

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

INFLUÊNCIA DO FLUXO MULTIFÁSICO
EM ANÁLISES DE TESTES DE POÇOS

NÃO SURGENTES

*Este exemplar corresponde ao original final de prova
degradado pelo Eng.º Edson Tsuneo Kato e aprovado
para a comissão pelo professor em 14/11/90.
Kelsen Valente Serra*

Autor : Edson Tsuneo Kato

Orientador : Kelsen Valente Serra

68/90

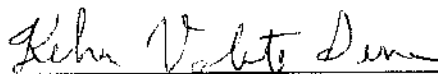
Dezembro de 1990

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A dissertação “Influência do Fluxo Multifásico em Análises de Testes de Poços não Surgentes” elaborada por Edson Tsuneo Kato e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 14 de Dezembro de 1990

Banca Examinadora



Kelsen Valente Serra, Ph.D



Osvaldo Vidal Trevisan, Dr.



Maria Cristina Cunha Bezerra, Dr.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Eliana pela digitação da maior parte dos textos, pela paciência e compreensão.

À minha filha Lumi pela alegria que nos trouxe.

Ao professor Kelsen pela orientação, estímulo e confiança depositada.

Ao professor Antonio Cláudio pelos conhecimentos adquiridos em Simulação Numérica de Reservatórios.

À Petróleo Brasileiro S.A. por ter possibilitado a minha participação no Curso de Mestrado em Engenharia de Petróleo.

RESUMO

Este trabalho considera a influência do fluxo multifásico (óleo, gás e água) na análise de testes de poços não surgentes. Para isso foi construído um simulador numérico, r-z, "black oil", que leva em conta a variação do ponto de bolha e a penetração parcial. Inicialmente o reservatório se encontra em equilíbrio, com a pressão inicial maior ou igual a pressão de bolha inicial.

Uma sequência de "fluxos e estáticas" pode ser fornecida como condição interna, para simular um teste *não-surgente*, considerando o crescimento de uma coluna só de líquido (óleo e água) e desprezando-se os efeitos energéticos.

Comparações com métodos analíticos desenvolvidos para fluxo monofásico de fluido de pequena compressibilidade para determinação dos parâmetros de reservatório de poços não surgentes são feitas para se avaliar a influência do fluxo multifásico.

Durante o período de fluxo("slug test"), desvios significantes acontecem no cálculo dos parâmetros de reservatório (por exemplo, transmissibilidade); enquanto que, na estática, os desvios são mais moderados.

O comportamento de variáveis importantes de fluxo multifásico (óleo, gás e água) em um teste de poço não surgente, como pressão de bolha, permeabilidade relativa, pressão de fase, saturação de gás, são mostrados como função do espaço e tempo.

Uma análise mais criteriosa para levar em conta os efeitos multifásicos é possível com o uso do simulador.

ABSTRACT

This work considers the influence of multiphase flow (oil, gas and water) in the well test analysis of *non* - flowing wells : For example, Drill Stem Tests (DST) and Slug Tests.

To achieve this end, a two-dimensional (r-z), variable bubble point, black-oil simulator was built that considers a well partially penetrating the formation. Initially, the reservoir is at equilibrium condition with a initial pressure greater or equal to the initial bubble point pressure. A sequence of flow and/or static periods may be imposed at the well to simulate a non-flowing well test, considering the buildup of a liquid column (oil and water) with inertial effects negligible.

Comparisons with analytical methods (developed for single-phase flow of fluid of small and constant compressibility) in the determination of reservoir parameters (eg., Transmissibility) are made to determine how good or bad these methods are in the presence of more than one phase flowing in the porous medium. During flow periods (Slug Test for example) significant discrepancies are obtained in the comparison, whereas in the buildup flow periods the discrepancies become less significative. Explanations to these effects are given in detail, and justify why, usually, reservoir parameters obtained from flow periods do not mach results obtained from buildups periods in the well test analysis.

Conteúdo

FOLHA DE ROSTO	i
FOLHA DE APROVAÇÃO	ii
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
CONTEÚDO	vi
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Teste de Formação em Poços não Surgentes	2
1.2 Métodos de Análise de Testes de Poços não Surgentes	4
1.2.1 Métodos de Análise do Período de Fluxo	4
1.2.2 Métodos de Análise do Período de Estática	8
1.2.3 Métodos de Análise de Fluxo e Estática em Conjunto	9
1.3 Simulação Numérica de Reservatório e Poço	9
1.3.1 Simulação de Problemas de Ponto de Bolha Variável	11
2 MODELO FÍSICO	13
3 MODELO MATEMÁTICO	15
3.1 Modelo de Poço	15
3.2 Modelo de Reservatório	15
3.2.1 Geometria do Modelo	20

4	MODELO NUMÉRICO DO RESERVATÓRIO	22
4.1	Construção da Malha	22
4.2	Discretização das Equações do Escoamento Multifásico	24
4.2.1	Desenvolvimento do Termos de Fluxo	24
4.2.2	Desenvolvimento do Termos de Acumulação	32
4.3	Equações de Diferenças	33
4.4	Solução do Sistema de Equações de Diferenças	34
4.5	Tratamento dos Coeficientes Variáveis das Equações de Diferenças	40
4.5.1	Tratamento das Variáveis Dependentes da Pressão	40
4.5.2	Tratamento das Variáveis Dependentes da Saturação	43
4.6	Discretização das Condições de Contorno	44
5	MODELO NUMÉRICO DO POÇO	45
5.1	Construção da Malha	45
5.2	Condição de Pressão Especificada	45
5.3	Condição de Vazão Especificada	51
6	MODELO DE PONTO DE BOLHA VARIÁVEL	53
6.1	Lógica de Ponto de Bolha	54
6.1.1	Tratamento do Caso 1 : A pressão está abaixo de p_b e continua abaixo de p_b	55
6.1.2	Tratamento do Caso 2 : Pressão cruza p_b de baixo para cima	57
6.1.3	Tratamento do caso 3 : A pressão está acima do p_b e continua acima. .	60
6.1.4	Tratamento do caso 4 : A pressão cruza p_b de cima para baixo	62
6.1.5	Cálculo do Ponto de Bolha por Balanço de Material	64
6.2	Solução para o Ponto de Bolha Variável	66
7	MODELO COMPUTACIONAL	68
8	VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO	72

8.1	Comparação com Simulador Comercial	72
8.2	Validação do Modelo de Reservatório com Solução Analítica	77
8.3	Validação do Modelo de Poço/Reservatório com Solução Analítica	80
9	SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MONOFÁSICO	83
9.1	Análise do Período de Fluxo	85
9.1.1	Método de Normalização de Vazão	86
9.1.2	Método de Convolução	87
9.1.3	Método de Deconvolução no Campo Real	89
9.1.4	Método de Deconvolução no Campo de Laplace	90
9.2	Análise do Período de Estática	92
9.2.1	Método de Horner	92
9.2.2	Método de Horner com Vazão Variável	94
9.2.3	Método de Corrêa	96
9.2.4	Método Peres 1	99
9.2.5	Método Peres 2	101
9.3	Resultados	102
10	SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO	104
10.1	Análise do Período de Fluxo	115
10.1.1	Método de Normalização de Vazão	115
10.1.2	Método de Convolução	117
10.1.3	Método de Deconvolução no Campo Real	120
10.1.4	Método de Deconvolução no Campo Laplace	120
10.2	Análise do Período de Estática	122
10.2.1	Método de Horner	122
10.2.2	Método de Horner com Vazão Variável	126
10.2.3	Método de Corrêa	128
10.2.4	Método Peres 1	128

10.2.5 Método Peres 2	130
10.3 Resultados	131
11 COMENTÁRIOS	134
11.1 Desempenho do Simulador	134
11.2 Casos Simulados	136
12 CONCLUSÕES	146
NOMENCLATURA	148
REFERÊNCIAS	151
APÊNDICE A: Derivadas do Jacobiano	155
ANEXO B: Soluções Analíticas do Período de Fluxo	205
ANEXO C: Soluções Analíticas do Período de Fluxo	222

Lista de Figuras

1	Exemplo de DST com 3 ciclos (ou 6 períodos)	3
2	Curva tipo “slug test” semilog para tempos intermediários	5
3	Curva tipo “slug test” log-log para tempos iniciais	6
4	Curva tipo “slug test” log-log para tempos longos	7
5	Modelo Físico	14
6	Malha Radial	23
7	Malha Linear	23
8	Malha Retangular	25
9	Malha Cilíndrica	25
10	Esquema de bloco centrado	26
11	Esquema da malha bidimensional	27
12	Ordenamento dos Blocos da Malha	38
13	Estrutura do Jacobiano do Reservatório	39
14	Ponderação na Interface	40
15	Ponderação na interface na direção - x	41
16	Ponderação na interface na direção - z	42
17	Esquema da malha do poço	46
18	Jacobiano do reservatório com inclusão do poço	50
19	Caso 1 : Expansão de $\Delta_t b_o$	56
20	Caso 1 : Expansão de $\Delta_t R_s$	56
21	Caso 2 : Expansão de $\Delta_t b_o$	58
22	Caso 2 : Expansão de $\Delta_t R_s$	59
23	Caso 3 : Expansão de $\Delta_t b_o$	60
24	Caso 3 : Expansão de $\Delta_t R_s$	62
25	Caso 4 : Expansão de $\Delta_t b_o$	63
26	Caso 4 : Expansão de $\Delta_t R_s$	64
27	Esquema de saturação na célula	65

28	Determinação de p_b na tabela PVT	66
29	Comportamento da pressão de fluxo no poço	73
30	Comportamento da Rgo de produção	74
31	Comportamento da pressão do primeiro bloco do reservatório	75
32	Comportamento da pressão média volumétrica do reservatório	76
33	Comparação do modelo numérico do reservatório com solução analítica	78
34	Gráfico semilog da solução numérica do reservatório	79
35	Simulação para validação monofásica	81
36	Comparação do modelo numérico do poço/reservatório com solução analítica	82
37	Simulação do Caso Monofásico	84
38	Monofásico: Gráfico do Método de Normalização de Vazão	86
39	Monofásico: Gráfico do Método de Convolução	88
40	Monofásico: Gráfico do Método de Deconvolução no Campo Real	89
41	Monofásico: Gráfico do Método de Deconvolução no Campo de Laplace	91
42	Monofásico: Gráfico do Método de Horner	93
43	Monofásico: Gráfico do Método de Horner com Vazão Variável	95
44	Gráfico do Método Corrêa	97
45	Gráfico do Método Corrêa	98
46	Monofásico: Gráfico do Método de Peres 1	100
47	Gráfico do Método de Peres 2	101
48	Simulação de DST com Escoamento Multifásico	104
49	Comportamento da pressão no início do “slug test”	105
50	Comportamento da pressão no início do “slug test”	106
51	Comportamento da saturação no início do “slug test”	107
52	Comportamento da pressão de bolha no início do “slug test”	108
53	Comportamento da pressão na vizinhança do poço	109
54	Comportamento da pressão na vizinhança do poço	110
55	Comportamento da pressão de bolha na vizinhança do poço	111

56	Comportamento da saturação na vizinhança do poço	112
57	Comportamento da pressão após o fechamento	113
58	Comportamento da pressão após o fechamento	114
59	Gráfico do Método de Normalização de Vazão	116
60	Gráfico do Método de Convolução	118
61	Gráfico do Método de Deconvolução no Campo Real	119
62	Gráfico do Método de Deconvolução no Campo de Laplace	121
63	Gráfico do Método de Horner	123
64	Gráfico do Método de Horner com Vazão Variável	125
65	Gráfico do Método Corrêa	127
66	Gráfico do Método de Peres 1	129
67	Gráfico do Método de Peres 2	130
68	Simulação com efeito de película	135
69	Monofásico: Comportamento da viscosidade	136
70	Monofásico: Comportamento da viscosidade	137
71	Multifásico: Comportamento da permeabilidade relativa	139
72	Multifásico: Comportamento da permeabilidade relativa	140
73	Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo	141
74	Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo	142
75	Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo	143
76	Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo	144
77	Multifásico: Comportamento da vazão de óleo	145

Lista de Tabelas

1	Tabela da dependência funcional das propriedades PVT	19
2	Tabela da dependência funcional das propriedades petrofísicas	19
3	Tabela de convenção da ponderação um ponto a montante	43
4	Caso Monofásico: Tabela dados do fluxo	85
5	Caso Monofásico: Tabela dados da estática	92
6	Tabela dos resultados da análise do caso monofásico	102
7	Tabela da análise do fluxo do caso monofásico	103
8	Caso Monofásico: Tabela dados do fluxo	115
9	Caso Monofásico: Tabela dados da estática	122
10	Tabela resumo dos resultados do teste multifásico	131
11	Tabela resumo do trecho inicial do fluxo multifásico	134

1 INTRODUÇÃO

O teste de formação, (TFR ou DST de "Drill Stem Test"), tem sido um dos principais meios empregados na determinação das características do reservatório; transmissibilidade, permeabilidade, efeito de película, pressão de reservatório, etc.

Os testes de poços não surgentes representam uma classe importante de teste de formação que são distinguidos por não fluírem na superfície durante os períodos de fluxo, isto é, caracterizados pela permanência de todo fluido produzido no interior da coluna de teste criando uma contrapressão crescente na face do reservatório.

O desenvolvimento dos métodos de análise de teste de formação de poços não surgentes tem-se restringido ao comportamento da pressão de fundo de poço em escoamento monofásico. Os modelos analíticos existentes são descritos pela equação da difusividade e adotam as seguintes simplificações para o reservatório :

- meio poroso isotrópico e homogêneo
- espessura constante
- escoamento monofásico e isotérmico de fluido de compressibilidade pequena e constante
- fluido de viscosidade constante
- efeitos gravitacionais e capilares desprezíveis.

Na prática, é comum estes métodos serem generalizados e empregados em condições diferentes das assumidas. Um destes casos, é quando a face da formação é submetida a pressões menores que a pressão de saturação do óleo. Neste caso, na ocorrência de um escoamento multifásico no interior do reservatório os métodos analíticos monofásicos podem não ser mais aplicáveis.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo numérico computacional, trifásico (óleo, gás, água), tipo "black oil", que possa descrever o comportamento da

pressão de fundo de poço e determinar o perfil de pressão e saturação durante a realização de um teste de formação em poço não surgente com a finalidade de verificar a influência do fluxo multifásico em análises que assumem comportamento monofásico em poços não surgentes.

1.1 Teste de Formação em Poços não Surgentes

O teste de formação, inicialmente utilizado na identificação de fluido e determinação da pressão estática da formação, tornou-se um dos meios mais empregado na avaliação das características do reservatório.

Mecanicamente, o teste de formação é uma forma de aliviar temporariamente a formação produtora da pressão hidrostática da lama (ou fluido de completação), permitindo o escoamento do fluido do reservatório para o poço, registrando-se a pressão de fundo contra tempo.

A ferramenta do teste de formação é constituída de uma válvula de fundo que minimiza os efeitos de poço ("afterflow" e segregação de fluidos) e permite uma sequência de períodos de aberturas e fechamentos (Fig. 1).

Durante um teste de formação, o poço pode chegar a fluir na superfície, porém, isto não ocorre em grande parte dos testes. Nestes casos, quando a pressão do reservatório é insuficiente para elevar a coluna de líquido da formação para a superfície, o poço é dito não surgente.

Os períodos de abertura dos testes de poços não surgentes são caracterizados pela tendência de amortecimento do poço quando a pressão da coluna hidrostática na face da formação aproxima-se da pressão do reservatório. Na Hidrologia, este tipo de teste foi denominado de "Slug Test" por Ferris e Knowles⁽¹⁾ onde a palavra "slug" refere-se a uma quantidade de água que subitamente é removida (ou adicionada) a uma coluna amortecida de um poço de água.

Desta forma, por similaridade, é comum denominar o período de fluxo do teste de formação de poço não surgente de "Slug Test".

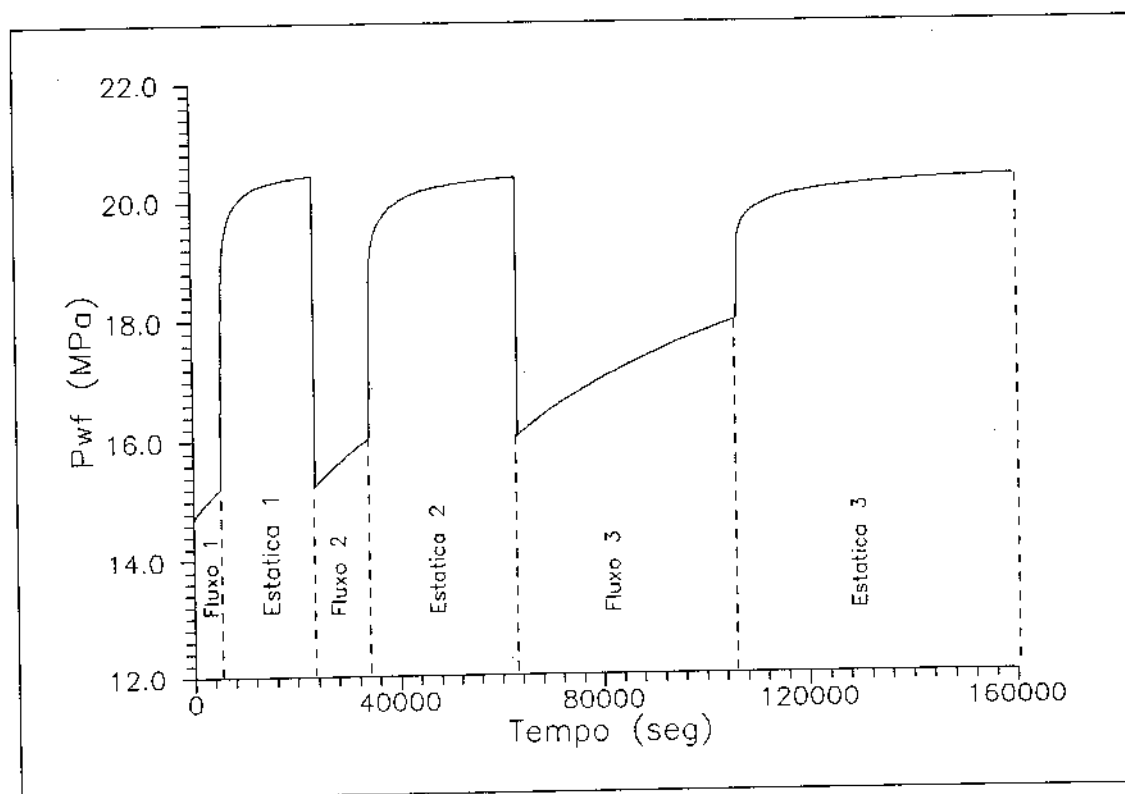


Figura 1: Exemplo de DST com 3 ciclos (ou 6 períodos)

1.2 Métodos de Análise de Testes de Poços não Surgentes

Os métodos de análise de poços não surgentes podem ser classificados conforme os períodos de teste de formação em que são aplicáveis:

- a) Análise do período de fluxo ou "Slug-Test";
- b) Análise do período de estática ou "DST Test";
- c) Análise do período de fluxo e estática em conjunto.

1.2.1 Métodos de Análise do Período de Fluxo

A origem do desenvolvimento dos métodos de análise do período de fluxo de poço não surgente está na Hidrologia.

Ferris e Knowles⁽¹⁾ em 1954, introduziram um método para estimativa da transmissibilidade de aquífero, derivando uma solução de longo tempo para o poço com a consideração do modelo de linha fonte (poço de raio infinitesimal).

Entretanto, em 1966, Bredehoeft⁽²⁾ et alii mostraram com um modelo analógico elétrico de um sistema aquífero-poço que a solução de Ferris e Knowles somente era satisfatória para tempos muito grandes e que a discrepância observada devia-se a consideração do modelo da linha fonte.

Em 1961, Cooper⁽³⁾ et alii apresentaram uma solução de raio finito com estocagem numa análise semilog de curva tipo.

O método de Cooper⁽³⁾ et alii, foi adaptado na Engenharia de Petróleo, por van Poollen e Weber⁽⁴⁾ (1970) e Kohlhaas⁽⁵⁾ (1972) para análise dos períodos de fluxo de testes de formação de poços não surgentes.

Ramey e Agarwal⁽⁶⁾ (1972) adicionaram à solução para o "slug-test" o efeito de película infinitesimal.

Em 1974, Earlougher e Kersch⁽⁷⁾, apresentaram um método de curva tipo log-log usando soluções analíticas correlacionadas pelo grupo adimensional $C_D \cdot e^{2s}$ baseado no conceito de raio de poço efetivo para fluxo de poços surgentes.

Usando o grupo adimensional $C_D \cdot e^{2s}$ de Earlougher e Kersch⁽⁷⁾ como correlação, Ramey, Agarwal e Martin⁽⁸⁾ (1973) derivaram três novas curvas tipo para o “slug test” (Figs. 2, 3 e 4).

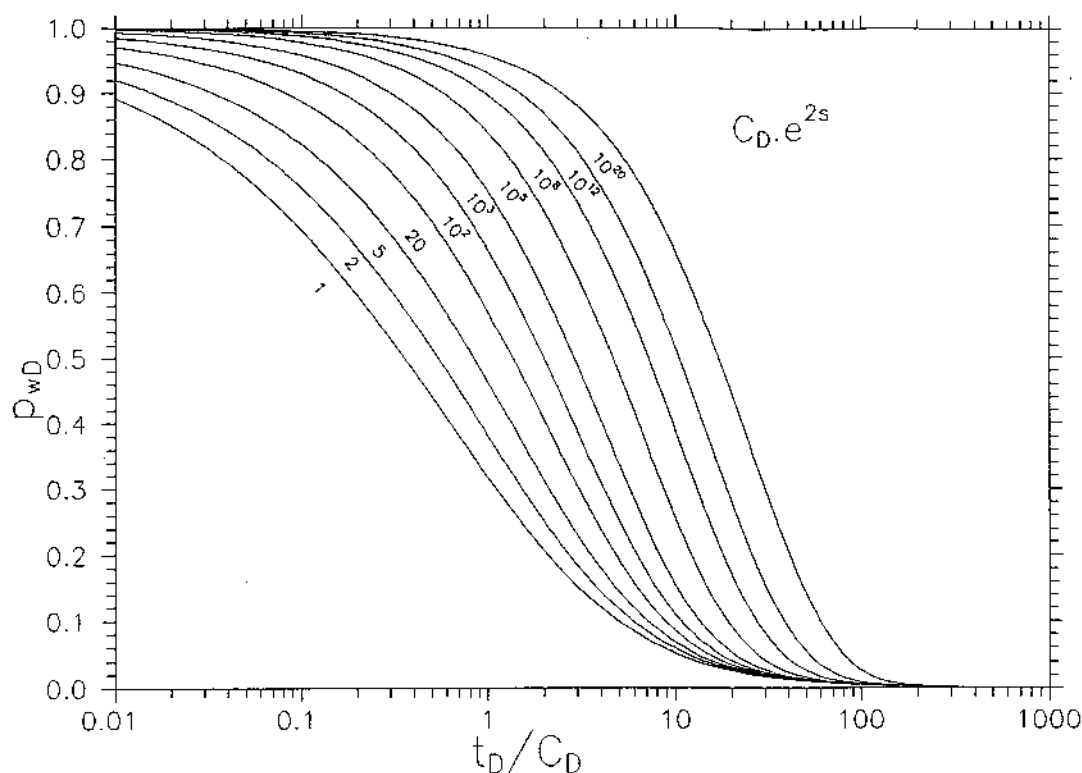


Figura 2: Curva tipo “slug test” semilog para tempos intermediários

Sageev⁽⁹⁾ (1986), derivou uma solução de curto tempo e apresentou duas curvas tipo log-log a serem usadas conforme a presença ou não do efeito de película. Sageev mostrou que o parâmetro de correlação para tempos curtos na presença do efeito de película é $C_D \cdot s$ e para tempos longos, como apresentado por Ramey, $C_D \cdot e^{2s}$.

Em 1988, Karasaki⁽¹⁰⁾ et alii apresentaram soluções para “slug test” para várias geometrias de fluxo (linear, radial, duas camadas e composto).

Recentemente, Peres⁽¹¹⁾ (1989) mostrou que a resposta do “slug test” pode ser convertida a uma resposta de vazão constante na superfície com estocagem e efeito de película para qualquer geometria de fluxo poço/reservatório, através da integração da

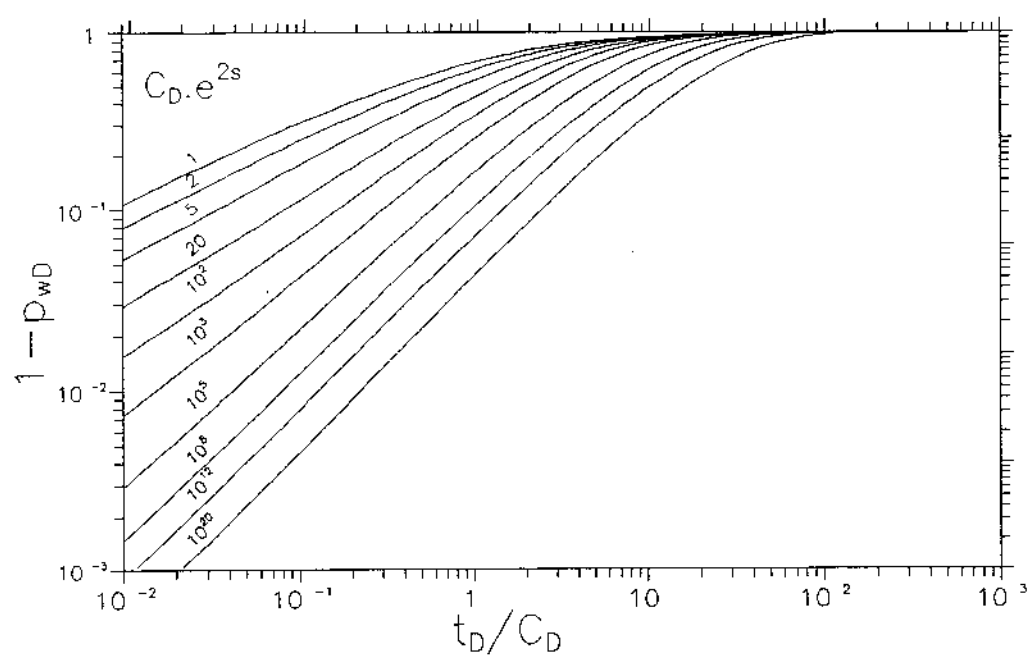


Figura 3: Curva tipo “slug test” log-log para tempos iniciais

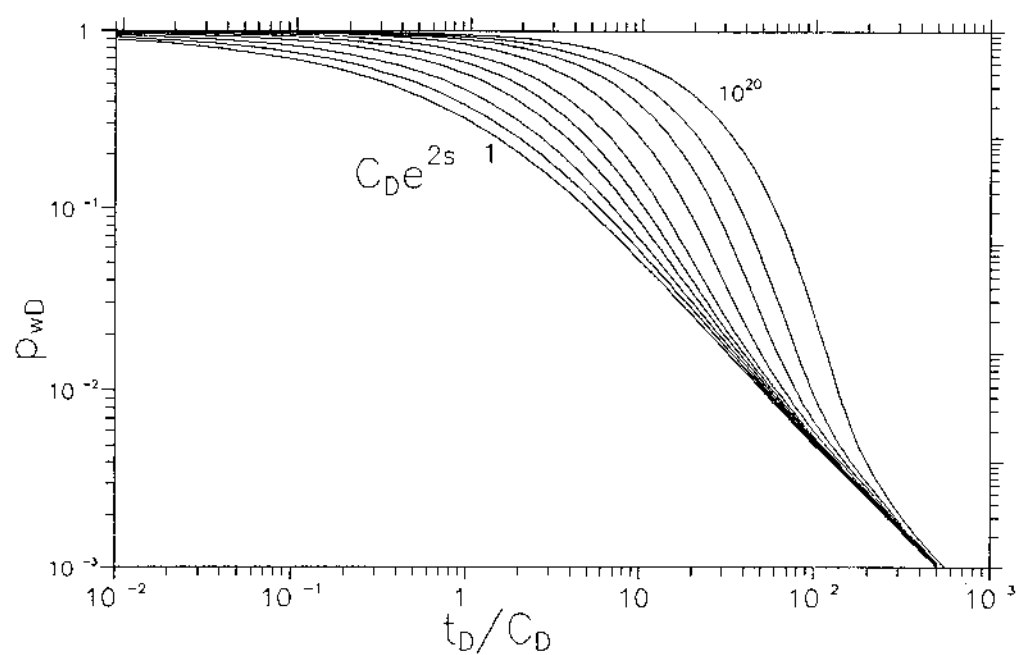


Figura 4: Curva tipo "slug test" log-log para tempos longos

pressão do slug test no tempo. Peres denominou este método de Solução Geral do "Slug Test". Desta forma, os procedimentos de análise convencionais e de curvas tipo para vazão constante na superfície são válidos e não há mais necessidade de curvas tipo de "slug-test".

Peres⁽¹¹⁾, a partir da Solução Geral do "Slug Test" explorou a aplicabilidade dos métodos de deconvolução⁽¹²⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾ que levam em consideração a variação contínua da vazão, permite a eliminação da estocagem de poço dos dados de "slug test" convertidos e obtém dados equivalentes de vazão na face da formação constante.

A aplicação do método de convolução (superposição, "multi-rate"), aos dados convertidos de "slug test" também foi adaptado por Peres⁽¹¹⁾.

1.2.2 Métodos de Análise do Período de Estática

Tradicionalmente, o método mais utilizado na interpretação do período de estática tem sido o método de Horner⁽²⁶⁾. A solução de Horner foi derivada originalmente considerando um problema de um poço produzindo com vazão constante (Veja Anexo C), porém, o período de fluxo de um teste de formação de poço não surgente geralmente apresenta uma sensível variação de vazão e o método original de Horner não é mais aplicável.

Desta forma, o método de Horner é utilizado de duas maneiras na análise do teste de poço não surgente:

a) - Horner com vazão média.

Esta aproximação considera para o cálculo uma vazão média dada pela produção acumulada antes do fechamento dividido pelo tempo de produção ⁽¹⁸⁾.

$$q_{média} = \frac{V_p}{t_p}$$

onde,

V_p = Volume produzido durante o período de fluxo

t_p = tempo de produção antes do fechamento.

b) - Horner com vazão variável.

Este método⁽¹⁷⁾ considera que o tempo total de fluxo pode ser dividido em um número discreto de períodos de tempo onde a vazão em cada período pode ser considerada constante e aplica o princípio da superposição para obter a equação de Horner equivalente para vazão variável.

Corrêa⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾ apresentou um método baseado na solução de longo de tempo para o problema de "slug test", cujo procedimento de análise é conhecido como Método Corrêa ou Cartesiano. Soliman⁽³⁰⁾ derivou uma solução para teste de crescimento de pressão precedido por um curto período de fluxo que para tempos longos reduz-se à solução de Corrêa.

Peres⁽¹¹⁾ desenvolveu métodos de análise de teste de crescimento de pressão de poços não surgentes baseados no princípio de Duhamel que não precisam do cálculo de vazões na face da formação através da derivada da pressão.

1.2.3 Métodos de Análise de Fluxo e Estática em Conjunto

Os métodos para análise de fluxo e estática em conjunto que consideram o período de fechamento como uma extensão do período de fluxo não serão aplicados neste trabalho.

1.3 Simulação Numérica de Reservatório e Poço

As etapas do desenvolvimento de um modelo numérico computacional de um sistema poço-reservatório é tratado em detalhes por Aziz e Settari⁽¹⁹⁾

Basicamente o desenvolvimento de um modelo numérico computacional está dividido em 3 etapas:

- Desenvolvimento do Modelo Matemático
- Desenvolvimento do Modelo Numérico
- Desenvolvimento do Modelo Computacional

No desenvolvimento do modelo matemático define-se as equações diferenciais parciais e as relações adicionais que descrevem o escoamento no reservatório. A formulação destas equações estão reportadas em diversas publicações⁽¹⁷⁾⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾⁽²¹⁾.

Entretanto, as equações diferenciais parciais e as relações adicionais por si só não são suficientes para descrever todo processo físico que ocorre no reservatório. Desta forma, nesta etapa são escolhidos também os modelos de simulação de reservatório, que particularizam o modelo matemático e determinam assim a classe de problemas que podem ser simulados. Como exemplo dos modelos pode-se citar:

- Tratamento de Propriedades PVT

Modelo “black oil” com ou sem ponto de bolha variável

- Tratamento do escoamento no meio poroso

Lei de Darcy

- Tratamento de transferência de massa e calor:

Escoamento imiscível “black oil”

Escoamento Isotérmico

- Tratamento da Geometria

Modelo Bidimensional

- Tratamento do Sistema de Coordenadas

Sistema Cartesiano

- Tratamento das Facilidades de Superfície

Sistema Reservatório-Poço

O desenvolvimento do modelo numérico envolve a discretização das equações do escoamento de fluido e os métodos de solução das equações de diferenças. A técnica numérica, as limitações e aplicações são tratadas em detalhes por Aziz e Settari⁽¹⁹⁾, Peaceman⁽²⁰⁾ e Crichlow⁽²¹⁾.

A etapa do desenvolvimento computacional consiste em escrever o programa de computador (geralmente em linguagem Fortran) para resolver as equações de diferenças finitas do modelo numérico.

1.3.1 Simulação de Problemas de Ponto de Bolha Variável

Nas equações diferenciais parciais do escoamento multifásico de óleo, gás e água seguindo o modelo "black oil" é assumido que uma única curva de cada propriedade PVT (R_s , b_o , etc.) é válida em todo o reservatório. Isto pode ser considerado verdadeiro quando a pressão da formação sempre decresce. Entretanto, em muitos casos, como no caso do teste de formação com escoamento multifásico, isto não ocorre. O crescimento da pressão no reservatório após um período de fluxo multifásico, conforme a saturação de gás em cada bloco, poderá conduzir a diferentes pontos de bolha em diferentes lugares após a repressurização.

As técnicas desenvolvidas para o tratamento de ponto de bolha variável envolvem duas propriedades, pressão de saturação e pressão de bolha, que Aziz⁽¹⁹⁾ define:

p_b = Pressão de bolha, é a pressão na qual a primeira bolha de gás evolui quando a pressão é diminuída ou também a pressão na qual todo o gás num sistema líquido-gás é dissolvido quando a pressão é aumentada.

p_s = Pressão de saturação, é a pressão de ponto de bolha de um sistema líquido-gás quando todo gás livre é removido na pressão do sistema (É a pressão do bloco de um simulador de diferença finitas quando mais de uma fase existe).

Steffensen e Sheffield⁽²²⁾, Thomas, Lumpkin e Reheis⁽²⁴⁾ desenvolveram modelos

numéricos, semi-implícitos, trifásicos, "black oil" e bidimensionais (coordenadas retangulares) para modelar o colapso de gás, isto é, total dissolução do gás livre no óleo, considerando a pressão de ponto de bolha como uma variável apenas no termo de acumulação

Kazemi⁽²³⁾, usou a mesma aproximação para um modelo radial bidimensional, bifásico (óleo-gás), considerando a histerese de solubilidade, isto é, parte do gás livre não dissolve após a repressurização .

Basicamente, estes métodos prevêem a esperada condição de um bloco no incremento de tempo anterior e durante as iterações esta previsão pode ser corrigida.

Stright⁽²⁵⁾ et alii, analisando os métodos de Kazemi⁽²³⁾ e Thomas⁽²⁶⁾, chegaram a conclusão que estes métodos aumentam o número de iterações num incremento de tempo e podem falhar caso ocorram reversões frequentes de fluxo. Stright⁽²⁷⁾ et alii, desenvolveram um modelo totalmente implícito, considerando também a pressão de bolha como uma variável apenas nos termos de acumulação das equações do escoamento. A técnica baseia-se nos conceitos de pressão de saturação e pressão de bolha e envolve duas iterações. Na primeira iteração, o método prediz quais blocos mudarão a pressão de saturação e na segunda a solução é obtida para p_s ou S_g dependendo da condição prevista na primeira iteração .

2 MODELO FÍSICO

O modelo físico adotado é um sistema consistindo de um reservatório cilíndrico com um poço na origem(Fig.5).

- Características do poço :
 - Coluna de teste com válvula de fundo e um obturador de anular (*packer*) assentado no topo da formação .
 - Coluna de diâmetro interno constante
 - Diâmetro interno do poço na frente do reservatório constante
 - O fundo do poço coincide com a base do reservatório.
 - Durante o período de fluxo o fluido do poço não alcança a superfície
- Características do Reservatório :
 - Forma cilíndrica, com superfície dômica ou plana
 - Espessura total constante.
 - Camadas com espessuras e características variáveis
 - Cada camada tem individualmente uma espessura constante, mas pode ter características variáveis ao longo da camada.
 - A perfuração (canhoneio) dentro de uma camada deve ser total, mas pode ser variável e descontínua dentro da espessura total da formação .
 - Fluido trifásico (óleo, água e gás)
 - Sem fluxo através dos limites externo do reservatório.

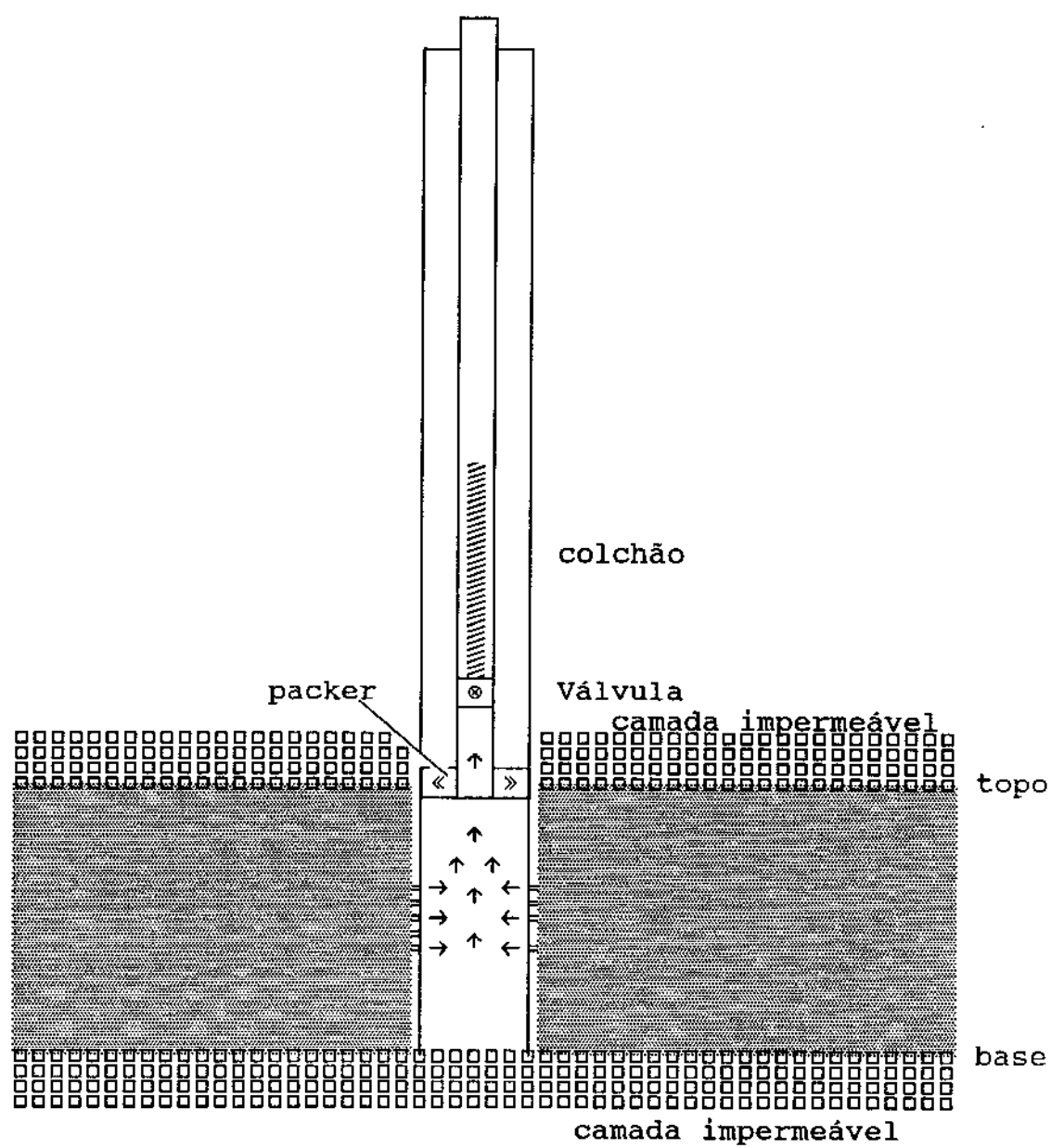


Figura 5: Modelo Físico

3 MODELO MATEMÁTICO

3.1 Modelo de Poço

O modelo matemático do poço está baseado nas considerações do modelo físico.

Todo fluido produzido permanece dentro da coluna de teste e a pressão de fluxo de fundo pode ser calculada a partir da pressão da coluna hidrostática do líquido considerando as seguintes simplificações :

- efeitos inerciais desprezíveis (atrito e aceleração);
- efeitos gravitacionais do gás livre desprezíveis (somente a densidade do líquido é usada no cálculo da pressão da coluna hidrostática).

Desta forma a pressão do fluxo de fundo pode ser dada por:

$$p_{wf}(t) = p_o + \frac{\bar{\gamma}_{liq}}{\frac{\pi D_i^2}{4}} \int_o^t \left(\frac{Q_o(t)}{b_o} + \frac{Q_w(t)}{b_w} \right) dt \quad (3.1.1)$$

onde, $\bar{\gamma}_{liq}$ = peso específico médio do líquido no poço

3.2 Modelo de Reservatório

O modelo matemático do reservatório para o escoamento multifásico isotérmico esta baseado em três princípios físicos:

- Conservação da Massa
- Conservação de Quantidade de Movimento (Lei de Darcy)
- Equação de Estado

O princípio da conservação da massa nos fornece a equação da continuidade

$$-\nabla \cdot \dot{\mathbf{m}}_t = \frac{\partial}{\partial t} (m_t) + \hat{q}_t \quad (3.2.1)$$

onde,

m_ℓ = massa do componente ℓ por unidade de volume do meio poroso

$\dot{m}_\ell$ = vazão de massa do componente ℓ por unidade de área

$\hat{q}_\ell$ = vazão de massa por unidade de volume do meio poroso

∇ = operador divergente

A consideração do modelo “black oil” significa que a componente óleo não flui na fase gás no reservatório. Só a fase óleo do reservatório é constituída de dois componentes:

- Óleo na condição tanque (Componente óleo), com densidade $\bar{\rho}_o$ no reservatório,
- Gás dissolvido na condição padrão (Componente gás), que flui no reservatório como fase óleo.

Desta forma, a densidade da fase óleo na condição de reservatório é dada por:

$$\rho_o = \bar{\rho}_o + \bar{\rho}_g \quad (3.2.2)$$

onde,

$$\bar{\rho}_o = \frac{1}{B_o} \rho_{osc} \quad (3.2.3)$$

$$\bar{\rho}_g = \frac{R_s}{B_o} \rho_{gsc} \quad (3.2.4)$$

Além disso,

$$\rho_w = \frac{1}{B_w} \rho_{wsc} \quad (3.2.5)$$

$$\rho_g = \frac{1}{B_g} \rho_{gsc} \quad (3.2.6)$$

Assim, as equações do escoamento multifásico podem ser dados por:

Óleo

$$-\nabla \cdot [\bar{\rho}_o \mathbf{u}_o] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \bar{\rho}_o) + \hat{q}_o \quad (3.2.7)$$

Gás

$$-\nabla \cdot [\rho_g \mathbf{u}_g + \bar{\rho}_g \mathbf{u}_o] = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_g S_g + \bar{\rho}_g S_o)] + \hat{q}_g \quad (3.2.8)$$

Água

$$-\nabla \cdot [\rho_w \mathbf{u}_w] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w) + \hat{q}_w \quad (3.2.9)$$

onde,

$$\hat{q}_g = \hat{q}_{fg} + \hat{q}_o R_s \left(\frac{\rho_g}{\rho_o} \right)_{sc} = \hat{q}_{fg} + q_o R_s \rho_{gsc} \quad (3.2.10)$$

$$q_o = \frac{\hat{q}_o}{\rho_{osc}} \quad (3.2.11)$$

ou,

Óleo

$$-\nabla \cdot \left[\frac{1}{B_o} \mathbf{u}_o \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) + q_o \quad (3.2.12)$$

Gás

$$-\nabla \cdot \left[\frac{R_s}{B_o} \mathbf{u}_o + \frac{1}{B_g} \mathbf{u}_g \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R_s}{B_o} S_o + \frac{1}{B_g} S_g \right) \right] + q_{fg} + R_s q_o \quad (3.2.13)$$

Água

$$-\nabla \cdot \left[\frac{1}{B_w} \mathbf{u}_w \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_w}{B_w} \right] + q_w \quad (3.2.14)$$

A lei de Darcy é extendida ao fluxo multifásico considerando que as pressões de fases são as pressões causadoras do fluxo de cada fase:

Óleo

$$u_o = - \frac{k k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla z) \quad (3.2.15)$$

Gás

$$u_g = - \frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla p_g - \gamma_g \nabla z) \quad (3.2.16)$$

Água

$$u_w = - \frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla z) \quad (3.2.17)$$

onde,

$$\gamma_w = \rho_w \frac{g}{g_c} \quad (3.2.18)$$

$$\gamma_o = \rho_o \frac{g}{g_c} \quad (3.2.19)$$

$$\gamma_g = \rho_g \frac{g}{g_c} \quad (3.2.20)$$

Assim,

Óleo

$$\nabla \cdot [\lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla z)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] + q_o \quad (3.2.21)$$

Gás

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot [R_s \lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla z) + \lambda_g (\nabla p_g - \gamma_g \nabla z)] = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R_s}{q_o} S_o + \frac{S_g}{B_g} \right) \right] + R_s q_o + q_{fg} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Água

$$\nabla \cdot [\lambda_w (\nabla p_w - \gamma_w \nabla z)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S_w}{B_w} \right] + q_w \quad (3.2.23)$$

onde, a transmissibilidade λ_ℓ é definido por

$$\lambda_\ell = \frac{k_{r\ell}}{\mu_\ell B_\ell} k \quad (3.2.24)$$

ℓ = óleo, gás e água

As relações de dependência funcional das propriedades PVT e petrofísicas são dadas pelas Tabelas 1 e 2.

Propriedades	Relação Funcional
R_s	$R_s(p_o, p_b)$
B_o	$B_o(p_o, p_b)$
μ_o	$\mu_o(p_o, p_b)$
ρ_o	$\rho_o(p_o, p_b)$
B_g	$B_g(p_g)$
μ_g	$\mu_g(p_g)$
ρ_g	$\rho_g(p_g)$
B_w	$B_w(p_w)$
μ_w	$\mu_w(p_w)$
ρ_w	$\rho_w(p_w)$

Tabela 1: Tabela da dependência funcional das propriedades PVT

Propriedades	Relação Funcional
k_{rw}	$k_{rw}(S_w)$
k_{rg}	$k_{rg}(S_g)$
k_{ro}	$k_{ro}(S_w, S_g)$

Tabela 2: Tabela da dependência funcional das propriedades petrofísicas

A permeabilidade relativa ao óleo é determinado através do método de Stone II:

$$k_{ro} = (k_{row} + k_{rw})(k_{rog} + k_{rg}) - (k_{rw} + k_{rg}) \quad (3.2.25)$$

onde,

$k_{row} = k_{row}(S_w)$ - permeabilidade relativa ao óleo num sistema água-óleo.

$k_{rog} = k_{rog}(S_g)$ - permeabilidade relativa ao óleo num sistema gás-óleo.

Para o escoamento trifásico (óleo, gás e água) dado pelas Equações (3.2.21), (3.2.22) e (3.2.23) tem-se seis variáveis dependentes (p_o , p_w , p_g , S_o , S_w e S_g) e precisa-se de mais três relações :

- Relações Adicionais

$$S_o + S_w + S_g = 1 \quad (3.2.26)$$

Pressão capilar óleo-gás

$$p_{cgo} = p_g - p_o = p_{cgo}(S_g) \quad (3.2.27)$$

Pressão capilar óleo-água

$$p_{cwo} = p_o - p_w = p_{cwo}(S_w) \quad (3.2.28)$$

Considerando como variáveis primárias p_o , S_g e S_w , as equações (3.2.21), (3.2.22) e (3.2.23), constituem um conjunto de equações não lineares que pode ser resolvido numericamente.

3.2.1 Geometria do Modelo

O modelo de reservatório cilíndrico produzido através de um poço central pode ser tratado como um problema de seção transversal ($x - z$) através das seguintes conversões:

$$\begin{cases} r \longrightarrow x \\ \theta \longrightarrow y \\ z \longrightarrow z \end{cases}$$

Considerando que não há fluxo na direção θ , o objetivo é utilizar as equações diferenciais parciais com coordenadas cartesianas num problema típico de poço radial ($r - z$).

A adoção do modelo de seção transversal considera que o escoamento em uma das direções horizontais é desprezível em relação às outras direções e que as variações nesta direção podem ser levadas em consideração usando uma espessura Δy para cada bloco. Desta forma, considera-se propriedades médias na direção y .

As equações (3.2.21), (3.2.22) e (3.2.23) para o modelo seção-transversal ($x - z$) ficam:

Óleo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\Delta y \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta y \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} - \gamma_o \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] = \\ & = \Delta y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) + q_o \Delta y \end{aligned} \quad (3.2.1.1)$$

Gás

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\Delta y R_s \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \Delta y \lambda_g \left(\frac{\partial p_g}{\partial x} - \gamma_g \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta y R_s \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} - \gamma_o \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \Delta y \lambda_g \left(\frac{\partial p_g}{\partial z} - \gamma_g \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] = \\ & = \Delta y \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right) \right] + R_s q_o \Delta y + q_g \Delta y \end{aligned} \quad (3.2.1.2)$$

Água

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\Delta y \lambda_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} - \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta y \lambda_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial z} - \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] = \\ & = \Delta y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) + q_w \Delta y \end{aligned} \quad (3.2.1.3)$$

4 MODELO NUMÉRICO DO RESERVATÓRIO

O objetivo desta seção é desenvolver o modelo numérico através de aproximações das equações do escoamento de fases por diferenças finitas e definir o método de solução para as equações de diferenças.

Para a utilização das equações de escoamento bidimensional de seção transversal deve-se fazer a transformação adequada do sistema de malha cilíndrica para um sistema equivalente de malha retangular.

4.1 Construção da Malha

A característica logarítmica da solução analítica do escoamento monofásico radial representa um rápido crescimento da pressão a partir do poço e exige na solução numérica a construção de uma malha irregular na direção r com um refinamento crescente na direção reservatório-poço para manter uma precisão uniforme.

Uma construção usualmente empregada é uma distribuição uniforme logarítmica que num escoamento permanente em meio homogêneo a Lei de Darcy fornece quedas de pressões iguais (Fig. 6).

Definindo $\rho = \ln (r/r_w)$, obtém-se um sistema linear onde

$$r = r_w \exp \rho \quad (4.1.1)$$

Considerando um esquema de bloco centrado com distribuição uniforme (Fig. 7), tem-se

$$\Delta \rho = \frac{\ln r_e - \ln r_w}{N_x} = \frac{\ln (r_e/r_w)}{N_x} = \frac{\rho_e - \rho_w}{N_x} \quad (4.1.2)$$

onde,

N_x = número de bloco na direção - x (ou r)

r_e = raio externo do reservatório

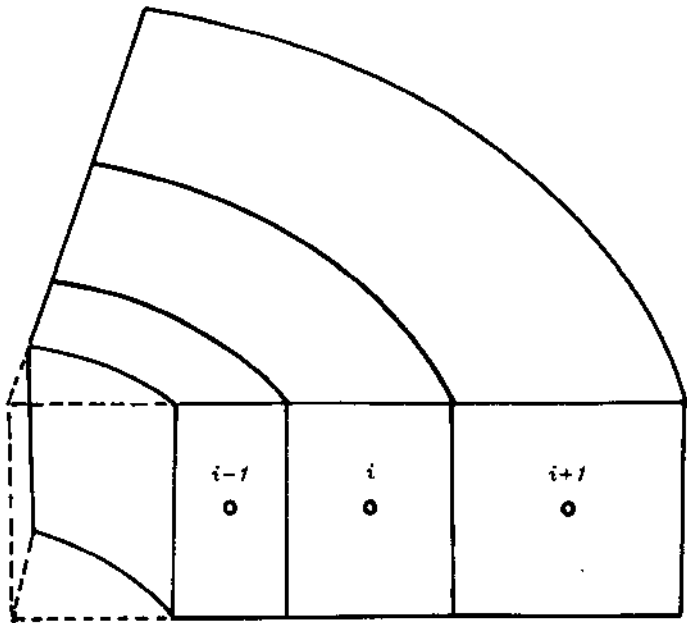


Figura 6: Malha Radial

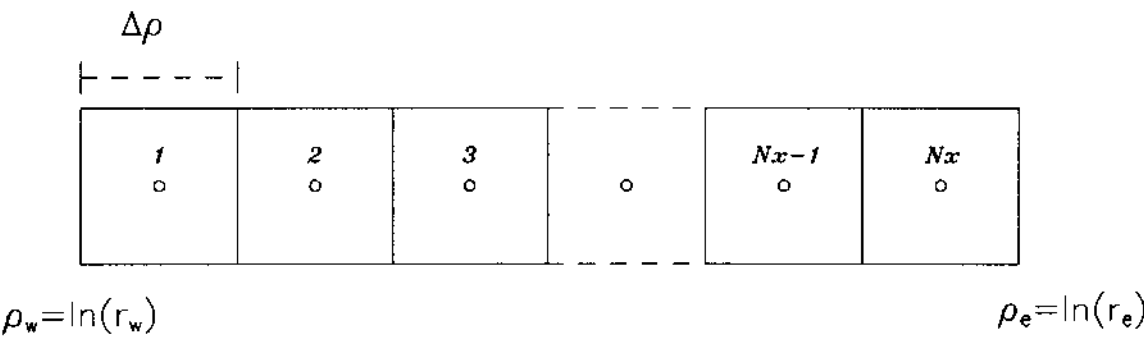


Figura 7: Malha Linear

r_w = raio do poço

Desta forma, os raios das interfaces dos blocos são dados por:

$$r_{i-1/2,k} = r_w \exp(\Delta\rho(i-1)) \quad ; \quad i = 1, N_x \quad (4.1.3)$$

$$r_{i-1/2,k} = r_w \exp(\Delta\rho(i)) \quad ; \quad i = 1, N_x \quad (4.1.4)$$

A determinação das posições dos pontos nodais dos blocos é feita pelo método de Pedrosa⁽³¹⁾

$$r_{i,k} = r_{i-1/2,k} \exp\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \ln\alpha - \frac{1}{2}\right) \quad (4.1.5)$$

onde,

$$\alpha = \frac{r_{i+1/2,k}}{r_{i-1/2,k}} = \frac{r_w \exp(i\Delta\rho)}{r_w \exp((i-1)\Delta\rho)} = \exp(\Delta\rho) \quad (4.1.6)$$

Este método posiciona o nó onde a pressão é igual a pressão média do bloco, considerando escoamento permanente.

4.2 Discretização das Equações do Escoamento Multifásico

As equações do escoamento multifásico são discretizadas usando um esquema de diferenças finitas centrado no espaço e atrasado no tempo.

A adoção das equações do escoamento multifásico, bidimensional seção transversal para um sistema reservatório-poço cilíndrico implica num tratamento especial para as condições de contorno (fronteiras) dos blocos (Figs. 8 e 9).

Pode-se ver que na malha cilíndrica $A_{i-1/2,k} < A_{i+1/2,k}$ e $A_{i,k-1/2} = A_{i,k+1/2}$. Assim, deve-se observar durante a discretização a influência da geometria nos termos de fluxo interblocos.

