

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

GOMES

MODELO COMPOSICIONAL DE RESERVATÓRIOS
COM FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA

*Este exemplar corresponde à redação final
da tese aprovada pela Comissão julgadora, defen-
dida pelo Eng. Hamilton Pimentel Gomes em 22/11/90.*
Antonio Cláudio de França Corrêa

48/90

Autor : Hamilton Pimentel Gomes
Orientador : Antonio Cláudio de França Corrêa

Novembro de 1990



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

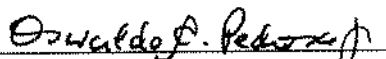
A dissertação "Modelo Composicional de Reservatórios com Formulação Totalmente Implícita", elaborada por Hamilton Pimentel Gomes e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 22 de Novembro de 1990

Banca Examinadora



Antonio Cláudio de França Corrêa, Ph. D.
(Orientador)



Oswaldo Antunes Pedrosa Jr., Ph. D.



Fernando Rodriguez de la Garza, Ph. D.

Agradecimentos

Ao Dr. Antonio Cláudio de França Corrêa, pelo seu incentivo, interesse, colaboração e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos engenheiros Dr. Kelsen Valente Serra e Dr. Fernando Rodriguez de la Garça pelo incentivo e apoio prestados.

Aos professores e funcionários do curso de mestrado em engenharia de petróleo, pela atenção e colaboração .

Aos colegas de curso, por tornarem esta tarefa mais aprazível.

À Petróleo Brasileiro S.A., pela assistência técnica e suporte financeiro que possibilitou a minha participação no curso de mestrado em engenharia de petróleo.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Descrição geral do modelo	3
3	Modelo matemático	4
3.1	Equações de escoamento	4
3.2	Equações de equilíbrio termodinâmico	5
3.3	Equações de capilaridade	6
3.4	Equações restritivas	7
4	Modelo numérico	8
4.1	Discretização do problema	8
4.2	Solução do problema	12
5	Propriedades de rocha e fluidos	14
5.1	Equação de Peng - Robinson	14
5.2	Fugacidades	15
5.3	Peso específico	16
5.3.1	Correlação de Alani-Kennedy	16
5.4	Viscosidade	17
5.4.1	Correlação de Lee-Gonzalez	17
5.4.2	Correlação de Lohrenz	17
5.5	Tensão interfacial e pressão capilar	18
5.6	Permeabilidade relativa	19
5.6.1	Modelos de Stone	19
5.6.2	Modificações dos modelos de Stone	20
5.7	Saturação de água	20
5.8	Pressão de saturação	22
5.8.1	Pressão de bolha	22
5.8.2	Pressão de orvalho	23
5.8.3	Casos especiais	24
6	Validação do modelo	26
6.1	Teoria do fluxo permanente para escoamento bifásico.	26
6.2	Resultados do modelo versus solução analítica	29
7	Tópicos especiais	35
7.1	Cálculo "flash"	35
7.2	Cálculo das pressões de fluxo	36
7.3	Índice de produtividade dos poços	37
7.4	Inicialização do modelo	37

7.5	Aparecimento e desaparecimento das fases de hidrocarbonetos	38
8	Aplicações do modelo	39
8.1	Processos de produção	39
8.2	Produção de fluidos com ciclagem de gás	40
8.3	Testes de formação	43
9	Conclusões	48
	Bibliografia	49
	Apêndice A - Expressões analíticas das derivadas	52

Lista de Tabelas

6.1	Composição inicial dos fluidos (%)	30
6.2	Propriedades de rocha e fluidos	31
6.3	Dados de permeabilidades relativas	34
8.1	Composição final do fluido no reservatório de gás condensado retrógrado	40
8.2	Composição final do fluido no reservatório de óleo volátil	43
8.3	Composição do fluido injetado	43

Lista de Figuras

6.1	Reservatório de gás condensado retrógrado - verificação da condição de fluxo permanente	32
6.2	Reservatório de óleo volátil - verificação da condição de fluxo permanente .	32
6.3	Reservatório de gás condensado retrógrado - resultados analíticos x numéricos	33
6.4	Reservatório de óleo volátil - resultados analíticos x numéricos	33
8.1	Reservatório de gás condensado retrógrado - q_o , RGO x tempo	41
8.2	Reservatório de óleo volátil - q_g , p_{sat} , p_{wf} x tempo	41
8.3	Reservatório de gás condensado retrógrado - p_{sat} , p_{wf} x tempo	42
8.4	Reservatório de gás condensado retrógrado - fr. molar da fase líquida x tempo	42
8.5	Reservatório de gás condensado retrógrado - q_o , RGO x tempo	44
8.6	Reservatório de óleo volátil - q_g , p_{sat} , p_{wf} x tempo	44
8.7	Reservatório de gás condensado retrógrado - q_g , p_{wf} x tempo	45
8.8	Teste de gás com vazão constante - p , S_o x tempo	46
8.9	Teste de óleo com vazão constante - p , S_o x tempo	46
8.10	Teste de gás com vazão variável - p , S_o x tempo	47
8.11	Teste de óleo com vazão variável - p , S_o x tempo	47

Nomeclatura

a	- constante da equação de Peng - Robinson
A	- constante da equação de Peng - Robinson
A_m	- constante da correlação de Alani-Kennedy
b	- constante da equação de Peng - Robinson
B	- constante da equação de Peng - Robinson
B_m	- constante da correlação de Alani-Kennedy
c_i	- constante da correlação de Alani-Kennedy
c_r	- compressibilidade da rocha (Pa^{-1})
c_w	- compressibilidade da água (Pa^{-1})
$f_{i,l}$	- fugacidade do componente i na fase l (Pa)
FR	- função de resíduos do método de Newton - Raphson
G	- energia livre de Gibbs (J/kg-mol)
h_{cel}	- espessura das células (m)
IP	- índice de produtividade
J^n	- matriz jacobiana
k	- constante da correlação de Lee - Gonzalez - permeabilidade absoluta (m^2)
k_i	- constante da correlação de Alani-Kennedy
$k_{r,l}$	- permeabilidade relativa da fase l (fr)
k_x	- permeabilidade na direção x (m^2)
L	- fração molar da fase líquida
L_{ecc}	- fração molar da fase líquida em um experimento de expansão a composição constante
M	- peso molecular
m	- constante da equação de Peng - Robinson
m_i	- constante da correlação de Alani-Kennedy
N	- número total de equações
n	- número total de moles de um sistema
N_b	- número total de blocos
n_c	- numero total de componentes
n_i	- constante da correlação de Alani-Kennedy
n_l	- número de moles do componente l
p	- pressão (Pa)
$p^{\nu+1}$	- pressão na iteração $\nu + 1$ (Pa)
p_b	- pressão de bolha (Pa)
p_{cel}	- pressão média da célula (Pa)
P_{chi}	- parachor do componente i
P_{clk}	- pressão capilar entre as fases l e k (Pa)

- P_d - pressão de orvalho (Pa)
 P_o - pressão na fase óleo (Pa)
 P_{ref} - pressão de referência (Pa)
 P_{sat} - pressão de saturação (Pa)
 P_{wf} - pressão de fluxo (Pa)
 q_{gs} - vazão de gás em condições de superfície ($\frac{m^3}{seg}$)
 q_l - vazão volumétrica da fase l ($\frac{m^3}{seg}$)
 q_{ls} - vazão de líquido em condições de superfície ($\frac{m^3}{seg}$)
 q_m^* - vazão molar do componente m por unidade de volume ($\frac{moles}{m^3 \cdot seg}$)
 q_t^* - vazão molar total ($\frac{moles}{seg}$)
 R - constante universal dos gases ($\frac{Pa \cdot m^3}{kg \cdot mol \cdot ^\circ K}$)
 r_i - raio central do bloco i (m)
 $r_{i+\frac{1}{2}}$ - raio da fronteira externa do bloco i (m)
 \vec{R}^n - vetor de funções de resíduos
 r_o - raio de aplicação da pressão média do bloco (m)
 r_w - raio de poço (m)
 S - entropia (J / $^\circ K$)
 S_l - saturação da fase l (fração)
 T - temperatura ($^\circ R$)
 t - tempo (segundos)
 T_r - temperatura reduzida
 u_l - velocidade da fase l (m/seg)
 \vec{u} - vetor de incógnitas
 v - volume molar ($\frac{m^3}{mol}$)
 V - fração molar da fase vapor
- volume (m^3)
 V_b - volume de rocha (m^3)
 v_l - volume molar da fase l ($\frac{m^3}{mol}$)
 V_s - fração molar da fase gás em condições de superfície
 x_m - fração molar do componente m na fase líquida
 x_{mo} - fração molar do componente m na fase líquida do fluido original
 y_m - fração molar do componente m na fase gasosa
 y_{mo} - fração molar do componente m na fase vapor do fluido original
 Z - fator de compressibilidade
 $z_{i,j}$ - profundidade média do bloco (i, j) (m)
 Z_{cel} - profundidade do topo das células m
 Z_{cgo} - profundidade do contato gás-óleo (m)
 z_m - fração molar do componente m
 z_{mo} - fração molar do componente m na composição original do fluido
 Z_{ref} - profundidade de referência (m)

- α - indicador de fase
- constante da equação de Peng - Robinson
- fator geométrico (m^2)
- fator de relaxação
- constante = $\frac{\Delta x}{\Delta y}$
- β - indicador de fase
- constante da correlação de Lee - Gonzalez
- constante = $\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i-\frac{1}{2}}}$
- γ - peso específico correlação de Lee - Gonzalez ($\frac{gr}{cm^3}$)
- peso específico da fase l ($\frac{kg}{m^3}$)
- δ_{ml} - coeficiente de iteração binária entre o componente m e o componente l
- ϵ_j - constante da correlação de Lohrenz
- η - constante da correlação de Lee - Gonzalez
- θ - constante da equação (3.17)
- λ_l - mobilidade da fase l ($\frac{moles}{m^3 Pa \cdot seg}$)
- μ_l - potencial químico do componente l ($Pa \cdot m^3$)
- μ_l - viscosidade da fase l ($Pa \cdot seg$)
- μ_j^* - viscosidade do componente j à baixa pressão (cp)
- ν - nível iterativo
- ρ_{ls} - densidade molar do líquido em condições de superfície ($\frac{mol}{m^3}$)
- ρ_{gs} - densidade molar do gás em condições de superfície ($\frac{mol}{m^3}$)
- σ - tensão interfacial ($\frac{dyn}{cm}$)
- ϕ - porosidade (fração)
- ψ_l - potencial de fluxo da fase l (Pa)
- ω - fator acêntrico
- Ω_a - constante da equação de Peng - Robinson
- Ω_b - constante da equação de Peng - Robinson

Resumo

Este trabalho descreve um simulador composicional, isotérmico, bidimensional, com formulação totalmente implícita, desenvolvido para o estudo de reservatórios portadores de óleo leve ou gás condensado retrógrado.

No modelo, são consideradas as fases óleo, gás e água, podendo ser simuladas geometrias cartesianas ($x - y$) ou cilíndricas ($r - z$). A fase água, apesar de presente, não flui no reservatório, sendo considerada compressível com sua saturação variando em função da pressão. Considera-se que o equilíbrio termodinâmico é atingido instantaneamente, não existindo água dissolvida nas fases de hidrocarbonetos nem hidrocarbonetos dissolvidos na fase água e que o sistema rocha fluidos é quimicamente inerte.

Para o cálculo do equilíbrio de fases e propriedades dos fluidos foi adotada a equação de estado de Peng - Robinson (1976), com suas constantes tendo sido previamente ajustadas por meio da utilização de um simulador PVT.

O problema em questão é não linear, tendo sido adotado o método de Newton-Raphson para solucioná-lo. O sistema matricial resultante, penta-diagonal bloqueado, foi resolvido de maneira direta utilizando-se eliminação Gaussiana, tirando-se proveito da esparsidade da matriz.

Devido à complexidade da solução analítica do problema, a sua validação foi feita apenas para o caso de fluxo permanente no reservatório. O resultado da validação e alguns exemplos de aplicação do modelo são partes integrantes deste trabalho.

Abstract

This work describes an isothermal and two-dimensional fully implicit compositional model, which has been developed to the modelling of retrograde gas condensate and volatile oil reservoirs.

The model considers oil, gas and water phases, and may be applied to either cartesian (x-y) or cylindrical (r-z) grids. Water is considered to be immobile and slightly compressible, and water saturation is a function of pressure. Thermodynamic equilibrium is also considered, with no water dissolved in the hydrocarbon phases and no hydrocarbon dissolved in the water phase. Fluid-rock interactions have not been considered.

Phase equilibrium and fluid properties have been computed by means of the Peng-Robinson (1976) equation of state. The adjustable coefficients of the equation of state have been previously determined by means of a commercial PVT simulator.

The Newton-Raphson method has been selected to solve the resulting highly non-linear problem. The block penta-diagonal matrix has been directly solved by Gaussian elimination, which takes advantage of the matrix sparcity.

Due to the problem complexity, the validation of the model has been provided to the steady-state flow case, which presents a known analytical solution for composition and saturations.

Examples of application of the computer model to depletion studies, gas cycling and well testing are presented.

1 Introdução

A modelagem de reservatórios é uma ferramenta muito útil na indústria de petróleo, sendo utilizada com frequência nos projetos de desenvolvimento de novas jazidas, na previsão de comportamento de campos antigos, no estudo de poços e em pesquisa de métodos para recuperação suplementar de hidrocarbonetos.

Como modelos de simulação, podemos citar: análise de curvas de declínio, modelos tipo tanque, "black-oil", pseudo-composicionais, e os modelos composicionais.

A técnica de análise de curvas de declínio, proposta por Arps (1960), foi bastante utilizada inicialmente, sendo aplicável em previsões de comportamento em períodos curtos. Esta modelagem se baseia em equações empíricas, não levando em consideração nenhuma propriedade física do reservatório, sendo necessária a existência de um histórico de produção da jazida em análise para possibilitar sua aplicação.

Os modelos tipo tanque, métodos de Muskat (1945) e Turner (1944), consideram o reservatório como um todo, desprezando a sua geometria e variações de propriedades que ocorrem no meio poroso. Este tipo de modelo pode ser utilizado para uma estimativa inicial de volumes de hidrocarbonetos e previsões em períodos não muito longos.

Os modelos do tipo "black-oil", tratam o reservatório detalhadamente, considerando variações em suas propriedades físicas em áreas distintas da jazida. São admitidas as fases óleo, água e gás, permitindo-se a existência da fase gás dissolvida no óleo. As composições das fases não se alteram durante o período de produção e as propriedades dos fluidos são obtidas a partir de resultados de laboratório resultantes de um experimento PVT. Estes modelos são adequados para o estudo de métodos de recuperação convencionais em reservatórios de óleo ou gás em que a alteração nas composições das fases não seja significativa.

Os modelos pseudo-composicionais, diferem dos modelos "black-oil" por permitirem também a existência da fase óleo dissolvida na fase gás. Estes modelos tendem a ter um melhor desempenho que os do tipo "black-oil" no estudo de reservatórios portadores de óleo leve ou gás condensado retrógrado.

A ocorrência, cada vez mais freqüente, de reservatórios portadores de óleo leve e gás condensado retrógrado, fez com que se iniciassem os estudos de modelos composicionais, considerando-se além das fases óleo, água e gás, também as suas respectivas composições. Neste tipo de modelo, as propriedades dos fluidos são obtidas a partir de uma equação de estado, sendo variáveis dependentes da pressão, temperatura e composição. Estes modelos podem ser utilizados em qualquer tipo de reservatório, prestando-se para o estudo de projetos de injeção de água, injeção de gás, ciclagem de gás, deslocamento miscível, etc...

Os primeiros simuladores composicionais, desenvolvidos por Kniazeff e Naville (1965), Roebuck, Ford e Henderson (1968, 1969) e Nolen (1973), usavam valores tabelados de k (constante de equilíbrio) para descrever as composições das fases no equilíbrio. Estes simuladores tratavam as equações de fluxo e equilíbrio termodinâmico separadamente, apresentando problemas de convergência em sistemas de hidrocarbonetos complexos e em

regiões próximas da crítica.

Quem primeiro utilizou uma equação de estado para a obtenção das propriedades dos fluidos foi Fussel e Fussel (1979). O seu modelo, baseado no método conhecido como MVNR ("Minimum Variable Newton-Raphson"), trata apenas a pressão implicitamente, sendo as demais variáveis atualizadas ao final de cada iteração .

Seguindo-se a Fussel e Fussel (1979), os autores Nghien, Fong e Aziz (1981), Acs, Doleschall e Farkas (1982), Young e Stephenson (1983), Kendal, Morrel, Peaceman, Silliman e Watts (1983), também desenvolveram modelos com formulação semi-implícita.

Coats (1980), foi quem primeiro abordou o problema de simulação composicional com uma formulação totalmente implícita. O seu modelo, o qual utilizava-se da equação de estado de Redlich-Kwong (1949) modificada por Zudkevitch e Joffe (1970), requer a solução simultânea de $n_b(2n_c + 4)$ equações, onde n_b é o número de blocos da malha e n_c o número de componentes hidrocarbonetos. Além de Coats, a formulação totalmente implícita para modelos composicionais foi proposta também por Chien, Lee e Chen (1983).

