = \rho a^2 (L+2\ell) \quad - \text{ massa total do corpo} \quad (7.4c)$$

pode-se calcular o momento de inércia em relação ao eixo xx, como:

$$I_{xx} = \frac{1}{12} M(a^2+L^2) + 2 \left[\frac{1}{12} m(a^2+a^2) \right] \quad (7.5)$$

onde o primeiro termo à direita é relativo ao comprimento maior, e o segundo, à soma dos dois braços menores.

Para o eixo yy, tem-se:

$$I_{yy} = \frac{1}{12} M(a^2+a^2) + 2 \left[\frac{1}{12} (a^2+\ell^2) \right] + 2md^2 \quad (7.6)$$

onde os dois primeiros termos à direita são da mesma forma que o anterior, e o terceiro é o termo de transferência de cada lado para o centro da cruz.

No eixo zz, os termos têm a mesma forma que o eixo yy e o momento é dado por

$$I_{zz} = \frac{1}{12} M(a^2+L^2) + 2 [m(a^2+\ell^2)] + 2md^2 \quad (7.7)$$

onde d é a distância do centro do braço menor ao centro da cruz.

No entanto, como se quer os momentos principais de inércia, no ponto fixo do sistema, aparece em relação ao eixo x e y mais um componente. Este dá a transferência do centro da cruz, que é considerado o centro de massa até o ponto fixo do sistema, obtido pela multiplicação da distância e pela massa total. Assim, os momentos ficam:

$$I_{xx} = \frac{1}{12} M(a^2+L^2) + \frac{1}{3} ma^2 + \bar{M}e^2 \quad (7.8)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{6} Ma^2 + \frac{1}{6} m(a^2+\ell^2) + 2md^2 + \bar{M}e^2 \quad (7.9)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} M(a^2 + L^2) + \frac{1}{6} m(a^2 + \ell^2) + 2md^2 \quad (7.10)$$

Substituindo-se em 7.4a, 7.4b e 7.4c os valores de de finidos das massas e de d, e dividindo-se por ρa^2 , toma-se para os eixos x, y e z a representação A, B e C, respectivamente para cada um dos eixos, ficando

$$A = \frac{1}{12} L^3 + \frac{1}{12} La^2 + \frac{1}{3} \ell a^2 + (2+2\ell)e^2 \quad (7.11)$$

$$B = \frac{2}{3} \ell^5 + \frac{1}{6} La^2 + \ell^2 a + \frac{2}{3} \ell a^2 + (L+2)e^2 \quad (7.12)$$

$$C = \frac{1}{12} L^3 + \frac{1}{12} La^2 + \frac{2}{3} \ell^3 + \ell^2 a + \frac{2}{3} \ell a^2 \quad (7.13)$$

Embora tomados em relação ao ponto fixo, não se levam em consideração os momentos relativos ao semi-eixo, no caso de junta rotulada, e também na junta cardânica, pois a influência é muito pequena em relação aos momentos principais do corpo.

O fato de se ter dividido os valores das equações por ρa^2 , não vai influir em nada pois os valores serão usados em razões dos momentos principais no triângulo de forma e, portanto, os termos se cancelam.

8. MEDIÇÕES E RESULTADOS

8.1. INTRODUÇÃO

Com as montagens feitas e descritas no capítulo 6, passa-se a descrever as medições procedidas e seus respectivos resultados, levando-se em conta os dois tipos de análise que serão feitas com respeito a suspensão cardânica e suspensão rotulada.

8.2. SUSPENSÃO CARDÂNICA

Para se obter a medida de velocidade de rotação considerada estável, no caso do sistema em que se usa suspensão cardânica, procede-se de maneira a se observar em que velocidade de rotação o corpo passa a girar em relação ao eixo vertical, como os braços na horizontal, mesmo que esta posição seja oscilante dentro de um certo limite, uma vez que se possa julgar visualmente a existência de estabilidade, quando se eleva a rotação do sistema. Numa segunda etapa, observa-se a velocidade de rotação em que o sistema deixa de girar naquela posição, quando se diminui a velocidade.

Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 8.1, para cada montagem com barras de bitola quadrada, de 0.95 cm, com o centro de gravidade a uma distância de 1,8 cm do ponto fixo.

A tabela 8.2 mostra as medidas das experiências de corpos montados com barras de secção quadrada, de 1,27 cm, e com centro de massa a 2,0 cm do ponto fixo do sistema.

As medidas obtidas e apresentadas nas tabelas 8.1 e 8.2 permitem então uma análise imediata pela aplicação das condições de estabilidade apresentadas no capítulo 5, (5.7) e (5.8), para o caso onde não aparece a matriz de esforços não conservativos, que são:

$$K > \bar{A} - 1 \quad (8.1a)$$

$$K > \bar{B} - 1 \quad (8.1b)$$

para $\det [K] > 0$

Nº da Experiência	Valores de L (cm)	Valores de ℓ (cm)	Momentos Normalizados		Momento Principal	Velocidade limite de Subida		Velocidade limite de descida	
			$\bar{A}$	$\bar{B}$		RPM	Hz	RPM	Hz
1		19,05	0,634	0,400	12792,34	58,3	6,10	57,0	5,97
2		16,55	0,728	0,320	11119,49	69,4	7,27	68,0	7,12
3	45,45	14,65	0,797	0,252	10136,11	86,0	9,00	83,3	8,72
4		14,05	0,818	0,232	9872,25	83,3	8,72	82,0	8,59
5		11,55	0,897	0,155	8988,14	118,0	12,34	115,3	12,07
6		16,55	0,648	0,410	8628,56	68,0	7,12	66,6	6,97
7	40,00	14,65	0,729	0,332	7645,19	84,7	8,87	83,3	8,72
8		14,05	0,755	0,308	7381,33	83,3	8,72	82,0	8,59
9		11,55	0,854	0,211	6497,22	111,0	11,62	109,7	11,49
10		14,65	0,645	0,429	5884,40	77,7	8,14	77,7	8,14
11	35,0	14,05	0,675	0,401	5620,54	79,2	8,29	77,7	8,14
12		11,55	0,795	0,286	4736,43	99,4	10,41	99,4	10,41
13	30,0	11,55	0,713	0,392	3413,14	102,8	10,76	102,8	10,76

Tabela 8.1. Valores para corpos de barra quadrada de bitola com $a=0,95$ cm, onde

