

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR RICARDO AUGUSTO  
MAZZA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 14 10 94.

*Eugênio Spanó Rosa*  
ORIENTADOR

**“MODELAGEM HIDRODINÂMICA DE  
UM MECANISMO PULSO  
DUPLICADOR”**

número de publicação FEM - 49/94

**Autor:** Ricardo Augusto Mazza

**Orientador:** Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

02/94

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	M458m
V.	F.
TÍTULO	25508
PROJ.	433/95
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	19/09/95
N.º CPD	

CM-00076451-3

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA CENTRAL - UNICAMP

M458m Mazza, Ricardo Augusto  
Modelagem hidrodinâmica de um mecanismo pulso duplicador /  
Ricardo Augusto Mazza. - - Campinas, SP : [s.n.], 1994.

Orientador : Rosa, Eugênio Spanó.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Escoamento pulsátil.	2. Ultra-sonografia Doppler
3. Perturbação (matemática).	I. Rosa, Eugênio Spanó
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.	III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**“MODELAGEM HIDRODINÂMICA DE  
UM MECANISMO PULSO  
DUPLICADOR”**

**Autor:** Ricardo Augusto Mazza

**Orientador:** Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

**Curso:** Engenharia Mecânica

**Unidade:** Faculdade de Engenharia Mecânica

**Área de Concentração:** Térmica e Fluidos

Trabalho apresentado à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 14 de outubro de 1994

S.P - Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

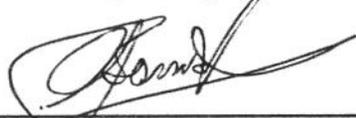
**“MODELAGEM HIDRODINÂMICA DE  
UM MECANISMO PULSO  
DUPLICADOR”**

**Autor:** Ricardo Augusto Mazza

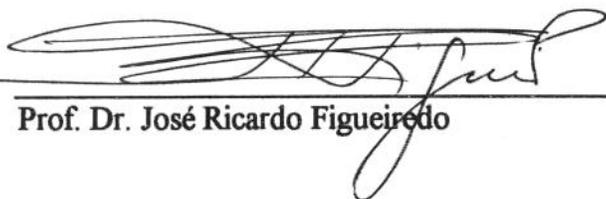
**Orientador:** Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa



Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa, Presidente



Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart



Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo

Campina, 14 de outubro de 1994

## **Dedicatória:**

**Aos meus pais, sem os quais este trabalho seria impossível, e a todos que um dia vierem a usufruir deste trabalho.**

## **Agradecimentos:**

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que, de uma forma direta ou indireta, possibilitaram a realização deste trabalho, e de um forma especial à:

**Papai e Mamãe**, pelo apoio incondicional;

**Renato e Piçuka**, pelas brigas, mas sempre superadas;

**Mari**, pelo verão;

**Regina, Agenor, Regiane, Hellen, Gustavo e Adolfo**, pelo apoio, compreensão e carinho;

**Fábio, Rodrigo, Marcus, Traíra, Zigoto, Marcão, Porrinha, Neguinho, Buda, Samir, Riani, Pereira e demais**, pelos porres;

**Elisane, Marcia, Roseli, Alessandra, Sandra, Sandrinha, Edna, Lena**, pelas reflexões;

**Padilha**, pelo despertar;

**Rosemeire**, pela dedicação;

**Marcelo, Valter, Beatriz, Belquis, D. Oralda, Pinotti**, pelo início;

**Rodrigues**, pelas orientações nos entraves burocráticos;

**Prof. Dr. Marcos C. Somazz**, pelas medidas valiosas;

**Dr. Jorge Urquiola Castrillo**, pela compreensão e sabedoria;

**A FAPESP**, pelo projeto 90/3940-0

**Thomazinho**, pela luz e força na hora H;

**Eugênio**, pela orientação

## **Sonífera Ilha**

Não posso mais viver assim do seu ladinho  
Por isso colo o meu ouvido no radinho de pilha  
Pra te sintonizar sozinha, numa ilha  
Sonífera Ilha, descansa meus olhos  
Sossega minha boca,  
Me enche de luz

Titãs

**“Aquele que realmente ensina é aquele que mais estuda”**

**André Luis - Psicografado por Francisco Xavier**

## Resumo

Mecanismos pulso duplicadores são importantes em aplicações biomedicas. Podemos utiliza-los no estudo *in vitro* do escoamento hemodinâmico e suas possíveis perturbações, tais como estenoses, aneurismas, bifurcações, vaso elasticidade entre outras.

A proposta deste trabalho é desenvolver um ferramental matemáticas para modelar e analisar mecanismos pulso duplicadores e propor um novo mecanismo pulso duplicador. O modelo matemático unidimensional é fundamentado nas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Uma análise de escala do sistema é feita, tornando a equação adimensional e formando os grupos adimensionais, representando parâmetros do escoamento, geométricos e dinâmicos. A solução é obtida por meio de dois métodos: um analítico, utilizando a teoria das perturbações e um numérico, desenvolvido no software *Mathematica*<sup>®</sup>. As ferramentas matemáticas são aplicadas para analisar o comportamento dinâmico do novo mecanismo pulso duplicador, sem válvulas. O princípio de funcionamento, baseia-se no fato de podermos decompor uma onda em duas componentes, uma constante, representando a média temporal e uma de flutuação, representando os níveis de oscilação. O responsável pela componente constante é um tanque de nível constante e pela componente de flutuação é o deslocamento oscilatório de um pistão, que é controlado por microcomputador.

## **Abstract**

Pulse duplicators simulators are useful devices in biomedical applications. They can simulate *in vitro* flow phenomena related to arterial blood flow such as: stenosis, aneurysms, bifurcations, vessel elasticity among others.

The purpose of this work is two-fold: develop mathematical tools to model and analyze pulse duplicators simulators and the propose a new conceptual design of pulse duplicator. The one-dimensional mathematical model is founded on the conservations equations of mass, momentum and energy. A scale analysis is performed on the system rendering the equations in dimensionless form plus dimensional groups representing geometric and dynamic flow parameters. The solution is obtained by means of two methods: one analytical approximated method with the use of perturbation theory and the other a numerical method developed in the Mathematica®. The mathematical tools were applied to analyze the dynamic behavior of a new valveless pulse duplicator design. The pulse duplicator concept relies on the decomposition of a given waveform in two components: DC and AC levels which represent, respectively, the waveform time average and fluctuating components. The waveform DC component is supplied by a constant head tank while the AC component is given by a reciprocating piston pump controlled by a computer.

## Sumário

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>3</b>
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	3
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>12</b>
SISTEMA PULSO DUPLICADOR PROPOSTO .....	12
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>15</b>
FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	15
3.1 - <i>Formulação Integral</i> .....	16
3.1.1 - Equação da Conservação de Massa.....	16
3.1.2 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x .....	17
3.1.3 - Equação da Conservação de Energia.....	18
3.2 - <i>Aplicação das Equações da Formulação Integral a Um Modelo Unidimensional</i> .....	21
3.2.1 - Equação da Conservação de Massa.....	24
3.2.2 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x .....	24
3.2.3 - Equação da Conservação de Energia.....	25
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>26</b>
ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MODELO UNIDIMENSIONAL.....	26
4.1 - <i>Processo Inverso</i> .....	26
4.1.1 - Escalas Características Utilizadas.....	26
4.1.2 - Equação da Conservação de Massa.....	27
4.1.3 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x .....	28
4.1.4 - Equação da Conservação de Energia.....	29
4.2 - <i>Processo Direto</i> .....	31
4.2.1 - Escalas Características Utilizadas.....	31
4.2.3 - Equação da Conservação de Massa.....	32
4.2.3 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x .....	33
4.2.3 - Equação da Conservação de Energia.....	34
4.3 - <i>Obtenção da Equação a Ser Solucionada</i> .....	36
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>39</b>
MÉTODO DE SOLUÇÃO .....	39
5.1 - <i>Método de Perturbação</i> .....	39
5.1.1 - Processo Inverso.....	40
5.1.1.1 - Solução para $St \rightarrow 0$ .....	40
5.1.1.1.1 - Solução para o Termo de Ordem Zero.....	41
5.1.1.1.2 - Solução para o Termo de Primeira Ordem.....	43
5.1.1.1.3 - Solução para o Termo de Segunda Ordem.....	45
5.1.1.2 - Solução para $St \rightarrow \infty$ .....	47
5.1.1.2.1 - Solução para o Termo de Ordem Zero.....	49
5.1.1.2.2 - Solução para o Termo de Primeira Ordem.....	50

5.1.2 - Processo Direto .....	52
5.1.2.1 - Solução para $St \rightarrow 0$ .....	52
5.1.2.1.1 - Solução para o Termo de Ordem Zero .....	54
5.1.2.1.2 - Solução para o Termo de Primeira Ordem .....	54
5.1.2.2 - Solução para $St \rightarrow \infty$ .....	56
5.2 - Método Numérico .....	58
5.2.1 - Sem Efeitos Viscosos .....	58
5.2.2 - Com Efeitos Viscosos .....	59
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>62</b>
SUMÁRIO DAS EQUAÇÕES .....	62
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>73</b>
RESULTADOS OBTIDOS .....	73
7.1 - Processo Inverso .....	73
7.2 - Processo Direto .....	83
7.3 - Similaridade Hidrodinâmica .....	85
7.3.1 - Artéria Renal Direita .....	86
7.3.2 - Artéria Ilíaca Comum Direita .....	90
7.3.3 - Artéria Subclávia Direita .....	92
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>96</b>
CONCLUSÃO .....	96
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>97</b>
SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS .....	97
<b>APÊNDICE A</b> .....	<b>98</b>
A1 - PROCESSO INVERSO $St \rightarrow 0$ .....	98
A2 - PROCESSO INVERSO $St \rightarrow \infty$ .....	102
A3 - PROCESSO DIRETO $St \rightarrow 0$ .....	104
<b>APÊNDICE B</b> .....	<b>109</b>
CALCULO DOS PARÂMETROS DE FLUXO ARTERIAL HUMANO, NÚMERO DE REYNOLDS (RE) E STROUHAL (ST).....	109
B1 - Pulsos de Velocidades para Várias Artérias - Dimensional e Adimensional .....	111
B2 - Programa para Geração dos Pulsos de Velocidades .....	113
<b>APÊNDICE C</b> .....	<b>117</b>
C1 - ARTÉRIA RENAL DIREITA .....	117
C2 - ARTÉRIA SUBCLAVIA DIREITA .....	124
C3 - ARTÉRIA ILÍACA COMUM DIREITA .....	132
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>142</b>

## Lista de Figuras

1. Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Newgard (1963).....	4
2. Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Duff e Fox (1972)...	5
3. Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Chandran et al (1989).	6
4. Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Heiliger et al (1987)....	7
5. Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Willshaw et al (1986)..	8
6. Desenho esquemático da modificação em uma bomba peristáltica proposto por Law et al (1987) ....	9
7. Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Law et al (1987) .....	10
8. Desenho esquemático do sistema do mecanismo pulso duplicador proposto.....	12
9. Desenho esquemático do sistema que será modelado numericamente.....	13
10. Esquema do volume de controle e do referencial adotado.....	15
11. Significado geométrico da nomenclatura utilizada .....	21
12. Desenho esquemático da subdivisão do volume de controle adotado .....	23
13. Algoritmo utilizado para solucionar a eq. (86), numericamente.....	59
14. Algoritmo para solucionar a eq. (71), numericamente.....	61
15. Comportamento do ganho para o primeiro caso.....	71
16. Comportamento do ganho para o segundo caso .....	72
17. Desvio relativo máximo entre o método numérico e o método das perturbações - processo inverso.	74
18. Gráfico da estabilidade do método numérico - processo inverso.....	75

19. Gráficos de $V_2$ , na ordenada, em função do tempo <sup>NA</sup> , calculado numericamente, para um valor de $St = 1$ e $Fr$ variando.....	76
20. Gráficos de $V_2$ , na ordenada, em função do tempo <sup>NA</sup> , calculado numericamente, para vários números de $St$ com $Fr = 0.02$ .....	77
21. Gráficos de $V_2$ , na ordenada, em função do tempo <sup>NA</sup> , calculado numericamente, para um valor de $St = 0.1$ e $Fr$ variando.....	78
22. Gráficos da quantidade de energia que compõem a equação da conservação de energia e da velocidade de saída, nas ordenadas, em função do tempo <sup>NA</sup> , para $St = 0.1$ e $Fr = 2$ .....	80
23. Gráficos da quantidade de energia que compõem a equação da conservação de energia e da velocidade de saída, nas ordenadas, em função do tempo <sup>NA</sup> , para $St = 1$ e $Fr = 2$ .....	81
24. Gráficos da quantidade de energia que compõem a equação da conservação de energia e da velocidade de saída, nas ordenadas, em função do tempo <sup>NA</sup> , para $St = 25$ e $Fr = 2$ .....	82
25. Estabilidade numérica - processo direto.....	84
26. Desvio relativo máximo entre o método numérico e o método de perturbação - processo direto.....	85
27. Pulso de velocidade da artéria (pontilhada) e do pistão (cheia) para a artéria renal direita, em função do tempo <sup>NA</sup> .....	87
28. Gráfico de fase do pistão para a artéria renal direita.....	88
29. Pulso de velocidade desejado (pontilhada) e o reproduzido (cheia) para a artéria renal direita, em função do tempo <sup>NA</sup> .....	89
30. Pulso de velocidade da artéria (pontilhada) e do pistão (cheia) para a íliaca comum direita, em função do tempo <sup>NA</sup> .....	90
31. Gráfico de fase do pistão para a artéria íliaca comum direita.....	91
32. Pulso de velocidade desejado (pontilhada) e o reproduzido (cheia) para a artéria íliaca comum direita, em função do tempo <sup>NA</sup> .....	92
33. Pulso de velocidade da artéria (pontilhada) e do pistão (cheia) para a artéria subclávia direita, em função do tempo <sup>NA</sup> .....	93
34. Gráfico de fase do pistão para a artéria subclávia direita.....	94
35. Pulso de velocidade desejado (pontilhada) e o reproduzido (cheia) para a artéria subclávia direita, em função do tempo <sup>NA</sup> .....	94
B1. Pulso de velocidade da artéria subclávia direita.....	111
B2. Pulso de velocidade da artéria aorta ascendente.....	112

---

B3.Pulso de velocidade da artéria renal direita.....	112
B4.Pulso de velocidade da artéria ilíaca comum direita.....	112
B5.Pulso de velocidade da artéria tronco braquiocefálico .....	113
B6.Pulso de velocidade da artéria aorta abdominal .....	113

## Lista de Tabelas

1. Nomenclatura utilizada.....	22
2. Escalas utilizadas para a adimensionalização - Processo Inverso .....	62
3. Escalas utilizadas para a adimensionalização - Processo Inverso .....	63
4. Equações da conservação de energia, quantidade de movimento na direção x e energia em sua forma adimensional - Processo Direto e Inverso .....	64
5. Equação que iremos solucionar.....	66
6. Equação obtida pelo método das perturbações para $St \rightarrow 0$ .....	67
7. Equação obtida pelo método das perturbações para $St \rightarrow \infty$ .....	68
8. Ganho, Reynolds e Strouhal do sistema arterial humano .....	68
9. Geometria do mecanismo pulso duplicador para o processo inverso.....	73
10. Geometria do mecanismo pulso duplicador para o processo direto .....	83
11. Parâmetros dinâmicos e geometria do simulador para o caso da artéria renal direita.....	86
12. Parâmetros dinâmicos <sup>7.3</sup> e escalas utilizadas para o processo inverso no caso da artéria renal direita.....	88
13. Parâmetros dinâmicos fisiológicos e reproduzidos - artéria renal direita .....	89
14. Parâmetros dinâmicos e geometria do simulador para o caso da artéria ilíaca comum direita .....	90
15. Parâmetros dinâmicos <sup>7.3</sup> e escalas utilizadas para o processo inverso no caso da artéria ilíaca comum direita .....	91
16. Parâmetros dinâmicos fisiológicos e reproduzidos - artéria ilíaca comum direita .....	92

---

17. Parâmetros dinâmicos e geometria do simulador para o caso da artéria subclávia direita ..	93
18. Parâmetros dinâmicos <sup>7.3</sup> e escalas utilizadas para o processo inverso no caso da artéria subclávia direita.....	95
19. Parâmetros dinâmicos fisiológicos e reproduzidos - artéria subclávia direita .....	95
B1. Diâmetro das principais artérias (mm).....	110
B2. Parâmetros geométricos e dinâmicos do sistema arterial.....	111

## **Nomenclatura**

### **Área**

$A_1$  - Área da seção circular do reservatório elevado de nível constante;

$A_2$  - Área da seção circular do tubo de teste;

$A_3$  - Área da seção circular do pistão;

$A_4$  - Área da seção circular do tubo de alimentação;

$A_j$  - Área da junção;

$A_r$  - Área de descarga no reservatório de saída com nível constante;

### **Comprimento**

$L_1$  - Comprimento do reservatório elevado;

$L_2$  - Comprimento da seção de teste;

$L_3$  - Deslocamento máximo do pistão;

$L_{3v}$  - Posição instantânea do pistão;

$L_4$  - Comprimento do tubo de alimentação;

$L_5$  - Altura do reservatório de saída;

$L_j$  - Comprimento da junção

### **Velocidade**

$V_1$  - Velocidade do fluido no reservatório elevado;

$V_2$  - Velocidade do fluido na seção de teste;

$V_3$  - Velocidade do pistão;

$V_4$  - Velocidade do fluido no tubo de alimentação;

$\bar{U}$  - Velocidade média na seção de teste;

$\vec{V}_r$  - Velocidade do relativa entre o fluido e a superfície de controle;

$\vec{V}_F$  - Velocidade da fronteira;

$\vec{V}_i$  - Velocidade inercial;

$V_x$  - Velocidade na direção x;

$\frac{d\vec{r}}{dt}$  - Velocidade do referencial inercial;

$\vec{\Omega} \times \vec{r}$  - Velocidade angular do referencial inercial;

### **Aceleração**

$\dot{V}_1$  - Aceleração do fluido no reservatório elevado;

$\dot{V}_2$  - Aceleração do fluido na seção de teste;

$\dot{V}_4$  - Aceleração do fluido no tubo de alimentação;

$\dot{V}_3$  - Aceleração do pistão;

$a_{rel_x}$  - aceleração relativa na direção x;

### **Coefficientes de Perda**

$K_1$  - Coeficiente de perda expansão ou contração 1 para 4;

$K_2$  - Coeficiente de perda na expansão ou contração da junção para 2;

$K_3$  - Coeficiente de perda na expansão ou contração de 3 para a junção;

$K_4$  - Coeficiente de perda na expansão ou contração de 4 para a junção;

$K_5$  - Coeficiente de perda na expansão ou contração de 2 para o reservatório de saída;

$K_v$  - Coeficiente de perda na válvula reguladora de fluxo;

$f_2$  - Fator de atrito de Darcy para 2;

$f_4$  - Fator de atrito de Darcy para 4;

### **Constante Física e Propriedades do Fluido**

$\rho$  - Densidade do fluido;

$\mu$  - Viscosidade do fluido;

$g$  - Aceleração da gravidade;

$g_x$  - Aceleração gravitacional decomposta na direção  $x$ ;

### **Pressão**

$p_3$  - Pressão na cabeça do pistão;

### **Números Adimensionais**

$St$  - Strouhal;

$Fr$  - Froude;

$Re$  - Reynolds.

### **Outros**

$\infty$  - Infinito;

$dV$  - Variação volumétrica;

$dA$  - Variação de área;

$\bar{n}$  - Vetor unitário normal a área;

$VC$  - Volume de controle;

$SC$  - Superfície de controle;

$F_{MEC_x}$  - Força mecânica que cruza a superfície de controle, na direção  $x$ ;

$\tau$  - Tensor de tensões;

$\dot{Q}$  - Fluxo de calor transferido de ou para o sistema;

$\dot{W}_e$  - Fluxo de trabalho de eixo que atravessa a superfície de controle;

$\dot{W}_v$  - Fluxo de trabalho viscoso realizado pelas tensões viscosas;

$\dot{W}_i$  - Fluxo de trabalho inercial, associada ao movimento do volume de controle;

$\dot{W}_{iv}$  - Fluxo de trabalho inercial viscoso;

$\dot{W}_p$  - Fluxo de trabalho inercial de pressão;

$\hat{u}$  - Energia interna;

## Capítulo 1

### Revisão Bibliográfica

Mecanismos pulso duplicadores tem aplicações biomédicas importantes, tais como, o estudo *in vitro* dos diversos fatores que afetam o escoamento hemodinâmico (aneurismas, bifurcações, vaso elasticidade, prótese valvar, etc) e também no desenvolvimento de novos métodos e técnicas de medida de velocidade de um escoamento, com aplicação biomédica ou não. Quando o mecanismo pulso duplicador reproduz o pulso de velocidade fisiológico humano é usualmente chamado de simulador cardiovascular e estes são classificados em dois grandes grupos. Um grupo constitui-se daqueles que reproduzem os parâmetros de fluxo dentro da cavidade cardíaca e o outro daqueles que reproduzem o escoamento nas principais artérias.

Os simuladores cardiovasculares do primeiro grupo são utilizados no teste de desempenho de próteses valvares cardíacas, e para tanto, é necessário que este tipo de simulador reproduza o gradiente de pressão entre as câmaras cardíacas, não sendo necessário que reproduza os níveis das pressões fisiológicas. Neste tipo de simulador, as válvulas são as responsáveis pela reprodução dos pulsos de velocidades. Os simuladores do segundo grupo são utilizados no estudo do escoamento hemodinâmico nas principais artérias e suas possíveis perturbações, tais como, aneurismas, estenoses, bifurcações, entre outras. Podemos também utilizá-los para o aperfeiçoamento de técnicas não invasivas de medidas dos escoamentos hemodinâmicos, como o ultra-som Doppler ou laser Doppler. Geralmente este tipo de simulador não reproduz nem os níveis de pressões fisiológicos, nem os gradientes de pressões entre as câmaras cardíacas. Este tipo de simulador não necessita de válvulas para reproduzir os pulsos de velocidades e pode reproduzir o pulso de velocidade em qualquer artéria, o que é impossível aos simuladores do primeiro grupo.

A seguir, passa-se a uma descrição de alguns tipos de mecanismos pulso duplicadores que têm como objetivo reproduzir pulsos de velocidade fisiológicos.

- Hoppman e Liu (1972) descreveram um sistema que utilizava como bomba uma câmara elástica comprimida por uma came e com uma válvula de controle, a qual era acionada por diferença de pressão. Os pulsos de velocidade obtidos não foram mostrados e o sistema apresentava falta de flexibilidade na variação dos mesmos. (Law et al, 1987)

- Newgard (1963) descreveu um sistema de simulação cardiovascular baseado em três conjuntos de cilindro-came-pistão. O primeiro conjunto cilindro-came-pistão, funcionando

como reservatório, é mantido a pressão de diástole<sup>1.1</sup> pulmonar e representa o sistema cardiovascular pulmonar. Neste reservatório, o conjunto came-pistão comprime o ar, provocando assim, um aumento amortecido de pressão e este aumento de pressão provoca um aumento na vazão do reservatório para o segundo conjunto cilindro-came-pistão.

O segundo conjunto cilindro-came-pistão apresenta uma particularidade, uma mola liga a came ao pistão. Este conjunto representa o átrio e a mola representa a capacitância do átrio. O terceiro conjunto cilindro-came-pistão possui o mesmo sistema do segundo, diferindo apenas na rigidez da mola, superior à do segundo, e por possuir duas válvulas para impedir o contra-fluxo. O terceiro conjunto representa o ventrículo e as válvulas representam a válvula mitral e a válvula aórtica.

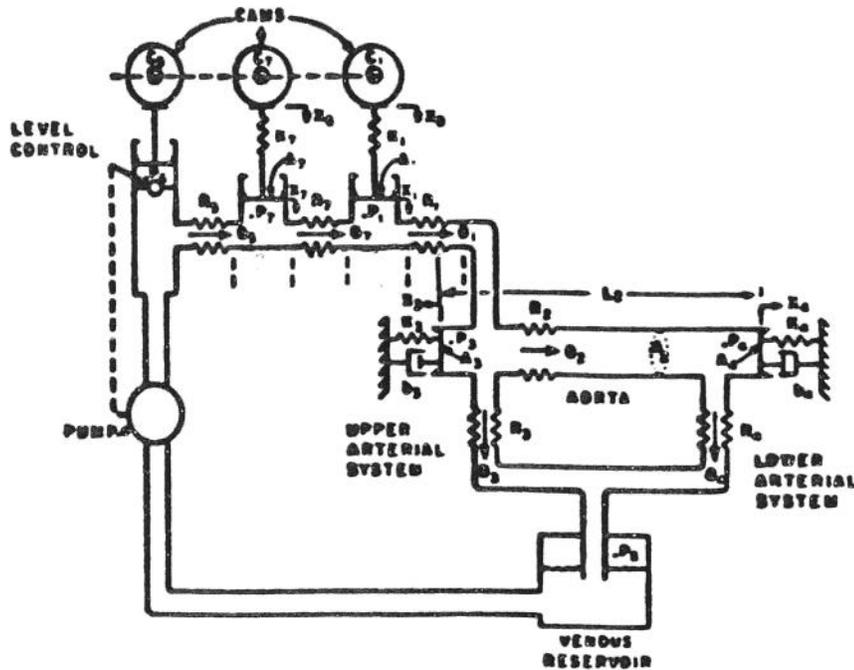


fig. 1 - Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Newgard (1963).

O funcionamento do sistema é simples. Quando da sistole<sup>1.2</sup> ventricular o conjunto came-mola-pistão aumenta a pressão no "ventrículo" tornando-a superior à pressão aórtica, provocando assim, o escoamento do fluido previamente armazenado no cilindro ventricular para um tubo, que representa a artéria aorta. No final da ejeção, a superfície da came se levanta, fazendo com que a mola se contraia. A contração da mola puxa o pistão rapidamente, baixando assim, a pressão ventricular. Quando a pressão ventricular se torna menor que a

<sup>1.1</sup> Diástole - fase de relaxamento do coração, ou seja, quando se enche de sangue uma das cavidades cardíacas.

<sup>1.2</sup> Sistole - fase de contração do coração, ou seja, quando o sangue é expulso de uma das cavidades cardíacas.

atrial, há a passagem do fluido, armazenado anteriormente no cilindro atrial, para o cilindro ventricular. Esta passagem se realiza inicialmente com alta velocidade, mas quando as pressões atrial e ventricular se aproximam, a velocidade diminui.

Para assegurar um perfeito sincronismo dos três conjuntos came-pistão, as cames são interligadas através de um fuso que garante a reprodução dos parâmetros de fluxo apresentados pelo coração dentro da cavidade cardíaca esquerda.

Este sistema não se mostrou versátil, pois para qualquer mudança dos parâmetros de fluxo necessita-se de novos conjuntos de came-mola-fuso, além de não apresentar boas respostas para componentes de alta frequência dos pulsos de velocidade e de pressão.

- Duff e Fox (1972) também utilizaram um sistema de simulação de fluxo cardiovascular baseados em uma bomba a pistão. O sistema possui um reservatório elevado, fornecendo uma vazão constante; uma câmara com membrana flexível, representando o átrio esquerdo; uma

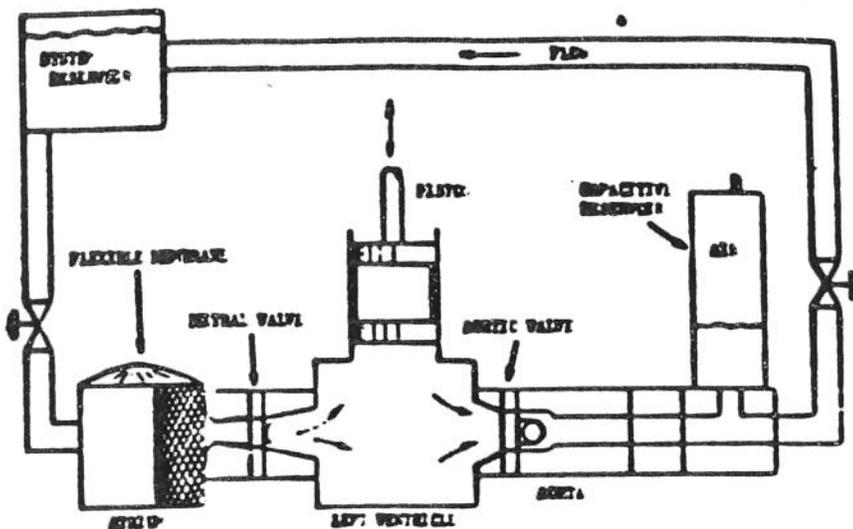


fig. 2 - Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Duff e Fox (1972).

bomba a pistão, representando o ventrículo esquerdo; um reservatório fechado preenchido com fluido e ar, representando a capacitância sistêmica; um tubo, representando a artéria aorta; e duas válvulas, uma entre o átrio e o ventrículo, representando a válvula mitral e outra entre o ventrículo e a aorta, representando a válvula aórtica.

O princípio de funcionamento é simples. Quando da sístole ventricular, a bomba a pistão aumenta a pressão do ventrículo, fazendo com que a válvula mitral se feche e, quando a pressão ventricular supera a pressão aórtica, a válvula aórtica se abre permitindo que o fluido armazenado no ventrículo escoe para a aorta. Enquanto a válvula mitral está fechada, o reservatório elevado enche o átrio, esticando assim a membrana flexível. Terminada a sístole ventricular, o pistão começa a retornar, diminuindo a pressão ventricular, e quando se torna

inferior à pressão aórtica, a válvula aórtica se fecha. Quando a pressão ventricular é inferior à pressão atrial, a válvula mitral se abre, fazendo com que o fluido armazenado no átrio escoe para o ventrículo. Inicialmente o fluido escoo com alta velocidade, devido à contração da membrana flexível. Depois que a membrana flexível retorna à posição original, o escoamento é mais lento.

Este sistema de simulação cardiovascular foi concebido para avaliar como uma prótese valvar cardíaca afeta o escoamento sanguíneo normal. A flexibilidade de simulação deste sistema demonstrou-se suficiente para reproduzir os diferentes parâmetros de interesse do fluxo.

- Kiyose et al (1977) descreveram um sistema baseado em uma bomba a pistão para simular escoamento arterial periférico. O sistema é baseado no princípio de que toda forma de onda de um escoamento fisiológico pode ser sintetizada por suas componentes harmônicas. Uma versão modificada deste sistema, empregando quatro pistões e uma bomba centrífuga foi descrita por Appugliese et al (1980) e Poots et al (1986). (Law et al, 1987).

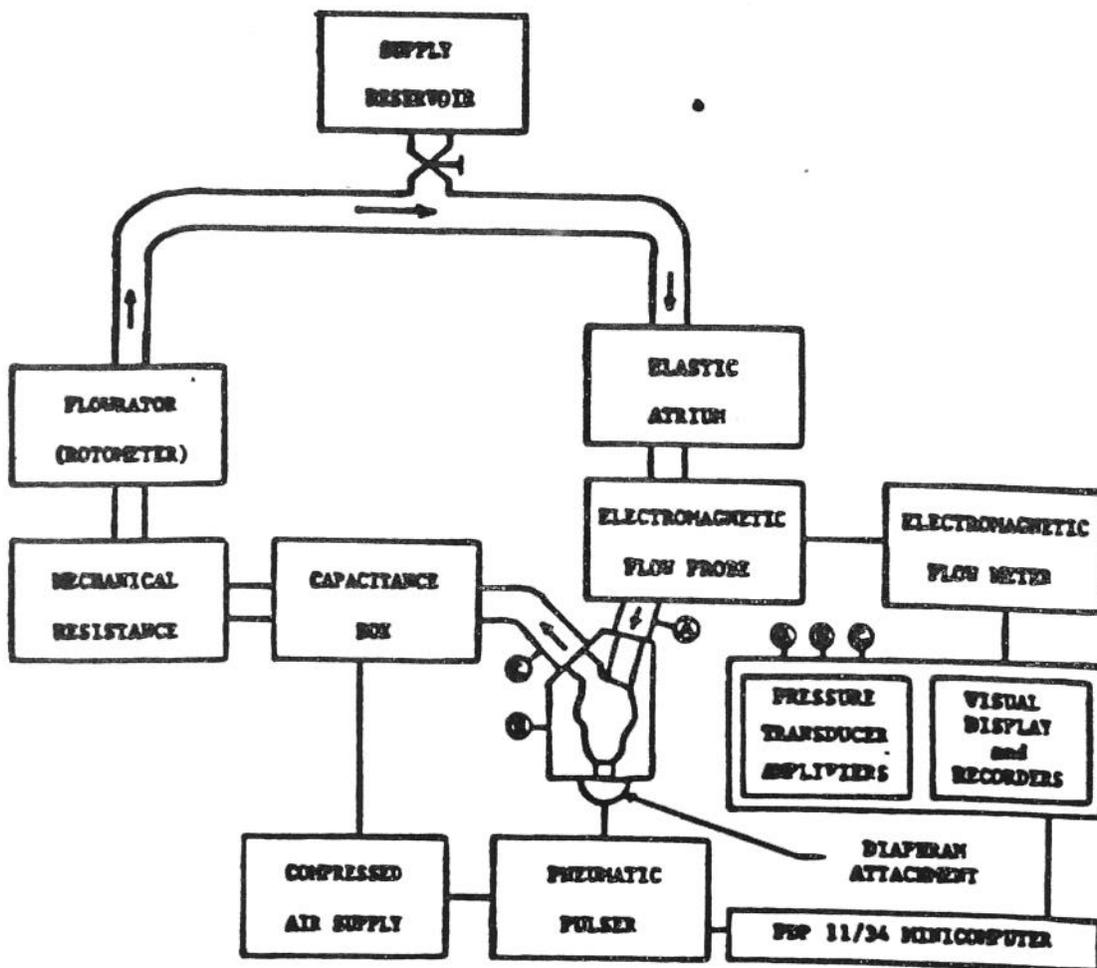


fig. 3 - Desenho esquemático do sistema de simulação proposto por Chandran et al (1989).

Além das bombas a pistão, combinadas ou não com outros tipos de bombas, pode-se ter como fonte de escoamento, bombas especialmente desenvolvidas com a finalidade de simular o sistema cardiovascular humano. Estas bombas podem ser tubos flexíveis, que são periodicamente comprimidos por ar comprimido ou roletes, ou ainda, membranas com formato semelhante ao ventrículo, movimentadas por ar comprimido.

- Chandran et al (1989) descreveram um sistema de simulação cardiovascular baseado em uma bomba de membrana. Este sistema de simulação cardiovascular utilizou um ventrículo esquerdo artificial em acrílico na diástole, confeccionado a partir de um molde plástico. Este molde foi obtido através da injeção do material plástico em um coração humano cadavérico. Na base do ventrículo, foi adaptada uma membrana flexível (diafragma), responsável pelo bombeamento do fluido. Este diafragma é acionado pneumaticamente, através de pulsos de ar comprimido, controlados por micro computador. O sistema também possui: um reservatório elevado; uma câmara elástica, representando o átrio; um sistema que simula a capacitância sistêmica; e um outro sistema que simula a resistência periférica. Tomadas de pressão nas vias de entrada, saída e no próprio ventrículo monitoram o sistema e servem de parâmetros de controle do escoamento. Foram montadas válvulas nas vias de entrada e saída do ventrículo artificial, que são respectivamente, as válvulas mitral e aórtica.

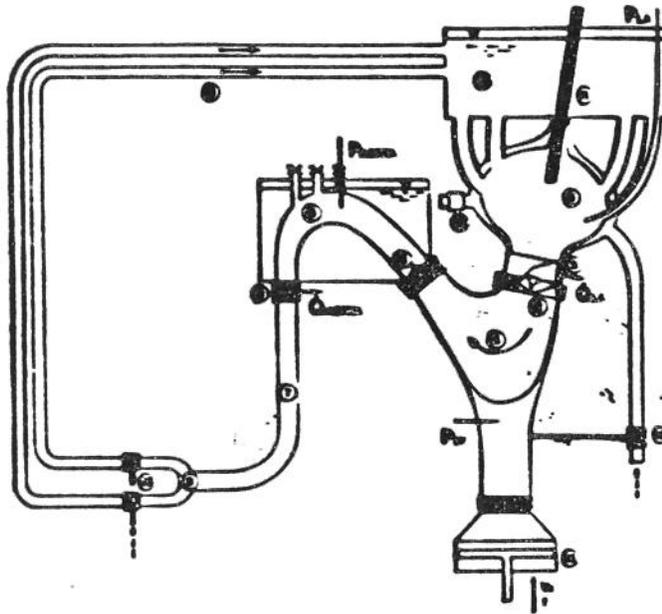


fig. 4 - Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Heiliger et al (1987).

Os pulsos de velocidade deste sistema não foram registrados bem como uma descrição mais detalhada do funcionamento do sistema, o que nos impediu de realizar uma melhor avaliação do desempenho deste sistema de simulação. Este sistema foi desenvolvido para testar próteses valvares cardíacas.

- Heiliger et al (1987) também descreveram um sistema de simulação cardiovascular baseado em uma bomba de membrana. A diferença básica entre o sistema de Heiliger et al e o

de Chandran et al é que neste caso o ventrículo artificial esquerdo não possui a forma do ventrículo esquerdo humano na diástole, mas somente apresenta um formato semelhante ao do ventrículo humano. A "câmara atrial" apresenta a forma do átrio e possui uma característica peculiar, a capacitância do átrio não é devida a uma "contração voluntária" de uma membrana flexível ou elástica, mas sim, devido à contração de uma película flexível que reveste o átrio, através de pressurização. O átrio também possui quatro orifícios, pelos quais recebe o fluido de um reservatório. Estes orifícios têm a forma e o tamanho das veias pulmonares. O bombeamento do sangue no ventrículo é feito através de uma membrana que foi adaptada à base do ventrículo. Esta membrana é movimentada por ar comprimido, o qual é produzido pelo deslocamento de um pistão. A saída do ventrículo é adaptada a um tubo, cuja forma e tamanho são iguais aos da artéria aorta. Há também duas válvulas, uma entre o ventrículo e a aorta e outra entre o átrio e o ventrículo. Estas válvulas representam as válvulas aórtica e mitral, respectivamente. O átrio, ventrículo e artéria aorta são feitos de uma borracha de silicone rígida.

As formas de onda não foram registradas, portanto é difícil fazer uma avaliação de desempenho e de flexibilidade do sistema. O objetivo deste sistema era de testar próteses valvares cardíacas em posição mitral.

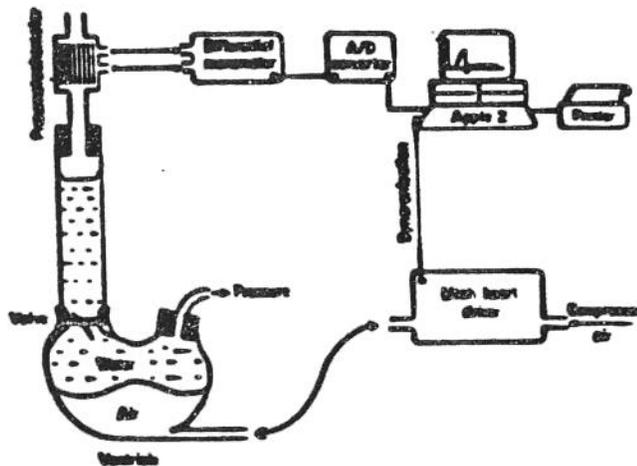


fig. 5 - Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Willshaw et al (1986).

- Willshaw et al (1986) descreveram um sistema de simulação cardiovascular baseado em uma bomba de membrana, utilizando uma adaptação do ventrículo artificial Jarvik 7. Este

ventrículo consiste de um corpo polimérico montado em uma base de alumínio. Internamente uma membrana flexível é colocada entre a base e o corpo, separando o ventrículo em duas câmaras; uma de ar e outra de fluido. Na parte de fluido do corpo ventricular há dois furos, uma para tomada de pressão e outro para a montagem das válvulas a serem testadas. Na parte de ar há um furo, o qual foi conectado a uma fonte de ar comprimido. Uma unidade de controle eletropneumático de ar comprimido conecta-o alternadamente com a atmosfera, produzindo assim a sístole e a diástole.

Não foram registradas as formas de onda produzidas por este sistema, portanto não foi possível realizar uma avaliação de desempenho do sistema. Este sistema foi utilizado para estudar as características de fechamento das próteses valvares cardíacas em posição aórtica.

- Calil & Roberts (1985) em seu estudo de ultra-som Doppler, utilizaram ar comprimido para pressionar a seção de um tubo de látex flexível, que fazia parte de um sistema de circulação extra corpórea. Com este sistema é difícil de reproduzir um pulso de velocidade pré determinado. (Law et al, 1987).

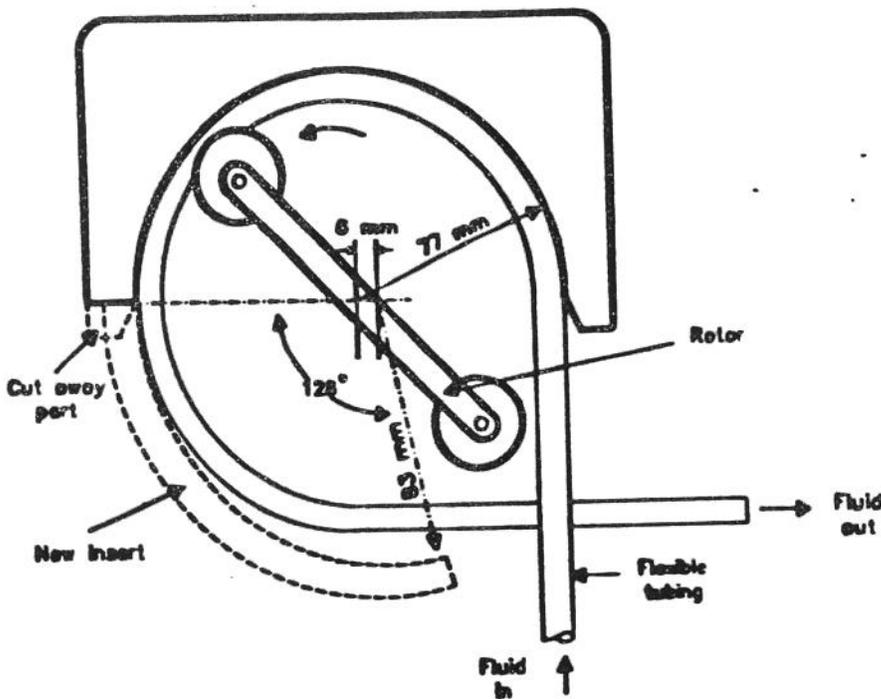


fig. 6 - Desenho esquemático da modificação em uma bomba peristáltica proposta por Law et al (1987).

