

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À
REDACÃO FINAL DA Tese DEFENDIDA
PELO ENG. CLÁUDIO LESSA PAIXÃO E
APROVADO PELA COMISSÃO JULGADORA
EM 30/11/90 Fernando

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA DE PETRÓLEO

DA PAIXÃO

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA
DE ESTRUTURAS RETICULADAS COM APLICAÇÃO
AO LANÇAMENTO DE OLEODUTOS SUBMARINOS

AUTOR : CLÁUDIO LESSA PAIXÃO
ORIENTADOR : FERNANDO IGUTI
CO-ORIENTADOR : VICTOR PRODONOFF

59/90

NOVEMBRO, 1990

59/90

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

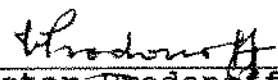
A dissertação "Análise Não Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas com Aplicação ao Lançamento de Oleodutos Submarinos " elaborada por Cláudio Lessa Paixão e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 30 de novembro de 1990.

Banca Examinadora



Fernando Iguti, PhD.



Victor Prodonoff, PhD.



Wilson S. Venturini, PhD.

A minha mãe , Maria José, pela educação recebida, assim como pela compreensão e apoio durante toda a fase de elaboração deste trabalho .

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio e compreensão nas horas que deixamos de compartilhar.

Ao professor Fernando Iguti, orientador deste estudo que, com a sua dedicação, incentivo nos momentos de desânimo, entusiasmo e sobretudo pela amizade demonstrada durante todo este período, tornou-se um elemento fundamental para a sua realização.

Ao professor Victor Prodonoff, pela sugestão do tema, assim como pela ajuda no estabelecimento das diretrizes e objetivos básicos para o desenvolvimento deste trabalho.

À PETROBRAS - Petróleo Brasileiro S.A. pelo apoio financeiro e técnico em todas as etapas.

Aos colegas do mestrado, agradeço pela companhia, fraternidade e exemplar espírito cooperativo existente durante todo o período em que convivemos.

Aos professores e funcionários da UNICAMP, agradeço a atenção e o esforço dedicados.

ABSTRACT

A numerical scheme for the geometric non linear analysis of three dimensional cable and frames structures by the Finite Element Method is presented in this work .

Two computer programs were implemented, one of them uses the modified and relaxed Newton-Raphson method and the other the Quasi-Newton Method for the solution of non linear system of equations.

Simple numerical examples are studied in order to validate the numerical algorithms and the computer programs.

Another specific program was developed in order to simulate the structural behaviour of offshore oil pipelines. This program includes a data pre-processing routine and a linear spring element that simulates the sea bed reaction.

RESUMO

Nesta dissertação, apresenta-se uma metodologia para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais pelo método dos elementos finitos .

Para a implementação do modelo apresentado, desenvolveram-se dois programas de computador os quais variam entre si quanto ao processo utilizado para a linearização do sistema de equações . O primeiro utiliza o método de Newton-Raphson modificado e relaxado, e o segundo baseia-se no processo Quase-Newton .

São apresentados alguns exemplos com o intuito de validar e avaliar os processos utilizados assim como os programas implementados .

Para a simulação do lançamento de oleodutos, desenvolveu-se um programa específico o qual incorpora aos anteriores uma rotina de pré-processamento de dados e um elemento de mola linear para simular a reação do fundo do mar .

SUMÁRIO

	página
Lista de Figuras.....	xi
Lista de Tabelas.....	xvii
Lista de Símbolos.....	xviii
<u>1 INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 Revisão Bibliográfica.....	3
1.1.1 Análise não Linear Geométrica de Pórticos espaciais.....	3
1.1.2 Simulação do Lançamento de Oleoduto.....	6
1.2 Descrição da Dissertação.....	10
<u>2 FORMULAÇÃO TEÓRICA</u>	11
2.1 Introdução.....	11
2.2 Formulação Lagrangeana Atualizada.....	12
2.3 Equações Diferenciais para Viga-Coluna Espacial.....	16
2.4 Modelagem de um Elemento de Viga-Coluna Espacial.....	21
2.5 Carregamento Distribuído.....	22
2.6 Processo de Superposição de Elementos.....	24
2.7 Flambagem.....	25

<u>3. TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR</u>	30
3.1 Introdução.....	30
3.2 Processo Incremental.....	32
3.3 Processos Incrementais Iterativos.....	34
3.3.1 Newton-Raphson.....	34
3.3.2 Quase-Newton.....	38
3.4 Relaxação.....	46
3.5 Atualização de Geometria.....	49
3.6 Processo de Recuperação de Esforços.....	57
3.7 Elemento de Mola Linear.....	59
3.8 Critério de Convergência.....	60
3.9 Métodos de Solução com Deslocamentos Controlados.....	63
<u>4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</u>	65
4.1 Introdução.....	65
4.2 Descrição dos programas.....	66
<u>5. EXEMPLOS NUMÉRICOS</u>	69
5.1 Introdução.....	69
5.2 Pórtico Espacial Linear.....	70
5.3 Cálculo de Carga Crítica.....	71
5.4 Treliça Plana.....	76
5.5 Viga com Imperfeição Geométrica Inicial.....	80

5.6	Viga em Balanço.....	86
5.6.1	Carga Vertical Concentrada na Extremidade.....	86
5.6.2	Carga de Momento na Extremidade.....	88
5.6.3	Carga Distribuida.....	95
6.	<u>SIMULAÇÃO DO LANÇAMENTO DE OLEODUTOS SUBMARINOS</u>	98
6.1	Introdução.....	98
6.2	Configuração Estrutural.....	99
6.3	Condições de Carregamento.....	101
6.4	Modelagem do Problema.....	103
6.5	Exemplos Numéricos.....	106
6.5.1	Caso 1 - Sem reação do solo.....	106
6.5.2	Caso 2 - Com reação do solo.....	107
6.5.3	Caso 3 - Verificação do efeito da tração na barcaça.....	120
6.5.4	Caso 4 - Verificação do efeito do ângulo de lançamento.....	121
7.	<u>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</u>	139
7.1	Introdução.....	139
7.2	Conclusões.....	139
7.3	Sugestões.....	143
	<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	145

APÊNDICE A - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE UM ELEMENTO DE
VIGA-COLUNA ESPACIAL UTILIZANDO O MÉTODO DE GALERKIN .

152

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	- Configurações de equilíbrio para a Formulação Lagrangeana Atualizada	14
Figura 2.2	- Desenho esquemático de um elemento de viga-coluna plano.....	18
Figura 2.3	- Obtenção do equilíbrio entre o carregamento externo e os esforços internos.....	18
Figura 3.1	- Representação esquemática do processo puramente incremental.....	32
Figura 3.2	- Representação esquemática do processo incremental iterativo de Newton-Raphson.....	36
Figura 3.3	- Representação esquemática do processo de Newton-Raphson modificado.....	36
Figura 3.4	- Algoritmo do método de Newton-Raphson relaxado.....	40
Figura 3.5	- Algoritmo para resolução de sistemas de equações não lineares pelo método DFP com relaxamento (Quase-Newton).....	44
Figura 3.6	- Algoritmo utilizado para a obtenção do fator de relaxação.....	48
Figura 3.7	- Sistemas de coordenadas para um elemento de viga coluna espacial.....	50
Figura 3.8	- Ângulos entre os eixos dos sistemas local e global.....	52
Figura 3.9	- Representação esquemática da obtenção do	

	plano principal de inércia através de um ponto P3 auxiliar	54
Figura 3.10 -	Atualização do vetor \hat{y}	56
Figura 5.1 -	Pórtico espacial - Desenho esquemático.....	72
Figura 5.2 -	Pórtico espacial - Sistema de numeração para os deslocamentos livres.....	72
Figura 5.3 -	Gráfico de carga crítica x no de elementos para uma viga em balanço no espaço com carga axial.....	75
Figura 5.4	Treliça plana - Desenho esquemático.....	77
Figura 5.5 -	Variáveis geométricas em uma configuração típica de treliça plana	77
Figura 5.6 -	Gráfico de deslocamento vertical x carga aplicada para treliça plana.....	79
Figura 5.7 -	Viga pré-deformada - Desenho esquemático.....	82
Figura 5.8 -	Comparação entre os resultados numéricos obtidos e a solução analítica de Timoshenko para viga com imperfeição inicial.....	83
Figura 5.9 -	Configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental para a viga com imperfeição inicial.....	84
Figura 5.10 -	Viga em balanço com carga vertical concentrada na extremidade livre - Desenho esquemático.....	87
Figura 5.11 -	Comparação dos resultados numéricos obtidos com a solução analítica proposta por	

	Mattiasson para a viga em balanço com carga vertical concentrada na extremidade livre..	90
Figura 5.12 -	Algumas configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental para a viga em balanço, com carga concentrada na extremidade livre.....	91
Figura 5.13 -	Viga em balanço com carga de momento concentrada na extremidade livre - Desenho esquemático.....	92
Figura 5.14 -	Comparação dos resultados numéricos obtidos com a solução analítica para a viga em balanço com carga de momento concentrada na extremidade livre.....	92
Figura 5.15 -	Algumas configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental ,para a viga em balanço com carga de momento concentrada na extremidade livre.....	94
Figura 5.16 -	Viga em balanço com carga distribuída constante no sistema global - Desenho esquemático.....	96
Figura 5.17 -	Comparação dos resultados numéricos obtidos com a solução analítica proposta por Holden para a viga em balanço com carga distribuída no sistema global.....	97
Figura 6.1 -	Desenho esquemático do método da barcaça de lançamento de oleodutos submarinos.....	100

Figura 6.2 - Desenho esquemático do modelo #1 (Sem reação do fundo do mar).....	105
Figura 6.3 - Desenho esquemático do modelo #2 (Com reação do fundo do mar).....	105
Figura 6.4 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical (Caso 1 Simulação 1).....	108
Figura 6.5 - Posição ao longo da linha x Força axial (Caso 1 Simulação 1).....	109
Figura 6.6 - Posição ao longo da linha x inclinação (Caso 1 Simulação 1).....	110
Figura 6.7 - Posição ao longo da linha x Momento (Caso 1 Simulação 1).....	111
Figura 6.8 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical (Caso 1 Simulação 2).....	112
Figura 6.9 - Posição ao longo da linha x Força axial (Caso 1 Simulação 2).....	113
Figura 6.10- Posição ao longo da linha x inclinação (Caso 1 Simulação 2).....	114
Figura 6.11- Posição ao longo da linha x Momento (Caso 1 Simulação 2).....	115
Figura 6.12- Afastamento horizontal x Afastamento vertical (Caso 1 Simulação 3).....	116
Figura 6.13- Posição ao longo da linha x Força axial (Caso 1 Simulação 3).....	117
Figura 6.14- Posição ao longo da linha x inclinação (Caso 1 Simulação 3).....	118

Figura 6.15-	Posição ao longo da linha x Momento (Caso 1 Simulação 3).....	119
Figura 6.16-	Afastamento horizontal x Afastamento vertical (Caso 2 Simulação 1).....	123
Figura 6.17-	Posição ao longo da linha x Força axial (Caso 2 Simulação 1).....	124
Figura 6.18-	Posição ao longo da linha x inclinação (Caso 2 Simulação 1).....	125
Figura 6.19-	Posição ao longo da linha x Momento (Caso 2 Simulação 1).....	126
Figura 6.20-	Afastamento horizontal x Afastamento vertical (Caso 2 Simulação 2).....	127
Figura 6.21-	Posição ao longo da linha x Força axial (Caso 2 Simulação 2).....	128
Figura 6.22-	Posição ao longo da linha x inclinação (Caso 2 Simulação 2).....	129
Figura 6.23-	Posição ao longo da linha x Momento (Caso 2 Simulação 2).....	130
Figura 6.24-	Afastamento horizontal x Afastamento vertical (Caso 3).....	131
Figura 6.25-	Posição ao longo da linha x Força axial (Caso 3).....	132
Figura 6.26-	Posição ao longo da linha x inclinação (Caso 3).....	133
Figura 6.27-	Posição ao longo da linha x Momento (Caso 3).....	134

Figura 6.28-	Afastamento horizontal x Afastamento vertical (Caso 4).....	135
Figura 6.29-	Posição ao longo da linha x Força axial (Caso 4).....	136
Figura 6.30-	Posição ao longo da linha x inclinação (Caso 4).....	137
Figura 6.31-	Posição ao longo da linha x Momento (Caso 4).....	138
Figura A.1-	Condições de contorno essenciais para termo da flexão plana.....	157

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Resultados obtidos para o pórtico espacial linear.....	73
Tabela 5.2 - Valores correspondentes ao gráfico da fig.5.8.....	85
Tabela 5.3 - Valores correspondentes ao gráfico da fig.5.11.....	90
Tabela 5.4 - Valores correspondentes ao gráfico da fig.5.14.....	93
Tabela 6.1 - Cargas em um oleoduto submarino.....	102
Tabela A.1 - Matriz de rigidez elástica.....	169
Tabela A.2 - Matriz de rigidez geométrica.....	170

LISTA DE SÍMBOLOS

ROMANOS

A	Área da seção transversal
C_{ij}	Cosseno diretor do eixo i em relação ao eixo j
E	Módulo de elasticidade transversal
(F)	Vetor das forças externas
(FI)	Vetor das forças internas
(FD)	Vetor das forças desbalanceadas
G	Módulo de elasticidade transversal
[H]	Aproximação da matriz jacobiana
[I]	Matriz identidade
I_y	Momento de inércia em relação ao eixo local y
I_z	Momento de inércia em relação ao eixo local z
[J]	Matriz jacobiana
K	Constante de elasticidade do fundo do mar
[K_e]	Matriz de rigidez elástica
[K_g]	Matriz de rigidez geométrica
[K_T]	Matriz de rigidez total
L_0	Comprimento do elemento no início do incremento
L_i	Comprimento do elemento após a i-ésima iteração
$L_{2m} ()$	Operador diferencial de ordem 2m
M	Momento fletor
P	Força axial no elemento
q_x, q_y, q_z	Componentes do vetor de cargas distribuídas

$[R]$ Matriz dos cossenos diretores dos eixos do elemento
 R_D Resíduo ponderado no domínio
 R_C Resíduo ponderado no contorno
 $[T]$ Matriz de rotação - Sistema global para local
 T_r Momento torçor
 $\{U\}$ Vetor dos deslocamentos
 u_1, \dots, u_{12} Deslocamentos nodais
 u_x, u_y, u_z Componentes do campo de deslocamento
 V Esforço cortante
 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ Vetores correspondentes aos eixos principais do elemento

GREGOS

α_i Constante multiplicadora do processo de relaxação da direção de procura na iteração i .
 ξ_{xx} Deformação axial incremental do elemento
 Π Energia potencial total
 β_i Função admissível para as condições de contorno do termo de deslocamento axial
 φ_i Função admissível para as condições de contorno do termo de flexão

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação apresenta-se uma metodologia para a análise não-linear geométrica de pórticos espaciais pelo método dos elementos finitos e com base nesta, é apresentada uma simulação do comportamento de um oleoduto submarino quando do seu lançamento.

Nas estruturas de aço, o comportamento inelástico e/ou os grandes deslocamentos, são de grande importância na avaliação estrutural de resistência. A não consideração destes fenômenos na análise pode levar a resultados incompatíveis com o comportamento real, o que, em alguns casos, pode comprometer a segurança da própria estrutura.

A análise não linear, embora tenha sua importância reconhecida pelos projetistas estruturais, ainda é relativamente pouco utilizada. A nível de Brasil, o dimensionamento ainda é predominantemente baseado na análise linear. O desenvolvimento de sistemas de análise não linear em microcomputadores seria uma das formas mais adequadas de introduzir esta análise no cotidiano do projeto estrutural, pois estes estão à disposição, atualmente, da maioria dos projetistas. Depois de vencidas as dificuldades à

introdução de um procedimento não convencional, a análise não linear deverá ser reconhecida e aceita no meio profissional, pois é sem dúvida mais realística e propõe estruturas mais econômicas e seguras que a análise linear.

Quando do lançamento de um oleoduto pela barcaça, uma grande parte deste está suspensa no oceano entre a barcaça e o fundo do mar. A configuração do trecho suspenso dos oleodutos, constitui um problema com não linearidade geométrica, graças aos grandes deslocamentos envolvidos.

Uma melhor avaliação do comportamento estrutural dos oleodutos submarinos, aparece como uma etapa importante em atividades de exploração de reservatórios de petróleo situados sob o fundo do mar, uma vez que em lâminas d'água mais profundas, os oleodutos podem significar um dos elementos de grande investimento na exploração, além do fato de que falhas estruturais podem causar grandes danos ecológicos.

Para lâminas d'água mais profundas, a utilização de uma metodologia que leve em conta a existência de grandes deslocamentos é fundamental, uma vez que a teoria clássica de pequenas deformações e pequenos deslocamentos falha quanto à determinação de tensões e deflexões concernentes ao problema de lançamento de oleoduto.

Normalmente a não linearidade do material não é levada em conta no projeto pois deseja-se que a estrutura trabalhe sempre no regime elástico.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1.1 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS ESPACIAIS

Neste item, apresenta-se uma revisão da literatura relacionada à análise não linear geométrica de pórticos espaciais, iniciando com um breve resumo histórico quanto à origem da utilização do método dos elementos finitos para o estudo de estruturas reticuladas.

O trabalho de Turner et al. [1], publicado em 1956 é considerado como um dos pontos de partida para a formulação do método dos elementos finitos (MEF).

Inicialmente, o seu desenvolvimento se fez baseado no conceito físico de elementos estruturais discretos, sujeitos a cargas concentradas aplicadas nos nós. Porém, a falta de um procedimento matemático rigoroso, além de dificultar a aplicação do MEF a problemas mais complexos, tornava o aprimoramento da sua metodologia lento e desordenado.

O estabelecimento de um enfoque racional e unificado para a representação das características dos elementos só foi conseguido com a aplicação dos métodos variacionais da mecânica dos sólidos, especialmente a partir dos trabalhos publicados na conferência de Wright-Patterson, Ohio, em 1965, e entre outros, os trabalhos de Norrie e deVries [2] e Martin e Carey [3], ambos em 1973.

Após o êxito obtido com os problemas lineares, as atenções se voltaram para os não-lineares. A não linearidade geométrica

tem sido a partir de então, bastante investigada.

O elemento de pórtico plano foi um dos primeiros elementos para análise não-linear geométrica a ser formulado. Em 1965, Martín [4] já publicava um trabalho que incluía, entre outros, uma formulação para este elemento. Desde então várias formulações têm sido apresentadas. A diferença entre elas se encontra basicamente na recuperação dos esforços internos e na consideração, ou não, de termos não lineares de grau mais elevado.

A maior parte dos trabalhos envolvendo não linearidade, utilizando o MEF, se utilizam das Formulações Lagrangeanas como por exemplo Bathe et al. [5]. Quais sejam, as formulações Lagrangeana Total e Lagrangeana Atualizada que diferem entre si com relação à configuração de referência para as variáveis cinemáticas e cinéticas. Na formulação Lagrangeana Total a configuração de referência é a configuração inicial não deformada, enquanto na formulação Atualizada o estado de referência é a última configuração de equilíbrio conhecida.

As muitas considerações envolvidas na análise não-linear vêm sendo estudadas por diversos pesquisadores. Sistemas utilizando análises incrementais que consideram alguns destes aspectos foram tratadas por Gatass [6], onde a não linearidade geométrica de estruturas bidimensionais é analisada para carregamentos dinâmicos; por Young [7], em um estudo de estruturas espaciais submetidas à torção não uniforme; por Orbinson [8], que inclui em seu estudo, além da geométrica, a não

linearidade do material no estudo de estruturas tridimensionais sujeitas a cargas estáticas; por Conci [9], que apresenta uma análise de estruturas de aço de perfis abertos levando em conta o empenamento da seção transversal assim como a não linearidade do material.

O problema da eliminação do movimento de corpo rígido quando da obtenção dos deslocamentos dos elementos, é um dos principais problemas da análise não linear de estruturas reticuladas sujeitas a grandes deslocamentos. Tendo sido, um dos principais motivos da diversidade de trabalhos publicados ultimamente para a análise de tais estruturas.

Entre estes, pode-se citar o trabalho publicado em 1987 por Hsiao e Hon [10] que apresenta uma simples porém eficiente formulação corrotacional para elementos planos de viga-coluna, através da qual pôde-se eliminar a restrição de pequenas rotações entre dois incrementos consecutivos. No mesmo ano, Hsiao et al. [11] publicaram um outro trabalho estendendo a formulação proposta em [10] para um elemento de viga-coluna espacial.

Outros trabalhos, realizam esta eliminação partindo da Formulação Lagrangeana Atualizada. Como por exemplo, o apresentado por Bathe e Bolourchi [12] que propõem uma modificação no processo de recuperação de forças de modo a eliminar o deslocamento axial de corpo rígido.

Uma forma de se obter os esforços no elemento, para grandes deslocamentos e rotações e pequenas deformações, independente da magnitude do incremento de carga é apresentado por Gatass [6], o

qual baseia-se na Formulação Natural.

1.1.2 SIMULAÇÃO - LANÇAMENTO DE OLEODUTOS

A configuração suspensa de um oleoduto submarino, quando do seu lançamento, constitui um problema com não linearidade geométrica devido aos grandes deslocamentos existentes.

As primeiras propostas para a solução deste problema surgiram na década de 60, quando as atividades de perfuração e produção marítima de petróleo começaram a deslocar-se para regiões produtoras situadas sob lâminas d'água cada vez mais profundas.

Em 1967, Plunket [13], propôs a utilização da catenária como sendo a configuração assumida pelo oleoduto. Com base nesta curva, função da profundidade, obteve-se a curva de momento atuante ao longo da linha elástica.

No ano seguinte, 1968, Dixon et al. [14] adotaram como configuração da linha deformada do oleoduto, a catenária rígida, verificando a influência da rigidez na configuração final.

Em 1969, Powers et al. [15] desenvolveram uma forma de solução levando em conta o efeito da rigidez, qualquer condição de contorno, perfil de corrente, flutuadores e movimento lateral da barcaça. O processo utilizado, tinha por base uma análise de valor inicial, ou seja, cada trecho de tubo era calculado isoladamente, partindo das condições da extremidade, levando em conta a compatibilidade de deslocamentos com os trechos

contíguos. Como a configuração era obtida através de acréscimo de segmentos de viga, para comprimentos muito grande, verificava-se uma acumulação do erro até que para um dado afastamento a partir da barcaça, não se tinha mais uma boa exatidão da solução obtida.

Também em 1969, Brewer e Dixon [16], avaliaram a influência da movimentação da barcaça sobre o comportamento de um oleoduto sendo lançado em lâminas d'água de até 100 metros. Incluem em sua análise o efeito da tração aplicada no oleoduto através dos tensionadores posicionados sobre a barcaça.

A principal dificuldade em se obter a configuração de um oleoduto submarino, quando submetido a um carregamento externo, durante o seu lançamento, é o estabelecimento das condições de contorno do problema, uma vez que não se conhece de antemão o ponto em que a linha elástica toca o fundo do mar.

Este problema foi objeto de investigação por Neathery [17], o qual modelou o oleoduto utilizando-se de técnicas de diferenças finitas, assumindo que existe uma única configuração de equilíbrio para uma dada condição de carregamento, que atenda às seguintes condições:

- Inclinação e momento nulo na extremidade inferior.
- Afastamento vertical igual à profundidade da lâmina d'água, para a extremidade superior.

O trabalho de Neathery busca a solução impondo como configuração inicial (sem carregamento) a catenária, com origem na extremidade inferior e com extremidade superior passando por valores pré-estabelecidos para os afastamentos horizontal e

vertical. Em seguida, o afastamento horizontal é variado continuamente até que se tenha a satisfação das condições de contorno de inclinação e momento nulo na extremidade inferior.

Este processo, demonstrou ser bastante custoso, sempre que se parte de uma configuração inicial distante da configuração de equilíbrio, tendo em alguns casos não obtido a convergência.

Um outro modelamento proposto para a análise do lançamento foi apresentado por Ovunc e Mallareddy [18], que utilizaram em seu trabalho o método da matriz de rigidez para se obter a configuração deformada do oleoduto.

A forma da estrutura indeformada é assumida como sendo uma linha reta sobre a superfície da água ou tendo uma inclinação conforme o ângulo da rampa de lançamento. Quando algum ponto do oleoduto atinge o fundo do mar, o seu deslocamento vertical é considerado constante e igual à profundidade da lâmina d'água.

Este processo apresenta como inconveniente, a impossibilidade em se aplicar uma carga de tração de forma a simular a ação do tensionador.

Apesar de, conforme apresentado no item 1.1.1 desta dissertação, a análise não linear geométrica de pórticos espaciais, ter sofrido um grande avanço na última década, a análise do comportamento estrutural de oleodutos durante o lançamento, manteve-se estacionada na década de 70 quando foram publicados os últimos trabalhos com propostas de modelagem. Alguns programas computacionais para simular o lançamento foram colocados no mercado não sendo no entanto de domínio público os

processos de cálculo utilizados.

Os últimos trabalhos publicados quanto à avaliação estrutural de oleodutos, avaliam os mesmos quando em operação, sob os mais variados aspectos, tais como: Flambagem lateral de oleodutos com restrição de deslocamento axial apresentado por Palmer e Boldry [19] em 1974; o efeito da camada de areia sobre o oleoduto depositado sobre o fundo do mar, quanto a sua resistência mecânica, por Kruigt et al. [20] em 1988; avaliação dos esforços devido às ondas em oleodutos sobre o fundo do mar, apresentado por Wilkinson et al. [21] em 1988, entre outros.

O trabalho apresentado em 1989 por Timmersmans [22], apresenta alguns aspectos práticos concernentes à seleção e ao lançamento de oleodutos em lâminas d'água profundas, sem no entanto apresentar procedimentos de cálculo a partir dos quais foram obtidas as conclusões apresentadas.

No Brasil, os únicos trabalhos que se tem conhecimento, quanto à questão do lançamento de oleodutos em águas profundas, foram desenvolvidos por Prodonoff e Ferreira [23] e [24] e publicados em 1976. Estes trabalhos apresentam uma modificação e extensão do programa de computador desenvolvido por Neathery [17], incluindo neste, um processo de automatização da busca do afastamento horizontal correspondente ao equilíbrio, e um processo de cálculo das tensões a partir da linha elástica da estrutura deformada.

1.2 DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em seis capítulos além desta introdução.

O capítulo dois, apresenta a formulação teórica necessária para a análise de estruturas reticuladas espaciais, assim como uma menção sobre o cálculo da carga crítica de flambagem.

O capítulo três enfoca a resolução do sistema não-linear, os procedimentos para a atualização da geometria da análise Lagrangeana Atualizada, o processo utilizado para a obtenção dos esforços internos, o elemento de mola linear, o critério de convergência adotado, além de apresentar o método de solução com deslocamentos controlados.

O capítulo quatro apresenta uma descrição sucinta dos programas implementados para a realização deste estudo.

O capítulo cinco fornece os exemplos numéricos utilizados na validação dos programas desenvolvidos para a análise de estruturas reticuladas sujeitas a grandes deslocamentos.

O capítulo seis apresenta os aspectos concernentes à simulação do lançamento de oleodutos submarinos, assim como alguns exemplos desenvolvidos.

No capítulo sete, tem-se as conclusões quanto aos efeitos da não linearidade geométrica na resposta estrutural, e quanto ao modelo proposto para a simulação do lançamento de oleodutos. Apresentam-se ainda, algumas sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 2 FORMULAÇÃO TEÓRICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a formulação teórica necessária para a análise de estruturas reticuladas, especialmente as sujeitas a grandes deslocamentos e pequenas deformações, modeladas através de elementos finitos de viga-coluna espacial. Apresenta-se ainda um estudo sobre o cálculo da carga crítica de flambagem.

As soluções das equações diferenciais da viga-coluna foram obtidas numericamente através da discretização da estrutura em segmentos retos, cuja rigidez é obtida através de funções aproximada do campo de deslocamentos ao longo dos elementos. Desta maneira, tem-se um modelamento do comportamento do elemento diferente do que teríamos caso optássemos por uma solução utilizando métodos de diferenças finitas, uma vez que neste caso teríamos o comportamento somente de pontos discretos ao longo da estrutura, sem interpolação intermediária.

Em uma análise estrutural são freqüentes os casos em que se faz necessário considerar as equações diferenciais levando-se em

conta efeitos de não-linearidade, os quais podem ser de dois tipos:

- Não linearidade geométrica, resultante de grandes variações em relação à configuração inicial da estrutura.

- Não linearidade do material, presente nas relações entre as tensões e deformações atuantes no elemento.

Neste trabalho somente o primeiro tipo de não linearidade será objeto de estudo, pois é usual que se especifique que os oleodutos não sofram deformações permanentes.

2.2 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA

Uma análise estrutural baseada na teoria clássica das pequenas deformações e pequenos deslocamentos, assume uma relação linear entre o vetor deslocamento $\{U\}$ e o vetor de carga $\{F\}$. Relação esta, que pode ser representada pela equação abaixo, calculada em um único passo.

$$[K_e] \{U\} = \{F\} \quad (2.1)$$

Este fato, entretanto, não é mais válido para uma análise com não linearidade geométrica, uma vez que para elementos sujeitos a grandes deslocamentos, o equilíbrio deve ser avaliado para uma nova configuração diferente da original.

No caso linear todas as integrações necessárias para a formulação do método dos elementos finitos, são efetuadas em relação à configuração original, o que faz com que $[K_e]$ e $\{F\}$

independam dos deslocamentos do sistema.

Uma vez havendo esta dependência da matriz de rigidez $[K_e]$ e do vetor de carga $\{F\}$ em relação aos deslocamentos dos elementos, verifica-se a necessidade de se utilizar um processo iterativo para se obter a condição de equilíbrio.

Pode-se reduzir as dificuldades para a obtenção da condição de equilíbrio através da utilização de um processo incremental, passo a passo, no qual a carga total aplicada é dividida em pequenas parcelas. E cada parcela é aplicada incrementalmente até se atingir a carga total.

Apesar de podermos resolver problemas envolvendo não linearidade geométrica de várias maneiras, os processos estudados e implementados neste trabalho, se valem da derivação incremental do equilíbrio do sistema os quais baseiam-se na Formulação Lagrangeana Atualizada, que é objeto de estudo a seguir.

A principal característica da Formulação Lagrangeana na derivação do movimento de um corpo é a utilização dos pontos do corpo em um dado instante, como sendo o referencial para se avaliar o comportamento desses pontos, quanto às grandezas inerentes à configuração.

A utilização da configuração inicial, não deformada, como configuração de referência identifica a Formulação Lagrangeana Total.

Na Formulação Lagrangeana Atualizada utiliza-se como referencial a configuração de equilíbrio imediatamente anterior ao incremento de uma parcela da carga.

utilizadas na Formulação Lagrangeana Atualizada.

Esta formulação é contrastante com a Euleriana, bastante utilizada em problemas de mecânica dos fluidos, no qual a análise é realizada em função do escoamento do fluido através de um volume de controle não estacionário.

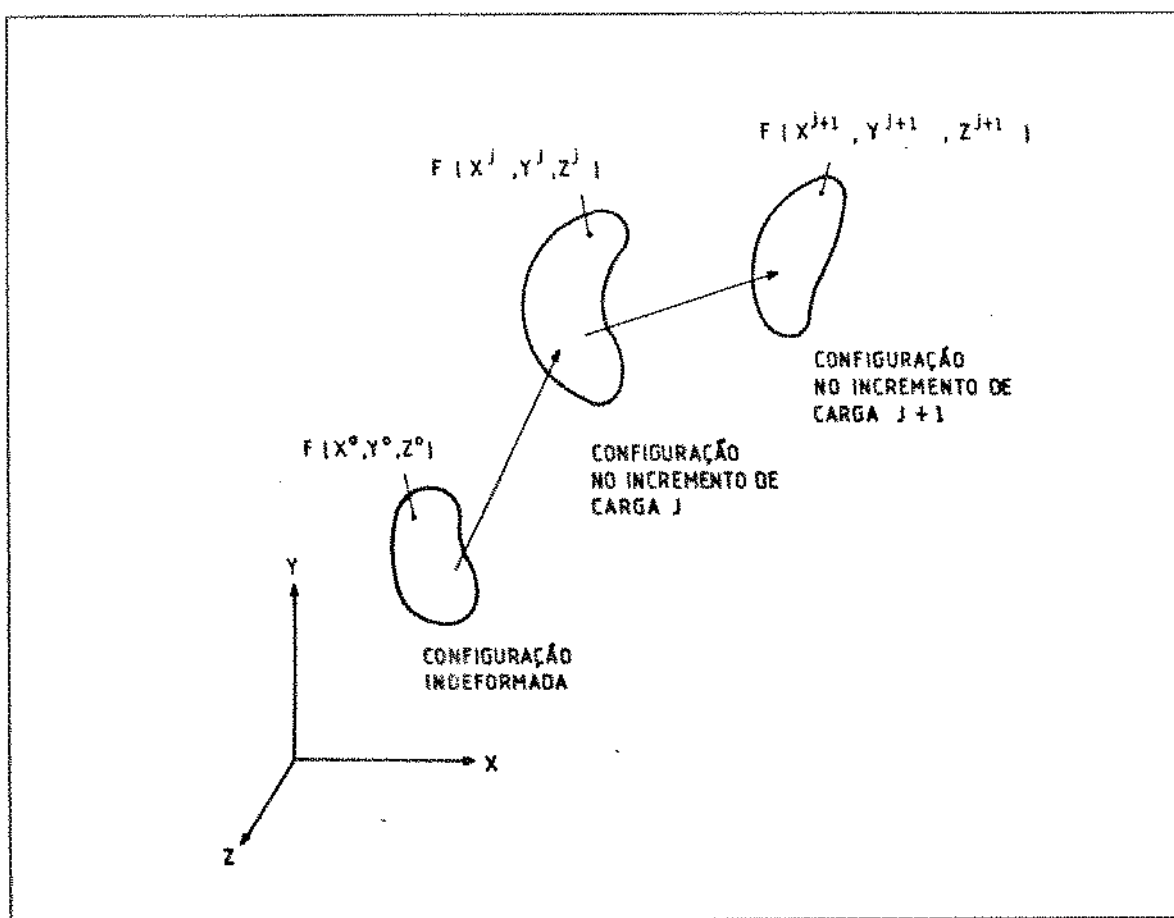


Fig. 2.1 - Formulação Lagrangeana Atualizada
configurações de referência

Tendo em vista este fato, não é muito conveniente por exemplo, utilizar um sistema de referência Euleriano para problemas estruturais que envolvessem grandes deslocamentos, pois haveria a necessidade de se mudar o volume de controle continuamente, dificultando bastante a análise.

Para a formulação do método dos elementos finitos utilizando o método dos resíduos ponderados, faz-se necessário adotar um referencial para o campo de deslocamento. Neste trabalho foi utilizado como referencial a última configuração de equilíbrio obtida, ou seja, utilizou-se a Formulação Lagrangeana Atualizada.

Por esta formulação, a cada incremento no nível de carga, a configuração de equilíbrio do nível anterior é considerada como sendo a configuração inicial de referência. A cada novo incremento de carga tem-se um novo problema, partindo do equilíbrio do passo anterior e utilizando as coordenadas nodais e os esforços internos de cada elemento para se obter a rigidez do sistema no passo inicial e tomando a variação incremental do carregamento como sendo o esforço externo atuante.

O fator preponderante na opção pela Formulação Lagrangeana Atualizada é sua maior simplicidade de compreensão e implementação quando comparada com a Formulação Lagrangeana Total. Tendo sido, por isso, bastante utilizada para análise de problemas que envolvem grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Além disto, segundo Tang [25], este tipo de formulação é mais eficiente nos casos em que existam grandes rotações, pois as operações com os ângulos referidos à configuração atualizados são menos sensíveis a erros de representação.

Entre os trabalhos que usam a Formulação Lagrangeana Atualizada no desenvolvimento de elementos finitos com não linearidade geométrica, pode-se citar os de Bathe [5], Argyris [26], Gatass [6] e Conci [9], entre outros.

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA VIGA-COLUNA ESPACIAL

Existem na literatura diversas formas de se obter as equações diferenciais de equilíbrio de viga-coluna. Algumas bastante simplificadas apresentadas por diversos autores em livros básicos de elasticidade, entre os quais Timoshenko [27], que parte do equilíbrio de um pequeno elemento submetido apenas a esforços devido a forças axiais e transversais, até formulações mais complexas, como a apresentada por Chen e Atsuta [28] que levam em conta efeitos acoplados de torção e empenamento.

As equações diferenciais utilizadas neste trabalho, assim como as hipóteses adotadas para a validade das mesmas, serão apresentadas a seguir.

Inicialmente, é desenvolvida a equação diferencial para uma viga-coluna plana, submetida apenas a esforços de flexão e carga axial.

Esta dedução é feita a partir do equilíbrio de um elemento

de viga infinitesimal submetido a um carregamento lateral distribuído, e uma carga axial P. Este elemento está representado na figura (2.2).

A relação entre o carregamento externo e os esforços internos é obtida a partir do equilíbrio do elemento da figura (2.3).

Do equilíbrio de forças na direção \overline{oy} tem-se,

$$\sum F_y = V - q_y dx - (V + dV) = 0 \quad (2.2)$$

De onde:

$$q_y = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.3)$$

onde,

q_y - carregamento distribuído lateral

V - esforço cortante

Do equilíbrio de momento tem-se:

$$\sum M = -M - q dx \frac{dx}{2} - (V + dV) dx + (M + dM) + P \frac{du_y}{dx} dx = 0 \quad (2.4)$$

Desprezando os termos diferenciais de segunda ordem, tem-se:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} + P \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.5)$$

Desprezando os efeitos devido à deformação por cisalhamento

momento em função do raio de curvatura do eixo da viga deformada:

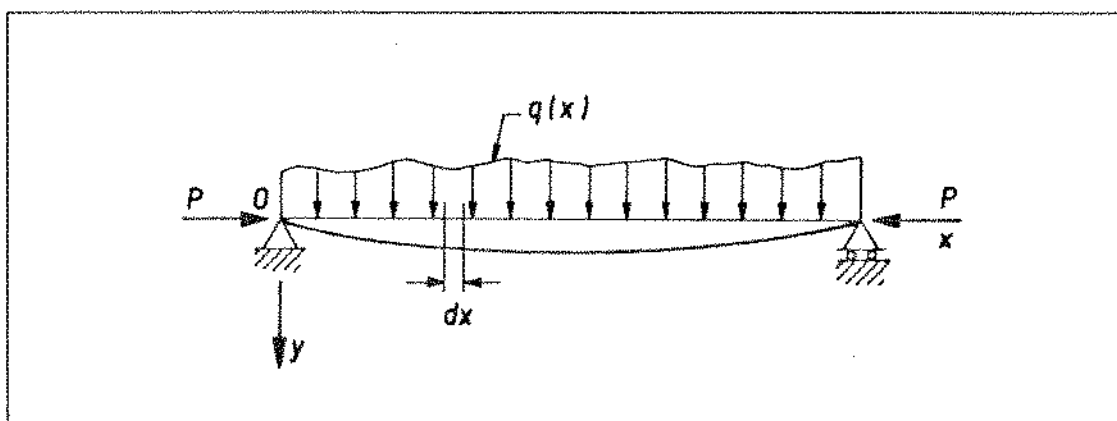


Fig. 2.2 - Desenho esquemático de uma viga-coluna plana.

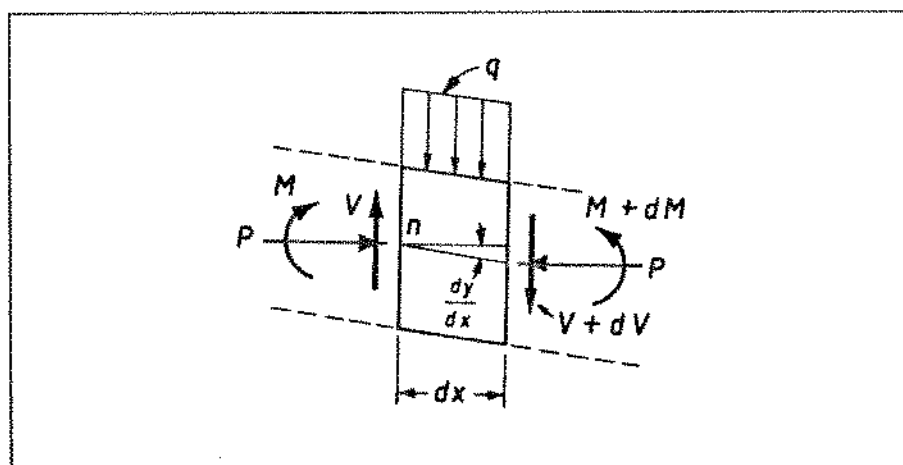


Fig. 2.3 - Obtenção do equilíbrio entre o carregamento externo e os esforços internos para uma viga coluna plana.

$$EI_z = \frac{\partial^2 u_y(x)}{\partial x^2} = -M(x) \quad (2.6)$$

$$EI_z \frac{\partial^2 u_y(x)}{\partial x^2} = -M(x) \quad (2.6)$$

Onde EI_z corresponde à rigidez à flexão da viga.

Combinando (2.6), (2.5) e (2.3) obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = q_y(x) \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é válida para um elemento de viga-coluna plano conforme o apresentado acima, no qual as deformações por cisalhamento e axial foram desprezadas, além de se supor pequenos deslocamentos laterais.

Objetivando levar em conta a deformação axial constante do elemento adota-se a seguinte expressão para o cálculo do esforço axial P .

$$EA \frac{\partial u_x}{\partial x} = P \quad (2.8)$$

Para a obtenção das equações (2.7) e (2.8), admitiu-se que os valores de EI_z , EA e P não variam ao longo do elemento.

Das equações (2.8) e (2.7), pode-se constatar que o deslocamento lateral (u_y) depende do valor da carga axial aplicada no elemento, que por sua vez depende do deslocamento axial (u_x). Verifica-se desta maneira a existência de um acoplamento entre os deslocamentos lateral e axial.

Repetindo o processo para uma viga no plano principal $\bar{x}\bar{z}$, obtém-se equações similares, desta vez acoplando u_z e u_x .

$$EI_y \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = q_z \quad (2.9)$$

O modelamento realizado neste trabalho utiliza apenas estes dois acoplamentos e assume uma independência entre os demais deslocamentos do elemento. O deslocamento da viga em torno do seu próprio eixo devido à existência de momento de torção aplicado, é analisado de forma independente utilizando a teoria clássica da elasticidade para vigas prismáticas, a qual pode ser encontrada em diversos artigos da elasticidade clássica entre os quais, o apresentado por Ugural [29] que fornece a seguinte equação:

$$GI_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = - T_r \quad (2.10)$$

O acoplamento da torção com os deslocamentos laterais e axial pode ser obtido conforme apresentado por Chen e Atsuda [28], substituindo as equações (2.7) e (2.9) por:

$$EI_z \frac{d^4 u_y}{dx^4} - T_r \frac{d^3 u_z}{dx^3} + P \frac{d^2 u_y}{dx^2} = q_y \quad (2.11)$$

$$EI_y \frac{d^4 u_z}{dx^4} + T_r \frac{d^3 u_y}{dx^3} + P \frac{d^2 u_z}{dx^2} = q_z \quad (2.12)$$

Com a presença do torque (T_r), as duas equações para a deflexão tornam-se acopladas, ao contrário do que ocorre com

(2.7) e (2.9). Entretanto, a solução destas equações torna-se muito mais complicada.

Tendo em vista a complexidade inerente ao acoplamento da torção, neste trabalho a torção é tratada de forma desacoplada e o comportamento do elemento de viga-coluna espacial é regido por (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10).

2.4 MODELAGEM DE UM ELEMENTO DE VIGA-COLUNA ESPACIAL

O conceito básico que norteia o método dos elementos finitos é o fato de que uma estrutura complexa pode ser modelada através da sua subdivisão em um número finito de elementos, cujo comportamento pode ser estudado independentemente dos demais elementos, utilizando-se para isto de um conjunto de funções interpoladoras que aproximam os campos de deslocamentos ao longo do elemento.

Estas funções são escolhidas de forma que se imponha a continuidade dos deslocamentos em todos os pontos do sistema, e que se garanta a satisfação das condições de contorno essenciais.

O método dos elementos finitos pode ser formulado a partir dos campos de deslocamentos, de tensões ou de campos mistos. No entanto, a formulação baseada nos campos de deslocamentos é a mais utilizada dada a sua facilidade de implementação computacional, além do fato de que geralmente os deslocamentos são as incógnitas naturais do sistema. Tendo sido por estes motivos, adotado neste trabalho.

