

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Análise de Tensões em Peneiras Vibratórias
através de Modelagem Numérica Utilizando
o Método dos Elementos Finitos e
Experimentalmente por Extensometria**

Autor: Eduardo Kenji Iizuka
Orientador: Paulo R. G. Kurka

30/2006

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**Análise de Tensões em Peneiras Vibratórias
através de Modelagem Numérica Utilizando
o Método dos Elementos Finitos e
Experimentalmente por Extensometria**

Autor: Eduardo Kenji Iizuka
Orientador: Paulo R. G. Kurka

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Trabalho Final de Mestrado Acadêmico apresentado à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

| | |
|------|---|
| ii9a | <p>Iizuka, Eduardo Kenji</p> <p>Análise de tensões em peneiras vibratórias através de modelagem numérica utilizando o método dos elementos finitos e experimentalmente por extensometria / Eduardo Kenji Iizuka. --Campinas, SP: [s.n.], 2006.</p> <p>Orientador: Paulo Roberto Gardel Kurka Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Equipamento industrial – Vibração. 2. Testes de vibração. 3. Vibração. 4. Método dos elementos finitos. 5. Deformação e tensões – Medição. I. Kurka, Paulo Roberto Gardel. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p> |
|------|---|

Título em Inglês: Stress analysis in vibrating screens by numerical simulation through finite element method and experimentally by strain gage measurements

Palavras-chave em Inglês: Vibrating screen, Finite element method, Strain gage measurements

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Stelamaris Rolla Bertoli, Marco Lúcio Bittencourt

Data da defesa: 23/02/2006

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Dissertação de Mestrado Acadêmico

**Análise de Tensões em Peneiras Vibratórias
através de Modelagem Numérica Utilizando
o Método dos Elementos Finitos e
Experimentalmente por Extensometria**

Autor: Eduardo Kenji Iizuka
Orientador: Paulo R. G. Kurka

Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp

Profa. Dra. Stelamaris Rolla Bertoli
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp

Campinas, 23 de Fevereiro de 2006

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha família, meu pai Luiz Itsuo Iizuka, minha mãe Yaeko Iizuka e meu irmão Humberto Yukio Iizuka.

Agradecimentos:

Este trabalho não poderia ser concluído sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho. Em especial à Haver & Boecker Latinoamericana e ao Sr. Adrian N. Gamburggo, Sr. Oswaldo J. Delfim e ao Sr. Reinaldo Galbe.

Aos meus colegas do Departamento NIA - Mineração HBL.

A todos os professores que compartilharam seu conhecimento e indicaram os caminhos a serem seguidos.

O conhecimento existe para ser compartilhado

Resumo

IIZUKA, Eduardo Kenji, *Análise de Tensões em Peneiras Vibratórias através de Modelagem Numérica Utilizando o Método dos Elementos Finitos e Experimentalmente por Extensometria*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 178 p. Dissertação (Mestrado).

O trabalho apresenta os resultados obtidos na simulação numérica e medição extensométrica de peneiras vibratórias de alta capacidade. Para o estudo numérico utilizou-se o *software* MSC.FEA 2005 que é uma integração dos *softwares* MSC.Patran e MSC.Nastran, obtendo-se resultados de tensão de von Mises apresentados na forma de gráficos e tabelas. Nas medições experimentais foram empregados extensômetros do tipo roseta 45° que possibilitaram a determinação das tensões principais e conseqüentemente a tensão de von Mises dos pontos instrumentados. Os valores de tensão de von Mises numéricos e experimentais foram comparados resultando em uma diferença média satisfatória de 8,4% considerando-se a complexidade do equipamento analisado. Os resultados deste trabalho são importantes para os futuros projetos de peneiras vibratórias de alta capacidade, visando garantir a integridade física do equipamento.

Palavras Chave

- Peneira Vibratória; Método dos Elementos Finitos; Extensometria

Abstract

IIZUKA, Eduardo Kenji, *Stress analysis in Vibrating Screens by Numerical Simulation through Finite Element Method and Experimentally by Strain Gage Measurements*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 178 p. Dissertação (Mestrado).

The work presents the results of numerical simulation and strain gage measurements for high capacity vibrating screens. MSC.FEA 2005 software that is an integration of the MSC.Patran and MSC.Nastran softwares was used to get the numerical results of von Mises stress, which is presented in charts and tables form. Strain gages type rosette 45° were used on experimental measurements and allowed the determination of principal stress hence von Mises stress, in the analyzed points. Numerical and experimental values of stress were compared and resulted into an 8.4% mean difference, which is a satisfactory result considering the complexity of the equipment. The results presented in this work create an important base to future designs of high capacity vibrating screens, aiming at the physical integrity of the equipment.

Key Words

- Vibrating Screen, Finite Element Method, Strain Gage Measurements

Sumário

| | |
|--|----|
| Lista de Figuras | iv |
| Lista de Tabelas | ix |
| Nomenclatura | xi |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Objetivos | 4 |
| 1.2 Apresentação dos capítulos | 5 |
| 2 Características de Projeto de uma Peneira Vibratória | 6 |
| 2.1 Peneiramento: comportamento coletivo | 8 |
| 2.2 Peneiramento: comportamento individual | 9 |
| 2.3 Eficiência de peneiramento | 10 |
| 2.3.1 Eficiência de remoção dos passantes | 11 |
| 2.3.2 Eficiência de recuperação dos passantes | 11 |
| 2.4 Equipamentos para peneiramento | 11 |
| 2.5 Movimento vibratório | 13 |
| 2.6 Tipos de peneiras vibratórias | 17 |
| 2.6.1 Peneira de acionamento livre circular (2 rolamentos) | 18 |
| 2.6.2 Peneira de acionamento excêntrico (4 rolamentos) | 20 |
| 2.6.3 Peneira de acionamento por motovibradores | 22 |
| 2.6.4 Peneira de acionamento por duplo eixo | 25 |
| 2.6.5 Peneira de acionamento por excitadores | 26 |
| 2.7 Escolha das telas | 30 |
| 2.8 Dimensionamento de peneiras | 33 |
| 2.9 Detalhes construtivos | 38 |

| | |
|---|-----|
| 3 Aspectos Teóricos da Modelagem Numérica de Estruturas | 41 |
| 3.1 Princípios básicos do MEF | 47 |
| 3.1.1 Pré-processamento | 48 |
| 3.1.2 Solução | 50 |
| 3.1.3 Pós-processamento | 53 |
| 3.2 Considerações | 53 |
| 3.3 Formulação do elemento triangular linear | 54 |
| 3.3.1 Deformações no elemento triangular linear | 59 |
| 3.3.2 Tensões no elemento triangular linear | 61 |
| 3.4 Formulação do elemento retangular bilinear | 61 |
| 3.4.1 Deformações no elemento retangular bilinear | 68 |
| 3.4.2 Tensões no elemento retangular bilinear | 69 |
| 3.5 Introdução à análise dinâmica | 69 |
| 3.5.1 Tipos de análises dinâmicas | 72 |
| 3.5.2 Análise modal numérica | 73 |
| 3.5.3 Análise linear de resposta em frequência | 75 |
| 3.5.4 Amortecimento na análise de resposta em frequência | 77 |
| 4 Técnicas de Medições Extensométricas | 79 |
| 4.1 Extensometria elétrica: princípio de funcionamento | 81 |
| 4.2 Seleção do extensômetro | 86 |
| 4.3 Preparação da superfície de análise e colagem dos extensômetros | 91 |
| 4.4 Ponte de Wheatstone | 91 |
| 4.5 Roseta de 0° / 45° / 90° ou Roseta de 45° | 98 |
| 4.6 Tensões principais | 104 |
| 4.7 Critério de falha de <i>von Mises</i> | 104 |
| 5 Modelagem e Medições da Peneira Vibratória | 107 |
| 5.1 Ferramenta CAD – Modelo Geométrico | 114 |
| 5.2 Ferramenta CAE – Modelo Estrutural | 117 |
| 5.3 Instrumentação – Extensometria | 125 |

| | |
|--|-----|
| 6 Análise de Resultados | 133 |
| 6.1 Peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 133 |
| 6.2 Peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 137 |
| 6.3 Peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 141 |
| 6.4 Peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 145 |
| 6.5 Discussão dos Resultados | 149 |
| 7 Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos | 152 |
| 7.1 Conclusões | 152 |
| 7.2 Sugestões para trabalhos futuros | 155 |
| Referências Bibliográficas | 157 |
| AI Cálculo da Área do Elemento Triangular | 162 |
| AII Equação Diferencial do Problema de Deslocamento para o Estado Plano de Tensões | 166 |
| AII.1 Equações de Equilíbrio em termos de tensões | 166 |
| AII.2 Lei de Hooke generalizada | 167 |
| AII.3 Condições de contorno | 168 |
| AII.4 Problema de deslocamento | 169 |
| AII.5 Método dos Resíduos Ponderados (MRP) | 171 |
| AII.5.1 Integral I | 172 |
| AII.5.2 Integral II | 173 |
| AII.5.3 Integral III | 173 |
| AII.5.4 Integral IV | 174 |
| AII.5.5 Forma Fraca de $-f_x$ | 175 |
| AII.5.6 Forma Fraca de $-f_y$ | 176 |
| AII.5.7 Forma Fraca expressa em deslocamento | 176 |
| AII.6 Escolha da Função de Ponderação | 178 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 2.1 – Processo de peneiramento | 7 |
| Figura 2.2 – Comportamento coletivo das partículas peneiradas | 8 |
| Figura 2.3 – Comportamento individual das partículas peneiradas | 10 |
| Figura 2.4 – Componentes básicos de uma peneira vibratória | 12 |
| Figura 2.5 – Movimento circular de uma partícula sobre a malha | 14 |
| Figura 2.6 – Movimento linear de uma partícula sobre a malha | 14 |
| Figura 2.7 – Peneira vibratória de acionamento livre linear | 19 |
| Figura 2.8 – Esquema do acionamento livre circular | 20 |
| Figura 2.9 – Peneira vibratória de acionamento excêntrico | 21 |
| Figura 2.10 – Esquema do acionamento excêntrico | 22 |
| Figura 2.11 – Esquema do motovibrador | 22 |
| Figura 2.12 – Tipos de montagem dos motovibradores | 23 |
| Figura 2.13 – Recomendações para montagem dos motovibradores | 24 |
| Figura 2.14 – Peneira vibratória para aplicação em desaguamento com acionamento por motovibradores | 24 |
| Figura 2.15 – Esquema de funcionamento das peneiras de acionamento por duplo eixo | 25 |
| Figura 2.16 – Peneira vibratória para aplicação em desaguamento com acionamento por duplo eixo | 26 |
| Figura 2.17 – Peneira vibratória 4000 mm x 11000 mm com acionamento por excitadores | 27 |
| Figura 2.18 – Esquema do excitador | 27 |
| Figura 2.19 – Detalhe das engrenagens do excitador | 28 |

| | |
|--|----|
| Figura 2.20 – Esquema das componentes da força centrífuga dos contrapesos | 29 |
| Figura 2.21a – Tela de aço | 31 |
| Figura 2.21b – Chapa perfurada | 31 |
| Figura 2.21c – Tela de borracha | 31 |
| Figura 2.21d – Tela de poliuretano | 31 |
| Figura 2.22 – Guia de referência para escolha das telas | 32 |
| Figura 2.23 – Detalhe da fixação de <i>huck-bolts</i> | 38 |
| Figura 2.24 – Peneira vibratória 3200 mm por 7315 mm com quadro de isolamento | 39 |
| Figura 2.25 – Peneira vibratória com <i>Trolley</i> de translação | 39 |
| Figura 2.26 – Peneira vibratória 2438 mm por 6100 mm com sistema de <i>sprays</i> | 40 |
| Figura 3.1 – Linhas de estudo na análise estrutural | 41 |
| Figura 3.2 – Modelo de elementos finitos | 43 |
| Figura 3.3 – Forma geométrica básica dos elementos finitos | 44 |
| Figura 3.4 – Exemplo da modelagem estrutural com elementos unidimensional | 44 |
| Figura 3.5 – Exemplo da modelagem estrutural com elementos bidimensional | 45 |
| Figura 3.6 – Exemplo da modelagem estrutural com elementos tridimensional | 45 |
| Figura 3.7 – Esquema da discretização de um sistema contínuo | 48 |
| Figura 3.8 – Graus de liberdade de um nó | 49 |
| Figura 3.9 – Análise local do elemento finito | 50 |
| Figura 3.10 – Montagem do sistema global | 51 |
| Figura 3.11 – Aplicação das condições de contorno ao modelo de elementos finitos | 52 |
| Figura 3.12 – Plotagem de tensão e deformação de um modelo arbitrário | 52 |
| Figura 3.13 – Procedimento simplificado para solução de sistemas discretos | 53 |
| Figura 3.14 – Malha de elementos triangulares em um domínio qualquer | 54 |
| Figura 3.15 – Coordenadas, deslocamentos e forças nodais do elemento triangular linear | 55 |
| Figura 3.16 – Triângulo de Pascal | 56 |
| Figura 3.17 – Elemento de estado plano de tensões retangular linear | 62 |
| Figura 3.18 – Forças e deslocamentos nodais para o elemento retangular bilinear | 63 |
| Figura 3.19 – Processo iterativo da análise dinâmica | 71 |
| Figura 3.20 – Algoritmo de Lanczos | 74 |
| Figura 4.1 – Componentes de um <i>strain gage</i> | 87 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4.2 – Comprimento ativo de um <i>strain gage</i> | 88 |
| Figura 4.3 – Valor incorreto de tensão devido à escolha de um comprimento ativo incorreto do <i>strain gage</i> | 89 |
| Figura 4.4 – Extensômetro uniaxial | 90 |
| Figura 4.5 – Roseta retangular | 90 |
| Figura 4.6 – Roseta 0° / 45° / 90° | 90 |
| Figura 4.7 – Representações da Ponte de Wheatstone | 92 |
| Figura 4.8 – Ponte de Wheatstone | 93 |
| Figura 4.9 – Arranjos da ponte de Wheatstone | 97 |
| Figura 4.10 – Círculo de Mohr de deformações | 99 |
| Figura 4.11 – Sentido de rotação positivo da roseta 45° | 99 |
| Figura 4.12 – Círculo de Mohr com os eixos da roseta 45° superpostos | 100 |
| Figura 4.13 – Localização do ângulo auxiliar | 102 |
| Figura 4.14 – Posição e valor do ângulo | 103 |
| Figura 4.15 – Posição de θ em relação aos eixos da roseta 45° | 103 |
| Figura 5.1 – Processo iterativo do projeto mecânico | 108 |
| Figura 5.2 – Nomenclatura básica para peneiras vibratórias | 109 |
| Figura 5.3 – Peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 110 |
| Figura 5.4 – Peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 111 |
| Figura 5.5 – Peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 112 |
| Figura 5.6 – Peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 113 |
| Figura 5.7 – Modelo geométrico da peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 115 |
| Figura 5.8 – Modelo geométrico da peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 115 |
| Figura 5.9 – Modelo geométrico da peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 116 |
| Figura 5.10 – Modelo geométrico da peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 116 |
| Figura 5.11 – Fluxograma do processo de simulação numérica | 117 |
| Figura 5.12 – Geometria e sistema de coordenadas do elemento CQUAD4 | 118 |
| Figura 5.13 – Geometria e sistema de coordenadas do elemento CTRIA3 | 119 |
| Figura 5.14 – Modelo estrutural da peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 120 |
| Figura 5.15 – Modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 121 |
| Figura 5.16 – Modelo estrutural da peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 122 |

| | |
|--|-----|
| Figura 5.17 – Modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 123 |
| Figura 5.18 – Condição de contorno das peneiras vibratórias | 124 |
| Figura 5.19 – Carregamento das peneiras vibratórias | 125 |
| Figura 5.20 – Esquema de lixamento da superfície analisada | 126 |
| Figura 5.21 – Etapa de lixamento da superfície analisada | 126 |
| Figura 5.22 – Processo de condicionamento da superfície | 127 |
| Figura 5.23 – <i>Strain gage</i> roseta 45° (1-RY-6/120) | 127 |
| Figura 5.24 – Sapatas de soldagem | 128 |
| Figura 5.25 – Colagem dos <i>strain gages</i> | 128 |
| Figura 5.26 – Acabamento do <i>strain gage</i> | 129 |
| Figura 5.27 – Sistema de aquisição de dados <i>MGCplus</i> | 129 |
| Figura 5.28 – Sinal típico de tensão (deformação) de uma peneira vibratória | 130 |
| Figura 5.29 – Análise de picos do sinal | 131 |
| Figura 5.30 – Valor médio e mínimo de tensão (deformação) | 131 |
| Figura 6.1 – Peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 134 |
| Figura 6.2 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 135 |
| Figura 6.3 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (R-TE 4000x11000) | 135 |
| Figura 6.4 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (R-TE 4000x11000) | 136 |
| Figura 6.5a – Pontos analisados 1 e 2 | 136 |
| Figura 6.5b – Elementos analisados 1 e 2 | 136 |
| Figura 6.6a – Ponto analisado 3 | 137 |
| Figura 6.6b – Elementos analisados 3 | 137 |
| Figura 6.7a – Ponto analisado 4 | 137 |
| Figura 6.7b – Elementos analisados 4 | 137 |
| Figura 6.8 – Peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 138 |
| Figura 6.9 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 139 |
| Figura 6.10 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (R-MD 3200x7315) | 140 |
| Figura 6.11 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (R-MD 3200x7315) | 141 |
| Figura 6.12a – Ponto analisado 5 | 141 |

| | |
|---|-----|
| Figura 6.12b – Elementos analisados 5 | 141 |
| Figura 6.13a – Ponto analisado 6 | 141 |
| Figura 6.13b – Elementos analisados 6 | 141 |
| Figura 6.14 – Peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 142 |
| Figura 6.15 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 143 |
| Figura 6.16 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (RB-MD 3200x7315) | 144 |
| Figura 6.17 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (RB-MD 3200x7315) | 144 |
| Figura 6.18a – Pontos analisados 7 e 8 | 145 |
| Figura 6.18b – Elementos analisados 7 e 8 | 145 |
| Figura 6.19 – Peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 146 |
| Figura 6.20 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 147 |
| Figura 6.21 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (R-MD 2438x6100) | 147 |
| Figura 6.22 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (R-MD 2438x6100) | 148 |
| Figura 6.23a – Pontos analisados 9 e 10 | 148 |
| Figura 6.23b – Elementos analisados 9 e 10 | 148 |
| Figura AI.1 – Coordenadas dos nós de um elemento triangular | 162 |
| Figura AI.2 – Diferença entre as coordenadas nodais do elemento triangular | 163 |
| Figura AI.3 – Coordenadas locais de área | 163 |
| Figura AII.1 – Domínio bidimensional qualquer | 168 |

Lista de Tabelas

| | |
|--|-----|
| Tabela 2.1 – Valores recomendados de rotação em função da abertura da malha para peneiras circulares | 15 |
| Tabela 2.2 – Valores recomendados de rotação em função da abertura da malha para peneiras lineares | 15 |
| Tabela 2.3 – Valores do fator de correção “CA” em função da abertura da malha | 35 |
| Tabela 2.4 – Valores do fator de correção “CB” em função da porcentagem de <i>oversize</i> | 36 |
| Tabela 2.5 – Valores do fator de correção “CC” em função da porcentagem de <i>halfsize</i> | 36 |
| Tabela 2.6 – Valores do fator de correção “CD” em função da localização do <i>deck</i> | 36 |
| Tabela 2.7 – Valores do fator de correção “CE” em função da abertura da malha | 36 |
| Tabela 2.8 – Valores do fator de correção “CH” em função do formato da abertura da malha | 37 |
| Tabela 2.9 – Valores do fator de correção “CJ” em função da eficiência desejada | 37 |
| Tabela 3.1 – Principais áreas e características da aplicação do MEF | 47 |
| Tabela 3.2 – Comparação entre métodos de integração direta e superposição modal | 75 |
| Tabela 4.1 – Valores médios do <i>gage factor</i> para ligas metálicas convencionais | 84 |
| Tabela 4.2 – Valores para fator de segurança | 106 |
| Tabela 5.1 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 120 |
| Tabela 5.2 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 121 |
| Tabela 5.3 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 122 |
| Tabela 5.4 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 123 |
| Tabela 5.5 – Propriedades do aço estrutural ASTM A36 | 124 |
| Tabela 6.1 – Dados técnicos da peneira vibratória R-TE 4000x11000 | 133 |
| Tabela 6.2 – Freqüências naturais da peneira R-TE 4000x11000 abaixo de 20 Hz | 134 |

| | |
|--|-----|
| Tabela 6.3 – Dados técnicos da peneira vibratória R-MD 3200x7315 | 138 |
| Tabela 6.4 – Frequências naturais da peneira R-MD 3200x7315 abaixo de 20 Hz | 139 |
| Tabela 6.5 – Dados técnicos da peneira vibratória RB-MD 3200x7315 | 142 |
| Tabela 6.6 – Frequências naturais da peneira RB-MD 3200x7315 abaixo de 20 Hz | 143 |
| Tabela 6.7 – Dados técnicos da peneira vibratória R-MD 2438x6100 | 145 |
| Tabela 6.8 – Frequências naturais da peneira R-MD 3200x7315 abaixo de 20 Hz | 146 |
| Tabela 6.9 – Análise das frequência naturais críticas | 149 |
| Tabela 6.10 – Comparação entre resultados experimentais e numéricos | 150 |
| Tabela 6.11 – Fator de segurança para peneiras vibratórias | 151 |
| Tabela 7.1 – Tempo de processamento das análises numéricas | 153 |

Nomenclatura

Letras Latinas

| | |
|---|---------------------|
| a - amplitude do movimento vibratório | [mm] |
| A - área de uma geometria qualquer | [m ²] |
| a_C - aceleração centrífuga | [m/s ²] |
| a_i - diferença “i” na direção x entre coordenadas nodais | [m] |
| A_{ij} - área do triângulo formado pelo ponto P e nós “i” e “j” | [m ²] |
| b_i - diferença “i” na direção y entre coordenadas nodais | [m] |
| $[B]$ - matriz deslocamento-deformação | - |
| C_A - fator relacionado capacidade básica de peneiramento | adimensional |
| C_B - fator relacionado ao <i>oversize</i> | [%] |
| C_C - fator relacionado ao <i>halfsize</i> | [%] |
| C_D - fator relacionado à posição do <i>deck</i> | adimensional |
| C_E - fator relacionado ao peneiramento úmido | adimensional |
| C_F - fator relacionado à densidade do material | adimensional |
| C_G - fator relacionado à abertura da malha | adimensional |
| C_H - fator relacionado à forma da abertura da malha | adimensional |
| C_i - constante “i” | adimensional |
| C_J - fator relacionado à eficiência da peneira | adimensional |
| $[C]$ - matriz de amortecimento | [Ns/m] |
| D - diâmetro | [m] |
| d_a - tamanho da partícula a ser peneirada | [mm] |
| D_a - abertura da malha | [mm] |
| $[D]$ - matriz de elasticidade | [MPa] |

| | |
|--|---------------------|
| E - módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young | [MPa] |
| f - frequência de operação do equipamento | [Hz] |
| F_1 - força centrífuga dos contrapesos do eixo A de um excitador | [N] |
| F_2 - força centrífuga dos contrapesos do eixo B de um excitador | [N] |
| F_a, F_b, F_c – fatores de segurança parciais | adimensional |
| F_C - força centrífuga | [N] |
| F_R - força resultante | [N] |
| FS – fator de segurança | adimensional |
| f_x - força de volume na direção x | [N] |
| f_{xi} - força na direção x agindo sobre o nó “i” | [N] |
| f_y - força de volume na direção y | [N] |
| f_{yi} - força na direção y agindo sobre o nó “i” | [N] |
| $\{f\}$ - vetor de forças | [N] |
| $\{f^e\}$ - vetor de forças nodais do elemento | [N] |
| $\{f_n\}$ - termo fonte devido às condições de contorno naturais | [N] |
| $\{f_o\}$ - vetor de forças de volume | [N] |
| $\{f_v\}$ - termo fonte devido à força de volume $\{f_o\}$ | [N] |
| g - aceleração da gravidade | [m/s ²] |
| I_i – corrente elétrica no ramo “i” da ponte de Wheatstone | [A] |
| k – sensibilidade longitudinal de um extensômetro (<i>gage factor</i>) | adimensional |
| K - fator de peneiramento | adimensional |
| k_t – sensibilidade transversal de um extensômetro (<i>transverse gage factor</i>) | adimensional |
| $[K]$ - matriz de rigidez global | [N/m] |
| $[k^e]$ - matriz de rigidez elementar no referencial local | [N/m] |
| $[K^e]$ - matriz de rigidez elementar no referencial global | [N/m] |
| L – comprimento | [m] |
| L_i - coordenadas locais de área | adimensional |
| m - massa vibrante | [kg] |
| m_c - massa de cada contrapeso de um excitador | [kg] |
| $[M]$ – matriz de massa | [kg] |
| n - normal unitária | [m] |

| | |
|--|-------------------|
| N - rotação de operação do equipamento | [RPM] |
| N_i - função de forma “i” | adimensional |
| n_x, n_y - componentes em x e y, respectivamente, da normal unitária | [m] |
| $[N(x,y)]$ - matriz função de forma do elemento finito | adimensional |
| $Op()$ - Operador diferencial | adimensional |
| P - peso vibrante | [N] |
| P_A - porcentagem de passante na alimentação | [%] |
| P_D - porcentagem de área aberta da malha sendo utilizada | [%] |
| P_L - porcentagem de área aberta apresentada na tabela do Fator “ C_A ” | [%] |
| P_R - porcentagem realmente passante | [%] |
| P_{SG} – potência do <i>strain gage</i> | [W] |
| $\{q_j\}$ – vetores de Lanczos | - |
| r – relação entre resistências elétricas | adimensional |
| R – resistência elétrica | [Ω] |
| R_A - porcentagem de retido na alimentação | [%] |
| r_e - distância entre o centro de massa do contrapeso e o seu centro de giro | [m] |
| R_i – resistência elétrica “i” | [Ω] |
| R_R - porcentagem realmente retida | [%] |
| s – espessura de uma geometria qualquer | [m] |
| S - área de uma geometria ou área de peneiramento | [m ²] |
| SG_a – resistência elétrica do <i>strain gage</i> “a” | [Ω] |
| t - tempo | [s] |
| t_x, t_y - forças de contorno | [N] |
| $\{t\}$ - vetor de focas de contorno | [N] |
| $[T]$ - matriz de transformação de coordenadas | adimensional |
| $[T_j]$ – valores de Ritz | - |
| $u = u(x,y)$ - deslocamento em x de um ponto interno ao elemento | [m] |
| U - vazão mássica de <i>undersize</i> | [t/h] |
| u_i - deslocamento de um ponto ou nó “i” na direção x | [m] |
| $\{u\}$ - vetor de deslocamento | [m] |
| $\{\dot{u}\}$ - vetor de velocidade | [m/s] |

| | |
|--|---------------------|
| $\{\ddot{u}\}$ - vetor de aceleração | [m/s ²] |
| $\{u^e\}$ - vetor de deslocamentos nodais do elemento | [m] |
| $v = v(x,y)$ - deslocamento em y de um ponto interno ao elemento | [m] |
| V - volume | [m ³] |
| v_i - deslocamento de um ponto ou nó “i” na direção y | [m] |
| V_0 - tensão de saída da ponte de Wheatstone | [V] |
| V_S - tensão de excitação da ponte de Wheatstone | [V] |
| x_i - coordenada x do nó “i” | [m] |
| x_{ij} - diferença entre as coordenadas dos nós “i” e “j” na direção x | [m] |
| w_i - deslocamento de um ponto ou nó “i” na direção z | [m] |
| y_i - coordenada y do nó “i” | [m] |
| y_{ij} - diferença entre as coordenadas dos nós “i” e “j” na direção y | [m] |

Letras Gregas

| | |
|---|-----------|
| α_j - amplitude do vetor de Lanczos | - |
| β_j - amplitude do vetor de Lanczos | - |
| ΔR_i - variação da resistência elétrica “i” | [A] |
| ϵ_1, ϵ_2 - deformações principais nas direções de σ_1 e σ_2 | [m/m] |
| $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c, \epsilon_d$ - deformações dos <i>strain gages</i> ou grades “a”, “b”, “c”, “d” | [m/m] |
| ϵ_θ - deformação a qualquer ângulo θ em relação aos eixos principais | [m/m] |
| $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ - deformações lineares nas direções x, y e z, respectivamente | [m/m] |
| ϵ_{xy} - Distorção no plano xy | [rad/rad] |
| $\{\epsilon\} = \{\epsilon(x,y)\}$ - vetor de deformações | [m/m] |
| $\{\phi\}$ - autovetor ou modo de vibrar | - |
| $\gamma/2$ - distorção local de um ponto | [rad/rad] |
| Γ - contorno | [m] |
| Γ_i - parte “i” do contorno | [m] |
| η_R - eficiência de remoção dos passantes | [%] |
| η_P - eficiência de recuperação dos passantes | [%] |
| φ - ângulo entre a grade de referência do <i>strain gage</i> e o eixo principal | [rad] |

| | |
|---|----------------------|
| κ - ângulo formado entre o sistema de coordenadas local e global | [rad] |
| θ - ângulo entre o eixo principal e a grade de referência do <i>strain gage</i> | [rad] |
| θ_x - rotação em torno do eixo x | [rad] |
| θ_y - rotação em torno do eixo y | [rad] |
| θ_z - rotação em torno do eixo z | [rad] |
| ρ - resistividade | [Ωm] |
| σ' - tensão de von Mises | [MPa] |
| $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - tensões principais de um ponto | [MPa] |
| σ_{ADM} - tensão admissível | [MPa] |
| σ_e - limite de escoamento do material | [MPa] |
| $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ - componentes do tensor de tensões | [MPa] |
| $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ - tensões normais nas direções x, y e z, respectivamente | [MPa] |
| $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ - tensões de cisalhamento | [MPa] |
| $\{\sigma\} = \{\sigma(x,y)\}$ - vetor de tensões | [MPa] |
| ν - coeficiente de Poisson | adimensional |
| $\{\zeta\}$ - vetor de coordenadas modais | - |
| ω - frequência | [rad/s] |
| Ω - domínio | - |
| $\Psi_i(x,y,z)$ - função ponderadora “i” | - |
| $\{\Psi\}$ - vetor de funções ponderadoras | - |

Sobrescritos

- ^ - condições de contorno especificadas
- * - relacionada com o Teorema de Green
- + - igual ou acima deste valor

Subscritos

- ε - relacionado ao termo de deformação
- γ - relacionado ao termo de cisalhamento

Abreviações

1D – Unidimensional

2D – Bidimensional

3D – Tridimensional

CAD - *Computer Aided Design* ou Projeto Assistido por Computador;

CAE - *Computer Aided Engineering* ou Engenharia Assistida por Computador;

CAM - *Computer Aided Manufacture* ou Manufatura Assistida por Computador;

CIM - *Computer Integrated Manufacturing* ou Manufatura Integrada por Computador

CNC - *Computerized Numerical Control* ou Comando Numérico Computadorizado;

det – Determinante

DOF – Grau(s) de liberdade

MEF – Método dos Elementos Finitos

MRP – Método dos Resíduos Ponderados

SG – *Strain gage* ou extensômetro

TDM - *Technical Document Management* ou Gerenciamento de Dados Técnicos

VFD – *Variable Frequency Drive* ou Inversor de Frequências

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho aplica-se ao projeto de máquinas e sistemas para manuseio de sólidos a granel cujas principais áreas de atuação compreendem a indústria de cimento e materiais para construção, petroquímica, mineração e indústria alimentícia. Dentre os processos de manuseio de sólidos cita-se o peneiramento, que é a operação de separação de uma população de partículas em duas frações de tamanhos diferentes, mediante sua apresentação a um gabarito de abertura pré-determinada, segundo Chave e Peres (2003). O peneiramento é uma etapa essencial em diversos processos industriais como a siderurgia, as indústrias de fertilizantes e alimentícias, destacando-se a mineração, onde em geral toda a produção é submetida ao processo de peneiramento durante o processo de fabricação do produto final.

Faço (1994) menciona alguns dos equipamentos capazes de realizar a operação de peneiramento: peneiras estáticas; peneiras vibratórias; grelhas; e peneiras rotativas (tipo Tromel). O presente trabalho tem o intuito de analisar a estrutura mecânica das peneiras vibratórias: equipamento que sofre severo carregamento dinâmico e está sujeito aos mais diversos tipos de cargas, seja proveniente do seu sistema de acionamento ou do comportamento e do tipo de material a ser peneirado.

Desde o surgimento de peneiras vibratórias modernas (1940) até hoje em dia, os fabricantes buscam a melhor solução estrutural e econômica para realizar o processo crítico de peneiramento, conforme mencionado por VSMA (1980). A empresa Haver & Boecker Latinoamericana em sua divisão de mineração (NIA) é responsável pelo projeto e desenvolvimento de peneiras vibratórias. O presente trabalho foi realizado em parceria com tal empresa, como forma de aplicação prática dos conhecimentos desenvolvidos nesta dissertação.

Devido ao carregamento e condição de operação, é comum a encontrar relatos de falhas prematuras e quebra das peneiras vibratórias em diversas ocasiões, gerando uma grande queda de produção ou ainda a parada da planta inteira. Neste ponto, a Divisão NIA optou pelo projeto de peneiras vibratórias superdimensionadas e desenvolvidas com base na experiência adquirida anteriormente, buscando garantir a confiabilidade do produto, porém Iizuka (2001) e Pinto Júnior (1999) mencionam a imposição do mercado atual por produtos visando uma maior qualidade e segurança, menor prazo de entrega e custo. Pinto Júnior (1999) ainda cita ganhos significativos com a antecipação das simulações e testes e sua integração, no caso de produtos com ciclo de desenvolvimento curto ou produtos desenvolvidos sob encomenda, como é o caso das peneiras vibratórias.

Os três fatos citados justificam a utilização de ferramentas computacionais nas áreas de Projeto Assistido por Computador (CAD) e Engenharia Assistida por Computador (CAE) para realizar um cuidadoso estudo durante a fase de projeto deste equipamento. Além destas, medições experimentais para validar os estudos numéricos e contínua análise dos dados históricos também são necessárias, para a adequação às necessidades do mercado atual, mantendo a confiabilidade do produto.

No presente trabalho pretende-se estabelecer um ciclo de modelagem numérica e validação experimental do modelo de peneiras vibratórias, de forma a contribuir para o desenvolvimento e a confecção do produto.

Utiliza-se a ferramenta CAD MicroStation V8 – 2004 Edition, fornecido pela Bentley para a criação do modelo geométrico das peneiras vibratórias, devido à sua complexidade . O MicroStation é uma plataforma gráfica que possui ferramentas voltadas para o projeto e *design* 3D de componentes mecânicos. O modelo geométrico é exportado no formato *parasolid* que é um arquivo de intercâmbio de dados gráficos largamente utilizado para realizar a interação entre *softwares* independentes das áreas de CAD, CAE e CAM (Manufatura Assistida por Computador).

De acordo com Alves Filho (2000) a maioria das estruturas de importância prática é muito complexa para ser analisada pelas técnicas clássicas de análise estrutural. Para equipamentos como peneiras vibratórias, a solução analítica freqüentemente se torna difícil e o problema requer excessivas simplificações resultando em cálculos pouco acurados, dessa forma a solução é a utilização de Métodos Numéricos como o Método dos Elementos Finitos.

O modelo e análise estrutural da peneira vibratória foram criados através do pacote comercial MSC.FEA 2005 que é uma integração dos *softwares* MSC.Patran e MSC.Nastran, responsáveis pelo pré e pós-processamento; e solução do problema, respectivamente.

Uma vez concluídas as análises numéricas, emprega-se a medição extensométrica para a determinação experimental do estado de deformações nos pontos mais solicitados da estrutura. Segundo Hoffmann (1989) para objetos, de formas complexas como peneiras vibratórias, submetidos a diversos tipos de carregamentos (normal, flexão e torção) a determinação da direção das tensões principais é obtida através da utilização de extensômetros do tipo roseta. É possível que os valores de tensões e deslocamentos encontrados na simulação numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos difiram dos valores reais das grandezas citadas. Assim, análises experimentais são necessárias para minimizar esta diferença.

Neste trabalho são analisadas quatro peneiras vibratórias de grande porte fornecidas pela Haver & Boecker Latinoamericana – Divisão NIA, que são projetos especiais ou seja, equipamentos customizados para cada aplicação. Neste panorama, o desenvolvimento tecnológico de tais equipamentos se torna ainda mais desafiador pois não existe uma linha de produção com um equipamento padrão, mas sim um novo projeto para cada cliente. Experiência profissional (dados históricos) e conhecimento técnico são largamente empregados na criação de equipamentos que cumpram com qualidade todas as necessidades do mercado.

Em suma, a importância do presente trabalho resulta na apresentação de conhecimentos referentes à simulação numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos e medição experimental por técnica extensométrica para posterior comparação entre dados numéricos e experimentais, com o intuito de garantir a integridade física deste equipamento crítico, a peneira vibratória de alta capacidade.

1.1 Objetivos

Assim, os objetivos do presente trabalho são apresentados como:

- Descrever de forma sistemática os principais aspectos do projeto de peneiras vibratórias, como contribuição preliminar ao processo de modelagem numérica.
- Estabelecer e descrever o processo de modelagem numérica das peneiras vibratórias, através do método dos elementos finitos.
- Estabelecer e descrever o processo de medição experimental de tensões, aplicado à análise de operação de peneiras vibratórias.
- Realizar a comparação entre a análise numérica do modelo e os dados experimentais medidos, de forma a comprovar a eficiência da sistemática de modelagem.

1.2 Apresentação dos capítulos

No próximo capítulo é feita uma apresentação das principais características do projeto de peneiras vibratórias, dos tipos de peneiras vibratórias e de seus principais componentes. Estudos sobre o comportamento das partículas a serem peneiradas, o rendimento de peneiramento e o dimensionamento de peneiras vibratórias são também apresentados.

No Capítulo 3 são mostrados os aspectos teóricos da modelagem numérica de estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos, apresentando os principais elementos utilizados na discretização de estruturas, com foco em elementos de superfície.

O Capítulo 4 apresenta as técnicas de medições extensométricas, evidenciando o uso de rosetas para posterior determinação das tensões principais e de von Mises, além de propor um fator de segurança necessário no projeto de peneiras vibratórias.

No Capítulo 5 é apresentada a ferramenta de CAD (MicroStation V8 – 2004) e o modelo geométrico obtido; a ferramenta de CAE (MSC.FEA) e o modelo estrutural; e as metodologias empregadas para obtenção de ambos os modelos e simulação numérica da peneira vibratória. Os equipamentos e metodologias utilizadas nas medições extensométricas também são apresentadas.

No Capítulo 6 são mostrados e discutidos os resultados obtidos, através de uma análise dos pontos mais solicitados das peneiras vibratórias que conseqüentemente são instrumentados, obtendo-se assim os dados necessários para a comparação entre os valores numéricos e experimentais de tensão de von Mises. No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Características de Projeto de uma Peneira Vibratória

As primeiras referências sobre a utilização de peneiras datam de 150 a.C. onde gregos e romanos as utilizavam no processo de mineração. O primeiro relato sobre o uso de equipamentos vibratórios com acionamento mecânico, data de 1775. Em meados de 1910 inicia-se a era das peneiras vibratórias modernas, onde a rotação dos equipamentos ultrapassa os 500 RPM. A partir de 1940 até hoje em dia, os fabricantes de peneiras vibratórias buscam a melhor solução estrutural e econômica para realizar o processo de peneiramento, uma vez que esses equipamentos vibratórios são de extrema importância em diversos processos industriais, entre os quais se podem citar: a mineração, a siderurgia e as indústrias de fertilizantes e alimentícias, conforme mencionado por VSMA (1980).

Peneiramento é a operação de separação de uma população de partículas em duas frações de tamanhos diferentes, mediante sua apresentação a um gabarito de abertura pré-determinada, de forma que cada partícula tem apenas as possibilidades de passar ou de ficar retida. Os dois produtos chamam-se retido (ou *oversize*) e passante (ou *undersize*), segundo Chave e Peres (2003). A dimensão que classifica o tamanho dos grãos entre retido e passante é chamado de abertura da malha. Assumindo que os grãos possuem formato esférico, pode-se definir o corte de peneiramento como sendo o tamanho máximo dos grãos passantes. Geralmente o corte é menor que a abertura da malha.

Os gabaritos, também chamados de superfície de peneiramento ou malha, podem ser telas de malhas quadradas ou retangulares cuja matéria-prima pode ser poliuretano, borracha ou arame de aço; telas auto-limpantes; chapas perfuradas; placas fundidas; barras paralelas; entre outros.

Os materiais peneirados possuem partículas de diversas dimensões variando desde partículas de 0,130 mm a matacos, que são grandes blocos de minério cuja dimensão pode ser superior a 2000 mm. No processo de peneiramento, o material é lançado sobre a caixa de alimentação (ou bica de alimentação), reduzindo a componente vertical de velocidade. Através da vibração forçada a camada de material tende a desenvolver um estado fluido de deslocamento (Figura 2.1).

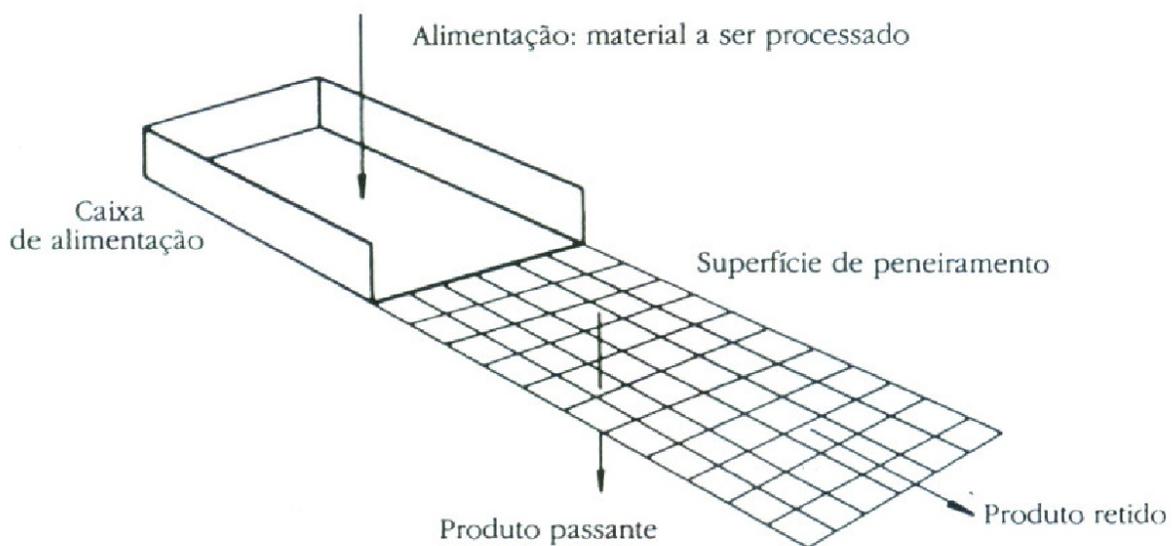


Figura 2.1 – Processo de peneiramento – Faço (1994)

Chave e Peres (2003) comentam que para a classificação do material, dois pontos devem ser analisados: o comportamento do conjunto de partículas e o comportamento individual das partículas.

2.1 Peneiramento: comportamento coletivo

No início da superfície de peneiramento e sob ação do movimento vibratório, a camada de material sofre a extratificação ou seja, as partículas menores escoam através dos vãos criados pelas partículas maiores e encaminham-se para a parte inferior da camada, conseqüentemente as partículas maiores tendem a se deslocar para a parte superior.

Em seguida ocorre o peneiramento de saturação onde o leito da camada está completamente extratificado ou seja, a quantidade de finos diminui gradativamente. Já na terceira etapa, chamada de peneiramento por tentativas repetidas ou peneiramento de baixa probabilidade, as partículas finas remanescentes têm que atingir sucessivamente a superfície de peneiramento até conseguirem ultrapassá-la.

A Figura 2.2 ilustra um corte longitudinal de peneira ideal onde se pode notar que a curva de quantidade de passante se torna assintótica ao eixo do comprimento da peneira ou seja, é necessário um grande comprimento de superfície de peneiramento para se obter 100% de eficiência. Dessa forma valores entre 90 a 95% de eficiência de peneiramento são aceitáveis para a maioria das aplicações. Quanto mais extensa for a peneira, maior sua eficiência; por outro lado, peneiras mais largas têm maior capacidade de produção.

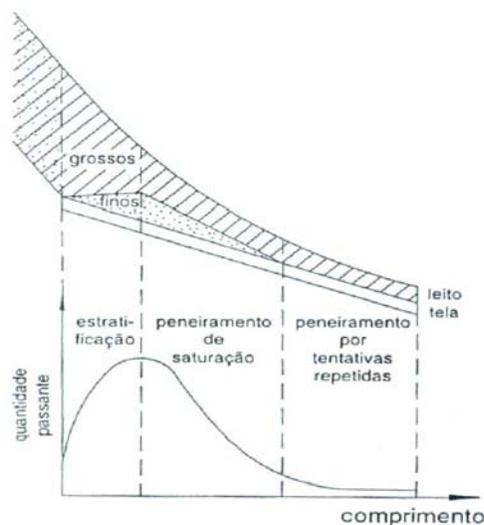


Figura 2.2 – Comportamento coletivo das partículas peneiradas – Chaves e Peres (2003)

2.2 Peneiramento: comportamento individual

O material a ser peneirado é composto por partículas de diferentes tamanhos “ d_a ”, que possuem comportamento distinto quando apresentadas à superfície de peneiramento de abertura “ D_a ”:

- $d_a \geq 1,5.D_a$: estas partículas não acarretam em problemas para o peneiramento, sendo encaminhadas para o retido. Porém podem danificar ou acentuar o desgaste da superfície de peneiramento devido à elevada massa e dimensão;
- $1,5.D_a > d_a \geq D_a$: diferente da classe anterior, estas partículas possuem tamanho semelhante à abertura da malha, dificultando assim o peneiramento e podendo causar o entupimento da superfície de peneiramento;
- $D_a > d_a \geq 0,5.D_a$: este tamanho de partícula afeta diretamente no rendimento e capacidade da peneira, uma vez que necessitam de diversas tentativas para atravessar a superfície de peneiramento. Esta faixa de tamanho é denominada “faixa crítica de peneiramento” ou *nearsized*;
- $d_a < 0,5.D_a$: estas partículas não acarretam problemas para o peneiramento, sendo encaminhadas para o passante;
- $d_a \ll 0,5.D_a$: diferente da classe anterior, as partículas muito finas podem aderir às de maior tamanho e serem encaminhadas para o retido. Quando a quantidade dessas partículas é muito elevada, recomenda-se um peneiramento a úmido, o qual será detalhado mais adiante.

A Figura 2.3 ilustra o comportamento das diversas classes de tamanho de partículas submetidas ao peneiramento.

