

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR *Adriana dos*
Reis E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *10* / *02* / *2010*


.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Formulações do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas de Materiais Compósitos Laminados

Autora: Adriana dos Reis

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

Co-orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior

11/2010

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Formulações do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas de Materiais Compósitos Laminados

Autora: Adriana dos Reis

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

Co-orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2010

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R278f Reis, Adriana dos
 Formulação do método dos elementos de contorno
 para análise de placas de materiais compósitos laminados
 / Adriana dos Reis. --Campinas, SP: [s.n.], 2010.

 Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Leandro
 Palermo Júnior.

 Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

 1. Método de elementos de contorno. 2. Materiais
 compósitos. 3. Placas (Engenharia). 4. Deformações e
 tensões. I. Albuquerque, Éder Lima de . II. Palermo
 Júnior, Leandro. III. Universidade Estadual de
 Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV.
 Título.

Título em Inglês: Formulations boundary element method for the analysis of plates of
composite materials laminates

Palavras-chave em Inglês: Boundary Element Method, Composite Materials, Plates
(Engineering), Strain and stresses

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Paulo Sollero, Euclides de Mesquita Neto, José Antonio Fontes
Santiago, Luiz Carlos Facundo Sanches

Data da defesa: 10/02/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Tese de Doutorado

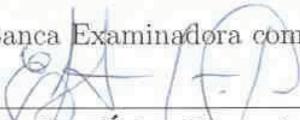
Formulações do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas de Materiais Compósitos Laminados

Autora: Adriana dos Reis

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

Co-orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente
FEM/UNICAMP



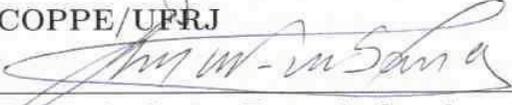
Prof. Dr. Paulo Sollero
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago
PEC/COPPE/UPRJ



Prof. Dr. Luiz Carlos Facundo Sanches
FE/UNESP-Ilha Solteira

Campinas, 10 de Fevereiro de 2010.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu irmão Luciano e a Kátia .

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

- A CNPq pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Departamento de Projeto Mecânico pela infra-estrutura fornecida durante a realização deste trabalho.
- Ao meu orientador, Professor Éder Lima de Albuquerque, pela supervisão, apoio, companheirismo, amizade e principalmente pela paciência durante este período que trabalhamos juntos.
- Ao professor Leandro Palermo Júnior pela co-orientação deste trabalho.
- Ao professor e amigo Luttgardes pela grande ajuda em tão pouco tempo.
- Aos amigos do Departamento: Nubia, Giselle, Jairo, Fernando, Fabiano, André, Kerlles, Dalmo, Doval e Luis Jorge.

”O mal neste mundo é que os estúpidos vivem cheios de si, e os sábios cheios de dúvidas.”

Bertrand Russell

Resumo

Reis, Adriana dos, *Formulações do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas de Materiais Compósitos Laminados*. 2010. 128 p. Tese de doutorado - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Neste trabalho é apresentada uma análise, através do método dos elementos de contorno, de problemas estáticos em placas anisotrópicas sob flexão. As formulações dos elementos de contorno é desenvolvida usando soluções fundamentais para elasto-estática e são utilizados apenas elementos quadráticos descontínuos (3 nós por elementos). As integrais de superfície provenientes das cargas de domínio, são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial. São estudadas três formulações: a formulação clássica ou de placas finas, a formulação de três parâmetros e a formulação de placas espessas ou placas com efeito da deformação por cortante ou teoria de primeira ordem. São apresentados detalhes das deduções das soluções fundamentais para a teoria clássica e para a teoria de primeira ordem. A solução fundamental da teoria clássica é obtida usando variáveis complexas. Para o caso da teoria de primeira ordem, o operador de Hörmander é usado para transformar o sistema de equações diferenciais parciais que representa as equações de equilíbrio em apenas uma equação diferencial parcial. Usando a transformada de Radon, essa equação diferencial parcial é reduzida a uma equação diferencial ordinária. A formulação desenvolvida é aplicada no cálculo de deslocamentos, tensões e momentos de estruturas planas de materiais compósitos laminados submetidos a cargas distribuídas no domínio da estrutura. Os resultados obtidos são comparados com resultados analíticos disponíveis na literatura, com o método de elementos finitos e com o método sem malhas. Em geral há uma boa concordância com os resultados da literatura.

Palavras chaves: Materiais Compósitos, Método dos Elementos de Contorno, Teoria Clássica de Placas, Teoria de Placas de Primeira Ordem, Análise de tensões, Transformada de Radon, Método de Integração Radial.

Abstract

Reis, Adriana dos, *Formulations of the Boundary Element Method for the Analysis of Plates of Laminate Composite Materials*. 2010. 128 p. PhD Thesis - Faculty Mechanical Engineering - State University of Campinas, Campinas.

This work presents an analysis, using the boundary element method, of static problems of anisotropic plate bending. Boundary element formulations are developed using fundamental solutions for elasto-statics and only discontinuous quadratic elements (three nodes per element) are used. Surface integrals that come from domain loads are transformed into boundary integrals using the radial integration method. Three formulations are studied: the classic formulation or of thin plate theory, the formulation of three parameters, and the formulation of thick plates, or plate with the effect of transversal shear deformation or first order theory. Details of the derivation of the fundamental solutions are presented to the classical and first order theory. The fundamental solution of the classical theory are obtained using complex variables. In the case of thick plates, the Hörmander operator is used to transform the partial differential equation system that represents the equilibrium equation in only one partial differential equation. Using Radon transform, this partial differential equation is reduced to an ordinary differential equation. The developed formulations are applied to compute displacements, stresses and moments of laminated composite structures submitted to transversal loads in the structure domain. Results are compared with analytical results available in literature, with finite element method, and meshless method. In general there is a good agreement between the results obtained in this work and those available in literature.

Key words: Composite Materials, Boundary Element Method, Classical Plate Theory, First Order Plate Theory, Stress Analysis, Radon Transform, Radial Integration Method.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	3
1.2 Objetivos e hipóteses	5
1.3 Descrição do presente trabalho	6
2 Teoria Clássica de Flexão em Placas Anisotrópicas	8
2.1 Introdução	8
2.2 Relações básicas para placas anisotrópicas	9
2.3 Materiais Compósitos	14
2.3.1 Material compósito laminado	14
2.3.2 Equação constitutiva do laminado	15
2.4 Cálculo da matriz de rigidez de flexão em uma direção arbitrária	20
3 O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas	23
3.1 Introdução	23
3.2 Equação integral de contorno	23

3.3	Soluções fundamentais para problemas de flexão em materiais anisotrópicos .	30
3.4	Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno para flexão em placas anisotrópicas	37
3.5	Elementos Quadráticos	43
3.6	Equação matricial	46
3.7	Tensões em placas compósitas laminadas	49
3.7.1	Tensão e deformação de placas compósitas laminadas	50
3.7.2	Cálculo das tensões no contorno	56
3.8	Exemplos numéricos	60
3.8.1	Exemplo 1	60
3.8.2	Exemplo 2	60
3.8.3	Exemplo 3	61
3.8.4	Exemplo 4	65
3.8.5	Exemplo 5	66
4	Equações Integrais para Flexão em Placas Usando Uma Formulação de Três Parâmetros	68
4.1	Introdução	68
4.2	Equações integrais de contorno	69
4.3	Exemplo Numérico	73
5	Teoria de Flexão para Placas Espessas	76
5.1	Introdução	76
5.2	Teoria de placas laminadas de primeira-ordem	77
5.2.1	Equações constitutivas para um laminado	77
5.2.2	Deslocamentos e tensões	78

5.2.3	Fatores de correção de cisalhamento	79
5.2.4	Relações tensão-deformação	80
5.2.5	Solução fundamental	81
5.2.6	Cálculo das soluções fundamentais	85
5.2.7	Equações integrais de contorno	87
5.3	Exemplo Numérico	88
5.3.1	Exemplo 1	88
5.3.2	Exemplo 2	88
5.3.3	Exemplo 3	89
5.3.4	Exemplo 4	91
6	Conclusões	95
6.1	Conclusões finais	95
6.2	Proposta para trabalhos futuros	96
	Referências	97
	Apêndice A – Transformada de Telles	103
	Apêndice B – Método de Hörmander	105
B.1	Exemplo do uso do operador de Hörmander	106
	Apêndice C – Transformada de Radon	108
C.1	Definição da transformada de Radon	108
C.2	Exemplo do uso da transformada de Radon	109

Lista de Figuras

1	Placa Fina, (TORSANI, 2007).	9
2	Tensões em um elemento de placa, (TORSANI, 2007).	10
3	Forças e momentos em um elemento da placa	11
4	Deformação em um elemento da placa.	12
5	Posições inicial e final de um elemento de placa.	13
6	Compósito laminado com quatro lâminas, (TORSANI, 2007).	17
7	Sistema de coordenadas (n, s) normal e tangente ao contorno Γ	24
8	Canto i da placa e os momentos antes e depois a este canto.	27
9	Transformação da integral de domínio em integral de contorno.	38
10	Elemento quadrático descontínuo, (TORSANI, 2007).	45
11	Variação da deformação e da tensão em um laminado simétrico hipotético, (TORSANI, 2007).	50
12	Direções normal m e tangencial t no ponto fonte.	56
13	Discretização da placa quadrada usando 3 elementos descontínuos por lado.	61
14	Distribuição de tensão (σ_x) ao longo da espessura do laminado no ponto B.	62
15	Efeito da orientação α no deslocamento transversal no centro da placa.	63
16	Efeito da orientação α nos momentos M_x e M_y no centro da placa.	63
17	Distribuição de tensão σ_x ao longo da espessura para $\alpha = 45^\circ$ no ponto central da placa.	64
18	Variação do momento fletor ao longo de $(x, a/2)$ para uma placa quadrada engastada.	65

19	Placa laminada retangular, $b = 3a$	67
20	Placa retangular com furo retangular.	74
21	Discretização usando elementos quadráticos.	74
22	Deslocamento transversal ao longo da linha $A-A$	75
23	Deslocamento transversal ao longo da linha $B-B$	75
24	Uma lâmina no estado plano de tensão.	77
25	Discretização da placa usando 2 elementos quadráticos por lado.	89
26	Varição do deslocamento transversal para uma placa quadrada engastada.	90
27	Deslocamento transversal no laminado de 4 camadas de grafite-epoxy.	92
28	Deslocamento transversal no laminado de 4 camadas de vidro-epoxy.	93
29	Placa laminada retangular, $b = 3a$	93
30	Pontos de Gauss sem o uso da transformada de Telles (Regular) e com o seu uso.	104
31	Transformada de Radon para o caso tri-dimensional: integração no plano $\alpha = z_i x_i$ e transformada da Inversa: integração sobre uma esfera unitária $z_i z_i = 1$	109
32	Coordenadas esféricas z_1, z_2 e z_3	111

Lista de Tabelas

1	Deslocamentos e momentos na placa com todos os lados engastados.	60
2	Tensões e deslocamento transversal no centro da placa.	66
3	Tensões e deslocamento transversal no centro da placa retangular.	66
4	Deflexão no centro de uma placa quadrada ortotrópica sob um carregamento senoidal $g = g_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$	89
5	Deflexão no centro de uma placa quadrada ortotrópica sob um carregamento distribuído uniformemente.	91
6	Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com três camadas.	91
7	Deslocamento transversal no centro do laminado retangular com três camadas, $b = 3a$	91
8	Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com cinco camadas.	94
9	Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com sete camadas.	94
10	Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com nove camadas.	94

Símbolos

Letras gregas

α = Ângulo.

ε = Deformação normal.

ϕ = Ângulo.

Γ = Contorno.

γ = Deformação cisalhante.

μ = Raiz da equação característica.

ν = Razão de Poisson.

Ω = Domínio.

θ = Ângulo.

ρ = Distância.

σ = Tensão normal.

τ = Tensão cisalhante.

Letras arábicas

A = Matriz de rigidez extensional.

B = Matriz de rigidez de acoplamento.

C, G, H, K = Constantes.

D = Matriz de rigidez de flexão.

D' = Inversa da matriz **D**.

d_i = Parte real da raiz.

E = Módulo de elasticidade.

e_1 = Parte imaginária.

M = Momento.

N = Função de interpolação.

n = Vetor normal ao contorno.

Q = Ponto campo.

Q = Matriz das constantes elásticas.

$\bar{\mathbf{Q}}$ = Inversa da matriz \mathbf{Q} .

q = Força distribuída.

R_i = Função.

r_i, s_i, q_i, p_i = Constantes.

S_i = Função.

\mathbf{T} = Matriz de transformação.

t = Espessura da placa.

u, v = Deslocamento.

w = Deslocamento transversal.

x, y, z = Eixos principais.

z = Distância transversal do plano médio à um ponto.

Subscritos

Γ = Contorno.

Ω = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

c = Compressão, elemento contínuo.

d = Elemento descontínuo.

L = Direção longitudinal às fibras.

n = Direção normal.

ns = Direção tangencial.

T = Direção transversal às fibras.

t = Tração.

x, y, z = Direções principais do sistema de coordenadas.

Sobrescritos

1, 2, 3 = Nós do elemento.

* = Soluções fundamentais.

1 *Introdução*

Placas, por definição, são elementos estruturais de superfície, simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão menor, que está na direção normal a este plano, é denominada espessura da placa. O carregamento é transversal ao plano médio. De acordo com o material do qual é constituída, as placas podem ser classificadas como: anisotrópicas (com propriedades diferentes em qualquer direção), ortotrópicas (com propriedades diferentes em duas direções perpendiculares), ou isotrópicas (com propriedades iguais em qualquer direção). E, de acordo com a espessura, as placas são classificadas como finas e espessas. A literatura recomenda, para metais, a formulação de placas finas para $1/80 < t/a < 1/5$ e espessa para $t/a > 1/5$, onde t é a espessura e a é a aresta da placa quadrada. Os modelos matemáticos para placas finas não levam em conta os efeitos da deformação por cisalhamento transversal enquanto que nos modelos de placas espessas estes efeitos são considerados.

A primeira teoria de placas foi proposta por Kirchhoff (1850). Esta teoria é comumente referenciada como teoria clássica ou teoria de placas finas, na qual é desconsiderada a deformação por cisalhamento, ou distorção, ao longo da espessura da placa. No caso de materiais compósitos ou placas anisotrópicas, onde o módulo de cisalhamento é muito pequeno quando comparado com o módulo de elasticidade na direção das fibras, a teoria clássica pode não ter resultados satisfatórios mesmo para placas finas. Isto também ocorre em placas, isotrópicas ou não, com furos da ordem da espessura da placa ou menor. Outra teoria de placas foi proposta por Reissner (1945). Esta teoria é baseada em um modelo bi-dimensional o qual assume variações de tensão ao longo da espessura da placa (terceira dimensão). A teoria considera que a deformação por cisalhamento transversal e a tensão normal transversal não são desprezíveis. Mindlin (1951) propôs uma outra formulação, similar a de Reissner, baseada no deslocamento ao longo da espessura da placa. Tanto a teoria de Reissner quanto a de Mindlin são consideradas teoria de placas espessas, por considerarem a deformação de cisalhamento na direção transversal. Estas teorias também são conhecidas como teorias de

placas de primeira ordem, pois o campo de deslocamentos ao longo da espessura da placa é dado por uma função linear.

A teoria apresentada por Reissner (1944) fornece um sistema de equações diferenciais que pode ser condensado a uma equação diferencial de sexta ordem, que satisfaz as três condições de contorno ao longo das bordas, ao invés de apenas duas, como estabelece a teoria clássica de Kirchhoff. Já a teoria proposta por Mindlin (1951) teve como base as equações de equilíbrio da teoria de elasticidade tridimensional para um corpo em movimento, considerando-se o efeito da inércia rotatória e da vibração devido ao cisalhamento. As tensões foram obtidas assumindo constantes as distorções que ocorrem na espessura. O sistema de equações diferenciais também é condensado em uma equação diferencial de sexta ordem e satisfaz as três condições de contorno requeridas.

Com o avanço das pesquisas e da tecnologia, o computador permitiu a manipulação de teorias mais precisas de mecânica estrutural, podendo-se considerar as mais diversas hipóteses para o comportamento do material constitutivo, carregamentos estáticos ou dinâmicos, diferentes condições de vinculação e as mais diversas formas da estrutura. Dentre os métodos numéricos para análise de problemas de engenharia, os mais difundidos são: o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método de elementos de contorno (MEC).

O método das diferenças finitas foi o primeiro método de tratamento numérico dos problemas de engenharia formulado em bases matemáticas consistentes e usado em um grande número de trabalhos. Conforme apresentado por Southwell (1946), o conceito básico do método consiste na transformação das equações diferenciais que governam o problema físico em um sistema de equações lineares pela aplicação de operadores diferenciais.

O método dos elementos finitos (COOK, 1995) é, atualmente, o método numérico mais utilizado para análise de problemas mecânicos. Por ser um método de domínio, isto é, as equações de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos devem ser escritas para todos os pontos da estrutura, ele possui desvantagens para análises de casos de sólidos considerados infinitos, como é o caso de muitos problemas acústicos e de solos.

O método dos elementos de contorno é mais apropriado para a modelagem de domínios infinitos, uma vez que não se faz necessária a discretização do domínio, eliminando-se assim possíveis perturbações causadas por tais discretizações, além da redução do número de

variáveis do problema. O método é formulado usando-se equações integrais no contorno. Esta característica faz com que sua formulação se apresente em uma dimensão menor que a do problema real. Por exemplo, nos problemas de duas dimensões a análise recai sobre seu contorno uni-dimensional.

Neste trabalho será apresentada uma análise de placas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno.

1.1 Revisão Bibliográfica

As tentativas de se desenvolver modelos analíticos para a representação do comportamento das placas iniciou-se em meados de 1800 com trabalhos desenvolvidos por Sophie Germain, Lagrange e Poisson (PILKEY; WUNDERLICH, 1994). As equações integrais são conhecidas desde o século XIX e foram aplicadas à teoria da elasticidade pela primeira vez por Betti (1872) e Somigliana (1885) que apresentou trabalhos para elasticidade plana. Fredholm (1903) publicou um trabalho sobre a aplicação das equações integrais dos problemas potenciais em um contorno dividido em partes, sendo as funções de densidade aproximadas por funções fictícias. A estas aproximações para as funções de densidade por funções fictícias dá-se o nome de formulação indireta. Kupradze (1965) apresentou a primeira formulação dos chamados métodos dos elementos de contorno utilizando equações integrais cujas variáveis envolvidas não eram as variáveis físicas do problema estudado (elementos de contorno indireto). Rizzo (1967) apresentou o método na sua forma direta. O MEC discretiza o contorno em segmentos, onde as variáveis nodais são aproximadas por funções interpoladoras (funções de forma). Cruze (1969) inicialmente utilizou a função de forma constante, introduzindo posteriormente a função de forma linear para problemas de elasticidade tridimensional. Da mesma forma Ricardella (1973) utilizou elementos lineares para problemas bi-dimensionais. Posteriormente, Lachat (1975) desenvolveu elementos com funções de forma de ordem superior. A partir de 1978, apareceram as primeiras formulações diretas para placas baseadas nas hipóteses de Kirchhoff, tais como as apresentadas por Bezine (1978) e Stern (1979). Estas formulações são chamadas diretas porque expressam deslocamentos e forças de superfícies de pontos do contorno do sólido como variáveis que possuem significado físico imediato. O MEC teve um grande crescimento desde então, tornando-se, nos dias atuais, aplicável a vários problemas práticos de engenharia.

A análise de flexão em placas usando o MEC tem atraído a atenção de muitos pesquisadores durante os últimos anos, provando ser uma técnica adequada para esse campo de aplicações. Soluções de equações integrais de contorno indiretas de problemas de flexão de placas de Kirchhoff foram apresentadas por Altiero e Sikarskie (1978) e Tottenham (1979).

O primeiro artigo sobre as análises de elementos de contorno para placas espessas, utilizando a formulação de Reissner, foi apresentado por Weeën (1982), o qual usou o método de Hörmander para a derivação da solução fundamental. Depois do trabalho de Weeën, muitos outros foram apresentados sobre a análise de flexão de placas espessas, a maioria usando o modelo de Reissner. Dentre estes trabalhos podemos citar Karam e Telles (1988), Long, Brebbia e Telles (1988), Katsikadelis e Yotis (1993) e Yan (1995). Barcellos e Silva (1989) apresentaram uma formulação similar a de Weeën (1982) para o modelo de placas de Mindlin. Sua formulação difere da formulação de Reissner na constante chamada fator de cisalhamento. Westphal e Barcellos (1990) discutiram a importância de negligenciar termos na solução fundamental derivada por Weeën (1982). Eles concluíram que estes termos não tem efeito nos resultados, e representam um movimento de corpo rígido.

Barcellos e Westphal (1992) mostraram como transformar a solução fundamental de Reissner na solução fundamental de Kirchhoff, atribuindo zeros para partes do integrando que representam as deformações de cisalhamento. EL-Zafrany, Debbih e Fadhil (1994) apresentaram uma aproximação simplificada para a derivação da equação integral de contorno e da solução fundamental para flexão de placas espessas de Reissner. Expressões explícitas para parâmetros da solução fundamental, apropriados para placas com formas arbitrárias, são derivadas usando transformada de Hankel. Palermo-Jr. (2000) estudou a resposta harmônica de placas usando a solução no domínio da frequência em conjunto com a equação integral de contorno direta para o modelo de Mindlin. Marczack e Creus (2002) propuseram um tratamento numérico para as integrais com singularidades fracas e fortes da formulação de placas espessas isotrópicas. Neto e Paiva (2004) apresentaram uma formulação de placas para o MEC onde três equações de contorno são usadas: uma para o deslocamento transversal w e para as outras duas derivadas normais $\frac{\partial w}{\partial n}$ e tangenciais $\frac{\partial w}{\partial s}$. O deslocamento transversal w foi aproximado, neste trabalho, por um polinômio cúbico e, como consequência, $\frac{\partial w}{\partial s}$ por uma aproximação quadrática. Esta formulação possui os mesmos graus de liberdade da formulação de placa espessa de Reissner, embora não leve em conta o efeito da deformação por cisalhamento ao longo da espessura.

Shi e Bezzine (1988) apresentaram uma análise de elementos de contorno para problemas de flexão de placas usando as soluções fundamentais proposta por Wu e Altiero (1981) baseado na teoria de flexão de placas de Kirchhoff.

Existem poucos trabalhos sobre o MEC para placas e cascas ortotrópicas ou anisotrópicas que levem em conta o efeito da deformação por cortante. Wang e Huang (1991) apresentaram uma solução fundamental para placas ortotrópicas considerando este efeito. Em Wang e Schweizerhof (1996b) essa formulação foi estendida para laminados compósitos. Wang e Schweizerhof (1996a) apresentaram uma formulação para análise estática de cascas abatidas de laminados ortotrópicos moderadamente espessas.

O efeito das deformação por cisalhamento em cascas foi analisadas usando o MEC por Wang e Schweizerhof (1997) com a solução fundamental numérica proposta por Wang e Schweizerhof (1995). Rajamohan e Raamachandran (1999) propuseram uma formulação onde as singularidades foram evitadas pela colocação do ponto fonte fora do domínio. Paiva, Sollero e Albuquerque (2003) apresentaram um tratamento analítico para as integrais singulares e hipersingulares da formulação apresentada por Shi e Bezzine (1988). Recentemente, Wen e Aliabadi (2006) apresentaram uma formulação para deslocamentos descontínuos para placas ortotrópicas trincadas, segundo a teoria de Reissner. Albuquerque et al. (2006) apresentaram um método para transformar integrais de domínio em integrais de contorno a partir da formulação apresentada por Shi e Bezzine (1988). Em Albuquerque, Sollero e Paiva (2007), esta formulação foi expandida para problemas dinâmicos. Recentemente foi implementada uma formulação de elementos de contorno que utiliza a formulação de Reissner e que integrais de domínio devido a forças distribuídas são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial (GOUVÊA; ALBUQUERQUE; PALERMO-JR., 2008).

1.2 Objetivos e hipóteses

Usando o método dos elementos de contorno, os objetivos deste trabalho são:

- Apresentar uma análise de placas de laminados compósitos sem considerar a deformação por cisalhamento na direção transversal (teoria clássica).
- Apresentar uma formulação alternativa, de três parâmetros, para placas, segundo a teoria clássica .

- Calcular deslocamentos, momentos e tensões em placas de laminados compósitos segundo a teoria clássica.
- Apresentar uma formulação de placas ortotrópicas onde o efeito da deformação por cisalhamento na direção transversal é considerado.

As hipóteses adotadas são:

- Problemas estáticos.
- Materiais anisotrópicos lineares.

