

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

PERON

**DISPERSÃO DE TRAÇADORES EM
MEIOS POROSOS ATRAVÉS DE TESTES
DE INJEÇÃO E PRODUÇÃO**

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida pelo Eng.º José Renato da Costa Peron e
aprovada pela Comissão Julgadora em 27/11/90.

(Assinatura)
Autor : José Renato da Costa Peron *mt*
Orientador : Antonio Cláudio de França Corrêa *†*

54/90

novembro de 1990

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A dissertação "Dispersão de traçadores em meios porosos através de testes de injeção e produção" elaborada por José Renato da Costa Peron e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 27 de novembro de 1990

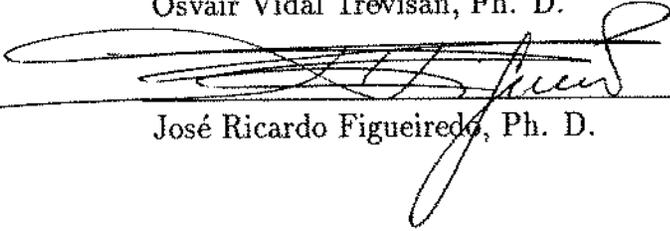
Banca Examinadora



Antonio Cláudio de França Gorrêa, Ph. D. (Orientador)



Osvair Vidal Trevisan, Ph. D.



José Ricardo Figueiredo, Ph. D.

A Cleide com amor.
A meus Filhos José Renato e Ana Cecília.

RESUMO

Este trabalho estuda o comportamento dispersivo-convectivo de traçadores conservativos em meios porosos homogêneos, sujeitos a processos de injeção e posterior produção com vazão constante.

Da análise da concentração de traçador do efluente durante o período de produção pode-se determinar o coeficiente de dispersão hidrodinâmica característico do processo.

As equações que descrevem o fenômeno do deslocamento miscível de traçadores são solucionadas por métodos numéricos e semi-analíticos, para as geometrias de fluxo linear e radial.

O método semi-analítico descrito neste trabalho baseia-se na inversão numérica da transformada de Laplace da concentração de traçador no meio poroso por meio do algoritmo de Crump.

O tratamento numérico empregado consiste na aplicação do método de Allen para discretização dos operadores espaciais da equação da difusão-convecção.

Resultados experimentais obtidos através da utilização de um corpo de prova linear homogêneo são também apresentados.

ABSTRACT

This work studies the convective-difusive behavior of conservative tracers in homogeneous porous media, for process of tracer production following tracer injection with a constant flow rate.

From the analysis of the effluent tracer concentration it is possible to determine the dispersion coefficient which characterizes the process.

The equations describing the miscible displacement phenomenon have been solved by means of both numerical and semi-analytical methods for either linear or radial flow geometries.

The semi-analytical method described in this work has been based on the numerical inversion of the Laplace transform of tracer concentration in the porous medium, by means of the Crump algorithm.

The numerical treatment employs the Allen scheme for discretization of the spatial operators of the convection-diffusion equation.

Experimental results have been obtained from experiments in a linear homogeneous core.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
2	DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS DE SOLUÇÃO	3
2.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA	3
2.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA	5
2.2.1	Método de Allen	5
3	MODELAGEM DO PROCESSO DE DESLOCAMENTO MISCÍVEL	8
3.1	Tratamento Analítico para Escoamento Linear	8
3.1.1	Período de Injeção	8
3.1.2	Período de Produção	12
3.2	Tratamento Numérico para Escoamento Linear	15
3.2.1	Período de Injeção	15
3.2.2	Período de Produção	19
3.3	Tratamento Analítico para Escoamento Radial	20
3.3.1	Período de Injeção	20
3.3.2	Período de Produção	24
3.4	Tratamento Numérico para Escoamento Radial	27
3.4.1	Período de Injeção	27
3.4.2	Período de Produção	31
4	PROPOSTA DE VALIDAÇÃO	32
4.1	Sistema linear	33
4.2	Sistema radial	40
5	DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA	47
5.1	O corpo de prova	47
5.2	Fluidos utilizados	48
5.3	Equipamentos utilizados	48
5.4	Esquema do experimento	50

5.5	Descrição do experimento	51
5.6	Característica do experimento	51
6	EXPERIMENTOS	54
6.1	Objetivos	54
6.2	Metodologia	54
6.3	Resposta esperada	54
6.4	Verificação da validade da metodologia empregada na obtenção da dispersão hidrodinâmica	56
6.5	Resultados	56
7	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	63
8	BIBLIOGRAFIA	65
9	NOMENCLATURA	67
A	Apêndice - Análise da Precisão do algoritmo de Crump	71
B	Apêndice - Solução Semi-Analítica para Geometria Linear	74
C	Apêndice - Solução Numérica Para Geometria Linear	82
D	Apêndice - Solução Semi-Analítica para Geometria Radial	88
E	Apêndice - Solução Numérica Para Geometria Radial	118

Lista de Figuras

1	C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $NB = 50$	35
2	C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $NB = 200$	36
3	C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $NB = 800$	37
4	C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $\Delta t = .001$	38
5	C_D versus t_D sistema linear, períodos de injeção e produção.	39
6	C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $NB = 50$	41
7	C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $NB = 200$	42
8	C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $NB = 800$	43
9	C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $\Delta t = 10$	44
10	C_D versus t_D sistema radial, períodos de injeção e produção.	45
11	C_D versus t_D sistema radial, período de injeção para diversos raios.	46
12	C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.	58
13	C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.	59
14	C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.	60
15	C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.	61
16	C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.	62
17	Módulo dos termos do algoritmo de Crump.	73

1 INTRODUÇÃO

O fenômeno da dispersão hidrodinâmica em meios porosos pode ser estudado através de um ajuste entre os resultados de um teste de deslocamento miscível e os do modelo matemático que o descreve.

O escoamento miscível de traçadores conservativos em meios porosos homogêneos pode ser descrito através de uma equação diferencial parcial do tipo convecção-difusão. O escoamento através de meios porosos heterogêneos pode ser modelado por variações da equação da convecção-difusão

O uso de traçadores em meios porosos pode ser aplicado, entre outros, para caracterização das heterogeneidades do reservatório e a determinação da saturação de óleo residual.

Neste trabalho busca-se compreender o processo cíclico de injeção e posterior produção de traçadores em meios porosos homogêneos com geometrias linear e radial. Da medição da concentração do efluente durante o período de produção, pode-se determinar o coeficiente de dispersão que caracteriza o meio poroso.

Para sistemas complexos, os métodos numéricos tem utilização mais ampla que os processos analíticos empregados na solução das equações descritivas do deslocamento miscível.

Entretanto, os métodos numéricos apresentam erros de arredondamento aritmético devido ao truncamento das séries utilizadas para representar as funções que satisfazem o problema original, e erros de consistência oriundos da inadequação das séries para representar tais funções. Além disso, os métodos numéricos podem apresentar problemas de instabilidade e/ou oscilações. Para casos mais simples, é possível utilizar soluções analíticas para verificar o comportamento das soluções numéricas.

Estudando o fenômeno da dispersão hidrodinâmica em meios porosos ho-

mogêneos, este trabalho tem como objetivos:

- analisar um novo método de discretização numérica dos operadores espaciais,
- apresentar uma solução semi-analítica, obtida através da inversão numérica da transformada de Laplace da concentração do efluente, que será usada para verificação da validade do método numérico,
- verificar a validade das hipóteses simplificadoras assumidas na solução da equação da convecção-difusão através da realização em laboratório de testes do tipo injeção-produção.

O experimento foi realizado através da injeção com posterior produção de um traçador salino em um corpo de prova linear e homogêneo, com a monitoração contínua da concentração salina do efluente através de um sistema de aquisição de dados acoplado a um microcomputador.

O processo numérico empregado neste trabalho baseia-se na discretização dos operadores espaciais da equação da convecção-difusão pelo método de Allen^(16,17).

A solução semi-analítica descrita no texto consiste em se inverter para o domínio do tempo equações obtidas no espaço de Laplace, através do algoritmo de Crump.

2 DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Neste capítulo serão descritos os métodos de solução da equação da convecção-difusão utilizados no presente trabalho.

2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para um sistema linear, a equação que descreve o comportamento da concentração de traçador conservativo no meio poroso é dada por^(1,2):

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (1)$$

enquanto que para uma geometria radial, a concentração de traçador é modelada por⁽³⁻⁹⁾:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r D(r) \frac{\partial C}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_m(r) C] = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (2)$$

onde:

$D(r)$ é o coeficiente de dispersão hidrodinâmica,

u é a velocidade convectiva do fluido num sistema linear,

$v_m(r)$ é a velocidade convectiva do fluido num sistema radial,

C é a concentração do traçador.

A quantificação das características dos sistemas porosos é usualmente determinada ajustando-se aos dados obtidos em laboratório as soluções das equações que descrevem os sistemas.

Para situações complexas, normalmente não se dispõe de soluções analíticas que descrevam o comportamento dos sistemas, sendo então utilizados métodos numéricos para resolver as equações que modelam o deslocamento miscível.

Com a utilização de soluções numéricas, porém, acrescenta-se à dispersão hidrodinâmica uma dispersão numérica inerente ao método, que pode inviabilizar o seu uso.

Para evitar esse problemas e dada a indisponibilidade de soluções analíticas, utiliza-se um outro método para a solução de equações do tipo convecção - difusão, que consiste na obtenção da solução analítica da equação no domínio de Laplace.

Neste método, a volta ao domínio do tempo é obtida através de um algoritmo numérico, para cálculo da transformada inversa de Laplace. Tais métodos apresentam dispersão numérica, na maior parte das vezes, desprezível ou nula.

Utilizar-se-á no presente trabalho esse tipo de solução, sendo a volta ao domínio do tempo implementada através do método de Crump⁽¹⁰⁾.

Por apresentar rotinas numéricas embutidas no algoritmo que faz a volta ao domínio do tempo, referir-se-á a esse método como semi-analítico.

Uma análise da precisão do algoritmo de Crump é apresentada no Apêndice A.

2.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para maior confiabilidade e validação mútua dos resultados obtidos com a solução semi-analítica, serão desenvolvidas e implementadas soluções numéricas para a equação da convecção-difusão.

Neste caso, os operadores espaciais serão discretizados segundo o método de Allen, que têm como méritos a estabilidade, acuidade de segunda ordem e, para as equações e intervalo de aplicação das variáveis utilizadas no presente trabalho, a possibilidade de minimizar-se a dispersão numérica.

2.2.1 Método de Allen

Utilizar-se-á este método de discretização de operadores espaciais com o objetivo de minimizar-se a dispersão numérica que ocorre quando se utiliza técnicas padrões de diferenças finitas para solução de equações do tipo convecção-difusão.

A discretização desses operadores é obtida utilizando-se uma curva interpolante no intervalo a ser discretizado, a qual satisfaz a equação original para casos em que a variação temporal da concentração seja considerada constante num dado intervalo de tempo.

Descreve-se a seguir a sequência de operações para discretização dos operadores espaciais e montagem do sistema de equações.

Dada uma equação genérica:

$$\mathfrak{S}(C) = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (3)$$

onde \mathfrak{S} é um operador linear espacial,

utiliza-se uma equação particular do tipo:

$$\mathfrak{S}(C) = K, \quad (4)$$

onde K é uma constante, como aproximação à equação original para um dado intervalo de tempo.

Através do ajuste da solução dessa equação, a qual é dada de forma genérica por $C = f(K, x)$, aos pontos nodais $i - 1$, i e $i + 1$, obtém-se um sistema de equações algébricas do tipo:

$$C_{i-1} = f(K, x_{i-1}), \quad (5)$$

$$C_i = f(K, x_i), \quad (6)$$

$$C_{i+1} = f(K, x_{i+1}). \quad (7)$$

Resolve-se esse sistema de equações de forma a obter-se K como função das concentrações nos pontos nodais $i - 1$, i e $i + 1$, ou seja, $K = K(C_{i-1}, C_i, C_{i+1})$, esgotando-se assim na presente solução a utilização do método de Allen, que se resume na discretização dos operadores espaciais.

Com isso, volta-se ao problema original dado pela equação (3), onde o operador temporal é então discretizado. No presente trabalho tal discretização será implementada por diferenças finitas de primeira ordem, de forma a que a concentração seja calculada implicitamente. Então:

$$K = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t}. \quad (8)$$

Este processo pode ser estendido para toda a malha, resultando em um sistema de equações lineares, que em forma matricial é dado por:

3 MODELAGEM DO PROCESSO DE DESLOCA- MENTO MISCÍVEL

Neste capítulo serão descritos os modelos matemáticos aplicados ao deslocamento de traçador conservativo em meio poroso, para esquemas de fluxos unidimensionais com geometrias linear e radial.

3.1 Tratamento Analítico para Escoamento Linear

3.1.1 Período de Injeção

O escoamento linear de um traçador conservativo em meio poroso homogêneo pode ser descrito pela equação da convecção-difusão, a qual em termos de concentração estática é descrita por:

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (10)$$

O modelo considera um corpo de prova inicialmente saturado por uma solução aquosa com concentração de traçador igual a C_{min} . Assim, a condição inicial é dada por :

$$C(x, t = 0) = C_{min}. \quad (11)$$

Durante este período, injeta-se através de uma das faces do meio poroso uma solução com concentração de traçador igual a C_{max} , distinta de C_{min} . Com isto, tem-se a seguinte condição de contorno interna :

$$\left[C - \frac{D}{u} \frac{\partial C}{\partial x} \right]_{(x=0, t>0)} = C_{max}, \quad (12)$$

isto é, a concentração dinâmica no ponto $x = 0$ é igual a concentração do fluido injetado.

A hipótese de meio linear infinito pode ser considerada na prática interrompendo-se a injeção antes que a concentração do efluente na face produtora deixe de ser C_{min} . A seguinte condição de contorno externa pode então ser escrita:

$$C(x \rightarrow \infty, t) = C_{min}. \quad (13)$$

A adimensionalização da equação diferencial e das condições de contorno permite um tratamento genérico ao problema. Deste modo, as seguintes definições de variáveis adimensionais foram selecionadas:

$$x_D = \frac{x}{L}, \quad (14)$$

$$U_D = \frac{uL}{D}, \quad (15)$$

$$t_D = \frac{tu}{L}, \quad (16)$$

e :

$$C_D(x_D, t_D) = \frac{C(x, t) - C_{min}}{C_{max} - C_{min}}, \quad (17)$$

onde L é um comprimento arbitrário necessário à adimensionalização das variáveis, que neste caso será fixado como sendo o comprimento do meio poroso.

Substituindo-se estas definições na equação (10), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} - U_D \frac{\partial C_D}{\partial x_D} = U_D \frac{\partial C_D}{\partial t_D}. \quad (18)$$

Aplicando as mesmas transformações às condições de fronteira definidas pelas equações (11), (12) e (13), resulta:

$$C_D(x_D, t_D = 0) = 0, \quad (19)$$

$$\left[C_D - \frac{1}{U_D} \frac{\partial C_D}{\partial x_D} \right]_{(x_D=0, t_D)} = 1, \quad (20)$$

$$C_D(x_D \rightarrow \infty, t_D) = 0. \quad (21)$$

Pelos motivos anteriormente discutidos, a equação (18) será desenvolvida no espaço de Laplace, com posterior retorno da solução ao domínio do tempo por meio do algoritmo de Crump.

Assim, no espaço de Laplace, a equação (18) fica :

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{d x_D^2} - U_D \frac{d \bar{C}_D}{d x_D} = U_D s \bar{C}_D - U_D C_D(x_D, t_D = 0), \quad (22)$$

onde $\bar{C}_D(x_D, s)$ é a transformada de Laplace da concentração adimensional, $C_D(x_D, t_D)$.

Utilizando-se a condição inicial dada pela eq. (19) na eq. (22), a equação diferencial no espaço de Laplace se reduz a:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{d x_D^2} - U_D \frac{d \bar{C}_D}{d x_D} - U_D s \bar{C}_D = 0. \quad (23)$$

Transformando-se as condições de contorno interna e externa, eqs. (20) e (21), para o espaço de Laplace, obtém-se respectivamente:

$$\left[\bar{C}_D - \frac{1}{U_D} \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} \right]_{(x_D=0,s)} = \frac{1}{s}, \quad (24)$$

$$\bar{C}_D(x_D \rightarrow \infty, s) = 0. \quad (25)$$

Resolvendo-se a equação (23), com as novas condições de contorno dadas pelas eqs. (24) e (25), obtém-se então a equação que descreve a transformada de Laplace da concentração estática de traçador no meio poroso em estudo durante o período de injeção, cuja dedução pormenorizada é apresentada no apêndice B, fornecendo o seguinte resultado:

$$\bar{C}_D = 2 \frac{e^{\frac{v_D}{2} (1 - \sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}) x_D}}{(1 + \sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}) s}. \quad (26)$$

A concentração estática de traçador é obtida a partir da transformada inversa de Laplace da eq. (26), resultando em:

$$C(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_D(x_D, s)\} * (C_{max} - C_{min}) + C_{min}. \quad (27)$$

3.1.2 Período de Produção

A equação que descreve o comportamento da concentração de traçador no meio poroso em estudo durante o período de produção é semelhante à do período de injeção, porém com sentido contrário de fluxo. Assim, a equação da concentração para o período de produção é representada por:

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} + U_D \frac{\partial C}{\partial x} = U_D \frac{\partial C_D}{\partial t_D}. \quad (28)$$

O período de produção é iniciado imediatamente após a interrupção da injeção, o que define a seguinte condição inicial:

$$C_D(x_D, t_D = 0) = C_0(x_D), \quad (29)$$

onde $C_0(x_D)$ é a concentração estática existente no final do período de injeção, sendo que para o período de produção define-se uma nova origem do tempo.

O fluido produzido tem concentração igual a do fluido que satura a face interna do corpo de prova. Isto pode ser entendido pelo fato de que fora do meio poroso a concentração estática é igual a dinâmica, o que se obtém desprezando-se a dispersão hidrodinâmica, uma vez que o coeficiente de dispersão fora do meio poroso é muito pequeno.

Isto leva à seguinte condição de contorno interna :

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x_D = 0, t > 0) = 0. \quad (30)$$

Durante o período de produção, será injetado na extremidade oposta à de estudo, uma solução com concentração de traçador igual a C_{min} , a qual é idêntica a concentração do fluido inicialmente saturante. Isto fornece a seguinte condição de contorno externa :

$$C_D(x_D = 1, t_D) = 0. \quad (31)$$

Transformando-se a equação (28) para o domínio de Laplace, e aplicando-se a condição inicial definida pela eq. (29), obtém-se :

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dx_D^2} + U_D \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} - U_D s \bar{C}_D = -U_D C_0(x_D) \quad (32)$$

Com as condições de contorno impostas pelas eqs. (30) e (31), a solução da equação (32) é desenvolvida no apêndice B, resultando em:

$$\begin{aligned} \bar{C}_D(x_D, s) = & -\frac{U_D e^{r_1 x_D}}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D=1} C_0(x') e^{-r_1 x'} dx' + \frac{U_D e^{r_2 x_D}}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D=1} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' + \\ & + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}} \int_0^{x_D=1} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' \left(e^{r_2 x_D} + \frac{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} + 1} e^{r_1 x_D} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

onde :

$$r_1 = -\frac{U_D}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} \right), \quad (34)$$

e :

$$r_2 = -\frac{U_D}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} \right). \quad (35)$$

Como foi mencionado, o fluido produzido tem concentração igual a do fluido que satura a face produtora ($x_D = 0$). Assim a transformada de Laplace da sua concentração estática é dada por :

$$\bar{C}_D(0, s) = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} + 1} \int_0^{x_D=1} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx'. \quad (36)$$

A concentração dinâmica do efluente será então dada por :

$$C(0, t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_D(0, s)\} * (C_{max} - C_{min}) + C_{min}. \quad (37)$$

3.2 Tratamento Numérico para Escoamento Linear

A solução numérica para a equação de deslocamento miscível em meio poroso homogêneo será obtida através do processo de diferenças finitas formulado por Allen.

3.2.1 Período de Injeção

No período de injeção, a equação diferencial do escoamento e as condições de contorno apropriadas, em forma adimensional, são descritas na seção 3.1.1, ou sejam:

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} - U_D \frac{\partial C_D}{\partial x_D} = U_D \frac{\partial C_D}{\partial t_D}, \quad (38)$$

$$C_D(x_D, t_D = 0) = 0, \quad (39)$$

$$\left[C_D - \frac{1}{U_D} \frac{\partial C_D}{\partial x_D} \right]_{(x_D=0, t_D)} = 1, \quad (40)$$

$$C_D(x_D = 1, t_D) = 0. \quad (41)$$

O primeiro passo do processo numérico consiste na obtenção da curva interpolante da discretização espacial.

Os operadores espaciais da equação (38) serão discretizados por intermédio de uma curva interpolante obtida a partir da seguinte equação:

$$\frac{1}{U_D} \frac{d^2 C_D}{dx_D^2} - \frac{dC_D}{dx_D} = K_1 = L_x(C_D), \quad (42)$$

onde K_1 é uma constante, e C_D é função somente da variável espacial x_D .

Note que a equação (42) deriva da equação (38), onde o termo transiente é considerado constante.

A solução da equação (42) é dada por :

$$C_D = -K_1 x_D + K_2 e^{U_D x_D} + K_3, \quad (43)$$

onde :

$$K_2 = y_0 \frac{e^{U_D x_{D0}}}{U_D}, \quad (44)$$

$$K_3 = C_D(x_{D0}) - y_0 \frac{e^{U_D x_{D0}}}{U_D}, \quad (45)$$

$$y_0 = y e^{U_D (x_{D0} - x_D)}, \quad (46)$$

e :

$$y = \frac{dC_D}{dx_D}. \quad (47)$$

Como na solução numérica só interessa obter-se a solução da equação original para pontos específicos, a equação (38) é então substituída em cada ponto nodal pela equação (43), resultando em um sistema de equações algébricas.

