

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
como requisito parcial à obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

MODELO NÃO ISOTÉRMICO DE UM SISTEMA  
POÇO-RESERVATÓRIO OPERANDO COM FLUIDO  
PSEUDO-HOMOGÊNEO

*Este exemplar responde à redação final da tese defendida  
pelo Engenheiro Sívio Gonçalves Dias e aprovada pela Comissão  
Julgadora em 14/11/90.*

  
Antônio Carlos Bannwart

44190

Autor : Sívio Gonçalves Dias  
Orientador : Antônio Carlos Bannwart  
Co-Orientador : Kelsen Valente Serra

novembro de 1990

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

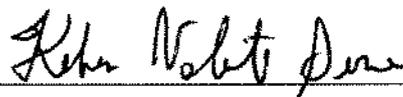
A dissertação "Modelo Não Isotérmico de um Sistema Poço-Reservatório Operando com Fluido Pseudo-Homogêneo", elaborada por Silvio Gonçalves Dias e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 14 de Novembro de 1990.

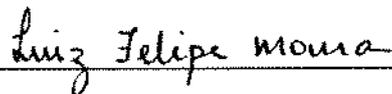
Banca Examinadora



Antônio Carlos Bannwart, Ph.D.



Kelsen Valente Serra, Ph.D.



Luis Felipe Mendes de Moura, Ph.D.

Aos

meus pais

Ana

e

Tiburtino

## AGRADECIMENTOS

Aos orientadores: Dr. Antônio Carlos Bannwart pela atenção, dedicação e tempo dispendido e Dr. Kelsen Valente Serra pelo incentivo e auxílio na definição do tema deste trabalho.

Aos Doutores Maria Cristina Cunha Bezerra, Fernando Rodriguez de La Garza e Osvaldo Vidal Trevisan pelas consultas prestadas.

À PETROBRÁS pela oportunidade e por oferecer condições para que este curso de mestrado em engenharia de petróleo se realizasse. Aos colegas da empresa, especialmente aos da Divisão de Óleo do Departamento de Produção, que incentivaram a minha vinda.

Aos funcionários do CEPETRO pela dedicação e auxílio prestados durante todo o período do mestrado.

Aos colegas de mestrado e professores pela amizade e companheirismo nesta importante etapa de minha vida.

# Índice

Lista de Figuras . . . . .	viii
Lista de Tabelas . . . . .	x
Nomenclatura . . . . .	xi
Sumário . . . . .	xiv
<b>Introdução . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1 - Revisão Bibliográfica . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>2 - Modelo Físico . . . . .</b>	<b>8</b>
2.1 - Descrição . . . . .	8
2.2 - Hipóteses Básicas do Modelo . . . . .	11
<b>3 - Modelo Isotérmico - Formulação Matemática . . . . .</b>	<b>13</b>
3.1 - O Poço . . . . .	13
3.2 - O Reservatório . . . . .	14
3.3 - Condições de Contorno . . . . .	15
3.4 - Adimensionalização . . . . .	17
<b>4 - Modelo Isotérmico - Método de Solução . . . . .</b>	<b>20</b>
4.1 - Aplicação do Método das Direções Características . . . . .	20
4.2 - Solução Numérica pelo Método das Diferenças Finitas . . . . .	21
4.2.1 - Equações no Poço . . . . .	21
4.2.1.1 - Pontos Internos . . . . .	21
4.2.1.1 - Condição de Contorno na Cabeça do Poço . . . . .	25
4.2.2 - Equações no Reservatório . . . . .	27
4.2.2.1 - Condição de Contorno no Limite Externo . . . . .	28
4.2.3 - Junção Poço-Reservatório . . . . .	29
<b>5 - Modelo Não Isotérmico - Formulação Matemática . . . . .</b>	<b>31</b>
5.1 - O Poço . . . . .	31
5.2 - O Reservatório . . . . .	33
5.3 - Condições de Contorno . . . . .	34
5.4 - Adimensionalização . . . . .	36

<b>6 - Modelo Não Isotérmico - Método de Solução</b>	41
6.1 - Aplicação do Método das Direções Características . . . . .	41
6.2 - Solução Numérica pelo Método das Diferenças Finitas . . . . .	43
6.2.1 - Equações no Poço . . . . .	43
6.2.1.1 - Pontos Internos . . . . .	43
6.2.1.1 - Condição de Contorno na Cabeça do Poço . . . . .	48
6.2.2 - Equações no Reservatório . . . . .	48
6.2.2.1 - Condição de Contorno no Limite Externo . . . . .	51
6.2.3 - Junção Poço-Reservatório . . . . .	51
<b>7 - Resultados e Comentários</b> . . . . .	55
7.1 - Definição dos Casos-Testes Estudados . . . . .	55
7.2 - Desempenho dos Métodos Numéricos . . . . .	56
7.3 - Transiente Inicial . . . . .	59
7.4 - Teste do Modelo Isotérmico . . . . .	63
7.5 - Simulação Não Isotérmica . . . . .	68
<b>Conclusões e Recomendações</b> . . . . .	74
<b>Referências</b> . . . . .	76
<b>Apêndices</b> . . . . .	79
A - Equações Básicas . . . . .	80
A.1 - Relações Termodinâmicas . . . . .	80
A.2 - Equações Locais Instantâneas Primárias . . . . .	81
A.3 - Equações Locais Instantâneas Secundárias . . . . .	82
A.4 - Equações Médias Espaciais-Temporais . . . . .	83
A.4.1 - Hipóteses Básicas . . . . .	83
A.4.2 - As Equações Médias . . . . .	84
A.4.3 - Equações para o Meio Poroso . . . . .	86

B - Sistemas de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem	88
B.1 - Informações Gerais . . . . .	88
B.2 - Solução da Equação Diferencial Parcial de Primeira Ordem . . . . .	88
B.3 - O Sistema de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem . . . . .	92
C - A Equação de Estado de Peng & Robinson . . . . .	95
C.1 - Informações Gerais . . . . .	95
C.2 - As Equações de Peng & Robinson . . . . .	95
D - Correlação de Lee <i>et alii</i> para a Viscosidade do Gás . . . . .	98

## Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática do sistema interligado poço-reservatório. . . . .	9
4.1	Discretização no domínio $(x_D, t_D)$ no poço. Avanço das variáveis independentes seguindo as direções características. . . . .	23
4.2	Representação esquemática da discretização no reservatório. . . . .	28
4.3	Representação esquemática mostrando os pontos discretizados envolvidos na junção poço-reservatório. . . . .	29
6.1	Discretização no domínio $(x_D, t_D)$ no poço. Avanço das variáveis independentes seguindo as direções características. . . . .	44
7.1	Desenho esquemático mostrando o mecanismo da propagação das ondas de pressão no interior do poço. . . . .	60
7.2	Gráficos da variação da pressão e da velocidade nos instantes iniciais de abertura de um poço produtor de líquido. . . . .	61
7.3	Gráficos da variação da pressão e da velocidade nos instantes iniciais de abertura de um poço produtor de gás. . . . .	62
7.4	Comparação da pressão no fundo do poço quando calculadas pelos modelos isotérmico e não isotérmico. . . . .	64
7.5	Gráfico da queda de pressão no fundo do poço versus tempo para um fluido pouco compressível. . . . .	66
7.6	Gráfico dos adimensionais da queda de pseudo-pressão no fundo do poço versus pseudo-tempo para um fluido compressível. . . . .	67
7.7	Gráfico dos adimensionais da pseudo-pressão versus pseudo-tempo de Agarwal para vários escoamentos não isotérmicos - diagrama bilogarítmico. . .	69
7.8	Gráfico dos adimensionais da pseudo-pressão versus pseudo-tempo de Agarwal para vários escoamentos não isotérmicos - diagrama monologarítmico. .	70

7.9	Gráfico dos adimensionais da queda de temperatura versus pseudo-tempo de Agarwal para vários casos de escoamentos não isotérmicos, mostrando uma inclinação unitária nos instantes iniciais (escala bilogarítmica). . . . .	71
7.10	Gráfico dos adimensionais da queda de temperatura versus tempo para vários casos de escoamentos não isotérmicos – monologarítmico. . . . .	72
7.11	Gráfico dos adimensionais da queda de pressão versus pseudo-tempo de Agarwal mostrando a influência da vazão de produção . . . . .	73

## Lista de Tabelas

7.1	Composição molar do gás produzido . . . . .	55
7.2	Parâmetros do reservatório simulado . . . . .	56
7.3	Parâmetros das trocas térmicas e da rocha. . . . .	56

## Nomenclatura

### Letras Romanas:

$a$	velocidade de propagação da onda	$m.s^{-1}$
$c_f$	compressibilidade do fluido	$Pa^{-1}$
$c_P$	calor específico a pressão constante	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$c_r$	compressibilidade da formação	$Pa^{-1}$
$f_o$	fator de atrito no escoamento	-
$g$	aceleração da gravidade	$m.s^{-2}$
$h$	entalpia específica	$J.kg^{-1}$
$k$	permeabilidade da formação	$m^2$
$m$	número total de pontos no reservatório	-
$n$	número total de pontos no poço	-
$r$	posição radial no reservatório	$m$
$r_T$	raio do tubo (poço)	$m$
$r_w$	raio interno do reservatório	$m$
$t$	tempo	$s$
$t_P$	pseudo-tempo	-
$u$	energia interna	$J.kg^{-1}$
$u$	velocidade darciana	$m.s^{-1}$
$v$	velocidade	$m.s^{-1}$
$x$	posição no poço	$m$
$w$	massa	$kg$
$C_R$	capacidade térmica da rocha	$J.m^{-3}.K^{-1}$
$D$	diâmetro do poço	$m$
$E$	aceleração devido aos efeitos gravitacionais e viscosos	$m.s^2$
$E_2$	aceleração devido aos efeitos gravitacionais e viscosos	$m.s^2$
$E_3$	taxa de energia devido trocas de calor e efeitos viscosos	$J.m^{-3}.s^{-1}$
$Eu$	número de Euler	-
$H$	profundidade do poço	$m$
$K_{JT}$	Coefficiente de Joule-Thompson	$K.Pa^{-1}$
$P$	pressão	$Pa$
$P_P$	pseudo-pressão	$N.m^{-2}.s^{-1}$
$Q$	vazão volumétrica	$m^3.s^{-1}$
$Re$	Número de Reynolds	-
$S$	coeficiente de película	-

Letras gregas:

$\alpha$	coeficiente de implicitude	-
$\beta$	coeficiente de expansividade	$K^{-1}$
$\gamma$	posição logarítmica radial	-
$\delta$	incremento numérico	-
$\theta$	temperatura	$K$
$\lambda$	transmissibilidade adimensional	-
$\mu$	viscosidade dinâmica	$N.s.m^{-2}$
$\xi$	variável auxiliar de posicionamento	-
$\rho$	massa específica	$kg.m^{-3}$
$\psi$	inclinação do poço com a vertical	radianos
$\sigma_1$	coeficiente de troca de calor no poço	$J.m^{-3}.s^{-1}.K^{-1}$
$\sigma_2$	troca de calor nas vizinhanças do reservatório	$J.m^{-2}.s^{-1}.K^{-1}$
$\sigma_3$	coeficiente de troca de calor no reservatório	$J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}$
$\bar{\tau}$	tensor das tensões	-
$\phi$	porosidade da formação	-
$\varphi$	parcela da equação da difusividade discretizada	-
$\varphi_2$	parcela da equação da difusividade discretizada	-

Subscritos:

0	indica uma condição de referência
<i>ext</i>	referência a uma posição externa ao sistema
<i>i</i>	variável adimensional discretizada no reservatório
<i>r</i>	variável refere-se ao reservatório
<i>A</i>	referência a um ponto de valor inicial conhecido
<i>B</i>	referência a um ponto de valor inicial conhecido
<i>D</i>	variáveis adimensionais
<i>E</i>	refere-se ao ponto de valor inicial estimado
<i>F</i>	referência a um ponto de valor inicial conhecido
<i>I</i>	posição interna do reservatório
<i>Q</i>	refere-se ao ponto de variáveis incógnitas
<i>T</i>	variável refere-se ao poço
<i>RES</i>	variável refere-se ao reservatório
<i>POCO</i>	variável refere-se ao poço

## Superscritos:

- $f'$  indica a região afetada por um dano
- $\dot{f}$  indica taxa de variação no tempo
- $\bar{f}$  propriedades nas condições originais do reservatório
- $\underline{\underline{f}}$  indica que a variável é um tensor

## Sumário

O objetivo deste trabalho é investigar o comportamento de um poço de petróleo considerando um sistema poço-reservatório acoplado. Inicialmente, o sistema encontra-se na condição estática e é feito fluir ou a pressão ou a vazão constante na superfície. Fluxo multifásico não isotérmico, sem escorregamento entre as fases (fluido pseudo-homogêneo) é considerado no reservatório e na coluna de produção. As equações diferenciais parciais e condições auxiliares que regem o comportamento do escoamento no reservatório são acopladas às equações do poço, previamente modificadas pelo método das características e resolvidas por diferenças finitas. Resultados da pressão e da temperatura são calculados em diversos pontos do sistema. Particularmente a pressão no fundo do poço, usualmente utilizada em análise de testes de poços, é investigada com profundidade. Comparações com sistemas isotérmicos mostraram que para tempos longos (não influenciados por estocagem) a análise convencional isotérmica fornece resultados próximos aos reais. Entretanto, para tempos menores ocorrem desvios em função dos parâmetros de fluxo e propriedades térmicas do sistema considerado.

## Abstract

The objective of this work is to investigate the behavior of a coupled wellbore-reservoir system. Initially, the system is at static conditions and may flow at constant surface rate or constant surface pressure. Multiphase non-isothermal flow with no slip between the phases is considered in the reservoir and in the tubing string; i.e., a pseudo-homogeneous fluid is used. The partial differential equations and auxiliary conditions which govern the flow in the reservoir are coupled with the wellbore equations (modified by the characteristics method) using a finite difference scheme. Results of pressure and temperature versus time are displayed in many different positions. Particularly, the downhole wellbore flowing pressure, usually used in well testing analysis is investigated with depth. Comparison with isothermal systems showed that for long time the conventional analysis is of good accuracy. However, for short time analysis influenced by wellbore storage significant errors may occur which depend upon the flow parameters and thermal properties of the system used.

# Introdução

Conhecer o comportamento de um sistema formado por um poço acoplado a um reservatório é de grande importância em engenharia de petróleo. Mais especificamente, a avaliação dos parâmetros do reservatório é realizada através de testes de formação que, usualmente, comparam as medições realizadas nos poços com algumas curvas típicas (ou soluções matemáticas), as quais são obtidas a partir de modelos simplificados de representação da interligação poço-reservatório.

Os testes de avaliação geralmente registram a pressão na face da formação em um período de tempo que sucede a uma variação brusca nas condições de operação do poço. Tais variações podem ser causadas tanto por uma mudança de pressão como de vazão; por exemplo, fechar o poço na cabeça após um período de fluxo registrando a pressão no fundo versus tempo é um teste típico conhecido como "Teste de Crescimento de Pressão".

Normalmente, o objetivo do teste é provocar um fluxo transiente no interior do meio poroso e registrar a resposta do sistema. A curva da pressão registrada ao longo do tempo na face da formação pode ser comparada com curvas sintéticas calculadas através da simulação dos modelos simplificados, permitindo que valores de diversos parâmetros do reservatório sejam estimados. Desse modo, verifica-se que a qualidade dos valores obtidos depende bastante do grau de semelhança entre o modelo que gerou as curvas típicas e o reservatório que está sendo analisado.

Na maioria das vezes, os problemas de Análise de Testes em reservatórios petrolíferos são resolvidos assumindo um fluido monofásico, de compressibilidade e viscosidade constantes, escoando isotermicamente em um meio poroso homogêneo e isotrópico. O poço é representado como sendo uma condição de contorno interna que considera uma capacidade de estocagem de massa que é, por sua vez, quantificada como sendo proporcional à variação de pressão no fundo do poço; o fator de proporcionalidade depende da compressibilidade do fluido e do volume do poço, sendo conhecido como Constante de Estocagem. Para problemas posteriores, mais complicados, foram procuradas soluções que, através de manipulações matemáticas, tornassem suas equações semelhantes às desse modelo simplificado.

Atualmente há a preocupação de se quantificar a magnitude dos erros causados pelas hipóteses simplificadoras que são abstraídas de um escoamento real. Muito se tem feito nos estudos específicos de reservatório, mas pouco no que tange ao acoplamento poço-reservatório.

Dentro dessa perspectiva o objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo mais realista para o escoamento no poço acoplado ao reservatório e investigar o período em que o efeito de estocagem da massa é o maior responsável pelo comportamento do sistema. A consideração da variação das propriedades físicas e termodinâmicas de um fluido real, tais como viscosidade, compressibilidade e expansividade térmica, permitirá uma apreciação das diferenças que ocorrem em relação aos modelos mais simplificados. Para completar este modelo, é introduzida uma forma de estimar as trocas de calor entre o fluido e a formação rochosa vizinha ao poço.

Para se atender aos objetivos acima propostos foi inicialmente desenvolvido um modelo isotérmico para o sistema poço-reservatório. O modelo consiste basicamente em acoplar a equação da difusividade, empregada para a descrição do escoamento no meio poroso, com as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, válidas no duto. Nessa primeira etapa, matematicamente mais simples, foi desenvolvida a estrutura utilizada para a solução do sistema.

Um aspecto importante do trabalho é a escolha do método numérico para a solução do sistema de equações no poço. Dois métodos foram testados para resolver numericamente o sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, que resulta da aplicação das equações básicas de conservação ao escoamento unidimensional em dutos. Em tais testes o reservatório foi representado por uma equação simplificada que relacionava linearmente a produção na face da formação à pressão de fluxo. Os dois métodos testados foram:

1. "Método das Diferenças Finitas" para discretizar as equações do sistema diferencial original; no caso foi utilizada uma discretização centrada no espaço e atrasada no tempo. Este método não apresentou resultados que permitissem um acompanhamento satisfatório das variáveis dependentes, em uma situação de escoamento transiente. Houve uma forte dependência dos resultados apresentados aos valores especificados para os incrementos no tempo. Em determinadas condições não se garantia a estabilidade dos resultados. Além disso, como verificado na literatura, existe a possibilidade de uma acelerada propagação de erros. Tais motivos levaram a não optar por este método.
2. "Método das Direções Características" para transformar o sistema original em um sistema de equações diferenciais ordinárias. O método das diferenças finitas foi aplicado ao sistema resultante. Neste caso, as equações características impõem a relação entre os incrementos no tempo e no espaço. Este método apresenta um lento avanço no tempo, motivado pelo fato de que suas equações acompanham as ondas de variação de pressão, as quais geralmente se deslocam a velocidades elevadas. Entretanto, propicia uma solução consistente para o escoamento transiente, possui boa estabilidade e é citado por apresentar menor propagação de erros.

Outro aspecto importante deste trabalho foi a opção pelo emprego de valores tabelados para as propriedades dos fluidos. Dessa forma, até mesmo dados obtidos experimentalmente podem ser utilizados, não havendo particularização da solução do problema. O valor de qualquer propriedade é obtido, para o caso isotérmico, através de uma interpolação linear com a pressão. Para o caso não isotérmico, o procedimento é análogo, porém envolvendo interpolação com a pressão e a temperatura.

A montagem das tabelas pode ser feita através da utilização de dados experimentais ou de valores obtidos por correlações semi-empíricas publicadas na literatura, como a equação de estado de Peng e Robinson [22]. Alguns cuidados se revelaram necessários para garantir a convergência dos cálculos computacionais. Não apenas as funções devem ser contínuas, como também, em certos casos, suas derivadas. A velocidade de propagação da onda no meio, por exemplo, é função de propriedades ligadas à variação da massa específica; os métodos numéricos exigem, também, o conhecimento da sua primeira derivada. Assim tornou-se conveniente montar tabelas contendo o valor, além da massa específica, também de sua derivada primeira.

O desenvolvimento do modelo não-isotérmico foi realizado seguindo as etapas adotadas no caso anterior, representando, pois, uma extensão do método das direções características ao caso em que também a equação de conservação de energia é considerada. Neste trabalho, os valores das propriedades térmicas foram calculados com base nas equações de Passut e Danner [21].

Algumas opções relativas à solução numérica foram modificadas, visando dispendir um menor esforço computacional. O método iterativo de Newton-Raphson foi substituído pelo "Método de Substituição Sucessiva" na solução das equações no poço. Também foi adotado para a solução numérica do reservatório, devido à inclusão da equação da energia, um procedimento misto que calcula sucessivamente as funções de pressão e de temperatura, cada uma delas iterativamente resolvidas pelo procedimento de Newton-Raphson.

# Capítulo 1

## Revisão Bibliográfica

O efeito da estocagem em um poço petrolífero foi inicialmente considerado por van Everdingen & Hurst [12], em 1949. Para o cálculo da vazão na face da formação produtora, esses autores utilizaram uma equação com variação exponencial no tempo, que a relacionava com a vazão de produção total na superfície.

Trabalhos posteriores, como os de Agarwal *et alii* [1] e Wattenbarger & Ramey [30], ambos em 1970, consideraram o efeito da compressibilidade do fluido para prever a capacidade do poço em responder com uma parcela da produção total. Hipóteses simplificadoras, como a compressibilidade do fluido constante e escoamento isotérmico, foram formuladas, determinando-se então um coeficiente de estocagem constante,  $C_D$ , que estabelecia a proporcionalidade entre essa parcela da produção e a variação no tempo da pressão na face da formação.

Uma abordagem que considerasse a compressibilidade variável, bem como efeitos devidos à expansividade térmica dos fluidos e às trocas de calor só se tornaram possíveis quando passou-se a construir simuladores numéricos acoplando os diversos modelos desenvolvidos para representar o poço e o reservatório.

Um estudo mais detalhado, incluindo o comportamento da estocagem, foi publicado por Miller [19], em 1979. O modelo desenvolvido acopla um simulador de reservatório radial, para fluido homogêneo, com uma rotina de fluxo multifásico em tubulações. São considerados os efeitos de trocas de calor no poço e da expansividade térmica do fluido, cujas propriedades médias são calculadas através de uma equação de estado. Enfocando tanto os poços petrolíferos como os poços geotérmicos, Miller [19] propôs, além do coeficiente de estocagem, a adoção de um outro parâmetro para caracterizar a resposta do sistema, principalmente nos períodos de mais rápido transiente. Tal parâmetro,  $t_{rw}$ , foi definido como a razão entre os tempos, em que, respectivamente, o reservatório e o poço respondem a um pulso de pressão.

Desse estudo de Miller [19], foi concluído que a reta de inclinação unitária – encontrada quando se plota os adimensionais de pressão no fundo do poço versus tempo em um diagrama bilogarítmico – só ocorre quando o valor do parâmetro  $t_{rw}$  é elevado. Tal condição é comum nos reservatórios petrolíferos, devido ao fato da transmissibilidade do fluido no reservatório,  $\frac{kh_r}{\mu}$ , ser bastante baixa e, em consequência, determinar um elevado tempo de resposta do reservatório.

Os poços geotérmicos têm um comportamento diferenciado. Uma vez que os valores típicos de permeabilidade e espessura da formação são mais elevados que nos campos petrolíferos e a viscosidade da água é mais baixa que a de hidrocarbonetos, a resposta a uma variação de pressão dada pelo reservatório é mais rápida, deixando de ser unitária a inclinação da reta.

Outra conclusão importante, no caso dos poços geotérmicos, refere-se à necessidade de se considerar as variações na temperatura do fluido para uma correta interpretação dos parâmetros de reservatório – os quais são obtidos quando se plota a queda de pressão no fundo do poço versus logaritmo do tempo. A inclinação da reta esperada para caracterizar o regime transiente de escoamento, neste caso, possui um valor diferente daquele que é calculado quando se utiliza a hipótese de escoamento isotérmico. Também foi observado que o tempo necessário para iniciar o comportamento transiente é aumentado.

Outro modelo de sistema poço-reservatório foi desenvolvido por Tiab [28], em 1988, para estudar os aspectos termodinâmicos envolvidos na produção de poços surgentes, especialmente o aproveitamento da energia disponível no reservatório para a elevação natural do petróleo.

Com o objetivo de analisar a energia perdida nos processos irreversíveis de fricção e turbulência, esse modelo incluiu a equação da entropia. Embora tenha utilizado as equações completas do escoamento em dutos, Tiab [28] não concentrou sua análise nos aspectos transientes do escoamento.

Muitos artigos tem sido escritos para investigar os diversos métodos numéricos para resolver as equações diferenciais que governam o escoamento em dutos. Tais equações são, em geral, do tipo hiperbólico; a propagação de erros e a perda de estabilidade das soluções são os problemas geralmente apresentados por este tipo de equação.

Os artigos publicados por Ashley [7] e Liles [17], respectivamente em 1968 e 1978, discutem as formas de discretizar o sistema original de equações hiperbólicas, visando a obter maior estabilidade ou precisão nos resultados. Grande destaque é dado às diversas formas de avaliação dos termos não lineares, presentes nas equações.

Um outro método, como o descrito por Courant & Hilbert [10] em 1962, consiste em modificar analiticamente as equações diferenciais, com a finalidade de determinar as direções características do sistema. Nessas direções o sistema de equações diferenciais parciais pode ser reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias. A discretização por diferenças finitas é normalmente realizada para a solução numérica do novo sistema. Esse método apresenta maior estabilidade numérica e menor propagação de erros. Em compensação, o avanço no tempo é lento e determinado pelas equações características.

Mfonfu e Grader [18], em 1989, utilizaram uma discretização com grau de implicitude variável para resolver um escoamento bifásico isotérmico. O sistema de equações formado foi resolvido pelo método de substituição sucessiva, com opção para uma variante acelerada chamada "Powell Method", quando a convergência não é alcançada. Tinham como objetivo investigar os efeitos de mudança de secção, os efeitos transientes na abertura e fechamento de válvulas, bem como avaliar as condições de operação e as condições de segurança nos testes de poços ou de linhas de transporte de fluido. Nesse artigo as propriedades do líquido e do gás foram obtidas da equação de estado de Peng&Robinson [22] e também foi considerada a compressibilidade do tubo. Assumiu-se que não há escorregamento entre as fases e as propriedades do fluido foram determinadas através de médias volumétricas.

Almehaideb [5], em 1989, para investigar um sistema poço-reservatório desenvolveu um simulador multifásico isotérmico que considera o escorregamento entre as fases no poço e a saturação dos fluidos no reservatório. As equações que representam o escoamento no meio poroso acopladas às equações do poço são discretizadas pelo método das diferenças finitas e resolvidas simultaneamente por um método totalmente implícito. As não-linearidades do sistema algébrico são resolvidas iterativamente pelo método de Newton-Raphson. O modelo foi aplicado para determinar as curvas de pressão no fundo do poço visando avaliar a duração da estocagem e analisar o comportamento do sistema, tanto em um teste de crescimento de pressão como durante a injeção de fluidos.