4.2.1 Desenvolvimento do Termos de Fluxo

Considerando uma malha de blocos irregulares com um esquema de bloco centrado (Fig. 10 e 11), e o esquema de malha bidimensional retangular (Fig. 11), as Equações (3.2.1.1), (3.2.1.2) e (3.2.1.3) podem ser dadas por uma aproximação totalmente implícita:

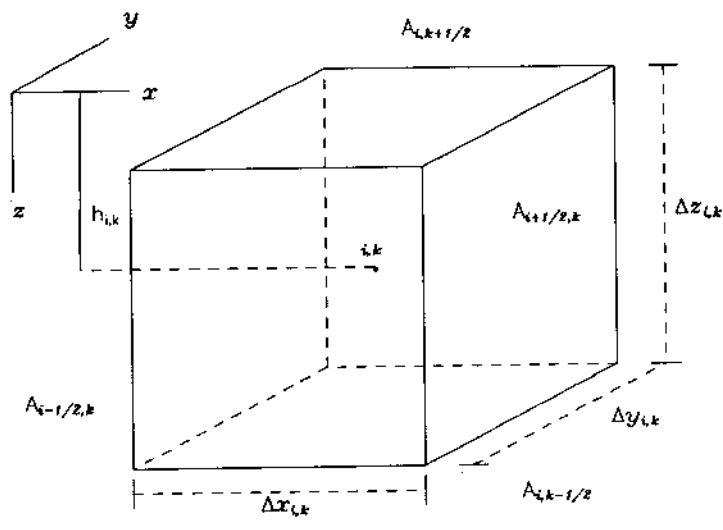


Figura 8: Malha Retangular

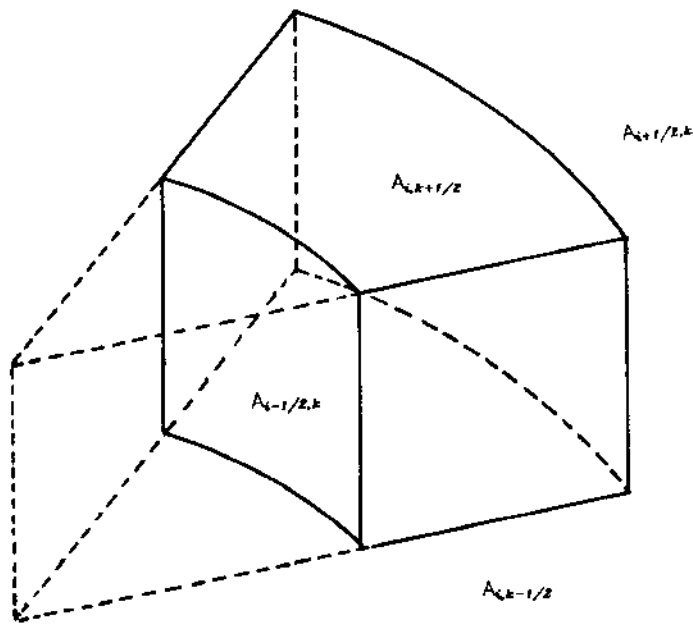


Figura 9: Malha Cilíndrica

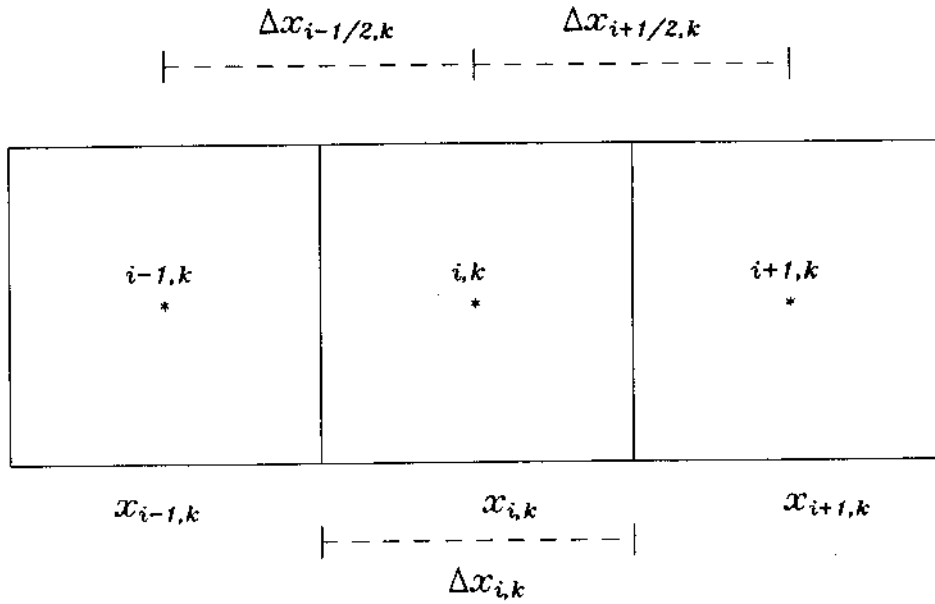


Figura 10: Esquema de bloco centrado

Óleo

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta x_{i,k}} \left\{ \left[\Delta y \lambda_o \frac{\partial}{\partial x} (p_o - \gamma_o h) \right]_{i+1/2,k}^{n+1} - \left[\Delta y \lambda_o \frac{\partial}{\partial x} (p_o - \gamma_o h) \right]_{i-1/2,k}^{n+1} \right\} + \\
 & + \frac{1}{\Delta z_{i,k}} \left\{ \left[\Delta y \lambda_o \frac{\partial}{\partial z} (p_o - \gamma_o h) \right]_{i,k+1/2}^{n+1} - \left[\Delta y \lambda_o \frac{\partial}{\partial z} (p_o - \gamma_o h) \right]_{i,k-1/2}^{n+1} \right\} = \\
 & = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \Delta y_{i,k} \Delta_t (\phi S_o b_o) + q_{o,i,k} \Delta y_{i,k} \quad (4.2.1.1)
 \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta x_{i,k}} \left\{ \left(\frac{\Delta y \lambda_o}{\Delta x} \right)_{i+1/2,k} \left[(p_{o,i+1,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^{n+1}) - \gamma_{o,i+1/2,k}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \right. \\
 & - \left. \left(\frac{\Delta y \lambda_o}{\Delta x} \right)_{i-1/2,k} \left[(p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i-1,k}^{n+1}) - \gamma_{o,i-1/2,k}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] \right\} +
 \end{aligned}$$

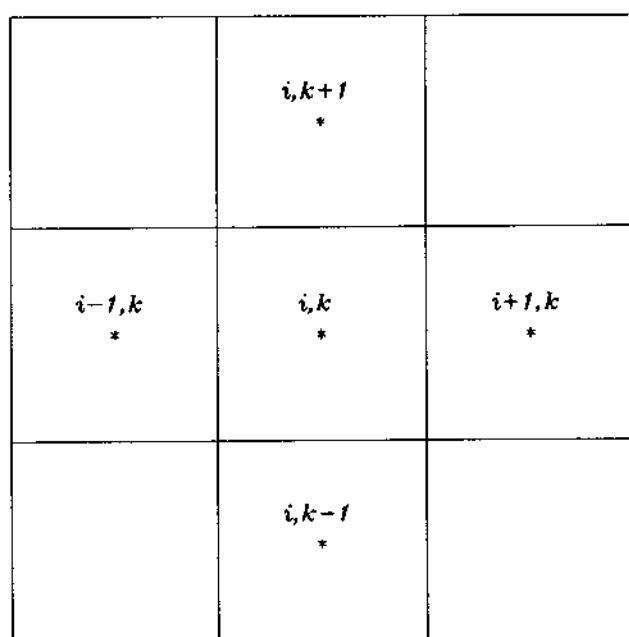


Figura 11: Esquema da malha bidimensional

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta z_{i,k}} \left\{ \left(\frac{\Delta y \lambda_o}{\Delta z} \right)_{i,k+1/2} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k+1/2}}^{enc} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \right. \\
& - \left. \left(\frac{\Delta y \lambda_o}{\Delta z} \right)_{i,k-1/2} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] \right\} = \\
& = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \Delta y_{ik} \Delta_t(\phi S_o b_o) + q_{o_{i,k}} \Delta y_{i,k} \quad (4.2.1.2)
\end{aligned}$$

Gás

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x_{i,k}} \left\{ \left(\frac{\Delta y R_s \lambda_o}{\Delta x} \right)_{i+1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \right. \\
& - \left. \left(\frac{\Delta y R_s \lambda_o}{\Delta x} \right)_{i-1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] \right\} + \\
& + \left(\frac{\Delta y \lambda_g}{\Delta x} \right)_{i+1/2,k}^{n+1} \left[(p_{g_{i+1,k}}^{n+1} - p_{g_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
& - \left(\frac{\Delta y \lambda_g}{\Delta x} \right)_{i-1/2,k}^{n+1} \left[(p_{g_{i,k}}^{n+1} - p_{g_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] \Big\} + \\
& + \frac{1}{\Delta z_{i,k}} \left\{ \left(\frac{\Delta y R_s \lambda_o}{\Delta z} \right)_{i,k+1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \right. \\
& - \left(\frac{\Delta y R_s \lambda_o}{\Delta z} \right)_{i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] + \\
& + \left(\frac{\Delta y \lambda_g}{\Delta z} \right)_{i,k+1/2}^{n+1} \left[(p_{g_{i,k+1}}^{n+1} - p_{g_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
& - \left. \left(\frac{\Delta y \lambda_g}{\Delta z} \right)_{i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{g_{i,k}}^{n+1} - p_{g_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] \right\} = \\
& = \frac{\Delta y_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t[\phi(R_s b_o S_o + S_g b_g)]_{i,k} + \Delta y_{i,k} R_{s,i,k}^{n+1} q_{o_{i,k}}^{n+1} + q_{f_{g,i,k}}^{n+1} \Delta y_{i,k} \quad (4.2.1.3)
\end{aligned}$$

Água

$$\frac{1}{\Delta x_{i,k}} \left\{ \left(\frac{\Delta y \lambda_w}{\Delta x} \right)_{i+1/2,k}^{n+1} \left[(p_{w_{i+1,k}}^{n+1} - p_{w_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\Delta y \lambda_w}{\Delta x} \right)_{i-1/2,k}^{n+1} \left[(p_{w_{i,k}}^{n+1} - p_{w_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] \Big\} + \\
& + \frac{1}{\Delta z_{i,k}} \left\{ \left(\frac{\Delta y \lambda_w}{\Delta z} \right)_{i,k+1/2}^{n+1} \left[(p_{w_{i,k+1}}^{n+1} - p_{w_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \right. \\
& - \left. \left(\frac{\Delta y \lambda_w}{\Delta z} \right)_{i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{w_{i,k}}^{n+1} - p_{w_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] \right\} - \\
& = \frac{\Delta y_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t(\phi S_w b_w) + q_{w_{i,k}}^{n+1} \Delta y_{i,k}
\end{aligned} \tag{4.2.1.4}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\Delta t^{n+1} &= t^{n+1} - t^n \\
b_\ell &= \frac{1}{B_\ell} \quad ; \quad \ell = \text{óleo, gás e água}
\end{aligned} \tag{4.2.1.5}$$

Considerando p_o , S_g e S_w como variáveis primárias, multiplicando as Equações (4.2.1.2), (4.2.1.3) e (4.2.1.4) por $(\Delta x_{i,k} \Delta z_{i,k})$, definindo

$$A_{i+1/2,k} = \Delta z_{i,k} \Delta y_{i,k} \tag{4.2.1.6}$$

$$A_{i-1/2,k} = \Delta z_{i,k} \Delta y_{i,k} \tag{4.2.1.7}$$

$$A_{i,k+1/2} = \Delta x_{i,k} \Delta y_{i,k} \tag{4.2.1.8}$$

$$A_{i,k-1/2} = \Delta x_{i,k} \Delta y_{i,k} \tag{4.2.1.9}$$

$$V_{i,k} = \Delta x_{i,k} \Delta z_{i,k} \Delta y_{i,k} \tag{4.2.1.10}$$

$$Q_{o_{i,k}} = V_{i,k} q_{o_{i,k}} \tag{4.2.1.11}$$

$$Q_{fg_{i,k}} = V_{i,k} q_{fg_{i,k}} \tag{4.2.1.12}$$

$$Q_{w_{i,k}} = V_{i,k} q_{w_{i,k}} \tag{4.2.1.13}$$

as transmissibilidades interblocos

$$Tx_{\ell_{i \pm 1/2, k}} = \frac{A_{i \pm 1/2, k} \lambda_{\ell_{i \pm 1/2, k}}}{\Delta x_{i \pm 1/2, k}} \quad (4.2.1.14)$$

$$Tz_{\ell_{i, k \pm 1/2}} = \frac{A_{i, k \pm 1/2} \lambda_{\ell_{i, k \pm 1/2}}}{\Delta z_{i, k \pm 1/2}} \quad (4.2.1.15)$$

onde,

$$\lambda_{\ell_{i \pm 1/2, k}} = \left(\frac{k \cdot k_{r\ell}}{\mu B_\ell} \right)_{i \pm 1/2, k} \quad (4.2.1.16)$$

$$\lambda_{\ell_{i, k \pm 1/2}} = \left(\frac{k \cdot k_{r\ell}}{\mu B_\ell} \right)_{i, k \pm 1/2} \quad (4.2.1.17)$$

ℓ = óleo, gás e água

e usando as relações adicionais (3.2.26), (3.2.27) e (3.2.28), obtém-se

Óleo

$$\begin{aligned} & Tx_{o_{i+1/2, k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1, k}}^{n+1} - p_{o_{i, k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2, k}}^{n+1} (h_{i+1, k} - h_{i, k}) \right] - \\ & - Tx_{o_{i-1/2, k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k}}^{n+1} - p_{o_{i-1, k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2, k}}^{n+1} (h_{i, k} - h_{i-1, k}) \right] + \\ & + Tz_{o_{i, k+1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k+1}}^{n+1} - p_{o_{i, k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i, k+1/2}}^{n+1} (h_{i, k+1} - h_{i, k}) \right] - \\ & - Tz_{o_{i, k-1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k}}^{n+1} - p_{o_{i, k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i, k-1/2}}^{n+1} (h_{i, k} - h_{i, k-1}) \right] = \\ & = \frac{V_{i, k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t (\phi b_o S_o)_{i, k} + Q_{o_{i, k}}^{n+1} \end{aligned} \quad (4.2.1.18)$$

Gás

$$\begin{aligned} & (Tx_o R_s)_{i+1/2, k}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1, k}}^{n+1} - p_{o_{i, k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2, k}}^{n+1} (h_{i+1, k} - h_{i, k}) \right] - \\ & - (Tx_o R_s)_{i-1/2, k}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k}}^{n+1} - p_{o_{i-1, k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2, k}}^{n+1} (h_{i, k} - h_{i-1, k}) \right] + \\ & + Tx_{g_{i+1/2, k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1, k}}^{n+1} - p_{o_{i, k}}^{n+1} + p_{cgo_{i+1, k}}^{n+1} - p_{cgo_{i, k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i+1/2, k}}^{n+1} (h_{i+1, k} - h_{i, k}) \right] - \\ & - Tx_{g_{i-1/2, k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k}}^{n+1} - p_{o_{i-1, k}}^{n+1} + p_{cgo_{i, k}}^{n+1} - p_{cgo_{i-1, k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i-1/2, k}}^{n+1} (h_{i, k} - h_{i-1, k}) \right] + \\ & + (Tz_o R_s)_{i, k+1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k+1}}^{n+1} - p_{o_{i, k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i, k+1/2}}^{n+1} (h_{i, k+1} - h_{i, k}) \right] - \\ & - (Tz_o R_s)_{i, k-1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k}}^{n+1} - p_{o_{i, k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i, k-1/2}}^{n+1} (h_{i, k} - h_{i, k-1}) \right] + \\ & + Tz_{g_{i, k+1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i, k+1}}^{n+1} - p_{o_{i, k}}^{n+1} + p_{cgo_{i, k+1}}^{n+1} - p_{cgo_{i, k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i, k+1/2}}^{n+1} (h_{i, k+1} - h_{i, k}) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - Tz_{g,i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{oi,k}^{n+1} - p_{oi,k-1}^{n+1} + p_{cgoi,k}^{n+1} - p_{cgoi,k-1}^{n+1}) - \gamma_{g,i,k-1/2}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] = \\
& = \frac{V_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t [\phi(R_s S_o b_o) + \phi S_g b_g] + (R_s Q_o)_{i,k}^{n+1} + Q_{fg,i,k}^{n+1} \quad (4.2.1.19)
\end{aligned}$$

Água

$$\begin{aligned}
& Tx_{w,i+1/2,k}^{n+1} \left[(p_{oi+1,k}^{n+1} - p_{oi,k}^{n+1} - p_{cwoi+1,k}^{n+1} + p_{cwoi,k}^{n+1}) - \gamma_{w,i+1/2,k}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
& - Tx_{w,i-1/2,k}^{n+1} \left[(p_{oi,k}^{n+1} - p_{oi-1,k}^{n+1} - p_{cwoi,k}^{n+1} + p_{cwoi-1,k}^{n+1}) - \gamma_{w,i-1/2,k}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
& + Tz_{w,i,k+1/2}^{n+1} \left[(p_{oi,k+1}^{n+1} - p_{oi,k}^{n+1} - p_{cwoi,k+1}^{n+1} + p_{cwoi,k}^{n+1}) - \gamma_{w,i,k+1/2}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
& + Tz_{w,i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{oi,k}^{n+1} - p_{oi,k-1}^{n+1} - p_{cwoi,k}^{n+1} + p_{cwoi,k-1}^{n+1}) - \gamma_{w,i,k-1/2}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] = \\
& = \frac{V_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t (\phi b_w S_w)_{i,k} + Q_{wi,k}^{n+1} \quad (4.2.1.20)
\end{aligned}$$

Pela definição da transmissibilidade interblocos, Eqs.(4.2.1.14) e (4.2.1.15), observa-se que a transmissibilidade depende da área das interfaces, isto é, da geometria do sistema de malha.

Para levar em consideração a transmissibilidade variável do sistema radial na mudança de sistema, adota-se a definição de transmissibilidade de Pedrosa⁽³¹⁾

$$Tx_{\ell,i \pm 1/2,k} = \left(FGX \frac{k_{r\ell}}{\mu_{\ell} B_{\ell}} \right)_{i \pm 1/2,k} \quad (4.2.1.21)$$

$$Tz_{\ell,i,k \pm 1/2} = \left(FGZ \frac{k_{r\ell}}{\mu_{\ell} B_{\ell}} \right)_{i,k \pm 1/2} \quad (4.2.1.22)$$

onde,

ℓ = óleo, gás e água

FGX e FGZ - são fatores geométricos que levam em conta a geometria do sistema.

Para direção radial

$$FGX_{i+1/2,k} = \frac{2\pi \Delta h}{\frac{1}{k_{r,i,k}} \ln \left(\frac{r_{i+1/2,k}}{r_{i,k}} \right) + \frac{1}{k_{r,i+1,k}} \ln \left(\frac{r_{i+1,k}}{r_{i+1/2,k}} \right)} \quad (4.2.1.23)$$

Para direção vertical

$$FGZ_{i,k+1/2} = \frac{\pi (r_{i+1/2,k}^2 - r_{i-1/2,k}^2)}{\frac{z_{i,k+1/2} - z_{i,k}}{k_{z_{i,k}}} + \frac{z_{i,k+1} - z_{i,k+1/2}}{k_{z_{i,k+1}}}} \quad (4.2.1.24)$$

Os fatores geométricos dado pelas Equações (4.2.1.23) e (4.2.1.24) podem ser obtidos pela aplicação da lei de Darcy assumindo escoamento permanente num meio poroso homogêneo.

4.2.2 Desenvolvimento do Termos de Acumulação

O desenvolvimento dos termos de acumulação das Equações (4.2.1.18), (4.2.1.19) e (4.2.1.20) pode ser feito da forma convencional ou considerando ponto de bolha variável (veja Seção 6).

Na expansão convencional, pode-se fazer a seguinte aproximação :

Óleo

$$\frac{V_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t (\phi b_o S_o)_{i,k} = \frac{V_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} [(\phi b_o S_o)^{n+1} - (\phi b_o S_o)^n]_{i,k} =$$

considerando,

$$\phi_{i,k}^{n+1} = \phi_{i,k}^n [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] \quad (4.2.2.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{V_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \phi_{i,k}^n \{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (b_o S_o)_{i,k}^{n+1} - (b_o S_o)_{i,k}^n \} = \\ &= \frac{V p_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (b_o S_o)_{i,k}^{n+1} - (b_o S_o)_{i,k}^n \} \end{aligned} \quad (4.2.2.2)$$

onde,

$$V p_{i,k}^n = V_{i,k} \phi_{i,k}^n \quad (4.2.2.3)$$

Analogamente, para a água, obtém-se

Água

$$\frac{V_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t (\phi b_w S_w) = \frac{V p_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n)] (b_w S_w)_{i,k}^{n+1} - (b_w S_w)_{i,k}^n \right\} \quad (4.2.2.4)$$

e para o gás

Gás

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t [\phi (R_s b_o S_o) + \phi (S_g b_g)]_{i,k} &= \\ &= \frac{V p_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n)] [R_s b_o S_o + S_g b_g]_{i,k}^{n+1} - (R_s b_o S_o + S_g b_g)_{i,k}^n \right\} \end{aligned} \quad (4.2.2.5)$$

4.3 Equações de Diferenças

Substituindo as Eqs.(4.2.2.1),(4.2.2.2) e (4.2.2.3) nas Eqs.(4.2.1.18),(4.2.1.20) e (4.2.1.19), respectivamente, obtém-se as seguintes equações de diferenças para o escoamento multifásico:

Óleo

$$\begin{aligned} & T x_{o,i+1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o,i+1,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^{n+1}) - \gamma_{o,i+1/2,k}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\ & - T x_{o,i-1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i-1,k}^{n+1}) - \gamma_{o,i-1/2,k}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\ & + T z_{o,i,k+1/2}^{n+1} \left[(p_{o,i,k+1}^{n+1} - p_{o,i,k}^{n+1}) - \gamma_{o,i,k+1/2}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\ & - T z_{o,i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k-1}^{n+1}) - \gamma_{o,i,k-1/2}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] = \\ & = \frac{V p_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n)] (S_o b_o)_{i,k}^{n+1} - (S_o b_o)_{i,k}^n \right\} + Q_{o,i,k}^{n+1} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Água

$$\begin{aligned}
& Tx_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i+1,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
& - Tx_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
& + Tz_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k+1}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
& - Tz_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] = \\
& = \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (b_w S_w)_{i,k}^{n+1} - (b_w S_w)_{i,k}^n \right\} + Q_{w,i,k}^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Gás

$$\begin{aligned}
& (Tx_o R_s)_{i+1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
& - (Tx_o R_s)_{i-1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
& + Tx_{g_{i+1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i+1,k}}^{n+1} - p_{cgo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
& - Tx_{g_{i-1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k}}^{n+1} - p_{cgo_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
& + (Tz_o R_s)_{i,k+1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
& - (Tz_o R_s)_{i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] + \\
& + Tz_{g_{i,k+1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k+1}}^{n+1} - p_{cgo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
& - Tz_{g_{i,k-1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k}}^{n+1} - p_{cgo_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] = \\
& = \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (R_s b_o S_o + S_g b_g)_{i,k}^{n+1} - \right. \\
& \left. - (R_s b_o S_o + S_g b_g)_{i,k}^n \right\} + (R_s Q_o)_{i,k}^{n+1} + Q_{fg,i,k}^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

As Equações (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3) formam um sistema de equações algébricas não lineares.

4.4 Solução do Sistema de Equações de Diferenças

A solução das Equações (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3) é obtida através do método de Newton-Raphson.

Definindo as funções resíduos do reservatório a partir das equações de diferença, tem-se:

Óleo

$$\begin{aligned}
 Fo_{i,k}^{n+1} = & \\
 = & Tx_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
 & - Tx_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
 & + Tz_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
 & - Tz_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] - \\
 & - \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (S_o b_o)_{i,k}^{n+1} - (S_o b_o)_{i,k}^n \right\} + \\
 & + Q_{o_{i,k}}^{n+1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Água

$$\begin{aligned}
 Fw_{i,k}^{n+1} = & \\
 = & Tx_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i+1,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
 & - Tx_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
 & + Tz_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k+1}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
 & - Tz_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] - \\
 & - \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (b_w S_w)_{i,k}^{n+1} - (b_w S_w)_{i,k}^n \right\} - \\
 & - Q_{w_{i,k}}^{n+1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Gás

$$\begin{aligned}
Fg_{i,k}^{n+1} = & (Tx_o R_s)_{i+1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
& - (Tx_o R_s)_{i-1/2,k}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
& + Tx_{g_{i+1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i+1,k}}^{n+1} - p_{cgo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i+1/2,k}}^{n+1} (h_{i+1,k} - h_{i,k}) \right] - \\
& - Tx_{g_{i-1/2,k}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k}}^{n+1} - p_{cgo_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i-1/2,k}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i-1,k}) \right] + \\
& + (Tz_o R_s)_{i,k+1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
& - (Tz_o R_s)_{i,k-1/2}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] + \\
& + Tz_{g_{i,k+1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k+1}}^{n+1} - p_{cgo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k+1/2}}^{n+1} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \right] - \\
& - Tz_{g_{i,k-1/2}}^{n+1} \left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k}}^{n+1} - p_{cgo_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k-1/2}}^{n+1} (h_{i,k} - h_{i,k-1}) \right] - \\
& - \frac{Vp^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (R_s b_o S_o + S_g b_g)_{i,k}^{n+1} - \right. \\
& \left. - (R_s b_o S_o + S_g b_g)_{i,k}^n \right\} - (R_s Q_o)_{i,k}^{n+1} - Q_{fg_{i,k}}^{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Usando a expansão de Taylor truncada das funções resíduos e considerando as variáveis primárias p_o , S_g , S_w , resulta:

$$\begin{aligned}
F\ell_{i,k}^{(\nu+1)} = & F\ell_{i,k}^{(\nu)} + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta p_{o_{i-1,k}}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{g_{i-1,k}}^{(\nu+1)} + \\
& + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{w_{i-1,k}}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta p_{o_{i,k-1}}^{(\nu+1)} + \\
& + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{g_{i,k-1}}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{w_{i,k-1}}^{(\nu+1)} + \\
& + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta p_{o_{i,k}}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{g_{i,k}}^{(\nu+1)} + \\
& + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{w_{i,k}}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F\ell_{i,k}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta p_{o_{i,k+1}}^{(\nu+1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial F_{\ell_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{g_{i,k+1}}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{\ell_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{w_{i,k+1}}^{(\nu+1)} + \\
& + \left(\frac{\partial F_{\ell_{i,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta p_{o_{i+1,k}}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{\ell_{i,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{g_{i+1,k}}^{(\nu+1)} + \\
& + \left(\frac{\partial F_{\ell_{i,k}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S_{w_{i+1,k}}^{(\nu+1)} = 0
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

onde,

ℓ = óleo, gás e água

ν = nível de iteração

Passando o termo $F_{\ell_{i,k}}^{(\nu)}_{n+1}$ para o lado direito da Equação (4.4.4), obtém-se o sistema de equações :

$$\underset{\sim}{J}^{(\nu)}_{n+1} \underset{\sim}{\delta X}^{(\nu+1)}_{n+1} = - \underset{\sim}{F}_{\ell}^{(\nu)}_{n+1} \tag{4.4.5}$$

onde,

$\underset{\sim}{J}$ = matriz jacobiana

$\underset{\sim}{\delta X}$ = vetor solução

$\underset{\sim}{F}_{\ell}$ = vetor termo independente (funções resíduos)

ℓ = óleo, gás e água (fases)

$X = p_o, S_g, S_w$

e,

$$\underset{\sim}{X}^{(\nu+1)}_{n+1} = \underset{\sim}{X}^{(\nu)}_{n+1} + \underset{\sim}{\delta X}^{(\nu+1)}_{n+1} \tag{4.4.6}$$

Para uma malha $N_x \times N_z$, o sistema de equações dado por (4.4.5), fornece um conjunto de $(3 \times N_x \times N_z)$ equações algébricas lineares.

A matriz jacobiana do reservatório é uma matriz pentadiagonal em blocos 3×3 cujos elementos são as derivadas das funções resíduo em relação as variáveis primárias (veja Apêndice A).

$$J_{res} = \begin{bmatrix} \partial F_o / \partial p_o & \partial F_o / \partial S_g & \partial F_o / \partial S_w \\ \partial F_g / \partial p_o & \partial F_g / \partial S_g & \partial F_g / \partial S_w \\ \partial F_w / \partial p_o & \partial F_w / \partial S_g & \partial F_w / \partial S_w \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

Desta forma, o sistema de equações fica

$$\begin{bmatrix} \partial F_o / \partial p_o & \partial F_o / \partial S_g & \partial F_o / \partial S_w \\ \partial F_g / \partial p_o & \partial F_g / \partial S_g & \partial F_g / \partial S_w \\ \partial F_w / \partial p_o & \partial F_w / \partial S_g & \partial F_w / \partial S_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_o \\ F_g \\ F_w \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

A estrutura do jacobiano do reservatório pode ser visualizado (Fig. 12) através de uma montagem para uma malha $N_x \times N_z = 4 \times 3$, com uma ordenação de blocos mostrada pela Fig. 12.

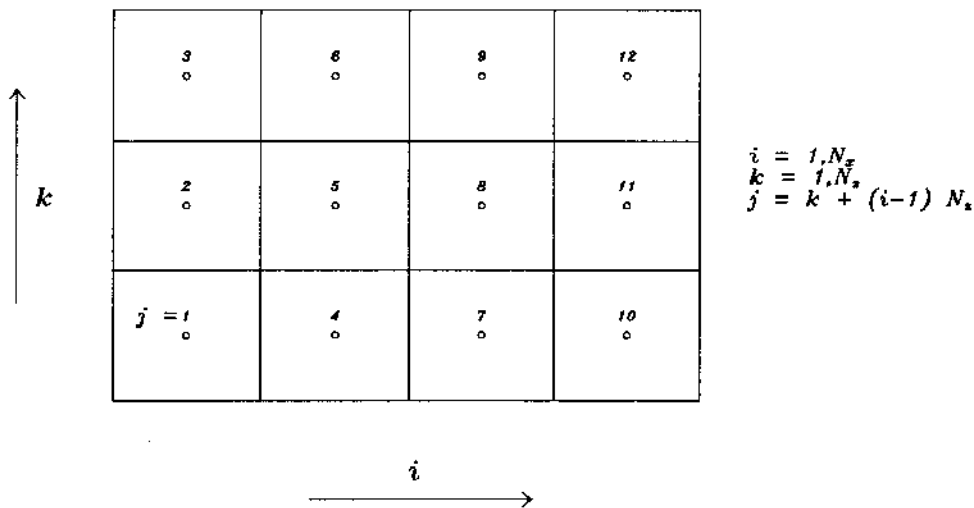


Figura 12: Ordenamento dos Blocos da Malha

Com a utilização de um algoritmo de solução de sistema de equações com matriz de banda, percorrendo a malha segundo a ordenação proposta permite uma menor

○○○	□□□		***								
○○○	□□□		***								
○○○	□□□		***								
△△△	○○○	□□□		***							
△△△	○○○	□□□		***							
△△△	○○○	□□□		***							
	△△△	○○○			***						
	△△△	○○○			***						
	△△△	○○○			***						
○○○			○○○	□□□		***					
○○○			○○○	□□□		***					
○○○			○○○	□□□		***					
	○○○		△△△	○○○	□□□		***				
	○○○		△△△	○○○	□□□		***				
	○○○		△△△	○○○	□□□		***				
		○○○		△△△	○○○			***			
		○○○		△△△	○○○			***			
		○○○		△△△	○○○			***			
			○○○			○○○	□□□		***		
			○○○			○○○	□□□		***		
			○○○			○○○	□□□		***		
				○○○		△△△	○○○	□□□		***	
				○○○		△△△	○○○	□□□		***	
				○○○		△△△	○○○	□□□		***	
					○○○		△△△	○○○			***
					○○○		△△△	○○○			***
					○○○		△△△	○○○			***
						○○○			○○○	□□□	
						○○○			○○○	□□□	
						○○○			○○○	□□□	
							○○○		△△△	○○○	□□□
							○○○		△△△	○○○	□□□
							○○○		△△△	○○○	□□□

Derivadas das Funções Resíduos do Reservatório

○○○○ em relação as variáveis primárias de bloco i, k
 □□□□ em relação as variáveis primárias do bloco $i, k+1$
 △△△△ em relação as variáveis primárias do bloco $i, k-1$
 *** em relação as variáveis primárias do bloco $i+1, k$
 ○○○ em relação as variáveis primárias do bloco $i-1, k$

Figura 13: Estrutura do Jacobiano do Reservatório

esparsidade na banda e portanto uma matriz de armazenamento do jacobiano menor, pois normalmente tem-se $N_x \gg N_z$.

4.5 Tratamento dos Coeficientes Variáveis das Equações de Diferenças

Para um esquema de discretização de blocos centrados a equação diferencial é aproximada pelos pontos nodais, o que significa que as variáveis primárias e as propriedades são avaliadas nos nós. Desta forma, o cálculo da transmissibilidade interblocos definidas na discretização dos termos de fluxo para uma malha irregular necessita de um tratamento adequado.

4.5.1 Tratamento das Variáveis Dependentes da Pressão

As propriedades que são funções de pressão são consideradas como não linearidades fracas, e normalmente, os modelos numéricos aproximam as propriedades da interface pela média simples das propriedades dos blocos que criam a interface ou através de uma ponderação à montante (Fig. 14).

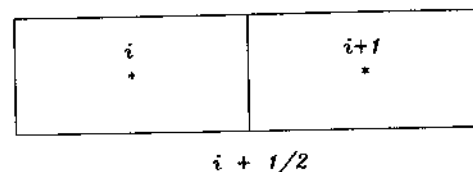


Figura 14: Ponderação na Interface

- Média simples

$$f_{i+1/2} \cong \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) \quad (4.5.1.1)$$

onde,

f = propriedade PVT

- Ponderação a montante (*upstream*)

$$\begin{aligned} f_{i+1/2} &\cong f_i \text{ para fluxo no sentido } i \longrightarrow i+1 \\ f_{i+1/2} &\cong f_{i+1} \text{ para fluxo no sentido } i+1 \longrightarrow i \end{aligned} \quad (4.5.1.2)$$

No modelo proposto, adotou-se para o cálculo das propriedades da interface uma ponderação na distância dada por :

- Ponderação na distância

$$f_{i-1/2} \approx w_i f_i + (i - w_i) f_{i-1} \quad (4.5.1.3)$$

Na direção - x (radial), devido ao comportamento logarítmico da pressão com a distância, a ponderação é feita na malha linearizada (Fig. 15).

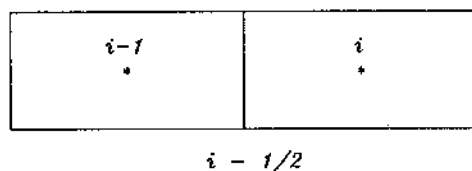


Figura 15: Ponderação na interface na direção - x

$$wx_{i,k} = \frac{\rho_{i-1/2,k} - \rho_{i-1,k}}{\rho_{i,k} - \rho_{i-1,k}} \quad (4.5.1.4)$$

O cálculo dos ponderadores na direção - x (radial) fornece o mesmo valor para todos os blocos. Desta forma, considerando o bloco, N_x tem-se

$$wx = \frac{\rho_{Nx-1/2,k} - \rho_{Nx-1,k}}{\rho_{Nx,k} - \rho_{Nx-1,k}} \quad (4.5.1.5)$$

$$\rho_{Nx-1/2,k} - \rho_{Nx-1,k} = \ln \left(\frac{r_{Nx,k}}{r_{Nx-1,k}} \right) \quad (4.5.1.6)$$

$$\begin{aligned} \rho_{Nx-1/2,k} - \rho_{Nx-1,k} &= \ln \left(\frac{r_{Nx-1/2,k}}{r_{Nx-1,k}} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{r_w \exp(\Delta\rho(Nx-1))}{r_{Nx-1,k}} \right) = \Delta\rho(Nx-1) + \ln \left(\frac{r_w}{r_{Nx-1,k}} \right) \end{aligned} \quad (4.5.1.7)$$

$$= \Delta\rho(Nx-1) - \ln \left(\frac{r_{Nx-1,k}}{r_w} \right) \quad (4.5.1.8)$$

onde,

$$r_{Nx-1/2} = r_w \exp(\Delta\rho(Nx-1))$$

Assim,

$$wx = \frac{\Delta\rho(Nx-1) - \ln \left(\frac{r_{Nx-1,k}}{r_w} \right)}{\ln \left(\frac{r_{Nx,k}}{r_{Nx-1,k}} \right)} \quad (4.5.1.9)$$

Na direção - z, como as camadas tem espessura constante, calcula-se somente os ponderadores de cada camada(Fig. 16):

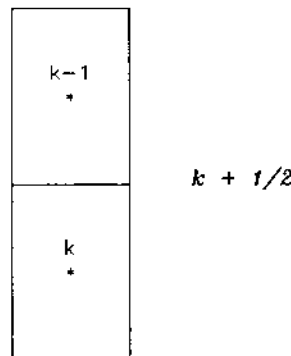


Figura 16: Ponderação na interface na direção - z

$$wz_k = \frac{z_{i,k-1/2} - z_{i,k-1}}{z_{i,k} - z_{i-1,k}} \quad (4.5.1.10)$$

Para uma distribuição uniforme das camadas temos

$$wz_k = 0,5 \quad (4.5.1.11)$$

4.5.2 Tratamento das Variáveis Dependentes da Saturação

As propriedades que dependem da saturação são consideradas como linearidades fortes e exigem uma ponderação apropriada para relacionar a propriedade de interface com as saturações dos blocos adjacentes.

A aproximação da permeabilidade relativa através de uma média simples, com erro de segunda ordem, apresenta em modelos numéricos com equações de natureza hiperbólica resultados incorretos⁽²⁰⁾ e desta forma, costuma-se usar um esquema de ponderação à montante que, embora de primeira ordem, fornece resultados corretos:

$$k_{r\ell_{i+1/2}} = \begin{cases} k_{r\ell}(S_{w_i}) & \text{fluxo de } i+1 \rightarrow i \\ k_{r\ell}(S_{w_{i+1}}) & \text{fluxo de } i \rightarrow i+1 \end{cases} \quad (4.4.2.1)$$

onde, o sentido do fluxo é dado pelo sinal da diferença de potencial:

$$\Delta\Phi_{i+1/2} = [p_{\ell_{i+1}} - p_{\ell_i} - \gamma_{\ell_{i+1/2}}(z_{i+1} - z_i)] \quad (4.4.2.2)$$

assim,

se $\Delta\Phi_{i+1/2} > 0$ fluxo $i+1 \rightarrow i$

se $\Delta\Phi_{i+1/2} < 0$ fluxo $i \rightarrow i+1$

No escoamento multifásico, pode-se ter sentido de fluxo de fases diferentes e portanto, o teste do sentido de fluxo deve ser feito para cada fase.

Adotando a ponderação um ponto à montante tem-se o esquema mostrado pela Tabela 3

Usando a convenção da Tabela 3 o cálculo da permeabilidade relativa na interface fica:

Sentido de Fluxo	Permeabilidade Upsteam	Convenção do Sentido de fluxo
$i + i \rightarrow i$	$k_{r\ell_{i+1/2,k}} = k_{r\ell_{i+1,k}}$	$IF\ell X = 1$
$i \rightarrow 1 + 1$	$k_{r\ell_{i+1/2,k}} = k_{r\ell_{i,k}}$	$IF\ell X = 0$
$k + 1 \rightarrow k$	$k_{r\ell_{i,k+1/2}} = k_{r\ell_{i,k+1}}$	$IF\ell Z = 1$
$k \rightarrow k + 1$	$k_{r\ell_{i,k+1/2}} = k_{r\ell_{i,k}}$	$IF\ell Z = 0$

Tabela 3: Tabela de convenção da ponderação um ponto a montante

$$k_{r\ell_{i+1/2,k}} = IF\ell X \, k_{r\ell_{i+1,k}} + (1 - IF\ell X) \, k_{r\ell_{i,k}} \quad (4.4.2.3)$$

$$k_{r\ell_{i,k+1/2}} = IF\ell Z \, k_{r\ell_{i,k+1}} + (1 - IF\ell Z) \, k_{r\ell_{i,k}} \quad (4.4.2.4)$$

4.6 Discretização das Condições de Contorno

As condições de contorno externas e internas (poço) são representadas na equação de diferença finita através da consideração da condição de contorno homogêneo de Neumann (sem fluxo em todo o contorno) e a substituição adequada dos termos de produção através do limite interno por termos fontes

A condição de contorno de Neumann é obtida considerando nas equações de diferenças:

$$Tx_{\ell_{i+1/2}} = 0 \text{ para limite externo}$$

$$Tx_{\ell_{i-1/2}} = 0 \text{ para limite interno}$$

$$Tz_{\ell_{k+1/2}} = 0 \text{ para limite superior}$$

$$Tz_{\ell_{k-1/2}} = 0 \text{ para limite inferior}$$

Os termos fontes que substituem os fluxos no limite interno são dados por

$$Q_{\ell_1,k} = Tx_{\ell_{1/2,k}} [p_{\ell_{1,k}} - p_{wf_k}] \quad (4.6.1)$$

$$Q_{\ell_1,k} = Tx_{\ell_{1/2,k}} [p_{\ell_{1,k}} - p_{wf_k}] \quad (4.6.2)$$

para cada fase

$$Q_{o_1,k} = T_{o_1/2,k} [p_{o_1,k} - p_{wf_k}] \quad (4.6.3)$$

$$Q_{fg1,k} = T_{g1/2,k} [p_{o1,k} - p_{wf,k} + p_{cgo1,k}] \quad (4.6.4)$$

$$Q_{w1,k} = T_{w1/2,k} [p_{o1,k} - p_{wf,k} - p_{cwo1,k}] \quad (4.6.5)$$

$$Q_{g1,k} = Q_{fg1,k} + R_{s1,k} Q_{o1,k} \quad (4.6.6)$$

onde, $T_{\ell_{1/2},k}$ representa a transmissibilidade entre o poço e o nó do bloco do reservatório adjacente, calculado de forma consistente com o esquema de transmissibilidade interblocos usado para toda a malha, isto é, as propriedades de fluidos ponderadas pela distância e as permeabilidades relativas ponderadas um ponto a montante.

5 MODELO NUMÉRICO DO POÇO

5.1 Construção da Malha

O modelo numérico do poço considera o poço composto de duas partes, inferior e superior, e discretiza apenas a parte inferior (Fig. 17).

A parte inferior do poço é equivalente ao comprimento da espessura do reservatório e é discretizada por um esquema de bloco centrado com blocos de alturas iguais aos dos blocos adjacentes do reservatório.

A simulação de um ciclo completo de um DST necessita de duas condições especificadas:

- i) Fluxo : Pressão especificada pelo crescimento da coluna hidrostática da parte superior da coluna
- ii) Estática : Vazão total especificada: ($Q_t = 0$)

5.2 Condição de Pressão Especificada

Para a simulação do “slug test”, especifica-se inicialmente a pressão de abertura a uma dada profundidade de referência e a densidade do fluido no poço.

A distribuição inicial de pressão de abertura em cada bloco da parte inferior pode ser então calculado por:

$$p_{wf_k} = p_0 + \gamma_{p_0} (z_k - z_{p_0}) \quad (5.2.1)$$

onde,

p_0 = Pressão de abertura inicial

z_{p_0} = Profundidade de referência de p_0

γ_{p_0} = Peso específico do fluido da coluna/poço (pressão/ distância) no momento da abertura

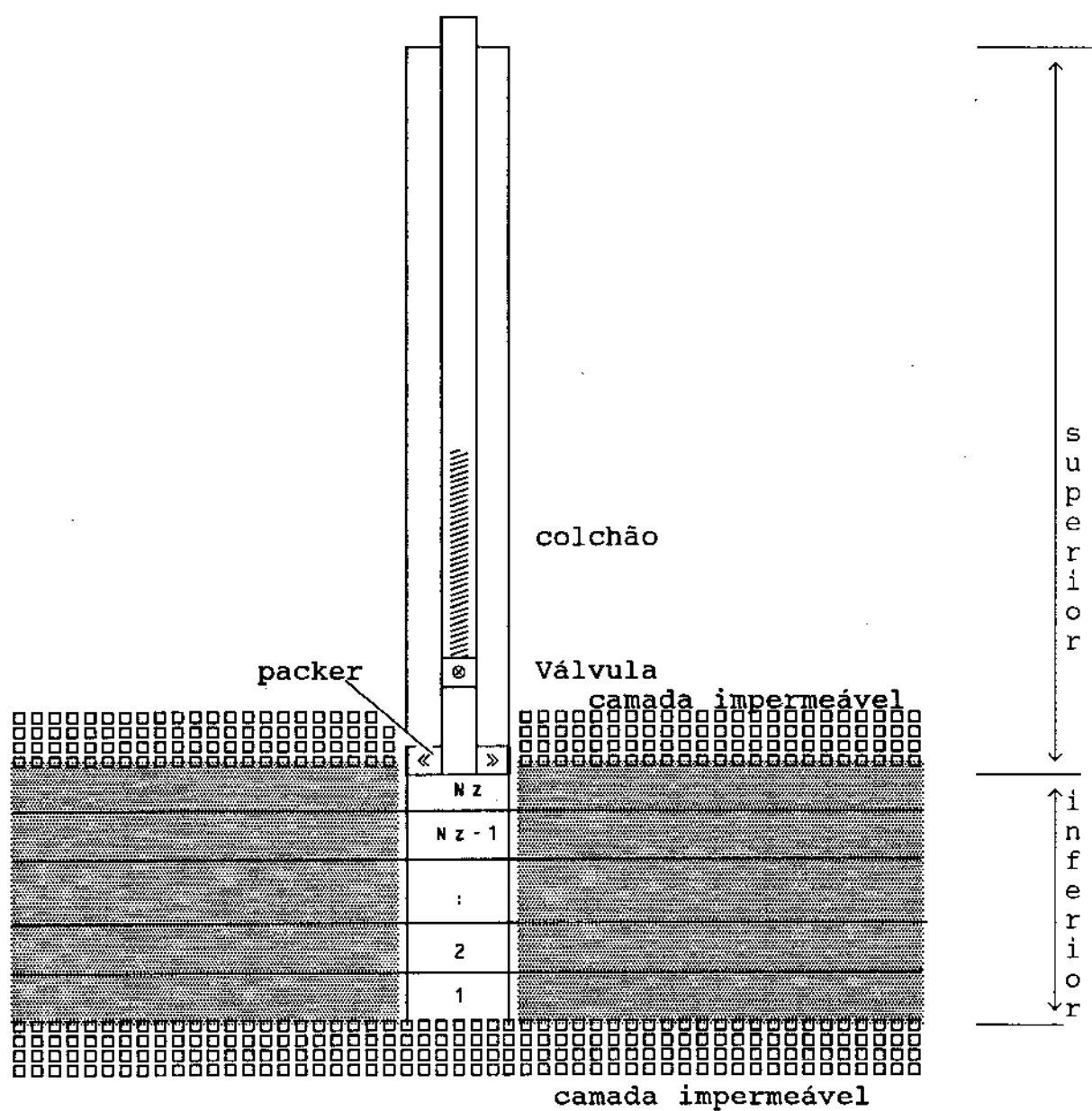


Figura 17: Esquema da malha do poço

Durante o período de fluxo, desprezando os efeitos inerciais e assumindo apenas os efeitos gravitacionais, o gradiente de pressão na face de formação pode ser aproximado pelo gradiente da pressão hidrostática no poço.

$$\frac{dp_{wf}}{dz} = \bar{\gamma} \quad (5.2.2)$$

onde,

$\bar{\gamma}$ = peso específico médio do fluido no poço.

A discretização da Equação (5.2.2), com ordenação dos blocos no sentido contrário a orientação do eixo - z adotada, fornece:

$$p_{wf_k} = p_{wf_{k+1}} - \bar{\gamma}_{k+1/2} (z_{k+1} - z_k) \quad (5.2.3)$$

O peso específico do fluido é calculado considerando apenas o gradiente do líquido e ponderado pela fração volumétrica da fase água no líquido,

$$\bar{\gamma}_{k+1/2} = \frac{1}{2} (\gamma_{w_{k+1}} + \gamma_{w_k}) f_{w_{k+1/2}} + \frac{1}{2} (\gamma_{o_{k+1}} + \gamma_{o_k}) (1 - f_{w_{k+1/2}}) \quad (5.2.4)$$

onde, $f_{w_{k+1/2}}$ é a fração volumétrica da água no líquido dado por

$$f_{w_{k+1/2}} = \frac{\sum_{m=1}^j \left(\frac{Q_w}{b_w} \right)_m}{\sum_{m=1}^j \left(\frac{Q_w}{b_w} + \frac{Q_o}{b_o} \right)_m} \quad (5.2.5)$$

Assim, fixado a pressão do último bloco, as pressões dos outros blocos da parte inferior do poço podem ser relacionadas através da equação :

$$p_{wf_k} = p_{wf_{Nz}} - H_k \quad (5.2.6)$$

onde,

$$H_k = \sum_{m=j}^{Nz-1} \bar{\gamma}_{m+1/2} (z_{m+1} - z_m) \quad (5.2.7)$$

A pressão do fluxo do último bloco (N_z) é dada pelo crescimento da coluna hidrostática no poço,

$$p_{wfN_z}^{n+1} = p_{wfN_z}^n + \bar{\gamma}_{N_z}^{n+1} \Delta H^{n+1} \quad (5.2.8)$$

$$\bar{\gamma}_{N_z}^{n+1} = \gamma_{wN_z}^{n+1} fw_{N_z+1/2}^{n+1} + \gamma_{oN_z}^{n+1} (1 - fw_{N_z+1/2}^{n+1}) \quad (5.2.9)$$

$$\Delta H^{n+1} = \sum_{m=1}^{N_z} \left(\frac{Q_{om}}{b_{om}} + \frac{Q_{wm}}{b_{wm}} \right) \frac{\Delta t}{C_{col}} \quad (5.2.10)$$

$$C_{col} = \frac{\pi D_i^2}{4} \quad (5.2.11)$$

onde,

$p_{wfN_z}^{n+1}$ = pressão de fluxo do bloco N_z no nível de tempo $n + 1$

$p_{wfN_z}^n$ = pressão de fluxo do bloco N_z no nível de tempo n

$\bar{\gamma}_{N_z}^{n+1}$ = peso específico do líquido do bloco N_z no nível de tempo $n + 1$

ΔH^{n+1} = Variação da coluna hidrostática durante o incremento de tempo Δt

$\Delta t = t^{n+1} - t^n$

C_{col} = capacidade da coluna

D_i = diâmetro interno da tubulação

Numa solução totalmente implícita usando o método de Newton, a equação (5.2.8) pode ser incorporada ao jacobiano do reservatório, definido na seção 4.4, sem alteração de sua estrutura pelo seguinte procedimento:

Define-se a função resíduo do poço a partir da Eq. (5.2.8)

$$Fp_{wf}^{n+1} = (p_{wfN_z}^n - p_{wfN_z}^{n+1}) + \bar{\gamma}_{N_z}^{n+1} \sum_{m=1}^{N_z} \left(\frac{Q_{om}}{b_{om}} + \frac{Q_{wm}}{b_{wm}} \right) \frac{\Delta t}{C_{col}} = 0 \quad (5.2.12)$$

Usando a Eq. (5.2.6), coloca-se como única incógnita do poço a pressão de fluxo do último bloco.

Considerando as variáveis primárias do poço e do reservatório e usando a expansão de Taylor truncada da função resíduo do poço, tem-se

$$\begin{aligned}
Fp_{wf}^{(\nu)+1} &= Fp_{wf}^{(\nu)+1} + \left(\frac{\partial Fp_{wf}}{\partial p_{wfNz}} \right)^{(\nu)+1} \delta p_{wfNz}^{(\nu)+1} + \sum_{k=1}^{Nz} \left(\frac{\partial Fp_{wf}}{\partial p_{oi,k}} \right)^{(\nu)+1} \delta p_{oi,k}^{(\nu)+1} + \\
&+ \sum_{k=1}^{Nz} \left(\frac{\partial Fp_{wf}}{\partial S_{g1,k}} \right)^{(\nu)+1} \delta S_{g1,k}^{(\nu)+1} + \sum_{k=1}^{Nz} \left(\frac{\partial Fp_{wf}}{\partial S_{w1,k}} \right)^{(\nu)+1} \delta S_{w1,k}^{(\nu)+1} = 0
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

A inclusão da função resíduo do poço no jacobiano do reservatório não altera o tamanho da banda e a matriz jacobiana do reservatório é aumentada em uma linha e uma coluna de blocos (Fig. 18).

Os elementos adicionais do jacobiano são dados por:

Primeiro bloco da primeira linha e primeira coluna

$$J_{\text{poço}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fp_{wf}}{\partial p_{wfNz}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.2.14}$$

Blocos restantes da primeira linha

$$J_{\text{poço/res}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fp_{wf}}{\partial p_{oi,k}} & \frac{\partial Fp_{wf}}{\partial S_{g1,k}} & \frac{\partial Fp_{wf}}{\partial S_{w1,k}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2.15}$$

Blocos restantes da primeira coluna

$$J_{\text{res/poço}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_o}{\partial p_{wfNz}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_g}{\partial p_{wfNz}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_w}{\partial p_{wfNz}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2.16}$$

Os elementos adicionais são montados de forma a preservar a estrutura dos elementos do bloco do jacobiano do reservatório (3×3). Na diagonal do primeiro bloco

*** *** ***	+++ +++ +++	+++ +++ +++	+++ +++ +++									
ooo ooo ooo	ooo ooo ooo	ooo ooo ooo		*** *** ***								
ooo ooo ooo	aaa aaa aaa	ooo ooo ooo	ooo ooo ooo		*** *** ***							
ooo ooo ooo		aaa aaa aaa	ooo ooo ooo			*** *** ***						
	ooo ooo ooo			ooo ooo ooo	ooo ooo ooo		*** *** ***					
		ooo ooo ooo		aaa aaa aaa	ooo ooo ooo	ooo ooo ooo		*** *** ***				
			ooo ooo ooo		aaa aaa aaa	ooo ooo ooo			*** *** ***			
				ooo ooo ooo			ooo ooo ooo	ooo ooo ooo		*** *** ***		
					ooo ooo ooo		aaa aaa aaa	ooo ooo ooo	ooo ooo ooo		*** *** ***	
						ooo ooo ooo					*** *** ***	
							ooo ooo ooo	ooo ooo ooo				*** *** ***
									ooo ooo ooo	ooo ooo ooo		
										ooo ooo ooo	ooo ooo ooo	
											ooo ooo ooo	ooo ooo ooo

Derivadas das Funcoes Residuos do Reservatorio

ooooo em relacao as variaveis primarias de i, k
 ooooo em relacao as variaveis primarias de $i, k+1$
 aaaaa em relacao as variaveis primarias de $i, k-1$
 ***** em relacao as variaveis primarias de $i+1, k$
 oooooo em relacao as variaveis primarias de $i-1, k$
 oooooo em relacao a variavel primaria do poço p_{wtm}

Derivadas da Funcao Residuo do Poco

***** em relacao a p_{wtm}
 ++++++ em relacao a variaveis primarias do reservatorio

Figura 18: Jacobiano do reservatório com inclusão do poço

do jacobiano são colocados valores unitários para permitir a solução por eliminação de Gauss.

5.3 Condição de Vazão Especificada

Na solução com vazão especificada adota-se o mesmo procedimento da condição de pressão especificada.

Para uma condição de vazão total especificada, tem-se

$$Q_T = \sum_{k=1}^{Nz} (Q_{o1,k} + Q_{w1,k} + Q_{g1,k}) \quad (5.3.1)$$

onde,

$$Q_{o1,k} = T x_{o1/2,k} (p_{o1,k} - p_{wf,k}) \quad (5.3.2)$$

$$Q_{w1,k} = T x_{w1/2,k} (p_{o1,k} - p_{wf,k} - p_{cwo1,k}) \quad (5.3.3)$$

$$Q_{g1,k} = T x_{g1/2,k} (p_{o1,k} - p_{wf,k} - p_{cgo1,k}) + R_{s1,k} Q_{o1,k} \quad (5.3.4)$$

Na solução usando o método de Newton - Raphson, define-se a função resíduo da vazão como

$$FQ = \sum_{k=1}^{Nz} (Q_{w1,k} + Q_{w1,k} + Q_{g1,k}) - Q_T = 0 \quad (5.3.5)$$

Como os $p_{wf,k}$ são relacionadas pela Eq.(5.2.6) com $p_{wf,Nz}$, pode-se também colocar $p_{wf,Nz}$ como única incógnita do poço e deste modo a expansão de Taylor da Eq.(5.3.4) fica

$$\begin{aligned} FQ^{(\nu+1)}_{n+1} &= \\ &= FQ^{(\nu)}_{n+1} + \left(\frac{\partial FQ}{\partial p_{wf,Nz}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta p^{(\nu+1)}_{wf,Nz} + \sum_{k=1}^{Nz} \left(\frac{\partial FQ}{\partial p_{o1,k}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta p^{(\nu+1)}_{o1,k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{Nz} \left(\frac{\partial FQ}{\partial S_{g1,k}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S^{(\nu+1)}_{g1,k} + \sum_{k=1}^{Nz} \left(\frac{\partial FQ}{\partial S_{w1,k}} \right)^{(\nu)}_{n+1} \delta S^{(\nu+1)}_{w1,k} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

A montagem do jacobiano é a mesma da pressão especificada, com os blocos adicionais dado por :

Primeiro bloco da primeira linha e primeira coluna

$$JQ_{poco} = \begin{bmatrix} \frac{\partial FQ}{\partial p_{wf_{Nz}}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.7)$$

Blocos restantes da primeira linha

$$JQ_{poco/res} = \begin{bmatrix} \frac{\partial FQ}{\partial p_{o1,k}} & \frac{\partial FQ}{\partial S_{g1,k}} & \frac{\partial FQ}{\partial S_{w1,k}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.8)$$

Blocos restantes da primeira coluna

$$JQ_{res/poco} = \begin{bmatrix} \frac{\partial FQ}{\partial p_{wf_{Nz}}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial FQ}{\partial F_g} & 0 & 0 \\ \frac{\partial FQ}{\partial F_w} & 0 & 0 \\ \frac{\partial FQ}{\partial p_{wf_{Nz}}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.9)$$

6 MODELO DE PONTO DE BOLHA VARIÁVEL

No período de fluxo a face da formação é submetida a uma variação muito grande de pressão que muitas vezes ocasiona um escoamento multifásico no interior do reservatório, durante parte ou todo o período de fluxo.

A repressurização do reservatório, pelo crescimento da coluna ou pelo fechamento, causa a dissolução do gás livre no óleo. Quando todo o gás está em solução, dependendo da distribuição do gás disponível em cada célula na dissolução, pode-se ter diferentes pressões de bolha em diferentes partes.

A simulação do ponto de bolha variável exige um tratamento especial para os termos de acumulação das equações do óleo e do gás.

Os métodos do manuseio⁽²²⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾, do problema do ponto de bolha variável, assumem que a pressão de bolha é uma variável apenas nos termos de acumulação. Segundo Stright⁽²⁵⁾, o tratamento dos termos de acumulação é suficiente para um modelo areal ou 3-D, mas para as aplicações de cone é necessário também o tratamento implícito da pressão de bolha nos termos do fluxo envolvendo R_s .