L - comprimento maior da cruz

ℓ - comprimento do braço menor da cruz

Nº da Experiência	Valores de L (cm)	Valores de λ (cm)	Momentos Normalizados		Momento Principal	Velocidade limite de Subida		Velocidade limite de descida	
			A	B		RPM	Hz	RPM	Hz
1		16,865	0,633	0,436	8915,99	73,6	7,71	70,8	7,42
2	40,00	14,365	0,740	0,334	7592,40	91,6	9,60	88,9	9,31
3		13,365	0,783	0,294	7171,46	98,6	10,33	95,8	10,04
4		11,865	0,843	0,193	6643,81	116,7	12,22	115,3	12,07
5		14,365	0,659	0,432	5831,31	88,9	9,31	86,11	9,02
6	35,00	13,365	0,708	0,386	5410,38	94,4	9,89	91,7	9,60
7		11,865	0,782	0,259	4882,72	111,1	11,64	108,3	11,34
8	30,00	13,365	0,609	0,506	4086,79	94,4	9,89	91,7	9,60
9		11,865	0,695	0,349	3559,13	108,3	11,34	105,6	11,05
10	28,00	11,865	0,652	0,393	3138,20	104,2	10,91	101,4	10,62

Tabela 8.2. Valores para corpos de barra quadrada de bitola com $a = 1,27\text{ cm}$

Para o cálculo de K em cada um dos casos da experiência, a partir das medidas obtidas, usar-se-á a equação (4.42d), na qual se considera $C=0$ (4.21), pois este é muito pequeno e sempre positivo; portanto:

$$K = \frac{c-mge}{\Omega^2 C} = \frac{-mge}{\Omega^2 C} \quad (8.2)$$

onde:

- c - coeficiente de mola
- e - distância do C.G. ao ponto fixo
- m - massa do corpo
- g - aceleração da gravidade
- Ω - velocidade de rotação
- C - momento principal de inércia

Os resultados de K limite, que é o valor da condição de estabilidade, e os K's dos valores encontrados para velocidades, quando se aumentava e quando se diminuía a rotação das experiências, estão apresentados nas tabelas 8.3 e 8.4. Assim, comparando-se os K's limites com os calculados, pode-se notar que as condições de estabilidade são satisfeitas pois o K limite apresentado na tabela é relativo ao momento normalizado $\bar{A}$, que é maior que $\bar{B}$; portanto, se K calculado é maior que o K de $\bar{A}$, será também maior que o K de $\bar{B}$.

Cada um dos K's limites definem, dentro do triângulo de forma, uma região de estabilidade, determinada através da aplicação das coordenadas de MAGNUS [4], definidas no capítulo 3, onde:

$$\frac{A - B}{C} = f \quad -1 \leq f \leq 1 \quad (3.14)$$

$$\frac{C - A}{B} = g \quad -1 \leq g \leq 1 \quad (3.15)$$

$$\frac{B - C}{A} = - \frac{f + g}{1 + fg} \quad -1 \leq \frac{-f+g}{1+fg} \leq 1 \quad (3.16)$$

Nº da Experiência	Valores de K limite	Valores de K de subida	Valores de K de descida
1	- 0,366	- 0,310	- 0,324
2	- 0,272	- 0,236	- 0,246
3	- 0,203	- 0,161	- 0,171
4	- 0,182	- 0,173	- 0,178
5	- 0,103	- 0,088	- 0,092
6	- 0,352	- 0,295	- 0,308
7	- 0,271	- 0,203	- 0,210
8	- 0,245	- 0,214	- 0,221
9	- 0,146	- 0,127	- 0,130
10	- 0,355	- 0,291	- 0,291
11	- 0,325	- 0,288	- 0,299
12	- 0,203	- 0,20	- 0,20
13	- 0,287	- 0,237	- 0,237

Tabela 8.3. Valores de K calculados para barra
de $a = 0,95$ cm

Nº da Experiência	Valores de K limite	Valores de K de subida	Valores de K de descida
1	- 0,367	- 0,273	- 0,295
2	- 0,260	- 0,193	- 0,205
3	- 0,217	- 0,171	- 0,181
4	- 0,157	- 0,126	- 0,129
5	- 0,341	- 0,247	- 0,264
6	- 0,292	- 0,229	- 0,248
7	- 0,218	- 0,174	- 0,184
8	- 0,391	- 0,278	- 0,296
9	- 0,305	- 0,230	- 0,243
10	- 0,348	- 0,271	- 0,287

Tabela 8.4. Valores de K calculados para barra
de $a = 1,27$ cm

Portanto, tomando-se um K limite na tabela 8.3 e aplicando-se a condição de estabilidade (8.1a)

$$K > \bar{A} - 1 \quad (8.1a)$$

onde

$$A = \frac{1}{e} = \frac{A}{C},$$

e usando-se as relações das coordenadas de SCHIEHLEN e MAGNUS

$$u = \frac{-\sqrt{3} (1+fg)}{3+fg+g-f} \quad (8.3)$$

$$v = \frac{f+g}{3+fg+g-f} \quad (8.4)$$

$$\frac{1}{e} = \frac{-2u}{\sqrt{3} v + (u+\sqrt{3})} \quad (8.5)$$

Fazendo-se as transformações, vem:

$$\frac{1}{e} = \frac{1+fg}{1+g} \quad (8.6)$$

donde tem-se que K fica:

$$K > \frac{1+fg}{1+g} - 1 \quad (8.7)$$

Para o valor limite, pode-se escrever

$$K \frac{(1+g)}{g} = f-1 \quad (8.8)$$

Assim, variando-se os valores de g de 1,0 até o limite lateral do triângulo para $f=\pm 1,0$, tem-se as curvas do limite de estabilidade para o caso tomado, como as da Fig. 8.1. Então, pela figura, para o K limite que determina a região de estabilidade, tem-se possibilidade de encontrar cor-