Os modelos composicionais, devido à sua maior complexidade, requerem um esforço computacional bem superior aos do tipo "black-oil" e pseudo-composicionais. A adoção de uma formulação semi-implícita minimiza este problema. A desvantagem deste tipo de formulação é que o processo torna-se bastante instável, podendo inviabilizar sua aplicação em estudos de reservatórios com geometria radial ou em situações em que ocorram mudanças bruscas nas composições dos fluidos.

Neste trabalho, com o objetivo de se obter um simulador composicional eficiente para o estudo de reservatórios portadores de óleo leve e gás condensado retrógrado, optou-se pela adoção de uma formulação totalmente implícita.

2 Descrição geral do modelo

O modelo desenvolvido é totalmente composicional utilizando-se uma equação de estado para se representar o equilíbrio de fases e auxiliar na obtenção das propriedades dos fluidos. Considera-se que o equilíbrio termodinâmico é atingido instantaneamente não existindo água dissolvida nas fases de hidrocarbonetos nem hidrocarbonetos dissolvidos na fase água e que o sistema rocha fluidos é quimicamente inerte. Todo o trabalho foi desenvolvido utilizando-se a equação de Peng -Robinson (1976) mas a filosofia adotada pode ser aplicada para a utilização de outras equações de estado. Os parâmetros da citada equação são obtidos previamente por meio de um ajuste efetuado com um simulador PVT. Os mesmos parâmetros são utilizados para as condições de reservatório e superfície. Para o cálculo do peso específico do gás utilizou-se a própria equação de estado enquanto que para o do líquido adotou-se a correlação de Alani-Kennedy (1960). A viscosidade do líquido é calculada por meio da correlação de Lohrenz (1964) e a do gás com a correlação de Lee-Gonzalez (1966). A pressão capilar original é obtida a partir de dados de laboratório, sendo alterada a partir do momento em que ocorram variações na tensão interfacial gás - óleo. A tensão interfacial é obtida utilizando-se o método sugerido por Macleod (1923) - Sugden (1924) para substâncias puras, adaptado por Weignaug e Katz (1943) para misturas.

As pressões de saturação, parâmetro utilizado para se identificar as condições das células, são calculadas isoladamente utilizando-se o método de Newton-Raphson, sendo atualizadas ao final de cada intervalo de tempo em estudo.

O simulador pode ser utilizado em casos unidimensionais e bidimensionais, utilizando coordenadas cilíndricas ou cartesianas.

A fase água, apesar de ser considerada no trabalho, não flui no meio poroso, sendo compressível com sua saturação variando em função da pressão do reservatório.

Podem ser simulados casos de processos depletivos e de injeção de gás em reservatórios portadores de óleo e gás.

A composição total inicial das fases é constante em todos os pontos, não sendo consideradas as variações possivelmente existentes.

Os poços produtores e injetores podem se localizar em qualquer bloco, existindo restrição apenas para o caso radial onde só é permitida a existência de poço produtor no bloco central. No caso dos poços produtores é possível se especificar a vazão de produção de óleo ou gás, ou então a pressão de fluxo. Para o caso de pressão especificada, o poço tem um tratamento totalmente implícito, enquanto que no caso de vazão especificada, a composição do fluido produzido em condições de superfície é tratada explicitamente, sendo atualizada a nível iterativo.

3 Modelo matemático

3.1 Equações de escoamento

A modelagem do escoamento no meio poroso baseia-se no princípio de conservação de massa e na equação de Darcy, desprezando-se os efeitos de dispersão, admitindo-se fluxo isotérmico e laminar no meio poroso, sistema rocha fluidos quimicamente inerte e que o equilíbrio termodinâmico é atingido instantaneamente. Com estas considerações, obteve-se o seguinte equacionamento:

- Equação de balanço de materiais para os hidrocarbonetos:

$$-\vec{\nabla} \cdot (x_m \rho_o \vec{u}_o + y_m \rho_g \vec{u}_g) - q_m^* = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)], \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (3.1)$$

- Equação de balanço de materiais para a água:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\rho_w \vec{u}_w) - q_m^* = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_w S_w)], \quad m = n_c + 1. \quad (3.2)$$

Considerando-se a água imóvel no reservatório, a equação (3.2) se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_w S_w)] = 0. \quad (3.3)$$

- Lei de Darcy:

A lei de Darcy, modificada utilizando-se o conceito de permeabilidades relativas, pode ser escrita como:

$$\vec{u}_l = -k \frac{k_{rl}}{\mu_l} (\vec{\nabla} p_l - \gamma_l \vec{\nabla} z), \quad l = o, g, w. \quad (3.4)$$

- Equação geral de fluxo:

Definindo-se o potencial de fluxo como:

$$\vec{\nabla} \psi_l = \vec{\nabla} p_l - \gamma_l \vec{\nabla} z, \quad l = o, g, w, \quad (3.5)$$

e substituindo-se a equação (3.4) em (3.1), temos:

$$\vec{\nabla} \cdot (x_m \rho_o k \frac{k_{ro}}{\mu_o} \vec{\nabla} \psi_o + y_m \rho_g k \frac{k_{rg}}{\mu_g} \vec{\nabla} \psi_g) - q_m^* = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)], \quad (3.6)$$

$$m = 1, 2, \dots, n_c.$$

A equação (3.6) pode ser escrita de forma simplificada como:

$$\vec{\nabla} \cdot (k\lambda_o x_m \vec{\nabla} \psi_o + k\lambda_g y_m \vec{\nabla} \psi_g) - q_m^* = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)], \quad (3.7)$$

$$m = 1, 2, \dots, n_c,$$

onde,

$$\lambda_l = \frac{\rho_l k_{rl}}{\mu_l}, \quad l = o, g.$$

3.2 Equações de equilíbrio termodinâmico

Um critério geral para que um sistema fechado com temperatura e pressão constantes seja considerado em equilíbrio é:

$$(dG^t)_{T,p} = 0 \quad (3.8)$$

Se considerarmos um sistema bifásico, fechado, com cada fase atuando separadamente como sistemas abertos possibilitando a transferência de massa de uma fase para a outra, podemos escrever:

$$d(nG)_\alpha = -(nS)_\alpha dT + (nv)_\alpha dp + \sum (\mu_{i,\alpha} dn_{i,\alpha}), \quad (3.9)$$

$$d(nG)_\beta = -(nS)_\beta dT + (nv)_\beta dp + \sum (\mu_{i,\beta} dn_{i,\beta}), \quad (3.10)$$

onde,

G - energia livre de Gibbs

S - entropia

v - volume molar

n - numero total de moles do sistema

n_i - numero de moles do componente i

μ_i - potencial químico do componente i

α e β - indicadores de fase

A soma das equações (3.9) e (3.10) fornece dG^t . Aplicando-se a condição de equilíbrio da equação (3.8) para um sistema com pressão e temperatura constantes, obtém-se:

$$(dG^t)_{T,p} = \sum (\mu_{i,\alpha} dn_{i,\alpha}) + \sum (\mu_{i,\beta} dn_{i,\beta}) = 0. \quad (3.11)$$

Assumindo que o sistema é fechado, sem a ocorrência de reações químicas, e aplicando-se as condições de balanço de materiais, temos:

$$dn_{i,\beta} = -dn_{i,\alpha}. \quad (3.12)$$

Substituindo-se a equação (3.12) na equação (3.11), resulta:

$$\sum(\mu_{i,\alpha} - \mu_{i,\beta})dn_{i,\alpha} = 0. \quad (3.13)$$

Os valores de $dn_{i,\alpha}$ são independentes e arbitrários. Sendo assim, para que a equação (3.13) seja atendida é necessário que os potenciais químicos sejam iguais, isto é:

$$\mu_{i,\alpha} = \mu_{i,\beta}. \quad (3.14)$$

A fugacidade de um componente em uma mistura pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$d\bar{G}_i = RTd(\ln f_{i,l}), \quad (T \text{ constante}). \quad (3.15)$$

Sabendo que $\mu_i \equiv \bar{G}_i$, a equação (3.15) pode ser escrita como:

$$d\mu_i = RTd(\ln f_{i,l}), \quad (T \text{ constante}). \quad (3.16)$$

Integrando a equação (3.16), obtém-se:

$$\mu_i = RT \ln f_{i,l} + \Theta_i, \quad (3.17)$$

onde Θ_i é uma constante que depende apenas da temperatura. Substituindo-se a equação (3.17) na equação (3.14), resulta:

$$f_{\alpha,m} = f_{\beta,m}, \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (3.18)$$

que é a condição básica para a existência do equilíbrio termodinâmico.

3.3 Equações de capilaridade

A pressão capilar em um reservatório de petróleo é uma função da tensão interfacial entre os fluidos, dimensão e geometria dos poros e molhabilidade do sistema, sendo definida como a diferença entre as pressões atuantes na fase não molhante e molhante. Para os sistemas óleo-água e gás-óleo, considerando-se como fases molhantes a água e o óleo respectivamente, podemos expressá-la como:

$$p_{cow} = p_o - p_w, \quad (3.19)$$

e

$$p_{cgo} = p_g - p_o. \quad (3.20)$$

3.4 Equações restritivas

As definições de fração molar e saturação de fluidos fornecem as seguintes equações restritivas adicionais:

$$\sum_{m=1}^{n_c} x_m = 1.0 \quad (3.21)$$

$$\sum_{m=1}^{n_c} y_m = 1.0 \quad (3.22)$$

$$S_o + S_w + S_g = 1.0 \quad (3.23)$$

Analisando-se o problema, verificamos a existência de $2n_c+6$ incógnitas e $2n_c+6$ equações.

As incógnitas são: as pressões atuantes em cada fase (p_o, p_g, p_w), as saturações de cada fase (S_o, S_w, S_g) e as frações molares dos componentes nas fases óleo e gás ($x_m, y_m, m = 1, n_c$).

As equações disponíveis são: n_c equações de balanço de massa para os componentes hidrocarbonetos, n_c equações de equilíbrio termodinâmico, uma equação de balanço de massa para a fase água, duas equações de capilaridade e três equações restritivas.

Explicitando-se os valores de S_o, p_w, p_g, x_1, y_1 e calculando-se a saturação de água como uma função da pressão temos:

$$S_o = 1.0 - S_w - S_g, \quad (3.24)$$

$$p_w = p_o - p_{cow}, \quad (3.25)$$

$$p_g = p_o + p_{cgo}, \quad (3.26)$$

$$x_1 = 1.0 - \sum_{m=2}^{n_c} x_m, \quad (3.27)$$

$$y_1 = 1.0 - \sum_{m=2}^{n_c} y_m, \quad (3.28)$$

$$S_w = S_w(p). \quad (3.29)$$

Estas alterações reduzem o problema para um sistema com $2n_c$ incógnitas e $2n_c$ equações.

4 Modelo numérico

Tendo o problema sido equacionado em forma diferencial, torna-se necessário definir-se um método numérico para solucioná-lo. Devido a sua grande utilização na indústria do petróleo, decidiu-se adotar o método das diferenças finitas.

4.1 Discretização do problema

Escrevendo-se a equação (3.7) para um sistema bidimensional, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [k\lambda_o x_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_o + k\lambda_g y_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_g] + \frac{\partial}{\partial y} [k\lambda_o x_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_o + k\lambda_g y_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_g] \\ - q_m^* = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)], \quad m = 1, \dots, n_c. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Utilizando-se um esquema de diferenças finitas com 5 pontos, a equação (4.1) pode ser discretizada como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_{i,j}} [(k\lambda_o x_m)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{(\psi_o)_{i+1,j} - (\psi_o)_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} - (k\lambda_o x_m)_{i-\frac{1}{2},j} \frac{(\psi_o)_{i,j} - (\psi_o)_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}] + \\ \frac{1}{\Delta y_{i,j}} [(k\lambda_o x_m)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{(\psi_o)_{i,j+1} - (\psi_o)_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} - (k\lambda_o x_m)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{(\psi_o)_{i,j} - (\psi_o)_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}] + \\ \frac{1}{\Delta x_{i,j}} [(k\lambda_g y_m)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{(\psi_g)_{i+1,j} - (\psi_g)_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} - (k\lambda_g y_m)_{i-\frac{1}{2},j} \frac{(\psi_g)_{i,j} - (\psi_g)_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}] + \\ \frac{1}{\Delta y_{i,j}} [(k\lambda_g y_m)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{(\psi_g)_{i,j+1} - (\psi_g)_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} - (k\lambda_g y_m)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{(\psi_g)_{i,j} - (\psi_g)_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}] = \\ \frac{1}{\Delta t} [\phi(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g) - \phi^n(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)^n]_{i,j} \\ + x_{m,i,j} q_{o,i,j}^* + y_{m,i,j} q_{g,i,j}^*, \quad m = 1, \dots, n_c. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Multiplicando-se a equação (4.2) pelo volume do bloco i, j dado por:

$$V_{b,i,j} = \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} \Delta z_{i,j}, \quad (4.3)$$

resulta:

$$\Delta y_{i,j} \Delta z_{i,j} \left[\left(\frac{k\lambda_o x_m}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{o,i+1,j} - \psi_{o,i,j}) - \left(\frac{k\lambda_o x_m}{\Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} (\psi_{o,i,j} - \psi_{o,i-1,j}) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& \Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j} \left[\left(\frac{k \lambda_o x_m}{\Delta y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{o,i,j+1} - \psi_{o,i,j}) - \left(\frac{k \lambda_o x_m}{\Delta y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} (\psi_{o,i,j} - \psi_{o,i,j-1}) \right] + \\
& \Delta y_{i,j} \Delta z_{i,j} \left[\left(\frac{k \lambda_g y_m}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{g,i+1,j} - \psi_{g,i,j}) - \left(\frac{k \lambda_g y_m}{\Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} (\psi_{g,i,j} - \psi_{g,i-1,j}) \right] + \\
& \Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j} \left[\left(\frac{k \lambda_g y_m}{\Delta y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{g,i,j+1} - \psi_{g,i,j}) - \left(\frac{k \lambda_g y_m}{\Delta y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} (\psi_{g,i,j} - \psi_{g,i,j-1}) \right] = \\
& \frac{\Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} \Delta z_{i,j}}{\Delta t} [\phi(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g) - \phi^n(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)]_{i,j} + \\
& x_{m,i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} \Delta z_{i,j} q_{o,i,j}^* + y_{m,i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} \Delta z_{i,j} q_{g,i,j}^*, \quad (4.4) \\
& m = 1, \dots, n_c.
\end{aligned}$$

Definindo-se:

$$\rho_{o,i,j} q_{o,i,j} = q_{o,i,j}^* V_{b,i,j} \quad (4.5)$$

$$\rho_{g,i,j} q_{g,i,j} = q_{g,i,j}^* V_{b,i,j} \quad (4.6)$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\Delta y_{i,j} \Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} k_{i+\frac{1}{2},j} \quad (4.7)$$

$$\alpha_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} k_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

a equação (4.4) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& (\alpha \lambda_o x_m)_{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{o,i+1,j} - \psi_{o,i,j}) - (\alpha \lambda_o x_m)_{i-\frac{1}{2},j} (\psi_{o,i,j} - \psi_{o,i-1,j}) + \\
& (\alpha \lambda_o x_m)_{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{o,i,j+1} - \psi_{o,i,j}) - (\alpha \lambda_o x_m)_{i,j-\frac{1}{2}} (\psi_{o,i,j} - \psi_{o,i,j-1}) + \\
& (\alpha \lambda_g y_m)_{i+\frac{1}{2},j} (\psi_{g,i+1,j} - \psi_{g,i,j}) - (\alpha \lambda_g y_m)_{i-\frac{1}{2},j} (\psi_{g,i,j} - \psi_{g,i-1,j}) + \\
& (\alpha \lambda_g y_m)_{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{g,i,j+1} - \psi_{g,i,j}) - (\alpha \lambda_g y_m)_{i,j-\frac{1}{2}} (\psi_{g,i,j} - \psi_{g,i,j-1}) = \\
& \frac{V_{b,i,j}}{\Delta t} [\phi(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g) - \phi^n(x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)]_{i,j} + \\
& x_{m,i,j} \rho_{o,i,j} q_{o,i,j} + y_{m,i,j} \rho_{g,i,j} q_{g,i,j}, \quad m = 1, \dots, n_c \quad (4.9)
\end{aligned}$$

As permeabilidades das interfaces, $k_{i+\frac{1}{2},j}$ e $k_{i,j+\frac{1}{2}}$, são calculadas como a média harmônica das permeabilidades dos blocos adjacentes. Sendo assim, para um sistema em

coordenadas cartesianas (x-y), os fatores geométricos, $\alpha_{i+\frac{1}{2},j}$ e $\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}$, podem ser escritos como:

direção x

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\Delta y_{i,j}}{\frac{x_{i+\frac{1}{2},j} - x_{i,j}}{k_{x,i,j} \Delta z_{i,j}} + \frac{x_{i+1,j} - x_{i+\frac{1}{2},j}}{k_{x,i+1,j} \Delta z_{i+1,j}}} \quad (4.10)$$

direção y

$$\alpha_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_{i,j}}{\frac{y_{i,j+\frac{1}{2}} - y_{i,j}}{k_{y,i,j} \Delta z_{i,j}} + \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j+\frac{1}{2}}}{k_{y,i,j+1} \Delta z_{i,j+1}}} \quad (4.11)$$

Para um sistema em coordenadas cilíndricas (r-z), os fatores geométricos tornam-se:

direção radial

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{k_{r,i,k} \Delta z_{i,k}} \ln \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i} + \frac{1}{k_{r,i+1,k} \Delta z_{i+1,k}} \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i+\frac{1}{2}}}} \quad (4.12)$$

direção vertical

$$\alpha_{i,k+\frac{1}{2}} = \frac{\pi(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2)}{\frac{z_{i,k+\frac{1}{2}} - z_{i,k}}{k_{z,i,k}} + \frac{z_{i,k+1} - z_{i,k+\frac{1}{2}}}{k_{z,i,k+1}}} \quad (4.13)$$

No sistema de coordenadas cilíndricas os raios das fronteiras dos blocos de malha ($r_{i-\frac{1}{2}}$, $r_{i+\frac{1}{2}}$) são calculados segundo uma distribuição logarítmica, sendo a primeira fronteira igual ao raio do poço e a última igual ao raio do reservatório.