- Law et al (1987) descreveram um sistema de simulação cardiovascular baseado em uma bomba de rolete peristáltica conhecida. Foi proposta uma alteração na bomba, a adaptação de um prolongamento na saída da região de compressão dos roletes, o que permitiu uma melhor uniformidade dos pulsos de velocidade em cada ciclo. Este sistema não necessita de uma

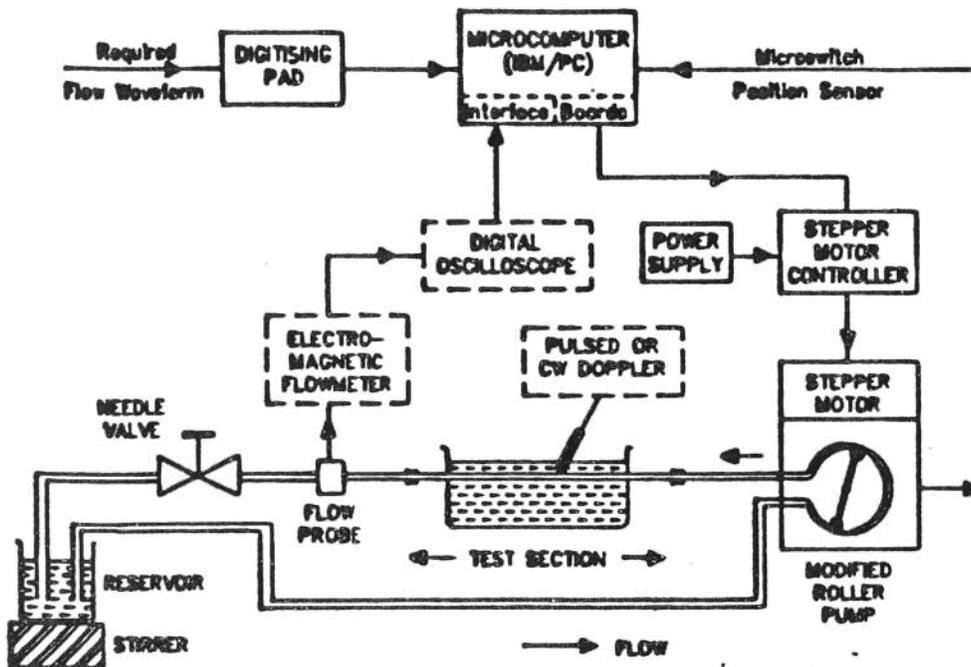


fig. 7 - Desenho esquemático do sistema de simulação cardiovascular proposto por Law et al (1987).

câmara atrial ou de válvulas para impedir o contra fluxo na simulação dos pulsos de velocidade. O sistema conta ainda com um motor de passo, controlado por micro computador através de uma interface ligada ao controlador do motor, que movimenta os roletes, e uma válvula ajustável na seção de teste, para oferecer resistência ao escoamento.

O funcionamento do sistema é simples. Os roletes comprimem um tubo flexível e "empurram" o fluido para a seção de teste. São dois roletes fazendo este trabalho, quando um está deixando a região de compressão, o outro está entrando na região de compressão. O motor de passo controla a frequência e a direção dos roletes nos vários passos de cada ciclo, possibilitando assim, obter os pulsos de velocidade desejados.

Este sistema de simulação cardiovascular apresenta bons resultados quanto à possibilidade de se obter os diversos pulsos de velocidade fisiológicos humanos, mas com alguns inconvenientes. Para gerar os componentes de fluxo reverso do pulso de velocidade, há a necessidade de se inverter a rotação do motor de passo, o que gera um choque na união do motor com a bomba. Este choque pode ser amortecido pela inclusão de um absorvedor de choque na união, mas isto ainda afetará o escoamento. Para cada pulso de velocidade desejado há a necessidade de um diâmetro específico do tubo flexível, e este sistema só poderá reproduzir os pulsos de velocidade, não reproduzindo os pulsos de pressão.

## Capítulo 2

### Sistema Pulso Duplicador Proposto

Como sistema pulso duplicador, propomos um sistema composto de um reservatório elevado de nível constante; um conjunto de bombeamento, o qual é constituído de um pistão, uma came e um motor de passo controlado por micro computador; uma junção; um tubo de alimentação; uma válvula reguladora de fluxo; um tubo onde serão reproduzidos os pulsos de velocidade (seção de teste); um reservatório de saída com nível constante e um sistema de recirculação, constituído de uma bomba centrífuga e da tubulação que liga o reservatório de saída ao reservatório elevado, como mostrado na fig. 8.

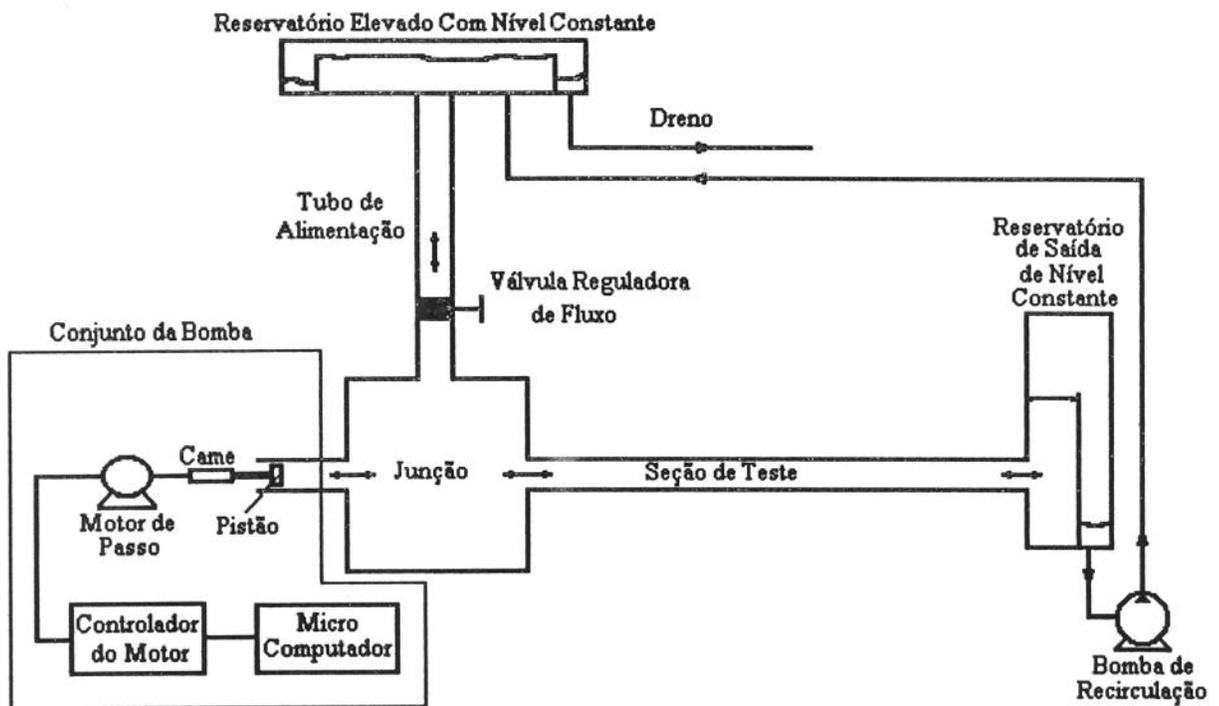


fig. 8 - Desenho esquemático do mecanismo pulso duplicador proposto.

O princípio de funcionamento do sistema pulso duplicador proposto baseia-se no fato de que todos os pulsos de velocidade fisiológicos humano podem ser decompostos em duas componentes, sendo uma componente constante, que reproduz a média temporal da onda e uma componente de flutuação, que representa o nível de oscilação da onda. No sistema proposto, o reservatório elevado de nível constante é o responsável pela componente constante e o deslocamento do pistão, guiado através de uma came e movimentado por um motor de passo, que é controlado por um microcomputador, é o responsável pela componente de flutuação.

Para se obter diversos pulsos de velocidade, o sistema tem que apresentar flexibilidade para reproduzir de diferentes médias e flutuações, sem que sejam necessárias alterações estruturais significativas.

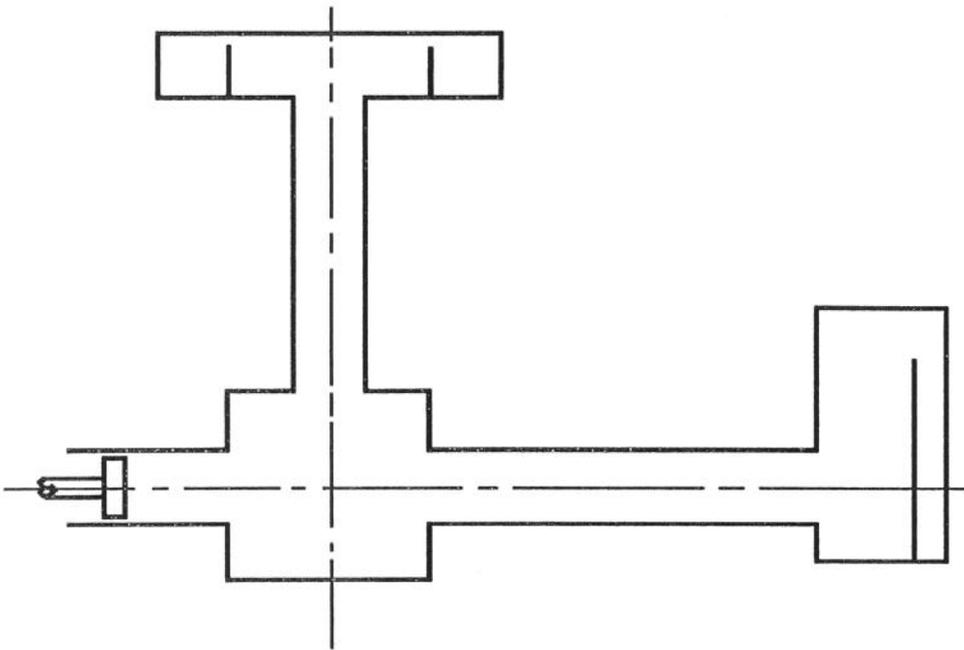


fig. 9 - Desenho esquemático do sistema que será modelado numericamente.

Para que se possa reproduzir as diferentes médias, foi colocado no tubo de alimentação uma válvula controladora de fluxo. Isto permite que, através de uma simples regulagem na válvula, causemos um maior ou menor estrangulamento no fluxo, alterando assim, a vazão do reservatório elevado de nível constante para a seção de teste. Com isto, podemos obter diversas componentes médias de uma maneira simples.

Para estabelecer qual será o ajuste da válvula que irá reproduzir uma velocidade média pré-determinada, podemos utilizar a seguinte expressão:

$$K_v = \frac{2gh}{\bar{U}^2} - (1 + \text{perdas})$$

onde:

$K_v$  - Perda de carga na válvula;

$g$  - Aceleração da gravidade;

$h$  - Diferença de cota entre os reservatórios;

$\bar{U}$  - Velocidade média que se deseja reproduzir na seção de teste;

perdas - Perda de carga no sistema (distribuída e localizada), exceto na válvula.

O grau de obstrução da válvula em função de  $K_v$  pode ser obtido facilmente através de uma curva de calibração da válvula, e com esta curva, pode-se então, ajustar facilmente a abertura da válvula para que se reproduza a velocidade média desejada.

Reproduzir as diferentes componentes de flutuação é mais complexo pois além de reproduzir oscilações máximas diferentes é necessário que as amplitudes de oscilação sejam diferentes entre si no mesmo pulso de velocidade.

Para reproduzir a amplitude de oscilação máxima, regulamos o deslocamento máximo do pistão. Isto pode ser feito facilmente através de uma regulagem no volante da came. Para reproduzir as demais amplitudes de oscilação o pistão deverá reproduzir várias harmônicas. Isto pode ser obtido controlando o motor de passo. Mas para que possamos regular o volante da came e controlarmos o motor de passo, necessitamos saber antes qual será o deslocamento máximo e quais serão as harmônicas de oscilação do pistão, ou seja, qual será a função controladora do pistão que reproduzirá os níveis de flutuações desejados na seção de teste.

Para isto, modelamos o sistema compreendido pelo pistão, reservatório elevado de nível constante, tubo de alimentação, junção e seção de teste, mostrados na fig. 9, utilizando os princípios da mecânica dos fluidos e resolvemos o modelo matemático, obtendo assim a função controladora do pistão.

## Capítulo 3

### Formulação Matemática

Para obtermos a função controladora do pistão, o sistema pulso duplicador proposto foi modelado utilizando os princípios da mecânica dos fluidos. Para tanto, foram utilizadas as equações da conservação de massa, quantidade de movimento e energia em sua forma integral e, através delas, obtivemos o modelo matemático do sistema que relaciona as características físicas do mecanismo pulso duplicador e o pulso de velocidade do pistão. Este modelo matemático foi posteriormente resolvido por dois métodos, um analítico e outro numérico.

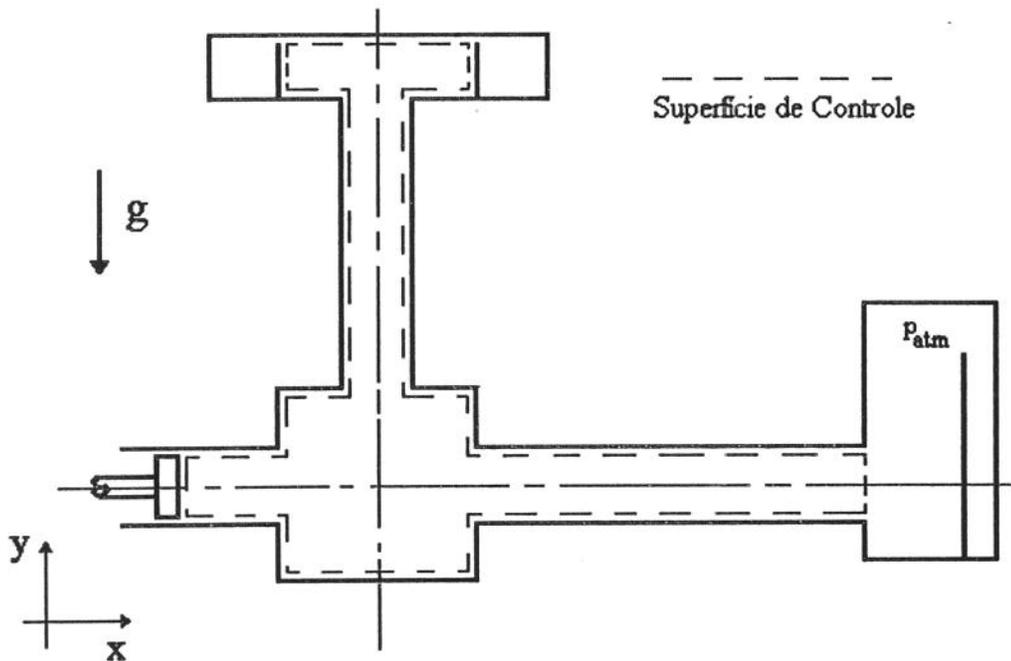


fig. 10 - Esquema do volume de controle e do referencial adotado.

### 3.1 - Formulação Integral

Para a utilização da formulação integral, [Fox, (1985); Potter, (1982); White,(1986)], necessitamos delimitar uma região onde estamos interessados em analisar os fenômenos físicos e sua interação com o meio. Esta região é chamada de volume de controle e a superfície que envolve o volume de controle chamada de superfície de controle. O volume de controle pode ser estacionário ou não, deformável ou não, as propriedades do fluido em seu interior podem variar ou não, bem como a massa que atravessa a superfície de controle. A escolha do volume de controle se faz com o objetivo de simplificar ao máximo o modelo matemático do sistema, sem contudo perder suas características físicas. No caso do mecanismo pulso duplicador proposto, foi adotado um volume de controle cuja superfície de controle é coincidente com a parede sólida e que também possui uma fronteira deformável (acompanhando o pistão). O volume de controle adotado está esquematizado na fig. 10. O reservatório de saída se faz necessário para garantir que o tubo da seção de teste sempre fique com fluido em seu interior, evitando assim, que haja uma descontinuidade de fluido.

Também necessitamos adotar um sistema referencial, pois toda e qualquer grandeza vetorial envolvida na formulação do sistema tem que ser referenciada a este sistema. O referencial adotado é um referencial cartesiano e inercial (x,y), também mostrado na fig. 10.

#### 3.1.1 - Equação da Conservação de Massa

Utilizaremos a equação da conservação de massa para obtermos uma relação entre as velocidades.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = 0 \tag{1}$$

Aplicando a regra de Leibnitz na primeira integral da eq. (1), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \tag{2}$$

Como estamos trabalhando com fluido incompressível,  $\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = 0$ , portanto a eq. (2) fica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = \rho \int_{sc} \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \tag{3}$$

Substituindo a eq. (3) em (1) obtemos:

$$\int_{sc} \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA + \int_{sc} \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (4)$$

onde:

$$\vec{V}_F - \text{velocidade da fronteira.} \quad (5)$$

$$\vec{V}_r - \text{velocidade relativa entre o fluido e a superfície de controle.} \quad (6)$$

### 3.1.2 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x

Utilizaremos a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x para obter uma relação entre as velocidades e pressões.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} V_x \rho dV + \int_{sc} V_x \rho \vec{V}_x \cdot \vec{n} dA = - \int_{sc} p \vec{n} dA + \int_{sc} \vec{n} \cdot \tau dA + F_{MEC_x} + \int_{vc} \rho a_{rel_x} dV + g_x \int_{vc} \rho dV \quad (7)$$

onde:

$$F_{MEC_x} = 0 - \text{Não há forças mecânicas atravessando o Volume de Controle.} \quad (8)$$

$$\int_{vc} \rho a_{rel_x} dV = 0 - \text{Referencial Inercial.} \quad (9)$$

$$g_x \int_{vc} \rho dV = 0 - g_x = 0 \quad (10)$$

Aplicando a regra de Leibnitz na primeira integral da eq. (7), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} V_x \rho dV = \int_{vc} \rho \frac{\partial}{\partial t} (V_x) dV + \int_{vc} V_x \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int_{sc} V_x \rho \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \quad (11)$$

Como estamos trabalhando com fluido incompressível,  $\int_{vc} \mathbf{V}_x \frac{\partial}{\partial t} \rho \, dV = 0$ , portanto a eq. (11) fica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \mathbf{V}_x \rho \, dV = \rho \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_x \, dV + \int_{sc} \mathbf{V}_x \rho \bar{\mathbf{V}}_F \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dA \quad (12)$$

Substituindo as eqs. (8), (9), (10) e (12) em (7), obtemos:

$$\rho \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_x \, dV + \rho \int_{sc} \mathbf{V}_x \bar{\mathbf{V}}_F \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dA + \rho \int_{sc} \mathbf{V}_x \bar{\mathbf{V}}_r \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dA = - \int_{sc} p \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dA + \int_{sc} \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dA \quad (13)$$

### 3.1.3 - Equação da Conservação de Energia

Utilizaremos a equação da conservação de energia para obter mais uma relação entre as velocidades e as pressões.

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v - \dot{W}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \left( \frac{V_i^2}{2} + gz + \hat{u} \right) dV + \int_{sc} \left( \frac{V_i^2}{2} + gz + \hat{u} \right) \rho \bar{\mathbf{V}}_r \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dA \quad (14)$$

onde:

$\dot{W}_s$  - Não há trabalho de eixo atravessando a fronteira do sistema.

(15)

$\dot{W}_v$  - A superfície de controle é coincidente com as paredes sólidas.

(16)

O trabalho inercial é dividido em trabalho inercial de pressão e trabalho inercial viscoso, como mostra a eq. (17) abaixo:

$$\dot{W}_i = \dot{W}_{iv} + \dot{W}_{ip} \quad (17)$$

onde:

$$\dot{W}_{iv} = - \int_{sc} \bar{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{V}}_i) \, dA \quad (18)$$

e

$$\dot{W}_{ip} = \int_{sc} p(\bar{V}_i \cdot \bar{n}) dA \quad (19)$$

A velocidade inercial ( $V_i$ ) é sempre normal à superfície de controle que acompanha o deslocamento do pistão, à superfície de controle à saída da seção de teste e a superfície de controle do reservatório elevado, portanto o trabalho viscoso é nulo, então a eq. (19) fica:

$$-\int_{sc} \bar{n} \cdot (\tau \cdot \bar{V}_i) dA = 0 \quad (20)$$

A velocidade inercial  $V_i$  pode ser calculada pela eq. (21).

$$\bar{V}_i = \bar{V}_r + \bar{V}_F + \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{r} \quad (21)$$

onde:

$\frac{d\bar{r}}{dt} = 0$ - É a velocidade do referencial. Como estamos utilizando um referencial inercial, esta velocidade é nula.

(22)

$\bar{\Omega} \times \bar{r} = 0$ - É a velocidade angular do referencial, que também é nula.

(23)

Substituindo as eqs. (22) e (23) na eq. (21) obtemos:

$$\bar{V}_i = \bar{V}_r + \bar{V}_F \quad (24)$$

Substituindo a eq. (24) na eq. (19), obtemos:

$$\dot{W}_{ip} = \int_{sc} p(\bar{V}_r + \bar{V}_F) \cdot \bar{n} dA \quad (25)$$

Desenvolvendo a primeira integral da eq. (14) pela regra de Leibnitz, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \left( \frac{V_i^2}{2} + gz \right) dV = & \int_{vc} \left( \frac{V_i^2}{2} + gz \right) \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int_{sc} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V_i^2}{2} + gz \right) dV \\ & + \int_{sc} \rho \left( \frac{V_i^2}{2} + gz \right) \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (26)$$

Substituindo a eq. (24) em (26), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) dV = & \int_{vc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \frac{\partial}{\partial t} \rho dV \\ + \int_{sc} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) dV + & \int_{sc} \rho \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (27)$$

Como a aceleração gravitacional e a cota do fluido são independentes do tempo, ou seja,  $\frac{\partial}{\partial t} gz = 0$  e como também estamos trabalhando com fluido incompressível,  $\int_{vc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = 0$ , a eq. (27) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) dV = & \int_{sc} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + \hat{u} \right) dV + \\ & \int_{vc} \rho \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (28)$$

Substituindo as eqs.(15), (16), (25) e (28) na eq. (14), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \int_{sc} p(\vec{V}_r + \vec{V}_F) \cdot \vec{n} dA = & \int_{vc} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + \hat{u} \right) dV + \int_{sc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \rho \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \\ & + \int_{sc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (29)$$

Portanto, as equações da conservação de massa, quantidade de movimento na direção x e energia aplicadas ao sistema da fig. 9, ficam:

$$\int_{sc} \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA + \int_{sc} \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA = 0$$

(4)

$$\rho \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} V_x dV + \rho \int_{sc} V_x \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA + \rho \int_{sc} V_x \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = - \int_{sc} p \cdot \vec{n} dA + \int_{sc} \vec{n} \cdot \tau dA$$

(13)

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \int_{sc} p(\vec{V}_r + \vec{V}_F) \cdot \vec{n} dA &= \int_{vc} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + \hat{u} \right) dV + \int_{sc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \rho \vec{V}_F \cdot \vec{n} dA \\ &+ \int_{sc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \end{aligned}$$

(29)

### 3.2 - Aplicação das Equações da Formulação Integral a Um Modelo Unidimensional

Utilizando um modelo unidimensional para a velocidades, simplificamos o modelo matemático, sem contudo perder o realismo físico. Portanto, as eqs. da conservação de massa, quantidade de movimento na direção x e energia, eqs. (4), (13) e (29) serão reduzidas a um modelo unidimensional utilizando a nomenclatura da tab. 1 e mostrada na fig. 11.

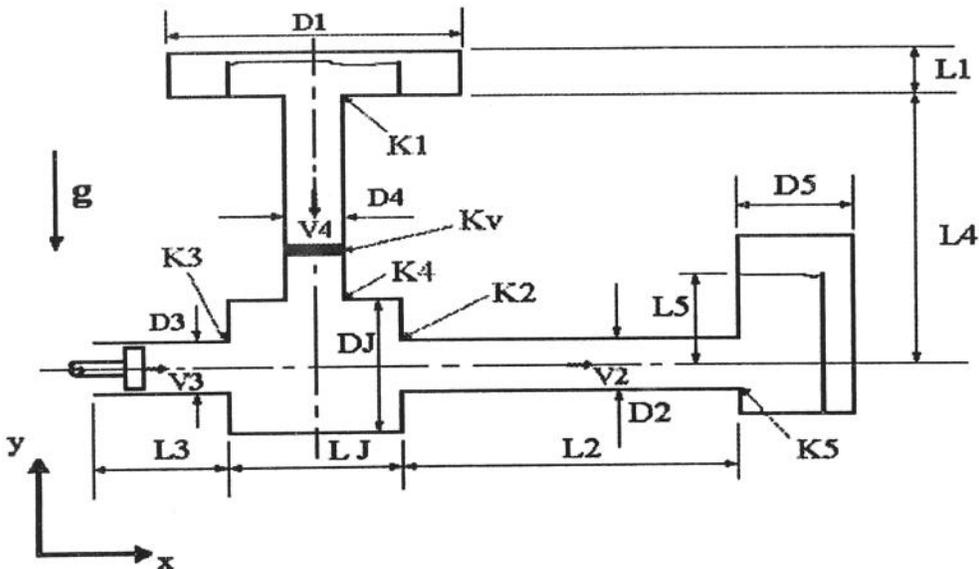


fig. 11 - Significado geométrico da nomenclatura utilizada.

**Nomenclatura**

Tab. 1 - Nomenclatura utilizada.

<b>Área</b>			
$A_1$ -	Área da seção circular do reservatório elevado de nível constante;	$A_2$ -	Área da seção circular do tubo de teste;
$A_3$ -	Área da seção circular do pistão;	$A_4$ -	Área da seção circular do tubo de alimentação;
$A_j$ -	Área da junção;	$A_r$ -	Área de descarga no reservatório de saída com nível constante;
<b>Comprimento</b>			
$L_1$ -	Comprimento do reservatório elevado;	$L_2$ -	Comprimento da seção de teste;
$L_3$ -	Deslocamento máximo do pistão;	$L_{3v}$ -	Posição instantânea do pistão;
$L_4$ -	Comprimento do tubo de alimentação;	$L_5$ -	Altura do reservatório de saída;
$L_j$ -	Comprimento da junção;		
<b>Velocidade</b>			
$V_1$ -	Velocidade do fluido no reservatório elevado;	$V_4$ -	Velocidade do fluido no tubo de alimentação;
$V_3$ -	Velocidade do pistão;	$V_2$ -	Velocidade do fluido na seção de teste;
<b>Aceleração</b>			
$\dot{V}_1$ -	Aceleração do fluido no reservatório elevado;	$\dot{V}_4$ -	Aceleração do fluido no tubo de alimentação;
$\dot{V}_3$ -	Aceleração do pistão;	$\dot{V}_2$ -	Aceleração do fluido na seção de teste;
<b>Coefficientes de Perda</b>			
$K_1$ -	Coefficiente de perda expansão ou contração 1 para 4;	$K_2$ -	Coefficiente de perda na expansão ou contração da junção para 2;
$K_3$ -	Coefficiente de perda na expansão ou contração de 3 para a junção;	$K_4$ -	Coefficiente de perda na expansão ou contração de 4 para a junção;
$K_5$ -	Coefficiente de perda na expansão ou contração de 2 para o reservatório de saída;	$K_v$ -	Coefficiente de perda na válvula reguladora de fluxo;
$f_2$ -	Fator de atrito de Darcy para 2;	$f_4$ -	Fator de atrito de Darcy para 4;
<b>Constante Física e Propriedades do Fluido</b>			
$\rho$ -	densidade do fluido;	$\mu$ -	viscosidade do fluido;
		$g$ -	aceleração da gravidade;
<b>Pressão</b>			
$p_3$ -	pressão na cabeça do pistão.		

Para facilitar a compreensão de cada termo das equações geradas, iremos dividir o volume de controle mostrado na fig. 10 em cinco sub-volumes de controle, como mostra a fig. 12. O volume de controle um (VC-1) refere-se ao reservatório de nível constante; o volume de controle dois (VC-2) refere-se ao tubo da seção de teste; o volume de controle três (VC-3) refere-se à câmara onde o fluido é bombeado e possui superfície deformável acompanhando o deslocamento do pistão; o volume de controle quatro (VC-4) refere-se ao tubo de alimentação; o volume de controle cinco (VC-5) refere-se à junção do tubo de alimentação com a câmara de bombeamento e o tubo da seção de teste. Também iremos adotar algumas hipóteses simplificadoras para aplicar as eqs. (4), (13) e (29) ao sistema proposto, com o objetivo de se obter a equação a ser solucionada. As hipóteses simplificadoras estão apresentadas abaixo:

- Não há velocidade na direção  $x$  no volume de controle 4, ou seja,  $V_{4x}=0$ ;
- O reservatório elevado de nível constante tem uma área muito maior que a área do tubo de alimentação, portanto, a velocidade do reservatório de nível constante é desprezível e como estamos utilizando fluido incompressível, a velocidade em todo o volume de controle é constante, em cada instante, portanto a velocidade do fluido que atravessa a superfície superior do VC-1 também é desprezível;
- Não iremos modelar os fenômenos que ocorrem no sub-volume de controle 5 pois sua seção transversal é muito maior que seção transversal do tubo de alimentação, do pistão e da seção de teste, portanto, a velocidade em seu interior é desprezível;

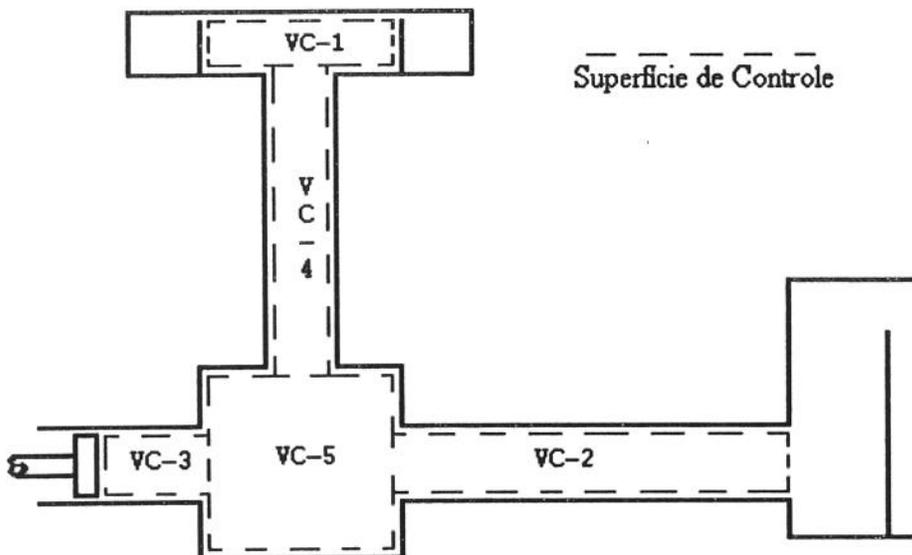


fig. 12 - Desenho esquemático da subdivisão do volume de controle adotado.

- Os perfis de velocidade nas seções transversais são uniformes.

### 3.2.1 - Equação da Conservação de Massa

Utilizaremos a equação da conservação de massa para obtermos uma relação entre a velocidade do reservatório elevado ( $V_1$ ), a velocidade do tubo de alimentação ( $V_4$ ), a velocidade da seção de teste ( $V_2$ ) e a velocidade do pistão ( $V_3$ ). Para tanto, aplicaremos a equação da conservação de massa em sua forma integral, eq. (4), ao sistema mostrado na fig. 9 utilizando os volumes de controles da fig. 12 e a nomenclatura da fig. 11.

$$\int_{SC} \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA + \int_{SC} \vec{V}_f \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (4)$$

obtemos:

$$V_3 A_3 = V_2 A_2 + V_1 A_1 \quad (30)$$

e

$$V_1 A_1 = V_4 A_4 \quad (31)$$

Derivando as eqs. (30) e (31) em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{V}_3 A_3 = \dot{V}_2 A_2 + \dot{V}_1 A_1 \quad (32)$$

e

$$\dot{V}_1 A_1 = \dot{V}_4 A_4 \quad (33)$$

### 3.2.2 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x

Utilizaremos a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x para obter uma relação entre a velocidade da seção de teste ( $V_2$ ), a velocidade do pistão ( $V_3$ ), a velocidade do tubo de alimentação ( $V_4$ ), a pressão<sup>3.1</sup> na cabeça do pistão ( $p_3$ ) e a pressão

---

<sup>3.1</sup> Estamos considerando pressão manométrica.

hidrostática do reservatório de saída ( $p_5 = \rho g L_5$ ). Para tanto, aplicaremos a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x em sua forma integral, eq. (13), ao sistema mostrado na fig. 9 utilizando os volumes de controles da fig. 12 e a nomenclatura da fig. 11.

$$\rho \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} V_x dV + \rho \int_{sc} V_x \bar{V}_F \cdot \bar{n} dA + \rho \int_{sc} V_x \bar{V}_r \cdot \bar{n} dA = - \int_{sc} p \cdot \bar{n} dA + \int_{sc} \bar{n} \cdot \tau dA \quad (13)$$

obtemos:

$$\frac{p_3 A_3}{\rho} = \dot{V}_3 (L_3 - L_{3v}) A_3 + \dot{V}_2 L_2 A_2 - V_3^2 A_3 + V_2^2 A_2 + g L_5 A_2 + \frac{f_2 V_2^2 L_2 \pi D_2}{8} + K_5 \frac{V_2^2}{2} A_2 \quad (34)$$

### 3.2.3 - Equação da Conservação de Energia

Utilizaremos a equação da conservação de energia para obter mais uma relação entre as velocidades ( $V_2, V_3, V_4$ ) e as pressões ( $p_3$  e  $p_5$ ). Para tanto aplicaremos a equação da conservação de energia em sua forma integral, eq. (29), ao sistema mostrado na fig. 9 utilizando os volumes de controle da fig. 12 e a nomenclatura da fig. 11.

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \int_{sc} p (\bar{V}_r + \bar{V}_F) \cdot \bar{n} dA = \int_{vc} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + \hat{u} \right) dV + \int_{sc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \rho \bar{V}_F \cdot \bar{n} dA \\ + \int_{sc} \left( \frac{(V_r^2 + V_F^2)}{2} + gz + \hat{u} \right) \rho \bar{V}_r \cdot \bar{n} dA \end{aligned} \quad (29)$$

Assumindo que toda a energia dissipada pelo fluido devido a sua viscosidade é perdida para o meio via transmissão de calor ou causa um aumento da energia interna do fluido. Com isto, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{p_3 A_3 V_3}{\rho} = V_3 \dot{V}_3 (L_3 - L_{3v}) A_3 + V_2 \dot{V}_2 L_2 A_2 + V_4 \dot{V}_4 L_4 A_4 - \frac{V_3^2}{2} V_3 A_3 + \frac{V_2^2}{2} V_2 A_2 + g L_5 V_2 A_2 \\ + g (L_1 + L_4) V_4 A_4 + \frac{f_4 L_4}{2 D_4} V_4^2 |V_4 A_4| + \frac{f_2 L_2}{2 D_2} V_2^2 |V_2 A_2| + K_1 \frac{V_4^2}{2} |V_4 A_4| + K_2 \frac{V_2^2}{2} |V_2 A_2| \\ + K_3 \frac{V_3^2}{2} |V_3 A_3| + K_4 \frac{V_4^2}{2} |V_4 A_4| + K_5 \frac{V_2^2}{2} |V_2 A_2| + K_v \frac{V_4^2}{2} |V_4 A_4| \end{aligned} \quad (35)$$

## Capítulo 4

### Adimensionalização das Equações do Modelo Unidimensional

Dividiremos agora o nosso estudo em dois casos: Processo Inverso e Processo Direto. O processo inverso é quando determinamos o pulso de velocidade na seção de teste ( $V_2$ ) para um pulso de velocidade do pistão ( $V_3$ ) conhecido. O processo direto é quando determinamos o pulso de velocidade do pistão ( $V_3$ ) para um pulso de velocidade na seção de teste ( $V_2$ ) conhecida, ou seja, o caso do simulador de pulso.

Optamos por estudar o problema neste dois casos distintos pois o processo inverso é mais fácil de verificar e de analisar a solução obtida, e este estudo nos dará subsídios para analisar os resultados do processo direto. As equações obtidas, eqs. (30), (31), (32), (33), (34) e (35) são válidas para ambos os casos, mas as escalas utilizadas para a adimensionalização mudam, como veremos adiante.

#### 4.1 - Processo Inverso

##### 4.1.1 - Escalas Características Utilizadas

A escala utilizada para as velocidades  $V_2$ ,  $V_1$  e  $V_4$  é a velocidade média  $\bar{U}$  do fluido, calculada por  $\bar{U} = \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)}$ . A escala utilizada para a velocidade  $V_3$  é o produto do deslocamento máximo do pistão e a frequência do pistão ( $L_3 f_3$ ).

$$V_3 = V_3^* L_3 f_3, \quad V_2 = V_2^* \bar{U}, \quad V_1 = V_1^* \bar{U} \quad \text{e} \quad V_4 = V_4^* \bar{U} \quad (36)$$

A escala utilizada para a aceleração,  $\dot{V}_2$ ,  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_4$  é a velocidade média e o deslocamento máximo do pistão  $L_3$  e a escala para  $\dot{V}_3$  é a mesma utilizada para a velocidade.

