

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Tese de Mestrado

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS
E ANÁLISE MODAL EM UMA
ESTRUTURA DO TIPO
GARFO MECÂNICO.

Autor: Nelson Elizeu Dias

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka *PRK*

059/92

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR NELSON ELIZEU
DIAS E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 29/12/92


ORIENTADOR

Trabalho apresentado à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

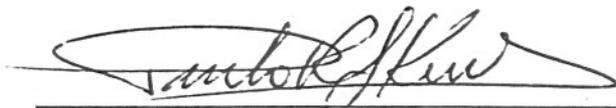
Tese de Mestrado

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS
E ANÁLISE MODAL EM UMA
ESTRUTURA DO TIPO GARFO MECÂNICO.

Autor: Nelson Elizeu Dias

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka

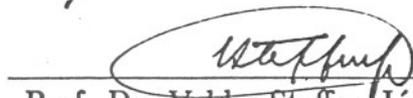
Aprovado por:



Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, presidente



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda



Prof. Dr. Valder Steffen Júnior

Campinas, 29 de Dezembro de 1992.

Pelos meus pais, Nelson e Clementina
Dias, e para o amor da minha vida,
Marta.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Paulo Roberto Gardel Kurka, pelo incentivo, suporte e dedicação dados a este trabalho.
- Aos membros da banca examinadora, Profs. Dr. José Roberto de França Arruda e Dr. Valder Steffen Júnior, pelas valiosas sugestões que enriqueceram ainda mais este trabalho.
- Ao CNPq, Conselho Nacional de Ensino e Pesquisa, Pela bolsa de estudos concedida para a realização desse trabalho.
- Ao Engenheiro Hélio Ricardo Teles de Azevedo pela amizade e atenção dispensada durante a fase inicial desse trabalho.
- Aos Engs. Waldemar Scudeller Jr. e Rogério Centelha Bastos Duarte, do DPM, pelo suporte dado na implementação dos algoritmos computacionais e pela boa vontade com que sempre o fizeram.
- Aos Engs. Rubens Stuginski Jr. e Vicente Scalon, do DTEF, pelos auxílios e sugestões oferecidos.
- Ao Mestre Guilherme Emanuel Costa Laux, pelas valiosas sugestões dadas e pelo companheirismo e amizade que sempre dispensou ao longo de minha vida acadêmica.
- À equipe do LABDIN, Laboratório de Dinâmica de Sistemas Mecânicos, pela ajuda prestada numa fase crítica desse trabalho, possibilitando o término do mesmo.
- À equipe do DPM, Departamento de Projetos Mecânicos, pelo apoio e consideração dispensados ao longo desse trabalho.
- À minha família, pelo carinho e apoio sempre dispensados.
- A todos que, direta ou indiretamente deram o seu apoio, o meu muito obrigado.

Sumário

Um método de identificação de parâmetros modais é apresentado. o algoritmo implementado utiliza a técnica dos mínimos quadrados associada ao método dos gradientes para o ajuste das funções de resposta em frequência (FRF). O modelo matemático adotado neste ajuste assume a FRF na forma de frações parciais. A ajustagem de curvas aos dados de resposta em frequência é feita numa faixa contendo vários modos de vibrar e a influência dos modos fora dessa faixa é prevista no modelo matemático através da adição de parcelas residuais de inércia e rigidez.

O algoritmo de identificação é aplicado a dados experimentais, provenientes de um teste de laboratório feito numa estrutura do tipo garfo mecânico. É feita a análise modal do garfo a partir de 13 curvas de FRF e são obtidos os resultados para seus 8 primeiros modos de vibração.

Abstract

This work presents a method for modal parameter identification in the frequency domain. The algorithm uses gradient-least squares techniques for fitting experimental FRF functions. The mathematical model adopted uses the FRF on its partial fractional form. The fitting is done within a frequency range which contains a number of natural modes and the model also accounts for the influence of modes outside this range through the use of residual terms of equivalent inertia and stiffness.

The identification algorithm is applied to the experimental modal analysis of a mechanical fork. The analysis is made from a set of 13 FRF curves and the first 8 natural mode shapes are obtained.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação Inicial e Objetivos Gerais do Trabalho	1
1.2	Considerações Gerais sobre Análise Modal e Algoritmos de Identificação de Parâmetros Modais	2
1.3	Descrição dos Capítulos	4
2	REVISÃO DA TEORIA SOBRE ANÁLISE MODAL	5
2.1	Modelos Contínuos e Discretos	5
2.2	Obtenção da Matriz Função de Transferência	8
2.3	Apresentação da Função Resposta em Frequência	14
2.3.1	Formas Usuais de Representação da FRF	15
2.3.2	Amortecimento Viscoso - Caso Geral	18
2.3.3	Sistemas Não Amortecidos	19
2.3.4	Amortecimento Histerético - Caso Geral	20
2.4	Cálculo de Parâmetros modais a partir da FRF	21
3	UMA BREVE REVISÃO DOS MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS	24
3.1	Identificação Modo a Modo	24
3.2	Métodos Multi-modos no Domínio da Frequência	28
3.2.1	Sistematização do Método Modo a Modo	28
3.2.2	Identificação por Ajuste de Curvas Genérico	30
3.2.3	Método de Identificação por Ajustagem da Função de Transferência na forma de Razão Polinomial Complexa	32
3.2.4	Estruturas Levemente Amortecidas	35
3.3	Método Multi-Modo no Domínio do Tempo	37
3.3.1	Método das Exponenciais Complexas	37

4	MÉTODO IMPLEMENTADO DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	41
4.1	Desenvolvimento Teórico	42
4.1.1	Formulação Matemática do Método	42
4.2	Programa para Implementação numérica do método	46
5	EXPERIMENTO REALIZADO	51
5.1	Descrição do Protótipo	51
5.2	Tipo de Excitação Usada	51
5.3	Esquema de Aquisição e Processamento de dados	53
6	RESULTADOS OBTIDOS	58
6.1	Simulações	58
6.2	Resultados Experimentais	65
6.2.1	Considerações Sobre a Escolha dos Pontos de Excitação	65
6.2.2	Considerações Sobre o Modelo Matemático Adotado no Ajuste e a Escolha da Faixa Total de Análise	65
6.2.3	Considerações Sobre a Utilização dos Dados de Acelerância na Análise dos Resultados.	66
6.2.4	Considerações Sobre a Escolha de Análise por Sub-Faixas.	67
6.2.5	Análise dos Resultados - Seleção das Frequências e Amortecimentos	85
6.2.6	Diagramas de Modos de Vibrar	93
7	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	99
7.1	Conclusões Gerais	99
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	100
	BIBLIOGRAFIA	102
	APÊNDICE	107

Lista de Figuras

2.1	Sistema Contínuo com modelo representativo de um grau de liberdade. . .	6
2.2	Sistema Contínuo com modelo representativo de dois grau de liberdade. . .	7
2.3	Módulo e fase da receptância em função da frequência. [5]	16
2.4	Parte imaginária e real da receptância em função da frequência. [5]	17
2.5	Módulo da receptância, Mobilidade e acelerância em função da frequência para sistemas com mais de um grau de liberdade. [5]	17
2.6	Módulo da receptância (a) e Mobilidade (b) em função da frequência para sistemas com um grau de liberdade e diagrama de Nyquist para receptância (c) e Mobilidade (d). [5]	18
2.7	Sistema representativo de modelo com 2 grau de liberdade.	22
3.1	Propriedades do Círculo Modal.	26
3.2	Seleção dos pontos para análise de estruturas levemente amortecidas. [5] .	36
4.1	Faixa de interesse selecionada na FRF	43
4.2	Estrutura do programa GLOBAL.	47
4.3	Estrutura da rotina principal IDEPAR.	48
4.4	Estrutura da sub-rotina AJUSTE.	49
4.5	Estrutura da sub-rotina REGEN.	50
5.1	Montagem Experimental da estrutura ensaiada.	52
5.2	Funções de transferência e coerência típicas da estrutura ensaiada.	53
5.3	Montagem do protótipo.	54
5.4	Dimensões do protótipo.	55
5.5	Martelo de impacto.	56
5.6	Resposta em frequência típica para sinal de entrada obtida com martelo de cabeça de nylon.	56
5.7	interligação dos equipamentos usados no sistema de aquisição de dados. . .	57

6.1	CASO 1 - Modos Uniformemente Distribuídos	60
6.2	CASO 2 - Modos da Faixa Central Afastados dos Demais	60
6.3	CASO 3 - Caso Intermediário	60
6.4	Ajuste para dados simulados - Caso 2 - Modelo A	62
6.5	Ajuste para dados simulados - Caso 3 - Modelo B	63
6.6	Ajuste para dados simulados - Caso 1 - Modelo C	64
6.7	Pontos de medição e excitação no Protótipo ensaiado.	66
6.8	Ajuste típico para dados experimentais - 1ª Faixa	69
6.9	Ajuste típico para dados experimentais - 2ª Faixa	70
6.10	Ajuste típico para a faixa total de frequência	71
6.11	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x01	72
6.12	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x02	73
6.13	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x03	74
6.14	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x04	75
6.15	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x05	76
6.16	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x06	77
6.17	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x07	78
6.18	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x08	79
6.19	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x09	80
6.20	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x10	81
6.21	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x11	82
6.22	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x12	83
6.23	Ajuste para dados experimentais - FRF 07x13	84
6.24	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 1º Modo	85
6.25	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 2º/3º Modo	85
6.26	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 4º Modo	86
6.27	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 5º Modo	86
6.28	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 6º Modo	87
6.29	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 7º Modo	87
6.30	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 8º Modo	88
6.31	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 9º Modo	88
6.32	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 2º Modo	92
6.33	Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 3º Modo	92
6.34	1º e (2º/3º)* Modos de vibrar do garfo	94
6.35	4º e 5º Modos de vibrar do garfo	95
6.36	6º e 7º Modos de vibrar do garfo	96

6.37	8 ^o e 9 ^o Modos de vibrar do garfo	97
6.38	2 ^o e 3 ^o Modos de vibrar do garfo	98
.1	case 1: close resonances	110
.2	case 2: separated resonances	111
.3	case 3: intermediate case	112

Lista de Tabelas

2.1	Valores de FRF complexa para sistema com 2 graus de liberdade	22
6.1	tabela contendo os valores de polos e resíduos utilizados para gerar os 3 casos simulados	59
6.2	Resultados da identificação de parâmetros para os Sistemas Simulados. . .	61
6.3	Resultados da identificação de parâmetros para os Sistemas Simulados (continuação).	61
6.4	Resultados típicos de análise para faixa de 30 a 800 Hz.	68
6.5	Resultados típicos de análise para faixa de 1000 a 1600 Hz.	68
6.6	Frequências e Amortecimentos médios	89
6.7	Constantes Modais e seus respectivos ângulos de fase para as 13 FRF identificadas	89
6.8	Constantes Modais e seus respectivos ângulos de fase para as 13 FRF identificadas (cont.)	90
6.9	Amplitudes Modais relativas para os 13 Pontos de Excitação	91
6.10	* Frequências e Amortecimentos médios para o 2º e o 3º modos	93
6.11	* Resultados da análise na faixa de 200 a 300 Hz	93
.1	table of an 8 degree of freedom system's residuals and poles	109

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação Inicial e Objetivos Gerais do Trabalho

A idéia inicial para o presente trabalho surgiu a partir de um projeto de pesquisa conjunta entre as universidades de Campinas (DPM-FEM-UNICAMP), do Espírito Santo (CT-DEM-UFES) e Universidade de Hannover (CRI-HANNOVER) na Alemanha.

O propósito desse projeto é o de estudar e desenvolver um método de análise modal por impactos e sensoriamentos múltiplos. Para isso, três protótipos idênticos foram projetados e elaborados pelo Centro Tecnológico da Universidade Federal do ES (C.T. - UFES), que serão futuramente utilizados nos ensaios experimentais para testes do método a ser desenvolvido.

Os protótipos têm a forma de um garfo tridente, confeccionados em aço SAE 1020 e serão testados nos três centros de pesquisa mencionados.

A idéia deste trabalho surgiu, portanto, com a intenção de dar uma pequena contribuição na modelagem experimental do referido protótipo, bem como proporcionar um melhor conhecimento das técnicas envolvidas na identificação modal de estruturas mecânicas.

A medição da Função Resposta em Frequência (FRF) de uma estrutura é muito importante na análise modal, uma vez que a FRF está relacionada com os seus parâmetros modais. Estes parâmetros descrevem o comportamento dinâmico da estrutura de uma forma matemática concisa. Uma simples inspeção nos dados de resposta em frequência de uma estrutura, entretanto, não permite determinar seus parâmetros modais, pois a FRF experimental é apenas uma razão da transformada de Fourier dos sinais de entrada e saída da estrutura e sua simples inspeção permite ter apenas de maneira qualitativa, uma estimativa do conteúdo de frequência e amortecimentos naturais da mesma.

Para solucionar essa questão, foram desenvolvidos diversos algoritmos de identificação de parâmetros modais, que se baseiam em modelos matemáticos previamente escolhidos e em um conjunto de dados. Normalmente são usadas técnicas numéricas que objetivam o ajuste das FRF a modelos matemáticos conhecidos.

Frequentemente, com o objetivo de avaliar a eficiência do algoritmo utilizado, os dados originais da FRF são comparados com a curva gerada a partir dos parâmetros modais estimados, utilizando-se um modelo matemático apropriado. Esta comparação de curvas é uma medida da validade dos parâmetros modais calculados.

Assim, também faz parte dos objetivos básicos deste trabalho a realização de medidas experimentais visando a aquisição de dados da FRF do garfo mecânico. Para a identificação modal do garfo foi escolhido um método no domínio da frequência que associa a técnica dos mínimos quadrados ao método dos gradientes, ajustando as FRF a um modelo matemático conhecido.

1.2 Considerações Gerais sobre Análise Modal e Algoritmos de Identificação de Parâmetros Modais

O uso da Análise Modal na solução de problemas de engenharia, aliado ao emprego de técnicas modernas de processamento de sinal digital e às facilidades computacionais hoje existentes, constitui uma ferramenta poderosa no estudo do comportamento de sistemas mecânicos [30, 34, 39].

Mais especificamente na área de análise modal experimental, existem diversas aplicações onde estes resultados são comumente usados [7]. A mais usual é a verificação experimental de um modelo teórico para uma determinada estrutura, como aquele proposto pelo método dos elementos finitos. Através do processamento dos dados experimentais da FRF da estrutura é possível obter seus parâmetros modais (frequência naturais, fatores de amortecimento e modos naturais de vibrar) e a partir destes gerar um modelo matemático para o sistema, o qual pode então ser comparado com o modelo teórico da estrutura.

No processamento dos dados experimentais, modernos equipamentos eletrônicos podem ser usados, tais como Analisadores de Espectro, interfaces de conversão analógico-digitais, filtros de sinais e ainda sistemas computacionais baseados em micro-computadores. Técnicas numéricas de processamento de sinais tais como janelamento, filtragem digital, obtenção de médias estatísticas e análise da coerência entre sinais adquiridos [3, 27, 24] são também empregados na análise modal experimental de estruturas.

Snoeys, Heylen e Van Der Auweraer [35] apresentam um trabalho muito interessante, onde comentam as diversas tendências e novos desenvolvimentos no campo da análise modal experimental. Frequentemente, os métodos existentes nesta área são agrupados em 4 categorias [1]:

- a) O método de excitação de modo normal forçado, originalmente pesquisado por Lewis e Wrisley em 1950 [23], que descobriram que um determinado número de excitadores deveriam ser distribuídos na estrutura de tal forma a balancear as forças dissipativas atuantes em certas frequências;
- b) O método das exponenciais complexas, cuja formulação matemática baseia-se na resposta livre do sistema a partir de uma dada condição inicial, mas que também se aplica a dados da função resposta ao impulso. Embora sua implementação seja recente, sua base teórica foi formulada no século XVIII por Prony [31]. Atualmente, dois métodos usam essa teoria na identificação de parâmetros modais: o método de Ibrahim [12, 13, 14, 15, 16] e o método da poli-referência, desenvolvido por Vold [40, 41];
- c) Os métodos de modelo matemático de entrada-saída, que se baseiam nos dados de excitação e resposta do sistema. Nesta categoria estão o método ARMA [19, 10, 28] e o método da Matriz Estrutural Reduzida [32, 37];
- d) O método da Função Resposta em Frequência, que é o mais comumente usado e se baseia nos dados da FRF para o cálculo dos parâmetros modais da estrutura [9, 17, 26, 21, 40, 41, 8, 4, 6, 11, 29, 2].

Um estágio importante no processo de análise modal de uma dada estrutura é a identificação dos seus parâmetros modais, que pode ser feita tanto com dados no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Os algoritmos de análise no domínio da frequência se subdividem em 2 classes: aqueles que fazem identificação modo a modo [9, 17, 26], isto é, o processamento é realizado nas vizinhanças de um único modo, com base em certas características do círculo modal gerado no plano complexo, pelos dados da FRF; e os algoritmos de identificação multi-modos, que procedem à identificação de vários modos simultaneamente em uma dada faixa de frequência.

Com o avanço ocorrido nos últimos anos na área da informática, tornou-se viável o uso de algoritmos de identificação globais [21, 40, 41, 8], isto é, aqueles que processam, simultaneamente, todas as FRF de uma estrutura. Entretanto, a maioria dos trabalhos publicados são a respeito de métodos multi-modos, que processam somente uma FRF por vez [4, 6, 11, 29, 2].

Um dos aspectos importantes quanto aos métodos de identificação é a influência dos modos vizinhos à faixa de frequência analisada, isto é, a identificação é levada a efeito numa determinada faixa de frequência da FRF e por isso torna-se necessário a adição de termos relativos às contribuições dos modos anteriores e posteriores a esta [6].

O presente trabalho apresenta um algoritmo multi-modo de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência, que aplica a técnica dos mínimos quadrados associada ao método dos gradientes, no ajuste das FRF do sistema dinâmico [20].

1.3 Descrição dos Capítulos

No próximo capítulo é feita uma revisão sobre a teoria da Análise Modal, destacando-se alguns conceitos básicos, tais como discretização de estruturas contínuas, obtenção da matriz Função de Transferência, definição da FRF e suas formas de apresentação gráfica. Descreve-se também os diversos tipos de modelos de amortecimentos e o cálculo de parâmetros modais a partir da FRF.

No capítulo 3 faz-se uma apresentação de alguns métodos de identificação de parâmetros modais, enfatizando a formulação matemática dos métodos no domínio da frequência. O desenvolvimento matemático do método implementado neste trabalho é também descrito.

O capítulo 4 apresenta o desenvolvimento teórico usado no método de identificação de parâmetros modais implementado. São feitas considerações quanto à implementação numérica e quanto à estrutura do programa de computador desenvolvido.

No capítulo 5 descreve-se o sistema de aquisição dos dados experimentais. São mostrados detalhes sobre o protótipo usado e a montagem experimental realizada em laboratório.

No capítulo 6 são mostrados os resultados do processamento dos dados experimentais, apresentando os parâmetros modais calculados para o garfo e seus modos naturais de vibração.

No capítulo 7 são apresentadas algumas conclusões obtidas a partir dos resultados simulados e experimentais do método de identificação modal implementado, bem como são feitas sugestões para futuros trabalhos.

O apêndice apresenta um artigo feito para publicação no V-DINAME, com um resumo da técnica de identificação descrita nesse trabalho.

Capítulo 2

REVISÃO DA TEORIA SOBRE ANÁLISE MODAL

2.1 Modelos Contínuos e Discretos

Nesta seção serão apresentados os modelos contínuos e discretos de um sistema físico, a relação entre eles e exemplos ilustrativos.

Um sistema físico pode ser modelado de maneira contínua, através da integração de equações de equilíbrio infinitesimais ou através de um modelo discretizado por elementos finitos. A diferença básica entre os modelos é que sistemas discretos possuem um número finito de graus de liberdade e sistemas contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade. Os graus de liberdade, por sua vez, representam o número de coordenadas independentes necessárias para a descrição completa do movimento do sistema.

A figura 2.1.a mostra um sistema contínuo composto por uma viga engastada. Uma aproximação discreta do movimento da extremidade da viga de tal sistema pode ser representada pelo conjunto massa mola de 1 grau de liberdade (Figura 2.1.b). O deslocamento estático da extremidade da viga pode ser representado analogamente pelo deslocamento da massa m do modelo de 1 grau de liberdade quando o valor de rigidez de mola é dado por:

$$K = \frac{3EI}{L^3} \quad (2.1)$$

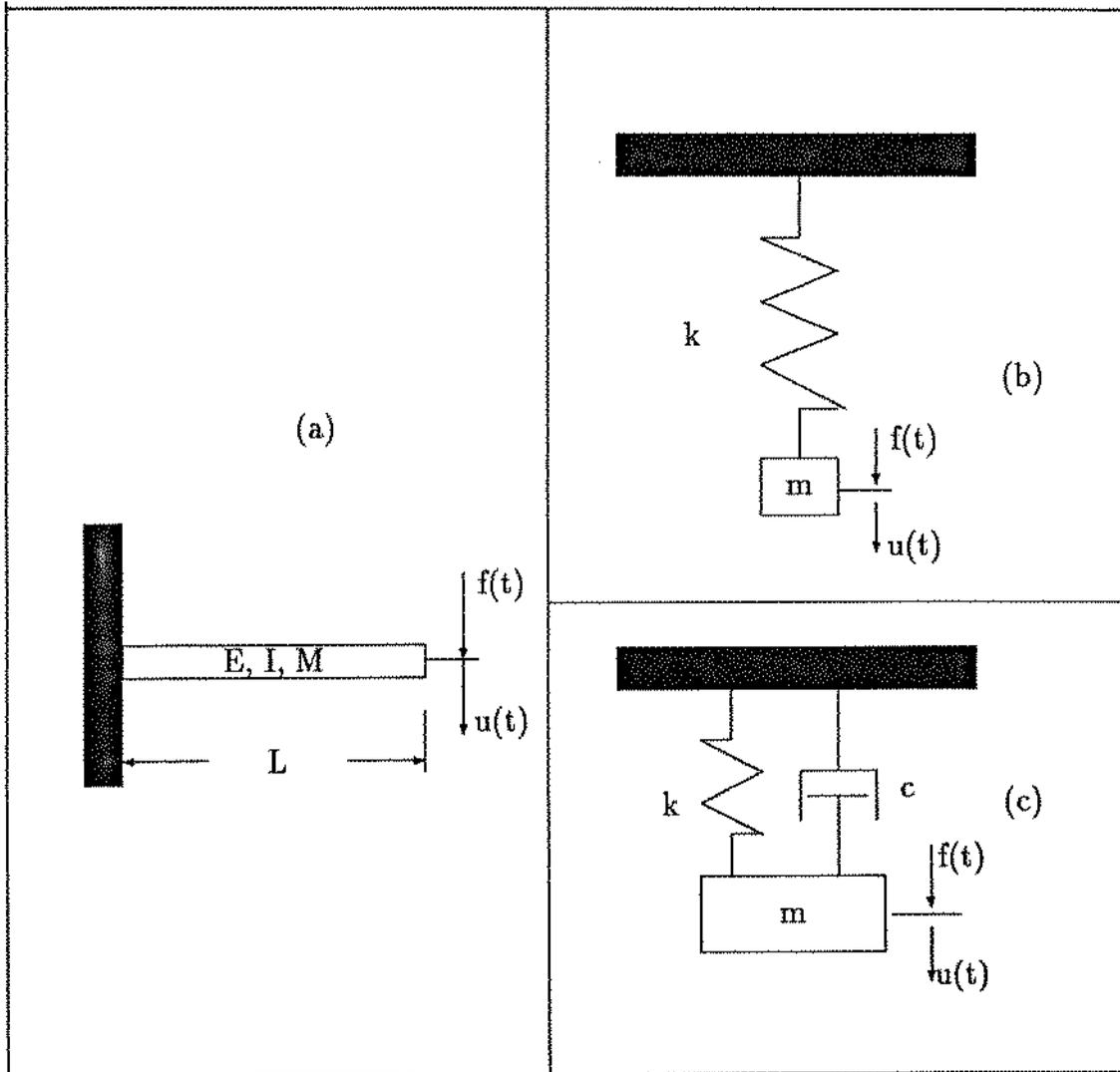


Figura 2.1: Sistema Contínuo com modelo representativo de um grau de liberdade.

onde:

- E módulo de elasticidade da viga;
- I momento de inércia da viga;
- M massa da viga;
- L comprimento da viga;
- f força atuante;
- u deslocamento;
- m massa equivalente do sistema discreto;
- K rigidez equivalente do sistema discreto;
- C amortecimento do sistema discreto.

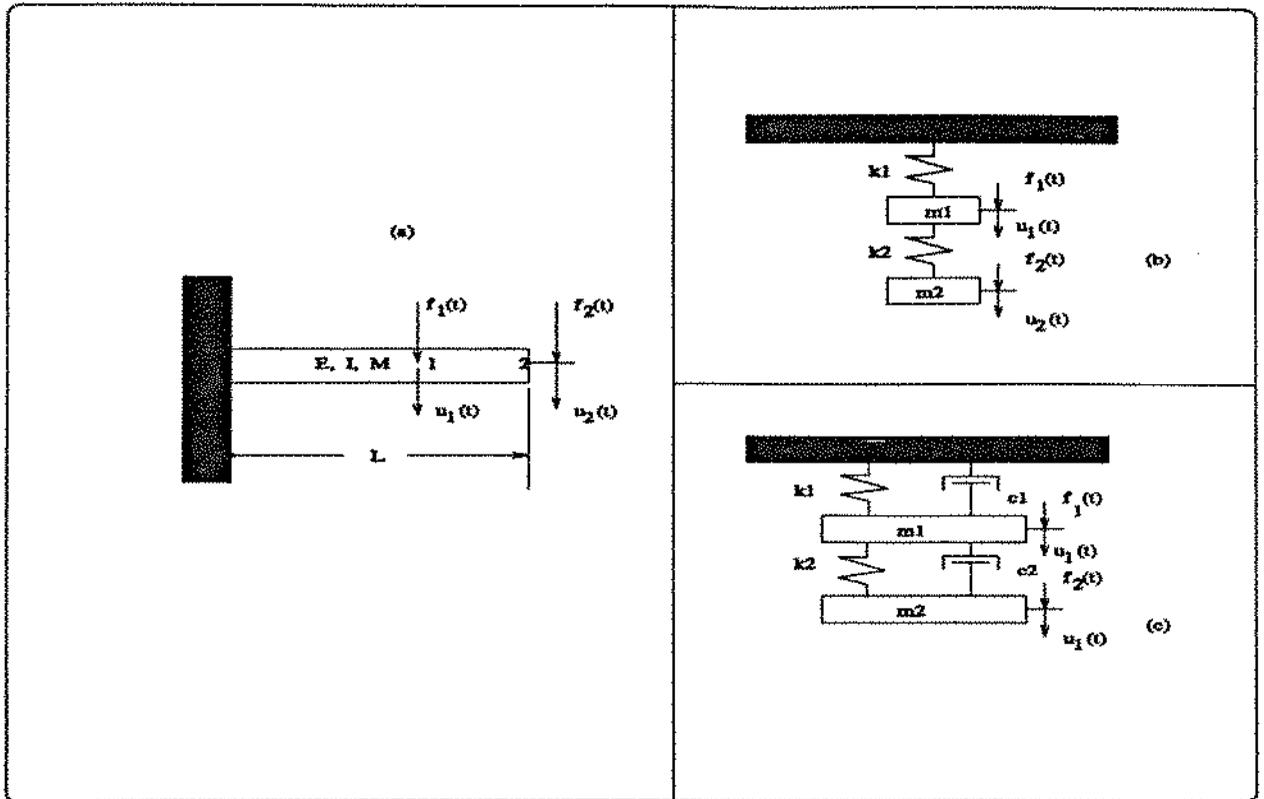


Figura 2.2: Sistema Continuo com modelo representativo de dois grau de liberdade.

Desejando-se uma analogia dinâmica entre o modelo discreto de 1 grau de liberdade e o sistema mecânico em estudo, pode-se adotar o valor de massa

$$m = \frac{3M}{(3.52)^2} \quad (2.2)$$

de tal forma que a frequência natural do modelo iguala-se à primeira frequência natural de vibração flexional da viga.

Para o sistema massa-mola da Figura 2.1.b, a equação de equilíbrio de forças é dada por:

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = f(t) \quad (2.3)$$

Se o efeito do amortecimento for considerado, conforme mostrado na figura 2.1.c, a equação (2.2) torna-se:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = f(t) \quad (2.4)$$

Para um sistema discreto com dois graus de liberdade como visto na Figura 2.2(c), as equações de equilíbrio, arranjadas matricialmente, tornam-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

onde os vetores u_r e f_r , $r=1,2$, são funções do tempo t .

Na prática os sistemas discretos são modelados para N graus de liberdade o que, levando em consideração o amortecimento, é representado pelo sistema de equações diferenciais de segunda ordem a seguir, escrito em notação matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.6)$$

onde:

- \mathbf{M} \mathbf{C} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez reais, simétricas, de ordem N ;
- \mathbf{f} e \mathbf{u} são os vetores de forças aplicadas e deslocamentos do graus de liberdade.

2.2 Obtenção da Matriz Função de Transferência

Pode-se utilizar a formulação por variáveis de estado, com finalidade de transformar o sistema de N equações de segunda ordem (2.6) em um conjunto de $2N$ equações de primeira ordem. Assim, definindo-se o conjunto de N equações adicionais dadas por:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

obtém-se o sistema de ordem $2N$:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{B} \mathbf{z}(t) = \mathbf{r}(t) \quad (2.8)$$

onde as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são formadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e os vetores \mathbf{z} e \mathbf{r} :

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{r}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

• Resposta Livre

Na análise da resposta livre do sistema, a equação (2.8) pode ser escrita como:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{B} \mathbf{z}(t) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

assume-se a solução da equação (2.11) como sendo da forma:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z} e^{st} \quad (2.12)$$

onde \mathbf{Z} é um vetor constante de ordem $2N \times 1$.

Substituindo-se a equação (2.12) na equação (2.11), obtém-se o autop problema:

$$(s\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

As soluções do autop problema (2.13) podem ser apresentadas na forma de duas matrizes complexas, ambas de ordem $2N \times 2N$. A primeira é a matriz diagonal dos autovalores ou matriz espectral ($\tilde{\mathbf{S}}$), cuja estrutura é:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^* \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A matriz \mathbf{S} está relacionada com as frequências naturais amortecidas e o fatores de amortecimento modais segundo a equação :

$$s_r = -\sigma_r + j\omega_{rd} \quad (2.15)$$

onde:

$$\sigma_r = \xi_r \omega_r \quad (2.16)$$

$$\omega_{rd} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (2.17)$$

sendo:

ξ_r fator de amortecimento modal do modo r ;

ω_{rd} frequência natural amortecida do modo r .

A segunda das duas matrizes do autoprobema (2.13) é a matriz modal \mathcal{Z} , cujas colunas são os auto-vetores associados ao problema descrito na equação (2.13). Assim, pode-se escrever:

$$\mathcal{Z} = \left[\mathbf{Z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{Z}_N \quad \mathbf{Z}_1^* \quad \dots \quad \mathbf{Z}_N^* \right] \quad (2.18)$$

Pode-se também mostrar que o auto-vetor \mathbf{Z}_r do problema associado às equações de estado (2.8), relaciona-se com o auto-valor s_r e o vetor \mathbf{U}_r da seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r \\ s_r \mathbf{U}_r \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

ou, na forma Matricial:

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}^* \\ \mathbf{U}\mathbf{S} & \mathbf{U}^*\mathbf{S}^* \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{U} = \left[\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \dots \quad \mathbf{U}_N \right] \quad (2.20)$$

onde \mathbf{U}_r é um auto-vetor associado ao sistema dado pela equação :

$$\left[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} \right] \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Tomando-se a expressão (2.13) para um único modo r qualquer, tem-se:

$$\mathbf{B}\mathbf{Z}_r = s_r \mathbf{A}\mathbf{Z}_r \quad (2.21)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (2.21) por \mathbf{Z}_s^T , tem-se:

$$\mathbf{Z}_s^T \mathbf{B}\mathbf{Z}_r = s_r \mathbf{Z}_s^T \mathbf{A}\mathbf{Z}_r \quad (2.22)$$

Escrevendo agora a equação (2.13) para o modo s e em seguida pré-multiplicando pelo vetor \mathbf{Z}_r^T , obtém-se:

$$\mathbf{Z}_r^T \mathbf{B}\mathbf{Z}_s = s_s \mathbf{Z}_r^T \mathbf{A}\mathbf{Z}_s \quad (2.23)$$

Subtraindo a equação (2.23) da equação (2.22) transposta, obtém-se:

$$(s_r - s_s) \mathbf{Z}_r^T \mathbf{A}\mathbf{Z}_s = 0 \quad (2.24)$$

Assim, para $s_r \neq s_s$, a equação (2.24) é satisfeita se:

$$\mathbf{Z}_r^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_s = 0 \quad (2.25)$$

Substituindo-se a equação (2.25) na equação (2.23), obtém-se:

$$\mathbf{Z}_r^T \mathbf{B} \mathbf{Z}_s = 0 \quad (2.26)$$

As equações (2.25) e (2.26) representam as relações de ortogonalidade entre os modos de vibrar e as variáveis de estado do sistema.

Para $s_r = s_s$ na expressão (2.24), as equações (2.25) e (2.26) tornam-se:

$$\mathbf{Z}_r^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_r = q_{rr}^{-1} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{Z}_r^T \mathbf{B} \mathbf{Z}_r = s_r q_{rr}^{-1} \quad (2.28)$$

Onde q_{rr}^{-1} são coeficientes de norma complexos, arbitrários.

Matricialmente, pode-se escrever:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{Q}^{-1} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{Q}^{-1} \quad (2.30)$$

sendo \mathbf{Q}^{-1} a matriz diagonal de norma, com a seguinte estrutura:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}^{-1*} \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11}^{-1} & & & \\ & q_{22}^{-1} & & \\ & & \dots & \\ & & & q_{NN}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Espandindo-se a equação (2.29), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^T & \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U}^{*T} & \mathbf{S}^{*T} \mathbf{U}^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}^* \\ \mathbf{U} \mathbf{S} & \mathbf{U}^* \mathbf{S}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}^{-1*} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Tomando apenas o elemento da primeira linha e primeira coluna, tem-se:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{q}^{-1} \quad (2.33)$$

Tomando apenas um elemento da diagonal de \mathbf{q}^{-1} , a equação (2.33) torna-se:

$$\mathbf{U}_r^T \mathbf{C} \mathbf{U}_r + 2s_r \mathbf{U}_r^T \mathbf{M} \mathbf{U}_r = q_{rr}^{-1} \quad (2.34)$$

Que é a relação de norma para o sistema nas variáveis de estado, em função das matrizes e autovalores/autovetores do sistema original.

• **Resposta Forçada**

Retornando ao caso forçado da equação (2.8) e tomando-se a excitação $r(t)$ como sendo:

$$r(t) = R e^{st} \quad (2.35)$$

tem-se que a resposta $z(t)$ do sistema é igualmente um vetor do tipo

$$z(t) = Z e^{st} \quad (2.36)$$

Substituindo (2.35) e (2.36) na expressão (2.8), tem-se:

$$(sA - B)Z = R \quad (2.37)$$

ou:

$$Z = (sA - B)^{-1} R \quad (2.38)$$

Nota-se das equações (2.37) e (2.38) que os vetores Z e R relacionam-se não apenas em função de suas amplitudes mas também em função do parâmetro s . Assim, torna-se conveniente a representação de tais vetores como funções do parâmetro genérico s . Nesta nova representação, reescreve-se a equação (2.37) como:

$$(sA - B)Z(s) = R(s) \quad (2.39)$$

Representando-se agora o vetor $Z(s)$ como o resultado da multiplicação da matriz modal Z pelo vetor de coordenadas principais, $P(s)$, tem-se:

$$Z(s) = ZP(s) \quad (2.40)$$

Pré-multiplicando a equação (2.39) por Z^T , obtém-se:

$$(sZ^T A Z - Z^T B Z) P(s) = Z^T R(s) \quad (2.41)$$

Utilizando as propriedades de normalização da matriz modal, expressões (2.29) e (2.30), tem-se:

$$(sI - \tilde{S}) Q^{-1} P(s) = Z^T R(s) \quad (2.42)$$

ou, de forma direta:

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}\Omega(s)\mathbf{Z}^T\mathbf{R}(s) \quad (2.43)$$

onde:

$$\Omega(s) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_1^* \end{bmatrix}$$

sendo:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} (s - s_1)^{-1} & & & \\ & (s - s_2)^{-1} & & \\ & & \dots & \\ & & & (s - s_N)^{-1} \end{bmatrix}$$

Combinando-se as expressões de força e deslocamento do sistema nas variáveis de estado, equações (2.35) e (2.36), com suas expressões nas coordenadas originais do problema, equação (2.10), tem-se:

$$\mathbf{R}(s) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(s) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad e \quad \mathbf{Z}(s) = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(s) \\ s\mathbf{U}(s) \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Substituindo as equações (2.43) e (2.44) na equação (2.40) e expandindo, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}(s) \\ s\mathbf{U}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}^* \\ \mathbf{U}\mathbf{S} & \mathbf{U}^*\mathbf{S}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T & \mathbf{S}\mathbf{U}^T \\ \mathbf{U}^{*T} & \mathbf{S}^{*T}\mathbf{U}^{*T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(s) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}(s) \\ s\mathbf{U}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{U}\mathbf{q}\Omega_1\mathbf{U}^T + \mathbf{U}^*\mathbf{q}^*\Omega_1^*\mathbf{U}^{*T}\} \mathbf{F}(s) \\ \{\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{q}\Omega_1\mathbf{U}^T + \mathbf{U}^*\mathbf{S}^*\mathbf{q}^*\Omega_1^*\mathbf{U}^{*T}\} \mathbf{F}(s) \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$\mathbf{U}(s) = [\mathbf{U}_q \Omega_1 \mathbf{U}^T + \mathbf{U}^* \mathbf{q}^* \Omega_1^* \mathbf{U}^{*T}] \mathbf{F}(s) \quad (2.45)$$

ou seja:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{F}(s) \quad (2.46)$$

onde

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{q_r \mathbf{U}_r \mathbf{U}_r^T}{s - s_r} + \frac{q_r^* \mathbf{U}_r^* \mathbf{U}_r^{*T}}{s - s_r^*} \right] \quad (2.47)$$

é a forma da Função de transferência em termos do parâmetro genérico s .