Quando a análise tratar de compósitos laminados, as seguintes hipóteses também são adotadas:

- As lâminas encontram-se perfeitamente coladas umas às outras, ou seja, não há deslocamento relativo das duas superfícies que compõe a interface entre duas lâminas.
- O laminado é simétrico, o que implica na existência de um plano médio de simetria.

1.3 Descrição do presente trabalho

Este trabalho é composto de 6 capítulos. No capítulo 2 são apresentadas algumas considerações em que se baseiam as teorias de flexão de placas anisotrópicas segundo a teoria clássica. Neste capítulo também é feita uma breve descrição dos materiais anisotrópicos e dos materiais compósitos. No capítulo 3 é descrita a formulação de elementos de contorno para placas anisotrópicas segundo a teoria clássica. É obtida a equação integral de contorno e também a solução fundamental anisotrópica. É mostrado o tratamento das integrais analíticas e numéricas e os tipos de elementos de contorno usados. Neste capítulo são também calculadas as tensões nos pontos internos e em pontos do contorno de placas de compósitos laminados. No capítulo 4 é descrita a formulação de elementos de contorno para placas de três parâmetros segundo a teoria clássica. São apresentados resultados para o deslocamento transversal de diversos problemas. Estes resultados são comparados com resultados da literatura e também com a formulação de dois parâmetros apresentados no capítulo 2. No capítulo 5 é apresentada a teoria de flexão para placas ortotrópicas levando-se em conta os efeitos da deformação por cortante e considerando uma função linear para o campo de deslocamentos

ao longo da espessura (teoria de primeira ordem para placas com os efeitos da deformação por cortante) e abordada a teoria de Mindlin e sua solução fundamental. É calculado o deslocamento transversal que são comparados com resultados da literatura. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões finais sobre as formulações desenvolvidas ao longo do trabalho e também propostas para trabalhos futuros.

2 *Teoria Clássica de Flexão em Placas Anisotrópicas*

2.1 Introdução

Uma placa é um elemento estrutural definido por duas superfícies planas e paralelas (Figura 1) onde as cargas são transversalmente aplicadas. A distância entre estas duas superfícies define a espessura da placa, a qual é pequena quando comparada com as outras dimensões da placa.

Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Dependendo de sua espessura, uma placa pode ser considerada fina ou espessa. A teoria de placas finas não leva em conta os efeitos da deformação por cisalhamento e é conhecida também como teoria clássica de flexão de placas. Já as teorias para placas espessas levam em conta este efeito e por isso são também conhecidas como teoria de placas deformáveis por cisalhamento. Neste trabalho será desenvolvida a formulação para placas finas anisotrópicas e espessas ortotrópicas.

A teoria clássica de flexão em placas anisotrópicas está baseada nos seguintes pressupostos:

1. Seções retas, que no seu estado não deformado são normais à superfície média, continuam retas e normais à superfície média deformada depois de aplicado o carregamento.
2. A tensão normal σ_z na seção transversal paralela ao plano médio é nula.

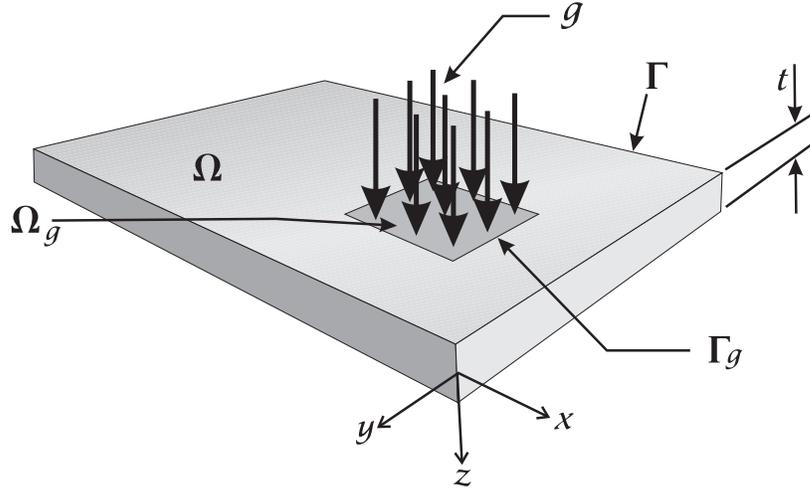


Figura 1: Placa Fina, (TORSANI, 2007).

2.2 Relações básicas para placas anisotrópicas

Considere um elemento de placa seguindo os pressupostos já definidos. A Figura 2 mostra este elemento com um estado de tensões agindo nele e uma força distribuída aplicada em sua superfície. Integrando as componentes de tensão ao longo da espessura da placa pode-se definir os momentos e forças de cisalhamento (Figura 3):

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad (2.1)$$

$$M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad (2.2)$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \quad (2.3)$$

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z dz, \quad (2.4)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad (2.5)$$

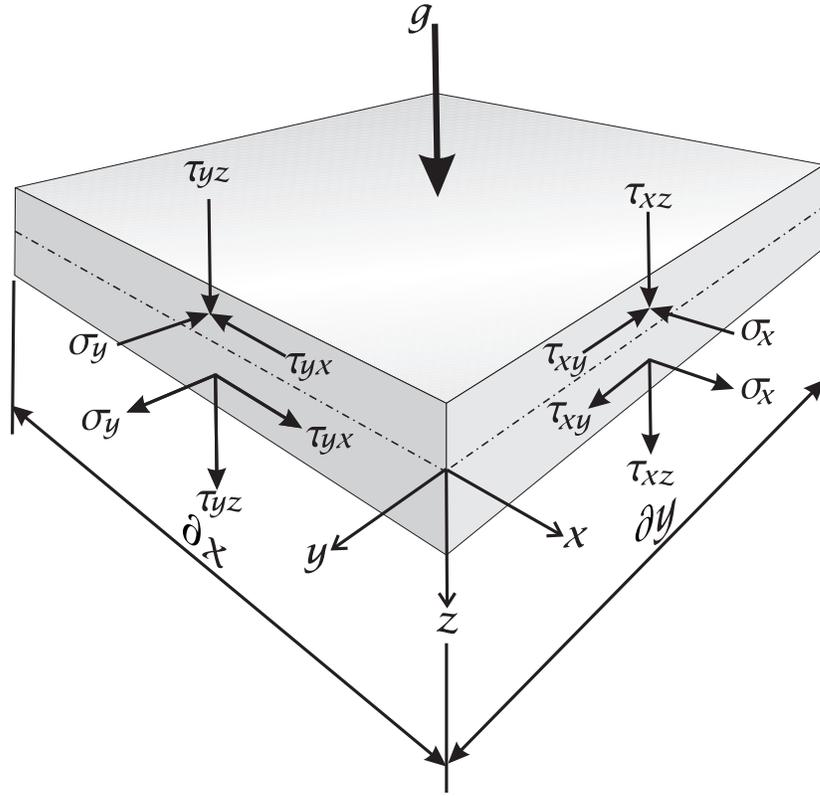


Figura 2: Tensões em um elemento de placa, (TORSANI, 2007).

e

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \quad (2.6)$$

Do equilíbrio de forças e momentos, pode-se escrever:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (2.9)$$

Resolvendo as equações (2.8) e (2.9) para Q_x e Q_y , respectivamente, substituindo na equação (2.7) e considerando a simetria de momentos ($M_{xy} = M_{yx}$), tem-se:

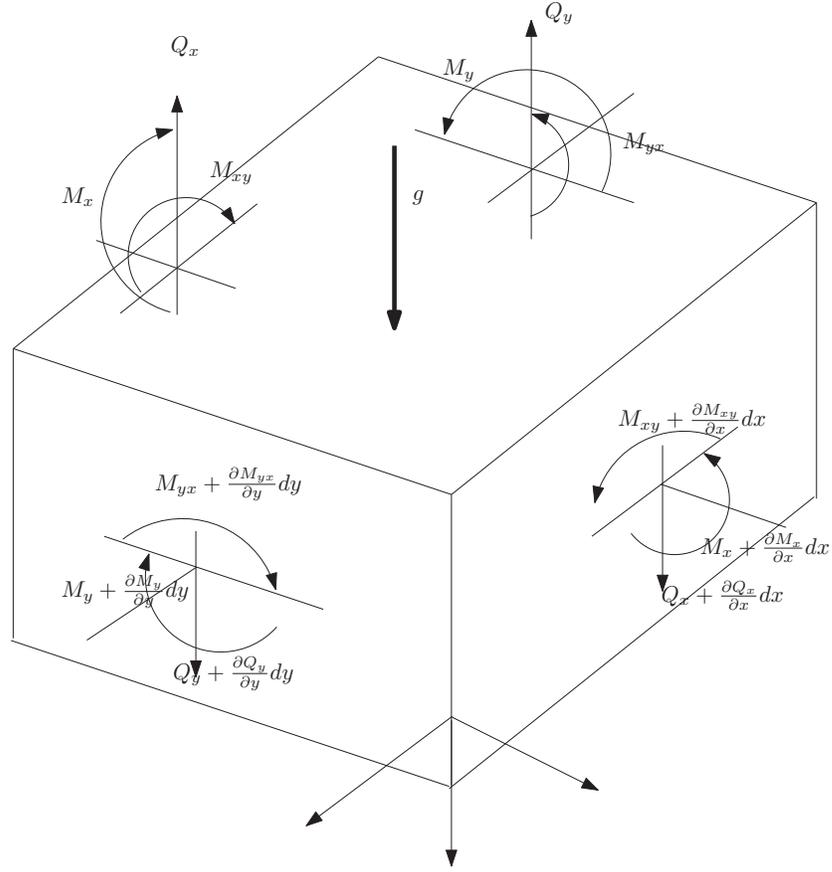


Figura 3: Forças e momentos em um elemento da placa

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -g. \quad (2.10)$$

Considere as posições inicial e final de um elemento da placa dado por $abcd$ paralelo ao plano médio com lados ab e ad paralelos aos eixos x e y , respectivamente, a uma distância z do plano médio (Figura 4).

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos a , b , c e d , movem-se para a' , b' , c' e d' , chamando as componentes de deslocamento do ponto a nas direções x e y de u_0 e v_0 (Figura 4), respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x é dado por:

$$b'_x - b_x = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (2.11)$$

Então, o incremento do comprimento dx na direção x é dado por:

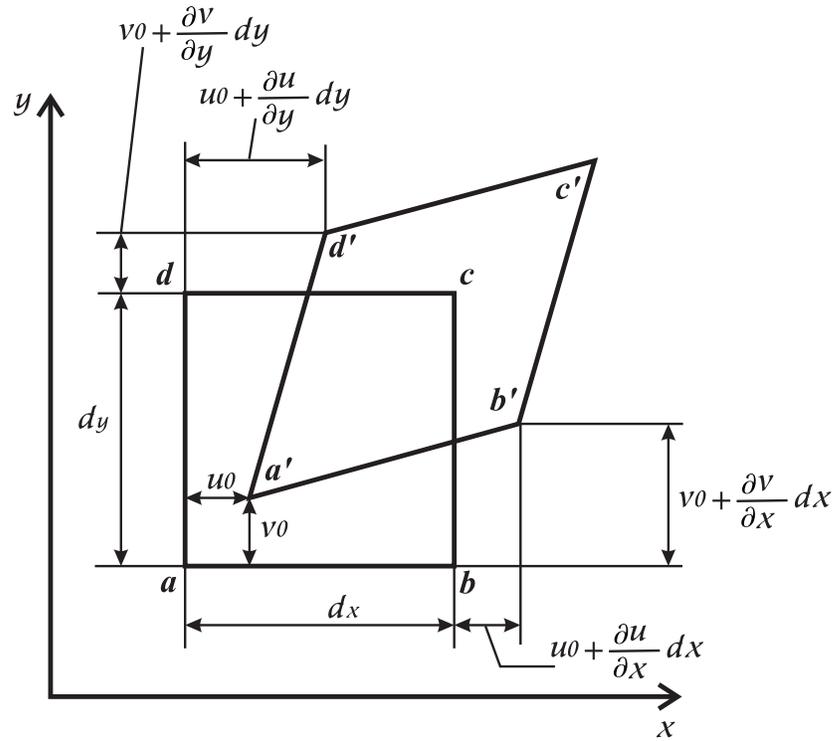


Figura 4: Deformação em um elemento da placa.

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (2.12)$$

e a deformação na direção x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Da mesma forma, pode-se escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.17)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2.18)$$

A Figura 5 mostra as posições inicial e final de uma seção da placa, paralela ao plano xz , que contém os pontos a , b , n_1 e n_2 . A rotação do elemento an_1 , inicialmente na posição vertical, é igual a $\frac{\partial w}{\partial x}$ (Figura 5). Então, o deslocamento do ponto na direção x , a uma distância z da superfície média pode ser escrita como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.19)$$

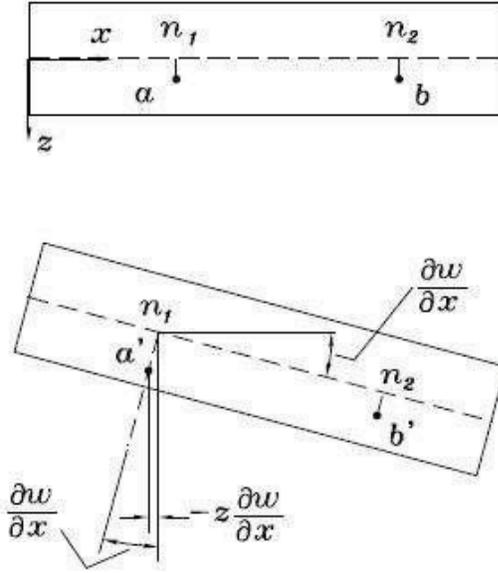


Figura 5: Posições inicial e final de um elemento de placa.

Seguindo um procedimento similar, o deslocamento de um ponto na direção y é dado por:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.20)$$

Substituindo as equações (2.19) e (2.20) nas equações (2.13), (2.14) e (2.16), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z\kappa_x, \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z\kappa_y, \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z \kappa_{xy}, \quad (2.21)$$

onde κ_x , κ_y e κ_{xy} são as curvaturas da placa dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

2.3 Materiais Compósitos

Os materiais anisotrópicos apresentam duas características interessantes. Se por um lado o grande número de variáveis e constantes elásticas necessárias para descrever o seu comportamento dificulta sua análise, por outro essas mesmas variáveis dão várias opções para a otimização do elemento projetado. As propriedades mecânicas podem ser maximizadas em determinadas direções, justamente àquelas que estarão sujeitas às maiores solicitações, sem um aumento significativo de peso.

Embora a maioria dos materiais apresente algum grau de anisotropia, ela pode, em muitos casos, ser ignorada por não ser relevante para uma determinada aplicação. O exemplo mais importante desse comportamento é o aço laminado, no qual é notada uma resistência à tração ligeiramente maior na direção de laminação. Na maioria das aplicações essa diferença não é importante, porém em outras ela pode ser determinante. O exemplo mais conhecido de material anisotrópico é, sem dúvida, a madeira com seus veios, cuja direção determina onde terá maior resistência e maior rigidez.

2.3.1 Material compósito laminado

Os materiais compósitos são aqueles constituídos por duas ou mais fases bem definidas, geralmente com propriedades mecânicas bastante distintas. As duas fases sempre presentes são a matriz e o reforço. A matriz é um material homogêneo que tem a finalidade de aglutinar as fibras ou partículas do material de reforço. O material de reforço tem a função de aumentar a resistência mecânica do elemento. O reforço pode estar na forma de fibras curtas, fibras longas ou de partículas. As fibras curtas e particulados são largamente utilizados

como reforço em materiais termoplásticos injetados. Nestes materiais são acrescentados principalmente fibras de vidro picadas e talco industrial para aumentar a rigidez e a resistência mecânica dos componentes injetados. Nestes casos buscam-se geralmente um comportamento isotrópico e o controle da direção preferencial das fibras é quase nulo. As fibras longas, por sua vez, são usadas com matrizes de resinas termofixas como o poliéster e epóxi. Os materiais compósitos com reforço de fibras longas permitem um maior controle das propriedades mecânicas anisotrópicas pelo direcionamento das fibras e sua proporção na composição do material. Normalmente este material é constituído de várias camadas, que são as lâminas, nas quais as fibras possuem uma única direção. Por serem formados por várias lâminas, estes materiais são conhecidos como compósitos laminados (Figura 6).

2.3.2 Equação constitutiva do laminado

Como apresentado por Agarwal e Broutman (1990), as tensões em cada lâmina podem ser calculadas a partir das deformações como segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{Q}}_k$ é dada por:

$$\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{T}^{-\mathbf{T}}. \quad (2.24)$$

A matriz de transformação \mathbf{T} é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2nm \\ n^2 & m^2 & -2nm \\ -nm & nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

sendo, $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$.

A matriz das constantes elásticas \mathbf{Q} é dada, em termos das constantes de engenharia, por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

onde: E_L é o módulo de elasticidade longitudinal (na direção das fibras), E_T é o módulo de elasticidade transversal (ortogonal às fibras), G_{LT} é o módulo de cisalhamento no plano da lâmina, ν_{LT} é a razão de Poisson principal e $\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}$. Os subscritos L e T referem-se respectivamente às direções longitudinal e transversal à direção das fibras.

As tensões nas direções longitudinal e transversal do reforço com fibras podem ser calculadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.27)$$

Integrando ao longo da espessura (Figura 6) as equações (2.1), (2.2) e (2.3), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (2.28)$$

Usando-se as equações (2.23) e (2.21), a equação (2.28) pode ser escrita para um laminado como:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right\}, \quad (2.29)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$

onde

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (2.31)$$

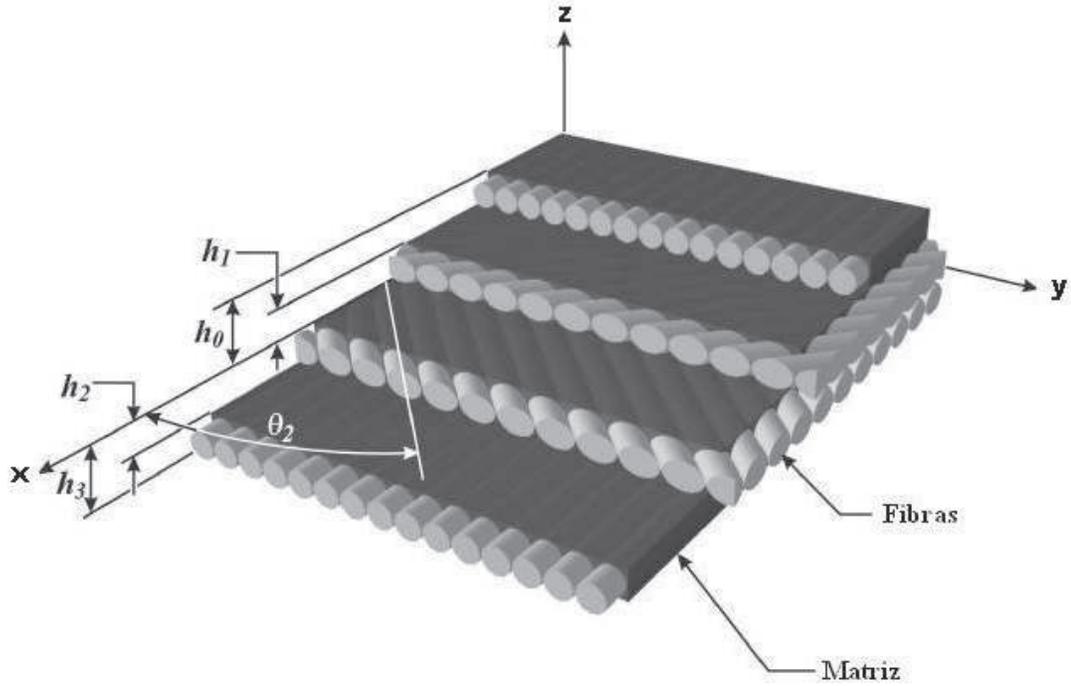


Figura 6: Compósito laminado com quatro lâminas, (TORSANI, 2007).

e h_k é a distância do plano médio do laminado até a interface k (Figura 6). A equação (2.30) pode ser escrita, na forma expandida, como:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{yy} &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo as equações (2.32) nas equações (2.8) e (2.9), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
Q_x &= - \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right], \\
Q_y &= - \left[D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right].
\end{aligned} \tag{2.33}$$

A equação (2.10) pode ser reescrita, usando as equações (2.32), como (LEKHNITSKII, 1968):

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \tag{2.34}$$

A equação (2.34) pode ser integrada no plano característico complexo

$$\begin{aligned}
z &= x + \mu y, \\
\mu &= d + ie,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

onde d e e são as partes real e imaginária de μ , respectivamente. Usando a equação (2.35) e considerando as forças de corpo nulas, a equação (2.34) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \left[D_{11} \mu^4 + 4D_{16} \mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \mu^2 + 4D_{26} \mu + D_{22} \right] = 0. \tag{2.36}$$

A solução geral para w na equação (2.34) depende das raízes μ_1 , μ_2 , $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ da equação característica dada por:

$$D_{22} \mu^4 + 4D_{26} \mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \mu^2 + 4D_{16} \mu + D_{11} = 0, \tag{2.37}$$

cuja validade é condição para a existência de soluções não triviais da equação (2.36).

As raízes desta equação, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são sempre complexas para materiais homogêneos. As raízes complexas $\mu_1 = d_1 + e_1 i$ e $\mu_2 = d_2 + e_2 i$ são conhecidas

como parâmetros complexos de deflexão. Em geral, estas raízes são números complexos diferentes.

Uma expressão geral para a deflexão tem a forma:

1. no caso de parâmetros complexos diferentes ($\mu_1 \neq \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]. \quad (2.38)$$

2. no caso de parâmetros complexos iguais ($\mu_1 = \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + \bar{z}_1 w_2(z_1)]. \quad (2.39)$$

onde w_o é uma solução particular da equação (2.34) que depende da força distribuída g nas superfícies da placa, $w_1(z_1)$ e $w_2(z_2)$ são funções analíticas arbitrárias de variáveis complexas $z_1 = x + \mu_1 y$ e $z_2 = x + \mu_2 y$.

Baseada nas equações (2.32) e (2.33), podem ser obtidas expressões gerais para forças e momentos como (para o caso $\mu_1 \neq \mu_2$):

$$\begin{aligned} M_{xx} &= M_{xx}^o - 2\text{Re}[p_1 w''(z_1) + p_2 w''(z_2)], \\ M_{yy} &= M_{yy}^o - 2\text{Re}[q_1 w''(z_1) + q_2 w''(z_2)], \\ M_{xy} &= M_{xy}^o - 2\text{Re}[r_1 w''(z_1) + r_2 w''(z_2)], \\ Q_x &= Q_x^o - 2\text{Re}[\mu_1 s_1 w'''(z_1) + \mu_2 s_2 w'''(z_2)], \\ Q_y &= Q_y^o - 2\text{Re}[s_1 w'''(z_1) + s_2 w'''(z_2)]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde M_{xx}^o , M_{yy}^o , M_{xy}^o , Q_x^o e Q_y^o são momentos e forças cisalhantes correspondentes a função w_o calculada pelas equações (2.32) e (2.33). As outras constantes são dadas por:

$$\begin{aligned}
p_1 &= D_{11} + D_{12}\mu_1^2 + 2D_{16}\mu_1, & p_2 &= D_{11} + D_{12}\mu_2^2 + 2D_{16}\mu_2, \\
q_1 &= D_{12} + D_{22}\mu_1^2 + 2D_{26}\mu_1, & q_2 &= D_{12} + D_{22}\mu_2^2 + 2D_{26}\mu_2, \\
r_1 &= D_{16} + D_{26}\mu_1^2 + 2D_{66}\mu_1, & p_2 &= D_{16} + D_{26}\mu_2^2 + 2D_{66}\mu_2, \\
s_1 &= \frac{D_{11}}{\mu_1} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_1 + D_{26}\mu_1^2, & & (2.41) \\
s_2 &= \frac{D_{11}}{\mu_2} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_2 + D_{26}\mu_2^2, \\
s_1 - r_1 &= \frac{p_1}{\mu_1}, & s_2 - r_2 &= \frac{p_2}{\mu_2}, \\
s_1 + r_1 &= -q_1\mu_1, & s_2 + r_2 &= -q_2\mu_2.
\end{aligned}$$

Expressões similares podem ser obtidas para o caso isotrópico, onde $\mu_1 = \mu_2$. Contudo estas expressões não serão apresentadas neste trabalho.

