

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Minimização da variação do erro de
transmissão de pares engrenados através
da modificação da superfície dos dentes

Autor: Carlos Henrique Wink

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Minimização da variação do erro de
transmissão de pares engrenados através
da modificação da superfície dos dentes**

Autor: Carlos Henrique Wink

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2007

SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

W728m Wink, Carlos Henrique
Minimização da variação do erro de transmissão de pares
engrenados através da modificação da superfície dos dentes /
Carlos Henrique Wink.--Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Engrenagens. 2. Engrenagens - Ruído. 3. Peças de
máquinas. 4. Projetos mecânicos. 5. Automóveis –
Dispositivos de transmissão. I. Serpa, Alberto Luiz.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Minimization of transmission error excitation of gear pairs through tooth
surface modification.

Palavras-chave em Inglês: Transmission error, modified tooth surfaces, gear optimization.

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e projeto mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Janito Vaqueiro Ferreira, Auteliano Antunes dos Santos Júnior,
Marcus Antônio Viana Duarte, Jonas de Carvalho.

Data da defesa: 02/04/2007.

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica.

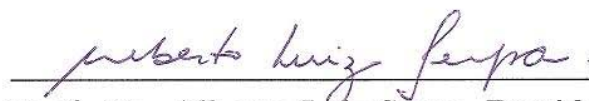
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
TESE DE DOUTORADO

Minimização da variação do erro de
transmissão de pares engrenados através
da modificação da superfície dos dentes

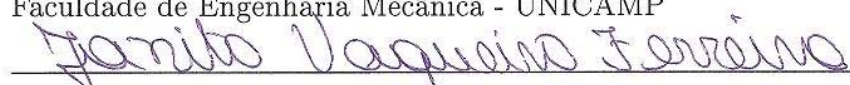
Autor: Carlos Henrique Wink

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

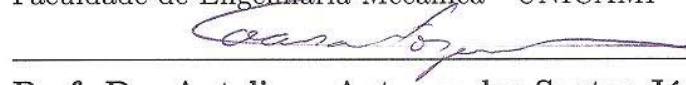
Banca Examinadora



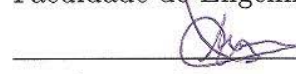
Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente

Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP


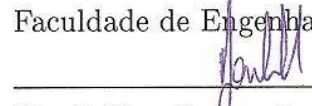
Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira

Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP


Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Júnior

Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP


Prof. Dr. Marcus Antônio Viana Duarte

Faculdade de Engenharia Mecânica - UFU


Prof. Dr. Jonas de Carvalho

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Campinas, 02 de Abril de 2007

*A minha esposa, a minha filha, e a todos os familiares que me apoiaram em
mais esta jornada.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Alberto Luiz Serpa, que me mostrou os caminhos a serem seguidos, sou grato pela orientação.

Ao Prof. Julian Allwood, do Departamento de Engenharia da Universidade de Cambridge no Reino Unido, pelas informações sobre os métodos para solução de problemas de contato e por compartilhar comigo as suas rotinas em MATLAB.

Ao Prof. Philippe Velez, do Laboratório de Mecânica de Contato e dos Sólidos do Instituto Nacional de Ciências Aplicadas de Lyon na França (INSA), pelas informações e discussões sobre a análise dinâmica de pares engrenados, e pelos artigos gentilmente fornecidos.

Ao Prof. Ahmet Kahraman, diretor do Laboratório de Engrenagens da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Ohio - EUA, pelas discussões sobre as vantagens e dificuldades da modelagem do erro de transmissão com análise global de contato dos dentes.

Ao Dr. David Palmer, da empresa Romax Technology no Reino Unido, por fornecer uma cópia da sua tese de doutorado, e os dados experimentais do erro de transmissão e dos níveis de ruído de um par engrenado.

Ao Dr. Ralf Meske, da empresa FE-DESIGN GmbH na Alemanha, pelas valiosas informações sobre o seu trabalho de pesquisa com métodos de otimização de forma não paramétricos aplicados em problemas de contato.

A minha família, em especial a minha esposa e a minha filha, pela paciência, compreensão e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

À EATON - Divisão Transmissões, pelo apoio e facilidades oferecidas para a realização deste trabalho.

Trabalhos publicados pelo autor

1. C.H. Wink, A.L. Serpa. Performance assessment of solution methods for load distribution problem of gear teeth. *Mechanism and Machine Theory, Elsevier*, 2006 (aceito para publicação).
2. C.H. Wink, A.L. Serpa. Efficient procedure to calculate transmission error of helical gear pairs with global tooth contact analysis using a combined pseudo-interference and linear programming solution. *18th. International Congress of Mechanical Engineering (COBEM2005-0712)*, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil, pp. 1-8, Novembro 2005.
3. C.H. Wink, A.L. Serpa. Investigation of tooth contact deviations from the plane of action and their effects on gear transmission error. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* (paper C04704), 2005, 219(5), pp. 501-509.
4. C.H. Wink, A.L. Serpa. A new procedure to calculate the transmission error of helical gear pairs with modified tooth surfaces. *17th. International Congress of Mechanical Engineering (COBEM2003-0072)*, São Paulo, São Paulo, Brasil, pp. 1-10, Novembro 2003.
5. C.H. Wink. Cálculo do erro de transmissão de pares engrenados com modificações na microgeometria dos dentes. Campinas, *Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas*, 2002. 154 p. Dissertação (Mestrado).

Resumo

WINK, Carlos H., *Minimização da variação do erro de transmissão de pares engrenados através da modificação da superfície dos dentes*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007. 210p. Tese (Doutorado)

O ruído gerado pelos sistemas de transmissão de potência por engrenagens pode ser incomodo e algumas vezes inaceitável para o usuário. Os pares de engrenagens geram um ruído incomodo ao ouvido humano devido as suas características de intensidade e frequência. Este ruído é proveniente principalmente da irregularidade no movimento transmitido de uma engrenagem para a outra, que é conhecida como erro de transmissão (ET). A excitação proveniente do ET pode ser reduzida modificando-se a superfície dos dentes. Embora a modelagem matemática para o cálculo do ET tenha sido bastante estudada, não se conhece um método eficaz para definir os parâmetros ótimos das modificações. Os métodos existentes usam procedimentos exaustivos para a busca da solução, ou usam procedimentos de otimização que podem resultar em modificações de difícil obtenção. Neste trabalho desenvolveu-se um método para determinar as modificações da superfície dos dentes que minimizam a excitação do ET. No método proposto as modificações são obtidas resolvendo-se um problema particular de otimização de forma com contato, através de um procedimento iterativo com uma abordagem baseada em critérios de ótimo. Os valores calculados inicialmente para as modificações da superfície são aproximados aos obtidos por funções pré-definidas, resolvendo um problema de ajuste de curva, através de um método de programação seqüencial quadrática. Isto é feito para assegurar que a solução obtida seja simples do ponto de vista de fabricação de engrenagens. A verificação do método foi feita através de exemplos numéricos com pares de engrenagens helicoidais com características geométricas distintas. Nos exemplos numéricos estudados, o método se mostrou eficaz para determinar as modificações da superfície dos dentes que minimizam a excitação do ET.

Palavras-chave: Erro de transmissão, dentes evolventes modificados, otimização de engrenagens.

Abstract

WINK, Carlos H., *Minimization of transmission error excitation of gear pairs through tooth surface modification*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007. 210p. Tese (Doutorado)

Noise that comes from geared systems can be annoying, and in some cases unacceptable by users of those systems. Gear noise is close to pure tone, presents high amplitude, and its frequency is near to most sensitive region of human ear. Transmission error (TE) excitation is recognized as one of the main sources of gear noise and vibration. It is well-known that TE excitation can be reduced by modifying tooth surfaces. Usually, tooth modifications are defined based on trial and error methods, or based on existent gear sets. Although there are some methods to calculate TE, a simple method to define the tooth modifications that minimize the TE excitation is still unknown. Existent methods are based on exhaustive search of solution, or based on optimization procedures that can end up in non practical solutions. In this work, an efficient method to determine the tooth profile modification to minimize the TE excitation was developed. The proposed method defines the optimal modifications by solving a particular shape optimization problem with contact using an iterative procedure based on optimal criteria approach. Initial modification results are converted to pre-defined functions by solving a curve fitting problem using a sequential quadratic programming. This assures a worthy solution from the practical engineering viewpoint. Three different helical gear pairs were used to carry out numerical analysis in order to verify the proposed method. The results of the numerical analysis showed that the proposed method is efficient in solving this kind of problem. Significant reductions on TE excitation were achieved for all three cases of study. The optimization procedure can be used as a useful design tool for gear design and development.

Keywords: Transmission error, modified tooth surfaces, gear optimization.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Nomenclatura	xv
1 Introdução	1
2 Revisão da literatura	15
3 Modelagem matemática do erro de transmissão	31
3.1 Parâmetros de operação	32
3.2 Modelo geométrico	32
3.3 Modelo elástico	35
3.3.1 Deflexão local devido ao contato	36
3.3.2 Deflexão do dente	39
3.4 Interação com outros componentes do sistema	41
3.5 Distribuição de carga entre os dentes	42
3.5.1 Procedimento incremental	46
3.5.2 Programação linear	49
3.5.3 Método direto: inversão de matriz	51
3.5.4 Redução do problema: técnica da pseudo-interferência	53
3.5.5 Comparação dos métodos e resultados obtidos	57

4	Análise de sensibilidade	63
4.1	Sensibilidade aos parâmetros de discretização	67
4.2	Condicionamento da matriz de flexibilidade	68
4.3	Sensibilidade às variações na distância entre centros	72
4.4	Sensibilidade aos erros no torque aplicado	74
4.5	Sensibilidade às variações no vetor dos afastamentos iniciais	75
4.6	Sensibilidade aos erros de espaçamento entre os dentes	77
4.7	Sensibilidade aos erros de alinhamento dos dentes	79
4.8	Sensibilidade aos erros da forma do passo da hélice	82
4.9	Sensibilidade aos erros do perfil	82
4.10	Sensibilidade aos erros de forma do perfil evolvente	85
4.11	Sumário das análises de sensibilidade	86
5	Comparação com resultados experimentais	91
5.1	Resultados experimentais	93
5.2	Resultados numéricos	94
5.3	Critérios de comparação dos resultados	95
5.4	Comparação dos resultados teóricos e experimentais	97
5.5	Sumário dos resultados obtidos	103
6	Método para determinar as modificações da superfície dos dentes que minimizam o PPETL	109
6.1	Formulação do problema	112
6.2	Método para a solução do problema de otimização	117
6.3	Estrutura do procedimento de otimização	121
6.3.1	Sistema: rotina para calcular o erro de transmissão	124
6.3.2	Critério de convergência ou de parada	127
6.3.3	Controlador: rotina de otimização do erro de transmissão	128
6.3.4	Ganho: ajuste do passo para a busca	129
6.3.5	Filtro: definição das modificações de superfície	130

7	Verificação do método	139
7.1	Estudo de caso 1	141
7.2	Estudo de caso 2	142
7.3	Estudo de caso 3	143
7.4	Influência do fator de ganho	144
7.5	Resultados obtidos com o procedimento de otimização	146
7.6	Interpretação da solução para a redução do PPETL	155
7.7	Comparação com a superfície de resposta do problema	160
7.8	Sumário do estudo de verificação do método proposto	163
8	Conclusões e sugestões para próximos trabalhos	167
	Referências bibliográficas	173
A	Apêndice: Coeficientes de influência	185
A.1	Coeficientes da deflexão da região de contato	185
A.2	Coeficientes da deflexão do dente	187
A.3	Matriz dos coeficientes de influência	188

Lista de Figuras

1.1	Origem do ruído em caixas de engrenagens.	4
1.2	Fluxo de vibração e ruído de uma caixa de engrenagens.	4
1.3	Modelo torsional simplificado do par de engrenagens.	5
1.4	Ilustração dos alívios do perfil evolvente	9
1.5	Ilustração do abaulamento do passo da hélice.	9
1.6	Ilustração da amplitude e extensão do alívio.	10
1.7	Ilustração do grau de recobrimento axial.	11
1.8	Ilustração do grau de recobrimento transversal.	12
3.1	Seção transversal do par de engrenagens.	34
3.2	Placa análoga ao dente helicoidal.	40
3.3	Ilustração da pseudo-interferência em um par de engrenagens.	54
3.4	Relação entre erro de contato e erro de transmissão.	59
3.5	Resultados obtidos com o método incremental.	60
3.6	Resultados da programação linear e pseudo-interferência.	60
4.1	Forma básica do perfil evolvente das engrenagens helicoidais em análise.	66
4.2	Forma básica do passo da hélice das engrenagens em análise.	66
4.3	Influência da discretização do ciclo de engrenamento.	68
4.4	Número de condição da matriz de flexibilidade.	69
4.5	Sensibilidade da matriz de flexibilidade.	70
4.6	Sensibilidade do PPETL à variação da distância entre centros.	73
4.7	Sensibilidade à variação do torque aplicado.	75

4.8	Sensibilidade do vetor dos afastamentos iniciais.	76
4.9	Sensibilidade ao erro de espaçamento entre os dentes.	79
4.10	Influência do erro de espaçamento na forma da função do ETL.	80
4.11	Sensibilidade do PPETL ao erro de alinhamento dos dentes.	81
4.12	Sensibilidade ao erro da forma do passo da hélice.	83
4.13	Sensibilidade do PPETL ao erro do ângulo do perfil.	84
4.14	Sensibilidade ao erro da forma do perfil do dente.	86
4.15	Influência do erro da forma do perfil dos dentes na função do ETL.	86
5.1	Erro de transmissão calculado para o torque de 70Nm.	98
5.2	Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 70Nm.	98
5.3	Erro de transmissão calculado para o torque de 157Nm.	100
5.4	Erro de transmissão calculado para o torque de 245Nm.	100
5.5	Erro de transmissão calculado para o torque de 334Nm.	101
5.6	Erro de transmissão calculado para o torque de 424Nm.	101
5.7	Erro de transmissão calculado para o torque de 514Nm.	102
5.8	Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 157Nm.	102
5.9	Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 245Nm.	103
5.10	Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 334Nm.	103
5.11	Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 424Nm.	104
5.12	Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 514Nm.	104
5.13	PPETL calculado e medido para diferentes níveis de torques.	107
5.14	Nível de pressão sonora médio obtido experimentalmente para diferentes torques.	107
6.1	Ilustração do contato em uma dada posição chamada de 1.	114
6.2	Ilustração do contato em uma dada posição chamada de 2.	115
6.3	Ilustração dos afastamentos entre as superfícies dos elementos em uma dada posição de contato.	117
6.4	Estrutura do procedimento de otimização pela abordagem de controle.	122
6.5	Fluxograma para o cálculo do erro de transmissão.	125

6.6	Fluxograma para a otimização do erro de transmissão.	129
6.7	Ilustração dos alívios do perfil evolvente	132
6.8	Ilustração do perfil equivalente.	133
6.9	Ilustração do ângulo de rolamento.	134
6.10	Variáveis de projeto para as modificações do perfil evolvente.	135
6.11	Ilustração da aproximação dos afastamentos do perfil por funções afins.	137
7.1	Influência do fator de ganho na solução do problema.	145
7.2	Convergência para o estudo de caso 1 com funções afins.	147
7.3	Convergência para o estudo de caso 1 com funções quadráticas.	148
7.4	Convergência para o estudo de caso 2 com funções afins.	148
7.5	Convergência para o estudo de caso 2 com funções quadráticas.	149
7.6	Convergência para o estudo de caso 3 com funções afins.	149
7.7	Convergência para o estudo de caso 3 com funções quadráticas.	150
7.8	ETL antes e após a otimização para o caso 1 com alívios afins.	151
7.9	ETL antes e após a otimização para o caso 1 com alívios quadráticos.	152
7.10	ETL antes e após a otimização para o caso 2 com alívios afins.	152
7.11	ETL antes e após a otimização para caso 2 com alívios quadráticos.	153
7.12	ETL antes e após a otimização para o caso 3 com alívios afins.	153
7.13	ETL antes e após a otimização para caso 3 com alívios quadráticos.	154
7.14	Perfil do dente para o caso 1 com alívios afins.	154
7.15	Perfil do dente para o caso 1 com alívios quadráticos.	155
7.16	Perfil do dente para o caso 2 com alívios afins.	156
7.17	Perfil do dente para o caso 2 com alívios quadráticos.	156
7.18	Perfil do dente para o caso 3 com alívios afins.	157
7.19	Perfil do dente para o caso 3 com alívios quadráticos.	157
7.20	Localização da carga sem modificações no perfil dos dentes.	160
7.21	Localização da carga com modificações no perfil dos dentes.	161
7.22	Superfície de resposta do problema para o caso 1 com alívio afim.	163
7.23	Gráfico de contorno da resposta do problema para o caso 1 com alívio afim.	164

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais.	58
3.2	Tempo de processamento computacional dos procedimentos.	61
4.1	Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais.	65
4.2	Valor máximo da derivada S para os diversos parâmetros.	88
5.1	Valores do MAC para os diferentes níveis de torque.	105
5.2	PPETL calculado e medido para os diferentes níveis de torque.	105
7.1	Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais para o caso 1.	142
7.2	Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais para o caso 2.	143
7.3	Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais para o caso 3.	144
7.4	Resultados das simulações com o procedimento de otimização.	147
7.5	Resultados do PPETL (μm) com o procedimento de otimização.	150
7.6	Resultados das variáveis de otimização obtidos com o procedimento de otimização.	155
7.7	Composição do ETL nas posições 6 e 18 para o caso 1 com modificações afins. .	158
7.8	Percentual de carga aplicada nos dentes engrenados nas posições 6 e 18 para o caso 1 com modificações afins.	159
7.9	Comparação dos resultados para o caso 1 com alívios afins.	165

Nomenclatura

Letras latinas

$\mathbf{A}$	- matriz dos coeficientes de influência
a_i	- coeficiente de influência no ponto i
C	- fator de escala para os afastamentos adicionais
$c(\hat{\zeta})$	- função de correção da deflexão devido à distância $\hat{\zeta}$ da aresta livre
d_F	- alívio máximo no perfil evolvente modificado
d_Y	- alívio no perfil evolvente em um ponto Y
E	- módulo de elasticidade de tração e compressão (N/mm^2)
$e(t)$	- função de excitação do sistema no instante t
F_p	- erro de espaçamento acumulado
F_α	- erro total do perfil
$f(\bar{x}')$	- função comum das deflexões na direção da largura da placa
$f_{f\alpha}$	- erro de forma do perfil
fH_α	- erro do ângulo do perfil
fH_β	- erro de alinhamento entre os dentes
f_p	- erro de espaçamento adjacente
f_u	- diferença entre espaçamentos adjacentes
$\mathbf{g}$	- vetor dos afastamentos resultantes após a aplicação da carga
g_i	- afastamento entre um par de pontos discretos após a aplicação da carga
$g(\bar{y}')$	- função comum das deflexões na direção da altura da placa
H	- altura da placa de dimensões análogas ao dente da engrenagem (mm)

$\mathbf{h}$	- vetor dos afastamentos iniciais entre os pontos discretos
$\mathbf{h}_a$	- afastamento adicional entre os pontos discretos para reduzir o PPET
$\mathbf{h}_T$	- afastamento inicial total entre os pontos discretos
I_c	- conjunto de pontos discretos em contato
I_n	- conjunto de pontos discretos que não estão em contato
I_g	- conjunto de todos os pontos discretos ($I_c \cup I_n$)
K_i	- rigidez de um ponto em contato i
K_c	- rigidez de um par de pontos em contato
K_{eq}	- rigidez equivalente dos pontos da região de contato
MP	- módulo equivalente da placa análoga ao dente da engrenagem (mm)
N	- número de dentes da engrenagem
P	- ponto qualquer na superfície do dente
p	- força tangencial (N)
p'	- força normal ao plano neutro da placa (N)
p_N	- força normal à superfície (N)
$\mathbf{q}$	- vetor unitário
r	- raio da engrenagem (mm)
S	- derivada para o cálculo da sensibilidade
$\mathbf{s}$	- vetor de sensibilidade dos afastamentos adicionais
$\mathbf{t}$	- vetor dos torques discretos (Nm)
t_i	- torque aplicado no ponto discreto i (Nm)
U	- valor absoluto da deflexão do dente ($\mu m/N$)
u_0	- deslocamento do elemento como um todo
$u(x)$	- resposta da função u para a variável x
$v(\bar{r}_k)$	- função comum das deflexões dada pela distância $\bar{r}_k$
$\mathbf{w}$	- vetor das deflexões elásticas no pontos em contato (mm)
w_i	- deflexão do dente no ponto discreto i (mm)
w_B	- deflexão do dente como um todo (mm)
w_H	- deflexão normal à superfície devido ao contato (mm)
$\mathbf{x}$	- vetor das variáveis de projeto para as modificações do perfil

Letras gregas

- α - passo ou fator de escala para a busca da solução ótima
- β - ângulo de hélice (*rad*)
- Δx - incremento em x
- δ - ângulo de rotação de aproximação entre as superfícies dos dentes (*rad*)
- ϵ - erro admissível para a convergência na solução do problema
- ϕ - ângulo entre um ponto discreto na superfície do dente e o eixo y do sistema de coordenadas (*rad*)
- η - distância na direção radial da engrenagem e em relação ao raio externo (*mm*)
- κ - expoente para o alívio do perfil igual a 1 para função afim e 2 para função quadrática
- λ - fator de escala das coordenadas x' e ζ'
- ν - coeficiente de Poisson
- Θ - ângulo de rotação da engrenagem (*rad*)
- ξ - ângulo de rolamento (*rad*)
- ζ - eixo paralelo ao passo do dente da engrenagem de um sistema de coordenadas local
- Δ - desvio angular (*rad*)

Superescritos

- $\wedge$ - refere-se a uma distância em relação a aresta livre
- $'$ - refere-se à coordenada da placa análoga ao dente
- $\bar{x}$ - refere-se à razão entre uma dimensão x e a altura H da placa análoga ao dente
- f - refere-se a condição resultante após a aplicação da carga
- i - refere-se a condição inicial ou sem carga aplicada
- 1 - engrenagem motora ou pinhão
- 2 - engrenagem movida
- a - refere-se a um valor obtido analiticamente
- b - refere-se à deflexão do dente como um todo

- r - refere-se ao alívio do perfil no sentido da raiz dos dentes
- T - indica a transposta de uma matriz ou vetor
- t - refere-se ao alívio do perfil no sentido do topo dos dentes

Subscritos

- c - refere-se ao ponto discreto em contato
- F - refere-se ao ponto final do alívio no perfil dos dentes
- g - refere-se ao raio base da engrenagem
- I - refere-se ao ponto de início do alívio no perfil dos dentes
- l - valor longitudinal (mm)
- m - refere-se a um valor medido
- min - refere-se a uma dimensão mínima
- n - refere-se ao ponto discreto que não está em contato
- o - refere-se ao raio primitivo
- p - refere-se a um ponto P na superfície do dente
- s - plano transversal
- Y - refere-se a um ponto qualquer no perfil de dente

Abreviações

- CNC - Controle Numérico Computadorizado
- ET - Erro de Transmissão
- ETL - Erro de Transmissão Longitudinal
- MAC - "*Modal Assurance Criterion*"
- PPET - Pico-a-Pico do Erro de Transmissão
- PPETL - Pico-a-Pico do Erro de Transmissão Longitudinal

Capítulo 1

Introdução

A crescente evolução tecnológica, que se tem verificado nas últimas décadas, deve-se principalmente ao conhecimento científico, o qual fornece subsídios para a melhor compreensão dos fenômenos físicos, e à evolução dos recursos computacionais, que permitem a manipulação e processamento de grande volume de dados. Além disso, os recursos para simulação e testes são hoje bem difundidos e auxiliam no projeto e desenvolvimento de novos produtos tornando-se parte integrada do sistema de desenvolvimento de produtos e tecnologia da maioria das empresas.

A tecnologia de informação também tem dado grande contribuição para divulgação e ampliação do conhecimento científico, fazendo com que informações neste campo tornem-se disponíveis aos pesquisadores e estudiosos em todas as partes do mundo. Hoje as descobertas científicas são mais rapidamente divulgadas e conhecidas através dos meios eletrônicos.

Como consequência dentro da área de projeto mecânico, o interesse pelo melhor desempenho dos componentes aumenta, ao mesmo tempo que seu custo e facilidade de obtenção devem ser mantidos ou melhorados. Neste cenário, a evolução dos recursos computacionais tem contribuído para que estes objetivos sejam seguidos. Alguns exemplos disto são os "*softwares*" de CAD ("*computer aided design*"), que permitem projetar com facilidade novos componentes em três dimensões, proporcionando excelente visualização, maior domínio sobre o componente e eliminando potenciais problemas dimensionais, e os "*softwares*" de simulação, como por exem-

plo os aplicativos de cálculos por elementos finitos, que tornam possível avaliar a performance do produto antes deste ser fabricado e submetido a um teste real. Isto possibilita a otimização dos componentes, reduzindo as despesas com desenvolvimento e o tempo necessário para introdução do produto no mercado.

As engrenagens, quando comparadas a outros componentes, demonstram pouca aplicação de novos conceitos. Isto se deve principalmente à alta complexidade do projeto e fabricação das engrenagens. A maior evolução no projeto de engrenagens tem sido observada na otimização de performance quanto à resistência e durabilidade deste componente. Os projetos são usualmente avaliados quanto à resistência a ruptura do dente por fadiga a flexão e quanto à resistência a fadiga de contato das superfícies dos dentes. As empresas que projetam este tipo de componente utilizam normalmente programas para computador desenvolvidos internamente, os quais utilizam a formulação difundida na literatura técnica específica com fatores ajustados pela prática trazida do histórico de desempenho dos projetos e testes realizados.

Este enfoque de projeto voltado para a durabilidade das engrenagens tem sofrido uma transformação em função de novas exigências do mercado e da maior competitividade necessária à sobrevivência das empresas nas economias globalizadas. Atualmente o projeto não é somente voltado para a máxima resistência. Parte-se do pressuposto que a engrenagem deve ser isenta de falha durante toda a vida útil do produto e se buscam outros diferenciais, entre eles o conforto acústico.

As seguintes situações são apontadas como causas desta maior importância que se tem dado à qualidade sonora nos projetos de engrenagens [37, 38]:

- Regulamentação dos limites de ruído: legislações que estabelecem níveis máximos de ruído para comercialização do produto. Para os veículos automotores, por exemplo, assim como os níveis de emissão de poluentes, também o nível de ruído gerado pelos veículos é limitado. Normas técnicas como a NBR 8433/1984 e a ISO 362/1981 foram criadas para determinação do nível de ruído em veículos rodoviários automotores em aceleração;
- Desconforto acústico: mesmo o nível de ruído não excedendo os limites legais, este pode

ainda incomodar o usuário do produto. Isto pode representar um ponto de diferenciação entre produtos similares;

- Limite de ruído estabelecido por contrato de fornecimento: contratos de fornecimento de engrenagens são muitas vezes estabelecidos entre o cliente e o fabricante de engrenagens com critérios de aprovação dos lotes de produção baseados em níveis prescritos de ruído.

Além disto, o ruído característico de engrenagens é muito próximo do tom puro e possui um alto nível de pressão sonora, onde as frequências predominantes são próximas da região sensitiva do ouvido humano [38]. Este tipo de ruído observado nos pares engrenados é chamado de "*whine noise*", ou choro de engrenagem. O choro de engrenagem é causado principalmente pelo movimento não uniforme entre as engrenagens devido às irregularidades no contato entre os dentes engrenados.

As irregularidades no contato entre os dentes resultam em forças dinâmicas nos dentes, as quais excitam vibrações nos corpos das engrenagens e nos eixos sobre os quais as engrenagens estão apoiadas, que por sua vez excitam a carcaça que envolve o sistema de engrenagens. As paredes da carcaça atuam como auto falantes, irradiando o ruído para fora do sistema, e atingindo o ouvido do usuário do equipamento [38]. O fluxo de vibração e ruído de engrenagens é ilustrado nas figuras 1.1 e 1.2.

A vibração gerada pelo par de engrenagens pode também excitar outros componentes que estão acoplados à caixa de engrenagens gerando ruído. Um exemplo disto é o eixo cardan de veículos automotores comerciais que está normalmente conectado à saída da caixa de mudança de marchas [85, p.7].

Baseado no fluxo de vibração e ruído de engrenagens mostrado na figura 1.2 torna-se evidente que uma maneira eficiente para reduzir o ruído é através da redução da excitação gerada pelo engrenamento. Mas para isto é necessário que se entenda a origem da excitação gerada pelas engrenagens na transmissão de potência.

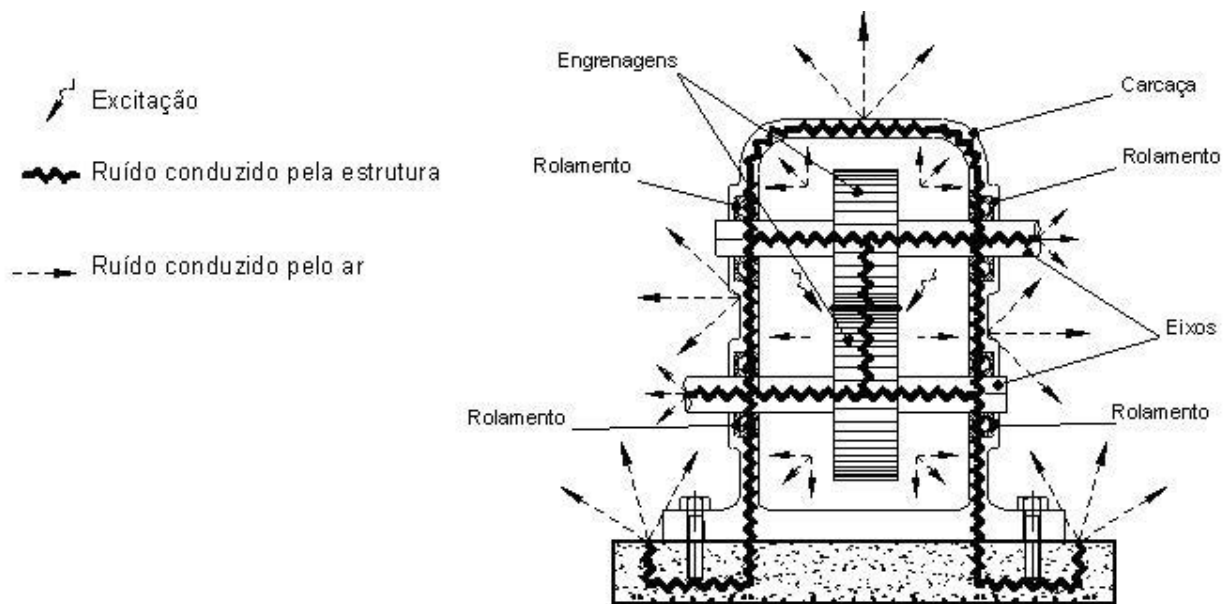


Fig. 1.1: Origem do ruído em caixas de engrenagens.



Fig. 1.2: Fluxo de vibração e ruído de uma caixa de engrenagens.

A figura 1.3 mostra um par de engrenagens representado através de um modelo torsional simplificado. No modelo simplificado mostrado na figura 1.3 apenas é considerada a rigidez dos dentes engrenados. Os outros elementos do sistema, tais como, os eixos e carcaça, assim como o corpo das engrenagens são considerados rígidos (ver [67]).

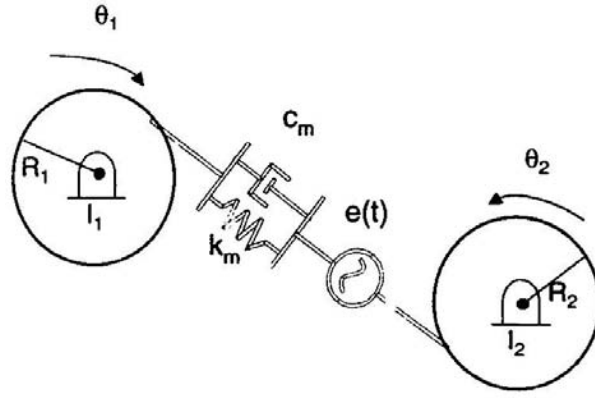


Fig. 1.3: Modelo torsional simplificado do par de engrenagens.

Na figura 1.3, k_m representa a rigidez do engrenamento, c_m o amortecimento, $e(t)$ é a função de excitação do sistema, θ_1 e θ_2 são os deslocamentos angulares da engrenagem motora e movida, R_1 e R_2 são os raios referentes aos diâmetros das engrenagens motora e movida, e I_1 e I_2 são as inércias das engrenagens motora e movida respectivamente.

A rigidez dos dentes engrenados, k_m , é dada por uma função não linear que depende, dentre outros fatores do número de pares de dentes engrenados em cada instante e da posição de contato dos dentes. Devido à forma geométrica dos dentes, que é próxima de uma placa de seção trapezoidal com a base engastada, a rigidez varia ao longo do dente, i.e., a rigidez do topo dos dentes é diferente da rigidez da base dos dentes.

Da teoria geral de engrenagens, sabe-se que o número de dentes em contato e a posição em contato entre estes dentes varia de forma periódica ao longo do ciclo de engrenamento. O ciclo de engrenamento pode ser definido como a distância angular percorrida pelo par de dentes engrenados equivalente a um passo base da engrenagem, onde o passo base é o perímetro da circunferência de raio base dividido pelo número de dentes da engrenagem [26]. Por exemplo, em um dado par de engrenagens, pode-se ter em uma certa posição do ciclo de engrenamento dois pares de dentes engrenados que resulta em um valor de rigidez do engrenamento, e em outra posição pode-se ter apenas um par de dentes engrenados que resulta em um outro valor de rigidez. Desta forma, torna-se evidente que a função de rigidez é não linear.

Considerando que o par de engrenagens representado pelo modelo mostrado na figura 1.3 está submetido à uma solicitação constante, tem-se que a carga transmitida de uma engrenagem para a outra é distribuída entre os pares de dentes engrenados em função da rigidez dos dentes. Quando os dentes são submetidos a carga ocorrem deflexões elásticas. Estas deflexões variam em função da posição dos dentes em contato. Isto faz com que haja uma oscilação periódica no movimento transmitido da engrenagem motora para a engrenagem movida.

Os desvios geométricos nas superfícies dos dentes dos valores ideais podem fazer com que ocorram irregularidades no contato entre os dentes, resultando em um erro de sincronismo entre os deslocamentos angulares θ_1 e θ_2 (ver figura 1.3) mesmo sem carga aplicada. Estes desvios geométricos nas superfícies dos dentes dos valores ideais podem ser decorrentes dos erros na fabricação das engrenagens, ou ainda, introduzidos intencionalmente nas superfícies dos dentes. Esta segunda condição é discutida mais adiante.

A oscilação nas deflexões dos dentes ao longo do ciclo de engrenamento, assim como as irregularidades no contato causadas por desvios geométricos nas superfícies dos dentes compõem a função de deslocamentos representada por $e(t)$ e mostrada na figura 1.3. Esta é considerada a função de excitação do sistema [85, p. 6].

A função periódica de deslocamentos representada por $e(t)$ e mostrada na figura 1.3 é chamada de **erro de transmissão (ET)** [109, 62, 38]. O ET pode ser definido como o desvio da posição real da engrenagem movida em relação à posição teórica que ela deveria ocupar, e pode ser descrito matematicamente pela equação (1.1):

$$e(t) = R_1\theta_1(t) - R_2\theta_2(t) , \quad (1.1)$$

onde $e(t)$ é o deslocamento longitudinal no instante t , R_1 é o raio da engrenagem motora, R_2 é o raio da engrenagem movida, θ_1 e θ_2 são os deslocamentos angulares da engrenagem motora e movida no instante t .

O conceito de erro de transmissão foi definido por Harris em 1958 [31]. A relação entre o

erro de transmissão e o ruído dos pares de engrenagens é conhecida há mais de 20 anos [85, p.6], sendo que o erro de transmissão é o principal fator para a geração de ruído dos pares engrenados [38, 85, 109, 62]. Vários trabalhos discutem que a excitação proveniente do erro de transmissão está relacionada com o ruído dos pares engrenados [85, 68, 6, 14, 38, 86, 37, 109, 62].

Outros fatores podem contribuir para a excitação $e(t)$ e para a geração de ruído, tais como, as forças de atrito entre os dentes em contato, o lubrificante, e bolhas de ar entre os dentes e o lubrificante. No entanto, estes fatores são considerados secundários para a excitação $e(t)$ [38, 37, 109, 99].

Uma vez que a origem da excitação gerada pelas engrenagens na transmissão de potência é conhecida, entende-se que a redução da amplitude da excitação leva à redução do ruído emitido pelo par engrenado [85, 68, 38, 37, 109, 62]. Para as questões de ruído o importante é a variação máxima do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento, que representa a amplitude da excitação $e(t)$ [85, p.6].

A amplitude da excitação do erro de transmissão corresponde à variação máxima do valor do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento, chamado de pico-a-pico do erro de transmissão (PPET), que é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função do erro de transmissão ao longo de um ciclo de engrenamento.

A análise da excitação proveniente do erro de transmissão pode ser feita também através das amplitudes das harmônicas da função periódica descrita pelo ET. As amplitudes das harmônicas do ET podem ser obtidas através da série de Fourier [38].

Para a redução do PPET, pode-se utilizar processos de fabricação que permitam obter superfícies dos dentes mais próximas das ideais, i.e., maior precisão. No entanto, estes processos podem implicar em um custo mais elevado para a fabricação das engrenagens.

Um outro meio para reduzir o PPET é através da introdução de modificações nas superfícies dos dentes. Estas modificações quando apropriadas podem reduzir o PPET, e quando não são adequadas podem resultar em um aumento do PPET e conseqüentemente em maior nível de

ruído [38, 68, 65, 91, 104, 74, 93, 51, 40]. Esta estratégia de modificar as superfícies dos dentes foi proposta inicialmente por Walker em 1938 [106] para melhorar o contato entre os dentes, e aumentar a vida dos pares engrenados. Posteriormente diversos trabalhos analisaram a influência das modificações das superfícies dos dentes na excitação proveniente do erro de transmissão. Estes trabalhos e suas principais contribuições são apresentados no capítulo 2.

Uma outra razão para se modificar as superfícies dos dentes é para evitar que o dente adjacente ao dente engrenado entre em contato prematuramente. Isto pode ocorrer devido às deflexões elásticas dos dentes engrenados sob carga, combinadas ou não com os erros de espaçamento entre os dentes oriundos do processo de fabricação. Este fenômeno é chamado de "*tip contact*" ou "*corner contact*", ou ainda, "*edge contact*". O contato prematuro do dente ocorre fora da posição ideal de contato, que é o plano de ação para as engrenagens de dentes evolventes, e causam impactos tornando-se uma fonte de vibração e reduzindo a vida do par engrenado [38].

As irregularidades no contato entre os dentes causadas pelos erros geométricos de fabricação e pelas deflexões elásticas dos dentes podem ser reduzidas através da introdução de modificações intencionais na superfície dos dentes [38].

Em geral, as modificações intencionais de projeto consistem na remoção de material na direção do perfil, chamada de alívio de topo e alívio de raiz, ou em inglês "*tip relief*" ou "*root relief*" (ver figura 1.4), e também na remoção de material nas extremidades dos dentes na direção do passo da hélice, chamada de abaulamento de passo, ou em inglês "*lead crown*", esta última aplicada principalmente para compensar erros de alinhamentos dos eixos que suportam as engrenagens. O abaulamento do passo da hélice é ilustrado na figura 1.5.

As modificações intencionais de projeto introduzidas nas superfícies dos dentes podem ser descritas, em geral, por funções afins ¹ ou quadráticas. Portanto, nas situações reais, os dentes das engrenagens deixam de apresentar uma forma evolvente pura [109]. Neste caso, o perfil dos

¹Chama-se de função afim qualquer função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, e $a, b \neq 0$.

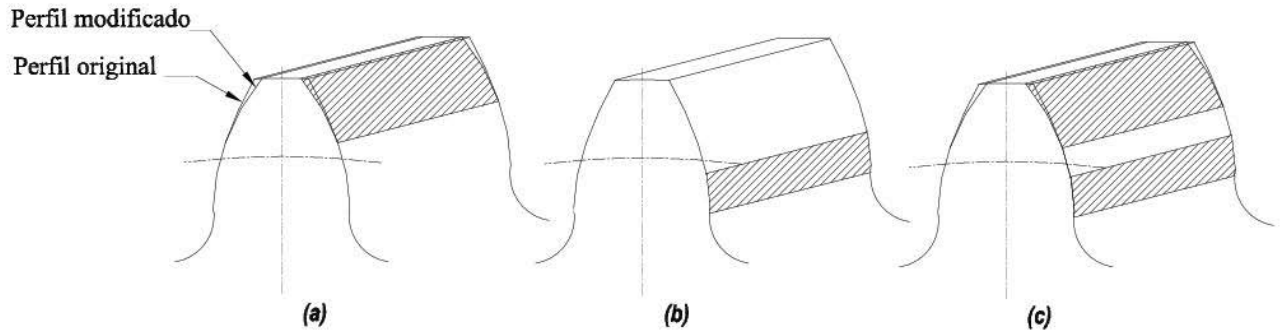


Fig. 1.4: Ilustração dos alívios do perfil evolvente: a) alívio no topo, b) alívio na raiz, c) alívios no topo e na raiz.



Fig. 1.5: Ilustração do abaulamento do passo da hélice.

dentes apresenta uma parte puramente evolvente e outra conforme funções afins ou quadráticas. Na figura 1.4 as regiões modificadas do dente por funções afins ou quadráticas são ilustradas com hachuras.

As modificações das superfícies dos dentes podem ser especificadas em função dos erros de espaçamento permitidos e das deflexões elásticas quando toda a carga é transmitida por um único dente, i.e., deflexão elástica máxima [109, 62]. Neste caso, deverá existir uma modificação ideal para cada nível de carga ao qual o par engrenado está submetido. Pode-se adotar como critério definir as modificações com base em um torque nominal ou torque de projeto.

Evidentemente, quando o par engrenado opera fora do torque nominal ocorrem desvios

do contato. Para torques abaixo do torque nominal, as deflexões elásticas são pequenas e insuficientes para colocar o dente modificado na posição ideal de contato. Nesta condição existe uma perda do contato entre os dentes. Por outro lado, para os torques acima do torque nominal, as deflexões podem ser grandes para que ocorra o contato prematuro do dente adjacente ao dente em contato, i.e., "*tip contact*".

Usando a estratégia mencionada anteriormente, as modificações podem ser super dimensionadas devido à consideração da deflexão elástica máxima. Sabe-se que nas engrenagens a carga é dividida, ou distribuída, entre os pares de dentes em contato. E ainda, que o número de pares de dentes em contato varia ao longo do ciclo de engrenamento [38].

Além disto, o método mencionado acima permite apenas estimar a amplitude da modificação. Para especificar as modificações, é necessário ainda determinar a extensão da região sujeita à modificação, e a função a ser usada para descrever a modificação ao longo do perfil (ver figura 1.6).

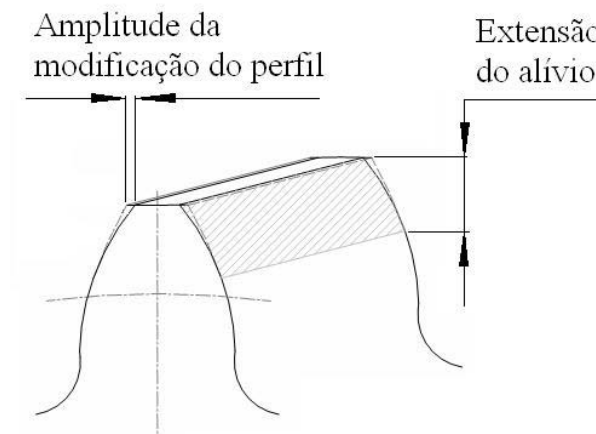


Fig. 1.6: Ilustração da amplitude e extensão do alívio.

Em 1999, Palmer [68] realizou um extenso estudo teórico e experimental sobre as modificações das superfícies dos dentes. Ele estudou a influência de vários tipos de modificações em engrenagens de dentes retos e helicoidais submetidas a diferentes níveis de torque. Palmer [68] concluiu em seu trabalho que não é possível criar uma regra simples para a aplicação de mo-

dificações na superfície dos dentes para reduzir o PPET. O PPET varia com a carga aplicada e com o grau de recobrimento axial ² e transversal ³. Portanto, nas situações reais, os dentes das engrenagens deixam de apresentar uma forma evolvente pura [109]. Assim, existem infinitas combinações de graus de recobrimento, extensão do alívio no perfil e amplitude da modificação [68, p.114].

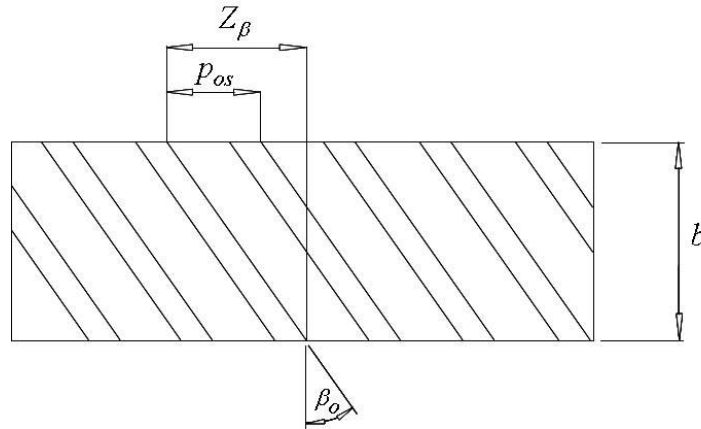


Fig. 1.7: Ilustração do grau de recobrimento axial.

No ambiente de projeto, a definição da modificação a ser aplicada no par engrenado é feita em muitos casos de forma arbitrária tomando-se como referência as modificações usadas em um par engrenado com bom desempenho de ruído. Em outros casos, usa-se algum programa computacional para calcular o erro de transmissão com o qual o projetista realiza uma série de iterações considerando várias modificações de superfície até que se obtenha um valor de PPET que ele considera adequado. Portanto, torna-se evidente que a condição ótima dificilmente é obtida, uma vez que as iterações no cálculo do erro de transmissão ficam restritas a algumas poucas tentativas e a alguns tipos de modificações pré-estabelecidas pelo projetista.

²Chama-se de grau de recobrimento axial a razão da largura de contato do dente e do passo circular transversal no diâmetro primitivo, conforme ilustrado na figura 1.7. O grau de recobrimento axial pode ser calculado por: $\varepsilon_a = \frac{Z_\beta}{p_{os}}$, onde $Z_\beta = b \sin \beta_o$

³Chama-se de grau de recobrimento transversal a razão da extensão de contato da linha de ação, Z , e do passo circular transversal no diâmetro de base, p_g , conforme ilustrado na figura 1.8. O grau de recobrimento transversal pode ser calculado por: $\varepsilon_s = \frac{Z}{p_g}$

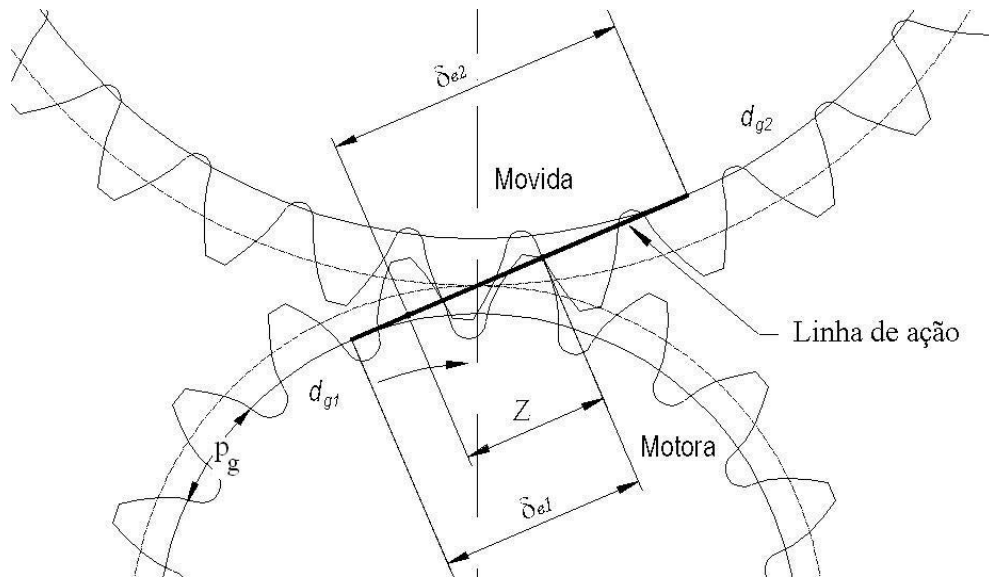


Fig. 1.8: Ilustração do grau de recobrimento transversal.

Por outro lado, as regulamentações para níveis de emissão sonora, bem como o nível de exigência quanto à qualidade sonora por parte do usuário do produto, têm feito com que os novos desenvolvimentos de pares de engrenagens sejam feitos voltados a este novo cenário. Mas existe ainda a necessidade de adequação dos produtos já desenvolvidos e que se encontram em produção. Esta adequação é particularmente interessante considerando-se todos os recursos despendidos com estes pares existentes, isto é, os custos e tempo gastos no desenvolvimento do produto, entre eles aqueles envolvidos com o projeto e com a validação, e no processo de fabricação, aqueles envolvidos com a elaboração do processo, com as ferramentas de corte e dispositivos de fixação [87].

Coloca-se desta forma a problemática tratada neste trabalho. Se por um lado, existe a necessidade de redução dos níveis de ruído dos pares engrenados aplicados nos sistemas de transmissão de potência, por outro lado, não se tem um método eficaz para a determinação das modificações das superfícies dos dentes que possam minimizar a excitação proveniente do erro de transmissão, e contribuir assim para a redução do ruído gerado pelos pares engrenados.

Portanto, torna-se evidente que o desenvolvimento de um método eficaz para determinar as

modificações ótimas das superfícies dos dentes para minimizar o PPET é importante do ponto de vista prático. Isto possibilitaria reduzir os níveis de ruído gerado por pares engrenados existentes somente através da modificação das superfícies dos dentes, preservando assim a grande parte dos recursos já gastos, e desta forma manter o produto competitivo no seu mercado. Além disso, procura-se garantir a adequação dos novos projetos de engrenagens às exigências do mercado quanto ao nível de ruído.

Com esta motivação, a proposta deste trabalho envolve o estudo e o desenvolvimento de um método para determinar as modificações na superfície dos dentes que minimizem o erro de transmissão, assim como a implementação computacional e a verificação do algoritmo através de exemplos numéricos.

O método para determinar as modificações das superfícies dos dentes para minimizar o PPET deve:

1. representar o fenômeno físico de forma adequada;
2. produzir soluções que sejam viáveis do ponto de vista técnico e econômico nos ambientes de fabricação de engrenagens; e
3. ser computacionalmente eficiente para que possa ser usado como uma ferramenta de projeto de engrenagens.

O método desenvolvido e proposto neste trabalho diferencia-se dos métodos conhecidos na literatura para a determinação das modificações das superfícies dos dentes devido aos três fatores mencionados anteriormente. O método desenvolvido usa como base para o cálculo do ET um procedimento desenvolvido pelo presente autor durante o seu trabalho de mestrado, o qual apresenta resultados considerados mais precisos do que os procedimentos usuais de cálculo do ET (ver [111, 113]). O método desenvolvido otimiza as modificações baseadas em funções pré estabelecidas pelo usuário, o que garante uma solução factível do ponto de vista de fabricação. E finalmente, o método desenvolvido mostrou-se computacionalmente eficiente nos exemplos numéricos estudados convergindo para a solução do problema em um número satisfatório de iterações.

Este trabalho é apresentado da seguinte forma: no capítulo 2 uma ampla revisão da literatura técnica disponível sobre o assunto é apresentada, resultado da investigação dos métodos de otimização de forma de aplicação geral e das estratégias usadas para definir as modificações das superfícies dos dentes. No capítulo 3 é apresentado o modelo para o cálculo do erro de transmissão. Um grande trabalho foi desenvolvido para tornar o modelo analítico adequado à aplicação em ambientes de projeto de engrenagens e para viabilizar a implementação do algoritmo iterativo de otimização. No capítulo 4 é relatado o estudo de sensibilidade dos principais parâmetros envolvidos no problema. O capítulo 5 mostra os resultados da comparação entre os dados obtidos com o modelo analítico proposto no capítulo 3 e dados de medição do erro de transmissão. É apresentada também neste capítulo a relação entre o erro de transmissão e o nível de ruído gerado pelo par de engrenagens. Já no capítulo 6 é apresentado o método desenvolvido para a determinação das modificações das superfícies dos dentes para minimizar o PPET. O problema de minimização é apresentado, a função objetivo e as restrições do problema são estabelecidas, e são discutidas as estratégias para a solução do problema, assim como o procedimento de otimização desenvolvido. No capítulo 7 são apresentados os resultados numéricos obtidos com o método proposto. Os resultados são analisados e discutidos. Finalmente no capítulo 8 são apresentadas as conclusões do trabalho e são dadas sugestões para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa.