2.3 Apresentação da Função Resposta em Frequência

Expandindo-se a equação (2.46), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1(s) \\ \mathbf{U}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_i(s) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}(s) & \mathbf{H}_{12}(s) & \dots & \mathbf{H}_{1j}(s) & \dots & \mathbf{H}_{1N}(s) \\ \mathbf{H}_{21}(s) & \mathbf{H}_{22}(s) & \dots & \mathbf{H}_{2j}(s) & \dots & \mathbf{H}_{2N}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{i1}(s) & \mathbf{H}_{i2}(s) & \dots & \mathbf{H}_{ij}(s) & \dots & \mathbf{H}_{iN}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{N1}(s) & \mathbf{H}_{N2}(s) & \dots & \mathbf{H}_{Nj}(s) & \dots & \mathbf{H}_{NN}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(s) \\ \mathbf{f}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_j(s) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N(s) \end{pmatrix}$$

Assumindo a força aplicada somente no ponto j , ou seja, $f_k = 0, \forall k \neq j$, e a resposta tomada no ponto i , obtém-se:

$$\mathbf{u}_i(s) = \mathbf{H}_{ij}(s) \mathbf{f}_j(s) \quad (2.48)$$

onde:

$$\mathbf{H}_{ij}(s) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{q_r u_{ri} u_{rj}}{s - s_r} + \frac{q_r^* u_{ri}^* u_{rj}^*}{s - s_r^*} \right] \quad (2.49)$$

é a equação que representa a função de transferência relativa à excitação no ponto j e resposta no ponto i , sendo u_{ri} o i -ésimo elemento do auto-vetor U_r .

Pode-se escrever a equação (2.49) como se segue:

$$H_{ij}(s) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{r_{rij}}{s - s_r} + \frac{r_{rij}^*}{s - s_r^*} \right] \quad (2.50)$$

onde:

$$r_{rij} = q_r u_{ri} u_{rj} \quad (2.51)$$

é chamado resíduo modal complexo e s_r , o polo complexo definido na equação (2.15).

Fazendo a variável de Laplace $s = j\omega$ na equação (2.50), obtém-se:

$$H_{ij}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{r_{rij}}{j\omega - s_r} + \frac{r_{rij}^*}{j\omega - s_r^*} \right] \quad (2.52)$$

A expressão (2.52) representa a **Função Resposta em Frequência (FRF)** de um sistema com N graus de liberdade, onde ω é a frequência de excitação.

2.3.1 Formas Usuais de Representação da FRF

a) Formas Alternativas de FRF

O desenvolvimento apresentado até o presente momento mostra a FRF como uma razão entre o deslocamento num determinado ponto i , devido a uma força atuante num único ponto j , que recebe o nome de receptância. De fato, existem outras formas de se apresentar os dados da FRF. Outras duas formas alternativas podem ser usadas para apresentar estes dados, sendo elas:

I - a **Mobilidade**, $\beta(\omega)$, que é a razão entre a velocidade e a força e

II - a **Acelerância**, $\gamma(\omega)$, que é a razão entre a aceleração e a força

É possível mostrar, com base nas características senoidais da força e do deslocamento, que a relação entre essas três formas de FRF se dá como se segue:

$$\beta(\omega) = j\omega\alpha(\omega) \quad (2.53)$$

$$\gamma(\omega) = j\omega\beta(\omega) = -\omega^2\alpha(\omega) \quad (2.54)$$

A vantagem do uso de uma ou outra depende da sua conveniência ou disponibilidade dos sinais dinâmicos utilizados.

As formas inversas da Receptância, Mobilidade e Acelerância recebem o nome respectivamente de Rigidez Dinâmica, Impedância Mecânica e Massa Aparente, mas estas não são comumente usadas para a apresentação dos dados de uma FRF.

Quando as coordenadas i, j , respectivamente de resposta e excitação, não são coincidentes, a função $\alpha_{ij}(\omega)$ é dita receptância de transferência, ou cruzada. Se entretanto estas coordenadas coincidirem, então a referida função é chamada de receptância de ponto. A seguir serão apresentados os gráficos representativos destas duas formas de FRF, bem como as outras formas gráficas existentes.

b) Representação Gráfica dos Dados de uma FRF

No processamento dos dados de um teste modal torna-se necessário, em algum ponto do seu desenvolvimento a apresentação em forma de gráficos dos dados contidos numa FRF, facilitando certos tipos de interpretações qualitativas.

A forma clássica de se apresentar graficamente uma FRF é *plotando* seus conteúdos de módulo e fase em função da frequência denominada diagrama de Bode, apresentado na Figura 2.3.

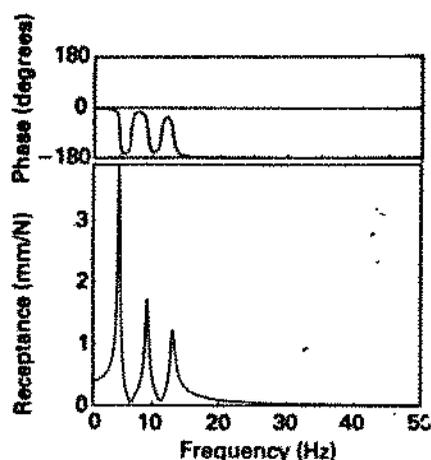


Figura 2.3: Módulo e fase da receptância em função da frequência. [5]

Pode-se ainda apresentar os gráficos da parte real e imaginária em função da frequência Figura 2.4.

No caso do diagrama de Bode, pode-se usar escalas lineares para ambos os eixos, amplitude e frequência ou logarítmica para a amplitude e linear para a frequência ou ainda logarítmica para ambos (Figura 2.5).

No caso particular de sistemas com um único grau de liberdade observa-se uma simetria no gráfico da mobilidade, ao contrário do gráfico da receptância (Figuras 2.6.a e

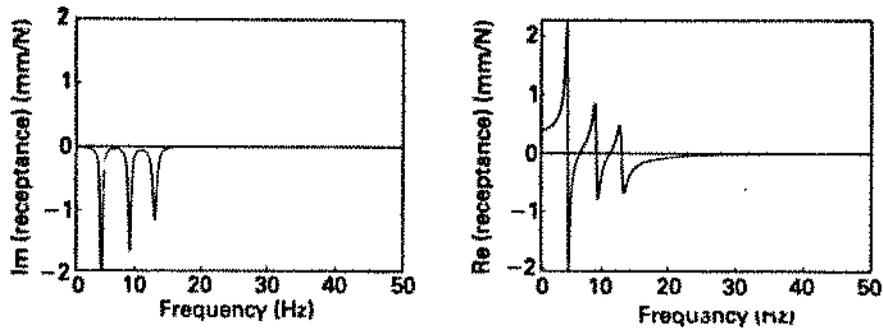


Figura 2.4: Parte imaginária e real da receptância em função da frequência. [5]

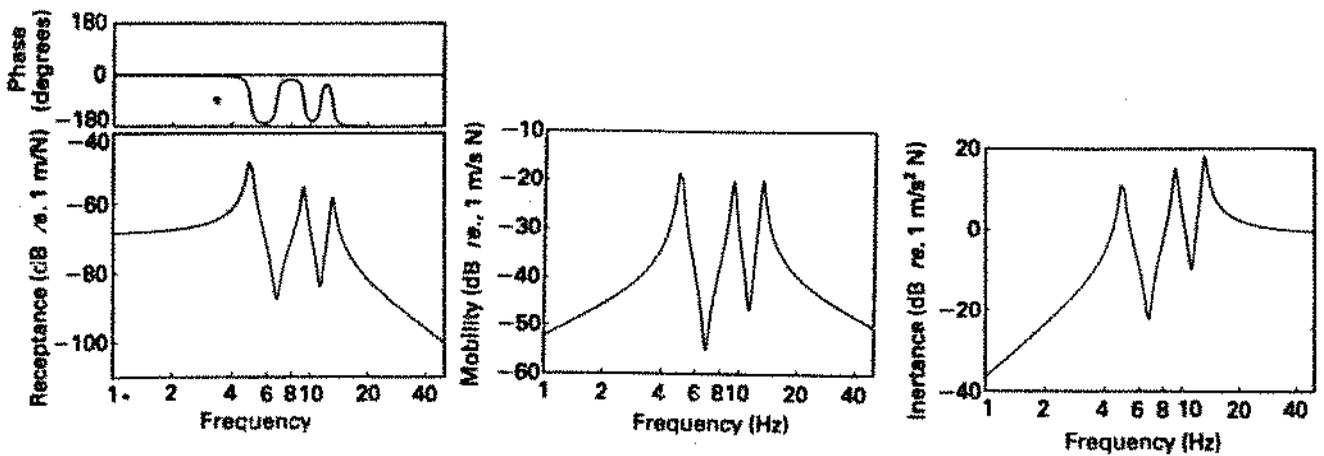


Figura 2.5: Módulo da receptância, Mobilidade e aceleração em função da frequência para sistemas com mais de um grau de liberdade. [5]

2.6.b).

Outra forma de se apresentar os dados de uma FRF é o diagrama de Nyquist, que representa a sua parte imaginária em função da parte real. Para sistemas com amortecimento viscoso, o gráfico de Nyquist da mobilidade para um sistema com apenas um grau de liberdade é um círculo perfeito no plano complexo, com centro no eixo real. Já para sistemas com amortecimento histerético (que será definido na seção 2.3.4), somente o gráfico da receptância é circular (Figuras 2.6.c e 2.6.d).

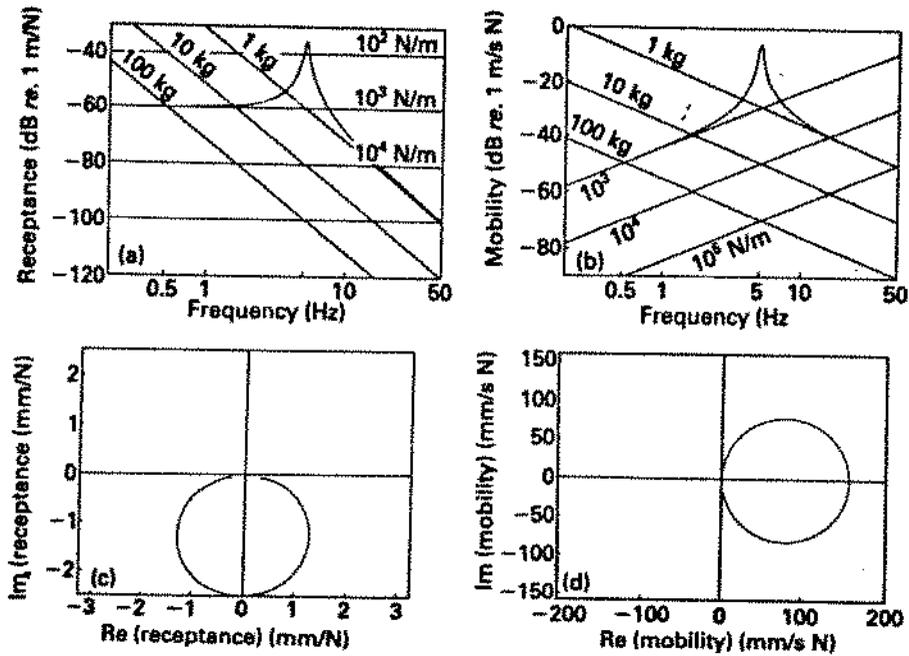


Figura 2.6: Módulo da receptância (a) e Mobilidade (b) em função da frequência para sistemas com um grau de liberdade e diagrama de Nyquist para receptância (c) e Mobilidade (d). [5]

2.3.2 Amortecimento Viscoso - Caso Geral

Neste item será derivada uma expressão em termos das quantidades modais relativas a sistemas com amortecimento viscoso não-proporcional (caso geral), pois o método implementado que será discutido no capítulo 4 trata da resposta de sistemas com esta forma de amortecimento.

Substituindo-se as equações (2.15), (2.16) e (2.17) na equação (2.52) e sabendo-se

que o resíduo r_{rij} é um valor complexo ($a_{rij} + jb_{rij}$), obtém-se

$$\mathbf{H}_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{a_{rij} + jb_{rij}}{\omega_r \xi_r + j(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} + \frac{a_{rij} - jb_{rij}}{\omega_r \xi_r + j(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} \right] \quad (2.55)$$

onde a quantidade ω_r é a frequência natural e ξ_r é a razão de amortecimento crítico para o modo r . Por vezes, a quantidade ω_r é chamada *frequência natural não-amortecida*, o que não é muito correto, exceto no caso de amortecimento proporcional, ou no caso de sistemas com um grau de liberdade (Ewins, 1984).

Arranjando-se a equação (2.55), obtém-se:

$$\mathbf{H}_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{\omega_r D_{rij} + j\omega E_{rij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_r \xi_r} \right] \quad (2.56)$$

onde:

$$D_{rij} = 2(a_{rij}\xi_r - b_{rij}\sqrt{1 - \xi_r^2})$$

$$E_{rij} = 2a_{rij}$$

Percebe-se da equação (2.56) que o termo no numerador é complexo e varia com a frequência de excitação ω .

2.3.3 Sistemas Não Amortecidos

Os sistemas não amortecidos constituem um caso particular do modelo derivado na seção 2.3.2. Assim, fazendo $\xi_r = 0$ na expressão (2.56), tem-se:

$$\mathbf{H}_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{\omega_r D_{rij} + j\omega E_{rij}}{\omega_r^2 - \omega^2} \right] \quad (2.57)$$

ou

$$\mathbf{H}_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{-2(\omega_r b_{rij} - j\omega a_{rij})}{\omega_r^2 - \omega^2} \right] \quad (2.58)$$

Nota-se neste caso que, embora sendo o sistema não amortecido, o numerador da expressão 2.58 continua sendo complexo. Entretanto, sabe-se que a expressão da função resposta em frequência para sistemas não amortecidos é real, o que leva a concluir que a constante a_{rij} é nula. Outra consequência deste fato é que os elementos dos auto-vetores de sistemas não amortecidos são sempre reais.

2.3.4 Amortecimento Histerético - Caso Geral

O modelo de amortecimento histerético é aquele que assume que as forças de amortecimento atuantes numa estrutura são proporcionais aos deslocamentos dos pontos da mesma em relação ao sistema de coordenadas adotado.

O sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve o movimento dos sistemas com este modelo de amortecimento, para excitação harmônica, é dado na forma matricial por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K} + j\mathbf{H}) \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.59)$$

onde as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{H} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento histerético e rigidez de sistema, de ordem N .

Assim como no caso do amortecimento viscoso (seção 2.2), pode-se derivar uma expressão para a FRF para sistemas com amortecimento histerético. Procedendo-se à análise da resposta livre do sistema e assumindo solução do tipo harmônica:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} e^{j\omega t} \quad (2.60)$$

substituindo-se em 2.59, recai-se num auto-problema complexo cuja solução é dada, novamente, por duas matrizes complexas, contendo os auto-valores e auto-vetores complexos do sistema:

$$[(\mathbf{K} + j\mathbf{H}) - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{u} = 0 \quad (2.61)$$

Convém observar que os modos de vibrar complexos são simplesmente aqueles nos quais a amplitude de cada coordenada possui magnitude e ângulo de fase, diferentemente dos modos reais, onde o ângulo de fase é 0 ou 180 graus.

Os autovalores complexos são definidos como a seguir:

$$s_r^2 = \omega_r^2 \cdot (1 + j\eta_r) \quad (2.62)$$

onde ω_r é a frequência natural e η_r é o fator de perda do modo r .

A solução do autoproblema 2.61 permite definir relações de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e rigidez, como a seguir:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y} = [m_r] \quad (2.63)$$

$$\mathbf{y}^T [\mathbf{K} + j\mathbf{H}] \mathbf{y} = [k_r] \quad (2.64)$$

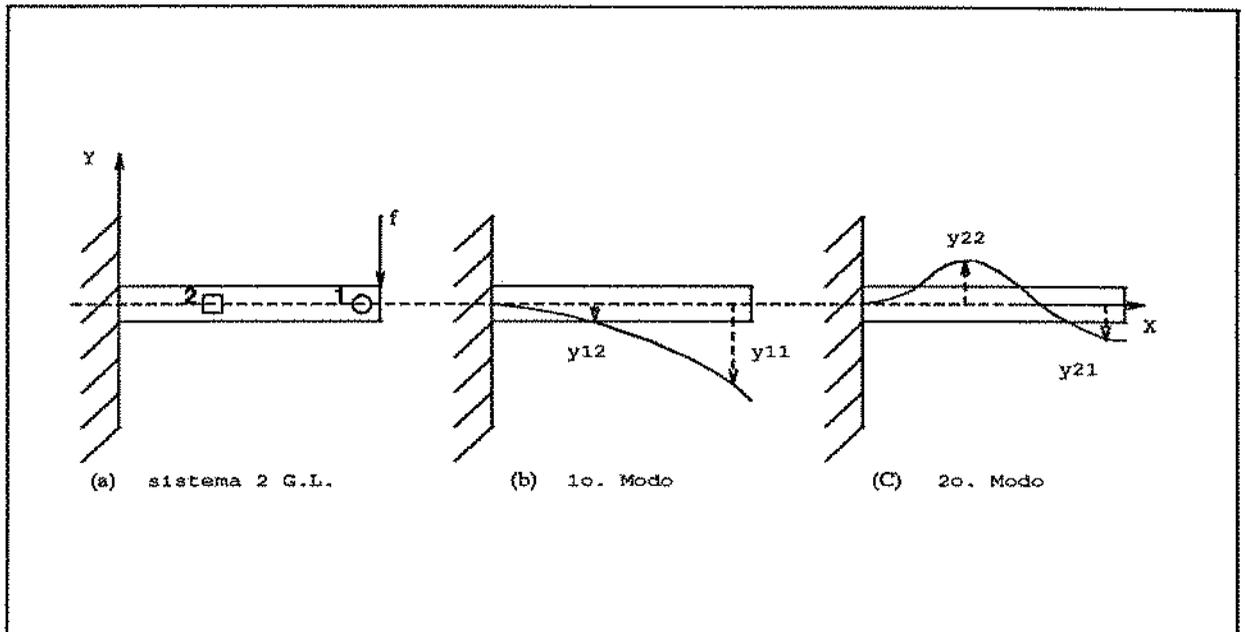


Figura 2.7: Sistema representativo de modelo com 2 grau de liberdade.

Medindo-se os valores das FRF para um sistema discreto cujas matrizes de massa, rigidez e amortecimento são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 22 & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

pode-se obter valores para a FRF complexa em 2N valores de frequência discreta

Tabela 2.1: Valores de FRF complexa para sistema com 2 graus de liberdade

	$\omega_1 = 11[rd/s]$	$\omega_2 = 13[rd/s]$	$\omega_3 = 15[rd/s]$	$\omega_4 = 17[rd/s]$
$H_{11}(\omega_k)[10^{-3}]$	-7.7708-7.0070j	-5.4021-5.2048j	-3.9845-4.1593j	-3.0660-3.4774j
$H_{12}(\omega_k)[10^{-3}]$	-6.8128-11.946j	-4.8798-8.7920j	-3.6332-6.9961j	-2.8031-5.8397j
$H_{22}(\omega_k)[10^{-3}]$	2.1266-31.329j	0.6057-24.814j	0.0706-20.549j	-0.1281-17.564j

e então montar um sistema de equações análogo a (2.67) cujas incógnitas são s_1 e s_2 , r_{111} , r_{211} , r_{112} , r_{112} , r_{122} , r_{222} . A solução desse sistema de equações permite determinar o valor desses parâmetros, observando-se que a solução para s_1 e s_2 deverá levar a valores comuns para estes parâmetros.

Através da relação $r_{rij} = q_r y_{ri} y_{rj}$, pode-se usar os valores de resíduos obtidos, para calcular os auto-vetores y_1 e y_2 e os coeficientes de normalização q_1 e q_2 , a partir do seguinte sistema de equações, também não lineares:

$$\begin{aligned}
 r_{111} &= q_1 \cdot x_{11} \cdot x_{11} = q_1 \cdot x_{11}^2 \\
 r_{211} &= q_2 \cdot x_{21} \cdot x_{21} = q_2 \cdot x_{21}^2 \\
 r_{112} &= q_1 \cdot x_{11} \cdot x_{12} \\
 r_{212} &= q_2 \cdot x_{21} \cdot x_{22} \\
 r_{122} &= q_1 \cdot x_{12} \cdot x_{12} = q_1 \cdot x_{12}^2 \\
 r_{222} &= q_2 \cdot x_{22} \cdot x_{22} = q_2 \cdot x_{22}^2
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

resolvendo-se (2.67) e (2.68), obtém-se os seguintes resultados para este sistema de 2 graus de liberdade:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -3 + 5j & x_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2}j \end{bmatrix} & q_1 &= 1/41 \cdot (-2 + (5/2)j) \\
 s_2 &= -2 + 4j & x_2^T &= \begin{bmatrix} 1 & (3/10)\sqrt{2} - (4/10)\sqrt{2}j \end{bmatrix}; & q_2 &= 1/41 \cdot (2 - (31/4)j)
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

UMA BREVE REVISÃO DOS MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

O objetivo do presente capítulo é fazer um breve relato a respeito dos métodos de identificação de parâmetros modais existentes.

Os métodos de identificação podem ser formulados no domínio do tempo ou da frequência. Neste último, podem ser considerados duas formas de análise: uma que diz respeito à identificação modo a modo, destacando-se o método de ajustagem do círculo, e outra, capaz de identificar vários modos de vibrar simultaneamente, o que é muito útil em casos onde o sistema possui forte acoplamento modal.

O objetivo principal dos métodos de identificação modal é o cálculo dos parâmetros modais do sistema sob análise. A maioria dos algoritmos usados para esse fim utilizam modelos de ajustagem de curvas, envolvendo técnicas matemáticas tais como mínimos quadrados, métodos gradientes, etc.. Normalmente recai-se num sistema de equações, que é função dos parâmetros que se deseja calcular.

3.1 Identificação Modo a Modo

O método mais usado para esse tipo de análise é o de ajuste de círculo. Um método proposto por Kennedy & Pancu [17] assume que nas vizinhanças de uma frequência natural ω_r , a amplitude de FRF complexa é influenciado somente pela parcela correspondente ao modo r em questão e que a contribuição dos modos restantes é pequena e constante. Assim, um gráfico da parte imaginária em função da parte real da FRF se aproxima e

pode ser ajustado por um círculo.

A FRF de receptância para um sistema com N graus de liberdade, assumindo amortecimento histerético, pode ser expressa como:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{A_{rij}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + j(\eta_r \omega_r^2)} + \sum_{k=1, k \neq r}^N \frac{A_{kij}}{(\omega_k^2 - \omega^2) + j(\eta_k \omega_k^2)} \quad (3.1)$$

ou:

$$H_{ij}(\omega) \cong \frac{A_{rij}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + j(\eta_r \omega_r^2)} + B_{rij} \quad (3.2)$$

- onde: j - imaginário puro $\sqrt{-1}$;
 ω - frequência;
 A_{rij} - constante modal do modo r ;
 ω_r - frequência natural do modo r ;
 η_r - fator de amortecimento histerético;
 B_{rij} - parcela residual dos modos restantes.

A primeira parcela da equação 3.2 corresponde ao modo r , e a segunda parcela, suposta constante, representa a contribuição dos modos restantes, que é supostamente independente da frequência de excitação de ω .

Pode-se demonstrar que a equação 3.1 representa um círculo no plano complexo, que é chamado de círculo modal, cujas propriedades geométricas podem ser expressas através dos parâmetros modais da equação 3.1, como mostra a figura 3.1:

Com base na equação 3.1, o ângulo γ mostrado na figura 3.1, para qualquer valor de ω , é igual a:

$$\gamma = \arctan \left(\frac{\eta_r \omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} \right) \quad (3.3)$$

e também,

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{\omega_r^2 - \omega^2}{\eta_r \omega_r^2} \right) \quad (3.4)$$

Da equação 3.4, obtém-se:

$$\omega^2 = \omega_r^2 \left[1 - \eta_r \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (3.5)$$

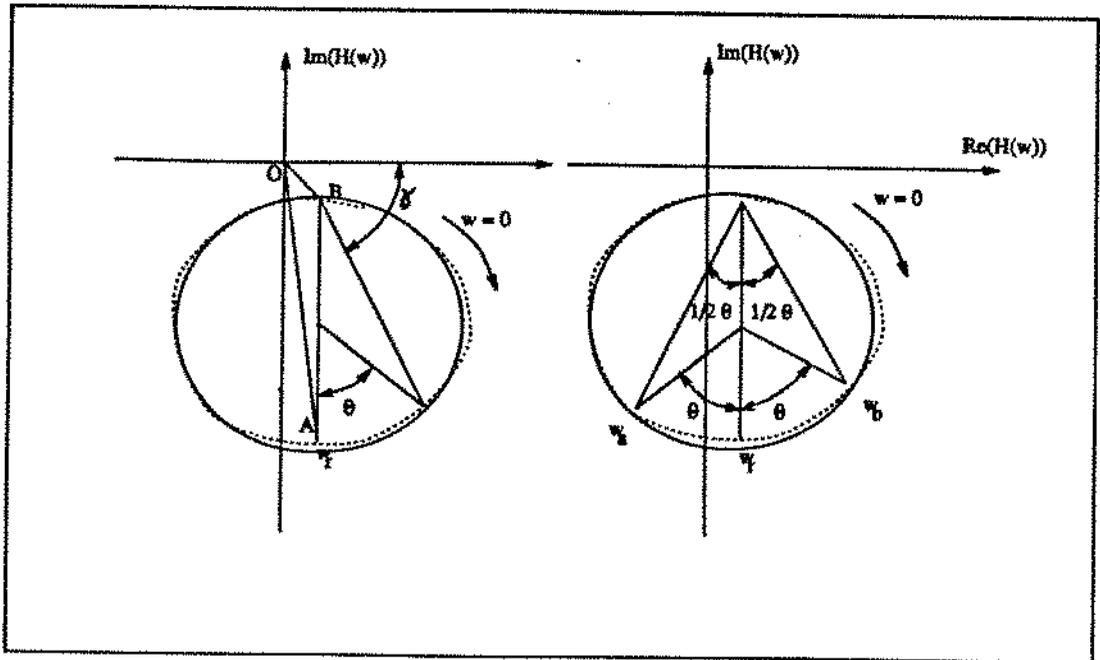


Figura 3.1: Propriedades do Círculo Modal.

Derivando-se (3.5) em relação a θ :

$$\frac{d(\omega^2)}{d\theta} = \left(-\frac{\omega_r^2 \eta_r}{2} \right) \sec^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (3.6)$$

Derivando-se (3.6) mais uma vez, em relação a ω , pode-se verificar um ponto de máximo em $\omega = \omega_r$. Para isso:

$$\frac{d}{d\omega} \frac{d(\omega^2)}{d\theta} = 0 \quad (3.7)$$

Pode-se também obter uma estimativa para o fator de amortecimento histerético η_r , fazendo-se:

$$\left(\frac{d\theta}{d(\omega^2)} \right)_{\omega=\omega_r} = -\frac{2}{\eta_r \omega_r^2} \quad (3.8)$$

Analisando novamente a figura 3.1, pode-se obter uma relação entre os ângulos θ_a e θ_b escolhidos arbitrariamente antes e depois da ressonância e os parâmetros η_r e ω_r , como se segue:

$$\theta_a = 2 \arctan \left(\frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\eta_r \omega_r^2} \right) \quad (3.9)$$

$$\theta_b = 2 \arctan \left(\frac{\omega_r^2 - \omega_b^2}{\eta_r \omega_r^2} \right) \quad (3.10)$$

E a partir de (3.9) e (3.10), resulta a seguinte expressão para o fator de amortecimento η_r :

$$\eta_r = \frac{(\omega_a^2 - \omega_b^2)}{\omega_r^2 [\tan(\theta_a/2) + \tan(\theta_b/2)]} \quad (3.11)$$

Se o amortecimento for pequeno, a equação (3.11) torna-se:

$$\eta_r = \frac{2(\omega_a - \omega_b)}{\omega_r [\tan(\theta_a/2) + \tan(\theta_b/2)]} \quad (3.12)$$

No caso particular em que $\theta_a = \theta_b = \pi/2$, resulta:

$$\eta_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r} \quad (3.13)$$

onde as frequências ω_1 e ω_2 correspondem aos pontos de média potência [7].

A propriedade final diz respeito à constante modal A_{rij} , que está relacionada com o diâmetro do círculo D_{rij} da seguinte forma:

$$D_{rij} = \frac{|A_{rij}|}{\eta_r \omega_r^2} \quad (3.14)$$

A implementação numérica do método consiste basicamente em interpolar um círculo aos pontos referentes à FRF estudada. Quando o número de pontos conhecidos da FRF em torno da ressonância é maior do que o mínimo necessário para a interpolação de um círculo utiliza-se um método de mínimos quadrados, uma vez que o sistema de equações resultantes é superdimensionado, ou seja, possui um número de equações superior ao número de incógnitas.

A partir disso pode-se, com o auxílio das relações mostradas anteriormente, determinar as propriedades modais do sistema estudado.

A constante complexa B_{rj} é obtida tomando-se a distância entre a origem do plano complexo e o ponto do círculo ajustado, que está diametralmente oposto ao ponto correspondente à frequência ω_r .

Este método pode dar bons resultados, se os modos do sistema sob estudo forem pouco acoplados. Por este método que demanda pouco esforço computacional, o mesmo pode ser usado numa análise prévia para obtenção de estimativas iniciais, necessárias para entrada em um programa maior de identificação multi-modos.

3.2 Métodos Multi-modos no Domínio da Frequência

Existem situações em que a aproximação modo a modo se torna inadequada e nesses casos torna-se conveniente o uso de métodos de identificação multi-modos. É o caso de sistemas com forte acoplamento modal e aqueles com amortecimento extremamente fraco, onde os valores próximos às ressonâncias são imprecisos e de difícil obtenção.

É conveniente observar que por modos fortemente acoplados entende-se como aqueles sistemas para os quais as frequências naturais estão pouco espaçadas umas das outras, ou nos casos aonde ocorre amortecimento relativamente forte, ou ambos [7].

As estruturas reais possuem infinitos modos de vibrar, porém, no processo de obtenção da FRF os seus sinais dinâmicos são filtrados, limitando a observação do conteúdo de frequência do sistema até um certo valor, acima do qual o sinal é atenuado por um filtro anti-rebatimento. O número de modos de vibrar da estrutura será portanto finito dentro da região de frequências fornecida pela FRF. Pode-se ainda, dentro dessa região, escolher, para efeito de identificação, uma faixa de frequência que contenha apenas um certo número de modos de vibrar. No processo de identificação de tais modos, pode-se obter uma expressão matemática truncada da FRF, dentro da faixa de análise, adicionando-se a ela termos que representem a influência dos modos acima e abaixo de tal faixa.

Estabelecidas estas considerações, pretende-se fazer agora uma apresentação sucinta dos principais métodos de identificação multi-modo no domínio da frequência.

3.2.1 Sistematização do Método Modo a Modo

Da forma como foi apresentado na seção 3.1, o método de ajuste de círculos supõe a influência dos demais modos como constante [17], entretanto pode-se adicionar parcelas residuais à resposta em frequência para aproximar com maior precisão os resultados para os parâmetros modais.

Pode-se ainda escrever a seguinte expressão para a função receptância de um sistema dinâmico com N graus de liberdade, dentro da faixa de frequência a ser analisada:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{A_{sij}}{\omega_s^2 - \omega^2 + j\eta_s \omega_s^2} + \frac{1}{k_{ij}} - \frac{1}{\omega^2 m_{ij}} \quad (3.15)$$

isolando-se o modo r , tem-se:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{A_{rij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} + \left[\sum_{s=1, s \neq r}^N \frac{A_{sij}}{\omega_s^2 - \omega^2 + j\eta_s \omega_s^2} \right] + \frac{1}{k_{ij}} - \frac{1}{\omega^2 m_{ij}} \quad (3.16)$$

Na seção 3.1, o termo do lado direito da equação (3.2) foi tido como constante. Na equação (3.16), entretanto, tal termo é substituído por três valores, sendo um constante, outro dependente de ω e o terceiro representando a contribuição dos modos dentro da faixa de análise. O termo constante é utilizado para representar a contribuição dos modos com frequência natural acima da faixa de frequência a ser analisada, o que em termos físicos representa um rigidez equivalente daqueles modos. O termo dependente de ω contabiliza a influência dos modos com frequência natural abaixo da faixa a ser analisada, o que em termos físicos representa um comportamento de inércia equivalente daqueles modos.

Supondo que se tenha um conjunto de dados experimentais em torno da ressonância ω_r , denotado por $\bar{H}_{ij}(\omega)$, pode-se então calcular além dos parâmetros ω_r , η_r e A_{rij} , as contribuições k_{ij} e m_{ij} , supondo zero o termo de contribuição dos demais modos inclusos na faixa de análise. Em seguida os parâmetros modais em torno de uma nova ressonância ω_r podem ser calculados, bem como novos termos k_{ij} e m_{ij} referentes ao ajuste em torno da nova ressonância. Este segundo ajuste é feito não mais sobre os termos de $\bar{H}_{ij}(\omega)$, mas sobre estes valores experimentais subtraídos da contribuição do modo r anteriormente estimado. Assim sendo, a estimativa de novos modos (e novos valores residuais k_{ij} e m_{ij}) é feito de maneira recursiva através da equação :

$$\frac{A_{rij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} + \frac{1}{k_{ij}} - \frac{1}{\omega^2 m_{ij}} = \bar{H}_{ij}(\omega) - \sum_{s=1, s \neq r}^N \frac{A_{sij}}{\omega_s^2 - \omega^2 + j\eta_s \omega_s^2} \quad (3.17)$$

Pode-se repetir este procedimento iterativamente para todos os modos de vibrar na faixa de frequência de interesse, até que se obtenha convergência para valores aceitáveis [5].

3.2.2 Identificação por Ajuste de Curvas Genérico

A maioria dos métodos de ajuste de curvas utiliza a técnica de mínimos quadrados, para a determinação de parâmetros modais em sistemas multimodos. Esta técnica tem como objetivo minimizar o erro quadrático médio entre os dados experimentais e os teóricos, obtidos a partir do modelo matemático adotado para a FRF em estudo.

Tomando-se a equação da FRF para sistemas com amortecimento viscoso, obtida no capítulo 2 e adicionando-se a ela as parcelas residuais relativas aos modos que se encontrem fora da faixa de análise,obtem-se:

$$H_{ij}(\omega_k) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} + \frac{r_{rij}^*}{j\omega_k - s_r^*} \right] - \frac{1}{\omega_2 m_{ij}} + \frac{1}{k_{ij}} \quad (3.18)$$

onde: $r_{rij} = a_{rij} + jb_{rij}$ - resíduo;

$s_r = \sigma_r + j\omega_{rd}$ - polo;

m_{ij} e k_{ij} - parcelas residuais de inércia e rigidez.

Observa-se que existem $2N$ incógnitas complexas, r_{rij} e s_r , $r = 1, \dots, N$, mais m_{ij} e k_{ij} , totalizando $4N+2$ incógnitas reais. Também é notável o fato de que a equação (3.18) é não linear com relação às incógnitas σ_r e ω_{rd} . Portanto, uma solução iterativa se faz necessária, na ajustagem de curvas.

Supondo que $\bar{H}_{ij}(\omega)$ seja a FRF medida experimentalmente em laboratório, em P valores discretos de ω , ou seja, ω_k , $k = 1, \dots, P$, pode-se definir um erro de ajustagem da seguinte forma:

$$\epsilon(\omega_k) = \bar{H}_{ij}(\omega_k) - H_{ij}(\omega_k) \quad k = 1, \dots, P \quad (3.19)$$

sendo $H_{ij}(\omega_k)$ definida em (3.18) e calculada a partir de estimativas iniciais arbitrárias dos parâmetros modais do sistema.