A formulação do sistema de equações de um elemento de viga-coluna, regido pelas equações diferenciais apresentadas no item 2.3, está desenvolvida no apêndice A através do método de Galerkin e fornece o seguinte sistema válido para um elemento:

$$\left(\left[K_E \right] + \left[K_G \right] \right) \{ \Delta U \} = \{ \Delta F \} \quad (2.13)$$

onde :

$[K_E]$ - Matriz de rigidez do elemento dada pela tabela A.1

$[K_G]$ - Matriz geométrica do elemento dada pela tabela A.2

$\{ \Delta U \}$ - Incremento no vetor de deslocamentos do elemento

$\{ \Delta F \}$ - Incremento no vetor de carregamento

2.5 CARREGAMENTO DISTRIBUIDO

Conforme verificado no item 2.4, a modelagem utilizada não leva em conta as cargas distribuídas na montagem das matrizes de rigidez e geométrica, assim como do vetor de carga.

Neste trabalho, entretanto, consideram-se cargas distribuídas constantes nos sistemas local e global, atribuindo cargas concentradas equivalentes para os nós do elemento.

As componentes da carga distribuída no sistema local é dada pelo vetor:

$\{ Q(1), Q(2), Q(3), Q(4), Q(5), Q(6) \}$. De onde, obtendo-se as

reações na extremidade de um elemento de viga-coluna bi-engastado sujeito a este carregamento obtém-se as seguintes expressões para as forças nodais equivalentes:

$$F(1) = \frac{1}{2} Q(1) L \qquad F(2) = \frac{1}{2} Q(2) L$$

$$F(3) = \frac{1}{2} Q(3) L \qquad F(4) = \frac{1}{2} Q(4) L$$

$$F(5) = \frac{1}{12} Q(3) L^2 \qquad F(6) = -\frac{1}{12} Q(2) L^2$$

$$F(7) = \frac{1}{2} Q(1) L \qquad F(8) = \frac{1}{2} Q(2) L$$

$$F(9) = \frac{1}{2} Q(3) L \qquad F(10) = \frac{1}{2} Q(4) L$$

$$F(11) = \frac{1}{12} Q(3) L^2 \qquad F(12) = \frac{1}{12} Q(2) L^2$$

onde:

- Q(1) - Carga axial distribuída
- Q(2) e Q(3) - Cargas laterais distribuídas
- Q(4) - Momento torçor distribuído
- Q(5) e Q(6) - Momento fletor distribuído

2.6 PROCESSO DE SUPERPOSIÇÃO DE ELEMENTOS

A equação (2.13) válida para um elemento de viga-coluna espacial pode, através de um processo de superposição, ser estendida para toda a estrutura permitindo uma análise do sistema como um todo.

A obtenção da matriz total do sistema baseia-se na integração por sub-domínios, pertinente à teoria dos resíduos ponderados, apresentada no apêndice A.

Tendo em vista que em elementos contíguos deve-se impor a compatibilidade de deslocamentos, e que se pode desprezar os deslocamentos nodais correspondentes às restrições de movimento, monta-se a matriz do sistema pela simples superposição das matrizes de cada elemento, uma vez definida a numeração dos deslocamentos livres de cada nó.

O processo utilizado para se montar a matriz do sistema é conhecido como processo de rigidez direta, como pode ser visto em Rubinstein [30].

O método consiste em se montar a matriz de cada elemento relacionando a cada matriz um vetor contendo a numeração das variáveis. O grau de liberdade correspondente a cada linha ou coluna da matriz, é indicado pelo elemento correspondente do vetor de numeração da variável. Com base neste recurso, pode-se montar a matriz global do sistema onde cada linha e coluna está associada a um grau de liberdade.

Convém ressaltar que para se fazer a superposição, todas as matrizes devem estar relacionadas a um mesmo sistema de referência.

2.7 FLAMBAGEM

Neste item são apresentados os conceitos fundamentais concernentes ao problema de estabilidade elástica de uma estrutura reticulada, quando submetida a um determinado carregamento.

Este problema é importante em alguns tipos de estruturas, na área de engenharia de petróleo, que apresentam uma das dimensões bastante reduzidas, como por exemplo "risers", oleodutos submarinos e colunas de perfuração.

Qualifica-se como estabilidade elástica, a propriedade das equações diferenciais do sistema de fornecer soluções de equilíbrio.

Em problemas de mecânica estrutural, um rompimento da estabilidade configura-se pelo surgimento de grandes deslocamentos sem que seja necessário um aumento do carregamento aplicado.

A seguir, é apresentado o conceito de carga crítica assim como os fundamentos teóricos envolvidos neste cálculo.

A partir da equação (2.13), pode-se escrever:

$$\left(\left[K_E \right] + \lambda \left[K_G \right]^* \right) \{U\} = \lambda \{F\}^* \quad (2.14)$$

sendo que

$$\left[K_G \right] = \lambda \left[K_G \right]^* \quad (2.15)$$

e

$$\{F\} = \lambda \{F\}^* \quad (2.16)$$

Onde $\left[K_G \right]^*$ é uma matriz geométrica para um valor unitário do nível de carga aplicado ($\lambda=1$).

As matrizes $\left[K_E \right]^*$ e $\left[K_G \right]^*$ são construídas para um determinado nível de carga em que se quer aferir a estabilidade do sistema, e são baseadas na configuração inicial da estrutura.

A partir de (2.14), podemos obter a seguinte expressão para o vetor deslocamento.

$$\{U\} = \left(\left[K_E \right] + \lambda \left[K_G \right]^* \right)^{-1} \lambda \{F\}^* \quad (2.17)$$

Da definição formal da matriz inversa como sendo a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, notamos que os deslocamentos $\{U\}$ tendem para o infinito quando:

$$\left| \left[K_E \right] + \lambda \left[K_G \right]^* \right| = 0 \quad (2.18)$$

A equação (2.18) pode ser resolvida através de rotinas para

cálculo de autovalores e autovetores. Neste trabalho foi implementada uma rotina baseada no método de Jacobi generalizado, conforme apresentado por Bathe [35].

A partir dos valores obtidos para λ , pode-se obter os vetores de carga crítica através da relação (2.16). O menor valor de λ implica na obtenção da primeira carga crítica, sendo este geralmente o valor mais importante.

O processo descrito anteriormente é conhecido como problema de estabilidade inicial uma vez que a obtenção das cargas críticas se dá a partir das matrizes montadas para a condição inicial.

Utilizando este processo para a avaliação da estabilidade de uma estrutura, pode-se estar incorrendo em erros significativos, uma vez que foi assumida uma linearidade da matriz geométrica com o carregamento aplicado, sem se levar em conta o efeito da variação da geometria quando da montagem das matrizes para o cálculo dos autovalores.

Logo, para problemas que envolvam grandes deslocamentos (principalmente grandes rotações), a carga crítica deve ser verificada através de um processo incremental-iterativo, avaliando-se a cada passo a variação do vetor deslocamento. Consegue-se desta maneira uma melhor descrição do comportamento da estrutura.

É importante notar que o conceito de carga crítica de flambagem é puramente matemático e que muitas vezes a carga crítica pode ser bastante diferente da real, dependendo de

fatores outros como sensibilidade do comportamento da estrutura às imperfeições geométricas e nível de simplificação no modelamento da equação diferencial.

Uma forma alternativa para se interpretar o estado de estabilidade de um sistema, é a partir da minimização da energia potencial total.

Sendo Π a energia potencial total da estrutura, se Π cresce durante a aplicação de um campo admissível de deslocamento virtual então a configuração de equilíbrio é definida como sendo estável. Se Π decresce ou permanece constante a configuração é instável.

A partir do cálculo variacional, pode-se obter a seguinte relação, apresentada por Zienkiewicz [31].

$$\delta^2\Pi = \delta(\delta\Pi) = \left\{ \left(\frac{\partial\Pi}{\partial u} \right)^T \right\} (\delta U) = (\delta U)^T [K_T] (\delta U) \quad (2.19)$$

De onde se conclui que para se ter um sistema estável, a matriz $[K_T]$ deve ser positiva definida. Este fato, constitui um importante critério para se verificar a estabilidade do sistema a qualquer instante.

O rompimento da estabilidade de uma estrutura pode ocasionar o surgimento de deformações plásticas ou até mesmo a destruição total do sistema. Logo, quando do projeto de uma estrutura, faz-se necessário uma avaliação de comportamento desta quando submetida às cargas de projeto.

Apesar de que na maior parte dos casos a perda da

estabilidade seja bastante danosa, existem alguns exemplos em que mesmo após a perda inicial de seu equilíbrio a estrutura continua a resistir e desempenhar com segurança as suas funções em uma nova configuração de equilíbrio. Como um exemplo típico, tem-se o caso de uma coluna de perfuração que quando em operação, apresenta-se geralmente flambada, tendo no entanto os seus deslocamentos limitados pela parede do poço no qual está inserida. Neste caso, percebe-se a importância de se realizar o estudo do comportamento não linear elástico, quase estático, da estrutura.

CAPÍTULO 3 TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo apresentar os dois métodos numéricos utilizados para a resolução de problemas de análise estrutural com não linearidade geométrica, os procedimentos para atualização da geometria da análise Lagrangeana Atualizada, o processo implementado de recuperação de esforços, o elemento de mola linear, além de apresentar o critério de convergência adotado.

3.2 PROCESSO INCREMENTAL

A base do processo incremental, é a divisão da carga total aplicada em vários incrementos menores. Se o incremento for suficientemente pequeno, é possível que o comportamento da estrutura se aproxime do linear ao longo de cada incremento.

Usualmente estes incrementos de carga apresentam a mesma magnitude, sendo esta a forma utilizada neste trabalho, uma vez que a utilização de incrementos de tamanhos variados, requereria um conhecimento prévio do comportamento da estrutura para que se pudesse atribuir incrementos menores nas faixas em que se tenha um maior desvio da condição linear.

Quando se estuda um problema de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e pequenas deformações, conforme já analisado no capítulo anterior, não se tem mais uma relação linear entre as cargas aplicadas e os deslocamentos das mesmas. É necessário portanto obter o estado de equilíbrio entre o carregamento aplicado e os esforços internos. No processo puramente incremental, não se realiza esta busca da condição de equilíbrio, assumindo como solução para cada estágio, o resultado da análise linear correspondente ao passo.

Na figura (3.1) tem-se uma representação esquemática do processo incremental.

Neste processo, parte-se do pressuposto que se conhece a condição de equilíbrio, configuração geométrica e esforços internos do passo anterior, de forma que se possa, com base nestes dados, montar a matriz de rigidez e obter a variação do vetor deslocamento entre os dois níveis consecutivos de carregamento.

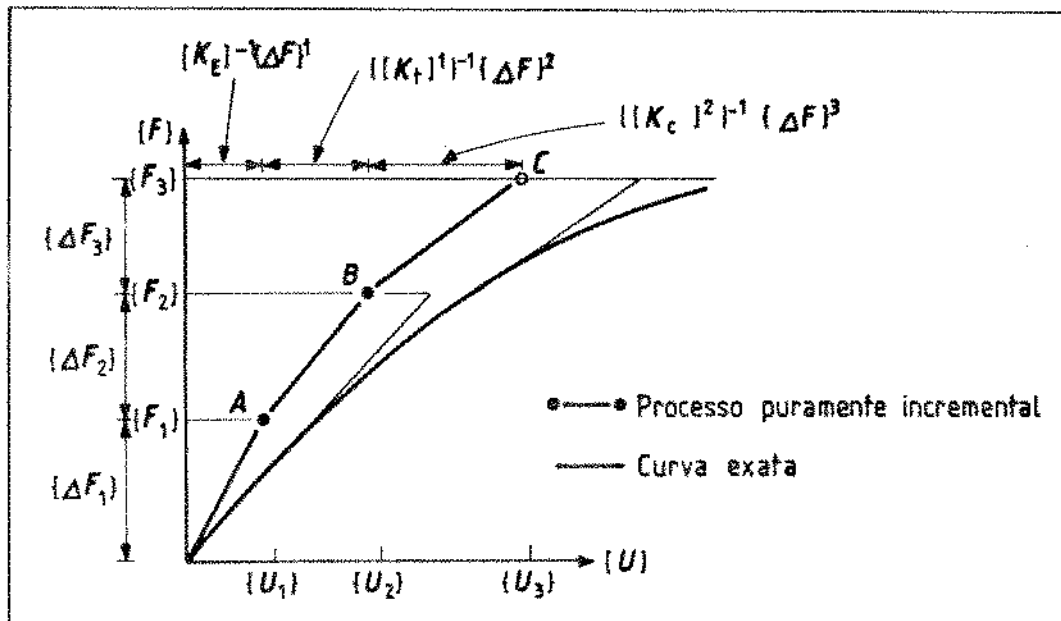


Fig. 3.1 - Representação esquemática do processo puramente incremental

O sistema de equações a ser resolvido em cada passo, é:

$$[K_t]^j \{\Delta U\}^j = \{\Delta F\}^j \quad (3.1)$$

$$\{\Delta F\}^j = \{F\}^{j+1} - \{F\}^j \quad (3.2)$$

onde:

$[K_t]^j$ - Matriz de rigidez tangente no início do incremento j .

$\{\Delta F\}^j$ - Variação do vetor carregamento no incremento.

$\{\Delta U\}^j$ - Variação do vetor deslocamento no incremento.

A cada nível de carga, as equações são tratadas como sendo

lineares, uma vez que o resultado obtido para $(\Delta U)^j$ por (3.1) é assumido como sendo a solução neste incremento.

A matriz de rigidez tangente $[K_T]$, assume diferentes valores a cada incremento de carga, uma vez que esta depende da configuração dos elementos, assim como dos esforços internos no nível anterior.

Os deslocamentos incrementais obtidos, são acumulados de forma a se ter o deslocamento total em qualquer nível de carga. Este processo é repetido até se atingir a carga total aplicada à estrutura.

De posse dos deslocamentos totais ao término do incremento, pode-se atualizar as coordenadas e calcular os esforços internos da estrutura, para então passar para o incremento seguinte.

O método puramente incremental, assemelha-se ao método de Euler utilizado na resolução de equações diferenciais através de um processo passo a passo, e apresenta como principal vantagem o fato de não envolver um processo iterativo para obtenção do equilíbrio, o que representa além de uma maior facilidade de implementação numérica, uma redução substancial do esforço computacional por incremento.

Tendo-se em vista que este processo não garante o equilíbrio em cada nível de carga, o resultado obtido para situações que envolvam grandes deslocamentos tende a se afastar da solução exata. Quanto maior for o número de incrementos de carga para um dado carregamento, maior é a confiabilidade no resultado obtido, até o ponto em que mesmo aumentando o número de incremento, a

solução obtida não sofre mais alteração. A aplicação deste procedimento torna-se, em geral, proibitiva pelo alto custo computacional resultante.

3.3 PROCESSO INCREMENTAL ITERATIVO

Um processo incremental iterativo de resolução de sistemas de equações não lineares, difere de um puramente incremental pelo fato de que a cada incremento de carga, se busca uma condição de equilíbrio entre o carregamento externo e as forças internas atuantes na estrutura. Essa condição foi verificada através de um critério de energia, a ser descrito no item 3.8. Neste trabalho, foram implementados dois métodos de resolução através de processos iterativos. O método de Newton-Raphson e o Quase-Newton, os quais são descritos a seguir.

3.3.1 Newton-Raphson

O processo incremental-iterativo de Newton-Raphson, é largamente utilizado para a resolução de problemas envolvendo sistemas de equações não lineares. Consiste basicamente em se calcular após cada iteração, a parcela desbalanceada da carga incremental aplicada e usá-la para calcular uma variação do vetor deslocamento. Neste processo, o sistema de equações utilizado é:

$$[K_T]_{i-1}^j \{\Delta U\}_i^j = \{\Delta F\}^j - \{\Delta F_1\}_{i-1}^j = \{\Delta F_D\}_{i-1}^j \quad (3.3)$$

$$\{U\}_i^j = \{U\}_0^j + \{\Delta U\}_i^j \quad (3.4)$$

- $[K_T]_{i-1}^j$ - Matriz de rigidez tangente, atualizada após cada iteração, i .
- $\{\Delta U\}_i^j$ - Variação do vetor deslocamento a cada iteração, i .
- $\{\Delta F_1\}_{i-1}^j$ - Variação do vetor de força interna do sistema, atualizado a cada iteração.
- $\{U\}_0^j$ - Vetor de deslocamento no início do incremento

Após o cálculo da última estimativa para o vetor deslocamento total do sistema, utiliza-se este vetor para se atualizar as coordenadas nodais da estrutura e para se obter os esforços nodais de forma a se poder ter a matriz tangente do sistema, $[K_T]_i^j$, e o vetor de força interna no incremento, $\{F_1\}_i^j$, ambos atualizados para o passo em questão. Este processo é repetido até que o equilíbrio, aferido por um critério de convergência a ser descrito no item 3.8, seja atingido para cada nível de carga.

O processo incremental iterativo de Newton-Raphson pode ser representado graficamente através da figura (3.2).

Sendo $\{\Delta F\}^j$ e $\{\Delta U\}_i^j$ respectivamente a carga aplicada neste nível e o vetor deslocamento no início do incremento i , para o i -ésimo ciclo do processo iterativo neste incremento, o

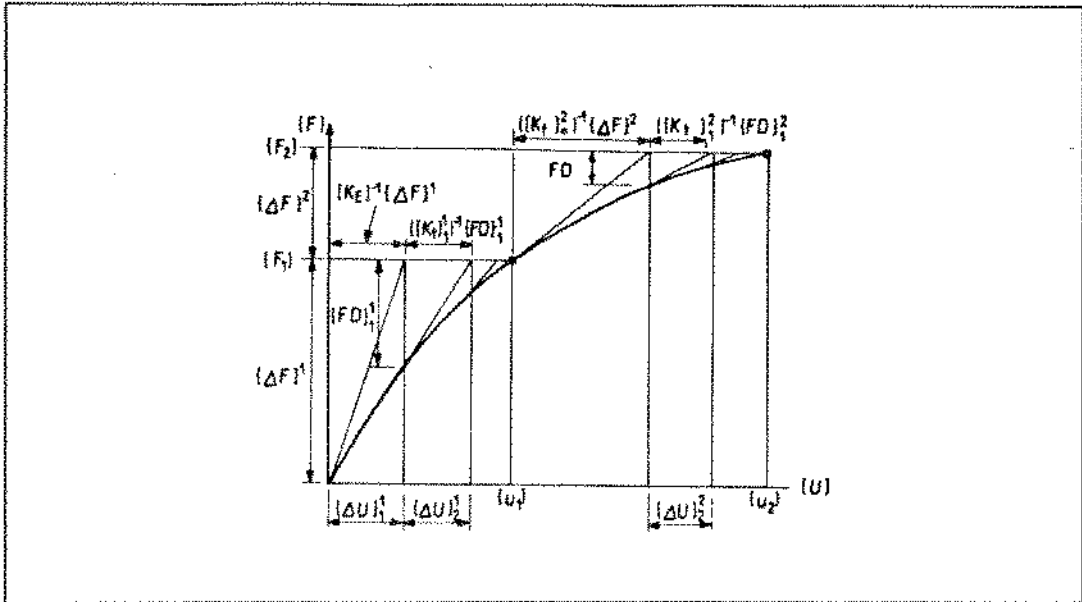


Fig 3.2 - Representação esquemática do processo incremental iterativo de Newton-Raphson

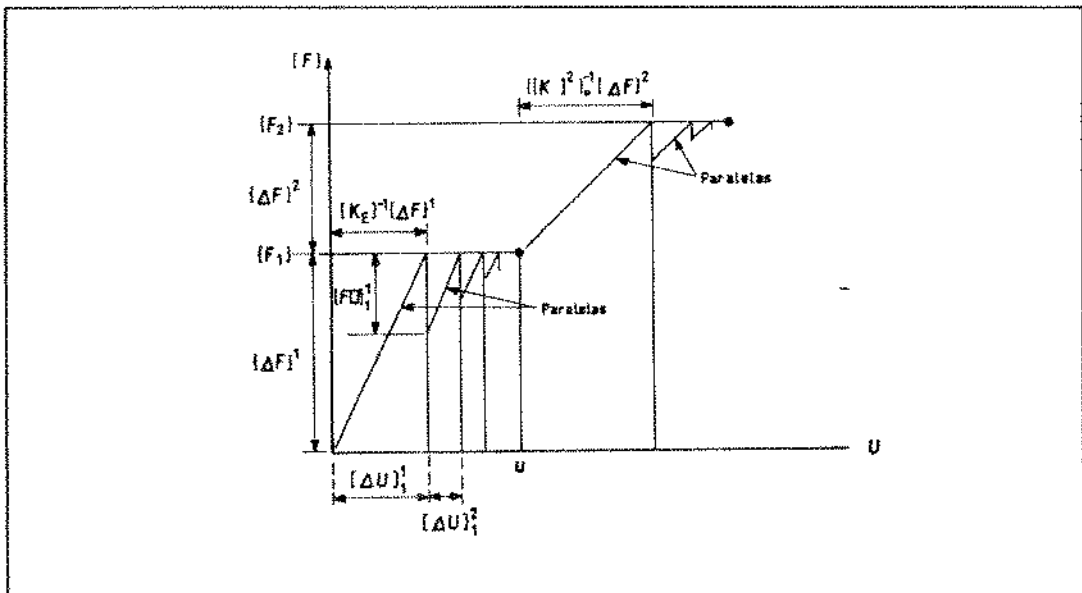


Fig. 3.3 - Representação esquemática do processo de Newton-Raphson modificado

vetor de força desbalanceado é dado por:

$$\{F_D\}_i^j = \{F\}_i^j - \{F_1\}_{i-1}^j \quad (3.5)$$

No método de Newton-Raphson descrito anteriormente faz-se necessário, montar uma nova matriz do sistema a cada iteração e posteriormente resolver um sistema de equações lineares com esta nova matriz. Tendo em vista o enorme esforço computacional envolvido neste processo, o programa desenvolvido foi adaptado de forma a se utilizar dentro de um mesmo incremento, a mesma matriz de rigidez obtida a partir da última condição de equilíbrio conhecida.

Este processo é conhecido como método de Newton-Raphson modificado e apesar de precisar de um maior número de iterações para se obter o equilíbrio, consegue-se uma grande redução no esforço computacional, graças ao fato de não se precisar decompor a matriz do sistema a cada iteração.

A formulação básica para o processo de Newton-Raphson modificado é:

$$[K_T]_0^j \{\Delta U\}_i^j = \{\Delta F\}_i^j - \{\Delta F_1\}_{i-1}^j \quad (3.6)$$

$$\{U\}_i^j = \{U\}_0^j + \{\Delta U\}_i^j \quad (3.7)$$

A figura (3.3) apresenta graficamente o método de

Newton-Raphson modificado conforme exposto anteriormente.

O processo incremental-iterativo apresentado pelas equações (3.3) e (3.4), como já foi dito, é mais preciso e mais versátil do que o estritamente incremental das equações (3.1) e (3.2), pois apesar das matrizes utilizadas serem as mesmas nos dois processos, a realização de iterações de equilíbrio em cada incremento reduz substancialmente a acumulação de erros, tornando menos rígidas as restrições quanto ao tamanho dos incrementos adotados.

O processo de auto-correção que visa minimizar as forças desbalanceadas após cada iteração, corrigindo os erros de equilíbrio, também conhecido como relaxação do incremento de deslocamento da iteração, foi também implantado e é objeto de discussão em item posterior.

O diagrama da figura (3.4) representa o algoritmo do método de Newton-Raphson relaxado .

3.3.1 MÉTODO QUASE-NEWTON

Os oleodutos submarinos, objeto final deste estudo, apresentam uma acentuada não linearidade quanto à relação entre o deslocamentos e o carregamento. Em casos de tubulações muito flexíveis, o mal condicionamento da matriz de rigidez pode inviabilizar a análise do comportamento da estrutura através de um processo incremental-iterativo do tipo Newton-Raphson.

Visando suprir esta possível deficiência assim como uma redução no esforço computacional requerido, ampliando o

ferramental disponível para análise, foi implementado um método de solução para sistemas não lineares, conhecido como Quase-Newton.

Este processo, consiste basicamente em se utilizar uma matriz $[H]$ real, simétrica e positivo-definida que se aproxime da inversa da matriz jacobiana no cálculo da aproximação do vetor deslocamento, ou seja:

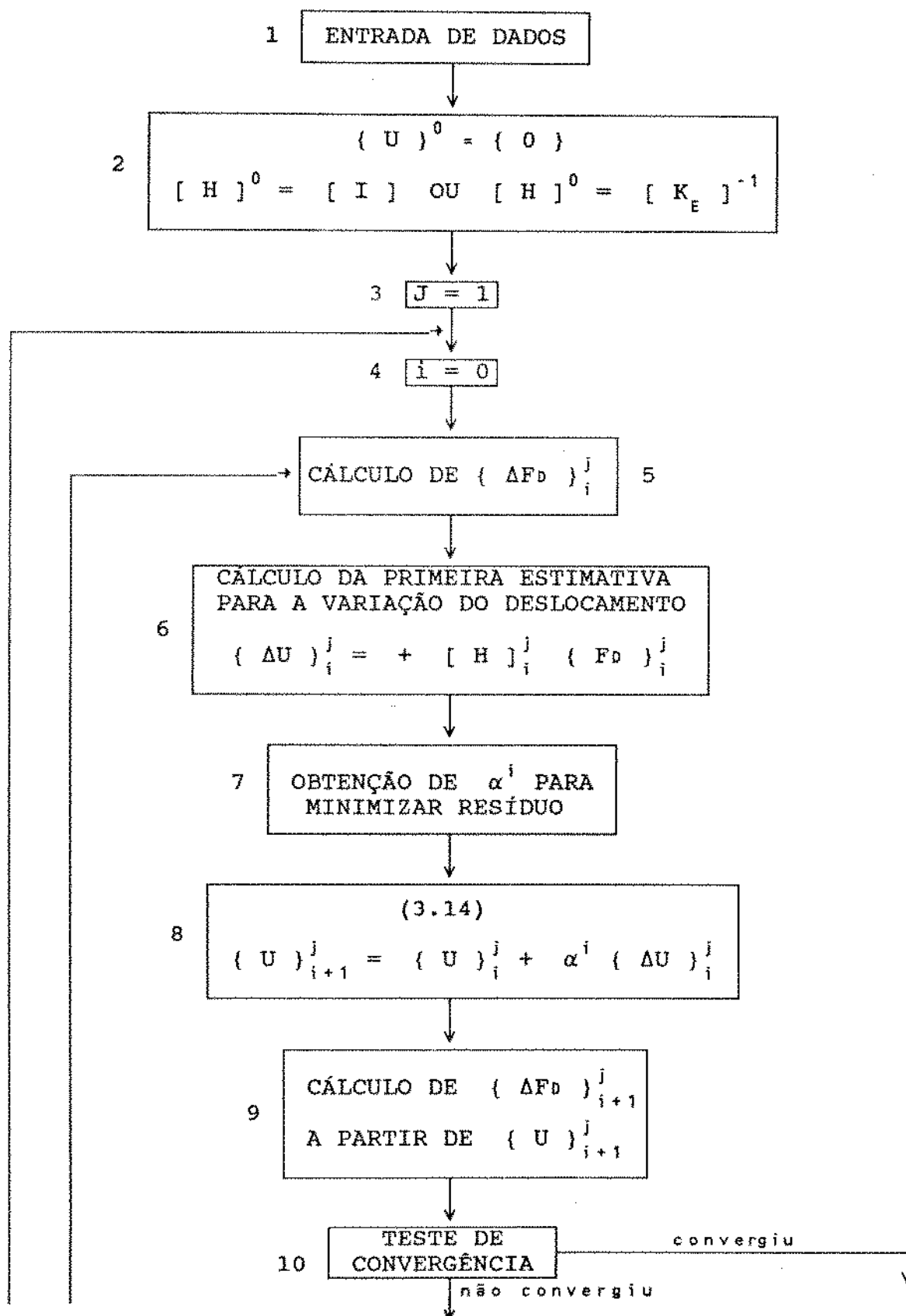
$$\{U\}_{i+1}^j = \{U\}_i^j + [H]_i^j \{\Delta F_0\}_i^j \quad (3.8)$$

A matriz $[H]_i^j$, é montada tomando por base os seguintes vetores: $\{U\}_i^j$, $\{U\}_{i+1}^j$, $\{F_0\}_i^j$, $\{\Delta F_0\}_{i-1}^j$, não sendo necessário calcular a matriz jacobiana.

Para problemas de mecânica estrutural, conforme estabelecido no item anterior, a matriz jacobiana é a matriz de rigidez tangente do sistema $[K_T]$.

Conforme descrito por [36], é definido como um método Quase-Newton sempre que a matriz $[H]^{i+1}$ que aproxima a inversa de $[J]$ seja tal que satisfaça à seguinte relação:

$$[H]_{i+1}^j \{\Delta F_0\}_i^j = \{\Delta U\}_i^j \quad (3.9)$$



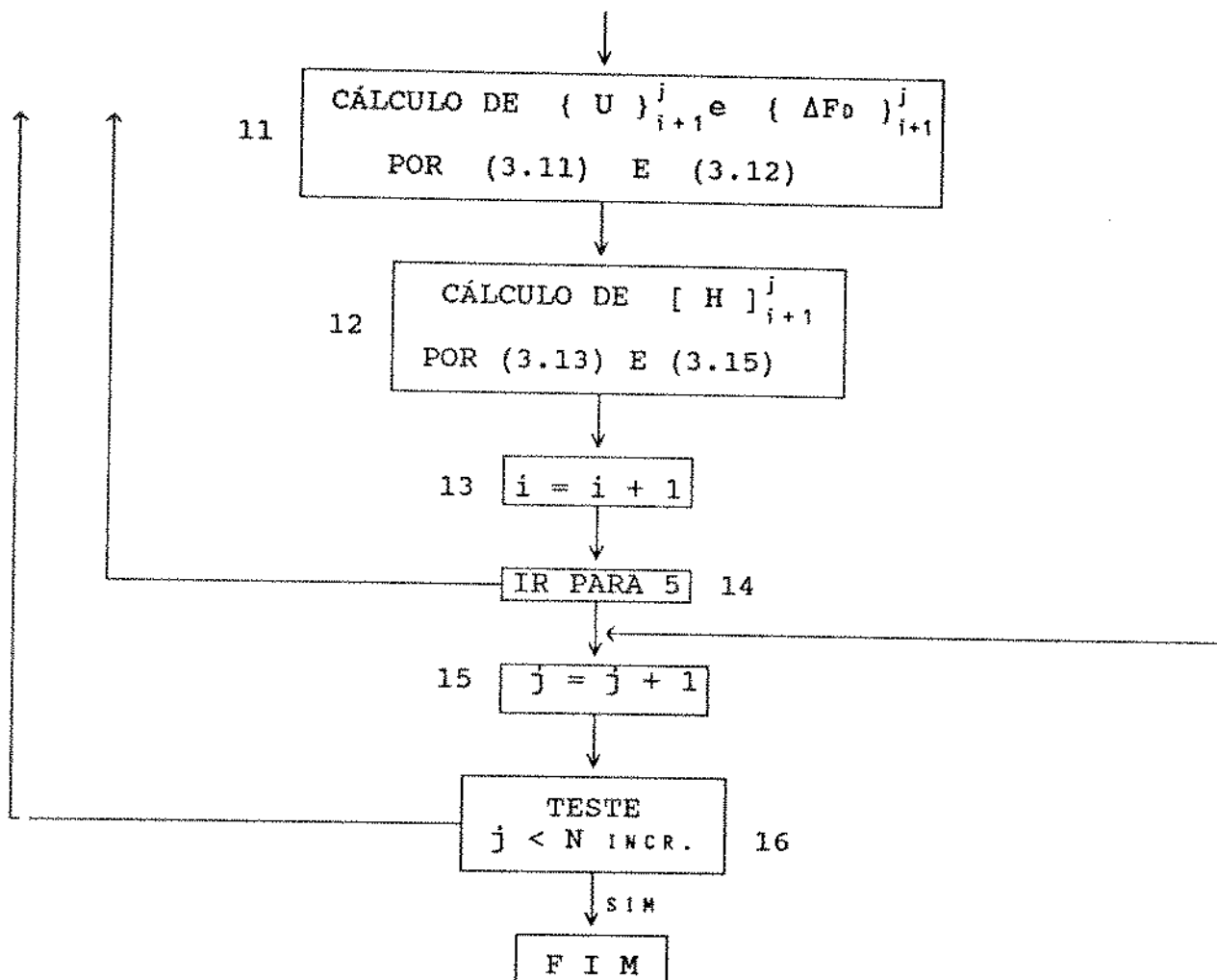


Fig. 3.4 - Algoritmo do método de Newton-Raphson relaxado

onde:

$$(\Delta F_0)_i^j = (F_0)_{i+1}^j - (F_0)_i^j \quad (3.10)$$

$$(\Delta U)_i^j = (U)_{i+1}^j - (U)_i^j \quad (3.11)$$

É também desejável que $[H]_{i+1}^j$ seja facilmente computada a partir de $[H]_i^j$, $(\Delta F_0)_i^j$ e $(\Delta U)_i^j$, somando uma matriz de correção $[C]_i^j$ a $[H]_i^j$.

$$[H]_{i+1}^j = [H]_i^j + [C]_i^j \quad (3.12)$$

Uma vez que a matriz $[H]_i^j$ é simétrica, positiva definida, a matriz $[C]_i^j$ deve ser simétrica e no mínimo semi-positivo definida.

Sendo $[H]_{i+1}^j$ uma matriz positivo-definida, existe uma constante α_i que faz com que o valor de $(U)_{i+1}^j$ se aproxime da solução mais rapidamente, ou seja, α_i deve minimizar a força desbalanceada para um dado $(\Delta U)_i^j$.

O valor de $(U)_{i+1}^j$ é obtido da equação abaixo, em lugar de (3.8).

$$(U)_{i+1}^j = (U)_i^j - \alpha_i [H]_i^j (\Delta F_0)_i^j \quad (3.13)$$

A utilização desta constante α_i , variável a cada passo, é

conhecida como processo de relaxação da direção de procura de $\{\Delta U\}_i^j$. A rotina desenvolvida para este processo de procura do valor de α_i que minimize o resíduo, foi também incorporada ao programa de cálculo por Newton-Raphson. Este processo é descrito no próximo item.

Os processos de cálculo baseados no exposto acima, equações (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) podem ser classificados como sendo do tipo Quase-Newton. De acordo com o processo de atualização da matriz $[H]_i^j$, equação (3.12), existe uma variedade de matrizes $[C]_i^j$ que atendem aos requisitos estabelecidos inicialmente por Davidon [32].

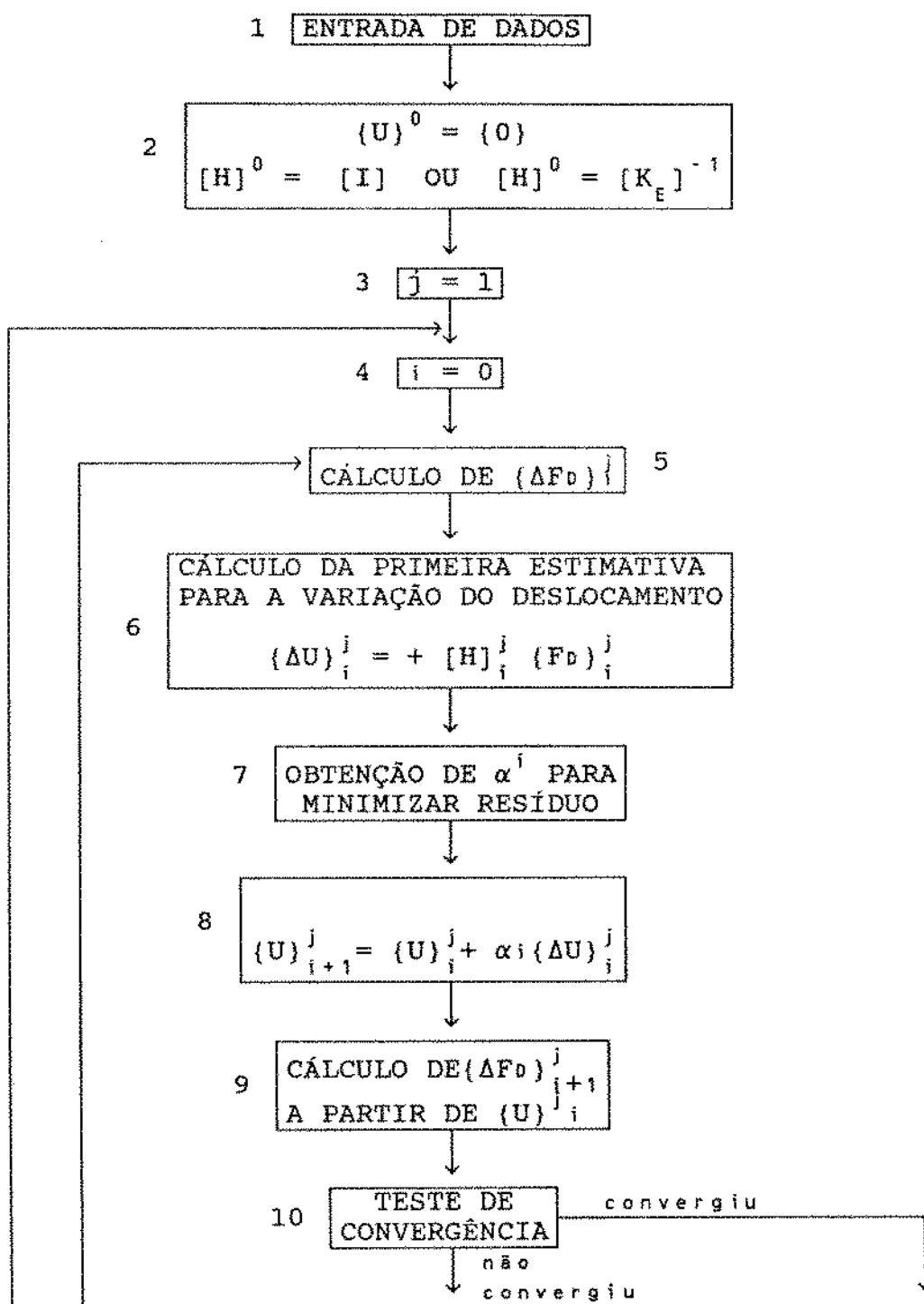
Um método proposto por Fletcher e Powell [33], baseado no citado trabalho de Davidon, por isto conhecido como método DFP, é um dos melhores métodos para minimização sem restrição de sistemas de equações no qual a matriz $[C]$ é obtida de:

$$[C]_i^j = \frac{\{\Delta U\}_i^j \left(\{\Delta U\}_i^j \right)^T}{\left(\{\Delta U\}_i^j \right)^T \{\Delta F_D\}_i^j} - \frac{\left([H]_i^j \{\Delta F_D\}_i^j \right)^T \left([H]_i^j \{\Delta F_D\}_i^j \right)^T}{\left(\{\Delta F_D\}_i^j \right)^T [H]_i^j \{\Delta F_D\}_i^j} \quad (3.14)$$

onde todos os termos estão no mesmo nível (j) de carga.

A matriz $[C]_i^j$ quando levada em (3.13) satisfaz os requisitos do método Quase-Newton.

A figura (3.5) apresenta simplificada o algoritmo implementado para resolução de sistemas de equações não lineares pelo método DFP.



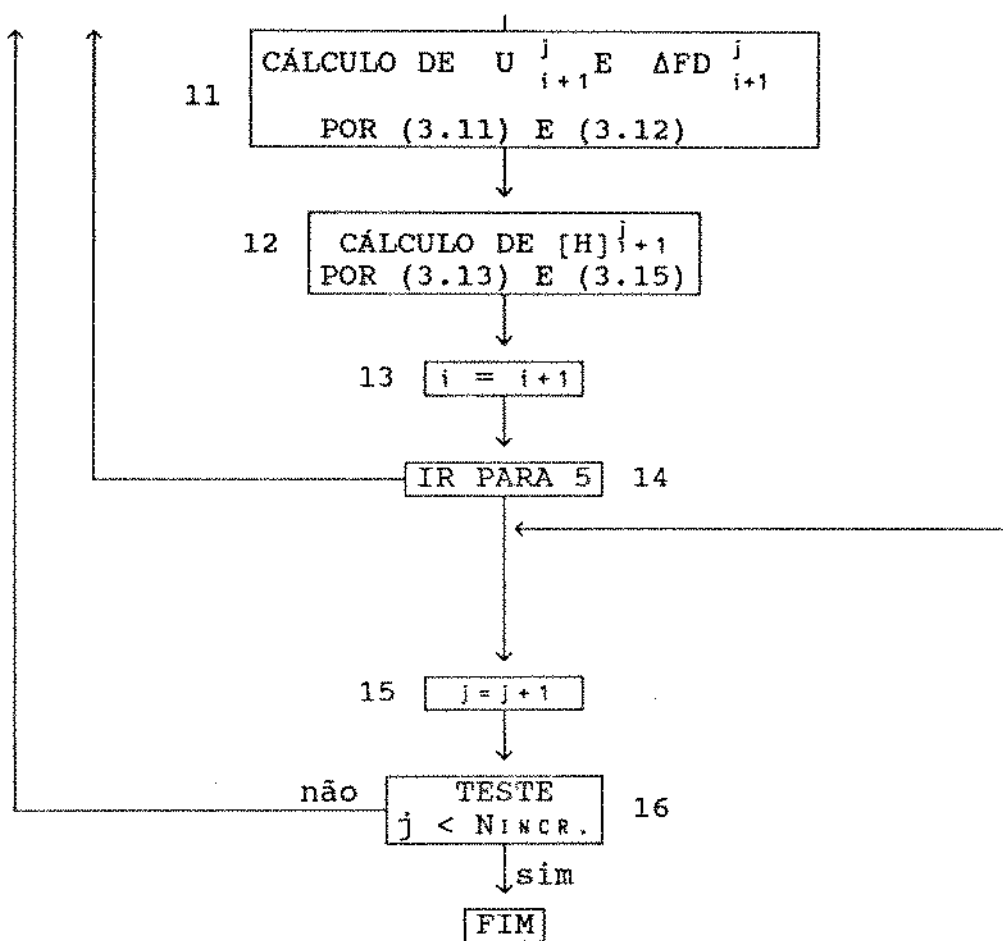


Fig. 3.5 Algoritmo do método Quase Newton com relaxamento

Conforme estabelecido no passo 2 do algoritmo da figura

(3.6), a matriz $[H]_0$ utilizada no início do processo pode ser a matriz identidade $[I]$, e ainda assim ao término do processo, ter-se-ia um vetor de deslocamentos próximos da solução do problema, independentemente da estimativa inicial da solução ($\{U\}^0 = 0$ no algoritmo implantado).

No entanto, em alguns casos, o valor obtido para α_i , devido a problemas de acumulação de erros, pode fazer com que a matriz $[H]_i^j$ obtida a partir de α_i não seja positivo-definida, fazendo com que a convergência não mais seja atingida. Este problema foi descrito por Bard [42].

A forma utilizada para se contornar este problema, foi a de quando verificado este problema, atribuir para $[H]_i^j$ o valor da matriz identidade, continuando o processo iterativo.

O teste efetuado para verificar a necessidade de modificação de $[H]_i^j$ é o seguinte:

$$\| \{ \Delta F_D \}_{i+1}^j \| \geq \| \{ \Delta F_D \}_i^j \| \quad (3.15)$$

e deve ser realizado após o passo 7 do algoritmo da figura 3.6.

3.4 RELAXAÇÃO

A relaxação consiste na obtenção de um fator multiplicador α_i , para a variação do vetor deslocamento $\{ \Delta U \}_i^j$ a cada passo, tal que o vetor obtido $\alpha_i \{ \Delta U \}_i^j$ seja ortogonal ao vetor das forças desbalanceadas $\{ \Delta F_D \}_{i+1}^j$, acelerando desta maneira a convergência do processo.

A convergência do processo é aferida com base no vetor de forças desbalanceadas dado a cada passo por (3.5). Teoricamente esta é atingida quando este vetor tende a zero.

O valor do vetor das forças desbalanceadas é função dos deslocamentos nodais da estrutura, a qual é função de α_i .