Em 1989, para investigar o comportamento de um sistema poço-reservatório, particularmente no que diz respeito aos aspectos transientes na produção e injeção de gás, Ahluwala e Wilkes [3] desenvolveram um simulador não isotérmico para escoamento monofásico. O modelo acopla um reservatório radial homogêneo, cuja rocha possui calor específico e condutibilidade térmica constantes, a um poço sujeito às trocas de calor com as formações vizinhas. São considerados os efeitos gravitacionais, de fricção, compressibilidade e turbulência no meio poroso. As propriedades do gás são calculadas com a ajuda de uma equação de estado. As equações do escoamento no meio poroso são numericamente resolvidas pelo Método dos Elementos Finitos, enquanto que as equações diferenciais no poço foram analiticamente modificadas para explicitar as suas direções características e, então, discretizadas por diferenças finitas.

Ahluwala e Wilkes[3] investigaram a duração do efeito de estocagem bem como concentraram sua análise no período transiente, inclusive na natureza ondulatória das variações de pressão e temperatura. Seus resultados foram, entretanto, contestados por Poettmann & Kazemi [23] e Kazimierz Glowacki [13], no mesmo ano. Diversas críticas foram realizadas, tais como incorreções de unidades, não citação de bibliografia, uma possível diferença no sinal do coeficiente de Joule-Thompson utilizado para o gás, além de não apresentar de maneira clara as simulações que realizou. Também não foram utilizados os métodos clássicos de testes de avaliação de parâmetros de reservatório, tais como os

testes de injetividade, crescimento de pressão, etc.

Podemos acrescentar que o método proposto por Ahluwalia e Wilkes [3] para a discretização das equações características possivelmente acelera a propagação dos erros numéricos devido ao exagerado uso de interpolações que o método requer. Observa-se que as equações características impõem, a partir dos valores iniciais especificados, os incrementos numéricos a serem dados, tanto na variável de espaço como na variável de tempo. Entretanto, Ahluwalia e Wilkes [3] pré-estabeleceram esses valores, necessitando, portanto, de fórmulas adicionais para a interpolação dos valores iniciais.

# Capítulo 2

## Modelo Físico

### 2.1 Descrição

Conceitualmente, o sistema poço-reservatório é formado por três elementos básicos: o poço, o reservatório e o fluido que é produzido ou injetado. Para cada elemento é realizada uma modelagem específica. A figura 2.1 mostra um desenho esquemático do sistema.

De um modo genérico, o conjunto poço-reservatório constitui um sistema interligado formado por um poço e um reservatório. O sistema pode ser produtor ou injetor de fluido. O fluido pode ser um líquido, um gás ou, sob condições restritas, uma mistura de fases.

Com a adoção de um modelo físico para o sistema, seu equacionamento resulta em um modelo matemático constituído por um conjunto de equações diferenciais cujas soluções são obtidas através de métodos numéricos.

O POÇO é considerado como sendo um tubo circular, de diâmetro e ângulo de inclinação com a vertical constantes, onde ocorre um escoamento unidimensional. É, portanto, uma típica coluna de produção de poços de petróleo descida em um revestimento de produção (figura 2.1).

A temperatura na formação atravessada pelo poço é função da profundidade, mas invariante no tempo. O valor desta temperatura, em cada posição, é calculada a partir da utilização de um gradiente geotérmico típico. A troca de calor com o poço, em cada posição, é admitida proporcional à diferença entre as temperaturas na coluna de produção e formação vizinha. O fator de proporcionalidade é o coeficiente de troca de calor entre o poço e a formação vizinha, que será admitido constante em qualquer profundidade e em qualquer instante do tempo.

A hipótese de diâmetro constante simplifica as equações de fluxo e não introduz erros significativos quando o fluido for muito mais compressível do que o tubo. Para considerar a variação do diâmetro, Mfonfu e Grader [18] consideraram uma relação entre as dimensões do tubo e o módulo de elasticidade do material, introduzindo um fator de compressibilidade do tubo. Esse fator era somado à compressibilidade dos fluidos

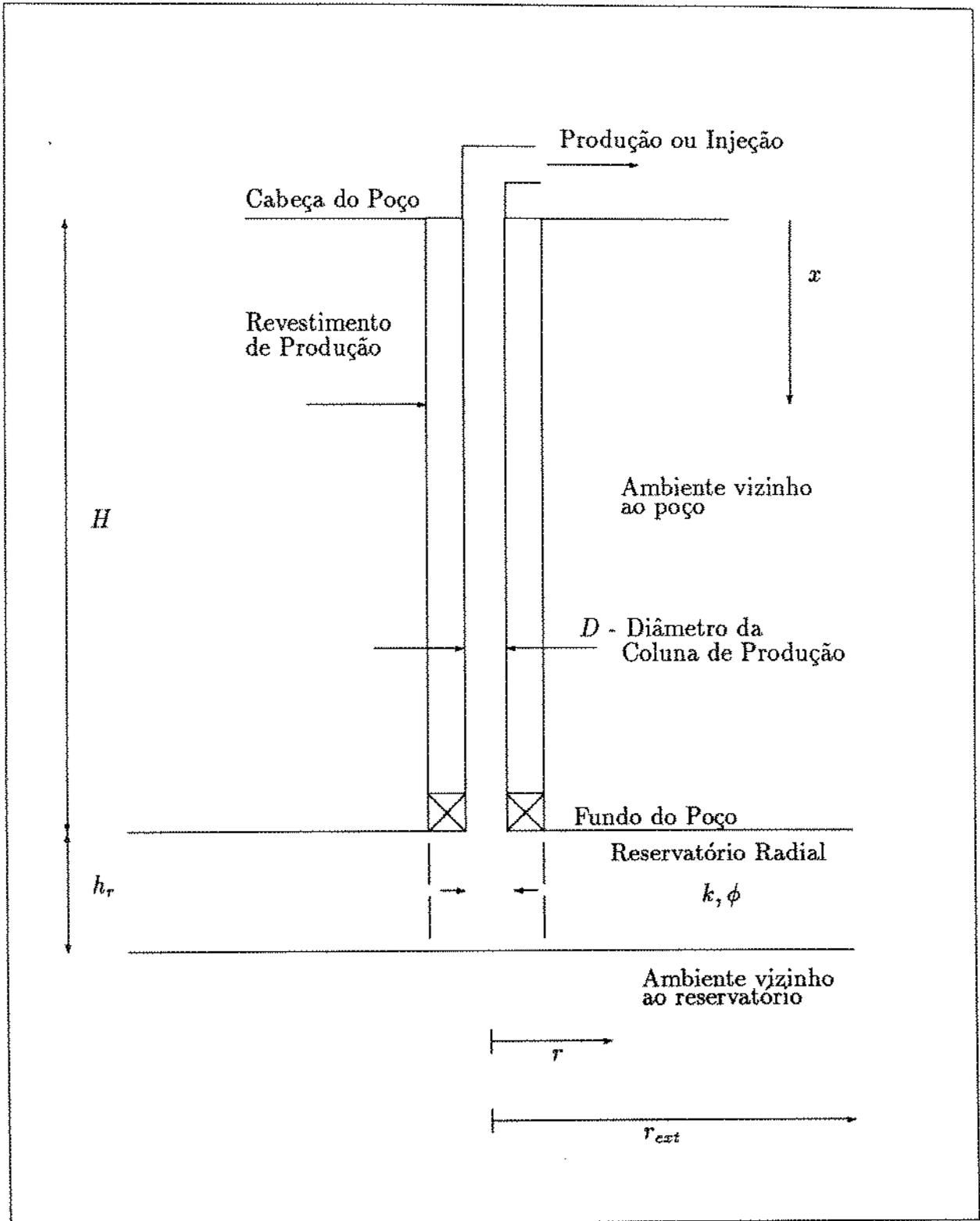


Figura 2.1: Representação esquemática do sistema interligado poço-reservatório.

resultando em um valor total, que era aplicado nas equações.

A hipótese de inclinação constante simplifica os programas computacionais desenvolvidos, além de não comprometer a nossa análise. O efeito da inclinação constante é rapidamente considerada multiplicando a aceleração da gravidade pelo cosseno do ângulo que o poço forma com a vertical.

O FLUIDO considerado tem propriedades termodinâmicas e físicas que, em cada posição e em cada instante, são determinadas como função exclusiva da pressão e da temperatura locais naquele instante. Nesta condição estão incluídos os escoamentos monofásicos. Em uma primeira aproximação esta hipótese é válida para misturas do tipo líquido—líquido ou líquido—gás, desde que não exista escorregamento entre as fases. As propriedades médias da mistura podem ser obtidas a partir das propriedades de cada fase, obedecendo regras apropriadas de mistura.

Os efeitos térmicos introduzidos pelo fluido são diretamente considerados através de sua expansividade térmica, ou, em consequência, do coeficiente de Joule-Thompson, que relaciona as variações de pressão às variações de temperatura.

O RESERVATÓRIO é considerado circular e de espessura constante. Seus poros são preenchidos apenas pelo fluido que escoar, descartando efeitos de segregação gravitacional e capilaridade. O escoamento é considerado unidimensional, estando isolado ao fluxo de massa nas suas cotas superior e inferior. A condição externa pode ser mantida à pressão constante ou isolada ao fluxo. A permeabilidade da rocha será considerada uma função da posição radial, a fim de possibilitar a investigação dos efeitos causados por um dano na formação.

Como hipótese simplificadora será considerado, no interior do reservatório, um equilíbrio local de temperaturas entre o fluido e a matriz rochosa. Uma opção mais realista, que não foi considerada neste trabalho, seria tomar cada um como um sistema distinto, onde, em cada posição radial, haveria trocas de calor devido à diferença entre as suas temperaturas. Nesse caso seria necessário um modelo adicional que representasse a convecção do calor entre os dois meios. Matematicamente, em consequência da aplicação da equação da energia para cada um dos meios, haveria em um maior número de equações diferenciais, onde a temperatura da rocha, em cada posição, seria tratada como uma nova variável dependente.

Os ambientes vizinhos ao reservatório, nas cotas superior e inferior, são considerados como grandes reservatórios térmicos, ou seja, não há variação de temperatura ao longo do tempo, que são consideradas iguais à temperatura original do reservatório. De modo análogo ao poço, o fluxo térmico é calculado através de um coeficiente de troca de calor que será admitido constante, multiplicado pela diferença entre as temperaturas em

cada posição.

Um modelo mais realista para considerar as trocas de calor exigiria uma modelagem mais cuidadosa do meio externo. A princípio seria necessário considerar uma nova dimensão geométrica a fim de se considerar os efeitos do fluxo de calor no interior desse ambiente. Dessa maneira seria possível prever o comportamento de sua temperatura ao longo do tempo, aprimorando a estimativa do valor das trocas de calor com o sistema de interesse. Do ponto de vista matemático, entretanto, novas equações de conservação de energia seriam acopladas ao sistema geral de equações diferenciais, tornando muito mais lenta a sua solução numérica. Provavelmente (mas a ser comprovado) a influência desse modelo mais elaborado não seja mais significativa do que as variações causadas por diferentes estimativas dos valores das propriedades físicas do meio.

## 2.2 Hipóteses Básicas do Modelo

- Quanto ao fluido produzido ou injetado:
  1. Não há variação composicional;
  2. Não há escorregamento entre as fases;
  3. O fluido é pseudo-homogêneo; isto é, as propriedades físicas e termodinâmicas são funções apenas da pressão e da temperatura.
  
- No poço:
  1. Escoamento unidimensional;
  2. Diâmetro constante;
  3. Inclinação com a vertical constante;
  4. Coeficiente de troca de calor com as formações adjacentes constante;
  5. A espessura da formação produtora é pequena em relação à profundidade do poço.
  
- No reservatório:
  1. Escoamento unidimensional;
  2. Escoamento horizontal e radial;
  3. Reservatório circular;
  4. Espessura constante;
  5. Não há segregação gravitacional;

6. Equilíbrio local de temperaturas entre a rocha e o fluido;
  7. Capacidade térmica da rocha constante;
  8. Condutibilidade térmica no reservatório constante;
  9. Formações acima e abaixo do reservatório têm a mesma temperatura;
  10. Não há contribuição térmica devido aos efeitos viscosos do escoamento.
- Na junção poço-reservatório:
    1. Há igualdade de pressão entre a posição do fundo do poço e a posição radial interna do reservatório; os efeitos decorrentes da mudança da direção das linhas de fluxo não são considerados;
    2. Há igualdade de temperaturas entre a posição do fundo do poço e a posição radial interna do reservatório.

# Capítulo 3

## Modelo Isotérmico: Formulação Matemática

### 3.1 O Poço

O escoamento unidimensional de um fluido pseudo-homogêneo em um poço petrolífero quase vertical de secção transversal constante, para uma condição isotérmica, pode ser previsto através de um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, resultante das equações médias temporais-espaciais de conservação da massa e de conservação da quantidade de movimento, conforme descrito no Apêndice A. Essas equações são, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} - \rho g + \rho \frac{f_o}{2D} v |v| = 0 \quad (3.2)$$

onde  $P$  é a pressão,  $\rho$  é a massa específica,  $v$  é a velocidade do fluido,  $D$  o diâmetro do poço e  $f_o$  é o fator de atrito. As equações serão resolvidas nas variáveis dependentes:

$$v = v(x, t) \quad (3.3)$$

$$P = P(x, t) \quad (3.4)$$

com ajuda das seguintes leis constitutivas:

$$\rho = \rho(P) \quad (3.5)$$

$$\mu = \mu(P) \quad (3.6)$$

e da fórmula para o coeficiente de atrito, também descrita no Apêndice A:

$$f_o = f_o(P, v) = \frac{0.16}{Re^{0.172}} \quad (3.7)$$

onde:

$$Re = \frac{\rho D |v|}{\mu} \quad (3.8)$$

A velocidade isotérmica de propagação da onda de pressão no fluido é definida por:

$$a = a(P) = \left( \frac{d\rho}{dP} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

e o parâmetro  $E$  por:

$$E = E(P, v) = g - \frac{1}{2} \frac{f_o}{D} v |v| \quad (3.10)$$

Com o auxílio de (3.9) e (3.10) o sistema formado pelas equações (3.1,2) se torna:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} - \rho E = 0 \quad (3.12)$$

## 3.2 O Reservatório

O escoamento unidimensional de um fluido pseudo-homogêneo em um reservatório radial é determinado pela associação da equação da conservação da massa à Lei de Darcy, resultando, conforme mostrado no Apêndice A, na equação da difusividade:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \quad (3.13)$$

a ser resolvida na variável dependente:

$$P = P(r, t) \quad (3.14)$$

com a ajuda das seguintes leis constitutivas:

$$\rho = \rho(P) \quad (3.15)$$

$$\mu = \mu(P) \quad (3.16)$$

$$\phi = \phi(P) \quad (3.17)$$

$$k = k(r) \quad (3.18)$$

A porosidade da formação,  $\phi$ , é uma função da pressão local; pode ser determinada pela definição da compressibilidade da rocha,  $c_r$ , a qual será admitida constante:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dP} = \text{const} \quad (3.19)$$

Integrando (3.19) obtemos:

$$\phi = \phi_0 e^{c_r(P-P_0)} \quad (3.20)$$

onde  $\phi_0$  é o valor da porosidade em uma pressão de referência  $P_0$ .

Para estudar a influência de um dano na formação, o valor da permeabilidade,  $k$ , está sendo proposto como uma função da posição radial; será considerada uma região afetada, representada pelo raio  $r'$ , onde o valor da permeabilidade original é alterado para um novo valor  $k'$ . O coeficiente de película,  $S$ , é o parâmetro que mede a intensidade do dano. A fórmula proposta por Hawkins [14] define a relação entre os valores originais e os afetados pelo dano:

$$S = \left( \frac{k}{k'} - 1 \right) \ln \left( \frac{r'}{r_w} \right) \quad (3.21)$$

### 3.3 Condições de Contorno

- **Condição Inicial.**

Trataremos de um problema de valor inicial, ou seja, para o instante inicial são conhecidas as seguintes condições :

Poço -

$$P = P(x, 0) \quad (3.22)$$

$$v = v(x, 0) \quad (3.23)$$

Reservatório -

$$P = P(r, 0) \quad (3.24)$$

- Condição na Junção Poço-Reservatório.

A condição no fundo do poço é determinada pela continuidade da pressão e da vazão na posição interfacial entre o poço e o reservatório:

$$Q_{POCO_{z=H}} = Q_{RES_{r=r_w}} \quad (3.25)$$

$$P_{POCO_{z=H}} = P_{RES_{r=r_w}} \quad (3.26)$$

Observa-se que, com mais rigor, poderíamos utilizar a profundidade  $H + \frac{h_r}{2}$ , porém como a espessura do reservatório é muito menor que a profundidade do poço esta correção é desprezada.

- Condição na Cabeça do Poço.

Três condições distintas serão estudadas para a condição na cabeça do poço:

1. Velocidade conhecida ao longo do tempo.

$$v = v(0, t) \quad (3.27)$$

Essa condição é a que possibilita o estudo do fechamento de um poço; ou seja, após o instante da interrupção do escoamento vale a igualdade  $v(0, t) = 0$ .

2. Pressão conhecida ao longo do tempo:

$$P = P(0, t) \quad (3.28)$$

Utilizada para especificar a abertura do poço para um ambiente com pressão conhecida.

3. Fluxo volumétrico constante em condição padrão:

$$\dot{w} = \rho v = \dot{w}(0, t) = \text{const} \quad (3.29)$$

É equivalente a um fluxo de massa constante sendo equacionado para a cabeça do poço como  $\dot{w} = v(0, t) \cdot \rho(0, t) = \text{cte}$ , onde  $\dot{w}$  é a vazão mássica do fluido.

- Condição na Face Externa do Reservatório.

Duas condições distintas são propostas no limite externo do reservatório:

1. Pressão constante:

$$P = P(r_{ext}, t) = const \quad (3.30)$$

2. Reservatório selado ao fluxo:

$$\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r_{ext}} = 0 \quad (3.31)$$

### 3.4 Adimensionalização

O sistema pode ser adimensionalizado em relação aos seguintes parâmetros constantes:

- $(\bar{P})$ , Pressão original do reservatório;
- $(\bar{a})$ , Velocidade da onda na pressão original do reservatório;
- $(H)$ , Profundidade do poço;
- $(r_w)$ , Raio interno do reservatório;
- $(\bar{\mu})$ , Viscosidade do fluido na pressão original do reservatório.

Dessa forma, tem-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$P_D = \frac{P}{\bar{P}} \quad (3.32)$$

$$v_D = \frac{v}{\bar{a}} \quad (3.33)$$

$$a_D = \frac{a}{\bar{a}} \quad (3.34)$$

$$x_D = \frac{x}{H} \quad (3.35)$$

$$t_D = \frac{t\bar{a}}{H} \quad (3.36)$$

$$\rho_D = \rho \frac{\bar{a}^2}{\bar{P}} \quad (3.37)$$

$$\mu_D = \frac{\mu}{\bar{\mu}} \quad (3.38)$$

$$k_D = k \frac{\bar{P}H}{\bar{\mu}ar_w^2} \quad (3.39)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3.40)$$

$$E_D = \frac{H}{a^2} E \quad (3.41)$$

A equação da difusividade é mais facilmente resolvida através de uma mudança de variáveis que transforma a dimensão radial para uma escala logarítmica. Dessa forma, definimos:

$$\gamma_D = \ln r_D \quad (3.42)$$

Em consequência, o modelo matemático adimensionalizado do sistema poço-reservatório para o caso isotérmico se torna:

- Poço:

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D a_D^2 \frac{\partial v_D}{\partial x_D} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + \rho_D v_D \frac{\partial v_D}{\partial x_D} - \rho_D E_D = 0 \quad (3.44)$$

- Reservatório : adimensionalizando a equação (3.13) e usando (3.42) obtemos:

$$\frac{1}{\partial \gamma_D} \left( \frac{\rho_D k_D}{\mu_D} \frac{\partial P_D}{\partial \gamma_D} \right) = \phi e^{2\gamma} \left( \frac{d\rho_D}{dP_D} + \rho_D c_{r_D} \right) \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \quad (3.45)$$

onde  $c_{r_D}$  é a compressibilidade adimensional definida como  $c_{r_D} = c_r \bar{P}$ .

- Condições de Contorno:

Inicial:

Poço -

$$P_D = P_D(x_D, 0) \quad (3.46)$$

$$v_D = v_D(x_D, 0) \quad (3.47)$$

Reservatório -

$$P_D = P_D(\gamma_D, 0) \quad (3.48)$$

Junção:

$$Q_{DPOCO_{x_D=1}} = Q_{DRES_{\gamma_D=0}} \quad (3.49)$$

$$P_{DPOCO_{x_D=1}} = P_{DRES_{\gamma_D=0}} \quad (3.50)$$

Cabeça do Poço:

$$v_D = v_D(0, t_D) \quad \text{ou} \quad (3.51)$$

$$P_D = P_D(0, t_D) \quad \text{ou} \quad (3.52)$$

$$\dot{w}_D = v_D(0, t_D) \cdot \rho_D(0, t_D) = cte \quad (3.53)$$

Limite Externo do Reservatório:

$$P_D = P_D(r_{D_{ext}}, t_D) = cte \quad \text{ou} \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right|_{r_{D_{ext}}} = 0 \quad (3.55)$$

# Capítulo 4

## Modelo Isotérmico: Método de Solução

### 4.1 Aplicação do Método das Direções Características

O Sistema de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem (SEDPPO), expresso pelas equações (3.43,44) do capítulo precedente, e que representa o fluxo isotérmico no poço pode ser transformado em um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (SEDO). Para tanto, é inicialmente necessário efetuar uma combinação entre as equações originais para explicitar as assim chamadas “direções características” do sistema (ver Apêndice B). Partindo do SEDPPO adimensionalizado:

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D a_D^2 \frac{\partial v_D}{\partial x_D} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + \rho_D v_D \frac{\partial v_D}{\partial x_D} - \rho_D E_D = 0 \quad (4.2)$$

Multiplicando (4.2) por  $(\pm a_D)$  e somando (4.1), obtemos:

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} + (v_D + a_D) \frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D a_D \left[ \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + (v_D + a_D) \frac{\partial v_D}{\partial x_D} \right] - \rho_D a_D E_D = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} + (v_D - a_D) \frac{\partial P_D}{\partial x_D} - \rho_D a_D \left[ \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + (v_D - a_D) \frac{\partial v_D}{\partial x_D} \right] + \rho_D a_D E_D = 0 \quad (4.4)$$

Conforme o exposto no Apêndice B, cada equação resulta em um SEDO. Utilizando as variáveis  $(s_1)$  e  $(s_2)$ , que indicam as direções características explicitadas em cada equação, tem-se:

a) Para  $t_D = t_D(s_1)$ ,  $x_D = x_D(s_1)$ ,  $P_D = P_D(s_1)$  e  $v_D = v_D(s_1)$ , a equação (4.3) pode ser expressa pelo seguinte SEDO:

$$\frac{dP_D}{ds_1} + \rho_D a_D \frac{dv_D}{ds_1} - \rho_D a_D E_D = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{dt_D}{ds_1} = 1 \quad (4.6)$$

$$\frac{dx_D}{ds_1} = v_D + a_D \quad (4.7)$$

b) Para  $t_D = t_D(s_2)$ ,  $x_D = x_D(s_2)$ ,  $P_D = P_D(s_2)$  e  $v_D = v_D(s_2)$ , a equação (4.4) é representada pelo SEDO:

$$\frac{dP_D}{ds_2} - \rho_D a_D \frac{dv_D}{ds_2} + \rho_D a_D E_D = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{dt_D}{ds_2} = 1 \quad (4.9)$$

$$\frac{dx_D}{ds_2} = v_D - a_D \quad (4.10)$$

## 4.2 Solução Numérica pelo Método das Diferenças Finitas

### 4.2.1 Equações no Poço

Nota: No que segue, as variáveis adimensionais serão escritas sem o subscrito  $D$ , para maior facilidade de notação. Por exemplo, a posição  $x_{D_Q}$  será simplesmente  $x_Q$ .

#### 4.2.1.1 Pontos Internos:

**Equações Discretizadas:** Discretizando o SEDO completo (4.5-10) resultante da aplicação do método das direções características entre os pontos  $A(x_A, t_A)$ ,

$B(x_B, t_B)$  e  $Q(x_Q, t_Q)$ , representados no plano  $(x_D, t_D)$ , conforme detalhado na figura 4.1, obtemos:

$$\frac{x_Q - x_A}{t_Q - t_A} - (v_{QA} + a_{QA}) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{P_Q - P_A}{t_Q - t_A} + \rho_{QA} a_{QA} \frac{v_Q - v_A}{t_Q - t_A} - \rho_{QA} a_{QA} E_{QA} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{x_Q - x_B}{t_Q - t_B} - (v_{QB} - a_{QB}) = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{P_Q - P_B}{t_Q - t_B} - \rho_{QB} a_{QB} \frac{v_Q - v_B}{t_Q - t_B} + \rho_{QB} a_{QB} E_{QB} = 0 \quad (4.14)$$

As variáveis  $v_{QA}$  e  $v_{QB}$  representam os valores de  $v_D$  avaliados no intervalo  $\overline{QA}$  e  $\overline{QB}$ , respectivamente. De maneira análoga para  $a_{QA}$ ,  $a_{QB}$ , etc. Observa-se que foi utilizado  $t_Q - t_A = s_{1Q} - s_{1A}$  em (4.11-12), proveniente de (4.6) e, similarmente,  $t_Q - t_B = s_{2Q} - s_{2B}$  em (4.13-14) proveniente de (4.9).

O sistema não-linear formado possui 4 equações e 4 incógnitas. As incógnitas  $(x_Q, t_Q, P_Q, v_Q)$  são obtidas dos valores conhecidos nos pontos (A) e (B), a partir dos quais as equações são integradas, seguindo as direções características.

**Não Linearidades:** Os termos  $v, a, \rho, E$  são não lineares; um valor precisa ser avaliado para representar cada variável nos intervalos  $\overline{AQ}$  e  $\overline{BQ}$ . Normalmente, a discretização é realizada utilizando uma fórmula que pondera os valores nos pontos extremos do intervalo. Um coeficiente de implicitude ( $\alpha$ ), que será admitido constante, tem a função de especificar o peso de cada parcela.