Os parâmetros K_1 , K_2 e K_3 , podem ser obtidos ajustando-se a curva interpolante descrita pela equação (43) aos pontos nodais $i - 1$, i e $i + 1$, obtendo-se o sistema de equações :

$$\begin{aligned}
-K_1 x_{D(i-1)} + K_2 e^{U_D x_{D(i-1)}} + K_3 &= C_{D(i-1)}, \\
-K_1 x_{D(i)} + K_2 e^{U_D x_{D(i)}} + K_3 &= C_{D(i)}, \\
-K_1 x_{D(i+1)} + K_2 e^{U_D x_{D(i+1)}} + K_3 &= C_{D(i+1)}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Resolvendo-se o sistema e isolando-se K_1 , chega-se a :

$$K_1 = \frac{(C_{D(i)} - C_{D(i-1)})(m_i - m_{i+1}) - (C_{D(i)} - C_{D(i+1)})(m_i - m_{i-1})}{(n_i - n_{i-1})(m_i - m_{i+1}) - (n_i - n_{i+1})(m_i - m_{i-1})} = L_x(C_D), \tag{49}$$

onde :

$$m_i = e^{U_D x_{D(i)}}, \tag{50}$$

e :

$$n_i = -x_{D(i)}. \tag{51}$$

Uma vez que deseja-se obter $L_x(C_D) = K_1$ para substituir o termo transiente na equação (38), não há necessidade de se determinar K_2 e K_3 . A equação (49) pode então ser colocada na forma:

$$L_x(C_D) = A_i^- C_{D(i-1)} - (A_i^- + A_i^+) C_{D(i)} + A_i^+ C_{D(i+1)}, \tag{52}$$

onde :

$$A_i^- = \frac{(m_{i+1} - m_i)}{p_i}, \quad (53)$$

$$A_i^+ = \frac{(m_i - m_{i-1})}{p_i}, \quad (54)$$

e :

$$p_i = (n_i - n_{i-1})(m_i - m_{i+1}) - (n_i - n_{i+1})(m_i - m_{i-1}). \quad (55)$$

A extensão do procedimento descrito aos demais pontos da malha fornece uma equação matricial semelhante à equação (9), a qual é então resolvida diretamente, fornecendo-se a distribuição da concentração estática na malha em cada instante de tempo.

O método prossegue sequencialmente para se determinar a distribuição de concentrações com o tempo.

3.2.2 Período de Produção

Para o período de produção é feito um desenvolvimento análogo ao do período de injeção. Porém, por ter sentido de fluxo contrário a este, o equacionamento é feito a partir da seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} + U_D \frac{\partial C_D}{\partial x_D} = U_D \frac{\partial C_D}{\partial t_D}. \quad (56)$$

Após o desenvolvimento desta equação por um processo similar ao descrito na secção anterior, determinam-se os seguintes parâmetros para o período de produção:

$$m_i = e^{-U_D x_{D(i)}}, \quad (57)$$

e:

$$n_i = x_{D(i)}. \quad (58)$$

Uma vez que a concentração no início do período de produção é igual a concentração no final do período de injeção, para se passar de um caso para o outro basta que se remonte o sistema de equações com os novos parâmetros m_i e n_i .

3.3 Tratamento Analítico para Escoamento Radial

3.3.1 Período de Injeção

O escoamento radial de um traçador conservativo em meio poroso homogêneo pode ser descrito pela equação da convecção-difusão, a qual em termos de concentração estática, $C(r, t)$, é descrita por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rD(r) \frac{\partial C}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rv_m(r)C] = \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (59)$$

O modelo em estudo considera um meio radial inicialmente saturado por uma solução com concentração de traçador igual a C_{min} , o que define a seguinte condição inicial:

$$C(r, t = 0) = C_{min}. \quad (60)$$

Injeta-se inicialmente através da face interna do meio poroso, uma solução com concentração de traçador igual a C_{max} , distinta de C_{min} , fornecendo a seguinte condição de contorno interna:

$$\left[C - \frac{D}{v_m} \frac{\partial C}{\partial r} \right]_{r=r_w} = C_{max}. \quad (61)$$

onde r_w é o raio da face interna do meio poroso.

A hipótese de meio radial infinito pode ser considerada na prática interrompendo-se a injeção antes que a concentração do efluente na face externa do meio deixe de ser C_{min} .

Portanto, a seguinte condição de contorno externa pode ser escrita:

$$C(r \rightarrow \infty, t) = 0. \quad (62)$$

As seguintes variáveis adimensionais serão selecionadas para o escoamento radial:

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (63)$$

$$C_D(r_D, t) = \frac{C(r, t) - C_{min}}{C_{max} - C_{min}}, \quad (64)$$

$$D_D(r_D) = \frac{2\pi h \phi}{q} D(r), \quad (65)$$

$$t_D = \frac{q t}{2\pi h \phi r_w^2}. \quad (66)$$

Substituindo-se estas definições na equação (59), obtém-se:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D}{\partial t_D}. \quad (67)$$

Aplicando as mesmas transformações às condições de contorno e inicial, definidas pelas equações (60), (61) e (62), resulta:

$$C_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (68)$$

$$\left[C_D - D_D r_D \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right]_{(r_D=1, t_D)} = 1, \quad (69)$$

$$C_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0. \quad (70)$$

A solução da equação (67) será inicialmente desenvolvida no espaço de Laplace, com sua posterior transformação inversa obtida através do algoritmo de Crump.

A transformada de Laplace da equação (67) produz:

$$\frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = -C_D(r_D, 0), \quad (71)$$

a qual, após a utilização da condição inicial definida pela equação (68), fornece:

$$\frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = 0. \quad (72)$$

Transformando-se as condições de contorno interna e externa, eqs. (69) e (70), para o espaço de Laplace, obtém-se respectivamente:

$$\left[\bar{C}_D - D_D r_D \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right]_{(r_D=1, s)} = \frac{1}{s}, \quad (73)$$

$$\bar{C}_D(r_D \rightarrow \infty, s) = 0. \quad (74)$$

Manipulando-se algebricamente a equação (72) chega-se a :

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} + \left[\frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)} + \frac{D_D(r_D) - 1}{D_D(r_D) r_D} \right] \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = 0. \quad (75)$$

Resolvendo-se a equação (75), com as novas condições de contorno dadas pelas eqs. (73) e (74), obtém-se então a transformada de Laplace da equação que descreve a concentração de traçador no meio poroso em estudo, durante o período de injeção, considerando-se altas velocidades convectivas, conforme descrito no apêndice D:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{s} e^{\left(\frac{r_D-1}{2D_{0D}}\right)} \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_w}} \frac{K_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{D_{0D}}{s} \right) \varphi^{\frac{3}{2}} \right]}{K_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{D_{0D}}{s} \right) \varphi_w^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{D_{0D}^{\frac{3}{2}} \varphi_w}{\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{D_{0D}}{s} \right) \varphi_w^{\frac{3}{2}} \right]}, \quad (76)$$

onde:

$$D_{0D} = \frac{D_0}{r_w}, \quad (77)$$

$$\varphi(r_D, s) = \frac{1}{4D_D^2} + \frac{s r_D}{D_D}, \quad (78)$$

e:

$$\varphi_w = \varphi(r_D = 1, s). \quad (79)$$

A concentração estática de traçador é obtida a partir da transformada inversa de Laplace da eq. (76), resultando em:

$$C(r, t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_D(r_D, s)\} * (C_{max} - C_{min}) + C_{min}. \quad (80)$$

3.3.2 Período de Produção

Para o período de produção, o sentido de fluxo é invertido, o que pode ser modelado por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right] + \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D}{\partial t_D} \quad (81)$$

O período de produção é iniciado imediatamente após a interrupção da injeção, o que define a seguinte condição inicial:

$$C(r_D, t_D = 0) = C_0(r_D), \quad (82)$$

onde $C_0(r_D)$ é a concentração estática existente no final do período de injeção, sendo que para o período de produção define-se uma nova origem do tempo.

Negligenciando-se os efeitos dispersivos no fluido produzido através da face interna do meio poroso, a concentração dinâmica do efluente torna-se igual à concentração estática do fluido residente na face interna do meio, o que define a seguinte condição de contorno interna:

$$\frac{\partial C_D}{\partial r_D}(r_D = 1, t_D > 0) = 0. \quad (83)$$

Durante o período de produção, será injetado através da face externa do meio radial uma solução com concentração de traçador igual a C_{min} , a qual é idêntica à concentração do fluido inicialmente saturante, definindo a seguinte condição de contorno externa:

$$C_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0. \quad (84)$$

Transformando-se a equação (81) para o domínio de Laplace, e aplicando-se a condição inicial definida pela eq. (82), obtém-se :

$$\frac{1}{r_D} \left[D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} + r_D \frac{dD_D}{dr_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} + r_D D_D(r_D) \frac{d^2\bar{C}_D}{dr_D^2} + \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right] - s\bar{C}_D = -C_0(r_D). \quad (85)$$

Com as condições de contorno impostas pelas eqs. (83) e (84) transformadas ao domínio de Laplace, a solução da equação (85) é apresentada no apêndice D como:

$$\begin{aligned} \bar{C}(\varphi, s) &= \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A'_i(x_1)_x B_i(x) - A_i(x) B'_i(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\} * \\ &* \frac{\pi \zeta^{\frac{1}{3}}}{D_D} A_i(x) \int_{r_D=1}^{\infty} A_i(x') C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D - r_D}{2D_D}} r'_D dr'_D, \quad (x \leq x'), \end{aligned} \quad (86)$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{C}(\varphi, s) &= \int_{r_D=1}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A'_i(x_1)_x B_i(x) - A_i(x) B'_i(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\} * \\ &* \frac{\pi \zeta^{\frac{1}{3}}}{D_D} A_i(x) A_i(x') C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D - r_D}{2D_D}} r'_D dr'_D, \quad (x > x'), \end{aligned} \quad (87)$$

onde A_i e B_i são funções de Airy e:

$$x = \zeta^{\frac{2}{3}} \varphi,$$

$$x_w = \zeta^{\frac{2}{3}} \varphi_w,$$

$$\varphi = \frac{D_0}{s},$$

$$\tau = \frac{1}{2s}.$$

Como foi mencionado, o fluido produzido tem concentração igual a do fluido que satura a face produtora ($r_D = 1$). Assim, a transformada de Laplace da sua concentração é dada por :

$$\bar{C}[\varphi(r_D = 1), s] = \frac{1}{s} \int_{r_D=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi')} K_{\frac{1}{3}}[\frac{2}{3} (\zeta \varphi'^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}] C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D-1}{2D_D}} r'_D}{\zeta^{\frac{4}{3}} \varphi_w K_{\frac{2}{3}}[\frac{2}{3} (\zeta \varphi_w^{\frac{3}{2}})] + \tau \sqrt{(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi_w) K_{\frac{1}{3}}[\frac{2}{3} (\zeta \varphi_w^{\frac{3}{2}})]}} dr'_D. \quad (88)$$

Com esta equação obtém-se a concentração adimensional de traçador no fluido produzido, no espaço de Laplace. A concentração real será então dada por :

$$C(r, t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_D(r_D, s)\} * (C_{max} - C_{min}) + C_{min}.$$

O processo de cálculo da concentração do efluente consiste em inverter para o domínio do tempo a expressão da equação (88) definida pela relação entre as funções de Airy, computando-se numericamente a integral ao longo do raio.

3.4 Tratamento Numérico para Escoamento Radial

A solução numérica para a equação de deslocamento miscível em meio poroso homogêneo será obtida através do processo de diferenças finitas implementado por Allen⁽¹²⁾.

3.4.1 Período de Injeção

No período de injeção, a equação diferencial do escoamento, com as simplificações para altas velocidades convectivas anteriormente assumidas, e as condições de contorno apropriadas, podem ser expressas na seguinte forma:

$$\frac{D_D}{r_D} \frac{\partial^2 C_D}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D}{\partial t_D}, \quad (89)$$

$$C_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (90)$$

$$\left[C_D - D_D r_D \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right]_{(r_D=1, t>0)} = 1, \quad (91)$$

$$C_D(r_{eD}, t_D) = 0. \quad (92)$$

onde $r_{eD} = \frac{r_e}{r_w}$ é o raio adimensional da face externa do meio poroso.

O primeiro passo do processo numérico consiste na obtenção da curva interpolante e da discretização espacial.

Os operadores espaciais da equação (89) serão discretizados por intermédio de uma curva interpolante aos nós $i - 1$, i e $i + 1$ e obtida a partir da seguinte equação:

$$\frac{D_D}{r_D} \frac{d^2 C_D}{dr_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{dC_D}{dr_D} = K_1 = L_r(C_D), \quad (93)$$

onde K_1 é uma constante, e C_D é função somente da variável espacial r_D .

Note que a equação (93) deriva da equação (89), onde o termo transiente é considerado constante.

A solução da equação (93) é dada por :

$$C_D = -\frac{K_1}{2} \left(r_D^2 + 2 D_D r_D \right) + K_2 e^{\frac{r_D}{D_D}} + K_3, \quad (94)$$

onde :

$$K_2 = \frac{y_0 D_D}{e^{\frac{1}{D_D}}}, \quad (95)$$

$$K_3 = y_0 D_D, \quad (96)$$

$$y_0 = y e^{\frac{D_D - r_D}{D_D}}, \quad (97)$$

e :

$$y = \frac{dC_D}{dr_D}. \quad (98)$$

Os parâmetros K_1 , K_2 e K_3 , podem ser obtidos ajustando-se a curva interpolante descrita pela equação (94) aos pontos nodais $i - 1$, i e $i + 1$, obtendo-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
-\frac{K_1}{2} \left(r_{D(i-1)}^2 + 2 D_D r_{D(i-1)} \right) + K_2 e^{\frac{r_{D(i-1)}}{D_D}} + K_3 &= C_{D(i-1)}, \\
-\frac{K_1}{2} \left(r_{D(i)}^2 + 2 D_D r_{D(i)} \right) + K_2 e^{\frac{r_{D(i)}}{D_D}} + K_3 &= C_{D(i)}, \\
-\frac{K_1}{2} \left(r_{D(i+1)}^2 + 2 D_D r_{D(i+1)} \right) + K_2 e^{\frac{r_{D(i+1)}}{D_D}} + K_3 &= C_{D(i+1)}. \tag{99}
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema e isolando K_1 chega-se a :

$$K_1 = \frac{(C_{D(i)} - C_{D(i-1)})(m_i - m_{i+1}) - (C_{D(i)} - C_{D(i+1)})(m_i - m_{i-1})}{(n_i - n_{i-1})(m_i - m_{i+1}) - (n_i - n_{i+1})(m_i - m_{i-1})} = L_r(C_D), \tag{100}$$

onde :

$$m_i = e^{\frac{r_{D(i)}}{D_D}}, \tag{101}$$

e :

$$n_i = -\frac{\left(r_{D(i)}^2 + 2 D_D r_{D(i)} \right)}{2}. \tag{102}$$

Uma vez que deseja-se obter $L_r(C_D) = K_1$ para substituir o termo transiente na equação(89), não há necessidade de se determinar K_2 e K_3 .

Assim, a equação (100) pode ser colocada na forma :

$$L_r(C_D) = A_i^- C_{D(i-1)} - (A_i^- + A_i^+) C_{D(i)} + A_i^+ C_{D(i+1)}, \tag{103}$$

onde:

$$A_i^- = \frac{(m_{i+1} - m_i)}{p_i}, \quad (104)$$

$$A_i^+ = \frac{(m_i - m_{i-1})}{p_i}, \quad (105)$$

e :

$$p_i = (n_i - n_{i-1})(m_i - m_{i+1}) - (n_i - n_{i+1})(m_i - m_{i-1}). \quad (106)$$

A extensão do procedimento descrito aos demais pontos da malha fornece uma equação matricial semelhante à equação (9), a qual é então resolvida diretamente, fornecendo-se a distribuição da concentração estática na malha em cada instante de tempo.

O método prossegue sequencialmente para se determinar a distribuição de concentrações com o tempo.

3.4.2 Período de Produção

Para o período de produção é feito um desenvolvimento análogo ao do período de injeção. Porém, por ter sentido de fluxo contrário a este, o equacionamento é feito a partir da seguinte equação:

$$\frac{D_D(r_D)}{r_D} \frac{\partial^2 C_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D}{\partial t_D} \quad (107)$$

Após o desenvolvimento desta equação por um processo similar ao descrito na secção anterior, determinam-se os seguintes parâmetros para o período de produção:

$$m_i = e^{-\frac{r_{D(i)}}{D_D}}, \quad (108)$$

e:

$$n_i = \left(\frac{r_{D(i)}^2}{2} - D_D r_{D(i)} \right). \quad (109)$$

Uma vez que a concentração no início do período de produção é igual a concentração no final do período de injeção, para se passar de um caso para o outro, basta que se remonte o sistema de equações com os novos parâmetros m_i e n_i .

4 PROPOSTA DE VALIDAÇÃO

Uma vez que dispõe-se da solução analítica da equação que descreve o período de injeção do sistema linear, a validação neste caso será feita pela comparação dos resultados obtidos pelas soluções analítica, semi-analítica e numérica. Será, portanto, a base da validação para os outros casos.

A validação em todos os outros casos será feita pela comparação entre os resultados obtidos pela solução semi-analítica e os obtidos pela solução numérica.

Essa validação será mútua, isto é, a coincidência das soluções indicará a validade de ambos os métodos, e através da variação de parâmetros como o número de blocos ou a discretização do tempo será analisada a dispersão numérica do método numérico proposto.

A seguir encontram-se resultados obtidos para os sistemas linear e radial, onde o enfoque principal é dado ao período de injeção, devido a sua grande importância na resposta final, uma vez que define a condição inicial do período de produção.

4.1 Sistema linear

As Figuras (1) a (5) mostram os resultados analíticos⁽²⁾, semi-analíticos e numéricos de uma simulação com diferentes discretizações no espaço e no tempo, descritos a seguir :

- discretizações do tempo (Δt_D) iguais a .01 , .005 e .001 com número de blocos iguais a : 50 na Figura (1), 200 na Figura (2) e 800 na Figura (3).

- Δt_D igual a .001 e número de blocos iguais a 50, 200 e 800, na Figura (4).

Em termos de esforço computacional, observa-se em todos os gráficos a maior importância na discretização do tempo do que no espaço, para minimização da dispersão numérica. Desta forma nota-se que para $\Delta t_D \leq .001$, a dispersão numérica torna-se muito pequena para um número de células maior do que 200.

Na faixa de discretizações utilizadas, a maior importância na discretização do tempo fica ainda mais evidente na Figura (4), pela observação de que para um determinado Δt_D a dispersão numérica fica praticamente constante para qualquer número de blocos ≥ 200 , fato que não ocorre quando se fixa o número de blocos e varia-se Δt_D . O maior refinamento de Δt é requerido pela discretização de primeira ordem no tempo.

O perfeito ajuste entre as soluções analítica e semi-analítica e o bom ajuste dessas com a solução numérica, para um número de blocos e uma discretização do tempo suficientes para minimizar a dispersão numérica, durante o período de injeção, fornece a base necessária para que, no período de produção para o sistema linear e nos períodos de injeção e produção para o sistema radial, a coincidência das soluções analítica e semi-analítica indique a validade do modelo proposto.

Na Figura (5) são apresentadas as soluções do sistema linear para ambos os períodos, e a boa coincidência das curvas confirma a validade dos modelos propostos. Observa-se neste gráfico que a solução analítica apresenta um pico negativo no início do período de produção fato que não foi objeto de análise.

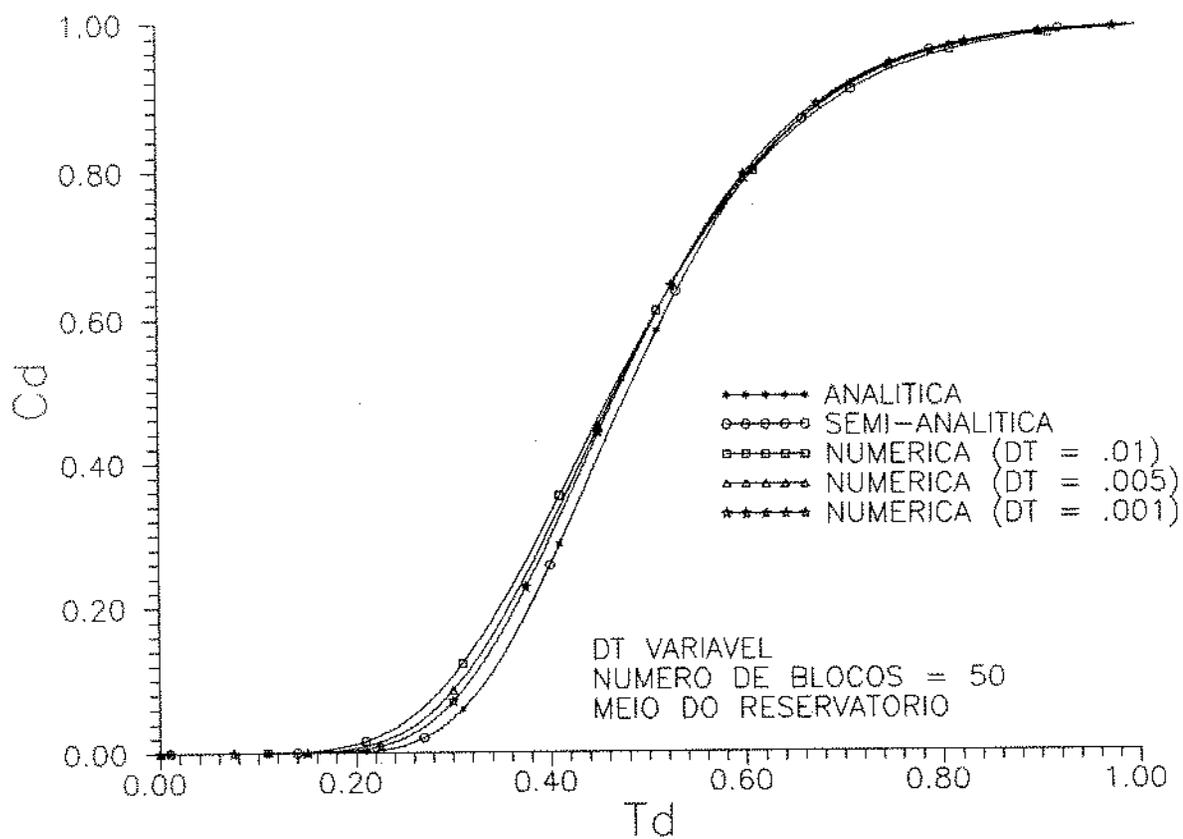
Figura 1: C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $NB = 50$.

Figura 2: C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $NB = 200$.