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_3^* L_3 f_3^2, \quad \dot{V}_2 = \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_3}, \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_1^* \frac{\bar{U}^2}{L_3} \quad \text{e} \quad \dot{V}_4 = \dot{V}_4^* \frac{\bar{U}^2}{L_3} \quad (37)$$

As áreas serão escaladas com o deslocamento máximo do pistão, ou seja:

$$A_3 = A_3^* L_3^2, \quad A_2 = A_2^* L_3^2, \quad A_1 = A_1^* L_3^2 \quad \text{e} \quad A_4 = A_4^* L_3^2 \quad (38)$$

Tanto para o deslocamento do pistão ( máximo -  $L_3$  e instantâneo -  $L_{3v}$  ) quanto para os outros comprimentos utilizaremos como escala o deslocamento máximo do pistão. Os diâmetros também serão escalados com o deslocamento máximo.

$$L_3 = L_3^* L_3, \quad L_{3v} = L_{3v}^* L_3, \quad L_2 = L_2^* L_3, \quad L_1 = L_1^* L_3, \quad L_4 = L_4^* L_3, \quad L_5 = L_5^* L_3 \quad \text{e} \quad L_J = L_J^* L_3 \quad (39)$$

$$D_3 = D_3^* L_3, \quad D_2 = D_2^* L_3, \quad D_1 = D_1^* L_3, \quad D_4 = D_4^* L_3, \quad D_5 = D_5^* L_3 \quad \text{e} \quad D_J = D_J^* L_3 \quad (40)$$

A pressão está escalada com a pressão dinâmica.

$$p_3 = p_3^* \rho \bar{U}^2 \quad (41)$$

O tempo está escalado com o deslocamento do pistão e a velocidade média na seção de teste.

$$t = t^* \frac{L_3}{\bar{U}} \quad (42)$$

#### 4.1.2 - Equação da Conservação de Massa

Substituindo a eq. (36) na eq. (30), obtemos:

$$V_3^* L_3 f_3 A_3^* = V_2^* \bar{U} A_2^* + V_1^* \bar{U} A_1^* \Leftrightarrow V_3^* A_3^* \frac{L_3 f_3}{\bar{U}} = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \quad (43)$$

Definindo o número de Strouhal (St) como:  $St = \frac{L_3 f_3}{\bar{U}}$  e substituindo na eq. (43), obtemos:

$$V_3^* A_3^* St = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \quad (44)$$

Também substituindo a eq. (36) na eq. (31), obtemos:

$$V_1^* A_1^* = V_4^* A_4^* \quad (45)$$

Substituindo a eq. (37) na eq. (32), obtemos:

$$\dot{V}_3^* L_3 f_3^2 A_3^* L_3^2 = \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_3} A_2^* L_3^2 + \dot{V}_1^* \frac{\bar{U}^2}{L_3} A_1^* L_3^2 \Leftrightarrow \dot{V}_3^* A_3^* \frac{L_3^2 f_3^2}{\bar{U}^2} = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \quad (46)$$

Sabendo que,  $St = \frac{L_3 f_3}{\bar{U}}$  e substituindo na eq. (46), obtemos:

$$\dot{V}_3^* A_3^* St^2 = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \quad (47)$$

Analogamente para a eq. (33), obtemos:

$$\dot{V}_1^* A_1^* = \dot{V}_4^* A_4^* \quad (48)$$

Portanto, as equações da conservação de massa adimensional aplicadas ao problema ficam:

$$V_3^* A_3^* St = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \quad (44)$$

$$V_1^* A_1^* = V_4^* A_4^* \quad (45)$$

$$\dot{V}_3^* A_3^* St^2 = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \quad (47)$$

$$\dot{V}_1^* A_1^* = \dot{V}_4^* A_4^* \quad (48)$$

### 4.1.3 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x

Aplicando as eqs. (36), (37), (38), (39), (40) e (41) na eq. (34), obtemos:

$$\frac{p_3^* \bar{U}^2 A_3^* L_3^2}{\rho} = \dot{V}_3^* L_3 f_3^2 (L_3^* - L_{3v}^*) L_3 A_3^* L_3^2 + \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_3} L_2^* L_3 A_2^* L_3^2 - V_3^{*2} L_3^2 f_3^2 A_3^* L_3^2 + V_2^{*2} \bar{U}^2 A_2^* L_3^2 + g L_3^* L_3 A_2^* L_3^2 + \frac{f_2 V_2^{*2} \bar{U}^2 L_2^* L_3 \pi D_2^* L_3}{8} + K_5 \frac{V_2^{*2} \bar{U}^2}{2} A_2^* L_3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_3^* A_3^* \bar{U}^2 = \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* L_3^2 f_3^2 + \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* \bar{U}^2 - V_3^{*2} A_3^* L_3^2 f_3^2 + V_2^{*2} A_2^* \bar{U}^2 + L_5^* A_2^* g L_4^* + \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} \bar{U}^2 + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* \bar{U}^2 \quad (49)$$

Dividindo a eq. (49) por  $g L_3$  e definindo o número de Froude (Fr) como:  $Fr = \frac{\bar{U}^2}{g L_3}$ , obtemos que a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x em sua forma adimensional fica:

$$p_3^* A_3^* Fr = \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^2 + \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr - V_3^{*2} A_3^* Fr St^2 + V_2^{*2} A_2^* Fr + L_5^* A_2^* + \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} Fr + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* Fr \quad (50)$$

#### 4.1.4 - Equação da Conservação de Energia

Substituindo as eqs. (36), (37), (38), (39), (40) e (41) na eq. (35), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{p_3^* \rho \bar{U}^2 V_3^* L_3 f_3 A_3^* L_3^2}{\rho} &= V_3^* L_3 f_3 \dot{V}_3^* L_3 f_3^2 (L_3^* - L_{3v}^*) L_3 A_3^* L_3^2 + V_2^* \bar{U} \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_3} L_2^* L_3 A_2^* A_3^* \\ &+ V_4^* \bar{U} \dot{V}_4^* \frac{\bar{U}^2}{L_3} L_4^* L_3 A_4^* L_3^2 - \frac{V_3^{*2} (L_3 f_3)^2}{2} V_3^* L_3 f_3 A_3^* L_3^2 + \frac{V_2^{*2} \bar{U}^2}{2} V_2^* \bar{U} A_2^* L_3^2 \\ &+ g (L_1^* + L_4^*) L_3 V_4^* \bar{U} A_4^* L_3^2 + g L_5^* L_3 V_2^* \bar{U} A_2^* L_3^2 + \frac{f_4 L_4^*}{2 D_4^*} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_3^2| \\ &+ \frac{f_2 L_2^*}{2 D_2^*} V_2^{*2} \bar{U}^2 |V_2^* \bar{U} A_2^* L_3^2| + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_3^2| + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} \bar{U}^2 |V_2^* \bar{U} A_2^* L_3^2| \\ &+ \frac{K_3}{2} V_3^{*2} (L_3 f_3)^2 |V_3^* L_3 f_3 A_3^* L_3^2| + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_3^2| \\ &+ \frac{K_5}{2} V_2^{*2} \bar{U}^2 |V_2^* \bar{U} A_2^* L_3^2| + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_3^2| \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow p_3^* V_3^* A_3^* \bar{U}^3 L_3 f_3 &= V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* (L_3 f_3)^3 + V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* \bar{U}^3 + V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* \bar{U}^3 \\
 &\quad - \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* (L_3 f_3)^3 + \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* \bar{U}^3 + (L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^* g L_4^* \bar{U} + L_5^* V_2^* A_2^* g L_4^* \bar{U} \\
 &\quad + \frac{f_4 L_4^*}{2 D_4^*} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3 + \frac{f_2 L_2^*}{2 D_2^*} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| \bar{U}^3 + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3 + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| \bar{U}^3 \\
 &\quad + \frac{K_3}{2} V_3^{*2} |V_3^* A_3^*| (L_3 f_3)^3 + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3 + \frac{K_5}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| \bar{U}^3 + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3
 \end{aligned} \tag{51}$$

Dividindo a eq. (51) por  $g L_3 \bar{U}$ , obtemos que a equação da conservação de energia adimensionalizada fica:

$$\begin{aligned}
 p_3^* V_3^* A_3^* FrSt &= V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* FrSt^3 + V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr + V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* Fr - \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* FrSt^3 \\
 &\quad + \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* Fr + (L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^* + L_5^* V_2^* A_2^* + \frac{f_4 L_4^*}{2 D_4^*} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{f_2 L_2^*}{2 D_2^*} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr \\
 &\quad + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_3}{2} V_3^{*2} |V_3^* A_3^*| FrSt^3 + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \\
 &\quad + \frac{K_5}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr
 \end{aligned} \tag{52}$$

Portanto, as equações da conservação de massa, quantidade de movimento na direção x e energia em sua forma adimensional são:

$$V_3^* A_3^* St = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \tag{44}$$

$$V_1^* A_1^* = V_4^* A_4^* \tag{45}$$

$$\dot{V}_3^* A_3^* St^2 = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \tag{47}$$

$$\dot{V}_1^* A_1^* = \dot{V}_4^* A_4^* \tag{48}$$

$$p_3^* A_3^* Fr = \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^2 + \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr - V_3^{*2} A_3^* Fr St^2 + V_2^{*2} A_2^* Fr + L_5^* A_2^* + \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} Fr \frac{L_3^*}{A_2} + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* Fr \quad (50)$$

$$p_3^* V_3^* A_3^* Fr St = V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^3 + V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr + V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* Fr - \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* Fr St^3 + \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* Fr + (L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^* + L_5^* V_2^* A_2^* + \frac{f_4 L_4^*}{2 D_4^*} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{f_2 L_2^*}{2 D_2^*} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_3}{2} V_3^{*2} |V_3^* A_3^*| Fr St^3 + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{K_5}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \quad (52)$$

## 4.2 - Processo Direto

### 4.2.1 - Escalas Características Utilizadas

A escala utilizada para as velocidades  $V_2$ ,  $V_1$  e  $V_4$  é a velocidade média  $\bar{U}$  do fluido, calculada por  $\bar{U} = \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)}$ . A escala utilizada para a velocidade  $V_3$  é o produto de um comprimento<sup>3.2</sup> característico e de uma frequência<sup>3.3</sup> característica ( $L_c f_c$ ).

$$V_3 = V_3^* L_c f_c, \quad V_2 = V_2^* \bar{U}, \quad V_1 = V_1^* \bar{U} \quad \text{e} \quad V_4 = V_4^* \bar{U} \quad (53)$$

A escala utilizada para a aceleração,  $\dot{V}_2$ ,  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_4$  é a velocidade média e o comprimento característico  $L_c$  e a escala para  $\dot{V}_3$  é a mesma utilizada para a velocidade.

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_3^* L_c f_c^2, \quad \dot{V}_2 = \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_c}, \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_1^* \frac{\bar{U}^2}{L_c} \quad \text{e} \quad \dot{V}_4 = \dot{V}_4^* \frac{\bar{U}^2}{L_c} \quad (54)$$

As áreas serão escaladas com o quadrado do comprimento característico  $L_c$ :

<sup>3.2</sup> Adotaremos como comprimento característico a maior amplitude do sinal de entrada.

<sup>3.3</sup> Adotaremos como frequência característica a frequência fundamental do sinal de entrada.

$$A_3 = A_3^* L_c^2, \quad A_2 = A_2^* L_c^2, \quad A_1 = A_1^* L_c^2 \quad \text{e} \quad A_4 = A_4^* L_c^2 \quad (55)$$

Tanto para o deslocamento do pistão ( máximo -  $L_3$  e instantâneo -  $L_{3v}$  ) quanto para os outros comprimentos utilizaremos como escala o comprimento característico. Os diâmetro também serão escalado com o comprimento característico.

$$L_3 = L_3^* L_c, \quad L_{3v} = L_{3v}^* L_c, \quad L_2 = L_2^* L_c, \quad L_1 = L_1^* L_c, \quad L_4 = L_4^* L_c, \quad L_5 = L_5^* L_c \quad \text{e} \quad L_J = L_J^* L_c \quad (56)$$

$$D_3 = D_3^* L_c, \quad D_2 = D_2^* L_c, \quad D_1 = D_1^* L_c, \quad D_4 = D_4^* L_c, \quad D_5 = D_5^* L_c \quad \text{e} \quad D_J = D_J^* L_c \quad (57)$$

A pressão está escalada com a pressão dinâmica.

$$p_3 = p_3^* \rho \bar{U}^2 \quad (58)$$

O tempo está escalado com o comprimento característico e a velocidade média na seção de teste.

$$t = t^* \frac{L_c}{\bar{U}} \quad (59)$$

### 4.2.3 - Equação da Conservação de Massa

Substituindo a eq. (53) na eq. (30), obtemos:

$$V_3^* L_c f_c A_3^* L_c^2 = V_2^* \bar{U} A_2^* L_c^2 + V_1^* \bar{U} A_1^* L_c^2 \Leftrightarrow V_3^* A_3^* \frac{L_c f_c}{\bar{U}} = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \quad (60)$$

Definindo o número de Strouhal (St) como:  $St = \frac{L_c f_c}{\bar{U}}$  e substituindo na eq. (60), obtemos:

$$V_3^* A_3^* St = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \quad (61)$$

Também substituindo a eq. (53) na eq. (31), obtemos:

$$V_1^* A_1^* = V_4^* A_4^* \quad (62)$$

Substituindo a eq. (54) na eq. (32), obtemos:

$$\dot{V}_3^* L_c f_c^2 A_3^* L_c^2 = \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_c} A_2^* L_c^2 + \dot{V}_1^* \frac{\bar{U}^2}{L_c} A_1^* L_c^2 \Leftrightarrow \dot{V}_3^* A_3^* \frac{L_c^2 f_c^2}{\bar{U}^2} = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \quad (63)$$

Sabendo que,  $St = \frac{L_c f_c}{\bar{U}}$  e substituindo na eq. (63), obtemos:

$$\dot{V}_3^* A_3^* St^2 = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \quad (64)$$

Analogamente para a eq. (33), obtemos:

$$\dot{V}_1^* A_1^* = \dot{V}_4^* A_4^* \quad (65)$$

Portanto, as equações da conservação de massa adimensional aplicadas ao problema ficam:

$$V_3^* A_3^* St = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \quad (61)$$

$$V_1^* A_1^* = V_4^* A_4^* \quad (62)$$

$$\dot{V}_3^* A_3^* St^2 = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \quad (64)$$

$$\dot{V}_1^* A_1^* = \dot{V}_4^* A_4^* \quad (65)$$

### 4.2.3 - Equação da Conservação de Quantidade de Movimento na Direção x

Aplicando as eqs. (53), (54), (55), (56), (57) e (58) na eq. (34), obtemos:

$$\frac{p_3^* \rho \bar{U}^2 A_3^* L_c^2}{\rho} = \dot{V}_3^* L_c f_c^2 (L_3^* - L_{3v}^*) L_c A_3^* L_c^2 + \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_c} L_2^* L_c A_2^* L_c^2 - V_3^{*2} L_c^2 f_c^2 A_3^* L_c^2 + V_2^{*2} \bar{U}^2 A_2^* L_c^2 + g L_5^* L_c A_2^* L_c^2 + \frac{f_2 V_2^{*2} \bar{U}^2 L_2^* L_c \pi D_2^* L_c}{8} + K_5 \frac{V_2^{*2} \bar{U}^2}{2} A_2^* L_c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_3^* A_3^* \bar{U}^2 = \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* L_3^2 f_3^2 + \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* \bar{U}^2 - V_3^{*2} A_3^* L_3^2 f_3^2 + V_2^{*2} A_2^* \bar{U}^2 + L_5^* A_2^* g L_4^* + \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} \bar{U}^2 + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* \bar{U}^2 \quad (66)$$

Dividindo a eq. (66) por  $gL_c$  e definindo o número de Froude (Fr) como:  $Fr = \frac{\bar{U}^2}{gL_c}$ , obtemos que a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x em sua forma adimensional fica:

$$p_3^* A_3^* Fr = \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^2 + \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr - V_3^{*2} A_3^* Fr St^2 + V_2^{*2} A_2^* Fr + L_5^* A_2^* + \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} Fr + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* Fr \quad (67)$$

### 4.2.3 - Equação da Conservação de Energia

Substituindo as eqs. (53), (54), (55), (56), (57) e (58) na eq. (35), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{p_3^* \rho \bar{U}^2 V_3^* L_c f_c A_3^* L_c^2}{\rho} &= V_3^* L_c f_c \dot{V}_3^* L_c f_c^2 (L_3^* - L_{3v}^*) L_c A_3^* L_c^2 + V_2^* \bar{U} \dot{V}_2^* \frac{\bar{U}^2}{L_c} L_2^* L_c A_2^* L_c^2 \\ &+ V_4^* \bar{U} \dot{V}_4^* \frac{\bar{U}^2}{L_c} L_4^* L_c A_4^* L_c^2 - \frac{V_3^{*2} (L_c f_c)^2}{2} V_3^* L_c f_c A_3^* L_c^2 + \frac{V_2^{*2} \bar{U}^2}{2} V_2^* \bar{U} A_2^* L_c^2 \\ &+ g(L_1^* + L_4^*) L_c V_4^* \bar{U} A_4^* L_c^2 + g L_5^* L_c V_2^* \bar{U} A_2^* L_c^2 + \frac{f_4 L_4^*}{2 D_4^*} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_c^2| \\ &+ \frac{f_2 L_2^*}{2 D_2^*} V_2^{*2} \bar{U}^2 |V_2^* \bar{U} A_2^* L_c^2| + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_c^2| + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} \bar{U}^2 |V_2^* \bar{U} A_2^* L_c^2| \\ &+ \frac{K_3}{2} V_3^{*2} (L_c f_c)^2 |V_3^* L_c f_c A_3^* L_c^2| + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_c^2| \\ &+ \frac{K_5}{2} V_2^{*2} \bar{U}^2 |V_2^* \bar{U} A_2^* L_c^2| + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} \bar{U}^2 |V_4^* \bar{U} A_4^* L_c^2| \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow p_3^* V_3^* A_3^* \bar{U} L_c f_c &= V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* (L_c f_c)^3 + V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* \bar{U}^3 + V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* \bar{U}^3 \\
 &\quad - \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* (L_c f_c)^3 + \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* \bar{U}^3 + (L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^* g L_4^* \bar{U} + L_5^* V_2^* A_2^* g L_4^* \bar{U} \\
 &\quad + \frac{f_4 L_4^*}{2D_4^*} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3 + \frac{f_2 L_2^*}{2D_2^*} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| \bar{U}^3 + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3 + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| \bar{U}^3 \\
 &\quad + \frac{K_3}{2} V_3^{*2} |V_3^* A_3^*| (L_c f_c)^3 + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3 + \frac{K_5}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| \bar{U}^3 + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| \bar{U}^3
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

Dividindo a eq. (68) por  $gL_c \bar{U}$ , obtemos que a equação da conservação de energia adimensionalizada fica:

$$\begin{aligned}
 p_3^* V_3^* A_3^* FrSt &= V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* FrSt^3 + V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr + V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* Fr - \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* FrSt^3 \\
 &\quad + \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* Fr + (L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^* + L_5^* V_2^* A_2^* + \frac{f_4 L_4^*}{2D_4^*} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{f_2 L_2^*}{2D_2^*} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr \\
 &\quad + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_3}{2} V_3^{*2} |V_3^* A_3^*| FrSt^3 + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \\
 &\quad + \frac{K_5}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

Portanto, as equações da conservação de massa, quantidade de movimento na direção x e energia em sua forma adimensional são:

$$V_3^* A_3^* St = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \tag{61}$$

$$V_1^* A_1^* = V_4^* A_4^* \tag{62}$$

$$\dot{V}_3^* A_3^* St^2 = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \tag{64}$$

$$\dot{V}_1^* A_1^* = \dot{V}_4^* A_4^* \tag{65}$$

$$p_3^* A_3^* Fr = \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^2 + \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr - V_3^{*2} A_3^* Fr St^2 + V_2^{*2} A_2^* Fr + L_5^* A_2^* + \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} Fr \frac{L_3^2}{A_2} + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* Fr \quad (67)$$

$$p_3^* V_3^* A_3^* Fr St = V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^3 + V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr + V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* Fr - \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* Fr St^3 + \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* Fr + (L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^* + L_5^* V_2^* A_2^* + \frac{f_4 L_4^*}{2 D_4^*} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{f_2 L_2^*}{2 D_2^*} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_1}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{K_2}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_3}{2} V_3^{*2} |V_3^* A_3^*| Fr St^3 + \frac{K_4}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr + \frac{K_5}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr + \frac{K_v}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \quad (69)$$

Nota-se que a equação da conservação de massa, quantidade de movimento e energia são semelhantes tanto para o processo inverso como para o processo direto. A distinção entre estas equações se faz na forma em que foram definidos os parâmetros adimensionais St e Fr.

Recapitulando, para o processo inverso são  $St = \frac{L_3 f_3}{U}$  e  $Fr = \frac{\bar{U}^2}{gL_3}$  enquanto para o processo

direto são  $St = \frac{L_c f_c}{U}$  e  $Fr = \frac{\bar{U}^2}{gL_c}$ .

### 4.3 - Obtenção da Equação a Ser Solucionada

Para a obtenção da equação final que modela o sistema pulso duplicador proposto, devemos multiplicar a eq. (50) ou (67) por  $V_3^* St$ , obtendo:

$$p_3^* V_3^* A_3^* Fr St = V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^3 + V_3^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr St - V_3^{*2} V_3^* A_3^* Fr St^3 + V_2^{*2} V_3^* A_2^* Fr St + L_5^* A_2^* V_3^* St + \frac{f_2 V_2^{*2} V_3^* L_2^* \pi D_2^*}{8} Fr St \frac{L_3^2}{A_2} + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} V_3^* A_2^* Fr St \quad (70)$$

Igualando o lado direito da eq.(70) com o lado direito da eq. (52) ou (69) e agrupando os termos semelhantes para depois substituir as eqs. (44), (45), (47) e (48) ou (61), (62), (64) e (65) na equação resultante, obtemos:

$$\begin{aligned} & \dot{V}_2^* V_2^* W_1 - \dot{V}_2^* V_3^* W_2 St + V_2^{*2} W_3 - V_2^{*2} V_3^* W_4 St - V_2^* \dot{V}_3^* W_5 St^2 - V_2^* W_6 + V_3^{*2} W_7 St^3 + V_3^* \dot{V}_3^* W_8 St^3 \\ & + V_3^* W_9 St + COENER_1 \left( \frac{V_3^{*2} A_3^{*2}}{A_4^{*2}} Fr St^2 - \frac{2V_3^* V_2^* A_3^* A_2^*}{A_4^{*2}} Fr St + \frac{V_2^{*2} A_2^{*2}}{A_4^{*2}} Fr \right) \left| V_3^* A_3^* St - V_2^* A_2^* \right| \\ & + COENER_2 V_2^{*2} \left| V_2^* A_2^* \right| Fr + COENER_3 V_3^{*2} \left| V_3^* A_3^* \right| Fr St^3 - (COMOM_1 + COMOM_2) V_2^{*2} V_3^* St = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

onde:

$$W_1 = \left[ L_2^* + L_4^* \left( \frac{A_2^*}{A_4^*} \right) \right] A_2^* Fr; \quad (72)$$

$$W_2 = \left[ L_2^* + L_4^* \left( \frac{A_3^*}{A_4^*} \right) \right] A_2^* Fr \quad (73)$$

$$W_3 = \frac{A_2^* Fr}{2}; \quad (74)$$

$$W_4 = A_2^* Fr; \quad (75)$$

$$W_5 = \frac{A_2^* A_3^*}{A_4^*} L_4^* Fr; \quad (76)$$

$$W_6 = A_2^* (L_1^* + L_4^* - L_5^*); \quad (77)$$

$$W_7 = \frac{A_3^* Fr}{2}; \quad (78)$$

$$W_8 = \frac{A_3^{*2}}{A_4^*} L_4^* Fr; \quad (79)$$

$$W_9 = A_3^*(L_1^* + L_4^*) - L_5^* A_2^*; \tag{80}$$

$$\text{COMOM}_1 = \frac{f_2 L_2^* \pi D_2^*}{8} \text{Fr}; \tag{81}$$

$$\text{COMOM}_2 = \frac{K_5 A_2^*}{2} \text{FrSt}; \tag{82}$$

$$\text{COENER}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{f_4 L_4^*}{D_4^*} + K_1 + K_4 + K_v \right); \tag{83}$$

$$\text{COENER}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{f_2 L_2^*}{D_2^*} + K_2 + K_5 \right); \tag{84}$$

$$\text{COENER}_3 = \frac{1}{2} K_3; \tag{85}$$

Esta equação é válida tanto para o processo inverso quando o processo direto, mas tem que se de tomar alguns cuidados com os parâmetros adimensionais das equações. Estes cuidados serão abordados no próximo capítulo.

## Capítulo 5

### Método de Solução

A equação que modela o nosso sistema, eq. (71), foi solucionada através de dois métodos: um analítico e um numérico. Neste estudo exploratório do mecanismo pulso duplicador, resolveu-se simplificar a modelagem e não incluir os termos associados às perdas viscosas. O método analítico é o método de perturbação, o qual foi aplicado a dois casos extremos, quando  $St \rightarrow 0$  e  $St \rightarrow \infty$ , tanto para o processo inverso quanto para o processo direto, e o fato de não considerarmos os termos viscosos possibilitou que obtivéssemos uma solução analítica para três dos quatro casos estudados. O método numérico adotado foi desenvolvido no software *Mathematica*<sup>®</sup>. Uma análise dos resultados obtidos pelos dois métodos é feita.

#### 5.1 - Método de Perturbação

O método de perturbação é um processo que obtem uma solução analítica aproximada de sistemas que envolvem parâmetros pequenos ou grandes, chamados de parâmetros de perturbação. Estes parâmetros são ajustados, podendo ser conservados, aproximados ou mesmo negligenciados, simplificando assim o sistema e possibilitando que se obtenha uma solução analítica. Entretanto, para que isso não altere a natureza do sistema, necessitamos verificar qual é a influência dos diversos elementos que compõem o sistema, através da comparação com seus elementos básicos. Isto pode ser feito através da adimensionalização das equações. [Nayfeh, (1981) e (1973)]

A principal ferramenta matemática utilizada neste método é uma expansão assintótica em relação ao parâmetro de perturbação. Embora a expansão possa ser divergente, sua representação qualitativa pode ser muito útil na representação da solução do sistema.

Neste estudo, não iremos considerar os termos que representam o efeito viscoso (perdas de carga), ou seja:

$$\text{COMOM}_1 = 0$$

$$\text{COMOM}_2 = 0$$

$$\text{COENER}_1 = 0$$

$$\text{COENER}_2 = 0$$

$$\text{COENER}_3 = 0$$

Portanto, o sistema que solucionaremos pelo método de perturbação é o representado pela eq. (86)<sup>4.2</sup>, ou seja, a eq. (71) com as restrições acima.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 V_2 W_1 - \dot{V}_2 V_3 W_2 St + V_2^3 W_3 - V_2^2 V_3 W_4 St - V_2 \dot{V}_3 W_5 St^2 - V_2 W_6 + V_3^3 W_7 St^3 + V_3 \dot{V}_3 W_8 St^3 \\ + V_3 W_9 St = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

### 5.1.1 - Processo Inverso

Como foi mencionado anteriormente, neste caso obteremos o pulso de velocidade na seção de teste ( $V_2$ ) para um dado pulso de velocidade do pistão ( $V_3$ ) conhecido (também usaremos a discriminação sinal de entrada e sinal de saída para, neste caso, o pulso de velocidade do pistão e o pulso de velocidade na seção de teste, respectivamente). Iremos estudar dois casos distintos, o primeiro caso é quando o parâmetro de perturbação tende a zero e outro quando este tende a infinito.

Como sinal de entrada utilizaremos uma função periódica simples, do tipo:

$$V_3 = \sin(St.t)$$

Com este tipo de sinal podemos estudar o comportamento do sistema pulso duplicador quando variamos os dois parâmetros dinâmicos que o governam ( $St$  e  $Fr$ ) e também analisar a influência dos parâmetros geométricos.

#### 5.1.1.1 - Solução para $St \rightarrow 0$

Analisando a eq. (86), verificamos que se trata de um problema de perturbação regular, para  $St \rightarrow 0$ . Como solução, propomos uma série assintótica de segunda ordem, eq. (87). A série proposta só poderá ser utilizada para valores de  $St < 1$ .

$$V_2 = V_{20} + V_{21}St + V_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3) \quad (87)$$

Cuja a derivada é representada pela eq. (88).

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_{20} + \dot{V}_{21}St + \dot{V}_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3) \quad (88)$$

<sup>4.2</sup> Não iremos mais utilizar a notação \* para indicar variável adimensional.

Substituindo as eqs. (87) e (88) na eq. (86), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & (\dot{V}_{20} + \dot{V}_{21}St + \dot{V}_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3))(V_{20} + V_{21}St + V_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3))W_1 - \\
 & (\dot{V}_{20} + \dot{V}_{21}St + \dot{V}_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3))V_3W_2St + (V_{20} + V_{21}St + V_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3))^3W_3 - \\
 & (V_{20} + V_{21}St + V_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3))^2V_3W_4St \\
 & - (V_{20} + V_{21}St + V_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3))\dot{V}_3W_5St^2 - (V_{20} + V_{21}St + V_{22}St^2 + \mathcal{O}(St^3))W_6 \\
 & + V_3W_7St^3 + V_3\dot{V}_3W_8St^3 + V_3W_9St = 0
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

Fatorando a eq. (89) e reagrupando os termos de mesma ordem em St, obtemos:

**ordem zero:**

$$\dot{V}_{20}V_{20}W_1 + V_{20}^3W_3 - V_{20}W_6 = 0
 \tag{90}$$

**primeira ordem:**

$$\dot{V}_{21}V_{20}W_1 + \dot{V}_{20}V_{21}W_1 - V_3\dot{V}_{20}W_2 + 3V_{20}^2V_{21}W_3 - V_3V_{20}^2W_4 - V_{21}W_6 + V_3W_9 = 0
 \tag{91}$$

**segunda ordem:**

$$\begin{aligned}
 & V_{21}\dot{V}_{21}W_1 + \dot{V}_{20}V_{22}W_1 + V_{20}\dot{V}_{22}W_1 - \dot{V}_{21}V_3W_2 + 3V_{20}V_{21}^2W_3 + 3V_{20}^2V_{22}W_3 - 2V_{20}V_{21}V_3W_4 \\
 & - V_{22}W_6 = 0
 \end{aligned}
 \tag{92}$$

As eqs. (90), (91) e (92) são equações diferenciais ordinárias lineares. A solução recursiva destas equações leva a uma solução aproximada para  $V_2(t)$ , cujo o erro é da ordem de  $St^3$ .

### 5.1.1.1.1 - Solução para o Termo de Ordem Zero

A eq. (90) pode ser rescrita na forma.

$$\dot{V}_{20}W_1 + V_{20}^2W_3 - W_6 = 0
 \tag{93}$$

A eq. (93) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não linear, mas que possui solução analítica. Esta solução é obtida através Transformada de Riccati, que aumenta um grau na equação diferencial ordinária original, mas a transforma em uma equação linear.

Podemos generalizar a transformada de Riccati por:

$$v = C \frac{u'}{u} \quad (94)$$

onde:

$v$  - variável original;

$C$  - constante de transformação;

$u$  - variável transformada;

$u'$  - derivada da variável transformada.

No nosso caso, podemos utilizar como transformada de Riccati:

$$V_{20} = \left( \frac{W_1}{W_3} \right) \frac{u'}{u} \quad (95)$$

e a derivada da transformada:

$$\dot{V}_{20} = \left( \frac{W_1}{W_3} \right) \left[ \frac{u''}{u} - \left( \frac{u'}{u} \right)^2 \right] \quad (96)$$

Substituindo as eqs. (95) e (96) na eq. (93), e realizando algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$u'' - \left( \frac{W_6 W_3}{W_1^2} \right) u = 0 \quad (97)$$

A solução da eq. (97) é do tipo:

$$u = A \exp\left(\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right) \quad (98)$$

Derivando a eq. (98) em relação ao tempo, obtemos:

$$u' = A \frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} \exp\left(\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right) - B \frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} \exp\left(-\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right)$$

(99)

Substituindo as eqs (98) e (99) na eq. (95), obtemos:

$$V_{20} = \sqrt{\frac{W_6}{W_3}} \left[ \frac{A \exp\left(\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right) - B \frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} \exp\left(-\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right)}{A \exp\left(\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{W_6 W_3}}{W_1} t\right)} \right]$$

(100)

Introduzindo a condição inicial, para  $t = 0 \Rightarrow V_{20} = \sqrt{\frac{W_6}{W_3}} = 1$  na eq. (100), obtemos:

$$A = \forall \quad e \quad B = 0$$

Portanto a eq. (100) pode ser escrita como:

$$V_{20} = \sqrt{\frac{W_6}{W_3}} \Rightarrow V_{20} = \sqrt{\frac{2(L_1 + L_4 - L_5)}{Fr}} = 1$$

(101)

A solução de ordem zero é a mesma obtida para o caso de um escoamento saindo de um reservatório em regime permanente.

### 5.1.1.1.2 - Solução para o Termo de Primeira Ordem

Iremos agora solucionar a eq. (91).

$$\dot{V}_{21} V_{20} W_1 + \dot{V}_{20} V_{21} W_1 - V_3 \dot{V}_{20} W_2 + 3V_{20}^2 V_{21} W_3 - V_3 V_{20}^2 W_4 - V_{21} W_6 + V_3 W_9 = 0$$

(91)

Como já sabemos da eq. (101) que  $V_{20} = \text{Cte} \Rightarrow \dot{V}_{20} = 0$ , podemos simplificar a eq. (91), obtendo:

$$\dot{V}_{21} + V_{21} \left( \frac{3V_{20}^2 W_3 - W_6}{V_{20} W_1} \right) = V_3 \left( \frac{V_{20}^2 W_4 - W_9}{V_{20} W_1} \right)$$

(102)

Fazendo:

$$b_{21} = \left( \frac{3V_{20}^2 W_3 - W_6}{V_{20} W_1} \right) \quad (103)$$

e

$$b_{31} = \left( \frac{V_{20}^2 W_4 - W_9}{V_{20} W_1} \right) \quad (104)$$

Substituindo as eqs. (103) e (104) na eq. (102), obtemos:

$$\dot{V}_{21} + V_{21} b_{21} = V_3 b_{31} \quad (105)$$

A eq. (105) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, do tipo que pode ser generalizada pela eq. (106):

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (106)$$

A solução da eq. (106) é obtida pela técnica do fator integrante. Não iremos demonstrar como se obtém a solução, que pode ser encontrada em detalhes em Swokowski (1983) e Demidovitch (1987).

$$y \exp\left[\int P(x)dx\right] = \int Q(x) \exp\left[\int P(x)dx\right] dx + D \quad (107)$$

No nosso caso,  $P(x) = b_{21}$  e  $Q(x) = b_{31} V_3$ .

Portanto, a solução da eq. (105) é:

$$V_{21} = \frac{b_{31} \int V_3(t) \cdot \exp(b_{21} \cdot t) dt + D}{\exp(b_{21} \cdot t)} \quad (108)$$

Como no método de perturbação a solução da equação diferencial é uma série, cada termo que compõe a série terá uma condição inicial específica, mas a somatória das condições iniciais terá que ser igual à condição inicial da equação original. Como a condição inicial da equação de ordem zero já satisfaz à condição inicial original, a somatória das condições originais dos termos restantes tem que ser nula. Portanto, as condições iniciais para os termos de ordem superior (primeira e segunda ordem) será a velocidade nula.

Aplicando então a condição inicial de velocidade nula na eq. (108) e sabendo que  $V_3 = \sin(St.t)$ , obtemos que:

$$D = \frac{b_{31}St}{b_{21}^2 + St^2} \quad (109)$$

Substituindo a eq. (109) na eq. (108), obtemos que a solução de primeira ordem,  $V_{21}$  fica:

$$V_{21} = \frac{b_{31}St}{\exp(b_{21}.t)(b_{21}^2 + St^2)} + \frac{b_{31}}{b_{21}^2 + St^2} [b_{21} \sin(St.t) - St \cos(St.t)] \quad (110)$$

### 5.1.1.1.3 - Solução para o Termo de Segunda Ordem

Iremos agora solucionar a eq. (92):

$$V_{21} \dot{V}_{21} W_1 + \dot{V}_{20} V_{22} W_1 + V_{20} \dot{V}_{22} W_1 - \dot{V}_{21} V_3 W_2 + 3V_{20} V_{21}^2 W_3 + 3V_{20}^2 V_{22} W_3 - 2V_{20} V_{21} V_3 W_4 - V_{22} W_6 = 0 \quad (92)$$

Como já sabemos da eq. (101) que  $V_{20} = \text{Cte} \Rightarrow \dot{V}_{20} = 0$ , podemos simplificar a eq. (92), obtendo:

$$\dot{V}_{22} + V_{22} b_{21} = -\frac{V_{21} \dot{V}_{21}}{V_{20}} + \frac{\dot{V}_{21} V_3 W_2}{V_{20} W_1} - \frac{3V_{21}^2 W_3}{W_1} + \frac{2V_{20} V_{21} V_3 W_4}{V_{20} W_1} \quad (111)$$

A eq. (111), também é uma equação linear de primeira ordem que pode ser generalizada pela eq. (106), portanto sua solução é obtida pela eq. (107), fazendo,  $P(x) = b_{21}$

e  $Q(x) = -\frac{V_{21} \dot{V}_{21}}{V_{20}} + \frac{\dot{V}_{21} V_3 W_2}{V_{20} W_1} - \frac{3V_{21}^2 W_3}{W_1} + \frac{2V_{20} V_{21} V_3 W_4}{V_{20} W_1}$ . A condição inicial será de velocidade nula, ou seja,  $V_{22}(0) = 0$ . Portanto a solução da equação de segunda ordem,  $V_{22}$ , pode ser escrita como:

$$V_{22} = \text{Const}_{21} + \frac{\text{Const}_{22}}{\exp(2b_{21}.t)} + \text{Const}_{23} \cos(2St.t) + \frac{\text{Const}_{24}}{\exp(b_{21}.t)} + \frac{\text{Const}_{25} \cos(St.t)}{\exp(b_{21}.t)} + \frac{\text{Const}_{26} \sin(St.t)}{\exp(b_{21}.t)} + \text{Const}_{27} \sin(2St.t) \quad (112)$$

onde:

$$\text{Const}_{21} = \frac{b_{31}(St^2 W_2 - 3b_{31} W_3 + 2b_{21} W_4)}{2(b_{21}^3 + b_{21} St^2) W_1}; \quad (113)$$

$$\text{Const}_{22} = \frac{b_{31}^2 St^2 (-2b_{21} W_1 + 3W_3)}{b_{21}(b_{21}^2 + St^2)^2 W_1}; \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \text{Const}_{23} = b_{31} & \frac{[2(2b_{21}^2 - St^2)b_{31} St^2 W_1 - 3(b_{21}^3 + b_{21} St^2) St^2 W_2 + 3(b_{21}^3 - 5b_{21} St^2)b_{31} W_3]}{2(b_{21}^2 + St^2)^2 (b_{21}^2 + 4St^2) W_1} \\ & + b_{31} \frac{[-2(b_{21}^4 - (b_{21}^2 + 2St^2) St^2) W_4]}{2(b_{21}^2 + St^2)^2 (b_{21}^2 + 4St^2) W_1}; \end{aligned} \quad (115)$$

$$\text{Const}_{24} = \frac{b_{31} [b_{21} b_{31} W_1 - W_2 (b_{21}^2 + 2St^2) - 6b_{31} W_3 + 2b_{21} W_4]}{(b_{21}^3 + 4b_{21} St^2) W_1}; \quad (116)$$

$$\text{Const}_{25} = \frac{b_{31} (-b_{21}^2 b_{31} W_1 + b_{31} St^2 W_1 + b_{21}^3 W_2 + b_{21} St^2 W_2 + 6b_{21} b_{31} W_3 - 2b_{21}^2 W_4 - 2St^2 W_4)}{(b_{21}^2 + St^2)^2 W_1}; \quad (117)$$

$$\text{Const}_{26} = \frac{2b_{31}^2 St (-b_{21} W_1 + 3W_3)}{(b_{21}^2 + St^2)^2 W_1}; \quad (118)$$

$$\begin{aligned} \text{Const}_{27} = b_{31} St & \frac{(-b_{21}^3 b_{31} + 5b_{21} b_{31} St^2) W_1 + (b_{21}^4 - b_{21}^2 St^2 - 2St^4) W_2 + 6(2b_{21}^2 b_{31} - b_{31} St^2) W_3}{2(b_{21}^2 + St^2)^2 (b_{21}^2 + 4St^2)^2 W_1} \\ & - b_{31} St \frac{6(b_{21}^3 + b_{21} St^2) W_4}{2(b_{21}^2 + St^2)^2 (b_{21}^2 + 4St^2)^2 W_1}; \end{aligned} \quad (119)$$

Para obtermos a solução para  $V_2$  pelo método de perturbação temos que substituir as eqs. (101), (110) e (112) na eq. (87), como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
V_2 = & 1 + St \left[ \frac{b_{31}}{St^2 + b_{21}^2} \left( \frac{St}{\exp(b_{21} \cdot t)} + b_{21} \sin(St \cdot t) - St \cos(St \cdot t) \right) \right] + St^2 [Const_{21}] \\
& + St^2 \left[ \frac{Const_{22}}{\exp(2b_{21} \cdot t)} + Const_{23} \cos(St \cdot t) + \frac{Const_{24}}{\exp(b_{21} \cdot t)} + \frac{Const_{25} \cos(St \cdot t)}{\exp(b_{21} \cdot t)} + \frac{Const_{26} \sin(St \cdot t)}{\exp(b_{21} \cdot t)} \right] \\
& + St^2 [Const_{27} \sin(2St \cdot t)]
\end{aligned} \tag{120}$$

Para se obter o pulso de velocidade no tubo de alimentação ( $V_4$ ), basta utilizar a equação da conservação de massa, eq. (44) e (45) ou (61) e (62) e substituir os dados conhecidos, ( $V_3$  e  $V_2$ ).