Há diversas opções para a fórmula que avalia os termos não lineares. Por exemplo, o produto  $(\rho a)$ , considerado no intervalo  $\overline{AQ}$ , pode ser tratado das seguintes formas:

$$(\rho a)_{\text{AVALIADO}} = (1 - \alpha)(\rho a)_A + \alpha(\rho a)_Q \quad (4.15)$$

$$(\rho a)_{\text{AVALIADO}} = [(1 - \alpha)\rho_A + \alpha\rho_Q] \cdot [(1 - \alpha)a_A + \alpha a_Q] \quad (4.16)$$

$$(\rho a)_{\text{AVALIADO}} = \rho \left( (1 - \alpha)P_A + \alpha P_Q \right) \cdot a \left( (1 - \alpha)P_A + \alpha P_Q \right) \quad (4.17)$$

O programa computacional para o caso isotérmico foi desenvolvido empregando a segunda fórmula. O caso não-isotérmico, buscando maior simplicidade, utilizará a terceira. Desse modo, temos que:

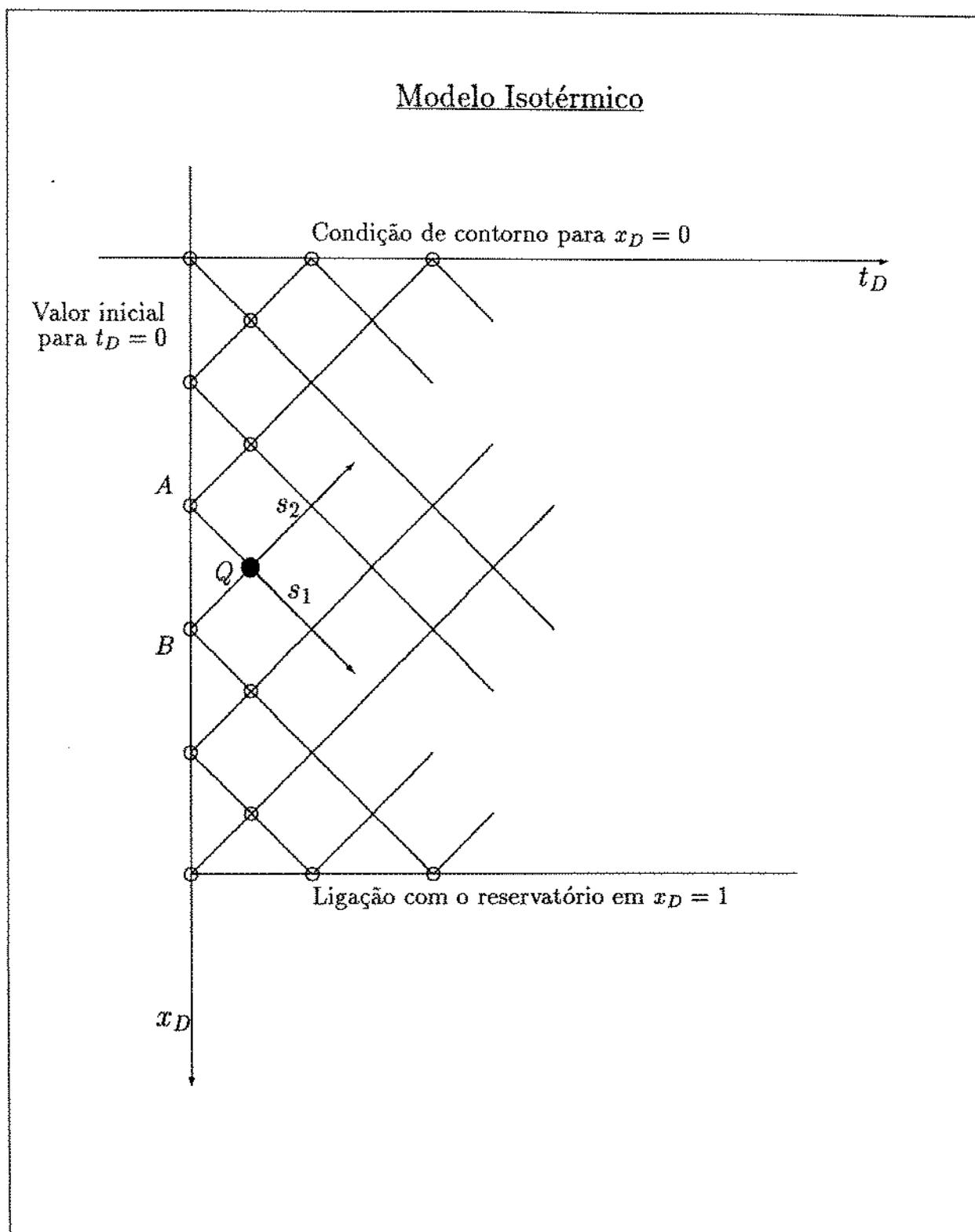


Figura 4.1: Discretização no domínio  $(x_D, t_D)$  no poço. Avanço das variáveis independentes seguindo as direções características.

$$v_{QA} = \alpha v_Q + (1 - \alpha)v_A \quad (4.18)$$

$$v_{QB} = \alpha v_Q + (1 - \alpha)v_B \quad (4.19)$$

$$a_{QA} = \alpha a_Q + (1 - \alpha)a_A \quad (4.20)$$

$$a_{QB} = \alpha a_Q + (1 - \alpha)a_B \quad (4.21)$$

$$E_{QA} = \alpha E_Q + (1 - \alpha)E_A \quad (4.22)$$

$$E_{QB} = \alpha E_Q + (1 - \alpha)E_B \quad (4.23)$$

$$\rho_{QA} = \alpha \rho_Q + (1 - \alpha)\rho_A \quad (4.24)$$

$$\rho_{QB} = \alpha \rho_Q + (1 - \alpha)\rho_B \quad (4.25)$$

**Solução Numérica do Sistema:** Entre os métodos disponíveis para resolver o sistema não-linear constituído pelas equações (4.11-14) dois foram seleccionados.

No primeiro, conhecido como método de substituição sucessiva, as incógnitas são explicitadas, uma em cada equação, e os seus valores calculados iterativamente, até que a convergência a algum valor fique caracterizada.

O segundo é o método iterativo de NEWTON-RAPHSON; para cada equação é definida uma função residual. Os valores do vetor definido por  $(x_Q, t_Q, P_Q, v_Q)$  são sucessivamente aproximados àqueles que zeram os valores das funções residuais. De acordo com as equações (4.11-14), tais funções podem ser definidas por:

$$R1 = (x_A - x_Q) + (t_Q - t_A)(v_{QA} + a_{QA}) \quad (4.26)$$

$$R2 = (P_Q - P_A) + \rho_{QA}a_{QA}(v_Q - v_A) - \rho_{QA}a_{QA}E_{QA}(t_Q - t_A) \quad (4.27)$$

$$R3 = (x_B - x_Q) + (t_Q - t_B)(v_{QB} - a_{QB}) \quad (4.28)$$

$$R4 = (P_Q - P_B) - \rho_{QB}a_{QB}(v_Q - v_B) + \rho_{QB}a_{QB}E_{QB}(t_Q - t_B) \quad (4.29)$$

ou seja:

$$R1 = R1(x_Q, t_Q, P_Q, v_Q) \quad (4.30)$$

$$R2 = R2(t_Q, P_Q, v_Q) \quad (4.31)$$

$$R3 = R3(x_Q, t_Q, P_Q, v_Q) \quad (4.32)$$

$$R4 = R4(t_Q, P_Q, v_Q) \quad (4.33)$$

A partir de uma estimativa inicial de  $x_Q, t_Q, P_Q$  e  $v_Q$  a aproximação numérica é feita somando-se à estimativa inicial os incrementos  $\delta x_Q, \delta t_Q, \delta P_Q$  e  $\delta v_Q$  obtidos a partir do seguinte sistema algébrico:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R1}{\partial x_Q} & \frac{\partial R1}{\partial t_Q} & \frac{\partial R1}{\partial P_Q} & \frac{\partial R1}{\partial v_Q} \\ 0 & \frac{\partial R2}{\partial t_Q} & \frac{\partial R2}{\partial P_Q} & \frac{\partial R2}{\partial v_Q} \\ \frac{\partial R3}{\partial x_Q} & \frac{\partial R3}{\partial t_Q} & \frac{\partial R3}{\partial P_Q} & \frac{\partial R3}{\partial v_Q} \\ 0 & \frac{\partial R4}{\partial t_Q} & \frac{\partial R4}{\partial P_Q} & \frac{\partial R4}{\partial v_Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_Q \\ \delta t_Q \\ \delta P_Q \\ \delta v_Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

O capítulo (7) contém alguns comentários sobre a eficiência dos dois métodos, quando aplicados a estes problemas específicos.

#### 4.2.1.2 Condição de Contorno na Cabeça do Poço

A discretização é realizada aplicando-se as equações (4.13-14) entre os pontos (B) e (Q) e definindo as seguintes funções residuais:

$$R5 = (x_B - x_Q) + (t_Q - t_B)(v_{QB} - a_{QB}) \quad (4.35)$$

$$R6 = (P_Q - P_B) - \rho_{QB} a_{QB} (v_Q - v_B) + \rho_{QB} a_{QB} E_{QB} (t_Q - t_B) \quad (4.36)$$

A posição ( $x_Q = 0$ ) é conhecida. Temos 2 equações e 3 incógnitas ( $t_Q, P_Q, v_Q$ ). É necessário uma relação adicional sobre as outras incógnitas em função do tempo. Essa relação adicional é dada pela condição de contorno na cabeça do poço. Três diferentes condições são propostas:

**Velocidade conhecida:** A equação adicional é dada pela condição (3.51), ou seja,  $v_D = v_D(t_D)$ , que é o valor  $v_Q$  conhecido. Os valores da pressão,  $P_Q$ , e do tempo,  $t_D$ , são determinados iterativamente, a partir de uma estimativa inicial, somando a ela as parcelas  $\delta t_Q$  e  $\delta P_Q$  calculadas a partir do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R5}{\partial t_Q} & \frac{\partial R5}{\partial P_Q} \\ \frac{\partial R6}{\partial t_Q} & \frac{\partial R6}{\partial P_Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta t_Q \\ \delta P_Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R5 \\ R6 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

**Pressão conhecida:** A equação adicional é dada pela condição (3.52)  $P_D = P_D(0, t_D)$  ou seja,  $P_Q = P_Q(t_Q)$ . De modo análogo, os valores da velocidade,  $v_Q$ , e do tempo,  $t_Q$ , são determinados iterativamente através do sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R5}{\partial t_Q} & \frac{\partial R5}{\partial v_Q} \\ \frac{\partial R6}{\partial t_Q} & \frac{\partial R6}{\partial v_Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta t_Q \\ \delta P_Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R5 \\ R6 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

**Vazão mássica constante:** Uma nova equação é adicionada ao sistema, ou seja,  $\dot{w}_Q = \rho_Q \cdot v_Q$ , a partir da qual uma função residual é definida:

$$R6A = R6A(t_Q, P_Q, v_Q) = \dot{w}_Q - \rho_Q \cdot v_Q \quad (4.39)$$

Novamente as estimativas iniciais dos valores da pressão ( $P_Q$ ), da velocidade ( $v_Q$ ) e do tempo ( $t_Q$ ) são incrementados com a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R5}{\partial t_Q} & \frac{\partial R5}{\partial P_Q} & \frac{\partial R5}{\partial v_Q} \\ \frac{\partial R6}{\partial t_Q} & \frac{\partial R6}{\partial P_Q} & \frac{\partial R6}{\partial v_Q} \\ \frac{\partial R6A}{\partial t_Q} & \frac{\partial R6A}{\partial P_Q} & \frac{\partial R6A}{\partial v_Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta t_Q \\ \delta P_Q \\ \delta v_Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R5 \\ R6 \\ R6A \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

## 4.2.2 Equações no Reservatório

A equação da difusividade adimensionalizada, (3.45),

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_D} \left( \frac{\rho_D k_D}{\mu_D} \frac{\partial P_D}{\partial \gamma_D} \right) = \phi e^{2\gamma} \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial P_D} + \rho_D c_{rD} \right) \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \quad (4.41)$$

pode ser discretizada para um ponto genérico ( $i$ ), conforme representação esquemática mostrada na figura 4.2, utilizando diferenças finitas centradas no espaço e atrasada no tempo, com incrementos  $\Delta \gamma$  constante. Disso resulta <sup>1</sup>:

$$\frac{1}{\Delta \gamma} \left[ \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta \gamma} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left( \frac{P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}}{\Delta \gamma} \right) \right] = \phi_i e^{2\gamma_i} \left( \frac{d\rho_D}{dP_D} + \rho_{D_i} c_{rD} \right)_i \left( \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t_D} \right) \quad (4.42)$$

onde:

$$\lambda_i = \lambda(P_{D_i}) = \left( \frac{k_D \rho_D}{\mu_D} \right)_i^{n+1} \quad (4.43)$$

$$\phi_i = \phi_0 e^{c_{rD}(P_{D_i}-1)} \quad (4.44)$$

$$\Delta t_D = t_Q^{n+1} - t_Q^n \quad (4.45)$$

A transmissibilidade adimensional,  $\lambda$ , será avaliada em um ponto intermediário onde o valor da pressão é obtido da média aritmética simples dos valores da pressão nos pontos extremos.

Definindo:

$$\varphi_i = \varphi_i(t_D, P_D) = \phi_i e^{2\gamma_i} \frac{\Delta \gamma^2}{\Delta t_D} \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial P_D} + \rho_{D_i} c_{rD} \right)_i \quad (4.46)$$

podemos escrever:

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}} P_{i-1}^{n+1} - (\lambda_{i-\frac{1}{2}} + \varphi_i + \lambda_{i+\frac{1}{2}}) P_i^{n+1} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} P_{i+1}^{n+1} = -\varphi_i P_i^n \quad (4.47)$$

<sup>1</sup>No que segue, as variáveis adimensionais  $\lambda_D$ ,  $\gamma_D$  e  $P_D$  serão utilizadas sem o subscrito  $D$ , para facilidade de notação.

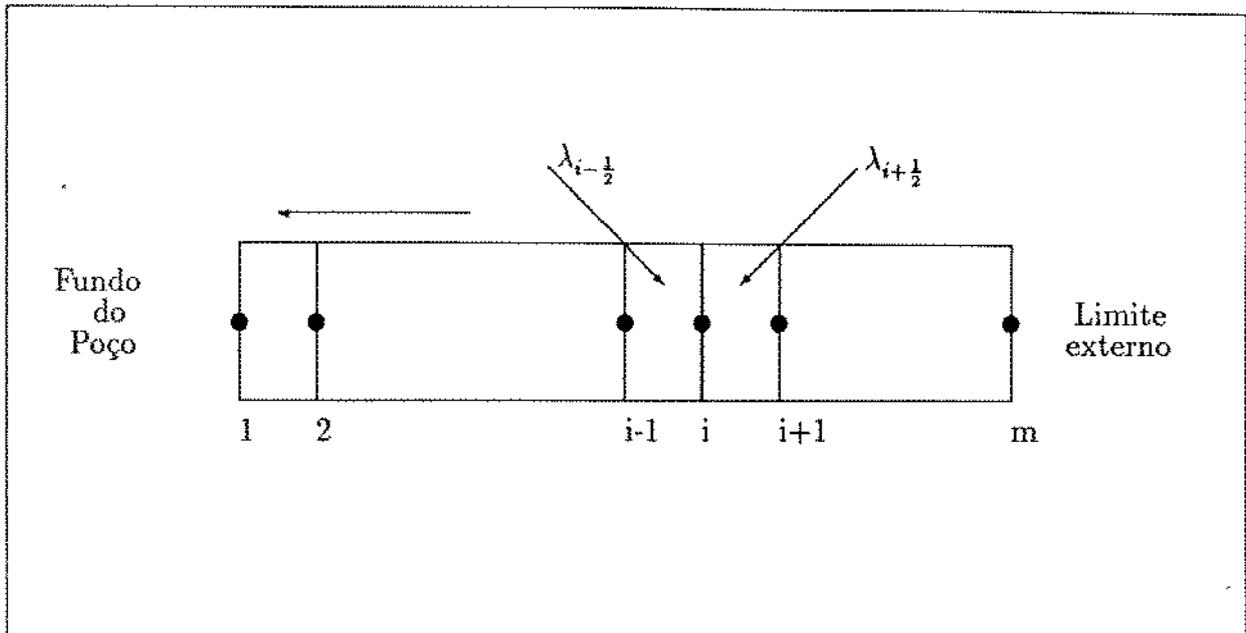


Figura 4.2: Representação esquemática da discretização no reservatório.

A equação (4.47) apresenta variáveis não lineares, cuja solução numérica é efetuada utilizando métodos iterativos. Uma função residual pode ser definida para cada equação :

$$R_i = \lambda_{i-\frac{1}{2}} P_{i-1}^{n+1} - (\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \varphi_i + \lambda_{i-\frac{1}{2}}) P_i^{n+1} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} P_{i+1}^{n+1} + \varphi_i P_i^n \quad (4.48)$$

#### 4.2.2.1 Condição de Contorno no Limite Externo

Conforme exposto no capítulo precedente, duas condições podem ser empregadas:

**Pressão Constante:** Neste caso, a pressão no limite externo do reservatório é fixada em qualquer instante do tempo. Em consequência, usando (3.54), tem-se  $P_m = 1$  e a definição da seguinte função residual:

$$R_m = P_m - 1 \quad (4.49)$$

**Selado ao Fluxo:** Neste caso, a variação da pressão em relação à coordenada radial é nula. Logo, usando (3.55), a condição discretizada resulta em  $P_{m-1} = P_{m+1}$  e na seguinte função residual:

$$R_m = 2\lambda_{m-\frac{1}{2}} P_{m-1}^{n+1} - (2\lambda_{m-\frac{1}{2}} + \varphi_m) P_m^{n+1} + \varphi_m P_m^n \quad (4.50)$$

### 4.2.3 Junção Poço-Reservatório

A junção poço-reservatório é realizada acoplando-se as equações características, para  $x_D = 1$ , à equação da difusividade com a finalidade de determinar os valores das variáveis comuns aos dois sub-sistemas. A figura 4.3 mostra a representação esquemática dos pontos discretizados que formam a junção.

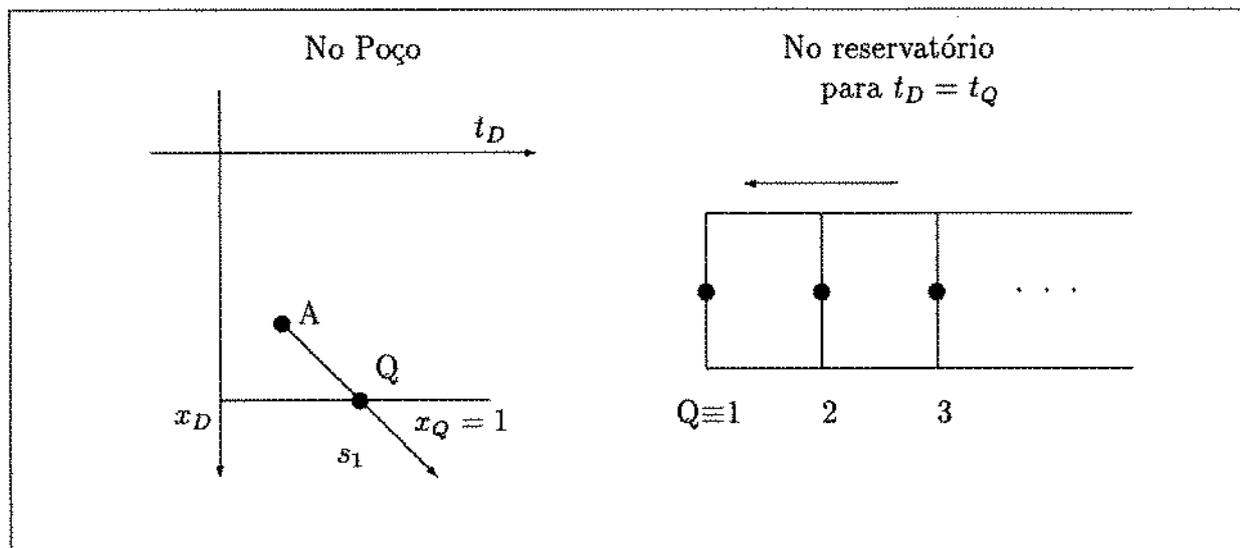


Figura 4.3: Representação esquemática mostrando os pontos discretizados envolvidos na junção poço-reservatório.

As equações características discretizadas são utilizadas entre os pontos (A) e (Q), definindo as seguintes funções residuais:

$$R7 = (x_A - x_Q) + (t_Q - t_A)(v_{QA} + a_{QA}) \quad (4.51)$$

$$R8 = (P_Q - P_A) + \rho_{QA} a_{QA} (v_Q - v_A) - \rho_{QA} a_{QA} E_{QA} (t_Q - t_A) \quad (4.52)$$

ou seja, como  $x_Q$  é conhecido na junção:

$$R7 = R7(t_Q, P_Q, v_Q) \quad (4.53)$$

$$R8 = R8(t_Q, P_Q, v_Q) \quad (4.54)$$

A continuidade da vazão mássica e da pressão podem ser aplicadas à junção do poço ao reservatório. Lembrando que  $\rho = \rho(P)$ , ambas resultam na condição de igualdade das vazões volumétricas. Igualando a vazão volumétrica que atravessa a secção transversal do duto à vazão volumétrica que cruza a posição radial interna do reservatório, adimensionalizados, obtém-se a equação:

$$v_{DPOCO} = -2 \frac{k_D h_r r_w^2}{\mu_D H r_T^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} \quad (4.55)$$

que discretizada define a função residual seguinte:

$$R9 = R9(v_Q, P_Q, P_2, P_3) = v_Q + 2 \frac{k_D h_r r_w^2}{\mu_D H r_T^2} \left( \frac{-3P_Q + 4P_2 - P_3}{2\Delta\gamma} \right) \quad (4.56)$$

onde  $P_Q = P_1$ , conforme pode ser verificado na figura 4.3.

A junção poço-reservatório é implementada com a solução simultânea dessas equações acrescentadas às equações do escoamento no meio poroso. Novamente, a solução numérica consiste em zerar o conjunto de funções residuais:

$$\left\{ \begin{array}{l} R7 = R7(t_Q, v_Q, P_Q); \\ R8 = R8(t_Q, v_Q, P_Q); \\ R9 = R9(v_Q, P_Q, P_2, P_3); \\ R_i = R_i(v_Q, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}), \quad i = 2, m-1; \\ \vdots \\ \vdots \\ R_m = R_m(P_m) \quad \text{ou} \\ R_m = R_m(P_{m-1}, P_m). \end{array} \right. \quad (4.57)$$

Daí resultam  $(m+2)$  equações e  $(m+2)$  incógnitas. Analogamente, a solução é obtida iterativamente pelo método de Newton-Raphson, somando a uma estimativa inicial as parcelas obtidas da equação matricial:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial R7}{\partial t_Q} & \frac{\partial R7}{\partial v_Q} & \left\{ \frac{\partial R7}{\partial P_Q} \right\} & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{\partial R8}{\partial t_Q} & \frac{\partial R8}{\partial v_Q} & \frac{\partial R8}{\partial P_Q} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \frac{\partial R9}{\partial v_Q} & \frac{\partial R9}{\partial P_Q} & \frac{\partial R9}{\partial P_2} & \left\{ \frac{\partial R9}{\partial P_3} \right\} & \dots & 0 \\
 \frac{\partial R_2}{\partial t_Q} & & \dots & \dots & \dots & & \\
 \vdots & & & \dots & \dots & \dots & \\
 \frac{\partial R_{m-1}}{\partial t_Q} & & & & & & \\
 X & & & & & X & X
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta t_Q \\
 \delta v_Q \\
 \delta P_Q \\
 \delta P_2 \\
 \vdots \\
 \delta P_m
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 R7 \\
 R8 \\
 R9 \\
 R_2 \\
 \vdots \\
 R_m
 \end{bmatrix}
 \quad (4.58)$$

Vários algoritmos foram desenvolvidos para reduzir o tempo dispendido no cálculo desse sistema. O que apresentou melhor resultado vetoriza as diagonais e a primeira coluna da matriz e procede a uma eliminação gaussiana da diagonal superior. Os termos que estão destacados entre as chaves são previamente eliminados através de uma combinação linear com as outras equações do sistema.

## Capítulo 5

# Modelo Não Isotérmico: Formulação Matemática

### 5.1 O Poço

O escoamento unidimensional de um fluido pseudo-homogêneo em um poço petrolífero quase vertical de secção transversal constante, pode ser previsto através de um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, resultante das equações médias temporais-espaciais de conservação da massa, de conservação da quantidade de movimento e de conservação da energia, as quais são analisadas em detalhes no Apêndice A. Essas equações são:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} - \rho g + \rho \frac{f_e}{2D} v |v| = 0 \quad (5.2)$$

$$\rho c_P \frac{d\theta}{dt} - \beta \theta \frac{dP}{dt} + \frac{4\sigma_1}{D} (\theta - \theta_{ext}) - \frac{1}{2} \rho \frac{f_e}{D} v^2 |v| = 0 \quad (5.3)$$

Além dos parâmetros utilizados no escoamento isotérmico, temos aqui a temperatura,  $\theta$ ; o coeficiente de troca de calor no poço,  $\sigma_1$ ; o coeficiente de expansividade do fluido,  $\beta$ ; e o calor específico a pressão constante,  $c_P$ . As equações (5.1-3) são resolvidas nas variáveis dependentes:

$$P = P(x, t) \quad (5.4)$$

$$v = v(x, t) \quad (5.5)$$

$$\theta = \theta(x, t) \quad (5.6)$$

com o auxílio das seguintes leis constitutivas:

$$\rho = \rho(P, \theta) \quad (5.7)$$

$$\mu = \mu(P, \theta) \quad (5.8)$$

$$c_P = c_P(P, \theta) \quad (5.9)$$

$$\beta = \beta(P, \theta) \quad (5.10)$$

$$f_o = f_o(P, \theta, v) \quad (5.11)$$

A equação (5.1) pode ser reescrita, usando (5.7), para apresentar apenas as derivadas de pressão, temperatura e velocidade. Os termos resultantes contendo derivadas em relação à temperatura podem ser eliminados através de uma combinação com a equação (5.3). Esse procedimento torna o formato do sistema semelhante ao do caso isotérmico. As seguintes definições são úteis:

$$a = a(P, \theta) = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_{\theta} - \frac{\theta \beta^2}{c_P} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$E_2 = E_2(P, \theta, v) = g - \frac{1}{2} \frac{f_o}{D} v |v| \quad (5.13)$$

$$E_3 = E_3(P, \theta, v) = \frac{4\sigma_1}{D} (\theta - \theta_{ext}) - \frac{1}{2} \rho \frac{f_o}{D} v^2 |v| \quad (5.14)$$

Pode-se provar que a equação (5.12) corresponde à velocidade isentrópica de propagação do som no fluido. Com a ajuda dessas definições as equações (5.1-3) se tornam, respectivamente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\beta a^2}{c_P} E_3 = 0 \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} - \rho E_2 = 0 \quad (5.16)$$

$$\rho c_P \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \beta \theta \left( \frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} \right) + E_3 = 0 \quad (5.17)$$

## 5.2 O Reservatório

O escoamento unidimensional de um fluido pseudo-homogêneo em um reservatório radial é determinado pela associação da equação de conservação da massa à Lei de Darcy, resultando na equação da difusividade:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \quad (5.18)$$

a ser resolvida na variável dependente:

$$P = P(r, t) \quad (5.19)$$

com a ajuda das seguintes leis constitutivas:

$$\rho = \rho(P, \theta) \quad (5.20)$$

$$\mu = \mu(P, \theta) \quad (5.21)$$

$$\phi = \phi(P) \quad (5.22)$$

$$k = k(r) \quad (5.23)$$

Note-se que a única diferença em relação ao sistema isotérmico, descrito no capítulo 3, equações (3.13-18), é a inclusão da dependência da temperatura na massa específica ( $\rho$ ) e na viscosidade ( $\mu$ ).