A partir de (3.19), define-se uma função objetivo através de todos os valores de ω_k . Esta função é dada por:

$$E = \sum_{k=1}^P [\epsilon(\omega_k)\epsilon^*(\omega_k)] = \sum_{k=1}^P |\epsilon(\omega_k)|^2 \quad (3.20)$$

Supondo que o conjunto de todas as $4N+2$ incógnitas de (3.18) esteja contido num vetor \mathbf{X} , onde:

$$\mathbf{X}^T = \{a_{1ij} \dots a_{Nij} b_{1ij} \dots b_{Nij} \sigma_1 \dots \sigma_N \omega_{1d} \dots \omega_{Nd} m_{ij} k_{ij}\} \quad (3.21)$$

pode-se realizar a minimização da função objetivo E da equação (3.20), igualando-se a zero suas derivadas parciais em relação a cada um dos elementos x_i do vetor de incógnitas \mathbf{X} :

$$\frac{\partial E}{\partial X_i} = \sum_{k=1}^P \left[\epsilon^*(\omega_k) \frac{\partial H_{ij}(\omega_k)}{\partial X_i} + \epsilon(\omega_k) \frac{\partial H_{ij}^*(\omega_k)}{\partial X_i} \right] = 0 \quad (3.22)$$

Infelizmente, o sistema de equações resultante da aplicação da condição de minimização expressa em (3.22) é não linear em relação aos parâmetros σ_r e ω_{rd} , o que sugere uma solução iterativa. Uma solução linear é possível se as incógnitas no denominador de $H_{ij}(\omega_k)$ (polos do sistema) são conhecidas. Nesse caso os resíduos r_{rij} podem ser determinados diretamente, pois o sistema de equações resultante de (3.22) se reduz a um conjunto de equações lineares simultâneas.

Outra solução é possível, linearizando o modelo matemático dado pela equação (3.18) em relação a cada um dos elementos do vetor \mathbf{X} . Expandindo-se a equação (3.18) em série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem mais alta e levando-se em consideração apenas os termos lineares, obtém-se

$$H_{ij}(\omega_k, \mathbf{X}) = H_{ij}(\omega_k, \mathbf{X}_0) + \sum_{r=1}^{4N+2} \frac{\partial H_{ij}(\omega_k, \mathbf{X}_0)}{\partial X_i} dX_i \quad (3.23)$$

onde X_0 é o vetor de estimativas iniciais para os parâmetros modais e

$$dX_i = X_i - (X_i)_0 \quad (3.24)$$

A função erro é agora escrita como:

$$\epsilon(\omega_k) = \bar{H}_{ij}(\omega_k) - H_{ij}(\omega_k, \mathbf{X}_0) - \sum_{r=1}^{4N+2} \frac{\partial H_{ij}(\omega_k, \mathbf{X}_0)}{\partial X_i} dX_i \quad k = 1, \dots, P \quad (3.25)$$

e a função objetivo equivalente é dada por:

$$E = \sum_{k=1}^P \left| \bar{H}_{ij}(\omega_k) - H_{ij}(\omega_k, \mathbf{X}_0) - \sum_{r=1}^{4N+2} \frac{\partial H_{ij}(\omega_k, \mathbf{X}_0)}{\partial X_i} dX_i \right|^2 \quad (3.26)$$

derivando-se E em relação a cada uma das variáveis X_i , obtém-se um sistema de equações lineares em relação a estas variáveis, pois o vetor X_0 é constante. A solução deste sistema fornece os valores dos incrementos ΔX_i que, a cada iteração ν , são somados aos valores iniciais:

$$X^\nu = X^{\nu-1} + \Delta X^\nu \quad (3.27)$$

Este método, como será visto em detalhes no capítulo 4, é numericamente estável e eficiente, sendo bastante rápido, se o número de modos a identificar for próximo de 3 [20].

3.2.3 Método de Identificação por Ajustagem da Função de Transferência na forma de Razão Polinomial Complexa

A teoria básica para este método se baseia na ajustagem da FRF como uma razão de dois polinômios complexos dependentes da frequência [22]:

$$H_{ij}(j\omega) = \frac{A_0 + A_1(j\omega) + A_2(j\omega)^2 + \dots + A_N(j\omega)^N}{B_0 + B_1(j\omega) + B_2(j\omega)^2 + \dots + B_M(j\omega)^M} \quad (3.28)$$

onde A_r , $r = 1 \dots N$, e B_s , $s = 1 \dots M$, são coeficientes reais. O polinômio do denominador, cujas raízes se relacionam com os polos modais do sistema, é chamado polinômio característico. E o polinômio do numerador possui informações relativas aos resíduos modais do sistema, relacionando-se portanto com seus modos de vibrar.

É conveniente reescrever (3.28), como a seguir:

$$H_{ij}(j\omega) = \frac{\alpha + j\omega\beta}{\sigma + j\omega\tau} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (3.29)$$

onde:

$$\alpha = A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 - \dots$$

$$\beta = A_1 - A_3\omega^2 + A_5\omega^4 - \dots$$

$$\sigma = B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 - \dots$$

$$\tau = B_1 - B_3\omega^2 + B_5\omega^4 - \dots$$

Sem perda de generalidade pode-se fazer, por conveniência, $B_0 = 1$.

Supondo-se que $\bar{H}_{ij}(\omega)$ é a FRF medida experimentalmente, com partes real e imaginária:

$$\bar{H}_{ij}(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \quad (3.30)$$

O erro de ajustagem entre as funções (3.30) e (3.29) é:

$$\epsilon(\omega) = \bar{H}_{ij}(\omega) - \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (3.31)$$

Multiplicando-se ambos os lados de (3.31) por $D(\omega)$, obtém-se:

$$D(\omega)\epsilon(\omega) = D(\omega)\bar{H}_{ij}(\omega) - N(\omega) \quad (3.32)$$

que representa uma função complexa com partes real e imaginária dadas por:

$$D(\omega)\epsilon(\omega) = a(\omega) - jb(\omega) \quad (3.33)$$

onde $a(\omega)$ e $b(\omega)$ são funções, não só da frequência ω , mas também dos coeficientes desconhecidos A_i e B_i .

O valor absoluto de (3.33), para uma frequência específica ω_k , é:

$$|D(\omega_k)\epsilon(\omega_k)| = |a(\omega_k) + jb(\omega_k)| = \sqrt{a^2(\omega_k) + b^2(\omega_k)} \quad (3.34)$$

ou ainda:

$$E = \sum_{r=1}^N |D(\omega_k)\epsilon(\omega_k)|^2 = \sum_{r=1}^N [a^2(\omega_k) + b^2(\omega_k)] \quad (3.35)$$

Os coeficientes polinomiais A_i e B_i são agora calculados com base na minimização da função dada pela equação (3.35), que também pode ser escrita como a seguir:

$$E = \sum_{r=1}^M [(R_r\sigma_r - \omega_k\tau_r I_r - \alpha_r)^2 + (\omega_k\tau_r R_r + \sigma_r I_r - \omega_k\beta_r)^2] \quad (3.36)$$

Derivando (3.36) parcialmente em relação a cada um dos coeficientes da função de transferência e igualando a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial A_0} &= \sum_{r=0}^N -2(a(\omega_k)) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial A_1} &= \sum_{r=0}^N -2(\omega_k b(\omega_k)) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial A_2} &= \sum_{r=0}^N +2(\omega_k^2 a(\omega_k)) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial A_3} &= \sum_{r=0}^N +2(\omega_k^3 b(\omega_k)) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E}{\partial B_1} &= \sum_{r=0}^N -2(\omega_k I(\omega_k) a(\omega_k) - \omega_k R(\omega_k) b(\omega_k)) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial B_2} &= \sum_{r=0}^N -2(\omega_k^2 R(\omega_k) a(\omega_k) + \omega_k^2 I(\omega_k) b(\omega_k)) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial E}{\partial B_3} = \sum_{r=0}^N +2(\omega_k^3 I(\omega_k) a(\omega_k) - \omega_k^3 R(\omega_k) b(\omega_k)) = 0$$

⋮

Rearranjando as expressões (3.37), resulta o seguinte sistema de equações lineares:

$$Ax = b \quad (3.38)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_4 & \dots & T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & T_5 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \dots & -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \dots \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \lambda_6 & \dots & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & T_7 & \dots \\ 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_6 & 0 & \dots & -S_4 & T_5 & S_6 & -T_7 & -S_8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & T_5 & \dots & U_2 & 0 & -U_4 & 0 & U_6 & \dots \\ S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \dots & 0 & -U_4 & 0 & U_6 & 0 & \dots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & T_7 & \dots & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & U_8 & \dots \end{bmatrix}$$

$$X^T = \{ A_0 \ A_1 \ A_2 \ \dots \ B_1 \ B_2 \ B_3 \ \dots \}$$

$$b^T = \{ S_0 \ T_1 \ S_2 \ \dots \ 0 \ U_2 \ 0 \ \dots \}$$

e ainda:

$$\lambda_i = \sum_{r=1}^N \omega_k^i \quad (3.39)$$

$$S_i = \sum_{r=1}^N \omega_k^i R_r \quad (3.40)$$

$$T_i = \sum_{r=1}^N \omega_k^i I_r \quad (3.41)$$

$$U_i = \sum_{r=1}^N \omega_k^i (R_r^2 + I_r^2) \quad (3.42)$$

Este método tem a vantagem de ser exato. Entretanto, devido à grande quantidade de zeros na matriz A , podem ocorrer instabilidades numéricas, dependendo do número de modos analisados.

Outro problema que pode ocorrer é devido ao efeito de grandes variações ocorridas na função ponderadora $D(\omega)$, o que também causaria instabilidades numéricas do método. A fim de diminuir este efeito, definiu-se uma nova função erro [33].

$$\epsilon'(\omega_k) = \frac{[D(\omega_k)\epsilon(\omega_k)]_L}{[D(\omega_k)]_{L-1}} \quad (3.43)$$

onde L corresponde ao número da iteração e $D(\omega_k)$ inicialmente é assumido igual a 1.

Substituindo (3.32) em (3.43), obtém-se:

$$\epsilon'(\omega_k) = \frac{[D(\omega_k)\overline{H}_{ij}(\omega_k)]_L - [N(\omega_k)]_L}{[D(\omega_k)]_{L-1}} \quad (3.44)$$

A nova função objetivo torna-se:

$$E' = |\epsilon'(\omega_k)|^2 = \frac{|D(\omega_k)\overline{H}_{ij}(\omega_k)_L - N(\omega_k)_L|^2}{|D(\omega_k)_{L-1}|^2} \quad (3.45)$$

Substituindo $W_{rL} = 1/|D(\omega_k)_{L-1}|^2$ em (3.45), e somando para todos os r 's,

$$E' = \sum_{r=1}^N E_r W_{rL} \quad (3.46)$$

onde E_r está definida em (3.35) e é função de $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$

Os coeficientes B_1, B_2, B_3, \dots , calculados na iteração $L - 1$ são usados para o cálculo de W_L na próxima iteração.

3.2.4 Estruturas Levemente Amortecidas

Existem estruturas em que os métodos antes mencionados não se aplicam muito bem, devido às dificuldades encontradas em se adquirir boas medidas próximo às ressonâncias. É o caso de estruturas levemente amortecidas.

O método apresentado a seguir [7] se aplica a casos como o citado anteriormente e é capaz de identificar as constantes modais (reais) de modelos de estruturas com amortecimento muito baixo, a partir de dados medidos longe das regiões de ressonância.

Para a aplicação deste método é necessário:

- levantamento dos dados de FRF numa faixa de frequência de interesse.
- conhecimento antecipado das frequências naturais do sistema.
- seleção de um número de pontos de frequências igual ao número de modos a identificar. Estes pontos devem ser localizados longe das frequências naturais (3.2).

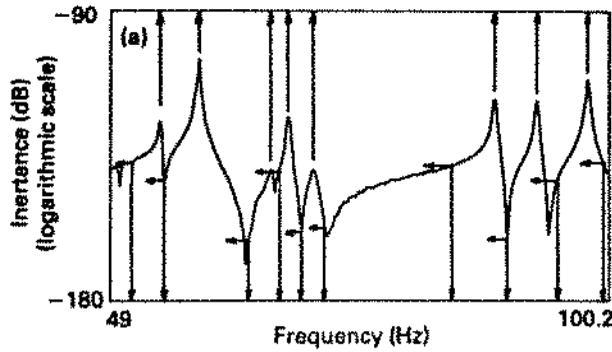


Figura 3.2: Seleção dos pontos para análise de estruturas levemente amortecidas. [5]

A teoria de cálculo do método é muito simples e foi desenvolvida para o caso de sistemas não amortecidos, em que a FRF é dada por:

$$\mathbf{H}_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{rij}}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (3.47)$$

a qual, para um valor específico $\omega = \Omega_k$, torna-se:

$$\mathbf{H}_{ij}(\Omega_k) = \left\{ (\omega_1^2 - \Omega_k^2)^{-1} \quad (\omega_2^2 - \Omega_k^2)^{-1} \quad \dots \quad (\omega_N^2 - \Omega_k^2)^{-1} \right\} \begin{Bmatrix} A_{1ij} \\ A_{2ij} \\ \vdots \\ A_{Nij} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Procedendo-se da mesma forma para as N frequências Ω_k , obtém-se o seguinte sistema de equações :

$$\mathbf{R}(\Omega) \cdot \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{H}_{ij}(\Omega) \quad (3.49)$$

onde:

$$\mathbf{R}(\Omega) = \begin{bmatrix} (\omega_1^2 - \Omega_1^2)^{-1} & (\omega_2^2 - \Omega_1^2)^{-1} & \dots & (\omega_N^2 - \Omega_1^2)^{-1} \\ (\omega_1^2 - \Omega_2^2)^{-1} & (\omega_2^2 - \Omega_2^2)^{-1} & \dots & (\omega_N^2 - \Omega_2^2)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\omega_1^2 - \Omega_N^2)^{-1} & (\omega_2^2 - \Omega_N^2)^{-1} & \dots & (\omega_N^2 - \Omega_N^2)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ij}^T = \{ A_{1ij} \ A_{2ij} \ A_{3ij} \ \dots \ A_{Nij} \}$$

$$\mathbf{H}_{ij}^T(\Omega) = \{ H_{ij}(\Omega_1) \ H_{ij}(\Omega_2) \ \dots \ H_{ij}(\Omega_N) \}$$

cuja solução fornece o vetor das constantes modais:

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{R}^{-1}(\Omega) \cdot \mathbf{H}_{ij}(\Omega) \quad (3.50)$$

A performance do método depende dos pontos escolhidos na curva de FRF.

3.3 Método Multi-Modo no Domínio do Tempo

No domínio do tempo, a Função Resposta ao Impulso unitário (FRI) de um sistema linear, com amortecimento viscoso é dada pela seguinte equação :

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^N [R_{rij} \cdot e^{s_r t} + R_{rij}^* \cdot e^{s_r^* t}] \quad (3.51)$$

que é obtida aplicando-se uma transformação de Fourier inversa na equação da FRF (2.52).

A equação (3.51) possui 2N incógnitas complexas e é não linear com relação a s_r . O algoritmo apresentado a seguir pode ser usado para o cálculo dos parâmetros R_{rij} e s_r .

3.3.1 Método das Exponenciais Complexas

A técnica de solução para estimação dos parâmetros da equação (3.51) é conhecida como algoritmo das exponenciais complexas e usa o método de solução de Prony [36].

Normalmente a FRI é exemplificada em intervalos de tempo igualmente espaçados, assim a equação (3.51) pode ser reescrita como:

$$h_{ij}(t_k) = \sum_{r=1}^N [R_{rij} \cdot e^{s_r kT} + R_{rij}^* \cdot e^{s_r^* kT}] \quad (3.52)$$

ou

$$h_{ij}(t_k) = \sum_{r=1}^{2N} [R_{rij} \cdot x_r^k] \quad (3.53)$$

onde: N = número de modos; e
 T = intervalo de amostragem;
 $t_k = kT$.

$$x_r = e^{s_r t}. \quad (3.54)$$

Dessa forma, a equação (3.53) calculada para todos os diferentes valores de t_k resulta em um sistema de equações que pode ser solucionado pelo método de Prony. Para isso, um novo conjunto de incógnitas a_i , $i = 0, 1, \dots, 2N$, é introduzido, as quais são os coeficientes dos termos na equação polinomial:

$$\prod_{r=1}^N (x - x_r) \cdot (x - x_r^*) = \sum_{k=0}^{2N} a_k \cdot x^k = 0 \quad (3.55)$$

As $2N$ raízes da equação (3.55) são as exponenciais complexas $e^{s_r t}$ e os coeficientes a_k são chamados de coeficientes de autoregressão do modelo assumido na (3.52).

Multiplicando-se a equação (3.53) pelos coeficientes a_k e somando-se as equações resultantes para os $2N$ dados amostrados, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{2N} [a_k \cdot h_{ij}(t_{(m+k)})] = \sum_{k=0}^{2N} \left[a_k \left(\sum_{r=1}^{2N} R_{rij} \cdot x_r^{m+k} \right) \right] = \sum_{r=1}^{2N} \left[R_{rij} \cdot x_r^m \left(\sum_{k=0}^{2N} a_k \cdot x_r^k \right) \right] \quad (3.56)$$

Assim, para se calcular as raízes x_r da equação (3.56), deve-se determinar antes os valores dos coeficientes a_k , e segundo a equação (3.55), tem-se:

$$\sum_{k=0}^{2N} a_k \cdot h(t_{(m+k)}) = 0 \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.57)$$

A equação (3.57) indica que existem somente $2N$ amplitudes linearmente independentes na resposta ao impulso amostrada. Se os coeficientes de autoregressão forem normalizados, arbitrando-se $a_{2N} = 1$, resultará portanto:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} a_k \cdot h(t_{(m+k)}) = -h(t_{(m+2N)}) \quad (3.58)$$

Existem portanto $2N$ equações lineares que podem ser escritas para as variáveis a_k , e estas são calculadas diretamente da resposta ao impulso unitário. Assim, expandindo-se a equação (3.58) em forma matricial (na prática $0 < m < 2N$, mas qualquer conjunto de $2N$ valores pode ser usado):

$$h \cdot a = -\bar{h} \quad (3.59)$$

onde:

$$h = \begin{bmatrix} h(t_{2N-1}) & h(t_{2N}) & h(t_{2N+1}) & \dots & h(t_{4N-2}) \\ h(t_{2N-2}) & h(t_{2N-1}) & h(t_{2N}) & \dots & h(t_{4N-3}) \\ h(t_{2N-3}) & h(t_{2N-2}) & h(t_{2N-1}) & \dots & h(t_{4N-4}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(t_0) & h(t_1) & h(t_2) & \dots & h(t_{2N-1}) \end{bmatrix}$$

$$a^T = \{ a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2N-1} \}$$

$$\bar{h}^T = \{ h(t_{4N-1}) \ h(t_{4N-2}) \ \dots \ h(t_{2N}) \}$$

O sistema de equações (3.59) envolve a forma matricial de Toeplitz. A solução deste sistema permite obter os valores de a_k e, conseqüentemente, através de (3.55) calcula-se os valores das raízes x_r . Pode-se então obter os autovalores complexos s_r da equação (3.54).

Uma vez obtidos os autovalores, os resíduos modais R_{rij} podem ser calculados da relação (3.52), que expandida na forma matricial, resulta:

$$x \cdot R = h \quad (3.60)$$

onde:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$R^T = \{ R_{1ij} \ R_{2ij} \ R_{3ij} \ \dots \ R_{Nij} \}$$

$$h^T = \{ h(t_0) \ h(t_1) \ h(t_2) \ \dots \ h(t_{N-1}) \}$$

O sistema de equações (3.60) envolve a forma matricial de Van Der Monde. A solução desse sistema fornece os valores dos resíduos modais, que por sua vez se relacionam com os modos de vibrar da estrutura.

Maiores detalhes sobre esse método, suas vantagens e desvantagens, podem ser encontrados em [6].



Capítulo 4

MÉTODO IMPLEMENTADO DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Encontram-se disponíveis, atualmente, vários métodos de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. A maioria deles usa técnicas matemáticas simples, objetivas e fáceis de implementar.

O presente capítulo apresenta um método de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência, rápido, preciso e eficiente. Trata-se de um método de identificação multi-modo que associa técnica de mínimos quadrados com o método dos gradientes [20], para ajustar dados, simulados ou experimentais, a um modelo matemático previamente escolhido.

Três tipos de modelos matemáticos diferentes são propostos para aproximar as contribuições de baixas e altas frequências antes e depois da faixa de análise, no ajuste das FRF de transferência, as quais são ajustadas uma a uma.

As etapas do algoritmo implementado são apresentadas na forma de diagramas de blocos. Os resultados da aplicação deste método são apresentados no capítulo 7 para dados experimentais e simulados.

4.1 Desenvolvimento Teórico

O método que será apresentado aqui baseia-se no Modelo analítico da resposta forçada, na forma de frações parciais, assumindo o modelo de amortecimento viscoso com distribuição genérica.

Na seção seguinte será apresentada a formulação matemática relativa à etapa de ajustagem de curvas de FRF, que tem como objetivo determinar os coeficientes (resíduos e polos complexos, mais as contribuições dos modos vizinhos) da função de transferência do sistema, na faixa de análise.

4.1.1 Formulação Matemática do Método

Como visto no capítulo 2, a resposta em frequência entre os pontos i e j , respectivamente excitação e resposta, de um sistema discreto com M graus de liberdade, assumindo amortecimento viscoso geral, se apresenta sob a forma:

$$H_{ij}(\omega_k) = \sum_{r=1}^M \left[\frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} + \frac{r_{rij}^*}{j\omega_k - s_r^*} \right], \quad k = 0, 1, \dots, P \quad (4.1)$$

- onde:
- j - $\sqrt{-1}$;
 - ω_k - valor discreto de frequência de análise;
 - $s_r = \sigma_r + j\omega_{rd}$ - polo complexo do r -ésimo modo;
 - ω_{rd} - frequência natural amortecida do r -ésimo modo;
 - σ_r - amortecimento modal do r -ésimo modo;
 - $r_{rij} = u_{ri}u_{rj}$ - resíduo complexo do r -ésimo modo e
 - u_{ri} - i -ésimo elemento do autovetor U_r .

Pode-se selecionar uma faixa de interesse contendo N dos M modos de vibrar, que descrevem o sistema em questão (figura 4.1).

A influência dos modos restantes existentes antes e depois da faixa de análise pode ser aproximada segundo qualquer uma das três expressões a seguir:

$$H_{ij}(\omega_k) = q + \sum_{r=1}^N \frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} \quad \text{Modelo A}$$

$$H_{ij}(\omega_k) = u + \sum_{r=1}^N \frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} + j\omega_k \cdot v \quad \text{Modelo B}$$

$$H_{ij}(\omega_k) = \frac{b}{j\omega_k - \omega_L} + \sum_{r=1}^N \frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} + \frac{a}{j\omega_k - \omega_H} \quad \text{Modelo C}$$

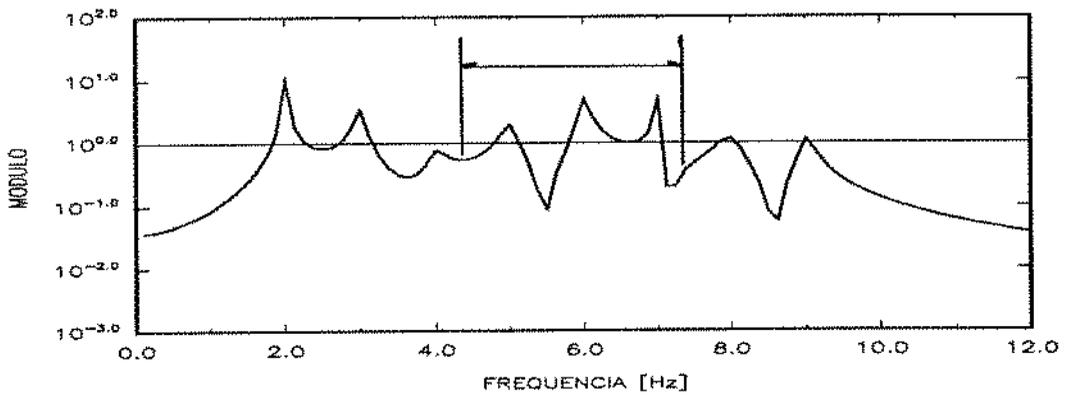


Figura 4.1: Faixa de interesse selecionada na FRF

com $k = 0, 1, \dots, P$

- q, u e v - contribuição dos modos fora da faixa de análise;
- b - resíduo de baixa frequência;
- a - resíduo de alta frequência;
- ω_L - frequência não-amortecida antes da faixa de análise;
- ω_H - frequência não-amortecida depois da faixa de análise.

Para qualquer uma dessas três formas de aproximação da função de transferência entre os pontos i e j de uma estrutura mecânica, podemos formular o seguinte método de identificação dos parâmetros r_r ($r = 1, \dots, N$), s_r ($r = 1, \dots, N$), q , u , v , b e a (OBS: tais parâmetros são tratados pelo termo genérico X , sempre que suas formas explícitas não se tornem necessárias):

• **Definição da Função Erro:**

A função de erro entre as respostas medida e calculada numa dada frequência ω_k é:

$$\varepsilon(\omega_k, X_r) = \bar{H}_{ij}(\omega_k) - H_{ij}(\omega_k), \quad k = 1, \dots, P \quad (4.2)$$

onde $\bar{H}_{ij}(\omega_k)$ é a função de transferência medida nas frequências $\omega_k, k = 1, \dots, P$, e $H_{ij}(\omega_k)$, definida nas expressões dos modelos matemáticos (A), (B) ou (C).

• **Expansão de 1ª ordem:**

A expansão de $\varepsilon(\omega_k, X_r)$, através de seu termo de 1ª ordem, em torno dos valores iniciais de seus parâmetros genéricos X_{r0} é dada por:

$$\varepsilon(\omega_k, X_r) = \varepsilon(\omega_k, X_{r0}) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_r} dX_r \quad (4.3)$$

No caso particular do Modelo (A), no qual $X_r^T = \{q, r_r, s_r\}, r = 1, \dots, N$, define-se a seguinte expansão para $\varepsilon(\omega_k, X_r)$:

$$\varepsilon(\omega_k, q, s_r, r_r) = \varepsilon(\omega_k, q_0, s_{r0}, r_{r0}) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} dq + \sum_{r=1}^N \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_r} dr_r + \sum_{r=1}^N \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_r} ds_r \quad (4.4)$$

Rearranjando a equação para o Modelo (A):

$$(H_{ij}(\omega_k) - q) - \sum_{r=1}^N \frac{r_r}{j\omega_k - s_r} = 0 = \varepsilon(\omega_k, q, s_r, r_r) \quad (4.5)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.5) por:

$$\prod_{r=1}^N (j\omega_k - s_r) \quad (4.6)$$

resulta:

$$(H_{ij}(\omega_k) - q) \cdot \prod_{r=1}^N (j\omega_k - s_r) - \sum_{r=1}^N \left(\frac{r_r}{j\omega_k - s_r} \prod_{r=1}^N (j\omega_k - s_r) \right) = 0 \quad (4.7)$$

Explicitando, portanto, as expressões de $\partial \varepsilon / \partial q$, $\partial \varepsilon / \partial r_r$ e $\partial \varepsilon / \partial s_r$, obtém-se:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial q} = - \prod_{r=1}^N (j\omega_k - s_r) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_r} = - \frac{\prod_i (j \cdot \omega_k - s_i)}{j \cdot \omega_k - s_r} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_r} = - (\mathbf{H}_{ij}(\omega_k) - q) \frac{\prod_i (j \cdot \omega_k - s_i)}{j \cdot \omega_k - s_r} + \sum_{r \neq ka} \frac{r_r \prod_i (j \cdot \omega_k - s_i)}{(j \cdot \omega_k - s_r) \cdot (j \cdot \omega_k - s_{ka})} \quad (4.10)$$

Deseja-se encontrar os valores dos parâmetros q , s_r , r_r do modelo acima de tal forma que a função $\varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)$ seja o mais próximo de zero possível. Substituindo-se portanto o valor de $\varepsilon(\omega_k, q, s_r, r_r)$ do modelo acima por zero, satisfazendo-a simultaneamente para cada valor de frequência ω_k , $k = 1, \dots, P$, obtém-se o seguinte sistema linear de equações:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r) \quad (4.11)$$

onde a matriz \mathbf{A} dos coeficientes é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial q} \right)_{\omega_1} & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial r_1} \right)_{\omega_1} & \cdots & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial r_N} \right)_{\omega_1} & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial s_1} \right)_{\omega_1} & \cdots & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial s_N} \right)_{\omega_1} \\ \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial q} \right)_{\omega_2} & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial r_1} \right)_{\omega_2} & \cdots & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial r_N} \right)_{\omega_2} & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial s_1} \right)_{\omega_2} & \cdots & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial s_N} \right)_{\omega_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial q} \right)_{\omega_P} & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial r_1} \right)_{\omega_P} & \cdots & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial r_N} \right)_{\omega_P} & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial s_1} \right)_{\omega_P} & \cdots & \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_k)}{\partial s_N} \right)_{\omega_P} \end{bmatrix}$$

e os vetores \mathbf{d} e $\varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)$ são dados por:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} dq_0 \\ dr_1 \\ \vdots \\ dr_N \\ ds_1 \\ \vdots \\ ds_N \end{Bmatrix} \quad \varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r) = - \begin{Bmatrix} \varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)_{\omega=\omega_1} \\ \varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)_{\omega=\omega_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)_{\omega=\omega_P} \end{Bmatrix}$$

o vetor \mathbf{d} composto pelos termos diferenciais dX_r dos parâmetros a determinar é também o valor do gradiente da expansão de $\varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)$ em torno de seus valores iniciais.

Este sistema pode ser resolvido por uma solução de Mínimos Quadrados, através do método da inversa generalizada:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{A}^H \varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r) \quad (4.12)$$

onde $(\mathbf{M})^H$ denota conjugado transposto de \mathbf{M} e portanto:

$$\mathbf{d} = \text{inv}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^H \cdot \varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r) \quad (4.13)$$

Uma vez obtido o vetor gradiente da expansão de $\varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)$ em torno dos valores iniciais de seus parâmetros, pode-se prosseguir a um esquema de busca da minimização de $\varepsilon(\omega_k, \mathbf{X}_r)$ através da modificação de seus parâmetros conforme a seguir:

$$X_r^\nu = X_r^0 - dX_r^{\nu-1} \quad (4.14)$$

Pode-se assim obter por um método de gradiente associado a mínimos quadrados os valores de q , r_r e s_r .

4.2 Programa para Implementação numérica do método

O método foi implementado num program em linguagem Fortran (GLOBAL.FOR), que está estruturado em três módulos principais (sub-rotinas) a saber:

- IDEPAR, program principal para identificação de parâmetros modais, que gerencia a chamada das subrotinas;
- INPUT, sub-rotina onde é feita a entrada de dados;
- AJUSTE, sub-rotina contendo o método de ajuste descrito na seção 4.2.1;
- REGEN, sub-rotina que faz a recuperação da resposta forçada a partir dos resíduos e polos complexos identificados.
- OUTPUT, sub-rotina onde é feita a saída de dados;

A figura 4.2 apresenta a estrutura descrita anteriormente para o programa GLOBAL.

O programa principal IDEPAR chama inicialmente a sub-rotina INPUT, onde é feita a entrada de dados genéricos, tais como N (n° de modos a identificar), \mathbf{CX} (vetor contendo estimativas iniciais para polos, resíduos e contribuição dos outros modos), P (n° de dados da FRF), $Niter$ (n° máximo de iterações), ω_L e ω_H (frequências não amortecidas, para o caso de se usar o modelo C na ajustagem da FRF), além dos dados da FRF, simulada ou experimental, a ser ajustada. Estes valores são passados para a sub-rotina AJUSTE, que

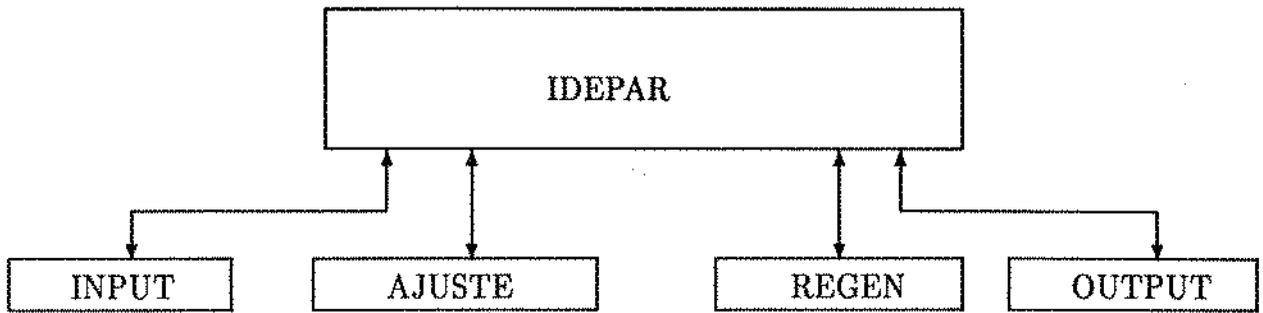


Figura 4.2: Estrutura do programa GLOBAL.

procede à ajustagem das curvas de FRF. A figura 4.3 mostra o fluxograma do programa principal IDEPAR.

A sub-rotina AJUSTE (figura 4.4) tem como dados de entrada a FRF na sua forma complexa e o vetor de estimativa inicial dos parâmetros da FRF. É feita uma seleção da faixa de frequência de interesse a ser analisada, sendo fornecido para tal os valores de frequências mínimo e máximo correspondentes a essa faixa. Tem início então um *looping* iterativo, no qual são calculados os valores das derivadas parciais (equações (4.8), (4.9) e (4.10)) em relação aos parâmetros que se deseja identificar. Monta-se então um sistema de equações (equação (4.11)), o qual é resolvido pelo método da inversa generalizada.

É importante observar que o desenvolvimento matemático apresentado na seção anterior (4.2.1) refere-se ao modelo (A) e portanto as equações das derivadas para os modelos (B) e (C) constituem uma opção na subrotina AJUSTE que será feita pelo usuário conforme a conveniência da aplicação. Todos os três modelos estão implementados e a execução do programa é desviada de acordo com a opção feita.

O processamento é repetido um certo número de iterações até que os valores do vetor gradiente dado pela equação (4.13) estejam abaixo da tolerância de convergência, momento no qual este é interrompido e retornado ao programa principal. Os parâmetros assim identificados são passados para a sub-rotina REGEN.

A sub-rotina REGEN (figura 4.5) utiliza os parâmetros modais calculados e, de acordo com o modelo de ajuste adotado, recupera a FRF complexa, a qual é comparada graficamente com a resposta original medida ou simulada.

Na subrotina OUTPUT é feita a gravação dos resultados obtidos em arquivos de dados, contendo os valores dos parâmetros calculados e os dados da FRF calculada, que posteriormente é comparada com a original para analisar a qualidade do ajuste obtido.

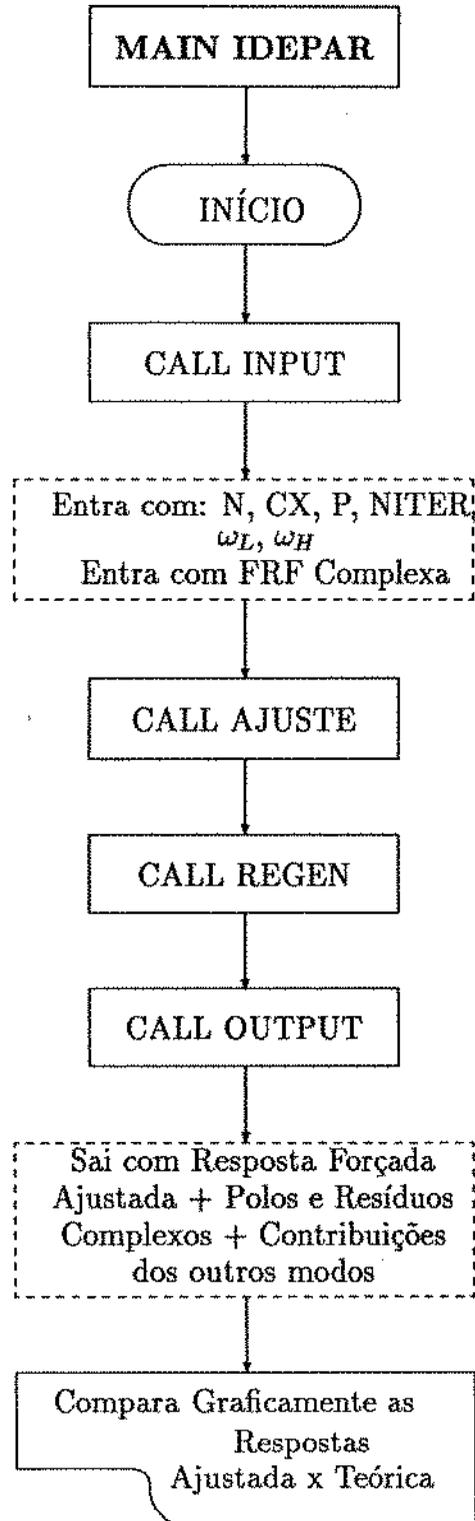


Figura 4.3: Estrutura da rotina principal IDEPAR.