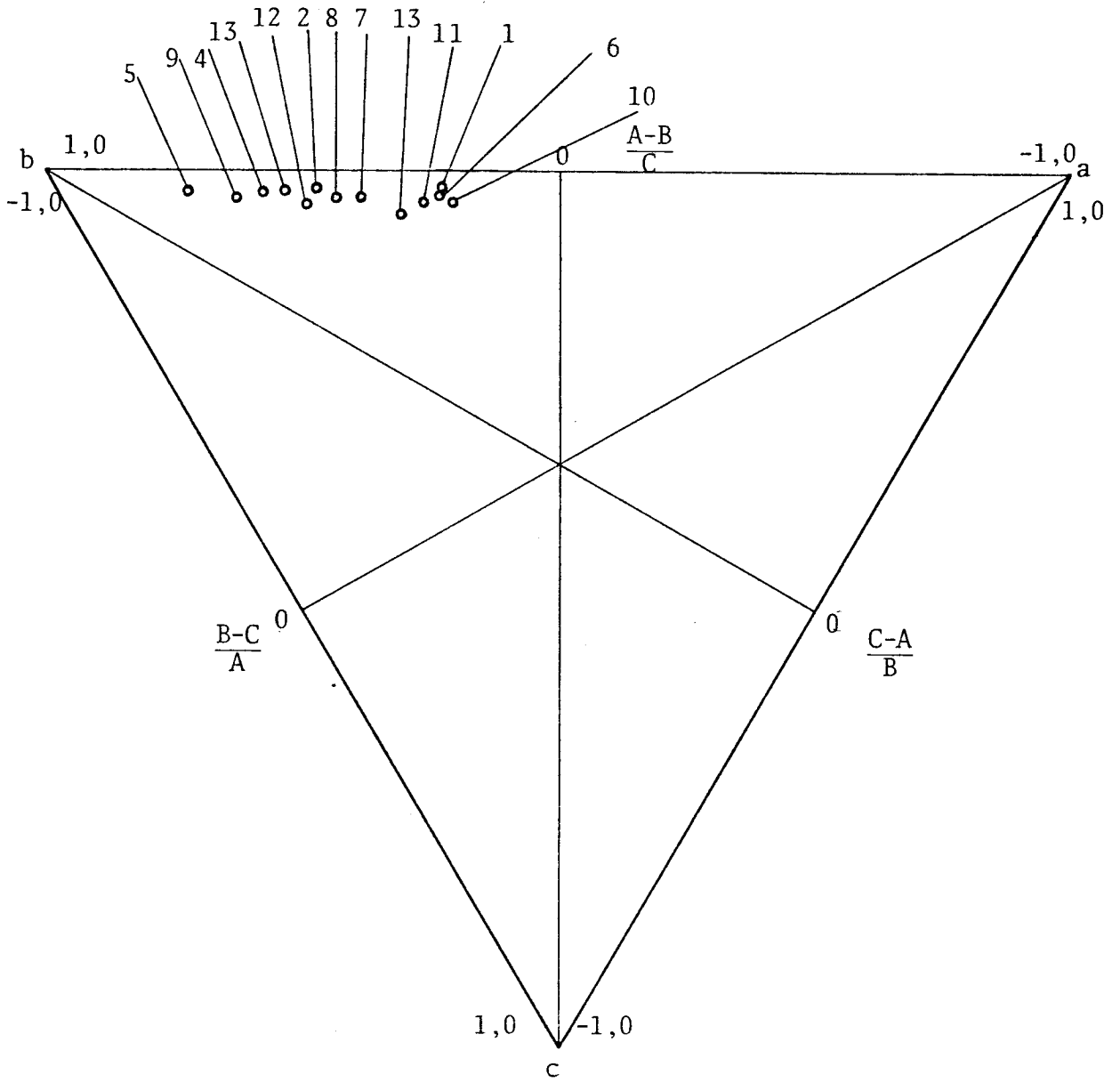


Fig. 8.2 Distribuição dos pontos que determinam os K 's de cada corpo, a partir das experiências da tabela 8.1

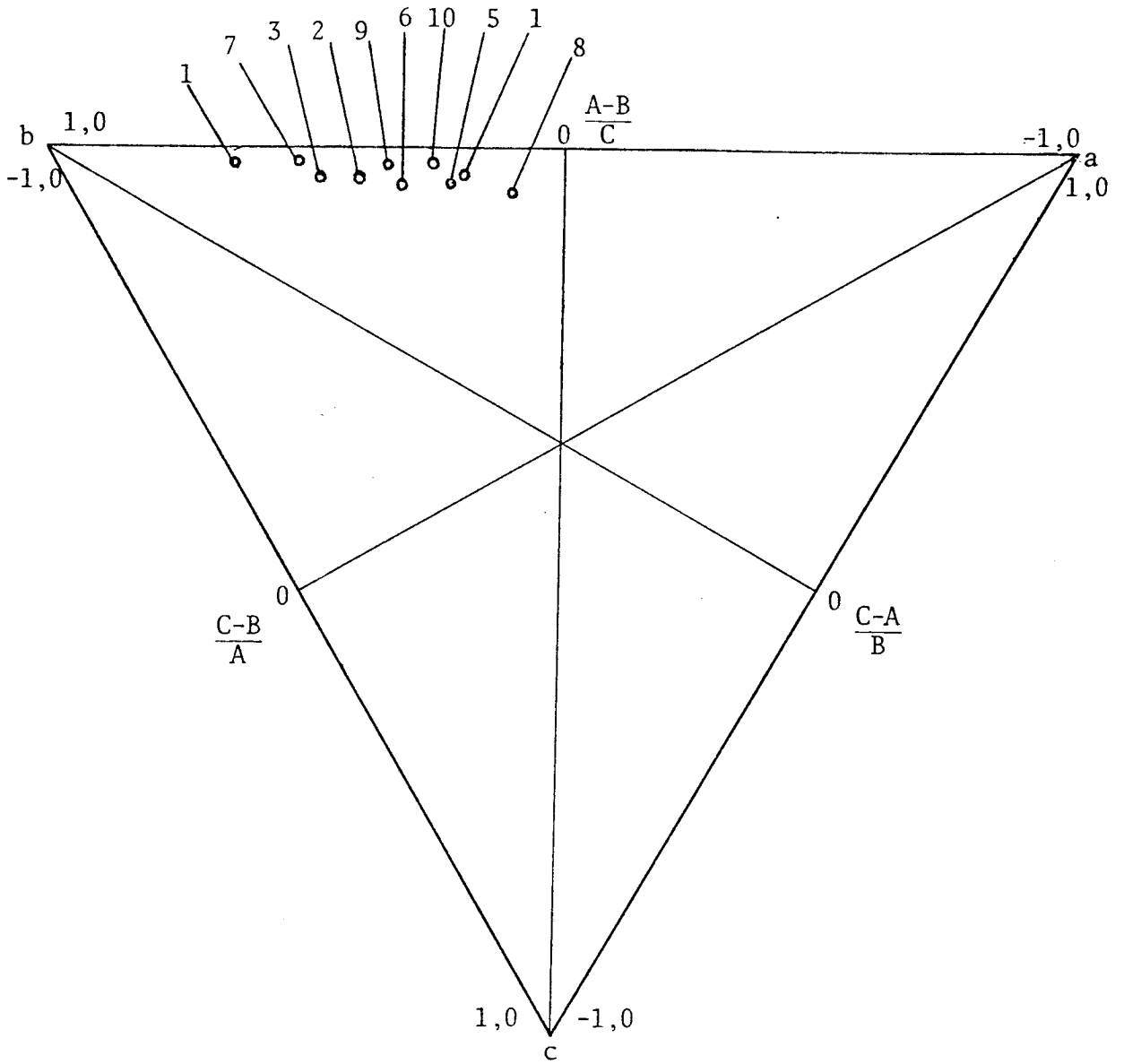


Fig. 8.3 Distribuição dos pontos que determinam os K 's de cada corpo da tabela 8.2

pos com determinados momentos de inércia e acima de certas rotações, em que se trabalha com estabilidade no sistema. Como determina o K limite do sistema, o corpo é quase sempre encontrado numa rotação acima da linha de estabilidade do sistema. Além disso, a Fig. 8.2 mostra, no triângulo de forma, a distribuição dos pontos medidos para barras de 0,95cm e com $e = 1,8\text{cm}$.