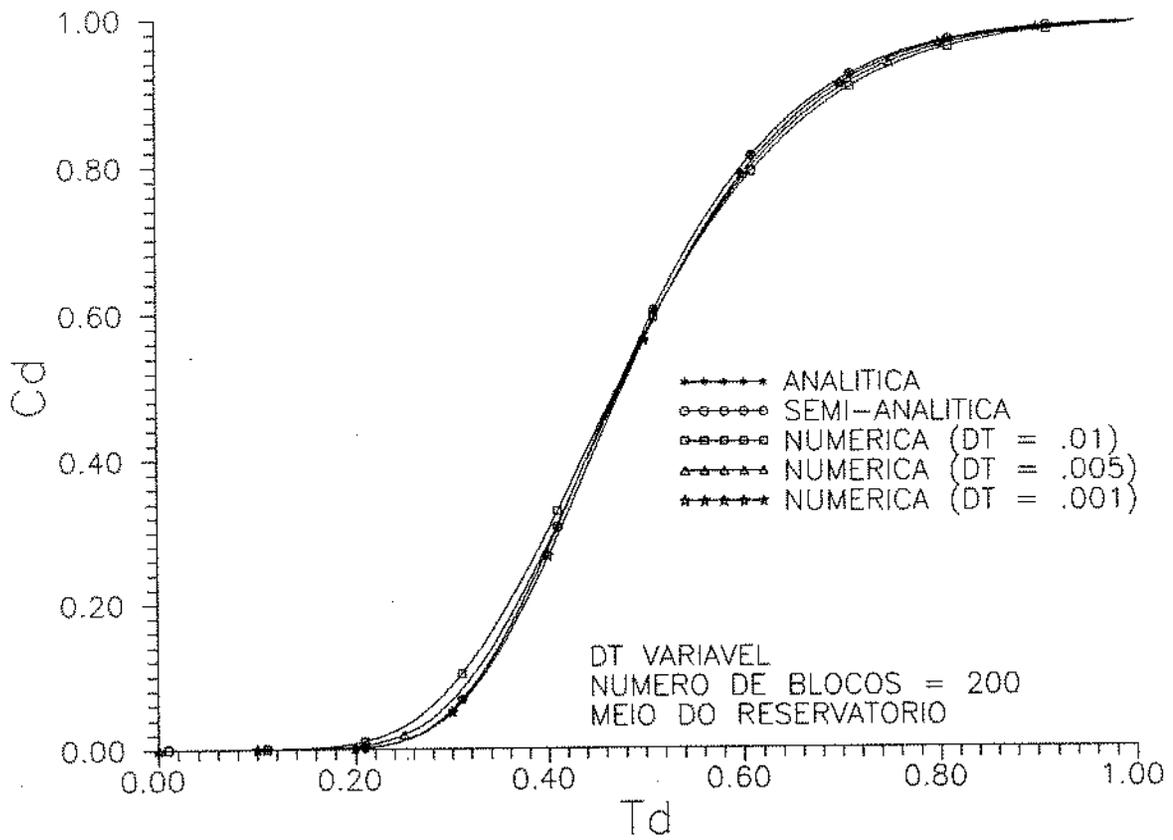


Figura 3: C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $NB = 800$.

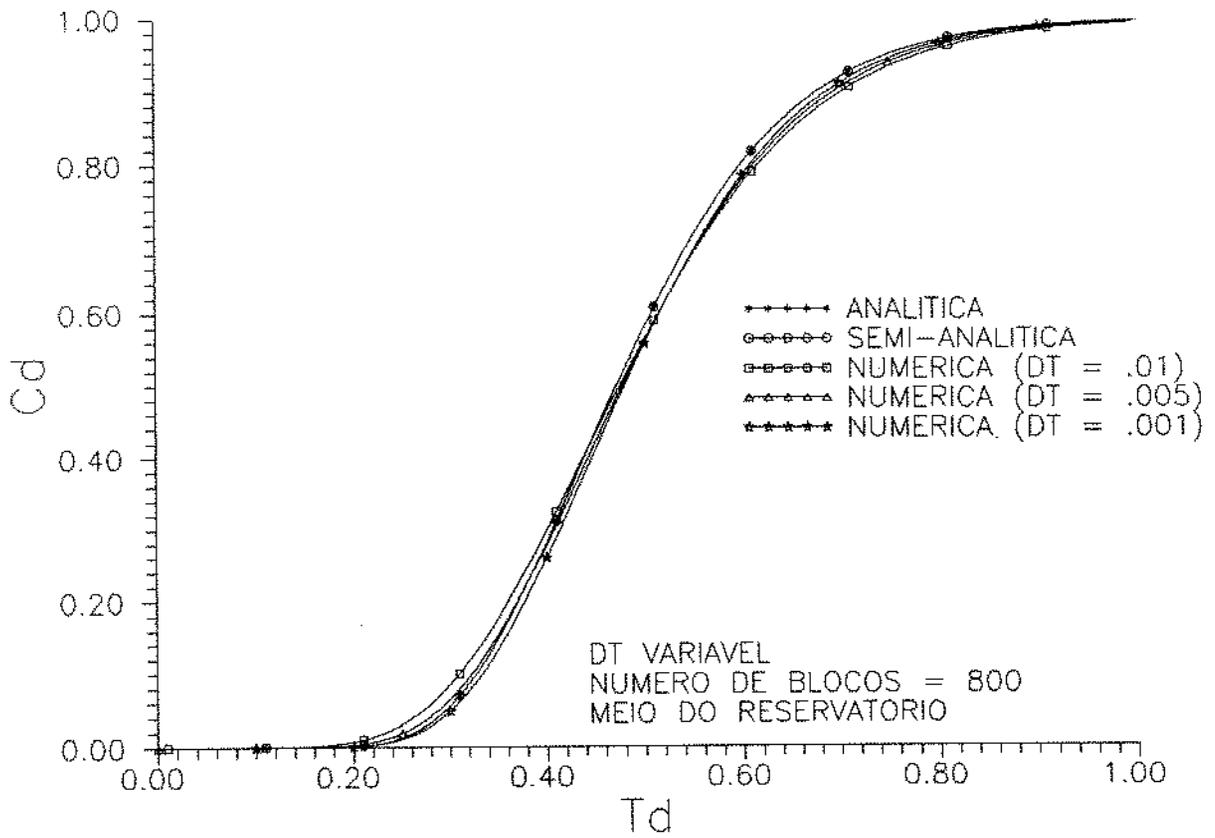


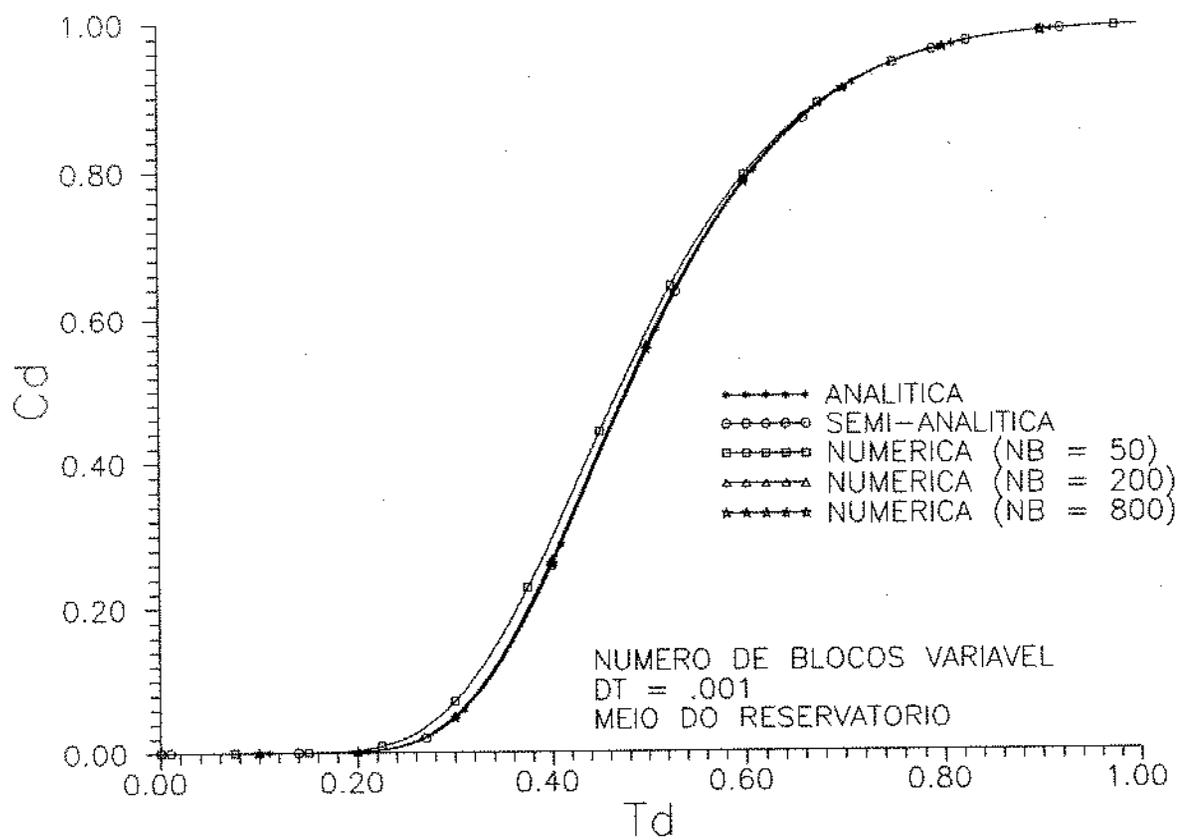
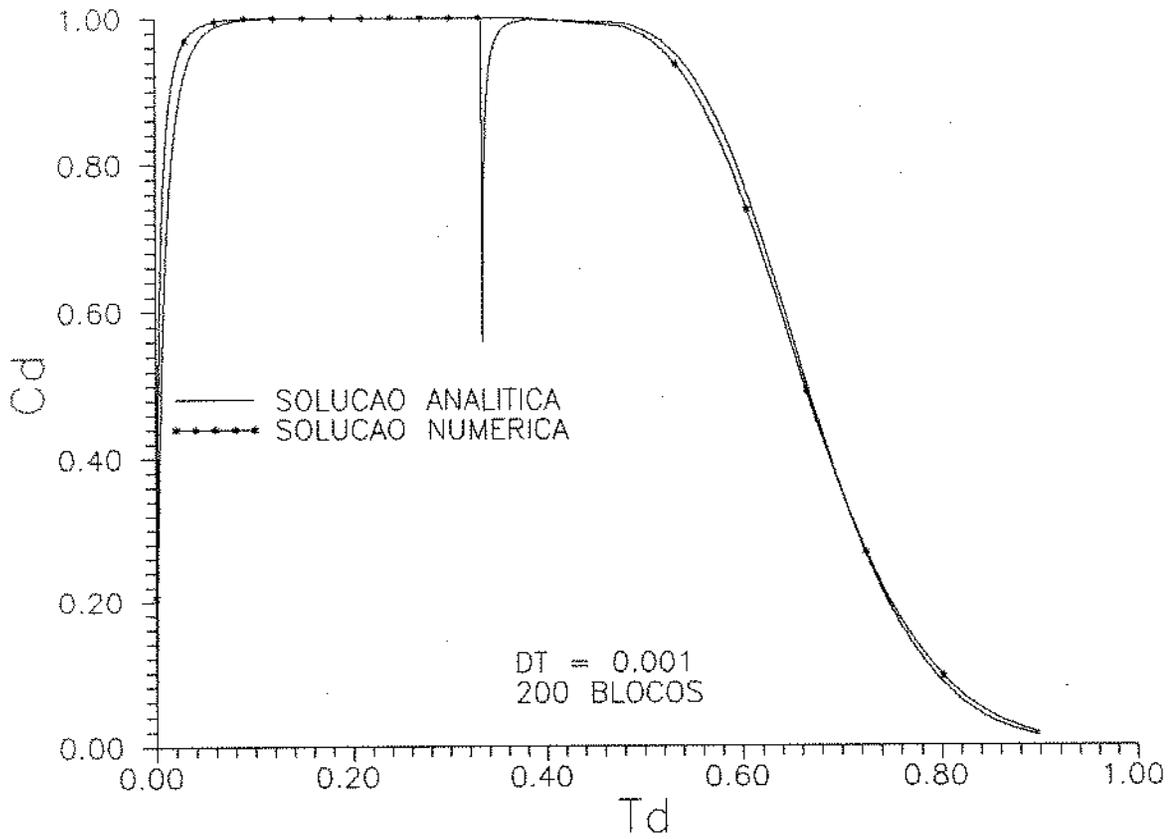
Figura 4: C_D versus t_D sistema linear, período de injeção com $\Delta t = .001$.

Figura 5: C_D versus t_D sistema linear, períodos de injeção e produção.

4.2 Sistema radial

As Figuras (6) a (10) apresentam os resultados semi-analíticos e numéricos de uma simulação com diferentes discretizações no espaço e no tempo, descritos a seguir :

- discretizações do tempo (Δt_D) iguais a 100 , 50 e 10 com número de blocos iguais a 50 na Figura (6), 200 na Figura (7) e 800 na Figura (8).

- Δt_D igual a 10 e número de blocos iguais a : 50, 200 e 800 na Figura (9).

De forma mais evidente que para o sistema linear, observa-se em todos os gráficos a maior importância na discretização do tempo do que na do espaço, para minimização da dispersão numérica com o menor esforço computacional possível. Nota-se que para $\Delta t_D \leq 10$ a dispersão numérica praticamente se anula para um pequeno número de células (em nosso caso analisado para ≥ 50)

A Figura (9) é então apresentada para evidenciar este fato, ficando clara a pequena influência da discretização do espaço na dispersão numérica, quando a discretização do tempo é pequena o suficiente.

A Figura (10) apresenta os resultados da simulação para ambos os períodos, e pela boa coincidência das curvas, conclue-se pela validade dos modelos propostos.

Observa-se também na Figura (11) que no limite externo do meio poroso simulado não há coincidência das soluções semi-analítica e numérica, o que é justificado pelo fato da solução semi-analítica ter sido encontrada para um sistema infinito e a numérica para um sistema finito.

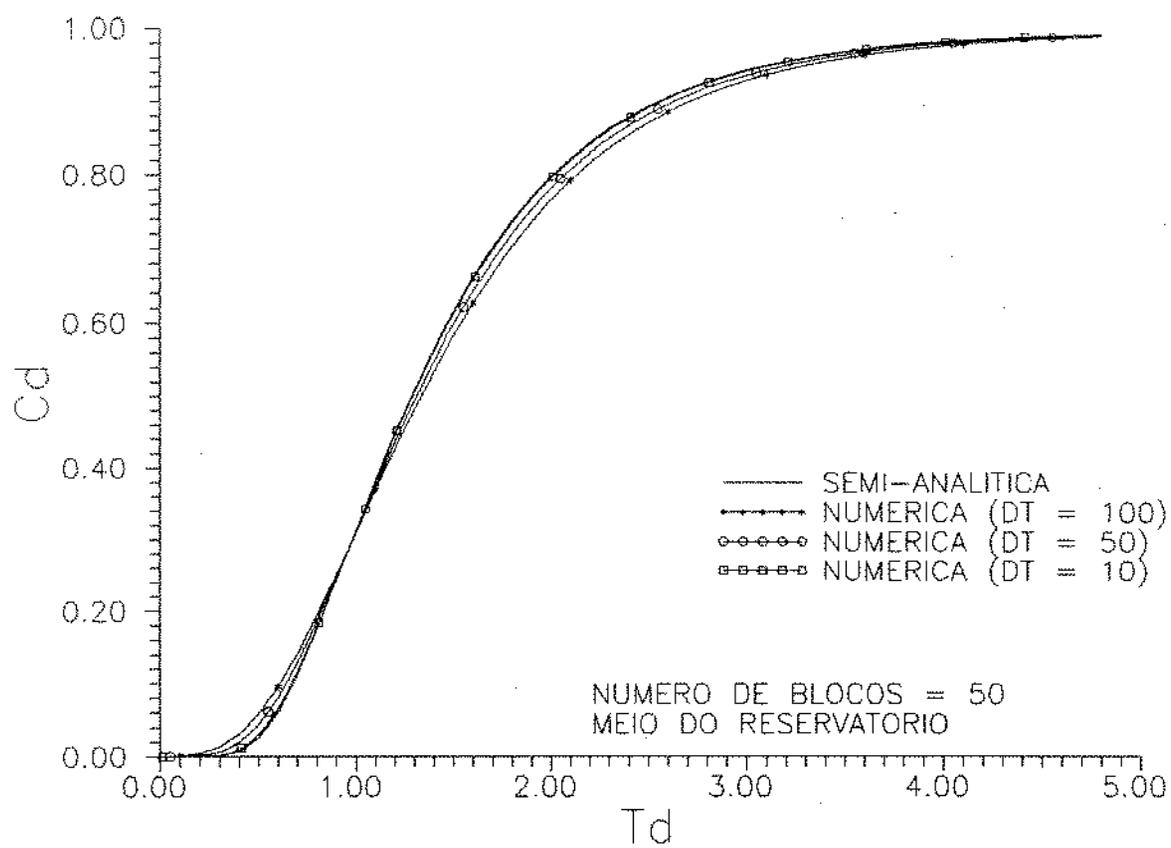
Figura 6: C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $NB = 50$.

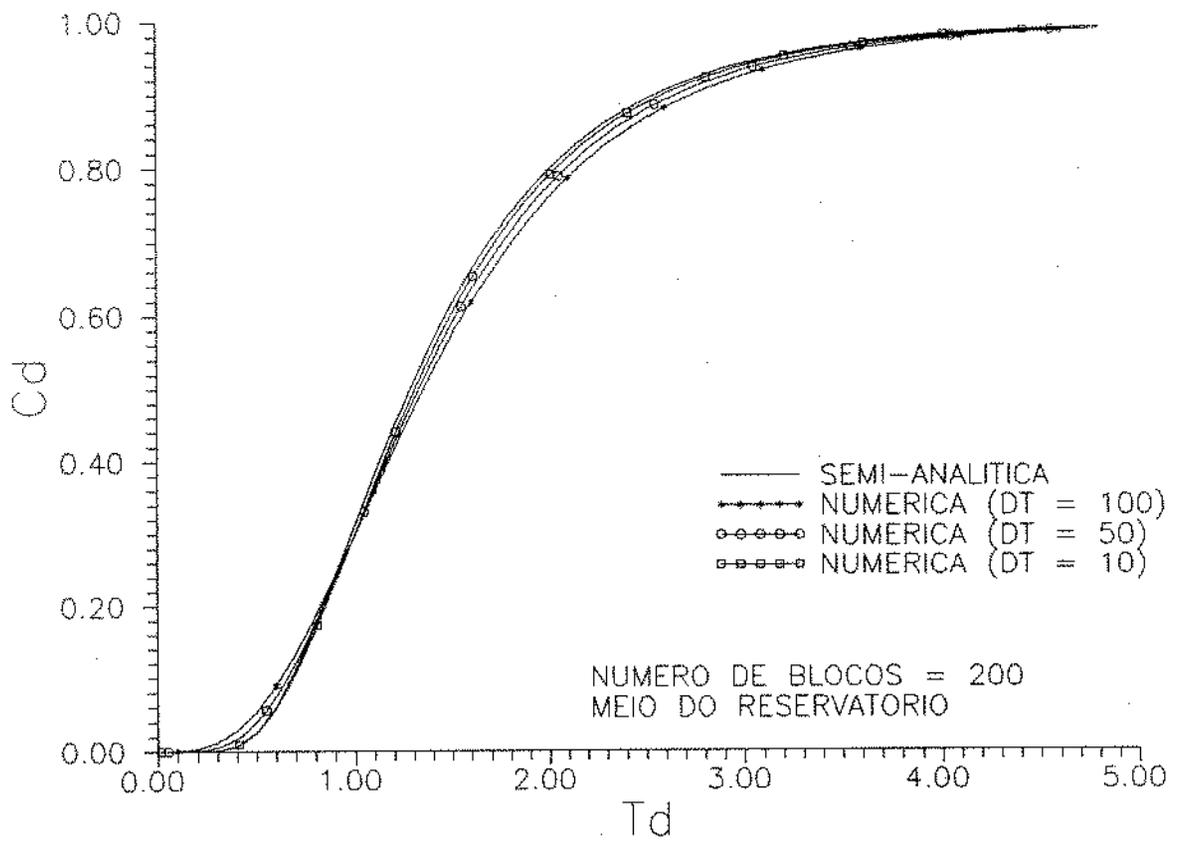
Figura 7: C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $NB = 200$.

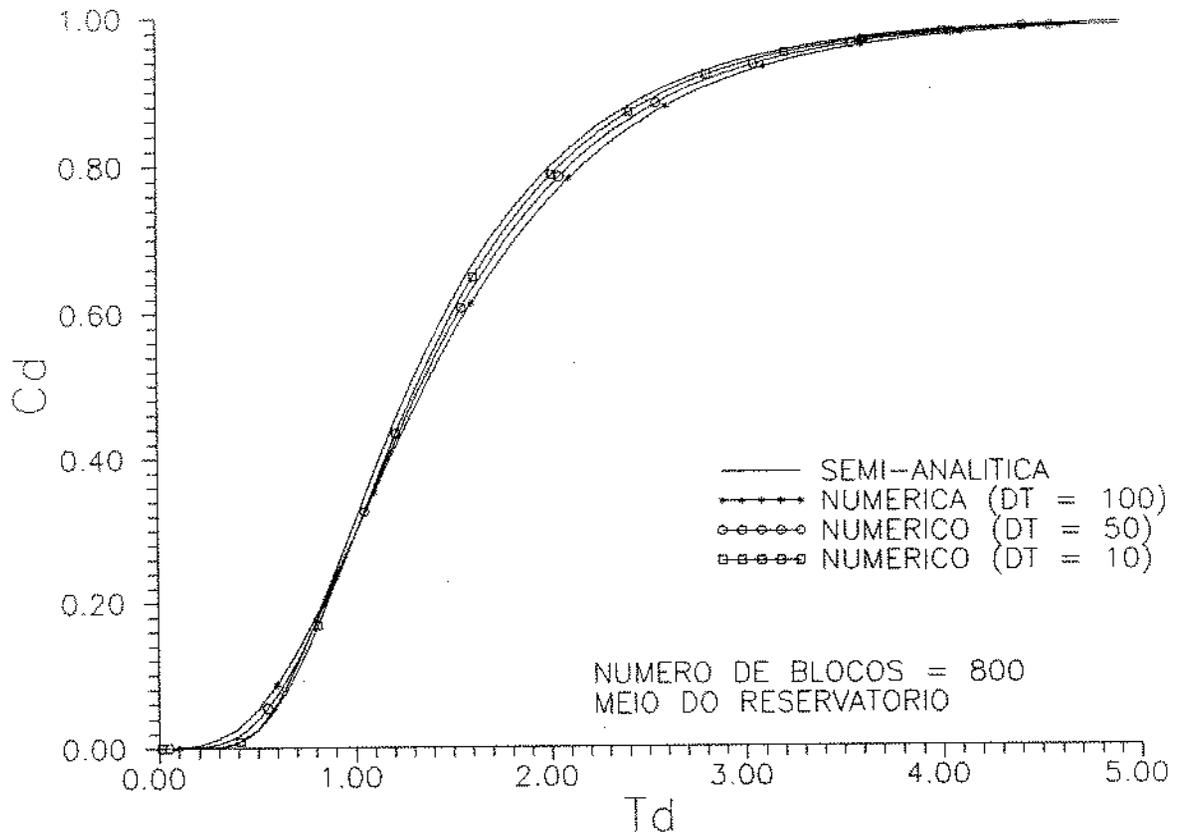
Figura 8: C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $NB = 800$.

