

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TERMICA E FLUIDOS

Este parecer com o parecer da Redação
final da tese defendida por
Adriano Padilha e aprovada pela
comissão Julgadora em 26/9/90.
H. E. S. P.

"ESTUDO TEORICO E EXPERIMENTAL DO MOVIMENTO DA
FRENTE DE SOLIDIFICACAO POR SUPER-RESFRIAMENTO
DE UM LIQUIDO NO INTERIOR DE UM DUTO"

PADILHA

20/90

TRABALHO APRESENTADO À COMISSÃO DE PÓS
GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA
DE CAMPINAS, COMO PARTE DOS REQUISITOS
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TERMICA E FLUIDOS

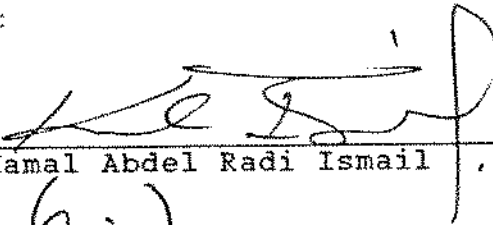
TESE DE DOUTORADO

"ESTUDO TEORICO E EXPERIMENTAL DO MOVIMENTO DA FRENTE DE
SOLIDIFICACAO POR SUPER-RESFRIAMENTO DE UM LIQUIDO
NO INTERIOR DE UM DUTO"


Autor : Alcides Padilha

Orientador : Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail

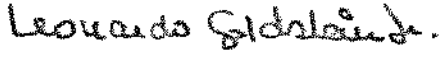
APROVADA POR :




Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail, Presidente



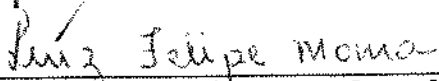
Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski



Prof. Dr. Leonardo Goldstein Junior



Prof. Dr. Paulo Magalhães Filho



Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura

Campinas, 26 de setembro de 1990

RESUMO

É apresentado um estudo teórico e experimental do processo transiente de mudança de fase, por super-resfriamento, de líquido escoando em regime laminar no interior de um duto. Considerando o balanço de energia nas regiões sólida, líquida e frente de solidificação é proposto um modelo numérico, admitindo as propriedades físicas da região sólida como função da temperatura e as malhas dependentes da posição da interface (Transformadas de Landau). Um aparato experimental é desenvolvido, obtendo-se o processo de solidificação por super-resfriamento, utilizando-se nitrogênio líquido como refrigerante. Os resultados numéricos apresentaram excelente concordância com os experimentais obtidos. A eficiência do modelo é demonstrada por uma análise comparativa entre três soluções numéricas para o modelo analítico de Neumann, o modelo da Capacidade Térmica Aparente devido a Bonacina, o modelo convencional das Equações da Energia com malhas fixas devido a Goodrich e o presente modelo.

ABSTRACT

In order to investigate the solidification process involving the phase change of laminar flow submitted to superfreezing, a theoretical and experimental study is developed. An alternative analytical and numerical unsteady model with temperature-dependent physical properties for the solid region is proposed, based upon the energy balance equation in the solid and liquid regions, as well as across the solidification front, employing interface-dependent coordinate grid (the Landau transformation). A rig has been built using liquid nitrogen as refrigerant. The numerical results compare well with the experimental ones. In order to show the capabilities of the model in comparison to previous numerical methods, the results of a comparative analysis between three numerical solutions for the analytical model due to Neumann, the Apparent Thermal Capacity model, due to Bonacina, a conventional fixed-grid Energy-Equation model due to Goodrich and the present model, are also included.

À minha esposa Maria
e a minha filha Juliana
pelo estímulo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que colaboraram para a realização deste trabalho e, em particular:

Ao Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail, cuja orientação guiaram-me nas muitas dificuldades do trabalho.

Ao Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski, pelos esclarecimentos.

Aos Professores Caio Glaucio Sanches, Cássio Roberto Macedo Maia, Marco Antonio Rahal Sacoman e João Batista Campos Silva, pelas sugestões durante a realização deste trabalho.

Ao Núcleo de Apoio Computacional do Departamento de Engenharia Mecânica (NAC/DEM), pelo suporte computacional.

Aos srs. Luiz Zanaga e Cláudio Gomes, técnicos do Laboratório de Armazenadores Térmicos e Tubos de Calor, pelo apoio no desenvolvimento do trabalho experimental.

As Sras. Adelaide Amaral S. Passipieri e Ivani C.S. Arruda Castro, pelos trabalhos de datilografia.

A Sra. Maurícia A.B. Homem e Sr. Elias de Carvalho Silveira, pelos desenhos.

À CAPES e a UNESP, pelo auxílio financeiro.

ÍNDICE

	Página
Simbologia.....	i
Figuras e Tabelas	iv
I - INTRODUÇÃO	01
I.1 - Processos de Mudança de Fase	02
I.2 - Histórico	05
I.3 - Objetivos	10
I.4 - Plano Geral do Trabalho.....	11
II - TEORIA	12
II.1 - Análise teórica.....	13
II.2 - Hipóteses Simplificadoras	14
II.3 - Modelo Matemático	16
II.4 - Método de solução	23
II.4.1 - Diagrama de blocos.....	31
III - TRABALHO EXPERIMENTAL	37
III.1 - Aparato Experimental	38
III.2 - Procedimento Experimental	42
IV - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	45
IV.1 - Introdução	46
IV.2 - Resultados Obtidos	47
IV.2.1 - Comparação com Solução Analítica	47
IV.2.2 - Comparação com os Dados Experimentais....	49

V - CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	61
V.1 - Aplicações do Modelo	62
V.2 - Extensões Futuras	64

APÊNDICES

A - Equação do Balanço de Energia para a Interface Sólido-Líquido.....	65
B - Componentes Transversal e Axial das Velocidades.	70
C - Temperatura Média de Mistura	73
D - Queda de Pressão Axial	76
E - Aplicação das Transformadas de Landau.....	79
F - Adimensionalização do Sistema de Equações (II.5) a (II.16).....	85
G - Método de Crank-Nicolson	92
H - Discretização da equação da Interface.....	97
I - Discretização da Equação da Região Sólida..	100
J - Discretização da Equação da Região Líquida.	108
K - Curva de Calibração da Placa de Orifício...	113

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	115
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	119

SIMBOLOGIA

- a : altura do canal, [m].
- C_L : calor latente de solidificação, [J/Kg °c].
- C_p : calor específico a pressão constante, [J/Kg °c].
- $D_h = 4 \text{ área/perímetro} = 4Ha/(2H+a)$: diâmetro hidráulico da secção transversal retangular do canal, [m].
- h_m : coeficiente de transferência de calor médio entre a região líquida e a interface, [W/m² °c].
- H : metade da largura do canal, [m].
- K : condutividade térmica, [W/m °c].
- L : comprimento da secção de teste, [m].
- NN : número de pontos da malha na direcção axial.
- N : número de pontos da malha na região líquida na direcção transversal.
- M : número de pontos total da malha, na direcção transversal.
- $\Delta \bar{p}$: diferença de pressão axial na secção de teste, [N/m²].
- Q : vazão na secção de teste, [m³/s].
- \bar{s} : posição dimensional da interface líquido-sólido em relação ao centro do canal, [m].
- \bar{t} : tempo dimensional, [s].
- \bar{T}_m : temperatura dimensional média de mistura na região líquida, [°c].
- \bar{T} : temperatura dimensional, [°c].
- \bar{u}, \bar{v} : componentes respectivamente, axial e transversal, da velocidade dimensional do líquido, [m/s].
- U_m : velocidade média calculada na secção transversal de entrada do canal, [m/s].

\bar{x} : coordenada dimensional, [m].

$\bar{x}^* = \bar{x}/(D_h \cdot Re \cdot Pr)$: distância adimensional na direção do fluxo para a região de entrada.

SUB-ÍNDICES

e : entrada do canal

f : frente de solidificação

i : inicial

l : líquido

o : centro do canal

s : sólido

w : parede

NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Nu_m : Número de Nusselt médio.

$Pr = \nu/\alpha_1$: Número de Prandtl.

$Pe = Re.Pr$: Número de Peclet.

$Re = U_0.D_h/H$: Número de Reynolds.

$Ste = C_p(T_f - T_w)/CL$: Número de Stefan.

SÍMBOLOS GREGOS

ρ : massa específica, $[Kg/m^3]$.

$\alpha = K/\rho C_p$: difusividade térmica, $[m^2/s]$.

μ : viscosidade dinâmica, $[Kg/ms]$.

$\nu = \mu/\rho$: viscosidade cinemática, $[m^2/s]$.

η : coordenada de transformação para a região sólida.

ξ : coordenada de transformação para a região líquida.

FIGURAS E TABELAS

	página
Figura (II.1)	14
Figura (II.2)	23
Figura (III.1)	39
Figura (III.2)	40
Figura (III.3)	40
Figura (IV.1)	48
Tabela (IV.1)	50
Figura (IV.2)	51
Figura (IV.3)	53
Figura (IV.4)	54
Figura (IV.5)	55
Figura (IV.6)	56
Figura (IV.7)	57
Figura (IV.8)	58
Figura (IV.9)	59
Figura (IV.10)	60
Figura (C1)	75
Figura (G.1)	93

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - PROCESSOS DE MUDANÇA DE FASE

O processo de super-resfriamento de líquidos, em repouso ou em escoamento envolvendo movimento da frente de solidificação, gera problemas tecnicamente importantes na engenharia e ocorre tanto na natureza como no meio industrial, tendo considerável aplicação nas indústrias de vidro, aço, gelo e recentemente em sistemas de estocagens de energia e conservação de produtos.

No super-resfriamento de líquidos em escoamento interno forçado, laminar ou turbulento, em que ocorre a solidificação (formação de uma casca sólida na parede interna de um duto), ou no processo de fusão desta casca, tem-se a redução ou expansão da área útil do fluxo e conseqüentemente a aceleração ou desaceleração do líquido ao longo do duto. Isto gera muitos problemas operacionais na grande faixa de aplicações deste processo, alguns dos quais são apresentados a seguir (Cheung e Epstein [1]):

- O resfriamento de líquido processado em trocadores de calor e tubulações associadas é o maior problema operacional em regiões onde ocorrem grandes variações de temperatura ambiente. Nestas localizações, a formação ou fusão da casca sólida nas paredes internas dos tubos, provocam variações de pressão nas tubulações, ficando o sistema sujeito a condições de operação diferentes das estipuladas em projeto.

- No período de inverno, a água nas redes de abastecimento pode atingir níveis de temperaturas muito abaixo da sua temperatura

de solidificação, interrompendo assim sua distribuição e, devido à elevação de pressão nas redes, causar danos nas bombas de recalque e suas tubulações.

- Em algumas situações este processo torna-se desejável, como na aplicação dos aparelhos de refrigeração portáteis, utilizados para produzir redução no fluxo, através da solidificação do líquido no interior da tubulação.

- Em muitas operações de fundição, o material fundido escoar através de bocais ou no interior de moldes, cujas paredes estão inicialmente a uma temperatura menor que a temperatura de solidificação do material em escoamento. Neste caso, o líquido pode ser suficientemente pré-aquecido, até uma temperatura na qual ocorra a passagem do material pelo bocal. Estas operações de fundição podem ser controladas pelo bloqueamento ou desbloqueamento dos bocais, utilizando respectivamente a solidificação ou fusão do próprio material em escoamento.

O processo de mudança de fase por super-resfriamento de líquido em escoamento, constitui-se num tópico bastante recente de pesquisa e desenvolvimento, e apesar de sua grande aplicabilidade, não existe ainda definida uma metodologia de projeto. Pode-se observar, por outro lado, que existem diversos autores procurando desenvolver modelos teóricos, visando a simulação do comportamento da frente de solidificação e dos campos de temperatura. De uma maneira geral, o processo de mudança de fase por super-resfriamento da região líquida em repouso ou em escoamento é um assunto aberto, necessitando para o

seu completo entendimento um grande esforço teórico-experimental.

I.2 - HISTÓRICO

Em 1891, segundo Cheung e Epstein [1], uma teoria sobre resfriamento de camada líquida foi estabelecida por Stefan para explicar a formação de gelo no mar. Este trabalho, embora não tenha sido o primeiro na área, tornou-se uma referência padrão nos estudos atuais de problemas de resfriamento. Uma formulação praticamente similar foi apresentada em 1831 por Lamé e Clapeyron, para previsão da taxa de resfriamento em solos úmidos. A primeira solução exata importante foi obtida por Franz Neumann e apresentada em sua conferência de 1860. Nos anos seguintes à formulação de Stefan, uma grande classe de problemas tecnicamente importantes envolvendo as equações de difusão de calor e massa, sujeitas ao movimento da interface, tem sido identificadas.

As não linearidades, Stephan [2], oriundas tanto da posição transiente da interface sólido-líquido, como da dependência das propriedades físicas das regiões sólida e líquida com a temperatura, exigem métodos numéricos elaborados para a solução destes problemas.

No estudo teórico e experimental de Zerkle e Sunderland [3], também considerado um trabalho pioneiro, são obtidas as distribuições de pressão, temperatura e posição da interface sólido-líquido, em condições permanentes, para resfriamento de líquido em escoamento laminar no interior de um tubo de secção transversal circular. Um experimento, com a finalidade única de observação visual da formação de gelo ao longo das paredes de um duto de secção transversal retangular, foi também desenvolvido.

A partir do resfriamento de água em escoamento no

interior de tubos, Hirata e Ishihara [4] desenvolveram um estudo experimental, em condições permanentes, sobre o tipo de perfil de camada de gelo formada, cujo formato produz uma passagem de fluxo com variação cíclica na secção transversal ao longo do tubo. No estudo de Hirata e Matsuzawa [5], foi desenvolvido um experimento para examinar o fenômeno do resfriamento de água em escoamento em tubos, apresentando uma correlação entre o formato da camada de gelo e as condições experimentais. Por outro lado, no trabalho experimental de Seki, Fukusako e Younan [6], apresentou-se a posição de transição para a turbulência, de dois tipos de perfis de camada de gelo, formadas no interior de um canal retangular de placas planas e paralelas.

Cho e Sunderland [7] apresentaram uma solução analítica, para o problema de mudança de fase em regiões semi-infinitas, considerando a condutividade térmica de cada fase dependente da temperatura e a condução de calor como o mecanismo de transferência de calor entre a fase líquida e a interface. O mesmo problema foi resolvido por Olivier e Sunderland [8], incluindo também o calor específico de cada fase, como funções linearmente dependentes da temperatura.

Eckert *et alii* [10], apresentaram uma revisão da literatura referente a 1987, sobre problemas de mudança de fase relativos à fusão e solidificação, embora não incluam trabalhos sobre super-resfriamento de regiões líquidas em repouso ou em escoamento, sejam as propriedades físicas das regiões sólidas ou líquidas dependentes da temperatura ou não.

Atualmente, em muitos problemas práticos de engenharia, o processo de solidificação não ocorre somente em camada líquida estagnante, semelhantes ao problema de Stefan, mas

em escoamento sobre a qual tem-se a formação transiente da camada sólida. Em muitos destes problemas, a posição permanente ou transiente da frente de solidificação, a qual separa as regiões líquida e sólida, e as distribuições das temperaturas nestas regiões são desconhecidas. Se o movimento da interface for conhecido, a solução é obtida mais facilmente, mas infelizmente, este movimento deve ser determinado como parte da solução.

A literatura de mudança de fase com transmissão de calor é dividida em dois métodos de abordagens, o chamado método de entalpia e os das equações da energia, embora Sparrow e Chuk [18], tenham mostrado a equivalência teórica dessas duas formulações. No método da entalpia, Bonacina, *et alii* [21], para uma substância pura, a interface é substituída por uma região finita com propriedades intermediárias àquelas das duas fases; já no método das equações da energia a interface é representada pelo balanço da energia através dela, incluindo-se aí o calor latente de transformação de fase.

Dos métodos existentes, o da capacidade térmica aparente ou método da entalpia, embora tenha a vantagem de ser de simples programação, produz uma interface de mudança de fase (correspondente à isoterma $T = T_F$), que avança de forma oscilatória não realística, o que é acompanhado pela distorção do perfil de temperatura na região em processo de mudança de fase. A fim de manter os erros dentro de limites aceitáveis, o espaçamento da malha naquela região deve ser reduzido substancialmente. Isto pode, contudo, resultar em uma situação na qual a isoterma T_F se move através do elemento de grade em menos de um passo de tempo, a contribuição do calor latente do elemento podendo ser desprezada totalmente, a menos que o passo de tempo seja também reduzido. A

localização da interface de mudança de fase torna-se pobre, fato este que pode ser crítico em se tratando de problemas de camadas com propriedades térmicas nas camadas vizinhas bastante diferenciadas. A falta de habilidade em acomodar dois planos de interfaces coexistindo simultaneamente dentro do mesmo elemento de grade pode levar a erros em certos problemas de regime térmico periódico. Além disso, em problemas de condições de contorno dependentes do tempo o erro associado às oscilações pode ser acumulativo. Essas dificuldades são acentuadas em se tratando de materiais que possuem uma pequena faixa de temperatura de congelamento ou que congelam a temperatura fixa. Diferentes formulações de capacidade térmica aparente tem sido desenvolvidas [21] e [25-30], inclusive associadas a formulações conservativas tais como volumes finitos, Patankar [22].

No método das equações da energia para uma substância pura, a interface é o contorno das duas fases claramente distintas. Então, se a malha utilizada é aquela definida a priori sobre toda a região, haverá certamente a necessidade de se lançar mão de interpolações para detecção da interface, conforme pode ser atestado em Rao e Sastri [9], e Goodrich [23], os quais usam a formulação a diferenças centradas com solução por eliminação Gaussiana simples para os nós ordinários (fora da região que contém a interface). O método de Rao e Sastri [9] isola a não linearidade associada com a equação da interface e segue continuamente o movimento da frente de solidificação ou fusão, restringindo as iterações somente aos nós principais (próximos à interface).

Do histórico exposto acima, pode-se perceber a necessidade do desenvolvimento de estudos experimentais e de

modelos teóricos, que represente o processo de mudança de fase, de regiões líquidas finitas em repouso ou em escoamentos convectivos livres ou forçados.

I.3 - OBJETIVOS

A finalidade deste trabalho é a formulação de um modelo matemático, capaz de simular o processo de mudança de fase de uma região finita, envolvendo movimento da frente de solidificação por super-resfriamento de líquido, em escoamento laminar forçado no interior de um duto bidimensional, formado por placas planas e paralelas. As propriedades físicas da região sólida são consideradas dependentes da temperatura e os resultados teóricos devem ser comparados com os dados experimentais obtidos.

No trabalho experimental, além da observação visual do fenômeno, são também registrados o desenvolvimento da camada de gelo e dos campos de temperatura nas regiões sólida e líquida.

Considerando ainda o escoamento laminar e completamente desenvolvido, a queda de pressão teórica, em função da posição transiente da interface na seção de teste, é determinada.

Uma análise é feita entre três métodos numéricos de solução para o problema de fluxo de calor com mudança de fase e mediante uma aplicação ao problema simplificado de congelamento de Neumann, resultados numéricos utilizando-se cada um dos métodos são comparados com a solução analítica.

I.4 - PLANO GERAL DO TRABALHO

Inicialmente no capítulo II é apresentado uma análise teórica do modelo físico e a formulação do problema na sua forma dimensional. As transformadas de Landau são aplicadas na adimensionalização do sistema de equações resultante, para imobilização da frente de solidificação pela transformação de coordenadas. Para a solução do sistema de equações é utilizado o método implícito/explicito de Crank-Nicolson.

Uma descrição do aparato e do procedimento experimental é feita no capítulo III.

No capítulo IV é analisada a comparação entre os resultados experimentais obtidos utilizando-se o aparato apresentado no capítulo III, e os resultados numéricos obtidos através do modelo proposto no capítulo II. É desenvolvido ainda um estudo sobre a solução do problema simplificado de Neumann e os correspondentes resultados empregando-se o modelo proposto, bem como dois outros métodos numéricos diferentes. O efeito de se desprezar determinados termos no sistema de equações completo é também analisado neste capítulo.

As conclusões, limitações do modelo e extensões futuras são apresentadas no capítulo V.

Desenvolvimentos matemáticos importantes mas que não comprometem a estrutura básica do texto estão disponíveis nos apêndices de A a K.

As referências que contribuíram direta ou indiretamente para a elaboração deste trabalho podem ser consultadas no fim da obra.

CAPÍTULO II

TEORIA

II.1 - ANÁLISE TEÓRICA

O modelo físico ou sistema a ser tratado neste trabalho é ilustrado na figura (II.1). Consiste no super-resfriamento de líquido escoando em regime laminar no interior de um duto bidimensional, de secção transversal retangular, cuja secção de resfriamento é formada por placas planas e paralelas.

O fluxo de líquido atravessa uma zona livre de solidificação, $\bar{x} \leq 0$, onde as temperaturas das paredes do duto são mantidas constantes e acima da temperatura de solidificação do líquido T_f . Nesta região o líquido esco a uma temperatura constante $T_I > T_f$ e o perfil de velocidade torna-se plenamente desenvolvido. Para $\bar{x} > 0$ as temperaturas nas paredes laterais do duto são reduzidas abruptamente, atingindo valores iguais e constantes abaixo da temperatura de solidificação do líquido ($T_w < T_f$). Ao longo desta posição o líquido é super-resfriado devido à transferência de calor para a camada sólida, sua temperatura média diminui atingindo valores próximos da temperatura de solidificação, e a espessura da camada sólida aumenta. Durante o super-resfriamento a vazão de líquido é mantida constante e o perfil de velocidade plenamente desenvolvido na entrada da secção de teste.