A Fig. 8.3 mostra os pontos para os corpos de 1,27 cm e $e = 2,0\text{cm}$. Cada ponto destes corresponde a um corpo que, pelos seus momentos principais de inércia, define uma região de estabilidade no triângulo de forma do tipo da Fig. 8.1.

8.3. SUSPENSÃO ROTULADA

Pela forma como se construiu o sistema, pode-se notar que não se consegue manter o corpo da centrífuga girando com velocidade constante, o que exigiria o acoplamento permanente do motor a centrífuga, mudando-se as características da suspensão do sistema. Então, quando se fazem as medidas, a velocidade de rotação é levada acima da velocidade limite de estabilidade, por tentativas; assim, quando a velocidade do corpo diminui, após o desacoplamento do motor, a queda é registrada.

Na curva de velocidade, gravada no osciloscópio, identifica-se a velocidade limite de estabilidade no ponto onde o corpo toca o anel anteparo, que pela descarga do capacitor provoca uma descontinuidade brusca na linha de tensão. A Fig. 8.5 mostra uma curva genérica de medida da velocidade de rotação do sistema.

Com as medidas feitas, apresentadas na tabela 8.5, calculam-se os valores de K pela equação (8.2) e pelas condições de estabilidade definidas no capítulo 5, que são:

$$K > - \frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} \quad \text{para } D > 0 \quad (5.20)$$

$$a_2 = 2\bar{A}\bar{B} - (\bar{A} + \bar{B} - 1) + (\bar{A} + \bar{B})K + \bar{D}^2 > 0 \quad (5.21)$$

$$a_4 = \bar{A}\bar{B} - (\bar{A} + \bar{B}) - (\bar{A} + \bar{B})K + (K+1)^2 + \bar{D}^2 > 0 \quad (5.22)$$

Nº da Experiência	Valores de L (cm)	Valores de e (cm)	Momentos Normalizados		Momento Principal C	Velocidades limites		Valores de K
			A	B		RPM	Hz	
1		19,05	0,653	0,429	12792,34	70	7,33	- 0,30
2		16,55	0,748	0,341	11119,49	85	8,90	- 0,220
3	45,45	14,65	0,819	0,275	10136,11	110	11,52	- 0,136
4		14,05	0,840	0,254	9872,25	110	11,52	- 0,138
5		11,55	0,920	0,178	8988,14	160	16,76	- 0,067
6	40,00	14,05	0,781	0,336	7381,33	100	10,47	- 0,206
7		11,55	0,883	0,240	6497,22	130	13,61	- 0,128

Tabela 8.5. Valores para os corpos com barra de bitola a = 0,95 cm e e = 2,5 cm.

$$H = D^2 K [2(\bar{A} + \bar{B}) (\bar{A} + \bar{B} - 1)^2 + (\bar{A} + \bar{B})^2 K + 2(\bar{A} + \bar{B}) D^2] > 0 \quad (5.23)$$

Para se determinar as regiões de estabilidade do triângulo de forma, usa-se o sistema de coordenadas $\{u, v\}$. Então, pelas equações (3.19) e (3.20), podem-se reescrever as condições, como:

$$\frac{\sqrt{3}}{u_3} < 2K - 1 \quad (8.9)$$

$$v_2^2 < \frac{1}{3}(5 - 2K + 2D^2)u^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}(2 - K)u + 1 \quad (8.10)$$

$$v_4^2 < \frac{1}{3}[(3 + 2K)^2 + 4D^2]u^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}(3 + 2K)u + 1 \quad (8.11)$$

$$v_4^2 > \frac{2}{3K}[(4 + D^2)u^2 + \sqrt{3}(8 + D^2)u + 15 + \frac{3\sqrt{3}}{u}] \quad (8.12)$$

Estas desigualdades definem regiões no triângulo de forma (Fig. 8.6), que determinam as regiões de estabilidade para valores de K . Analisando-se as condições de estabilidade, pode-se demonstrar que a condição a_4 prevalece em relação à condição a_2 , o que pode ser observado na Fig. 8.6. Assim, para o estudo de estabilidade do sistema, trabalha-se apenas com as condições a_4 e H .

Na análise de estabilidade, usando-se a representação do triângulo de forma, um corpo é dito estável, se o ponto definido pelas relações dos momentos principais de inércia estiver contido pela região de estabilidade determinada pelas condições a_4 e H , que dependem da forma do corpo, do tipo de suspensão e do valor de K que, por sua vez, depende do corpo, da distância do centro de massa até o ponto fixo e da velocidade de rotação do sistema.

A variação de K implica em mudanças das regiões de estabilidade, quanto a localização e área. A Fig. 8.7 mostra como se comportam as regiões de estabilidade, quando se varia o valor de K , para um fator de amortecimento fixo.

Quando se tem um ponto no triângulo de forma, que identifica o corpo da centrífuga, este pode ser contido pelas