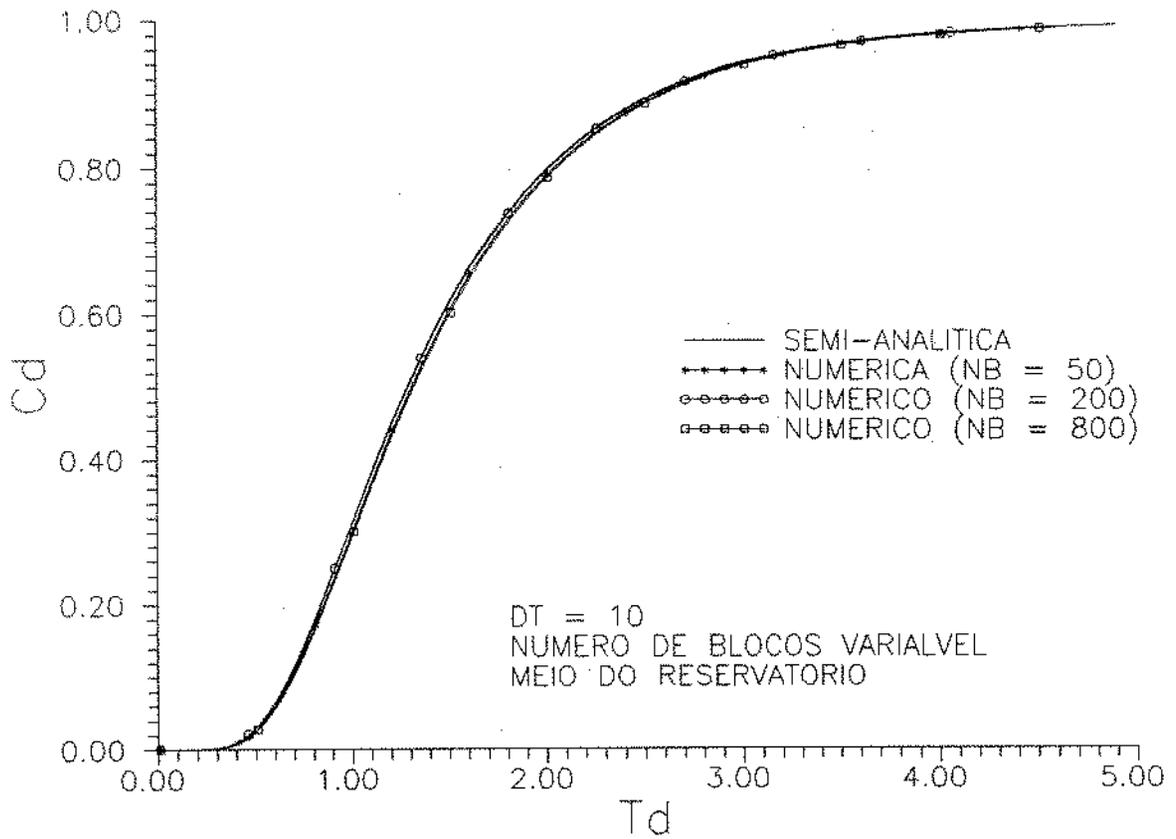
Figura 9: C_D versus t_D sistema radial, período de injeção com $\Delta t = 10$.

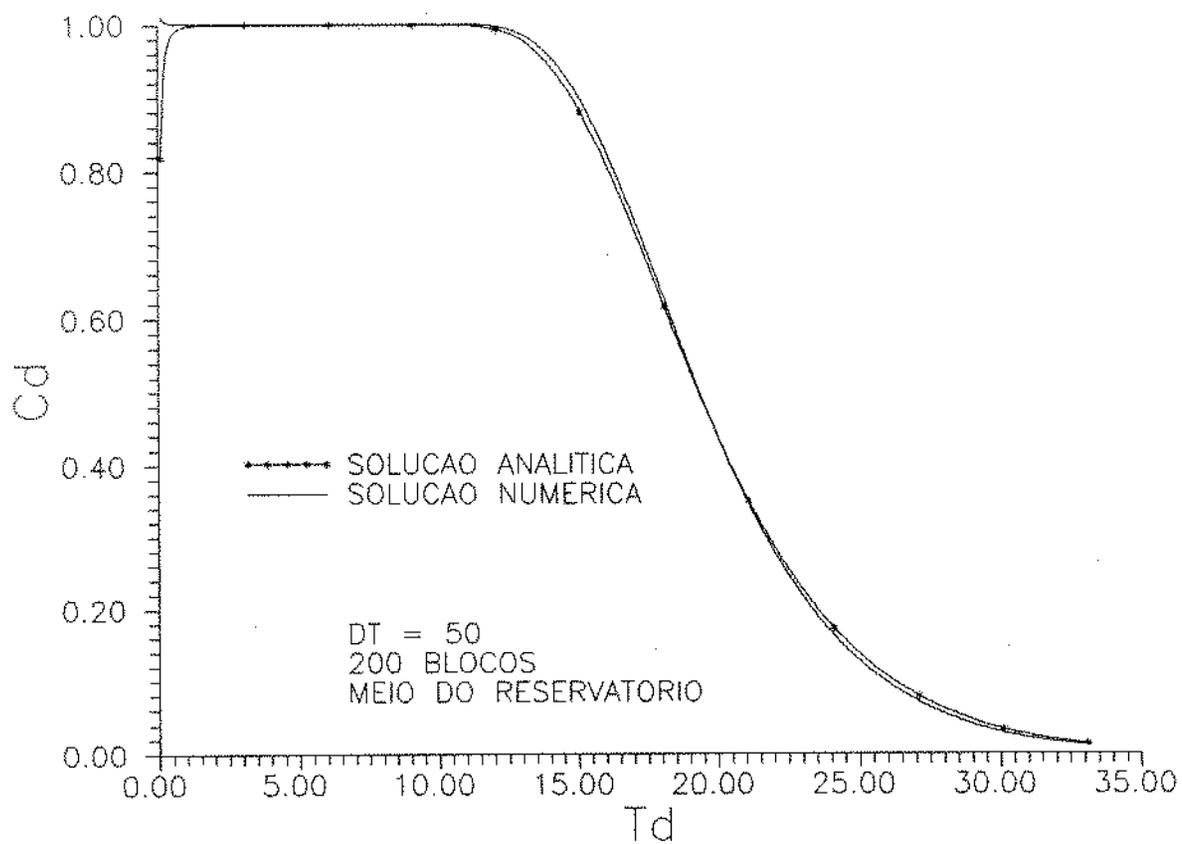
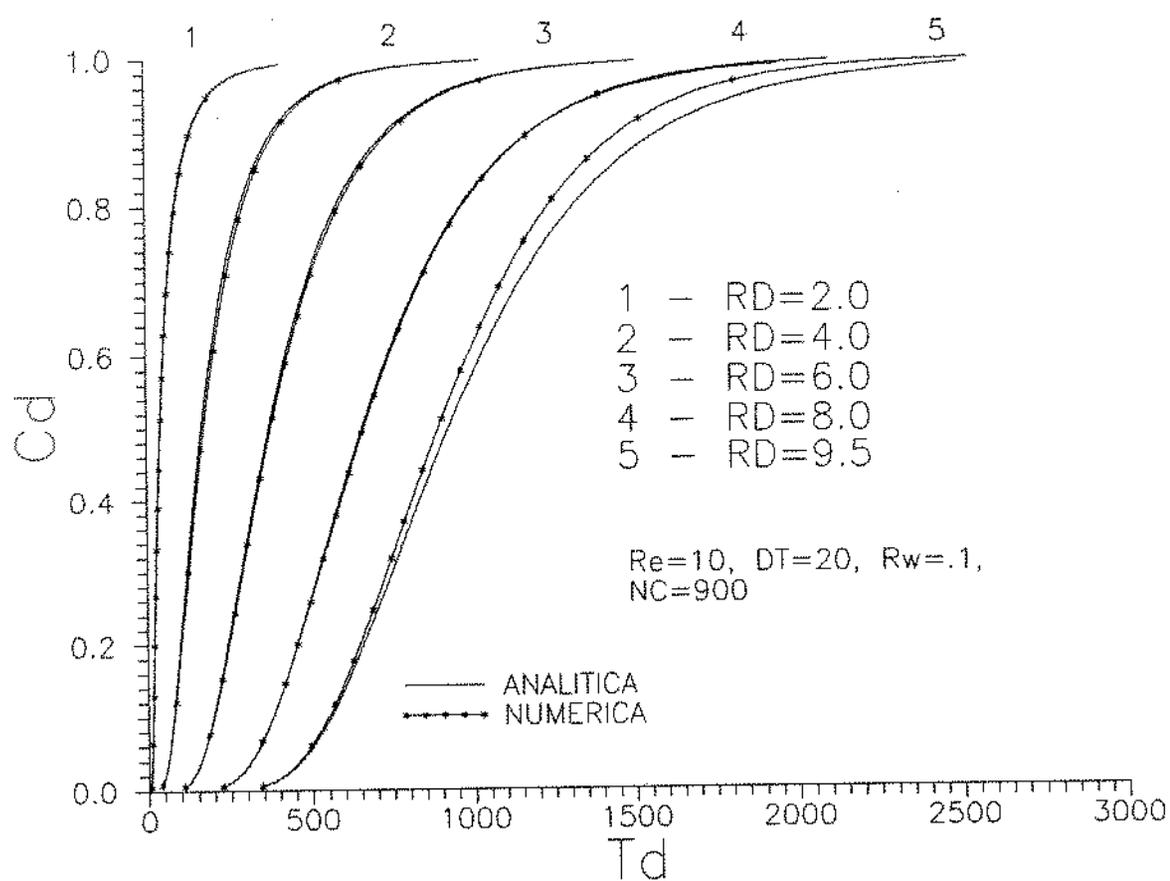
Figura 10: C_D versus t_D sistema radial, períodos de injeção e produção.

Figura 11: C_D versus t_D sistema radial, período de injeção para diversos raios.

5 DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA

Descreve-se a seguir o esquema do experimento, o corpo de prova, os fluidos e equipamentos utilizados, bem como os problemas e soluções empregadas no transcorrer da experiência.

5.1 O corpo de prova

Disponha-se de dois corpos de prova constituídos por testemunhos encapsulados em resina com extremidades abertas ao fluxo⁽¹³⁾, dos quais um foi descartado de imediato por apresentar heterogeneidades, tendo portanto o experimento se limitado a um único corpo de prova.

O corpo de prova estudado era feito de um arenito consolidado pertencente a formação Rio Bonito da bacia do Paraná, o qual se mostrou bastante homogêneo quando da análise petrográfica.

O encapsulamento do testemunho consiste de um envólucro em resina de epóxi, que o impermeabiliza, a menos das extremidades, as quais através de pequenos tubos de 1/8" de diâmetro ligados às mesmas, permanecem abertas ao fluxo.

Foi realizado no Centro de Pesquisas da Petrobrás no Rio de Janeiro uma descrição petrográfica de lâmina delgada, a qual evidenciou que as amostras da formação Rio Bonito possuem poros regularmente selecionados, com boa comunicação entre si e com porosidade de aproximadamente 20 % , o que concordou razoavelmente com o valor obtido com a medição à vácuo.

O corpo em estudo apresentou as seguintes medidas e características :

- comprimento: 15,40 cm.
- diâmetro: 3,76 cm.
- porosidade (petrofísica): 20 %
- porosidade (vácuo): 22 %
- permeabilidade: 150,7 mD.

5.2 Fluidos utilizados

O corpo de prova foi inicialmente saturado com uma solução de água destilada a 30.000 ppm de KCl, a fim de simular a água de formação e evitar o aparecimento de algas e/ou bactérias.

A solução deslocada para estudo consiste de água destilada com concentração de KCl de 45.000 ppm, que é o limite superior da faixa de resposta linear do condutímetro.

Além desses fluidos, que entram em contato com o corpo de prova, foram utilizados também água destilada pura, que é o fluido deslocado pela bomba, e óleo mineral, que faz interface entre a água pura e as soluções salinas.

5.3 Equipamentos utilizados

- Bomba seringa de vazão constante :

Foi utilizada uma bomba seringa, com vazão regulável entre 0 e 400 ml/hora, marca ISCO, modelo LC-5000.

- Condutivímetro:

A medição da concentração foi realizada através de uma célula de medição de condutividade, a qual possui duas placas metálicas paralelas e isoladas entre si, imersas no efluente líquido.

Aplicando-se uma diferença de potencial às placas, a corrente resultante é transformada em uma tensão proporcional em um condutivímetro.

Essa tensão é então aplicada a um conversor analógico-digital cuja saída é amostrada e armazenada pelo microcomputador, com uma frequência programável.

A concentração do efluente líquido pode então ser determinada por meio de uma curva de calibração de concentração versus tensão, para uma dada temperatura.

- microcomputador:

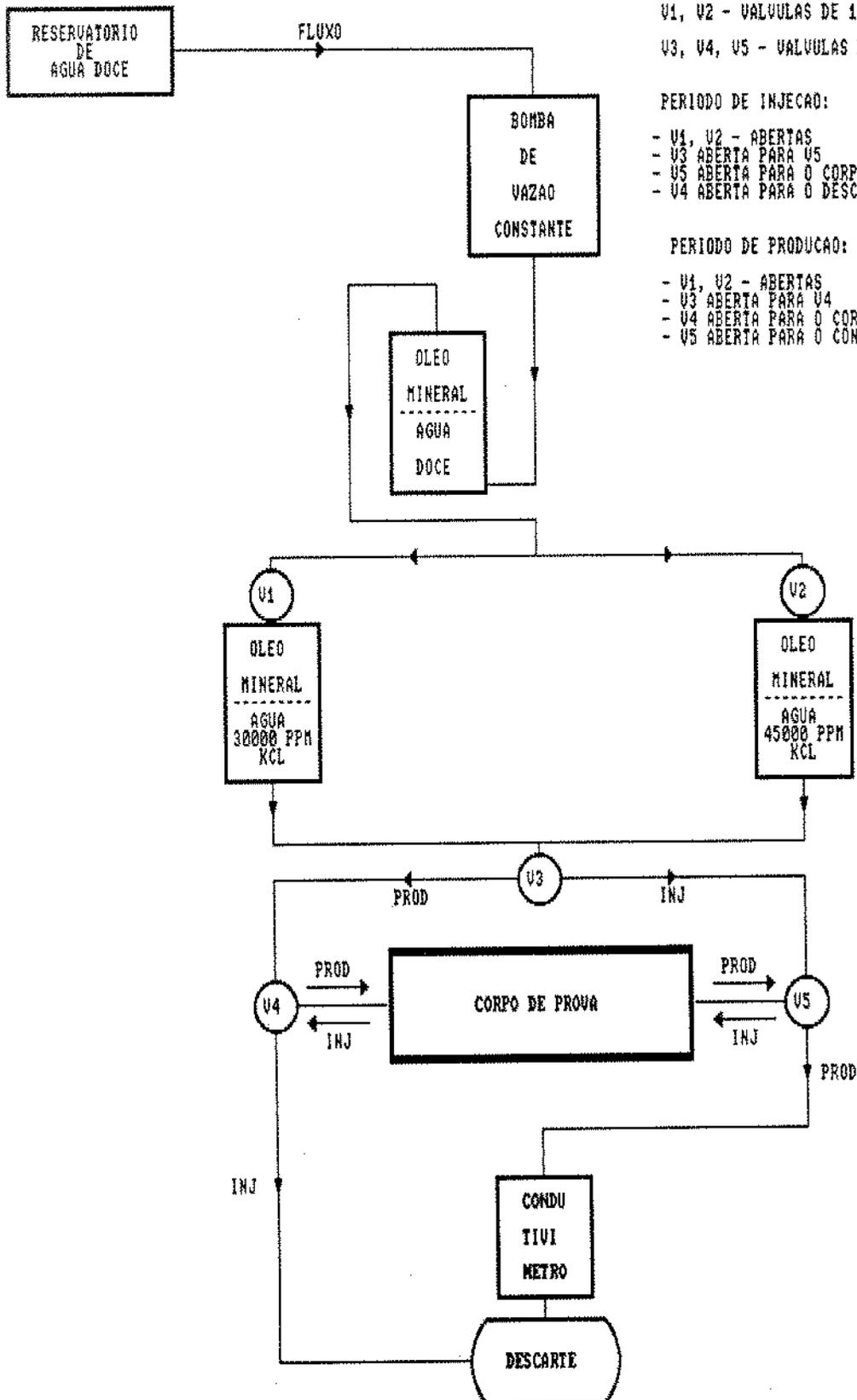
Foi utilizado um micro computador tipo PC-XT com frequência de trabalho de 8 MHz, o qual faz a amostragem e armazenagem dos dados acima referidos.

Cria também, um arquivo com características do teste em execução, como temperatura, vazão de injeção, volume poroso, etc.

- garrafas para contenção dos fluidos :

Garrafas acrílicas que contêm os fluidos anteriormente descritos e que têm pontos abertos ao fluxo no topo e na base.

5.4 Esquema do experimento



V1, V2 - VALVULAS DE 1 VIA

V3, V4, V5 - VALVULAS DE 2 VIAS

PERIODO DE INJECAO:

- V1, V2 - ABERTAS
- V3 ABERTA PARA V5
- V5 ABERTA PARA O CORPO DE PROVA
- V4 ABERTA PARA O DESCARTE

PERIODO DE PRODUCAO:

- V1, V2 - ABERTAS
- V3 ABERTA PARA V4
- V4 ABERTA PARA O CORPO DE PROVA
- V5 ABERTA PARA O CONDUTIVIMETRO

5.5 Descrição do experimento.

Uma bomba de vazão constante desloca, pelo orifício da base, água destilada para uma garrafa que contem água destilada em baixo e óleo mineral em cima. Com a entrada da água pela base, o óleo mineral é deslocado para fora da garrafa pelo orifício do topo da mesma, fluxo esse que através de uma válvula de três vias é direcionado para uma das duas outras garrafas existentes.

A garrafa onde o óleo é injetado possui óleo no topo e água destilada com concentração de sal (KCl) igual a 30.000 ppm ou 45.000 ppm na base.

O óleo mineral, entrando pelo topo da garrafa desloca a solução salina pela base, e esse fluxo, por intermédio de duas válvulas de três vias, é injetado por uma das extremidades do testemunho e produzido pela outra.

Inicialmente, no testemunho já saturado com água a 30.000 ppm, injeta-se água a 45.000 ppm. Após um tempo pré-determinado, interrompe-se a injeção nessa face e passa-se a injetar uma solução de 30.000 ppm na outra face, e concomitantemente a monitorar-se a concentração do efluente da face antes injetora.

5.6 Característica do experimento

Apesar de muito simples, o experimento apresentou problemas, alguns dos quais de difícil solução.

O principal deles é o grande volume morto existente na montagem. Exemplo disso é o volume da célula do condutivímetro, que é de $2,5 \text{ cm}^3$, enquanto o volume total do corpo de prova é de 34 cm^3 . Com as vazões utilizadas, de 15 a $40 \text{ cm}^3/\text{hora}$, o volume morto corresponde a cerca de 3 e 10 minutos de fluxo.

Para tentar minimizar esse problema tentou-se analisar a dispersão no interior da célula, com o experimento descrito a seguir:

- Enchia-se a célula com uma solução a 30.000 ppm e em seguida injetava-se na célula, com as vazões de interesse, uma solução a 45.000 ppm. Porém, após algumas tentativas com resultados incoerentes, observou-se que mesmo sem fluxo, apenas o fato de virar-se a válvula de tres vias para uma ou outra solução, a condutividade lida variava de um extremo ao outro. Isto acontecia apesar de não haver qualquer mudança do fluido dentro da célula, uma vez que não havia fluxo.

Concluiu-se que tratava-se de difusão iônica, uma vez que havia soluções com concentrações diferentes em contato, e pela inviabilidade do experimento.

O método finalmente empregado para minimizar o problema foi o de iniciar o experimento com a célula do condutivímetro vazia. A resposta obtida foi então deslocada no tempo, de forma a se considerar o início do período de produção sómente quando o condutivímetro estivesse parcialmente cheio, isto é, quando o mesmo passasse a fornecer medições coerentes.

Este procedimento apresenta o inconveniente da imprecisão na definição da translação necessária, mas foi o que apresentou melhores resultados, e portanto foi o utilizado.

Outro problema esperado era a grande influência da temperatura nas curvas de calibração do condutivímetro. Porém, para os experimentos que foram realizados, mostrou-se sem maiores conseqüências, uma vez que os mesmos foram de curta duração, com média em torno de 1,5 horas.

Um terceiro problema encontrado foi a grande variação, entre um experimento e outro, da leitura fornecida pelo condutivímetro para concentrações iguais. Tal fato não pode se atribuído exclusivamente à diferença de temperatura entre um experimento e outro, uma vez que houveram experimentos repetidos à mesma temperatura com respostas distintas.

Apesar dessa variação, os valores lidos foram sempre coerentes dentro de um mesmo experimento, isto é, após adimensionalizados, as curvas plotadas a partir de dados de experimentos com as mesmas características mostraram-se coincidentes.

6 EXPERIMENTOS

6.1 Objetivos

Em meios porosos homogêneos, o parâmetro que se procura identificar através de testes de deslocamento miscível é o coeficiente de dispersão hidrodinâmica (D), que nesses meios é a característica que impede que um fluxo no mesmo se comporte como um deslocamento tipo pistão.

6.2 Metodologia

A metodologia de obtenção da dispersão hidrodinâmica D através de testes de deslocamento miscível é descrita a seguir:

- Adimensionaliza-se os dados de concentração obtidos em um teste no corpo de prova em estudo.
- Através de tentativas ajusta-se, pela variação do parâmetro D , os resultados da simulação matemática aos do teste de laboratório.
- Uma vez obtido o ajuste entre os resultados teóricos e medidos, obtém-se o valor da dispersão hidrodinâmica do meio em estudo.