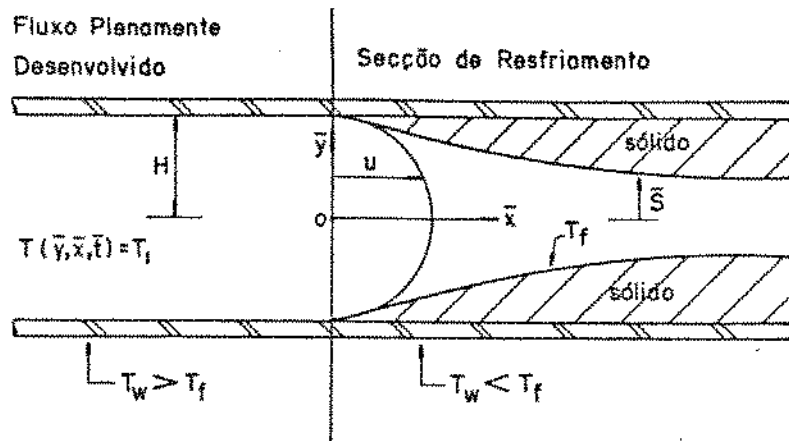


Figura II.1 - Esquema para a entrada térmica da seção de resfriamento do canal.

II.1 - HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Na formulação do modelo teórico, são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. A temperatura da interface sólido-líquido é constante e igual a temperatura de mudança de fase do líquido.
2. Na seção de resfriamento, o mecanismo de transferência de calor da região líquida para a interface é considerado por convecção forçada, e a correlação empírica utilizada para o Número de Nusselt médio é a recomendada por Shah [11], que considera os perfis de velocidade e temperatura em desenvolvimento;

$$Nu_m = 7,55 + 0,024 \bar{X}^{*-1,14} / [1 + 0,0358 \bar{X}^{*-0,64} Pr^{0,17}] \quad .II.1$$

3. As propriedades físicas da região líquida são consideradas constantes e admitidas na temperatura de solidificação do líquido, enquanto que as das regiões sólidas, considerando-se água como líquido em mudança de fase, variam com a temperatura,

segundo as correlações:

- volume específico (V), [m^3/kg], Perry [12],

$$V(\bar{T}) = 1,0907 \cdot 10^{-3} + 1,4635 \cdot 10^{-7} \cdot \bar{T}; \quad \text{II.2}$$

- calor específico (C_p), [$J/kg^\circ C$], Weast and Astle [13],

$$C_p(\bar{T}) = 2116,5607 + 7,2845 \cdot \bar{T}; \quad \text{II.3}$$

- condutividade térmica (K), [$W/m^\circ C$], Powell [14],

$$K(\bar{T}) = 2,09 - 0,003553 \cdot \bar{T}. \quad \text{II.4}$$

4. A condução de calor axial ($8500 < Pe < 28000$), a dissipação viscosa de energia e a convecção livre são desprezadas.
5. O líquido é admitido como Newtoniano, incompressível e substância pura.
6. As cascas sólidas formadas nas paredes laterais do duto são lisas, homogêneas e isotrópicas e suas espessuras aumentam gradativamente a partir da entrada térmica.
7. Devido as dificuldades inerentes com a solução do modelo matemático proposto no ponto de singularidade, na entrada do canal ($\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = H$), a sua temperatura é admitida conhecida, constante e igual a temperatura do líquido na entrada do canal.

II.3 - MODELO MATEMÁTICO

Considerando-se as hipóteses simplificadoras e o balanço de energia nas regiões sólida, líquida e frente de solidificação, para a metade do sistema, devido à simetria em $\bar{y} = 0$, obtém-se a formulação matemática do problema, na sua forma dimensional, como:

Para a região sólida:

$$c_p(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = v(\bar{T}) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[K(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right], \quad 0 < \bar{x} \leq L, \quad \bar{s} < \bar{y} < H \quad \text{e} \quad \bar{t} > 0; \quad \text{II.5}$$

e para a região líquida:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_1 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2},$$

$$0 < \bar{x} \leq L, \quad 0 \leq \bar{y} < \bar{s} \quad \text{e} \quad \bar{t} > 0, \quad \text{II.6}$$

sujeitas às seguintes condições inicial e de contorno:

$$\bar{T} = T_i, \quad 0 \leq \bar{x} \leq L, \quad 0 \leq \bar{y} \leq H, \quad \bar{t} = 0, \quad \text{II.7}$$

$$\bar{T} = T_v, \quad 0 < \bar{x} \leq L, \quad \bar{y} = H, \quad \bar{t} > 0, \quad \text{II.8}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad 0 < \bar{x} \leq L, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{t} > 0, \quad \text{II.9}$$

$$\bar{T} = T_1, \quad \bar{x} = 0, \quad 0 \leq \bar{y} \leq H, \quad \bar{t} > 0. \quad \text{II.10}$$

Para a interface sólido-líquido (Apêndice A), segundo também Lazaridis [15],

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_s = T_f, \quad 0 < \bar{x} \leq L, \quad \bar{y} = \bar{s}, \quad \bar{t} > 0, \quad \text{II.11}$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] \cdot \left[K_s \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial \bar{y}} - h_m (\bar{T}_m - T_f) \right] = -\rho_l \cdot C_l \cdot \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}},$$

$$0 < \bar{x} \leq L, \quad \bar{y} = \bar{s}, \quad \bar{t} > 0. \quad \text{II.12}$$

Os perfis de velocidades na região líquida, entre as placas planas e paralelas (Apêndice B), são admitidas como :

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = (3/2) \cdot (H/\bar{s}) U_m \left[1 - \left(\frac{\bar{y}}{\bar{s}} \right)^2 \right],$$

$$0 \leq \bar{x} \leq L, \quad 0 \leq \bar{y} \leq \bar{s}, \quad \bar{t} \geq 0 \quad \text{II.13}$$

e

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = (3/2) \cdot (H\bar{y}/\bar{s}^2) U_m \left[1 - \left(\frac{\bar{y}}{\bar{s}} \right)^2 \right] \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}},$$

$$0 \leq \bar{x} \leq L, \quad 0 \leq \bar{y} \leq \bar{s}, \quad \bar{t} \geq 0, \quad \text{II.14}$$

onde

$U_m = Q/(2.a.H)$ (velocidade média na secção transversal de entrada).

A temperatura média de mistura (ver apêndice C) e a queda de pressão axial, considerada constante em qualquer secção transversal do escoamento laminar, entre placas planas e paralelas (ver Apêndice D), são dadas respectivamente por:

$$\bar{T}_m - T_f = \frac{4}{5} \cdot (\bar{T}_0 - T_f) \quad , \quad 0 < \bar{x} \leq L \quad , \quad \bar{y} = 0 \quad , \quad \bar{t} > 0 \quad \text{II.15}$$

e

$$\bar{\Delta p} = 3 \cdot Q \cdot \mu \cdot \Delta \bar{x} / (2 \cdot a \cdot \bar{s}^3) \quad 0 \leq \bar{x} \leq L \quad , \quad \bar{t} > 0 \quad . \quad \text{II.16}$$

Para uma análise mais geral, o sistema de equações (II.5) - (II.16) é adimensionalizado, utilizando-se os parâmetros adimensionais apresentados por Ramachandran [17].

O super-resfriamento inicia-se na parede do canal em $\bar{y} = H$ e a distância entre o centro do canal e a posição instantânea da interface sólido-líquido é dada por $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})$ e definida como, $\bar{s} = \bar{s}(\bar{x}, \bar{t})$.

O ponto de partida do método de solução é a imobilização da frente de solidificação pela transformação de coordenadas,

$$\xi = \bar{y}/\bar{s} \quad e \quad \eta = (\bar{y} - \bar{s}) / (H - \bar{s}) \quad ,$$

conhecidas como as transformadas de Landau, de tal modo que as regiões do sistema são caracterizadas pelas fases líquida ($0 \leq \xi \leq 1$) e sólida ($0 \leq \eta \leq 1$), correspondendo simplesmente a um retângulo no espaço transformado (ξ, η, x, t).

O campo de temperatura é definido por

$$T = \frac{\bar{T} - T_f}{T_f - T_w},$$

e conseqüentemente, tem-se também as fases líquida ($T_0 \leq T \leq 0$) e sólida ($0 \leq T \leq -1$).

Adota-se a metade da largura (H) da seção de teste do canal, como parâmetro de referência para comprimentos, tal que:

$$s = \bar{s}/H, \quad y = \bar{y}/H, \quad x = \bar{x}/H \quad \text{e} \quad x^* = \bar{x}^*/H.$$

Finalmente, o intervalo de tempo, o perfil de velocidade e a queda de pressão axial são definidos respectivamente por,

$$t = \alpha_1 \bar{t}/H^2, \quad u = H \cdot \bar{u}/\alpha_1, \quad v = H \cdot \bar{v}/\alpha_1 \quad \text{e} \quad \Delta p = \Delta \bar{p}/(\rho U_e^2).$$

As transformadas de Landau (Apêndice E), são aplicadas na adimensionalização das equações (Apêndice F), a fim de facilitar o esquema numérico de solução do problema, resultando no seguinte sistema de equações adimensionalizadas:

Para a região Sólida:

$$C_p(T) \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{1-\eta}{1-s} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] = \frac{V(T) \cdot K(T)}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{1-s} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} -$$

$$\frac{\beta(T) \cdot (T_f - T_w)}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{1-s} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2, \quad 0 < x \leq L/H, \quad 0 < \eta < 1, \quad t > 0; \quad \text{II.17}$$

Para a região Líquida:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\xi}{s} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + u \left[\frac{\partial T}{\partial x} - \left(\frac{\xi}{s} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{v}{s} \frac{\partial T}{\partial \xi} =$$

$$\left(\frac{1}{s} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad 0 < x \leq L/H, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad t > 0, \quad \text{II.18}$$

sujeitas às seguintes condições inicial e de contorno:

$$T(x, \xi, t) = T_1, \quad 0 \leq x \leq L/H, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t = 0, \quad \text{II.19}$$

$$T(x, \eta, t) = -1, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \eta = 1, \quad t > 0, \quad \text{II.20}$$

$$\frac{\partial T(x, \xi, t)}{\partial \xi} = 0, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \xi = 0, \quad t > 0, \quad \text{II.21}$$

$$T(x, \xi, t) = T_1, \quad x = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t > 0, \quad \text{II.21a}$$

para a interface, tem-se:

$$T(x, \eta, t) = T(\xi, x, t) = 0, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \eta = 0, \quad \xi = 1, \quad t > 0 \quad \text{II.22}$$

e

$$\left[\left(\frac{1}{1-s} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} - Nu_m \left(\frac{H}{D_h} \right) \left(\frac{k_l}{ks} \right) T_m \right] \left[1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right] = - \frac{\alpha_1}{\alpha_s} \left(\frac{1}{Ste} \right) \frac{\partial s}{\partial t} ,$$

$$0 < x \leq L/H \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \xi = 1 \quad , \quad t > 0 . \quad \text{II.23}$$

Os perfis de velocidades, temperatura média de mistura e queda de pressão axial, foram admitidos respectivamente como :

$$u(x, \xi, t) = \frac{3 \cdot Q}{4a\alpha_1 s} (1 - \xi^2) \quad e$$

$$v(x, \xi, t) = \frac{3 \cdot Q \cdot \xi}{4a\alpha_1 s} (1 - \xi^2) \frac{\partial s}{\partial x} \quad , \quad \text{para}$$

$$0 \leq x \leq L/H \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad \text{II.24}$$

$$T_m = \frac{4}{5} T(x, \xi, t) \quad , \quad 0 < x \leq L/H \quad , \quad \xi = 0 \quad , \quad T > 0 \quad e \quad \text{II.25}$$

$$\Delta p(x, t) = 3 Q \nu_{, x} / (2 a U_e^2 H^2 s^3) \quad , \quad 0 \leq x \leq L/H \quad , \quad t > 0 . \quad \text{II.26}$$

O Número de Nusselt médio e as propriedades físicas da região sólida, segundo os parâmetros adimensionais propostos para o modelo, resultam respectivamente em:

$$Nu_m = 7,55 + 0,024 x^*^{-1,14} / (1 + 0,0358 \cdot x^*^{-0,64} Pr^{0,17}) \quad , \quad \text{II.27}$$

onde

$$x^* = x / (RePr) \quad , \quad \text{II.28}$$

- volun específico:

$$V(T) = 1,0907.10^{-3} + 1,4635.10^{-7} \cdot [T_f + (T_f - T_w) T] , \quad \text{II.29}$$

- calor específico:

$$C_p(T) = 2116,5607 + 7,2845 \cdot [T_f + (T_f - T_w) T] , \quad \text{II.30}$$

- condutividade térmica:

$$K(T) = 2,09 - 0,003553 \cdot [T_f + (T_f - T_w) T] , \quad \text{II.31}$$

onde

$\beta(T) = 0,003553 \cdot V(T)$: produto entre as propriedades físicas da fase sólida (ver Apêndice F).

O termo $\partial s / \partial t$, nas equações II.17 e II.18 da energia, é interpretado como velocidade e os termos no qual ele aparece são chamados termos pseudoconvectivos. A pseudoconvecção é criada pela imobilização da interface. Claramente, as equações II.17 e II.18 são mais complexas que suas originais, equações II.5 e II.6, refletindo o preço pago pela imobilização da interface.

II.4. MÉTODO DE SOLUÇÃO

Adotou-se a técnica numérica das diferenças finitas, para a discretização do sistema de equações diferenciais (II.17) - (II.23), com uma malha simples retangular no espaço transformado (ξ , η , x , t), espaçamento uniforme na direção axial x e com passo de tempo variável, conforme figura (II.2), para um determinado instante de tempo.

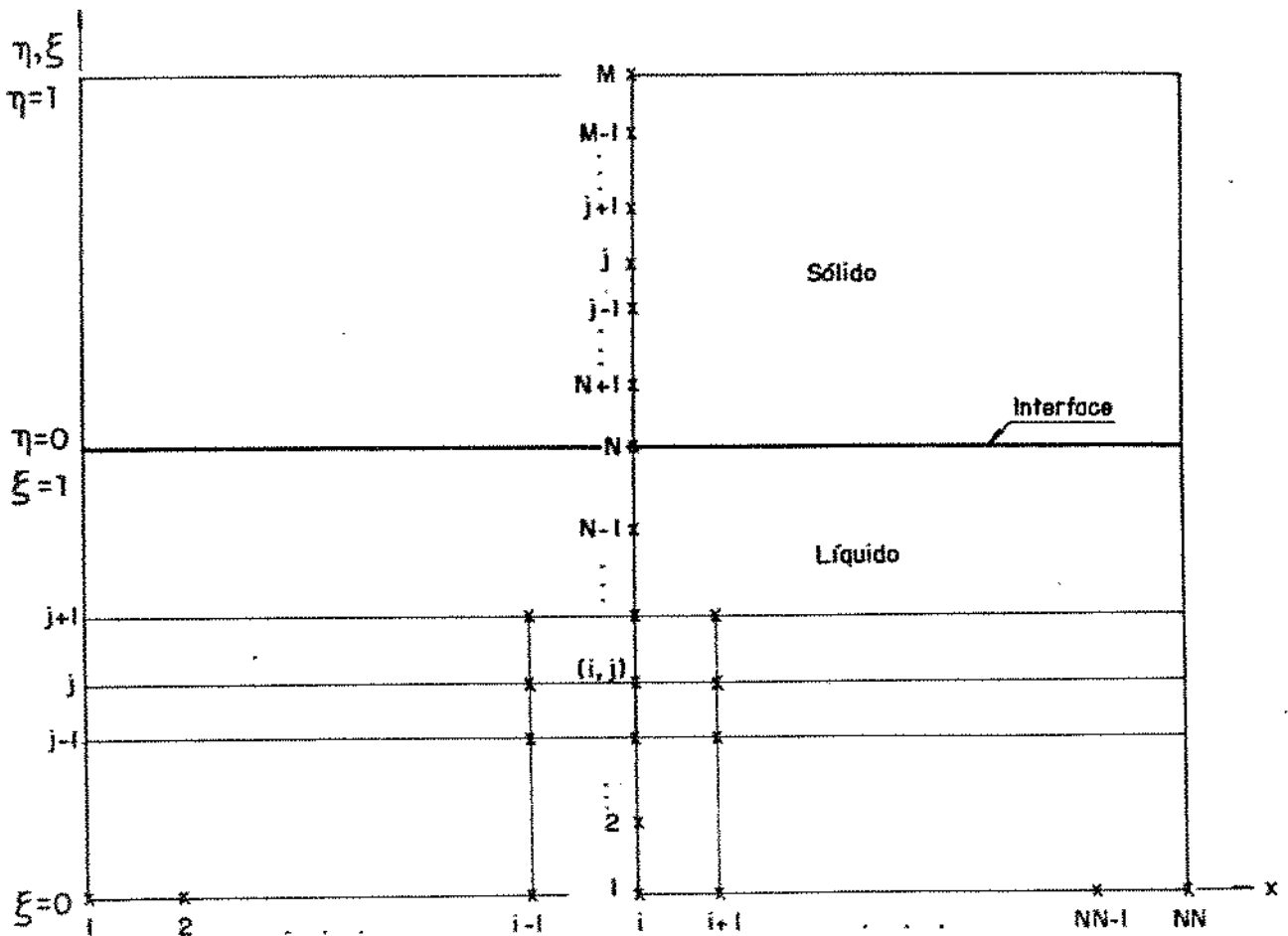


Figura II.2 - Perfil da frente de solidificação no espaço transformado (ξ , η , x , t) e sistema de malha adotado.

Assim temos:

Região líquida: $1 \leq i \leq NN$ e $1 \leq j \leq N$;

secção de entrada: $i = 1$ e $1 \leq j \leq N$

secção de saída: $i = NN$ e $1 \leq j \leq N$

pontos internos: $2 \leq i \leq NN - 1$ e $2 \leq j \leq N-1$

Região sólida: $1 \leq i \leq NN$ e $N \leq j \leq M$;

secção de entrada: $i = 1$ e $j = N$

secção de saída: $i = NN$ e $N \leq j \leq M$

pontos internos: $2 \leq i \leq NN$ e $N+1 \leq j \leq M-1$

e para $1 \leq i \leq NN$, tem-se que:

$j = 1, 2, 3, \dots, N$: número de pontos na região líquida.

$j = N, N+1, N+2, \dots, M$: número de pontos na região sólida.

$\Delta x = x_{i+1} - x_i$: distância entre os pontos na direção axial.

$\Delta \eta = \eta_{j+1} - \eta_j$: distância transversal entre os pontos da região líquida .

$\Delta \xi = \xi_{j+1} - \xi_j$: distância transversal entre os pontos da região sólida.

$\Delta t = t_{k+1} - t_k$: intervalo entre dois instantes de tempo consecutivos.

Na solução do sistema de equações não lineares (II.17) - (II.23), a equação (II.23) da interface é resolvida pelo método explícito de Crank-Nicolson (método este descrito no Apêndice G). Esta natureza explícita para a solução da equação da interface, elimina a iteração entre as soluções dos campos de temperatura e da interface. Sparrow e Chuck [18], utilizaram este

esquema de solução para problemas de resfriamento com mudança de fase, cujas propriedades físicas das regiões sólida e líquida foram admitidas constantes, e não encontraram limitações no passo de tempo em suas soluções. No caso do sistema de equações (II.17)-(II.23), relativo ao problema de super-resfriamento, a derivada de tempo $\partial T/\partial t$ na equação (II.17), originalmente não linear, é calculada explicitamente por Crank-Nicolson, a fim de se obter convergência no sistema de equações do campo de temperatura da região sólida, uma vez que o passo de tempo é um fator limitante na solução deste sistema.