### 5.1.1.2 - Solução para $St \rightarrow \infty$

Para solucionar a eq. (86) quando  $St \rightarrow \infty$  propomos uma série assintótica utilizando como parâmetro de perturbação ( $1/St$ ), eq. (121):

$$V_2 = V_{20} + \left( \frac{1}{St} \right) V_{21} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{St^2} \right) \tag{121}$$

Cuja derivada é:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_{20} + \left( \frac{1}{St} \right) \dot{V}_{21} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{St^2} \right) \tag{122}$$

A equação original, eq. (86) não apresenta o parâmetro de perturbação adotado de uma maneira explícita, portanto teremos que realizar algumas manipulações algébricas para que apareça o parâmetro. Para isto, substituiremos o sinal de entrada ( $V_3$ ) na eq. (86), obtendo:

$$\begin{aligned}
& \dot{V}_2 V_2 W_1 + V_2^3 W_3 - V_2 W_6 + St [W_9 - W_4 V_2^2 - W_2 \dot{V}_2] \sin(St \cdot t) \\
& + St^3 [W_7 \sin^3(St \cdot t) - W_5 \cos(St \cdot t) V_2] + St^4 W_8 \cos(St \cdot t) \sin(St \cdot t) = 0
\end{aligned} \tag{123}$$

Dividindo a eq. (123) por  $St^4$ , obtemos:

$$W_8 \cos(St.t) \sin(St.t) + \left(\frac{1}{St}\right) [W_7 \sin^3(St.t) - W_5 \cos(St.t)V_2] + \left(\frac{1}{St}\right)^3 [W_9 - W_4 V_2^2 - W_2 \dot{V}_2] \sin(St.t) + \left(\frac{1}{St}\right)^4 [\dot{V}_2 V_2 W_1 + V_2^3 W_3 - V_2 W_6] = 0 \quad (124)$$

Na eq. (124) o parâmetro de perturbação vem multiplicando a derivada de ordem superior, ou seja, é um caso de perturbação singular. Para podermos contornar este problema, teremos que propor uma transformação para a variável independente que desapareça com a singularidade. Para tanto, iremos utilizar a seguinte transformação:

$$\tau = St^3 . t \quad (125)$$

Como isto, as derivadas em relação à variável independente antiga (t) podem ser expressas em função da nova variável independente (τ) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} ( ) = \frac{d}{d\tau} ( ) \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} ( ) St^3 \quad (126)$$

Substituindo as eqs. (125) e (126) na eq. (124), obtemos:

$$W_8 \cos\left(\frac{\tau}{St^2}\right) \sin\left(\frac{\tau}{St^2}\right) - W_2 \sin\left(\frac{\tau}{St^2}\right) \dot{V}_2 + \left(\frac{1}{St}\right) [W_7 \sin^3\left(\frac{\tau}{St^2}\right) - W_5 \cos\left(\frac{\tau}{St^2}\right)V_2] + \left(\frac{1}{St}\right)^3 [W_9 - W_4 V_2^2] \sin\left(\frac{\tau}{St^2}\right) + \left(\frac{1}{St}\right)^4 [\dot{V}_2 V_2 W_1 + V_2^3 W_3 - V_2 W_6] = 0 \quad (127)$$

A expansão proposta para  $V_2$  continua valendo, mas agora a solução obtida não será mais função de t, mas sim de τ. Entretanto, se utilizarmos somente a expansão em relação a variável dependente  $V_2$ , a solução de primeira ordem apresentará termos seculares. Estes termos são funções harmônicas, mas não periódicas, que crescem ou decaem indefinidamente com o tempo. Para contornar este problema expandiremos também a variável independente em uma série assintótica do parâmetro de perturbação (técnica de Lighthill), conforme mostra a eq. (128).

$$\tau = s + \xi_1(s) \left(\frac{1}{St}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{St^2}\right) \quad (128)$$

Novamente, precisamos relacionar as derivadas da antiga variável independente (τ) com a nova variável independente (s). Isto pode ser feito através da seguinte expressão:

$$\frac{d}{d\tau}(\ ) = \frac{d}{ds}(\ ) \frac{ds}{d\tau} = \frac{d}{ds}(\ ) \left[ 1 + \dot{\xi}_1(s) \left( \frac{1}{St} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{St^2} \right) \right]^{-1}$$

(129)

Com isto, a expansão para  $V_2$  agora será uma função da nova variável independente ( $s$ ), como mostra a eq. (130):

$$V_2(s) = V_{20}(s) + V_{21}(s) \left( \frac{1}{St} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{St^2} \right)$$

(130)

E sua derivada é:

$$\dot{V}_2(s) = \dot{V}_{20}(s) + \dot{V}_{21}(s) \left( \frac{1}{St} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{St^2} \right)$$

(131)

Substituindo as eqs. (128), (129), (130) e (131) na eq. (127), fatorando e depois agrupando os termos semelhantes, obtemos:

ordem zero:

$$W_8 \cos \left( \frac{s}{St^2} \right) \sin \left( \frac{s}{St^2} \right) - W_2 \sin \left( \frac{s}{St^2} \right) \dot{V}_{20} = 0$$

(132)

primeira ordem:

$$\dot{\xi}_1 W_8 \cos \left( \frac{s}{St^2} \right) \sin \left( \frac{s}{St^2} \right) + W_7 \sin^3 \left( \frac{s}{St^2} \right) - W_5 \cos \left( \frac{s}{St^2} \right) V_{20} + W_1 V_{20} \dot{V}_{20} - W_2 \sin \left( \frac{s}{St^2} \right) \dot{V}_{21} = 0$$

(133)

### 5.1.1.2.1 - Solução para o Termo de Ordem Zero

Para obtermos a solução de ordem zero, eq. (132), basta integrar ambos os lados em relação ( $s$ ). Com isto obtemos:

$$V_{20} = A + \frac{St^2 W_8}{W_2} \sin \left( \frac{s}{St^2} \right)$$

(134)

Como condição inicial iremos impor que  $V_{20}(0) = 0$ . Esta condição inicial irá simplificar a solução de primeira ordem. Com isto, aplicando a condição inicial à eq. (135) obtemos:

$$V_{20} = \frac{St^2 W_8}{W_2} \sin\left(\frac{s}{St^2}\right) \quad (135)$$

### 5.1.1.2.2 - Solução para o Termo de Primeira Ordem

Para obtermos a solução para o termo de primeira ordem também integramos ambos os lados da eq. (133) em relação a (s). Mas antes, devemos substituir a eq. (135) e simplificar a equação resultante, eq. (136).

$$\dot{\xi}_1 W_8 \cos\left(\frac{s}{St^2}\right) + W_7 \sin^2\left(\frac{s}{St^2}\right) - St^2 \frac{W_5 W_8}{W_2} \cos\left(\frac{s}{St^2}\right) + St^2 \frac{W_1 W_8^2}{W_2^2} \cos\left(\frac{s}{St^2}\right) - W_2 \dot{V}_{21} = 0 \quad (136)$$

Como foi mencionada anteriormente, quando integramos a eq. (136) para obtermos a solução de primeira ordem, há o aparecimento de um termo secular e este termo é oriundo do termo  $\sin^2\left(\frac{s}{St^2}\right)$ . Para que não haja o aparecimento do termo secular, temos que impor que:

$$\dot{\xi}_1 W_8 \cos\left(\frac{s}{St^2}\right) + W_7 \sin^2\left(\frac{s}{St^2}\right) = 0 \quad \therefore \dot{\xi}_1 = -\frac{W_7}{W_8} \frac{\sin^2\left(\frac{s}{St^2}\right)}{\cos\left(\frac{s}{St^2}\right)} \quad (137)$$

Substituindo a eq. (137) na eq. (136) e integrando a equação resultante, obtemos:

$$V_{21} = A + \frac{St^4 (-W_2 W_5 + W_1 W_8)}{W_2^3} \sin\left(\frac{s}{St^2}\right) \quad (138)$$

Para estabelecermos a condição inicial temos que tomar o mesmo cuidado do caso anterior, portanto aqui a condição inicial será:  $V_{21}(0) = 1$ . Com isto obtemos que a solução da primeira ordem é:

$$V_{21} = 1 + \frac{St^4 (-W_2 W_5 + W_1 W_8)}{W_2^3} \sin\left(\frac{s}{St^2}\right) \quad (139)$$

Tanto a solução de ordem zero, eq. (135), quanto a solução de primeira ordem, eq. (139), foram obtidas como funções de s. Mas o que nos interessa é uma solução em função de

t. Para tanto, necessitamos estabelecer uma relação entre  $s$  e  $t$ , e para isto, precisaremos determinar  $\xi_1$ , ou seja, integrarmos a eq. (137):

$$\xi_1 = \int \dot{\xi}_1 ds = - \int \frac{W_7}{W_8} \frac{\sin^2\left(\frac{s}{St^2}\right)}{\cos\left(\frac{s}{St^2}\right)} ds \quad (140)$$

Com isto,  $\xi_1$  pode ser escrito como:

$$\xi_1 = St^2 \frac{W_7}{W_8} \left\{ \sin\left(\frac{s}{St^2}\right) - \ln \left[ \tan\left(\frac{s}{St^2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\} \quad (141)$$

Da forma que  $\xi_1$  está representado, eq. (141), a relação entre  $t$  e  $s$  se apresentará de uma forma implícita. Para que se possa obter uma relação explícita, iremos expandir  $\sin$ ,  $\tan$  e  $\ln$  em série de potências e como estamos analisando o caso de  $St \rightarrow \infty$ , só iremos utilizar o primeiro termo da série de potência que representam  $\sin$ ,  $\tan$  e  $\ln$ , obtendo assim que:

$$\xi_1 = 0 \quad (142)$$

Substituindo a eq. (142) na eq. (128), obtemos:

$$\tau = s \quad (143)$$

E finalmente substituindo a eq. (143) na eq. (125) obtemos a relação entre  $s$  e  $t$ , ou seja:

$$s = t \cdot St^3 \quad (144)$$

Portanto, para se obter a solução da eq. (86) em relação a  $t$  quando  $St \rightarrow \infty$ , basta substituir a eq. (144) nas eqs. (135) e (139) e substituí-las na série assintótica proposta como solução, eq. (121), obtendo assim que:

$$V_2(t) = \left( \frac{St^2 W_8}{W_2} + \frac{St^3 W_8 (-W_2 W_5 + W_1 W_8)}{W_2^3} \right) \sin(St \cdot t) + \frac{1}{St} \quad (145)$$

Para o cálculo do pulso de velocidade no tubo de alimentação ( $V_4$ ) utiliza-se processo análogo ao adotado para o caso anterior.

## 5.1.2 - Processo Direto

Para obtermos a solução para o processo direto, solucionaremos a eq. (86), mas agora o sinal de entrada é  $V_2$  e o sinal de saída é  $V_3$ . Também estudaremos os casos extremos do parâmetro de perturbação, ou seja, quando Strouhal tende a zero e quando Strouhal tende a infinito.

Para ambos os casos usaremos um sinal de entrada composto de uma média e um flutuação em relação a esta média, ou seja:

$$V_2 = 1 + St \sin(St.t) \quad (146)$$

A derivada do sinal de entrada é:

$$\dot{V}_2 = St^2 \sin(St.t) \quad (147)$$

Estudaremos este caso mais simples, porque este procedimento servirá de base para o estudo dos pulsos de velocidade fisiológicos os quais são semelhantes ao mostrado pela eq. (146). Também este estudo servirá para se verificar a resposta do simulador para variações dos parâmetros dinâmicos do problema ( $St$  e  $Fr$ ) e da geometria do simulador.

### 5.1.2.1 - Solução para $St \rightarrow 0$

Para solucionarmos a eq. (86) para o processo direto e  $St \rightarrow 0$ , devemos antes substituir as eqs. (146) e (147), obtendo assim a eq. (148)<sup>4.2</sup>:

$$\begin{aligned} St^2 [W_1 \cos(St.t) \sin(St.t) + W_3 \sin^3(St.t) - W_2 \cos(St.t) V_3 - W_4 \sin^2(St.t) V_3] + \\ St^2 [W_7 V_3^3 - W_5 \sin(St.t) \dot{V}_3 + W_8 V_3 \dot{V}_3] + (3W_3 - W_6) \sin(St.t) + V_3 (W_9 - W_4) \\ + St [W_1 \cos(St.t) + 3W_3 \sin^2(St.t) - 2W_4 \sin(St.t) V_3 - W_5 \dot{V}_3] = 0 \end{aligned} \quad (148)$$

A eq. (148) é um caso de perturbação singular. Para remover esta singularidade vamos adotar uma transformação de variável para a variável independente, conforme mostra a eq. (149).

---

<sup>4.2</sup>  $W_3 = W_6$

$$\tau = \frac{t}{St} \tag{149}$$

Agora, toda derivada em relação a antiga variável independente pode ser escrita em função da nova variável independente da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(\ ) = \frac{d}{d\tau}(\ ) \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau}(\ ) \frac{1}{St} \tag{150}$$

Substituindo a eq. (149) e (150) na eq. (148), obtemos:

$$\begin{aligned} & 2W_6 \sin(St^2 \cdot \tau) + V_3(W_9 - W_4) - W_5 \dot{V}_3 + \\ & St [W_1 \cos(St^2 \cdot \tau) + 3W_3 \sin^2(St^2 \cdot \tau) - 2W_4 \sin(St^2 \cdot \tau)V_3 - W_5 \sin(St^2 \cdot \tau)\dot{V}_3 + W_8 V_3 \dot{V}_3] \\ & St^2 [W_1 \cos(St^2 \cdot \tau) \sin(St^2 \cdot \tau) + W_3 \sin^3(St^2 \cdot \tau) - W_2 \cos(St^2 \cdot \tau)V_3 - W_4 \sin^2(St^2 \cdot \tau)V_3 + W_7 V_3^3] = 0 \end{aligned} \tag{151}$$

Para solucionarmos a eq. (151), propomos uma série assintótica de  $V_3$  utilizando como parâmetro de perturbação também  $St$ . Esta série é mostrada pela eq. (152) e sua derivada pela eq. (153).

$$V_3 = V_{30} + V_{31}St + o(St^2) \tag{152}$$

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_{30} + \dot{V}_{31}St + o(St^2) \tag{153}$$

Substituindo as eqs. (152) e (153) na eq. (151), fatorando e agrupando os termos de mesma ordem de  $St$ , obtemos:

**ordem zero:**

$$2W_6 \sin(St^2 \cdot \tau) + V_{30}(W_9 - W_4) - W_5 \dot{V}_{30} = 0 \tag{154}$$

**primeira ordem:**

$$\begin{aligned} & W_1 \cos(St^2 \cdot \tau) + 3W_6 \sin^2(St^2 \cdot \tau) - 2W_4 \sin(St^2 \cdot \tau)V_{30} + V_{31}(W_9 - W_4) - W_5 \sin(St^2 \cdot \tau)\dot{V}_{30} + W_8 V_{30} \dot{V}_{30} \\ & - W_5 \dot{V}_{31} = 0 \end{aligned} \tag{155}$$

### 5.1.2.1.1 - Solução para o Termo de Ordem Zero

O termo de ordem zero, eq. (155) possui a mesma forma que as eqs. (102) e (111), ou seja, é também uma equação de Bernoulli portanto, para solucionarmos o termo de ordem zero, podemos utilizar a eq. (107). Com isto obtemos que a solução de ordem zero é:

$$V_{30} = A \exp\left(\frac{\tau(W_9 - W_4)}{W_5}\right) + \left(\frac{2W_6(W_4 - W_9)\sin(St^2 \cdot \tau) - 2St^2W_5W_6 \cos(St^2 \cdot \tau)}{(W_4 - W_9)^2 + St^4W_5^2}\right) \quad (156)$$

A condição inicial para a equação original é de velocidade nula e, como a eq. (152) também representa a solução do problema, a somatória das condições iniciais dos termos que a compõem tem que ser a mesma que a da equação original. Por isto, usaremos como condição inicial para o termo de ordem zero a velocidade nula, ou seja,  $V_{30}(0) = 0$ . Com isto a constante A da eq. (156) fica:

$$A = \frac{St^2W_5W_6}{(W_4 - W_9)^2 + St^4W_5^2} \quad (157)$$

Portanto a solução do termo de ordem zero fica:

$$V_{30} = \frac{St^2W_5W_6}{(W_4 - W_9)^2 + St^4W_5^2} \exp\left(\frac{\tau(W_9 - W_4)}{W_5}\right) + \left(\frac{2W_6(W_4 - W_9)\sin(St^2 \cdot \tau) - 2St^2W_5W_6 \cos(St^2 \cdot \tau)}{(W_4 - W_9)^2 + St^4W_5^2}\right) \quad (158)$$

### 5.1.2.1.2 - Solução para o Termo de Primeira Ordem

A eq. (155) também é uma equação de Bernoulli, portanto sua solução também é dada pela eq. (107), ou seja

$$V_{31} = A \exp\left(\frac{\tau(W_9 - W_4)}{W_5}\right) + \left[\frac{\text{coef}_{17} + \text{coef}_{18} \cos(St^2 \cdot \tau)}{\text{coef}_{19}}\right] + \left[\frac{\text{coef}_{11} + \text{coef}_{12} \cos(St^2 \cdot \tau) + \text{coef}_{13} \cos(2St^2 \cdot \tau) + \text{coef}_{14} \sin(St^2 \cdot \tau) + \text{coef}_{15} \sin(2St^2 \cdot \tau)}{\text{coef}_{16}}\right] \quad (159)$$

onde:

$$\text{coef}_{11} = 3W_4^4W_6 - 12W_4^3W_6W_9 + 18W_4^2W_6W_9^2 - 12W_4W_6W_9^3 + 3W_6W_9^4 \quad (160)$$

$$\text{coef}_{12} = 2W_1W_4^4 - 8W_1W_4^3W_9 + 12W_1W_4^2W_9^2 - 8W_1W_4W_9^3 + 2W_1W_9^4 \quad (161)$$

$$\text{coef}_{13} = -3W_4^4W_6 + 12W_4^3W_6W_9 - 18W_4^2W_6W_9^2 + 12W_4W_6W_9^3 - 3W_6W_9^4 \quad (162)$$

$$\text{coef}_{14} = \text{St}^2(2W_1W_4^3W_5 - 6W_1W_4^2W_5W_9 + 6W_1W_4W_5W_9^2 - 2W_1W_5W_9^3) \quad (163)$$

$$\text{coef}_{15} = \text{St}^2(-6W_4^3W_5W_6 + 18W_4^2W_5W_6W_9 - 18W_4W_5W_6W_9^2 + 6W_5W_6W_9^3) \quad (164)$$

$$\text{coef}_{16} = 2(W_4 - W_9)(W_4^2 + \text{St}^4W_5^2 - 2W_4W_9 + W_9^2)(W_4^2 + 4\text{St}^4W_5^2 - 2W_4W_9 + W_9^2) \quad (165)$$

$$\text{coef}_{17} = 2\text{St}^2(-W_4^3W_5W_6 + 2W_4^2W_5W_6W_9 - W_4W_5W_6W_9^2) \quad (166)$$

$$\text{coef}_{18} = 2\text{St}^2(W_4^3W_5W_6 - 2W_4^2W_5W_6W_9 + W_4W_5W_6W_9^2) \quad (167)$$

$$\text{coef}_{19} = \text{St}^2W_5(W_4^4 + 5\text{St}^4W_4^2W_5^2 + 4\text{St}^8W_5^4 - 4W_4^3W_9 - 10\text{St}^4W_4W_5^2W_9 + 6W_4^2W_9^2 + 5\text{St}^4W_5^2W_9^2 - 4W_4W_9^3 + W_9^4) \quad (168)$$

Para determinar a constante A, utilizaremos como condição inicial  $V_{31}(0) = 0$ , obtendo assim:

$$A = \frac{-(\text{coef}_{11} + \text{coef}_{12} + \text{coef}_{13})}{\text{coef}_{16}} \quad (169)$$

Substituindo a eq. (169) na eq. (159), obtemos a solução de primeira ordem:

$$V_{31} = -\frac{(\text{coef}_{11} + \text{coef}_{12} + \text{coef}_{13})}{\text{coef}_{16}} \exp\left(\frac{\tau(W_9 - W_4)}{W_5}\right) + \left[\frac{\text{coef}_{17} + \text{coef}_{18} \cos(\text{St}^2 \cdot \tau)}{\text{coef}_{19}}\right] + \left[\frac{\text{coef}_{11} + \text{coef}_{12} \cos(\text{St}^2 \cdot \tau) + \text{coef}_{13} \cos(2\text{St}^2 \cdot \tau) + \text{coef}_{14} \sin(\text{St}^2 \cdot \tau) + \text{coef}_{15} \sin(2\text{St}^2 \cdot \tau)}{\text{coef}_{16}}\right] \quad (170)$$

Portanto a solução do processo direto quando  $\text{St} \rightarrow 0$  é obtida substituindo a eq. (149) nas eqs. (158) e (170), e depois estas na eq. (152):

$$V_3 = \left(\frac{\text{St}^2 W_5 W_6}{(W_4 - W_9)^2 + \text{St}^4 W_5^2} - \frac{(\text{coef}_{11} + \text{coef}_{12} + \text{coef}_{13})\text{St}}{\text{coef}_{16}}\right) \exp\left(\frac{t(W_9 - W_4)}{W_5 \text{St}}\right) + \left(\frac{2W_6(W_4 - W_9) \sin(\text{St} \cdot t) - 2\text{St}^2 W_5 W_6 \cos(\text{St} \cdot t)}{(W_4 - W_9)^2 + \text{St}^4 W_5^2}\right) + \text{St} \left(\frac{\text{coef}_{11}}{\text{coef}_{16}} + \frac{\text{coef}_{17}}{\text{coef}_{19}}\right) + \text{St} \left(\frac{\text{coef}_{18} \cos(\text{St} \cdot t)}{\text{coef}_{19}}\right) + \text{St} \left(\frac{\text{coef}_{12} \cos(\text{St} \cdot t) + \text{coef}_{13} \cos(2\text{St} \cdot t) + \text{coef}_{14} \sin(\text{St} \cdot t) + \text{coef}_{15} \sin(2\text{St} \cdot t)}{\text{coef}_{16}}\right) \quad (172)$$

Olhando para a solução do processo direto quando  $\text{St} \rightarrow 0$ , eq. (172) pode não ser periódica, dependendo do sinal do expoente da exponencial. Para que a solução seja periódica, o sinal do expoente da exponencial tem que ser negativo, para tanto,  $W_4 > W_9$ , isto implica que  $2A_2 > A_3$ .

### 5.1.2.2 - Solução para $\text{St} \rightarrow \infty$

Para obtermos a solução do processo direto para  $\text{St} \rightarrow \infty$ , iremos partir da eq. (148), pois nesta equação já foi substituído o sinal de entrada. Como o parâmetro de perturbação agora é  $(1/\text{St})$ , temos que manipular a equação original para que este parâmetro apareça na equação de uma forma explícita. Para isto, iremos dividir a eq. (148) por  $\text{St}^3$ , obtendo:

$$W_1 \cos(\text{St} \cdot t) \sin(\text{St} \cdot t) + W_3 \sin^3(\text{St} \cdot t) - W_2 \cos(\text{St} \cdot t) V_3 - W_4 \sin^2(\text{St} \cdot t) V_3 + W_7 V_3^3 - W_5 \sin(\text{St} \cdot t) - W_8 V_3 \dot{V}_3 + \left(\frac{1}{\text{St}}\right) (W_1 \cos(\text{St} \cdot t) + 3W_3 \sin^2(\text{St} \cdot t) - 2W_4 \sin(\text{St} \cdot t) V_3 - W_5 \dot{V}_3) + \left(\frac{1}{\text{St}}\right)^2 (\sin(\text{St} \cdot t)(3W_3 - W_6) + V_3(W_9 - W_3)) = 0 \quad (173)$$

Como solução da eq. (173), propomos uma série assintótica, eq. (174):

$$V_3 = V_{30} + \left(\frac{1}{St}\right)V_{31} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{St^2}\right) \quad (174)$$

E sua derivada é:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_{30} + \left(\frac{1}{St}\right)\dot{V}_{31} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{St^2}\right) \quad (175)$$

Substituindo as eqs. (174) e (175) na eq. (173), fatorando e agrupando os termos de mesma ordem em  $(1/St)$ , obtemos:

**ordem zero:**

$$W_1 \cos(St.t) \sin(St.t) + W_3 \sin^3(St.t) - W_2 \cos(St.t)V_{30} - W_4 \sin^2(St.t)V_{30} + W_7 V_{30}^3 - W_5 \sin(St.t)\dot{V}_3 + W_8 V_3 \dot{V}_3 = 0 \quad (176)$$

**primeira ordem:**

$$\begin{aligned} W_1 \cos(St.t) + 3W_3 \sin^2(St.t) - 2W_4 \sin(St.t)V_{30} - W_2 \cos(St.t)V_{31} - \\ W_2 \cos(St.t)V_{31} - W_4 \sin^2(St.t)V_{31} + 3W_7 V_{30}^2 V_{31} - W_5 \dot{V}_{30} + \\ W_8 V_{31} \dot{V}_{30} - W_5 \sin(St.t)\dot{V}_{31} + W_8 \dot{V}_{31} V_{30} = 0 \end{aligned} \quad (177)$$

Analisando para eq. (176), notamos que se trata de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não linear. O método de perturbação é um método que tem como objetivo possibilitar a obtenção de uma solução analítica aproximada da equação. Entretanto, neste caso a equação de ordem zero é não linear, o que dificulta a obtenção de uma solução analítica para tal equação, e isto acaba dificultando ou mesmo impossibilitando (caso o termo de ordem zero não possua solução analítica) a solução de primeira ordem, apesar desta ser linear.

Uma tentativa para se obter uma solução analítica<sup>4.3</sup> do termo de ordem zero é utilizar o método de Frobenius, propondo como solução uma série exponencial complexa, eq. (178):

---

<sup>4.3</sup> Não iremos apresentar a solução analítica deste caso.

$$V_{30} = \sum_n C_n \exp(n.i.St.t) \quad (178)$$

A primeira harmônica do sinal de saída foi imposta como a mesma do sinal de entrada, pois soluções que foram obtidas pelo método numérico nos mostraram este comportamento.

## 5.2 - Método Numérico

### 5.2.1 - Sem Efeitos Viscosos

Para solucionar numericamente a eq. (86), utilizamos o software *Mathematica*<sup>®</sup>. Este software possui várias aplicações tais como: “calculador” numérico ou simbólico; sistema de visualização de funções e dados, através de rotinas gráficas; linguagem de programação de alto nível; ambiente de análise de dados, entre outras aplicações.

Em nosso problema, utilizamos o *Mathematica*<sup>®</sup> em várias destas aplicações, para tanto, foi feito um arquivo dos comandos utilizados, de acordo com o algoritmo mostrado na fig. 13. O algoritmo da fig. 13 poderia ser implementado em qualquer linguagem usual, como FORTRAN, Pascal ou C++, mas devido às facilidades apresentadas pelo *Mathematica*<sup>®</sup> entre elas, rotinas gráficas para a visualização dos resultados e rotina para solucionar numericamente equações diferenciais ordinárias (não foi possível saber qual método numérico que o *Mathematica*<sup>®</sup> utiliza nesta rotina), acabou-se por optar pela utilização do *Mathematica*<sup>®</sup>. Os arquivos dos comandos do *Mathematica*<sup>®</sup> para o algoritmo da fig. 13 é mostrado no Apêndice A.

Neste caso também é feita uma comparação do resultado obtido numericamente com o resultado obtido pelo método de perturbação, através do cálculo do desvio relativo percentual. O desvio foi calculado de acordo com a eq. (179).

$$\text{desvio}(\%) = 100 \left( \frac{(V_{2\text{nummax}} - V_{2\text{nummin}}) - (V_{2\text{pertmax}} - V_{2\text{pertmin}})}{V_{2\text{nummax}} - V_{2\text{nummin}}} \right) \quad (179)$$

onde:

$V_{2\text{num max}}$  - valor de  $V_2$  máximo calculado numericamente;

$V_{2\text{num min}}$  - valor de  $V_2$  mínimo calculado numericamente;

$V_{2\text{pert max}}$  - valor de  $V_2$  máximo calculado pelo método de perturbação;

$V_{2\text{pert min}}$  - valor de  $V_2$  mínimo calculado pelo método de perturbação

..... processo de validação

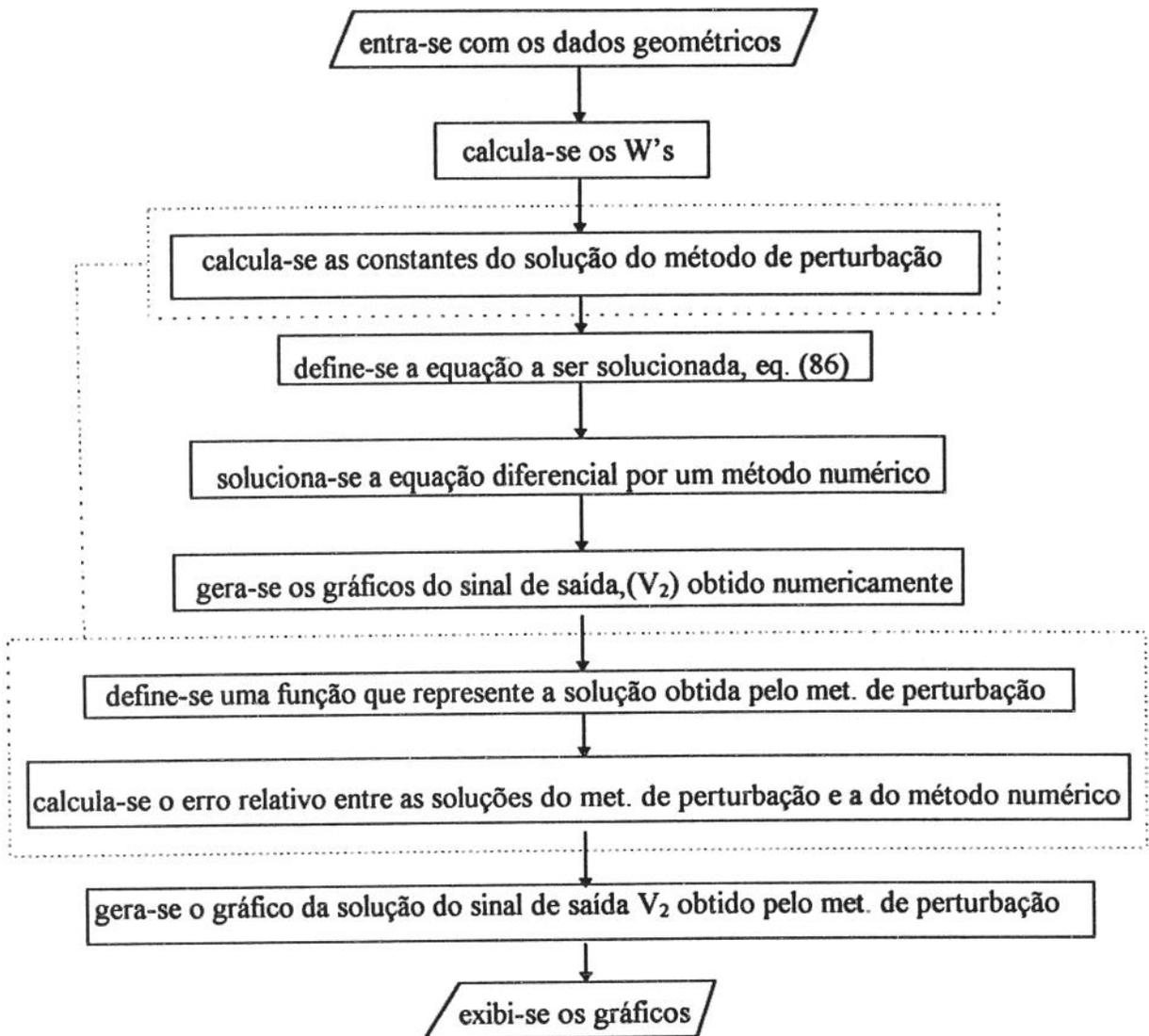


fig. 13 - Algoritmo utilizado para solucionar a eq. (86), numericamente.

## 5.2.2 - Com Efeitos Viscosos

A solução considerando os efeitos viscosos, ou seja a eq. (71), pode ser obtida numericamente, utilizando-se também o *Mathematica*<sup>®</sup>. A fig. 14, apresenta o algoritmo utilizado para este fim, que também pode-se implantar em qualquer outra linguagem.

Para o cálculo dos coeficientes que representam os termos viscosos,  $COMOM_1$ ,  $COMOM_2$ ,  $COENER_1$  e  $COENER_2$ , foi utilizada uma expressão explícita, apresentada por Churchill [3], que reproduz o diagrama de Moody, ou seja o cálculo do fator de atrito de Darcy ( $f$ ). Esta expressão é representada pela eq. (180).

$$f = 8 \left[ \left( \frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{3/2}} \right]^{1/12} \quad (180)$$

onde:

$$A = \left[ 2.457 \ln \left( \frac{1}{\left( \frac{7}{\text{Re}} \right) + 0.28 \frac{e}{D_h}} \right) \right]^{16}; \quad (181)$$

$$B = \left[ \frac{37350}{\text{Re}} \right]^{16}; \quad (182)$$

e

$\frac{e}{D_h}$  é a rugosidade relativa do tubo.

Para o cálculo das perdas localizadas, utilizou-se uma expressão obtida analiticamente para calcular a perda na expansão, eq. (183) e uma expressão aproximada para representar os dados experimentais na contração, eq. (184), apresentada por White [11].

$$K_e = \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right)^2 \quad (183)$$

$$K_c \approx 0.42 \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right) \quad (184)$$

onde:

d - menor diâmetro da junção;

D - maior diâmetro da junção.

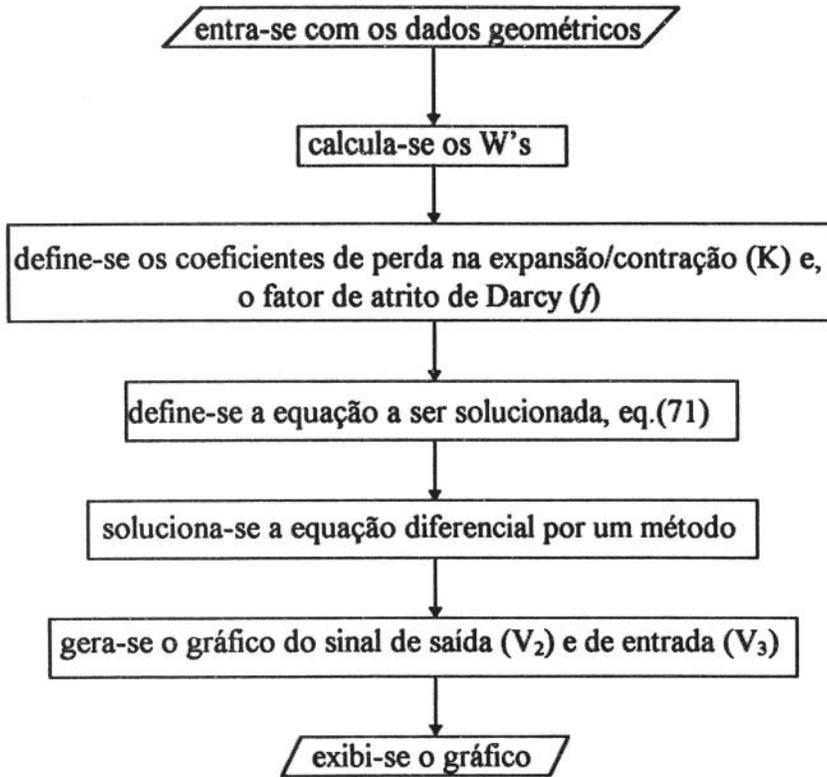


fig. 14 - Algoritmo para solucionar a eq. (71), numericamente.

## Capítulo 6

### Sumário das Equações

As tabs. 2 e 3 mostram um quadro comparativo entre as diferentes escalas utilizadas na adimensionalização, para o processo direto e para o processo inverso respectivamente. A tab. 4 mostra as equações da conservação de massa, quantidade de movimento na direção x e energia em sua forma adimensional. Deve-se destacar que na forma adimensional as equações, tanto para o processo inverso como para o processo direto, são idênticas. A diferenciação se faz nas escalas empregadas nos grupos adimensionais.

Tab. 2 - Escalas utilizadas para a adimensionalização - Processo Inverso.

	VC-3	VC-2	VC-1	VC-4	OUTROS
VELOCIDADE	$V_3 \propto L_3 f_3$	$V_2 \propto \bar{U}$	$V_1 \propto \bar{U}$	$V_4 \propto \bar{U}$	
ACELERAÇÃO	$\dot{V}_3 \propto L_3 f_3^2$	$\dot{V}_2 \propto \frac{\bar{U}^2}{L_3}$	$\dot{V}_1 \propto \frac{\bar{U}^2}{L_3}$	$\dot{V}_4 \propto \frac{\bar{U}^2}{L_3}$	
COMPRIMENTO	$L_3 \propto L_3; L_{3v} \propto L_3$	$L_2 \propto L_3$	$L_1 \propto L_3$	$L_4 \propto L_3$	$L_5 \propto L_3; L_j \propto L_3$
DIÂMETRO	$D_3 \propto L_3$	$D_2 \propto L_3$	$D_1 \propto L_3$	$D_4 \propto L_3$	$D_j \propto L_3; D_R \propto L_3$
ÁREA	$A_3 \propto L_3^2$	$A_2 \propto L_3^2$	$A_1 \propto L_3^2$	$A_4 \propto L_3^2$	$A_j \propto L_3^2; A_R \propto L_3^2$
PRESSÃO	$p_3 \propto \rho \bar{U}^2$				
TEMPO	$t \propto \frac{L_3}{\bar{U}}$				

Analisando a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x, eq. (50) ou (67), podemos ver que as forças de pressão  $[p_3^* A_3^* Fr]$ , ou seja, a força devido à pressão na cabeça do pistão atuando na superfície esquerda do VC-3 é equilibrada pela variação da quantidade de movimento dentro do volume de controle VC-3  $[\dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^2]$ , pela variação da quantidade de movimento dentro do volume VC-2  $[\dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr]$ , pelo fluxo da quantidade de movimento devido ao movimento da superfície

esquerda do VC-3  $[V_3^* A_3^* FrSt^2]$ , pelo fluxo da quantidade de movimento atravessando a superfície direita do VC-2  $[V_2^* A_2^* Fr]$  e pela pressão hidrostática devido ao reservatório de nível constante na saída da seção de teste  $[L_5^* A_2^*]$ . Os termos  $\left[ \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} Fr \right]$  e  $\left[ K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* Fr \right]$  são devidos à viscosidade e estão associados às perdas de carga no sistema.

Tab. 3 - Escalas utilizadas para a adimensionalização - Processo Direto.

	VC-3	VC-2	VC-1	VC-4	OUTROS
VELOCIDADE	$V_3 \propto L_c f_c$	$V_2 \propto \bar{U}$	$V_1 \propto \bar{U}$	$V_4 \propto \bar{U}$	
ACELERAÇÃO	$\dot{V}_3 \propto L_c f_c^2$	$\dot{V}_2 \propto \frac{\bar{U}^2}{L_c}$	$\dot{V}_1 \propto \frac{\bar{U}^2}{L_c}$	$\dot{V}_4 \propto \frac{\bar{U}^2}{L_c}$	
COMPRIMENTO	$L_3 \propto L_c; L_{3v} \propto L_c$	$L_2 \propto L_c$	$L_1 \propto L_c$	$L_4 \propto L_c$	$L_5 \propto L_c; L_j \propto L_c$
DIÂMETRO	$D_3 \propto L_c$	$D_2 \propto L_c$	$D_1 \propto L_c$	$D_4 \propto L_c$	$D_j \propto L_c; D_R \propto L_c$
ÁREA	$A_3 \propto L_c^2$	$A_2 \propto L_c^2$	$A_1 \propto L_c^2$	$A_4 \propto L_c^2$	$A_j \propto L_c^2; A_R \propto L_c^2$
PRESSÃO	$p_3 \propto \rho \bar{U}^2$				
TEMPO	$t \propto \frac{L_c}{\bar{U}}$				

Através da equação da conservação de energia, eq. (52) ou (69), podemos ver que o deslocamento do pistão provoca um fluxo de energia de pressão na superfície esquerda do VC-3  $[p_3^* V_3^* A_3^* FrSt]$  e este fluxo de energia é equilibrado por uma variação da energia cinética dentro de VC-3  $[V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* FrSt^3]$ , de VC-2  $[V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr]$  e de VC-4  $[V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* Fr]$ , pelo fluxo de energia cinética associada ao movimento da fronteira esquerda do VC-3  $\left[ \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* FrSt^3 \right]$ , pelo fluxo de energia cinética que atravessa a superfície direita do VC-2  $\left[ \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* Fr \right]$ , pelo fluxo de energia potencial de VC-1  $[(L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^*]$  e pelo fluxo de energia potencial  $[L_5^* V_2^* A_2^*]$  devido ao reservatório de saída. Não consideramos nem a variação de energia, nem o fluxo de energia cinética dentro do VC-1 porque sua área é muito grande, portanto sua velocidade é desprezível se comparadas com as outras velocidades. O fluxo de energia potencial é significativo e é considerado através do termo  $[(L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^*]$ .

Os termos  $\left[ \frac{f_4 L_4^*}{2D_4^*} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \right]$ ,  $\left[ \frac{f_2 L_2^*}{2D_2^*} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr \right]$ ,  $\left[ \frac{K_1}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \right]$ ,  $\left[ \frac{K_2}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr \right]$ ,  $\left[ \frac{K_3}{2} V_3^{*2} |V_3^* A_3^*| Fr St^3 \right]$ ,  $\left[ \frac{K_4}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \right]$ ,  $\left[ \frac{K_5}{2} V_2^{*2} |V_2^* A_2^*| Fr \right]$  e  $\left[ \frac{K_v}{2} V_4^{*2} |V_4^* A_4^*| Fr \right]$  são devidos à viscosidade do fluido e estão associados às perdas de carga

Tab. 4 - Equações da conservação de energia, quantidade de movimento na direção x e energia em sua forma adimensional - Processo Direto e Inverso.

	EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO
MASSA	$V_3^* A_3^* St = V_2^* A_2^* + V_1^* A_1^* \quad (44) \text{ ou } (61)$
	$\dot{V}_3^* A_3^* St^2 = \dot{V}_2^* A_2^* + \dot{V}_1^* A_1^* \quad (47) \text{ ou } (64)$
	$V_1^* A_1^* = V_4^* A_4^* \quad (45) \text{ ou } (62)$
	$\dot{V}_1^* A_1^* = \dot{V}_4^* A_4^* \quad (48) \text{ ou } (65)$
QUANTIDADE DE MOVIMENTO	$p_3^* A_3^* Fr = \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^2 + \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr - V_3^{*2} A_3^* Fr St^2 + V_2^{*2} A_2^* Fr + L_5^* A_2^* - p_{atm}^* (A_3^* - A_2^*) Fr + \frac{f_2 V_2^{*2} L_2^* \pi D_2^*}{8} Fr \frac{L_3^*}{A_2^*} + K_5 \frac{V_2^{*2}}{2} A_2^* Fr \quad (50) \text{ ou } (67)$
ENERGIA	$p_3^* V_3^* A_3^* Fr St = V_3^* \dot{V}_3^* (L_3^* - L_{3v}^*) A_3^* Fr St^3 + V_2^* \dot{V}_2^* L_2^* A_2^* Fr + V_4^* \dot{V}_4^* L_4^* A_4^* Fr - \frac{V_3^{*2}}{2} V_3^* A_3^* Fr St^3 + \frac{V_2^{*2}}{2} V_2^* A_2^* Fr + (L_1^* + L_4^*) V_4^* A_4^* + L_5^* V_2^* A_2^* + \frac{f_4 L_4^*}{2D_4^*} V_4^{*2}  V_4^* A_4^*  Fr + \frac{f_2 L_2^*}{2D_2^*} V_2^{*2}  V_2^* A_2^*  Fr + \frac{K_1}{2} V_4^{*2}  V_4^* A_4^*  Fr + \frac{K_2}{2} V_2^{*2}  V_2^* A_2^*  Fr + \frac{K_3}{2} V_3^{*2}  V_3^* A_3^*  Fr St^3 + \frac{K_4}{2} V_4^{*2}  V_4^* A_4^*  Fr + \frac{K_5}{2} V_2^{*2}  V_2^* A_2^*  Fr + \frac{K_v}{2} V_4^{*2}  V_4^* A_4^*  Fr \quad (52) \text{ ou } (69)$

A equação da conservação de energia, eq.(52) ou (69), pode nos fornecer informações importantes sobre o comportamento do sistema pulso duplicador. Estas informações podem

ser obtidas através de uma análise de como os parâmetros dinâmicos e/ou geométricos influenciam a ordem de grandeza dos diversos termos da equação da conservação de energia.