6.3 Resposta esperada

A dispersão hidrodinâmica no sistema linear aparece na adimensionalização da velocidade $U_D = \frac{v_l}{D}$.

O coeficiente de dispersão foi assumido como sendo dado por $D = D_0 |u|$, e sendo u equacionado com valor sempre positivo, assume-se que $D = D_0 u$.

Dessa forma, a velocidade adimensional, denominada número de Peclet, fica:

$$U_D = \frac{uL}{D_0 u} = \frac{L}{D_0}$$

a qual independe da velocidade. Assim, para um mesmo volume injetado, as curvas C_D versus t_D devem ser coincidentes, independentemente da velocidade de injeção.

Na prática isto não ocorre, pelo fato descrito a seguir:

- no início da produção a célula do condutivímetro está vazia, e somente após estar parcialmente cheia, o mesmo passa a fornecer leituras confiáveis.
- este volume não é bem definido, e varia de experimento para experimento.
- quanto menor a vazão, maior o tempo necessário para que o condutivímetro passe a fornecer leituras confiáveis, e maior o tempo de imprecisão nas leituras.
- o processo é contínuo, isto é, o tempo do experimento está sendo computado desde o início da injeção. Portanto, o tempo necessário para enchimento parcial do condutivímetro deve ser descontado, ou seja, os pontos amostrados entre o fim da injeção e o início do fornecimentos de leituras coerentes pelo condutivímetro devem ser desprezados. Isto foi feito da seguinte forma :

$$NPD = \frac{VM \cdot NAM}{q} \pm \text{imprecisão} ,$$

onde:

NPD é o número de pontos desprezados,

NAM é o número de amostras por minuto,

q é a vazão em cm^3 por minuto,

VM é o volume morto da célula do condutivímetro.

6.4 Verificação da validade da metodologia empregada na obtenção da dispersão hidrodinâmica

Uma vez obtido o valor da dispersão hidrodinâmica do meio, fez-se novos experimentos com vazões de injeção distintas, portanto com velocidades de fluxo distintas, e/ou tempos de injeção distintos.

A veracidade do valor obtido para o coeficiente de dispersão é verificada pela concordância entre os resultados dos novos experimentos e das novas simulações. As curvas experimentais devem ser paralelas ou coincidentes, dependendo dos volumes injetados serem iguais ou não, independentemente das vazões de injeção.

6.5 Resultados

Foram realizados sete testes, apresentados em 5 figuras distintas. A diferença entre cada teste no mesmo gráfico é dada somente pela vazão de injeção/produção, sendo que cada figura apresenta resultados para um mesmo volume injetado.

Na Figura (12) injetou-se 0,34 volumes porosos ($11,3 \text{ cm}^3$), com vazão de injeção e posteriormente de produção de $0,33 \text{ cm}^3/\text{min}$.

As Figuras (13 e 14) apresenta resultados de injeção de 0,42 volumes porosos ($14,3 \text{ cm}^3$), com vazões de injeção/produção de $0,50$ e $0,67 \text{ cm}^3/\text{min}$.

Nas Figura (15 e 16) encontram-se resultados obtidos para uma injeção de 0,5 volumes porosos ($17,2 \text{ cm}^3$), com vazões de injeção/produção de $0,50$ e $0,67 \text{ cm}^3/\text{min}$.

Comentários

O melhor ajuste entre os dados de laboratório e as soluções matemáticas foi obtido com $U_D = 50$, o que fornece uma dispersividade de $D_0 = 0.31 \text{ cm}$.

Os coeficientes de dispersão hidrodinâmica obtidos foram de $7,19 \times 10^{-4}$, $1,06 \times 10^{-3}$ e $1,42 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$, para vazões de injeção/produção de 0,34 , 0,50 e $0,67 \text{ cm}^3/\text{min.}$, respectivamente.

Para os casos de 0.34 e 0.50 volumes porosos injetados, são apresentadas curvas com e sem correção no eixo dos tempos.

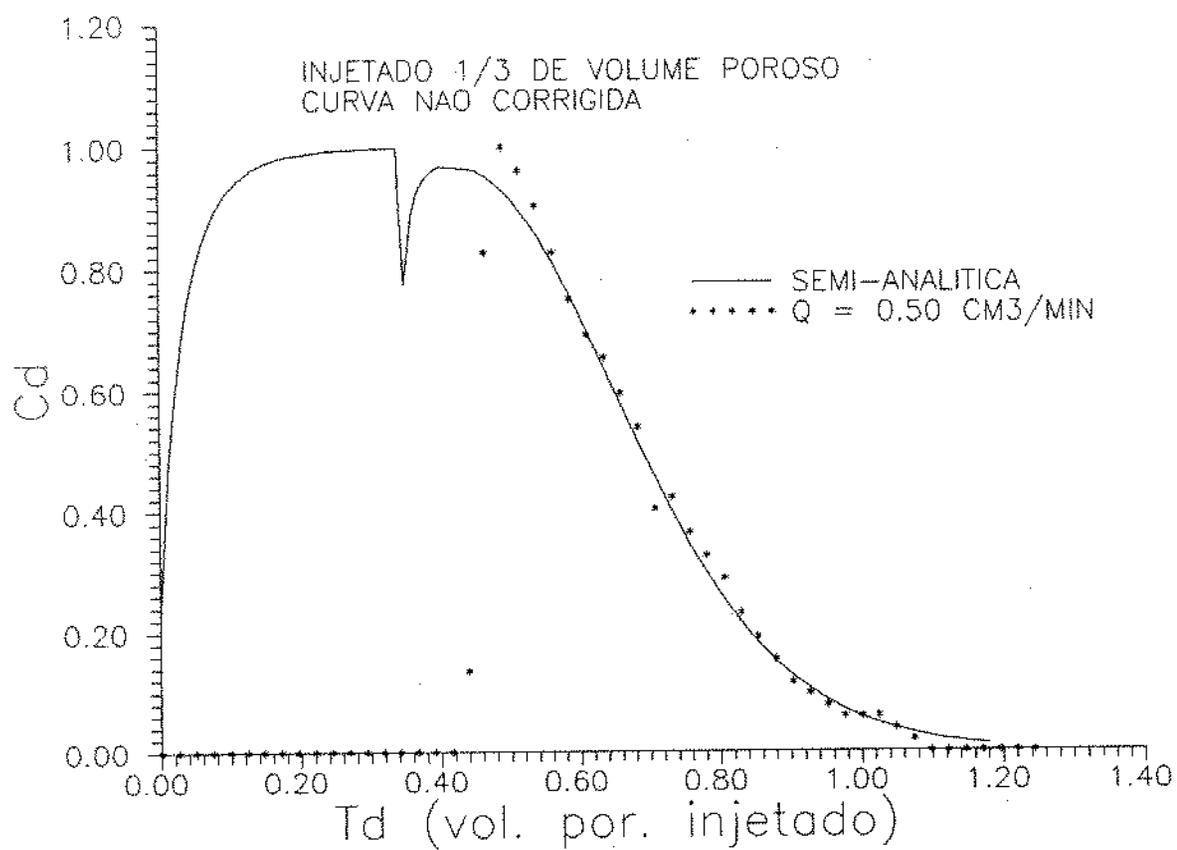
Figura 12: C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.

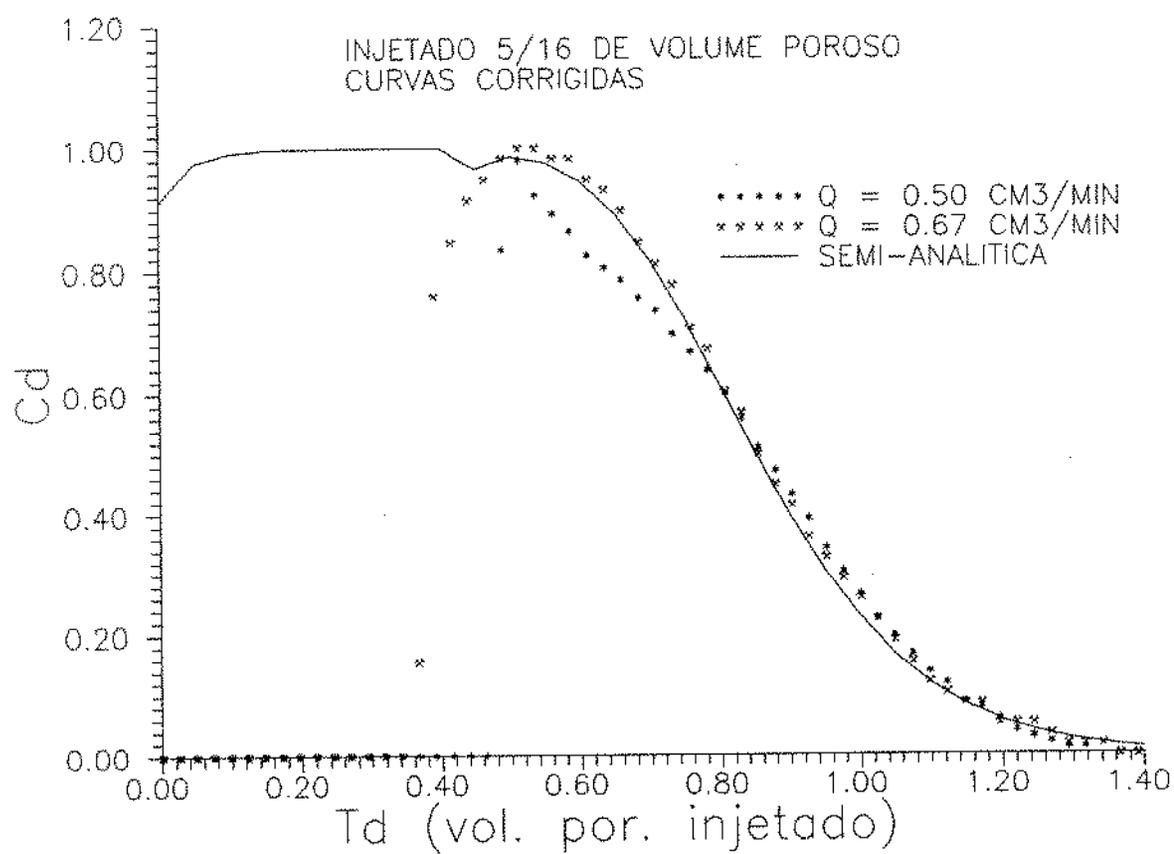
Figura 13: C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.

Figura 14: C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.

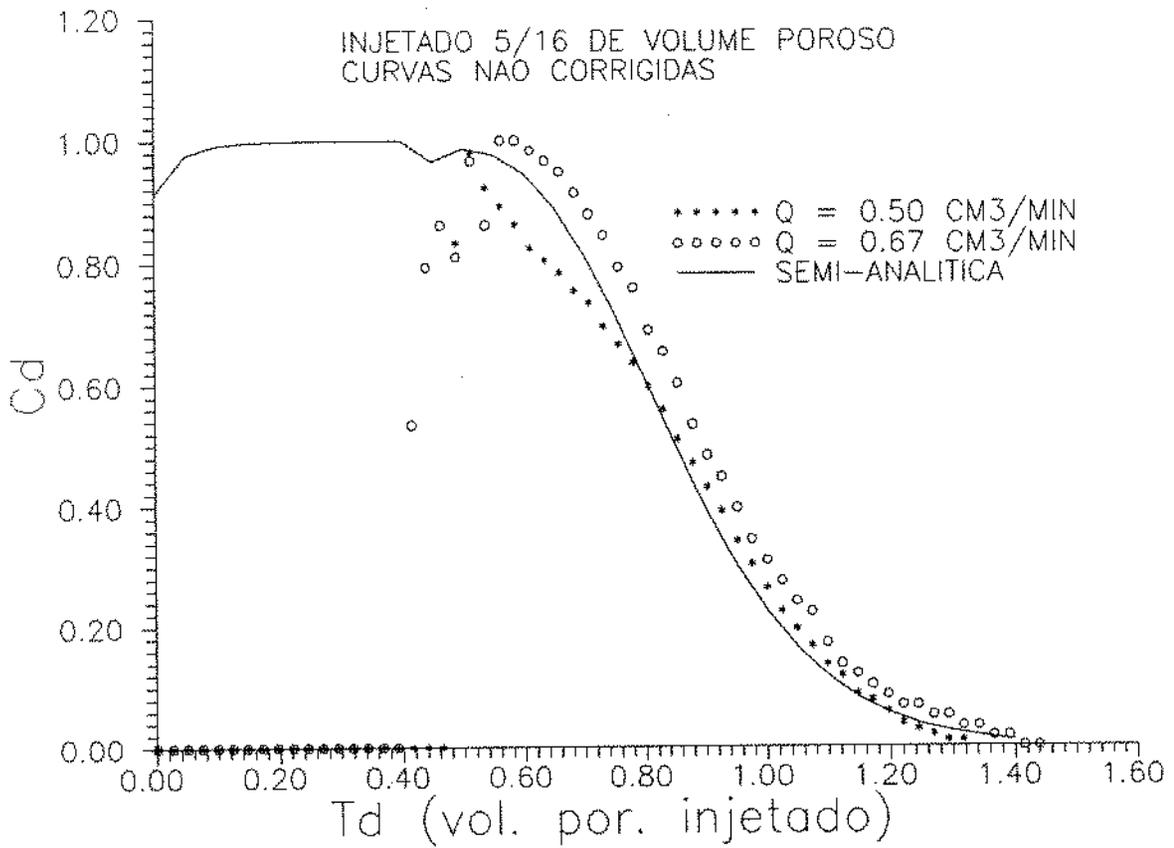


Figura 15: C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.

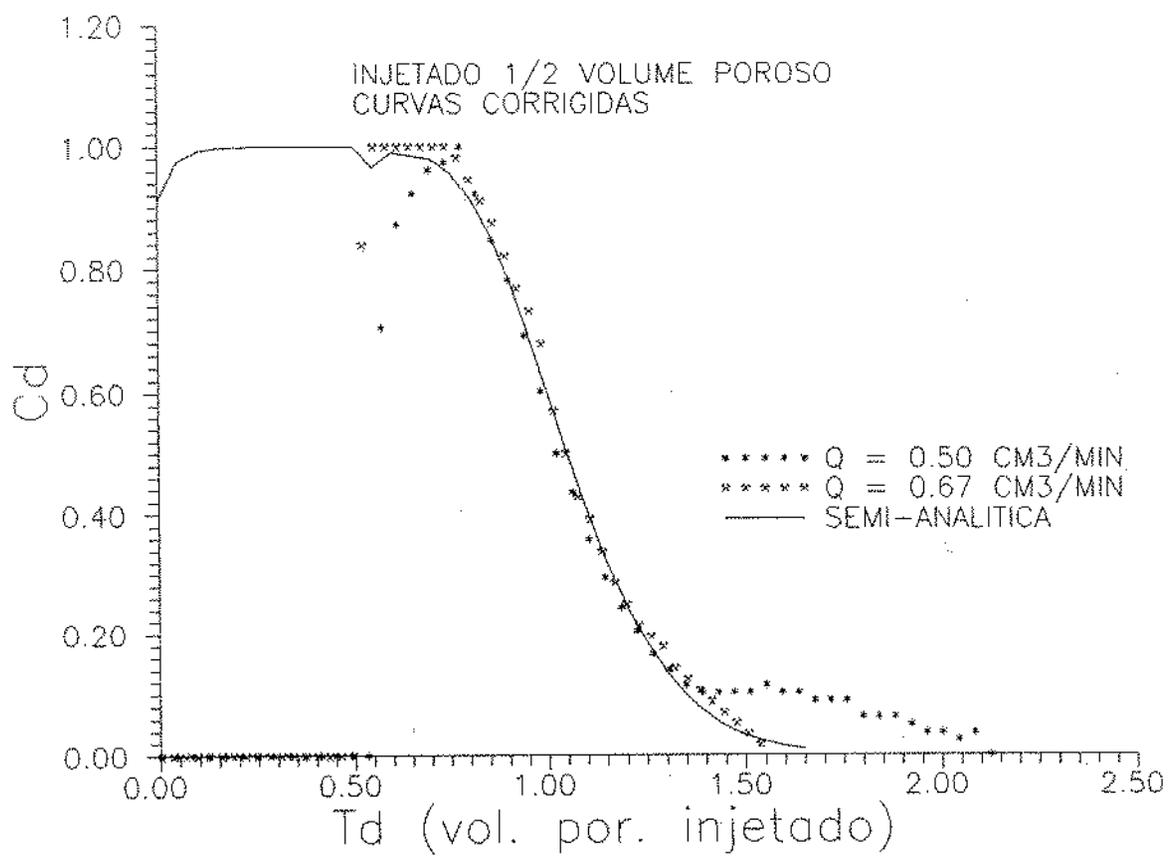
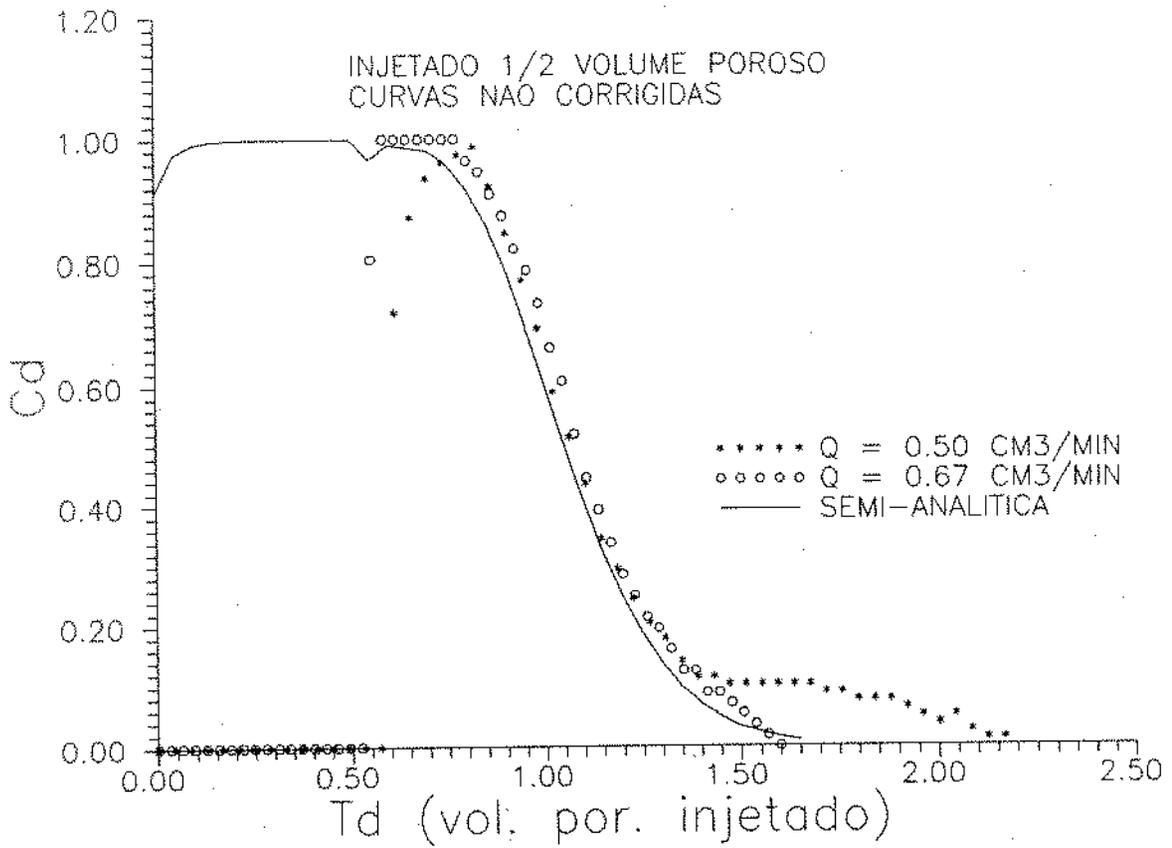


Figura 16: C_D versus t_D sistema linear, teórico e experimental.

7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

1 - Para velocidades de fluxo da ordem das envolvidas na parte experimental do presente projeto, a simplificação assumida para o coeficiente de dispersão hidrodinâmica, ou seja, desconsideração da difusão molecular, mostrou-se bastante satisfatória.

2 - Os modelos matemáticos propostos, bem como suas soluções, apresentaram boa precisão na modelagem do fluxo a que se propunham.

3 - A discretização dos operadores espaciais pelo método de Allen confirmou ser uma forte ferramenta a ser empregada em soluções numéricas de equações diferenciais do tipo convecção-difusão.

4 - A utilização de métodos numéricos para a volta ao domínio do tempo de equações solucionadas no domínio de Laplace, mostrou-se ser uma ferramenta adequada para o tratamento de soluções complexas das equações que modelam o processo de deslocamento miscível.

5 - O experimento montado apresentou resultados que indicam a validade das soluções encontradas para os problemas que se apresentaram no decorrer do mesmo, e que o tornaram de grande importância para o resultado final do trabalho, ainda que limitado a um corpo de prova linear.

6 - Devem ser realizados experimentos em novos corpos de prova, e especialmente em corpos de prova de formato radial, que para maior simplicidade pode ser montado em forma de um setor radial, com as laterais impermeabilizadas.

7 - Para melhor modelagem dos processos miscíveis encontrados em reservatórios de petróleo, o equacionamento e os experimentos devem ser estendidos aos casos de meios heterogêneos.

8 - A melhoria de condições para realização dos experimentos deve incluir obrigatoriamente a minimização dos volumes mortos, o controle da temperatura e um condutivímetro de maior precisão.

9 - As soluções da equação da convecção-difusão desenvolvidas no presente trabalho podem ser utilizadas para determinação automática do coeficiente de dispersão através do ajuste entre os dados práticos e teóricos da concentração de traçador no efluente líquido.

8 BIBLIOGRAFIA

1 - Brigham, W. E. : "Mixing Equation in Short Laboratory Cores", *SPEJ*, (Fevereiro, 1.974), 91-99.

2 - Corrêa, A. C. , Pande, K. K. , Ramey, H. J. and Brigham, W. E. : "Prediction and Interpretation of Miscible Displacement Performance Using a Transverse Matrix Diffusion Model" , *SPE Reservoir Engineering*, (Fevereiro, 1.990)

3 - Moench, A. F. and Ogata, A. : "A Numerical Inversion of the Laplace Transform Solution to Radial Dispersion in a Porous Medium" , *Water Resources Research*, (Fevereiro, 1.981) 17(1), 250/252.

4 - Falade, G. K. , Antunez, E. and Brigham, W. E. : "Mathematical Analysis of Single-Well Tracer Test" , *United States Department of Energy*. (Agosto, 1.986).