Assim, o primeiro passo consiste na discretização e na solução da equação (II.23) da interface, para obtenção da posição da frente de solidificação $s(x,t)$, ou seja :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = A_7 \cdot \left[\left(\frac{1}{1-s} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} - Nu_m \cdot A_{11} \cdot T_m / D_H \right] \left[1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right] ,$$

$$\eta = 0 \quad , \quad \xi = 1 \quad , \quad 0 < x \leq L/H \quad , \quad t > 0 ,$$

esta equação é discretizada (Apêndice H) e avaliada para o instante de tempo $t = K \Delta t$, produzindo:

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial t} \right)^K = A_7 \left[1 + \left(\frac{-3s_i^K + 4s_{i+1}^K - s_{i+2}^K}{2\Delta x} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{1-s_i^K} \right) \cdot \left(\frac{-3T_{i,N}^K + 4T_{i,N+1}^K - T_{i,N+2}^K}{2 \cdot \Delta \eta} \right) - 0,8 Nu_m A_{11} T_{i,\infty}^K / (4 S_i^K) \right] ,$$

$$1 < i \leq NN \quad , \quad j = N \quad , \quad K > 0 \quad . \quad \text{II.32}$$

Como todas as variáveis que aparecem no lado direito da equação (II.32), aqui referenciada por LD(32) são conhe

cidas, então a derivada $\left(\frac{\partial s_i}{\partial t}\right)^k$ é calculada. O valor de $\left(\frac{\partial s_i}{\partial t}\right)^k$ é então empregado para o cálculo do s_i no instante de tempo $t = (k + 1/2) \Delta t$,

$$s_i^{k+1/2} = s_i^k + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial t}\right)^k, \quad 1 < i \leq NN, \quad k > 0. \quad \text{II.33}$$

substituindo-se o valor de $s_i^{k+1/2}$, no LD(32), obtêm-se a derivada $(\partial s_i / \partial t)$, para o instante de tempo $t = (k + \frac{1}{2}) \Delta t$,

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial t}\right)^{k+1/2} = \text{LD(32)} \text{ com } s_i^{k+1/2} \quad \text{II.34}$$

Finalmente, a posição da frente de solidificação s_i , é obtida para o instante de tempo $t = (k+1)\Delta t$, como:

$$s_i^{k+1} = s_i^k + \Delta t \left(\frac{\partial s_i}{\partial t}\right)^{k+1/2}, \quad 1 < i \leq NN, \quad k > 0 \quad \text{II.35}$$

e a derivada $(\partial s / \partial t)^{k+1}$, para o instante de tempo $t = (k+1)\Delta t$, presente nas equações (II.17) e (II.18), regiões sólida e líquida, respectivamente, é calculada explicitamente substituindo-se a relação (II.35) na LD(32), ou seja

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial t}\right)^{k+1} = \text{LD(32)} \text{ com } s_i^{k+1}. \quad \text{II.36}$$

A derivada de tempo $(\partial T / \partial t)^{k+1}$ da equação (II.17),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_P(T)} \left(\frac{1-\eta}{1-s}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) + \frac{V(T) \cdot K(T)}{C_P(T) \alpha_1} \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} -$$

$$\frac{\beta(T) \cdot (T_f - T_w)}{C_p(T) \cdot \alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)^2, \quad 0 < x \leq L/H, \quad 0 < \eta < 1, \quad t > 0, \quad \text{II.37a}$$

referente à região sólida é também calculada explicitamente, para o instante de tempo $t = (k+1)\Delta t$, utilizando o mesmo esquema de solução da equação (II.32) considerando a derivada $(\partial s/\partial t)^{k+1}$ como conhecida, produzindo (Apêndice I) na forma discretizada, a relação:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{k+1} = Z_9 (\partial s/\partial t)^{k+1} + Z_8 (Z_2 \cdot Z_4 - A_5 \cdot Z_1 \cdot Z_1/8),$$

$$1 < i \leq NN, \quad N < j < M, \quad k > 0 \quad \text{II.37}$$

O próximo passo consiste na aplicação do método implícito de Crank-Nicolson na equação (II.17) (Apêndice I), para o cálculo do campo de temperatura na região sólida com as derivadas de tempo $(\partial T/\partial t)^{k+1}$, $(\partial s/\partial t)^{k+1}$ e a posição da interface s_i^{k+1} , calculadas explicitamente, resultando:

$$T_{i,j}^{k+1} = 2Z_0 - Z_3 - \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{k+1} / (2 \cdot Z_4 \cdot Z_8) + (\partial s/\partial t)^{k+1} \cdot Z_9 / (2 \cdot Z_4 \cdot Z_8) - A_5 \cdot Z_1 \cdot Z_1 / (16 \cdot Z_4), \quad 1 < i \leq NN, \quad N < j < M, \quad k > 0 \quad \text{II.38}$$

O método implícito de Crank-Nicolson também é aplicado na equação (II.18), para o cálculo do campo de temperatura na região líquida, utilizando-se a derivada $(\partial s/\partial t)^{k+1}$ e a posição da interface s_i^{k+1} calculadas explicitamente (Apêndice J), resultando em:

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + Z_1 \cdot Z_{11} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{k+1} - Z_{10} \cdot (Z_{14} - Z_1 \cdot Z_{11} \cdot Z_{13}) + Z_2 \cdot Z_{12} +$$

$$+ \frac{(j-1)}{4 s_i^{k+1}} \cdot Z_1 \cdot Z_{10} \cdot Z_{13} \quad , \quad 1 < i \leq NN \quad , \quad 1 \leq j < N \quad , \quad k > 0 \quad \text{II.39}$$

As condições inicial e de contorno, na forma discretizada, tornam-se:

Inicial

$$T_{i,j}^k = T_i \quad , \quad 1 \leq i \leq NN \quad , \quad 1 \leq j \leq M \quad , \quad k = 0 \quad \text{II.40}$$

Centro do canal

$$T_{i,j+1}^{k+1} = T_{i,j-1}^{k+1} \quad , \quad 1 < i \leq NN \quad , \quad j = 1 \quad , \quad k > 0 \quad \text{II.41}$$

Parede do canal

$$T_{i,j}^{k+1} = -1 \quad , \quad 1 < i \leq NN \quad , \quad j = M \quad , \quad k > 0 \quad \text{II.42}$$

Entrada do canal

$$T_{i,j}^{k+1} = T_i \quad , \quad i = 1 \quad , \quad 1 \leq j \leq M \quad , \quad k > 0 \quad \text{II.43}$$

Interface

$$T_{i,j}^{k+1} = 0 \quad , \quad 1 < i \leq NN \quad , \quad j = N \quad , \quad k > 0 \quad \text{II.44}$$

A equação (II.26), referente à queda de pressão axial, é escrita na forma discretizada como,

$$\Delta P_i^{k+1} = 3 \cdot Q \cdot \nu \cdot (i-1) \Delta x / [2 a U_e^2 H^2 (s_i^{k+1})^3]$$

$$0 \leq i \leq NN \quad , \quad t > 0 \quad \text{II.45}$$

onde, para todas as equações anteriores,

$$A_1 = 2116,5607 + 7,2845 \cdot T_f$$

$$A_2 = 7,2845 \cdot (T_f - T_w)$$

$$A_3 = 2,2796 \cdot 10^{-3} - 3,5694 \cdot 10^{-6} \cdot T_f$$

$$A_4 = -3,5694 \cdot 10^{-6} \cdot (T_f - T_w)$$

$$A_5 = 3,8753 \cdot 10^{-3} \cdot (T_f - T_w)$$

$$A_6 = \Delta t / (2 \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \xi)$$

$$A_7 = \frac{\alpha_s \cdot \text{ste}}{\alpha_1}$$

$$A_9 = 1 / (4 \Delta \eta)$$

$$A_{10} = 1 / (2 \alpha_1 \Delta \eta \Delta \eta)$$

$$A_{11} = H K_1 / K_s$$

$$Z_0 = 0,25 (T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)$$

$$Z_1 = T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k$$

$$Z_2 = T_{i,j+1}^{k+1} - 2 T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - 2 T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k$$

$$Z_3 = T_{i,j}^k$$

$$Z_4 = A_3 + A_4 Z_0$$

$$Z_5 = A_1 + A_2 Z_0$$

$$Z_6 = 1 / (1 - s_i^{k+1})$$

$$Z_7 = 1 - (j - N) \cdot \Delta \eta$$

$$Z_8 = A_{10} \cdot Z_6 \cdot Z_6 / Z_5$$

$$Z_9 = A_9 \cdot Z_1 \cdot Z_6 \cdot Z_7$$

$$Z_{10} = \frac{3 Q}{4 a \alpha_1 s_i^{k+1}} \{1 - [(j-1) \Delta \xi]^2\}$$

$$Z_{11} = (j-1)\Delta t / (4s^{k+1})$$

$$Z_{12} = A_6 / (s_i^{k+1})^2$$

$$Z_{13} = s_{i-2}^{k+1} - 4 s_{i-1}^{k+1} + 3 s_i^{k+1} + s_{i-2}^k - 4 s_{i-1}^k + 3 s_i^k$$

$$Z_{14} = T_{i-2,j}^{k+1} - 4 T_{i-1,j}^{k+1} + 3 T_{i,j}^{k+1} + T_{i-2,j}^k - 4 T_{i-1,j}^k + 3 T_{i,j}^k$$

Estabeleceu-se malhas de 50 nós na direção axial e 5 nós na direção transversal do escoamento, em cada região do sistema de mudança de fase. Adotou-se este número de nós levando-se em conta o problema de estabilidade na análise numérica, a precisão e o tempo computacional.

Embora o método implícito/explicito de Crank-Nicolson, utilizado na solução numérica, seja estável para todos os valores da razão $\lambda = \Delta t / \Delta x^2$, segundo Sparrow [18], valores de $\lambda = 4 \cdot 10^{-8}$ ($\Delta t > 10^{-6}$) ocasionaram divergência nos resultados, o que poderia ser devido a não linearidades do sistema de equações da região sólida, já que a solução do sistema da região líquida não apresentou quaisquer restrições.

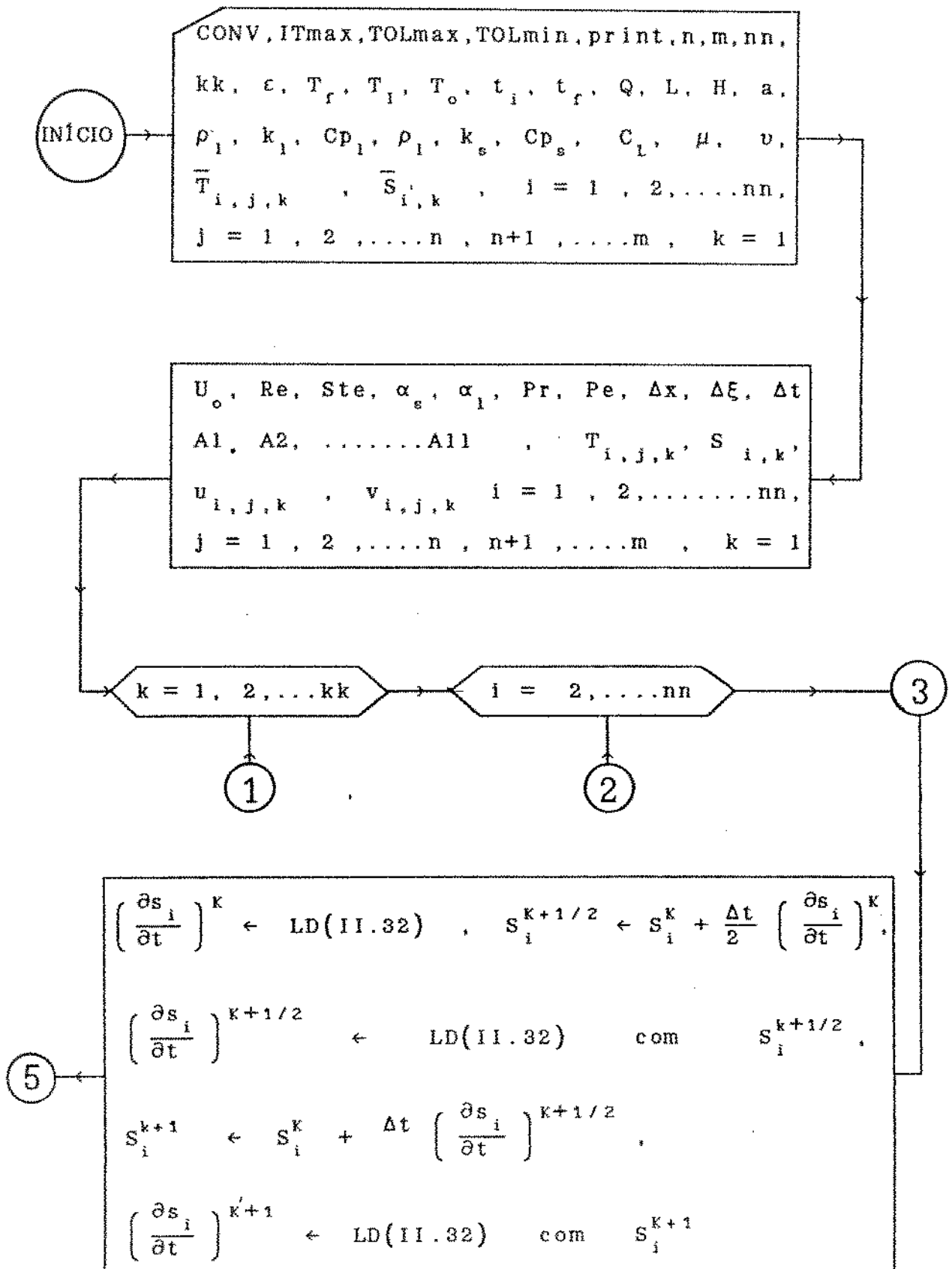
O sistema de equações (II.38) e (II.39), referentes aos campos de temperatura nas regiões líquida e sólida são independentemente resolvidos pelo método da substituição sucessiva Carnahan [19]. A convergência do sistema é atingida com um número máximo de 8 interações, no início do processo, para o campo de temperatura na região sólida, enquanto que o campo de temperatura na região líquida converge com um número máximo de 2 interações. Isto, é devido a maior complexidade (não linearidades) na equação da energia para a região sólida em relação a equação da energia

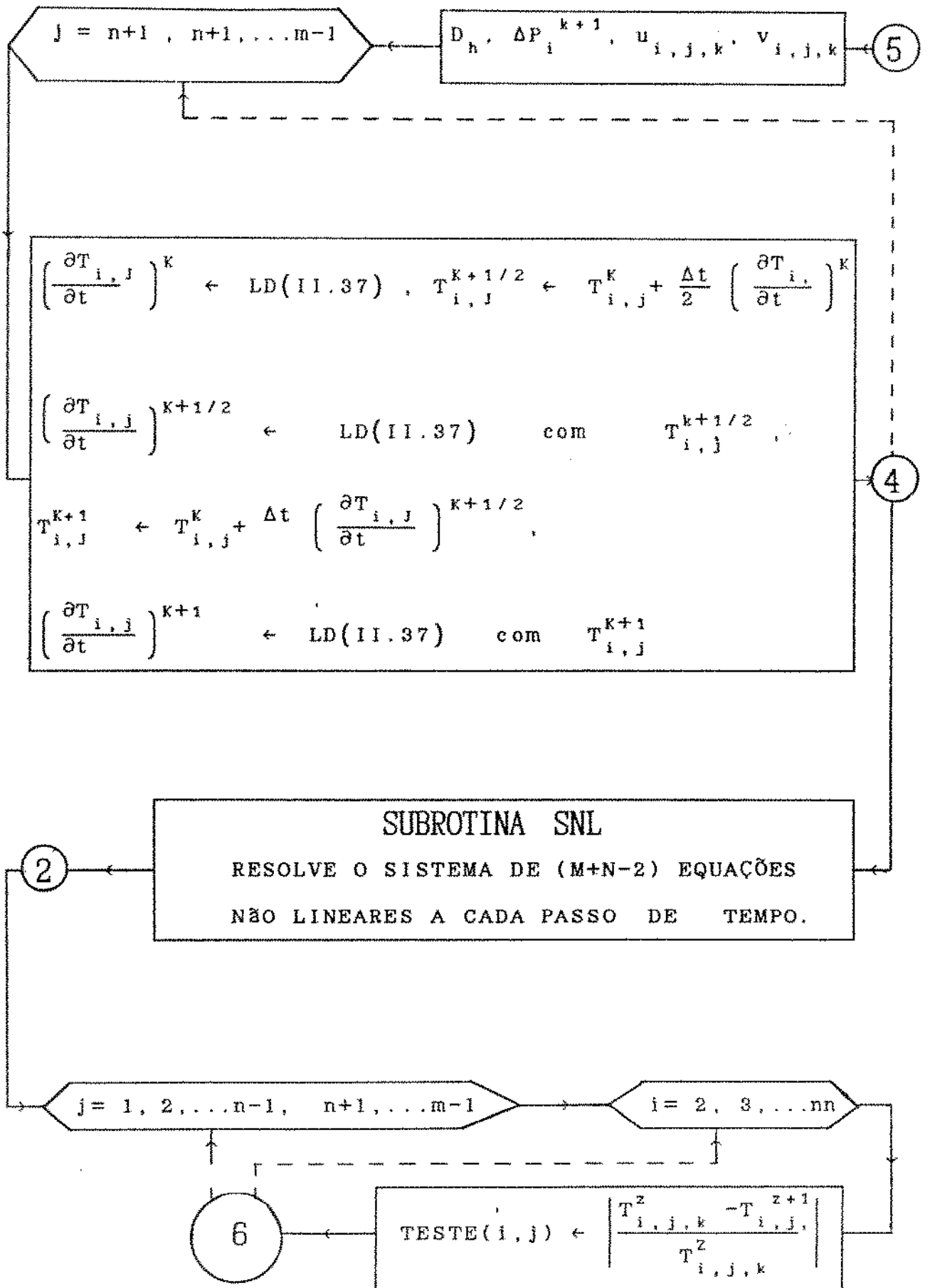
para a região líquida.

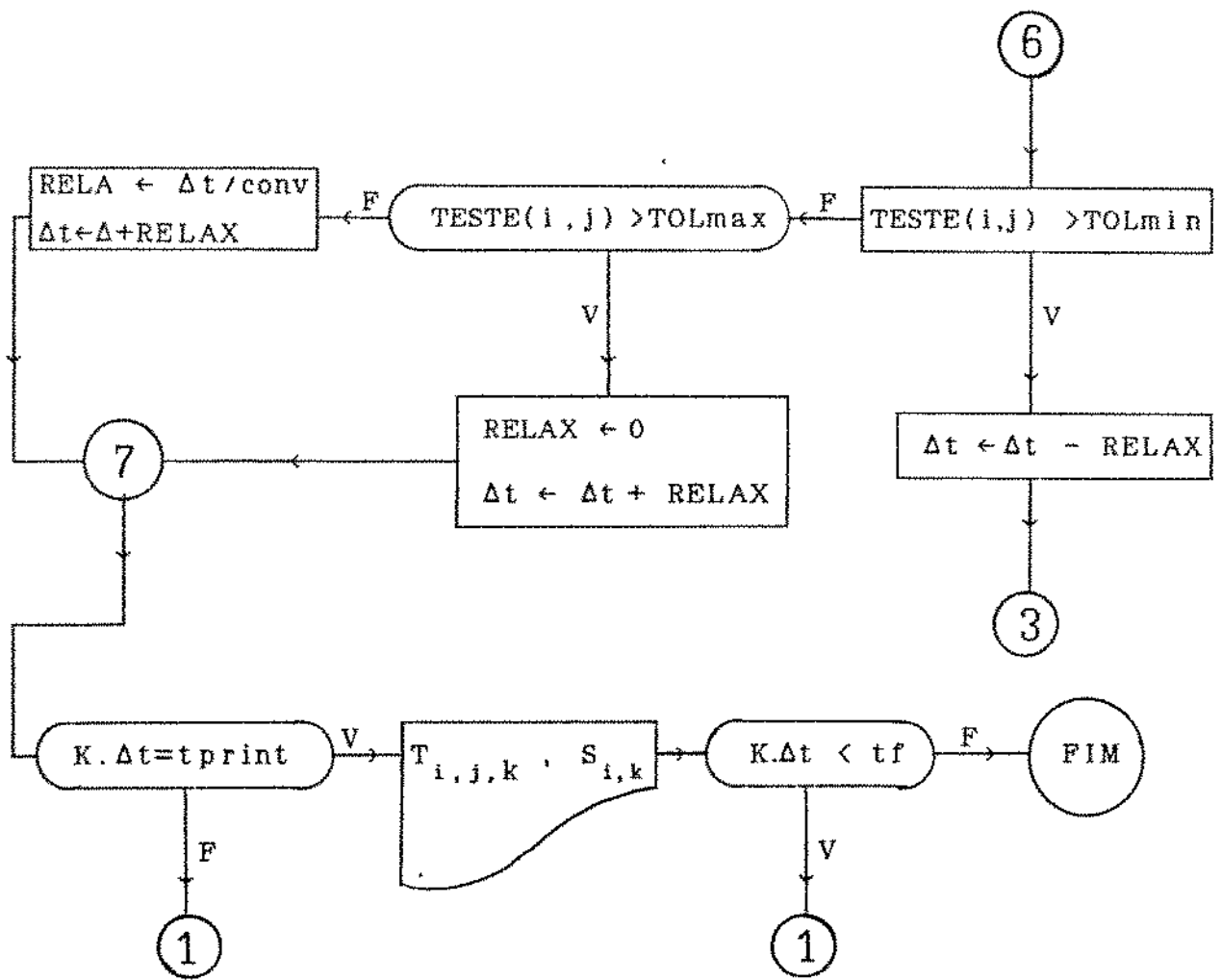
II.4.1 DIAGRAMA DE BLOCOS

A seguir é apresentado o diagrama de blocos referente ao esquema numérico de solução do sistema de equações do modelo matemático proposto.

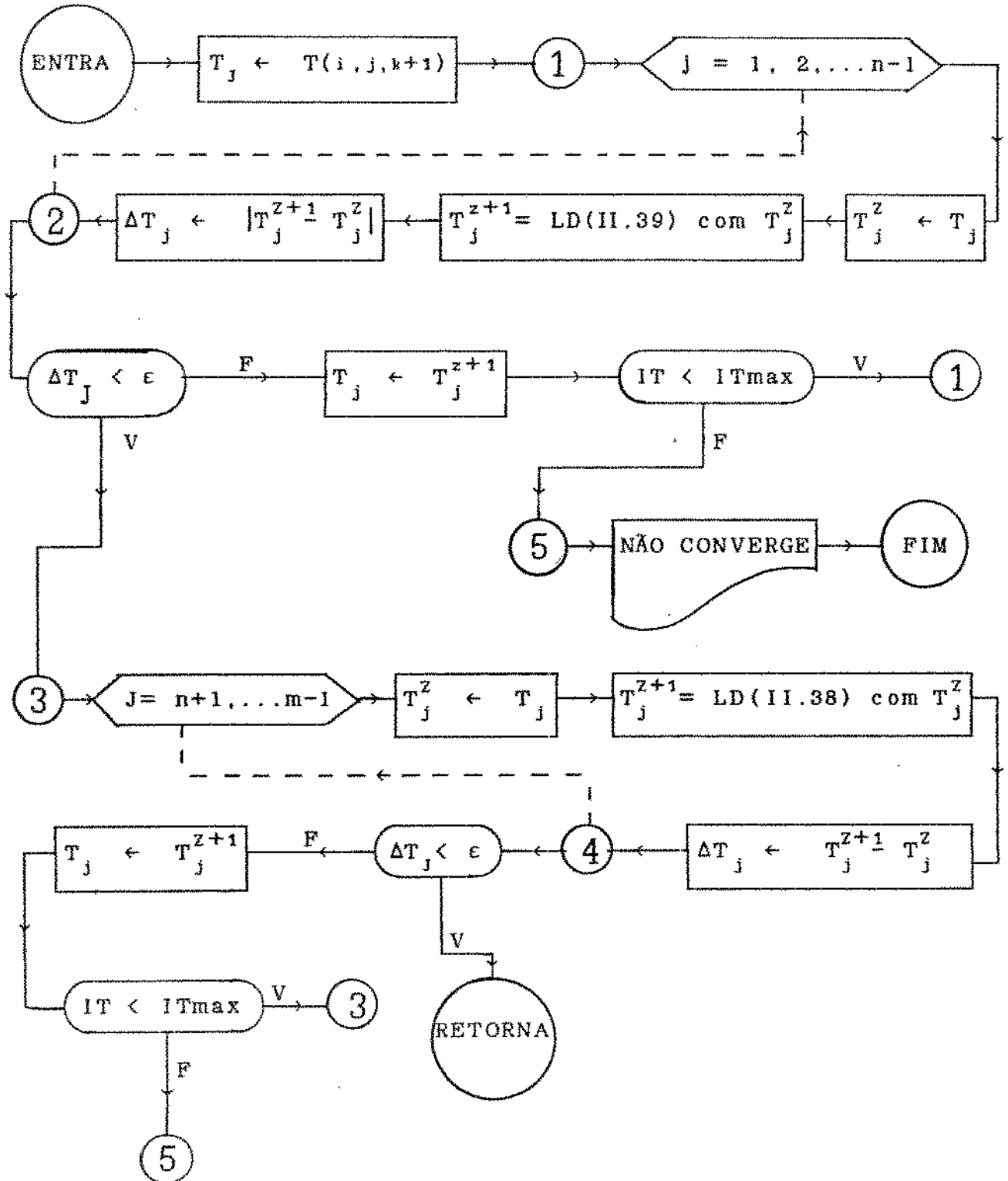
PROGRAMA PRINCIPAL.