A porosidade da formação é uma função da pressão local. Pode ser determinada através da definição da compressibilidade da rocha, que será admitida constante:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dP} \quad (5.24)$$

$$\phi = \phi_0 e^{c_r(P-P_0)} \quad (5.25)$$

Para estudar a influência de um dano na formação, o valor da permeabilidade está sendo proposto como uma função da posição radial. Será considerada uma região

afetada, representada pelo raio,  $r'$ , onde o valor da permeabilidade original é alterado para um novo valor,  $k'$ . O coeficiente de película,  $S$ , é o parâmetro que mede a intensidade do dano. A fórmula proposta por Hawkins [14] define a relação entre os valores originais e os afetados pelo Dano:

$$S = \left( \frac{k}{k'} - 1 \right) \ln \left( \frac{r'}{r_w} \right) \quad (5.26)$$

Aplicando a equação da energia, na forma térmica, a uma matriz rochosa de porosidade ( $\phi$ ), por onde escoo um fluido pseudo-homogêneo, conforme detalhado no Apêndice A, vem que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sigma_3 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{2\sigma_2}{h_r} (\theta - \theta_{res}) = (C_R + \rho c_P \phi) \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \rho c_P \frac{\partial \theta}{\partial r} - \beta \theta \left( \phi \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (5.27)$$

Os valores da capacidade térmica da rocha,  $C_R$ , bem como o dos coeficientes de troca de calor por condução no interior do reservatório,  $\sigma_2$ , e de trocas com os ambientes vizinhos,  $\sigma_3$ , além da temperatura da formação vizinha,  $\theta_{res}$ , são considerados constantes.

### 5.3 Condições de Contorno

- **Condição Inicial.**

Trataremos de um Problema de Valor Inicial, ou seja, para o instante inicial são conhecidas as seguintes condições:

Poço

$$P = P(x, 0) \quad (5.28)$$

$$\theta = \theta(x, 0) \quad (5.29)$$

$$v = v(x, 0) \quad (5.30)$$

Reservatório

$$P = P(r, 0) \quad (5.31)$$

$$\theta = \theta(r, 0) \quad (5.32)$$

- Condição de Interface.

A condição no fundo do poço é determinada pela continuidade da pressão, da temperatura e da vazão na posição interfacial, entre o poço e o reservatório:

Junção

$$Q_{POCO_{z=H}} = Q_{RES_{r=r_w}} \quad (5.33)$$

$$\theta_{POCO_{z=H}} = \theta_{RES_{r=r_w}} \quad (5.34)$$

$$P_{POCO_{z=H}} = P_{RES_{r=r_w}} \quad (5.35)$$

- Condição de Contorno na Cabeça do Poço.

Três condições distintas serão estudadas para a condição na cabeça do poço:

1. Velocidade conhecida ao longo do tempo.

$$v = v(0, t) \quad (5.36)$$

Esta condição é a que possibilita o estudo do fechamento de um poço. Ou seja, após o instante da interrupção do escoamento vale a igualdade  $v(0, t) = 0$ .

2. Pressão conhecida ao longo do tempo.

$$P = P(0, t) \quad (5.37)$$

Utilizada para especificar a abertura do poço para um ambiente com pressão conhecida.

3. Fluxo volumétrico constante em condição padrão.

$$\dot{w} = \rho v = \dot{w}(0, t) = \text{const} \quad (5.38)$$

É equivalente a um fluxo de massa constante, sendo equacionado para a cabeça do poço com  $\dot{w} = v(0, t) \cdot \rho(0, t) = \text{cte}$ , onde  $\dot{w}$  é a vazão mássica do fluido.

- Condição de Contorno na Face Externa do Reservatório.

Duas condições distintas são propostas para o limite externo do reservatório:

1. Pressão constante:

$$P = P(r_{ext}, t) = cte \quad (5.39)$$

2. Reservatório selado ao fluxo:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r_{ext}} = 0 \quad (5.40)$$

- Condições de Contorno Térmicas.

- Algumas condições de contorno térmicas dependem do poço estar produzindo ou recebendo a injeção do fluido.

No caso de um poço produtor deve ser especificado a condição térmica no limite externo do Reservatório. Neste caso será adotado que a temperatura permanece constante ao longo do tempo.

$$\theta_R = \theta_R(r_{ext}, t) = \theta_{res} = cte \quad (5.41)$$

Caso o poço fosse injetor seria necessário especificar, ao longo do tempo, a temperatura do fluido injetado na cabeça do poço:

$$\theta = \theta(0, t) \quad (5.42)$$

- Mais uma condição térmica é necessária para a solução das equações diferenciais. A condição que é normalmente utilizada não considera a existência de fluxo térmico decorrente do mecanismo de condução entre o reservatório e o poço, ou seja:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} = 0 \quad (5.43)$$

## 5.4 Adimensionalização

O sistema pode ser adimensionalizado em relação aos seguintes parâmetros

- $(\bar{P})$ , Pressão original do reservatório;

- $(\bar{a})$ , Velocidade da onda nas condições originais do reservatório;
- $(H)$ , Profundidade do poço
- $(r_w)$ , Raio interno do reservatório;
- $(\bar{\mu})$ , Viscosidade do fluido nas condições originais;
- $(\overline{\Delta\theta})$ , Diferença entre as Temperaturas no Reservatório e na Cabeça do Poço.

Dessa forma, têm-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$P_D = \frac{P}{\bar{P}} \quad (5.44)$$

$$v_D = \frac{v}{\bar{a}} \quad (5.45)$$

$$a_D = \frac{a}{\bar{a}} \quad (5.46)$$

$$x_D = \frac{x}{H} \quad (5.47)$$

$$t_D = \frac{t\bar{a}}{H} \quad (5.48)$$

$$\rho_D = \rho \frac{\bar{a}^2}{\bar{P}} \quad (5.49)$$

$$\mu_D = \frac{\mu}{\bar{\mu}} \quad (5.50)$$

$$k_D = k \frac{\bar{P}H}{\bar{\mu}\bar{a}r_w^2} \quad (5.51)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (5.52)$$

$$c_{P_D} = c_P \frac{\overline{\Delta\theta}}{\bar{a}^2} \quad (5.53)$$

$$\beta_D = \beta \overline{\Delta\theta} \quad (5.54)$$

$$u_D = u \frac{Hr_w}{r_i^2 \bar{a}} \quad (5.55)$$

$$\sigma_{2D} = \sigma_2 \frac{Hh_r \overline{\Delta\theta}}{\bar{P}\bar{a}} \quad (5.56)$$

$$\sigma_{3D} = \sigma_3 \frac{H\overline{\Delta\theta}}{\bar{P}\bar{a}r_w^2} \quad (5.57)$$

$$\beta_D = \beta \overline{\Delta \theta} \quad (5.58)$$

$$E_{2D} = \frac{H}{a^2} E_2 \quad (5.59)$$

$$E_{3D} = \frac{H}{P a} E_3 \quad (5.60)$$

A equação da difusividade é mais facilmente resolvida através de uma mudança de variáveis que transforme a dimensão radial para uma escala logarítmica. Dessa forma, utilizaremos:

$$\gamma_D = \ln r_D \quad (5.61)$$

O modelo matemático adimensionalizado do sistema poço-reservatório para o caso não-isotérmico se torna:

• Poço:

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D a_D^2 \frac{\partial v_D}{\partial x_D} + \frac{\beta_D a_D^2}{c_{PD}} E_{3D} = 0 \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + \rho_D v_D \frac{\partial v_D}{\partial x_D} - \rho_D E_{2D} = 0 \quad (5.63)$$

$$\rho_D c_{PD} \left( \frac{\partial \theta_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial \theta_D}{\partial x_D} \right) - \beta_D \theta_D \left( \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial P_D}{\partial x_D} \right) + E_{3D} = 0 \quad (5.64)$$

• Reservatório:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_D} \left( \frac{\rho_D k_D}{\mu_D} \frac{\partial P_D}{\partial \gamma_D} \right) = \phi e^{2\gamma} \left[ \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial P_D} + \rho_D c_{rD} \right) \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial \theta_D} \right) \frac{\partial \theta_D}{\partial t_D} \right] \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e^{2\gamma}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \sigma_{3D} \frac{\partial \theta_D}{\partial \gamma} \right) - \sigma_{2D} (\theta_D - \theta_{res}) = \\ & (C_{RD} + \rho_D c_{PD} \phi) \frac{\partial \theta_D}{\partial t_D} + \rho_D c_{PD} \frac{v_D}{r} \frac{\partial \theta_D}{\partial \gamma} - \beta_D \theta_D \left( \phi \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + \frac{v_D}{r} \frac{\partial P_D}{\partial \gamma_D} \right) \end{aligned} \quad (5.66)$$

• Condições:

Inicial:

Poço

$$P_D = P_D(x_D, 0) \quad (5.67)$$

$$\theta_D = \theta_D(x_D, 0) \quad (5.68)$$

$$v_D = v_D(x_D, 0) \quad (5.69)$$

Reservatório

$$P_D = P_D(\gamma_D, 0) \quad (5.70)$$

$$\theta_D = \theta_D(\gamma_D, 0) \quad (5.71)$$

Junção :

$$Q_{DPOCO_{x_D=1}} = Q_{DRES_{\gamma_D=0}} \quad (5.72)$$

$$\theta_{DPOCO_{x_D=1}} = \theta_{DRES_{\gamma_D=0}} \quad (5.73)$$

$$P_{DPOCO_{x_D=1}} = P_{DRES_{\gamma_D=0}} \quad (5.74)$$

Cabeça do Poço:

$$v_D = v_D(0, t_D) \quad \text{ou} \quad (5.75)$$

$$P_D = P_D(0, t_D) \quad \text{ou} \quad (5.76)$$

$$\dot{w}_D = v_D(0, t_D) \cdot \rho_D(0, t_D) = cte \quad (5.77)$$

$$\theta_D = \theta_D(0, t_D) \quad (\text{Somente para a injeção}) \quad (5.78)$$

Limite Externo do Reservatório:

$$P_D = P_D(r_{D_{ext}}, t_D) = 1 \quad \text{ou} \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial \gamma_D} \Big|_{r_{D_{ext}}} = 0 \quad (5.80)$$

$$\theta_D = \theta_D(r_{D_{ext}}, t_D) = 1 \quad (\text{Somente para a produção}) \quad (5.81)$$

Limite Interno do Reservatório:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} = 0 \quad (5.82)$$

# Capítulo 6

## Modelo Não Isotérmico: Método de Solução

### 6.1 Aplicação do Método das Direções Características

O sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem (SEDPPO) constituído pelas equações (5.62-64) e que representa o escoamento não-isotérmico no poço pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias (SEDO). Para tanto, é inicialmente necessário efetuar uma combinação entre as equações originais para explicitar as direções características do sistema.

Partindo do SEDPPO adimensionalizado:

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D \alpha_D^2 \frac{\partial v_D}{\partial x_D} + \frac{\beta_D a_D^2}{c_{PD}} E_{3D} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial x_D} + \rho_D \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + \rho_D v_D \frac{\partial v_D}{\partial x_D} - \rho_D E_{2D} = 0 \quad (6.2)$$

$$\rho_D c_{PD} \left( \frac{\partial \theta_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial \theta_D}{\partial x_D} \right) - \beta_D \theta_D \left( \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial P_D}{\partial x_D} \right) + E_{3D} = 0 \quad (6.3)$$

A equação (6.3) já apresenta uma direção característica explícita  $\left( \frac{dx_D}{dt_D} = v_D \right)$ . As duas primeiras são bastante semelhantes às do caso isotérmico. Multiplicando a equação (6.2) por  $(\pm a_D)$  e somando à equação (6.1), vem que o sistema (6.1-3) pode ser escrito como:

$$\left[ \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + (v_D + a_D) \frac{\partial P_D}{\partial x_D} \right] + \rho_D a_D \left[ \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + (v_D + a_D) \frac{\partial v_D}{\partial x_D} \right] - \rho_D a_D E_{2D} + \frac{\beta_D a_D^2}{c_{PD}} E_{3D} = 0 \quad (6.4)$$

$$\left[ \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + (v_D - a_D) \frac{\partial P_D}{\partial x_D} \right] - \rho_D a_D \left[ \frac{\partial v_D}{\partial t_D} + (v_D - a_D) \frac{\partial v_D}{\partial x_D} \right] + \rho_D a_D E_{2D} + \frac{\beta_D a_D^2}{c_{PD}} E_{3D} = 0 \quad (6.5)$$

$$\rho_D c_{PD} \left( \frac{\partial \theta_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial \theta_D}{\partial x_D} \right) - \beta_D \theta_D \left( \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + v_D \frac{\partial P_D}{\partial x_D} \right) + E_{3D} = 0 \quad (6.6)$$

Cada uma das equações resulta em um SEDO. Utilizando as variáveis  $(s_1)$ ,  $(s_2)$  e  $(s_3)$ , que indicam as direções características explicitadas em cada equação, obtemos:

a) Para  $t_D = t_D(s_1)$ ,  $x_D = x_D(s_1)$ ,  $P_D = P_D(s_1)$  e  $v_D = v_D(s_1)$ , a equação (6.4) pode ser expressa pelo seguinte SEDO:

$$\frac{dP_D}{ds_1} + \rho_D a_D \frac{dv_D}{ds_1} - \rho_D a_D E_{2D} + \frac{\beta_D a_D^2}{c_{PD}} E_{3D} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{dt_D}{ds_1} = 1 \quad (6.8)$$

$$\frac{dx_D}{ds_1} = v_D + a_D \quad (6.9)$$

b) Para  $t_D = t_D(s_2)$ ,  $x_D = x_D(s_2)$ ,  $P_D = P_D(s_2)$  e  $v_D = v_D(s_2)$ , de modo análogo para a equação (6.5):

$$\frac{dP_D}{ds_2} - \rho_D a_D \frac{dv_D}{ds_2} + \rho_D a_D E_{2D} + \frac{\beta_D a_D^2}{c_{PD}} E_{3D} = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{dt_D}{ds_2} = 1 \quad (6.11)$$

$$\frac{dx_D}{ds_2} = v_D - a_D \quad (6.12)$$

c) Para  $t_D = t_D(s_3)$ ,  $x_D = x_D(s_3)$ ,  $P_D = P_D(s_3)$  e  $v_D = v_D(s_3)$ , finalmente em relação a equação (6.6):

$$\rho c_P \frac{d\theta}{ds_3} - \beta \theta \frac{dP}{ds_3} + E_{3D} = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{dt_D}{ds_3} = 1 \quad (6.14)$$

$$\frac{dx_D}{ds_3} = v_D \quad (6.15)$$

## 6.2 Solução Numérica pelo Método das Diferenças Finitas

De modo análogo ao caso isotérmico, as variáveis adimensionais serão escritas sem o subscrito  $D$ , para facilidade de notação. Assim, por exemplo, a posição  $x_{D_Q}$  será simplesmente  $x_Q$ .

### 6.2.1 Equações no Poço

#### 6.2.1.1 Pontos Internos

**Discretização :** Discretizando o sistema de equações diferenciais ordinárias, resultante da aplicação do método das direções características entre os pontos  $A(x_A, t_A)$ ,  $B(x_B, t_B)$ ,  $E(x_E, t_E)$  e  $Q(x_Q, t_Q)$ , representados no plano  $(x_D, t_D)$ , conforme representado na figura 6.1, obtemos:

$$\frac{x_Q - x_A}{t_Q - t_A} - (v_{QA} + a_{QA}) = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{P_Q - P_A}{t_Q - t_A} + \rho_{QA} a_{QA} \frac{v_Q - v_A}{t_Q - t_A} + E_{4QA} = 0 \quad (6.17)$$

$$\frac{x_Q - x_B}{t_Q - t_B} - (v_{QB} - a_{QB}) = 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{P_Q - P_B}{t_Q - t_B} - \rho_{QB} a_{QB} \frac{v_Q - v_B}{t_Q - t_B} + E_{4QB} = 0 \quad (6.19)$$

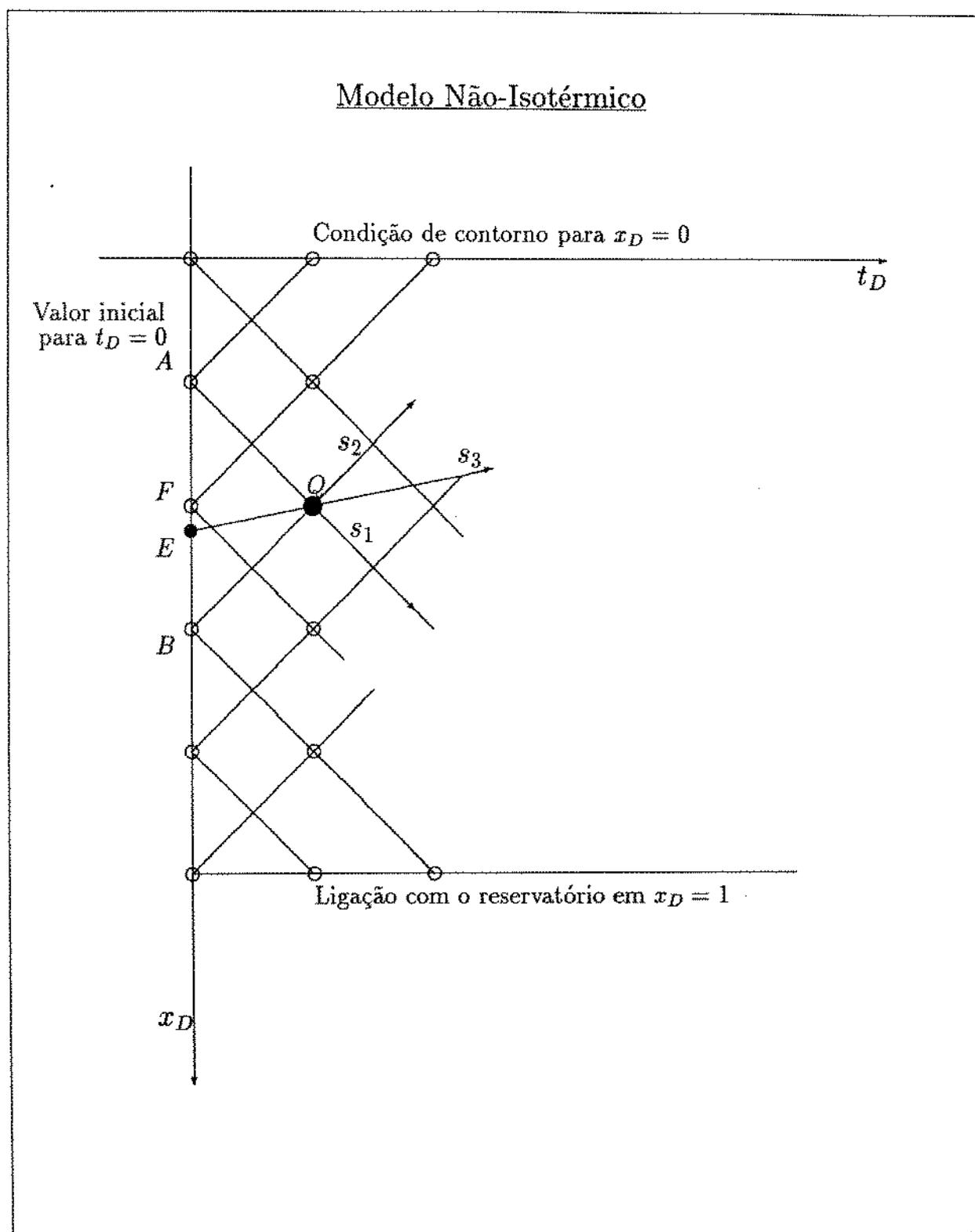


Figura 6.1: Discretização no domínio  $(x_D, t_D)$  no poço. Avanço das variáveis independentes seguindo as direções características.

$$\frac{x_Q - x_E}{t_Q - t_E} - v_{QE} = 0 \quad (6.20)$$

$$\rho_{QE} c_{PQE} \frac{\theta_Q - \theta_E}{t_Q - t_E} - \beta_{QE} \theta_{QE} \frac{P_Q - P_E}{t_Q - t_E} + E_{3QE} = 0 \quad (6.21)$$

Onde, para facilitar a notação foram definidas as seguintes funções:

$$E_{4QA} = -\rho_{QA} a_{QA} E_{2QA} + \frac{\beta_{QA} a_{QA}^2}{c_{PQA}} E_{3QA} \quad (6.22)$$

$$E_{4QB} = +\rho_{QB} a_{QB} E_{2QB} + \frac{\beta_{QB} a_{QB}^2}{c_{PQB}} E_{3QB} \quad (6.23)$$

O sistema não-linear formado possui 6 equações e 10 incógnitas. As incógnitas são  $(x_Q, t_Q, P_Q, \theta_Q, v_Q, x_E, t_E, P_E, \theta_E, v_E)$ . O Ponto  $E(x_E, t_E)$  não é conhecido, nem o valor das variáveis dependentes neste ponto. Apenas a direção característica é especificada.

Como não é provável que seguindo as direções características, a partir dos pontos de valor inicial, sejam encontrados pontos  $Q(x_Q, t_Q)$  com intersecção comum às três direções, torna-se necessário uma nova definição para o Ponto E, ou seja, são necessárias novas equações que permitam o fechamento do problema. A posição do ponto(E), bem como o valor de suas variáveis dependentes, serão avaliadas em função dos pontos (A), (B) e (F), através de uma regra linear:

a) Se o Poço é Produtor:

$$t_E = t_F + \xi(t_B - t_F) \quad (6.24)$$

$$x_E = x_F + \xi(x_B - x_F) \quad (6.25)$$

$$P_E = P_F + \xi(P_B - P_F) \quad (6.26)$$

$$v_E = v_F + \xi(v_B - v_F) \quad (6.27)$$

$$\theta_E = \theta_F + \xi(\theta_B - \theta_F) \quad (6.28)$$

b) Se o Poço é Injetor:

$$t_E = t_F + \xi(t_A - t_F) \quad (6.29)$$

$$x_E = x_F + \xi(x_A - x_F) \quad (6.30)$$

$$P_E = P_F + \xi(P_A - P_F) \quad (6.31)$$

$$v_E = v_F + \xi(v_A - v_F) \quad (6.32)$$

$$\theta_E = \theta_F + \xi(\theta_A - \theta_F) \quad (6.33)$$

A qualidade dessa aproximação é função da relação entre os valores de  $(v)$  e  $(a)$ . Quando  $(a \gg v)$  obtemos um valor de  $(\xi)$  bastante próximo a zero. Nesse caso o ponto (E) aproxima-se do ponto (F), que é um valor inicial do problema.

A inclusão das 5 Equações acima e de uma nova incógnita  $(\xi)$  resulta em um Sistema Não-Linear com 11 equações e 11 incógnitas.

**Não Linearidades:** Os termos que não são lineares da equação —  $(v, a, \rho, E_2, E_3)$  — precisam ser avaliados nos intervalos  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BQ}$  e  $\overline{EQ}$ . A discretização é realizada utilizando uma fórmula que pondera os valores nos pontos extremos ao intervalo. O coeficiente de implicitude  $(\alpha)$ , considerado constante, tem a função de especificar o peso de cada parcela.

Das várias fórmulas possíveis será utilizada aquela que determina os termos não lineares como uma função dos valores representativos da pressão, temperatura e velocidade no intervalo. Por exemplo, as variáveis no intervalo  $\overline{AQ}$  são avaliadas como:

$$(\rho_{QA})_{AVALIADO} = \rho(P_{QA}, \theta_{QA}) \quad (6.34)$$

$$(a_{QA})_{AVALIADO} = a(P_{QA}, \theta_{QA}) \quad (6.35)$$

$$(E_{2QA})_{AVALIADO} = E_2(P_{QA}, \theta_{QA}, v_{QA}) \quad (6.36)$$

$$(E_{3QA})_{AVALIADO} = E_3(P_{QA}, \theta_{QA}, v_{QA}) \quad (6.37)$$

onde:

$$P_{QA} = (1 - \alpha)P_A + \alpha P_Q \quad (6.38)$$

$$\theta_{QA} = (1 - \alpha)\theta_A + \alpha\theta_Q \quad (6.39)$$

$$v_{QA} = (1 - \alpha)v_A + \alpha v_Q \quad (6.40)$$

**Solução do Sistema:** Entre os métodos disponíveis para resolver o sistema não-linear, foi escolhido o Método de Substituição Sucessiva. Esse método consiste em explicitar uma diferente variável em cada equação. Partindo de uma estimativa inicial, os valores são sucessivamente recalculados, até que uma precisão aceitável seja obtida.

Com o objetivo de diminuir o tempo computacional, o sistema foi dividido em dois sub-sistemas. As equações (6.41-44), abaixo, referem-se ao primeiro sub-sistema; enquanto que as equações (6.45-51) referem-se ao segundo sub-sistema. As equações dos dois sub-sistemas são obtidas através das combinações das equações (6.16-23) e (6.24-28). O procedimento adotado é o seguinte:

1. fixada a estimativa do valor de  $(\theta_Q)$ , são iterativamente resolvidas as equações (6.41) a (6.44), fornecendo novos valores para  $(x_Q, t_Q, P_Q, v_Q)$ .
2. logo após são resolvidas as equações (6.45) a (6.51), fornecendo novos valores de  $(\theta_Q, x_E, t_E, P_E, v_E, \theta_E, \xi)$ .
3. o processo se repete até ser atingida a precisão global do sistema.