5 - Falade, G. K. and Brigham, W. E. : "Analysis of Radial Transport of Reactive Tracer in Porous Media" , *SPE Reservoir Engineering*, (Fevereiro, 1.989) 85/90.

6 - Tang, D. H. E. and Peaceman, D. W. : "New Analytical and Numerical Solutions for the Radial Convection Dispersion Problem" , *SPE Reservoir Engineering*, (Agosto, 1.987) 343/359.

7 - Valocchi, A. J. : "Effect of Radial Flow on Deviations From Local Equilibrium During Sorbing Solute Transport Through Homogeneous Soils", *Water Resources Research*, (Novembro, 1.986) 22(12), 1693-1701.

8 - Valocchi, A. J. : "Validity of the Local Equilibrium Assumption for Modeling Sorbing Solute Transport Through Homogeneous Soils", *Water Resources Research*, (Junho, 1.985) 21(6), 808-820.

- 9 - Tang, D. H. E. and Babu, D. K. : "Analytical Solutions of a Velocity Dependent Dispersion Problem" , *Water Resources Research*, (Dezembro, 1.979) **15**(6).
- 10 - Crump, K. S. : "Numerical Inversion of Laplace Transform Using a Fourier Series Aproximation", *Journal of the ACM*, (Janeiro, 1.976) **23**(1), 89-96.
- 11 - Figueiredo, J. R. : "*Generalização e aproximação do Esquema Discretizante de Allen para equações de transporte de fluidos*", Tese de Doutorado, UNICAMP/FEC, 1988.
- 12 - Figueiredo, J. R. - Manuscrito não publicado.
- 13 - Portella, R. C. M. : "Interpretação e Automação de Testes de Deslocamento Miscível Usando Soluções no Espaço de Laplace e Deconvolução" , Tese de Mestrado, UNICAMP/FEC , (Março, 1.989) 15/89.
- 14 - Abramowitz, M. and Stegun, I. A. : *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc, New York
- 15 - Butkov, E. : *Física Matemática*, Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1.988
- 16 - Allen, D. N. de G.: "A Suggested Approach to Finite-Difference Representation of Differential Equations, With an Application to Determine Temperature-Distributions Near a Sliding Contact", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, (1.962) **XV**.
- 17 - Allen, D. N. de G. and Southwell, R. V.: " Relaxation Methods Applied to Determine the Motion, in Two Dimensions, of a Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, (1.955) **VIII**.

9 NOMENCLATURA

A_i - função de Airy.

A'_i - derivada da função de Airy A_i .

$A'_i(x_1)_x$ - derivada da função de Airy A_i em relação a x , avaliada no ponto $r_D = 1$.

A_i^+ - variável definida no texto, $\frac{m_{i+1}-m_i}{p_i}$.

A_i^- - variável definida no texto, $\frac{m_i-m_{i-1}}{p_i}$.

α - constante definida no texto, $\frac{q}{2\pi h\phi}$.

B_i - função de Airy.

β - variável definida no texto, $\frac{D'_D}{D_D} + \frac{D_D-1}{D_D r_D}$, [MOL].

C - concentração de traçador, [MOL].

C_0 - concentração de traçador no início do período de injeção.

C_D - concentração adimensional de traçador,

C_{min} - concentração mínima de traçador, [MOL].

C_{max} - concentração máxima de traçador, [MOL].

C_i - concentração no ponto i no tempo $n + 1$, [MOL].

C_i^n - concentração no ponto i no tempo n , [MOL].

D - coeficiente de dispersão hidrodinâmica, $[L]^2 [T]^{-1}$.

D_m - coeficiente de difusão molecular, $[L]^2 [T]^{-1}$.

D_0 - coeficiente de dispersividade, [L]

Δt - discretização do tempo, [T].

$g(x, x')$ - função de Green modificada definida no texto.

$H(x, x')$ - função de Green.

K_1 , K_2 e K_3 - constantes definidas no texto.

$K_{\frac{1}{3}}$ - função de Bessel modificada de ordem $\frac{1}{3}$.

$K_{\frac{2}{3}}$ - função de Bessel modificada de ordem $\frac{2}{3}$.

L - comprimento do meio poroso linear.

L - operador $\frac{d^2}{d\varphi^2} - \zeta^2 \varphi$.

\mathcal{L} - operador da transformada de Laplace.

$L_x(C_D)$ - função definida no texto.

$L_r(C_D)$ - função definida no texto.

m_i - variável definida no texto como $e^{\frac{r_{Di}}{D}}$ para o sistema radial e $e^{U_D x_{Di}}$ para o sistema linear.

n_i - variável definida no texto como $\frac{-r_{Di}^2 + 2Dr_{Di}}{2}$ para o sistema radial e $-x_{Di}$ para o sistema linear.

p_i - variável definida no texto.

ϕ - variável definida no texto, $C_D e^{\frac{1}{2} \int 1r_D \beta dr_D}$.

Ψ - variável definida no texto, $C_0 e^{\frac{r_D - 1}{2D_0D}}$.

$p(r_D)$ - variável definida no texto, $\pi \frac{\zeta^2 r_D}{D_0D}$.

q - vazão de injeção, $[L]^3 [T]^{-1}$.

r - raio, $[L]$.

r_i - raio do ponto i , $[L]$.

r_D - raio adimensional.

r_w - raio da face interna de um meio poroso radial, $[L]$.

r_e - raio da face externa de um meio poroso radial, $[L]$.

s - variável da transformada de Laplace.

σ - variável definida no texto, $\frac{1}{4} \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dr_D} + \frac{s}{D_D}$.

t - tempo, $[T]$.

t_D - tempo adimensional.

τ - variável definida no texto, $\frac{1}{2s}$.

U - operador $\frac{d}{d\varphi} - \frac{\zeta}{2D_0}$.

u - velocidade convectiva em meio linear, $[L] [T]^{-1}$.

U_D - número de Peclet (velocidade adimensional em meio linear).

v_m - velocidade convectiva em meio radial, $[L] [T]^{-1}$.

V_1 e V_2 - variáveis definidas no texto.

V_i' - derivada da variável V_i .

x_i - distância longitudinal do ponto i , $[L]$.

x (no sistema radial) - variável definida no texto, $\left(\frac{D_0 D}{s}\right)^{\frac{2}{3}} \varphi$.

ϕ_w - ϕ avaliado no raio interno do meio poroso.

ϕ' - derivada da variável ϕ em relação a φ .

ϕ'' - segunda derivada da variável ϕ em relação a φ .

φ - variável definida no texto, $\frac{1}{4D_0 D} + \frac{s r_D}{D_0 D}$.

φ_w - φ avaliado no raio interno do meio poroso.

x - distância em um meio poroso linear, $[L]$.

x_D - distância adimensional em um meio poroso linear.

x' - variável de integração.

W - Wronskiano.

y - variável definida no texto, $\frac{dC_D}{dr_D}$.

y_0 - variável definida no texto, $y e \frac{D_0 D - r D}{D_0 D}$.

ζ - constante definida no texto, $\frac{D_0 D}{s}$.

UNIDADES FÍSICAS:

[L] - comprimento,

[T] - tempo,

[MOL] - concentração molar de soluto.

A Apêndice - Análise da Precisão do algoritmo de Crump

A rotina computacional implementada a partir do algoritmo de Crump, para cálculo da transformada inversa de Laplace, consiste em uma integração numérica pelo método dos trapézios.

Tal rotina computa a série de Fourier da função que se quer inverter, e a condição de truncamento é determinada quando o último termo calculado se torna inferior a um valor pré-determinado.

Ao se comparar resultados da rotina aplicada à funções com transformada de Laplace conhecida, em geral e especialmente com funções de Bessel de ordem $\frac{1}{3}$ devido ao fato de tais funções serem a base das funções de Airy, nota-se que o erro decresce com a melhora da precisão solicitada, até passar por um mínimo, e em seguida passar a crescer com a precisão.

Esse comportamento induziu a procura de derivadas do erro para localização da precisão ótima, com resultados que não corresponderam ao esperado, uma vez que verificou-se não haver um erro mínimo.

O passo seguinte foi verificar se o erro não decrescia de forma oscilatória amortecida. Para isso exigiu-se que uma sequência de pontos estivesse dentro da precisão requerida, obtendo-se um resultado inverso ao esperado

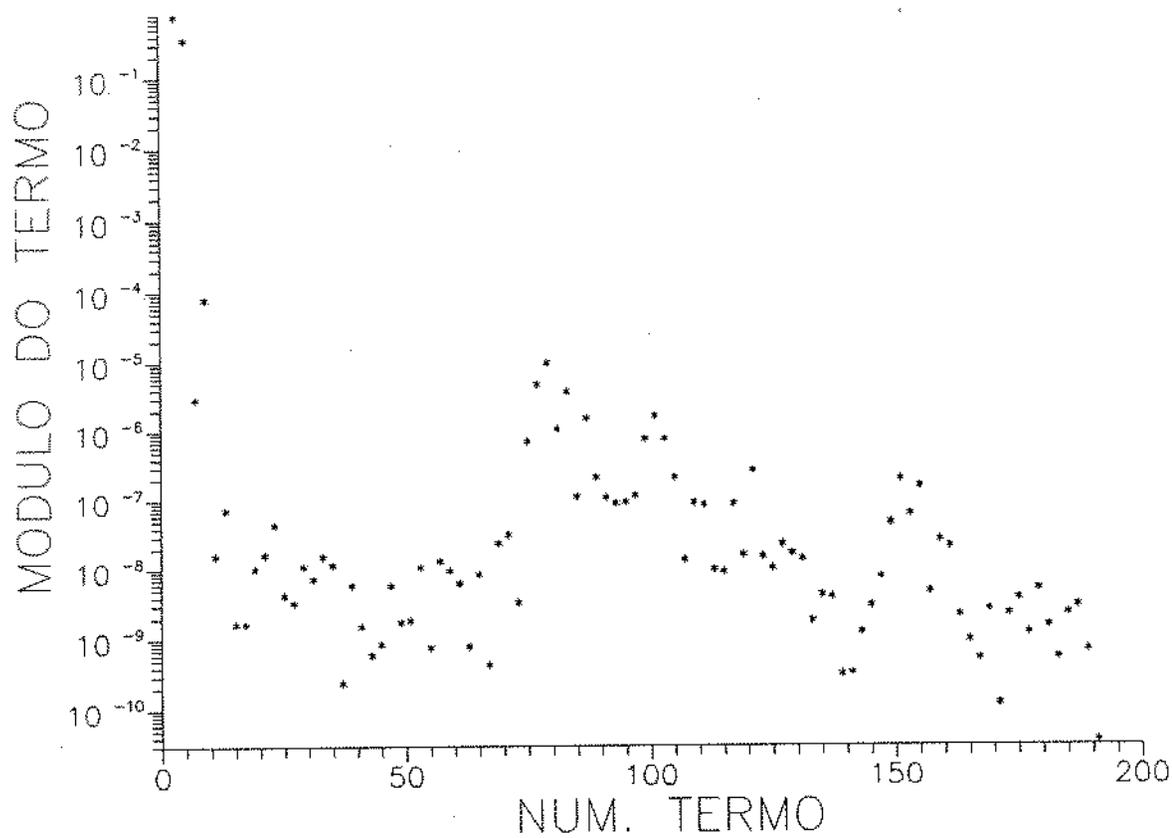
Passou-se então à análise do comportamento dos termos do somatório, que para funções de Bessel modificada de ordem $\frac{1}{3}$, comporta-se tipicamente conforme mostrado na figura (17). Notou-se que os mesmos decrescem em módulo, constantemente, até um determinado valor (V), e em seguida distribuem-se de uma maneira aparentemente aleatória no intervalo ($0 - V$). Tal fato explica o aumento do erro com a melhora na precisão requerida.

Da análise efetuada vale ressaltar dois pontos :

- O ponto V foi sempre atingido com um número relativamente pequeno de termos (≤ 20).

- O erro neste ponto esteve sempre abaixo de 0,1 %.

Figura 17: Módulo dos termos do algoritmo de Crump.



B Apêndice - Solução Semi-Analítica para Geometria Linear

Período de Injeção

A equação convectiva-difusiva que descreve o sistema linear é dada por:

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (110)$$

onde

D é o coeficiente de dispersão hidrodinâmica,

u é a velocidade convectiva do fluido,

C é a concentração do traçador.

Para o sistema em estudo, as condições de contorno e inicial são:

$$\begin{aligned} C(x, t = 0) &= 0, \\ \left[C - \frac{D}{u} \frac{\partial C}{\partial x} \right]_{x=0} &= C_{max}, \\ C(x \rightarrow \infty, t) &= 0. \end{aligned}$$

Assumir-se-a o coeficiente de dispersão hidrodinâmica como $D = D_0 |U|$, conforme proposto por Brigham e Raimond.

As seguintes variáveis adimensionais serão utilizadas:

$$x_D = \frac{x}{L},$$

$$U_D = \frac{uL}{D},$$

$$t_D = \frac{tu}{L},$$

e:

$$C_D = \frac{C - C_{min}}{C_{max} - C_{min}},$$

onde L é um comprimento arbitrário necessário à adimensionalização das variáveis, que neste caso será fixado como sendo o comprimento do meio poroso.

Tem-se então que:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{(C_{max} - C_{min})}{L} \frac{\partial C_D}{\partial x_D},$$

e que:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{(C_{max} - C_{min})}{L^2} \frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2}.$$

Utilizando-se estas relações, a equação (110) pode então ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} - U_D \frac{\partial C_D}{\partial x_D} = U_D \frac{\partial C_D}{\partial t_D}, \quad (111)$$

com as condições de contorno e inicial dadas por:

$$\begin{aligned} C_D(x_D, t_D = 0) &= 0, \\ \left[C_D - \frac{1}{U_D} \frac{dC_D}{dx_D} \right]_{x_D=0} &= 1, \\ C_D(x_D \rightarrow \infty, t_D) &= 0. \end{aligned}$$

A transformada de Laplace da equação (111) produz:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dx_D^2} - U_D \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} = U_D s \bar{C}_D - U_D C(x_D, t_D = 0), \quad (112)$$

e empregando-se a condição inicial definida anteriormente, obtém-se:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dx_D^2} - U_D \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} - U_D s \bar{C}_D = 0. \quad (113)$$

As condições de contorno interna e externa são transformada para:

$$\begin{aligned} \left[\bar{C}_D - \frac{1}{U_D} \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} \right]_{x_D=0} &= \frac{1}{s}, \\ \bar{C}_D(x_D \rightarrow \infty, s) &= 0. \end{aligned}$$

A solução da equação (113) é dada por:

$$\bar{C}_D = a_1 e^{r_1 x_D} + a_2 e^{r_2 x_D},$$

onde:

$$r_1 = \frac{U_D + \sqrt{U_D^2 + 4U_D s}}{2},$$

e:

$$r_2 = \frac{U_D - \sqrt{U_D^2 + 4U_D s}}{2}.$$

Da condição de contorno externa vem que $a_1 = 0$.

A equação (113) se reduz a:

$$\bar{C}_D = a_2 e^{r_2 x_D}. \quad (114)$$

Sabendo-se que:

$$\bar{C}_D - \frac{1}{U_D} \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} = a_2 e^{r_2 x_D} \left(1 - \frac{r_2}{U_D}\right),$$

da condição de contorno interna resulta:

$$\left[\bar{C}_D - \frac{1}{U_D} \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} \right]_{x_D=0} = a_2 \left(1 - \frac{r_2}{U_D}\right) = \frac{1}{s},$$

obtendo-se:

$$a_2 = \frac{U_D}{s(U_D - r_2)}.$$

A transformada de Laplace da concentração para o período de injeção é então dada por:

$$\bar{C}_D = 2 \frac{e^{\frac{U_D}{2} (1 - \sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}) x_D}}{s \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{s}{U_D}} \right]}. \quad (115)$$

Período de Produção

Para o período de produção, a equação diferencial que descreve o deslocamento de traçador é dada por:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dx_D^2} + U_D \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} = U_D \frac{\partial \bar{C}_D}{\partial t_D}, \quad (116)$$

com as seguintes condições de contorno e inicial:

$$\begin{aligned} \bar{C}_D(x_D, t_D = 0) &= C_0(x_D), \\ \frac{d\bar{C}_D}{dx_D}(x_D = 0, t_D > 0) &= 0, \\ \bar{C}_D(x_D \rightarrow \infty, t_D) &= 0. \end{aligned}$$

onde $C_0(x_D)$ é a concentração obtida no final do período de injeção.

No espaço de Laplace, tem-se que:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dx_D^2} + U_D \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} - U_D s \bar{C}_D = -U_D C_0(x_D). \quad (117)$$

A solução dessa equação pode ser obtida pelo método da variação dos parâmetros.

A solução da equação homogênea é dada por:

$$\bar{C}_D = a_1 e^{-\frac{U_D}{2} (1 + \sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}) x_D} + a_2 e^{-\frac{U_D}{2} (1 - \sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}) x_D}.$$

O método da variação dos parâmetros consiste na obtenção de coeficientes V_1 e V_2 de tal modo que a forma da solução seja similar à solução da equação homogênea, isto é:

$$\bar{C}_D(x_D, s) = V_1 e^{r_1 x_D} + V_2 e^{r_2 x_D}, \quad (118)$$

onde V_1 e V_2 são coeficientes a serem determinados de forma a que satisfaçam:

$$V_1' e^{r_1 x_D} + V_2' e^{r_2 x_D} = 0, \quad (119)$$

sendo:

$$V_i' = \frac{d}{dx_D} [V_i(x_D)].$$

Derivando-se a equação (118) e utilizando-se a condição dada pela equação (119), a equação (117) resulta em:

$$V_1' r_1 e^{r_1 x_D} + V_2' r_2 e^{r_2 x_D} = -U_D C_0(x_D). \quad (120)$$

Resolvendo-se o sistema formado pelas eqs. (119) e (120), obtém-se:

$$V_1' = -\frac{U_D C_0(x_D) e^{-r_1 x_D}}{r_1 - r_2}, \quad (121)$$

$$V_2' = \frac{U_D C_0(x_D) e^{-r_2 x_D}}{r_1 - r_2}. \quad (122)$$

Integrando as equações (121) e (122) obtém-se:

$$V_1 = -\int_0^{x_D} \frac{U_D C_0(x') e^{-r_1 x'}}{r_1 - r_2} dx' + C_1 = -\frac{U_D}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_1 x'} dx' + C_1, \quad (123)$$

$$V_2 = \int_0^{x_D} \frac{U_D C_0(x') e^{-r_2 x'}}{r_1 - r_2} dx' + C_2 = \frac{U_D}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' + C_2. \quad (124)$$

A equação (118) resulta em:

$$\begin{aligned} \bar{C}_D(x_D, s) = & - \frac{U_D e^{r_1 x_D}}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_1 x'} dx' + C_1 e^{r_1 x_D} + \\ & + \frac{U_D e^{r_2 x_D}}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' + C_2 e^{r_2 x_D}. \end{aligned} \quad (125)$$

Da condição de contorno externa vem que:

$$C_2 = \frac{U_D}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D \rightarrow \infty} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx'.$$

Da equação (125) pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} = & - \frac{U_D e^{r_1 x_D}}{r_1 - r_2} \left[r_1 \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_1 x'} dx' + e^{-r_1 x_D} C_0(x_D) \right] + C_1 r_1 e^{r_1 x_D} + \\ & + \frac{U_D e^{r_2 x_D}}{r_1 - r_2} \left[r_2 \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' + e^{-r_2 x_D} C_0(x_D) \right] + C_2 r_2 e^{r_2 x_D}, \end{aligned} \quad (126)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}_D}{dx_D} = & - \frac{U_D e^{r_1 x_D}}{r_1 - r_2} r_1 \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_1 x'} dx' - \frac{U_D C_0(x_D)}{r_1 - r_2} + C_1 r_1 e^{r_1 x_D} + \\ & + \frac{U_D e^{r_2 x_D}}{r_1 - r_2} r_2 \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' + \frac{e^{r_2 x_D} C_0(x_D)}{r_1 - r_2} + C_2 r_2 e^{r_2 x_D}. \end{aligned} \quad (127)$$

Da condição de contorno interna vem que:

$$\frac{d\bar{C}_D}{dx_D}\Big|_{x_D=0} = C_1 r_1 + C_2 r_2 = 0,$$

$$C_1 = -\frac{r_2}{r_1} C_2,$$

resultando em:

$$C_1 = \frac{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} + 1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}} \int_0^{x_D \rightarrow \infty} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx'.$$

A equação (125) fica então:

$$\begin{aligned} \bar{C}_D(x_D, s) &= -\frac{U_D e^{r_1 x}}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_1 x'} dx' + \frac{U_D e^{r_2 x_D}}{r_1 - r_2} \int_0^{x_D} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}} \int_0^{x_D \rightarrow \infty} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' \left(e^{r_2 x_D} + \frac{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} + 1} e^{r_1 x_D} \right). \end{aligned} \quad (128)$$

Na face produtora, $x_D = 0$, tem-se que:

$$\bar{C}_D(0, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}}} \int_0^{x_D \rightarrow \infty} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx' \left(1 + \frac{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} + 1} \right), \quad (129)$$

e finalmente:

$$\bar{C}_D(0, s) = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4s}{U_D}} + 1} \int_0^{x_D \rightarrow \infty} C_0(x') e^{-r_2 x'} dx'. \quad (130)$$

C Apêndice - Solução Numérica Para Geometria Linear

Período de Injeção

Em forma adimensional, a equação que descreve o período de injeção é dada por:

$$\frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} - U_D \frac{\partial C_D}{\partial x_D} = U_D \frac{\partial C_D}{\partial t_D}, \quad (131)$$

com as condições de contorno e inicial dadas por:

$$\begin{aligned} C_D(x_D, t_D = 0) &= 0, \\ \left[C_D - \frac{1}{u_D} \frac{\partial C_D}{\partial x_D} \right]_{x_D=0} &= 1, \\ C_D(x_D = 1, t_D) &= 0. \end{aligned}$$

Os operadores espaciais da equação (131) serão discretizados por intermédio de uma curva interpolante obtida a partir da seguinte equação:

$$\frac{d^2 C_D}{dx_D^2} - U_D \frac{dC_D}{dx_D} = U_D K_1 = L_x(C_D) \quad (132)$$

onde K_1 é uma constante, e C_D é função somente da variável espacial x_D .

Note que a equação (132) deriva da equação (131), onde o termo transiente é considerado constante.

A solução dessa equação é a soma de uma solução particular da equação não homogênea com a solução geral da homogênea associada.