A localização dos raios dos blocos pode ser feita de duas maneiras, considerando-se fluxo permanente ou pseudo-permanente no seu interior. Segundo Pedrosa (1986), se for considerada a hipótese de fluxo permanente o raio do bloco pode ser calculado como:

$$r_i = r_{i-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \ln \beta - \frac{1}{2}\right), \quad (4.14)$$

onde,

$$\beta = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i-\frac{1}{2}}}.$$

Caso se considere a hipótese de fluxo pseudo-permanente, o raio do bloco será calculado a partir da solução da seguinte equação não linear:

$$\ln \frac{r_i}{r_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{r_i}{r_{i-\frac{1}{2}}} \right)^2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \ln \beta - \frac{1}{4\beta^2} - \frac{3}{4}. \quad (4.15)$$

As propriedades dos fluidos e as permeabilidades relativas dos blocos são calculadas adotando-se um esquema de um ponto a montante, ou seja, a partir do bloco de maior potencial.

4.2 Solução do problema

Em se tratando de um problema não linear, é necessário resolvê-lo adotando-se um método iterativo, tendo sido escolhido, pela sua comprovada eficiência, o método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson pode ser aplicado para a resolução de qualquer sistema de N equações não lineares com N incógnitas. No caso em questão, existem $2n_c$ incógnitas e $2n_c$ equações para cada bloco da malha.

As equações a serem resolvidas, em forma residual, podem ser escritas como:

$$FR_{i,m}(u_{j,k}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N_b, \quad m, k = 1, \dots, N, \quad (4.16)$$

onde N_b é o número total de blocos do sistema e $N = 2n_c$.

A equação básica do método de Newton-Raphson é dada por:

$$J^\nu \Delta \vec{u} = -\vec{FR}^\nu, \quad (4.17)$$

onde J é a matriz jacobiana com dimensões $(N \times N_b) \times (N \times N_b)$; $\Delta \vec{u} = (\vec{u}^{\nu+1} - \vec{u}^\nu)$; \vec{u} é o vetor de incógnitas com dimensões $(N \times N_b)$, \vec{R} é o vetor de funções de resíduos, também com dimensões $(N \times N_b)$ e ν é o nível iterativo.

Agrupando-se as variáveis por blocos, podemos escrever:

$$\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_a, \dots, \vec{u}_{N_b})^T, \quad (4.18)$$

onde

$$\vec{u}_a = (p_a, y_{a,2}, y_{a,3}, \dots, y_{a,n_c}, Sg_a, x_{a,2}, x_{a,3}, \dots, x_{a,n_c})^T, \quad (4.19)$$

ou,

$$\vec{u}_a = (u_{a,1}, u_{a,2}, \dots, u_{a,N})^T. \quad (4.20)$$

Da mesma maneira, para o vetor de função de resíduos temos:

$$\vec{FR} = (\vec{FR}_1, \vec{FR}_2, \dots, \vec{FR}_a, \dots, \vec{FR}_{N_b})^T, \quad (4.21)$$

onde,

$$\vec{FR}_a = (FR_{a,1}, FR_{a,2}, \dots, FR_{a,N})^T. \quad (4.22)$$

A matriz jacobiana terá a seguinte estrutura:

$$\begin{pmatrix} J_{1,1} & \dots & J_{1,Nb} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{Nb,1} & \dots & J_{Nb,Nb} \end{pmatrix}$$

onde cada J_{a,a^*} é uma submatriz com dimensões $(N \times N)$ cujos elementos são definidos como:

$$(J_{i,j})_{a,a^*} = \frac{\partial FR_{a,i}}{\partial u_{a^*,j}}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Para problemas bidimensionais, a matriz jacobiana resultante será penta-diagonal blocada. Na resolução do sistema final, adotamos o método de eliminação de Gauss, tirando proveito da esparsidade da matriz.

5 Propriedades de rocha e fluidos

Excluindo-se a água, as propriedades dos fluidos são calculadas utilizando-se a equação de estado de Peng - Robinson (1976) ou então correlações que considerem as composições de cada fase.

5.1 Equação de Peng - Robinson

A equação de Peng - Robinson (1976), utilizada para definir o comportamento de misturas tem a seguinte forma:

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a(T)}{v(v + b) + b(v - b)}, \quad (5.1)$$

onde:

$$b = \Omega_b \frac{RT_c}{p_c}, \quad (5.2)$$

$$a(T) = \Omega_a \frac{R^2 T_c^2}{p_c} \alpha, \quad (5.3)$$

$$\alpha^{0.5} = 1 + m(1 - T_r^{0.5}), \quad (5.4)$$

$$m = 0,37464 + 1,5422\omega - 0,26992\omega^2. \quad (5.5)$$

Adotando-se a definição do fator de compressibilidade

$$Z = \frac{pv}{RT}, \quad (5.6)$$

a equação (5.1) pode ser escrita como:

$$Z^3 - (1 - B)Z^2 + (A - 3B^2 - 2B)Z - (AB - B^2 - B^3) = 0, \quad (5.7)$$

onde:

$$A = \frac{ap}{R^2 T^2}, \quad (5.8)$$

$$B = \frac{bp}{RT}. \quad (5.9)$$

Para misturas, as seguintes regras são adotadas:

$$b = \sum_m x_m b_m, \quad (5.10)$$

$$a = \sum_m \sum_l x_m x_l a_{m,l}, \quad (5.11)$$

$$a_{m,l} = (1 - \delta_{m,l}) \sqrt{a_m a_l}, \quad (5.12)$$

onde $\delta_{m,l}$ são os coeficientes empíricos de iteração binária entre o componente m e o componente l .

Os valores originais de Ω_a e Ω_b adotados na equação de Peng - Robinson (1976) são 0,45724 e 0,07780 respectivamente.

A equação (5.7) pode ter uma ou três raízes reais, dependendo do número de fases existentes. Na região de duas fases, a maior raiz representa o fator de compressibilidade da fase vapor enquanto a menor raiz positiva corresponde ao da fase líquida.

5.2 Fugacidades

A fugacidade de um componente i em uma mistura é uma função da pressão, temperatura e composição da mistura, podendo ser calculada a partir da seguinte expressão (Chueh, 1967):

$$RT \ln \frac{f_i}{y_i p} = \int_V^\infty \left[\left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_{T,V,n_j} - \frac{RT}{V} \right] dV - RT \ln Z. \quad (5.13)$$

onde V é o volume total da mistura, e Z é o fator de compressibilidade a T e p .

A equação (5.1) pode ser escrita como:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2 + 2nbV - b^2n^2}. \quad (5.14)$$

Diferenciando-se (5.14) resulta:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_{T,V,n_j} = \frac{\partial}{\partial n_i} \left[\frac{nRT}{V - nb} \right] - \frac{\partial}{\partial n_i} \left[\frac{an^2}{V^2 + 2nbV - b^2n^2} \right], \quad (5.15)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_{T,V,n_j} = I - II + III, \quad (5.16)$$

onde,

$$I = \frac{RT(V - nb) + nRTb_i}{(V - nb)^2}, \quad (5.17)$$

$$II = \frac{2 \sum_l n_l a_{i,l}}{(V^2 + 2bn - b^2n^2)}, \quad (5.18)$$

$$III = \frac{an^2(2V - 2bn)b_i}{(V^2 + 2bnV - b^2n^2)^2}. \quad (5.19)$$

Integrando-se I, II e III em relação a dV teremos:

$$\int IdV = RT \ln(V - nb) - \frac{nRTb_i}{V - nb}, \quad (5.20)$$

$$\int II dV = \frac{\sum_l n_l a_{i,l}}{bn\sqrt{2}} \ln \left[\frac{V + bn(1 - \sqrt{2})}{V + bn(1 + \sqrt{2})} \right], \quad (5.21)$$

$$\int III dV = an^2 b_i \left\{ \frac{V}{bn(V^2 + 2bnV - b^2n^2)} + \frac{1}{b^2n^2\sqrt{2}} \ln \left[\frac{V + bn(1 - \sqrt{2})}{V + bn(1 + \sqrt{2})} \right] \right\}. \quad (5.22)$$

Utilizando-se as definições de Z , A e B dadas pelas equações (5.7), (5.8) e (5.9) respectivamente, e substituindo as equações (5.20), (5.21) e (5.22) na equação (5.13), obtém-se:

$$\ln \frac{f_i}{x_i p} = \frac{b_i}{b} (Z - 1) - \ln(Z - B) - \frac{A}{2\sqrt{2}B} \left(\frac{2 \sum_k x_k a_{k,i}}{a} - \frac{b_k}{b} \right) \ln \left(\frac{Z + 2,414B}{Z - 0,414B} \right). \quad (5.23)$$

A equação (5.23) é válida tanto para a fase líquida como para a fase vapor. Suas derivadas em relação à pressão e composição dos fluidos são apresentadas no apêndice A.

5.3 Peso específico

Para a fase gás, o peso específico é calculado utilizando-se a própria equação de estado ($pv = ZRT$). Para a fase líquida, adotamos a correlação de Alani-Kennedy (1960).

5.3.1 Correlação de Alani-Kennedy

A correlação de Alani-Kennedy (1960), utilizada para o cálculo do peso específico da fase líquida, foi obtida a partir da equação de estado de van der Waals tendo a seguinte forma:

$$v^3 - \left(\frac{RT}{p} + B_m \right) v^2 + \frac{A_m}{p} v - \frac{A_m B_m}{p} = 0, \quad (5.24)$$

onde,

$$A_m = \sum_{i=1}^{n_c} a_i x_i, \quad (5.25)$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n_c} b_i x_i, \quad (5.26)$$

$$a_i = k_i \exp\left(\frac{n_i}{T}\right), \quad (5.27)$$

$$b_i = m_i T + C_i, \quad (5.28)$$

k , n , m e C são parâmetros para cada hidrocarboneto que dependem da temperatura.

5.4 Viscosidade

A viscosidade do gás é calculada utilizando-se a correlação de Lee-Gonzalez (1966) e a do líquido a correlação de Lohrenz (1964).

5.4.1 Correlação de Lee-Gonzalez

Utilizando a correlação de Lee-Gonzalez (1966), podemos exprimir a viscosidade do gás como:

$$\mu_g = \kappa \exp[\beta \gamma^\eta], \quad (5.29)$$

onde,

$$\kappa = \frac{(7,77 + 0,0063M)T^{1,5}}{122,4 + 12,9M + T}, \quad (5.30)$$

$$\beta = 2,57 + \frac{1914,5}{T} + 0,0095M, \quad (5.31)$$

$$\eta = 1,11 + 0,04\beta, \quad (5.32)$$

sendo,

T - Temperatura absoluta, °R

μ - Viscosidade, micropoise

γ - Peso específico, gr/cm³

M - Peso molecular da mistura

5.4.2 Correlação de Lohrenz

Utilizando a correlação de Lohrenz (1964), é necessário que se determine a viscosidade do líquido à baixa pressão para em seguida obtê-la na pressão de interesse.

A viscosidade de componentes puros à baixa pressão (μ_j^*) é obtida por:

$$\mu_j^* \varepsilon_j = 34 \times 10^{-5} Tr_j^{0,94}, \quad (Tr_j \leq 1,5), \quad (5.33)$$

$$\mu_j^* \varepsilon_j = 17,78 \times 10^{-5} (4,58 Tr_j - 1,67)^{\frac{1}{6}}, \quad (Tr_j \geq 1,5), \quad (5.34)$$

onde,

$$Tr_j = \frac{T}{Tc_j}, \quad (5.35)$$

$$\varepsilon_j = \frac{Tc_j^{\frac{1}{6}}}{M_j^{\frac{1}{2}} pc_j^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.36)$$

sendo:

T - Temperatura absoluta, °K

e

p - Pressão absoluta, atm

A viscosidade da mistura à baixa pressão (μ^*) é calculada por:

$$\mu^* = \frac{\sum_{j=1}^{n_c} (x_j \mu_j^* \sqrt{M_j})}{\sum_{j=1}^{n_c} (x_j \sqrt{M_j})} \quad (5.37)$$

A viscosidade da mistura na pressão de interesse é obtida a partir de:

$$\begin{aligned} & [(\mu - \mu^*)\varepsilon + 10^{-4}]^{\frac{1}{4}} = \\ = & 0,1023 + 0,023364\rho_r + 0,058533\rho_r^2 - 0,40758\rho_r^3 + 0,0093324\rho_r^4, \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde:

$$vc' = \sum_{j=1}^{n_c} (x_j vc_j), \quad (5.39)$$

$$\rho'_c = \frac{1}{vc'}, \quad (5.40)$$

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho'_c}, \quad (5.41)$$

$$\varepsilon = \frac{[\sum_{j=1}^{n_c} (x_j T c_j)]^{\frac{1}{6}}}{[\sum_{j=1}^{n_c} (x_j M_j)]^{\frac{1}{2}} [\sum_{j=1}^{n_c} (x_j p c_j)]^{\frac{2}{3}}}. \quad (5.42)$$

5.5 Tensão interfacial e pressão capilar

O cálculo da tensão interfacial gás óleo é feito utilizando-se as correlações de Macleod (1923)-Sugden (1924), adaptadas por Weinaug e Katz (1943) para aplicações em misturas,

$$\sigma^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n_c} P_{chi} (\gamma_o x_i - \gamma_g y_i), \quad (5.43)$$

onde, P_{chi} é o "parachor" do componente i e os pesos específicos são expressos em ($\frac{gr}{cm^3}$). Se inicialmente existir uma capa de gás no reservatório, a tensão interfacial inicial é calculada usando os pesos específicos e composições existentes no equilíbrio. Se o reservatório for

subsaturado, considera-se para cálculo da tensão interfacial inicial os pesos específicos e composições existentes na pressão de saturação .

A curva de pressão capilar informada ao modelo é considerada correspondente a uma tensão interfacial igual a inicial. Em qualquer outra situação, adotando-se a modificação sugerida por Coats (1980), esta curva será corrigida multiplicando-se o valor obtido pelo resultado da relação entre a tensão interfacial, calculada com as novas composições e pesos específicos, e a tensão interfacial inicial.

5.6 Permeabilidade relativa

Os valores das permeabilidades relativas podem ser obtidos diretamente das tabelas fornecidas para o modelo ou utilizando um dos modelos propostos por Stone (1973).

5.6.1 Modelos de Stone

Nos modelos de Stone (1973) as permeabilidades relativas para um deslocamento bifásico água-óleo, na ausência de gás, são definidas como:

$$k_{rw} = k_{rw}(S_w),$$

e

$$k_{row} = k_{row}(S_w),$$

e, para um deslocamento gás-óleo em presença de água conata como:

$$k_{rg} = k_{rg}(S_g),$$

e

$$k_{rog} = k_{rog}(S_g).$$

Em cada modelo assume-se que a rocha é predominantemente molhada pela água, seguindo-se em ordem de preferência de molhabilidade as fases óleo e gás. No escoamento trifásico as permeabilidades relativas às fases água e gás são consideradas como função de suas respectivas saturações e a permeabilidade relativa ao óleo como função das saturações de água e gás:

$$k_{rw}(S_w, S_g) = k_{rw}(S_w),$$

$$k_{rg}(S_w, S_g) = k_{rg}(S_g),$$

$$k_{ro}(S_w, S_g) = k_{ro}(S_w, S_g).$$

Stone (1973), no modelo I, define a permeabilidade relativa ao óleo como:

$$k_{ro}(S_w, S_g) = \frac{S_o^* k_{row} k_{rog}}{(1 - S_w^*)(1 - S_g^*)},$$

onde,

$$\begin{aligned} S_o^* &= \frac{S_o - S_{om}}{1 - S_{wc} - S_{om}}, \\ S_w^* &= \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{om}}, \\ S_g^* &= \frac{S_g}{1 - S_{wc} - S_{om}}, \end{aligned}$$

e S_{om} é a saturação residual de óleo em presença de água e gás.