Capítulo 2

Revisão da literatura

A engrenagem pode ser considerada um dos componentes mais complexos da mecânica devido as suas características de geometria e cinemática. Ainda assim, as engrenagens são largamente usadas nos sistemas de transmissão de potência nos mais diversos campos de aplicação devido a sua eficiência e confiabilidade. Diante disto, existe na literatura uma grande quantidade de trabalhos publicados sobre geometria, cinemática, dinâmica, resistência, ruído e vibração das engrenagens.

Como o presente trabalho está relacionado ao estudo do ruído e vibração gerado pelas engrenagens cilíndricas de eixos paralelos e dentes com perfil evolvente, o levantamento bibliográfico foi limitado a este tipo de engrenagem. No entanto, vários dos conceitos e técnicas apresentados nos diversos trabalhos pesquisados são aplicáveis também a outros tipos de engrenagens.

Entre as revisões da ampla literatura disponível sobre ruído e vibração de engrenagens, destacam-se dois excelentes trabalhos publicados em 1988, o trabalho de Ozguven e Houser [67] que faz uma revisão de 188 trabalhos científicos sobre os modelos matemáticos usados na análise dinâmica das engrenagens, e o trabalho de Kohler [49] que apresenta uma revisão histórica através do levantamento de 250 trabalhos publicados sobre engrenagens com ênfase em ruído e vibração.

Os dentes de engrenagens com perfil evolvente são muito usados devido a sua facilidade de

fabricação, de montagem mesmo em situações onde a distância entre centros apresenta variações, a sua alta eficiência, à resistência adequada e à transmissão de movimento uniforme. No entanto, os dentes sofrem deflexões elásticas quando submetidos à carga, que podem provocar contato irregular entre os dentes engrenados, causando distúrbios no funcionamento das engrenagens, seja quanto à uniformidade do movimento transmitido, nível de vibração e ruído, ou quanto à resistência ou desgaste dos dentes. Esta irregularidade no contato entre os dentes pode ser também ocasionada por erros de fabricação, que causam desvios na forma geométrica dos dentes em relação a sua forma teórica. Para reduzir estes efeitos causados pelas deflexões dos dentes, Walker [106] propôs, em 1938, modificar a forma evolvente teórica dos dentes, através da introdução de alívios nas extremidades dos mesmos. Estes alívios são usados até hoje e têm sido objeto de estudos relatados em uma grande quantidade de trabalhos.

De acordo com Walker [106], o alívio no perfil evolvente dos dentes deveria iniciar-se próximo do diâmetro primitivo e com amplitude máxima, tomada no diâmetro externo, igual a amplitude da deflexão total do par de dentes engrenados sob carga. Em 1958, Harris [31] estudou o comportamento dinâmico das engrenagens de dentes retos considerando diferentes tipos de alívios no perfil evolvente. Harris [31] também introduziu o conceito do erro de transmissão, que é usado até os dias atuais para o estudo do ruído e vibração dos pares engrenados. Ele usou um modelo matemático com um grau de liberdade para engrenagens retas. Segundo o seu trabalho, existem três fontes internas de vibração: erros de manufatura, variações na rigidez dos dentes e não linearidade na rigidez dos dentes devido à perda de contato. Ele considerou a excitação como periódica e mostrou o comportamento do erro de transmissão para diversos torques na forma de gráficos, onde o eixo das ordenadas é representado pelos valores longitudinais do erro de transmissão para os diversos valores de torque, e o eixo das abscissas representado por posições no ciclo de engrenamento. Esta forma de representação do erro de transmissão é conhecida como mapa de Harris.

Em 1963, Gregory, Harris e Munro [29] confirmaram experimentalmente os resultados obtidos anteriormente por Harris [31]. Neste trabalho o erro de transmissão foi medido para diferentes cargas e diferentes modificações no perfil dos dentes, e apresentados através do mapa

de Harris. A principal conclusão apontada neste trabalho foi que o erro de transmissão poderia ser reduzido através das modificações do perfil evolvente.

Desde então, muitos trabalhos têm dedicado atenção ao estudo das modificações do perfil dos dentes para a redução do erro de transmissão e conseqüente redução do ruído gerado pelos pares de engrenagens. Estes trabalhos concentram-se basicamente no estudo do tipo e amplitude das modificações, na modelagem do erro de transmissão para tornar possível a avaliação das modificações na fase de projeto das engrenagens, e ainda algumas propostas de procedimentos computacionais para minimizar o erro de transmissão.

Além dos trabalhos que estudaram as modificações do perfil evolvente, diversos outros trabalhos estudaram a influência no erro de transmissão devido aos erros de fabricação das engrenagens e aos desvios de montagem do par de engrenagens.

Em função do grande número de trabalhos apresentados sobre o erro de transmissão, alguns trabalhos publicados dedicaram-se a revisar e resumir as principais conclusões e recomendações obtidas neste assunto. Entre eles destacam-se os trabalhos de Smith [82], Welbourn [109], Munro [62] e Houser [38].

O estudo bibliográfico dos trabalhos sobre o erro de transmissão, principalmente no que tange aos procedimentos de modelagem do erro de transmissão estático, foi feito pelo presente autor em um trabalho anterior (ver [111]). Desta forma, destaca-se a seguir os trabalhos pesquisados sobre a redução do erro de transmissão através das modificações da forma da superfície dos dentes.

O primeiro trabalho dedicado à otimização da superfície dos dentes de engrenagens foi apresentado por Conry e Seireg [17], em 1973. Conry e Seireg [17] apresentaram um procedimento de otimização das modificações na superfície dos dentes baseado num algoritmo simplex modificado, que foi originalmente proposto por estes mesmos autores em 1971 [16] para resolver o problema geral de distribuição de carga entre dois corpos elásticos em contato. O procedimento de Conry e Seireg [17] tinha como função objetivo minimizar a máxima pressão atuante na linha de contato entre os dentes. Isto foi obtido através da determinação dos parâmetros ótimos

de uma função quadrática pré-definida para a modificação da superfície dos dentes. Conry e Seireg [17] aplicaram o procedimento proposto em um par de engrenagens de dentes helicoidais considerando modificações somente no passo da hélice das engrenagens para compensar o erro de alinhamento dos dentes provocado pela deflexão dos eixos. Modificações na direção do perfil evolvente não foram consideradas. Nenhuma verificação experimental foi feita e não houve preocupação quanto à viabilidade de fabricação das engrenagens com as modificações ótimas.

Tavakoli e Houser [91] publicaram, em 1984, um trabalho de otimização das modificações da superfície dos dentes visando minimizar o erro de transmissão estático das engrenagens de dentes retos. O procedimento usou o método complex, que é um método de programação linear desenvolvido a partir do método simplex em 1965 por M. J. Box. Neste trabalho de Tavakoli e Houser [91] a função objetivo era minimizar a soma das amplitudes das três primeiras harmônicas do erro de transmissão. Os valores máximos e mínimos para cada variável envolvida no problema deveriam ser definidos pelo usuário e a função objetivo era otimizada com respeito a cada variável separadamente. Os tipos de modificações foram pré-definidos e limitados às modificações convencionais, tais como os alívios no topo e / ou na raiz dos dentes segundo uma função afim ou quadrática. Os autores justificaram isto afirmando que outras modificações poderiam ser consideradas, mas poderiam ser de difícil obtenção com os processos usuais de fabricação. Não foram consideradas modificações na direção do passo hélice das engrenagens, e para simplificação do modelo assumiu-se a carga distribuída uniformemente ao longo da largura dos dentes. Os autores mostraram ser possível reduzir o erro de transmissão através das modificações convencionais do perfil evolvente para um dado torque, indicando que deve existir uma modificação ótima para cada torque. Eles sugeriram como seqüência do trabalho o desenvolvimento de um procedimento de otimização que minimize o efeito das alterações de carga no erro de transmissão.

Em 1987, Hu *et. al.* [42] analisaram a influência das modificações de perfil no comportamento dinâmico de um par de engrenagens de dentes retos. Para isto, usaram um procedimento de otimização cuja função objetivo era minimizar o valor médio da aceleração. O algoritmo de otimização usado no trabalho não é mencionado e as modificações foram limitadas aos alívios

do perfil evolvente no topo e na raiz dos dentes. Os autores obtiveram redução de 4 dB(A) com a aplicação do procedimento de otimização em um par de engrenagens de dentes retos.

Weck e Mauer [107], em 1990, estudaram também a influência das modificações das superfícies dos dentes quanto à distribuição de carga e quanto ao comportamento dinâmico dos pares de engrenagens helicoidais. Este trabalho confirmou que a distribuição de carga e a rigidez do engrenamento estão diretamente relacionados com as modificações das superfícies dos dentes, e que mesmo as modificações mais simples, como os alívios do perfil evolvente no topo dos dentes podem levar a reduções de ruído. Estudaram ainda o efeito das modificações chamadas de 3D, que são alívios introduzidos na direção da linha de contato e rolamento. Segundo Weck e Mauer [107] este tipo de correção poderia ser obtido através de um processo de retífica dos dentes em máquinas CNC. Os exemplos numéricos mostraram que as modificações 3D resultam em menor nível de ruído. No entanto, não foram feitas verificações experimentais para a comprovação dos resultados, e mesmo as análises numéricas foram limitadas a um único nível de torque.

Nesta mesma linha de pesquisa, o trabalho de Beghini *et. al.* [10] publicado em 2004, propôs um procedimento para minimizar o pico-a-pico do erro de transmissão de engrenagens de dentes retos através dos alívios no topo dos dentes. Neste procedimento eles assumiram a amplitude do alívio como um valor próximo do valor da deflexão máxima do par de dentes conjugados e buscaram, através de um procedimento iterativo, o valor ótimo para o início dos alívios. O procedimento trabalha com valores discretos definidos pelo usuário e repete a rotina de cálculo para cada combinação de valores das variáveis. O procedimento não é computacionalmente eficiente. Nos exemplos numéricos apresentados, cerca de doze horas foram gastas para se obter a melhor solução usando um microcomputador com processador de 2.6GHz e 1GB de memória RAM. O procedimento é limitado às engrenagens retas e com grau de recobrimento menor do que dois.

Já em 1991, o trabalho de Sundaresan, Ishii e Houser [90] apresentou um estudo para otimização robusta das modificações das superfícies dos dentes visando a redução do erro de transmissão de engrenagens helicoidais. O procedimento proposto por estes autores baseou-se

na otimização estatística usando as técnicas de Taguchi. Foram considerados como fatores de estudo o início da modificação do perfil evolvente, a amplitude do alívio no perfil, o início da modificação no passo da hélice e a amplitude do alívio no passo da hélice. Todos os fatores de estudo foram considerados em dois níveis (máximo e mínimo). Considerou-se ainda, alguns erros de fabricação, tais como, erros de forma do perfil evolvente e erros de alinhamento dos eixos, e variações de operação, tais como, variações no torque aplicado. A função objetivo era minimizar o valor de uma função com a média ponderada do pico-a-pico do erro de transmissão e um índice de sensibilidade. Usou-se, então, um arranjo ortogonal L8 para as combinações. Através de um programa computacional para o cálculo do erro de transmissão, calculou-se o pico-a-pico do erro de transmissão para cada combinação do arranjo L8. A escolha do valor ótimo levou em conta também a sensibilidade às variações de fabricação e de operação.

O trabalho de Santus, Presicce e Beghini [81], publicado em 2006, para engrenagens de dentes retos propôs o uso de um alívio no topo dos dentes que se inicia com uma função quadrática e segue depois conforme uma função afim. Segundo estes autores esta combinação de modificações melhora a transição de contato entre o perfil evolvente e o perfil modificado. Os parâmetros ótimos foram determinados através de um procedimento de repetição do cálculo do erro de transmissão com valores discretos das variáveis do problema, avaliando-se o valor do pico-a-pico do erro de transmissão.

Outras formas de modificação das superfícies dos dentes também foram estudadas, como por exemplo, no trabalho de Litvin *et al* [56] de 1995, que propôs o uso de uma função parabólica pré-definida para o erro de transmissão. Uma vez definida esta função do erro de transmissão, as modificações nas superfícies dos dentes necessárias para gerar aquela função podem ser calculadas. A forma destas modificações é caracterizada por dois arcos circulares. No entanto, para a fabricação de uma das engrenagens com as modificações propostas, é necessário uma máquina CNC e cortadores especiais, e a outra engrenagem pode ser obtida através dos processos e cortadores convencionais. Este trabalho mostrou somente resultados de simulação numérica sem carga aplicada. Não foram feitas verificações experimentais.

Ainda nesta linha, em 2001 Litvin *et al* patentearam uma forma similar de modificação das

superfícies dos dentes de engrenagens retas e helicoidais [57]. A modificação consiste basicamente de um abaulamento duplo no perfil do pinhão para gerar um contato concavo-convexo entre as superfícies dos dentes do pinhão e da engrenagem. As curvaturas dos dentes das duas engrenagens possuem uma pequena diferença para acomodar as deflexões das superfícies quando sob carga. Desta forma, o contato entre os dentes se dá em forma de longas elipses de contato. Com isto o erro de transmissão assume a forma de uma função parabólica, o que segundo os autores reduz o ruído e vibração, reduz o deslocamento de contato devido aos erros de alinhamento, e reduz substancialmente as tensões de compressão e flexão. Para a fabricação de engrenagens com estas modificações são necessárias máquinas CNC.

Existe um grupo de pesquisa formado por pesquisadores de diversas universidades dos Estados Unidos, Europa e Ásia que trabalha nesta linha de função parabólica do erro de transmissão. Em decorrência disto, diversos trabalhos foram publicados sobre este tipo de modificação dos dentes de engrenagens, entre eles os trabalhos de Litvin *et al* [55], Chen e Tsay [13], Chen *et al* [11], Chen e Tsay [12], e Tseng e Tsay [92].

Norman [65], em 1995, apresentou um procedimento para o cálculo do erro de transmissão baseado em ajuste de curvas das deflexões elásticas dos dentes obtidas através de modelagem em elementos finitos. Ele usou o método dos coeficientes de influência e um método iterativo para resolver o problema de distribuição de carga entre os dentes. Através deste procedimento, ele estudou a influência de alguns parâmetros que definem as modificações das superfícies dos dentes sob a influência de erros de alinhamento de montagem do par de engrenagens. As simulações numéricas foram feitas usando um par de engrenagens helicoidais de aplicação automotiva. O cálculo do erro de transmissão foi obtido para cada condição estudada repetindo-se o procedimento de cálculo. O valor de pico-a-pico do erro de transmissão estático foi considerado para comparação entre os resultados, que foram apresentados em forma de gráficos de contorno tomando-se dois a dois os parâmetros estudados. Neste caso, a condição ótima para as modificações das superfícies dos dentes pôde ser obtida através da análise dos gráficos. Este trabalho também conclui que as modificações do perfil e do passo da hélice devem ser otimizadas para minimizar o erro de transmissão. No entanto, o trabalho foi limitado as modificações conven-

cionais (alívio de perfil e abaulamento do passo da hélice) e comprovações experimentais não foram feitas.

Iwase e Miyasaka [43] apresentaram em 1996, o procedimento adotado pela Toyota do Japão para a determinação das modificações ótimas das superfícies dos dentes de engrenagens automotivas. O método, chamado de método convencional para a determinação das modificações dos dentes, previa a fabricação de engrenagens de teste com algumas poucas variações nas superfícies dos dentes. Estas engrenagens eram testadas em uma bancada, na qual o ruído gerado pelo par engrenado em condições de operação era medido. A partir destas medições traçava-se gráficos de contorno e se definia a condição considerada ótima. O método empírico era limitado e custoso. Os autores propuseram então um procedimento de otimização baseado em um método analítico. Neste procedimento os autores dividiram o processo de otimização em duas fases distintas. Na primeira fase eram otimizados os parâmetros envolvidos com os erros de alinhamento das engrenagens e na segunda fase eram otimizados os parâmetros de forma do dente. A função objetivo adotada foi a amplitude da primeira harmônica do erro de transmissão. A estratégia de otimização não é explícita no trabalho, mas se entende que o erro de transmissão foi calculado de forma iterativa para várias combinações dentro dos intervalos definidos para cada parâmetro. Na estudo de caso apresentado, os autores obtiveram redução de 4 dB no ruído gerado pelo par de engrenagens através do uso deste procedimento. A conclusão do trabalho é que se deve buscar o maior grau de recobrimento real possível, o que pode ser obtido através do uso de modificações pequenas na curvatura das superfícies dos dentes e através do uso de modificações cruzadas (chamadas em outros trabalhos de modificações 3D).

Durante seu trabalho de doutorado em 1999, Palmer [68] fez uma extensa pesquisa teórica e experimental sobre as modificações das superfícies dos dentes para a redução do ruído gerado pelas engrenagens de dentes retos e helicoidais. O trabalho foi limitado as modificações convencionais 2D e 3D, tais como, alívios do perfil evolventes no topo e na raiz dos dentes conforme funções afins e quadráticas, e ainda, abaulamentos no passo da hélice. Neste trabalho, Palmer [68] investigou os valores ótimos das modificações dos dentes para minimizar o erro de transmissão. Isto foi feito adotando intervalos de valores para os parâmetros envolvidos e repe-

tindo uma rotina de cálculo do erro de transmissão para cada combinação destes valores. Para a avaliação dos resultados obtidos ele comparou o valor de pico-a-pico do erro de transmissão. Ele mostrou em seu trabalho que existe uma forte relação entre o pico-a-pico do ET e o nível de pressão sonora gerado pelo par engrenado. Seu trabalho concluiu que não existem diferenças significativas entre as modificações chamadas de 2D (alívios no topo e / ou na raiz do perfil) e as modificações 3D (modificações cruzadas), e ainda, concluiu que é possível minimizar o erro de transmissão através da escolha correta das modificações da superfície dos dentes.

Wagaj e Kahraman [104] realizaram um estudo semelhante, em 2002, sobre o efeito das modificações 2D e 3D no erro de transmissão de pares de engrenagens de dentes retos e helicoidais. O estudo envolveu uma análise teórica e experimental. Para a análise teórica eles usaram o procedimento desenvolvido por Vijayakar [101]. A estratégia usada no estudo foi selecionar os parâmetros envolvidos nas modificações das superfícies e variá-los para cada simulação. Os resultados foram apresentados em forma de gráficos de superfície, onde o eixo z corresponde a amplitude da 1a. e 2a. harmônicas do erro de transmissão. As conclusões deste trabalho concordam com aquelas obtidas por Palmer [68]. Entre as principais conclusões destaca-se que ambas modificações, 2D e 3D, podem ser usadas para minimizar as amplitudes do erro de transmissão, mas que nenhuma delas elimina a influência da carga aplicada no erro de transmissão, ou seja, pode-se minimizar o erro de transmissão através das modificações, porém somente para um dado torque. No entanto, as modificações 3D (modificações cruzadas) apresentaram menor sensibilidade às variações do torque. Além disto, em um segundo estudo, agora com foco em durabilidade, Wagaj e Kahraman [105] mostraram que as engrenagens com modificações 3D apresentam menores níveis de tensão de contato e de flexão quando comparadas com as engrenagens com modificações 2D.

O trabalho de Umezawa [95], publicado em 2000, também concluiu através de análises teóricas e experimentais que engrenagens com modificações cruzadas (ou 3D) apresentam melhor resposta quanto ao nível de vibração gerado. No entanto, não conseguiu concluir qual modificação cruzada é melhor, se é na direção das linhas de contato (chamadas de "*bias-out*") ou na direção normal as linhas de contato (chamadas de "*bias-in*").

Rao e Yoon [74] propuseram, em 2001, uma abordagem diferente para o problema da redução do pico-a-pico do erro de transmissão em engrenagens helicoidais. Nesta abordagem, as correções da superfície dos dentes são tomadas no plano de ação e se busca obter a superfície dos dentes, após as deflexões causadas pela carga aplicada, com características evolventes. Os dentes são então modificados conforme uma *spline* cúbica de tal forma que quando em operação sob carga eles possuam a forma evolvente. Obviamente as modificações que devem ser introduzidas nos dentes para que isto aconteça podem não ser de fácil fabricação. O fato de se assumir as modificações somente no plano de ação torna o problema mais simples para o caso das engrenagens de dentes helicoidais, que se torna bi-dimensional. Com esta abordagem os autores criam um chamado plano de ação perfeito, no qual deve ocorrer todo o contato entre os dentes. Os autores mostraram através de um exemplo numérico que se pode obter uma expressiva redução no pico-a-pico do erro de transmissão com esta abordagem. No entanto, o trabalho foi limitado às simulações numéricas sem comprovação experimental e na modelagem foi desprezado o contato prematuro do topo dos dentes (*"corner contact"*). De acordo com estes autores, este tipo de modificação proposta, resultante da abordagem do plano de ação perfeito, é melhor do que as modificações convencionais sugeridas na literatura, que segundo eles não são adequadas para as engrenagens helicoidais devido as suas características de contato.

De maneira geral, o trabalho de Rao e Yoon [74] seguiu a mesma metodologia proposta por Kish e Isabelle [48], que foi patenteada pela empresa americana *United Technologies Corporation* em 1994 [48]. A patente assegura os direitos sobre o tipo de modificação e o método para a obtenção da modificação dos dentes. O procedimento consiste em calcular, através de um modelo em elementos finitos, as deflexões radiais e tangenciais dos dentes engrenados quando submetidos à carga de projeto. Os valores das deflexões calculadas ao longo da superfície dos dentes são adicionados aos valores iniciais que definem a superfície dos dentes gerando um mapa da superfície modificada. Este mapa é então usado para a definição do perfil do rebolo de retífica, e para definir as coordenadas da máquina CNC de retífica dos dentes. Os autores sugeriram que o montante total de deflexão dos dentes engrenados fosse aplicado apenas no pinhão (engrenagem de menor número de dentes), permanecendo a outra engrenagem do par sem modificações, e ainda sugeriram que fosse usado no processo de retífica um rebolo de

nitreto cúbico de boro, devido a sua maior capacidade de manter o perfil definido. Com estas modificações nas superfícies dos dentes, os dentes engrenados sob carga apresentam uma forma próxima à forma evolvente, que tem a característica de transmitir movimento uniforme, com valor reduzido do pico-a-pico do erro de transmissão.

Uma outra abordagem muito interessante foi observada nos trabalhos de Nielsen *et al* [64], publicado em 1985, e Rouverol e Pearce [79], publicado em 1988. Nestes trabalhos buscou-se minimizar a variação de rigidez do engrenamento, que é característica dos pares de engrenagens e uma das causas do erro de transmissão. A variação mínima da rigidez foi obtida através da modificação da superfície dos dentes. Uma das modificações usadas foi um abaulamento diferenciado nos dentes, ou seja, em cada posição radial dos dentes foi determinado um abaulamento específico para que a rigidez do engrenamento permanecesse constante. Outras modificações foram também introduzidas, como a altura variável ao longo da largura do dente através da alteração do diâmetro externo da engrenagem. Estes trabalhos apresentam uma abordagem diferenciada para o problema de contato entre os dentes, cujo princípio é alterar a matriz de rigidez e não o vetor dos afastamentos iniciais como é feito na maioria dos trabalhos. A grande vantagem neste caso é que a redução no pico-a-pico do erro de transmissão pode ser obtida para uma faixa ampla de torques, e não somente para um torque nominal de projeto. Obviamente as superfícies resultantes desta abordagem podem apresentar alguma dificuldade para a fabricação, apesar dos autores afirmarem que elas podem ser obtidas através dos processos convencionais de fabricação. Os procedimentos para a minimização do pico-a-pico do erro de transmissão que usam esta abordagem foram objeto de algumas patentes depositadas nos Estados Unidos entre 1981 e 1994 (ver [76, 77]). Embora não se tenha observado através da pesquisa bibliográfica realizada a utilização deste tipo de abordagem em aplicações reais, atualmente a empresa americana *Axicon Technologies* detém os direitos destas patentes e comercializa projetos de engrenagens com estas modificações [78].

A abordagem de rigidez constante do engrenamento apresenta certa relação com os trabalhos de Honda [34, 33, 35], publicados em 1993 e 1995. Honda [34] propôs uma modelagem do erro de transmissão baseada na variação do diâmetro de base da engrenagem movida. Ele considerou

que todos os desvios no contato entre os dentes causados por modificações intencionais das superfícies dos dentes, erros de fabricação e pelas deflexões poderiam ser consideradas como variações do diâmetro de base da engrenagem movida. Desta forma, poder-se-ia verificar as variações no movimento transmitido pelo par de engrenagens. Para calcular as deflexões dos dentes ele usou a função de rigidez de Umezawa [34]. Honda [35] fez uma análise experimental e teórica com um par de engrenagens helicoidais com três diferentes modificações na superfície dos dentes. Ele usou para isto um índice de desempenho dinâmico (ruído, vibração e carga dinâmica) do par engrenado [33]. Honda [35] mostrou teoricamente um método para minimizar este índice, e desta forma, minimizar o ruído e vibração gerado pelo par engrenado. Ele concluiu que para se obter um projeto de um par de engrenagens com boa resposta dinâmica sob qualquer nível de carga é necessário buscar uma configuração geométrica do par com rigidez equivalente do engrenamento com menor variação possível, e neste caso, as modificações e erros da superfícies dos dentes devem ser as menores possíveis. No entanto, Honda [35] não mostra como podem ser obtidos pares de engrenagens na condição considerada ótima.

Segundo o trabalho de Houser *et al* [41], publicado em 2000, pode-se projetar pares de engrenagens com certas características geométricas que reduzem as variações do erro de transmissão e com baixa influência das modificações da superfícies dos dentes. Estes autores propuseram um procedimento de projeto ótimo de pares de engrenagens através de uma abordagem de multi-variáveis. O procedimento consiste em definir os parâmetros considerados como variáveis de projeto e outros parâmetros com valores fixos. Para os parâmetros considerados variáveis, atribui-se valores numéricos máximo e mínimo, e também o grau de discretização do intervalo. Então, repete-se uma rotina de cálculo para todas as combinações possíveis (em um exemplo citado, a rotina foi repetida cerca de 2 milhões de vezes). Os projetos de interesse são selecionados com a ajuda de filtros e de gráficos em forma de nuvens de pontos. Já as modificações da superfícies dos dentes são consideradas fixas (iguais) para todos as combinações analisadas. Segundo estes autores, para a maioria das engrenagens helicoidais, as modificações circulares no perfil evolvente e no passo da hélice são próximas da condição ótima e por isto podem ser assumidas desta forma para todos projetos. Os autores não usaram outro método de otimização por entenderem que as técnicas convencionais de otimização são limitadas quanto ao número

de variáveis de entrada e de respostas, e além disto requerem uma função objetivo, mesmo nos métodos mais avançados de otimização, como as redes neurais e os algoritmos genéticos. A experiência destes autores com projeto de engrenagens mostra que existem várias subregiões ótimas, e que pequenas alterações na função objetivo podem resultar em projetos completamente diferentes. Entretanto, o procedimento proposto por estes autores resulta em elevado tempo de processamento computacional necessário para executar todas as combinações, e ainda considera somente os valores discretos de cada parâmetro que podem não levar à condição ótima. De qualquer forma, a abordagem apresentada neste trabalho difere daquelas apresentadas nos demais trabalhos pesquisados por fixar as modificações das superfícies dos dentes e buscar um projeto do par de engrenagens que reduza o pico-a-pico do erro de transmissão.

Esta questão da estratégia de buscar um projeto ótimo em termos de ruído através dos parâmetros chamados de macro-geometria, tais como, módulo e número de dentes, conforme apresentado no trabalho citado acima de Houser *et al* [41], e através dos parâmetros chamados de micro-geometria, tais como as modificações das superfícies dos dentes, foi tema de um artigo do Dr. Hermann J. Stadtfeld [87] publicado em 2005. Neste artigo, Stadtfeld [87] disse que a maioria das grandes melhorias nos pares de engrenagens são obtidas com alterações de macro-geometria e que melhorias menores são, em geral, obtidas com modificações de micro-geometria, e que a decisão de quando adotar uma ou outra estratégia é um desafio do engenheiro responsável por isto. Para melhorias em termos de resistência dos pares de engrenagens, ele recomendou que sempre que possível sejam feitas alterações de macro-geometria. No entanto, para as reduções de ruído, ele recomendou que sejam usadas as alterações de micro-geometria. Conforme a experiência deste autor, é aceito na indústria que pares de engrenagens existentes que sofram alterações de micro-geometria não necessitam de revalidação de durabilidade, uma vez que estas alterações são neutras ou positivas quanto à resistência do par de engrenagens. A validação de durabilidade de um par de engrenagens é um processo caro e demorado. Ainda segundo a experiência deste autor, a otimização de um par de engrenagens quanto ao ruído requer, em geral, apenas modificações nas superfícies dos dentes.

Um método de modificação da superfície dos dentes foi apresentado em uma patente da

Toyota do Japão de 2000 de autoria de Maki [59]. A patente refere-se ao tipo de modificação e ao método para a obtenção da modificação. Trata-se de uma curvatura convexa aplicada à superfície dos dentes. A convexidade da superfície varia ao longo das linhas de contato dos dentes, o que segundo o autor, permite minimizar o erro de transmissão em uma ampla faixa de torques. Isto é particularmente interessante, por exemplo, nas aplicações em transmissões automotivas, onde existe uma variação grande do torque nos pares de engrenagens. Sob diferentes torques, as deflexões elásticas resultantes nos dentes são acomodadas pelas diferentes curvaturas dos dentes. As curvaturas convexas dos dentes são definidas por simulação computacional e obtidas através de máquinas CNC de retífica de dentes.

Uma outra patente relacionada a um método para redução de ruído e vibração de pares de engrenagens através de modificações nas superfícies dos dentes foi requerida por Vinayak *et al* [102] em 2005. A patente de propriedade da empresa americana *Sikorsky Aircraft Corporation*, fabricante de helicópteros, refere-se a um método para a definição das modificações das superfícies dos dentes em função do erro de transmissão previamente calculado ou obtido experimentalmente, e do processo de acabamento dos dentes das engrenagens. Segundo os autores, pode-se obter reduções no nível de ruído da ordem de 13 a 15dB através do método proposto. O princípio do método é reduzir as duas componentes de vibração do engrenamento, uma delas referente aos deslocamentos na direção do plano de ação, que é o pico-a-pico do erro de transmissão, e a outra referente ao deslizamento entre as superfícies dos dentes e ocorre na direção normal ao plano de ação. A primeira componente é reduzida através da definição adequada das modificações nas superfícies dos dentes e a segunda componente é reduzida através do uso de um processo de super acabamento ("*isotropic finishing process*") dos dentes das engrenagens para reduzir a rugosidade superficial e para mudar a orientação das marcas geradas no processo anterior de retífica dos dentes. Como o processo de super acabamento gera alterações dimensionais na superfície dos dentes, a definição das modificações na superfície dos dentes é feita considerando-se as variações de rigidez e também as alterações geradas pelo processo de super acabamento. Na descrição da patente, os autores não esclareceram o método usado para a obtenção das modificações das superfícies. O interessante neste trabalho é a estratégia de determinar previamente o erro de transmissão para depois buscar a modificação na superfície

dos dentes que reduza o valor de pico-a-pico do erro de transmissão.

Um trabalho para redução do erro de transmissão através do uso de um algoritmo genético foi apresentado por Curtis *et. al.* [20] em 2005. Neste trabalho, Curtis *et. al.* [20] propuseram um procedimento para a redução do ruído de choro de engrenagens ("*whine noise*") através da redução da excitação de entrada de um sistema dinâmico. A excitação considerada foi o erro de transmissão estático, e a redução da excitação proveniente do erro de transmissão foi obtida através da otimização das modificações na superfície dos dentes usando um algoritmo genético. As modificações consideradas na otimização foram restritas às modificações convencionais 2D, onde as variáveis envolvidas foram a inclinação e o abaulamento do perfil evolvente e do passo da hélice. O procedimento proposto considerou ainda uma análise de sensibilidade aos erros de fabricação. Desta forma, a condição ótima foi definida não somente quanto à menor excitação proveniente do erro de transmissão, mas também quanto à robustez do projeto aos erros de fabricação. O trabalho apresentou a aplicação do procedimento em pares de engrenagens de uma transmissão automotiva de cinco marchas, e apresentou ainda comparação dos resultados analíticos com os resultados obtidos experimentalmente. O trabalho concluiu que a redução da excitação do erro de transmissão leva a redução do ruído.

A revisão bibliográfica mostra que há quase cinco décadas o erro de transmissão e a sua influência no ruído dos pares engrenados têm sido estudados. Isto demonstra a importância deste tema. Trabalhos publicados nos últimos anos mostram que este assunto ainda preocupa os pesquisadores e que o conhecimento nesta área não foi esgotado. Constatou-se através da revisão bibliográfica que o pico-a-pico do erro de transmissão foi usado em grande parte dos trabalhos como parâmetro de avaliação do comportamento do par de engrenagens quanto ao ruído gerado. É amplamente aceito que o pico-a-pico do erro de transmissão relaciona-se ao ruído dos pares engrenados. Muitos dos trabalhos estudaram o efeito das modificações das superfícies dos dentes na redução do pico-a-pico do erro de transmissão e do ruído dos pares engrenados. Mesmos as modificações simples, chamadas em alguns trabalhos de modificações 2D, possibilitam a redução do pico-a-pico do erro de transmissão. Isto justifica a abordagem do presente trabalho e a motivação para desenvolver um método para determinar as modificações

da superfície dos dentes que minimize o PPET, como forma de contribuir para a redução do ruído gerado pelos pares engrenados.

Capítulo 3

Modelagem matemática do erro de transmissão

Este capítulo tem como objetivo apresentar o modelo usado para o cálculo do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento, e discutir alguns procedimentos para determinar a distribuição de carga entre os dentes engrenados que foram estudados neste trabalho.

Um modelo matemático que permita prever o erro de transmissão gerado pelo par engrenado em condições de operação, ainda na fase de projeto, é sem dúvida uma ferramenta valiosa para a obtenção de engrenagens com baixo nível de ruído.

Vários modelos para o cálculo do erro de transmissão foram propostos e diferentes abordagens foram usadas com o objetivo de se obter uma melhor representação do fenômeno real [67]. Pode-se dividir a modelagem do erro de transmissão em termos dos seguintes aspectos:

- parâmetros de operação;
- representação geométrica do contato entre os dentes (modelo geométrico);
- comportamento elástico do par engrenado (modelo elástico);
- interação com outros componentes do sistema; e
- solução do problema de distribuição de carga entre os dentes.

3.1 Parâmetros de operação

Os parâmetros de operação dos pares engrenados considerados nos modelos são, em geral, o torque aplicado e a rotação transmitida. Os modelos que consideram a rotação transmitida levam em conta os efeitos dinâmicos. No entanto, a aproximação do modelo com o fenômeno real depende do número de graus de liberdade usado e das simplificações na modelagem dos elementos do sistema. O erro de transmissão estático é normalmente usado como um dado de entrada dos modelos de dinâmica de engrenagens [67].

É fato que a análise estática é um modelo simplificado do fenômeno real. Apesar disso, o erro de transmissão na condição estática apresenta comportamento similar ao do erro de transmissão na condição dinâmica, e poderia ser usado para se avaliar o efeito das modificações da superfície dos dentes [58]. Por isto, na fase de projeto, seria razoável desprezar o atrito e considerar a condição estática para a otimização das modificações da superfície dos dentes [58]. Segundo um trabalho de Velez e Ajmi [98], publicado em 2006, existe uma relação formal entre a excitação do erro de transmissão estático e o fator dinâmico dos pares engrenados. Velez e Ajmi [98] propuseram uma fórmula aproximada que permite calcular o fator dinâmico a partir do erro de transmissão estático. Desta forma, no presente trabalho é usado um modelo do erro de transmissão estático, e se assume que este irá representar a excitação dinâmica do par engrenado quando em rotação constante.

3.2 Modelo geométrico

Normalmente, para a representação geométrica do contato entre os dentes engrenados, assume-se que o contato ocorre somente no plano de ação, que é o plano tangente aos dois cilindros de base. Com esta simplificação a modelagem fica restrita somente às linhas de contato dos dentes. As linhas de contato podem ser adequadamente representadas por um número pequeno de pontos discretos. Além disso, o fato destes pontos discretos se localizarem sobre o plano de ação permite que se aplique as propriedades geométricas das engrenagens com dentes evolventes, evitando a projeção dos deslocamentos para outros planos ou para outros sistemas

de coordenadas.

O contato entre os dentes de engrenagens evolventes dar-se-ia exclusivamente no plano de ação se o par de engrenagens e os componentes que interagem com ele fossem perfeitos, isto é, isentos de desvios da sua forma ideal, e ainda com rigidez infinita. Para uma grande parte das aplicações de engrenagens, estas condições não podem ser assumidas como verdadeiras e a simplificação do contato somente no plano de ação resulta em erros na determinação do contato entre os dentes e no cálculo do erro de transmissão [113].

Além dos modelos baseados no método dos elementos finitos, como por exemplo o modelo proposto por Vijayakar [101], alguns modelos analíticos também consideram o contato em toda a superfície dos dentes e não somente no plano de ação, por exemplo, o modelo proposto por Kurokawa *et al.* [51] para as engrenagens de dentes retos e o modelo proposto por Wink [111] para as engrenagens de dentes helicoidais.

No caso das engrenagens com dentes retos, a análise pode ser tratada em duas dimensões. No entanto, os pares engrenados com dentes helicoidais requerem análises em três dimensões, o que impõe uma complexidade maior à modelagem.

No presente trabalho utiliza-se o procedimento proposto por Wink [111] para a determinação do contato entre os dentes e para o cálculo do erro de transmissão de pares engrenados de dentes helicoidais. Este procedimento é descrito brevemente a seguir, porém para maiores detalhes recomenda-se consultar a referência [111].

O modelo geométrico do par de engrenagens é mostrado na figura 3.1.

Por convenção a engrenagem movida é localizada acima da engrenagem motora, a distância entre centros do par de engrenagens é definida sobre o eixo y e o eixo de rotação da engrenagem motora coincide com o eixo x .

A superfície dos dentes da engrenagem movida é representada por pontos discretos no sistema de coordenadas mostrados na figura 3.1. Os respectivos pontos discretos de contato na superfície dos dentes da engrenagem motora são calculados a partir da teoria de geometria e

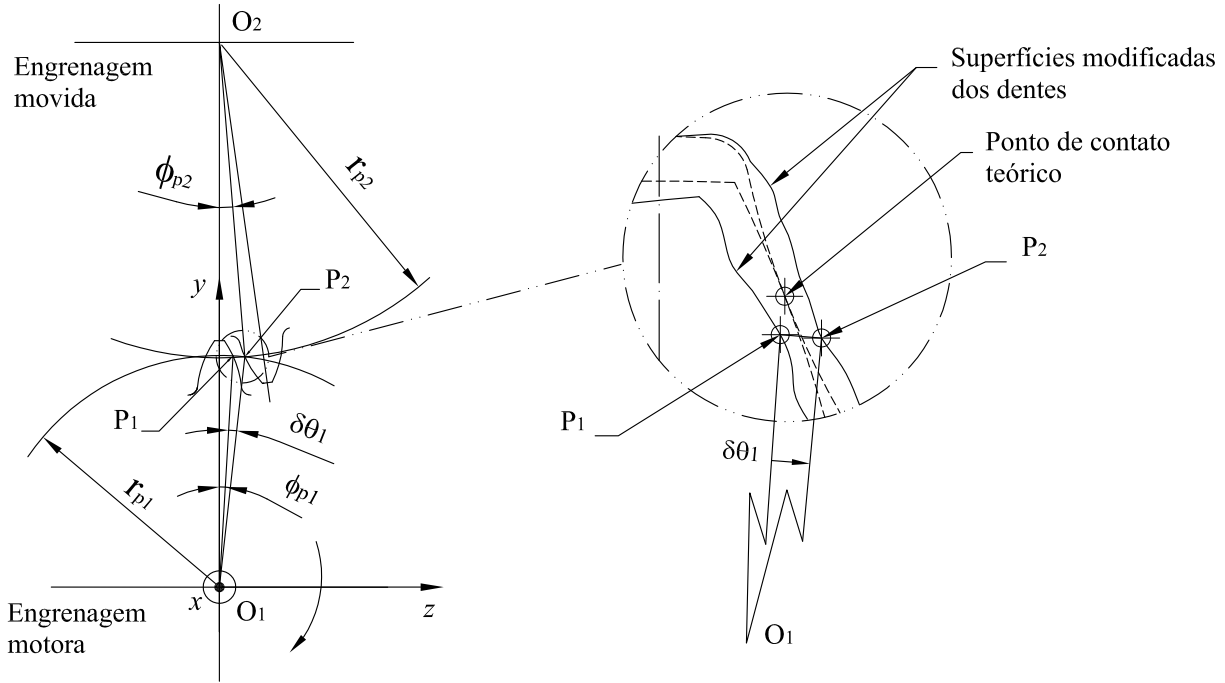


Fig. 3.1: Seção transversal do par de engrenagens.

cinemática das engrenagens de dentes helicoidais.

Os desvios longitudinais da topografia ideal dos dentes, tais como erros de fabricação e modificações intencionais de projeto, podem ser considerados na análise de contato com este modelo. Para isto, eles são transformados em desvios angulares tomados no sistema de coordenadas (ver figura 3.1) e são adicionados aos respectivos pontos discretos nas superfícies dos dentes.

Nos pares de engrenagens, a região de contato entre os dentes e o número de dentes em contato variam conforme a posição angular do par engrenado em função da cinemática do movimento. Assume-se que um número de pontos discretos ao longo do ciclo de engrenamento pode representar adequadamente o movimento do par engrenado.

O ângulo $\delta\theta_1$ mostrado na figura 3.1, corresponde ao ângulo de rotação necessário para que o ponto P_1 referente à superfície da engrenagem motora entre em contato com o ponto P_2 referente à superfície da engrenagem movida. Este ângulo pode ser calculado para cada par

de pontos candidatos ao contato. O ângulo mínimo entre todos os pares de pontos analisados, $\delta\Theta_{1min}$, pode ser encontrado para cada posição no ciclo de engrenamento.

Desta forma, o erro de transmissão longitudinal sem carga aplicada numa dada posição no ciclo de engrenamento pode ser calculado pela equação (3.1):

$$ETL = -\delta\Theta_{1min} \frac{N_1}{N_2} r_{g2} , \quad (3.1)$$

onde ETL é o erro de transmissão longitudinal sem carga aplicada (mm), N_1 é o número de dentes da engrenagem motora, N_2 é o número de dentes da engrenagem movida e r_{g2} é o raio de base da engrenagem movida (mm).

3.3 Modelo elástico

Quando o par engrenado é submetido a torque, observa-se que devido às deflexões dos dentes, a posição da engrenagem movida fica defasada em relação à engrenagem motora de um certo ângulo de rotação. Este ângulo de rotação, devido às deflexões, combinado com os erros e modificações das superfícies dos dentes, compõem o erro de transmissão.

Diversos métodos são usados para o cálculo das deflexões dos dentes. Segundo Beacham *et al.* [9] os principais métodos usados são:

- o método dos elementos finitos [110, 54];
- o método de fatias finas, no qual a engrenagem helicoidal é tratada como uma série de engrenagens com largura muito pequena ligadas entre si por molas. Estas engrenagens devido à largura pequena podem ser aproximadas por engrenagens de dentes retos [83, 84, 68];
- o método dos coeficientes de influência, no qual os coeficientes são determinados através do método dos elementos finitos [101, 93] ou através de fórmulas aproximadas [18], ou ainda, determinados de forma semi-empírica [94, 96, 88];

Observa-se que em diversos trabalhos foi aplicado o método dos coeficientes de influência para o cálculo das deflexões dos dentes e do erro de transmissão [9, 36, 45, 65, 69, 93, 95, 114, 111]. O uso extensivo do método dos coeficientes de influência se deve principalmente a sua flexibilidade e facilidade para alterar a micro e macro geometria do modelo, além de apresentar boa correlação com os resultados experimentais [9].

Através do método dos coeficientes de influência pode-se calcular a deflexão gerada em um ponto em análise devido a uma força aplicada num ponto qualquer do dente. A deflexão elástica total num dado ponto discreto é calculada como pela somatória das deflexões elásticas naquele ponto causadas por uma força aplicada diretamente nele e por forças aplicadas em outros pontos do dente.

Geralmente, para a determinação da rigidez do engrenamento, a deflexão elástica total é dividida em componentes da deflexão que são assumidas como independentes [88]. Neste estudo é usado o mesmo modelo elástico considerado por Wink [111], o qual é composto pelas seguintes deflexões elásticas:

1. deflexão local relativa à região de contato entre os dentes (achatamento da superfície);
2. deflexão do dente como um todo, que é considerada próxima daquela que surge em uma placa engastada de dimensões representativas do dente.

Além das duas deflexões citadas acima, alguns trabalhos disponíveis na literatura consideram ainda as deflexões dos corpos das engrenagens [88, 80, 1]. No entanto, estas deflexões tornam-se significativas para engrenagens grandes e que operam em altas rotações [1]. No presente estudo os corpos das engrenagens são assumidos como rígidos.

3.3.1 Deflexão local devido ao contato

Uma das deflexões elásticas observadas em dentes de engrenagens é a deflexão devido ao contato entre os dentes causada por uma força normal às superfícies destes. Esta deflexão da região de contato pode ser comparada à deflexão de Hertz segundo um modelo de dois cilindros em contato. No entanto, o contato entre dentes de engrenagens difere do modelo de Hertz

quanto à posição de suporte e aplicação da força, quanto à curvatura dos dentes, que não é constante ao longo do contato, e ainda quanto à extensão do contato para as arestas livres do dente [101].

Neste trabalho, a deflexão de contato é considerada somente no ponto onde a força é aplicada. A influência desta força sobre outros pontos discretos na superfície do dente não é considerada. Segundo Ajmi e Velez [1] e Steward [88] a deflexão de contato é muito localizada e sua influência em outros pontos é pequena quando comparada com a influência da deflexão do dente como um todo, e por isto esta influência sobre outros pontos é desprezada na grande maioria dos modelos. Ainda segundo Ajmi e Velez [1] a comparação com resultados experimentais mostra que esta aproximação é satisfatória.

A formulação adotada neste trabalho para o cálculo das deflexões de contato foi usada em [17, 111], e está baseada na equação de Boussinesq [44] com uma constante de aproximação para a relação do deslocamento do elemento como um todo e do raio de curvatura das superfícies [17].

Considera-se neste trabalho as funções de correção da deflexão de contato devido à proximidade da aresta livre proposta em [96]. Estas funções de correção são baseadas em resultados experimentais e mostram que a deflexão provocada por uma dada força unitária próxima das arestas livres é maior do que distante delas. Isto deve ser considerado no contato de dentes de engrenagens, já que os dentes possuem a aresta livre correspondente ao diâmetro externo e as arestas livres nas duas extremidades dos dentes (nas faces da engrenagem). Esta abordagem foi usada em [111]. Também Steward [88] usou uma abordagem semelhante a esta, na qual ele multiplicou as deflexões locais por um fator semi-empírico baseado em uma análise de elementos finitos para considerar o aumento de flexibilidade próximo das arestas livres dos dentes.

A equação (3.2) é usada para o cálculo das deflexões locais das superfícies. Para detalhes da determinação dos afastamentos das arestas livres considerando diferentes arranjos de engrenagens e ainda para as funções de correção ver [111, p.50-52 e p.149].

$$w_H = \frac{25(1-\nu^2)p_N}{\pi E} c(\hat{\zeta}) c(\hat{\eta}) , \quad (3.2)$$

onde w_H é a deflexão local das superfícies em contato (mm), ν é o coeficiente de Poisson, p_N é a força normal à superfície (N), E é o módulo de elasticidade (N/mm^2), $c(\hat{\zeta})$ e $c(\hat{\eta})$ são as funções de correção da deflexão devido à proximidade com a aresta livre em $\hat{\zeta}$ e $\hat{\eta}$ respectivamente.

Na equação (3.2), a força normal à superfície, p_N , é determinada assumindo-se que a superfície real do dente é próxima da superfície evolvente teórica. Esta aproximação é válida considerando-se que os desvios na superfície real são pequenos. Assim, a força normal às superfícies nos pontos de contato pode ser calculada através da equação (3.3):

$$p_N = p \frac{r_p}{r_g} \left(1 + \tan^2 \beta_g\right)^{\frac{1}{2}} , \quad (3.3)$$

onde p_N é a força normal à superfície (N), p é a força tangencial (N), r_p é o raio correspondente ao ponto discreto P na superfície do dente (mm), r_g é o raio de base (mm), β_g é o ângulo de hélice no diâmetro de base (rad).

Por conveniência, a deflexão calculada pela equação (3.2), normal às superfícies em contato, pode ser projetada para o plano YZ (vide figura 3.1) e convertida para a forma angular. Desta forma, a deflexão causada pela força de contato pode ser considerada como um deslocamento angular adicional entre as superfícies [111, p.54]. A deflexão angular de contato no plano YZ é obtida através da equação (3.4):

$$\Delta w_{Hs} = \frac{w_H \cos \beta_p}{r_g} , \quad (3.4)$$

onde Δw_{Hs} é a deflexão angular de contato da superfície (rad), β_p é o ângulo de hélice no diâmetro correspondente ao ponto de contato P (rad), e r_g é o raio de base (mm).

3.3.2 Deflexão do dente

A deflexão do dente como um todo é tomada como o deslocamento da linha de centro do dente devido à carga aplicada na superfície do dente.

Neste trabalho usa-se o mesmo procedimento adotado em [111] para o cálculo das deflexões de dente. Trata-se de um procedimento semi-empírico desenvolvido por Umezawa [94], que determina as deflexões do dente devido a cargas concentradas a partir de um modelo bidimensional que aproxima o dente da engrenagem a uma placa engastada de espessura linearmente variável e de dimensões representativas. O procedimento de Umezawa [94] é baseado em uma série de funções de correção das deflexões que foram determinadas de forma empírica. Estas funções foram atualizadas por Park e Lee [69] a partir de um modelo em elemento finitos.

Neste procedimento estuda-se as deflexões em todo o domínio quando uma força é aplicada em um ponto arbitrário do dente, conforme ilustrado na figura 3.2. As forças são aplicadas no plano neutro da placa e as deflexões resultantes também são tomadas neste plano. É definido um sistema de coordenadas cartesianas específico para a placa de dimensões representativas do dente. As dimensões da placa são definidas a partir do cálculo da espessura do dente da engrenagem no plano normal em três diferentes posições, no topo dos dentes, na raiz dos dentes, e na altura do dente correspondente à metade da distância entre o topo e a raiz do dente. Para maiores detalhes sobre o cálculo das dimensões da placa que representa o dente, recomenda-se consultar a referência [111, p. 55-60].

A deflexão da placa de dimensões análogas ao dente helicoidal é calculada pela equação (3.5):

$$w_B(x', y') = \frac{U \times 10^{-3} f(\lambda \bar{x}') g(\bar{y}')}{MP} \sum_{k=1}^n p'_k \frac{v(\bar{r}_k)}{f(\lambda |\bar{x}' - \bar{\zeta}'_k|) g(|\bar{y}' - \bar{\eta}'_k|)} f(\lambda \bar{\zeta}'_k) g(\bar{\eta}'_k) , \quad (3.5)$$

onde:

- $w_B(x', y')$ é a deflexão no ponto (x', y') devido às forças aplicadas em pontos discretos da placa (mm);

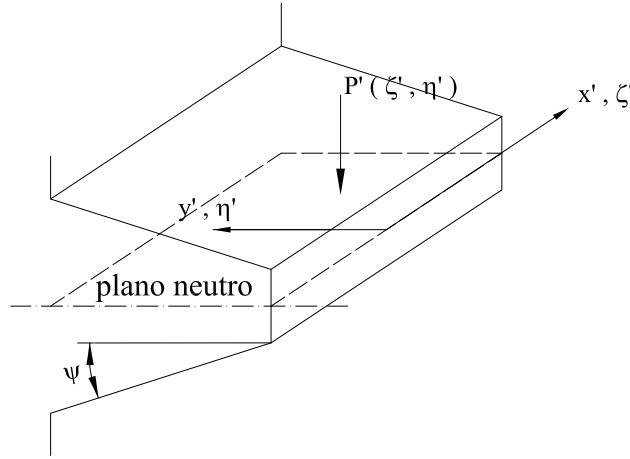


Fig. 3.2: Placa análoga ao dente helicoidal.

- U é o valor absoluto da deflexão em função do ângulo de inclinação da placa ($\mu m/N$) [111, p.150];
- MP é o módulo equivalente da placa análoga [111, p.60];
- p'_k é a força normal ao plano neutro da placa aplicada no ponto k e é calculada pela equação (3.7) (N);
- $g(\bar{y}') = \sqrt{G(\bar{y}')}$ é a função comum das deflexões na direção da altura da placa (em $\bar{y}'$) [111, p.151];
- $f(\bar{x}') = \sqrt{F(\bar{x}')}$ é a função comum das deflexões na direção da largura da placa (em $\bar{x}'$) [111, p.152];
- $v(\bar{r}_k)$ é uma função comum das deflexões dada pela distância entre um ponto discreto de aplicação da força e o ponto discreto onde se deseja calcular a deflexão [111, p.153]. A distância $\bar{r}_k$ é dada pela equação (3.6);
- $\bar{x}' = x'/H$. As demais variáveis com barra significam que são divididas pela altura da placa H ;
- $k = 1, 2, \dots, n$, onde n é o número total de forças discretas aplicadas na placa;

A equação (3.6) calcula a distância r do ponto em análise $P(x', y')$ ao ponto onde a carga concentrada é aplicada $P_k(\zeta', \eta')$:

$$\bar{r}_k^2 = (\lambda \bar{x}' - \lambda \bar{\zeta}_k')^2 + (\bar{y}' - \bar{\eta}_k')^2, \quad (3.6)$$

onde λ é um fator de escala das coordenadas x' e ζ' para ajustar a função $v(\bar{r}_k)$ a uma dada relação de largura e altura da placa [111, p.154].