As equações que formam o primeiro sub-sistema são:

$$t_Q = \frac{(x_B - x_A) + t_A(v_{QA} + a_{QA}) - t_B(v_{QB} - a_{QB})}{v_{QA} + a_{QA} - v_{QB} + a_{AB}} \quad (6.41)$$

$$x_Q = x_A + (t_Q - t_A)(v_{QA} + a_{QA}) \quad (6.42)$$

$$v_Q = \frac{(P_A - P_B) + (v_A \rho_{QA} a_{QA} + v_B \rho_{QB} a_{QB}) - E_{4QA}(t_Q - t_A) + E_{4QB}(t_Q - t_B)}{\rho_{QA} a_{QA} + \rho_{QB} a_{QB}} \quad (6.43)$$

$$P_Q = P_B + \rho_{QB} a_{QB}(v_Q - v_B) - E_{4QB}(t_Q - t_B) \quad (6.44)$$

e as que formam o segundo sub-sistema:

$$\alpha = \frac{(x_F - x_Q) - (t_F - t_Q)v_{QE}}{(x_F - x_B) - (t_F - t_B)v_{QE}} \quad (6.45)$$

$$x_E = x_F + \xi(x_B - x_F) \quad (6.46)$$

$$t_E = t_F + \xi(t_B - t_F) \quad (6.47)$$

$$P_E = P_F + \xi(P_B - P_F) \quad (6.48)$$

$$\theta_E = \theta_F + \xi(\theta_B - \theta_F) \quad (6.49)$$

$$v_E = v_F + \xi(v_B - v_F) \quad (6.50)$$

$$\theta_Q = \theta_E - \frac{E_{3QE}(t_Q - t_E) - \beta_{QE}\theta_{QE}(P_Q - P_E)}{\rho_{QE}c_{PQE}} \quad (6.51)$$

### 6.2.1.2 Condições de Contorno na Cabeça do Poço

A solução é determinada através das equações características discretizadas nos intervalos  $\overline{BQ}$  e  $\overline{EQ}$  e impondo as seguintes condições:

$$x_Q = 0 \quad (6.52)$$

$$x_F = 0 \quad (6.53)$$

$$P_Q = P_Q(0, t_Q) \quad \text{ou} \quad (6.54)$$

$$v_Q = v_Q(0, t_Q) \quad \text{ou} \quad (6.55)$$

$$\dot{w}_Q = v_Q \cdot \rho_Q = \text{cte} \quad (6.56)$$

Também, se o poço é injetor:

$$\theta_Q = \theta_Q(0, t_Q) \quad (6.57)$$

### 6.2.2 Equações no Reservatório

Escoamento no Meio Poroso: A equação da difusividade adimensionalizada:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_D} \left( \frac{\rho_D k_D}{\mu_D} \frac{\partial P_D}{\partial \gamma_D} \right) = \phi e^{2\gamma} \left[ \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial P_D} + \rho_D c_{rD} \right) \frac{\partial P_D}{\partial t_D} + \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial \theta_D} \right) \frac{\partial \theta_D}{\partial t_D} \right] \quad (6.58)$$

Pode ser discretizada para um ponto genérico ( $i$ ), de maneira semelhante ao mostrado na figura 4.2, utilizando as diferenças finitas centradas no espaço e atrasada no tempo, o que resulta <sup>2</sup> em:

<sup>2</sup>Novamente, para facilitar a notação, as variáveis adimensionais  $\lambda_D, \gamma_D, P_D, \theta_D$  serão usadas sem o subscrito  $D$ .

$$\frac{1}{\Delta\gamma} \left[ \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta\gamma} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left( \frac{P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}}{\Delta\gamma} \right) \right] = \phi_i e^{2\gamma_i} \left( \frac{d\rho_D}{dP_D} + \rho_{Di} c_{\tau D} \right)_i \left( \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t_D} \right) + \phi_i e^{2\gamma_i} \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial \theta_D} \right)_i \left( \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t_D} \right) \quad (6.59)$$

onde:

$$\lambda_i = \lambda(P_{Di}, \theta_{Di}) = \left( \frac{k_D \rho_D}{\mu_D} \right)_i^{n+1} \quad (6.60)$$

$$\phi_i = \phi_0 e^{c_{\tau D}(P_D - 1)} \quad (6.61)$$

$$\Delta t_D = t_Q^{n+1} - t_Q^n \quad (6.62)$$

A transmissibilidade adimensional,  $\lambda$ , será avaliada em uma posição intermediária onde os valores da pressão e da temperatura são obtidos da média aritmética simples dos valores nos pontos extremos. Também definindo:

$$\varphi_i = \varphi_i(t_D, P_D, \theta_D) = \phi_i e^{2\gamma_i} \frac{\Delta\gamma^2}{\Delta t_D} \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial P_D} + \rho_{Di} c_{\tau D} \right)_i \quad (6.63)$$

e

$$\varphi_{2i} = \varphi_{2i}(t_D, P_D, \theta_D) = \phi_i e^{2\gamma_i} \frac{\Delta\gamma^2}{\Delta t_D} \left( \frac{\partial \rho_D}{\partial \theta_D} \right)_i \quad (6.64)$$

A Equação discretizada se torna:

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}} P_{i-1}^{n+1} - \left( \lambda_{i-\frac{1}{2}} + \varphi_i + \lambda_{i+\frac{1}{2}} \right) P_i^{n+1} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} P_{i+1}^{n+1} = -\varphi_i P_i^n + \varphi_{2i} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^n) \quad (6.65)$$

Esta equação apresenta variáveis não lineares. A solução numérica é efetuada com a utilização de métodos iterativos. Uma função residual pode ser definida para cada equação:

$$R_i = \lambda_{i-\frac{1}{2}} P_{i-1}^{n+1} - \left( \lambda_{i-\frac{1}{2}} + \varphi_i + \lambda_{i+\frac{1}{2}} \right) P_i^{n+1} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} P_{i+1}^{n+1} + \varphi_i P_i^n - \varphi_{2i} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^n) \quad (6.66)$$

Dessa forma, a equação obtida tem a seguinte dependência:

$$R_i = R_i(t_Q, P_{i-1}^{n+1}, P_i^{n+1}, P_{i+1}^{n+1}, \theta_{i-1}^{n+1}, \theta_i^{n+1}, \theta_{i-1}^n) \quad (6.67)$$

**Comportamento Térmico:** A equação da energia adimensionalizada para o escoamento em um meio poroso, equação (5.66), também pode ser discretizada para um ponto genérico ( $i$ ) e definir uma função residual ( $R_{\theta_i}$ ). Fazendo uso das seguintes variáveis, para facilidade de notação:

$$y_1 = y_1(\theta_i) = (C_R + \phi \rho c_P)_i \frac{e^{2\gamma_i}}{\Delta t} \quad (6.68)$$

$$y_2 = y_2(\theta_i) = (u \rho c_P)_i \frac{e^{\gamma_i}}{2\Delta\gamma} \quad (6.69)$$

$$y_3 = y_3(\theta_i) = \left[ \beta \theta \left( \phi \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial P_D}{\partial \gamma_D} \right) - \frac{\bar{\theta}}{\Delta\theta} 2\sigma_2 \right]_i e^{2\gamma_i} \quad (6.70)$$

onde a velocidade Darciana discretizada é:

$$u_i = \left( \frac{k}{\mu e^\gamma} \right)_i \frac{-3P_{i-1} + 4P_i - P_{i+1}}{2\Delta\gamma} \quad (6.71)$$

vem que:

$$R_{\theta_i} = -\frac{\sigma_3}{(\Delta\gamma)^2} (\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}) - 2\sigma_2 e^{2\gamma_i} \theta_i^{n+1} + y_1 (\theta_i^{n+1} - \theta_i^n) + y_2 (\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1}) + y_3 \quad (6.72)$$

Além dessa, há outras opções que podem ser utilizadas para discretizar a equação térmica. O termo da equação que mostra grande importância para a escolha é o que contém a derivada da temperatura em relação a distância radial ( $\rho c_P \frac{u}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}$ ). No Capítulo (7) serão destacados alguns resultados que mostram que outras opções conduzem a instabilidades nos resultados.

### 6.2.2.1 Condição de Contorno no Limite Externo

**Pressão Constante** Neste caso a pressão no limite externo do reservatório é considerado igual à pressão original, em qualquer instante do tempo. Em consequência temos a equação discretizada  $P_m = 1$ . É definida a Função Residual:

$$R_m = P_m - 1 \quad (6.73)$$

**Temperatura Constante** Utilizada quando o poço é produtor. Neste caso a temperatura no limite externo do reservatório é considerado igual à temperatura original, em qualquer instante do tempo. Em consequência, obtemos a equação discretizada  $\theta_m = \frac{\bar{\theta}}{\Delta\theta}$ . É definida a função residual:

$$R_{\theta_m} = \theta_m - \frac{\bar{\theta}}{\Delta\theta} \quad (6.74)$$

**Selado ao Fluxo** Neste caso a variação da Pressão em relação a coordenada radial é nula. A condição discretizada considera que  $P_{m-1} = P_{m+1}$ . Definindo a função residual:

$$R_m = 2\lambda_{m-\frac{1}{2}}P_{m-1} - (2\lambda_{m-\frac{1}{2}} + \varphi_m)P_m + \varphi_m P_m^n \quad (6.75)$$

### 6.2.3 Junção Poço-Reservatório

De maneira análoga ao caso isotérmico, a ligação poço-reservatório é realizada acoplando as equações características, válidas no interior do poço, à equação da difusividade e à equação da energia, válidas no meio poroso, com a finalidade de determinar os valores das variáveis comuns aos dois sub-sistemas.

Uma particularidade deve ser destacada quanto à ligação térmica das equações. O modelo prevê que apenas uma das equações térmicas será aplicada nesta posição. Se o sentido do escoamento é do reservatório para o poço será aplicada a equação térmica do meio poroso. Caso contrário, será aplicada a equação características da energia.

O entendimento físico é que o fluido ao atingir a junção traz a temperatura do seu meio de origem, devidamente considerados os efeitos provocados pelas variações de pressão e velocidade.

As equações características discretizadas no intervalo  $\overline{AQ}$  definem as seguintes funções residuais:

$$R7 = (x_A - x_Q) + (t_Q - t_A)(v_{QA} + a_{QA}) \quad (6.76)$$

$$R8 = (P_Q - P_A) + \rho_{QA} a_{QA} (v_Q - v_A) + E_{QA} (t_Q - t_A) \quad (6.77)$$

ou seja na junção :

$$R7 = R7(t_Q, P_Q, \theta_Q, v_Q) \quad (6.78)$$

$$R8 = R8(t_Q, P_Q, \theta_Q, v_Q) \quad (6.79)$$

A continuidade da vazão mássica, da pressão e da temperatura podem ser aplicadas na ligação do poço ao reservatório. Lembrando que  $\rho = \rho(P, \theta)$ , é obtida a condição de igualdade das vazões volumétricas. Igualando a vazão que atravessa a secção transversal do duto, à vazão que cruza a posição radial interna do reservatório, adimensionalizados, obtém-se que:

$$v_{DPOCO} = -2 \frac{k_D h_r r_w^2}{\mu_D H r_T^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} \quad (6.80)$$

que discretizada define a função residual:

$$R9 = R9(v_Q, P_Q, \theta_Q, P_2, P_3) = v_Q + 2 \frac{k_D h_r r_w^2}{\mu_D H r_T^2} \left( \frac{-3P_Q + 4P_2 - P_3}{2\Delta\gamma} \right) \quad (6.81)$$

A ligação poço-reservatório é implementada com a solução simultânea destas equações acrescentadas às equações do escoamento no meio poroso. Novamente a solução numérica consiste em zerar o conjunto de funções residuais:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 R7 = R7(t_Q, v_Q, P_Q, \theta_Q) \\
 R8 = R8(t_Q, v_Q, P_Q, \theta_Q) \\
 R9 = R9(v_Q, P_Q, \theta_Q, P_2, P_3) \\
 R_i = R_i(t_Q, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1}) \quad i = 2, m-1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 R_m = R_m(P_m) \quad \text{ou} \\
 R_m = R_m(t_Q, P_{m-1}, P_m, \theta_{m-1}, \theta_m) \\
 \\
 R_{\theta_i} = R_{\theta_i}(t_Q, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}) \quad i = 2, m-1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 R_{\theta_m} = R_{\theta_m}(\theta_m)
 \end{array} \right. \quad (6.82)$$

Resultando em um número igual a  $(2m + 2)$  equações e  $(2m + 2)$  incógnitas.

A solução para este sistema não-linear é obtida através de métodos iterativos. A cada iteração o sistema deve ser resolvido e as variáveis não lineares reavaliadas. A convergência é conseguida quando soma das diferenças relativas entre os resultados anteriores e os atuais não excede a uma tolerância especificada.

Há diferentes procedimentos que podem ser utilizados para efetuar cada iteração. Um exemplo é a solução simultânea de todos os resíduos seguida da reavaliação de todas as variáveis não lineares. Este método implica na solução de sistemas lineares, cuja matriz principal possui 6 diagonais e uma coluna, dispendendo um grande esforço computacional.

Visando diminuir o tempo de processamento, foi adotado um método misto, que consiste de três etapas. Partindo-se de uma estimativa inicial:

1. É recalculado o valor da variável  $(t_Q)$  através da equação (6.42):

$$R7 = (x_A - x_Q) + (t_Q - t_A)(v_{QA} + a_{QA}) = 0 \quad (6.83)$$



# Capítulo 7

## Resultados e Comentários

### 7.1 Definição dos Casos-Testes Estudados

#### Fluido utilizado:

Os casos estudados foram simulados utilizando um gás real, cujas propriedades foram calculadas através das equações de Peng & Robinson [22]. A entalpia foi calculada nos valores de referência, em cada temperatura, indicados pelas relações de Passut & Danner [21]. A composição molar do gás é descrita na tabela 7.1.

Substância	Fração Molar	Peso Molecular
Metano	0,70	16
Etano	0,20	30
Propano	0,10	44
Mistura	1,00	21,6

Tabela 7.1: Composição molar do gás produzido

#### Dimensões do poço:

Para as dimensões do poço optou-se por valores normalmente encontrados nos campos produtores de hidrocarbonetos gasosos. Na maior parte dos casos foi estabelecida uma profundidade de 2000 metros, sendo que em alguns casos, buscando reduzir a estocagem para melhor investigar os efeitos da expansão térmica, a profundidade foi alterada para 1250 metros. Os diâmetros testados foram de 0.085, 0.07 e 0.06 metros.

### Parâmetros do reservatório:

Os valores adotados para os parâmetros do reservatório foram basicamente os apresentados na tabela 7.2, sendo que o raio interno foi, em algumas situações, reduzido para 0.05 metros para atingir os valores do coeficiente de estocagem dos casos analíticos conhecidos.

Parâmetro	Valor	Unidade
Raio externo, $r_{ext}$	400,0	$m$
Raio interno, $r_w$	0,16	$m$
Espessura, $h_r$	5,0	$m$
Porosidade, $\phi$	0,20	—
Permeabilidade, $k$	$1,0 \cdot 10^{-14}$	$m^2$

Tabela 7.2: Parâmetros do reservatório simulado

### Constantes Térmicas:

Os valores adotados para os coeficientes de troca térmica, para o calor específico e massa específica da rocha são valores típicos coletados no manual de dados termodinâmicos e de transferência de calor de Raznjevic [26] e estão indicados na tabela 7.3.

Parâmetro	Valor	Unidade
Convecção no poço, $\sigma_1$	100.0	$J.m^{-3}.K^{-1}$
Condução Térmica no interior do reservatório, $\sigma_2$	1.0	$J.m^{-1}.K^{-1}$
Trocas do reservatório com a formação, $\sigma_3$	20.0	$J.m^{-2}.K^{-1}$
Calor específico da rocha, $c_{pR}$	1000.0	$J.Kg^{-1}.K$
Massa específico da rocha, $\rho_R$	2500.0	$Kg.m^{-3}$

Tabela 7.3: Parâmetros das trocas térmicas e da rocha.

## 7.2 Desempenho dos Métodos Numéricos

### Método das direções características:

Embora o método das direções características propicie resultados bastante satisfatórios em se tratando de prever o comportamento transiente em um escoamento em dutos, existe um inconveniente: o elevado esforço computacional que surge ao ser aplicado para um sistema poço-reservatório.

Tal situação decorre do fato de que o tempo necessário para que o poço se adapte a uma nova condição de produção é muito menor do que para o meio poroso. Em consequência, para analisar o comportamento transiente do poço é necessário utilizar pequenos intervalos tempo, da ordem de 1 segundo ou menos. Dessa forma, ao se desejar a análise de todo o sistema poço-reservatório é preciso um elevado número de incrementos no tempo para observar a resposta do conjunto.

O programa computacional desenvolvido para o caso não isotérmico requer cerca de 8 horas em uma estação de trabalho Proceda com CPU Motorola 60020 para calcular um caso enquanto que o do modelo isotérmico leva cerca de 4 horas. Um método pode ser proposto para reduzir esse tempo. Observa-se que após um determinado período as curvas de pressão e velocidade no poço têm reduzida variação. A utilização dos métodos numéricos que discretizam diretamente o sistema original de equações diferenciais no poço apresentam bons resultados quando o escoamento está próximo ao regime permanente. Dessa forma, um outro método numérico poderia servir como uma variante para acelerar a performance dos cálculos quando o período de mais rápidas variações tivesse se encerrado.

#### Avaliação dos termos não lineares:

Como já foi exposto nos capítulos precedentes, duas fórmulas foram utilizadas para avaliar os termos não lineares das equações discretizadas entre dois nós A e Q. Por exemplo, o valor da massa específica ( $\rho$ ) no intervalo  $\overline{AQ}$  foi aproximado por:

$$1) \text{ Modelo isotérmico: } \rho_{\overline{AQ}} = (1 - \alpha)\rho_A + \alpha\rho_Q \quad \text{equação (4.16)}$$

$$2) \text{ Modelo não isotérmico: } \rho_{\overline{AQ}} = \rho ( (1 - \alpha)P_A + \alpha P_Q ) \quad \text{equação (4.17)}$$

Cada uma das aproximações resulta em valores numéricos diferentes, porém não foram observadas diferenças significativas nos resultados finais do sistema. Isso se deve ao fato de que, na alta faixa de pressão dos reservatórios produtores e nas baixas velocidades de escoamento no poço, as não linearidades não são muito fortes. Observa-se também que o método das direções características impõe pequenos incrementos no tempo, contribuindo para que não haja oscilações bruscas nas variáveis do problema.

A única condição em que foi observada uma diferença entre os valores calculados pelas duas fórmulas foi nos instantes iniciais do teste quando uma onda com uma maior descontinuidade de pressão percorre o poço. O fato é explicado considerando que uma maior diferença, tanto de pressão como de velocidade ou temperatura, acentuam as diferenças entre os valores avaliados pelas fórmulas. Tal diferença não compromete os resultados finais, uma vez que ocorre em um reduzido número de iterações e o comportamento oscilatório é convergente para uma condição mais estabilizada do escoamento.

### Método de Newton-Raphson x Método de Substituição Sucessiva:

O sistema linear resultante, em cada iteração da solução numérica, do sistema de equações não lineares que representa o escoamento no poço, apresentadas nas equações (4.11-14) e (6.16-21), foram resolvidas, em cada caso, por um método diferente.

Inicialmente, para o modelo isotérmico, foi escolhido o método iterativo de Newton-Raphson por ser, normalmente, mais rápido. Depois, ao contrário, observou-se que para esse tipo de problema o método de substituição sucessiva é mais simples e também um pouco mais rápido do que o de Newton-Raphson. Embora o número de iterações observado neste último método seja menor, cerca de 2 ou 3 iterações em média, contra 5 ou 6 no método de substituição, o esforço computacional dispendido para a montagem da matriz jacobiana é grande e, portanto, faz com que o método de Newton Raphson fique em desvantagem.

A razão para esse resultado pode ser, uma vez mais, atribuída ao pequeno incremento no tempo determinado pelas equações características. Como as variações a serem calculadas de pressão, velocidade e temperatura são de pequena ordem de grandeza, as variáveis terão pouca modificação entre uma iteração e outra.

### Discretização da equação da energia no meio poroso:

A solução simultânea da equação da difusividade e da equação da energia no meio poroso revelou-se de difícil realização. Isso porque a equação do fluxo térmico introduz instabilidades no sistema global. Mais especificamente para se conseguir a convergência da solução numérica houve uma grande dependência da forma adotada para discretizar o termo convectivo da energia térmica  $(u\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial x})$ .

Tanto a discretização centrada como a atrasada no espaço produziram respostas oscilantes, ou seja a curva da temperatura versus raio, em cada instante, apresentava tendência crescente e decrescente, variando com o trecho, o que é fisicamente inconsistente. A simples modificação para a discretização avançada no espaço estabilizou a resposta obtida. Outros testes indicaram que a estabilidade depende do sentido da velocidade do escoamento. Portanto é possível que ao estudar os casos de injeção de fluidos no meio poroso seja necessário modificar a discretização para um esquema atrasado no espaço, a fim de manter a estabilidade no sistema.

Uma observação que pode ser feita é que o trabalho publicado por Ahluwalia & Wilkes [3] apresenta oscilações semelhantes às obtidas com a discretização centrada, sendo possível que o modelo numérico desses autores apresente esse mesmo tipo de instabilidades.

### 7.3 Transiente Inicial

#### Característica ondulatória inicial:

Nos primeiros instantes de um escoamento transiente, após uma variação brusca nas condições de operação de um poço, ocorre um período que é caracterizado por um comportamento ondulatório. O escoamento não se modifica no mesmo instante em todo o sistema, uma vez que a compressibilidade do fluido determina uma velocidade finita para a transmissão do pulso de pressão a todos os pontos do poço.

Vamos considerar, inicialmente, uma análise isotérmica de um sistema poço-rese no qual será iniciada a produção. Previamente o reservatório possui pressão uniforme e no poço há uma distribuição de pressões que é determinada pela hidrostática do fluido. Será imposta uma condição de produção com fluxo mássico constante.

Uma variação de pressão e, em consequência, de massa específica do fluido na cabeça do poço provoca uma perturbação que se propagará em direção ao fundo do poço com uma velocidade que é determinada pelas propriedades do fluido. No instante inicial, representado no primeiro quadro da figura 7.1, o valor de pulso de pressão e da velocidade da onda podem ser obtidos das relações:

$$\Delta P = \frac{\dot{w}a}{A} \quad (7.1)$$

$$a = \left( \frac{1}{\frac{d\rho}{dP}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.2)$$

O segundo quadro da mesma figura representa o trajeto da onda entre a cabeça do poço e a face da formação produtora. Somente a parcela do fluido que se encontra acima da onda de pressão é que contribui, através do efeito da descompressão, para a produção do poço. O fluido abaixo da onda ainda se encontra nas condições iniciais.

O mecanismo de descompressão é que fornece a produção do poço até o instante em que a perturbação atinge o reservatório. A interação com o meio poroso provoca uma nova condição perturbadora que irá retornar no sentido da superfície. A vazão produzida pelo meio poroso dependerá dos parâmetros do reservatório. Normalmente, para os baixos valores de transmissibilidade  $\left( \frac{kh_r}{\mu} \right)$  encontrados nas formações produtoras de petróleo, resulta em uma vazão menor que aquela fornecida pela descompressão inicial do fluido no poço. Um novo pulso retorna para a cabeça do poço, reduzindo a velocidade do fluido.

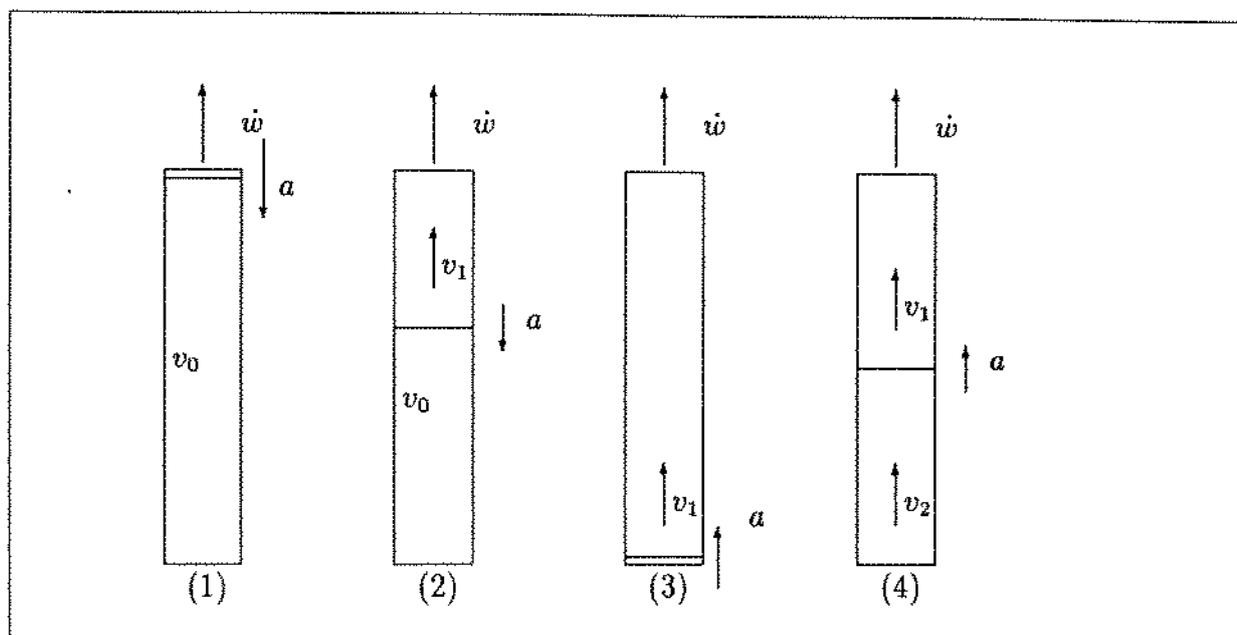


Figura 7.1: Desenho esquemático mostrando o mecanismo da propagação das ondas de pressão no interior do poço.

Todo o processo se repete sucessivamente, uma vez que a condição de vazão constante imporá uma decompressão adicional ao fluido, novamente causando uma onda em direção ao fundo do poço. As oscilações nas propriedades serão cada vez menores até que as curvas de pressão e de velocidade sejam compatíveis com a capacidade produtora do reservatório. A partir desse momento é encerrado o período ondulatório do escoamento.

As figuras 7.2 e 7.3 mostram os gráficos de pressão e de velocidade no fundo do poço, obtidos pelo simulador isotérmico, respectivamente, para um sistema produtor de líquido e de gás. As oscilações ocorrem a intervalos de tempo aproximadamente iguais, que correspondem ao tempo necessário para a onda se propagar do fundo para a cabeça do poço e depois retornar. O primeiro pulso ocorre na metade do tempo, uma vez que percorre metade do trajeto.

Um problema em engenharia de petróleo, relativo à segurança operacional e dos equipamentos nas intervenções em poços ou de linhas de transferência de fluidos, é o controle das oscilações de pressão. Nesse caso, o aumento da vazão deve ser realizada de maneira gradual, de modo que haja um intervalo de tempo suficiente para o retorno e amortecimento dos pulsos de pressão.

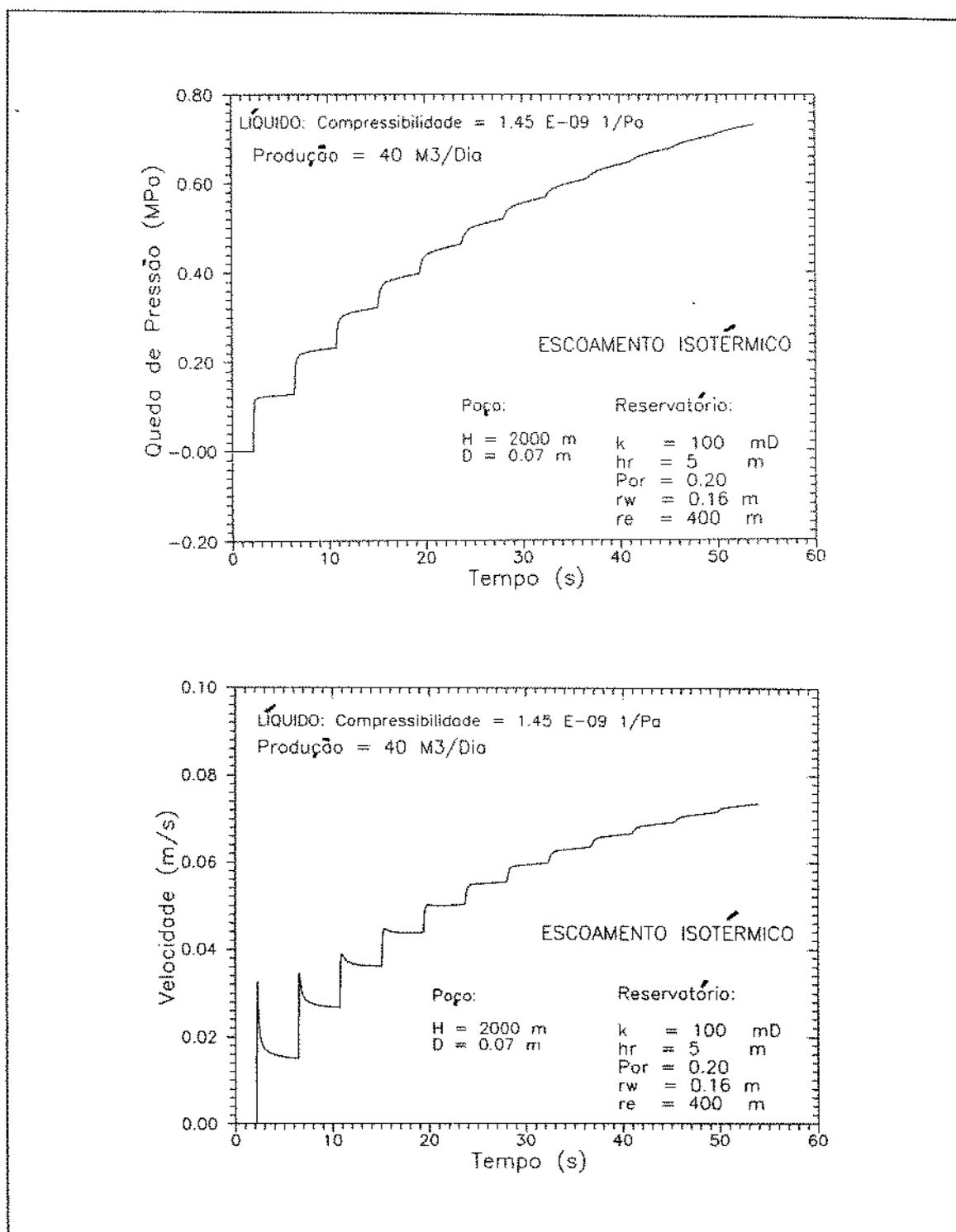


Figura 7.2: Gráficos da variação da pressão e da velocidade nos instantes iniciais de abertura de um poço produtor de líquido.