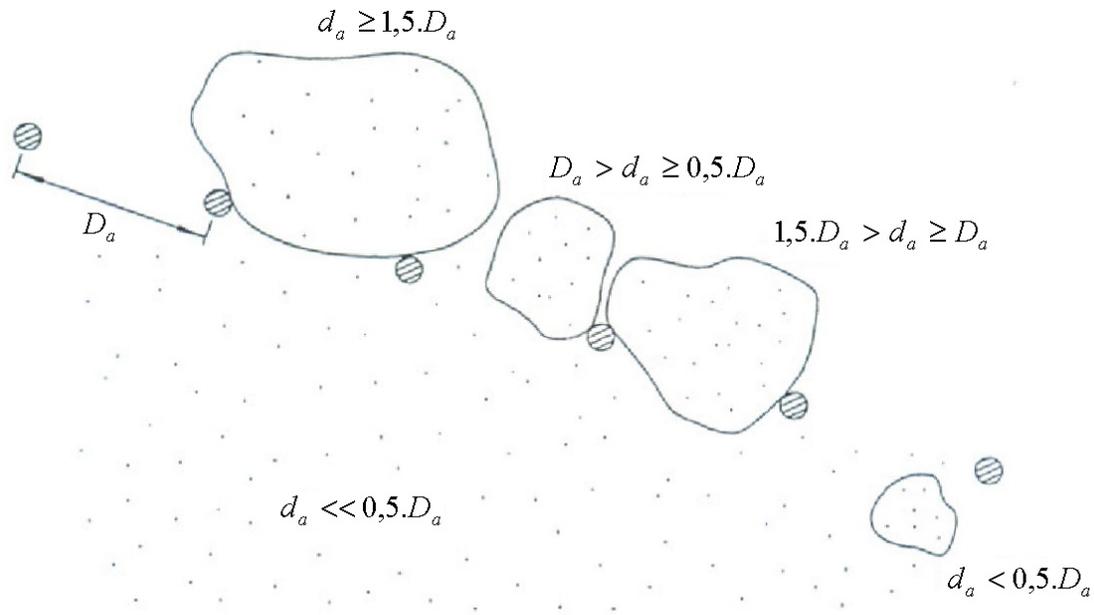


Figura 2.3 – Comportamento individual das partículas peneiradas – Chaves e Peres (2003)

2.3 Eficiência de peneiramento

A eficiência de peneiramento é definida como a qualidade de separação que a peneira fornece. Segundo Faço (1994), um peneiramento de baixa eficiência pode acarretar em sérios problemas, entre os principais estão:

- Sobrecarga do circuito fechado de britagem: parte do material que deveria passar pela peneira retorna ao circuito, diminuindo a capacidade real dos britadores e sobrecarregando as correias transportadoras;
- Produto fora de especificação: contaminação do produto final com partículas de dimensões fora de especificação.

Para a avaliação do processo de peneiramento, deve-se realizar uma análise do material na alimentação da peneira, no retido e/ou no passante. Duas eficiências podem ser obtidas baseadas no produto final considerado.

2.3.1 Eficiência de remoção dos passantes

Quando o produto final considerado é o material retido, a eficiência é dada por:

$$\eta_R = \frac{R_A}{R_R} \cdot 100\% \quad (2.1)$$

onde: η_R - Eficiência de remoção dos passantes;

R_A - Porcentagem de retido na alimentação;

R_R - Porcentagem realmente retida.

Segundo Faço (1994), valores aceitáveis de contaminação do retido são de 5% a 20%.

2.3.2 Eficiência de recuperação dos passantes

Quando o produto final considerado é o material passante, a eficiência é dada por:

$$\eta_P = \frac{P_R}{P_A} \cdot 100\% \quad (2.2)$$

onde: η_P - Eficiência de recuperação dos passantes;

P_R - Porcentagem realmente passante;

P_A - Porcentagem de passante na alimentação.

Segundo Faço (1994), valores aceitáveis de contaminação do passante são de 2% a 10%.

2.4 Equipamentos para peneiramento

Os equipamentos capazes de realizar a operação de peneiramento são diversos, como por exemplo: peneiras estáticas; peneiras vibratórias; grelhas; e peneiras rotativas (tipo Tromel). É importante ressaltar que este trabalho tem o intuito de analisar a estrutura mecânica das peneiras vibratórias os seja, peneiras estáticas, grelhas e peneiras rotativas não serão abordadas.

Peneiras vibratórias são basicamente compostas por um chassi robusto chamado de caixa da peneira, a qual é apoiada sobre molas ou coxins de borracha, dotada de um mecanismo acionador e de *deck(s)* (superfície de peneiramento simples ou múltipla). Em geral as peneiras vibratórias são identificadas pela largura e comprimento da sua superfície de peneiramento. Na Figura 2.4 pode ser visto uma peneira vibratória de 2430 mm por 6000 mm e seus componentes principais:

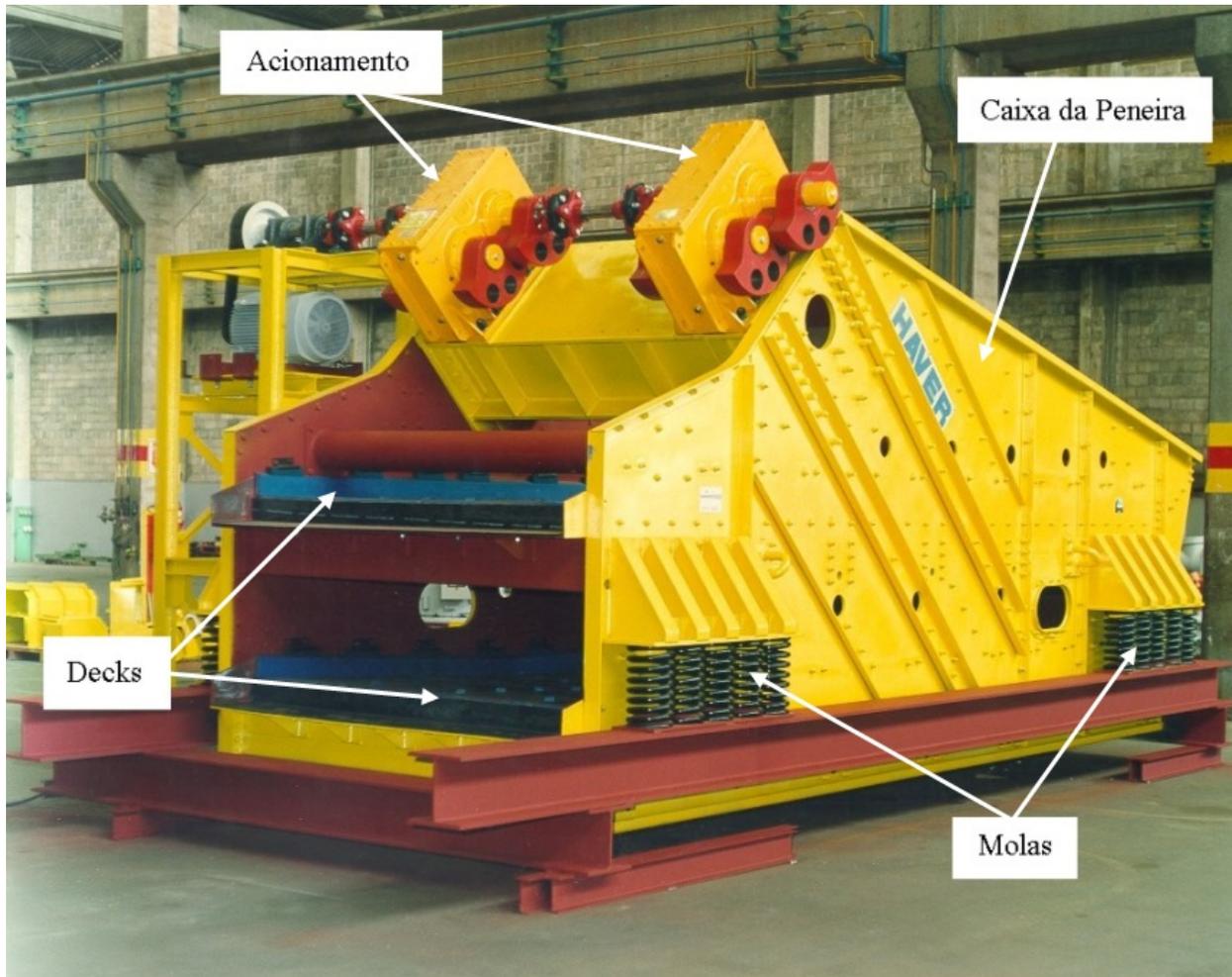


Figura 2.4 – Componentes básicos de uma peneira vibratória

Segundo Luz, Possa, e Almeida (1998), as peneiras vibratórias são de uso mais freqüente na mineração, sendo muito empregadas nas operações de britagem e de preparação do minério para os processos de concentração. Entre as principais aplicações estão:

- Peneiras escarpadoras: normalmente são posicionadas antes de britadores planta de mineração. Sua principal função é retirar as partículas finas, otimizando assim o rendimento dos britadores;
- Peneiras classificadoras: é a operação mais usual onde o objetivo é a própria definição de peneiramento: a separação de partículas em diferentes tamanhos;
- Peneiras desaguadoras: são utilizadas para diminuir a umidade do material a ser peneirado. Em geral estas peneiras possuem malhas no fundo e laterais da caixa; e operam com alta camada de material;
- Peneiras de proteção ou rejeito: em geral, são utilizadas para proteger algum equipamento, como por exemplo o sistema de ensacagem das plantas de cimento.

2.5 Movimento vibratório

O movimento vibratório da peneira é produzido por sistemas de acionamento que, geralmente são baseados em massas desbalanceadas. Normalmente a amplitude de vibração possui valores entre 3,0 mm e 8,0 mm; e a máquina opera em uma faixa de rotações de 600 RPM a 1200 RPM. Porém, estes valores podem variar como no caso das peneiras de alta freqüência que operam com amplitude de até 0,5 mm e rotação de 3600 RPM.

As peneiras vibratórias possuem dois tipos principais de vibração: com movimento circular (peneiras inclinadas ou peneiras circulares) ou com movimento linear (peneiras horizontais ou peneiras lineares).

Nas peneiras circulares, a partícula é deslocada pela ação conjunta do movimento circular imposto pelo acionamento e da inclinação do *deck*. A amplitude das peneiras circulares é dada pelo raio do círculo formado pelo seu movimento. A Figura 2.5 ilustra o movimento circular de uma partícula sobre a superfície de peneiramento.

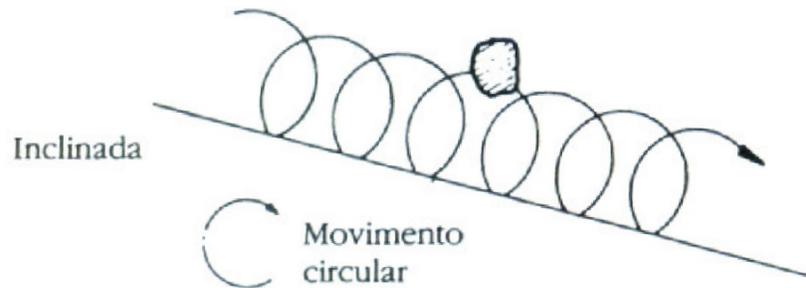


Figura 2.5 – Movimento circular de uma partícula sobre a malha – Faço (1994)

As peneiras de movimento horizontal surgiram principalmente, por dois motivos: diminuir o espaço vertical requisitado pelo equipamento (peneira circular) e gerar um melhor controle dos fluidos da polpa a ser peneirada na operação de desaguamento. Além do desaguamento, as peneiras horizontais são largamente utilizadas em processos de classificação.

No caso das peneiras horizontais, o movimento linear é capaz de transportar o material sem o auxílio da aceleração da gravidade. A direção da força que gera o movimento linear geralmente forma um ângulo de 45° com a superfície de peneiramento e a amplitude é dada pela metade do comprimento do trajeto feito pelo seu movimento. A Figura 2.6 ilustra o movimento linear de uma partícula sobre a superfície de peneiramento.



Figura 2.6 – Movimento linear de uma partícula sobre a malha – Faço (1994)

Para uma boa eficiência de peneiramento, deve-se escolher a melhor relação entre rotação e amplitude da máquina em função do material a ser peneirado. É desejável que a partícula, ao se deslocar sobre a superfície de peneiramento, não atinja a mesma abertura da malha, mas também não ultrapasse várias aberturas. Baseado nas tabelas mencionadas por Chave e Peres (2003), pode-se recomendar as seguintes rotações de trabalho em função da abertura da malha para peneiras convencionais, apresentadas nas Tabelas 2.1 e 2.2:

Tabela 2.1 – Valores recomendados de rotação em função da abertura da malha para peneiras circulares

| Peneiras circulares | |
|-----------------------------------|--------------------------|
| Abertura da malha [mm] | Rotação [RPM] |
| 101,60 | 800 |
| 76,20 | 850 |
| 50,80 | 900 |
| 25,40 | 950 |
| 12,70 | 1000 |
| 6,35 | 1400 |
| 1,91 | 1500 |
| 1,35 | 1600 |

Tabela 2.2 – Valores recomendados de rotação em função da abertura da malha para peneiras lineares

| Peneiras lineares | |
|-----------------------------------|--------------------------|
| Abertura da malha [mm] | Rotação [RPM] |
| 101,60 a 50,8 | 700 |
| 50,80 a 25,40 | 750 |
| 25,40 a 12,70 | 800 |
| 12,70 a 5,45 | 850 |
| 5,45 a 1,91 | 900 |
| 1,91 a 1,00 | 950 |

Conforme critério apresentado por HBL (2004), a relação entre a força gerada pelo acionamento e a peso da caixa da peneira (ou peso vibrante) é chamado de Fator de Peneiramento (K); e este deve possuir valor entre 3 e 5:

$$K = \frac{F_c}{P} \quad (2.3)$$

onde: F_c - Força centrífuga gerada pelo acionamento;

P - Peso vibrante.

Sabendo-se que a força centrífuga (F_c) é função da massa da caixa da peneira ou massa vibrante (m) e da aceleração centrífuga (a_c); e lembrando que a aceleração centrífuga é função da amplitude do movimento vibratório (a) e da frequência de operação da mesma (ω) ou da rotação do equipamento (N), tem-se:

$$F_c = m.a_c = m.\frac{a}{1000}.\omega^2 = m.\frac{a}{1000}.\left(\frac{2.\pi.N}{60}\right)^2 \quad (2.4)$$

Retomando a equação (2.3):

$$K = \frac{F_c}{P} = \frac{(m.a_c)}{(m.g)} = \frac{m.\frac{a}{1000}.\left(\frac{2.\pi.N}{60}\right)^2}{m.g} = \frac{a}{1000}.\frac{1}{g}.\left(\frac{2.\pi.N}{60}\right)^2 = \frac{a.N^2}{894564,7304} \quad (2.5)$$

$$K \approx \frac{a.N^2}{900000}$$

Neste ponto é importante ressaltar que a definição precisa do Fator de Peneiramento, da rotação e da amplitude de trabalho é baseada em diversas informações empíricas relacionadas às características do material a ser peneirado.

2.6 Tipos de peneiras vibratórias

Além da classificação pelo tipo de movimento vibratório, as peneiras são subdivididas de acordo com o tipo de acionamento que estas possuem. Na listagem abaixo são apresentados os tipos de acionamento:

- Movimento circular:
 - Peneira de acionamento livre circular (dois rolamentos);
 - Peneira de acionamento excêntrico (quatro rolamentos).

- Movimento linear:
 - Peneira de acionamento por motovibradores;
 - Peneira de acionamento por duplo eixo;
 - Peneira de acionamento por excitadores.

- Outros tipos:
 - Peneira de vibração elíptica;
 - Peneira em ressonância;
 - Peneira de acionamento eletromagnético;
 - Peneira de acionamento direto na tela (alta frequência).

A seguir serão apresentadas as principais características das classes de peneiras mais usuais assim, peneiras de aplicação restrita não serão analisadas neste trabalho.

2.6.1 Peneira de acionamento livre circular (2 rolamentos)

A peneira de acionamento livre circular é um dos sistemas mais simples e antigos que realiza a operação de peneiramento. Como mencionado anteriormente, estas peneiras necessitam de trabalharem inclinadas em relação ao plano horizontal ou seja, necessitam do auxílio da força da gravidade para realizar o processo de peneiramento. Esta inclinação varia de 10° a 30° (inclinações menores são aplicadas em classificação a úmido e inclinações maiores, a seco), segundo VSMA (1980). A abertura de malha destas peneiras varia entre 1 e 150 mm.

O sentido de rotação do eixo pode ser contra o fluxo de material ou a favor do fluxo do material. No primeiro caso, existe uma diminuição da velocidade do fluxo (capacidade da peneira) e conseqüente aumento da eficiência; já no segundo caso, a velocidade do material é maior, porém existe uma queda da eficiência. Este tipo de peneira normalmente é utilizado em operações de classificação e proteção.

Em geral, as peneiras de acionamento livre circular possuem uma forma construtiva simples, sendo compostas basicamente de chapas laterais reforçadas com perfis “U” ou cantoneiras. O seu sistema de acionamento é formado por um tubo mecânico de proteção, um eixo que atravessa transversalmente toda a peneira e que possui, em suas extremidades, contrapesos (massas) que realizam o desbalanceamento do mesmo. Um motor elétrico acoplado ao eixo por um sistema de correias “V” é utilizado para o movimento do mesmo. Os *decks* são formados por travessas: vigas transversais ao fluxo de material; e por longarinas: vigas longitudinais ao fluxo de material e telas. A caixa da peneira é apoiada sobre molas helicoidais ou coxins e vibra livremente sobre os mesmos.

Devido ao tipo de acionamento, a peneira livre circular fica restrita ao comprimento do eixo que, geralmente é inferior a 2500 mm. Para comprimentos de eixo superiores a este valor, o custo da peneira se torna inviável devido à necessidade de rolamentos de maior diâmetro, eixos forjados mais resistentes, maior espaço entre os decks, entre outras dificuldades construtivas. Em seguida é ilustrada uma peneira vibratória de acionamento livre linear de 2000 mm de largura da malha por 6000 mm de comprimento (Figura 2.7) e um detalhe do acionamento da peneira livre circular (Figura 2.8):



Figura 2.7 – Peneira vibratória de acionamento livre linear

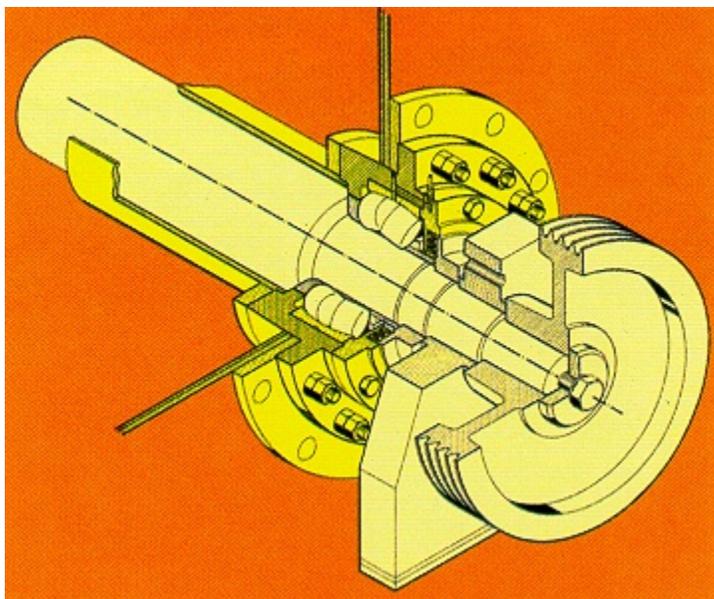


Figura 2.8 – Esquema do acionamento livre circular – HBL (2004)

2.6.2 Peneira de acionamento excêntrico (4 rolamentos)

Como no caso das peneiras de acionamento livre linear, as peneiras excêntricas possuem movimento circular ou seja, necessitam de trabalharem inclinadas com relação ao plano horizontal. A inclinação varia de 10° a 30° e o corte, entre 5 e 300 mm, de acordo com HBL (2004). Em geral este tipo de peneira realiza a operação de *scalping* (alívio do britador primário e/ou secundário).

A construção da caixa das peneiras excêntricas é similar à das peneiras livre circulares, a maior diferença entre as duas classes está no acionamento, o qual possui um eixo com excentricidade usinada em suas extremidades. No acionamento existem dois mancais internos fixados à caixa da peneira; e outros dois mancais externos montados em uma base estática. Uma vez que os mancais da caixa estão fora de centro em relação aos mancais estacionários, a rotação do eixo impõe um movimento circular a parte vibrante da peneira. O movimento do eixo é similar ao de uma manivela e a amplitude da peneira é dada pela excentricidade do eixo. Como as peneiras livre circular, as excêntricas possuem a mesma restrição de tamanho relacionada ao comprimento máximo do eixo de acionamento ou seja, estão restritas à 2500 mm, novamente, acima deste valor, a construção destes equipamentos se torna economicamente inviável.

Nas peneiras excêntricas, os contrapesos são fixados nas extremidades do eixo, entre os mancais externo e interno. Porém, diferente das peneiras livre circular, os contrapesos têm a função de gerar uma força centrífuga oposta à gerada pela massa vibrante da peneira com o objetivo de balanceamento, visando assim reduzir as cargas incidentes nos rolamentos. Em seguida é apresentada uma peneira excêntrica de 2200 mm por 6000 mm (Figura 2.9) e o esquema de montagem do acionamento excêntrico (Figura 2.10).



Figura 2.9 – Peneira vibratória de acionamento excêntrico

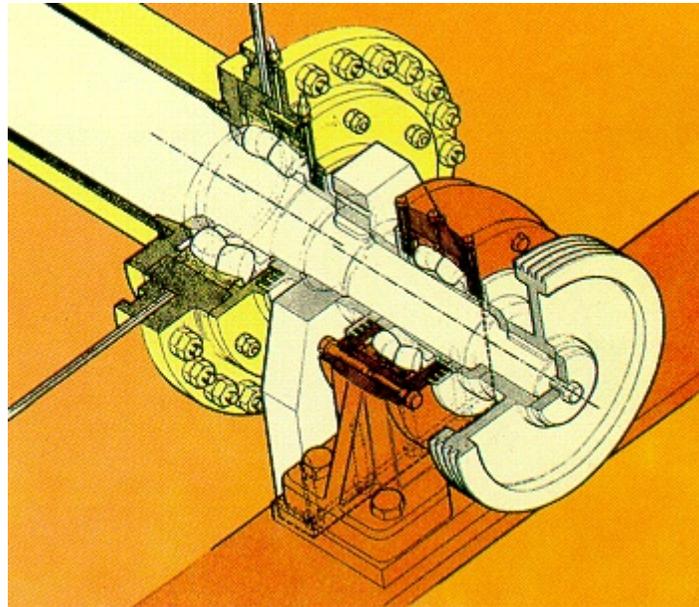


Figura 2.10 – Esquema do acionamento excêntrico – HBL (2004)

2.6.3 Peneira de acionamento por motovibradores

Os motovibradores são sistemas formados por um motor elétrico acoplado à massas desbalanceadas em suas extremidades, como pode ser visto na Figura 2.11:

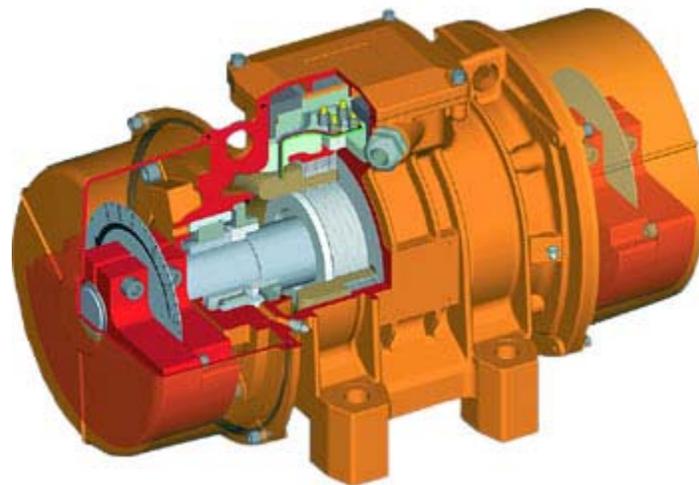


Figura 2.11 – Esquema do motovibrador – Italvibras (2005)

Dependendo do tipo de montagem dos motovibradores, pode-se obter um movimento circular ou um movimento linear da peneira. Para a obtenção do movimento linear, é necessário o emprego dos motovibradores aos pares de forma que os motores girem em sentido de rotação oposto. A Figura 2.12 ilustra os dois tipos de montagem:

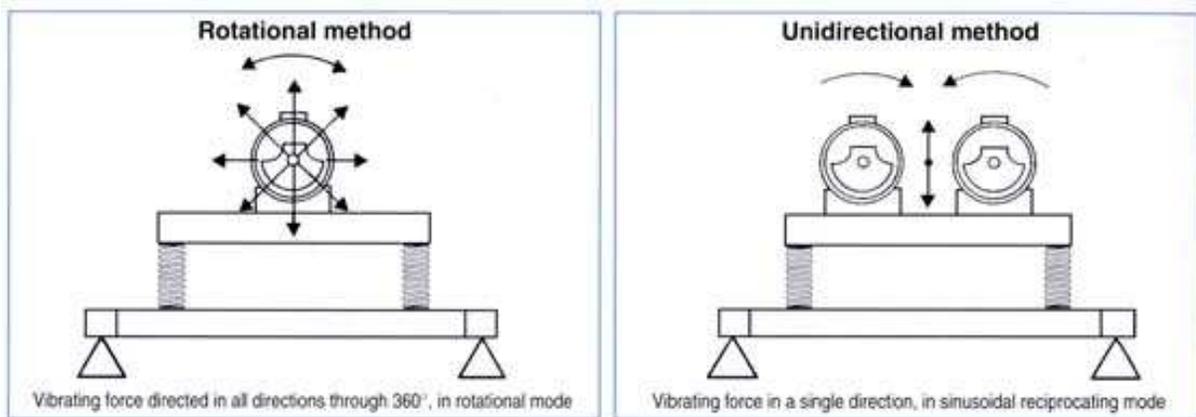


Figura 2.12 – Tipos de montagem dos motovibradores – Italtvibras (2005)

Italtvibras (2005) recomenda as seguintes montagens dos motovibradores (Figura 2.13):

1. Para transportadores, separadores, peneiras vibratórias, alimentadores vibratórios, entre outros, é recomendado o movimento linear (1);
2. Para silo e funil de carga (2A), filtros (2B) e camas vibratórias (2C), é recomendado o movimento circular;
3. Para mesas compactadoras e para testes (aceleração, envelhecimento e tensão), podem-se utilizar os movimentos circular (3A) ou linear (3B).

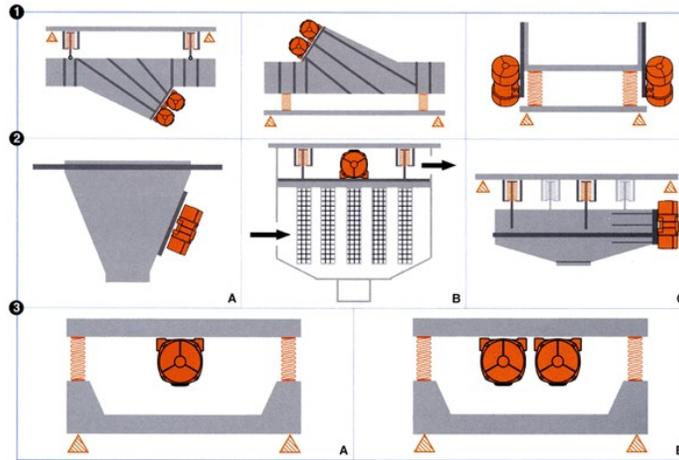


Figura 2.13 – Recomendações para montagem dos motovibradores – Italtibras (2005)

Em geral as peneiras acionadas por motovibradores possuem largura máxima da superfície de peneiramento de 1800 mm uma vez que dois problemas impedem o uso de motovibradores para peneiras de grande porte: a forma construtiva (motor diretamente acoplado aos contrapesos) impede que a massa dos contrapesos seja muito elevada ou seja, a força de impacto gerada não pode atingir valores desejados para o peneiramento; os motovibradores estão sujeitos à mesma vibração da caixa da peneira, o que diminui a vida útil do conjunto. Normalmente, as peneiras vibratórias acionadas por motovibradores são utilizadas para o desaguamento e a classificação. Na Figura 2.14 é ilustrada uma peneira desaguadora de 1200 mm por 3000 mm.



Figura 2.14 – Peneira vibratória para aplicação em desaguamento com acionamento por motovibradores

2.6.4 Peneira de acionamento por duplo eixo

Conforme o critério apresentado por HBL (2004), este sistema de acionamento é composto por dois eixos que possuem o desbalanceamento usinado ou fixado no seu comprimento. Similar ao sistema de motovibradores, o movimento linear é obtido com os eixos girando em sentido de rotação oposto, obtendo-se “a sincronização dos contrapesos sem necessidade de elementos mecânicos de ligação” (OHASHI, 2005, p.11). A Figura 2.15 ilustra uma peneira com acionamento por duplo eixo:

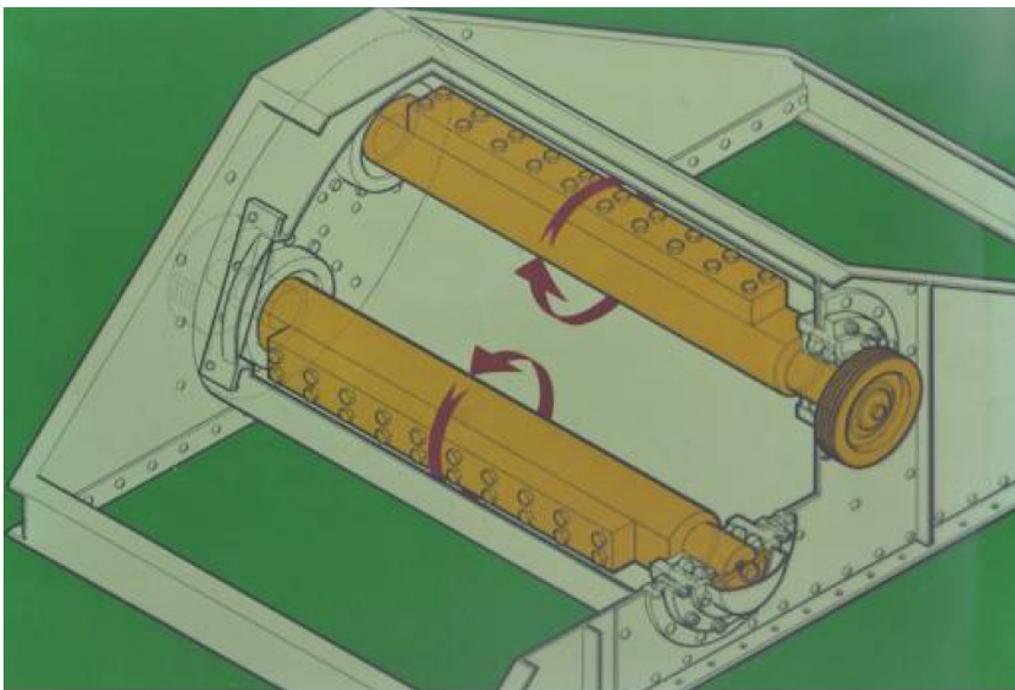


Figura 2.15 – Esquema de funcionamento das peneiras de acionamento por duplo eixo – HBL (2004)

Como as peneiras de movimento circular, a peneira de duplo eixo possui restrição de tamanho relacionada ao comprimento do eixo de acionamento porém, devido ao desbalanceamento incorporado ao corpo do eixo, a largura máxima da superfície de peneiramento é restrita a 2200mm. Acima desta a construção destes equipamentos se torna economicamente inviável. Em geral, peneiras acionadas por duplo eixo são aplicadas nas operações de desaguamento e de classificação. A Figura 2.16 apresenta uma peneira desaguadora de 1800 mm por 3500 mm.

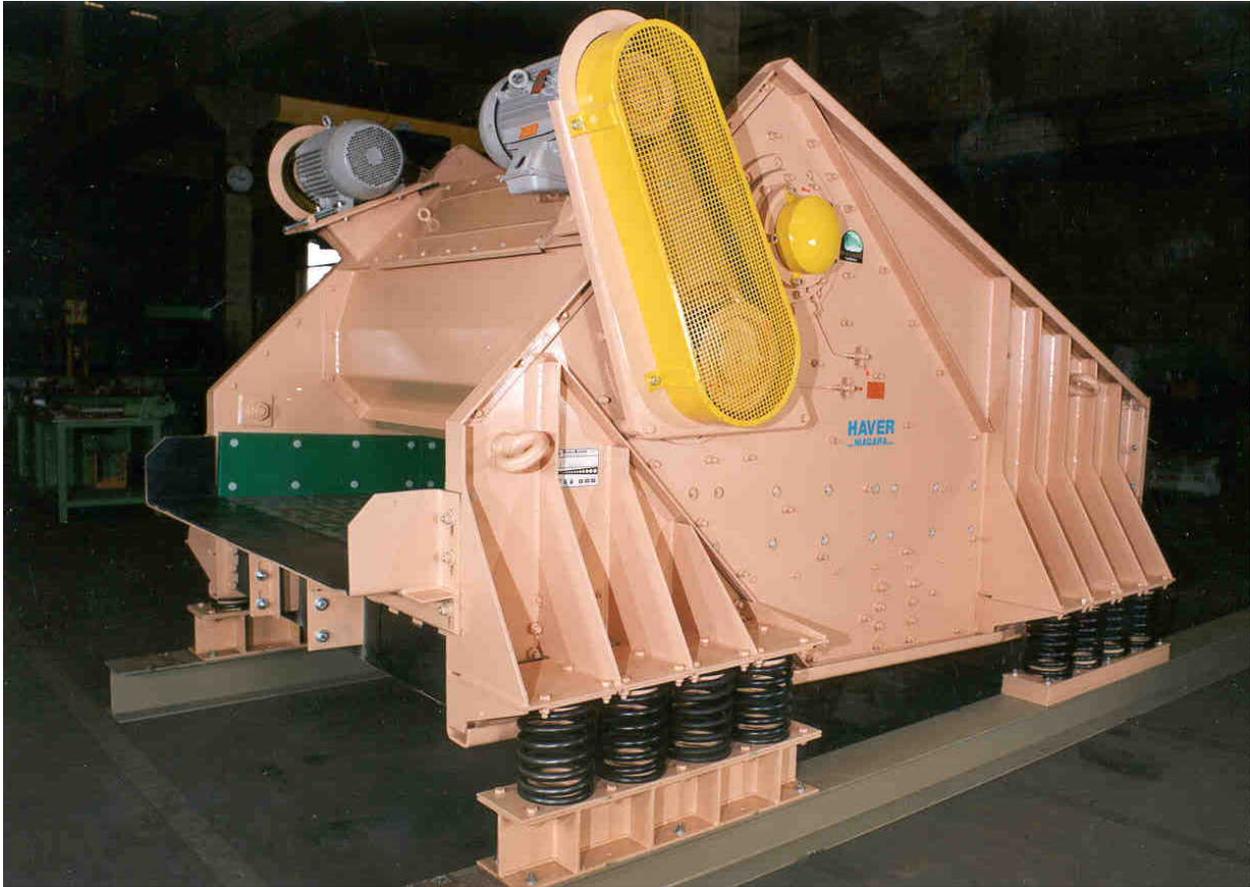


Figura 2.16 – Peneira vibratória para aplicação em desaguamento com acionamento por duplo eixo

2.6.5 Peneira de acionamento por excitadores

A principal aplicação das peneiras com acionamento por excitador é a classificação. O sistema de acionamento por excitadores permite uma maior largura da superfície de peneiramento assim, peneiras de alta capacidade normalmente utilizam este tipo de acionamento, podendo atingir larguras de até 4000 mm e comprimento de 12000 mm (Figura 2.17).

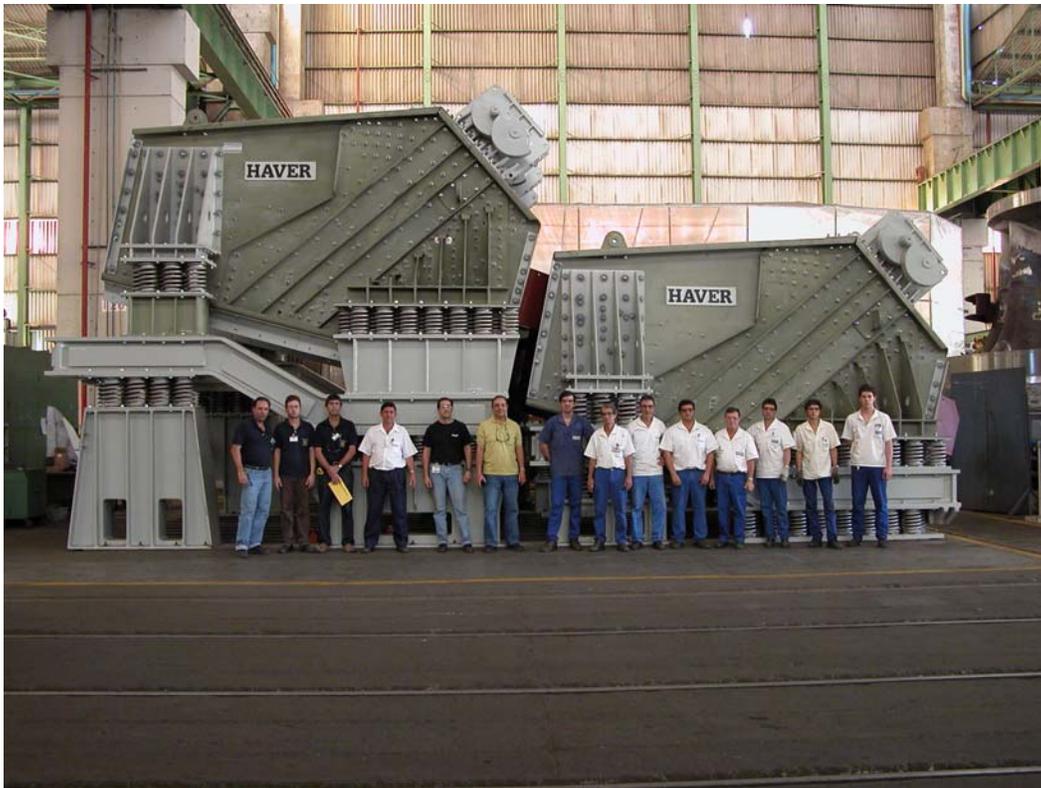


Figura 2.17 – Peneira vibratória 4000 mm x 11000 mm com acionamento por excitadores

O princípio de funcionamento do excitador (Figura 2.18) é similar ao do motovibrador e duplo eixo porém, um único excitador mecânico unidirecional possui dois eixos com contrapesos em suas extremidades que giram em sentido oposto.

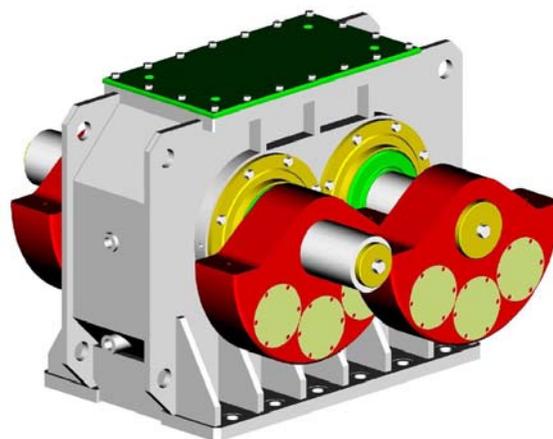


Figura 2.18 – Esquema do excitador – VIMEC (2004)

VIMEC (2004) informa que a rotação dos eixos é sincronizada através de um par de engrenagens (Figura 2.19) cuja finalidade é originar a oscilação unidirecional, na qual a direção da força resultante F_R é perpendicular à linha que conecta os centros dos eixos A e B, conforme Figura 2.20. Pode-se notar que devido ao sentido de giro dos contrapesos, existem determinadas posições em que as componentes das forças centrífugas geradas pelo movimento angular dos mesmos se somam ou se anulam:

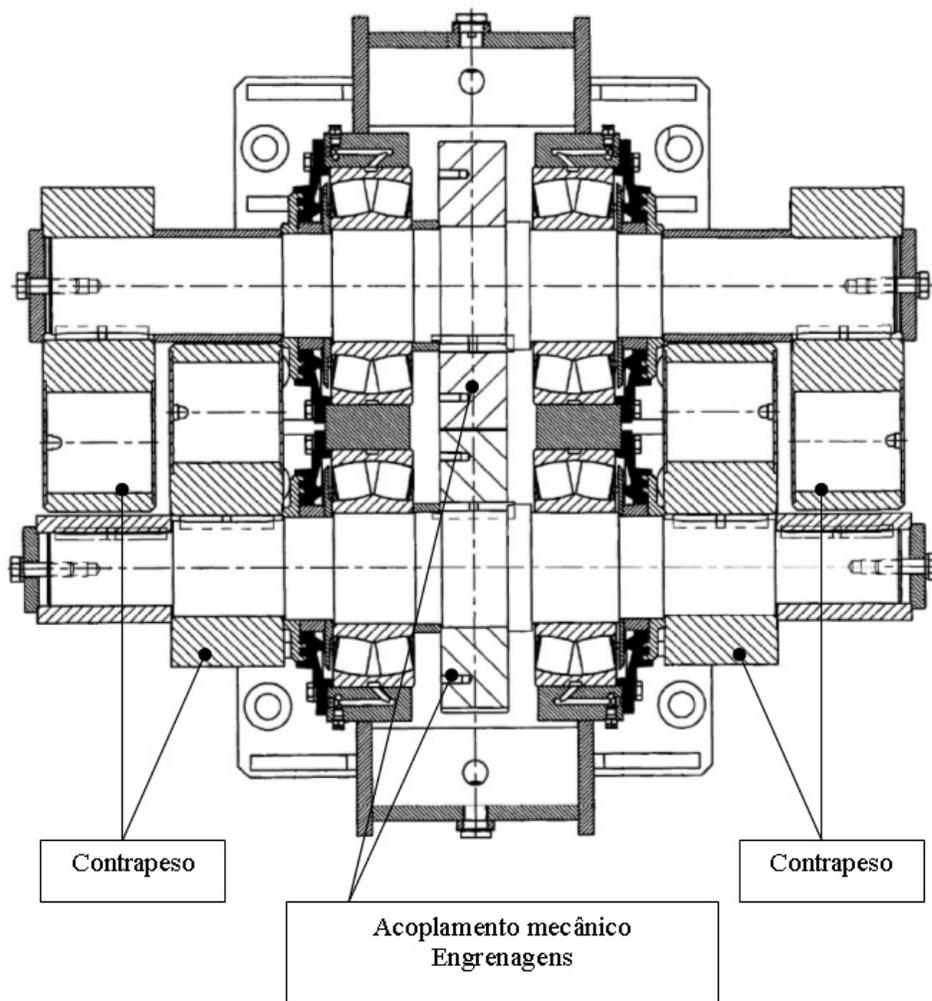


Figura 2.19 – Detalhe das engrenagens do excitador – VIMEC (2004)

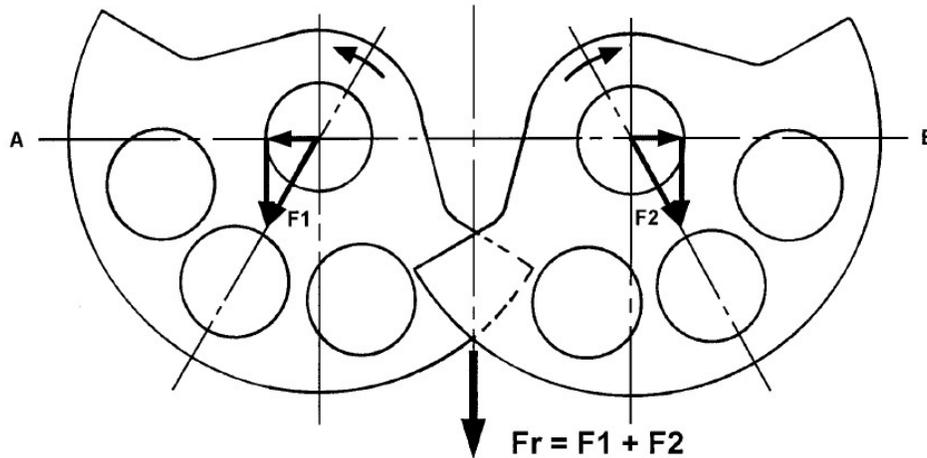


Figura 2.20 – Esquema das componentes da força centrífuga dos contrapesos – VIMEC (2004)

A força resultante é uma função senoidal dada por:

$$Fr = (F_1 + F_2) \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \quad (2.6)$$

onde: F_1 - Força centrífuga gerada pelos contrapesos do eixo A;

F_2 - Força centrífuga gerada pelos contrapesos do eixo B;

f - Frequência de operação do equipamento;

t - Tempo.

Utilizando a equação (2.4) para os contrapesos:

$$F_1 = F_2 = 2 \cdot m_c \cdot r_e \cdot \left(\frac{2\pi \cdot N}{60} \right)^2 \quad (2.7)$$

onde: m_c - Massas de cada contrapesos;

r_e - Distância entre o centro de massa do contrapeso e o seu centro de giro;

N - Rotação de trabalho do equipamento.

Substituindo as equações (2.7) na equação (2.6) e lembrando que a frequência de operação pode ser expressa em termos da rotação de trabalho:

$$Fr = 4.m_c.r_e.\left(\frac{2.\pi.N}{60}\right)^2.\sin\left(\frac{2.\pi.N}{60}.t\right) \quad (2.8)$$

É importante ressaltar que no acionamento por excitadores não possui as restrições dos outros projetos, conseqüentemente é possível utilizar grandes larguras com este tipo de acionamento. O acoplamento entre os excitadores é realizado através do emprego de juntas universais (eixo cardan) ou através de acoplamentos elásticos. O motor elétrico que movimenta os excitadores é posicionado em uma base estática e transmite o movimento através de um sistema de polias e correias permitindo assim a seleção da rotação e torque mais adequada ao sistema.

Normalmente as peneiras de grande porte são mais suscetíveis a condições de carregamento severo, necessitando assim de análises técnicas mais apuradas. O presente trabalho irá apresentar os resultados de simulações numéricas utilizando o Método dos Elementos Finitos e medições experimentais por extensometria para quatro peneiras de grande.

2.7 Escolha das telas

Anderson (2000) apresenta alguns princípios básicos que devem ser considerados na escolha do tipo de tela a ser utilizada em aplicações convencionais:

- Telas de aço;
- Telas de aço com malhas retangulares longas;
- Chapas perfuradas;
- Telas de poliuretano;
- Telas de borracha;
- Telas de borracha macia ou auto-limpante.

O tipo de malha a ser utilizado depende da abrasividade, tamanho do grão do material, umidade, viabilidade econômica e nível de ruído. Basicamente, as telas de aço são as mais usuais devido ao seu baixo custo e aplicabilidade em peneiramento seco ou úmido. Sua desvantagem é a baixa resistência ao desgaste e ao impacto (Figura 2.21a).