Para levar em consideração a variação do ponto de bolha deve-se expandir os termos de acumulação da equação de diferença do óleo e do gás de forma conveniente:

Considerando os termos de acumulação do óleo,

$$A_{co} = \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \Delta t (\phi b_o S_o) \quad (6.1)$$

e do gás

$$A_{cg} = \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \Delta t [\phi (R_s b_o S_o + S_g b_g)] \quad (6.2)$$

para um esquema totalmente implícito a expansão é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_{co} &= \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ (\phi S_o)^n \Delta t b_o + b_o^{n+1} \Delta t (\phi S_o) \right\}_{i,k} = \\ &= \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ (\phi S_o)^n \Delta t b_o + b_o^{n+1} [(\phi S_o)^{n+1} - (\phi S_o)^n] \right\}_{i,k} = \end{aligned}$$

$$= \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ (\phi S_o)^n \Delta_t b_o + b_o^{n+1} \left[[1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \phi^n S_o^{n+1} - (\phi S_o)^n \right] \right\}_{i,k} \quad (6.3)$$

considerando que,

$$\phi_{i,k}^{n+1} = \phi_{i,k}^n [1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n)] \quad (6.4)$$

Assim,

$$Aco = \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ S_o^n \Delta_t b_o + b_o^{n+1} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] S_o^{n+1} - S_o^n \right\}_{i,k} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} Acg &= \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ (\phi S_o)^n \Delta_t (R_s b_o)^{n+1} + (R_s b_o)^{n+1} \Delta_t (\phi S_o) + \right. \\ &\quad \left. + (\phi S_g b_g)^{n+1} - (\phi S_g b_g)^n \right\}_{i,k} = \\ &= \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ (\phi S_o)^n \Delta_t (R_s b_o) + (R_s b_o)^{n+1} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \phi^n S_o^{n+1} - \right. \\ &\quad \left. - (\phi S_o)^n + [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \phi^n (S_g b_g)^{n+1} - (\phi S_g b_g)^n \right\}_{i,k} = \\ &= \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ S_o^n \Delta_t (R_s b_o) + (R_s b_o)^{n+1} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] S_o^{n+1} - S_o^n \right\} + \\ &\quad + [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (S_g b_g)^{n+1} - (S_g b_g)^n \}_{i,k} \quad (6.6) \end{aligned}$$

Usando a expansão $\Delta_t (R_s b_o) = R_s^n \Delta_t b_o + b_o^{n+1} \Delta_t R_s$ obtém-se

$$\begin{aligned} Acg &= \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ S_o^{n+1} [R_s^n \Delta_t b_o + b_o^{n+1} \Delta_t R_s] + \right. \\ &\quad + (R_s b_o)^{n+1} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] S_o^{n+1} - S_o^n \right\} + \\ &\quad + [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (S_g b_g)^{n+1} - (S_g b_g)^n \}_{i,k} \quad (6.7) \end{aligned}$$

6.1 Lógica de Ponto de Bolha

A lógica do tratamento do ponto de bolha dos termos de acumulação é dividida em 4 casos:

Caso 1: A pressão esta abaixo de p_b e continua abaixo de p_b (caso padrão)

Caso 2: A pressão cruza p_b de baixo para cima

Caso 3: A pressão está acima da p_b e permanece acima

Caso 4: A pressão cruza p_b de cima para baixo

6.1.1 Tratamento do Caso 1 : A pressão está abaixo de p_b e continua abaixo de p_b .

- a) No tempo n tem-se $p_o^n < p_b^n$ e $S_g^n > 0$
- b) Na primeira iteração resolve-se para $p_o^{n+1,1}$ e $S_g^{n+1,1}$
- c) Se $p_o^{n+1,1} < p_b^n$ e $S_g^{n+1,1} > 0$, prossegue-se iterando para $p_o^{n+1,\nu+1}$ e $S_g^{n+1,\nu+1}$ com p_b fixo para $\nu = 1, 2, \dots$

onde,

ν é o número da iterações

- Expansão de $\Delta_t b_o$ (Fig. 19)

$$\Delta_t b_o = b_o^{n+1} - b_o^n = b_o' \Delta_t p_o^{n+1} \quad (6.1.1.1)$$

onde,

$$\Delta_t p_o^{n+1} = p_o^{n+1,\nu+1} - p_o^n \quad (6.1.1.2)$$

$$b_o' = \frac{b_o(p_o^{n+1,\nu}, p_b^n) - b_o(p_o^n, p_b^n)}{p_o^{n+1,\nu} - p_o^n} \quad (6.1.1.3)$$

para $\nu = 0$, b_o' é obtida da curva $b_o \times p_o$ da PVT do óleo saturado com $p_o^{n+1} = p_o^n$

- Expansão de $\Delta_t R_s$ (Fig. 20)

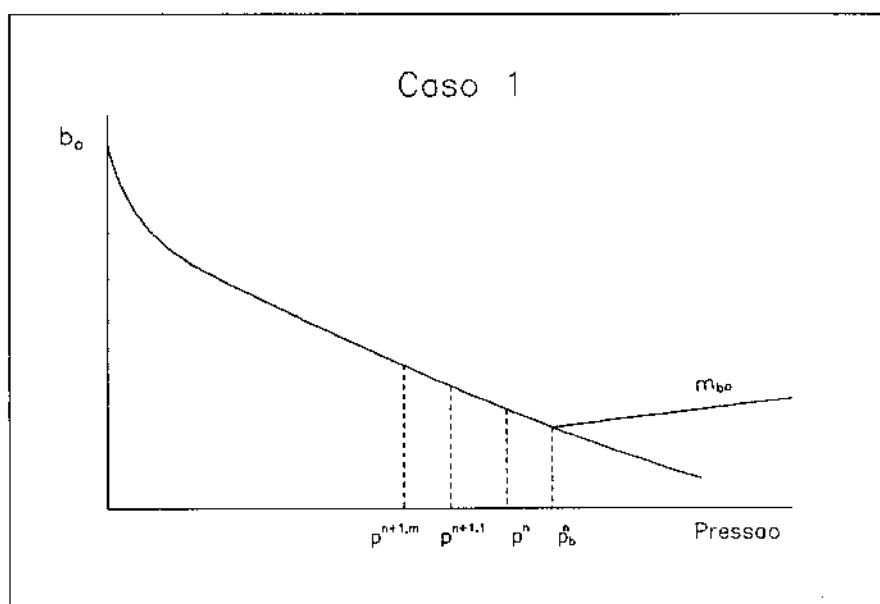


Figura 19: Caso 1 : Expansão de $\Delta_t b_o$

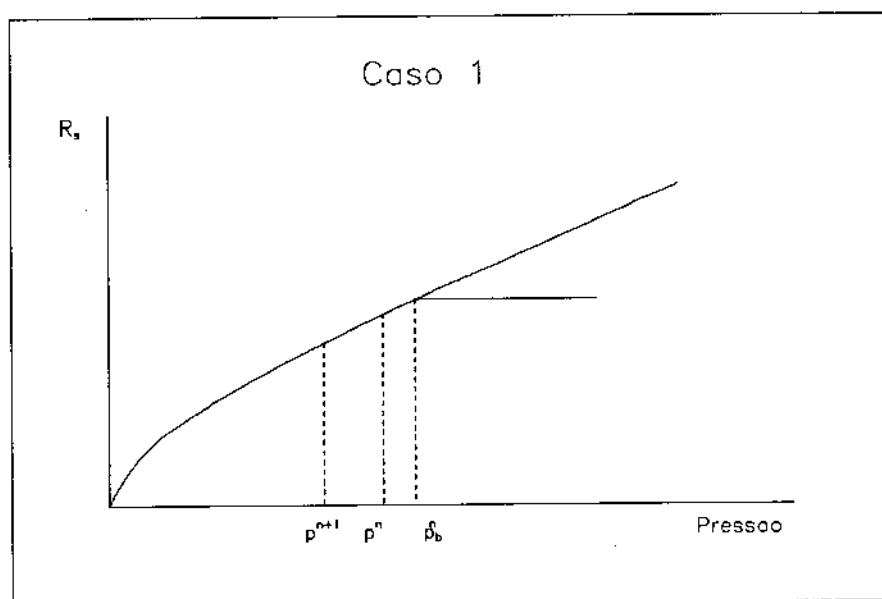


Figura 20: Caso 1 : Expansão de $\Delta_t R_s$

$$\Delta_t R_s = R_s^{n+1} - R_s^n = R'_s \Delta_t p_o^{n+1} \quad (6.1.1.4)$$

onde,

$$R'_s = \frac{R_s(p_o^{n+1,\nu}, p_b^n) - R_s(p_o^n, p_b^n)}{p_o^{n+1,\nu} - p_o^n} \quad (6.1.1.5)$$

para $\nu = 0$, R'_s é obtido da tabela PVT saturado para $p_o^{n+1} = p_o^n$

No final do tempo $n+1$ tem-se p_o^{n+1} e S_g^{n+1} e estima-se p_b^{n+1} usando balanço de material.

6.1.2 Tratamento do Caso 2 : Pressão cruza p_b de baixo para cima

a) No tempo n tem-se $p_o^n < p_b^n$ e $S_g^n > 0$

b) Na primeira iteração, resolve-se para $p_o^{n+1,1}$ e $S_g^{n+1,1}$

c) Se $p_o^{n+1,1} > p_b^n$ e $S_g^{n+1,1} < 0$, isto é, a pressão cruzou o p_b de baixo para cima, refaz-se a iteração com $S_g^{n+1} = 0$, resolvendo para $p_b^{n+1,1}$ e $p_o^{n+1,1}$

• Expansão de $\Delta_t b_o$ (Fig. 21)

$$\Delta_t b_o = b_o(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - b_o(p_o^n, p_b^n) \quad (6.1.2.1)$$

somando e subtraindo $b_o(p_o^{n+1}, p_b^{n+1})$ e $b_o(p_b^n, p_b^n)$ da Eq.(6.1.2.1), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta_t b_o &= [b_o(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - b_o(p_b^{n+1}, p_b^{n+1})] + [b_o(p_b^{n+1}, p_b^{n+1}) - b_o(p_b^n, p_b^n)] + \\ &+ [b_o(p_b^n, p_b^n) - b_o(p_o^n, p_b^n)] = \\ &= b'_o(p_o^{n+1,\nu+1} - p_b^{n+1}) + b'_{ob} \Delta_t p_b + b_{ob}^n - b_o^n \end{aligned} \quad (6.1.2.2)$$

onde,

$$b'_o = \frac{b_o(p_o^{n+1,\nu}, p_b^{n+1,\nu}) - b_o(p_b^{n+1,\nu}, p_b^{n+1,\nu})}{p_o^{n+1,\nu} - p_b^{n+1,\nu}} \cong m_{bo} \quad (6.1.2.3)$$

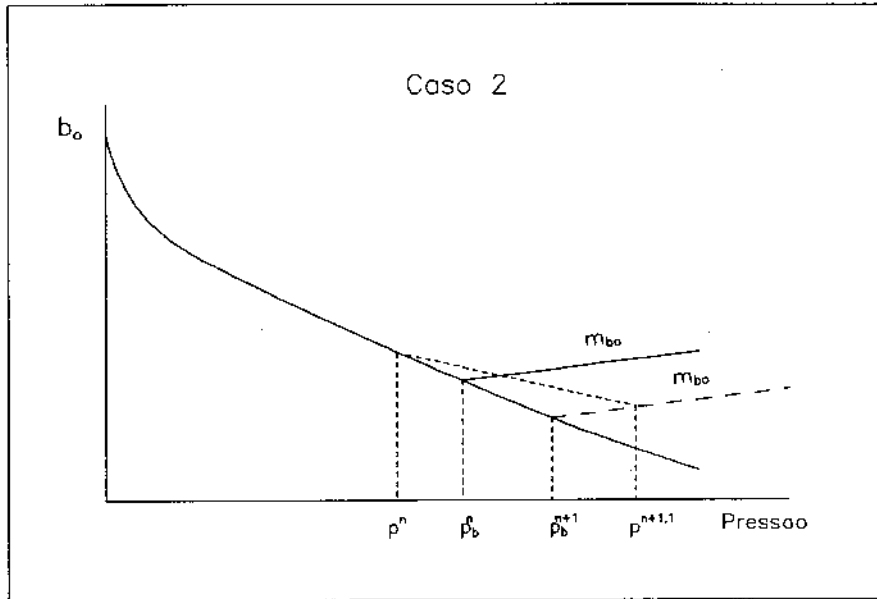


Figura 21: Caso 2 : Expansão de $\Delta_t b_o$

m_{bo} = declividade da reta de b_o subsaturado

$$b'_{ob} = \frac{b_o(p_b^{n+1,\nu}, p_b^{n+1,\nu}) - b_o(p_b^n, p_b^n)}{p_b^{n+1,\nu} - p_b^n} \quad (6.1.2.4)$$

$$b_{ob}^n = b_o(p_b^n, p_b^n)$$

$$b_o = b_o(p_o^n, p_b^n)$$

assim,

$$\Delta_t b_o = m_{bo} p_o^{n+1,\nu+1} + (b'_{ob} - m_{bo}) p_b^{n+1,\nu+1} - b'_{ob} p_b^n + (b_{ob}^n - b_o^n) \quad (6.1.2.5)$$

- Expansão de $\Delta_t R_s$ (Fig. 22)

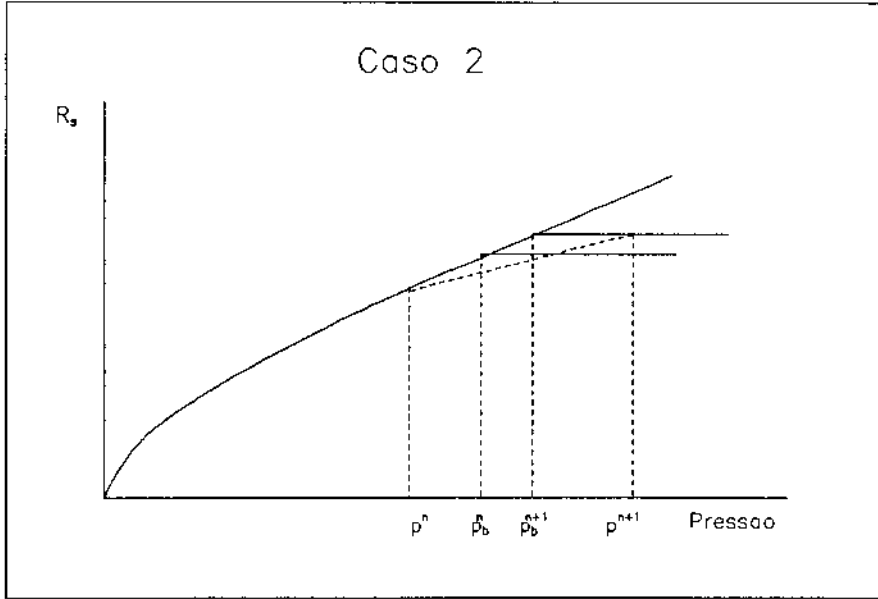


Figura 22: Caso 2 : Expansão de $\Delta_t R_s$

$$\begin{aligned}\Delta_t R_s &= R_s(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - R_s(p_o^n, p_b^n) = \\ &= R_s(p_b^{n+1}, p_b^{n+1}) - R_s(p_o^n, p_b^n)\end{aligned}\quad (6.1.2.6)$$

Somando e subtraindo $R_s(p_b^n, p_b^n)$ da Eq.(6.1.2.6)

$$\begin{aligned}\Delta_t R_s &= [R_s(p_b^{n+1}, p_b^{n+1}) - R_s(p_b^n, p_b^n)] + [R_s(p_b^n, p_b^n) - R_s(p_o^n, p_b^n)] = \\ &= R'_{s_b} \Delta_t p_b + R_{s_b}^n - R_s^n \\ &= R'_{s_b} (p_b^{n+1, \nu+1} - p_b^n) + R_{s_b}^n - R_s^n\end{aligned}\quad (6.1.2.7)$$

onde,

$$R'_{s_b} = \frac{R_s(p_b^{n+1, \nu}, p_b^{n+1, \nu}) - R_s(p_b^n, p_b^n)}{p_b^{n+1, \nu} - p_b^n}\quad (6.1.2.8)$$

$$\Delta_t p_b = p_b^{n+1, \nu+1} - p_b^n$$

$$R_{s_b}^n = R_s(p_b^n, p_b^n)$$

$$R_s^n = R_s(p_o^n, p_b^n)$$

6.1.3 Tratamento do caso 3 : A pressão está acima do p_b e continua acima.

- a) No tempo n tem-se $p_o^n > p_b^n$ e $S_g^n = 0$
 - b) Na primeira iteração resolve-se para $p_o^{n+1,1}$ e $p_b^{n+1,1}$
 - c) Se $p_o^{n+1,1} > p_b^{n+1,1}$ a pressão continua acima de p_b e prossegue-se resolvendo para $p_o^{n+1,\nu+1}$ e $p_b^{n+1,\nu+1}$
- Expansão de $\Delta_t b_o$ (Fig. 23)

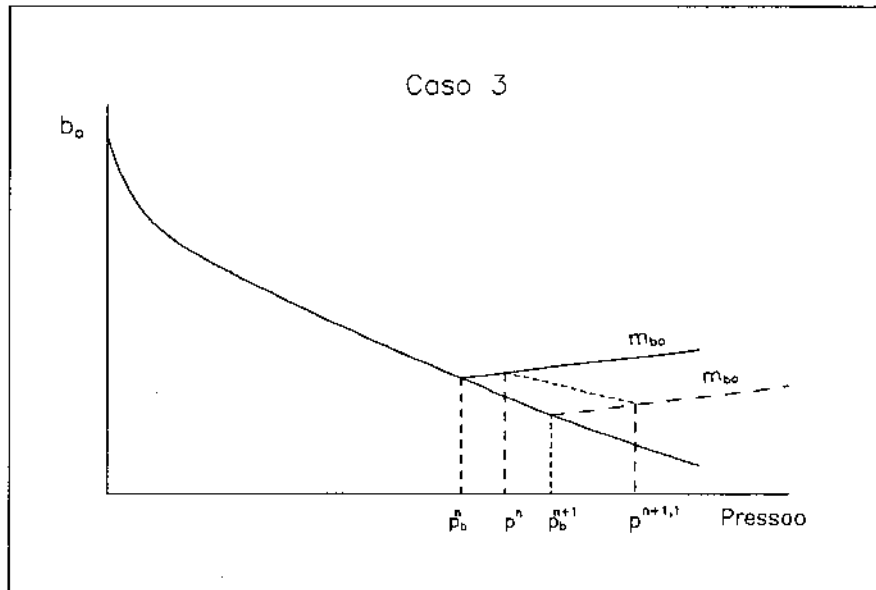


Figura 23: Caso 3 : Expansão de $\Delta_t b_o$

$$\Delta_t b_o = b_o(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - b_o(p_o^n, p_b^n) \quad (6.1.3.1)$$

somando e subtraindo $b_o(p_b^{n+1}, p_b^{n+1})$ e $b_o(p_b^n, p_b^n)$ da Eq.(6.1.3.1),

$$\begin{aligned}
 \Delta_t b_o &= [b_o(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - b_o(p_b^{n+1}, p_b^{n+1})] + [b_o(p_b^{n+1}, p_b^{n+1}) - b_o(p_b^n, p_b^n)] + \\
 &+ [b_o(p_b^n, p_b^n) - b_o(p_o^n, p_b^n)] = \\
 &= m_{b_o}(p_o^{n+1, \nu+1} - p_b^{n+1, \nu+1}) + b'_{o_b}[p_b^{n+1, \nu+1} - p_b^n] + m_{b_o}(p_b^n - p_o^n)
 \end{aligned} \tag{6.1.3.2}$$

onde,

$$b'_{o_b} = \frac{[b_o(p_o^{n+1, \nu}, p_b^{n+1, \nu}) - b_o(p_b^n, p_b^n)]}{(p_b^{n+1, \nu} - p_b^n)} \tag{6.1.3.3}$$

logo,

$$\Delta_t b_o = m_{b_o}(p_o^{n+1, \nu+1} - p_o^n) + (b'_{o_b} - m_{b_o})(p_b^{n+1, \nu+1} - p_b^n) \tag{6.1.3.4}$$

• Expansão de $\Delta_t R_s$

$$\begin{aligned}
 \Delta_t R_s &= R_s(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - R_s(p_o^n, p_b^n) = \\
 &= R_s(p_b^{n+1}, p_b^{n+1} - R_s(p_b^n), p_b^n) = \\
 &= R'_{s_b} \Delta_t p_b = R'_{s_b}[p_b^{n+1, \nu+1} - p_b^n]
 \end{aligned} \tag{6.1.3.5}$$

onde,

$$R'_{s_b} = \frac{R_s(p_b^{n+1, \nu}, p_b^{n+1, \nu}) - R_s(p_b^n, p_b^n)}{p_b^{n+1, \nu} - p_b^n} \tag{6.1.3.6}$$

ou

$$R'_{s_b} = \left(\frac{\partial R_s}{\partial p_b} \right)^{n+1} \tag{6.1.3.7}$$

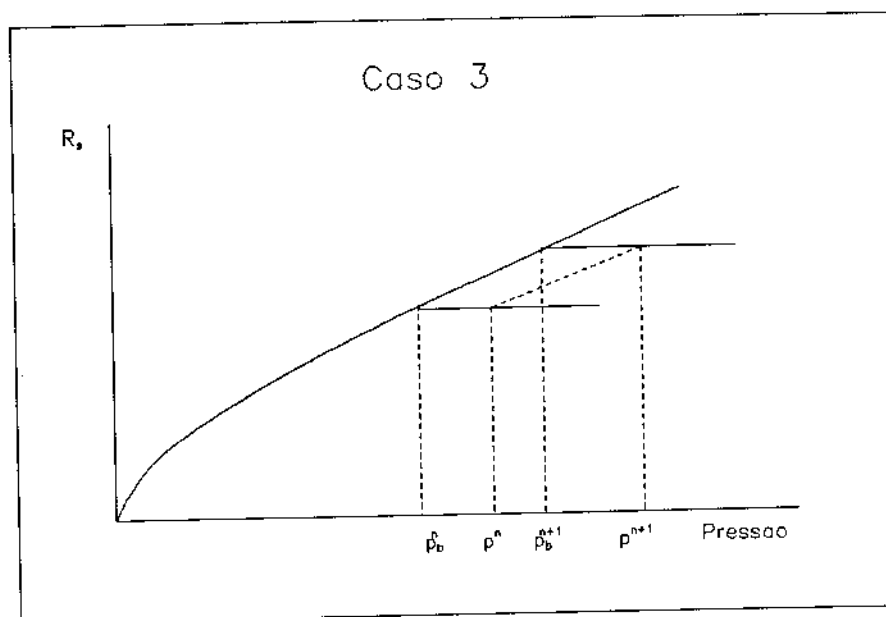


Figura 24: Caso 3 : Expansão de $\Delta_t R_s$

6.1.4 Tratamento do caso 4 : A pressão cruza p_b de cima para baixo

- a) No tempo n tem-se $p_o^n > p_b^n$ e $S_g^n = 0$
 - b) Na primeira iteração resolve-se para p_o^{n+1} e p_b^{n+1} usando o procedimento do caso 3
 - c) Se $p_o^{n+1} < p_b^{n+1}$ refaz-se a primeira iteração resolvendo para p_o^{n+1} e S_g^{n+1} e usa-se o balanço de material para calcular o novo p_b^{n+1} no final do tempo $n + 1$.
 - d) Se $p_o^{n+1,\nu} < p_b^{n+1,\nu}$ prossegue-se resolvendo para $p_o^{n+1,\nu+1}$ e $S_g^{n+1,\nu+1}$
- Expansão de $\Delta_t b_o$ (Fig. 25)

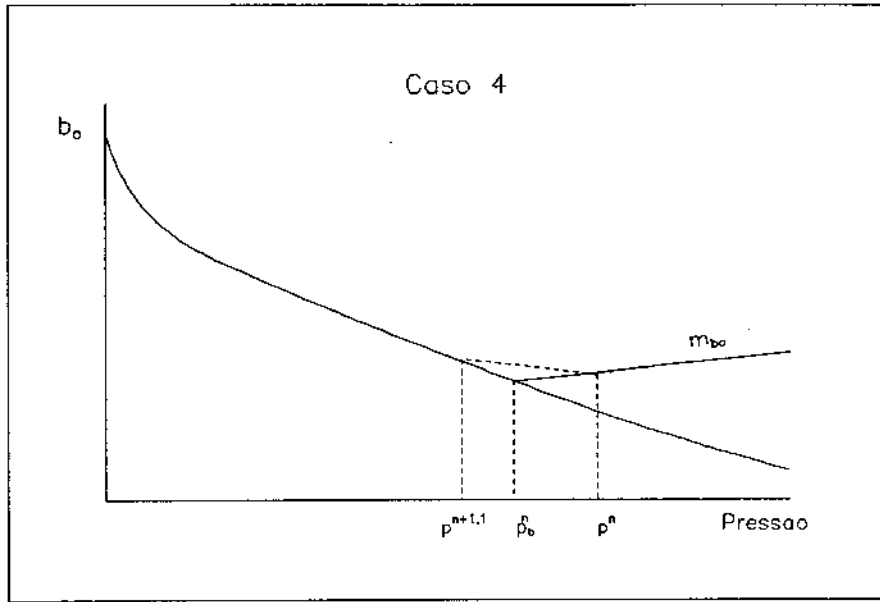


Figura 25: Caso 4 : Expansão de $\Delta_t b_o$

$$\begin{aligned}
 \Delta_t b_o &= b_o(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - b_o(p_o^n, p_b^n) = \\
 &= b_o(p_o^{n+1}, p_b^n) - b_o(p^n, p_b^n) = \\
 &= b_o(p_o^{n+1}, p_b^n) - b_o(p_b^n, p_b^n) + b_o(p_b^n, p_b^n) - b_o(p_o^n, p_b^n) = \\
 &= b'_o [p_o^{n+1, \nu+1} - p_b^n] - m_{b_o}(p_o^n - p_b^n) = \\
 &= b'_o [p_o^{n+1, \nu+1} - p_o^n + p_o^n - p_b^n] - m_{b_o}(p_o^n - p_b^n) = \\
 &= b'_o (p_o^{n+1, \nu+1} - p_o^n) + b'_o (p_o^n - p_b^n) - m_{b_o} (p_o^n - p_b^n) = \\
 &= b'_o (p_o^{n+1, \nu+1} - p_o^n) + (b'_o - m_{b_o}) (p_o^n - p_b^n)
 \end{aligned} \tag{6.1.4.1}$$

onde,

$$b'_o = \frac{b_o(p_o^{n+1, \nu}, p_b^n) - b_o(p_b^n, p_b^n)}{(p_o^{n+1, \nu} - p_b^n)} \tag{6.1.4.2}$$

- Expansão de $\Delta_t R_s$ (Fig. 26)

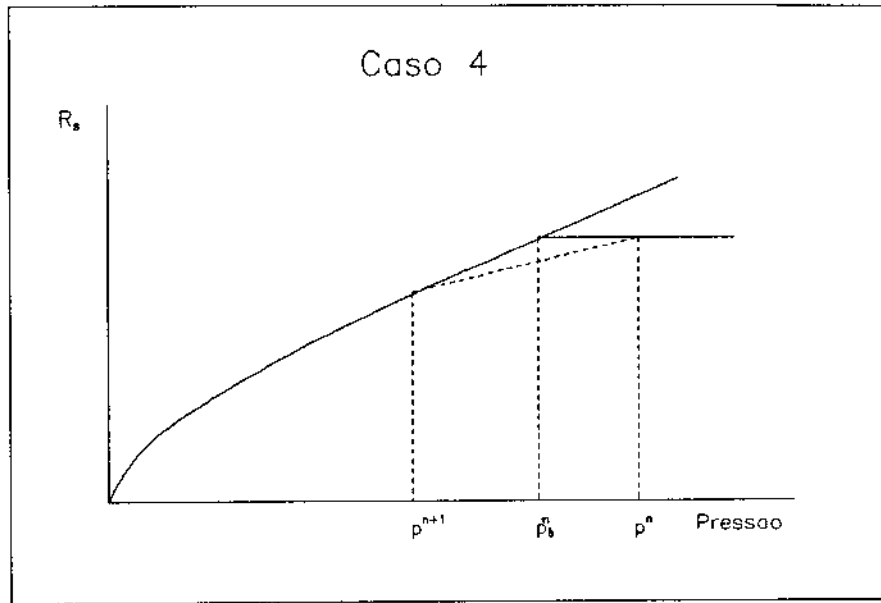


Figura 26: Caso 4 : Expansão de $\Delta_t R_s$

$$\begin{aligned}
 \Delta_t R_s &= R_s(p_o^{n+1}, p_b^{n+1}) - R_s(p_o^n, p_b^n) = \\
 &= R_s(p_o^{n+1}, p_b^n) - R_s(p_b^n, p_b^n) = \\
 &= R'_s(p_o^{n+1, \nu+1} - p_o^n + p_o^n - p_b^n) \\
 &= R'_s(p_o^{n+1, \nu+1} - p_o^n) + R'_s(p_o^n - p_b^n)
 \end{aligned} \tag{6.1.4.3}$$

onde,

$$R'_s = \frac{R_s(p_o^{n+1, \nu}, p_b^n) - R_s(p_b^n, p_b^n)}{(p_o^{n+1, \nu} - p_b^n)} \tag{6.1.4.4}$$

6.1.5 Cálculo do Ponto de Bolha por Balanço de Material

Para os casos onde se resolve para S_g precisa-se calcular a pressão de bolha no final do tempo $n + 1$ através do balanço de material.

Após o término do tempo $n + 1$ o gás total na célula é dado por (Fig. 27)

$$b_o^{n+1} R_s^{n+1} S_o^{n+1} + b_g^{n+1} S_g^{n+1} \quad (6.1.5.1)$$

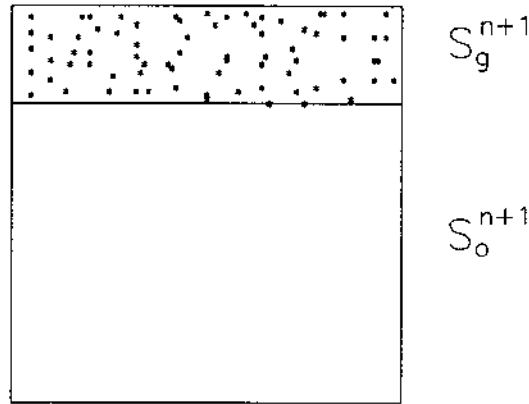


Figura 27: Esquema de saturação na célula

A pressão de bolha da célula é a pressão na qual todo o gás livre seria dissolvido quando a pressão fosse aumentada, portanto em p_b

$$(S_g)_{p_b}^{n+1} = 0 \quad (6.1.5.2)$$

$$(S_o)_{p_b}^{n+1} = 1 - S_w^{n+1} \quad (6.1.5.3)$$

Da conservação da fase óleo (*black oil*) tem-se

$$(b_o \cdot S_o)_{p_b}^{n+1} = (b_o S_o)^{n+1} \quad (6.1.5.4)$$

e da conservação da fase gás

$$(b_o R_s S_o)_{p_b}^{n+1} = (b_o R_s S_o + b_g S_g)^{n+1} \quad (6.1.5.5)$$

Além disso, pela definição de R_s ,

$$(R_s)_{p_b}^{n+1} = \frac{(b_o R_s S_o)_{p_b}^{n+1}}{(b_o S_o)_{p_b}^{n+1}} \quad (6.1.5.6)$$

Substituindo (6.1.5.4) e (6.1.5.5) em (6.1.5.6) obtém-se

$$(R_s)_{p_b}^{n+1} = \frac{(b_o R_s S_o + b_g S_g)^{n+1}}{(b_o S_o)^{n+1}} \quad (6.1.5.7)$$

Com o valor calculado de $(R_s)_{p_b}^{n+1}$ calcula-se p_b^{n+1} por interpolação linear na tabela de PVT do óleo saturado (Fig. 28).

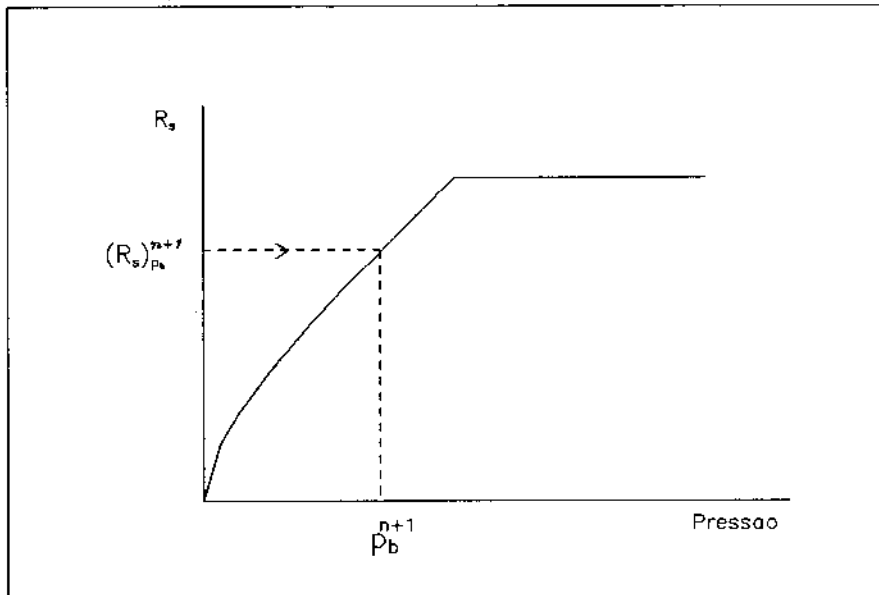


Figura 28: Determinação de p_b na tabela PVT

6.2 Solução para o Ponto de Bolha Variável

Na solução do sistema de equações diferenças totalmente implícito incluindo ponto de bolha variável não há necessidade de alterar a estrutura do jacobiano.

Usando a lógica de tratamento do ponto de bolha variável adotado, os termos relativos a $\Delta_t S_g$ são substituídos por $\Delta_t p_b$ quando se resolve para p_b (caso 2 e 3) e desta forma a estrutura do jacobiano é preservada.

$$\begin{bmatrix} \partial F_o / \partial p_o & \partial F_o / \partial p_b & \partial F_o / \partial S_w \\ \partial F_g / \partial p_o & \partial F_g / \partial p_b & \partial F_g / \partial S_w \\ \partial F_w / \partial p_o & \partial F_w / \partial p_b & \partial F_w / \partial S_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_o \\ \delta p_b \\ \delta S_w \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

Para os termos do fluxo, considera-se as seguintes expansões :

$$b_o^{n+1} = b_o^n + \Delta_t b_o \quad (6.2.2)$$

$$\mu_o^{n+1} = \mu_o^n + \Delta_t \mu_o \quad (6.2.3)$$

$$\gamma_o^{n+1} = \gamma_o^n + \Delta_t \gamma_o \quad (6.2.4)$$

$$R_s^{n+1} = R_s^n + \Delta_t R_s \quad (6.2.5)$$

O tratamento do ponto de bolha variável para μ_o e γ_o é a mesma descrita para b_o .

No tratamento do ponto de bolha variável, usando a lógica adotada, é necessário para a estabilidade ponderar R_s um ponto a montante nos termos de fluxo, de forma idêntica ao da permeabilidade relativa. Este mesmo procedimento foi usado por Thomas⁽²⁴⁾.

7 MODELO COMPUTACIONAL

No programa computacional o sistema de equações matricial obtida pelo método de Newton-Raphson é resolvida por eliminação de Gauss, usando o programa GBAND da Ref. 19 para solução de sistema de equações com matriz de banda.

O armazenamento da matriz de banda no programa computacional é feita temporariamente por uma matriz com endereçamento de blocos que permite o armazenamento da banda por elemento de bloco seguindo uma ordenação por linhas de blocos.

As dimensões das matrizes de armazenamento temporário do jacobiano e dos termos independentes são:

$$A(N_x N_z (2 N_z + 1) - N_x N_z - N_z, 9)$$

$$D(N_x N_z, 3)$$

Na montagem final, com a inclusão do poço, a matriz armazenadora do jacobiano para ser usada na GBAND é unidimensional e o armazenamento se processa por elemento das derivadas das funções resíduos. Desta forma as dimensões das matrizes são dadas por

$$A(3(N_x N_z + 1)(2 M_B + 1) - M_B M_B - M_B)$$

$$D(3(N_x N_z + 1))$$

onde,

$$M_B = 3 N_z + 2$$

M_B é o número de diagonais da banda acima (ou abaixo) da diagonal principal.

O controle do incremento de tempo é feita a nível de iteração e a nível de tempo:

A nível de iteração a seleção do incremento de tempo basea-se no número máximo e mínimo de iterações :

- a) Se o número de iterações ultrapassa o valor máximo, o incremento de tempo é reduzido por um fator de redução fornecido.

b) Se o número de iterações ultrapassa o valor mínimo, o incremento de tempo é aumentado por um fator de ampliação fornecido.

A nível de tempo a seleção é feita automaticamente usando um procedimento sugerido por Aziz⁽¹⁹⁾ para assegurar estabilidade da solução e manter erros de truncamento aceitáveis:

Fornecido os limites para um incremento de tempo

DSLIM = Limite máximo de variação da saturação no bloco

DPLIM = Limite máximo de variação da pressão no bloco

DPBLIM = Limite máximo de variação da pressão de bolha no bloco

calcula-se as máximas variações no tempo anterior,

$$DSMAX^n = \max \{ |\Delta_t S_\ell^n| \}_{i,k}$$

$$DPMAX^n = \max \{ |\Delta_t p_o^n| \}_{i,k}$$

$$DPBMAX^n = \max \{ |\Delta_t p_b^n| \}_{i,k}$$

onde,

ℓ = óleo, gás e água

DSMAX = Máxima variação da saturação no bloco

DPMAX = Máxima variação da pressão no bloco

DPBMAX = Máxima variação da pressão de bolha no bloco

Em seguida, calcula-se o novo incremento de tempo,

$$\Delta t^{n+1} = \min \{ \Delta t_s, \Delta t_{p_o}, \Delta t_{p_b} \}$$

onde,

$$\Delta t_s = \Delta t^n \frac{DSLIM}{DSMAX^n}$$

$$\Delta t_{p_o} = \Delta t^n \frac{DPLIM}{DPMAX^n}$$

$$\Delta t_{p_b} = \Delta t^n \frac{DPBLIM}{DPBMAX^n}$$

Para evitar que as variações não excedam em demasia os limites de variação no final de um incremento de tempo, devido a não linearidades das variações, o seguinte procedimento é efetuado no final do incremento de tempo:

Calcula-se as máximas variações no incremento de tempo,

$$DSMAX^{n+1} = \max \left\{ \left| \Delta_t S_\ell^{n+1} \right| \right\}_{i,k}$$

$$DPMAX^{n+1} = \max \left\{ \left| \Delta_t p_o^{n+1} \right| \right\}_{i,k}$$

$$DPBMAX^{n+1} = \max \left\{ \left| \Delta_t p_b^{n+1} \right| \right\}_{i,k}$$

e caso

$$DSMAX^{n+1} \leq C_1 DSLIM$$

$$DPMAX^{n+1} \leq C_2 DPLIM$$

$$DPBMAX^{n+1} \leq C_3 DPBLIM$$

aceita-se o incremento de tempo. Caso contrário, recalcula-se o incremento de tempo,

$$\Delta t^{n+1} = \min \{ \Delta t_s, \Delta t_{p_o}, \Delta t_{p_b} \}$$

onde,

C_1 , C_2 e C_3 são constantes maiores que um.

$$\Delta t_s = \Delta t^{n+1} \frac{DSLIM}{DSMAX^{n+1}}$$

$$\Delta t_{p_o} = \Delta t^{n+1} \frac{DPLIM}{DPMAX^{n+1}}$$

$$\Delta t_{p_b} = \Delta t^{n+1} \frac{DPBLIM}{DPBMAX^{n+1}}$$

e reinicia o tempo $n + 1$.

8 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

8.1 Comparação com Simulador Comercial

O modelo numérico de reservatório foi comparado com o simulador comercial SIMBEST através do seguinte caso simulado:

- malha de óleo $N_x \times N_z = 50 \times 4$
- vazão de óleo = $300 \text{ m}^3/d$
- distribuição uniforme de camadas
- altura de cada camada = 10 m
- canhoneio: apenas na camada mais inferior
- raio do poço: 0,1 m
- raio do reservatório: 500 m
- $\Delta p_{max} = 7,0 \text{ kgf/cm}^2$
- $\Delta p_{b_{max}} = 7,0 \text{ kgf/cm}^2$
- $\Delta S_{max} = 5,0\%$
- $\Delta t_{max} = 5 \text{ dias}$

A comparação foi efetuada através do comportamento de 4 variáveis:

- pressão no poço
- pressão do primeiro bloco do reservatório aberto ao fluxo
- pressão média volumétrica do reservatório
- Rgo de produção

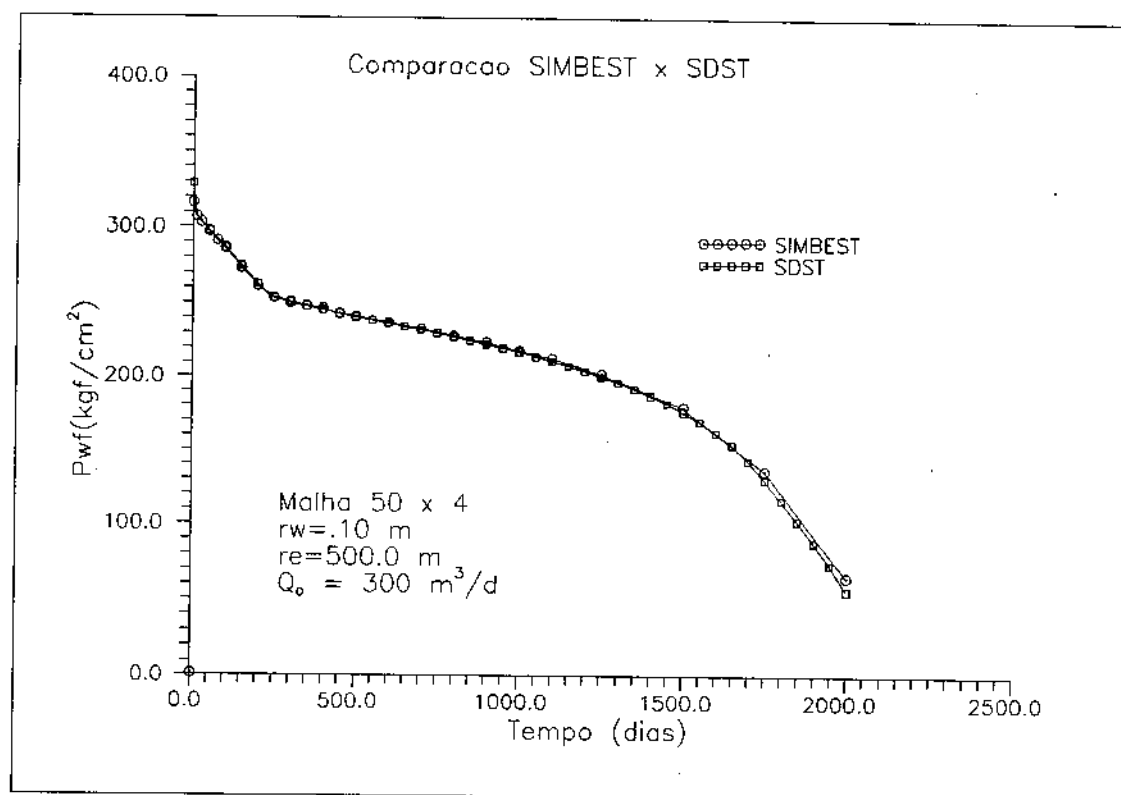


Figura 29: Comportamento da pressão de fluxo no poço

A Figura 29 mostra o comportamento da pressão de fundo de fluxo no poço onde observar-se que os resultados de ambos os simuladores são essencialmente o mesmo até aproximadamente 1700 dias, quando as curvas apresentam um afastamento gradual.

O mesmo comportamento pode ser observado para a R_{go} , pressão do primeiro bloco do reservatório aberto ao fluxo e pressão média volumétrica do reservatório, Figs. 30, 31 e 32.

Embora alguém possa considerar os resultados da comparação satisfatórios, deve-se alertar que a comparação é entre dois modelos numéricos e portanto insuficiente para validar ou não o modelo proposto⁽³²⁾.

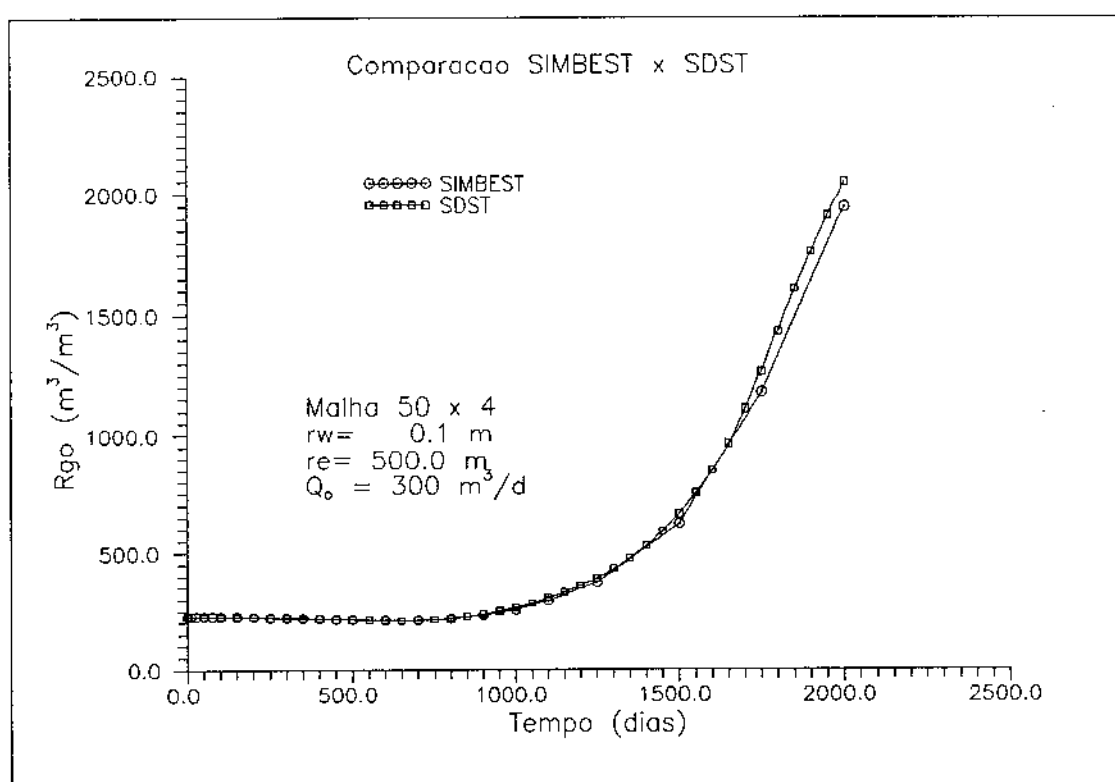


Figura 30: Comportamento da Rgo de produção

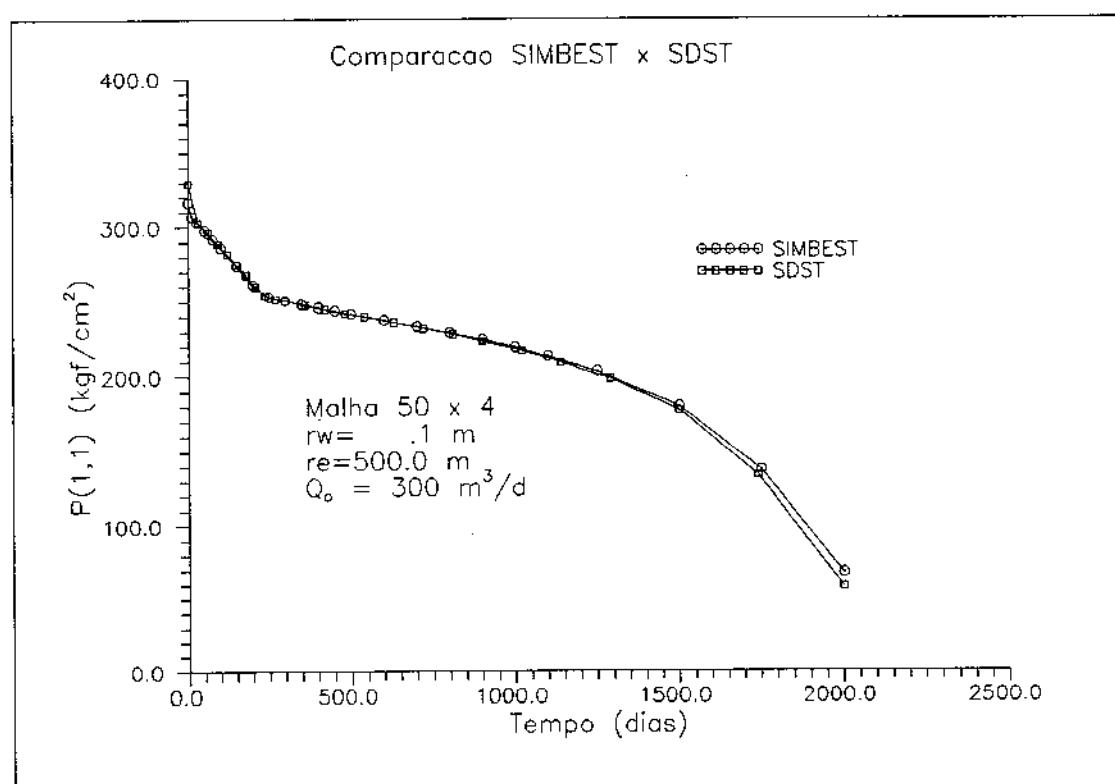


Figura 31: Comportamento da pressão do primeiro bloco do reservatório

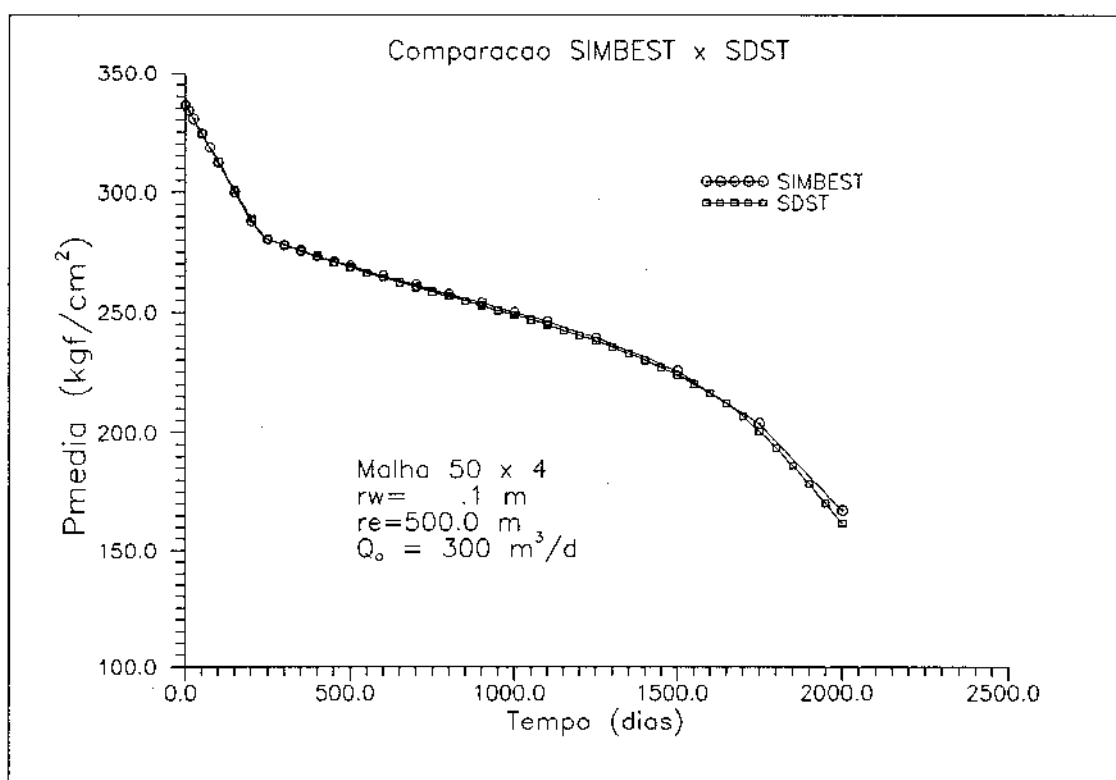


Figura 32: Comportamento da pressão média volumétrica do reservatório

8.2 Validação do Modelo de Reservatório com Solução Analítica

O modelo de reservatório foi validado pela comparação com a solução analítica monofásica para o período transiente num sistema radial dada pela aproximação logarítmica,

$$p_D = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{e^\gamma} \right) + s \quad ; \quad t_D > 50 \quad (8.2.1)$$

onde,

$$p_D = \frac{2\pi kh [p_i - p_{wf}(t)]}{QB\mu} \quad (8.2.2)$$

$$t_D = \frac{kt}{\phi\mu c_t r_w^2} \quad (8.2.3)$$

para as seguintes condições :

Espessura do reservatório	: 30 m
Camada aberta ao fluxo	: 30 m
Raio do poço	: 0,155 m
Raio externo do reservatório	: 500 m
Pressão inicial do reservatório	: 24,517 MPa
Porosidade	: 26%
Permeabilidade absoluta	: $9,86923 \times 10^{-14} m^2$
Permeabilidade efetiva	: $5,931 \times 10^{-14} m^2 (60mD)$
Vazão de produção de óleo	: $1,15741 \times 10^{-3} m^3/s$
Fator volume de formação do óleo	: $1,138 m^3/m^3$
Viscosidade	: $6,59 \times 10^{-3} Pa.s$
Compressibilidade total	: $4,7927 \times 10^{-10} Pa^{-1}$
Efeito de película	: 0, 5 e 10
Malha do reservatório	: 20×1
Tolerância da pressão	: 980,7 Pa
Dpmáx	: 0,49 MPa

A Fig. 33 mostra que a solução do modelo numérico é praticamente coincidente com a solução analítica para todos os valores de efeito de película.

Usando os dados do gráfico semilog de $p_{wf}(t)$ contra tempo para $s = 10$, Fig. 34, obtém-se os seguintes resultados:

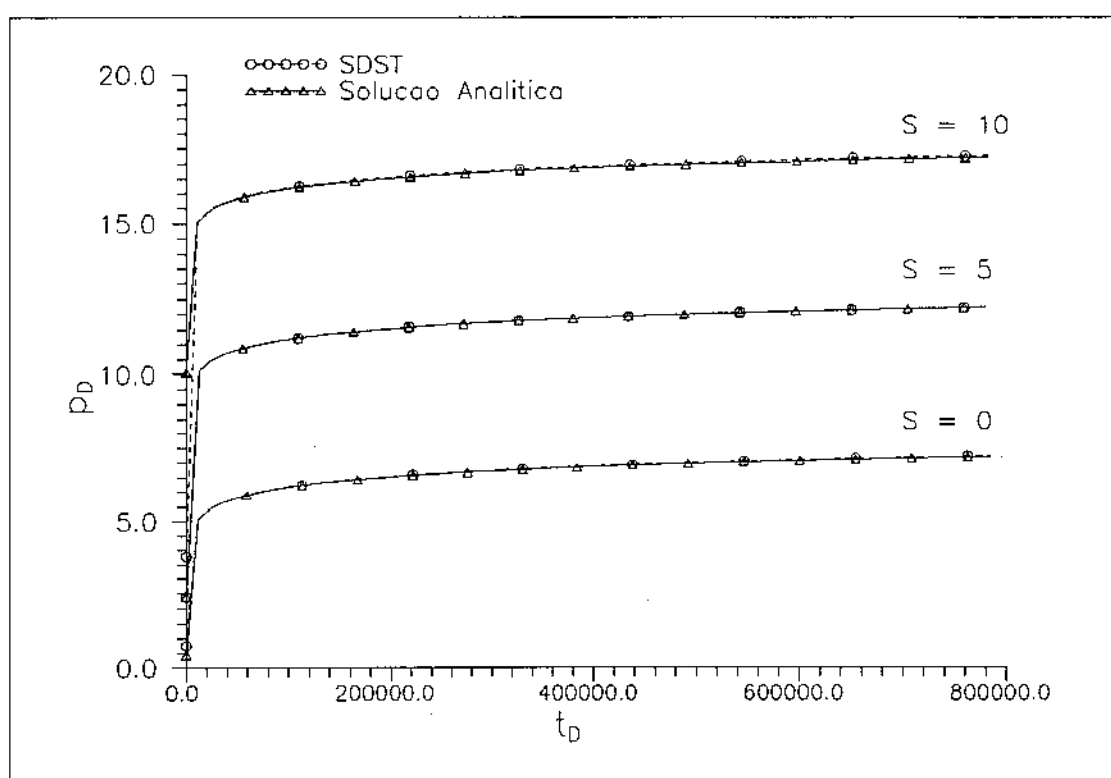


Figura 33: Comparação do modelo numérico do reservatório com solução analítica

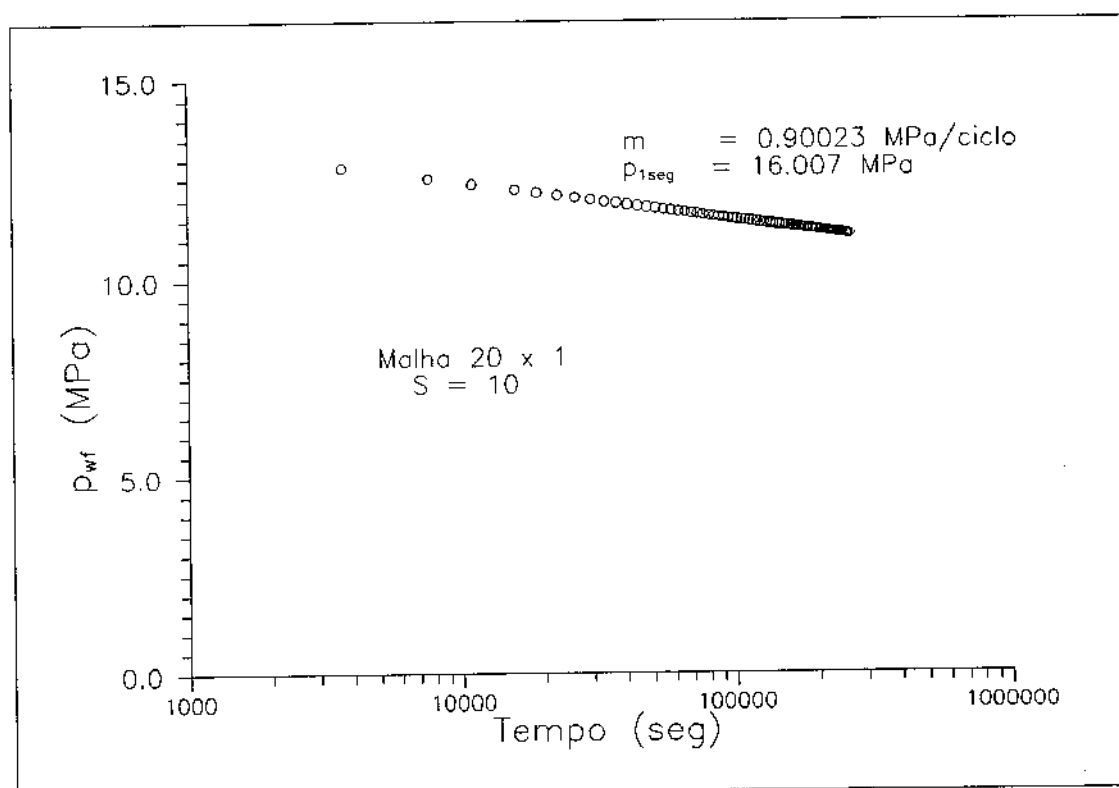


Figura 34: Gráfico semilog da solução numérica do reservatório

$$k = 0,183234 \frac{QB\mu}{mh} \quad (8.2.4)$$

$$k = 5,89 \times 10^{-14} \text{ m}^2 \quad (59,7 \text{ mD})$$

$$s = 1,1513 \left[\frac{(p_{1seg} - p_i)}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} \right) - 0,351 \right] \quad (8.2.5)$$

$$s = 9,93$$

Pode-se ver que os resultados obtidos apresentam uma boa concordância com os valores fornecidos ao simulador.