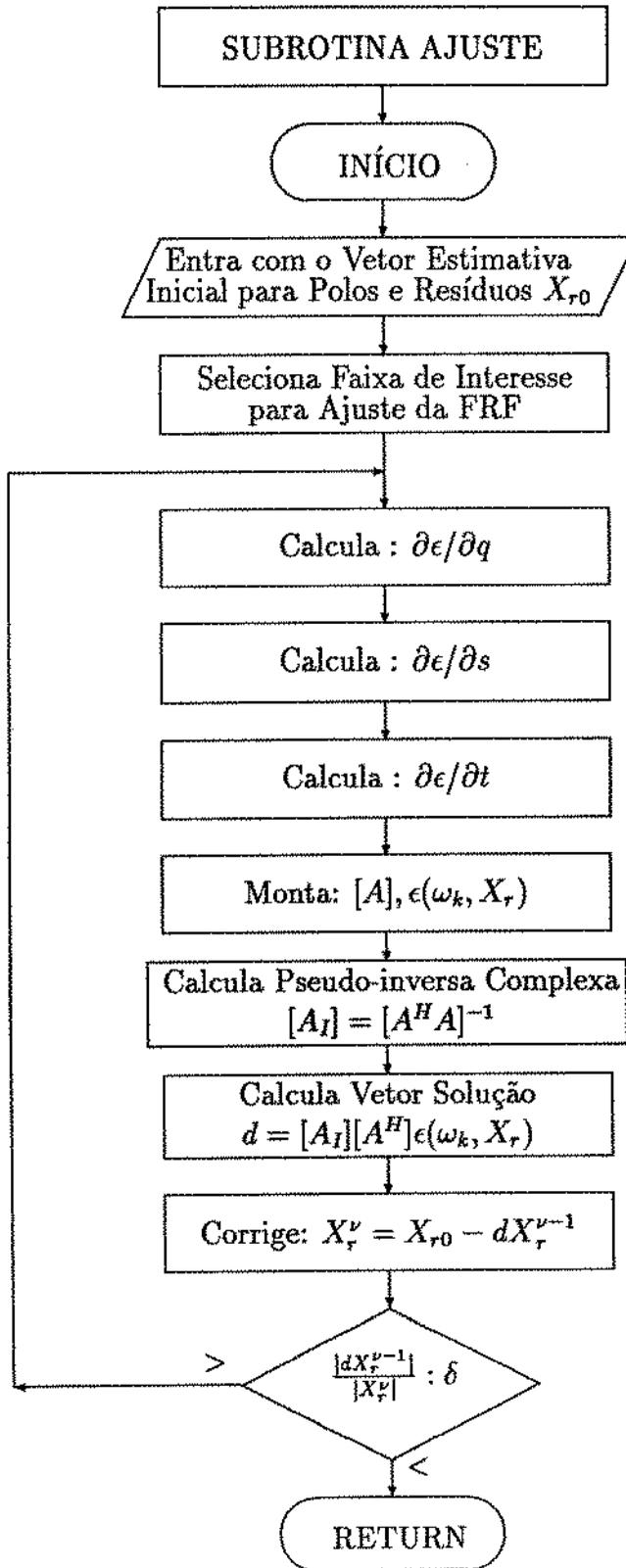


Figura 4.4: Estrutura da sub-rotina AJUSTE.

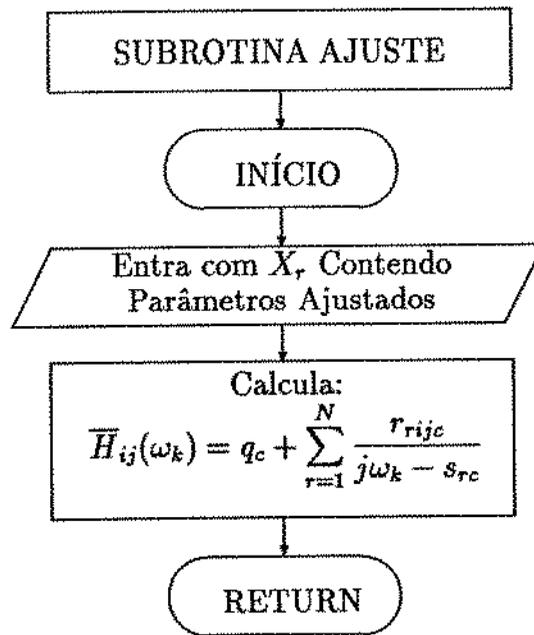


Figura 4.5: Estrutura da sub-rotina REGEN.

Capítulo 5

EXPERIMENTO REALIZADO

Para verificar a eficácia do método de identificação implementado, descrito no capítulo 4, foi proposto um ensaio experimental em uma estrutura mecânica, em formato de garfo tridente, conforme pode ser visto na figura 5.1. Os dados de entrada e saída foram adquiridos através de um sistema experimental de aquisição e processamento, que será discutido mais adiante.

A faixa de frequência analisada ficou estabelecida entre 0 e 1600 Hz, onde a função coerência se apresenta mais próxima de 1, conforme se pode observar da figura 5.2.

5.1 Descrição do Protótipo

O protótipo ensaiado foi suspenso por molas do tipo helicoidal numa estrutura metálica confeccionada em aço, conforme mostra a figura 5.3. A suspensão por mola simula a condição de vibração livre, já que a rigidez da mola é muito pequena em relação à do garfo.

O material usado na construção do garfo é aço SAE 1020 e suas dimensões estão mostradas na figura 5.4.

5.2 Tipo de Excitação Usada

A excitação por impacto manual, usada para produzir uma entrada impulsiva, foi a forma adotada no ensaio experimental. A principal vantagem deste tipo de excitação é que a mesma constitui uma forma simples e de fácil utilização, pelo menos em relação às exigências de instalação.

Sua principal desvantagem é com relação ao conteúdo de frequência de excitação,



Figura 5.1: Montagem Experimental da estrutura ensaiada.

limitado em função das características de massa do martelo e rigidez do contato no impacto [5].

Neste trabalho, o tipo de martelo de impacto usado na excitação do protótipo foi confeccionado em alumínio, com cabo de PVC e em sua ponta foi fixado um transdutor de força, para medir o sinal de entrada. Sobre o transdutor de força foi colocado uma ponta de Nylon, conforme figura 5.5.

Uma curva típica do conteúdo de frequência obtida para o sinal de entrada, através do uso da cabeça de Nylon, está mostrada na figura 5.6.

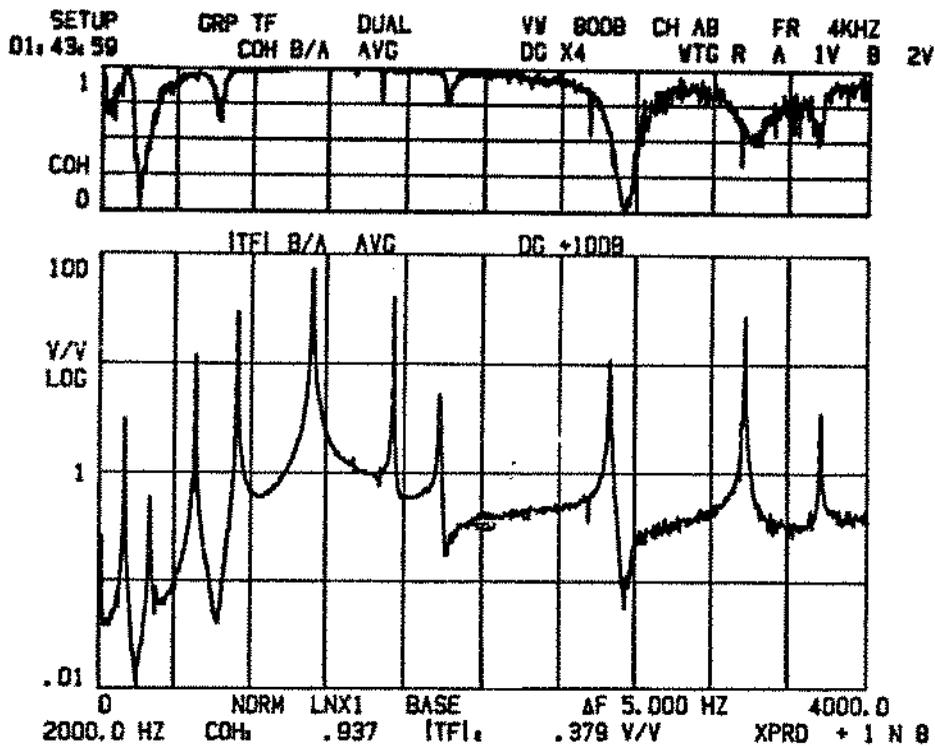


Figura 5.2: Funções de transferência e coerência típicas da estrutura ensaiada.

5.3 Esquema de Aquisição e Processamento de dados

No procedimento de aquisição e processamento de dados foram usados os seguintes equipamentos:

- Placa de aquisição e conversão de sinais analógicos/digitais
 TIPO: DT 282 LG DATA TRANSLATION
 Nº de CANAIS: 8 FREQUÊNCIA DE AQUISIÇÃO: 250 Hz - 12 bits
- Amplificadores condicionadores
 TIPO: 2635 B&K - para sensor força
- Fonte auxiliar
 TIPO: Battery operated current source - DYTRAN MODELO: 410 s
- Acelerômetro
 TIPO: 3100 DYTRAN
 SENSIBILIDADE: 100 mv/g
 MASSA: 47.18 g

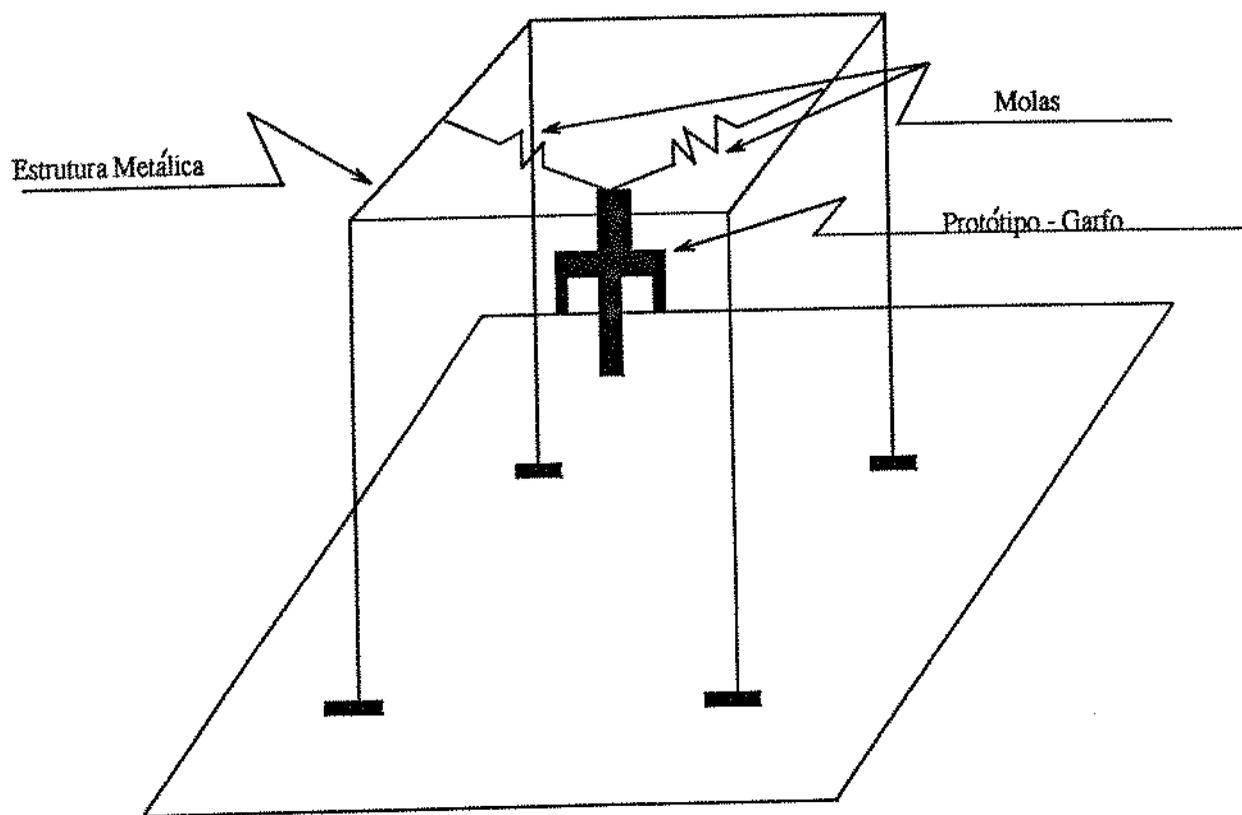


Figura 5.3: Montagem do protótipo.

- **Sensor de força**
 TIPO: 8200 B&K
 SENSIBILIDADE: 3.96 pC/N
 MASSA: 21 g
- **Martelo de impacto**
 CABEÇA: nylon
 CORPO: Al CABO: PVC

O esquema que mostra a interligação desses equipamentos no processo de medição de dados está mostrado na figura 5.7.

Foram definidos 13 pontos de impacto e um único ponto de medição da resposta, que foi mantido fixo durante todo o teste.

No tratamento do sinal adquirido foram usados filtros analógicos e na obtenção da FRF foi usada janela do tipo retangular. Cada FRF utilizada na análise modal do garfo

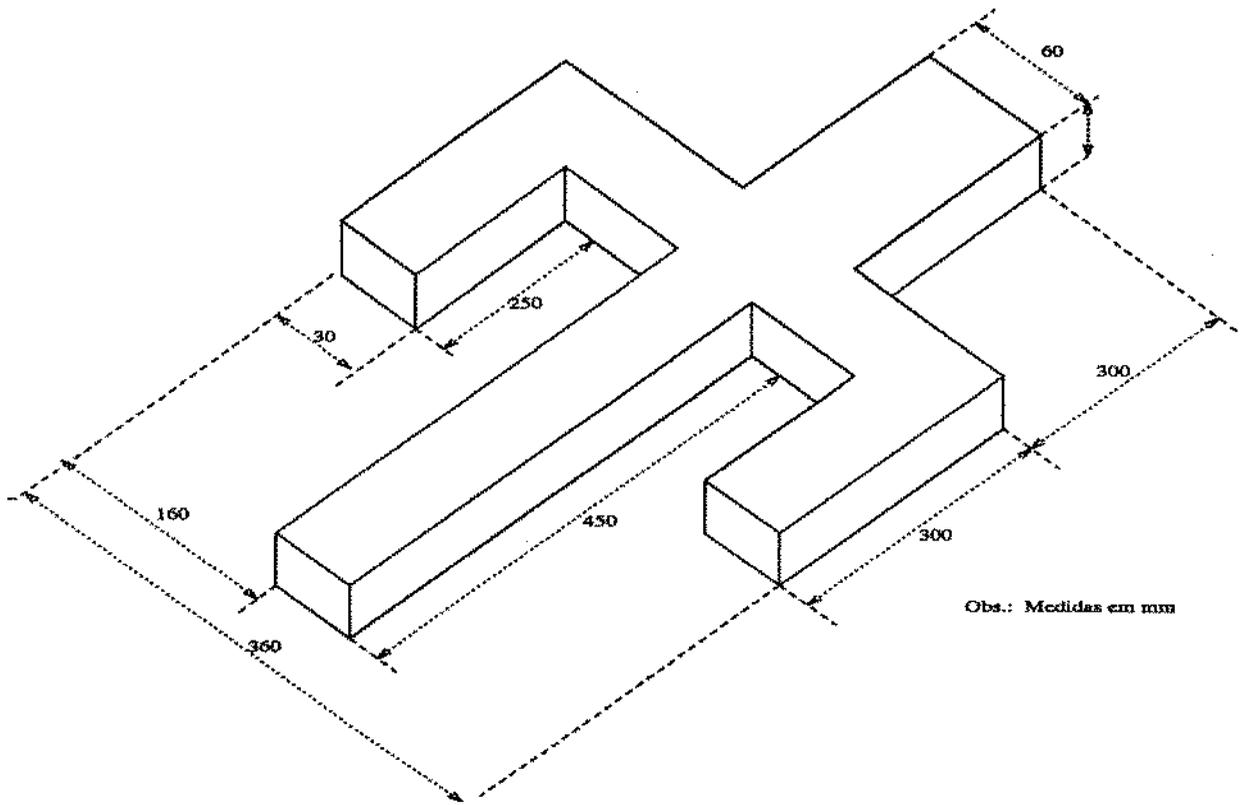


Figura 5.4: Dimensões do protótipo.

é resultado da média de valores obtidos em 10 diferentes ensaios.

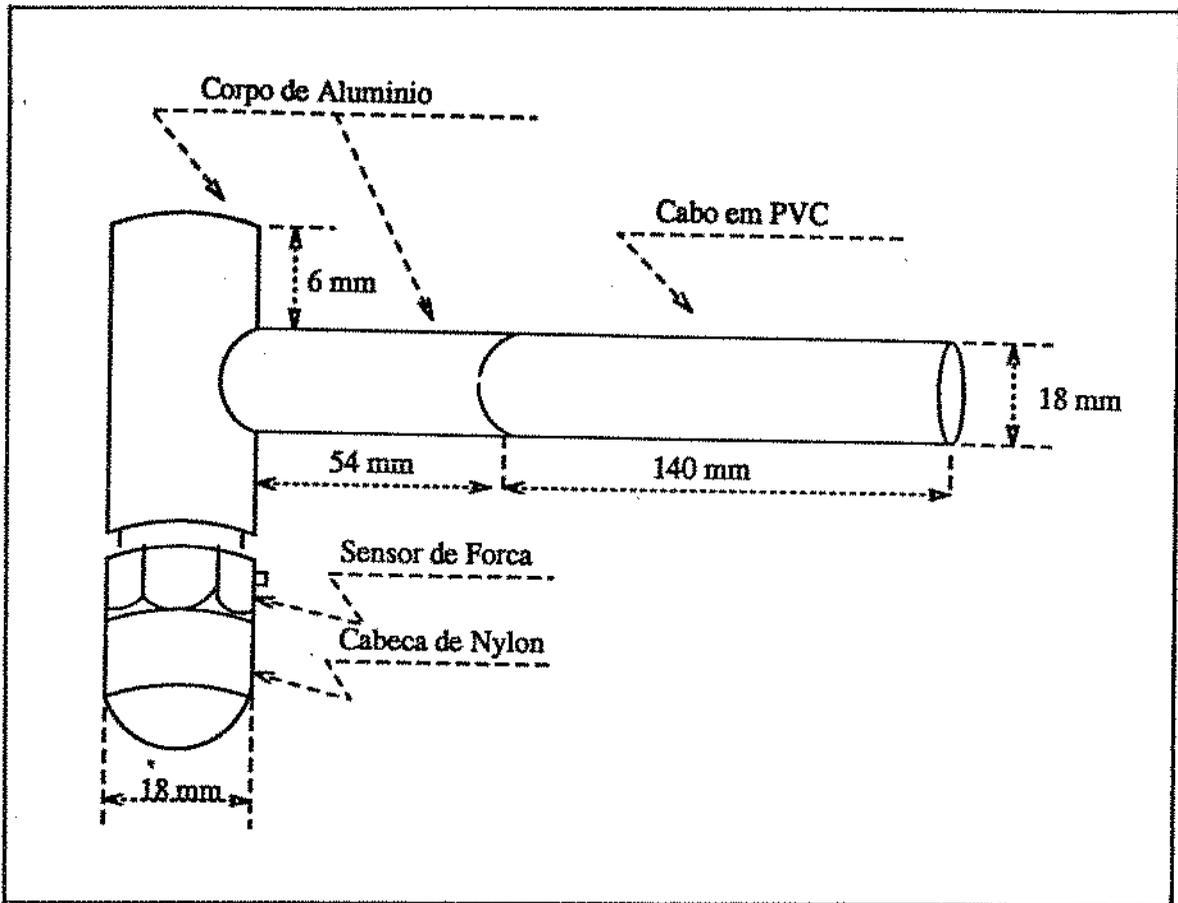


Figura 5.5: Martelo de impacto

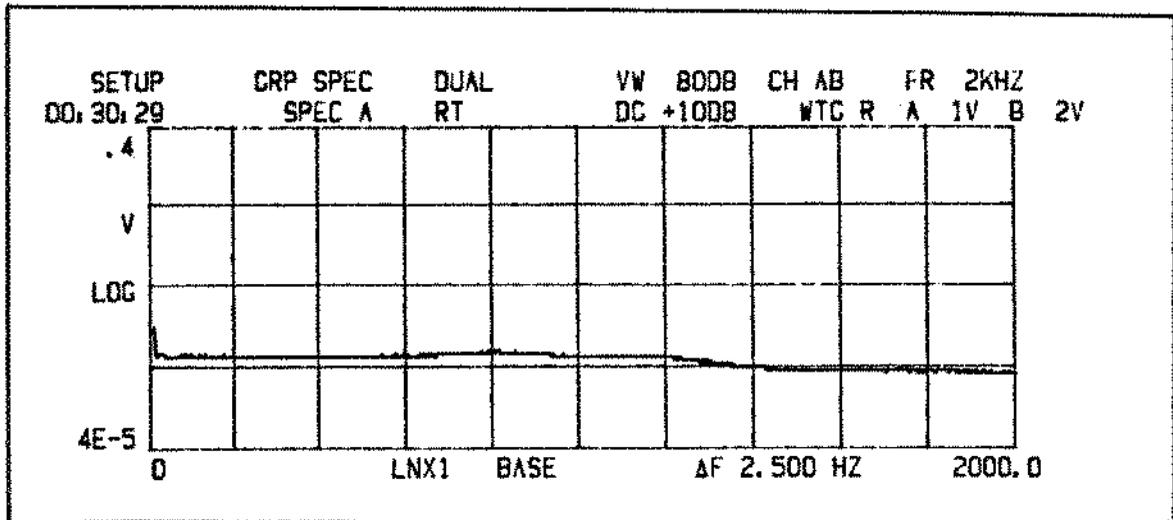


Figura 5.6: Resposta em frequência típica para sinal de entrada obtida com martelo de cabeça de nylon

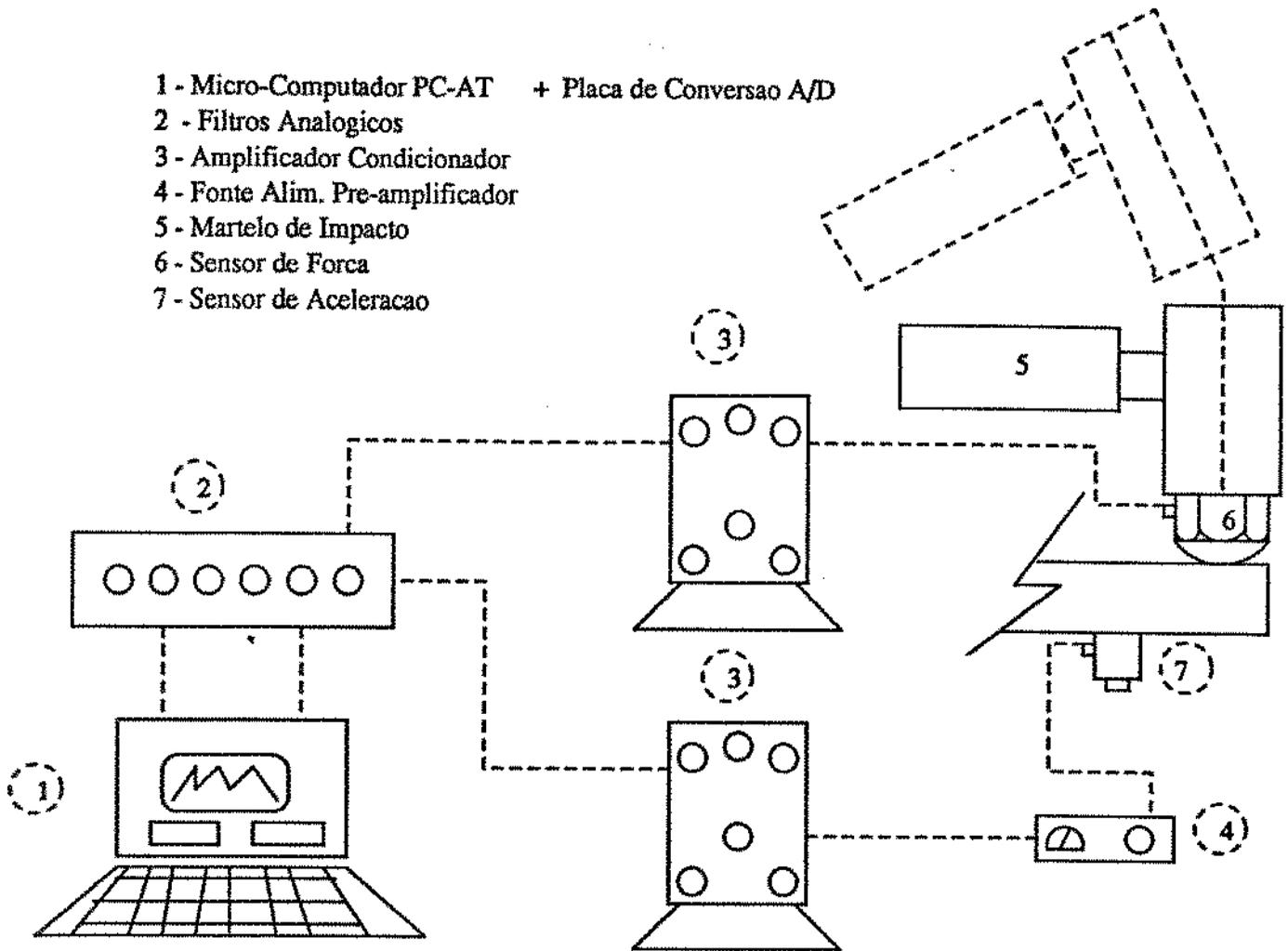


Figura 5.7: interligação dos equipamentos usados no sistema de aquisição de dados.

Capítulo 6

RESULTADOS OBTIDOS

O presente Capítulo objetiva apresentar os resultados obtidos com a utilização do método descrito no Capítulo 4.

O programa GLOBAL foi inicialmente testado para dados simulados, a partir de um sistema discreto hipotético, contendo 8 graus de liberdade numa faixa de 0 a 15 Hz. O propósito dessas simulações foi de avaliar a eficiência dos três modelos matemáticos descritos no Capítulo 4, no ajuste de FRF com diferentes tipos de distribuição modal.

O programa GLOBAL foi também aplicado no processamento de dados experimentais, para a identificação dos parâmetros modais do protótipo descrito no Capítulo 5.

Os resultados são mostrados nas seções subsequentes.

6.1 Simulações

Foram geradas 3 FRF de sistemas hipotéticos, cujos gráficos estão mostrados nas figuras 6.1, 6.2, 6.3. Os polos e os resíduos complexos desses sistemas foram arbitrados (tabela 6.1) de tal forma a gerar 3 tipos de distribuição modal, a saber:

- CASO 1: Todos os modos se encontram uniformemente distribuídos (figura 6.1).
- CASO 2: A faixa central, contendo 3 modos, se encontra afastada dos modos restantes (figura 6.2).
- CASO 3: Os modos se encontram distribuídos de forma intermediária entre os casos 1 e 2 (figura 6.3).

E os modelos matemáticos utilizados para ajustar as FRF foram:

$$H_{ij}(\omega_k) = q + \sum_{r=1}^N \frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} \quad \text{Modelo A}$$

$$H_{ij}(\omega_k) = u + \sum_{r=1}^N \frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} + j\omega_k \cdot v \quad \text{Modelo B}$$

$$H_{ij}(\omega_k) = \frac{b}{j\omega_k - \omega_L} + \sum_{r=1}^N \frac{r_{rij}}{j\omega_k - s_r} + \frac{a}{j\omega_k - \omega_H} \quad \text{Modelo C}$$

O ajuste das FRF foi feito numa faixa contendo as 4ª, 5ª e 6ª frequências naturais. Os três modelos matemáticos foram testados para cada um dos casos citados e os resultados da identificação de parâmetros são apresentados nas tabelas 6.2 e 6.3. As figuras 6.6-6.5 mostram os melhores ajustes obtidos na faixa de análise.

Tabela 6.1: tabela contendo os valores de polos e resíduos utilizados para gerar os 3 casos simulados

	caso 1	caso 2	caso 3
$r1 = 0.01+j0.2$	$s1 = 2(-0.01+j)$	$1(-0.01+j)$	$2.5(-0.01+j)$
$r2 = 0.02-j0.2$	$s2 = 3(-0.02+j)$	$1.25(-0.02+j)$	$3(-0.02+j)$
$r3 = -0.03+j0.1$	$s3 = 4(-0.03+j)$	$1.5(-0.03+j)$	$3.5(-0.03+j)$
$r4 = -0.02+j0.2$	$s4 = 5(-0.02+j)$	$5(-0.02+j)$	$5(-0.02+j)$
$r5 = 0.01+j0.3$	$s5 = 6(-0.01+j)$	$6(-0.01+j)$	$6(-0.01+j)$
$r6 = 0.02+j0.1$	$s6 = 7(-0.003+j)$	$7(-0.003+j)$	$7(-0.003+j)$
$r7 = 0.03+j0.2$	$s7 = 8(-0.02+j)$	$10(-0.02+j)$	$8.5(-0.02+j)$
$r8 = -0.04+j0.1$	$s8 = 9(-0.01+j)$	$11(-0.01+j)$	$9(-0.01+j)$

passo de frequência: $\Delta\omega = 0.125 \text{ Hz}$;

número de exemplos: 255 amostras;

faixa de análise: $4.5 \text{ Hz} \leq \omega \leq 7.5 \text{ Hz}$.

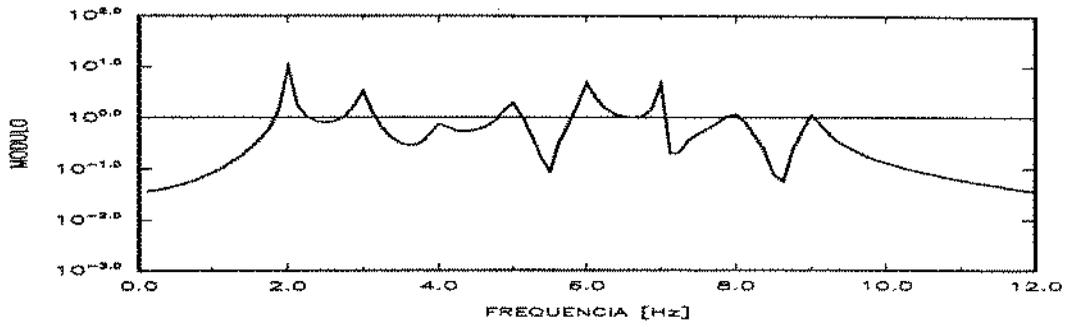


Figura 6.1: CASO 1 - Modos Uniformemente Distribuídos

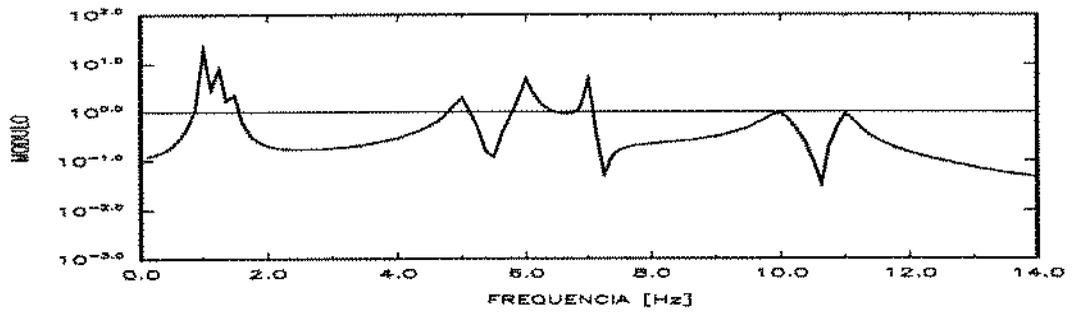


Figura 6.2: CASO 2 - Modos da Faixa Central Afastados dos Demais

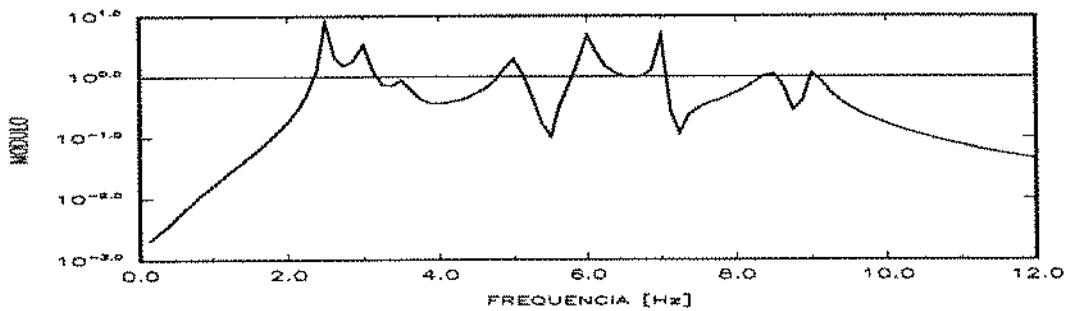


Figura 6.3: CASO 3 - Caso Intermediário

Tabela 6.2: Resultados da identificação de parâmetros para os Sistemas Simulados.

C A S O	M O D O	Frequências Naturais - ω_r /erro rel %				Fats. de Amorts. - $\xi_r(10^{-2})$ /erro rel %			
		Exatos	Calculados			Exatos	Calculados		
			MODELO				MODELO		
			A	B	C		A	B	C
1	1	5.0	5.000/.00	4.995/.10	4.998/.04	2.0	2.545/27.3	2.042/2.1	2.096/4.8
	2	6.0	5.998/.03	5.997/.05	5.999/.02	1.0	1.264/26.4	1.018/1.8	1.031/3.1
	3	7.0	7.003/.04	7.001/.01	7.000/.00	0.3	0.167/44.3	0.273/9.0	0.289/3.7
2	1	5.0	5.001/.02	5.001/.02	5.001/.02	2.0	2.077/3.9	1.994/0.3	2.000/0.0
	2	6.0	6.000/.00	6.000/.00	6.000/.00	1.0	1.040/4.0	0.999/0.1	1.001/0.1
	3	7.0	7.000/.00	7.000/.00	7.000/.00	0.3	0.279/7.0	0.299/0.3	0.300/0.0
3	1	5.0	5.001/.02	4.999/.02	5.000/.00	2.0	2.256/12.8	1.983/0.9	2.019/1.0
	2	6.0	5.999/.02	5.999/.02	6.000/.00	1.0	1.131/13.1	0.998/0.2	1.008/0.8
	3	7.0	7.002/.03	7.001/.01	7.000/.00	0.3	0.229/23.7	0.292/2.7	0.298/0.7

Tabela 6.3: Resultados da identificação de parâmetros para os Sistemas Simulados (continuação).