A força normal ao plano neutro da placa usada na equação (3.5) é dada pela equação (3.7):

$$p' = p \left[1 + \left(\frac{r_p}{r_o} \tan \beta_o \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

onde p' é a força normal ao plano neutro da placa, p é a força tangencial, r_p é o raio referente ao ponto P , r_o é o raio primitivo e β_o é o ângulo de hélice no diâmetro primitivo.

As deflexões longitudinais do dente calculadas pela equação (3.5) são perpendiculares ao plano neutro da placa. Pode-se projetá-las para o plano YZ e transformá-las para a forma de afastamentos angulares através da equação (3.8) [111, p.63-64]:

$$\Delta w_{Bs} = \frac{w_B \cos(\beta_p)}{r_p}, \quad (3.8)$$

onde Δw_{Bs} é o afastamento angular no plano YZ causado pela deflexão do dente (rad), w_B é a deflexão longitudinal do dente normal ao plano neutro da placa que representa o dente (mm), β_p é o ângulo de hélice no raio r_p (rad) e r_p é o raio correspondente ao ponto P em análise (mm).

3.4 Interação com outros componentes do sistema

Os pares engrenados geralmente fazem parte de um sistema de transmissão de potência. Sistemas típicos são compostos ainda por eixos, rolamentos, carcaças, entre outros componentes. No entanto, usualmente nos estudos de contato dos dentes e cálculo do erro de transmissão, os

efeitos devido aos outros componentes do sistema não são considerados ou, em alguns casos, são considerados de forma simplificada. Por exemplo, os eixos são considerados como sendo biapoiados e com seção constante. No presente trabalho os efeitos no contato entre os dentes gerados por esses componentes não são considerados, assumindo que esta é uma simplificação válida para certas categorias de sistemas de transmissão de potência por engrenagens.

3.5 Distribuição de carga entre os dentes

A transmissão de torque por meio de pares engrenados é realizada através de um ou mais pares de dentes em contato, sendo que a forma como a carga correspondente a este torque é distribuída entre os dentes é aqui chamada de distribuição de carga. A determinação da distribuição de carga entre os dentes é necessária para os cálculos das deflexões dos dentes e do erro de transmissão. Para tanto, deve-se levar em conta que em cada posição no ciclo de engrenamento existe uma condição particular de contato. Assim, a distribuição de carga deve ser determinada para cada uma das posições.

Diferentes métodos têm sido empregados para a solução do problema de distribuição de carga entre os dentes. Em geral para a solução deste problema, aplicam-se as mesmas formulações usadas para resolver os problemas gerais de contato entre corpos elásticos [17].

Normalmente estes problemas têm como dados de entrada a geometria dos corpos em contato, suas forças e a cinemática destes corpos, e como dados de saída se obtém a distribuição de carga e o deslocamento do elemento como um todo [44].

Na modelagem apresentada neste trabalho, assume-se que as superfícies dos dentes podem ser adequadamente representadas por pontos discretos. A separação inicial entre as superfícies dos dentes (sem carga aplicada) é dada pelos afastamentos angulares entre os pontos discretos das superfícies dos dentes das engrenagens motora e movida, $\delta\Theta_1^i = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}^T$ onde n é número de pontos discretos (vide figura 3.1), e o torque total aplicado na engrenagem motora é dado por T . A carga equivalente ao torque T é distribuída entre os pontos discretos devido ao contato mútuo, e pode ser descrita por $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^T$. As forças inter-faciais causam

as deflexões elásticas, $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$, (vide seção 3.3), permitindo um deslocamento angular de rotação da engrenagem motora, $\delta\Theta_{1min}^f$, sem o respectivo deslocamento da engrenagem movida. Este deslocamento angular é relativo à parcela do erro de transmissão com carga aplicada, e pode ser considerado como o deslocamento do elemento como um todo da formulação do problema geral de contato entre corpos elásticos. Devido às deflexões elásticas e ao deslocamento da engrenagem motora, as separações iniciais entre as superfícies alteram-se e se tem então separações resultantes $\delta\Theta_1^f - \mathbf{q} \delta\Theta_{1min}^f = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}^T$, onde $\mathbf{q}$ é um vetor coluna com todos os elementos de valor 1.

Pode-se dizer que os pontos discretos que representam as superfícies dos dentes pertencem ao conjunto de pontos I_g . Este conjunto de pontos pode ser dividido em dois subconjuntos: I_c dos pontos pertencentes a área de contato (chamado de conjunto ativo) e I_n dos outros pontos. Geralmente, os pontos que pertencem a estes dois subconjuntos não são conhecidos a priori e precisam ser determinados como parte da solução do problema [3, 72].

O problema de distribuição de carga entre os dentes de engrenagens pode então ser definido pelos seguintes critérios representados por um sistema de equações e inequações [17]:

- Condição de compatibilidade: para qualquer par de pontos discretos candidatos ao contato, a somatória da deflexão elástica total dos dentes das duas engrenagens e dos afastamentos iniciais (sem carga aplicada) deve ser maior ou igual ao deslocamento da engrenagem como um todo. Esta condição é representada na equação (3.9):

$$g_i = h_i - u_o + w_i, \quad \forall i \in I_g, \quad (3.9)$$

onde:

$$w_i = \sum_{k \in I_g} a_{i-k} p_k, \quad (3.10)$$

$g_i \geq 0$, é um elemento do vetor $\delta\Theta_1^f - \delta\Theta_{1min}^f$ cujo valor corresponde à separação resultante em i após as deflexões; h_i é um elemento do vetor $\delta\Theta_1^i$ cujo valor corresponde ao afastamento inicial (sem carga aplicada) entre um par de pontos candidatos ao contato;

$u_o = \delta\Theta_{1min}^f$ que é o deslocamento angular de rotação da engrenagem motora (ou deslocamento do elemento como um todo) quando a engrenagem movida está fixa em uma dada posição i ; w_i é a deflexão elástica total em i , que é a somatória de todas as deflexões elásticas em i ; a_{i-k} é o coeficiente de influência em i devido à carga aplicada em k , obtido a partir das equações (3.4) e (3.8) ; p_k é a carga aplicada no ponto k ;

- Condição de equilíbrio: a condição de equilíbrio do torque deve ser satisfeita. O momento total em relação ao eixo de rotação das forças p_i atuando nos pontos em contato de raio r_{1i} deve ser igual ao torque aplicado T . Isto pode ser definido como:

$$\sum_{i \in I_c} p_i r_{1i} = \sum_{i \in I_c} t_i = T , \quad (3.11)$$

onde t_i é o torque correspondente à carga p_i aplicada no ponto i de raio r_1 da engrenagem motora.

- Critério de contato: este critério estabelece que as superfícies dos dentes estão em contato nos pontos onde existem cargas aplicadas, e onde não existe contato a carga aplicada é nula. Matematicamente isto pode ser escrito como:

$$\forall i \in I_c : \quad g_i = 0, \quad p_i \geq 0 , \quad (3.12)$$

$$\forall i \in I_n : \quad g_i \geq 0, \quad p_i = 0 . \quad (3.13)$$

Para que se possa usar as mesmas formulações para a solução do problema geral de contato entre corpos elásticos no problema de distribuição de carga entre os dentes, é conveniente expressar a equação (3.10) em função de t_i ao invés de p_i (ver equação (3.11)), bem como transformar as equações do cálculo das deflexões elásticas, equações (3.4) e (3.8), para que se obtenham os coeficientes de influência em cada ponto i em função dos torques aplicados, t_i . Com isto a equação (3.10) pode ser reescrita conforme a equação (3.14). A descrição completa da manipulação destas equações encontra-se no apêndice A.

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \mathbf{t} , \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes de influência das deflexões nos pontos discretos, e $\mathbf{t}$ é vetor com os torques discretos aplicados nos pontos em contato (ver equação (3.11)).

No caso dos modelos de análise do contato entre dentes que assumem a existência do contato somente no plano de ação, um número pequeno de pontos discretos é usado para representar a linha de ação, e portanto a escolha do método para a solução do problema de distribuição de carga não requer maior atenção quanto ao esforço computacional. Por outro lado, nos modelos de análise global de contato, um número elevado de pontos discretos é necessário para que toda a superfície dos dentes possa ser adequadamente representada, e conseqüentemente uma maior atenção deve ser dedicada à solução do problema de distribuição de carga para que este possa ser resolvido considerando as limitações computacionais e a precisão requerida. Neste caso, o tempo computacional necessário para a solução do problema torna-se importante do ponto de vista prático no ambiente de projeto.

O problema de contato pode ser convenientemente sumarizado combinando as equações (3.9) - (3.14) em forma matricial, como mostrado na equação (3.15):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cc} & \mathbf{A}_{cn} & \mathbf{q}_c \\ \mathbf{A}_{cn}^T & \mathbf{A}_{nn} & \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_c^T & \mathbf{q}_n^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_c \\ 0 \\ -u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{h}_c \\ \mathbf{g}_n - \mathbf{h}_n \\ T \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Na equação (3.15) a matriz $\mathbf{A}$ é formada pelos coeficientes de influência. O índice c é usado para designar elementos que estão em contato e o índice n para designar os elementos que não estão em contato. Os vetores $\mathbf{q}$ são vetores com todos os elementos de valor 1.

As duas primeiras linhas dos três blocos da equação (3.15) referem-se ao critério de contato (equações (3.12) e (3.13)), e a terceira linha da equação (3.15) refere-se à condição de equilíbrio (equação 3.11).

A solução de problemas gerais de contato, como este definido na equação (3.15), tem sido muito estudada nos últimos 40 anos [3]. Diversos métodos iterativos foram propostos para solução deste tipo de problema. Allwood [2] apresentou uma análise comparativa dos principais

métodos para a solução de problemas gerais de contato entre corpos elásticos comparando-os em termos do tempo computacional requerido para a solução e da precisão obtida. Wink e Serpa [112] apresentaram um estudo comparativo entre dois métodos para a solução do problema de contato entre dentes de engrenagens com análise global de contato, um procedimento de aplicação gradual e iterativa da carga, e um procedimento com programação linear.

Neste trabalho, três métodos para a solução do problema de distribuição de carga entre os dentes de engrenagens foram implementados em um programa computacional desenvolvido em MATLAB [60], e avaliados quanto ao tempo de processamento computacional e quanto à precisão na solução do problema:

- Procedimento incremental: no qual a carga é aplicada gradualmente através de iterações;
- Programação linear: baseada em um algoritmo de ponto interior; e
- Método direto de inversão de matriz: baseado na fatorização de Cholesky.

Para tornar os procedimentos de solução do problema de distribuição de carga entre os dentes mais eficiente em termos computacionais, aplicou-se uma técnica para a redução do problema baseada no trabalho de Pimsarn e Kazerounian [70]. Esta técnica é discutida na seção 3.5.4.

3.5.1 Procedimento incremental

A maioria dos métodos usados para estudar o problema de contato assume que a região de contato entre os dois corpos não é conhecida a priori e que isto deve fazer parte da solução do problema. No caso dos métodos incrementais usa-se uma abordagem diferente, na qual a carga é aplicada de forma incremental e a análise dos pontos em contato é conhecida e reavaliada a cada iteração [3, 111].

O procedimento avaliado para a determinação da carga aplicada entre os dentes baseia-se no procedimento proposto por Wink [111], o qual prevê a aplicação de forças de pequena intensidade nos pontos discretos em contato localizados numa primeira análise sem carga, em

seguida calculam-se as deflexões elásticas devido à aplicação destas forças e se realiza uma nova análise dos pontos de contato. A partir daí tem-se duas possibilidades: novos pontos de contato podem surgir e pontos anteriormente em contato podem permanecer no conjunto de pontos de mínimo afastamento, significando que a força aplicada não provocou deflexão suficiente para incluir novos pontos no conjunto de pontos ativos, I_c . Assim novos incrementos de força são aplicados nos pontos em contato e / ou somados às forças já existentes nos pontos anteriormente em contato. Este processo iterativo é realizado até que a equação (3.11) seja satisfeita, ou seja, o torque aplicado através das forças nos pontos discretos seja igual ao torque de análise.

Este método pode ser sumarizado nos seguintes passos:

1. O mínimo ângulo de afastamento entre as superfícies, $\delta\Theta_{1min}^i$, e os respectivos pontos nas superfícies dos dentes são identificados (condição sem carga aplicada);
2. O torque de entrada para análise é dividido em cargas discretas com intensidade pequena e constante;
3. As cargas discretas são aplicadas nos pontos onde $\delta\Theta_{1i} = \delta\Theta_{1min}$;
4. As deflexões elásticas em todos os pontos (com carga e sem carga aplicada) são calculadas. As deflexões longitudinais são transformadas em deslocamentos angulares conforme o sistema de coordenadas adotado (vide figura 3.1). As deflexões angulares em cada ponto discreto dos dentes são adicionadas aos ângulos ϕ_{p2} e ϕ_{p1} (vide figura 3.1);
5. Os pontos discretos que representam as superfícies dos dentes da engrenagem movida foram definidos inicialmente e são tomados como fixos. Já os pontos discretos nas superfícies dos dentes da engrenagem motora são definidos em função da cinemática das engrenagens e desta forma, alteram-se conforme o movimento rotacional imposto pelas deflexões elásticas dos dentes. Assim os pontos discretos da engrenagem motora são redefinidos em cada iteração e os ângulos, $\delta\Theta_{1i}$ são recalculados para todos os pontos discretos;
6. O mínimo ângulo de afastamento entre as superfícies, $\delta\Theta_{1min}^i$, e os respectivos pontos nas superfícies dos dentes podem ser recalculados (condição com carga parcial aplicada);

7. Incrementos de carga são aplicados nos pontos onde $\delta\Theta_{1i} = \delta\Theta_{1min}$. Para os pontos que já pertenciam à região de contato, os incrementos de carga são adicionados a carga existente;
8. Os passos 4 a 7 são repetidos até que a carga aplicada seja equivalente ao torque total de análise.

Neste método são negligenciadas as aplicações excessivas de carga nos pontos discretos, ou seja, o procedimento não prevê a redução da força aplicada num dado ponto devido, por exemplo, à deflexão local excessiva ou à alteração do contato por deflexões em outros pontos discretos. Com isto, a precisão do método está relacionada com o grau de discretização da carga total (número de incrementos de carga) e o grau de discretização das superfícies dos dentes (número de pontos possíveis de contato). Por outro lado o aumento do grau de discretização leva ao aumento do tempo de processamento computacional. Uma adequação entre o tempo de processamento e o grau de discretização deve ser feita para se obter um nível de precisão satisfatório. Para maiores detalhes sobre procedimento incremental recomenda-se consultar a referência [111, p.65-75].

Uma abordagem similar foi proposta por Allwood e Ciftci [3] em 2005. A diferença conceitual básica entre estes dois procedimentos incrementais é que no procedimento proposto por Allwood e Ciftci [3], o incremento de carga aplicado não é de intensidade constante. Calcula-se qual o incremento de carga necessário para trazer o ponto mais próximo em termos de afastamento ao contato. Verifica-se se este incremento de carga somado aos incrementos aplicados nas iterações anteriores ultrapassa ou não a carga total para análise. Em caso negativo (não atinge o valor da carga máxima) então o incremento de carga é aplicado e se tem um novo ponto no conjunto ativo, I_c . Em caso positivo (ultrapassa o valor da carga máxima), sabe-se que aquele ponto próximo não entrará para o conjunto ativo e se tem então o conjunto ativo, I_c , determinado. Para as iterações Allwood e Ciftci [3] utilizaram dentro do método incremental, um método de inversão direta de matrizes através da fatorização de Cholesky, no qual as matrizes são atualizadas a cada iteração para evitar uma nova fatorização da matriz completa. O procedimento proposto por Allwood e Ciftci [3] resulta em uma maior precisão dos resultados

quanto ao grau de discretização da carga aplicada em relação ao procedimento proposto por Wink [111]. No entanto, o tempo de processamento computacional é elevado comparado com outros métodos existentes [3].

O procedimento incremental proposto por Wink [111] foi avaliado quanto a sua precisão e o tempo de processamento computacional. Os resultados são apresentados na seção 3.5.5.

3.5.2 Programação linear

O problema de contato estabelecido na equação (3.15), pode ser formulado como um problema de otimização, no qual se deseja minimizar a energia de contato sujeito às restrições de desigualdade das equações (3.12) e (3.13) [21, 16, 72]. Para a solução deste problema pode-se usar um método baseado em programação linear, como o algoritmo simplex [16].

O procedimento baseado no algoritmo simplex foi proposto por Conry e Seireg [16] e tem sido muito usado para a solução do problema de distribuição de carga entre dentes de engrenagens [17, 9, 65, 69, 101, 52].

No procedimento desenvolvido por Conry e Seireg [16], o algoritmo simplex é modificado através da imposição de regras de entrada para atender ao critério de contato. Este critério de contato é necessário para que se possa tratar os pontos discretos que podem não estar em contato, e neste caso a carga aplicada a estes pontos deve ser zero e ao invés de negativa (vide equações (3.12) e (3.13)). No algoritmo simplex modificado, a variável g_i da equação (3.9) é introduzida para eliminar a desigualdade da equação, e a função objetivo é estabelecida através da introdução de variáveis artificiais [16].

No caso dos modelos que assumem o contato somente no plano de ação, o número de pontos discretos considerados na solução do problema é pequeno quando comparado com o número de pontos discretos dos modelos de análise de contato global. Segundo Polonsky e Keer [72] o método simplex é apenas prático para um número relativamente pequeno de pontos. Por outro lado, os algoritmos de ponto interior têm sido usados com sucesso na solução de problemas com grande número de pontos, chamados de problemas de larga escala [97].

Neste trabalho um algoritmo de ponto interior é avaliado para a solução do problema de distribuição de carga entre os dentes de engrenagens. Utilizou-se para isto o algoritmo de ponto interior disponível em uma rotina do MATLAB [60], o qual é uma variante do algoritmo preditor-corretor proposto por Mehrotra [60].

Para tornar possível a utilização do algoritmo na sua forma padrão, o problema de contato entre dentes foi reformulado com relação a função objetivo. Estabeleceu-se como função objetivo maximizar o deslocamento angular de rotação da engrenagem motora, conforme descrito na equação (3.16) [112].

A equação (3.16) mostra a formulação do problema de otimização para a determinação da distribuição de carga ($\mathbf{t}$) e erro de transmissão (u_0), baseada na primeira e na terceira linha dos três blocos da equação (3.15):

Maximizar

$$u_0 , \quad (3.16)$$

sujeito à

$$\begin{aligned} -\mathbf{A} \mathbf{t} + u_0 \mathbf{q} - \mathbf{h} &\leq \mathbf{0} , \\ \mathbf{q}^T \mathbf{t} - T &= 0 , \\ \mathbf{t} &\geq \mathbf{0} , \quad u_0 \geq 0 , \end{aligned}$$

onde u_0 é o deslocamento angular de rotação da engrenagem motora, que é equivalente ao erro de transmissão angular tomado na engrenagem motora, $\mathbf{A}$ é a matriz com os coeficientes de influência das deflexões, $\mathbf{q}$ é um vetor coluna com todos os elementos de valor 1, $\mathbf{h}$ é o vetor com os afastamentos angulares iniciais entre os pontos candidatos ao contato, $\mathbf{t}$ é o vetor com os torques discretos aplicados em cada par de pontos em contato, T é o torque total para a análise aplicado na engrenagem motora.

O problema de otimização em (3.16) pode ser resolvido usando-se um algoritmo de programação linear. Neste estudo usou-se um algoritmo de ponto interior implementado em uma rotina do MATLAB [60] através da função *lipsol* com a opção *optimset('LargeScale','on')* [60].

O algoritmo de ponto interior implementado na rotina do MATLAB [60] é uma variante do algoritmo preditor-corretor proposto por Mehrotra (ver [60]). Trata-se de um algoritmo primal-dual que resolve simultaneamente os dois problemas com equações lineares-quadráticas usando variáveis de folga, e mantendo as variáveis de iteração positivas, que estão na região interior representadas pelas restrições da desigualdade. Maiores detalhes sobre o algoritmo de ponto interior usado podem ser encontrados na referência [60].

Esta abordagem para a solução do problema de distribuição de carga entre os dentes de engrenagens usando programação linear foi proposta por Wink e Serpa [112] em 2005, e difere do procedimento proposto por Conry e Seireg [17] devido à utilização de um algoritmo de ponto interior na sua forma padrão ao invés do algoritmo tipo simplex modificado. Para isto o problema é reformulado para que a função objetivo seja a maximização do deslocamento.

A eficiência deste método para a solução do problema de distribuição de carga é comparada com os outros métodos estudados e discutida na seção 3.5.5.

3.5.3 Método direto: inversão de matriz

Em alguns trabalhos, o problema de contato foi resolvido usando métodos diretos de solução, tais como, eliminação de Gauss [88] e fatorização de Cholesky [3, 2].

Nestes métodos de solução, o problema é resolvido através de iterações para determinar o conjunto de pontos pertencentes à região de contato $I_c \in I_g$. Em cada iteração calculam-se as cargas aplicadas em cada par de pontos discretos através de um método direto sem considerar a restrição $\mathbf{t} \geq 0$, então se impõe esta restrição identificando e eliminando do conjunto de pontos ativos, I_c , os pontos onde a carga é negativa. Repete-se o procedimento até que não existam mais pontos com carga negativa.

O método direto de solução usando a fatorização de Cholesky é um método estável e rápido em comparação com outros métodos de solução deste tipo de problema [3, 2]. No entanto, a solução do problema por este método apresenta uma limitação quanto à memória computacional necessária. A memória computacional necessária para a solução do problema aumenta com o

quadrado do número de pontos em análise, por exemplo, para um equipamento com 256Mb de memória o limite de pontos em análise é em torno de 2200 pontos [2].

Neste trabalho avaliou-se o método direto usando a fatorização de Cholesky para a solução do problema de distribuição de carga entre os dentes. O método foi implementado em um programa em MATLAB [60] usando uma rotina já disponível para a fatorização de Cholesky.

Para um dado conjunto ativo estimado de pontos, I_c , a distribuição de carga pode ser determinada através da primeira e da terceira linhas da equação (3.15):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cc} & \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_c \\ -u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{h}_c \\ T \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

A matriz do lado esquerdo da equação (3.17) é simétrica, mas não é positiva-definida devido ao zero na diagonal. No entanto, ela pode ser reorganizada como mostrado nas equações (3.18) e (3.19):

$$u_0 = \frac{1}{\mathbf{q}_c^T \mathbf{A}_{cc}^{-1} \mathbf{q}_c} \left(\mathbf{q}_c^T \mathbf{A}_{cc}^{-1} \mathbf{h}_c + T \right). \quad (3.18)$$

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{A}_{cc}^{-1} \mathbf{h}_c + \mathbf{A}_{cc}^{-1} \mathbf{q}_c u_0. \quad (3.19)$$

A solução das equações (3.18) e (3.19) requer apenas a inversa ou a fatorização da matriz $\mathbf{A}_{cc}$, que é positiva-definida e simétrica. Pela fatorização de Cholesky tem-se que $\mathbf{A}_{cc} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, onde $\mathbf{R}$ é a matriz triangular superior. Então, pode-se determinar a distribuição de torque $\mathbf{t}_c$ e o deslocamento do elemento como um todo u_0 através de:

$$\mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{q}_c, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{h}_c, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}, \quad (3.23)$$

$$u_0 = \frac{\mathbf{q}_c^T \mathbf{c} + T}{\mathbf{q}_c^T \mathbf{b}}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{t}_c = u_0 \mathbf{b} - \mathbf{c}. \quad (3.25)$$

Com os valores de $\mathbf{t}_c$ e u_0 , pode-se determinar os afastamentos finais nos pontos que não estão em contato através da segunda linha da equação (3.15):

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{h}_n + \mathbf{A}_{cn}^T \mathbf{t}_c - \mathbf{q}_n u_0 . \quad (3.26)$$

A solução deve ser testada quanto às restrições em (3.12) e (3.13). Se o torque referente a força de contato é negativo em algum ponto, este ponto deve ser removido do conjunto ativo, I_c , e o problema deve ser resolvido novamente após a atualização da matriz em (3.17). Este processo é repetido até que se satisfaça às restrições em (3.12) e (3.13).

Os resultados obtidos com este método de solução do problema de distribuição de carga são apresentados e discutidos na seção 3.5.5.

3.5.4 Redução do problema: técnica da pseudo-interferência

Apesar do modelo de análise global de contato discretizar a superfície completa dos dentes, e não somente a linha de ação, sabe-se que apenas uma pequena região dos dentes está em contato em uma dada posição do par de engrenagens no ciclo de engrenamento e sob um dado torque. Se esta região de contato dos dentes em uma dada condição geométrica e de torque pudesse ser conhecida a priori, ou então estimada, poder-se-ia restringir a análise apenas aos pontos pertencentes à região de contato, de tal forma que o método de solução poderia ser aplicado a um problema reduzido.

Nesta linha, para tornar os procedimentos de solução do problema de distribuição de carga entre os dentes mais eficiente em termos computacionais, aplicou-se neste trabalho uma técnica para a redução do problema baseada no trabalho de Pimsarn e Kazerounian [70, 71].

Esta técnica, chamada de pseudo-interferência, consiste basicamente da introdução de um deslocamento angular de rotação estimado na engrenagem motora mantendo a engrenagem movida fixa em uma dada posição, de tal forma a simular uma interferência entre os corpos a fim de se identificar a região de contato para aquele deslocamento estimado, conforme mostrado

na figura 3.3. Obviamente como não ocorre a interpenetração dos corpos, esta interferência não existe de fato.

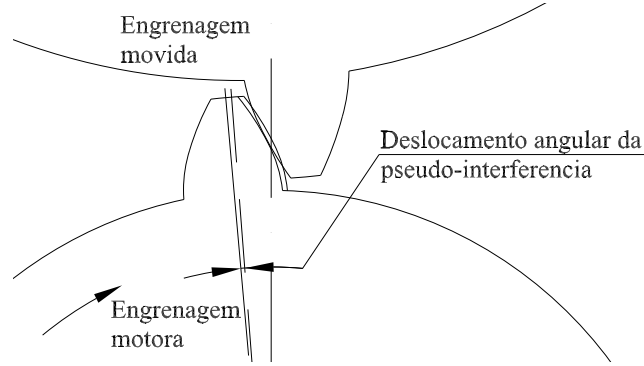


Fig. 3.3: Ilustração da pseudo-interferência em um par de engrenagens.

O problema reduzido deve representar adequadamente o problema original sem afetar o resultado da solução do problema de distribuição de carga. Para isto, o deslocamento angular de rotação da engrenagem motora para a pseudo-interferência é super-estimado para garantir que todos os pontos possíveis de contato para o torque em análise sejam identificados. É evidente que o tamanho do problema de distribuição de carga a ser resolvido está relacionado com esta estimativa. Assim, quanto mais próximo o deslocamento estimado estiver do deslocamento final calculado, menor será o problema a ser resolvido. Por outro lado, se o deslocamento estimado for menor do que o deslocamento final calculado, pontos discretos em contato não serão avaliados quanto à distribuição de carga gerando imprecisão na solução do problema e no cálculo do erro de transmissão.

O deslocamento angular de rotação da engrenagem motora para gerar a pseudo-interferência pode ser estimado através de uma equação semi-empírica obtida a partir do ajuste de curvas de um modelo de elementos finitos por Kuang e Yang [50], ou seja,

$$K_i = (A_0 + A_1 X) + (A_2 + A_3 X) \frac{r_i - r_o}{(1 + X)m} , \quad (3.27)$$

onde K_i é a rigidez específica por milímetro de largura dos dentes da engrenagem ($N/\mu m/mm$) no ponto de raio r_i , X é o coeficiente de modificação do adendum, m é o módulo da engrenagem,

N é o número de dentes da engrenagem, r_o é o raio primitivo (mm), e os coeficientes A_k ($k = 0, 1, 2, 3$) são:

$$A_0 = 3.867 + 1.612N - 2.916 \times 10^{-2} N^2 + 1.553 \times 10^{-4} N^3 , \quad (3.28)$$

$$A_1 = 17.060 + 7.290 \times 10^{-1} N - 1.728 \times 10^{-2} N^2 + 9.993 \times 10^{-5} N^3 , \quad (3.29)$$

$$A_2 = 2.637 - 1.222N + 2.217 \times 10^{-2} N^2 - 1.179 \times 10^{-4} N^3 , \quad (3.30)$$

$$A_3 = -6.330 - 1.033N + 2.068 \times 10^{-2} N^2 - 1.130 \times 10^{-4} N^3 . \quad (3.31)$$

A equação 3.27 é válida para: $-0.6 \leq X \leq 0.6$, $12 \leq N \leq 100$ e para engrenagens de aço [50].

A rigidez de um par de pontos em contato é considerada equivalente a duas molas em série. Esta rigidez é calculada através da equação (3.32) [70, 71]:

$$K_{c_i} = \frac{K_{1i} K_{2i}}{K_{1i} + K_{2i}} , \quad (3.32)$$

onde K_{c_i} é a rigidez do par de pontos em contato, K_{1i} é a rigidez do corpo 1 no ponto i e K_{2i} é a rigidez do corpo 2 no ponto i .

A rigidez de um par de pontos em contato, K_{c_i} , pode ser associada com a rigidez de um outro par de pontos, $K_{c_{i+1}}$, considerando-se um modelo de duas molas em paralelo [70, 71]. Assim, a rigidez equivalente do contato é obtida através da soma da rigidez de todos os pares de pontos em contato, conforme a equação (3.33):

$$K_{eq} = \sum_{i=1}^n K_{c_i} , \quad (3.33)$$

onde K_{eq} é a rigidez equivalente dos pontos em contato e n é o número de pares de pontos em contato.

A carga total para um dado deslocamento do elemento como um todo, pode ser determinada

baseando-se na lei de Hooke:

$$\delta_{pseudo} = \frac{T}{r_g^2} K_{eq}^{-1} \times 10^{-3} , \quad (3.34)$$

onde δ_{pseudo} é o deslocamento angular de rotação estimado para a engrenagem motora para produzir a pseudo-interferência (rad), T é o torque para a análise em (Nm) e r_g é o raio de base da engrenagem motora (mm).

Observa-se na equação (3.34) que para se estimar o deslocamento do elemento como um todo é necessário que se conheça a rigidez da região em contato.

No presente trabalho um procedimento iterativo foi usado para estimar a região de contato e o deslocamento da engrenagem motora [112]. Este procedimento converge para a solução estimada em algumas poucas iterações e consiste dos seguintes passos:

1. Conhecido o erro de transmissão angular sem carga aplicada em cada posição, $\delta\Theta_{1min}$:
 - define-se um erro admissível para a convergência, ϵ ; e
 - assume-se $\delta_{pseudo}^k = 0$ para $k = 0$, onde k é o número de iterações;
2. Localiza-se todos os pontos candidatos à região de contato:

$$\forall i : \delta\Theta_{1i} \leq (\delta\Theta_{1min} + \delta_{pseudo}^k) ;$$
3. Calcula-se a rigidez equivalente, K_{eq}^{k+1} , para os pontos da região de contato estimada (i, j) através das equações (3.27), (3.32) e (3.33);
4. Calcula-se o deslocamento angular de rotação da engrenagem motora δ_{pseudo}^{k+1} através da equação (3.34);
5. Verifica-se a convergência:
 - Se $|\delta_{pseudo}^{k+1} - \delta_{pseudo}^k| > \epsilon \Rightarrow k = k + 1$ e retorna ao passo 2;
 - Se $|\delta_{pseudo}^{k+1} - \delta_{pseudo}^k| \leq \epsilon \Rightarrow$ fim da rotina.

Através da rotina acima se obtém o deslocamento angular de rotação estimado da engrenagem motora para a pseudo-interferência. Localiza-se, então, os pontos pertencentes à região de interferência da mesma forma descrita no passo 2 da rotina acima. Todos os pontos pertencentes a esta região em cada posição do ciclo de engrenamento são considerados na solução do problema de distribuição de carga, e os demais pontos são desprezados. Os resultados numéricos mostraram que para as condições avaliadas menos de 5% do total de pontos discretos que representam as superfícies dos dentes são considerados na análise final, o que representa uma redução significativa do problema a ser resolvido [112].

3.5.5 Comparação dos métodos e resultados obtidos

Os três métodos de solução do problema de distribuição de carga entre os dentes apresentados foram avaliados através de um exemplo numérico. Usou-se para isto um par de engrenagens de dentes helicoidais conforme os dados mostrados na tabela 3.1.

Os cálculos foram feitos em 10 posições discretas do ciclo de engrenamento. A distribuição de carga e o erro de transmissão foram calculados para cada uma das posições no ciclo de engrenamento.

Comparou-se o tempo de processamento computacional requerido para o cálculo do erro de transmissão nas 10 posições do ciclo de engrenamento, bem com o erro do método numérico na solução do problema em cada um dos seguintes procedimentos:

- Método incremental para o problema completo conforme proposto por Wink [111] (vide seção 3.5.1);
- Programação linear aplicada ao problema reduzido pela técnica da pseudo-interferência (vide seção 3.5.2 e 3.5.4);
- Método direto (fatorização de Cholesky) aplicado ao problema reduzido pela técnica da pseudo-interferência (vide seção 3.5.3 e 3.5.4);

Uma análise comparativa dos dois primeiros procedimentos acima foi realizada por Wink

Tab. 3.1: Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais.

Parâmetros	Motora	Movida
Número de dentes	27	43
Distância entre centros (mm)	70	
Módulo normal (mm)	1.93	
Ângulo de pressão normal	20°	
Ângulo de hélice normal	15°	
Diâmetro externo (mm)	58	90
Diâmetro de raiz (mm)	48	80
Fator de modificação do adendum	0	0
Largura da engrenagem (mm)	15	15
Torque nominal de análise (Nm)	30	
Módulo de elasticidade (GPa)	206	
Coefficiente de Poisson	0.3	
Distância entre pontos discretos na altura do dente (μm)	90	
Distância entre pontos discretos na largura do dente (μm)	385	

e Serpa [112]. Os resultados mostraram uma eficiência computacional significativamente superior do procedimento que combina programação linear e pseudo-interferência sobre o método incremental.

Todos os cálculos foram executados em um micro computador com processador Pentium Intel Xeo de 2.8GHz e 2.1GB de memória RAM.

Para a avaliação do erro do método numérico comparou-se o erro de contato, que é o erro na solução da equação (3.12) do problema de contato. Do ponto de vista matemático, pode-se dizer que o erro de contato é o valor de g_i para $i \in I_c$ (vide a equação (3.12)), cujo valor exato é zero.

O erro na solução do problema de contato afeta o valor calculado do erro de transmissão (ver equação (3.15)). Isto pode ser observado através da figura 3.4 que mostra a relação entre

os valores calculados do erro de transmissão e o erro de contato. Os valores mostrados na figura 3.4 foram obtidos para o par de engrenagens da tabela 3.1 para a primeira posição no ciclo de engrenamento e usando o método incremental com incrementos de carga de 0.15 a 12N.

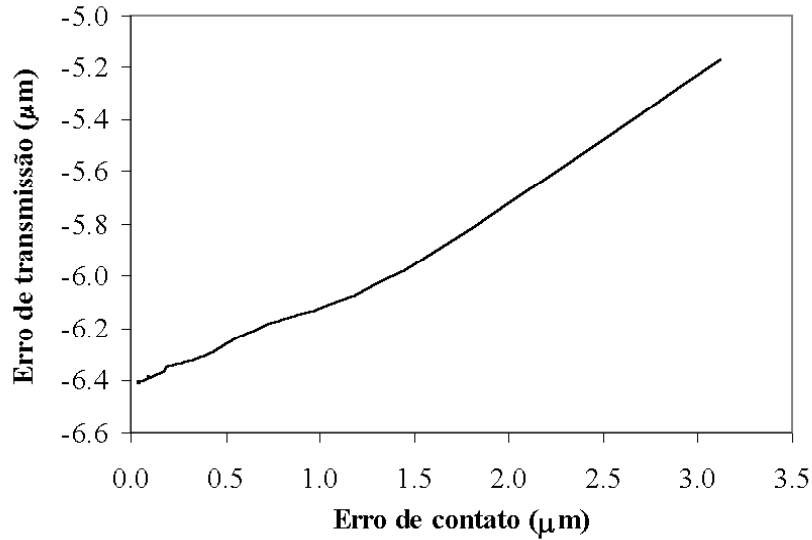


Fig. 3.4: Relação entre erro de contato e erro de transmissão.

A figura 3.5 mostra os resultados obtidos usando-se o método incremental proposto por Wink [111] (vide seção 3.5.1). A precisão deste método está relacionada com o grau de discretização da carga aplicada (intensidade dos incrementos de carga). Desta forma, diferentes valores de intensidade dos incrementos de carga foram usados na análise. Foram usados valores entre 0.15 a 12N por incremento de carga. Pode-se observar na figura 3.5 que menores intensidades dos incrementos de carga resultam em menores erros de contato, porém o tempo de processamento computacional é maior.

A figura 3.6 mostra os resultados obtidos usando o procedimento que combina programação linear e a pseudo-interferência (vide a seção 3.5.2). Para esta análise diferentes valores foram impostos para o critério de convergência do algoritmo. O erro de contato e o tempo de processamento computacional foram verificados para cada um destes valores.

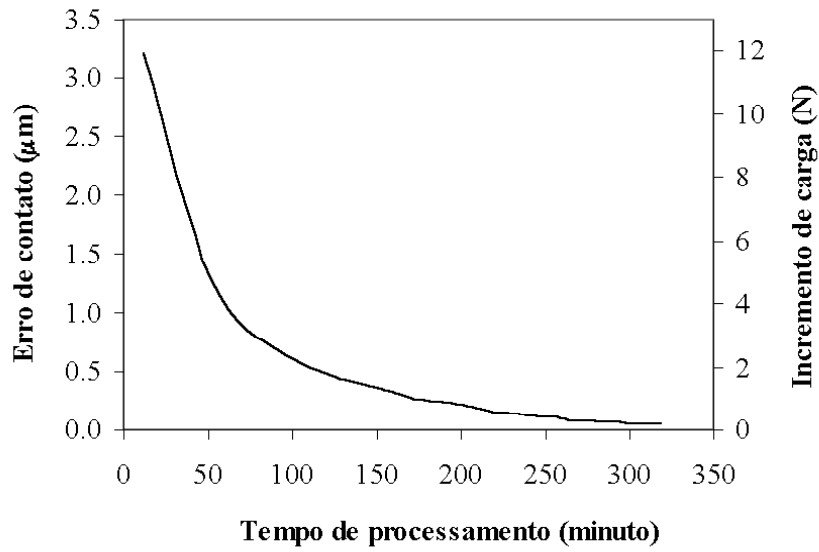


Fig. 3.5: Resultados obtidos com o método incremental.

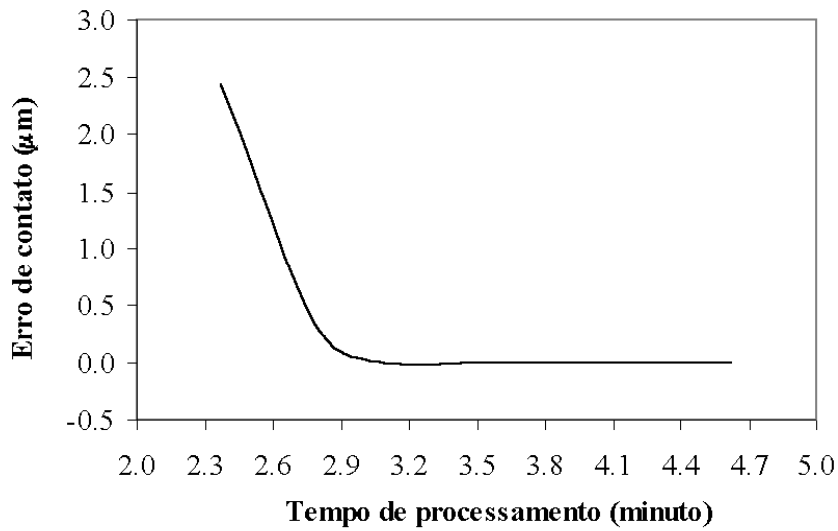


Fig. 3.6: Resultados da programação linear e pseudo-interferência.

Já com o método direto, através da fatorização de Cholesky, aplicado ao problema reduzido com a técnica da pseudo-interferência, constatou-se valores de erro de contato da ordem de 2.2×10^{-16} (zero numérico), que foram obtidos como resposta da rotina usada em MATLAB [60]. O tempo de processamento computacional para a solução do problema através deste procedimento

foi 30.6s.

Para que se pudesse comparar os três procedimentos para o cálculo do erro de transmissão em termos de eficiência, assumiu-se como aceitável do ponto de vista prático um erro da ordem de 1% no resultado do erro de transmissão devido ao erro do método numérico. Buscou-se entre as análises feitas com cada um dos procedimentos a condição que apresentou erro desta ordem e comparou-se os tempos de processamento.

A tabela 3.2 mostra o tempo de processamento computacional para calcular o erro de transmissão com carga aplicada para 10 posições dos dentes no ciclo de engrenamento para cada um dos três procedimentos apresentados, bem como, os desvios do valor do erro de transmissão devido ao erro do método numérico para a primeira posição no ciclo de engrenamento.

Tab. 3.2: Tempo de processamento computacional dos procedimentos.

Procedimentos	Tempo (minuto)	Erro (%)
Método incremental	318	1.3
Programação linear e pseudo-interferência	3	0.2
Método direto e pseudo-interferência	0.51	2.2×10^{-16}

Observa-se na tabela 3.2 que, para os exemplos numéricos analisados, o tempo de processamento obtido com o método direto é significativamente menor do que os obtidos com os outros dois métodos avaliados (cerca de 600 vezes menor em comparação com o método incremental e cerca de 6 vezes menor em comparação com o procedimento de programação linear). O método direto mostrou ainda precisão superior aos outros dois métodos.

Em função dos resultados obtidos nas simulações numéricas com os três métodos para a solução do problema de distribuição de carga, considera-se que a aplicação do procedimento com o método direto e pseudo-interferência torna os procedimentos de cálculo do erro de transmissão com análise global de contato dos dentes, como o proposto por Wink [111], adequados do ponto de vista de eficiência computacional e precisão para sua utilização em ambientes de projeto de engrenagens.

Capítulo 4

Análise de sensibilidade

Neste capítulo são apresentados os resultados do estudo de sensibilidade da variação do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento (PPETL) devido à perturbação dos parâmetros envolvidos no problema. Constatou-se que o PPETL é bastante sensível à variação da forma do perfil evolvente.

É certo que nos problemas reais nem todos os parâmetros envolvidos são conhecidos ou podem ser controlados. Os modelos matemáticos, em geral, também apresentam suas simplificações em relação ao problema físico. Desta forma, um número limitado de parâmetros é levado em conta para os cálculos. É claro que se procura considerar os parâmetros que podem melhor reproduzir o problema estudado. Mesmo assim, a influência destes parâmetros na resposta do problema pode não ser bem conhecida [25, p.3-21] [30, p.255].

Nos trabalhos estudados sobre o cálculo do erro de transmissão não foram encontradas análises detalhadas sobre a sensibilidade dos modelos usados para este fim. No entanto, diversos trabalhos dedicaram atenção ao estudo da influência de alguns erros de fabricação no erro de transmissão e no ruído gerado por pares engrenados [95, 83, 65, 100, 75, 108, 73, 103]. Alguns exemplos dos erros de fabricação considerados nestes trabalhos são: erros de espaçamento entre os dentes, erros de concentricidade, erros de alinhamento, e desvios das superfícies dos dentes nas direções longitudinal e radial. Alguns bons resumos da influência dos erros de fabricação no erro de transmissão podem ser encontrados nas referências [37, 38, 109, 62].

Os erros de fabricação são importantes no cálculo do erro de transmissão, mas não são facilmente obtidos com precisão. Destacam-se duas dificuldades principais quando se consideram os erros de fabricação para o cálculo do erro de transmissão: usualmente os dentes das engrenagens são medidos por amostragem em uma única seção dos dentes na direção do perfil e na direção do passo da hélice. Assim, assume-se que os resultados destas medições representam satisfatoriamente a forma da superfície dos dentes. Para que se pudesse obter uma precisão maior nos cálculos seria necessário medir a topografia completa de cada um dos dentes das engrenagens para que as diferenças entre eles fossem conhecidas e consideradas. O segundo ponto refere-se ao acúmulo de incertezas de medição devido ao grande número de medições que seriam necessárias para se identificar a forma real de cada dente [62].

Constatou-se que diversos trabalhos publicados dedicaram atenção à influência das modificações intencionais de micro geometria das superfícies dos dentes [7, 104, 27, 68, 65, 17]. Estas modificações seriam especificadas no projeto das engrenagens com o objetivo de reduzir o erro de transmissão. A influência dos parâmetros de operação do par engrenado, como torque e rotação, no erro de transmissão também foi objeto de vários estudos [27, 99, 7, 63].

Neste capítulo estudou-se a influência que perturbações nos dados de entrada do modelo, tanto na matriz dos coeficientes de influência (matriz $\mathbf{A}_{cc}$ da equação (3.15)), quanto no vetor dos afastamentos iniciais ($\mathbf{h}_c$ da equação (3.15)), causam na resposta do problema. Para isto, calculou-se o erro de transmissão em diversas posições no ciclo de engrenamento e se avaliou o valor do pico-a-pico do erro de transmissão. Este valor relaciona-se ao ruído gerado pelo par engrenado (ver capítulo 1).

Devido às características da modelagem do erro de transmissão (problema discreto com solução iterativa) adotou-se uma metodologia para a análise de sensibilidade, na qual o programa de cálculo é executado repetidas vezes considerando diferentes valores dos parâmetros selecionados. A sensibilidade da solução do problema à variação de um dado parâmetro foi obtida através da aproximação por diferenças finitas [30, p.255-274].

Para as análises de sensibilidade, adotou-se estudar um par de engrenagens de dentes heli-

coidais que foi usado no trabalho de Palmer [68]. Palmer em 1999 [68] estudou os efeitos das modificações do perfil evolvente no erro de transmissão, porém não avaliou a influência dos outros parâmetros envolvidos no problema, como aqueles provenientes de erros de fabricação. Este par de engrenagens foi escolhido para o presente estudo devido à disponibilidade de dados teóricos e experimentais [68]. As duas engrenagens do par são geometricamente idênticas e as suas principais características de projeto são mostradas na tabela 4.1.

Tab. 4.1: Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais.

Parâmetros	Engrenagens
Número de dentes	40
Distância entre centros (mm)	203.2
Módulo normal (mm)	4.233
Ângulo de pressão normal	20°
Ângulo de hélice normal	33.55°
Diâmetro externo (mm)	211.684
Diâmetro de raiz (mm)	189.713
Fator de modificação do adendum	0
Largura da engrenagem (mm)	26.987
Grau de recobrimento transversal	1.32
Grau de recobrimento axial	1.12
Torque nominal de análise (Nm)	70
Módulo de elasticidade (GPa)	206
Coefficiente de Poisson	0.3
Distância entre pontos discretos na altura do dente (μm)	152
Distância entre pontos discretos na largura do dente (μm)	538

O perfil evolvente e o passo da hélice foram considerados nos cálculos conforme mostrado nas figuras 4.1 e 4.2, e representam a condição real do par de engrenagens usados nos experimentos em [68]. As figuras 4.1 e 4.2 representam os resultados gráficos das medições do dente das engrenagens. Este tipo de representação é comumente usado na indústria. Os gráficos de

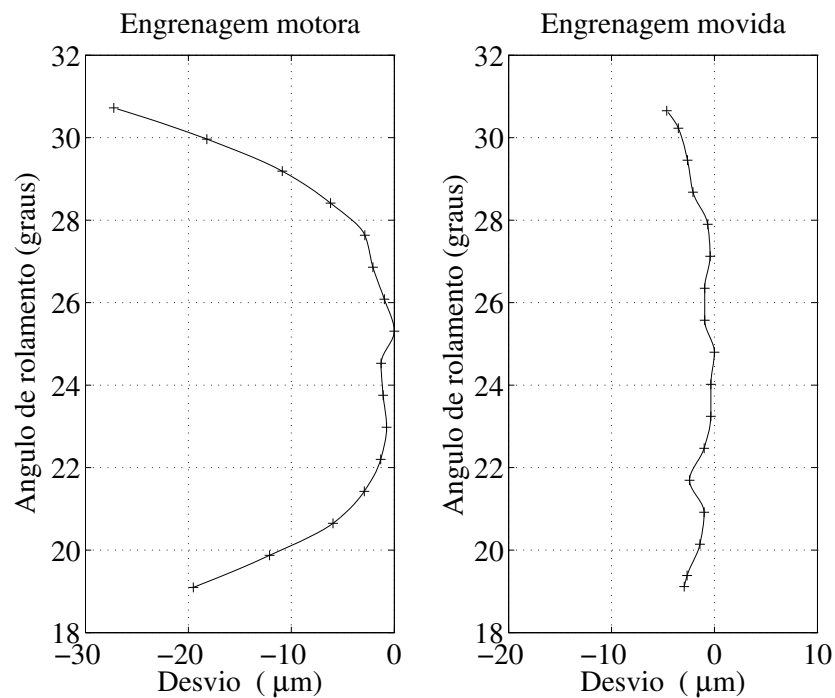


Fig. 4.1: Forma básica do perfil evolvente das engrenagens helicoidais em análise.

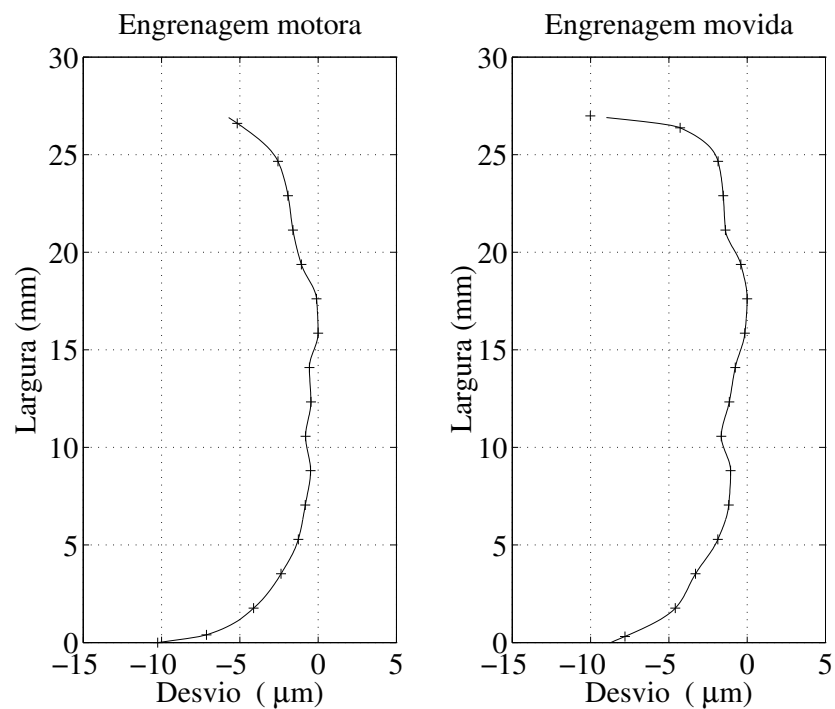


Fig. 4.2: Forma básica do passo da hélice das engrenagens em análise.

medição originais podem ser encontrados na referência [68, Apêndice III]. Os erros de fabricação dos dentes das engrenagens não são conhecidos, e portanto, tornaram-se objeto deste estudo quanto à sensibilidade da resposta a estas incertezas.

A figura 4.1 mostra a forma do dente na direção radial e em uma dada seção transversal do dente. Esta figura mostra, no eixo das abscissas, os desvios do perfil do dente em relação ao perfil evolvente teórico. No eixo das ordenadas estão os pontos ao longo da direção radial do dente. Como é usual neste tipo de representação, os valores ao longo da direção radial do dente são mostrados em ângulo de rolamento, que é o ângulo correspondente ao desenvolvimento do perfil evolvente tomado no diâmetro de base [26].

Já a figura 4.2 mostra a forma do dente na direção axial e em uma dada seção do dente. Nesta figura são mostrados no eixo das abscissas os desvios do passo da hélice das engrenagens em relação ao passo da hélice teórico. No eixo das ordenadas são mostrados as respectivas distâncias axiais dos dentes.