Chapas perfuradas são utilizadas no caso de peneiramento pesado e/ou quando o material a ser peneirado é altamente abrasivo, segundo VSMA (1980). Em geral estas telas são empregadas em peneiras escarpadoras e na indústria siderúrgica (Figura 2.21b).

Se o peneiramento for úmido e de alto impacto, as telas de borracha geram bons resultados (Figura 2.21c). Já as telas de poliuretano são, geralmente, recomendadas para aplicações de peneiramento a úmido (Figura 2.21d).

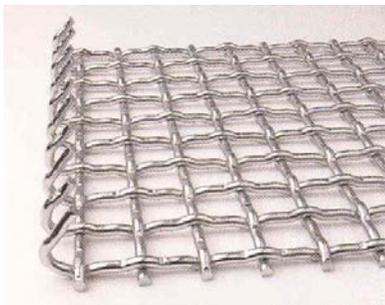


Figura 2.21a – Tela de aço



Figura 2.21b – Chapa perfurada

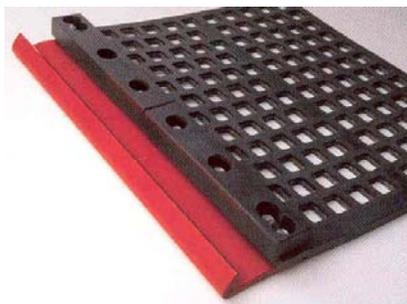


Figura 2.21c – Tela de borracha

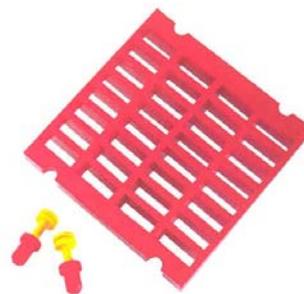


Figura 2.21d – Tela de poliuretano

Anderson (2000) ainda apresenta um guia de referência para escolha dos meios de peneiramento para utilizações específicas (Figura 2.22). O *scalping* é a operação de peneiramento realizada antes do britador primário; a separação primária é aquela que vem depois do britador primário; e assim sucessivamente.

| Meios de Peneiramento | | | | | | | |
|---|---|--|-----------------|----------------------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| Utilização da tela | Tela de aço | Tela de malhas retangulares longas | Chapa perfurada | Tela de aço inoxidável perfurado | Tela de poliuretano | Tela de borracha | Tela autolimpante |
| Separação primária (seca de alto impacto) | REGULAR Arame de alto teor de carbono ou temperado em óleo | NÃO SE RECOMENDA | BOA | NÃO SE RECOMENDA | NÃO SE RECOMENDA | EXCELENTE | NÃO SE RECOMENDA |
| Primária - material pastoso ou dragado (úmida de alto impacto) | REGULAR Arame temperado em óleo | NÃO SE RECOMENDA | BOA | NÃO SE RECOMENDA | BOA-EXCELENTE | BOA-EXCELENTE | NÃO SE RECOMENDA |
| Secundária seca | REGULAR-BOA Arame temperado em óleo | REGULAR Arame temperado em óleo (alta produção) | REGULAR-BOA | NÃO SE RECOMENDA | NÃO SE RECOMENDA | EXCELENTE | BOA |
| Terciária seca | BOA Arame temperado em óleo (granulometria aberta) | EXCELENTE aramé temperado em óleo (alta produção) | REGULAR | REGULAR | REGULAR | BOA | BOA-EXCELENTE |
| Desaguadora | REGULAR Arame temperado em óleo | REGULAR Arame temperado em óleo (alta produção) | REGULAR | BOA | EXCELENTE | NÃO SE RECOMENDA | REGULAR |

Figura 2.22 – Guia de referência para escolha das telas – Anderson (2000)

2.8 Dimensionamento de peneiras

Dimensionar as peneiras vibratórias significa calcular as dimensões das suas superfícies de peneiramento em função da capacidade requerida ou seja, da quantidade de material com características e condições determinadas que deva passar pelo equipamento por um determinado intervalo tempo. Faço (1994) comenta a existência de diversos métodos de dimensionamento de peneiras porém, existem duas considerações independentes que devem ser atendidas:

- A área de peneiramento definida deve prover a passagem de *undersize* requerida no processo;
- Para haver uma estratificação satisfatória é necessário assegurar que na descarga, a altura de camada seja no máximo quatro vezes a abertura da tela.

Luz, Possa, e Almeida (1998) mencionam que os dados necessários para a seleção e dimensionamento de equipamentos são:

- a) Características do material a ser peneirado: densidade, tamanho máximo do grão na alimentação, distribuição granulométrica, forma das partículas, umidade, presença de materiais argilosos e temperatura;
- b) Capacidade;
- c) Faixa de separação do produto (corte);
- d) Eficiência desejada;
- e) Aplicação;
- f) Limitação: espaço físico e massa máxima do equipamento;
- g) Grau de conhecimento do material e do produto desejado.

Como mencionado acima, existem diversos métodos para dimensionar uma peneira vibratória. Chave e Peres (2003) demonstram a Fórmula empírica de Bauman; a Fórmula de Westerfield que dimensiona peneiras utilizadas na britagem primária e rebritagem; e a Fórmula de *Smith Engineering Works* que é baseada na quantidade de passante; Faço (1994) recomenda o dimensionamento baseado na vazão de alimentação; e Luz, Possa, e Almeida (1998) apresentam o dimensionamento baseado na quantidade de passante. O método apresentado neste trabalho é baseado no guia da VSMA (1980).

No caso de peneiras vibratórias de mais de um deck, deve-se utilizar a equação (2.9) para dimensionar cada um deles separadamente.

$$S = \frac{U}{C_A * C_B * C_C * C_D * C_E * C_F * C_G * C_H * C_J} * \frac{1}{10,763910} \quad (2.9)$$

O dimensionamento da área de peneiramento S é baseado na quantidade de *undersize*, corrigido por diversos fatores empíricos:

- U - Vazão mássica de material na alimentação do *deck* cujo tamanho é menor que a abertura da malha $[t/h]$;
- C_A - Taxa pré-determinada de vazão de material que é passante em um pé quadrado de uma malha com abertura específica. Supondo que a alimentação do *deck* contém 25% de *oversize* e 40% de material com dimensão menor que a metade da abertura da malha;
- C_B - Porcentagem de material na alimentação que possui dimensão maior que a abertura da malha;
- C_C - Porcentagem de material na alimentação que possui dimensão menor que metade da abertura da malha;
- C_D - Em uma peneira de mais de um *deck*, a área total de peneiramento só é válida para o primeiro. O trajeto do material passante, ao escoar do primeiro *deck* para o segundo (e do segundo para o terceiro), faz com que as áreas de peneiramento dos mesmos sejam menos eficientes;

- C_E - Empregado em peneiras que possuem sistema de lavagem (*sprays*);
- C_F - A equação (2.9) é baseada em materiais com densidade de $100\text{lb}/\text{ft}^3$. Para materiais que possuam densidade distinta desta, deve-se aplicar fator de correção “ C_F ”, lembrando que $1\frac{t}{m^3} = 62,4280\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$;
- C_G - Para superfícies de peneiramento que possuam porcentagem de área aberta distinta àquela apresentada na tabela do Fator “ C_A ”, deve-se aplicar o fator de correção “ C_G ”, calculado pela equação 2.10;
- C_H - Na utilização de malhas de formato oblongo ou retangular, as quais possuem maior porcentagem de área aberta, deve-se utilizar fator “ C_H ”;
- C_J - Como mencionado anteriormente, a eficiência aplicável para peneiras vibratórias oscila em torno de 90% a 95%;
- $\frac{1}{10,763910}$ - Constante de conversão: de ft^2 para m^2 .

As tabelas abaixo são baseadas nos dados encontrados em VSMA (1980) e contém as informações necessárias para o dimensionamento de uma peneira vibratória:

Tabela 2.3 – Valores do fator de correção “ C_A ” em função da abertura da malha

| Abertura da malha quadrada [mm] | Porcentagem de área aberta [%] | Fator “ C_A ” | Abertura da malha quadrada [mm] | Porcentagem de área aberta [%] | Fator “ C_A ” |
|---------------------------------|--------------------------------|-----------------|---------------------------------|--------------------------------|-----------------|
| 101,6000 | 75 | 7,69 | 19,0500 | 61 | 3,08 |
| 88,9000 | 77 | 7,03 | 15,8750 | 59 | 2,82 |
| 76,2000 | 74 | 6,17 | 12,7000 | 54 | 2,47 |
| 69,8500 | 74 | 5,85 | 9,5250 | 51 | 2,08 |
| 63,5000 | 72 | 5,52 | 6,3500 | 46 | 1,60 |
| 50,8000 | 71 | 4,90 | 4,7625 | 45 | 1,27 |
| 44,4500 | 68 | 4,51 | 3,1750 | 40 | 0,95 |
| 38,1000 | 69 | 4,20 | 2,3812 | 45 | 0,76 |
| 31,7500 | 66 | 3,89 | 1,5875 | 37 | 0,58 |
| 25,4000 | 64 | 3,56 | 0,7938 | 41 | 0,39 |
| 22,2250 | 63 | 3,38 | | | |

Tabela 2.4 – Valores do fator de correção “C_B” em função da porcentagem de *oversize*

| | | | | | | | |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| % Oversize | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| Fator “C_B” | 1,21 | 1,13 | 1,08 | 1,02 | 1,00 | 0,96 | 0,92 |
| % Oversize | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
| Fator “C_B” | 0,88 | 0,84 | 0,79 | 0,75 | 0,70 | 0,66 | 0,62 |
| % Oversize | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | | |
| Fator “C_B” | 0,58 | 0,53 | 0,50 | 0,46 | 0,33 | | |

Tabela 2.5 – Valores do fator de correção “C_C” em função da porcentagem de *halfsize*

| | | | | | | | |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| % Halfsize | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Fator “C_C” | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 0,55 | 0,60 | 0,70 | 0,80 |
| % Halfsize | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 |
| Fator “C_C” | 0,90 | 1,00 | 1,10 | 1,20 | 1,30 | 1,40 | 1,55 |
| % Halfsize | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | | |
| Fator “C_C” | 1,70 | 1,85 | 2,00 | 2,20 | 2,40 | | |

Tabela 2.6 – Valores do fator de correção “C_D” em função da localização do *deck*

| Localização do Deck | Primeiro | Segundo | Terceiro |
|------------------------------|-----------------|----------------|-----------------|
| Fator “C_D” | 1,00 | 0,90 | 0,80 |

Tabela 2.7 – Valores do fator de correção “C_E” em função da abertura da malha

| | | | | | |
|-------------------------------|--------|---------|---------|---------|--------|
| Abertura da malha [mm] | 0,7938 | 1,5875 | 3,1750 | 4,7625 | 6,3500 |
| Fator “C_E” | 1,00 | 1,25 | 2,00 | 2,50 | 2,00 |
| Abertura da malha [mm] | 9,5250 | 12,7000 | 19,0500 | 25,4000 | |
| Fator “C_E” | 1,75 | 1,40 | 1,30 | 1,25 | |

Conforme mencionado acima, o fator de correção “ C_G ” deve ser calculado de acordo com a equação abaixo:

$$C_G = \frac{P_D}{P_L} \quad (2.10)$$

onde: P_D - Porcentagem de área aberta da malha sendo utilizada;

P_L - Porcentagem de área aberta da malha definida na tabela do Fator “ C_A ”

Tabela 2.8 – Valores do fator de correção “ C_H ” em função do formato da abertura da malha

| Formato da abertura da malha | Fator “C_H” |
|--|---------------------------------|
| Malha quadrada | 1,00 |
| Malha retangular (Comprimento é de 3 a 4 vezes a largura) | 1,15 |
| Malha retangular (Comprimento maior que 4 vezes a largura) | 1,20 |

Tabela 2.9 – Valores do fator de correção “ C_J ” em função da eficiência desejada

| Eficiência [%] | Fator “C_J” |
|---------------------------|---------------------------------|
| 95 | 1,00 |
| 90 | 1,15 |
| 85 | 1,35 |
| 80 | 1,50 |
| 75 | 1,70 |
| 70 | 1,90 |

2.9 Detalhes construtivos

Dependendo da aplicação e das condições do ambiente onde a peneira vibratória for instalada alguns cuidados e detalhes construtivos devem ser tomados. Os principais detalhes estão apresentados abaixo:

- Huck-bolt: é um fixador do tipo rebite para substituição de fixações do tipo parafuso-porca, sendo o maior avanço estrutural na construção de peneiras vibratórias (Figura 2.23).

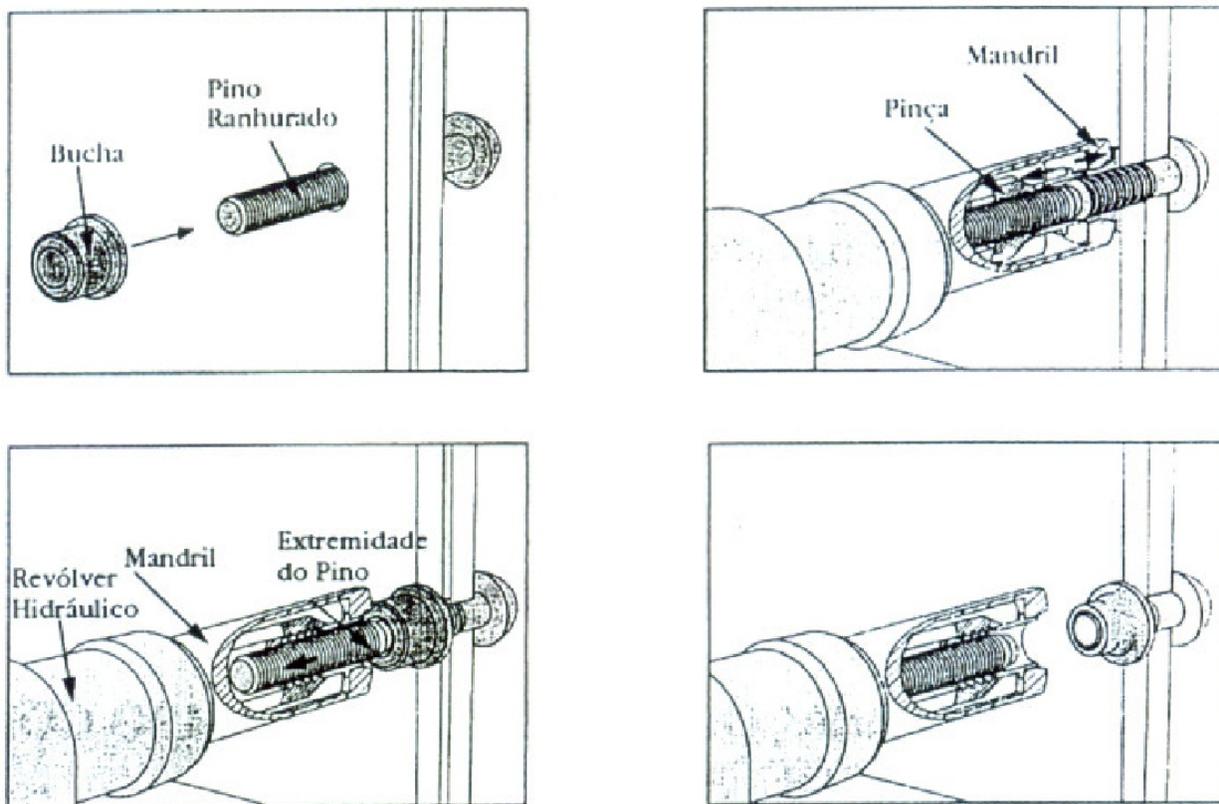


Figura 2.23 – Detalhe da fixação de huck-bolts – Faço (1994)

- Quadro de isolamento: é um complemento da peneira vibratória cujo objetivo é minimizar a transmissão de vibração para a estrutura de suporte (Figura 2.24).



Figura 2.24 - Peneira vibratória 3200 mm por 7315 mm com quadro de isolamento

- Trolley: é um quadro de translação para movimentar a peneira vibratória no caso de, por exemplo, manutenção (Figura 2.25).



Figura 2.25 - Peneira vibratória com Trolley de translação

- Sistema de *sprays*: O peneiramento é dito “a seco” quando é feito com o material na sua umidade natural, e dito “a úmido” quando o material é alimentado na forma de polpa ou recebe água adicional através de *sprays* dispostos sobre os *decks* (Figura 2.26).



Figura 2.26 - Peneira vibratória 2438 mm por 6100 mm com sistema de *sprays*

Além destes, outros detalhes também podem ser citados como por exemplo: quando partículas abrasivas são peneiradas, é necessário o revestimento das paredes internas da caixa com placas de material resistente ao desgaste; quando o material peneirado é pulverulento, é necessário encapsular ou confinar o equipamento; peneiras suspensas (ao invés de apoiadas) também podem ser utilizadas; quando o material a ser peneirado é composto por diversos tamanhos de grãos, é conveniente utilizar um *deck* de alívio ou proteção para que as partículas de maior dimensão não danifiquem a malha (no final, os retidos de ambos os *decks* são reunidos formando um produto único), entre outros.

Capítulo 3

Aspectos Teóricos da Modelagem Numérica de Estruturas

Cálculos estruturais são utilizados para garantir que o objeto de análise não estará sujeito à falhas, sob a ação dos carregamentos gerados durante sua operação. Tais cálculos são divididos em duas linhas de estudo: Métodos Clássicos e Métodos Numéricos.

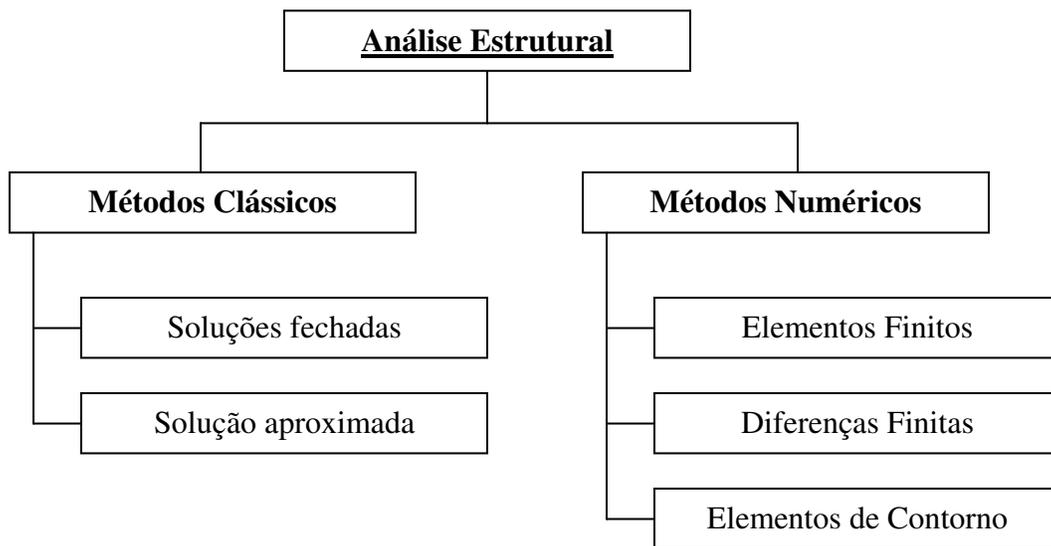


Figura 3.1 – Linhas de estudo na análise estrutural

Os Métodos Clássicos ou Métodos Analíticos são baseados na solução de equações diferenciais resultando em uma solução fechada do problema, a qual pode ser aplicada para qualquer ponto da estrutura, considerando-se o objeto de análise como uma estrutura contínua, segundo Iizuka (2002). Com relação aos Métodos Clássicos, ainda pode-se mencionar que: as soluções fechadas estão disponíveis apenas para problemas simples como flexão de vigas, torção de barras, entre outros; a solução aproximada utiliza expansão em séries das equações diferenciais para analisar estruturas como placas e cascas; e que são restritos a estruturas com geometria, carregamentos e condições de contorno simples, segundo MSC (2003).

De acordo com Alves Filho (2000) a maioria das estruturas de importância prática é muito complexa para ser analisada pelas técnicas clássicas. Para estruturas de forma arbitrária, a solução analítica frequentemente se torna difícil e o problema requer excessivas simplificações resultando em cálculos pouco acurados, dessa forma a solução é a utilização de Métodos Numéricos.

MSC (2003) comenta sobre os Métodos Numéricos:

- Método dos Elementos de Contorno: soluciona as equações diferenciais que governam o problema através da integração das mesmas no domínio do contorno ou seja, apenas o contorno da estrutura é discretizado;
- Método das Diferenças Finitas: substitui as equações diferenciais e condições de contorno que governam o problema por equações algébricas de diferenças finitas;
- Método dos Elementos Finitos (MEF): método capaz de solucionar problemas com geometria arbitrária, carregamentos e condições de contorno complexas.

O MEF é um método de aproximação numérica para investigação do comportamento de estruturas complexas e de meios contínuos baseando-se no conceito da discretização, onde a idéia é transformar um problema complexo na soma de diversos problemas simples. Torna-se necessário a busca por soluções locais cujas propriedades garantam a convergência para os problemas globais, segundo Bathe (1982) e Cook (1989).

Pinto Júnior (1999) menciona que o MEF envolve a divisão do domínio da solução em um número finito de subdomínios chamados de elementos finitos, os quais são conectados entre si através dos nós. O conjunto de nós e elementos é chamado de malha de elementos finitos.

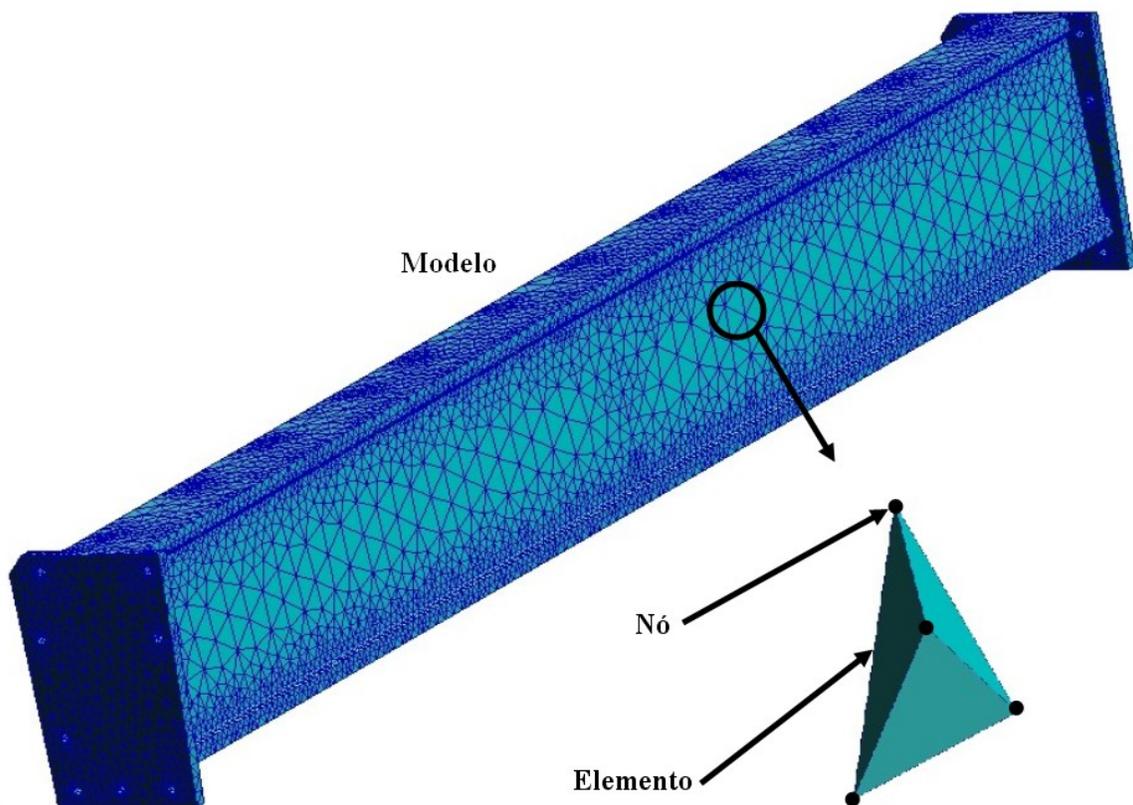


Figura 3.2 – Modelo de elementos finitos

“Os elementos finitos possuem formas geométricas relativamente simples para formulação e análise” (MSC, 2003, p.2-9), onde os três tipos básicos de elementos finitos são: elementos de viga (unidimensional), elementos de placa (bidimensional) e elementos sólidos (tridimensional):

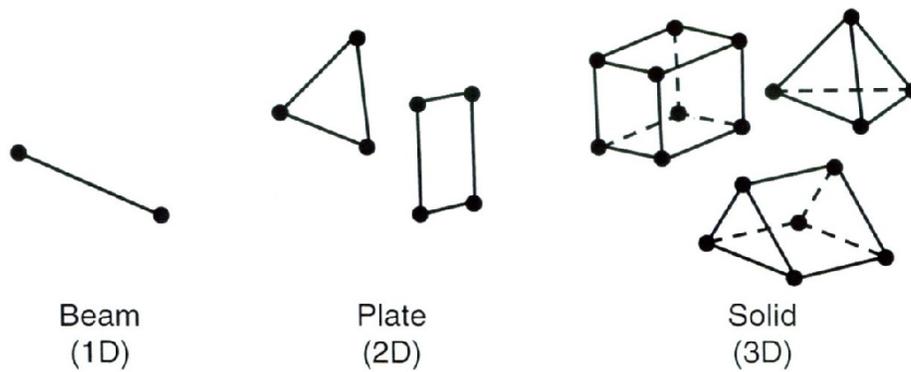


Figura 3.3 – Forma geométrica básica dos elementos finitos – MSC (2003)

- Elementos unidimensionais são empregados para modelagem de elementos estruturais longos e delgados, como por exemplo uma estrutura treliçada (Figura 3.4):

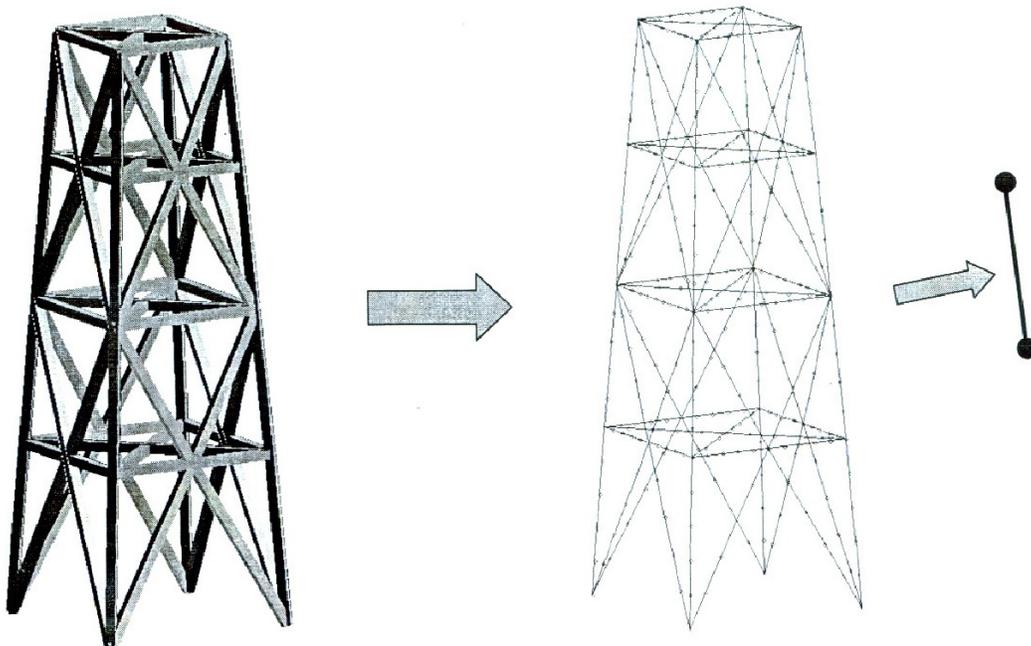


Figura 3.4 – Exemplo da modelagem estrutural com elementos unidimensional – MSC (2003)

- Elementos bidimensionais são empregados para modelagem de componentes estruturais onde a espessura é menor que a dimensão característica, como por exemplo a fuselagem de um avião (Figura 3.5):

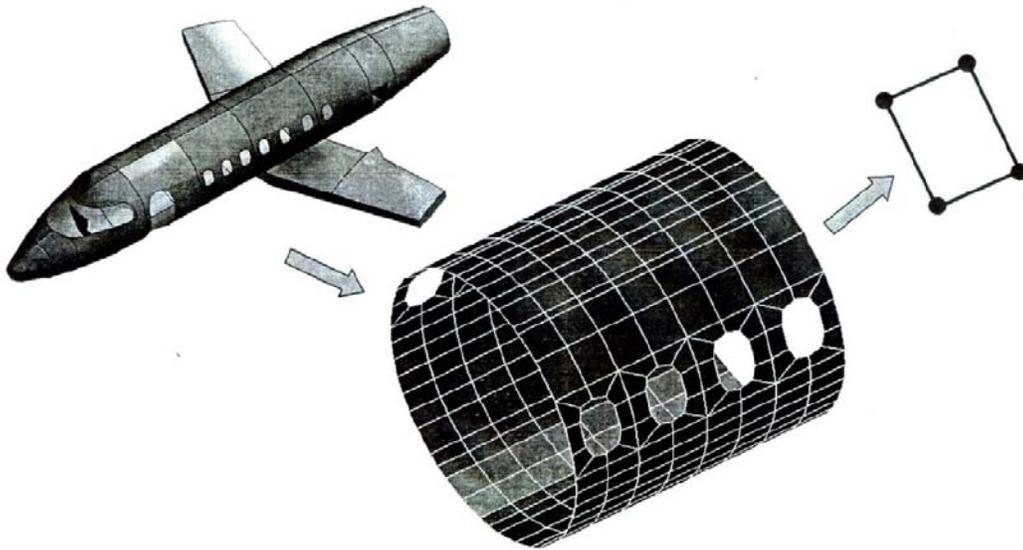


Figura 3.5 – Exemplo da modelagem estrutural com elementos bidimensional – MSC (2003)

- Elementos tridimensionais são empregados na modelagem de componentes onde não existe uma dimensão característica predominante, tais como o pistão de um motor (Figura 3.6):

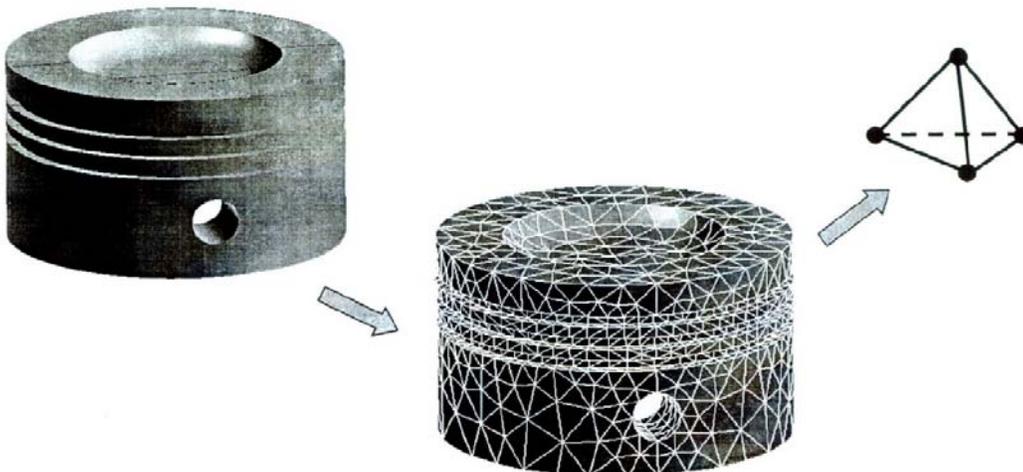


Figura 3.6 – Exemplo da modelagem estrutural com elementos tridimensional – MSC (2003)

Pavanello (1997) menciona que a utilização do MEF tem se destacado nas áreas onde a densidade tecnológica é alta, e Sánchez (2001) apresenta uma tabela reunindo algumas destas:

Tabela 3.1 – Principais áreas e características da aplicação do MEF

| Área de estudo | Problemas de equilíbrio | Problemas de autovalores | Problemas de propagação |
|--|---|---|--|
| Engenharia civil estrutural | Análise estática de estruturas civis. | - Frequências naturais e modos de vibrar. - Estabilidade de estruturas. | - Propagação de ondas de tensão. - Resposta de estruturas a cargas aperiódicas. |
| Estruturas aeronáuticas | - Análise estática de estruturas de aviões, foguetes, mísseis e espaçonaves. | - Frequências naturais e estabilidade de estruturas aeronáuticas. | - Resposta de estruturas de aviões a cargas aleatórias. - Resposta dinâmica de aviões e a cargas aperiódicas. |
| Condição de calor | - Estado de distribuição de temperatura em sólidos e fluídos | - | - Transientes de fluxo de calor em bocais de foguetes, motores de combustão interna, turbinas e estruturas de edifícios. |
| Geomecânica | - Análise de escavações, túneis, problemas de interação de estruturas e solos. - Análise de tensões em solos, pilares e fundações de máquina. | - Frequências naturais e modos de vibrar de sistemas de reservatórios e problemas de interação solo-estrutura. | - Transiente de problemas de interação solo-estrutura, solos e rochas. - Ondas de propagação de tensão em solos e rochas. |
| Engenharia hidráulica e de recursos hídricos | - Análise de potencial de fluxos, fluxos em superfícies livres, fluxos viscosos, problemas aerodinâmicos. - Análise de estruturas hidráulicas. | - Períodos naturais e modos de vibrar de lagos e portos. - Movimento de líquidos em reservatórios rígidos e flexíveis. | - Análises de problemas de propagação de ondas e fluxos instáveis de fluídos. - Transientes em meios porosos. - Dinâmica de gases rarefeitos. - Fluxo magneto-hidrodinâmicos. |

| | | | |
|----------------------|---|---|---|
| Engenharia nuclear | <ul style="list-style-type: none"> - Análise de níveis de pressão nuclear em estruturas de contenção. - Estado de distribuição de temperaturas em componentes de reatores. | <ul style="list-style-type: none"> - Frequências naturais e estabilidade de estruturas de concentração. - Distribuição do fluxo de nêutrons. | <ul style="list-style-type: none"> - Resposta de estruturas de contenção a cargas dinâmicas. - Transientes de distribuição de temperatura e análise viscoelástica e térmica de estrutura de reatores. |
| Engenharia biomédica | <ul style="list-style-type: none"> - Análise de tensão de ossos e dentes. - Capacidade de carga em implantes e sistemas protéticos. - Mecanismo das válvulas do coração. | - | <ul style="list-style-type: none"> - Análise de impactos em articulações. - Dinâmica de estruturas anatômicas. |
| Projeto Mecânico | <ul style="list-style-type: none"> - Problemas de concentração de tensões em estruturas mecânicas, dutos, pistões, materiais compósitos, acoplamentos, engrenagens, entre outros. | <ul style="list-style-type: none"> - Frequências naturais e estabilidade de estruturas, acoplamentos, engrenagens, máquinas ferramentas, entre outros. | <ul style="list-style-type: none"> - Problemas de quebras e fraturas sob cargas dinâmicas. |

3.1 Princípios básicos do MEF

MSC (2003) menciona que existem duas diferentes abordagens para o MEF: o Método dos Deslocamentos e o Método das Forças. Em ambos os métodos as relações de compatibilidade, equilíbrio e tensão-deformação são utilizados para gerar um sistema de equações algébricas que representam o comportamento da estrutura analisada. No Método dos Deslocamentos, os deslocamentos dos nós são as variáveis do sistema de equações; já no Método das Forças, as forças agindo sobre o elemento são desconhecidas. Somente o Método dos Deslocamentos será analisado neste trabalho uma vez que esta abordagem é largamente empregada na maioria dos *softwares* de análise estrutural.

O MEF é baseado no tratamento de sistemas discretos onde inúmeras equações algébricas são geradas a partir da condição de equilíbrio de cada elemento finito. O meio mais eficiente de armazenar, manipular e processar estas informações é por intermédio de matrizes. O princípio básico do tratamento de sistemas discretos através do MEF é dividido em três etapas: Pré-processamento, Solução (*Solver*) e Pós-Processamento.

3.1.1 Pré-processamento

O pré-processamento é a etapa onde se prepara o modelo a ser analisado ou seja, analisa-se o fenômeno escolhendo os elementos mais adequados e aplicando as propriedades dos materiais aos mesmos. Neste ponto também são feitas simplificações necessárias a permitir a análise, mas sem afetar na confiabilidade do estudo. Os passos inclusos nesta etapa são:

- Discretização do sistema: uma geometria qualquer é discretizada pela divisão do domínio em elementos finitos de formato simples, os quais são conectados pelos nós (Figura 3.7):

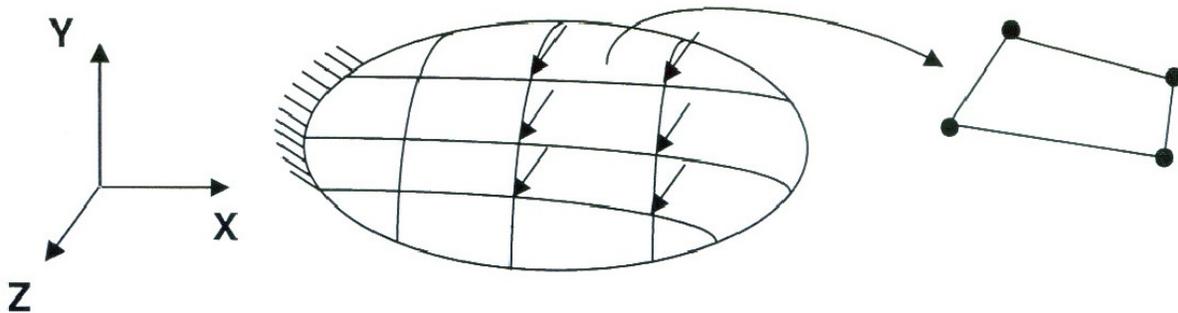


Figura 3.7 – Esquema da discretização de um sistema contínuo – MSC (2003)

- Graus de liberdade: cada nó é capaz de se movimentar em seis direções independentes (três translações – u , v e w – e três rotações – θ_x , θ_y e θ_z). Estes são chamados de Graus de Liberdade (DOF – *Degrees of Freedom*) de um nó (Figura 3.8):

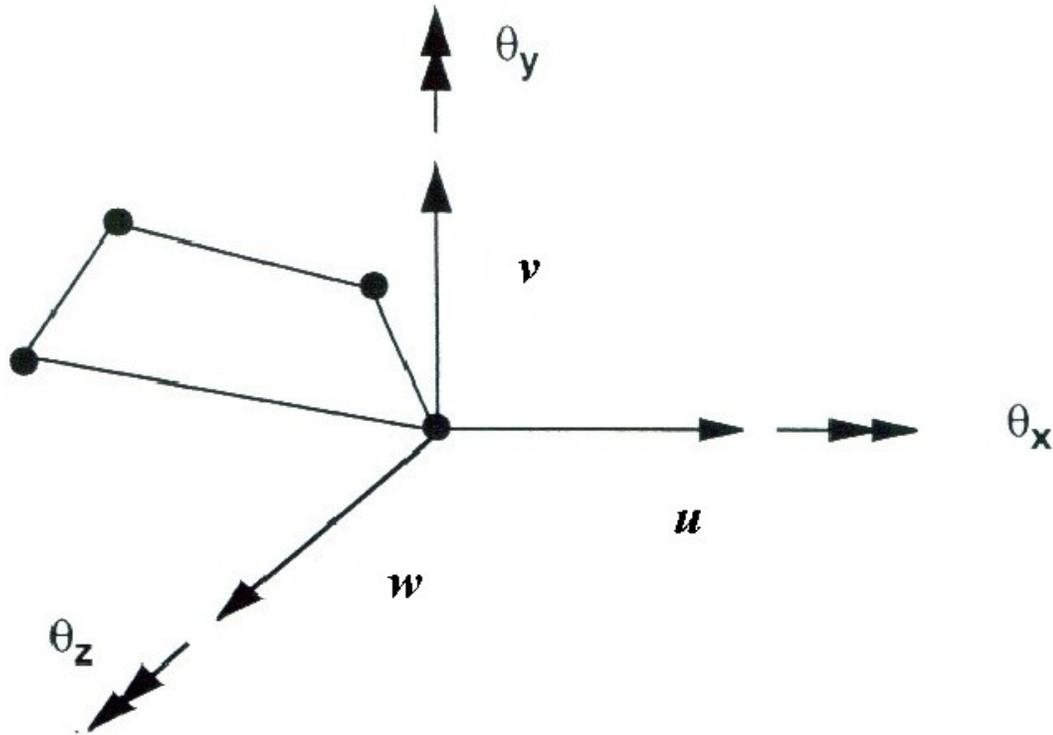


Figura 3.8 – Graus de liberdade de um nó – MSC (2003)

- Seleção das funções de interpolação ou funções de forma: de acordo com o tipo de elemento escolhido na discretização existem funções de interpolação que representam a distribuição dos deslocamentos no interior do elemento sendo que, em geral a forma adotada para as funções de interpolação é polinomial devido à simplicidade de manipulação matemática.

3.1.2 Solução

A solução é baseada em um algoritmo numérico que objetiva a resolução simultânea das diversas equações algébricas que representam o comportamento da estrutura analisada (modelo criado na etapa anterior), sob todas as condições impostas. Os passos inclusos nesta etapa são:

- Análise local: A relação entre um elemento e seus nós pode ser expressa através da equação (3.1):

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} \quad (3.1)$$

- A matriz de rigidez do elemento $[K^e]$ é definida pela geometria, material e propriedades do elemento;
- O vetor das forças nodais do elemento $\{f^e\}$ descreve as forças agindo sobre o elemento;
- O vetor dos deslocamentos nodais $\{u^e\}$ é desconhecido nesta equação e descreve os deslocamentos resultantes dos nós devido às forças aplicadas.

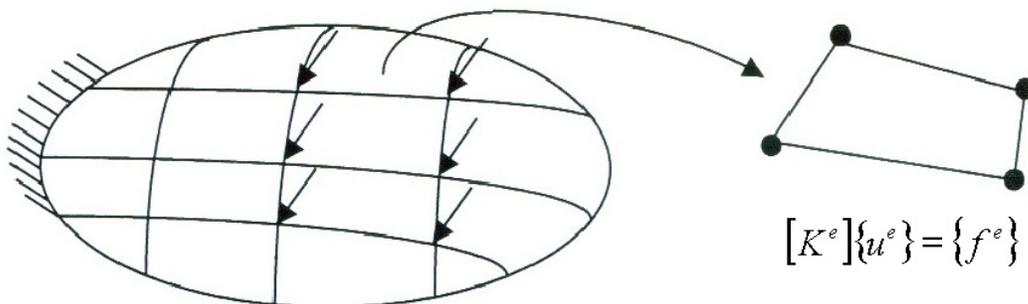


Figura 3.9 – Análise local do elemento finito – MSC (2003)

- Análise global: As matrizes de rigidez do elemento são reunidas formando a matriz de rigidez global do sistema, assim como o vetor de carregamentos que também formam o vetor de forças global. A base para montagem do sistema global é a exigência das interconexões nodais (os deslocamentos em um nó devem ser os mesmos para todos os elementos adjacentes). Como resultado obtém-se um sistema de equações matriciais que representam o comportamento da estrutura:

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (3.2)$$

onde: $[K]$ - Matriz de rigidez global;

$\{f\}$ - Vetor das forças nodais;

$\{u\}$ - Vetor dos deslocamentos nodais.

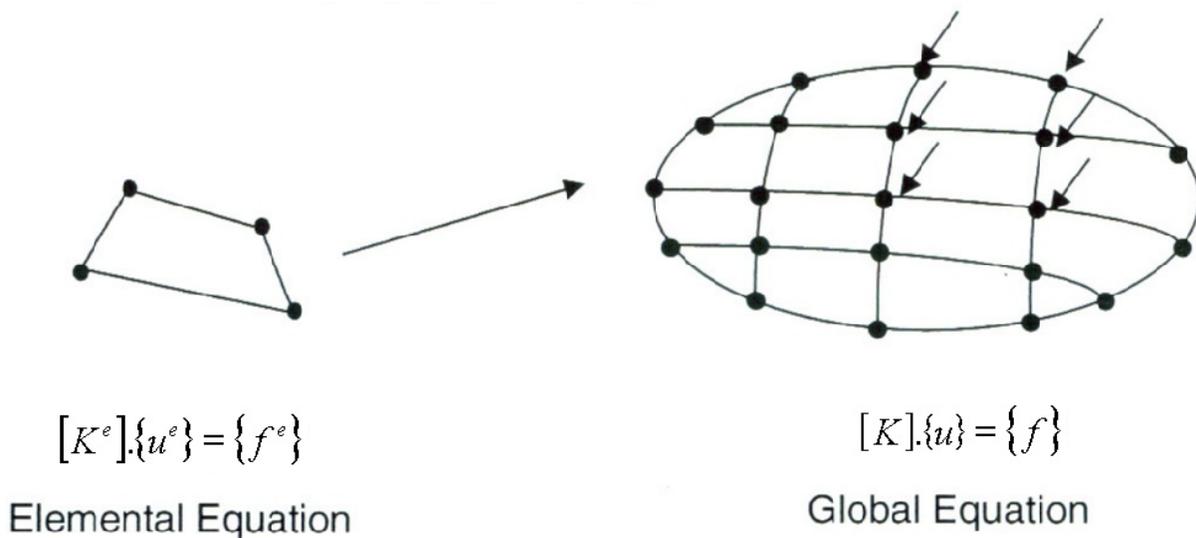


Figura 3.10 – Montagem do sistema global – MSC (2003)

- Condições de contorno: Restrições são aplicadas ao modelo para evitar a singularidade do sistema matricial, matematicamente isto significa a remoção de linhas e colunas correspondentes aos DOF nulos.

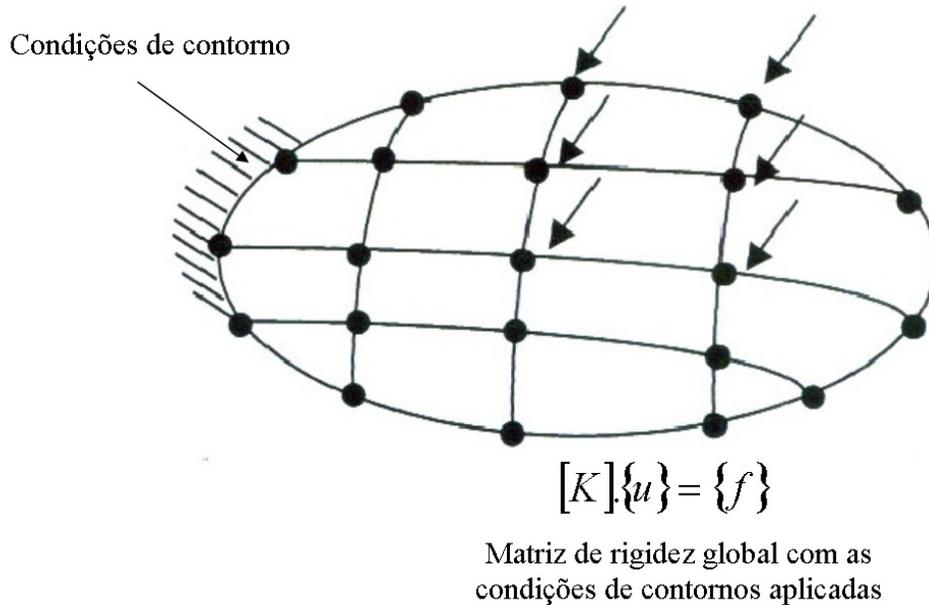


Figura 3.11 – Aplicação das condições de contorno ao modelo de elementos finitos – MSC (2003)

- Solução do sistema: O sistema matricial de equações é resolvido determinando-se assim os deslocamentos nodais, a partir destes é possível determinar a deformação e tensão nos elementos finitos.