8.3 Validação do Modelo de Poço/Reservatório com Solução Analítica

O modelo de poço/reservatório foi validado com a solução analítica para o problema do “slug test” no campo de Laplace dado pela Eq. (B-34).

A solução do “slug test” no campo de Laplace foi invertida numericamente para o campo real usando o algoritmo de Stehfest⁽¹⁵⁾.

A comparação foi realizada através do seguinte caso simulado:

Espessura do reservatório	: 4 m
Camada aberta ao fluxo	: 4 m
Raio do poço	: 0,155 m
Raio externo do reservatório	: 500 m
Pressão inicial do reservatório	: 20,594 MPa
Pressão inicial de fluxo	: 14,710 MPa
Porosidade	: 26%
Permeabilidade absoluta	: $9,86923 \times 10^{-14} \text{ m}^2$
Permeabilidade efetiva	: $5,931 \times 10^{-14} \text{ m}^2$ (60mD)
Vazão de produção de óleo	: $1,15741 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$
Fator volume de formação do óleo	: $1,138 \text{ m}^3/\text{m}^3$
Viscosidade	: $6,59 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$
Compressibilidade total	: $4,7927 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Efeito de película	: 0
Peso específico do óleo	: 8296,4 (Pa/m)
Diametro da tubulação	: 0,12136 m
Malha do reservatório	: 20×1
Tolerância da pressão	: 980,7 Pa
Dpmáx	: 0,49 MPa

A Fig. 35 mostra a simulação do caso para validação .

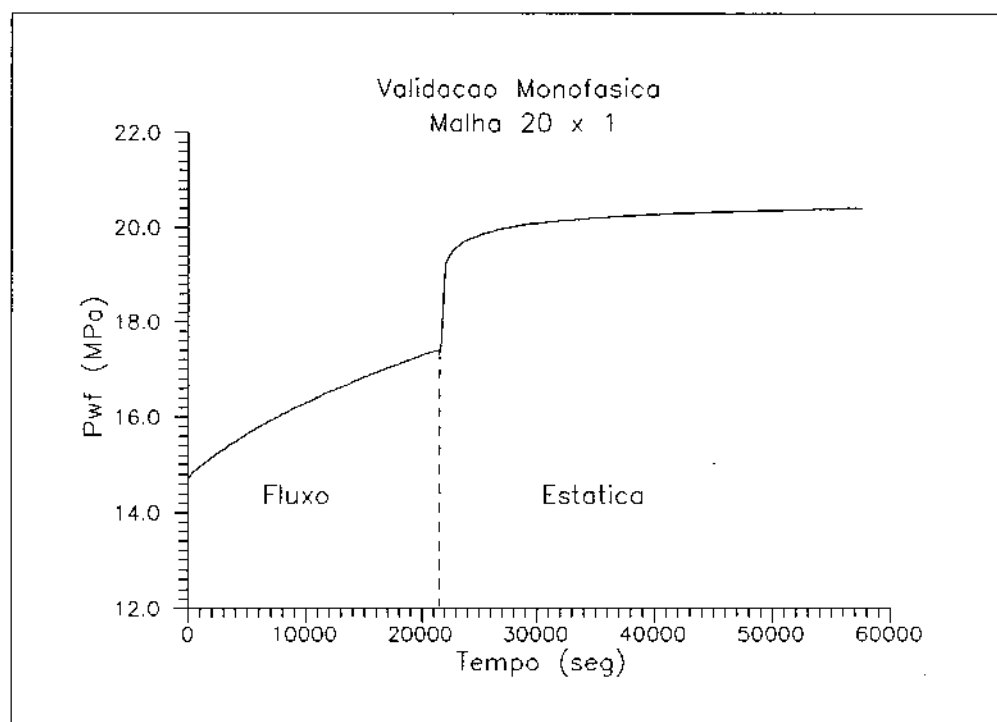


Figura 35: Simulação para validação monofásica

A comparação da solução do modelo numérico com a solução analítica, Fig. 36, mostra que os resultados são essencialmente os mesmos.

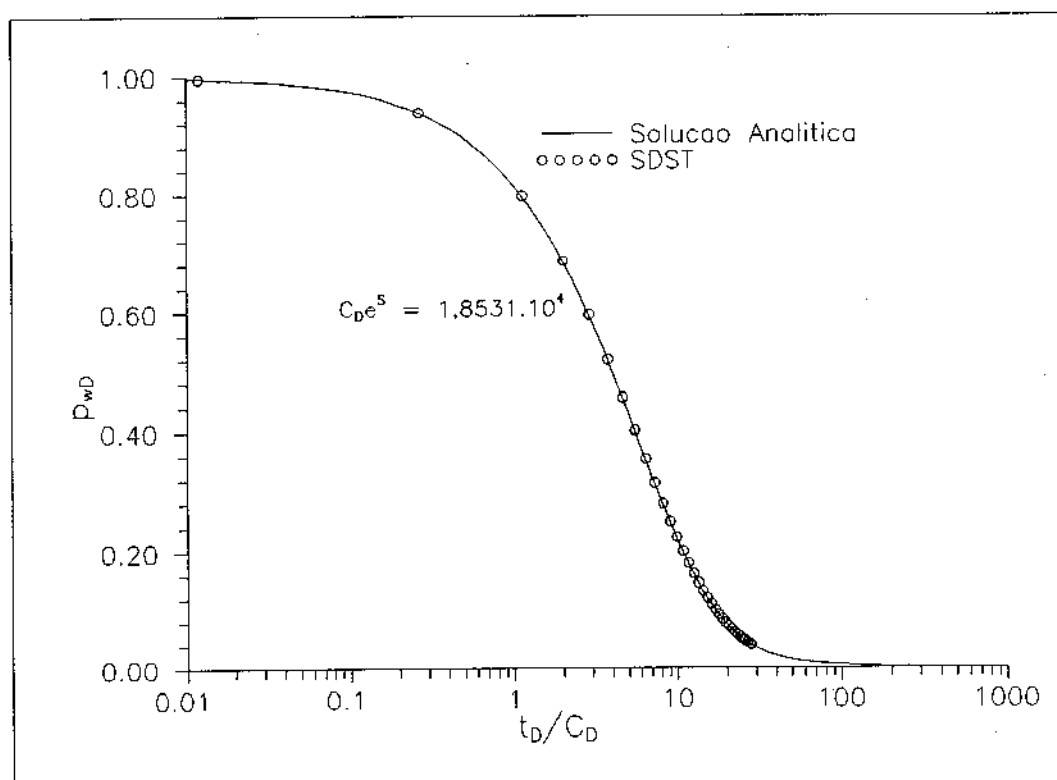


Figura 36: Comparação do modelo numérico do poço/reservatório com solução analítica

9 SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MONOFÁSICO

A Fig. 37 mostra a simulação de um teste de formação com escoamento monofásico para as seguintes condições :

Período de fluxo	: 6 horas
Período de estática	: 10 horas
Espessura do reservatório	: 4 m
Camada aberta ao fluxo	: 4 m
Raio do poço	: 0,155 m
Raio externo do reservatório	: 500 m
Diametro da tubulação	: 0,12136 m
Porosidade	: 26%
Permeabilidade absoluta	: $9,86923 \times 10^{-14} m^2$
Permeabilidade efetiva	: $5,931 \times 10^{-14} m^2 (60mD)$
Compressibilidade da formação	: $4,79267 \times 10^{-10} Pa^{-1}$
Efeito de película	: 0
Pressão inicial do reservatório	: 20,594 MPa
Pressão inicial de fluxo	: 14,710 MPa
Refinamento da malha	: 20×1
Tolerância da pressão	: 980,7 Pa
Dpmáx	: 0,49 MPa

Os resultados obtidos foram interpretados usando os seguintes métodos de análise monofásica (veja Anexos B e C):

Período de fluxo

- Método de Normalização de Vazão
- Método de Convolução
- Método de Deconvolução no Campo Real
- Método de Deconvolução no Campo de Laplace

Período de Estática

- Método de Horner adaptado para poço não surgente

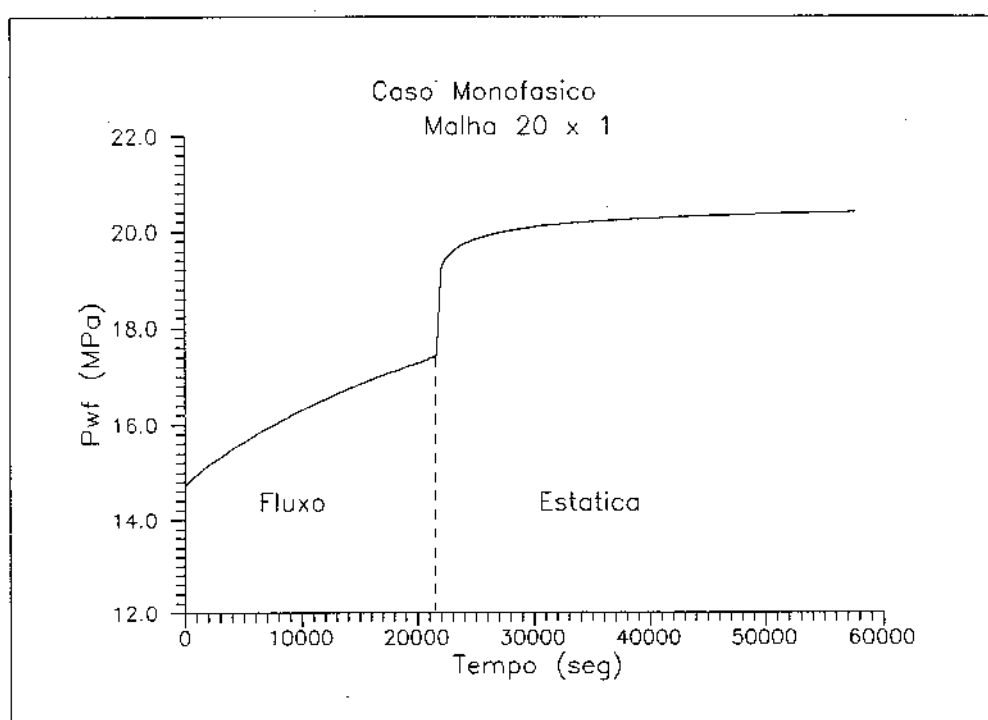


Figura 37: Simulação do Caso Monofásico

- Método de Horner com vazão variável
- Método Corrêa
- Método 1 (Peres)
- Método 2 (Peres)

9.1 Análise do Período de Fluxo

Para a análise do período de fluxo considerou-se os dados da Tabela 4,

p_i MPa	p_o MPa	h m	r_w m	ϕ %	μ_o Pa.s	γ_o Pa/m	C_F $\times 10^6 m^3.Pa^{-1}$	c_t $\times 10^{11}.Pa^{-1}$
20,594	14,710	4,0	0,155	26,0	0,0076	8324,1	1,389	129,513

Tabela 4: Caso Monofásico: Tabela dados do fluxo

adotando os seguintes resultados:

Coeficiente de estocagem do fluxo

$$C_F = \frac{\pi D_i^2}{4\gamma_o} = \frac{\pi (0,12136)^2}{4 \cdot 8324,1} = 1,3897 \times 10^{-6} Pa^{-1} . m^3$$

Compressibilidade efetiva da formação

$$c_t = c_o S_o + c_w S_w + c_f = 129,513 \times 10^{-11} Pa^{-1}$$

onde,

$$c_o = 91,533 \times 10^{-11} Pa^{-1}$$

$$c_w = 41,799 \times 10^{-11} Pa^{-1}$$

$$c_f = 41,927 \times 10^{-11} Pa^{-1}$$

$$S_o = 0,8$$

$$S_w = 0,2$$

A viscosidade adotada é a viscosidade do óleo na pressão inicial do reservatório.

9.1.1 Método de Normalização de Vazão

A Fig. 38 mostra o gráfico da interpretação do período de fluxo usando o método de Normalização de Vazão adaptado ao problema do “slug test”.

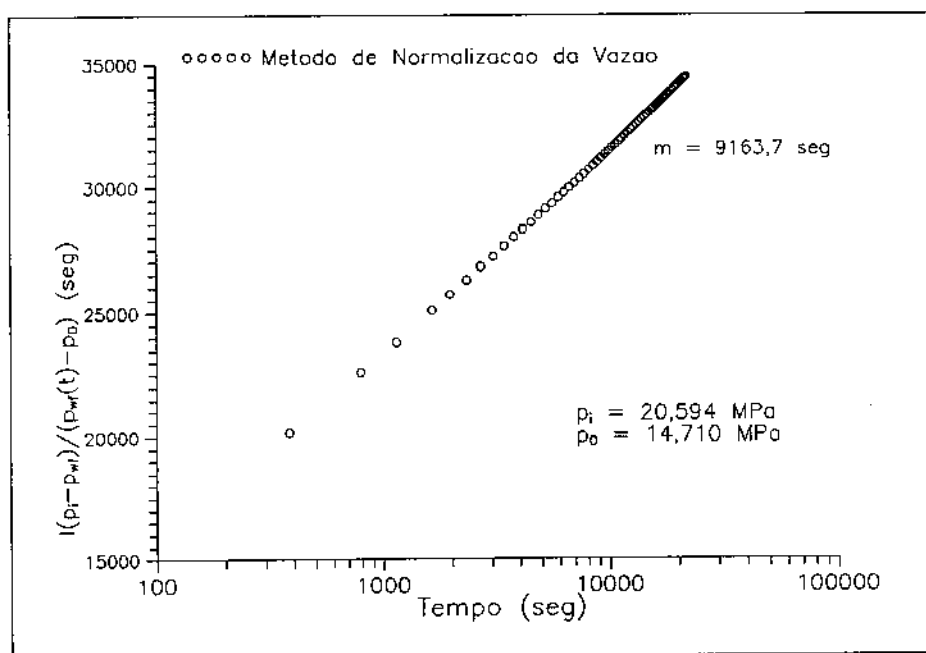


Figura 38: Monofásico: Gráfico do Método de Normalização de Vazão

Pode-se ver que o gráfico de $I(\Delta p)/(p_{wf} - p_o)$ contra tempo fornece uma linha reta de declividade $m = 9163,7$ seg.

Usando a Eq. (B-57),

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{C_F}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,7788 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{Pa.s})$$

$$k h = 2,11119 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,27947 \times 10^{-14} m^2 (53,5 mD)$$

O efeito de película pode ser calculado usando a Eq. (B-58) e adotando o seguinte ponto na reta

$$\begin{cases} t^* = 1000 \text{ seg} \\ \left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \right]_{t^*} = 22.201,8 \text{ seg} \end{cases}$$

$$s = 1,151 \left\{ \frac{\left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \right]_{t^*}}{m} - \log \left(\frac{kt^*}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

$$s = -0,99$$

9.1.2 Método de Convolução

A Fig. 39 apresenta o gráfico do Método de Convolução adaptado ao problema do "slug test".

Considerando a declividade da reta $m = 8553,4 \text{ seg}$ e usando a Eq. (B-75), tem-se

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{C_F}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,9771 \times 10^{-11} m^3 / (Pa.s)$$

$$k h = 2,2626 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,6564 \times 10^{-14} m^2 (57,3 mD)$$

Adotando o seguinte ponto da reta

$$\begin{cases} t_{ms}^* = 3,0 \\ \left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \right]_{t_{ms}^*} = 25742,6 \text{ seg} \end{cases}$$

e usando a Eq. (B-76), tem-se

$$s = 1,151 \left\{ \frac{[I(\Delta p)/(p_{wf} - p_0)]_{t_{ms}^*}}{m} - t_{ms}^* - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

$$s = -0,35$$

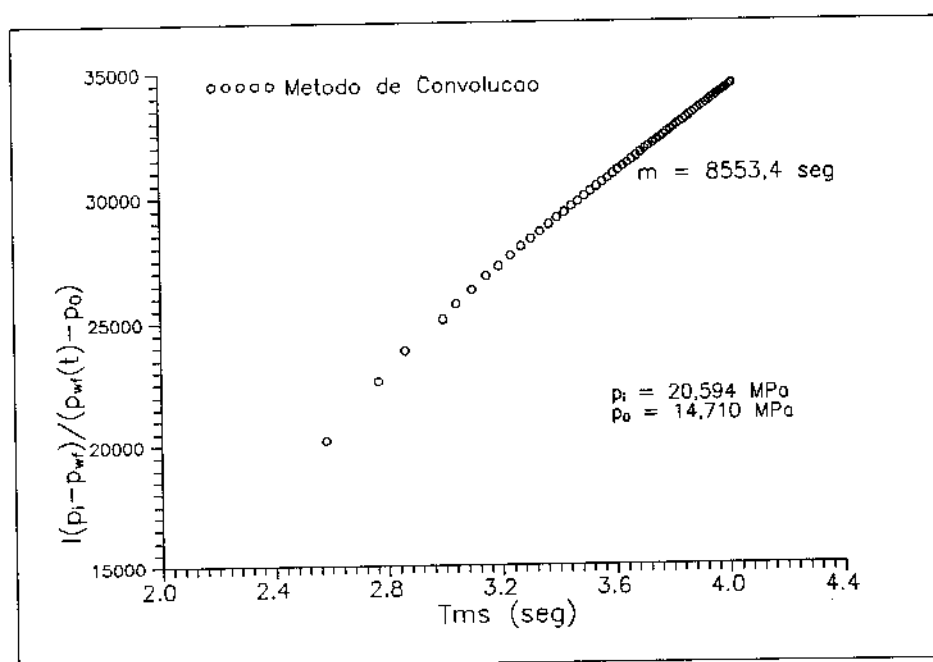


Figura 39: Monofásico: Gráfico do Método de Convolução

9.1.3 Método de Deconvolução no Campo Real

A Fig. 40 apresenta o gráfico do método da Deconvolução no Campo Real adaptado ao problema do "slug test".

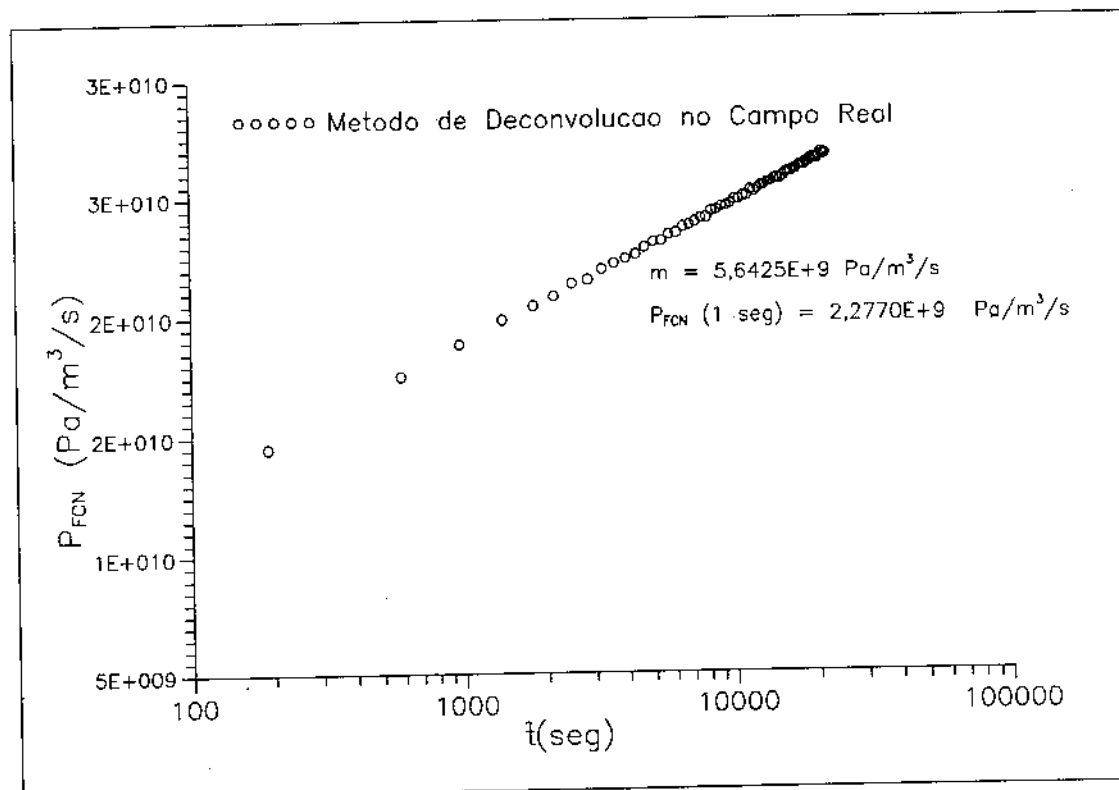


Figura 40: Monofásico: Gráfico do Método de Deconvolução no Campo Real

Considerando a declividade da reta $m = 5,6425 \times 10^9 \text{ Pa/m}^3/\text{s}$ e usando a Eq.

(B-97)

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{1}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,2474 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{Pa.s})$$

$$k h = 2,4680 \times 10^{-13} \text{ m}^3$$

$$k = 6,1700 \times 10^{-14} m^2 (62,5 mD)$$

Com o ponto da reta,

$$\begin{cases} t = 1seg \\ P_{FCN}(1seg) = 2,277 \times 10^9 Pa/m^3/s \end{cases}$$

a Eq. (B-97)

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN}(1seg)}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

fornece

$$s = 0,06$$

9.1.4 Método de Deconvolução no Campo de Laplace

A Fig. 41 mostra o gráfico do método de Deconvolução no Campo de Laplace adaptado ao problema do "slug test".

Considerando a declividade da reta $m = 5,5967 \times 10^9 Pa/m^3/s$ e usando a Eq. (B-107)

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{1}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,2774 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,4882 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 6,2205 \times 10^{-14} m^2 (63,0 mD)$$

e adotando o ponto na reta,

$$\begin{cases} t = 1seg \\ P_{FCN}(1seg) = 2,3386 \cdot 10^9 Pa/m^3/s \end{cases}$$

a Eq. (B-108)

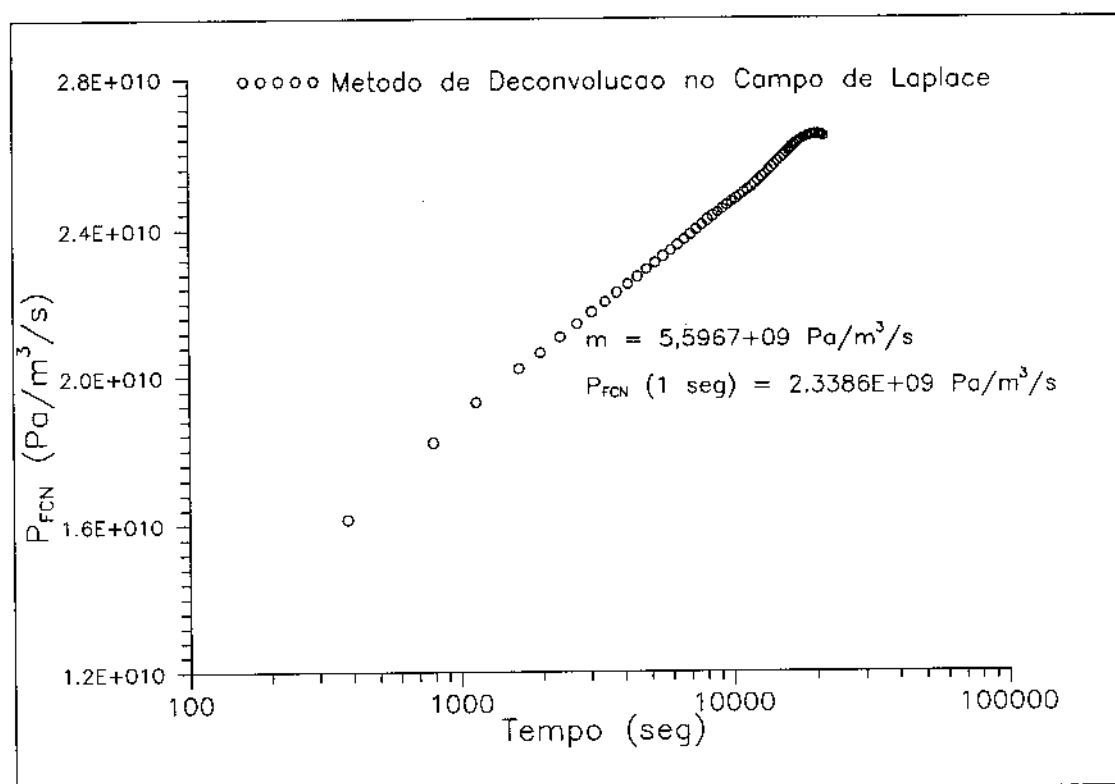


Figura 41: Monofásico: Gráfico do Método de Deconvolução no Campo de Laplace

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN(1seg)}}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

dá

$$s = 0,06$$

Observe, porém, que próximo ao termino do fluxo ocorre o denominado *efeito de cauda* provavelmente devido ao fato que a deconvolução no campo de Laplace usa todos os dados do intervalo $[0, \infty]$ no cálculo de cada ponto e portanto os valores calculados próximo ao termino do fluxo são mais afetados pela extrapolação .

9.2 Análise do Período de Estática

Para a análise do período de estática considerou-se os dados da Tabela(5,

p_0 MPa	h m	r_w m	ϕ %	μ_o Pa.s	C_F $\times 10^6 m^3.Pa^{-1}$	c_t $\times 10^{11}.Pa^{-1}$
14,710	4,0	0,155	26,0	0,0076	1,389	129,513

Tabela 5: Caso Monofásico: Tabela dados da estática

9.2.1 Método de Horner

A Fig. 42 é o gráfico de Horner do período de estática do caso simulado.

Considerando a vazão média dada dada pela Eq. (C-18) tem-se

$$q_{média} = \frac{C_F [p_{wf}(t_p) - p_0]}{t_p}$$

$$q_{média} = 1,7378 \times 10^{-4} m^3/s$$

para,

$$p_{wf}(t_p) = 17,411 MPa$$

$$t_p = 2,160 \times 10^4 s$$

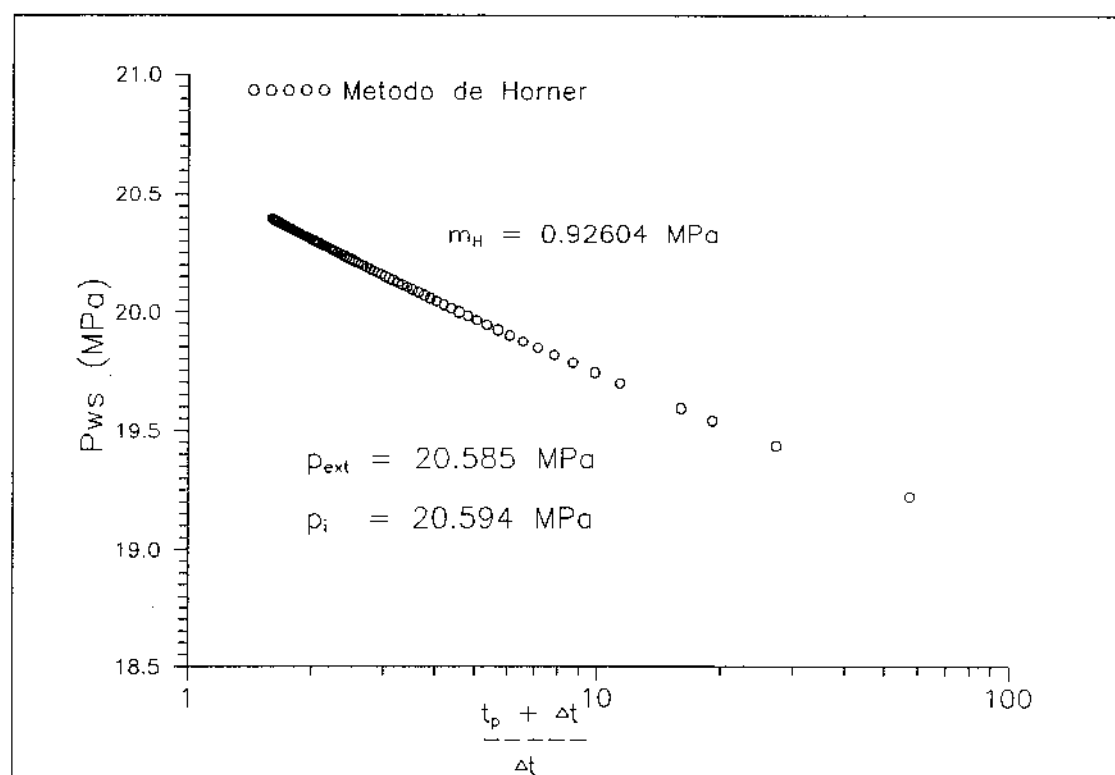


Figura 42: Monofásico: Gráfico do Método de Horner

Desta forma, usando a Eq. (C-21) com declividade $m_H = 0,92604$ MPa,

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{q_{m\acute{e}dia}}{m_H}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,4386 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,6133 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 6,5333 \times 10^{-14} m^2 (66,2mD)$$

Com a Eq. (C-22),

$$s = 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{m\acute{e}dia}}{m} - \log \left(\frac{k t_p}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

para,

$$p_{m\acute{e}dia} = \frac{p_0 + p_{wf}(t_p)}{2} = 16,0605 MPa$$

tem-se

$$s = 0,21$$

9.2.2 Método de Horner com Vazão Variável

O método de Horner com Vazão Variável aplicado aos dados simulados é apresentado graficamente pela Fig. 43.

A vazão na face da formação no final do período de fluxo é dado pela Eq. (C-30)

$$q_{sf}(t_p) = C_F \frac{dp_{wf}}{dt} = 1,3897 \times 10^{-6} \times 78,6003$$

$$q_{sf}(t_p) = 1,09237 \times 10^{-4} m^3/s$$

Deste modo, usando a Eq. (C-28) com a declividade da reta $m_H = 0,63854$ MPa, tem-se

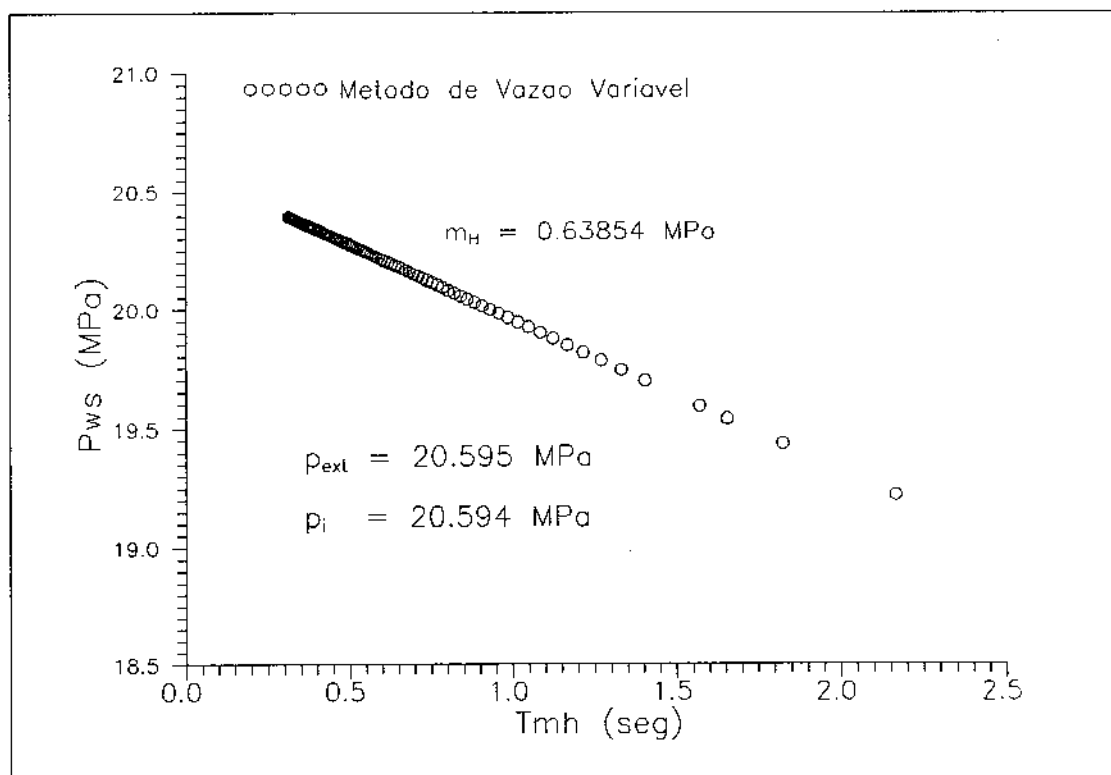


Figura 43: Monofásico: Gráfico do Método de Horner com Vazão Variável

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{q_{sf}(t_p)}{m_H}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,1346 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,3823 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,95549 \times 10^{-14} m^2 (60,3 mD)$$

O efeito de película pode ser calculado da Eq. (C-33),

$$s = 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{wf}(t_p)}{m} - \sum_0^{n+1} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{q_{n+1}} \right) \log(t_{n+1} - t_j) - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

$$s = -0,13$$

para

$$\sum_0^{n+1} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{q_{n+1}} \right) \log(t_{n+1} - t_j) = 4,76379$$

9.2.3 Método de Corrêa

A Fig. 44 mostra o gráfico do método cartesiano para um tempo de fechamento de 10 horas precedido por um período de fluxo de 6 horas.

A interpolação linear dos últimos pontos da curva fornece uma declividade ($m_c = 0,64228$ MPa) incorreta

$$k = \frac{q_{média} \mu}{4\pi h m_c} = 3,91925 \times 10^{-14} m^2$$

onde, $q_{média} = 1,7378 \times 10^{-4} m^3/s$

A obtenção de declividade incorreta está associado ao tempo de fechamento insuficiente para atingir o trecho reto, pois o método cartesiano é uma solução de longo tempo.

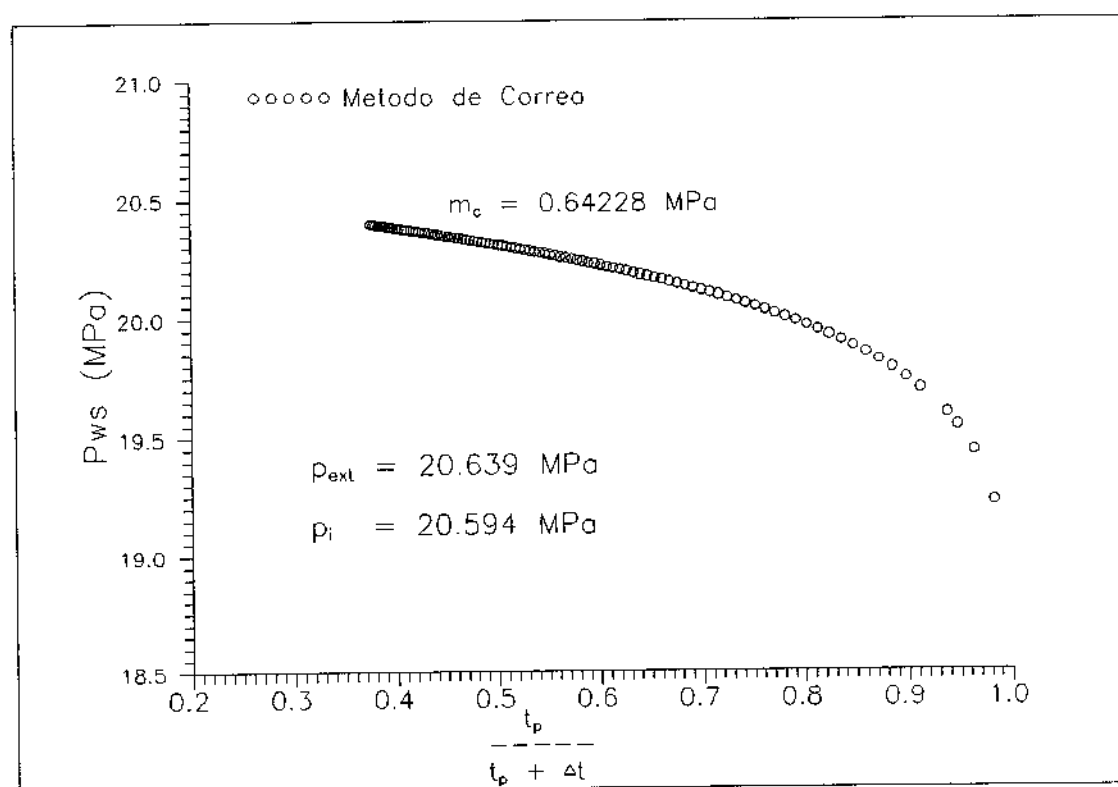


Figura 44: Gráfico do Método Corrêa

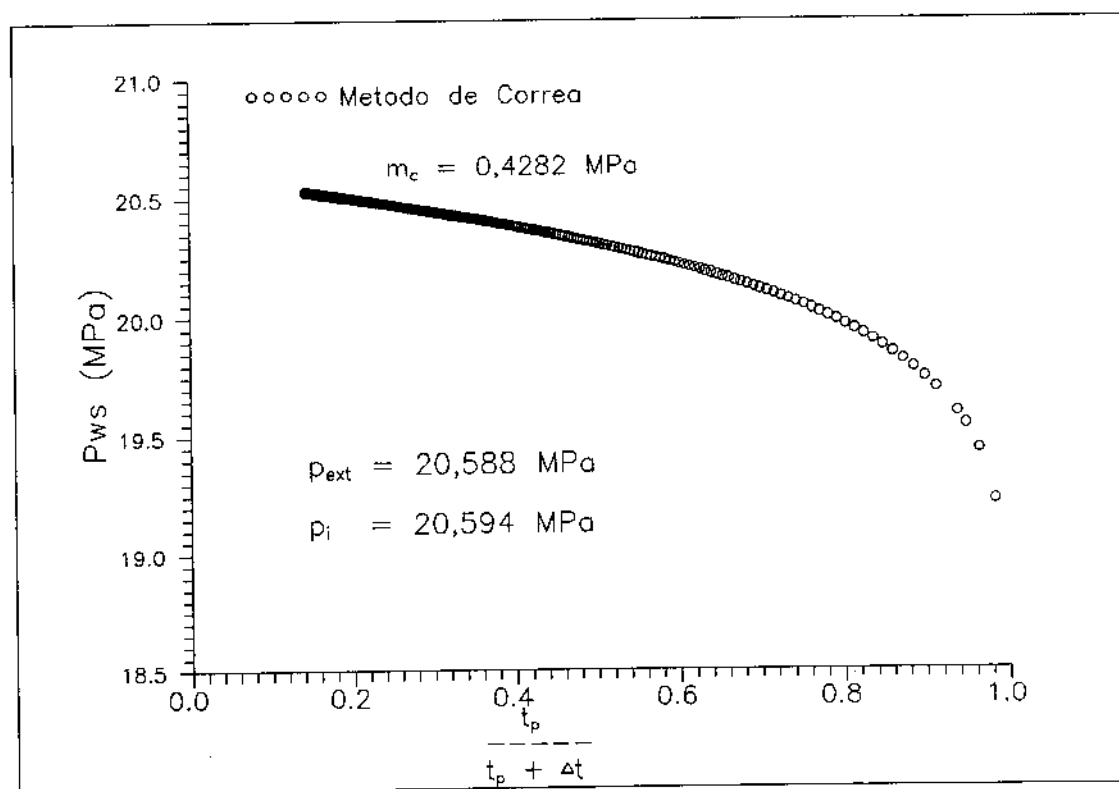


Figura 45: Gráfico do Método Corrêa

A Fig. 45 mostra o gráfico do método cartesiano para um caso simulado com as mesmas condições do anterior, porém, com um tempo de fechamento de 36 horas.

Usando a declividade $m_c = 0,4282$ MPa deste gráfico, tem-se

$$\frac{k h}{\mu} = \frac{q_{média}}{4\pi m_c}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,2296 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,4545 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 6,1362 \times 10^{-14} m^2 (62,2mD)$$

9.2.4 Método Peres 1

A Fig. 46 mostra o gráfico do método Peres 1.

Usando a declividade da reta $m_1 = 1,0893$ MPa na Eq. (C-72), tem-se

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{q_{média}}{m_1}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,9232 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,2216 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,554 \times 10^{-14} m^2 (56,3mD)$$

O efeito de película é obtido da Eq. C-76,

$$s = 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{média}}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} \right) - 0,351 - \sum_{j=0}^n \log(t_p - t_{jp}) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{p_{wf}(t_p) - p_0} \right] \right\}$$

$$s = -0,43$$

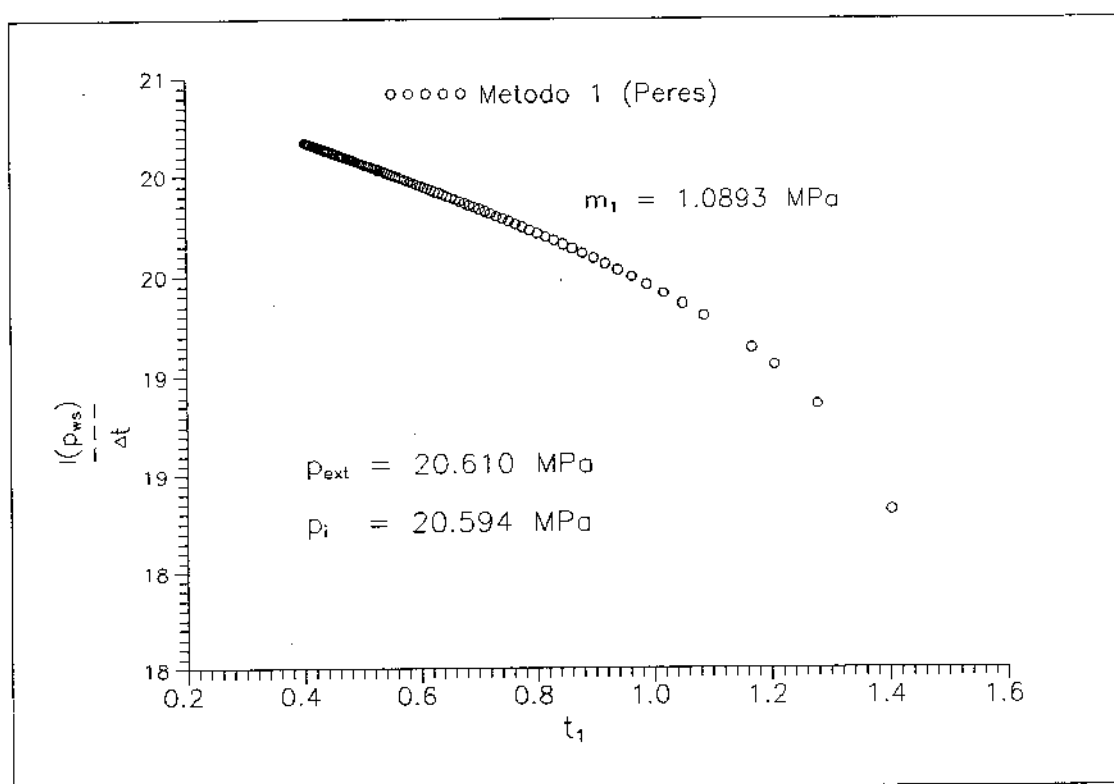


Figura 46: Monofásico: Gráfico do Método de Peres 1

para

$$p_{m\acute{e}dia} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} p_{wf}(d\tau) d\tau = 16,3 \text{ MPa}$$

$$\sum_{j=0}^n \log(t_p - t_{j,p}) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{p_{wf}(t_p) - p_0} \right] = 4,0083$$

9.2.5 Método Peres 2

A aplicação do método Peres 2 está mostrado graficamente na Fig. 47.

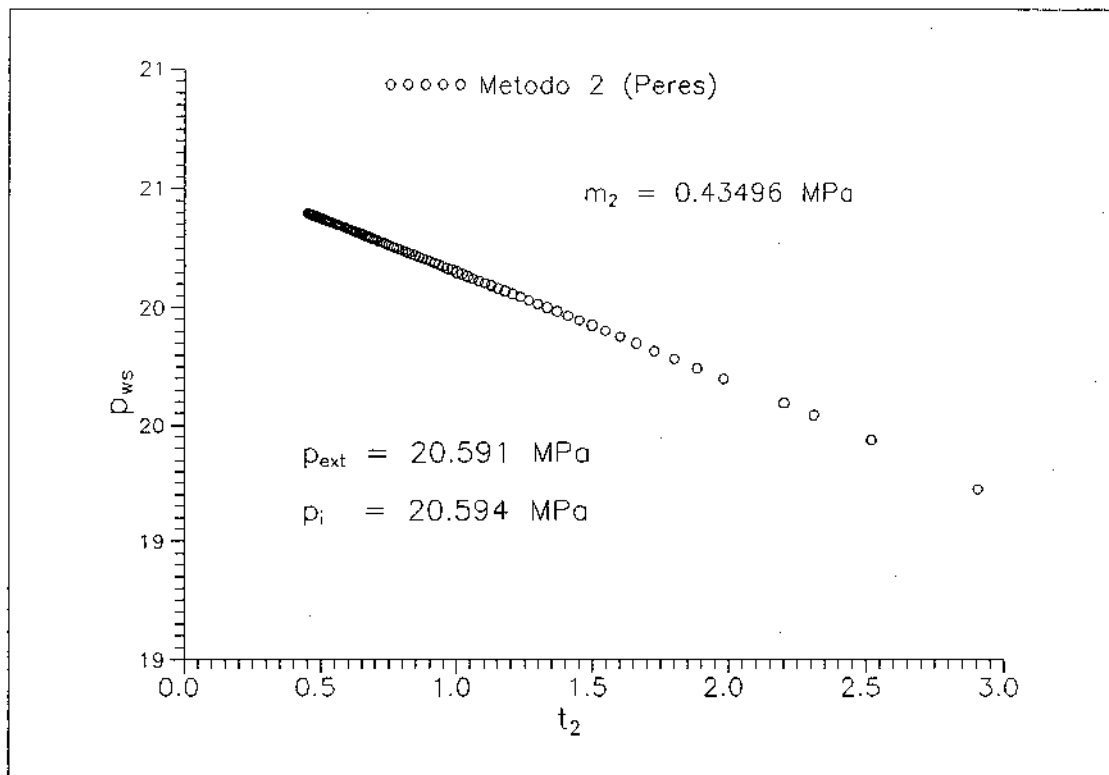


Figura 47: Gráfico do Método de Peres 2

Usando a declividade $m_2 = 0,43496 \text{ MPa}$ na Eq. (C-86), obtém-se

$$\frac{k h}{\mu} = \frac{q_{m\acute{e}dia}}{4\pi m_2}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,1794 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{Pa.s})$$

$$k h = 2,4163 \times 10^{-13} \text{ m}^3$$

$$k = 6,0408 \times 10^{-14} \text{ m}^2 (61,2 \text{ mD})$$

Considerando a Eq. (C-87),

$$m_1 = m_2 \ln 10 = 1,00153$$

tem-se da Eq. (C-76),

$$s = 0,074$$

9.3 Resultados

A tabela 6 mostra o resumo dos resultados do período de fluxo e estática para os métodos considerados

método	período	k mD	s	p_{ext} MPa
Normalização Vazão	fluxo	53,5	- 0,99	—
Convolução	fluxo	57,3	- 0,35	—
Deconvolução Real	fluxo	62,5	0,059	—
Deconvolução Laplace	fluxo	63,0	0,062	—
Horner	estática	66,2	0,21	20,585
Horner Vazão Variável	estática	60,3	- 0,13	20,595
Corrêa	estática	62,2	—	20,588*
Método Peres 1	estática	56,3	- 0,43	20,610
Método Peres 2	estática	61,2	0,074	20,591

Tabela 6: Tabela dos resultados da análise do caso monofásico

(*) prolongamento do fechamento de 10 para 36 horas.

Os resultados do período de fluxo da Tabela 6 foram obtidos com a viscosidade do período de estática. Calculando com a viscosidade do óleo obtido na pressão final do “slug test” ($\mu = 0,0068 Pa.s$) obtém-se os dados da Tabela 7.

método	período	k mD	s
Normalização Vazão	fluxo	51,4	- 0,99
Convolução	fluxo	55,1	- 0,351
Deconvolução real	fluxo	60,1	0,059
Deconvolução Laplace	fluxo	60,5	0,062

Tabela 7: Tabela da análise do fluxo do caso monofásico

Observa-se que os resultados dos métodos de deconvolução usando a viscosidade do período de fluxo apresentam uma melhor aproximação aos dados fornecidos ao simulador.

10 SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO

A Fig. 48 mostra a simulação de um teste de formação com escoamento multifásico usando as mesmas condições do caso monofásico com a exceção das seguintes condições :

Pressão inicial de fluxo : 1,96133 MPa
Tempo de fechamento : $8,640 \times 10^4$ seg
 S_{gc} (saturação de gás crítica) : 2 %

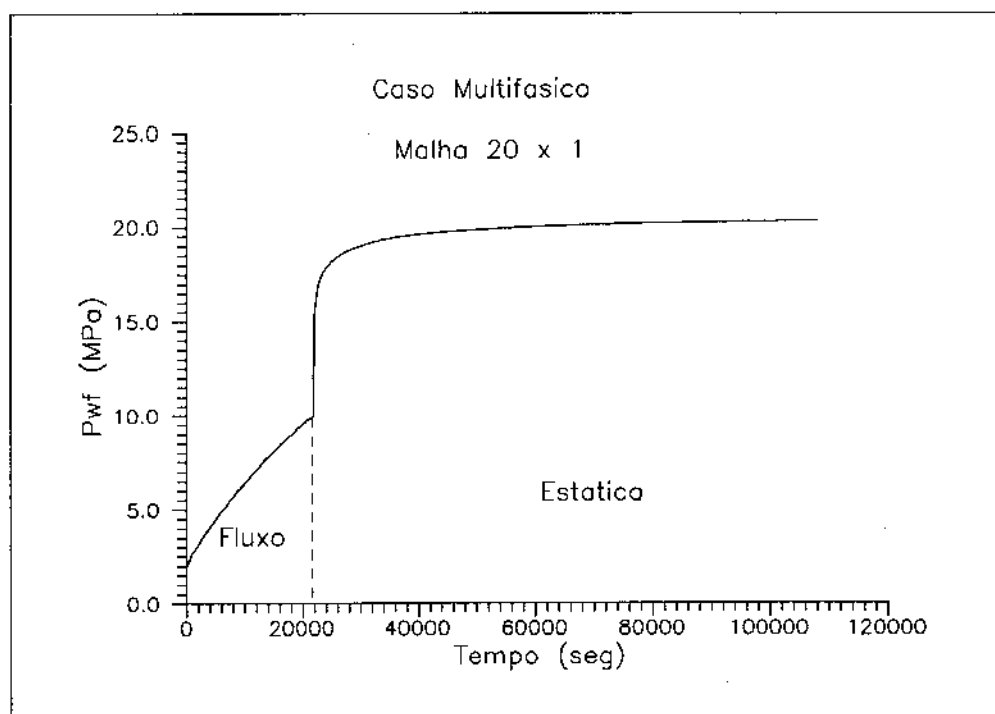


Figura 48: Simulação de DST com Escoamento Multifásico

Para este caso simulado, a pressão no poço durante o período do “slug test” permaneceu sempre abaixo da pressão de saturação inicial:

$$p_{sat} = 11,28 \text{ MPa}$$

$$p_{wf}(tp) = 10,02 \text{ MPa}$$

As Figs. 49 e 50 mostram o comportamento da pressão dentro do reservatório no início do período do “slug test”.

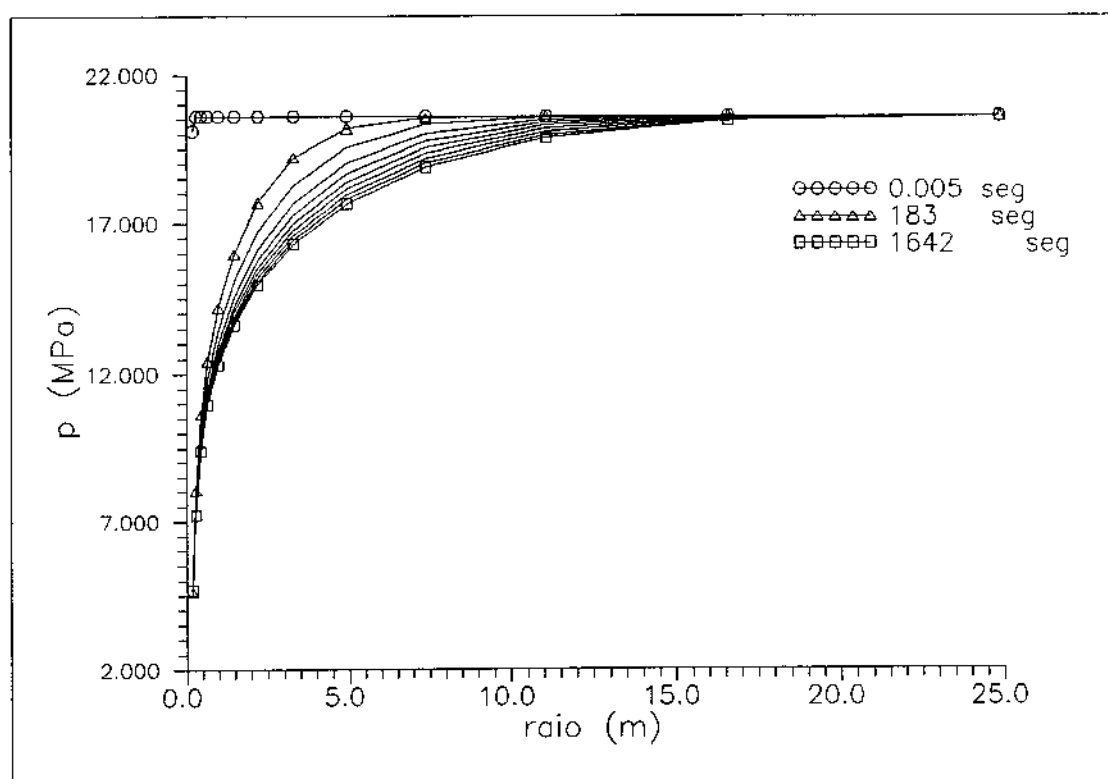


Figura 49: Comportamento da pressão no início do “slug test”

Devido ao grande diferencial de pressão que a face da formação é submetida, a saturação de gás rapidamente atinge a saturação crítica (Fig. 51). Devido à rápida mobilização do gás liberado perto do poço, a pressão de bolha apresenta nos tempos iniciais uma tendência de queda (Fig. 52).