SUBROTINA SNL

ARGUMENTOS ($T_{i,j,k+1}$, J)

Onde,

- CONV : Constante de divisão do passo de tempo.
- F : Falso.
- IT : Número de iterações.
- ITmax : Número de iterações máxima.
- LD(32) : Lado direito da equação II.32.
- LD(37) : Lado direito da equação II.37.
- LD(38) : Lado direito da equação II.38.
- LD(39) : Lado direito da equação II.39
- RELAX : Fator de relaxação.
- TOLmin : Tolerância mínima admitida.
- TOLmax : Tolerância máxima admitida.
- t_f : Tempo total de solidificação.
- t_{print} : Intervalo de tempo para impressão dos resultados.
- V : Verdadeiro.
- z : Número de iterações .
- ϵ : Precisão admitida.

CAPÍTULO III

TRABALHO EXPERIMENTAL

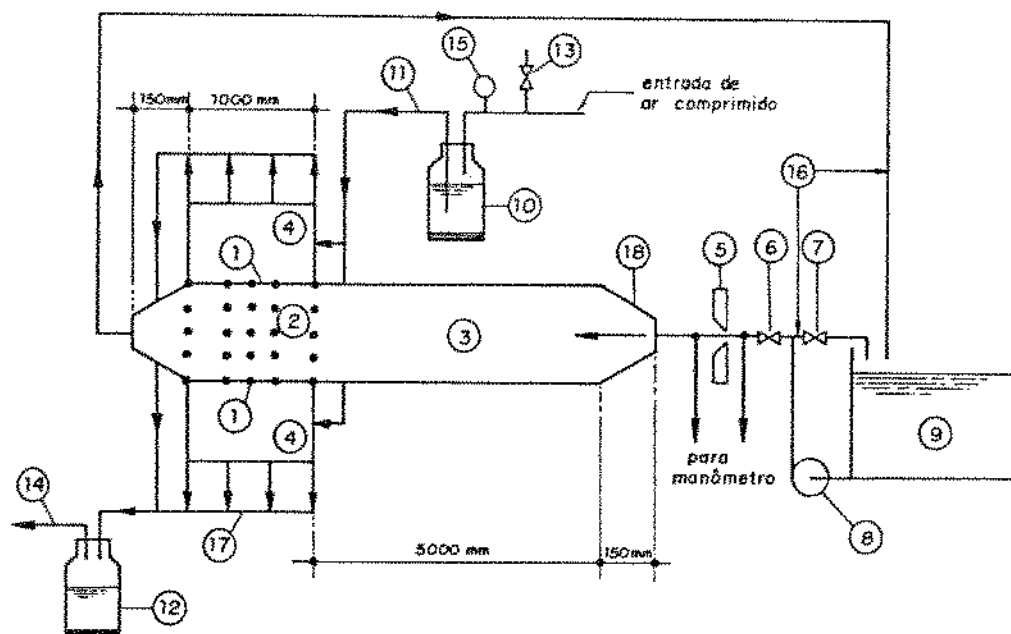
III.1 - APARATO EXPERIMENTAL

Um diagrama esquemático do aparato experimental é apresentado na figura (III-1). As partes principais do sistema compreendem o duto de entrada em alumínio, de secção transversal retangular, com cinco metros de comprimento, a secção de teste de um metro de comprimento e uma unidade de resfriamento, utilizando-se o nitrogênio líquido como fluido refrigerante. Além disso, ao longo do circuito de fluxo de água, utilizada como líquido de mudança de fase, tem-se o reservatório de água de nível constante, a bomba centrífuga de 3/4 cv e os sistemas de medidas de temperatura e vazão.

A secção de teste de secção transversal retangular é ilustrada nas figuras (III-2) e (III-3), cujas dimensões internas são de 1000 mm de comprimento, 100 mm de largura na direcção do movimento da frente de solidificação e 34 mm de altura. As paredes laterais, através das quais é aplicado o super-resfriamento, são as próprias paredes dos canais distribuidores do nitrogênio. A parede superior, graduada para observação visual do fenômeno, e a parede inferior, onde são fixados 25 termopares, foram construídas de placas de acrílico transparentes de 12 mm de espessuras.

Utilizou-se isopor para isolar termicamente todas as unidades do aparato experimental.

Os canais distribuidores de nitrogênio foram modelados em madeira e construídos por conformação a frio em chapa de cobre de 0,8 mm de espessura.



- (1) Paredes resfriadas. (2) Seção de teste.
 (3) Seção para desenvolvimento do perfil de velocidade.
 (4) Canais distribuidores de nitrogênio.
 (5) Placa de orifício. (6) Válvula tipo esfera.
 (7) Válvula tipo gaveta. (8) Bomba de 3/4 cv.
 (9) Reservatório de água de nível constante.
 (10) Tanque de Nitrogênio líquido de 35 litros.
 (11) Saída de Nitrogênio. (12) Tanque de descarga de Nitrogênio.
 (13) Válvula de segurança. (14) Descarga de vapor de Nitrogênio.
 (15) Manômetro. (16) Tubos de PVC de 1".
 (17) Tubos de cobre de 1/2".
 (18) Redutor de seção transversal retangular para circular.
 . Termopares tipo cobre-constantan.

Figura III-1 - Diagrama Esquemático do Aparato Experimental.

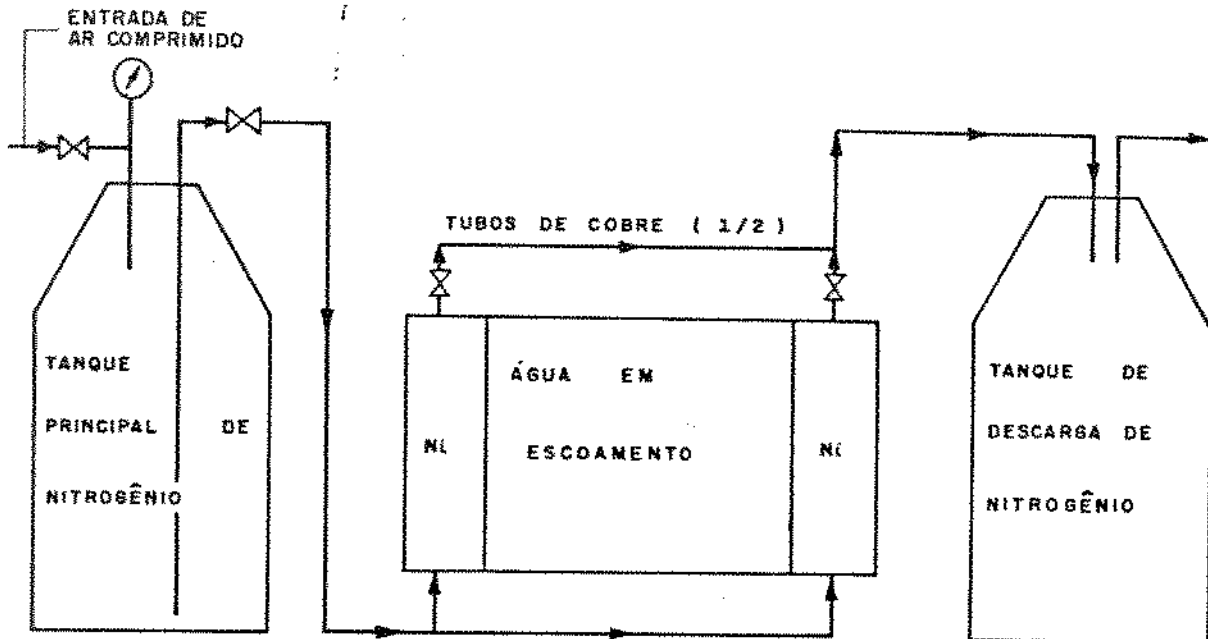


Figura III-2 - Esquema do sistema de resfriamento, para escoamento de água na direção normal ao plano da figura.

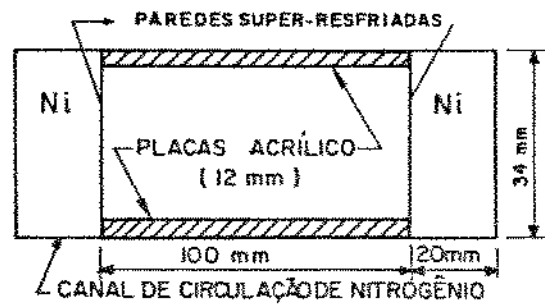


Figura III-3 - Detalhes da seção transversal da seção de teste.

O gradiente de temperatura nos contatos entre as superfícies de cobre das paredes super-resfriadas a temperatura de -170°C , e as placas de acrílico a temperatura ambiente (em torno de 27°C), resultaram sobre estas em trincas, principalmente para temperaturas abaixo de -120°C . Este problema foi contornado após vários testes com materiais isolantes térmicos, optando-se pela utilização de silicone industrial. Este material, além de isolar termicamente o contato entre a parede e a placa de acrílico e a seção de teste do restante do circuito, apresentou excelente aderência nas superfícies em contato, mantendo suas características elásticas e de vedação da água, mesmo para as baixas temperaturas utilizadas neste trabalho.

A rigidez da seção de teste e o acoplamento desta no circuito são garantidas por grampos de altas pressões.

III.2 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Utilizando-se um registrador de 20 canais de marca FLUKE, as temperaturas nas superfícies das placas de cobre super-resfriadas foram medidas por 10 termopares calibrados, tipo cobre-constantan de 2 mm de diâmetros, com faixa útil de medidas de temperatura de -200°C a 400°C , instalados nos centros e em linhas nas placas, distanciados de 0,2 m um do outro, enquanto 15 termopares iguais, posicionados a 0,2 m axialmente e 0,025 m transversalmente um do outro, foram utilizados para a determinação das temperaturas internas no material sólido e líquido.

Um manômetro tipo U, utilizando o tetracloreto de carbono como líquido manométrico, é conectado na placa de orifício, construída em aço inoxidável, formando o sistema de medidas de vazões do fluxo de água, cuja curva de calibração é apresentada no Apêndice K.

As temperaturas nas paredes laterais super-resfriadas da seção de teste, foram mantidas iguais e constantes através da circulação de nitrogênio injetado, a pressão constante de 0,5 atm (5.10^4 Pa) nos difusores de nitrogênio instalados no interior dos canais de circulação, o que garantiu boa distribuição e em consequência um molhamento uniforme por nitrogênio nestas superfícies.

No circuito a água proveniente do tanque, cujo fluxo é estabelecido pela bomba centrífuga, tem sua descarga controlada por uma válvula de esfera, sendo a vazão medida pela placa de orifício calibrada. A água entra na seção de teste como fluxo laminar plenamente desenvolvido, através da seção de entrada de cinco metros de comprimento, sendo a temperatura de entrada da água nesta seção medida por um termopar.

Após o estabelecimento do escoamento na vazão desejada, as paredes laterais da seção de teste são super-resfriadas pela circulação de nitrogênio, que é estabelecida injetando-se ar comprimido no reservatório de nitrogênio líquido. A pressurização foi realizada a 0,5 atm ($5 \cdot 10^4$ Pa), mantida constante durante todo o processo e controlada por um manômetro instalado no reservatório. Após a circulação, o nitrogênio líquido é recuperado no tanque de descarga e o vapor descarregado no ambiente.

Nestas condições, a temperatura da água em contato com as paredes super-resfriadas da seção de teste, sofre uma queda brusca, abaixo da temperatura de solidificação da água e a placa de gelo formada em cada parede lateral do canal cresce gradualmente a partir da entrada da seção de teste, cujo encerramento ocorre com o encontro das duas interfaces no centro do canal.

No trabalho experimental , além da observação visual do processo de solidificação da água, em escoamento laminar no interior de um duto retangular, mediu-se também a vazão e o campo de temperatura na seção de teste.

Os testes experimentais foram realizados para vazões de água de $0,761 \cdot 10^{-4}$; $1,083 \cdot 10^{-4}$ e $1,459 \cdot 10^{-4}$ m³/s, mantendo-se fixas em -170°C as temperaturas das paredes do canal e a temperatura inicial da água próxima da sua temperatura de solidificação ($2,4^{\circ}\text{C}$).

Uma câmara fotográfica (marca ASAHI PENTAX, equipada com lente tipo grande angular, filme 35 mm e 400 ASA), fixada a uma distância de 1200 mm, do centro da seção de teste, registrou o crescimento da camada sólida em intervalos de tempo de

60 segundos. As posições transientes da frente de solidificação foram medidas nos negativos dos filmes, utilizando-se de um ESTEREO MICROSCÓPIO, marca CARL ZEISS JENA, cuja resolução é de 0,01 mm.

Tanto na observação visual como nas fotografias a interface é um contorno nítido e definido, que no ESTEREO MICROSCÓPIO apresenta-se como uma região de indefinição com largura máxima de 0,1mm . Assim a posição resultante da interface foi obtida pela média aritmética entre as medidas das posições máxima e mínima , tomadas a partir de um ponto de referência na escala da placa de acrílico graduada, ou seja com uma precisão de ± 0.05 mm.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

IV.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos precedentes foi proposto e analisado um estudo experimental e o respectivo modelo matemático objetivando a simulação do movimento da frente de solidificação, de um líquido em escoamento laminar no interior de um duto retangular.

Neste capítulo, pretende-se analisar os resultados obtidos seguindo basicamente quatro procedimentos:

- Comparação entre os resultados teóricos do modelo e a solução analítica para o problema de Neumann.
- A precisão entre os resultados teóricos do modelo proposto e os dados experimentais obtidos.
- O comportamento da frente de solidificação devido ao super-resfriamento aplicado nas paredes do canal.
- A influência das características do escoamento no movimento da frente de solidificação.

IV.2 - RESULTADOS OBTIDOS

Para obtenção dos resultados numéricos utilizou-se um microcomputador 386/25 MHz com co-processador 80387 cujo tempo de processamento em cada exemplo é da ordem de 250 segundos.

IV.2.1 - COMPARAÇÃO COM SOLUÇÃO ANALÍTICA

O modelo proposto foi simplificado para ser aplicado ao problema de Neumann, para o qual existe solução analítica [24] ou seja :

- Problema unidimensional , com dimensão infinita na direção do movimento da frente de solidificação.
- Propriedades físicas das regiões sólida e líquida são constantes e admitidas a temperatura de mudança de fase.
- A região líquida é admitida estagnante e o mecanismo de transferência de calor da região líquida para a interface por condução.

A comparação é baseada na posição transiente da interface e os valores dos parâmetros escolhidos foram os mesmos utilizados por Goodrich [23], ou seja:

$$T_1 = 2^{\circ}\text{C} \quad , \quad T_w = -10^{\circ}\text{C} \quad , \quad \rho \cdot CL = 100\text{MJ/m}^3 \quad , \quad K_l = K_s = 2\text{W/mK} \quad .$$

$$\rho \cdot Cp_l = 2,5\text{MJ/m}^3 \quad , \quad \rho \cdot Cp_s = 1,5\text{MJ/m}^3 \quad , \quad \Delta x = 0,25\text{m} \quad \text{e} \quad \Delta t = 1 \text{ dia}.$$

A posição transiente da frente de solidificação é mostrada na Figura IV.1 segundo a curva (a) solução analítica; curva (b) método numérico apresentado neste trabalho de maneira simplificada; curva (c) método numérico desenvolvido por Goodrich [23] e também por Rao e Sastri [9] ; curva (d) método da capacidade térmica aparente ou método da entalpia.

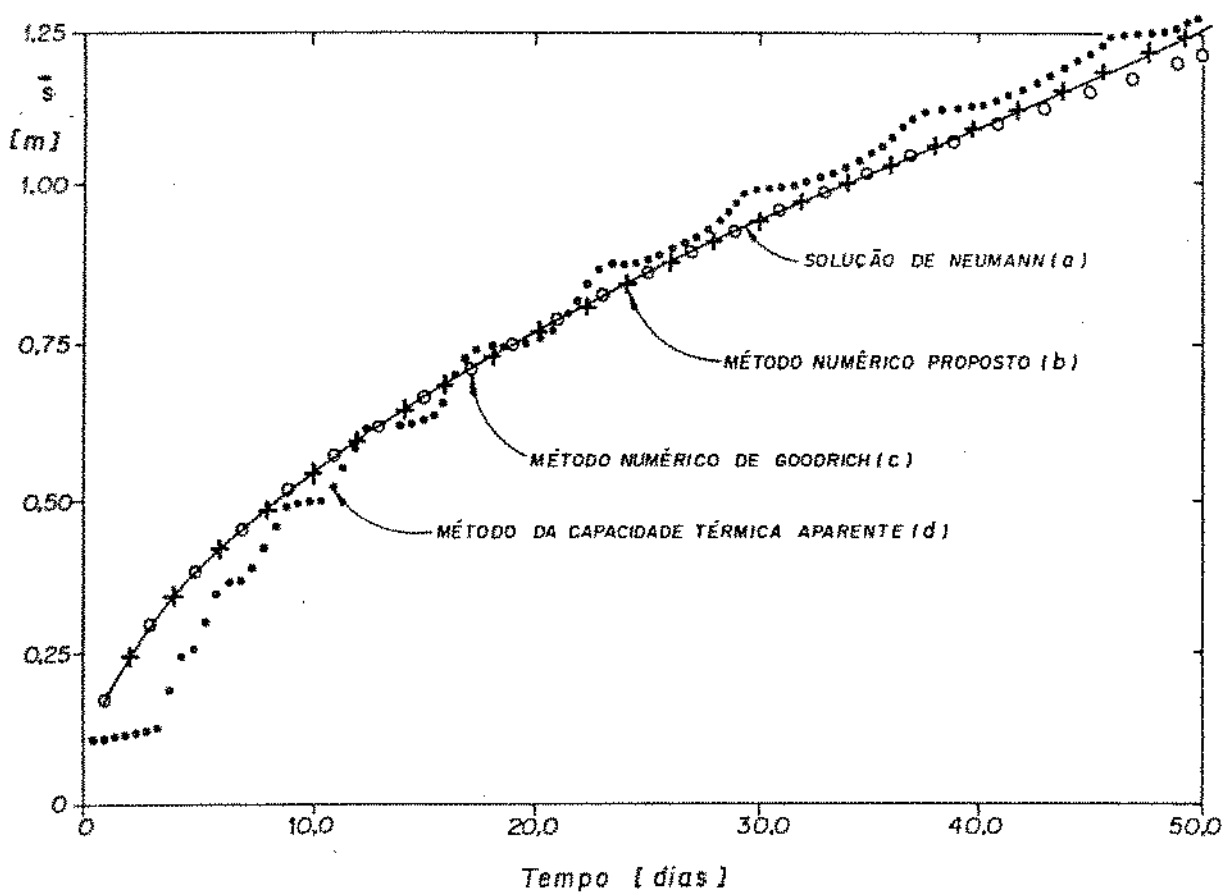


Figura IV.1 - Comparação entre os três métodos numéricos e a solução analítica do problema de Neumann.

Observa-se na figura IV.1, que o método da capacidade térmica aparente apresenta uma solução instável de forma

oscilatória em relação a solução analítica, curva (a), já o método das equações da energia utilizando a técnica numérica de refinamento da malha, curva(c), apresenta uma solução divergente a partir do 37^o dia , enquanto a solução pela técnica numérica proposta, curva (b) não apresentou qualquer instabilidade ou divergência para o intervalo de tempo testado.

IV.2.2 - COMPARAÇÃO COM OS DADOS EXPERIMENTAIS

Com a finalidade de comparar os resultados teóricos do modelo semi-empírico desenvolvido com os dados experimentais obtidos, foram adotadas as mesmas características de tipo de líquido, regime de escoamento e nível de temperatura. No caso da água, utilizou-se os seguintes valores para as propriedades físicas a temperatura de mudança de fase:

$$\rho_1 = 999.9 \text{ kg/m}^3 , \quad C_{p1} = 4217.7 \text{ J/kg} , \quad K_1 = 0.565 \text{ W/m}$$

$$C_L = 333565.95 \text{ J/kg} , \quad \nu = 1.787 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} , \quad T_f = 0 \text{ } ^\circ\text{C} ,$$

$$640 < Re < 2100 \quad \text{e} \quad 8500 < Pe < 28000 .$$

O processo é inicializado a partir de uma casca sólida da ordem de $\bar{s} = 10^{-7}$ m, admitindo-se uma variação linear do campo de temperatura nesta região, uma vez que a variação abrupta da temperatura na parede resfriada dificulta a inicialização do esquema numérico para $t = 0$. Neste instante a velocidade da frente de solidificação atinge seu valor máximo, devido ao elevado gradiente de temperatura, da ordem de -170°C , e a solução do sistema requer passos de tempo em torno de 10^{-6} segundos. Este

problema foi contornado aplicando-se um fator de relaxação variável com o tempo, para aumentar o passo de tempo a medida que aumenta a espessura da casca de gelo e conseqüentemente diminui a velocidade da frente de solidificação. Este processo de relaxação pode ser analisado no diagrama de blocos apresentado no capítulo II.