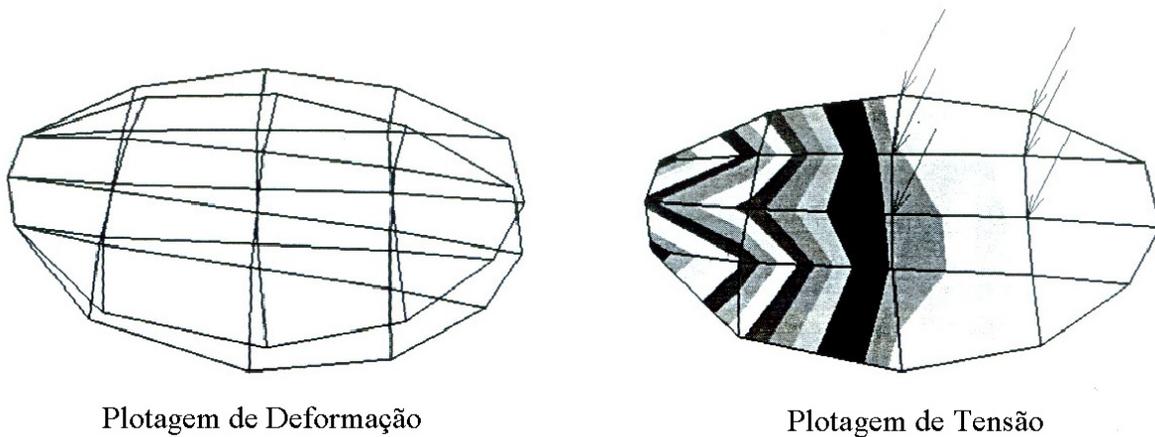


Figura 3.12 – Plotagem de tensão e deformação de um modelo arbitrário – MSC (2003)

3.1.3 Pós-processamento

A última etapa do MEF depende das necessidades e da análise do engenheiro responsável pelo estudo. Dados como: deslocamentos nodais, deformações da geometria, gradientes de tensão de acordo com o critério de resistência escolhido, gradientes de temperatura, deslocamentos nodais ao longo do tempo, frequências naturais e modos de vibrar da estrutura, acelerações, entre outros podem ser apresentados de diversas formas.

3.2 Considerações

Tanto Pavanello (1997) quanto MSC (2002) recomendam procedimentos similares para solução de um sistema discreto, os quais apresentados de forma simplificada na Figura (3.13):

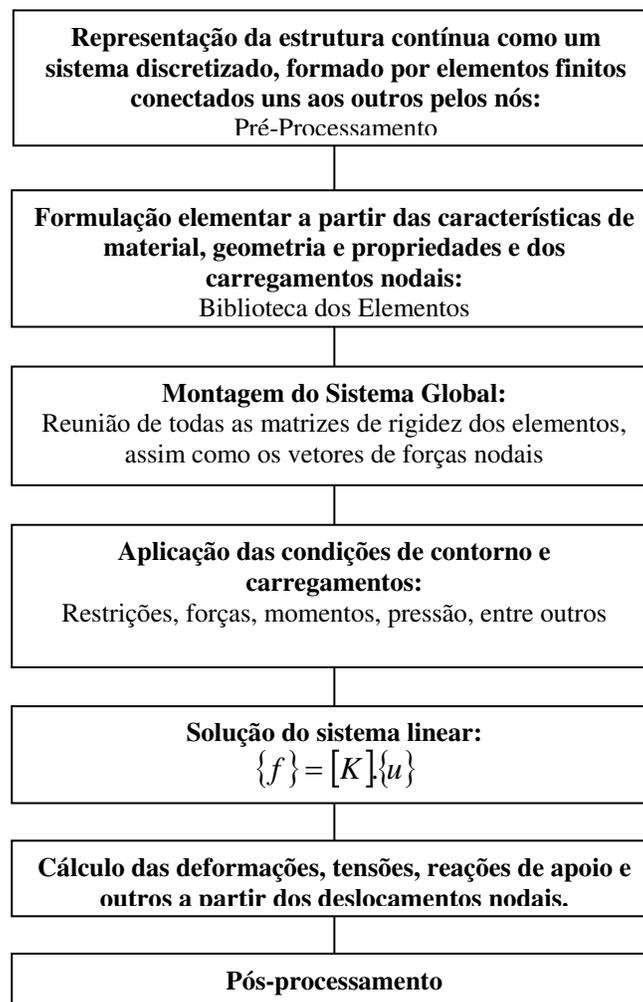


Figura 3.13 – Procedimento simplificado para solução de sistemas discretos

Uma das colocações de Pavanello (1997) menciona a necessidade de uma transformação dos eixos de referências durante a transição do vetor de deslocamentos elementar para a montagem do vetor de deslocamentos global: $\{u_{LOCAL}\} = [T]\{u_{GLOBAL}\}$, onde $[T]$ é uma matriz de transformação de coordenadas formada pelos co-senos diretores que relacionam os eixos locais do elemento com os eixos globais da estrutura.

Conforme verificado no Capítulo 2 deste trabalho, a maior parte estrutural da peneira vibratória é constituída por chapas ou seja, o modelo de elementos finitos é formado basicamente por elementos bidimensionais. Dessa forma decidiu-se criar um tutorial para obtenção da matriz de rigidez dos elementos triangular linear e retangular bilinear no estado plano de tensões. Este tutorial tem o intuito de gerar uma base teórica para a formulação de elementos mais complexos como placas e cascas.

3.3 Formulação do elemento triangular linear

Considerando a malha triangular de um domínio bidimensional qualquer Ω conforme ilustrado na Figura (3.14), pode-se isolar cada um dos elementos notando-se que o elemento triangular linear possui 6 DOF no total (2 translações por nó).

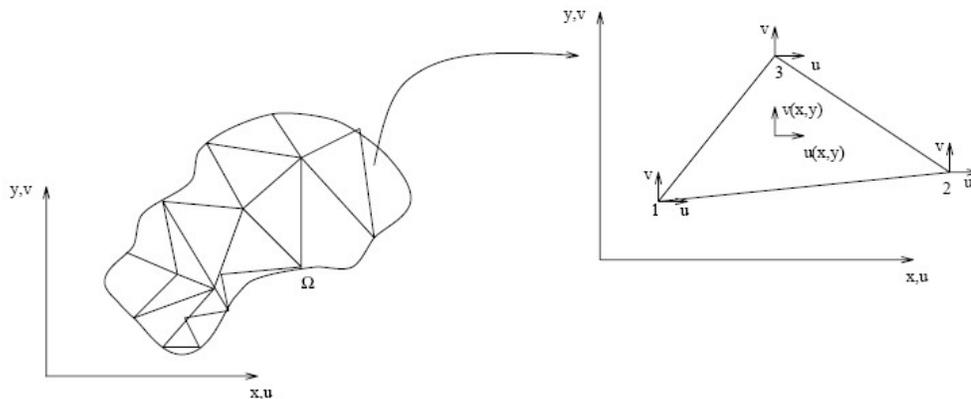


Figura 3.14 – Malha de elementos triangulares em um domínio qualquer – Pavanello (1997)

Na Figura 3.15 são apresentadas as coordenadas dos nós do elemento triangular, os deslocamentos nodais e as forças nodais:

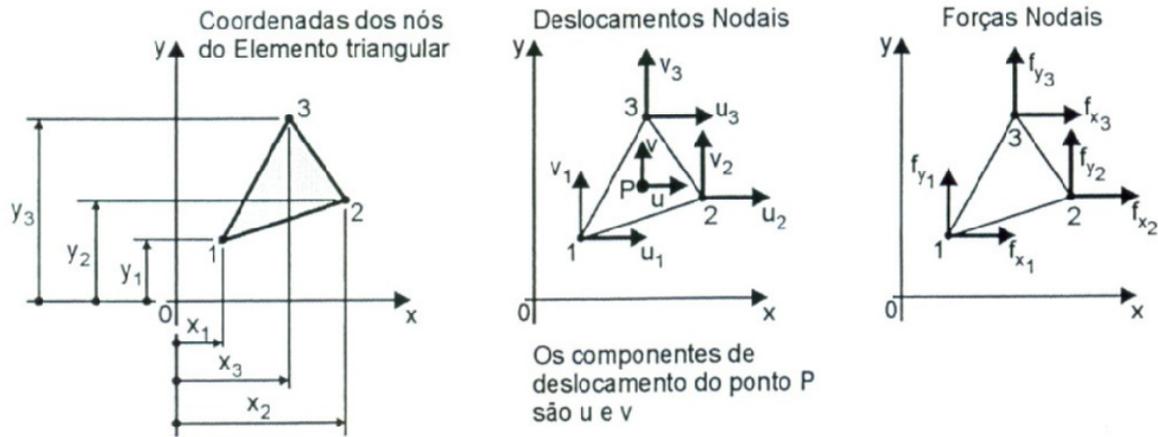


Figura 3.15 – Coordenadas, deslocamentos e forças nodais do elemento triangular linear – Alves Filho (2000)

Aplicando a equação (3.1) para o elemento triangular linear:

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\}, \text{ onde neste caso, } \{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \text{ e } \{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Para formulação da matriz de rigidez do elemento triangular linear é necessária a criação uma aproximação que possibilite a determinação dos deslocamentos de qualquer ponto interno ao elemento a partir dos deslocamentos nodais, esta é chamada de Aproximação de Base. Neste trabalho será apresentada somente a aproximação de base do tipo polinomial baseada no triângulo de Pascal (Figura 3.16).

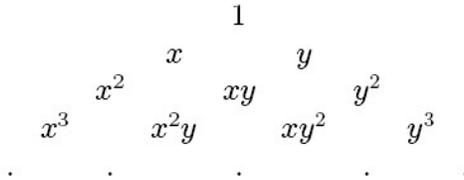


Figura 3.16 – Triângulo de Pascal – Pavanello (1997)

Sendo uma aproximação linear:

$$u(x, y) \approx C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y \quad (3.4)$$

$$v(x, y) \approx C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot y \quad (3.5)$$

Matricialmente:

$$\{u(x, y)\} \approx \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = [P(x, y)]^T \cdot \{C\} \quad (3.6)$$

Utilizando a aproximação linear para os deslocamentos nodais:

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = [P_n] \{C\} \quad (3.7)$$

$$\{C\} = [P_n]^{-1} \cdot \{u^e\} \quad (3.8)$$

A Aproximação Nodal é obtida expressando a forma matricial da Aproximação de Base em função das variáveis nodais ou seja, substituindo a equação (3.8) em (3.6):

$$\{u(x, y)\} = [P(x, y)]^T \cdot [P_n]^{-1} \cdot \{u^e\} = [N(x, y)] \{u^e\} \quad (3.9)$$

A matriz $[N(x, y)]$ é chamada de Função de Forma do Elemento Finito, uma vez que permite determinar os deslocamentos internos do elemento a partir dos deslocamentos nodais. Avelino (2000) ressalta que a inversão da matriz $[P_n]$ normalmente é feita com auxílio computacional. Uma metodologia de cálculo da área do elemento triangular (A_{123}) baseada no uso de coordenadas de área é apresentada no Anexo I deste trabalho.

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{2 \cdot A_{123}} \begin{bmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & 0 & -x_1 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 & 0 & x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & 0 & -x_1 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 & 0 & x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$2 \cdot A_{123} = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) \quad (3.11)$$

Assim, o modelo para interpolação no elemento fica definido da seguinte forma:

$$\{u(x, y)\} = [N(x, y)] \{u^e\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Retomando o Problema de Deslocamento apresentado no Anexo II deste trabalho, onde a equação diferencial que governa o problema no estado plano de tensões é determinada através do Método dos Resíduos Ponderados, tem-se:

$$[K^e] = \int_{\Omega} \{Op(N)\}^T \cdot [D] \cdot \{Op(N)\} d\Omega \quad (3.13)$$

e

$$[B] = Op\{N\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$[B] = \frac{1}{2 \cdot A_{123}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Assim, a matriz de rigidez elementar fica:

$$[K^e] = \int_{\Omega} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] d\Omega \quad (3.16)$$

As matrizes $[B]$ e $[D]$ contêm somente termos constantes e podem ser colocados fora da integral restando apenas $\int_{\Omega} d\Omega$. Para um elemento de espessura constante, a integral é igual à área do triângulo multiplicada pela espessura s :

$$[K^e] = [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot A_{123} \cdot s \quad (3.17)$$

Substituindo as equações (3.4) e (3.5) em (3.21), (3.22) e (3.23):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y] = C_2 \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot y] = C_6 \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y] + \frac{\partial}{\partial x} [C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot y] = C_3 + C_5 \quad (3.26)$$

O fato de a deformação ser constante em todos os pontos do elemento finito implica em uma séria limitação quanto à precisão do elemento triangular linear, isto decorreu da escolha de uma função de primeiro grau para representação dos deslocamentos (Aproximação de Base). A utilização de elementos com funções de interpolação de ordem superior gerará melhores resultados porém acarretarão em um maior tempo de processamento computacional.

Retomando as relações de deformação-deslocamento, porém na forma matricial:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = [G][C] \quad (3.27)$$

Substituindo (3.8) na equação (3.27):

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [G][P_n]^{-1} \cdot \{u^e\} \quad (3.28)$$

obtem-se a equação das deformações para qualquer ponto interno ao elemento por intermédio dos deslocamentos nodais.

3.3.2 Tensões no elemento triangular linear

A relação entre os diversos componentes de tensões e deformações para um ponto qualquer do elemento sob estado plano de tensões é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

ou

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(x, y)\} \quad (3.30)$$

Substituindo a equação (3.28) na equação (3.30):

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][G][P_n]^{-1} \cdot \{u^e\} \quad (3.31)$$

obtém-se a equação das tensões para qualquer ponto interno ao elemento por intermédio dos deslocamentos nodais.

3.4 Formulação do elemento retangular bilinear

Considerando a malha retangular de um domínio qualquer bidimensional, conforme ilustrado na Figura (3.17), pode-se isolar cada um dos elementos notando-se que o elemento retangular bilinear possui 8 DOF no total (2 translações por nó).

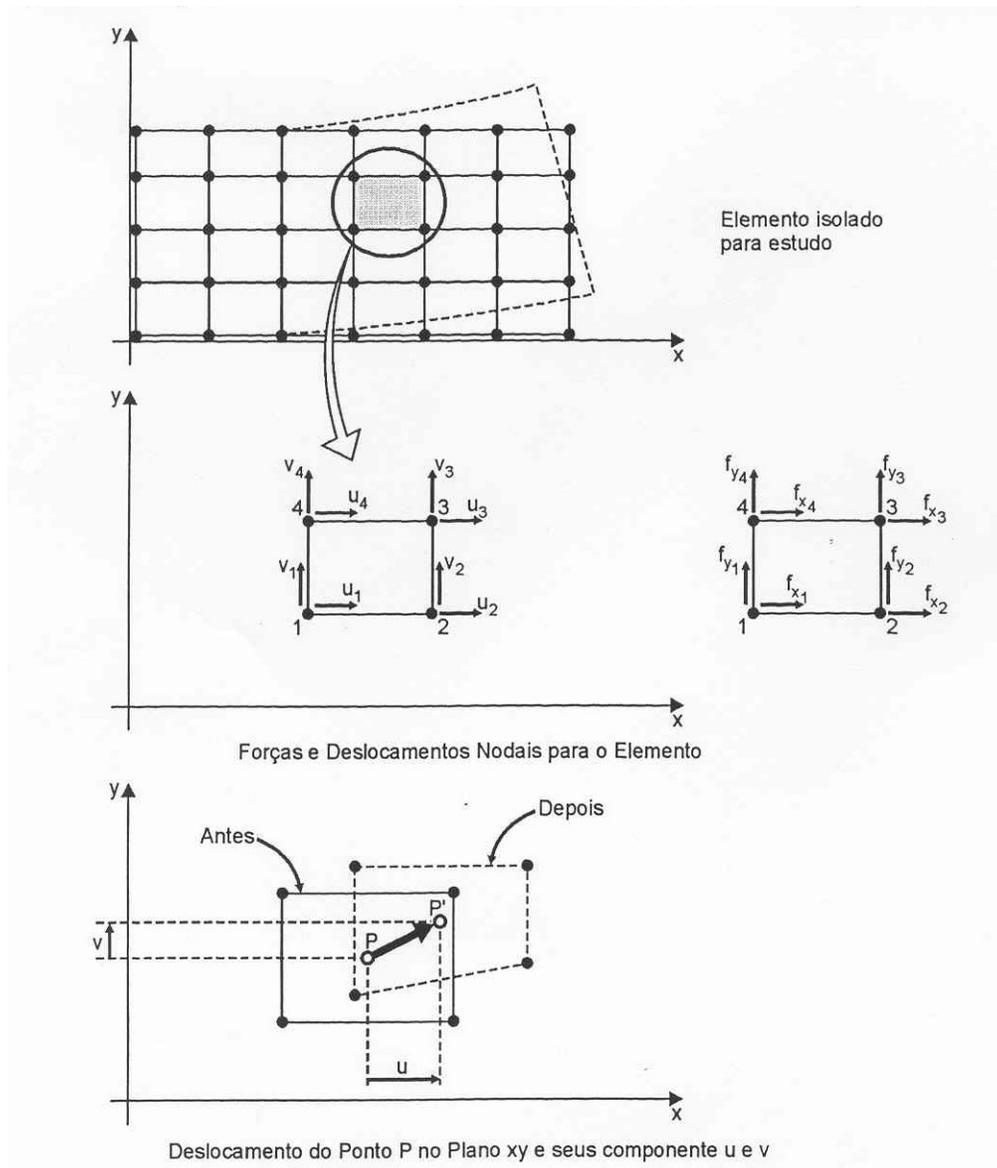


Figura 3.17 - Elemento de estado plano de tensões retangular linear – Alves Filho (2000)

Na Figura (3.18) são apresentados os deslocamentos nodais $\{u^e\}$, as forças nodais $\{f^e\}$ e as dimensões “a”, “b” e “t”:

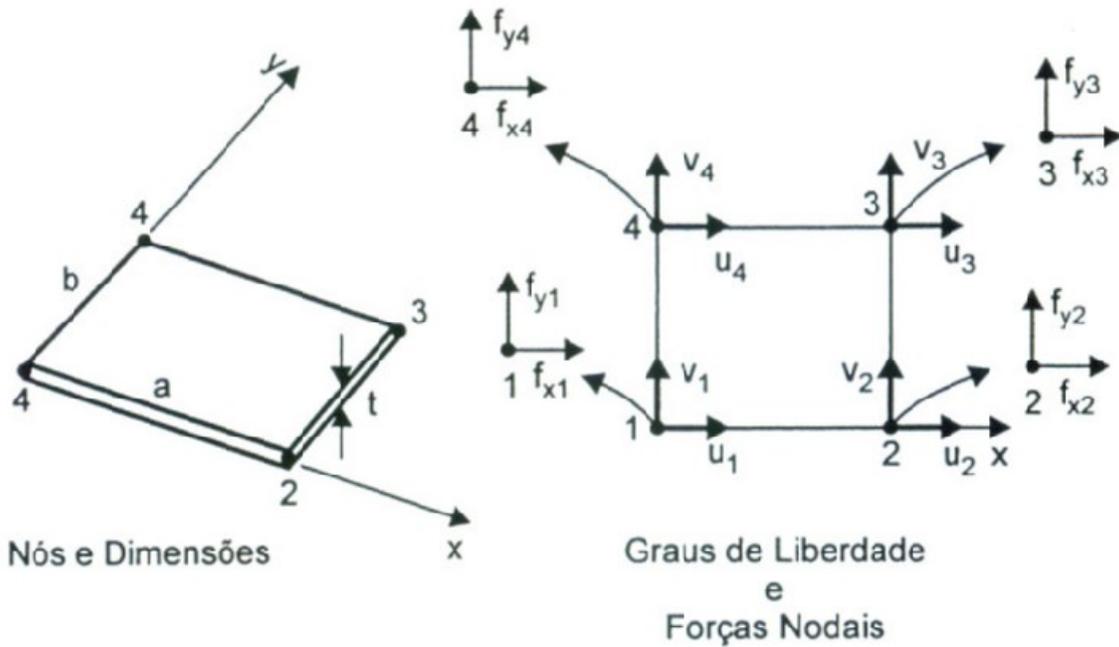


Figura 3.18 – Forças e deslocamentos nodais para o elemento retangular bilinear – Alves Filho (2000)

A determinação da matriz de rigidez do elemento retangular bilinear segue um procedimento similar ao adotado para o elemento triangular linear no estado plano de tensões:

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\}, \text{ onde neste caso, } \{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \text{ e } \{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Criando uma aproximação bilinear baseada no triângulo de Pascal (Figura 3.16) para a determinação dos deslocamentos de qualquer ponto interno ao elemento ($u(x, y)$ e $v(x, y)$) a partir dos deslocamentos nodais,:

$$u(x, y) \approx C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y \quad (3.33)$$

$$v(x, y) \approx C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y \quad (3.34)$$

Matricialmente:

$$\{u(x, y)\} \approx \begin{bmatrix} 1 & x & y & x \cdot y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x \cdot y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = [P(x, y)]^T \cdot \{C\} \quad (3.35)$$

Realizando a Aproximação Nodal:

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & a \cdot b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & a \cdot b \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = [P_n] \cdot \{C\} \quad (3.36)$$

Evidenciando $\{C\}$:

$$\{C\} = [P_n]^{-1} \cdot \{u^e\}$$

$$\{C\} = \frac{1}{a.b} \begin{bmatrix} a.b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a.b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \{u^e\} \quad (3.37)$$

Relacionando os deslocamentos dentro do elemento aos deslocamentos nodais ou seja, substituindo (3.37) em (3.35):

$$\{u(x, y)\} = [P(x, y)]^T \cdot [P_n]^{-1} \cdot \{u^e\} = [N(x, y)] \cdot \{u^e\} \quad (3.38)$$

Assim, a interpolação no elemento fica:

$$\{u(x, y)\} = [N(x, y)] \cdot \{u^e\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \left. \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

A Matriz Deslocamento-Deformação $[B]$ de operadores diferenciais dos polinômios bilineares é determinada por:

$$[k^e] = \frac{Et}{24.(1+\nu)} \begin{bmatrix} 4.\alpha & & & & & & & & \\ 3 & \frac{4}{\alpha} & & & & & & & \\ 2.\alpha & \frac{\alpha}{3} & 4.\alpha & & & & & & \\ -3 & -\frac{4}{\alpha} & -3 & \frac{4}{\alpha} & & & & & \\ -2.\alpha & -3 & -4.\alpha & 3 & 4.\alpha & & & & \\ -3 & -\frac{2}{\alpha} & -3 & \frac{2}{\alpha} & 3 & \frac{4}{\alpha} & & & \\ -4.\alpha & -3 & -2.\alpha & 3 & 2.\alpha & 3 & 4.\alpha & & \\ 3 & \frac{2}{\alpha} & 3 & -\frac{2}{\alpha} & -3 & -\frac{4}{\alpha} & -3 & \frac{4}{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{Simétrico} \quad (3.43)$$

sendo $\alpha = \frac{a}{b}$

Caso haja necessidade de transformação de coordenadas:

$$[K^e] = [T]^T . [k^e] . [T] \quad (3.44)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \kappa & \sin \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \kappa & \sin \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \kappa & \sin \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

onde $[K^e]$: Matriz de rigidez elementar no sistema global;

$[k^e]$: Matriz de rigidez elementar no sistema local;

$[T]$: Matriz de transformação;

κ : Ângulo formado entre o sistema de coordenadas local e global.

3.4.1 Deformações no elemento retangular bilinear

Utilizando as relações de deformação-deslocamento expressas pela Lei de Hooke generalizada no estado plano de tensões:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y] = C_2 + C_4 \cdot y \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y] = C_7 + C_8 \cdot x \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_4 \cdot x + C_6 + C_8 \cdot y \quad (3.48)$$

Diferente do elemento triangular linear que apresenta algumas limitações relacionadas ao cálculo das deformações e, conseqüentemente das tensões, o elemento retangular bilinear representa as deformações com uma aproximação mais precisa. Porém o mesmo é muito rígido e não consegue representar curvaturas do elemento deformado devido à sua aproximação de primeiro grau. Retomando a equação de deformações na forma matricial:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = [G][C] \quad (3.49)$$

Substituindo (3.37) na equação (3.49):

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [G][P_n]^{-1} \cdot \{u^e\} \quad (3.50)$$

obtém-se a equação das deformações para qualquer ponto interno ao elemento por intermédio dos deslocamentos nodais.

3.4.2 Tensões no elemento retangular bilinear

Retomando a relação entre os diversos componentes de tensões e deformações para um ponto qualquer do elemento sob estado plano de tensões $\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\varepsilon(x, y)\}$ e substituindo a equação (3.50) na equação (3.30):

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][G][P_n]^{-1} \cdot \{u^e\} \quad (3.51)$$

obtém-se a equação das tensões para qualquer ponto interno ao elemento por intermédio dos deslocamentos nodais.

3.5 Introdução à análise dinâmica

Existem dois aspectos básicos que diferem a análise dinâmica da análise estática: o primeiro é que os carregamentos aplicados são funções do tempo; e o segundo é que este carregamento dinâmico implica em respostas que variam com o tempo (deslocamentos, velocidades, acelerações, forças e tensões). Estas características fazem com que a análise dinâmica seja mais complexa e mais realista que a análise estática, segundo MSC (1997).

Segundo Bathe (1982) e MSC (2001), para a solução de sistemas dinâmicos de múltiplos DOF utiliza-se a equação do movimento:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (3.52)$$

A solução da equação do movimento pode-se tornar difícil sendo necessário a utilização de integração numérica, a qual será brevemente comentada nos próximos subitens.

MSC (1997) comenta a importância de definir os objetivos da análise antes da formulação do modelo de elementos finitos. O tipo de carregamento dinâmico aplicado (ou ambiente dinâmico) governa a escolha da solução requisitada: análise modal numérica, resposta no domínio do tempo, resposta no domínio da frequência, entre outros. O ambiente dinâmico também indica o comportamento dominante a ser simulado como por exemplo: problemas de contato, grandes deslocamentos, etc. A interpretação correta do ambiente dinâmico resulta em um modelo de elementos finitos mais refinado e confiável.

Normalmente após a compreensão do ambiente dinâmico e modelagem deve-se realizar uma análise modal numérica para determinação das frequências naturais e modos de vibrar. Este passo é essencial para evitar que a frequência de operação do equipamento seja próximo às suas frequências naturais uma vez que isto levaria à uma quebra prematura. Finalmente as cargas dinâmicas são aplicadas ao modelo com o intuito de determinar a resposta à excitação forçada da estrutura e assim verificar a necessidade de modificações no projeto. Estes passos criam um processo iterativo de análise dinâmica como pode ser visto no fluxograma da Figura (3.19):

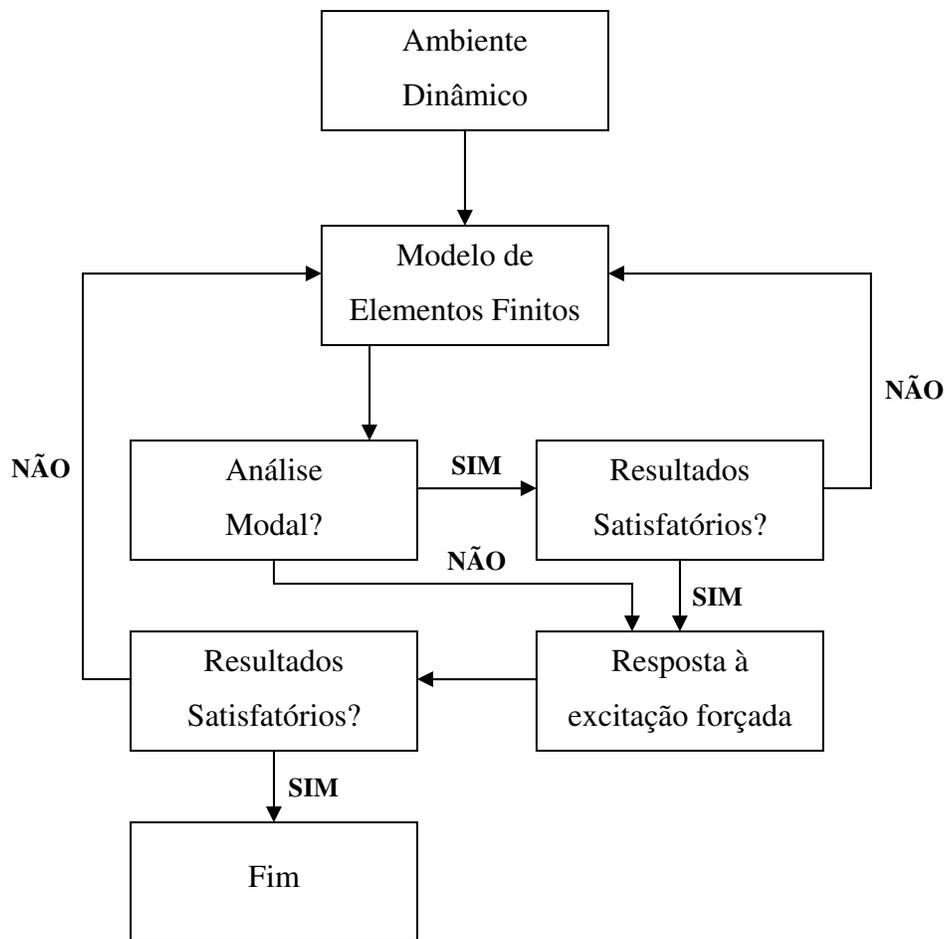


Figura 3.19 – Processo iterativo da análise dinâmica

Em suma, os principais passos para realizar uma análise dinâmica são:

1. Definir o ambiente dinâmico (carregamentos);
2. Formular o modelo de elementos finitos adequadamente;
3. Selecionar e aplicar as análises numéricas corretas para determinação do comportamento da estrutura;
4. Analisar os resultados.

3.5.1 Tipos de análises dinâmicas

Para a simulação numérica das peneiras vibratórias foi empregado o método dos elementos finitos através da ferramenta MSC.NASTRAN, a qual será apresentada posteriormente. Neste pacote comercial existem três tipos básicos de análise dinâmica:

- Análise modal numérica (vibração livre não-amortecida);
- Análise de resposta em frequência linear (resposta no domínio da frequência);
- Resposta transiente linear (resposta no domínio do tempo).

A análise modal numérica é utilizada para determinar as características dinâmicas básicas de uma estrutura, onde o estudo deste problema de autovalor resulta nas frequências naturais e modos de vibrar. Embora o resultado deste problema não seja dependente do carregamento aplicado, a análise modal pode pré-determinar o comportamento dinâmico da estrutura sob diversos tipos de carregamentos dinâmicos, segundo MSC (1997).

A análise transiente é utilizada para determinação do comportamento dinâmico da estrutura sob um carregamento que varia com o tempo e é, geralmente utilizada para estruturas que possuem um comportamento linear elástico.

A análise de resposta em frequência é um método eficiente para determinar a resposta em regime permanente da estrutura sob uma excitação senoidal. Neste tipo de análise o carregamento é um sinal no qual a amplitude, frequência e fase são especificadas. A resposta em frequência está restrita a estruturas com comportamento linear elástico.

Para a análise de peneiras vibratórias fica evidente a necessidade de dois tipos de análises:

- Análise modal, para evitar que a peneira opere próxima a frequências naturais;
- Análise de resposta em frequência, uma vez que existe uma necessidade da determinação da resposta dinâmica do equipamento em regime de operação e, como mencionado no Capítulo 2 deste trabalho, o carregamento gerado pelos excitadores possui a forma de uma onda senoidal.

3.5.2 Análise modal numérica

A solução da equação do movimento para determinação das frequências naturais e dos modos de vibrar requer uma redução da equação (3.52) desconsiderando a existência de amortecimento e de carregamentos aplicados:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (3.53)$$

Assumindo que a solução do sistema possui um formato harmônico:

$$\{u\} = \{\phi\}.e^{\omega.t} \quad (3.54)$$

Derivando a equação (3.54) e substituindo na (3.53):

$$-\omega^2.[M]\{\phi\}.e^{\omega.t} + [K]\{\phi\}.e^{\omega.t} = 0 \quad (3.55)$$

$$([K] - \omega^2.[M])\{\phi\}.e^{\omega.t} = 0 \quad (3.56)$$

Segundo Dias Jr. (2033), $e^{\omega.t} \neq 0 \quad \forall \omega, t$:

$$([K] - \omega^2.[M])\{\phi\} = 0 \quad (3.57)$$

Ainda segundo Dias (2003), $\{\phi\} = 0$ indica a ausência de movimento (solução trivial), então é necessário que a inversa da matriz $([K] - \omega^2 \cdot [M])$ não exista:

$$\det([K] - \omega^2 \cdot [M]) = 0 \quad (3.58)$$

MSC (1997) indica o Método Numérico de Lanczos para resolução de problemas de autovalores devido à sua precisão e confiabilidade na análise de modelos com múltiplos graus de liberdade. Baseado em Hughes (1987) e Hzu (2003), o algoritmo básico para o Método de Lanczos é apresentado na Figura 3.20:

1. Definir:
 - a. $\{q_0\} = 0$ e um vetor inicial $\{r_0\}$ gerado aleatoriamente;
 - b. $\beta_1 = \sqrt{\{r_0\}^T [M] \{r_0\}}$;
 - c. $\{q_1\} = \frac{\{r_0\}}{\beta_1}$;
 - d. $\{p_1\} = [M] \{q_1\}$;
2. Loop para $j = 1, 2, 3, \dots$
 - a. $\{\bar{r}_j\} = [K]^{-1} \{p_j\}$;
 - b. $\{\hat{r}_j\} = \{\bar{r}_j\} - \{q_{j-1}\} \beta_j$;
 - c. $\alpha_j = \{q_j\}^T [M] \{\hat{r}_j\}$;
 - d. $\{r_j\} = \{\hat{r}_j\} - \{q_j\} \alpha_j$;
 - e. $\{\bar{p}_j\} = [M] \{r_j\}$;
 - f. $\beta_{j+1} = \sqrt{\{\bar{p}_j\}^T [M] \{\bar{p}_j\}}$;
 - g. Finalizar o loop quando forem calculados vetores suficientes ($\beta_{j+1} \approx 0$);
 - h. $\{q_{j+1}\} = \frac{\{\bar{p}_j\}}{\beta_{j+1}}$;
 - i. $\{p_{j+1}\} = \frac{\{\bar{p}_j\}}{\beta_{j+1}}$;
3. Definir $[T_j] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & & \\ & & \beta_4 & \alpha_4 & \dots & & \\ & & & \dots & \dots & \beta_j & \\ & & & & & \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$

Figura 3.20 – Algoritmo de Lanczos

Os autovalores da matriz triangular $[T_j]$ são chamados de Valores de Ritz, e alguns destes são boas aproximações dos autovalores de (3.58).

3.5.3 Análise linear de resposta em frequência

Matematicamente, a equação (3.52) representa um sistema de equações lineares de segunda ordem e em princípio a solução para tais equações pode ser obtida através de procedimentos padrões de solução de equações diferenciais, segundo Bathe (1982). Contudo, a solução do sistema pode se tornar difícil se a ordem das matrizes for muito grande (múltiplos graus de liberdade), necessitando do auxílio de procedimentos alternativos para solução de equações que, de acordo com Sánchez (2001), podem ser divididos em dois grupos: métodos de integração direta no tempo e métodos de superposição de modos (superposição modal).

MSC (1997) apresenta uma tabela comparativa entre o método de integração direta e o método de superposição modal para a análise linear de resposta em frequência:

Tabela 3.2 – Comparação entre métodos de integração direta e superposição modal

| | Superposição Modal | Método Direto |
|---------------------------------|---------------------------|----------------------|
| Modelos pequenos | | X |
| Modelos grandes | X | |
| Poucas frequências de excitação | | X |
| Muitas frequências de excitação | X | |
| Frequências de excitação altas | | X |
| Amortecimento não modal | | X |

Como peneiras vibratórias requerem grandes modelos de elementos finitos (em geral são mais de 1 000 000 de graus de liberdade) com varredura de frequências desde o repouso até a frequência de operação (em geral abaixo de 20 Hz), decidiu-se pelo Método de Superposição Modal.

O método de superposição modal utiliza os modos de vibrar da estrutura para reduzir a ordem do problema, desacoplar as equações de movimento e fazer com que a solução numérica seja mais eficiente.

O primeiro passo da análise consiste em transformar as coordenadas físicas do problema $\{u(\omega)\}$ em coordenadas modais $\{\xi(\omega)\}$ através do emprego da matriz formada pelos modos de vibrar da estrutura $[\phi]$:

$$\{u(\omega)\} = [\phi] \{\xi(\omega)\} e^{i.\omega.t} \quad (3.59)$$

Lembrando que no caso da análise de resposta em frequência a excitação é harmônica, definindo a solução proposta como sendo uma harmônica de frequência idêntica à da excitação, ignorando o amortecimento e retomando a equação do movimento (3.52):

$$-\omega^2.[M]\{\ddot{u}(\omega)\} + [K]\{u(\omega)\} = \{f(\omega)\} \quad (3.60)$$

Substituindo a equação (3.59) na equação (3.60), sabendo-se que $e^{i.\omega.t} \neq 0 \quad \forall \omega, t$:

$$-\omega^2.[M][\phi]\{\xi(\omega)\} + [K][\phi]\{\xi(\omega)\} = \{f(\omega)\} \quad (3.61)$$

Para desacoplar as equações basta multiplicá-las por $[\phi]^T$:

$$-\omega^2.[\phi]^T.[M][\phi]\{\xi(\omega)\} + [\phi]^T.[K][\phi]\{\xi(\omega)\} = [\phi]^T.\{f(\omega)\} \quad (3.62)$$

onde: $[\phi]^T.[M][\phi]$ - Matriz modal de massa;

$[\phi]^T.[K][\phi]$ - Matriz modal de rigidez;

$[\phi]^T.\{F(\omega)\}$ - Matriz modal de forças.

A propriedade de ortogonalidade dos modos de vibrar garante que cada modo é distinto do outro ou seja, cada modo de vibrar é único e não pode ser obtido através da combinação linear dos outros. A etapa final da análise é baseada nesta propriedade de ortogonalidade dos modos de vibrar para formular a equação do movimento em função das matrizes modais de massa e rigidez, as quais são diagonais. Uma vez que as equações são desacopladas (matrizes diagonais), as equações do movimento podem ser escritas como um sistema de equações de 1 DOF:

$$-\omega^2 \cdot m_i \cdot \xi_i(\omega) + k_i \cdot \xi_i(\omega) = f_i(\omega) \quad (3.63)$$

onde: m_i - i-ésima massa modal;

k_i - i-ésima rigidez modal;

$f_i(\omega)$ - i-ésima força modal.

Uma vez calculada as respostas modais individuais $\xi_i(\omega)$, as respostas físicas podem ser recuperadas através de:

$$\{u(\omega)\} = [\phi] \{\xi(\omega)\} e^{i\omega t} \quad (3.64)$$

3.5.4 Amortecimento na análise de resposta em frequência

Segundo MSC (1997) se a matriz de amortecimento $[C]$ existe, a propriedade de ortogonalidade da matriz dos modos não existe; e se um amortecimento estrutural é utilizado então não é possível diagonalizar a matriz de rigidez $[K]$. Em ambos os casos é necessário resolver um sistema acoplado do tipo:

$$\{-\omega^2 \cdot [\phi]^T \cdot [M] \cdot [\phi] + i\omega \cdot [\phi]^T \cdot [C] \cdot [\phi] + [\phi]^T \cdot [K] \cdot [\phi]\} \{\xi(\omega)\} = [\phi]^T \cdot \{f(\omega)\} \quad (3.65)$$

Porém se o amortecimento for aplicado para cada modo separadamente, então as equações de movimento podem ser desacopladas. Quando o amortecimento modal é utilizado, cada modo possui seu próprio amortecimento $c_i = 2.m_i.\omega_i.\xi_i$, então:

$$-\omega^2.m_i.\xi_i(\omega) + i.\omega.c_i.\xi_i(\omega) + k_i.\xi_i(\omega) = f_i(\omega) \quad (3.66)$$

E cada resposta modal é calculada através de:

$$\xi_i(\omega) = \frac{f_i(\omega)}{-\omega^2.m_i + i.\omega.c_i + k_i} \quad (3.67)$$

Novamente, as respostas modais individuais $\xi_i(\omega)$ são calculadas, e as respostas físicas podem ser recuperadas através de:

$$\{u(\omega)\} = [\phi]\{\xi(\omega)\}.e^{i.\omega.t} \quad (3.68)$$

Capítulo 4

Técnicas de Medições Extensométricas

A análise extensométrica tem como principal objetivo a determinação experimental do estado de deformações em qualquer ponto da estrutura analisada. É possível que os valores de tensões, deslocamentos e acelerações encontrados na simulação numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos diferem dos valores reais das grandezas citadas assim, análises experimentais são necessárias para que o modelo de Elementos Finitos seja otimizado de forma a minimizar esta diferença.

Entre as principais técnicas de medições extensométricas estão aquelas que utilizam os seguintes transdutores:

Extensômetro mecânico: técnica que utiliza a proporcionalidade da medida entre dois pontos antes e depois da solicitação da estrutura. Como os deslocamentos são pequenos, dispositivos ópticos são necessários para a obtenção das medidas. Segundo Hoffmann (1989), a extensometria mecânica tem como base a proporção entre deslocamentos absolutos da estrutura, e não a proporção de uma deformação relativa, assim os equipamentos utilizados neste tipo de medição não devem ser considerados extensômetros.

Extensômetro ótico: nesta técnica a deformação da estrutura pode ser obtida através das análises de franjas de Moiré, Holografia e Fotoelasticidade.

Albertazzi Jr. e Pezzotta (2003) e Coelho e Tavares (2002) mencionam que na análise de franjas de Moiré, a configuração da estrutura deformada pode ser obtida através da superposição e comparação de dois reticulados formados por um conjunto de linhas extremamente finas, paralelas e igualmente espaçados. Um reticulado fica ligado à peça deformada e é comparado a outro reticulado não deformado, conseqüentemente as linhas projetadas aparecem distorcidas em função da deformação da estrutura.

Figueiredo e Almeida (2002) menciona que na técnica por Holografia, a fase de uma vibração luminosa é medida e comparada com outra usada como referência.

Na Fotoelasticidade, o extensômetro é formado por uma faixa composta de material ótico que gera um campo isocromático quando solicitado. O extensômetro é fixado à estrutura de forma que as linhas isocromáticas correspondem à medida de deformação da mesma. Hoffmann (1989) menciona que esta técnica não possui significância prática e, portanto este tipo de extensômetro não é mais comercializado.

Extensômetro semicondutor: seu princípio de funcionamento é baseado no efeito piezoresistivo, similar ao princípio dos extensômetros metálicos que serão analisados com mais detalhes no próximo item deste capítulo. Esta técnica é indicada para realizar medições de deformações muito pequenas.

Extensômetros de filme fino: neste tipo de medição os extensômetros também possuem características piezoresistivas e são obtidos por técnicas de deposição de vapor de ligas metálicas diretamente na estrutura. A aplicação deste tipo de extensômetros é limitada ao processo de fabricação do mesmo.

Extensômetros capacitivos: esta é uma técnica recentemente desenvolvida para servir como uma alternativa aos extensômetros convencionais (extensômetros metálicos) em medições de estruturas submetidas à alta temperatura. Estes extensômetros geram boas medições em temperaturas de até 500 °C.

Extensômetros piezoelétricos: similar aos transdutores piezoelétricos que utilizam o quartzo como material ativo, os extensômetros piezoelétricos utilizam uma liga de bário e titânio para gerar uma mudança de potencial a qual é proporcional à deformação da estrutura analisada.

Camadas frágeis: nesta técnica uma camada frágil é aplicada à superfície da estrutura, que quando solicitada criará finas fraturas nas regiões críticas. As direções das fraturas são perpendiculares à direção das tensões principais. A aplicação desta técnica não objetiva a obtenção dos valores das tensões, mas sim determinar as regiões críticas.

Extensômetro metálicos (*strain gages*): a técnica que utiliza este tipo de extensômetro é denominada extensometria elétrica e é baseada na variação da resistência elétrica dos metais quando solicitados mecanicamente. Nas medições realizadas com extensômetros metálicos é obtido o estado da deformação de um ponto pertencente à estrutura analisada, e através deste dado pode-se determinar o estado de deformação e de tensão de qualquer plano que passa por este ponto. Em seguida, esta técnica será analisada de uma forma mais detalhada uma vez que a mesma foi utilizada nas medições de deformações (tensões) das peneiras vibratórias.

4.1 Extensometria elétrica: princípio de funcionamento

Willian Thompson (Lord Kelvin após 1892) publicou trabalhos em 1856 relatando a variação da resistência elétrica de fios metálicos energizados quando estes estavam submetidos a esforços de tração. De acordo com Eberteim (2004), o princípio físico (eletromecânico) que ocorreu na descoberta de Lord Kelvin pode ser modelado pela equação da resistência elétrica de um condutor:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad (4.1)$$

onde: R - Resistência elétrica do condutor;

ρ - Resistividade;

L - Comprimento;

A - Área da seção transversal do condutor.

Uma vez que os extensômetros são formados por condutores de seção circular, tem-se:

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \quad (4.2)$$

Substituindo a equação (4.2) em (4.1) obtém-se $R = R(\rho, L, D)$:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \rho \cdot \frac{4 \cdot L}{\pi \cdot D^2} \quad (4.3)$$

e suas derivadas parciais:

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{4 \cdot L}{\pi \cdot D^2} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{4 \cdot \rho}{\pi \cdot D^2} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial D} = -\frac{8 \cdot \rho \cdot L}{\pi \cdot D^3} \quad (4.6)$$

Sabendo-se que a variação da resistência dR é dada considerando-se ρ , L e D como variáveis lineares (FIGUEIREDO e ALMEIDA, 2002, p.6):

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \rho} .d\rho + \frac{\partial R}{\partial L} .dL + \frac{\partial R}{\partial D} .dD \quad (4.7)$$

Dividindo-se a equação (4.7) por R e substituindo suas derivadas parciais (4.4), (4.5) e (4.6):

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= \frac{4.L}{\pi.D^2} \cdot \frac{1}{R} .d\rho + \frac{4.\rho}{\pi.D^2} \cdot \frac{1}{R} .dL - \frac{8.\rho.L}{\pi.D^3} \cdot \frac{1}{R} .dD \\ \frac{dR}{R} &= \frac{4.L}{\pi.D^2} \frac{\pi.D^2}{4.\rho.L} .d\rho + \frac{4.\rho}{\pi.D^2} \frac{\pi.D^2}{4.\rho.L} .dL - \frac{8.\rho.L}{\pi.D^3} \frac{\pi.D^2}{4.\rho.L} .dD \\ \frac{dR}{R} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - 2 \cdot \frac{dD}{D} \end{aligned} \quad (4.8)$$

A variação na resistência elétrica ocorre devido à deformação geométrica do condutor e à variação da resistividade do material:

- $\frac{dL}{L} = \varepsilon$: Variação da resistência devido à deformação longitudinal do condutor;
- $-\frac{dD}{D} = \nu.\varepsilon$: Variação da resistência devido à deformação transversal do condutor;
- $\frac{d\rho}{\rho}$: Variação da resistência devido a mudanças na resistividade do condutor.