2.4 Cálculo da matriz de rigidez de flexão em uma direção arbitrária

Considerando que as constantes de rigidez à flexão de uma placa em um sistema de coordenadas x, y, z são dadas por $D_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$ e em um sistema de coordenadas x', y', z' , rotacionado α com respeito ao primeiro sistema de coordenadas, são dados por $D'_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$, as equações relacionando estas constantes, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são dadas por:

$$D'_{11} = D_{11} \cos^4 \alpha + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + D_{22} \sin^4 \alpha +$$

$$2(D_{16} \cos^2 \alpha + D_{26} \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha, \quad (2.42)$$

$$D'_{22} = D_{11} \sin^4 \alpha + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + D_{22} \cos^4 \alpha +$$

$$2(D_{16} \sin^2 \alpha + D_{26} \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha, \quad (2.43)$$

$$D'_{12} = D_{12} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha +$$

$$(D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha \sin 2\alpha, \quad (2.44)$$

$$D'_{66} = D_{66} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha +$$

$$(D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha \sin 2\alpha, \quad (2.45)$$

$$D'_{16} = \frac{1}{2}[D_{22} \sin^2 \alpha - D_{11} \cos^2 \alpha + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha +$$

$$D_{16} \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) + D_{26} \sin^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (2.46)$$

$$D'_{26} = \frac{1}{2}[D_{22} \cos^2 \alpha - D_{11} \sin^2 \alpha + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha +$$

$$D_{16} \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) + D_{26} \cos^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (2.47)$$

As componentes de tensão σ_n e τ_{ns} , tensões normal e cisalhante, respectivamente, estão relacionadas com as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} por:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.48)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (2.49)$$

As componentes do momento fletor e da força cortante podem ser escritas explicitamente no sistema ns como:

$$M_{nn} = M_{xx} \cos^2 \alpha + M_{yy} \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.50)$$

$$M_{ss} = M_{xx} \sin^2 \alpha + M_{yy} \cos^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.51)$$

$$M_{ns} = (M_{yy} - M_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (2.52)$$

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha, \quad (2.53)$$

$$Q_s = Q_y \cos \alpha - Q_x \sin \alpha. \quad (2.54)$$

Com o objetivo de resolver a equação diferencial da placa dada por (2.34), é necessário a imposição das condições de contorno para o deslocamento w e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$. Kirchhoff (1850) mostrou que as condições de contorno da força cisalhante Q_n e momento volvente M_{ns} podem ser escritas como uma única condição dada por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \quad (2.55)$$

A outra condição de carregamento no contorno é o momento M_{nn} .

3 *O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas*

3.1 Introdução

Neste Capítulo é desenvolvida a formulação dos elementos de contorno para o tratamento de problemas de elasticidade plana em materiais anisotrópicos considerando a presença de forças de corpo genéricas. As integrais de domínio, provenientes do carregamento distribuído, são transformadas em integrais de contorno usando o método de integração radial (PAIVA, 2005).

3.2 Equação integral de contorno

Usando o teorema de Betti (BETTI, 1872), pode-se relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como (PAIVA, 1987):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega. \quad (3.1)$$

Escrevendo o lado direito da equação (3.1) na notação de von Karman, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^* \right) d\Omega. \quad (3.2)$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa, a equação (3.2) é escrita como:

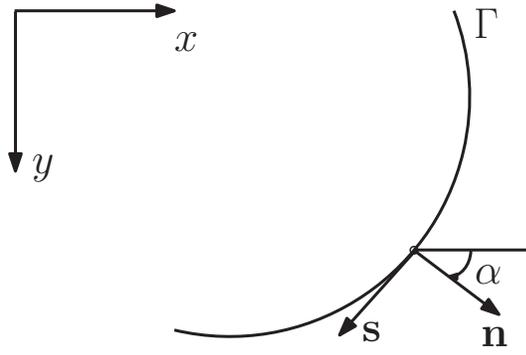


Figura 7: Sistema de coordenadas (n, s) normal e tangente ao contorno Γ .

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^*) d\Omega. \quad (3.3)$$

Substituindo as equações (2.23) e (2.21) na equação (3.3), pode-se escrever o primeiro termo da integral no lado direito da equação (3.3) como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Omega} M_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Omega. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right] d\Omega. \quad (3.5)$$

Do teorema geral de Gauss, tem-se (Figura 7):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} f \cos \alpha d\Gamma, \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} f \sin \alpha d\Gamma. \quad (3.7)$$

sendo f uma função genérica, contínua em Ω .

Usando o teorema de Green (GREEN; ZERNA, 1968), a equação (3.5) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} d\Omega. \quad (3.8)$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.8), pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \right] d\Omega. \quad (3.9)$$

Depois, usando o teorema de Green, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + w^* \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} d\Omega. \quad (3.10)$$

Seguindo um procedimento similar, pode-se mostrar que:

$$\int_{\Omega} \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-M_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + w^* \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} d\Omega, \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + w^* \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \alpha \right. \\ \left. + w^* \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2w^* \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Assim, a equação (3.3) é escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha \right. \\ \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Omega} w^* \left[\left(\cos \alpha \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \left(\sin \alpha \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma \\ - \int_{\Omega} w^* \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo as equações (2.8), (2.9) e (2.10) e usando a equação (2.53), a equação (3.13) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha \right.$$

$$+M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* Q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.14)$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas (x, y) e (n, s) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial x} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha, \\ \frac{\partial w^*}{\partial y} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo as equações (3.15) na equação (3.14) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma} \left[M_{xx} \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) \right. \\ &+ M_{yy} \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + M_{xy} \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) \\ &\left. + M_{xy} \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* Q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a equação (3.16) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} \left(M_{xx} \cos^2 \alpha + M_{yy} \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} \left[M_{xy} \left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \right) + (M_{yy} - M_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha \right] \right\} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} w^* Q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo as equações (2.50) e (2.52) na equação (3.17), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.18)$$

Calculando o segundo termo da primeira integral do lado direito da equação (3.18), tem-se:

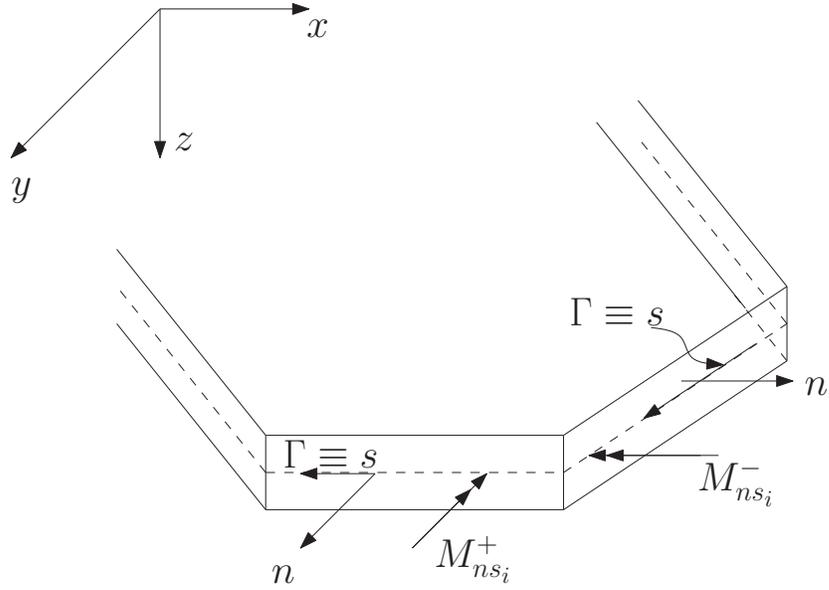


Figura 8: Canto i da placa e os momentos antes e depois a este canto.

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (3.19)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve a curva de contorno e suas derivadas são contínuas, o primeiro termo do lado direito da equação (3.19) se anula. No caso onde há cantos, a equação (3.19) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (3.20)$$

onde

$$R_{c_i} = M_{ns_i}^+ - M_{ns_i}^-, \quad (3.21)$$

e os termos w_{c_i} , $M_{ns_i}^+$, $M_{ns_i}^-$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto i da placa, respectivamente, N_c é o número total de cantos no contorno (Figura 8) (PAIVA, 1987).

Das equações (3.18) e (3.20), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(Q_n w^* - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.22)$$

Das equações (3.22) e (2.55), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.23)$$

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obtermos a equação (3.23), o lado esquerdo da equação (3.1) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - M_{nn} \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \quad (3.24)$$

Substituindo as equações (3.23) e (3.24) na equação (3.1), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - M_{nn}^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A equação (3.25) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisamos considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos analisar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por:

$$\int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.26)$$

desapareça. Usando as propriedades da função delta de Dirac $\delta(P, q)$, de forma que $g^* = \delta(P, Q)$, a integral (3.26) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta(P, Q) w(P) d\Omega(P) = w(Q), \quad (3.27)$$

onde Q é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e P é o ponto onde a deflexão é observada, conhecido como ponto campo.

O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da equação (3.25) relacionadas a este estado (w^*, V_n^* e M_{nn}^*) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da equação diferencial (2.34).

Considerando o estado "fundamental" como o estado fundamental, a equação (3.25) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P)w(P) - M_{nn}^*(Q, P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) \\
= \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q, P) - M_{nn}(P)\frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q, P) \\
+ \int_{\Omega} g(P)w^*(Q, P)d\Omega. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

A constante K é introduzida para considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada diretamente em um ponto onde no contorno, então $K = 1/2$, se for aplicada no domínio $K = 1$, e se for aplicada fora vale $K = 0$, (KANE, 1994).

As variáveis da equação (3.28) são deslocamentos $w(P)$, rotações $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$, momentos $M_{nn}(P)$, e forças cortante $V_n(P)$. Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas e outras desconhecidas. Para termos um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente à derivada do deslocamento $w(Q)$ em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e tangencial ao contorno no ponto de origem.

Para um caso particular onde o ponto fonte é localizado em um ponto onde o contorno é suave, a equação de contorno correspondente à derivada do deslocamento é dada por (PAIVA, 1987):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P) w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P) + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) d\Omega. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

É importante dizer que é possível usar apenas a equação (3.28) em uma formulação de elementos de contorno usando como pontos fontes os nós do contorno e um número igual de pontos externos ao domínio do problema.

3.3 Soluções fundamentais para problemas de flexão em materiais anisotrópicos

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculado fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial (2.34) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac $\delta(Q, P)$ (PAIVA, 2005), (TORSANI, 2007), isto é:

$$\Delta\Delta w^*(Q, P) = \delta(Q, P), \tag{3.30}$$

onde $\Delta\Delta(\cdot)$ é o operador diferencial:

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta(\cdot) &= \frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + 4 \frac{D_{16}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial^3 \partial y} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} \\
&+ 4 \frac{D_{26}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Como mostrado por Shi e Bezine (1988), a solução fundamental do deslocamento transversal é dada por:

$$w^*(\rho, \theta) = \frac{1}{8\pi} \{C_1 R_1(\rho, \theta) + C_2 R_2(\rho, \theta) + C_3 [S_1(\rho, \theta) - S_2(\rho, \theta)]\}, \quad (3.32)$$

onde

$$\rho = [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]^{1/2}, \quad (3.33)$$

x e y são as coordenadas do ponto campo P , x_o e y_o são as coordenadas do ponto fonte Q ,

$$\theta = \arctan \frac{y - y_o}{x - x_o}, \quad (3.34)$$

$$C_1 = \frac{(d_1 - d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_1}, \quad (3.35)$$

$$C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_2}, \quad (3.36)$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)}{GH}, \quad (3.37)$$

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2, \quad (3.38)$$

$$H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2, \quad (3.39)$$

d_i e e_i são respectivamente as partes real e imaginária das raízes μ_i da equação característica (2.37),

$$R_i = \rho^2 [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta] \\ \times \left\{ \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} \left((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 3 \right\}$$

$$-4\rho^2 e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned} S_i &= \rho^2 e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \\ &\times \left\{ \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} \left((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 3 \right\} \\ &+ \rho^2 \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta \right] \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

O índice repetido i nos termos de R_i e S_i não implicam em soma. O coeficiente a é uma constante arbitrária tomada como $a = 1$.

As outras soluções fundamentais são dadas por:

$$M_{nn}^* = - \left(f_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + f_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right), \quad (3.42)$$

$$R_{c_i}^* = - \left(g_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + g_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + g_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} V_n^* &= - \left(h_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + h_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\bar{R}} \left(h_5 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + h_6 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + h_7 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde \bar{R} é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno Γ . As demais constantes são definidas como:

$$f_1 = D_{11}n_x^2 + 2D_{16}n_x n_y + D_{12}n_y^2, \quad (3.45)$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2 + 2D_{66}n_x n_y + D_{26}n_y^2), \quad (3.46)$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2 + 2D_{26}n_xn_y + D_{22}n_y^2, \quad (3.47)$$

$$g_1 = (D_{12} - D_{11}) \cos \alpha \sin \alpha + D_{16}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (3.48)$$

$$g_2 = 2(D_{26} - D_{16}) \cos \alpha \sin \alpha + 2D_{66}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (3.49)$$

$$g_3 = (D_{22} - D_{12}) \cos \alpha \sin \alpha + D_{26}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (3.50)$$

$$h_1 = D_{11}n_x(1 + n_y^2) + 2D_{16}n_y^3 - D_{12}n_xn_y^2, \quad (3.51)$$

$$h_2 = 4D_{16}n_x + D_{12}n_y(1 + n_x^2) + 4D_{66}n_y^3 - D_{11}n_x^2n_y - 2D_{26}n_xn_y^2, \quad (3.52)$$

$$h_3 = 4D_{26}n_y + D_{12}n_x(1 + n_y^2) + 4D_{66}n_x^3 - D_{22}n_xn_y^2 - 2D_{16}n_x^2n_y, \quad (3.53)$$

$$h_4 = D_{22}n_y(1 + n_x^2) + 2D_{26}n_x^3 - D_{12}n_x^2n_y, \quad (3.54)$$

$$h_5 = (D_{12} - D_{11}) \cos 2\alpha - 4D_{16} \sin 2\alpha, \quad (3.55)$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha - 4D_{66} \sin 2\alpha, \quad (3.56)$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12}) \cos 2\alpha - 4D_{26} \sin 2\alpha, \quad (3.57)$$

e α é o ângulo entre o sistema de coordenadas global xy e um sistema de coordenadas ns o qual tem seus eixos paralelos aos vetores n e s , normal e tangente, respectivamente, ao contorno no ponto Q . As derivadas da solução fundamental do deslocamento transversal podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções R_i e S_i . Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi} \left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (3.58)$$

As derivadas de R_i e S_i são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_i}{\partial x} &= 2r (\cos \theta + d_i \sin \theta) \left\{ \log \left[\frac{r^2}{a^2} \left((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad - 4r e_i \sin \theta \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta},\end{aligned}\tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_i}{\partial y} &= 2r \left[d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) - e_i^2 \sin \theta \right] \\ &\quad \times \left\{ \log \left[\frac{r^2}{a^2} \left((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad - 4r e_i (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta},\end{aligned}\tag{3.60}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} = 2 \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\},\tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} &= 2d_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\} \\ &\quad - 4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta},\end{aligned}\tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} &= 2 (d_i^2 - e_i^2) \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\} \\ &\quad - 8d_i e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta},\end{aligned}\tag{3.63}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} = \frac{4 (\cos \theta + d_i \sin \theta)}{r \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]},\tag{3.64}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4 [d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) + e_i^2 \sin \theta]}{r \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]},\tag{3.65}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{4 [(d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) d_i \sin \theta]}{r \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]},\tag{3.66}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} = \frac{4 [d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \sin \theta]}{r \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]},\tag{3.67}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^4} = -\frac{4 \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta \right]}{r^2 \left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^3 \partial y} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{d_i}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} + \frac{2e_i^2 \sin \theta \cos \theta}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^2 + e_i^2)}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]} - \frac{2e_i^2 \cos^2 \theta}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{d_i (d_i^2 + e_i^2)}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]} - \frac{2e_i^2 \cos \theta (2d_i \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta)}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}, \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial y^4} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^4 - e_i^4)}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} - \frac{2e_i^2 \cos \theta [(3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta]}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}, \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial x} &= re_i \sin \theta \left\{ \log \left[\frac{r^2}{a^2} \left((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad + 2r (\cos \theta + d_i \sin \theta) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial y} &= re_i (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \left\{ \log \left[\frac{r^2}{a^2} \left((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad + 2r \left[d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) - e_i^2 \sin \theta \right] \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} = 2 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} &= e_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta] \right\} \\ &\quad + 2d_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta},\end{aligned}\tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} &= 2d_i e_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta] \right\} \\ &\quad + 2(d_i^2 - e_i^2) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta},\end{aligned}\tag{3.77}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^3} = -\frac{2e_i \sin \theta}{r [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]},\tag{3.78}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2e_i \cos \theta}{r [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]},\tag{3.79}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{2e_i [2d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) - (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta]}{r [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]},\tag{3.80}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial y^3} = \frac{2e_i [(3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta]}{r [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]},\tag{3.81}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^4} = \frac{4e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta)}{r^2 [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]^2},\tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^3 \partial y} &= \frac{2e_i}{r^2} \left\{ \frac{1}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \cos \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta)}{[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]^2} \right\},\end{aligned}\tag{3.83}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4e_i \cos \theta [d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) + e_i^2 \sin \theta]}{r^2 [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]^2},\tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 S_i}{\partial x \partial y^3} &= -\frac{2e_i}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^2 + e_i^2)}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(d_i^2 + e_i^2) \cos \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) - 4e_i^2 \cos^2 \theta}{[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]^2} \right\},\end{aligned}\tag{3.85}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial y^4} = -\frac{4e_i}{r^2} \left\{ \frac{d_i (d_i^2 + e_i^2)}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} + \frac{\cos \theta [d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \sin \theta]}{[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta]^2} \right\}. \quad (3.86)$$

Como pode ser visto, as derivadas de R_i e S_i apresentam singularidades fracas ($\log r$), singularidades fortes ($1/r$), e hipersingularidades ($1/r^2$) que precisarão de uma atenção especial durante sua integração.

3.4 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno para flexão em placas anisotrópicas

Como pôde ser visto nas equações (3.28) e (3.29), há integrais de domínio na formulação devido a carga distribuída no domínio. Estas integrais podem ser calculadas no domínio por integração direta na área Ω_g (ver Figura 1). Contudo, a formulação dos elementos de contorno perde seu principal atrativo que é a discretização somente do contorno. Neste trabalho, as integrais de domínio, oriundas das cargas distribuídas, são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata, (PAIVA, 1987).

Considere a placa da Figura 1, sob o carregamento g , aplicado em uma área Ω_g . Assumindo que o carregamento g tem uma distribuição linear ($Ax + By + C$) na área Ω_g , a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Omega_g} (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (3.87)$$

ou

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (3.88)$$

onde r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ_g .

Definindo F^* como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho, \quad (3.89)$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \quad (3.90)$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figura 9), a relação entre o comprimento do arco $rd\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno $d\Gamma$, pode ser escrito como:

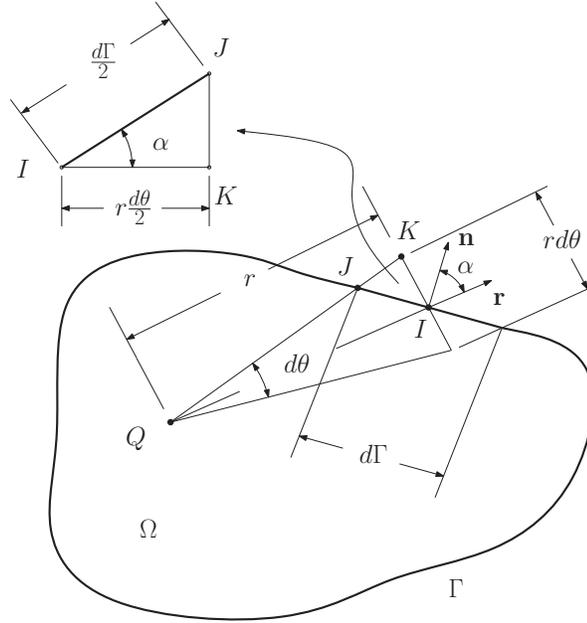


Figura 9: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \quad (3.91)$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma. \quad (3.92)$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{r} , indicados na Figura 9, pode-se escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma. \quad (3.93)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.93) na equação (3.90), a integral de domínio da equação (3.28) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma. \quad (3.94)$$

Sabendo que

$$x = \rho \cos \theta, \quad (3.95)$$

e

$$y = \rho \sin \theta, \quad (3.96)$$

a integral F^* pode ser escrita como:

$$F^* = \int_0^r \frac{1}{8\pi} (A\rho \cos \theta + B\rho \sin \theta + C) [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] \rho d\rho, \quad (3.97)$$

onde C_1 , C_2 e C_3 são dados pelas equações (3.35), (3.36) e (3.37), respectivamente. A equação (3.97) pode ser reescrita como:

$$F^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho + C \int_0^r \rho [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho \right\}. \quad (3.98)$$

Seguindo um procedimento similar para obter a equação (3.98), o termo de domínio da equação (3.29) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Omega = \int_{\theta} G^* d\theta, \quad (3.99)$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial w^*}{\partial m} \rho d\rho, \quad (3.100)$$

ou

$$\begin{aligned} G^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 \left[C_1 \frac{\partial R_1}{\partial m} + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial m} \right. \right. \\ \left. \left. + C_3 \left(\frac{\partial S_1}{\partial m} - \frac{\partial S_2}{\partial m} \right) \right] d\rho + C \int_0^r \rho \left[C_1 \frac{\partial R_1}{\partial m} + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial m} + C_3 \left(\frac{\partial S_1}{\partial m} - \frac{\partial S_2}{\partial m} \right) \right] d\rho \right\}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Como pode ser visto, as equações (3.98) e (3.101) não são dependentes de θ . Por integração analítica, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \int_0^r R_i \rho d\rho = \frac{r^4}{16} \left\{ -16e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right. \\ \left. - \left[-7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ \left. \times [-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \int_0^r S_i \rho d\rho = \frac{r^4}{16} \left\{ 2e_i \left[-7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ \left. \times \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) + 2 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left[1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \sin 2\theta \right] \Bigg\}, \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \int_0^r R_i \rho^2 d\rho &= \frac{r^5}{50} \left\{ -40e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. - \left[-17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \sin 2\theta \right] \right\}, \quad (3.104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r S_i \rho^2 d\rho &= \frac{r^5}{50} \left\{ 2e_i \left[-17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) + 5 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \sin 2\theta \right] \right\}, \quad (3.105) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho d\rho &= \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \left[-8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (3.106) \end{aligned}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \right.$$

$$+ \left[-8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \left[d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta \right] \Bigg\}, \quad (3.107)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho d\rho = \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[-8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \sin \theta \right. \\ \left. + 6 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (3.108)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[-8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ \left. \times (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) - 6 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \left[d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta \right] \right\}, \quad (3.109)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta \right. \\ \left. + \left[-5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (3.110)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \right. \\ \left. + \left[-5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \left[d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta \right] \right\}, \quad (3.111)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[-5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \sin \theta \right. \\ \left. + 4 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (3.112)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[-5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ \left. \times (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) + 4 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}. \quad (3.113)$$

Para casos onde o carregamento g é diferente de uma carga linearmente distribuída, o mesmo procedimento pode ser aplicado, porém integrando F^* numericamente. Por exemplo, caso se tenha $g = \sin(\pi x)$ a integral (3.89) é escrita como $F^* = \int_0^r \sin(\pi x) w^* \rho d\rho$ que, neste trabalho, é integrada numericamente.

3.5 Elementos Quadráticos

Como enfatizado por Kane (1994), o passo fundamental para o desenvolvimento do método dos elementos de contorno é o abandono da aspiração por uma solução exata do problema. Este requisito é substituído por outra estratégia: encontrar uma solução aproximada de alta qualidade em um número finito de pontos no contorno do problema, os nós. Assim, visando aumentar a convergência dos resultados para a formulação apresentada aqui, foram implementados os elementos quadráticos, os quais são os mais simples elementos de contorno curvo. Neste trabalho são usados os elementos quadráticos descontínuos para representar os elementos físicos e os elementos quadráticos contínuos para representar os elementos geométricos.

Nos elementos quadráticos, os deslocamentos e forças podem ser representados como:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{(1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(2)} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (3.114)$$

$$\begin{Bmatrix} V_n \\ M_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n^{(1)} \\ M_{nn}^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ M_{nn}^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ M_{nn}^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (3.115)$$

onde $N_d^{(i)}$ são as funções de interpolação, ou funções de forma, descontínuas dadas por:

$$N_d^{(1)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right); \quad (3.116)$$

$$N_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left(1 + \frac{3}{2}\xi \right); \quad (3.117)$$

$$N_d^{(3)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \quad (3.118)$$

ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 10). E $w^{(i)}$, $\frac{\partial w}{\partial n}^{(i)}$, $V_n^{(i)}$ e $M_{nn}^{(i)}$ são os deslocamentos transversais, as rotações, as forças transversais e os momentos em cada nó dos elementos, respectivamente.