Na tabela IV.1, são apresentadas as espessuras teóricas de camada de gelo, para os instantes 1, 5, 10 e 15 minutos em função das vazões 10^{-7} , $0,761 \cdot 10^{-4}$ e $1,459 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. Os dados mostram claramente a influência praticamente desprezível da vazão do líquido, na espessura da camada de gelo. Estes resultados também foram verificados experimentalmente, bem como corroboram a afirmação feita em Cheung e Epstein [1]. Assim, optou-se pelos resultados experimentais fornecidos utilizando-se a vazão $1,459 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, para comparação com os dados teóricos apresentados nas figuras IV.2 a IV.8.

Tabela IV.1 - Influência da vazão na espessura da camada de gelo de gelo [mm].

tempo (min) vazão (m^3/s)	1	5	10	15
10^{-7}	10,9553	24,50416	34,66619	42,46634
$7,61 \cdot 10^{-5}$	10,97085	24,59073	34,85995	42,76653
$1,459 \cdot 10^{-4}$	10,97509	24,61432	34,91288	42,8484

O desenvolvimento da frente de solidificação sujeita ao super-resfriamento, considerando-se os efeitos dos

termos $\partial s/\partial t$ e $(\partial T/\partial \eta)^2$, nas equações II.17 e II.18 da energia, são apresentados na Figura IV.2. Observa-se a superposição de efeitos da precisão na solução simplificada ($\alpha = 0$ e $j = 0$), a qual está mais próxima da solução completa ($\alpha = 1$ e $j = 1$), que a solução parcialmente simplificada representada pela curva $\alpha = 0$ e $j = 1$. A solução parcialmente simplificada ($\alpha = 1$ e $j = 0$) é a que mais se aproxima da solução completa, o que nos leva a concluir que o termo $\partial s/\partial t$ é um fator preponderante na precisão da solução obtida.

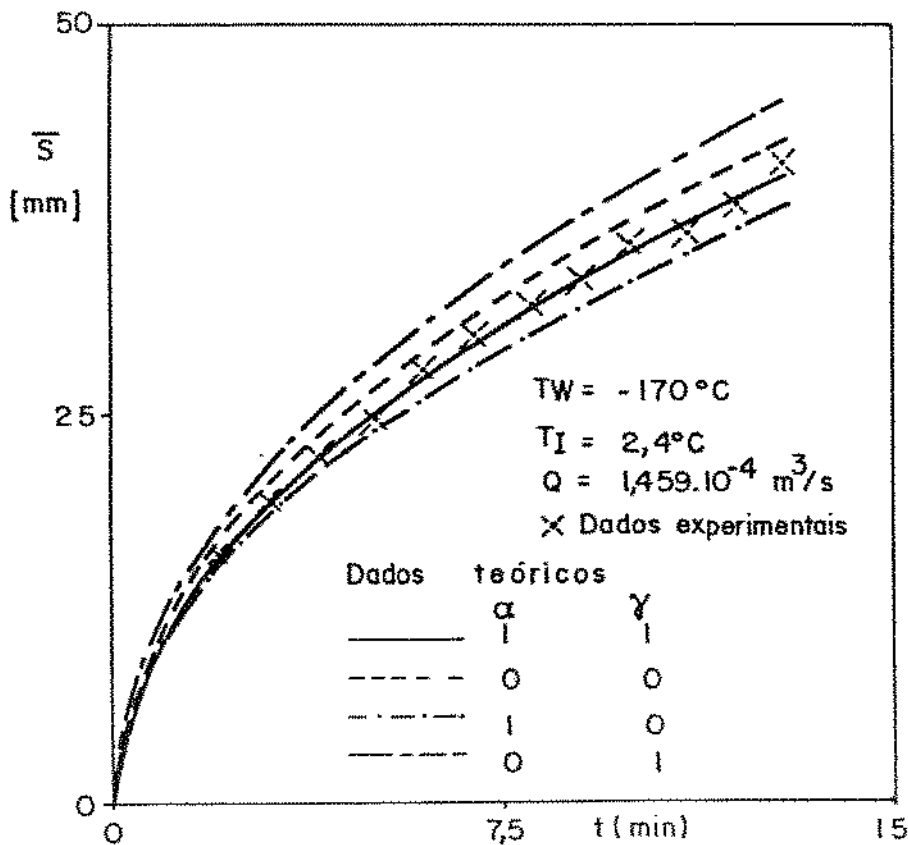


Figura IV.2 - Perfis da frente de solidificação considerando-se os efeitos dos termos $\alpha \cdot (\partial s/\partial t)$ e $\gamma \cdot (\partial T/\partial \eta)^2$, para $8500 < Pe < 28000$.

O termo $(\partial T/\partial \eta)^2$, referente a uma parcela da não linearidade devido a dependência das propriedades físicas com a temperatura na equação da energia para a região sólida, ao ser desprezado apresenta um erro máximo de 8%. Por outro lado, a velocidade da frente de solidificação $(\partial s/\partial t)$, se desprezada das equações da energia, como simplificação feita por Ramachandran [17], apresenta um erro máximo de 13%. Assim, os resultados teóricos que se seguem são apresentados admitindo-se o sistema completo de equações ($\alpha = 1$ e $\gamma = 1$).

Na Figura IV.3 é apresentado o erro relativo no cálculo teórico da espessura da camada de gelo, em função da temperatura de resfriamento da parede do canal, quando a velocidade da frente de solidificação $(\partial s/\partial t)$ é desprezada. Os resultados foram obtidos para o centro do canal ($\bar{x} = 0,5$ m), a partir das condições de vazão $Q = 1,459 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, e temperatura inicial $T_1 = 2,4^\circ \text{C}$, para o instante de tempo igual a 13 minutos.

Observa-se que a simplificação admitida em Ramachandran [17], de que a velocidade da frente de solidificação $(\partial s/\partial t)$, nas equações da energia das regiões sólida e líquida pode ser desprezada, depende do grau de super-resfriamento aplicado na parede do canal.

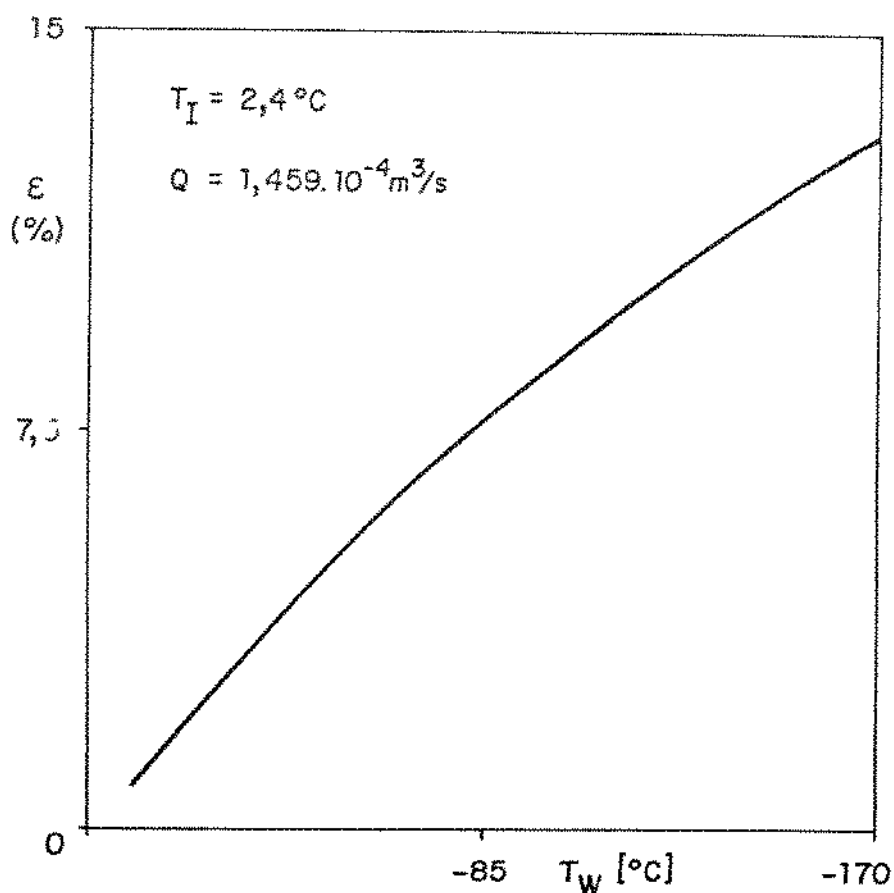


Figura IV.3 - Erro relativo em função da temperatura de parede, quando $\partial s/\partial t$ é desprezada, no centro do canal ($\bar{x} = 0,5 \text{ m}$).

Na Figura IV.4, pode ser visto a concordância entre o perfil das posições transientes da frente de solidificação fornecidas pela solução numérica do modelo proposto e os dados experimentais obtidos, para a temperatura de parede igual a -170°C , temperatura inicial da água de $2,4^{\circ}\text{C}$ e vazão de $1,459 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. O erro máximo encontrado é da ordem de 4%, devido à influência de alguns fatores tais como:

- a) Nitidez suficiente da interface sólido-líquido nos negativos dos filmes, para determinação precisa da localização da frente de solidificação.
- b) Os termopares utilizados para controlar as temperaturas das paredes super-resfriadas, possuem tempo de resposta muito grande, deslocando a referência de tempo tomada no início do processo.
- c) O uso de correlações empíricas na formulação do modelo, implica em simplificações que afetam os resultados obtidos.

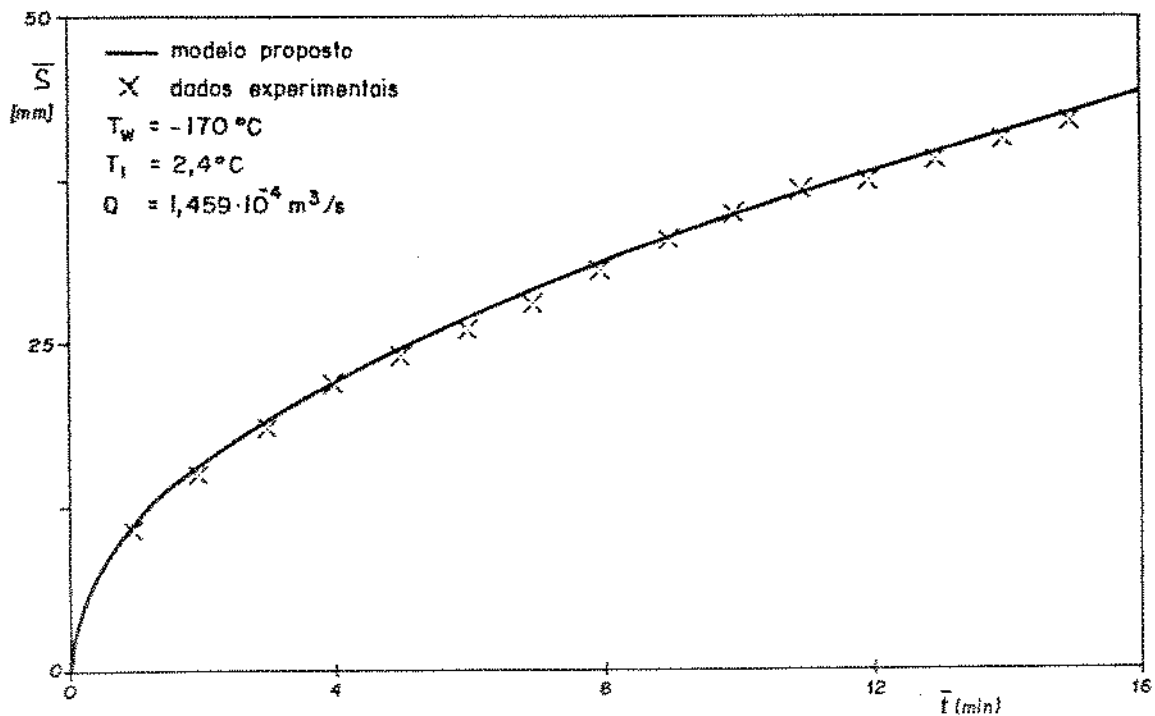


Figura IV.4 - Desenvolvimento da frente de solidificação para a posição axial $\bar{x} = 0,5\text{ m}$ e $8500 < Pe < 28000$.

Nos perfis das posições teóricas e experimentais da frente de solidificação ao longo do canal, mostradas na Figura IV.5, para os instantes de tempo 4, 8 e 12 minutos, observa-se o comportamento unidimensional do processo, a menos de uma pequena região de aproximadamente 20 cm, a partir da entrada da seção de teste.

O perfil teórico da temperatura transiente para a região sólida, mostrado na Figura IV.6, é comparado com os dados experimentais de temperatura, medidos durante 8 minutos, por um termopar localizado na região sólida, na posição axial $\bar{x} = 0,2$ m e transversalmente $\bar{y} = 0,025$ m da seção de teste, apresentando um erro máximo de 5%.

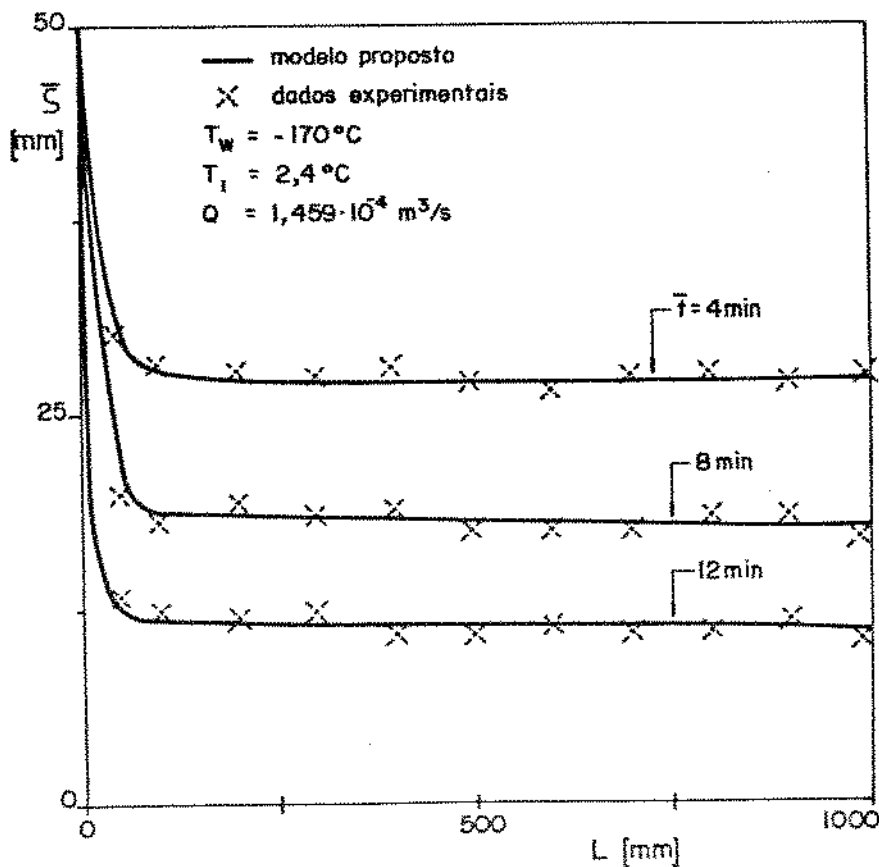


Figura IV.5 - Perfis das posições da frente de solidificação ao longo do canal, para $8500 < Pe < 28000$.

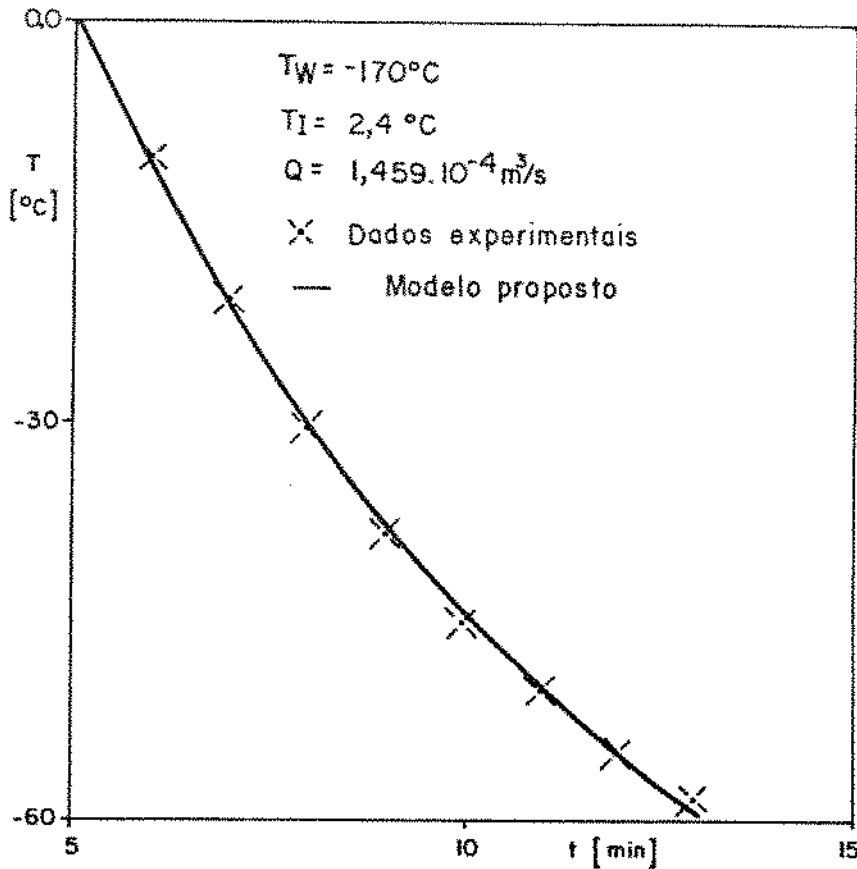


Figura IV.6 - Perfil de temperatura transiente na região sólida, relativo à posição axial $\bar{x} = 0,5 \text{ m}$ e transversal $\bar{y} = 0,025 \text{ m}$, para $8500 < Pe < 28000$.

A evolução teórica do campo de temperatura na região sólida, para os instantes 0,25, 2, 5, 10 e 15 minutos, é apresentado na Figura IV.7, inicialmente conhecida e admitida como linear, sobre a casca sólida, utilizada para inicializar o esquema numérico no instante $t = 0$. Observa-se ainda nesta figura, que os pontos de encontro dos perfis de temperatura com o eixo y , fornecem as localizações transientes da frente de solidificação.

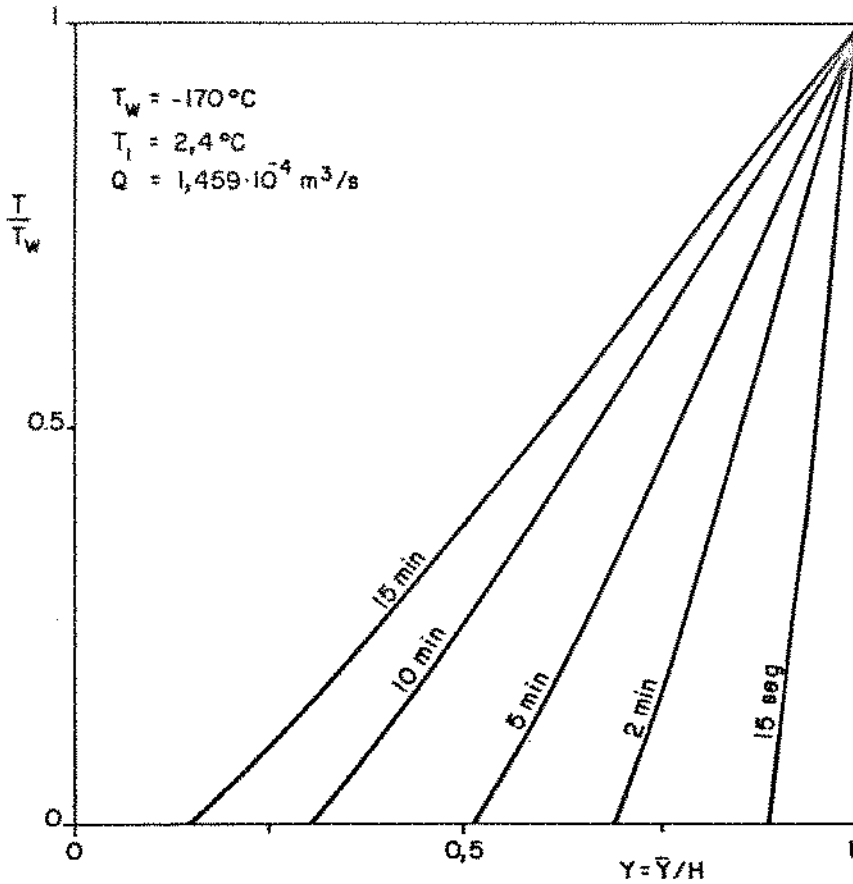


Figura IV.7 - Campo de temperatura teórico na região sólida para a posição axial $\bar{x} = 0,5 \text{ m}$ e para $8500 < Pe < 28000$.

Com o perfil inicial em degrau de temperatura para a região líquida, é mostrado na figura IV.8, a evolução dos perfis teóricos de temperatura e as posições transientes da interface, para os instantes de tempo 1, 5, 10 e 15 minutos. Observa-se também que os pontos de encontro dos perfis de temperatura com o eixo y , fornecem as posições da interface nestes instantes.

O comportamento da velocidade teórica da frente de solidificação, para três condições de temperatura de parede

iguais a -90°C , -130°C e -170°C , mantendo constantes a vazão $Q = 1,459 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ e a temperatura inicial da água $T_I = 2,4^{\circ}\text{C}$, é apresentado na Figura IV.9.