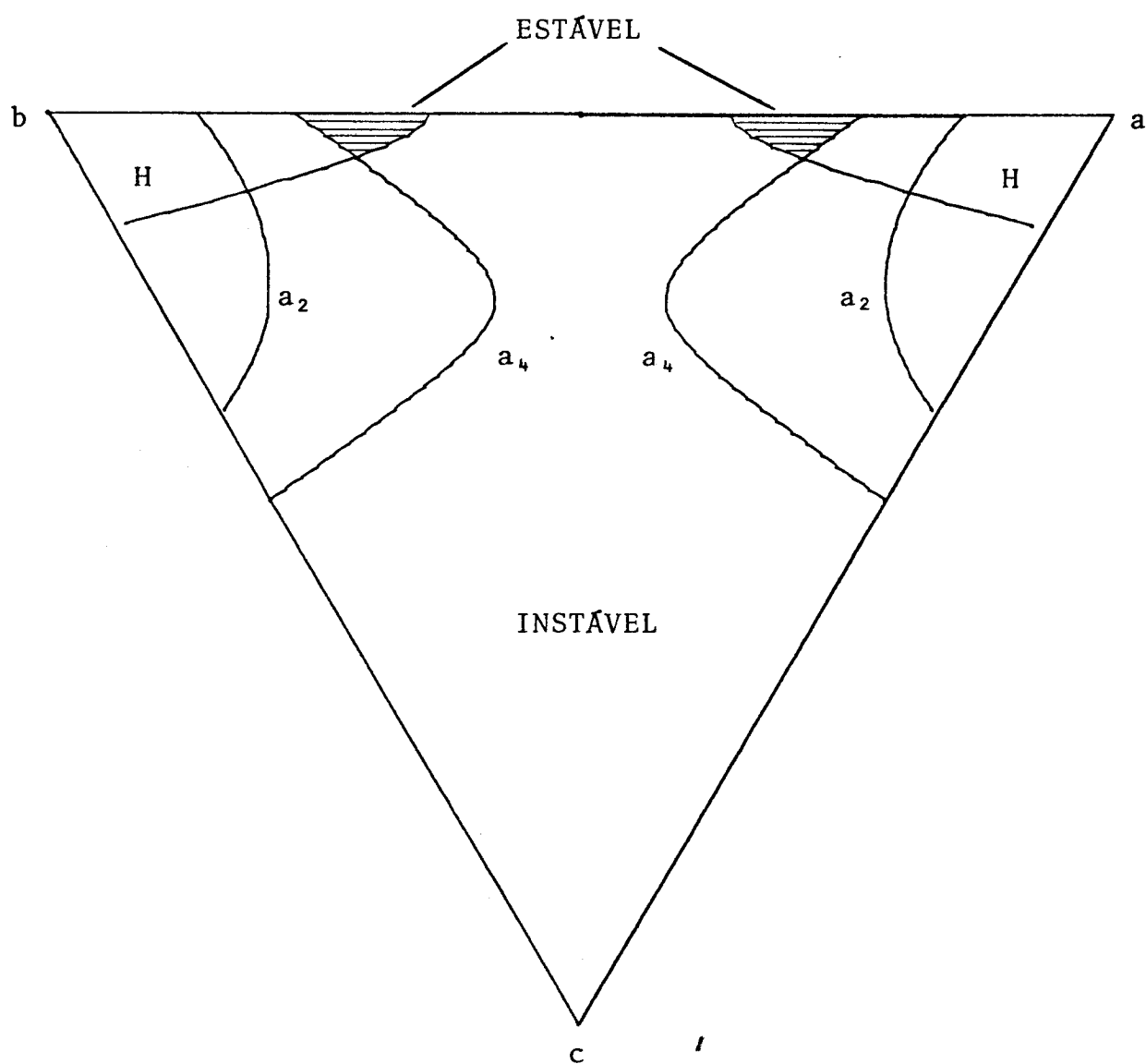


Fig. 8.6. Curvas que definem as regiões de estabilidade no triângulo de forma para $K=0,25$ e $D=0,1$.

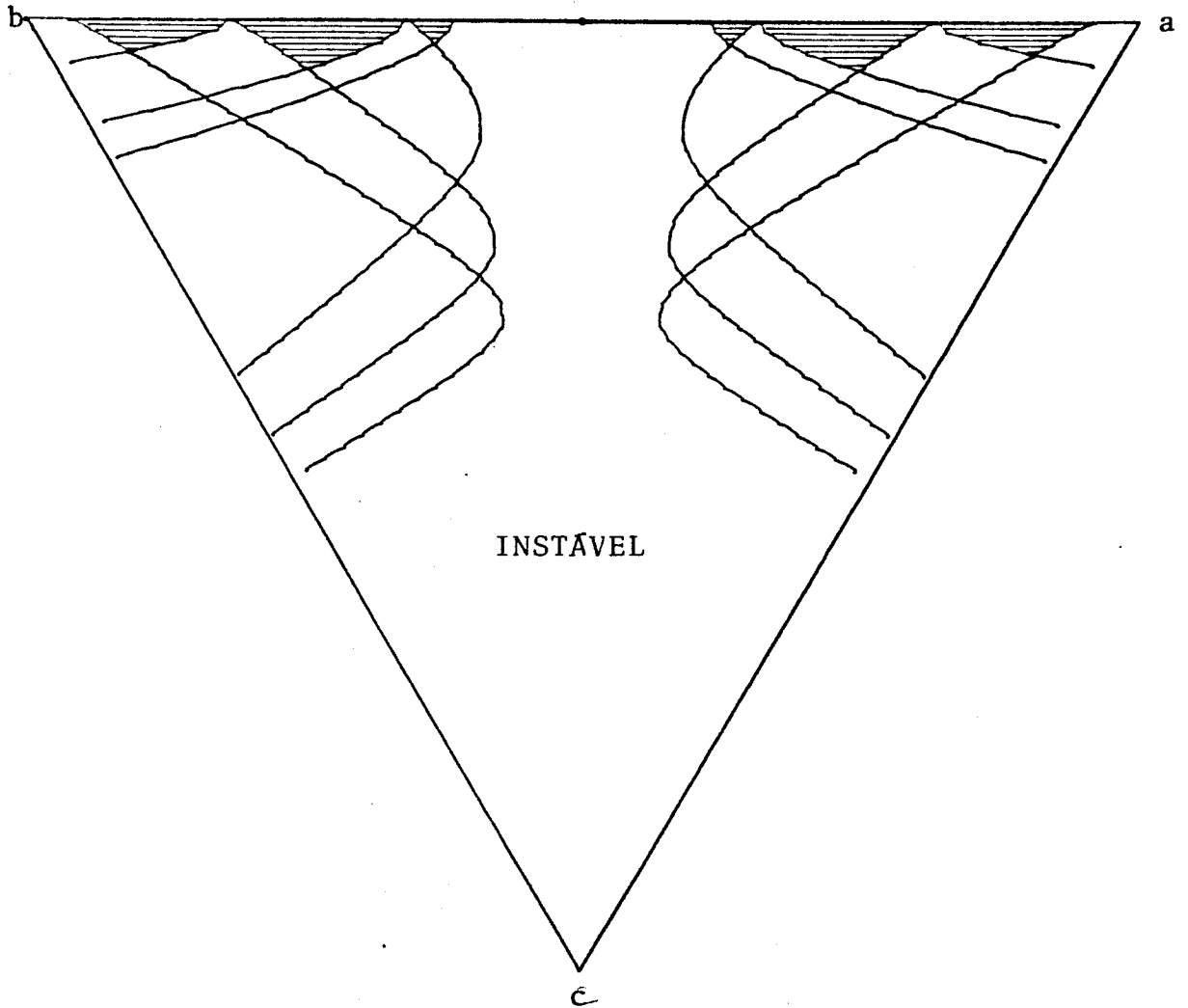


Fig. 8.7. Comportamento das regiões de estabilidade quando se varia o K para D fixo.
 $D=0,1$.

regiões de estabilidade, quando esta se desloca pela variação de K que, para um corpo único, somente sofre alteração com a variação da velocidade. Assim, pode-se dizer que o sistema é instável em baixa rotação, estável em uma faixa bem determinada de velocidade de rotação, e instável, novamente, para valores de velocidade acima desta faixa.