Nos elementos quadráticos descontínuos, os nós são colocados em $\xi = -2/3$, $\xi = 0$ e $\xi = +2/3$, como mostrado na Figura 10).

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

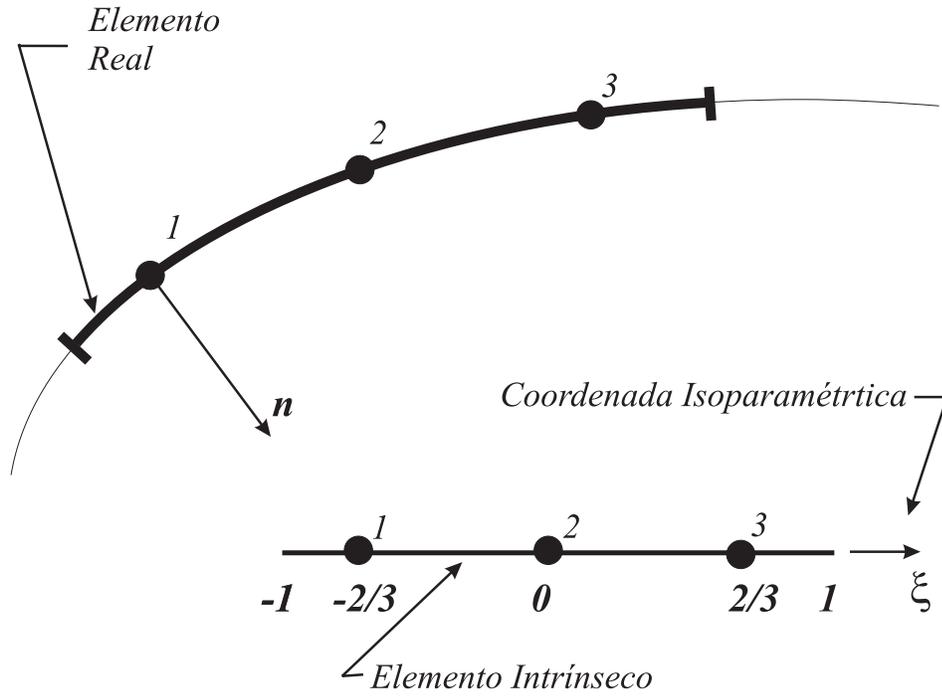


Figura 10: Elemento quadrático descontínuo, (TORSANI, 2007).

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} & 0 \\ 0 & N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (3.119)$$

onde $N_c^{(i)}$ são as funções de interpolação para elementos quadráticos contínuos, dadas por:

$$N_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad (3.120)$$

$$N_c^{(2)} = (1 - \xi^2); \quad (3.121)$$

$$N_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad (3.122)$$

$x^{(i)}, y^{(i)}$ são as coordenadas de cada nó.

3.6 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno Γ é discretizado em N_e elementos e as variáveis de contorno w , $\partial w/\partial n$, M_{nn} e V_n são assumidas com uma variação quadrática ao longo de cada elemento. Tomando um nó d como o ponto fonte, as equações (3.28) e (3.29) podem ser escritas, na forma matricial, como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w^{(d)} \\ \frac{\partial w}{\partial m}^{(d)} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_e} \begin{bmatrix} h_{11}^{(i,d)} & h_{12}^{(i,d)} & h_{13}^{(i,d)} & h_{14}^{(i,d)} & h_{15}^{(i,d)} & h_{16}^{(i,d)} \\ h_{21}^{(i,d)} & h_{22}^{(i,d)} & h_{23}^{(i,d)} & h_{24}^{(i,d)} & h_{25}^{(i,d)} & h_{26}^{(i,d)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,1)} \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,3)} \end{Bmatrix} \\
= \sum_{i=1}^{N_e} \begin{bmatrix} g_{11}^{(i,d)} & g_{12}^{(i,d)} & g_{13}^{(i,d)} & g_{14}^{(i,d)} & g_{15}^{(i,d)} & g_{16}^{(i,d)} \\ g_{21}^{(i,d)} & g_{22}^{(i,d)} & g_{23}^{(i,d)} & g_{24}^{(i,d)} & g_{25}^{(i,d)} & g_{26}^{(i,d)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n^{(i,1)} \\ M_{nn}^{(i,1)} \\ V_n^{(i,2)} \\ M_{nn}^{(i,2)} \\ V_n^{(i,3)} \\ M_{nn}^{(i,3)} \end{Bmatrix} \\
+ \sum_{i=1}^{N_c} \left(\begin{Bmatrix} R_1^{(i,d)} \\ R_2^{(i,d)} \end{Bmatrix} w_c^{(i)} \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \left(\begin{Bmatrix} c_1^{(i,d)} \\ c_2^{(i,d)} \end{Bmatrix} R_c^{(i)} \right) + \begin{Bmatrix} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{Bmatrix}. \quad (3.123)
\end{aligned}$$

Os termos da equação (3.123) são integrais dadas por:

$$h_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} M_{nn}^* d\Gamma, \quad (3.124)$$

$$h_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{14}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} M_{nn}^* d\Gamma, \quad (3.125)$$

$$h_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{16}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} M_{nn}^* d\Gamma, \quad (3.126)$$

$$h_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} d\Gamma, \quad h_{22}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, \quad (3.127)$$

$$h_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} d\Gamma, \quad h_{24}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, \quad (3.128)$$

$$h_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} d\Gamma, \quad h_{26}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, \quad (3.129)$$

$$g_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} w^* d\Gamma, \quad g_{12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.130)$$

$$g_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} w^* d\Gamma, \quad g_{14}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.131)$$

$$g_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} w^* d\Gamma, \quad g_{16}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.132)$$

$$g_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, \quad g_{22}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.133)$$

$$g_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, \quad g_{24}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.134)$$

$$g_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, \quad g_{26}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.135)$$

$$c_1^{(i,d)} = w_{ci}^*, \quad c_2^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}, \quad (3.136)$$

$$R_1^{(i,d)} = R_{ci}^*, \quad R_2^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}, \quad (3.137)$$

$$P_1^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \quad P_2^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial m} d\Omega. \quad (3.138)$$

sendo o contorno Γ dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e, \quad (3.139)$$

onde N_e é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (3.123) requer o uso do Jacobiano já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional mas as integrais são resolvidas ao longo do contorno Γ_e . O Jacobiano desta transformação é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\xi}. \quad (3.140)$$

Assim:

$$d\Gamma_e = J(\xi)d\xi. \quad (3.141)$$

A equação matricial (3.123) tem duas equações e $6N_e + N_c$ variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear solucionável, o ponto fonte é colocado sucessivamente em cada nó do contorno ($d = 1, \dots, 3N_e$) bem como em cada nó de canto ($d = 3N_e + 1, \dots, 3N_e + N_c$). É importante notar que enquanto ambas as equações, (3.28) e (3.29), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras $6N_e$ equações), somente a equação (3.28) é usada para cada canto (fornecendo outras N_c equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}, \quad (3.142)$$

onde \mathbf{w}_{bn} contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno, \mathbf{V}_{bn} contém a força cisalhante e o momento torsor de cada nó de contorno, \mathbf{P}_{bn} contém a integral de domínio para cada nó de contorno, \mathbf{w}_c contém o deslocamento transversal de cada canto, \mathbf{V}_c contém a reação de canto para cada canto, \mathbf{P}_c contém a integral de domínio para cada canto. Os termos \mathbf{H}' , \mathbf{C}' , \mathbf{R}' e \mathbf{G}' são matrizes que contém os respectivos termos da equação (3.123) escritos para os $3 N_e$ nós de contorno. Os termos \mathbf{H}'' , \mathbf{C}'' , \mathbf{R}'' e \mathbf{G}'' são matrizes que contém os respectivos primeiros termos lineares da equação (3.123) escrita para os N_c cantos.

A equação (3.142) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{V} + \mathbf{P}, \quad (3.143)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix}, \quad (3.144)$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix}, \quad (3.145)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix}, \quad (3.146)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix}, \quad (3.147)$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}. \quad (3.148)$$

Aplicando as condições de contorno, a equação (3.142) pode ser rearranjada como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.149)$$

que pode ser resolvida pelo procedimento padrão para sistemas lineares.

3.7 Tensões em placas compósitas laminadas

As lâminas de um material compósito formado por fibras unidirecionais apresentam um comportamento anisotrópico bem definido, cujas propriedades variam com as direções porém permanecem constantes em uma dada direção. Assim, a resistência na direção longitudinal às fibras será a mesma por toda a lâmina, bem como a resistência na direção perpendicular às fibras e na direção normal à lâmina. Essa característica permite que o fabricante tenha controle sobre as propriedades da lâmina através de poucas variáveis. Quando várias lâminas

unidirecionais são unidas para formar um laminado, surgem outras variáveis, como o número de lâminas e o ângulo das fibras de cada lâmina. O comportamento elástico de cada lâmina pode ser completamente distinto uma das outras.

3.7.1 Tensão e deformação de placas compósitas laminadas

Os laminados são fabricados para agir como um elemento estrutural único. Para atender a essa condição, a união entre duas lâminas do laminado deve ser infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento para que o deslizamento de umas lâminas sobre outras seja evitado, e para permitir o deslocamento contínuo ao longo da união (AGARWAL; BROUTMAN, 1990). Assim, pode-se considerar que as deformações são contínuas ao longo da espessura. Contudo, como as lâminas tem propriedades diferentes, as tensões apresentam descontinuidades ao longo das interfaces do laminado, como mostrado na Figura 11.

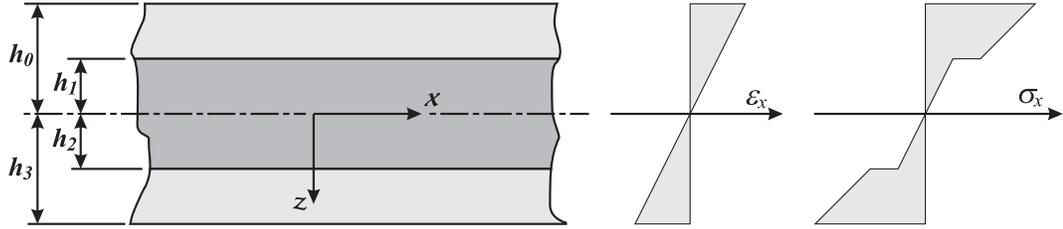


Figura 11: Variação da deformação e da tensão em um laminado simétrico hipotético, (TORSANI, 2007).

Para obter as deformações (2.21), os momentos (2.32) e as tensões (2.23) nas placas de Kirchhoff, as derivadas segundas da equação integral (3.28) precisam ser calculadas. Para um ponto no interior do domínio, essas derivadas são dados por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x^2} &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2}(Q, P) w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x^2}(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q, P) w_{c_i}(P) \\
&\quad - \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x^2}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q, P) \\
&\quad + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q, P) d\Omega. \tag{3.150}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial y^2} &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial y^2}(Q, P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial y^2}(Q, P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q, P)w_{c_i}(P) \\
&\quad - \int_{\Gamma} \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q, P) - M_{nn}(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial y^2}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q, P) \\
&\quad + \int_{\Omega} g(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q, P)d\Omega. \tag{3.151}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x \partial y} &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x \partial y}(Q, P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x \partial y}(Q, P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x \partial y}(Q, P)w_{c_i}(P) \\
&\quad - \int_{\Gamma} \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q, P) - M_{nn}(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x \partial y}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial x \partial y}(Q, P) \\
&\quad + \int_{\Omega} g(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q, P)d\Omega. \tag{3.152}
\end{aligned}$$

onde as segundas derivadas das soluções fundamentais são dadas por:

$$\frac{\partial^2 w^*(\rho, \theta)}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi} \left\{ C_1 \frac{\partial^2 R_1(\rho, \theta)}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2(\rho, \theta)}{\partial x^2} + C_3 \left[\frac{\partial^2 S_1(\rho, \theta)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2(\rho, \theta)}{\partial x^2} \right] \right\}, \tag{3.153}$$

sendo que C_1 , C_2 e C_3 são dados pelas equações (3.35), (3.36) e (3.37), respectivamente; ρ é dado pela equação (3.33) e θ é dado pela equação (3.34).

As outras derivadas da solução fundamental são dadas por:

$$\frac{\partial^2 M_{nn}^*}{\partial x^2} = - \left(f_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + f_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + f_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \tag{3.154}$$

$$\frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2} = - \left(g_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + g_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + g_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \tag{3.155}$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2} = - \left(h_1 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^5} + h_2 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^4 \partial y} + h_3 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^3 \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^2 \partial y^3} \right)$$

$$-\frac{1}{R} \left(h_5 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + h_6 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + h_7 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right). \quad (3.156)$$

As derivadas para y e xy são dadas por procedimentos similares. Todas as derivadas das soluções fundamentais do deslocamento transversal w podem ser expressas pela combinação linear das derivadas de R_i e S_i . Todas as derivadas de R_i e S_i até a 4ª ordem são dadas pelas equações de (3.59) até (3.86). As derivadas de 5ª ordem são dadas por:

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^5} = \frac{8(\cos \theta + d_i \sin \theta) [\cos^2 \theta + (d_i^2 - 3e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (3.157)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 R_i}{\partial x^4 \partial y} = & \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{d_i \cos^3 \theta + 3(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. + \frac{3d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 R_i}{\partial x^3 \partial y^2} = & \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{(d_i^2 - e_i^2) \cos^3 \theta + 3d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. + \frac{3(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + d_i (d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 R_i}{\partial x^2 \partial y^3} = & \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos^3 \theta + 3(d_i^4 - e_i^4) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. + \frac{3d_i (d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (3.160)$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x \partial y^4} = \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{(d_i^4 - 6e_i^2 d_i^2 + e_i^4) \cos^3 \theta + 3d_i (d_i^4 - 2e_i^2 d_i^2 - 3e_i^4) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} + \frac{3(d_i^2 - e_i^2)(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + d_i (d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \quad (3.161)$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial y^5} = \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{d_i (d_i^4 - 10e_i^2 d_i^2 + 5e_i^4) \cos^3 \theta + 3(d_i^6 - 5e_i^2 d_i^4 - 5e_i^4 d_i^2 + e_i^6) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} + \frac{3d_i (d_i^2 - 3e_i^2)(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2)(d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \quad (3.162)$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^5} = \frac{4e_i \sin \theta [-3 \cos^2 \theta - 6d_i \sin \theta \cos \theta + (e_i^2 - 3d_i^2) \sin^2 \theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (3.163)$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^4 \partial y} = \frac{4e_i [\cos^3 \theta - 3(d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta \cos \theta - 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin^3 \theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (3.164)$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{4e_i [2d_i \cos^3 \theta + 3(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta - (d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^3 \theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (3.165)$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{4e_i \cos \theta}{R^3} \left\{ \frac{(3d_i^2 - e_i^2) \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} + \frac{3(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta [2d_i \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta]}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 S_i}{\partial x \partial y^4} = & \frac{4e_i}{R^3} \left\{ \frac{4d_i(d_i - e_i)(d_i + e_i) \cos^3 \theta + 3(3d_i^2 - e_i^2)(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. + \frac{6d_i(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 S_i}{\partial y^5} = & \frac{4e_i}{R^3} \left\{ \frac{(5d_i^4 - 10e_i^2 d_i^2 + e_i^4) \cos^3 \theta + 12d_i(d_i^4 - e_i^4) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. - \frac{3(e_i^2 - 3d_i^2)(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + 2d_i(d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}. \end{aligned} \quad (3.168)$$

O último termo da equação (3.150) pode ser transformado de uma integral de domínio para uma integral de contorno, seguindo um processo similar ao procedimento mostrado na seção 3.4. Então:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\theta} H^* d\theta, \quad (3.169)$$

onde

$$H^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \rho d\rho, \quad (3.170)$$

ou

$$\begin{aligned} H^* = & \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 \left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho \right. \\ & \left. + C \int_0^r \rho \left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho \right\}, \end{aligned} \quad (3.171)$$

As integrais das segundas derivadas de R_i e S_i que aparecem na equação (3.171), tanto as multiplicadas por ρ quanto por ρ^2 , podem ser resolvidas analiticamente e são dadas por:

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} \rho d\rho = r^2 \left\{ \log \left[\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] - 1 \right\}, \quad (3.172)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} r^3 \left\{ 3 \log \left[\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] - 2 \right\}, \quad (3.173)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} \rho d\rho = r^2 \arctan \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right], \quad (3.174)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} r^3 \arctan \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right], \quad (3.175)$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} \rho d\rho &= r^2 \left\{ (d_i^2 - e_i^2) \left[\log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. - 4d_i e_i \tan^{-1} \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.176)$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} \rho^2 d\rho &= \frac{2}{9} r^3 \left\{ (d_i^2 - e_i^2) \left[3 \log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 12d_i e_i \tan^{-1} \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.177)$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} \rho d\rho &= r^2 \left\{ (d_i^2 - e_i^2) \arctan \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right. \\ &\quad \left. + d_i e_i \left[\log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.178)$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} \rho^2 d\rho &= \frac{2}{9} r^3 \left\{ 3 (d_i^2 - e_i^2) \arctan \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right. \\ &\quad \left. + d_i e_i \left[3 \log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.179)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} \rho d\rho = r^2 \left\{ d_i \left[\log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right\}$$

$$-2e_i \tan^{-1} \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \}, \quad (3.180)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} r^3 \left\{ 6e_i \tan^{-1} \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] + d_i \left[2 - 3 \log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) \right] \right\}, \quad (3.181)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} \rho d\rho = \frac{1}{2} r^2 \left\{ 2d_i \arctan \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] + e_i \left[\log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (3.182)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} \rho^2 d\rho = \frac{1}{9} r^3 \left\{ 6d_i \arctan \left[\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] + e_i \left[3 \log \left(\frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 2 \right] \right\}. \quad (3.183)$$

As tensões são então calculadas usando o procedimento apresentado na seção 2.3.

3.7.2 Cálculo das tensões no contorno

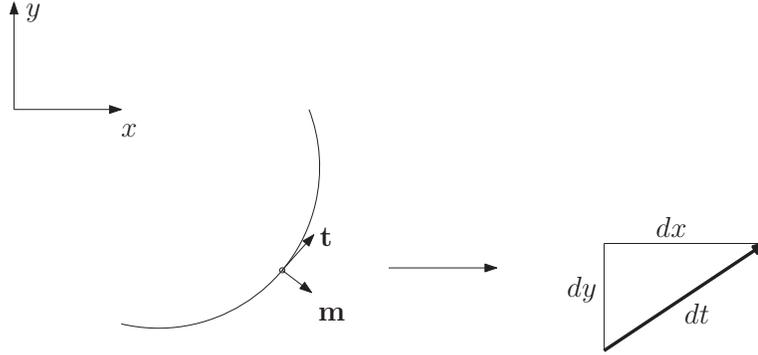


Figura 12: Direções normal m e tangencial t no ponto fonte.

Para calcular as tensões no contorno, será apresentada uma abordagem alternativa.

A derivada da equação (3.28) na direção tangencial no ponto fonte, que é um nó no

contorno (Figura 12), é dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial t} w - \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \right) + \sum \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial t} w_{ci} \\ &= \int_{\Gamma} \left(V_n \frac{\partial w^*}{\partial t} - M_{nn} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial t} \right) d\Gamma + \sum R_{ci} \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial t} + \int_{\Omega} g \frac{\partial w^*}{\partial t} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.184)$$

E na direção normal ao ponto fonte tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m} w - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \right) + \sum \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m} w_{ci} \\ &= \int_{\Gamma} \left(V_n \frac{\partial w^*}{\partial m} - M_n \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial m} \right) d\Gamma + \sum R_{ci} \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m} + \int_{\Omega} g \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.185)$$

No interior de um elemento de contorno quadrático, a derivada direcional do deslocamento transversal na direção tangencial é dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = N_d^{(1)} \frac{\partial w_1}{\partial t} + N_d^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial t} + N_d^{(3)} \frac{\partial w_3}{\partial t}. \quad (3.186)$$

onde $\frac{\partial w_1}{\partial t}$, $\frac{\partial w_2}{\partial t}$ e $\frac{\partial w_3}{\partial t}$ são derivadas de w em nos nós de um elemento de contorno na direção tangente ao ponto fonte, $N_d^{(1)}$, $N_d^{(2)}$, e $N_d^{(3)}$ são funções de forma quadráticas descontínuas dadas pelas equações (3.116), (3.117) e (3.118).

A derivada segunda do deslocamento transversal é dada por:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{d\xi}{dt}. \quad (3.187)$$

Escrevendo $\frac{\partial w}{\partial t}$ em termos de valores nodais interpolados pelas funções de forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(N_d^{(1)} \frac{\partial w_1}{\partial t} + N_d^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial t} + N_d^{(3)} \frac{\partial w_3}{\partial t} \right) \frac{d\xi}{dt}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left(\frac{dN_d^{(1)}}{d\xi} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{dN_d^{(2)}}{d\xi} \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{dN_d^{(3)}}{d\xi} \frac{\partial w_3}{\partial t} \right) \left(1 / \frac{dt}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (3.188)$$

Seguindo um procedimento similar para $\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t}$, é possível obter:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} = \left(\frac{dN_d^{(1)}}{d\xi} \frac{\partial w_1}{\partial m} + \frac{dN_d^{(2)}}{d\xi} \frac{\partial w_2}{\partial m} + \frac{dN_d^{(3)}}{d\xi} \frac{\partial w_3}{\partial m} \right) \left(1 / \frac{dt}{d\xi} \right). \quad (3.189)$$

onde $\frac{\partial w_1}{\partial m}$, $\frac{\partial w_2}{\partial m}$, e $\frac{\partial w_3}{\partial m}$ são derivadas de w nos nós do elemento de contorno na direção normal ao ponto fonte.

Não é possível calcular $\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}$ da mesma forma que $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t}$ porque não se tem $\frac{dm}{d\xi}$.

Uma alternativa é escrever as equações do momento no sistema mt :

$$\begin{aligned} M_{mm} &= - \left(D'_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2D'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \right), \\ M_{tt} &= - \left(D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + D'_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2D'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \right), \end{aligned} \quad (3.190)$$

e

$$M_{mt} = - \left(D'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + D'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2D'_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \right). \quad (3.191)$$

onde D'_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) são os termos da matriz de rigidez no sistema nt , dado por:

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{16} \\ D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{T}^{-1})^t, \quad (3.192)$$

Neste sistema, as variáveis conhecidas são: M_{mm} , $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t}$, e as desconhecidas são: M_{tt} , M_{mt} , and $\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}$.

Escrevendo essas equações na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} M_{mm} \\ M_{tt} \\ M_{mt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{16} \\ D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \end{Bmatrix}. \quad (3.193)$$

Assim, expandindo a equação (3.193), tem-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m^2} = S'_{11} M_{mm} + S'_{12} M_{tt} + S'_{16} M_{mt},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S'_{12} M_{mm} + S'_{22} M_{tt} + S'_{26} M_{mt}, \quad (3.194)$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} = S'_{16} M_{mm} + S'_{26} M_{tt} + S'_{66} M_{mt}, \quad (3.195)$$

onde

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{D}'^{-1}. \quad (3.196)$$

Isolando as variáveis desconhecidas:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + S'_{12} M_{tt} + S'_{16} M_{mt} &= -S'_{11} M_{mm}, \\ S'_{22} M_{tt} + S'_{26} M_{mt} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S'_{12} M_{mm}, \end{aligned} \quad (3.197)$$

e

$$S'_{26} M_{tt} + S'_{66} M_{mt} = \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} - S'_{16} M_{mm}, \quad (3.198)$$

que pode ser escrita na forma de matrix, como:

$$\begin{bmatrix} -1 & S'_{12} & S'_{16} \\ 0 & S'_{22} & S'_{26} \\ 0 & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} \\ M_{tt} \\ M_{mt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -S'_{11} M_{mm} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S'_{12} M_{mm} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} - S'_{16} M_{mm} \end{Bmatrix}. \quad (3.199)$$

As variáveis desconhecidas $\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}$, M_{tt} e M_{mt} podem ser calculadas resolvendo o sistema linear (3.199). Uma vez que se tem $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial n}$, pode-se calcular $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ pela transformação de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \end{Bmatrix}. \quad (3.200)$$

3.8 Exemplos numéricos

3.8.1 Exemplo 1

Considere uma placa quadrada de material compósito de grafite-epóxi com todos os lados engastados e sob um carregamento uniformemente distribuído de intensidade g . A aresta da placa tem comprimento $a = 1$ m. O laminado é simétrico e tem nove lâminas com os seguintes ângulos $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. A soma das espessuras das lâminas a 0° é igual a soma das espessuras a 90° . A espessura total é $t = 0,001$ m e as propriedades do material são: $E_L = 207$ GPa, $E_T = 5,2$ GPa, $G_{LT} = 3,1$ GPa, e $\nu_{LT} = 0,25$. A placa foi discretizada usando 12 elementos quadráticos descontínuos, como mostrado na Figura 13. O deslocamento no ponto A e o momento no ponto B , mostrado na Figura 13, são comparados com resultados de elementos finitos obtidos por Lakshminarayana e Murthy (1984). Como pode ser visto na Tabela 1, a concordância entre a formulação de elementos de contorno para placas finas e a formulação de elementos finitos para placas deformáveis por cisalhamento (placas espessas) é muito boa para o deslocamento e para o momento.