Comparando-se os termos da equação da conservação de energia com o fluxo de energia potencial dado pelo reservatório elevado de nível constante (FEP4) [FEP4  $\approx L_4 V_4 A_4$  ( $L_1 \ll L_4$ )], temos que:

$$i) - \frac{\text{variação da energia de pressão}}{\text{FEP4}} \propto \frac{A_3 Fr St}{A_4 L_4} = 2 \frac{A_3}{A_4} St \quad (185)$$

$$ii) - \frac{\text{variação da energia cinética em VC-3}}{\text{FEP4}} \propto \frac{A_3 Fr St^3}{A_4 L_4} = 2 \frac{A_3}{A_4} St^3 \quad (186)$$

$$iii) - \frac{\text{variação da energia cinética em VC-3}}{\text{FEP4}} \propto \frac{L_2 A_2 Fr}{L_4 A_4} = 2 L_2 \frac{A_2}{A_4} \quad (187)$$

$$iv) - \frac{\text{variação da energia cinética em VC-4}}{\text{FEP4}} \propto \frac{L_4 A_4 Fr}{L_4 A_4} = 2 L_4 \quad (188)$$

$$v) - \frac{\text{fluxo de energia cinética em VC-3}}{\text{FEP4}} \propto \frac{A_2 Fr St^3}{A_4 L_4} = 2 \frac{A_3 St^3}{A_4} \quad (189)$$

$$vi) - \frac{\text{fluxo de energia cinética em VC-2}}{\text{FEP4}} \propto \frac{A_2 Fr}{L_4 A_4} = 2 \frac{A_2}{A_4} \quad (190)$$

Analisando as eqs. (185) a (190), notamos que as eqs. (185), (186) e (189) dependem de parâmetros geométricos e dinâmico, enquanto as eqs. (187), (188) e (190) só dependem de parâmetros geométricos. Quando  $St \ll 1$ , as eqs. (185), (186) e (189) tenderam a zero, ou seja, o termo constante é muito maior que os termos periódicos, o que no leva a concluir que a influência do reservatório elevado de nível constante é maior que a influência do pistão, independentemente dos parâmetros geométricos. Quando  $St \cong 1$ , as eqs. (185), (186) e (189)

ficam dependentes dos parâmetros geométricos e a predominância da influencia do reservatório de nível elevado ou do pistão vai depender da relação das áreas do pistão e do tubo de alimentação. Quando  $St \gg 1$ , as eqs. (185), (186) e (189) tenderão a infinito, ou seja, os termos periódicos são muitas vezes maiores que os termos constantes, o que nos leva a concluir que a influência do pistão no sinal de saída, neste caso, é predominante.

A tab 5, mostra a equação a ser solucionada na forma adimensional, também válida para ambos os processos.

Tab. 5 - Equação que iremos solucionar.

EQUAÇÃO QUE IREMOS SOLUCIONAR		
$\begin{aligned} & \dot{V}_2^* V_2^* W_1 - \dot{V}_2^* V_3^* W_2 St + V_2^{*2} W_3 - V_2^* V_3^* W_4 St - V_2^* \dot{V}_3^* W_5 St^2 - V_2^* W_6 + V_3^* W_7 St^3 + V_3^* \dot{V}_3^* W_8 St^3 \\ & + V_3^* W_9 St + COENER_1 \left( \frac{V_3^{*2} A_3^{*2}}{A_4^{*2}} Fr St^2 - \frac{2V_3^* V_2^* A_3^* A_2^*}{A_4^{*2}} Fr St + \frac{V_2^{*2} A_2^{*2}}{A_4^{*2}} Fr \right) \left  V_3^* A_3^* St - V_2^* A_2^* \right  \\ & + COENER_2 V_2^{*2} \left  V_2^* A_2^* \right  Fr + COENER_3 V_3^{*2} \left  V_3^* A_3^* \right  Fr St^3 - (COMOM_1 + COMOM_2) V_2^{*2} V_3^* = 0 \end{aligned}$ <div style="text-align: right;">(71)</div>		
Processo Inverso		
$\bar{U} = \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)}$	$Fr = \frac{\bar{U}^2}{gL_3}$	$St = \frac{L_3 f_3}{\bar{U}}$
Processo Direto		
$\bar{U} = \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)}$	$Fr = \frac{\bar{U}^2}{gL_c}$	$St = \frac{L_c f_c}{\bar{U}}$

As tabs 6 e 7 mostram as equações obtidas pelo método das perturbações para  $St \rightarrow 0$  e  $St \rightarrow \infty$ , respectivamente, onde a definição das constantes encontram-se no capítulo 5.

Analisando a solução analítica obtida para o processo inverso quando  $St \rightarrow 0$ , verificamos que esta não apresenta nenhum termo que a faça se tornar não periódica. Os termos até segunda ordem apresentam sempre um decaimento exponencial com constante de tempo proporcional aos fatores geométricos. A frequência fundamental do sinal é o parâmetro  $St$  e sua primeira harmônica surge somente nos termos de segunda ordem. Em particular, destaca-se que os termos de segunda ordem da solução também apresentam um termo constante, que depende de parâmetros geométricos e do parâmetro dinâmico  $St$ .

Por sua vez, a solução analítica obtida para o processo direto, quando  $St \rightarrow 0$ , é condicionalmente estável. A estabilidade está relacionada com o sinal da constante de tempo do termo exponencial:

$$\tau = \frac{W_5 St}{W_9 - W_4}$$

tab. 6 - Equação obtida pelo método das perturbações para  $St \rightarrow 0$ .

Processo Inverso
$V_2 = 1 + St \left[ \frac{b_{31}}{St^2 + b_{21}^2} \left( \frac{St}{\exp(b_{21} \cdot t)} + b_{21} \sin(St \cdot t) - St \cos(St \cdot t) \right) \right] + St^2 [Const_{21}]$ $+ St^2 \left[ \frac{Const_{22}}{\exp(2b_{21} \cdot t)} + Const_{23} \cos(St \cdot t) + \frac{Const_{24}}{\exp(b_{21} \cdot t)} + \frac{Const_{25} \cos(St \cdot t)}{\exp(b_{21} \cdot t)} + \frac{Const_{26} \sin(St \cdot t)}{\exp(b_{21} \cdot t)} \right]$ $+ St^2 [Const_{27} \sin(2St \cdot t)]$ <p style="text-align: right;">(120)</p>
Processo Direto
$V_3 = \left( \frac{St^2 W_5 W_6}{(W_4 - W_9)^2 + St^4 W_5^2} - \frac{(coef_{11} + coef_{12} + coef_{13}) St}{coef_{16}} \right) \exp\left(\frac{t(W_9 - W_4)}{W_5 St}\right) +$ $\left( \frac{2W_6(W_4 - W_9) \sin(St \cdot t) - 2St^2 W_5 W_6 \cos(St \cdot t)}{(W_4 - W_9)^2 + St^4 W_5^2} \right) + St \left( \frac{coef_{11}}{coef_{16}} + \frac{coef_{17}}{coef_{19}} \right) +$ $St \left( \frac{coef_{18} \cos(St \cdot t)}{coef_{19}} \right) +$ $St \left( \frac{coef_{12} \cos(St \cdot t) + coef_{13} \cos(2St \cdot t) + coef_{14} \sin(St \cdot t) + coef_{15} \sin(2St \cdot t)}{coef_{16}} \right)$ <p style="text-align: right;">(172)</p>

A solução é estável desde que  $W_9 - W_4 < 0$ , ou seja, a área do pistão não deve ser maior que o dobro da área da seção de teste,  $A_3 < 2A_2$ , sempre.

Como já havíamos visto, simuladores de pulso podem ter aplicações biomédicas importantes, mas para que isto seja possível é necessário que o simulador de pulso possa reproduzir os parâmetros de um escoamento fisiológico humano. Estes parâmetros são principalmente o ganho (G), que indica o nível de amplitude máxima de oscilação em relação à média, o número de Reynolds<sup>6.1</sup> (Re), que garante similaridade hidrodinâmica do escoamento e o número de Strouhal, que garante a similaridade das harmônicas do pulso de velocidade<sup>6.2</sup>.

<sup>6.1</sup> - O número de Reynolds garante que dois escoamentos tem o mesmo comportamento hidrodinâmico, quando os Re são iguais, mesmo que a velocidade, o comprimento característico e as propriedades do fluido sejam diferentes.

<sup>6.2</sup> - O procedimento utilizado para calcular o ganho, o número de Reynolds e o número de Strouhal é mostrado em detalhes no Apêndice B.

tab. 7 - Equação obtida pelo método das perturbações para  $St \rightarrow \infty$ .

<b>Processo Inverso</b>
$V_2(t) = \left( \frac{St^2 W_8}{W_2} + \frac{St^3 W_8 (-W_2 W_5 + W_1 W_8)}{W_2^3} \right) \sin \left( \frac{W_8 St^2}{W_8 St - W_7} \cdot t \right) + \frac{1}{St}$
<b>(145)</b>
<b>Processo Direto</b>
Não há solução analítica conhecida

A tab. 8 apresenta o ganho, Reynolds e Strouhal das principais artéria do sistema arterial humano.

Um dos fatores limitantes para que um simulador de pulso possa representar os pulsos de velocidade fisiológicos é a possibilidade de reprodução do ganho. No sistema proposto o ganho pode ser estimado utilizando a solução obtida pelo método de perturbação para o processo inverso quando  $St \rightarrow 0$ , ou seja, a eq. (120):

$$\begin{aligned}
 V_2 = & 1 + St \left[ \frac{b_{31}}{St^2 + b_{21}^2} \left( \frac{St}{\exp(b_{21} \cdot t)} + b_{21} \sin(St \cdot t) - St \cos(St \cdot t) \right) \right] + St^2 [Const_{21}] \\
 & + St^2 \left[ \frac{Const_{22}}{\exp(2b_{21} \cdot t)} + Const_{23} \cos(St \cdot t) + \frac{Const_{24}}{\exp(b_{21} \cdot t)} + \frac{Const_{25} \cos(St \cdot t)}{\exp(b_{21} \cdot t)} + \frac{Const_{26} \sin(St \cdot t)}{\exp(b_{21} \cdot t)} \right] \\
 & + St^2 [Const_{27} \sin(2St \cdot t)]
 \end{aligned}$$

(120)

tab. 8 - Ganho, Reynolds e Strouhal do sistema arterial humano.

Artéria	Ganho	Reynolds	Strouhal
Subclávia Direita	2	390	0.5495
Aorta Ascendente	6	573	2.6410
Renal Direita	1	348	0.4378
Iliaca Comum Direita	1.3	791	0.4883
Tronco Braquiocefálico	3	471	1.0930
Aorta Abdominal	3.5	470	1.0532

Através da análise da eq. (120), podemos determinar qual será a amplitude máxima de oscilação, em relação a média, do sinal de saída para um sinal de entrada conhecido, determinando assim o ganho. Para tanto, só iremos analisar os termos periódicos e de até primeira ordem da eq. (120), com isto obtemos:

$$V_2 = 1 + St \left[ \frac{b_{31}}{St^2 + b_{21}^2} (b_{21} \sin(St.t) - St \cos(St.t)) \right] \quad (191)$$

Para podermos analisar melhor o ganho, é interessante que colocar a eq. (191) na forma:

$$V_2 = 1 + G \sin(St.t + \phi) \quad (192)$$

Para tanto:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{St}{b_{21}}\right) \quad (193)$$

$$G = \frac{b_{31}}{\sqrt{St^2 + b_{21}^2}} \quad (194)$$

Sabendo da eq. (103) e da eq. (104) que:

$$b_{21} = \frac{2W_6}{W_1} \quad (103)$$

$$b_{31} = \frac{W_4 - W_9}{W_1} \quad (104)$$

Obtemos que o ganho, G, é dado pela eq. (195):

$$G = \frac{W_4 - W_9}{\sqrt{St^2 W_1^2 + 4W_6^2}}$$

(195)

Da eqs. (72), (75), (77) e (79), podemos escrever a eq. (195) em função da variáveis originais do simulador, obtendo assim que:

$$G = \frac{Fr - \left(\frac{A_3}{A_2}\right)(L_1 + L_4) + L_5}{Fr \sqrt{St^2 \left(L_2 + L_4 \left(\frac{A_2}{A_4}\right)\right)^2 + 16}}$$

(196)

Iremos avaliar a influencia de dos parâmetros dinâmicos (Fr e St) e dos geométricos ( $A_3/A_2$  e  $A_2/A_4$ ), no comportamento do ganho, e para que possamos realizar esta análise iremos dividir o estudo em dois casos. Um caso com uma geometria e variando Fr e St e outro com o Fr, St e os comprimentos fixos e variando a relação de áreas,  $A_3/A_2$  e  $A_4/A_2$ .

**primeiro caso:** Parâmetros Geométricos Constantes.

$$A_3/A_2 = 1 \quad A_2/A_4 = 1.46 \quad L_2 = 30 \quad L_1 = 3 \quad L_5 = 3$$

$$L_4 = Fr/2 - L_1 + L_5 \quad 0.01 \leq Fr \leq 1 \quad 0 \leq St \leq 1 \quad L_3 = 1$$

Escala utilizada:  $L_3 = 0.1$  (m)

**segundo caso:** Parâmetros Dinâmicos (Fr e St) constantes.

$$0.4 \leq A_3/A_2 \leq 1 \quad 1 \leq A_4/A_2 \leq 10 \quad L_2 = 30 \quad L_1 = 3 \quad L_5 = 3$$

$$L_4 = Fr/2 - L_1 + L_5 \quad Fr = 0.01 \quad St = 1 \quad L_3 = 1$$

Escala utilizada:  $L_3 = 0.1$  (m)

A fig. 15 mostra um gráfico do comportamento do ganho mantendo-se a geometria fixa e variando-se Fr e St. Nota-se também que a variação do ganho é muito sensível a St, apresentando um aumento quando St cresce, o mesmo já não acontece com Fr. O aumento Fr causa uma diminuição do ganho. O ganho máximo ocorre quando  $Fr \rightarrow 0$  e  $St = 1$  e que este valor é 0.1 da velocidade média, para a geometria do primeiro caso. Este ganho está aquém dos valores de ganho do sistema fisiológico, mostrados na tab. 8.

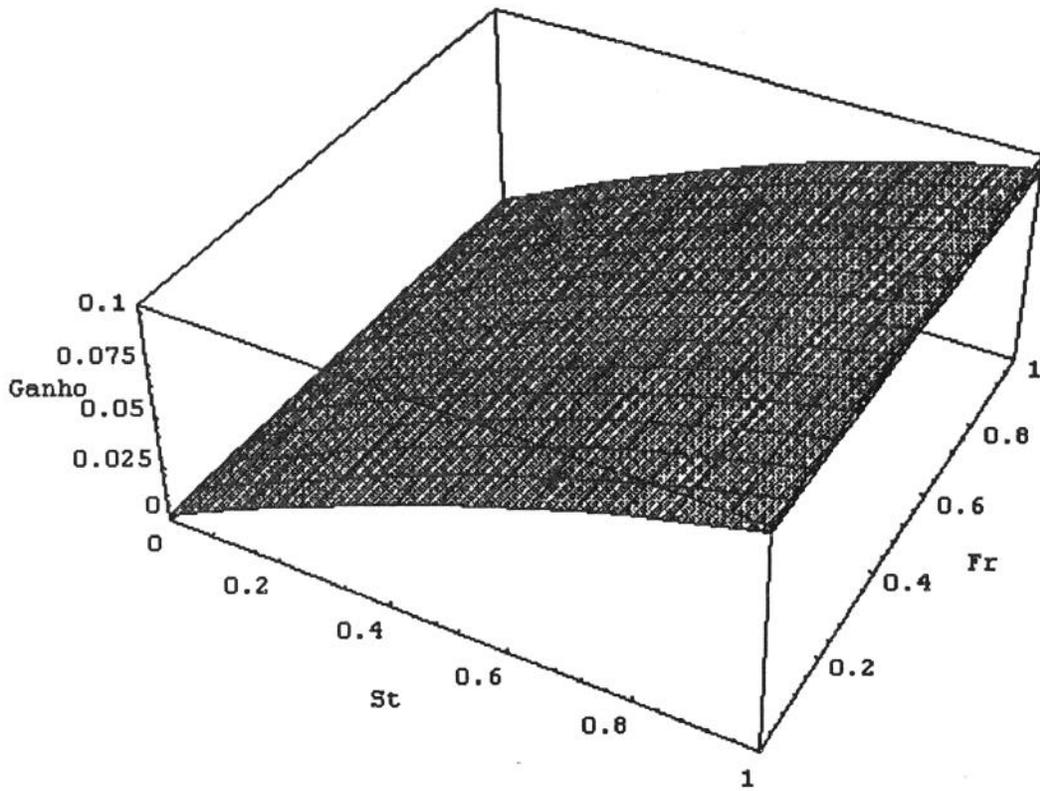


fig. 15 - Comportamento do ganho para o primeiro caso.

A fig. 16 mostra um gráfico do comportamento do ganho para o segundo caso, ou seja, para valores de St e Fr fixos e variando  $A_3/A_2$  e  $A_4/A_2$ . Podemos notar que o ganho máximo é de 40 vezes a velocidade média. Este ganho é mais que 4 vezes o ganho necessário em aplicações biomédicas, portanto o simulador de pulso proposto poderá ter aplicações biológicas. Nota-se um sensível aumento de ganho com a relação  $A_3/A_2$ .

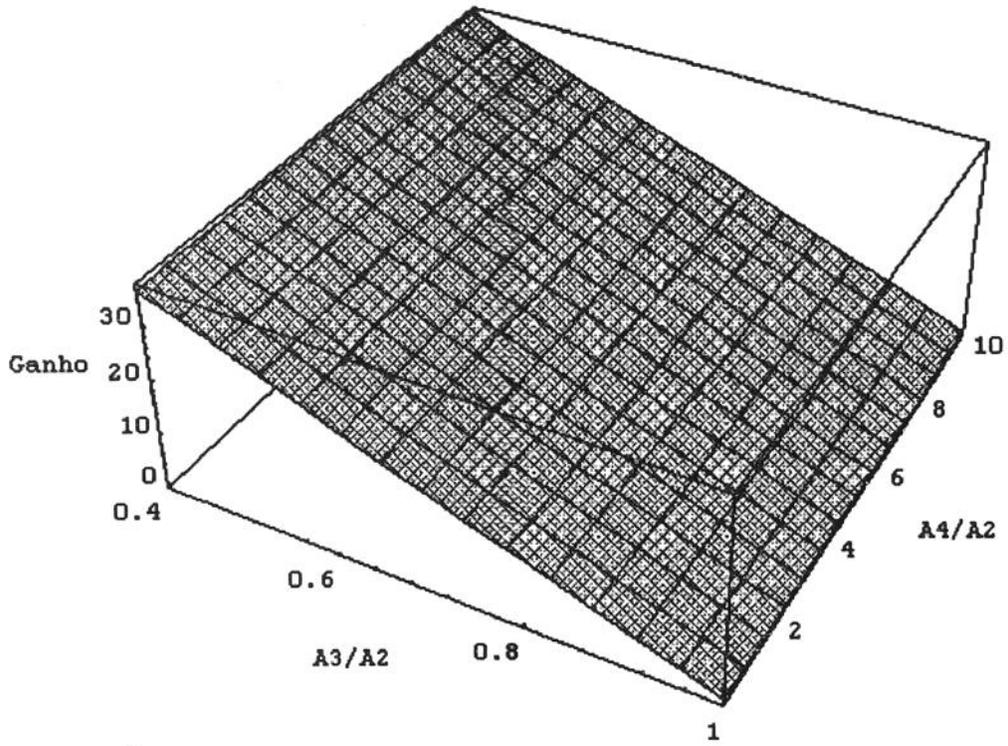


fig. 16 - Gráfico do ganho para o segundo caso.

## Capítulo 7

### Resultados Obtidos

Para o processo inverso foi verificada a influência dos dois parâmetros dinâmicos,  $Fr$  e  $St$ , no comportamento hidrodinâmico do sistema pulso duplicador. Também foi feita, quando  $St \rightarrow 0$ , uma análise do desvio entre a solução obtida numericamente e a obtida pelo método de perturbação. Quando  $St \rightarrow \infty$  não foi feita esta análise pois a solução obtida pelo método de perturbação só se apresenta convergente para valores de  $St > 10^3$ .

Para o processo direto, devido ao comportamento não definido da solução numérica para  $St > 1$  e a faixa estreita de convergência da solução obtida pelo método de perturbação, foi impossível realizar uma análise detalhada do comportamento do desvio entre as soluções (método de perturbação e método numérico) para  $St \rightarrow 0$ . Quando  $St \rightarrow \infty$  não há solução para método de perturbação conhecida, portanto é impossível realizarmos uma análise do comportamento do desvio.

#### 7.1 - Processo Inverso

Em todos os casos que o processo inverso foi analisado, consideramos fixa a geometria, como mostra a tab. 9.

Tab. 9 - geometria do mecanismo pulso duplicado para o processo inverso.

Áreas (m)	Comprimentos (m)	Diâmetros (m)
$A_2 = 506.7 \times 10^{-6}$	$L_1 = 0.3$	$D_2 = 25.4 \times 10^{-3}$
$A_3 = 506.7 \times 10^{-6}$	$L_2 = 3.0$	$D_3 = 25.4 \times 10^{-3}$
$A_4 = 346.4 \times 10^{-6}$	$L_3 = 0.1$	$D_4 = 21.0 \times 10^{-3}$
	$L_5 = 0.3$	

O comportamento do desvio, conforme mostra a fig. 17, indica que na faixa de  $0,05 \leq St \leq 1$  a solução obtida pelo método de perturbação, eq. (120) e a solução obtida pelo método numérico são muito próximas, com desvios na faixa de 0.04% a 4%. A fig. 17 também mostra que para valores na faixa de  $0,001 \leq Fr \leq 1$  as soluções se aproximam quando  $St \rightarrow 0$ , numa

taxa levemente superlinear, demonstrando uma coerência entre os cálculos. Não iremos mostrar o comportamento do desvio entre a solução obtida pelo método de perturbação, eq. (145) e a solução obtida pelo método numérico para  $St > 1$  porque a eq. (145) só apresenta convergência para a solução numérica com valores de  $St > 10^3$  e para  $St$  nesta ordem de grandeza a solução numérica só se apresenta estável para valores de  $Fr < 10^{-1}$  ou  $Fr > 10^5$ , o que está muito fora da área de interesse fisiológico.

Embora a solução obtida pelo método de perturbação, eq. (120) e (145), se apresente estável para qualquer número de  $St$  ou  $Fr$ , a solução numérica se apresenta instável de acordo com os valores relativos destes parâmetros, como mostra a fig. 18. Este comportamento da solução numérica explica o porque da diminuição do erro entre a solução numérica e a solução do método de perturbação quando  $Fr > 10$ .

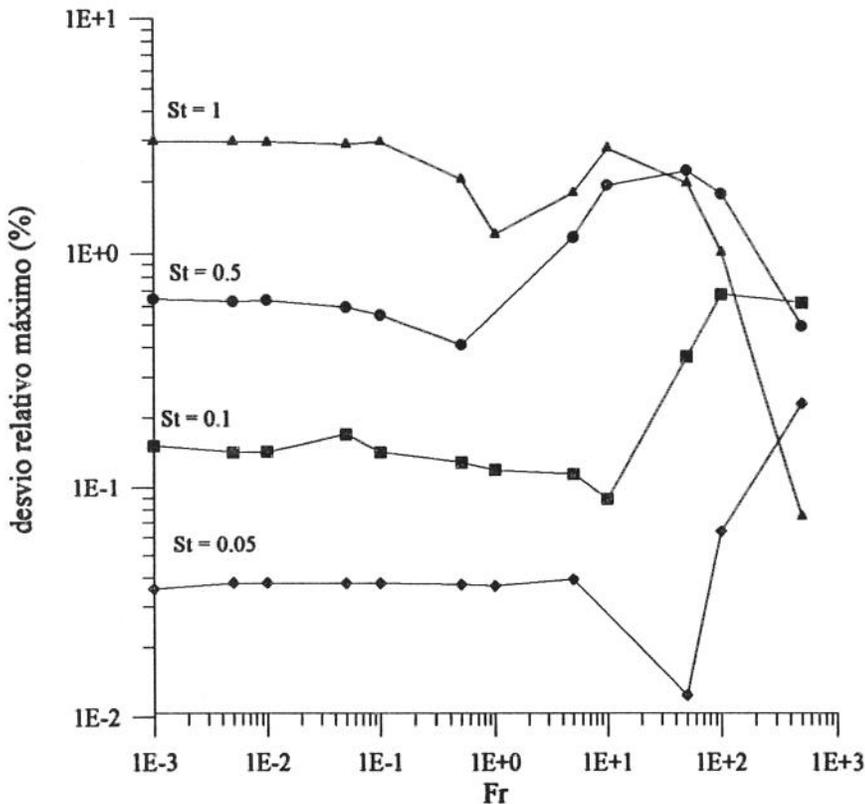


fig. 17 - Desvio relativo máximo entre o método numérico e o método das perturbações -processo inverso.

Para valores de  $St \cong 1$ , observamos que o sinal de saída  $V_2$  apresenta uma velocidade média diferente de  $\left[ \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)} \right]$  (Equação de Torricelli), conforme mostram as figs. 19 (a), (b), (c), (d) e as figs. 20 (c), (d), (e), (f), (g) e (h). Estas figuras representam o sinal de saída  $V_2$ , nas ordenadas, em função do tempo<sup>NA</sup>. Este comportamento também é mostrado pelo método de perturbação, eq.(120), pois a solução de segunda ordem apresenta um termo constante ( $Const_{21}$ ) que se torna significativo quando aumentamos  $St$ .

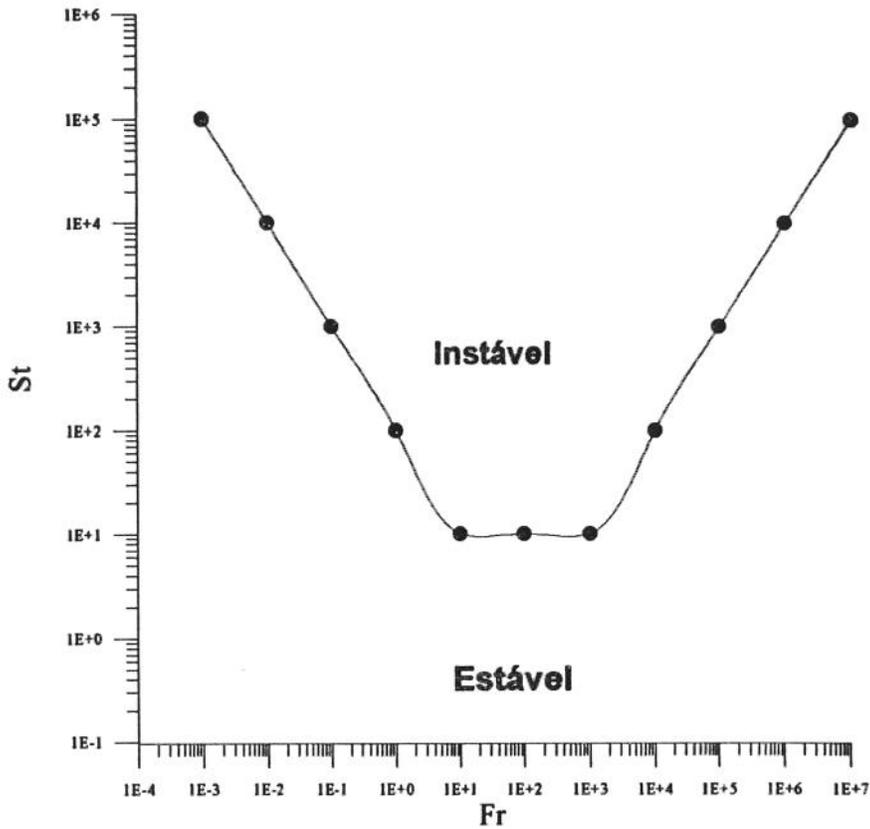


fig. 18 - Gráfico da estabilidade do método numérico - processo inverso.

Este tipo de comportamento ocorre porque quando o pistão empurra o fluido para o interior de VC-2 aumenta-se a velocidade  $V_2$  e, quando o pistão tem que retirar o fluido de VC-2 acaba não conseguindo reverter o fluxo em VC-2 e retira o fluido necessário ao preenchimento do espaço vazio, provocado pelo deslocamento, de VC-4 com isto a velocidade  $V_2$  é diferente de  $\left[ \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)} \right]$ . Isto é possível porque quando  $St \cong 1$  a relação entre o fluxo de energia oriundo do deslocamento do pistão e o fluxo de energia oriundo do reservatório elevado são de mesma ordem (dependem somente da geometria) portanto, o pistão não consegue sobrepujar o fluxo de energia do reservatório elevado, fazendo com que haja uma contribuição igualitária, no sinal de  $V_2$ , destas grandezas.

Para valores de  $St \ll 1$ , observamos que o sinal de saída  $V_2$  passa a oscilar em torno da velocidade média  $\left[ \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)} \right]$  com pequenas amplitudes, da ordem de 2% desta, conforme mostra as figs. 20 (a), (b), figs. 21 (a), (b), (c) e (d). Estas figuras representam o sinal de saída  $V_2$ , nas ordenadas, em função do tempo<sup>N.A</sup>. Podemos notar que Fr não altera significativamente a solução.

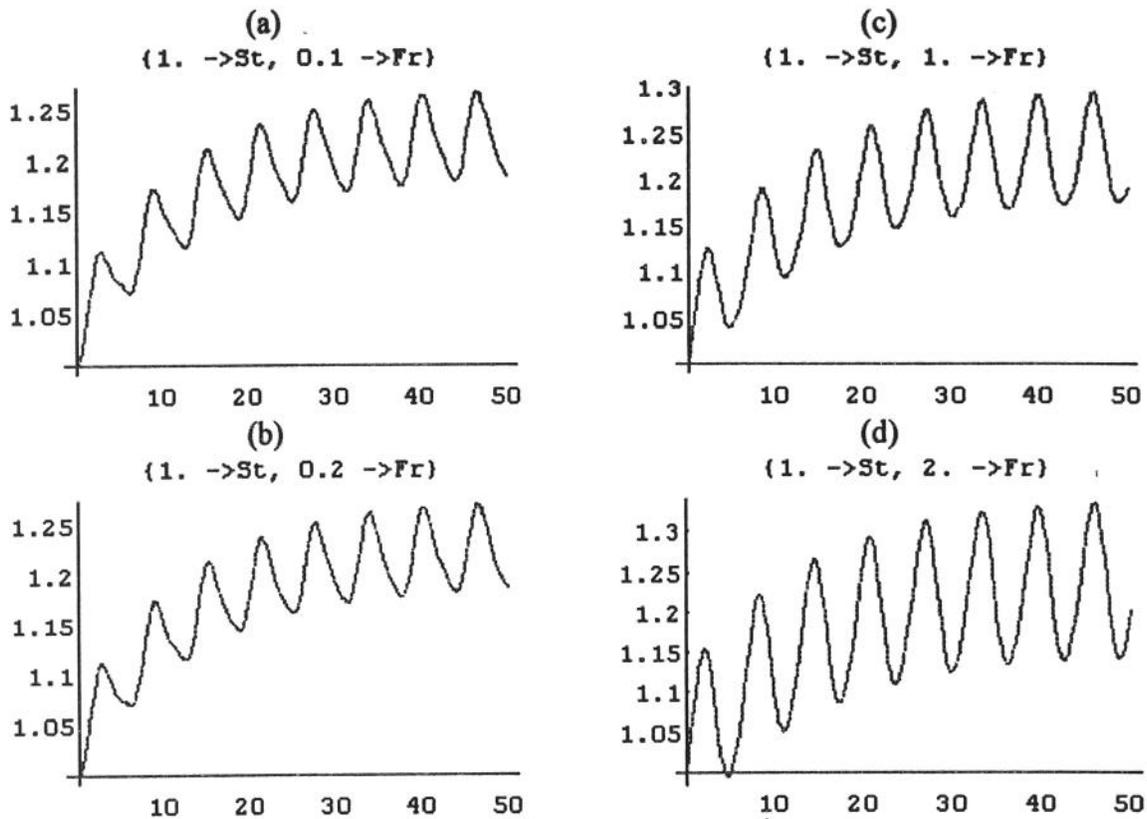


fig. 19 - Gráficos de  $V_2$ , na ordenada, em função do tempo<sup>NA</sup>, calculado numericamente, para um valor de  $St=1$  e  $Fr$  variando.

(a)  $Fr = 0.1$ ; (b)  $Fr = 0.2$ ; (c)  $Fr = 1$ ; (d)  $Fr = 2$ .

A solução obtida pelo método de perturbação também mostra este comportamento, pois quando diminuimos o valor de  $St$ , as soluções de ordem superior ficam desprezíveis em relação à solução de ordem zero, que passa portanto a predominar. Esta solução é a que justamente representa a velocidade média. Os pequenos níveis de oscilação são os termos obtidos pela solução de primeira ordem que não decai tão rapidamente com a diminuição de  $St$ , pois só é proporcional a  $St$ , enquanto a solução de segunda ordem é proporcional a  $St^2$ .

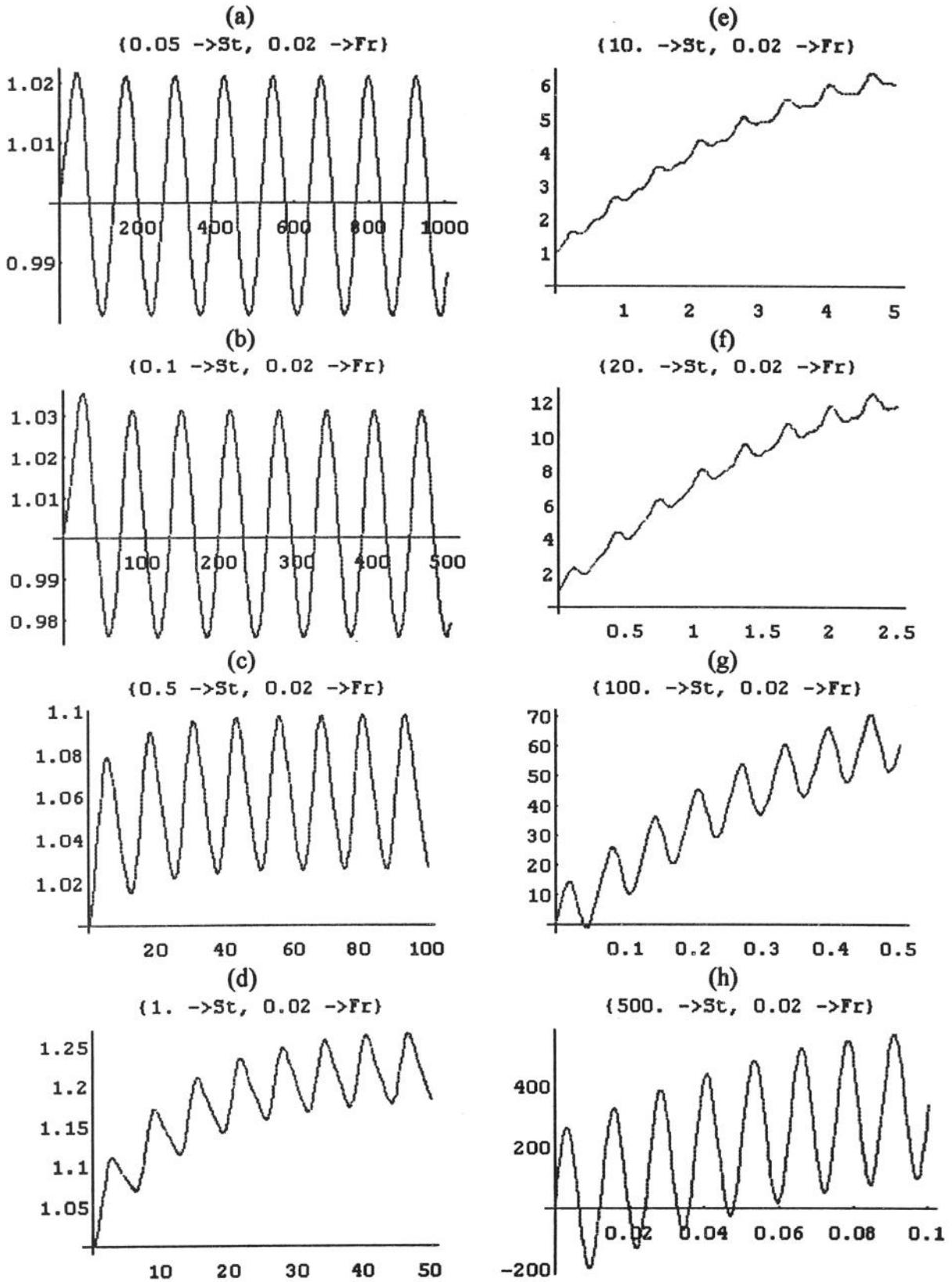


fig. 20 - Gráficos de  $V_2$ , na ordenada, em função do tempo<sup>NA</sup>, calculada numericamente, para vários números de St com Fr = 0.02.

(a) St = 0.05; (b) St = 0.1; (c) St = 0.5; (d) St = 1; (e) St = 10; (f) St = 20; (g) St = 100; (h) St = 500.

Sabendo que  $St^3$  é proporcional à razão entre a variação e/ou fluxo de energia cinética provocada pelo deslocamento do pistão com fluxo de energia potencial do reservatório elevado de nível constante, eq. (186) e (189) e sabendo que  $St \ll 1$ , podemos verificar que a energia potencial do reservatório elevado é muito maior que a variação de energia provocada pelo pistão. Isto nos leva a dizer que no sinal de saída,  $V_2$ , predominará a influência do reservatório elevado e este é o responsável pela velocidade média do sinal de saída, portanto o sinal de saída será a velocidade média com pequenas amplitudes de oscilações. As amplitudes aumentam quando aumentamos  $St$ , como mostram as figs. 20 (a) e (b).

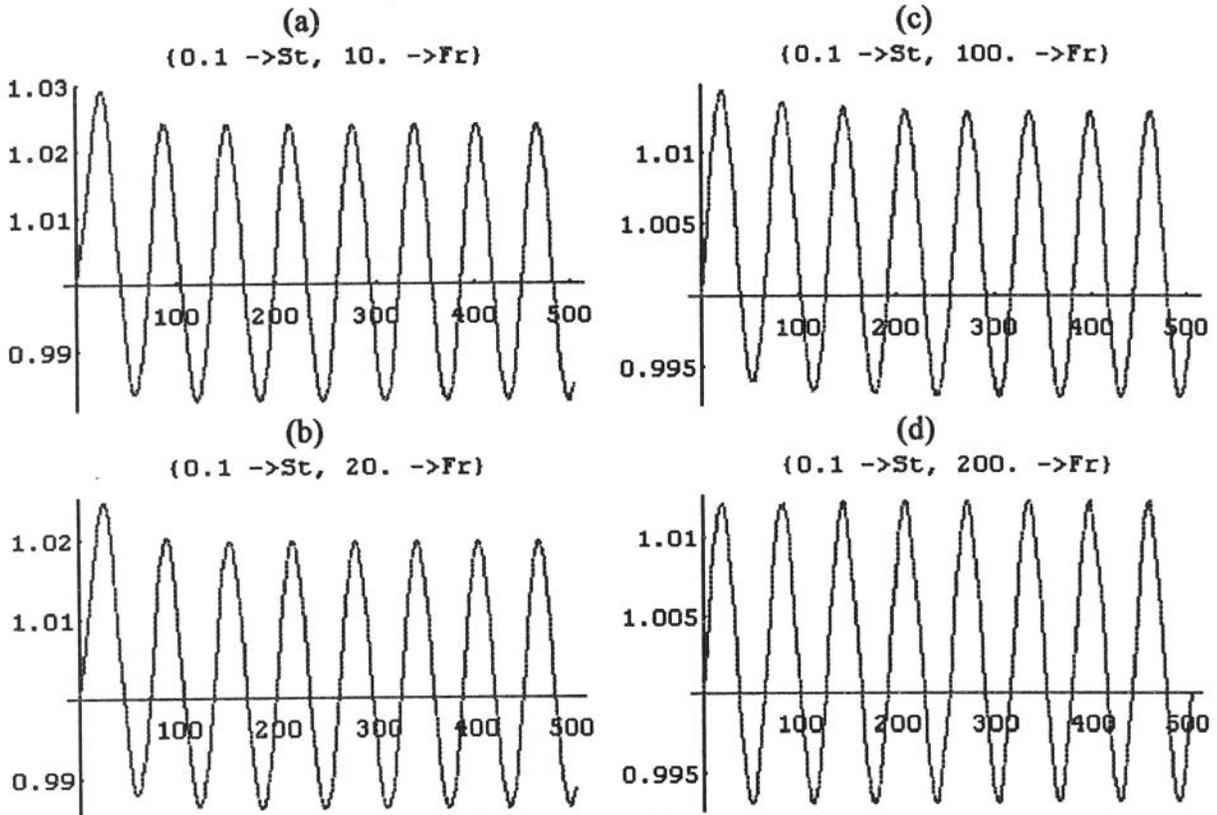


fig. 21 - Gráficos de  $V_2$ , na ordenada, em função do tempo<sup>NA</sup>, calculado numericamente, para um valor de  $St = 0.1$  e  $Fr$  variando.

(a)  $Fr = 10$ ; (b)  $Fr = 20$ ; (c)  $Fr = 100$ ; (d)  $Fr = 200$ .

Quando  $St \gg 1$ , observamos que o sinal de saída  $V_2$  tende a oscilar em torno de zero, mas com grandes amplitudes de oscilação, conforme mostra a fig. 20 (h). Isto ocorre pois quando  $St \gg 1$  a variação de energia provocada pelo deslocamento do pistão é muito maior que a energia potencial do reservatório elevado, portanto, podemos considerar, no limite, como sendo o escoamento no interior de um tubo com um pistão oscilando em uma das extremidades e para conservar a massa, a velocidade na saída do tubo ( $V_2$ ) tem que ser igual a velocidade na entrada, ou seja, a velocidade do pistão ( $V_3$ ). O grande valor observado para a amplitude (sendo superior a 200 vezes a velocidade média) é devido a escala de  $V_2$  ser a velocidade média e esta ser muito menor que a escala da velocidade do pistão ( $L_3 f_3$ ).

Este resultado também pode ser verificado pelo método de perturbação, através da eq. (145):

$$V_2(t) = \left( \frac{St^2 W_8}{W_2} + \frac{St^3 W_8 (-W_2 W_5 + W_1 W_8)}{W_2^3} \right) \sin(St.t) + \frac{1}{St} \quad (145)$$

Nesta equação podemos verificar que quando  $St \gg 1$ ,  $V_2$  passa a oscilar em torno de zero, pois  $1/St \rightarrow 0$ . Os níveis de amplitudes elevados também podem ser verificados, pois os coeficientes do termo periódico são proporcionais a  $St^2$  e  $St^3$ .