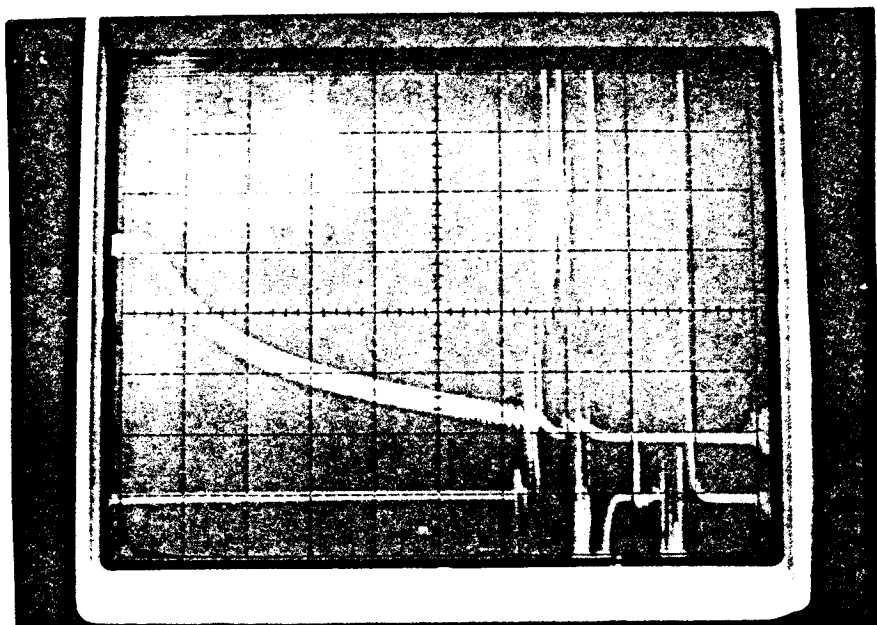


Fig. 8.5. Curva genérica de medida de rotação.

Na prática, este fenômeno foi observado e o sistema comportava-se da seguinte maneira: quando se elevava a velocidade de rotação do sistema, para o posterior desacoplamento do motor, notava-se que, acima de determinadas rotações, diferentes para cada corpo testado, ocorriam vibrações muito pronunciadas, obrigando-se a diminuir a velocidade de rotação, pois quando se desacoplava o acionamento nestas rotações ocorreram danos na estrutura do sistema, tal a violência do fenômeno, não sendo possível registrar em que velocidade o sistema se estabilizava.

Embora não se tenha medido a velocidade de rotação do sistema para o limite superior de rotação estável, pode-se comprovar a sua existência, confirmando as análises teóricas desenvolvidas.

A Fig. 8.8 mostra a variação das regiões de estabilidade $D=0$, que delimita a região onde a relação dos momentos principais de inércia dos corpos podem se encontrar, para que haja estabilidade.

Conhecendo-se a região possível, para definir os corpos, pode-se plotar os pontos da tabela 8.5, que como se vê (Fig. 8.9), podem se estabilizar. Assim, mostra-se na Fig. 8.10 a região de estabilidade para os resultados da experiência nº 3, da tabela 8.5, onde o ponto está localizado sobre a linha a_4 que determina o limite inferior da rotação estável.