Nas figuras 4.1 e 4.2, se o dente medido das engrenagens fosse isento de erros e sem modificações intencionais nas superfícies dos dentes, os gráficos apresentariam todos os valores no eixo das abscissas iguais a zero. Por convenção os valores negativos nos gráficos representam desvios em relação ao posição teórica na direção normal à superfície e no sentido do centro do dente [111, p.30-32].

4.1 Sensibilidade aos parâmetros de discretização

Inicialmente analisou-se a sensibilidade da resposta aos parâmetros de discretização envolvidos no problema. Os parâmetros de discretização da superfície dos dentes foram analisados em um estudo anterior na referência [111, p.80-83 e p.98-103]. Assim os parâmetros de discretização da superfície dos dentes foram escolhidos baseados nos resultados daquele estudo. Os valores adotados para estes parâmetros são mostrados na tabela 4.1.

A influência do número de posições discretas que representam o ciclo de engrenamento

não havia sido avaliada até o momento. Procedeu-se então a esta análise na qual o valor do pico-a-pico do erro de transmissão foi comparado para diversos graus de discretização do ciclo de engrenamento. Os valores obtidos foram normalizados para facilitar a interpretação dos resultados e são apresentados na figura 4.3.

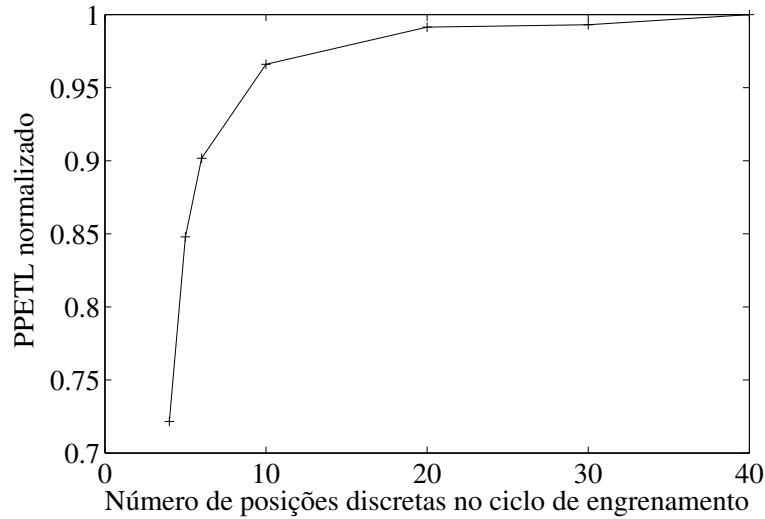


Fig. 4.3: Influência da discretização do ciclo de engrenamento.

Pode-se observar na figura 4.3 um comportamento assintótico e uma variação considerada pequena nos valores do pico-a-pico do erro de transmissão para as análises com mais de 10 posições discretas no ciclo de engrenamento. Em função destes resultados, adotou-se efetuar os outros cálculos para as análises de sensibilidade dos demais parâmetros considerando 20 posições discretas no ciclo de engrenamento. Isto representa um erro devido à discretização do ciclo de engrenamento menor do que 1% (ver figura 4.3).

4.2 Condicionamento da matriz de flexibilidade

O número de condição da matriz de um sistema de equações lineares pode indicar a sensibilidade, ou a vulnerabilidade, da solução devido às variações nos valores de entrada, ver equação (4.1) [19, p.42-44] [89, p.361-369]. Assim, para analisar a influência que perturbações dos dados de entrada podem provocar na solução do sistema, calculou-se o número de condição da matriz

$\mathbf{A}_{cc}$ da equação (3.15) para cada uma das 20 posições no ciclo de engrenamento. Para isto, usou-se a função *cond*¹ do MATLAB [60].

$$cond(\mathbf{A}_{cc}) = \|\mathbf{A}_{cc}\|_2 \|\mathbf{A}_{cc}^{-1}\|_2 . \quad (4.1)$$

onde $\|\mathbf{A}_{cc}\|_2$ é norma 2 da matriz $\mathbf{A}_{cc}$, que é dada pelo máximo valor singular de $\mathbf{A}_{cc}$ [60]. Os valores singulares da matriz $\mathbf{A}_{cc}$ podem ser obtidos pela técnica numérica de decomposição em valores singulares (SVD) [19, p.44-56].

Os números de condição da matriz $\mathbf{A}_{cc}$ calculados nas 20 posições do ciclo de engrenamento são mostrados na figura 4.4. Com base nos resultados obtidos, pode-se dizer que a matriz $\mathbf{A}_{cc}$ é bem condicionada e pouco sensível a erros nos dados de entrada [19, p.42-44] [89, p.361-369].

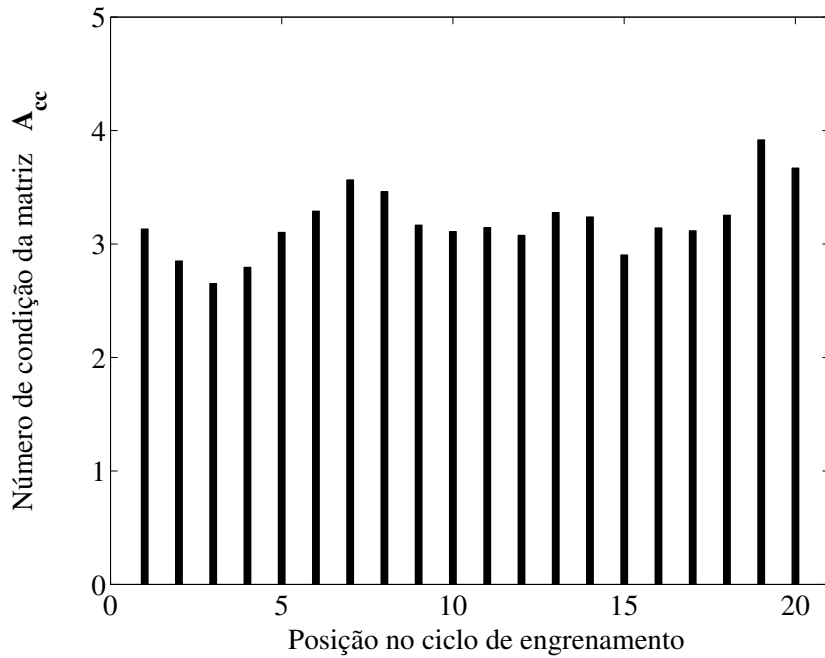


Fig. 4.4: Número de condição da matriz de flexibilidade.

Uma forma particular usada neste trabalho, além do emprego do número de condição, para investigar a sensibilidade da matriz $\mathbf{A}_{cc}$ é a variação dos elementos da matriz. Para isto, a

¹A função *cond* do MATLAB calcula o número de condição de uma matriz através da equação 4.1.

matriz $\mathbf{A}_{cc}$ foi multiplicada por um fator de perturbação (escalar) e foi avaliada a resposta do sistema para cada nível de perturbação da matriz. Os resultados obtidos nesta análise são mostrados na figura 4.5. A figura mostra o percentual de alteração na resposta devido a um dado percentual de alteração na matriz de flexibilidade. Pode-se observar na figura 4.5 um comportamento próximo do linear e pouco significativo para os valores de pico-a-pico do erro de transmissão.

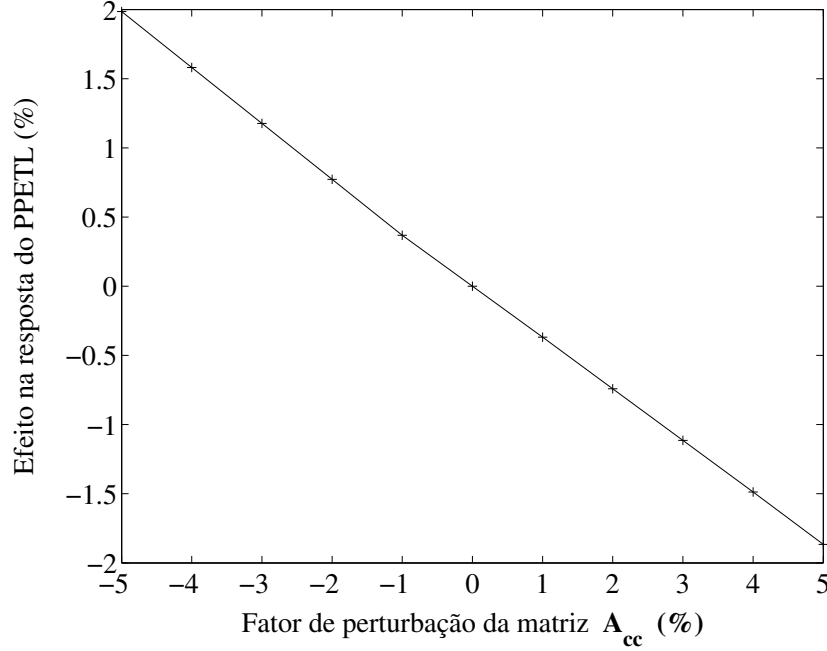


Fig. 4.5: Sensibilidade da matriz de flexibilidade.

Para quantificar a influência das perturbações na solução do problema, usou-se ainda a derivada logarítmica [30, p.261-262], conforme a equação (4.2).

$$S = \frac{d(\log u)}{d(\log x)} = \frac{du/u_t}{dx/x_t}, \quad (4.2)$$

onde S é a derivada para o cálculo da sensibilidade, u é a resposta do problema, x é o valor do parâmetro para a análise de sensibilidade, u_t e x_t são valores representativos da resposta da função e do parâmetro respectivamente.

A equação (4.2) pode ser calculada através da aproximação por diferenças finitas de primeira ordem conforme mostrado na equação (4.3) [30, p.256] [19, p.174-180],

$$\frac{du/du_t}{dx/x_t} \approx \frac{\Delta u/u_t}{\Delta x/x_t} = \frac{2[u(x + \Delta x) - u(x)]/[u(x + \Delta x) + u(x)]}{\Delta x/(x + 0.5\Delta x)}, \quad (4.3)$$

onde $u(x)$ é a resposta da função u para a variável x , Δx é o passo no valor da variável x .

A derivada S para o cálculo da sensibilidade (ver equação (4.3)) fornece as alterações relativas na resposta u devido à alteração relativa no parâmetro x . Portanto, quando o valor da derivada é maior do que 1 as alterações relativas na resposta são maiores do que as alterações relativas no parâmetro, e assim o parâmetro pode ser considerado significativo para a precisão da solução do problema. Já para valores da derivada S muito menores do que 1, o parâmetro pode ser considerado pouco influente na solução do problema [30, p.261-262].

O valor da derivada para o cálculo da sensibilidade obtido através da equação (4.3) referente às alterações no PPETL devido às perturbações da matriz de flexibilidade foi 0.39. O que quantifica o comportamento observado na figura 4.5. Portanto, pode-se concluir que pequenas perturbações na matriz de flexibilidade, $\mathbf{A}_{cc}$, resultam em variações não significativas na solução do problema.

Diante disto, pode-se assumir que pequenas erros nos parâmetros que compõem os elementos da matriz de flexibilidade (ver as equações (A.6) e (A.9)) do apêndice A não são significativos para a precisão da resposta do problema. Entre estes parâmetros estão o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson, as funções de deflexão da placa análoga ao dente, entre outros. Evidentemente os parâmetros relacionados com a geometria do dente, como o ângulo de hélice por exemplo, podem apresentar um comportamento diferente devido à alteração da região de contato.

4.3 Sensibilidade às variações na distância entre centros

A distância entre centros de montagem de um par de engrenagens é usualmente determinada pelas posições dos mancais usinados na carcaça da caixa de engrenagens. Desvios da posição nominal especificada para a usinagem podem levar a desalinhamentos dos eixos que suportam as engrenagens e a variações da distância de trabalho das engrenagens.

Além disto, poder-se-ia assumir que desvios de concentricidade entre o centro de trabalho da engrenagem e o diâmetro primitivo dos dentes poderiam ser considerados como variações da distância entre centros ao longo do perímetro da engrenagem. Obviamente neste caso a distância entre centros teria um valor diferente para cada ciclo de engrenamento do par de engrenagens e dois efeitos poderiam ser observados no espectro de frequências, um devido à alteração da forma da função do erro de transmissão para cada ciclo de engrenamento que poderia causar uma alteração na amplitude das harmônicas do ETL, e o outro devido diretamente ao desvio de concentricidade que causaria um efeito de modulação do sinal afetando a frequência fundamental do eixo [25, p.99-102]. Na análise realizada, a alteração da distância entre centros causada pelo efeito do desvio de concentricidade não foi considerada.

Estas variações em relação a distância entre centros nominal afetam os pontos discretos em contato entre as superfícies dos dentes das engrenagens motora e movida. Tanto a matriz de flexibilidade, $\mathbf{A}_{cc}$, quanto o vetor dos afastamentos iniciais, $\mathbf{h}_c$, da equação (3.15), podem ser afetados por estas variações.

Efetuuou-se a análise de sensibilidade à variação da distância entre centros através do cálculo do PPETL para diversos valores da distância entre centros. O valor nominal da distância entre centros consta na tabela 4.1. Para a definição do montante de variação admissível para a distância entre centros usou-se como referência a norma DIN3964 [24].

Os resultados desta análise são mostrados nas figuras 4.6. Pode-se observar na figura 4.6 que os erros na distância entre centros não causam influência significativa no erro de transmissão. Isto é confirmado pelo valor máximo de 0.03 da derivada S calculada através da equação (4.3).

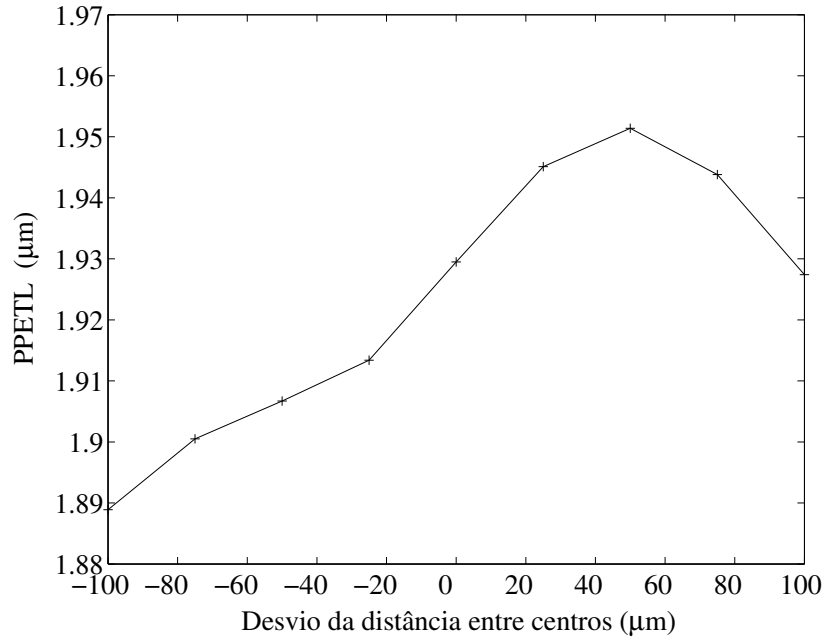


Fig. 4.6: Sensibilidade do PPETL à variação da distância entre centros.

Intuitivamente esperava-se encontrar uma sensibilidade maior às variações da distância entre centros devido às alterações dos pontos de contato das superfícies modificadas dos dentes. No entanto, entendeu-se que as superfícies dos dentes permaneceram predominantemente helicóides e evolventes, nas quais a propriedade fundamental é a manutenção da transmissão uniforme de movimento em diferentes distâncias entre centros [53, p.288], diferentemente do que ocorre com dentes de engrenagens de perfil cicloidal [53, p.382-389].

A partir dos resultados obtidos nesta análise da influência das variações da distância entre centros, pode-se dizer que o efeito predominante devido aos desvios de concentricidade nas engrenagens é a modulação do sinal [38, p.14-18].

Nos trabalhos pesquisados na literatura disponível sobre o assunto não foi encontrada nenhuma abordagem quanto à sensibilidade do erro de transmissão devido às variações na distância entre centros. Embora a influência de tais variações seja pequena, conforme verificada na presente análise, considera-se que os resultados obtidos são importantes para um melhor conhecimento e entendimento do problema.

4.4 Sensibilidade aos erros no torque aplicado

Vários estudos mostram que o erro de transmissão pode ser reduzido através da introdução de modificações nas superfícies dos dentes [27, 99, 7, 63]. Estas modificações atuam de forma eficaz para um dado nível de torque, chamado de torque nominal ou torque de projeto [104, 113].

Nas condições reais de aplicação de pares engrenados, o torque considerado no projeto para as especificações das modificações das superfícies dos dentes pode apresentar desvios em relação ao seu valor nominal. Considerou-se importante avaliar a sensibilidade do erro de transmissão às variações do torque aplicado.

Avaliou-se a sensibilidade do erro de transmissão às variações, ou erros, do torque aplicado no par engrenado quando em operação. Para isto, considerou-se um erro máximo em relação ao torque nominal de análise de $+5\%$ a -5% . A faixa de torque de $70Nm + 5\%$ a $70Nm - 5\%$ foi discretizada em 5 pontos. Os resultados do PPETL para cada um dos 5 níveis de torque são mostrados na figura 4.7.

Obteve-se a derivada para o cálculo da sensibilidade através da equação (4.3) e o resultado encontrado foi 0.38. Este valor da derivada S indica que pequenos desvios em torno do torque nominal não afetam de forma significativa o PPETL. Este resultado é válido para os valores de desvios estudados. Sabe-se que quando o par engrenado opera em sistema com ampla variação de torque, como no caso das caixas de engrenagens aplicadas em veículos equipados com motores de combustão interna, o PPETL pode ser alterado significativamente para os diferentes níveis de torque.

Na faixa de perturbação avaliada, o efeito da variação do torque no erro de transmissão pode ser considerado linear (ver figura 4.7), mostrando uma tendência de aumento do pico-a-pico do erro de transmissão para valores de torque abaixo do torque nominal.

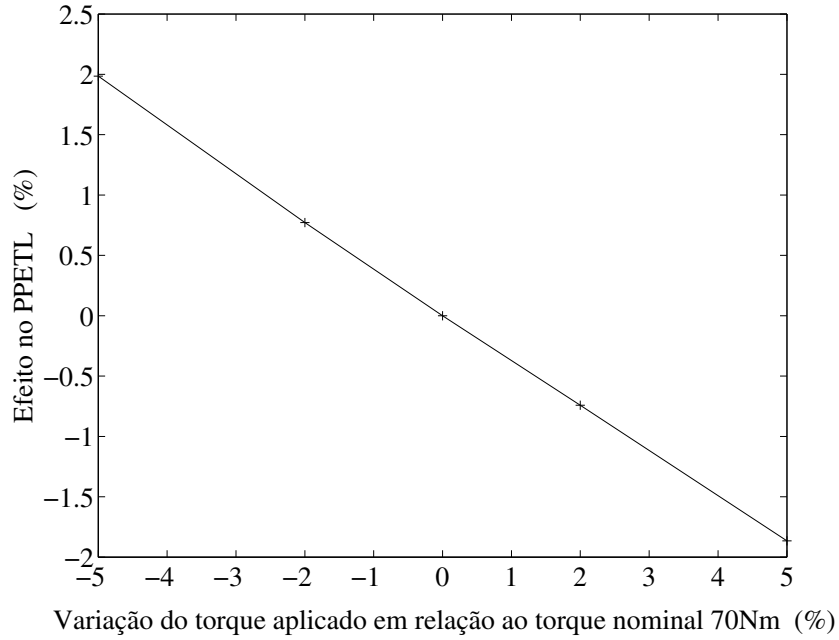


Fig. 4.7: Sensibilidade à variação do torque aplicado.

4.5 Sensibilidade às variações no vetor dos afastamentos iniciais

As incertezas de medição das características geométricas do par de engrenagens e os erros geométricos dos dentes gerados no processo de fabricação podem produzir alterações tanto na matriz de flexibilidade $\mathbf{A}_{cc}$, quanto no vetor dos afastamentos iniciais $\mathbf{h}_c$ (ver equação (3.15)).

Considera-se que grandes erros geométricos podem afetar a matriz de flexibilidade devido à alteração significativa dos pontos em contato, além de afetar os valores dos afastamentos iniciais. Já pequenos erros devem afetar mais significativamente o vetor dos afastamentos iniciais, uma vez que pequenos erros podem não ser suficientes para mudar a região de contato dos dentes engrenados.

A sensibilidade da matriz de flexibilidade e de alguns parâmetros que compõem os elementos desta matriz foi estudada nas seções anteriores. Nesta seção, estudou-se a sensibilidade do vetor dos afastamentos iniciais, $\mathbf{h}_c$.

Para esta análise usou-se um fator de perturbação (escalar). Multiplicou-se o vetor dos afastamentos iniciais por este fator, cujo valor variou de 0.95 a 1.05, e se obteve resposta do sistema para cada nível de perturbação.

Os resultados obtidos nesta análise são mostrados na figura 4.8. A figura mostra o percentual de alteração na resposta devido a um dado percentual de alteração no vetor dos afastamentos iniciais. Observa-se na figura 4.8 um comportamento linear da variação da resposta em relação à variação do parâmetro com uma forte influência no pico-a-pico do erro de transmissão.

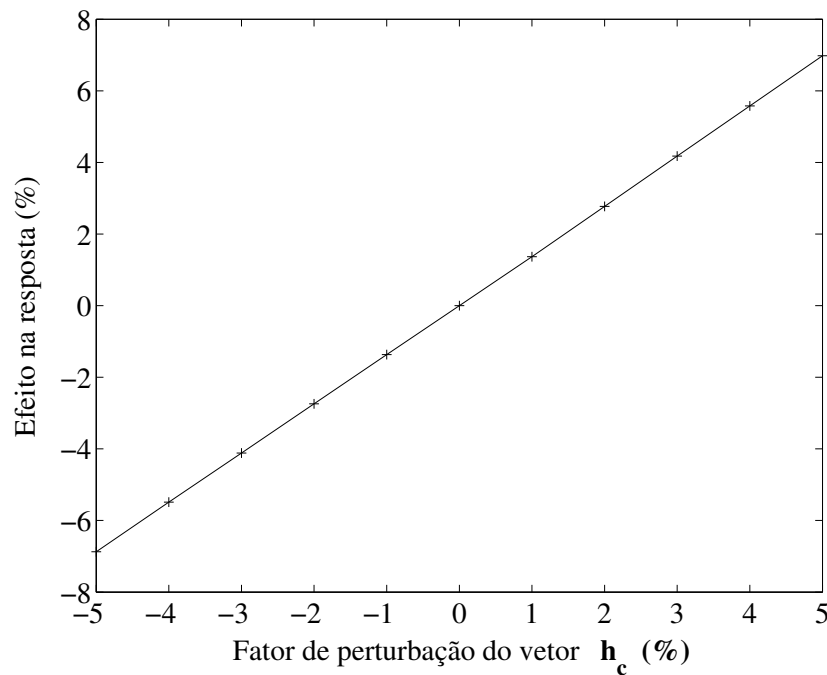


Fig. 4.8: Sensibilidade do vetor dos afastamentos iniciais.

Para quantificar a influência das perturbações na solução do problema, calculou-se ainda a derivada S conforme a equação (4.3). O resultado obtido para a derivada foi 1.47.

Verificou-se nesta análise que o problema estudado é mais sensível às variações dos afastamentos iniciais do que às variações dos elementos da matriz de flexibilidade, ou seja, a resposta é mais influenciada pelas variações geométricas e dimensionais dos dentes.

As variações geométricas e dimensionais que poderiam causar alteração nos valores dos elementos do vetor dos afastamentos iniciais podem ser provenientes de diversos parâmetros dos dentes. Alguns destes parâmetros correspondem a erros de fabricação e outros às especificações de projeto. Nas análises seguintes estudou-se alguns destes parâmetros individualmente.

4.6 Sensibilidade aos erros de espaçamento entre os dentes

Nas engrenagens os dentes deveriam ser igualmente espaçados, ou seja, a distância angular entre eles deveria corresponder a $2\pi/N$, onde N é o número de dentes. No entanto, devido aos erros dos processos de fabricação, são encontrados desvios do espaçamento entre os dentes em relação ao valor teórico.

Em geral, os erros de espaçamento entre os dentes são distribuídos de forma aleatória, e por isto produzem componentes de frequência em quase todas as harmônicas da frequência do eixo. Os erros de espaçamento não afetam a frequência de engrenamento [62, 38, 109, 75].

A importância desta análise de sensibilidade está no entendimento da alteração que o erro de espaçamento pode provocar na forma da função do erro de transmissão. Isto é importante para comparação com dados experimentais.

Desta forma, na análise de sensibilidade aos erros de espaçamento foram considerados o efeito no pico-a-pico do erro de transmissão e a forma da função do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento.

A norma DIN3960 [22] define, entre os desvios dos parâmetros individuais dos dentes de engrenagens cilíndricas, sete desvios relativos ao espaçamento. Destes destacam-se três:

- erro de espaçamento adjacente (f_p) que é a diferença entre a dimensão real e a dimensão nominal do espaçamento transversal entre dois dentes;
- erro de espaçamento acumulado (F_p) que é o erro de espaçamento acumulado em todos os dentes da engrenagem. Ele é obtido somando-se algebricamente os erros de espaçamento

de dentes adjacentes (f_p). O erro de espaçamento acumulado é a diferença entre o maior e o menor valor desta soma algébrica;

- diferença entre espaçamentos adjacentes (f_u) que é a diferença dos valores medidos entre dois espaçamentos consecutivos. A diferença entre espaçamentos adjacentes leva em consideração a posição real de três dentes adjacentes.

Entende-se que os desvios definidos na norma DIN3960 [22] se referem a formas distintas de especificação e controle do erro de espaçamento entre os dentes.

Devido à distribuição aleatória dos erros de espaçamento entre os dentes de cada engrenagem, pode-se encontrar um número elevado de combinações possíveis de erros de espaçamento relativos aos dentes engrenados em cada instante. O número de combinações depende da relação entre os números de dentes do par de engrenagens.

No caso do par de engrenagens em estudo (ver tabela 4.1), como as duas engrenagens possuem o mesmo número de dentes (40 dentes), a análise do erro de transmissão teria que ser repetida 40 vezes para cada uma das 40 possíveis combinações de montagem do par de engrenagens. Isto resultaria em 1600 cálculos do erro de transmissão assumindo-se uma única condição de distribuição aleatória dos erros dentro de uma amplitude admissível para o erro de espaçamento.

Adotou-se uma simplificação para reduzir o número de análises e determinar a influência que os erros de espaçamento provocam no erro de transmissão. Os cálculos do erro de transmissão foram efetuados introduzindo-se o erro de espaçamento em somente um dos dentes engrenados da engrenagem motora. O erro introduzido foi um erro de espaçamento entre dentes adjacentes (f_u) com valores entre $-5\mu m$ e $+5\mu m$ (ver norma DIN3962 [23, parte 1]). Repetiu-se, então, o cálculo do erro de transmissão para 11 valores discretos neste intervalo.

Os resultados obtidos nos cálculos são mostrados na figura 4.9. Observa-se na figura 4.9 que o comportamento do erro de transmissão é não linear em função do erro de espaçamento e que existe uma influência significativa nos resultados.

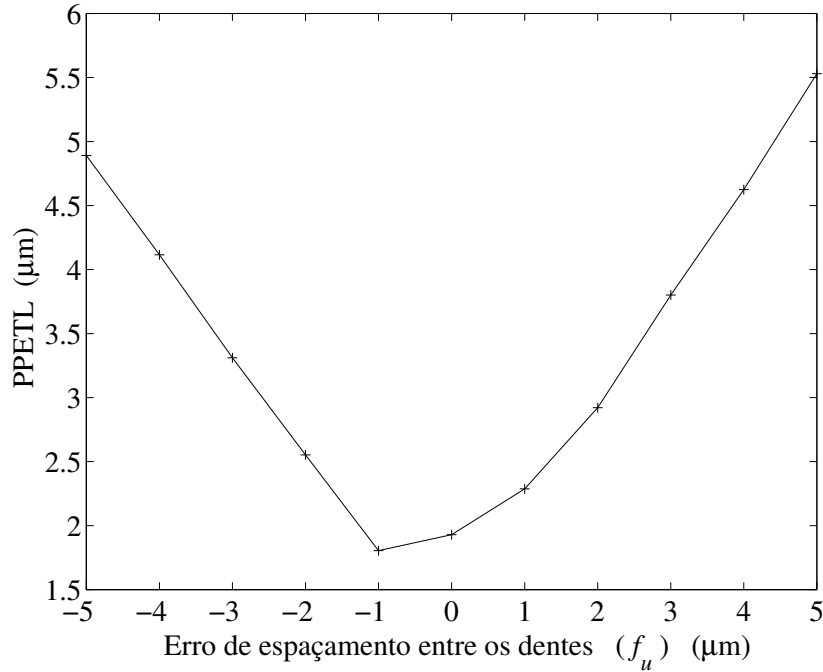


Fig. 4.9: Sensibilidade ao erro de espaçamento entre os dentes.

Notou-se ainda que a forma da função do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento é significativamente afetada pelo erro de espaçamento, como pode ser observado na figura 4.10.

A figura 4.10 mostra o erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento sem erro de espaçamento e com dois níveis de erro de espaçamento ($+5\mu\text{m}$ e $-5\mu\text{m}$). Erro de espaçamento com sinal positivo indica maior distância entre os dentes e com sinal negativo indica menor distância entre os dentes (ver norma DIN3960 [22]).

4.7 Sensibilidade aos erros de alinhamento dos dentes

Os erros de alinhamento dos dentes quando as engrenagens estão montadas na caixa de engrenagens podem ser devido principalmente às imprecisões na usinagem dos assentos dos mancais da carcaça, às deflexões dos eixos que suportam as engrenagens quando estas estão submetidas a carga, aos erros de montagem das engrenagens nos eixos e aos erros de alinhamento

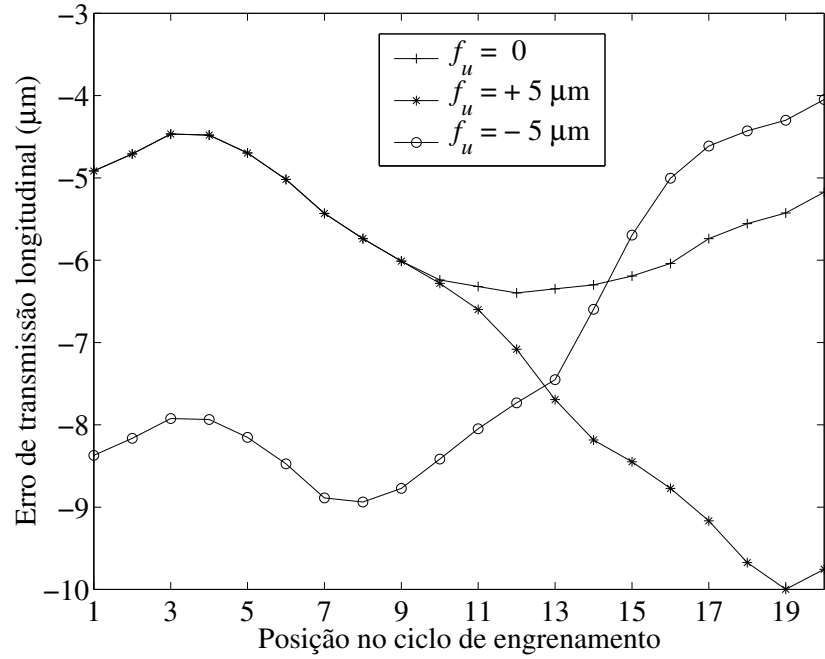


Fig. 4.10: Influência do erro de espaçamento na forma da função do ETL.

dos dentes causados pelo processo de fabricação [103].

Todos estes erros de alinhamento afetam o erro de transmissão de maneira similar [38, p. 14.18-14.19]. No entanto, as componentes do erro de alinhamento no plano normal aos dentes têm um efeito mais significativo [38, 37, 95, 103].

Na análise de sensibilidade quanto ao erro de alinhamento dos dentes, considerou-se apenas aqueles que poderiam ser causados por desvios do ângulo de hélice. Estes desvios causam um desalinhamento no contato entre os dentes no plano normal aos dentes.

Os erros de alinhamento dos dentes foram definidos conforme a norma DIN3960 [22], a qual designa este erro por $fH\beta$. Adotou-se valores admissíveis para os erros de alinhamento dos dentes conforme a norma DIN3962 [23, parte 2].

Considerou-se que apenas uma das engrenagens apresentava desvio do ângulo de hélice, a engrenagem motora, e se assumiu um desvio igual para todos os dentes desta engrenagem. A engrenagem movida foi considerada isenta de erros.

A análise de sensibilidade foi feita calculando-se o erro de transmissão para diversos valores do erro de alinhamento dos dentes. Os resultados obtidos nestes cálculos são mostrados na figura 4.11.

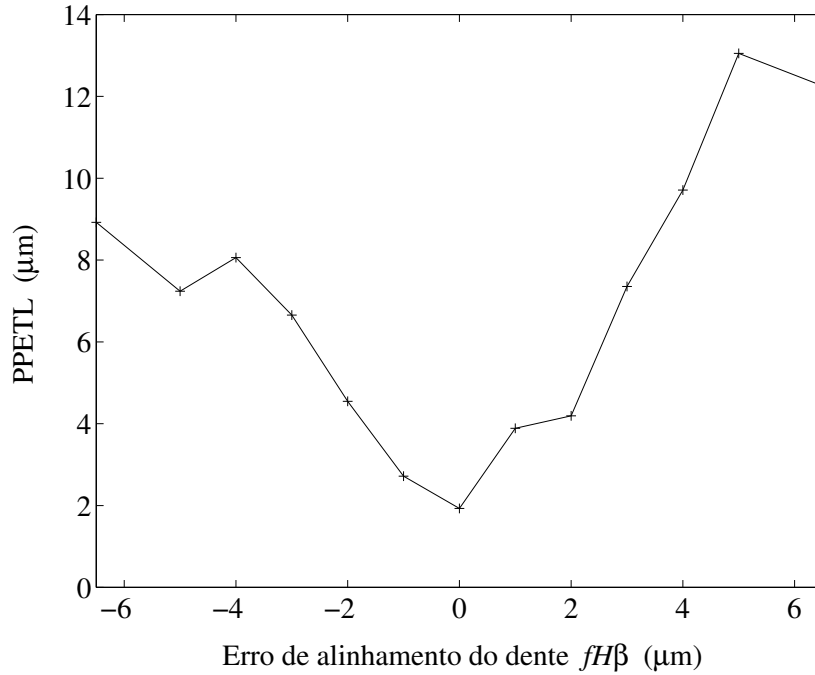


Fig. 4.11: Sensibilidade do PPETL ao erro de alinhamento dos dentes.

Observa-se na figura 4.11 que o comportamento do pico-a-pico do erro de transmissão é não linear para os erros de alinhamento estudados e com influência significativa no erro de transmissão, o que concorda com os resultados obtidos em estudos anteriores [103, 83].

As derivadas foram calculadas através da equação (4.3) para cada intervalo de resultados obtidos. O valor máximo calculado foi 1.37 no intervalo $2\mu m \leq fH\beta \leq 3\mu m$.

É interessante observar que existe uma tendência dos erros de alinhamento positivos influenciarem mais a resposta do que os erros com valores negativos (ver a figura 4.11). Os valores positivos do erro de alinhamento correspondem, neste caso, a um ângulo de hélice menor do que o nominal, já os valores negativos correspondem a um ângulo de hélice maior do que o nominal. Esta tendência foi observada em outros estudos [95, 103].

4.8 Sensibilidade aos erros da forma do passo da hélice

Para reduzir o efeito de possíveis erros de alinhamento das engrenagens, e ainda, para garantir que a carga de contato entre os dentes não atinja as extremidades dos dentes, usualmente, emprega-se uma modificação no passo da hélice das engrenagens [38].

Esta modificação consiste de um abaulamento do dente na direção do passo da hélice que é descrito em geral por uma função quadrática [104]. Desta forma, o dente apresenta uma superfície convexa na direção do passo da hélice.

Além desta modificação intencional imposta no passo da hélice, também existem os erros de forma do passo da hélice decorrentes do processo de fabricação (ver norma DIN3960 [22]).

Analisou-se a sensibilidade da forma do passo da hélice no erro de transmissão através da perturbação dos dados geométricos do passo da hélice modificado. Multiplicou-se os afastamentos do passo da hélice mostrados na figura 4.2 por um fator de perturbação variando de 0.95 a 1.05, e se avaliou o efeito no pico-a-pico do erro de transmissão. Os resultados obtidos são mostrados na figura 4.12.

Os resultados desta análise mostram que os erros na forma do passo da hélice causam pequena influência no pico-a-pico do ETL. O valor máximo da derivada calculado através da equação (4.3) considerando a alteração máxima do PPETL devido à alteração imposta na forma do passo da hélice foi 0.86.

4.9 Sensibilidade aos erros do perfil

O perfil evolvente modificado dos dentes (ver figura 4.1) também pode apresentar desvios em relação ao perfil desejado devido aos erros de fabricação. Entre os erros de perfil classificados pela norma DIN3960 [22] têm-se o erro de forma do perfil, $f_{f\alpha}$, o erro do ângulo do perfil, $f_{H\alpha}$, e o erro total de perfil, F_{α} , que engloba os dois anteriores.

Na presente análise, adotou-se avaliar a influência do erro de forma do perfil e do erro do

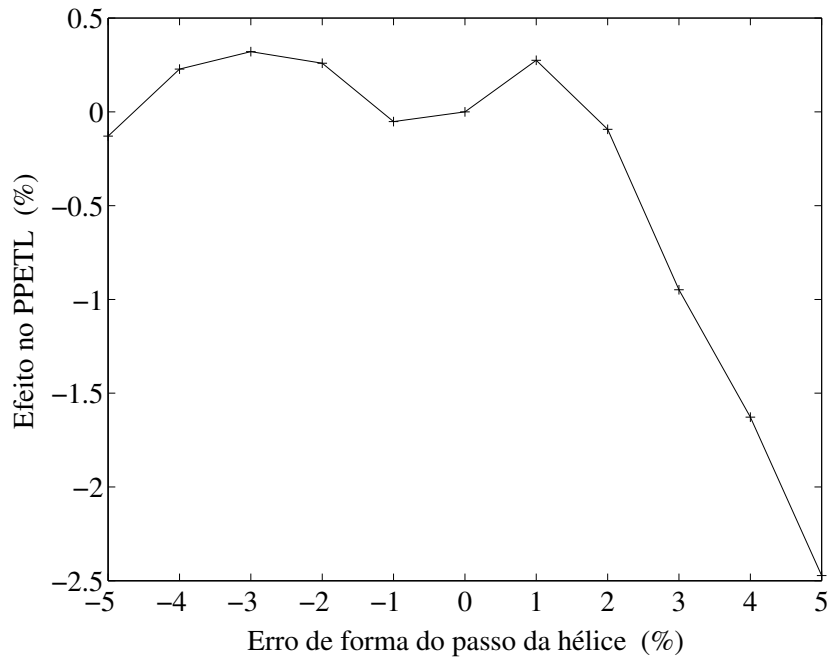


Fig. 4.12: Sensibilidade ao erro da forma do passo da hélice.

ângulo do perfil, no erro de transmissão. Avaliou-se inicialmente o erro do ângulo do perfil.

Para esta análise calculou-se o erro de transmissão para diferentes erros do ângulo do perfil. Os erros do ângulo do perfil foram considerados como desvios do ângulo de pressão em relação ao valor nominal da tabela 4.1, tomados longitudinalmente conforme definido na norma DIN3960 [22]. Para a definição do erro máximo admissível para o ângulo do perfil usou-se a norma DIN3962 [23, parte 1].

Para cada condição calculada, o erro do ângulo do perfil foi considerado igual para todos os dentes e introduzido somente na engrenagem motora. Os dentes da engrenagem movida permaneceram isentos de erros.

Os resultados obtidos nesta análise são mostrados na figura 4.13. Observa-se na figura 4.13 que o erro do ângulo do perfil causa um efeito não linear na resposta do problema, porém com baixa influência nos resultados. Observa-se ainda, um comportamento assimétrico, ou seja, erros do ângulo do perfil com valores negativos resultam em uma menor influência na resposta quando comparados com os erros com valores positivos.

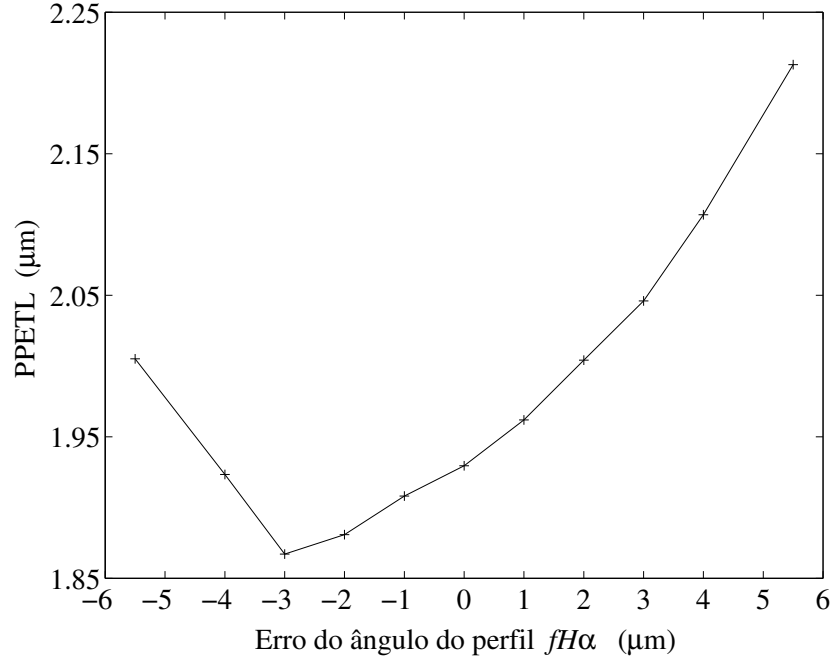


Fig. 4.13: Sensibilidade do PPETL ao erro do ângulo do perfil.

Usualmente na indústria, especifica-se no projeto tolerâncias para os erros admissíveis do ângulo do perfil simétricas em torno do valor nominal. A própria norma DIN3962 [23, parte 1] especifica valores simétricos para o erro do ângulo do perfil. No entanto, de acordo com os resultados da análise realizada, os valores admissíveis para o erro do ângulo do perfil deveriam ser especificados de forma assimétrica em torno do valor nominal. O campo de tolerância deveria ser deslocado para os valores negativos, permitindo-se erro do ângulo do perfil maiores, em valores absolutos, no sentido negativo e menores no sentido positivo.

Os valores das derivadas também mostram que a influência do erro do ângulo do perfil é pequena para os casos analisados. O valor máximo, 0.16, foi encontrado no intervalo $4\mu m \leq fH\alpha \leq 5.5\mu m$.

4.10 Sensibilidade aos erros de forma do perfil evolvente

A forma do perfil dos dentes é normalmente modificada para se obter uma melhor condição de contato e de distribuição de carga, e assim reduzir o erro de transmissão e / ou as tensões que atuam nos dentes. Com isto, a forma do perfil dos dentes deixa de ser uma evolvente pura [109].

A influência destas modificações no perfil dos dentes no desempenho do par de engrenagens, seja quanto à resistência ou quanto ao nível de ruído, foi objeto de estudo de diversos trabalhos publicados [38, 62, 109, 104, 68, 93, 104].

Além das modificações intencionais impostas no perfil dos dentes, também existem os erros de forma do perfil decorrentes do processo de fabricação (ver norma DIN3960 [22]).

Analizou-se a sensibilidade dos erros na forma do perfil dos dentes no erro de transmissão através da perturbação dos dados geométricos do perfil do dente modificado. Multiplicou-se os afastamentos do perfil mostrados na figura 4.1 por um fator de perturbação variando de 0.95 a 1.05, e se avaliou o efeito no pico-a-pico do erro de transmissão. Os resultados obtidos são mostrados na figura 4.14.

A perturbação na forma do perfil foi considerada somente na engrenagem motora e com a mesma amplitude para todos os dentes.

Os resultados desta análise mostram que os erros na forma do perfil dos dentes causam forte influência no erro de transmissão. Isto pode ser observado na figura 4.14. Esta influência pode também ser observada nos valores calculados para as derivadas do pico-a-pico do ETL através da equação (4.3). O valor máximo obtido foi 67.38.

A figura 4.15 mostra a forma da função do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento para a condição não perturbada (fator 1) e para as condições com fatores de perturbação 0.95 e 1.05. Observa-se uma alteração significativa na forma da função do ETL devido à variação da forma do perfil.

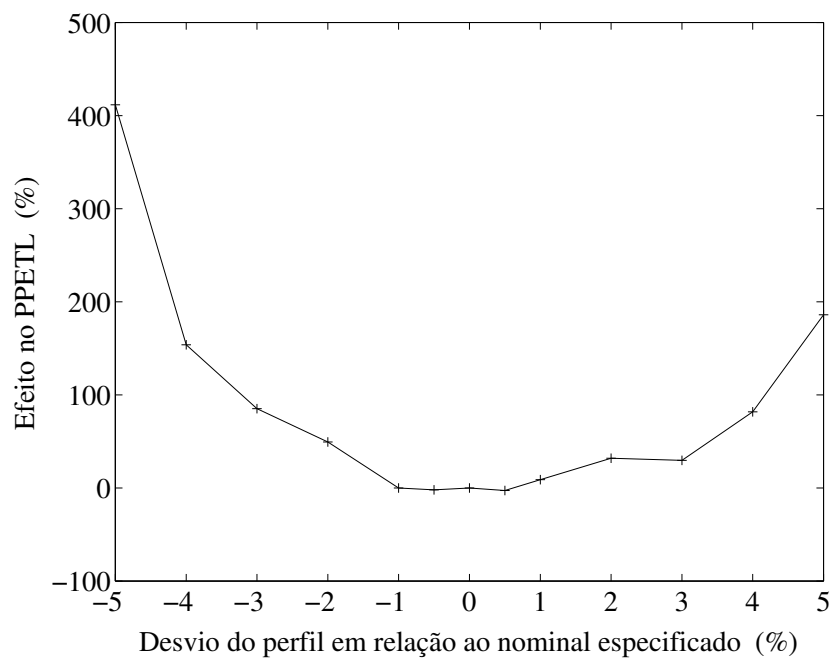


Fig. 4.14: Sensibilidade ao erro da forma do perfil do dente.

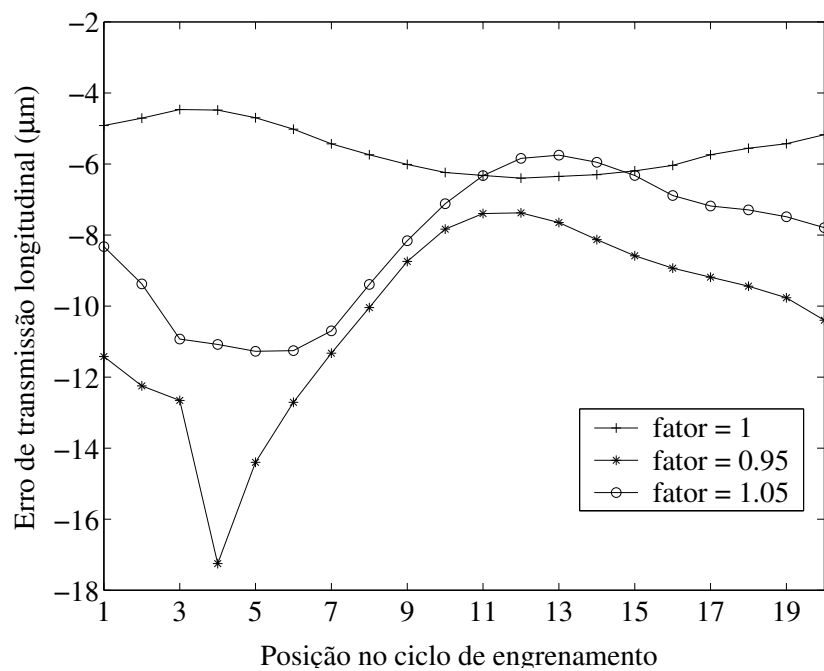


Fig. 4.15: Influência do erro da forma do perfil dos dentes na função do ETL.

4.11 Sumário das análises de sensibilidade

As análises de sensibilidade de diversos parâmetros envolvidos no problema foram feitas com o objetivo de identificar a influência de cada um deles na solução do problema.

Inicialmente avaliou-se a sensibilidade da matriz de flexibilidade no erro de transmissão. Isto foi feito através do cálculo do número de condição da matriz, e ainda através da verificação do efeito de perturbações nos elementos da matriz. Constatou-se que a matriz é bem condicionada e que perturbações em seus elementos resultam em pequenas variações na resposta. Estas perturbações tiveram como finalidade representar erros ou incertezas dos parâmetros envolvidos na definição dos elementos da matriz (ver seção 4.2).

Avaliou-se, então, a sensibilidade do problema devido às variações no vetor dos afastamentos iniciais, e se verificou que estas variações causam alterações significativas na resposta. Estas variações podem ser devido a erros ou a incertezas nos parâmetros geométricos das engrenagens (ver seção 4.5).

As variações nos valores dos afastamentos iniciais entre os pontos discretos podem ser provenientes de erros ou incertezas em diversos parâmetros geométricos envolvidos. Os parâmetros principais foram identificados através de trabalhos publicados sobre o assunto [62, 109, 108, 75, 37, 38] e através da norma DIN3960 [22].

É certo que variações nos parâmetros que definem os afastamentos iniciais entre os pares de pontos discretos podem afetar também a região de contato entre os dentes, dependendo da amplitude destas variações. Um exemplo seria a consideração de um erro de alinhamento dos dentes, que poderia deslocar o contato entre os dentes do centro dos dentes para uma das suas extremidades. Alterações deste tipo afetam não só os elementos do vetor dos afastamentos iniciais, mas também podem afetar de forma significativa os elementos da matriz de flexibilidade.

A tabela 4.2 mostra os valores máximos da derivada para o cálculo da sensibilidade com relação aos respectivos parâmetros de interesse. Estes valores indicam a sensibilidade do pico-a-pico do erro de transmissão para os parâmetros estudados, considerando a faixa de perturbação estudada em cada caso. Os valores mostrados na tabela 4.2 devem servir apenas como uma referência uma vez que em várias análises observou-se um comportamento não linear do valor do pico-a-pico do erro de transmissão em função da variação dos parâmetros, e o valor da

derivada da função também apresentou variações significativas. Os parâmetros que aparecem como os de maior influência na resposta neste estudo (ver tabela 4.2) coincidem com aqueles apontados em outros trabalhos como sendo os de maior influência no erro de transmissão [45, 38, 37, 62, 109, 75]

Tab. 4.2: Valor máximo da derivada S para os diversos parâmetros.

Parâmetros	Valor máximo	Vide seção
Distância entre centros	0.03	4.3
Torque aplicado	0.38	4.4
Espaçamento	0.80	4.6
Alinhamento do dente	1.37	4.7
Forma do passo da hélice	0.86	4.8
Ângulo do perfil	0.16	4.9
Forma do perfil	67.38	4.10

Para cada parâmetro, considerou-se que as perturbações atuavam nos dentes de somente uma das engrenagens, na engrenagem motora. Assumiu-se que todos os dentes da engrenagem motora possuíam o mesmo erro. Considera-se isto como uma aproximação para análise, haja vista que nas engrenagens reais os erros podem ser encontrados nas duas engrenagens do par e com uma certa variação entre cada um dos dentes. As interações entre os diversos parâmetros envolvidos no problema não foram avaliadas, porém se espera que elas causem uma contribuição significativa quando os parâmetros de maior sensibilidade ao modelo estejam envolvidos.

Em função dos resultados obtidos nas análises, verificou-se que pequenas variações em alguns parâmetros podem causar diferenças significativas nos resultados (ver tabela 4.2). Uma vez que existem incertezas nas medições destes parâmetros, e ainda, que a medição dos erros em cada um dos dentes é uma tarefa trabalhosa e que introduz um acúmulo de incertezas devido ao excessivo número de medições, torna-se difícil considerar na modelagem do erro de transmissão os dados reais das engrenagem a fim de se obter resultados precisos quando comparados com as curvas de erro de transmissão obtidas experimentalmente [62].

No estudo de sensibilidade apresentado neste capítulo analisou-se o comportamento da resposta do PPETL em função de variações nos parâmetros envolvidos no problema. Os resultados apresentados foram obtidos para um par de engrenagens com características representativas das engrenagens usualmente aplicadas nas transmissões de veículos comerciais. Acredita-se que para esta categoria de produtos os resultados não devem mudar significativamente.

Capítulo 5

Comparação com resultados experimentais

Neste capítulo é mostrada a verificação do modelo usado para o cálculo da variação do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento (PPETL) quanto à sua adequação para este fim. Para isto, comparou-se o PPETL calculado através do modelo usado com dados experimentais referentes a um par de engrenagens de dentes helicoidais submetido a diferentes níveis de torque. Os resultados mostram uma correlação adequada entre os dados calculados e medidos.