Retomando a equação (4.8):

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \varepsilon - 2.\nu.\varepsilon$$

$$\frac{dR}{R} = \varepsilon \left(1 + 2.\nu + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\rho}{\rho} \right)$$

$$\frac{dR}{R} = k.\varepsilon \tag{4.9}$$

$$k = 1 + 2.\nu + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\rho}{\rho} \tag{4.10}$$

Para aplicações convencionais, o *gage factor* k varia entre 1,70 e 2,2, sendo que na tabela 4.1 são apresentados valores médios de k para algumas ligas metálicas utilizadas na fabricação de extensômetros:

Tabela 4.1 – Valores médios do *gage factor* para ligas metálicas convencionais

| Material do condutor [Nome comercial] | Composição do material [%] | Média aproximada do <i>gage factor</i> – k |
|--|---------------------------------------|--|
| Constantan | 57 Cu, 43 Ni | 2,05 |
| Karma | 73 Ni, 20 Cr, res. Fe + Al | 2,1 |
| Nichrome V | 80 Ni, 20 Cr | 2,2 |

Juvinall *apud* Figueiredo e Almeida (2002) descreve a formulação completa da variação da resistência do extensômetro submetido a um carregamento de tração ou compressão, considerando-se que a variação da resistividade do material $\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)$ é proporcional à variação do volume $\left(\frac{dV}{V}\right)$:

$$\frac{d\rho}{\rho} = C \cdot \left(\frac{dV}{V} \right)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = C \cdot \left(\frac{dS}{S} + \frac{dL}{L} \right) \quad (4.11)$$

Retomando a equação (4.8) e substituindo (4.11):

$$\frac{dR}{R} = C \cdot \left(\frac{dS}{S} + \frac{dL}{L} \right) + \frac{dL}{L} - \frac{dS}{S} \quad (4.12)$$

$$\frac{dR}{R} = (C-1) \cdot \frac{dS}{S} + \varepsilon \cdot (C+1) \quad (4.13)$$

No estado plano de tensões, $\sigma_{zz} = 0$:

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] = 0 \quad (4.14)$$

$$(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{(1-\nu)} \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (4.15)$$

Sendo a variação da área função das deformações transversais:

$$\frac{dS}{S} = \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} - \frac{\nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})}{(1-\nu)} = \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \cdot \varepsilon_{yy} - \frac{\nu}{(1-\nu)} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) em (4.13)

$$\frac{dR}{R} = \left[C \cdot \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) + \left(\frac{1}{1-\nu} \right) \right] \cdot \varepsilon_{xx} + (C-1) \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \varepsilon_{yy} = k \cdot \varepsilon_{xx} + k_t \cdot \varepsilon_{yy} \quad (4.17)$$

Measurements Group (1993) menciona que a sensibilidade transversal do extensômetro deve ser a menor possível:

$$\frac{dR}{R} \approx k \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.18)$$

Os *strain gages* são inseridos em uma ponte de Wheatstone de forma que quando a peça instrumentada sofre algum tipo de carregamento, a resistência elétrica dos extensômetros varia, gerando um desequilíbrio da ponte. Este desequilíbrio é expresso em termos de variação de tensão e é proporcional à deformação sofrida pela estrutura.

4.2 Seleção do extensômetro

O primeiro passo de uma medição extensométrica é a seleção do strain gage correto para a tarefa, sendo necessária a avaliação das características do extensômetro em relação a: condições do ambiente (principalmente térmicas); precisão necessária na medição; condições de instalação; e custo. Além destas, alguns parâmetros também devem ser estudados: sensibilidade da liga metálica da grade do *strain gage* (*k-factor*); fator de compensação térmica; material de suporte do extensômetro; comprimento do extensômetro; e parâmetros da medição (objetivos da medição), segundo Measurements group 1989.

Restrições como: precisão necessária; duração do teste; estabilidade de medição; resistência à fadiga; e alongamentos também devem ser analisados. Para a seleção correta, deve-se assumir alguns compromissos uma vez que é comum existirem situações onde a necessidade de alguns requerimentos conflita com a existência de outros. Um exemplo é a medição extensométrica em regiões que possuem raio de adoçamento muito pequeno, onde o espaço para a instalação do *strain gage* é reduzido, impondo a necessidade de extensômetros de pequenas dimensões. Porém, extensômetros pequenos (em torno de 3 mm de comprimento) possuem restrições quanto: alongamento máximo permissível, durabilidade em relação à fadiga, estabilidade de medição e manuseio.

O principal componente que define as características de operação dos extensômetros é o material utilizado na fabricação de sua grade. Figueiredo e Almeida (2002) comenta que a liga metálica da grade deve possuir alta resistividade, alto limite de escoamento, boa resistência à corrosão, boa soldabilidade, boa resistência à fadiga e baixa sensibilidade a variações térmicas.

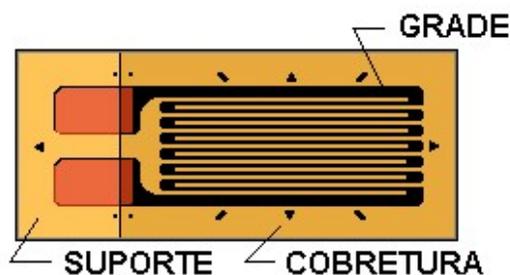


Figura 4.1 – Componentes de um *strain gage* – Measurements group (1989)

A liga de constantan (CuNi57-43) é a mais utilizada na fabricação de *strain gages* e abrange uma série de aplicações uma vez que possui diversas das características citadas acima. Porém é interessante mencionar que acima de 65 °C, o constantan apresenta uma dilatação constante, necessitando assim de uma análise mais detalhada caso em que a aplicação requeira altos níveis de estabilidade.

A grade do *strain gage* é fixada a um material de suporte que é escolhido em função do tipo de medição a ser realizado (dinâmica ou estática) e da condição térmica do ambiente. Entre suas principais funções estão: servir de apoio para o manuseio do *strain gage* durante sua instalação; possuir uma superfície que possibilite a colagem do *strain gage*; e ser isolante. Em geral, o material de suporte é feito de papel impregnado em nitrocelulose ou em epóxi.

O comprimento de um strain gage é na verdade, o seu comprimento ativo como pode ser visto na Figura 4.2:



Figura 4.2 – Comprimento ativo de um *strain gage* – Measurements group (1989)

As extremidades do comprimento ativo são consideradas como não-sensitivas uma vez que possuem seção transversal relativamente grande e baixa resistência elétrica. O comprimento ativo dos extensômetros pode variar de 0,6 mm a 150 mm (HOFFMANN, 1989, p.43).

Normalmente medições de tensão são realizadas nos pontos mais críticos da estrutura, que apresentam concentração de tensão, possuem alto gradiente de tensão e área restrita a uma pequena região. Se o comprimento ativo da grade for muito grande a ponto de cobrir a área de tensão máxima, então o extensômetro irá realizar uma média das tensões agindo sobre seu comprimento e o valor dessa média será sempre inferior ao valor de tensão de pico (Figura 4.3):

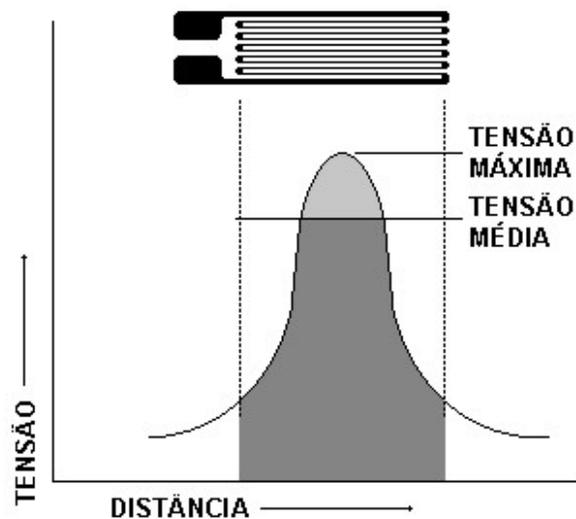


Figura 4.3 – Valor incorreto de tensão devido à escolha de um comprimento ativo incorreto do *strain gage* – Measurements group (1989)

Measurements group (1989) ainda recomenda que o comprimento ativo do *strain gage* deve ser menor que 10% da dimensão da causa da concentração de tensão. Alguns exemplos deste tipo de dimensão são: raio do furo, raio de arredondamento e dimensão de entalhe. Para aplicações gerais são recomendados SG com comprimento ativo variando entre 3 a 6 mm, sendo que comprimentos ativos maiores ou menores que estas dimensões geram um aumento de custo do transdutor.

Restrições relativas à aplicação (objetivo da medição) influenciam diretamente no formato no número de grades do extensômetro. Existem diversos formatos de SG, onde os mais usuais são:

- O extensômetro uniaxial com uma grade (Figura 4.4) é normalmente empregado em medições onde o estado de tensões do ponto medido é uniaxial e a direção dos eixos principais é conhecida com uma precisão de aproximadamente, $\pm 5^\circ$.

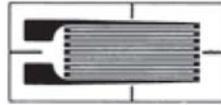


Figura 4.4 – Extensômetro uniaxial – Hoffmann (1989)

- A Roseta retangular (Figura 4.5) é composta por duas grades defasadas de 90° e é empregada com o intuito de determinar as tensões principais. Este tipo de extensômetro deve ser utilizado quando a direção dos eixos principais é conhecida.

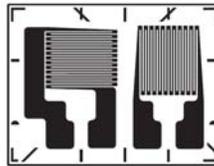


Figura 4.5 – Roseta retangular – Hoffmann (1989)

- Em diversos casos práticos, a direção das tensões principais é desconhecida devido à geometria e tipo de carregamento aplicado assim, uma roseta de três grades deve ser utilizada. No presente trabalho, somente a roseta de $0^\circ / 45^\circ / 90^\circ$ será detalhada uma vez que esta foi largamente utilizada nas medições de tensão das peneiras vibratórias (Figura 4.6).

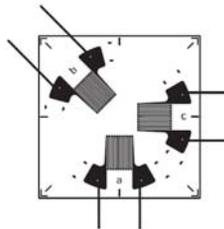


Figura 4.6 – Roseta $0^\circ / 45^\circ / 90^\circ$ – Hoffmann (1989)

4.3 Preparação da superfície de análise e colagem dos extensômetros

Segundo Figueiredo e Almeida (2002) e Hoffmann (1989), a preparação da superfície para posterior colagem dos extensômetros segue um procedimento baseado em 5 etapas: abrasão, marcação, condicionamento, colagem e proteção.

O primeiro passo para a colagem do SG é abrasão realizada com o auxílio de lixas, que tem como objetivo de remoção de óxidos, pinturas, porosidades excessivas, rugosidades excessivas, entre outros. Linhas de guia são marcadas na superfície com o intuito de posicionar corretamente o extensômetro em relação aos eixos de interesse, em seguida o processo de limpeza é realizado com condicionadores que são aplicados com auxílio de pinças metálicas e gaze em um processo repetitivo até que o máximo de impurezas seja retirado.

Na próxima etapa é realizada a colagem dos extensômetros que, em geral utiliza adesivos a base de cianoacrilato ou nitrocelulose, ambos possuindo cura a frio (temperatura ambiente). Como regra geral, deve-se pressionar o extensômetro contra a superfície de teste durante dois minutos para que seja dado o início do pega do adesivo. A etapa final do processo de colagem é a aplicação de produtos de proteção que impermeabilizam e garantem o prolongamento da vida útil do SG.

4.4 Ponte de Wheatstone

Em 1843, Sir Charles Wheatstone apresentou um circuito capaz de medir com precisão a resistência elétrica (diferença entre resistências elétricas), o qual foi batizado como Ponte de Wheatstone. Normalmente, a resistência elétrica pode ser medida através de duas maneiras:

- Determinação do valor absoluto da resistência através da comparação com uma resistência conhecida;
- Determinação da variação relativa das resistências que compõem a Ponte de Wheatstone.

O segundo método é utilizado nas técnicas extensométricas e permite a medição precisa da variação da resistência dos extensômetros na ordem de 10^{-4} a $10^{-2} \Omega/\Omega$. A Figura 4.7a ilustra uma Ponte de Wheatstone na forma de rombo (representação esquemática mais usual), já a Figura 4.7b ilustra o mesmo circuito, porém de uma forma que facilita o entendimento do princípio de funcionamento da ponte.

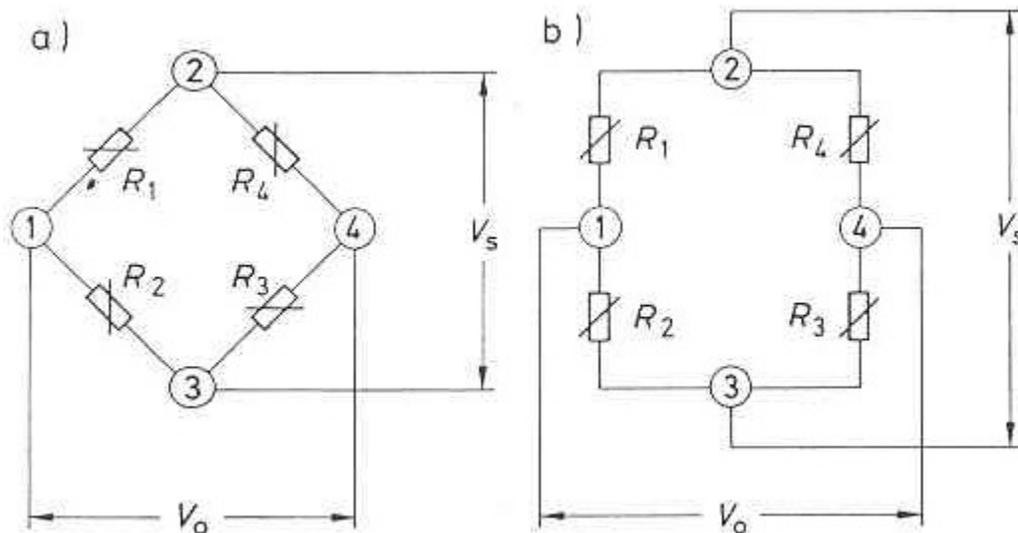


Figura 4.7 – Representações da Ponte de Wheatstone – Hoffmann (1989)

A Ponte de Wheatstone é composta por braços ou “ramos” constituídos pelas resistências R_1 , R_2 , R_3 e R_4 . Aplicando-se a tensão de alimentação V_s entre os pontos 2 e 3 da ponte, pode-se medir a tensão de saída V_o entre os pontos 1 e 4, a qual depende dos valores das resistências utilizadas. A avaliação da Ponte de Wheatstone descrita neste trabalho assume que a resistência da fonte de tensão pode ser desprezada e que a resistência interna do aparelho utilizado para medição da tensão de saída da ponte é muito alta e não causa nenhum tipo de desbalanceamento da mesma. Esta avaliação é aceitável uma vez que os instrumentos de aquisição de dados utilizados nas técnicas extensométricas cumprem ambos os requisitos de maneira satisfatória.

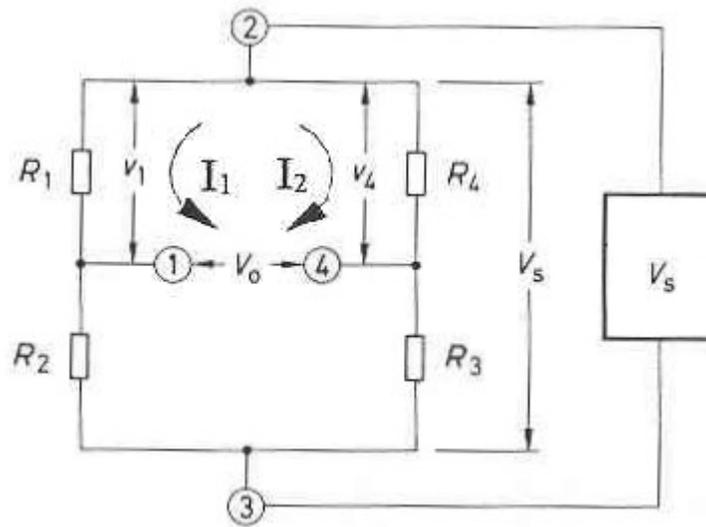


Figura 4.8 – Ponte de Wheatstone – Hoffmann (1989)

Pela lei de Ohm, tem-se:

$$V_s = (R_1 + R_2) \cdot I_1 = (R_3 + R_4) \cdot I_2 \quad (4.19)$$

Pode-se verificar que a tensão parcial v_1 é dada por:

$$v_1 = R_1 \cdot I_1 = V_s \cdot \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \quad (4.20)$$

Da mesma maneira, v_4 é dada por:

$$v_4 = R_4 \cdot I_2 = V_s \cdot \frac{R_4}{(R_3 + R_4)} \quad (4.21)$$

A tensão de saída V_o é a diferença das duas tensões parciais definidas em (4.20) e (4.21):

$$V_o = v_1 - v_4 = V_s \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \quad (4.22)$$

Para comparação de grandezas diversas é mais conveniente definir a relação entre as tensões de saída e de entrada (tensão relativa de saída):

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (4.23)$$

Existem duas condições para que $V_o = 0$ (ponte balanceada):

- Quando todas as resistências que compõem a ponte são iguais:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$$

- Quando a relação entre as resistências da meia ponte é a mesma:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

Se as resistências R_1 , R_2 , R_3 e R_4 variarem seus valores de ΔR_1 , ΔR_2 , ΔR_3 e ΔR_4 respectivamente, a ponte se tornará desbalanceada assim, a tensão de saída pode ser expressa segundo:

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + \Delta R_1 & R_2 + \Delta R_2 \\ R_4 + \Delta R_4 & R_3 + \Delta R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2 & 0 \\ 0 & R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4 \end{vmatrix}} = \frac{\det 1}{\det 2} \quad (4.24)$$

Analisando separadamente os determinantes da equação (4.24):

$$\det 1 = \begin{vmatrix} R_1 + \Delta R_1 & R_2 + \Delta R_2 \\ R_4 + \Delta R_4 & R_3 + \Delta R_3 \end{vmatrix} = (R_1 + \Delta R_1)(R_3 + \Delta R_3) - (R_2 + \Delta R_2)(R_4 + \Delta R_4) \quad (4.25)$$

$$\det 1 = R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot \Delta R_3 + R_3 \cdot \Delta R_1 + \Delta R_1 \cdot \Delta R_3 - R_2 \cdot R_4 - R_2 \cdot \Delta R_4 - R_4 \cdot \Delta R_2 - \Delta R_2 \cdot \Delta R_4 \quad (4.26)$$

Segundo Hoffmann (1989), na técnica extensométrica todos os ramos da Ponte de Wheatstone devem possuir a mesma resistência elétrica, ou pelo menos as metades da ponte devem possuir a mesma resistência ($R_1 = R_2$ e $R_3 = R_4$), ou seja:

$$\det 1 = R_1 \cdot \Delta R_3 + R_3 \cdot \Delta R_1 + \Delta R_1 \cdot \Delta R_3 - R_2 \cdot \Delta R_4 - R_4 \cdot \Delta R_2 - \Delta R_2 \cdot \Delta R_4 \quad (4.27)$$

Variações na resistência dos extensômetros elétricos são da ordem de $10^{-3} \Omega/\Omega$ assim, a aproximação abaixo gera precisão suficiente para medições experimentais:

$$\det 1 = R_1 \cdot \Delta R_3 + R_3 \cdot \Delta R_1 - R_2 \cdot \Delta R_4 - R_4 \cdot \Delta R_2 \quad (4.28)$$

$$\det 1 = R_1 \cdot R_3 \cdot \frac{\Delta R_3}{R_3} + R_1 \cdot R_3 \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} - R_2 \cdot R_4 \cdot \frac{\Delta R_4}{R_4} - R_2 \cdot R_4 \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad (4.29)$$

Lembrando que $R_1 = R_2$ e $R_3 = R_4$:

$$\det 1 = R_1 \cdot R_3 \cdot \frac{\Delta R_3}{R_3} + R_1 \cdot R_3 \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} - R_1 \cdot R_2 \cdot \frac{\Delta R_4}{R_4} - R_1 \cdot R_2 \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad (4.30)$$

$$\det 1 = R_1 \cdot R_3 \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.31)$$

Segundo Hoffmann (1989), Figueiredo e Almeida (2005) e HBM (1995), é possível negligenciar a variação das resistências elétricas no denominador da equação (4.24):

$$\det 2 = \begin{vmatrix} R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2 & 0 \\ 0 & R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & 0 \\ 0 & R_3 + R_4 \end{vmatrix} \quad (4.32)$$

$$\det 2 = R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 \quad (4.33)$$

Lembrando que $R_1 = R_2$ e $R_3 = R_4$:

$$\det 2 = R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 = R_1 \cdot R_3 + 2 \cdot R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3$$

$$\det 2 = \frac{R_3}{R_2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3} \cdot R_1 \cdot R_3 + 2 \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdot R_1 \cdot R_3 + \frac{R_2}{R_3} \cdot R_2 \cdot R_3 \right) = \frac{R_3}{R_2} \cdot (R_1^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 + R_2^2)$$

$$\det 2 = \frac{R_1}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2} \cdot (R_1 + R_2)^2 \quad (4.34)$$

Retomando a equação (4.24) e substituindo os determinantes (4.31) e (4.34):

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{\det 1}{\det 2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.35)$$

Definindo $r = \frac{R_1}{R_2}$ e substituindo na (4.35):

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{r}{(1+r)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.36)$$

Admitindo que todas as resistências que compõem o circuito são iguais $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, conseqüentemente $r = 1$ e substituindo a equação (4.18) em (4.36):

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{k}{4} (\varepsilon_a - \varepsilon_b + \varepsilon_c - \varepsilon_d) \quad (4.37)$$

Na análise extensométrica, dificilmente todos os ramos da ponte são compostos por *strain gages*, em geral apenas um ou alguns ramos possuem *strain gages* sendo o restante composto por resistências elétricas complementares. É comum que os aparelhos de aquisição de dados já possuam resistências complementares internas. Na Figura 4.9 pode-se visualizar:

- 4.9a) Arranjo de ¼ ponte: O extensômetro SG_a substitui a resistência R_1 do circuito da Ponte de Wheatstone;
- 4.9b) Arranjo de ½ ponte assimétrica: as resistências R_1 e R_2 são substituídas pelos extensômetros SG_a e SG_b ;
- 4.9c) Arranjo de ponte diagonal: as resistências R_1 e R_3 são substituídas pelos extensômetros SG_a e SG_c ;
- 4.9d) Arranjo de ponte completa: todas as resistências são substituídas por extensômetros.

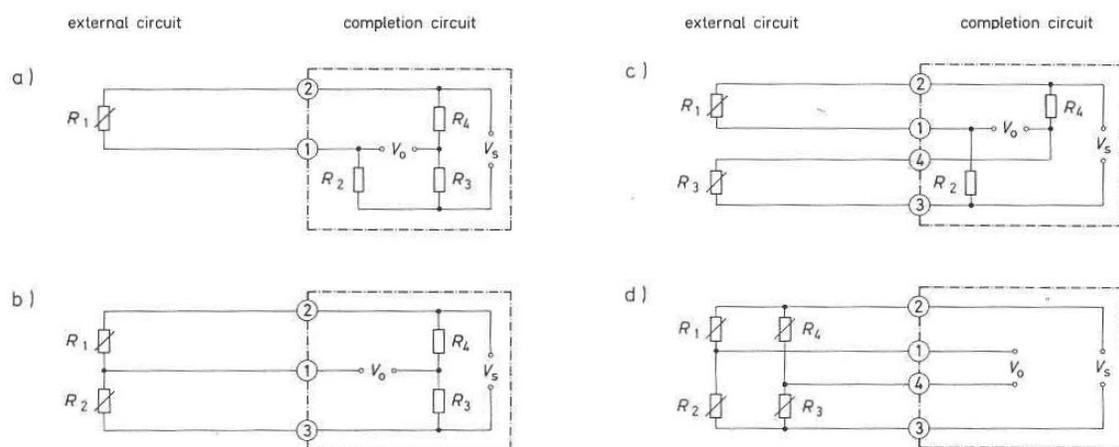


Figura 4.9 – Arranjos da ponte de Wheatstone – Hoffmann (1989)

Para realização das medições extensométricas somente o arranjo de ¼ de ponte foi utilizado, assim este será analisado de uma forma mais detalhada. Retomando a equação (4.36):

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{r}{(1+r)^2} k \cdot \varepsilon_a \quad (4.38)$$

Pode-se notar que a tensão de saída depende dos valores da tensão de entrada, “k” e “r”, devendo-se escolher uma boa relação entre estes para se obter um eficiente sinal de saída sem a necessidade de uma tensão elevada de alimentação, uma vez que isto implica no aumento da potência do extensômetro P_{SG} gerando uma redução da durabilidade e precisão das medidas.

$$P_{SG} = SG_a \cdot I_1^2 \quad (4.39)$$

Substituindo (4.20) em (4.38):

$$P_{SG} = \frac{V_s \cdot I_1}{(1+r)} \quad (4.40)$$

4.5 Roseta de 0° / 45° / 90° ou Roseta de 45°

Para objetos de formas complexas submetidos a diversos tipos de carregamentos (normal, flexão e torção), a pré-determinação da direção das tensões principais é muito difícil sendo assim necessária a medição da deformação em três diferentes direções que não correspondem às direções principais e, normalmente são classificadas como direções “a”, “b” e “c”.

Segundo Measurements Group (1990), as equações para o cálculo das deformações principais podem ser definidas com o auxílio do círculo de Mohr de deformações (Figura 4.10).

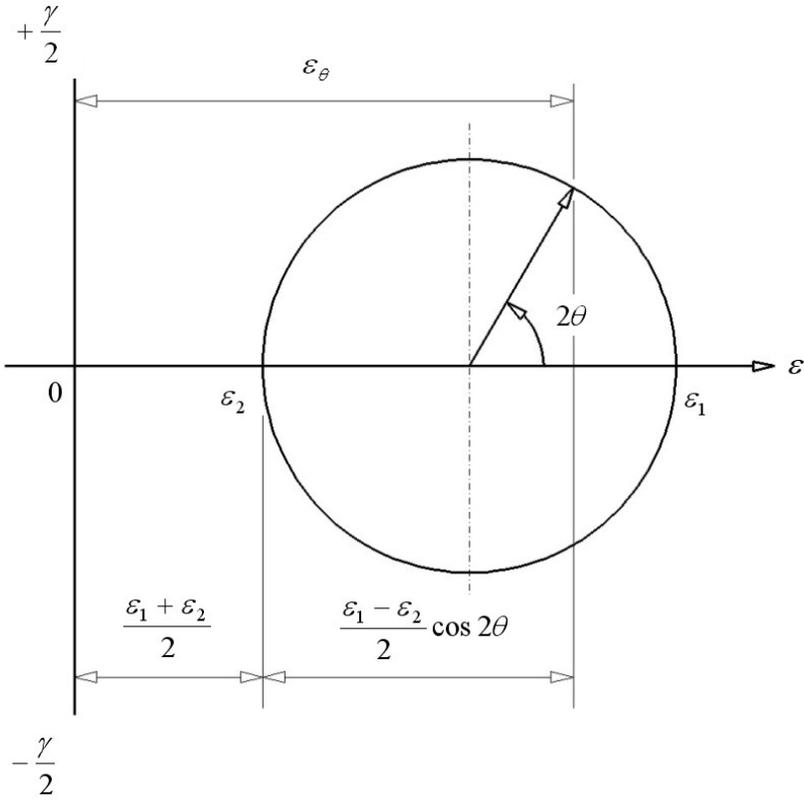


Figura 4.10 – Círculo de Mohr de deformações

Pode-se notar que o sentido de rotação positivo é o mesmo da roseta 45° (Figura 4.11):

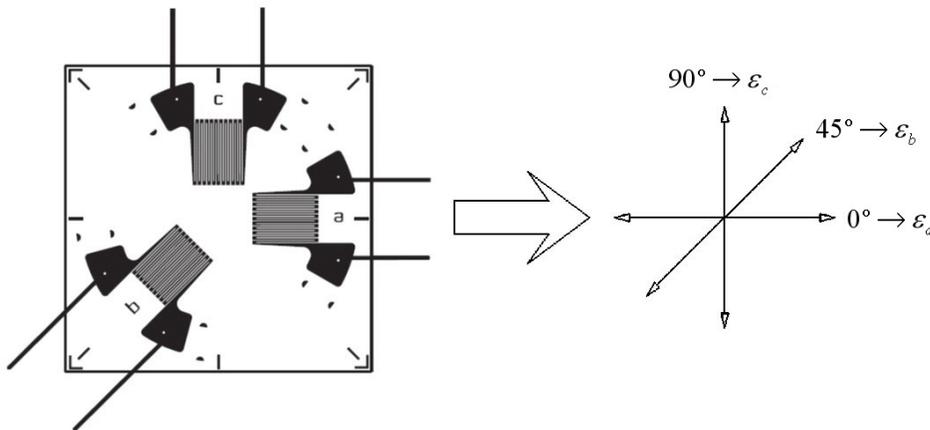


Figura 4.11 – Sentido de rotação positivo da roseta 45° – Hoffmann (1989)

Ainda segundo Measurements Group (1990), os ângulos do círculo de Mohr são o dobro dos ângulos físicos da superfície instrumentada assim a deformação normal localizada a qualquer ângulo θ em relação aos eixos principais é expresso por:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\theta \quad (4.41)$$

A Figura 4.12 apresenta o círculo de Mohr com os eixos da roseta de 45° superpostos:

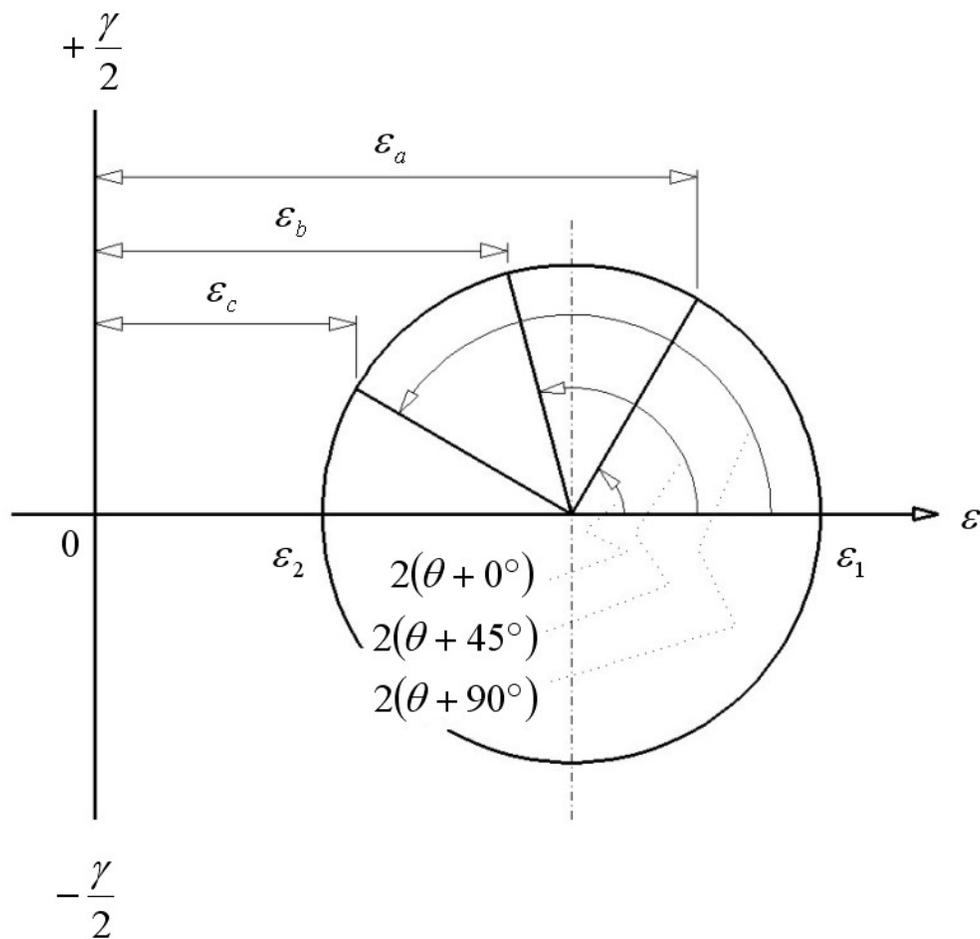


Figura 4.12 – Círculo de Mohr com os eixos da roseta 45° superpostos

Substituindo os ângulos das três direções da grade do extensômetro na equação (4.41) é possível determinar a deformação para cada uma das direções “a”, “b” e “c”:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\theta \quad (4.42)$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2(\theta + 45^\circ) \quad (4.43)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2(\theta + 90^\circ) \quad (4.44)$$

Manipulando o sistema de equações formado por (4.42), (4.43) e (4.44) pode-se isolar as deformações principais:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad (4.46)$$

Dessa forma as deformações principais podem ser determinadas através da substituição das deformações medidas ε_a , ε_b e ε_c . Já para o ângulo que indica a direção das deformações principais, é requerida uma análise geométrica a qual é apresentada por Hoffmann (1989):

Inicialmente, defini-se a tangente de um ângulo auxiliar ψ :

$$\tan \psi = \frac{2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} = \frac{Num}{Den} \quad (4.47)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \right) \quad (4.48)$$

Dependendo dos valores de Num e Den , o ângulo auxiliar ψ pode estar localizado em quatro diferentes quadrantes (Figura 4.13):

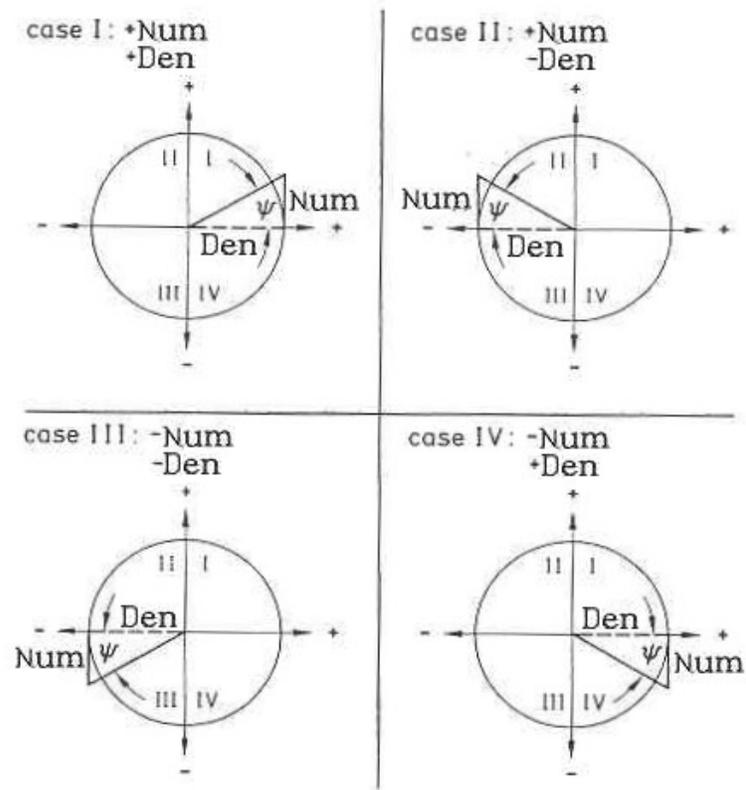


Figura 4.13 – Localização do ângulo auxiliar ψ – Hoffmann (1989)

O ângulo θ representa o ângulo físico entre o eixo principal de deformação e a direção da grade de referência do extensômetro (no caso é a grade “a”), porém para casos práticos é comum utilizar o ângulo entre a grade de referência e o eixo principal φ :

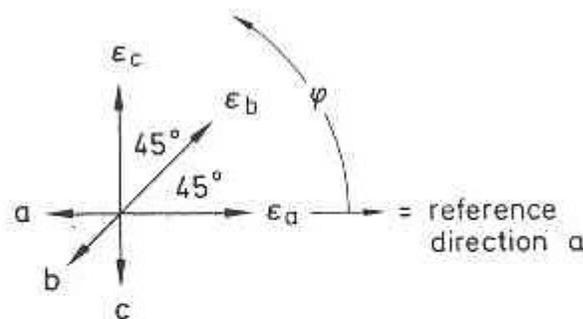
$$\varphi = -\theta \quad (4.49)$$

Uma vez que $\tan \psi = \tan(\psi + 180^\circ)$, os valores (positivo ou negativo) de *Num* e *Den* definem o quadrante em que ψ está localizado. Através da análise da Figura 4.14 pode-se determinar a posição e o valor de φ :

| | | | | |
|------------------------|--------------------------------------|--|--|--|
| Num | $\geq 0 (+)$ | $> 0 (+)$ | $\leq 0 (-)$ | $< 0 (-)$ |
| Den | $> 0 (+)$ | $\leq 0 (-)$ | $< 0 (-)$ | $\geq 0 (+)$ |
| corresponding quadrant | I | II | III | IV |
| $\varphi =$ | $\frac{1}{2} \cdot (0^\circ + \psi)$ | $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \psi)$ | $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ + \psi)$ | $\frac{1}{2} \cdot (360^\circ - \psi)$ |

Figura 4.14 – Posição e valor do ângulo φ – Hoffmann (1989)

Relembrando que φ é o ângulo referenciado pela grade “a” até o eixo principal de deformação:



0°/45°/90° rosette

Figura 4.15 – Posição de φ em relação aos eixos da roseta 45° – Hoffmann (1989)

4.6 Tensões principais

Assumindo que o material analisado é homogêneo em sua composição e isotrópico em suas propriedades mecânicas e utilizando a relação linear entre tensão e deformação, a Lei de Hooke aplicada ao estado biaxial de tensões pode ser utilizada para definição das tensões principais através da análise das deformações principais:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu.\varepsilon_2) \quad (4.50)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu.\varepsilon_1) \quad (4.51)$$

Substituindo os valores das deformações principais em função das deformações nas direções “a”, “b” e “c” do *strain gage*:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\nu)} \cdot \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad (4.52)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\nu)} \cdot \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad (4.53)$$

4.7 Critério de falha de von Mises

Em 1913, von Mises propôs o critério de falha denominado de critério de escoamento por energia de distorção, definindo que o escoamento tem início quando a energia de distorção atinge um valor crítico σ_{ADM} , constante para um dado material sob condições definidas e independentes do estado de tensões, segundo Wikipedia (2005) e efunda (2005):

$$\sigma_{ADM}^2 \geq \frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (4.54)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais.

No caso do estado plano de tensões, $\sigma_3 = 0$, então o critério se reduz a:

$$\sigma_{ADM}^2 \geq \frac{1}{2} \cdot [\sigma_1^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2] \quad (4.55)$$

$$\sigma_{ADM} \geq \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (4.56)$$

Ainda segundo Wikipedia (2005), a análise de elementos finitos tipicamente apresenta resultados como tensão de von Mises σ' uma vez que esta reduz um tensor de seis dimensões em um simples escalar:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (4.57)$$

Comparando (4.56) com (4.57), nota-se que tensão de von Mises é comparada diretamente com a tensão admissível:

$$\sigma' \leq \sigma_{ADM} \quad (4.58)$$

Para projetos de equipamentos vibratórios, a tensão admissível é função do limite de escoamento do material e de um fator de segurança.

$$\sigma_{ADM} = \frac{\sigma_E}{FS} \quad (4.59)$$

Cavalca (1999) apresenta a Tabela 4.2 que direciona a escolha do fator de segurança mais adequado para materiais dúcteis.

Tabela 4.2 – Valores para fator de segurança

| Informação | Qualidade da Informação | Fator |
|--|--|------------------|
| | | F_a |
| Dados de propriedades de materiais disponíveis de testes | O material realmente utilizado foi testado | 1,3 |
| | Dados representativos de teste de material | 2,0 |
| | Dados satisfatórios de teste de material | 3,0 |
| | Dados escassos de teste de material | 5,0 ⁺ |
| | | F_b |
| Condições ambientais de uso real e efetivo | Idênticas às condições de teste | 1,3 |
| | Ambiente essencialmente controlado | 2,0 |
| | Ambiente com alterações moderadas | 3,0 |
| | Ambiente com alterações extremas | 5,0 ⁺ |
| | | F_c |
| Modelo analítico para carregamento e tensões | Modelos testados por experimentos | 1,3 |
| | Modelos representativos precisos | 2,0 |
| | Modelos representativos aproximados | 3,0 |
| | Modelos grosseiramente aproximados | 5,0 ⁺ |

$$FS = \max(F_a, F_b, F_c) \quad (4.60)$$

Para peneiras vibratórias $FS = \max(1,3; 5,0^+; 1,3) = 5,0^+$:

- Fator $F_a = 1,3$: para peneiras vibratórias de grande porte, todas as chapas de aço estrutural são analisadas por ultra-som e certificadas pelo fornecedor;
- Fator $F_b = 5^+$: a Haver & Boecker Latinoamericana trabalha com projetos especiais (customizados) ou seja, cada projeto é único e específico. Na fabricação da peneiras vibratórias são realizados testes de fábrica onde as condições diferem da operação real assim, adota-se um alto fator de segurança que garanta a integridade física do equipamento. Medições na planta de operação também são realizadas;
- Fator $F_c = 1,3$: Além das medições experimentais por extensometria, são realizadas: medições de temperatura, deslocamento, aceleração, entre outras.

Capítulo 5

Modelagem e Medições da Peneira Vibratória

Nesse capítulo apresenta-se a integração das técnicas de modelagem numérica e medição experimental, aplicadas de forma prática ao projeto de quatro peneiras vibratórias. Os detalhes de modelagem e a sistemática de medição constituem as mais importantes fases da realização do projeto mecânico de tais máquinas.

O mercado atual impõe a necessidade do projeto de produtos de maior segurança, qualidade e custo competitivo. Neste panorama surge a evolução das ferramentas computacionais para auxílio no projeto mecânico e manufatura, as quais atuam principalmente nas áreas de:

- CAE: *Computer Aided Engineering* ou Engenharia Assistida por Computador;
- CAD: *Computer Aided Design* ou Projeto Assistido por Computador;
- CAM: *Computer Aided Manufacture* ou Manufatura Assistida por Computador;
- CIM: *Computer Integrated Manufacturing* ou Manufatura Integrada por Computador
- CNC: *Computerized Numerical Control* ou Comando Numérico Computadorizado;
- TDM: *Technical Document Management* ou Gerenciamento de Dados Técnicos.

Inúmeros projetos necessitam de auxílio computacional tanto na parte de confecção de desenhos utilizando programas de CAD, quanto na parte de análise de estruturas utilizando programas de CAE. As etapas de projeto (CAD e CAE) geram um processo iterativo que pode ser estabelecido antes da fabricação do equipamento ou mesmo da construção de protótipos, diminuindo-se o tempo e os custos do projeto. Para a validação dos resultados da simulação numérica utilizam-se ferramentas e técnicas de medições experimentais. No caso em que os resultados experimentais apresentam dados que diferem muito dos resultados numéricos, é necessário retomar a etapa inicial do projeto determinando-se a causa desta diferença.

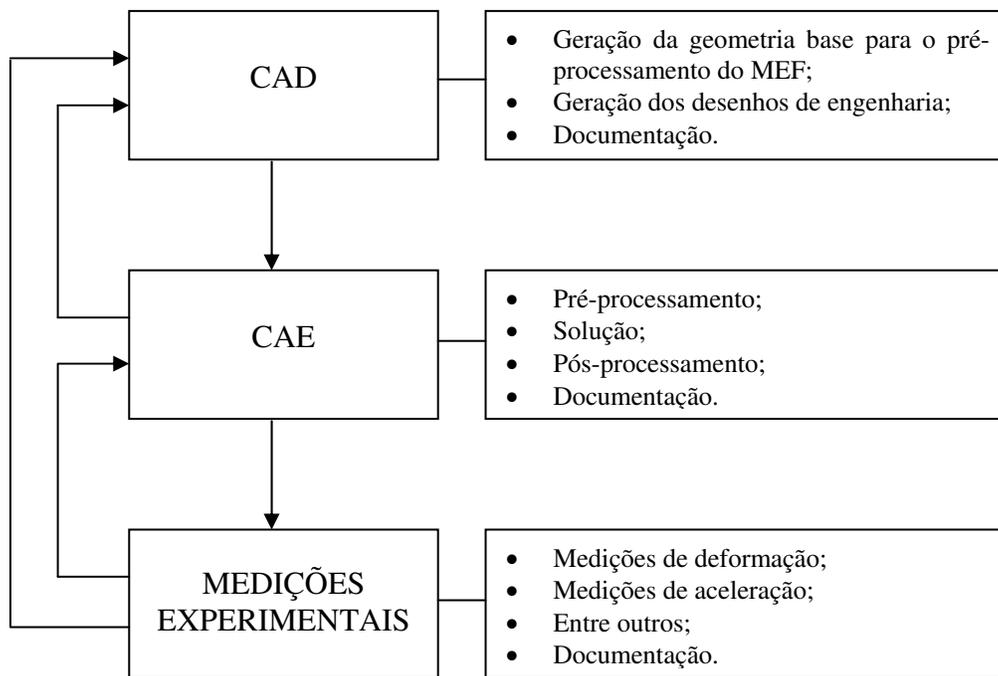


Figura 5.1 – Processo iterativo do projeto mecânico

Neste trabalho realizou-se o estudo de quatro peneiras vibratórias de alta capacidade projetadas e construídas pela empresa Haver & Boecker Latinoamericana:

- R-TE 4000x11000 (Fornecida para Syncrude Ltd.);
- R-MD 3200x7315 (Fornecida para CODELCO – Divisão Chuquicamata);
- RB-MD 3200x7315 (Fornecida para Sociedad Punta Del Cobre);
- R-MD 2438x6100 (Fornecida para CVRD – Paragominas).

A Figura 5.2 ilustra de forma simplificada a nomenclatura de peneiras, adotada pela Haver & Boecker Latinoamericana:

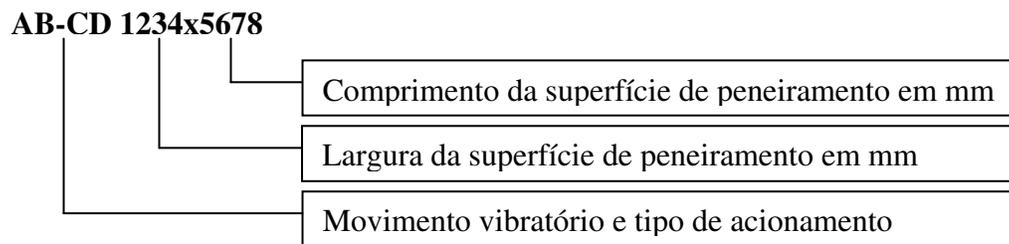


Figura 5.2 – Nomenclatura básica para peneiras vibratórias

Nas próximas quatro figuras são apresentadas as dimensões gerais das peneiras vibratórias estudadas.