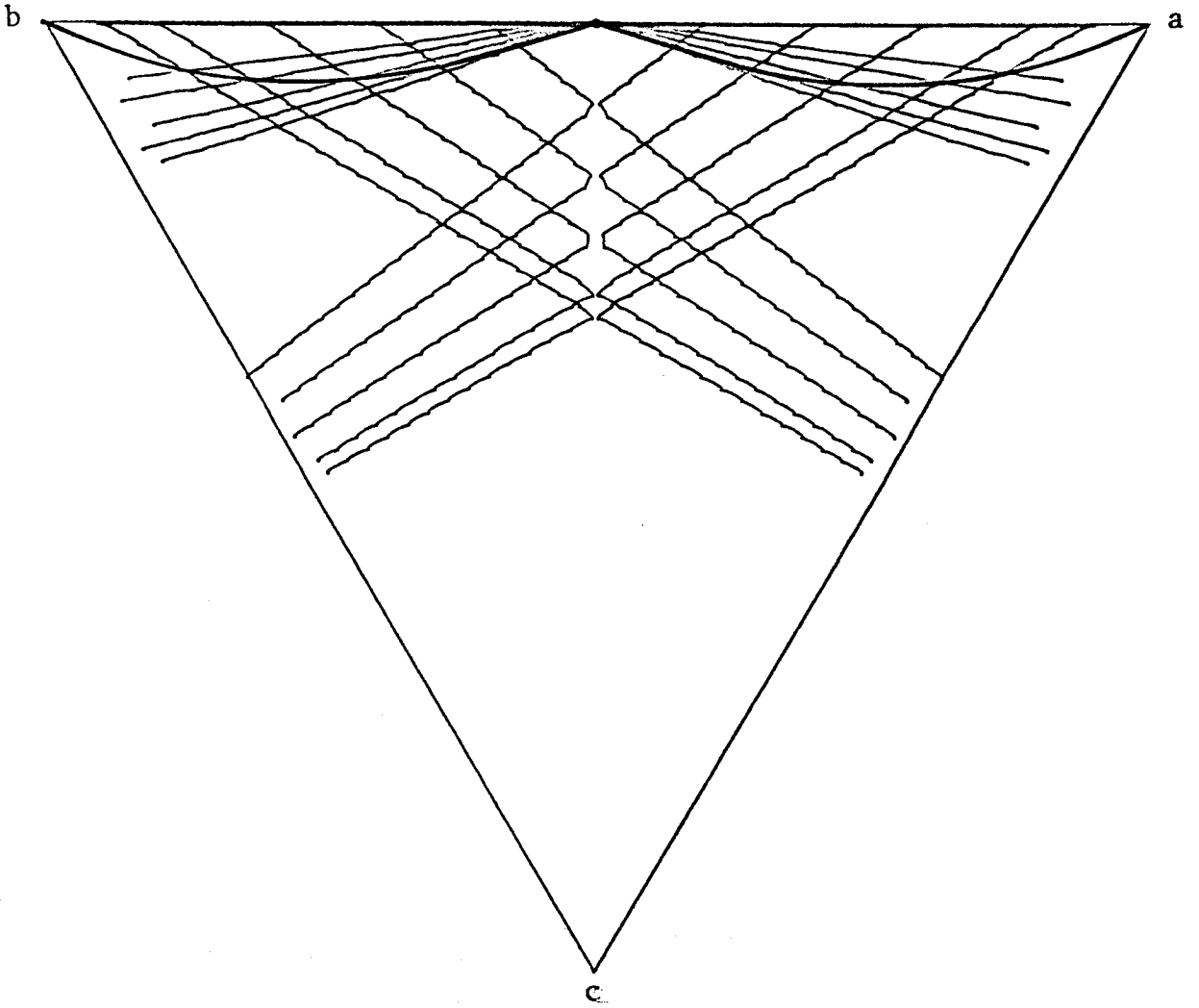


Fig. 8.8. Determinação das regiões onde são encontrados corpos que podem ser estáveis, onde se varia o K e $D=0$.

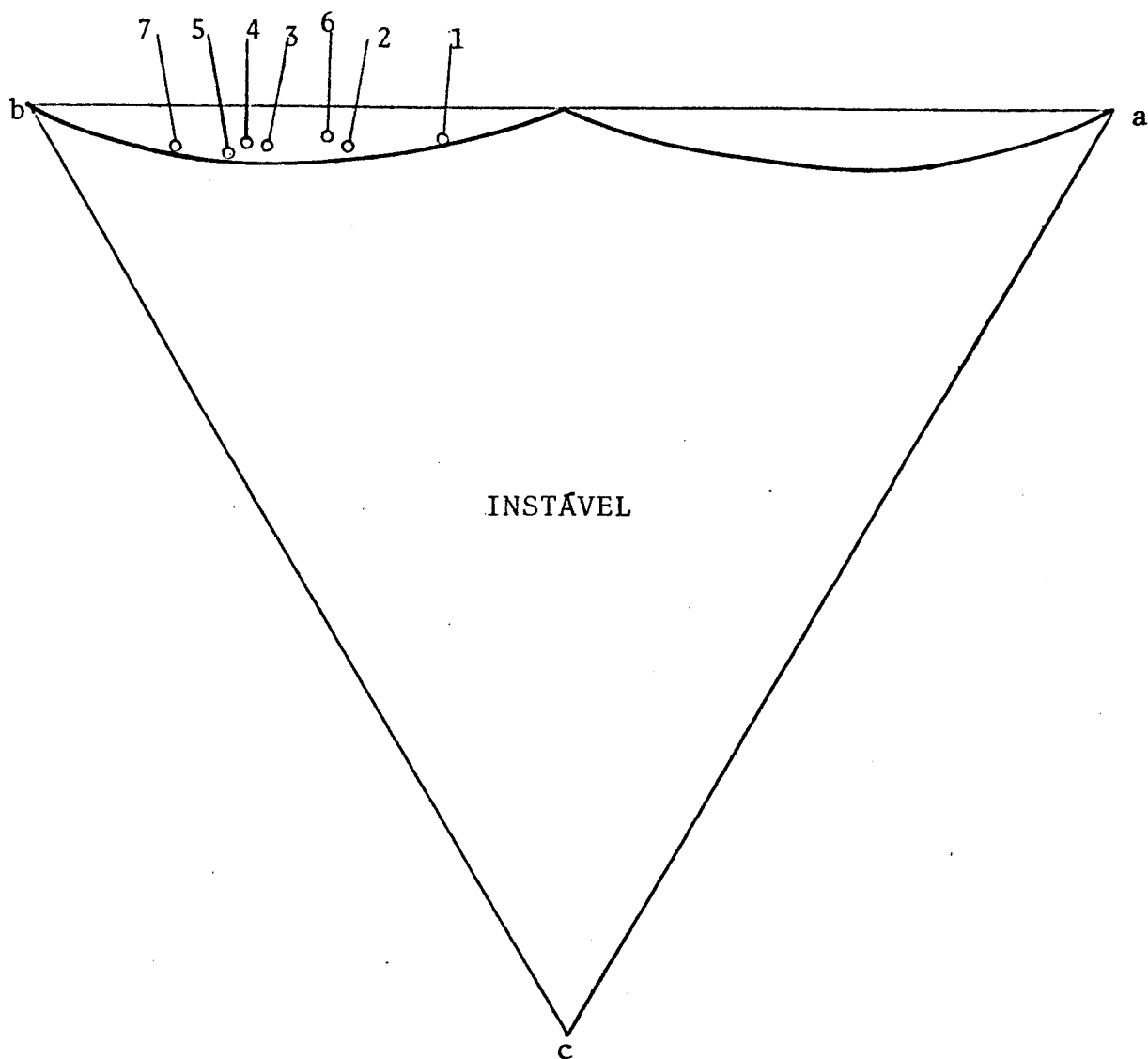


Fig. 8.9. Distribuição dos pontos que identificam os corpos ensaiados, na região, delimitada, de possível instabilidade.