O valor de α_i que minimiza $(\Delta F_D)_{i+1}^j$ é aquele que faz com que:

$$\frac{\partial (\Delta F_D)_{i+1}^j}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (3.16)$$

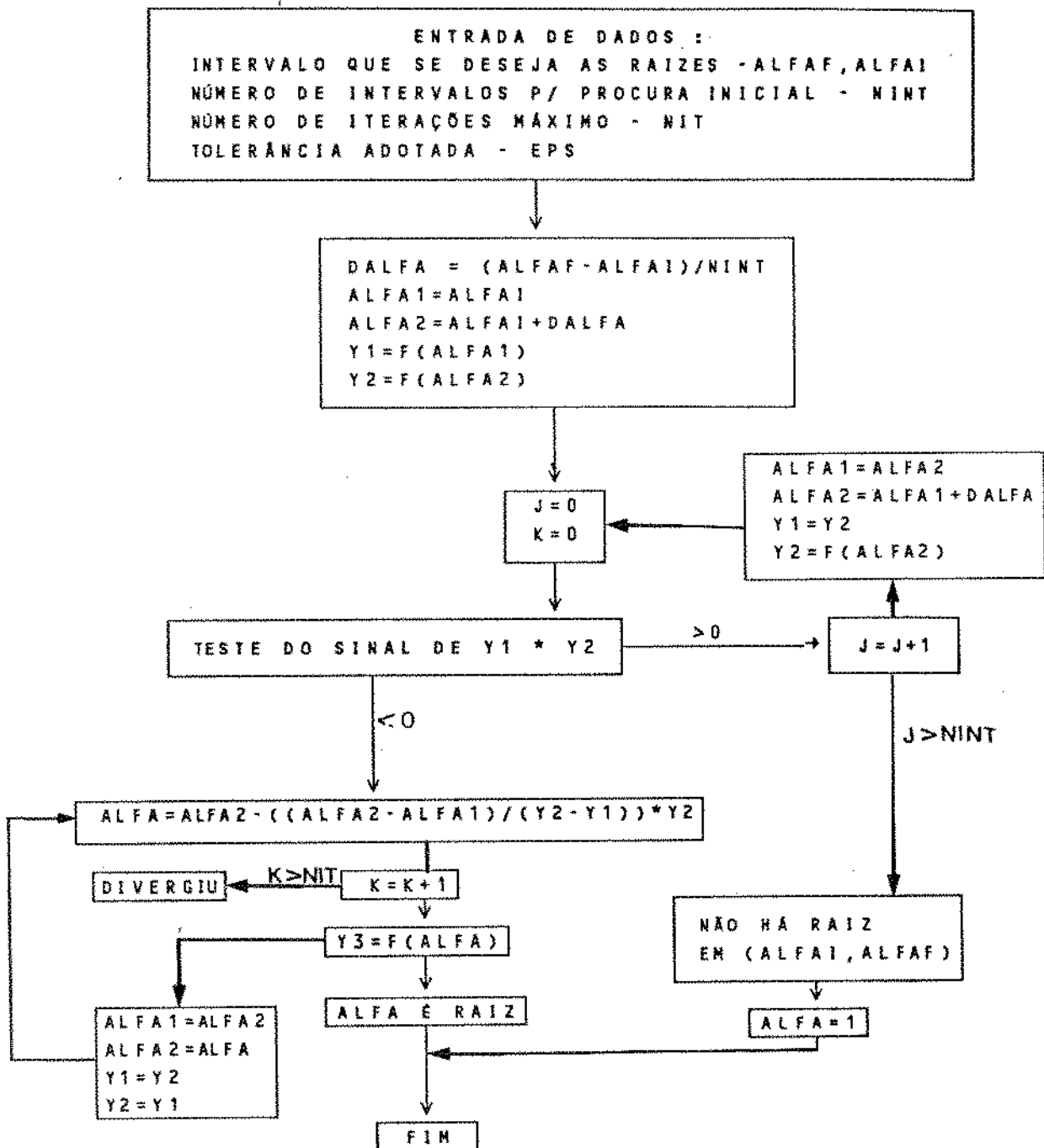
ou seja:

$$\text{RES} = \left((\Delta F_D)_{i+1}^j \right)^T \alpha_i (\Delta U)_i^j = 0 \quad (3.17)$$

Para a obtenção do valor de α_i faz-se necessário a implementação de uma rotina de procura da raiz, a qual foi baseada no método da secante ou regula-falsi. O método é um processo de 1ª ordem (a maior ordem da derivada utilizada) e dois passos (função de dois passos), para se obter a raiz da função (3.16).

O algoritmo implantado, está representado simplifcadamente na figura (3.6).

Fig. 3.6 - Algoritmo implementado para a obtenção do fator de relaxação .



3.5 ATUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA

Além do aspecto de mudança da rigidez do elemento causado pelo acoplamento entre a força normal e a flexão da viga, a análise não-linear geométrica deve considerar também as mudanças nas coordenadas causadas pelos grandes deslocamentos.

Tendo em vista que cada elemento de uma estrutura possui uma disposição espacial própria, para se poder montar a equação do sistema, faz-se necessário adotar um sistema de referência inercial único válido para todos os elementos, e um sistema de referência para cada elemento chamado de sistema local.

Cada sistema de referência, é composto por três eixos coordenados ortogonais entre si. O sistema global é estabelecido em função das coordenadas nodais iniciais e fixo ao longo de todo o processo.

O sistema local depende da configuração de cada elemento no espaço e é composto por três vetores unitários os quais devem ser atualizados após cada iteração. A figura (3.7) ilustra o sistema local para um elemento prismático. A convenção da figura, também utilizada neste trabalho, é a seguinte:

O vetor (\hat{x}) indica o eixo longitudinal com sentido do nó inicial do elemento para o final. O vetor (\hat{y}) define um eixo principal de inércia da seção transversal da barra, e o vetor (\hat{z}) sendo ortogonal aos outros dois.

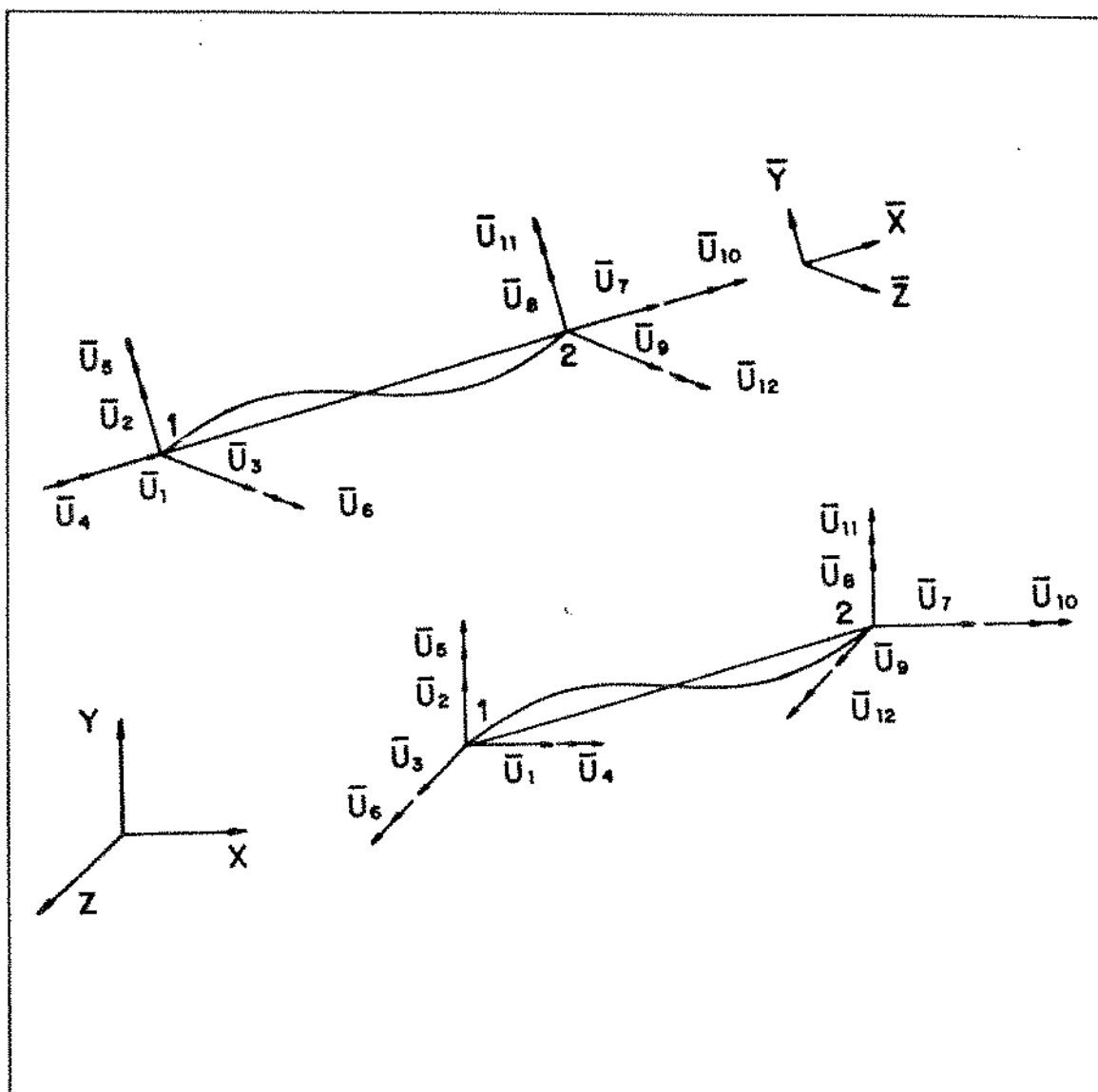


Fig. 3.7 - Sistemas de coordenadas (local-global) para um elemento de viga coluna espacial.

Os deslocamentos de um elemento no sistema global de referência, podem ser transformados para o sistema local através

da seguinte relação:

$$\{\bar{U}\} = [T] \{U\} \quad (3.18)$$

onde:

$\{\bar{U}\}$ Deslocamentos do elemento no sistema local.

$[T]$ Matriz de rotação.

$\{U\}$ Deslocamentos do elemento no sistema global.

Para um elemento de viga-coluna espacial, a matriz $[T]$ é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [R] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [R] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [R] \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde $[R]$ é a matriz cujas linhas são formadas pelos cossenos diretores dos eixos \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} em relação aos eixos do referencial global.

A matriz $[R]$ é dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{xx} & \bar{C}_{xy} & \bar{C}_{xz} \\ \bar{C}_{yx} & \bar{C}_{yy} & \bar{C}_{yz} \\ \bar{C}_{zx} & \bar{C}_{zy} & \bar{C}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

onde:

C_{ij} cosseno

\bar{i}_j ângulo entre eixos \vec{i} e \vec{j}

A figura (3.8) representa os ângulos entre os eixos dos

sistemas local e global.

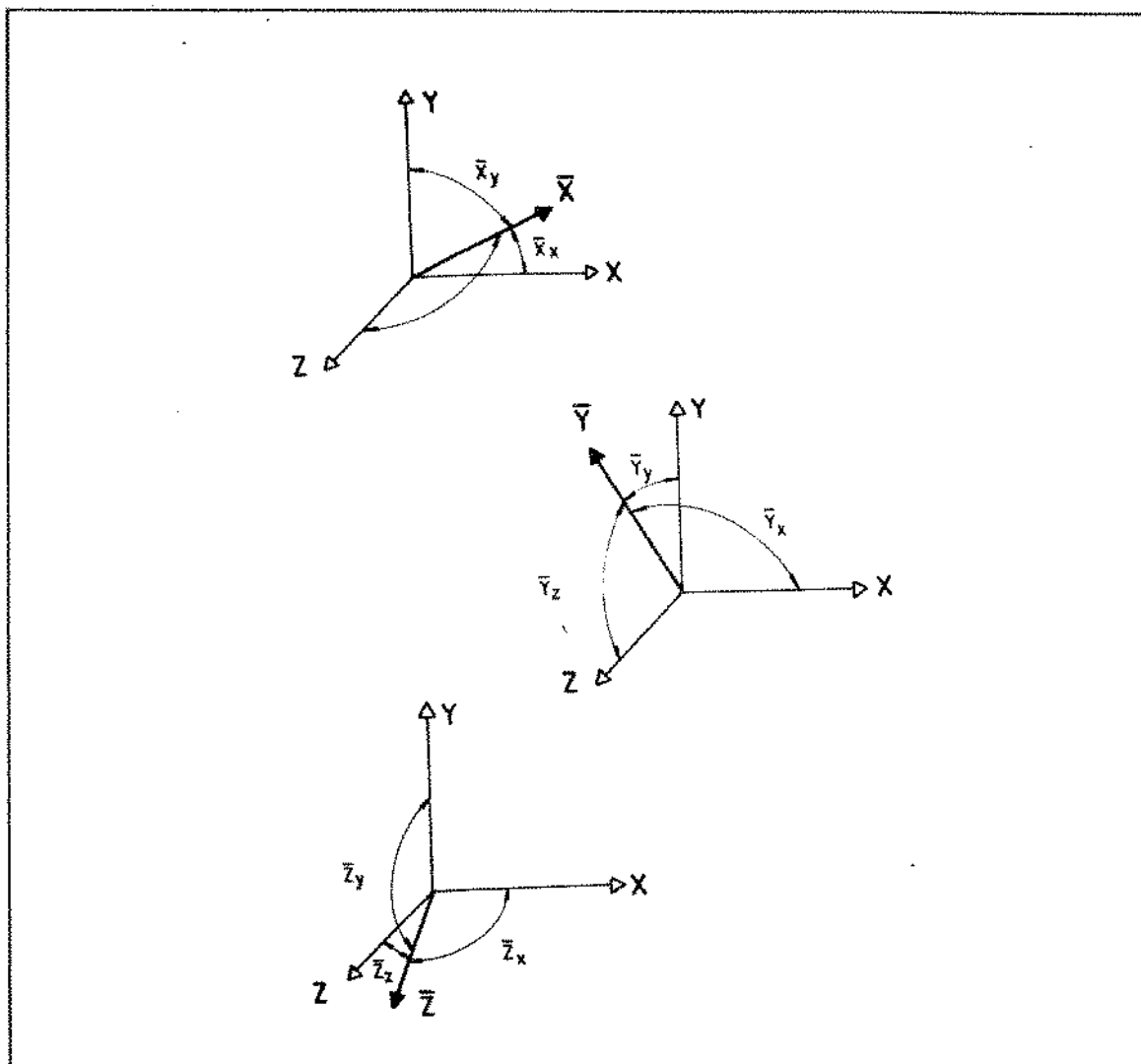


Fig. 3.8 - Representação dos ângulos entre os eixos dos sistemas local e global.

Para promovermos uma rotação da matriz de rigidez de um elemento do sistema local para global, a operação a ser efetuada é:

$$[K_T] = [T]^T [\bar{K}_T] [T] \quad (3.21)$$

onde :

$[\overline{K}_i]$ - Matriz do elemento no sistema local.

$[K_i]$ - Matriz do elemento no sistema global.

A seguir é descrito o procedimento utilizado para obtenção da matriz $[T]$ de cada elemento.

No início da execução do programa, se fornece como dado de entrada além das coordenadas nodais referenciadas ao sistema global, as coordenada de um terceiro ponto para cada elemento (pode ser o mesmo para todos), ponto este que determina com o eixo do elemento um plano principal de inércia. A figura (3.9) apresenta este ponto para um dado elemento de viga-coluna.

Para a obtenção do vetor unitário \hat{x} na direção axial do elemento, basta ter as coordenadas nodais.

$$\{\hat{x}\} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \quad (3.22)$$

onde:

$$\hat{e}_1 = \frac{x_2 - x_1}{L} \quad (3.23)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad (3.24)$$

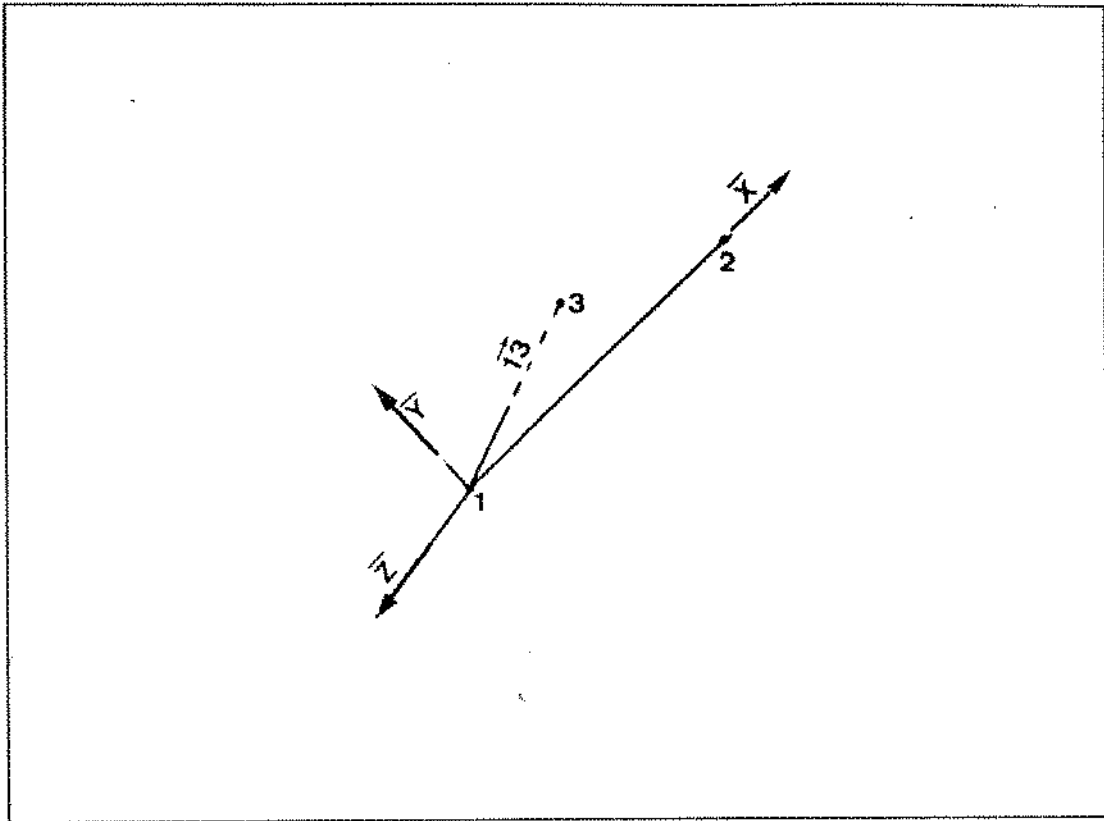


Fig (3.9) - Representação esquemática da obtenção do plano principal de inércia através de um ponto p3 auxiliar.

$$\hat{e}_3 = \frac{z_2 - z_1}{L} \quad (3.25)$$

e

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.26)$$

O vetor \hat{z} , é obtido da norma do produto vetorial de \hat{x} por \vec{r}_3 , onde \vec{r}_3 é o vetor que liga os pontos 1 e 3, fig.(3.9).

$$(\hat{13}) = \frac{(X3 - X1) \vec{i}}{|\vec{13}|} + \frac{(Y3 - Y1) \vec{j}}{|\vec{13}|} + \frac{(Z3 - Z1) \vec{k}}{|\vec{13}|} \quad (3.27)$$

Em seguida obtem-se o vetor (\hat{y}) através do produto $(\hat{z}) \times (\hat{x})$.

Como os vetores (\hat{x}) , (\hat{y}) , (\hat{z}) que definem o sistema de referência local, são unitários, e seus valores foram obtidos em relação ao sistema global. Então a matriz [T] para cada elemento no início da execução do programa é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} (\hat{x})^T \\ (\hat{y})^T \\ (\hat{z})^T \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Para iterações posteriores, quando o elemento já se encontra deslocado de sua posição original, o processo utilizado é o seguinte:

Após a atualização das coordenadas pode-se calcular o vetor unitário na direção axial, de forma semelhante à efetuada no primeiro passo.

O vetor unitário na direção (\bar{y}) , é obtido a partir de uma combinação linear entre os vetores (\hat{y}) e (\hat{z}) no passo anterior e é dado por:

$$(\bar{y})_{i+1} = \left[(\hat{y})_i + \text{tg} \bar{\theta}_x (\hat{z})_i \right] \quad (3.29)$$

$$\{\hat{Y}\}_{i+1} = \frac{\{\bar{Y}\}_{i+1}}{\|\{\bar{Y}\}_{i+1}\|} \quad (3.30)$$

onde $\bar{\theta}_x$ corresponde à média entre os ângulos de torção dos nós do elemento.

A figura (3.11) ilustra o processo de obtenção do vetor $\{\bar{Y}\}_{i+1}$.

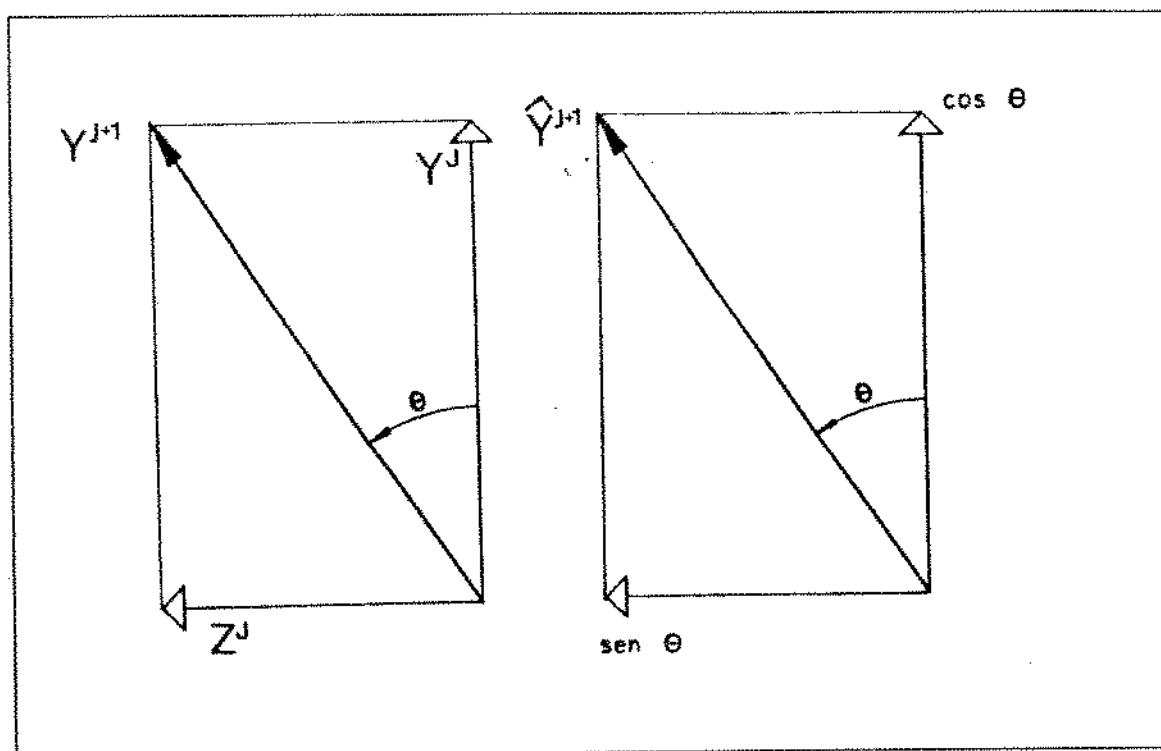


Fig. 3.10 - Atualização do vetor y

O vetor $\{\hat{Y}\}_{i+1}$ obtido de (3.30) e (3.31) não é necessariamente perpendicular a $\{\hat{x}\}_{i+1}$, entretanto, pode-se obter um vetor $\{\hat{z}\}_{i+1}$ através do produto vetorial de $\{\hat{x}\}_{i+1}$ por $\{\hat{Y}\}_{i+1}$.

Em seguida, promove-se um novo produto vetorial entre $(\hat{z})^{i+1}$ e $(\hat{x})^{i+1}$ para se obter um vetor $(\hat{y})_{i+1}$ unitário paralelo ao plano principal de inércia da seção.

3.6 PROCESSO DE RECUPERAÇÃO DE ESFORÇOS

Os esforços internos nos elementos ,em cada iteração além de serem informações indispensáveis ao processo iterativo , são necessários na formulação da matriz geométrica [Kg].

Usualmente nos métodos incrementais iterativos de solução da equação não linear de equilíbrio ; os esforços nodais no elemento na i-ésima iteração, são obtidos da seguinte relação :

$$\{\overline{\Delta F}\}_i^{j-1} = [\overline{Kt}]_{i-1}^j \{\overline{\Delta U}\}_i^j \quad (3.31)$$

onde:

$\{\overline{\Delta F}\}_i$ = Vetor de força do elemento no sistema local.

$[\overline{Kt}]_{i-1}^{j-1}$ = Matriz total do elemento no sistema local.

$\{\overline{\Delta U}\}_i$ = Deslocamento do elemento no sistema local.

Em seguida promove-se a rotação do vetor de força de cada elemento para o sistema global e monta-se o vetor de força interna total do sistema através da superposição dos vetores dos elementos.

Este processo assume que o incremento dos deslocamentos é pequeno, sendo desconsideradas as rotações de corpo rígido.

Devido à aproximação nas interpolações dos deslocamentos,

quando o sistema é submetido a deslocamentos de corpo rígido, mesmo em casos em que não haja mudança no estado de deformação, o processo pode apresentar um incremento de força artificial.

Se este processo for utilizado para casos de grandes deslocamentos, pequenos incrementos de carga devem ser usados a fim de ser garantida a obtenção de pequenos incrementos de deslocamentos, e o processo iterativo pode acabar degenerando para uma simples solução incremental.

O processo de eliminação do movimento de corpo rígido, consiste em se substituir o vetor de deslocamento $(\overline{\Delta U})_i$ da equação 3.31 por um vetor de deformação.

Bathe e Boulourchi (12), propõem que o cálculo da deformação axial do elemento seja feito a partir da relação :

$$\xi_{xx} = \frac{L_i - L_o}{L_o} \quad (3.32)$$

onde :

L_o - Comprimento do elemento no início do incremento.

L_i - Comprimento do elemento após a i -ésima iteração

ξ_{xx} - Deformação axial do elemento no incremento.

Orbinson [8], estende a proposição de Bathe e Boulouchi [12], calculando a força axial por :

$$F_x = EA\xi_{xx} \quad (3.33)$$

Adotam-se neste trabalho, as proposições apresentadas em

[12] e [8] .

A obtenção do vetor de força interna do elemento é realizado , substituindo-se os termos correspondentes a \bar{U}_1 e \bar{U}_7 de $\{\bar{\Delta U}\}_i$, por: $(L_i - L_o)/2L_o$ e $-(L_i - L_o)/2L_o$. Desta maneira , atribui-se metade da deformação axial para cada nó , levando-se em conta a convenção de sinais adotada para os termos do vetor deslocamento. Os demais termos de $\{\bar{\Delta U}\}_i$ são mantidos .

Este processo apresentou resultados satisfatórios , como pode ser constatado nos exemplos numéricos apresentados no capítulo 5.

3.7 ELEMENTO DE MOLA LINEAR

Com o intuito de se poder modelar a reação do fundo do mar , importante para a simulação do lançamento de oleodutos submarinos, objeto de estudo neste trabalho ,se faz necessário estudar e implementar um elemento de mola linear o qual é acionado sempre que o afastamento vertical de um determinado nó atinja o fundo do mar.

Enquanto nenhum nó da estrutura atingir a posição imposta para o acionamento da reação de contato determinada pelo elemento de mola , o processo incremental-iterativo não sofre qualquer alteração em relação ao descrito anteriormente .

Quando o afastamento do nó for tal que se atinja a posição de acionamento da reação de contato, deve-se incorporar na matriz de rigidez global do sistema , no termo correspondente ao grau de liberdade que se deseja restringir, a rigidez estabelecida para a

mola.

Além disto ,deve-se acrescentar ao termo correspondente do vetor de força desbalanceada , um termo de intensidade dada pelo produto da rigidez da mola pela distância que o nó passou em relação ao ponto de contato , no caso da simulação do lançamento, o fundo do mar. A direção desta reação de contato , deve ser contrária à direção do avanço em relação ao ponto de restrição .

Para se simular um fundo do mar com topologia variável , se faz necessário uma rotação prévia do termo de reação , assim como dos termos da matriz de rigidez influenciados pelo elemento de mola uma vez que a reação terá direção perpendicular à inclinação do fundo.

Neste trabalho , utilizou-se o elemento de contato , simulado através de uma mola linear, acoplado ao método de resolução Quase-Newton , uma vez que neste método não se faz necessário a montagem da matriz de rigidez a cada passo .Sendo a sua inversa aproximada por uma matriz [H] baseada nas iterações anteriores conforme descrito no item 3.3.2 . Desta forma , a incorporação da reação de contato tornou-se mais simples , sendo necessário apenas a incorporação da reação devido ao elemento de mola no vetor de força desbalanceada.

3.8 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Quando se utiliza um processo iterativo para resolução de sistemas não lineares, se faz necessário a adoção de um critério

para o término das iterações a cada incremento de carga.

Teoricamente, o processo iterativo deveria ser interrompido quando o vetor deslocamento não mais se altera entre duas iterações consecutivas, ou seja:

$$|| \Delta U ||_i^j = || \Delta U ||_{i+1}^j \quad (3.34)$$

Na prática entretanto, é inviável buscar uma solução numérica total através de um processo iterativo, sendo necessário portanto a fixação de uma tolerância que indique o instante da parada.

Encontram-se na literatura, diversas formas de se avaliar a convergência. Entre estas, podemos citar por exemplo a apresentada por Naylor [9], baseada apenas na carga desbalanceada (equação 3.5) em cada iteração, ao longo de um incremento de carga. Esta forma entretanto, apesar de simples, pode apresentar resultados não muito favoráveis. No caso de pórticos esse critério pode também falhar pelo fato de existir variáveis físicas de dimensionalidade distintas na equação (3.5) no caso, forças e momentos.

$$|| (\Delta F)^j - (\Delta F)_i^j || \leq \text{TOL} \quad (3.35)$$

Uma outra forma possível para se avaliar a convergência é através de um critério envolvendo apenas o deslocamento e dada por:

$$\frac{||\Delta U||_i^j}{||U||^j} \leq \text{TOL} \quad (3.36)$$

onde:

$||\Delta U||_i^j$ - Norma da variação do vetor deslocamento na i -ésima iteração.

$||U||^j$ - Norma do vetor deslocamento no início do incremento

Este critério no entanto pode apresentar problemas especialmente quando se tem estruturas que enrijecem com o deslocamento, o que implica em muitos casos em se ter uma pequena variação, do deslocamento, porém com uma grande força desbalanceada, fazendo com que o processo seja, interrompido longe da solução.

Tendo em vista as deficiências inerentes aos critérios estabelecidos por (3.35) e (3.36), adotou-se um critério de convergência baseado na variação tanto dos deslocamentos quanto do vetor de força desbalanceada após cada iteração.

O processo consiste em se comparar a variação da energia interna na primeira iteração do incremento de carga atual, com a variação da energia interna na i -ésima iteração. Podendo ser descrito por:

$$\frac{((\Delta u)_i^j)^T (\Delta F_D)_i^j}{((\Delta u)_i^j)^T (\Delta F)_i^j} \leq \text{TOL} \quad (3.37)$$

3.9 MÉTODOS DE SOLUÇÃO COM DESLOCAMENTOS CONTROLADOS

Na maior parte dos problemas práticos em engenharia, as incógnitas do problema são os deslocamentos assumidos pela estrutura, os quais são determinados a partir do carregamento imposto. Em alguns casos, no entanto, tem-se conhecimento de antemão do deslocamento assumido por alguns pontos do sistema e deseja-se saber os esforços atuantes nesta condição.

Como exemplo, pode-se citar a avaliação do comportamento pós-flambagem de uma dada estrutura ou a determinação dos esforços internos atuantes em uma estrutura quando submetida a uma determinada variação de configuração.

A equação geral do sistema, incluindo os termos devido ao deslocamento imposto, pode ser dada por :

$$\begin{bmatrix} [K]_{LL} & [K]_{LC} \\ [K]_{CL} & [K]_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Delta U)_L \\ (\Delta U)_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (F)_{EXT} \\ (F)_{CC} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Onde:

- $[K]_{LL}$ - Matriz de rigidez das variáveis livres.
- $[K]_{CC}$ - Matriz de rigidez das variáveis impostas.
- $[K]_{LC}$ e $[K]_{CL}$ - Matriz de rigidez dos termos cruzados.
- $(F)_{EXT}$ - Carregamento externo correspondente às variáveis livres.
- $(F)_{CC}$ - Carregamento externo correspondente às variáveis impostas.
- $(\Delta U)_L$ - Deslocamentos livres

$\{\Delta U\}_c$ - Deslocamentos impostos.

De (3.38) tem-se que :

$$[K]_{LL} \{\Delta U\}_L = - [K]_{LC} \{\Delta U\}_C + \{F\}_{EXT} \quad (3.39)$$

O termo dado por $(- [K]_{LC} \{\Delta U\}_C)$ pode ser interpretado como sendo uma carga equivalente devido aos deslocamentos impostos. Caso todos os deslocamentos impostos sejam nulos, recai-se no caso já estudado sem deslocamentos controlados.

O processo de resolução dos problemas de análise estrutural com deslocamentos impostos, é similar ao apresentado nos itens anteriores deste capítulo, diferindo apenas pela inclusão da carga equivalente devido aos deslocamentos impostos.

CAPÍTULO 4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo apresentar sucintamente os dois programas desenvolvidos para a realização de análises de estruturas reticuladas espaciais sujeitas a grandes deslocamentos e por conseguinte envolvendo não linearidades geométricas. Além disto, são discutidas as modificações realizadas nos referidos programas com o objetivo de adaptá-los ao problema específico de análise do lançamento de oleodutos submarinos.

A teoria e a metodologia utilizada nestes programas, baseiam-se no apresentado nos capítulos 2 e 3.

Os programas foram desenvolvidos utilizando a linguagem FORTRAN IV.

4.2 DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS

Neste item, são descritos os seguintes programas, desenvolvidos neste trabalho:

- PAER1 (Programa de análise de estruturas reticuladas #1)
- PAER2 (Programa de análise de estruturas reticuladas #2)
- DUTO (Programa para análise de lançamento de oleoduto)

O programa PAER1 tem como principal característica, a utilização do processo de resolução de sistemas de equações não lineares conhecido como Newton-Raphson Modificado, incorporando ainda, um processo de auto correção que visa minimizar as forças desbalanceadas após cada iteração, conhecido como relaxação do incremento de deslocamento.

O programa PAER2, utiliza como processo de resolução para os sistemas de equações não lineares, o método conhecido como Quase-Newton apresentando também a relaxação do incremento de deslocamento.

Os algoritmos simplificados correspondentes aos programas PAER1 e PAER2, encontram-se nas figuras 3.5 e 3.6 apresentadas no capítulo 3.

O programa DUTO, consiste em uma adaptação do programa PAER2 de forma a se ter um programa específico para a simulação do lançamento de oleodutos submarinos. Esta modificação foi feita basicamente no que diz respeito a incorporar ao PAER2 uma rotina de pré-processamento de dados e a utilização de um elemento de mola linear com o intuito de se simular a reação do fundo do mar.

A rotina de pré-processamento de dados, permite que se monte todos os arquivos de entrada utilizados por PAER2 a partir de dados específicos concernentes ao problema do lançamento, tais como: profundidade da lâmina d'água, afastamento horizontal até onde se deseja estudar o comportamento do oleoduto, inclinação da rampa de lançamento, número de nós, de incrementos, propriedades do oleoduto e coeficiente elástico para a reação do solo.

O elemento de mola linear implantado, está descrito no capítulo 3.

A primeira fase da execução dos programas PAER1 e PAER2, é a entrada de dados, onde se realiza a leitura das coordenadas nodais da configuração inicial, das propriedades dos elementos, da incidência nodal, do código dos graus de liberdade, do número de incrementos de carga, da tolerância adotada para o processo iterativo e do código indicativo do sistema de referência (global ou local) em que serão lidos os vetores de carga.

Após esta fase, os vetores de grau de liberdade nodal correspondente a cada nó, são numerados, estabelecendo desta maneira o número de equações do sistema. Em seguida, determinam-se os vetores de orientação dos elementos no espaço, conforme o processo descrito no item 3.5.

Realiza-se então a leitura do vetor de carga por elemento, sendo que a carga distribuída quando fornecida no sistema global, deve sofrer uma rotação prévia para o sistema local a fim de se poder atribuir os valores de carga equivalente para os nós. Após este processo, são somadas as cargas equivalentes correspondentes

às cargas concentradas e distribuídas, ambas no sistema global. Em seguida monta-se o vetor de carga total do sistema, com o auxílio do vetor contendo a numeração das variáveis para cada nó

Como se está utilizando um processo incremental com variação de carga constante, obtem-se a variação incremental do carregamento ΔF , dividindo-o pelo número de incrementos de carga (NINC), fornecido na entrada de dados.

Quando se tem cargas distribuídas no sistema global, o processo de obtenção do vetor de carga incremental é repetido a cada incremento, uma vez que o valor das cargas equivalentes correspondentes a este tipo de carregamento é função da configuração do elemento. A não adoção desta atualização ocasionaria em erros na avaliação do carregamento atuante, especialmente nos termos correspondentes aos momentos, graças à variação de inclinação entre os elementos adjacentes, a qual pode ser bastante acentuada.

CAPÍTULO 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo apresentar alguns casos simulados com o intuito de validar os processos e os programas computacionais utilizados em problemas de análise estática não linear de estruturas reticuladas sujeitas a grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Os exemplos são apresentados na seqüência em que foram realizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho, mostrando desta maneira a metodologia utilizada para se aferir os diversos componentes dos programas.

Os resultados obtidos são apresentados sob a forma de gráficos e tabelas, permitindo desta maneira analisar-se a exatidão do processo utilizado comparando os valores com soluções propostas por diversos outros autores.

5.2 PÓRTICO ESPACIAL LINEAR

Neste item é apresentada uma análise estática linear (pequenos deslocamentos) de um pórtico espacial.

A importância da inserção desta análise reside no fato de que através da comparação dos resultados numéricos obtidos com os valores fornecidos por Gere e Weaver [36], pôde-se avaliar o comportamento das matrizes de rotação, além de testar a matriz de rigidez elástica para um elemento sujeito a deslocamentos espaciais.

Este exemplo tem como objetivo servir de referência para trabalhos futuros nesta área, uma vez que estas verificações são de vital importância no desenvolvimento do programa computacional.

A figura (5.1) mostra o pórtico espacial estudado o qual tem quatro membros e cinco nós. Uma observação da figura mostra que existem dezoito graus de liberdade (seis em cada um dos nós B, C e D) e doze restrições (seis em cada um dos pontos A e E). As cargas nodais no pórtico consistem numa força $2P$ na direção positiva de x no ponto B, numa força P na direção negativa de y no ponto D, e um binário PL no sentido negativo de z em D. Atua ainda uma força de intensidade $4P$ na direção positiva de z , aplicada no ponto C.

Todos os membros têm as mesmas propriedades em suas seções transversais, que são as seguintes:

$$E = 30000 \text{ ksi}$$

$$P = 1 \text{ kip}$$

$$\begin{aligned} G &= 12000 \text{ ksi} & L &= 120 \text{ in} \\ A &= 11 \text{ in}^2 & I_x &= 83 \text{ in}^4 \\ I_y &= I_z = 56 \text{ in}^4 \end{aligned}$$

A figura (5.2) mostra a estrutura com o respectivo sistema de numeração para os deslocamentos, o qual é obtido do sistema de numeração para os nós.

A tabela (5.1) apresenta os resultados obtidos para o caso em questão, resultados estes que coincidem com os apresentados por Gere [36].

5.3 CÁLCULO DE CARGA CRÍTICA

Neste item é apresentado um exemplo com solução analítica para o cálculo da carga crítica de flambagem, com o intuito de se aferir as matrizes utilizadas assim como o processo de obtenção dos autovalores e autovetores implantado.

O exemplo testado, foi o de uma viga em balanço, com igual espaçamento em relação aos três eixos coordenados, com uma carga axial P aplicada na extremidade livre.

O gráfico da figura (5.3) apresenta os valores obtidos variando-se o número de elementos. Verificou-se que, para o caso em questão, com três elementos, os resultados são excelentes para as três primeiras cargas críticas. Onde os valores analíticos para carga crítica de flambagem são dados por :

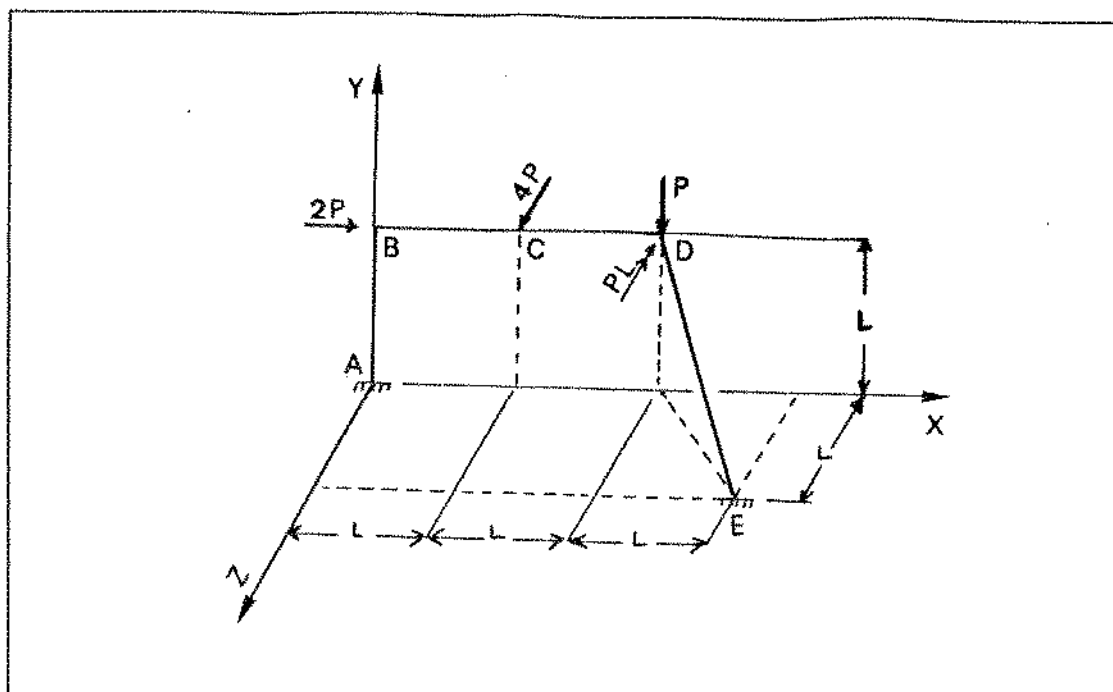


Fig. 5.1 - Pórtico espacial linear - Desenho esquemático

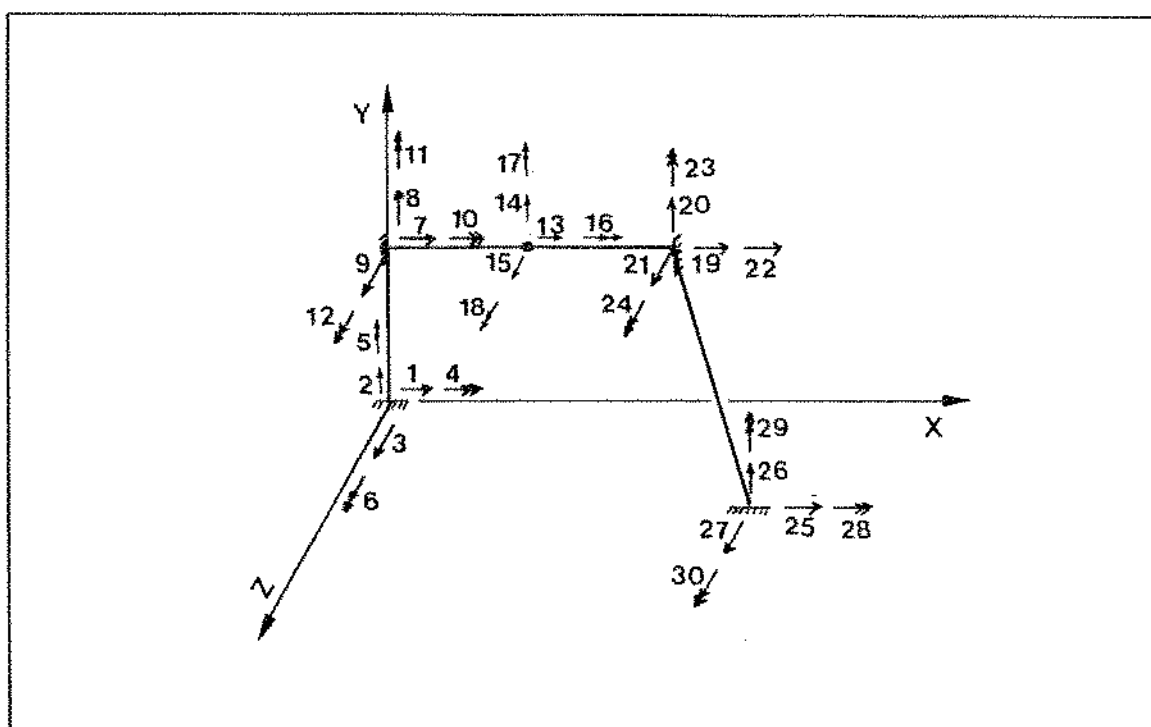


Fig.5.2 - Pórtico espacial linear - Sistema de numeração para os deslocamentos livres.