Com a contrapressão crescente criada pelo crescimento da coluna hidrostática ocorre uma repressurização gradativa nas proximidades do poço, Figs. 53 e 54, com parte

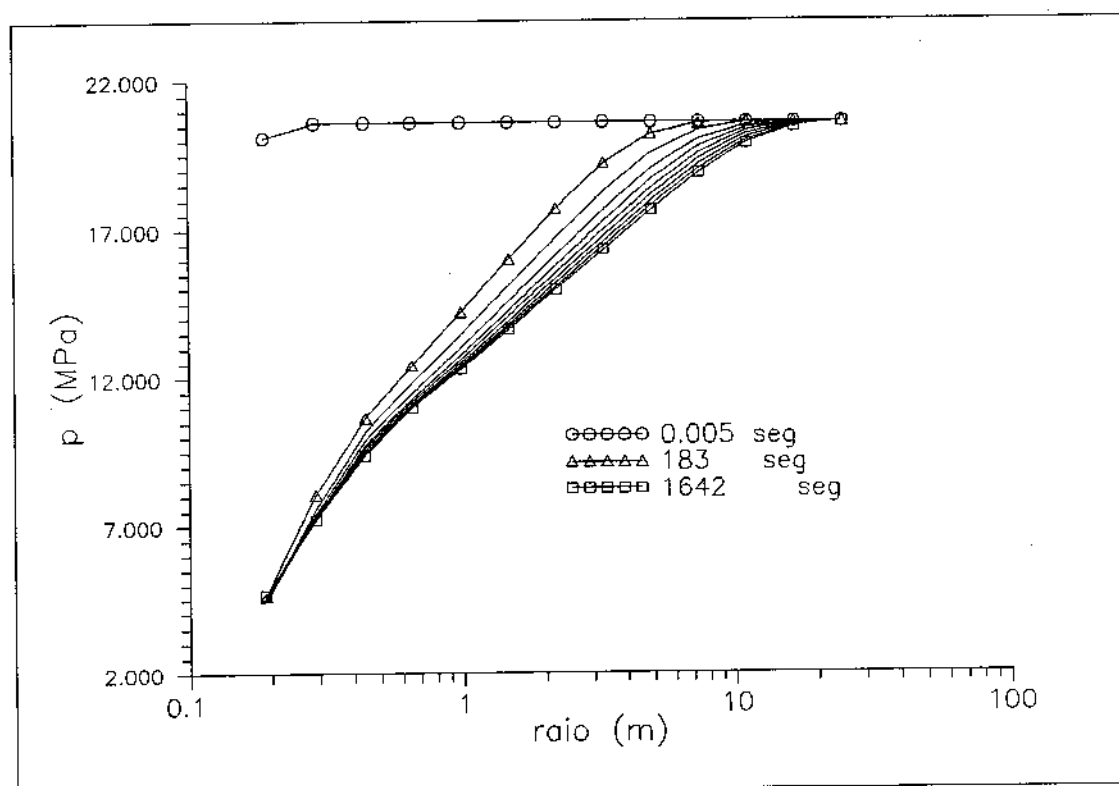


Figura 50: Comportamento da pressão no início do "slug test"

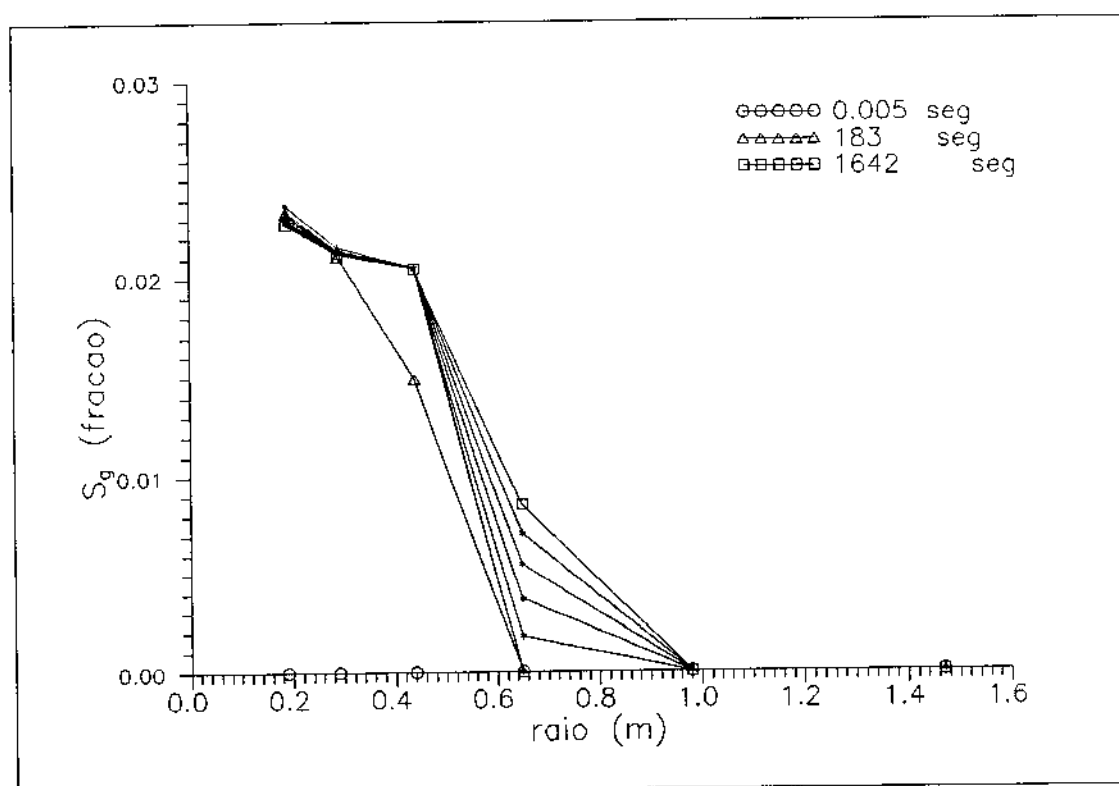


Figura 51: Comportamento da saturação no início do "slug test"

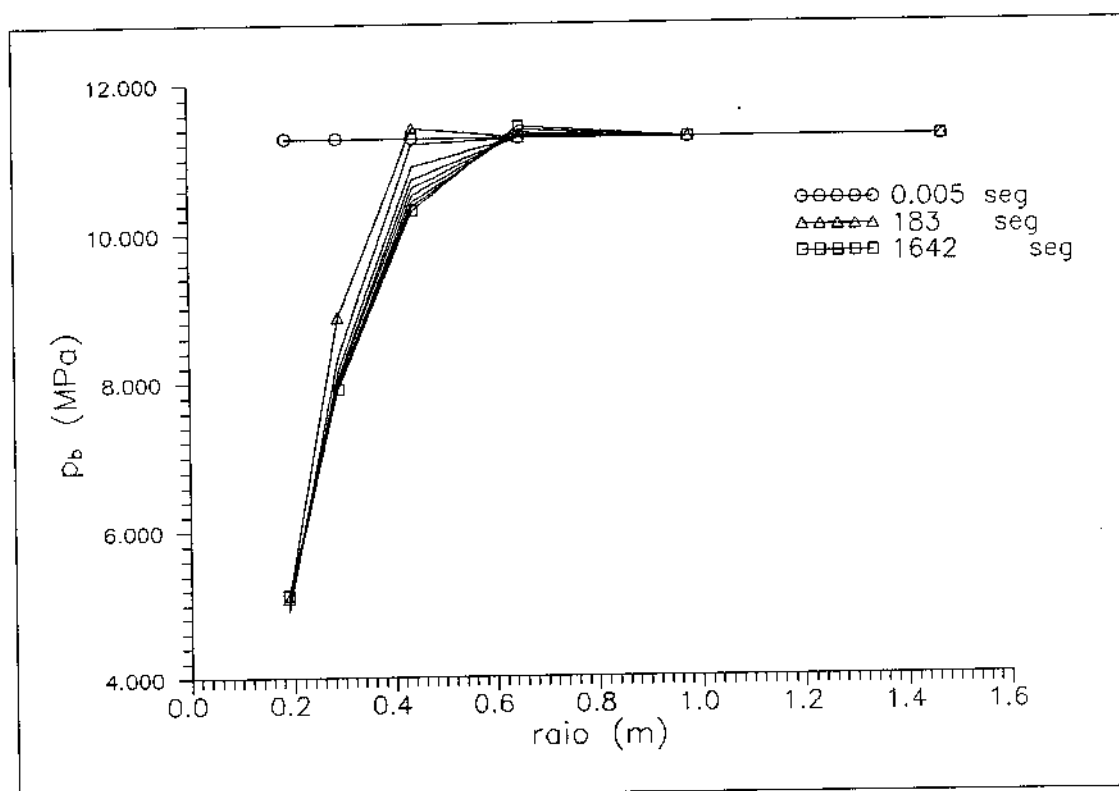


Figura 52: Comportamento da pressão de bolha no início do “slug test”

do gás livre sendo dissolvido no óleo. Desta forma, enquanto que o comportamento da pressão de bolha é de crescimento (Fig. 55), o comportamento da saturação de gás é de queda (Fig. 56).

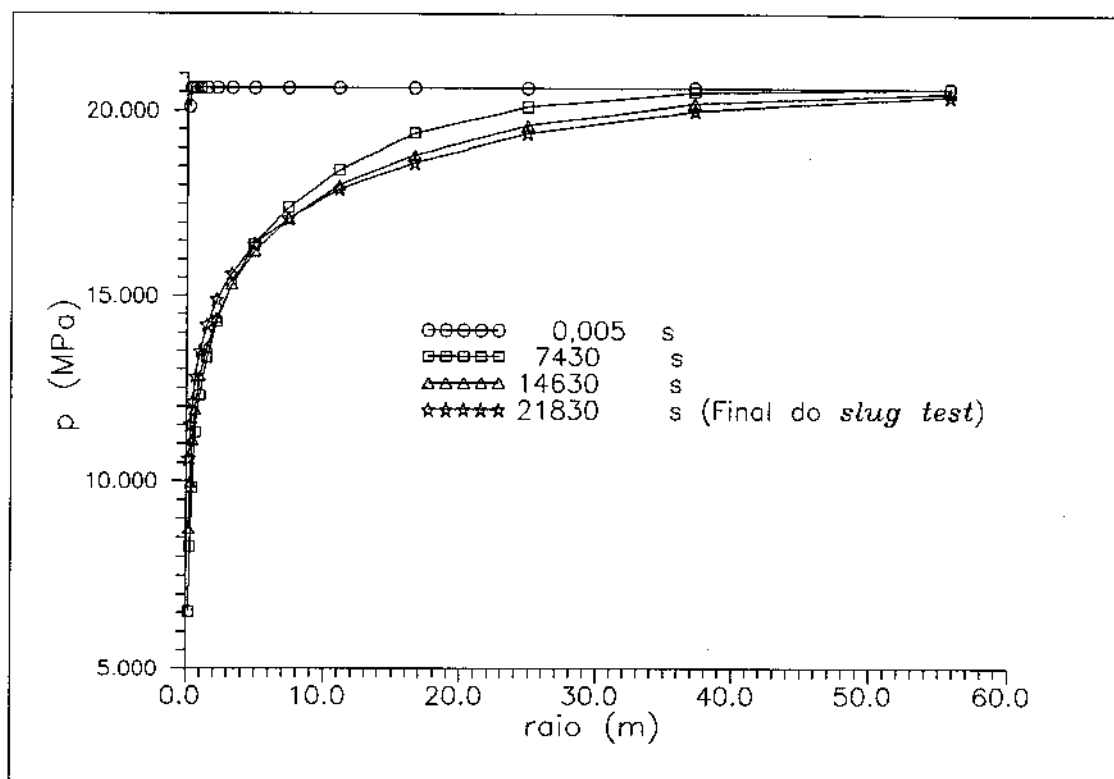


Figura 53: Comportamento da pressão na vizinhança do poço

As Figs. 57 e 58 apresentam o comportamento da pressão no reservatório após o fechamento. Com a repressurização brusca, e a baixa saturação do gás no momento do fechamento, praticamente todo o gás livre é imediatamente colapsado e o perfil da pressão de bolha é o mesmo do momento do fechamento.

Com a finalidade de verificar a influência do escoamento multifásico no uso da análise monofásica, o caso de escoamento multifásico simulado foi analisado pelos mesmos métodos empregados no caso monofásico.

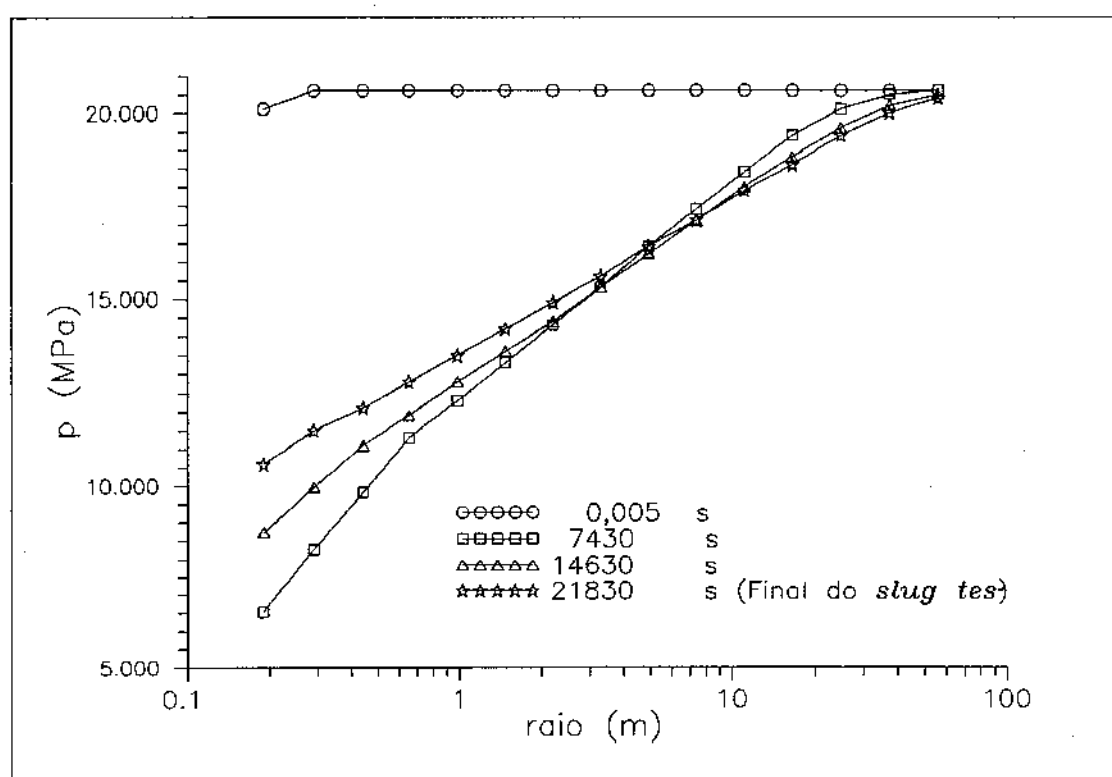


Figura 54: Comportamento da pressão na vizinhança do poço

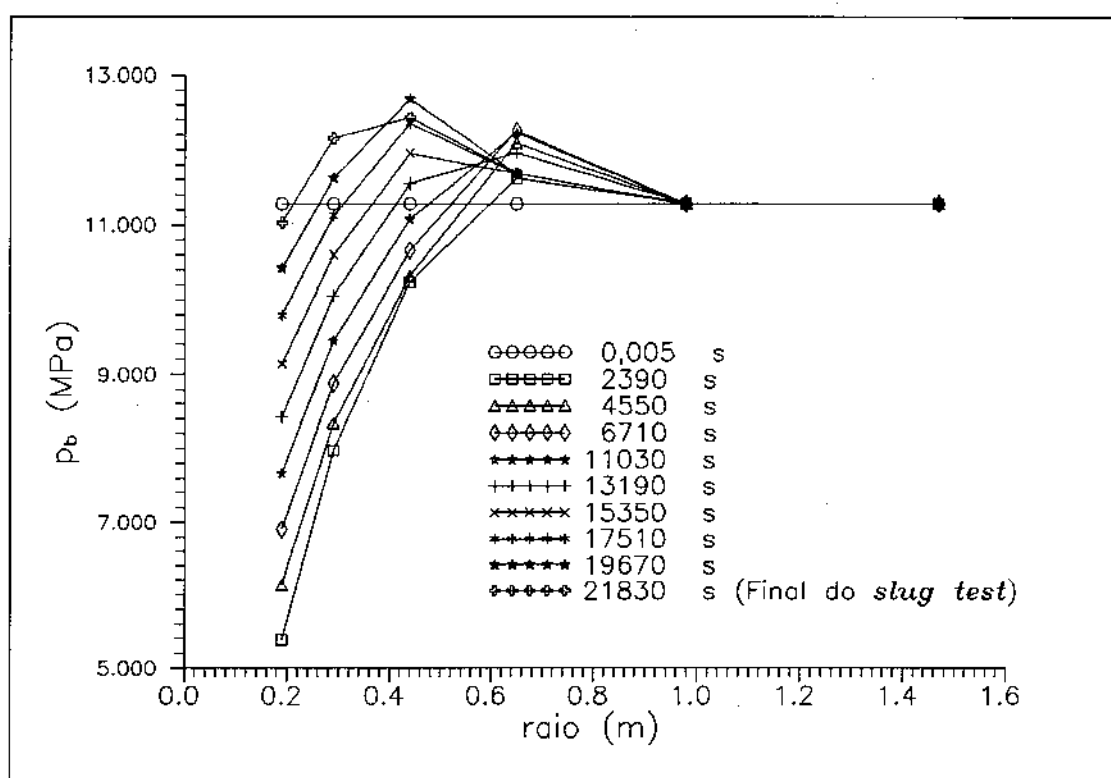


Figura 55: Comportamento da pressão de bolha na vizinhança do poço

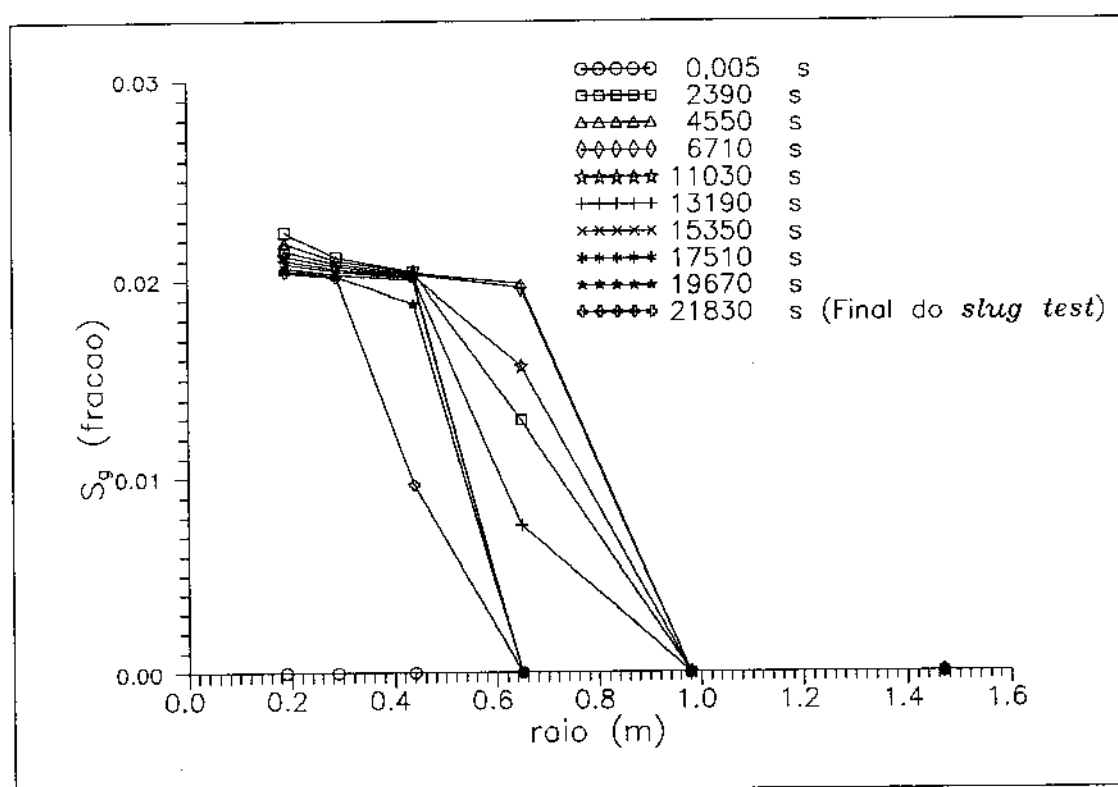


Figura 56: Comportamento da saturação na vizinhança do poço

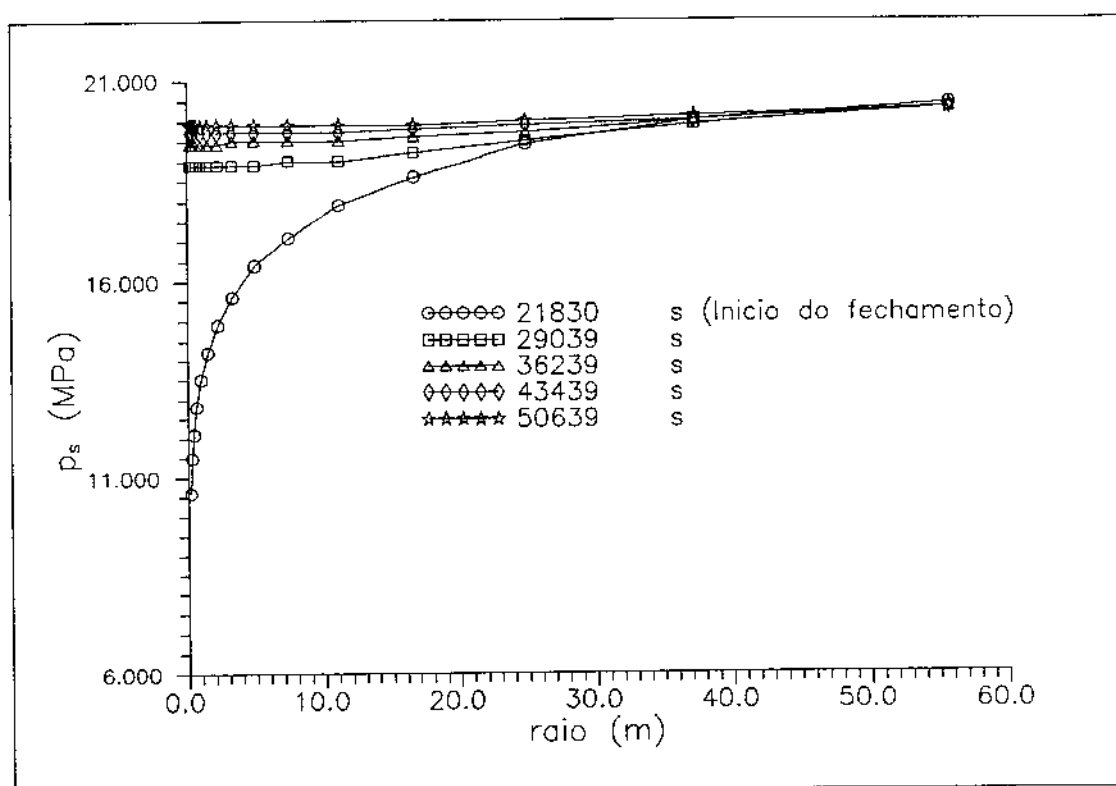


Figura 57: Comportamento da pressão após o fechamento

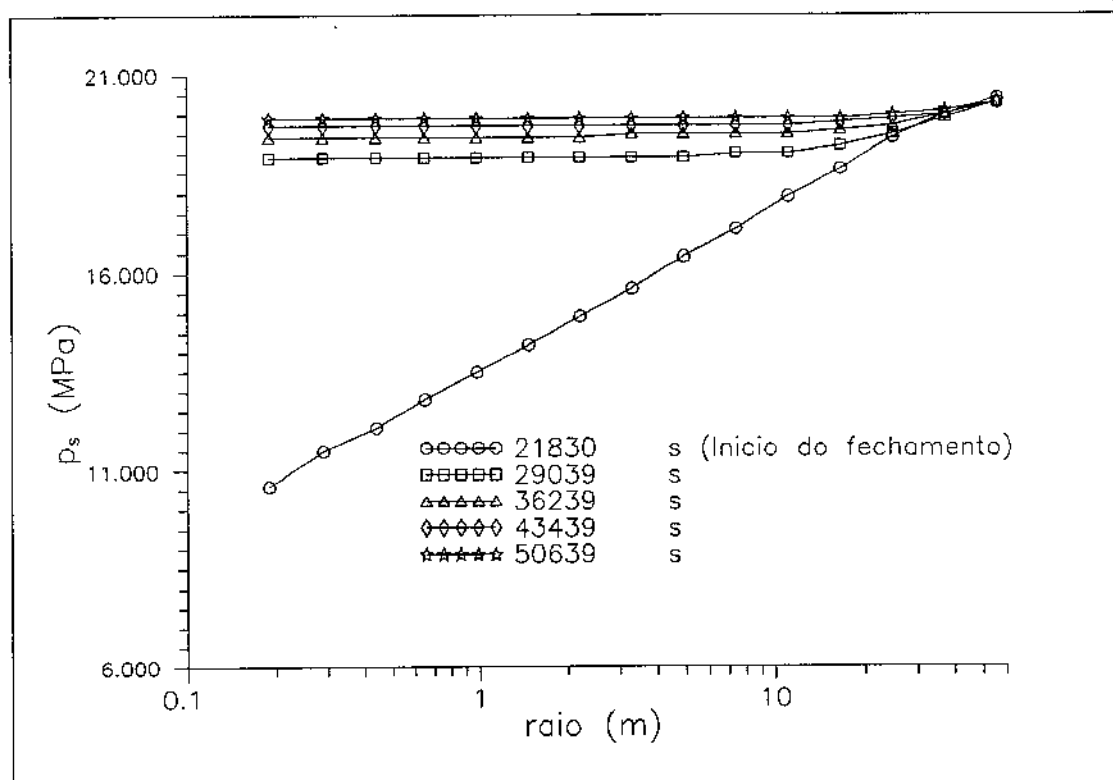


Figura 58: Comportamento da pressão após o fechamento

10.1 Análise do Período de Fluxo

Para a análise do período de fluxo adotou-se os dados da Tabela 8,

p_i MPa	p_o MPa	h m	r_w m	ϕ %	μ_o Pa.s	γ_o Pa/m	C_F $\times 10^6 m^3.Pa^{-1}$	c_t $\times 10^{11}.Pa^{-1}$
20,594	14,710	4,0	0,155	26,0	0,0076	8405	1,3764	129,513

Tabela 8: Caso Monofásico: Tabela dados do fluxo

considerando os seguintes cálculos,

$$C_F = \frac{\pi D_i^2}{4\gamma_o} = \frac{\pi (0,12136)^2}{4 \cdot 8405} = 1,3763 \times 10^{-6} m^3.Pa^{-1}$$

e adotando a compressibilidade efetiva da formação do caso monofásico.

10.1.1 Método de Normalização de Vazão

A Fig. 59 mostra o gráfico do método de Normalização de Vazão do caso multifásico. Observa-se, em comparação ao caso monofásico, uma diminuição da declividade no final do período do fluxo.

Com a declividade $m = 4936,7$ seg do trecho final da curva tem-se usando a Eq. (B-57),

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{C_F}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 5,1083 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 3,8823 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 9,7057 \times 10^{-14} m^2 (98,3mD)$$

O efeito de película pode ser calculado usando a Eq. (B-58) e adotando o seguinte ponto na reta

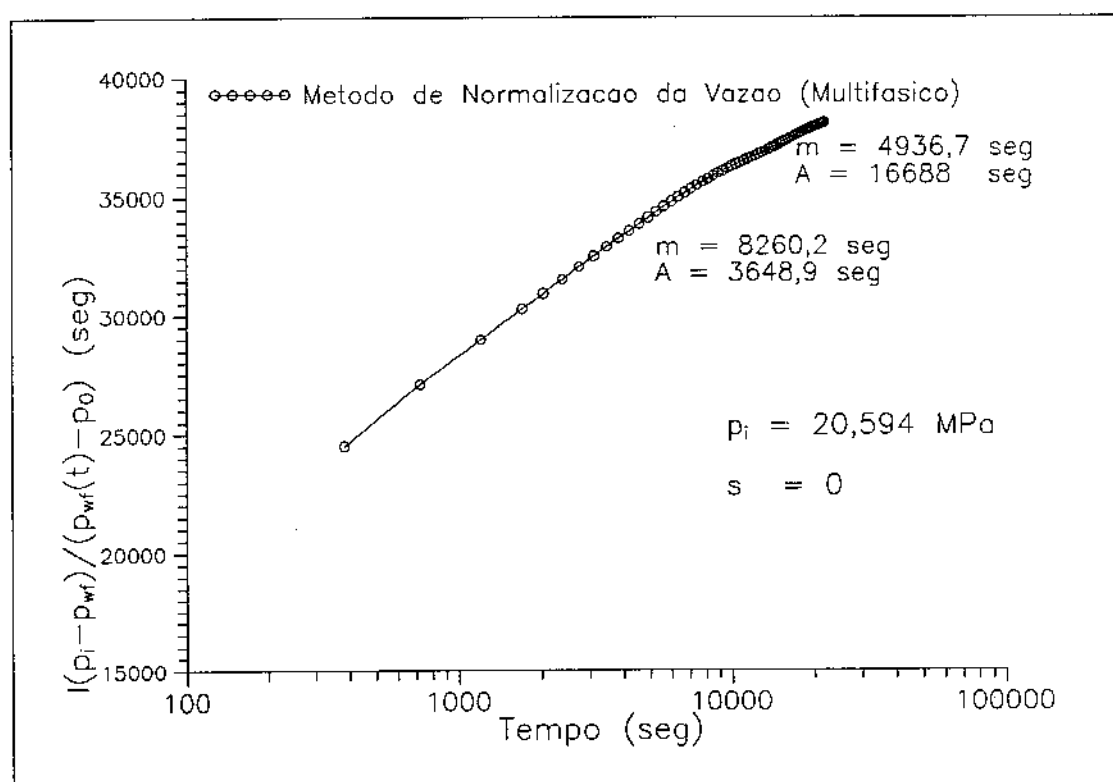


Figura 59: Gráfico do Método de Normalização de Vazão

$$\begin{cases} t^* = 1000 \text{ seg} \\ \left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \right]_{t^*} = 31498,1 \text{ seg} \end{cases}$$

$$s = 1,151 \left\{ \frac{\left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \right]_{t^*}}{m} - \log \left(\frac{kt^*}{\phi \mu c_l r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

chega-se

$$s = 3,26$$

10.1.2 Método de Convolução

O método de convolução apresenta o mesmo comportamento mostrado pela curva da Normalização de Vazão (Fig. 60).

Considerando a declividade da reta $m = 4698,4 \text{ seg}$ e usando a Eq. (B-75), tem-se

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{C_F}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 5,3773 \times 10^{-11} m^3 / (Pa.s)$$

$$k h = 4,0792 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 1,0198 \times 10^{-13} m^2 (103,33 mD)$$

Adotando o seguinte ponto da reta

$$\begin{cases} t_{ms}^* = 3,0 \\ \left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \right]_{t_{ms}^*} = 33385,2 \text{ seg} \end{cases}$$

e usando a Eq. (B-76),

$$s = 1,151 \left\{ \frac{\left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \right]_{t_{ms}^*}}{m} - t_{ms}^* - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_l r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

tem-se,

$$s = 4,07$$

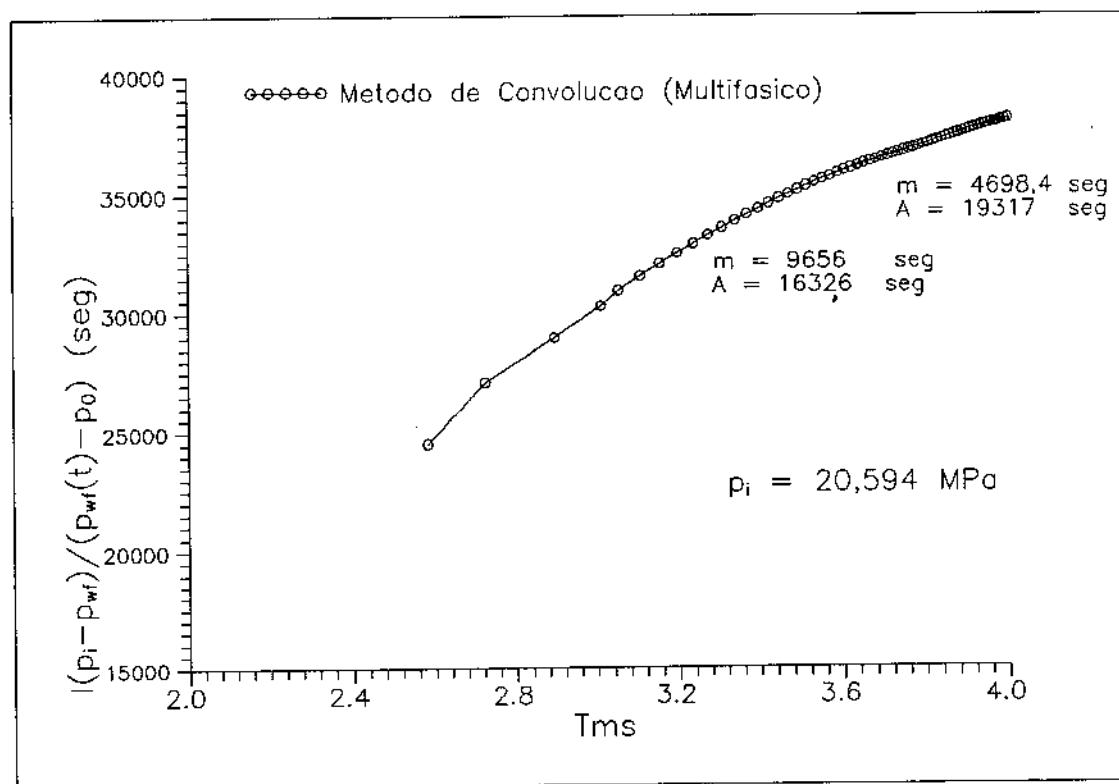


Figura 60: Gráfico do Método de Convolução

10.1.3 Método de Deconvolução no Campo Real

A Fig. 61 apresenta a aplicação do Método da Deconvolução no Campo Real para o "slug test".

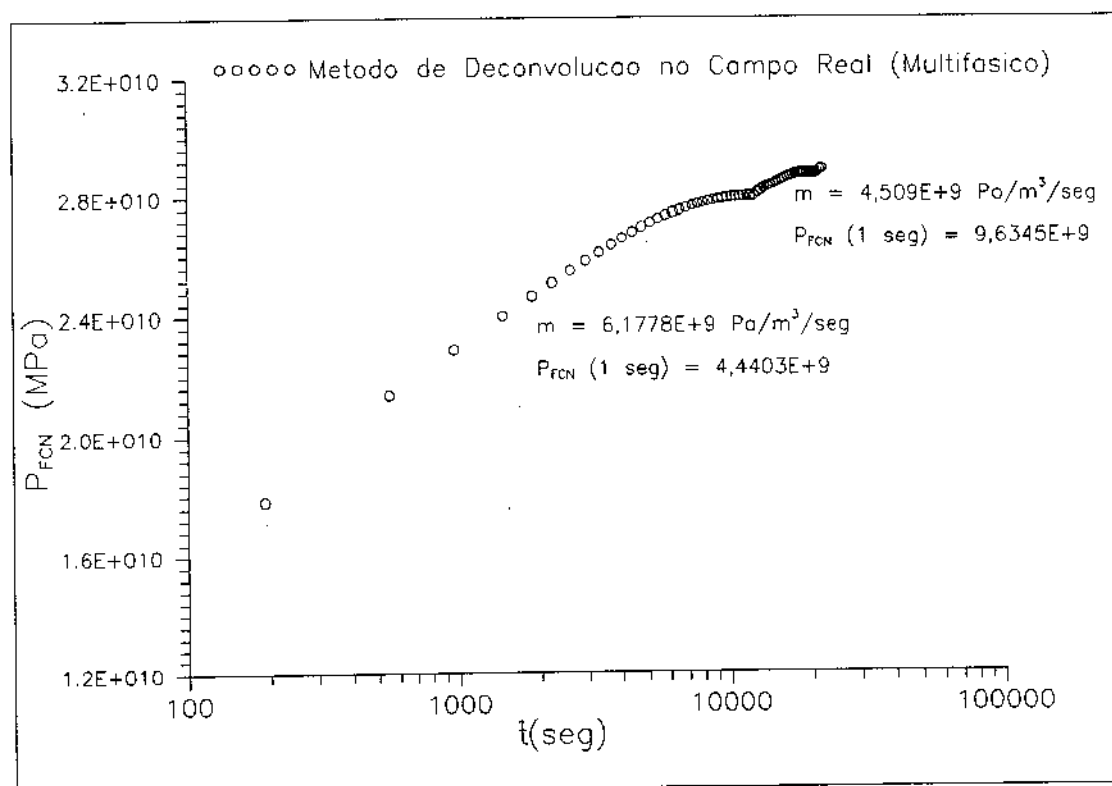


Figura 61: Gráfico do Método de Deconvolução no Campo Real

Considerando o trecho final da curva, mas desprezando os ultimos pontos, obtém-se uma declividade $m = 4,509 \times 10^9 \text{ Pa/m}^3/\text{s}$, que usando a Eq. (B-97) fornece

$$\frac{kh}{\mu} = 0,183234 \frac{1}{m}$$

$$\frac{kh}{\mu} = 4,0637 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{Pa.s})$$

$$kh = 3,0884 \times 10^{-13} \text{ m}^3$$

$$k = 7,7210 \times 10^{-14} m^2 (78,2mD)$$

Com o ponto da reta,

$$\begin{cases} t = 1seg \\ P_{FCN}(1seg) = 9,6345 \times 10^9 Pa/m^3/s \end{cases}$$

a Eq. (B-97)

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN}(1seg)}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

fornece

$$s = 1,94$$

10.1.4 Método de Deconvolução no Campo Laplace

O gráfico do Método de Deconvolução no Campo Laplace é mostrado na Fig. 62.

Considerando o trecho final da curva e descartando os pontos influenciados pelo efeito de cauda tem-se uma declividade $m = 4,882 \times 10^9 Pa/m^3/s$. Assim, usando a Eq. (B-107)

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{1}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,7533 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,8525 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 7,1312 \times 10^{-14} m^2 (72,2mD)$$

e adotando o ponto na reta,

$$\begin{cases} t = 1seg \\ P_{FCN}(1seg) = 8,0937 \cdot 10^9 Pa/m^3/s \end{cases}$$

a Eq. (B-108)

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN}(1seg)}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

dá

$$s = 1,43$$

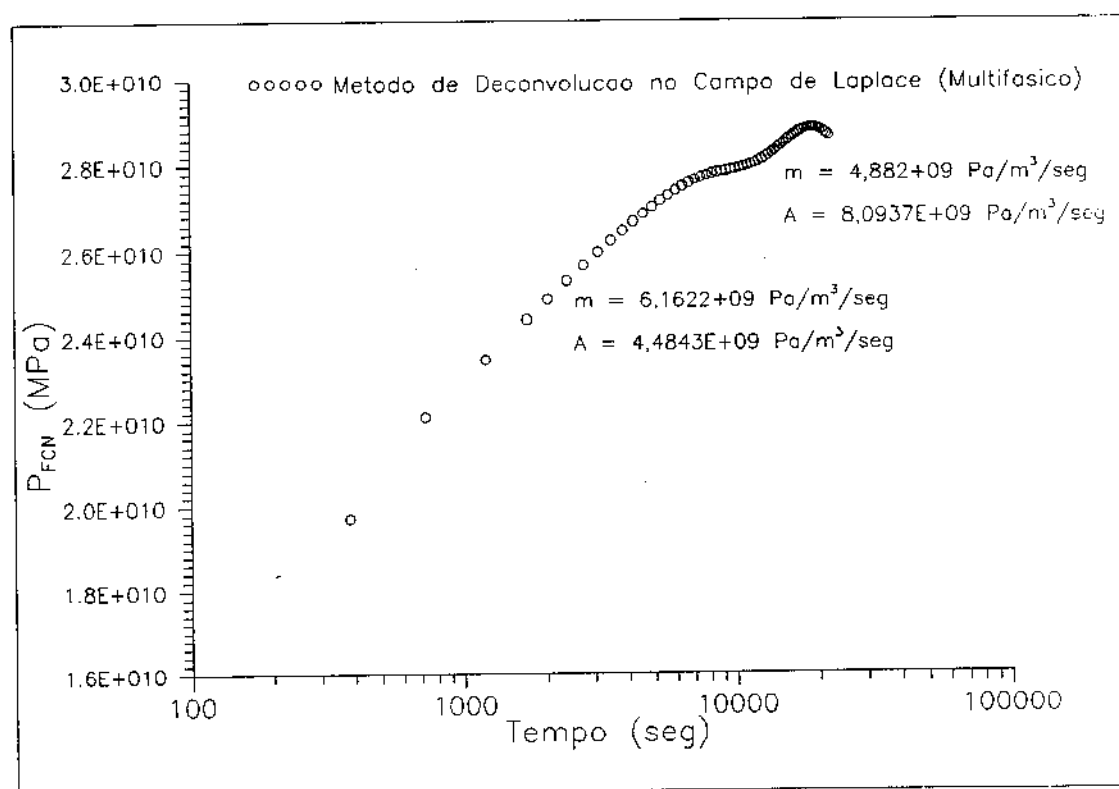


Figura 62: Gráfico do Método de Deconvolução no Campo de Laplace

10.2 Análise do Período de Estática

Para a análise do período de estática considerou-se os dados da Tabela 9.

p_0 MPa	h m	r_w m	ϕ %	μ_o Pa.s	C_F $\times 10^6 m^3.Pa^{-1}$	c_t $\times 10^{11}.Pa^{-1}$
1,9613	4,0	0,155	26,0	0,0076	1,3763	129,513

Tabela 9: Caso Monofásico: Tabela dados da estática

10.2.1 Método de Horner

O gráfico de Horner é dado pela Fig. 63.

Considerando a vazão média dada dada pela Eq. (C-17) tem-se

$$q_{média} = \frac{C_F [p_{wf}(t_p) - p_0]}{t_p}$$

para,

$$p_{wf}(t_p) = 10,018 MPa$$

$$t_p = 2,183 \times 10^4 s$$

chega-se a

$$q_{média} = 5,08 \times 10^{-4} m^3/s$$

Desta forma, usando a Eq. (C-21) com declividade $m_H = 3,0332 MPa$,

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{q_{média}}{m_H}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,0684 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,3320 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,8300 \times 10^{-14} m^2 (59,07 mD)$$

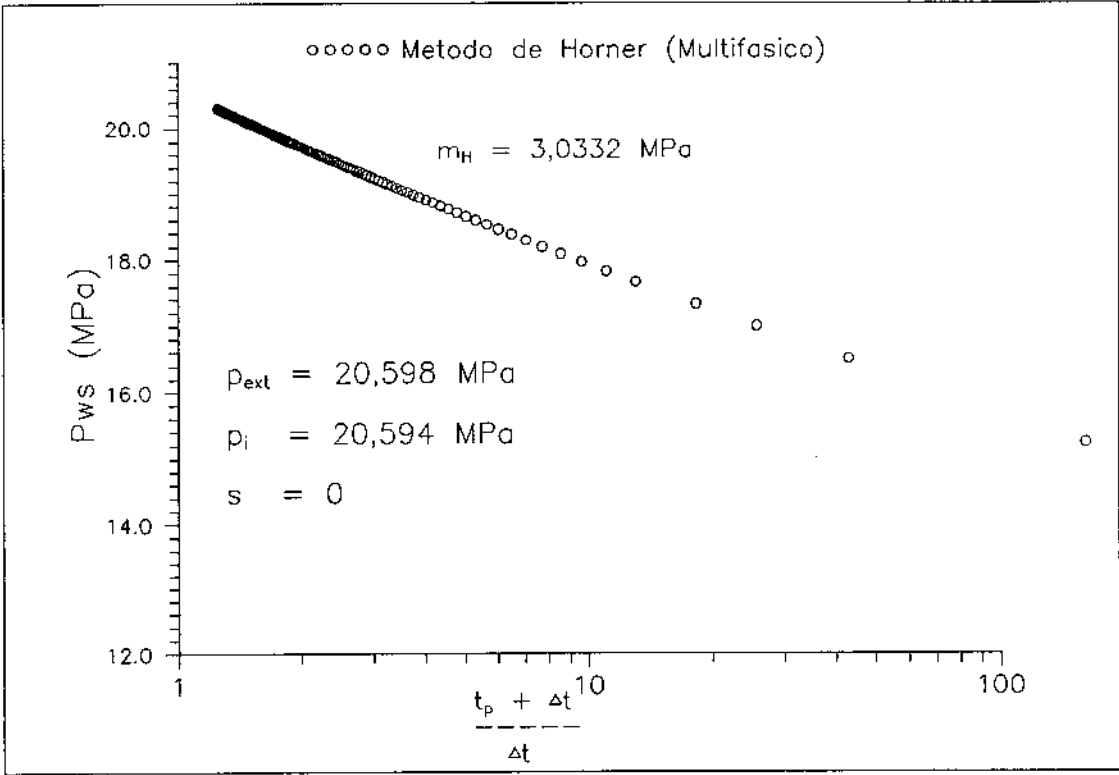


Figura 63: Gráfico do Método de Horner

Com a Eq. (C-22),

$$s = 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{m\acute{e}dia}}{m} - \log \left(\frac{kt_p}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

para,

$$p_{m\acute{e}dia} = \frac{p_0 + p_{wf}(t_p)}{2} = 5,990 MPa$$

tem-se

$$s = 0,17$$

10.2.2 Método de Horner com Vazão Variável

O gráfico de Horner com Vazão Variável é apresentado pela Fig. 64.

A vazão na face da formação no final do período de fluxo é dado pela Eq. (C-30)

$$q_{sf}(t_p) = C_F \cdot \frac{dp_{wf}}{dt} = 1,3764 \times 10^{-6} \times 256,67$$

$$q_{sf}(t_p) = 3,533 \times 10^{-4} m^3/s$$

Usando a Eq. (C-28) com a declividade da reta $m_H = 2,285 MPa$, tem-se

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{q_{sf}(t_p)}{m_H}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,8331 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,1532 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,3829 \times 10^{-14} m^2 (54,5mD)$$

Para o efeito de película, usando a Eq. (C-33),

$$s = 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{wf}(t_p)}{m} - \sum_0^{n+1} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{q_{n+1}} \right) \log(t_{n+1} - t_j) - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

onde,

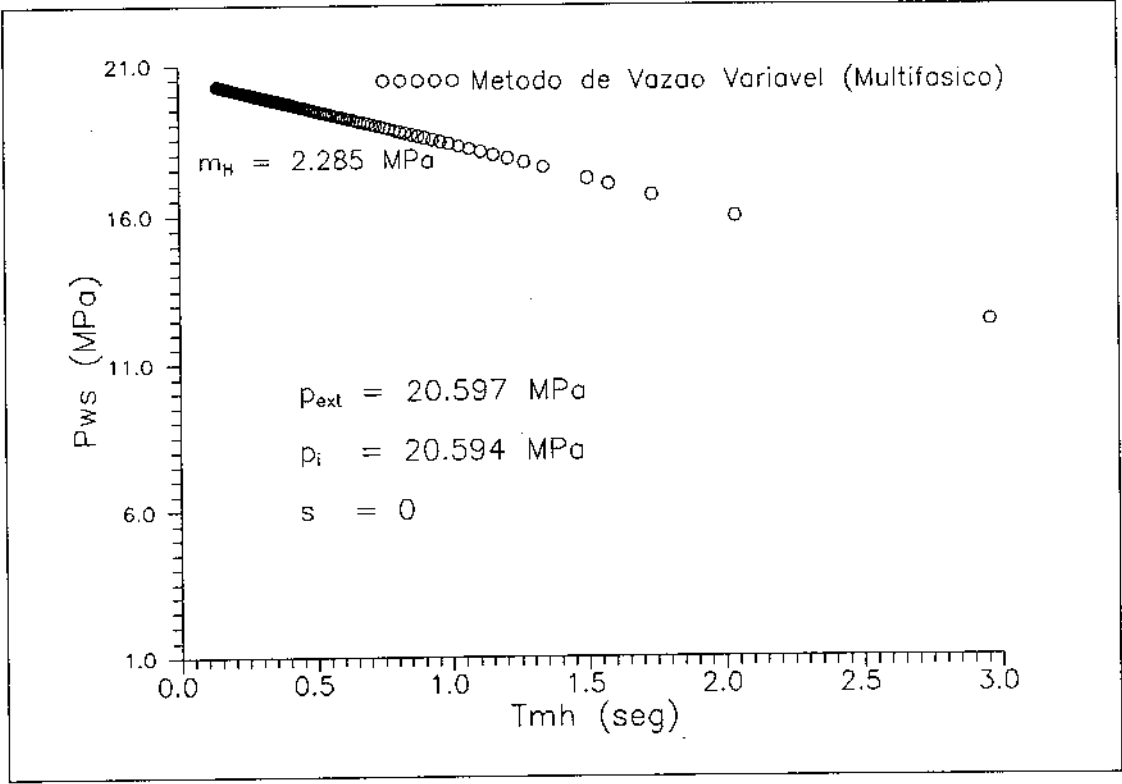


Figura 64: Gráfico do Método de Horner com Vazão Variável

$$\sum_0^{n+1} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{q_{n+1}} \right) \log (t_{n+1} - t_j) = 4,67156$$

logo,

$$s = -0,39$$

10.2.3 Método de Corrêa

O gráfico do método Cartesiano está na Fig. 65.

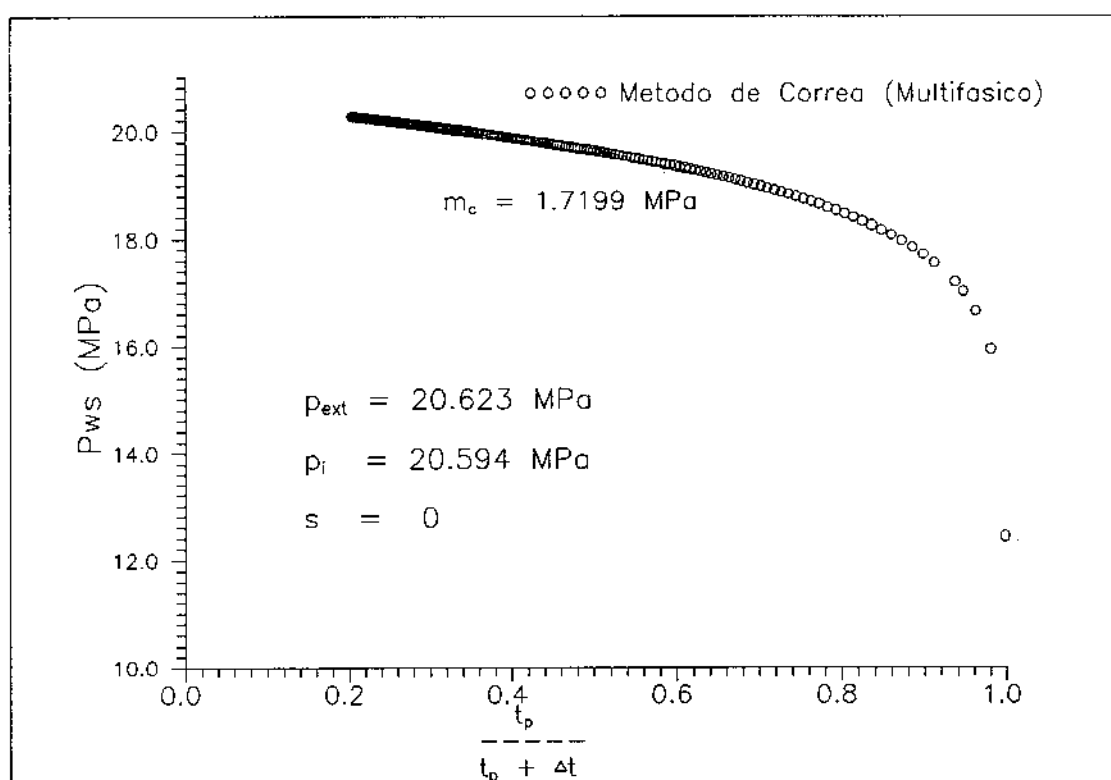


Figura 65: Gráfico do Método Corrêa

Usando a declividade $m_c = 1,7199 \text{ MPa}$ do gráfico, tem-se

$$\frac{k h}{\mu} = \frac{q_{média}}{4\pi m_c}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,3501 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 1,7861 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 4,4653 \times 10^{-14} m^2 (45,2 mD)$$

pode-se ver que o tempo de fechamento foi insuficiente.

10.2.4 Método Peres 1

A Fig. 66 mostra o gráfico do método Peres 1.

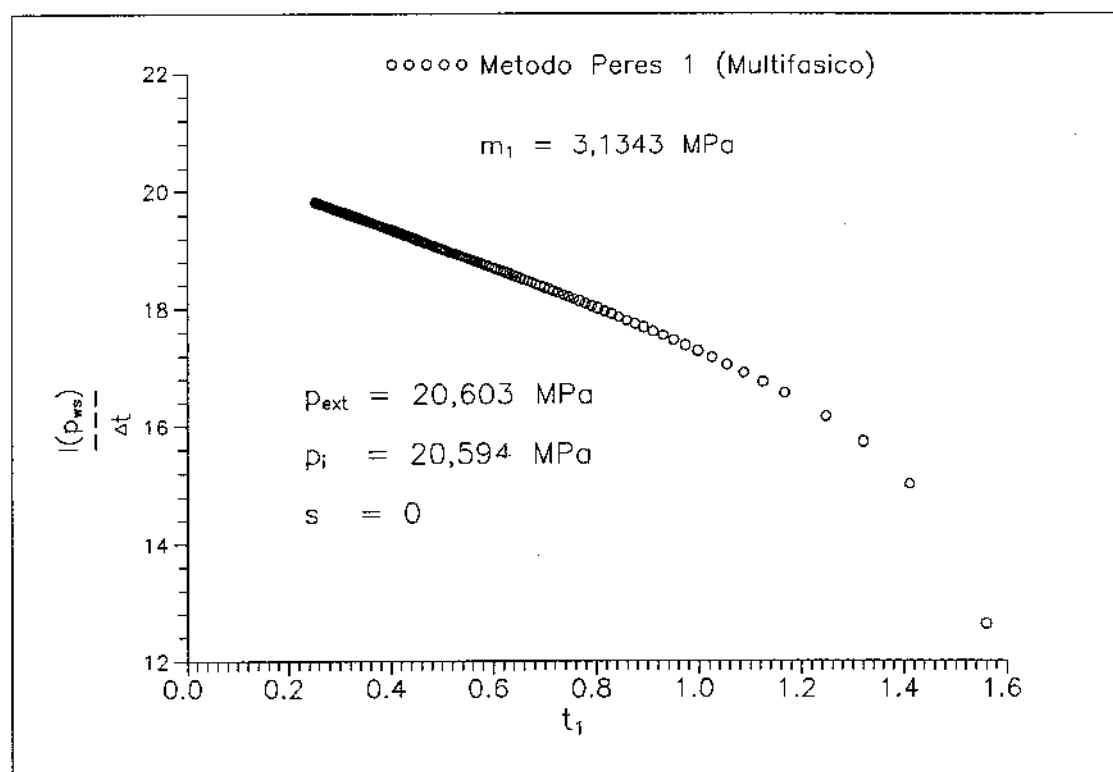


Figura 66: Gráfico do Método de Peres 1

usando a declividade $m = 3,1343 \text{ MPa}$, a Eq. (C-72) dá

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{q_{média}}{m_1}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,9694 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,2568 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,6419 \times 10^{-14} m^2 (57,2 mD)$$

O efeito de película é obtido da Eq. (C-76),

$$\begin{aligned} s &= 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{média}}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} \right) - 0,351 - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^n \log(t_p - t_{jp}) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{p_{wf}(t_p) - p_0} \right] \right\} \\ s &= 0,2 \end{aligned}$$

para

$$p_{média} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} p_{wf}(d\tau) d\tau = 6,528 MPa$$

$$\sum_{j=0}^n \log(t_p - t_{jp}) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{p_{wf}(t_p) - p_0} \right] = 4,00$$

10.2.5 Método Peres 2

O gráfico do método Peres 2 está mostrado na Fig. 67

Usando a declividade $m_2 = 1,3255 MPa$ na Eq. (C-86), obtém-se

$$\frac{k h}{\mu} = \frac{q_{média}}{4\pi m_2}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,0494 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,3176 \times 10^{-13} m^3$$

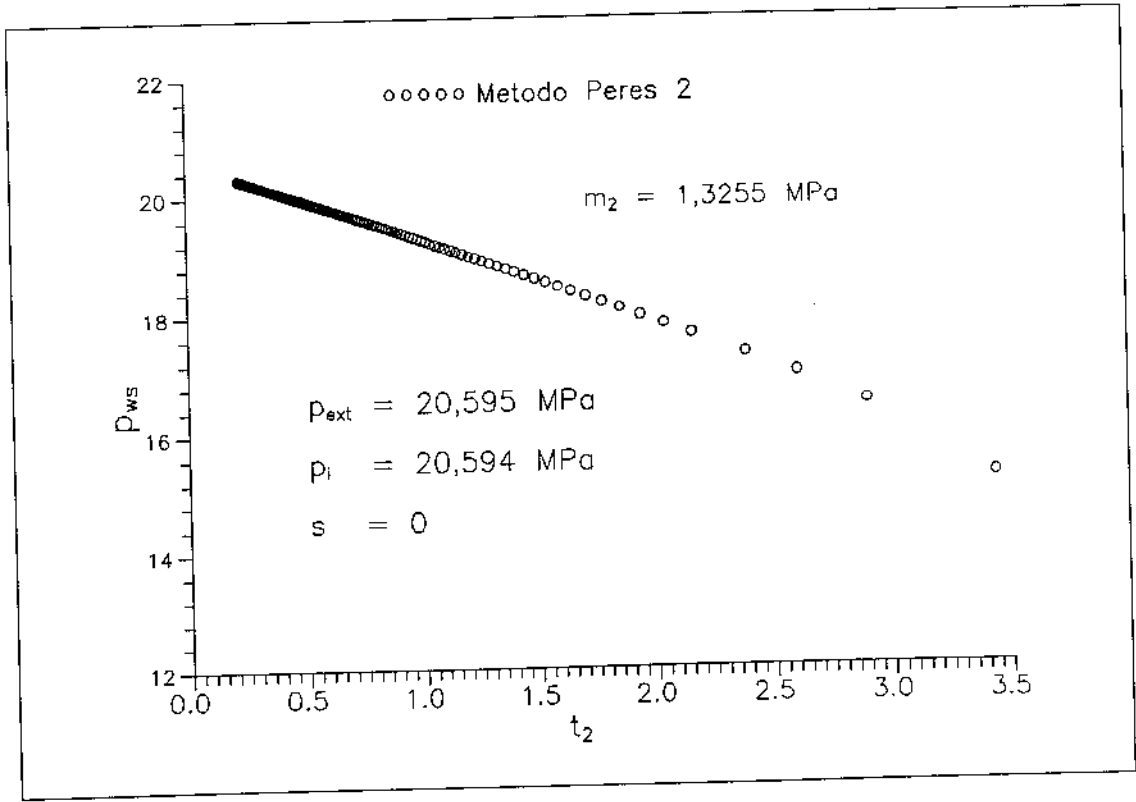


Figura 67: Gráfico do Método de Peres 2

$$k = 5,7939 \times 10^{-14} m^2 (58,7 mD)$$

Considerando a Eq. (C-87),

$$m_1 = m_2 \ln 10 = 1,00153$$

tem-se da Eq. (C-76),

$$s = 0,32$$

10.3 Resultados

Os resultados da análise monofásica aplicada ao escoamento multifásico pode ser avaliado pela Tabela 10

método	período	k mD	s	$p_{ext}(MPa)$
Normalização Vazão	fluxo	98,3	3,3	—
Convolução	fluxo	103,3	4,1	—
Deconvolução real	fluxo	78,1	1,9	—
Deconvolução Laplace	fluxo	72,2	1,4	—
Horner	estática	59,1	0,2	20,598
Horner Vazão Variável	estática	54,5	-0,4	20,597
Corrêa	estática	—	—	20,623
Método Peres 1	estática	57,0	0,2	20,603
Método Peres 2	estática	58,7	0,3	20,595

Tabela 10: Tabela resumo dos resultados do teste multifásico

Pode-se ver que a utilização do período final do fluxo, usando a análise monofásica apresenta resultados incorretos. Porém, considerando o trecho inicial do fluxo e usando os métodos de deconvolução tem-se :

- Método de Normalização de vazão

Usando a declividade do trecho inicial do gráfico da Fig. 59, $m = 8260,2$ seg tem-se usando a Eq. (B-57),

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{C_F}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 3,0532 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,3205 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,8011 \times 10^{-14} m^2 (58,8 mD)$$

Da Eq. (B-58) e o seguinte ponto da reta

$$\left\{ \begin{array}{l} t^* = 1000 \text{ seg} \\ \left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_o)} \right]_{t^*} = 28430 \text{ seg} \end{array} \right.$$

$$s = 1,151 \left\{ \frac{\left[\frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_o)} \right]_{t^*}}{m} - \log \left(\frac{k t^*}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

chega-se

$$s = 0,13$$

- Deconvolução no espaço Real

Usando a declividade do gráfico inicial da Fig. 61, $m = 4,509 \times 10^9 Pa/m^3/s$, tem-se com a Eq. (B-97),

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{1}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,9660 \times 10^{-11} m^3/(Pa.s)$$

$$k h = 2,2542 \times 10^{-13} m^3$$

$$k = 5,6354 \times 10^{-14} m^2 (57,1 mD)$$

Com a Eq. (B-97) e o ponto da reta,

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 1 \text{ seg} \\ P_{FCN}(1 \text{ seg}) = 4,4403 \times 10^9 Pa/m^3/s \end{array} \right.$$

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN(1seg)}}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

tem-se $s = 0,65$

• Deconvolução no espaço de Laplace

Usando a declividade inicial do gráfico da Fig. 62, $m = 6,1622 \times 10^9 \text{ Pa/m}^3/\text{s}$ na Eq. (B-107),

$$\frac{k h}{\mu} = 0,183234 \frac{1}{m}$$

$$\frac{k h}{\mu} = 2,9735 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{Pa.s})$$

$$k h = 2,2599 \times 10^{-13} \text{ m}^3$$

$$k = 5,6497 \times 10^{-14} \text{ m}^2 (57,2 \text{ mD})$$

e adotando o ponto na reta,

$$\begin{cases} t = 1 \text{ seg} \\ P_{FCN}(1 \text{ seg}) = 4,4843 \times 10^9 \text{ Pa/m}^3/\text{s} \end{cases}$$

a Eq. (B-108)

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN(1seg)}}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\}$$

dá $s = 0,48$

método	período	k mD	s
Normalização Vazão	fluxo	58,8	0,13
Deconvolução Real	fluxo	57,1	0,65
Deconvolução Laplace	fluxo	57,2	0,48

Tabela 1: Tabela resumo do trecho inicial do fluxo multifásico

11 COMENTÁRIOS

11.1 Desempenho do Simulador

A simulação de um teste de poço não surgente com escoamento multifásico apresenta certas características peculiares que diferem da simulação convencional de teste de poço.