A modelagem matemática de problemas reais pode ser muito complexa mesmo para problemas simples. Por isto, diversas simplificações são normalmente feitas. No entanto, o excesso de simplificações na modelagem pode levar à perda de precisão do modelo e em alguns casos à perda do significado físico do problema estudado. Neste sentido, os testes experimentais são importantes para a avaliação da capacidade do modelo em representar o problema real [25, p.3-4].

Para a medição do erro de transmissão de pares engrenados, alguns métodos têm sido empregados, entre os quais predominam as máquinas comerciais de medição, que são usadas no ambiente produtivo para a avaliação das engrenagens em processo de fabricação. Nestas máquinas o par de engrenagens é submetido a uma carga muito baixa, somente para o arraste

e a manutenção do contato entre os dentes, e também a baixa rotação. Este tipo de verificação é chamado em inglês de "*single flank test*" [39, 62, 86].

As máquinas de "*single flank test*" são limitadas quanto ao torque aplicado, e por isto podem não representar a condição de operação do par de engrenagens. Alguns outros equipamentos são usados para a verificação experimental do erro de transmissão, entre eles os dinamômetros e os sistemas de circuito fechado, conhecidos como "*four square machines*", ou "*back-to-back tester*", ou ainda, "*circulating power tester*". Nos equipamentos de circuito fechado, duas caixas de engrenagens iguais são montadas uma contra a outra de forma a manter a mesma potência no sistema. A desvantagem deste sistema é a dificuldade em isolar o resultado do par em estudo, uma vez que dois pares de engrenagens são usados simultaneamente no teste [39].

Nos dinamômetros e nos sistemas de circuito fechado pode-se submeter o par engrenado à condição real de operação em termos de torque e rotação. Sob alta carga, outras deflexões envolvidas como: as deflexões dos eixos e das carcaças tornam-se significativas, e por isto, é adequado que as medições do erro de transmissão sejam feitas com o par de engrenagens montado na própria caixa de engrenagens onde ele irá operar [62].

Quanto à instrumentação necessária para a medição do erro de transmissão, são dois os sistemas que se destacam: os que utilizam "*encoders*" óticos de alta resolução e os que utilizam acelerômetros torcionais. Cada um destes sistemas de medição apresenta vantagens e desvantagens conforme suas características, sendo que os acelerômetros torcionais necessitam de uma atenção especial quanto à calibração para a obtenção de resultados precisos, além de um tratamento matemático do sinal adquirido [39].

Torna-se evidente que um equipamento de precisão adequada para a medição do erro de transmissão com carga é um equipamento específico de alto custo. Constatou-se que poucos laboratórios e instituições de pesquisa dispõem de tal equipamento, sendo que estes ainda possuem limitações quanto ao tamanho das engrenagens aplicáveis. Provavelmente isto justifica porque poucos trabalhos científicos apresentam comprovações experimentais para os modelos propostos para o cálculo do erro de transmissão.

Como o erro de transmissão é a principal fonte de excitação para a geração do ruído de pares engrenados, em diversos trabalhos o erro de transmissão foi calculado e aplicado em outros modelos para a previsão do nível de ruído do sistema, sendo que a comprovação do modelo completo foi feita através da medição do ruído ou vibração gerado pelo par de engrenagens e não do erro de transmissão [66, 95, 5, 9, 69].

5.1 Resultados experimentais

No presente trabalho, não foram executadas medições do erro de transmissão devido às dificuldades citadas anteriormente quanto ao equipamento de medição necessário. No entanto, usou-se os resultados experimentais obtidos por David Palmer [68] durante o seu trabalho de doutoramento, na Universidade de Huddersfield, no Reino Unido. O Dr. Palmer forneceu seus dados experimentais do erro de transmissão e de níveis de pressão sonora relativos a um par de engrenagens helicoidais submetido a seis diferentes níveis de torque: $70Nm$, $157Nm$, $245Nm$, $334Nm$, $424Nm$ e $514Nm$. A seguir descreve-se as condições e os equipamentos usados pelo Dr. Palmer [68] para as medições.

Os parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais usados pelo Dr. Palmer [68] são mostrados na tabela 4.1 do capítulo 4.

As modificações de micro-geometria no perfil e no passo da hélice das engrenagens motora e movida são mostradas respectivamente nas figuras 4.1 e 4.2. Os erros de fabricação das engrenagens não são conhecidos.

As medições do erro de transmissão foram feitas usando uma bancada de sistema fechado ("*back-to-back tester*"), projetada pelo Prof. Munro, na Universidade de Cambrige, no Reino Unido, nos anos sessenta, para investigar o comportamento dinâmico de pares de engrenagens de dentes retos [68, p.160]. Esta bancada é movida por um motor elétrico de corrente variável que compensa as perdas por atrito no sistema [68, p.160].

Para a medição do erro de transmissão estático do par de engrenagens helicoidais foi usado

um par de "*encoders*" ópticos da marca *Heidenhain* de 36000 linhas de resolução e com uma unidade de interpolação. Os "*encoders*" foram montados nas extremidades dos eixos que suportam as engrenagens. Este sistema de medição apresenta precisão de 0.36 segundo de arco [68, p.167].

Já as medições de pressão sonora foram feitas usando-se um microfone da marca B&K, que foi posicionado à distância de 223mm da caixa de engrenagens. As aquisições foram feitas com um enclausuramento acústico colocado sobre a caixa de engrenagens para reduzir a contaminação do sinal com o ruído de outras fontes do sistema. Os valores de pressão sonora medidos foram medidos em decibel sem ponderação pela curva padrão de atenuação A [68, p.162].

As medições foram realizadas com o sistema estabilizado, o que foi obtido após 2 horas de funcionamento do sistema. A temperatura do óleo da caixa de engrenagens ficou em torno de 40°C, enquanto a temperatura da sala foi mantida em 21°C [68, p.167].

O erro de transmissão foi medido para cada um dos seis níveis de torque na condição quasi-estática com as engrenagens em rotação entre 30 a 45 rpm [68, p.180].

O nível de pressão sonora foi medido na condição dinâmica, com a rotação das engrenagens variando de 100 a 1100 rpm. As medições foram feitas para condições discretas neste intervalo de rotações e para cada nível de torque aplicado no par engrenado. Os dados foram analisados, para cada nível de torque, calculando-se a média dos valores de pressão sonora medidos nas várias rotações [68, p.213-215].

Para maiores detalhes e informações sobre a obtenção dos dados experimentais, recomenda-se consultar a referência original [68, p.160-226].

5.2 Resultados numéricos

Para comparação com os dados experimentais, calculou-se o erro de transmissão estático através do procedimento descrito no capítulo 3 para o par de engrenagens mostrado na tabela 4.1

do capítulo 4.

Os parâmetros de micro-geometria foram considerados conforme as figuras 4.1 e 4.2 do capítulo 4. Não foram considerados erros de fabricação das engrenagens, uma vez que estas informações não são disponíveis.

Calculou-se o ETL em 50 posições do ciclo de engrenamento para cada nível de torque aplicado. Como foi apresentado na seção 4.1 do capítulo 4, 50 posições discretas podem representar com precisão adequada o comportamento do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento.

Para efeito de adequação de nomenclatura com os dados originais do trabalho do Dr. Palmer [68], adotou-se usar o termo passo base ao invés de ciclo de engrenamento. No caso em questão, o perímetro da engrenagem no diâmetro de base pode ser representado por 40 passos base, onde 40 é o número de dentes das engrenagens.

É importante destacar que os resultados experimentais do Dr. David Palmer [68] mostrados neste trabalhos não correspondem aos valores absolutos obtidos na medição. Os valores do erro de transmissão foram deslocados no eixo das ordenadas do gráfico por um valor constante que não é conhecido. O Dr. David Palmer [68] fez esta alteração nos valores por uma conveniência de apresentação no seu trabalho de doutoramento. Ele apresentou as curvas do erro de transmissão nos diferentes níveis de torque em um mesmo gráfico, que é conhecido como mapa de Harris. Assim, para efeito de comparação entre os dados medidos e os calculados, adotou-se deslocar todos valores calculados do erro de transmissão no eixo das ordenadas para que o valor médio do erro de transmissão calculado ao longo de um passo base ficasse próximo do valor médio do erro de transmissão do trabalho do Dr. Palmer [68].

5.3 Critérios de comparação dos resultados

Nos trabalhos pesquisados, identificou-se os seguintes critérios de comparação entre os dados do erro de transmissão obtidos experimentalmente e analiticamente:

- comparação gráfica das curvas descritas pelo erro de transmissão medido e calculado para diferentes torques [63, 51, 68]. Esta forma de apresentação é conhecida como mapa de Harris [109];
- comparação gráfica entre amplitudes das harmônicas do erro de transmissão medidas e calculadas para diferentes níveis de torque. Alguns trabalhos compararam as amplitudes das duas primeiras harmônicas do erro de transmissão [40, 4, 86], e um outro trabalho comparou as três primeiras harmônicas do ETL [5] com as respectivas harmônicas do ruído medido;
- comparação gráfica entre os valores de vibração em aceleração [95, 69, 9], ou do nível de pressão sonora na escala decibel [14, 66, 9, 5];
- comparação gráfica entre o nível de pressão sonora global obtido através da média dos níveis de pressão sonora medidos em uma faixa de rotações com a amplitude do pico-a-pico do erro de transmissão [68].

Em nenhum destes trabalhos se observou o uso de algum critério objetivo de comparação entre os dados medidos e calculados que pudesse quantificar a relação entre eles.

Propõe-se no presente trabalho comparar os dados obtidos experimentalmente com os dados do erro de transmissão calculados através de dois critérios: um deles usando uma equação aplicada em análise modal para comparação entre modos de vibrar medidos e calculados. Este critério, chamado de MAC (*Modal Assurance Criterion*), permite quantificar a similaridade entre dois modos de vibrar e é definido pela equação (5.1) [28, p. 56-60]. O outro critério é gráfico, no qual o erro de transmissão calculado ao longo do ciclo de engrenamento para diversos níveis de torque é comparado com a curva do erro de transmissão obtida experimentalmente, e ainda, os valores do pico-a-pico do erro de transmissão calculados para cada torque são comparados com os valores do PPETL obtidos experimentalmente e com os níveis de pressão sonora medidos nas respectivas condições de torque.

A equação do MAC é:

$$MAC = \frac{|ETL_m^T ETL_a|^2}{(ETL_a^T ETL_a) (ETL_m^T ETL_m)} , \quad (5.1)$$

onde ETL é o vetor com os valores do erro de transmissão longitudinal ao longo do ciclo de engrenamento em um dado torque (μm), os índices m e a indicam respectivamente os valores medidos e os valores analíticos, e ETL^T é o vetor transposto de ETL .

O MAC é uma técnica muito usada para estimar o grau de correlação entre vetores modais obtidos de modelos analíticos e obtidos experimentalmente. Os valores do MAC situam-se entre 0 e 1. Valores próximos de 1 indicam que um vetor é múltiplo do outro. A escala dos vetores não é importante para o cálculo do MAC. Desta forma o MAC compara a forma definida pelos vetores [28, p.56-57].

5.4 Comparação dos resultados teóricos e experimentais

Nesta seção são apresentados os resultados calculados do erro de transmissão para diferentes níveis de torque, e também as comparações destes resultados teóricos com aqueles obtidos experimentalmente por Palmer [68].

Os resultados calculados para o erro de transmissão em 50 posições discretas de um passo base do par de engrenagens submetido ao torque de $70Nm$ são mostrados na figura 5.1.

A figura 5.2 mostra o erro de transmissão calculado e medido para o torque de $70Nm$. O erro de transmissão calculado, que é mostrado na figura 5.2, corresponde ao erro de transmissão para um passo base, mostrado na figura 5.1, e repetido 5 vezes. Isto é válido uma vez que não são considerados os erros de fabricação pelo fato deles não serem conhecidos. Já os valores medidos do erro de transmissão mostrados na figura 5.1 correspondem aos 5 primeiros passos base do par engrenado.

Pode-se observar na figura 5.2 que existe uma certa variação entre as curvas medidas do erro de transmissão em cada passo base. Provavelmente, isto é devido aos erros de fabricação que

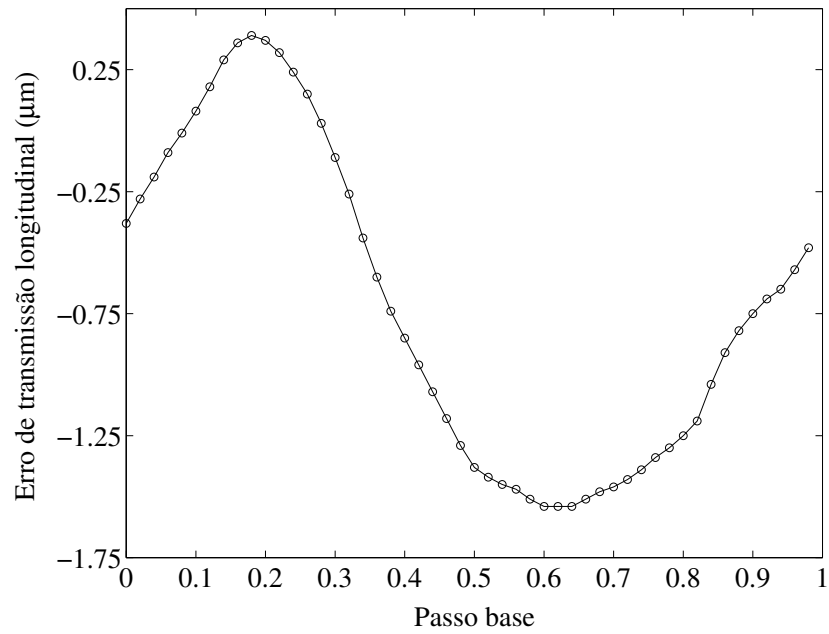


Fig. 5.1: Erro de transmissão calculado para o torque de 70Nm.

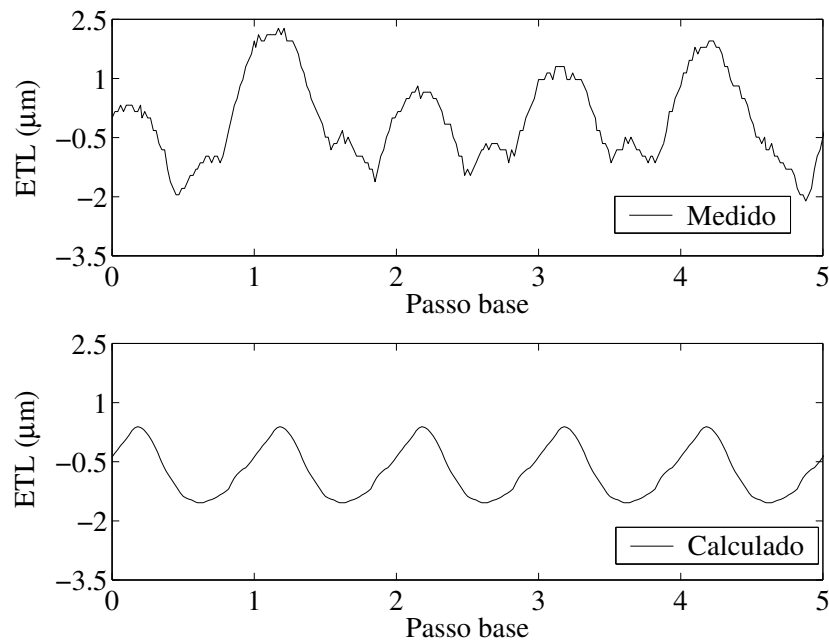


Fig. 5.2: Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 70Nm.

geram condições geométricas diferentes para cada dente, e ainda, aos erros experimentais. No entanto, observa-se na figura 5.2 que existe semelhança entre as curvas medidas e calculadas.

Aplicou-se a equação (5.1) aos vetores com os erros de transmissão medido e calculado para verificar a similaridade entre os dois vetores. Para isto, considerou-se os valores do erro de transmissão calculados em um passo base, mostrado na figura 5.1, repetidos 40 vezes. Para que os dois vetores, medido e calculado, tivessem o mesmo número de elementos, os valores entre as posições discretas consideradas no cálculo foram obtidas por interpolação através das funções polinomiais *pchip*¹ e *ppval*² do MATLAB [60].

O valor obtido pelo critério do MAC foi de 0.7976, que corresponde à semelhança entre as curvas do erro de transmissão medido e calculado que foram mostradas na figura 5.2. Entende-se através destes resultados que o critério adotado para a comparação objetiva entre as curvas do erro de transmissão através do MAC (*Modal Assurance Criterion*) é adequada para este fim (ver seção 5.3).

O erro de transmissão é composto em parte pelos afastamentos geométricos entre os dentes causados por erros de fabricação e modificações intencionais das superfícies dos dentes, e em parte pelas deflexões elásticas causadas pela carga aplicada [38, 104]. Quando o par de engrenagens opera sem carga aplicada ou sob baixa carga, as deflexões elásticas são pequenas, e assim o erro de transmissão é causado predominantemente pelos desvios geométricos dos dentes. Nesta situação os erros de fabricação podem apresentar influência mais significativa nos resultados.

A seguir são apresentados os resultados obtidos para os outros níveis de torque. As análises de comparação usadas para os outros níveis de torque obedeceram a mesma forma usada para o torque de $70Nm$.

As figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 mostram os resultados do erro de transmissão calculado em 50 pontos discretos de um passo base para os torques de $157Nm$, $245Nm$, $334Nm$, $424Nm$ e $514Nm$, respectivamente.

Já as figuras 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 mostram a comparação entre o erro de transmissão medido nos cinco primeiros passos base do par engrenado com o erro de transmissão calculado

¹A função *pchip* do MATLAB determina um polinômio de interpolação cúbica por partes.

²A função *ppval* do MATLAB calcula o valor da função polinomial de interpolação cúbica por partes.

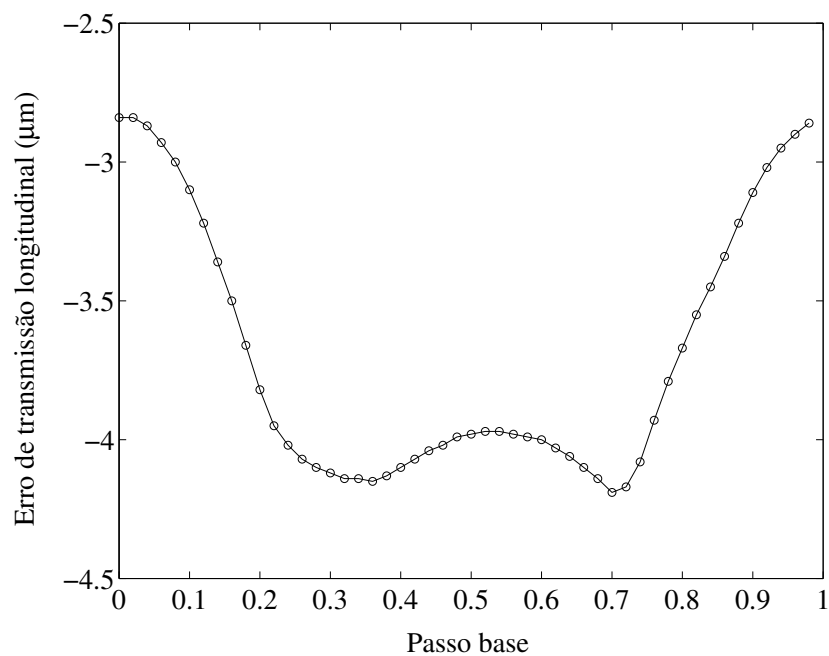


Fig. 5.3: Erro de transmissão calculado para o torque de 157Nm.

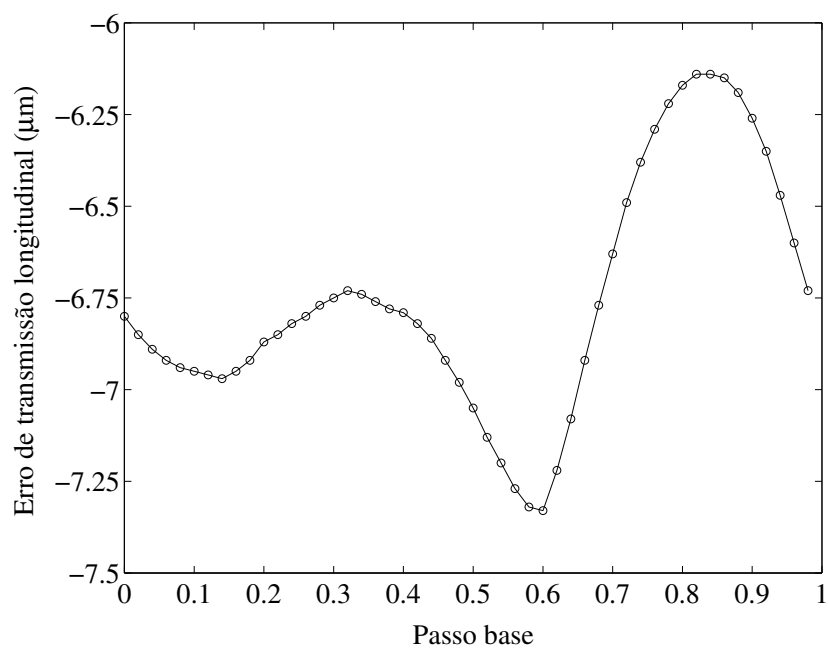


Fig. 5.4: Erro de transmissão calculado para o torque de 245Nm.

para os torques de 157Nm, 245Nm, 334Nm, 424Nm e 514Nm, respectivamente. Observa-se nestas figuras que existe semelhança entre as curvas medidas e calculadas.

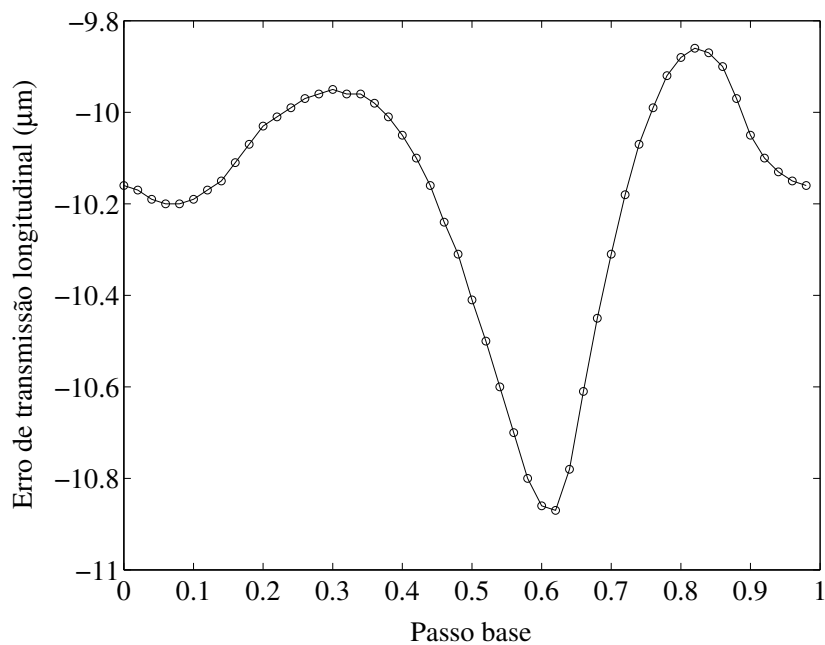


Fig. 5.5: Erro de transmissão calculado para o torque de 334Nm.

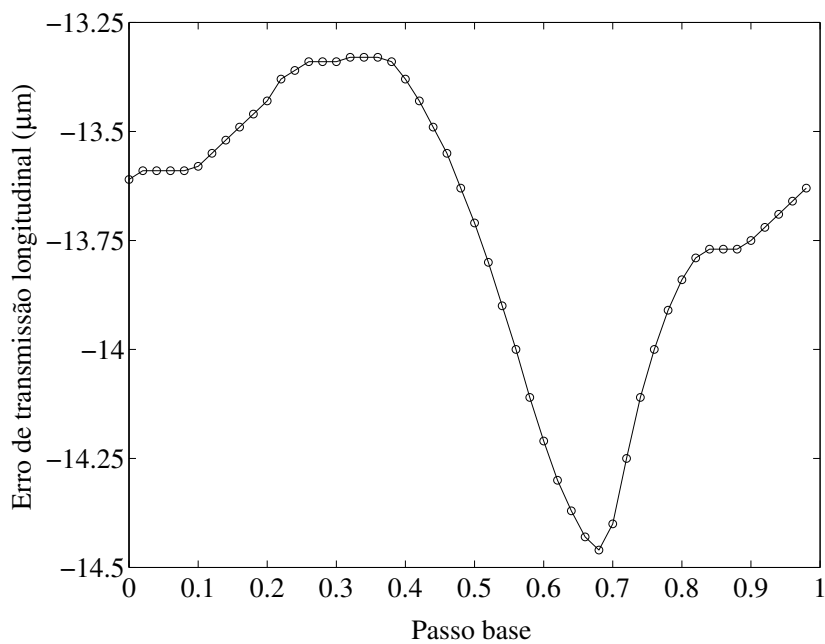


Fig. 5.6: Erro de transmissão calculado para o torque de 424Nm.

Calculou-se ainda o valor do MAC (ver equação (5.1)) para os vetores com os valores das curvas medidas e calculadas nos diferentes níveis de torque. Os valores obtidos e um sumário

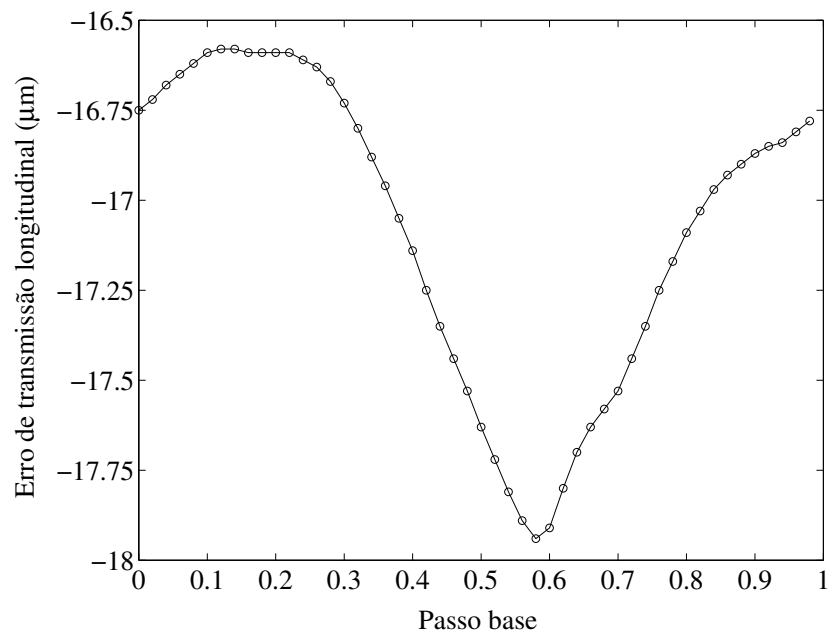


Fig. 5.7: Erro de transmissão calculado para o torque de 514Nm.

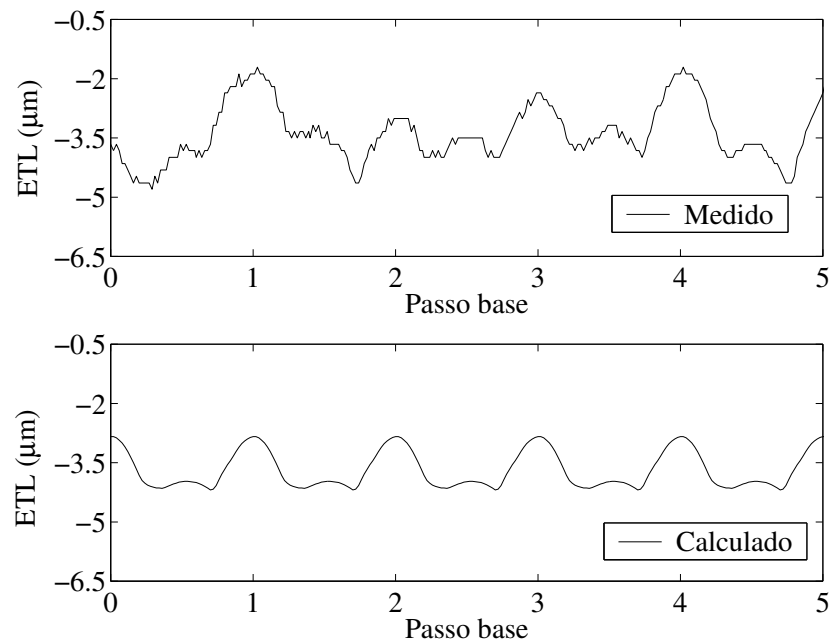


Fig. 5.8: Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 157Nm.

das comparações realizadas são apresentados a seguir.

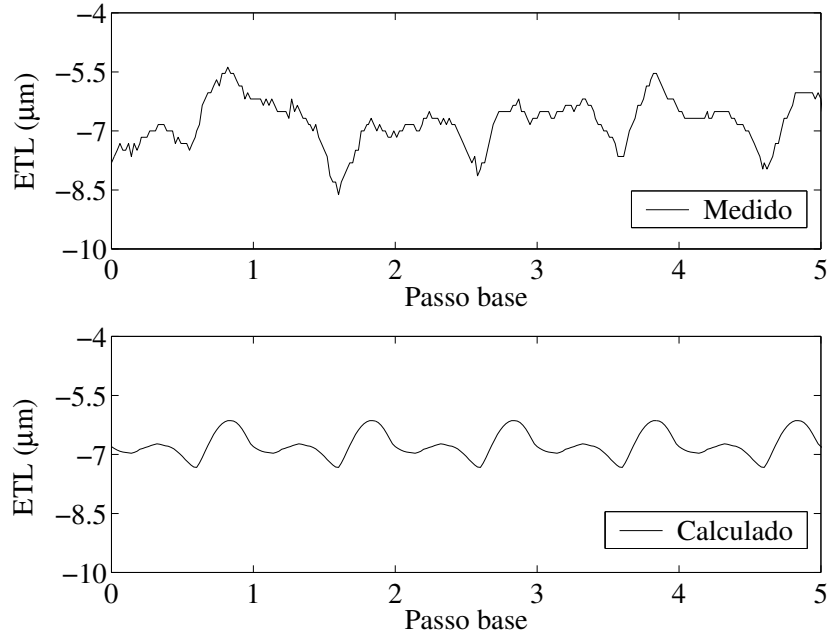


Fig. 5.9: Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 245Nm.

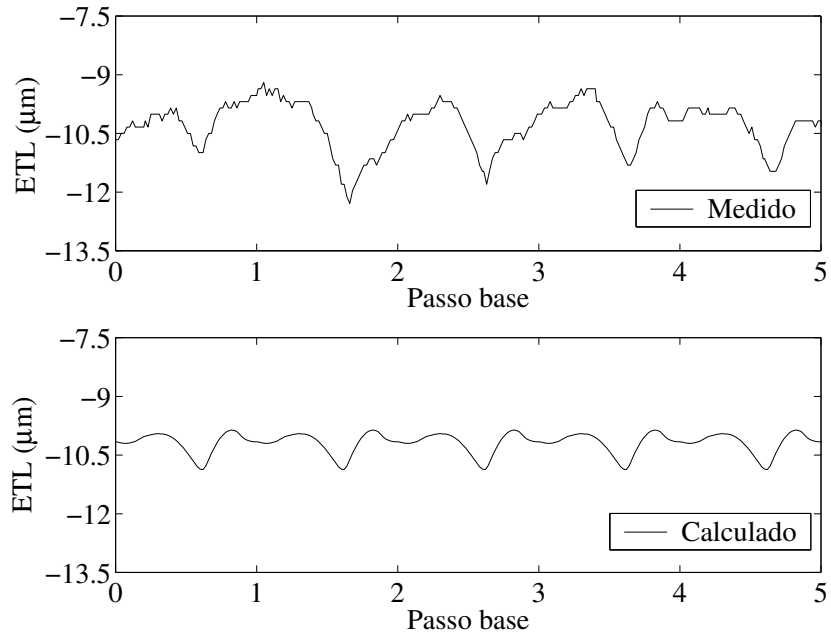


Fig. 5.10: Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 334Nm.

5.5 Sumário dos resultados obtidos

A tabela 5.1 mostra os valores do MAC obtidos para os diferentes níveis de torque considerando as curvas do erro de transmissão para os 40 passos base em uma volta do par engrenado.

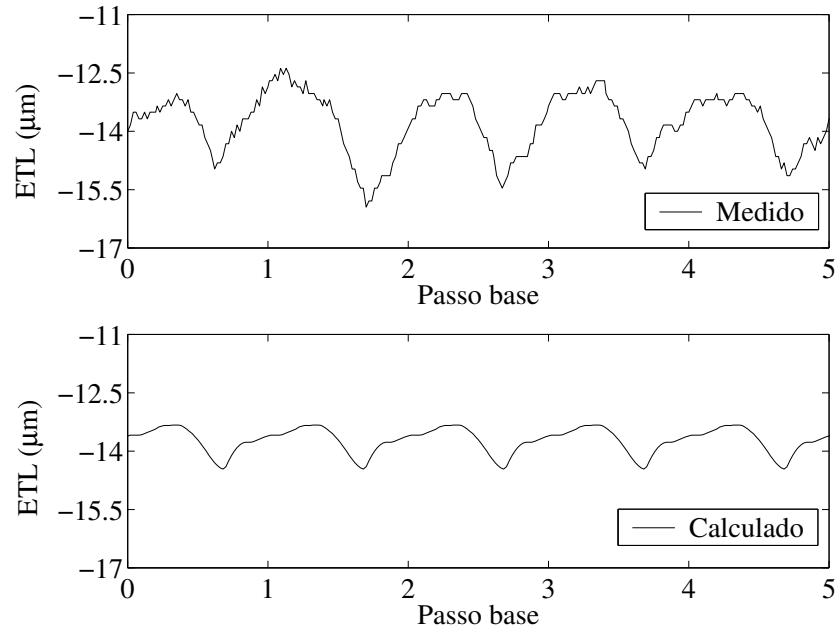


Fig. 5.11: Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 424Nm.

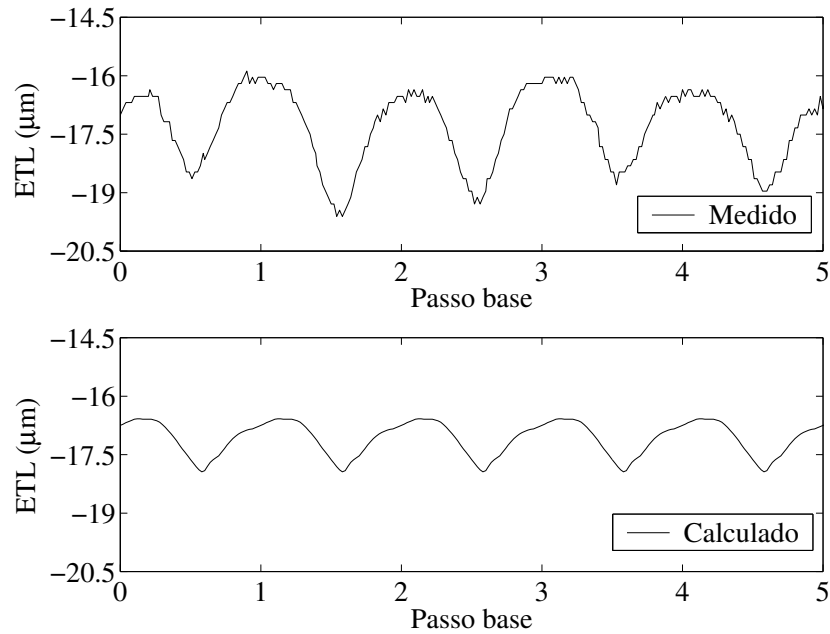


Fig. 5.12: Erro de transmissão medido e calculado para o torque de 514Nm.

Pode-se observar na tabela 5.1 que existe uma tendência de melhor aproximação da curva do erro de transmissão calculado para a curva obtida experimentalmente à medida que o torque aplicado no par engrenado aumenta. Isto pode ser devido à maior influência das deflexões

Tab. 5.1: Valores do MAC para os diferentes níveis de torque.

Torque (Nm)	70	157	245	334	424	514
MAC	0.7976	0.8252	0.9776	0.9908	0.9939	0.9949

elásticas nos torques maiores, onde os erros e incertezas geométricas contribuem com uma parcela menor para o erro de transmissão.

Por este critério adotado para comparação dos resultados (MAC), pode-se afirmar que existe uma concordância adequada entre os resultados obtidos por cálculo e os obtidos experimentalmente.

A comparação pelo critério do MAC mostra se existe similaridade entre as curvas medida e calculada do erro de transmissão, mas não dá uma indicação direta do desempenho do par de engrenagens em termos do ruído gerado.

No trabalho desenvolvido pelo Dr. David Palmer [68], foi mostrada uma forte relação entre os valores de pico-a-pico do erro de transmissão (PPETL) e o nível de pressão sonora medidos para o par engrenado (ver [68, p.221-223 e 230]).

Na tabela 5.2 são mostrados os valores do PPETL calculados e medidos para os diferentes torques analisados. Como as curvas do erro de transmissão medido ao longo de uma volta do par engrenado apresentaram variações significativas, calculou-se a média e o desvio padrão do PPETL nos 40 passos base.

Tab. 5.2: PPETL calculado e medido para os diferentes níveis de torque.

Torque	(Nm)	70	157	245	334	424	514
PPETL calculado	(μm)	1.9279	1.3496	1.1842	1.0039	1.1281	1.3571
PPETL medido - Média	(μm)	3.9442	3.3714	2.6606	2.4737	2.7053	3.2171
Desvio padrão	(μm)	1.0289	1.0669	0.9130	0.9745	0.9924	0.8105

Dois pontos podem ser destacados a partir dos os dados da tabela 5.2:

- os valores do desvio padrão mostram a tendência de redução à medida que o torque aplicado aumenta. Isto justifica a questão explicada anteriormente sobre a influência das deflexões elásticas e dos erros e incertezas geométricas. Esta menor dispersão nos valores do erro de transmissão entre os diversos passos base quando um torque maior é aplicado ao par engrenado permitiu que se obtivesse uma melhor aproximação com a curva calculada, conforme foi observado nos valores do MAC mostrados na tabela 5.1;
- observando-se os valores médios do PPETL, nota-se que os valores do PPETL calculados são inferiores aos valores medidos para todos os níveis de torque analisados. Isto era esperado uma vez que os erros de fabricação não foram considerados nos cálculos, ou seja, assumiu-se que as engrenagens eram isentas de erros. Por outro lado, os valores calculados seguem a mesma tendência dos valores médios medidos. Esta tendência entre os valores de PPETL calculados e os valores médios medidos pode ser claramente observada através da figura 5.13.

Além disto, calculou-se o coeficiente de correlação dos valores do PPETL calculados e medidos através da função *corrcoef*³ do MATLAB [60]. O valor obtido foi 0.9573, que confirma a boa correlação entre eles.

A seguir são mostrados, na figura 5.14, os níveis de pressão sonora medidos com o par de engrenagens submetidos aos vários níveis de torque. Os valores mostrados são valores médios das medições feitas com o par engrenado nas rotações de 100 a 1100 rpm para cada nível de torque. Os dados da figura 5.14 referem-se aqueles obtidos pelo Dr. David Palmer [68] (ver seção 5.1).

Observa-se na figura 5.14 que a variação no nível de pressão sonora entre os diferentes torques é pequena (menor do que 1 dB), o que pode ser comparado também com a pequena variação nos valores do PPETL entre os vários torques (ver tabela 5.2), e que o nível de pressão sonora tende a um valor mínimo em uma dada condição de torque, em torno de 334Nm.

³A função *corrcoef* do MATLAB calcula o coeficiente de correlação entre duas variáveis dividindo a covariância das duas variáveis pelo produto de seus desvios padrão.

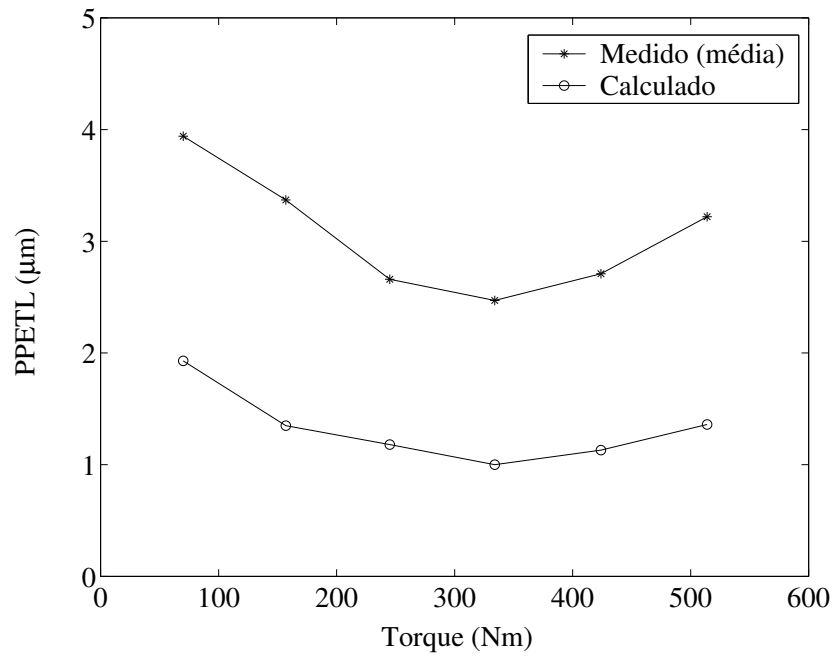


Fig. 5.13: PPETL calculado e medido para diferentes níveis de torques.

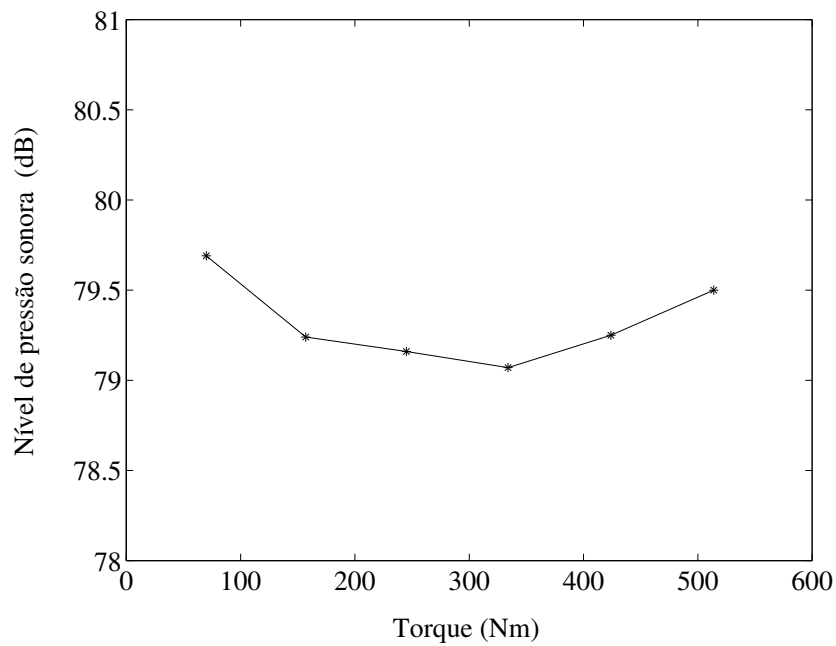


Fig. 5.14: Nível de pressão sonora médio obtido experimentalmente para diferentes torques.

Observando-se as figuras 5.13 e 5.14, pode-se dizer que os valores de pico-a-pico do erro de transmissão e os valores do nível de pressão sonora seguem a mesma tendência. Isto é,

na condição onde o PPETL é mínimo, o nível de pressão sonora do par engrenado também é mínimo. O coeficiente de correlação, calculado através da função *corrcoef* do MATLAB [60], para os valores calculados do PPETL e os valores do nível de pressão sonora medidos indica que existe uma boa correlação entre eles. O valor obtido foi 0.9129.

A redução da excitação proveniente do erro de transmissão (PPETL) é interessante para melhorar as condições de regularidade do engrenamento, e conseqüentemente contribuir para a redução da emissão de ruído conforme já constatado por outros autores [85, 68, 6, 14, 38, 86, 37, 109, 62].

Capítulo 6

Método para determinar as modificações da superfície dos dentes que minimizam o PPETL

Este capítulo tem como objetivo apresentar o método desenvolvido para determinar as modificações da superfície dos dentes que minimizam o PPETL. As etapas de desenvolvimento do método, tais como, a definição do problema a ser resolvido, sua formulação matemática, a abordagem adotada e a descrição do método desenvolvido são apresentadas neste capítulo.

Os problemas reais de projeto podem ter várias soluções diferentes aceitáveis. No processo para projetar componentes mecânicos, a fase chamada de otimização visa definir valores para determinados parâmetros do projeto para melhorar o seu desempenho. Em muitas situações práticas não se busca a solução ótima, mas de fato, uma solução satisfatória que atenda aos requisitos funcionais ou de durabilidade do produto [46, 15]. Para isto, em muitos casos são usados processos iterativos baseados principalmente na experiência passada do projetista e na familiaridade com o produto, ao invés de métodos formais de otimização e conceitos matemáticos abstratos [25, p.22].

Neste trabalho chama-se de solução otimizada ambas as soluções, a solução ótima no sentido de ótimo absoluto e a solução satisfatória. Entende-se que a diferença entre elas é devido ao

grau de complexidade ou precisão da modelagem, às restrições impostas e ao critério de parada, ou aceitação da solução, definido pelo projetista. Neste sentido, a solução otimizada pode, ou não, ser igual a solução ótima absoluta.

A solução otimizada deve respeitar as características físicas do problema e ainda certos limites funcionais do componente, do produto ou do sistema. A solução otimizada deve também ser viável em termos de obtenção do componente por métodos existentes de fabricação. De outra forma, o valor da solução otimizada para o projeto pode ser questionável [15].

A solução otimizada pode ser obtida através da utilização de métodos matemáticos de otimização, que consistem em encontrar valores para as variáveis do problema que produzam valores extremos (máximos ou mínimos) de uma dada função de mérito, ou função objetivo, sem que sejam violadas as restrições do problema [15].

Existe na literatura um grande número de métodos matemáticos desenvolvidos para a otimização de problemas de engenharia. No entanto, há uma discrepância entre o enorme nível de pesquisa em teorias de otimização e as aplicações em engenharia [15, 61].

Segundo Cohn [15], os motivos para a falta de aplicação de métodos de otimização nos problemas reais de engenharia são vários, entre eles, a falta de conhecimento dos métodos de otimização por parte dos engenheiros de projeto, que se deve em parte à distância entre os pesquisadores e os engenheiros de projeto, ao grande número de métodos existentes, o que dificulta a escolha do método adequado ao problema enfrentado, ao excesso de simplificações na modelagem dos problemas resolvidos com os métodos de otimização, que faz com que a validade da solução para o problema real não seja satisfatória, e a viabilidade de obtenção do componente ou sistema na condição otimizada.

A solução de problemas de engenharia através de métodos de otimização deve partir do problema real e deve terminar com um projeto real. Nesta linha, a otimização matemática é um processador de dados de um modelo que produz uma solução matemática através de um algoritmo apropriado, ou seja, é apenas uma conexão entre o problema e a solução real [15].

Cohn [15] recomenda cuidado com o excesso de confiança nos processos automatizados de otimização. Segundo este autor, nenhum método geral de otimização, por mais robusto que seja, pode substituir a boa intuição de engenharia. A melhor estratégia é aquela que alia o método de otimização e o conhecimento do projetista.

Os métodos de otimização podem ser classificados como:

- métodos probabilísticos: nestes métodos as variáveis de projeto são alteradas por regras de probabilidade, e o resultado da função objetivo é usado para o refinamento da busca. Estes métodos são usados quando não se dispõe de informações sobre o comportamento do problema, ou quando o problema é mal-condicionado, ou se existem muitos mínimos locais, ou ainda, se o custo computacional para calcular o valor da função objetivo é muito pequeno. O método de Monte Carlo e os algoritmos genéticos pertencem a esta classe [61];
- métodos de aproximação: um método de aproximação bem conhecido é o método de superfície de resposta, no qual a função objetivo é determinada para diversos valores das variáveis do problema e a superfície de resposta pode ser obtida por interpolação. Estes métodos podem ser adequados nos problemas onde o número de variáveis é pequeno, e não existam informações do gradiente da função objetivo e das equações de restrição. Os métodos de aproximação podem ser ainda aplicados em problemas altamente não-lineares [61];
- métodos de programação matemática: esta é uma classe especial de método numérico iterativo, também classificada como métodos diretos [46, 15]. A partir de uma estimativa inicial usada como ponto de partida, uma busca sistemática iterativa é feita no domínio da solução até que o critério de convergência seja satisfeito, e então a solução ótima, ou próxima da ótima é encontrada. Em geral, os algoritmos de programação matemática usam os gradientes da função objetivo e das equações de restrição. Os métodos de programação linear podem ser aplicados para problemas gerais. No entanto, estes métodos são limitados quanto ao número de variáveis de projeto e quanto ao tamanho do problema. Eles apresentam problemas de convergência e eficiência computacional para problemas

de larga escala [46, 15, 61];

- Métodos de critério de ótimo ou indiretos: diferentemente dos métodos de programação matemática que otimizam diretamente a função objetivo, os métodos baseados no critério de ótimo buscam satisfazer um conjunto de critérios pré-definidos e relacionados com o comportamento do problema. Nos métodos de critério de ótimo, parte-se da premissa que a solução ótima é encontrada quando os critérios são satisfeitos. Estes critérios podem ser definidos através de métodos matemáticos ou intuitivamente a partir do conhecimento prévio do comportamento físico do problema. Por isto os métodos de critério de ótimo são métodos dependentes do problema e não de aplicação geral como os métodos de programação matemática. Apesar de específicos, os métodos de critério de ótimo são computacionalmente eficientes [46, 15, 47, 61].

Nos métodos de critério de ótimo, a utilização do conhecimento do comportamento físico do problema leva ao conhecimento do comportamento da convergência para a solução do problema, o que normalmente torna estes métodos mais eficientes computacionalmente e mais robustos do que os métodos de programação matemática e os métodos de aproximação [61].

A combinação dos conceitos dos métodos de programação matemática e dos métodos de critério de ótimo tem se mostrado como a melhor alternativa para a solução de problemas com grande número de variáveis e problemas tridimensionais complexos, como por exemplo os problemas de forma com contato [15, 61]. Os algoritmos baseados nos critérios de ótimo são estáveis e robustos na solução de muitos problemas reais de engenharia e a velocidade de convergência independe do número de variáveis de projeto. Além disto, as informações de sensibilidade das variáveis de projeto e das restrições não são necessárias [61].

6.1 Formulação do problema

A primeira etapa para a solução de um problema através de um procedimento de otimização é a formulação do problema [15].

Como foi apresentado no capítulo 1, a variação do erro de transmissão ao longo do ciclo de

engrenamento é considerada a principal fonte de excitação para a geração de ruído em pares engrenados [38, 85, 109, 62]. E a relação entre a função do erro de transmissão e o ruído gerado pelos pares engrenados é bastante conhecida [85, p.6].

A excitação proveniente do erro de transmissão, representada no modelo simplificado da figura 1.3 do capítulo 1 por $e(t)$, apresenta uma certa amplitude característica correspondente à variação do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento, ver por exemplo a figura 5.2 do capítulo 5. A redução da amplitude da excitação, $e(t)$ da figura 1.3 do capítulo 1 ou PPETL, resulta na redução da vibração gerada durante a transmissão de potência do par engrenado e conseqüentemente do ruído proveniente do sistema de engrenagens, ver capítulo 1.

Na revisão da literatura disponível sobre o assunto (ver capítulo 2) verificou-se que as principais estratégias usadas para reduzir o PPETL são através das modificações dos parâmetros de macro-geometria das engrenagens, tais como o número de dentes, o módulo, o ângulo de pressão e de hélice, que se poderia chamar de otimização dimensional, ou através das modificações da micro-geometria dos dentes, tais como os alívios na direção do perfil evolvente e na direção do passo da hélice, que se poderia chamar de otimização de forma. Uma outra estratégia proposta nos trabalhos pesquisados é a alteração da distribuição de material dos dentes, inserindo rasgos ou furos nos dentes, ou ainda diâmetro variável ao longo da largura dos dentes com o objetivo de se obter rigidez constante [78]. Isto está relacionado com otimização topológica.

A alteração dos parâmetros de macro-geometria para minimizar o PPETL objetiva melhorar a distribuição de carga e a função de rigidez ao longo do ciclo de engrenamento, ou seja, exerce uma influência maior nos valores dos elementos da matriz de flexibilidade $\mathbf{A}$ (ver equação (3.15)). Já a alteração dos parâmetros de micro-geometria afeta também a distribuição de carga, mas através da alteração dos afastamentos iniciais entre as superfícies dos dentes em contato, vetor $\mathbf{h}$ da equação (3.15), alterando os elementos da matriz $\mathbf{A}$ que estão em contato.