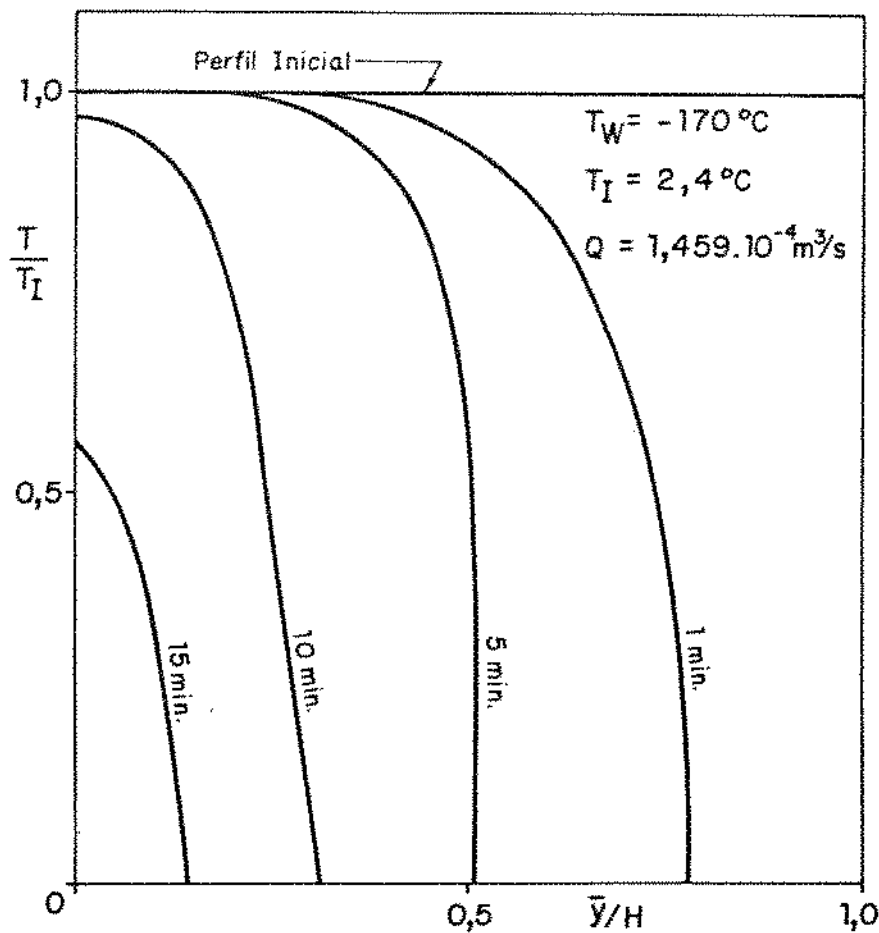


Figura IV.8 - Campo de temperatura teórico na região líquida para a posição axial $\bar{x} = 0,5 \text{ m}$ e $8500 < Pe < 28000$.

A velocidade da frente de solidificação é elevada no início do processo, diminuindo rapidamente até o instante de tempo em torno de 3 minutos. Neste início, a solução do sistema requer passos de tempo muito pequenos, da ordem de 10^{-6} segundos, para convergência dos resultados.

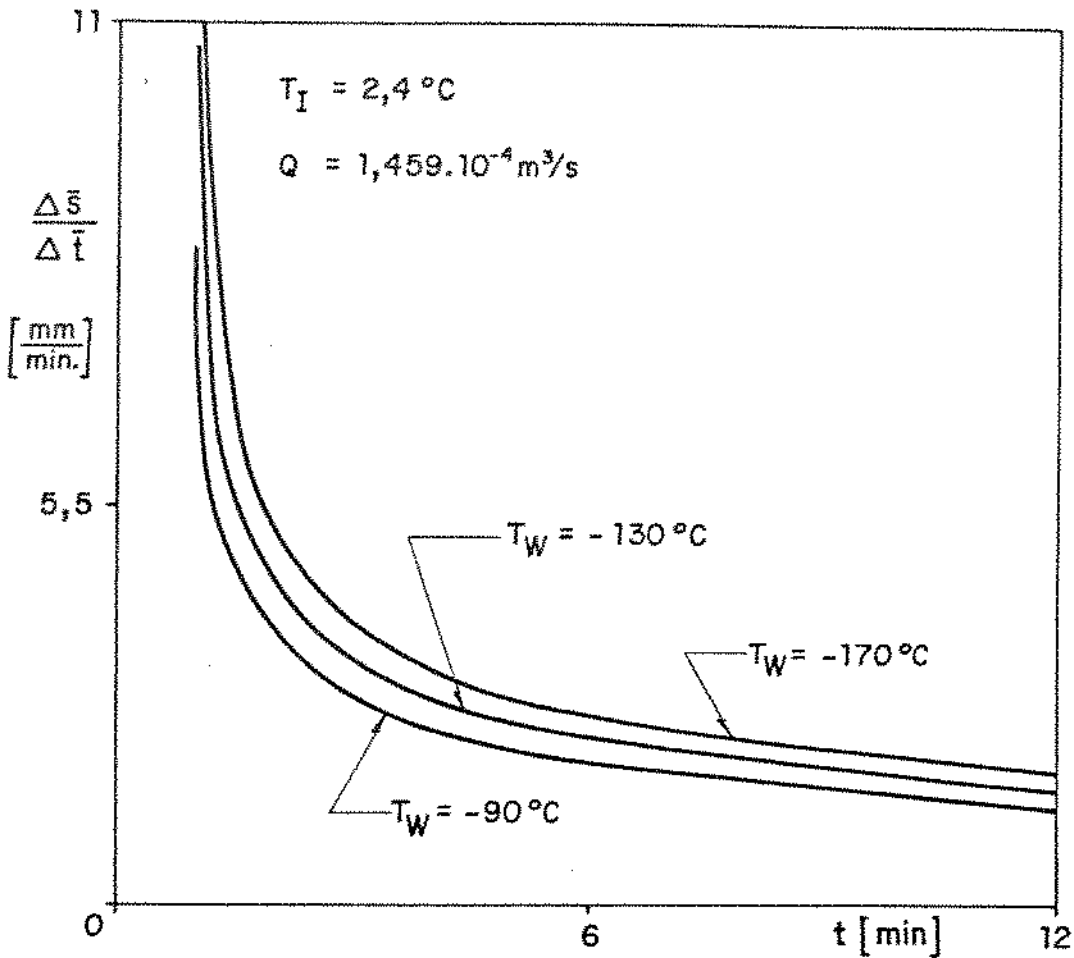


Figura IV.9 - Velocidade teórica da frente de solidificação, na posição axial $\bar{x} = 0,5 \text{ m}$, para diversas temperaturas de super-resfriamento e $8500 < Pe < 28000$.

Na Figura IV.10 é apresentado o gradiente de pressão teórico entre a entrada e a saída da seção de teste em função das posições transientes da interface. Ao se considerar este perfil deve-se salientar que a queda de pressão considerada é aquela devido apenas a camada de gelo e tem um valor máximo, definido pelo limite superior do Número de Reynolds no regime laminar.

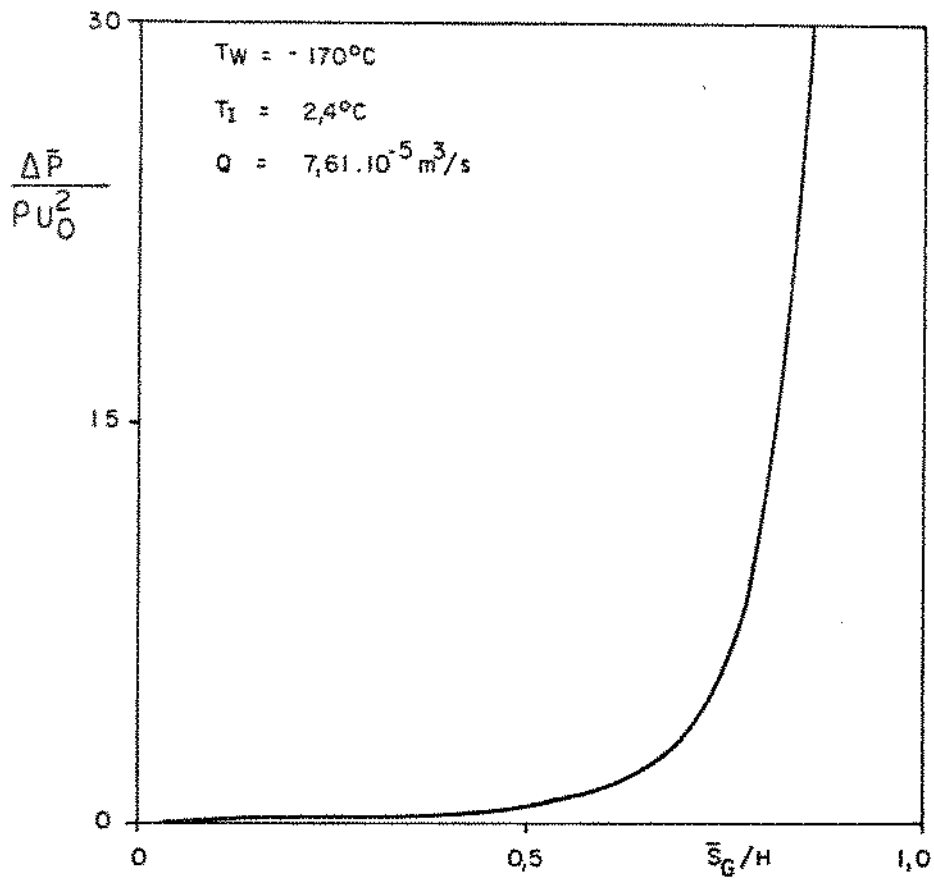


Figura IV.10 - Gradiente de pressão teórico, na seção de teste em função da formação da camada de gelo no interior do duto.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

V.1 - CONCLUSÕES

Na técnica numérica desenvolvida , o fato da interface apresentar um contorno bem definido abre uma nova possibilidade de determinação da malha: isto é, a imobilização da interface através de uma transformação do sistema de coordenadas.

Como a transformação é feita sobre um retângulo, a divisão da malha e a solução do método das diferenças finitas escolhido torna-se um problema mais simples. O custo desta simplificação como já sabemos, são as equações resultantes mais complexas que as originais.

Se considerarmos a excelente comparação com os resultados experimentais e o razoável tempo de processamento no microcomputador 386/25 MHz, então concluímos que este método pode ser extremamente adequado para este tipo de problema.

Desse modo , foi demonstrado que o modelo proposto na sua formulação analítica e na sua solução numérica pode prever o comportamento da frente de solidificação, campos de temperatura e queda de pressão com boa precisão e com reduzido tempo computacional.

Além disso, a formulação analítica geral permite prever os resultados de modelos desenvolvidos por outros pesquisadores além de avaliar os erros causados pelos vários tipos de simplificações no modelo analítico.

Embora exista na literatura um grande número de trabalhos referindo-se à mudança de fase com fluido em repouso (o clássico problema de Stefan) o quadro se reverte quando se trata de líquido em escoamento principalmente devido à importância da convecção livre no escoamento do líquido.

O modelo aqui proposto não pretende resolver o problema na sua forma mais geral, mas limita sua aplicabilidade ao problema de Stefan associado a convecção forçada e preliminarmente em regime laminar, embora esta não nos parece uma restrição tão importante.

Experimentalmente, verificou-se que, quando a temperatura do líquido de mudança de fase era a ambiente, ocorria um escoamento secundário que deformava completamente a superfície da camada sólida ao passo que nenhuma deformação ocorria quando a temperatura da água era próxima da temperatura de solidificação, razão pela qual todos os resultados aqui apresentados foram baseados nesta última condição de temperatura.

V.2 - EXTENSÕES FUTURAS

Do que foi exposto anteriormente, pode-se claramente perceber que existem inúmeras possibilidades de desenvolvimento de aspectos que o modelo, tal como proposto, ou não consegue atingir ou deixa apenas entrever.

Evidentemente, a maior parte desses aspectos corresponde à eliminação de uma ou mais restrições que formam o corpo de hipóteses sob o qual o modelo está subjacente.

Por exemplo, ao eliminar-se as hipóteses de perfil de velocidade parabólica e admitir a temperatura inicial da água como próxima da temperatura ambiente (25°C), abre-se todo um campo para se introduzir fenômenos até agora não tratados, como a presença e o efeito real da convecção livre no comportamento do movimento e no formato do perfil da frente de solidificação.

Por outro lado, mesmo com a formulação atual, existem aspectos que possibilitam um estudo mais detalhado como no caso do escoamento forçado turbulento, aumentando assim a aplicabilidade do modelo.

APÊNDICE A

EQUAÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA
PARA A INTERFACE SÓLIDO-LÍQUIDO

O balanço de energia na interface sólido-líquido para o problema de solidificação segundo a figura (II.1), pode ser estabelecida como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Fluxo de calor na} \\ \text{direção positiva} \\ \text{y através da fase} \\ \text{sólida} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Fluxo de calor na} \\ \text{direção positiva} \\ \text{y através da fase} \\ \text{líquida} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Taxa de calor li-} \\ \text{berado durante a} \\ \text{solidificação por} \\ \text{unidade de área} \\ \text{da interface.} \end{array} \right]$$

ou,

$$q_s - q_l = \rho C_L \frac{ds(\bar{t})}{d\bar{t}} \quad \text{para} \quad \bar{y} = \bar{s}(\bar{t}). \quad (A1)$$

Quando a transferência de calor em ambas as fases é admitida por condução pura, tem-se:

$$q_s = -k_s \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial \bar{y}} \quad \text{e} \quad q_l = -k_l \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \bar{y}}$$

que substituídos na equação (A1) produz ,

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial \bar{y}} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial \bar{y}} = \rho C_L \frac{d\bar{s}(\bar{t})}{d\bar{t}} \quad \text{para} \quad \bar{y} = \bar{s}(\bar{t}) \quad (\text{A2})$$

sendo:

$\frac{d\bar{s}}{d\bar{t}}(\bar{t})$: a velocidade da interface na direção negativa y,

C_L : o calor latente por unidade de massa do material de mudança de fase.

Generalizando as condições de contorno da interfase para o caso bidimensional a forma da interface é definida pela equação:

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \quad (\text{A3})$$

A equação (A2) pode ser escrita como:

$$k_s \nabla T_s \cdot \nabla F - k_l \nabla T_l \cdot \nabla F = \rho C_L \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{A4})$$

onde

$$\nabla T_i \cdot \nabla F = \frac{\partial T_i}{\partial \bar{x}} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial T_i}{\partial \bar{y}} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}, \quad i = s \quad \text{ou} \quad l \quad (\text{A5})$$

Relacionando o gradiente de temperatura $\partial T_i / \partial \bar{y}$ com $\partial T_i / \partial \bar{x}$, tem-se

$$\frac{\partial T_i}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial F / \partial \bar{y}}{\partial F / \partial \bar{x}} \frac{\partial T_i}{\partial \bar{x}}, \quad i = s \quad \text{ou} \quad 1 \quad (\text{A6})$$

substituindo a relação (A6) em (A5),

$$\nabla T_i \cdot \nabla F = \frac{\partial T_i}{\partial \bar{x}} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial T_i}{\partial \bar{x}} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial F / \partial \bar{y}}{\partial F / \partial \bar{x}}$$

ou

$$\nabla T_i \cdot \nabla F = \frac{\partial T_i}{\partial \bar{x}} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \left[1 + \left(\frac{\partial F / \partial \bar{y}}{\partial F / \partial \bar{x}} \right)^2 \right], \quad (\text{A7})$$

substituindo (A7) em (A4), tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \left[1 + \left(\frac{\partial F / \partial \bar{y}}{\partial F / \partial \bar{x}} \right)^2 \right] \left[k_s \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial \bar{y}} - k_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{y}} \right] = -\rho c_l \frac{\partial F}{\partial \bar{t}} \quad (\text{A8})$$

se a equação da interface é expressa na forma:

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{x} - \bar{s}(\bar{y}, \bar{t}) \quad (\text{A9})$$

então,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{t}} = - \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}} \quad (\text{A10})$$

Introduzindo as relações (A10) em (A8), tem-se:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] \left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial \bar{y}} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial \bar{y}} \right] = \rho \cdot C_L \cdot \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}},$$

para $\bar{y} = s(\bar{x}, \bar{t})$ (A11)

Se a transferência de calor na fase líquida é admitida por convecção, a equação da interface (A11) toma a forma:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] \left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial \bar{y}} - h_m (T_m - T_l) \right] = \rho \cdot C_L \cdot \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}$$

para $\bar{y} = \bar{s}(\bar{x}, \bar{t})$. (A12)

APÊNDICE B

COMPONENTES TRANSVERSAL E AXIAL DAS VELOCIDADES

Admitindo-se que o perfil de velocidade na seção de teste permanece parabólico, segundo as mesmas hipóteses utilizadas por Zerkle e Sunderland [3], tem-se:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = a \bar{y}^2 + b\bar{y} + c$$

sujeita as seguintes condições de contorno do canal:

$$\begin{aligned} \bar{y} = 0 & , & \bar{u} &= U_{\text{máx}} \\ \bar{y} = \bar{s} & , & \bar{u} &= 0 \\ \bar{y} = -\bar{s} & , & \bar{u} &= 0 \end{aligned}$$

Assim:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = U_{\text{máx}} \left[1 - \left(\frac{\bar{y}}{\bar{s}} \right)^2 \right]$$

como a vazão é mantida constante em qualquer seção transversal do canal,

$$Q_{x=0} = Q_{x>0}$$

ou

$$2.H.a U_{\text{medio}} = 2 \int_0^{\bar{s}} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) . a . d\bar{y}$$

Após integração tem-se:

$$U_{\text{máximo}} = \frac{3}{2} \frac{H}{s} U_{\text{medio}} = \frac{3}{2} \frac{H}{s} U_m$$

resultando no perfil:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{3}{2} \frac{H}{s} \cdot U_m \left[1 - \left(\frac{\bar{y}}{s} \right)^2 \right]$$

A partir da equação da continuidade, obtém-se a componente da velocidade $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ na forma:

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = - \int_0^{\bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) d\bar{y}$$

ou

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{3}{2} \cdot U_m \frac{H \cdot \bar{y}}{s^2} \left[1 - \left(\frac{\bar{y}}{s} \right)^2 \right] \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}}$$

APÊNDICE C

TEMPERATURA MÉDIA DE MISTURA

A temperatura média de mistura da região líquida (\bar{T}_m), para qualquer secção transversal do duto é da forma,

$$\bar{T}_m = \frac{1}{A \cdot U} \int_A \bar{u} \cdot \bar{T} \cdot dA , \quad (C1)$$

e a velocidade parabólica,

$$\bar{u} = \frac{3 \cdot Q}{4 \cdot a \cdot s} \left[1 - \left(\frac{\bar{y}}{s} \right)^2 \right] \quad (C2)$$

O perfil de temperatura da região líquida, também admitida como parabólica é do tipo:

$$\bar{T} = a \bar{y}^2 + b \bar{y} + c ,$$

sujeita às condições de contorno:

$$\bar{y} = 0 \quad , \quad \bar{T} = \bar{T}_0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$\bar{y} = s \quad , \quad \bar{T} = T_f$$

assim,

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + (T_f - \bar{T}_0) \left(\frac{\bar{y}}{s} \right)^2 \quad (C3)$$

A área infinitesimal da secção transversal, é apresentada na figura C1 e calculada como:

$$dA = a \cdot dy \quad (C4)$$

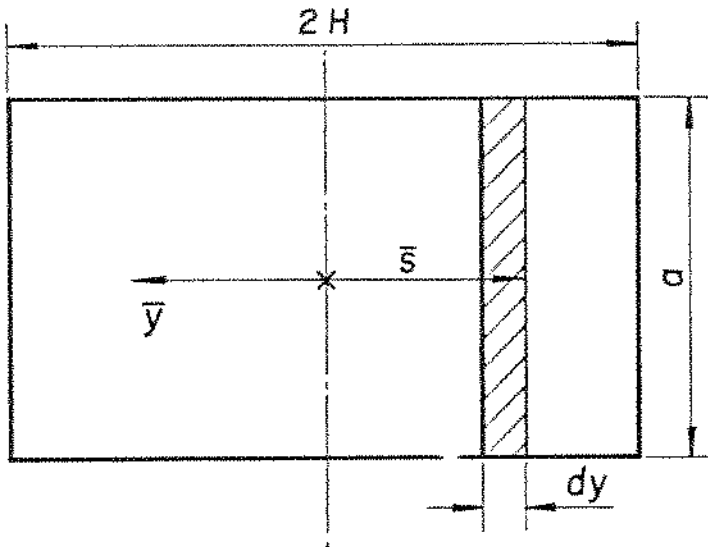


Figura C1 - Seção transversal da seção de teste.

Substituindo-se as relações (C2), (C3) e (C4) em (C1), tem-se que:

$$\bar{T}_m = \frac{T_f}{5} + \frac{4}{5} \bar{T}_0$$

ou

$$\bar{T}_m - T_f = \frac{4}{5} [\bar{T}_0 - T_f]$$

onde:

$\bar{T}_0 = \bar{T}(\bar{x}, 0, \bar{t})$: Temperatura no centro do canal.

APÊNDICE D

QUEDA DE PRESSÃO AXIAL NA SECÇÃO DE TESTE

Para escoamento laminar entre placas planas e paralelas, o perfil de velocidade, Bejan [16], é dado por:

$$\bar{u} = (2.\bar{s}^2/\mu) (\partial\bar{P}/\partial\bar{x}) \left[\left(\frac{\bar{y}}{2.\bar{s}} \right)^2 - \frac{1}{4} \right], \quad (D1)$$

a vazão volumétrica de líquido, considerada constante em qualquer secção transversal do canal, como:

$$Q = \int_{-\bar{s}}^{\bar{s}} \bar{u}.dA, \quad (D2)$$

e a área transversal da secção infinitesimal dada por:

$$dA = a.d\bar{y} \quad (D3)$$

Substituindo-se as relações (D2) e (D3) em (D1), tem-se que:

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}} = \frac{3.\mu.Q}{2.\bar{s}^3.a}$$

como, $\partial\bar{P}/\partial\bar{x}$ é uma constante:

$$\frac{\bar{P}_{\bar{x}+\Delta\bar{x}} - \bar{P}_{\bar{x}}}{\Delta\bar{x}} = \frac{-\Delta\bar{P}}{\Delta\bar{x}} = \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}},$$

assim,

$$\Delta\bar{P} = \frac{3.H.U_m \cdot \mu \cdot \Delta\bar{x}}{s^3}$$

onde:

$U_m = Q/(2.H.a)$: velocidade média na secção transversal de entrada do canal.