A solução da equação não homogênea é buscada na forma:

$$C_D = A x_D^2 + B x_D + E, \quad (133)$$

e tem-se então que:

$$\frac{dC_D}{dx_D} = 2 A x_D + B,$$

e que:

$$\frac{d^2 C_D}{dx_D^2} = 2 A.$$

Substituindo-se tais derivadas na equação (132), tem-se que:

$$2 A - 2 A U_D x_D - U_D B = K_1 U_D,$$

o que produz $A = 0$ e $B = -K_1$.

Como E é arbitrário, faz-se $E = 0$ e a equação (133) reduz-se a:

$$C_D = -K_1 x_D.$$

A equação homogênea associada é dada por:

$$\frac{d^2 C_D}{dx_D^2} - U_D \frac{dC_D}{dx_D} = 0. \quad (134)$$

Definindo-se:

$$y = \frac{dC_D}{dx_D},$$

tem-se que:

$$\frac{dy}{dx_D} = \frac{d^2 C_D}{dx_D^2}.$$

Substituindo-se tais definições na eq. (134), resulta:

$$\frac{dy}{dx_D} - U_D y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = U_D dx_D,$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{x_{D0}}^{x_D} U_D dx_D,$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = U_D (x_D - x_{D0}),$$

e:

$$y = y_0 e^{U_D (x_D - x_{D0})} = y_0 e^{U_D x_D} e^{-U_D x_{D0}}.$$

Porém, da definição de y e da equação anterior vem:

$$dC_D = y_0 e^{U_D x_D} e^{-U_D x_{D0}} dx_D,$$

$$\int_{C_{D0}}^{C_D} dC_D = \int_{x_{D0}}^{x_D} y_0 e^{U_D x_D} e^{-U_D x_{D0}} dx_D,$$

$$C_D = K_2 e^{U_D x_D} + K_3, \quad (135)$$

onde:

$$K_2 = y_0 \frac{e^{U_D x_{D0}}}{U_D},$$

e:

$$K_3 = C_{D0} - y_0 \frac{e^{U_D x_{D0}}}{U_D}.$$

A solução geral fica então:

$$C_D = -K_1 x_D + K_2 e^{U_D x_D} + K_3. \quad (136)$$

Os parâmetros K_1 , K_2 e K_3 , podem ser obtidos ajustando-se a curva interpolante definida pela equação (136) aos pontos nodais $i - 1$, i e $i + 1$.

Com isto, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
& - K_1 x_{D(i-1)} + K_2 e^{U_D x_{D(i-1)}} + K_3 = C_{D(i-1)} \\
& - K_1 x_{D(i)} + K_2 e^{U_D x_{D(i)}} + K_3 = C_{D(i)} \\
& - K_1 x_{D(i+1)} + K_2 e^{U_D x_{D(i+1)}} + K_3 = C_{D(i+1)}
\end{aligned} \tag{137}$$

Resolvendo o sistema e isolando K_1 chega-se a:

$$K_1 = \frac{(C_{D(i)} - C_{D(i-1)})(m_i - m_{i+1}) - (C_{D(i)} - C_{D(i+1)})(m_i - m_{i-1})}{(n_i - n_{i-1})(m_i - m_{i+1}) - (n_i - n_{i+1})(m_i - m_{i-1})} = L_x(C_D) \tag{138}$$

onde:

$$m_i = e^{U_D x_{D(i)}} \quad e \quad n_i = -x_{D(i)}.$$

Não há necessidade de se determinar K_2 e K_3 , pois da equação (132) tem-se que $L_x(C_D) = K_1 * U_D$. Pode-se então escrever a equação (138) na forma:

$$L_x(C_D) = A_i^- C_{D(i-1)} - (A_i^- + A_i^+) C_{D(i)} + A_i^+ C_{D(i+1)}, \tag{139}$$

onde:

$$A_i^- = \frac{(m_{i+1} - m_i)}{p_i},$$

$$A_i^+ = \frac{(m_i - m_{i-1})}{p_i},$$

e:

D Apêndice - Solução Semi-Analítica para Geometria Radial

Período de Injeção

A equação convectiva-difusiva que descreve o escoamento miscível em um sistema radial é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r D(r) \frac{\partial C}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_m(r) C] = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (141)$$

onde:

$D(r)$ é o coeficiente de dispersão hidrodinâmica,

$v_m(r)$ é a velocidade convectiva do fluido,

C é a concentração do traçador.

Para o sistema em estudo as condições de contorno e inicial são:

$$\begin{aligned} C(r, t = 0) &= 0, \\ \left[C - \frac{D}{u} \frac{dC}{dr} \right]_{r=r_w} &= C_{max}, \\ C(r \rightarrow \infty, t) &= 0. \end{aligned}$$

As seguintes variáveis adimensionais serão utilizadas:

$$r_D = \frac{r}{r_w},$$

e:

$$C_D = \frac{C - C_{min}}{C_{max} - C_{min}}.$$

Das definições das variáveis adimensionais, tem-se que:

$$dr = r_w dr_D,$$

e que:

$$dC_D (C_{max} - C_{min}) = dC,$$

$$d^2 C_D (C_{max} - C_{min}) = d^2 C.$$

Substituindo-se tais diferenciais na eq. (141), e manipulando-se algébricamente o resultado, obtém-se:

$$\frac{r_w}{r} \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[\frac{r}{r_w} D(r) \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \frac{1}{r_w} \right] - \frac{r_w}{r} \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[\frac{r}{r_w} v_m(r) C_D \right] = \frac{\partial C_D}{\partial t}, \quad (142)$$

ou:

$$\frac{1}{r_D} \frac{1}{r_w^2} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[r_D D(r) \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial r_D} [r_D v_m(r) C_D] = \frac{\partial C_D}{\partial t}. \quad (143)$$

Definindo-se:

$$\alpha = \frac{q}{2\pi\phi h},$$

onde h é a espessura do meio poroso e ϕ a porosidade, pode-se selecionar as demais variáveis adimensionais para o caso radial:

e:

$$D_D(r_D) = \frac{1}{\alpha} D(r),$$

$$t_D = \frac{\alpha t}{r_w^2}.$$

A equação (143) pode ser reescrita na forma adimensional por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D}{\partial t_D}. \quad (144)$$

As condições inicial e de fronteira tornam-se:

$$\begin{aligned} C_D(r_D, t_D = 0) &= 0, \\ \left[C_D - D_D r_D \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} &= 1, \\ C_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) &= 0. \end{aligned}$$

Devido a complexidade da equação (144) sua solução será encontrada no espaço de Laplace, com posterior retorno ao domínio do tempo por inversão numérica através do algoritmo de Crump.

A transformada de Laplace da eq. (144) produz:

$$\frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = -C_D(r_D, 0) \quad (145)$$

Aplicando-se a condição inicial, a eq. (145) reduz-se à:

$$\frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = 0, \quad (146)$$

e as condições de contorno se tornam:

$$\left[\bar{C}_D - D_D r_D \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right]_{r_D=1} = \frac{1}{s},$$

$$\bar{C}_D(r_D \rightarrow \infty, s) = 0.$$

Expandindo a equação (146), tem-se:

$$\frac{1}{r_D} \left[D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} + r_D \frac{dD_D}{dr_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} + r_D D_D(r_D) \frac{d^2\bar{C}_D}{dr_D^2} \right] - \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = 0, \quad (147)$$

ou ainda que:

$$D_D(r_D) \frac{d^2\bar{C}_D}{dr_D^2} + \left[\frac{D_D(r_D)}{r_D} + \frac{dD_D}{dr_D} - \frac{1}{r_D} \right] \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = 0. \quad (148)$$

Dividindo-se a equação (148) por $D_D(r_D)$ e manipulando-se algebricamente o resultado, chega-se a:

$$\frac{d^2\bar{C}_D}{dr_D^2} + \left[\frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)} + \frac{D_D(r_D) - 1}{D_D(r_D)r_D} \right] \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - \frac{s\bar{C}_D}{D_D(r_D)} = 0, \quad (149)$$

a qual é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes variáveis, podendo ser resolvida através da seguinte transformação proposta por Cole (1951):

$$\bar{C}_D = \phi e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}, \quad (150)$$

onde:

$$\beta = \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)} + \frac{D_D(r_D) - 1}{D_D(r_D)r_D}. \quad (151)$$

Da definição da equação (150), tem-se que:

$$\frac{d\bar{C}_D}{dr_D} = \frac{d\phi}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \frac{1}{2} \phi \beta e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}, \quad (152)$$

e que:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} = \frac{d^2 \phi}{dr_D^2} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \beta \left[\frac{d\phi}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \frac{1}{4} \phi \beta e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} \right] - \frac{1}{2} \phi \frac{d\beta}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}. \quad (153)$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $\frac{1}{4} \phi \beta^2 e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}$ na eq. (153), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} &= \frac{d^2 \phi}{dr_D^2} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \beta \underbrace{\left[\frac{d\phi}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \frac{1}{2} \phi \beta e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} \right]}_{\frac{d\bar{C}_D}{dr_D}} + \\ &\quad - \frac{1}{4} \phi \beta^2 e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \frac{1}{2} \phi \frac{d\beta}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}, \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} = \frac{d^2 \phi}{dr_D^2} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \beta \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - \frac{1}{4} \phi \beta^2 e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \frac{1}{2} \phi \frac{d\beta}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}. \quad (154)$$

Substituindo-se as equações (152) e (154) na equação (149) resulta:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \beta \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - \left[\frac{1}{4} \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dr_D} \right] \phi e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} + \beta \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - \frac{s \bar{C}_D}{D_D(r_D)} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} = 0. \quad (155)$$

Dividindo a equação (155) por $e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}$, tem-se:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} - \phi \left[\frac{1}{4} \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dr_D} + \frac{s}{D_D(r_D)} \right] = 0. \quad (156)$$

Definindo-se:

$$\lambda = \frac{1}{4} \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dr_D} + \frac{s}{D_D(r_D)}, \quad (157)$$

a equação (156) fica então:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} - \lambda \phi = 0. \quad (158)$$

Da definição dada pela eq. (150), vem que:

$$\phi(r_D = 1, s) = \bar{C}_D(r_D = 1, s) e^{\frac{1}{2} \int_1^1 \beta dr_D} = \bar{C}_D(r_D = 1, s),$$

o que implica nas seguintes condições de contorno interna e externa:

$$\left[\phi - D_D r_D \frac{d\phi}{dr_D} \right]_{r_D=1} = \frac{1}{s},$$

$$\phi(r_D \rightarrow \infty, s) = 0.$$

É importante analisar o comportamento do coeficiente λ na eq. (158). Da definição de β , eq. (151), obtém-se:

$$\frac{d\beta}{dr_D} = \frac{\frac{dD_D}{dr_D} D_D(r_D) - \frac{dD_D^2}{dr_D}}{D_D(r_D)^2} + \frac{\frac{dD_D}{dr_D} D_D(r_D) r_D - \left(D_D(r_D) + \frac{dD_D}{dr_D} r_D \right) (D_D(r_D) - 1)}{D_D(r_D)^2 r_D^2},$$

$$\frac{d\beta}{dr_D} = \frac{\frac{d^2 D_D}{dr_D^2}}{D_D(r_D)} - \frac{\frac{dD_D^2}{dr_D}}{D_D(r_D)^2} + \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D) r_D} - \frac{1}{r_D^2} + \frac{1}{D_D(r_D) r_D^2} - \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D) r_D} + \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)^2 r_D},$$

e:

$$\beta^2 = \frac{\frac{dD_D^2}{dr_D}}{D_D(r_D)^2} + \frac{2 \frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D) r_D} - \frac{2 \frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)^2 r_D} + \frac{1}{r_D^2} - \frac{2}{D_D(r_D) r_D^2} + \frac{1}{D_D(r_D)^2 r_D^2}.$$

Deste modo, na eq. (157) tem-se que:

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{\frac{dD_D^2}{dr_D}}{4 D_D(r_D)^2} + \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{2 D_D(r_D) r_D} - \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{2 D_D(r_D)^2 r_D} + \frac{1}{4 r_D^2} - \frac{1}{2 D_D(r_D) r_D^2} + \\ & + \frac{1}{4 D_D(r_D) r_D^2} + \frac{\frac{d^2 D_D}{dr_D^2}}{2 D_D(r_D)} - \frac{\frac{dD_D^2}{dr_D}}{2 D_D(r_D)^2} + \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{2 D_D(r_D) r_D} - \frac{1}{2 r_D^2} + \\ & + \frac{1}{2 D_D(r_D) r_D^2} - \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{2 D_D(r_D) r_D} + \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{2 D_D(r_D)^2 r_D} + \frac{s}{D_D(r_D)}, \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\lambda = \frac{\frac{d^2 D_D}{dr_D^2}}{2 D_D(r_D)} - \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)} \right] \left[\frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{2 D_D(r_D)} - \frac{1}{r_D} \right] + \frac{1}{4 r_D^2} \left[\frac{1}{D_D(r_D)^2} - 1 \right] + \frac{s}{D_D(r_D)}. \quad (159)$$

A solução da equação (158) é função de λ , onde os seguintes casos devem ser considerados:

- $\lambda > 0$ a equação apresenta solução exponencial,

- $\lambda < 0$ a equação apresenta solução periódica.

Portanto, λ deve ser especificado antes que a equação seja solucionada.

Como λ é função de $D_D(r_D)$, é importante que se conheça o comportamento da dispersão hidrodinâmica para solucionar a equação diferencial que rege o sistema.

Raimondi (1959) e Brigham (1961) propuseram para o cálculo de $D_D(r_D)$ uma equação do tipo:

$$D(r) = D_m + D_0 |v_m(r)| \quad (160)$$

onde D_m é a constante de difusão molecular e D_0 é a constante de dispersividade.

Definindo-se:

$$D_{0D} = \frac{D_0}{r_w},$$

e:

$$D_{mD} = \frac{D_m}{r_w},$$

a relação (160) se torna:

$$D_D(r_D) = D_{mD} + \frac{D_{0D}}{r_D},$$

donde:

$$\frac{dD_D}{dr_D} = -\frac{D_{0D}}{r_D^2},$$

e:

$$\frac{d^2 D_D}{dr_D^2} = \frac{2 D_{0D}}{r_D^3}.$$

Mas da equação (159) tem-se que:

$$\lambda = \frac{2 D_{0D} \frac{1}{r_D}}{2 \left(D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D} \right)} - \frac{1}{2} \frac{D_{0D} \frac{1}{r_D}}{D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D}} \left[\frac{D_{0D} \frac{1}{r_D}}{2 \left(D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D} \right)} - \frac{1}{r_D} \right] + \frac{1}{4 r_D^2} \left[\frac{1}{\left(D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D} \right)^2} - 1 \right] + \frac{s}{D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D}},$$

ou:

$$\lambda = \frac{D_{0D} \frac{1}{r_D}}{D_{mD} r_D + D_{0D}} - \frac{1}{2} \frac{D_{0D} \frac{1}{r_D}}{D_{mD} r_D + D_{0D}} \left(\frac{1}{2} \frac{D_{0D} \frac{1}{r_D}}{D_{mD} r_D + D_{0D}} - \frac{1}{r_D} \right) + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(D_{mD} r_D + D_{0D} \right)^2} - \frac{1}{r_D^2} \right] + \frac{s}{D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D}},$$

ou ainda:

$$\lambda = \frac{D_{0D} \frac{1}{r_D} 4 \left(D_{mD} r_D + D_{0D} \right) - D_{0D}^2 \frac{1}{r_D^2} - 2 D_{0D} \frac{1}{r_D} \left(D_{mD} r_D + D_{0D} \right) + 1 - \left(D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D} \right)}{4 \left(D_{mD} r_D + D_{0D} \right)^2} + \frac{s}{D_{mD} + D_{0D} \frac{1}{r_D}},$$

e finalmente:

$$\lambda = \frac{1 - D_{mD}^2}{4 \left(D_{mD} r_D + D_{0D} \right)^2} + \frac{s r_D}{D_{mD} r_D + D_{0D}}. \quad (161)$$

Substituindo-se a equação (161) na equação(158) tem-se que:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} - \left[\frac{1 - D_{mD}^2}{4 (D_{mD} r_D + D_{0D})^2} + \frac{s r_D}{D_{mD} r_D + D_{0D}} \right] \phi = 0, \quad (162)$$

com as condições de contorno:

$$\left[\phi - D_{0D} r_D \frac{d\phi}{dr_D} \right]_{r_D=1} = \frac{1}{s},$$

$$\phi(r_D \rightarrow \infty, s) = 0.$$

A equação (162) descreve o fluxo radial dispersivo não uniforme, de um traçador em um meio poroso homogêneo radial.

É uma equação geral e pode sofrer simplificações distintas a depender do modelo que se pretende descrever.

Basicamente, pode ser adaptada a tres casos distintos, a depender do fluxo em estudo possuir velocidade convectiva baixa, moderada ou alta.

Esta classificação da velocidade do fluxo se baseia na preponderância de um dos termos da equação (160).

Devido ao fato das velocidades envolvidas em testes similares aos estudados no presente trabalho, o termo $D_0 |v_m|$ é muito maior que o termo D_{mD} , e portanto a equação (162) pode, sem maiores prejuizos à precisão, ser adaptada ao caso de velocidade convectiva alta.

Quando a velocidade convectiva é alta, a difusão molecular deixa de ser importante no coeficiente de dispersão hidrodinâmica, isto é $D_0 |v_m| \gg D_{mD}$.

Desta forma, simplifica-se a equação (160) para:

$$D_D(r_D) \simeq \frac{D_{0D}}{r_D}, \quad (163)$$

e a equação (162) se reduz a:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} - \left[\frac{1}{4 D_{0D}^2} + \frac{s r_D}{D_{0D}} \right] \phi = 0, \quad (164)$$

com as condições de contorno:

$$\phi(r_D = 1, s) = \phi_w(s),$$

$$\phi(r_D \rightarrow \infty, s) = 0.$$

Aplicando-se na equação (164) a seguinte transformação:

$$\varphi(r_D, s) = \frac{1}{4 D_{0D}^2} + \frac{s r_D}{D_{0D}}, \quad (165)$$

a qual produz:

$$\frac{d\varphi}{dr_D} = \frac{s}{D_{0D}}, \quad (166)$$

a equação (164) se reduz a:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dr_D} \right)^2 - \varphi \phi = 0, \quad (167)$$

ou:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \left(\frac{s}{D_{0D}} \right)^2 - \varphi \phi = 0. \quad (168)$$

Dividindo-se a equação (168) por $\left(\frac{s}{D_{0D}} \right)^2$, tem-se:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} - \left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^2 \varphi \phi = 0. \quad (169)$$

A equação (169) é uma equação de Airy do tipo $\omega^2 - Z\omega = 0$ (Abramowitz - pg. 446/451), cuja solução é uma combinação linear das funções de Airy $A_i(Z)$ e $B_i(Z)$, isto é:

$$\phi = E A_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi \right] + F B_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi \right], \quad (170)$$

onde E e F são coeficientes a serem determinados através das condições de fronteira.

Utilizando-se a condição de contorno externa $\phi(r_D \rightarrow \infty, s) = 0$ tem-se que:

$$F = 0 \quad \text{pois} \quad B_i(x \rightarrow \infty) = \infty.$$

Portanto, aplicando-se este resultado a eq. (170), obtém-se:

$$\frac{d\phi}{dr_D} = E \frac{d\varphi}{dr_D} A_i' \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi \right].$$

Da condição de contorno interna resulta:

$$\left[\phi - D_D r_D \frac{d\phi}{dr_D} \right]_{r_D=1} = E \left\{ A_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] - s A_i' \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] \right\} = \frac{1}{s},$$

o que fornece:

$$E = \frac{1}{s \left\{ A_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] - s A_i' \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] \right\}}. \quad (171)$$

A solução da equação (170) fica então:

$$\phi(r_D) = \frac{A_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi(r_D) \right]}{s \left\{ A_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] - s A_i' \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] \right\}}. \quad (172)$$

Com a simplificação definida pela eq. (163), o coeficiente β definido pela equação (151) se torna:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)} + \frac{D_D(r_D) - 1}{D_D(r_D) r_D} = \\ &= \frac{-\frac{D_{0D}}{r_D^2}}{\frac{D_{0D}}{r_D}} + \frac{\frac{D_{0D}}{r_D} - 1}{D_{0D}} = -\frac{1}{r_D} + \frac{1}{r_D} - \frac{1}{D_{0D}} = -\frac{1}{D_{0D}} \end{aligned}$$

Portanto a eq. (150) se reduz a:

$$\bar{C}_D = \phi e^{\left(\frac{r_D - 1}{2D_{0D}} \right)}, \quad (173)$$

ou:

$$\phi = \frac{\bar{C}_D}{e^{\left(\frac{r_D - 1}{2D_{0D}} \right)}}.$$

Tal valor pode ser substituído na eq. (172), resultando:

$$\frac{\bar{C}_D}{e^{\left(\frac{r_D - 1}{2D_{0D}} \right)}} = \frac{1}{s} \frac{A_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi(r_D) \right]}{s \left\{ A_i \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] - s A_i' \left[\left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] \right\}}, \quad (174)$$

ou ainda:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{s} e^{\left(\frac{r_D-1}{2D_0D}\right)} \frac{A_i \left[\left(\frac{D_0D}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi(r_D) \right]}{s \left\{ A_i \left[\left(\frac{D_0D}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] - s A_i' \left[\left(\frac{D_0D}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w \right] \right\}}. \quad (175)$$

Pode-se escrever a função de Airy ($A_i(x)$) e sua derivada em termos de funções de Bessel modificada através da equação⁽¹⁴⁾:

$$A_i(Z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Z}{3}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} Z^{\frac{3}{2}} \right), \quad (176)$$

e:

$$A_i'(Z) = \frac{-1}{\pi} \frac{Z}{\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} Z^{\frac{3}{2}} \right). \quad (177)$$

Dessa forma a equação (175) fica:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{s} e^{\left(\frac{r_D-1}{2D_0D}\right)} \frac{\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\omega\varphi}{3}} K_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} (\omega\varphi)^{\frac{3}{2}} \right]}{\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\omega\varphi_w}{3}} K_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} (\omega\varphi_w)^{\frac{3}{2}} \right] - s \frac{-1}{\pi} \frac{\omega\varphi_w}{\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}} \left[\frac{2}{3} (\omega\varphi_w)^{\frac{3}{2}} \right]}, \quad (178)$$

onde:

$$\omega = \left(\frac{D_0D}{s} \right)^{\frac{2}{3}}$$

A solução para concentração de traçador, no espaço de Laplace, é finalmente dada por:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{s} e^{\left(\frac{r_D-1}{2D_0D}\right)} \frac{\sqrt{\left(\frac{D_0D}{s}\right)^{\frac{2}{3}} \varphi} K_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{D_0D}{s}\right) \varphi^{\frac{3}{2}} \right]}{\sqrt{\left(\frac{D_0D}{s}\right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w} K_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{D_0D}{s}\right) \varphi_w^{\frac{3}{2}} \right] + s \left(\frac{D_0D}{s}\right)^{\frac{2}{3}} \varphi_w K_{\frac{2}{3}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{D_0D}{s}\right) \varphi_w^{\frac{3}{2}} \right]} \quad (179)$$

Período de Produção

Invertendo-se o sentido de fluxo, a equação diferencial para o período de produção se torna:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right] + \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D}{\partial t_D}. \quad (180)$$

As condições inicial e de contorno para o período de produção são dadas por:

$$C_D(r_D, t_D = 0) = C_0(r_D),$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial r_D}(r_D = 1, t_D > 0) = 0,$$

$$C_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0,$$

onde C_0 é a concentração no fim do período de injeção.