Neste trabalho adota-se a estratégia de alteração dos parâmetros de micro-geometria para minimizar o PPETL. Para tanto, tem-se como objetivo encontrar a modificação ótima da superfície dos dentes que produza a mínima variação do erro de transmissão ao longo do ciclo

de engrenamento. Isto implica em determinar valores adicionais de afastamentos entre as superfícies dos dentes de tal modo a distribuir convenientemente a carga aplicada entre as superfícies em contato, reduzindo com isto as variações dos valores do erro de transmissão nas várias posições do ciclo de engrenamento.

A figura 6.1 ilustra de forma simplificada o contato entre os dentes em uma dada posição do ciclo de engrenamento. O elemento superior representa a engrenagem motora e o elemento inferior representa a engrenagem movida. Observa-se na figura 6.1 que a carga total, chamada de T , aplicada no elemento superior é distribuída ao longo das regiões em contato dos dois elementos, superior e inferior. A distribuição da carga é dada pelo vetor $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}^T$. Nesta posição observam-se duas regiões em contato, representando dois pares de dentes em contato. Em função da geometria dos elementos e das deflexões elásticas, provocadas pelas cargas aplicadas nas superfícies em contato, tem-se um deslocamento do elemento superior, chamado de deslocamento do elemento como um todo u_{O1} , que seria equivalente ao erro de transmissão nos pares de engrenagens.

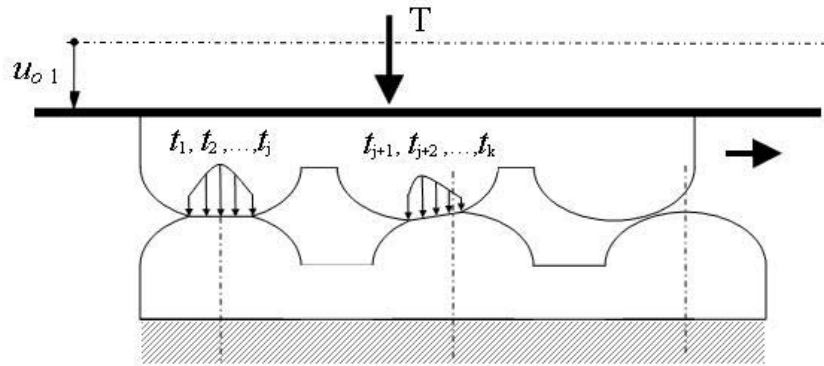


Fig. 6.1: Ilustração do contato em uma dada posição chamada de 1.

Na cinemática do modelo simplificado mostrado na figura 6.1, o elemento superior se desloca horizontalmente da esquerda para a direita da figura. Isto faz com que as regiões de contato sejam alteradas para cada posição do elemento superior em relação ao elemento inferior, como ocorre no contato entre os dentes dos pares engrenados em função da rotação e cinemática característica das engrenagens.

Já a figura 6.2 ilustra o modelo simplificado em uma outra posição, chamada de posição 2. Nesta posição a carga total aplicada, T , é distribuída ao longo de três regiões de contato conforme o vetor $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}^T$, representando três pares de dentes em contato. É evidente que a rigidez equivalente nesta posição é diferente da rigidez na posição anterior mostrada na figura 6.1. Como resultado da carga aplicada e da rigidez das regiões em contato, o deslocamento do elemento superior, u_{02} , pode ser diferente do deslocamento u_{01} ilustrado na figura 6.1.

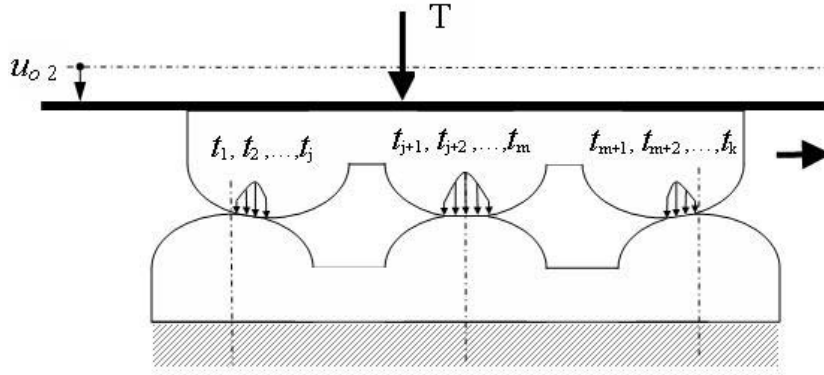


Fig. 6.2: Ilustração do contato em uma dada posição chamada de 2.

Para cada posição i do elemento superior em relação ao elemento inferior obtém-se um deslocamento específico do elemento superior, u_{0i} . A função descrita pelos deslocamentos $\mathbf{u}_{0i} = \{u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n}\}^T$, onde n é o número de posições discretas dos elementos, representa a função de excitação do sistema $e(t)$ mostrada na figura 1.3 do capítulo 1.

O problema em questão é minimizar a função de excitação do sistema $e(t)$, ou seja, minimizar a variação entre os deslocamentos u_{0i} para qualquer posição do elemento superior em relação ao elemento inferior. Isto é equivalente a minimizar o PPETL para qualquer posição discreta do par engrenado ao longo do ciclo de engrenamento.

O problema pode ser formulado matematicamente com base na equação (3.15) como um problema de otimização conforme mostrado na equação (6.1),

Minimizar

$$f(\mathbf{h}_a) = \max_{1 \leq i \leq n} |u_{0i} - \bar{u}_0|, \quad (6.1)$$

sujeito à

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i}) &= \mathbf{q}_i^T \mathbf{t}_i - T = 0, \\
g_1(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i}) &= -\mathbf{A}_i \mathbf{t}_i + u_{0i} \mathbf{q}_i - \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{\mathbf{a}i} \leq 0, \\
g_2(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i}) &= -u_{0i} \leq 0, \\
g_3(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i}) &= -\mathbf{t}_i \leq 0, \\
g_4(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i}) &= -\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{\mathbf{a}i} \leq 0,
\end{aligned}$$

onde $f(\mathbf{h}_{\mathbf{a}})$ é a função objetivo a ser minimizada, u_{0i} é o deslocamento do elemento como um todo que é equivalente ao erro de transmissão angular tomado na engrenagem motora para a posição i do ciclo de engrenamento, $\bar{u}_0$ é um valor médio do deslocamento do elemento como um todo calculado em n posições discretas do ciclo de engrenamento, $i = \{1, 2, \dots, n\}$, $h(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i})$ é a restrição de igualdade para a posição i do ciclo de engrenamento, $g_1(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i})$, $g_2(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i})$, $g_3(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i})$ e $g_4(\mathbf{h}_{\mathbf{a}i})$ são as restrições de desigualdade do sistema na posição i , $\mathbf{h}_i$ é o vetor dos afastamentos iniciais sem carga dos elementos em contato na posição i devido à geometria característica dos dentes helicoidais de perfil evolvente, e $\mathbf{h}_{\mathbf{a}i}$ é o vetor dos afastamentos iniciais sem carga aplicada na posição i do ciclo de engrenamento devido às modificações impostas para minimizar o PPETL.

O objetivo do problema definido em (6.1) é obter o vetor dos afastamentos iniciais ótimos, $\mathbf{h}_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{h}_{\mathbf{a}1}, \mathbf{h}_{\mathbf{a}2}, \dots, \mathbf{h}_{\mathbf{a}n}\}^T$, que minimize a função objetivo $f(\mathbf{h}_{\mathbf{a}})$. Estes afastamentos representam as modificações que devem ser introduzidas na superfície dos dentes para se obter valores homogêneos do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento, ou seja, minimizar o PPETL nas n posições discretas do ciclo de engrenamento.

A figura 6.3 ilustra os afastamentos adicionais dados pelo vetor $\mathbf{h}_{\mathbf{a}}$ relativos às modificações introduzidas na superfície de um dos elementos. Observa-se na figura 6.3 que os afastamentos totais entre as superfícies são dados pelo somatório dos afastamentos iniciais referentes à geometria e à cinemática características dos elementos, vetor $\mathbf{h}$, e dos afastamentos iniciais devido às modificações introduzidas, vetor $\mathbf{h}_{\mathbf{a}}$. Estes afastamentos são tomados entres os pontos discretos candidatos ao contato nas superfícies dos dentes antes da aplicação da carga.

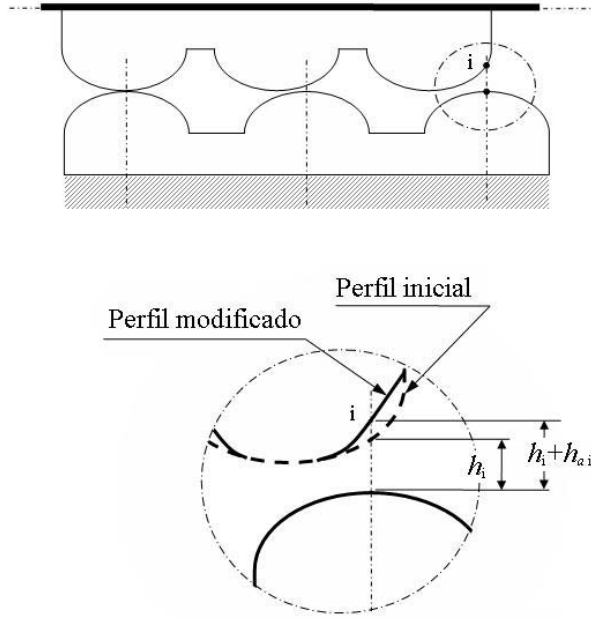


Fig. 6.3: Ilustração dos afastamentos entre as superfícies dos elementos em uma dada posição de contato.

As modificações nas superfícies dos dentes dadas pelos afastamentos ótimos podem ser introduzidas nas superfícies dos dentes da engrenagem motora, ou da movida, ou em ambas. Adotou-se neste trabalho modificar somente as superfícies dos dentes da engrenagem motora.

6.2 Método para a solução do problema de otimização

A escolha do método de solução do problema de otimização definido pela equação (6.1) deve levar em conta a natureza e o tamanho do problema, e a quantidade de variáveis de projeto.

O problema em questão pode ser classificado como um problema de otimização de forma com contato. O termo forma usado aqui é no sentido de otimização do contorno do modelo buscando-se a forma ótima para o domínio do projeto. Diferentemente da otimização de tamanho que busca os parâmetros dimensionais ótimos do modelo, como por exemplo em um caso genérico, a seção de uma barra ou a espessura de uma chapa.

O problema é não linear devido ao contato entre as superfícies e também da função resposta

descrita pelo erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento (ver figuras do capítulo 5).

Outra característica do problema é que os pontos em contato em cada posição do ciclo de engrenamento são dependentes dos afastamentos iniciais totais (ver seção 3.2). Desta forma, alterações dos valores do vetor dos afastamentos $\mathbf{h}_a$ resultam em alterações dos elementos da matriz de flexibilidade $\mathbf{A}$. Assim o problema de contato deve ser reavaliado a cada iteração. Os problemas de otimização de forma e de contato entre as superfícies dos dentes devem ser resolvidos simultaneamente [32].

Conforme apresentado no capítulo 3, o procedimento para o cálculo do erro de transmissão através da análise global de contato entre os dentes, e não limitada ao plano de ação teórico, requer a discretização de toda a superfície dos dentes. Como durante o ciclo de engrenamento vários dentes podem estar em contato simultaneamente, a quantidade de pontos discretos para análise aumenta consideravelmente. Por outro lado, a aplicação da técnica da pseudo-interferência, discutida na seção 3.5.4, permite que a área possível de contato seja estimada, e desta forma a análise de contato pode restringir-se aos pontos pertencentes a esta região. Isto traz uma significativa redução do problema de contato que deve ser resolvido para o cálculo do erro de transmissão (ver seção 3.5).

O procedimento para o cálculo do erro de transmissão deve ser executado para cada posição discreta do ciclo de engrenamento. Obviamente, quanto maior o grau de discretização do ciclo de engrenamento, mais próximo do contínuo e melhor é a representação da função. No entanto, conforme foi discutido na seção 4.1, pode-se obter uma representação do ciclo de engrenamento com erro menor do que 5% discretizando-o acima de 10 posições.

À medida que se aumenta o grau de discretização do ciclo de engrenamento, parte das regiões em contato entre os dentes engrenados pode ser comum para mais de uma posição discreta analisada, ou seja, alguns pontos discretos nas superfícies dos dentes que possuem elementos correspondentes no vetor $\mathbf{h}_{a_i}$ podem ser os mesmos para o vetor $\mathbf{h}_{a_{i+1}}$ (ver as regiões de contato ilustradas nas figuras 6.1 e 6.2). Assim, se o problema é resolvido para cada posição discreta, em uma análise puramente matemática poder-se-ia calcular diferentes valores de modificação

para um mesmo ponto discreto em função da posição de análise do ciclo de engrenamento. Por restrição física, a solução do problema de otimização deve considerar que apenas uma modificação pode ser imposta para uma mesma região do dente.

Neste sentido, seria interessante resolver o problema de otimização em (6.1) e (3.15) simultaneamente para todas as posições discretas que representam o ciclo de engrenamento. No entanto, isto poderia levar a um problema com matrizes de tamanhos que dificultariam ou inviabilizariam o processamento computacional, e que poderiam resultar em um tempo computacional para a obtenção da solução otimizada inaceitável do ponto de vista prático de projeto (ver seções 3.5.5 do capítulo 3).

Quanto às variáveis de projeto, a solução do problema de otimização em (6.1) traz como resultado o vetor das modificações das superfícies dos dentes, $\mathbf{h}_a$, para minimizar o PPETL. Os elementos do vetor $\mathbf{h}_a$ definem a modificação que deve ser introduzida em cada ponto discreto correspondente. A superfície completa dos dentes pode ser obtida por interpolação das modificações calculadas nos pontos discretos através de uma função matemática apropriada. No entanto, isto pode resultar em uma superfície não factível tecnicamente ou mesmo economicamente nos ambientes atuais de fabricação de engrenagens. Portanto, devem ser impostas restrições para as modificações que viabilizem a fabricação das engrenagens na condição otimizada. Considera-se que este é um ponto fundamental para a utilização do procedimento proposto neste trabalho como uma ferramenta de projeto de engrenagens.

Neste contexto, um procedimento baseado no critério de ótimo foi desenvolvido para a solução do problema da equação (6.1) atendendo as características do problema. Adotou-se uma abordagem pelo critério de ótimo intuitivo baseado no conhecimento do comportamento físico do problema [46, 61].

Um algoritmo de otimização de forma com contato baseado no critério de ótimo precisa dos seguintes componentes [61]:

- critério de ótimo que descreva o ótimo e as propriedades das variáveis associadas;
- uma regra de reprojeto que altere o vetor das variáveis de projeto tal que a convergência

seja atingida dentro de um número finito de iterações;

- um critério de convergência ou de parada para terminar o procedimento de otimização.

O critério que descreve o estado de ótimo do problema é que os desvios do erro de transmissão em relação ao erro de transmissão médio sejam nulos (ver equação (6.1)). O erro de transmissão deve ser constante ao longo do ciclo de engrenamento reduzindo assim o respectivo pico-a-pico.

A regra de reprojetar para alterar o valor dos afastamentos adicionais, vetor $\mathbf{h}_a$, que é obtido através das modificações nas superfícies dos dentes, é dada por uma abordagem intuitiva fisicamente através das seguintes considerações:

1. o erro de transmissão em uma dada posição pode ser aumentado, através do aumento da deflexão total da região de contato. Isto pode ser obtido afastando-se os pontos em contato que apresentam baixa resposta em termos de deflexão à carga aplicada. O critério para o afastamento de cada ponto discreto pode ser estabelecido a partir da análise da matriz de flexibilidade $\mathbf{A}$ (ver equação (6.1));
2. o erro de transmissão em uma dada posição pode ser reduzido, através da aproximação dos pontos em contato e dos pontos candidatos ao contato. Isto resulta no aumento da região de contato. O critério para a alteração do afastamento em cada ponto discreto também pode ser estabelecido com base na análise da matriz de flexibilidade, na qual são priorizados os pontos que apresentam maior rigidez específica;
3. deve-se respeitar as restrições físicas: o afastamento inicial total entre as superfícies deve ser maior ou igual a zero (ver restrição $g_4(\mathbf{h}_{a_i})$ do problema (6.1)), e o afastamento inicial entre um par de pontos em contato, ou candidatos ao contato, deve ser único;
4. os afastamentos adicionais, $\mathbf{h}_a$, são obtidos através da alteração dos parâmetros geométricos de forma do projeto. E devem ser proporcionais aos desvios do erro de transmissão em relação ao valor médio do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento;
5. os afastamentos necessários, $\mathbf{h}_a$, podem ser aproximados por funções de modificações que facilitem, ou viabilizem, a fabricação das superfícies otimizadas.

As alterações dos afastamentos entre as superfícies dos dentes resultam em alteração da distribuição de carga entre os pontos discretos. Isto pode implicar no aumento das tensões resultantes, principalmente nas tensões de compressão entre os dentes, que pode reduzir a vida do par de engrenagens.

O problema de otimização das superfícies dos dentes tratado neste trabalho tem como objetivo a minimização do valor de pico-a-pico do erro de transmissão visando a conseqüente redução do ruído gerado pelo par engrenado. Desta forma, a tensão compressiva máxima resultante em cada iteração do processo de otimização é monitorada, mas não restringe a busca da solução.

Poder-se-ia adicionar uma restrição para o valor máximo da tensão. No entanto, entende-se que isto penalizaria o resultado do problema em termos da solução ótima para o erro de transmissão. Além disto, a análise de vida ou resistência de um par de engrenagens é mais complexa do que a análise simples do valor da tensão de compressão. Outros parâmetros e fatores devem ser levados em conta, tais como, a relação pressão e velocidade de deslizamento, acabamento superficial, espessura do filme de óleo, propriedades do lubrificante, entre outros [26].

Na proposta deste trabalho o projetista poderia através do método proposto, obter facilmente a superfície ótima dos dentes para minimizar o erro de transmissão, e então avaliar a resistência do par de engrenagens otimizado através de seu software de cálculo. Nesta situação, ele poderia decidir se a solução otimizada atende, ou não, o seu requisito de vida, e se for o caso optar por uma outra solução próxima da ótima (obtida nas iterações antes da convergência) ponderando os compromissos de desempenho do par engrenado quanto à vida e ao ruído. Assumiu-se que isto não traz nenhum demérito para a aplicação do método proposto neste trabalho nos processos de projeto de engrenagens.

6.3 Estrutura do procedimento de otimização

Inicialmente o procedimento resolve o problema calculando os valores do vetor $\mathbf{h}_a$ que minimiza o PPETL sem restrições quanto às limitações da fabricação. Posteriormente os valores

necessários para as modificações são aproximados por funções que garantem a viabilidade de fabricação das engrenagens na condição otimizada. Este procedimento permite que diferentes estratégias quanto às características das modificações sejam adotadas, desde modificações simples e de fácil obtenção até modificações complexas.

O procedimento desenvolvido calcula o que poderia ser chamado de vetor de sensibilidade da matriz de flexibilidade para cada posição do ciclo de engrenamento. Este vetor é usado para calcular o vetor das modificações ótimas, $\mathbf{h}_a$. Isto permite que o problema possa ser resolvido para um grande número de posições no ciclo de engrenamento com pouca possibilidade de ter problemas computacionais para executar as iterações.

O procedimento desenvolvido neste trabalho para a obtenção das modificações das superfícies dos dentes que minimizam o PPETL pode ser apresentado de forma simples pela abordagem da teoria de controle [61], conforme mostrado na figura 6.4.

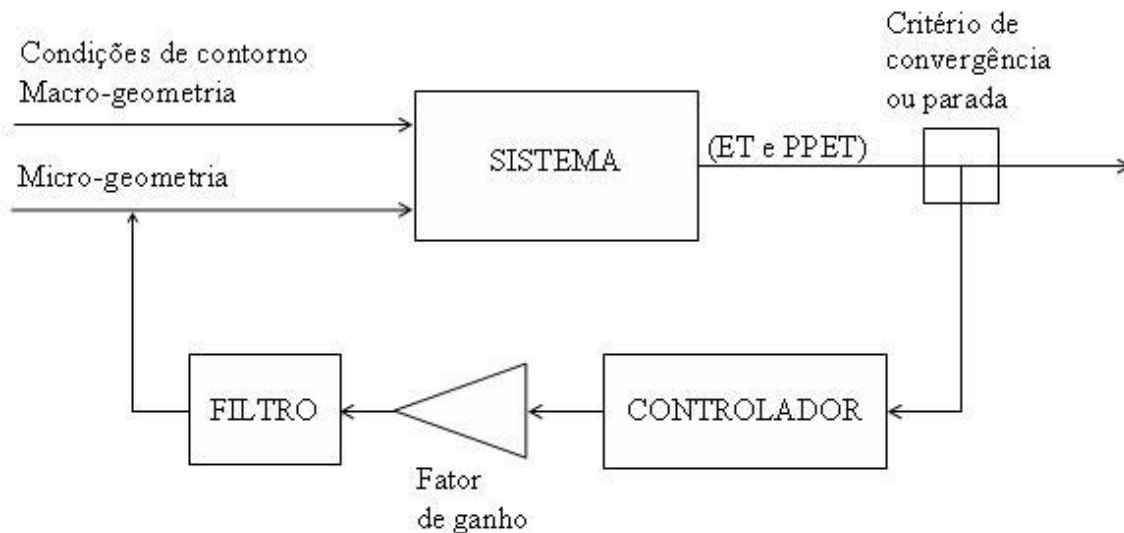


Fig. 6.4: Estrutura do procedimento de otimização pela abordagem de controle.

No esquema mostrado na figura 6.4 o bloco chamado de sistema representa o par de engrenagens. Este bloco simula o comportamento do par engrenado quanto ao erro de transmissão. Ele contém a rotina para o cálculo do erro de transmissão nas diversas posições do ciclo de engrenamento. Entra-se com as condições de contorno, os dados de macro-geometria, e os dados

iniciais de micro-geometria. O sistema calcula o erro de transmissão (ET) e faz a análise da matriz de flexibilidade para cada posição discreta do ciclo de engrenamento, e por fim calcula os desvios do ET em relação ao ET médio. Estas são as saídas do sistema.

As saídas do sistema passam para um outro bloco que compara o máximo desvio em relação ao ET médio com o valor admissível pelo critério de convergência ou de parada. Este bloco direciona as informações de saída do sistema para o controlador até que o critério de convergência seja satisfeito.

O bloco seguinte chamado de controlador contém as regras de reprojeção. Para cada posição no ciclo de engrenamento, o controlador analisa o valor do desvio do ET em relação ao ET médio e as informações da matriz de flexibilidade nos pontos discretos para determinar o afastamento ótimo necessário em cada um dos pontos para anular o desvio do ET médio. Caso o desvio máximo do ET em relação ao ET médio da iteração em análise seja maior do que o desvio máximo obtido na iteração anterior (indicação de que o algoritmo está divergindo), o controlador assume os afastamentos da iteração anterior e reduz o valor de ganho a ser aplicado.

Os afastamentos definidos pelo controlador como necessários para anular os desvios do ET médio devem passar por um filtro para converter estes afastamentos em modificações de superfície. Este filtro é composto por funções que aproximam os valores dos afastamentos necessários em modificações factíveis em ambientes atuais de fabricação de engrenagens. Desta forma, o procedimento torna-se flexível permitindo a introdução de novas funções ou alteração das funções existentes, podendo assim simplificar as modificações ou obter modificações mais complexas. É evidente que existe uma dependência entre as funções adotadas e o grau de aproximação com os valores de afastamentos necessários definidos pelo controlador.

As funções de aproximação entre os afastamentos e as modificações, por mais complexas que sejam, podem resultar em uma perda nos valores dos afastamentos definidos pelo controlador. Por isto, introduziu-se um ganho entre o bloco do controlador e filtro. Os afastamentos necessários em cada ponto são multiplicados por um valor adequadamente escolhido de tal forma que após a passagem pelo filtro se obtenha valores de afastamentos resultantes das modificações

próximos dos afastamentos definidos pelo controlador. Em uma analogia com os algoritmos clássicos de otimização, poder-se-ia dizer que a direção é dada pelo controlador e o passo de busca pelo que se chamou aqui de ganho.

As modificações resultantes dos afastamentos necessários definidos pelo controlador, em função dos dados de saída do sistema na iteração anterior, re-alimentam o sistema através da substituição dos respectivos parâmetros de micro-geometria anteriores. A partir dos novos dados de entrada de micro-geometria o sistema irá calcular novamente os dados de saída. Este procedimento é repetido até que o desvio máximo do ET em relação ao ET médio atenda ao critério de convergência ou de parada. Como resultado do procedimento tem-se as modificações ótimas para as superfícies dos dentes que minimizam o PPETL e que atendam às restrições pré-estabelecidas de fabricação das engrenagens.

A estrutura básica do procedimento desenvolvido neste trabalho foi baseado no trabalho de Meske, Sauter e Schnack [61] para problemas gerais de otimização de forma não paramétricos. No entanto, no presente trabalho desenvolveu-se uma formulação específica para o problema tratado, e se introduziu um filtro para aproximar a forma ideal dos dentes para uma forma mais conveniente do ponto de vista de fabricação.

A seguir cada um dos blocos da figura 6.4 é mostrado em detalhes. Os fluxogramas das rotinas contidas nos blocos, assim como a formulação matemática são apresentados e discutidos.

6.3.1 Sistema: rotina para calcular o erro de transmissão

O fluxograma do sistema é mostrado na figura 6.5. A linha tracejada na figura 6.5 delimita os cálculos executados. A rotina contida no sistema foi baseada na referência [111] e suas principais características foram apresentadas no capítulo 3. Por isto, nesta seção será apresentada uma visão mais geral da rotina com o objetivo de possibilitar o entendimento do procedimento de otimização desenvolvido neste trabalho.

Um aspecto apresentado na figura 6.5 que está contido no sistema, e que ainda não foi discutido, é o cálculo do vetor s dos coeficientes de sensibilidade dos elementos da matriz de

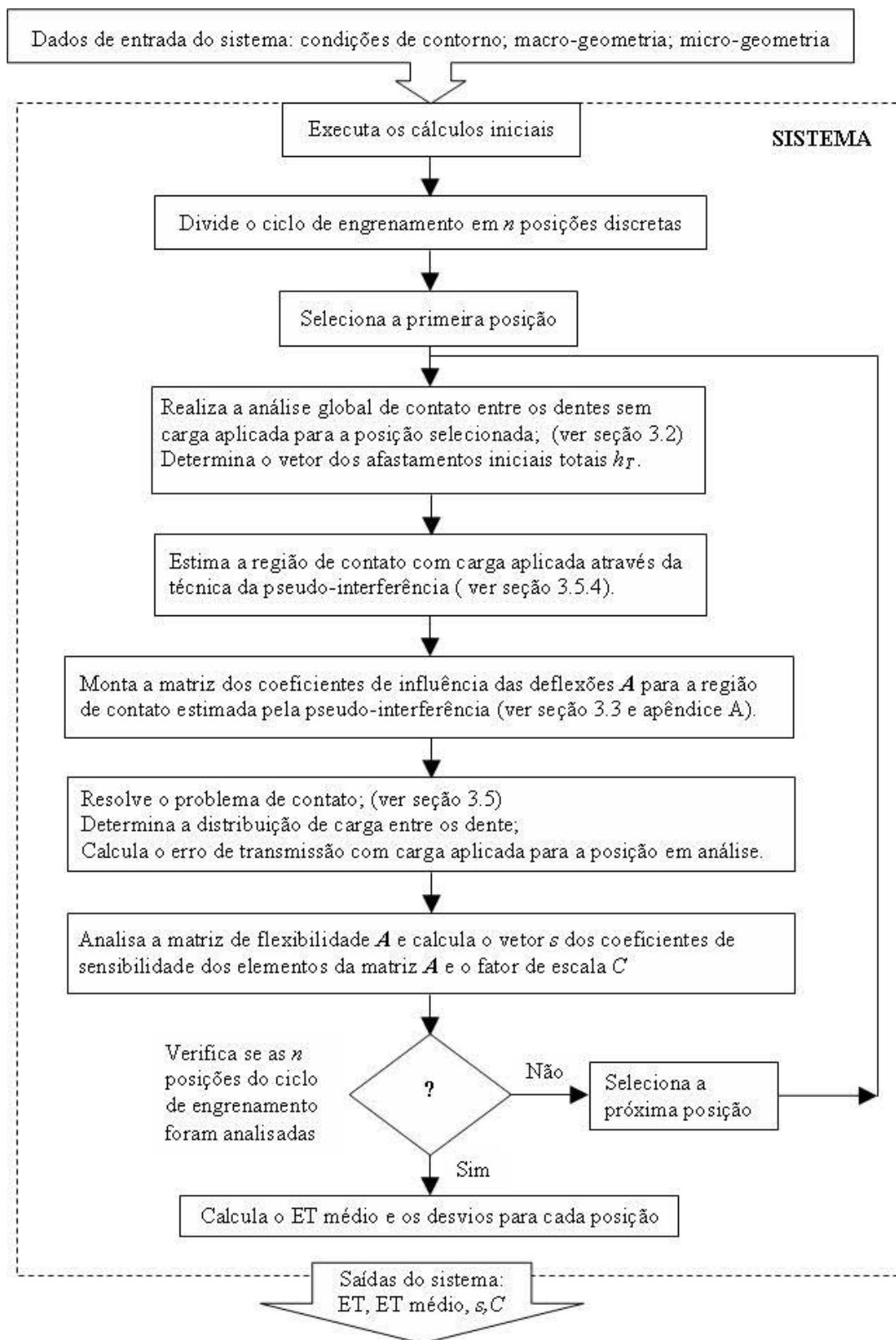


Fig. 6.5: Fluxograma para o cálculo do erro de transmissão.

flexibilidade $\mathbf{A}$.

Para que o desvio do erro de transmissão em uma dada posição do ciclo de engrenamento em relação ao erro de transmissão médio seja anulado, é necessário definir os valores do vetor dos afastamentos adicionais, $\mathbf{h}_a$ (ver equação (6.1)). No entanto, devido à matriz de flexibilidade $\mathbf{A}$, o valor de cada elemento do vetor $\mathbf{h}_a$ não deve ser igual. Tem que se avaliar a influência de cada elemento no resultado final do problema (ver a equação (6.1)). Neste trabalho a equação (6.2) é proposta para se determinar o vetor de sensibilidade dos afastamentos obtido a partir da matriz de flexibilidade $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{s} = \|\mathbf{w}\|_{\infty} \mathbf{w}^{-1} - \mathbf{q} , \quad (6.2)$$

onde $\mathbf{s}$ é o vetor de sensibilidade dos afastamentos adicionais, $\mathbf{w}$ é um vetor com elementos correspondentes a deflexão resultante em cada ponto quando uma carga unitária é aplicada em todos os pontos discretos da região de contato e é dado pela equação (6.3), $\|\mathbf{w}\|_{\infty}$ é a norma de máximo do vetor $\mathbf{w}$ dada por $\|\mathbf{w}\|_{\infty} = \max \{|w_1|, |w_2|, \dots, |w_k|\}$, e $\mathbf{q}$ é um vetor coluna com todos os elementos de valor 1,

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \mathbf{q} . \quad (6.3)$$

O vetor $\mathbf{s}$ fornece uma ponderação para os valores dos afastamentos a serem adicionados, $\mathbf{h}_a$. No entanto, é necessário determinar um fator de escala para permitir que os valores dos afastamento adicionais $\mathbf{h}_a$ sejam calculados a partir do vetor $\mathbf{s}$ e do desvio do erro de transmissão.

A equação (6.4) é usada para calcular os valores do vetor dos afastamentos adicionais $\mathbf{h}_a$,

$$\mathbf{h}_{a_i} = (u_{0i} - \bar{u}_0) C_i \mathbf{s}_i , \quad (6.4)$$

onde $(u_{0i} - \bar{u}_0)$ é o desvio do deslocamento do elemento como um todo em uma dada posição i em relação ao valor médio. O deslocamento do elemento como um todo é equivalente ao erro de transmissão tomado na engrenagem motora. C é um fator de escala, e i é a posição no ciclo de engrenamento.

Para determinar o vetor dos afastamentos adicionais $\mathbf{h}_a$ conforme a equação (6.4) é necessário que se conheça o valor médio do erro de transmissão. Este só é determinado após calcular-se o erro de transmissão em todas as posições discretas do ciclo de engrenamento. Diante disto, o cálculo do vetor $\mathbf{h}_a$ é executado posteriormente no bloco do controlador.

Para que se possa calcular o vetor $\mathbf{h}_a$ no bloco do controlador sem a necessidade da matriz de flexibilidade $\mathbf{A}$ referente a cada posição, determina-se no bloco sistema os valores do vetor $\mathbf{s}$ e do fator de escala C . Isto reduz de forma significativa a memória computacional necessária para executar o procedimento.

O fator de escala C , proposto neste trabalho, é calculado da seguinte forma:

- após calculado o erro de transmissão em uma dada posição i do ciclo de engrenamento, adota-se um valor para o desvio do erro de transmissão, $(u_{0i} - \bar{u}_0)$ da equação (6.4). No caso usou-se $(u_{0i} - \bar{u}_0) = 0.10 u_{0i}$. Assumiu-se este valor como sendo pequeno o suficiente para que o comportamento da resposta possa ser aproximado adequadamente de forma linear. Valores maiores podem não ser adequados para este fim.
- calcula-se o vetor $\mathbf{h}_{ai}$ através da equação (6.4) assumindo um valor inicial do fator de escala unitário ($C_i = 1$);
- adiciona-se o vetor $\mathbf{h}_{ai}$ ao vetor dos afastamentos iniciais $\mathbf{h}_i$ ($\mathbf{h}_{Ti} = \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{ai}$);
- resolve-se novamente o problema de contato e distribuição de carga entre os dentes (ver seção 3.5);
- a partir do novo valor obtido para o erro de transmissão em função dos afastamentos adicionais $\mathbf{h}_{ai}$, ajusta-se linearmente o fator de escala C_i . Assume-se que o comportamento da resposta do problema é linear para pequenos valores dos desvios do erro de transmissão.

6.3.2 Critério de convergência ou de parada

Os resultados da rotina do cálculo do erro de transmissão são analisados pelo bloco do critério de convergência ou de parada. Compara-se o máximo desvio do erro de transmissão

obtido nas várias posições do ciclo de engrenamento em relação ao valor médio do erro de transmissão da iteração atual com o máximo desvio da iteração anterior. Se a diferença entre estes desvios máximos for maior do que um erro admissível pré-estabelecido, direciona-se as informações de saída do sistema para o controlador. Se a diferença entre os desvios máximos for menor ou igual ao erro admissível, finaliza-se o procedimento de otimização. Neste caso, a solução do problema de otimização em (6.1) é obtida. As modificações atribuídas para as superfícies dos dentes para os cálculos do erro de transmissão da última iteração são as consideradas ótimas para minimizar o pico-a-pico do erro de transmissão.

O critério de convergência é dado por:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u_{0i} - \bar{u}_0| \leq \epsilon, \quad (6.5)$$

onde ϵ é erro admissível para a convergência na solução do problema.

O erro admissível para a convergência do algoritmo de otimização deve ser definido pelo projetista tendo em vista o aspecto prático da solução e físico do problema. O número de iterações até a convergência está relacionado com o erro admissível para a solução. Valores muito pequenos para o erro admissível podem levar a um tempo computacional elevado para a solução do problema. Valores elevados de erro admissível podem fazer com que o procedimento seja finalizado com uma solução distante da solução ótima. Portanto, deve-se avaliar o binômio tempo de processamento e precisão da solução.

6.3.3 Controlador: rotina de otimização do erro de transmissão

Após a análise dos resultados quanto ao critério de convergência ou de parada, as informações calculadas na rotina para o cálculo do erro de transmissão do bloco sistema são enviadas ao controlador. O controlador irá definir os valores dos afastamentos adicionais necessários para a convergência, ou seja, os valores do vetor $\mathbf{h}_a = \{\mathbf{h}_{a1}, \mathbf{h}_{a2}, \dots, \mathbf{h}_{an}\}^T$.

As etapas da rotina executada pelo controlador são mostradas no fluxograma da figura 6.6. A linha tracejada na figura 6.6 delimita os cálculos executados pelo controlador.

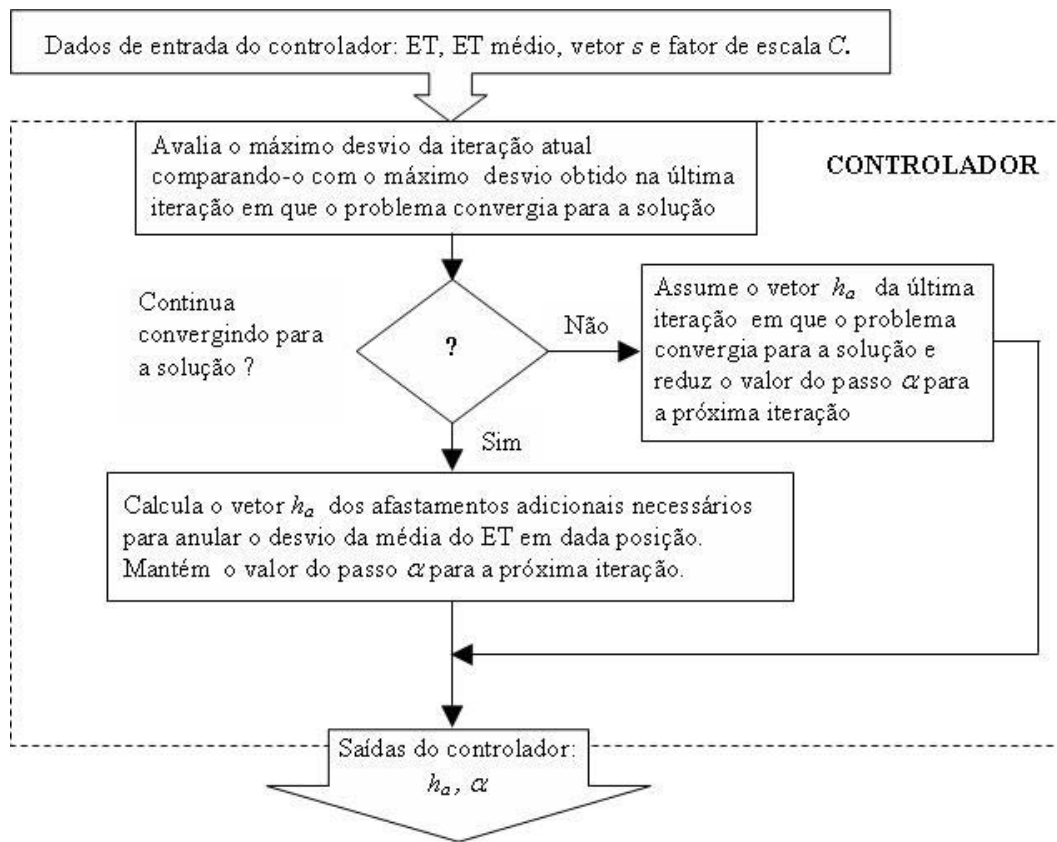


Fig. 6.6: Fluxograma para a otimização do erro de transmissão.

A partir dos valores dos desvios do ET para cada posição em relação ao ET médio, pode-se calcular os afastamentos necessários em cada ponto discreto analisado através da equação (6.4).

6.3.4 Ganho: ajuste do passo para a busca

Os afastamentos adicionais necessários para a convergência, vetor $\mathbf{h}_a$, são obtidos através de modificações nas superfícies dos dentes. Estas modificações podem ser feitas alterando-se a micro-geometria dos dentes através de funções afins ou quadráticas, por exemplo. Com isto, toda a superfície dos dentes é modificada e não somente a região de contato analisada. Desta forma, o processo para a otimização deve ser iterativo.

A aproximação dos afastamentos adicionais obtidos através das modificações da micro-geometria dos dentes depende da complexidade das funções usadas. Modificações mais comple-

xas podem resultar em afastamentos iniciais entre as superfícies mais próximos dos valores de $\mathbf{h}_a$, mas podem ser de difícil obtenção através dos processos usuais de fabricação de engrenagens. Por outro lado, modificações simples, tais como, os alívios de perfil com funções afins ou quadráticas, podem não apresentar boa aproximação com os valores considerados necessários.

Para compensar a diferença entre os afastamentos adicionais necessários, $\mathbf{h}_a$, e os afastamentos resultantes das modificações definidas para as superfícies, assim como para acelerar o processo de convergência devido às alterações da região de contato em cada iteração, usa-se um fator de ganho. Este fator de ganho, chamado aqui de α , multiplica o vetor dos afastamentos adicionais $\mathbf{h}_a$.

O fator de ganho α pode ser considerado como o passo para a busca da solução. Quando este passo é muito grande, pode-se passar do ponto de mínimo levando a divergência da solução ótima. Por outro lado, se o passo é muito pequeno, um número muito grande de iterações pode ser necessário para se atingir a solução.

Adotou-se definir o valor inicial de α arbitrariamente para a primeira iteração (na seção 7.4 do capítulo 7 a influência do valor inicial do fator de ganho na solução do problema é estudada). O controlador avalia o resultado obtido com o passo definido e se necessário ajusta o valor de α para a próxima iteração. Isto é, se o algoritmo estava convergindo para a solução e na última iteração apresentou divergência, o controlador retorna para a última condição de convergência e reduz o passo (α) para a próxima iteração. Se o problema continua divergindo mesmo após a redução do passo, retorna-se novamente a última iteração de convergência e se aplica uma nova redução no valor de α . Este processo é realizado pelo controlador até que se retorne a condição de convergência. O critério adotado para a redução do passo (α) foi reduzir o passo à metade do seu valor anterior.

6.3.5 Filtro: definição das modificações de superfície

O objetivo do bloco chamado de filtro é determinar as modificações nas superfícies dos dentes que resultem em afastamentos entre as superfícies próximos dos afastamentos definidos

pelo vetor $\alpha \mathbf{h}_a$.

O procedimento estruturado desta forma é bastante flexível. Pode-se introduzir no bloco filtro diferentes funções para as modificações das superfícies, de acordo com a conveniência do usuário.

É amplamente aceito que as modificações do perfil evolvente, tais como, os alívios no sentido do topo (*"tip relief"*) e da raiz dos dentes (*"root relief"*) que seguem funções afins ou quadráticas são eficazes para a redução do pico-a-pico do erro de transmissão em engrenagens de dentes retos e helicoidais, ver por exemplo os trabalhos de Palmer [68] e Wagaj e Kahraman [104].

Modificações do perfil evolvente conforme funções afins ou quadráticas são facilmente obtidas com os processos convencionais de fabricação de engrenagens que usam máquinas de raspar os flancos dos dentes (*"shaver"*), ou ainda aqueles que usam máquinas de retificar os flancos dos dentes. Em ambos os casos as modificações das superfícies dos dentes das engrenagens são obtidas através do ajuste do perfil da ferramenta de corte ou da ferramenta abrasiva.

Diante disto, neste trabalho foram implementadas no bloco chamado de filtro as modificações do perfil evolvente que seguem funções afins e quadráticas.

A figura 6.7 ilustra as modificações do perfil evolvente dadas pelos alívios no sentido do topo e da raiz dos dentes. As áreas destacadas nos dentes são afetadas pelos alívios. Os alívios se iniciam em uma dada altura do dente, onde o valor do afastamento é zero e terminam no diâmetro externo para os alívios no sentido do topo, e no menor diâmetro de contato dos dentes para os alívios no sentido da raiz. Nestes pontos o valor do alívio é máximo. Os valores dos alívios nos pontos intermediários entre o início e o final da modificação seguem as funções afins ou quadráticas.

Quanto aos alívios do perfil evolvente, diferentes estratégias podem ser adotadas. Pode-se introduzir alívios no sentido do topo dos dentes nas duas engrenagens (motora e movida), ou se pode introduzir alívios menores no sentido do topo e da raiz nas duas engrenagens, ou ainda, introduzi-los somente em uma das engrenagens. O efeito gerado por estas diferentes estratégias

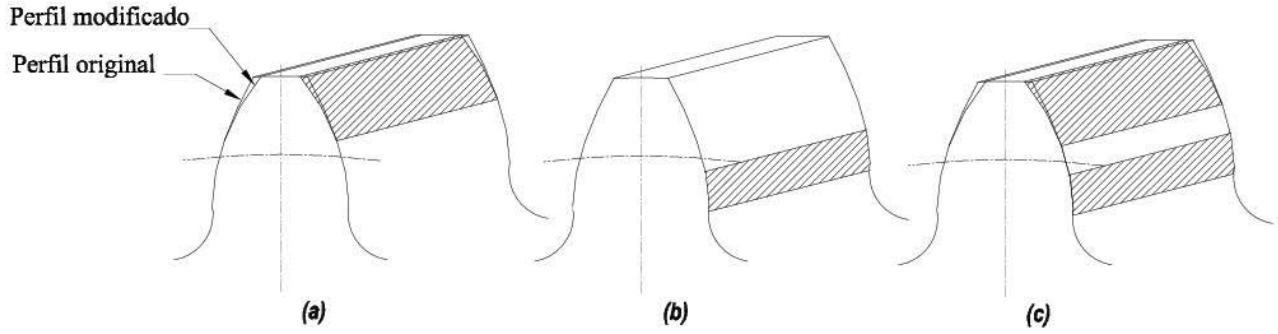


Fig. 6.7: Ilustração dos alívios do perfil evolvente: a) alívio no topo, b) alívio na raiz, c) alívios no topo e na raiz.

pode ser considerado o mesmo [104]. Considera-se importante o perfil equivalente que é a combinação dos perfis conjugados do par de engrenagens.

A figura 6.8 ilustra o perfil equivalente dos perfis modificados das duas engrenagens. Na figura 6.8 os dentes das duas engrenagens são modificados com alívios no sentido do topo dos dentes. O perfil equivalente combina as modificações dos dentes conjugados resultando em alívio no início e no final de contato dos dentes.

Os valores do alívio devido às modificações são tomados na direção normal à tangente do perfil evolvente. Os pontos no perfil evolvente são determinados através do ângulo de rolamento [26]. O ângulo de rolamento é ilustrado na figura 6.9 e pode ser calculado através da equação (6.6) [22]. Na figura 6.9 o comprimento do segmento de reta definido pelos pontos V e Y e o comprimento do arco entre V e U , possuem o mesmo valor devido à característica dos perfis evolventes.

$$\xi_Y = \frac{(r_Y^2 - r_g^2)^{1/2}}{r_g}, \quad (6.6)$$

onde ξ_Y é o ângulo de rolamento referente ao ponto Y , r_Y é o raio referente ao ponto Y e r_g é o raio de base da engrenagem.

O perfil modificado pode ser comparado com o perfil evolvente teórico através de um gráfico que mostra no eixo das ordenadas os ângulos de rolamento dos diferentes pontos no perfil

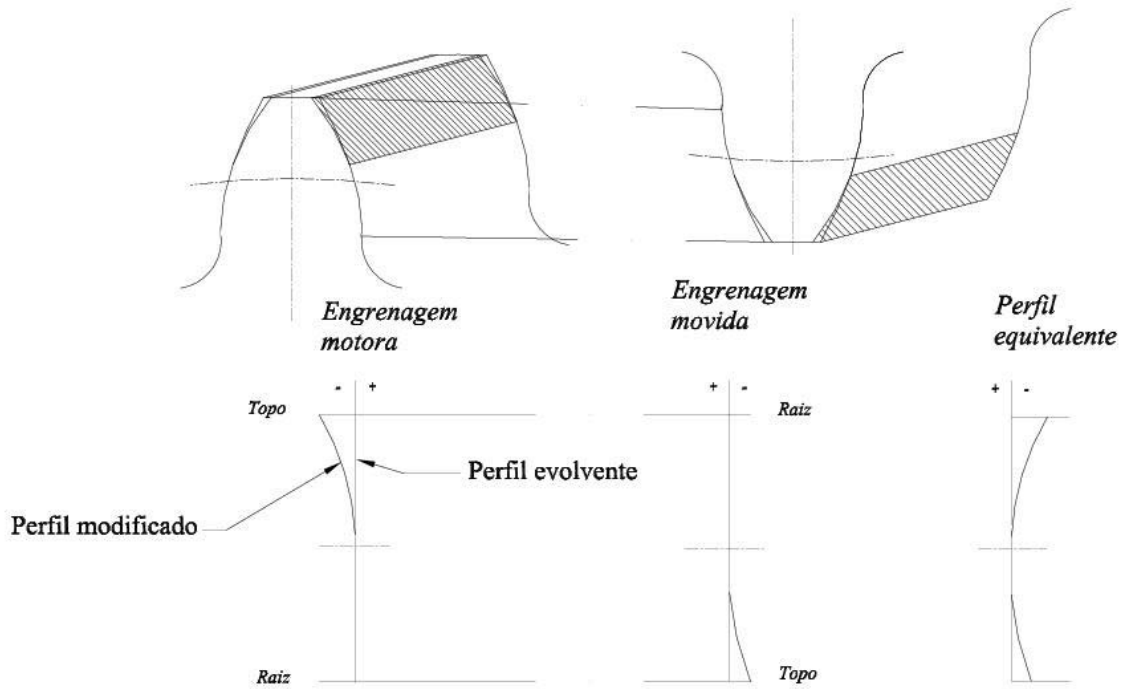


Fig. 6.8: Ilustração do perfil equivalente.

evolvente e no eixo das abscissas os respectivos valores dos alívios, que são os desvios em relação ao perfil evolvente teórico. A figura 6.10 ilustra o gráfico de perfil evolvente.

A seguinte equação geral pode ser usada para descrever matematicamente os alívios ao longo do perfil do dente [104]:

$$d_Y = d_F \left(\frac{\xi_Y - \xi_I}{\xi_F - \xi_I} \right)^\kappa, \quad (6.7)$$

onde d_Y é o valor do alívio em um ponto Y do perfil do dente, ξ_Y é o respectivo ângulo de rolamento, ξ_I é o ângulo de rolamento no ponto de início do alívio, ξ_F é o ângulo de rolamento no ponto final do alívio, d_F é o valor do alívio no seu ponto final, que é onde o valor do alívio tem valor máximo, κ é igual a 1 para modificações afins e igual a 2 para modificações quadráticas.

A equação (6.7) é válida para o intervalo definido entre ξ_I e ξ_F . Fora deste intervalo o valor do alívio é zero, o que significa que fora do intervalo o perfil permanece puramente evolvente.

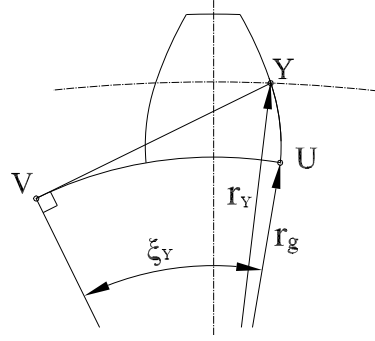


Fig. 6.9: Ilustração do ângulo de rolamento.

Adotou-se neste trabalho modificar o perfil evolvente dos dentes através de alívios no sentido do topo e da raiz dos dentes descritos por funções afins e quadráticas conforme a equação (6.7), e aplicados somente nos dentes da engrenagem motora. Neste caso os dentes da engrenagem movida são mantidos sem modificações.

Considerou-se para a otimização somente funções de modificação das superfícies dos dentes na direção do perfil evolvente. Modificações na direção do passo da hélice não foram consideradas. No entanto, as modificações na direção da hélice podem ser incluídas no procedimento através de funções apropriadas similares às usadas para as modificações do perfil evolvente. Ou ainda, podem ser consideradas como valores constantes de entrada do procedimento. Neste caso, o procedimento irá minimizar o PPETL através das modificações de perfil evolvente para os valores impostos de modificações na direção do passo da hélice.

Pela estratégia adotada neste trabalho para as modificações das superfícies dos dentes, definiu-se quatro variáveis de projeto para serem determinadas pelo procedimento de otimização, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$, que são ilustradas na figura 6.10:

1. x_1 : valor máximo do alívio no sentido do topo tomado no raio externo da engrenagem motora;
2. x_2 : ângulo de rolamento no início do alívio no sentido do topo;
3. x_3 : valor máximo do alívio no sentido da raiz tomado no menor raio de contato da engrenagem motora;

4. x_4 : ângulo de rolamento no início do alívio no sentido da raiz.

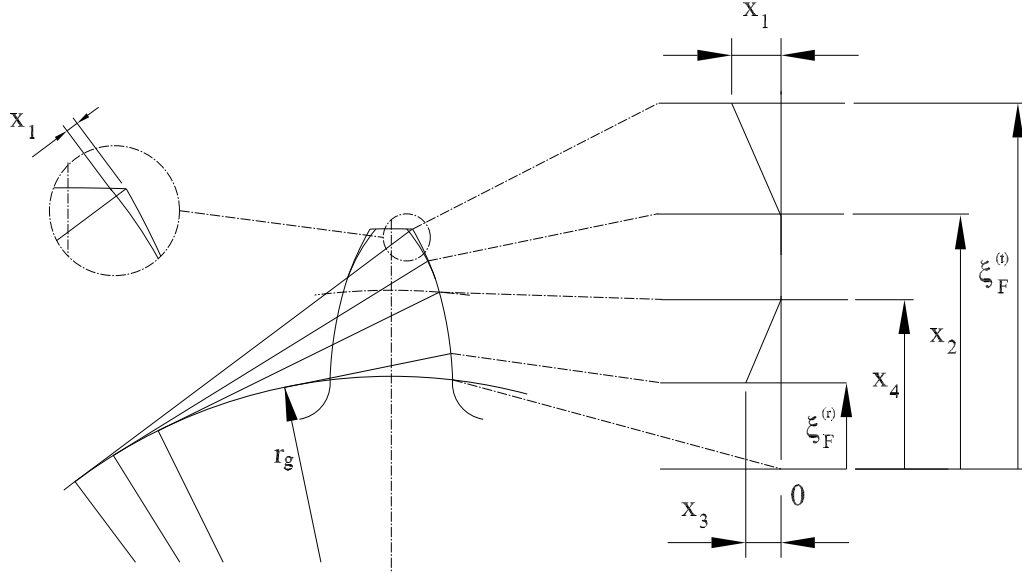


Fig. 6.10: Variáveis de projeto para as modificações do perfil evolvente.