Também podemos verificar a influência de  $St$  analisando as componentes da equação da conservação de energia<sup>7.1</sup>, eq. (196).

$$p_3 V_3 A_3 Fr St = \underbrace{V_3 \dot{V}_3 (L_3 - L_{3v}) A_3 Fr St^3}_{(i)} + \underbrace{V_2 \dot{V}_2 L_2 A_2 Fr}_{(ii)} + \underbrace{V_4 \dot{V}_4 L_4 A_4 Fr}_{(iii)} - \frac{V_3^2}{2} V_3 A_3 Fr St^3 + \frac{V_2^2}{2} V_2 A_2 Fr \quad (v) \quad (vi)$$

$$+ \underbrace{(L_1 + L_4) V_4 A_4}_{(vii)} + \underbrace{L_5 V_2 A_2}_{(viii)} \quad (196)$$

Quando  $St \cong 1$ , foi verificado que a influência da variação de energia provocada pelo deslocamento do pistão é igual a energia potencial do reservatório elevado de nível constante, no sinal de saída  $V_2$ . Isto ocorre porque a equação da conservação de energia nos mostra que a energia associada aos termos (ii) [ variação da energia cinética dentro de VC-3], (v) [fluxo de energia cinética em VC-3], (iv) [ variação de energia cinética dentro de VC-4] e (vii) [fluxo de energia potencial de VC-4] são de mesma ordem de grandeza, fig. 23, e para satisfazer a equação da conservação de energia, esta energia tem que ser equilibrada pela energia associada aos termos (iii) [ variação de energia cinética dentro de VC-2] e (vi) [fluxo de energia cinética em VC-2]. Com isto, pode-se verificar que a influencia dos termos (ii), (v), (iv) e (vii) é que ser igualitária no termos (iii) e (vi), portanto o sinal de saída  $V_2$  carregara informações igualitárias do pistão e do reservatório elevado.

<sup>7.1</sup> - Não iremos analisar o termo (vii) por não influenciar no comportamento do sinal de saída  $V_2$ .  
- Lembrando que não estamos considerando os efeitos viscosos.

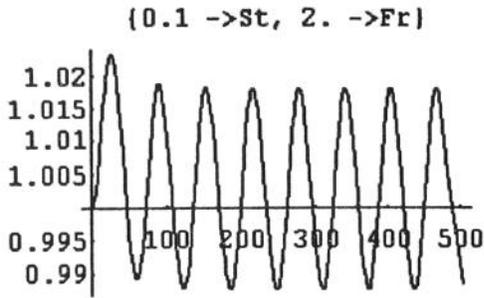


gráfico da velocidade de saída  $V_2$

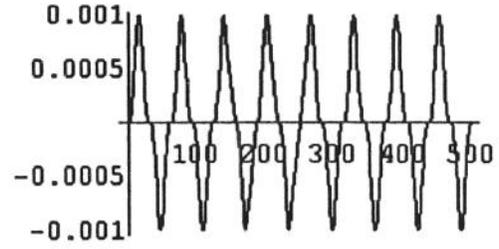


gráfico do fluxo de energia cinética que entra no VC-3 (v)

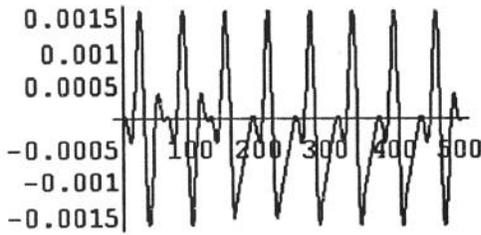


gráfico da variação da energia cinética no VC-3 (ii)

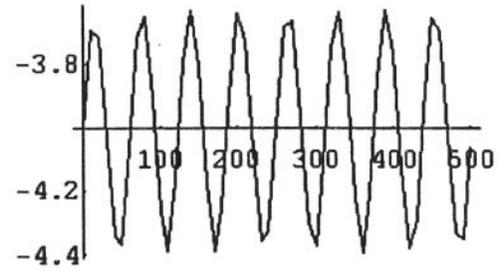


gráfico do fluxo de energia potencial em VC-4 (vii)

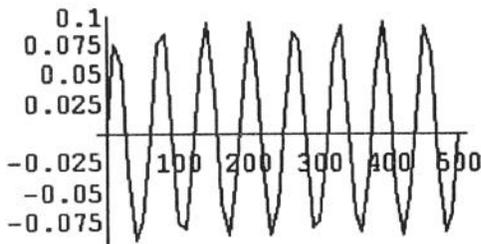


gráfico da variação da energia cinética no VC-2 (iii)

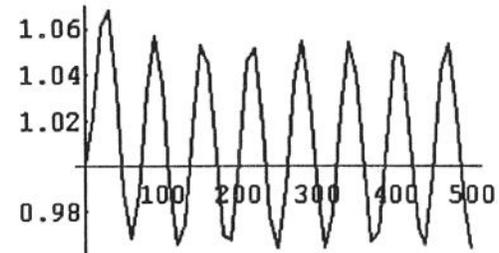


gráfico do fluxo de energia cinética que sai em VC-2 (vi)

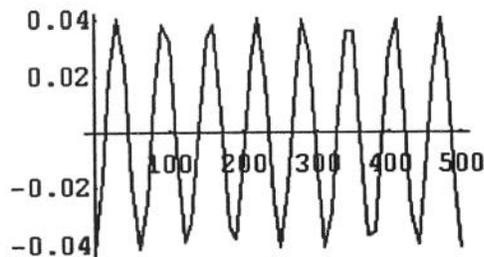


gráfico da variação da energia cinética no VC-4 (iv)

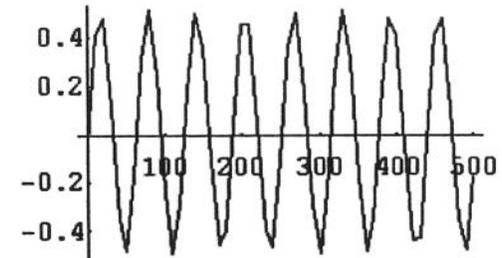


gráfico do trabalho de pressão na cabeça do pistão (i)

fig. 22 - gráficos quantidade de energia que compõem a equação da conservação de energia e da velocidade de saída, nas ordenadas, em função do tempo<sup>N.A</sup>, para  $St = 0.1$  e  $Fr = 2$ .

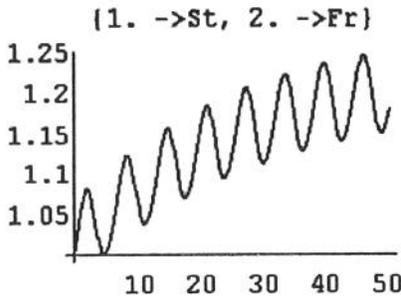


gráfico da velocidade de saída  $V_2$

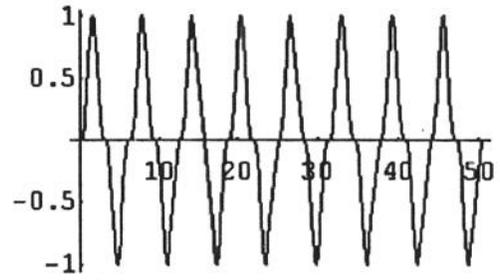


gráfico do fluxo de energia cinética que entra no VC-3 (v)

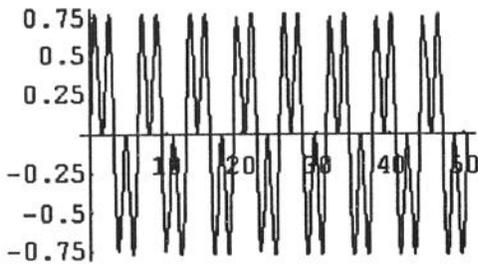


gráfico da variação da energia cinética no VC-3 (ii)

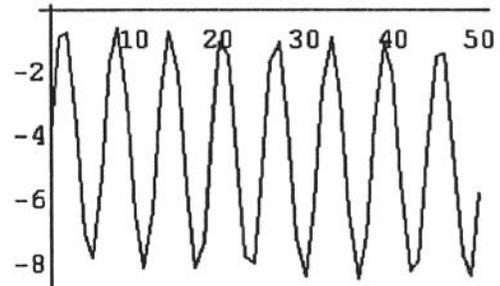


gráfico do fluxo de energia potencial em VC-4 (vii)

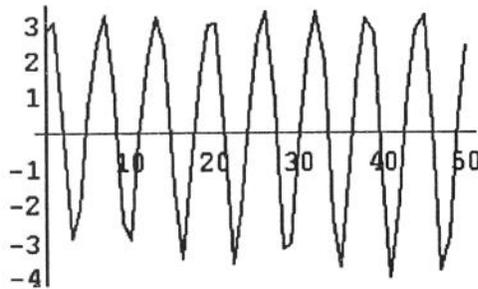


gráfico da variação da energia cinética no VC-2 (iii)

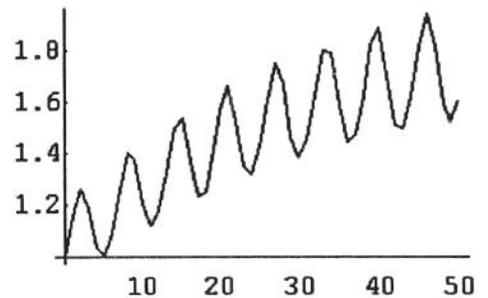


gráfico do fluxo de energia cinética que sai em VC-2 (vi)

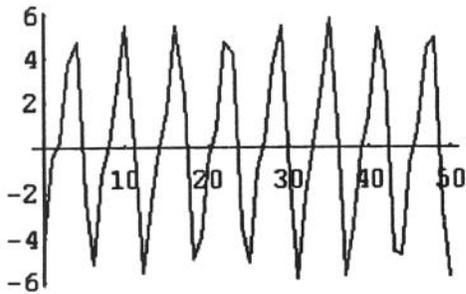


gráfico da variação da energia cinética no VC-4 (iv)

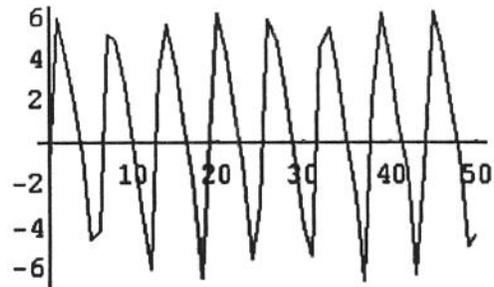


gráfico do trabalho de pressão na cabeça do pistão (i)

fig. 23 - gráficos quantidade de energia que compõem a equação da conservação de energia e da velocidade de saída, nas ordenadas, em função do tempo<sup>NA</sup>, para  $St = 1$  e  $Fr = 2$ .

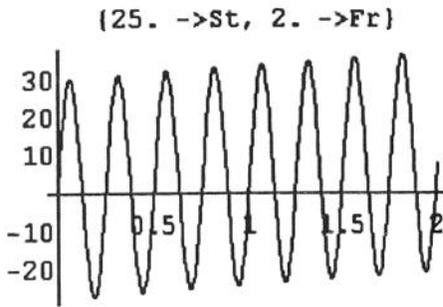


gráfico da velocidade de saída  $V_2$

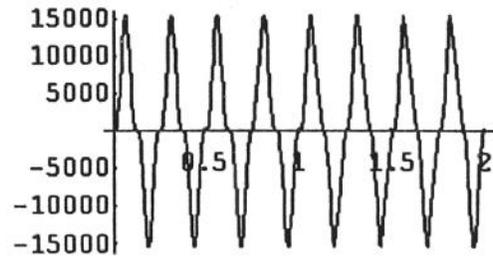


gráfico do fluxo de energia cinética que entra no VC-3 (v)

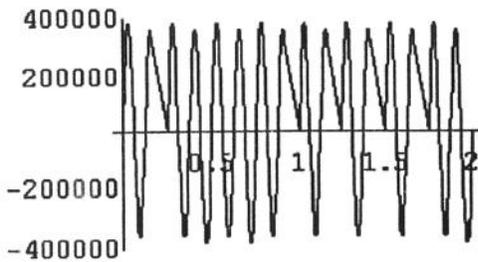


gráfico da variação da energia cinética no VC-3 (ii)

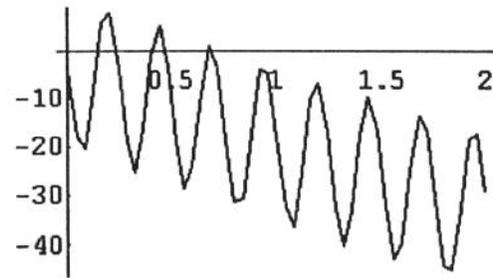


gráfico do fluxo de energia potencial em VC-4 (vii)

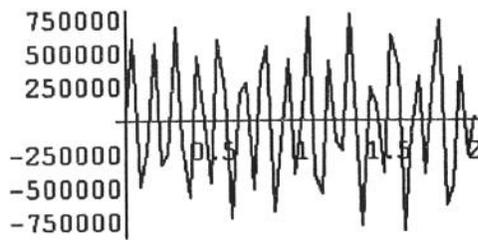


gráfico da variação da energia cinética no VC-2 (iii)

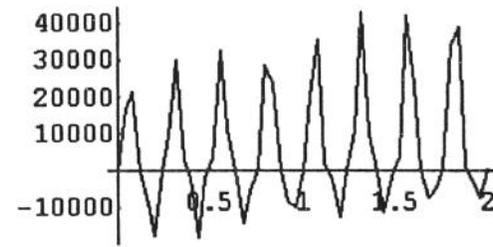


gráfico do fluxo de energia cinética que sai em VC-2 (vi)

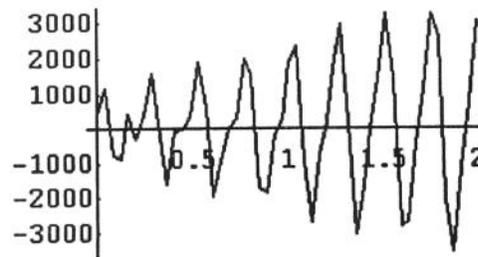


gráfico da variação da energia cinética no VC-4 (iv)

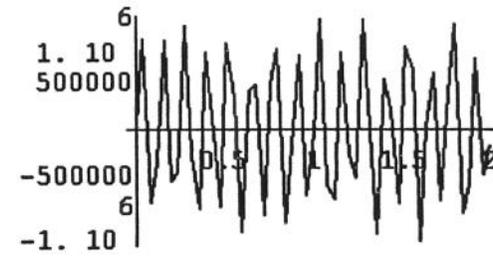


gráfico do trabalho de pressão na cabeça do pistão (i)

fig. 24 - gráficos quantidade de energia que compõem a equação da conservação de energia e da velocidade de saída, nas ordenadas, em função do tempo  $N_A$ , para  $St = 25$  e  $Fr = 2$ .

Quando  $St \ll 1$  a energia associada aos termos (ii) e (v) é menor que a energia associada aos termos (iv) e (vii), fig. 22, portanto, para que a equação da conservação de energia seja satisfeita, a energia associada aos termos (iii) e (vi) terá uma parcela mais significativa oriunda dos termos (iv) e (vii) levando o sinal de saída  $V_2$  a apresentar o comportamento visto. Isto é o mesmo que dissermos que a energia associada ao reservatório elevado é maior que a energia associada ao deslocamento do pistão. Quando  $St \gg 1$  ocorre o inverso, ou seja, a energia associada aos termos (ii) e (v) é maior que a energia associada aos termos (iv) e (vii), fig. 24, e como ainda tem-se que satisfazer a equação da conservação de energia, a energia associada aos termos (iii) e (vi) passa ter sua parcela mais significativa oriunda dos termos (ii) e (v) e não mais dos termos (iv) e (vii), ou seja, a energia associada ao deslocamento do pistão é maior que a energia associada ao reservatório elevado. A energia associada ao termo (i) [trabalho de pressão na cabeça do pistão] é a responsável pelo movimento do fluido dentro de VC-3 e suas conseqüências.

## 7.2 - Processo Direto

O desvio relativo entre o método numérico e o método de perturbação, assim como um mapa da estabilidade numérica para o processo direto foram estudadas com os parâmetros geométricos do sistema mostrados na tab. 10.

Tab. 10 - geometria do mecanismo pulso duplicador para o processo direto.

Áreas (m <sup>2</sup> )	Comprimentos (m)	Diâmetros (m)
$A_2 = 1.013 \times 10^{-3}$	$L_1 = 0.3$	$D_2 = 35.9 \times 10^{-3}$
$A_3 = 506.7 \times 10^{-6}$	$L_2 = 3.0$	$D_3 = 25.4 \times 10^{-3}$
$A_4 = 346.4 \times 10^{-6}$	$L_5 = 0.3$	$D_4 = 21.0 \times 10^{-3}$

Para que se definir a equação que governa o sistema, é necessário que se determine o comprimento característico, pois precisaremos determinar os parâmetros geométricos adimensionais do sistema. Para se determinar este comprimento, utilizaremos a definição de  $Fr$ , ou seja:

$$L_c = \frac{\bar{U}^2}{Fr \cdot g}$$

Ainda assim, para que possamos determinar este comprimento, é necessário que fixemos a velocidade média na seção de teste. No caso estudado, esta velocidade foi fixada em 0.15 m/s.

A fig. 25 mostra o gráfico da estabilidade do método numérico para o processo direto. Pode-se verificar que a estabilidade do método numérico tem um comportamento não definido para  $St > 1$ , portanto não iremos estudar detalhadamente a influência dos parâmetros dinâmicos ( $Fr$  e  $St$ ) no comportamento hidrodinâmico do sistema.

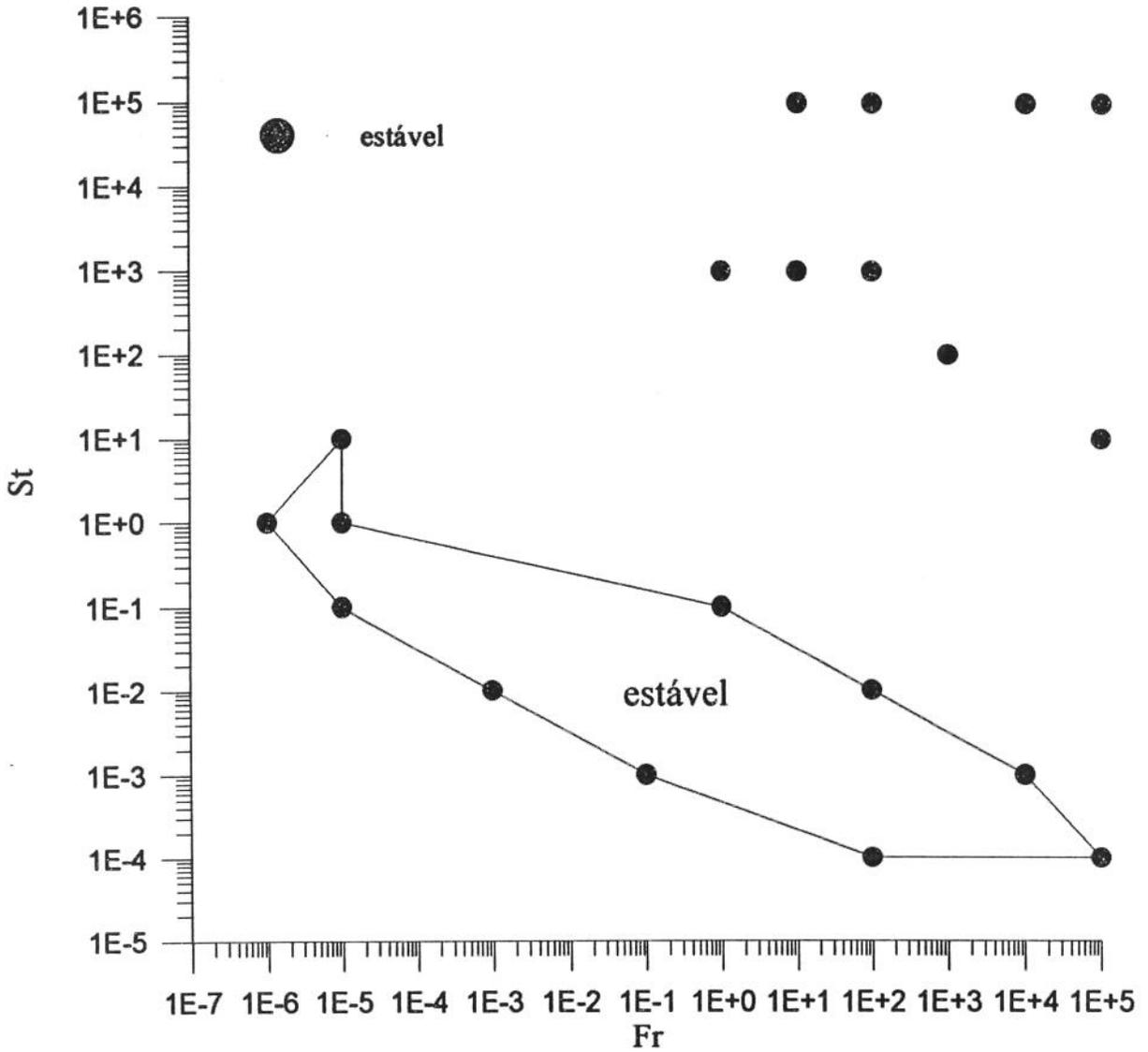


fig. 25 - Estabilidade numérica - processo direto.

O comportamento do desvio máximo relativo, fig. 26, mostra que a solução numérica e a solução obtida pelo método de perturbação, eq. (172), são convergentes para  $0.001 \leq St \leq 0.01$  com erros na faixa de 0.05% a 3%. A faixa estreita de convergência da solução obtida pelo método de perturbação, em St, deve-se ao fato de utilizarmos uma expansão de primeira ordem para representar a solução de  $V_3$ . A faixa estreita de Fr, na qual foi verificada a convergência entre as soluções, deve-se à instabilidade do método numérico.

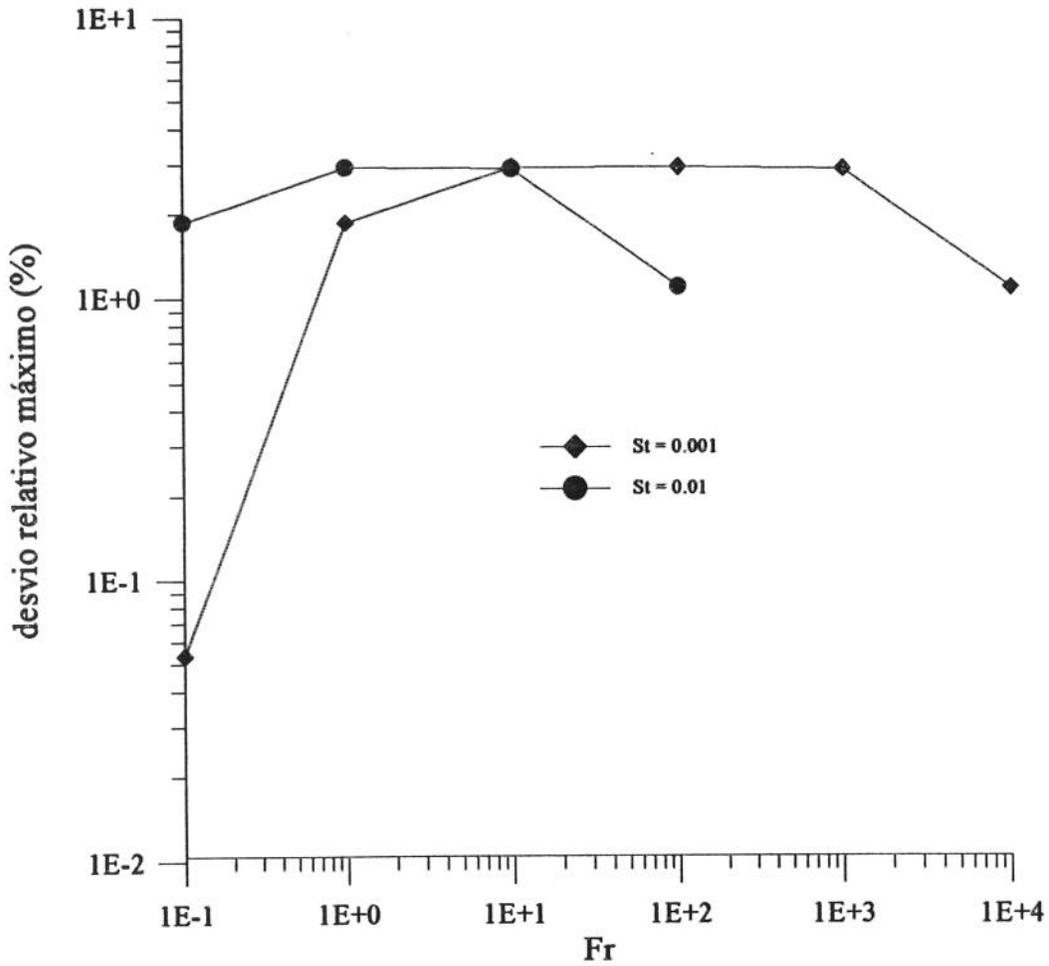


fig. 26 - Desvio relativo máximo entre o método numérico e o método de perturbação - processo direto.

### 7.3 - Similaridade Hidrodinâmica

Para que possamos garantir a similaridade hidrodinâmica entre o escoamento hemodinâmico do sistema arterial e o escoamento que será reproduzido no mecanismo pulso duplicador, é necessário que os parâmetros Re e St do simulador sejam os mesmos do escoamento hemodinâmico<sup>7.2</sup>, ou seja:

$$(Re)_{\text{fisiológico}} = (Re)_{\text{mec. pulso duplicador}} = \frac{\overline{UD}}{\nu}$$

(197)

7.2 maiores detalhes, verificar o apêndice B.

$$(St)_{\text{fisiológico}} = (St)_{\text{mec. pulso duplicador}} = \frac{L_c f_c}{U} \quad (198)$$

Para que se possa definir a equação que governa o sistema é necessário que se conheça  $Fr$ , e este terá que satisfazer os parâmetros de similaridade hidrodinâmica do pulso fisiológico ( $Re$  e  $St$ ). Para tanto, combinaremos as eqs. (197) e (198) com as definições de  $Fr \left[ Fr = \frac{\bar{U}^2}{gL_c} \right]$ , obtendo assim que:

$$(Fr)_{\text{mec. pulso duplicador}} = \frac{(Re)_{\text{fisiológico}} \cdot \nu \cdot f_c}{g \cdot (St)_{\text{fisiológico}} \cdot D} \quad (199)$$

onde:

$g$  - aceleração gravitacional;

$\nu$  - viscosidade cinemática do fluido de teste;

$D$  - diâmetro da seção de teste;

$f_c$  - frequência fundamental do sinal que será reproduzido.

Com estas restrições, eqs. (197) e (196), podemos garantir uma similaridade cinemática e dinâmica entre os pulso de velocidade do simulador e o pulso de velocidade fisiológico.

### 7.3.1 - Artéria Renal Direita

Para a simulação da artéria renal direita foram utilizados a geometria e os parâmetros dinâmicos mostrados na tab. 11. O programa utilizado encontra-se no Apêndice C. Para o pulso de velocidade fisiológico foram empregados cinco termos da série obtida por Garcia<sup>7.2</sup> (1992).

Tab. 11 - Parâmetros dinâmicos e geometria do simulador para o caso da artéria renal direita.

Comprimentos (m)	Diâmetros (m)	Parâmetros Dinâmicos	Outros
$L_1 = 0.3$	$D_2 = 50.8 \times 10^{-3}$	$Re = 348$	$f_c = 1.167$ (rad/s)
$L_2 = 3$	$D_3 = 25.4 \times 10^{-3}$	$St = 0.437981$	$\nu = 4 \times 10^{-6}$ (m <sup>2</sup> /s)
$L_5 = 0.3$	$D_4 = 21 \times 10^{-3}$	$Fr = 0.00744256$	$L_c = 0.0102839$ (m)

O gráfico da fig. 27 exibe o pulso de velocidade da artéria renal direita (linha pontilhada) e o pulso de velocidade do pistão (linha cheia) que a reproduzirá no sistema pulso duplicador

proposto. Vale lembrar que todo o método de solução desenvolvido até aqui negligencia as perdas de carga que ocorrem no sistema.

Analisando a fig. 27 verificamos que o sinal de saída, velocidade do pistão, tem um comportamento semelhante ao do sinal de entrada, porém com diferenças nas amplitudes. Este

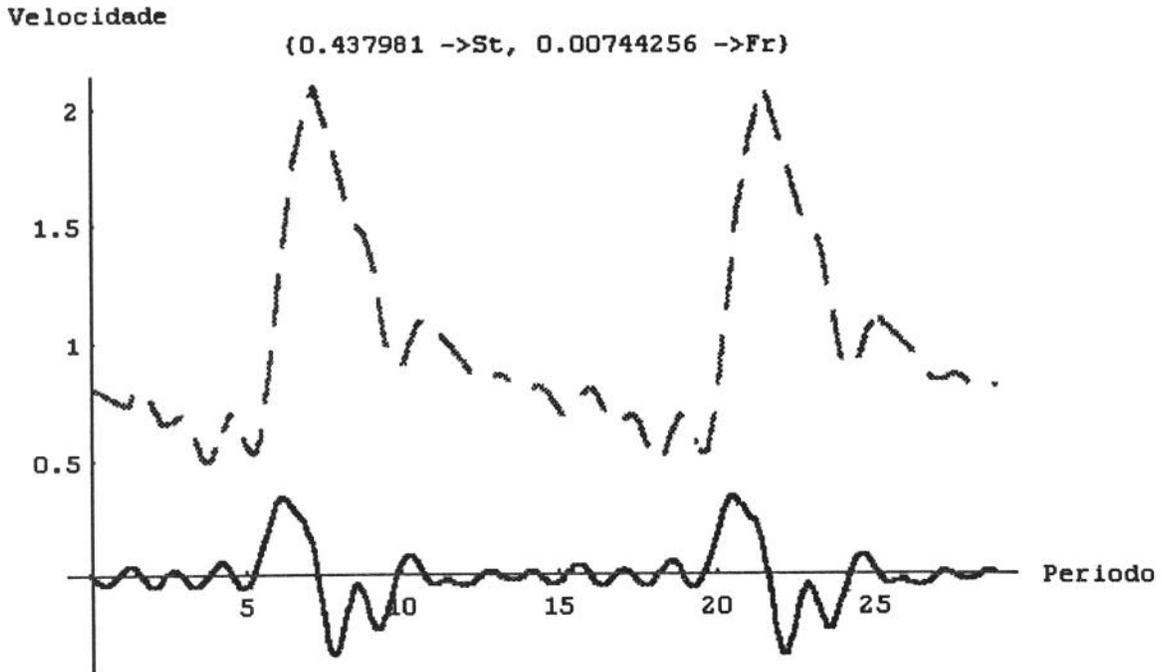


fig. 27 - Pulso de velocidade da artéria (pontilhada) e do pistão (cheia) para a artéria renal direita, em função do tempo<sup>NA</sup>.

resultado nos leva a crer que o simulador seria capaz de reproduzir um pulso de velocidade similar ao fisiológico, ou seja, o simulador reproduziria um pulso de velocidade com o mesmo St e Re do pulso de velocidade fisiológico desejado. Entretanto, analisando o gráfico de fase da velocidade com o deslocamento, fig. 28, verificamos que o pistão apresenta uma velocidade média diferente de zero e negativa, quer dizer, o pistão para reproduzir um pulso de velocidade similar ao fisiológico terá que retirar mais fluido do que colocou na seção de teste. Tal pulso é impossível de ser reproduzido pelo sistema proposto.

A fim de contornar-se este problema, forçaremos o pistão a ter uma velocidade média igual a zero, e com este pulso de velocidade para o pistão e o procedimento de solução adotado para o processo inverso, solucionaremos o sistema e verificaremos se o pulso de velocidade reproduzido na seção de teste será similar ao fisiológico. Também é necessário que se altere a altura do reservatório elevado de nível constante, para que seja compensado o incremento de velocidade média no sinal de saída, dado pelo sistema.

Não obstante, para que se possa realizar este procedimento, é necessário que definamos as escalas e os parâmetros dinâmicos do processo inverso ( $L_3$ , Fr e St). Para tanto, é preciso que se determine o deslocamento máximo do pistão ( $L_3$ ) e a velocidade média na seção de teste, já descontado o incremento de velocidade média fornecido pelo sistema.

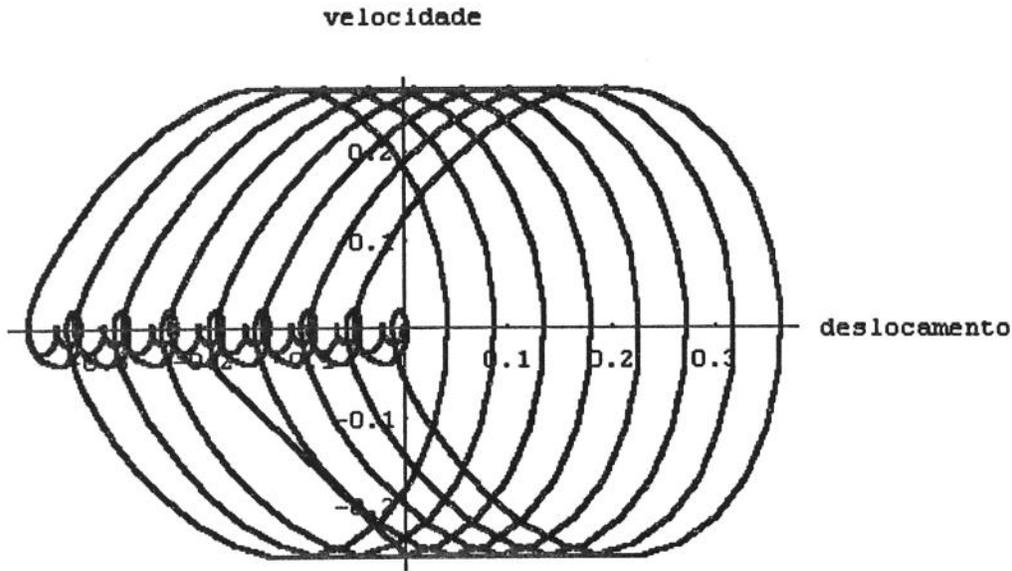


fig. 28 - Gráfico de fase do pistão para a artéria renal direita.

Com o intuito de se determinar o deslocamento máximo dimensional do pistão, integra-se a função do pulso de velocidade, oriundo do processo direto. Calcula-se então os pontos de máximo e mínimo, para obter seu deslocamento máximo e daí, fazemo-lo dimensional com a escala adotada para os comprimentos no processo direto ( $L_c$ ). A velocidade média na seção de teste é determinada pela altura do reservatório de nível constante ( $L_4$ ) dimensional, calculado no processo direto. O incremento na velocidade média na seção de teste pode ser estimado através da velocidade média do pistão, obtido no processo direto.

Com este procedimento, os parâmetros dinâmicos e as escalas que serão utilizados no processo inverso, são os dados da tab. 12.

Tab. 12 - Parâmetros dinâmicos<sup>7.3</sup> e escalas utilizadas para o processo direto no caso da artéria renal direita.

$L_3$ (m)	$f_3$ (rad/s)	Fr	St	$\bar{U}$ (m/s)	$v$ (m <sup>2</sup> /s)
0.0043	1.167	0.017797	0.183142	0.0273	$4 \times 10^{-6}$

A fig. 29 mostra o pulso de velocidade reproduzido pelo simulador (linha cheia) e o que deveria ser reproduzido (linha pontilhada), isto é, o pulso de velocidade do sistema fisiológico na artéria renal direita. Analisando o gráfico, verifica-se que o pulso de velocidade reproduzido

$$^{7.3} St = \frac{L_3 f_3}{\bar{U}} \text{ e } Fr = \frac{\bar{U}^2}{gL_3}$$

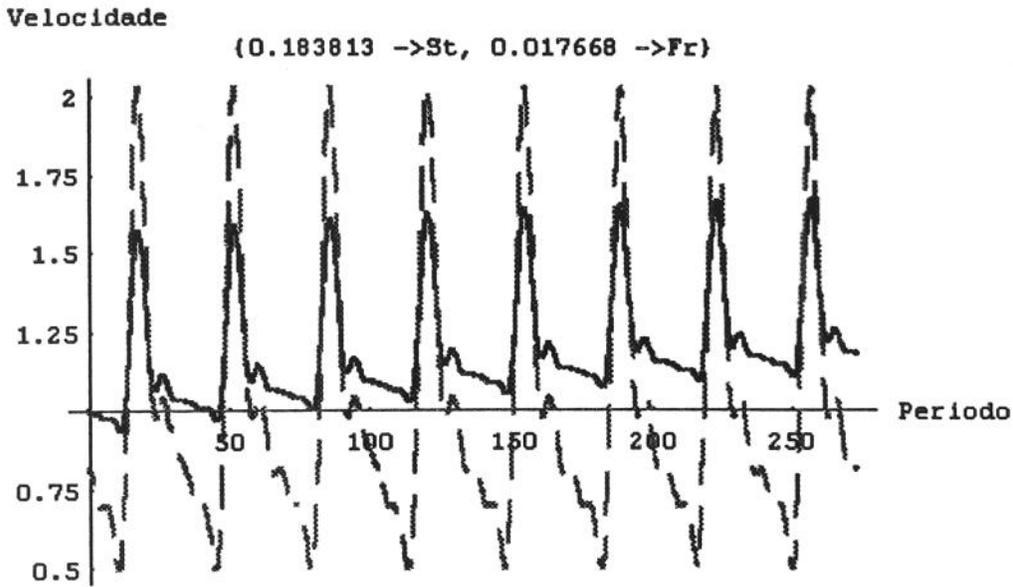


fig. 29 - Pulso de velocidade desejado (pontilhado) e o reproduzido (cheia) para a artéria renal direita, em função do tempo<sup>NA</sup>.

no simulador não é similar ao fisiológico, pois não apresentam o mesmo Re nem o mesmo St (ver tab. 13), todavia o pulso obtido é semelhante ao desejado.

Tab. 13 - Parâmetros dinâmicos fisiológicos e reproduzidos - artéria renal direita

	Re	St
Desejado (Fisiológico)	348	0.437981
Obtido (Processo Inverso)	413	0.0446056
erro relativo (%)	19	90

Os dados da tab. 13 demonstram que o escoamento reproduzido pelo simulador apresenta uma diferença de 18% para o Re fisiológico e de 90% para St. Conclui-se daí que, neste caso, o sistema é capaz de simular um escoamento com velocidade média mais próxima do fluxo fisiológico do que os níveis de amplitude. No entanto, o pulso de velocidade apresenta um pico de velocidade, aquém do fisiológico, porém significativo (1.5 vezes maior que a velocidade média).

### 7.3.2 - Artéria Ilíaca Comum Direita

No intuito de simular a artéria ilíaca comum direita, foram utilizadas a geometria e os parâmetros dinâmicos exibidos na tab. 14. Para o pulso de velocidade, empregamos cinco termos da série devida a Garcia<sup>7,2</sup> (1992). O programa computacional segue no Apêndice C.

Tab. 14 - Parâmetros dinâmicos e geometria do simulador para artéria ilíaca comum direita.

Comprimentos (m)	Diâmetro (m)	Parâmetros Dinâmicos	Outros
$L_1 = 0.3$	$D_2 = 50.8 \times 10^{-3}$	$Re = 791$	$f_c = 1.167$ (rad/s)
$L_2 = 3$	$D_3 = 25.4 \times 10^{-3}$	$St = 0.4882741$	$v = 4 \times 10^{-6}$ (m <sup>2</sup> /s)
$L_3 = 0.3$	$D_4 = 21 \times 10^{-3}$	$Fr = 0.0151744$	$L_c = 0.0260595$ (m)

O gráfico da fig. 28 mostra os pulsos de velocidade da artéria (linha pontilhada) e do pistão (linha cheia), este responsável pela reprodução daquele. no sistema pulso duplicador proposto.

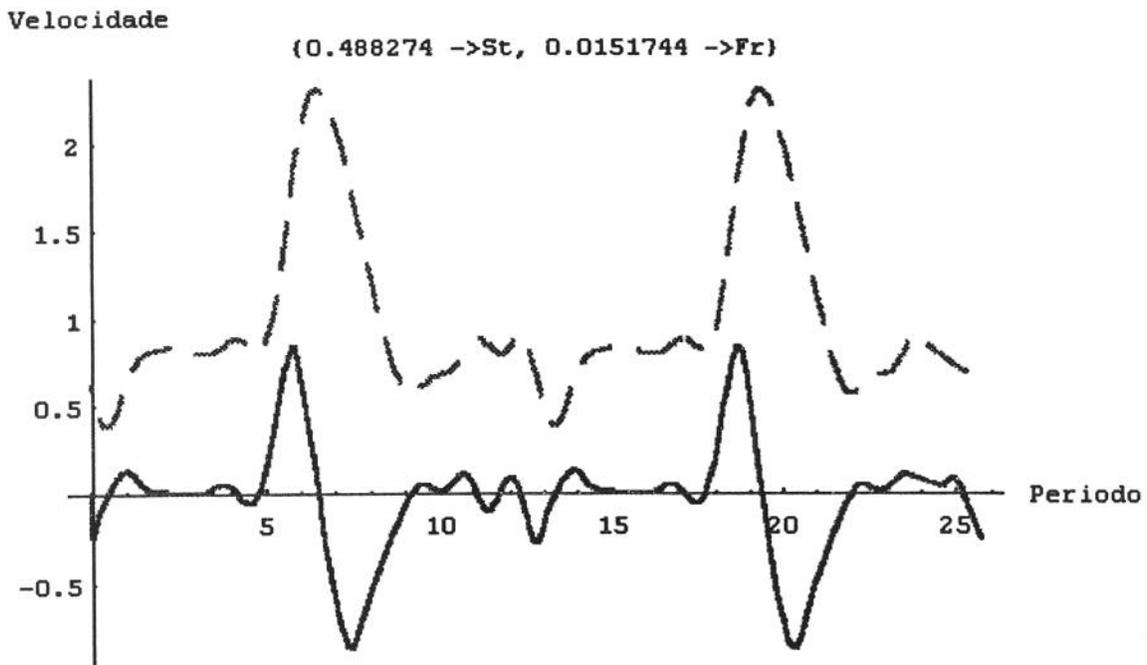


fig. 30- Pulso de velocidade da artéria (pontilhada) e do pistão (cheia) para a artéria ilíaca comum direita, em função do tempo<sup>NA</sup>.