TITULO DO TRABALHO - - PORTICO ESPACIAL ,Gere e Weaver (Exemplo 1)

NUMERO DE INCREMENTOS DE CARGA - 1 TOLERANCIA - .100E-02
 CODIGO DO TIPO DE ELEMENTO - 0

NO	COORDENADAS		
	[OX]	[OY]	[OZ]
1	.00	.00	.00
2	.00	120.00	.00
3	120.00	120.00	.00
4	240.00	120.00	.00
5	360.00	.00	120.00

DESLOCAMENTOS E ROTACOES NODAIS - SIST. GLOBAL

NO	DELTAX	DELTAY	DELTAZ	TETA1	TETA2	TETA3
	[IN]	[IN]	[IN]	[Rad]	[Rad]	[Rad]
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	-.1528	.0002	.6263	-.0075	.0055	-.0027
3	-.1535	.3894	1.1278	-.0056	.0000	-.0029
4	-.1542	.4562	.6139	-.0036	-.0057	.0027
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

DESLOCAMENTOS NODAIS -SISTEMA LOCAL
 ESFORCOS NODAIS - SIST. GLOBAL e LOCAL

NO	DELTAX	DELTAY	DELTAZ	TETA1	TETA2	TETA3
	[IN]	[IN]	[IN]	[Rad]	[Rad]	[Rad]
	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ

ELEMENTO # 1

1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0037	-.3330	-.5520	.0055	.0072	-.0034

a) SISTEMA GLOBAL

1	-.957E+02	-.102E+05	-.209E+04	.228E+06	-.452E+05	.311E+05
2	.957E+02	.102E+05	.209E+04	.167E+05	.456E+05	-.441E+05

b) SISTEMA LOCAL

1	-.102E+05	.151E+04	.137E+04	-.453E+05	-.184E+06	.138E+06
2	.102E+05	-.151E+04	-.137E+04	.453E+05	.194E+05	.433E+05

ELEMENTO # 2

2	-.1502	-.0012	-.6270	-.0075	.0055	.0026
3	-.1475	.3864	-1.1297	-.0056	.0000	.0028

a) SISTEMA GLOBAL

2	-.731E+04	-.732E+03	-.203E+04	-.163E+05	-.435E+05	.451E+05
3	.731E+04	.732E+03	.203E+04	.167E+05	-.197E+06	.399E+05

b) SISTEMA LOCAL

2	-.732E+04	-.702E+03	.200E+04	-.162E+05	-.436E+05	-.450E+05
3	.732E+04	.702E+03	-.200E+04	.162E+05	-.197E+06	-.392E+05

ELEMENTO # 3

3	-.1581	.3955	-1.1251	-.0055	-.0000	.0029
4	-.1566	.4595	-.6107	-.0036	-.0057	-.0027

a) SISTEMA GLOBAL

3	-.424E+04	-.645E+03	.199E+04	-.165E+05	.199E+06	-.393E+05
4	.424E+04	.645E+03	-.199E+04	.167E+05	.379E+05	.116E+06

b) SISTEMA LOCAL

3	-.424E+04	-.632E+03	-.198E+04	-.162E+05	.198E+06	.404E+05
4	.424E+04	.632E+03	.198E+04	.162E+05	.385E+05	-.116E+06

ELEMENTO # 4

4	-.0009	.0677	-.7772	.0028	-.0067	-.0001
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

a) SISTEMA GLOBAL

4	-.776E+03	.102E+04	-.711E+03	-.165E+05	-.375E+05	.220E+04
5	.776E+03	-.102E+04	.711E+03	.521E+05	.447E+05	-.308E+05

b) SISTEMA LOCAL

4	-.145E+04	.138E+03	-.175E+03	.135E+05	-.362E+05	.138E+05
5	.145E+04	-.138E+03	.175E+03	-.135E+05	.726E+05	.148E+05

NOVAS COORDENADAS NODAIS

NO	COORD. OX	COORD. OY	COORD. OZ
1	.0000	.0000	.0000
2	-.1528	120.0002	.6263
3	119.8465	120.3894	1.1278
4	239.8458	120.4562	.6139
5	360.0000	.0000	120.0000

Tabela 5.1 - Resultados obtidos para o pórtico espacial linear

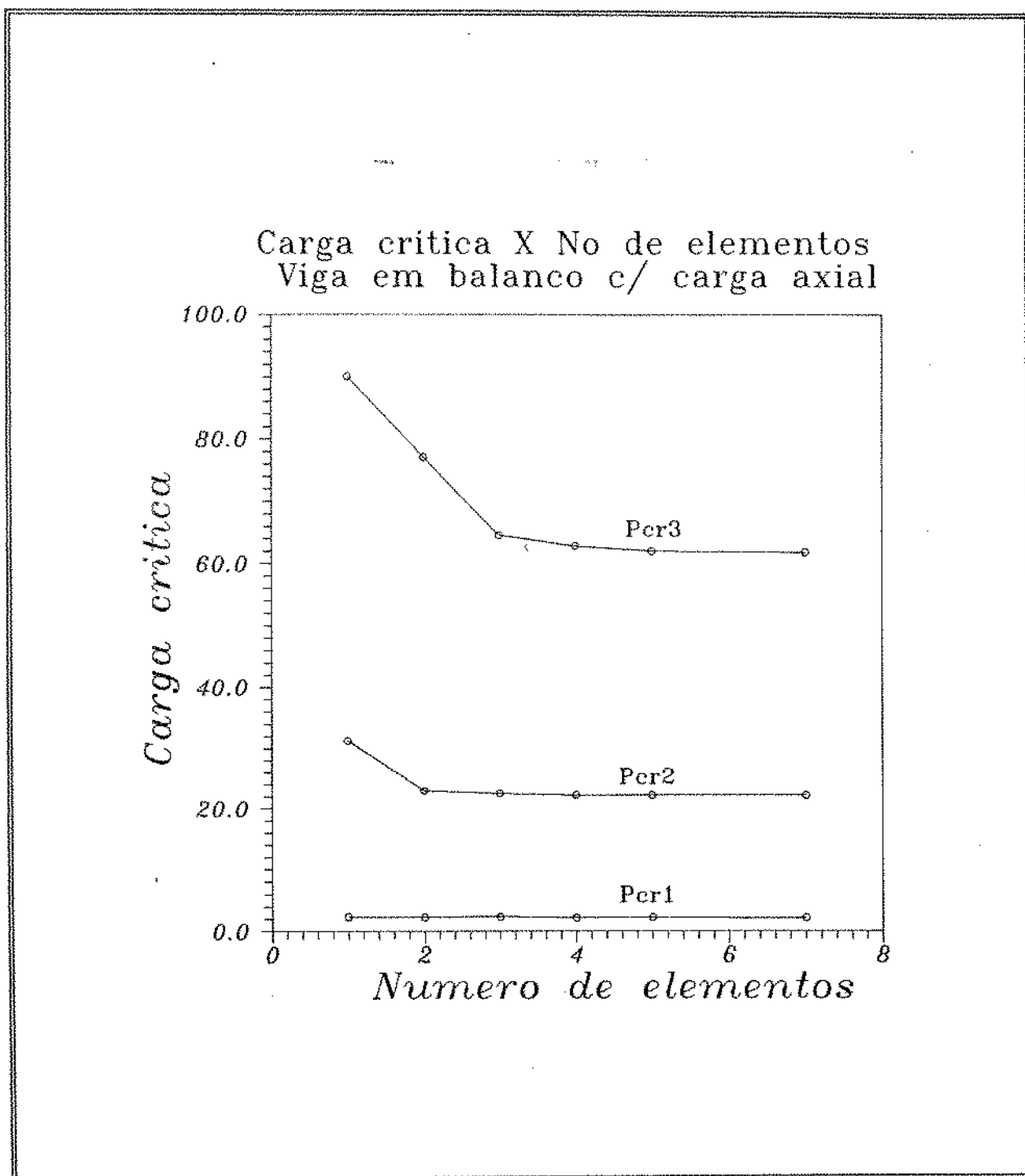


Fig. 5.3 - Gráfico de carga crítica x No de elementos para uma viga em balanço no espaço com carga axial concentrada.

$$\cdot P_{cr}^1 - (\Pi^2 EI)/4L^2 \quad (5.1)$$

$$\cdot P_{cr}^2 - 9(\Pi^2 EI)/4L^2 \quad (5.2)$$

$$\cdot P_{cr}^3 - 25(\Pi^2 EI)/4L^2 \quad (5.3)$$

5.4 TRELIÇA PLANA

O comportamento da estrutura apresentada na figura (5.4), composta por dois elementos de barra, foi calculado analiticamente por Bathe [35], o qual obteve uma relação entre o carregamento aplicado e o deslocamento vertical do ponto central da viga.

A solução proposta por Bathe, assume uma relação linear entre a força axial na barra e a deformação da mesma, hipótese esta que só é válida para pequenas deformações (o que é consistente com a teoria utilizada neste trabalho).

$$F_{axial} = K \varepsilon_{xx} \quad (5.4)$$

onde:

K - é uma constante.

ε_{xx} - é a deformação axial da barra para um dado carregamento

Com base na figura (5.5) pode-se obter as seguintes relações de equilíbrio, a partir da simetria da estrutura:

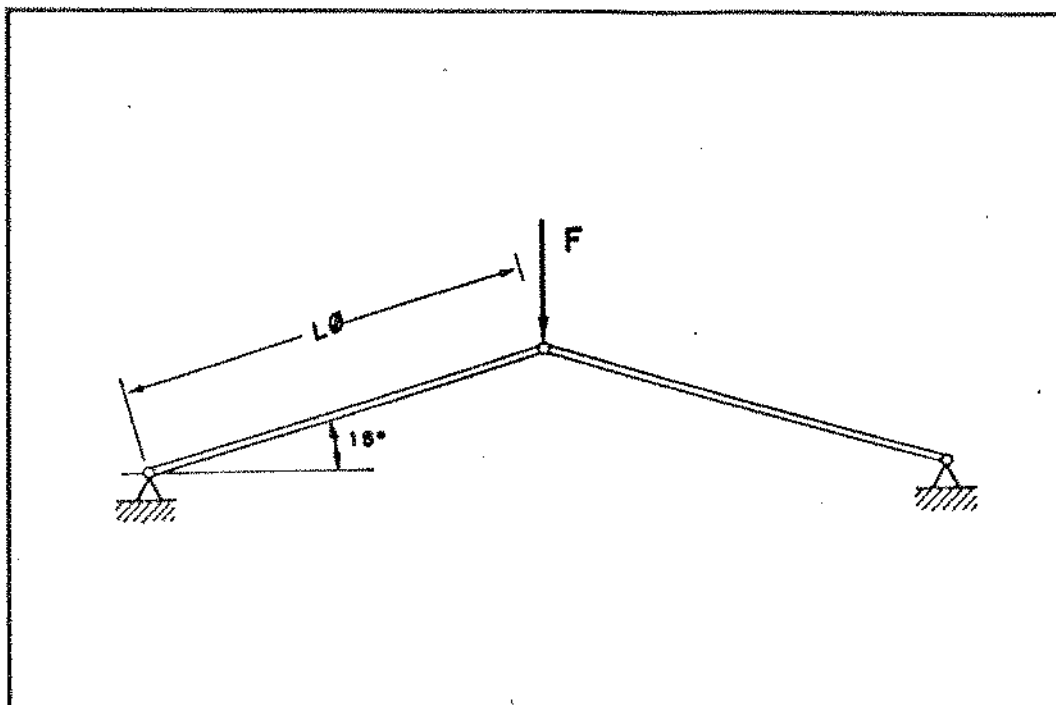


Fig. 5.4 - Treliça plana - Desenho esquemático

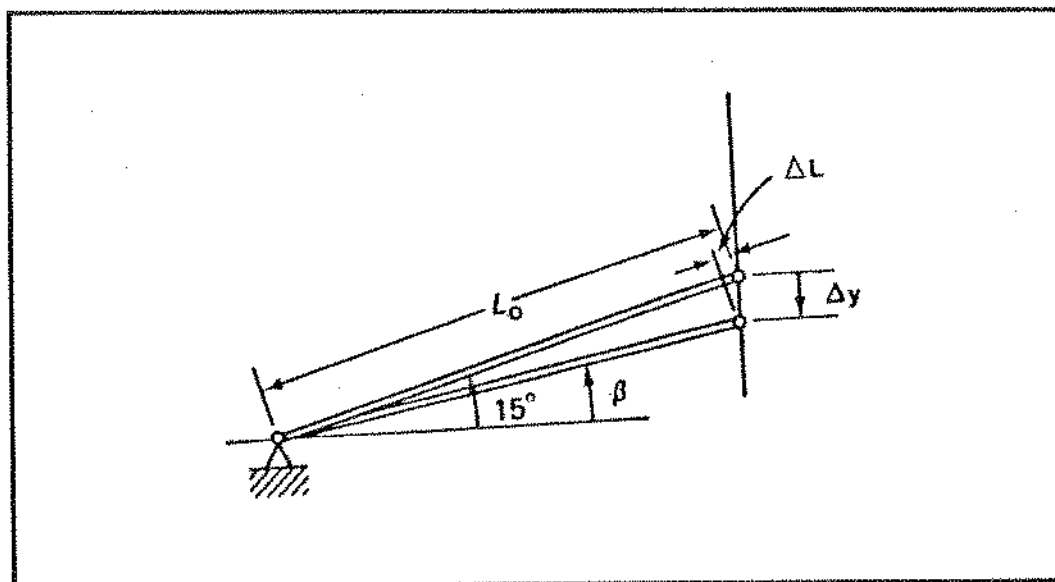


Fig.5.5 - Variáveis geométricas em uma configuração típica da treliça plana.

$$(L_0 - \Delta L) \cos\beta = L_0 \cos 15^\circ \quad (5.5)$$

$$(L_0 - \Delta L) \sin\beta = L_0 \sin 15^\circ - \Delta y \quad (5.6)$$

onde:

$$\Delta L = L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2L_0\Delta y \sin 15^\circ + (\Delta y)^2} \quad (5.7)$$

$$\sin\beta = \frac{L_0 \sin 15^\circ - \Delta y}{L_0 - \Delta L} \quad (5.8)$$

Do equilíbrio entre as forças internas e o carregamento externo, tem-se que:

$$2 F_{axial} \sin\beta = R \quad (5.9)$$

Expressando a força axial como função das deformações das barras, tem-se:

$$\frac{R}{2 K L_0} = \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\Delta y}{L_0} \sin 15^\circ + \left(\frac{\Delta y}{L_0}\right)^2}} \right] \left(\sin 15^\circ - \frac{\Delta y}{L_0} \right) \quad (5.10)$$

O comportamento da treliça plana foi analisado por dois

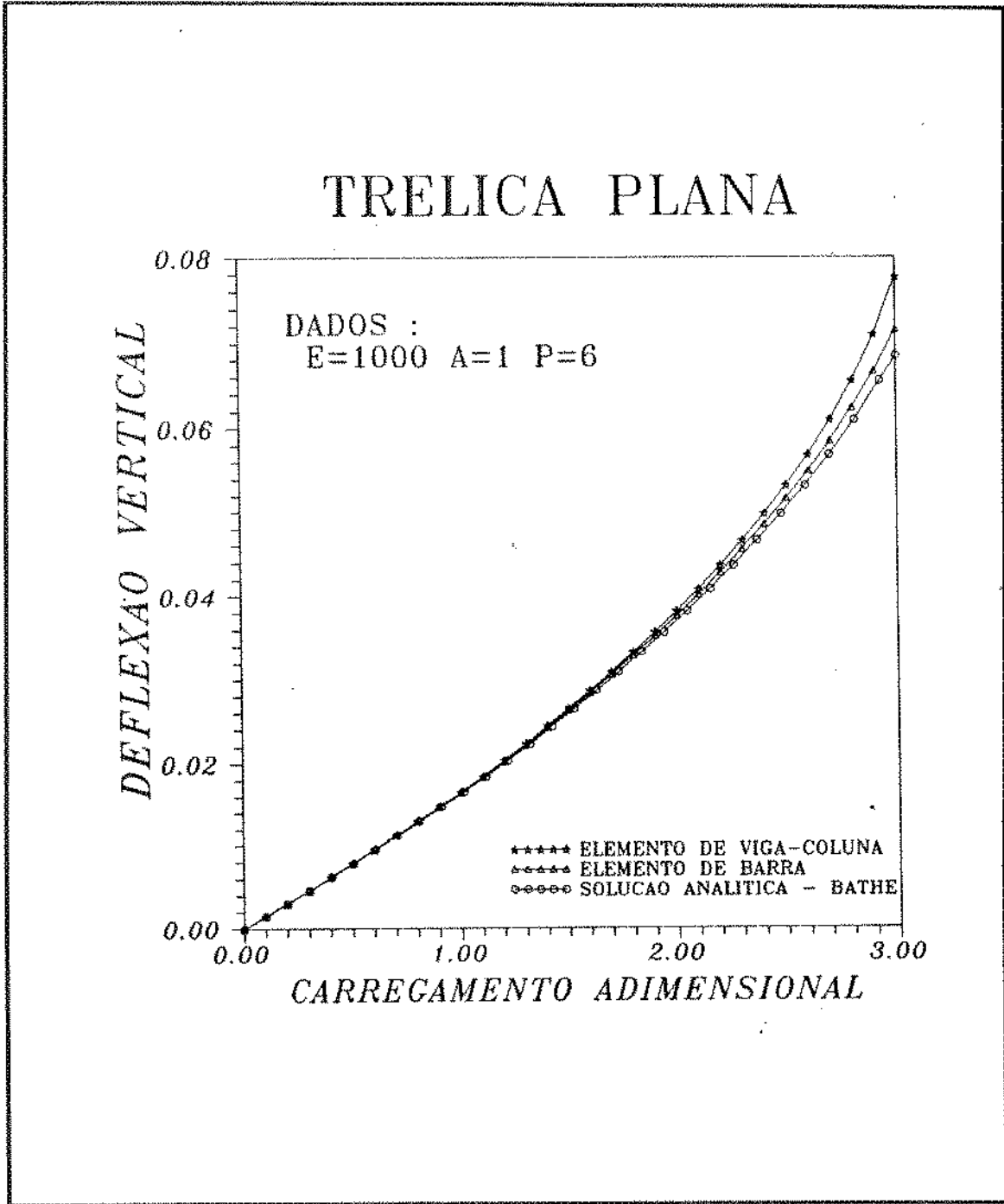


Fig. 5.6 - Deslocamento vertical x Nível de carga para treliça plana

processos distintos e comparado com a solução proposta por Bathe. O primeiro utilizando um elemento de barra e o segundo com elemento de viga-coluna o resultado está apresentado no gráfico da figura 5.6 .

O elemento de barra aproximou-se melhor do modelo de Bathe, uma vez que em sua formulação adotou-se uma aproximação linear para os deslocamentos nas extremidades da barra, fato este consistente com a hipótese assumida no equacionamento teórico uma vez que admitiu-se que o elemento só se deforma axialmente.

5.5 VIGA COM IMPERFEIÇÃO GEOMÉTRICA INICIAL

Neste exemplo, é analisado o comportamento de uma viga bi-apoiada com imperfeição geométrica quando submetida a um carregamento axial P. A figura (5.7), ilustra o caso em questão, onde a linha tracejada representa a configuração inicial da viga, enquanto que a linha cheia ilustra uma configuração de equilíbrio para um dado valor de P.

Adota-se, para a configuração não deformada inicial da viga a seguinte função:

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.11)$$

O que implica em se ter inicialmente para o eixo da viga uma configuração senoidal, com uma flecha máxima no centro igual a "a". Se a viga em questão é submetida a uma carga axial P, como

ilustrado em (5.7), há uma deflexão lateral adicional, a qual chamaremos de y_1 .

$$y = y_0 + y_1 \quad (5.12)$$

A solução deste problema é mostrada por Timoshenko [27] que propôs a seguinte equação para deflexão lateral da viga: lateral da viga:

$$y_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} a \sin \frac{\pi x}{l} \quad (5.13)$$

levando (5.11) e (5.13) em (5.12), tem-se:

$$y = \frac{a}{1 - \alpha} \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \quad (5.14)$$

Onde α corresponde à razão entre a força longitudinal P e a carga crítica P_{cr} da viga ideal, ou seja:

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{P}{(\pi^2 EI/l^2)} \quad (5.15)$$

Da equação (5.14) conclui-se que a imperfeição inicial no centro da viga, é multiplicada pelo fator $1/(1 - \alpha)$ o qual deve-se à ação da carga longitudinal P . Observa-se também que quando P se aproxima da carga crítica, ou seja, quando α tende a 1, a deflexão lateral total y tende a infinito.

No gráfico da figura (5.8) tem-se a comparação entre o

resultado obtido numericamente e a solução analítica proposta por Timoshenko para a variação do afastamento vertical no centro da viga.

A figura (5.9) apresenta algumas configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental.

A tabela (5.2) apresenta os valores do gráfico da figura (5.8).

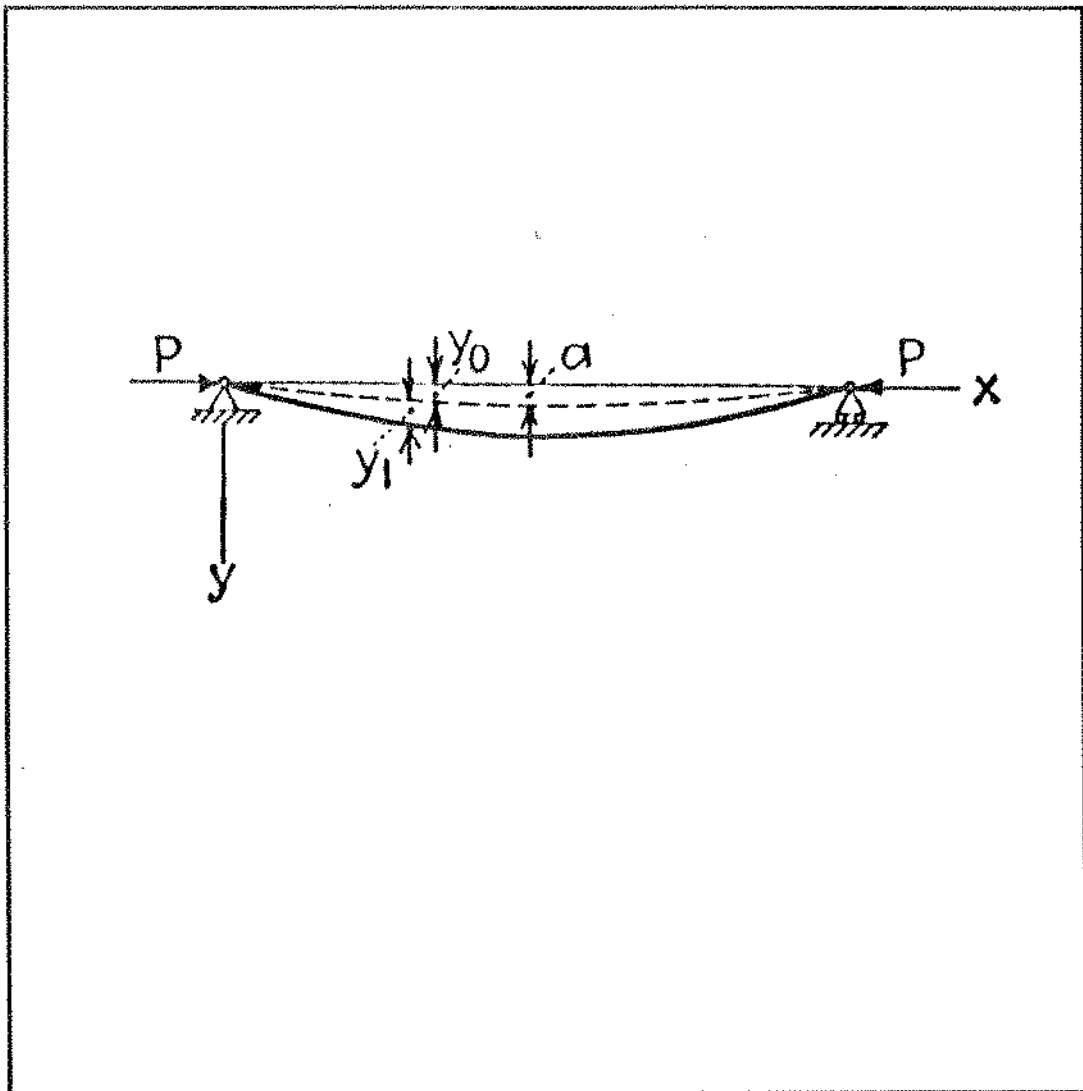


Fig.5.7 - Viga com imperfeição inicial - Desenho esquemático

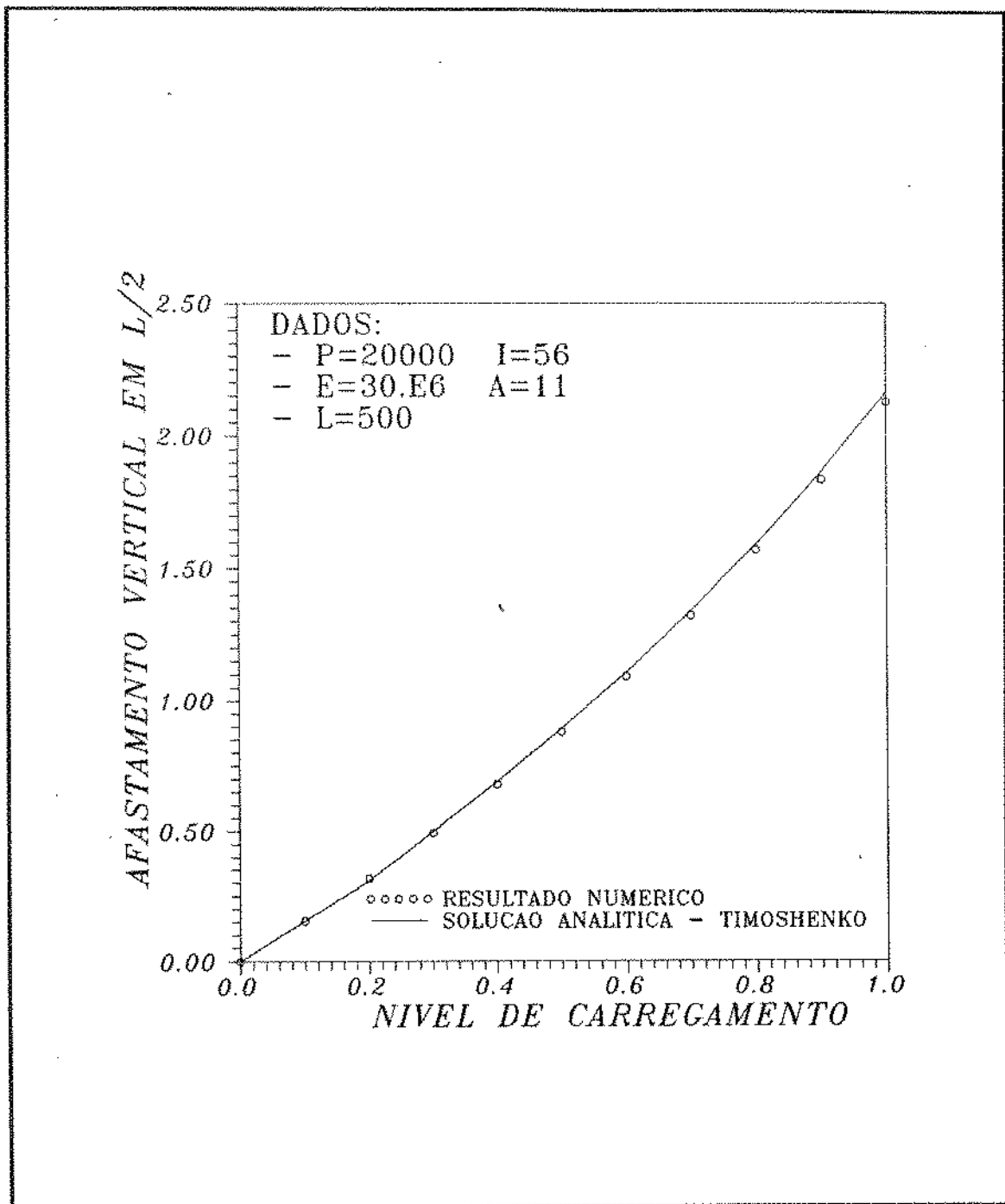


Fig.5.8 - Comparação entre os resultados obtidos numericamente e a solução analítica de Timoshenko para viga com imperfeição inicial .

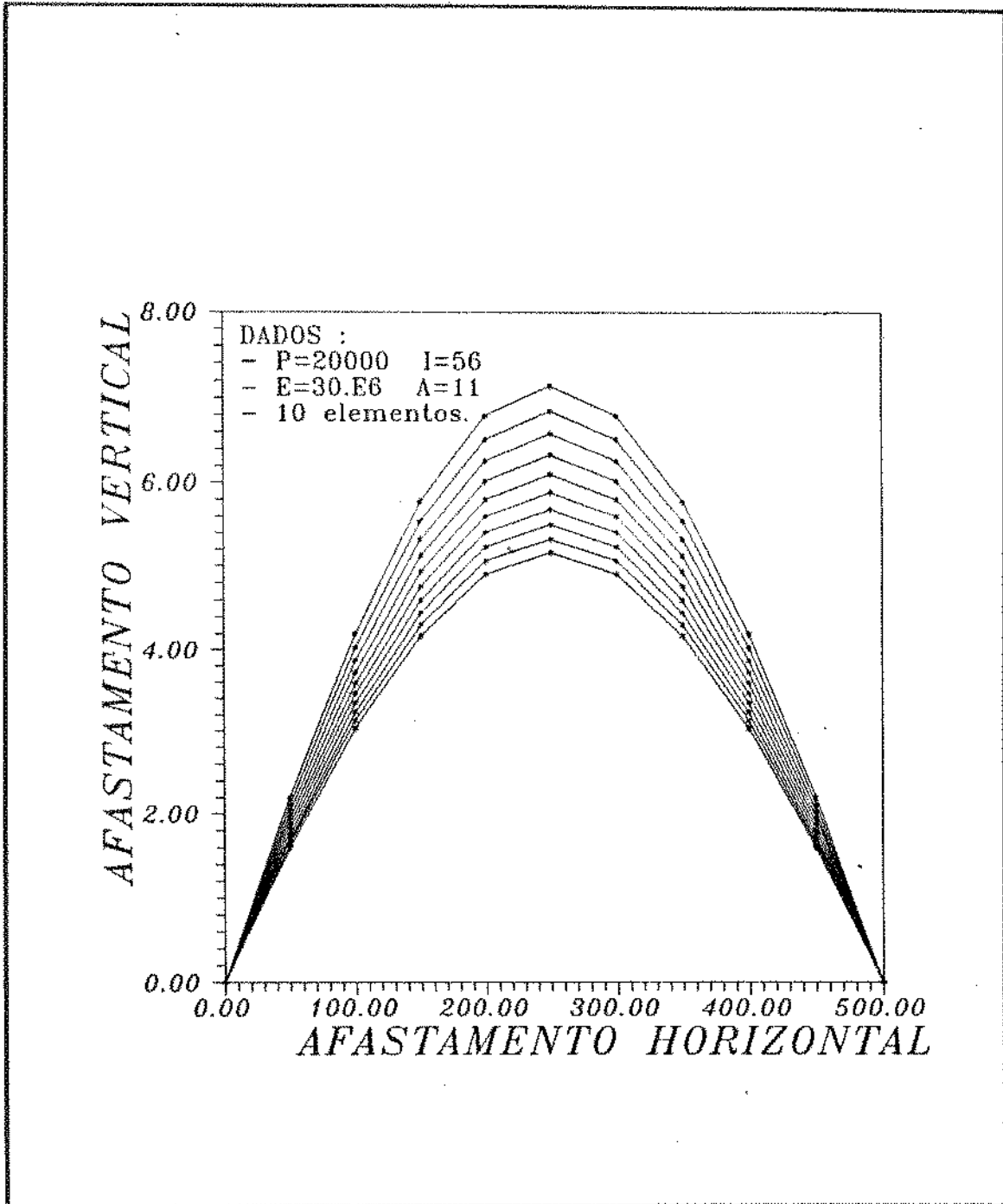


Fig.5.9 - Configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental para viga com imperfeição inicial.

TABELA 5.2

VALORES DO GRÁFICO DA FIGURA (5.8)

NÍVEL DE CARGA	DEFLEXÃO VERTICAL NO CENTRO DA VIGA	RESULTADO ANALÍTICO TIMOSHENKO
0.1	0.1536	0.1554
0.2	0.3170	0.3090
0.3	0.4912	0.4973
0.4	0.6771	0.6858
0.5	0.8760	0.8877
0.6	1.0894	1.1044
0.7	1.3188	1.3378
0.8	1.5661	1.5897
0.9	1.8335	1.8624
1.0	2.1234	2.1587

5.6 VIGA EM BALANÇO

Neste item é avaliado o comportamento de uma viga em balanço quando submetida a três tipos distintos de carregamento. Quais sejam:

- Carga vertical concentrada na extremidade livre.
- Carga de momento na extremidade livre.
- Carregamento vertical distribuído ao longo da viga.

5.6.1 Carga vertical concentrada na extremidade

O problema de se avaliar as grandes deflexões às quais está submetida uma viga em balanço quando sujeita a uma carga vertical aplicada em sua extremidade livre já foi analisado por diversos autores tais como: Barten [37], Bisshopp e Drucker [38] e Mattiasson [39] por meio de integrais elípticas e por Bathe e Bolourchi [12], Gattass [6] e Conci [9], entre outros utilizando elementos finitos. Trata-se de um dos problemas mais utilizados como exemplo com o intuito de se avaliar programas de elementos finitos para vigas com não linearidade geométrica, sendo por este motivo também utilizado como teste neste trabalho.

A figura (5.10) apresenta um desenho esquemático do problema em questão onde:

- L - Comprimento inicial da viga.
- u - Deflexão horizontal da extremidade livre.
- v - Deflexão vertical da extremidade livre.

θ - Inclinação da extremidade livre.

P - Carregamento concentrado vertical.

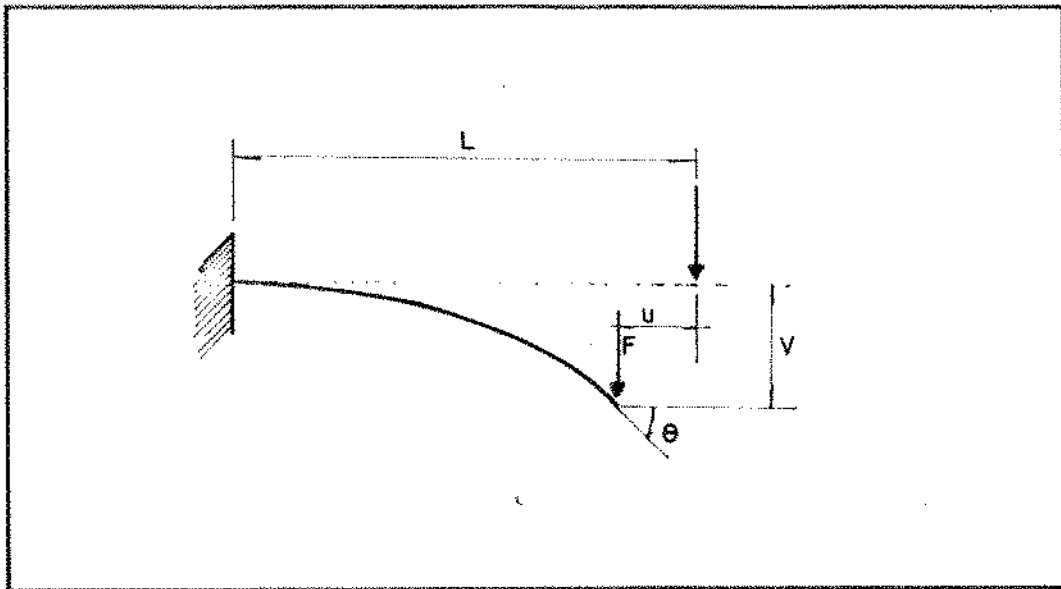


Fig.5.10 - Viga em balanço com carga vertical concentrada na extremidade livre - Desenho esquemático.

Os resultados obtidos numericamente são comparados com os valores tabelados apresentados por Mattiasson (39), o qual faz a sua análise a partir das seguintes hipóteses:

- 1) O material é linearmente elástico (Lei de Hooke).
- 2) As deformações axiais são desprezíveis.
- 3) As deformações de cisalhamento são desprezíveis.
- 4) A viga é inicialmente reta e possui seção uniforme constante.
- 5) O plano de carregamento coincide com o plano de flexão.

Essas hipóteses foram observadas na simulação que se segue, pois 1, 3 e 4 são inerentes à teoria utilizada enquanto 2 e 5 foram levadas em conta adotando uma viga esbelta com seção transversal circular.

Os valores utilizados das características da viga foram:

$$E = 1000 \text{ Pa}$$

$$A = 1000 \text{ m}^2$$

$$L = 1 \text{ m}$$

Os resultados foram adimensionalizados em função de um parâmetro de carga P_{ad} dado por:

$$P_{ad} = \frac{PL^2}{EI} \quad (5.16)$$

E os deslocamentos adimensionais u/L e v/L .

O gráfico da figura (5.11) apresenta os resultados obtidos, comparando-os com os apresentados em [39].

A tabela (5.3), apresenta alguns valores utilizados em (5.11).

O gráfico (5.12) apresenta algumas configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental.

5.6.2 Carga de momento na extremidade

A mesma viga do exemplo anterior é analisada agora sob a condição de um momento concentrado na extremidade livre (figura

5.13). Como o momento é constante na viga, o raio de curvatura r , também é constante e a forma deformada da viga é um arco de círculo. A rotação da viga θ_z e os deslocamentos verticais e horizontais são:

$$\theta_z = \frac{uL}{EI} \quad (5.17)$$

$$v = r(1 - \cos\theta) = \frac{EI}{\mu} \left(1 - \cos\frac{\mu L}{EI} \right) \quad (5.18)$$

$$u = L - r \sin\theta = L - \frac{EI}{\mu} \sin\frac{\mu L}{EI} \quad (5.19)$$

O gráfico da figura (5.14) apresenta os resultados obtidos para os deslocamentos adimensionais u/L e v/L em função do parâmetro de carga adimensional (μ_{ad}) comparando-os com a solução analítica.

$$\mu_{ad} = \frac{\mu L^2}{(2\pi EI)} \quad (5.20)$$

A tabela (5.4) apresenta alguns valores correspondentes ao gráfico da fig.(5.14).

A figura (5.15) apresenta configurações de equilíbrio para alguns níveis de carga.

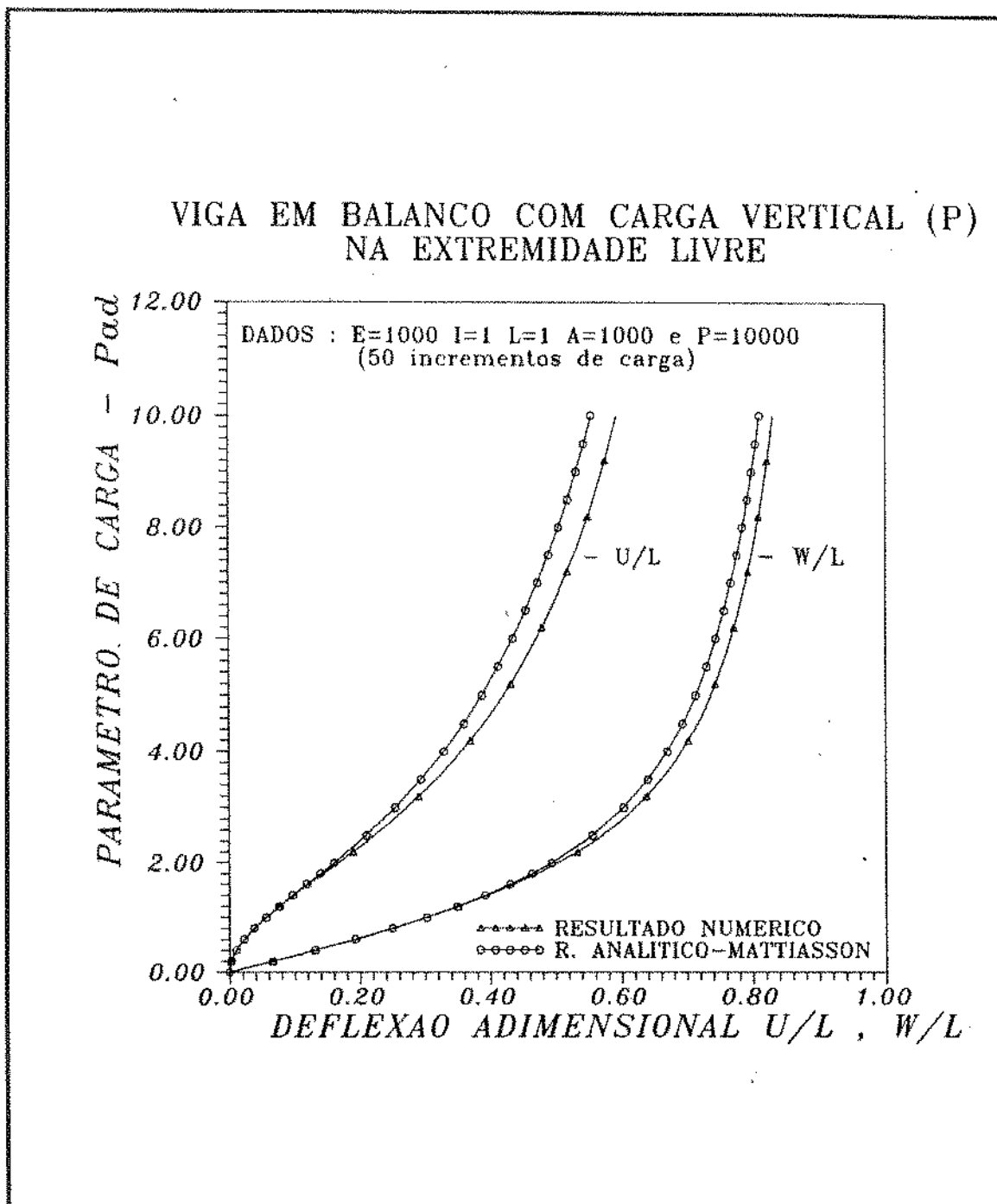


Fig.5.11 - Comparação dos resultados numéricos obtidos com a solução analítica proposta por Mattiasson para a viga em balanço com carga vertical concentrada na extremidade livre .

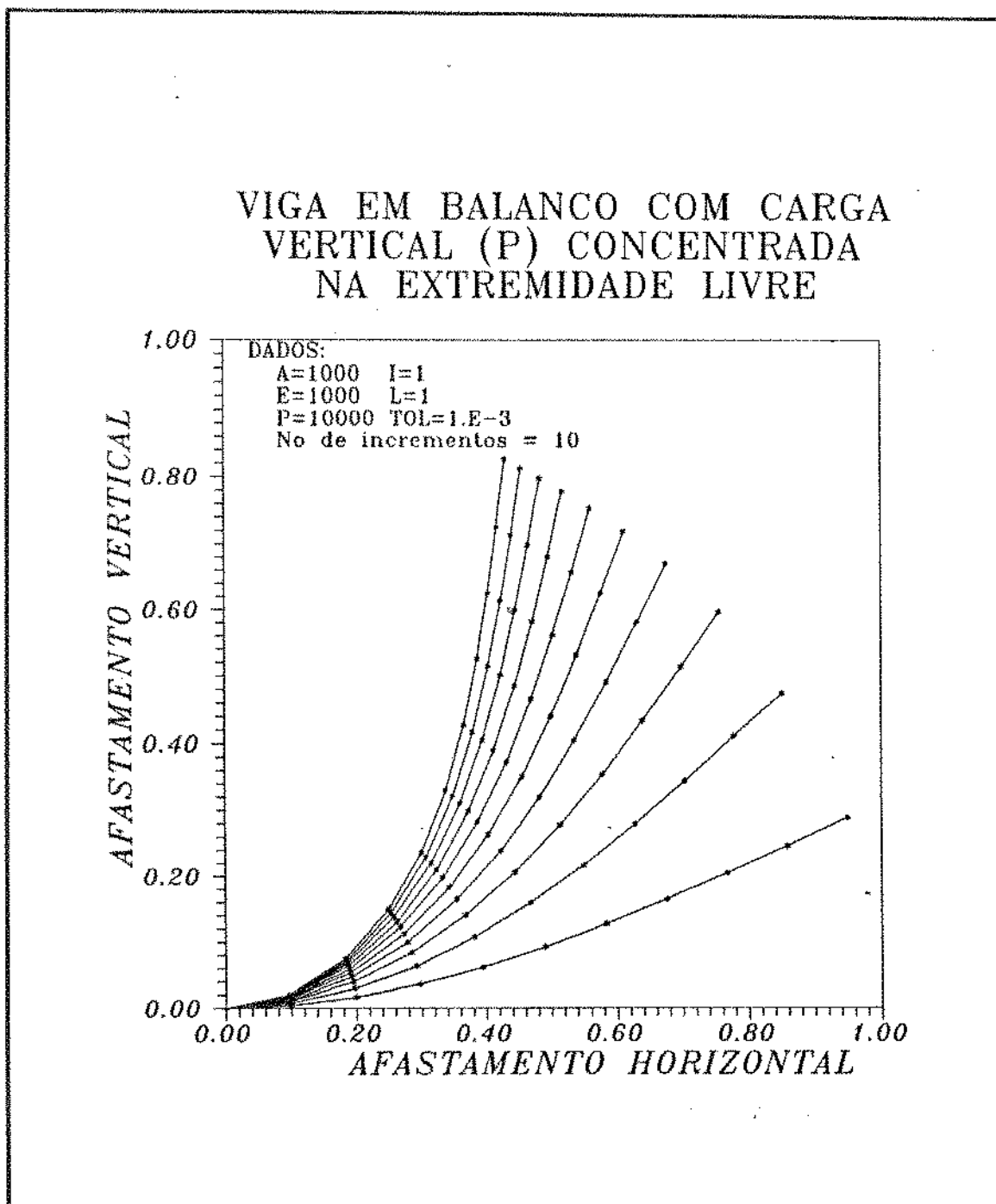


Fig.5.12 - Algumas configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental para a viga em balanço ,com carga concentrada na extremidade livre .