O problema a ser resolvido no bloco chamado filtro é um problema de ajuste de curva para determinar uma forma conveniente para o perfil do dente que seja próxima daquela calculada para minimizar o PPETL. A figura 6.11 ilustra os afastamentos calculados, $\alpha \mathbf{h}_a$, através de pontos que representam a forma calculada como ideal, e os segmentos de reta representam a forma conveniente para o perfil modificado definida por funções pré-estabelecidas dadas pelas variáveis de projeto $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$, no caso ilustrado por funções afins, que se aproximam da forma ideal dada pelo vetor $\alpha \mathbf{h}_a$. O vetor $\mathbf{h}_m$ contém os valores dos afastamentos nos pontos discretos da superfície dos dentes devido às modificações impostas pelas funções afins. Os vetores $\alpha \mathbf{h}_a$ e $\mathbf{h}_m$ foram multiplicados pelo raio base da engrenagem, r_{g1} , para mostrar os valores na forma longitudinal, ao invés da forma angular. Embora na figura 6.11 é mostrado o perfil modificado por funções afins, funções quadráticas também podem ser usadas, ver equação (6.7). Deve-se observar que o perfil descrito pela modificação quadrática, dado pela equação (6.7), é tangente ao perfil evolvente, ou seja, tangente à linha vertical entre x_2 e x_4 mostrada na figura 6.11, no seu ponto inicial. Ele é tangente em x_2 para a modificação no sentido do topo dos dentes, e em x_4 para a modificação no sentido da raiz dos dentes.

Este problema pode ser descrito matematicamente pelo seguinte problema de otimização:

Minimizar

$$f(\mathbf{x}) = \|\alpha \mathbf{h}_a - \mathbf{h}_m\| , \quad (6.8)$$

sujeito à

$$g_1(\mathbf{x}) = x_4 - x_2 \leq 0 ,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_2 - \xi_F^{(t)} \leq 0 ,$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \xi_F^{(r)} - x_4 \leq 0 ,$$

$$g_4(\mathbf{x}) = x_1 \leq 0 ,$$

$$g_5(\mathbf{x}) = x_3 \leq 0 ,$$

onde $\mathbf{h}_m$ é o vetor dos alívios (afastamentos) gerados pela modificação do perfil evolvente nos pontos discretos do dente correspondentes aos elementos do vetor $\mathbf{h}_a = \{\mathbf{h}_{a1}, \mathbf{h}_{a2}, \dots, \mathbf{h}_{an}\}^T$ e tomados na forma angular. $\mathbf{h}_m$ é calculado com base na equação (6.7) em função do ângulo de rolamento do ponto discreto correspondente:

$$\mathbf{h}_m(\xi) = x_1 \left(\frac{\xi - x_2}{\xi_F^{(t)} - x_2} \right)^\kappa r_{g1}^{-1} , \quad \forall \quad x_2 < \xi \leq \xi_F^{(t)} , \quad (6.9)$$

$$\mathbf{h}_m(\xi) = x_3 \left(\frac{\xi - x_4}{\xi_F^{(r)} - x_4} \right)^\kappa r_{g1}^{-1} , \quad \forall \quad \xi_F^{(r)} \leq \xi < x_4 , \quad (6.10)$$

$$\mathbf{h}_m(\xi) = 0 , \quad \forall \quad x_4 \leq \xi \leq x_2 . \quad (6.11)$$

O problema de otimização de multivariáveis com restrições de desigualdade descrito em (6.8) pode ser resolvido através de algoritmos bastante conhecidos de programação não linear. Neste trabalho, usou-se um método de programação seqüencial quadrática implementado na função *fmincon*¹ do MATLAB [60]. Neste método, o problema de otimização é transformado em um subproblema de programação quadrática que é resolvido em cada iteração. A matriz Hessiana da função Lagrangiana é estimada a cada iteração usando a fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [8], e a busca linear é feita através de uma função de mérito. O

¹A função *fmincon* do MATLAB tenta encontrar um valor mínimo restrito de uma função escalar de várias variáveis a partir de um ponto inicial dado usando um algoritmo de programação seqüencial quadrática.

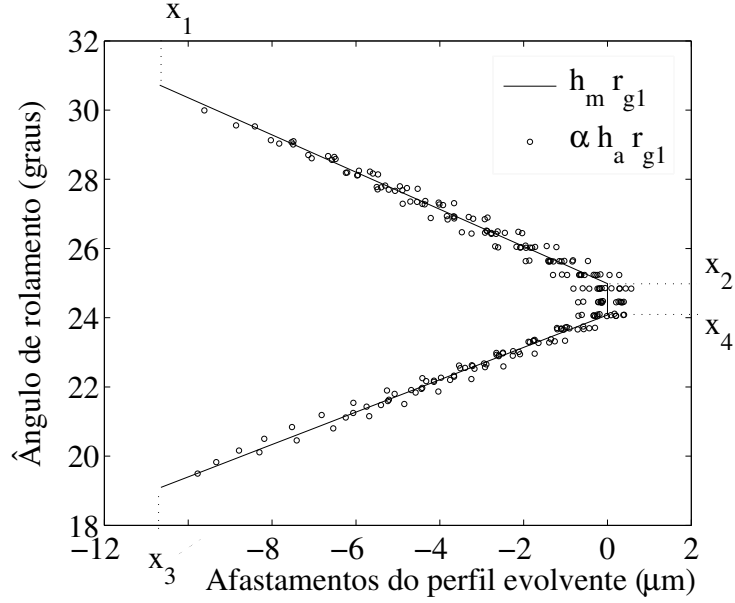


Fig. 6.11: Ilustração da aproximação dos afastamentos do perfil por funções afins.

subproblema de programação quadrática é então resolvido usando uma estratégia de conjunto ativo, ou método de projeção [60, 8]. O vetor com os valores iniciais das variáveis de otimização foi definido como $\mathbf{x}_0 = \{0, \xi_F^{(t)} - 0.25(\xi_F^{(t)} - \xi_F^{(r)}), 0, \xi_F^{(r)} + 0.25(\xi_F^{(t)} - \xi_F^{(r)})\}^T$.

Resolvendo-se o problema de otimização mostrado na equação (6.8) se obtém os valores para as variáveis de projeto $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$. Uma vez calculados os valores das variáveis de projeto, pode-se determinar o valor das modificações das superfícies em qualquer ponto dos dentes (ver equação (6.7)).

O vetor $\mathbf{x}$, vetor das variáveis de projeto, é a saída do bloco chamado de filtro. O sistema é re-alimentado com os novos valores das variáveis, e uma análise completa do contato entre os dentes e cálculo do erro de transmissão são realizados. As modificações das superfícies na iteração anterior são desconsideradas para a análise das novas modificações. Isto é, as modificações não são cumulativas. Na nova iteração são removidas as influências dadas nos afastamentos contidos no vetor $\mathbf{h}_a$ devido à modificação anterior. Assim as novas modificações são definidas sempre a partir da superfície evolvente teórica.

O método para determinar as modificações das superfícies dos dentes desenvolvido e apre-

sentado neste capítulo foi implementado em forma de programa computacional em linguagem MATLAB [60]. A verificação do método é apresentada no capítulo 7 através da análise de exemplos numéricos.

Capítulo 7

Verificação do método

Este capítulo tem como objetivo apresentar os resultados numéricos obtidos com o método proposto e avaliar a sua adequação para determinar as modificações da superfície dos dentes que minimizam a variação do erro de transmissão (PPETL). Três pares de engrenagens de dentes helicoidais foram estudados. Considerou-se a introdução de modificações na superfície dos dentes conforme funções afins e quadráticas. Os resultados obtidos para os três casos com os dois tipos de modificações são apresentados, entre eles estão a redução da função objetivo (variação do erro de transmissão), o valor das variáveis de projeto que definem as modificações, o número de iterações e o tempo de processamento. Obteve-se reduções significativas na variação do erro de transmissão (PPETL) para todos os casos analisados.

O procedimento para o cálculo do erro de transmissão é parte importante do método proposto para determinar as modificações nas superfícies dos dentes das engrenagens para reduzir a excitação proveniente do erro de transmissão (ver seção 6.3 do capítulo 6). O procedimento para o cálculo do erro de transmissão apresentado no capítulo 3 é baseado no procedimento desenvolvido pelo presente autor durante seu trabalho de mestrado [111]. Naquele trabalho o procedimento foi devidamente verificado quanto a sua adequação para o cálculo do erro de transmissão de pares engrenados de dentes helicoidais. Aquele procedimento mostrou-se mais preciso para o cálculo do erro de transmissão do que os procedimentos convencionais por analisar o contato em toda a superfície dos dentes, e não somente no plano de ação teórico [113]. O procedimento para o cálculo do erro de transmissão foi ainda melhorado em termos de efici-

ência computacional e precisão da resposta através da implementação da rotina do cálculo da distribuição de carga baseada na fatorização de Cholesky e pseudo-interferência (ver seção 3.5 do capítulo 3).

Além dos resultados obtidos com o procedimento de cálculo do erro de transmissão apresentados nas referências [111, 113], no capítulo 5 do presente trabalho comparou-se os resultados numéricos do erro de transmissão com resultados experimentais. Na comparação destes resultados observou-se que os valores calculados e medidos apresentam uma tendência próxima quanto ao comportamento do PPETL. Embora diferenças foram observadas entre os valores absolutos calculados e medidos do PPETL, estas eram esperadas uma vez que nos cálculos não se considerou os erros de fabricação das amostras testadas (ver capítulo 5). Baseado nos trabalhos desenvolvidos anteriormente referentes a este procedimento para o cálculo do erro de transmissão (ver referências [111, 113] e no capítulo 5) considera-se que tal procedimento pode ser usado para representar o comportamento do pico-a-pico do erro de transmissão.

A relação entre PPETL e o ruído gerado por pares engrenados é bastante conhecida na literatura disponível conforme descrito nos capítulos 1 e 2. A redução do PPETL e conseqüentemente do ruído gerado pelos pares engrenados através das modificações das superfícies dos dentes também é mostrada em diversos trabalhos publicados (ver capítulos 1 e 2). Portanto, o presente trabalho não se propõe a verificar a existência destas duas relações, ou seja, a relação entre o PPETL e o ruído dos pares engrenados, e a relação entre o PPETL e as modificações das superfícies dos dentes. Haja vista que estas relações são amplamente reconhecidas na comunidade científica.

A verificação do método proposto é feita quanto à capacidade do algoritmo desenvolvido de obter as modificações para as superfícies dos dentes que minimizem a excitação proveniente do erro de transmissão (PPETL). Para tanto, verifica-se o método proposto neste trabalho através de simulações computacionais usando-se alguns exemplos numéricos. Como o método desenvolvido destina-se à aplicação geral em pares de engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais, para as simulações numéricas selecionou-se três pares de engrenagens com características geométricas distintas. Um dos parâmetros importantes dos pares de engrenagens selecionados é o

ângulo de hélice. O primeiro par de engrenagens possui um ângulo de hélice bastante elevado, 33.55° , o segundo par possui um valor intermediário, 25.23° , e o terceiro par de engrenagens possui ângulo de hélice menor, 15° . Outro parâmetro de destaque é a distância entre centros de montagem das engrenagens dos pares. Ela corresponde a 203, 150 e 70mm, para os pares engrenados 1, 2 e 3 respectivamente. Observa-se através destes parâmetros que os pares de engrenagens selecionados correspondem a aplicações bastante distintas.

Neste capítulo, os três pares de engrenagens selecionados são descritos em detalhes, um estudo da influência do fator de ganho (ver seção 6.3.4 do capítulo 6) é apresentado, e os resultados das simulações numéricas usando o método proposto são mostrados e discutidos para os três exemplos de pares engrenados. E finalmente, a solução obtida através do método proposto é comparada com a superfície de resposta do problema.

7.1 Estudo de caso 1

O par de engrenagens helicoidais usado no capítulo 4 para o estudo de sensibilidade e no capítulo 5 para a comparação dos dados calculados com dados medidos do erro de transmissão foi usado como o primeiro estudo de caso do programa de otimização. Os dados das engrenagens do caso 1 são mostrados na tabela 7.1.

Considerou-se como premissas para a otimização das superfícies dos dentes que as modificações otimizadas seriam introduzidas somente no perfil dos dentes da engrenagem motora. Na engrenagem movida considerou-se que os dentes deveriam possuir um abaulamento na direção do passo de amplitude máxima de $5\mu m$ em ambas as extremidades dos dentes conforme uma função quadrática. Neste caso, o programa de otimização deve buscar a modificação ótima do perfil dos dentes da engrenagem motora considerando a existência desta modificação de passo da engrenagem movida. Isto, conforme foi mencionado no capítulo 6, é uma opção possível no procedimento proposto.

Adotou-se para as análises o torque de $334Nm$ aplicado na engrenagem motora. O ciclo de engrenamento foi dividido em 25 posições discretas.

Tab. 7.1: Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais para o caso 1.

Parâmetros	Engrenagens
Número de dentes	40
Distância entre centros (mm)	203.2
Módulo normal (mm)	4.233
Ângulo de pressão normal	20°
Ângulo de hélice normal	33.55°
Diâmetro externo (mm)	211.684
Diâmetro de raiz (mm)	189.713
Fator de modificação do adendum	0
Largura da engrenagem (mm)	26.987
Grau de recobrimento transversal	1.32
Grau de recobrimento axial	1.12
Torque nominal de análise (Nm)	70
Módulo de elasticidade (GPa)	206
Coefficiente de Poisson	0.3
Distância entre pontos discretos na altura do dente (μm)	152
Distância entre pontos discretos na largura do dente (μm)	538

7.2 Estudo de caso 2

O segundo par de engrenagens selecionado para as simulações numéricas apresenta características geométricas distintas em relação ao par de engrenagens do caso 1. Este segundo par de engrenagens foi extraído do trabalho de Wagaj e Kahraman [104]. Os parâmetros geométricos deste par são mostrados na tabela 7.2.

Adotou-se que as modificações otimizadas seriam introduzidas somente no perfil dos dentes da engrenagem motora. Assumiu-se neste segundo estudo de caso que os dentes da engrenagem movida não possuem qualquer modificação nas superfícies.

Para este estudo adotou-se o torque de $300Nm$ aplicado na engrenagem motora. O ciclo de

Tab. 7.2: Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais para o caso 2.

Parâmetros	Engrenagens
Número de dentes	50
Distância entre centros (mm)	150
Módulo normal (mm)	2.714
Ângulo de pressão normal	18.224°
Ângulo de hélice normal	25.232°
Diâmetro externo (mm)	156
Diâmetro de raiz (mm)	140.68
Fator de modificação do adendum	0
Largura da engrenagem (mm)	20
Grau de recobrimento transversal	1.75
Grau de recobrimento axial	1.00
Torque nominal de análise (Nm)	300
Módulo de elasticidade (GPa)	206
Coefficiente de Poisson	0.3
Distância entre pontos discretos na altura do dente (μm)	108
Distância entre pontos discretos na largura do dente (μm)	404

engrenamento foi dividido em 16 posições discretas.

7.3 Estudo de caso 3

O terceiro estudo de caso considera um par de engrenagens helicoidais com ângulo de hélice inferior aos dois casos anteriores, $\beta_o = 15^\circ$. Este terceiro par de engrenagens também se diferencia dos outros dois por considerar engrenagens motora e movida diferentes quanto ao número de dentes e geometria. As engrenagens são também bem menores quando comparadas às engrenagens dos dois pares anteriores. Este terceiro par de engrenagens foi extraído do trabalho de mestrado do presente autor [111] e foi apresentado no capítulo 3. Os parâmetros

geométricos deste par são mostrados na tabela 7.3.

Tab. 7.3: Parâmetros básicos do par de engrenagens helicoidais para o caso 3.

Parâmetros	Motora	Movida
Número de dentes	27	43
Distância entre centros (mm)		70
Módulo normal (mm)		1.93
Ângulo de pressão normal		20°
Ângulo de hélice normal		15°
Diâmetro externo (mm)	58	90
Diâmetro de raiz (mm)	48	80
Fator de modificação do adendum	0	0
Largura da engrenagem (mm)	15	15
Torque nominal de análise (Nm)		30
Módulo de elasticidade (GPa)		206
Coefficiente de Poisson		0.3
Distância entre pontos discretos na altura do dente (μm)		90
Distância entre pontos discretos na largura do dente (μm)		385

As modificações otimizadas são consideradas também somente no perfil dos dentes da engrenagem motora. Assumiu-se também neste estudo de caso que os dentes da engrenagem movida não possuem qualquer modificação nas superfícies.

Para este estudo, adotou-se o torque de $30Nm$ aplicado na engrenagem motora. O ciclo de engrenamento foi dividido em 10 posições discretas.

7.4 Influência do fator de ganho

Antes de proceder a simulação numérica usando o método proposto é necessário definir o valor para o fator de ganho α mostrado na seção 6.3.4 do capítulo 6.

Para isto, executou-se o procedimento desenvolvido e implementado em MATLAB [60] para o primeiro exemplo numérico com diversos valores para o fator de ganho. Avaliou-se o número de iterações executadas até a convergência para a solução do problema. A figura 7.1 mostra os resultados obtidos.

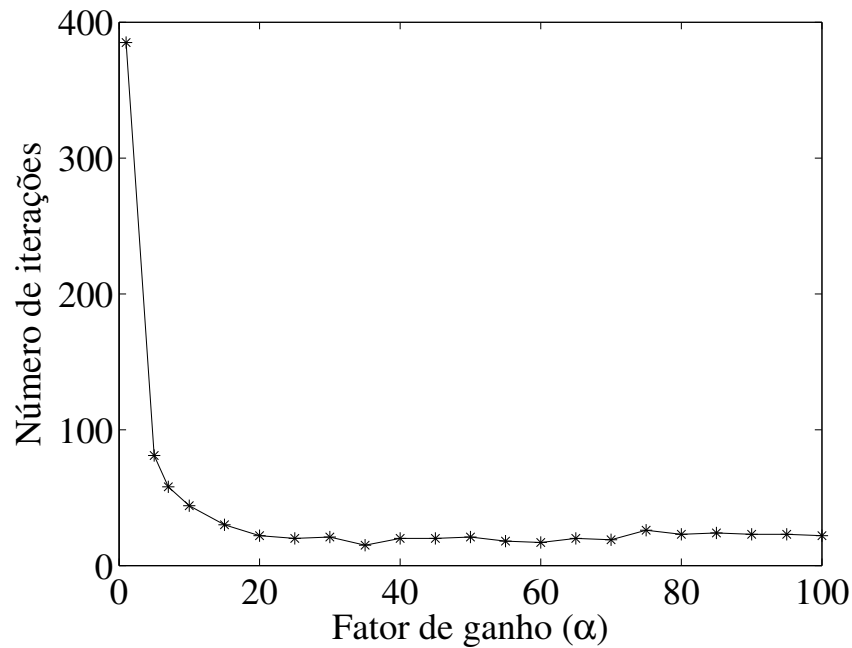


Fig. 7.1: Influência do fator de ganho na solução do problema.

Observa-se na figura 7.1 que para pequenos valores do fator de ganho, um número grande de iterações é necessário para a solução do problema. Para valores do fator de ganho acima de 20 o número de iterações é bastante reduzido, e permanece pouco sensível para valores maiores do fator de ganho.

Quando utilizado fatores de ganho elevados, observou-se que foi necessário reduzir o fator de ganho após as primeiras iterações, conforme foi descrito na seção 6.3.4 do capítulo 6. Este ajuste é feito automaticamente pelo procedimento quando ocorre divergência na busca da solução. Isto faz com que sejam necessárias iterações adicionais para retornar a um valor de passo adequado para a busca da solução, o que justifica as oscilações no número de iterações observadas na

figura 7.1 para valores de fator de ganho entre 30 e 80, por exemplo.

Nas diversas simulações com fatores de ganho diferentes, o procedimento convergiu para a solução atendendo o valor do critério de convergência previamente definido como $1 \times 10^{-7}mm$ (ver seção 6.3.2).

Baseado nos resultados obtidos neste estudo do fator de ganho, adotou-se usar o fator de ganho igual a 30 para todas as simulações numéricas para os três pares de engrenagens selecionados.

7.5 Resultados obtidos com o procedimento de otimização

Executou-se o procedimento de otimização desenvolvido para cada um dos estudos de caso descritos anteriormente. Todas as simulações foram feitas usando-se um microcomputador com processador Pentium Intel Xeo de 2.8GHz e com 2.1GB de memória (RAM). Os tempos de processamento computacional que são mencionados neste capítulo referem-se aos obtidos neste equipamento.

Para os três estudos de caso, realizou-se dois estudos de otimização. Adotou-se inicialmente funções afins para as modificações do perfil e em um segundo estudo adotou-se modificações quadráticas (ver expoente κ da equação (6.7)).

Para todos os casos estudados, definiu-se o critério de convergência igual a $1 \times 10^{-7}mm$ (ver seção 6.3.2), e o fator de ganho igual a 30 (ver seção 6.3.4 e 7.4).

A tabela 7.4 mostra as simulações realizadas, o número de iterações e o tempo de processamento computacional gasto para se obter a solução otimizada.

As figuras 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 e 7.7, indicadas na tabela 7.4, mostram a resposta do PPETL em cada iteração para os casos estudados. O PPETL é a função objetivo do problema de otimização (ver capítulo 6).

Tab. 7.4: Resultados das simulações com o procedimento de otimização.

Estudo	Modificação (equação (6.7))	Número de iterações	Tempo de processamento (minutos)	Ver figura
Caso 1	afim ($\kappa = 1$)	21	11.6	7.2
Caso 1	quadrática ($\kappa = 2$)	30	18.2	7.3
Caso 2	afim ($\kappa = 1$)	16	12.1	7.4
Caso 2	quadrática ($\kappa = 2$)	12	8.0	7.5
Caso 3	afim ($\kappa = 1$)	39	10.3	7.6
Caso 3	quadrática ($\kappa = 2$)	38	8.6	7.7

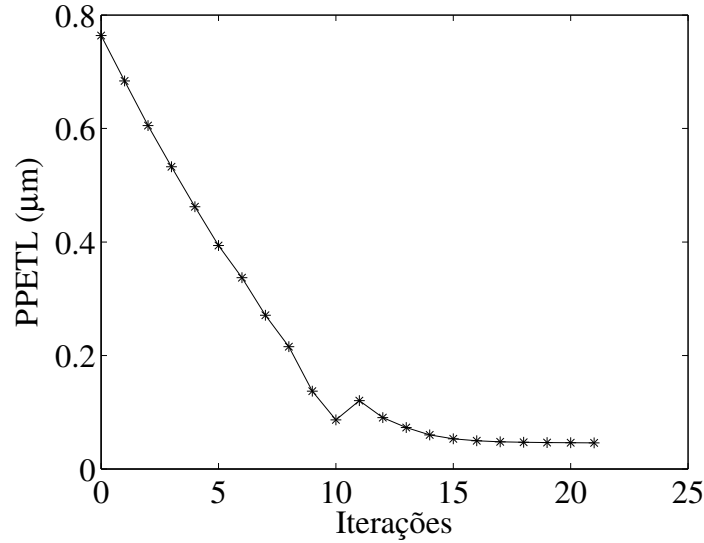


Fig. 7.2: Convergência para o estudo de caso 1 com funções afins.

Nas figuras 7.2 e 7.6 pode-se observar mais claramente que em algumas iterações o valor da função objetivo (PPETL) aumentou, ou seja, divergiu para a busca da solução. Nestes casos, o procedimento retornou às condições da iteração anterior e efetuou o ajuste do fator de ganho conforme descrito na seção 6.3.4 do capítulo 6.

Observa-se na tabela 7.4 que para os três casos estudados obteve-se a solução do problema com um número reduzido de iterações e um tempo computacional satisfatório.

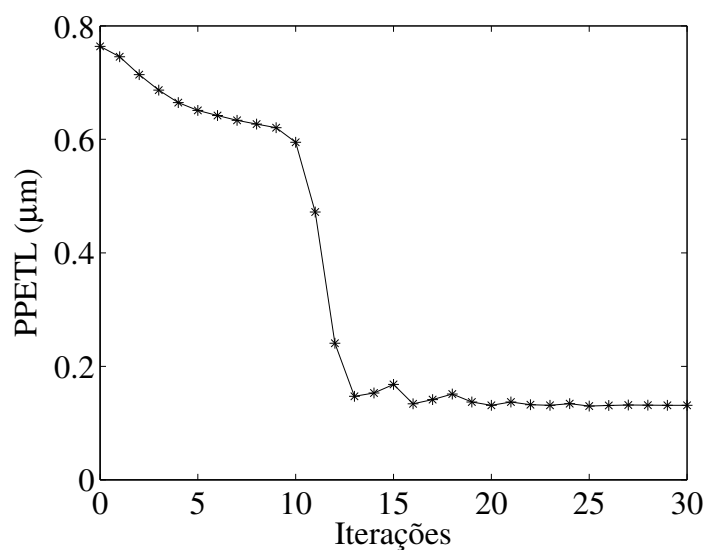


Fig. 7.3: Convergência para o estudo de caso 1 com funções quadráticas.

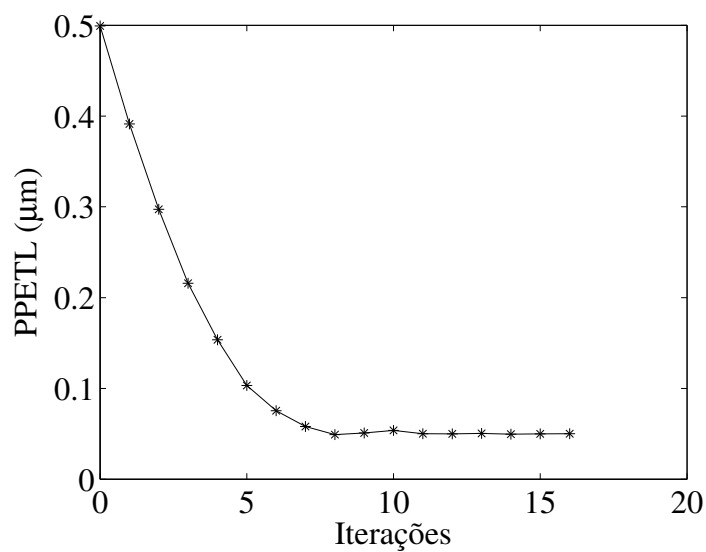


Fig. 7.4: Convergência para o estudo de caso 2 com funções afins.

Na maioria dos casos obteve-se uma redução bastante significativa no valor da função objetivo após 10 a 12 iterações, ver por exemplo a figura 7.2. No entanto, devido ao critério de convergência adotado foram necessárias iterações adicionais até se obter a solução final do problema. Do ponto de vista prático, a solução obtida na 10^a iteração poderia ser satisfatória.

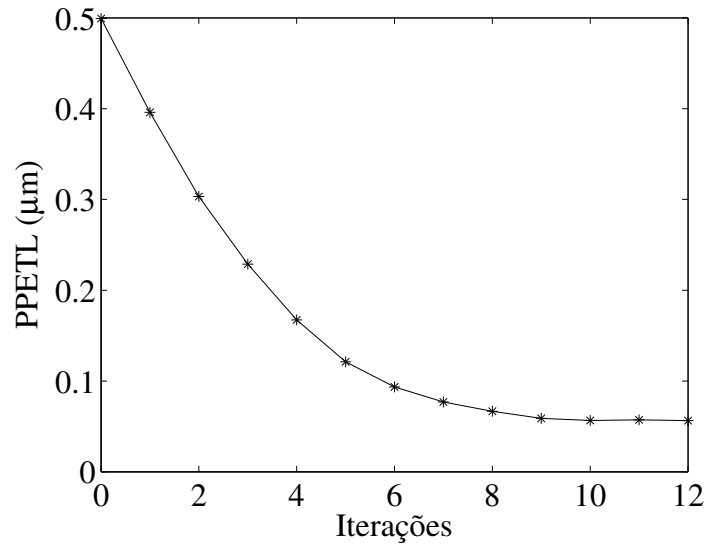


Fig. 7.5: Convergência para o estudo de caso 2 com funções quadráticas.

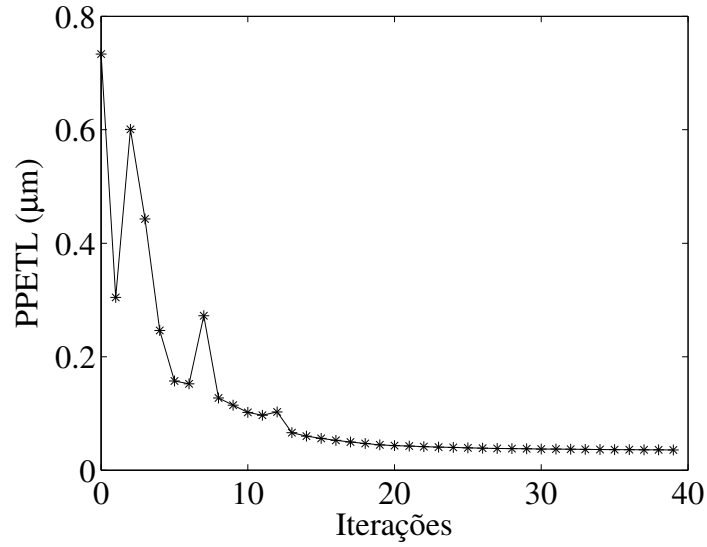


Fig. 7.6: Convergência para o estudo de caso 3 com funções afins.

Daí a importância da avaliação do binômio precisão e tempo de processamento.

Em todos os casos estudados obteve-se a solução do problema atendendo o critério de convergência estabelecido, $1 \times 10^{-7}mm$ (ver seção 6.3.2).

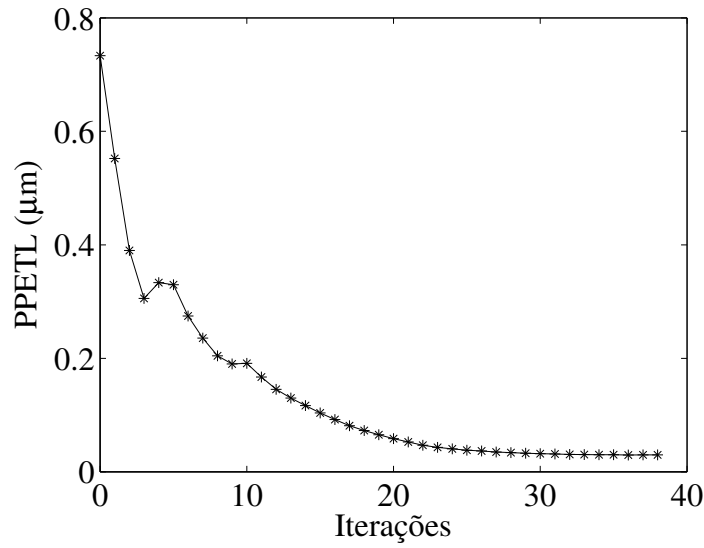


Fig. 7.7: Convergência para o estudo de caso 3 com funções quadráticas.

A tabela 7.4 mostra os resultados obtidos para o PPETL antes e após a otimização das superfícies dos dentes. Os valores antes da otimização foram obtidos considerando os dentes das engrenagens em estudo sem modificações nas superfícies dos dentes, exceto aquelas assumidas como existentes e descritas nas seções 7.1, 7.2 e 7.3.

Tab. 7.5: Resultados do PPETL (μm) com o procedimento de otimização.

Estudo	Modificação (equação (6.7))	Antes da otimização	Após a otimização	Ver figura
Caso 1	afim ($\kappa = 1$)	0.7638	0.0459	7.8
Caso 1	quadrática ($\kappa = 2$)	0.7638	0.1299	7.9
Caso 2	afim ($\kappa = 1$)	0.4993	0.0492	7.10
Caso 2	quadrática ($\kappa = 2$)	0.4993	0.0563	7.11
Caso 3	afim ($\kappa = 1$)	0.7334	0.0356	7.12
Caso 3	quadrática ($\kappa = 2$)	0.7334	0.0296	7.13

Observa-se na tabela 7.5 que se obteve reduções significativas para a função objetivo do problema, PPETL, para todos os casos analisados. Observa-se ainda que não houve diferenças

significativas entre as modificações afins e as quadráticas. A maior diferença entre elas foi observada para o caso 1.

As figuras 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12 e 7.13, indicadas na tabela 7.5, mostram o erro de transmissão calculado para as posições discretas no ciclo de engrenamento na condição antes e após a otimização, para os três estudos de caso. Em todos os casos se observou que o erro de transmissão após a otimização apresenta menor variação entre os valores calculados nas diversas posições do ciclo de engrenamento em comparação com os valores do ETL antes da otimização. E ainda, que os valores do erro de transmissão após a otimização são significativamente maiores, em termos absolutos, quando comparados com os valores iniciais. Isto é discutido adiante na seção 7.6.

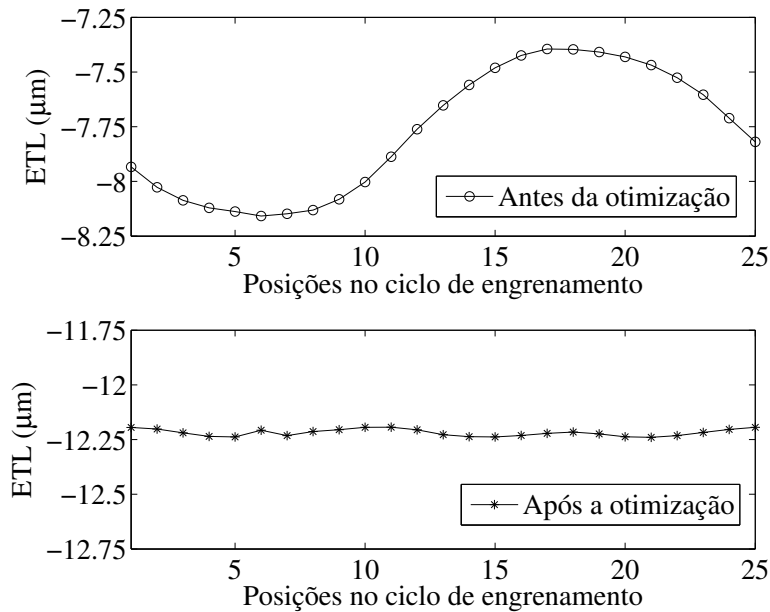


Fig. 7.8: ETL antes e após a otimização para o caso 1 com alívios afins.

Os valores das quatro variáveis do problema de otimização obtidos nas simulações são mostrados na tabela 7.6 (ver seção 6.3.5 e figura 6.10).

As figuras 7.14, 7.15, 7.16, 7.17, 7.18 e 7.19 indicadas na tabela 7.6, mostram as modificações

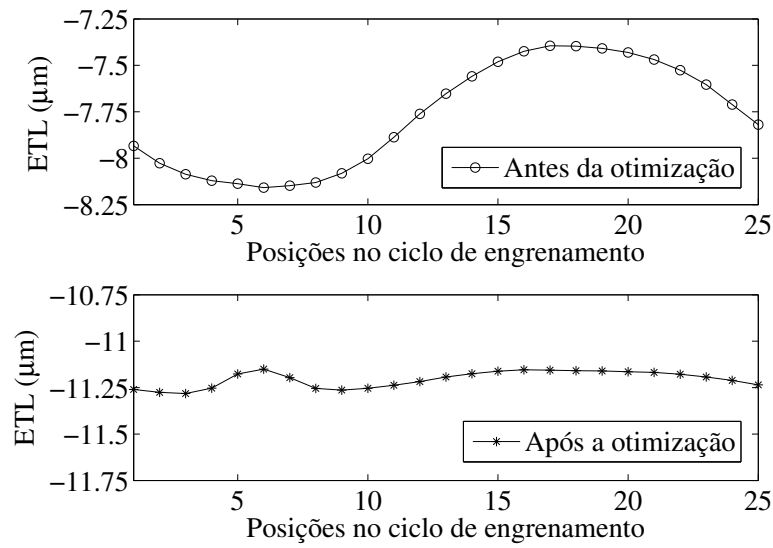


Fig. 7.9: ETL antes e após a otimização para o caso 1 com alívios quadráticos.

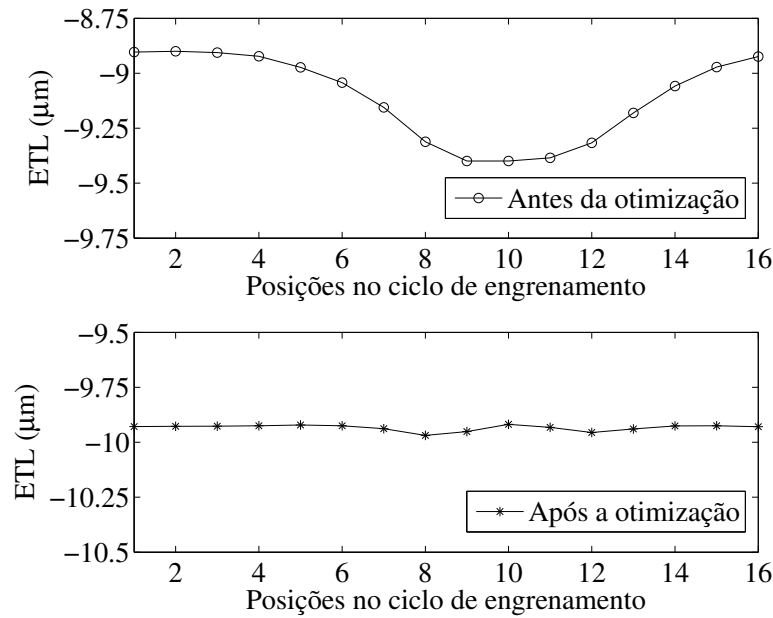


Fig. 7.10: ETL antes e após a otimização para o caso 2 com alívios afins.

ótimas para os perfis dos dentes obtidas com o procedimento de otimização. Estas figuras correspondem à representação gráfica dos valores das quatro variáveis de projeto da tabela 7.6.

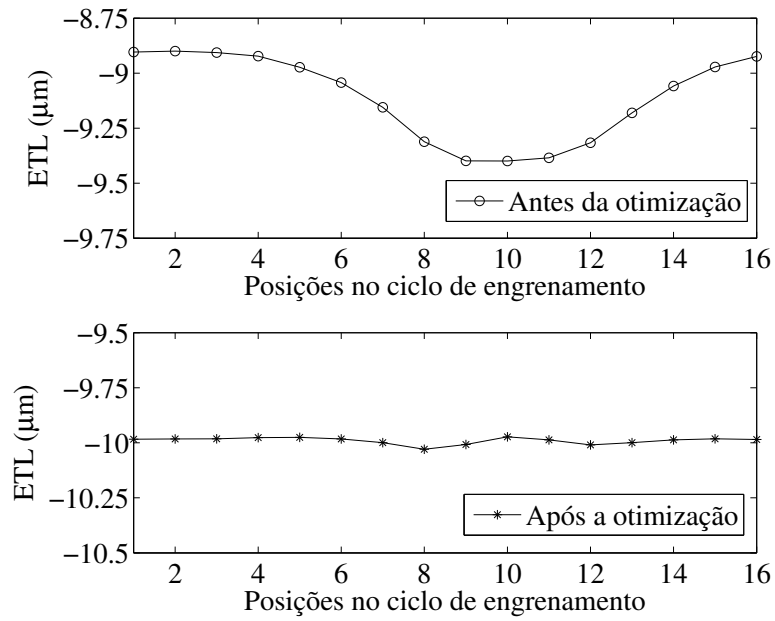


Fig. 7.11: ETL antes e após a otimização para caso 2 com alívios quadráticos.

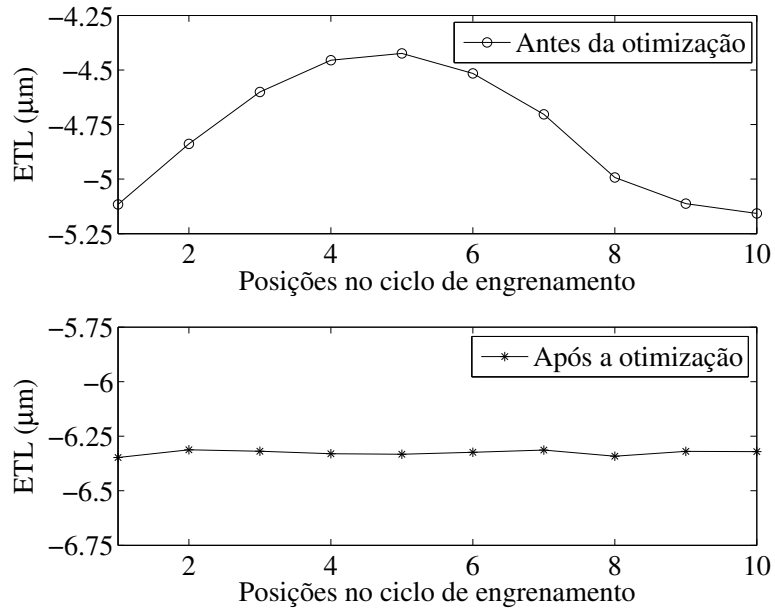


Fig. 7.12: ETL antes e após a otimização para o caso 3 com alívios afins.

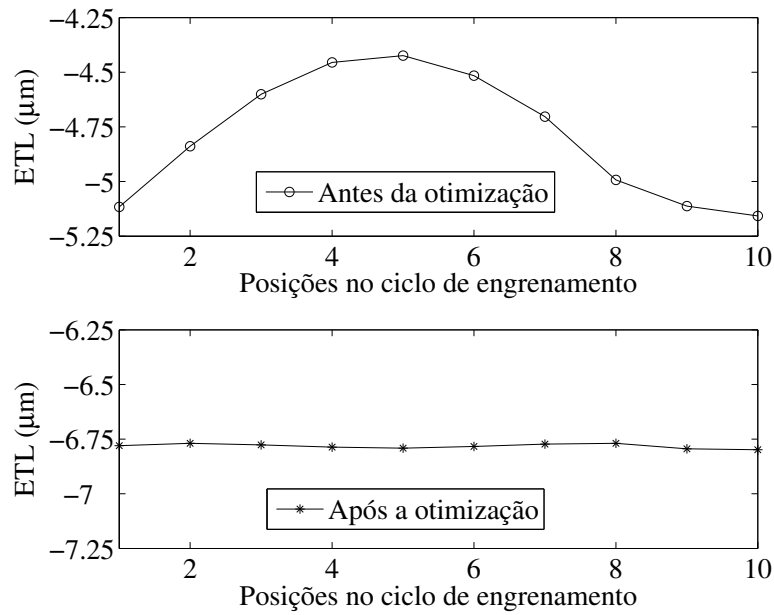


Fig. 7.13: ETL antes e após a otimização para caso 3 com alívios quadráticos.

Para detalhes sobre a forma e interpretação da representação gráfica das variáveis mostradas nestas figuras, ver a seção 6.3.5 do capítulo 6.

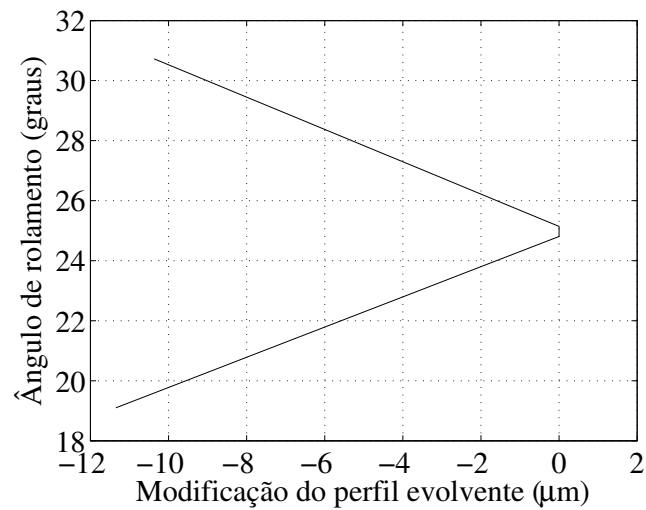


Fig. 7.14: Perfil do dente para o caso 1 com alívios afins.

Tab. 7.6: Resultados das variáveis de otimização obtidos com o procedimento de otimização.

Estudo	Modificação (equação (6.7))	x_1 (μm)	x_2 ($graus$)	x_3 (μm)	x_4 ($graus$)	Ver figura
Caso 1	afim ($\kappa = 1$)	-10.3690	25.1442	-11.3480	24.8050	7.14
Caso 1	quadrática ($\kappa = 2$)	-13.2947	24.7559	-17.4534	24.7559	7.15
Caso 2	afim ($\kappa = 1$)	-6.0982	25.1606	-6.079	16.1234	7.16
Caso 2	quadrática ($\kappa = 2$)	-6.7482	24.2507	-6.9728	16.7849	7.17
Caso 3	afim ($\kappa = 1$)	-3.7716	22.1798	-4.4051	20.1189	7.18
Caso 3	quadrática ($\kappa = 2$)	-6.5119	20.7011	-11.1655	20.7011	7.19

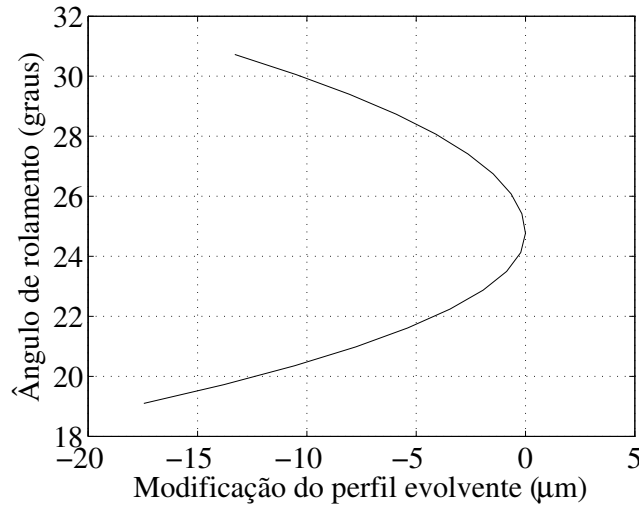


Fig. 7.15: Perfil do dente para o caso 1 com alívios quadráticos.

7.6 Interpretação da solução para a redução do PPETL

Uma questão que surge quando se observa os gráficos do erro de transmissão ao longo do ciclo de engrenamento antes e depois da otimização das modificações da superfícies dos dentes, como aqueles mostrados nas figuras 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12 e 7.13, é como estas modificações influenciaram a distribuição de carga e o comportamento elásticos dos dentes para que fosse possível reduzir a variação do ETL. Uma outra questão relacionada com a condição otimizada é quanto ao valor absoluto do ETL nas várias posições do ciclo de engrenamento. Os valores

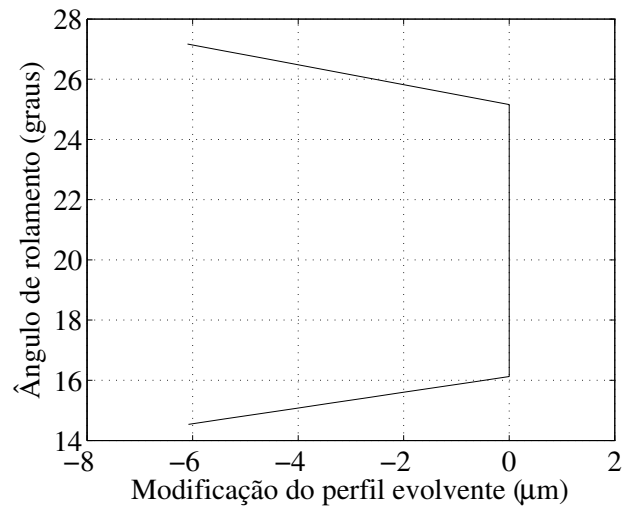


Fig. 7.16: Perfil do dente para o caso 2 com alívios afins.

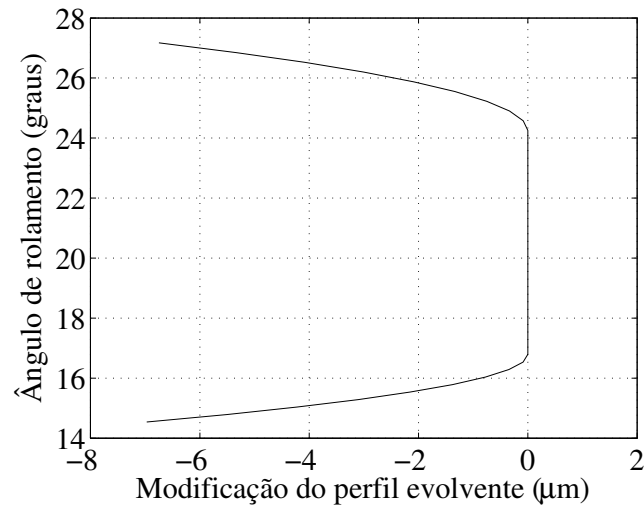


Fig. 7.17: Perfil do dente para o caso 2 com alívios quadráticos.

absolutos são significativamente maiores na condição otimizada quando comparados com a condição inicial, antes da otimização.

Para esclarecer estas duas questões analisou-se, para o caso 1 com modificações afins, a contribuição da parcela do ETL devido aos afastamentos provenientes da modificação da superfície dos dentes, e a contribuição da parcela do ETL devido às deflexões elásticas, assim como, a

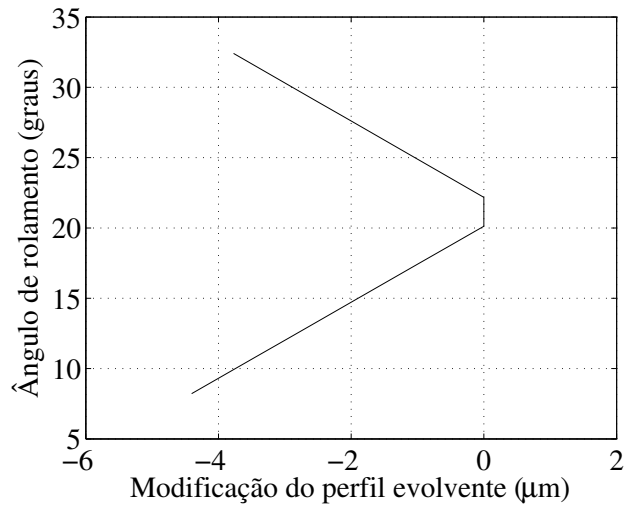


Fig. 7.18: Perfil do dente para o caso 3 com alívios afins.

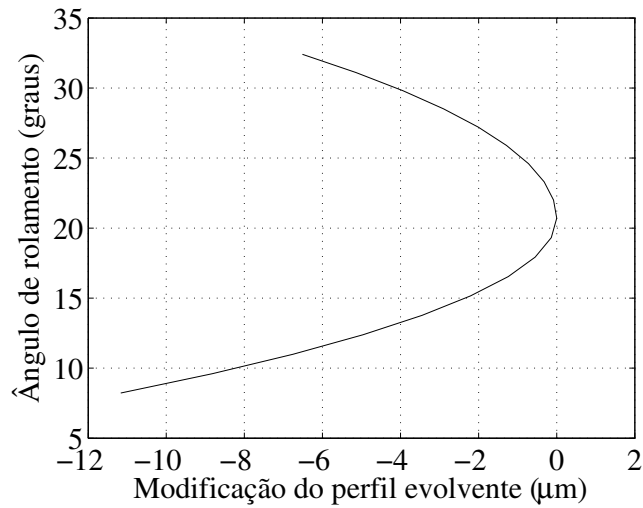


Fig. 7.19: Perfil do dente para o caso 3 com alívios quadráticos.

distribuição de carga entre os dentes engrenados. Considerou-se para esta análise duas posições do ciclo de engrenamento, a posição 6 e a posição 18. A posição 6 é a posição que apresentou a menor variação no valor absoluto do ETL entre a condição antes e após a otimização. E a posição 18 é a posição que apresentou a maior variação entre esses valores, ver a figura 7.8.

Observou-se na análise destas duas posições que para a posição 6, onde houve a menor

diferença no valor do ETL, a contribuição predominante foi na deflexão elástica dos dentes engrenados. Enquanto que na posição 18, onde houve a maior diferença no valor do ETL, as deflexões elásticas permaneceram com valores próximos nas duas condições, antes e após a otimização das superfícies, mas houve uma alteração no erro de transmissão devido aos afastamentos impostos pelas modificações nas superfícies dos dentes na condição após a otimização.