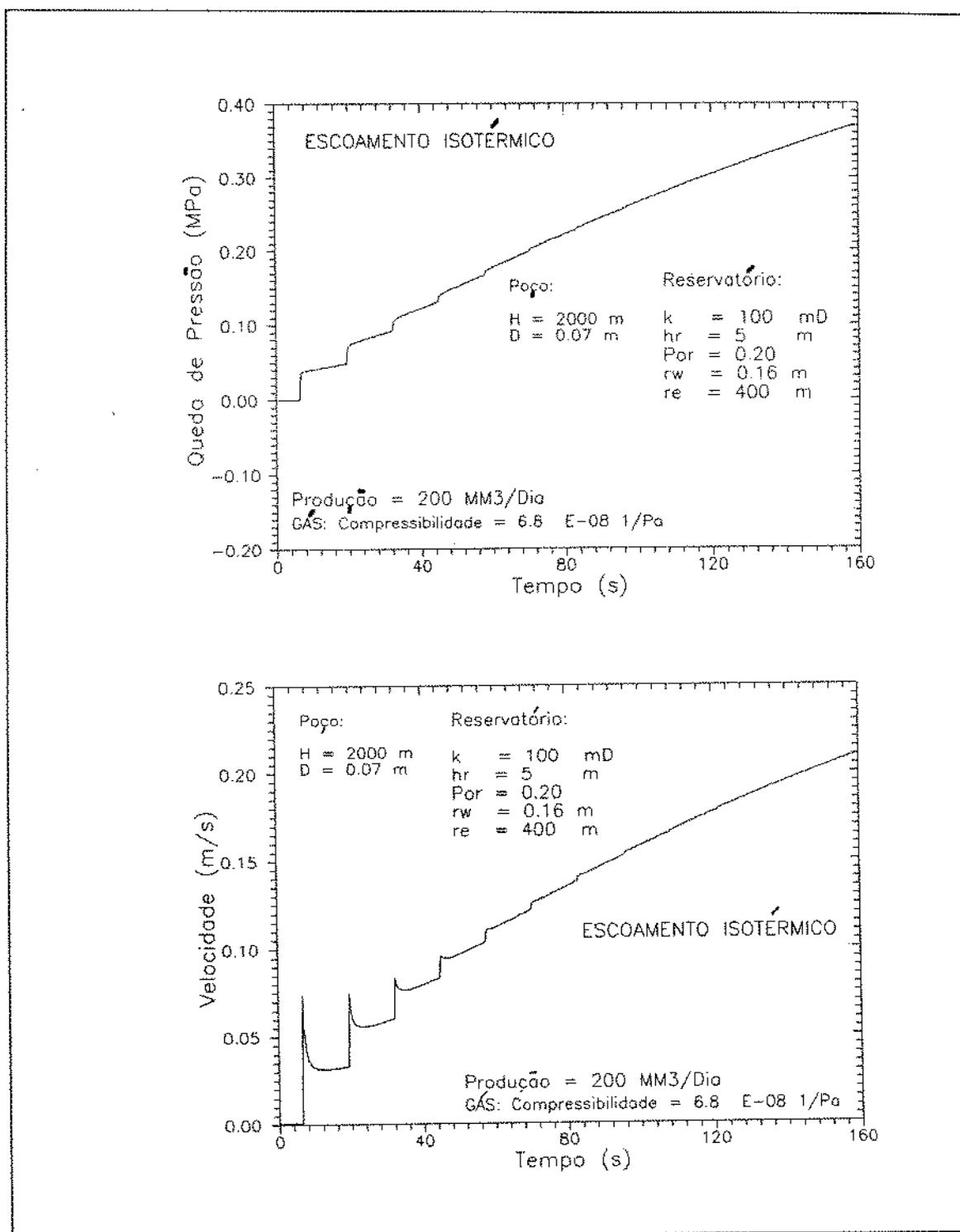


Figura 7.3: Gráficos da variação da pressão e da velocidade nos instantes iniciais de abertura de um poço produtor de gás.

### Velocidade de propagação da onda:

As equações que regem o escoamento mostram que a velocidade de propagação da onda está relacionada com o processo termodinâmico que ocorre no fluido. No caso isotérmico apenas a variação da pressão é que determina a velocidade da onda. No caso não isotérmico, a variação da temperatura também tem influência. Neste último caso a solução do sistema completo de equações indica um processo isentrópico como sendo aquele que ocorre na propagação da onda de pressão no meio fluido; a velocidade da onda é também denominada “velocidade sônica” para este processo.

O período oscilatório do escoamento é também influenciado pela velocidade da onda uma vez que influencia na frequência das oscilações. A velocidade calculada para um processo isotérmico é menor que aquela calculada para um processo isentrópico. Um caso real dificilmente será isotérmico, uma vez que o processo é muito rápido para se introduzir um fluxo térmico para manter constante a temperatura. Porém a aproximação é válida para alguns fluidos, normalmente líquidos, que devido à baixa compressibilidade, apresentam valores próximos para a velocidade da onda calculada conforme os dois processos.

A figura 7.4 mostra as curvas de pressão no fundo do poço, nos instantes iniciais de produção de um poço de gás, calculadas pelos dois modelos. Observa-se uma grande diferença no comportamento inicial inclusive devido a diferença entre as velocidades de propagação da onda de pressão.

## 7.4 Teste do Modelo Isotérmico

### Fluidos de baixa compressibilidade:

A representação clássica para o efeito da estocagem considera que o poço contém um fluido de compressibilidade e viscosidade constantes. A produção devida à decompressão do fluido no poço pode ser, então, determinada pela equação :

$$c_f = \frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad \Rightarrow \quad c_f = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad (7.3)$$

A segunda equação é válida porque a compressibilidade é constante. Se  $V$  é o volume do poço, obtemos que:

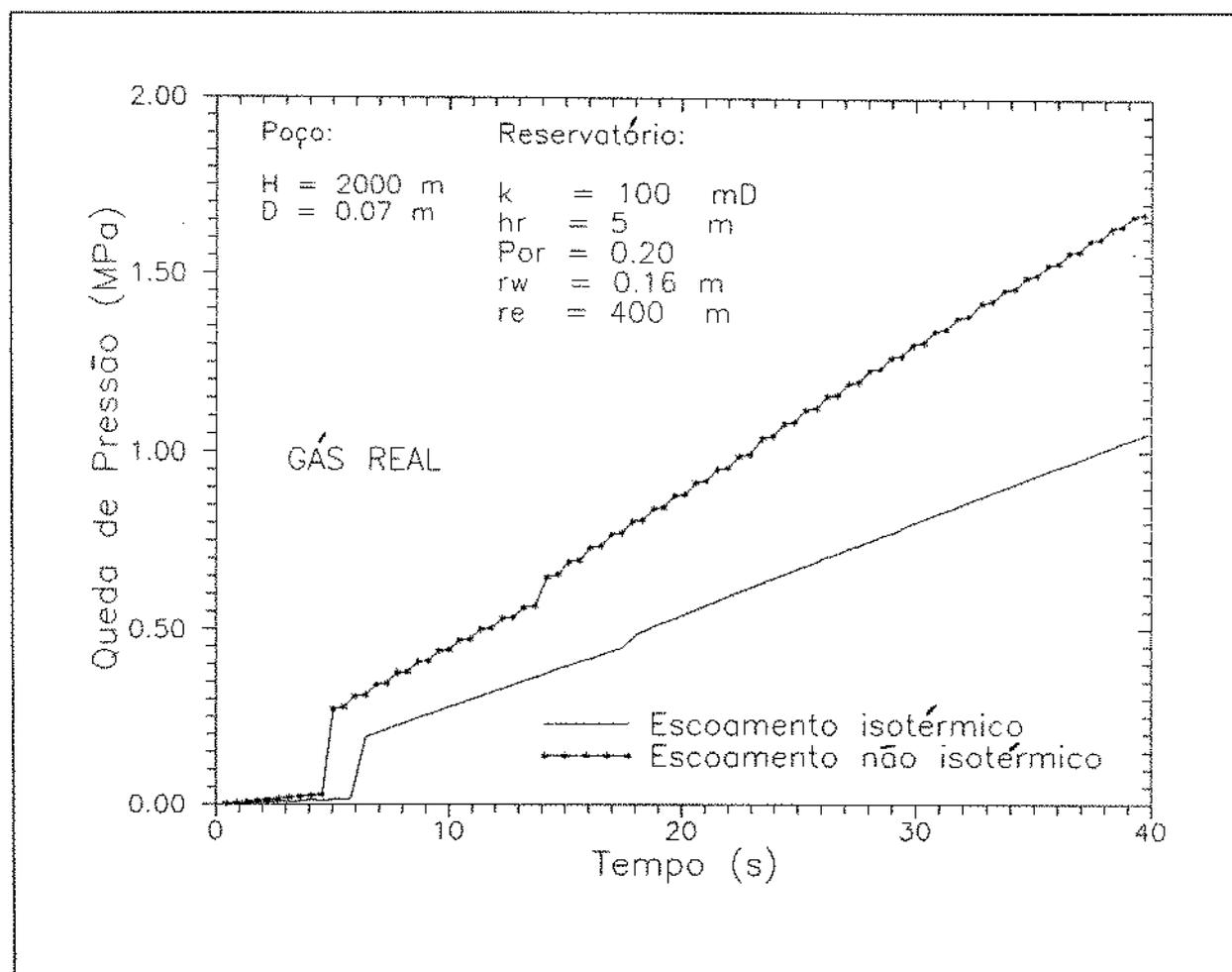


Figura 7.4: Comparação da pressão no fundo do poço quando calculadas pelos modelos isotérmico e não isotérmico.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = c_f \cdot V_{POCO} \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad (7.4)$$

Podemos definir  $C = c_f \cdot V_{POCO}$  como o coeficiente de estocagem do poço. Dessa forma, a produção é proporcional à variação de pressão no poço. Observa-se que esse modelo considera a hipótese da derivada da pressão em relação ao tempo  $\left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\right)$  ter o mesmo valor em qualquer ponto do poço.

A equação da difusividade para o escoamento em um meio poroso de um fluido de pequena compressibilidade, com vazão constante na superfície, foi adimensionalizada e resolvida analiticamente por Agarwal *et alii* [1] para uma condição de contorno interna que considera um coeficiente de estocagem constante.

O simulador isotérmico foi utilizado para calcular esse mesmo caso. A figura 7.5 compara os resultados obtidos com os analíticos para um caso de coeficiente de estocagem adimensional  $\left(\frac{C}{2\phi r_w^2 h_r c_t}\right)$  igual a 1000. Observa-se uma grande concordância entre as duas curvas. Uma ligeira diferença, paralela à curva, parece indicar que alguma imprecisão numérica introduziu um efeito semelhante a uma estocagem adicional.

#### Fluido compressível real:

O escoamento isotérmico de um fluido compressível e de viscosidade variável pode ser resolvido através do uso de uma pseudo-pressão e de um pseudo-tempo que têm por objetivo linearizar a equação da difusividade. A pseudo-pressão foi empregada pela primeira vez em engenharia de petróleo por Al-Hussainy *et alii*. O pseudo-tempo foi definido por Agarwal [2]. A pseudo-pressão e o pseudo-tempo são definidos, respectivamente, por:

$$P_P(P) = \int_{P_0}^P \frac{2P}{\mu Z} dP \quad (7.5)$$

$$t_P(t) = \int_0^t \frac{dt}{\mu c_t} \quad (7.6)$$

A produção devida ao efeito de estocagem foi relacionada à variação da pressão no fundo do poço através de uma equação similar ao caso anterior:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = C \frac{\Delta P_P}{\Delta t_P} \quad (7.7)$$

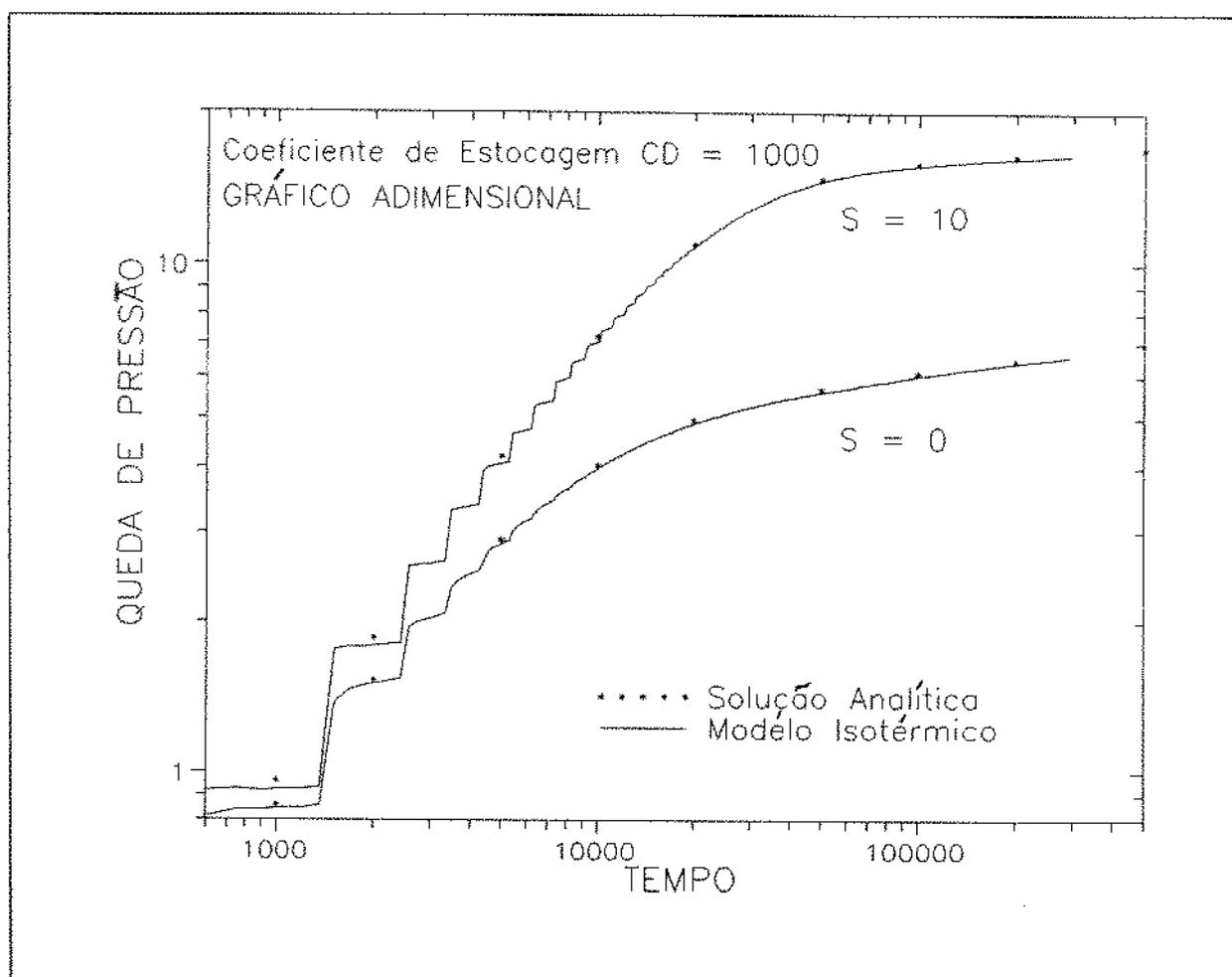


Figura 7.5: Gráfico da queda de pressão no fundo do poço versus tempo para um fluido pouco compressível.

O desenvolvimento da equação (7.7) mostra que o volume fornecido pelo poço é proporcional à variação da massa específica no fundo do poço. Novamente está implícita a hipótese de que as variações em todo o poço são iguais. Esse problema em termo das pseudo-pressões, devidamente adimensionalizado, é idêntico ao do caso anterior, possuindo a mesma solução numérica.

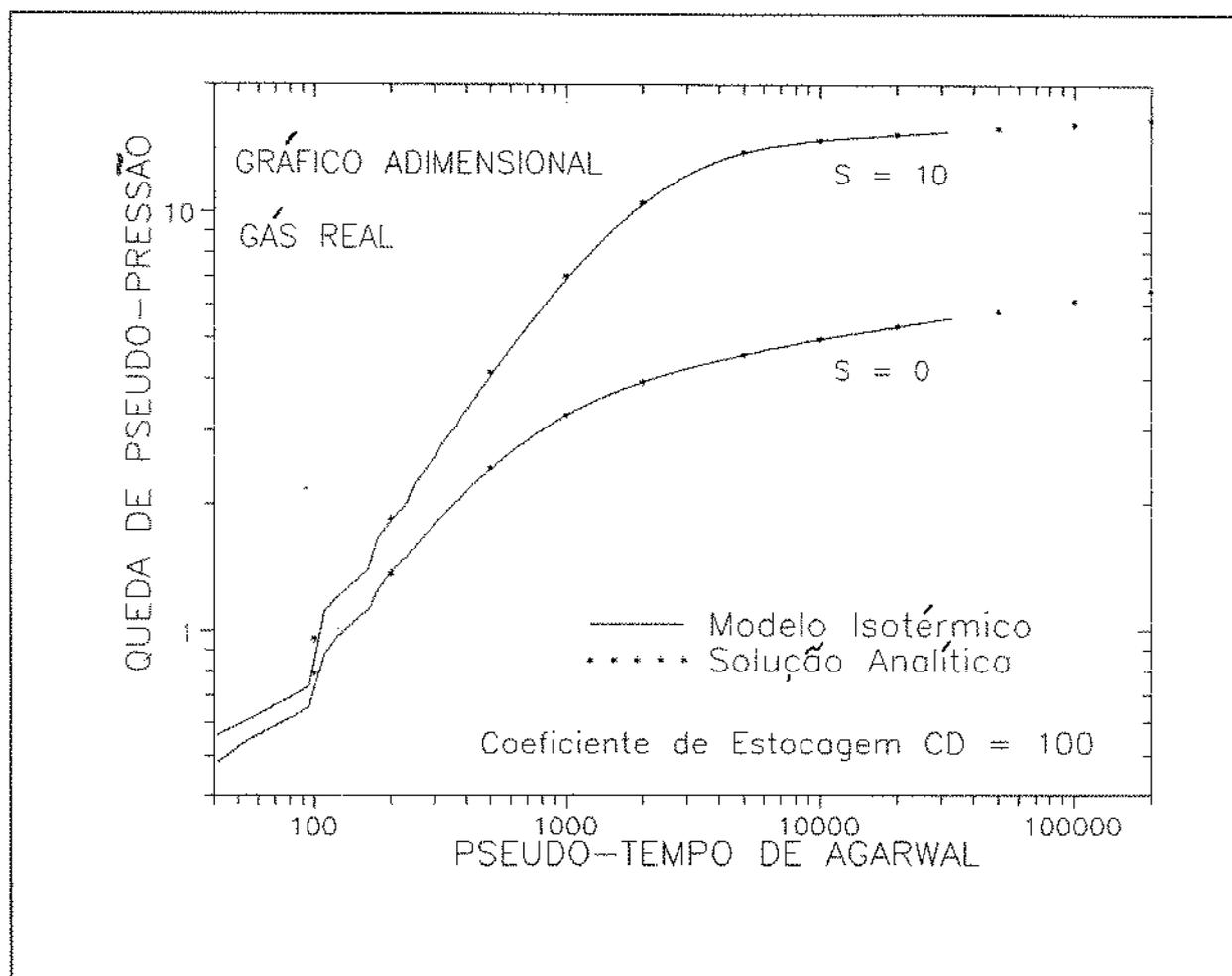


Figura 7.6: Gráfico dos adimensionais da queda de pseudo-pressão no fundo do poço versus pseudo-tempo para um fluido compressível.

Novamente o simulador numérico foi utilizado para calcular um escoamento de um fluido real. As respostas obtidas foram transformadas por um programa auxiliar para as pseudo-funções. A figura 7.6 mostra os resultados obtidos para um coeficiente de estocagem de igual a 100. Novamente houve concordância entre as curvas. Deve-se observar que os dois problemas, neste caso, possuem uma diferença adicional: o modelo computacional não impõe a condição de que as derivadas da massa específica e da viscosidade

sejam iguais em todos os pontos do poço.

## 7.5 Simulação não isotérmica

A equação da energia não é considerada nas interpretações dos parâmetros de reservatório normalmente realizadas. Dessa forma, vamos proceder à nossa análise comparando os resultados obtidos pelo simulador não isotérmico com as soluções analíticas disponíveis visando indentificar as diferenças que não são consideradas nos procedimentos convencionais. Os valores calculados foram transformados para pseudo-funções com uma tabela pressão versus pseudo-pressão calculada na temperatura do reservatório. A análise com esse procedimento irá revelar as eventuais diferenças e semelhanças entre os dois métodos.

De maneira geral os resultados apresentados mostram que as variações ocorrem no período dominado por estocagem. Em tempos mais longos, quando o comportamento do sistema é dominado pelo transiente do reservatório, as curvas tendem a possuir o mesmo comportamento.

A figura 7.7 é um gráfico de pseudo-pressão,  $P_p$ , versus o pseudo-tempo,  $t_p$ , para três condições térmicas de escoamento. Uma curva representa o escoamento adiabático sem a contribuição da capacidade térmica da matriz rochosa, a outra curva considera também essa contribuição e a terceira considera os efeitos devidos às trocas de calor tanto no reservatório como no poço. Uma produção equivalente a 40.000 metros cúbicos padrões por dia foi especificado para este caso. A figura 7.8 mostra as mesmas curvas plotadas em um diagrama monologarítmico.

A análise do gráfico mostra que as curvas térmicas se adiantam em relação à solução analítica. Uma razão possível para esse comportamento é o fato da compressibilidade total do fluido ser influenciada pela expansividade térmica, acelerando a resposta do sistema a um pulso de pressão. Comportamento semelhante foi analisado na figura 7.4 quando foi comparada as respostas obtidas através dos modelos isotérmico e não-isotérmico.

A inclinação unitária esperada para os instantes iniciais vai se alterando de modo mais rápido devido à influência térmica. A maior parte do período influenciado por estocagem mostra ligeira e menor taxa de crescimento de pressão no tempo.

Um fato interessante pode ser constatado na figura 7.9 que mostra o comportamento da queda de temperatura versus tempo de Agarwal. Nesse gráfico esta indicada

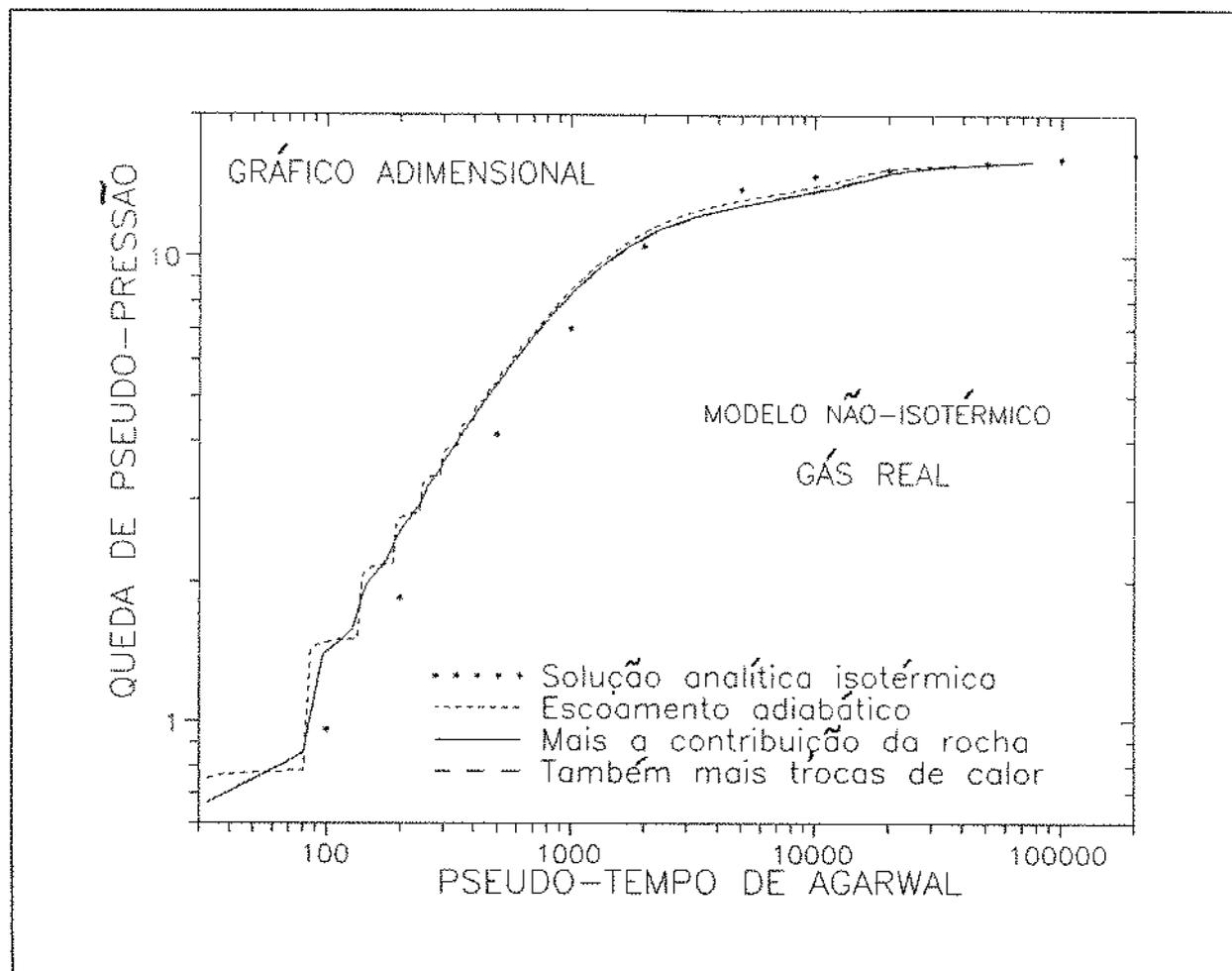


Figura 7.7: Gráfico dos adimensionais da pseudo-pressão versus pseudo-tempo de Agarwal para vários escoamentos não isotérmicos - diagrama bilogarítmico.