A Figura 14 mostra a distribuição de tensões σ_x no ponto B ao longo da espessura da placa, do plano médio até o topo da superfície. Pode ser visto que, como a rigidez do material é maior na direção das fibras, a tensão é maior na lâmina com fibras orientadas paralelas ao eixo x ($\theta = 0^\circ$).

Tabela 1: Deslocamentos e momentos na placa com todos os lados engastados.

Nó		MEC	Referência	Diferença [%]
A	$\frac{wE_T t^3}{(ga^4) \times 10^3}$	0.9544	0.9494	0.53
B	$\frac{M_{xx}}{(ga^2) \times 10^2}$	-6.6392	-6.6019	0.57

3.8.2 Exemplo 2

Considere o mesmo laminado da seção anterior, porém com lâminas de orientação $[+\alpha/-\alpha/+ \alpha/- \alpha/+ \alpha/- \alpha/+ \alpha/- \alpha/+ \alpha]$ com $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$. A malha usada é a mesma do exemplo anterior (Figura 13). Todos os lados estão simplesmente apoiados e todas as camadas tem a mesma espessura. As Figuras 15 e 16 mostram o efeito da variação de α nos deslocamentos e nos momentos resultantes, respectivamente, no centro da placa (ponto

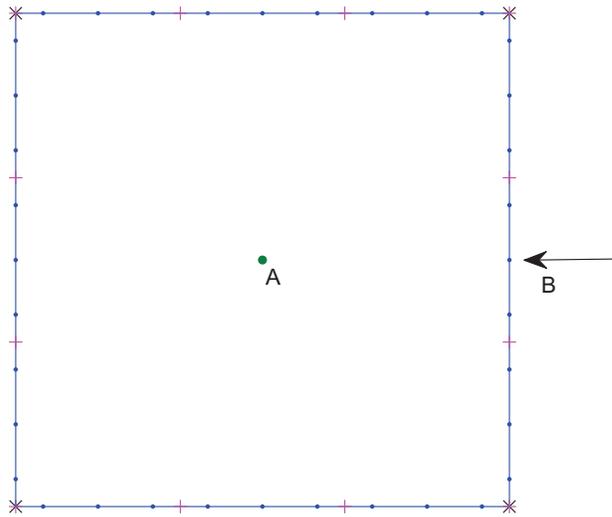


Figura 13: Discretização da placa quadrada usando 3 elementos descontínuos por lado.

A). Eles são comparados com resultados de elementos finitos obtidos por Lakshminarayana e Murthy (1984). Pode ser observado que em ambos os casos a concordância é muito boa entre a formulação de elementos de contorno para placas finas e a formulação de elementos finitos para placas espessas. A Figura 17 mostra a distribuição de tensão (σ_x) ao longo da espessura da placa considerando $\alpha = 45^\circ$. Neste caso como todas as camadas apresentam fibras inclinadas em relação ao eixo x , a variação da tensão entre as camadas são menores que no caso anterior.

3.8.3 Exemplo 3

O terceiro exemplo é uma placa quadrada engastada com os lados de comprimento $a = 0,254$ m e a razão entre a espessura e o comprimento dos lados é $t/a = 0,05$. A placa está sujeita a uma carga estática uniformemente distribuída g . As propriedades do material usado na

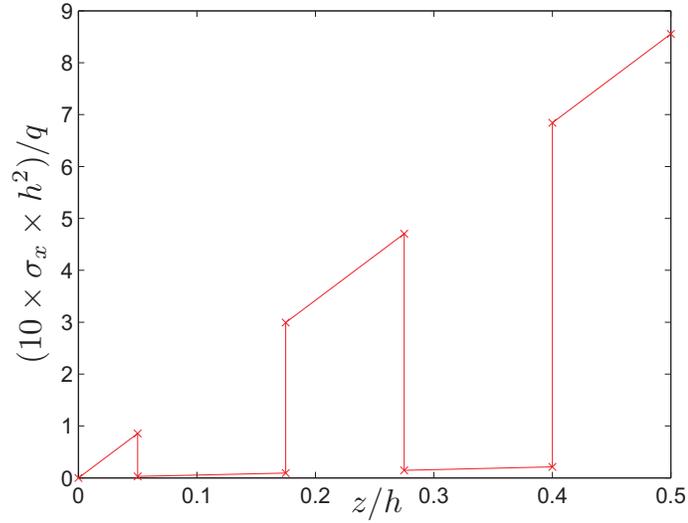


Figura 14: Distribuição de tensão (σ_x) ao longo da espessura do laminado no ponto B.

análise numérica são: $E_T = 6,895$ GPa, $E_L = 2E_T$, $\nu_{LT} = 0,3$, and $G_{LT} = E_T/2(1 + \nu_{LT})$. A malha usada é a mesma do primeiro exemplo (Figure 13). Pode ser observado que, existe uma perfeita concordância entre ambos os resultados. Como em Sladek et al. (2006), momentos fletores são normalizados pelo valor do momento fletor central em uma placa isotrópica $M_x^{(iso)}(a/2) = 3064$ Nm/m. A Figura 18 mostra a variação do momento fletor M_x ao longo da linha central da placa $y = a/2$.

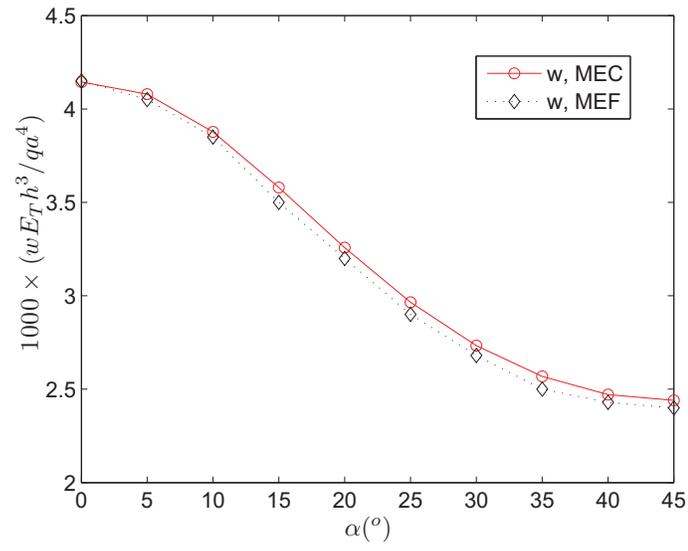


Figura 15: Efeito da orientação α no deslocamento transversal no centro da placa.

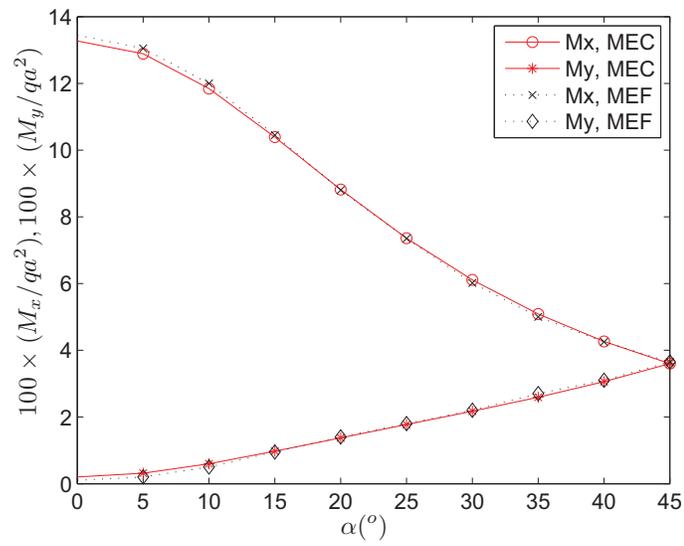


Figura 16: Efeito da orientação α nos momentos M_x e M_y no centro da placa.

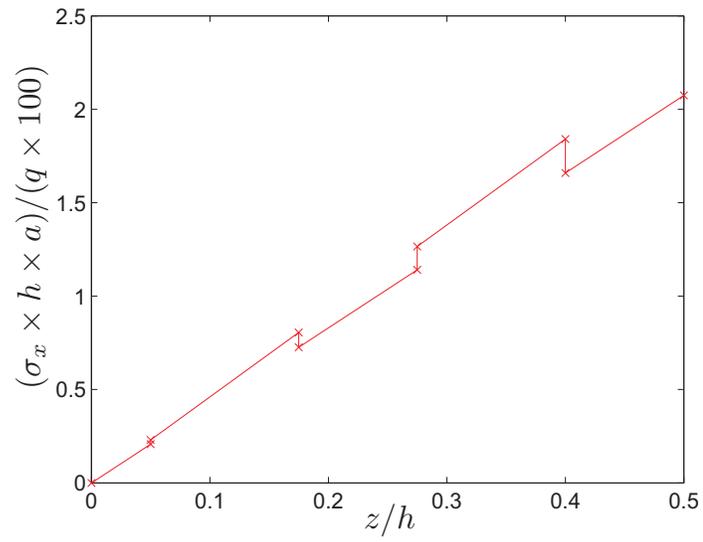


Figura 17: Distribuição de tensão σ_x ao longo da espessura para $\alpha = 45^\circ$ no ponto central da placa.

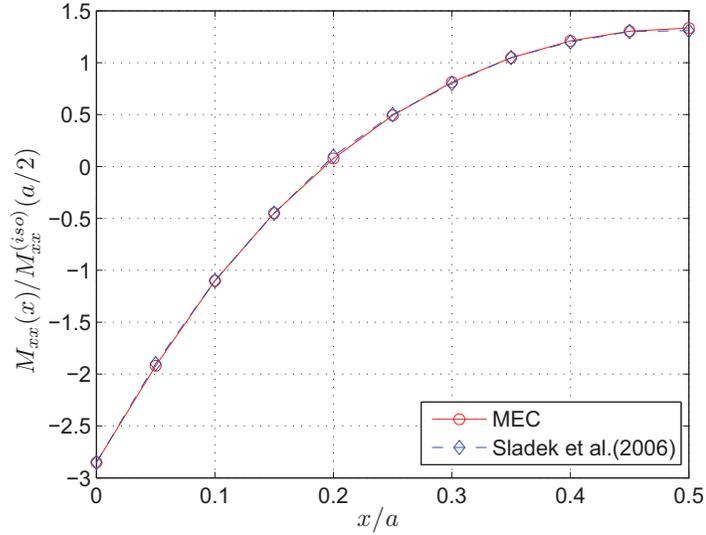


Figura 18: Variação do momento fletor ao longo de $(x, a/2)$ para uma placa quadrada engastada.

3.8.4 Exemplo 4

Considere uma placa laminada quadrada com todos os lados simplesmente apoiado, e com as seguintes propriedades: $E_L = 25$ MPa; $E_T = 1$ MPa; $G_{LT} = 0,5$ MPa; $G_{TT} = 0,2$ MPa; $\nu_{LT} = 0,25$. Foram usados dois elementos quadráticos descontínuos por lado na discretização da placa. Será analisado quatro placas com três, cinco, sete e nove camadas com um carregamento senoidal $g = g_o \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$. Todos os laminados são simétricos, com as fibras orientadas alternadamente entre $[0^\circ/90^\circ]$ com o eixo x . A soma das espessuras da lâmina a 0° é igual a soma das espessuras a 90° (PAGANO; HATFIELD, 1972). A Tabela 2 mostra os resultados para a tensão na direção do eixo x ($\hat{\sigma}_x$), a tensão na direção do eixo y ($\hat{\sigma}_y$) e o deslocamento transversal \hat{w} , no centro da placa. Onde $\hat{w} = w\pi^4 Q/(12g_o t S^4)$, $Q = 4G_{LT} + \{E_L + E_T(1 + 2\nu_{LT})\}/(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$, e $(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y) = (1/(g_o S^2))(\sigma_x, \sigma_y)$. Houve uma boa concordância entre os resultados deste trabalho e a solução exata para a teoria clássica.

Tabela 2: Tensões e deslocamento transversal no centro da placa.

camadas		MEC	ref.	Diferença [%]
3	\hat{w}	1,00	1,00	0,0
	$\hat{\sigma}_x$	0,541	0,539	0,37
	$\hat{\sigma}_y$	0,270	0,269	0,37
5	\hat{w}	1,00	1,00	0,0
	$\hat{\sigma}_x$	0,542	0,539	0,55
	$\hat{\sigma}_y$	0,361	0,359	0,56
7	\hat{w}	1,00	1,00	0,0
	$\hat{\sigma}_x$	0,543	0,539	0,74
	$\hat{\sigma}_y$	0,406	0,404	0,50
9	\hat{w}	1,00	1,00	0,0
	$\hat{\sigma}_x$	0,543	0,539	0,74
	$\hat{\sigma}_y$	0,434	0,431	0,70

ref.:(PAGANO; HATFIELD, 1972)

3.8.5 Exemplo 5

Considere agora uma placa laminada retangular, $b = 3a$ de três camadas $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ simplesmente apoiado com as espessuras iguais $t/3$, Figura 19, com as mesmas propriedades do exemplo anterior (PANDA; NATARAJAN, 1979). A Tabela 3 mostra os resultados para a tensão no eixo x ($\hat{\sigma}_x$), a tensão no eixo y ($\hat{\sigma}_y$) e o deslocamento transversal \hat{w} , no centro da placa. O laminado foi discretizado com 2 elementos quadráticos descontínuos nos lados menores e 6 nos lados maiores. Os resultados são normalizados da seguinte forma: $\hat{w} = w \times 100E_L/(g_0tS^4)$, e $(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y) = (1/(g_0S^2))(\sigma_x, \sigma_y)$. Pode-se observar uma perfeita concordância entre os resultados.

Tabela 3: Tensões e deslocamento transversal no centro da placa retangular.

	MEC	ref.	Diferença [%]
\hat{w}	0,503	0,503	0,0
$\hat{\sigma}_x$	0,623	0,623	0,0
$\hat{\sigma}_y$	0,0254	0,0252	0,8

ref.:(PANDA; NATARAJAN, 1979)

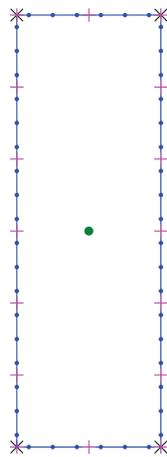


Figura 19: Placa laminada retangular, $b = 3a$.

4 *Equações Integrais para Flexão em Placas Usando Uma Formulação de Três Parâmetros*

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma formulação alternativa para a teoria clássica na qual se usa 3 equações integrais, ao invés de 2, conforme apresentado no capítulo 3. As três equações integrais nesta formulação são: uma equação de deslocamento e duas equações adicionais obtidas das derivadas direcionais no ponto fonte nas direções normal e tangencial, (USECHE, 2007). Esta formulação considera três graus de liberdade, duas rotações e uma deflexão, para cada nó no contorno. Mas, de acordo com a teoria de Kirchhoff, somente dois valores nodais são usados para calcular os esforços, que são o momento M_{nn} e a força de cisalhamento Q_n (PAIVA; NETO, 1995). A formulação de Kirchhoff tem duas variáveis w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ (uma deflexão e uma rotação) em cada ponto e a placa de Reissner tem três variáveis: w , $\frac{\partial w}{\partial n}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$ (uma deflexão e duas rotações). Ou seja, a formulação de Reissner e a formulação de Kirchhoff são cinematicamente incompatíveis. Já a formulação de três parâmetros torna as duas formulações, Reissner e Kirchhoff, cinematicamente compatíveis. Esta formulação é baseada no trabalho de Neto e Paiva (2005) que apresentaram uma formulação para o método dos elementos de contorno para a análise de placas segundo a teoria clássica, onde as equações integrais do deslocamento transversal e de suas derivadas normal e tangencial ao contorno são usadas no sentido de possibilitar uma melhor análise de placas isoladas ou em associação com outros elementos estruturais, como vigas e pilares.

4.2 Equações integrais de contorno

Usando a equação (2.34) e o teorema de reciprocidade de Betti, pode-se relacionar dois estados de tensão e deformação em uma placa que atenda a teoria de Kirchhoff,

$$\int_w \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dw = - \int_{\Gamma} \left(M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) d\Gamma + \int_w g w^* dw, \quad (4.1)$$

$$\int_w \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dw = - \int_{\Gamma} \left(M_{nn}^* \frac{\partial w}{\partial n} + M_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s} - Q_n^* w \right) d\Gamma + \int_w g^* w dw. \quad (4.2)$$

Considerando que na teoria de Kirchhoff $M_{ns} = 0$, igualando as equações (4.1) e (4.2) e fazendo $g^* = \delta(x - x_0)$ e $g = 0$, pode-se escrever:

$$w(x) + \int_{\Gamma} \left(Q_n^* w - M_{nn}^* \frac{\partial w}{\partial n} - M_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(Q_n w^* - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (4.3)$$

A derivada direcional da equação (4.3) num ponto fonte no contorno na direção normal m é dado por:

$$\frac{\partial w}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q_n^*}{\partial m} w - \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(Q_n \frac{\partial w^*}{\partial m} - M_{nn} \frac{\partial^2 w^*}{\partial m \partial n} \right) d\Gamma. \quad (4.4)$$

E a derivada direcional da equação (4.3) num ponto fonte no contorno na direção tangencial t é dado por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q_n^*}{\partial t} w - \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial s} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(Q_n \frac{\partial w^*}{\partial t} - M_{nn} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial t} \right) d\Gamma. \quad (4.5)$$

Os deslocamentos e forças podem ser representados como:

$$\begin{pmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & 0 & N_d^{(2)} & 0 & 0 & N_d^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & 0 & N_d^{(2)} & 0 & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & N_d^{(1)} & 0 & 0 & N_d^{(2)} & 0 & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial n} \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial s} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w^{(2)}}{\partial n} \\ \frac{\partial w^{(2)}}{\partial s} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w^{(3)}}{\partial n} \\ \frac{\partial w^{(3)}}{\partial s} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\begin{pmatrix} Q_n \\ M_{nn} \\ M_{ns} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & 0 & N_d^{(2)} & 0 & 0 & N_d^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & 0 & N_d^{(2)} & 0 & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & N_d^{(1)} & 0 & 0 & N_d^{(2)} & 0 & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_n^{(1)} \\ M_{nn}^{(1)} \\ M_{ns}^{(1)} \\ Q_n^{(2)} \\ M_{nn}^{(2)} \\ M_{ns}^{(2)} \\ Q_n^{(3)} \\ M_{nn}^{(3)} \\ M_{ns}^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

A aproximação geométrica do elemento é a mesma dada pela equação (3.119).

As equações (4.3), (4.4) e (4.5) podem ser escritas matricialmente como:

$$\begin{aligned}
h_{11}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} Q_n^* d\Gamma, & h_{12}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} M_{nn}^* d\Gamma, & h_{13}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} M_{ns}^* d\Gamma, \\
h_{14}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} Q_n^* d\Gamma, & h_{15}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} M_{nn}^* d\Gamma, & h_{16}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} M_{ns}^* d\Gamma, \\
h_{17}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} Q_n^* d\Gamma, & h_{18}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} M_{nn}^* d\Gamma, & h_{19}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} M_{ns}^* d\Gamma, \\
h_{21}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial Q_n^*}{\partial m} d\Gamma, & h_{22}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, & h_{23}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} d\Gamma, \\
h_{24}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial Q_n^*}{\partial m} d\Gamma, & h_{25}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, & h_{26}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} d\Gamma, \\
h_{27}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial Q_n^*}{\partial m} d\Gamma, & h_{28}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, & h_{29}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} d\Gamma, \\
h_{31}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial Q_n^*}{\partial t} d\Gamma, & h_{32}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial t} d\Gamma, & h_{33}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial t} d\Gamma, \\
h_{34}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial Q_n^*}{\partial t} d\Gamma, & h_{35}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial t} d\Gamma, & h_{36}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial t} d\Gamma, \\
h_{37}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial Q_n^*}{\partial t} d\Gamma, & h_{38}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial t} d\Gamma, & h_{39}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial t} d\Gamma,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
g_{11}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} w^* d\Gamma, & g_{12}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, & g_{13}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{14}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} w^* d\Gamma, & g_{15}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, & g_{16}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{17}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} w^* d\Gamma, & g_{18}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, & g_{19}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{21}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, & g_{22}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial^2 w^*}{\partial m \partial n} d\Gamma, & g_{23}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{24}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, & g_{25}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial^2 w^*}{\partial m \partial n} d\Gamma, & g_{26}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{27}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, & g_{28}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial^2 M_{nn}^*}{\partial n} d\Gamma, & g_{29}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{31}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial t} d\Gamma, & g_{32}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t \partial n} d\Gamma, & g_{33}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{34}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial t} d\Gamma, & g_{35}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t \partial n} d\Gamma, & g_{36}^{(i,d)} &= 0, \\
g_{37}^{(i,d)} &= \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial t} d\Gamma, & g_{38}^{(i,d)} &= - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t \partial n} d\Gamma, & g_{39}^{(i,d)} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

A equação (4.8) pode se escrita, considerando como ponto fonte todos os nós do contorno, como:

$$\mathbf{H} \mathbf{w} = \mathbf{G} \mathbf{q}. \tag{4.11}$$

Aplicando as condições de contorno no sistema, as incógnitas podem ser calculadas resolvendo o sistema linear:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{4.12}$$

4.3 Exemplo Numérico

Considere uma placa retangular com furo sob uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m² (Figura 20) e com espessura $t = 0.16$ m. A placa esta engastada em dois lados e

apoiada nos outros dois lados. É assumido que o material é quase-isotrópico, com as seguintes propriedades: $E_L = 30$ GPa, $E_T = 30,1$ GPa, $G_{LT} = 12,5$ GPa, e $\nu = 0,2$. A placa foi discretizada usando 64 elementos de contorno quadráticos (Figura 21), 12 elementos para os lados maiores e 8 elementos para os lados menores do contorno externo da placa, e 8 e 4 elementos para os lados maiores e menores do furo, respectivamente. As figuras 22 e 23 mostram o deslocamento transversal ao longo das linhas $A-A$ e $B-B$ obtidas usando o MEC baseado na teoria de Kirchhoff com 2 e 3 parâmetros. É comparado também com resultados de placas isotrópicas baseado na teoria de Reissner (DIRGANTARA, 2000). Como pode ser visto, há uma boa concordância entre as três formulações.

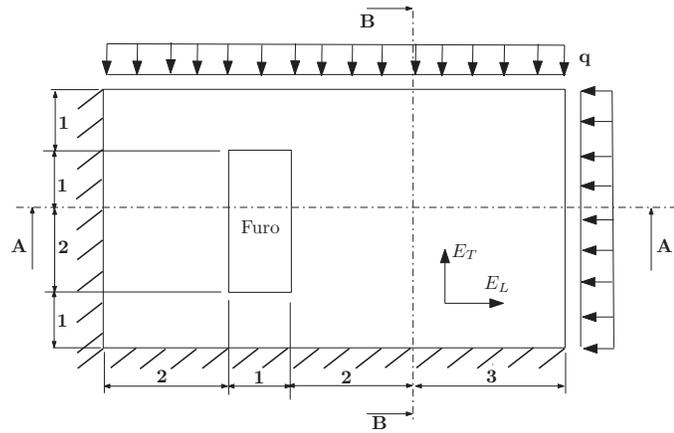


Figura 20: Placa retangular com furo retangular.

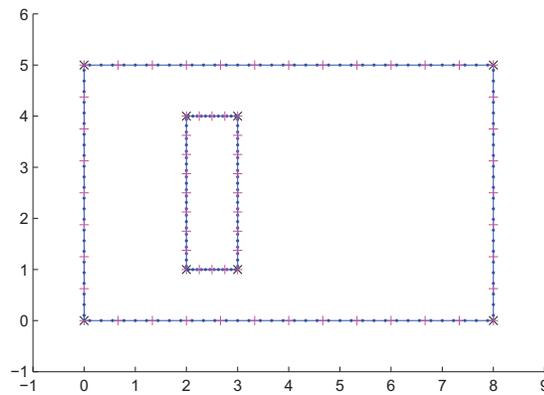


Figura 21: Discretização usando elementos quadráticos.