O modelo II não requer a especificação do valor de S_{om} . A sua equação foi derivada a partir de considerações a respeito do fluxo de fluidos em canais, tendo a seguinte forma:

$$k_{ro} = (k_{row} + k_{rw})(k_{rog} + k_{rg}) - (k_{rw} + k_{rg}).$$

5.6.2 Modificações dos modelos de Stone

Com o objetivo de se ter consistência com os dados bifásicos nos pontos terminais, Aziz e Settari (1979) propõem uma normalização nos modelos de Stone (1973).

Definindo-se:

$$k_{row}(S_{wc}) = k_{rog}(S_L = 1) = k_{rocw},$$

onde, $S_L = 1 - S_g = S_o + S_{wc}$ para o sistema gás-óleo, os modelos de Stone modificados são:

- Modelo I

$$k_{ro}(S_w, S_g) = \frac{S_o^* k_{row} k_{rog}}{k_{rocw} (1 - S_w^*) (1 - S_g^*)}$$

- Modelo II

$$k_{ro}(S_w, S_g) = k_{rocw} \left[\left(\frac{k_{row}}{k_{rocw}} + k_{rw} \right) \left(\frac{k_{rog}}{k_{rocw}} + k_{rg} \right) - (k_{rw} + k_{rg}) \right].$$

5.7 Saturação de água

Expandindo-se a equação (3.3) temos:

$$\phi \rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} + \phi S_w \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_w S_w \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (5.44)$$

Dividindo-se a equação (5.44) por $\phi\rho_w$ resulta:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + S_w \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (5.45)$$

Utilizando a regra da cadeia, podemos escrever:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + S_w \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (5.46)$$

Definindo-se a compressibilidade da água como:

$$c_w = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial p}, \quad (5.47)$$

e a compressibilidade da rocha por:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad (5.48)$$

a equação (5.46) se reduz a:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w(c_w + c_r) \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (5.49)$$

Discretizando-se a equação (5.49) vamos obter:

$$\frac{S_w - S_w^n}{\Delta t} + S_w c_w \frac{p - p^n}{\Delta t} + S_w c_r \frac{p - p^n}{\Delta t} = 0. \quad (5.50)$$

Rearranjando (5.50) temos:

$$S_w = \frac{S_w^n}{1 + (p - p^n)(c_w + c_r)}. \quad (5.51)$$

A equação (5.51) é utilizada para expressar S_w em função da pressão.

5.8 Pressão de saturação

5.8.1 Pressão de bolha

A pressão de bolha de um líquido ocorre no instante em que surge a fase gasosa no sistema. Nesta situação, são conhecidas as frações molares das fases e a composição da fase líquida, tendo como incógnitas a composição da fase gasosa e a pressão de bolha. Este problema pode ser equacionado da seguinte maneira:

- Dados conhecidos:

$$V = 0, \\ x_m = z_m, \quad m = 1, \dots, n_c,$$

- Incógnitas:

$$y_m, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad p_b.$$

- Equações do problema:

$$f_{m,l} = f_{m,v}, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad (5.52)$$

$$\sum_{m=1}^{n_c} y_m = 1. \quad (5.53)$$

Adotando-se,

$$y_1 = 1 - \sum_{m=2}^{n_c} y_m \quad (5.54)$$

obtém-se um sistema não linear com n_c incógnitas e n_c equações.

Para resolver esse sistema, adotamos o método de Newton-Raphson com as seguintes definições das funções de resíduos e da matriz jacobiana, a saber:

Funções de resíduos:

$$FR_m = f_{m,l} - f_{m,v}, \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (5.55)$$

Elementos da matriz jacobiana:

$$J_{m,k-1} = -\frac{\partial f_{m,v}}{\partial y_k}, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad k = 2, \dots, n_c \quad (5.56)$$

$$J_{m,n_c} = \frac{\partial f_{m,l}}{\partial p_b} - \frac{\partial f_{m,v}}{\partial p_b}, \quad m = 1, \dots, n_c \quad (5.57)$$

5.8.2 Pressão de orvalho

A pressão de orvalho de um gás ocorre no instante em que se obtém a fase líquida no sistema. O seu cálculo é feito de maneira semelhante à metodologia adotada para o cálculo da pressão de bolha, podendo ser equacionado da seguinte maneira:

- Dados conhecidos

$$V = 1,$$

$$y_m = z_m, \quad m = 1, \dots, n_c.$$

- Incógnitas

$$x_m, \quad m = 1, n_c,$$

$$p_d.$$

- Equações do problema

$$f_{m,l} = f_{m,v}, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad (5.58)$$

$$\sum_{m=1}^{n_c} x_m = 1. \quad (5.59)$$

Adotando-se,

$$x_1 = 1 - \sum_{m=2}^{n_c} x_m, \quad (5.60)$$

resulta um sistema, não linear, com n_c incógnitas e n_c equações.

Utilizando-se o método de Newton-Raphson para resolução do sistema de equações, teremos as seguintes definições para as funções de resíduos e elementos da matriz jacobiana:

- Funções de resíduos

$$FR_m = f_{m,l} - f_{m,v}, \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (5.61)$$

- Elementos da matriz jacobiana

$$J_{m,k-1} = \frac{\partial f_{m,l}}{\partial x_k}, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad k = 2, \dots, n_c, \quad (5.62)$$

e

$$J_{m,n_c} = \frac{\partial f_{m,l}}{\partial p_d} - \frac{\partial f_{m,v}}{\partial p_d}, \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (5.63)$$

5.8.3 Casos especiais

Em algumas situações, em fluidos com pressões de saturação próximas de suas pressões críticas, não foi possível se obter convergência utilizando o método de Newton-Raphson. Nestes casos, tanto para o cálculo da pressão de bolha como para a de orvalho, utilizou-se o procedimento descrito a seguir.

Em cada célula são conhecidas as composições e a pressão, ou sejam,

$x_m, y_m, z_m, m = 1, \dots, n_c$, e p_{cel} .

(1) - Com os dados acima, calculam-se:

$$L = \frac{(z_1 - k_1)}{(1 - k_1)}, \quad (5.64)$$

$$p^\nu = p_{cel}, \quad x_m^\nu = x_m, \quad y_m^\nu = y_m, \quad m = 1, \dots, n_c.$$

(2) - A seguir determina-se um fator de relaxação dado por:

$$\alpha = \frac{1}{L} \quad L > 0,5 \quad (5.65)$$

$$\alpha = \frac{1}{(1 - L)} \quad L < 0,5 \quad (5.66)$$

Se $\alpha \geq 1,1$ então $\alpha = 1,1$.

(3) - Computa-se

$$p^{\nu+1} = \alpha p^\nu. \quad (5.67)$$

(4) Efetua-se o cálculo flash na nova pressão $p^{\nu+1}$, adotando-se como aproximação inicial para as composições das fases os valores de x_m^ν e y_m^ν .

(5) Se $L \geq 1,01$ ou $L \leq 0$ fazemos:

$$p^{\nu+1} = 0,8p^\nu + 0,2p^{\nu+1}, \quad (5.68)$$

retornando ao item (4).

(6) - Atualiz-se a pressão e as composições por:

$$p^\nu = p^{\nu+1}, \quad (5.69)$$

$$x_m^\nu = x_m^{\nu+1}, \quad (5.70)$$

$$y_m^\nu = y_m^{\nu+1}, \quad (5.71)$$

retornando ao item (2).

O processo se repete até que se atinja uma das seguintes condições:

- a - $\frac{p^{\nu+1}}{p^\nu} \leq 1,01$
- b - $0,99 \leq L \leq 1,01$
- c - $0,00 \leq L \leq 0,01$

Encerrado o processo, a pressão de saturação se define como:

- a - Se $L \geq 0,5$, o fluido se comporta como óleo, resultando:

$$p_b = p^{\nu+1}, \quad (5.72)$$

$$x_{b,m} = z_m, \quad (5.73)$$

$$y_{b,m} = y_m^{\nu+1}. \quad (5.74)$$

- b - Se $L \leq 0,5$, o fluido se comporta como gás, obtendo-se:

$$p_d = p^{\nu+1}, \quad (5.75)$$

$$y_{d,m} = z_m, \quad (5.76)$$

$$x_{d,m} = x_m^{\nu+1}. \quad (5.77)$$

6 Validação do modelo

6.1 Teoria do fluxo permanente para escoamento bifásico.

Desprezando-se os efeitos de dispersão, capilaridade e gravitacionais, as equações de balanço de materiais para um sistema de hidrocarbonetos bifásico (óleo e gás) composto por n_c componentes podem ser escritas como:

$$\nabla \cdot (x_m k \lambda_o + y_m k \lambda_g) \nabla p - q_m^* = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)], \quad (6.1)$$

$m = 1, \dots, n_c.$

Efetuando-se o somatório das equações (6.1), para todos os elementos, obtemos a equação de balanço de materiais total para os hidrocarbonetos:

$$\nabla \cdot (k \lambda_o + k \lambda_g) \nabla p - q_f^* = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_o S_o + \rho_g S_g)]. \quad (6.2)$$

Ao se atingir o fluxo permanente, a massa de cada componente em qualquer ponto do reservatório permanece constante,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_m \rho_o S_o + y_m \rho_g S_g)] = 0, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad (6.3)$$

o mesmo acontecendo com a massa total de hidrocarbonetos,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_o S_o + \rho_g S_g)] = 0. \quad (6.4)$$

Aplicando-se a equação (6.1) para o fluxo permanente em uma região onde não exista uma fonte produtora, temos:

$$\nabla \cdot (x_m k \lambda_o + y_m k \lambda_g) \nabla p = 0, \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (6.5)$$

Da equação (6.5) podemos escrever:

$$(x_m k \lambda_o + y_m k \lambda_g) \nabla p = \vec{C}_m, \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (6.6)$$

onde \vec{C}_m é o fluxo molar do componente m .

O mesmo raciocínio pode ser empregado em relação a equação (6.2), obtendo-se:

$$\nabla \cdot (k\lambda_o + k\lambda_g)\nabla p = 0. \quad (6.7)$$

Da equação (6.7) tem-se:

$$(k\lambda_o + k\lambda_g)\nabla p = \vec{C}_t, \quad (6.8)$$

onde \vec{C}_t é o fluxo molar total de hidrocarbonetos.

Efetuando-se o produto escalar das equações (6.6) e (6.8) por um vetor unitário e dividindo-se o fluxo molar do componente m pelo fluxo molar total, obteremos:

$$z_{mf} = \frac{\lambda_o x_m + \lambda_g y_m}{\lambda_o + \lambda_g}. \quad (6.9)$$

A equação (6.9) representa a composição total do componente m na massa que flui no reservatório. Esta seria a composição obtida caso se efetuasse uma amostragem dos fluidos em fluxo. Existe uma distinção entre esta composição e a composição "in-situ". A composição em cada ponto do reservatório é definida como:

$$z_m = \frac{\rho_o S_o x_m + \rho_g S_g y_m}{\rho_o S_o + \rho_g S_g}. \quad (6.10)$$

Esta seria a composição obtida da análise de um testemunho perfeitamente preservado.

Vamos admitir um reservatório que se apresente em seu limite externo na região de uma única fase (pressão superior à pressão de saturação). Existindo apenas uma fase não haverá variação na composição, sendo, nesta região, a composição total da massa em fluxo igual a composição original do reservatório. A equação (6.9), válida para o fluxo permanente, indica que não existe variação da composição total dos fluidos em fluxo com relação à distância. Sendo assim, pode-se escrever também para a região de duas fases a composição da massa em fluxo como sendo igual a composição original do reservatório,

$$z_{mf} = z_{mo}. \quad (6.11)$$

A partir da equação (6.9) podemos escrever:

$$z_{mf} = L_f x_m + (1 - L_f) y_m, \quad (6.12)$$

onde,

$$L_f = \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_g}, \quad (6.13)$$

ou

$$1 - L_f = \frac{\lambda_g}{\lambda_o + \lambda_g}. \quad (6.14)$$

A equação que representa o equilíbrio de fases em um processo de expansão a composição constante para o fluido original do reservatório pode ser escrita como:

$$z_{mo} = L_{ecc}x_{mo} + (1 - L_{ecc})y_{mo}. \quad (6.15)$$

Sabendo-se que a composição total em fluxo (z_{mf}) é igual a composição original do reservatório (z_{mo}), podemos afirmar que as frações molares e composições de suas fases, para uma mesma condição de pressão e temperatura, também serão iguais. Assim temos:

$$x_m = x_{mo}, \quad (6.16)$$

$$y_m = y_{mo}, \quad (6.17)$$

$$L_{ecc} = L_f, \quad (6.18)$$

$$(1 - L_{ecc}) = (1 - L_f). \quad (6.19)$$

Substituindo-se as equações (6.18) e (6.19) em (6.13) e (6.14), segue-se:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_g} = L_{ecc}, \quad (6.20)$$

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_o + \lambda_g} = 1 - L_{ecc}. \quad (6.21)$$

Dividindo-se (6.20) por (6.21) resulta:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_g} = \frac{L_{ecc}}{1 - L_{ecc}}. \quad (6.22)$$

Por definição ,

$$L_{ecc} = \frac{v_o \rho_o |_{x_{mo}}}{v_o \rho_o |_{x_{mo}} + v_g \rho_g |_{y_{mo}}}, \quad (6.23)$$

$$1 - L_{ecc} = \frac{v_g \rho_g |_{y_{mo}}}{v_o \rho_o |_{x_{mo}} + v_g \rho_g |_{y_{mo}}}. \quad (6.24)$$

onde v_o e v_g são as frações volumétricas de líquido e gás, respectivamente, obtidas durante um experimento de expansão à composição constante, efetuado com o fluido original do reservatório.

Se $x_m = x_{m0}$ e $y_m = y_{m0}$, então:

$$\rho_o|_{x_m} = \rho_o|_{x_{m0}}, \quad (6.25)$$

$$\rho_g|_{y_m} = \rho_g|_{y_{m0}}, \quad (6.26)$$

$$\mu_o|_{x_m} = \mu_o|_{x_{m0}}, \quad (6.27)$$

$$\mu_g|_{y_m} = \mu_g|_{y_{m0}}. \quad (6.28)$$

A equação (6.22) pode ser escrita como:

$$\frac{\frac{k_{ro}\rho_o}{\mu_o}|_{x_m}}{\frac{k_{rg}\rho_g}{\mu_g}|_{y_m}} = \frac{v_o\rho_o|_{x_{m0}}}{v_g\rho_g|_{y_{m0}}}. \quad (6.29)$$

Utilizando-se a equação (6.29), as curvas de permeabilidade relativas e os resultados de uma expansão à composição constante, pode-se obter uma curva de S_o ou S_g em função da pressão. As composições em cada ponto do reservatório podem ser obtidas por meio da equação (6.10).

6.2 Resultados do modelo versus solução analítica

Para comparação com os resultados analíticos obtidos com a metodologia apresentada no item (6.1), foram simulados 4 (quatro) casos distintos:

- a - Reservatório radial contendo gás condensado retrógrado.
- b - Reservatório radial contendo óleo volátil.
- c - Reservatório linear contendo gás condensado retrógrado.
- d - Reservatório linear contendo óleo volátil.

Para os casos de gás condensado retrógrado foram utilizados dados PVT do poço RNS-90 (campo de Pescada - Petrobrás - RPNS), com um fracionamento da parte mais pesada (C11+) em dois componentes e, com o objetivo de se reduzir o esforço computacional, um posterior reagrupamento para apenas 6 (seis) pseudo-componentes.

As transformações efetuadas na composição original do fluido foram feitas previamente, utilizando-se um simulador PVT.

Para o óleo volátil, utilizamos um fluido com composição semelhante à da fase líquida existente na pressão de saturação do gás condensado retrógrado. A tabela (6.1) apresenta as composições do fluido original, do gás condensado retrógrado e do óleo volátil utilizados nos casos estudados.

Nas geometrias radiais, foram simulados reservatórios com 400,0m de raio, com espaçamento logaritmico para as células. Nos modelos lineares, foram estudados reservatórios com 1500,0m de comprimento por 50,0m de largura, adotando-se um espaçamento constante de 100,0m. Em ambos os casos foi admitida uma espessura constante de 15,0m.

componente	fluido original	fluido original + C11+ desm.	pseudo- componentes	condensado retrógrado	óleo volátil
C1	60,390	60,390			
N2	7,800	7,800	Psc1	61,170	45,900
C2	14,330	14,330			
CO2	0,340	0,340	Psc2	14,670	13,710
C3	9,590	9,590			
C4	5,360	5,360	Psc3	17,110	19,540
C5	2,160	2,160			
C6	1,250	1,250			
C7	1,260	1,260			
C8	1,340	1,340	Psc4	5,080	9,070
C9	0,760	0,760			
C10	0,470	0,470			
C11+	1,970	1,396	Psc5	1,4000	5,4200
C12+		0,574	Psc6	0,5740	6,3500

Tabela 6.1: Composição inicial dos fluidos (%)

Os dados de permeabilidades relativas utilizados em todos os casos são apresentados na tabela (6.3).