Analisando a fig. 30, verificamos que o sinal de saída, velocidade do pistão, tem um comportamento semelhante ao do sinal de entrada, todavia com diferenças nas amplitudes. Entretanto, também aqui, o pistão apresenta uma velocidade média nula, como se depreende

do gráfico de fase da velocidade com o deslocamento, fig. 31. Com o fito de sobrepujar esta dificuldade, adotaremos o mesmo recurso do caso anterior, ou seja, solucionar o sistema, com a metodologia do processo inverso, utilizando como pulso de velocidade do pistão o sinal obtido no processo direto, restringindo como nula sua velocidade média.

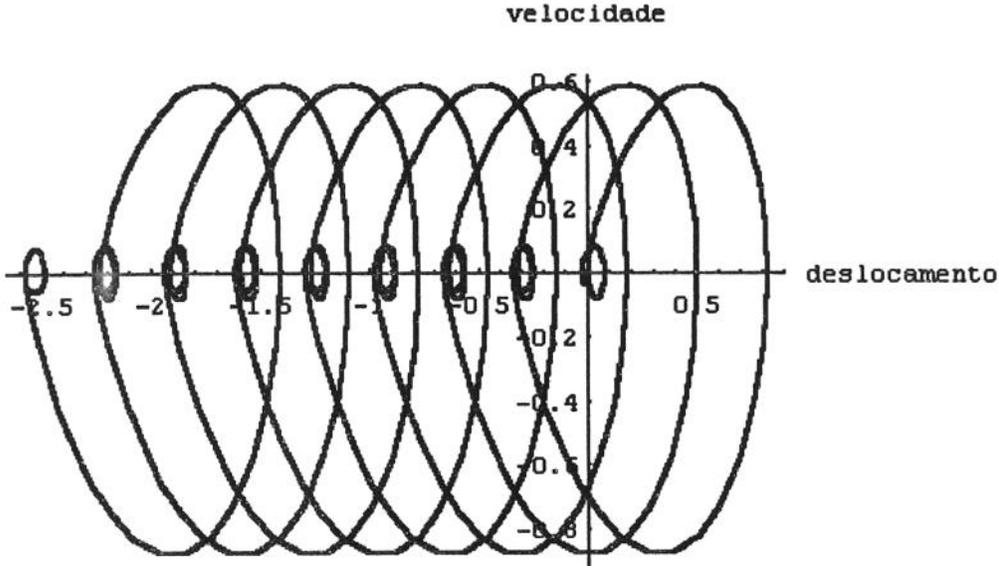


fig. 31 - Gráfico de fase do pistão para a artéria ilíaca comum direita.

Os parâmetros dinâmicos e as escalas para o processo inverso estão mostrados na tab. 15.

Tab. 15 Parâmetros dinâmicos<sup>7,3</sup> e escalas utilizadas para o processo inverso no caso da artéria ilíaca comum direita.

$L_3$ (m)	$f_3$ (rad/s)	Fr	St	$\bar{U}$ (m/s)	$v$ (m <sup>2</sup> /s)
0.0286	1.167	0.0138338	0.535734	0.0608	$4 \times 10^{-6}$

A fig. 32 também exhibe o pulso de velocidade reproduzido pelo simulador (linha cheia) e o que deveria ser reproduzido - pulso fisiológico (linha pontilhada). Analisando-os, podemos verificar que não são similares, pois não apresentam o mesmo Re nem o mesmo St, conforme revela a tab. 16.

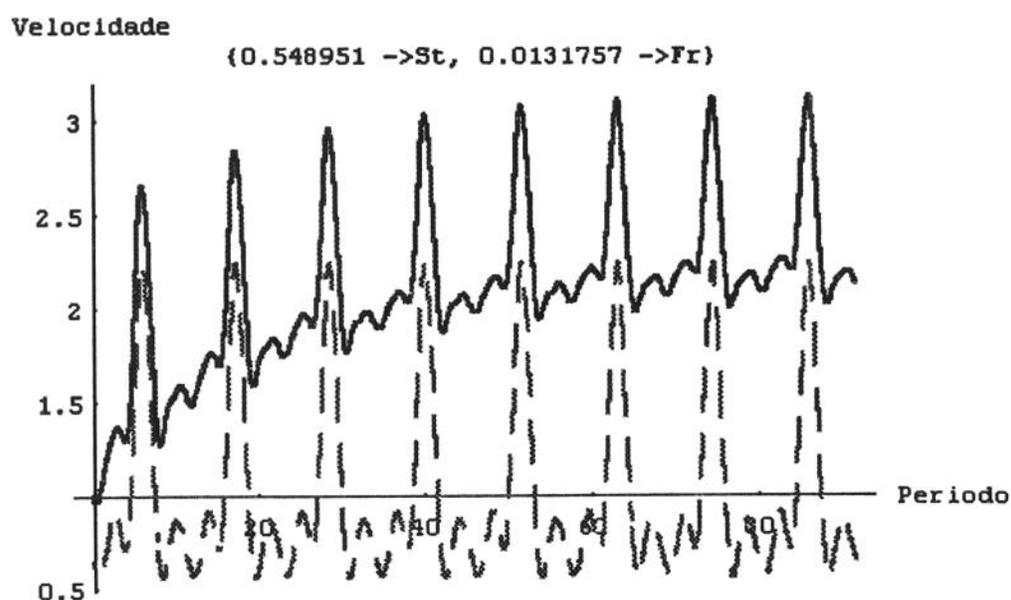


fig. 32 - Pulso de velocidade desejado (pontilhado) e o reproduzido (cheia) para a artéria ilíaca comum direita. em função do tempo<sup>NA</sup>.

Os dados da tab. 16 mostram que o escoamento reproduzido pelo simulador apresenta uma diferença de 106% para o Re fisiológico e de 75% para St. Destes dados abstrai-se que, neste caso, o sistema é incapaz de simular um fluxo com velocidade média nem tampouco com níveis de amplitudes próximos do escoamento fisiológico.

Tab. 16 - Parâmetros dinâmicos fisiológico e reproduzidos - artéria ilíaca comum direita.

	Re	St
Desejado (Fisiológico)	791	0.4883
Obtido (Processo Inverso)	1627	0.120683
Erro relativo (%)	106	75

### 7.3.3 - Artéria Subclávia Direita

A fim de simular a artéria subclávia direita, valem-nos da geometria e dos parâmetros dinâmicos mostrados na tab. 17. Para o pulso de velocidade fisiológico, foram empregados cinco termos da série obtida por Garcia<sup>7.2</sup> (1992). O programa utilizado encontra-se no Apêndice C.

Tab. 17 - Parâmetros dinâmicos e geometria do simulador para o caso da artéria subclávia direita.

Comprimentos (m)	Diâmetro (m)	Parâmetros Dinâmicos	Outros
$L_1 = 0.3$	$D_2 = 50.8 \times 10^{-3}$	$Re = 390$	$f_c = 1.167$ (rad/s)
$L_2 = 3$	$D_3 = 25.4 \times 10^{-3}$	$St = 0.5495$	$v = 4 \times 10^{-6}$ (m <sup>2</sup> /s)
$L_5 = 0.3$	$D_4 = 21 \times 10^{-3}$	$Fr = 0.00664806$	$L_c = 0.0144596$ (m)

O gráfico da fig. 32 mostra o pulso de velocidade da artéria subclávia direita (linha pontilhada) e aquele que o reproduzirá no modelo proposto: pulso de velocidade do pistão (linha cheia). Relembrando que todo o método de solução desenvolvido até aqui supõe desprezíveis as perdas de carga inerentes ao sistema

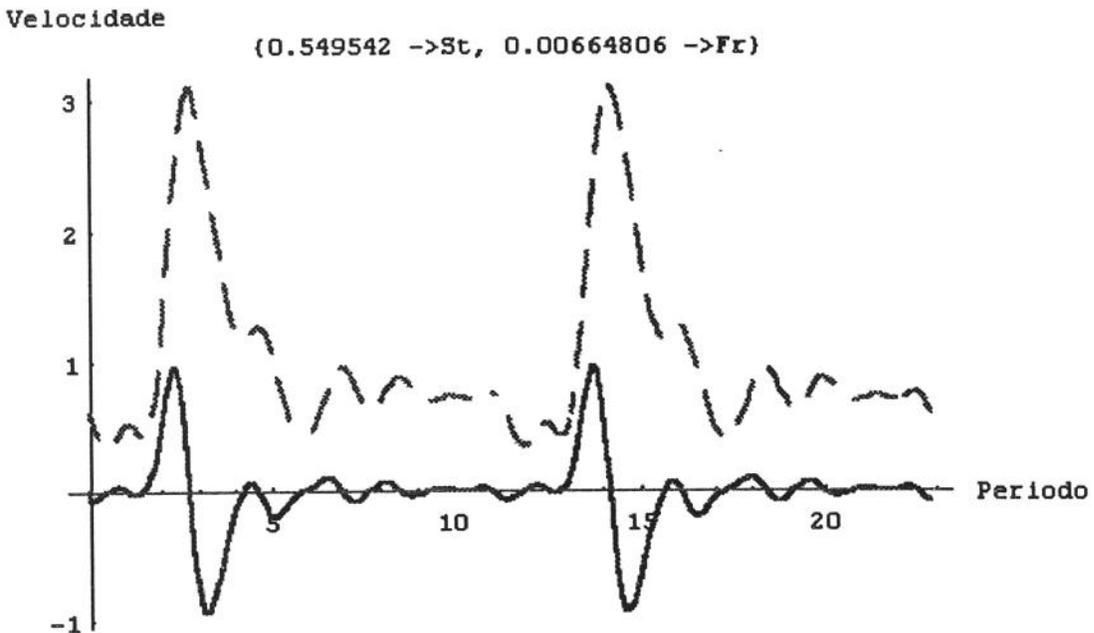


fig. 33 - Pulso de velocidade da artéria (pontilhada) e do pistão (cheia) para a artéria subclávia direita, em função do tempo<sup>N.A.</sup>

Analisando a fig. 33, verifica-se que o sinal de saída, velocidade do pistão, apresenta também um comportamento semelhante ao de entrada, mas com amplitudes diferentes. Este resultado poderia nos levar a dizer que o simulador seria capaz de reproduzir aí o pulso de velocidade fisiológico, entretanto, também neste caso, a velocidade do pistão, obtida pelo processo direto, apresenta uma velocidade média diferente de zero, segundo revela o gráfico de fase entre a velocidade e o deslocamento, fig. 34.

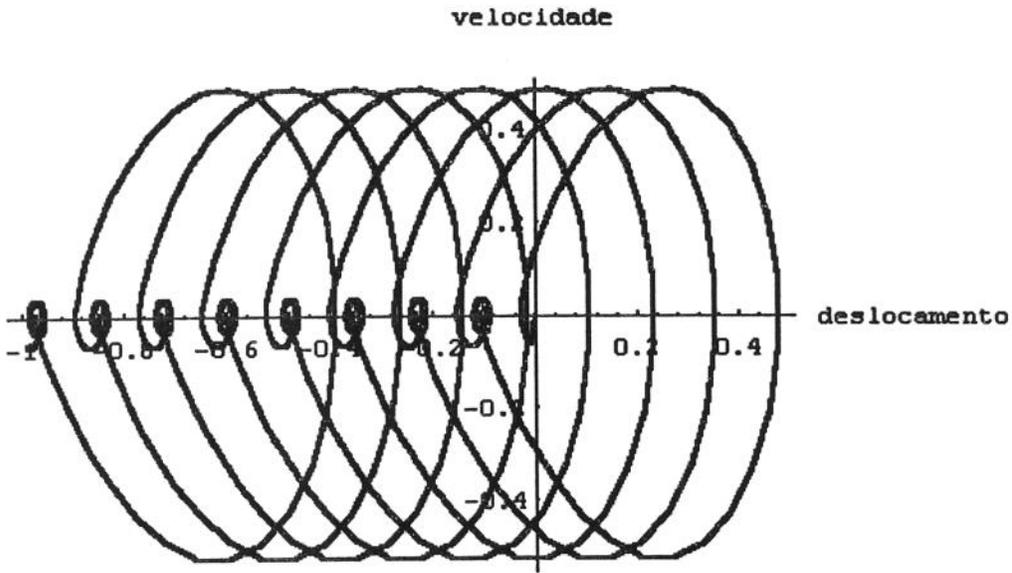


fig. 34 - Gráfico de fase do pistão para a artéria subclávia direita.

Tal inconveniente é resolvido pelo procedimento utilizado no caso da artéria renal direita, ou seja, utilizando-se dos dados da tab. 18 e a técnica de solução do processo inverso. Como pulso de velocidade do pistão, utiliza-se o obtido do processo direto (impondo nula a velocidade média), conseguindo assim que o pulso de velocidade reproduzido seja o dado pela fig. 35, onde ambos são plotados: o desejado (linha pontilhada) e o calculado (linha cheia).

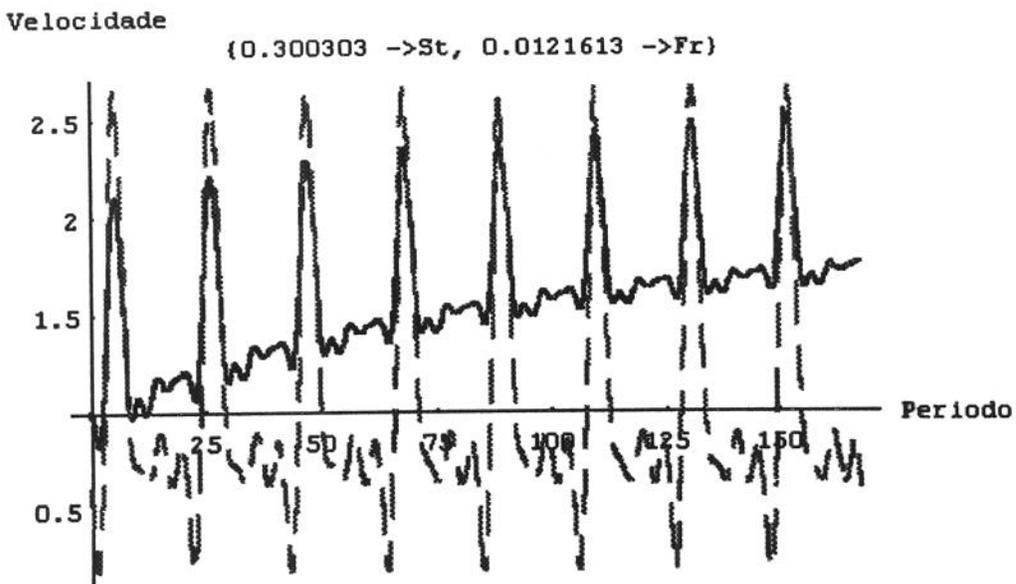


fig. 35 - Pulso de velocidade desejado (pontilhado) e o reproduzido (cheia), para artéria subclávia direita, em função do tempo<sup>NA</sup>.

Tab. 18 - Parâmetros dinâmicos<sup>7,3</sup> e escalas utilizadas para o processo inverso no caso da subclávia direita.

$L_3$ (m)	$f_3$ (rad/s)	Fr	St	$\bar{U}$ (m/s)	$\nu$ (m <sup>2</sup> /s)
0.0079	1.167	0.0121613	0.0300303	0.0307	$4 \times 10^{-6}$

Os dados da tab. 19 revelam que o escoamento reproduzido pelo simulador apresenta uma diferença de 60% para o Re fisiológico e de 76% para St. Estes dados demonstram que, também neste caso, o sistema proposto não simula de modo exato um escoamento com velocidade média nem tampouco com níveis de amplitudes do escoamento fisiológico.

Tab. 19 - Parâmetros dinâmicos fisiológico e reproduzidos - artéria subclávia direita.

	Re	St
Desejado (Fisiológico)	390	0.5495
Obtido (Processo Inverso)	623	0.131104
Erro Relativo (%)	60	76

<sup>N.A</sup> O tempo plotado nas abcissas é :  $t_{\text{abcissas}} = \frac{2\pi}{St} t_{\text{dimensional}}$

## Capítulo 8

### Conclusão

As equações derivadas, tanto para o processo inverso como para o processo direto, em sua forma adimensional, são estritamente iguais, diferindo apenas pelas escalas empregadas nos grupos adimensionais. A solução obtida pelo método de perturbação revela que o processo inverso é incondicionalmente estável, entretanto o método numérico mostrou-se instável de acordo com os valores relativos dos parâmetros dinâmicos do sistema ( $Fr$  e  $St$ ). Para o processo direto, a expressão oriunda do método de perturbação, configurou-se como condicionalmente estável ( $A_3 < 2A_2$ ), mas o método numérico, mesmo respeitando esta limitação, resultou instável, dependendo dos valores relativos de  $Fr$ ,  $St$ .

Outrossim, através dos resultados provenientes do método de perturbação, verificamos que o ganho do sistema pode vir a ser superior ao do sistema fisiológico, entretanto o sistema, apesar de flexível à simulação de pulsos de velocidade, revelou-se deficiente na reprodução, para os casos estudados, de fluxos similares aos fisiológicos, embora semelhantes. Atribui-se tal limitação fundamentalmente à inércia natural do sistema quando  $St$  é aproximadamente unitário, como evidenciado na análise do simulador quando do processo inverso.

Através do método de perturbação (processo direto), percebeu-se que, se  $St \rightarrow 0$ , conquanto seja não-linear a equação de governo, sua solução é linear. Quando  $St \rightarrow 1$ , a solução passa a ser não-linear e o referido fenômeno destaca-se pelo aparecimento de um termo constante na expansão de segunda ordem. Enfim, quando  $St \rightarrow \infty$ , o comportamento volta a ser linear.

A existência de inércia propicia uma velocidade média diferente daquela prevista pela fórmula de Torricelli - no caso,  $\bar{U} = \sqrt{2g(L_1 + L_4 - L_5)}$ . Isto implica que, no processo direto, o pistão obrigatoriamente deverá apresentar um velocidade média diferente de zero e negativa a fim de que  $\bar{U}$  na seção de teste seja aquela imposta pelo modelo. Em termos práticos, tal fato é impossível.

O sistema físico idealizado, no qual baseia-se o modelo matemático, deverá ser então alterado, permitindo-se mais um grau de liberdade. Outro parâmetro de relevância é a inclusão dos efeitos de perda de carga no procedimento de solução, que deverão previamente ser avaliados na modelagem atual.

## Capítulo 9

### Sugestões para Futuros Trabalhos

Em futuros trabalhos seria importante realizar:

- Análise da estabilidade do método numérico, para o processo direto, variando  $Fr$ ,  $St$  e  $Re$ ;
- Análise detalhada da influência dos parâmetros dinâmicos ( $Fr$ ,  $St$  e  $Re$ ) no comportamento hidrodinâmico do sistema, para o processo direto;
- Implementação do modelo de perda de carga no procedimento de solução e verificação de sua influência no comportamento hidrodinâmico do sistema, tanto para o processo direto quanto para o processo inverso;
- Adicionar ao modelo matemático os efeitos de restrições (estenoses) e expansões (aneurismas);
- Adicionar ao modelo matemático os efeitos de uma válvula;
- Montar o equipamento e verificar o modelo matemático adotado;
- Realizar correções no modelo matemático com base nos dados experimentais;
- Adicionar ao modelo matemático o efeito viscoelástico das artérias.

## Apêndice A

### A1 - Processo Inverso $St \rightarrow 0$

(\*comparação do sol. obtida pelo mét. de perturbação\*)

(\*e o mét. numérico no processo inverso  $St \rightarrow 0$ \*)

Remove["Global`\*"]

(\*parâmetros adimensionais\*)

St = qualquer valor;

fr = qualquer valor.;

l3est = 0.1;

(\*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas\*)

a2 = 0.000506707/l3est^2;

a3 = 0.000506707/l3est^2;

a4 = 0.000346361/l3est^2;

l1 = 0.3/l3est;

l2 = 3./l3est;

l5 = .3/l3est;

l4 = fr/2 - l1 + l5;

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

w1 = (l2+l4\*a2/a4)\*a2\*fr;

w2 = (l2+l4\*a3/a4)\*a2\*fr;

w3 = a2\*fr/2;

$$w4 = a2 * fr;$$

$$w5 = a3 * a2 * l4 * fr / a4;$$

$$w6 = a2 * (l1 + l4 - l5);$$

$$w7 = a3 * fr / 2.;$$

$$w8 = a3^2 * l4 * fr / a4;$$

$$w9 = a3 * (l1 + l4) - l5 * a2;$$

(\*coeficientes da solução pelo met. de perturbação\*)

$$b21 = (3 * w3 - w6) / w1;$$

$$b31 = (15 * a2 - patm * (a3 - a2) * fr - a3(l1 + l4) + w4) / w1;$$

$$const21 = (b31 * (St^2 * w2 - 3 * b31 * w3 + 2 * b21 * w4) / (2 * b21^3 * w1 + 2 * b21 * St^2 * w1));$$

$$const22 = (b31^2 * St^2 * (-(b21 * w1) + 3 * w3)) / (b21 * (b21^2 + St^2)^2 * w1);$$

$$const23 = (b31 * (4 * b21^2 * b31 * St^2 * w1 - 2 * b31 * St^4 * w1 - 3 * b21^3 * St^2 * w2 - 3 * b21 * St^4 * w2 + 3 * b21^3 * b31 * w3 - 15 * b21 * b31 * St^2 * w3 - 2 * b21^4 * w4 + 2 * b21^2 * St^2 * w4 + 4 * St^4 * w4)) / (2 * (b21^2 + St^2)^2 * (b21^2 + 4 * St^2) * w1);$$

$$const24 = (b31 * (b21 * b31 * w1 - b21^2 * w2 - 2 * St^2 * w2 - 6 * b31 * w3 + 2 * b21 * w4)) / (b21^3 * w1 + 4 * b21 * St^2 * w1);$$

$$const25 = (b31 * (-(b21^2 * b31 * w1) + b31 * St^2 * w1 + b21^3 * w2 + b21 * St^2 * w2 + 6 * b21 * b31 * w3 - 2 * b21^2 * w4 - 2 * St^2 * w4)) / ((b21^2 + St^2)^2 * w1);$$

```

const26 = (2*b31^2*St*(-b21*w1+3*w3))/
  ((b21^2+St^2)^2*w1);
const27 = (b31*St*(-(b21^3*b31*w1) + 5*b21*b31*St^2*w1 +
  b21^4*w2 - b21^2*St^2*w2 - 2*St^4*w2 +
  12*b21^2*b31*w3 - 6*b31*St^2*w3 -
  6*b21^3*w4 - 6*b21*St^2*w4))/
  (2*(b21^2 + St^2)^2*(b21^2 + 4*St^2)*w1);
const31 = (b21*b31*const21*St)/(b21^2+St^2) -
  (6*b31*const21*St*w3)/((b21^2+St^2)*w1) -
  w5/w1;

(*sinal de entrada*)
v3[t_] := Sin[St*t]

(*eq. a ser solucionada*)
eqcomp[t_] := v2[t]*v2[t]*w1 - v2'[t]*v3[t]*w2*St +
  v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St -
  v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 +
  v3[t]^3*w7*St^3 +
  v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St

(*solução numérica*)
NDSolve[{eqcomp[t]==0,v2[0]==1},v2,{t,0,16.*Pi/St},
MaxSteps -> 5000];
v2[t_] := Evaluate[v2[t]/.%]

(*solução obtida pelo método de perturbação*)
vpert21[t_] := (b31*St)/(E^(b21*t)*(b21^2 + St^2)) +
  (-(b31*St*Cos[St*t]) + b21*b31*Sin[St*t])/
  (b21^2 + St^2)

```

```

vpert22[t_] := const21+const22*Exp[-2*b21*t] +
    const23*Cos[2*St*t] + const24*Exp[-b21*t] +
    const25*Cos[St*t]*Exp[-b21*t] +
    const26*Sin[St*t]*Exp[-b21*t] +
    const27*Sin[2*St*t]

vpert23[t_] := (b21*const31)/(Exp[b21*t]*(b21^2+St^2)) -
    const31*((b21*Cos[St*t] + St*Sin[St*t])/
    (b21^2+St^2))

vpert2[t_] := Chop[1. + St*vpert21[t] + St^2*vpert22[t]
    + St^3*vpert23[t]]

(*gráficos da solução numérica*)
grafv2 := Plot[N[v2[t]],{t,0.,16.*Pi/St},
    PlotStyle -> RGBColor[1,0,0],
    PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"}]

(*gráfico da solução de perturbação*)
grafvpert2 := Plot[N[vpert2[t]],{t,0.,16.*Pi/St},
    PlotStyle -> RGBColor[0,0,1],
    PlotLabel -> {met.de pert},
    PlotRange -> All]

(*calculo do erro entre as duas soluções*)
datapert = Flatten[Table[N[vpert2[t]],
    {t,0,16*Pi/St,1/(2*St)}]];
datanume = Flatten[Table[N[v2[t]],
    {t,0,16*Pi/St,1/(2*St)}]];
erro = 100*Abs[(Max[datanume] - Min[datanume]) -
    (Max[datapert] - Min[datapert])]/

```

(Max[datanume] - Min[datanume]) ]

Show[grafvpert2,grafv2]

## A2 - Processo Inverso St $\rightarrow \infty$

(\*comparação do sol. obtida pelo mét. de perturbação\*)

(\*e o mét. numérico no processo inverso St -> Infinito\*)

Remove["Global`\*"]

(\*parâmetros adimensionais\*)

St = qualquer valor;

fr = qualquer valor;

l3est = 0.1;

(\*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas\*)

a2 = 0.000506707/l3est^2;

a3 = 0.000506707/l3est^2;

a4 = 0.000346361/l3est^2;

l1 = 0.3/l3est;

l2 = 3./l3est;

l5 = 0.3/l3est;

l4 = fr/2 - l1 + l5;

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

w1 = (l2+l4\*a2/a4)\*a2\*fr;

w2 = (l2+l4\*a3/a4)\*a2\*fr;

w3 = a2\*fr/2;

w4 = a2\*fr;

w5 = a3\*a2\*l4\*fr/a4;

w6 = a2\*(l1+l4-l5);

$$w7 = a3*fr/2.;$$

$$w8 = a3^2*14*fr/a4;$$

$$w9 = a3*(11+14)-15*a2;$$

(\*coeficientes da solução pelo met. de perturbação\*)

$$coef1 = St;$$

$$coef2 = w8*St^2/w2;$$

$$coef3 = (St^3*w8*(-w2*w5 + w1*w8))/w2^3;$$

(\*sinal de entrada\*)

$$v3[t_] := Sin[St*t]$$

(\*eq. a ser solucionada\*)

$$\begin{aligned} eqcomp[t_] := & v2'[t]*v2[t]*w1 - v2'[t]*v3[t]*w2*St + \\ & v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St - \\ & v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 + \\ & v3[t]^3*w7*St^3 + \\ & v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St \end{aligned}$$

(\*solução numérica\*)

$$NDSolve[{eqcomp[t]==0,v2[0]==1},v2,{t,0,16.*Pi/St},$$

$$MaxSteps -> 5000];$$

$$v2[t_] := Evaluate[v2[t]/.%$$

(\*solução obtida pelo método de perturbação\*)

$$vpert2[t_] := Sin[t*coef1]*coef2 + 1/St$$

(\*gráficos da solução numérica\*)

$$grafv2 = Plot[N[v2[t]],{t,0.,16.*Pi/St},$$

$$PlotStyle -> RGBColor[1,0,0],$$

$$PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"},$$

$$DisplayFunction -> Identity];$$

(\*gráfico da solução de perturbação\*)

```
grafvpert2 = Plot[N[vpert2[t]], {t, 0., 16. *Pi/St},
```

```
PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],
```

```
PlotLabel -> {met. de pert},
```

```
PlotRange -> All,
```

```
DisplayFunction -> Identity];
```

(\*calculo do erro entre as duas soluções\*)

```
datapert = Flatten[Table[N[vpert2[t]],
```

```
{t, 0, 16*Pi/St, 1/(2*St)}]];
```

```
datanume = Flatten[Table[N[v2[t]],
```

```
{t, 0, 16*Pi/St, 1/(2*St)}]];
```

```
erro = 100*Abs[(Max[datanume] - Min[datanume]) -
```

```
(Max[datapert] - Min[datapert]) ]/
```

```
(Max[datanume] - Min[datanume])]
```

```
Show[grafvpert2, grafv2,
```

```
DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

### A3 - Processo Direto $St \rightarrow 0$

(\*comparação do sol. obtida pelo mét. de perturbação\*)

(\*e o mét. numérico no processo direto  $St \rightarrow 0$ \*)

```
Remove["Global`*"]
```

(\*parâmetros adimensionais\*)

```
d2 = N[Sqrt[2]*25.4*10^-3];
```

```
St = qualquer valor;
```

```
fr = qualquer valor;
```

```
vmed = 0.15;
```

$$l_{cest} = v_{med}^2 / (9.81 * fr);$$

(\*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas\*)

$$a_2 = N[(\pi * d^2) / (4 * l_{cest}^2)];$$

$$a_3 = 0.000506707 / l_{cest}^2;$$

$$a_4 = 0.000346361 / l_{cest}^2;$$

$$l_1 = 0.3 / l_{cest};$$

$$l_2 = 3. / l_{cest};$$

$$l_5 = 0.3 / l_{cest};$$

$$l_4 = fr/2 - l_1 + l_5;$$

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

$$w_1 = (l_2 + l_4 * a_2 / a_4) * a_2 * fr;$$

$$w_2 = (l_2 + l_4 * a_3 / a_4) * a_2 * fr;$$

$$w_3 = a_2 * fr / 2;$$

$$w_4 = a_2 * fr;$$

$$w_5 = a_3 * a_2 * l_4 * fr / a_4;$$

$$w_6 = a_2 * (l_1 + l_4 - l_5);$$

$$w_7 = a_3 * fr / 2.;$$

$$w_8 = a_3^2 * l_4 * fr / a_4;$$

$$w_9 = a_3 * (l_1 + l_4) - l_5 * a_2;$$

(\*coeficientes da solução pelo met. de perturbação\*)

$$\text{coef10} = (2 * St^2 * w_5 * w_6) / (w_4^2 + St^4 * w_5^2 - 2 * w_4 * w_9 + w_9^2);$$

$$\text{coef40} = (2 * w_6 * (w_4 - w_9)) / (w_4^2 + St^4 * w_5^2 - 2 * w_4 * w_9 + w_9^2);$$

$$\text{coef11} = 3 * w_4^4 * w_6 - 12 * w_4^3 * w_6 * w_9 + 18 * w_4^2 * w_6 * w_9^2 - 12 * w_4 * w_6 * w_9^3 + 3 * w_6 * w_9^4;$$

$$\text{coef12} = 2*w1*w4^4 - 8*w1*w4^3*w9 + 12*w1*w4^2 -$$

$$8*w1*w4*w9^3 + 2*w1*w9^4;$$

$$\text{coef13} = -3*w4^4*w6 + 12*w4^3*w6*w9 - 18*w4^2*w6*w9^2 +$$

$$12*w4^2*w6*w9^3 - 3*w6*w9^4;$$

$$\text{coef14} = \text{St}^2(2*w1*w4^3*w5 - 6*w1*w4^2*w5*w9 +$$

$$6*w1*w4*w5*w9^2 - 2*w1*w5*w9^3);$$

$$\text{coef15} = \text{St}^2*(-6*w4^3*w5*w6 + 18*w4^2*w5*w6*w9 -$$

$$18*w4^2*w5*w6*w9^2 + 6*w5*w6*w9^3);$$

$$\text{coef16} = 2*(w4 - w9)*(w4^2 + \text{St}^4*w5^2 - 2*w4*w6 +$$

$$w9^2)*(w4^2 + 4*\text{St}^4*w5^2 - 2*w4*w9 + w9^2);$$

$$\text{coef17} = 2*\text{St}^2*(-w4^3*w5*w6 + 2*w4^2*w5*w6*w9 -$$

$$w4*w5*w6*w9^2);$$

$$\text{coef18} = 2*\text{St}^2*(w4^3*w5*w6 - 2*w4^2*w5*w6*w9 +$$

$$w4*w5*w6*w9^2);$$

$$\text{coef19} = \text{St}^2*w5*(w4^4 + 5*\text{St}^4*w4^2*w5^2 +$$

$$4*\text{St}^8*w5^4 - 4*w4^3*w9 -$$

$$10*\text{St}^4*w4*w5^2*w9 + 6*w4^2*w9^2 +$$

$$5*\text{St}^4*w5^2*w9^2 - 4*w4*w9^3 + w9^4);$$

(\*sinal de entrada\*)

$$v2[t_] := 1. + \text{St}*\text{Sin}[\text{St}*t];$$

(\*eq. a ser solucinada\*)

$$\text{eqcomp}[t_] := v2'[t]*v2[t]*w1 - v2'[t]*v3[t]*w2*\text{St} +$$

$$v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*\text{St} -$$

$$v2[t]*v3'[t]*w5*\text{St}^2 - v2[t]*w6 +$$

$$v3[t]^3*w7*\text{St}^3 +$$

$$v3[t]*v3'[t]*w8*\text{St}^3 + v3[t]*w9*\text{St}$$

(\*solução numérica\*)

```
NDSolve[{eqcomp[t]==0,v3[0]==0},v3,{t,0,16.*Pi/St},
,MaxSteps -> 10000];
```

```
v3[t_]:=Evaluate[v3[t]/.%[[1]]]
```

(\*solução obtida pelo método de perturbação\*)

```
vpert30[t_] := (coef40)*Sin[St*t] -
             coef10*Cos[St*t]
```

```
vpert31[t_] := (coef11 + coef12*Cos[St*t] +
             coef13*Cos[2*St*t] + coef14*Sin[St*t] +
             coef15*Sin[2*St*t])/coef16 +
             (coef17 + coef18*Cos[2*St*t])/coef19
```

```
vpert32[t_] := ( (St^2*w5*w6)/((w4-w9)^2 + St^4*w5^2) -
             (St*(coef11 + coef12 + coef13)/coef16) ) *
             Exp[(t*(w9-w4))/(w5*St)]
```

```
vpert3[t_] := vper30[t] + St*vpert31[t] + vper32[t]
```

(\*gráficos da solução numérica\*)

```
grafv3 = Plot[N[v3[t]],{t,0.,16.*Pi/St},
PlotStyle -> RGBColor[1,0,0],
PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"},
DisplayFunction -> Identity]
```

(\*gráfico da solução de perturbação\*)

```
grafvpert3 = Plot[N[vpert3[t]],{t,0.,16.*Pi/St},
PlotStyle -> RGBColor[0,0,1],
PlotLabel -> {met.de pert},
PlotRange -> All,
DisplayFunction -> Identity]
```

(\*calculo do erro entre as dua soluções\*)

```
datapert = Flatten[Table[N[vpert3[t]],  
  {t,0,16*Pi/St,1/(2*St)}]];
```

```
datanume = Flatten[Table[N[v3[t]],  
  {t,0,16*Pi/St,1/(2*St)}]];
```

```
erro = 100*Abs[(Max[datanume] - Min[datanume]) -  
  (Max[datapert] - Min[datapert]) ]/  
  (Max[datanume] - Min[datanume])]
```

```
Show[grafvpert3,grafv3,
```

```
  DisplayFunction :> $DisplayFunction]
```

## Apêndice B

### Calculo dos Parâmetros de Fluxo Arterial Humano, número de Reynolds (Re) e Strouhal (St)

Para garantirmos a similaridade hidrodinâmica entre o escoamento hemodinâmico do sistema arterial humano com um escoamento *in vitro*, é necessário que o modelo *in vitro* respeite os parâmetros dinâmicos, número de Reynolds (Re) e número de Strouhal (St) do escoamento *in vivo*, ou seja, Re e St do escoamento *in vitro* tem que ser o mesmo do escoamento *in vivo*. Portanto, para que se possa reproduzir um escoamento hemodinâmico *in vitro*, é necessário determinar os Re e St do escoamento *in vivo*.

Para o calculo do número de Reynolds (Re), definido por:

$$Re = \frac{\bar{U}D}{\nu}$$

onde:

- $\bar{U}$  é a velocidade característica do escoamento;
- D é um comprimento característico do escoamento;
- $\nu$  é a viscosidade cinemática do sangue.

é necessário definir qual será a velocidade e o comprimento característico e também determinar a viscosidade do sangue. Para a velocidade característica adotaremos a velocidade média do pulso de velocidade e o comprimento característico será o diâmetro das artérias.

Para se calcular a velocidade média utilizou-se uma função que representa os pulsos de velocidades, mostrados por Garcia (1992). Estas funções foram obtidas a partir dos gráficos dos pulsos de velocidades levantados por Mills et all (1970). Estes pulsos de velocidades estão reproduzidos nas figs. B1 à B6, as quais foram geradas pelas funções de Garcia através do programa ao final do apêndice.

O diâmetro das artéria foram obtidos pelo Prof. Dr. Marcos C. Somazz -Dept. de Anatomia - IB/UNICAMP. Para tanto, utilizou-se 9 amostras de cada artéria ex-vivo, as quais foram medidas com um paquímetro. Cada artéria foi medida em uma mesma região, sendo que para:

- Artéria Subclávia Direita: a 1 cm após a saída do tronco braquiocefálico;
- Artéria Aorta Ascendente: a 5 cm da base da válvula aórtica;
- Artéria Renal Direita: a 0.5 cm antes de chegar ao Rim;
- Artéria Iílica Comum: a 1 cm após a saída da aorta abdominal;
- Tronco Braquiocefálico: a 0.5 cm após do cajado da aorta
- Artéria Aorta Abdominal: a 0.5 cm de seu fim.

Não foi possível determinar a idade e o peso dos ex-vivos doadores das artérias

A tab. B1 mostra o valor média e o desvio padrão das medidas do diâmetro para cada artéria.

tab. B1 - Diâmetro das principais artéria (mm).

Artéria	Média	Desvio Padrão
Subclávia direita	9.7	1.0
Aorta Ascendente	30	4.0
Renal Direita	5.7	0.8
Iílica Comum Direita	11.8	1.2
Tronco Braquiocefálico	13.8	2.2
Aorta Abdominal	17.3	1.9

Para o calculo do número de Strouhal, definido por:

$$St = \frac{L_c f_c}{\bar{U}}$$

onde:

- $L_c$  é um comprimento característico
- $f_c$  é uma frequência característica;
- $\bar{U}$  é a velocidade característica do escoamento.

foi adotado a velocidade média como velocidade característica, a maior amplitude do sinal de entrada como comprimento característica e a frequência fundamental como frequência característica.

Strouhal é um parâmetro que aparece naturalmente quando adimensionalizamos o pulso de velocidade e pode ser determinado dividindo o primeiro coeficiente do sinal<sup>B1</sup> que representa o pulso de velocidade pelo coeficiente zero da série. Este procedimento é feito automaticamente no programa ao final do apêndice.

A tab. B2 mostra todos os dados necessários para se calcular os parâmetros dinâmicos do sistema arterial, bem como o valor destes para cada artéria.

tab. B2 - parâmetros geométricos e dinâmicos do sistema arterial.

Artéria	$\bar{U}$ (m/s)	D (m)	$L_c f_c$ (m/s)	$Re = \frac{\bar{U}D}{\nu}$	$St = \frac{L_c f_c}{\bar{U}}$
Subclávia Direita	0.1603	$9.7 \times 10^{-3}$	0.0881	390	0.5495
Aorta Ascendente	0.0764	$30 \times 10^{-3}$	0.2017	573	2.6410
Renal Direita	0.2439	$5.7 \times 10^{-3}$	0.1068	348	0.4378
Iliaca Comum Direita	0.2691	$11.75 \times 10^{-3}$	0.1314	791	0.4883
Tronco Braquiocefálico	0.1365	$13.8 \times 10^{-3}$	0.1492	471	1.0930
Aorta Abdominal	0.1087	$17.31818 \times 10^{-3}$	0.1145	470	1.0532

$\nu = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  - Skalak e Chien (1987)

## B1 - Pulsos de Velocidades para Várias Artérias - Dimensional e Adimensional

### Subclávia Direita

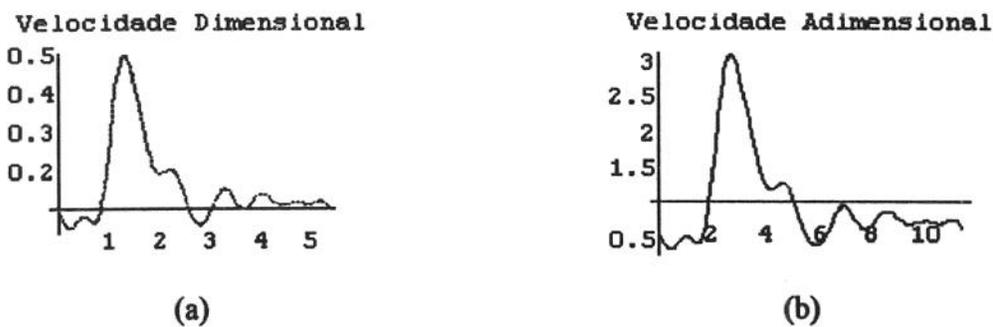


fig. B1 - Pulso de velocidade da artéria subclávia direita.  
 (a) - Dimensional - (m/s).  
 (b) - Adimensional.

<sup>B1</sup> A série adotada é uma série de Fourier

### Aorta Ascendente

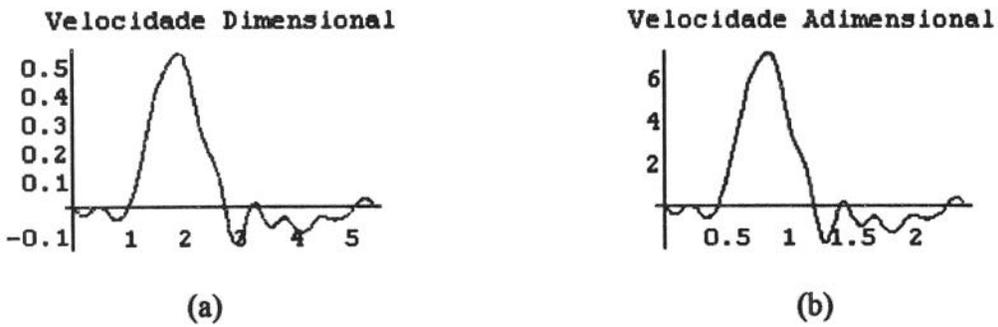


fig. B2 - Pulso de velocidade da artéria aorta ascendente.  
 (a) - Dimensional - (m/s).  
 (b) - Adimensional.

### Renal Direita

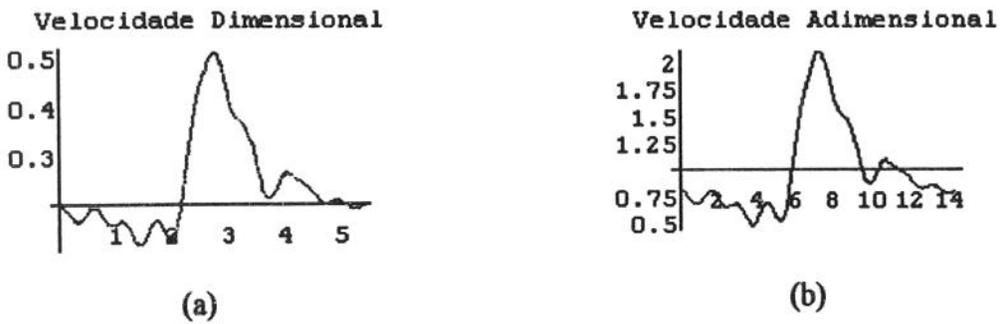


fig. B3 Pulso de velocidade da artéria renal direita.  
 (a) - Dimensional - (m/s).  
 (b) - Adimensional.

### Íliaca Comum Direita

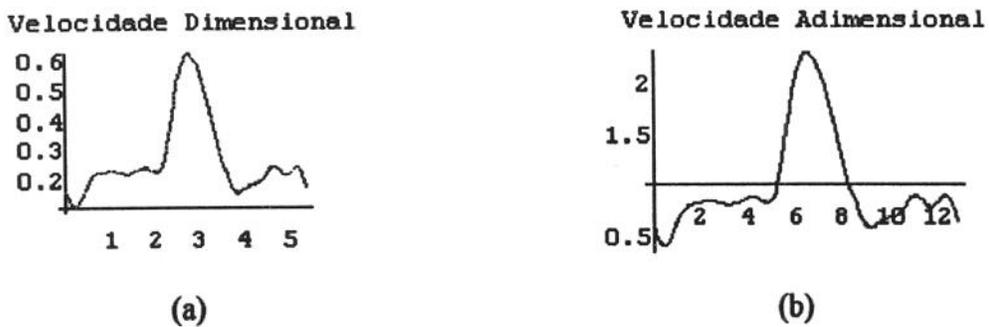


fig. B4 - Pulso de velocidade da artéria íliaca comum direita.  
 (a) - Dimensional - (m/s).  
 (b) - Adimensional.

### Tronco Braquiocefálico

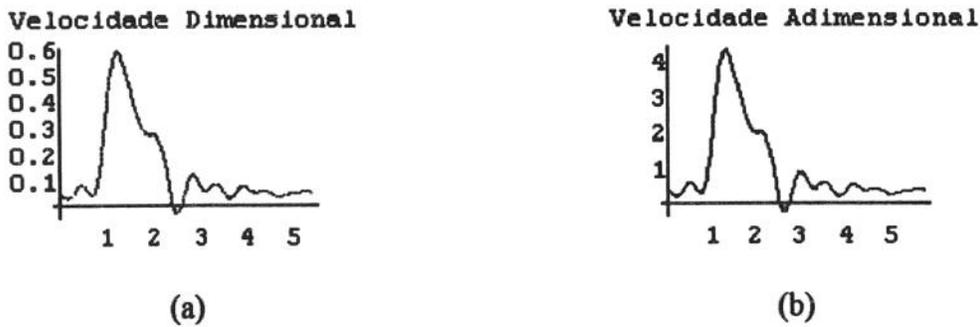


fig. B5 - Pulso de velocidade do tronco braquiocefálico.  
 (a) - Dimensional - (m/s).  
 (b) - Adimensional.

### Aorta Ascendente

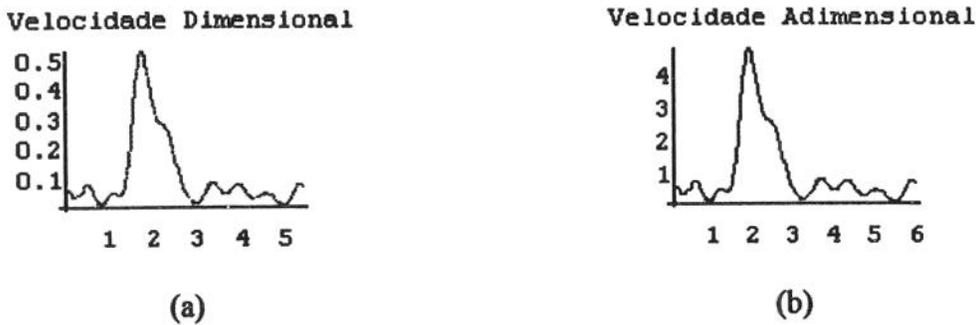


fig. B6 - Pulso de velocidade da artéria aorta abdominal.  
 (a) - Dimensional - (m/s).  
 (b) - Adimensional.

## B2 - Programa para Geração dos Pulsos de Velocidades