C A S O	M O D O	Resíduos Complexos (Real,Imag) - $r_r(10^{-1})$			
		Exatos	Calculados		
			MODELO		
			A	B	C
1	1	(-0.2,-2.0)	(-0.17,-2.57)	(-0.07,-2.00)	(-0.13,-2.07)
	2	(0.1,-3.0)	(0.19,-3.68)	(0.22,-2.94)	(0.17,-3.00)
	3	(0.2, 1.0)	(0.16, 0.55)	(0.18, 0.94)	(0.20, 0.99)
2	1	(-0.2,-2.0)	(-0.20,-2.09)	(-0.19,-1.99)	(-0.20,-2.00)
	2	(0.1,-3.0)	(0.11,-3.12)	(0.11,-2.99)	(0.10,-3.00)
	3	(0.2, 1.0)	(0.20, 0.93)	(0.20, 0.99)	(0.20, 1.00)
3	1	(-0.2,-2.0)	(-0.19,-2.28)	(-0.16,-1.97)	(-0.19,-2.02)
	2	(0.1,-3.0)	(0.15,-3.38)	(0.14,-2.96)	(0.11,-3.01)
	3	(0.2, 1.0)	(0.20, 0.75)	(0.20, 0.97)	(0.20, 1.00)

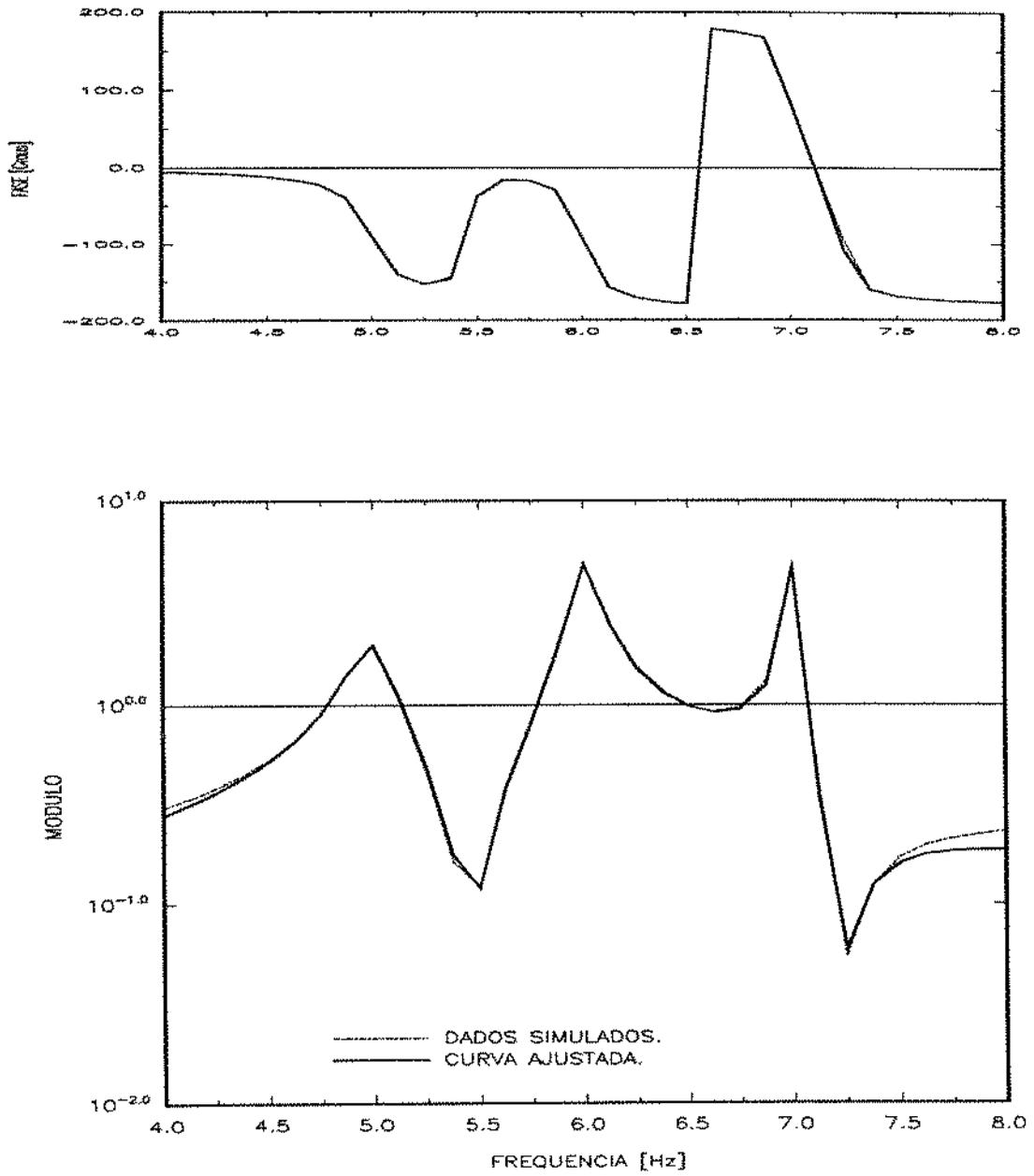


Figura 6.4: Ajuste para dados simulados - Caso 2 - Modelo A

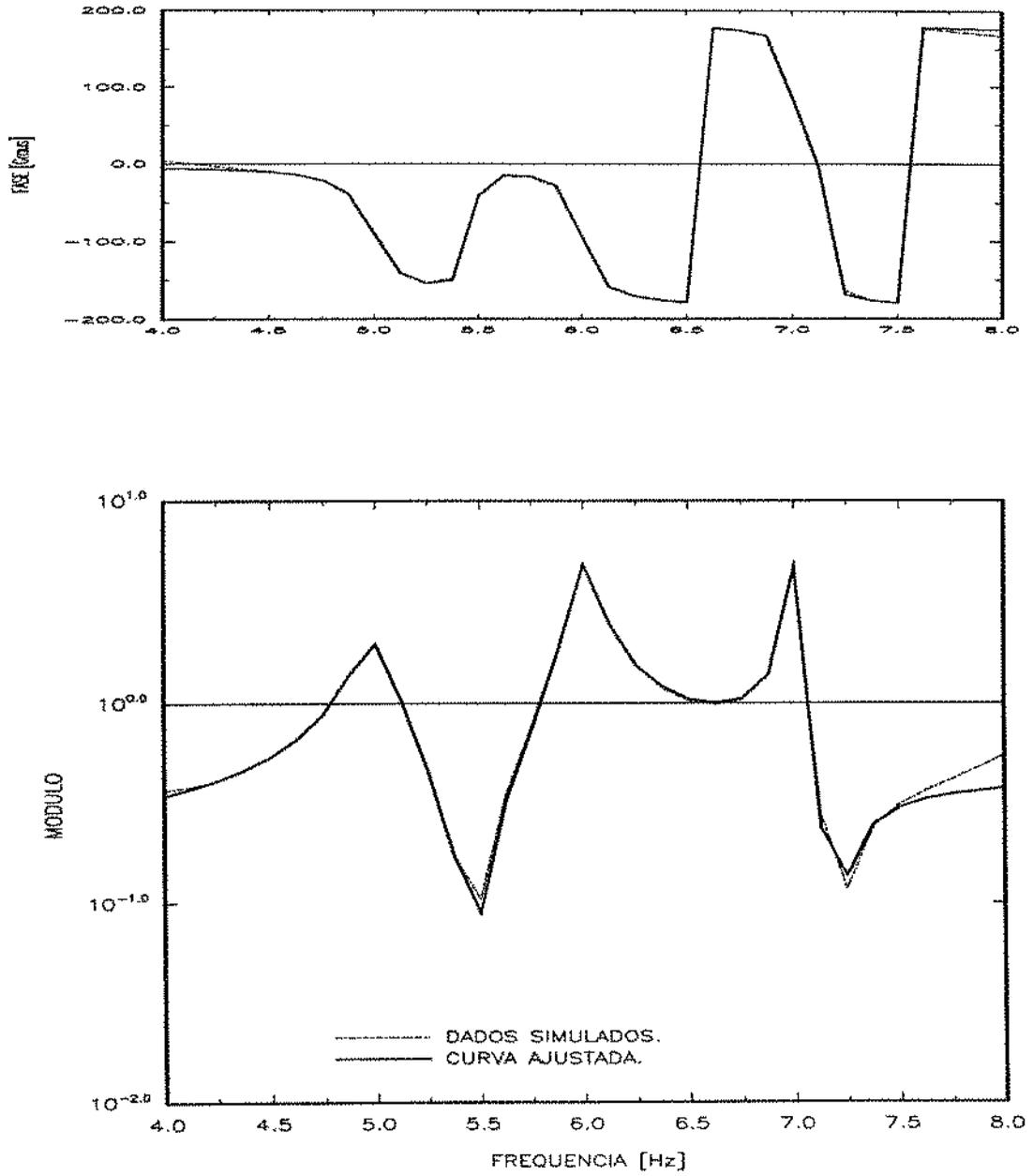


Figura 6.5: Ajuste para dados simulados - Caso 3 - Modelo B

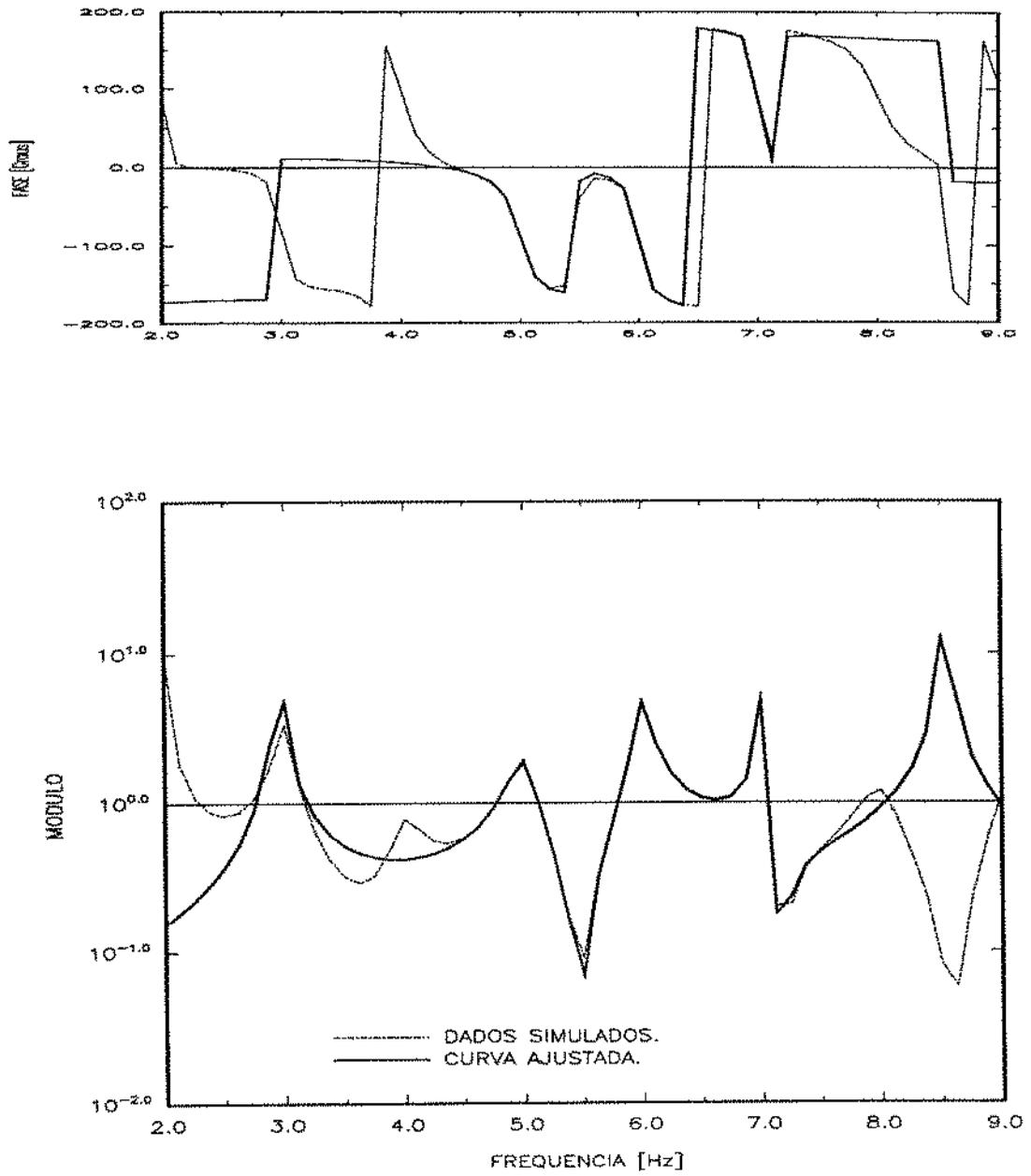


Figura 6.6: Ajuste para dados simulados - Caso 1 - Modelo C

6.2 Resultados Experimentais

Antes da apresentação das tabelas e gráficos contendo os resultados experimentais obtidos, faz-se necessário comentar alguns pontos pertinentes ao desenvolvimento dessa parte do trabalho:

6.2.1 Considerações Sobre a Escolha dos Pontos de Excitação

Inicialmente o protótipo foi subdividido em 34 elementos, conforme mostra a figura 6.7, objetivando uma futura modelagem por Elementos Finitos, que está fora do escopo desse trabalho.

A estrutura foi excitada 10 vezes em cada um dos 34 pontos indicados, tendo-se mantido fixo o Transdutor de Aceleração no ponto 16 (vide figura 6.7).

Para cada ponto excitado, foram adquiridos 2048 amostras no tempo. Posteriormente foi feita uma Média Espectral, no domínio da frequência, das 10 aquisições realizadas. Com isso, o efeito do ruído no sinal adquirido foi reduzido sensivelmente.

Para efeito de processamento e identificação dos parâmetros modais do Garfo, foram selecionados 13 dos 34 pontos excitados, que correspondem aos pontos: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 16, 18, 20, 25, 26, 30 e 34 mostrados na figura 6.7.

6.2.2 Considerações Sobre o Modelo Matemático Adotado no Ajuste e a Escolha da Faixa Total de Análise

Os resultados dos testes simulados descritos na seção anterior mostram que os dois Modelos Matemáticos, B e C, descritos no Capítulo 4, apresentam melhores ajustes das FRF analisadas.

Para analisar os dados experimentais, testou-se estes dois Modelos e os resultados foram idênticos. Optou-se, portanto, pelo uso do Modelo B, já que este apresentou menos instabilidades numéricas no processamento dos dados experimentais.

A faixa de frequência analisada foi estabelecida entre 0 e 1600 Hz, que contém os 8 primeiros modos de vibrar da estrutura. Essa escolha baseou-se, dentre outros, em dois resultados obtidos a partir dos testes experimentais:

- Decaimento da frequência de excitação a partir de 1200 Hz (conforme Figura 5.6);
- Consequente diminuição da Função Coerência a partir desse mesmo valor (vide Figura 5.2).

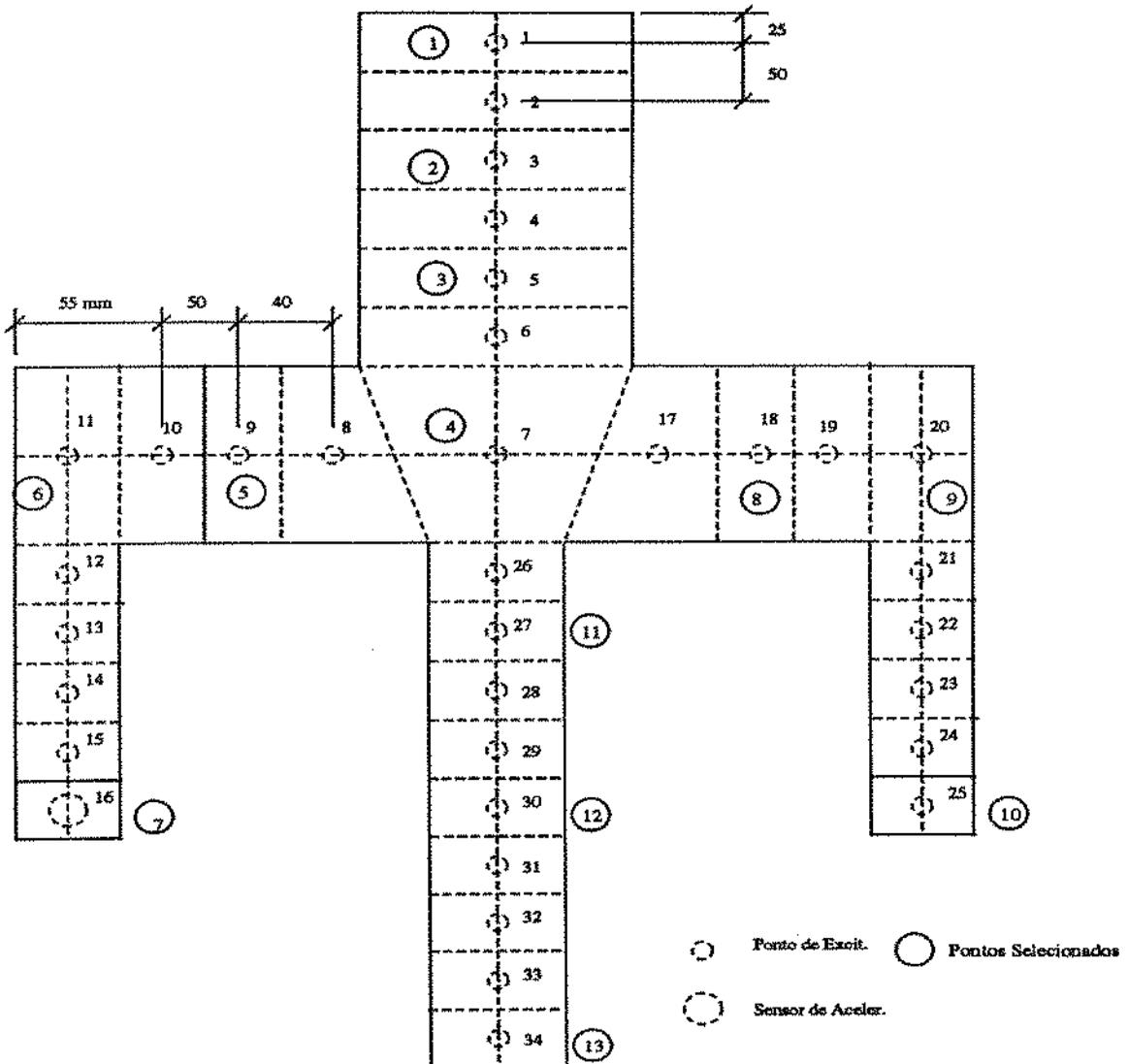


Figura 6.7: Pontos de medição e excitação no Protótipo ensaiado.

Estes resultados são típicos dos testes experimentais realizados, tendo-se verificado que os mesmos se repetem para todos os pontos ensaiados.

6.2.3 Considerações Sobre a Utilização dos Dados de Aceleração na Análise dos Resultados.

O algoritmo de identificação descrito no capítulo 4 baseia-se em interpolações realizadas a partir da receptância de um sistema dinâmico. O teste experimental realizado, entretanto, utilizou sinais de força e aceleração provenientes do sistema, o que levou à

determinação das diversas FRF do tipo aceleração.

Tomando-se a expressão da função resposta ao impulso unitário (equação 3.51) e derivando-a duas vezes com respeito ao tempo, tem-se:

$$a(t) = \frac{d^2[h_{ij}(t)]}{dt^2} = \sum_{r=1}^N [s_r^2 \cdot R_{rij} \cdot e^{s_r t} + (s_r^*)^2 \cdot R_{rij}^* \cdot e^{s_r^* t}] \quad (6.1)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier à expressão acima, chega-se à forma da aceleração no domínio da frequência:

$$A(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{s_r^2 R_{rij}}{j\omega - s_r} + \frac{(s_r^*)^2 R_{rij}^*}{j\omega - s_r^*} \right] \quad (6.2)$$

A expressão 6.2 acima sugere que os resíduos calculados à partir de valores experimentais de aceleração, diferem dos resíduos da função de receptância pelo termo s_r^2 . Assim sendo, os valores exatos dos resíduos das FRF de receptância do sistema em estudo devem ser divididos por s_r^2 , para cada modo identificado. Os resultados apresentados nas tabelas 6.7 e 6.8 desprezam tal correção, já que deseja-se apenas uma apresentação qualitativa dos modos de vibrar da estrutura.

6.2.4 Considerações Sobre a Escolha de Análise por Sub-Faixas.

Após alguns testes preliminares, com o uso do programa GLOBAL para a identificação de parâmetros modais ao longo de toda a faixa de análise, observou-se que, por melhor que fosse a estimativa inicial para o processamento de ajuste da FRF, havia instabilidades numéricas no cálculo dos parâmetros, o que levava a resultados não confiáveis. Optou-se, portanto, pelo ajuste em sub-faixas de frequência de análise.

Observou-se que o cálculo dos parâmetros era estável para o ajuste de até 5 modos de vibrar. Dividiu-se então a faixa total de 0 a 1600 Hz, em duas sub-faixas, a saber:

- 1ª Faixa - 30 a 800 Hz, contendo os 4 primeiros modos de vibrar. Nesta faixa optou-se por omitir a frequência de 20 Hz, típica da suspensão da estrutura;
- 2ª Faixa - 1000 a 1600 Hz, contendo os 4 últimos modos de vibrar.

A seguir são mostrados resultados típicos dos cálculos dos parâmetros modais (Tabelas 6.4 e 6.5) e dos ajustes conseguidos nestas duas faixas de frequência (figuras 6.8 e 6.9):

Tabela 6.4: Resultados típicos de análise para faixa de 30 a 800 Hz.

MODO	polo (Real,Imag)	ω_r [Hz]	ξ_r (10^{-3})	Residuo (Real,Imag)	(Constante Modal Módulo \angle fase)
1	(-.043,127.85)	127.85	-0.340	(0.496, 0.400)	0.637 \angle 38.85
2/3*	(-.329,259.41)	259.41	-1.270	(-0.607, 1.120)	1.274 \angle 118.44
4	(-.151,502.24)	502.24	-0.301	(-0.135,-2.640)	2.643 \angle -92.93
5	(-.267,712.94)	712.94	-0.374	(-3.441, 1.571)	3.783 \angle 155.46

Termos residuais: $u = 10^{-2}(-1.182,0.384)$ $v = 10^{-5}(-.384,-.712)$

Tabela 6.5: Resultados típicos de análise para faixa de 1000 a 1600 Hz.

MODO	Polo	ω_r [Hz]	ξ_r (10^{-3})	Residuo	(Constante Modal Módulo \angle fase)
6	(-1.286,1118.08)	1118.08	-1.150	(1.639,-0.718)	1789 \angle -23.66
7	(-0.282,1332.86)	1332.86	-0.212	(-2.802, 0.702)	2889 \angle 165.93
8	(-0.244,1475.53)	1475.53	-0.165	(1.435,-0.868)	1677 \angle -31.15
9	(-0.349,1517.02)	1517.02	-0.230	(2.173, 0.075)	2174 \angle 1.97

Termos residuais: $u = 10^{-1}(-0.306,0.205)$ $v = 10^{-4}(-.137,-.148)$

A partir dos valores de polos e resíduos complexos obtidos em ambas as faixas de análise, calculou-se os valores das contribuições dos termos residuais para a faixa mais ampla de análise (figura 6.10). Os ajustes obtidos para as treze FRF analisadas estão mostrados nas Figuras 6.11 a 6.23