Para a obtenção do regime permanente de fluxo com o modelo numérico, foram simulados casos de produção e injeção simultâneas de fluidos. Nos casos radiais o poço produtor foi localizado no centro do reservatório e a injeção distribuída ao longo de todo o perímetro externo. Para os casos lineares o poços, produtor e injetor, foram localizados em extremidades opostas. Em todas as situações a composição do fluido injetado foi sempre igual à composição original do reservatório, adotando-se uma pressão de fluxo mínima nos poços produtores de 10,0 mPa.

Em todos os casos, simulou-se um tempo total de 5000 dias. Após este tempo pode se considerar o regime de fluxo como permanente, conforme mostrado nas figuras (6.1) e (6.2) para as vazões de produção e pressão nas células produtoras.

As figuras (6.3) e (6.4) apresentam, para os casos radiais, os resultados dos cálculos de saturação de gás efetuados analiticamente e os resultados obtidos com a utilização do modelo. Podemos observar que houve uma boa concordância entre as duas metodologias de cálculo, o que valida o modelo computacional.

casos	propriedade	valor
a,b,c,d	compressibilidade da água, Pa ⁻¹	6,67 x 10 ⁻¹⁰
a,b,c,d	compressibilidade da rocha, Pa ⁻¹	6,38 x 10 ⁻¹⁰
a,b,c,d	fator volume formação da água, m ³ /stdm ³	1,0850
a,b,c,d	peso específico da água, Kg/m ³	1000,0
a,b,c,d	temperatura do reservatório, °K	422,22
a,b,c,d	pressão de separação, Pa	1,013 x 10 ⁵
a,b,c,d	temperatura de separação, °K	295,0
a,b,c,d	profundidade de referência, m	3500,17 m
a,b,c,d	pressão de referência, Pa	325,0 x 10 ⁵
a,b,c,d	espessura do reservatório, m	15,0
a,b,c,d	pressão de fluxo mínima, Pa	100,0 x 10 ⁵
a,b,c,d	porosidade, fr	0,18
a,b	raio do reservatório, m	400,0
a,b	ponto de aplicação da pressão média das células, m 0,12 0,22 0,38 0,66 1,16 2,04 3,57 6,26 10,97 19,23 33,71 59,08 103,54 181,48 318,08	
a,b	posição das fronteiras externas das células 0,15 0,27 0,48 0,83 1,46 2,56 4,49 7,87 13,80 24,18 42,39 74,29 130,21 228,22 400,00	
a,c	saturação inicial de fluidos (%) óleo	0,00
	água	0,25
	gás	0,75
b,d	óleo	0,75
	água	0,25
	gás	0,00
a,c	vazões máximas admitidas, m ³ /seg vazão de gás	1,736
b,d	vazão de óleo	4,652 x 10 ⁻³

Tabela 6.2: Propriedades de rocha e fluidos

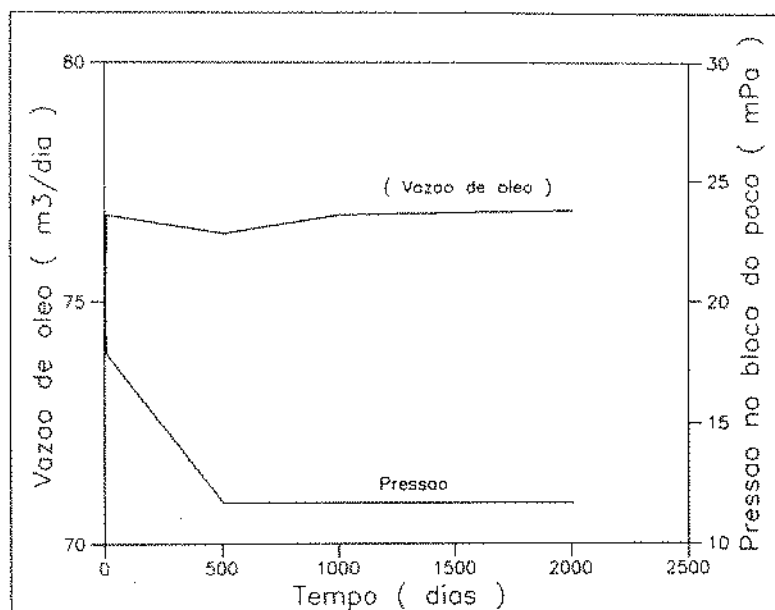


Figura 6.1: Reservatório de gás condensado retrógrado - verificação da condição de fluxo permanente

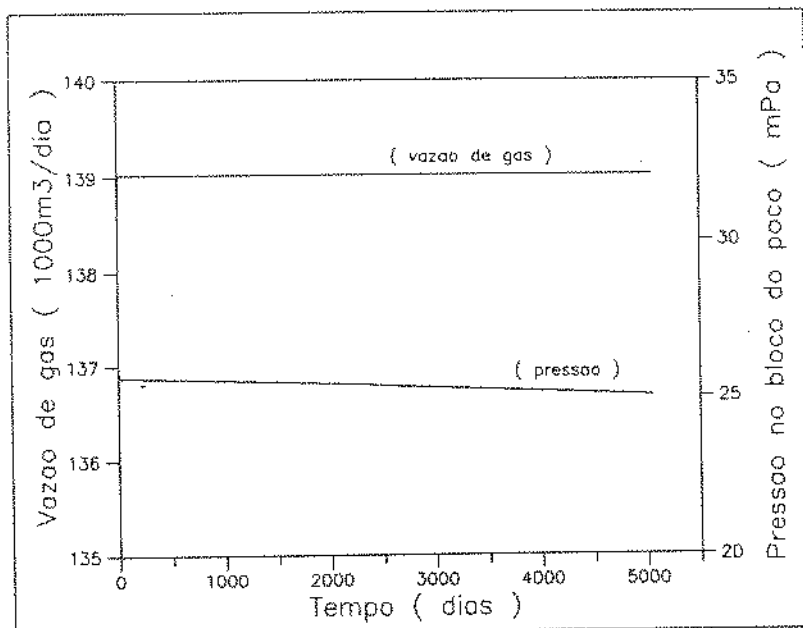


Figura 6.2: Reservatório de óleo volátil - verificação da condição de fluxo permanente

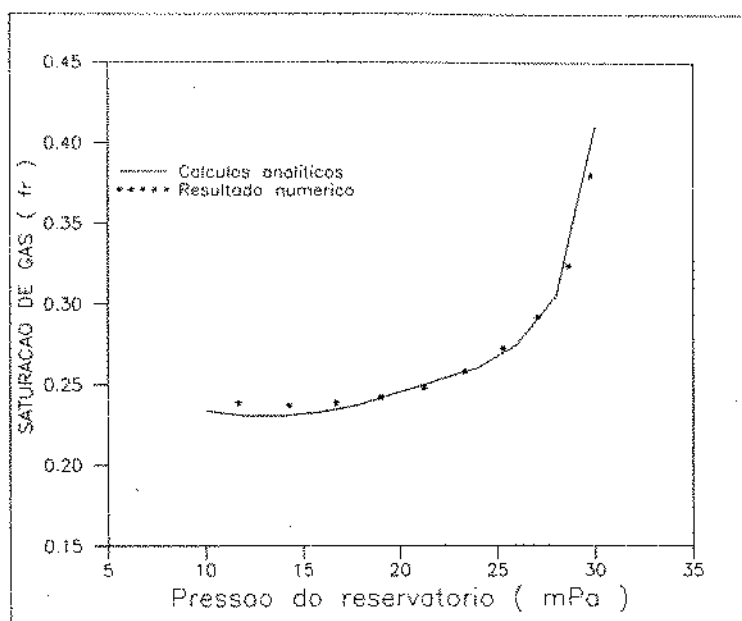


Figura 6.3: Reservatório de gás condensado retrógrado - resultados analíticos x numéricos

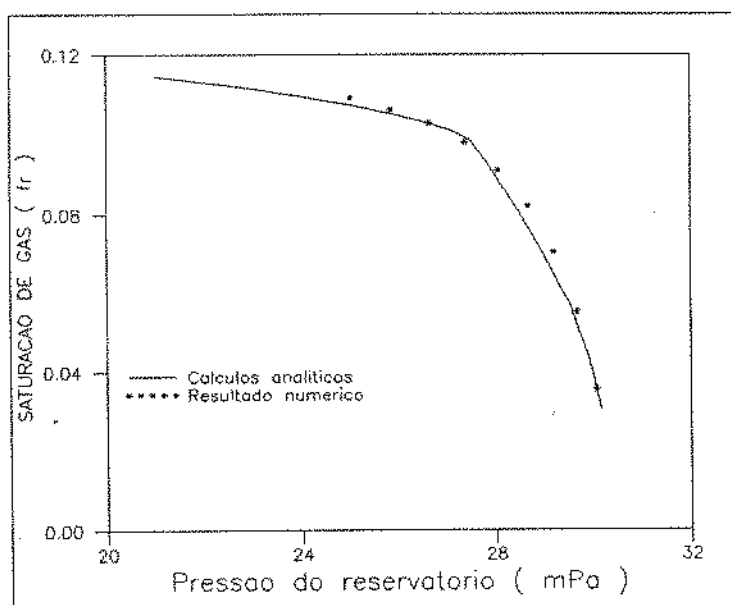


Figura 6.4: Reservatório de óleo volátil - resultados analíticos x numéricos

Saturação de gás (fr)	permeabilidade relativa	
	óleo (fr)	gás (fr)
0,0000	0,7500	0,0000
0,0300	0,6200	0,0000
0,0500	0,5300	0,0057
0,1000	0,3100	0,0200
0,1500	0,1700	0,0500
0,2000	0,0850	0,0900
0,2500	0,0420	0,1400
0,3000	0,0220	0,2000
0,3500	0,0100	0,2700
0,4000	0,0030	0,3600
0,4500	0,0015	0,4500
0,5000	0,0000	0,5700
0,5500	0,0000	0,6530
0,5600	0,0000	0,6700
0,6000	0,0000	0,7300
0,6500	0,0000	0,7900
0,7000	0,0000	0,8300
0,7500	0,0000	0,8700
1,0000	0,0000	1,0000

Tabela 6.3: Dados de permeabilidades relativas

7 Tópicos especiais

7.1 Cálculo "flash"

A utilização de um cálculo "flash" permite que se obtenha as composições e as frações molares ou mássicas de cada fase, sendo conhecidos a pressão, a temperatura e a composição total da mistura. Neste trabalho este tipo de cálculo é necessário para que se possa determinar as composições dos fluidos produzidos em condições de superfície.

Este tipo de problema pode ser resolvido de duas maneiras: (1) por substituição sucessiva ou (2) adotando-se o método de Newton - Raphson. Para solucioná-lo adotou-se a opção (2) com o seguinte equacionamento:

- Equações do problema:

- Condições de equilíbrio termodinâmico:

$$f_{m,l} = f_{m,v}, \quad m = 1, \dots, n_c. \quad (7.1)$$

- Equações de balanço de materiais:

$$z_m = x_m L + y_m V, \quad m = 2, \dots, n_c. \quad (7.2)$$

- Incógnitas do problema:

$$x_m, y_m, L, \quad m = 2, \dots, n_c. \quad (7.3)$$

- Funções de resíduos:

$$FR_m = f_{m,l} - f_{m,v}, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad (7.4)$$

$$FR_m = Lx_{m-n_c+1} + (1-L)y_{m-n_c+1} - z_{m-n_c+1}, \quad m = n_c + 1, \dots, 2n_c - 1. \quad (7.5)$$

- Matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial FR_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial FR_1}{\partial x_{n_c}} & \frac{\partial FR_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial FR_1}{\partial y_{n_c}} & \frac{\partial FR_1}{\partial L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial FR_{n_c}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial FR_{n_c}}{\partial x_{n_c}} & \frac{\partial FR_{n_c}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial FR_{n_c}}{\partial y_{n_c}} & \frac{\partial FR_{n_c}}{\partial L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial FR_{2n_c-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial FR_{2n_c-1}}{\partial x_{n_c}} & \frac{\partial FR_{2n_c-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial FR_{2n_c-1}}{\partial y_{n_c}} & \frac{\partial FR_{2n_c-1}}{\partial L} \end{pmatrix}$$

- Avaliação dos elementos da matriz jacobiana

Derivadas em relação à composição da fase líquida:

$$J_{m,k} = \frac{\partial f_{m,l}}{\partial x_{k+1}}, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad k = 1, \dots, n_c - 1, \\ J_{m,m-n_c} = L, \quad m = n_c + 1, \dots, 2n_c - 1. \quad (7.6)$$

Derivadas em relação à composição da fase gasosa:

$$J_{m,k} = -\frac{\partial f_{m,v}}{\partial y_{k-n_c+2}}, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad k = n_c, \dots, 2n_c - 2, \quad (7.7)$$

$$J_{m,m-1} = (1.0 - L), \quad m = n_c + 1, \dots, 2n_c - 1. \quad (7.8)$$

Derivadas em relação à fração molar da fase líquida:

$$J_{m,2n_c-1} = 0, \quad m = 1, \dots, n_c, \quad (7.9)$$

$$J_{m,2n_c-1} = x_{m-n_c+1} - y_{m-n_c+1}, \quad m = n_c + 1, \dots, 2n_c - 1. \quad (7.10)$$

7.2 Cálculo das pressões de fluxo

Desprezando-se os efeitos de estocagem existentes nos poços, podemos assumir a vazão molar total no fundo do poço como sendo igual a vazão molar total na superfície. Sendo assim, podemos calcular a vazão molar total produzida como:

a - Vazão de líquido especificada:

$$q_t^* = \frac{q_{ls}\rho_{ls}}{(1 - V_s)}, \quad (7.11)$$

b - Vazão de gás especificada:

$$q_t^* = \frac{q_{gs}\rho_{gs}}{V_s}, \quad (7.12)$$

onde:

q_t^* - vazão molar total

q_{ls} - vazão de líquido em condições de superfície

q_{gs} - vazão de gás em condições de superfície

ρ_{ls} - densidade molar da fase líquida em condições de superfície

ρ_{gs} - densidade molar da fase gás em condições de superfície

V_s - fração molar da fase gás em condições de superfície

A vazão molar total pode ser escrita como:

$$q_t^* = \rho_o q_o + \rho_g q_g, \quad (7.13)$$

$$q_t^* = \frac{\rho_o IP k_{ro}}{\mu_o} [p_o - p_{wf}] + \frac{\rho_g IP k_{rg}}{\mu_g} [p_g - p_{wf}], \quad (7.14)$$

$$\frac{q_t^*}{IP} = \frac{\rho_o k_{ro}}{\mu_o} [p_o - p_{wf}] + \frac{\rho_g k_{rg}}{\mu_g} [p_o + p_{cgo} - p_{wf}], \quad (7.15)$$

$$\frac{q_t^*}{IP} = [p_o - p_{wf}] \left[\frac{\rho_o k_{ro}}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg}}{\mu_g} \right] + \frac{\rho_g k_{rg} p_{cgo}}{\mu_g}. \quad (7.16)$$

Finalmente, podemos expressar a pressão de fluxo como:

$$p_{wf} = p_o - \frac{\left[\frac{q_t^*}{IP} - \frac{\rho_g k_{rg} p_{cgo}}{\mu_g} \right]}{\frac{\rho_o k_{ro}}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg}}{\mu_g}}. \quad (7.17)$$

7.3 Índice de produtividade dos poços

O índice de produtividade dos poços pode ser fornecido como dado de entrada ou então calculado pelo modelo, utilizando-se a seguinte equação:

$$IP = \frac{2\pi kh}{\ln\left(\frac{r_o}{r_w}\right)} \quad (7.18)$$

onde,

a - Caso radial

k = Permeabilidade na direção radial

r_o = Raio central da célula que contém o poço

r_w = Raio do poço

h = Espessura da célula

b - Caso cartesiano

$k = \sqrt{k_x k_y}$

$r_o = 0,14\Delta x[1 + \alpha^2]^{\frac{1}{2}}$ (Peaceman, 1977)

$\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 2$

h = Espessura da célula

7.4 Inicialização do modelo

Para o cálculo das pressões iniciais das células são consideradas três situações distintas:

a - Reservatório de óleo com gás em solução ,

b - Reservatório de óleo com capa de gás,

c - Reservatório de gás.