```
(***** Coeficientes das Série de Fourier - Velocidade *****)
(* *****)
(* *****) Artéria Subclávia Direita *****)
(* *****)
```

Remove["Global' \*"]

```
aa = {16.0324,-2.1055,-8.7612,1.1265,3.3816,2.2101,
      -3.2929,-0.1474,0.3598,0.3745,0.3782};
```





```

grafv2 = Plot[v2[t], {t, 0, 2*Pi/f0}, PlotRange -> All,
PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], PlotLabel -> "Velocidade
Dimensional",
DisplayFunction -> Identity]
(*definição da função que representa o pulso de velocidade e seu gráfico - Adimensional*)
(*Calculo do número de Strouhal*)
St = Abs[c[[2]]/c[[1]]];
d = Table[c[[i]]/c[[1]], {i, 1, 11}];
vad2[t_] := d[[1]] + Sum[d[[i+1]]*Sin[St*i*t - phi[[i+1]] +
Pi/2], {i, 1, 10}]
grafvad2 = Plot[vad2[t], {t, 0, 2*Pi/St},
PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],
PlotLabel -> "Velocidade Adimensional",
DisplayFunction -> Identity]
(*mostrando os gráficos*)
Show[GraphicsArray[{grafv2, grafvad2}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction]

```

## Apêndice C

### C1 - Artéria Renal Direita

(\*Gerando a função controladora o pistão para a\*)

(\* Artéria Renal Direita \*)

Remove["Global' \*"]

(\*parâmetros adimensionais\*)

$$d2 = 2*25.4*10^{-3};$$

$$ni = 4*10^{-6};$$

$$fc = 1.167;$$

$$St = .437981;$$

$$re = 348.;$$

$$fr = (re*ni*fc)/(9.81*St*d2)$$

$$vmed = (re*ni)/d2$$

$$lcest = vmed^2/(9.81*fr)$$

$$0.00744256$$

$$0.0274016$$

$$0.0102839$$

(\*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas\*)

$$a2 = N[(Pi*d2^2)/(4.*lcest^2)];$$

$$a3 = 0.000506707/lcest^2;$$

$$a4 = 0.000346361/lcest^2;$$

$$l1 = 0.3/lcest;$$

$$l2 = 3./lcest;$$

$$l5 = 0.3/lcest;$$

$$l4 = fr/2 - l1 + l5;$$

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

$$w1 = (l2+l4*a2/a4)*a2*fr;$$

$$w2 = (l2+l4*a3/a4)*a2*fr;$$

$$w3 = a2*fr/2;$$

$$w4 = a2*fr;$$

$$w5 = a3*a2*l4*fr/a4;$$

$$w6 = a2*(l1+l4-l5);$$

$$w7 = a3*fr/2.;$$

$$w8 = a3^2*l4*fr/a4;$$

$$w9 = a3*(l1+l4)-l5*a2;$$

(\*sinal de entrada\*)

(\*\*\*\*\*)

$$aav2 = \{24.3877,-9.2422,7.1531,-5.3602,2.8575\};$$

$$bbv2 = \{0.,-5.3547,2.0487,-0.2826,0.268\};$$

(\*\*\*\*\*)

$$av2 = \text{Table}[aav2[[i]]/100,\{i,1,5\}];$$

$$bv2 = \text{Table}[bbv2[[i]]/100,\{i,1,5\}];$$

$$phiv2 = \text{Table}[\text{ArcTan}[bv2[[i]]/av2[[i]]],\{i,1,5\}];$$

$$cv2 = \text{Table}[av2[[i]]/\text{Cos}[phiv2[[i]]],\{i,1,5\}];$$

$$St = \text{Abs}[cv2[[2]]/cv2[[1]]];$$

$$dv2 = \text{Table}[cv2[[i]]/cv2[[1]],\{i,1,5\}];$$

$$v2[t_] := dv2[[1]]+\text{Sum}[dv2[[i+1]]*\text{Sin}[St*i*t-phiv2[[i+1]] +$$

$$\text{Pi}/2 ], \{i, 1, 4\}]$$

(\*eq. a ser solucionada\*)

```
eqcomp[t_] := v2'[t]*v2[t]*w1 - v2'[t]*v3[t]*w2*St +
  v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St -
  v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 +
  v3[t]^3*w7*St^3 +
  v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St
```

(\*solução numérica\*)

```
NDSolve[{eqcomp[t] == 0, v3[0] == 0}, v3,
  {t, 0, 16.*Pi/St}, MaxSteps -> 50000];
```

```
v3[t_] := Evaluate[v3[t] /. %[[1]]]
```

(\*gráficos da solução numérica\*)

```
grafv3 = Plot[{N[v3[t]], N[v2[t]]}, {t, 0., 4.*Pi/St},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},
  Dashing[{0.05, 0.03]}}],
```

```
PlotRange -> All,
```

```
AxesLabel -> {"Periodo", "Velocidade"},
```

```
PlotLabel -> {St"->St", fr"->Fr"},
```

```
DisplayFunction -> Identity]
```

(\*gráfico de fase\*)

```
NDSolve[{l3'[t] - v3[t] == 0, l3[0] == 0},
```

```
  l3, {t, 0, 16.*Pi/St}, MaxSteps -> 50000];
```

```
l3[t_] := Evaluate[l3[t] /. %[[1]]]
```

```
parame = ParametricPlot[{l3[t], v3[t]}, {t, 0, 16*Pi/St},
```

```
  DisplayFunction -> Identity]
```

(\*Tranformada de Fourier\*)

```

n      = 1024.;
tinicial = 0*Pi/St;
tfinal  = 2*Pi/St;
incremen = (tfinal-tinicial)/n;
datav3  = Table[N[v3[t]],
               {t,tinicial,tfinal-incremen,incremen}];
fourievi3 = Fourier[datav3];
av3      = (2/Sqrt[n])*Re[fourievi3];
bv3      = (2/Sqrt[n])*Im[fourievi3];
f = St;
v3fourier[t_] := av3[[1]]/2 + Sum[av3[[i+1]]*Cos[f*i*t] +
                                bv3[[i+1]]*Sin[f*i*t],
                                {i,1,5}];
grafv3fourier = Plot[N[v3fourier[t]],{t,0.,4.*Pi/f},
PlotStyle -> RGBColor[0,0,1],
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
PlotLabel -> "Série de Fourier",
DisplayFunction -> Identity]
Show[{grafv3fourier,grafv3},
      DisplayFunction -> $DisplayFunction]
Show[parame,DisplayFunction -> $DisplayFunction,
      PlotRange -> All,
      AxesLabel -> {"deslocamento", "velocidade"}]
(*determinação de L3, dimensional*)
Clear[l3fourier]

```

```
NDSolve[{l3fourier[t] - (v3fourier[t] - av3[[1])/2) == 0,
```

```
l3fourier[0] == 0},l3fourier,
```

```
{t,0,16.*Pi/St},MaxSteps -> 50000];
```

```
l3fourier[t_] := Evaluate[l3fourier[t]/.%[[1]]]
```

```
Plot[l3fourier[t],{t,0,2.*Pi/St},PlotRange -> All]
```

```
a5 = Table[av3[[i]],{i,1,6}]
```

```
b5 = Table[bv3[[i]],{i,1,6}]
```

```
(*volta para a artéria renal direita*)
```

```
Remove["Global`*"]
```

```
(*parâmetros adimensionais*)
```

```
d2 = 2*25.4*10^-3;
```

```
ni = 4*10.^-6.;
```

```
f3 = 1.167;
```

```
l3est = 0.0043;
```

```
vmed = 0.0273;
```

```
St = (l3est*f3)/vmed
```

```
fr = vmed^2/(9.81*l3est)
```

```
0.183813
```

```
0.017668
```

```
(*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas*)
```

```
a2 = N[(Pi*d2^2)/(4.*l3est^2)];
```

```
a3 = 0.000506707/l3est^2;
```

```
a4 = 0.000346361/l3est^2;
```

```
l1 = 0.3/l3est;
```

```
l2 = 3./l3est;
```

```
l5 = .3/l3est;
```

$$l4 = fr/2 - l1 + l5;$$

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

$$w1 = (l2+l4*a2/a4)*a2*fr;$$

$$w2 = (l2+l4*a3/a4)*a2*fr;$$

$$w3 = a2*fr/2;$$

$$w4 = a2*fr;$$

$$w5 = a3*a2*l4*fr/a4;$$

$$w6 = a2*(l1+l4-l5);$$

$$w7 = a3*fr/2.;$$

$$w8 = a3^2*l4*fr/a4;$$

$$w9 = a3*(l1+l4)-l5*a2;$$

(\*sinal de entrada\*)

$$a = \{0.,$$

$$-0.01440067557235245,$$

$$0.01703723957124719, -0.01417692488844894,$$

$$0.02152814669557586, -0.01568995176194512\};$$

$$b = \{0., 0.04824732266945243,$$

$$-0.07425992071935819,$$

$$0.0852535280879527,$$

$$-0.06912686769007517,$$

$$0.02459110580688221\};$$

$$v3[t_] := a[[1]]/2 + Sum[a[[i+1]]*Cos[St*i*t] +$$

$$b[[i+1]]*Sin[St*i*t],$$

$$\{i,1,5\}\};$$

(\*eq. a ser solucinada\*)

$$eqcomp[t_] := v2'[t]*v2[t]*w1 - v2'[t]*v3[t]*w2*St +$$

$$\begin{aligned}
&v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St - \\
&v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 + \\
&v3[t]^3*w7*St^3 + \\
&v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St
\end{aligned}$$

(\*solução numérica\*)

```
NDSolve[{eqcomp[t]==0,v2[0]==1},v2,
{t,0,16.*Pi/St},MaxSteps -> 5000];
```

```
v2[t_] := Evaluate[v2[t]/.%]
```

(\*gráficos da solução numérica\*)

```
grafv2 = Plot[{N[v2[t]],N[v3[t]]},{t,0.,16.*Pi/St},
PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},
Dashing[{0.05,0.03}]},
```

```
PlotRange -> All,
```

```
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
```

```
PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"},
```

```
DisplayFunction -> Identity]
```

```
Show[grafv2,
```

```
DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

(\*outros gráficos\*)

```
aav2 = {24.3877,-9.2422,7.1531,-5.3602,2.8575};
```

```
bbv2 = {0.,-5.3547,2.0487,-0.2826,0.268};
```

```
av2 = Table[aav2[[i]]/100,{i,1,5};
```

```
bv2 = Table[bbv2[[i]]/100,{i,1,5};
```

```
phiv2 = Table[ArcTan[bv2[[i]]/av2[[i]],{i,1,5};
```

```
cv2 = Table[av2[[i]]/Cos[phiv2[[i]],{i,1,5};
```

```
dv2 = Table[cv2[[i]]/cv2[[1]],{i,1,5};
```

```
vfourier2[t_] := dv2[[1]] + Sum[dv2[[i+1]]*Sin[St*i*t-phiv2[[i+1]] +
      Pi/2 ],{i,1,4}]
```

```
grafv2 = Plot[{N[v2[t]],N[vfourier2[t]]},{t,0.,16.*Pi/St},
```

```
PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0],
      Dashing[{0.05,0.03}]}}},
```

```
PlotRange -> All,
```

```
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
```

```
PlotLabel -> {"St"->St",fr"->Fr"}]
```

(\*calculo do Reynolds e Strouhal baseados no sinal\*)

(\*de saída, v2\*)

```
n = 1024.;
```

```
tinicial = 0*Pi/St;
```

```
tfinal = 16*Pi/St;
```

```
inremen = (tfinal-tinicial)/n;
```

```
datav2 = Table[N[v2[t]],
      {t,tinicial,tfinal-inremen,inremen}];
```

```
fouriev2 = Fourier[datav2];
```

```
anv2 = (2/Sqrt[n])*Re[fouriev2];
```

```
bnv2 = (2/Sqrt[n])*Im[fouriev2];
```

```
a2nv2 = Table[anv2[[i]],{i,1,2}]
```

```
b2nv2 = Table[bnv2[[i]],{i,1,2}]
```

```
nre = (a2nv2[[1,1]]*d2*vmed)/(2*ni)
```

```
nst = 2*Sqrt[a2nv2[[2,1]]^2 + b2nv2[[2,1]]^2]/a2nv2[[1,1]]
```

## C2 - Artéria Subclavia Direita

(\*Gerando a função controladora o pistão para a\*)

(\* Artéria Subclavia Direita \*)

Remove["Global' \*"]

(\*parâmetros adimensionais\*)

$$d2 = 2*25.4*10^{-3};$$

$$ni = 4*10.^{-6};$$

$$fc = 1.167;$$

$$St = .5495;$$

$$re = 390.;$$

$$fr = (re*ni*fc)/(9.81*St*d2)$$

$$vmed = (re*ni)/d2$$

$$lcest = vmed^2/(9.81*fr)$$

$$0.00664806$$

$$0.0307087$$

$$0.0144596$$

(\*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas\*)

$$a2 = N[(Pi*d2^2)/(4.*lcest^2)];$$

$$a3 = 0.000506707/lcest^2;$$

$$a4 = 0.000346361/lcest^2;$$

$$l1 = 0.3/lcest;$$

$$l2 = 3./lcest;$$

$$l5 = 0.3/lcest;$$

$$l4 = fr/2 - l1 + l5;$$

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

$$w1 = (l2+l4*a2/a4)*a2*fr;$$

$$w2 = (l2+l4*a3/a4)*a2*fr;$$

$$w3 = a2*fr/2;$$

```

w4 = a2*fr;
w5 = a3*a2*l4*fr/a4;
w6 = a2*(l1+l4-l5);
w7 = a3*fr/2.;
w8 = a3^2*l4*fr/a4;
w9 = a3*(l1+l4)-l5*a2;
(*sinal de entrada*)
aav2 = {16.0324,-2.1055,-8.7612,1.1265,3.3816};
bbv2 = {0.,8.5552,-2.3571,-5.9539,-1.303};
av2 = Table[aav2[[i]]/100,{i,1,5}];
bv2 = Table[bbv2[[i]]/100,{i,1,5}];
phiv2 = Table[ArcTan[bv2[[i]]/av2[[i]]],{i,1,5}];
cv2 = Table[av2[[i]]/Cos[phiv2[[i]]],{i,1,5}];
St = Abs[cv2[[2]]/cv2[[1]]];
dv2 = Table[cv2[[i]]/cv2[[1]],{i,1,5}];
v2[t_] := dv2[[1]]+Sum[dv2[[i+1]]*Sin[St*i*t-phiv2[[i+1]] +
Pi/2 ],{i,1,4}]
(*eq. a ser solucionada*)
eqcomp[t_] := v2'[t]*v2[t]*w1 - v2'[t]*v3[t]*w2*St +
v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St -
v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 +
v3[t]^3*w7*St^3 +
v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St
(*solução numérica*)
NDSolve[{eqcomp[t] == 0, v3[0] == 0},v3,
{t,0,16.*Pi/St},MaxSteps -> 50000];

```

```

v3[t_] := Evaluate[v3[t] /. %[[1]]]
(*gráficos da solução numérica*)
grafv3 = Plot[{N[v3[t]],N[v2[t]]},{t,0.,4.*Pi/St},
PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},
Dashing[{0.05,0.03}]}},
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"},
DisplayFunction -> Identity]
(*gráfico de fase*)
NDSolve[{l3'[t] - v3[t] == 0, l3[0] == 0},l3,
{t,0,16.*Pi/St},MaxSteps -> 50000];
l3[t_] := Evaluate[l3[t] /. %[[1]]]
parame = ParametricPlot[{l3[t],v3[t]},{t,0,16*Pi/St},
DisplayFunction -> Identity]
(*Tranformada de Fourier*)
n = 1024.;
tinicial = 0*Pi/St;
tfinal = 2*Pi/St;
incremen = (tfinal-tinicial)/n;
datav3 = Table[N[v3[t]],
{t,tinicial,tfinal-incremen,incremen}];
fourievi3 = Fourier[datav3];
av3 = (2/Sqrt[n])*Re[fouriervi3];
bv3 = (2/Sqrt[n])*Im[fouriervi3];
f = St;

```

```

v3fourier[t_] := av3[[1]]/2 + Sum[av3[[i+1]]*Cos[f*i*t] +
      bv3[[i+1]]*Sin[f*i*t],
      {i,1,5}];

grafv3fourier = Plot[N[v3fourier[t]],{t,0.,4.*Pi/f},
PlotStyle -> RGBColor[0,0,1],
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
PlotLabel -> "Série de Fourier",
DisplayFunction -> Identity]
Show[{grafv3fourier,grafv3},
      DisplayFunction :> $DisplayFunction]
Show[parame,DisplayFunction :> $DisplayFunction,
      PlotRange -> All,
      AxesLabel -> {"deslocamento", "velocidade"}]
(*determinação de L3, dimensional*)
Clear[l3fourier]
NDSolve[{l3fourier'[t] - (v3fourier[t] - av3[[1]]/2) == 0,
      l3fourier[0] == 0},l3fourier,
      {t,0,16.*Pi/St},MaxSteps -> 50000];
l3fourier[t_] := Evaluate[l3fourier[t]/.%[[1]]]
Plot[l3fourier[t],{t,0,2.*Pi/St},PlotRange -> All]
a5 = Table[av3[[i]],{i,1,6}]
b5 = Table[bv3[[i]],{i,1,6}]
(*volta para a artéria subclávia direita*)
Remove["Global' *"]
(*parâmetros adimensionais*)

```

$$d2 = 2*25.4*10^{-3};$$

$$ni = 4*10.^{-6};$$

$$f3 = 1.167;$$

$$l3est = .0079;$$

$$vmed = 0.0307;$$

$$St = (l3est*f3)/vmed$$

$$fr = vmed^2/(9.81*l3est)$$

$$0.300303$$

$$0.0121613$$

(\*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas\*)

$$a2 = N[(Pi*d2^2)/(4.*l3est^2)];$$

$$a3 = 0.000506707/l3est^2;$$

$$a4 = 0.000346361/l3est^2;$$

$$l1 = 0.3/l3est;$$

$$l2 = 3./l3est;$$

$$l5 = .3/l3est;$$

$$l4 = fr/2 - l1 + l5;$$

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

$$w1 = (l2+l4*a2/a4)*a2*fr;$$

$$w2 = (l2+l4*a3/a4)*a2*fr;$$

$$w3 = a2*fr/2;$$

$$w4 = a2*fr;$$

$$w5 = a3*a2*l4*fr/a4;$$

$$w6 = a2*(l1+l4-l5);$$

$$w7 = a3*fr/2.;$$

$$w8 = a3^2*l4*fr/a4;$$

```

w9 = a3*(11+14)-15*a2;

(*sinal de entrada*)

(*****)

a = {0.,
     0.07330199584699584,
     -0.01385684801757671,
     -0.1475544123363457,
     0.00562666703698481,
     0.06722740997311963};

b = {0., -0.00840282446866478,
     0.1358089702388474,
     -0.02690563263219779,
     -0.1308059052019037,
     0.02661115491504276};

v3[t_] := a[[1]]/2 + Sum[a[[i+1]]*Cos[St*i*t] +
                        b[[i+1]]*Sin[St*i*t],
                        {i,1,5}];

(*eq. a ser solucionada*)

eqcomp[t_] := v2[t]*v2[t]*w1 - v2[t]*v3[t]*w2*St +
              v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St -
              v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 +
              v3[t]^3*w7*St^3 +
              v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St

(*solução numérica*)

NDSolve[{eqcomp[t]==0,v2[0]==1},v2,
        {t,0,16.*Pi/St},MaxSteps -> 5000];

```

```

v2[t_] := Evaluate[v2[t]/.%)
(*gráficos da solução numérica*)
grafv2 = Plot[{N[v2[t]],N[v3[t]]},{t,0.,16.*Pi/St},
PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0],
      Dashing[{0.05,0.03}}]},
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"},
DisplayFunction -> Identity]
Show[grafv2,
      DisplayFunction :> $DisplayFunction]
(*outros gráficos*)
(*****)
aav2 = {16.0324,-2.1055,-8.7612,1.1265,3.3816};
bbv2 = {0.,8.5552,-2.3571,-5.9539,-1.303};
(*****)
av2 = Table[aav2[[i]]/100,{i,1,5};
bv2 = Table[bbv2[[i]]/100,{i,1,5};
phiv2 = Table[ArcTan[bv2[[i]]/av2[[i]]],{i,1,5};
cv2 = Table[av2[[i]]/Cos[phiv2[[i]]],{i,1,5};

dv2 = Table[cv2[[i]]/cv2[[1]],{i,1,5};

vfourier2[t_] := dv2[[1]]+Sum[dv2[[i+1]]*Sin[St*i*t-phiv2[[i+1]] +
      Pi/2 ],{i,1,4}]

```

```

grafv2 = Plot[{N[v2[t]],N[vfourier2[t]]},{t,0.,16.*Pi/St},
PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0],
      Dashing[{0.05,0.03}]},
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"}]
(*calculo do Reynolds e Strouhal baseados no sinal*)
(*de saída, v2*)
n      = 1024.;
tinicial = 0*Pi/St;
tfinal  = 16*Pi/St;
inremen = (tfinal-tinicial)/n;
datav2  = Table[N[v2[t]],
      {t,tinicial,tfinal-inremen,inremen}];

fouriev2 = Fourier[datav2];
anv2     = (2/Sqrt[n])*Re[fourierv2];
bnv2     = (2/Sqrt[n])*Im[fourierv2];
a2nv2    = Table[anv2[[i]],{i,1,2}]
b2nv2    = Table[bnv2[[i]],{i,1,2}]
nre      = (a2nv2[[1,1]]*d2*vmed)/(2*ni)
nst      = 2*Sqrt[a2nv2[[2,1]]^2 + b2nv2[[2,1]]^2]/a2nv2[[1,1]]

```

### C3 - Artéria Ilíaca Comum Direita

(\*Gerando a função controladora o pistão para a\*)  
 (\* Artéria Ilíaca Direita \*)

Remove["Global' \*"]

(\*parâmetros adimensionais\*)

$$d2 = 2*25.4*10^{-3};$$

$$ni = 4*10^{-6};$$

$$fc = 1.167;$$

$$St = .488274;$$

$$re = 791.;$$

$$fr = (re*ni*fc)/(9.81*St*d2)$$

$$vmed = (re*ni)/d2$$

$$lcest = vmed^2/(9.81*fr)$$

$$0.0151744$$

$$0.0622835$$

$$0.0260595$$

(\*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas\*)

$$a2 = N[(Pi*d2^2)/(4.*lcest^2)];$$

$$a3 = 0.000506707/lcest^2;$$

$$a4 = 0.000346361/lcest^2;$$

$$l1 = 0.3/lcest;$$

$$l2 = 3./lcest;$$

$$l5 = 0.3/lcest;$$

$$l4 = fr/2 - l1 + l5;$$

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

$$w1 = (l2+l4*a2/a4)*a2*fr;$$

$$w2 = (l2+l4*a3/a4)*a2*fr;$$

$$w3 = a2*fr/2;$$

$$w4 = a2*fr;$$

$$w5 = a3*a2*14*fr/a4;$$

$$w6 = a2*(11+14-15);$$

$$w7 = a3*fr/2.;$$

$$w8 = a3^2*14*fr/a4;$$

$$w9 = a3*(11+14)-15*a2;$$

(\*sinal de entrada\*)

(\*\*\*\*\*)

$$aav2 = \{26.9107, -13.1306, 9.1975, -7.7857, 2.211\};$$

$$bbv2 = \{0., -0.4914, 0.9936, -4.4101, 0.7126\};$$

(\*\*\*\*\*)

$$av2 = \text{Table}[aav2[[i]]/100, \{i, 1, 5\}];$$

$$bv2 = \text{Table}[bbv2[[i]]/100, \{i, 1, 5\}];$$

$$\text{phiv2} = \text{Table}[\text{ArcTan}[bv2[[i]]/av2[[i]]], \{i, 1, 5\}];$$

$$cv2 = \text{Table}[av2[[i]]/\text{Cos}[\text{phiv2}[[i]]], \{i, 1, 5\}];$$

$$St = \text{Abs}[cv2[[2]]/cv2[[1]]];$$

$$dv2 = \text{Table}[cv2[[i]]/cv2[[1]], \{i, 1, 5\}];$$

$$v2[t_] := dv2[[1]] + \text{Sum}[dv2[[i+1]]*\text{Sin}[St*i*t - \text{phiv2}[[i+1]] + \text{Pi}/2], \{i, 1, 4\}]$$

(\*eq. a ser solucinada\*)

$$\begin{aligned} \text{eqcomp}[t_] := & v2'[t]*v2[t]*w1 - v2[t]*v3[t]*w2*St + \\ & v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St - \\ & v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 + \\ & v3[t]^3*w7*St^3 + \\ & v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St \end{aligned}$$

(\*solução numérica\*)

```

NDSolve[{eqcomp[t] == 0, v3[0] == 0}, v3,
{t, 0, 16.*Pi/St}, MaxSteps -> 50000];
v3[t_] := Evaluate[v3[t] /. %[[1]]]
(*gráficos da solução numérica*)
grafv3 = Plot[{N[v3[t]], N[v2[t]]},
{t, 0., 4.*Pi/St},
PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},
Dashing[{0.05, 0.03}]},
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"Periodo", "Velocidade"},
PlotLabel -> {St"->St", fr"->Fr"},
DisplayFunction -> Identity]
(*****)
(*gráfico de fase*)
NDSolve[{l3'[t] - v3[t] == 0, l3[0] == 0},
l3, {t, 0, 16.*Pi/St}, MaxSteps -> 50000];
l3[t_] := Evaluate[l3[t] /. %[[1]]]
parame = ParametricPlot[{l3[t], v3[t]},
{t, 0, 16.*Pi/St},
DisplayFunction -> Identity]
(*****)
(*Tranformada de Fourier*)
n = 1024.;
tinicial = 0*Pi/St;
tfinal = 2*Pi/St;
incremen = (tfinal-tinicial)/n;

```

```

datav3 = Table[N[v3[t]],
               {t,tinicial,tfinal-incremen,incremen}];

fourievi3 = Fourier[datav3];
av3      = (2/Sqrt[n])*Re[fourievi3];
bv3      = (2/Sqrt[n])*Im[fourievi3];
(*nmax    = Max[Abs[fourievi3]];*)
(*posicao  = Position[Abs[fourievi3],nmax];*)
(*periodo = (n-1)*incremen;*)
(*f1      = 2/periodo;*)
(*f       := N[2*Pi*f1]**)
f = St;
v3fourier[t_] := av3[[1]]/2 + Sum[av3[[i+1]]*Cos[f*i*t] +
                               bv3[[i+1]]*Sin[f*i*t],
                               {i,1,5}];

grafv3fourier = Plot[N[v3fourier[t]],{t,0.,4*Pi/f},
PlotStyle -> RGBColor[0,0,1],
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
PlotLabel -> "Série de Fourier",
DisplayFunction -> Identity]
Show[{grafv3fourier,grafv3},
      DisplayFunction -> $DisplayFunction]
Show[parame,DisplayFunction -> $DisplayFunction,
      PlotRange -> All,

```

```

AxesLabel -> {"deslocamento", "velocidade"}]

(*determinação de L3, dimensional*)

Clear[l3fourier]

NDSolve[{l3fourier'[t] - (v3fourier[t] - av3[[1])/2) == 0,
        l3fourier[0] == 0}, l3fourier,
        {t, 0, 16.*Pi/St}, MaxSteps -> 50000];

l3fourier[t_] := Evaluate[l3fourier[t]/.%[[1]]]

Plot[l3fourier[t], {t, 0, 2*Pi/St}, PlotRange -> All]

a5 = Table[av3[[i]], {i, 1, 6}]
b5 = Table[bv3[[i]], {i, 1, 6}]

(*volta para a artéria ilíaca comum direita*)

Remove["Global`*"]

(*parâmetros adimensionais*)

d2 = 2*25.4*10^-3;
ni = 4*10.^-6.;
f3 = 1.167;
l3est = 0.0286;
vmed = 0.0608;
St = (l3est*f3)/vmed
fr = vmed^2/(9.81*l3est)

0.548951
0.0131757

(*áreas, comprimentos e pressão adimensionalizadas*)

a2 = N[(Pi*d2^2)/(4.*l3est^2)];
a3 = 0.000506707/l3est^2;
a4 = 0.000346361/l3est^2;

```

$$l1 = 0.3/l3est;$$

$$l2 = 3./l3est;$$

$$l5 = .3/l3est;$$

$$l4 = fr/2 - l1 + l5;$$

(\*coeficientes da eq. a ser solucionada\*)

$$w1 = (l2+l4*a2/a4)*a2*fr;$$

$$w2 = (l2+l4*a3/a4)*a2*fr;$$

$$w3 = a2*fr/2;$$

$$w4 = a2*fr;$$

$$w5 = a3*a2*l4*fr/a4;$$

$$w6 = a2*(l1+l4-l5);$$

$$w7 = a3*fr/2.;$$

$$w8 = a3^2*l4*fr/a4;$$

$$w9 = a3*(l1+l4)-l5*a2;$$

(\*sinal de entrada\*)

(\*\*\*\*\*)

$$a = \{0.,$$

$$0.02862611086128072,$$

$$0.01569262165113108, -0.1137860350147537,$$

$$0.07950589587290105, -0.06342436756444603\};$$

$$b = \{0., 0.1386118287407684, -0.2104036012589168,$$

$$0.2456363776869435, -0.1429330148728695,$$

$$0.05541818130299597\};$$

$$v3[t_] := a[[1]]/2 + Sum[a[[i+1]]*Cos[St*i*t] +$$

$$b[[i+1]]*Sin[St*i*t],$$

$$\{i,1,5\}];$$

(\*eq. a ser solucionada\*)

```
eqcomp[t_] := v2'[t]*v2[t]*w1 - v2'[t]*v3[t]*w2*St +
  v2[t]^3*w3 - v2[t]^2*v3[t]*w4*St -
  v2[t]*v3'[t]*w5*St^2 - v2[t]*w6 +
  v3[t]^3*w7*St^3 +
  v3[t]*v3'[t]*w8*St^3 + v3[t]*w9*St
```

(\*solução numérica\*)

```
NDSolve[{eqcomp[t]==0,v2[0]==1},v2,
```

```
{t,0,16.*Pi/St},MaxSteps -> 5000];
```

```
v2[t_] := Evaluate[v2[t]/.%]
```

(\*gráficos da solução numérica\*)

```
grafv2 = Plot[{N[v2[t]],N[v3[t]]},{t,0.,16*Pi/St},
```

```
PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},
```

```
Dashing[{0.05,0.03}]}},
```

```
PlotRange -> All,
```

```
AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
```

```
PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"},
```

```
DisplayFunction -> Identity]
```

```
Show[grafv2,
```

```
DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

(\*outros gráficos\*)

```
aav2 = {26.9107,-13.1306,9.1975,-7.7857,2.211};
```

```
bbv2 = {0.,-0.4914,0.9936,-4.4101,0.7126,};
```

```
(*****)
```

```
av2 = Table[aav2[[i]]/100,{i,1,5};
```

```
bv2 = Table[bbv2[[i]]/100,{i,1,5};
```

```

phiv2 = Table[ArcTan[bv2[[i]]/av2[[i]],{i,1,5}];
cv2 = Table[av2[[i]]/Cos[phiv2[[i]],{i,1,5}];

dv2 = Table[cv2[[i]]/cv2[[1]],{i,1,5};

vfourier2[t_] := dv2[[1]]+Sum[dv2[[i+1]]*Sin[St*i*t-phiv2[[i+1]] +
      Pi/2 ],{i,1,4}]
grafv2 = Plot[{N[v2[t]],N[vfourier2[t]]},
      {t,0.,16.*Pi/St},
      PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0],
      Dashing[{0.05,0.03]}}},
      PlotRange -> All,
      AxesLabel -> {"Periodo","Velocidade"},
      PlotLabel -> {St"->St",fr"->Fr"}]
(*calculo do Reynolds e Strouhal baseados no sinal*)
(*de saída, v2*)
n = 1024.;
tinicial = 0*Pi/St;
tfinal = 16*Pi/St;
incremen = (tfinal-tinicial)/n;
datav2 = Table[N[v2[t]],
      {t,tinicial,tfinal-incremen,incremen}];

fourier2 = Fourier[datav2];
anv2 = (2/Sqrt[n])*Re[fourier2];
bnv2 = (2/Sqrt[n])*Im[fourier2];

```

a2nv2 = Table[anv2[[i]], {i, 1, 2}]

b2nv2 = Table[bnv2[[i]], {i, 1, 2}]

nre = (a2nv2[[1, 1]]\*d2\*vmed)/(2\*ni)

nst = 2\*Sqrt[a2nv2[[2, 1]]^2 + b2nv2[[2, 1]]^2]/a2nv2[[1, 1]]

## Bibliografia

1. CHANDRAN, K. B, SCHOEPHEROSTER, R. e DELLPESBERGER, K.C. - "Effects of prothetic mitral valve geometry and orientation on flow dynamics in a model human left ventricular" - J. Biomechanics, Vol.22 número 1 - 1989.
2. CHURCHILL, S.N - "Friction factor equation span all fluid flow regimes" - Chemical Engineering, November - 1977.
3. DEMIDOVICHT, B. - "Problemas e Exercícios de Análise Matemática" - Editora Mir - 1987.
4. DUFF, W.R e FOX, R.W - "Prothetic cardiac valves" - J. of Thoracic and Caordiovascular Surgery - 1972.
5. FOX, W.R e McDONALD, A.T - "Introdução à Mecânica dos Fluidos" - Editora Guanabara - 1985.
6. GARCIA, CARLOS S. - "Análise Espectral de Sinais Característicos de Fluxo e de Vazão em Artérias" - Relatório de Iniciação Científica - FAEP - UNICAMP - 1992.
7. HEILIGER, R, GEKS, J. e MITTERMAYER, C. - "Results of comparative in vitro study of duromedics and Björk-Shiley monostrut mitral heart valve protheses" - J. Biomedical Engeneering - April - Vol. 9 - 1987.
8. KRAUSE, M. e ODERMATT, R. - "Testing of Components of implantable assist device " - Comprission of The European Communities - Concerted Action HEART (Heart Assist and Replacement Techonology) - 1991, 1992 - Vol. 2 - 35-39
9. LAW, Y.F, COBBOLD, R.S.C, JOHNSTON, K.W e BASCOM, P.A.J - "Computer controlled pulsatile system for phisyological flow simulation" - Medical & Biological Engeneering & Computing - September - 1987.
10. MILLS, C.J., GABE, I.T., GAULT, J.H., MASON, D.T., ROS, J., BRAUNWOLD, E. e SHILLINGFORD, J., P. - "Pressure-Flow Relationships and vascular impedance in man" - Cardiovascular Reserch, 4 - 405-411 - 1970.
11. NAYFEH, ALI H. - "Introduction to Perturbation Techniques" - John Wilwy & Songs - 1981.
12. NAYFEH, ALI H. - "Perturbation Methods" - John Wilwy & Songs - 1973.

13. NEWGARD, P.M - "Design of a mechanical cardiovascular simulator" - IEEE Transactions on Bio-Medical Electronics - 1963.
14. POTTER, M.C and FOSS, J. F - "Fluid Mechanics" - Great Lakes Press, Inc., Okemos, 1982.
15. SKALAK, RICHARD e CHIEN, SHIU - "Handbook of Bioengineering" - McGraw-Hill Book Company - 1987.
16. SWOKOWISK, EARL W. - "Cálculo com Geometria Analítica" - McGraw-Hill - Vol. 2 - 1983.
17. WILLSHAW, P. ,BIAGETTI, M. e PICHEL, R. H. - "A comparative in vitro study of closing characteristics of Björk-Shiley and Bicer-Vatiling disc mitral valve protheses" - J. Biomedical Engineering - January - Vol. 8 - 1986.
18. WHITE, F.M - "Fluid Mechanics" - McGraw-Hill Book Company - 1986.
19. WHITE, F.M - "Viscous Flow" - McGraw-Hill Book Company - 1974.
20. WOLFRAN, S. - "*Mathematica*, A system for doing mathematics by computer" - Addison-Wesley Publishing Company - 1993.
21. WYLIE, E. B e STREETER, V.L - "Fluid Transients" - FEB Press, Michigan, 1983.

**E o pulso ainda pulsa.**

**(Titãs)**