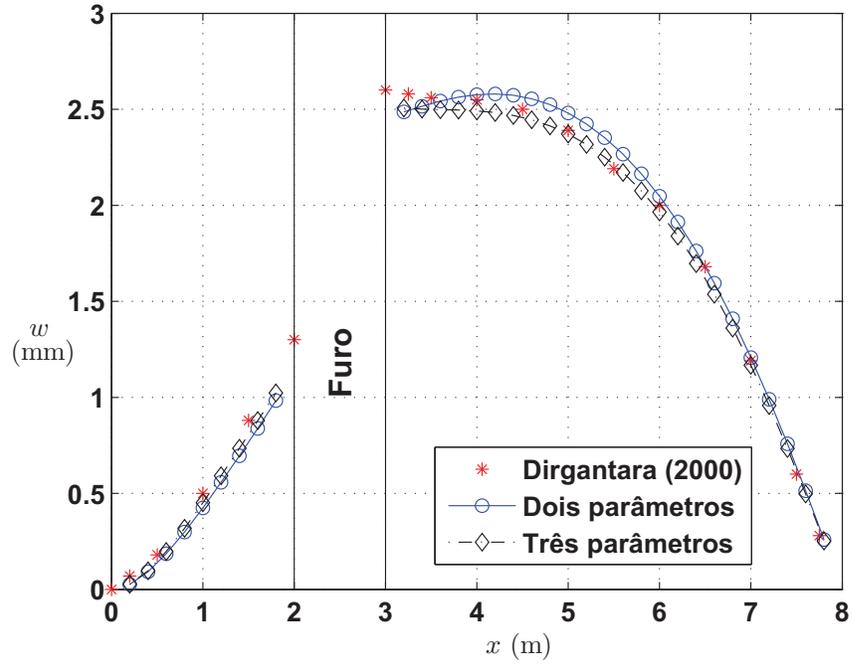


Figura 22: Deslocamento transversal ao longo da linha A-A.

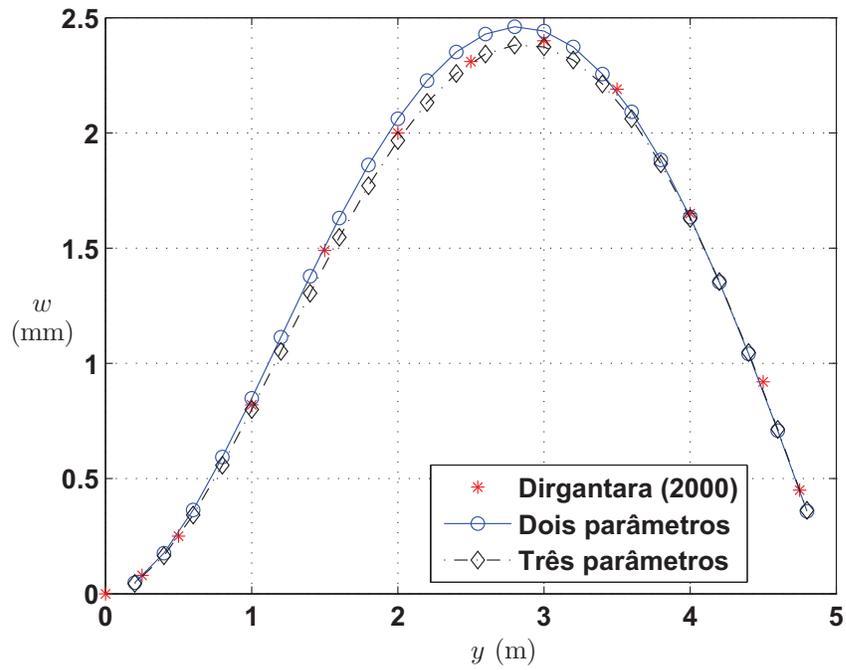


Figura 23: Deslocamento transversal ao longo da linha B-B.

5 *Teoria de Flexão para Placas Espessas*

5.1 Introdução

A teoria de Kirchhoff-Love para placas de laminados compósitos tem sido usada com sucesso em formulações do método dos elementos de contorno conforme mostrado por Shi e Bezzine (1988), Shi e Bezzine (1990), Rajamohan e Raamachandran (1999), Syngellakis e Cherukunnath (2004), Albuquerque et al. (2006) e Albuquerque, Sollero e Paiva (2007). Entretanto, esta teoria ignora a deformação devido ao cisalhamento transversal. No caso de compósitos laminados, a diferença entre as propriedades elásticas das fibras e da matriz resulta, na maior parte das aplicações, em uma razão alta entre o módulo de elasticidade na direção das fibras e o módulo de cisalhamento na direção transversal. Por isso, a deformação devido ao cisalhamento transversal pode ser significativa mesmo em placas de pequena espessura. Para melhorar os resultados, a teoria de Reissner (REISSNER, 1944), também chamada de teoria de primeira ordem de deformação por cisalhamento transversal, pode ser utilizada para placas moderadamente espessas. Porém, poucos trabalhos apresentam formulações dos elementos de contorno para a análise de placas espessas ortotrópicas ou anisotrópicas, por exemplo, Wang e Huang (1991) e Wang e Schweizerhof (1996b). Estas formulações apresentam soluções fundamentais que não podem ser expressas de maneira analítica, o que torna seu tempo de processamento significativamente mais alto que as formulações de Kirchhoff.

Neste capítulo é apresentada a formulação do método dos elementos de contorno para placas espessas seguindo as hipóteses de Mindlin. A solução fundamental, obtida usando a transformada de Radon (WANG; HUANG, 1991), é mostrada de maneira detalhada.

5.2 Teoria de placas laminadas de primeira-ordem

5.2.1 Equações constitutivas para um laminado

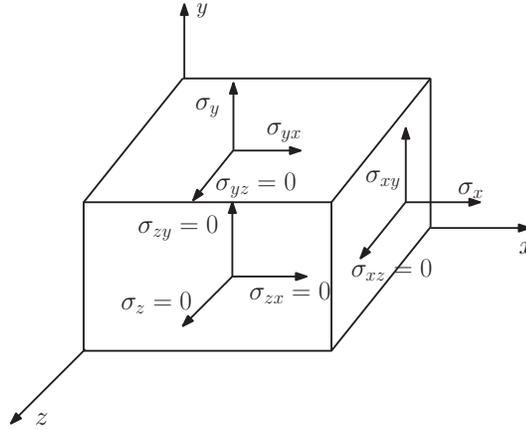


Figura 24: Uma lâmina no estado plano de tensão.

Um estado plano de tensão é definido como um estado em que todas as tensões das seções transversais são iguais a zero. Para uma lâmina no plano xy , as componentes da tensão na seção transversal são: σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} (Figura 24). Embora esses componentes de tensão sejam pequenos em comparação a σ_x , σ_y e τ_{xy} , eles podem induzir a falhas porque compósitos laminados reforçados com fibras são menos resistentes na direção transversal uma vez que a resistência provém das fibras que estão no plano xy , (REDDY, 1997). Assim, as componentes da tensão na seção transversal não podem ser sempre desprezadas na análise de laminados. No entanto, se elas são negligenciadas na teoria dos laminados, as equações constitutivas devem ser modificadas para explicar o fato que: $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$ e $\tau_{zy} = 0$.

Para uma lâmina ortotrópica, a condição $\sigma_z = 0$ resulta na seguinte deformação transversal normal:

$$\varepsilon_z = S_{16}\sigma_x + S_{26}\sigma_y. \quad (5.1)$$

A tensão de cisalhamento da seção transversal igual a zero resulta numa deformação por cisalhamento da seção transversal igual a zero, ou seja, $\gamma_{zy} = 0$, $\gamma_{zx} = 0$.

Quando a tensão normal na seção transversal é desprezada e as tensões de cisalhamento na seção transversal são incluídas, deverá ser acrescentado nas relações constitutivas as

seguintes equações:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (5.2)$$

onde $Q_{44} = G_{yz}$ e $Q_{55} = G_{xz}$.

A relação tensão-deformação transformada de uma lâmina ortotrópica em um estado plano de tensão são dadas por (2.23):

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (5.3)$$

5.2.2 Deslocamentos e tensões

Na teoria de placas de primeira ordem para laminados deformáveis por cisalhamento (FSDT- first-order shear deformation laminated plate theory), a hipótese de Kirchhoff é relaxada, removendo a hipótese que as normais transversais permanecem perpendicular ao plano médio depois da deformação. A deformação por cisalhamento transversal é incluída. A inexistência das tensões normais transversais requerem que w não seja uma função da coordenada z na espessura, (REDDY, 1997).

Sob as mesmas suposições e restrições da teoria clássica do laminado, o campo de deslocamento da teoria da primeira-ordem é na forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ são funções desconhecidas a serem determinadas. Como antes, (u_0, v_0, w_0) são os deslocamentos de um ponto no plano $z = 0$. Pode-se notar que:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi_x, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \phi_y. \quad (5.6)$$

os quais indicam que ϕ_x e ϕ_y são as rotações normais da seção transversal sobre os eixos x e y , respectivamente. A notação ϕ_x denota a rotação normal da seção transversal sobre o eixo y e ϕ_y denota a rotação sobre o eixo x . Eles não seguem a regra da mão direita. No entanto, essa notação tem sido usada exhaustivamente na literatura. Se $(\beta_x$ e $\beta_y)$ denotam as rotações sobre os eixos x e y , respectivamente, que seguem a regra da mão direita, então:

$$\begin{aligned}\beta_x &= \phi_y, \\ \beta_y &= \phi_x.\end{aligned}\tag{5.7}$$

As quantidades $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ são chamadas de deslocamentos generalizados. Para uma placa fina, isto é, quando o efeito da deformação por cisalhamento transversal é desprezado, as rotações ϕ_x e ϕ_y deverão se aproximar das respectivas inclinações da deflexão transversal:

$$\begin{aligned}\phi_x &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \phi_y &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

5.2.3 Fatores de correção de cisalhamento

Uma vez que as deformações de cisalhamento transversais são consideradas constantes sobre a espessura do laminado, as tensões de cisalhamento transversais também serão constantes. Da teoria elementar de vigas homogêneas, a tensão de cisalhamento transversal varia parabolicamente sobre a espessura da viga. Em placas e vigas de laminados compósitos, a tensão de cisalhamento transversal varia ao menos quadraticamente sobre as camadas na espessura. Devido a discrepância entre o estado de tensão real e o estado de tensão constante predita pela teoria da primeira-ordem, torna necessário que as forças resultantes de cisalhamento transversal (Q_x, Q_y) sejam corrigidas pela multiplicação das integrais da equação (2.5) e (2.6) por um parâmetro k , chamado coeficiente de correção de cisalhamento:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz. \quad (5.9)$$

Conforme descrito por Reddy (1997) o fator de correção de cisalhamento vale $k = 5/6$.

5.2.4 Relações tensão-deformação

As equações (2.7), (2.8) e (2.9) representam as equações de equilíbrio na forma diferencial. Em notação indicial estas equações podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha &= 0, \\ Q_{\alpha,\alpha} + g &= 0, \end{aligned} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (5.10)$$

Pode-se notar que as equações de equilíbrio em (5.10) contém cinco variáveis desconhecidas, no entanto são apenas três equações. Por isso, mais duas equações são requeridas para que o sistema possa ser resolvido. Estas equações são as equações constitutivas dadas por:

$$M_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha}) + C_{\alpha\beta}U_{\gamma,\gamma} \quad (5.11)$$

e

$$Q_\alpha = C_\alpha(U_{3,\alpha} + U_\alpha). \quad (5.12)$$

onde U_α são as rotações and U_3 é o deslocamento transversal, e neste caso, a repetição de α e β não indicam somatório.

As equações generalizadas de Navier podem ser formadas substituindo os valores das constantes (2.31) dentro da equação constitutiva (5.12) e da equação de equilíbrio (5.10):

$$L_{ij}U_j + b_i = 0, \quad (5.13)$$

as quais

$$\begin{aligned}
L_{11} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - C_1, & L_{22} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - C_2, \\
L_{12} = L_{21} &= (D_{11} \mu_{yx} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, & L_{13} = -L_{31} &= -C_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\
L_{23} = -L_{32} &= -C_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & L_{33} &= C_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde b_i ($i = 1, 2, 3$) representa $0, 0, g$, respectivamente, L_{ij} é o operador generalizado do operador diferencial de Navier. Os valores das constantes que aparecem na equação (5.14) são:

$$\begin{aligned}
C_{12} = C_{21} &= 0, & C_{11} &= D_{11} \nu_{yx}, & C_{22} &= D_{22} \nu_{xy}, \\
C_1 &= G_{zx} kh, & C_2 &= G_{zy} kh,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $k = 5/6$ da teoria de Reissner.

Se n_α e t_α representam os cossenos diretores dos vetores normal e transversal, respectivamente, no contorno Γ da placa, as forças generalizadas e os deslocamentos no contorno Γ são escritos como:

$$\begin{aligned}
P_\alpha &= M_{\alpha\beta} n_\beta, & P_3 &= Q_\alpha n_\alpha, & M_n &= M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, \\
M_{ns} &= M_{\alpha\beta} t_\alpha n_\beta, & \psi_n &= \psi_\alpha n_\alpha, & \psi_S &= \psi_\alpha t_\alpha.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

5.2.5 Solução fundamental

A solução fundamental para placas espessas ortotrópicas, considerando a deformação por cisalhamento transversal, são soluções particulares da equação diferencial (5.13) sob uma carga concentrada, ou seja, as soluções satisfazem a seguinte equação diferencial não-homogênea:

$$L_{ij}^{adj} U_{kj}^*(\zeta, x) = -\delta(\zeta, x) \delta_{ki}, \tag{5.17}$$

onde $\delta(\zeta, x)$ representa a função delta de Dirac, ζ representa o ponto fonte, x representa o ponto campo, e L_{ij}^{adj} é o operador adjunto (ver Wang e Huang (1991)). Seguindo o método do operador de Hörmander (veja apêndice B), as soluções da equação (5.13) podem ser escritas como:

$$U_{ij}^*(\zeta, x) = {}^{co}L_{ji}^{adj} \phi(\zeta, x), \quad (5.18)$$

onde $\phi(\zeta, x)$ é uma função escalar desconhecida e ${}^{co}L_{ji}^{adj}$ é a matriz de cofatores do operador L_{ji}^{adj} que é dado por:

$${}^{co}L_{\alpha\beta}^{adj} = E_{\alpha\beta} \nabla^2 \nabla_k^2 - B_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - C_1 C_2 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (5.19)$$

$${}^{co}L_{3\alpha}^{adj} = -{}^{co}L_{\alpha 3}^{adj} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (E_{\alpha 3} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{\alpha 3} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - C_1 C_2), \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} {}^{co}L_{33}^{adj} &= D_{11} D_{66} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + (D_{11} D_{22} - D_{11}^2 \nu_{yx}^2 - 2D_{11} D_{66} \nu_{yx}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \\ &+ D_{22} D_{66} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - (D_{11} C_2 + C_1 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (C_1 D_{22} + C_2 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + C_1 C_2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde seguintes símbolos são introduzidos:

$$\begin{aligned} E_{11} &= D_{22}, & E_{22} &= D_{11}, & E_{12} &= E_{21} = 0, \\ B_{11} &= D_{21} - D_{66}, & B_{22} &= D_{11} - D_{66}, & B_{12} &= B_{21} = (D_{11} \nu_{yx} + D_{66}), \\ E_{13} &= C_1 D_{22} - C_2 (D_{11} \nu_{yx} + D_{66}), & B_{13} &= C_1 D_{66}, & E_{23} &= C_2 D_{66}, \\ B_{23} &= C_2 D_{11} - C_1 (D_{11} \nu_{yx} + D_{66}), & \nabla_k^2 &= C_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

O potencial $\phi(\zeta, x)$ pode ser calculado como:

$$\det[{}^{co}L_{\alpha\beta}^{adj}] \phi(\zeta, x) = -\delta(\zeta, x). \quad (5.23)$$

A equação (5.23) é uma equação diferencial parcial também de sexta ordem. Usando a transformada de Radon, a equação diferencial parcial (5.23) pode ser reduzida a uma equação diferencial ordinária, a qual simplifica o tratamento do problema. Primeiro expande-se $\delta(\zeta, x)$

usando a transformada de Radon (WANG; HUANG, 1991):

$$\delta(\zeta, x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |\omega_1(x - \zeta) + \omega_2(y - \eta)|^{-2} d\theta, \quad (5.24)$$

onde (ω_1, ω_2) são as coordenadas de um ponto num círculo unitário (veja apêndice C), ou seja, $\omega_1 = \cos(\theta)$, $\omega_2 = \sin(\theta)$, (x, y) e (ζ, η) são as coordenadas do ponto campo e do ponto fonte, respectivamente. Similarmente, $\phi(\zeta, x)$ pode ser escrito como:

$$\phi(\zeta, x) = \int_0^{2\pi} \varphi(\rho) d\theta, \quad (5.25)$$

onde $\rho = \omega_1(x - \zeta) + \omega_2(y - \eta)$, $\varphi(\rho)$ é uma função que depende somente de ρ .

Substituindo as equações (5.24) e (5.25) na equação (5.23) e, considerando a relação diferencial $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \omega_\alpha \frac{d}{d\rho}$, obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{d^4}{d\rho^4} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - p^2 \right) \varphi(\rho) = \frac{1}{4\pi^2 a^2} |\rho|^{-2}, \quad (5.26)$$

onde

$$\begin{aligned} a^2 &= C_1 D_{11} D_{66} \omega_1^6 + C_1 (D_{11} D_{22} - D_{11}^2 \nu_{yx}^2 - 2D_{11} D_{66} \nu_{yx}) \omega_1^4 \omega_2^2 + C_1 D_{22} D_{66} \omega_1^2 \omega_2^4 + C_2 D_{11} D_{66} \omega_1^4 \omega_2^2 \\ &+ C_2 D_{22} D_{66} \omega_2^6 + C_2 (D_{11} D_{22} - D_{11}^2 \nu_{yx}^2 - 2D_{11} D_{66} \nu_{yx}) \omega_1^2 \omega_2^4, \\ b^2 &= C_1 C_2 [D_{11} \omega_1^4 + 2(2D_{66} + D_{11} \nu_{yx}) \omega_1^2 \omega_2^2 + D_{22} \omega_2^4], \\ p^2 &= b^2/a^2. \end{aligned}$$

A solução da equação (5.23) é agora reduzida à solução de uma equação diferencial ordinária dada pela equação (5.26). Depois de quatro integrações na equação (5.26), obtém-se:

$$\frac{d^2 \varphi(\rho)}{d\rho^2} - p^2 \varphi(\rho) = -\frac{1}{8\pi^2 a^2} p^2 \ln |\rho|. \quad (5.27)$$

A solução da equação (5.27) pode ser escrita como:

$$\varphi(\rho) = f_1(\rho) \exp(p\rho) + f_2(\rho) \exp(-p\rho). \quad (5.28)$$

Pelo método da variação dos parâmetros, os coeficientes $f_1(\rho)$ e $f_2(\rho)$ podem ser obtidos. Substituindo $f_1(\rho)$ e $f_2(\rho)$ na equação (5.28), obtém-se:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) = & \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} \left[p^2 \rho^2 \ln |\rho| + 2 \ln |\rho| + 3 \right. \\ & \left. + \exp(p\rho) \int_{\rho}^{\infty} \frac{\exp(-p\sigma)}{\sigma} d\sigma - \exp(-p\rho) \int_{-\infty}^{\rho} \frac{\exp(p\sigma)}{\sigma} d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Substituindo a equação (5.29) na equação (5.25) e integrando, obtém-se a função $\phi(\zeta, x)$. O deslocamento generalizado e os esforços no contorno podem ser escritas da seguinte forma:

$$U_{ij}^*(\zeta, x) = \int_0^{2\pi} \tilde{U}_{ij}^*(\rho) d\theta, \quad (5.30)$$

$$P_{ij}^*(\zeta, x) = \int_0^{2\pi} \tilde{P}_{ij}^*(\rho) d\theta. \quad (5.31)$$

Das equações (5.12), (5.16) e (5.18), pode-se facilmente obter $\tilde{U}_{ij}^*(\rho)$ e $\tilde{P}_{ij}^*(\rho)$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\alpha\beta}^*(\rho) &= a_{\alpha\beta} \frac{d^4 \varphi}{d\rho^4} - C_1 C_2 \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2}, \\ \tilde{U}_{3\alpha}^*(\rho) &= -\tilde{U}_{\alpha 3}^*(\rho) = f_{\alpha} \frac{d^3 \varphi}{d\rho^3} - C_1 C_2 \omega_{\alpha} \frac{d\varphi}{d\rho}, \\ \tilde{U}_{33}^*(\rho) &= \alpha_1 \frac{d^4 \varphi}{d\rho^4} - \beta_1 \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} C_1 C_2 \varphi, \end{aligned} \quad (5.32)$$

nos quais

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= (E_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}) (C_1 \omega_1^2 + C_2 \omega_2^2), \\ f_{\alpha} &= (E_{\alpha 3} \omega_2^2 + B_{\alpha 3} \omega_1^2) \omega_{\alpha}, \\ \alpha_1 &= D_{11} D_{66} \omega_1^4 + (D_{11} D_{22} - D_{11}^2 \nu_{yx}^2 - 2D_{11} D_{66} \nu_{yx}) \omega_1^2 \omega_2^2 + D_{22} D_{66} \omega_2^4, \\ \beta_1 &= (C_2 D_{11} + C_1 D_{66}) \omega_1^2 + (C_2 D_{66} + C_1 D_{22}) \omega_2^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\tilde{P}_{\alpha\beta}^*(\rho) = [D_{\beta\gamma} (a_{\alpha\beta} \omega_{\gamma} + a_{\alpha\beta} \omega_{\beta}) n_{\gamma} + C_{\beta\gamma} d_{\alpha} n_{\gamma}] \frac{d^5 \varphi}{d\rho^5}$$

$$-[2D_{\beta\gamma}C_1C_2\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma)n_\gamma + C_1C_2C_{\beta\gamma\omega_\alpha}n_\gamma]\frac{d^3\varphi}{d\rho^3}, \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{3\alpha}^*(\rho) &= [D_{\alpha\gamma}(f_\alpha\omega_\gamma + f_\gamma\omega_\alpha) + C_{\alpha\gamma}g]n_\gamma\frac{d^4\varphi}{d\rho^4} \\ &\quad - [2D_{\alpha\gamma}\omega_\alpha\omega_\gamma + C_{\alpha\gamma}]n_\gamma C_1C_2\frac{d^2\varphi}{d\rho^2}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\tilde{P}_{\alpha 3}^*(\rho) = C_\gamma(a_{\alpha\gamma} - f_\alpha\omega_\gamma)n_\gamma\frac{d^4\varphi}{d\rho^4}, \quad (5.36)$$

$$\tilde{P}_{33}^*(\rho) = C_\gamma(f_\gamma - \beta_1\omega_\gamma)n_\gamma\frac{d^3\varphi}{d\rho^3} + \alpha_1C_\gamma\omega_\gamma n_\gamma\frac{d^5\varphi}{d\rho^5}, \quad (5.37)$$

sendo que índices repetidos em α e β não representam somatório e

$$d_\alpha = a_{\alpha\zeta}\omega_\zeta, \quad g = f_\zeta\omega_\zeta. \quad (5.38)$$

5.2.6 Cálculo das soluções fundamentais

1. Cálculo de $\varphi(\rho)$ e suas derivadas

Para encontrar os deslocamentos generalizados e as forças de superfície, é necessário calcular a função $\varphi(\rho)$ e suas derivadas. O cálculo será simplificado se forem introduzidas as funções A_0 e A_1 dadas por:

$$A_0(p\rho) = \exp(p\rho) \int_\rho^\infty \frac{\exp(-p\sigma)}{\sigma} d\sigma - \exp(-p\rho) \int_\rho^{-\infty} \frac{\exp(-p\sigma)}{\sigma} d\sigma, \quad (5.39)$$

$$A_1(p\rho) = \exp(p\rho) \int_\rho^\infty \frac{\exp(-p\sigma)}{\sigma} d\sigma + \exp(-p\rho) \int_\rho^{-\infty} \frac{\exp(-p\sigma)}{\sigma} d\sigma, \quad (5.40)$$

que, derivando com respeito a variável ρ , tem-se:

$$\frac{dA_0(p\rho)}{d\rho} = pA_1(p\rho) - \frac{2}{p}, \quad \frac{dA_1(p\rho)}{d\rho} = pA_1(p\rho). \quad (5.41)$$

Então, tem-se as expressões de $\varphi(\rho)$ e suas derivadas:

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} (p^2 \rho^2 \ln |\rho| + 2 \ln |\rho| + 3 + A_0(p\rho)),$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\rho} &= \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} (2p^2 \rho \ln |\rho| + p^2 \rho + p A_1(p\rho)), \\
\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} &= \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} (2p^2 \rho \ln |\rho| + 3p^2 + p^2 A_0(p\rho)), \\
\frac{d^3\varphi}{d\rho^3} &= \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} p^3 A_1(p\rho), \\
\frac{d^4\varphi}{d\rho^4} &= \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} p^4 A_0(p\rho), \\
\frac{d^5\varphi}{d\rho^5} &= \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} (p^5 A_1(p\rho) - \frac{2p^4}{\rho}), \\
\frac{d^6\varphi}{d\rho^6} &= \frac{1}{8\pi^2 p^4 a^2} (p^6 A_0(p\rho) + \frac{2p^4}{\rho^2}).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

2. Fórmulas para $A_0(p\rho)$ e $A_1(p\rho)$

As funções $A_0(p\rho)$ e $A_1(p\rho)$ podem ser expressas em termos das integrais exponenciais $E_i(p\rho)$ e $E_i(p\rho)$.