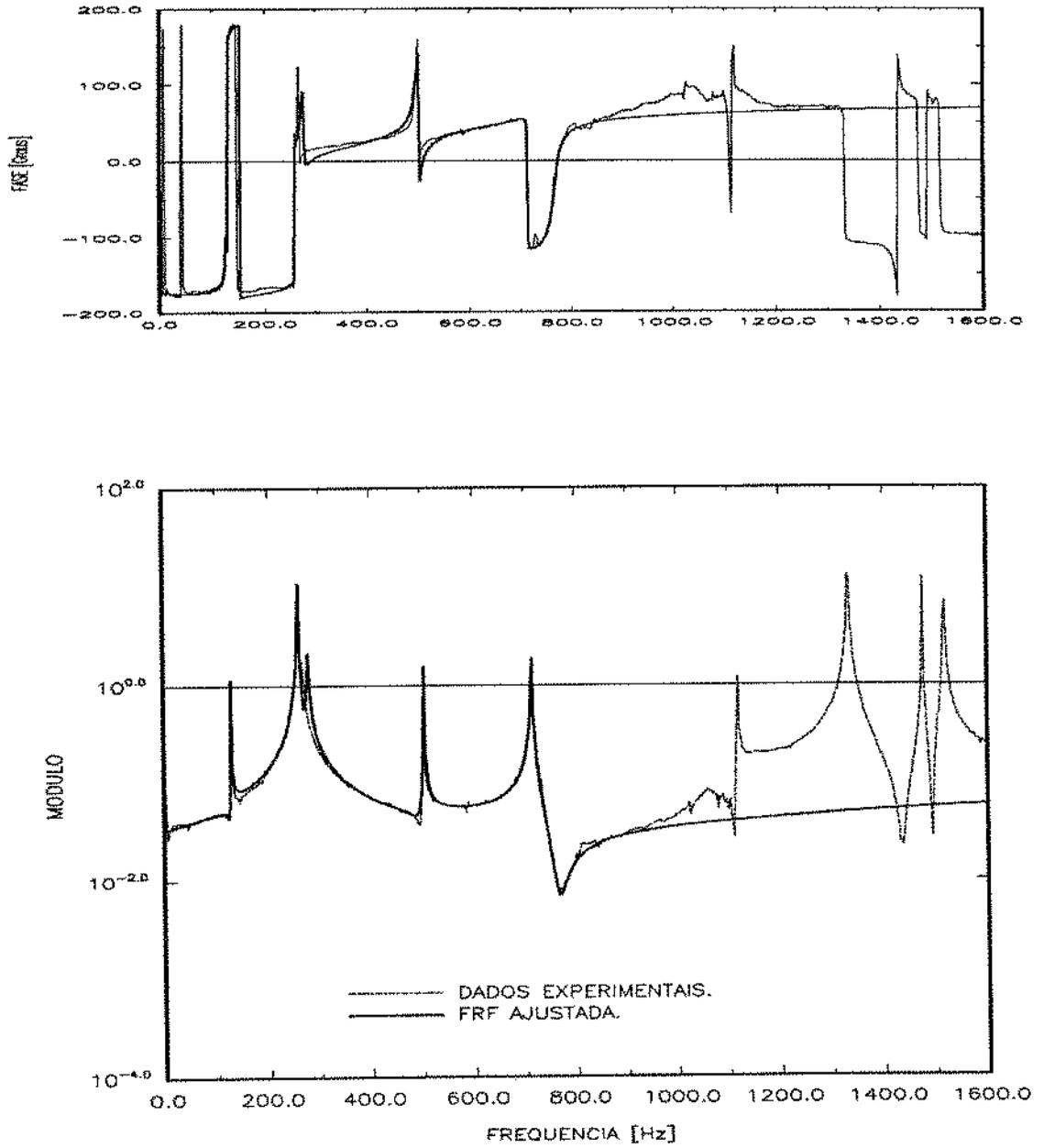


Figura 6.8: Ajuste típico para dados experimentais - 1ª Faixa

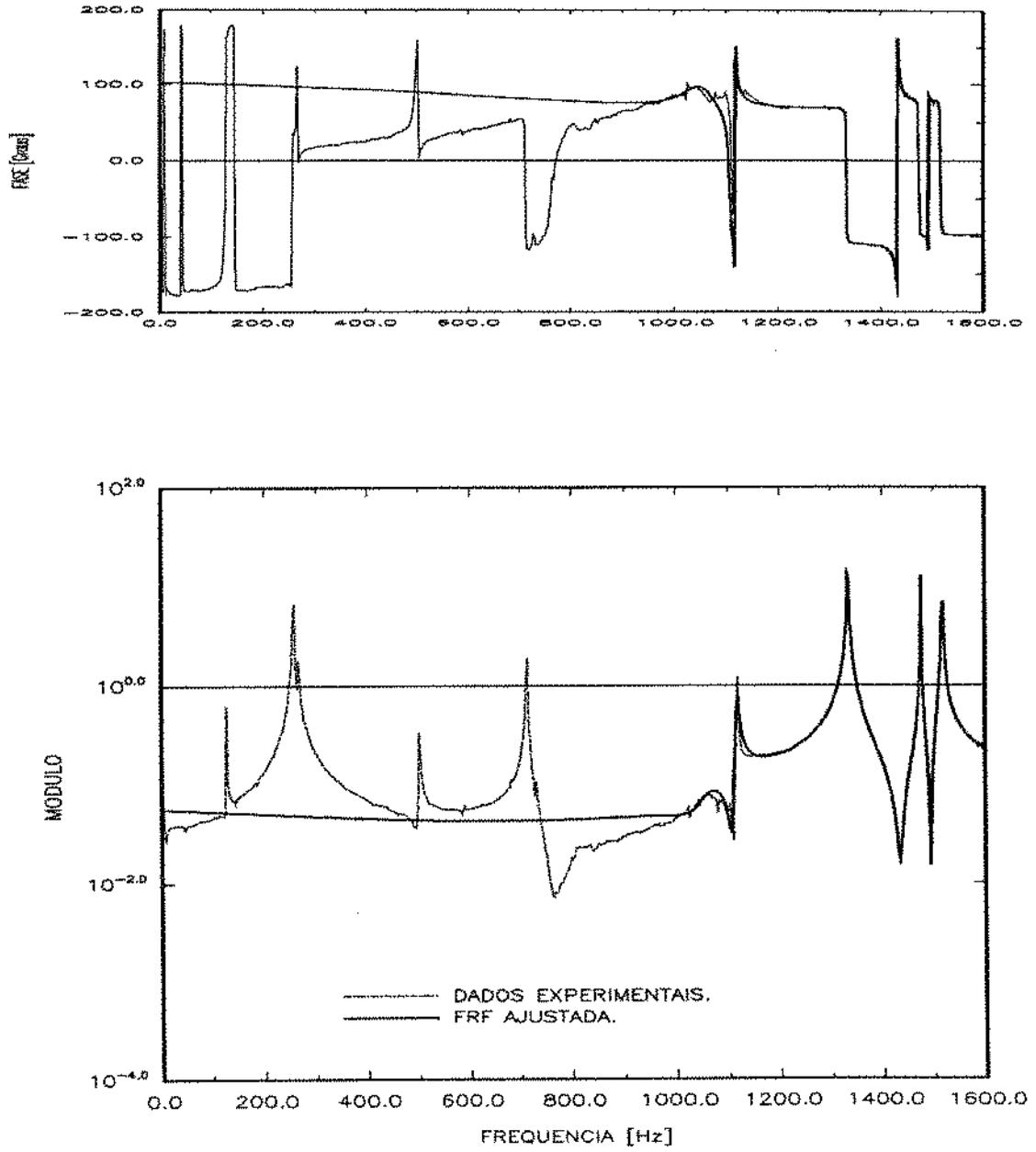


Figura 6.9: Ajuste típico para dados experimentais - 2ª Faixa

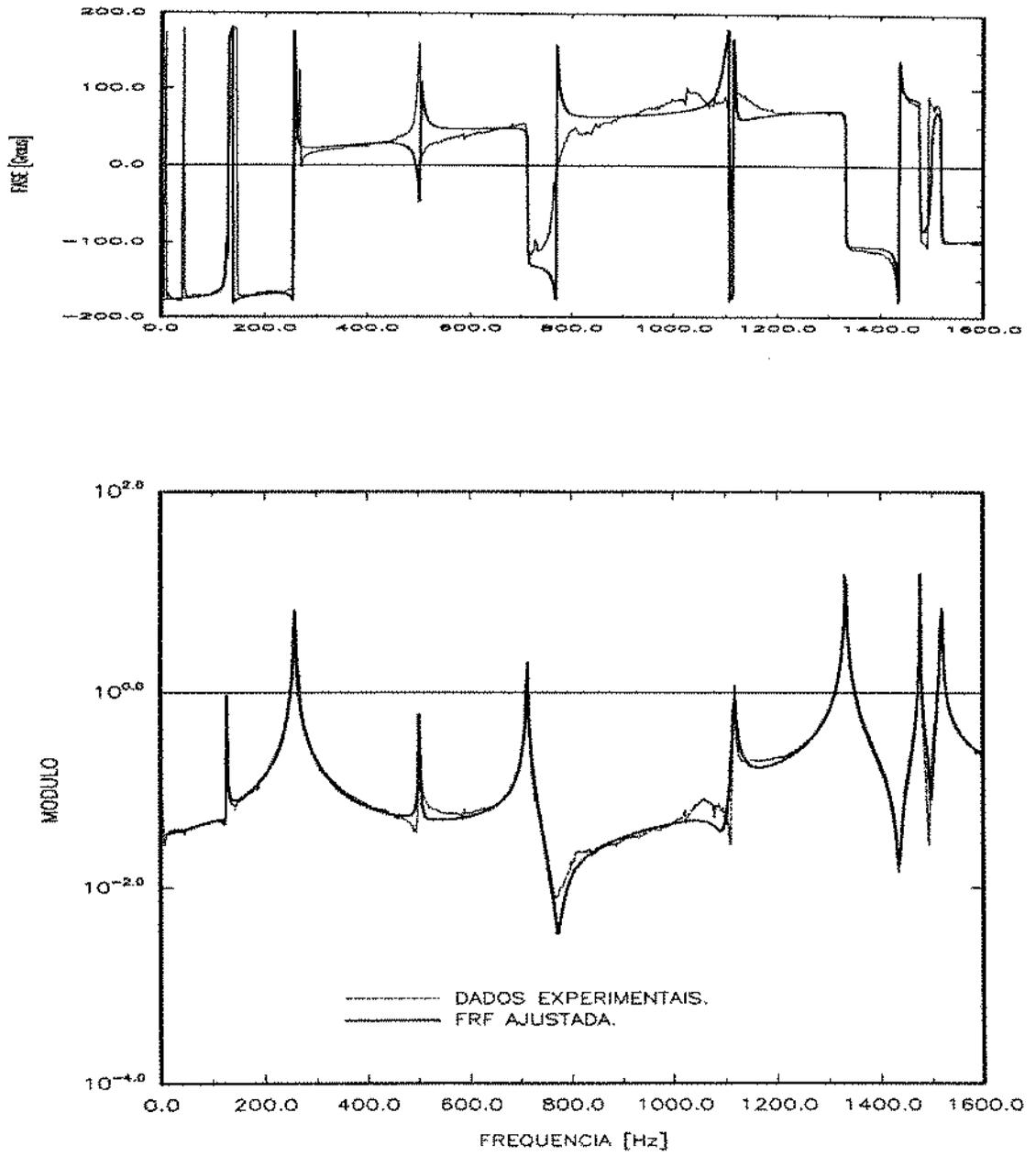


Figura 6.10: Ajuste típico para a faixa total de frequência

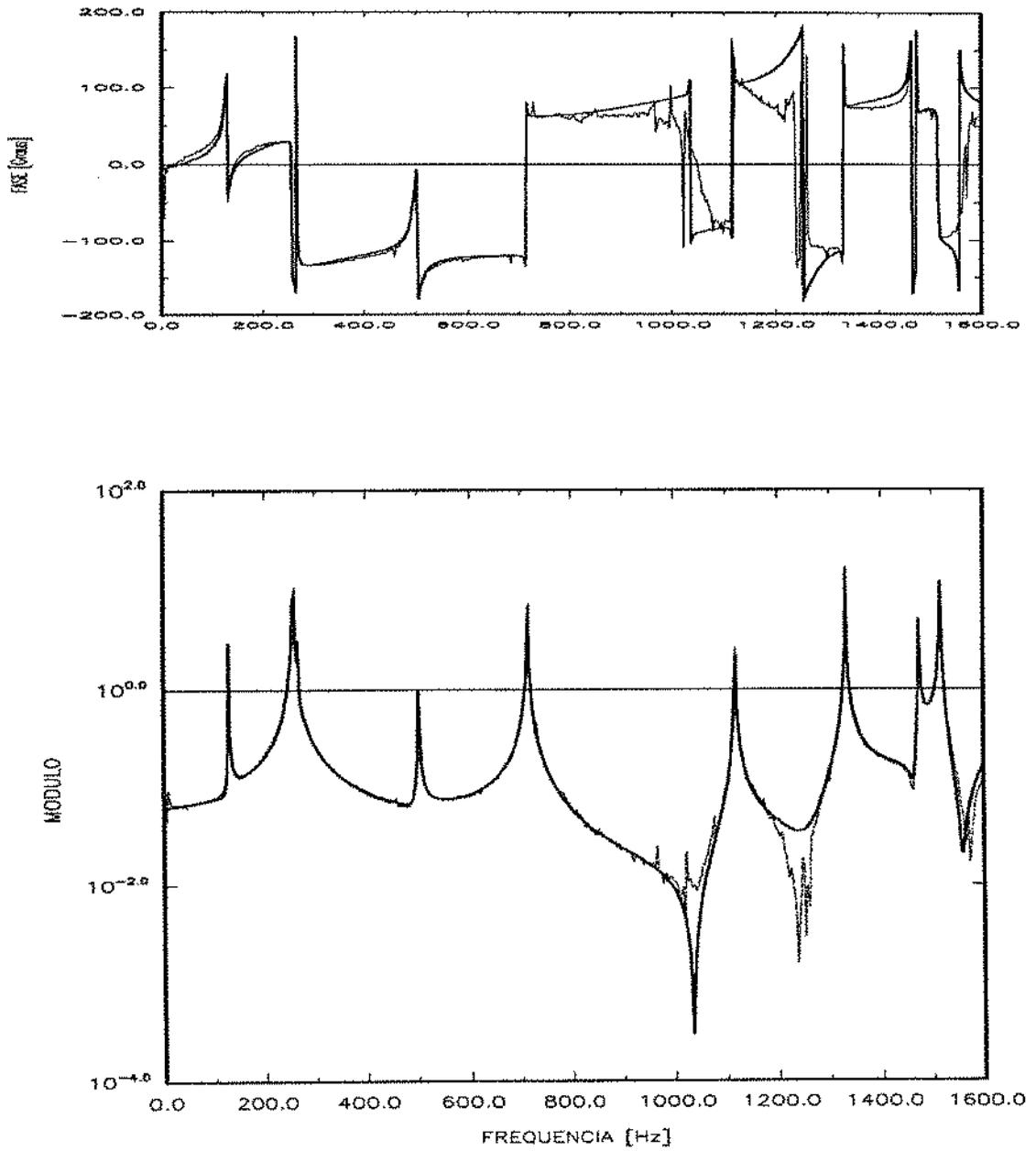


Figura 6.11: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x01

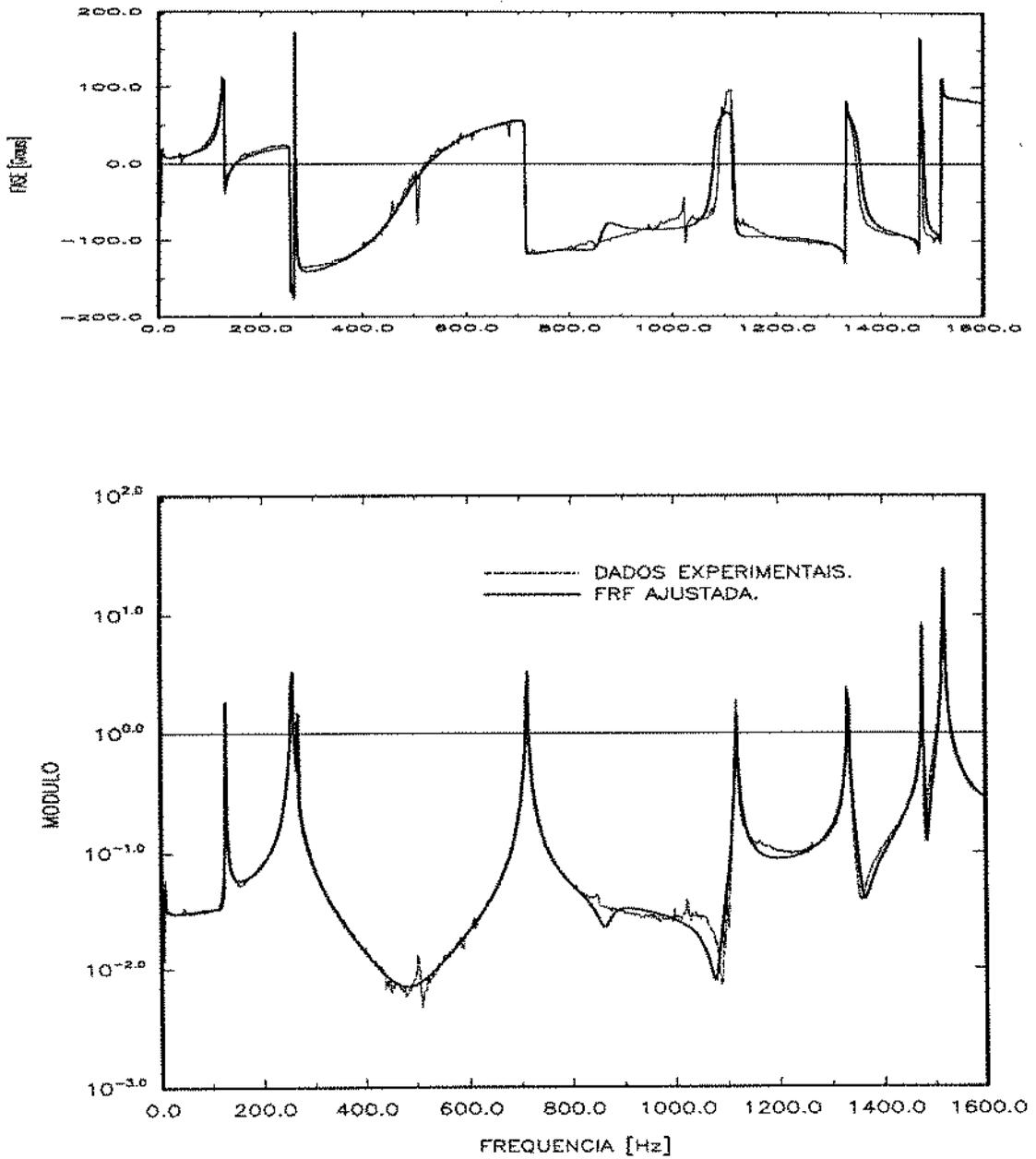


Figura 6.12: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x02

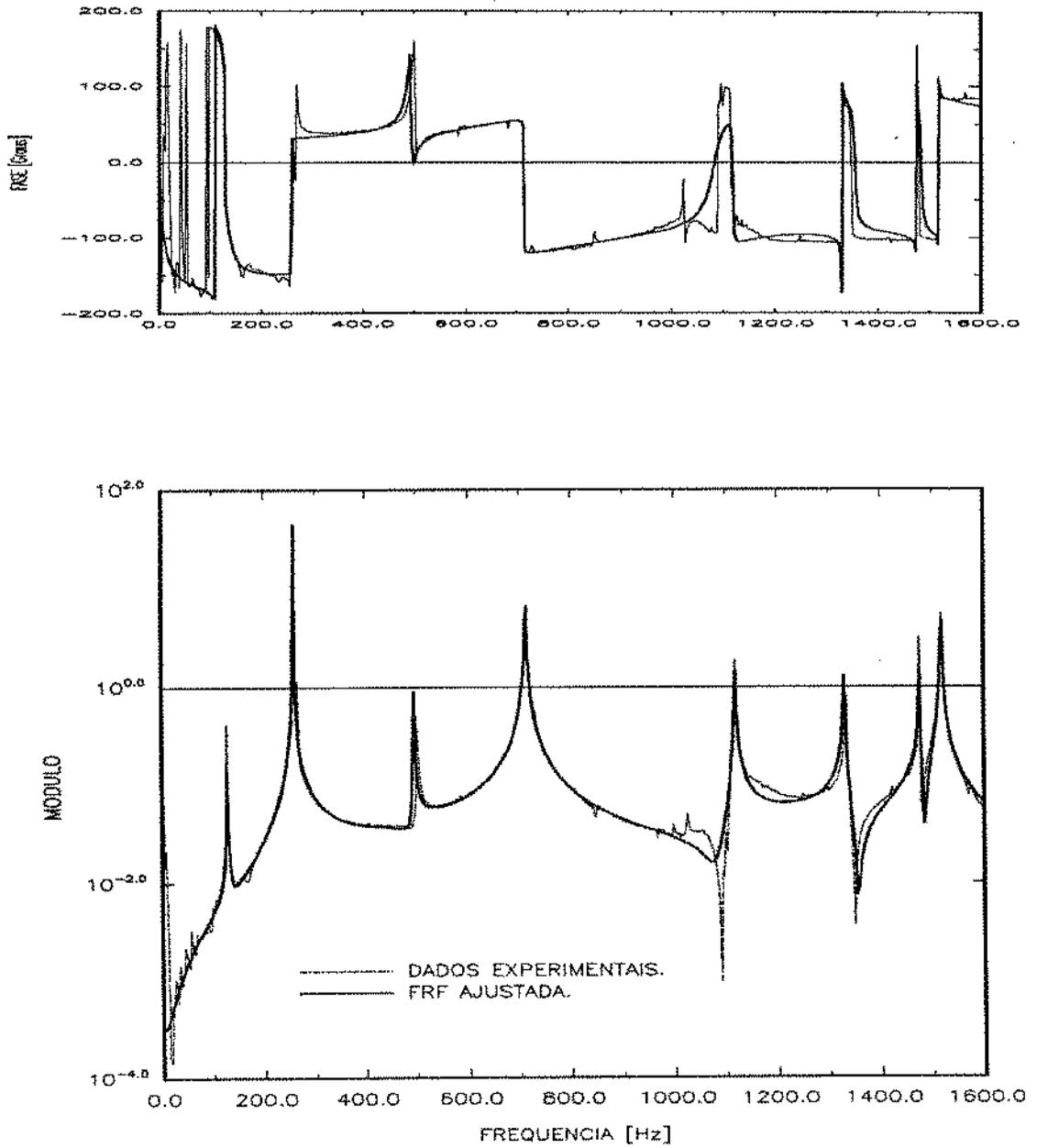


Figura 6.13: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x03

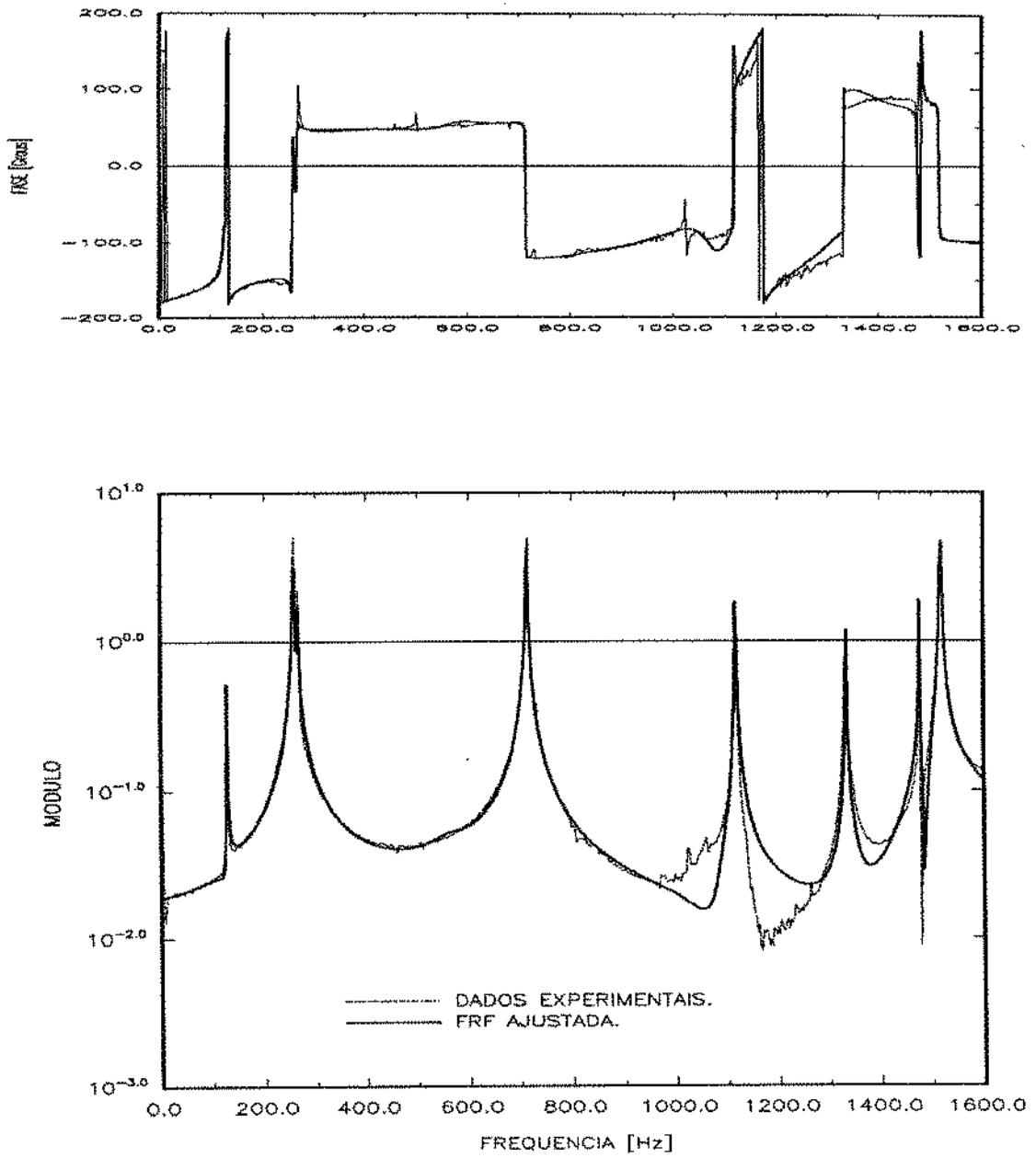


Figura 6.14: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x04

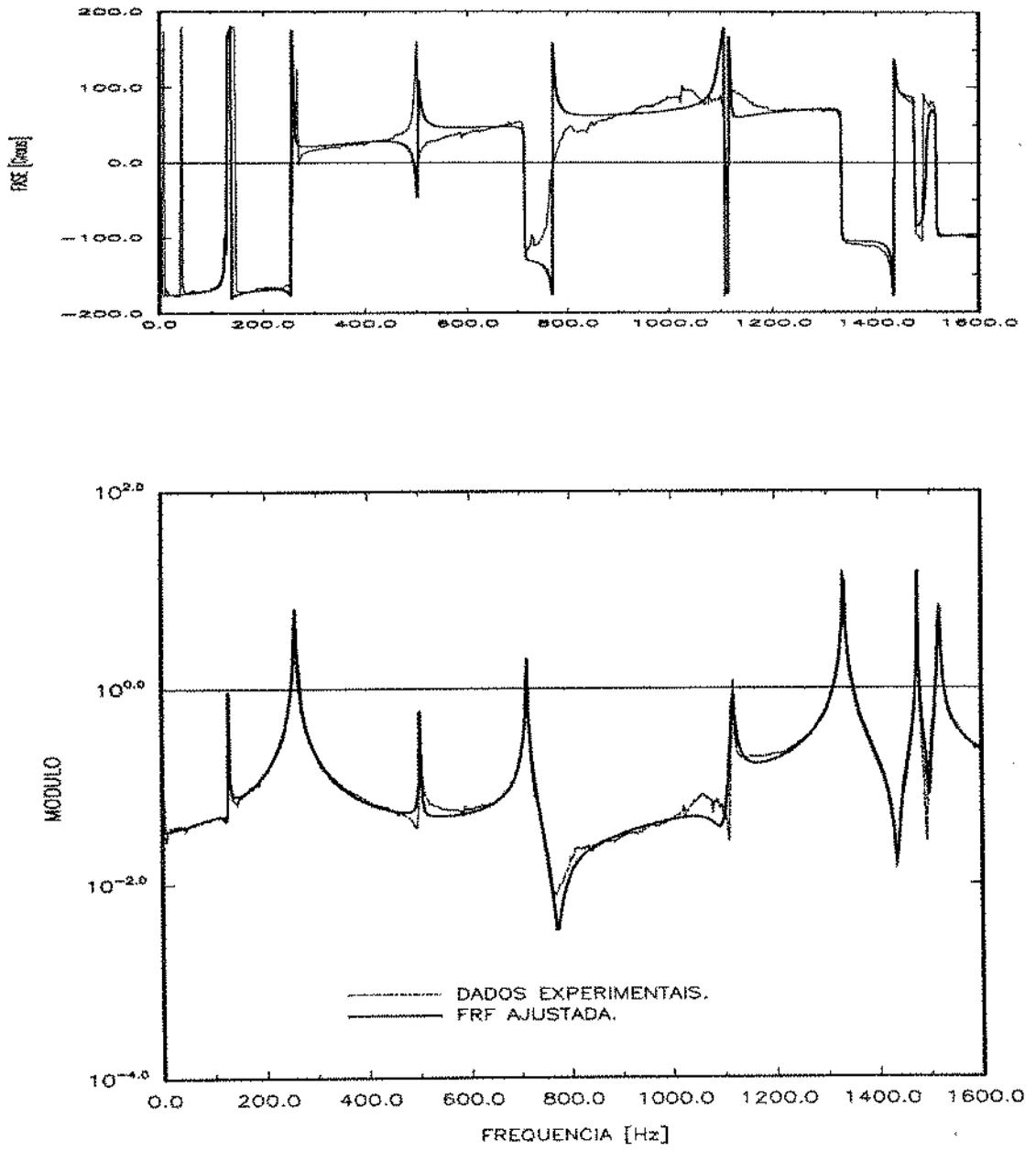


Figura 6.15: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x05

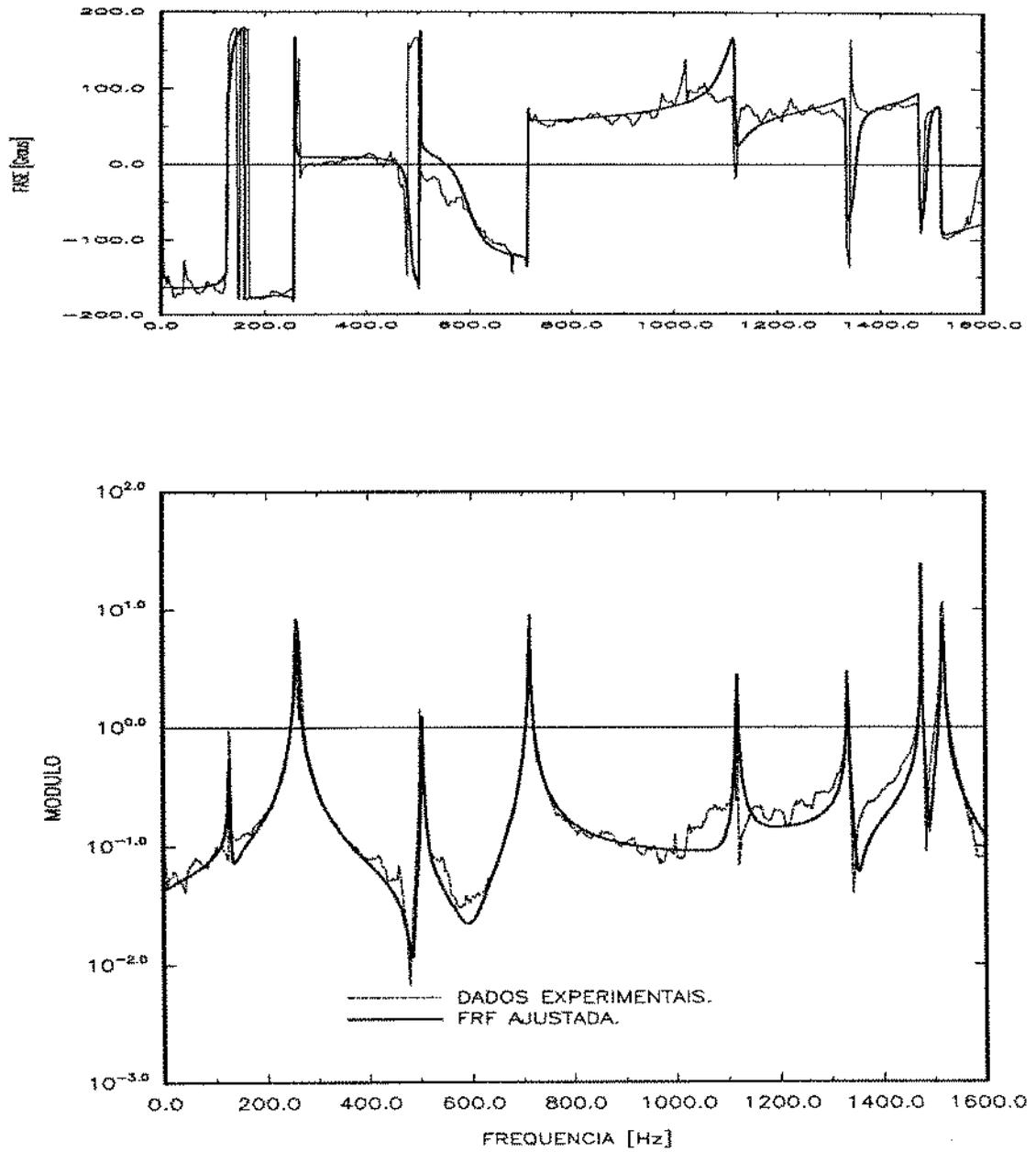


Figura 6.16: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x06

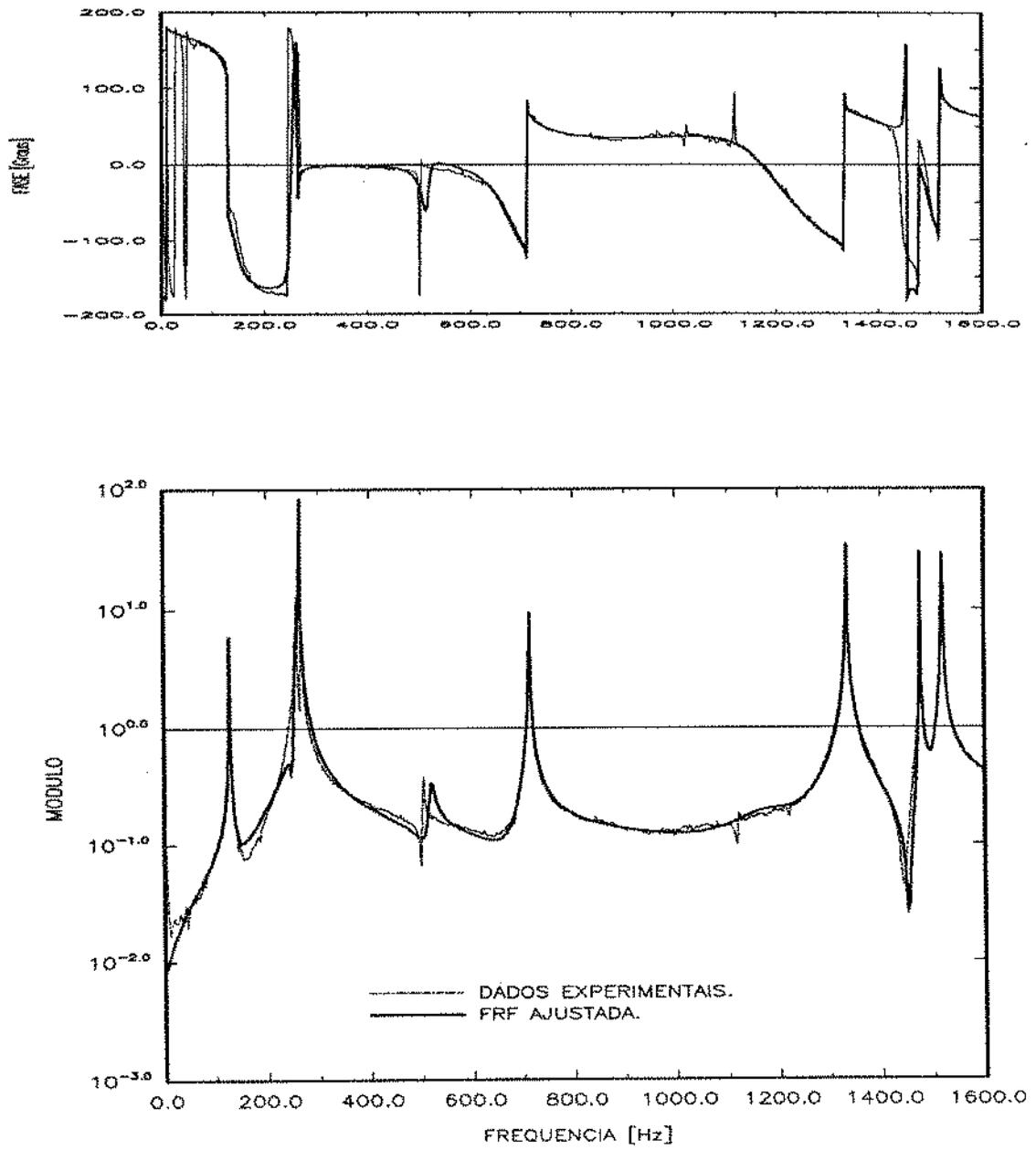


Figura 6.17: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x07

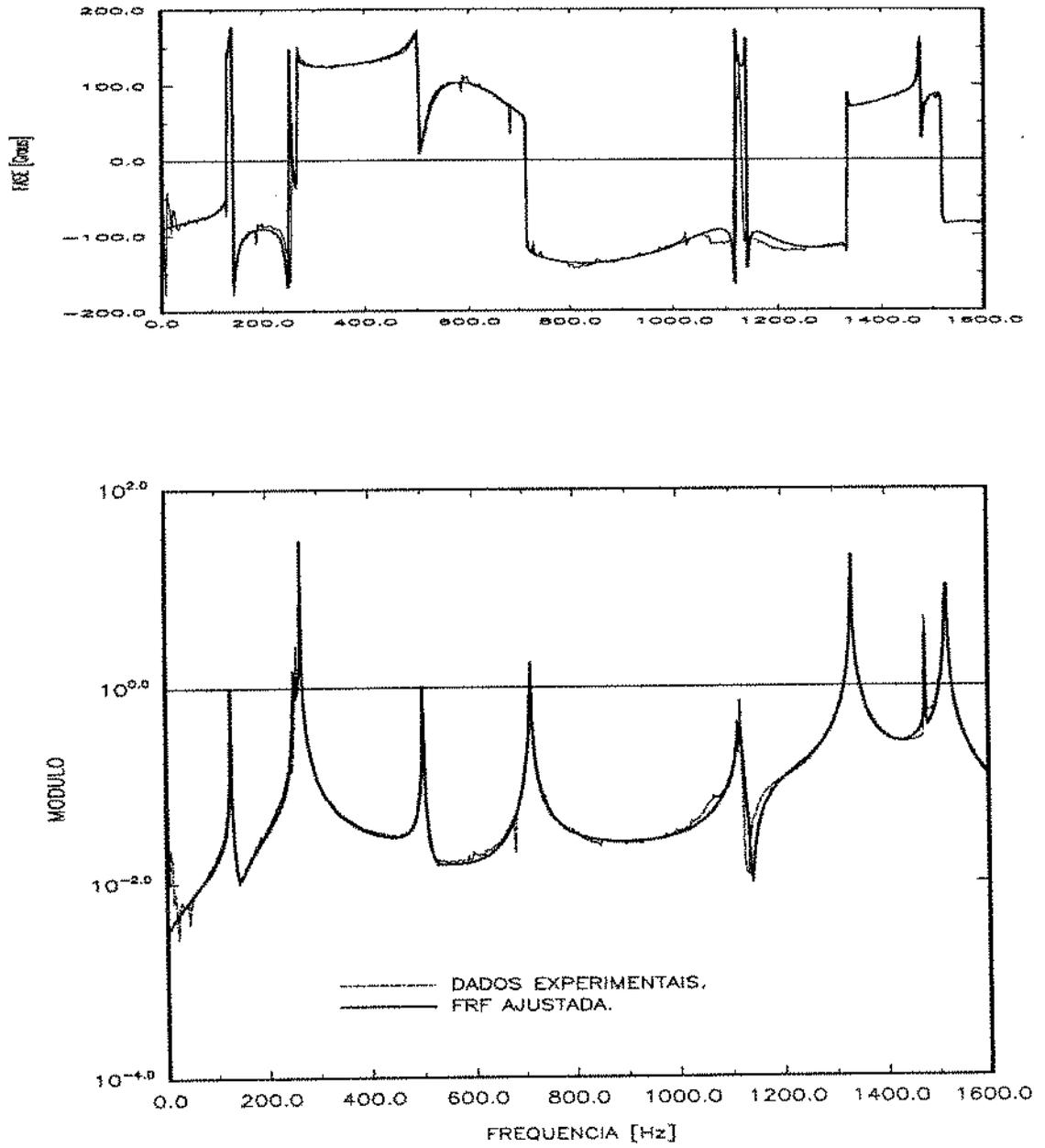


Figura 6.18: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x08

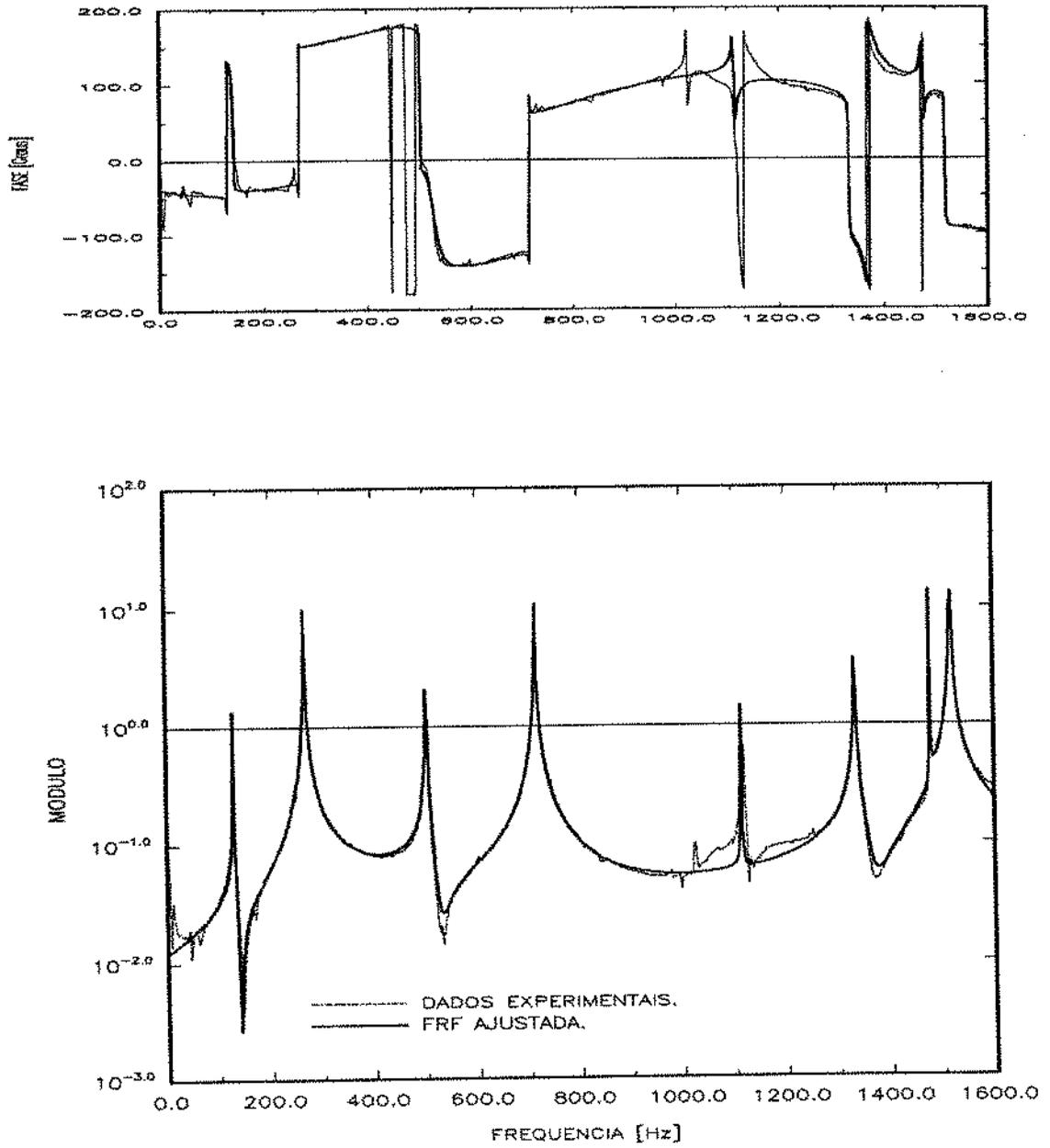


Figura 6.19: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x09

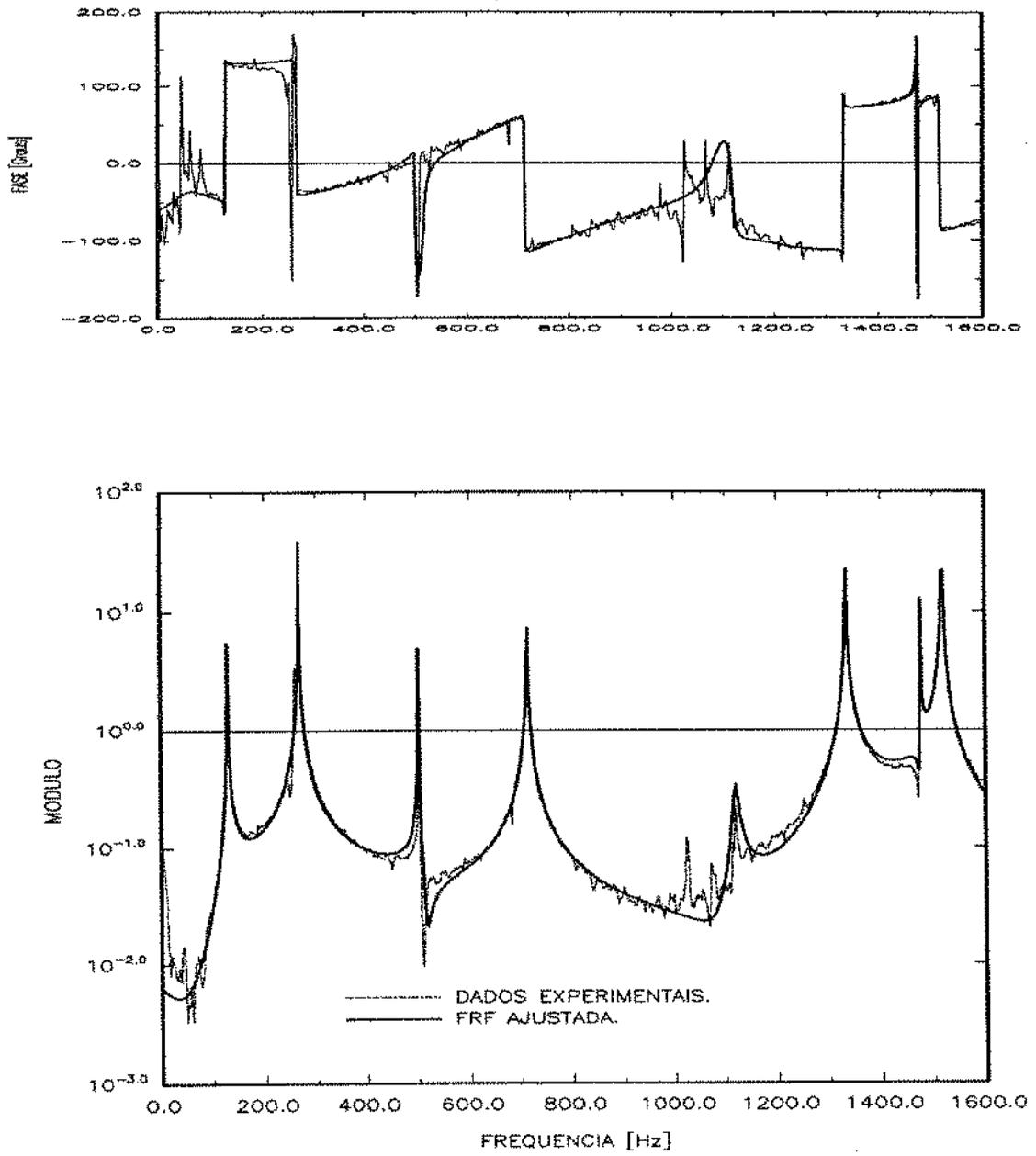


Figura 6.20: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x10

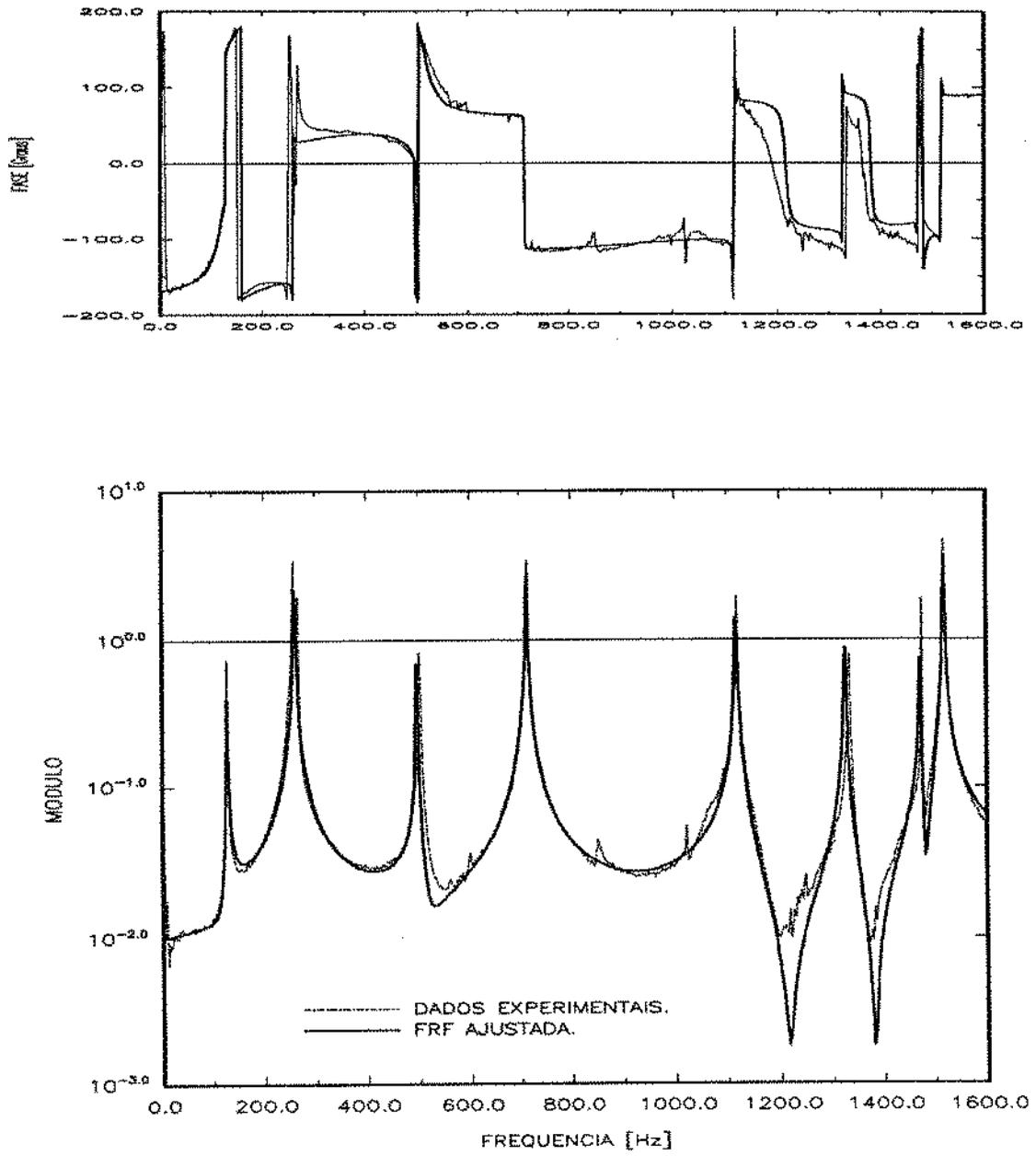


Figura 6.21: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x11

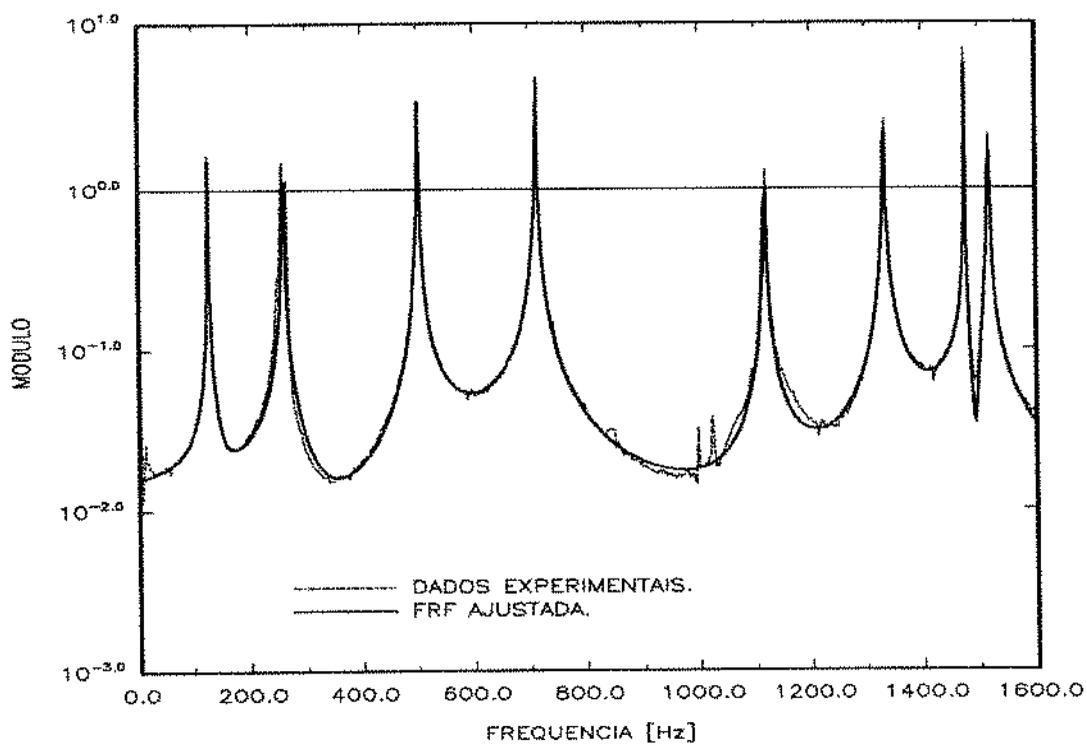
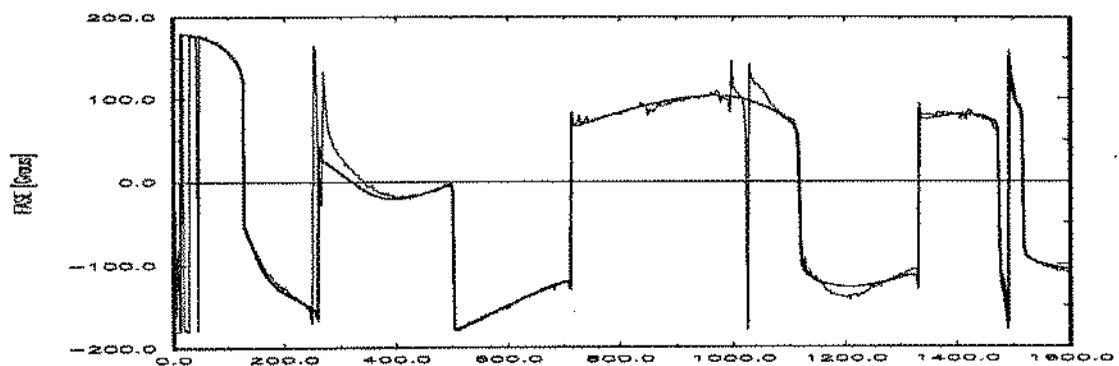