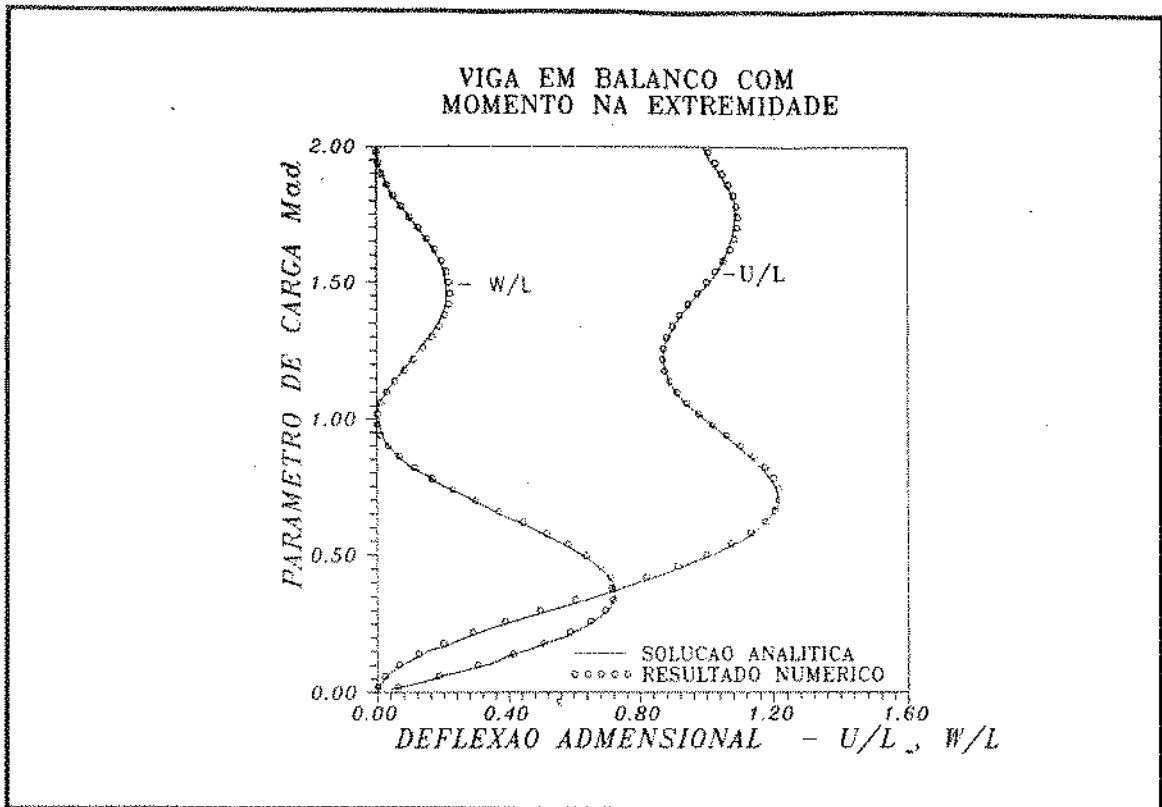


Fig.5.14 - Comparação dos resultados numéricos obtidos, com a solução analítica para a viga em balanço com carga de momento concentrada na extremidade livre .

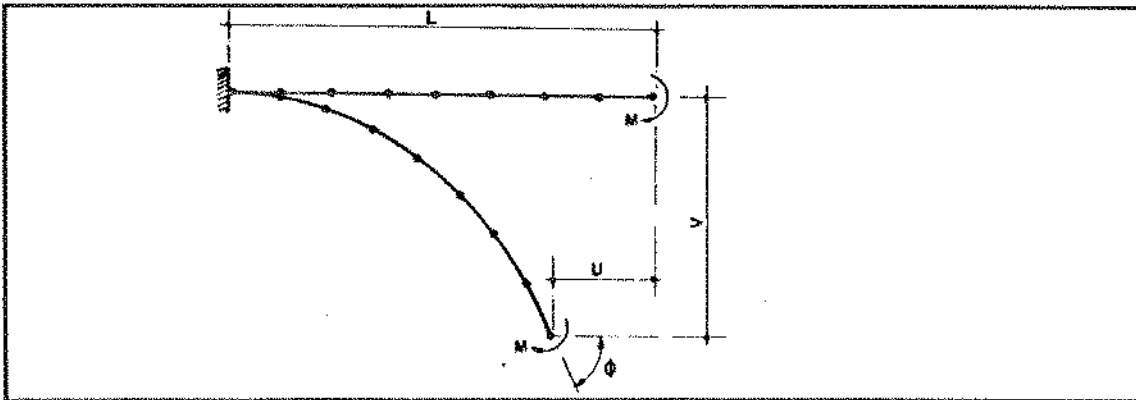


Fig. 5.13 - Viga em balanço com carga de momento concentrada na extremidade livre .

Mad	U/L	V/L
.100	.0646	.3044
.200	.2433	.5506
.300	.4957	.6955
.400	.7665	.7211
.500	1.0006	.6380
.600	1.1567	.4812
.700	1.2169	.2986
.800	1.1894	.1381
.900	1.1032	.0345
1.000	.9982	.0014
1.100	.9125	.0303
1.200	.8713	.0958
1.300	.8817	.1662
1.400	.9328	.2128
1.500	1.0017	.2195
1.600	1.0620	.1862
1.700	1.0937	.1252
1.800	1.0871	.0616
1.900	1.0493	.0156
2.000	.9968	.0006

Tabela 5.4 - Valores correspondentes ao gráfico da figura 5.14

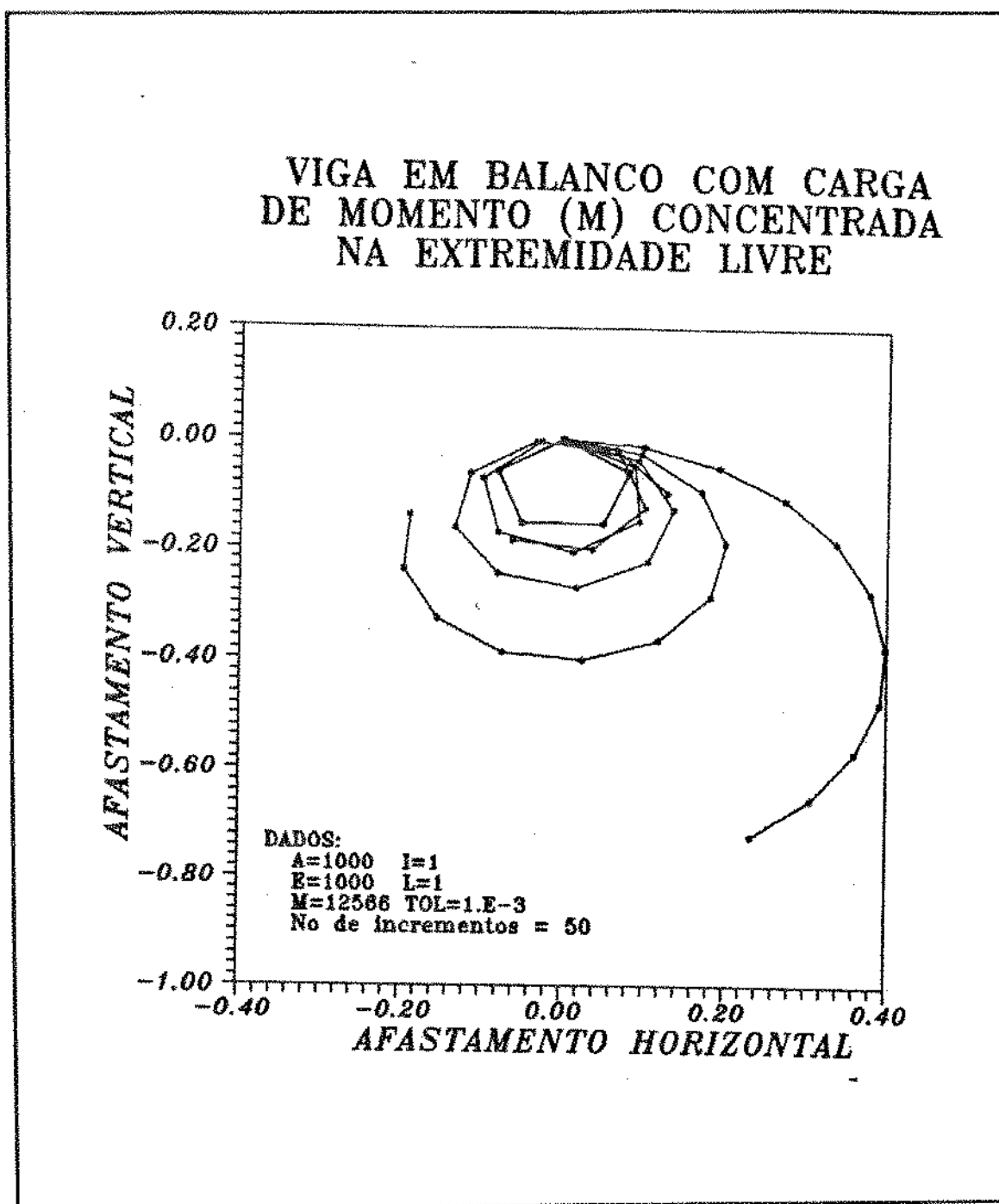


Fig.5.15 - Algumas configurações de equilíbrio obtidas ao longo do processo incremental, para a viga em balanço com carga de momento concentrado na extremidade livre .

5.6.3 Carga distribuída

Neste item, avalia-se o comportamento de uma viga engastada sujeita a um carregamento vertical distribuído constante, conforme ilustrado na figura (5.16).

Os valores utilizados para as propriedades da viga foram:

$$E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$A = 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = 1.6667 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$L = 1 \text{ m}$$

E o deslocamento adimensional v/L foi plotado em função de um parâmetro de carga adimensional Q_{ad} dado por:

$$Q_{ad} = \frac{q L^3}{EI} \quad (5.21)$$

A resposta da análise para carga constante no sistema global é comparada com o resultado de Holden [40] .

A figura (5.17) apresenta esta curva de uma forma adimensional .

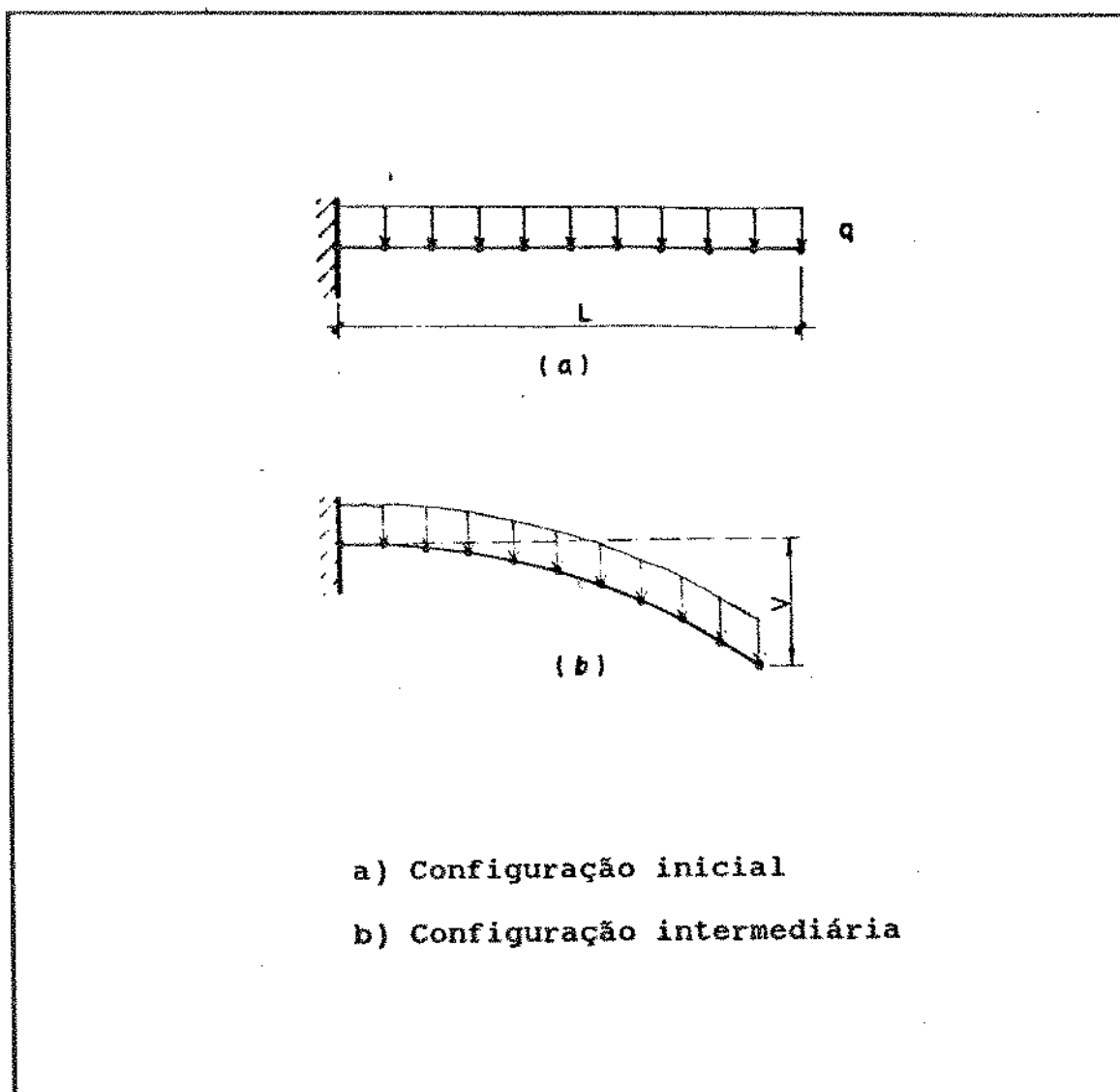


Fig. 5.16 - Viga em balanço com carga distribuída constante no sistema global - Desenho esquemático .

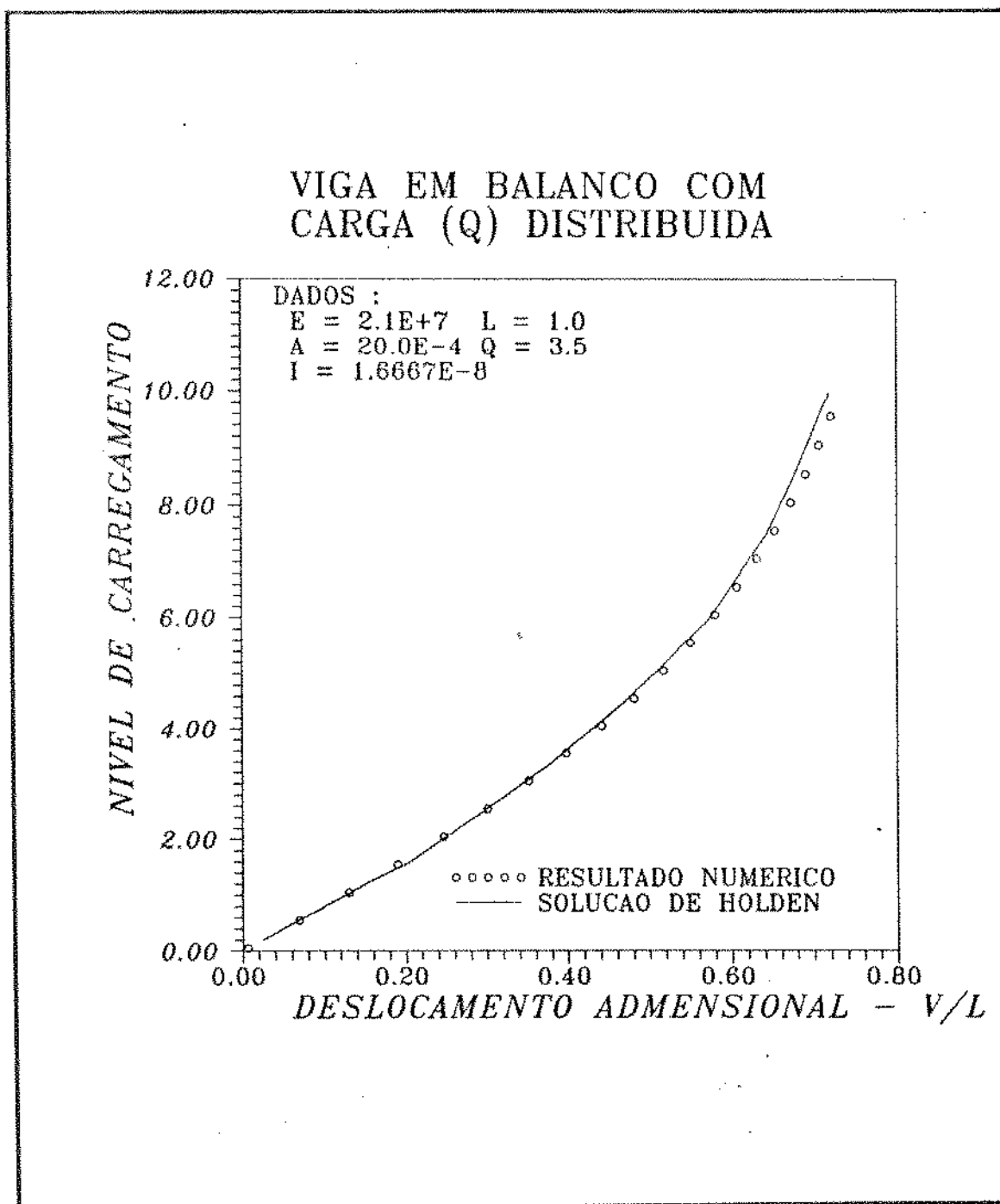


Fig. 5.17 - Comparação dos resultados numéricos obtidos com a solução analítica proposta por Holden para a viga em balanço com carga distribuída no sistema global.

CAPÍTULO 6 SIMULAÇÃO DO LANÇAMENTO DE OLEODUTOS SUBMARINOS

6.1 INTRODUÇÃO

A teoria e os métodos de resolução apresentados nos capítulos anteriores são utilizados para determinar deflexões e esforços em oleodutos submarinos suspensos entre a barcaça de lançamento e o fundo do mar.

A configuração suspensa de um oleoduto submarino constitui um problema com não linearidade geométrica devido à existência de grandes deslocamentos.

Apesar de, aparentemente, constituir-se em uma estrutura bastante simples, a análise estrutural de oleodutos submarinos é mais complexa do que a de algumas estruturas a primeira vista mais complicadas. Existe uma diversidade muito grande quanto aos carregamentos aplicados, métodos de construção e condições de operação.

No início das operações de prospecção de petróleo na plataforma continental oceânica, não havia necessidade de uma

grande preocupação com a complexidade da análise estrutural dos oleodutos. As linhas eram lançadas em águas rasas, relativamente perto da costa. Sob estas condições, a teoria clássica de pequenos deslocamentos e pequenas deformações fornecia resultados adequados.

No entanto, com a descoberta de campos de petróleo sob lâminas d'água cada vez mais profundas, houve a necessidade de se lançar oleodutos em condições operacionais, estruturalmente, das mais hostis. O resultado disto, é um aumento considerável da importância de uma melhor avaliação do comportamento estrutural dos oleodutos.

6.2 CONFIGURAÇÃO ESTRUTURAL

As possíveis configurações estruturais assumidas por um oleoduto submarino durante o lançamento e quando em operação, são inúmeras. Neste trabalho, no entanto, é objeto de estudo apenas a análise da linha sendo lançada através de um método conhecido como "método da barcaça de lançamento".

O método de lançamento em questão, é apresentado na figura (6.1). A configuração do tubo consiste em uma parte reta, suportada por cilindros no convés da barcaça; um trecho com grande curvatura entre a barcaça e a rampa de lançamento; um trecho reto inclinado suportado por cilindros sobre a rampa de lançamento; trecho curvo entre o final da rampa e o fundo do mar;

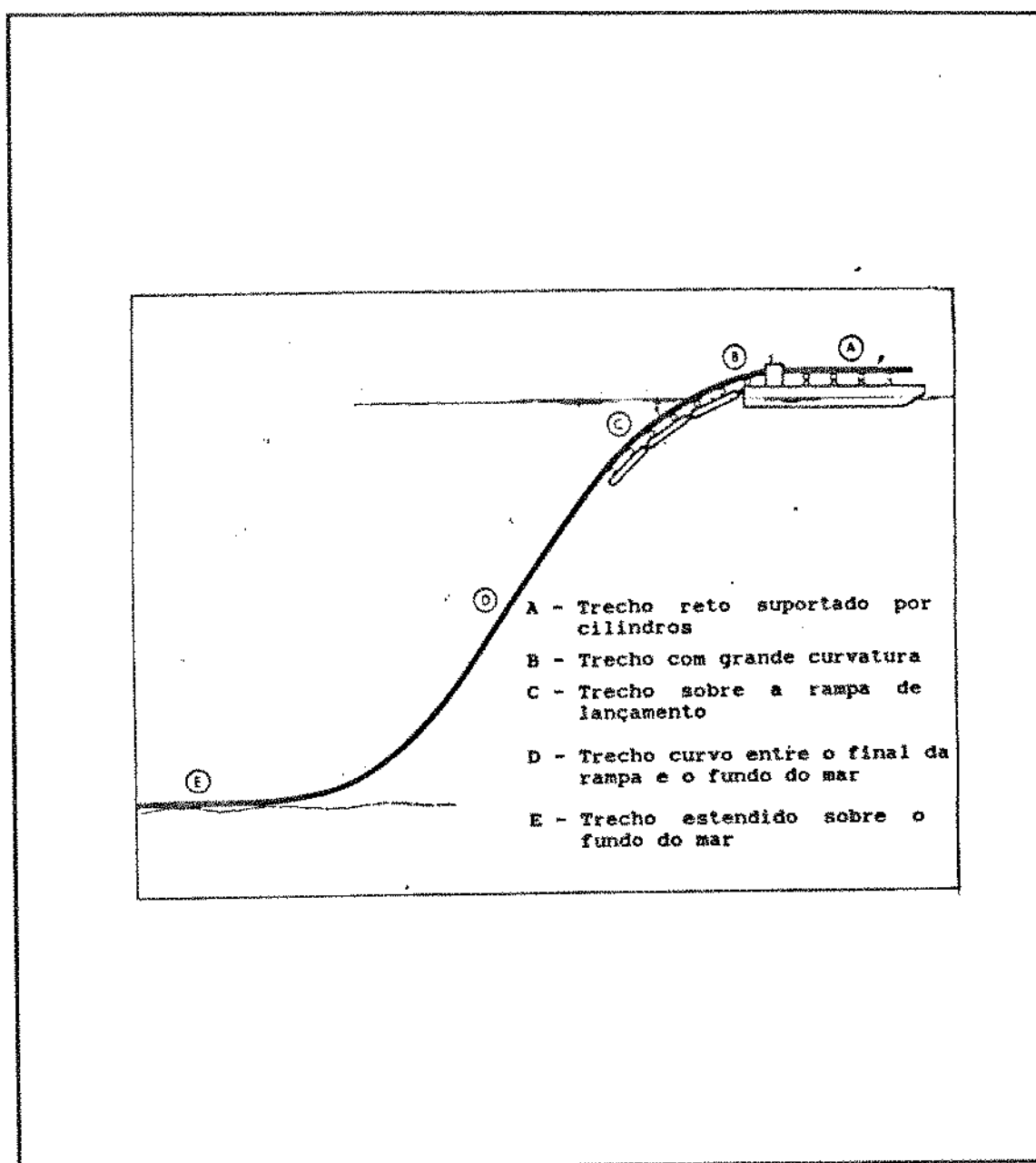


Fig.6.1 - Desenho esquemático do método da barcaça de lançamento de oleodutos submarinos .

e uma parte estendida no fundo do mar. Além disto, comumente as barcaças utilizadas para lançamento em lâminas d'água maiores, possuem tensionadores posicionados sobre o convés da barcaça, antes da rampa de lançamento .

6.3 CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO

As cargas que atuam em um oleoduto submarino podem ser classificadas como estáticas e/ou dinâmicas, ou ser categorizadas de acordo com a sua origem, por exemplo: gravitacional, ambientais, de lançamento e operacionais. A tabela (6.1), apresenta uma lista de cargas de acordo com o tipo e a origem.

Além disto, a modelagem dos carregamentos torna-se complexa por uma série de fatores tais como:

- As cargas podem variar em sua magnitude, direção, e frequência .
- Existem inúmeras combinações possíveis de cargas agindo simultaneamente.
- Algumas cargas podem ser estabelecidas com bastante precisão, ao passo que outras devem ser estimadas.
- As cargas podem variar ao longo do oleoduto, uma vez que algumas delas dependem da posição, direção e profundidade em relação ao ponto de lançamento .

TABELA (6.1) - CARGAS EM UM OLEODUTO SUBMARINO

TIPO	ORIGEM
Peso	- Gravitacional
Flutuação	- Hidrostática - Solos Fluidificados
Forças de Arraste	- Velocidade das Correntes em Regime permanente - Velocidade Oscilatória da Onda - Vortex Transversal
Força de Sustentação Fluidomecânica (Lift)	- Velocidade das Correntes em Regime permanente - Velocidade Oscilatória da Onda - Vortex Transversal
Força de Inércia	- Velocidade Oscilatória da Onda - Movimento da Barcaça
Tração	- Tensionadores da Barcaça - Movimento da Barcaça - Pressões do Fluido Interno - Contração Térmica
Compressão	- Gravitacional - Movimento da Barcaça - Expansão Térmica
Torção	- Movimento da Barcaça
Pressão Externa	- Hidrostática - Sólidos
Pressão Interna	- Fluido Bombeado

Somam-se a estes problemas, a dificuldade em se obter, para uma dada locação, dados quanto às cargas ambientais atuantes.

Neste trabalho, no entanto, são avaliadas apenas situações de lançamento com oleodutos sujeitos aos seguintes carregamentos :

- Peso próprio
- Tração na barcaça
- Reação do solo

6.4 MODELAGEM DO PROBLEMA

Conforme estabelecido nos itens anteriores, o problema consiste em se analisar o comportamento de um oleoduto submarino durante o lançamento em lâminas d'água profundas, sujeito a cargas devido ao peso próprio, tração na extremidade e reação do solo.

Com o objetivo de simplificar a análise é desprezado o efeito da rampa de lançamento, modelando-se o tubo a partir do ponto em que este deixa a rampa. Esta consideração não afeta os resultados obtidos para o trecho suspenso do tubo.

A principal dificuldade desta análise, é o fato de que não se conhece a priori o ponto em que o oleoduto toca o fundo do mar.

Neste trabalho, foram utilizados dois processos distintos para a obtenção da configuração de equilíbrio da estrutura deformada.

No primeiro, não se leva em conta a reação do fundo do mar, aproximando-se do modelo proposto por Neathery [17], que propõe buscar a solução do problema através de um processo de tentativas, até que os resultados obtidos satisfaçam as condições de contorno desejadas.

No segundo tipo de modelagem, leva-se em conta a reação do fundo do mar, através da incorporação ao programa de um elemento de mola linear, conforme descrito no item 3.8.

Além disto, adotou-se como configuração inicial para a estrutura não deformada, uma função senoidal que atende as seguintes condições impostas: tangente nula na extremidade inferior, afastamento horizontal, afastamento vertical e inclinação da extremidade superior.

A função utilizada foi:

$$Y^{(i)} = \frac{Y}{\left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{ang}\right)\right]} \left[\operatorname{sen}\left((\pi - \operatorname{ang}) \frac{X^{(i)}}{X} - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{ang}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{ang}\right) \right] \quad (6.1)$$

onde:

x - Afastamento horizontal da linha

y - Afastamento vertical da linha

ang - ângulo de lançamento (entre o eixo horizontal e a rampa).

As figuras (6.2) e (6.3) apresentam um desenho esquemático dos dois modelos utilizados.

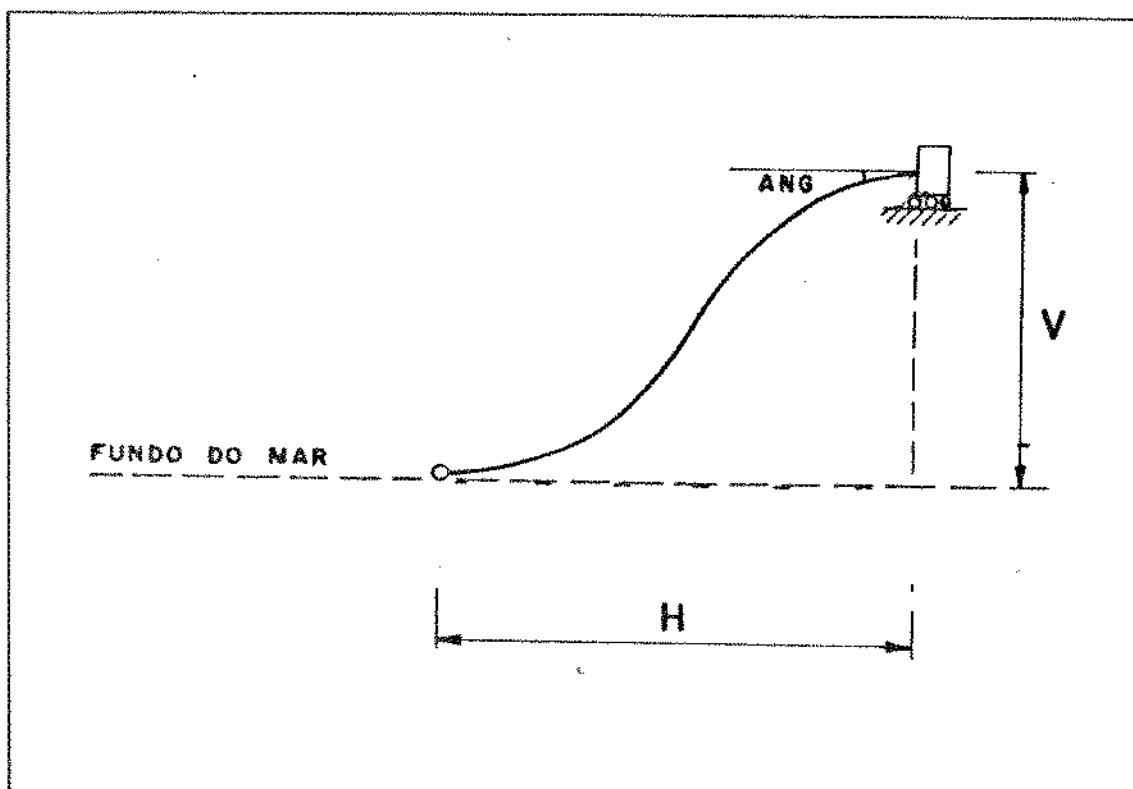


Fig. 6.2 - Desenho esquemático do modelo #1
(Sem reação do fundo do mar)

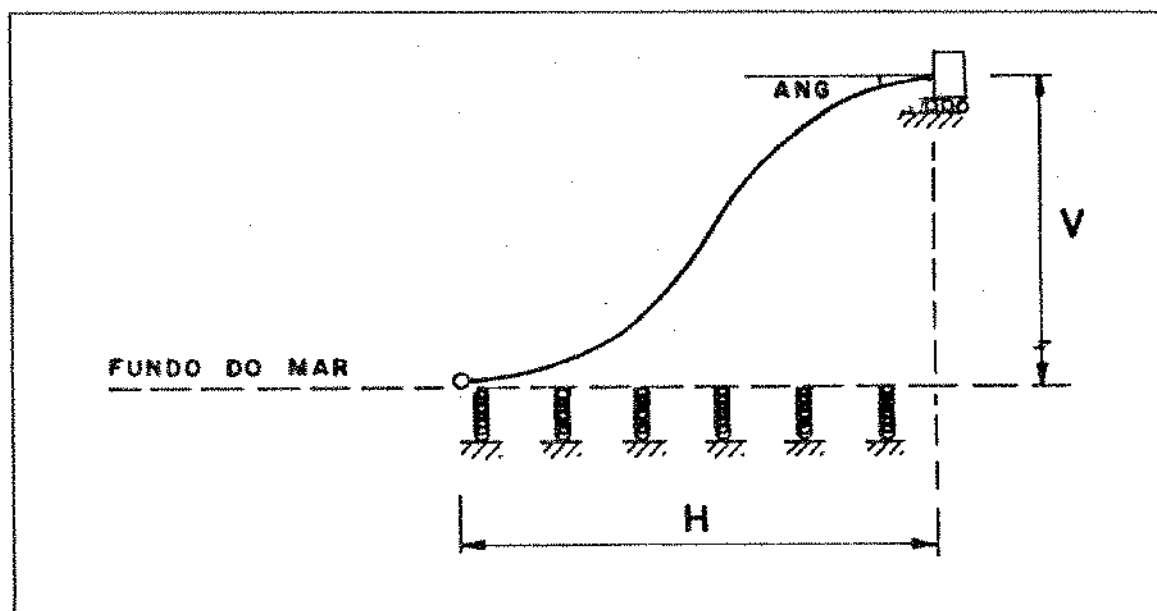


Fig. 6.3 - Desenho esquemático do modelo #2
(Com reação do fundo do mar)

6.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste item, é apresentada a simulação do lançamento de um oleoduto com as seguintes dados :

$$E = 206.7 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \text{ (módulo de elasticidade)}$$

$$I_x = 3.05 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \text{ (momento de inércia da seção)}$$

$$A = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ (área efetiva do tubo)}$$

$$Q = 38.21 \text{ N/m (peso próprio)}$$

$$F_x = 13336 \text{ N (Força horizontal aplicada na extremidade superior)}$$

Estes valores foram utilizados com o objetivo de se poder comparar os resultados obtidos com o fornecido por Neathery [17].

6.5.1 Caso 1 - Sem reação do solo

O lançamento é simulado, sem se levar em conta o efeito do fundo do mar. Logo, a solução de equilíbrio é obtida através de um processo de tentativa e erro no qual o afastamento horizontal sofre variação até que a condição de contorno de inclinação nula na extremidade inferior é atingida.

Com este objetivo, foram simulados três exemplos de lançamento, com os afastamentos horizontais respectivamente de: 400m, 300m e 274.32m e a profundidade de 91.44m .

A seguir, apresentam-se as curvas obtidas para os três exemplos simulados:

Afastamento horizontal x Afastamento vertical

(figuras 6.4, 6.8 e 6.12)

Posição ao longo da linha x Força axial

(figuras 6.5, 6.9 e 6.13)

Posição ao longo da linha x inclinação

(figuras 6.6, 6.10 e 6.14)

Posição ao longo da linha x Momento

(figuras 6.7, 6.11 e 6.15)

A configuração de equilíbrio, inclinação nula na extremidade inferior, foi obtida para a tentativa #3 com $x=274.32m$. Este resultado mostrou-se bastante próximo do fornecido por Neathery [17], como pode ser verificado pelo gráfico da figura (6.12), que compara a configuração final obtida por Neathery com a obtida neste trabalho.

Convém ressaltar que as configurações iniciais utilizadas por Neathery [17], (catenária passando por $x=274.32m$ e $y=91.44m$) diferem bastante da utilizada nesta simulação.

6.5.2 Caso 2 - Com reação do solo

Quando se simula o mesmo problema anterior, levando em conta a reação do fundo do mar, verifica-se que o resultado obtido independe do afastamento horizontal inicial adotado. Este fato pode ser constatado através da simulação do lançamento com diferentes afastamentos horizontais. As curvas 6.16 a 6.23, apresentam os resultados obtidos para as duas simulações realizadas com afastamentos horizontais de 400m e 320m.

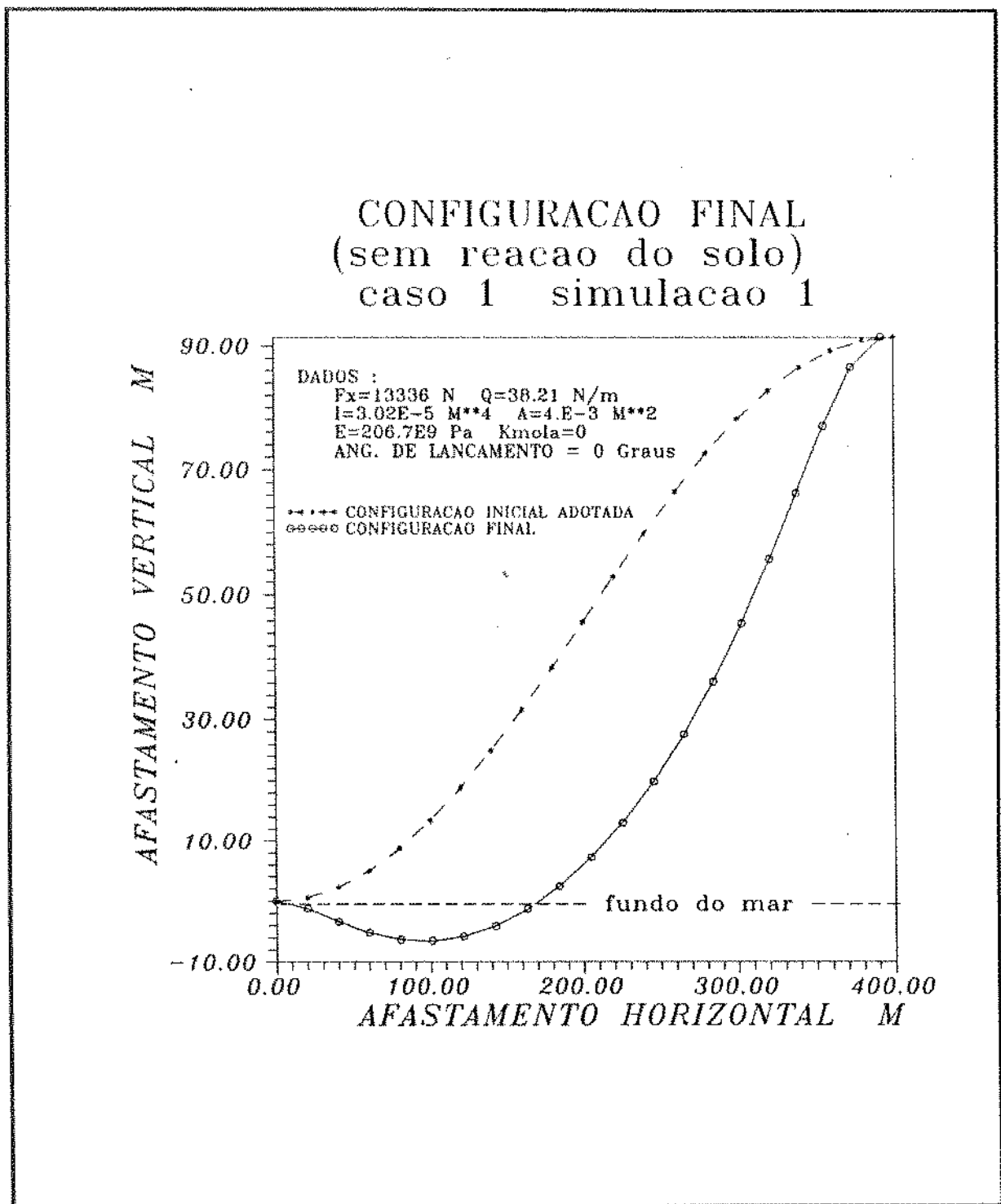


Fig. 6.4 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical
(caso 1 Simulação 1)

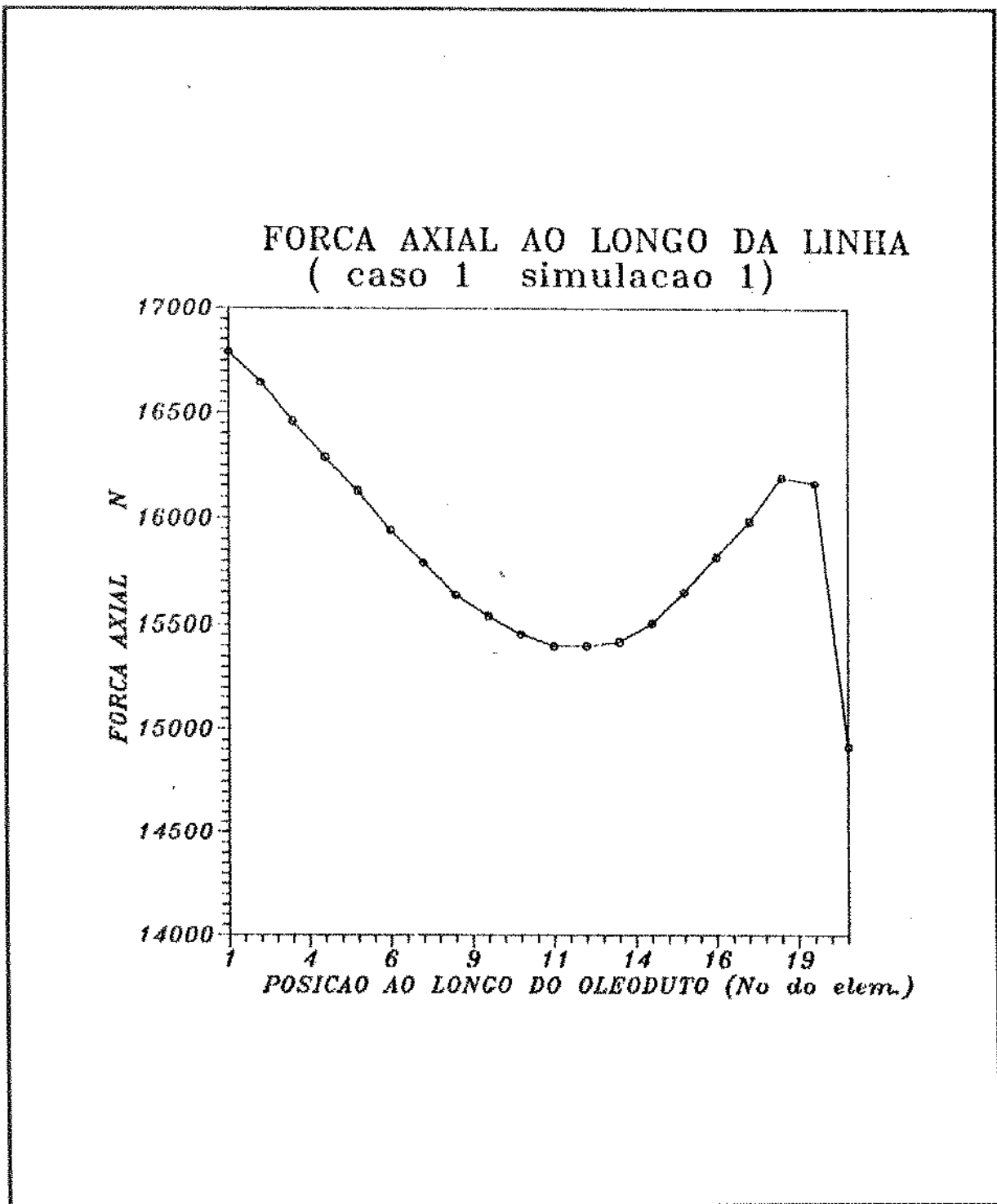


Fig. 6.5 - Posição ao longo da linha x Força axial
(caso 1 Simulação 1)