No caso (a) o modelo calcula o gradiente da fase óleo na pressão de referência e em seguida são calculadas as pressões das células com a seguinte equação:

$$p_{cel} = p_{ref} + \gamma_o \left(Z_{cel} + \frac{H_{cel}}{2} - Z_{ref} \right), \quad (7.19)$$

onde,

p_{cel} - pressão da célula

p_{ref} - pressão de referência

γ_o - peso específico da fase óleo

Z_{cel} - topo da célula

H_{cel} - espessura da célula

Z_{ref} - profundidade de referência

No caso (b) o modelo calcula a pressão de saturação da mistura e os gradientes das fases óleo e gás na pressão de saturação . As pressões das células são calculadas a seguir utilizando-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \text{a - Se} \quad & Z_{cel} + \frac{H_{cel}}{2} > Z_{cgo}, \\
 & p_{cel} = p_{sat} + \gamma_o \left(Z_{cel} + \frac{H_{cel}}{2} - Z_{cgo} \right). \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b - Se} \quad & Z_{cel} + \frac{H_{cel}}{2} < Z_{cgo}, \\
 & p_{cel} = p_{sat} + \gamma_g \left(Z_{cel} + \frac{H_{cel}}{2} - Z_{cgo} \right) - p_{cgo}. \quad (7.21)
 \end{aligned}$$

No caso (c) o modelo calcula o gradiente da fase gás na pressão de referência, obtendo as pressões das células a parte com a seguinte equação:

$$p_{cel} = p_{ref} + \gamma_g \left(Z_{cel} + \frac{H_{cel}}{2} - z_{ref} \right) \quad (7.22)$$

7.5 Aparecimento e desaparecimento das fases de hidrocarbonetos

O caso de aparecimento e desaparecimento das fases de hidrocarbonetos é tratado de maneira bastante simples. Se ao final de uma iteração a pressão de um determinado bloco for inferior a sua pressão de saturação, então existem as fases óleo e gás, sendo o sistema resolvido normalmente considerando-se todas as incógnitas. Se a pressão do bloco for superior a sua pressão de saturação este encontra-se em uma região de fase única. Neste caso, a saturação de gás e a composição de uma das fases deixam de ser incógnitas, e as equações de equilíbrio termodinâmico tornam-se desnecessárias. Para manter a estrutura da matriz jacobiana e permitir que o sistema de equações tenha uma solução normal, é necessário adotar-se o seguinte procedimento:

a - Tornar nulas as funções de resíduos associadas às equações de equilíbrio termodinâmico do bloco.

b - Anular as derivadas parciais das funções de resíduos associadas às equações de balanço de materiais do bloco, em relação à composição da fase inexistente e à saturação de gás.

c - Anular todas as derivadas parciais das funções de resíduos associadas às equações de equilíbrio termodinâmico do bloco, exceto aquelas em relação à composição da fase inexistente e a saturação de gás, com a restrição de só existir um elemento não nulo em cada linha e que estas se mantenham linearmente independentes entre si.

8 Aplicações do modelo

Além dos casos simulados para validação do modelo, foram feitas algumas simulações em reservatórios de óleo volátil e gás condensado retrógrado, em geometrias radiais e cartesianas, com processos de produção, ciclagem de gás e testes de formação .

As composições dos fluidos e curvas de permeabilidades relativas utilizadas em todos os casos foram as mesmas utilizadas nos casos de validação .

8.1 Processos de produção

Para os processos de produção, foram estudados reservatórios com 400m de raio, adotando-se uma malha com 10 blocos, distribuídos logaritmicamente, na direção radial e 4 blocos, com espaçamento regular, na vertical. Com este tipo de discretização, a célula central, que contém o poço produtor, ficou com um raio de apenas 21,0cm. Considerou-se os poços produzindo apenas da camada inferior, com as vazões limitadas em 150.000 m³/dia para o caso de gás e 80m³/dia para o caso de óleo.

Apesar do modelo admitir variações nas propriedades das células, as espessuras, porosidades e permeabilidades foram consideradas constantes, atribuindo-se valores de 15,0m para a espessura, 18% para a porosidade e $9,9 \times 10^{-15} \text{m}^2$ para a permeabilidade.

As figuras (8.1), (8.2) e (8.3) apresentam o comportamento da pressão de fluxo, vazão de óleo, vazão de gás e razão gás óleo para cada caso.

Conforme pode ser verificado nas tabelas (8.1) e (8.2), em ambas as situações as composições finais dos fluidos apresentaram significativas variações em relação à original, provocando alterações nas pressões de saturação e comportamento dos fluidos. No caso do gás condensado retrógrado verificou-se que em alguns blocos o fluido passou a se comportar como óleo volátil. A figura (8.4), obtida utilizando-se a composição final dos fluidos existentes na camada inferior do reservatório de gás condensado retrógrado, confirma esta mudança de comportamento.

bloco	fração molar						fluido
	Psc1	Psc2	Psc3	Psc4	Psc5	Psc6	
1,1	0.4650	0.1339	0.1934	0.1011	0.0691	0.0374	óleo
2,1	0.4780	0.1354	0.1915	0.0949	0.0621	0.0380	óleo
3,1	0.4900	0.1368	0.1897	0.0896	0.0559	0.0380	óleo
4,1	0.5015	0.1380	0.1880	0.0849	0.0504	0.0372	óleo
5,1	0.5141	0.1392	0.1861	0.0803	0.0451	0.0353	óleo
6,1	0.5303	0.1405	0.1837	0.0749	0.0392	0.0314	óleo
7,1	0.5919	0.1452	0.1742	0.0566	0.0201	0.0120	gás
8,1	0.6095	0.1465	0.1714	0.0514	0.0146	0.0064	gás
9,1	0.6106	0.1466	0.1713	0.0511	0.0143	0.0061	gás
10,1	0.6107	0.1466	0.1712	0.0511	0.0143	0.0060	gás
composição original do reservatório							
	0.6117	0.1467	0.1711	0.0508	0.0140	0.0057	gás

Tabela 8.1: Composição final do fluido no reservatório de gás condensado retrógrado

8.2 Produção de fluidos com ciclagem de gás

Nos processos de produção de fluidos com ciclagem de gás, estudou-se um reservatório com 900,0m de comprimento e 300,0m de largura, discretizado em uma malha regular de 9x3, com as mesmas propriedades adotadas nos casos dos processos produtivos.

Em ambos os casos os poços produtores foram localizados no bloco (3,2) e os poços injetores no bloco (7,2). As condições de vazões máximas e pressões de fluxo mínimas foram também mantidas iguais às das simulações anteriores.

As composições dos fluidos injetados, que constam na tabela (8.3), foram admitidas como iguais a do gás produzido no primeiro intervalo de tempo de cada caso simulado, sendo adotadas vazões de injeção constantes de 28.000m³/dia para o caso de óleo e de 40.000m³/dia para o caso de gás.

As figuras (8.5), (8.6) e (8.7) apresentam o comportamento da pressão de fluxo, vazão de óleo, vazão de gás e razão gás-óleo de cada poço produtor para os casos estudados.

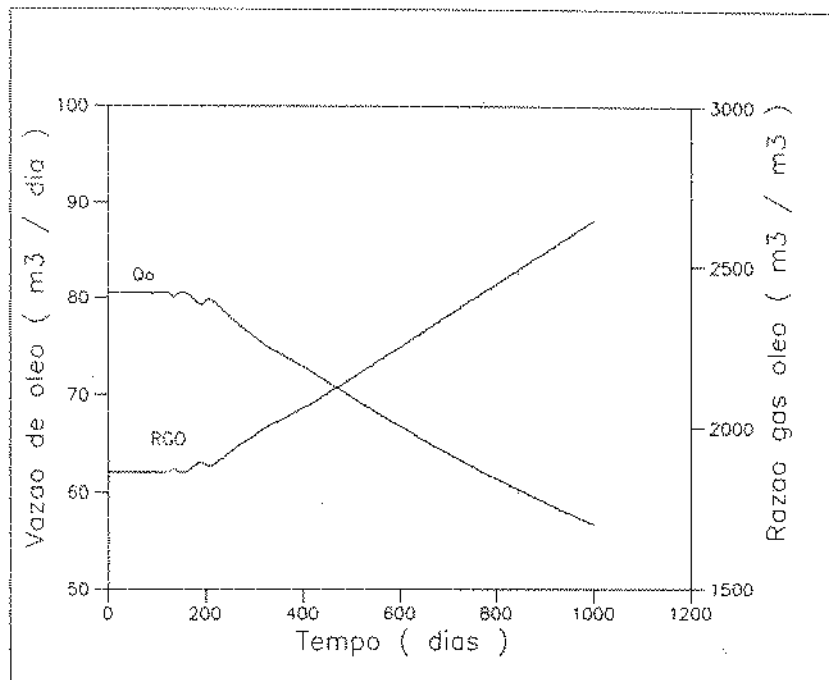


Figura 8.1: Reservatório de gás condensado retrógrado - q_o , RGO x tempo

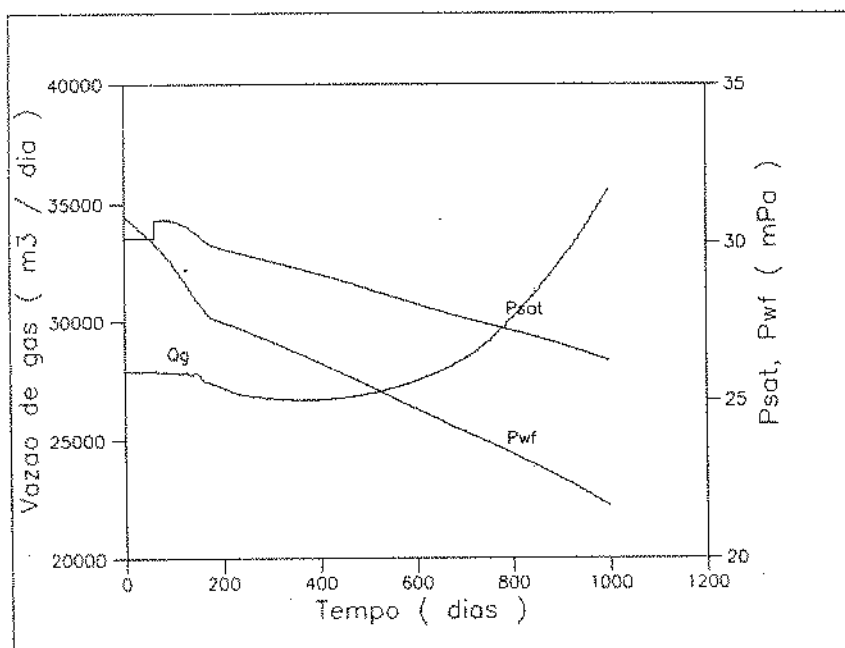


Figura 8.2: Reservatório de óleo volátil - q_g , P_{sat} , P_{wf} x tempo

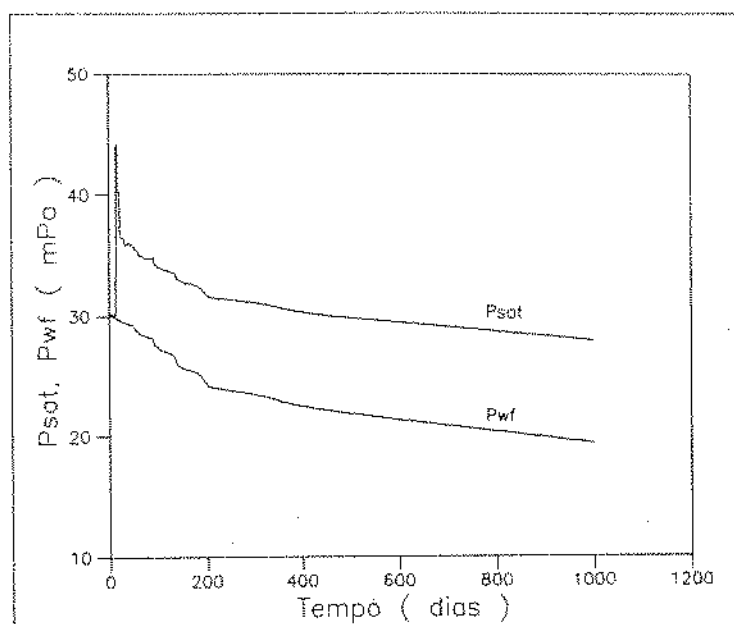


Figura 8.3: Reservatório de gás condensado retrógrado - P_{sat} , P_{wf} x tempo

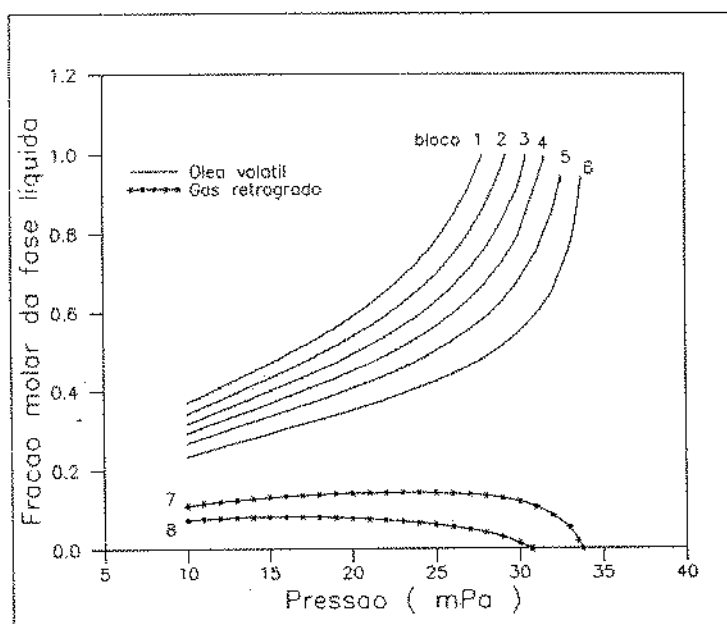


Figura 8.4: Reservatório de gás condensado retrógrado - fr. molar da fase líquida x pressão

bloco	fração molar						fluido
	Psc1	Psc2	Psc3	Psc4	Psc5	Psc6	
1,1	0.4576	0.1370	0.1956	0.0912	0.0546	0.0640	óleo
2,1	0.4574	0.1370	0.1957	0.0912	0.0546	0.0641	óleo
3,1	0.4572	0.1370	0.1957	0.0913	0.0547	0.0642	óleo
4,1	0.4571	0.1370	0.1957	0.0913	0.0547	0.0642	óleo
5,1	0.4569	0.1370	0.1957	0.0914	0.0548	0.0643	óleo
6,1	0.4569	0.1369	0.1957	0.0914	0.0548	0.0643	óleo
7,1	0.4569	0.1370	0.1957	0.0914	0.0548	0.0643	óleo
8,1	0.4576	0.1370	0.1956	0.0912	0.0546	0.0640	óleo
9,1	0.4586	0.1370	0.1955	0.0909	0.0543	0.0637	óleo
10,1	0.4589	0.1371	0.1954	0.0908	0.0542	0.0635	óleo
composição original do reservatório							
	0.4590	0.1371	0.1954	0.0908	0.0542	0.0635	óleo

Tabela 8.2: Composição final do fluido no reservatório de óleo volátil

componente	Psc1	Psc2	Psc3	Psc4	Psc5	Psc6
fr. molar (res. óleo)	0.5883	0.1730	0.2328	0.0109	0.0000	0.0000
fr. molar (res. gás)	0.6488	0.1553	0.1788	0.0171	0.0000	0.0000

Tabela 8.3: Composição do fluido injetado

8.3 Testes de formação

Para simulação dos testes de formação foi utilizado um modelo radial, unidimensional, com 15 blocos distribuídos logaritmicamente, mantendo-se as demais propriedades utilizadas nos casos anteriores.

Quatro testes foram simulados, dois em reservatório de gás condensado retrógrado e dois em reservatório de óleo volátil. Em todos os testes limitou-se o período de fluxo em 10hs, seguindo-se uma estática de 24hs. O primeiro teste de gás foi simulado com uma vazão constante de 150.000m³/dia durante o fluxo, seguindo-se então o período de fechamento. No segundo teste, iniciou-se com a mesma vazão do primeiro, reduzindo-se para a metade após 5hs de fluxo. Os testes de óleo seguiram a mesma filosofia dos testes de gás, adotando-se vazões de óleo de 160,0m³/dia e 80,0m³/dia nos dois casos, respectivamente.

No primeiro teste do reservatório de gás houve uma significativa deposição de líquido nas proximidades do poço e, após o fechamento, um incremento desta deposição, confirmando assim a mudança de comportamento do fluido de gás condensado retrógrado para óleo volátil. Este fato, comprovado na simulação, pode, caso se confirme na prática, falsear a interpretação do teste, bem como invalidar as amostragens de fluido efetuadas no período.

O segundo teste simulado para o gás mostrou ser possível reverter a situação adversa obtida com o primeiro teste.