- para $\rho > 0$

$$\begin{aligned}
A_0(p\rho) &= \exp(p\rho) E_1(p\rho) - \exp(-p\rho) E_i(p\rho), \\
A_1(p\rho) &= \exp(p\rho) E_1(p\rho) + \exp(-p\rho) E_i(p\rho).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

- para $\rho < 0$

$$\begin{aligned}
A_0(p\rho) &= -\exp(-|p\rho|) E_1(|p\rho|) + \exp(|p\rho|) E_1(|p\rho|), \\
A_1(p\rho) &= -\exp(-|p\rho|) E_1(|p\rho|) - \exp(|p\rho|) E_1(|p\rho|).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

As fórmulas aproximadas de $E_1(p\rho)$ e $E_i(p\rho)$ podem ser encontradas em Cody e Henry-Jr (1969) e Abramowitz e Stegun (1965).

3. Cálculo numérico das soluções fundamentais

No cálculo da solução fundamental, tem-se que dividir a solução fundamental:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} F_1(\theta) \frac{d^k \varphi}{d\rho^k} d\theta, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{5.45}$$

No intervalo entre 0 e 2π existem dois pontos que fazem $\rho = 0$. Primeiro determina-se o valor de θ_0 o qual faz $\rho = 0$ e então divide-se $(0, 2\pi)$ em quatro intervalos. Como o integrando é uma função periódica, os quatro intervalos são $[\theta_0, \theta_0 + \pi/2]$, $[\theta_0 + \pi/2, \theta_0 + \pi]$, $[\theta_0 + \pi, \theta_0 + 3\pi/2]$ e $[\theta_0 + 3\pi/2, \theta_0 + 2\pi]$. Emprega-se a fórmula Gaussiana para

calcular a integral I_1 para cada intervalo. O número de pontos de Gauss depende das propriedades do material e principalmente, da relação entre os comprimentos da aresta e da espessura da placa. Um estudo mais detalhado ainda deve ser realizado. O valor de θ_0 é determinado a partir da seguinte equação:

$$\theta_0 = \arctan \left(-\frac{x - \zeta}{y - \eta} \right). \quad (5.46)$$

A derivada de sexta ordem de $\varphi(\rho)$ será usada no cálculo das tensões internas. Então, precisa-se calcular a seguinte integral:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2} F_2'(\theta) d\theta, \quad (5.47)$$

onde $F_2(\theta)$ é uma função de θ . Como ρ tem dois zeros entre 0 e 2π , I_2 é uma integral divergente.

O cálculo da integral I_2 está fora do escopo deste trabalho pois não serão calculadas as tensões na formulação de placas espessas.

5.2.7 Equações integrais de contorno

A equação integral pode ser obtida considerando a representação integral da equação governante (5.10), ou seja:

$$\int_{\Omega} [(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha})U_{\alpha}^* + (Q_{\alpha,\alpha} + g)U_3^*] d\Omega = 0, \quad (5.48)$$

onde U_i^* ($i = \alpha, 3$) são as funções peso. Integrando por partes (aplicando a segunda identidade de Green) e usando as relações de reciprocidade (5.16), tem-se:

$$U_j(\zeta) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta, x) U_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta, x) P_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} g(x) U_{i3}^*(\zeta, x) d\Omega. \quad (5.49)$$

Considerando o ponto ζ no contorno Γ , a equação (5.49) pode ser escrita como:

$$c_{ij}(\zeta) U_j(\zeta) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta, x) U_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta, x) P_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} g(x) U_{i3}^*(\zeta, x) d\Omega, \quad (5.50)$$

onde \int representa a integral no sentido do valor principal de Cauchy, $\zeta, x \in \Gamma$ são os pontos fonte e os pontos campo, respectivamente. O valor de $c_{ij}(x)$ é igual a $\delta_{ij}/2$ quando x está localizado num contorno suave. A equação (5.50) representa três equações integrais, duas

($i = \alpha = 1, 2$) para rotações e uma ($i = 3$) para o deslocamento transversal. A última integral do lado direito na equação (5.50) é uma integral de domínio, que é transformada em uma integral de contorno pelo método da integração radial (ALBUQUERQUE; SOLLERO; VENTURINI; ALIABADI, 2006).

5.3 Exemplo Numérico

5.3.1 Exemplo 1

Para validar o procedimento implementado e avaliar a convergência das soluções, considera-se uma placa quadrada engastada com os lados de comprimento $a = 0,254$ m e a razão entre a espessura e o comprimento dos lados é $t/a = 0,05$ (Figura 25). A placa está sujeita a uma carga estática uniformemente distribuída $g = 2,07$ MPa. As propriedades do material usado na análise numérica são: $E_T = 6,895$ GPa, $E_L = 2E_T$, $\nu_{LT} = 0,3$, e $G_{LT} = E_T/2(1 + \nu_{LT})$. A placa foi discretizada usando 8 elementos quadráticos descontínuos (Figura 25). Como em Sladek et al. (2006), que usou o método sem malha de Petrov-Galerkin (MLPG), os deslocamentos transversais são normalizados pelo valor do deslocamento transversal central em uma placa isotrópica $w^{(iso)}(a/2) = 8,842 \times 10^{-3}$ m. A Figura 26 mostra a variação do deslocamento transversal w ao longo da linha central da placa ($y = a/2$), considerando uma placa isotrópica e ortotrópica. Pode ser observado que existe uma boa concordância entre ambos os resultados.

5.3.2 Exemplo 2

Neste exemplo, será considerado um laminado ortotrópico com as seguintes propriedades: $E_T = 25E_L$, $G_{LT} = 0,5E_L$, $G_{TT} = 0,2E_L$, $\nu_{LT} = 0,25$. A placa foi discretizada usando oito elementos quadrático descontínuos (Figura 25). São analisados dois tipos de sequência de empilhamentos $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e dois valores para a razão comprimento/espessura (a/t). As Tabelas 4 e 5 mostram os deslocamentos transversais $\hat{w} = wE_y t^3 / (g_o a^4 10^3)$ no centro de uma placa quadrada simplesmente apoiada, com carregamentos no domínio senoidal ($g = g_o \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$) e uniforme, respectivamente (REDDY, 1984). Pode ser observado que houve uma boa concordância entre os resultados, sendo que para a espessura $t = 0,01$ m o erro foi bem menor quando comparado com a espessura $t = 0,1$ m, para ambos os

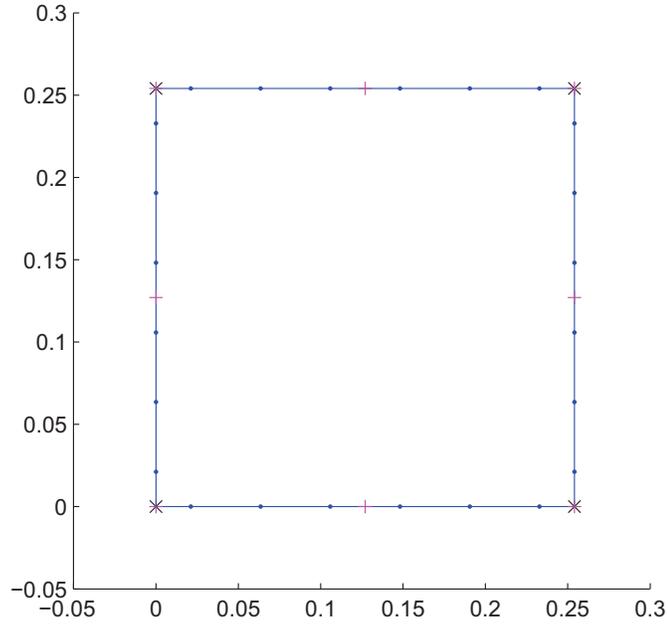


Figura 25: Discretização da placa usando 2 elementos quadráticos por lado.

carregamentos.

Tabela 4: Deflexão no centro de uma placa quadrada ortotrópica sob um carregamento senoidal $g = g_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$.

	a/h	\hat{w} (Reddy)	\hat{w} (MEC)	Diferença[%]
$0^\circ/90^\circ/0^\circ$	100	4,337	4,361	0,55
	10	6,693	6,397	4,42
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	100	4,336	4,368	0,74
	10	6,628	6,231	5,99

5.3.3 Exemplo 3

Aqui o laminado está submetido a uma carga senoidal: $g = g_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$. Serão discutidos três casos (PANDA; NATARAJAN, 1979). O primeiro é um laminado quadrado ortotrópico simplesmente apoiado com quatro camadas $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e com as seguintes propriedades: $G_{LT} = 0,6E_L$, $G_{TT} = 0,5E_L$, $\nu_{LT} = 0,25$. Dois materiais são considerados sendo um laminado de grafite-epoxy: $E_L = 40E_T$ e um laminado de vidro-epoxy: $E_L = 3E_T$.

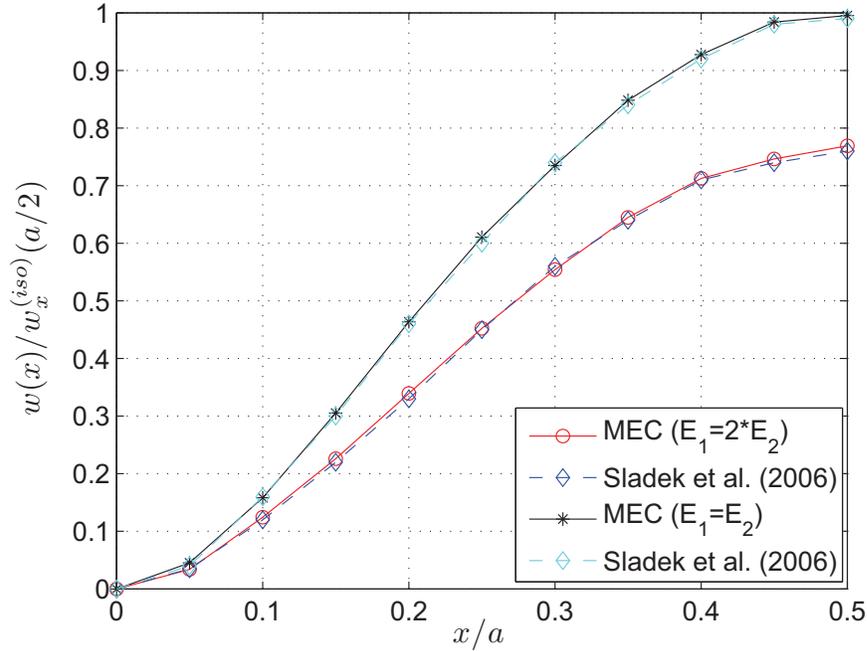


Figura 26: Variação do deslocamento transversal para uma placa quadrada engastada.

As Figuras 27 e 28 mostram os deslocamentos transversais \hat{w} calculados no centro do laminado de grafite-epoxy e de vidro-epoxy, respectivamente. Observa-se uma boa concordância dos resultados. A placa laminada foi discretizada usando oito elementos quadráticos descontínuos (Figura 25).

O segundo caso, é um laminado de três camadas $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ simplesmente apoiado, com as espessuras das camadas externas iguais a $t/4$. As propriedades do material são: $E_L = 25$ MPa, $E_T = 1$ MPa, $G_{LT} = 0,5$ MPa, $G_{TT} = 0,2$ MPa, $\nu_{LT} = 0,25$. A Tabela 6 mostra os resultados para o deslocamento transversal no centro da placa laminada. Os resultados foram comparados com A: Panda e Natarajan (1979), B: Solução exata da elasticidade (PAGANO; HATFIELD, 1972) e C: Formulação de elementos finitos (MAWENYA, 1973), onde $\hat{w} = w\pi^4 Q/(12g_o t S^4)$, e $Q = 4G_{LT} + \{E_L + E_T(1 + 2\nu_{LT})\}/(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$.

E, finalmente, o terceiro caso, é um laminado retangular, com $b = 3a$, Figura 29, de três camadas $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ simplesmente apoiado com as espessuras iguais a $t/3$, com as mesmas propriedades do caso anterior. A Tabela 7 mostra os resultados para o deslocamento transversal no centro da placa, onde $\hat{w} = w \times 100E_y/(g_o t S^4)$, comparados também com A:

Tabela 5: Deflexão no centro de uma placa quadrada ortotrópica sob um carregamento distribuído uniformemente.

	a/h	\hat{w} (Reddy)	\hat{w} (MEC)	Diferença[%]
$0^\circ/90^\circ/0^\circ$	100	6,697	6,723	0,39
	10	10,220	9,712	4,97
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	100	6,833	6,880	0,69
	10	10,251	9,571	6,63

Panda e Natarajan (1979), B: Solução exata da elasticidade (PAGANO; HATFIELD, 1972) e C: Formulação de elementos finitos (MAWENYA, 1973).

Estes problemas são estudados com o propósito de comparar os resultados do método de elementos de contorno com os resultados do método de elementos finitos e com a solução exata da elasticidade. Os resultados obtidos a partir da análise desse trabalho mostraram uma melhor concordância com a formulação de elementos finitos.

Tabela 6: Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com três camadas.

$S = a/t$	\hat{w} (MEC)	\hat{w} (A)	\hat{w} (B)	\hat{w} (C)
10	1,947	1,448	1,709	2,034
20	1,261	1,114	1,189	1,273
50	1,049	1,016	1,031	1,048
100	1,018	1,003	1,008	1,015

Tabela 7: Deslocamento transversal no centro do laminado retangular com três camadas, $b = 3a$.

$S = a/t$	\hat{w} (MEC)	\hat{w} (A)	\hat{w} (B)	\hat{w} (C)
10	1,103	0,752	0,919	1,141
20	0,653	0,565	0,610	0,664
50	0,525	0,513	0,520	0,529
100	0,507	0,505	0,508	0,510

5.3.4 Exemplo 4

Serão analisadas três placas laminadas simplesmente apoiadas com cinco, sete e nove camadas com um carregamento senoidal $g = g_o \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$. Todos os laminados são

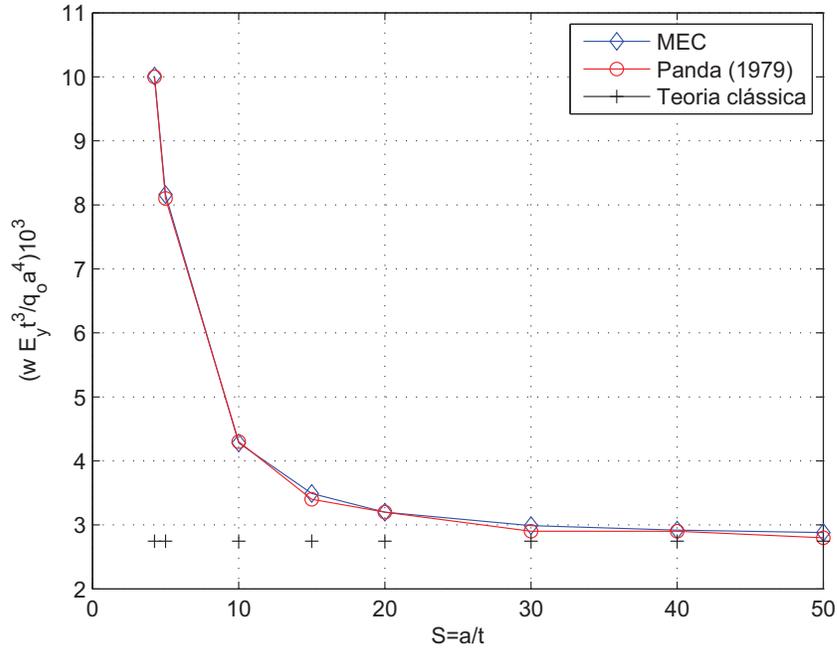


Figura 27: Deslocamento transversal no laminado de 4 camadas de grafite-epoxy.

simétricos, com as fibras orientadas alternadamente entre $[0^\circ/90^\circ]$ com o eixo x , e com a mesma espessura t . As propriedades do material são: $E_L = 25$ MPa, $E_T = 1$ MPa, $G_{LT} = 0,5$ MPa, $G_{TT} = 0,2$ MPa, $\nu_{LT} = 0,25$. As Tabelas 8, 9 e 10 mostram os resultados para o deslocamento transversal no centro da placa com seis diferentes valores de $S = a/t$. Estes valores são comparados com Ghosh e Dey (1992) e Pagano e Hatfield (1972). Os laminados foram discretizados com 3 elementos quadráticos descontínuos por lado. Onde $\hat{w} = w\pi^4 Q / (12g_0 t S^4)$ e $Q = 4G_{LT} + \{E_L + E_T(1 + 2\nu_{LT})\} / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$. Pode-se observar que em todos os casos deste exemplo o resultado converge para a solução da teoria clássica com o aumento da razão S , ou seja, com a diminuição do valor da espessura t . Segundo Pagano e Hatfield (1972), quando se compara o erro com os resultados da teoria clássica, este diminui a partir de uma razão $S = 30$. Os resultados foram comparados com a formulação de elementos finitos usando a teoria clássica.

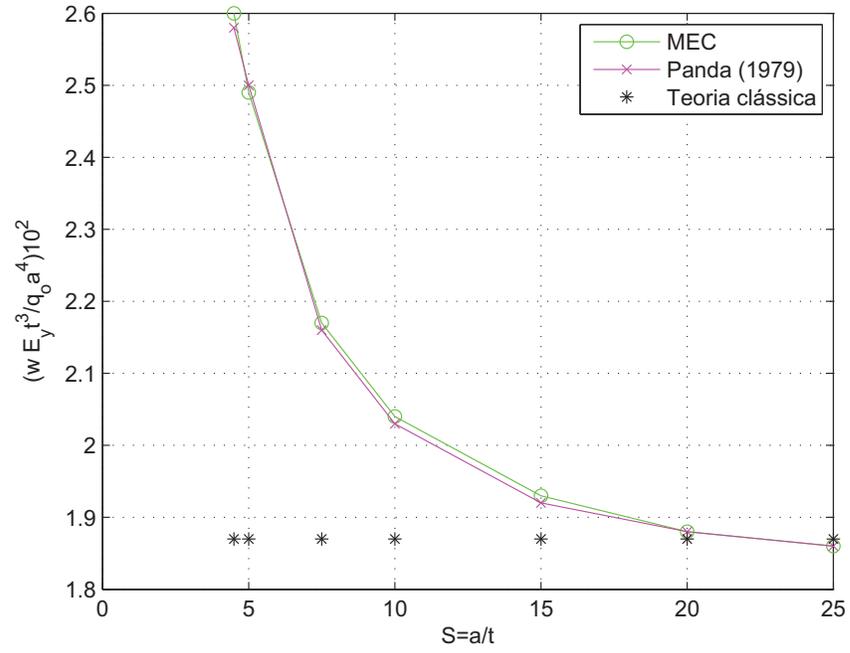


Figura 28: Deslocamento transversal no laminado de 4 camadas de vidro-epoxy.

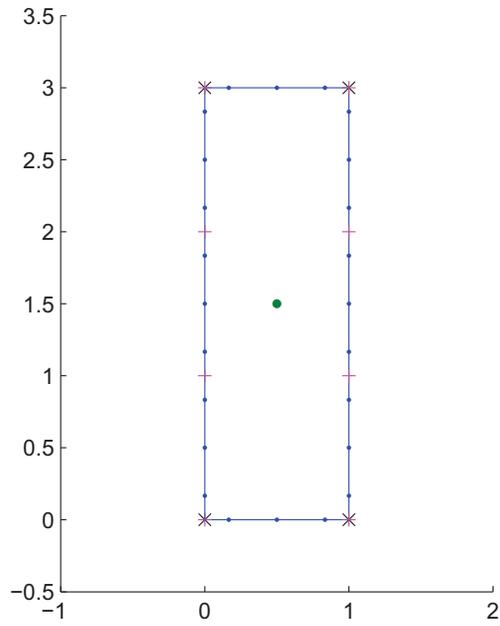


Figura 29: Placa laminada retangular, $b = 3a$.

Tabela 8: Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com cinco camadas.

$S = a/t$	\hat{w}	$\hat{w}(\text{ref1.})$	$\hat{w}(\text{ref2.})$
2	11,112	12,278	–
4	3,550	4,291	–
10	1,42	1,57	1,42
20	1,11	1,15	1,10
50	1,02	1,02	–
100	1,01	1,01	1,01
T. C.	1,00	1,00	0,0

ref1.:Pagano e Hatfield (1972)

ref2.:Ghosh e Dey (1992)

Tabela 9: Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com sete camadas.

$S = a/t$	\hat{w}	$\hat{w}(\text{ref1.})$	$\hat{w}(\text{ref2.})$
2	11,107	12,342	–
4	3,547	4,153	–
10	1,42	1,53	1,41
20	1,11	1,13	1,10
50	1,02	1,02	–
100	1,01	1,01	0,99
T. C.	1,00	1,00	0,0

ref1.:Pagano e Hatfield (1972)

ref2.:Ghosh e Dey (1992)

Tabela 10: Deslocamento transversal no centro do laminado quadrado com nove camadas.

$S = a/t$	\hat{w}	$\hat{w}(\text{ref.})$	$\hat{w}(\text{ref2.})$
2	11,124	12,288	–
4	3,560	4,079	–
10	1,42	1,51	1,41
20	1,11	1,13	1,10
50	1,023	1,021	–
100	1,01	1,01	0,99
T. C.	1,00	1,00	0,0

ref1.:Pagano e Hatfield (1972)

ref2.:Ghosh e Dey (1992)

6 *Conclusões*

6.1 *Conclusões finais*

Neste trabalho foram apresentadas formulações do método dos elementos de contorno para a análise de placas de laminados compósitos considerando ou não a deformação por cisalhamento na direção transversal. No caso da teoria clássica, onde os efeitos da deformação por cisalhamento na direção transversal não são considerados foram desenvolvidas as equações integrais das derivadas segundas do deslocamento transversal e todas as derivadas da solução fundamental foram calculadas analiticamente. Para o cálculo das tensões no contorno de placas anisotrópicas finas, foi apresentada uma abordagem alternativa na qual as derivadas segundas do deslocamento transversal foram calculadas usando equações constitutivas e derivadas da função de forma.

Foi desenvolvida uma formulação de três parâmetros para a teoria clássica de placas anisotrópicas. Para uma placa com furo, a formulação de três parâmetros teve boa concordância com a de dois parâmetros e com a formulação de Reissner.

Finalmente foi apresentada uma formulação do MEC para placas ortotrópicas onde o efeito da deformação por cisalhamento na direção transversal é considerado. A solução fundamental foi calculada usando o operador de Hörmander e a transformada de Radon. Em todas as formulações as integrais de superfície foram transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial (RIM). Com isso, em nenhum caso houve a necessidade de discretização do domínio, resguardando a principal característica do MEC que é a discretização apenas do contorno.

Foram usados elementos de contorno quadráticos descontínuos na discretização de todas as formulações apresentadas.

Em geral, os resultados mostraram boa concordância com resultados disponíveis na lite-

ratura.