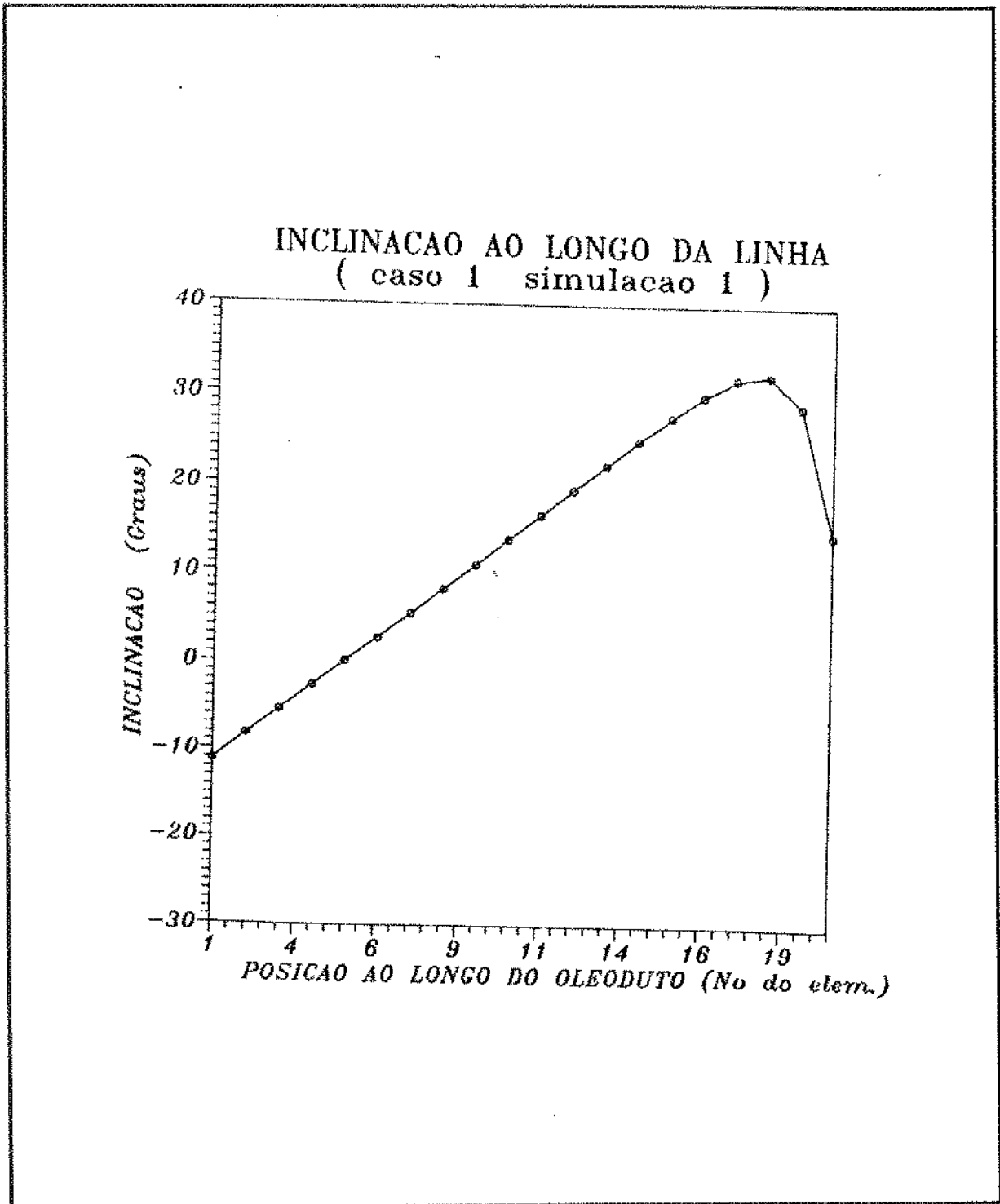


Fig. 6.6 - Posição ao longo da linha x inclinação
(Caso 1 Simulação 1)

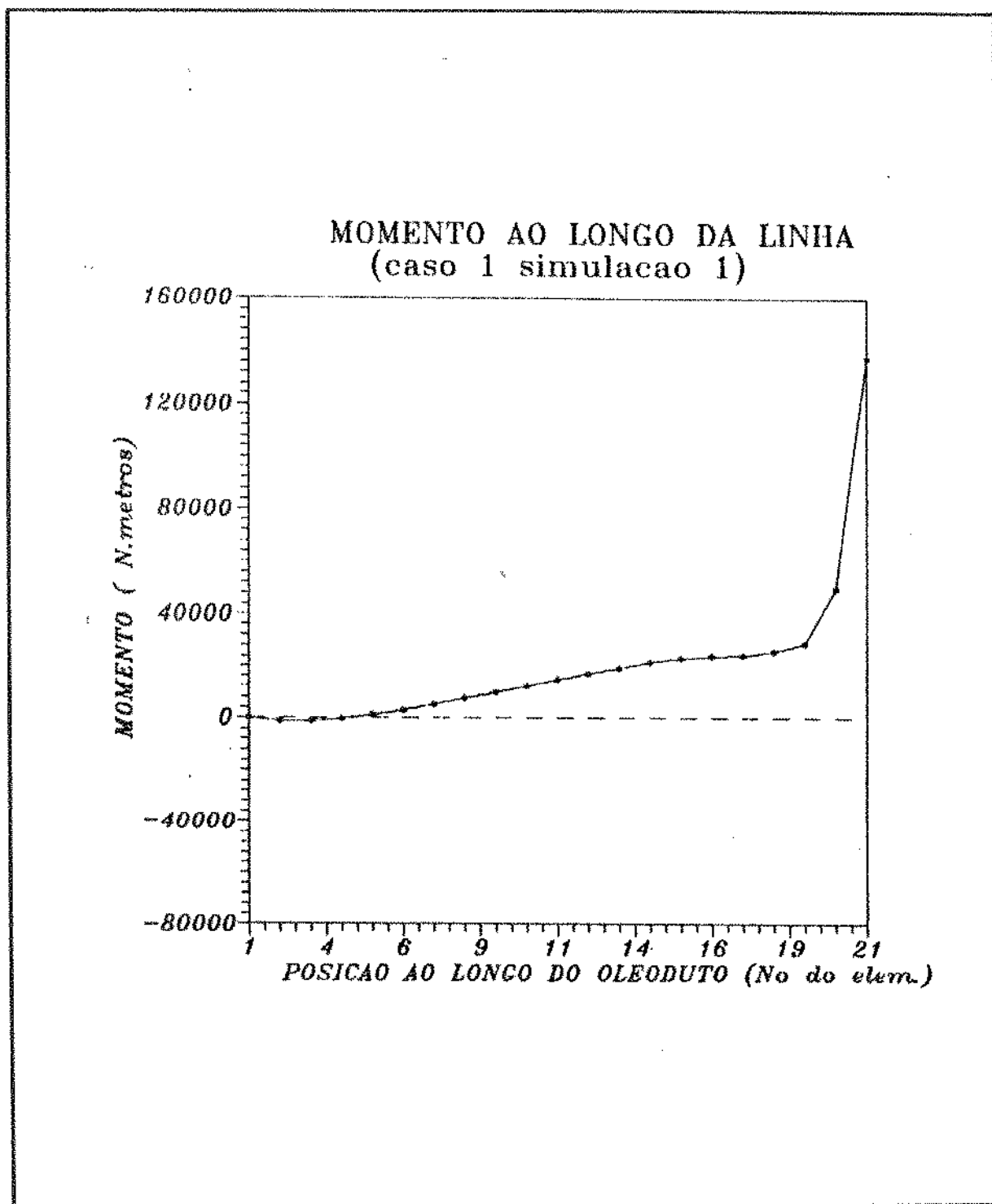


Fig. 6.7 - Posição ao longo da linha x Momento
(Caso 1 Simulação 1)

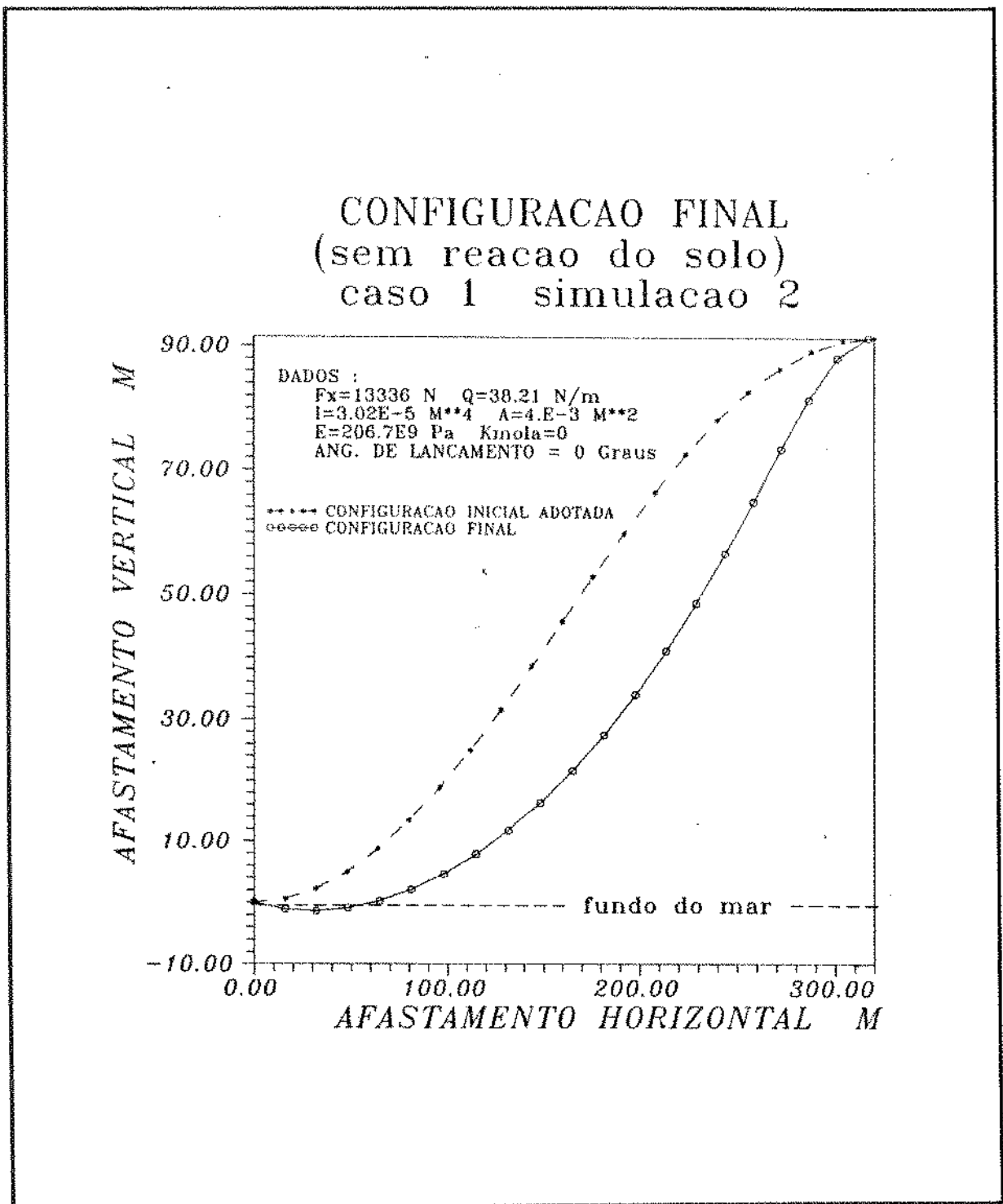


Fig. 6.8 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical
(Caso 1 Simulação 2)

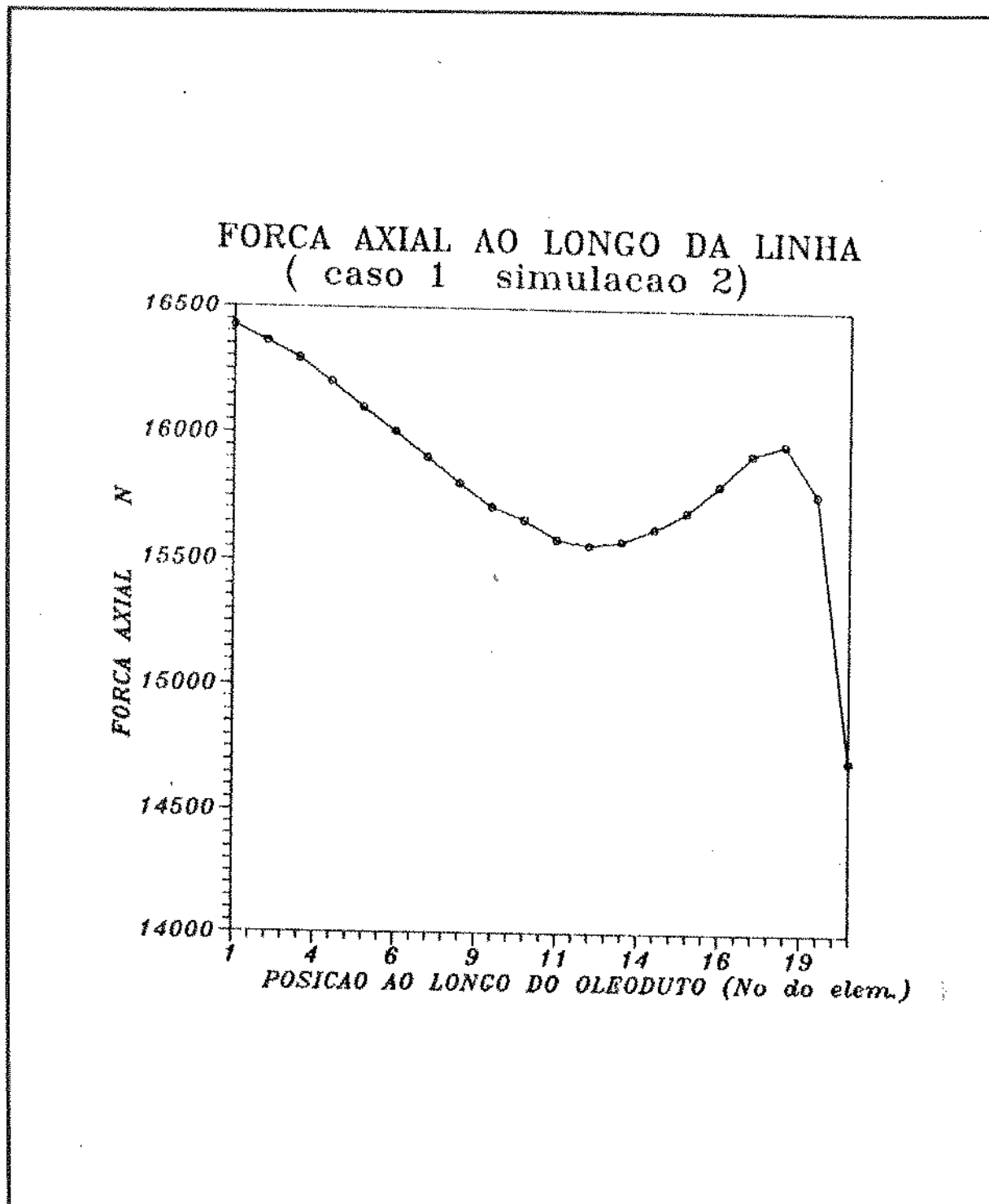


Fig.6.9 - Posição ao longo da linha x Força axial

(Caso 1 Simulação 2)

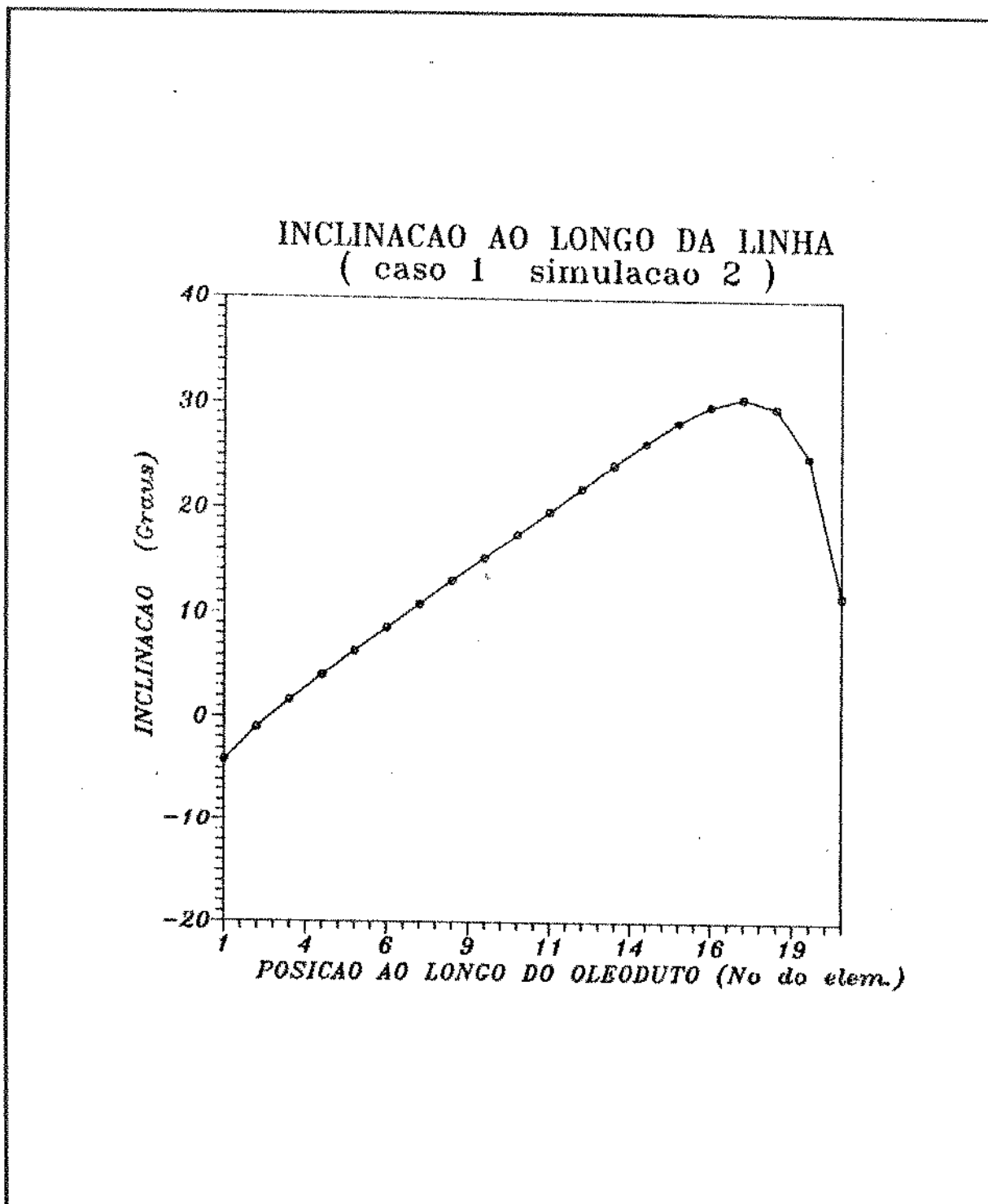


Fig.6.10 - Posição ao longo da linha x Inclinação

(Caso 1 Simulação 2)

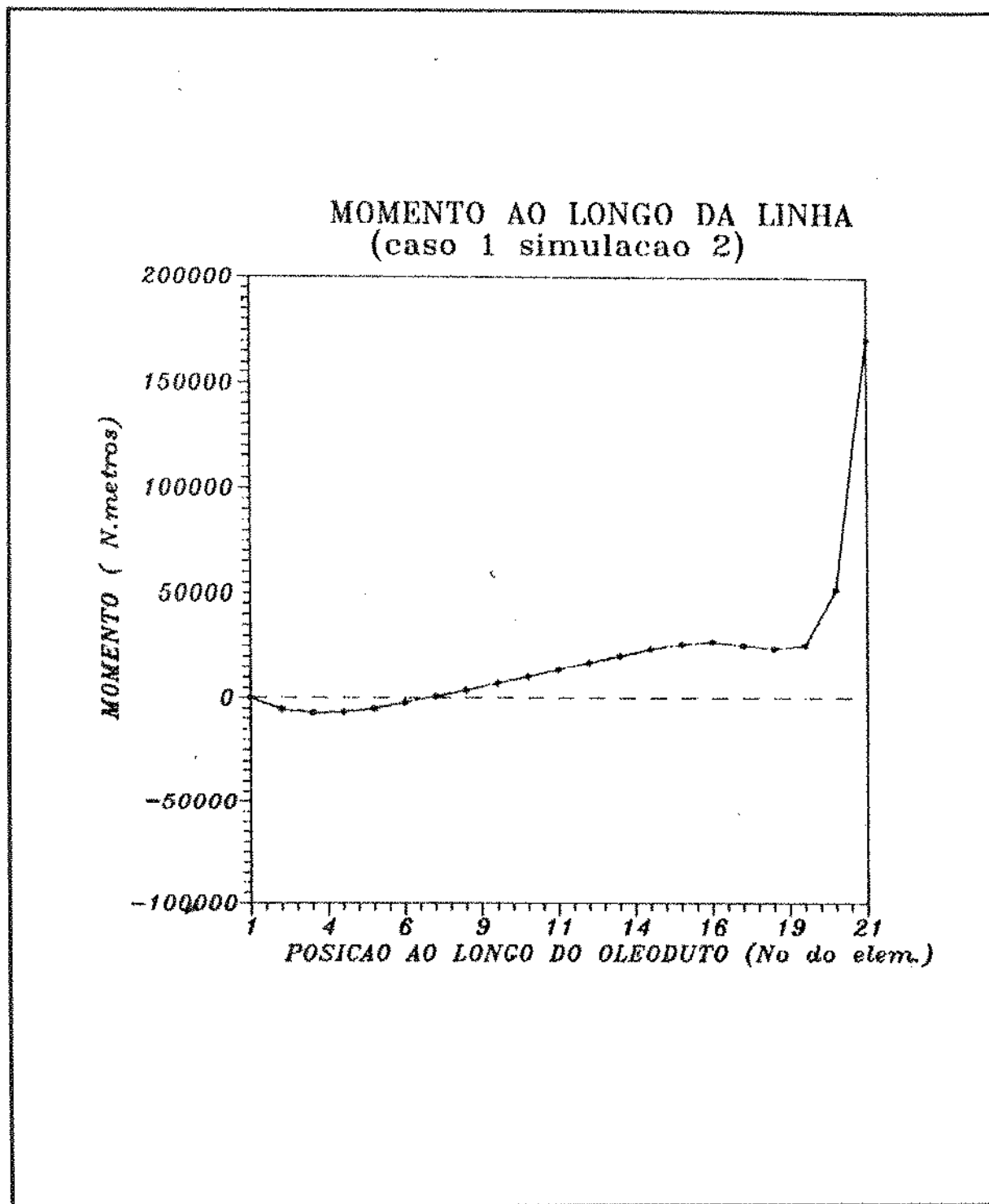


Fig. 6.11 - Posição ao longo da linha x Momento
(Caso 1 Simulação 2)

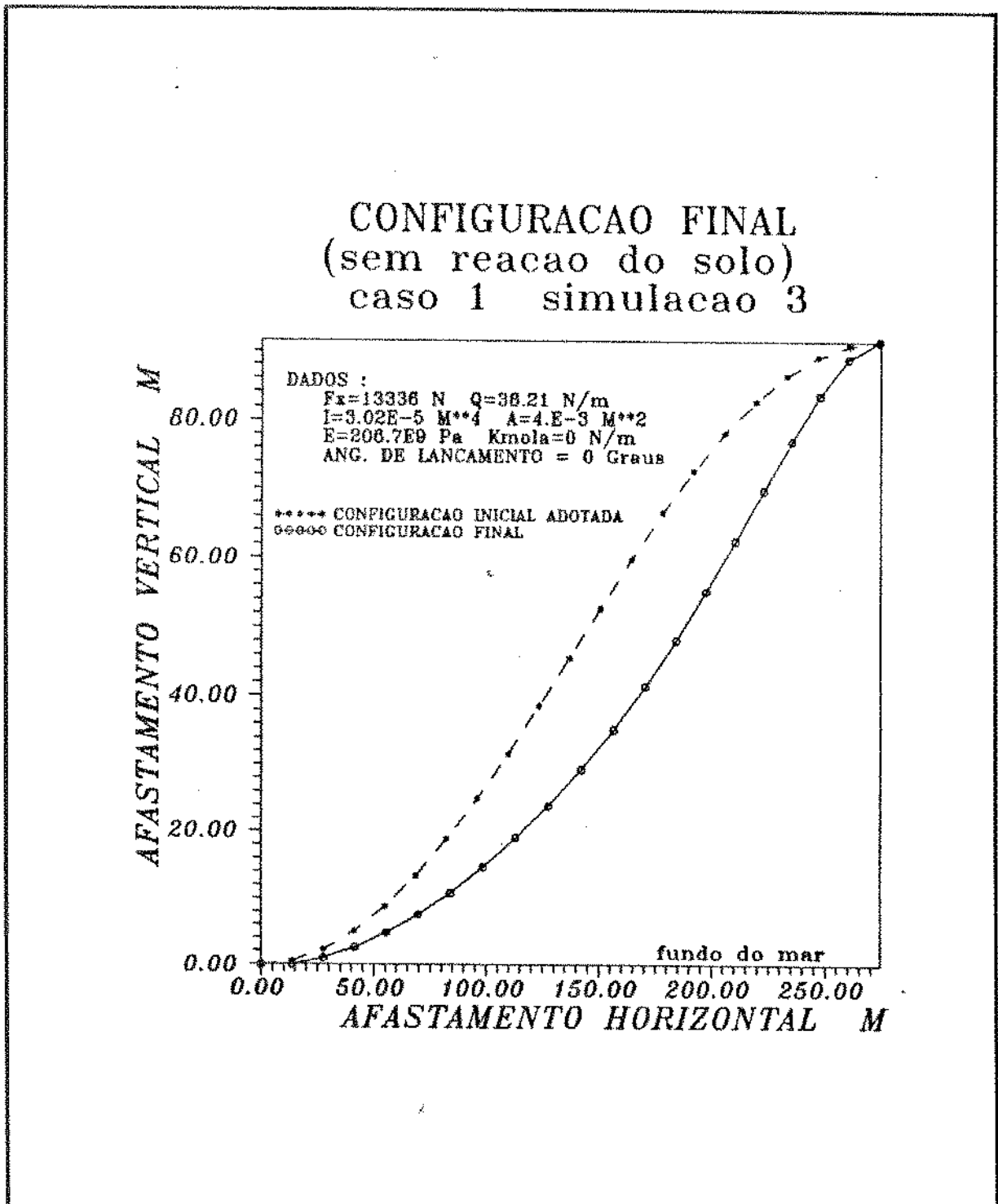


Fig. 6.12 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical

(Casol Simulação 3)

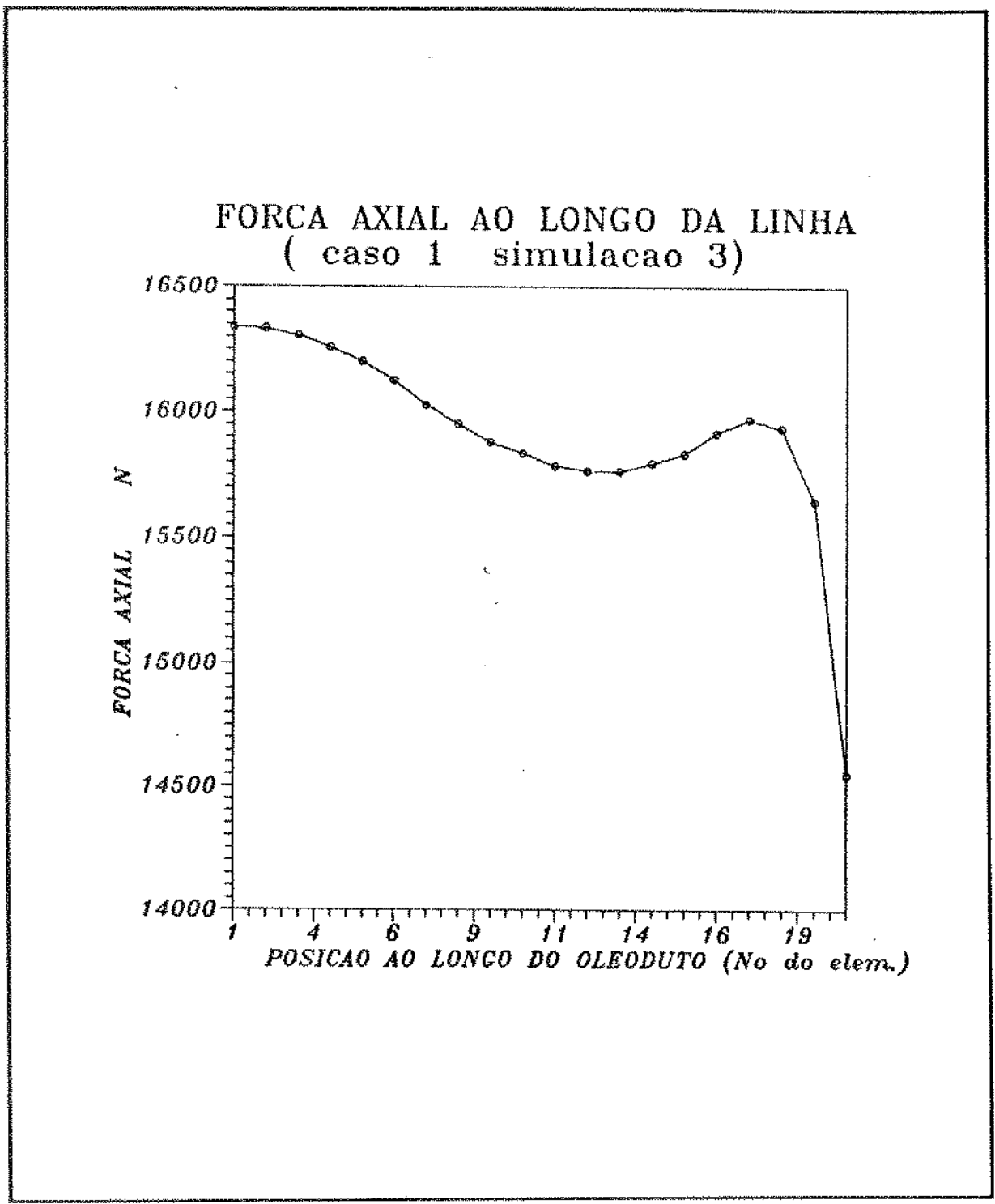


Fig. 6.13 - Posição ao longo da linha x Força axial
(Caso 1 Simulação 3)

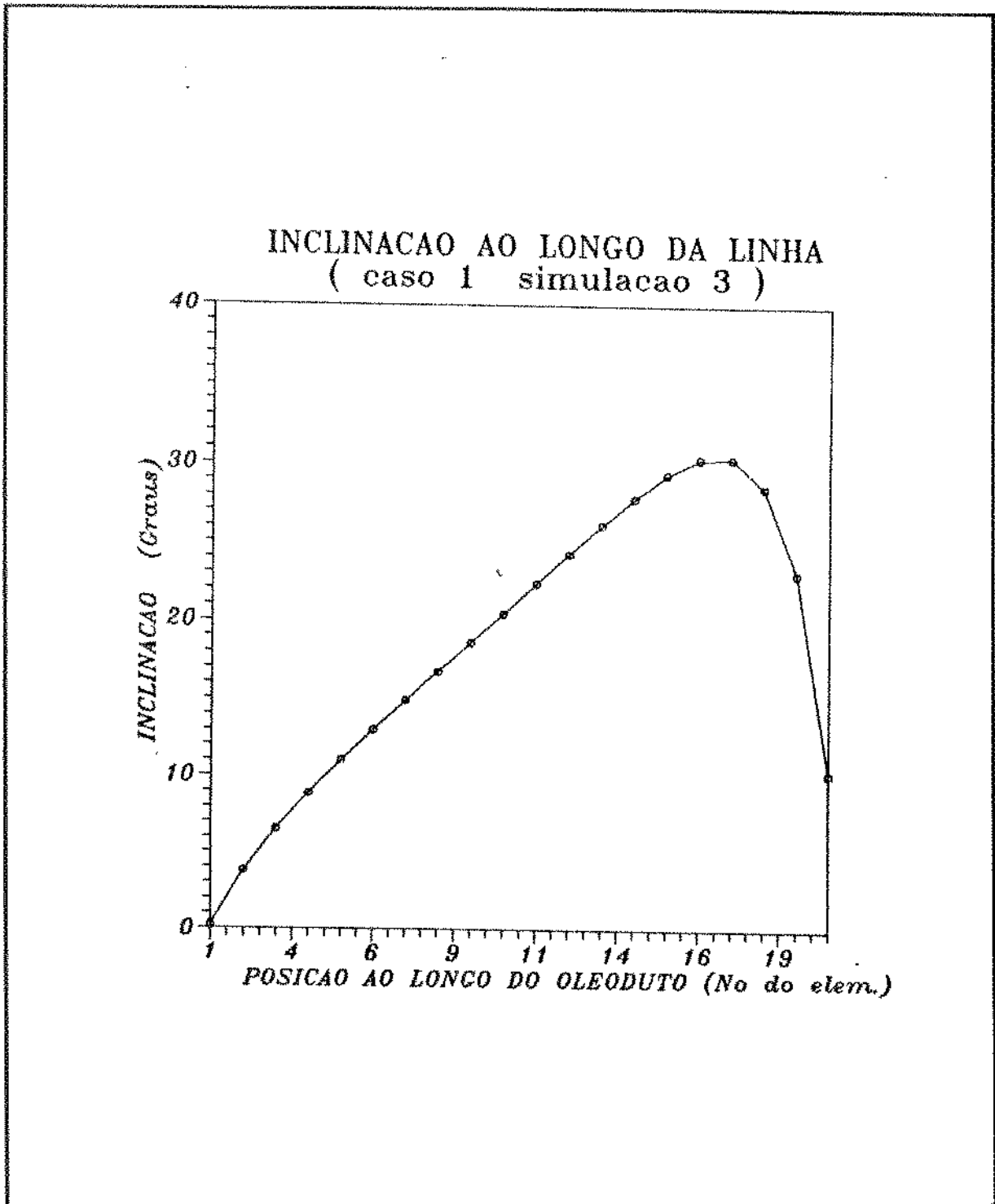


Fig. 6.14 - Posição ao longo da linha x Inclinação
(Caso 1 Simulação 3)

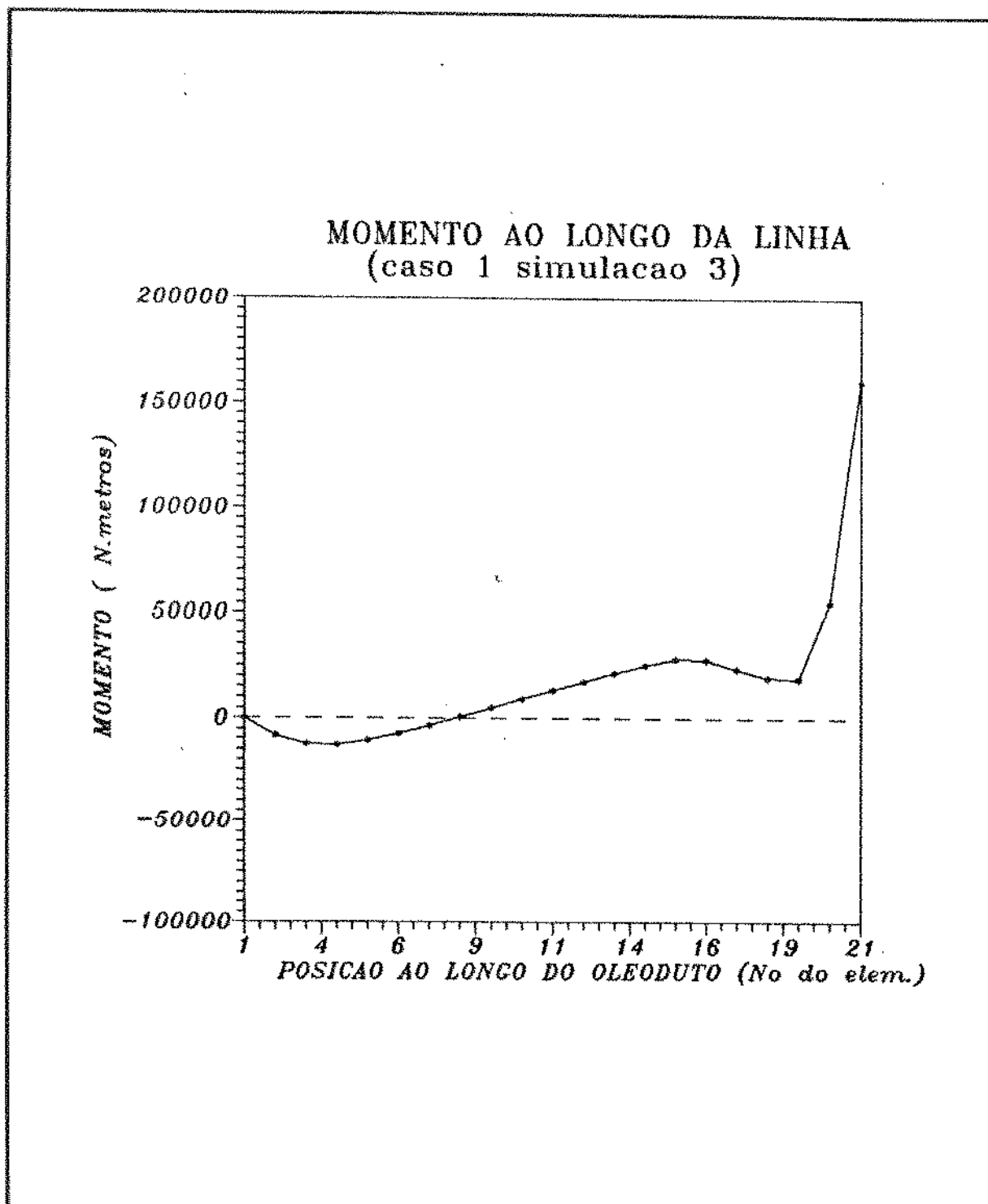


Fig. 6.15 - Posição ao longo da linha x Momento

(Caso 1 Simulação 3)

Verificou-se que a configuração do oleoduto, partindo do ponto de tangência com o fundo do mar até a barcaça de lançamento, apresenta uma boa coincidência com os resultados obtidos para o Caso 1.

Comparando-se os resultados obtidos para os casos 1 e 2, verifica-se a grande importância da utilização de uma modelagem levando-se em conta a reação de apoio do fundo do mar, uma vez que através deste processo, pode-se obter o resultado desejado em uma única simulação, bastando que se utilize um grande afastamento horizontal inicial .

6.5.3 Caso 3 - Verificação do efeito da tração na barcaça

Com o objetivo de se verificar o efeito da força de tração aplicada na barcaça, são apresentadas duas simulações, variando-se a força de tração aplicada

É utilizado um oleoduto com as mesmas propriedades dos utilizados no caso anterior.

O afastamento horizontal e a profundidade da lâmina d'água são 400m e 100m respectivamente.

No primeiro exemplo tem-se uma força de tração de 6668N enquanto que no segundo não se utiliza força de tração.

Os gráficos das figuras 6.24 a 6.27 apresentam os resultados obtidos.

Pode-se verificar que quanto maior a força de tração aplicada na extremidade superior do oleoduto, maior é o

afastamento horizontal entre a barcaça e o ponto de tangência do oleoduto com o fundo do mar.

Constata-se que quanto menor a força de tração aplicada, menor a força axial ao longo da linha. No entanto, a variação da inclinação, assim como a intensidade do momento ao longo da linha, é maior para o caso em que a força de tração é baixa.

Com base nestes resultados, pode-se concluir que um aumento da força de tração aplicada pelo tensionador, é desejável se se pretende aumentar o comprimento de tubo suspenso, com um menor ângulo de lançamento, permitindo uma redução do comprimento da rampa de lançamento. Este resultado está de acordo com o proposto por Postlewaite et al. [41].

6.5.4 Caso 4 - Verificação do efeito do ângulo de lançamento

Neste item são comparados os resultados obtidos, fazendo-se variar o ângulo de tangência da configuração inicial.

Como a modelagem supõe que a extremidade superior do oleoduto não possui liberdade de rotação, representando desta maneira o ângulo da rampa de lançamento, pode-se comparar as configurações obtidas, assumindo estas como sendo correspondente ao trecho suspenso do tubo.

Foram realizadas duas simulações utilizando para isto os seguintes valores:

$$x=400m$$

$$F_x=13336N$$

$$y=100m \quad Q=38.21N/m$$

O gráfico da figura (6.28) compara as configurações finais obtidas para ângulo de lançamento de 60° e 0° .

Verifica-se uma boa semelhança entre as curvas, as quais fornecem praticamente a mesma inclinação para o elemento superior. Este valor indica o ângulo de lançamento mais adequado uma vez que implicaria em uma curvatura menor entre o trecho suspenso e o início da rampa, conseqüentemente resultando um menor esforço neste trecho.