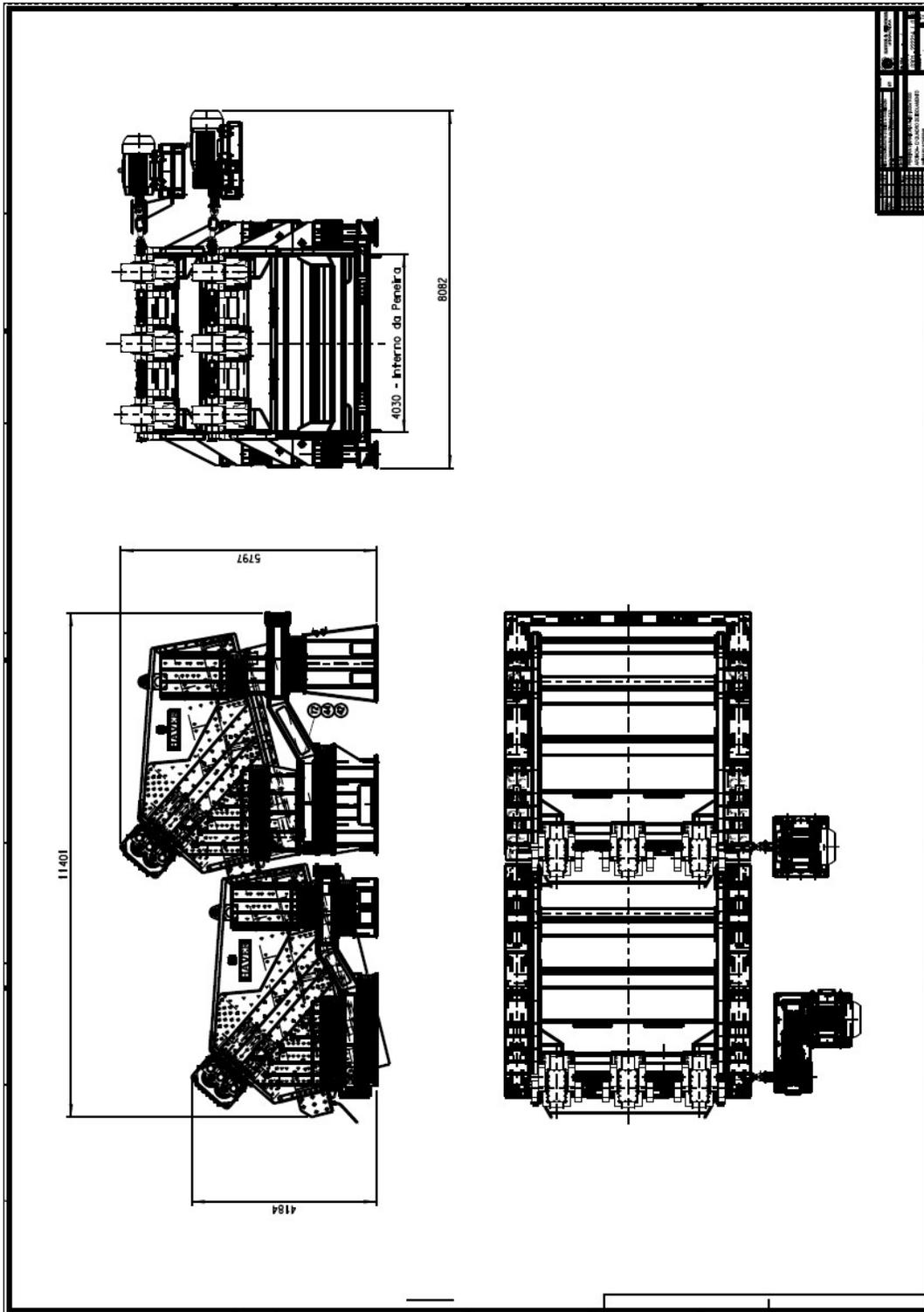


Figura 5.3 – Peneira vibratória R-TE 4000x11000

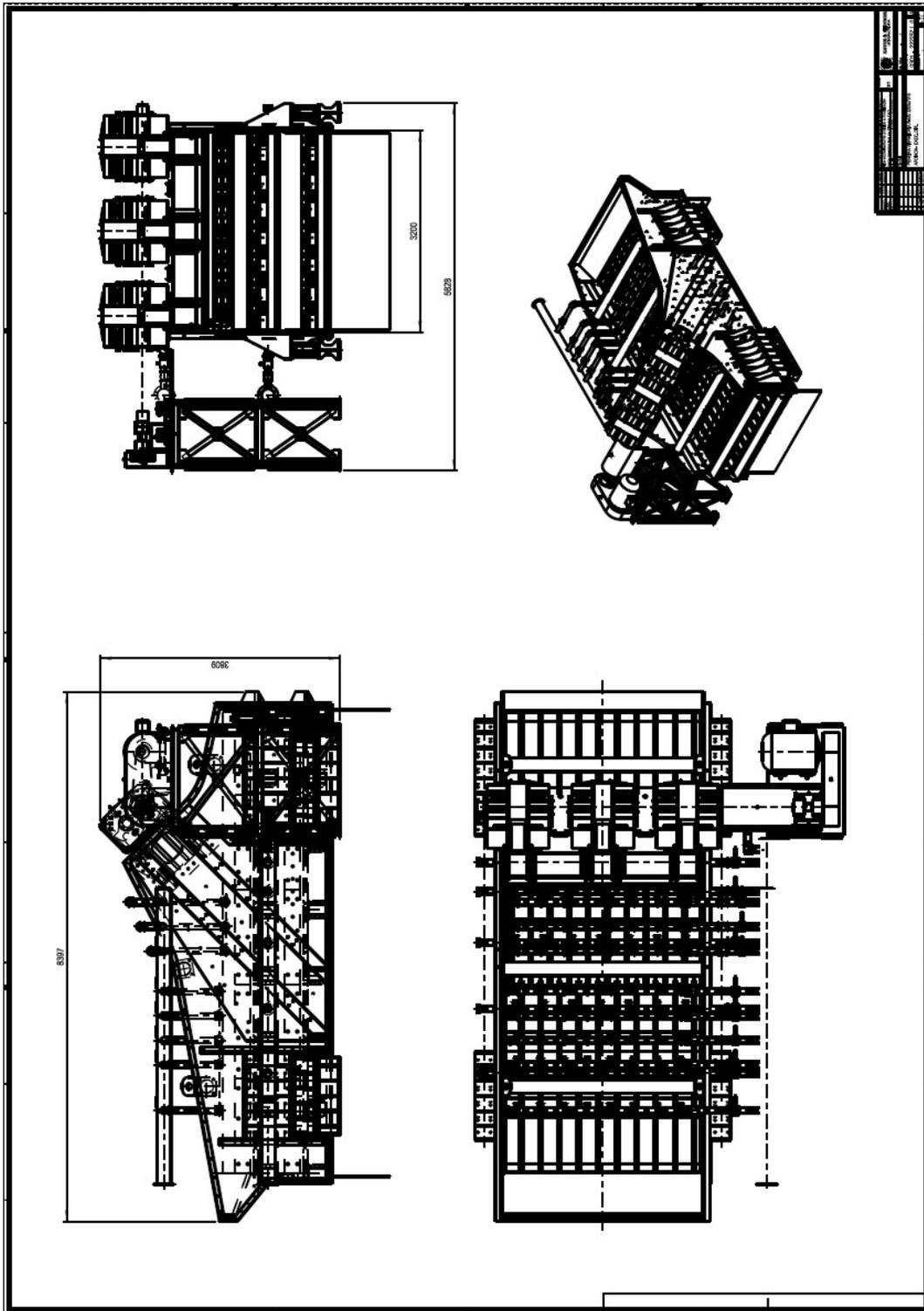


Figura 5.4 – Peneira vibratória R-MD 3200x7315

5.1 Ferramenta CAD – Modelo Geométrico

Emprega-se uma ferramenta CAD para a modelagem geométrica dos equipamentos contemplando algumas das simplificações necessárias para permitir sua simulação.

Para confecção do modelo geométrico foi utilizado o pacote comercial MicroStation V8 – 2004 Edition, fornecido pela Bentley. O MicroStation é uma plataforma gráfica que possui ferramentas voltadas para o projeto e *design* 3D de componentes mecânicos. As extensões dos arquivos nativos do MicroStation são .dgn e .dwg, havendo assim uma intercâmbio direto com arquivos provenientes do *software* AutoCAD.

De posse do pré-projeto (desenho de *layout* e croquis básicos) das peneiras vibratórias inicia-se o processo de geração do modelo geométrico. Como a peneira vibratória é basicamente composta por chapas metálicas, o recurso de modelagem de superfícies foi largamente utilizado. Ressaltando que as superfícies são criadas na linha média da espessura da chapa, uma vez que isto facilita a geração das propriedades dos elementos bidimensionais. As Figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 ilustram o modelo geométrico das quatro peneiras vibratórias analisadas:

Uma vez gerado o modelo geométrico, este é exportado no formato *parasolid* (extensão .x_t) o qual é um arquivo de intercâmbio de dados gráficos largamente utilizado para realizar a comunicação entre *softwares* independentes das áreas de CAD, CAE e CAM.

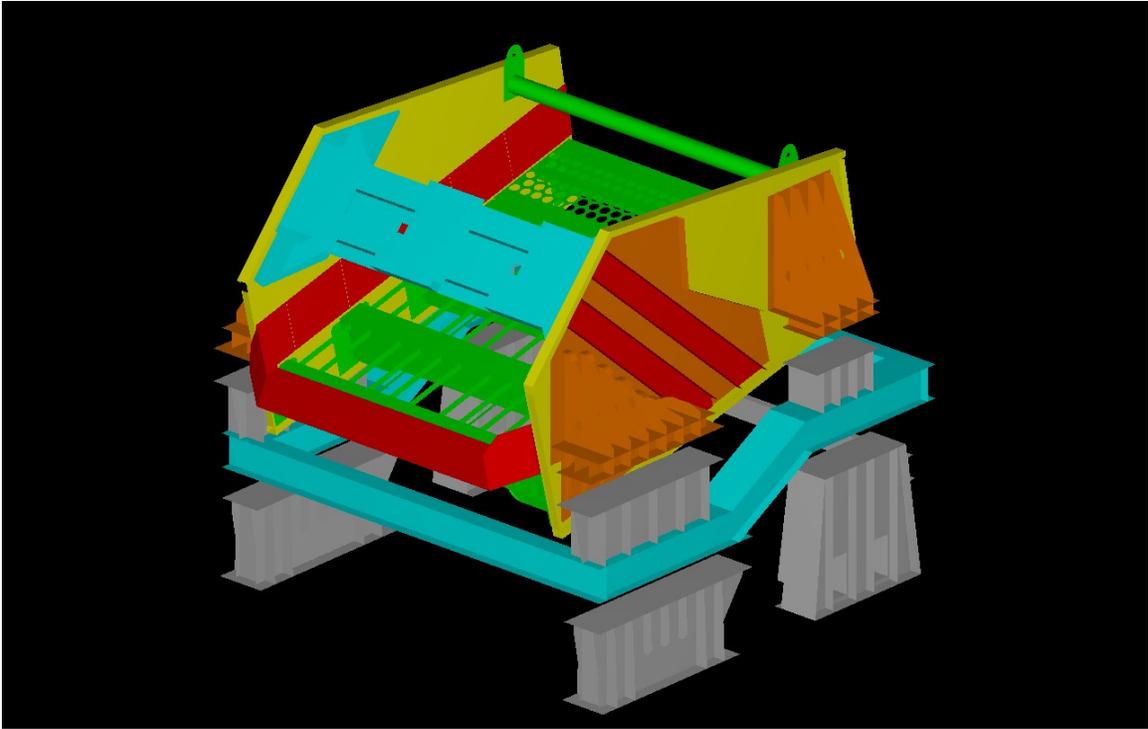


Figura 5.7 – Modelo geométrico da peneira vibratória R-TE 4000x11000

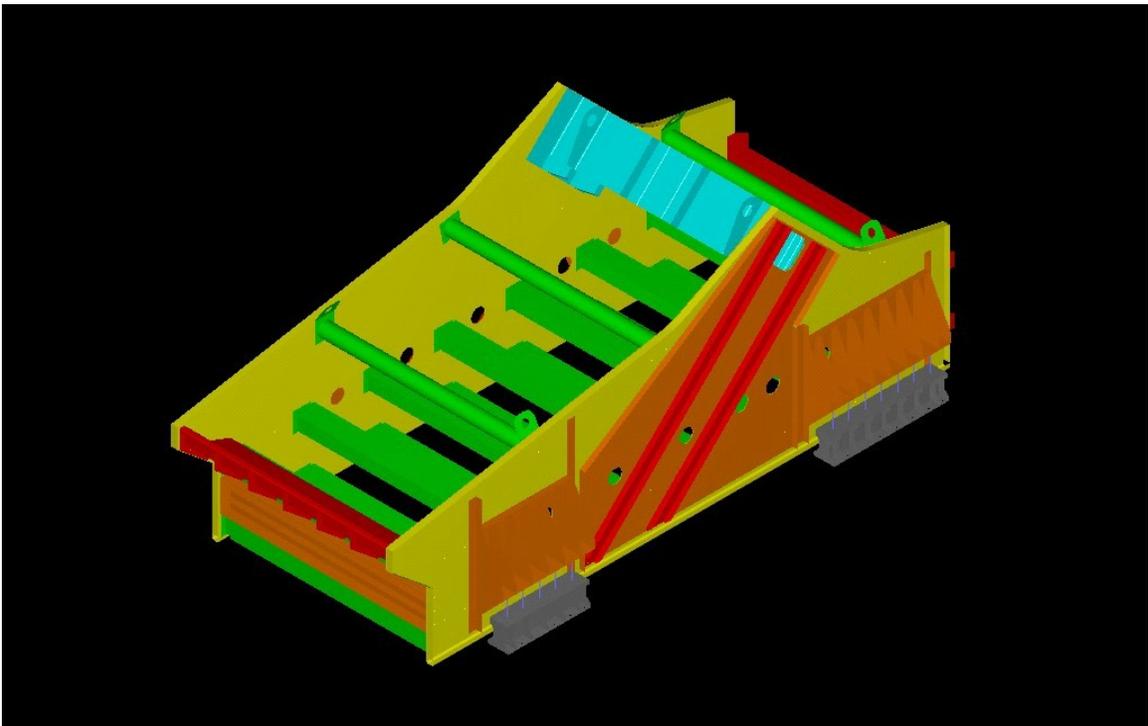


Figura 5.8 – Modelo geométrico da peneira vibratória R-MD 3200x7315

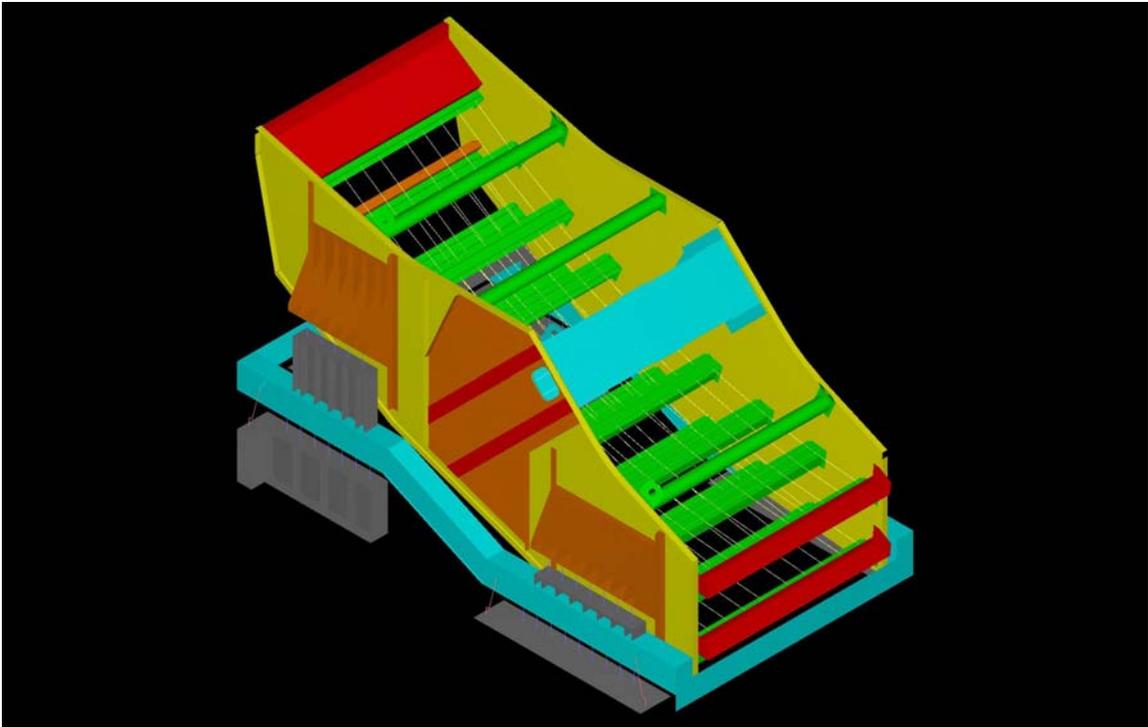


Figura 5.9 – Modelo geométrico da peneira vibratória RB-MD 3200x7315

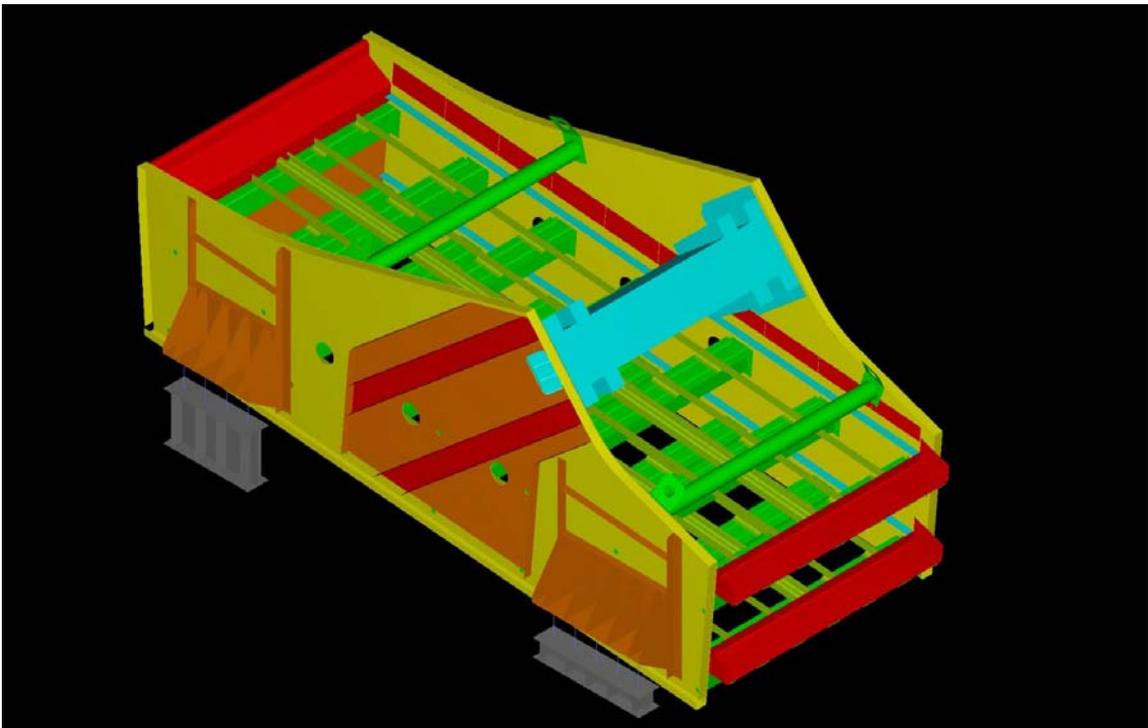


Figura 5.10 – Modelo geométrico da peneira vibratória R-MD 2438x6100

5.2 Ferramenta CAE – Modelo Estrutural

O modelo estrutural define a malha de elementos finitos que representa a discretização do equipamento para a análise matemática. Com exceção da modelagem geométrica, todas as outras etapas que compõem o processo de simulação numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos foram realizadas através do pacote comercial MSC.FEA 2005, o qual é uma integração dos *softwares* MSC.Patran e MSC.Nastran, responsáveis pelo pré e pós-processamento e solução do problema, respectivamente. O fornecedor da ferramenta CAE é a MSC Software Corporation. MSC (2003) apresenta um fluxograma do processo de simulação baseado no ponto de vista do usuário do *software*:

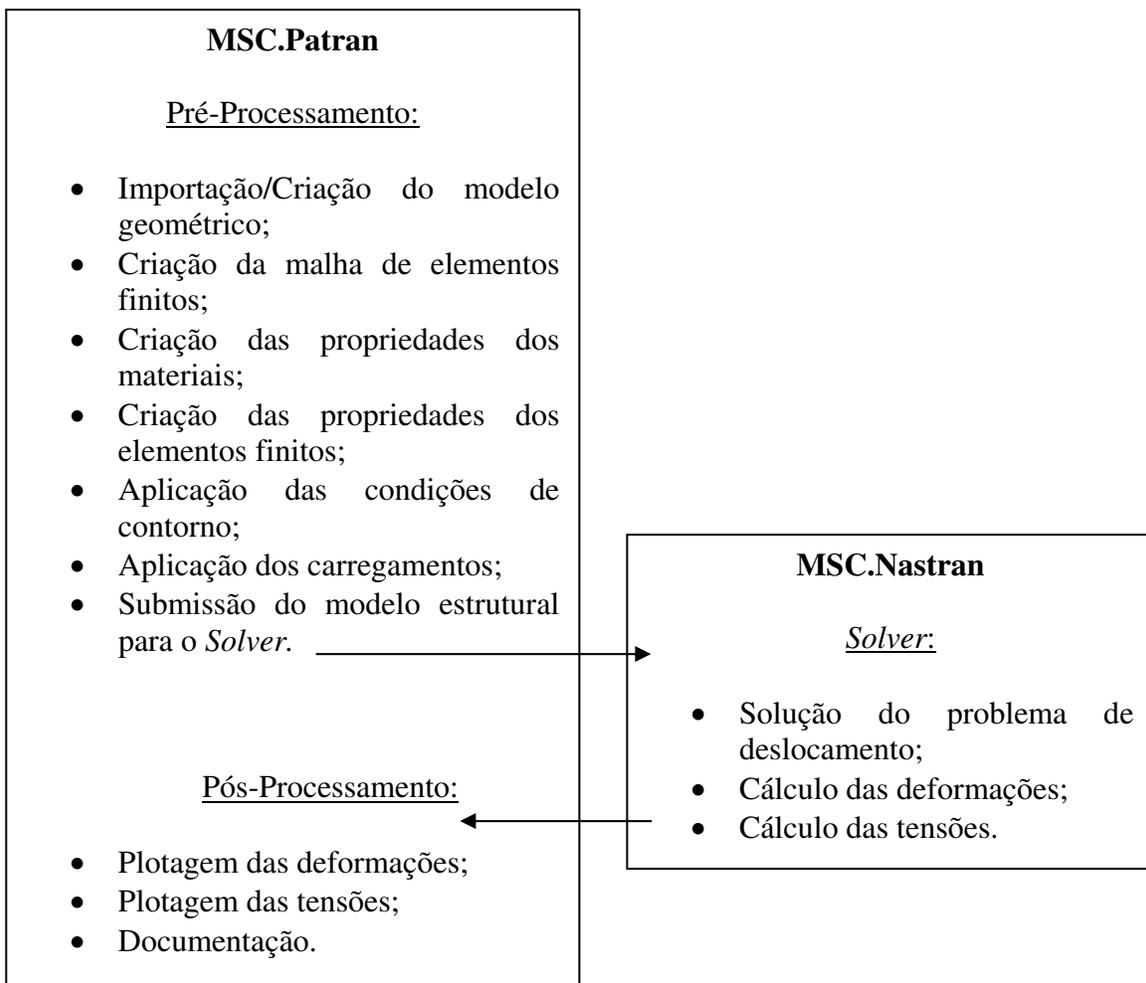


Figura 5.11 – Fluxograma do processo de simulação numérica

Após a importação do modelo geométrico (arquivo *parasolid*), a malha de elementos finitos é gerada e é composta basicamente de elementos bidimensionais. Os elementos de superfície são utilizados para representar estruturas as quais a espessura é pequena quando comparada com as outras dimensões; MSC (2003) recomenda a utilização de elementos bidimensionais quando a relação espessura/dimensão é de aproximadamente, 1:5. No caso dos elementos bidimensionais do MSC.FEA, os termos de rigidez existem para cinco dos possíveis seis graus de liberdade por nó, não existindo rigidez associada à rotação em torno da normal do elemento de superfície. Dessa forma o DOF correspondente a esta rotação deve ser restrito para evitar singularidades na matriz de rigidez. No Capítulo 2 foi apresentado um tutorial básico para a formulação dos elementos triangular linear e retangular bi-linear, determinando-se a matriz de rigidez dos mesmos. Sabe-se que o modelo numérico criado no software MSC.FEA é constituído por elementos de formulação semelhante aos analisados, mas infelizmente da formulação exata dos elementos de superfície CQUAD4 e CTRIA3 não é disponibilizada. As principais características dos elementos bidimensionais utilizados na modelagem estrutural são:

- Elemento CQUAD4: é o mais utilizado para modelagem de placas, cascas e membranas, podendo-se representar deformações no plano, flexão e cisalhamento transversal. O CQUAD4 é um elemento quadrilateral conectado por quatro nós:

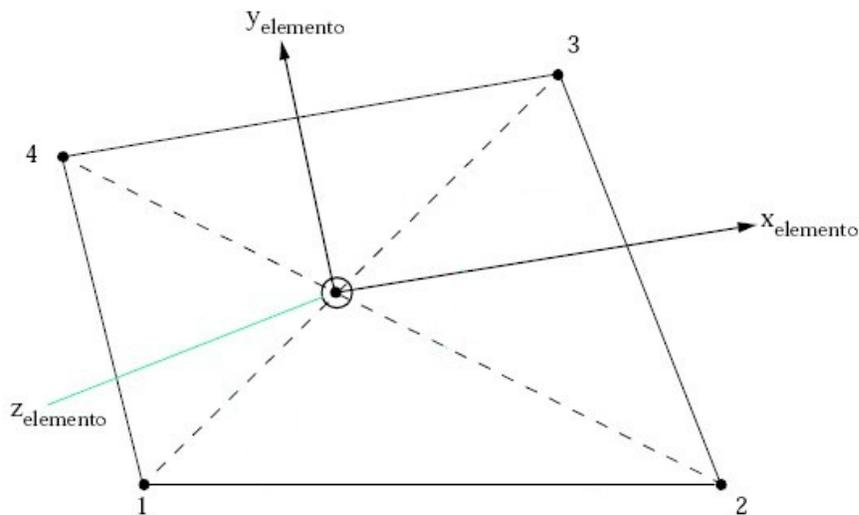


Figura 5.12 - Geometria e sistema de coordenadas do elemento CQUAD4 – MSC (2003)

- Elemento CTRIA3: é um elemento triangular conectado por três nós. Em geral o CTRIA3 é utilizado em transição de malhas e na discretização de superfícies com contorno irregular. Este elemento pode apresentar uma rigidez excessiva, particularmente para o comportamento de membrana, não é recomendada a utilização do CTRIA3 para discretizar locais de interesse da análise.

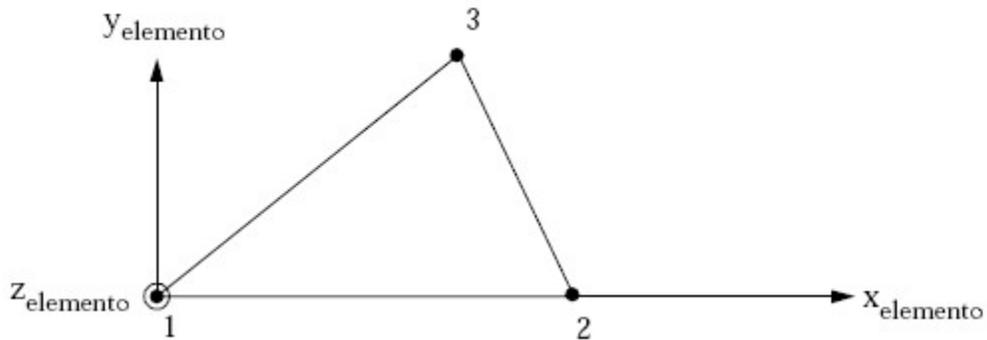


Figura 5.13 - Geometria e sistema de coordenadas do elemento CTRIA3 – MSC (2003)

Além destes também foram utilizados elementos unidimensionais (CBAR e CBUSH), elementos rígidos (RBE2) e elementos de massa (CONM2). As figuras e tabelas a seguir apresentam os modelos estruturais com seus respectivos dados:

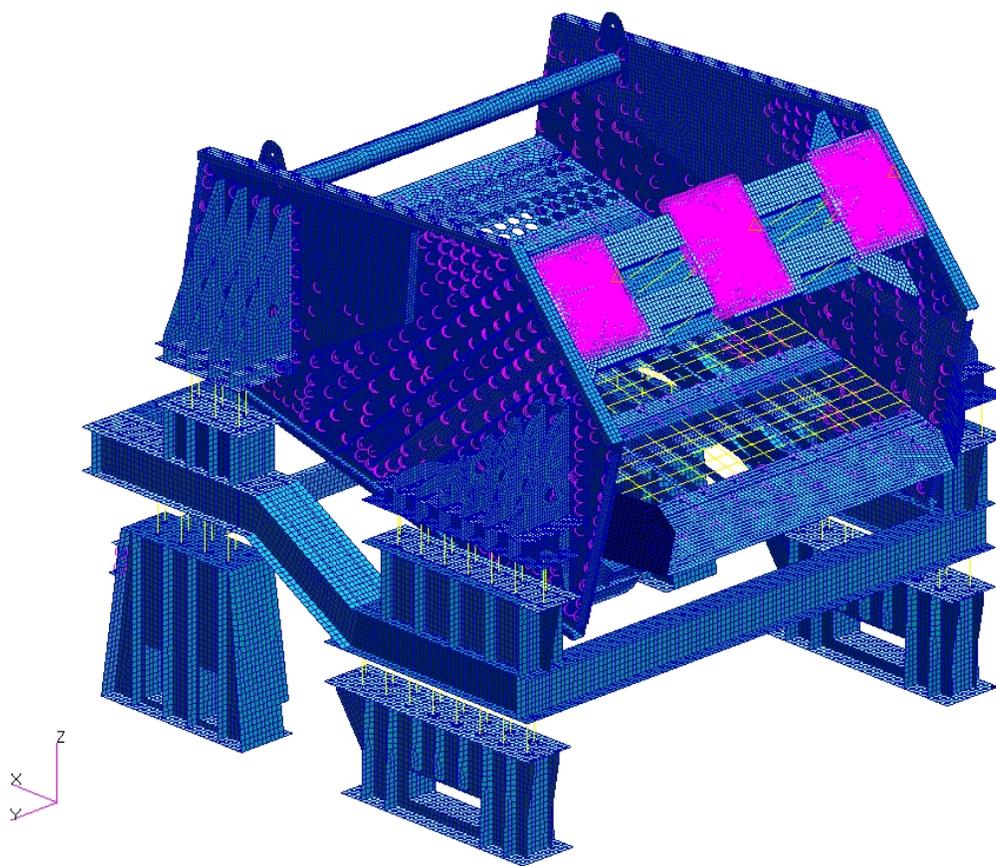


Figura 5.14 – Modelo estrutural da peneira vibratória R-TE 4000x11000

Tabela 5.1 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória R-TE 4000x11000

| | |
|----------------------------|---------|
| Número de nós | 168485 |
| Número de elementos CBAR | 1500 |
| Número de elementos CBUSH | 88 |
| Número de elementos CONM2 | 3 |
| Número de elementos CQUAD4 | 162408 |
| Número de elemento CTRIA3 | 4174 |
| Número de elemento RBE2 | 473 |
| Número de DOF | 1010910 |

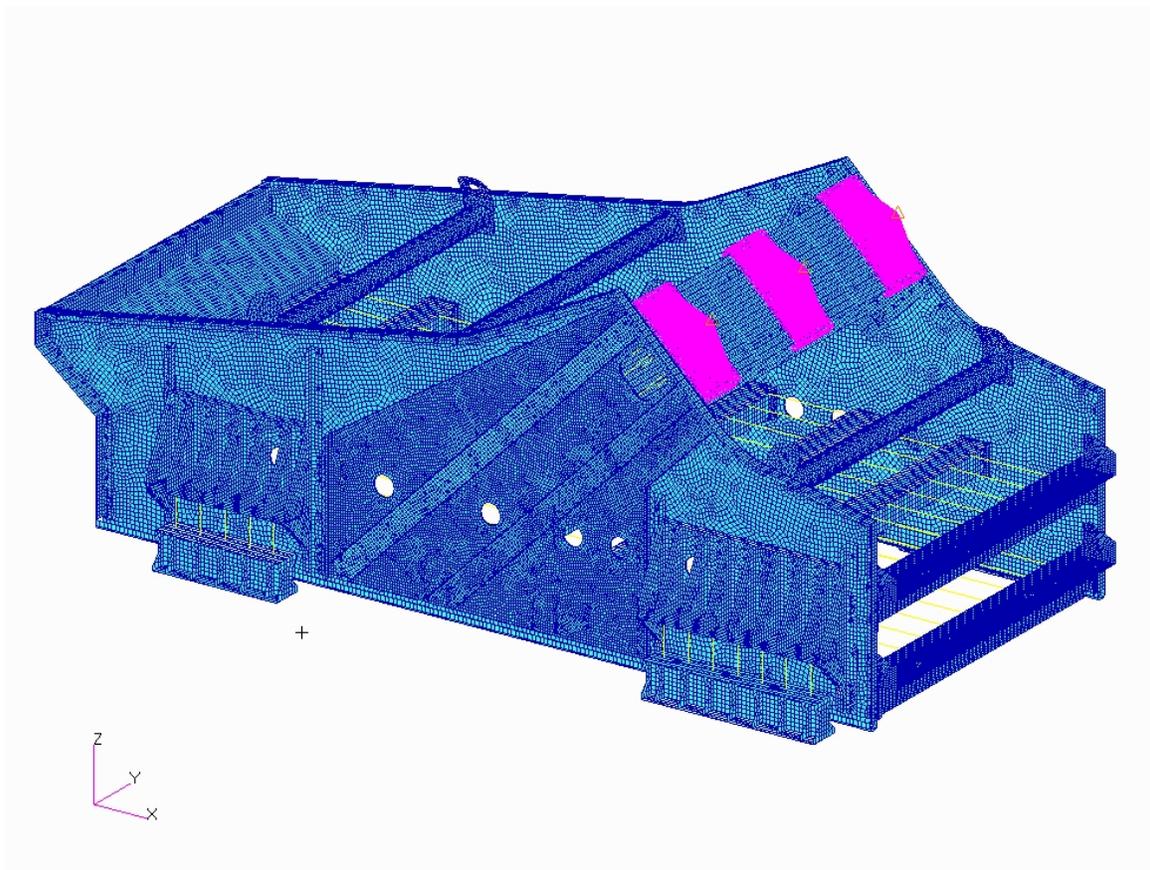


Figura 5.15 – Modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 3200x7315

Tabela 5.2 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 3200x7315

| | |
|----------------------------|---------|
| Número de nós | 173768 |
| Número de elementos CBAR | 1850 |
| Número de elementos CBUSH | 24 |
| Número de elementos CONM2 | 3 |
| Número de elementos CQUAD4 | 161453 |
| Número de elemento CTRIA3 | 16221 |
| Número de elemento RBE2 | 3 |
| Número de DOF | 1042608 |

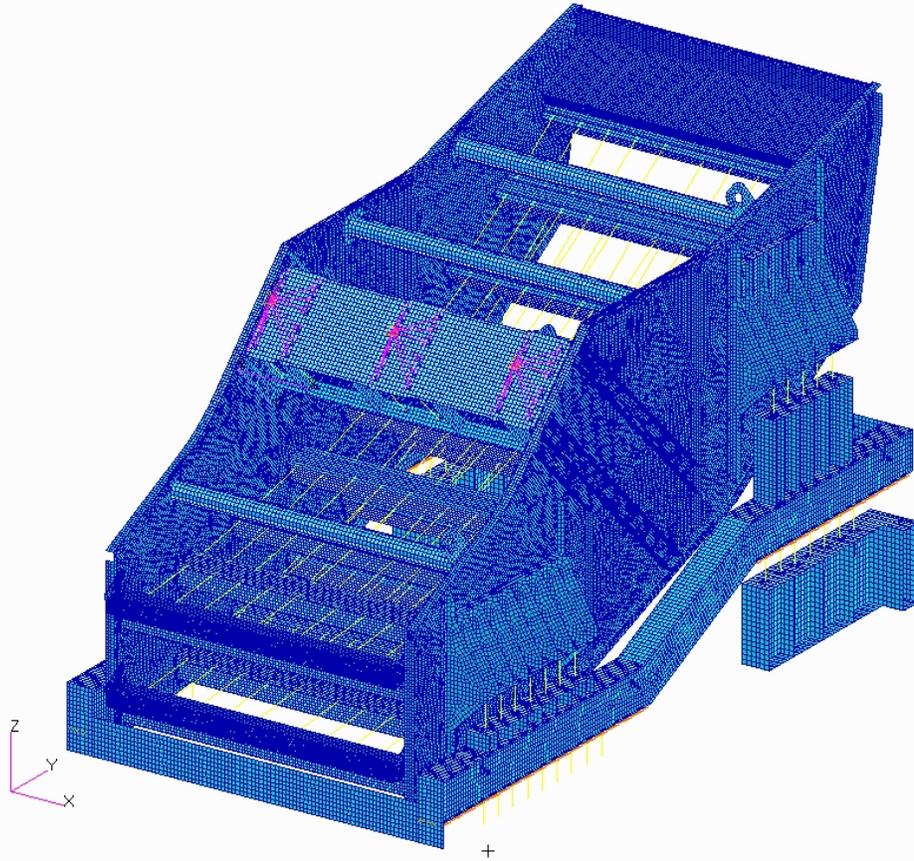


Figura 5.16 – Modelo estrutural da peneira vibratória RB-MD 3200x7315

Tabela 5.3 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória RB-MD 3200x7315

| | |
|----------------------------|---------|
| Número de nós | 220227 |
| Número de elementos CBAR | 1858 |
| Número de elementos CBUSH | 56 |
| Número de elementos CONM2 | 1463 |
| Número de elementos CQUAD4 | 212597 |
| Número de elemento CTRIA3 | 6476 |
| Número de elemento RBE2 | 3 |
| Número de DOF | 1321362 |

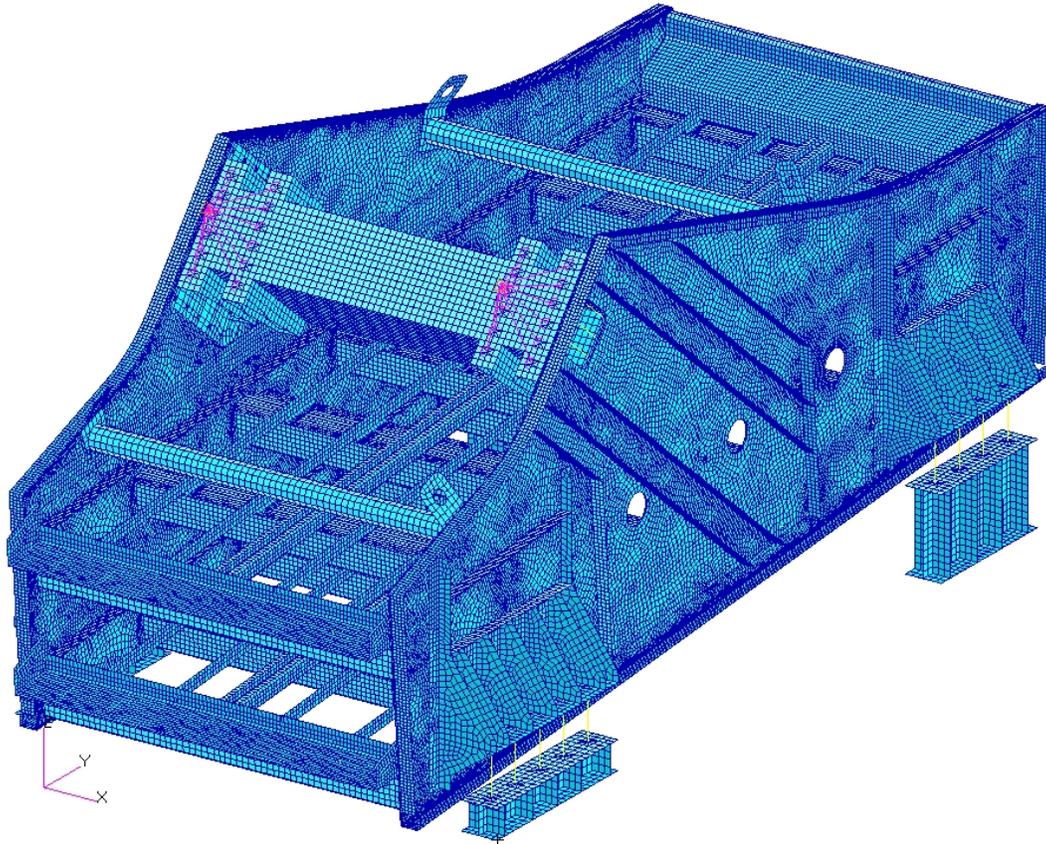


Figura 5.17 – Modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 2438x6100

Tabela 5.4 – Dados do modelo estrutural da peneira vibratória R-MD 2438x6100

| | |
|----------------------------|---------|
| Número de nós | 197400 |
| Número de elementos CBAR | 1396 |
| Número de elementos CBUSH | 18 |
| Número de elementos CONM2 | 2 |
| Número de elementos CQUAD4 | 185275 |
| Número de elemento CTRIA3 | 1216 |
| Número de elemento RBE2 | 2 |
| Número de DOF | 1184400 |

Seguindo o fluxograma apresentado na Figura 5.11, após a criação da malha de elementos finitos deve-se criar as propriedades dos materiais utilizados no projeto do equipamento. Como a maioria dos componentes da caixa da peneira é fabricada com o aço estrutural ASTM A36, o material criado para a simulação possui as seguintes propriedades:

Tabela 5.5 – Propriedades do aço estrutural ASTM A36

| | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| Módulo de elasticidade | $2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ |
| Coefficiente de Poisson | 0,3 |
| Densidade | $7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ |
| Características do Material | Homogêneo Isotrópico |

As propriedades dos elementos finitos de superfície foram criadas através da aplicação das espessuras das chapas correspondentes aos desenhos e da propriedade do material criado anteriormente.

Com relação às condições de contorno, estas são restritas nos seis graus de liberdade na região da base da peneira como pode ser visto na Figuras 5.18:

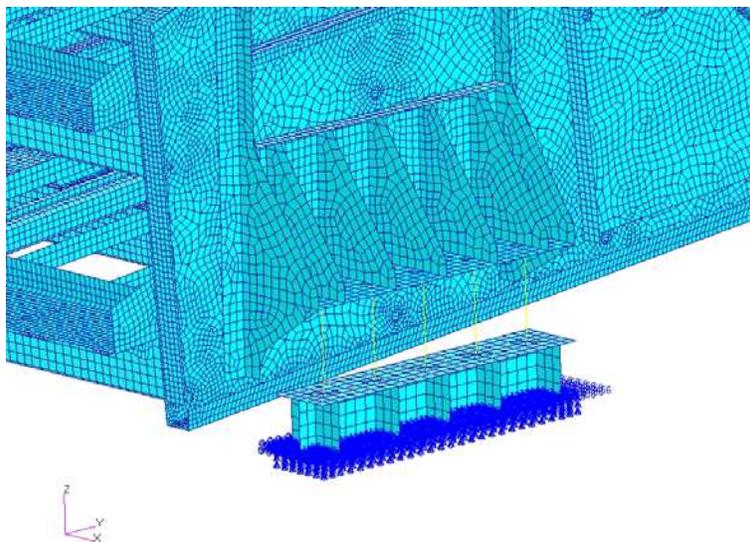


Figura 5.18 – Condição de contorno das peneiras vibratórias

Já o carregamento dinâmico é aplicado em função da frequência de operação da máquina e dos valores da força de impacto máxima referenciadas nos catálogos do fornecedor dos excitadores (VIMEC, 2003, p. 5 e VIMEC, 2004, p. 5).

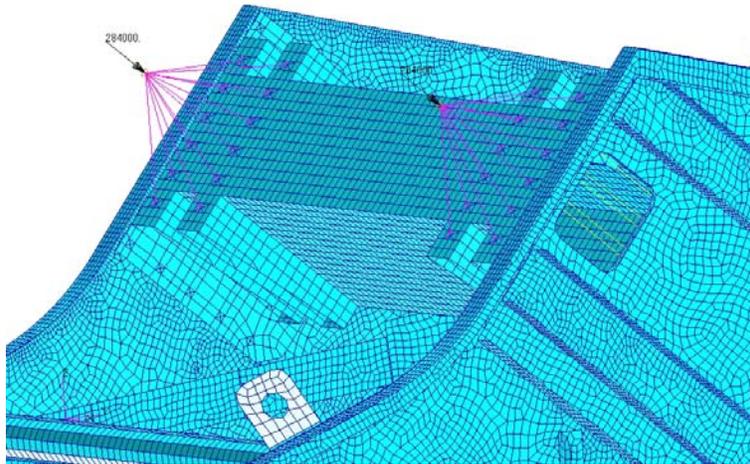


Figura 5.19 – Carregamento das peneiras vibratórias

Em seguida o modelo estrutural é submetido às etapas de solução e pós-processamento, onde os resultados obtidos serão apresentados no próximo capítulo.

5.3 Instrumentação – Extensometria

Todos os instrumentos e sistemas utilizados nas medições extensométricas foram fornecidas pela HBM (*Hottinger Baldwin Messtechnik*) do Brasil. O primeiro passo para colagem dos *strain gages* é a definição dos pontos mais solicitados da peneira vibratória, os quais são obtidos através da simulação numérica. Em seguida é dado o início do processo de colagem, conforme mencionado no Capítulo 4:

1. A superfície deve ser lixada, alternando-se a linha de trabalho em 45° para que exista uma rugosidade mínima que facilite a colagem do extensômetro (Figura 5.20). Em geral utiliza-se uma lixa de semi-acabamento a seco para materiais metálicos de granulometria 180 (Figura 5.21).