APÊNDICE E

APLICAÇÕES DAS TRANSFORMADAS DE LANDAU

A aplicação das transformadas de Landau neste problema, consiste em transformar as variáveis da função campo de temperatura $\bar{T} = \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$, através de uma relação $\varphi = \varphi(\bar{s}(\bar{x}, \bar{t}), \bar{y})$ entre as variáveis, obtendo-se uma função campo transformada $\bar{T}^* = \bar{T}^*(\bar{x}, \varphi, \bar{t})$. Assim, a derivada total da relação para a região sólida, $\eta = \eta[\bar{s}(\bar{x}, \bar{t}), \bar{y}]$ é dada por,

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} d\bar{y} + \frac{\partial \eta}{\partial \bar{s}} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}} d\bar{t} \right) \quad (E1)$$

A derivada total da função original $\bar{T} = \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ resulta em,

$$d\bar{T} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} d\bar{t} \quad (E2)$$

e a derivada total da função transformada $\bar{T} = \bar{T}^*(\bar{x}, \eta, \bar{t})$, tem a forma:

$$d\bar{T}^* = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{t}} d\bar{t} \quad (E3)$$

Substituindo-se a relação (E1) em (E3), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 d\bar{T}^* &= \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right) d\bar{y} + \left[\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{s}} \right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} \right) \right] d\bar{x} + \\
 &+ \left[\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{t}} + \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{s}} \right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}} \right) \right] d\bar{t} \quad (E4)
 \end{aligned}$$

Comparando-se as equações (E4) e (E2), obtém-se as relações para transformação,

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \quad (E5)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{s}} \right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \quad (E6)$$

e

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{t}} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{s}} \right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \quad (E7)$$

Diferenciando a relação (E5) e expandindo-se o produto, resulta:

$$d \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = d \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right] = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right) d \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) d \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right) \quad (E8)$$

sendo $\bar{T}^* = \bar{T}^*(\bar{x}, \eta, \bar{t})$ e $\eta = \eta(\bar{s}(\bar{x}, \bar{t}), \bar{y})$, obtém-se,

$$d \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) d\eta + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) d\bar{x} + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \right) d\bar{t} \quad (E9)$$

e

$$d\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)d\bar{y} + \frac{\partial}{\partial\bar{s}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{x}}\right)d\bar{x} + \frac{\partial}{\partial\bar{s}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}\right)d\bar{t} \quad (\text{E10})$$

Substituindo-se as relações (E9) e (E10) em (E8), resulta,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}\right) &= \left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right)d\eta + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\eta}\right)d\bar{x} + \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right)d\bar{t}\right] + \\ &+ \left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right)\left[\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)d\bar{y} + \frac{\partial}{\partial\bar{s}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{x}}\right)d\bar{x} + \frac{\partial}{\partial\bar{s}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}\right)d\bar{t}\right] \end{aligned} \quad (\text{E11})$$

e substituindo-se a relação (E1) em (E11), obtém-se a relação:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}\right) &= \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\right]d\bar{y} + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{T}^*}{\partial\eta^2}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{s}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{x}}\right) + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right) + \right. \\ &\left.\left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{x}}\right)\right]d\bar{z} + \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{T}^*}{\partial\eta^2}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{s}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}\right)\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}\right)\right]d\bar{t} \end{aligned} \quad (\text{E12})$$

Do diferencial de $(\partial\bar{T}/\partial\bar{y})$, tem-se que,

$$d\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) d\bar{y} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) d\bar{x} + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) d\bar{t} \quad (\text{E13})$$

e comparando-se as relações (E12) e (E13), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta}\right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{E14})$$

Finalmente, as relações (E5), (E6), (E7) e (E14), necessárias à transformação das variáveis do campo de temperatura na região sólida $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ para $\bar{T}^* = \bar{T}^*(\bar{x}, \eta, \bar{t})$ são obtidas.

A relação entre as variáveis da região sólida admitida como,

$$\eta = \frac{\bar{y} - \bar{s}}{H - \bar{s}} \quad (\text{E15})$$

e que, após substituição nas relações (E5), (E6), (E7) e (E14), resultam nas seguintes relações de transformação,

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\eta - 1}{H - \bar{s}}\right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}}\right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \quad (\text{E16})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{1}{H - \bar{s}}\right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \quad (\text{E17})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial t} + \left(\frac{\eta - 1}{H - \bar{s}} \right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} \right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \eta} \quad (\text{E18})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} = \left(\frac{1}{H - \bar{s}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2} \quad (\text{E19})$$

Para a região líquida, admitindo-se a relação,

$$\xi = \bar{y}/\bar{s} \quad , \quad (\text{E20})$$

que, substituída nas relações (E5), (E6), (E7) e (E14), produz as seguintes relações de transformação, para a região líquida:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{x}} - \left(\frac{\xi}{\bar{s}} \right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \xi} \quad (\text{E21})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{1}{\bar{s}} \right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \xi} \quad (\text{E22})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial t} - \left(\frac{\xi}{\bar{s}} \right) \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} \right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \xi} \quad (\text{E23})$$

e

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} = \left(\frac{1}{\bar{s}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial \xi^2} \quad (\text{E24})$$

APÊNDICE F

ADIMENSIONALIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES (II.5) A (II.16)

O sistema de equações (II.5) - (II.16), é adimensionalizado, a partir dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$x = \bar{x}/H \quad , \quad y = \bar{y}/H \quad , \quad s = \bar{s}/H,$$

$$\xi = \bar{y}/\bar{s} \quad , \quad \eta = (\bar{y}-\bar{s})/(H - \bar{s})$$

$$T = \frac{\bar{T} - T_f}{T_f - T_w} \quad , \quad t = \frac{\alpha_1}{H^2} \cdot \bar{t}$$

$$u = H \cdot \bar{u}/\alpha_1 \quad , \quad V = \bar{v} \cdot H/\alpha_1 \quad e \quad \Delta P = \Delta \bar{P}/(\rho \cdot U_m^2) \quad (F1)$$

O segundo membro da equação (II.5), referente a fase sólida é,

$$V(\bar{T}) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[K(\bar{T}) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right]$$

e que após desenvolvimento do diferencial fica,

$$V(\bar{T}) \cdot \left[K(\bar{T}) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial K(\bar{T})}{\partial \bar{y}} \right] \quad (F2)$$

mas,

$$\frac{\partial K(\bar{T})}{\partial \bar{y}} = - 0,003553 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} ,$$

que substituindo em (F2), resulta em,

$$V(\bar{T}) \cdot K(\bar{T}) \cdot \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} - \beta(\bar{T}) \cdot \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \quad (F3)$$

sendo,

$$\beta(\bar{T}) = 0,003553 \cdot V(\bar{T})$$

ou na forma adimensional:

$$\beta(T) = 0,003553 \{ 1,0907 \cdot 10^{-3} + 1,4635 \cdot 10^{-7} \cdot [T_f + (T_f - T_w)T] \} \quad (F4)$$

Assim, substituindo (F3) e (F4) na equação (II.5), as equações das fases sólida e líquida, após a substituição dos parâmetros adimensionais (F1) e das relações de transformação (E16)-(E19) e (E21)-(E24) desenvolvidas no Apêndice E, resultam em:

$$C_p(T) \cdot \frac{(T_f - T_w)}{H^2 / \alpha_1} \cdot \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\eta - 1}{1 - s} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\} =$$

$$\frac{V(T) \cdot K(T)}{H^2} \cdot \frac{(T_f - T_w)}{(1 - s)^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \frac{\beta(T)}{H^2} \cdot \frac{(T_f - T_w)^2}{(1 - s)^2} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$0 < x \leq L/H \quad , \quad 0 < \eta < 1 \quad , \quad t > 0 \quad (F5)$$

$$\frac{(T_f - T_w)}{H^2 / \alpha_1} \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\xi}{s} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{\alpha_1 \cdot (T_f - T_w)}{H^2} \cdot u \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x} -$$

$$-\left(\frac{\xi}{s}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\alpha_1}{H^2}(T_f - T_w)v\left(\frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) = \frac{\alpha_1 \cdot (T_f - T_w)}{H^2 \cdot s^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2},$$

$$0 < x \leq L/H, \quad 0 < \xi < 1, \quad t > 0 \quad (F6)$$

Após algumas simplificações, as equações (F5) e (F6) ficam reduzidas a:

$$C_p(T) \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{1-\eta}{1-s}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial \eta}\right) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] =$$

$$\frac{V(T) \cdot K(T)}{\alpha_1} \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \frac{\beta(T) \cdot (T_f - T_w)}{\alpha_1} \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2.$$

$$0 < x \leq L/H, \quad 0 < \eta < 1, \quad t > 0 \quad (F7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\xi}{s}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) \frac{\partial T}{\partial \xi} + u \left[\frac{\partial T}{\partial x} - \left(\frac{\xi}{s}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + v \left(\frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad 0 < x \leq L/H, \quad 0 < \xi < 1, \quad t > 0 \quad (F8)$$

Enquanto as condições de contorno e inicial, equações (II.7)-(II.12), tornam-se:

$$T(x, \xi, t) = T_f, \quad 0 \leq x \leq L/H, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t = 0 \quad (F9)$$

$$T(x, \eta, t) = -1, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \eta = 1, \quad t > 0 \quad (F10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}(x, \xi, t) = 0, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \xi = 0, \quad t = 0 \quad (F11)$$

interface,

$$T(x, \eta, t) = T(x, \xi, t) = 0, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \xi = 1, \quad \eta = 0, \quad t > 0 \quad (F12)$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{K_s (T_f - T_w)}{H (1-s)} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{4}{5} h_f (T_f - T_w) T_o \right] =$$

$$\rho_1 \cdot C_L \cdot \frac{\alpha_1}{H^2} \cdot H \cdot \frac{\partial s}{\partial t}, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \xi = 1, \quad \eta = 0, \quad t > 0$$

ou,

$$\left[1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{1}{1-s} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{4}{5} \left(\frac{H}{D_n} \right) \cdot \left(\frac{k_1}{k_s} \right) \cdot N_u \cdot T_o \right] =$$

$$- \frac{\alpha_1}{\alpha_s} \left(\frac{1}{Ste} \right) \frac{\partial s}{\partial t}, \quad 0 < x \leq L/H, \quad \xi = 1, \quad \eta = 0, \quad t > 0 \quad (F13)$$

Os perfis de velocidade na região líquida, equações (II.13) e (II.14), na forma adimensional resultam em,

$$\frac{\alpha_1}{H} u = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{Q}{2.a.H.s} \right) \left[1 - \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right], \quad 0 \leq x \leq L/H, \quad 0 \leq \frac{y}{s} \leq 1, \quad t > 0$$

e

$$\frac{\alpha_1}{H} v = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{Q}{2.a.H.s} \right) \left(\frac{y}{s} \right) \left[1 - \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right] \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$0 \leq x \leq L/H, \quad 0 \leq \frac{y}{s} \leq 1, \quad t > 0$$

ou,

$$u(x, \xi, t) = \frac{3.Q}{4.a.\alpha_1.s} [1 - \xi^2], \quad 0 \leq x \leq L/H, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t < 0 \quad (F14)$$

e

$$v(x, \xi, t) = \frac{3.Q.\xi}{4.a.\alpha_1.s} [1 - \xi^2] \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$0 \leq x \leq L/H, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t < 0 \quad (F15)$$

A temperatura média de mistura, equação (II.15), e a queda de pressão axial, equação (II.16), tornam-se, respectivamente:

$$(T_f - T_w) T_m = \frac{4}{5} (T_f - T_w) T_0$$

ou,

$$T_m = \frac{4}{5} T_0 \quad (F16)$$

e

$$\rho U_m^2 \Delta p = 3.Q.\mu.H.x / (2.a.H^3.s^3)$$

ou

$$\Delta p = \frac{3 \cdot Q \cdot \mu \cdot x}{\rho \cdot U_m^2 \cdot (2 \cdot a \cdot H^2 \cdot s^3)} \quad (F17)$$

onde:

$$D_H = 4 \text{ Ha} / (2H + a)$$

$$N_u = h \cdot D_H / K_l$$

$$Q = 2 \cdot U_m \cdot H \cdot a$$

$$T_o = T(x, 0, t)$$

$$\text{Ste} = \frac{C_p (T_f - T_w)}{C_l}$$

APÊNDICE G

MÉTODO DE CRANK - NICOLSON

O método implícito de Crank-Nicolson segundo Smith[20], elimina a restrição de estabilidade e melhora a precisão da aproximação, devido ao uso de simetria na construção da equação diferença, levando a um erro de truncamento de segunda ordem.

Considere a geometria da célula apresentada na figura (G.1), a qual possui um centro de simetria no ponto A $(x, y, t + \frac{k}{2})$, que não constitui um ponto da grade.

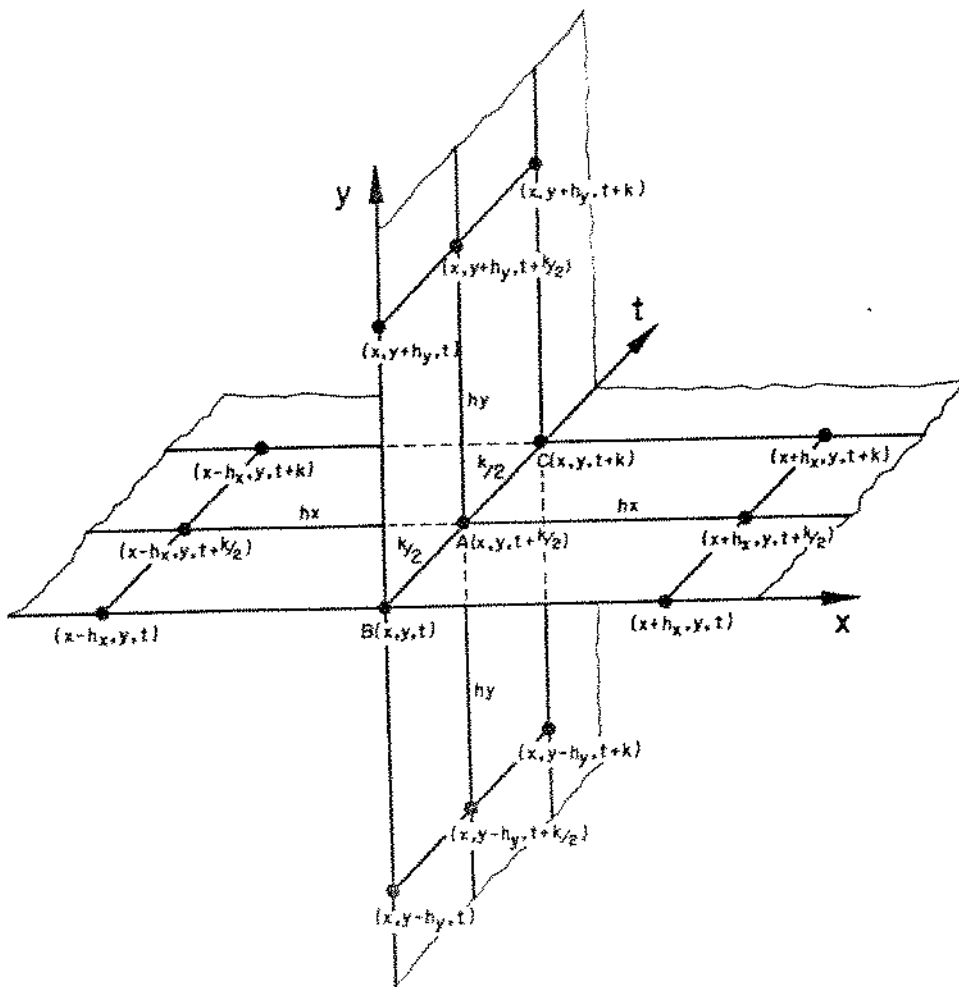


Figura (G.1) - Geometria da célula utilizada.

As derivadas do sistema de equações (II.17)-(II.23), são aproximadas pelas equações diferenças

finitas, através das séries de Taylor. A partir da geometria acima, com simetria no ponto A, para a variável temperatura $T(x,y,t)$, tem-se as seguintes equações diferenças:

- Diferença centrada, com erro de truncamento de segunda ordem:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B = \frac{T(x+h_x, y, t) - T(x-h_x, y, t)}{2 h_x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_C = \frac{T(x+h_x, y, t+k) - T(x-h_x, y, t+k)}{2 h_x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_B = \frac{T(x, y+h_y, t) - T(x, y-h_y, t)}{2 h_y}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_C = \frac{T(x, y+h_y, t+k) - T(x, y-h_y, t+k)}{2 h_y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_B = \frac{T(x+h_x, y, t) - 2T(x, y, t) + T(x-h_x, y, t)}{h_x^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_C = \frac{T(x+h_x, y, t+k) - 2T(x, y, t+k) + T(x-h_x, y, t+k)}{h_x^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_B = \frac{T(x, y+h_y, t) - 2T(x, y, t) + T(x, y-h_y, t)}{h_y^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_C = \frac{T(x, y+h_y, t+k) - 2T(x, y, t+k) + T(x, y-h_y, t+k)}{h_y^2}$$

- Diferença avançada, com erro de truncamento de primeira ordem:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_A = \frac{T(x,y,t+k) - T(x,y,t)}{k}$$

- Diferença avançada para três pontos, com erro de truncamento de segunda ordem:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B = \frac{-3T(x,y,t) + 4T(x+h_x, y,t) - T(x+2h_x, y,t)}{2 h_x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_C = \frac{-3T(x,y,t+k) + 4T(x+h_x, y,t+k) - T(x+2h_x, y,t+k)}{2 h_x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_B = \frac{-3T(x,y,t) + 4T(x,y+h_y, t) - T(x,y+2h_y, t)}{2 h_y}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_C = \frac{-3T(x,y,t+k) + 4T(x,y+h_y, t+k) - T(x,y+2h_y, t+k)}{2 h_x}$$

- Diferença atrasada para três pontos, com erro de truncamento de segunda ordem:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B = \frac{T(x-2h_x, y, t) - 4T(x-h_x, y, t) + 3T(x, y, t)}{2h_x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_C = \frac{T(x-2h_x, y, t+k) - 4T(x-h_x, y, t+k) - 3T(x, y, t+k)}{2h_x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_B = \frac{T(x, y-2h_y, t) - 4T(x, y-h_y, t) - 3T(x, y, t)}{2h_y}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_C = \frac{T(x, y-2h_y, t+k) - 4T(x, y-h_y, t+k) - 3T(x, y, t+k)}{2h_y}$$

Tomando-se as derivadas da variável no ponto A, como a média aritmética das derivadas nos pontos B e C, obtêm-se:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_A = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_C \right)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_A = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_B + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_C \right)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_A = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_B + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_C \right)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_A = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_B + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_C \right)$$

Além disso, o valor da variável temperatura no ponto "A", é tomado como:

$$T|_A = \frac{1}{2} (T|_B + T|_C)$$

APÊNDICE H

DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA INTERFACE

Na equação (II.23) da interface,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = A_7 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{1}{1-s} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} - Nu_x^* A_{11} T_m / D_H \right\},$$

$$0 < x \leq L/H \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \xi = 1 \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

a variação axial da posição da frente de solidificação e o gradiente de temperatura da interface para a região sólida, são respectivamente discretizados utilizando-se a equação diferença finita avançada para três pontos, com erro de truncamento de segunda ordem e calculadas explicitamente como:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta\eta} \left\{ -3S_i^k + 4S_{i+1}^k - S_{i+2}^k \right\}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ -3T_{i,N}^k + 4T_{i,N+1}^k - T_{i,N+2}^k \right\}$$

A temperatura média de mistura (T_m), da região líquida é calculada em relação a temperatura no centro do canal (Apêndice C) e adimensionalizada (Apêndice F) tendo a forma:

$$T_m = 0,8 T_{i,0}^k$$

Assim, a equação (II.23) na forma discretizada resulta em:

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial t} \right)^k = A_7 \left\{ 1 + \left(\frac{-3s_i^k + 4s_{i+1}^k - s_{i+2}^k}{2 \Delta x} \right)^2 \right\}.$$

$$\cdot \left\{ \left(\frac{1}{1 - s_i^k} \right) \left(\frac{-3T_{i,N}^k + 4T_{i,N+1}^k - T_{i,N+2}^k}{2 \Delta \eta} \right) \right.$$

$$\left. - 0,8 \cdot A_{11} \cdot Nu_m \cdot T_{i,0}^k / (4 s_i^k) \right\}, \quad 1 < i \leq NN, \quad j = N, \quad k > 0$$

APÊNDICE I

DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA REGIÃO SÓLIDA

Explicitando a derivada $\partial T/\partial t$ na equação (II.17) da região sólida, obtém-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{1-\eta}{1-s} \right] \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{K(T)}{C_p(T)} \cdot \frac{V(T)}{\alpha_1} \left(\frac{1}{1-s} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} -$$

$$- \frac{\beta(T)}{C_p(T)} \left(\frac{T_f - T_w}{\alpha_1} \right) \left(\frac{1}{1-s} \right)^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2, \quad (II)$$