Figura 6.22: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x12

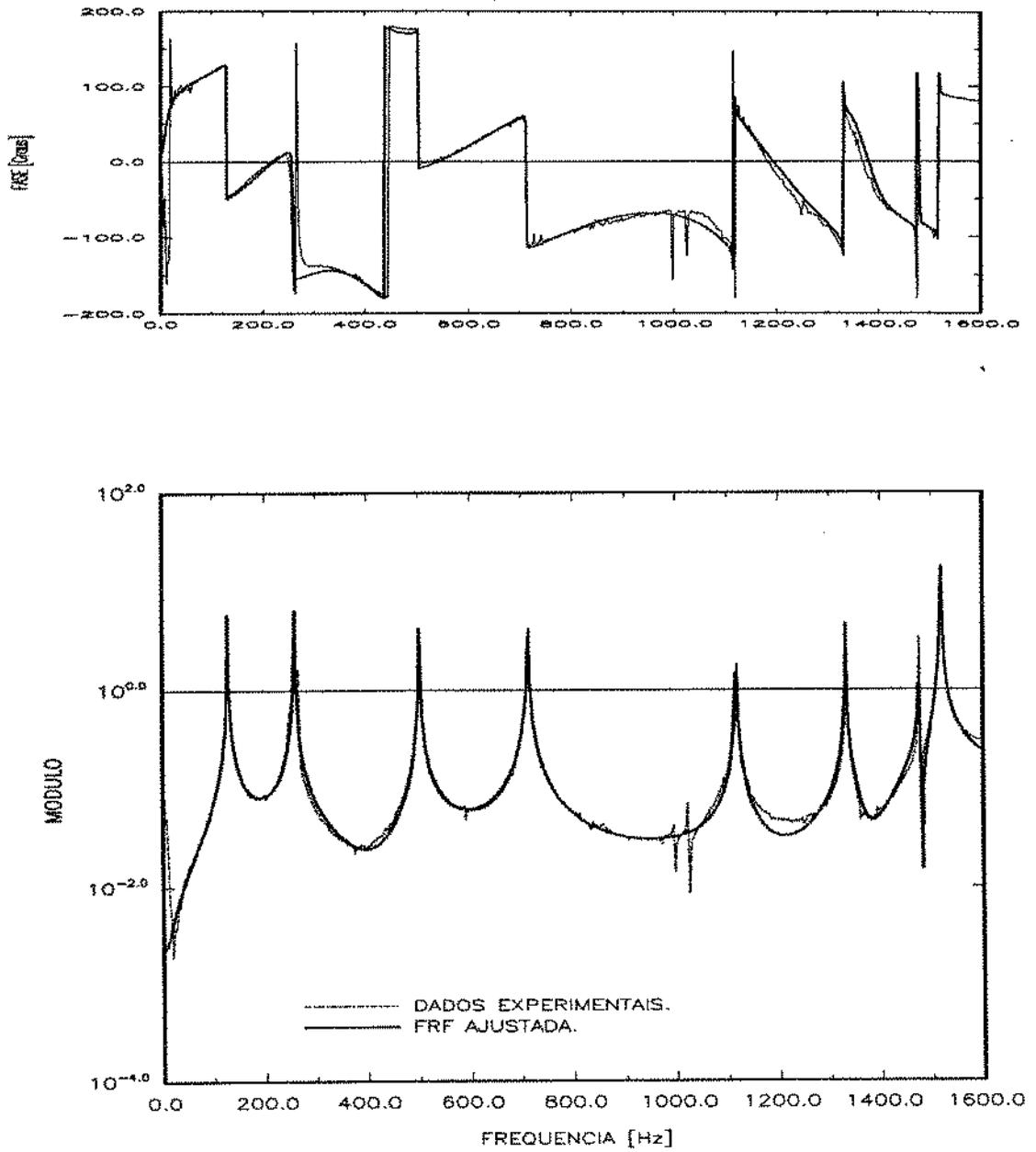


Figura 6.23: Ajuste para dados experimentais - FRF 07x13

6.2.5 Análise dos Resultados - Seleção das Frequências e Amortecimentos

A seguir, nas figuras de 6.24 a 6.31, são apresentados os valores de frequências e amortecimentos obtidos para cada modo de vibrar do protótipo, indicando-se também o n.º de vezes que aparecem nas FRF identificadas.

- 1º Modo

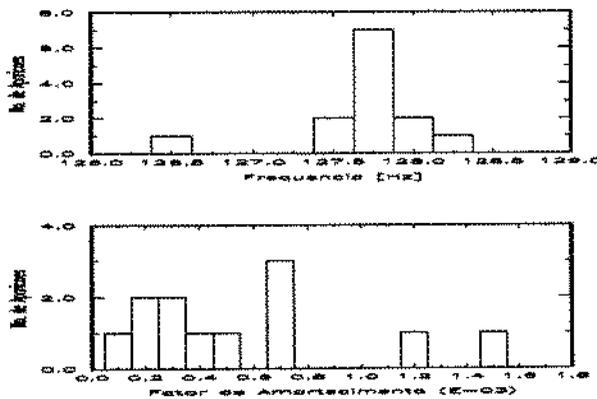


Figura 6.24: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 1º Modo

- (2º/3º)* Modo

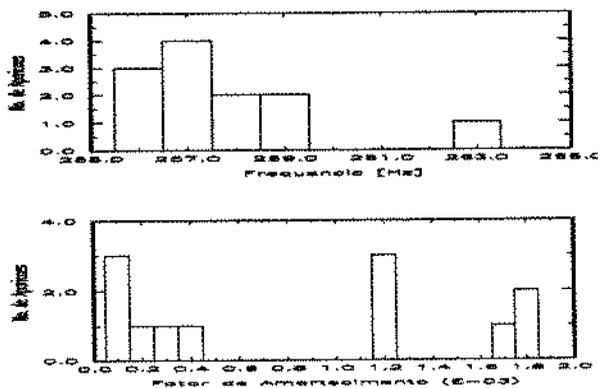


Figura 6.25: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 2º/3º Modo

* Este modo será discutido separadamente, mais adiante.

• 4º Modo

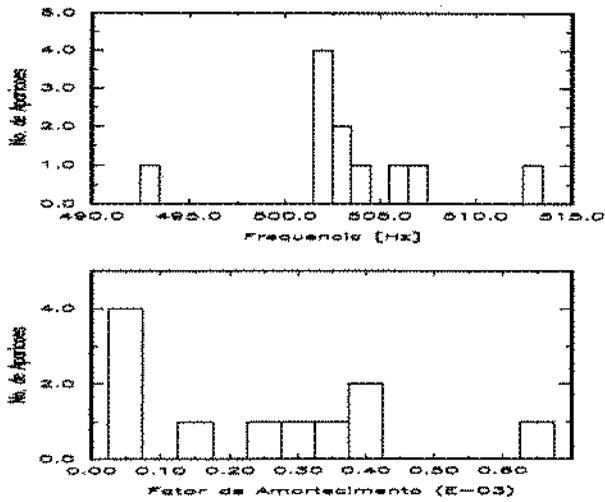


Figura 6.26: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 4º Modo

• 5º Modo

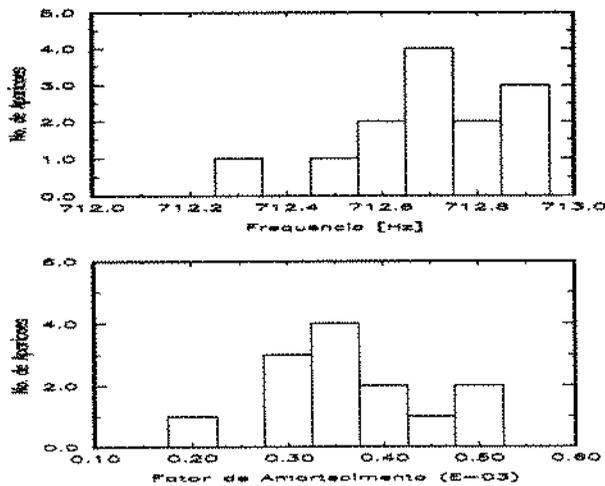


Figura 6.27: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 5º Modo

• 6º Modo

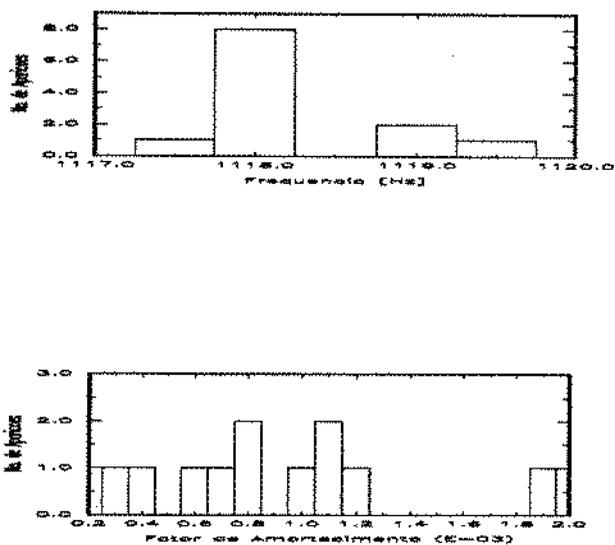


Figura 6.28: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 6º Modo

• 7º Modo

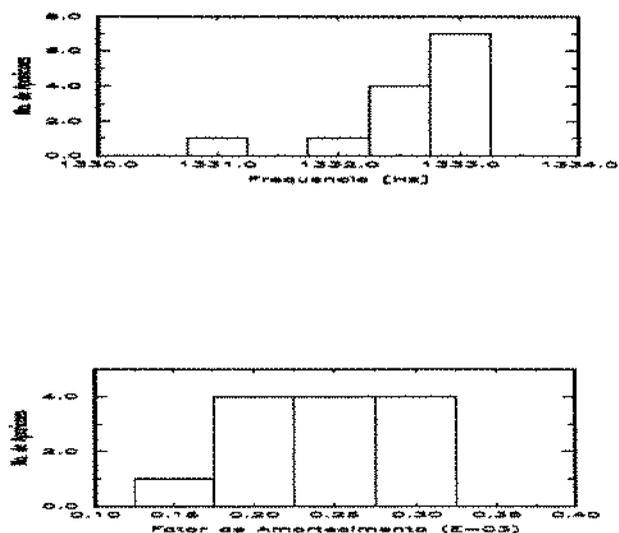


Figura 6.29: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 7º Modo

• 8º Modo

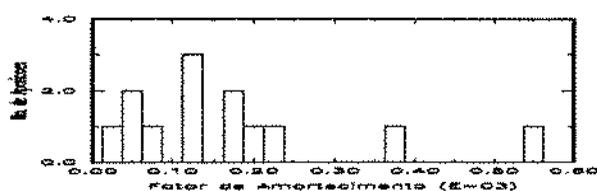
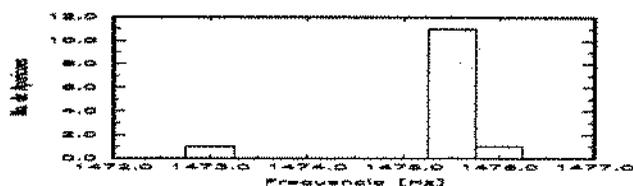


Figura 6.30: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 8º Modo

• 9º Modo

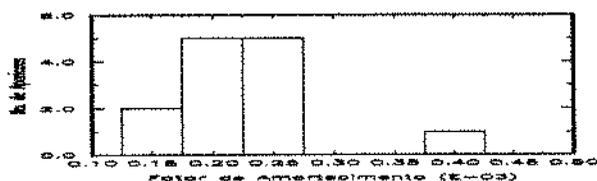


Figura 6.31: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 9º Modo

Os valores médios de frequências e amortecimentos, para os 8 modos identificados, estão mostrados na tabela 6.6.

Tabela 6.6: Frequências e Amortecimentos médios

	Modo							
	1	2/3*	4	5	6	7	8	9
Freq.	127.69	257.75	503.36	712.70	1118.25	1332.62	1475.35	1516.88
Amort. (10 ⁻³)	0.57	0.84	0.25	0.37	0.90	0.24	0.18	0.23

As tabelas 6.7 e 6.8 apresentam um resumo das frequências naturais médias de cada modo, seguidas pelas constantes modais relativas a cada ponto de discretização espacial da estrutura. Tais valores permitem o cálculo das amplitudes relativas de cada ponto da estrutura em seus modos naturais de vibração. As frequências naturais e amplitudes relativas modais estão apresentadas na tabela 6.9.

Tabela 6.7: Constantes Modais e seus respectivos ângulos de fase para as 13 FRF identificadas

	MODO/FREQ. MÉDIA			
	1	2/3*	4	5
	127.69	257.75	503.36	712.70
FRF No.	CONST. MODAL \angle fase [Graus]			
07x01	0.89 \angle 33.18	11.82 \angle -53.86	1.03 \angle -101.04	6.29 \angle 151.29
07x02	0.38 \angle 47.24	3.39 \angle -67.34	0.05 \angle 130.04	3.68 \angle -30.25
07x03	0.09 \angle 34.91	2.39 \angle 120.33	0.34 \angle 68.22	8.24 \angle -32.36
07x04	0.15 \angle -136.85	5.11 \angle 118.31	1.47 \angle -82.46	4.81 \angle -20.50
07x05	0.22 \angle -130.29	7.30 \angle 112.15	0.52 \angle 64.92	1.98 \angle -31.68
07x06	0.70 \angle 143.37	12.55 \angle 101.93	1.31 \angle 64.60	8.04 \angle 146.44
07x07	1.87 \angle 34.03	7.15 \angle 102.13	0.66 \angle 78.59	6.59 \angle 160.47
07x08	0.26 \angle -140.42	2.49 \angle 121.71	0.43 \angle 100.05	1.67 \angle -29.37
07x09	0.37 \angle -137.82	0.19 \angle 86.05	1.88 \angle 85.32	8.53 \angle 150.78
07x10	1.80 \angle -134.83	3.24 \angle 117.31	0.13 \angle -150.28	6.84 \angle -24.58
07x11	0.25 \angle -132.35	2.81 \angle 108.93	0.72 \angle -93.73	3.38 \angle -26.77
07x12	0.64 \angle 38.85	1.27 \angle 118.44	2.64 \angle -92.93	3.78 \angle 155.45
07x13	2.54 \angle 39.37	3.39 \angle -68.86	3.18 \angle 89.40	4.32 \angle -25.41

Tabela 6.8: Constantes Modais e seus respectivos ângulos de fase para as 13 FRF identificadas (cont.)

	MODO/FREQ. MÉDIA			
	6	7	8	9
	1118.25	1332.62	1475.35	1516.88
FRF No.	CONST. MODAL \angle fase [Graus]			
07x01	2.00 \angle -175.99	7.16 \angle 163.13	4.63 \angle 154.64	9.15 \angle -14.97
07x02	2.23 \angle 3.10	2.58 \angle 149.85	2.41 \angle 162.33	15.38 \angle 174.43
07x03	1.76 \angle -2.60	1.02 \angle 148.30	0.66 \angle 151.27	5.20 \angle 168.49
07x04	1.14 \angle -172.10	1.14 \angle 155.80	0.90 \angle -3.86	5.65 \angle -4.85
07x05	1.88 \angle -173.62	18.47 \angle -20.16	3.98 \angle -10.19	8.40 \angle -8.44
07x06	1.09 \angle 42.22	2.52 \angle -20.99	4.15 \angle 1.48	15.22 \angle -11.15
07x07	3.86 \angle 74.66	23.79 \angle 167.07	6.75 \angle 125.89	15.47 \angle -175.08
07x08	0.81 \angle 119.00	16.26 \angle 158.98	1.10 \angle 96.44	12.08 \angle 1.46
07x09	0.53 \angle -63.72	4.12 \angle -19.15	0.92 \angle 86.84	16.40 \angle -3.22
07x10	0.63 \angle -10.28	22.50 \angle 159.76	2.47 \angle 139.32	28.24 \angle 1.50
07x11	2.41 \angle 158.02	1.13 \angle 153.79	0.63 \angle 145.55	3.87 \angle 178.09
07x12	1.79 \angle -23.66	2.89 \angle 165.93	1.68 \angle -31.17	2.17 \angle 1.97
07x13	2.21 \angle 146.87	2.43 \angle 158.78	2.02 \angle 170.54	12.01 \angle 179.99

Tabela 6.9: Amplitudes Modais relativas para os 13 Pontos de Excitação

	MODO/FREQ. MÉDIA							
	1	2/3*	4	5	6	7	8	9
	127.69	257.75	503.36	712.70	1118.25	1332.62	1475.35	1516.88
FRF No.	AMPLITUDE RELATIVA							
07x01	0.74	6.97	-0.20	-5.52	-2.00	-6.85	-4.18	8.84
07x02	0.26	1.31	-0.03	3.18	2.23	-2.23	-2.30	-15.31
07x03	0.07	-1.21	0.13	6.96	1.76	-0.87	-0.58	-5.10
07x04	-0.11	-2.42	0.19	4.51	-1.13	-1.04	0.90	5.63
07x05	-0.14	-2.75	0.22	1.68	-1.87	17.34	3.92	8.31
07x06	-0.56	-2.59	0.56	-6.70	0.81	2.35	4.15	14.93
07x07	1.55	-1.50	0.13	-6.21	1.02	-23.19	-3.96	-15.41
07x08	-0.20	-1.31	-0.07	1.46	-0.39	-15.18	-0.12	12.08
07x09	-0.27	0.01	0.15	-7.44	0.23	3.89	0.05	16.37
07x10	-1.27	-1.49	-0.11	6.22	0.62	-21.11	-1.87	28.23
07x11	-0.17	-0.91	-0.05	3.02	-2.23	-1.01	-0.52	-3.87
07x12	0.50	-0.60	-0.13	-3.44	1.64	2.72	1.44	2.17
07x13	1.96	1.22	0.03	3.90	-1.85	-2.27	-1.99	-12.01

* Na identificação das FRF observou-se que na maioria das 13 funções processadas, o segundo modo apresentava dois picos de ressonância muito próximos, que foram assumidos como um único modo de vibração. Entretanto suspeitou-se da existência de dois modos de vibrar, em vez de um, nessa região, o que levou a uma análise em separado nessa faixa de frequência. Os resultados dessa análise estão a seguir:

• 2º Modo

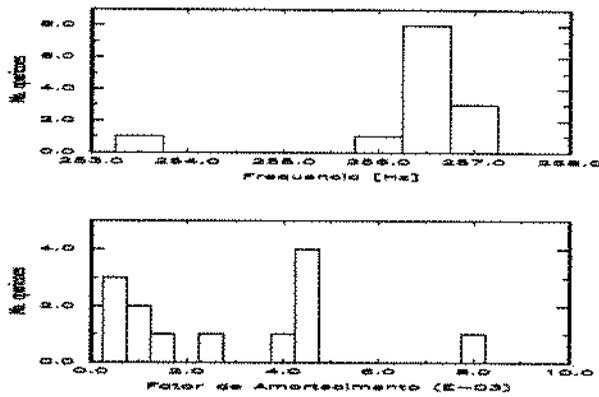


Figura 6.32: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 2º Modo

• 3º Modo

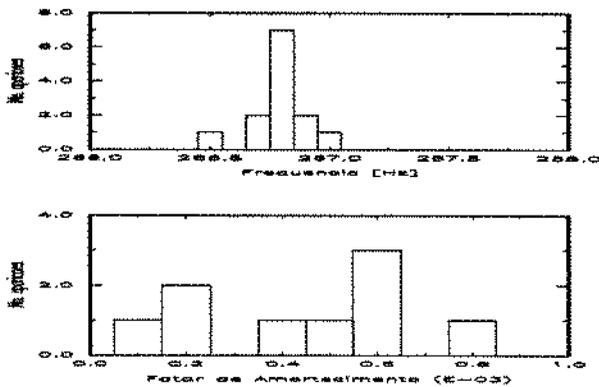


Figura 6.33: Distribuição das Frequências e Amortecimentos calculados p/ 3º Modo

Com base nas figuras 6.32 e 6.33, pode-se determinar os valores médios de frequências e amortecimentos para esses 2 modos:

Tabela 6.10: * Freqüências e Amortecimentos médios para o 2º e o 3º modos

	Modo	
	2	3
Freq.	256.51	266.85
Amort. (10^{-3})	2.88	0.53

A tabela 6.11 apresenta as constantes modais e as amplitudes relativas obtidas para esses dois modos:

Tabela 6.11: * Resultados da análise na faixa de 200 a 300 Hz

	MODO			
	2	3	2	3
FRF No.	Const. Mod e ∠fase [Graus]		Amplitude Relativa	
07x01	12.07/-61.5	1.73/54.5	5.85	1.00
07x02	3.96/-66.9	0.70/56.2	1.55	0.39
07x03	2.63/110.1	0.59/-129.6	-0.90	-0.38
07x04	5.21/111.7	1.23/-127.2	-1.93	-0.74
07x05	7.21/111.6	1.48/66.8	-2.65	0.58
07x06	9.19/111.5	3.62/63.6	-3.37	1.61
07x07	13.25/106.2	5.80/57.9	-3.70	3.08
07x08	2.41/112.2	3.94/-120.7	-0.91	-2.01
07x09	5.39/106.4	6.49/-118.6	-1.52	-3.11
07x10	4.08/-74.3	12.70/61.6	1.10	6.04
07x11	3.77/103.2	1.55/-115.2	-0.86	-0.66
07x12	1.91/105.1	0.82/-110.0	-0.50	-0.28
07x13	3.84/-75.5	1.11/72.6	0.96	0.33

6.2.6 Diagramas de Modos de Vibrar

Os valores da tabela 6.9 permitem a elaboração de um traçado gráfico ilustrativo dos 8 primeiros modos de vibrar da estrutura. Tal ilustração apresenta-se às figuras 6.34 a 6.37.

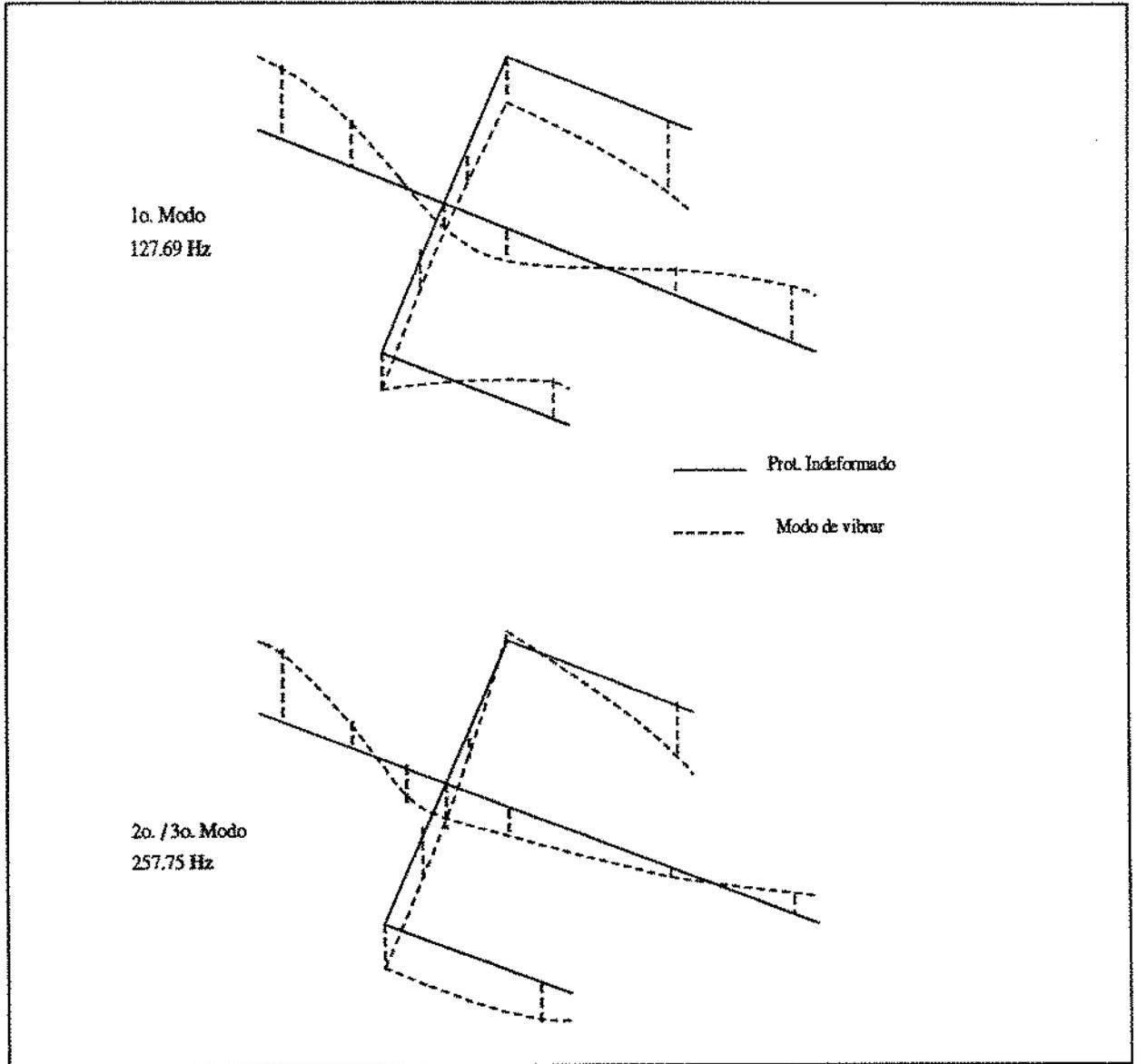


Figura 6.34: 1º e (2º/3º)* Modos de vibrar do garfo

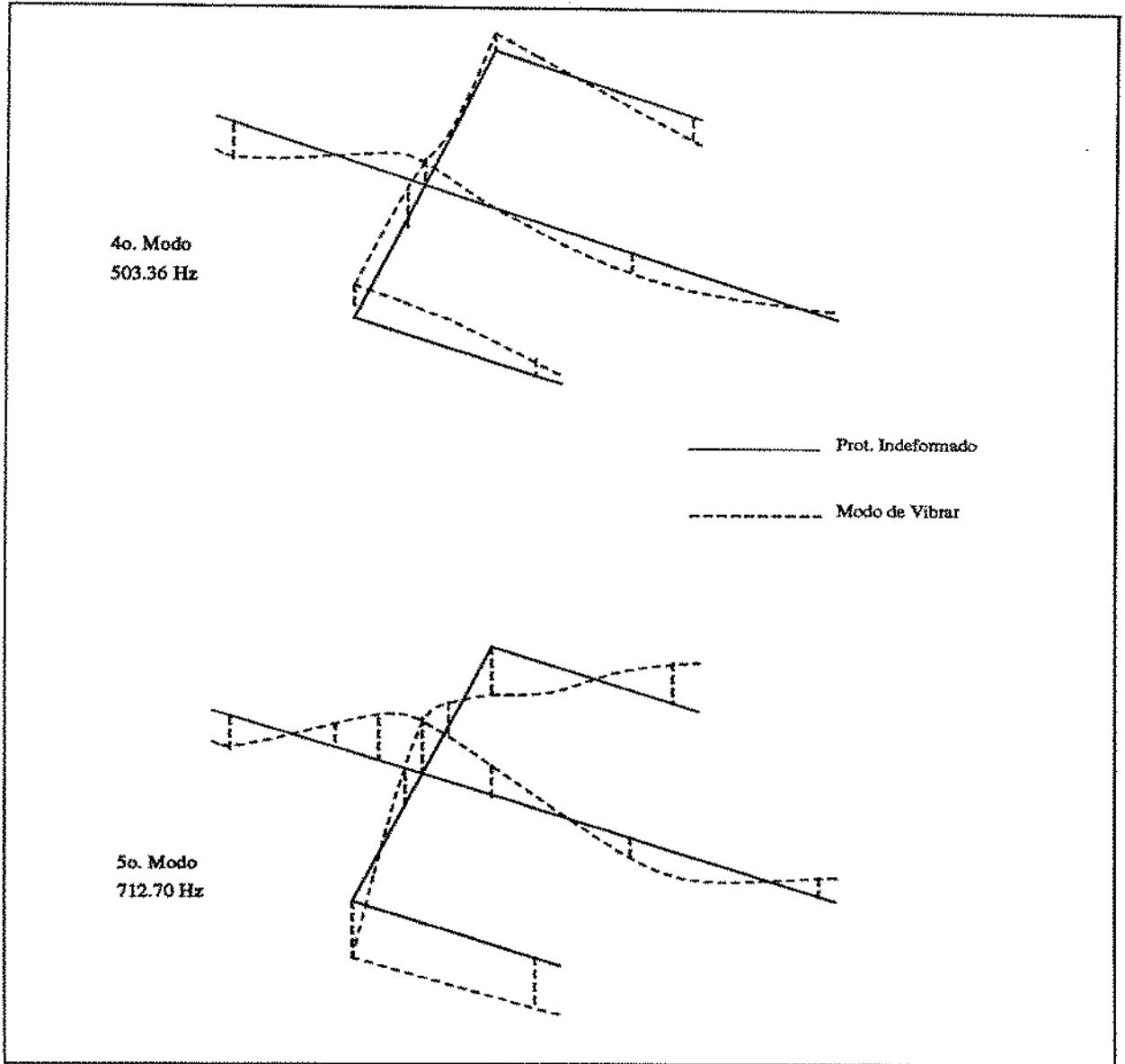


Figura 6.35: 4º e 5º Modos de vibrar do garfo

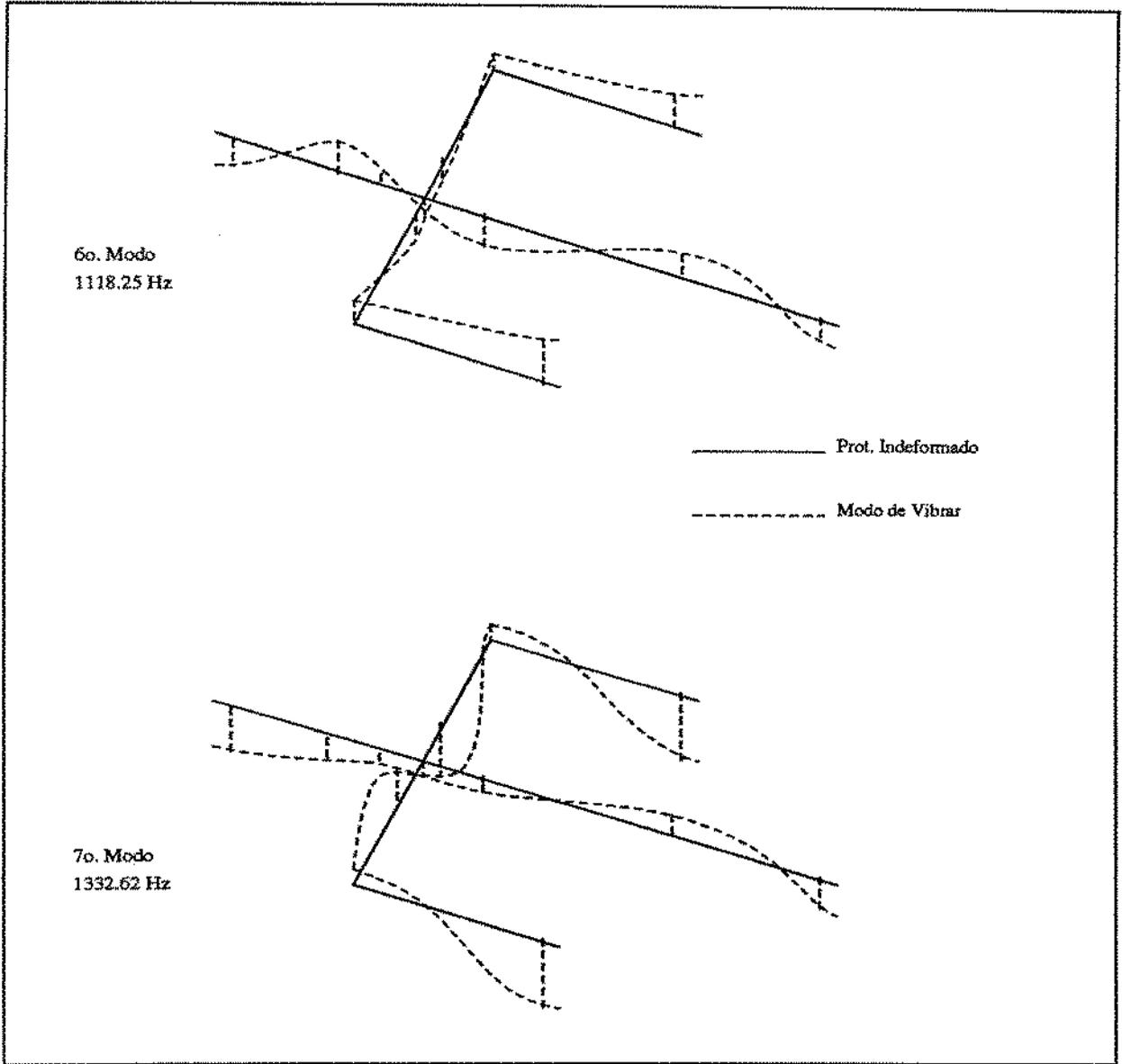


Figura 6.36: 6º e 7º Modos de vibrar do garfo

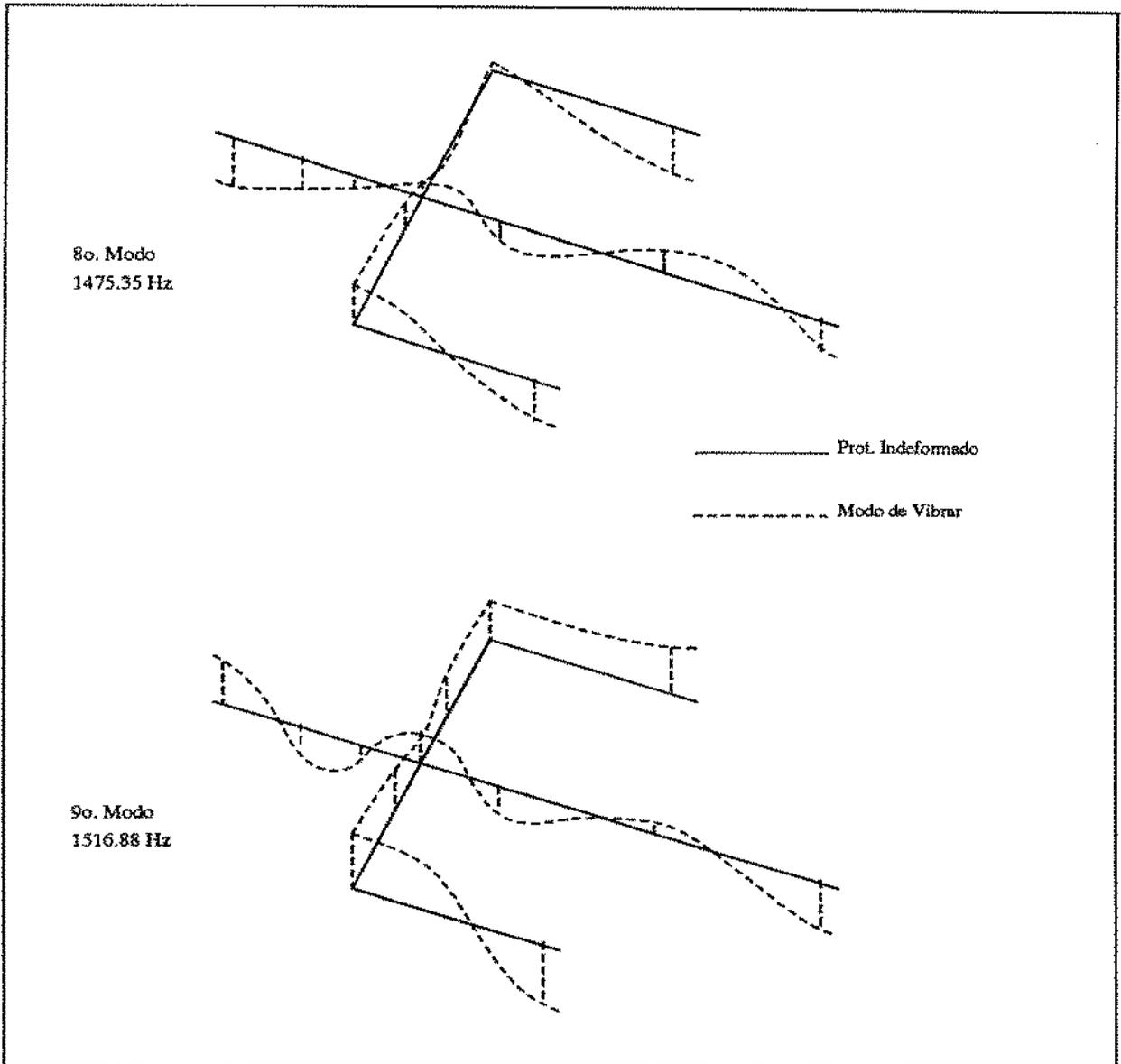


Figura 6.37: 8º e 9º Modos de vibrar do garfo

* Da mesma forma, os valores da tabela 6.11 possibilitam uma visualização do 2º e 3º modos separadamente (figura 6.38):