A tabela 7.7 mostra os valores da parcela do ETL devido aos afastamentos provenientes das modificações das superfícies, chamada na tabela de parcela geométrica, e os valores da parcela do ETL devido às deflexões elásticas, chamada na tabela de parcela elástica, para as duas posições analisadas. As parcelas geométricas correspondem ao ETL sem carga aplicada, onde as deflexões elásticas são zero e apenas existem desvios devido à geometria dos dentes. Já as parcelas elásticas do ETL referem-se aos valores do ETL após a aplicação da carga subtraindo-se os valores sem carga aplicada.

Tab. 7.7: Composição do ETL nas posições 6 e 18 para o caso 1 com modificações afins.

Parcela do ETL	Unidade	Posição 6		Posição 18	
		Antes da otimização	Após a otimização	Antes da otimização	Após a otimização
Geométrica	μm	-0.0289	0	0	-3.9437
Elástica	μm	-8.1295	-12.2071	-7.3964	-8.2721
ETL	μm	-8.1584	-12.2071	-7.3964	-12.2158

A diferença na parcela elástica do ETL antes e após a otimização apresentada na tabela 7.7 para a posição 6 ocorreu devido à alteração da rigidez do engrenamento. Os afastamentos impostos devido às modificações das superfícies dos dentes alteraram de forma significativa a distribuição de carga entre os dentes engrenados, reduzindo a rigidez do engrenamento naquela posição e aumentando a deflexão elástica dos dentes. Já para a posição 18 houve uma pequena variação na distribuição de carga entre os dentes engrenados. A tabela 7.8 mostra o percentual de carga aplicada nos pares de dentes engrenados em cada uma das posições nas condições antes e após a otimização.

Tab. 7.8: Percentual de carga aplicada nos dentes engrenados nas posições 6 e 18 para o caso 1 com modificações afins.

Pares de dentes engrenados	Posição 6		Posição 18	
	Antes da otimização	Após a otimização	Antes da otimização	Após a otimização
1	10 %	0 %	0 %	0 %
2	80.4 %	100 %	46.9 %	47.3 %
3	9.6 %	0 %	53.1 %	52.7 %

Observa-se na tabela 7.8 que na posição 6 tinha-se inicialmente três pares de dentes engrenados, e após a introdução das modificações das superfícies dos dentes apenas um par de dentes está engrenado naquela posição. Como somente um par de dentes está engrenado, a rigidez do engrenamento é menor do que na condição inicial e conseqüentemente a deflexão é maior, como mostrado anteriormente na tabela 7.7.

A figura 7.20 mostra a localização da carga aplicada em cada um dos três pares de dentes engrenados na condição sem modificações no perfil dos dentes, ou seja, antes da otimização para a posição 6. Os três pares de dentes são mostrados na mesma figura e são designados pelos números 1, 2 e 3 correspondendo a aqueles mostrados na tabela 7.8.

Já a figura 7.21 mostra a localização da carga aplicada no par de dentes engrenados na condição com as modificações no perfil dos dentes, após a otimização, também para a posição 6. O número 2 na figura 7.21 é para indicar que se trata do dente designado de 2 da tabela 7.8.

Na posição 6, o fato da carga total ser transmitida somente por um par de dentes na condição com as modificações nas superfícies dos dentes, ao invés de ser distribuída em três pares de dentes como na condição inicial antes das modificações, pode parecer num primeiro momento um demérito para a solução do problema devido ao aumento das tensões atuantes no dente chamado de dente 2, ver tabela 7.8. Mas observa-se na figura 7.20 que antes da introdução das modificações no perfil dos dentes, a carga estava distribuída em parte nas extremidades dos

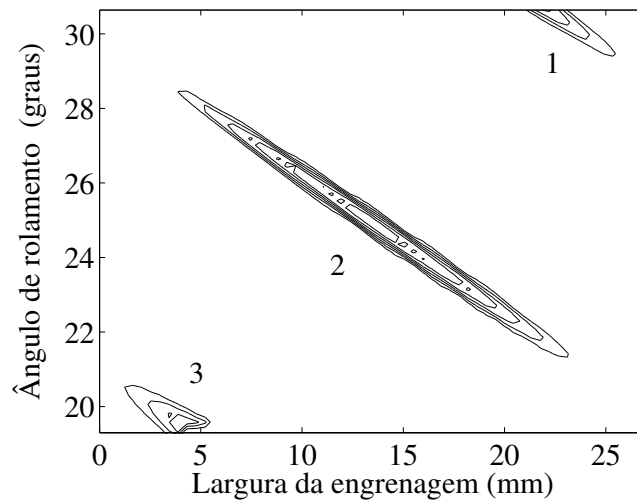


Fig. 7.20: Localização da carga nos três pares de dentes na condição sem modificações no perfil dos dentes.

dentes 1 e 3.

Esta condição de contato nas extremidades dos dentes pode resultar tanto em problemas de resistência do par de engrenagens, devido às tensões de contato elevadas na condição de singularidade, como em problemas de ruído, devido ao impacto do contato prematuro do dente adjacente [85, p.15]. Estas são razões pelas quais usualmente são introduzidos alívios no perfil dos dentes das engrenagens (ver capítulo 1).

A partir dos estudos feitos e apresentados nesta seção quanto à composição do ETL em parcela geométrica e parcela elástica, e quanto à distribuição de carga, torna-se claro como ocorreu a redução do PPETL através das modificações nas superfícies dos dentes determinadas pelo método proposto.

7.7 Comparação com a superfície de resposta do problema

Nos exemplos numéricos analisados através dos três estudos de caso, após a otimização os valores do PPETL convergiram para valores próximo de zero (ver tabela 7.5), que seria o

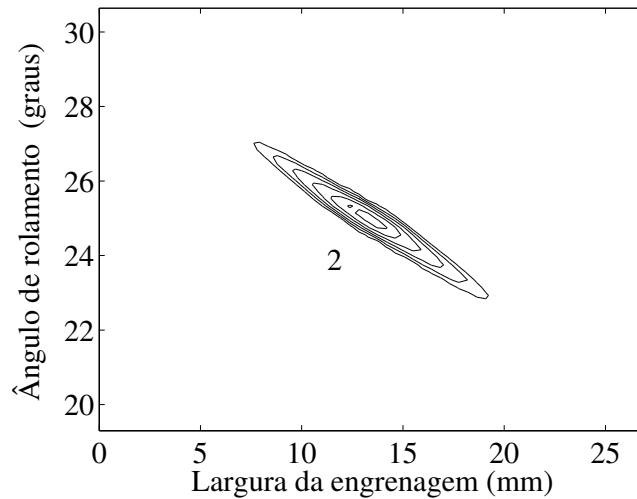


Fig. 7.21: Localização da carga no par de dentes na condição com modificações no perfil dos dentes.

valor limite para a solução ótima do problema. No entanto, considerou-se importante conhecer o comportamento da função objetivo no domínio da solução do problema para verificar a existência de outros pontos de mínimo. Isto foi feito através da análise da superfície de resposta do problema, que foi obtida repetindo-se o procedimento de cálculo do erro de transmissão para diversos valores das variáveis do problema.

A resposta do problema em questão pode ser obtida conhecendo-se as quatro variáveis relacionadas aos alívios do perfil dos dentes (ver seção 6.3.5 e figura 6.10). No entanto, como as duas engrenagens do par são idênticas para os estudos de caso 1 e 2, pode-se fazer uma aproximação de que as extensões dos alívios no topo e na raiz dos dentes são iguais, assim como as suas amplitudes. Isto faz com que se tenha apenas duas variáveis para o problema, a extensão e a amplitude do alívio. Simplificando o problema desta forma, torna-se mais simples a obtenção da superfície de resposta devido ao menor número de repetições dos cálculos.

Para o estudo da superfície de resposta do problema, usou-se o par de engrenagens chamado de caso 1 (ver seção 7.1). Definiu-se os intervalos para as amplitudes dos alívios, entre 0 e $-20\mu m$, e para a extensão dos alívios entre 0 e metade da altura do dente. Discretizou-se estes

intervalos em 30 pontos.

O erro de transmissão nas 25 posições do ciclo de engrenamento foi calculado para cada combinação de extensão e amplitude dos alívios, que foram assumidos como sendo iguais no topo e na raiz. O procedimento de cálculo do erro de transmissão foi executado 900 vezes para se obter o PPETL nas 25 posições do ciclo de engrenamento para cada combinação das variáveis do problema. Para isto foram gastas 11.6 horas de processamento computacional, usando o equipamento descrito na seção 7.5.

A superfície de resposta obtida com as simplificações assumidas é mostrada na figura 7.22. Já a figura 7.23 mostra os resultados em forma de gráfico de contorno ou curvas de nível. Nas figuras 7.22 e 7.23 os alívios são mostrados com sinal positivo apenas por uma questão de representação gráfica. Por convenção aqueles valores são negativos para representar remoção de material em relação à evolvente verdadeira.

Pode-se observar nas figuras 7.22 e 7.23 que o problema apresenta uma única região de mínimo para o domínio definido, e ainda que a resposta calculada no procedimento de otimização encontra-se nesta região de mínimo. Observa-se na tabela 7.9 que o valor mínimo encontrado é maior do que o mínimo PPETL encontrado através do programa de otimização. Isto se deve à discretização do intervalo e às aproximações feitas para o cálculo da superfície de resposta, onde foi assumido alívios iguais no topo e na raiz.

A tabela 7.9 compara os valores encontrados através da superfície de resposta com os valores obtidos através do procedimento de otimização.

Pode-se concluir através desta análise da superfície de resposta do problema e através do próprio valor do PPETL obtido através do programa de otimização que o procedimento de otimização foi eficaz na busca da solução ótima para este estudo de caso.

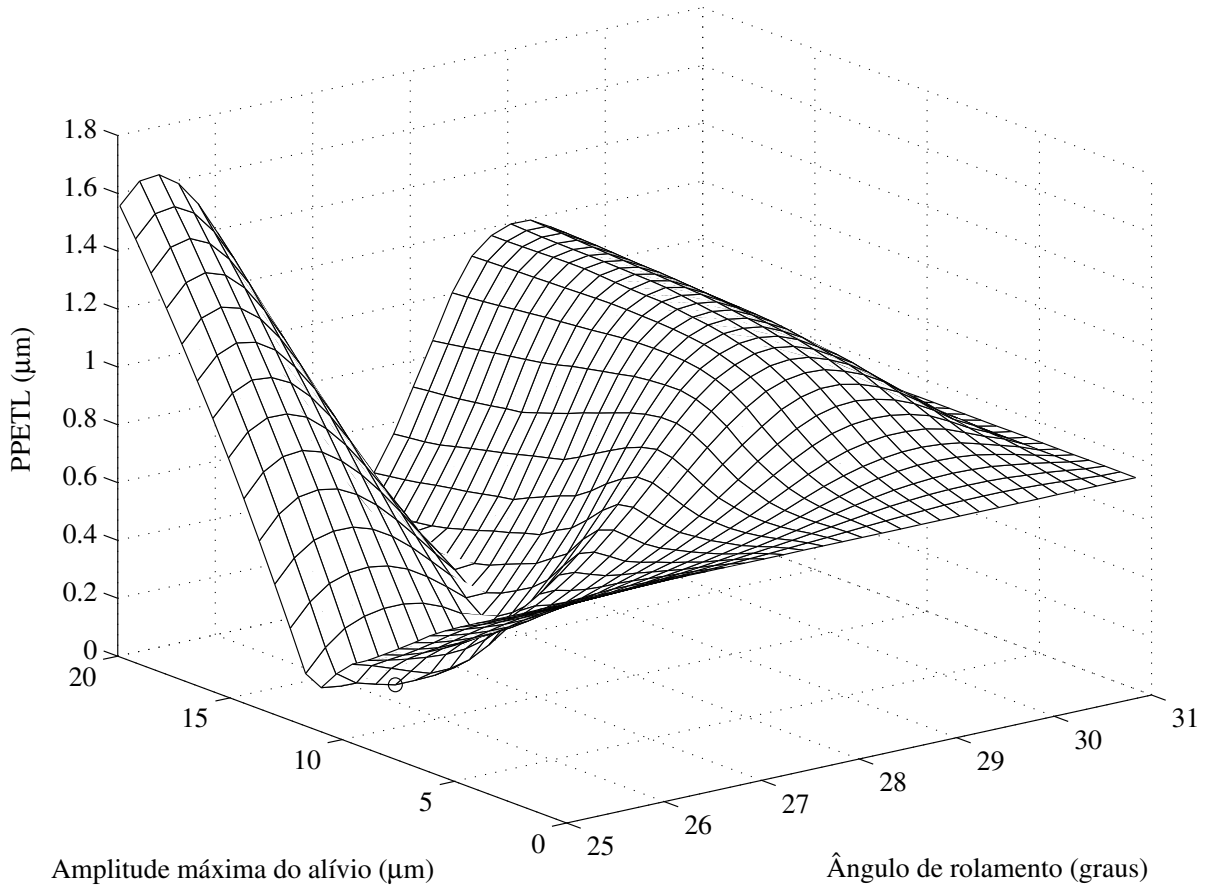


Fig. 7.22: Superfície de resposta do problema para o caso 1 com alívio afim.

7.8 Sumário do estudo de verificação do método proposto

Neste capítulo avaliou-se o método proposto através de exemplos numéricos. Para isto, três diferentes pares de engrenagens de dentes helicoidais foram selecionados. Para se avaliar a consistência do método, o estudo dos três casos levou em conta diferentes considerações quanto ao torque imposto para a análise, quanto à discretização das superfícies e do ciclo de engrenamento, quanto à geometria das engrenagens selecionadas e ainda quanto ao fator de ganho.

Constatou-se nos estudos que existe uma solução ótima para cada par de engrenagens. Isto dificulta a definição de um critério geral de projeto para a especificação das modificações dos dentes. Daí a necessidade de um procedimento de otimização para ser usado nos processos

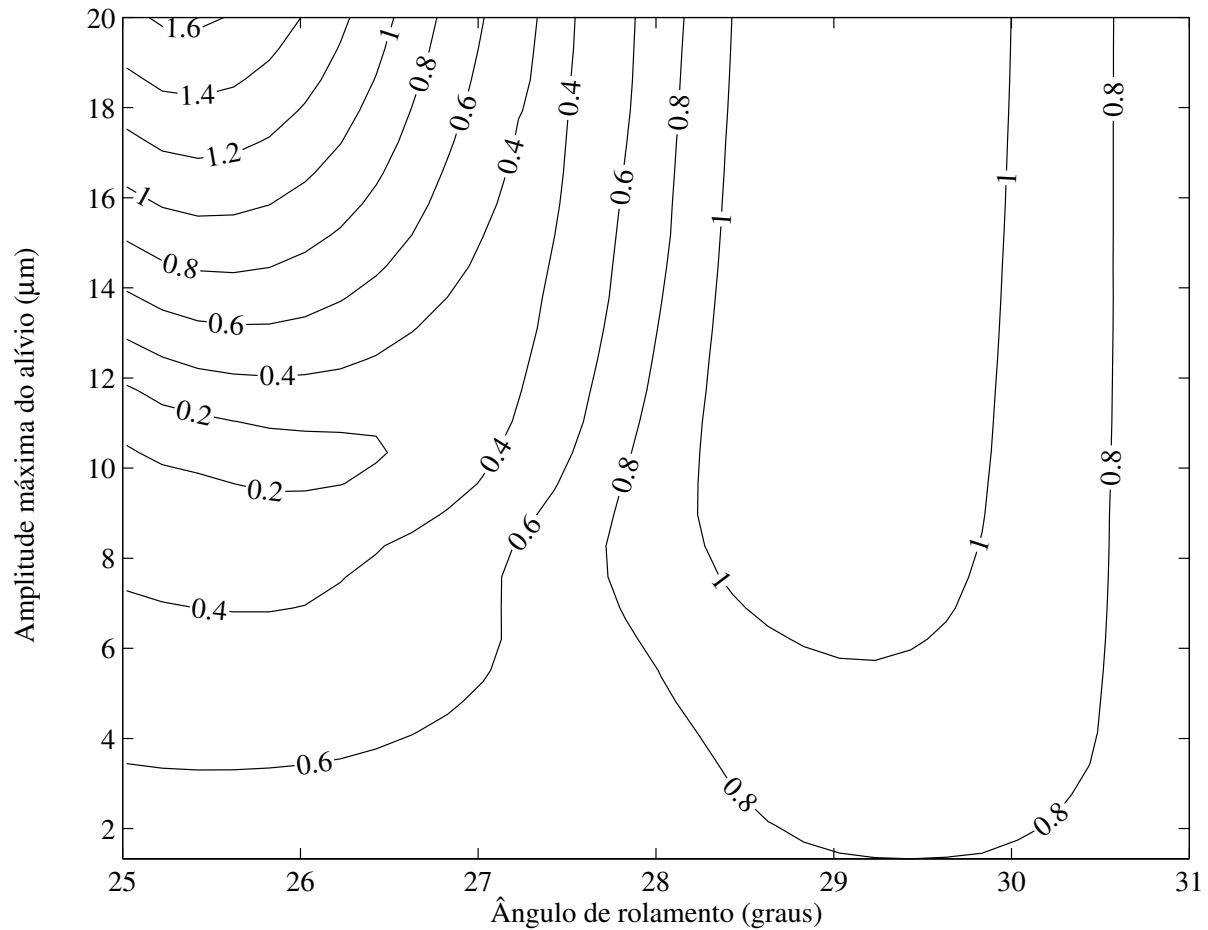


Fig. 7.23: Gráfico de contorno da resposta do problema para o caso 1 com alívio afim.

de projeto de pares de engrenagens para a determinação das modificações que minimizam o PPETL.

O programa de otimização desenvolvido mostrou-se consistente e robusto para os casos estudados, considerando tanto os alívios no perfil dos dentes conforme funções afins e quanto os alívios conforme funções quadráticas. Para todos os casos obteve-se reduções bastantes significativas no PPETL. Estas reduções foram da ordem de 6 a 25 vezes em relação ao PPETL na condição inicial.

As reduções obtidas nos valores do PPETL são bastante interessantes considerando-se que as oscilações medidas pelo PPETL correspondem as excitações que provocam o ruído dos pares

Tab. 7.9: Comparação dos resultados para o caso 1 com alívios afins.

Resultados	Unidade	Procedimento de otimização	Superfície de resposta
PPETL	(μm)	0.0459	0.1335
x_1	(μm)	-10.3690	-10.3448
x_2	$(graus)$	25.1442	25.6240
x_3	(μm)	-11.3480	-10.3448
x_4	$(graus)$	24.8050	24.1948
Número de iterações		21	900
Tempo de processamento	(h)	0.19	11.6

engrenados, e que a redução da amplitude da excitação contribui para a redução da emissão de ruído.

Capítulo 8

Conclusões e sugestões para próximos trabalhos

O objetivo deste capítulo final é apresentar um resumo do trabalho realizado, destacar os seus pontos relevantes, suas aplicações e limitações, apresentar as principais conclusões e propor temas a serem desenvolvidos em futuros trabalhos para que se avance nesta linha de pesquisa.

O trabalho desenvolvido iniciou-se com a melhoria na modelagem do erro de transmissão com análise de contato global entre os dentes para permitir o cálculo do erro de transmissão de forma eficiente do ponto de vista computacional. A implementação de técnicas como a pseudo-interferência e o método de fatorização de Cholesky permitiram a obtenção de um ganho computacional significativo. Conforme foi apresentado no capítulo 3 o ganho computacional obtido foi da ordem de 600 vezes em relação ao procedimento original desenvolvido pelo presente autor em seu trabalho de mestrado [111]. Este ganho de eficiência foi essencial para permitir a aplicação do procedimento de cálculo em ambientes de projeto de engrenagens, e ainda, para viabilizar a implementação de um algoritmo iterativo de otimização.

No capítulo 4 avaliou-se a sensibilidade do modelo às variáveis do problema. Confirmou-se a influência da forma do perfil evolvente no PPETL, assim como dos desvios do passo da hélice. É fato que estes parâmetros precisam ser bem controlados na fabricação e aplicação das engrenagens para permitir um bom desempenho destes componentes quanto ao nível de ruído.

Uma questão importante levantada a partir da análise de sensibilidade e que deve servir como um alerta para que os procedimentos para as especificações de engrenagens sejam revistos é quanto à simetria das tolerâncias de fabricação. A análise de sensibilidade mostra que o comportamento da resposta do erro de transmissão não é simétrico em relação à variação de certos parâmetros. Desta forma, no projeto dever-se-ia especificar limites superiores e inferiores distintos em torno das dimensões nominais. A análise de sensibilidade mostrou também o potencial de redução do PPETL a partir das modificações do perfil evolvente.

Para que o procedimento de otimização pudesse obter resultados válidos do ponto de vista de solução de projeto, o procedimento de cálculo do erro de transmissão deveria representar de forma satisfatória o fenômeno físico. Para assegurar isto, comparou-se no capítulo 5 resultados do erro de transmissão calculados com o procedimento proposto com medições do erro de transmissão para um par de engrenagens helicoidais sob diferentes torques. Nestas comparações constatou-se que os resultados calculados para o PPETL apresentam uma tendência próxima daquela observada nos resultados do PPETL obtidos nas medições. O capítulo 5 mostrou ainda a comparação entre o PPETL e medições de ruído gerado pelo par de engrenagens, onde se pode observar a forte relação que existe entre eles. Isto reforça a importância do estudo realizado para minimizar o PPETL como forma de reduzir o ruído dos pares engrenados.

O método para determinar as modificações das superfícies dos dentes que minimizam o PPETL foi então desenvolvido e implementado usando o procedimento de cálculo do erro de transmissão (ver capítulo 6). Este método proposto é baseado no critério de ótimo a partir de uma abordagem intuitiva e do conhecimento físico do problema. As modificações consideradas ideais, que são obtidas inicialmente, são aproximadas daquelas descritas por funções afins ou quadráticas através da solução de um problema de ajuste de curva. As variáveis das funções afins ou quadráticas são obtidas através da minimização do resíduo entre as modificações ideais e as modificações aproximadas pelas funções. O problema de minimização é resolvido usando-se um algoritmo de programação sequencial quadrática. O método proposto é simples do ponto de vista matemático e se mostrou eficiente nos exemplos numéricos estudados. No entanto, a aplicação do método é restrita ao problema para o qual ele foi desenvolvido, ou seja, para a

determinação das modificações das superfícies dos dentes que minimizam o PPETL.

Na implementação do método desenvolvido adotou-se trabalhar com modificações somente no perfil dos dentes e de fácil obtenção através dos processos convencionais de fabricação de engrenagens. No entanto, o método é flexível neste aspecto, e outras funções para as modificações podem ser implementadas, tais como, modificações do perfil por funções polinomiais e modificações no passo da hélice.

Para a verificação do método proposto neste trabalho, implementou-se o procedimento em forma de programa computacional em linguagem MATLAB [60], e executou-se o programa de otimização para três pares de engrenagens helicoidais com características geométricas distintas. Entre estas características destacam-se o ângulo de hélice, o qual variou entre 33.55° para o primeiro estudo de caso, e 15° para o terceiro estudo de caso, também quanto ao módulo dos três pares de engrenagens, 4.3, 2.7 e 1.9mm. Estes estudos foram relatados no capítulo 7.

O programa de otimização mostrou-se estável e consistente para exemplos numéricos estudados. Nos três casos o programa obteve a convergência para a solução em um número satisfatório de iterações. As reduções obtidas no PPETL foram significativas, da ordem de 6 a 25 vezes menores em relação aos valores iniciais. Os tempos computacionais gastos para a solução foram entre 8 a 18 minutos usando-se um microcomputador com processador Pentium Intel Xeo de 2.8GHz e com 2.1GB de memória (RAM). Considera-se que estes tempos de processamento são aceitáveis do ponto de vista prático de projeto.

Comparou-se ainda a solução obtida com o programa de otimização com a superfície de resposta do problema obtida através da repetição dos cálculos para valores discretos dos parâmetros do problema no domínio da solução. Constatou-se que as soluções obtidas pelo programa de otimização localizam-se na região de mínimo global do problema.

Pelos resultados obtidos com o programa de otimização através dos exemplos numéricos analisados, considera-se que o método proposto para a determinação das modificações das superfícies dos dentes é adequado para ser usado como ferramenta de projeto de pares engrenados de dentes helicoidais.

Com a aplicação do método proposto neste trabalho, o projetista poderá determinar os parâmetros ótimos para os alívios dos dentes para cada projeto de engrenagens. Substituindo a prática usual de especificar os alívios através de métodos de tentativa e erro, ou baseado na experiência passada ou projeto similar. No entanto, de nenhuma forma tem-se a pretensão de substituir, através do método desenvolvido, a experiência do projetista. A intenção é fornecer ao projetista uma ferramenta adicional para auxiliá-lo na obtenção de projetos otimizados. Haja vista que o projeto de engrenagens é um processo complexo que não se limita somente à análise do erro de transmissão. Existem outros compromissos importantes quanto à resistência e à durabilidade destes componentes, além de particularidades de cada aplicação.

Acredita-se que a conclusão deste trabalho traz uma contribuição para o tema pesquisado relativo ao projeto de engrenagens à medida que fornece um método de certa simplicidade para o cálculo das modificações das superfícies dos dentes que minimizam a excitação gerada pelo erro de transmissão. Mas de forma alguma esgota o conhecimento nesta linha de pesquisa. Pelo contrário, levanta novos questionamentos e abre novas possibilidades de pesquisa.

Como trabalhos futuros nesta linha de pesquisa, acredita-se que seria importante avaliar, através do método desenvolvido, outras modificações das superfícies dos dentes, além dos alívios do perfil estudados neste trabalho. Principalmente para as aplicações de pares de engrenagens que operam em sistemas com erros significativos de alinhamento entre os eixos, por exemplo aqueles causados pela deflexão de eixos.

Dois estudos envolvendo os erros de fabricação seriam também bastante interessantes. Um deles relacionado ao estudo do efeito das tolerâncias de fabricação das engrenagens na variação do erro de transmissão. E um outro quanto ao estudo de um método para determinar uma solução ótima que minimiza a variação do erro de transmissão e que seja robusta aos erros de fabricação.

A investigação da relação entre a solução ótima para minimizar a variação do erro de transmissão e a resistência do par engrenado também seria um importante trabalho a ser feito. Considera-se também importante como um trabalho futuro a verificação experimental

dos resultados obtidos neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Ajmi and P. Velex. A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*, 40:173–190, 2005.
- [2] J. Allwood. Survey and performance assessment of solution methods for elastic rough contact problems. *ASME Journal of Tribology*, 127(1):10–23, Jan 2005.
- [3] J. Allwood and H. Ciftci. An incremental solution method for rough contact problems. *Journal of Wear*, 258:1601–1615, 2005.
- [4] A. Bajpai. The effect of gear geometry and surface finish on measured transmission error and noise for several gear sets. Dissertação de mestrado, The Ohio State University, 2004.
- [5] D. W. Barnett. G-noise - an analytical approach to gear profile optimisation for low noise emissions. In British Gear Association, editor, *Annual BGA Conference*, 1990.
- [6] E. Baron, B. Favre, and P. Mairesse. Analysis of relation between gear noise and transmission error. In Internoise, editor, *Internoise 88*, pages 611–614, 1988.
- [7] S. Baud and P. Velex. Static and dynamic tooth loading in spur and helical geared systems-experiments and model validation. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 124:334–346, Jun 2002.
- [8] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. Wiley, 1993.

- [9] M. R. Beacham et al. Development of transmission whine prediction tools. *Journal of Society of Automotive Engineers*, pages 887–897, 1999.
- [10] M. Beghini, F. Presicce, and C. Santus. A method to define profile modification of spur gear and minimize the transmission error. In AGMA, editor, *Proceedings of AGMA Fall Technical Meeting*, pages 1–9, Milwaukee, Oct 2004.
- [11] C. K. Chen, S. T. Chiou, Z. H. Fong, C. K. Lee, and C. H. Chen. Mathematical model of curvature analysis for conjugate surfaces with generalized motion in three dimensions. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, 215:487–502, 2001.
- [12] Y. C. Chen and C. B. Tsay. Bearing contact of a helical gear pair with involute teeth pinion and modified circular-arc teeth gear. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, 215:1175–1187, 2001.
- [13] Y. C. Chen and C. B. Tsay. Contact ratios and transmission errors of a helical gear set with involute-teeth pinion and modified-circular-arc-teeth gear. *JSME International Journal - Series C*, 44(3):867–874, 2001.
- [14] C. H. Chung, G. Steyer, T. Abe, M. Clapper, and C. Shah. Gear noise reduction through transmission error control and gear blank dynamic tuning. *Society of Automotive Engineers*, 1999.
- [15] M. Z. Cohn. Theory and practice of structural optimization. *Structural Optimization*, 7:20–31, 1994.
- [16] T. F. Conry and A. Seireg. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 38(2):387–392, 1971.
- [17] T. F. Conry and A. Seireg. A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems. *Journal of Engineering for Industry - Transactions of the ASME*, 95:1115–1122, Nov 1973.

- [18] R. W. Cornell. Compliance and stress sensitivity on spur gear teeth. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 103:447–459, Apr 1981.
- [19] M. C. C. Cunha. *Métodos numéricos*. Editora da Unicamp, 2003.
- [20] S. Curtis, J. Pears, D. Palmer, M. Eccles, A. Poon, M. G. Kim, G. Y. Jeon, J. K. Kim, and S. H. Joo. An analytical method to reduce gear whine noise, including validation with test data. In SAE, editor, *2005 SAE World Congress - Transmissions and Drivelines Symposium - 4WD/AWD*, Apr 2005.
- [21] J. M. de Mul, J. J. Kalker, and B. Fredriksson. The contact between arbitrarily curved bodies of finite dimensions. *ASME Journal of Tribology*, 140(8):140–148, Jan 1986.
- [22] DIN3960. *Concepts and parameters associated with cylindrical gears and cylindrical gear pairs with involute teeth*. Deutsche Normen, 1987.
- [23] DIN3962. *Tolerances for cylindrical gear teeth*. Deutsche Normen, 1978.
- [24] DIN3964. *Deviations of shaft centre distances and shafts position tolerances of casings for cylindrical gears*. Deutsche Normen, 1980.
- [25] E. O. Doebelin. *System modeling and response - Theoretical and experimental approaches*. John Wiley and Sons, Inc., 1980.
- [26] D. W. Dudley. *Handbook of practical gear design*. CRC, 1984.
- [27] O. Duverger, P. Velex, L. Vedmar, and P. Sainsot. A model of the dynamic behavior of spur gears with consideration of off line-of-action contacts. In ASME, editor, *ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 1–8, Chicago, IL, 2003.
- [28] M. I. Friswell and J. E. Mottershead. *Finite element modal updating in structural dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [29] R. W. Gregory, S. L. Harris, and R. G. Munro. Dynamics behaviour of spur gears. *Proc. of the IMechE*, 178(1):207–226, 1963.

- [30] R. T. Haftka and Z. Gürdal. Elements of structural optimization. In G. M. L. Gladwell, editor, *Solid mechanics and its applications*, page 481. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [31] S. L. Harris. Dynamics loads on the teeth of spur gears. *Proc. of the IMechE*, 172(2):87–112, 1958.
- [32] J. Herskovits, A. Leontiev, G. Dias, and G. Santos. Contact shape optimization: a bilevel programming approach. *Struct Multidisc Optim*, 20:214–221, 2000.
- [33] S. Honda. Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces (2nd report). *JSME International Journal Series C: Dynamic, Control and Robotics*, 36(3):375–384, 1993.
- [34] S. Honda. Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces (modified tooth surfaces and its equivalent tooth profile). *JSME International Journal Series C: Dynamic, Control and Robotics*, 36(1):125–134, 1993.
- [35] S. Honda. Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces (verification of the new theory by experiment and a new design method for dynamic performance). *JSME International Journal Series C: Dynamic, Control and Robotics*, 38(1):112–121, 1995.
- [36] D. R. Houser. Research in the gear dynamics and gear noise research laboratory. *Journal of the Society of Automotive Engineers*, pages 15–23, 1982.
- [37] D. R. Houser. *Gear design manufacturing and inspection manual AE-15*, chapter Gear noise sources and their prediction using mathematical models, pages 213–222. SAE International, 1990.
- [38] D. R. Houser. *Dudley’s Gear Handbook*, chapter Gear noise, pages 14.1–14.32. McGraw-Hill, 1991.
- [39] D. R. Houser and G. W. Blankenship. Methods for measuring gear transmission error under load and at operating speeds. In SAE, editor, *International Off-Highway and Powertrain Congress and Exposition*, pages 1–8, Sep 1989.

- [40] D. R. Houser, V. M. Bolze, and J. M. Graber. Static and dynamic transmission error measurements and predictions for spur and helical gear sets. In ASME, editor, *The 7th International Power Transmission and Gearing Conference*, pages 365–372, Oct 1996.
- [41] D. R. Houser, J. Harianto, N. Iyer, J. Josephson, and B. Chandrasekaren. A multi-variable approach to determining the 'best' gear design. In ASME, editor, *2000 ASME Power Transmission and Gearing Conference*, pages 1–8, Sep 2000.
- [42] Z. Hu, H. Zhang, D. Yan, and S. Yan. Minimization of gear tooth profile modification on the reponse of noise reduction. In *Internoise*, pages 75–78, 1987.
- [43] Y. Iwase and K. Miyasaka. Proposal of modified tooth surface with minimized transmission error of helical gears. *JSAE Review*, 17:191–212, 1996.
- [44] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge Univ. Press, 1985.
- [45] S. Kawamoto et al. A study on gear noise reduction based on helical-gear tooth accuracy. *Journal of the Society of Automotive Engineers*, pages 67–72, 1991.
- [46] U. Kirsch. *Optimum structural design - Concepts, methods and applications*. McGraw-Hill Book Company, 1981.
- [47] U. Kirsch and G. I. N. Rozvany. Alternative formulations of structural optimization. *Structural Optimization*, 7:32–41, 1994.
- [48] J. G. Kish and C. Isabelle. Gear tooth topological modification. Patent number 5,315,790, United State Patent, May 1994.
- [49] H. Kohler. Gear dynamics, noise and vibration. Relatórios r/d-002 e r/d-003, British Gear Association, 1988.
- [50] J. H. Kuang and Y. T. Yang. An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair. In ASME, editor, *The ASME International Power Transmission and Gearing Conference*, pages 1–9, 1992.

- [51] S. Kurokawa, Y. Ariura, and M. Ohtahara. Transmission errors of cylindrical gears under load - influence of tooth profile modification and tooth deflections. In ASME, editor, *The 7th ASME International Power and Gearing Conference*, pages 213–217, San Diego, CA, Oct 1996.
- [52] S. Li. Gear contact model and loaded tooth contact analysis of a three-dimensional, thin-rimmed gear. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 124:511–517, Sep 2002.
- [53] F. L. Litvin. *Gear geometry and applied theory*. PTR Prentice Hall, 1994.
- [54] F. L. Litvin, J. S. Chen, and R. F. Handschuh. Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 118:561–567, Dec 1996.
- [55] F. L. Litvin, N. X. Chen, C. L. Hsiao, and R. F. Handschuh. Generation of helical gears with new surfaces topology by application of cnc machines. *Gear Technology - Journal of Gear Manufacturing*, pages 30–33, Jan/Feb 1994.
- [56] F. L. Litvin, N. X. Chen, J. Lu, and R. F. Handschuh. Computerized design and generation of low-noise helical gears with modified surface topology. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 117:254–261, Jun 1995.
- [57] F. L. Litvin, P. H. Feng, S. A. Lagutin, D. P. Townsend, and T. M. Sep. Helical and spur gear drive with double crowned pinion tooth surfaces and conjugated gear tooth surfaces. Patent number 6,205,879, United State Patent, Mar 2001.
- [58] O. Lundvall, N. Strömberg, and A. Klarbring. A flexible multi-body approach for frictional contact in spur gears. *Journal of Sound and Vibration*, 278:479–499, 2004.
- [59] H. Maki. Gear with modified tooth surface and gear tooth surface modification method. Patent number 6,112,611, United State Patent, Sep 2000.
- [60] Mathworks, Inc, <http://www.mathworks.com>. *MATLAB - the Mathematical Computer Language*, 2005.

- [61] R. Meske, J. Sauter, and E. Schnack. Nonparametric gradient-less shape optimization for real-world applications. *Struct Multidisc Optim*, 30:201–218, 2005.
- [62] R. G. Munro. A review of the theory and measurement of gear transmission error. In IMechE, editor, *1st IMechE Conference on Gearbox Noise and Vibration*, pages 3–10, 1990.
- [63] R. G. Munro, D. Palmer, and L. Morrish. An experimental method to measure gear tooth stiffness throughout and beyond the path of contact. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, 215:793–803, 2001.
- [64] M. A. Nielsen, W. J. Pearce, and W. S. Rouverol. Minimizing gear noise excitation. In AGMA, editor, *AGMA Fall Technical Meeting*, page 17p., San Francisco, 1985.
- [65] M. E. Norman. A new design tool for optimising gear geometry for low noise. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, pages 231–244, 1995.
- [66] F. B. Osvald, A. F. Seybert, T. W. Wu, and W. Atherton. Comparison of analysis and experiment for gearbox noise. Technical memorandum 105330, NASA, 1992.
- [67] H. N. Ozguven and D. R. Houser. Mathematical models used in gear dynamics - a review. *Journal of Sound and Vibration*, 121(3):383–411, 1988.
- [68] D. Palmer. The effects of profile relief on narrow face width parallel axis gears. Tese de doutorado, Universidade de Huddersfield - Inglaterra, 1999.
- [69] C. Park and J. M. Lee. The load transmission and vibration characteristics of automobile gear. *Journal of the Society of Automotive Engineers*, pages 1–11, 1993.
- [70] M. Pimsarn and K. Kazerounian. Efficient evaluation of spur gear tooth mesh load using pseudo-interference stiffness estimation method. *Mechanism and Machine Theory*, 37:769–786, 2002.
- [71] M. Pimsarn and K. Kazerounian. Pseudo-interference stiffness estimation, a highly efficient numerical method for force evaluation in contact problems. *Engineering with Computers*, 19:85–91, 2003.

- [72] I. A. Polonsky and L. M. Keer. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Journal of Wear*, 231:206–219, 1999.
- [73] J. P. Raclot and P. Velex. Simulation of the dynamic behaviour of single and multi-stage geared systems with shape deviations and mounting errors by using a spectral method. *Journal of Sound and Vibration*, 220(5):861–903, 1999.
- [74] S. S. Rao and K. Y. Yoon. Minimization of transmissin error in helical gears. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, 215(C4):447–459, 2001.
- [75] E. P. Remmers. Gear mesh excitation spectra for arbitrary tooth spacing errors, loads and design contact ratio. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 100:715–720, 1978.
- [76] W. S. Rouverol. Zero transmission error gearing. Patent number 5,083,474, United State Patent, Jan 1992.
- [77] W. S. Rouverol. Zero dynamic increment gearing. Patent number 5,341,699, United State Patent, Aug 1994.
- [78] W. S. Rouverol. Differential crowning - a new weapon against gear noise and dynamic load. Página na internet, Axicon Technologies, Abr 1996. <http://www.axicontechnologies.com>.
- [79] W. S. Rouverol and W. J. Pearce. The reduction of gear pair transmission error by minimizing mesh stiffness variation. In AGMA, editor, *AGMA Fall Technical Meeting*, 1988.
- [80] P. Sainsot and P. Velex. Contribution of gear body to tooth deflections - a new bidimensional analytical formula. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 126:748–752, Jul 2004.

- [81] C. Santus, F. Presicce, and M. Beghini. Proposal for tip relief modification to reduce noise and sensitivity to meshing conditions in spur gear. *Gear Technology - Journal of Gear Manufacturing*, pages 34–40, Mar/Apr 2006.
- [82] J. D. Smith. The uses and limitations of transmission error. *Gear Technology - Journal of Gear Manufacturing*, pages 34–39, Jul/Aug 1988.
- [83] J. D. Smith. Helical gear vibration excitation with misalignment. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, 208:71–79, 1994.
- [84] J. D. Smith. Estimation of the static load distribution factor for helical gears. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, 209:193–199, 1995.
- [85] J. D. Smith. *Gear noise and vibration*. Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [86] R. E. Smith. The relationship of measured gear noise to measured gear transmission errors. *American Gear Manufacturers Association*, pages 1–10, Oct 1987.
- [87] H. J. Stadtfeld. Good basic design or sophisticated flank optimizations ? each at the right time. *Gear Technology - Journal of Gear Manufacturing*, pages 20–23, Jan/Feb 2005.
- [88] J. H. Steward. The compliance of solid wide-faced spur gears. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 112:590–595, 1990.
- [89] G. Strang. *Linear algebra and its applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
- [90] S. Sundaresan, K. Ishii, and D. R. Houser. Design optimization for robustness using performance simulation programs. In ASME, editor, *17th ASME Design Automation Conference*, pages 249–256, Oct 1991.
- [91] M. S. Tavakoli and D. R. Houser. Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gear. In ASME, editor, *ASME Conference on Design Engineering*, pages 1–9, Oct 1984.
- [92] R. T. Tseng and C. B. Tsay. Contact characteristics of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth. *Mechanism and Machine Theory*, 39:905–919, 2004.

- [93] M. Umeyama, M. Kato, and K. Inoue. Effects of gear dimensions and tooth surface modifications on the loaded transmission error of a helical gear pair. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 120(1):119–125, Mar 1998.
- [94] K. Umezawa. The meshing test on helical gears under load transmission - 1st report, the approximate formula for deflections of gear tooth. *Bulletin of the JSME*, 15(90):1632–1639, 1972.
- [95] K. Umezawa. Low vibration design on a helical gear pair. *Gear Technology - Journal of Gear Manufacturing*, 17(1):18–25, Jan/Feb 2000.
- [96] K. Umezawa and J. Ishikawa. Deflection due to contact between gear teeth with finite width. *Bulletin of the JSME*, 16(97):1085–1093, 1973.
- [97] R. J. Vanderbei. *Linear Programming: Foundations and Extensions (International Series in Operations Research and Management Science)*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [98] P. Velex and M. Ajmi. Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears - approximate dynamic factor formulae. *Mechanism and Machine Theory*, Em publicação(doi:10.1016/j.mechmachtheory.2006.12.009), 2007.
- [99] P. Velex and V. Cahouet. Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical gear dynamics. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 122:515–522, Dec 2000.
- [100] P. Velex and M. Maatar. A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5):629–660, 1996.
- [101] S. Vijayakar. A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:525–545, 1991.

- [102] H. Vinayak, B. D. Hansen, E. J. Karedes, C. V. Cooper, and L. M. Zunski. Gear tooth topological modification for reducing noise and vibration in transmission systems. Patent number 6,918,181, United State Patent, Jul 2005.
- [103] H. Vinayak and D. R. Houser. A comparison of analytical predictions with experimental measurements of transmission error of misaligned loaded gears. In ASME, editor, *The 1992 ASME International Power and Gearing Conference*, pages 11–18, Scottsdale, AZ, Sep 1992.
- [104] P. Wagaj and A. Kahraman. Impact of tooth profile modifications on the transmission error excitation of helical gear pairs. In *6th Biennnnial Conferenceon Engineering Systems Design and Analysis*, Istanbul, Turkey, July 2002.
- [105] P. Wagaj and A. Kahraman. Influence of tooth profile modification on helical gear durability. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 124:501–510, Sep 2002.
- [106] H. Walker. Gear tooth deflection and profile modification. *The Engineer*, 1(166):410–435, Oct 1938.
- [107] M. Weck and G. Mauer. Optimum tooth flank corrections for helical gears. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 112:584–589, Dec 1990.
- [108] D. B. Welbourn. Gear errors and their resultant noise spectra. In IMechE, editor, *IMechE Conference on Gearing*, pages 131–139, 1970.
- [109] D. B. Welbourn. Fundamental knowledge of gear noise - a survey. In IMechE, editor, *IMechE Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions*, pages 9–14, Cranfield, Jul 1979.
- [110] L. Wilcox and W. Coleman. Application of finite elements to the analysis of gear tooth stresses. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 95(4):1139–1148, 1973.

- [111] C. H. Wink. Cálculo do erro de transmissão de pares engrenados com modificações na microgeometria dos dentes. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Setembro 2002.
- [112] C. H. Wink and A. L. Serpa. Efficient procedure to calculate transmission error of helical gear pairs with global tooth contact analysis using a combined pseudo-interference and linear programming solution. In *The 18th International Congress of Mechanical Engineering*, Ouro Preto, MG, Nov 2005.
- [113] C. H. Wink and A. L. Serpa. Investigation of tooth contact deviations from the plane of action and their effects on gear transmission error. *Proc. of the IMechE, Part C - Journal of Mechanical Engineering Science*, 219(5):501–509, 2005.
- [114] Y. Zhang and Z. Fang. Analysis of transmission errors under load of helical gears with modified tooth surfaces. *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, 119(1):120–126, Mar 1997.

Apêndice A

Coeficientes de influência

A.1 Coeficientes da deflexão da região de contato

A deflexão de contato pode ser expressa através do produto de um coeficiente e da força aplicada nos pontos discretos em contato, conforme foi apresentado na equação (3.2) na seção 3.3.1.

A força aplicada a uma dada distância do centro da engrenagem motora é equivalente a um torque t_1 tomado na engrenagem motora.

$$p = \frac{t_1}{r_1} \times 10^3 , \quad (\text{A.1})$$

onde p é a força tangencial (N), t_1 é o torque (Nm) referente a engrenagem motora que é uma parcela do torque total de análise T (vide equação (3.11) na seção 3.5), e r_1 é o raio referente ao ponto discreto em contato na engrenagem motora (mm).

A força aplicada normal às superfícies nos pontos em contato (vide equação (3.3) na seção 3.3.1) pode ser expressa em função do torque na engrenagem motora usando a equação (A.1),

$$p_{Nj} = \frac{t_1}{r_1} \frac{r_j}{r_{gj}} \left(1 + \tan^2 \beta_g \right)^{\frac{1}{2}} \times 10^3 , \quad (\text{A.2})$$

onde $j = 1, 2$ sendo $j = 1$ para a engrenagem motora e $j = 2$ para a engrenagem movida.

A equação (A.2) pode ser substituída na equação (3.3) da seção 3.3.1 para que a deflexão local de contato seja calculada em função do torque t_1 para os pontos de cada uma das engrenagens.

$$w_{Hj} = \frac{12.5 (1 - \nu^2)}{\pi E} c(\hat{\zeta}) c(\hat{\eta}) \frac{t_1}{r_1} \frac{r_j}{r_{gj}} \left(1 + \tan^2 \beta_g \right)^{\frac{1}{2}} \times 10^3 . \quad (\text{A.3})$$

Finalmente substituindo a equação (A.3) na equação (3.4) da seção 3.3.1 pode-se obter a deflexão local na forma angular em função do coeficiente de deflexão a_c .

$$\Delta w_{Hsj} = a_{cj} t_1 , \quad (\text{A.4})$$

onde:

$$a_{cj} = \frac{12.5 (1 - \nu^2)}{\pi E} c(\hat{\zeta}) c(\hat{\eta}) \frac{r_j}{r_1} \frac{\cos \beta_{pj}}{r_{gj}^2} \left(1 + \tan^2 \beta_g \right)^{\frac{1}{2}} \times 10^3 , \quad (\text{A.5})$$

Δw_{Hsj} é a deflexão local na forma angular na engrenagem j devido ao contato (rad), a_{cj} é o coeficiente da deflexão local de contato na engrenagem j , t_1 é o torque referente a força aplicada no ponto em contato (Nm).

Como as deflexões locais de contato são consideradas somente nos pontos em contato, desprezando-se a influência da deflexão causada em um outro ponto da superfície, pode-se montar uma matriz diagonal com os coeficientes da deflexão local de contato somando-se os coeficientes das duas engrenagens.

Por conveniência, a deflexão da engrenagem movida é transferida para a referência da engrenagem motora através da razão dos raios dos pontos em contato nas duas engrenagens. Assim a somatória dos coeficientes da deflexão local pode ser expressa como:

$$a_c = a_{c1} + a_{c2} \frac{r_2}{r_1} , \quad (\text{A.6})$$

onde a_c é o coeficiente da deflexão local das duas engrenagens com referência na engrenagem motora.

A.2 Coeficientes da deflexão do dente

A deflexão do dente como um todo pode ser expressa através dos coeficientes de influência, tendo como base a equação (3.5) na seção 3.3.2.

A força a ser considerada para o cálculo da deflexão do dente através do modelo de placa engastada, p' , é aplicada perpendicularmente ao plano neutro da placa, como mostrado na equação (3.7) (vide seção 3.3.2). Esta força pode ainda ser escrita como:

$$p'_j = \frac{p}{\cos\beta_{pj}} = \frac{t_1}{r_1 \cos\beta_{pj}} \times 10^3, \quad (\text{A.7})$$

onde p'_j é a força normal ao plano neutro da placa (N), p é a força tangencial (N), r_1 é o raio referente ao ponto discreto em contato (mm), t_1 é um torque referente a engrenagem motora (N) (vide equação (3.11) na seção 3.5), β_{pj} é o ângulo de hélice no diâmetro correspondente ao ponto em contato (rad), e $j = 1, 2$ sendo $j = 1$ para a engrenagem motora e $j = 2$ para a engrenagem movida.

A equação (3.5) (vide seção 3.3.2) pode ser reescrita como:

$$w_{Bi} = \sum_{j \in I_c}^n a_{b(i-j)} t_{1j}, \quad (\text{A.8})$$

onde $a_{b(i-j)}$ é o coeficiente de influência da deflexão no ponto i causada por uma força aplicada no ponto j , e é dado por:

$$a_{b(i-j)} = \frac{U}{MP} \frac{v(\bar{r})}{f(\lambda|\bar{x}' - \bar{\zeta}'|) g(|\bar{y}' - \bar{\eta}'|)} \frac{1}{r_{1j} \cos\beta_j} f(\lambda\bar{x}') g(\bar{y}') f(\lambda\bar{\zeta}') g(\bar{\eta}'), \quad (\text{A.9})$$

onde (ζ, η) é o ponto discreto na placa análoga correspondente ao ponto discreto j no dente da engrenagem, (x', y') é o ponto discreto na placa correspondente ao ponto discreto i na superfície do dente da engrenagem.

A deflexão longitudinal calculada na equação (A.8) pode ser transformada para a forma

angular através da equação (3.8) da seção 3.3.2. Portanto, a deflexão do dente como um todo na forma angular é dada por:

$$\Delta w_{Bsi} = \frac{\cos \beta_{ij}}{r_{ij}} \sum_{j \in I_c}^n a_{b(i-j)} t_{1j} . \quad (\text{A.10})$$

Esta equação é válida assumindo-se que: $w_{Bi} \cos \beta_i \ll r_i$ (vide [111, p.63-64]).

Por conveniência, a deflexão angular da engrenagem movida é transferida para a referência da engrenagem motora através da razão dos raios dos pontos em contato nas duas engrenagens. Assim a somatória das deflexões dos dentes das duas engrenagens tomada na engrenagem motora pode ser expressa como:

$$\Delta w_{Bsi} = \Delta w_{Bs1i} + \Delta w_{Bs2i} \frac{r_{2i}}{r_{1i}} , \quad (\text{A.11})$$

onde Δw_{Bsi} é a deflexão total do dente como um todo na forma angular e no ponto em contato i .

A.3 Matriz dos coeficientes de influência

Assume-se neste trabalho que a deflexão total em cada ponto discreto na superfície dos dentes é igual a somatória das componentes das deflexões das duas engrenagens. Desta forma, a matriz dos coeficientes de influência pode ser definida somando-se os coeficientes das equações (A.6) e (A.11).

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.12})$$

onde:

$$\forall i = j : a_{ij} = a_{ci} + \frac{\cos \beta_{1i}}{r_{1i}} a_{b1(i-j)} + \frac{\cos \beta_{2ij}}{r_{1i}} a_{b2(i-j)} , \quad (\text{A.13})$$

$$\forall i \neq j : a_{ij} = \frac{\cos\beta_{1i}}{r_{1i}} a_{b1(i-j)} + \frac{\cos\beta_{2i}}{r_{1i}} a_{b2(i-j)} ,$$

$\mathbf{A}^{(k)}$ é a matriz com os coeficientes de influência referente ao par de dentes engrenados k numa dada posição do ciclo de engrenamento.

Os pares de engrenagens helicoidais apresentam vários pares de dentes engrenados simultaneamente em cada posição do ciclo de engrenamento. Assim a matriz dos coeficientes de influência deve levar em conta os pontos discretos de todos os dentes em contato,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}^{(K)} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.14})$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz diagonal com os coeficientes de influência dos K pares de dentes engrenados numa dada posição do ciclo de engrenamento.

A matriz $\mathbf{A}$ da equação (A.14) pode ser construída para cada uma das posições discretas do ciclo de engrenamento.

A distribuição de carga entre os dentes e o valor do erro de transmissão são obtidos inserindo-se a matriz $\mathbf{A}$ da equação (A.14) na equação (3.15) e resolvendo-se o sistema de equações conforme descrito na seção 3.5.