O produto entre as propriedades físicas, na forma dimensional, é rearranjado, desprezando-se os termos de ordem (10^{-10}), assim,

$$K(\bar{T}) \cdot V(\bar{T}) = (1,0907 \cdot 10^{-3} + 1,4635 \cdot 10^{-7} \cdot \bar{T}) (2,09 - 3,553 \cdot 10^{-3} \bar{T})$$

ou na forma adimensionalizada,

$$K(T) \cdot V(T) = A_3 + A_4 \cdot T \quad (I2)$$

onde as constantes são:

$$A_3 = 2,2796 \cdot 10^{-3} - 3,5694 \cdot 10^{-6} T_f$$

$$A_4 = -3,5694 \cdot 10^{-6} (T_f - T_w)$$

A propriedade $C_p(T)$, é considerada na forma

adimensional como:

$$C_p(T) = A_1 + A_2 T \quad (13)$$

onde,

$$A_1 = 2116,5607 + 7,2845 T_f$$

$$A_2 = 7,2845 (T_f - T_w)$$

e a relação $\beta(T)$ (Apêndice F), fica reduzida a constante,

$$\beta(T) = 0,0038753$$

sendo incluída em uma nova constante,

$$A_5 = \beta(T) \cdot (T_f - T_w) \quad (14)$$

Assim, após substituição das relações (12), (13) e (14) na equação (11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & \left[\frac{1 - \eta}{1 - s} \right] \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{1}{1 - s} \right)^2 \left[\left(\frac{A_3 + A_4 T}{A_1 + A_2 T} \right) \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) - \left(\frac{A_5}{A_1 + A_2 T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 \right] \quad (15) \end{aligned}$$

A equação (15) na forma discretizada é aplicada

para todos os pontos internos da região sólida ($2 \leq i \leq NN$ e $N+1 \leq j \leq M-1$) e para isto, suas derivadas são aproximadas pelas equações diferenças finitas (Apêndice G), ou seja,

- variáveis:

$$\eta = j\Delta\eta \quad (16)$$

$$s = s_i^k \quad (17)$$

$$T = T_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left(T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k \right) \quad (18)$$

- Derivadas:

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{2\Delta\eta} \left(T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\Delta\eta^2} \left(T_{i,j+1}^k - 2 T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k \right) \quad (110)$$

Substituindo-se as relações (16)-(110) em (15), e admitindo $(\partial s / \partial t)^k$ como calculada explicitamente pela equação (II.32), produz-se para o instante de tempo $t = k \Delta t$,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^k = \left(\frac{1 - j \Delta\eta}{1 - s_i^k} \right) \left(\frac{1}{2\Delta\eta} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^k \left(T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{1}{1 - s_i^k} \right)^2 \left\{ \left[\frac{A_3 + 0,5.A_4 (T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)}{A_1 + 0,5.A_2 (T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)} \right] \right. \\
& \cdot \left(\frac{T_{i,j+1}^k - 2 T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{\Delta \eta^2} \right) - \left[\frac{A_5}{A_1 + 0,5.A_2 (T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)} \right] \\
& \cdot \left(\frac{T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k}{2\Delta \eta} \right) \quad (II1)
\end{aligned}$$

Todas as variáveis do lado direito do sistema de equações (II2), aqui designadas por LD(II1) são conhecidas, então as derivadas $(\frac{\partial T}{\partial t})^k$ são calculadas e seus valores utilizados nos cálculos dos $T_{i,j}^k$, para o instante de tempo $t = (k + \frac{1}{2})\Delta t$,

$$T_{i,j}^{k+1/2} = T_{i,j}^k + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^k$$

substituindo-se os valores de $T_{i,j}^{k+1/2}$ no LD(II2), obtém-se as derivadas $(\partial T/\partial t)$, para o instante de tempo $t = (k + \frac{1}{2})\Delta t$,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{k+1/2} = \text{LD(II1)} \text{ com } T_{i,j}^{k+1/2}$$

e com a obtenção das derivadas $(\frac{\partial T}{\partial t})^{k+1/2}$, calcula-se $T_{i,j}^{k+1}$ para o instante de tempo $t = (k + 1) \Delta t$,

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + \Delta t \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{k+1/2} \quad (II2)$$

As derivadas $(\partial T/\partial t)^{k+1}$, para o instante de tempo $t = (k+1)\Delta t$, são obtidas pelo método de Crank-Nicolson, utilizando-se as temperaturas $T_{i,j}^{k+1}$ nos cálculos das equações diferenças finitas:

$$T = \frac{1}{4} (T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k) \quad (113)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{4\Delta\eta} (T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k) \quad (114)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2\Delta\eta^2} (T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k) \quad (115)$$

Substituindo-se (16), (17) e (113)-(115) em (15), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{k+1} = \left(\frac{1-(j-N)\Delta\eta}{1-s_i^{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{4\Delta\eta}\right).$$

$$\left(T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \left(\frac{1}{1-s_i^{k+1}}\right)^2$$

$$\left\{ \frac{A_3 + 0,25 \cdot A_4 (T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)}{A_1 + 0,25 \cdot A_2 (T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)} \right\}.$$

$$\cdot \left(\frac{1}{2\Delta\eta^2}\right) \left(T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k\right) -$$

$$- \left[\frac{A_5}{A_1 + 0,25.A_2 (T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)} \right] \left(\frac{1}{4\Delta\eta} \right)^2$$

$$\left(T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k \right) \quad (II6)$$

ou

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{k+1} = Z_9 \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^{k+1} + Z_8 (Z_2.Z_4 - A_5.Z_1.Z_1/8) \quad (II7)$$

Aplicando-se o método implícito de Crank-Nicolson na equação (I5), ou seja, explicitando $T_{i,j}^{k+1}$ na equação (II7), com as derivadas $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{k+1}$, $\left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^{k+1}$ e a posição da interface s_i^{k+1} , calculadas explicitamente, tem-se:

$$T_{i,j}^{k+1} = 2Z_0 - Z_3 - \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{k+1} / (2.Z_4.Z_8) + Z_9 \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^{k+1} / (2.Z_4.Z_8) -$$

$$- A_5.Z_1.Z_1 / (16.Z_4) \quad (II8)$$

onde:

$$A_9 = 1/(4.\Delta\eta)$$

$$A_{10} = 1/(2\alpha_1 \Delta\eta \Delta\eta)$$

$$Z_0 = 0,25 \left(T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k \right)$$

$$Z_1 = T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k$$

$$Z_2 = T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k$$

$$Z_3 = T_{i,j}^k$$

$$Z_4 = A_3 + A_4 \cdot Z_0$$

$$Z_5 = A_1 + A_2 \cdot Z_0$$

$$Z_6 = 1/(1-s_i^{k+1})$$

$$Z_7 = 1 - (j-N)\Delta\eta$$

$$Z_8 = A_{10} \cdot Z_6 \cdot Z_6 / Z_5$$

$$Z_9 = A_9 \cdot Z_1 \cdot Z_6 \cdot Z_7$$

APÊNDICE J

DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA REGIÃO LÍQUIDA

A equação (II.18) referente à região líquida, na forma adimensional,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\xi}{s}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) \frac{\partial T}{\partial \xi} + u \left[\frac{\partial T}{\partial x} - \left(\frac{\xi}{s}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{v}{s} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \\ = \left(\frac{1}{s^2}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad 0 < x \leq L/H, \quad 0 < \xi < 1, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (J1)$$

é discretizada pelo método implícito de Crank-Nicolson, utilizando-se as seguintes variáveis e equações diferenças finitas, para os pontos $2 \leq i \leq NN$, $1 \leq j \leq N-1$ e $k > 0$:

$$\xi = (j-1) \Delta \xi \quad (J2)$$

$$s = s_i^{k+1} \quad (J3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k) \quad (J4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{4\Delta \xi} (T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k) \quad (J5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2\Delta \xi^2} (T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k) \\ (J6) \end{aligned}$$

para os pontos $2 \leq i \leq NN-1$, $1 \leq j \leq N-1$ e $k > 0$,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta x} (T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k) \quad (J7)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta x} (s_{i+1}^{k+1} - s_{i-1}^{k+1} + s_{i+1}^k - s_{i-1}^k) \quad (J8)$$

e para os pontos $i = NN$, $1 \leq j \leq N-1$ e $k > 0$,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta x} (s_{i-2}^{k+1} - 4s_{i-1}^{k+1} + 3s_i^{k+1} + s_{i-2}^k - 4s_{i-1}^k + 3s_i^k) \quad (J9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta x} (T_{i-2}^{k+1} - 4T_{i-1,j}^{k+1} + 3T_{i,j}^{k+1} + T_{i-2,j}^k - 4T_{i-1,j}^k + 3T_{i,j}^k) \quad (J10)$$

ou de um modo geral para os pontos $2 \leq i \leq NN$, $1 \leq j \leq N-1$,
 $k > 0$:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta x} Z_{13} \quad (J11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta x} Z_{14} \quad (J12)$$

onde, para $2 \leq i \leq N-1$, $1 \leq j \leq N-1$ e $k > 0$, tem-se:

$$Z_{13} = s_{i+1}^{k+1} - s_{i-1}^{k+1} + s_{i+1}^k - s_{i-1}^k$$

$$Z_{14} = T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k$$

e,

para $i = NN$, $1 \leq j \leq N-1$ e $K > 0$

$$Z_{13} = s_{i-2}^{k+1} - 4s_{i-1}^{k+1} + 3s_i^{k+1} + s_{i-2}^k - 4s_{i-1}^k + 3s_i^k$$

$$Z_{14} = T_{i-2,j}^{k+1} - 4T_{i-1,j}^{k+1} + 3T_{i,j}^{k+1} + T_{i-2,j}^k - 4T_{i-1,j}^k + 3T_{i,j}^k$$

Substituindo-se as relações (J2) - (J12) na equação (J1) e admitindo-se que a derivada $(\partial s/\partial t)^{k+1}$ e a posição s_i^{k+1} como calculadas explicitamente, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k) - \frac{(j-1)\Delta\xi}{4s_i^{k+1}} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{\Delta\xi}\right) (T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + \\ & + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k) + \frac{3Q}{4a\alpha_1 s_i^{k+1}} \{1 - [(j-1)\Delta\xi]^2\} \left[\left(\frac{1}{4\Delta x}\right) Z_{14} - \right. \\ & \left. - \frac{(j-1)\Delta\xi}{s_i^{k+1}} \left(\frac{1}{4\Delta\xi}\right) \left(\frac{1}{4\Delta x}\right) Z_{13} \cdot (T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k)\right] + \\ & + \frac{Z_1 \cdot Z_{10} \cdot Z_{11} \cdot Z_{13}}{\Delta t} = \left(\frac{1}{s_i^{k+1}}\right)^2 \left(\frac{1}{2\Delta\xi^2}\right) \left[T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + \right. \\ & \left. T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k \right], \quad 2 \leq i \leq NN, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad k > 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{k+1} &= T_{i,j}^k + Z_{11} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{k+1} \cdot Z_1 - Z_{10} [Z_{14} - Z_{11} \cdot Z_{13} \cdot Z_1] + \\ & + Z_{12} \cdot Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_{10} \cdot Z_{11} \cdot Z_{13}}{\Delta t}, \quad 2 \leq i \leq NN, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad k > 0 \end{aligned}$$

onde,

$$A_6 = \Delta t / (2 \Delta\xi \Delta\xi)$$

$$Z_1 = T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k$$

$$Z_2 = T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k$$

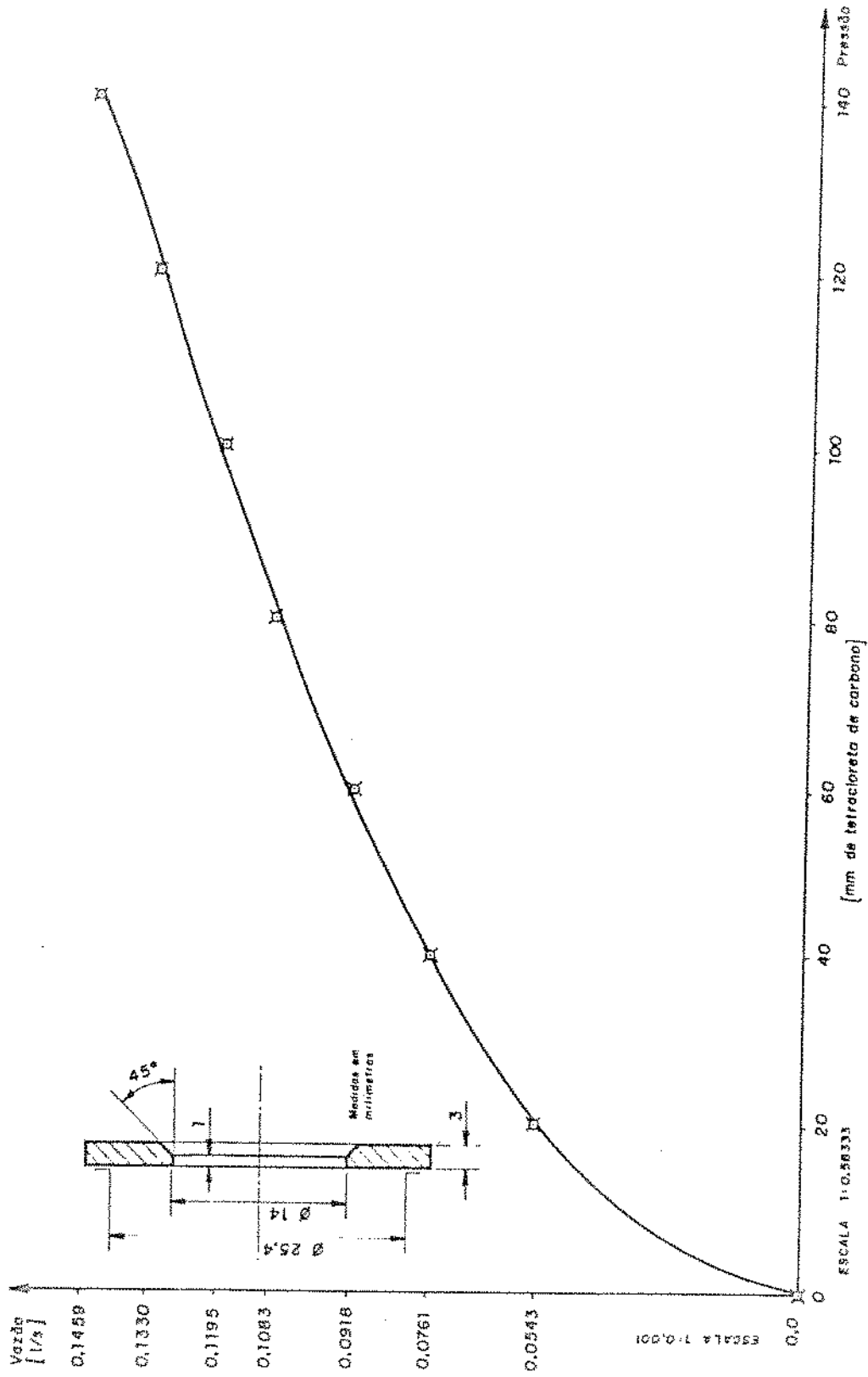
$$Z_{10} = \frac{3Q}{4a\alpha_1 s_i^{k+1}} \{1 - [(j-1)\Delta\xi]^2\} [\Delta t / (4\Delta x)]$$

$$Z_{11} = (j-1)\Delta t / (4s_i^{k+1})$$

$$Z_{12} = A_6 / (s_i^{k+1})^2$$

APÊNDICE K

CURVA DE CALIBRAÇÃO DA PLACA DE ORIFÍCIO



CURVA DE CALIBRAÇÃO DA PLACA DO ORIFÍCIO

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CHEUNG, F.B & EPSTEIN, M. Solidification and melting in fluid flow. IN: *Advances in Transporte Processes*. vol. III, A.S. MUJUNDAR & R.A. MASHELKAR (EDS). Wiley Eastern Limited. New Delhi, 1984.
- [2] STEPHAN, K. Influence of heat transfer on melting and solidification in forced flow. *Journal Heat and Mass Transfer*. 12:199-214. 1969.
- [3] ZERKLE, R.D. & SUNDERLAND, J.E. The effect of liquid solidification in a tube upon laminar-flow heat transfer and pressure drop. *Journal of Heat Transfer*. 90:188-190. 1968.
- [4] HIRATA, T. & ISHIHARA, M. Freeze-off conditions of a pipe containing a flow of water. *International Journal Heat Mass Transfer*. 28:331-337. 1985.
- [5] HIRATA, T. & MATSUZAWA, H. A study of Ice-Formation Phenomena on Freezing of Flowing Water in a Pipe. *Journal of Heat Transfer*. 109: 965-970. 1987.
- [6] SEKI, N.; FUKUSAKO, S.; YOUNAN, G.W. Ice-formation phenomena for water flow between two cooled parallel plates. *Transactions of the ASME*. 106:498-505. 1984.
- [7] CHO, S.H. & SUNDERLAND, J.E. Phase change problems with

- temperature dependent thermal conductivity. *ASME Journal Heat Transfer*. 96:214-217. 1974.
- [8] OLIVER, D.L.R. & SUNDERLAND, J.E. A phase change problem with temperature dependent thermal conductivity and specific heat. *International Journal Heat Mass Transfer*. 30:2657-2661. 1987.
- [9] RAO, P.R. & SASTRI, V.M.K. Efficient Numerical method for two-dimensional phase change problems. *Journal Heat Mass Transfer*. 27: 2077-2084. 1984.
- [10] ECKERT, E.R.G., Goldstein, R.J., Pfender, E., Ibele, W.E., Patankar, S.V., Ramsey, J.W., Simon, T.W., Decker, N.A., Kuehn, T.H., Lee, H. and Girshick, S.L. Heat transfer-a review of 1987 literature. *Int. J. Heat Mass Transfer* 31:2401-2488. 1988. 1988.
- [11] SHAH, R.K. & LONDON, A.L. *Laminar flow convection in ducts*. ACADEMIC PRESS. New York. 1978.
- [12] PERRY, J.H. *Chemical Engineers Handbook*. McGraw-Hill. Kogakusha. 1973.
- [13] WEAST, R.C. & ASTLE, M.J. *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press. Inc. Florida. 1982.
- [14] POWELL, R.W. Thermal conductivities and expansion coefficients of water and ice. *Advances in Physics*. 25:276-297. 1958.

- [15] LAZARIDIS, A. A numerical solution of the multidimensional solidification (or melting) problem. *International Journal Heat Mass Transfer*. 13:1459-1477. 1970.
- [16] BEJAN, A. *Convection Heat Transfer*. John Wiley & Sons Inc. 1984.
- [17] RAMACHANDRAN, N.; GUPTA, J.P.; JALURIA, Y. Two-dimensional solidification with natural convection in the melt and convective and radiative boundary conditions. *Numerical Heat Transfer*. 4:469-484. 1981. 1981.
- [18] SPARROW, E.M. & CHUCK, W. An implicit/explicit numerical solution scheme for phase-change problems. *Numerical Heat Transfer*. 7:1-15. 1984. 1984.
- [19] CARNAHAN, .; LUTHER, H.A.; WILKES, J.O. *Applied Numerical Methods*. New York. John Wiley, 1969. 604p.
- [20] SMITH, G.D. *Numerical solutions of partial differential equations*. OXFORD UNIVERSITY PRESS. 1965.
- [21] BONACINA, C.; FASANO, A.; PRIMICERIO, M. Numerical solutions of phase-change problems. *International Journal Heat Transfer*. v. 16, 1973.
- [22] PATANKAR, S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Mc Graw-Hill. 1980.197p.

- [23] GOODRICH, L.E. Efficient numerical technique model for one-dimensional thermal problems with phase change. *J. Heat Mass Transfer*. 21: 615-621. 1974.
- [24] OZISIK, M.N. *Heat Conduction*. John Wiley. 1980. 687p.
- [25] DEMPSEY, B.J. & THOMPSON, M.R. A heat transfer model for evaluating frost action and temperature related effects in multilayered pavement systems. *W.R.R.*, 342, 39-56 (1970).
- [26] FLEMING, A.K. The numerical calculation of freezing process. Presented at 13th International Inst. Refrigeration Congress. Washington, September, 1971.
- [27] HO, D.M.; HARR, M.E.; LEONARDS, G.A. Transient temperature distribution in insulated pavements predictions vs observations. *Can. Geotech J* 7, 275 (1970).
- [28] NAKANO, Y. & BROWN, J. Effect of a freezing zone of finite width on the thermal regime of soils. *Water Resources Res.* 7(5), 1226-1233 (1971).
- [29] PRICE, P.H. & STACK, M.R. The effect of latent heat numerical solutions of the heat flow equation. *Br. J. Appl. Phys.*, 5, 285-287(1954).
- [30] MEYER, G.M.; KELLER, H.M.; COUCH, E.J. Thermal model for roads, airstrips and building foundations in permafrost

regions. *J. Can. Petrol. Technol.* April June, 13-25.
1972.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- AHERN, J.E. *The exergy method of energy systems analysis*. New York, John Wiley. 1980. 295 p.
- BATCHELOR, G.K. *An introduction to fluid dynamics* Cambridge University Press. 1967. 615 p.
- BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport phenomena*. New York, John Wiley. 1960. 780 p.
- BOYCE, W.E. & DIPRIMA, R.C. *Elementar differential equations and boundary value problems*. 3 ed. New York, John Wiley. 1977. 582 p.
- CALLEN, H.B. *Thermodynamics*. New York, John Wiley. 1960. 376 p.
- SCHLICHTING, H. *Boundary layer theory*. 7.ed. New York, McGraw-Hill. 1979. 817 p.
- FIGUEIREDO, D.G. *Analise de Fourier e equacoes diferenciais*. Rio de Janeiro. IMPA: CNPq. 1977. (Projeto Euclides). 274p.
- KREYSZIG, E. *Matematica - superior*. Rio de Janeiro. LTC. 1977.
4 v.
- CARLAW, H.S. & JAEGER, J.C. *Conduction of heat in solids*. 2.ed.

Oxford, Oxford University Press. 1959. 510 p.

- KOROVKIN, P.P. *Inequalities*. Moscow, Mir. 1975 (Little Mathematics Library) p. 12-16.

- WELTY, J.R. *Engineering heat transfer*. Wiley Int. Ed. NY 1974.

- FABRY, C. *Elements de thermodynamique*. 11 ed. rev., Paris, Armand Colin, 1962. (Collection Armand Colin, Section Physique).