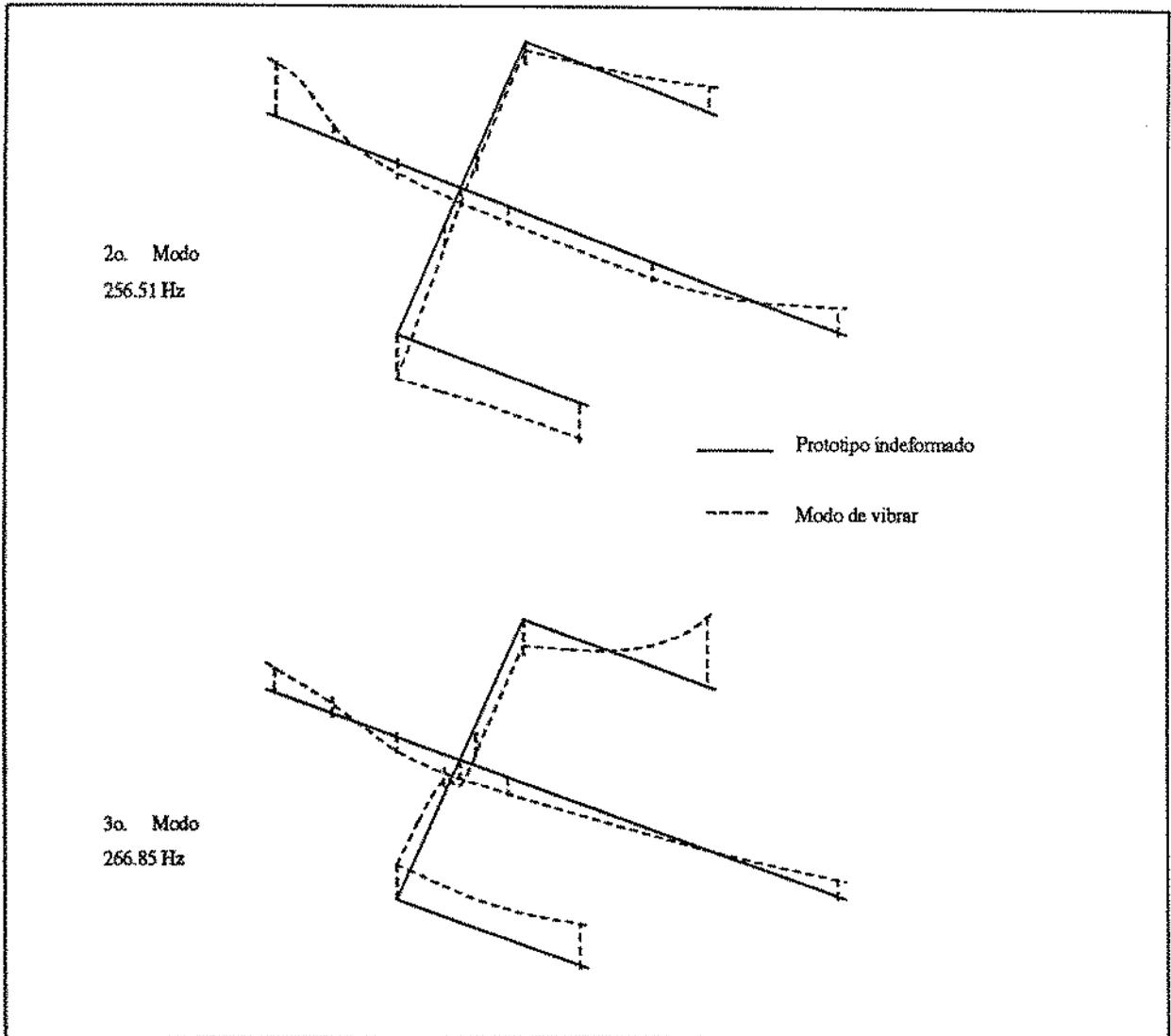


Figura 6.38: 2º e 3º Modos de vibrar do garfo

Capítulo 7

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

7.1 Conclusões Gerais

Uma análise dos resultados obtidos com a aplicação do método de identificação modal, tanto para os dados simulados quanto para os experimentais, permite concluir que o algoritmo apresentou bons resultados.

Nas simulações, o algoritmo mostrou-se eficiente e preciso para todos os casos propostos. Pode-se observar claramente, a partir dos resultados das tabelas 6.2 e 6.3, que o modelo C, onde os modos fora da faixa de análise são aproximados por dois modos não amortecidos, cujas frequências são ω_L e ω_H , é adequado aos três casos propostos com resultados muito próximos dos exatos, tanto para sistemas com modos muito próximos quanto para sistemas com modos separados.

O modelo A, o qual assume as contribuições dos modos fora da faixa de análise como sendo constante, se aplica melhor a sistemas com frequências relativamente distantes da faixa de interesse (Caso 2) e o modelo B, o qual assume as contribuições dos modos fora da faixa de análise como sendo um termo constante mais um linear em ω , se aplica bem tanto ao caso 2 quanto ao caso 3.

Como se pode notar a partir dos ajustes apresentados, o método se mostrou bastante eficiente na identificação de uma estrutura real. A aplicabilidade prática do método para dados reais se mostrou boa para a identificação em faixas contendo até 5 modos de vibração. Para a identificação de até 2 modos, a convergência do método mostrou-se relativamente insensível à escolha dos parâmetros iniciais. Nesse caso, mesmo com valores iniciais nulos, o método convergiu em 2 ou 3 iterações. Para o processamento de dados numa faixa contendo um número entre 2 e 5 modos, o vetor estimativa inicial devia ser não nulo e com valores coerentes com o resultado esperado. Finalmente, para faixas

contendo acima de 5 modos, a estimativa inicial devia ser o mais próxima possível dos parâmetros modais da estrutura, o que podia ser obtido através de um processamento prévio em sub-faixas. Isso permite concluir que na identificação de muitos modos de uma só vez (na maioria das vezes, acima de 5), o método se mostra instável numericamente e sua convergência depende fortemente da estimativa fornecida para os parâmetros iniciais.

Com relação aos resultados experimentais, pode-se verificar a partir das figuras 6.24 a 6.31 que os valores de frequência e amortecimento para um único modo variam pouco, o que significa consistência nos resultados apresentados na tabela 6.6. Observa-se também que, de alguma forma, a FRF de ponto (FRF 7x7) não apresenta anti-ressonâncias esperadas entre cada modo consecutivo, o que leva a concluir que as medições não foram realizadas da maneira mais acurada possível. Tal fato, porém, não representa um obstáculo à aplicação do método de identificação desenvolvido no trabalho, conforme observa-se do ajuste obtido para tal FRF.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Durante o desenvolvimento desse trabalho foram notados alguns pontos importantes a serem desenvolvidos, os quais são deixados como sugestões para futuros trabalhos:

- O método para identificação de parâmetros modais, na forma como foi concebido e implementado, só permite processar uma FRF por vez. Sugere-se transformá-lo em um método global para o processamento de várias FRF simultaneamente.
- Também seria muito interessante o desenvolvimento de rotinas gráficas para traçar, dentro do ambiente de processamento, os gráficos das FRF experimental e calculada, para uma verificação mais rápida da qualidade dos ajustes obtidos.
- Desenvolvimento de uma subrotina que habilite um cursor no vídeo, permitindo a seleção da faixa de frequência a ser analisada, de tal forma a tornar o programa mais amigável e interativo com o usuário.
- Desenvolvimento de uma interface entre o sistema de aquisição de dados e o programa de identificação modal, de tal forma que a transferência de dados seja automática, tornando mais rápida a análise modal de estruturas.
- Utilização de técnicas de condicionamento das matrizes dos sistemas lineares utilizados no algoritmo de análise. Espera-se que através de um condicionamento

adequado das matrizes dos sistemas lineares, seja possível a análise de um número maior de modos por faixa, sem o aparecimento de instabilidades numéricas.

Bibliografia

- [1] ALLEMANG, R. J., ROST, R. W., BROWN, D. L.
Multiple input estimation of frequency response functions: excitations considerations
ASME Design Engineering Conference on Mechanical Vibration and Noise, Detroit,
 September, 1983 (paper accepted).
- [2] ARRUDA, J. R. F.
Frequency domain estimation of structural parameters
VIII COBEM, S. J. Campos - SP, Dezembro 1985, pp. 583-586.
- [3] BENDAT, J. S. & PIERSON, A. G.
Engineering applications of correlation and spectral analysis.
 John Wiley & Sons, 1980.
- [4] BISHOP, R. E. D., GLADWELL, G. M. L.
An investigation into the theory of resonance testing
Philosophical Transactions, Royal Society of London, Serie A, Vol. 225, A-1055,
 1963, pp. 241-280.
- [5] BRAUN, S.
Mechanical signature analysis: Theory and applications
 Academic Press Inc., (London), 1986.
- [6] BROWN, D. L.; ALLEMANG, R. J.; ZIMMERMAN, R.; MERGEAY, M.
Parameter estimation techniques for modal analysis.
S.A.E. paper, (790221): pp. 828-846, 1979.
- [7] EWINS, D. J.
Modal testing: theory and practice.
 London, John Wiley & Sons Inc., 1984.

- [8] FILLOD, R., LALLEMENT, G., PIRANDA, J., RAYNAUD J.-L.,
Global method of modal identification
Proceedings of 3rd IMAC at Orlando FL, Vol. II, pp. 1145-1151, 1985.
- [9] GAUKROGER, D. R., SKINGLE, C. W., HERON, K. H.
Numerical analysis of vector response loci.
J Sound and Vib, 29(3), pp. 341-454, 1973.
- [10] GERSCH, W.
Estimation of the auto regressive parameters of a mixed autoregressive moving-average time series.
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-15, pp. 583-588, Oct 1970.
- [11] GOYDER, H. G. D.
Methods and application of structural modelling from measured structural frequency response data.
J Sound and Vib, 61(2), pp. 209-230, 1980.
- [12] IBRAHIM, S. R.
Modal confidence factor in vibration testing.
Shock and vibration bulletin, Vol. 48, parte 1, 1978, pp. 65-75.
- [13] IBRAHIM, S. R.
Modal identification techniques. Assessment and comparisons.
Proceedings of the 3rd IMAC, Vol. I: pp. 831-839, 1985.
- [14] IBRAHIM, S. R., MIKULCIK, E. C.
A time domain modal vibration test technique.
The shock and vibration bulletin, bulletin 43, June 1973, pp. 21-37.
- [15] IBRAHIM, S. R., MIKULCIK, E. C.
The experimental determination of vibration parameters from time responses.
The shock and vibration bulletin, bulletin 46, August 1976, pp. 187-196.
- [16] IBRAHIM, S. R., MIKULCIK, E. C.
A method for the direct identification of vibration parameters from the free response.
The shock and vibration bulletin, bulletin 47, September 1977, pp. 183-198.
- [17] KENNEDY, C. C. & PANCU, C. D. P.
Use of vectors in vibration measurements and analysis.
Journal of aeronautical sciences, 14(11): pp. 603-625, 1947.

- [18] KLOSTERMAN, A., ZIMMERMAN, R.
Modal survey activity via Frequency Response Functions
SAE paper, n° 751068, 1975.
- [19] KURKA, P. R. G.
Investigation of dynamic identification techniques and their applications.
Ph.D. Dissertation, University of Manchester, Manchester, England. 1989, 177 pp..
- [20] LALLEMENT, G.
Ajustement de modèles de structures mécaniques à partir de résultats d'essais en vibrations, Course: Identification of Vibrating Structures.
CISM, Udine, pp. 20-24 Oct. 1980.
- [21] LEMBREGTS, F., LEURIDAN, J., ZHANG, L., KANDA, H.
Multiple input modal analysis of Frequency Response Functions based on direct parameters identification
Proceedings of the 4th IMAC, Vol I, pp. 589-598, 1986.
- [22] LEVY, E. C.
Complex curve fitting
IRE Trans. Autom. Control, AC-4, pp. 37-43, 1959.
- [23] LEWIS, R. C., WRISLEY, D. L.
A system for the excitation of pure natural modes of complex structures
Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 17, n° 11, 1950, pp. 705-722.
- [24] MARPLE Jr., S. L.
Digital spectral analysis with applications.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.
- [25] MEIROVITCH, L.
Elements of vibration analysis.
McGraw-Hill, 1986.
- [26] MONTALVÃO E SILVA, J. M., MAIA, N. M. M.
Single mode identification techniques for use with small microcomputers
Journal of Sound and Vibrations, Vol. 124(1), 1988, pp.13-26 .
- [27] NEWLAND, D. E.
An introduction to random vibrations and spectral analysis.
2nd Edition. Longman Inc., New York, 1984.

- [28] PANDIT, S. M.
Analysis of vibration records by data dependent systems
Shock and Vibration Bulletin, n° 47, pp. 161-174, Sep. 1977.
- [29] PENDERED, J. W., BISHOP, R. E. D.
The determination of modal shapes in resonance testing
Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 5, n° 4, 1963, pp. 379-385.
- [30] POTTER, R. W.
A general theory of modal analysis for linear systems
Shock and Vibration Digest, Vol. 7, n° 11, 1975, 8 pp.
- [31] PRONY, R.
Essai experimental et analytique sur les lois de la dilatabilite des fluides elastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a differentes temperatures
Journal de l'École Polytechnique (Paris), Vol. 1, n° 2, 1795, pp. 24-76.
- [32] ROSS, R. G., Jr.
Synthesis of stiffness and mass matrices from experimental vibration modes
SAE paper, n° 710787, 1971, 9 pp.
- [33] SANATHANAN, C. K., KOERNER, J.
Transfer function syntesis as a ratio of two complex polinomials
IEEE Trans. Autom. Control, AC-8, pp. 56-58, 1963.
- [34] SLOANE, E., McKEEVER, B.
Modal survey techniques and theory
SAE paper, n° 751067, 1975, 27 pp.
- [35] SNOEYS, R., SAS, P., HEYLEN, W., VAN DER AUWERAER, H.
Trends in Experimental Modal Analysis
Mechanical System and Signal Processing, Vol. 1, n° 1, 1985, pp. 5-27.
- [36] SPITZNOGLE, E. R., QUAZI, A. H.
Imprevements in the complex exponential signal analysis computational algorithm
Journal of Underwater Acoustics, U. S. Nav, 1968.
- [37] THOREN, A. R.
Derivation of mass and stiffness matrices from dynamic test data
AIAA paper, n° 72-346, 1972, 9 pp.

- [38] VAROTO, P. S.
Análise modal no domínio da Frequência: um método multi-modo.
Dissertação de Mestrado, EESC-USP, São Carlos, 1991.
- [39] WADA, B. K.
Modal Test - measurement and analysis requirements
SAE paper, n° 751066, 1975, 17 pp.
- [40] VOLD, H., KUNDRAT, J., ROCKLIN, G. T., RUSSELL, R.
A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers
SAE paper, n° 820194, SAE Transactions, Vol. 91/1, pp. 815-821, 1982.
- [41] VOLD, H., ROCKLIN, T.
The numerical implementation of a multi-input modal estimation algorithm for mini-computers
Proceedings of the 1st IMAC, pp. 542-548, Orlando, 1982.

GRADIENT-LEAST SQUARES
MODAL PARAMETER
DETERMINATION IN THE
FREQUENCY DOMAIN

Paulo Roberto Gardel Kurka
Nelson Elizeu Dias
DPM/FEM/UNICAMP - PO BOX 6051

The transfer frequency response function between points i and j of an N degree of freedom dynamic system is given by:

$$H_{ij}(\omega_k) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{r_r}{j\omega_k - s_r} + \frac{r_r^*}{j\omega_k - s_r^*} \right), \quad k = 0, 1, \dots, P \quad (1)$$

where ω_k is a discrete frequency value, r_r a system's residual (or modal constant) and s_r a system's pole (or eigenvalue).

A representation of H_{ij} within the frequency region where only $N-M$ modes are present can be approximated by any of the three expressions:

$$\bullet \quad H_{ij}(\omega_k) = q + \sum_{r=M}^N \frac{r_r}{j\omega_k - s_r}, \quad \text{Expression A}$$

$$\bullet \quad H_{ij}(\omega_k) = u + \sum_{r=M}^N \frac{r_r}{j\omega_k - s_r} + j\omega_k v, \quad \text{Expression B}$$

$$\bullet \quad H_{ij}(\omega_k) = \frac{s}{j\omega_k - \omega_L} + \sum_{r=M}^N \frac{r_r}{j\omega_k - s_r} + \frac{t}{j\omega_k - \omega_H}, \quad \text{Expression C}$$

with $k = 0, 1, \dots, P$

Each of the expression above can be successfully used to represent H_{ij} in the frequency range of interest, depending on the condition of modes which lie outside this region. Expression (A) is better employed when the remaining modes are located at frequencies relatively far from the frequency range of interest. Expression (C) is generic and can be used even in the presence of modes located at frequencies relatively close to the frequency range of interest. Frequencies ω_L and ω_H must be provided in such a representation as an indication of the high and low resonant frequencies near the range of interest. Expression (B) is used when the modes below and above the frequency range of interest have respectively a clear stiffness and mass influence on the mentioned frequency range. Parameters q , r_r , s , s_r , t , u , and v will be referred also as generic parameter x_r of $H_{ij}(\omega)$.

The identification of parameters in expressions (A),(B) or (C) above is achieved through the following scheme:

- determination of an error functional $\varepsilon(\omega_k) = \bar{H}_{ij}(\omega_k) - H_{ij}(\omega_k)$, when $\bar{H}_{ij}(\omega_k)$ is the measured transfer frequency response function.

- minimization of $\varepsilon(\omega_k)$ through the recursion $x^\nu = x^{\nu-1} - d^{\nu-1}$ where $x^{\nu-1}$ and $d^{\nu-1}$ are respectively the system's parameters and error gradient vector at recursion $\nu-1$. The error gradient vector is obtained through the least square system solution:

$$A^T A d^\nu = -A^T \varepsilon^{\nu-1} \quad (.2)$$

with:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon(\omega_1)}{\partial X_1^{\nu-1}} & \frac{\partial \varepsilon(\omega_1)}{\partial X_2^{\nu-1}} & \dots & \frac{\partial \varepsilon(\omega_1)}{\partial X_{N-M}^{\nu-1}} \\ \frac{\partial \varepsilon(\omega_2)}{\partial X_1^{\nu-1}} & \frac{\partial \varepsilon(\omega_2)}{\partial X_2^{\nu-1}} & \dots & \frac{\partial \varepsilon(\omega_2)}{\partial X_{N-M}^{\nu-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon(\omega_p)}{\partial X_1^{\nu-1}} & \frac{\partial \varepsilon(\omega_p)}{\partial X_2^{\nu-1}} & \dots & \frac{\partial \varepsilon(\omega_p)}{\partial X_{N-M}^{\nu-1}} \end{bmatrix}$$

and $\varepsilon^{\nu-1}$ being the error functional obtained when $H_{ij}(\omega_k)$ is calculated using order $\nu-1$ approximation for the generic modal parameters.

An example is shown of an 8 degree of freedom system's frequency response function with resonances to be identified in its center region. Figures .1, .2 and .3 show the reconstruction of the frequency response function in the range of interest after modal parameters identification using criteria (A), (B) and (C). Different distribution of the resonances are used in figures .1, .2 and .3 in order to illustrate the pertinence of each criterion.

Tabela .1: table of an 8 degree of freedom system's residuals and poles

	case1	case2	case3
$r1 = 0.01 + j0.2$	$s1 = 2(-0.01 + j)$	$1(-0.01+j)$	$2.5(-0.01+j)$
$r2 = 0.02 - j0.2$	$s2 = 3(-0.02 + j)$	$1.25(-0.02+j)$	$3(-0.02+j)$
$r3 = -0.03 + j0.1$	$s3 = 4(-0.03 + j)$	$1.5(-0.03+j)$	$3.5(-0.03+j)$
$r4 = -0.02 + j0.2$	$s4 = 5(-0.02 + j)$	$5(-0.02+j)$	$5(-0.02+j)$
$r5 = 0.01 + j0.3$	$s5 = 6(-0.01 + j)$	$6(-0.01+j)$	$6(-0.01+j)$
$r6 = 0.02 + j0.1$	$s6 = 7(-0.003 + j)$	$7(-0.003+j)$	$7(-0.003+j)$
$r7 = 0.03 + j0.2$	$s7 = 8(-0.02 + j)$	$10(-0.02+j)$	$8.5(-0.02+j)$
$r8 = -0.04 + j0.1$	$s8 = 9(-0.01 + j)$	$11(-0.01+j)$	$9(-0.01+j)$

$$\Delta\omega = 0.125 \text{ Hz}$$

range of analysis: $4.5 \text{ Hz} \leq \omega \leq 7.5 \text{ Hz}$

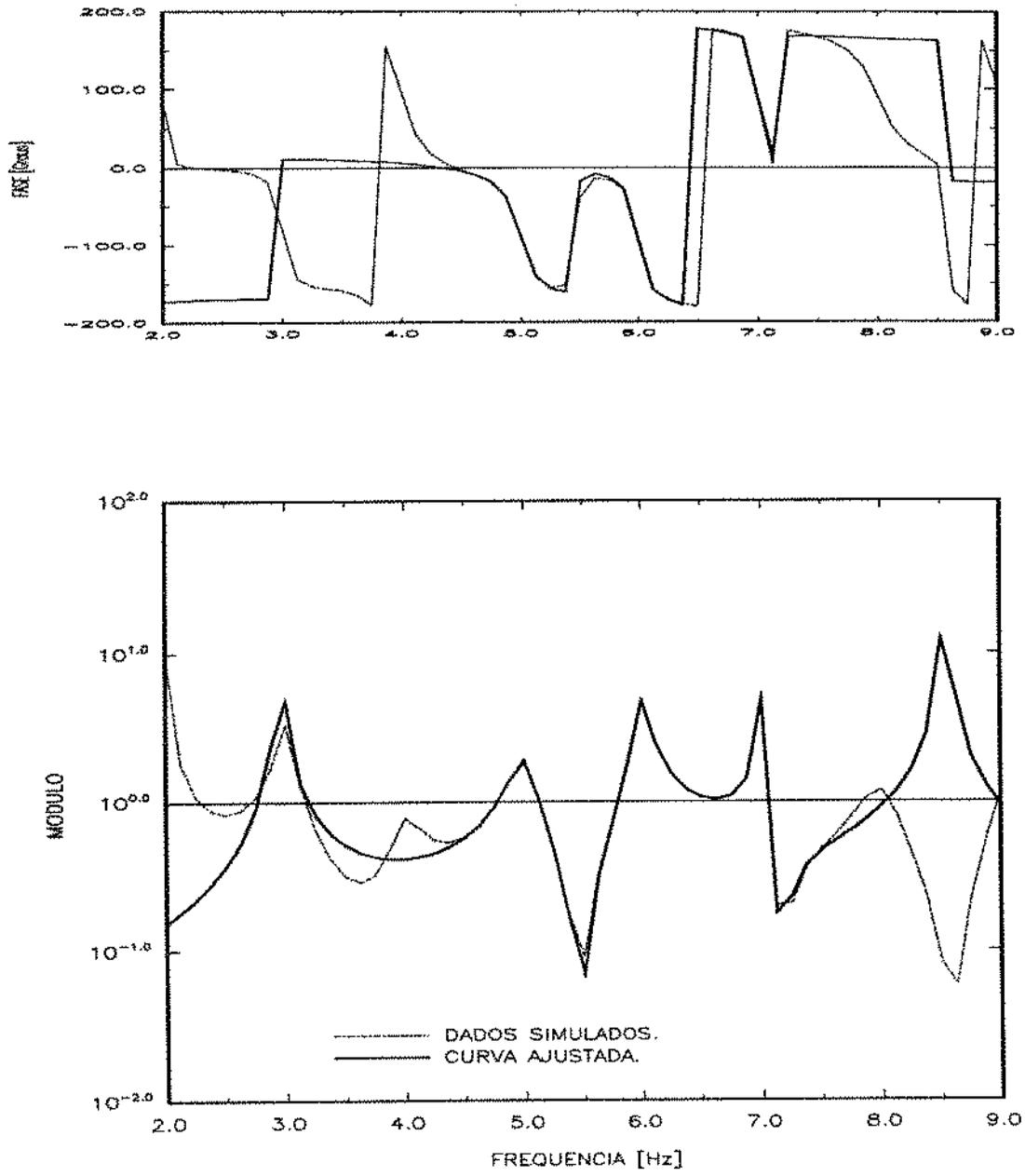


Figura .1: case 1: close resonances

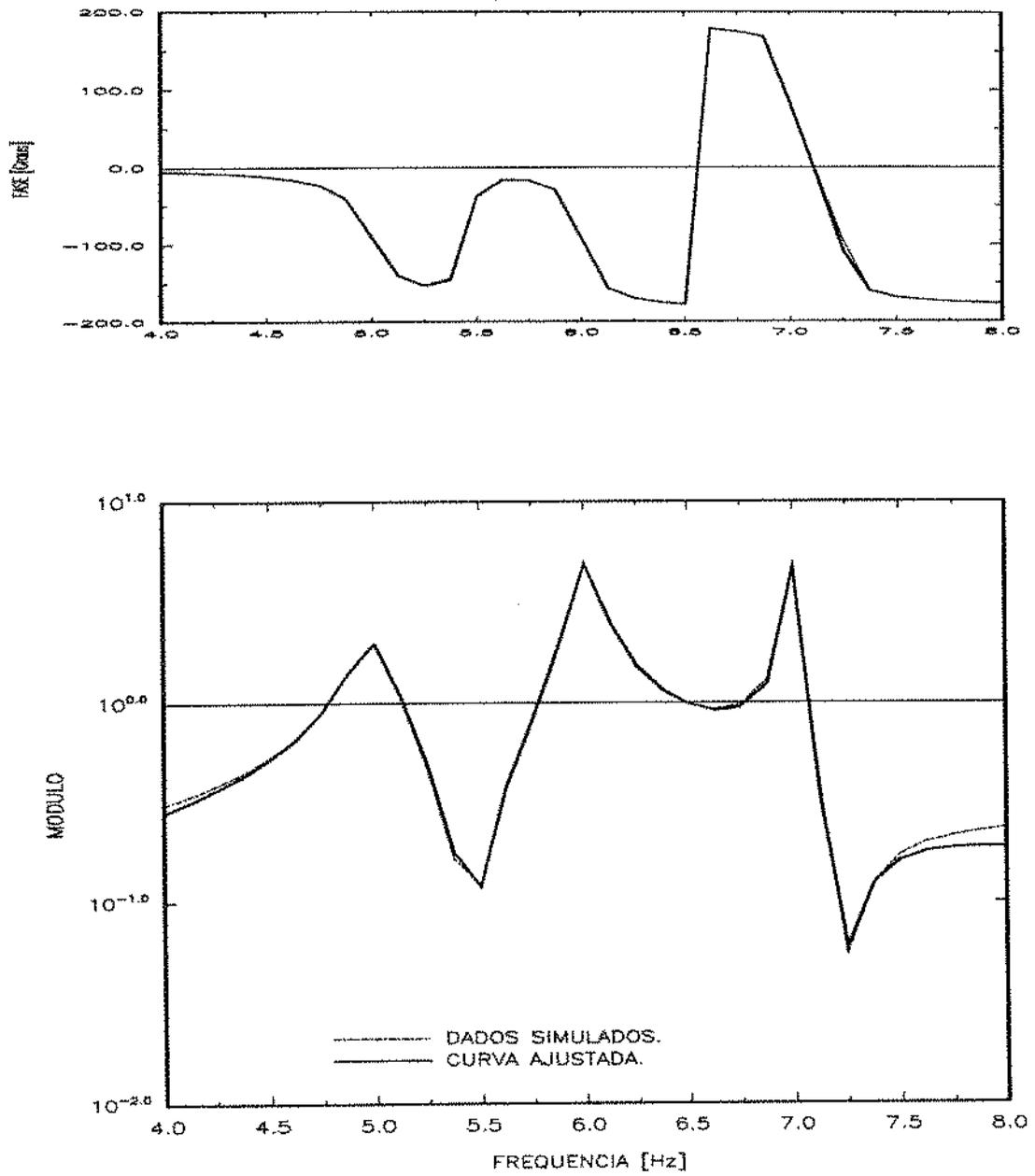


Figura .2: case 2: separated resonances

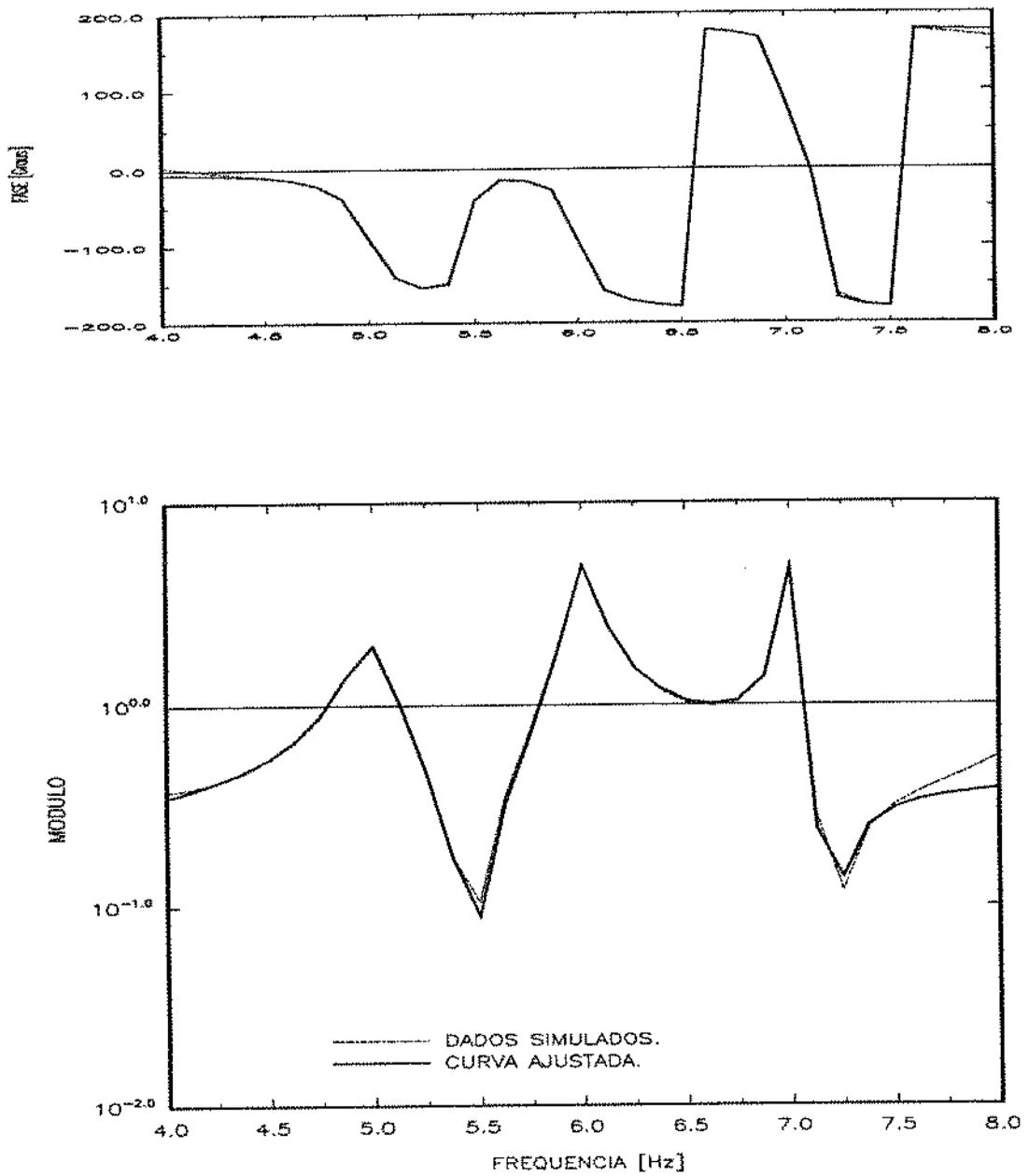


Figura .3: case 3: intermediate case