As abruptas variações de pressão e saturação durante a simulação aumentam a não linearidade do sistema de equações de diferenças do escoamento multifásico e diminuem o sucesso de convergência do método de Newton.

O tratamento de ponto de bolha variável adotado permite a simulação rigorosa destas variações especialmente na transição entre monofásico e multifásico. Além disso, permite uma simulação mais real para o caso de colapso de gás que ocorre durante o teste multifásico.

O controle das máximas variações de pressão e saturação através dos limites de variações tem de ser relaxado em algumas circunstâncias devido a instantaneidade das variações que ocorrem principalmente na transição do período de fluxo para estática, agravado nos casos de simulações com efeito de película (Fig. 68).

A ponderação da R_{go} na interface pela distância apresenta problemas de instabilidade numérica. Uma solução, com sucesso, é ponderar a R_{go} um ponto a montante, como a transmissibilidade.

O tratamento de ponto de bolha estendida os termos de fluxo apresenta uma melhor estabilidade para os casos de segregação.

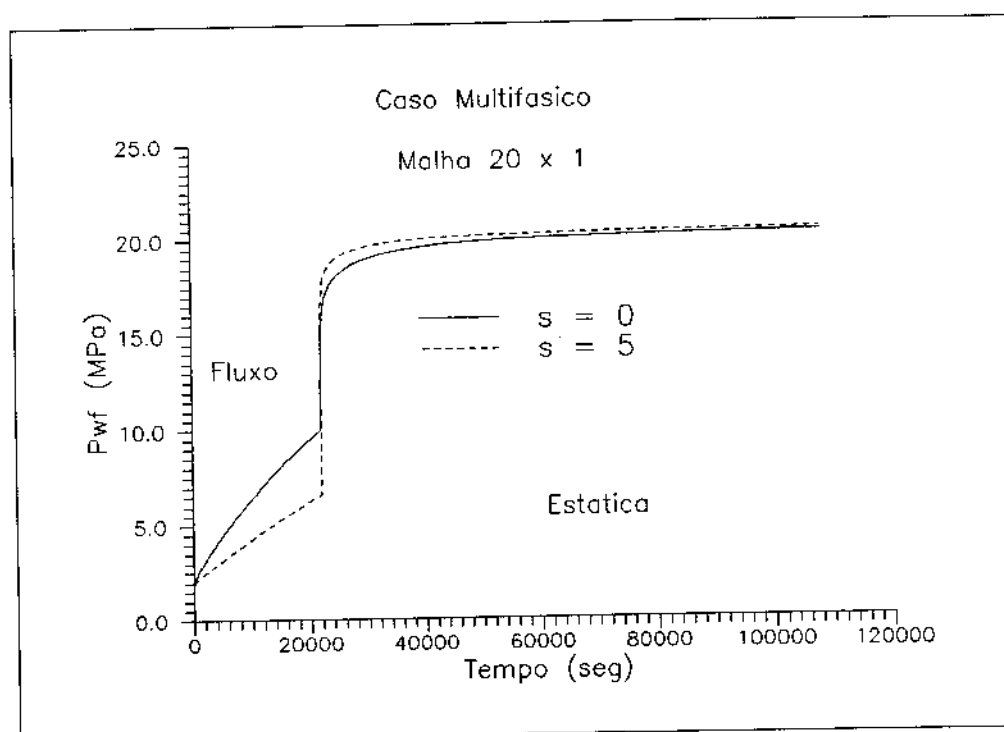


Figura 68: Simulação com efeito de película

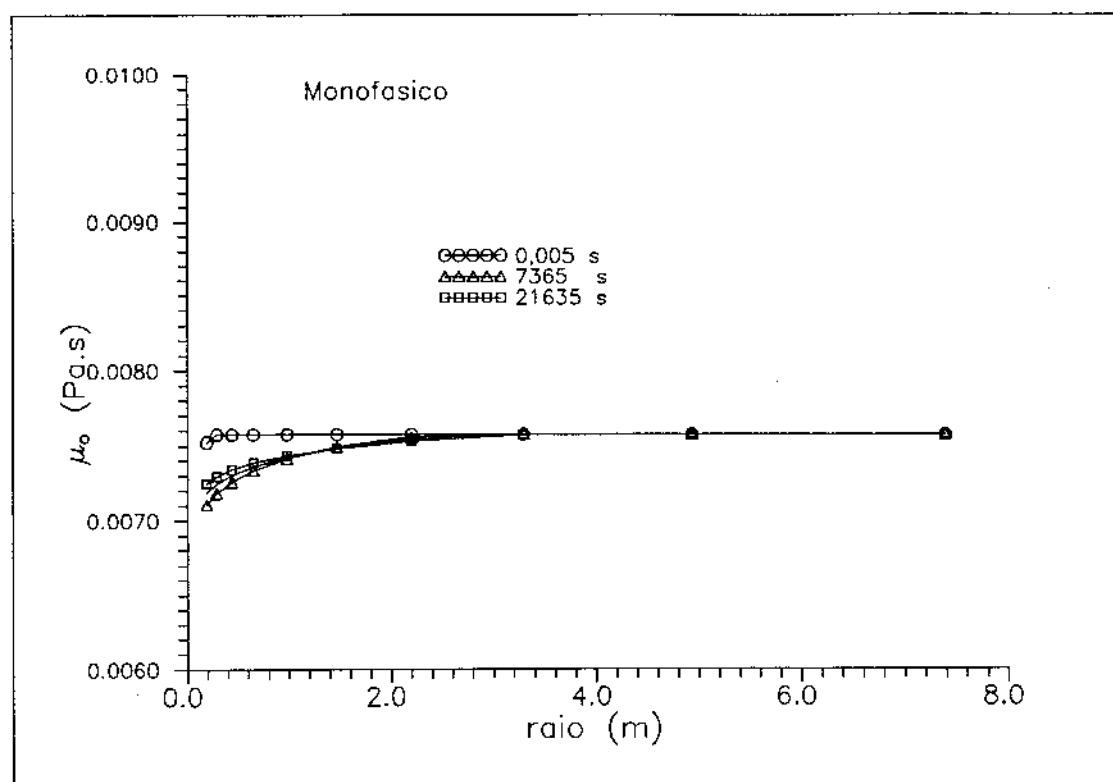


Figura 69: Monofásico: Comportamento da viscosidade

Embora os casos de testes de poço não surgente apresentados sejam para uma malha de 20×1 , o modelo com ponto de bolha variável desenvolvido pode simular malhas mais refinadas. Porém, um refinamento maior da malha significa um maior tempo de simulação devido a necessidade de incrementos de tempo menores para obter a precisão desejada.

11.2 Casos Simulados

A análise do caso monofásico simulado apresenta uma excelente concordância com os dados fornecidos ao simulador, indicando que os métodos analíticos empregados apresentam um bom desempenho para o escoamento monofásico desde que se leve em conta as variações das propriedades durante o escoamento do período de fluxo (Figs. 69 e 70)

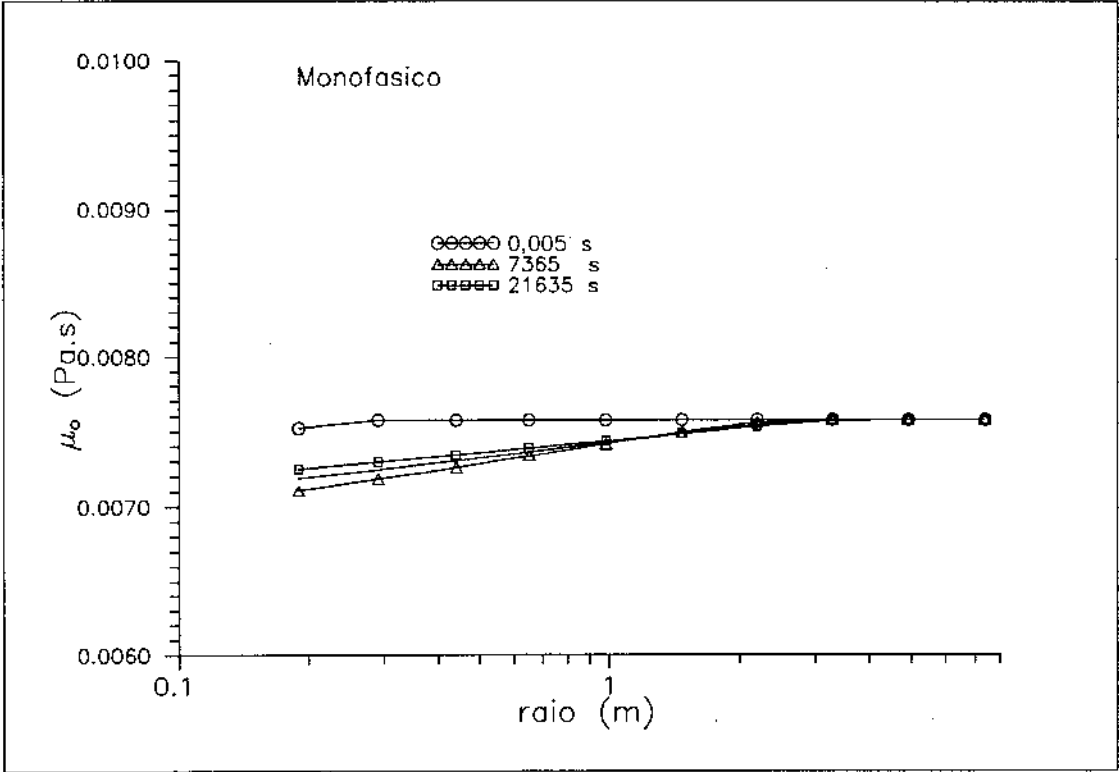


Figura 70: Monofásico: Comportamento da viscosidade

Para verificar um completo desempenho da análise monofásica no escoamento multifásico necessitaria a simulação de diversos casos com variações de propriedades de fluido e petrofísicas, dano e produções e um cuidadoso exame dos resultados que demandaria um tempo incompatível ao tempo disponível para este trabalho. Portanto, o estudo do desempenho da análise monofásica neste trabalho fica restrito ao caso apresentado.

Na análise do caso multifásico, pode-se ver uma grande variação das propriedades de fluido e petrofísicas num curto espaço de tempo que compromete o desempenho da análise monofásica do período de fluxo. Pode-se ver também que o emprego da análise monofásica é mais crítico para o período de fluxo.

A Fig. 71 mostra o comportamento da permeabilidade relativa no início do fluxo. Observa-se que há uma redução da permeabilidade 0,6 para aproximadamente 0,4 devido a liberação de gás. Esta redução progride com o tempo até atingir um raio em torno de 0,66 m para um tempo de 7430 segundos.

Usando a fórmula de Hawkins para o efeito de película,

$$s = \left(\frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_s}{r_w} \right)$$

onde,

k_s = , permeabilidade da zona alterada

r_s = , raio da zona alterada

tem-se

$$s = \left(\frac{0,6}{0,4} - 1 \right) \ln \left(\frac{0,66}{0,155} \right)$$

$$s = 0,72$$

A Fig. 72 mostra o comportamento da permeabilidade relativa no final do fluxo. Nota-se que a redução da permeabilidade até 0,66 m começa a recuar gradativamente devido a repressurização e consequente dissolução do gás.

Com a retração da zona alterada, ao final do fluxo o raio da zona alterada fica reduzido a aproximadamente 0,3 m. Assim,

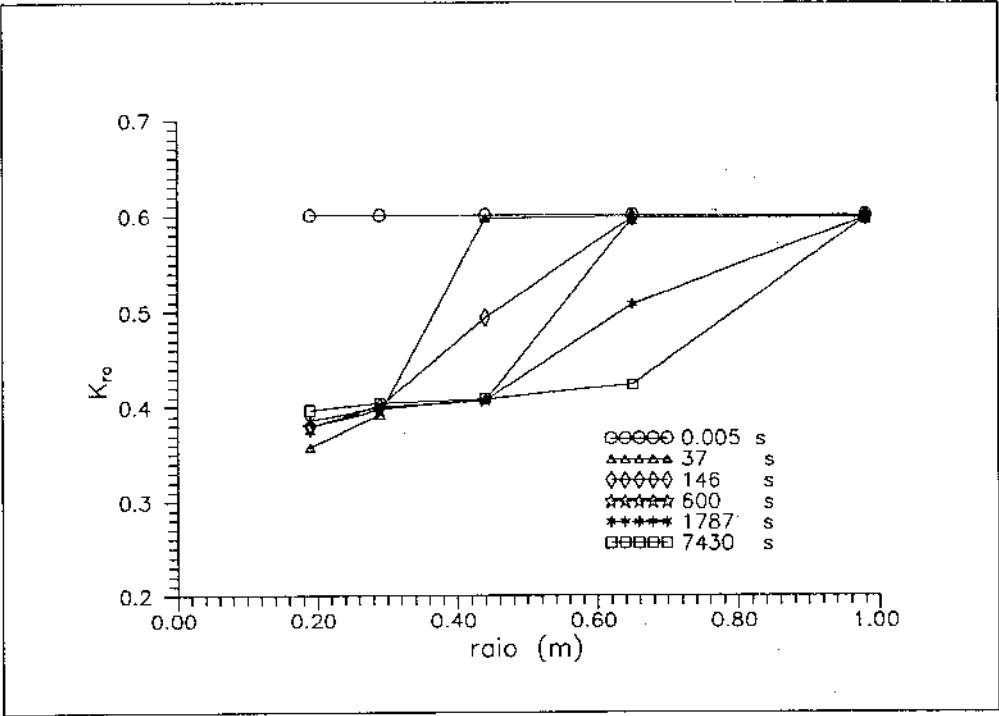


Figura 71: Multifásico: Comportamento da permeabilidade relativa

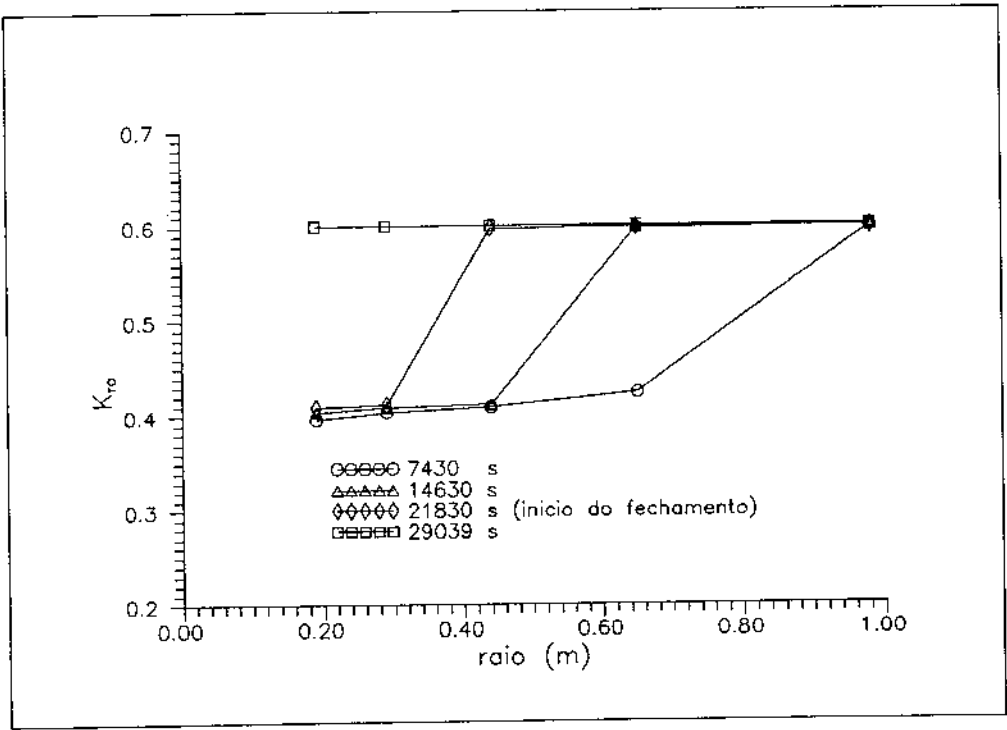


Figura 72: Multifásico: Comportamento da permeabilidade relativa

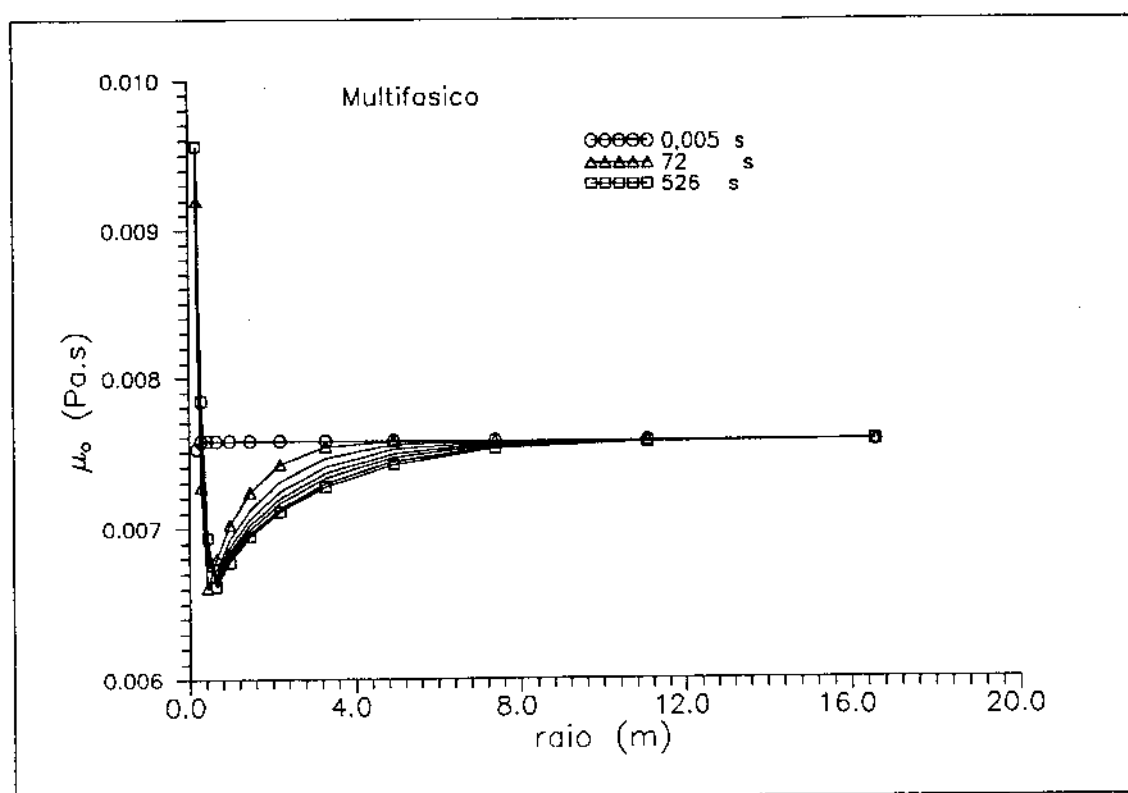


Figura 73: Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo

$$s = \left(\frac{0,6}{0,4} - 1 \right) \ln \left(\frac{0,30}{0,155} \right)$$

$$s = 0,33$$

Este valor de efeito de película está de acordo com o valor obtido pelo método de Peres 2 para o período de estática e mostra um caso de pseudo-dano associado a propriedades petrofísicas.

As Fig. 73 e 74 mostram o comportamento da viscosidade do óleo no início do fluxo. Observa-se inicialmente uma tendência de queda da viscosidade devido ao trecho monofásico da variação da pressão. Mas, com a liberação de gás, há um aumento sensível da viscosidade do óleo próximo ao poço. Nota-se ainda que a de uma certa distância (em torno de 0,6 m) o comportamento é de queda com o tempo, indicando que a pressão a partir desta distância permanece acima da pressão de saturação.

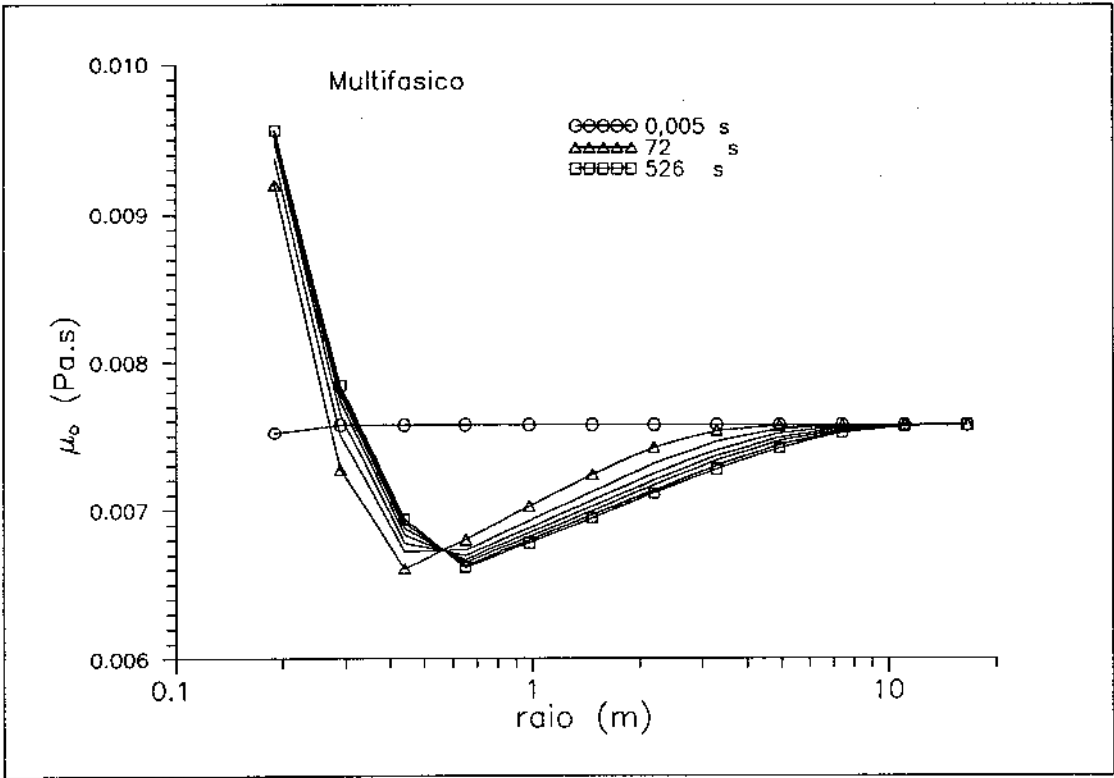


Figura 74: Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo

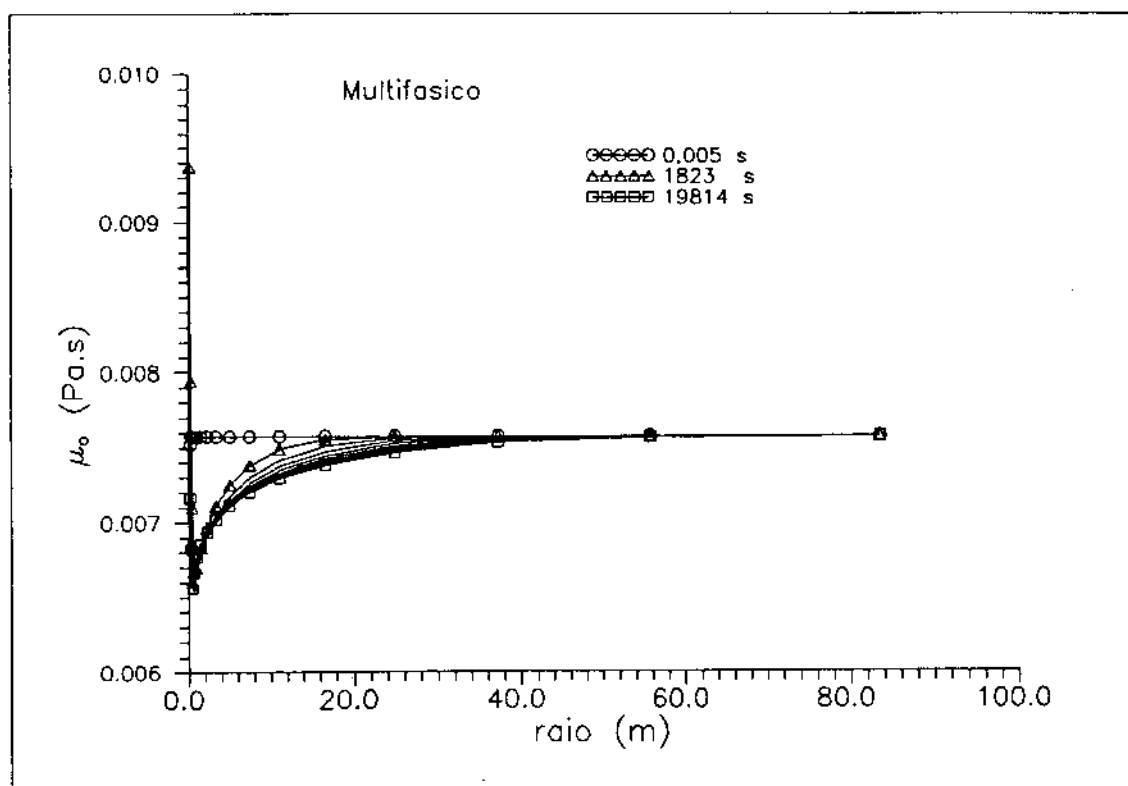


Figura 75: Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo

As Fig. 75 e 76 mostram o comportamento da viscosidade do óleo no final do fluxo. Observa-se que a viscosidade próximo ao poço após ter atingido um máximo tem um comportamento decrescente até o final do fluxo.

Usando a menor viscosidade nas proximidades do poço, $\mu = 0,0065 mD$, tem-se pelo método da deconvolução no campo de Laplace,

$$k = 6,0836 \times 10^{-14} m^2 (61,6 mD)$$

isto indica que o comportamento anômalo observado no período de fluxo está associado em grande parte a variação da viscosidade do óleo.

A influência da viscosidade e da propriedade petrofísica observada nos casos simulados são exemplos dentro uma grande diversidade de situações que podem ocorrer durante um teste de com escoamento multifásico.

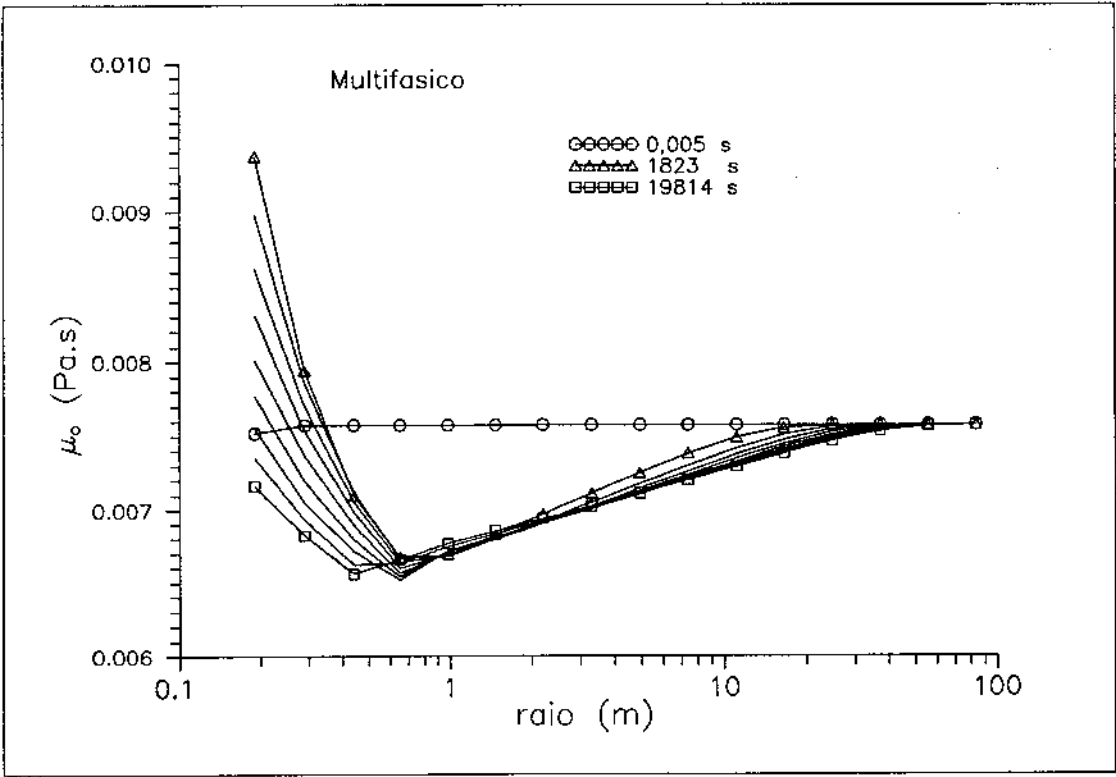


Figura 76: Multifásico: Comportamento da viscosidade óleo

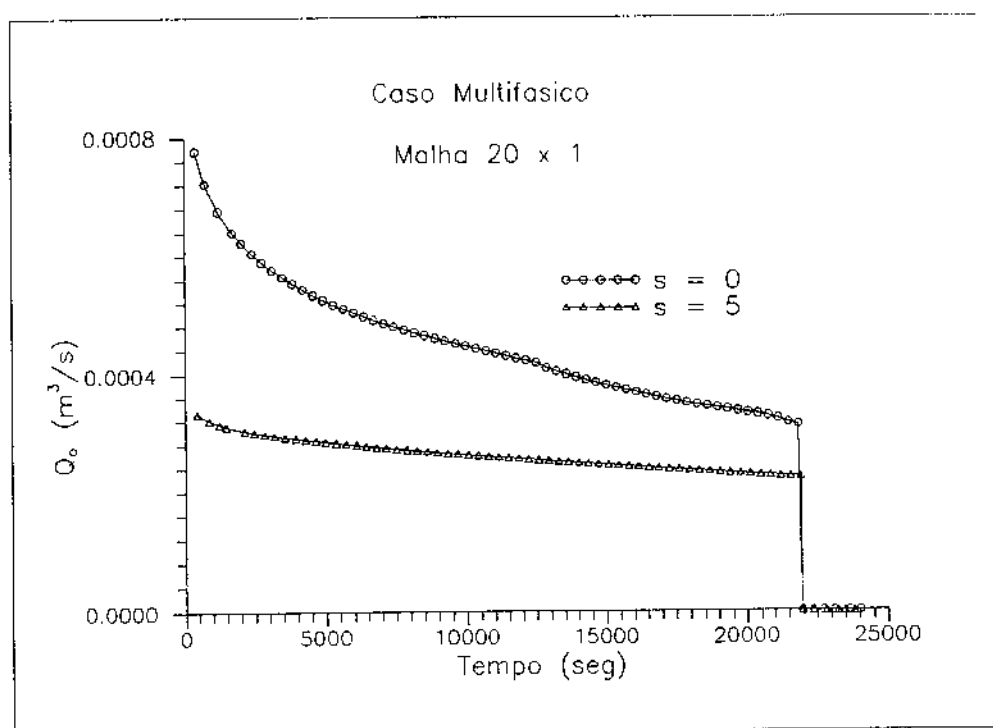


Figura 77: Multifásico: Comportamento da vazão de óleo

Um caso interessante para futuros estudos está associado ao comportamento linear da pressão com o tempo, isto é, vazão constante durante um certo período de fluxo, que pode ser observado na Fig. 68 para o caso de $s = 5$. Este comportamento foi considerado um paradoxo pela Ref. 8 pois não se encontrou na época (1975) uma razão plausível da aparente independência da vazão em relação a pressão do poço.

Porém, pode-se ver pela Fig. 77, que apesar da aparente linearidade da pressão com o tempo, a vazão apresenta uma leve variação com o tempo.

Devido ao comportamento da linear da pressão os métodos apresentados de análise para o período de fluxo não são mais aplicáveis para este tipo de teste.

12 CONCLUSÕES

As seguintes conclusões foram obtidas deste trabalho:

- O modelo numérico-computacional desenvolvido apresenta um bom desempenho na simulação de testes de poços não surgentes e representa um ferramenta útil para o estudo de do escoamento multifásico.
- O modelo com ponto de bolha variável permite uma simulação mais realista do fenômeno físico que faz presente no reservatório durante a realização de um teste de poço não surgente.
- Simulações de casos de redução drástica de permeabilidade devido a dano e influência petrofísicas, que dificilmente seriam possíveis em outros modelos, podem ser simulados até com certa facilidade ajustando parâmetros de controle de variação de pressão e saturação apropriadamente.

Considerando um escoamento multifásico gás-óleo,

- A aplicação generalizada dos métodos analíticos monofásicos para testes de poços não surgentes pode levar a resultados incorretos.
- A consideração de propriedades constantes mesmo no fluxo monofásico nos casos de diferenciais de pressão muito elevado também produz resultados incorretos na análise do período de fluxo.
- Os métodos de deconvolução aparentemente apresentam um melhor desempenho na análise do período de fluxo.
- A pequena variabilidade das propriedades após um curto tempo de fechamento, mesmo na análise multifásica, representa um fator predominante para o bom desempenho dos métodos analíticos para o período de fechamento.

Como sugestão para futuros trabalhos usando o simulador desenvolvido, pode-se considerar as seguintes abordagens do fluxo multifásico:

- Influência do escoamento gás-óleo com a saturação de gás crítica.
- Influência do escoamento água-óleo com uma zona na vizinhança do poço alterada pela invasão de filtrado.
- Influência do efeito de película.
- Permeabilidade relativa
- Inclusão de efeitos energiais no poço.

NOMENCLATURA

A	- área transversal
B_ℓ	- fator volume de formação da fase ℓ
b_ℓ	- inverso do fator volume de formação da fase ℓ
c	- compressibilidade
c_ℓ	- compressibilidade efetiva
c_r	- compressibilidade da rocha
C_{col}	- capacidade da coluna
D_i	- diâmetro interno da tubulação
Δx	- dimensão do bloco na direção x
Δy	- dimensão do bloco na direção y
Δz	- dimensão do bloco na direção z
Δt	- diferencial de tempo
Δp	- diferencial de pressão
f	- propriedade PVT
f_w	- fração volumétrica da água no líquido
F	- função resíduo
F_{pwf}	- função resíduo do poço para pressão especificada
FQ	- função resíduo do poço para vazão especificada
FGX	- fator geométrico na direção x
FGZ	- fator geométrico na direção z
g	- aceleração da gravidade
g_c	- fator de conversão de unidades
γ_{p0}	- peso específico do fluido da coluna na abertura
h	- espessura da formação
H	- coluna hidrostática
J	- jacobiano
X	- solução
k	- permeabilidade absoluta
k_x	- permeabilidade absoluta na direção x
k_z	- permeabilidade absoluta na direção z
$k_{r\ell}$	- permeabilidade relativa da fase ℓ
k_{rog}	- permeabilidade relativa ao óleo num sistema água-óleo
k_{row}	- permeabilidade relativa ao óleo num sistema gás-óleo
λ_ℓ	- transmissibilidade da fase ℓ
m	- massa por unidade de volume do meio poroso
$\dot{m}$	- vazão massica por unidade de volume do meio poroso
m_{bo}	- declividade de b_o subsaturado

N_x	-	Número de blocos na direção x (ou r)
N_z	-	Número de blocos na direção z
p_ℓ	-	pressão da fase ℓ
p_i	-	pressão inicial do reservatório
p_b	-	pressão de bolha
p_s	-	pressão de saturação
p_0	-	pressão inicial de fluxo
p_{cgo}	-	pressão capilar gás-óleo
p_{cwo}	-	pressão capilar água-óleo
p_{wf}	-	pressão de fluxo no poço
$\hat{q}$	-	vazão por unidade de área
q	-	vazão na condição de reservatório
q_{fg}	-	vazão de gás livre
q_g	-	vazão de gás livre + dissolvido
Q	-	vazão na condição de superfície
r	-	distância na direção radial
r_w	-	raio do poço
r_e	-	raio externo do reservatório
R_s	-	razão de solubilidade
ρ_e	-	raio externo do reservatório externo linearizado
ρ_w	-	raio do poço linearizado
$\bar{\rho}$	-	densidade específica na condição de reservatório
S_ℓ	-	saturação da fase ℓ
s	-	efeito de película
Tx_ℓ	-	Transmissibilidade interblocos da fase ℓ na direção x
Tz_ℓ	-	Transmissibilidade interblocos da fase ℓ na direção z
t	-	tempo
t_p	-	tempo de produção
u_ℓ	-	velocidade da fase ℓ
V_p	-	volume poroso
V	-	volume
wx	-	ponderador da propriedade PVT na direção x
wz	-	ponderador da propriedade PVT na direção z
x	-	distância na direção x
y	-	distância na direção y
z	-	distância na direção z

Grego

- μ - viscosidade
- ϕ - porosidade
- Φ - diferença de potencial
- ρ - densidade específica
- ρ - distância radial linearizada
- γ - peso específico
- γ - constante de Euler = 0,577216665...
- ν - nível de iteração

Operadores

- Δ - diferença
- Δ_t - diferença no tempo
- ∇ - divergente

Subscritos

- i - referente ao bloco k
- k - referente ao bloco k
- i, k - referente ao bloco i, k
- b - referente ao ponto de bolha
- D - adimensional
- e - fronteira externa
- g - gás
- fg - gás livre
- w - água
- w - poço
- o - óleo
- p - poroso
- ℓ - óleo , água e gás (fases)
- sc - condição padrão

- [12] Bostic, J. N., Agarwal, R. G. e Carter, R. D.: "Combined Analysis of Postfracturing Performance an Pressure Buildup Data for Evaluating an MHF Gas Well", JPT (Out. 1980), 1711-1719.
- [13] Kuchuk, F. J. e Wilkinson, D. J.: "Transient Pressure Behavior of Commingled Reservoirs", SPE 18125, apresentado no 63rd Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, (Out. 1988).
- [14] Rouboutsos A. e Stewart, G. : "A Direct Deconvolution or Convolution Algorithm for Well Test Analysis", SPE 18157, apresentado no 63rd Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, (Out. 1988).
- [15] Stehfest, H. : "Algorithm 368, Numerical Inversion of Laplace Transform", Comm. of the ACM, 13(1), 1970) 47-49.
- [16] Mathews, C. S. e Russel, D. G. : "Pressure Buildup And Flow Testes in Wells", Monograph Series, SPE, Dallas (1967) 1.
- [17] Earlougher, R. C. Jr.: "Advances in Well Test Analysis", Monograph Series, SPE, Dallas (1977) 5.
- [18] Dolan, J. P., Einarsen, C. A. e Hill, G. A.: "Special Applications of Drill-Stem Test Pressure Data", Trans. AIME, 210 (1957) 318-324.
- [19] Aziz, K. e Settari, A. : "Petroleum Reservoir Simulation", Applied Science Publishers Ltd., London (1979).
- [20] Peaceman, D. W. : "Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation", Developments in Petroleum Science, Elsevier Scientific Publishing Co., New York (1977).
- [21] Crichlow, H. B. : "Modern Reservoir Engineering - A Simulation Approach", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

- [22] Steffensen, R. J. e Sheffield, M. : "Reservoir Simulation of Collapsing Gas Saturation Requiring Areal Variation in Bubble-point Pressure", SPE 4275, apresentado no 3rd Numerical Simulation of Reservoir Performance Symposium, Houston (1973)
- [23] Kazemi, H. : "A Reservoir Simulation for Studying Productivity Variation and Transient Behavior of a Well in a Reservoir Undergoing Gas Evolution", Trans AIME, 259, 1401-1412 (1975).
- [24] Thomas, L. K., Lumpkin, W. B. e Reheis, G. M. : "Reservoir Simulation of Variable Bubble-Point Problems", Soc. Pet. Eng. J. (Fev. 1976) 10-16, Trans. AIME, 261.
- [25] Stright, D. H. Jr., Aziz, K., Settari, A. e Starrat, F. E. : "Carbon Dioxide Injection Into Bottom-Water, Undersaturated Viscous Oil Reservoirs", JPT, 29, 1248-1258, (1976)
- [26] Horner, D. R. : "Pressure Build-up in Wells", Reprint Series 9, SPE, Dallas (1967), 25-43.
- [27] Corrêa, A. C.: "Análise de Crescimento de Pressão em Poços Produzidos com Pressão Constante", apresentado no 2º Congresso Brasileiro de Petróleo, Rio de Janeiro, Brasil (Out. 1982).
- [28] Corrêa, A. C.e Ramey, H. J. Jr. : "Combined Effects of Shutin and Production : Solution with a New Inner Boundary Condition", SPE 15579, apresentado no 61st Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, New Orleans, L. A., (Out. 1986).
- [29] Corrêa, A. C.e Ramey, H. J. Jr. : "A Method for Pressure Buildup Analysis of Drillstem Tests", SPE 16802, apresentado no 62nd Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, Dallas, (Set. 1987).
- [30] Soliman, M. Y. : "Analysis of Buildup Tests with Short Producing Time", SPE Formation Evaluation (Aug. 1986), 363-371.

- [31] Pedrosa, O. A. Jr.: "Use a Hybrid Grid in Reservoir Simulation", PhD thesis, Stanford U., Stanford, CA (Dez. 1984).
- [32] Rodriguez de la Garza, F.: "Un Simulador Numerico del Fenomeno de Conificacion", Revista del Instituto Mexicano del Petroleo, Vol. 12, No. 3, (Julho 1985).

APÊNDICE A: Derivadas do Jacobiano

As funções resíduos dadas pelas Equações (4.4.1), (4.4.2) e (4.4.3) podem ser As funções dadas pelas equações (4.4.1), (4.4.2) e (4.4.3) podem ser colocadas numa forma mais compacta usando os seguintes agrupamentos:

Óleo

$$\begin{aligned}
 FO_{i,k}^{n+1} = & \underbrace{Tx_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} [(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} (z_{i+1/2,k} - z_{i,k})]}_{Potox2} - \\
 & - \underbrace{Tx_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} [(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i-1,k})]}_{Potox1} + \\
 & + \underbrace{Tz_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} [(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k})]}_{Potoz2} - \\
 & - \underbrace{Tz_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} [(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i,k-1})]}_{Potoz1} - \\
 & - \underbrace{\frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \{[1 + c_r(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)(S_o b_o)_{i,k}^n]\}}_{ACO} - Qo_{i,k}^{n+1} = 0 \quad (A-1)
 \end{aligned}$$

Água

$$\begin{aligned}
 Fw_{i,k}^{n+1} = & \\
 = & \underbrace{Tx_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} [(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i+1,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} (z_{i+1,k} - z_{i,k})]}_{Potwx2} - \\
 & - \underbrace{Tx_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} [(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i-1,k})]}_{Potwx1} + \\
 & + \underbrace{Tz_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} [(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k+1}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k})]}_{Potwz2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - Tz_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1} - p_{cwo_{i,k}}^{n+1} + p_{cwo_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \right]}_{Potwz1} - \\
& - \underbrace{\frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] (b_w S_w)_{i,k}^{n+1} - (b_w S_w)_{i,k}^n \right\}}_{Acw} - \\
& - Qw_{i,k}^{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{A-2}$$

Gás

$$\begin{aligned}
Fg_{i,k}^{n+1} = & \\
& = (TxoR_s)_{i+1/2,k}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} (z_{i+1/2,k} - z_{i,k}) \right]}_{Potox2} - \\
& - (TxoR_s)_{i-1/2,k}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \right]}_{Potox1} + \\
& + Txg_{i+1/2,k}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i+1,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i+1/2,k}}^{n+1} (z_{i+1,k} - z_{i,k}) \right]}_{Potgx2} - \\
& - Txg_{i-1/2,k}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i-1,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k}}^{n+1} - p_{cgo_{i-1,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i-1/2,k}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \right]}_{Potgx1} + \\
& + (TzoR_s)_{i,k+1/2}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \right]}_{Potoz2} - \\
& - (TzoR_s)_{i,k-1/2}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \right]}_{Potoz1} + \\
& + Tzg_{i,k+1/2}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i,k+1}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k+1}}^{n+1} - p_{cgo_{i,k}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k+1/2}}^{n+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \right]}_{Potgz2} - \\
& - Tzg_{i,k-1/2}^{n+1} \underbrace{\left[(p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k-1}}^{n+1} + p_{cgo_{i,k-1}}^{n+1}) - \gamma_{g_{i,k-1/2}}^{n+1} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \right]}_{Potgz1} - \\
& - \underbrace{\frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ [1 + c_r (p_{o_{i,k}}^{n+1} - p_{o_{i,k}}^n)] [r_s b_o S_o + s_g b_g]_{i,k}^{n+1} - \right.}_{Acg} \\
& \left. - [R_s b_o S_o + S_g b_g]_{i,k}^n \right\}}_{Acg} - (R_s Q_o)_{i,k}^{n+1} - Q_{fg_{i,k}}^{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{A-3}$$

As funções resíduos na forma compacta são dadas por

Óleo

$$\begin{aligned}
 Fo_{i,k}^{n+1} &= Tx_{o_{i+1/2,k}}^{n+1} Potox2^{n+1} - Tx_{o_{i-1/2,k}}^{n+1} Potox1^{n+1} + \\
 &+ Tz_{o_{i,k+1/2}}^{n+1} Potoz2^{n+1} - Tz_{o_{i,k-1/2}}^{n+1} Potoz1^{n+1} - \\
 &- Aco - Q_{o_{i,k}}^{n+1} = 0
 \end{aligned} \tag{A-4}$$

Gás

$$\begin{aligned}
 Fg_{i,k}^{n+1} &= (Tx_o R_s)_{i+1/2,k}^{n+1} Potox2^{n+1} - (Tx_o R_s)_{i-1/2,k}^{n+1} Potox1^{n+1} + \\
 &+ Tx_{g_{i+1/2,k}}^{n+1} Potgx2^{n+1} - Tx_{g_{i-1/2,k}}^{n+1} Potgx1^{n+1} + \\
 &+ (Tz_o R_s)_{i,k+1/2}^{n+1} Potoz2^{n+1} - (Tz_o R_s)_{i,k-1/2}^{n+1} Potoz1^{n+1} + \\
 &+ Tz_{g_{i,k+1/2}}^{n+1} Potgz2^{n+1} - Tz_{g_{i,k-1/2}}^{n+1} Potgz1^{n+1} - \\
 &- Acg - (R_s Q_o)_{i,k}^{n+1} - Q_{fg_{i,k}}^{n+1} = 0
 \end{aligned} \tag{A-5}$$

Água

$$\begin{aligned}
 Fw_{i,k}^{n+1} &= Tx_{w_{i+1/2,k}}^{n+1} Potwx2^{n+1} - Tx_{w_{i-1/2,k}}^{n+1} Potwx1^{n+1} + \\
 &+ Tz_{w_{i,k+1/2}}^{n+1} Potwz2^{n+1} - Tz_{w_{i,k-1/2}}^{n+1} Potwz1^{n+1} - \\
 &- Acw - Q_{w_{i,k}}^{n+1} = 0
 \end{aligned} \tag{A-6}$$

As derivadas da expansão de Taylor das funções resíduos, dadas pela Eq. (4.4.4), são apresentadas a seguir:

Derivadas da Função Resíduo do Óleo

- Derivada em relação a $i - 1, k$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^{\nu} = - P_{otox1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^{\nu} - T_{x_{o_{i-1/2,k}}} \left(\frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^{\nu} \quad (A-7)$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^{\nu} = - P_{otox1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^{\nu} \quad (A-8)$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^{\nu} = - P_{otox1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^{\nu} \quad (A-9)$$

- Derivada em relação a $i, k - 1$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} \right)^{\nu} = - P_{otoz1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k-1/2}}}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} \right)^{\nu} - T_{z_{o_{i,k-1/2}}} \left(\frac{\partial P_{otoz1}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} \right)^{\nu} \quad (A-10)$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} \right)^{\nu} = - P_{otoz1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} \right)^{\nu} \quad (A-11)$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} \right)^{\nu} = - P_{otoz1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} \right)^{\nu} \quad (A-12)$$

- Derivada em relação a i, k

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu &= Potox2 \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i+1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + T_{x_{o_{i+1/2,k}}}^\nu \left(\frac{\partial Potox2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &- Potox1 \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - T_{x_{o_{i-1/2,k}}}^\nu \left(\frac{\partial Potox1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &+ Potoz2 \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k+1/2}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + T_{z_{o_{i,k+1/2}}}^\nu \left(\frac{\partial Potoz2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &- Potoz1 \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k-1/2}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - T_{z_{o_{i,k-1/2}}}^\nu \left(\frac{\partial Potoz1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &- \left(\frac{\partial Aco}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial Q_{o_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu
 \end{aligned} \tag{A-13}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu &= Potox2 \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i+1/2,k}}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - Potox1 \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &+ Potoz2 \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - Potoz1 \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &- \left(\frac{\partial Aco}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial Q_{o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu
 \end{aligned} \tag{A-14}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu &= Potox2 \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i+1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - Potox1 \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &+ Potoz2 \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - Potoz1 \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &- \left(\frac{\partial Aco}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial Q_{o_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu
 \end{aligned} \tag{A-15}$$

- Derivada em relação a $i, k + 1$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^\nu = Potoz2 \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k+1/2}}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^\nu + T_{z_{o_{i,k+1/2}}}^\nu \left(\frac{\partial Potoz2}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^\nu \tag{A-16}$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^\nu = P_{otoz2}^\nu \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^\nu \quad (\text{A-17})$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^\nu = P_{otoz2}^\nu \left(\frac{\partial T_{z_{o_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^\nu \quad (\text{A-18})$$

- Derivada em relação a $i + 1, k$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^\nu = P_{otox2}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i+1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^\nu + T_{x_{o_{i+1/2,k}}}^\nu \left(\frac{\partial P_{otox2}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^\nu \quad (\text{A-19})$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu = P_{otox2}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i+1/2,k}}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu \quad (\text{A-20})$$

$$\left(\frac{\partial F_{o_{i,k}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^\nu = P_{otox2}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i+1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^\nu \quad (\text{A-21})$$

Derivadas da Função Resíduo do Gás

- Derivada em relação a $i - 1, k$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{g_{i,k}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^\nu &= \\
 &= - \left[R_{s_{i-1/2,k}}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^\nu + T_{x_{o_{i-1/2,k}}}^\nu (1 - w x_i) \left(\frac{\partial R_{s_{i-1,k}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^\nu \right] \cdot \\
 &\quad \cdot P_{otox1}^\nu - (T_{x_o} R_s)_{i-1/2,k}^\nu \left(\frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^\nu - P_{otgx1}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{g_{i-1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^\nu - \\
 &\quad - T_{x_{g_{i-1/2,k}}}^\nu \left(\frac{\partial P_{otgx1}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^\nu
 \end{aligned} \tag{A-22}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{g_{i,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^\nu &= \\
 &= - R_{s_{i-1/2,k}}^\nu P_{otox1}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^\nu - P_{otgx1}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{g_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^\nu + \\
 &\quad - T_{x_{g_{i-1/2,k}}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial P_{otgx1}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^\nu}_{-\left(\frac{\partial p_{cgo_{i-1,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^\nu}
 \end{aligned} \tag{A-23}$$

$$\left(\frac{\partial F_{g_{i,k}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^\nu = - R_{s_{i-1/2,k}}^\nu P_{otox1}^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{o_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^\nu \tag{A-24}$$

- Derivada em relação a $i, k - 1$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial Fg}{\partial p_{o_i, k-1}} \right)^\nu &= \\
&= - \left[R s_{i, k-1/2}^\nu \left(\frac{\partial T x_{o_i, k-1/2}}{\partial p_{o_i, k-1}} \right)^\nu + T z_{o_i, k-1/2}^\nu (1 - w z_k) \left(\frac{\partial R s_{i, k-1}}{\partial p_{o_i, k-1}} \right)^\nu \right] \\
&\quad \cdot P o t o z 1 - (T z_o R_s)_{i, k-1/2}^\nu \left(\frac{\partial P o t o z 1}{\partial p_{o_i, k-1}} \right)^\nu - P o t g z 1 \left(\frac{\partial T z_{i, k-1/2}}{\partial p_{o_i, k-1}} \right)^\nu - \\
&\quad - T z_{g_i, k-1/2}^\nu \left(\frac{\partial P o t g z 1}{\partial p_{o_i, k-1}} \right)^\nu
\end{aligned} \tag{A-25}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial Fg}{\partial S_{g_i, k-1}} \right)^\nu &= \\
&= - R s_{i, k-1/2}^\nu P o t o z 1 \left(\frac{\partial T z_{o_i, k-1/2}}{\partial S_{g_i, k-1}} \right)^\nu - P o t g z 1 \left(\frac{\partial T z_{g_i, k-1/2}}{\partial S_{g_i, k-1}} \right)^\nu + \\
&\quad - T z_{g_i, k-1/2}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial P o t g z 1}{\partial S_{g_i, k-1}} \right)^\nu}_{-\left(\frac{\partial p_{c g o_i, k-1}}{\partial S_{g_i, k-1}} \right)^\nu}
\end{aligned} \tag{A-26}$$

$$\left(\frac{\partial Fg}{\partial S_{w_i, k-1}} \right)^\nu = - R s_{i, k-1/2}^\nu P o t o z 1 \left(\frac{\partial T z_{o_i, k-1/2}}{\partial S_{w_i, k-1}} \right)^\nu \tag{A-27}$$

- Derivada em relação a i, k

$$\left(\frac{\partial Fg}{\partial p_{o_i, k}} \right)^\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[R_{s_{i+1/2,k}}^\nu \left(\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + T x_{o_{i,k+1/2}}^\nu (1 - w x_{i+1}) \left(\frac{\partial R_{s_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu \right] \\
&\quad \cdot P o t o x 2 + (T x_o R_s)_{i+1/2,k}^\nu \left(\frac{\partial P o t o x 2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \\
&\quad - \left[R_{s_{i-1/2,k}}^\nu \left(\frac{\partial T x_{o_{i-1/2,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + T x_{o_{i-1/2,k}}^\nu w x_i \left(\frac{\partial R_{s_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu \right] P o t o x 1 - \\
&\quad - (T x_o R_s)_{i-1/2,k}^\nu \left(\frac{\partial P o t o x 1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + P o t g x 2 \left(\frac{\partial T x_{g_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \\
&\quad + T x_{g_{i+1/2,k}}^\nu \left(\frac{\partial P o t g x 2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - P o t g x 1 \left(\frac{\partial T x_{g_{i-1/2,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \\
&\quad - T x_{g_{i-1/2,k}}^\nu \left(\frac{\partial P o t g x 1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \left[R_{s_{i,k+1/2}}^\nu \left(\frac{\partial T z_{o_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \right. \\
&\quad + T z_{o_{i,k+1/2}}^\nu (1 - w z_{k+1}) \left(\frac{\partial R_{s_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu \left. \right] P o t o z 2 + \\
&\quad + (T z_o R_s)_{i,k+1/2}^\nu \left(\frac{\partial P o t o z 2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \left[R_{s_{i,k-1/2}}^\nu \left(\frac{\partial T z_{o_{i,k-1/2}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \right. \\
&\quad + T z_{o_{i,k-1/2}}^\nu w z_k \left(\frac{\partial R_{s_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu \left. \right] P o t o z 1 - (T z_o R_s)_{i,k-1/2}^\nu \left(\frac{\partial P o t o z 1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \\
&\quad + P o t g z 2 \left(\frac{\partial T z_{g_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + T z_{g_{i,k+1/2}}^\nu \left(\frac{\partial P o t g z 2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \\
&\quad - P o t g z 1 \left(\frac{\partial T z_{g_{i,k-1/2}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - T z_{g_{i,k-1/2}}^\nu \left(\frac{\partial P o t g z 1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial A c g}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \\
&\quad - Q_{o_{i,k}}^\nu \left(\frac{\partial R_{s_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - R_{s_{i,k}}^\nu \left(\frac{\partial Q_{o_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial Q_{f g_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu \quad (A-28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F_{g_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu = \\
&= R_{s_{i+1/2,k}}^\nu P o t o x 2 \left(\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - R_{s_{i-1/2,k}}^\nu P o t o x 1 \left(\frac{\partial T x_{o_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu + \\
&+ P o t g x 2 \left(\frac{\partial T x_{g_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu + T x_{g_{i-1/2,k}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial P o t g x 2}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{c g o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{Potgx1 \left(\frac{\partial Tx_{g_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - Tx_{g_{i-1/2,k}} \left(\frac{\partial Potgx1}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu} + \\
& + R_{s_{i,k+1/2}}^\nu \underbrace{Potoz2 \left(\frac{\partial Tz_{o_{i,k+1/2}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - R_{s_{i,k+1/2}}^\nu Potoz1 \left(\frac{\partial Tz_{o_{i,k-1/2}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu} + \\
& + Potgz2 \left(\frac{\partial Tz_{g_{i,k+1/2}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu + Tz_{g_{i,k+1/2}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Potgz2}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu} - \\
& - Potgz1 \left(\frac{\partial Tz_{g_{i,k-1/2}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - Tz_{g_{i,k-1/2}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Potgz1}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu} - \\
& - \left(\frac{\partial Acg}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - R_s \left(\frac{\partial Q_{o_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial Q_{fg_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right)^\nu
\end{aligned} \tag{A-29}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial F_{g_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu = \\
& = R_{s_{i+1/2,k}}^\nu \underbrace{Potox2 \left(\frac{\partial Tx_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - R_{s_{i-1/2,k}}^\nu Potox1 \left(\frac{\partial Tx_{o_{i-1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu} + \\
& + R_{s_{i,k+1/2}}^\nu \underbrace{Potoz2 \left(\frac{\partial Tz_{o_{i,k+1/2}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - R_{s_{i,k-1/2}}^\nu Potoz1 \left(\frac{\partial Tz_{o_{i,k-1/2}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cgo_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu} - \\
& - \left(\frac{\partial Acg}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - R_{s_{i,k}}^\nu \left(\frac{\partial Q_{o_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial Q_{fg_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu
\end{aligned} \tag{A-30}$$