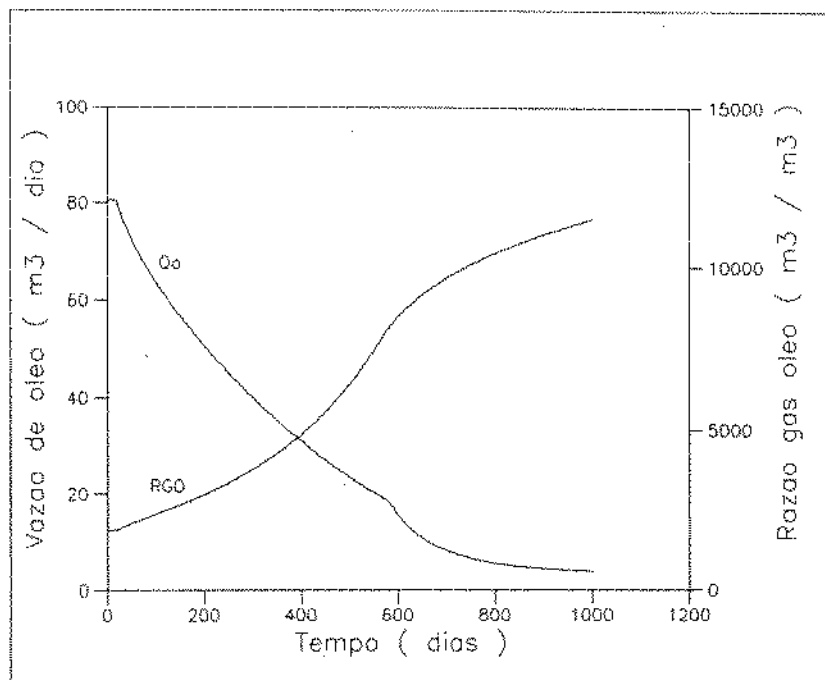


Figura 8.5: Reservatório de gás condensado retrógrado - q_o , RGO x tempo

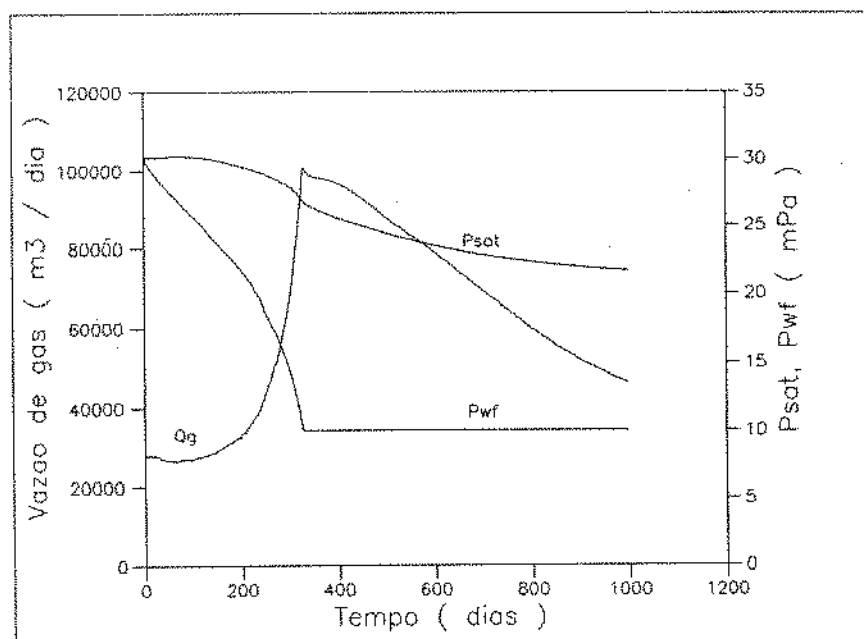


Figura 8.6: Reservatório de óleo volátil - q_g , P_{sat} , P_{wf} x tempo

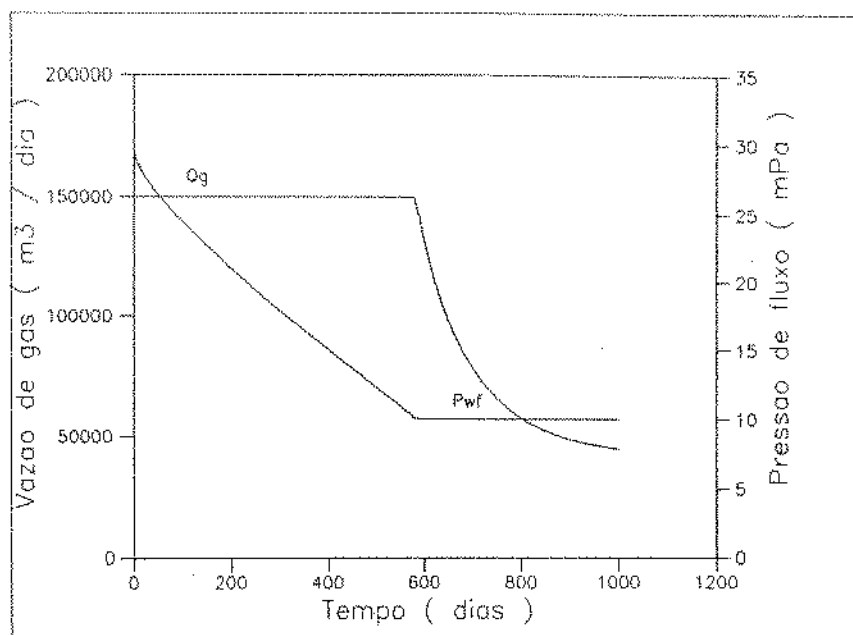


Figura 8.7: Reservatório de gás condensado retrógrado - q_g , P_{wf} x tempo

Em ambos os testes efetuados no reservatório de óleo, a saturação de gás que surgiu durante o período de fluxo desapareceu após o fechamento.

As figuras (8.8), (8.9), (8.10) e (8.11) apresentam o comportamento da pressão e saturação de óleo da célula que contém o poço produtor

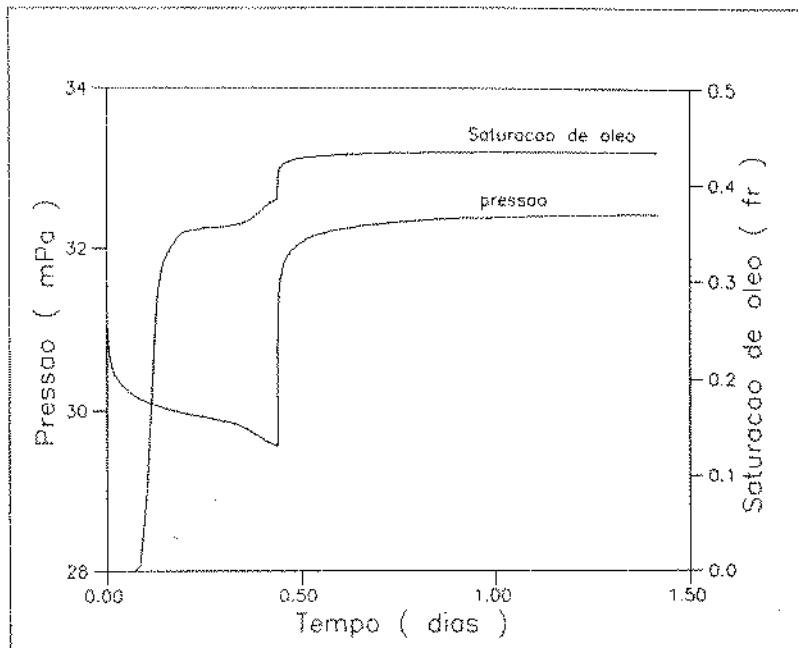


Figura 8.8: Teste de gás com vazão constante - p , S_o x tempo

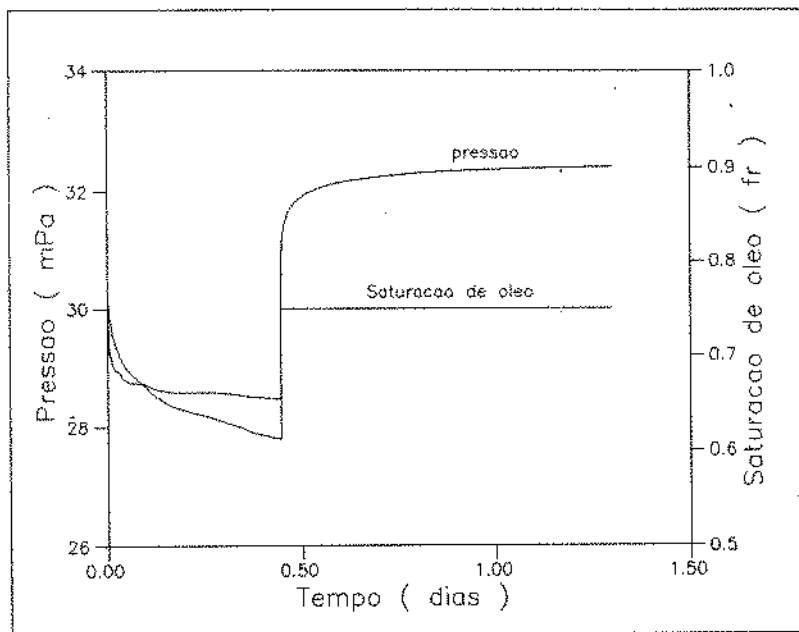


Figura 8.9: Teste de óleo com vazão constante - p , S_o x tempo

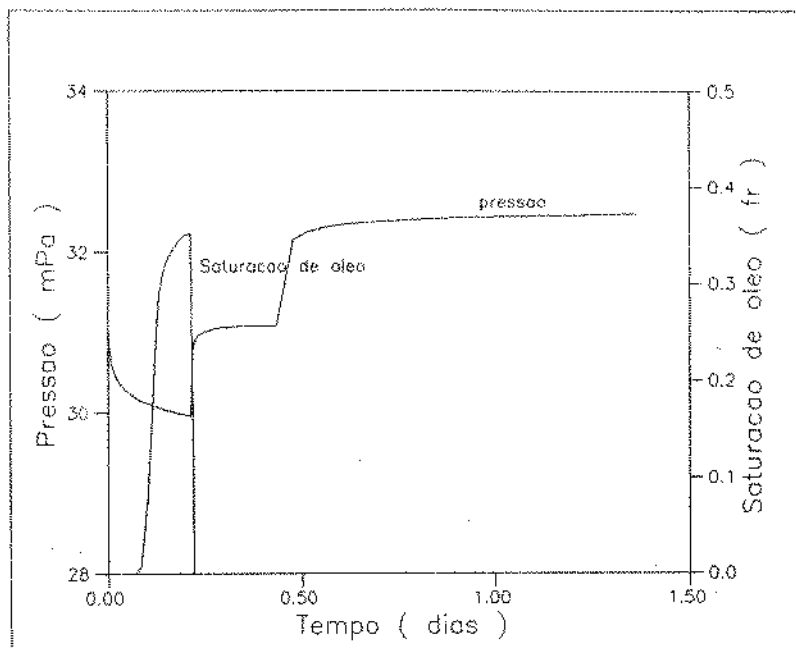


Figura 8.10: Teste de gás com vazão variável - p , S_o x tempo

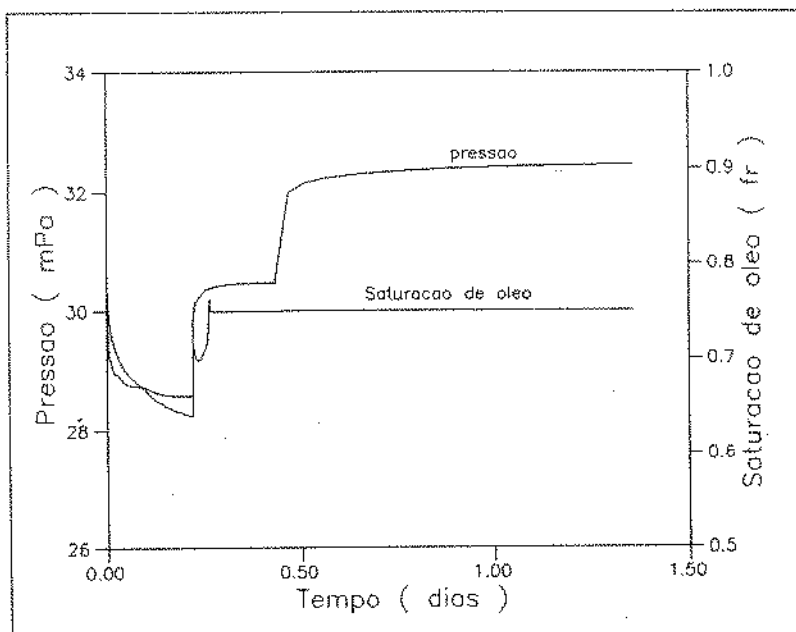


Figura 8.11: Teste de óleo com vazão variável - p , S_o x tempo

9 Conclusões

A modelagem composicional, totalmente implícita, utilizando a equação de estado de Peng-Robinson e o método de Newton-Raphson para solução do sistema não linear, mostrou ser bastante eficiente no estudo de reservatórios de gás condensado retrógrado e óleo volátil, principalmente no estudo de modelos radiais, onde a utilização de uma formulação semi-implícita é deficiente.

As oscilações nas vazões de óleo e gás ocasionadas pelo cálculo explícito das composições dos fluidos em condições de superfície não comprometem os resultados do modelo, podendo ser negligenciadas do ponto de vista prático.

A deposição de líquido, observada nos casos de reservatórios de gás condensado retrógrado, pode fazer com que o fluido mude a sua característica inicial, passando a ter um comportamento de óleo e não de gás. Este fato tem que ser levado em consideração nos casos de testes de formação e amostragem de fluidos.

A metodologia aqui aplicada, utilizando a equação de Peng-Robinson, é geral, podendo ser facilmente estendida para outras equações de estado.

Tendo em vista a consideração de que o equilíbrio termodinâmico é atingido instantaneamente, fato que não ocorre na realidade, é conveniente que os resultados do modelo sejam analisados com cautela.

Bibliografia

- Acs, G., Doleschall, S. and Farkas, E.: "General Purpose Compositional Model", *Soc. Pet. Eng. J.*, (agosto 1985), 543-553.
- Alani, G. H. and Kennedy, H. T.: "Volumes of Liquid Hydrocarbons at High Temperatures and Pressures", *Trans.*, AIME (1960) **219**, 288 - 292.
- Arps, J. J.: "Analysis of Decline Curves," *Trans.*, AIME (1945) **160**, 228-47.
- Aziz, K. and Settari, A.: *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers Ltd., London, 1979.
- Chopra, A. K. and Carter R. D.: "Proof of the Two-Phase Steady-State Theory for Flow Through Porous Media", *SPE Formation Evaluation*, (dezembro 1986) 603-607.
- Chien, M. C. H., Lee, S. T. and Chen, W. H.: "A New Fully Implicit Compositional Simulator", SPE Symposium on Reservoir Simulation, paper 13385, Dallas, fevereiro 1985.
- Chueh, P. L. and Prausnitz, J. M.: "Vapor-Liquid Equilibria at High Pressures. Vapor-Phase Fugacity Coefficients in Nonpolar and Quantum-Gas Mixtures", *I & E C Fundamentals*, (novembro 1967), **6**, No. 4, 492-498.
- Coats, K. H.: "An Equation of State Compositional Model", *Soc. Pet. Eng. J.*, (outubro 1980) 363-376.
- Coats, K. H.: "Simulation of Gas Condensate Reservoir Performance", *J. Pet. Tech.*, (outubro 1985) 1870-1886.
- Crichlow, H. B.: *Modern Reservoir Engineering: A simulation Approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1977.
- Firoozabadi A.: "Reservoir-Fluid Phase Behavior and Volumetric Predictions with Equations of State", *J. Pet. Tech.*, (abril 1988) 397-406.
- Firoozabadi A., Katz, D. L., Soroosh, H.: Sajjadian, V. A., "Surface Tension of Reservoir Crude-Oil/Gas Systems Recognizing the Asphalt in the Heavy Fraction", *SPE Reservoir Engineering*, (fevereiro 1988) 265-272.
- Fussel, D. D., Yanosik, J. L.: "An Iterative Sequence for Phase-Equilibria Calculations Incorporating the Redlich-Kwong Equation of State", *Soc. Pet. Eng. J.*, (junho 1978) 173-182.
- Fussel, L. T. and Fussel, D. D.: "An Iterative Technique for Compositional Reservoir Models", *Soc. Pet. Eng. J.*, (agosto 1979) 211-220.
- Hankinson, R. W. and Thomson, G. H.: "A New Correlation for Saturated Densities of Liquid and Their Mixtures", *A.I.Ch.E. Journal*, (julho 1979) 653-663.

- Katz, D. L. and Firoozabadi A.: "Predicting Phase Behavior of Condensate/Crude-Oil Systems Using Methane Interaction Coefficients", *J. Pet. Tech.*, (novembro 1978) 1649-1655.
- Kazemi, H., Vestal, C. R. and Shank, G. D.: "An Efficient Multicomponent Numerical Simulator", *Soc. Pet. Eng. J.*, (outubro 1978) 355-368.
- Kendall, R. P., Morrel, G. O., Peaceman, D. W.: Silliman, W. J., Watts, J. W., "Development of a Multiple Application Reservoir Simulator for Use on a Vector Computer", SPE Middle East Oil Technical Conference, paper 11483, Manama, Bahrain, março 1983.
- Kenyon, D. E. and Behie, A.: "Third SPE Comparative Solution Project: Gas Cycling of Retrograde Condensate Reservoirs", SPE Symposium on Reservoir Simulation, paper 12278, San Francisco, California, novembro 1983.
- Kniazeff, V. J. and Naville, S. A.: "Two-Phase Flow of Volatile Hydrocarbons", *Soc. Pet. Eng. J.* (Março 1965) 37 - 44; *Trans., AIME*, 234.
- Lee, A. L., Gonzalez, M. H.: "The Viscosity of Natural Gases", *J. Pet. Tech.*, (agosto 1966) 997-1000.
- Lohrenz, J., Bray, B. G., Clark, C. R.: "Calculating Viscosities of Reservoir Fluids From Their Compositions", *J. Pet. Tech.*, (outubro 1964) 1171-1176.
- Macleod, D. B.: "On a Relation Between Surface Tension and Density," *Trans., Faraday Soc.* (1923), 19, 38-42.
- Mansoori, J.: "Discussion of Compositional Modelling with an Equation of State", *Soc. Pet. Eng. J.*, (abril 1982) 202-203.
- Muskat, M.: "The Production Histories of Oil Producing Gas-Drive Reservoirs," *Journal of Applied Physics*, (1945), 16, 147.
- Nghiem, L. X., Fong, D. K. and Aziz, K.: "Compositional Modelling with an Equation of State", *Soc. Pet. Eng. J.*, (dezembro 1984) 687-698.
- Nolem, J. S.: "Numerical Simulation of Compositional Phenomena in Petroleum Reservoirs", Reprint series No. 11 - Numerical Simulation, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas (1973), 269 - 284.
- Nutakki, R., Wong, T., Firoozabadi, A., Aziz, K.: "Development of General Purpose Simulators", Stanford University, Stanford, California, julho 1985.
- Peaceman, D. W.: "Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation", Elsevier Scientific Publishing Co., New York, 1977.
- Pedrosa, Jr., O. A. and Aziz, K.: "Use of a Hybrid Grid in Reservoir Simulation", *SPE Reservoir Engineering*, (novembro 1986) 611-621.
- Peng, D. Y. and Robinson, D. B.: "A New Two-Constant Equation of State", *I. & E. C. Fundamentals*, (1976), 15, No. 1, 59-64.