6.2 Proposta para trabalhos futuros

Ficam como proposta para trabalhos futuros:

- Desenvolver formulações do método dos elementos de contorno para calcular os deslocamentos transversais e as tensões no domínio e no contorno de placas com efeito da deformação por cortante anisotrópicas.
- Estender as formulações implementadas para análise dinâmica, de estabilidade (flambagem), de grandes deslocamentos, de placas associadas no espaço, de danos em materiais compósitos, dentre outras formulações.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, 1965.
- AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1990.
- ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; PAIVA, W. P. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 805–818, 2007.
- ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; VENTURINI, W. S.; ALIABADI, M. H. Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, p. 4029–4046, 2006.
- ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, D. L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Computers and Structures*, v. 9, p. 163–168, 1978.
- BARCELLOS, C. S.; SILVA, L. H. M. e. A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. *Brebbia C.A., Venturini W.C., editors. Proceedings of the Third International Conference On Boundary Element Technology. Computational Mechanics Publications*, p. 123–130, 1989.
- BARCELLOS, C. S.; WESTPHAL, T. J. Reissner/Mindlin's plate models and the boundary element method. *Brebbia C.A., Ingber M.S., editors. Proceedings of the Seventh International Conference On Boundary Element Technology. Computational Mechanics Publications*, p. 589–604, 1992.
- BETTI, E. Teoria dell elasticità. *II Nuovo Cimento*, p. 7–10, 1872.
- BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, v. 5, p. 197–206, 1978.
- CODY, W. J.; HENRY-JR, C. T. Chebyshev approximations for the exponential integral $e_i(x)$. *Mathematics Computatival*, v. 23, p. 289–303, 1969.
- COOK, R. D. *Finite Element Modeling for stress analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- CRUZE, T. A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 1259–1274, 1969.

- DEANS, S. *The Radon transform and some of its applications*. Malabar, Flórida: Krieger Publishing Company, 1993.
- DIRGANTARA, T. *A New Boundary Element Formulation for Shear Deformable Shells Analysis*. Southampton: WIT Press, 2000.
- EL-ZAFRANY, A.; DEBBIH, M.; FADHIL, S. Boundary element analysis of thick Reissner plates in bending. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 14, p. 159–169, 1994.
- FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, v. 27, p. 365–390, 1903.
- GAUL, L.; KÖGL, M.; WAGNER, M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- GEL'FAND, I. M.; GRAEV, M. I.; VILENKIN, N. Y. *Generalized Functions, Vol.1*. New York: Academic, 1966.
- GHOSH, A. K.; DEY, S. S. A simple finite element for the analysis of laminated plates. *Computers and Structures*, v. 44, p. 585–596, 1992.
- GOUVÊA, A. R.; ALBUQUERQUE, E. L.; PALERMO-JR., L. The boundary element method applied to thick orthotropic plates. In: *XXIX CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*. Maceio, Brazil: [s.n.], 2008.
- GREEN, A.; ZERNA, W. *Theoretical Elasticity*. Second. London: Oxford University Press, 1968.
- HÖRMANDER, L. *Linear partial differential operators*. Berlin: Springer Verlag, 1963.
- KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- KARAM, V. J.; TELLES, J. C. F. On boundary elements for Reissner's plate theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 5, p. 21–27, 1988.
- KATSIKADELIS, J. T.; YOTIS, A. J. A new boundary element solution of thick plates modelled by Reissner's theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 12, p. 65–74, 1993.
- KIRCHHOFF, G. On the equilibrium and motion of an elastic plate. *J. Math.*, v. 40, p. 51–58, 1850. In German.
- KUPRADZE, V. *Potential methods in the theory of elasticity*. Jerusalém: Israel program for Scientific Translation, 1965.
- LACHAT, J. A. *A further development of the boundary integral technique for elastostatic*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 1975.

LAKSHMINARAYANA, H. V.; MURTHY, S. S. A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 591–623, 1984.

LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic plates*. New York: Gordon and Breach, 1968.

LONG, S. Y.; BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F. Boundary element bending analysis of moderately thick plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 5, p. 64–74, 1988.

MARCZACK, R. J.; CREUS, G. J. Direct evaluation of singular integrals in boundary element analysis of thick plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 653–665, 2002.

MAWENYA, A. S. *Finite element analysis of sandwich plate structures*. Tese (Doutorado) — University of Wales, Swansea, 1973.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics.*, v. 18, p. 31–38, 1951.

NETO, L. O.; PAIVA, J. B. Cubic approximation for the transverse displacement in BEM for elastic plates analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 28, p. 869–880, 2004.

NETO, L. O.; PAIVA, J. B. Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural. *Cadernos de Engenharia de Estruturas n. 22, São Carlos*, v. 7, p. 61–87, 2005.

PAGANO, N. J.; HATFIELD, S. J. Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites. *AIAA Journal*, v. 10, p. 931–933, 1972.

PAIVA, J. B. *Formulação do método de elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 1987.

PAIVA, J. B.; NETO, L. O. An alternative boundary element formulation for plate bending analysis. *Aliabadi M.H., Brebbia C.A., Dular P., Nicolet A., editors. Boundary Element Technology X*, p. 1–8, 1995.

PAIVA, W. P.; SOLLERO, P.; ALBUQUERQUE, E. L. Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 49–73, 2003.

PAIVA, W. P. *Análise de problemas estáticos e dinâmicos em placas anisotrópicas utilizando o método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) — Universidade de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2005.

PALERMO-JR., L. *Análise estática de placas e o método dos elementos de contorno*, Tese de Livre-Docência. — Universidade de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, 2000.

- PANDA, S. C.; NATARAJAN, R. Finite element analysis of laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 69–79, 1979.
- PILKEY, W.; WUNDERLICH, W. *Mechanics of structures: variational and computational methods*. Inc Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
- RAJAMOHAN, C.; RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engineering Software*, v. 30, p. 369–373, 1999.
- REDDY, J. *Mechanics of laminated composite plates*. Inc Boca Raton, Florida: CRC Press, 1997.
- REDDY, J. N. Exact solutions of moderately thick laminated shells. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 110, p. 794–809, 1984.
- REISSNER, E. On the theory of bending of elastic plates. *Journal Math Physics*, v. 23, p. 184, 1944.
- REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 12, p. 69–77, 1945.
- RICARDELLA, P. *An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elasto-plasticity*. Tese (Doutorado) — Carnegie-Mellon University, 1973.
- RIZZO, F. J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quartely of Applied mathematics*, v. 25, p. 83–92, 1967.
- SHI, G.; BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *Journal of Composite Materials*, v. 22, p. 694–716, 1988.
- SHI, G.; BEZINE, G. Buckling analysis of orthotropic plates by boundary element method. *Mechanics Research Communications*, v. 26, p. 1351–1370, 1990.
- SLADEK, J. et al. Analysis of orthotropic thick plates by meshless local petrov-galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 67, p. 1830–1850, 2006.
- SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. *II Nuovo Cimento*, p. 17–20, 1885.
- SOUTHWELL, R. *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. London: Oxford University Press, 1946.
- STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, p. 769–782, 1979.
- SYNGELLAKIS, S.; CHERUKUNNATH, N. Boundary element analysis of symmetrically laminated plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 28, p. 1005–1016, 2004.

- TELLES, J. C. F. A self adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, p. 959–973, 1987.
- TORSANI, F. L. *Implementação do cálculo das tensões em placas laminadas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2007.
- TOTTENHAM, H. *The boundary element method for plates and shells*. London: P. K. Banerjee and R. Butterfield. Applied Science, 1979.
- USECHE, J. F. *Análise pelo método dos elementos de contorno de placas de Reissner trincadas e reparadas com compósitos colados*. Tese (Doutorado) — Universidade de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2007.
- WANG, J.; HUANG, M. Boundary element method for orthotropic thick plates. *Acta Mechanica Sinica*, v. 7, p. 258–266, 1991.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells. *International Journal of Engineering Science*, v. 33, p. 995–1004, 1995.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. A boundary integral equation formulation for moderately thick laminated orthotropic shallow shells. *Computers and Structures*, v. 58, p. 277–287, 1996.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Fundamental solutions and boundary integral equations of moderately thick symmetrically laminated anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 12, p. 383–394, 1996.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method. *Computers and Structures*, v. 62, p. 151–156, 1997.
- WEEËN, V. F. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley and Sons Ltda*, v. 18, p. 1–10, 1982.
- WEN, P. H.; ALIABADI, M. H. Displacement discontinuity formulation for modeling cracks in orthotropic shear deformable plates. *International Journal of Fracture*, v. 142, p. 69–79, 2006.
- WESTPHAL, T. J.; BARCELLOS, C. S. Applications of the boundary element method to Reissner's and Mindlin's plate model. *Tanaka M., Brebbia C.A. and Honma T., editors. Proceedings of the 12th International Conference On Boundary Element Technology. Computational Mechanics Publications*, v. 1, p. 467–477, 1990.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 25, p. 343–353, 1981.

YAN, X. A new BEM approach for Reissner's plate bending. *Computers and Structures*, v. 54, p. 1085–1090, 1995.

APÊNDICE A – Transformada de Telles

Telles (1987) apresentou um método eficiente para calcular integrais singulares ou quase-singulares que atualmente são encontradas em aplicações do método dos elementos de contorno em problemas de duas dimensões, axissimétricos e três-dimensões. Trata-se de uma transformação polinomial de terceiro grau que melhora a aproximação do método da quadratura de Gauss dentro da faixa perto da singularidade. Este procedimento pode ser facilmente implementado no método dos elementos de contorno e apresenta uma importante característica de ser auto-adaptável, isto é, o método produz uma variável que depende da mínima distância do ponto fonte ao elemento. A auto-adaptação do método também o torna inativo quando não for útil, ou seja, em grandes distâncias do ponto fonte, o que faz o método muito seguro para o uso em geral.

Considere a integral:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta, \quad (\text{A.1})$$

a qual $f(\eta)$ é singular no ponto $\bar{\eta}$.

A idéia agora é fazer uma transformação de coordenadas de η para γ onde o jacobiano $\frac{d\eta}{d\gamma}$ se anule no ponto $\bar{\eta}$ onde $f(\eta)$ é singular.

Se for escolhido uma relação de segundo grau (uma relação de terceiro grau também é possível), tem-se:

$$\eta(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c. \quad (\text{A.2})$$

As seguintes condições tem que ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\gamma} \Big|_{\bar{\eta}} &= 0, \\ \eta(1) &= 1, \\ \eta(-1) &= -1. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Então, as seguintes soluções são obtidas:

$$\begin{aligned} a &= -c, \\ b &= 1, \\ c &= \frac{\bar{\eta} \pm \sqrt{(\bar{\eta}^2 - 1)}}{2}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

na qual a condição $|\bar{\eta}| \geq 1$ é necessária para evitar as raízes complexas.

Se $|\bar{\eta}| = 1$, a expressão (A.1) pode ser escrita como:

$$I = \int_{-1}^1 f\left[(1 - \gamma^2)\frac{\bar{\eta}}{2} + \gamma\right](1 - \gamma\eta) dy. \tag{A.5}$$

A transformação acima pode ser usada para calcular integrais com uma singularidade logarítmica em uma das extremidades. A principal vantagem é que, desde que o jacobiano cancele a singularidade, a integração de Gauss padrão pode ser aplicada sem precisar separar a parte regular da singular.

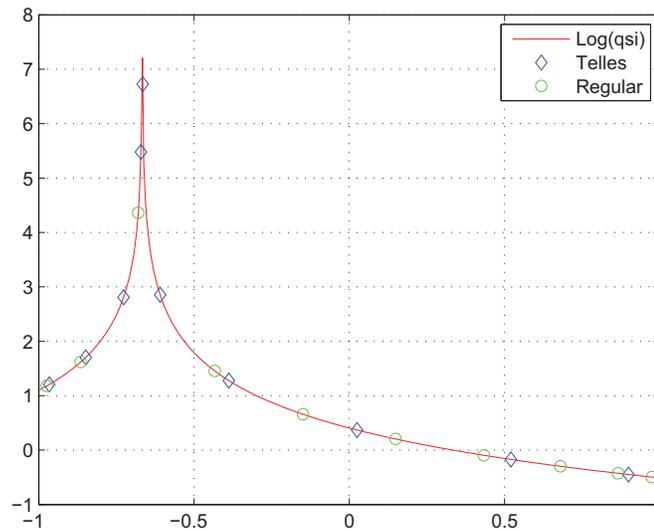


Figura 30: Pontos de Gauss sem o uso da transformada de Telles (Regular) e com o seu uso.

Conforme mostra a Figura 30, a transformada de Telles muda a posição dos pontos de Gauss, aproximando estes pontos perto da singularidade e afastando-os da região longe da singularidade.

APÊNDICE B – Método de Hörmander

O método de Hörmander, desenvolvido por Hörmander (1963), é um método geralmente usado para decompor a matriz de operadores diferenciais em um simples operador diferencial escalar a partir do qual a solução fundamental poderá ser facilmente obtida. Para demonstrar o procedimento geral do método de Hörmander, considera-se a seguinte equação diferencial:

$$LU^* = \delta, \tag{B.1}$$

onde δ é um operador diferencial como, por exemplo, o da equação (5.13):

O método de Hörmander consiste das seguintes etapas:

- Calcula-se o operador adjunto: $L^{adj}U^* = -\delta$;
- Calcula-se a matriz de cofatores do operador adjunto: ${}^{co}L^{adj}$;
- Calcula-se a matriz dos cofatores transposta: $({}^{co}L^{adj})^T$;
- Calcula-se o determinante da matriz de cofatores transposta: $\det[({}^{co}L^{adj})^T]$;
- Calcula-se o escalar potencial ϕ o qual é a solução da seguinte equação:

$$\det[({}^{co}L^{adj})^T]\phi = -\delta;$$

- Calcula-se a solução fundamental usando a seguinte equação: $U^* = {}^{co}L^{adj}\phi$.

O operador de Hörmander, representa a solução fundamental U^* como um vetor de derivadas de um escalar potencial ϕ .

B.1 Exemplo do uso do operador de Hörmander

Considere a equação diferencial de Navier:

$$L_{ij}U_{kj}^* = -\delta(\xi, x)\delta_{ki}, \quad (\text{B.2})$$

onde

$$L_{ij} = G\nabla^2\delta_{ij} + \frac{G}{1-2\nu}\partial_i\partial_j, \quad (\text{B.3})$$

ou

$$L = \begin{bmatrix} G\nabla^2 + \frac{G}{(1-2\nu)}\partial_1\partial_1 & \frac{G}{(1-2\nu)}\partial_1\partial_2 \\ \frac{G}{(1-2\nu)}\partial_2\partial_1 & G\nabla^2 + \frac{G}{(1-2\nu)}\partial_2\partial_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

o qual representa o operador diferencial original do problema. G é o módulo de cisalhamento e ν é o coeficiente de Poisson. Este operador é seu próprio operador adjunto, assim:

$$L_{ij}^{adj} = L_{ij}. \quad (\text{B.5})$$

Segundo Hörmander, a matriz de cofator do operador adjunto pode ser obtido a partir de:

$${}^{co}L^{adj} = \begin{bmatrix} G\nabla^2 + \frac{G}{(1-2\nu)}\partial_2\partial_2 & -\frac{G}{(1-2\nu)}\partial_2\partial_1 \\ -\frac{G}{1-2\nu}\partial_1\partial_2 & G\nabla^2 + \frac{G}{1-2\nu}\partial_1\partial_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

e em notação indicial:

$${}^{co}L_{ij}^{adj} = \frac{G}{(1-2\nu)}[2(1-\nu)\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j]. \quad (\text{B.7})$$

A transposta da matriz de cofator pode ser escrita como:

$$({}^{co}L_{ij}^{adj})^T = {}^{co}L_{ij}^{adj}, \quad (\text{B.8})$$

e o determinante poderá ser calculado a partir de:

$$\begin{aligned} \det|({}^{co}L_{ij}^{adj})^T| &= (G\nabla^2 + \frac{G}{(1-2\nu)}\partial_2\partial_2)(G\nabla^2 + \frac{G}{(1-2\nu)}\partial_1\partial_1) \\ &\quad - (-\frac{G}{(1-2\nu)}\partial_2\partial_1)(-\frac{G}{(1-2\nu)}\partial_1\partial_2), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

sendo que:

$$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i, \quad (\text{B.10})$$

e

$$\nabla^2 = \partial_1\partial_1 + \partial_2\partial_2. \quad (\text{B.11})$$

Da equação (B.9), tem-se:

$$\det|({}^{co}L_{ij}^{adj})^T| = \frac{2G^2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\nabla^4. \quad (\text{B.12})$$

De acordo com Hörmander, precisa-se obter um escalar Φ que satisfaça a seguinte equação:

$$\frac{2G^2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\nabla^4\Phi(\xi, x) = -\delta(\xi, x). \quad (\text{B.13})$$

A solução particular de Φ pode ser obtida a partir de:

$$\Phi = \frac{-(1-2\nu)}{2G^2(1-\nu)}\frac{1}{8\pi}r^2\log(r) + f, \quad (\text{B.14})$$

onde

$$f = ar^2 + b(\log(r)) + c, \quad (\text{B.15})$$

onde, a, b, c são constantes arbitrárias.

A expressão conhecida como solução fundamental de Kelvin pode ser escrita como:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\{-\delta_{ij}(3-4\nu)\log(r) + r_{,i}r_{,j}\}. \quad (\text{B.16})$$

APÊNDICE C – Transformada de Radon

A mais apropriada unificação entre a matemática e a grande classe de problemas de reconstrução (problemas nos quais se quer determinar algumas propriedades da estrutura interna de um objeto sem ter que cortar ou quebrar) é a transformada de Radon num espaço Euclidiano. Há diversos campos onde se é aplicada a teoria da transformada de Radon: ótica, astronomia, geofísica, biologia molecular e principalmente na medicina, com a tomografia computadorizada, dentre outras áreas. A propriedade interna pode ser identificada com, ou aproximada por, alguma função f e o perfil pode ser identificado ou aproximado pela Transformada de Radon de f , designado por:

$$\tilde{f} = \mathfrak{R}f. \tag{C.1}$$

Se f é definida no plano \mathfrak{R}^2 , então \tilde{f} é determinada por uma integral de linha de f . E, se f é definida em \mathfrak{R}^3 , então \tilde{f} é determinada por uma integral de superfície de f sobre um plano bi-dimensional (DEANS, 1993).

C.1 Definição da transformada de Radon

A transformada de Radon, também conhecida como transformada de ondas planas, é descrita em detalhes por Gel'fand, Graev e Vilenkin (1966). A transformada de Radon de uma função $f(x_i)$ é definida por (GAUL; KöGL; WAGNER, 2003):

$$\tilde{f}(\alpha, z_i) \equiv \mathfrak{R}f(x_i) \equiv \int_{\Omega} f(x_i)\delta(\alpha - z_i x_i)d\Omega, \tag{C.2}$$

onde a integração é feita sobre o plano $z_i x_i = \alpha$ (Figura 31a) e δ representa a função delta de Dirac. A transformada inversa é dada por:

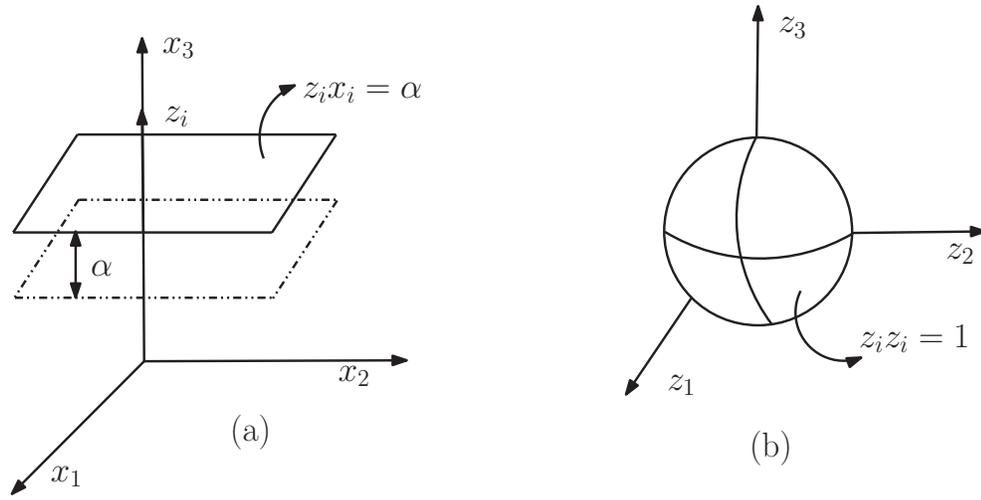


Figura 31: Transformada de Radon para o caso tri-dimensional: integração no plano $\alpha = z_i x_i$ e transformada da Inversa: integração sobre uma esfera unitária $z_i z_i = 1$.

$$f(x_i) = \mathfrak{R}^{-1} \tilde{f}(\alpha, z_i) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{z_i z_i=1} \frac{\partial^2 \tilde{f}(\alpha, z_i)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=z_i x_i} d\Gamma(z_i), \quad (\text{C.3})$$

onde a integração é feita, no caso tri-dimensional, sobre uma superfície de uma esfera unitária (Figura 31b).

A transformada de Radon possui as seguintes propriedades:

- Homogeniedade: $\mathfrak{R}\{f(k\alpha, kz_i)\} = \frac{1}{|k|} \mathfrak{R}\{f(\alpha, z_i)\}$.
- Linearidade: $\mathfrak{R}\{c_1 f + c_2 g\} = c_1 \mathfrak{R}\{f\} + c_2 \mathfrak{R}\{g\}$.
- Transformação de derivadas: $\mathfrak{R}\left\{\frac{\partial^n f}{\partial x_i \partial x_j \dots}\right\} = z_i z_j \dots \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \mathfrak{R}\{f\}$.
- Transformação do delta de Dirac: $\mathfrak{R}\{\delta(x_i)\} = \delta(\alpha)$.

C.2 Exemplo do uso da transformada de Radon

Para mostrar como se usa a transformada de Radon na obtenção das soluções fundamentais, considere a equação diferencial de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = \delta(\mathbf{X}_o), \quad \mathbf{X}_o = (x_o, y_o, z_o). \quad (\text{C.4})$$

Aplicando a transformada de Radon, tem-se :

$$z_1^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \alpha^2} + z_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \alpha^2} + z_3^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \alpha^2} = \delta(\alpha). \quad (\text{C.5})$$

Então:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \alpha^2} = \frac{\delta(\alpha)}{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}. \quad (\text{C.6})$$

Aplicando a transformada inversa:

$$T^*(\mathbf{X}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int \frac{\partial^2 \tilde{T}(\alpha, z_i)}{\partial \alpha^2} d\Gamma, \quad (\text{C.7})$$

Usando a equação (C.6), tem-se:

$$T^*(\mathbf{X}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{z_i z_i=1} \frac{\delta(\alpha)}{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} d\Gamma. \quad (\text{C.8})$$

considerando a origem dos eixos x_i no ponto fonte, pode-se escrever:

$$\alpha = z_i x_i = z_i r_i = r z_i r_i^0, \quad (\text{C.9})$$

onde $r_i^0 = r_i/r$.

Então:

$$T^*(\mathbf{X}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{z_i z_i=1} \frac{\delta(r_i z_i r_i^0)}{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} d\Gamma. \quad (\text{C.10})$$

Usando as propriedades da transformada de Radon (homogeneidade: $\delta(r_i z_i r_i^0) = \delta(z_i r_i^0)/r$, e a transformada do delta de Dirac), pode-se escrever:

$$T^*(\mathbf{X}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_1(\phi)^2 + z_2(\phi)^2 + z_3(\phi)^2} d\phi. \quad (\text{C.11})$$

Como z_1 , z_2 e z_3 são coordenadas de um ponto num círculo (Figura 32), $z_1(\phi)^2 + z_2(\phi)^2 + z_3(\phi)^2 = 1$. Finalmente tem-se:

$$T^*(\mathbf{X}) = -\frac{1}{8\pi^2} \phi \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{8\pi^2} \times (2\pi) = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (\text{C.12})$$

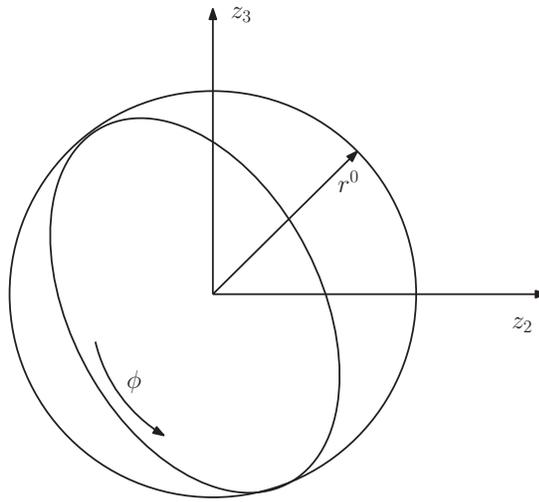


Figura 32: Coordenadas esféricas z_1 , z_2 e z_3 .

que é a solução fundamental analítica para a equação de Laplace, tri-dimensional, presente na maioria dos livros do método dos elementos de contorno.