- Derivada em relação a $i, k + 1$

$$\left(\frac{\partial F_{g_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[R_{s_{i,k+1/2}}^{\nu} \left(\frac{\partial T z_{o_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right) + T z_{o_{i,k+1/2}}^{\nu} w z_{k+1} \left(\frac{\partial R_{s_{i,k+1}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^{\nu} \right] P o t o z 2^{\nu} + \\
&+ (T z_o R_s)_{i,k+1/2}^{\nu} \left(\frac{\partial P o t o z 2}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^{\nu} + P o t g z 2^{\nu} \left(\frac{\partial T z_{g_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^{\nu} + \\
&+ T z_{o_{i,k+1/2}}^{\nu} \left(\frac{\partial P o t g z 2}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^{\nu} \tag{A-31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F g_{i,k}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^{\nu} = \\
&= R_{s_{i,k+1/2}}^{\nu} P o t o z 2^{\nu} \left(\frac{\partial T z_{o_{i,k+1/2}}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^{\nu} + P o t g z 2^{\nu} \left(\frac{\partial T z_{g_{i,k+1/2}}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^{\nu} + \\
&+ T z_{g_{i,k+1/2}}^{\nu} \underbrace{\left(\frac{\partial P o t g z 2}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^{\nu}}_{\left(\frac{\partial p_{c g o_{i,k+1}}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^{\nu}} \tag{A-32}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial F g_{i,k}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^{\nu} = R_{s_{i,k+1/2}}^{\nu} P o t o z 2^{\nu} \left(\frac{\partial T z_{o_{i,k+1/2}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^{\nu} \tag{A-33}$$

• Derivada em relação a $i + 1, k$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F g_{i,k}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^{\nu} = \\
&= \left[R_{s_{i+1/2,k}}^{\nu} \left(\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^{\nu} + T z_{o_{i+1/2,k}}^{\nu} w x_{i+1} \left(\frac{\partial R_{s_{i+1,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^{\nu} \right] P o t o x 2^{\nu} + \\
&+ (T x_o R_s)_{i+1/2,k}^{\nu} \left(\frac{\partial P o t o x 2}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^{\nu} + P o t g x 2^{\nu} \left(\frac{\partial T x_{g_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^{\nu} + \\
&+ T x_{g_{i+1/2,k}}^{\nu} \left(\frac{\partial P o t g x 2}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^{\nu} \tag{A-34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F g_{i,k}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu &= \\
 &= R_{s_{i+1/2,k}}^\nu Potox2 \left(\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu + Potgx2 \left(\frac{\partial T x_{g_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu + \\
 &+ T x_{g_{i+1/2,k}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Potgx2}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cg o_{i+1,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu}
 \end{aligned}
 \tag{A-35}$$

$$\left(\frac{\partial F g_{i,k}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^\nu = R_{s_{i+1/2,k}}^\nu Potox2 \left(\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^\nu
 \tag{A-36}$$

Derivadas da Função Resíduo da Água

- Derivada em relação a $i - 1, k$

$$\left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^{\nu} = - Pot_{wx1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i-1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right) - T_{x_{w_{i-1/2,k}}} \left(\frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} \right)^{\nu} \quad (A-37)$$

$$\left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} \right)^{\nu} = 0 \quad (A-38)$$

$$\left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^{\nu} = - Pot_{wx1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^{\nu} - T_{x_{w_{i-1/2,k}}}^{\nu} \underbrace{\left(\frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^{\nu}}_{\left(\frac{\partial p_{cwo_{i-1,k}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} \right)^{\nu}} \quad (A-39)$$

- Derivada em relação a $i, k - 1$

$$\left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} \right)^{\nu} = - Pot_{wz1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i,k-1/2}}}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} \right)^{\nu} - T_{z_{w_{i,k-1/2}}} \left(\frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} \right)^{\nu} \quad (A-40)$$

$$\left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} \right)^{\nu} = 0 \quad (A-41)$$

$$\left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} \right)^{\nu} = - Pot_{wz1}^{\nu} \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} \right)^{\nu} - T_{z_{w_{i,k-1/2}}}^{\nu} \underbrace{\left(\frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} \right)^{\nu}}_{\left(\frac{\partial p_{cwo_{i,k-1}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} \right)^{\nu}} \quad (A-42)$$

• Derivada em relação a i, k

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu &= Potwx2^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i+1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + T_{x_{w_{i+1/2,k}}}^\nu \left(\frac{\partial Potwx2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \\
 &- Potwx1^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i-1/2,k}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - T_{x_{w_{i-1/2,k}}}^\nu \left(\frac{\partial Potwx1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + \\
 &+ Potwz2^\nu \left(\frac{\partial T_{z_{w_{i,k+1/2}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu + T_{z_{w_{i,k+1/2}}}^\nu \left(\frac{\partial Potwz2}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \\
 &- Potwz1^\nu \left(\frac{\partial T_{z_{w_{i,k-1/2}}}}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - T_{z_{w_{i,k-1/2}}}^\nu \left(\frac{\partial Potwz1}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \\
 &- \left(\frac{\partial Acw}{\partial p_{o_{i,k}}} \right)^\nu - \left\{ \frac{\partial Q_{w_{i,k}}}{\partial p_{w_{i,k}}} \right\}^\nu
 \end{aligned} \tag{A-43}$$

$$\left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} \right) = 0 \tag{A-44}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{w_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right) &= Potwx2^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i+1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu + T_{x_{w_{i+1/2,k}}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Potwx2}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cwo_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu} + \\
 &- Potwx1^\nu \left(\frac{\partial T_{x_{w_{i-1/2,k}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - T_{x_{w_{i-1/2,k}}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Potwx1}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cwo_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu} + \\
 &+ Potwz2^\nu \left(\frac{\partial T_{z_{w_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu + T_{z_{w_{i,k+1/2}}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Potwz2}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cwo_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu} - \\
 &- Potwz1^\nu \left(\frac{\partial T_{z_{w_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - T_{z_{w_{i,k-1/2}}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Potwz1}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{cwo_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu} - \\
 &- \left(\frac{\partial Acw}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu - \left(\frac{\partial Q_{w_{i,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} \right)^\nu
 \end{aligned} \tag{A-45}$$

- Derivada em relação a $i, k + 1$

$$\left(\frac{\partial F w_{i,k}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^\nu = Pot w z 2 \left(\frac{\partial T z_{w_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right)^\nu + T z_{w_{i,k+1/2}}^\nu \left(\frac{\partial Pot w z 2}{\partial p_{o_{i,k+1}}} \right) \quad (A-46)$$

$$\left(\frac{\partial F w_{i,k}}{\partial S_{g_{i,k+1}}} \right)^\nu = 0 \quad (A-47)$$

$$\left(\frac{\partial F w_{i,k}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^\nu = Pot w z 2 \left(\frac{\partial T z_{w_{i,k+1/2}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^\nu + T z_{w_{i,k+1/2}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Pot w z 2}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)^\nu}_{\left(\frac{\partial p_{c w o_{i,k+1}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} \right)} \quad (A-48)$$

- Derivada em relação a $i + 1, k$

$$\left(\frac{\partial F w_{i,k}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^\nu = Pot w x 2 \left(\frac{\partial T x_{w_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^\nu + T x_{w_{i+1/2,k}}^\nu \left(\frac{\partial Pot w x 2}{\partial p_{o_{i+1,k}}} \right)^\nu \quad (A-49)$$

$$\left(\frac{\partial F w_{i,k}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} \right)^\nu = 0 \quad (A-50)$$

$$\left(\frac{\partial F w_{i,k}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^\nu = Pot w x 2 \left(\frac{\partial T x_{w_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^\nu + T x_{w_{i+1/2,k}}^\nu \underbrace{\left(\frac{\partial Pot w x 2}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)^\nu}_{-\left(\frac{\partial p_{c w o_{i+1,k}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} \right)} \quad (A-51)$$

Derivadas das diferenças de potenciais na direção - x em relação a pressão

- em relação a $i - 1, k$

$$\frac{\partial Pot\ell x1}{\partial p_{o_{i-1,k}}} = -1 - (1 - wx) \left(\frac{\partial \gamma_l}{\partial p_o} \right)_{i-1,k} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \quad (A-52)$$

$$\frac{\partial Pot\ell x2}{\partial p_{o_{i-1,k}}} = 0 \quad (A-53)$$

- em relação a i, k

$$\frac{\partial Pot\ell x1}{\partial p_{o_{i,k}}} = 1 - wx \left(\frac{\partial \gamma_l}{\partial p_o} \right)_{i,k} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \quad (A-54)$$

$$\frac{\partial Pot\ell x2}{\partial p_{o_{i,k}}} = -1 - (1 - wx) \left(\frac{\partial \gamma_l}{\partial p_o} \right)_{i,k} (z_{i+1,k} - z_{i,k}) \quad (A-55)$$

- em relação a $i + 1, k$

$$\frac{\partial Pot\ell x1}{\partial p_{o_{i+1,k}}} = 0 \quad (A-56)$$

$$\frac{\partial Pot\ell x2}{\partial p_{o_{i+1,k}}} = 1 - wx \left(\frac{\partial \gamma_l}{\partial p_o} \right)_{i+1,k} (z_{i+1,k} - z_{i,k}) \quad (A-57)$$

Derivadas das diferenças de potenciais na direção - z em relação a pressão

- em relação a $i, k - 1$

$$\frac{\partial Pot_{lz1}}{\partial p_{o,i,k-1}} = -1 - (1 - wz_k) \left(\frac{\partial \gamma_\ell}{\partial p_o} \right)_{i,k-1} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \quad (A-58)$$

$$\frac{\partial Pot_{lz2}}{\partial p_{o,i,k-1}} = 0 \quad (A-59)$$

- em relação a i, k

$$\frac{\partial Pot_{lz1}}{\partial p_{o,i,k}} = 1 - wz_k \left(\frac{\partial \gamma_o}{\partial p_o} \right)_{i,k} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \quad (A-60)$$

$$\frac{\partial Pot_{lz2}}{\partial p_{o,i,k}} = -1 - (1 - wz_{k+1}) \left(\frac{\partial \gamma_o}{\partial p_o} \right)_{i,k} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \quad (A-61)$$

- em relação a $i, k + 1$

$$\frac{\partial Pot_{lz1}}{\partial p_{o,i,k+1}} = 0 \quad (A-62)$$

$$\frac{\partial Pot_{lz2}}{\partial p_{o,i,k+1}} = 1 - wz_{k+1} \left(\frac{\partial \gamma_o}{\partial p_o} \right)_{i,k+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \quad (A-63)$$

Derivadas das diferenças de potenciais na direção - x em relação a S_g

- Derivadas em relação a $i - 1, k$

$$\frac{\partial Potox1}{\partial S_{gi-1,k}} = \frac{\partial Potwx1}{\partial S_{gi-1,k}} = 0 \quad (A-64)$$

$$\frac{\partial Potgx1}{\partial S_{gi-1,k}} = \left[1 - (1 - wx) \left(\frac{\partial \gamma_g}{\partial p_g} \right)_{i-1,k} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \right] \left(\frac{\partial p_{cgo}}{\partial S_g} \right)_{i-1,k} \quad (A-65)$$

$$\frac{\partial Potlx2}{\partial S_{gi-1,k}} = 0 \quad (A-66)$$

Note que se $f = f(p_g)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial S_g} &= \frac{\partial f(p_g)}{\partial S_g} = \frac{\partial f(p_o + p_{cgo}(S_g))}{\partial S_g} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial p_g} \cdot \frac{\partial p_g}{\partial S_g} = \frac{df}{dp_g} \cdot \frac{dp_{cgo}}{dS_g} \end{aligned} \quad (A-67)$$

- Derivadas em relação a i, k

$$\frac{\partial Potox1}{\partial S_{gi,k}} = \frac{\partial Potwx1}{\partial S_{gi,k}} = 0 \quad (A-68)$$

$$\frac{\partial Potgx1}{\partial S_{gi,k}} = - \left[1 + wx \left(\frac{d\gamma_g}{dp_g} \right)_{i,k} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \right] \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k} \quad (A-69)$$

$$\frac{\partial Potgx2}{\partial S_{g_{i,k}}} = - \left[1 + (1 - wx) \left(\frac{d\gamma_g}{dp_g} \right)_{i,k} (z_{i+1,k} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k} \quad (A-70)$$

$$\frac{\partial Potgz2}{\partial S_{g_{i,k}}} = - \left[1 + (1 - wz_{k+1}) \left(\frac{d\gamma_g}{dp_g} \right)_{i,k+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k} \quad (A-71)$$

$$\frac{\partial Potoz2}{\partial S_{g_{i,k}}} = \frac{\partial Potwz2}{\partial S_{g_{i,k}}} = 0 \quad (A-72)$$

- Derivadas em relação a $i, k + 1$

$$\frac{\partial Pot\ell z1}{\partial S_{g_{i,k+1}}} = 0 \quad (A-73)$$

$$\frac{\partial Potgz2}{\partial S_{g_{i,k+1}}} = \left[1 - wz_{k+1} \left(\frac{d\gamma_g}{dp_g} \right)_{i,k+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k+1} \quad (A-74)$$

$$\frac{\partial Potox2}{\partial S_{g_{i,k}}} = \frac{\partial Potwx2}{\partial S_{g_{i,k}}} = 0 \quad (A-75)$$

- Derivadas em relação a $i + 1, k$

$$\frac{\partial Pot\ell x1}{\partial S_{g_{i+1,k}}} = 0 \quad (A-76)$$

$$\frac{\partial Potox2}{\partial S_{g_{i+1,k}}} = \frac{\partial Potwx2}{\partial S_{g_{i,k}}} = 0 \quad (A-77)$$

$$\frac{\partial Potgx2}{\partial S_{g_{i+1,k}}} = \left[1 - wx \left(\frac{d\gamma_g}{dp_g} \right)_{i+1,k} (z_{i+1,k} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i+1,k} \quad (A-78)$$

Derivadas das diferenças de potenciais na direção - z em relação a S_g

- Derivadas em relação a $i, k - 1$

$$\frac{\partial P_{otoz1}}{\partial S_{g,i,k-1}} = \frac{\partial P_{otwz1}}{\partial S_{g,i,k-1}} = 0 \quad (A-79)$$

$$\frac{\partial P_{otgz1}}{\partial S_{g,i,k-1}} = - \left[1 + (1 - wz_k) \left(\frac{d\gamma_g}{dp_g} \right)_{i,k-1} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \right] \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k-1} \quad (A-80)$$

$$\frac{\partial P_{otlz2}}{\partial S_{g,i,k-1}} = 0 \quad (A-81)$$

- Derivadas em relação a i, k

$$\frac{\partial P_{otoz1}}{\partial S_{g,i,k}} = \frac{\partial P_{otwz1}}{\partial S_{g,i,k}} = 0 \quad (A-82)$$

$$\frac{\partial P_{otgz1}}{\partial S_{g,i,k}} = \left[1 - wz_k \left(\frac{d\gamma_g}{dp_g} \right)_{i,k} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \right] \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k} \quad (A-83)$$

$$\frac{\partial P_{otoz2}}{\partial S_{g,i,k+1}} = \frac{\partial P_{otwz2}}{\partial S_{g,i,k+1}} = 0 \quad (A-84)$$

Derivadas das diferenças de potenciais na direção - x em relação a S_w

- Derivadas em relação a $i - 1, k$

$$\frac{\partial Potox1}{\partial S_{w_{i-1,k}}} = \frac{\partial Potgx1}{\partial S_{w_{i-1,k}}} = 0 \quad (A-85)$$

$$\frac{\partial Potgx1}{\partial S_{w_{i-1,k}}} = \left[1 - (1 - wx) \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i-1,k} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i-1,k} \quad (A-86)$$

$$\frac{\partial Potlx2}{\partial S_{w_{i-1,k}}} = 0 \quad (A-87)$$

- Derivadas em relação a i, k

$$\frac{\partial Potox1}{\partial S_{w_{i,k}}} = \frac{\partial Potgx1}{\partial S_{w_{i,k}}} = 0 \quad (A-88)$$

$$\frac{\partial Potwx1}{\partial S_{w_{i,k}}} = - \left[1 + wx \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i,k} (z_{i,k} - z_{i-1,k}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k} \quad (A-89)$$

$$\frac{\partial Potwx2}{\partial S_{w_{i,k}}} = \left[1 + (1 - wx) \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i,k} (z_{i+1,k} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dp_w} \right)_{i,k} \quad (A-90)$$

$$\frac{\partial Potox1}{\partial S_{w_{i,k}}} = \frac{\partial Potgx2}{\partial S_{w_{i,k}}} = 0 \quad (A-91)$$

- Derivadas em relação a $i + 1, k$

$$\frac{\partial Potlx1}{\partial S_{w_{i+1,k}}} = 0 \quad (A-92)$$

$$\frac{\partial Potwx2}{\partial S_{w_{i+1,k}}} = - \left[1 + wx \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i+1,k} (z_{i+1,k} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i+1,k} \quad (A-93)$$

$$\frac{\partial Potox2}{\partial S_{w_{i+1,k}}} = \frac{\partial Potgx2}{\partial S_{g_{i+1,k}}} = 0 \quad (A-94)$$

Derivadas das diferenças de potenciais na direção - z em relação a S_w

- Derivadas em relação a $i, k - 1$

$$\frac{\partial P_{otoz1}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = \frac{\partial P_{otgz1}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = 0 \quad (A-95)$$

$$\frac{\partial P_{otwz1}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = \left[1 - (1 - wz_k) \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i,k-1} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k-1} \quad (A-96)$$

$$\frac{\partial P_{otlz2}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = 0 \quad (A-97)$$

- Derivadas em relação ao bloco i, k

$$\frac{\partial P_{otoz1}}{\partial S_{w_{i,k}}} = \frac{\partial P_{otgz1}}{\partial S_{w_{i,k}}} = 0 \quad (A-98)$$

$$\frac{\partial P_{otwz1}}{\partial S_{w_{i,k}}} = - \left[1 + wz_k \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i,k} (z_{i,k} - z_{i,k-1}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k} \quad (A-99)$$

$$\frac{\partial P_{otwz2}}{\partial S_{w_{i,k}}} = \left[1 - (1 - wz_k) \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i,k} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k} \quad (A-100)$$

$$\frac{\partial P_{otoz2}}{\partial S_{w_{i,k}}} = \frac{\partial P_{otgz2}}{\partial S_{w_{i,k}}} = 0 \quad (A-101)$$

- Derivadas em relação ao bloco $i, k + 1$

$$\frac{\partial Potlz1}{\partial S_{w_{i,k+1}}} = 0 \quad (A-102)$$

$$\frac{\partial Potwz2}{\partial S_{w_{i,k+1}}} = - \left[1 + wz_{k+1} \left(\frac{d\gamma_w}{dp_w} \right)_{i,k+1} (z_{i,k+1} - z_{i,k}) \right] \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k+1} \quad (A-103)$$

$$\frac{\partial Potoz2}{\partial S_{w_{i,k+1}}} = \frac{\partial Potogz2}{\partial S_{w_{i,k+1}}} = 0 \quad (A-104)$$

Derivadas das transmissibilidade na direção - x em relação a pressão

- Derivadas em relação ao bloco $i - 1, k$

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i-1/2,k}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} = (1 - wx) T x_{w_{i-1/2,k}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i-1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i-1/2,k} + \frac{1}{b_{\ell_{i-1/2,k}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i-1,k} \right] \quad (\text{A-105})$$

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i-1,k}}} = 0 \quad (\text{A-106})$$

- Derivadas em relação ao bloco i, k

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i-1/2,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} = wx T x_{\ell_{i-1/2,k}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i-1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{\ell_{i-1/2,k}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} \right] \quad (\text{A-107})$$

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i,k}}} = (1 - wx) T x_{\ell_{i-1/2,k}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i+1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{\ell_{i+1/2,k}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} \right] \quad (\text{A-108})$$

- Derivadas em relação ao bloco $i + 1, k$

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i-1/2,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} = 0 \quad (\text{A-109})$$

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i+1/2,k}}}{\partial p_{o_{i+1,k}}} = wx T x_{\ell_{i+1/2,k}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i+1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i+1,k} + \frac{1}{b_{\ell_{i+1/2,k}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i+1,k} \right] \quad (\text{A-110})$$

Derivadas das transmissibilidade na direção - z em relação a pressão

- Derivadas em relação ao bloco $i, k - 1$

$$\frac{\partial T z_{\ell_{i,k-1/2}}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} = (1 - w z_k) T z_{\ell_{i,k-1/2}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i,k-1/2}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k-1} + \frac{1}{b_{\ell_{i,k-1/2}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k-1} \right] \quad (\text{A-111})$$

$$\frac{\partial T z_{\ell_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k-1}}} = 0 \quad (\text{A-112})$$

- Derivadas em relação ao bloco i, k

$$\frac{\partial T z_{\ell_{i,k-1/2}}}{\partial p_{o_{i,k}}} = w z_k T z_{\ell_{i,k-1/2}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i,k-1/2}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{\ell_{i,k-1/2}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} \right] \quad (\text{A-113})$$

$$\frac{\partial T z_{\ell_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k}}} = (1 - w z_{k+1}) T z_{\ell_{i,k+1/2}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i,k+1/2}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{\ell_{i,k+1/2}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k} \right] \quad (\text{A-114})$$

- Derivadas em relação ao bloco $i, k + 1$

$$\frac{\partial T z_{\ell_{i,k-1/2}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} = 0 \quad (\text{A-115})$$

$$\frac{\partial T z_{\ell_{i,k+1/2}}}{\partial p_{o_{i,k+1}}} = w z_{k+1} T z_{\ell_{i,k+1/2}} \left[\frac{-1}{\mu_{\ell_{i,k+1/2}}} \left(\frac{d\mu_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k+1} + \frac{1}{b_{\ell_{i,k+1/2}}} \left(\frac{db_{\ell}}{dp_{\ell}} \right)_{i,k+1} \right] \quad (\text{A-116})$$

Derivadas de permeabilidade relativa do óleo do modelo de Stone em relação a saturação

$$k_{ro} = (k_{row} + k_{rw}) (k_{rog} + k_{rg}) - (k_{rw} + k_{rg}) \quad (A-117)$$

$$\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} = \left(\frac{dk_{row}}{dS_w} + \frac{dk_{rw}}{dS_w} \right) (k_{rog} + k_{rg}) - \frac{dk_{rg}}{dS_w} \quad (A-118)$$

$$\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} = (k_{row} + k_{rw}) \left(\frac{dk_{rog}}{dS_g} + \frac{dk_{rg}}{dS_g} \right) - \frac{dk_{rg}}{dS_g} \quad (A-119)$$

Permeabilidade relativa na interface ponderada um ponto a montante

- direção - x

$$k_{r\ell_{i-1/2,k}} = IF\ell X A k_{r\ell_{i,k}} + (1 - IF\ell X A) k_{r\ell_{i-1,k}} \quad (A-120)$$

$$k_{r\ell_{i+1/2,k}} = IF\ell X P k_{r\ell_{i+1,k}} + (1 - IF\ell X P) k_{r\ell_{i,k}} \quad (A-121)$$

usando a seguinte convenção

$$\begin{aligned} IF\ell X A &= 1 \quad \text{se} \quad \text{fluxo } i \rightarrow i - 1 \\ IF\ell X A &= 0 \quad \text{se} \quad \text{fluxo } i - 1 \rightarrow i \\ IF\ell X P &= 1 \quad \text{se} \quad \text{fluxo } i + 1 \rightarrow i \\ IF\ell X P &= 0 \quad \text{se} \quad \text{fluxo } i \rightarrow i + 1 \end{aligned}$$

- direção - z

$$k_{r\ell_{i,k-1/2}} = IF\ell Z I k_{r\ell_{i,k}} + (1 - IF\ell Z I) k_{r\ell_{i,k-1}} \quad (A-122)$$

$$k_{r\ell_{i,k+1/2}} = IF\ell Z S k_{r\ell_{i,k+1}} + (1 - IF\ell Z S) k_{r\ell_{i,k}} \quad (A-123)$$

usando a seguinte convenção

$$\begin{aligned} I\ell XI &= 1 & \text{se fluxo } k \rightarrow k-1 \\ I\ell XI &= 0 & \text{se fluxo } k-1 \rightarrow 1 \\ I\ell XS &= 1 & \text{se fluxo } k+1 \rightarrow i \\ I\ell XS &= 0 & \text{se fluxo } k \rightarrow k+1 \end{aligned}$$

Derivadas das transmissibilidades na direção - x em relação a S_g

- Derivadas em relação ao bloco $i-1, k$

$$\frac{\partial T x_{o_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} = FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i-1/2,k} (1 - IFOX A) \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i-1,k} \quad (A-124)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T x_{g_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} &= FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_g}{\mu_g} \right)_{i-1/2,k} (1 - IFGXA) \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i-1,k} + \\ &+ (1 - wx) TGX_{i-1/2,k} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i-1,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g_{i-1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i-1,k} + \frac{1}{b_{g_{i-1/2,k}}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i-1,k} \right] \end{aligned} \quad (A-125)$$

$$\frac{\partial T x_{w_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} = \frac{\partial T x_{l_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i-1,k}}} = 0 \quad (A-126)$$

- Derivadas em relação ao bloco i, k

$$\frac{\partial T x_{o_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} = FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i-1/2,k} IFOX A \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i,k} \quad (A-127)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T x_{g_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} &= FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i-1/2,k} IFGXA \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i,k} + \\
&+ wx T x_{g_{i-1/2,k}} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g_{i-1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{g_{i-1/2,k}}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i,k} \right]
\end{aligned} \tag{A-128}$$

$$\frac{\partial T x_{w_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} = \frac{\partial T x_{w_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} = 0 \tag{A-129}$$

$$\frac{\partial T x_{o_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} = FGX_{i+1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i+1/2,k} (1 - IFOXP) \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i,k} \tag{A-130}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T x_{g_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i,k}}} &= FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_g}{\mu_g} \right)_{i+1/2,k} (1 - IFGXP) \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i,k} + \\
&+ (1 - wx) T x_{g_{i+1/2,k}} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g_{i+1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{g_{i+1/2,k}}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i,k} \right]
\end{aligned} \tag{A-131}$$

• Derivadas em relação ao bloco $i + 1, k$

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i-1/2,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} = \frac{\partial T x_{w_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} = 0 \tag{A-132}$$

$$\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} = FGX_{i+1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i+1/2,k} IFOXP \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i+1,k} \tag{A-133}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{x_{g_{i+1/2,k}}}}{\partial S_{g_{i+1,k}}} &= FGX_{i+1/2,k} \left(\frac{b_g}{\mu_g} \right)_{i+1/2,k} IFGXP \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i+1,k} + \\
&+ wx T_{x_{g_{i+1/2,k}}} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i+1,k} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g_{i+1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i+1,k} + \frac{1}{b_{g_{i+1/2,k}}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i+1,k} \right] \quad (A-134)
\end{aligned}$$

Derivada das transmissibilidades na direção - z em relação a S_g

- Derivadas em relação ao bloco $i, k - 1$

$$\frac{\partial T_{z_{o_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} = FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k-1/2} (1 - IFOZI) \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i,k-1} \quad (A-135)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{z_{g_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} &= FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_g}{\mu_g} \right)_{i,k-1/2} (1 - IFGZI) \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i,k-1} + \\
&+ (1 - wz_k) T_{z_{g_{i,k-1/2}}} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k-1} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g_{i,k-1/2}}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i,k-1} + \frac{1}{b_{g_{i,k-1/2}}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i,k-1} \right] \quad (A-136)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T_{z_{w_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} = \frac{\partial T_{z_{t_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{g_{i,k-1}}} = 0 \quad (A-137)$$

- Derivadas em relação ao bloco i, k

$$\frac{\partial T^{z_{o,i,k-1/2}}}{\partial S_{g,i,k}} = FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k-1/2} IFOZI \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i,k} \quad (A-138)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{z_{g,i,k-1/2}}}{\partial S_{g,i,k}} &= FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_g}{\mu_o} \right)_{i,k-1/2} IFGZI \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i,k} + \\ &+ wz_k T^{z_{g,i,k-1/2}} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k-1/2} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g,i,k-1/2}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{g,i,k-1/2}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i,k} \right] \end{aligned} \quad (A-139)$$

$$\frac{\partial T^{z_{w,i,k-1/2}}}{\partial S_{g,i,k}} = \frac{\partial T^{z_{w,i,k+1/2}}}{\partial S_{g,i,k}} = 0 \quad (A-140)$$

$$\frac{\partial T^{z_{o,i,k+1/2}}}{\partial S_{g,i,k}} = FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k+1/2} (1 - IFOZS) \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i,k} \quad (A-141)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{z_{g,i,k+1/2}}}{\partial S_{g,i,k}} &= FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_g}{\mu_g} \right)_{i,k+1/2} (1 - IFGZS) \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i,k} + \\ &+ (1 - wz_{k+1}) Tx_{g,i,k+1/2} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g,i,k+1/2}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{g,i,k+1/2}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i,k} \right] \end{aligned} \quad (A-142)$$

• Derivadas em relação ao bloco $i, k + 1$

$$\frac{\partial T^{z_{l,i,k-1/2}}}{\partial S_{g,i,k+1}} = \frac{\partial T^{z_{w,i,k+1/2}}}{\partial S_{g,i,k+1}} = 0 \quad (A-143)$$

$$\frac{\partial T_{z_{o,i,k+1/2}}}{\partial S_{g,i,k+1}} = FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k+1/2} IFOZS \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_g} \right)_{i,k+1} \quad (A-144)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{z_{g,i,k+1/2}}}{\partial S_{g,i,k+1}} &= FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_g}{\mu_g} \right)_{i,k+1/2} IFGZS \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \right)_{i,k+1} + \\ &+ wz_{k+1} Tx_{g,i+1/2,k} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g} \right)_{i,k+1} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{g,i,k+1/2}} \left(\frac{d\mu_g}{dp_g} \right)_{i,k+1} + \frac{1}{b_{g,i,k+1/2}} \left(\frac{db_g}{dp_g} \right)_{i,k+1} \right] \end{aligned} \quad (A-145)$$

Derivadas das transmissibilidades na direção - x em relação a S_w

- Derivadas em relação ao bloco $i - 1, k$

$$\frac{\partial T_{x_{o,i-1/2,k}}}{\partial S_{w,i-1,k}} = FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i-1/2,k} (1 - IFOX A) \frac{\partial k_{ro,i-1,k}}{\partial S_{w,i-1,k}} \quad (A-146)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{x_{w,i-1/2,k}}}{\partial S_{w,i-1,k}} &= FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i-1/2,k} (1 - IFWXA) \frac{dk_{rw,i-1,k}}{dS_{w,i-1,k}} + \\ &+ (1 - wx) Tx_{w,i-1/2,k} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i-1,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{\mu_{w,i-1/2,k}} \left(\frac{d\mu_w}{dp_w} \right)_{i-1,k} + \frac{1}{b_{w,i-1/2,k}} \left(\frac{db_w}{dp_w} \right)_{i-1,k} \right] \end{aligned} \quad (A-147)$$

$$\frac{Tx_{g,i-1/2,k}}{\partial S_{w,i-1,k}} = \frac{\partial Tx_{\ell,i-1/2,k}}{\partial S_{w,i-1,k}} = 0 \quad (A-148)$$

- Derivadas em relação ao bloco i, k

$$\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} = FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i-1/2,k} IFOXA \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right)_{i,k} \quad (A-149)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T x_{w_{i-1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} &= FGX_{i-1/2,k} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i-1/2,k} IFWXA \left(\frac{dk_{rw}}{dS_w} \right)_{i,k} + \\ &+ wx T x_{w_{i-1/2,k}} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{\mu_{w_{i-1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_w}{dp_w} \right)_{i,k} - \frac{1}{b_{w_{i-1/2,k}}} \left(\frac{db_w}{dp_w} \right)_{i,k} \right] \end{aligned} \quad (A-150)$$

$$\frac{\partial T x_{g_{i-1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} = \frac{\partial T x_{i+1/2,k}}{\partial S_{w_{i,k}}} = 0 \quad (A-151)$$

$$\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} = FGX_{i+1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i+1/2,k} (1 - IFOXP) \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right)_{i,k} \quad (A-152)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T x_{w_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} &= FGX_{i+1/2,k} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i+1/2,k} (1 - IFWXP) \left(\frac{dk_{rw}}{dS_w} \right)_{i,k} + \\ &+ (1 - wx) T x_{w_{i+1/2,k}} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{-1}{\mu_{w_{i+1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_w}{dp_w} \right)_{i,k} - \frac{1}{b_{w_{i+1/2,k}}} \left(\frac{db_w}{dp_w} \right)_{i,k} \right] \end{aligned} \quad (A-153)$$

- Derivadas em relação ao bloco $i + 1, k$

$$\frac{\partial T x_{\ell_{i-1/2,k}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} = \frac{\partial T x_{g_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} = 0 \quad (\text{A-154})$$

$$\frac{\partial T x_{o_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i+1,k}}} = FGX_{i+1/2,k} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i+1/2,k} IFOXP \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right)_{i+1,k} \quad (\text{A-155})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T x_{w_{i+1/2,k}}}{\partial S_{w_{i,k}}} &= FGX_{i+1/2,k} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i+1/2,k} IFWXP \left(\frac{dk_{ro}}{dS_w} \right)_{i+1,k} + \\ &+ wx T x_{w_{i+1/2,k}} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i+1,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{\mu_{w_{i+1/2,k}}} \left(\frac{d\mu_w}{dp_w} \right)_{i+1,k} - \frac{1}{b_{w_{i+1/2,k}}} \left(\frac{db_w}{dp_w} \right)_{i+1,k} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-156})$$

Derivadas das transmissibilidades na direção - z em relação a S_w

- Derivadas em relação ao bloco $i, k - 1$

$$\frac{\partial T z_{o_{i,k-1/2}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k-1/2} (1 - IFOZI) \left(\frac{\partial k_{ro_{i-1,k}}}{\partial S_w} \right)_{i,k-1} \quad (\text{A-157})$$

$$\frac{\partial T z_{w_{i,k-1/2}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i,k-1/2} (1 - IFWZI) \left(\frac{dk_{rw_{i-1,k}}}{dS_w} \right)_{i,k-1} \quad (\text{A-158})$$

$$\frac{\partial T z_{w_{i,k-1/2}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = \frac{\partial T z_{\ell_{i,k-1/2}}}{\partial S_{w_{i,k-1}}} = 0 \quad (\text{A-159})$$

$$\frac{T x_{g_{i-1/2,k}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} = \frac{\partial T x_{\ell_{i-1/2,k}}}{\partial S_{w_{i-1,k}}} = 0 \quad (\text{A-160})$$

- Derivadas em relação ao bloco i, k

$$\frac{\partial T^{z_{o,i,k-1/2}}}{\partial S_{w,i,k}} = FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k-1/2} IFOZI \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right)_{i,k} \quad (A-161)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{z_{w,i,k-1/2}}}{\partial S_{w,i,k}} &= FGZ_{i,k-1/2} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i,k-1/2} IFWZI \left(\frac{dk_{rw}}{dS_w} \right)_{i,k} + \\ &+ w z_k T^{z_{w,i,k-1/2}} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{\mu_{w,i,k-1/2}} \left(\frac{d\mu_w}{dp_w} \right)_{i,k} - \frac{1}{b_{w,i,k-1/2}} \left(\frac{db_w}{dp_w} \right)_{C,k} \right] \end{aligned} \quad (A-162)$$

$$\frac{\partial T^{z_{g,i,k-1/2}}}{\partial S_{w,i,k}} = \frac{\partial T^{z_{g,i,k+1/2}}}{\partial S_{w,i,k}} = 0 \quad (A-163)$$

$$\frac{\partial T^{z_{o,i,k+1/2}}}{\partial S_{w,i,k}} = FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k+1/2} (1 - IFOZS) \left(\frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right)_{i,k} \quad (A-164)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{z_{w,i,k+1/2}}}{\partial S_{w,i,k}} &= FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i,k+1/2} (1 - IFWZS) \left(\frac{dk_{rw}}{dS_w} \right)_{i,k} + \\ &+ (1 - w z_{k+1} T^{x_{w,i,k+1/2}} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{\mu_{w,i,k+1/2}} \left(\frac{d\mu_w}{dp_w} \right)_{i,k} + \frac{1}{b_{w,i,k+1/2}} \left(\frac{db_w}{dp_w} \right)_{i,k} \right] \end{aligned} \quad (A-165)$$

- Derivadas em relação ao bloco $i, k + 1$

$$\frac{\partial T^{z_{\ell_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} = \frac{\partial T^{z_{g_{i,k-1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} = 0 \quad (\text{A-166})$$

$$\frac{\partial T^{z_{o_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} = FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_o}{\mu_o} \right)_{i,k+1/2} IFOZS \left(\frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \right)_{i,k+1} \quad (\text{A-167})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{z_{w_{i,k+1/2}}}}{\partial S_{w_{i,k+1}}} &= FGZ_{i,k+1/2} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right)_{i,k+1/2} IFWZS \left(\frac{dk_{rw}}{dS_w} \right)_{i,k+1} + \\ &+ w z_{k+1} T^{z_{w_{i,k+1/2}}} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w} \right)_{i,k+1} \\ &\quad \left[\frac{1}{\mu_{w_{i,k+1/2}}} \left(\frac{d\mu_w}{dp_w} \right)_{i,k+1} + \frac{1}{b_{w_{i,k+1/2}}} \left(\frac{db_w}{dp_w} \right)_{i,k+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-168})$$

Derivadas dos termos de acumulação em relação à pressão

$$\left(\frac{\partial Aco}{\partial p_o}\right)_{i,k} = \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ c_r (S_o b_o)^{n+1} + [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] S_o^{n+1} \left(\frac{\partial b_o}{\partial p_o}\right)^{n+1} \right\}_{i,k} \quad (A-169)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Acg}{\partial p_o}\right)_{i,k} &= \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ c_r (R_s b_o S_o + S_g b_g)^{n+1} + [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[S_o^{n+1} \left(b_o \frac{\partial R_s}{\partial p_o} + R_s \frac{\partial b_o}{\partial p_o} \right)^{n+1} + S_g^{n+1} \left(\frac{\partial b_g}{\partial p_g} \right)^{n+1} \right] \right\}_{i,k} \quad (A-170) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial Acw}{\partial p_o}\right)_{i,k} = \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ c_r (b_w S_w)^{n+1} + [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] S_w^{n+1} \left(\frac{\partial b_w}{\partial p_w}\right)^{n+1} \right\}_{i,k} \quad (A-171)$$

Derivadas dos termos de acumulação em relação a S_g

$$\left(\frac{\partial Aco}{\partial S_g}\right)_{i,k} = -\frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)]_{i,k} b_o^{n+1} \quad (A-172)$$

$$\left(\frac{\partial Acg}{\partial S_g}\right)_{i,k} = \frac{Vp_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)]_{i,k} (b_g - R_s b_o)_{i,k}^{n+1} \quad (A-173)$$

$$\left(\frac{\partial Acw}{\partial S_g}\right)_{i,k} = 0 \quad (A-174)$$

Derivadas dos termos de acumulação em relação a S_w

$$\left(\frac{\partial Aco}{\partial S_w} \right)_{i,k} = - \frac{V p_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)]_{i,k} b o_{i,k}^{n+1} \quad (\text{A-175})$$

$$\left(\frac{\partial Acg}{\partial S_w} \right)_{i,k} = \frac{V p_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)]_{i,k} (R_s b_o)_{i,k}^{n+1} \quad (\text{A-176})$$

$$\left(\frac{\partial Acw}{\partial S_w} \right)_{i,k} = \frac{V p_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)]_{i,k} b w_{i,k}^{n+1} \quad (\text{A-177})$$

Derivadas dos termos fontes em relação à pressão.

$$\left(\frac{\partial Q_o}{\partial p_o}\right)_{1,k} = \frac{\partial T x_{o1/2,k}}{\partial p_{oi,k}} (p_{oi,k}^{n+1} - p_{wf,k}) + T x_{o1/2,k} \quad (\text{A-178})$$

$$\left(\frac{\partial Q_{fg}}{\partial p_o}\right)_{1,k} = \frac{\partial T x_{g1/2,k}}{\partial p_{oi,k}} (p_{oi,k}^{n+1} - p_{wf,k}^{n+1} + p_{cgo1,k}^{n+1}) + T x_{g1/2,k} \quad (\text{A-179})$$

$$\left(\frac{\partial Q_w}{\partial p_o}\right)_{1,k} = \frac{\partial T x_{w1/2,k}}{\partial p_{oi,k}} (p_{oi,k}^{n+1} - p_{wf,k}^{n+1} - p_{cwo1,k}^{n+1}) - T x_{w1/2,k} \quad (\text{A-180})$$

$$\left(\frac{\partial Q_g}{\partial p_o}\right)_{1,k} = \left(\frac{\partial Q_{fg}}{\partial p_o}\right)_{1,k} + Q_{o1,k} \frac{\partial R_{s1/2,k}}{\partial p_{o1,k}} + R_{s1/2,k} \left(\frac{\partial Q_o}{\partial p_o}\right)_{1,k} \quad (\text{A-181})$$

Derivadas dos termos fontes em relação a S_g

$$\left(\frac{\partial Q_o}{\partial S_g}\right)_{1,k} = \frac{\partial T x_{o1/2,k}}{\partial S_{g1,k}} (p_{o1,k}^{n+1} - p_{wf,k}) \quad (\text{A-182})$$

$$\left(\frac{\partial Q_{fg}}{\partial S_g}\right)_{1,k} = \frac{\partial T x_{g1/2,k}}{\partial S_{g1,k}} (p_{o1,k}^{n+1} - p_{wf,k} + p_{cgo1,k}^{n+1}) + T x_{g1/2,k} \left(\frac{dp_{cgo}}{dS_g}\right)_{1,k} \quad (\text{A-183})$$

$$\left(\frac{\partial Q_w}{\partial S_g}\right)_{1,k} = 0 \quad (\text{A-184})$$

$$\left(\frac{\partial Q_g}{\partial S_g}\right)_{1,k} = \left(\frac{\partial Q_{fg}}{\partial S_g}\right)_{1,k} + R_{s1/2,k} \left(\frac{\partial Q_o}{\partial S_g}\right)_{1,k} \quad (\text{A-185})$$

Derivadas dos termos fontes em relação a S_w

$$\left(\frac{\partial Q_o}{\partial S_w}\right)_{1,k} = \frac{\partial T x_{o1/2,k}}{\partial S_{w1,k}} (p_{o1,k}^{n+1} - p_{wf,k}) \quad (\text{A-186})$$

$$\left(\frac{\partial Q_{fg}}{\partial S_w}\right)_{1,k} = \left(\frac{\partial Q_g}{\partial S_w}\right)_{1,k} = 0 \quad (\text{A-187})$$

$$\left(\frac{\partial Q_w}{\partial S_w}\right)_{1,k} = \frac{\partial T x_{w1/2,k}}{\partial S_{w1,k}} (p_{o1,k}^{n+1} - p_{wf,k} - p_{cwo1,k}) - T x_{w1/2,k} \left(\frac{dp_{cwo}}{dS_w}\right)_{1,k} \quad (\text{A-188})$$

Derivadas dos termos fontes em relação a p_{wf}

$$\frac{\partial Q_{o1,k}}{\partial p_{wf,k}} = \frac{\partial T x_{o1/2,k}}{\partial p_{wf,k}} (p_{o1,k} - p_{wf,k}) \quad (\text{A-189})$$

$$\frac{\partial Q_{fg1,k}}{\partial p_{wf,k}} = \frac{\partial T_{x_{g1/2,k}}}{\partial p_{wf,k}} (p_{o1,k} - p_{wf,k} + p_{cgo1,k}) - T_{x_{g1/2,k}} \quad (\text{A-190})$$

$$\frac{\partial Q_{w1,k}}{\partial p_{wf,k}} = \frac{\partial T_{x_{w1/2,k}}}{\partial p_{wf,k}} (p_{o1,k} - p_{wf,k} - p_{cwo1,k}) - T_{x_{w1/2,k}} \quad (\text{A-191})$$

$$\frac{\partial Q_{g1,k}}{\partial p_{wf,k}} = \frac{\partial Q_{fg1,k}}{\partial p_{wf,k}} + Q_{o1,k} \frac{\partial R_{s1/2,k}}{\partial p_{wf,k}} + R_{s1/2,k} \frac{\partial Q_{o1,k}}{\partial p_{wf,k}} \quad (\text{A-192})$$

Derivadas de Fp_{wf}

$$Fp_{wf}^{n+1} = (p_{wf_{Nz}}^n - p_{wf_{Nz}}^{n+1}) + \gamma_{Nz+1/2} \sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_{ok}}{b_{ok}} + \frac{Q_{wk}}{b_{wk}} \right) \frac{\Delta t}{C_{col}} \quad (A-193)$$

onde,

$$\gamma_{Nz+1/2} = \gamma_{w_{Nz}} f w_{Nz+1/2} + \gamma_{o_{Nz}} (1 - f w_{Nz+1/2}) \quad (A-194)$$

- Derivada de Fp_{wf} em relação a $p_{wf_{Nz}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fp_{wf}}{\partial p_{wf_{Nz}}} = & -1 + \bar{\gamma}_{Nz+1/2} \left\{ \sum_1^{Nz} \left[\left(\frac{1}{b_{ok}} \frac{\partial Q_{ok}}{\partial p_{wf_k}} - \frac{Q_{ok}}{b_{ok}^2} \frac{\partial b_{ok}}{\partial p_{wf_k}} \right) + \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{b_{wk}} \frac{\partial Q_{wk}}{\partial p_{wf_k}} - \frac{Q_{wk}}{b_{wk}^2} \frac{\partial b_{wk}}{\partial p_{wf_k}} \right) \right] \frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wf_{Nz}}} \right\} \frac{\Delta t}{C_{col}} + \\ & + \left[\sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_{ok}}{b_{ok}} + \frac{Q_{wk}}{b_{wk}} \right) \right] \frac{\Delta t}{C_{col}} \frac{\partial \gamma_{Nz+1/2}}{\partial p_{wf_{Nz}}} \end{aligned} \quad (A-195)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{Nz+1/2}}{\partial p_{wf_{Nz}}} = & f w_{Nz+1/2} \frac{\partial \gamma_w}{\partial p_{wf_{Nz}}} + (1 - f w_{Nz+1/2}) \frac{\partial \gamma_o}{\partial p_{wf_{Nz}}} + \\ & + (\gamma_w - \gamma_{o_{Nz}}) \frac{\partial f w_{Nz+1/2}}{\partial p_{wf_{Nz}}} \end{aligned} \quad (A-196)$$

- Derivada em relação a $p_{o_{1,k}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fp_{wf}}{\partial p_{o_{1,k}}} = & \left\{ \bar{\gamma}_{Nz+1/2} \left(\frac{1}{b_{ok}} \frac{\partial Q_{ok}}{\partial p_{o_{1,k}}} + \frac{1}{b_{wk}} \frac{\partial Q_{wk}}{\partial p_{o_{1,k}}} \right) + \right. \\ & + \left. \left[\sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_{ok}}{b_{ok}} + \frac{Q_{wk}}{b_{wk}} \right) \right] \frac{\partial \gamma_{Nz+1/2}}{\partial p_{o_{1,k}}} \right\} \frac{\Delta t}{C_{col}} \end{aligned} \quad (A-197)$$

$$\frac{\partial \gamma_{Nz+1/2}}{\partial p_{o1,k}} = (\gamma_{w_{Nz}} - \gamma_{o_{Nz}}) \frac{\partial f_{w_{Nz+1/2}}}{\partial p_{o1,k}} \quad (A-198)$$

$$\frac{\partial f_{w_{Nz+1/2}}}{\partial p_{o1,k}} = \frac{\frac{1}{b_{wk}} \frac{\partial Q_{wk}}{\partial p_{o1,k}} \sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_{ok}}{b_{ok}} \right) - \frac{1}{b_{ok}} \frac{\partial Q_{ok}}{\partial p_{o1,k}} \sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_{wk}}{b_{wk}} \right)}{\left[\sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_o}{b_o} + \frac{Q_w}{b_w} \right)_k \right]^2} \quad (A-199)$$

- Derivada em relação a $S_{g1,k}$

$$\frac{\partial F_{p_{wf}}}{\partial S_{g1,k}} = \left\{ \bar{\gamma}_{Nz+1/2} \left[\frac{1}{b_{ok}} \frac{\partial Q_{ok}}{\partial S_{g1,k}} \right] + \sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_{ok}}{b_{ok}} + \frac{Q_{wk}}{b_{wk}} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{Nz+1/2}}{\partial S_{g1,k}} \right) \right\} \frac{\Delta t}{C_{col}} \quad (A-200)$$

$$\frac{\partial \gamma_{Nz+1/2}}{\partial S_{g1,k}} = (\gamma_{w_{Nz}} - \gamma_{o_{Nz}}) \frac{\partial f_{w_{Nz+1/2}}}{\partial S_{g1,k}} \quad (A-201)$$

$$\frac{\partial f_{w_{Nz+1/2}}}{\partial S_{g1,k}} = - \frac{\frac{1}{b_{ok}} \frac{\partial Q_{ok}}{\partial S_{g1,k}} \cdot \sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_w}{b_w} \right)_k}{\left[\sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_o}{b_o} + \frac{Q_w}{b_w} \right)_k \right]^2} \quad (A-202)$$

- Derivada em relação a $S_{w1,k}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{p_{wf}}}{\partial S_{w1,k}} &= \left\{ \bar{\gamma}_{Nz+1/2} \left[\frac{1}{b_{ok}} \frac{\partial Q_{ok}}{\partial S_{w1,k}} + \frac{1}{b_{wk}} \frac{\partial Q_{wk}}{\partial S_{w1,k}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_1^{Nz} \left(\frac{Q_{ok}}{b_{ok}} + \frac{Q_{wk}}{b_{wk}} \right) \right] \frac{\partial \gamma_{Nz+1/2}}{\partial S_{w1,k}} \right\} \frac{\Delta t}{C_{col}} \end{aligned} \quad (A-203)$$

$$\frac{\partial \gamma_{N_z+1/2}}{\partial S_{w_1,k}} = (\gamma_{w_{N_z}} - \gamma_{o_{N_z}}) \frac{\partial f_{w_{N_z+1/2}}}{\partial S_{w_1,k}} \quad (\text{A-204})$$

$$\frac{\partial f_{w_{N_z+1/2}}}{\partial S_{w_1,k}} = \frac{\frac{1}{b_{w_k}} \frac{\partial Q_{w_k}}{\partial S_{w_1,k}} \cdot \sum_1^{N_z} \left(\frac{Q_o}{b_o} \right)_k - \frac{1}{b_{o_k}} \frac{Q_{o_k}}{\partial S_{w_1,k}} \sum_1^{N_z} \left(\frac{Q_w}{b_w} \right)_k}{\left[\sum_1^{N_z} \left(\frac{Q_o}{b_o} + \frac{Q_w}{b_w} \right)_k \right]^2} \quad (\text{A-205})$$

Derivadas de p_{wf_k} em relação a $p_{wf_{Nz}}$

$$p_{wf_k} = p_{wf_{Nz}} - \sum_{m=k}^{N_z-1} \bar{\gamma}_{m+1/2} (z_{m+1} - z_m) \quad (\text{A-206})$$

$$\bar{\gamma}_{k+1/2} = \frac{1}{2} (\gamma_{w_{k+1}} + \gamma_{w_k}) f_{w_{k+1/2}} + \frac{1}{2} (\gamma_{o_{k+1}} + \gamma_{o_k}) (1 - f_{w_{k+1/2}}) \quad (\text{A-207})$$

$$p_{wf_k} - p_{wf_{k+1}} = \bar{\gamma}_{k+1/2} (z_{k+1} - z_k) \quad (\text{A-208})$$

$$\frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wf_{Nz}}} = \frac{\partial p_{wf_{k+1}}}{\partial p_{wf_{Nz}}} - (z_{k+1} - z_k) \frac{\partial \bar{\gamma}_{k+1/2}}{\partial p_{wf_{Nz}}} \quad (\text{A-209})$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{k+1/2} &= \frac{1}{2} (\gamma_{w_{k+1}} f_{w_{k+1/2}} + \gamma_{o_{k+1}} (1 - f_{w_{k+1/2}})) + \\ &+ \frac{1}{2} (\gamma_{w_k} f_{w_{k+1/2}} + \gamma_{o_k} (1 - f_{w_{k+1/2}})) \end{aligned} \quad (\text{A-210})$$

$$\frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wf_{Nz}}} = \frac{\left[1 - \frac{\partial \bar{\gamma}_{k+1/2}}{\partial p_{wf_{k+1}}} (z_{k+1} - z_k) \right] \frac{\partial p_{wf_{k+1}}}{\partial p_{wf_{Nz}}}}{\left[1 + \frac{\partial \bar{\gamma}_{k+1/2}}{\partial p_{wf_{Nz}}} (z_{k+1} - z_k) \right]} \quad (\text{A-211})$$

$$\frac{\partial p_{wf_{Nz}}}{\partial p_{wf_{Nz}}} = 1 \quad \text{para} \quad k = N_z \quad (\text{A-212})$$

Calculando a partir de $N_z - 1$ obtém-se

$$\frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wf_{Nz}}} = \frac{\left[1 - \frac{\partial \bar{\gamma}_{k+1/2}}{\partial p_{wf_{k+1}}} (z_{k+1} - z_k) \right] \frac{\partial p_{wf_{k+1}}}{\partial p_{wf_{Nz}}}}{1 + \frac{\partial \bar{\gamma}_{k+1/2}}{\partial p_{wf_{Nz}}} (z_{k+1} - z_k)} \left[1 + \frac{\partial \bar{\gamma}_{k+1/2}}{\partial p_{wf_{Nz}}} (z_{k+1} - z_k) \right] \quad (\text{A-213})$$

$$\frac{\partial \gamma_{k+1/2}}{\partial p_{wf_{k+1}}} = \frac{1}{2} \left[f w_{k+1/2} \frac{\partial \gamma_{w_{k+1}}}{\partial p_{wf_{k+1}}} + (1 - f w_{k+1/2}) \frac{\partial \gamma_{o_{k+1}}}{\partial p_{wf_{k+1}}} \right] \quad (\text{A-214})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{k+1/2}}{\partial p_{wf_k}} = & \frac{1}{2} \left[f w_{k+1/2} \frac{\partial \gamma_{w_k}}{\partial p_{wf_k}} + (1 - f w_{k+1/2}) \frac{\partial \gamma_{o_{k+1}}}{\partial p_{wf_k}} + \right. \\ & \left. + (\gamma_{w_k} - \gamma_{o_k}) \frac{\partial f w_{k+1/2}}{\partial p_{wf_k}} \right] \quad (\text{A-215}) \end{aligned}$$

Derivadas da funções resíduos do reservatório em relação p_{wfNz}

$$\frac{\partial F_{o1k}}{\partial p_{wfNz}} = \frac{\partial F_{o1k}}{\partial p_{wf_k}} \frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wfNz}} \quad (\text{A-216})$$

mas,

$$p_{wf_k} = p_{wfNz} + \sum_{m=k}^{Nz-1} \bar{\gamma}_{m+1/2} (z_{m+1} - z_m) \quad (\text{A-217})$$

logo,

$$\frac{\partial F_{o1k}}{\partial p_{wfNz}} = - \frac{\partial Q_{o1,k}^{n+1}}{\partial p_{wf_k}} \frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wfNz}} \quad (\text{A-218})$$

$$\frac{\partial F_{g1k}}{\partial p_{wfNz}} = - \frac{\partial Q_{g1,k}}{\partial p_{wf_k}} \frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wfNz}} \quad (\text{A-219})$$

$$\frac{\partial F_{w1k}}{\partial p_{wfNz}} = - \frac{\partial Q_{w1,k}}{\partial p_{wf_k}} \frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wfNz}} \quad (\text{A-220})$$

Derivada da fração de água no líquido em relação a p_{wf_k}

$$f_{w_{k+1/2}} = \frac{\sum_{m=1}^k \left(\frac{Q_w}{b_w} \right)_m}{\sum_{m=1}^k \left(\frac{Q_w}{b_w} + \frac{Q_o}{b_o} \right)_m} \quad (\text{A-221})$$

$$\frac{\partial f_{w_{k+1/2}}}{\partial p_{wf_k}} =$$

$$\frac{\frac{1}{b_{w_k}} \left[\frac{\partial Q_{w_k}}{\partial p_{wf_k}} - \frac{Q_{w_k}}{b_{w_k}} \frac{\partial b_{w_k}}{\partial p_{wf_k}} \right] \sum_{m=1}^k \left(\frac{Q_o}{b_o} \right)_m - \frac{1}{b_{o_k}} \left[\frac{\partial Q_{o_k}}{\partial p_{wf_k}} - \frac{Q_{o_k}}{b_{o_k}} \frac{\partial b_{o_k}}{\partial p_{wf_k}} \right] \sum_{m=1}^k \left(\frac{Q_w}{b_w} \right)_m}{\left[\sum_{m=1}^k \left(\frac{Q_o}{b_o} \right)_m + \sum_{m=1}^k \left(\frac{Q_w}{b_w} \right)_m \right]^2} \quad (\text{A-222})$$

Derivadas da função resíduo do poço para vazão especificada

$$\frac{\partial FQ}{\partial p_{wf_{N_z}}} = \left[\sum_{k=1}^{N_z} \left(\frac{\partial Q_{o1,k}}{\partial p_{wf1,k}} + \frac{\partial Q_{g1,k}}{\partial p_{wf1,k}} + \frac{\partial Q_{w1,k}}{\partial p_{wf1,k}} \right) \right] \left(\frac{\partial p_{wf_k}}{\partial p_{wf_{N_z}}} \right) \quad (\text{A-223})$$

$$\frac{\partial FQ}{\partial p_{o1,k}} = \frac{\partial Q_{o1,k}}{\partial p_{o1,k}} + \frac{\partial Q_{g1,k}}{\partial p_{o1,k}} + \frac{\partial Q_{w1,k}}{\partial p_{o1,k}} \quad (\text{A-224})$$

$$\frac{\partial FQ}{\partial S_{g1,k}} = \frac{\partial Q_{o1,k}}{\partial S_{g1,k}} + \frac{\partial Q_{g1,k}}{\partial S_{g1,k}} \quad (\text{A-225})$$

$$\frac{\partial FQ}{\partial S_{w1,k}} = \frac{\partial Q_{o1,k}}{\partial S_{w1,k}} + \frac{\partial Q_{g1,k}}{\partial S_{w1,k}} + \frac{\partial Q_{w1,k}}{\partial S_{w1,k}} \quad (\text{A-226})$$

Derivada dos termos de acumulação para ponto de bolha variável

$$\frac{\partial Aco}{\partial p_o} = \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} S_o^{n+1} \left\{ \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \frac{\Delta_t b_o}{\Delta_t p_o} + c_r b_o^{n+1} \right\} \quad (A-227)$$

$$\frac{\partial Aco}{\partial p_b} = \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} S_o^{n+1} \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \frac{\Delta_t b_o}{\Delta_t p_b} \quad (A-228)$$

$$\frac{\partial Aco}{\partial S_g} = - \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} b_o^{n+1} \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \quad (A-229)$$

$$\frac{\partial Aco}{\partial S_w} = - \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} b_o^{n+1} \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \quad (A-230)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Acg}{\partial p_o} = & \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left\{ \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \left[S_o^{n+1} \left(R_s^{n+1} \frac{\Delta_t b_o}{\Delta_t p_o} + b_o^{n+1} \frac{\Delta_t R_s}{\Delta_t p_o} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + S_g^{n+1} \frac{\partial b_g}{\partial p_o} \right]_{i,k} + c_r (R_s b_o S_o + S_g b_g)_{i,k}^{n+1} \right\} \quad (A-231) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Acg}{\partial p_b} = \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} S_o^{n+1} \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \left(R_s^{n+1} \frac{\Delta_t b_o}{\Delta_t p_b} + b_o^{n+1} \frac{\Delta_t R_s}{\Delta_t p_b} \right) \quad (A-232)$$

$$\frac{\partial Acg}{\partial S_g} = \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \left[b_g^{n+1} - (R_s b_o)^{n+1} \right] \quad (A-233)$$

$$\frac{\partial Acg}{\partial S_w} = - \frac{V_{i,k}^n}{\Delta t^{n+1}} (R_s b_o)^{n+1} \left[1 + c_r (p_{o,i,k}^{n+1} - p_{o,i,k}^n) \right] \quad (A-234)$$

ANEXO B: Soluções Analíticas do Período de Fluxo

Para apresentação dos métodos analíticos do período de fluxo considerou-se as mesmas denominações de os grupos adimensionais adotadas por Peres⁽¹¹⁾ :

- Pressão adimensional para vazão de superfície constante com estocagem e efeito de película

$$p_{cD} = \frac{2\pi kh[p_i - p(r,t)]}{qB\mu} \quad (B-1)$$

- Pressão no poço adimensional para vazão de superfície constante com estocagem e efeito de película

$$p_{wcD} = \frac{2\pi kh[p_i - p_{wf}(t)]}{qB\mu} \quad (B-2)$$

- Pressão adimensional para o "slug test"

$$p_D = \frac{p_i - p(r,t)}{p_i - p_0} \quad (B-3)$$

- Pressão no poço adimensional para o "slug test"

$$p_{wD} = \frac{p_i - p_{wf}(t)}{p_i - p_0} = \frac{\Delta p}{p_i - p_0} \quad (B-4)$$

- Pressão adimensional para vazão na face da formação constante, ou vazão na superfície constante sem estocagem

$$p_{cD}^* = \frac{2\pi kh [p_i - p(r,t)]}{qB\mu} \quad (B-5)$$

- Pressão no poço adimensional para vazão na face da formação constante (solução de vazão na superfície constante e sem estocagem)

$$p_{wcD}^* = \frac{2\pi kh [p_i - p_{wf}(t)]}{qB\mu} \quad (B-6)$$

- Tempo adimensional

$$t_D = \frac{kt}{\phi \mu c_t r_w^2} \quad (\text{B-7})$$

- Raio adimensional

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (\text{B-8})$$

- Coeficiente de estocagem adimensional

$$C_D = \frac{C}{2\pi \phi h c_t r_w^2} \quad (\text{B-9})$$

- Vazão da face da formação adimensional

$$q_D = \frac{q_{sf}(t) \mu}{2\pi k h (p_i - p_o)} \quad (\text{B-10})$$

- Vazão da face da formação adimensional para vazão na superfície constante, com estocagem e efeito de película

$$q_{cD} = \frac{q_{sf}(t)}{qB} \quad (\text{B-11})$$

- Coeficiente de estocagem do "slug test" adimensional

$$C_{FD} = \frac{C_F}{2\pi \phi c_t r_w^2} \quad (\text{B-12})$$

$$C_F = \frac{\pi r_p^2}{\gamma} \quad (\text{B-13})$$

onde,

p_i	- pressão inicial do reservatório
p_0	- pressão inicial de abertura do "slug test"
p_{wf}	- pressão de fluxo no poço
$p(r,t)$	- pressão na distância r do centro do poço
q	- vazão na superfície constante
B	- fator volume de formação do fluido da formação
μ	- viscosidade efetiva da formação
k	- permeabilidade efetiva formação
h	- espessura do reservatório
r_w	- raio do poço
c_t	- compressibilidade total
q_{sf}	- vazão de face de formação
q_{sfc}	- vazão de face de formação para vazão de superfície constante
C	- coeficiente de estocagem no poço
C_F	- coeficiente de estocagem do "slug test"
r_p	- raio interno da tubulação
γ	- peso específico do fluido produzido

• Solução de Vazão Constante

O problema de vazão constante de um fluido levemente compressível num sistema radial infinito adotando solução de raio finito com estocagem e efeito de película e considerando reservatório de espessura constante, homogêneo e isotrópico é dado pelas seguintes relações matemáticas:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{cD}}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_{cD}}{\partial t_D} \quad (\text{B-14})$$

Condição inicial

$$p_{cD}(r_D, 0) = 0 \quad ; \quad 1 < r_D < \infty \quad (\text{B-15})$$

Condição de contorno

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} [p_{cD}(r_D, t_D)] = 0 \quad ; \quad t_D \geq 0 \quad (\text{B-16})$$

Condições de acoplamento com o poço (vazão constante, estocagem e efeito de película)

$$C_D \frac{\partial p_{wcD}(t_D)}{\partial t_D} - \left(r_D \frac{\partial p_{cD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 \quad (\text{B-17})$$

$$p_{wcD}(t_D) = p_{cD}(1, t_D) - s \left(r_D \frac{\partial p_{cD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (\text{B-18})$$

onde, s = fator efeito de película

A solução do problema matemático é obtida aplicando a transformada de Laplace,

$$\mathcal{L} \{P_{cD}(r_D, t_D)\} = \bar{p}_D(r_D, u) = \int_0^\infty e^{-ut_D} p_{cD}(r_D, t_D) dt_D \quad (\text{B-19})$$

no sistema de Equações (Eqs. (B-14) a (B-18)),

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{cD}(r_D, u)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_{cD}(r_D, u)}{\partial r_D} = u \bar{p}_{cD}(r_D, u) - p_{cD}(r_D, 0) \quad (\text{B-20})$$

(Equação de Bessel modificada)

$$\bar{p}_{cD}(r_D, 0) = 0 \quad (\text{B-21})$$

$$\bar{p}_{cD}(r_D \rightarrow \infty, u) = 0 \quad (\text{B-22})$$

$$C_D (u \bar{p}_{wcD} - \bar{p}_{wcD}(1, t_D)) - \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{cD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} \quad (\text{B-23})$$

$$\bar{p}_{wcD} = \bar{p}_{cD}(1, u) - s \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{cD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (\text{B-24})$$

No espaço de Laplace, a solução para pressão no poço é dado por⁽⁶⁾

$$\bar{p}_{wcD} = \frac{1}{u} \frac{K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u} K_1(\sqrt{u})}{\sqrt{u} K_1(\sqrt{u}) + C_D u [K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u} K_1(\sqrt{u})]} \quad (\text{B-25})$$

onde,

$\bar{p}_{wcD}$ é a transformada de Laplace de p_{wcD} .