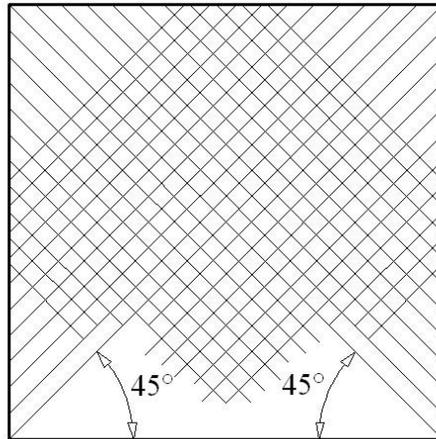


Figura 5.20 – Esquema de lixamento da superfície analisada



Figura 5.21 – Etapa de lixamento da superfície analisada

2. Após a marcação para auxílio na orientação do *strain gage*, é realizado o condicionamento da superfície com gaze umedecida no solvente RMS 1, que é uma mistura de isopropanol e acetona, e age sobre contaminantes em geral (Figura 5.22).



Figura 5.22 – Processo de condicionamento da superfície

3. Foram utilizados *strain gages* roseta 45° (Series Y) do tipo 6/120RY11 (referência 1-RY11-6/120); resistência de $120 \Omega \pm 0,35\%$; Sensibilidade longitudinal $1,95 \pm 1\%$; e sensibilidade transversal $-0,2 \%$ (Figura 5.23). Além destes, sapatas de soldagem compostas de cobre niquelado com suporte de poliamida indicados para medições até 180°C também foram empregados (Figura 5.24).

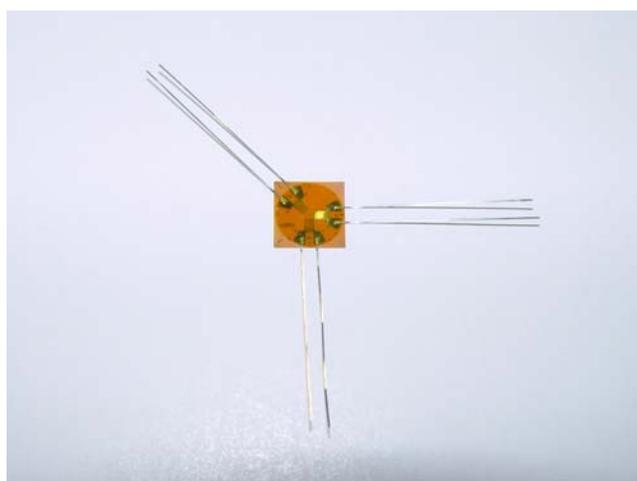


Figura 5.23 – *Strain gage* roseta 45° (1-RY-6/120)

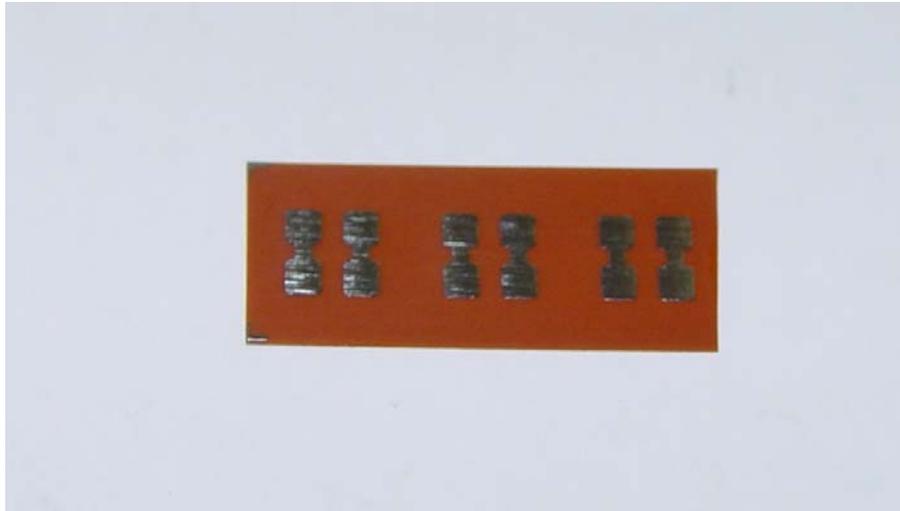


Figura 5.24 – Sapatas de soldagem

4. Os *strain gages* e as sapatas de soldagem são fixados na superfície com a cola Z 70 de cura a frio (tempo de cura: 1 minuto a 20 °C e umidade relativa entre 30 - 80%). Em seguida a fiação e os conectores da grade do extensômetro são soldados sobre as sapatas de soldagem (Figura 5.25).



Figura 5.25 – Colagem dos *strain gages*

5. O processo de acabamento tem como objetivo evitar que qualquer tipo de movimento da fiação danifique a conexão entre a grade do extensômetro e a mesma. Para isto, os cabos são fixados em toda a sua extensão por meio de fita adesiva de alta resistência e aderência (nome comercial: *silver tape*) até o sistema de aquisição de dados.



Figura 5.26 – Acabamento do *strain gage*

6. Como os extensômetros são utilizados apenas uma vez em teste de fábrica não há necessidade da proteção do mesmo assim, finalizada a etapa de acabamento a fiação é conectada ao sistema de aquisição de dados MGCplus (Figura 5.27).



Figura 5.27 – Sistema de aquisição de dados MGCplus

7. Em seguida é realizada a etapa de aquisição de sinal dinâmico com auxílio do *software* Catman versão 4.5 R1, instalado em um *laptop*. A Figura (5.28) ilustra um sinal típico de tensão (deformação) de uma peneira vibratória.

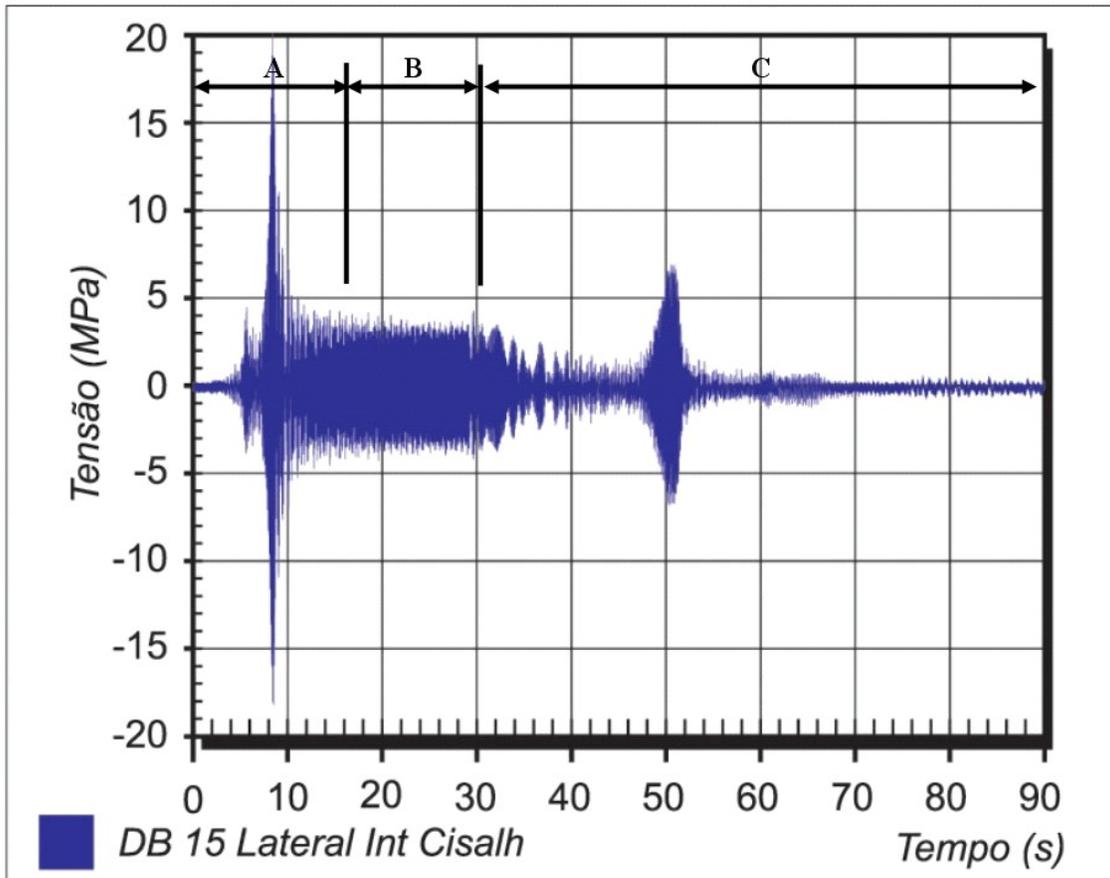


Figura 5.28 – Sinal típico de tensão (deformação) de uma peneira vibratória

- onde: **A** – *Start* da peneira vibratória;
B – Peneira vibratória operando em regime permanente (região de interesse);
C – Parada da peneira vibratória.

O passo final da medição experimental é o tratamento do sinal, o qual também é realizado com o *software* Catman. Entre as operações realizadas neste passo estão:

- Filtragem digital passa-baixa com o intuito de retirar ruídos indesejáveis do sinal;
- Análise de picos da região de interesse do sinal (Figura 5.29);
- Obtenção do valor médio máximo e mínimo da (tensão) deformação (Figura 5.30);
- Cálculo das tensões principais;
- Cálculo da tensão de von Mises.

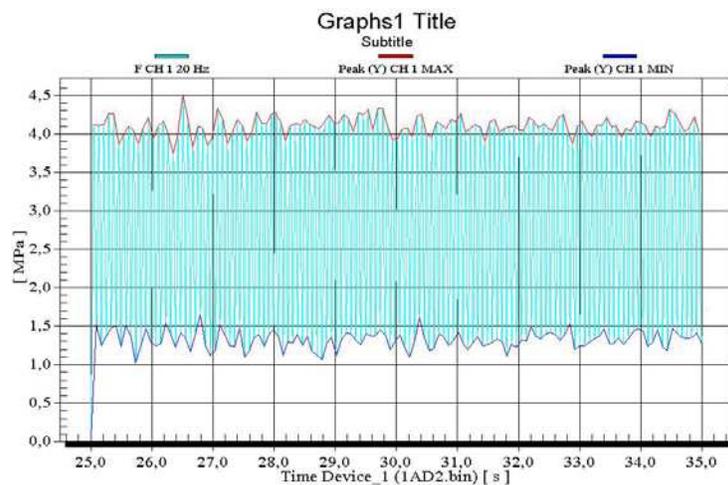


Figura 5.29 – Análise de picos do sinal

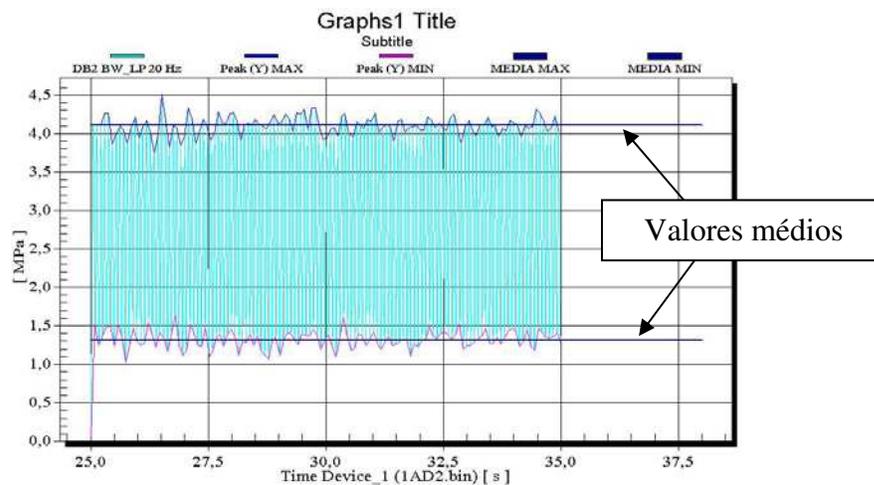


Figura 5.30 – Valor médio e mínimo de tensão (deformação)

Os procedimentos ilustrados acima integram de forma prática os diversos aspectos do projeto mecânico de peneiras vibratórias. O próximo capítulo trata da análise numérica e experimental das peneiras, confirmando as hipóteses assumidas na modelagem e na sistemática do processo de medição.

Capítulo 6

Análise de Resultados

6.1 Peneira vibratória R-TE 4000x11000

A Tabela 6.1 apresenta alguns dados técnicos relacionados à peneira vibratória R-TE 4000x11000 e a Figura 6.1 apresenta a peneira vibratória. A Tabela 6.2 em conjunto com a Figura 6.2 apresenta os resultados da análise modal numérica; as Figuras 6.3 e 6.4 apresentam os resultados em tensão de von Mises [MPa] do modelo de elementos finitos; nas Figuras 6.5 a 6.7 são apresentados os pontos medidos experimentalmente e os elementos finitos analisados para posterior comparação.

Tabela 6.1 – Dados técnicos da peneira vibratória R-TE 4000x11000

| | |
|---------------------------------------|------------------|
| Material processado | Areia betuminosa |
| Capacidade de carga | 10500 t/h |
| Força dinâmica máxima dos excitadores | 1698 kN |
| Massa total | 51650 kg |
| Massa vibrante | 121750 kg |
| Altura do equipamento | 5797 mm |
| Largura do equipamento | 8082 mm |
| Comprimento do equipamento | 11401 mm |



Figura 6.1 – Peneira vibratória R-TE 4000x11000

Tabela 6.2 – Frequências naturais da peneira R-TE 4000x11000 abaixo de 20 Hz

| Modo | Frequência [Hz] |
|-------------|----------------------------|
| 1 | 0,54 |
| 2 | 0,80 |
| 3 | 0,97 |
| 4 | 1,33 |
| 5 | 1,36 |
| 6 | 1,83 |
| 7 | 2,22 |
| 8 | 2,92 |
| 9 | 3,06 |
| 10 | 3,14 |
| 11 | 3,40 |
| 12 | 3,90 |
| 13 | 12,48 |
| 14 | 12,92 |
| 15 | 14,78 |
| 16 | 15,15 |
| 17 | 17,34 |
| 18 | 19,28 |

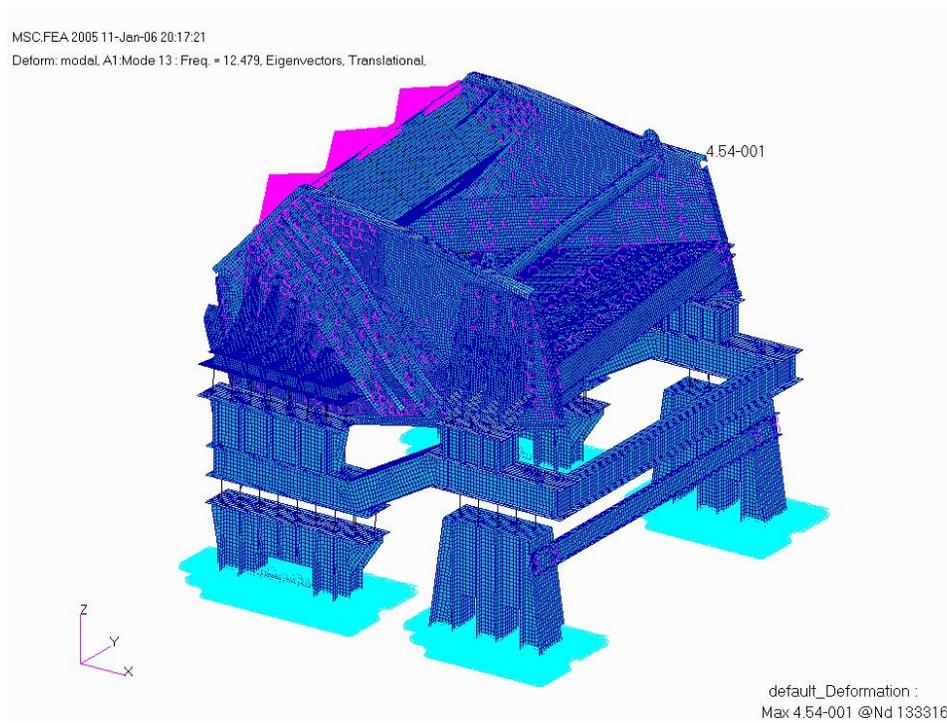


Figura 6.2 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória R-TE 4000x11000

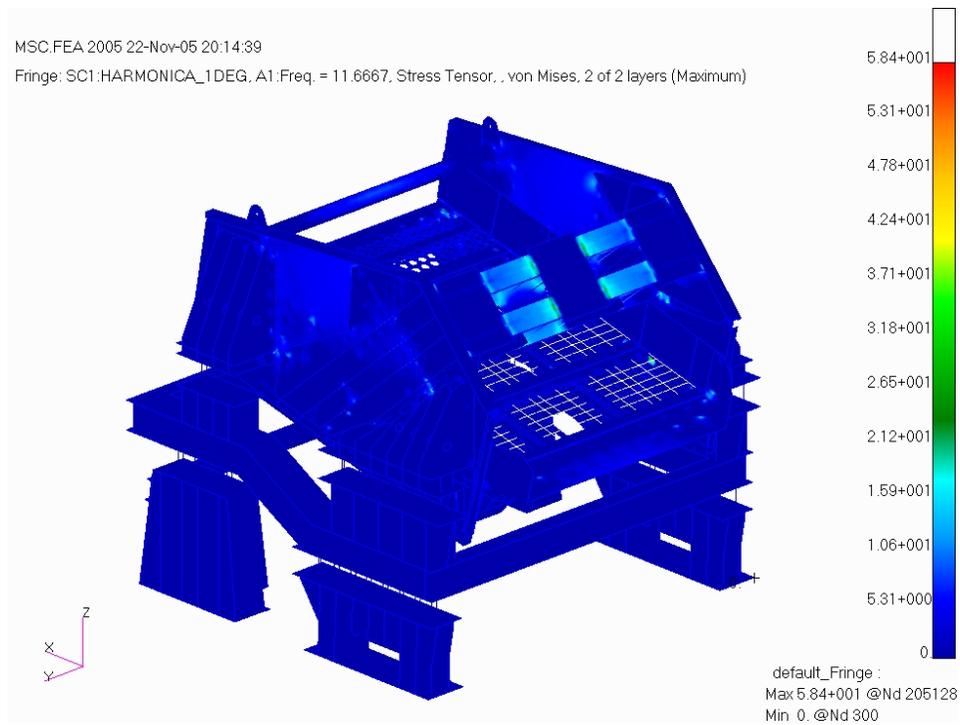


Figura 6.3 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (R-TE 4000x11000)

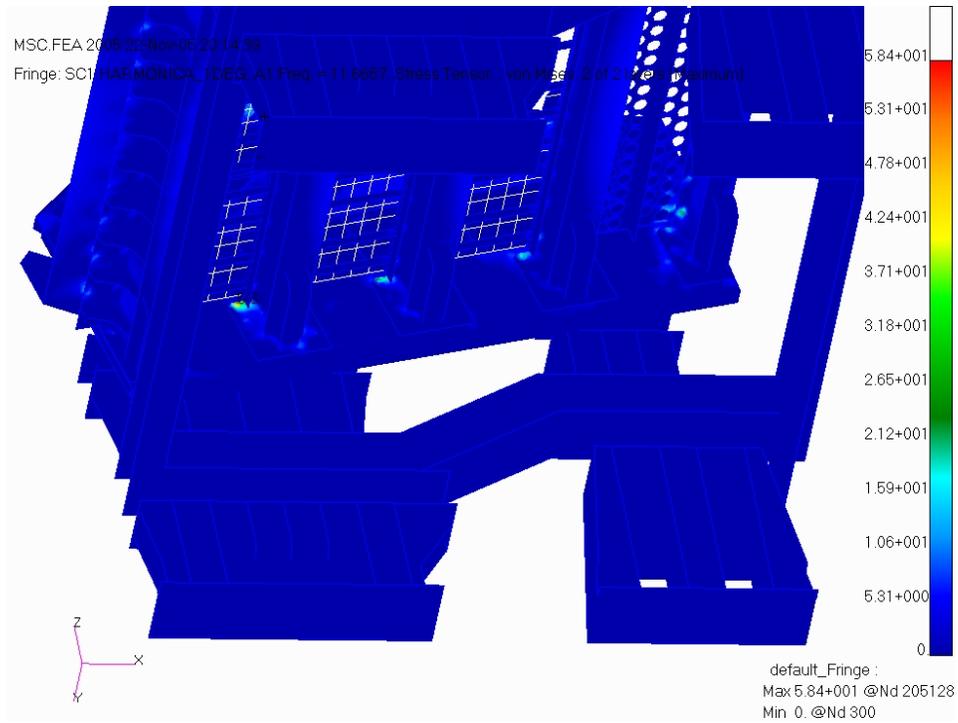


Figura 6.4 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (R-TE 4000x11000)

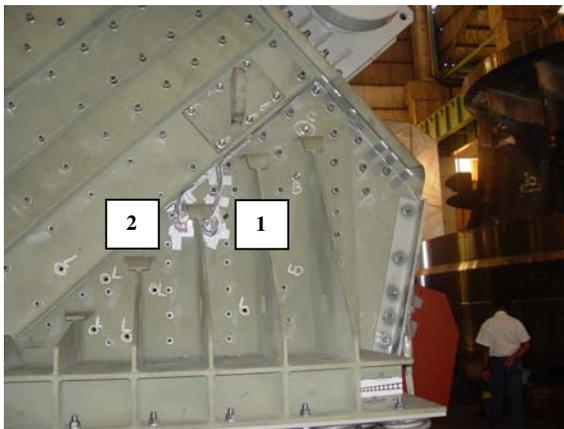


Figura 6.5a – Pontos analisados 1 e 2

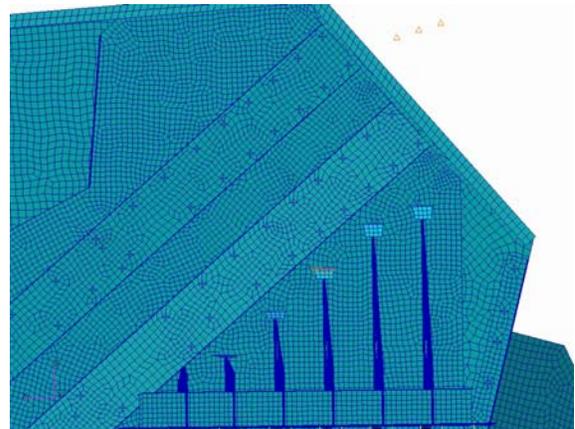


Figura 6.5b – Elementos analisados 1 e 2

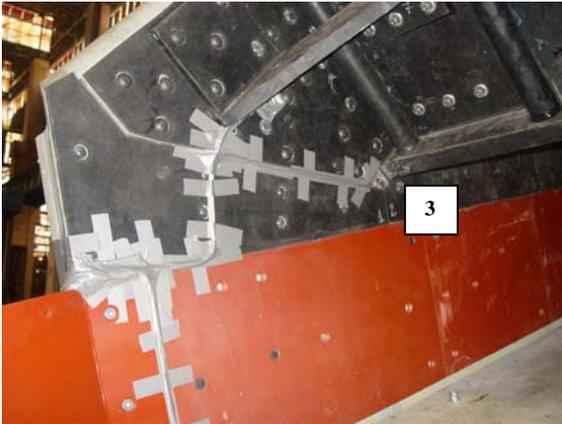


Figura 6.6a – Ponto analisado 3

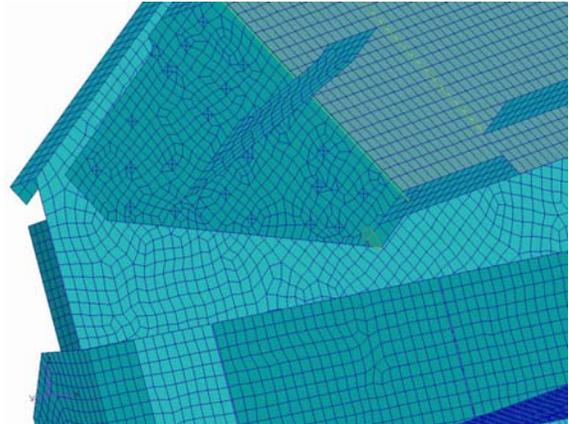


Figura 6.6b – Elementos analisados 3



Figura 6.7a – Ponto analisado 4

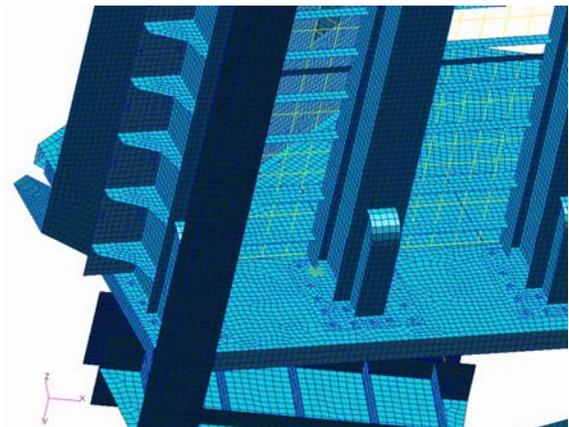


Figura 6.7b – Elementos analisados 4

6.2 Peneira vibratória R-MD 3200x7315

A Tabela 6.3 apresenta alguns dados técnicos relacionados à peneira vibratória R-MD 3200x7315 e a Figura 6.8 apresenta a peneira vibratória. A Tabela 6.4 em conjunto com a Figura 6.9 apresenta os resultados da análise modal numérica; as Figuras 6.10 e 6.11 apresentam os resultados em tensão de von Mises [MPa] do modelo de elementos finitos; nas Figuras 6.12 e 6.13 são apresentados os pontos medidos experimentalmente e os elementos finitos analisados para posterior comparação.

Tabela 6.3 – Dados técnicos da peneira vibratória R-MD 3200x7315

| | |
|---------------------------------------|------------------|
| Material processado | Minério de cobre |
| Capacidade de carga | 3000 t/h |
| Força dinâmica máxima dos excitadores | 1206 kN |
| Massa total | 30350 kg |
| Massa vibrante | 25070 kg |
| Altura do equipamento | 3809 mm |
| Largura do equipamento | 5828 mm |
| Comprimento do equipamento | 8397 mm |



Figura 6.8 – Peneira vibratória R-MD 3200x7315

Tabela 6.4 – Frequências naturais da peneira R-MD 3200x7315 abaixo de 20 Hz

| Modo | Frequência [Hz] |
|-------------|------------------------|
| 1 | 1,07 |
| 2 | 1,09 |
| 3 | 1,31 |
| 4 | 1,67 |
| 5 | 1,94 |
| 6 | 2,33 |
| 7 | 9,38 |
| 8 | 14,08 |
| 9 | 17,32 |
| 10 | 18,48 |

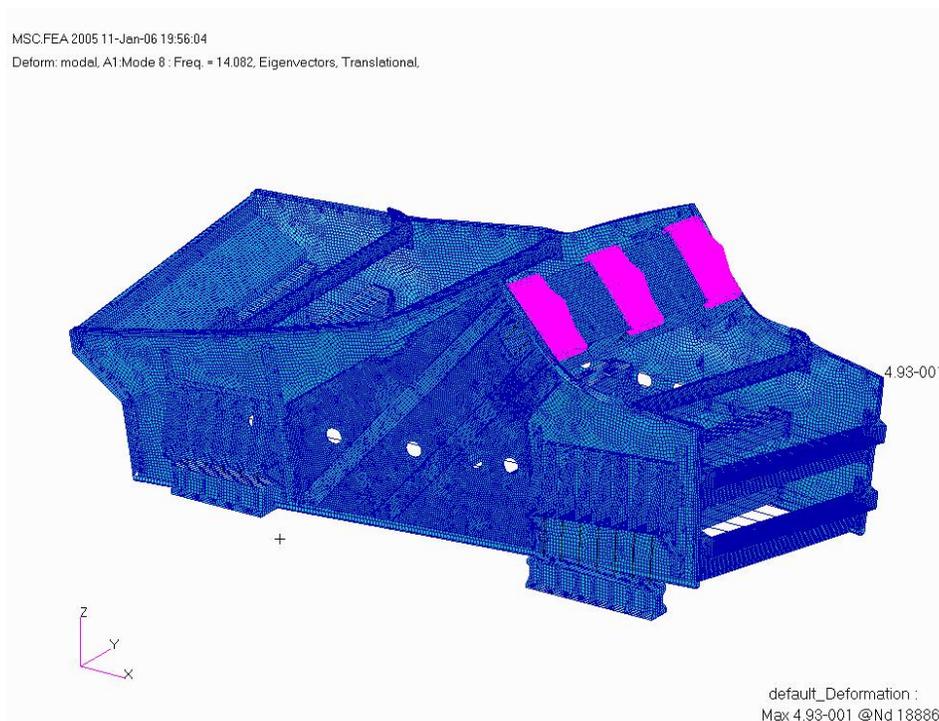


Figura 6.9 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória R-MD 3200x7315

MSC.FEA 2005 18-Nov-05 21:31:43

Fringe: SC1:HARMONIC:SC1, A1:Freq. = 13.6667, Stress Tensor, , von Mises, 2 of 2 layers (Maximum)

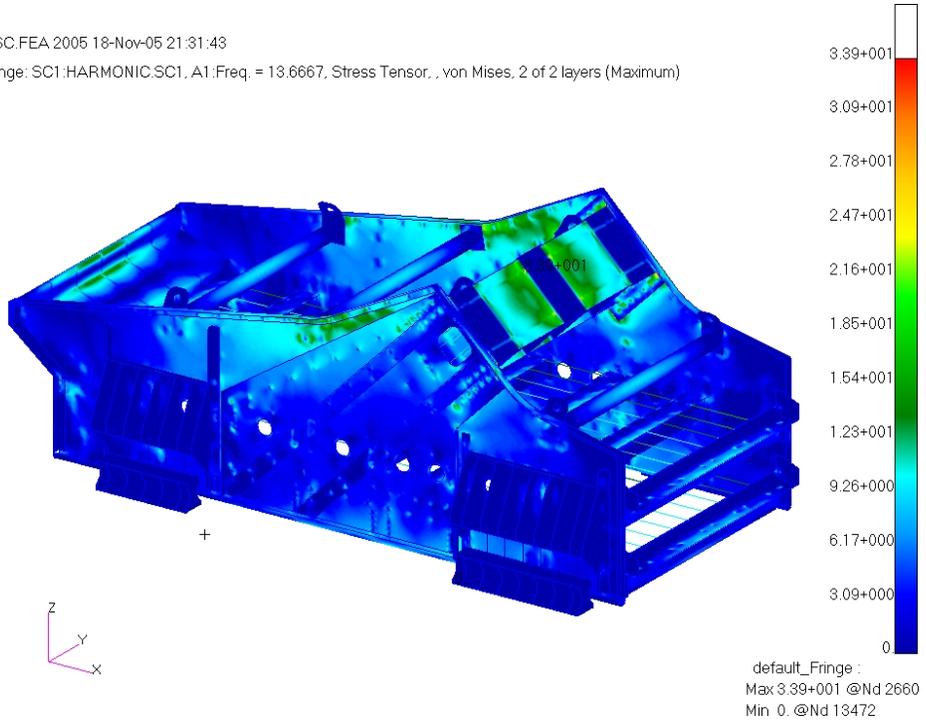


Figura 6.10 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (R-MD 3200x7315)

MSC.FEA 2005 18-Nov-05 22:09:24

Fringe: SC1:HARMONIC:SC1, A1:Freq. = 13.6667, Stress Tensor, , von Mises, 2 of 2 layers (Maximum)

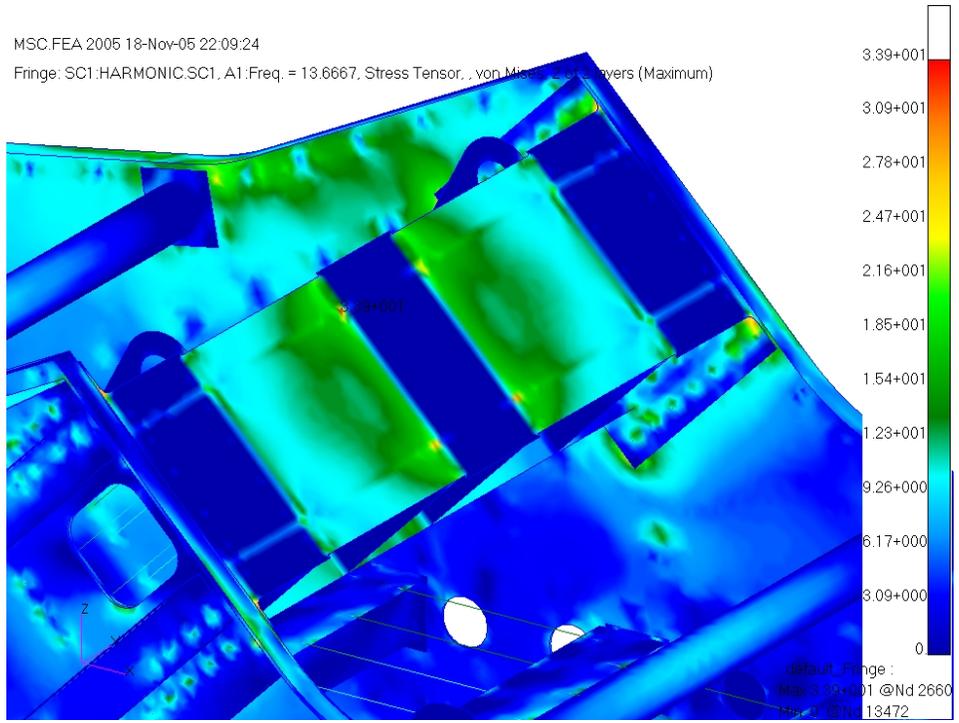


Figura 6.11 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (R-MD 3200x7315)

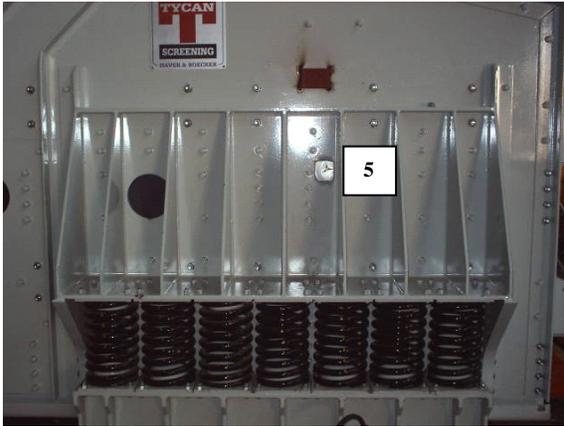


Figura 6.12a – Ponto analisado 5

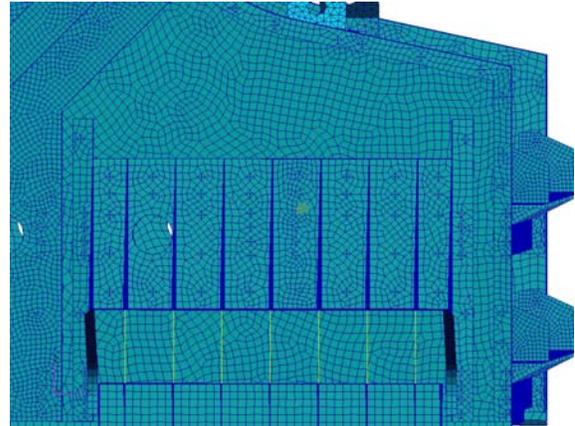


Figura 6.12b – Elementos analisados 5

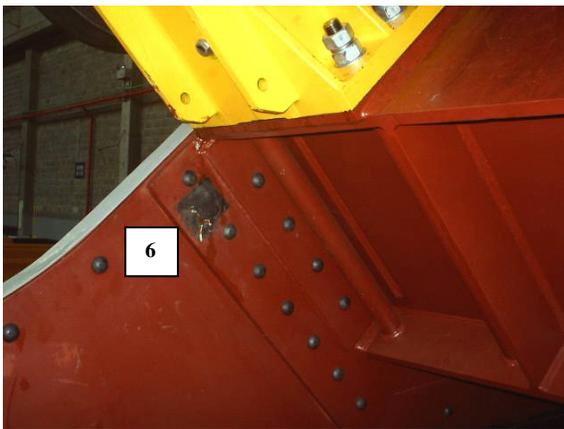


Figura 6.13a – Ponto analisado 6

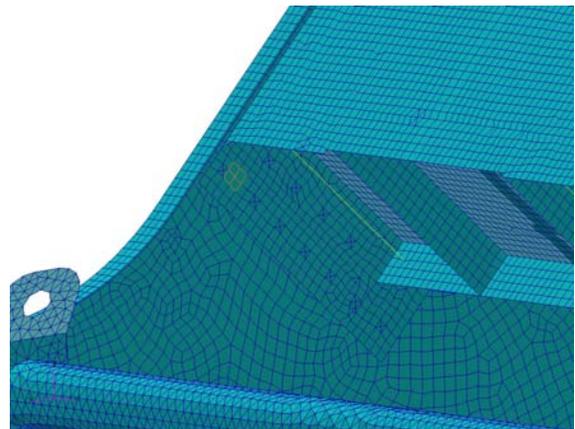


Figura 6.13b – Elementos analisados 6

6.3 Peneira vibratória RB-MD 3200x7315

A Tabela 6.5 apresenta alguns dados técnicos relacionados à peneira vibratória RB-MD 3200x7315 e a Figura 6.14 apresenta a peneira vibratória; A Tabela 6.6 em conjunto com a Figura 6.15 apresenta os resultados da análise modal numérica; as Figuras 6.16 e 6.17 apresentam os resultados em tensão de von Mises [MPa] do modelo de elementos finitos; nas Figuras 6.18 são apresentados os pontos medidos experimentalmente e os elementos finitos analisados para posterior comparação.

Tabela 6.5 – Dados técnicos da peneira vibratória RB-MD 3200x7315

| | |
|---------------------------------------|------------------|
| Material processado | Minério de cobre |
| Capacidade de carga | 3620 t/h |
| Força dinâmica máxima dos excitadores | 1206 kN |
| Massa total | 41500 kg |
| Massa vibrante | 25700 kg |
| Altura do equipamento | 4957 mm |
| Largura do equipamento | 6079 mm |
| Comprimento do equipamento | 7830 mm |



Figura 6.14 – Peneira vibratória RB-MD 3200x7315

Tabela 6.6 – Frequências naturais da peneira RB-MD 3200x7315 abaixo de 20 Hz

| Modo | Frequência [Hz] |
|------|-----------------|
| 1 | 0,66 |
| 2 | 0,69 |
| 3 | 0,93 |
| 4 | 1,24 |
| 5 | 1,40 |
| 6 | 1,64 |
| 7 | 2,48 |
| 8 | 2,87 |
| 9 | 2,95 |
| 10 | 3,14 |
| 11 | 3,26 |
| 12 | 3,28 |
| 13 | 5,44 |
| 14 | 9,43 |
| 15 | 11,16 |
| 16 | 14,29 |
| 17 | 16,79 |

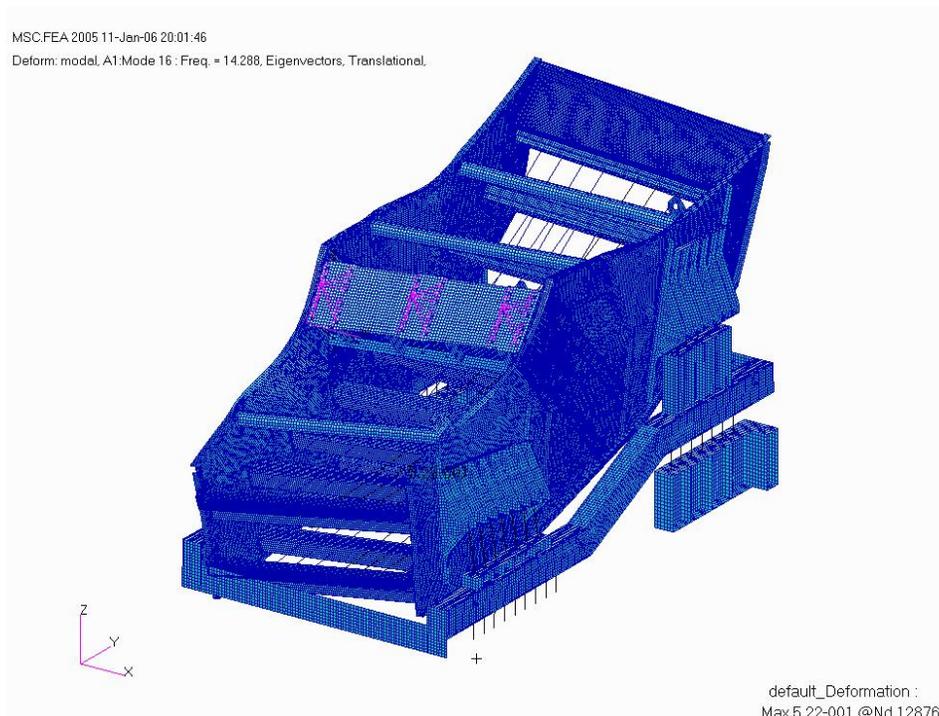


Figura 6.15 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória RB-MD 3200x7315

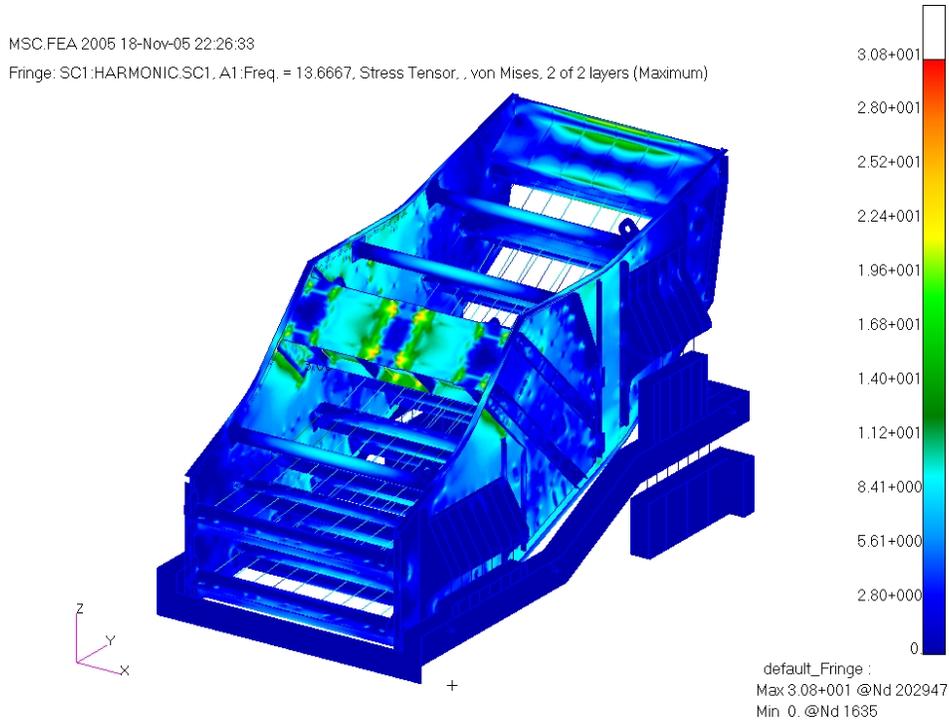


Figura 6.16 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (RB-MD 3200x7315)

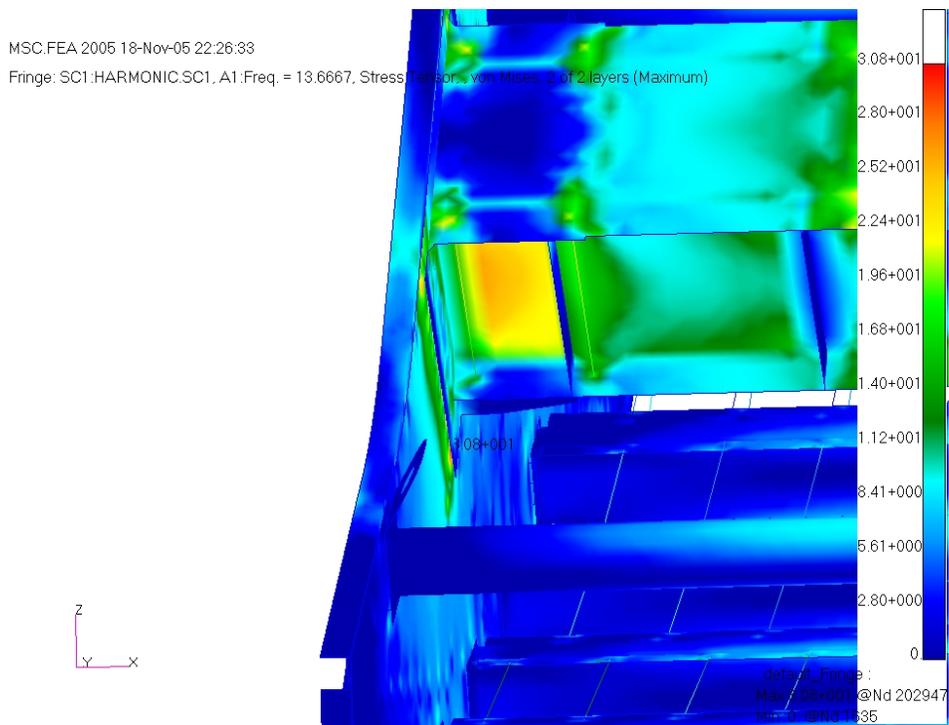


Figura 6.17 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (RB-MD 3200x7315)

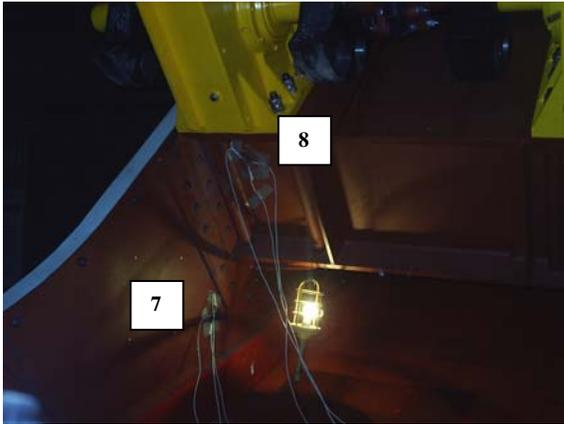


Figura 6.18a – Pontos analisados 7 e 8

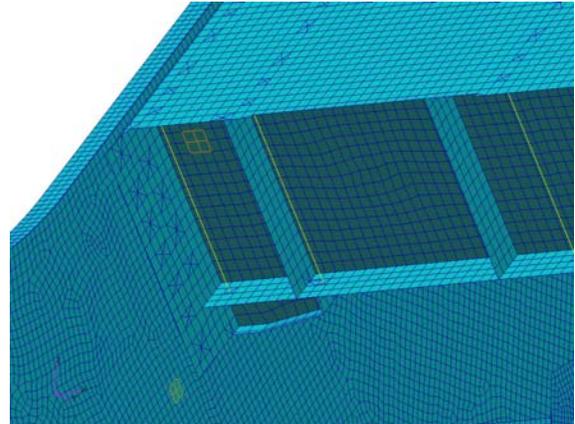


Figura 6.18b – Elementos analisados 7 e 8

6.4 Peneira vibratória R-MD 2438x6100

A Tabela 6.7 apresenta alguns dados técnicos relacionados à peneira vibratória R-MD 2438x6100 e a Figura 6.19 apresenta a peneira vibratória; A Tabela 6.8 em conjunto com a Figura 6.20 apresenta os resultados da análise modal numérica; as Figuras 6.21 e 6.22 apresentam os resultados em tensão de von Mises [MPa] do modelo de elementos finitos; nas Figuras 6.23 são apresentados os pontos medidos experimentalmente e os elementos finitos analisados para posterior comparação.