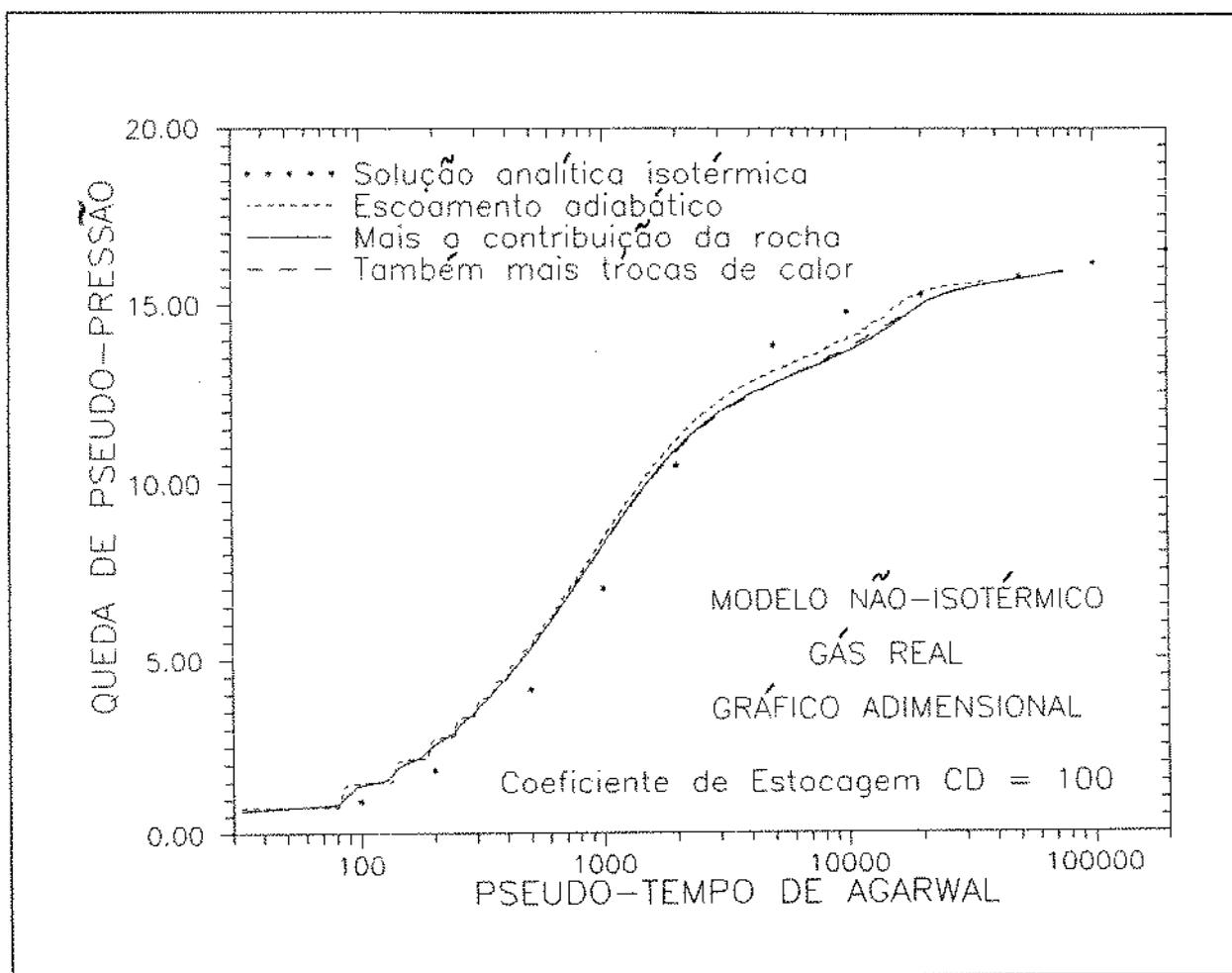


Figura 7.8: Gráfico dos adimensionais da pseudo-pressão versus pseudo-tempo de Agarwal para vários escoamentos não isotérmicos - diagrama monologarítmico.

de maneira mais nítida uma inclinação unitária para as curvas de queda de temperatura, mostrando que um comportamento similar ao esperado para a pressão ocorre para a temperatura no fundo do poço.

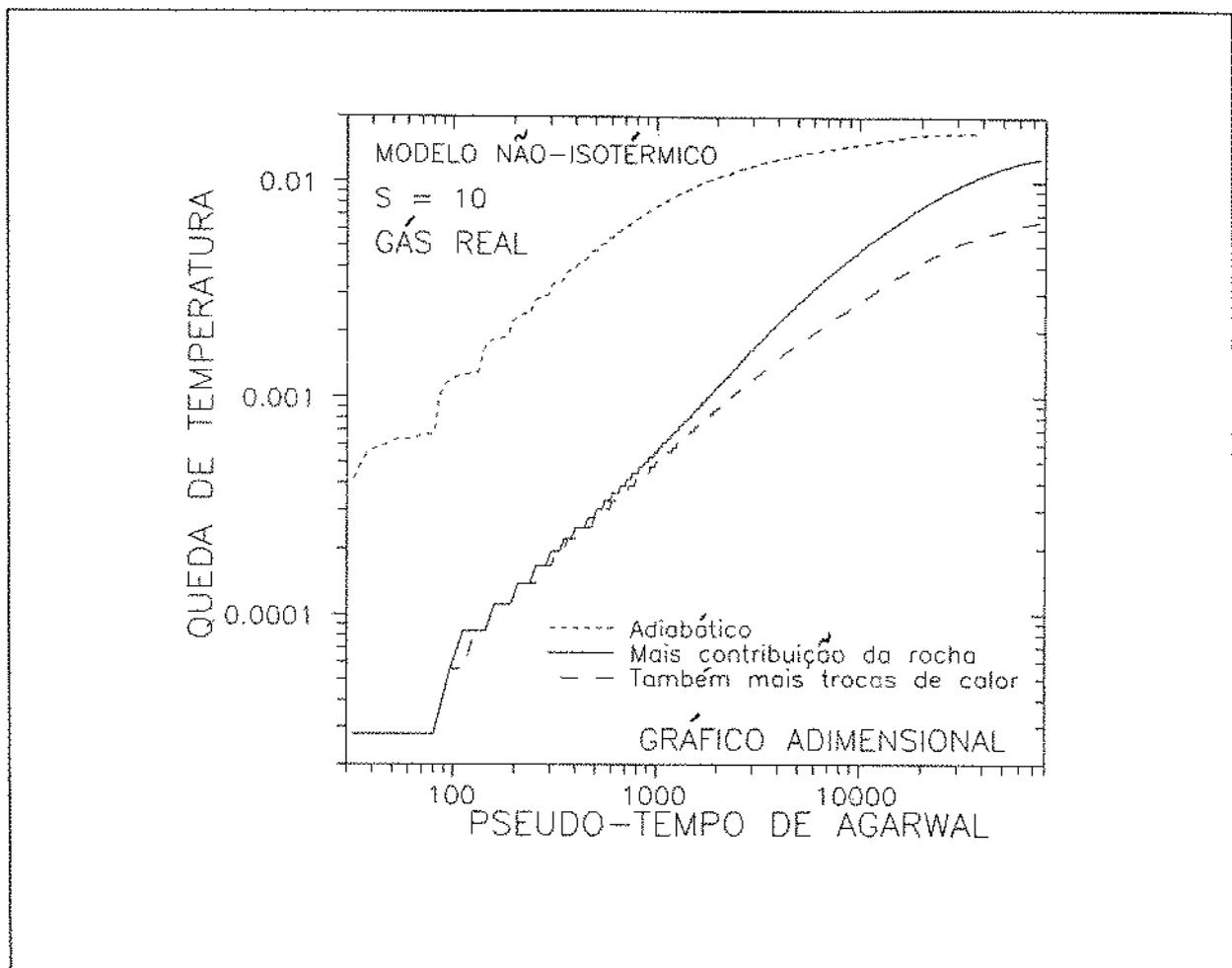


Figura 7.9: Gráfico dos adimensionais da queda de temperatura versus pseudo-tempo de Agarwal para vários casos de escoamentos não isotérmicos, mostrando uma inclinação unitária nos instantes iniciais (escala bilogarítmica).

A queda de temperatura é mais elevada quando não se considera a contribuição da capacidade térmica da matriz rochosa, porém as curvas apresentam uma tendência de se aproximarem em tempos mais longos, isto porque é preciso certo período de tempo para que o fluido em escoamento retire da matriz rochosa próxima ao poço a energia térmica que tem armazenada, para a partir daí diminuir a sua influência no comportamento da temperatura.

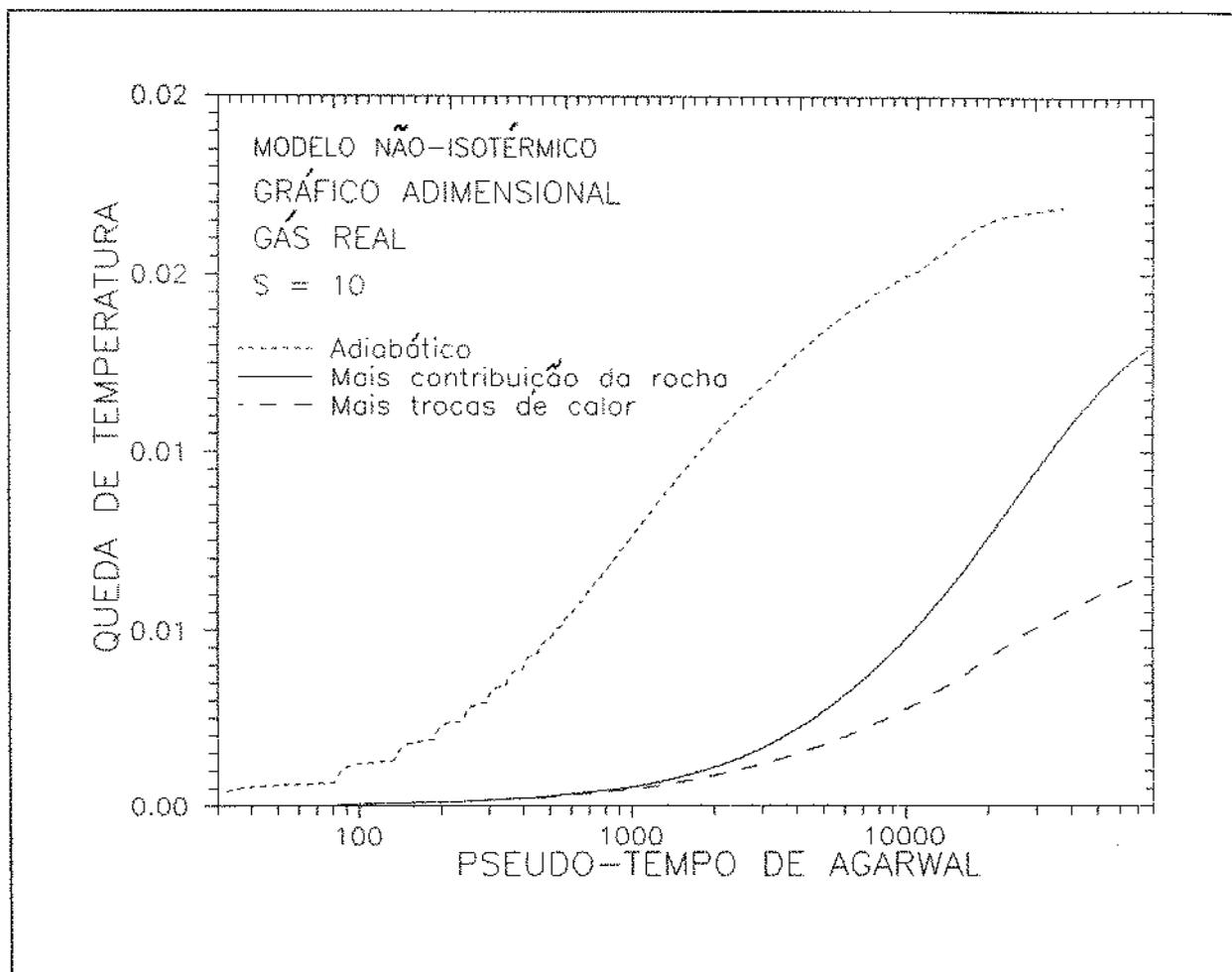


Figura 7.10: Gráfico dos adimensionais da queda de temperatura versus tempo para vários casos de escoamentos não isotérmicos - monologarítmico.

O formato das curvas depende das características mecânicas e térmicas do escoamento. Valores diferentes para os coeficientes de troca de calor e vazão de produção modificam os resultados. A inclusão das trocas térmicas produziu apenas uma pequena variação na temperatura nos tempos iniciais porém a extrapolação da figura 7.9 e da figura 7.10 parece indicar que em tempos bem mais longos, fora do escopo deste trabalho, possa ter um significado maior. A figura 7.11 compara escoamentos a diferentes vazões mostrando que o aumento da vazão, ainda no período de estocagem, aumenta a queda de pressão no fundo do poço.

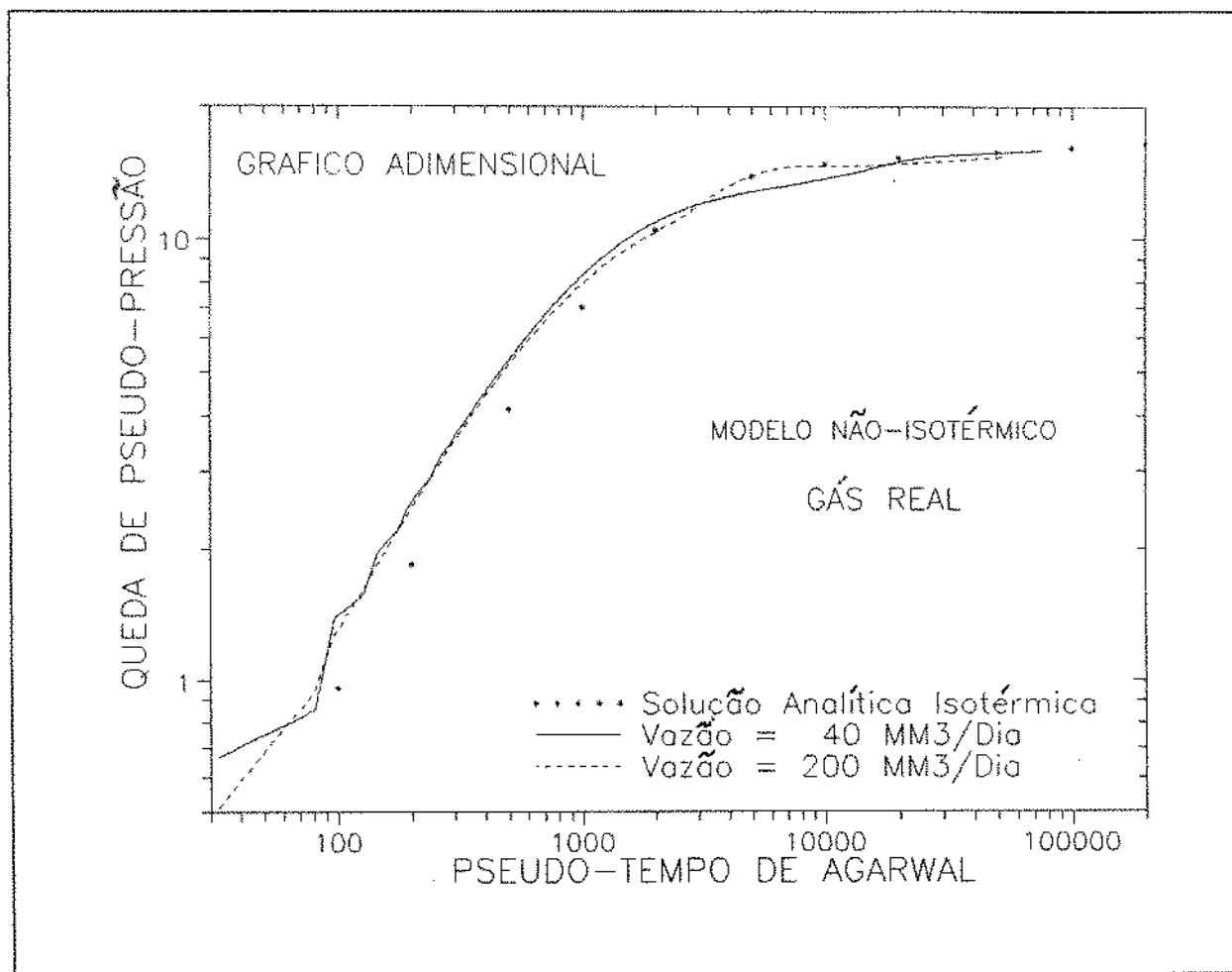


Figura 7.11: Gráfico dos adimensionais da queda de pressão versus pseudo-tempo de Agarwal mostrando a influência da vazão de produção

## Conclusões e Recomendações

O estudo dos sistemas interligando um poço e um reservatório de petróleo vem recebendo grande ênfase nos últimos anos, sendo recente a publicação da maior parte dos trabalhos pesquisados. Várias têm sido as motivações desses trabalhos. Alguns exemplos são: avaliar os erros introduzidos pela adoção da hipótese de escoamento isotérmico nas soluções atualmente existentes; previsão do comportamento de um sistema injetor; análise de estocagem variável, etc.

Muito se discute na literatura os aspectos ligados à solução numérica das equações diferenciais que regem o comportamento do sistema, sendo que diversos métodos são apresentados. Neste trabalho adotamos o método das direções características para modificar as equações no poço e as acoplamos com as equações válidas no reservatório. Na primeira parte do trabalho foi estudado o assunto com mais detalhes e desenvolvido um modelo isotérmico de escoamento. Em seguida, uma analogia com esse primeiro caso isotérmico incorporou a equação da energia, resultando em um sistema não isotérmico mais complexo.

Foram estudados diversos casos que consideravam um sistema inicialmente estático ao ser iniciada a produção. A escolha de um fluido gasoso permitiu identificar onde ocorrem as diferenças em relação ao modelo isotérmico, uma vez que os efeitos devidos à expansividade térmica são realçados. A partir dos estudos realizados pode-se concluir e propor as seguintes recomendações:

1. Embora o método das direções características produza resultados satisfatórios ao prever o comportamento transiente no escoamento em dutos, impõe um elevado esforço computacional ao ser aplicado para um sistema poço-reservatório. Duas alternativas para reduzir o tempo dispendido nos cálculos podem ser propostas, a título de recomendação para trabalhos posteriores:
  - (a) Associar uma rotina variante que discretize o sistema original de equações e seja acionada para acelerar o avanço no tempo quando o escoamento estivesse mais próximo de um regime permanente. Também um método para avaliar as novas condições iniciais, para a rotina variante, deveria ser acrescentado ao sistema. Com essa opção é possível multiplicar consideravelmente o valor dos incrementos no tempo.
  - (b) Reduzir o número de pontos discretizados no poço quando fosse identificada uma condição mais estável de escoamento. Esta opção é mais fácil de ser implementada, bastando, apenas abandonar um certo número de pontos do problema. Neste caso o incremento no tempo tem um valor limite máximo que

é definido pelo tempo que a onda de pressão dispense para percorrer todo o poço.

2. Investigar com mais detalhes outras condições de escoamento como por exemplo o fechamento de poços, a injeção de fluidos em diversas temperaturas, etc. Em sua forma atual o modelo já atende a essas condições, no entanto, é necessária uma análise do comportamento numérico devido a discretização da equação térmica no reservatório, especialmente o termo convectivo, nessas novas situações.

3. Um modelo mais realista para o estudo isotérmico não acrescentou diferenças significativas nas curvas típicas obtidas pelos modelos analíticos mais simples.

Deve-se observar que, embora alguns problemas mais complexos sejam estudados em engenharia de petróleo através do princípio da superposição, as soluções analíticas são conhecidas apenas para problemas com condições auxiliares também simplificadas. Dessa forma, a concordância verificada entre as curvas valida o modelo numérico e indica a possibilidade de seu uso em outras condições.

4. A pressão no fundo do poço em um teste de produção é influenciada pelas propriedades térmicas do sistema fluido-poço-reservatório enquanto houver a estocagem. Para períodos mais longos as curvas da queda de pseudo-pressão versus pseudo-tempo tendem a valores semelhantes àqueles obtidos através de modelos isotérmicos.
5. Um estudo analítico pode ser desenvolvido visando a propor um método de adimensionalização das curvas do escoamento não isotérmico. Embora deste estudo se possa concluir que o comportamento do sistema dependa de um número elevado de parâmetros, é possível estudar casos mais simples que estabeleçam um processo termodinâmico para o fluido e determine, neste caso, uma relação entre a pressão e a temperatura. O método adotado, de modo análogo ao realizado por Agarwal [2] no escoamento isotérmico compressível, poderia partir da equação da difusividade e das condições auxiliares, a princípio com uma equação simples representando o poço e iniciar a pesquisa de novas pseudo-funções que linearizassem o problema.

## Referências

- [1] Agarwal, Ram.G, Al-Hussainy, Rafi and Ramey, H.J. Jr: "An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effects in Unsteady Liquid Flow: I- Analytical Treatment", SPE Journal (Sep 1970) 279-290; Trans AIME 249.
- [2] Agarwal, Ram.G.; "Real Gas Pseudo-Time - A New Function for Pressure Build-Up Analysis of MHF Gas Wells," paper SPE 8279 presented at the 1979 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Sept 23-26.
- [3] Ahluwalia, J.S. and Wilkes J.O.: "Wellbore Storage Effects in Transient Flow Testing of Gas Wells" , JPT(Jun.1989) 623-632.
- [4] Al-Hussainy,R., Ramey, H.J.Jr and Crawford, P.B.: "The Flow of Real Gases Through Porous Media." JPT(May 1966) 624-636.
- [5] Almehaideb, Reyadh A.: " A Reservoir/Wellbore Model for Multiphase Injection and Pressure Transient Analysis" PhD Dissertation, Stanford University, (June 1989).
- [6] Asheim, H.: " MONA:An Accurate Two-Phase Well Flow Model Based on Phase Slippage". artigo SPE 12989 apresentado na 1984 European Petroleum Conference, London, England, Outubro 1984.
- [7] Ashley, F.E.: " An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Fluid Flow Problems," Journal of Computational Physics 2, 306-331(1968).
- [8] Aziz, K. and Settari, A.: " Petroleum Reservoir Simulation," Applied Science Publishers Ltd., London(1979).
- [9] Bergles, A.E., Collier, S.G., Delhaye, J.M., Hewitt, G.F. e Mayinger, F., "Two-Phase Flow and Heat Transfer In the Power and Process Industries," Cap. 2, Hemisphere/McGraw-Hill, 1981.
- [10] Courant,,R. and Hilbert D.: " Methods of Mathematical Physics," Volume II,Interscience Publishers,New York(1962).
- [11] Dukler, A.E., Wicks, M., Cleveland, R.G.: "Frictional Pressure Drop in Two-Phase Flow: B- An Approach Through Similarity Analysis," A.I.Ch.E. Journal. vol.10, no. 1, (jan 1964), 44-51.
- [12] van Everdingen, A.F. and Hurst, W.: "The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoir," Trans.,AIME(1949)179, 305-324.
- [13] Glowacki, Kazimierz: "Discussion of Well-Storage Effects in Transient Flow Testing of Gas Wells," JPT, (nov.1989), 1366.

- [14] Hawkins, M.F.Jr.: "A Note on the Skin Effect," Trans. AIME, (1956), 356-357.
- [15] Jhaveri, B.S. and Youngren, G.K.: "Three-Parameter Modification of the Peng-Robinson Equation Of State to Improve Volumetric Predictions," paper SPE 13118 presented at the 59th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston ,Set.1984.
- [16] Lee,A.L. et alii:"The Viscosity of Natural Gases," Trans. AIME (1966), 997.
- [17] Liles, D.R. and Reed, Wm.H.: "A Semi-Implicit Method for Two-Phase Fluid Dynamics," Journal of Computational Physics 26, 390-407(1978).
- [18] Mfonfu,G.B.S. and Grader,A.S.: "Versatile Implicit Four-Point Method for Transient Two-Phase Pipeline Flow," paper SPE 19703 presented at the 64th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, San Antonio,Out.1989.
- [19] Miller, Constance W.: "Wellbore Storage Effects in Geothermal Wells," paper SPE 8203 presented at the 54th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Las Vegas,Set.1979.
- [20] Miller, Constance W., Benson, S.M., O'Sullivan, M.J. and Pruess, K.: " Wellbore Effects in Analysis of Two-Phase Geothermal Wells Tests," Society of Petroleum Engineers Journal (Jun 1982) 309-320.
- [21] Passut, Charles A. and Danner, Ronald P.: " Correlation of Ideal Gas Enthalpy, Heat Capacity and Entropy," Ind. Eng. Chem. Fundam., Volume 11,n 4, 1972, 543-546.
- [22] Peng, Ding Yu and Robinson, Donald B.: " A New Two-Constant Equation of State," Ind. Eng. Chem. Fundam., Volume 15, N 1, 1976, 59-64.
- [23] Poettmann, F.H. and Kazemi H.: " Discussion of Wellbore-Storage Effects in Transient Flow Testing of Gas Wells," JPT(nov.1989) 1223-1224.
- [24] Ramey,H.J.Jr.:"Short-Time Test Data Interpretation in the Presence of Skin Effect and Wellbore Storage," JPT(Jan.1970) 97-104;Trans.,AIME.
- [25] Ramey,H.J.Jr.:"Wellbore Heat Transmission," JPT(Abr.1962) 427-434.
- [26] Raznjevic, Kuzman: "Handbook of Thermodynamics Tables and Charts," McGraw-Hill Book Company, USA (1976).
- [27] Smith, J.M., and van Ness, H.C.; "Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics," McGraw-Hill Chemical Engineering Series,Tokyo,Third Edition,1975.

- [28] Tiab, Djebbar and Duruawuru, A.U.: "Thermodynamic Analysis of Transient Two-Phase Flow in Petroleum Reservoirs," SPE Production Engineering (Nov. 1988) 495-507.
- [29] Wallis, G.B.: "One-Dimensional Two-Phase Flow," MacGraw-Hill Book Co., New York.
- [30] Wattenbarger, Robert A. and Ramey H.J. Jr: "An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effects in Unsteady Liquid Flow: II- Finite Difference Treatment," SPE Journal (Sep 1970) 279-290; Trans AIME 249.