- Redlich, O. and Kwong, J. N. S.: "On the Thermodynamics of Solutions V. an Equation of State. Fugacities of Gaseous Solutions," *Chem. Rev.*, (1949), **44**, 233.
- Roebuck, I. F. Jr., Ford, W. T., Henderson, G. E., and Douglas, Jim Jr.: "The Compositional Reservoir Simulator: Case I - The Linear Model", *Soc. Pet. Eng. J.* (Março 1969), 155-130; *Trans. AIME*, **246**.
- Roebuck, I. F. Jr., Ford, W. T., Henderson, G. E. and Douglas, Jim Jr.: "The Compositional Reservoir Simulator: Case III - The Radial Geometry ", Company Report, CORE Laboratories Inc., Dallas.
- Roebuck, I. F. Jr., Ford, W. T., Henderson, G. E., and Douglas, Jim Jr.: "The Compositional Reservoir Simulator: Case II - Two-Dimensional Model", Paper SPE 2235 presented at the SPE-AIME 43rd Annual Fall Meeting, Houston, 29 set. - 2 out., (1968).
- Schiozer, D. J.: "Estudo de um Modelo Composicional Para Simulação de Reservatórios", Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, junho 1989.
- Shang, G. D. and Vestal, C. R.: "Practical Techniques in Two-Pseudocomponent Black-Oil Simulation", *SPE Reservoir Engineering*, (maio 1989) 244-252.
- Smith, J. M. and Van Ness, H. C.: *Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics*, McGraw-Hill Kogakusha, LTD., Tokyo, 1975.
- Stone, H. L.: "Estimation of Three-Phase Relative Permeability and Residual Oil Data," *J. Cdn. Pet. Tech.*(out.-dez. 1953), 53-61.
- Sugden, S.: "The Variation of Surface Tension With Temperature and some Related Functions," *J. Chem. Soc.* (1924) **125**, 32-41.
- Turner, J.: "How Different Size Gas Caps and Pressure Maintenance Programs Affect Amount of Recoverable Oil," *Oil Weekly*, (junho, 1944), **144**, 32-44.
- Weinaug, C. F. and Katz, D. L.: "Surface Tension of Methane-Propane Mixtures," *Ind. & Eng. Chem.* (fev. 1943) **35**, 239-46.
- Wong, T. W. and Aziz, K.: "Considerations in the Development of Multipurpose Reservoir Simulation Models", Stanford University, Stanford, California, maio 1989.
- Young, L. C. and Stephenson, R. E.: "A Generalized Compositional Approach for Reservoir Simulation", *Soc. Pet. Eng. J.*, (outubro 1983) 727-742.
- Zudkevitch, D. and Joffe, J.: "Correlation and Prediction of Vapor-Liquid Equilibria with the Redlich Kwong Equation of State," *A.I.Ch.E. Journal* (jan. 1970), **16**, No.1, 112-119.

Apêndice A - Expressões analíticas das derivadas

- Derivadas do fator de compressibilidade

Utilizando a equação de Peng - Robinson, podemos escrever:

$$Z^3 - (1 - B)Z^2 + (A - 3B^2 - 2B)Z - (AB - B^2 - B^3) = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$A = \frac{ap}{R^2T^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$B = \frac{bp}{RT}. \quad (\text{A.3})$$

Para componentes puros, define-se:

$$b = 0,07780 \frac{RT_c}{p_c}, \quad (\text{A.4})$$

$$a(T) = 0,45724 \frac{R^2T_c^2\alpha}{p_c}, \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha^{0,5} = 0,37464 + 1,5422w - 0,2699w^2, \quad (\text{A.6})$$

sendo w o fator acêntrico.

Para misturas, adota-se:

$$b_m = \sum_m x_m b_m, \quad (\text{A.7})$$

$$a_m = \sum_m \sum_l x_m x_l a_{ml}, \quad (\text{A.8})$$

$$a_{ml} = (1 - \delta_{ml}) a_m^{0,5} a_l^{0,5}, \quad (\text{A.9})$$

sendo δ o coeficiente de interação binária.

O cálculo de $\frac{\partial Z}{\partial p}$ e $\frac{\partial Z}{\partial x_i}$ é feito a partir de:

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial Z}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial p}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \frac{\partial Z}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x_i} + \frac{\partial Z}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial x_i}, \quad (\text{A.11})$$

Diferenciando-se a equação (A.1) em relação a A e B resulta:

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = \frac{B - Z}{3Z^2 - 2Z(1 - B) + A - 3B^2 - 2B}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial B} = \frac{-Z^2 + Z(6B + 2) + A - 2B - 3B^2}{3Z^2 - 2Z(1 - B) + A - 3B^2 - 2B} \quad (\text{A.13})$$

Diferenciando-se A e B em relação à pressão, obtém-se:

$$\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{a_m}{R^2 T^2}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial B}{\partial p} = \frac{b_m}{RT}. \quad (\text{A.15})$$

Diferenciando-se A e B em relação à composição das misturas, vem:

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{2p \sum_l x_l (a_{li} - a_{1l})}{R^2 T^2}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} = \frac{p(b_i - b_1)}{RT}. \quad (\text{A.17})$$

- Derivadas das densidades molares dos fluidos

Derivadas da densidade molar da fase líquida

Utilizando-se a correlação de Alani-Kennedy (1960), as derivadas da densidade molar da fase líquida em relação a pressão e composição do fluido, podem ser calculadas com as seguintes expressões:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial p}, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{p^2} \frac{A_m v - v^2 RT - A_m B_m}{3v^2 - 2v\left(\frac{RT}{p} + B_m\right) + \frac{A_m}{p}}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial B_m}{\partial x_i} (v^2 + \frac{A_m}{p}) - \frac{1}{p} \frac{\partial A_m}{\partial x_i} (v - B_m)}{3v^2 - 2v\left(\frac{RT}{p} + B_m\right) + \frac{A_m}{p}}. \quad (\text{A.21})$$

- Derivadas da densidade molar da fase gás

Utilizando-se a expressão,

$$\rho_g = \frac{p}{ZRT}, \quad (\text{A.22})$$

para expressar a densidade molar da fase gás, teremos as seguintes expressões para suas derivadas em relação à pressão e composição da mistura:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial p} = \frac{1 - \frac{p}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p}}{ZRT}, \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial y_i} = -\frac{p}{RTZ^2} \frac{\partial Z}{\partial y_i}. \quad (\text{A.24})$$

- Derivadas das fugacidades

Utilizando-se a equação de Peng-Robinson (1976), podemos expressar a fugacidade de um componente k em uma fase l com a seguinte equação :

$$\ln \frac{f_k^l}{x_k p} = \frac{b_k(Z-1)}{b} - \ln(Z-B) - \frac{A}{2\sqrt{2}B} \left[\frac{2 \sum_l x_l a_{lk}}{a} - \frac{b_k}{b} \right] \ln \left[\frac{Z + (\sqrt{2}+1)B}{Z - (\sqrt{2}-1)B} \right]. \quad (\text{A.25})$$

Derivando-se a equação (A.21) em relação à pressão e composição das fases, vamos obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k^l}{\partial p} = f_k^l & \left[\frac{b_k}{b} \frac{\partial Z}{\partial p} - \frac{1}{Z-B} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial p} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2 \sum_l x_l a_{lk}}{a} - \frac{b_k}{b} \right) \right. \\ & \left. \left\{ \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{A}{B^2} \frac{\partial B}{\partial p} \right) \ln \left(\frac{Z + (\sqrt{2}+1)B}{Z - (\sqrt{2}-1)B} \right) + \frac{A}{B} \left(\frac{\frac{\partial Z}{\partial p} + (\sqrt{2}+1) \frac{\partial B}{\partial p}}{Z + (\sqrt{2}+1)B} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\frac{\partial Z}{\partial p} - (\sqrt{2}-1) \frac{\partial B}{\partial p}}{Z - (\sqrt{2}-1)B} \right) \right\} + \frac{1}{p} \right], \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_k^l} \frac{\partial f_k^l}{\partial x_i} = \frac{1}{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} + b_k & \left(\frac{1}{b} \frac{\partial Z}{\partial x_i} - \frac{Z-1}{b^2} b_i \right) - \frac{1}{Z-B} \left(\frac{\partial Z}{\partial x_i} - \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left\{ \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial x_i} - \frac{A}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \left(\frac{2 \sum_l x_l a_{l,k}}{a} - \frac{b_k}{b} \right) \ln \left(\frac{Z + (\sqrt{2}+1)B}{Z - (\sqrt{2}-1)B} \right) \right. \\ & + \frac{A}{B} \left[\left(\frac{2a_{i,k}}{a} - \frac{4 \sum_l x_l a_{l,k}}{a^2} \sum_l x_l a_{l,i} + \frac{b_k b_i}{b^2} \right) \ln \left(\frac{Z + (\sqrt{2}+1)B}{Z - (\sqrt{2}-1)B} \right) \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{2 \sum_l x_l a_{l,k}}{a} - \frac{b_k}{b} \right) \left(\frac{\frac{\partial Z}{\partial x_i} + (\sqrt{2}+1) \frac{\partial B}{\partial x_i}}{Z + (\sqrt{2}+1)B} - \frac{\frac{\partial Z}{\partial x_i} - (\sqrt{2}-1) \frac{\partial B}{\partial x_i}}{Z - (\sqrt{2}-1)B} \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

- Derivadas da tensão interfacial gás-óleo

Utilizando-se a correlação sugerida por Macleod (1923) - Sugden (1924) para o cálculo da tensão interfacial gás-óleo, teremos as seguintes expressões para as derivadas em relação à pressão e composição dos fluidos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} = 4 \left[\sum_{i=1}^{n_c} P_{chi} (\rho_l x_i - \rho_g y_i) \right]^3 \sum_{i=1}^{n_c} P_{chi} \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial p} x_i - \frac{\partial \rho_g}{\partial p} y_i \right), \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 4 \left[\sum_{k=1}^{n_c} P_{chk} (\rho_l x_k - \rho_g y_k) \right]^3 \sum_{k=1}^{n_c} P_{chk} \left[x_k \frac{\partial \rho_l}{\partial x_i} + \rho_l \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \right], \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y_i} = -4 \left[\sum_{k=1}^{n_c} P_{chk} (\rho_l x_k - \rho_g y_k) \right]^3 \sum_{k=1}^{n_c} P_{chk} \left[y_k \frac{\partial \rho_g}{\partial y_i} + \rho_g \frac{\partial y_k}{\partial y_i} \right]. \quad (\text{A.30})$$

- Derivadas da pressão capilar gás-óleo

A pressão capilar gás-óleo, expressa como uma função da saturação de gás e da tensão interfacial tem a seguinte expressão:

$$p_{cgo} = \frac{\sigma_{go}}{\sigma_{go}^i} p_{ci}(S_g), \quad (\text{A.31})$$

onde,

σ_{go}^i - Tensão interfacial inicial

$p_{ci}(S_g)$ - Curva original de pressão capilar

Utilizando-se a equação (A.31) as derivadas da pressão capilar gás-óleo podem ser expressas pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial p_{cgo}}{\partial x_i} = \frac{p_{ci}(S_g)}{\sigma_{go}^i} \frac{\partial \sigma_{go}}{\partial x_i}, \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial p_{cgo}}{\partial y_i} = \frac{p_{ci}(S_g)}{\sigma_{go}^i} \frac{\partial \sigma_{go}}{\partial y_i}, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial p_{cgo}}{\partial S_g} = \frac{\sigma_{go}}{\sigma_{go}^i} \frac{\partial p_{ci}}{\partial S_g}, \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial p_{cgo}}{\partial p} = \frac{p_{ci}(S_g)}{\sigma_{go}^i} \frac{\partial \sigma_{go}}{\partial p}. \quad (\text{A.35})$$

- Derivadas das viscosidades dos fluidos

Derivadas da viscosidade do gás

Utilizando-se a correlação de Lee-Gonzalez (1966), as derivadas da viscosidade do gás em relação à pressão e composição da fase gás podem ser expressas como:

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = K e^{X \rho_g^Y} X Y \rho_g^{Y-1} \frac{\partial \rho_g}{\partial p}, \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y_i} = e^{X \rho^Y} \frac{\partial K}{\partial y_i} + K [e^{X \rho^Y} \frac{\partial (X \rho^Y)}{\partial y_i}], \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial (X \rho^Y)}{\partial y_i} = \rho^Y \frac{\partial X}{\partial y_i} + X \frac{\partial \rho^Y}{\partial y_i}, \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial \rho^Y}{\partial y_i} = \rho^Y \left(\ln \rho \frac{\partial Y}{\partial y_i} + \frac{Y}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \right). \quad (\text{A.39})$$

Derivadas da viscosidade do líquido

Utilizando a correlação de Lohrenz (1964) as derivadas da viscosidade da fase líquida em relação à pressão e composição dos fluidos podem ser calculadas como:

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{4R_{aux}^3}{\epsilon} \frac{\partial R_{aux}}{\partial p}, \quad (\text{A.40})$$

$$R_{aux} = 0,1023 + 0,023364 \rho_r + 0,058533 \rho_r^2 - 0,40758 \rho_r^3 + 0,0093324 \rho_r^4, \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial R_{aux}}{\partial p} = \frac{\partial \rho_r}{\partial p} (0,023364 + 0,117066 \rho_r - 1,22274 \rho_r^2 + 0,0373296 \rho_r^3), \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial p} = \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial \rho_l}{\partial p}, \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_i} = \frac{4R_{aux}^3}{\epsilon} \frac{\partial R_{aux}}{\partial x_i} - \frac{R_{aux}^4 - 10^{-4}}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu^*}{\partial x_i}, \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial R_{aux}}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho_r}{\partial x_i} (0,0233364 + 0,0117066\rho_r - 1,22274\rho_r^2 + 0,0373296\rho_r^3), \quad (\text{A.45})$$

$$soma1 = \sum_{j=1}^{n_c} x_j \mu_j^* \sqrt{M_j}, \quad (\text{A.46})$$

$$soma2 = \sum_{j=1}^{n_c} x_j \sqrt{M_j}, \quad (\text{A.47})$$

$$soma3 = \sum_{j=1}^{n_c} x_j T_{c,j}, \quad (\text{A.48})$$

$$soma4 = \sum_{j=1}^{n_c} x_j M_j, \quad (\text{A.49})$$

$$soma5 = \sum_{j=1}^{n_c} x_j p_{c,j}, \quad (\text{A.50})$$

$$\epsilon = \frac{soma3^{\frac{1}{6}}}{soma4^{\frac{1}{2}} soma5^{\frac{2}{3}}}, \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \epsilon \left(\frac{(soma3)^{-1} \partial(soma3)}{6 \partial x_i} - \frac{(soma4)^{-1} \partial(soma4)}{2 \partial x_i} - \frac{2(soma5)^{-1} \partial(soma5)}{3 \partial x_i} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial(soma1)}{\partial x_i} = \mu_i^* \sqrt{M_i} - \mu_1^* \sqrt{M_1}, \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial(soma2)}{\partial x_i} = \sqrt{M_i} - \sqrt{M_1}, \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial(soma3)}{\partial x_i} = T_{ci} - T_{c1}, \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial(soma4)}{\partial x_i} = M_i - M_1, \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial(soma5)}{\partial x_i} = p_{ci} - p_{c1}, \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial \rho_l}{\partial x_i} - \frac{\rho_l}{\rho_c^2} \frac{\partial \rho_c}{\partial x_i}, \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial x_i} = -\rho_c^2 \frac{\partial v_c}{\partial x_i}, \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial v_c}{\partial x_i} = v_{ci} - v_{c1}, \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial \mu^*}{\partial x_i} = \mu^* \left(\frac{1}{soma1} \frac{\partial(soma1)}{\partial x_i} - \frac{1}{soma2} \frac{\partial(soma2)}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.61})$$