Tabela 6.7 – Dados técnicos da peneira vibratória R-MD 2438x6100

| | |
|---------------------------------------|--------------------|
| Material processado | Minério de bauxita |
| Capacidade de carga | 905 t/h |
| Força dinâmica máxima dos excitadores | 568 kN |
| Massa total | 20530 kg |
| Massa vibrante | 12300 kg |
| Altura do equipamento | 4907 mm |
| Largura do equipamento | 5132 mm |
| Comprimento do equipamento | 6830 mm |



Figura 6.19 – Peneira vibratória R-MD 2438x6100

Tabela 6.8 – Frequências naturais da peneira R-MD 3200x7315 abaixo de 20 Hz

| Modo | Frequência [Hz] |
|-------------|----------------------------|
| 1 | 1,02 |
| 2 | 1,17 |
| 3 | 1,40 |
| 4 | 2,06 |
| 5 | 2,08 |
| 6 | 2,40 |
| 7 | 10,29 |
| 8 | 12,52 |
| 9 | 15,46 |
| 10 | 17,56 |
| 11 | 18,76 |

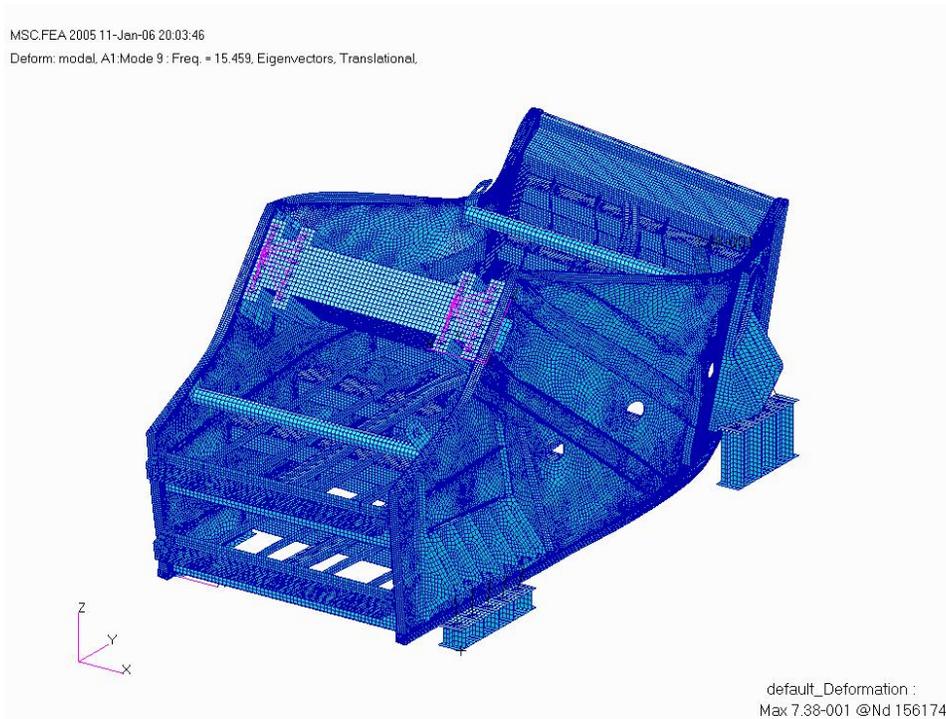


Figura 6.20 – Modo de vibrar associada à frequência natural mais próxima da frequência de operação da peneira vibratória R-MD 2438x6100

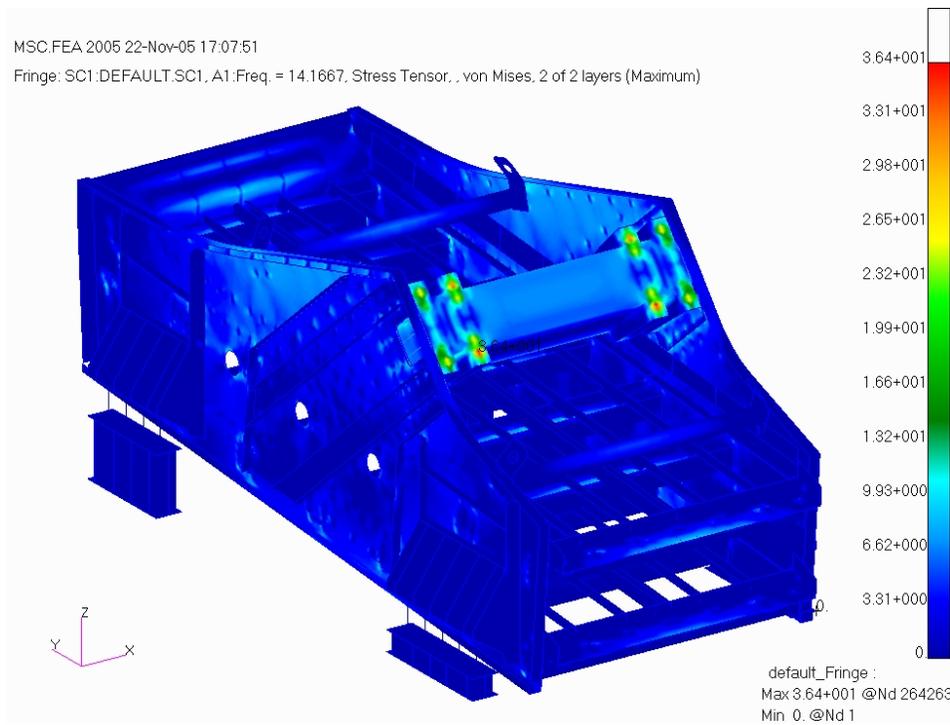


Figura 6.21 – Tensão de von Mises do modelo de elementos finitos (R-MD 2438x6100)

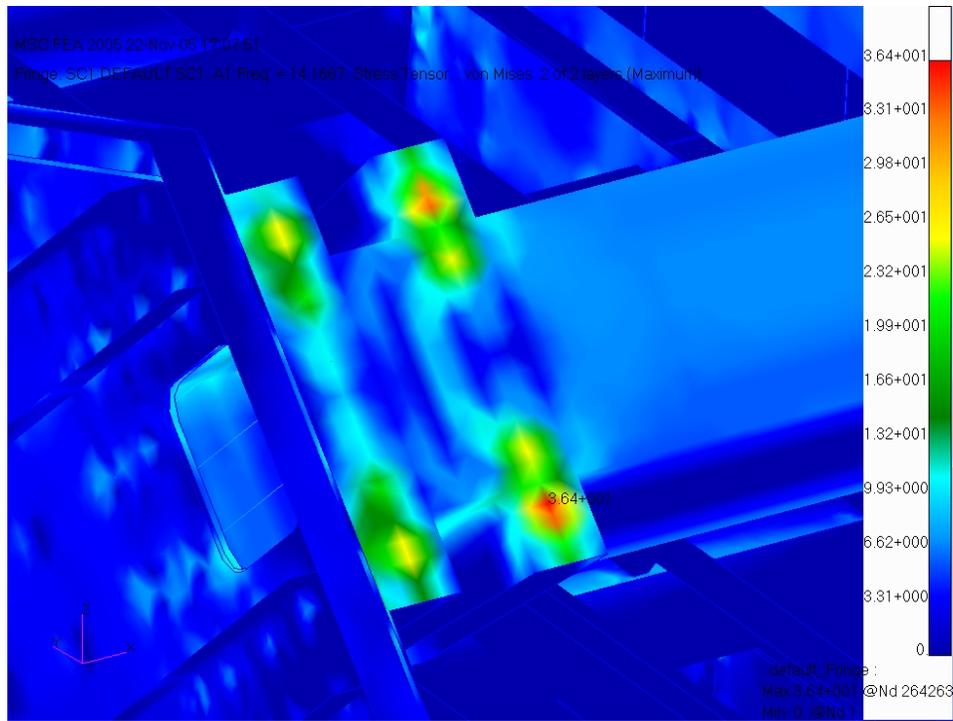


Figura 6.22 – Detalhe do ponto de máxima tensão de von Mises (R-MD 2438x6100)

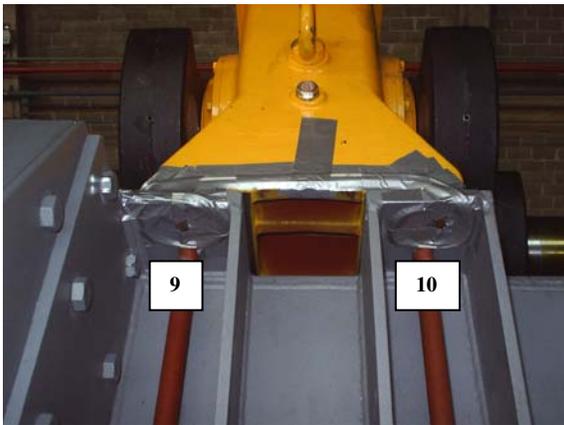


Figura 6.23a – Pontos analisados 9 e 10

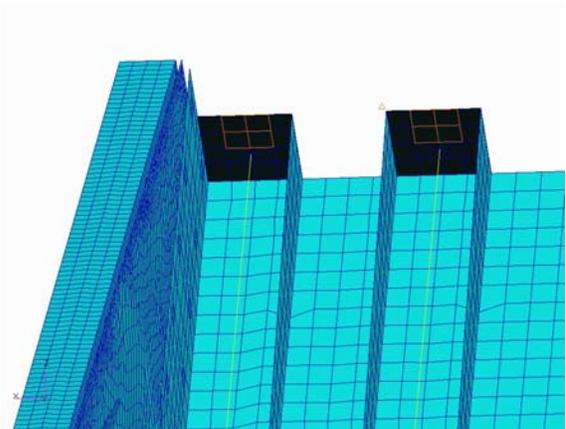


Figura 6.23b – Elementos analisados 9 e 10

6.5 Discussão dos Resultados

A Tabela 6.9 apresenta os resultados obtidos na análise modal numérica, comparando a frequência natural mais próxima da frequência de operação do equipamento.

Tabela 6.9 – Análise das frequências naturais críticas

| Equipamento | Frequência de Operação [Hz] | Frequência natural crítica [Hz] |
|--------------------|------------------------------------|--|
| R-TE 4000x11000 | 11,67 | 12,48 |
| R-MD 3200x7315 | 13,33 | 14,08 |
| RB-MD 3200x7315 | 13,33 | 14,29 |
| R-MD 2438x6100 | 14,17 | 15,46 |

Sabe-se que a frequência de operação do equipamento deve estar distante das frequências naturais do mesmo, uma vez que trabalhar próximo à condição de ressonância gerará um aumento na amplitude das tensões (deformações) da estrutura, resultando na falha do equipamento.

Analisando a distribuição das tensões de von Mises nas peneiras vibratórias (Figuras 6.4, 6.11, 6.17 e 6.22), nota-se que os pontos críticos são gerados basicamente pelo sistema de acionamento por excitadores, mas também são influenciados pela deflexão gerada no modo de vibrar mais próximo da frequência natural da estrutura.

A Tabela 6.10 apresenta a comparação entre os resultados obtidos na simulação numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos e nas medições experimentais utilizando as técnicas de extensometria.

Tabela 6.10 – Comparação entre resultados experimentais e numéricos

| Ponto analisado | Tensão de von Mises Experimental [MPa] | Tensão de von Mises MEF [MPa] | Diferença [%] |
|------------------------|---|--------------------------------------|----------------------|
| 1 (Lado direito) | 9,98 | 8,97 | 10,12 |
| 1 (Lado esquerdo) | 10,72 | 10,30 | 3,92 |
| 2 (Lado direito) | 7,17 | 8,77 | 18,24 |
| 2 (Lado esquerdo) | 9,22 | 10,03 | 8,08 |
| 3 (Lado direito) | 8,50 | 9,14 | 7,00 |
| 3 (Lado esquerdo) | 8,84 | 9,28 | 4,74 |
| 4 (Lado direito) | 12,19 | 11,14 | 8,61 |
| 4 (Lado esquerdo) | 9,50 | 10,62 | 10,55 |
| 5 | 10,90 | 11,63 | 6,28 |
| 6 | 14,10 | 14,86 | 5,11 |
| 7 | 15,60 | 17,24 | 9,51 |
| 8 | 23,40 | 25,34 | 7,66 |
| 9 | 13,96 | 14,95 | 6,62 |
| 10 | 17,68 | 19,90 | 11,16 |

Pela Tabela 6.10, nota-se uma pequena diferença entre os modelos numéricos e as medições experimentais considerando-se a complexidade do equipamento e, conseqüentemente o tamanho do modelo estrutural empregado. A diferença média entre os resultados numéricos e experimentais é de 8,4%.

Na maior parte dos pontos analisados (78,57%), verifica-se que os valores de tensão de von Mises são maiores no modelo numérico devido ao fato de que os elementos de superfície utilizados na modelagem numérica possuem um comportamento de elementos de placa, já na medição extensométrica, evidencia-se o estado plano de tensões.

Os níveis de tensão de von Mises são muito baixos tanto na estrutura real quanto no modelo matemático dessa forma variações mínimas gerarão grandes diferenças entre os mesmos.

Mesmo utilizando cabos blindados e aterrados, durante a etapa de tratamento de sinais pode-se verificar a presença de ruído devido principalmente à interferência de rede (60 Hz) e à utilização de um VFD (*Variable Frequency Drive* ou Inversor de Frequências) para medições em diferentes frequências de operação. Uma vez que o sinal de interesse possui frequência inferior a 20 Hz, para todos os casos a filtragem digital passa-baixa pode ser utilizada sem grandes limitações.

O fator de segurança pode ser analisado como sendo a medida de incerteza do projeto e geralmente é expresso como a razão entre duas quantidades de mesma natureza, como por exemplo tensão de escoamento por tensão admissível. Para o estudo do fator de segurança utilizado no projeto de peneiras vibratórias, utiliza-se a Tabela 6.11 onde os valores máximos das tensões de von Mises obtidos pela simulação numérica são comparados com o valor médio do limite de escoamento do aço estrutural ASTM A36, segundo a carta de certificação do fornecedor. Conforme indicado na Tabela 4.2 e equação (4.60) do Capítulo 4, todos os resultados estão atendendo os critérios impostos pelo projeto.

Tabela 6.11 – Fator de segurança para peneiras vibratórias

| Peneira Vibratória | Tensão máxima de von Mises - MEF [MPa] | Limite de escoamento médio do aço A36 [MPa] | FS |
|---------------------------|---|--|-----------|
| R-TE 4000x11000 | 58,4 | 300 | 5,14 |
| R-MD 3200x7315 | 33,9 | 300 | 8,85 |
| RB-MD 3200x7315 | 30,8 | 300 | 9,74 |
| R-MD 2438x6100 | 36,4 | 300 | 8,24 |

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

7.1 Conclusões

Foi apresentada uma sistemática para a realização do projeto mecânico de peneiras vibratórias, envolvendo modelagem numérica e verificação experimental. A complexidade do equipamento impõe a necessidade de uso de um pacote comercial CAD para a criação do modelo geométrico, pois esta contempla mais ferramentas que o pré-processador do programa de elementos finitos. O software MicroStation V8 – 2004 mostrou-se adequado para a realização de tal tarefa. Além desta imposição, as peneiras vibratórias requerem um alto nível de discretização devido aos detalhes existentes. A grande densidade de elementos no modelo estrutural gera resultados mais apurados, porém cria um maior custo computacional para a realização das análises modal numérica e dinâmica. O software de modelagem por elementos finitos MSC.FEA mostrou-se eficiente e flexível nas etapas de pré e pós-processamento; e estável durante a fase de solução do problema.

O computador utilizado nas análises numéricas das peneiras vibratórias foi um Dell Precision PWS 380 cujas características principais são: processador *dual core* Pentium(R) D de 3,20 GHz e 3,19 GHz; memória RAM de 3,25 GB; e disco rígido *SCSI* de 273 GB. Nesta configuração a Tabela 7.1 apresenta os tempos de processamento das análises numéricas.

Tabela 7.1 – Tempo de processamento das análises numéricas

| Análise numérica | Tempo |
|----------------------------------|--------------|
| Análise modal R-TE 4000x11000 | 0h6min54 s |
| Análise modal R-MD 3200x7315 | 0h6min9s |
| Análise modal RB-MD 3200x7315 | 0h13min43 s |
| Análise modal R-MD 2438x6100 | 0h7min18s |
| Análise dinâmica R-TE 4000x11000 | 0h55min29s |
| Análise dinâmica R-MD 3200x7315 | 1h0min39s |
| Análise dinâmica RB-MD 3200x7315 | 1h33min7s |
| Análise dinâmica R-MD 2438x6100 | 0h49min40s |

A técnica extensométrica possui uma elevada flexibilidade na medição de deformações (e conseqüentemente tensões) e permite a interpretação experimental de alguns fenômenos estáticos e dinâmicos de estruturas mecânicas.

Esta técnica é aplicável em praticamente qualquer parte da caixa da peneira, porém a instrumentação requer extremo cuidado e atenção, principalmente nas etapas de condicionamento, colagem e soldagem da fiação as quais devem ser baseadas em rotinas criteriosas, como apresentado no Capítulo 5, a fim de gerar resultados confiáveis.

Outros detalhes também requerem atenção como a utilização de uma taxa de amostragem correta segundo o Teorema de Nyquist evitando assim o *aliasing*; utilização correta de filtros (passa-baixa caso da análise de peneiras vibratórias); janelamento correto do sinal para evitar o *leakage*, caso uma análise espectral seja necessária; entre outros.

Assim, este trabalho apresentou um procedimento de medição experimental de peneiras vibratórias através da técnica extensométrica, aplicando-se a mesma na validação do modelo dos equipamentos projetados.

Em equipamentos vibratórios, a análise das frequências naturais e respectivos modos de vibrar são primordiais para o desenvolvimento dos mesmos, uma vez que quando a frequência de excitação se aproxima de alguma das frequências naturais há uma amplificação dinâmica da resposta da estrutura resultando em solicitações severas. Dados históricos de análises experimentais empregando o VFD (*Variable Frequency Drive* ou Inversor de Frequências) indicam que a diferença entre a frequência de operação do equipamento e a frequência natural crítica deve ser no mínimo de 0,75 Hz. Isso para que a estrutura da peneira vibratória não sofra fadiga devido a elevada amplitude de tensões na ressonância ou próxima da mesma. A Tabela 6.9 demonstra que todas as quatro peneiras estão adequadamente dentro desta condição. Além da amplificação dinâmica das tensões, a aceleração lateral imposta pelo modo de vibrar crítico também é um fator que requer cuidadosa análise.

Um segundo resultado verificado é a comparação de tensões críticas em locais estratégicos, entre o modelo numérico e a medição experimental, feitos para as quatro peneira analisadas. Com exceção do ponto 2 (Lado direito) da tabela 6.10, todos os outros pontos analisados possuem diferença inferior ou em torno de 10% entre os valores numéricos e experimentais, que é aceitável dentro dos limites estipulados pela Haver & Boecker Latinoamericana, dessa forma o modelo de elementos finitos é validado. A diferença encontrada no ponto 2 (Lado direito) é resultado do ruído existente no sinal que pôde ser verificado durante a etapa de filtragem digital do mesmo.

Quanto aos fatores de segurança observados, todos estão acima de 5 conforme requisito da Tabela 4.2 e equação (4.60), o que garante a integridade física dos equipamentos estudados segundo o critério adotado.

O critério de von Mises se mostrou muito prático e útil para verificação do comportamento da estrutura pois possibilita a comparação direta do seu valor com o limite de escoamento do material utilizado na fabricação da caixa da peneira.

Com a utilização das metodologias descritas neste trabalho, as peneiras de grande porte da Divisão NIA estão sendo desenvolvidas sobre uma base mais técnica porém, sempre mantendo a experiência profissional. A operação em conjunto da inovação tecnológica e dados históricos está resultando em equipamentos mais confiáveis e com maior competitividade no mercado atual.

O trabalho realizado também teve aplicação prática imediata de todos os produtos. A peneira vibratória R-TE 4000x11000 já se encontra instalada e em pleno funcionamento na Syncrude LTD. (Canadá) há mais de 4500 horas sem apresentar nenhum tipo de problema estrutural. Da mesma forma, a peneira vibratória R-MD 3200x7315, já se encontra em operação na CODELCO – Divisão Chuquicamata (Chile). As máquinas RB-MD 3200x7315 (Sociedad Punta del Cobre – Chile) e R-MD 2438x6100 (Grupo CVRD – Paragominas) estão aguardando a instalação nas respectivas plantas.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Existe grande possibilidade de continuidade dos trabalhos futuros, uma vez que a empresa Haver & Boecker Latinoamericana continua a investir no setor de Pesquisa & Desenvolvimento da Divisão NIA.

Sugere-se inicialmente a realização de uma análise modal experimental ou uma análise de modo operacional de vibração para verificar as frequências e modos naturais; e para obter os parâmetros de amortecimento modal com o intuito de calibrar o modelo de elementos finitos, gerando resultados ainda mais precisos.

Sugere-se criar modelos estruturais mais simplificados e com menor densidade de elementos para comparar os resultados obtidos e diminuir o tempo de processamento computacional. Sugere-se ainda verificar a influência destes modelos simplificados na análise modal numérica.

Quanto ao detalhamento do modelo, sugere-se a utilização elementos de membrana para verificar uma possível diminuição da diferença entre os resultados numéricos e experimentais.

Sugere-se instrumentar mais pontos em uma única peneira vibratória de testes para comparar de uma forma mais detalhada o modelo de elementos finitos com a estrutura real, bem como a colocação de mais *strain gages* nas regiões críticas para verificar se a concentração e variação da tensão de von Mises apresentada pelo MSC.FEA é similar à situação real. Medições experimentais da peneira vibratória com carga também são sugeridas.

Sugere-se a construção de um algoritmo que facilite o cálculo da tensão de von Mises a partir dos dados experimentais da roseta 45°.

Sugere-se a busca de outras formas de simular o carregamento gerado pelos excitadores e verificar sua influência nos resultados numéricos.

Referências Bibliográficas

ALBERTAZZI JUNIOR., Armando; PEZZOTTA, Carlos Aurélio. Linguagem de medição para extração de características geométricas de nuvens de pontos tridimensionais. In: METROLOGIA, 2003, Recife. **Metrologia para a vida**, Recife: Sociedade Brasileira de Metrologia (SBM), 2003.

ALMEIDA, Pedro Afonso de Oliveira. **Introdução à extensometria elétrica de resistência**. 1996. 21 f. – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A base da Tecnologia CAE**. 7 ed. São Paulo: Editora Érica, 2000. 292 p.

ANDERSON, Jon. **Problemas de peneiramento: escolha de soluções**. São Paulo: VIMAX, 2000, 4 p.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures in engineering analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1982. Cap 9.

BÄUMEL, Angela; KLECKERS, Thomas. **Basic for experimental stress analysis using strain gages**.). Alsbach-Hähnlein: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 2001. 32 f.

CAVALCA, Katia Lucchesi. **Fundamentos do projeto de componentes de máquinas**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1999. 264 p.

CHAVES, Arthur Pinto; PERES, Antonio Eduardo Clark. **Teoria e prática do tratamento de minérios**. v. 3. São Paulo: Signus, 2003.

COELHO, Cândida Pinto; TAVARES, João Manuel R. S. **Técnicas base para aquisição de informação tridimensional sem contacto: uma descrição**. 2002. 11 f. - Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Universidade do Porto, Porto.

COOK, Robert D. **Concepts and applications of finite element analysis**. Madison: University of Wisconsin, 1989. 368 p.

DIAS JUNIOR, Milton. **Introdução ao estudo de vibrações em sistemas mecânicos**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2003.

EBERTEIN, Dirk. **Introdução a medições com extensômetros (SG)**. Alsbach-Hähnlein: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 2004. 24 f.

EFUNDA. **Engineering fundamentals – von Mises stress**. Disponível em: <http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/failure_criteria/failure_criteria_ductile.cfm?search_string=von%20mises>. Acesso em: 5 de Outubro de 2005.

FAÇO. **Manual de britagem**. 5. ed. Sorocaba: Allis – Mineral Systems, 1994.

FIGUEIREDO E ALMEIDA, Luis Diamantino. **Análise de tensões e deformações em um corpo de prova “Compact Tension” experimentalmente por extensometria e teoricamente por MFEL**. 2002. 115 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

HAVER & BOECKER LATINOAMERICANA (HBL). **Seminário Nash + HBL**. Monte Mor: HBL, 2004. 142 p.

HBM. **O circuito da ponte de Wheatstone**. Darmstadt: HBM, 1997. 34p.

HOFFMANN, Karl. **An Introduction to measurements using strain gages**. 1. ed. Alsbach-Hähnlein: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 1989. 291 p.

HUGHES, Thomas J. R. **The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis**. 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1987. 803 p.

HSU, Christopher. **Effects of block size on the block Lanczos algorithm**. 2003. 44 p. Disponível em: <<http://bebop.cs.berkeley.edu/pubs/hsu2003-srthesis-blzpack.doc>>. Acesso em: 15 de Novembro de 2005.

IIZUKA, Eduardo Kenji. **Construção de modelos de elementos finitos e análise experimental de estruturas mecânicas**. 2002. 52 f. Projeto de Pesquisa – Iniciação Científica – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ITALVIBRAS. **Italvibras**. Disponível em: <<http://www.italvibras.it/>>. Acesso em: 19 de Outubro de 2005.

ITALVIBRAS. **Italvibras - guia**. Disponível em: <<http://www.italvibras.it/guidae.htm>>. Acesso em: 19 de Outubro de 2005.

JUVINALL, Robert C. **Engineering considerations of stress, strain and strength**. McGraw Hill, 1967.

LIMA, Cícero Ribeiro de. **Projeto de mecanismos flexíveis usando o método de otimização topológica**. 2002. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica/Mecatrônica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

LUZ, Adão Benvindo da; POSSA, Mario Valente; ALMEIDA, Salvado Luiz de. **Tratamento de Minérios**. Rio de Janeiro: CETEM – Centro de Tecnologia Mineral, 1998.

MEASUREMENTS GROUP. **Technical Note – TN 505 – Strain gage selection**. Measurements Group, 1989. 14 p.

MEASUREMENTS GROUP. **Technical Note – TN 509 – Transverse sensitivity errors**. Measurements Group, 1993. 8 p.

MEASUREMENTS GROUP. **Technical Note – TN 515 – Strain gage rosettes**. Measurements Group, 1990 10 p.

MSC. **NAS102 – Basic dynamic analysis: user’s guide**. Santa Ana: MSC.Software Corporation, 1997.

MSC. **NAS102 – Dynamic analysis course**. v.1 e v.2. Santa Ana: MSC.Software Corporation, 2001.

MSC. **Getting started with MSC.Nastran: user’s guide**. Santa Ana: MSC.Software Corporation, 2002.

MSC. **NAS120 – Linear static, normal model and buckling – Analysis using MSC.Nastran and MSC.Patran**. Santa Ana: MSC.Software Corporation, 2003.

PAVANELLO, Renato. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1997. 187 p.

PINTO JÚNIOR, Salustiano Martins. **Integração de testes experimentais com modelos dinâmicos de elementos finitos através da ferramenta I-DEAS fest**. 1999. 65 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SÁNCHEZ, César Antonio Aparecio. **Estudo de impacto usando elementos finitos e análise não linear**. 2001. 129 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, São Carlos.

VIMEC. **Linear motion mechanical oscillators type MU**. Edition 1-04. Sesto San Giovanni: VIMEC, 2004. 33 p.

VIMEC. **Linear Motion Mechanical Oscillators Type MU 600/LT**. Edition 1-03. Sesto San Giovanni: VIMEC, 2003. 23 p.

VIBRATING SCREEN MANUFACTURES ASSOCIATION (VSMA). **VSMA manual – quality / integrity**. VSMA 1980. 92 p.

WIKIPEDIA. **The free encyclopedia – von Mises stress**. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_stress>. Acesso em: 5 de Outubro de 2005.

Anexo I

Cálculo da Área do Elemento Triangular

Nesta parte do trabalho será apresentado o cálculo da área do elemento triangular linear utilizando coordenadas de área, baseando-se nas colocações de Pavanello (1997).

Sendo as coordenadas dos nós 1, 2 e 3 (Figura AI.1) e as diferenças dos mesmos (Figura AI.2):

:

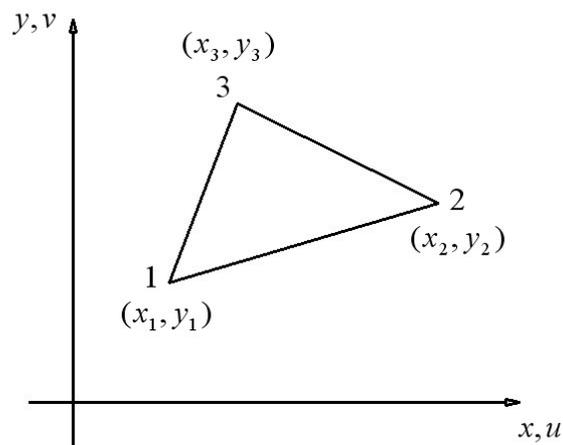


Figura AI.1 – Coordenadas dos nós de um elemento triangular – Pavanello (1997)

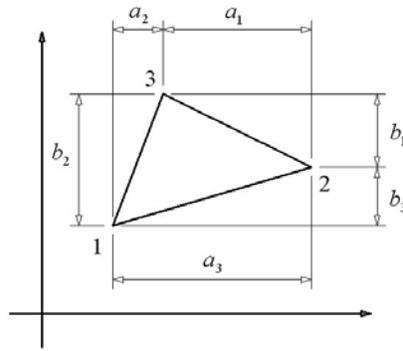


Figura AI.2 – Diferença entre as coordenadas nodais do elemento triangular – Pavanello (1997)

onde: $a_1 = x_3 - x_2$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$a_2 = x_1 - x_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$a_3 = x_2 - x_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

Sendo um ponto P interno ao triângulo analisado de forma que a área total do triângulo A pode ser expressa como a soma das três áreas dos triângulos internos A_{23} , A_{31} e A_{12} , de forma que A_{ij} é a área do triângulo formado pelos nós (i, j, P) :

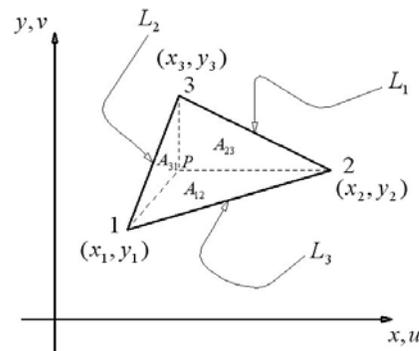


Figura AI.3 – Coordenadas locais de área – Pavanello (1997)

Então, as coordenadas locais de área L_1 , L_2 e L_3 podem ser expressas na forma adimensional:

$$L_1 = \frac{A_{23}}{A}; L_2 = \frac{A_{31}}{A}; L_3 = \frac{A_{12}}{A} \quad (\text{AI.1})$$

Existe uma relação entre o sistema local de área (L_1, L_2, L_3) e o sistema global (x, y) , que é explicitada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.2})$$

ou ainda,

$$x = L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3 = \sum_{i=1}^3 L_i \cdot x_i \quad (\text{AI.3})$$

$$y = L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 + L_3 \cdot y_3 = \sum_{i=1}^3 L_i \cdot y_i \quad (\text{AI.4})$$

Desde que $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, existem apenas duas coordenadas locais independentes correspondentes às duas coordenadas do sistema global (x, y) .

Finalmente, pode-se obter a relação inversa do sistema local de área para o sistema global, correspondente à equação (AI.2):

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A} \begin{bmatrix} 2 \cdot A_{23} & b_1 & a_1 \\ 2 \cdot A_{31} & b_2 & a_2 \\ 2 \cdot A_{12} & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.5})$$

ou ainda,

$$L_1 = \frac{1}{2.A} \cdot (2.A_{23} + b_1 \cdot x + a_1 \cdot y) \quad (\text{AI.6})$$

$$L_2 = \frac{1}{2.A} \cdot (2.A_{31} + b_2 \cdot x + a_2 \cdot y) \quad (\text{AI.7})$$

$$L_3 = \frac{1}{2.A} \cdot (2.A_{12} + b_3 \cdot x + a_3 \cdot y) \quad (\text{AI.8})$$

As áreas parciais A_{23} , A_{31} e A_{12} podem ser determinadas através de cálculo vetorial lembrando-se que o módulo do vetor resultante de uma multiplicação vetorial é igual à área do paralelogramo constituída pelos dois vetores base:

$$2.A_{23} = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \quad (\text{AI.9})$$

$$2.A_{31} = x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \quad (\text{AI.10})$$

$$2.A_{12} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \quad (\text{AI.11})$$

Expressando a área total do triângulo A como a soma das três áreas dos triângulos internos A_{23} , A_{31} e A_{12} :

$$2.A = 2.A_{23} + 2.A_{31} + 2.A_{12} = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \quad (\text{AI.12})$$

ou

$$2.A = a_3 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_3 = a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \quad (\text{AI.13})$$

Relembrando: $a_1 = x_3 - x_2$; $b_1 = y_2 - y_3$; $a_2 = x_1 - x_3$; $b_2 = y_3 - y_1$; $a_3 = x_2 - x_1$;
 $b_3 = y_1 - y_2$.

Anexo II

Equação Diferencial do Problema de Deslocamento para o Estado Plano de Tensões

Nesta parte do trabalho será apresentada a equação diferencial que governa o problema de deslocamento para o estado plano de tensões, baseando-se nas colocações de Pavanello (1997).

AII.1 Equações de Equilíbrio em termos de tensões

As equações de equilíbrio em termos de tensões para um corpo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme são expressas por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega = \mathfrak{R}^2 \quad (\text{AII.1})$$

Sendo f_x e f_y as forças de volume através das direções x e y , respectivamente, e o domínio Ω pertencente ao espaço \mathfrak{R}^2 ; e lembrando que as equações (AII.1) são determinadas fazendo-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal de lados ∂x e ∂y .

AII.2 Lei de Hooke generalizada

A Lei de Hooke generalizada pode ser adotada para definir o comportamento do material (Equações Constitutivas). Para o caso bidimensional:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.2})$$

Evidenciando as tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.3})$$

Efetuando o produto matricial:

$$\sigma_{yy} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \cdot \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \varepsilon_{yy} = c_2 \cdot \varepsilon_{xx} + c_1 \cdot \varepsilon_{yy} \quad (\text{AII.4})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{xy} = c_3 \cdot \varepsilon_{xy} \quad (\text{AII.5})$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \varepsilon_{xx} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \cdot \varepsilon_{yy} = c_1 \cdot \varepsilon_{xx} + c_2 \cdot \varepsilon_{yy} \quad (\text{AII.6})$$

AII.3 Condições de contorno

Sendo o domínio qualquer representado pela Figura (AII.1) e considerando-se o equilíbrio, tem-se:

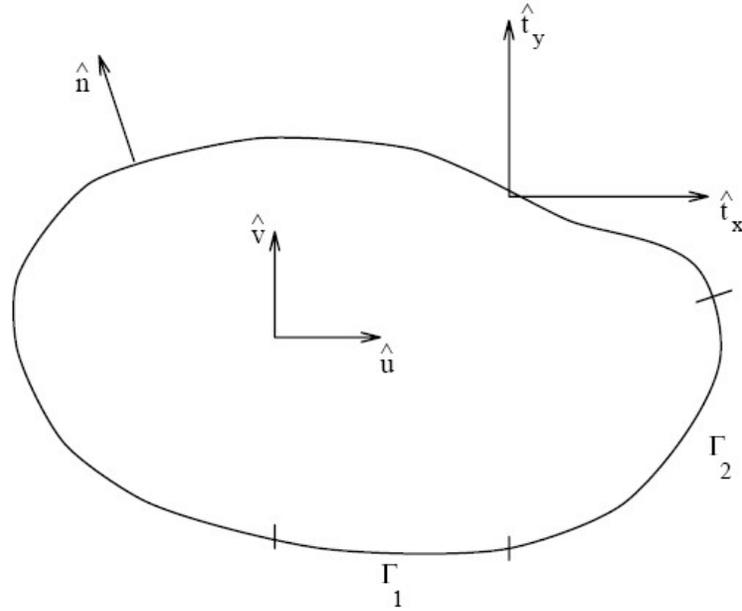


Figura AII.1 – Domínio bidimensional qualquer – Pavanello (1997)

A condição de contorno natural e essencial é definida pelas equações (AII.7) e (AII.8), respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}.n_x + \sigma_{xy}.n_y &= \hat{t}_x \\ \sigma_{xy}.n_x + \sigma_{yy}.n_y &= \hat{t}_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{AII.7})$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \hat{u} \\ v &= \hat{v} \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{AII.8})$$

onde $\hat{n} = (n_x, n_y)$ denota uma normal unitária ao contorno Γ ; Γ_1 e Γ_2 são porções do contorno Γ ; \hat{t}_x e \hat{t}_y denotam as forças de contorno (trações) especificadas; e \hat{u} e \hat{v} são os deslocamentos especificados.

AII.4 Problema de deslocamento

Retomando as equações de equilíbrio e de condições de contorno, define-se o sistema de equações (AII. 9) que compõe o problema de deslocamento:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= -f_x \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= -f_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega = \mathfrak{R}^2$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} \cdot n_x + \sigma_{xy} \cdot n_y &= \hat{t}_x \\ \sigma_{xy} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y &= \hat{t}_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_1 \tag{AII.9}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \hat{u} \\ v &= \hat{v} \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_2$$

Substituindo σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} definidos nas equações (AII.4), (AII.5) e (AII.6) no sistema (AII.9):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (c_1 \cdot \varepsilon_{xx} + c_2 \cdot \varepsilon_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y} (c_3 \cdot \varepsilon_{xy}) &= -f_x \\ \frac{\partial}{\partial x} (c_3 \cdot \varepsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (c_2 \cdot \varepsilon_{xx} + c_1 \cdot \varepsilon_{yy}) &= -f_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega = \mathfrak{R}^2$$

$$\left. \begin{aligned} (c_1 \cdot \varepsilon_{xx} + c_2 \cdot \varepsilon_{yy}) n_x + (c_3 \cdot \varepsilon_{xy}) n_y &= \hat{t}_x \\ (c_3 \cdot \varepsilon_{xy}) n_x + (c_2 \cdot \varepsilon_{xx} + c_1 \cdot \varepsilon_{yy}) n_y &= \hat{t}_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_1 \tag{AII.10}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \hat{u} \\ v &= \hat{v} \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_2$$

Relembrando que as relações de deformação-deslocamento que definem o estado plano de tensões são:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{AII.11})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{AII.12})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{AII.13})$$

Substituindo as deformações (AII.11), (AII.12) e (AII.13) no sistema (AII.10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c_3 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -f_x \\ c_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -f_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega = \mathfrak{R}^2$$

$$\left. \begin{aligned} \left(c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot n_x + c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot n_y &= \hat{t}_x \\ c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot n_x + \left(c_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot n_y &= \hat{t}_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{AII.14})$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \hat{u} \\ v &= \hat{v} \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_2$$

As equações que compõem o sistema (AII.14) são definidas como o Problema de Deslocamento e serão escritas em uma forma integral utilizando-se o *Método de Resíduos Ponderados*. Sabe-se que este mesmo conjunto de equações pode ser escrito em função de suas componentes de tensão, porém este trabalho irá abordar apenas o Problema de Deslocamento.

AII.5 Método dos Resíduos Ponderados (MRP)

O MRP é utilizado para determinação da *Forma Fraca* do Problema de Deslocamentos. A *Forma Fraca* é aquela em que o conjunto de funções ponderadoras $(\psi_i(x, y, z); i = 1, 2, 3, \dots)$ satisfaz as condições de diferenciabilidade e continuidade relaxada em função da equação diferencial de segunda ordem que governa o problema em questão. A *Forma Fraca* também relaxa as condições de contorno naturais, mas todas as condições de contorno essenciais devem ser satisfeitas. Em geral a *Forma Fraca* é empregada em soluções numéricas, diferente da *Forma Forte* que é utilizada em soluções analíticas.

Retomando o Problema de Deslocamentos (AII.14) e analisando a direção de f_x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c_3 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -f_x \quad (\text{AII.15})$$

$$c_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} = -f_x \quad (\text{AII.16})$$

Utilizando a formulação do tipo Resíduos Ponderados para determinar das posições de equilíbrio estático do problema:

$$\int_{\Omega} \left(c_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} \right) \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy = - \int_{\Omega} f_x \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.17})$$

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy + c_2 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy + c_3 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy + \\ c_3 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy = - \int_{\Omega} f_x \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy \end{aligned} \quad (\text{AII.18})$$

Analisando as integrais separadamente:

- Integral I:

$$c_1 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.19})$$

- Integral II:

$$c_2 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.20})$$

- Integral III:

$$c_3 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.21})$$

- Integral IV:

$$c_3 \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.22})$$

AII.5.1 Integral I

Aplicando-se o Teorema de Green (integração por partes), a ordem das derivadas sobre u e v serão reduzidas, procurando-se assim condições mais favoráveis para escolha das funções de aproximação do problema:

$$u^* = \psi(x, y) \Rightarrow du^* = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} dx \quad (\text{AII.23})$$

$$dv^* = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy \Rightarrow v^* = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (\text{AII.24})$$

Substituindo as equações (AII.23) e (AII.24) em (AII.19):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot n_x \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.25})$$

AII.5.2 Integral II

Aplicando a mesma metodologia do item AII.5.1:

$$u^* = \psi(x, y) \Rightarrow du^* = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} dx \quad (\text{AII.26})$$

$$dv^* = \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} \cdot dx \cdot dy \Rightarrow v^* = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (\text{AII.27})$$

Substituindo as equações (AII.26) e (AII.27) em (AII.20):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n_x \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.28})$$

AII.5.3 Integral III

Aplicando a mesma metodologia do item AII.5.1:

$$u^* = \psi(x, y) \Rightarrow du^* = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dy \quad (\text{AII.29})$$

$$dv^* = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dx \cdot dy \Rightarrow v^* = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (\text{AII.30})$$

Substituindo as equações (AII.29) e (AII.30) em (AII.21):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_y \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.31})$$

AII.5.4 Integral IV

Aplicando a mesma metodologia do item AII.5.1:

$$u^* = \psi(x, y) \Rightarrow du^* = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dy \quad (\text{AII.32})$$

$$dv^* = \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} \cdot dx \cdot dy \Rightarrow v^* = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (\text{AII.33})$$

Substituindo as equações (AII.32) e (AII.33) em (AII.22):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n_y \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \quad (\text{AII.34})$$

AII.5.5 Forma Fraca de $-f_x$

Retomando a equação (AII.18) e substituindo as integrações por partes (AII.25), (AII.28), (AII.31) e (AII.34):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(c_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} \right) \psi(x, y) dx \cdot dy = \\
 & = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot n_x d\Gamma - \int_{\Omega} c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} dx \cdot dy + \\
 & + \oint_{\Gamma} \psi(x, y) c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n_x d\Gamma - \int_{\Omega} c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} dx \cdot dy + \\
 & + \oint_{\Gamma} \psi(x, y) c_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_y d\Gamma - \int_{\Omega} c_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dx \cdot dy + \\
 & + \oint_{\Gamma} \psi(x, y) c_3 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n_y d\Gamma - \int_{\Omega} c_3 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dx \cdot dy
 \end{aligned} \tag{AII.35}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(c_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} \right) \psi(x, y) dx \cdot dy = \\
 & = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \left[\left(c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] d\Gamma - \\
 & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot \left(c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy
 \end{aligned} \tag{AII.36}$$

Comparando a equação (AII.36) com o sistema (AII.14):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(c_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_3 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} \right) \psi(x, y) dx \cdot dy = \\
 & = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \hat{f}_x \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot \left(c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy
 \end{aligned} \tag{AII.37}$$

AII.5.6 Forma Fraca de $-f_y$

Analogamente para a expressão de $-f_x$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[c_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy = \\ & = \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \cdot \hat{t}_y \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot \left(c_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \cdot dx \cdot dy \end{aligned} \quad (\text{AII.38})$$

AII.5.7 Forma Fraca expressa em deslocamento

Reunido as equações (AII.37) e (AII.38) e, novamente, comparando-as com o sistema de equações (AII.14):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot \left[c_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot \left[c_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + c_3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \cdot dx \cdot dy = \\ & = \int_{\Omega} (f_x + f_y) \cdot \psi(x, y) \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \cdot (\hat{t}_x + \hat{t}_y) \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{AII.39})$$

Definindo os operadores diferenciais em (AII.40) e (AII.41) e a matriz de elasticidade em (AII.42):

$$\{Op(u)\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (\text{AII.40})$$

$$\{Op(\psi)\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (\text{AII.41})$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.42})$$

é possível expressar a *Forma Fraca* de deslocamento na forma matricial assim, o Problema de Deslocamento fica:

Achar u tal que:

$$\int_{\Omega} \{Op(\psi)\}^T \cdot [D] \cdot \{Op(u)\} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \{\psi\}^T \cdot \{f_o\} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} \{\psi\}^T \cdot \{\hat{t}\} \cdot d\Gamma \quad \text{em } \Gamma_1$$

Sujeito a $u = \hat{u}$ e $v = \hat{v}$ e $\psi(x, y) = 0$ em Γ_2

$$\text{onde } \{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.43})$$

$$\{f_o\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$$

$$\{\psi\} = \{\psi\}$$

AII.6 Escolha da Função de Ponderação

Para a solução do Problema de Deslocamento expresso na *Forma Fraca* utiliza-se o Método de Galerkin para escolha das Funções Ponderadoras $\{\psi\}$. O Método de Galerkin consiste em adotar as funções ponderadoras idênticas às variações virtuais da função incógnita $\{u\}$, ou seja, as Funções Ponderadoras correspondem às funções de interpolação típicas do MEF (Funções de Forma).

Re-escrevendo o Problema de Deslocamento:

Achar u tal que:

$$\int_{\Omega} \{Op(N)\}^T [D] \{Op(N)\} d\Omega \cdot \{u\} = \int_{\Omega} \{N\}^T \cdot \{f_o\} d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\}^T \cdot \{\hat{t}\} d\Gamma \text{ em } \Gamma_1$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_{\Omega} \{Op(N)\}^T [D] \{Op(N)\} d\Omega \\ \{f_v\} &= \int_{\Omega} \{N\}^T \cdot \{f_o\} d\Omega \\ \{f_n\} &= \int_{\Gamma} \{N\}^T \cdot \{\hat{t}\} d\Gamma \end{aligned} \tag{AII.44}$$

Analisando o sistema (AII.44):

$$[K^e] \{u\} = \{f_v + f_n\} \tag{AII.45}$$

onde: $[K^e]$ - Matriz de rigidez do elemento;

$\{u\}$ - Vetor de deslocamentos;

$\{f_v\}$ - Termo fonte devido à força de volume $\{f_o\}$;

$\{f_n\}$ - Termo fonte devido às condições de contorno naturais.