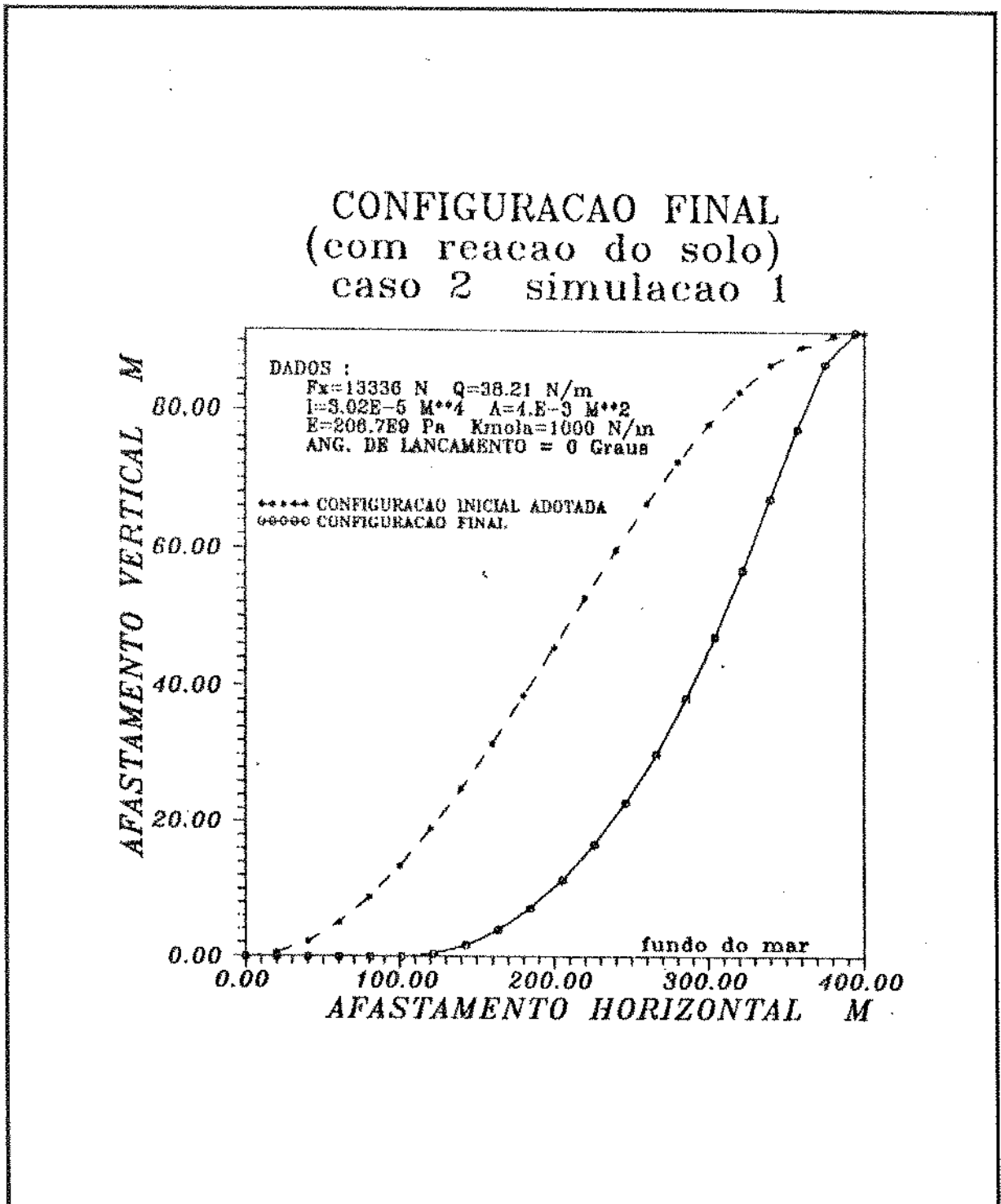


Fig.6.16 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical

(Caso 2 Simulação 1)

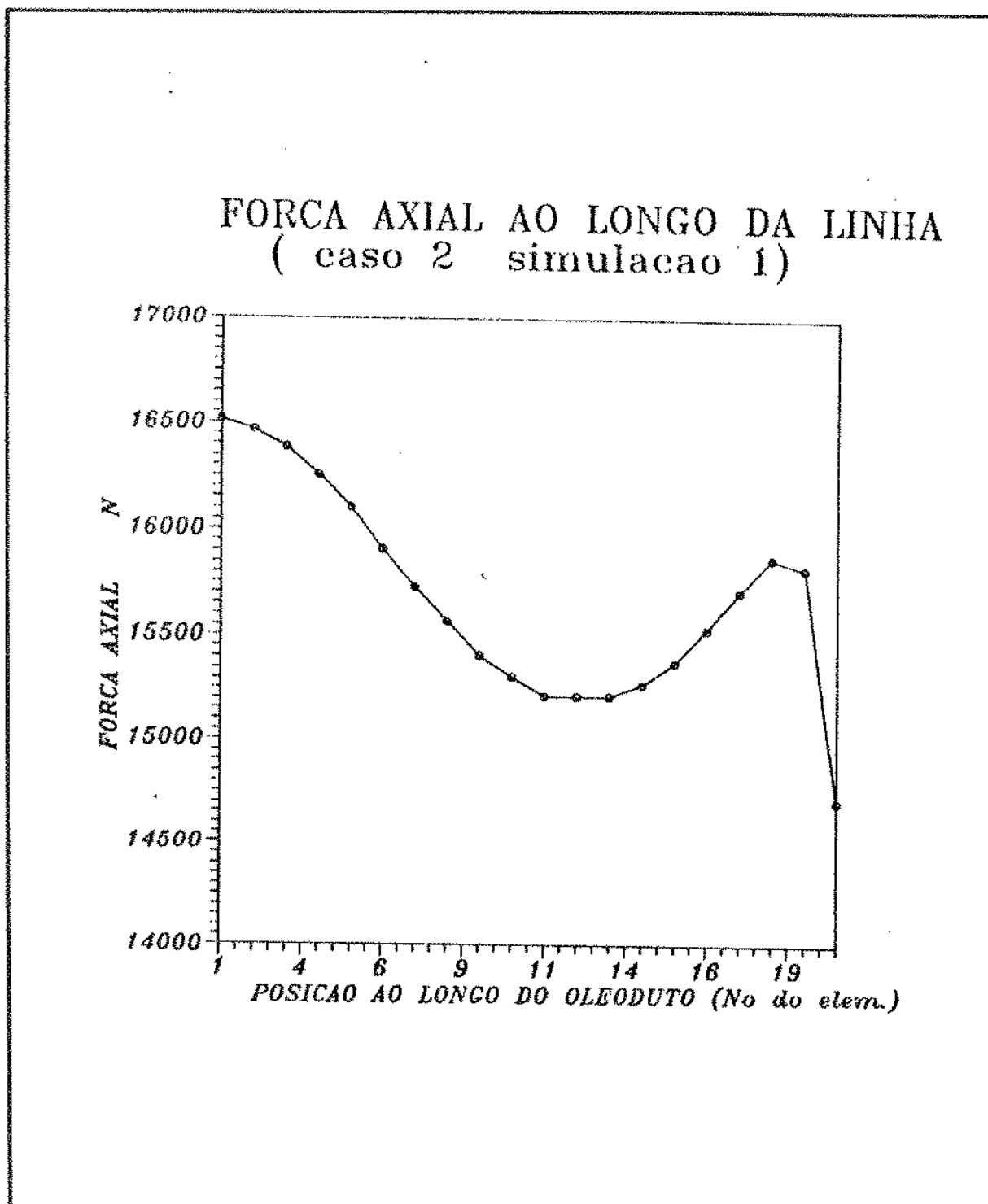


Fig. 6.17 - Posição ao longo da linha x Força axial

(Caso 2 Simulação 1)

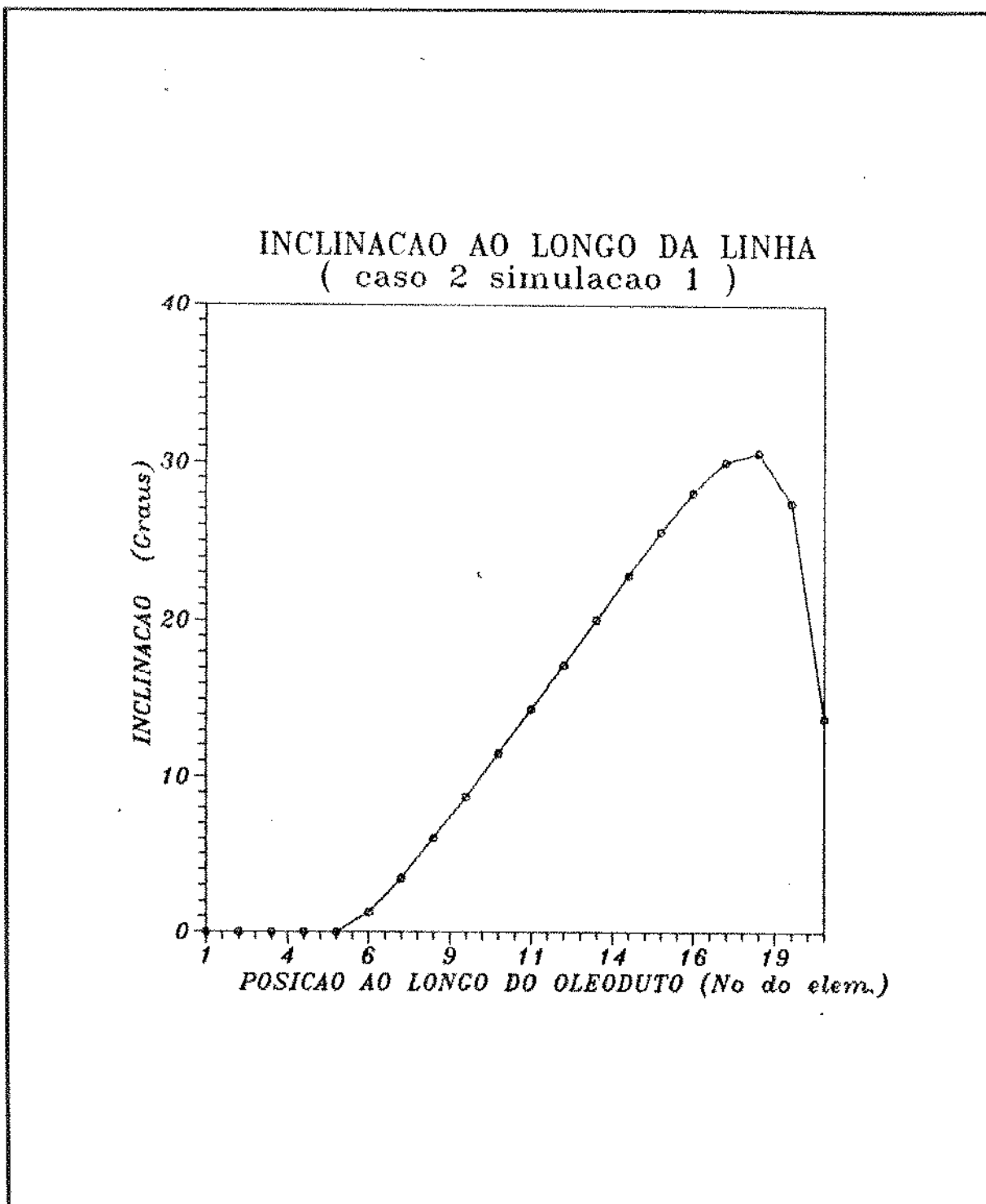


Fig. 6.18 - Posição ao longo da linha x Inclinação

(Caso 2 Simulação 1

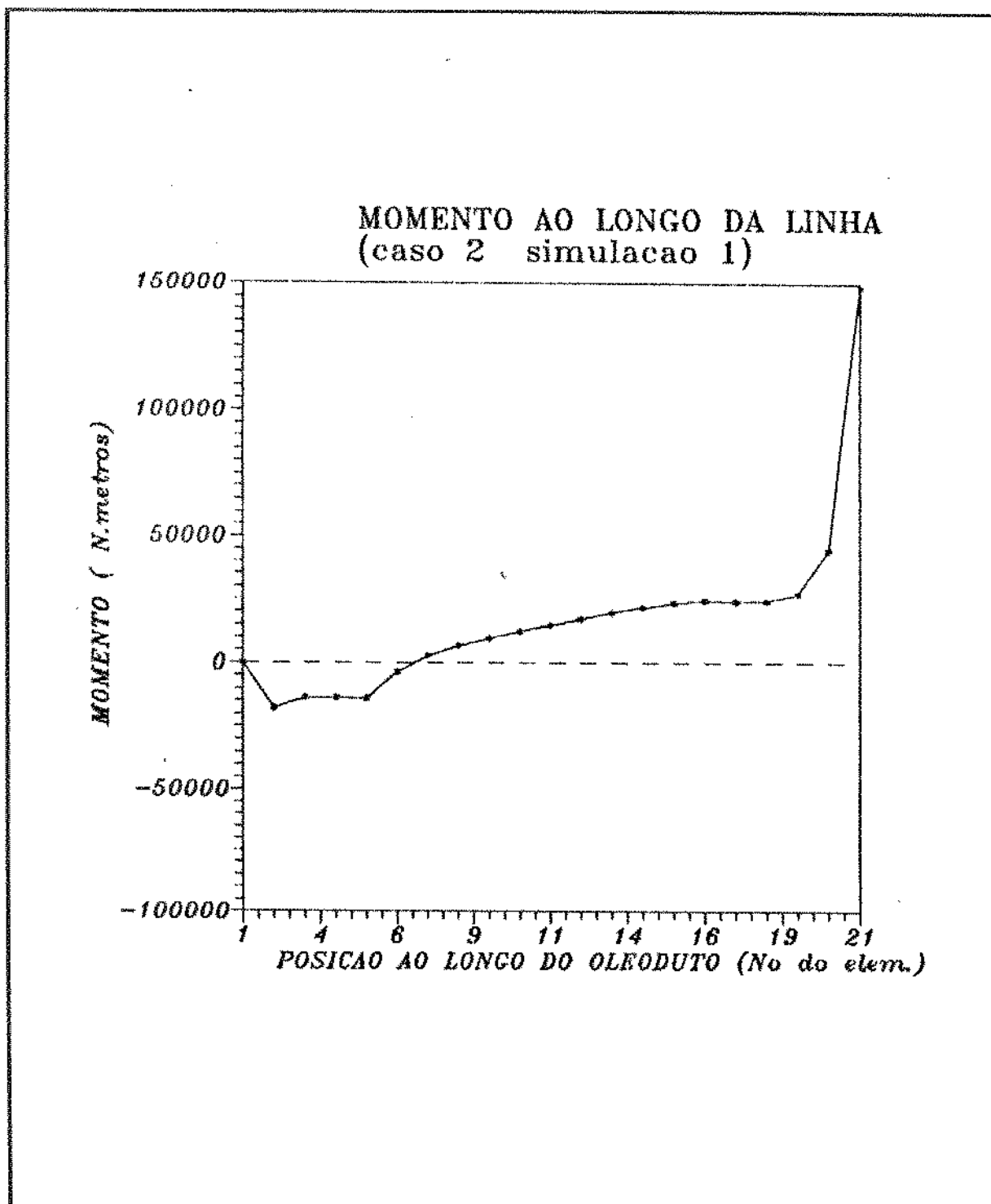


Fig. 6.19 - Posição ao longo da linha x Momento

(Caso 2 Simulação 1)

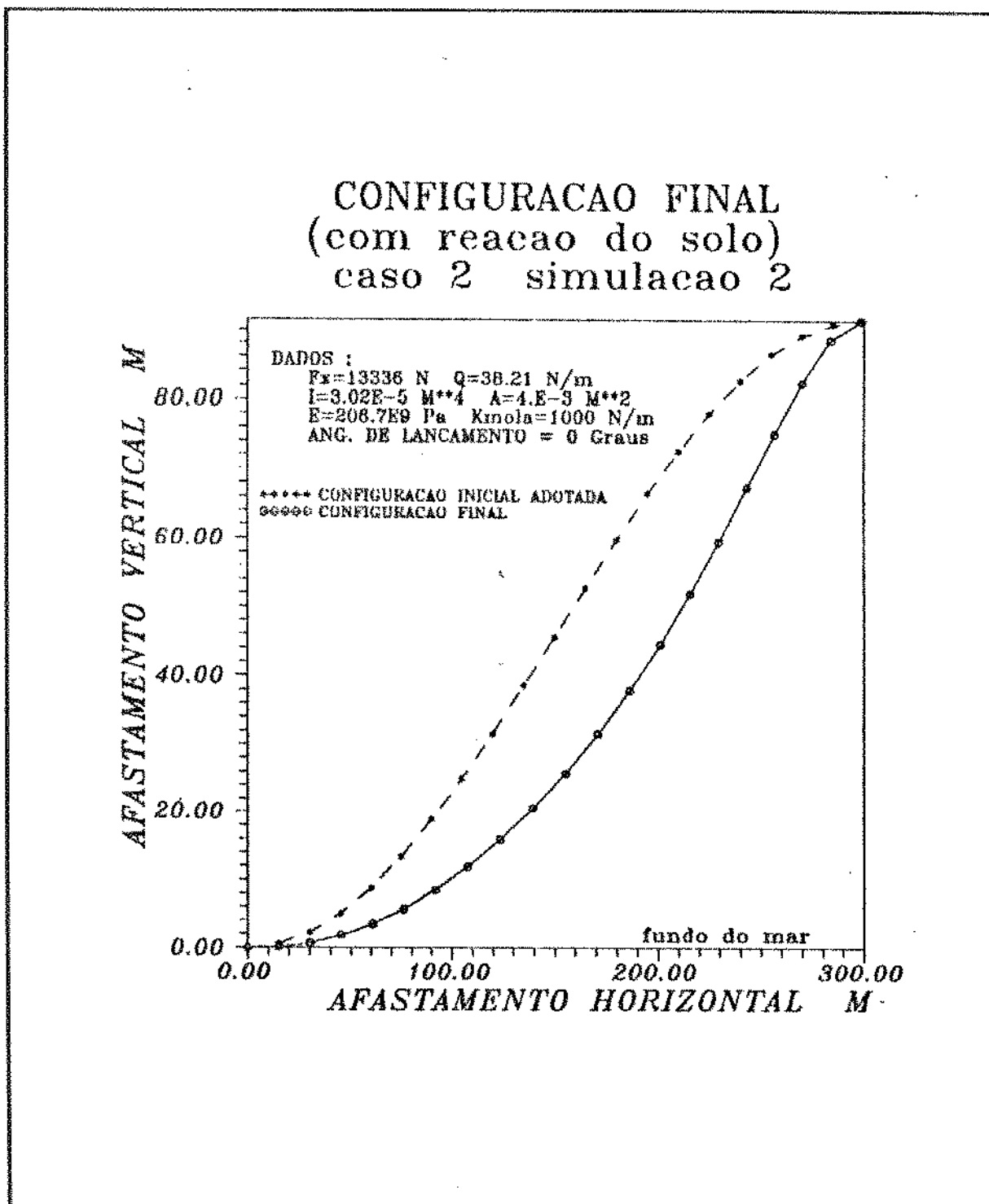


Fig. 6.20 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical

(Caso 2 Simulação 2)

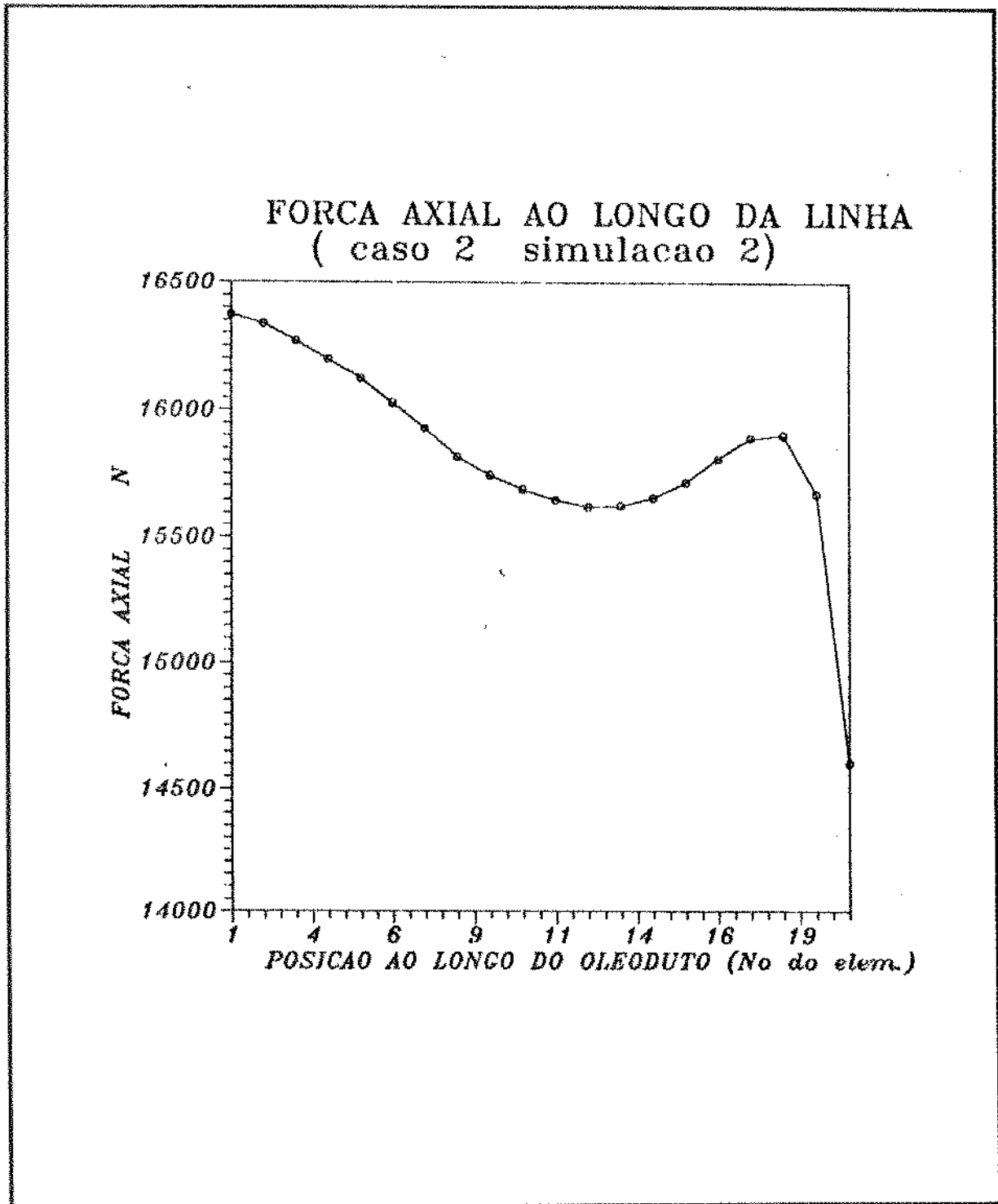


Fig.6.21 - Posição ao longo da linha x Força axial

(Caso 2 Simulação 2)

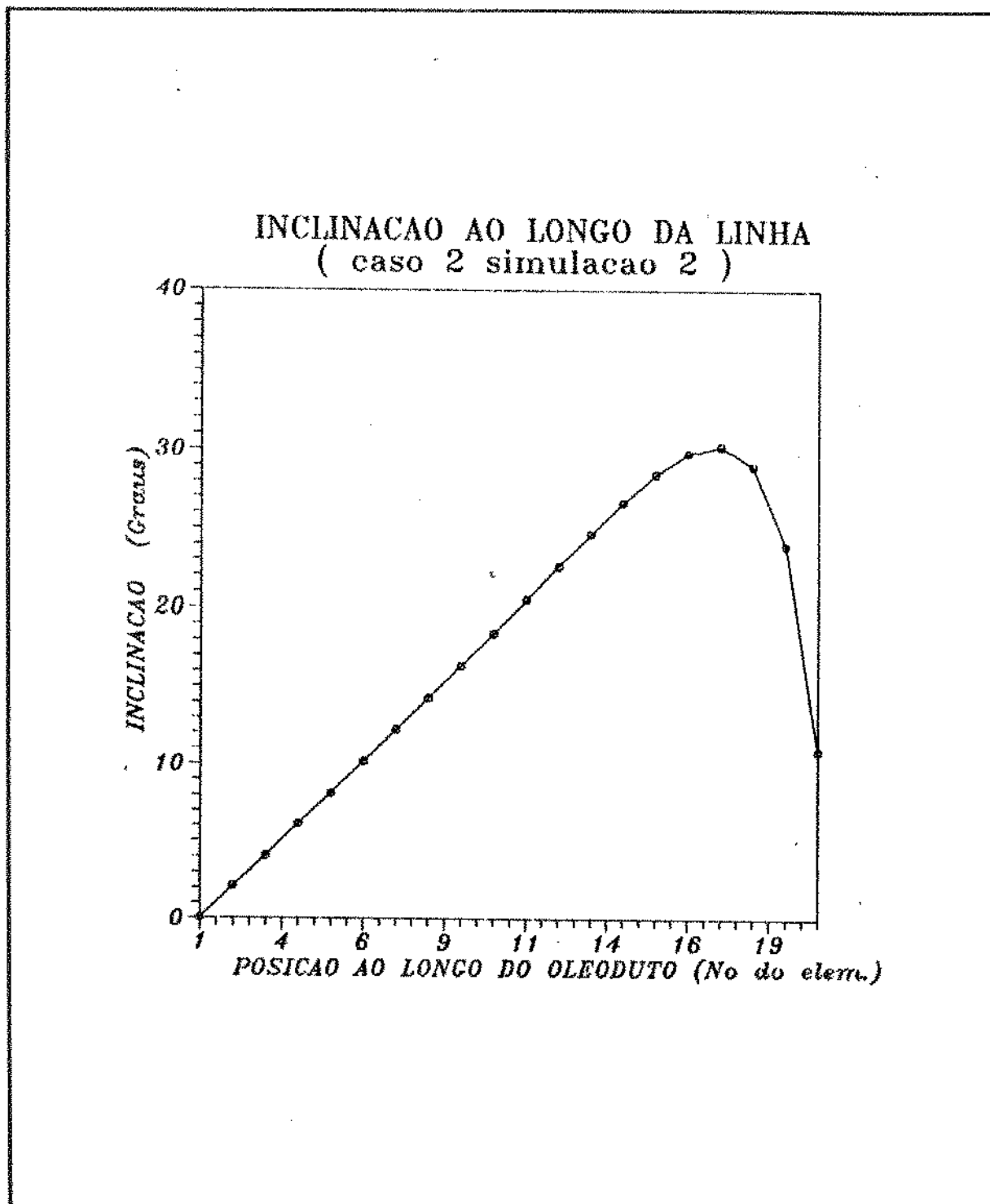


Fig.6.22 - Posição ao longo da linha x Inclinação
(Caso 2 Simulação 2)

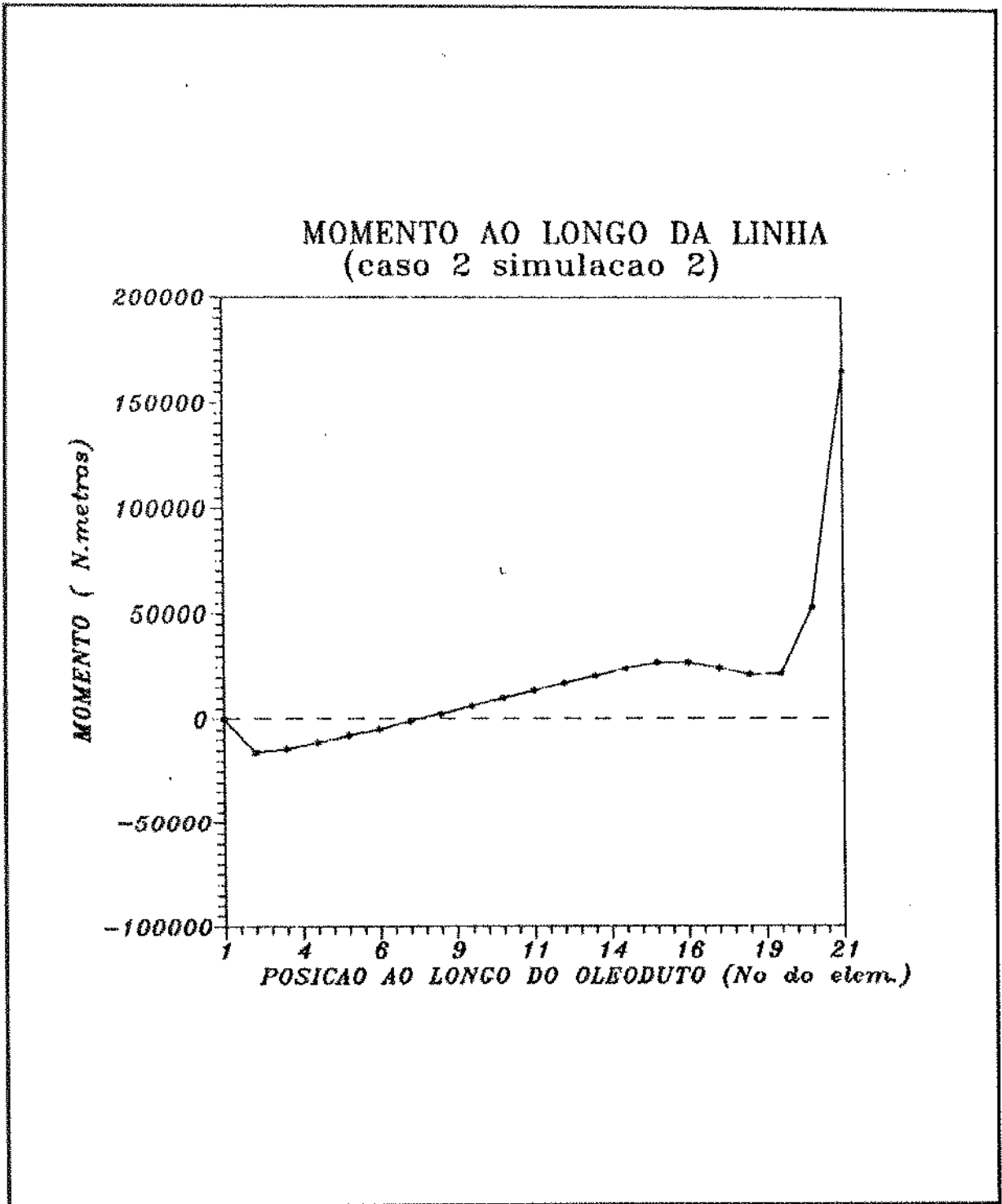


Fig. 6.23 - Posição ao longo da linha x Momento
(Caso 2 Simulação 2)

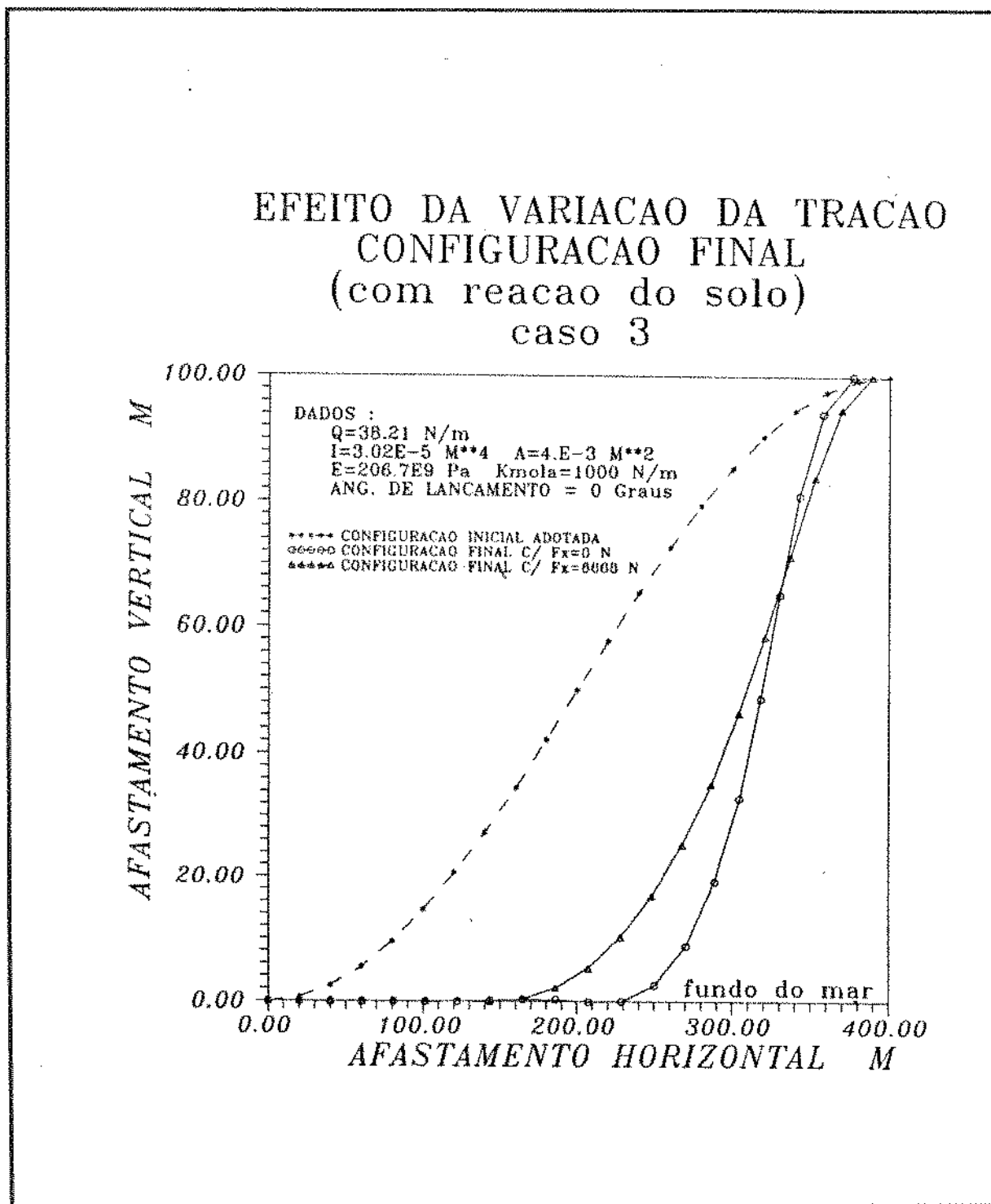


Fig.6.24 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical

(Caso 3)

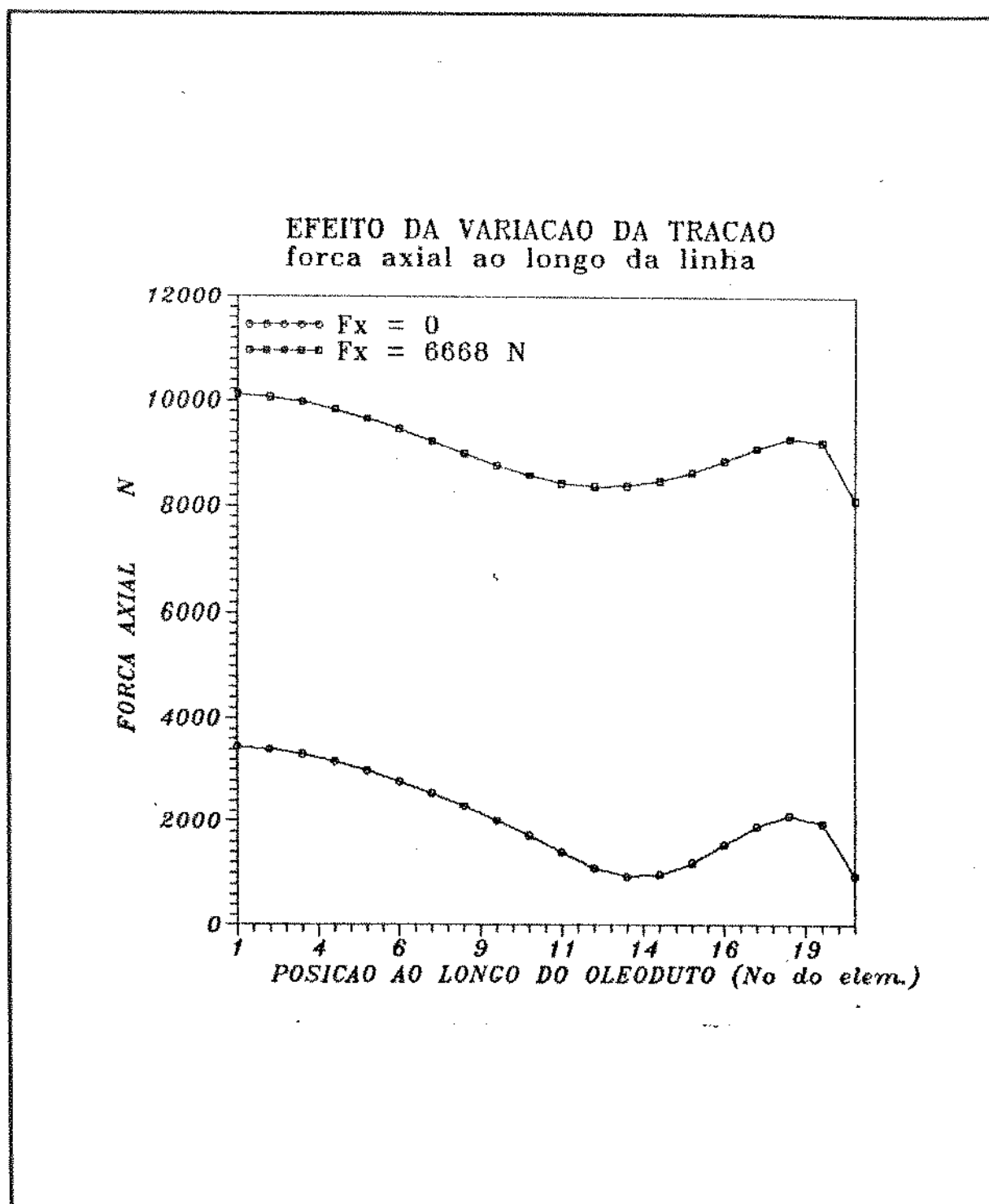


Fig.6.25 - Posição ao longo da linha x Força axial

(Caso 3)

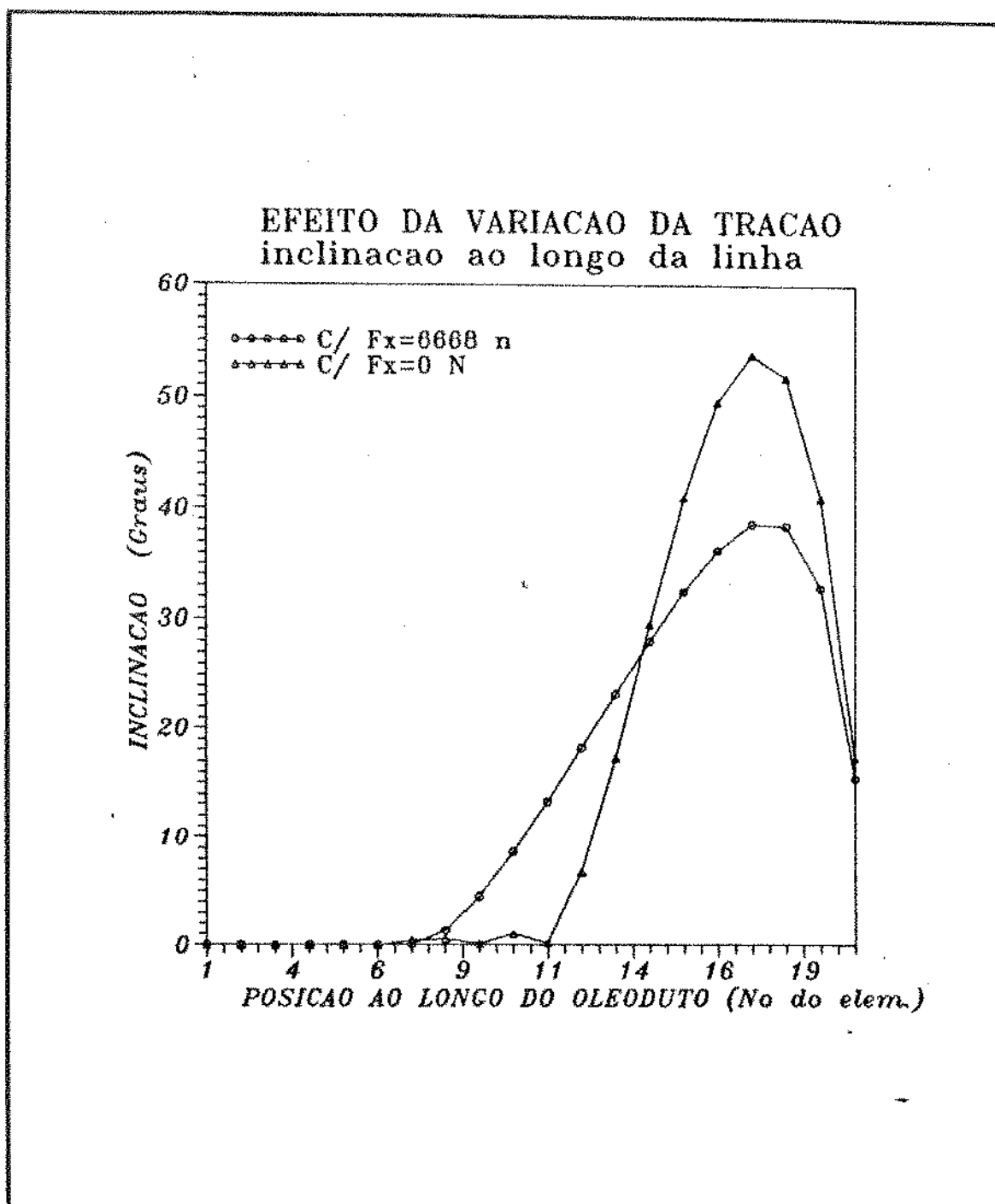


Fig. 6.26 - Posição ao longo da linha x Inclinação

(Caso 3)

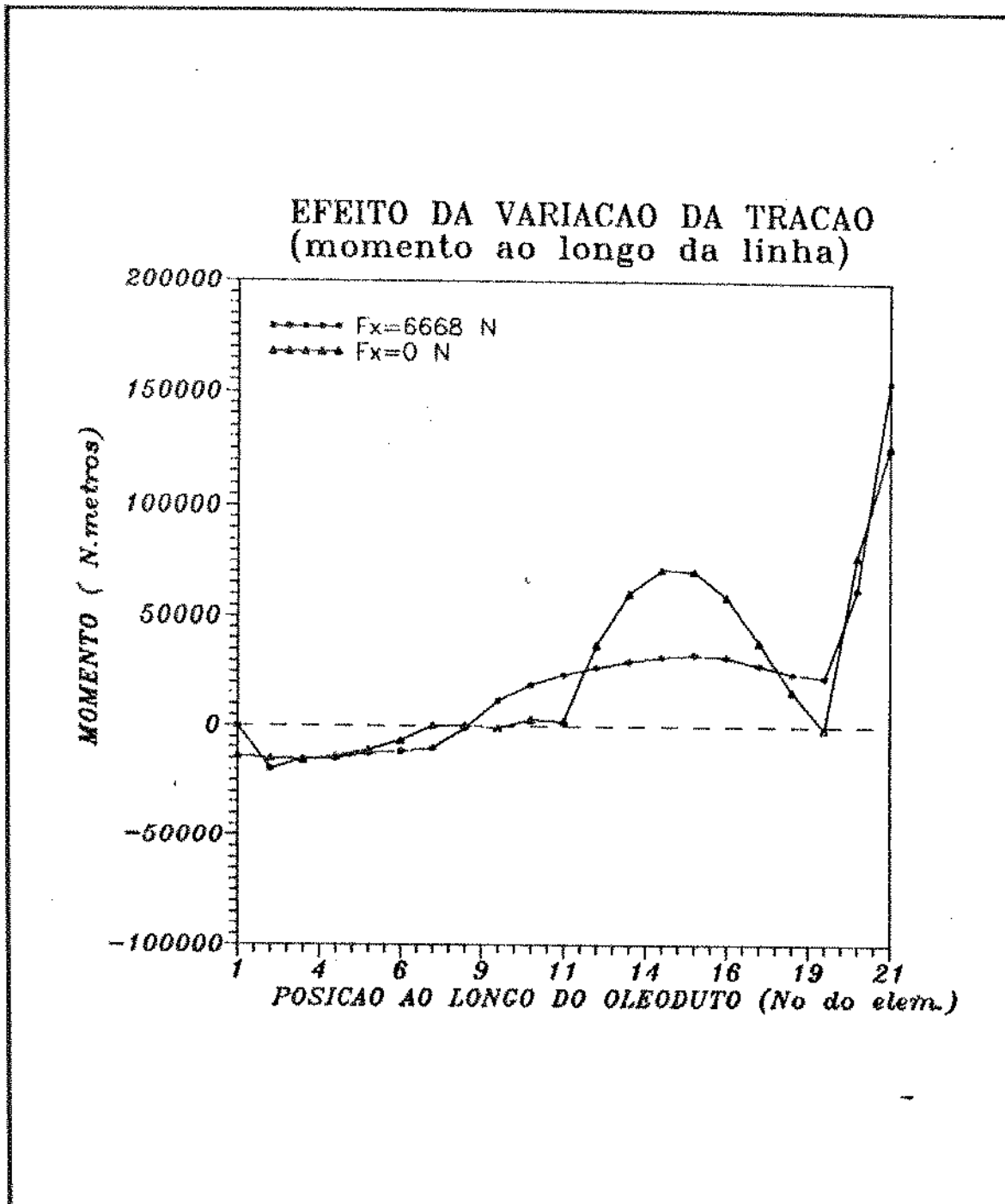


Fig. 6.27 - Posição ao longo da linha x Momento
(Caso 3)

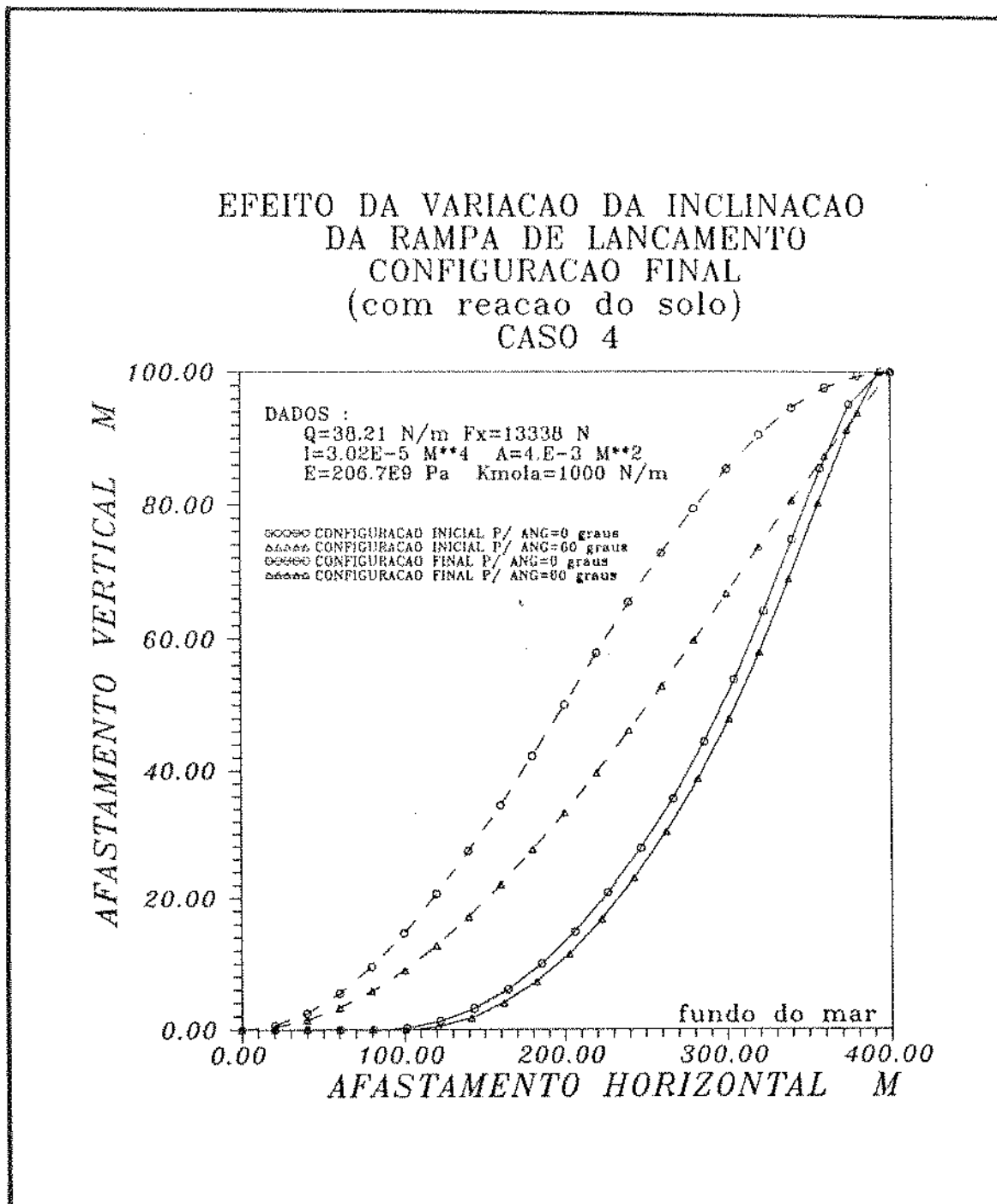


Fig. 6.28 - Afastamento horizontal x Afastamento vertical

(Caso 4)