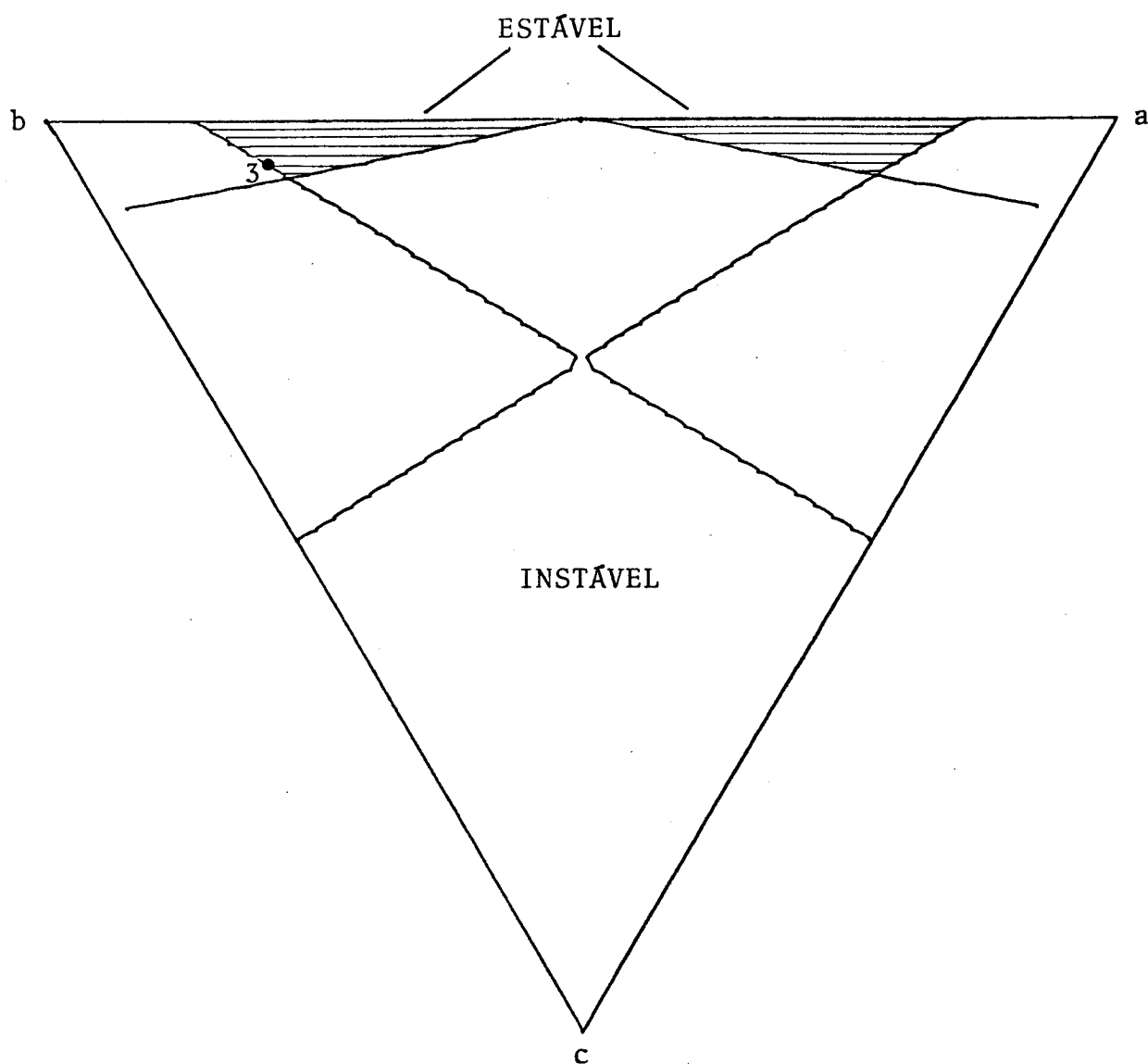


Fig. 8.10. Localização do ponto da experiência 3 para o valor de K encontrado. Está sobre a linha de a_4 , que é o limite inferior da rotação. $K = -0,136$ e $D = 0$.

9. CONCLUSÕES

Fundamentalmente, este trabalho teve a intenção de mostrar que uma pequena diferença de projeto pode provocar um comportamento totalmente diferente em um sistema mecânico.

A análise de uma centrífuga, estaticamente instável, apoiada em um ponto fixo, para a qual se faz uso de dois tipos de suspensão; uma vez por junta cardânica e outra por junta rotulada, vem mostrar que para o mesmo sistema mecânico, se tem um comportamento dinâmico diferente, sendo que para a suspensão por junta cardânica o comportamento da centrífuga é estável acima de uma certa rotação e, pelo uso de junta rotulada a estabilidade do sistema existe numa faixa de velocidade, sendo que em outras velocidades fica caracterizado a instabilidade do sistema.

As análises das condições de estabilidade, para o caso em que se usou junta cardânica, permitem definir as regiões de estabilidade, para qualquer corpo que obedeça uma das relações; $C > A > B$; $C > B > A$ e $C = A + B$ (A, B e C são momentos principais de inércia). A estabilidade, neste caso, só depende da rotação do sistema.

Cada corpo determina um valor de K limite (5.7 e 5.8) e, normalmente, ocorre que o valor de K (4.43d) encontrado está acima da linha definida pelo K limite, por causa do atrito. Além disso, como não se levou em conta os desbalanceamentos, a região encontrada em cada caso é um pouco menor que a esperada.

Em ambos os casos notou-se que por efeito de desbalanceamento, existe uma estabilidade oscilante, que aparece dentro do contorno que se limitou como limite, sem apresentar tendência assintótica de estabilização.

Pelo fato de se ter construído o sistema de junta rotulada com acionamento externo, não se pode registrar diretamente o limite superior de rotação com perda de estabilidade, embora tenha sido possível observar o fenômeno. Para esta montagem, procedeu-se à análise de estabilidade, através dos auto-valores da equação do movimento, cujas condições delimitam regiões de estabilidade, para corpos que obe-

decem as mesmas relações do caso anterior, porém, em faixas muito menores.

Considerando os mesmos corpos, ensaiados sobre sus pensões diferentes, pode-se notar que o limite inferior da rotação estabilizante é diferente.

Para o caso de junta cardânica as rotações são mais baixas que no caso rotulado. Este efeito se origina na diferença entre os movimentos das duas juntas. De qualquer modo, a junta rotulada, apresenta uma estabilidade mais restrita se iniciando em limites superiores de velocidade, fato que deve inspirar cuidados.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SCHIEHLEN, W. O. and WEBER, H.I. - On the Stability of Staude's Permanent Rotations of a Gyroscope with Damping. Ingenieur Archiv 46 (1977) 281 - 292. Springer-Verlag, 1977.
- [2] WEBER, H. I. and SCHIEHLEN, W. O. - Asymptotic Stability of Unsymmetric Centrifuges. Technical Report. UNICAMP-FEC-Departamento de Engenharia Mecânica, 1975.
- [3] MÜLLER, P. C. - Stabilität und Matrizen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [4] MÜLLER, P. C. - Special Problems of Gyrodynamics. Technical University of Munchen. International Centre for Mechanical Sciences, 1970.
- [5] BHATIA, N. P. and SZEGO, G. P. - Stability Theory of Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, New York, 1970.
- [6] CRANDALL, S. H. and BROSENS, P. J. - On the Stability of Rotations of a Rotor with Rotationally Unsymmetric Inertia and Stiffness Properties. Journal of Applied Mechanics 567 - 570, 1961.
- [7] BAARTZ, A. P. - Stability of Motion. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
- [8] MEIROVITCH, L. - Methods of Analytical Dynamics, Mc Graw-Hill Book Company, 1970.