K_0, K_1 são funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordem zero e um, respectivamente.

A solução do poço no espaço real é dado por

$$p_{wcD}(t_D) = \mathcal{L}^{-1} \bar{p}_{wcD}(r_D, u) \quad (\text{B-26})$$

Agarwal, Al-Hussainy e Ramey (1970)⁽⁶⁾ inverteram para o campo real (B-25) analiticamente por

$$p_{wcD}(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-u^2 t_D)}{u f(u)} du \quad (\text{B-27})$$

$$\begin{aligned} f(u) = & [u (C_D J_0(u) - (1 - C_D u^2 s) J_1(u))]^2 + \\ & + [u C_D Y_0(u) - (1 - C_D u^2 s) Y_1(u)]^2 \end{aligned} \quad (\text{B-28})$$

onde,

J_0, J_1 funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um, respectivamente.

Y_0, Y_1 funções de Bessel de segunda espécie de ordem zero e um, respectivamente. e apresentaram uma curva tipo para diferentes valores de C_D e s .

• Solução de Slug Test

Considerando o escoamento num sistema radial infinito de um fluido monofásico de viscosidade constante, pequena compressibilidade e considerando um meio poroso de espessura constante, homogêneo e isotrópico o problema do "slug test" pode ser dado por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (\text{B-29})$$

condição inicial

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad ; \quad 1 < r_D < \infty \quad (\text{B-30})$$

condição de contorno externo

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \quad ; \quad t_D \geq 0 \quad (\text{B-31})$$

condições de interface

$$p_{wD} = \left[p_D - s \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1} \quad (\text{B-32})$$

$$C_D \frac{\partial p_{wD}}{\partial t_D} - \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \right)_{r_D=1} = 0 \quad (\text{B-33})$$

Aplicando transformada de Laplace no sistema de Equações (B-29) a (B-33) e resolvendo, obtém-se a seguinte solução no campo de Laplace

$$\bar{p}_{wD} = C_D \frac{K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u} K_1(\sqrt{u})}{\sqrt{u} K_1(\sqrt{u}) + C_D u [K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u} K_1(\sqrt{u})]} \quad (\text{B-34})$$

A solução no campo real é dado por

$$p_{wD} = \frac{4C_D}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-u^2 t_D)}{u f(u)} du \quad (\text{B-35})$$

e

$f(u)$ dado pela Eq. (B-28)

Ramey, Agarwal e Martin⁽⁸⁾, apresentaram tres curvas tipos "slug test" a partir da solução de (B-34).

• Solução de Slug Test Geral

Peres⁽¹¹⁾, observando uma expressão obtida por Ramey, Al-Hussainy e Agarwal⁽⁶⁾ verificou que, baseado nas soluções (B-25) e (B-34), a solução do "slug test" pode ser colocada como

$$p_{wD} = C_D \frac{dp_{wcD}}{dt_D} \quad (\text{B-36})$$

ou seja, a pressão de "slug test" adimensional pode ser obtida da derivada em relação ao tempo da solução de pressão para vazão de superfície constante com estocagem e efeito de película.

Usando o princípio de Duhamel, a solução geral do "slug test" pode ser dado por

$$p_D(r_D, t_D, c_D, s) = \int_0^{t_D} q_D(\tau) \frac{\partial p_{cD}^*}{\partial t_D}(r_D, t_D - \tau) \quad (\text{B-37})$$

Pelo balanço de material no poço obtém-se

$$q_D = -C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D}(t_D, c_D, s) \quad (\text{B-38})$$

Substituindo (B-38) em (B-37), obtém-se

$$p_D(r_D, t_D, c_D, s) = - \int_0^{t_D} c_D \frac{dp_{wD}}{d\tau}(\tau, c_D, s) \cdot \frac{\partial p_{cD}^*}{\partial t_D}(r_D, t_D - \tau) d\tau \quad (\text{B-39})$$

Como a Eq. (B-37) é obtida por balanço de material no poço, a solução (B-39) aplica a qualquer geometria de fluxo poço/reservatório.

Da mesma forma, para a solução de vazão na superfície constante obtém-se:

$$p_{cD}(r_D, t_D, c_D, s) = - \int_0^{t_D} q_{cD}(\tau) \cdot \frac{\partial p_{cD}^*}{\partial t_D}(r_D, t_D - \tau) d\tau \quad (\text{B-40})$$

e por balanço de material no poço

$$q_{cD} = 1 - C_D \frac{dp_{wcD}}{dt_D} \quad (\text{B-41})$$

Substituindo (B-41) em (B-40), tem-se

$$p_{cD}(t_D, r_D, c_D, s) = \int_0^{t_D} \left[1 - c_D \frac{dp_{wcD}}{d\tau}(\tau, c_D, s) \right] \cdot \frac{\partial p_{cD}^*}{\partial t_D}(r_D, t_D - \tau) d\tau \quad (\text{B-42})$$

Aplicando a transformada de Laplace nas equações (B-39) e (B-42) e eliminando p_{cD}^* das equações, obtém-se o seguinte resultado no campo real

$$p_D(r_D, t_D, c_D, s) = C_D \frac{\partial p_{cD}}{\partial t_D}(r_D, t_D, c_D, s) \quad (\text{B-43})$$

Integrando a Eq. (B-43) de 0 a t_D

$$p_{cD}(r_D, t_D, c_D, s) = \frac{1}{c_D} \int_0^{t_D} p_D(r_D, \tau, c_D, s) d\tau \quad (\text{B-44})$$

Multiplicando por t_D/C_D ambos os lados da Eq. (B-43),

$$\frac{t_D}{c_D} \frac{\partial p_{cD}}{\partial t_D} = p'_{cD} = \frac{t_D}{C_D} p_D \quad (\text{B-45})$$

As Equações (B-44) e (B-45) mostram que os dados de "slug test" podem ser diretamente convertidos para dados equivalente de vazão na superfície constante com estocagem e efeito de película através da integração da pressão de "slug test" no tempo. Além disso, a multiplicação dos dados de pressão do "slug test" pelo tempo de produção fornece direto a derivada da equivalente pressão de vazão de superfície constante, sem necessidade de qualquer técnica de derivação.

No poço, as Equações (B-44) e (B-45) tornam-se

$$p_{wcD}(r_D, t_D, c_D, S) = \frac{I(p_{wD})}{C_D} \quad (\text{B-46})$$

e

$$p'_{wcD} = \frac{t_D}{c_D} p_{wD} \quad (\text{B-47})$$

onde,

$$I(p_{wD}) = \int_0^{t_D} p_{wD}(\tau, c_D, s) d\tau \quad (\text{B-48})$$

• Método de Normalização da Vazão

Peres⁽¹¹⁾, adaptou o procedimento de deconvolução aproximada pelo método de normalização da vazão para o problema do "slug test".

O método aproxima a pressão de vazão na face da formação constante pela relação queda de pressão dividido pela vazão de face de formação instantânea.

Para o procedimento aplicado diretamente aos dados do "slug test",

$$p_{wcD}^* \approx \frac{p_{wD}(t_D)}{q_D(t_D)} = - \frac{p_{wD}}{C_D(dp_{wD}/dt_D)} \quad (\text{B-49})$$

observa-se duas vantagens:

1) uso da derivada - comportamento oscilatório das derivadas dos dados de campo

2) validade da aproximação de (B-49) somente para $t_D/c_D \leq 1$. Para tempos longos torna-se muito impreciso.

Baseado na investigação de Ramey do método de normalização de vazão aplicado ao problema de vazão na superfície constante com estocagem e efeito de película,

$$p_{wcD}^* \approx \frac{p_{wcD}(t_D)}{q_{cD}(t_D)} \quad (B-50)$$

que concluiu que o método é uma boa aproximação para o problema de vazão variável devido a mudança de estocagem, Peres adaptou o método para o problema do "slug test" usando a solução Geral do "Slug Test".

Substituindo (B-41) em (B-49),

$$p_{wcD}^* = \frac{p_{wcD}(t_D)}{[1 - c_D \frac{dp_{wcD}}{dt_D}]} \quad (B-51)$$

(B-36) em (B-51),

$$p_{wcD}^* = \frac{p_{wcD}(t_D)}{[1 - p_{wD}]} \quad (B-52)$$

(B-46) em (B-52), tem-se

$$p_{wcD}^* = C_D \frac{I(p_{wcD})}{[1 - p_{wD}]} \quad (B-53)$$

ou

$$p_{wcD}^* = \frac{2\pi kh}{uC} \frac{I(\Delta p)}{(p_{wf} - p_0)} \quad (B-54)$$

Considerando a solução aproximada semilog para um escoamento radial sem estocagem,

$$p_{wcD}^* = 1,151 \log \left(\frac{4t_D}{e^\gamma} \right) + s \quad (B-55)$$

onde,

$$\gamma = \text{constante de Euler} = 0.577216665...$$

e comparando (B-54) com (B-55), obtém-se

$$\frac{2\pi kh}{uC} \left[\frac{I(\Delta p)}{p_{wf} - p_0} \right] = 1,151 \log \left(\frac{4t_D}{e^\gamma} \right) + s \quad (\text{B-56})$$

A relação (B-56) indica que um gráfico semilog de $\left[\frac{I(\Delta p)}{p_{wf} - p_0} \right]$ contra tempo fornece uma linha reta de declividade

$$m = 0,183234 \frac{uC}{kh} \quad (\text{B-57})$$

O efeito de película pode ser calculado de (B-56) tomando qualquer ponto na reta

$$s = 1,151 \left[\frac{\left[\frac{I(\Delta p)}{p_{wf} - p_0} \right]_{t^*}}{m} - \log \left(\frac{kt^*}{\phi \mu c_i r_w^2} \right) - 0,351 \right] \quad (\text{B-58})$$

onde, t^* e $\left[\frac{I(\Delta p)}{p_{wf} - p_0} \right]_{t^*}$ representam um ponto qualquer na reta semi-log.

• Método de Convolução (superposição, *multi-rate*)

O método assume uma solução particular para p_{wcD}^* e substitui a vazão variável continuamente por uma aproximação por partes.

Segundo Peres⁽¹¹⁾ a aplicação direta do método de convolução aos dados do "slug test" apresenta uma dispersão numérica devido ao ruído, mas aplicado aos dados convertidos o ruído é reduzido de forma substancial.

Considerando o princípio de Duhamel aplicado ao problema de vazão na superfície constante com estocagem e efeito de película dado por:

$$p_{wcD}(t_D) = \int_0^{t_D} q_{cD}(\tau) \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(t_D - \tau) d\tau \quad (\text{B-59})$$

Adotando a seguinte partição do tempo

$$O = t_{0D} < t_{1D} < \dots < t_{nD} < t_{n+1} = t_D \quad (\text{B-60})$$

a Equação (B-59) fica

$$\begin{aligned} p_{wcD}(t_D) &= \sum_{j=0}^n \int_{t_{jD}}^{t_{j+1,D}} q_{cD}(\tau) \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(t_D - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{j=0}^n q_{cD}(\hat{t}_{j+1,D}) [p_{wcD}^*(t_D - t_{jD}) - \\ &\quad - p_{wcD}^*(t_D - t_{j+1,D})] \end{aligned} \quad (\text{B-61})$$

onde, $\hat{t}_{j+1,D}$ é um ponto no intervalo

$$t_{jD} \leq \hat{t}_{j+1,D} \leq t_{j+1,D} \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (\text{B-62})$$

dado por

$$\hat{t}_{j+1,D} = \theta_{j+1} t_{j+1,D} + (1 - \theta_{j+1}) t_{jD} \quad (\text{B-63})$$

Rearranjando, Eq. (B-61) fica

$$\frac{p_{wcD}(t_D)}{q_{cD}(\hat{t}_{n+1,D})} = \frac{somal}{q_{cD}(\hat{t}_{n+1,D})} \quad (\text{B-64})$$

onde,

$$\begin{aligned}omal &= \sum_{j=0}^n [q_{cD}(\hat{t}_{j+1,D}) p_{wcD}^*(t_D - t_{jD}) - \\ &\quad - \underbrace{q_{cD}(\hat{t}_{j+1,D}) p_{wcD}^*(t_D - t_{j+1,D})}_{q_{cD}(\hat{t}_{j,D}) p_{wcD}^*(t_D - t_{j,D})}] \\ &= \sum_{j=0}^n [q_{cD}(\hat{t}_{j+1,D}) - q_{cD}(\hat{t}_{j,D})] p_{wcD}^*(t_D - t_{j,D}) \end{aligned} \quad (\text{B-65})$$

$$q_{cD}(\hat{t}_{0D}) = 0 \quad (\text{B-66})$$

Considerando $\hat{t}_{j+1,D} = t_{j+1,D}$,

$$q_{cD}(\hat{t}_{j+1,D}) = q_{cD}(t_{j+1,D}) \quad (\text{B-67})$$

Substituindo (B-66), (B-41), (B-36) e (B-46) em (B-64),

$$\frac{I(p_{wD})}{c_D [1 - p_{wD}(t_D)]} = \frac{soma2}{[1 - p_{wD}(t_D)]} \quad (B-68)$$

onde,

$$soma2 = \sum_{j=0}^n [p_{wD}(t_{jD}) - p_{wD}(t_{j+1,D})] p_{wcD}^*(t_D - t_{jD}) \quad (B-69)$$

No escoamento radial transiente, p_{wcD}^* pode ser substituído pela solução logarítmica e (B-68) fica

$$\frac{I(p_{wD})}{C_D [1 - p_{wD}(t_{n+1,D})]} = 1.151 \left[t_{msD} + \log \left(\frac{4}{e^\gamma} \right) \right] + s \quad (B-70)$$

onde,

$$t_{msD} = \sum_{j=0}^n \left[\frac{p_{wD}(t_{jD}) - p_{wD}(t_{j+1,D})}{1 - p_{wD}(t_{n+1,D})} \right] \log(t_{n+1,D} - t_{jD}) \quad (B-71)$$

ou na forma dimensional

$$\frac{2\pi kh}{\mu C} \frac{I(\Delta p)}{[p_{wf}(t_{n+1}) - p_0]} = 1,151 t_{ms} + \tilde{s} \quad (B-72)$$

onde,

$$t_{ms} = \sum_{j=0}^n \log(t_{n+1} - t_j) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1}) - p_{wf}(t_j)}{p_{wf}(t_{n+1}) - p_0} \right] \quad (B-73)$$

e

$$\tilde{s} = 1,151 \left[\log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) + 0.351 + 0.87s \right] \quad (B-74)$$

Pela Equação (B-72), um gráfico de $\frac{I(\Delta p)}{[p_{wf}(t_{n+1}) - p_0]}$ contra t_{ms} fornece uma reta de declividade

$$m = 0,183234 \frac{\mu C}{kh} \quad (B-75)$$

O efeito de película pode ser obtido das Equações (B-72) e (B-74), tomando qualquer ponto t_{ms}^* e $[I(\Delta p)/(p_{wf} - p_0)]_{t_{ms}^*}$ na reta. Assim,

$$s = 1,151 \left[\frac{[I(\Delta p)/(p_{wf} - p_0)]_{t_{ms}^*}}{m} - t_{ms}^* - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} \right) - 0.351 \right] \quad (\text{B-76})$$

• Deconvolução no Espaço Real (método A)

Peres⁽¹¹⁾ adaptou a deconvolução no espaço real para o problema do "slug test"⁽¹²⁾⁽¹³⁾.

Considerando o princípio de Duhamel dado por

$$p_{wD}(t_D) = \frac{d}{dt_D} \int_0^{t_D} q_D(\tau) p_{wcD}^*(t_D - \tau) d\tau \quad (\text{B-77})$$

Integrando ambos os lados da Equação (B-77)

$$\begin{aligned} \int_0^{t_D} p_{wD}(\tau) d\tau &= \int_0^{t_D} q_D(\tau) p_{wcD}^*(t_D - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_D} q_D(t_D - \tau) p_{wcD}^*(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{B-78})$$

e considerando a partição

$$0 = t_{0D} < t_{1D} < \dots < t_{nD} < t_{n+1,D} = t_D \quad (\text{B-79})$$

a Equação (B-78) pode ser dada por

$$\int_0^{t_{n+1,D}} p_{wD}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^n \int_{t_{jD}}^{t_{j+1,D}} q_D(t_D - \tau) p_{wcD}^*(\tau) d\tau \quad (\text{B-80})$$

Como p_{wcD}^* é contínua em cada sub-intervalo da partição, a expansão de Taylor truncada no primeiro termo fornece

$$p_{wcD}^*(\tau) = p_{wcD}^*(\hat{t}_{j+1,D}) - (\hat{t}_{j+1,D} - \tau) \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D} \hat{t}_{j+1,D} \quad (\text{B-81})$$

onde, $\hat{t}_{j+1,D}$ é dado por (B-63)

e

$$t_{jD} \leq \tilde{t}_{j+1,D} \leq t_{j+1,D} \quad (\text{B-82})$$

Substituindo (B-81) em (B-80), tem-se

$$\int_0^{t_{n+1,D}} p_{wD}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^n \left\{ p_{wcD}^*(\hat{t}_{j+1,D}) \int_{t_{jD}}^{t_{j+1,D}} q_D(t_D - \tau) d\tau - e_{B,j+1} \right\} \quad (\text{B-83})$$

onde,

$$e_{B,j+1} = \int_{t_{jD}}^{t_{j+1,D}} q_D(t_D - \tau) (\hat{t}_{j+1,D} - \tau) \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(\tilde{t}_{j+1,D}) d\tau \quad (\text{B-84})$$

Usando a definição da integral do "slug test" obtida na Solução Geral do "Slug Test", Equação (B-48) em (B-81) e resolvendo para $p_{wcD}^*(\hat{t}_{n+1,D})$ obtém-se

$$p_{wcD}^*(\hat{t}_{n+1,D}) = \frac{I(p_{wD}) - \text{soma} + E_B}{\int_{t_{nD}}^{t_{n+1,D}} q_D(t_D - \tau) d\tau} \quad (\text{B-85})$$

onde,

$$\text{soma} = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ p_{wcD}^*(\hat{t}_{j+1,D}) \int_{t_{jD}}^{t_{j+1,D}} q_D(t_D - \tau) d\tau \right\} \quad (\text{B-86})$$

$$E_B = \sum_{j=0}^n e_{B,j+1} \quad (\text{B-87})$$

para $t_D < t_{pD}$,

$$q_D(t_D) = -C_{FD} \frac{dp_{wD}}{dt_D} \quad (\text{B-88})$$

onde, t_{pD} = tempo de produção adimensional. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{t_{jD}}^{t_{n+1,D}} (t_D - \tau) &= -C_{FD} \int_{t_{jD}}^{t_{j+1,D}} \frac{dp_{wD}}{dt_D}(t_D - \tau) d\tau \\ &= C_{FD} [p_{wD}(t_D - t_{j+1,D}) - p_{wD}(t_D - t_{jD})] \end{aligned} \quad (\text{B-89})$$

para $j = n$, Eq. (B-89) fica

$$\int_{t_{nD}}^{t_{n+1,D}} q_D(t_D - \tau) d\tau = C_{FD} [1 - p_{wD}(t_D - t_{n,D})] \quad (\text{B-90})$$

usando o fato que $p_{wD}(0) = 1$

Assumindo que o erro E_B pode ser desprezado e considerando as Equações (B-89) e (B-90), a Equação (B-85) fica

$$P_{FCND}(\hat{t}_{n+1,D}) = p_{wcD}^*(\hat{t}_{n+1,D}) = \frac{\left[\frac{I(p_{wD})}{C_{FD}}\right] - soma1}{[1 - p_{wD}(t_D - t_{n,D})]} \quad (B-91)$$

onde,

$$soma1 = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ p_{wcD}^*(\hat{t}_{j+1,D}) [p_{wD}(t_D - t_{j+1,D}) - p_{wD}(t_D - t_{j,D})] \right\} \quad (B-92)$$

Peres⁽¹¹⁾, adotou a notação de Bostic⁽¹²⁾, usando $P_{FCND}(\hat{t}_{n+1,D})$ para denominar p_{wcD}^* ,

$$P_{FCND} = \frac{2\pi kh}{\mu} P_{FCN} \quad (B-93)$$

onde, P_{FCN} é a relação queda de pressão por unidade de vazão

$$P_{FCN}(\hat{t}_{n+1}) = \frac{\left[\frac{I(\Delta p)}{C_F}\right] - soma2}{[p_{wf}(t_{n+1} - t_n) - p_0]} \quad (B-94)$$

onde,

$$soma2 = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ P_{FCN}(\hat{t}_{j+1}) [p_{wf}(t_{n+1} - t_j) - p_{wf}(t_{n+1} - t_{j+1})] \right\} \quad (B-95)$$

Os dados de P_{FCN} , obtidos por B-94, podem ser analisadas pelos métodos de vazão na superfície constante. Considerando que P_{FCND} (ou p_{wcD}^*) pode ser dado pela aproximação logarítmica, a Eq. (B-93) torna-se

$$\frac{2\pi kh}{\mu} P_{FCN}(\hat{t}) = 1,151 \log(\hat{t}) + \hat{s} \quad (B-96)$$

onde,

$\hat{t}$ indica valores calculados de $\hat{t}_{j+1}$ para $\theta_{j+1} = 0,5$

$\hat{s}$ dado pela Eq.(B-74)

A Eq. (B-96) sugere que um gráfico de P_{FCN} contra $\hat{t}$ fornece uma reta de declividade

$$m = 0,183234 \frac{\mu}{k h} \quad (\text{B-97})$$

Usando Eq.(B-74) em (B-93) e considerando o ponto da reta

$$\begin{cases} t^* \\ P_{FCN}(t^*) \end{cases}$$

obtem-se

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN}(t^*)}{m} - \log \left(\frac{k t^*}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\} \quad (\text{B-98})$$

• Deconvolução no Espaço de Laplace (Metodo B)

Peres⁽¹¹⁾, usando a idéia da deconvolução no espaço de Laplace dado por Roumboutsos⁽¹⁴⁾, adaptou o método para o problema do “slug test”. O método transforma os dados do “slug test” para o campo de Laplace onde são *deconvoluidos* e os resultados invertidos para o campo real por um algoritmo de inversão numérica⁽¹⁵⁾.

O princípio de Duhamel aplicado para o “slug test” pode ser dado por

$$p_{wD}(t_D) = \int_0^{t_D} q_D(\tau) \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(t_D - \tau) d\tau \quad (\text{B-99})$$

Aplicando a transformada de Laplace em (B-99)

$$\bar{p}_{wD}(u) = \bar{q}_D(u) [u \bar{p}_{wcD}^*(u) - p_{wcD}^*(0)] \quad (\text{B-100})$$

usando o fato que $p_{wcD}^*(0) = 0$,

$$\bar{p}_{wD}(u) = u \bar{q}_D(u) \bar{p}_{wcD}^*(u) \quad (\text{B-101})$$

onde,

u - variavel de Laplace

$\bar{p}_{wD}$ - pressão no poço adimensional no campo de Laplace

$\bar{p}_{wcD}^*$ - pressão no poço adimensional para vazão na face da formação constante no campo de Laplace

Resolvendo para $\bar{p}_{wcD}^*(u)$, tem-se

$$\bar{p}_{wcD}^*(t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{p}_{wD}(u)}{u \bar{q}_D(u)} \right\} \quad (\text{B-102})$$

Para $t_D < t_{pD}$, a aplicação da transformada de Laplace na Eq. (B-88) dá

$$\bar{q}_D(u) = -C_{FD} [u \bar{p}_{wD}(u) - p_{wD}(0)] \quad (\text{B-103})$$

substituindo (B-103) em (B-102),

$$p_{wcD}^*(t_D) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{p}_{wD}(u)}{u C_{FD} [u \bar{p}_{wD}(u) - p_{wD}(0)]} \right\} \quad (\text{B-104})$$

O que indica que p_{wcD}^* pode ser obtido sem a necessidade do cálculo ou dado medido de vazão.

Os dados de p_{wD} são convertidos para o espaço de Laplace usando a expressão obtida por Roumboutsos e Stewart⁽¹⁴⁾, assumindo uma aproximação linear por partes e considerando uma partição como a da Eq. (B-79).

Desta forma,

$$\bar{p}_{FCN}(u) = - \left\{ \frac{\overline{\Delta p}(u)}{u C_F [u \overline{\Delta p}(u) - \Delta p(0)]} \right\} \quad (\text{B-105})$$

onde, $\overline{\Delta p}(u)$ é a transformada de Laplace de $\Delta p = p_i - p_{wf}$.

p_{FCN} é obtida invertendo (B-105) por algum algoritmo de inversão numérica.

Analogamente ao método de Deconvolução no Campo Real, considerando a solução logarítmica, tem-se

$$\frac{2\pi kh}{\mu} P_{FCN}(\hat{t}) = 1,151 \log(t) + \hat{s} \quad (\text{B-106})$$

que fornece uma reta de declividade

$$m = 0,183234 \frac{\mu}{kh} \quad (\text{B-107})$$

e considerando um ponto na reta

$$\left\{ \begin{array}{l} t^* \\ P_{FCN}(t^*) \end{array} \right.$$

obtem-se

$$s = 1,151 \left\{ \frac{P_{FCN}(t^*)}{m} - \log \left(\frac{kt^*}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\} \quad (\text{B-108})$$

ANEXO C: Soluções Analíticas do Período de Estática

Definindo os seguintes grupos adimensionais adotado por Peres⁽¹¹⁾:

- Pressão estática adimensional para vazão na superfície constante

$$p_{scD} = \frac{2\pi kh(p_i - p_{ws})}{qB\mu} \quad (C-1)$$

- Pressão no poço adimensional em qualquer tempo durante o DST

$$p_{wD} = \frac{p_i - p_w(t)}{p_i - p_o} \quad (C-2)$$

- Pressão estática adimensional

$$p_{sD} = \frac{p_i - p_{ws}(\Delta t)}{p_i - p_o} \quad (C-3)$$

- Tempo adimensional

$$t_D = \frac{kt}{\phi\mu c_i r_w^2} \quad ; \quad 0 < t < t_p + \Delta t \quad (C-4)$$

- Tempo de fechamento adimensional

$$\Delta t_D = \frac{k \Delta t}{\phi\mu c_i r_w^2} \quad ; \quad \Delta t > 0 \quad (C-5)$$

- Raio adimensional

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (C-6)$$

- Coeficiente de estocagem do período de fluxo

$$C_{FD} = \frac{C_F}{2\pi\phi c_i h r_w^2} \quad (C-7)$$

- Coeficiente de estocagem do período de estática

$$C_{SD} = \frac{C_S}{2\pi\phi c_i h r_w^2} \quad (C-8)$$

- Vazão da face da formação adimensional

$$q_D = \frac{q_{sf}\mu}{2\pi kh(p_i - p_0)} \quad (C-9)$$

$$C_F = \frac{\pi r_p^2}{\gamma_w} \quad (C-10)$$

$$C_S = V_w c_{wf} \quad (C-11)$$

onde,

- C_F - coeficiente de estocagem do período de fluxo
- r_p - raio interno da tubulação
- γ_w - peso específico do fluido no poço
- C_S - coeficiente de estocagem do período de estática
- V_w - volume da câmara de estocagem no período de estática
- c_{wf} - compressibilidade do fluido do poço
- p_{wf} - pressão do fluxo no poço
- p_{ws} - pressão de fechamento no poço
- t_p - tempo de produção antes do fechamento
- Δt - tempo de estática desde o início do fechamento
- t - tempo decorrido desde o início do DST.
- q_{sf} - vazão de face de formação durante o DST (fluxo + estática)

• Solução Básica do Crescimento de Pressão (Solução para Vazão Constante na Superfície)

A solução básica do crescimento de pressão pode ser obtida através da aplicação do princípio da superposição :

$$p_{scD}(\Delta t_D) = p_{wcD}(t_D) - p_{wcD}(\Delta t_D) \quad (C-12)$$

Para um escoamento radial monofásico num reservatório infinito homogêneo e isotrópico, com estocagem no poço desprezível, p_{wcD} pode ser aproximado pela solução logarítmica.

$$p_{wcD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{e^\gamma} \right) + s \quad ; t_D > 50 \quad (C-13)$$

onde, γ = constante de Euler = 0,577215665...

Substituindo, (C-13) em (C-12)

$$p_{scD}(\Delta t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t_{pD} + \Delta t_D}{\Delta t_D} \right) \quad (C-14)$$

ou

$$p_{ws}(\Delta t) = p_i - m \log \left(\frac{t_p + \Delta t}{\Delta t} \right) \quad (C-15)$$

onde,

$$m = 0,183234 \frac{qB\mu}{kh} \quad (C-16)$$

O efeito de película é dado por:

$$s = 1.151 \left\{ \frac{p_{1hr} - p_{ws}(\Delta t = 0)}{m} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\} \quad (C-17)$$

A Eq. (C-15) indica que um gráfico semilog de $p_{ws}(\Delta t)$ contra $(\frac{t_p + \Delta t}{\Delta t})$ fornece uma reta de inclinação m cuja extrapolação para $(\frac{t_p + \Delta t}{\Delta t}) = 1$ dá p_i .

Na Indústria do Petróleo este método é comumente denominado de método de Horner.

• Método de Horner Adaptado Para o Teste de Poço não Surgente

No teste de poço não surgente a vazão decresce ao longo do período de fluxo. Desta forma, pode-se dizer que o método de Horner para vazão na superfície constante não é mais aplicável.

O método original de Horner é adaptado para o problema do teste do poço não surgente através da substituição da vazão constante qB da Eq. (C-16) por uma vazão média dada por

$$\begin{aligned} q_{média} &= \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} C_F \frac{dp_{wf}(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= \frac{C_F [p_{wf}(t_p) - p_0]}{t_p} \end{aligned} \quad (C-18)$$

ou seja, $q_{média} = \frac{V_p}{t_p}$

V_p = volume produzido acumulado no período do fluxo

Desta forma, definindo

$$\begin{aligned} m_D &= \frac{q_{média} \cdot \mu}{4\pi k h [p_i - p_0]} = \frac{C_F \mu}{4\pi k h t_p} \left[\frac{p_{wf}(t_p) - p_0}{p_i - p_0} \right] = \\ &= \frac{C_{FD} [1 - p_{wD}(t_{pD})]}{2 t_{pD}} \end{aligned} \quad (C-19)$$

e usando (C-18) e (C-19), a Eq. (C-15) fica

$$\frac{p_{sD}(\Delta t_D)}{m_D} = \ln \left(\frac{t_{pD} + \Delta t_D}{\Delta t_D} \right) = t_{HD} \quad (C-20)$$

Portanto, um gráfico semilog de $p_{ws}(\Delta t)$ contra $(\frac{t_p + \Delta t}{\Delta t})$ fornece uma reta de inclinação m dado por

$$m = 0,183234 \frac{q_{média} \mu}{k h} \quad (C-21)$$

O efeito de película é dado por:

$$s = 1.151 \left\{ \frac{p_i - p_{média}}{m} - \log \left(\frac{k t_p}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 0,351 \right\} \quad (C-22)$$

onde, $p_{média}$ é a média aritmética de p_0 e $p_{wf}(t_p)$.

• Método de Horner com Vazão Variável

Considerando a partição do intervalo $[0, t_{pD}]$ dado por

$$0 = t_{0,pD} < t_{1,pD} < \dots < t_{n,pD} < t_{n+1,pD} = t_{pD} \quad (C-23)$$

e usando princípio da superposição, a solução para o crescimento de pressão para um sistema radial precedido por um fluxo com vazão variável é dado por:

$$\frac{p_{sD}(\Delta t_D)}{q_D(\hat{t}_{n+1,pD})} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{q_D(\hat{t}_{j+1,pD})}{q_D(\hat{t}_{n+1,pD})} \ln \left(\frac{t_{pD} - t_{j,pD} + \Delta t_D}{t_{pD} - t_{j+1,pD} + \Delta t_D} \right) \quad (C-24)$$

onde,

$$t_{j,pD} \leq \hat{t}_{j+1,pD} \leq t_{j+1,pD}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (\text{C-25})$$

Na forma dimensional

$$p_{ws}(\Delta t) = p_i - m_H t_{mH} \quad (\text{C-26})$$

onde,

$$t_{mH} = \sum_{j=0}^n \frac{q_{sf}(\hat{t}_{j+1,p})}{q_{sf}(\hat{t}_{n+1,p})} \log \left(\frac{t_p - t_{j,p} + \Delta t}{t_p - t_{j+1,p} + \Delta t} \right) \quad (\text{C-27})$$

$$m_H = \frac{1,151 q_{sf}(\hat{t}_{n+1,p})}{2\pi \left(\frac{kh}{\mu} \right)} \quad (\text{C-28})$$

$$q_D(\hat{t}_{j+1,pD}) = -C_{FD} \left[\frac{dp_{wD}}{dt_D} \right]_{\hat{t}_{j+1,pD}} \quad (\text{C-29})$$

$$q_{sf}(\hat{t}_{j+1,p}) = C_F \left[\frac{dp_{wf}}{dt} \right]_{\hat{t}_{j+1,p}} \quad (\text{C-30})$$

Peres⁽¹¹⁾ sugere o seguinte procedimento para o cálculo da vazão usando a Eq.

(C-29):

No período $[t_{j,pD}, t_{j+1,pD}]$, considerando $q_D(\hat{t}_{j+1,pD}) = \bar{q}_{j+1,D}$

onde $\bar{q}_{j+1,D}$ é a vazão média entre dois pontos consecutivos da partição (C-23), dado por

$$\begin{aligned} \bar{q}_{j+1,pD} &= \frac{1}{t_{j+1,pD} - t_{j,pD}} \int_{t_{j,pD}}^{t_{j+1,pD}} q_D(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{t_{j+1,pD} - t_{j,pD}} \int_{t_{j,pD}}^{t_{j+1,pD}} t_{j+1,pD} t_{j,pD} - C_{FD} \frac{\partial p_{wD}}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (\text{C-31})$$

$$q_{sf}(\hat{t}_{j+1,pD}) = C_F \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{t_{j+1,p} - t_{j,p}} \right] \quad (\text{C-32})$$

O fator de efeito de película pode ser calculado por

$$\begin{aligned} s &= 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{wf}(t_p)}{m} - \sum_0^{n+1} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{q_{n+1}} \right) \log(t_{n+1} - t_j) - \right. \\ &\quad \left. - \log \left(\frac{K}{\phi \mu c_i r_w^2} \right) - 0,351 \right\} \end{aligned} \quad (\text{C-33})$$

• Solução do Teste de Crescimento de Pressão para Poço Não Surgente

Considerando um escoamento de um fluido de viscosidade constante e de pequena compressibilidade através de um meio poroso homogêneo, isotrópico e de espessura constante, o problema de valor de contorno inicial do DST pode ser colocado como

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (\text{C-34})$$

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad ; \quad 1 < r_D < \infty \quad (\text{C-35})$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \quad ; \quad t_D \geq 0 \quad (\text{C-36})$$

$$p_{wD}(0) = 1 \quad (\text{C-37})$$

$$p_{wD} = \left[p_D - s r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} \quad (\text{C-38})$$

$$\left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \begin{cases} C_{FD} \frac{dp_{wD}}{dt_D} & t_D < t_{pD} \\ C_{SD} \frac{dp_{wD}}{dt_D} & t_D > t_{pD} \end{cases} \quad (\text{C-39})$$

A solução deste problema pode ser dado por

$$\begin{aligned} p_{wD}(t_D) &= \int_0^{t_D} q_D(\tau) \frac{dp_{wD}^*}{dt_D} (t_D - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{t_{pD}} q_D \frac{dp_{wD}^*}{dt_D} (t_D - \tau) d\tau + \int_{t_{pD}}^{t_D} q_D(\tau) \frac{dp_{wD}^*}{dt_D} (t_D - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{C-40})$$

para $t_D > t_{pD}$

Do balanço de material no poço,

$$q_D(t_D) = \begin{cases} -C_{FD} \frac{dp_{wD}}{dt_D} & t_D < t_{pD} \\ -C_{SD} \frac{dp_{wD}}{dt_D} & t_D > t_{pD} \end{cases} \quad (\text{C-41})$$

assim,

$$\begin{aligned} p_{sD}(\Delta t_D) &= -C_{FD} \int_0^{t_{pD}} \frac{dp_{wD}(\tau)}{dt_D} \frac{dp_{wD}^*}{dt_D} (t_{pD} - \tau + \Delta t_D) d\tau - \\ &\quad - C_{SD} \int_0^{\Delta t_D} \frac{dp_{sD}}{d\tau} \frac{dp_{wD}^*}{d\Delta t_D} (\Delta t_D - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{C-42})$$

que é uma solução implícita pois p_{sD} aparece em ambos os lados da Eq. (C-42).

• Método Corrêa ou Método Cartesiano

Corrêa e Ramey⁽²⁹⁾, com o problema de valor de contorno inicial para DST, dado pelas Eqs. (C-31) a (C-36) obtiveram uma solução analítica explícita dado por

$$p_{wD}(t_D) = C_{SD} \frac{dp_{wcD}}{dt_D}(t_D, C_{SD}, s) + (C_{SD} - C_{FD}) \int_0^{t_{pD}} \frac{dp_{wD}}{d\tau}(\tau) \frac{dp_{wcD}}{dt_D}(t_D - \tau, C_{SD}, s) d\tau ;$$

$$t_D > t_{pD} \quad (C-43)$$

Considerando que p_{wcD} pode ser dado pela aproximação logarítmica

$$\frac{dp_{wcD}}{dt_D} = \frac{1}{2t_D} \quad (C-44)$$

Se, $t_D \gg t_{pD}$ a seguinte aproximação é válida

$$\frac{dp_{wcD}}{dt_D}(t_D - t_{pD}, C_{SD}, s) = \frac{dp_{wcD}}{dt_D}(t_D, C_{SD}, s) \quad (C-45)$$

e a integração de (C-43) dá

$$p_{sD}(t_D) = \{C_{FD}[1 - p_{wcD}(t_{pD})] + C_{SD} p_{wcD}(t_{pD})\} \frac{dp_{wcD}}{dt_D}(t_D, C_{SD}, s) \quad (C-46)$$

Substituindo (C-44) em (C-46),

$$p_{sD}(t_D) = \frac{1}{2} \{C_{FD}[1 - p_{wcD}(t_{pD})] + C_{SD} p_{wcD}(t_{pD})\} \frac{1}{t_D} \quad (C-47)$$

e multiplicando e dividindo por t_{pD} o lado direito da Eq. (C-47),

$$\frac{p_{sD}(\Delta t_D)}{m_{cD}} = \frac{t_{pD}}{t_{pD} + \Delta t_D} = t_{cD} \quad (C-48)$$

onde,

$$m_{cD} = \frac{C_{FD}[1 - p_{wD}(t_{pD})] + C_{SD} p_{wD}(t_{pD})}{2 t_{pD}} \quad (C-49)$$

Na forma dimensional,

$$p_{ws}(\Delta t) = p_i - m_c \frac{t_p}{t_p + \Delta t} \quad (\text{C-50})$$

onde,

$$m_c = \frac{\mu}{4\pi k h t_p} \{C_F[p_{wf}(t_p) - p_0] + C_S[p_i - p_{wf}(t_p)]\} \quad (\text{C-51})$$

ou,

$$m_c = \frac{q\mu}{4\pi k h} \left\{ 1 + \frac{C_S[p_i - p_{wf}(t_p)]}{q t_p} \right\} \quad (\text{C-52})$$

considerando a vazão média q no período de fluxo dado por

$$q = \frac{C_F[p_{wf}(t_p) - p_0]}{t_p} \quad (\text{C-53})$$

A Eq. (C-50) sugere que um gráfico cartesiano de $p_{ws}(\Delta t)$ contra $t_c = \frac{t_p}{t_p + \Delta t}$ fornece uma reta de declividade m_c cuja extrapolação para $(\frac{t_p}{t_p + \Delta t}) = 0$ dá p_i .

Soliman⁽³⁰⁾, obteve uma solução do problema do DST para o período de estática quando precedido por um período curto de fluxo, dado por

$$\frac{p_{sD}(\Delta t_D)}{m_D} = -\ln \left(1 - \frac{t_{pD}}{t_{pD} + \Delta t_D} \right) \quad (\text{C-54})$$

que para longos tempos pode ser aproximado por

$$\frac{p_{sD}(\Delta t_D)}{m_D} \approx \left(\frac{t_{pD}}{t_{pD} + \Delta t_D} \right) \quad (\text{C-55})$$

onde, $m_D = m_{cD}$

• Método 1 (Peres)

A solução do problema do DST pode ser dado pela seguinte forma do princípio de Duhamel:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{d}{dt_D} \int_0^{t_D} q_D(\tau) p_{wcD}^*(t_D - \tau) d\tau \quad (\text{C-56})$$

integrando de 0 a t_D

$$\int_0^{t_D} p_{wD}(\tau) d\tau = \int_0^{t_D} q_D(\tau) p_{wcD}^*(t_D - \tau) d\tau \quad (C-57)$$

para $t_D > t_{pD}$

$$\int_0^{t_D} p_{wD}(\tau) d\tau = \int_0^{t_{pD}} q_D(\tau) p_{wcD}^*(t_D - \tau) d\tau + \int_0^{t_D} q_D(\tau) p_{wcD}^*(t_D - \tau) d\tau \quad (C-58)$$

A primeira integral do lado direito de (C-58) leva em conta a variação da vazão no período de fluxo.

Para $t_D = t_{pD}$, a Eq. (C-53) fornece

$$\int_0^{t_D} p_{wD}(\tau) d\tau = \int_0^{t_D} q_D(\tau) p_{wcD}^*(t_{pD} - \tau) d\tau \quad (C-59)$$

Assumindo $q_D = 0$ para $t_D > t_{pD}$ (sem *afterflow* após o fechamento) e $C_{SD} = 0$, e substituindo (C-59) em (C-58)

$$I(p_{sD}) = \int_0^{t_{pD}} q_D(\tau) [p_{wcD}^*(t_D - \tau) - p_{wcD}^*(t_{pD} - \tau)] d\tau \quad (C-60)$$

onde,

$$\begin{aligned} I(p_{sD}) &= \int_0^{t_D} p_{wD}(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_{pD}}^{\Delta t_D} p_{sD}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (C-61)$$

Usando a partição dado por (C-23), a Eq. (C-60) fica

$$\begin{aligned} I(p_{sD}) &= \sum_{j=0}^n \int_{t_{j,pD}}^{t_{j+1,pD}} q_D(\tau) [p_{wcD}^*(t_D - \tau) - p_{wcD}^*(t_{pD} - \tau)] d\tau \\ &\approx \sum_{j=0}^n \left\{ [p_{wcD}^*(t_D - \hat{t}_{j+1,pD}) - p_{wcD}^*(t_{pD} - \hat{t}_{j+1,pD})] \cdot \right. \\ &\quad \left. \int_{t_{j,pD}}^{t_{j+1,pD}} q_D(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (C-62)$$

onde,

$$t_{j,pD} \leq \tau \leq t_{j+1,pD} ; j = 0, 1, \dots, n \quad (C-63)$$

$$\hat{t}_{j+1,pD} = \theta_{j+1} t_{j+1,pD} + (1 - \theta_{j+1}) t_{j,pD} \quad (C-64)$$

$$\tilde{t}_{j+1,pD} = \xi_{j+1} t_{j+1,pD} + (1 - \xi_{j+1}) t_{j,pD} \quad (C-65)$$

considerando, $\theta_{j+1} = \xi_{j+1}$ vem

$$\hat{t}_{j+1,pD} = \tilde{t}_{j+1,pD}$$

Para $\tau \leq t_{pD}$,

$$q_D(\tau) = -C_{FD} \left[\frac{dp_{wD}}{dt_D} \right]_{\tau} \quad (C-66)$$

e a Eq. (C-62) fica,

$$I(p_{sD}) = -C_{FD} \sum_{j=0}^n \left\{ [p_{wcD}^*(t_D - \hat{t}_{j+1,pD}) - p_{wcD}^*(t_{pD} - \hat{t}_{j+1,pD})] \cdot [p_{wD}(t_{j+1,pD}) p_{wD}(t_{j,pD})] \right\} \quad (C-67)$$

Considerando a solução logarítmica para p_{wcD}^* , a Eq. (C-67) torna-se

$$\frac{1}{m_D \Delta t_D} I(p_{sD}) = t_{1D} \quad (C-68)$$

onde,

$$t_{1D} = - \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{t_{pD}}{\Delta t_D} \ln \left(\frac{t_D - \hat{t}_{j+1,pD}}{t_{pD} - \hat{t}_{j+1,pD}} \right) \left[\frac{p_{wD}(t_{j+1,pD}) - p_{wD}(t_{j,pD})}{1 - p_{wD}(t_{pD})} \right] \right\} \quad (C-69)$$

Na forma dimensional, para $\theta_{j+1} = 0$

$$\frac{I(p_{wS})}{\Delta t} = p_i - m_1 t_1 \quad (C-70)$$

onde,

$$t_1 = \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{t_p}{\Delta t} \log \left(\frac{t_p + \Delta t - t_{j,p}}{t_p - t_{j,p}} \right) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{p_{wf}(t_p) - p_0} \right] \right\} \quad (C-71)$$

$$m_1 = 0,183234 \frac{C_F \mu}{kh} \frac{[p_{wf}(t_p) - p_o]}{t_p} \quad (C-72)$$

$$I(p_{ws}) = \int_0^{\Delta t} p_{ws}(\tau) d\tau \quad (C-73)$$

A Eq. (C-70) sugere que um gráfico de $I(p_{ws})/\Delta t$ contra t_1 fornece uma reta de declividade m_1 e cuja extrapolação para $t_1 = 0$ obtem-se p_i

O efeito de película pode ser obtido da seguinte forma:

considerando a partição dada por (C-23) a Eq. (C-56) fica

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{pD}} p_{wD}(\tau) d\tau &= \sum_{j=0}^n \left\{ p_{wcD}^*(t_{pD} - \hat{t}_{j+1,pD}) \int_{t_{j,pD}}^{t_{j+1,pD}} q_D(\tau) d\tau \right\} = \\ &= C_{FD} \sum_{j=0}^n \left\{ p_{wcD}^*(t_{pD} - \hat{t}_{j+1,pD}) [p_{wD}(t_{j,pD}) - p_{wD}(t_{j+1,pD})] \right\} \end{aligned} \quad (C-74)$$

adotando $\hat{t}_{j+1,pD} = t_{j,pD}$ e considerando a solução logarítmica para p_{wcD}^* , (C-74) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{FD} [1 - p_{wD}(t_{pD})]} \int_0^{t_{pD}} p_{wD}(\tau) d\tau &= \\ = 1,151 \left\{ \sum_{j=0}^n \left(\log(t_{pD} - t_{j,pD}) \left[\frac{p_{wD}(t_{j,pD}) - p_{wD}(t_{j+1,pD})}{1 - p_{wD}(t_{pD})} \right] \right) + \right. \\ \left. + \log\left(\frac{4}{e^\gamma}\right) \right\} + s \end{aligned} \quad (C-75)$$

multiplicando e dividindo o lado esquerdo de (C-75) por t_{pD} e resolvendo para s na forma dimensional,

$$\begin{aligned} s &= 1,151 \left\{ \frac{p_i - p_{media}}{m_1} - \log\left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2}\right) - 0,351 - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^n \log(t_p - t_{j,p}) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{p_{wf}(t_p) - p_o} \right] \right\} \end{aligned} \quad (C-76)$$

onde,

$$p_{média} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} p_{wf}(\tau) d\tau \quad (C-77)$$

• Método 2 (Peres)

Usando o princípio de Duhamel na forma dada pela Eq. (C-40) e assumindo que a vazão na face da formação vai para zero após o fechamento

$$p_{sD}(\Delta t_D) = \int_0^{t_{pD}} q_D(\tau) \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(t_D - \tau) d\tau \quad (C-78)$$

considerando a partição de $[0, t_{pD}]$ dado por (C-23), (C-78) fica

$$\begin{aligned} p_{sD}(\Delta t_D) &= \sum_{j=0}^n \int_{t_{j,pD}}^{t_{j+1,pD}} q_D(\tau) \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(t_D - \tau) d\tau \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(t_D - \hat{t}_{j+1,pD}) \int_{t_{j,pD}}^{t_{j+1,pD}} q_D(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (C-79)$$

onde, $\hat{t}_{j+1,pD}$ é dado por (C-64)

Substituindo q_D dado por (C-66) em (C-79),

$$p_{sD}(\Delta t_D) = -C_{FD} \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{dp_{wcD}^*}{dt_D}(t_D - \hat{t}_{j+1,pD}) [p_{wD}(t_{j+1,pD}) - p_{wD}(t_{j,pD})] \right\} \quad (C-80)$$

Considerando a aproximação logarítmica para p_{wcD}^*

$$\frac{\partial p_{wcD}^*}{\partial t_D} = \frac{1}{2(t_D - \hat{t}_{j+1,pD})} \quad (C-81)$$

e usando em (C-80), pode-se chegar a seguinte equação :

$$\frac{p_{sD}(\Delta t_D)}{m_D} = t_{2D} \quad (C-82)$$

onde,

$$t_{2D} = \sum_{j=0}^n \left\{ \left(\frac{t_{pD}}{t_D - \hat{t}_{j+1,pD}} \right) \left[\frac{p_{wD}(t_{j+1,pD}) - p_{wD}(t_{j,pD})}{1 - p_{wD}(t_{pD})} \right] \right\} \quad (C-83)$$

Na forma dimensional, considerando $\theta_{j+1} = 0$

$$p_{ws}(\Delta t) = p_i - m_2 t_2 \quad (\text{C-84})$$

e

$$t_2 = \sum_{j=0}^n \left\{ \left(\frac{t_p}{t_p + \Delta t - t_{j,p}} \right) \left[\frac{p_{wf}(t_{j+1,p}) - p_{wf}(t_{j,p})}{p_{wf}(t_p) - p_0} \right] \right\} \quad (\text{C-85})$$

$$m_2 = \frac{C_F \mu}{4\pi k h} \frac{[p_{wf}(t_p) - p_0]}{t_p} \quad (\text{C-86})$$

A Eq. (C-84) sugere que o gráfico de $p_{ws}(\Delta t)$ contra t_2 fornece uma reta de declividade m_2 cuja extrapolação para $t_2 = 0$ obtem-se p_i .

O método 2 não fornece um meio direto de determinação do efeito de película, por partir da derivada da solução da vazão na face da formação constante, mas

$$m_1 = m_2 \ln 10 \quad (\text{C-87})$$

e o efeito de película pode ser estimado usando (C-87) em (C-76)