# APÊNDICES

# A Equações Básicas

## A.1 Relações Termodinâmicas

Algumas relações termodinâmicas [27], que envolvem as variáveis térmicas, serão destacadas por serem de fundamental importância no desenvolvimento das equações do escoamento em dutos:

- Entalpia:

$$h = h(P, \theta) = u + \frac{P}{\rho} \quad (\text{a.1})$$

- Calor Específico a Pressão Constante:

$$c_P = c_P(P, \theta) = \left( \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)_P \quad (\text{a.2})$$

- Expansividade Térmica:

$$\beta = \beta(P, \theta) = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_P \quad (\text{a.3})$$

- A expansividade térmica se relaciona com a entalpia através da seguinte equação diferencial:

$$\left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_\theta = \frac{1}{\rho} (1 - \beta\theta) \quad (\text{a.4})$$

- Coeficiente de Joule-Thompson:

$$K_{JT} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial P} \right)_h = \frac{\beta\theta - 1}{\rho c_P} = \frac{\frac{RT^2}{P} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P}{c_P} \quad (\text{a.5})$$

## A.2 Equações Locais Instantâneas Primárias

As equações locais instantâneas são obtidas da aplicação da Regra de Leibniz e do Teorema de Gauss aos balanços globais de massa, de quantidade de movimento e de energia, em um volume finito genérico, conforme desenvolvido por Bergles *et alii* [9]:

- Conservação da Massa:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{a.6})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{a.7})$$

- Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div}(\overline{\overline{T}}) \quad (\text{a.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{f} + \operatorname{div}(\overline{\overline{T}}) \quad (\text{a.9})$$

- Conservação da Energia:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \operatorname{div}(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q} \quad (\text{a.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \right] = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \operatorname{div}(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q} \quad (\text{a.11})$$

### A.3 Equações Locais Instantâneas Secundárias

As equações locais instantâneas primárias podem ser matematicamente modificadas dando origem a outras relações de grande aplicabilidade:

- Equação da Energia Cinética: obtida do produto escalar da equação (a.9) pelo vetor velocidade:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + (\text{div} \bar{\bar{T}}) \cdot \vec{v} \quad (\text{a.12})$$

- Equação da Energia Interna: obtida da combinação da equação (a.11) com a equação (a.12).

Lembrando também que:

$$\bar{\bar{T}} = -P\bar{I} + \bar{\bar{\tau}} \quad (\text{a.13})$$

e que

$$\text{div}(\bar{\bar{T}} \cdot \vec{v}) = (\text{div} \bar{\bar{T}}) \cdot \vec{v} + \text{tr}(\bar{\bar{T}} \cdot \text{grad} \vec{v}) \quad (\text{a.14})$$

vem que:

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{tr}(\bar{\bar{\tau}} \cdot \text{grad} \vec{v}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (\text{a.15})$$

- Equação da Entalpia: obtida aplicando a definição termodinâmica da entalpia (a.1) na equação (a.15):

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt} + \text{tr}(\bar{\bar{\tau}} \cdot \text{grad} \vec{v}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (\text{a.16})$$

- Sendo  $h = h(P, \theta)$  e aplicando as equações (a.2) a (a.4) na equação (a.16), obtemos:

$$\rho c_P \frac{d\theta}{dt} - \beta \theta \frac{dP}{dt} - \text{tr}(\bar{\bar{\tau}} \cdot \text{grad} \vec{v}) + \text{div}(\vec{q}) = 0 \quad (\text{a.17})$$

## A.4 Equações Médias Espaciais-Temporais

### A.4.1 Hipóteses Básicas

A trajetória real de uma partícula de fluido escoando em um duto é de difícil acompanhamento. Nela atuam um conjunto instável de forças, de origem inerciais e viscosas, que conferem uma natureza muito dinâmica e pouco previsível aos movimentos.

Não é praticável a utilização de uma modelagem que considere estas complexas condições. O acompanhamento de cada partícula, em cada instante, resultaria em um modelo matemático com um número incomensurável de equações e de incógnitas.

A hipótese de escoamento unidimensional resulta em grande simplificação do problema. Neste caso, o campo de velocidades real do escoamento é substituído por um campo uniforme de velocidades, em cada secção transversal do duto. Valores médios, no tempo e no espaço, são assumidos para representar o valor das propriedades físicas e termodinâmicas, em cada posição do escoamento.

Para equacionar o comportamento desse escoamento, representado por propriedades médias, as equações locais instantâneas são substituídas por equações médias temporais-espaciais. As equações médias, conforme Delhaye *et alii* [9], são matematicamente obtidas da integração, temporal e espacial, das equações locais instantâneas, tanto na secção transversal ao escoamento, como em um intervalo de tempo que ainda seja representativo das propriedades instantâneas.

Hipóteses simplificadoras são formuladas para facilitar o processo de integração. Algumas leis de interação se tornam necessárias para representar a transferência média de quantidade de movimento e de energia ao fluido.

Destacando, as hipóteses utilizadas no processo de média são:

- (a) o valor da pressão é constante na secção transversal ao escoamento
- (b) os coeficientes de correlação são unitários, ou seja:

$$\langle \rho v \rangle = \langle \rho \rangle \cdot \langle v \rangle \quad (\text{a.18})$$

$$\langle \rho e \rangle = \langle \rho \rangle \cdot \langle e \rangle \quad (\text{a.19})$$

$$\langle \rho e v \rangle = \langle \rho \rangle \cdot \langle e \rangle \cdot \langle v \rangle \quad (\text{a.20})$$

$$\langle \rho f v \rangle = \langle \rho \rangle \cdot \langle f \rangle \cdot \langle v \rangle \quad (\text{a.21})$$

$$\langle e \rangle = \langle u \rangle + \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (\text{a.22})$$

(c) o modelo de fluxo é homogêneo:

$$v_k = v \quad (\text{a.23})$$

$$k = 1, 2, \dots$$

(d) massa específica da mistura:

$$\rho = \sum_{k=1}^n R_k \rho_k \quad (\text{a.24})$$

## A.4.2 As Equações Médias

### Conservação da Massa

A equação média temporal-espacial da Conservação da Massa, para um escoamento unidimensional de um fluido pseudo-homogêneo, em termos dos valores médios, simplificada a notação, se escreve de forma semelhante à equação local:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (\text{a.25})$$

### Conservação da Quantidade de Movimento

**Lei de Interação para a Quantidade de Movimento:** O valor médio do termo que contém o tensor cisalhante pode ser interpretado como um gradiente de pressão, resistente ao escoamento, atribuído ao atrito viscoso. Esse termo tem uma orientação contrária ao sentido da velocidade e é normalmente representado por uma lei de interação que envolve a definição de um coeficiente de atrito.

O coeficiente de atrito é correlacionado empiricamente através de números adimensionais que representam o escoamento. No caso, o número de Reynolds é correlacionado ao número de Euler. Dukler *et. alii* [11] deduziram, por análise de similaridade, a definição para os números de Reynolds e Euler no escoamento bifásico. Estes adimensionais são funções do padrão de fluxo do escoamento. Quando o fluxo é homogêneo, ou seja, sem escorregamento entre as fases, as definições se reduzem a:

$$Re_{NS} = \frac{D \cdot v \cdot \rho_{NS}}{\mu_{NS}} \quad (\text{a.26})$$

$$Eu_{NS} = \frac{f}{2} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x}}{\frac{v^2}{D}} \quad (\text{a.27})$$

onde:

$$\rho_{NS} = \rho_L \lambda + \rho_G (1 - \lambda) \quad (\text{a.28})$$

$$\mu_{NS} = \mu_L \lambda + \mu_G (1 - \lambda) \quad (\text{a.29})$$

Diversas correlações, entre  $Re_{NS}$  e  $Eu_{NS}$ , estão publicadas na literatura. Vamos utilizar aquela que foi indicada por Asheim [6] por apresentar boa concordância com os dados reais e, também, por ter um formato bastante simples. Essa equação foi originalmente proposta por J.M. Campbell(1978):

$$f_o = \frac{0.16}{Re_{NS}^{0.172}} \quad (\text{a.30})$$

**A Equação Média da Quantidade de Movimento:** A equação média temporal-espacial da Conservação da Quantidade de Movimento, para o escoamento unidimensional de um fluido pseudo-homogêneo, em termos dos valores médios, em notação simplificada, utilizando a lei de interação para o termo viscoso assume a forma:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div.}(\rho v v) = \rho f - \text{grad}(P) + \rho \frac{f_o}{2D} v |v| \quad (\text{a.31})$$

## Conservação da Energia

### Leis de Interação para a Equação da Energia

#### 1. O termo devido ao atrito viscoso:

O valor médio da contribuição térmica devida ao atrito viscoso foi assumido como sendo igual ao de um escoamento bidimensional de um fluido pseudo-homogêneo,

com simetria radial, em um tubo circular de diâmetro constante. O desenvolvimento, nestas condições resulta em:

$$\Delta e_{viscoso} = \rho \frac{f_o}{2D} v^2 |v| \quad (\text{a.32})$$

2. O termo devido ao fluxo térmico:

O valor médio da contribuição térmica, devido ao termo que contém o divergente do fluxo de calor, será admitido proporcional à diferença de temperaturas, entre o fluido no poço e a formação adjacente. O coeficiente de trocas de calor é admitido ser constante. Considerando que o fluxo térmico é proporcional a superfície do tubo, temos que para cada unidade de volume no elemento:

$$\text{div}(\vec{q}) = -\frac{4\sigma_1}{D} (\theta - \theta_{ext}) \quad (\text{a.33})$$

**A Equação da Média da Energia:** A equação média temporal-espacial da Conservação da Energia, para o escoamento unidimensional de um fluido pseudo-homogêneo, em termos dos valores médios, aplicadas as leis de interação para os termos viscoso e térmico assume, em notação simplificada, a forma:

$$\rho c_P \frac{d\theta}{dt} - \beta \theta \frac{dP}{dt} - \rho \frac{f_o}{2D} v^2 |v| + \frac{4\sigma_1}{D} (\theta - \theta_{ext}) = 0 \quad (\text{a.34})$$

#### A.4.3 Equações para o meio-poroso

##### Hipóteses Adicionais

1. Temperatura é constante na seção transversal, ou seja, equilíbrio térmico local entre rocha e fluido;
2. Velocidade da rocha é desprezível;
3. A expansividade térmica da rocha é desprezível;
4. Não considerar contribuição térmica devido aos efeitos viscosos no reservatório;
5. O escoamento no reservatório é horizontal;
6. Não há trocas de massa entre o fluido e a matriz rochosa.

### Equação da Difusividade

A equação da difusividade é uma associação da equação da conservação da massa à Lei de Darcy, que, por sua vez, substitui de maneira simplificada a equação da quantidade de movimento.

Partindo da equação local instantânea da conservação da massa, para um escoamento radial de um fluido pseudo-homogêneo, utilizando a hipótese dos coeficientes de correlação unitários para o produto  $\rho v$ , obtém-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \text{div}(\rho u) = 0 \quad (\text{a.35})$$

que associada à Lei de Darcy, para um escoamento horizontal:

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (\text{a.36})$$

resulta na equação da difusividade:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (\text{a.37})$$

### Equação da Energia para o Meio Poroso

A equação local instantânea da conservação da energia, na forma da entalpia, pode ser integrada, temporal e espacialmente, em uma secção radial genérica, em um intervalo de tempo pequeno, porém representativo das propriedades instantâneas, resultando em:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sigma_3 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{2\sigma_2}{h_r} (\theta - \theta_{ext}) = \\ & [(1 - \phi) \rho_{CP}]_{rocha} \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\phi \rho_{CP})_{fluido} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u (\rho_{CP})_{fluido} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \beta \theta \left( \phi \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (\text{a.38})$$

## B Sistemas de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

### B.1 Informações Gerais

Uma Equação Diferencial (ED) pode ser descrita como uma função do tipo  $F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, u_{xy}, \dots) = 0$ , onde  $x, y, \dots$  são as variáveis independentes,  $u = u(x, y, \dots)$  é a solução da ED e  $u_x, u_y, \dots$  são as suas derivadas parciais em relação a  $x, y, \dots$ .

Uma equação diferencial é chamada ordinária (EDO) se há apenas uma única variável independente. A ordem da equação diferencial é definida pela maior ordem de suas derivadas.

Para uma EDO de ordem  $N$  a totalidade de soluções (exceto possíveis soluções singulares) pode ser escrita como função da variável independente ( $x$ ) e de  $N$  constantes de integração.

Para uma equação diferencial parcial (EDP) a situação é um pouco mais complexa. A solução geral apresenta  $N$  funções de integração. Cada função, em geral, possui uma série de variáveis independentes, ou parâmetros de integração, cujo número é igual àquele da função  $u(x, y, \dots)$  subtraído de uma unidade.

### B.2 Solução da Equação Diferencial Parcial de Primeira Ordem (EDPPO)

**Problema Específico:** Nosso estudo será restrito ao caso em que o número ( $i$ ) de equações diferenciais é igual ao número de soluções  $u, v, \dots$  procuradas. Além disto trataremos apenas de EDP que possuam 2 variáveis independentes e que sejam de primeira ordem.

Os conceitos utilizados na abordagem deste problema podem ser generalizados, em uma abordagem mais ampla, para a solução de problemas de ordem superior, ou com um número maior de variáveis independentes.

Vamos considerar as EDPPO que possam ser escritas da seguinte forma:

$$a.p + b.q + c = 0$$

onde

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Em adição vamos considerar que as funções  $(a, b, c)$  são contínuas, bem como as suas derivadas, e que  $(a)$  e  $(b)$  não são mutuamente nulas. Podemos classificar as EDPPO, conforme os valores assumidos por  $(a, b, c)$ , em quatro categorias:

- 1) Se  $(a, b, c)$  são funções de  $(x, y)$  a EDPPO é linear;
- 2) Se apenas  $(c)$  é função de  $(u)$  a EDPPO é semi-linear;
- 3) Se  $(a, b, c)$  são funções de  $(x, y, u)$  a EDPPO é 'Quasi-Linear';
- 4) Se algum termo depende de uma derivada parcial a função é 'não-linear'.

Nosso objetivo é desenvolver uma teoria para as EDPPO (ver referência [10]) do tipo "Quasi-Linear" e mostrar que esta equação é equivalente à um sistema de equações diferenciais ordinárias.

**Solução Analítica da EDPPO:** O Método para resolver uma EDPPO consiste em transformá-la em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Isto é possível através de uma variável  $s$  que satisfaz as seguintes relações :

$$\frac{dx}{ds} = a \quad \text{com } x = x(s)$$

$$\frac{dy}{ds} = b \quad \text{com } y = y(s)$$

Substituindo na EDPPO, obtemos:

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c = 0 \\ \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial u}{\partial y} + c = 0 \\ \frac{du}{ds} + c = 0 \end{cases}$$

Ou seja, com a introdução da variável ( $s$ ), obtemos o SEDO:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a & x = x(s) \\ \frac{dy}{ds} = b & y = y(s) \\ \frac{du}{ds} = -c & u = u(s) \end{cases}$$

A solução deste sistema conduz a três funções em ( $s$ ), cada uma apresentando mais uma constante de integração. Trataremos do caso em que as constantes definem, para  $s = 0$ , uma condição inicial genérica do problema original.

Especificadas as constantes, as equações representam uma linha no espaço  $(x, y, u)$ , sobre a qual a variável ( $s$ ) é medida. Esta linha recebe o nome de linha característica da EDPPO. A direção definida no domínio  $(x, y)$  através da relação  $dy \cdot dx = b \cdot a$  é denominada direção característica.

**Interpretação Geométrica:** De maneira geral uma função  $u = u(x, y, \dots)$  qualquer, solução da EDPPO, pode ser geometricamente representada no espaço  $(x, y, u)$  como sendo uma superfície. É de interesse o elemento de superfície que contém um ponto genérico  $P: (x, y, u)$ .

A princípio o ponto  $P: (x, y, u)$  também pertence a uma série de outras superfícies que satisfazem a EDPPO. Cada uma delas pode ser localmente definida por um plano tangente cuja direção normal  $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1)$  obedece a uma equação linear que é estabelecida pela própria EDPPO:

$$a \cdot p + b \cdot q + c = 0$$

onde:

$$a = a(P)$$

$$b = b(P)$$

$$c = c(P)$$

Estes planos, que localmente representam as superfícies definidas pelas funções  $u(x,y)$  em  $P$ , formam um conjunto de planos, denominado 'MONGE PENCILS'. Estes planos, devido a relação imposta pela EDPPO, possuem uma intersecção comum. Desta forma é definido um eixo chamado 'MONGE AXIS' ( de Gaspar Monge, 1746–1818). A direção do eixo , no espaço  $(x,y,u)$ , é dado pela relação  $dx.dy.du = a.b.c$ , no ponto  $P$ .

Há um campo de direções no espaço  $(x,y,u)$ . Cada ponto  $P$ , junto com a direção do Eixo de Monge, definem um elemento linear. Ponto a ponto os elementos definem uma linha no espaço  $(x,y,u)$ . Estas linhas são chamadas de Linhas ou Curvas Características da EDPPO. A projeção da curva característica no plano  $(x,y)$  define a Direção característica da EDPPO no Ponto  $P$ .

Se um ponto  $P$  pertence a uma superfície que é solução da EDPPO, então toda a linha característica, gerada a partir do Ponto  $P$ , também pertence a esta superfície. Mais; como o ponto  $P$  pode pertencer a infinitas superfícies, também soluções da EDPPO, então a linha característica pertence a todas estas superfícies.

O espaço  $(x,y,u)$  pode ser interpretado como sendo um conjunto de Linhas Características, para cada EDPPO. Algumas conclusões podem ser obtidas: qualquer função  $u(x,y)$ , formada por uma família de linhas características é solução da EDPPO; as funções  $u(x,y)$  que são soluções da EDPPO são formadas por uma família de linhas características.

Integrar uma EDPPO, a partir de uma condição inicial especificada, significa reunir as linhas características que contém os pontos que a compoem. Geometricamente podemos verificar que a condição inicial não pode coincidir com uma linha característica, uma vez que os seus pontos são redundantes, não acrescentando informações sobre o comportamento da superfície.

O conjunto de funções admissíveis como solução de uma ED pode, em geral, ser descrito com o uso de Parâmetros de Integração. Para o caso da EDPPO é necessário um número de 2 parâmetros. Um deles pode ser geometricamente visto como sendo uma variável que percorre as linhas características no espaço  $(x,y,u)$ . O outro é aquele que percorre a condição inicial do problema particular.

### B.3 O Sistema de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem SEDPPO

Para simplificar a notação, representaremos o caso de um SEDPPO com duas variáveis dependentes  $(u,v)$ , tal que  $u=u(x,y)$  e  $v=v(x,y)$ . Um sistema com um maior número de variáveis dependentes e de equações tem solução análoga.

O método de solução de um SEDPPO, com um número  $N$  de equações, consiste em transformá-lo em um sistema de equações diferenciais equivalente, o qual é formado por  $N$  sub-sistemas de equações diferenciais ordinárias. Cada um fornece uma relação entre as variáveis dependentes.

Uma etapa intermediária é necessária. Para transformar um SEDPPO em um conjunto de SEDO é preciso modificá-lo para explicitar as suas direções características. Nestas direções as variáveis dependentes se relacionam através de diferenciais exatas. Estas relações formam o SEDPPO modificado, combinação linear do original, que é passível da transformação.

De maneira geral, em uma ED, derivadas de cada variável dependente podem ser agrupadas, representando variações totais, mas em relação a variáveis distintas.

Por exemplo a ED:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} + d \frac{\partial v}{\partial y} + e = 0$$

poderia ser escrita como:

$$\frac{du}{ds} + \frac{dv}{dw} + e = 0$$

onde:

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{dx}{dw} = c, \quad \frac{dy}{dw} = d$$

Observa-se que, de modo genérico, as variáveis  $s$  e  $w$  não dão origem a direções coincidentes. Entretanto uma combinação linear entre as EDs pode provocar tal coincidência. Nesta nova equação a direção definida pela relação  $dy \cdot dx = b \cdot a = d \cdot c$  representa uma direção característica do sistema.

Se um SEDPPO pode ser substituído por outro, linearmente equivalente, no qual cada ED, em cada ponto, apresente apenas uma direção característica explícita, este sistema é classificado como hiperbólico. Trataremos desta classe de sistemas.

Seja o seguinte SEDPPO:

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} + e_1 = 0 \quad (\text{b.1})$$

$$a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} + e_2 = 0 \quad (\text{b.2})$$

onde  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  são funções de  $(x, y, u, v)$ .

A determinação do sistema modificado é possível através de funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , que multiplicadas respectivamente às equações (b.1) e (b.2) permitem calcular uma relação do tipo:

$$\lambda = \frac{\phi_1 a_1 + \phi_2 a_2}{\phi_1 b_1 + \phi_2 b_2} = \frac{\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2}{\phi_1 d_1 + \phi_2 d_2}$$

Ou seja :

$$\begin{bmatrix} b_1 \lambda - a_1 & b_2 \lambda - a_2 \\ d_1 \lambda - c_1 & d_2 \lambda - c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que este sistema linear não admita apenas a solução trivial é necessário que o determinante da matriz seja igual a zero. Em geral é obtida uma equação para  $\lambda$  de grau igual ao número N de equações.

Caso esta equação apresente N raízes reais e distintas, para qualquer valor de  $(a, b, c, d)$  o SEDPPO é do tipo hiperbólico. Caso houvesse raízes complexas o sistema seria classificado como elíptico, o que exigiria um outro procedimento para a abordagem do problema.

Cada auto-valor  $\lambda$  indica uma relação  $dy/dx$  que define uma direção característica. Para cada um deles há funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  que dão origem à uma nova equação, que pode ser reescrita em termos de diferenciais totais, cada uma segundo a sua direção característica.

Desta forma as equações (b.1) e (b.2) dão origem a dois SEDO, que podem ser resolvidos em função das variáveis  $s_1$  e  $s_2$ . Cada um fornece uma relação entre  $u$  e  $v$ .

$$(I) - \begin{cases} \frac{du}{ds_1} + C_1 \frac{dv}{ds_1} + e_1 \phi_{11} + e_2 \phi_{21} = 0 \\ \frac{dx}{ds_1} = a_1 \phi_{11} + a_2 \phi_{21} = \frac{1}{C_1} (c_1 \phi_{11} + c_2 \phi_{21}) \\ \frac{dy}{ds_1} = b_1 \phi_{11} + b_2 \phi_{21} = \frac{1}{C_1} (d_1 \phi_{11} + d_2 \phi_{21}) \end{cases}$$

$$(II) - \begin{cases} \frac{du}{ds_2} + C_2 \frac{dv}{ds_2} + e_1 \phi_{12} + e_2 \phi_{22} = 0 \\ \frac{dx}{ds_2} = a_1 \phi_{12} + a_2 \phi_{22} = \frac{1}{C_2} (c_1 \phi_{12} + c_2 \phi_{22}) \\ \frac{dy}{ds_2} = b_1 \phi_{12} + b_2 \phi_{22} = \frac{1}{C_2} (d_1 \phi_{12} + d_2 \phi_{22}) \end{cases}$$

## C A Equação de Estado de Peng-Robinson

### C.1 Informações Gerais

As equações de estado semi-empíricas com dois parâmetros foram continuamente aprimoradas desde a proposta por Van der Waals(1873). Uma delas, a equação de Redlich-Kwong (1949) obteve grande aceitação para a previsão das propriedades volumétricas e térmicas de substâncias simples.

Visando estudar as misturas multicomponentes, bem como a determinação do equilíbrio líquido-vapor, Giorgio Soave(1971) modificou a forma da dependência da temperatura na equação original de Redlich-Kwong, resultando em uma nova equação que possui grande concordância com os resultados empíricos, especialmente no caso de hidrocarbonetos.

Peng-Robinson(1976), repetiu o trabalho de Soave, visando melhorar, também, a previsão volumétrica da fase líquida.

### C.2 As Equações de Peng-Robinson

Substâncias Simples:

A equação de estado:

$$P = \frac{R\theta}{v - b} - \frac{a}{v(v + b) + b(v - b)} \quad (c.1)$$

onde:

$$a(\theta) = \alpha(\theta_r, w) \cdot a_c(\theta_c) \quad (c.2)$$

$$a_c = 0.457235 \frac{(R\theta_c)^2}{P_c} \quad (c.3)$$

$$b(\theta) = b(\theta_c) = 0.077796 \frac{R\theta_c}{P_c} \quad (c.4)$$

sendo que o subscrito (*r*) indica as propriedades reduzidas e o subscrito (*c*) as propriedades no ponto crítico.

Os parâmetros volumétricos são determinados através do fator de compressibilidade ( $Z$ ), que é obtido da equação cúbica:

$$Z^3 - (1 - B)Z^2 + (A - 2B - 3B^2)Z - (AB - B^2 - B^3) = 0 \quad (\text{c.5})$$

onde:

$$Z = \frac{Pv}{R\theta} \quad (\text{c.6})$$

$$A = \frac{a.P}{(R\theta)^2} \quad (\text{c.7})$$

$$B = \frac{b.P}{R\theta} \quad (\text{c.8})$$

Os valores do parâmetro ( $\alpha$ ) foram empiricamente correlacionados aos da temperatura, para cada substância, através de medidas experimentais no ponto de vapor, resultando em:

$$\alpha^{0.5} = 1 + m(1 - \theta_r^{0.5}) \quad (\text{c.9})$$

sendo que o valor de ( $m$ ) foi correlacionado diretamente com o fator acêntrico da substância, obtendo-se:

$$m = 0.37646 + 1.54226w - 0.26992w^2 \quad (\text{c.10})$$

### Misturas de Multicomponentes:

As regras de mistura para a determinação de misturas multicomponentes são bastante simples, sendo obtidas de:

$$a = \sum_i \sum_j x_i x_j a_i^{1/2} a_j^{1/2} (1 - \delta_{ij}) \quad (\text{c.11})$$

e

$$b = \sum_i x_i . b_i \quad (\text{c.12})$$

onde  $\delta_{ij}$  são os coeficientes de interação binária entre os componentes.

### Equação da Entalpia:

A equação termodinâmica que determina a entalpia em um processo isotérmico é:

$$\frac{H - H^*}{R\theta} = Z - 1 + \frac{1}{R\theta} \int_1^v \left[ \theta \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_v - P \right] dV \quad (c.13)$$

onde ( $H^*$ ) é o valor da entalpia do gás ideal. Essa equação, resolvida para um fluido que obedeça a equação de estado de Peng-Robinson, resulta em:

$$H - H^* = R\theta(Z - 1) + \frac{a}{2\sqrt{2}b} \left( \frac{\theta}{a} \left( \frac{da}{d\theta} \right) - 1 \right) \ln \left( \frac{Z + 2.414B}{Z - 0.414B} \right) \quad (c.14)$$

onde:

$$\theta \left( \frac{da}{d\theta} \right) = - \sum_i^N \sum_j^N x_i x_j m_j (a_i a_{cj} \theta_{rj})^{0.5} (1 - \delta_{ij}) \quad (c.15)$$

## D Correlação de Lee *et alii* para a Viscosidade do Gás

A Correlação de Lee *et alii* [16], para o cálculo da viscosidade dos gases,  $\mu_g$ , em função da temperatura,  $\theta$ , da massa específica,  $\rho_g$ , e o do peso molecular do gás,  $M$  é composta de uma série de equações, que modificadas para o Sistema S.I. se tornam:

$$\mu_g = 1.10^{-4} K \exp\left(x\left(\frac{\rho_g}{1000}\right)^y\right) \quad (\text{d.1})$$

onde  $K, x, y$  são parâmetros da correlação e definidos por:

$$K = \frac{1.8^{1.5}(9.4 + 0.02M)\theta^{1.5}}{209 + 19M + 1.8\theta} \quad (\text{d.2})$$

$$x = 3.5 + \frac{547.78}{\theta} + 0.01M \quad (\text{d.3})$$

$$y = 2.4 - 0.2x \quad (\text{d.4})$$