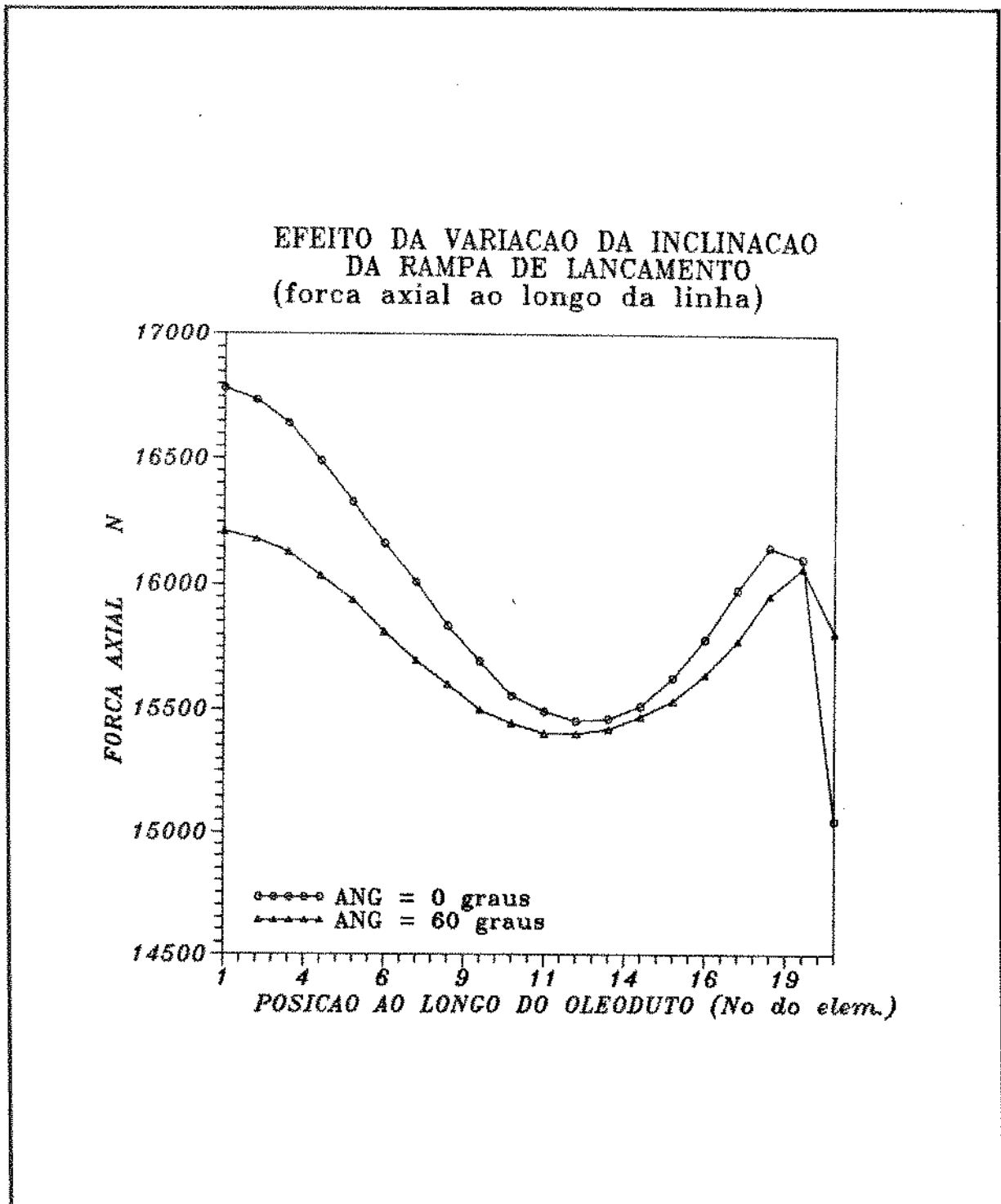


Fig.6.29 - Posição ao longo da linha x Força axial
(caso 4)

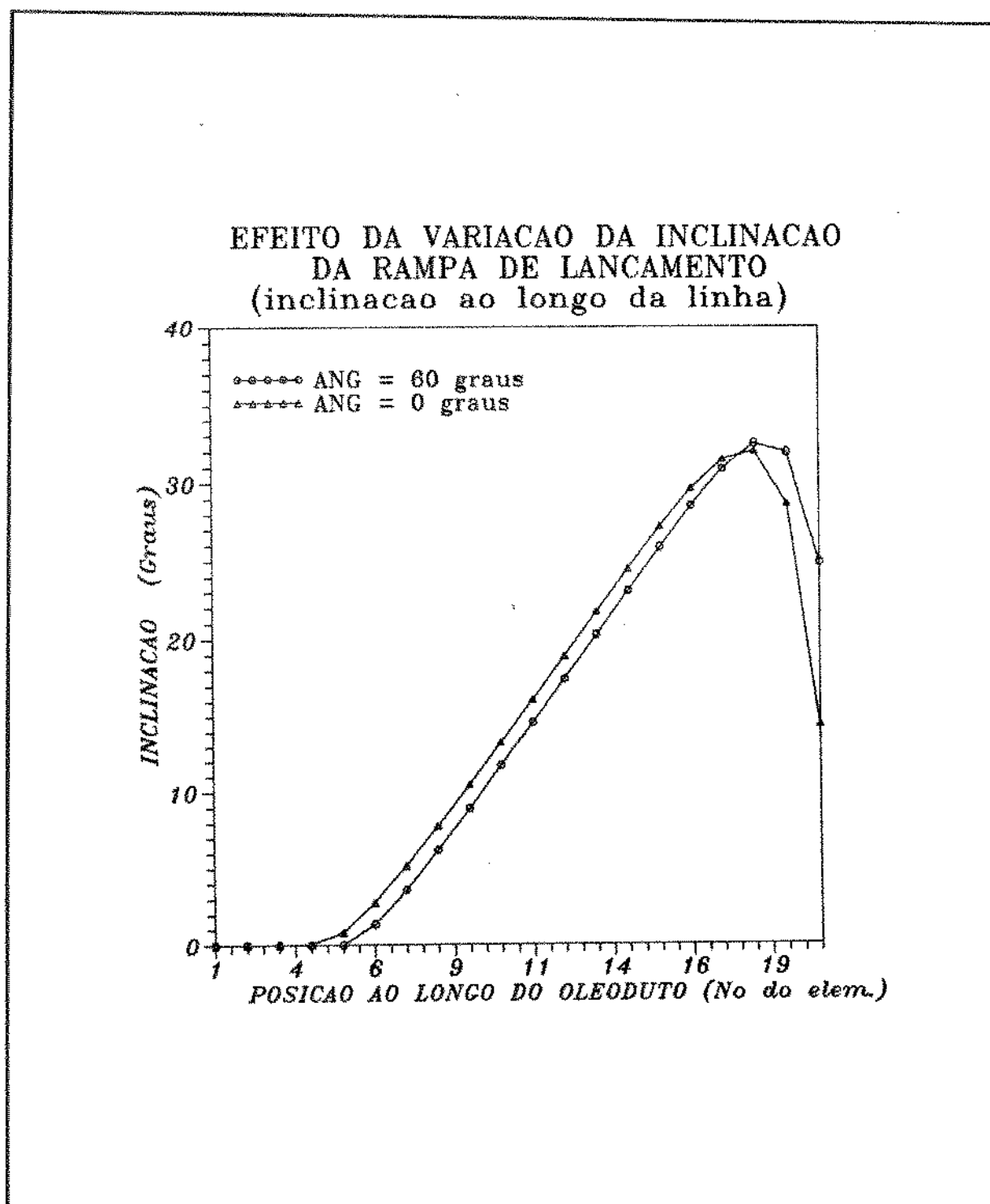


Fig. 6.30 - Posição ao longo da linha x Inclinação
(caso 4)

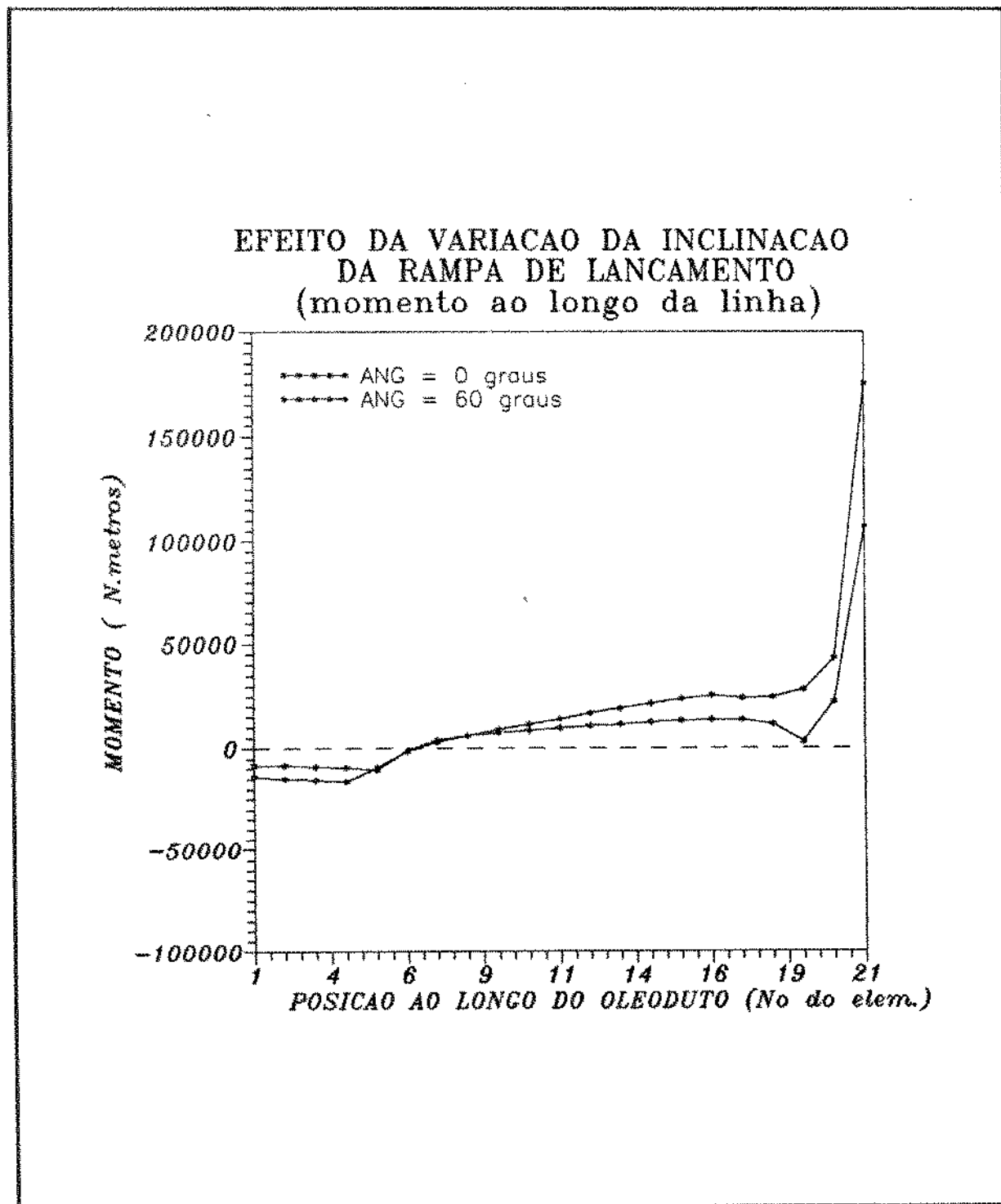


Fig. 6.31 - Posição ao longo da linha x Momento

(caso 4)

CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 - INTRODUÇÃO

O presente capítulo apresenta conclusões e sugestões quanto aos métodos de análise de estruturas reticuladas sujeitas a grandes deslocamentos, estudados e implementados neste trabalho, assim como quanto à modelagem do lançamento de oleodutos submarinos aqui proposta .

7.2 - CONCLUSÕES

Os dois métodos de resolução, Newton-Raphson modificado e Quase-Newton, utilizados para a resolução de problemas de estruturas reticuladas espaciais sujeitas a grandes deslocamentos, foram implementados levando-se em conta a Formulação Lagrangeana Atualizada e mostraram-se bastante eficazes, conforme verificado nos exemplos do capítulo 5.

Apesar da utilização de um elemento de viga-coluna bastante simples, o qual apresenta acoplamento apenas da flexão com a força axial, os resultados obtidos apresentaram uma boa concordância com os apresentados por diversos outros autores.

O processo de obtenção dos esforços internos, eliminando-se o movimento de corpo rígido apenas em relação aos deslocamentos axiais, mostrou-se bastante satisfatório.

Os resultados obtidos pelos dois métodos implementados apresentaram uma boa concordância, o que pode ser atribuído ao fato de se utilizar o mesmo processo tanto para o cálculo da força desbalanceada assim como o mesmo critério de convergência.

No item 5.2 atesta-se a validação da matriz de rigidez elástica assim como das matrizes de rotação utilizadas para um elemento sujeito a deslocamentos nas três direções, a partir da comparação dos deslocamentos dos resultados apresentados por Gere(36).

Com base nos exemplos do item 5.3 pode-se aferir o processo de obtenção dos autovalores e autovetores implantado, o qual baseia-se no método de Jacobi generalizado .

A treliça plana apresentada no item 5.4, quando se utilizaram elementos de barra para a análise, apresentou ótimos resultados quando comparados com os apresentados por Bathe [35]. No entanto, em [35], tem-se um estudo do comportamento da estrutura após a carga crítica. Estudo este que para ser realizado, necessitaria se incorporar aos programas desenvolvidos (PAER1 e PAER2), um método de análise levando-se em

conta deslocamentos impostos conforme apresentado no item 3.9, ou um outro método equivalente .

Os exemplos apresentados nos itens 5.5 e 5.6 permitem avaliar a eficiência dos métodos implementados, uma vez que foram obtidas soluções de equilíbrio para algumas estruturas reticulada sujeitas a grandes variações de geometria, utilizando relativamente poucos incrementos de carga e com poucas iterações de equilíbrio em cada incremento.

O exemplo 5.6.2, em especial, atesta o bom comportamento de toda a metodologia implantada em especial os processos incrementais-iterativos e o esquema da recuperação de esforços internos uma vez que os resultados obtidos podem ser considerados ótimos quando comparados com a solução analítica . A obtenção de um resultado próximo ao da solução analítica através de um processo puramente incremental sem a eliminação do movimento de corpo rígido, só foi possível com a utilização de 60000 incrementos de carga ao passo que com o algoritmo implantado, obteve-se um resultado quase exato com 50 passos de carga.

Além do estudo e implementação de um processo eficiente para a análise de estruturas reticuladas espaciais, apresentou-se neste trabalho uma proposta para a modelagem estrutural do lançamento de oleodutos em águas profundas, tendo como base o programa PAER2, ao qual incorporou-se uma rotina de pré processamento de dados e um elemento de mola linear com o intuito de se modelar a reação do fundo do mar .A este programa

específico para a simulação do lançamento de oleodutos submarinos deu-se o nome de DUTO.

A utilização do programa PAER2 como base para a montagem do programa DUTO, deveu-se principalmente à facilidade de implementação do elemento de mola linear quando se utiliza o método Quase-Newton conforme apresentado no item 3.7.

O programa DUTO fornece como resultados as seguintes informações : configuração final, inclinação ao longo da linha, esforços axiais e momentos para pontos ao longo do oleoduto.

A precisão dos resultados obtidos, foi verificada através da comparação com os resultados apresentados por Neathery [17] , o qual utiliza-se de técnicas de diferenças finitas, sem levar em conta o efeito da reação do fundo do mar, fazendo a busca da solução através de tentativas até que se atinja as condições de contorno impostas .

A metodologia apresentada neste trabalho apresenta como vantagem o fato de se poder obter a solução de equilíbrio sem realizar um processo de tentativas .Além disto, pode-se simular facilmente um fundo de mar com topologia variável através do processo descrito no item 3.7 .

A metodologia de análise proposta, assim como a apresentada em [17], apresenta como falha, o fato de que ao se assumir uma configuração inicial para o oleoduto, não levando em conta os esforços internos inerentes a esta geometria, incorre-se em erros quanto à avaliação dos esforços internos na configuração final.

7.3 - SUGESTÕES

Para dar continuidade a este trabalho, sugere-se o estudo e a implementação dos seguintes itens :

1) A implementação de métodos de solução com deslocamentos controlados (ou equivalente) conforme apresentado no item 3.9, o que permitiria uma análise do comportamento pós-flambagem de estruturas reticuladas, além de permitir a obtenção dos esforços internos na configuração inicial utilizada para a modelagem do lançamento de oleodutos submarinos .

2) A avaliação das forças internas através de um processo que elimine de forma mais eficiente os deslocamentos de corpo rígido .Poder-se-ia utilizar neste item as proposições apresentadas por Hsiao et al. [11], que apresentam uma forma simples e eficiente para a eliminação do movimento de corpo rígido partindo de uma formulação corrotacional. Com esta modificação, ter-se-ia uma aceleração do processo de convergência em cada incremento, e também uma maior confiabilidade em relação aos resultados obtidos.Outra possibilidade, seria utilizar elementos baseados na formulação natural onde se modela o modo de deformação do elemento .

3) Estabelecimento de parâmetros adimensionais para a análise do problema do lançamento de oleodutos . O que permitiria a realização de uma análise de sensibilidade em relação aos diversos parâmetros envolvidos .

4) Inclusão da análise do comportamento dinâmico de

estruturas .

5) Consideração da não linearidade do material. O que permitiria por exemplo a análise de "risers" não metálicos ou de material composto, ou o efeito de juntas de plastificação em oleodutos e "risers" metálicos .

6) Consideração de modelos mais completos de elementos de viga de modo a se levar em conta o acoplamento torcional e os termos de deformação de 2a ordem .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C. and TOPP, L., S. - "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", S. Aeron. Sci, vol. 23, n^o9, pp. 805-824, September (1956).
- [2] NORRIE, D. H. and deVRIES, G. - "The Finite Element Method ", Academic Press, New York, (1973).
- [3] MARTIN, H. C. and CORREY, G. F. -" Introduction to Finite Element Analysis", Theory and Application, McGraw-Hill Book Company, (1973).
- [4] MARTIN, H. C. -" On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems", Proceedings 1st. Conference of Matrix Methods in Struc. Mechanics, Wright Patterson Air Force Base, Ohio (1965).
- [5] BATHE, K. S.; RAMM, E.; WILSON, E. L. -" Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.t9, pp 353-386, (1975).
- [6] GATTAS, M. -" Large Displacement, Interactive-Adaptive Dynamic Analysis of Frames", Thesis in partial

Fullfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, Cornell University, Ithaca, N.Y., March, (1982).

[7] YOUNG, Y. B. - "Linear and Non-Linear Analysis of Space Frames with Non-Uniform Torsion using Interactive Computer Graphics", Thesis in Partial Fullfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, Cornell University, Ithaca, N. Y., June (1984).

[8] ORBINSON, J. G. -" Nonlinear Static Analisis of Three-Dimensional Steel Frames", Thesis in Partial Fullfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, Cornell University, Ithaca, N. Y., March (1984).

[9] CONCI, A. -"Análise de Estruturar Reticuladas de Aço com Consideração de Empenamento e Não Linearidades Geométricas e Material", Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia Civil: Estruturas, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, R.J., abril, (1988)

[10] HSIAO, K. M. and HON, F. Y. -" Non Linear Finite Element Analysis af Elastic Frames", Comput. Struct. 26, pp 693-701, (1987).

[11] HSIAO, K. M., HORNG, H. J. and CHEN, Y. R. -" A

Corrotational Procedure that Handles Large Rotations of Spatial Beam Structures", Comput. Struct. 27, pp 769-781, (1987).

[12] BATHE, K. J. e BOLOURCHI, S. -" Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures", Int. S. Num. Meth. Eng. vol. 14, pp 961-986, (1979).

[13] PLUNKET, R. -" Static Bending Stresses in Catenaries and Drill Strings", Journal of Engineering for Industry, ASME, Series B. vol 89, n^g1, February, 1967, pp 31-56.

[14] DIXON, D. A. and RUTLEDGE, D. R. -" Stiffned Catenary Calculations in Pipeline Laying Problems", Trans. ASME, pp 90-153, febr. (1968).

[15] POWERS, J. T. and FINN, L.D. - "Stress Analysis of Offshore Pipelines During Instalation", First Annual Offshore Technology Conference, pp 18-21, may, (1969). Houston, Texas, vol.2, paper n^g OTC 1071, pp 9-21.

[16] BREWER, W. V. and DIXON, D. A. -" Influence of Lay Barge Motions on a Deep Water Pipeline Laid under Tension", First Annual Offshore Technology Conference, pp 18-21, may (1969), Houston, Texas, vol.2, paper n^g OTC 1072, pp 22-36.

[17] NEATHERY, R. F. - "A numerical Solution to the Large

Angle Bending of Beams with an Application to Marine Pipelines", Thesis in partial fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy, The University of Arkansas, USA, (1970).

[18] OVUNC, B. and MALLAREDDY, H. -" Stress Analisis of Offshore Pipelines", OCT 1222, (1970).

[19] PALMER, A. C. and BALDRY, J. A. S. -" Lateral Buckling of Axially Constrained Pipelines", Journal of Petroleum Technology, pp 1283-1284, nov. (1974).

[20] KRUIJT, J. A. and Von der SCHRIECK, G. L. M. -" The Behavior and Safety of Sand and Gravel Pipeline Covers", Seventh International Conference of Offshore Mechanics and Artic Engineering, Houston, Texas, pp 257-266, february (1988).

[21] WILKINSON, R. H. and PALMER, A. C. -" Field Measurements of Wave Forces on Pipelines", Offshore Technology Conference, Houston, Texas, pp 257-266, febr. (1988).

[22] TIMMERMANS, W. S., "Technology for Larger Deepwater Pipelines Logs behind Industry's Development Plans", Oil and Gas Journal, pp 68-78, may (1989).

[23] PRODONOFF, V. e FERREIRA, S. M. M. -" Tensões em Oleodutos durante o Lançamento em Águas Profundas", Seminário

sobre Tecnologia de Engenharia de Perfuração e Produção no Mar, PETROBRAS, vol.1, pp 471-492, (1976).

[24] PRODONOFF, V. e FERREIRA, S. M. M. - Determinação de Tensões através da Linha Elástica de Tubulações Submetidas a Grandes Deformações, Boletim Técnico PETROBRAS, Rio de Janeiro, R.J., pp 125-135, abril/junho (1976).

[25] TANG, S. C.; YOUNG, R. S. and CHON, C. T. - "On the Tangent Stiffness Matrix in Convected Coordinate System", Computers and Structures, vol.12, pp 849-856, (1980).

[26] ARGYRIS, J. H. - "Non Linear Finite Element Analysis of Elastic Systems under Non Conservative Loading Natural Formulation" - Part I, Quasistatic Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.26, pp 75-123, (1981).

[27] TIMOSHENKO, S. P. and GERE, J. M. - "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Company Inc., (1961).

[28] CHEN, W. F. and ATSUTA, T. - "Theory of Beam-Columns" - vol.2: Space Behavior and Design, McGraw-Hill International Book Company, (1976).

[29] UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. - "Advanced Strength and Applied Elasticity", Elsevier Science Publishing Co. Inc., New York, USA, (1975).

- [30] RUBINSTEIN, M. F. - Structural Systems : " Statics, Dynamics and Stability", Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA.
- [31] ZIENKIEWICZ, O. C. - " The finite Element Method in Engineering Science", 3a ed. McGraw-Hill (1979)
- [32] DAVIDON, W. C. - " Variable Metric Method for Minimization ", Research and Development Report ANL-5990, US Atomic Energy Commission, Argonne National Laboratories (1959)
- [33] FLETCHER, R. and POWELL, M. J. D. - " A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization ", The Computer Journal No 6, 163-168
- [34] NAYLOR, A. W. and SELL, G. R. - Linear Operator Theory in Engineering and Science, Halt Rinehort and Winston Inc., New York, (1971).
- [35] BATHE, K. J., " Finite Element Procedures in Engineering Analysis " , Prentice-Hall, (1980)
- [36] GERE , J. M. ; WEAVER Jr. , W. - " Analysis of Framed Structures " , Litton Educational Publishing Inc. , New York (1965).
- [37] BARTEN , H. J. - " On The Deflection of a cantilever Beam " , Quart. Appl. Math. 2 , 168-171 (1944)

[38] BISSHOPP , K. E. and DRUCKER , D. C. - " Large Deflection Beam and Frame Problems Analysed by Means of Elliptic Integrals " , Int. Journal for Num. Met.in Eng. , Vol 17 , No 1 , 145-149 , (1981).

[39] MATTIASSON , K. - " Numerical Results from Large Deflection Beam and Frame Problems Analysed by Means of Elliptic Integrals " , Int. Journal for Num. Met. in Eng. , Vol. 17 , No 1, 145-149 , (1981)

[40] HOLDEN, J. T. - " On the Finite Deflections of Thin Beams " , Int. Journal of Sol. and Struc. , Vol.8, 1051-1055 , (1972).

[41] POSTLEWAITE , W. R. and LUDWING , M. - " Method for Laying Submarine Pipelines " , Patent No 3.266.256 , U.S. Patent Office (1966).

[42] BARD, Y. - " On a Numerical Instability of Davidson-Like Methods " , Mathematics of Computation No 22, 665-666 (1968)

APÊNDICE A

FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE UM ELEMENTO DE VIGA-COLUNA ESPACIAL UTILIZANDO O MÉTODO DE GALERKIN

Na área da mecânica estrutural, é comum a utilização do princípio da energia potencial total ou uma formulação baseada na minimização de um outro funcional, para a obtenção das equações do elemento.

Existem no entanto, outros métodos para se obter as equações do elemento. Alguns desses métodos têm a vantagem de iniciar o equacionamento a partir das equações diferenciais que regem o problema, eliminando-se desta maneira a necessidade de uma formulação variacional alternativa do problema físico.

O processo utilizado neste trabalho é conhecido como método de Galerkin, e foi proposto por Galerkin em 1915 como uma forma de se obter soluções aproximadas para problemas de valores de contorno.

O método de Galerkin é uma forma de se obter uma solução aproximada para a equação diferencial do problema. Isto é feito utilizando-se funções interpoladoras como solução aproximada e requerendo-se que o erro entre a solução aproximada e a solução exata, seja ortogonal às funções interpoladoras utilizadas na aproximação.

No entanto, o método quando implementado usando-se funções de interpolação, localizadas em subdomínios do problema ,

torna-se um importante processo para se resolver as equações diferenciais, o método dos elementos finitos .

Dada uma equação diferencial do tipo:

$$L_{2m}(u) - f = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde L é um operador diferencial de ordem $2m$.

E uma solução aproximada dada por:

$$\varphi = \sum_1^n C_i \varphi_i \quad (\text{A.2})$$

Então, o resultado aproximado dado por φ é :

$$L(\varphi) - f = R \quad (\text{A.3})$$

onde R corresponde ao resíduo ou erro uma vez que (A.2) é apenas uma solução aproximada.

A aplicação do método de Galerkin com o método de elementos finitos, leva ao seguinte sistema de equações:

$$\int_0 \left(L(\varphi) - f \right) \varphi_i \, d\omega = 0 \quad i=1, 2m \quad (\text{A.4})$$

O método de Galerkin exposto anteriormente apresenta os seguintes problemas quanto à obtenção da função admissível φ :

- A função φ_i deve satisfazer todas as condições de contorno (nem sempre facilmente satisfeitas).

• As funções φ_i devem satisfazer as condições de diferenciabilidade impostas pelo operador L_{2m} (). No mínimo as derivadas de ordem $(2m-1)$ devem ser contínuas.

Devido a estas dificuldades, surgiu a forma fraca que consiste basicamente na relaxação da satisfação das condições de contorno naturais para as funções admissíveis φ_i , e de algumas das condições de continuidade impostas pelo operador L_{2m} ().

As condições de contorno naturais, correspondem às condições de contorno que envolvem derivadas de ordem (m) a $(2m-1)$.

O resíduo ponderado passa a ser a soma dos resíduos ponderados no domínio e no contorno, sendo dado por:

$$\int_D R_D \varphi_i \, d\Omega + \int_C R_C \varphi_i \, dC \quad (A.5)$$

A seguir, são obtidas as relações forças-deslocamentos para um elemento de viga-coluna espacial, utilizando a forma fraca do método de Galerkin, na qual se faz necessário que as funções interpoladoras atendam apenas às condições de contorno essenciais, ou seja, aquelas que envolvem a função que se quer aproximar e suas derivadas até a ordem $(m-1)$.

Conforme estabelecido no item 2.3, a modelagem a seguir adota o acoplamento apenas dos deslocamentos nas direções principais y e z com o deslocamento axial (direção x).

Então pode-se desenvolver separadamente uma viga-coluna plana e depois acrescentar os efeitos de torção, assim como a

flexão no outro plano.

Dado o sistema de equações diferenciais abaixo, obtem-se as matrizes correspondentes ao elemento de viga-coluna em questão.

$$EI_z \frac{d^4 u_y(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} = q_y \quad (\text{A.6})$$

$$EI_y \frac{d^4 u_z(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} = q_z \quad (\text{A.7})$$

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} = q_x \quad (\text{A.8})$$

$$GI_x \frac{d\theta_x}{dx} = -T_r \quad (\text{A.9})$$

Semelhante às obtidas em (2.3).

A formulação de Galerkin, permite que cada termo da equação diferencial seja tratado de forma separada, como apresentado a seguir.

• TERMO DE FLEXÃO PLANA

$$EI_z \frac{d^4 u_y(x)}{dx^4} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Aplicando a definição de resíduos ponderados,

$$(R, \varphi_i) = \int_0^L EI \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} \varphi_i(x) dx = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (\text{A.11})$$

Integrando (A.11) por partes, de forma a se reduzir a ordem da diferencial para 2, tem-se :

$$(R, \varphi_i) = \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} dx - \left(EI \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) \Big|_0^L + \\ + \left(EI \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} \varphi_i(x) \right) \Big|_0^L = 0 \quad (\text{A.12})$$

De (A.12) tem-se o seguinte sistema de equações:

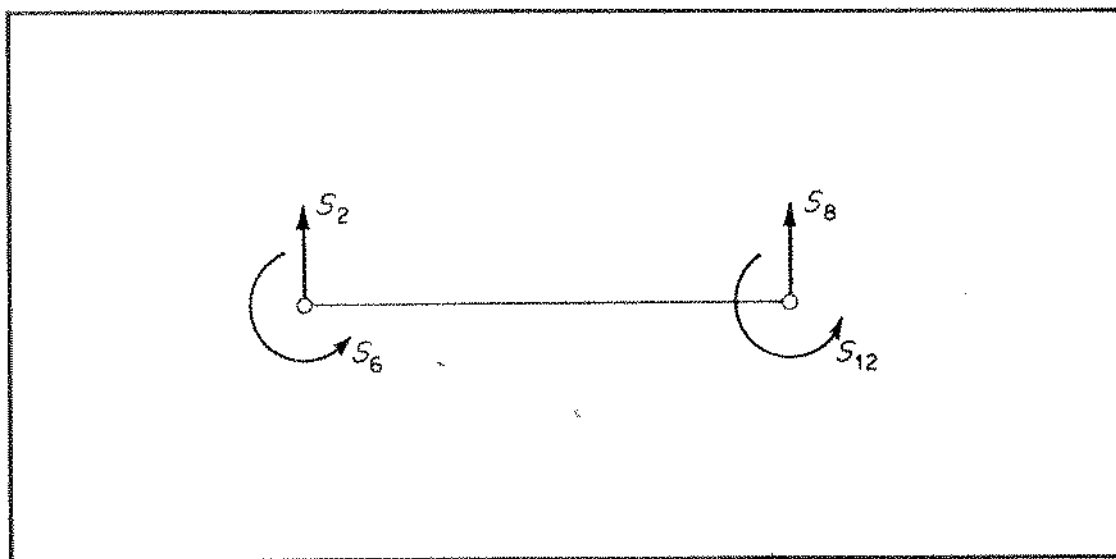
$$EI \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} dx = \left(EI \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \right) \Big|_0^L - EI \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} \varphi_i(x)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.13})$$

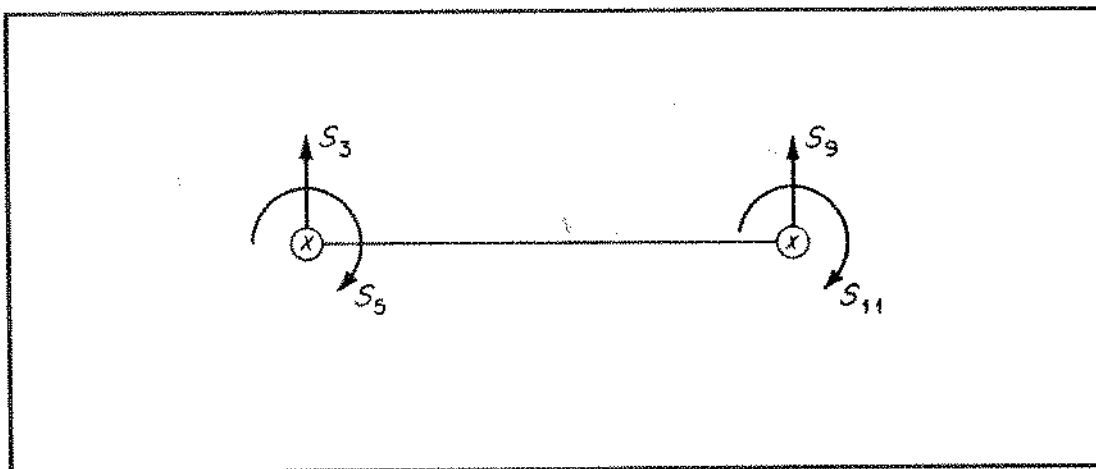
A função $\varphi(x)$ deve atender às condições de contorno essenciais que para o caso em questão são: u_2, u_6, u_8, u_{12} , conforme representado na figura (A.1a).

Para atender às quatro condições de contorno essenciais, utiliza-se um polinômio cúbico de interpolação para aproximar o valor do deslocamento lateral u_y .

$$\varphi(x) = \varphi_1 + \varphi_2 x + \varphi_3 x^2 + \varphi_4 x^3 = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$



a) - Plano XY



b) Plano XZ

Fig. A.1 - Condições de contorno essenciais para termo da flexão plana .

De onde:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \theta_2(x) = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

De (A.14) e (A.15) pode-se obter as seguintes expressões para as variáveis relacionadas com as condições de contorno essenciais.

$$\begin{bmatrix} u_2 = \varphi(0) \\ u_6 = \theta(0) \\ u_8 = \varphi(L) \\ u_{12} = \theta(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Pode-se escrever (A.16) como:

$$\{d\} = [A] \{\alpha\} \quad (\text{A.17})$$

de onde tem-se:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{d\} \quad (\text{A.18})$$

Levando (A.18) em (A.14) tem-se a seguinte expressão para aproximar o deslocamento lateral ao longo do eixo do elemento.

$$\varphi(x) = \left[(1-3\varepsilon^2+2\varepsilon^3) \ (\varepsilon-2\varepsilon^2+\varepsilon^3) \ L(3\varepsilon^2-2\varepsilon^3) \ (-\varepsilon^2+\varepsilon^3)L \right] \{d\} \quad (\text{A.19})$$

onde:

$$\varepsilon = \frac{x}{L} \quad (\text{A.20})$$

De (A.19), tem-se:

$$\theta_z(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{L} \left[6(-\varepsilon^2 + \varepsilon^3) (1 - 4\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3) L \quad 6(\varepsilon - \varepsilon^2) (-2\varepsilon + 3\varepsilon^2) L \right] (d) \quad (\text{A.21})$$

e

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \left[6(-1 + 2\varepsilon) \quad 2(-2\varepsilon + 3\varepsilon^2) L \quad 6(1 - 2\varepsilon) \quad 2(-1 + 3\varepsilon) L \right] (d) \quad (\text{A.22})$$

As expressões (A.19), (A.21) e (A.22) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\varphi(x) = N_i(\varepsilon)^T (d) \quad (\text{A.23})$$

$$\theta_z(x) = \left(\frac{dN_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^T (d) \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \left(\frac{dN_i^2(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right)^T (d) \quad (\text{A.25})$$

Pode-se então escrever o primeiro termo de (A.13) como:

$$EI \begin{pmatrix} \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} \\ \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} \\ \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_3(x)}{dx^2} \\ \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_4(x)}{dx^2} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{pmatrix} dx \quad (d) \quad (A.26)$$

De (A.20) tem-se que:

$$dx = L d\varepsilon \quad (A.27)$$

de onde

$$\frac{d^2 N_i}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dN_i}{dx} \right) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{dN_i}{d\varepsilon} \right) \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^2 = \frac{1}{L} \frac{d^2 N_i}{d\varepsilon^2} \quad (A.28)$$

Levando (A.28) em (A.26) tem-se:

$$EI \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} dx = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{d^2 N_1}{d\xi^2} \\ \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} \\ \frac{d^2 N_3}{d\xi^2} \\ \frac{d^2 N_4}{d\xi^2} \end{pmatrix} \left(\frac{d^2 N_1}{d\xi^2} \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} \frac{d^2 N_3}{d\xi^2} \frac{d^2 N_4}{d\xi^2} \right) d\xi \quad (d) \quad (A.29)$$

Que pode ser desenvolvida de forma a se ter:

$$EI \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} dx = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 \begin{pmatrix} 6(-1+2\xi)L \\ (-4+6\xi^2)L \\ (6-12\xi)L \\ (-2+6\xi)L \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left(6(-1+2\xi)L \quad (-4+6\xi^2)L \quad (6-12\xi)L \quad (-2+6\xi)L \right) d\xi \quad (d) \quad (A.30)$$

Efetuada a integração de (A.30) tem-se:

$$EI \int_0^L \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{SIM.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Obtemos desta maneira a matriz de rigidez elástica para uma viga plana no plano xy.

$$[KE]_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ & & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Os termos da matriz de rigidez associados com a flexão no plano xz podem ser derivados de forma semelhante à realizada para o plano xy. Deve ser observado, no entanto, que a direção positiva da rotação nos planos xy e xz são diferentes. Este fato pode ser observado claramente na figura (A.1.b), a qual mostra que a direção positiva das rotações u_5 e u_{11} são contrárias à de u_6 e u_{12} .

Fica então evidente que a matriz de rigidez correspondente à flexão no plano xz é:

$$[KE]_{xz} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ & & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

• TERMO DE ACOPLAMENTO FLEXÃO / ESFORÇO NORMAL

$$P \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} = 0 \quad (\text{A.34})$$

Aplicando o método de Galerkin em (A.34) e integrando por partes, tem-se:

$$\int_0^L P \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} \varphi_i(x) dx = \int_0^L P \frac{du_y(x)}{dx} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} dx - \left(P \frac{du_y(x)}{dx} \varphi_i(x) \right) \Big|_0^L$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{A.35})$$

Operando com o termo da integral no domínio, de maneira semelhante à efetuada para o termo de flexão, tem-se:

$$P \int_0^L \frac{Pdu_y(x)}{dx} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} dx = P \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_3}{dx} \\ \frac{dN_4}{dx} \end{pmatrix} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx = P \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_3}{dx} \\ \frac{dN_4}{dx} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dx} & \frac{dN_4}{dx} \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{pmatrix} \quad (A.36)$$

Na obtenção de (A.36) a força axial P foi considerada constante ao longo do elemento.

De (A.36) pode-se tirar o seguinte sistema de equações:

$$P \int_0^L \frac{Pdu_y(x)}{dx} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} dx = P \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_1}{dx}\right)^2 & \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_3}{dx} & \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_4}{dx} \\ & \left(\frac{dN_1}{dx}\right)^2 & \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_3}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_4}{dx} \\ & & \left(\frac{dN_1}{dx}\right)^2 & \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_4}{dx} \\ & & & \left(\frac{dN_1}{dx}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$dx \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Desenvolvendo (A.37) a partir das funções $N_i(\xi)$ obtidas para o termo da flexão plana, obtém-se a seguinte matriz para o termo de acomplamento da flexão no plano \overline{xy} com o carregamento axial P .

$$[K\sigma]_{\overline{xy}} = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Para o plano \overline{xz} , usando a convenção da figura (A.2), tem-se a seguinte matriz:

$$[K\sigma]_{\overline{xz}} = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & \frac{2L^2}{15} & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

• TERMOS DE DESLOCAMENTO AXIAL

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} = 0 \quad (\text{A.40})$$

Para a obtenção dos termos da matriz de rigidez relacionados ao deslocamento axial, basta aplicar Galerkin à equação (A.40), ou seja:

$$(R, \beta_i) = \int_0^L EA \frac{dB(x)}{dx} \frac{d\beta_i}{dx} dx = 0 \quad (\text{A.41})$$

Onde $B(x)$ corresponde ao polinômio interpolador para o deslocamento axial. Tendo sido adotado uma função linear, de forma a se atender as condições de contorno relacionadas com u_1 e u_7 .

$$B(x) = B_1 + B_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

De onde,

$$\begin{pmatrix} u_1 = B(0) \\ u_7 = B(L) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Levando (A.43) em (A.42), tem-se:

$$B(x) = \left[\left[\begin{array}{c} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{array} \right] \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_7 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Levando (A.44) em (A.41) e efetuando a integração, obtém-se os termos da matriz correspondentes aos deslocamentos axiais:

$$[KE]_{\text{axial}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

• TERMO DE TORÇÃO

$$GI \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (\text{A.46})$$

Uma vez que a diferencial (A.46) tem forma semelhante à (A.40), correspondente ao termo de deslocamento axial, a obtenção dos termos da matriz de rigidez devido à torção do elemento, não é apresentada, sendo similar ao devido ao esforço axial.

A matriz de rigidez obtida a partir de (A.46) é dada por:

$$[KE]_T = \frac{GI_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

O resultado obtido para os diversos termos das equações

diferenciais adotadas para o modelamento de um elemento de viga-coluna espacial, fornece o seguinte sistema de equações válido para um elemento de viga-coluna espacial:

$$([KE] + [Kg]) U = F \quad (A.48)$$

As matrizes $[KE]$ e $[Kg]$ são respectivamente as matrizes de rigidez elástica e geométrica e são obtidas a partir da superposição de: (A.32), (A.33), (A.45) e (A.47) para $[KE]$, (A.38) e (A.39) para $[Kg]$.

As matrizes $[KE]$ e $[Kg]$ estão apresentadas nas tabelas (A.1) e (A.2) a seguir.

TABELA (A.1) - MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA

$E \frac{A}{L}$	0	0	0	0	0	$-E \frac{A}{L}$	0	0	0	0	0
	$12E \frac{I}{L^3}$	0	0	0	$6E \frac{I}{L^2}$	0	$-12E \frac{I}{L^3}$	0	0	0	$6E \frac{I}{L^2}$
		$12E \frac{I}{L^3}$	0	$-6E \frac{I}{L^2}$	0	0	0	$-12E \frac{I}{L^3}$	0	$-6E \frac{I}{L^2}$	0
			$0 \frac{J}{L}$	0	0	0	0	0	$-0 \frac{J}{L}$	0	0
				$4E \frac{I}{L}$	0	0	0	$4E \frac{I}{L}$	0	$2E \frac{I}{L}$	0
					$4E \frac{I}{L}$	0	$-4E \frac{I}{L}$	0	0	0	$2E \frac{I}{L}$
						$E \frac{A}{L}$	0	0	0	0	0
	DIÁGNICA						$12E \frac{I}{L^3}$	0	0	0	$-6E \frac{I}{L^2}$
								$12E \frac{I}{L^3}$	0	$4E \frac{I}{L}$	0
									$0 \frac{J}{L}$	0	0
										$4E \frac{I}{L}$	0
											$4E \frac{I}{L}$

TABELA (A.2) - MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\frac{6P}{5L}$	0	0	0	$\frac{P}{10}$	0	$-\frac{6P}{5L}$	0	0	0	$\frac{P}{10}$
		$\frac{6P}{5L}$	0	$-\frac{P}{10}$	0	0	0	$-\frac{6P}{5L}$	0	$-\frac{P}{10}$	0
			0	0	0	0	0	0	0	0	0
				$\frac{2PL}{15}$	0	0	0	$\frac{P}{10}$	0	$-\frac{PL}{30}$	0
					$\frac{2PL}{15}$	0	$-\frac{P}{10}$	0	0	0	$-\frac{PL}{30}$
						0	0	0	0	0	0
							$\frac{6P}{5L}$	0	0	0	$-\frac{P}{10}$
								$\frac{6P}{5L}$	0	$\frac{P}{10}$	0
	SIMÉTRICA								0	0	0
										$\frac{2PL}{15}$	0
											$\frac{2PL}{15}$