No espaço de Laplace, a eq. (180) se torna:

$$\frac{1}{r_D} \frac{D}{dr_D} \left[r_D D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right] + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = -C_0, \quad (181)$$

ou ainda:

$$\frac{1}{r_D} \left[D_D(r_D) \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} + r_D \frac{dD_D}{dr_D} \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} + r_D D_D(r_D) \frac{d^2\bar{C}_D}{dr_D^2} + \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} \right] - s\bar{C}_D = -C_0, \quad (182)$$

e:

$$D_D(r_D) \frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} + \left[\frac{D_D(r_D)}{r_D} + \frac{dD_D}{dr_D} + \frac{1}{r_D} \right] \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - s\bar{C}_D = -C_0. \quad (183)$$

Dividindo-se a equação (183) por $D_D(r_D)$ e manipulando-se algebricamente o resultado chega-se a:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} + \left[\frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)} + \frac{D_D(r_D) + 1}{D_D(r_D)r_D} \right] \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - \frac{s\bar{C}_D}{D_D(r_D)} = -\frac{1}{D_D(r_D)} C_0. \quad (184)$$

Aplicando-se a transformação proposta por Cole, definida na equação (150), e observando-se que com a inversão do sentido de fluxo o coeficiente β definido na equação (151) se torna:

$$\beta = \frac{\frac{dD_D}{dr_D}}{D_D(r_D)} + \frac{D_D(r_D) + 1}{D_D(r_D)r_D}, \quad (185)$$

tem-se que:

$$\frac{d\bar{C}_D}{dr_D} = \frac{d\phi}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \frac{1}{2} \phi \beta e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}, \quad (186)$$

e que:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} = \frac{d^2 \phi}{dr_D^2} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \beta \left[\frac{d\phi}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} - \frac{1}{4} \phi \beta e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} \right] - \frac{1}{2} \phi \frac{d\beta}{dr_D} e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}. \quad (187)$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $\frac{1}{4} \phi \beta^2 e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}$ nesta equação e dividindo-se o resultado por $e^{-\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}$, tem-se:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} - \phi \left[\frac{1}{4} \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dr_D} + \frac{s}{D_D(r_D)} \right] = -\frac{1}{D_D(r_D)} C_0 e^{\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D}. \quad (188)$$

Para altas velocidades convectivas, e por um processo análogo ao desenvolvido para o período de injeção, obtém-se:

$$\beta = \frac{1}{D_{0D}},$$

e:

$$e^{\frac{1}{2} \int_1^{r_D} \beta dr_D} = e^{\frac{r_D-1}{2D_{0D}}}.$$

Estes resultados podem ser substituídos na eq. (188), resultando:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} - \left[\frac{1}{4 D_{0D}^2} + \frac{s r_D}{D_{0D}} \right] \phi = -\frac{r_D}{D_{0D}} C_0 e^{\frac{r_D-1}{2D_{0D}}}. \quad (189)$$

Definindo-se:

$$\Psi = C_0 e^{\frac{r_D-1}{2D_{0D}}},$$

a eq. (189) se reduz a:

$$\frac{d^2 \phi}{dr_D^2} - \left[\frac{1}{4 D_{0D}^2} + \frac{s r_D}{D_{0D}} \right] \phi = -\frac{r_D}{D_{0D}} \Psi, \quad (190)$$

e as condições de contorno interna e externa se tornam respectivamente:

$$\left. \frac{d\phi}{dr_D} \right|_{r_D=1} = 0,$$

$$\phi(r_D \rightarrow \infty, s) = 0.$$

Definindo-se o coeficiente da eq. (190) como:

$$\varphi(r_D, s) = \frac{1}{4 D_{0D}^2} + \frac{s r_D}{D_{0D}}. \quad (191)$$

tal que:

$$\frac{d\varphi}{dr_D} = \frac{s}{D_{0D}},$$

a eq. (190) transforma-se em:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dr_D} \right)^2 - \varphi \phi = -\frac{r_D}{D_{0D}} \Psi, \quad (192)$$

ou:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \left(\frac{s}{D_{0D}} \right)^2 - \varphi \phi = -\frac{r_D}{D_{0D}} \Psi. \quad (193)$$

Dividindo-se a equação (193) pelo termo $\left(\frac{s}{D_{0D}} \right)^2$, obtém-se:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} - \left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^2 \varphi \phi = - \left(\frac{D_{0D}}{s} \right)^2 \frac{r_D}{D_{0D}} \Psi, \quad (194)$$

ou:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} - \zeta^2 \varphi \phi = \zeta^2 \frac{r_D}{D_{0D}} \Psi, \quad (195)$$

onde:

$$\zeta = \frac{D_{0D}}{s}.$$

Em termos da nova variável φ , definida pela eq. (191), as condições de contorno interna e externa tornam-se respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\varphi} \Big|_{\varphi(r_D=1)} &= 0, \\ \phi(\varphi(r_D \rightarrow \infty), s) &= 0. \end{aligned}$$

A equação (195) é não homogênea, linear e de segunda ordem. Para solucioná-la definem-se os operadores:

$$L = \frac{d^2}{d\varphi^2} - \zeta^2 \varphi, \quad (196)$$

e:

$$U = \frac{d}{d\varphi} - \frac{\zeta}{2D_{0D}}. \quad (197)$$

Isto posto, a eq. (195) pode ser escrita por:

$$L[\phi(\varphi, s)] = -p(r_D), \quad (198)$$

onde:

$$p(r_D) = \frac{\zeta^2 r_D}{D_{0D}} \Psi,$$

com as condições de contorno:

$$U[\phi(\varphi, s)]_{r_D=1} = 0$$

$$\phi(\varphi(r_D \rightarrow \infty), s) = 0.$$

Usando o método da variação dos parâmetros, pode-se obter a seguinte solução:

$$\phi(\varphi, s) = V_1(\varphi) A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + V_2(\varphi) B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi), \quad (199)$$

onde $A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi)$ e $B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi)$ são as soluções independentes da equação homogênea dada por $L[\phi(\varphi, s)] = 0$, e $V_1(\varphi)$ e $V_2(\varphi)$ são coeficientes a serem determinados, de forma a que satisfaçam:

$$V_1'(\varphi) A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + V_2'(\varphi) B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) = 0, \quad (200)$$

onde:

$$V_i' = \frac{D}{d\varphi} [V_i(\varphi)].$$

Derivando-se a equação (199) em relação a φ obtém-se:

$$\phi' = V_1'(\varphi) A_i(x) + V_2'(\varphi) B_i(x) + V_1(\varphi) A_i'(x) + V_2(\varphi) B_i'(x), \quad (201)$$

onde:

$$x = \left(\frac{D_0 D}{s} \right)^{\frac{2}{3}} \varphi.$$

Substituindo-se a eq. (200) na eq. (201), tem-se:

$$\phi' = V_1(\varphi) A_i'(x) + V_2(\varphi) B_i'(x), \quad (202)$$

cuja derivada em relação a φ produz:

$$\phi'' = V_1'(\varphi) A_i'(x) + V_2'(\varphi) B_i'(x) + V_1(\varphi) A_i''(x) + V_2(\varphi) B_i''(x). \quad (203)$$

Utilizando-se as derivadas dadas pelas eqs. (202) e (203) na equação (198)

tem-se:

$$L[\phi(\varphi, s)] = V_1(\varphi) L[A_i(x)] + V_2(\varphi) L[B_i(x)] + V_1'(\varphi) A_i'(x) + V_2'(\varphi) B_i'(x) = -p(r_D). \quad (204)$$

Uma vez que $A_i(x)$ e $B_i(x)$ são soluções independentes da equação homogênea,

tem-se que:

$$L[A_i(x)] = L[B_i(x)] = 0,$$

e portanto a equação (204) se reduz a:

$$L[\phi(\varphi, s)] = V_1'(\varphi) A_i'(x) + V_2'(\varphi) B_i'(x) = -p(r_D). \quad (205)$$

A equação (199) é solução do problema dado pela eq. (195) sendo porém necessário obedecer as restrições impostas pelas equações (200) e (205).

Essas duas equações fornecem o sistema:

$$V_1'(\varphi) A_i(x) + V_2'(\varphi) B_i(x) = 0,$$

$$V_1'(\varphi) A_i'(x) + V_2'(\varphi) B_i'(x) = -p(r_D),$$

cuja solução produz:

$$V_1'(\varphi) = \frac{B_i(x) p(r_D)}{A_i(x) B_i'(x)_\varphi - B_i(x) A_i'(x)_\varphi}, \quad (206)$$

$$V_2'(\varphi) = -\frac{A_i(x) p(r_D)}{A_i(x) B_i'(x)_\varphi - B_i(x) A_i'(x)_\varphi}. \quad (207)$$

Utilizando-se a definição de Wronskiano¹⁵, tem-se que:

$$W[A_i(x), B_i(x)] = A_i(x) B_i'(x) - B_i(x) A_i'(x).$$

Integrando-se as equações (206) e (207), obtém-se:

$$V_1(\varphi) = \int_{\alpha_0}^{\varphi} V_1'(\varphi') d\varphi' + C_1 = \int_{\alpha_0}^{\varphi} \frac{B_i(x') p(r_D')}{W[A_i(x) B_i(x)]_\varphi} d\varphi' + C_1, \quad (208)$$

e:

$$V_2(\varphi) = -\int_{\alpha_0}^{\varphi} V_2'(\varphi') d\varphi' + C_2 = -\int_{\alpha_0}^{\varphi} \frac{A_i(x') p(r_D')}{W[A_i(x) B_i(x)]_\varphi} d\varphi' + C_2. \quad (209)$$

De acordo com Butkov¹³, tem-se que:

$$W [A_i(x) B_i(x)]_x = \frac{1}{\pi},$$

e portanto:

$$W [A_i(x) B_i(x)]_\varphi = W [A_i(x) B_i(x)] \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{d\varphi}. \quad (210)$$

Substituindo-se a equação (210) nas equações (208) e (209) tem-se que:

$$V_1(\varphi) = \frac{\pi}{\frac{dx}{d\varphi}} \int_{a_0}^{\varphi} B_i(x') p(r'_D) d\varphi' + C_1, \quad (211)$$

$$V_2(\varphi) = -\frac{\pi}{\frac{dx}{d\varphi}} \int_{a_0}^{\varphi} A_i(x') p(r'_D) d\varphi' + C_2, \quad (212)$$

onde, utilizando-se as definições de φ e x dadas anteriormente, obtém-se:

$$V_1(\varphi) = \frac{\pi}{\zeta^{\frac{5}{3}}} \int_{a_0}^{r_D} B_i[\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi(r'_D)] p(r'_D) dr'_D + C_1, \quad (213)$$

e:

$$V_2(\varphi) = -\frac{\pi}{\zeta^{\frac{5}{3}}} \int_{a_0}^{r_D} A_i[\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi(r'_D)] p(r'_D) dr'_D + C_2. \quad (214)$$

Utilizando-se as equações (213) e (214) na equação (199) tem-se:

$$\begin{aligned} \phi(\varphi, s) &= C_1 A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + C_2 B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + \\ &+ \frac{\pi}{\zeta^{\frac{5}{3}}} \int_{a_0}^{r_D} [A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi') - B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi')] p(r'_D) dr'_D, \quad (215) \end{aligned}$$

ou:

$$\phi(\varphi, s) = C_1 A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + C_2 B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + \frac{\pi}{\zeta^{\frac{1}{3}}} \int_{a_0}^{r_D} H(x, x') p(r'_D) dr'_D, \quad (216)$$

onde $H(x, x')$ é a função de Green do sistema em estudo, a qual é definida como:

$$H(x, x') = \det \begin{bmatrix} A_i(x) & B_i(x) \\ A_i(x') & B_i(x') \end{bmatrix}$$

Uma vez que $H(x, x')$ é a função de Green da equação:

$$L[\phi(\varphi, s)] = -p(r_D),$$

e $p(r_D)$ é continuamente distribuída no intervalo $(1, \infty)$, espera-se que uma função $f(\varphi, s)$ dada por:

$$f(\varphi, s) = \int_{a_0}^{r_D} H(x, x') p(r'_D) dr'_D,$$

deva se comportar como:

$$f(\varphi, s) = \int_1^{r_D} H(x, x') p(r'_D) dr'_D$$

com $r_D \rightarrow 1$, ou como:

$$f(\varphi, s) = - \int_{r_D}^{\infty} H(x, x') p(r'_D) dr'_D$$

com $r_D \rightarrow \infty$.

Dessa forma, define-se uma função de Green modificada $g(x, x')$, Miller (1963), Arsenim (1968), de tal forma que:

$$f(\varphi, s) = \int_{r_D=1}^{\infty} g(x, x') p(r'_D) dr'_D,$$

onde:

$$g(x, x') = \begin{bmatrix} H(x, x'); & x > x' \\ -H(x, x') = H(x', x); & x \leq x' \end{bmatrix}.$$

Com essa definição, a eq. (216) se torna:

$$\phi(\varphi, s) = C_1 A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + C_2 B_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + \frac{\pi}{\zeta^{\frac{5}{3}}} \int_{r_D=1}^{\infty} g(x, x') p(r'_D) dr'_D. \quad (217)$$

Aplicando a condição de contorno externa na eq. (217), tem-se que:

$$\phi(\varphi, s) = C_1 A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi) + \frac{\pi}{\zeta^{\frac{5}{3}}} \int_{r_D=1}^{\infty} g(x, x') p(r'_D) dr'_D. \quad (218)$$

Utilizando-se a condição de contorno interna, dada por:

$$U[\phi(\varphi, s)]|_{r_D=1} = 0,$$

a equação (218) transforma-se em:

$$U[\phi(\varphi, s)]|_{r_D=1} = C_1 U[A_i(x)] + \frac{\pi}{\zeta^{\frac{5}{3}}} \int_{r_D=1}^{\infty} U[g(x, x')] |_{r_D=1} p(r'_D) dr'_D = 0,$$

o que produz:

$$C_1 = \frac{\pi}{\zeta^{\frac{5}{3}}} \left[\frac{\int_{r_D=1}^{\infty} U[g(x, x')] |_{r_D=1} p(r'_D) dr'_D}{U[A_i(x)] |_{r_D=1}} \right]. \quad (219)$$

Observando-se que o operador U aplica-se apenas sobre x , uma vez que x' é a variável de integração, e substituindo-se equação (219) na eq. (218) tem-se que:

$$\phi(\varphi, s) = -\frac{\pi}{\zeta^{\frac{2}{3}}} \int_{r_D=1}^{\infty} \left[\frac{A_i(x)U[g(x, x')] - g(x, x')U[A_i(x)]|_{r_D=1}}{U[A_i(x)]|_{r_D=1}} \right] p(r'_D) dr'_D, \quad (220)$$

onde:

$$U[A_i(x)] = \frac{d}{d\varphi} [A_i(x)] - \tau A_i(x),$$

e:

$$\tau = \frac{\zeta}{2D_{0D}} = \frac{1}{2s}.$$

Da relação de $g(x, x')$ anterior, pode-se notar que:

$$U[g(x, x')] = \begin{cases} \det \begin{bmatrix} U[A_i(x)] & U[B_i(x)] \\ A_i(x') & B_i(x') \end{bmatrix} & ; x > x', \\ -\det \begin{bmatrix} U[A_i(x)] & U[B_i(x)] \\ A_i(x') & B_i(x') \end{bmatrix} & ; x \leq x'. \end{cases}$$

A equação (220) pode então ser reescrita como:

$$\phi(\varphi, s) = \frac{\pi}{\zeta^{\frac{2}{3}}} \int_{r_D=1}^{\infty} G(x, x') p(r'_D) dr'_D, \quad (221)$$

onde:

$$G(x, x') = \frac{-1}{U[A_i(x)]|_{r_D=1}} \det \begin{bmatrix} A_i(x) & U[A_i(x)]|_{r_D=1} \\ g(x, x') & U[g(x, x')]|_{r_D=1} \end{bmatrix},$$

sendo $G(x, x')$ a função de Green do sistema.

Em termos de $A_i(x)$ e $B_i(x)$, $G(x, x')$ fica:

$$G(x, x') = A_i(x') \left\{ \frac{[A_i'(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x_1)] - \tau [A_i(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i(x_1)]}{A_i'(x_1) - \tau A_i(x_1)} \right\}, \quad (222)$$

onde:

$$A_i'(x) = \frac{d}{d\varphi} [A_i(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi)] = \zeta^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} [A_i(x)],$$

e:

$$[A_i(x)]|_{r_D=1} = A_i(x_1).$$

A equação (222) fica então:

$$G(x, x') = A_i(x') \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A_i'(x_1)_x B_i(x) - A_i(x) B_i'(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A_i'(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\}. \quad (223)$$

Substituindo-se a equação (223) na eq. (221) tem-se:

$$\phi(\varphi, s) = \int_{r_D=1}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A_i'(x_1)_x B_i(x) - A_i(x) B_i'(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A_i'(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\} * A_i(x') \frac{\pi}{\zeta^{\frac{2}{3}}} p(r'_D) dr'_D \quad (x \leq x'). \quad (224)$$

Recordando-se que:

$$p(r_D) = \zeta^2 \frac{r_D}{D_{0D}} C_0 e^{\frac{r_D-1}{2D_{0D}}},$$

a equação (224) torna-se:

$$\begin{aligned} \phi(\varphi, s) &= \int_{r_D=1}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A'_i(x_1)_x B_i(x) - A_i(x) B'_i(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\} * \\ * A_i(x') C_0(r'_D) \frac{\pi \zeta^{\frac{1}{3}}}{D_{0D}} e^{\frac{r'_D-1}{2D_{0D}}} r'_D dr'_D \quad (x \leq x'). \end{aligned} \quad (225)$$

A equação a ser usada para a região $x > x'$ é obtida pela permuta de x com x' na equação(225), resultando:

$$\begin{aligned} \phi(\varphi, s) &= \int_{r_D=1}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A'_i(x_1)_x B_i(x') - A_i(x') B'_i(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x') - A_i(x') B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\} * \\ * A_i(x) C_0(r'_D) \frac{\pi \zeta^{\frac{1}{3}}}{D_{0D}} e^{\frac{r'_D-1}{2D_{0D}}} r'_D dr'_D \quad (x \leq x'). \end{aligned} \quad (226)$$

Em termos da transformada da concentração, as eqs. (225) e (226) se modificam para:

$$\begin{aligned} \bar{C}(\varphi, s) &= \frac{\pi \zeta^{\frac{1}{3}}}{D_{0D}} \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A'_i(x_1)_x B_i(x) - A_i(x) B'_i(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x) - A_i(x) B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\} * \\ &\int_{r_D=1}^{\infty} A_i(x') C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D-r_D}{2D_{0D}}} r'_D dr'_D \quad (x \leq x'), \end{aligned} \quad (227)$$

ou:

$$\bar{C}(\varphi, s) = \frac{\pi \zeta^{\frac{1}{3}}}{D_{0D}} A_i(x) \int_{r_D=1}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta^{\frac{2}{3}} [A'_i(x_1)_x B_i(x') - A_i(x') B'_i(x_1)_x] - \tau [A_i(x_1) B_i(x') - A_i(x') B_i(x_1)]}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1)_x - \tau A_i(x_1)} \right\} * \\ C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D - r_D}{2D_{0D}}} r'_D dr'_D \quad (x > x'). \quad (228)$$

A concentração no poço é obtida fazendo $x = x_{(r_D=1)}$ na equação (227), o que fornece:

$$\bar{C}[\varphi_w, s] = -\frac{\pi \zeta^{\frac{5}{3}} W[A_i(x), B_i(x)]_{x=x_1}}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1) - \tau A_i(x_1)} \int_{r_D=1}^{\infty} A_i(x') C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D - 1}{2D_{0D}}} r'_D dr'_D. \quad (229)$$

Sabendo-se que $W[A_i(x), B_i(x)]_{x=x_1} = \frac{1}{\pi}$, a eq. (229) se torna:

$$\bar{C}[\varphi_w, s] = -\frac{\zeta}{D_{0D}} \int_{r_D=1}^{\infty} \frac{A_i(x') C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D - 1}{2D_{0D}}} r'_D dr'_D}{\zeta^{\frac{2}{3}} A'_i(x_1)_x - \tau A_i} \quad (230)$$

Em termos de funções de Bessel, a eq. (230) se transforma em:

$$\bar{C}[\varphi_w, s] = \frac{-1}{s} \int_{r_D=1}^{\infty} \frac{\pi^{-1} \sqrt{\left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi'}{3}\right)} K_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} \left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi'}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D - 1}{2D_{0D}}} r'_D}{-\zeta^{\frac{2}{3}} \pi^{-1} \frac{(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi)_1}{\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} \left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \tau \pi^{-1} \sqrt{\left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi}{3}\right)} K_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} \left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} dr'_D, \quad (231)$$

ou:

$$\bar{C}[\varphi_w, s] = \frac{1}{s} \int_{r_D=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi'}{3}\right)} K_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} \left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi'}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D - 1}{2D_{0D}}} r'_D}{\zeta^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi\right)_1 K_{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} \left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \tau \sqrt{\left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi}{3}\right)} K_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} \left(\frac{\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} dr'_D, \quad (232)$$

e finalmente:

$$\bar{C}[\varphi_w, s] = \frac{1}{s} \int_{r_D=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi') K_{\frac{1}{3}}[\frac{2}{3}(\zeta \varphi'^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}]} C_0(r'_D) e^{\frac{r'_D-1}{2D_0D}} r'_D}{\zeta^{\frac{1}{3}} \varphi_1 K_{\frac{2}{3}}[\frac{2}{3}(\zeta \varphi^{\frac{3}{2}})_1] + \tau \sqrt{(\zeta^{\frac{2}{3}} \varphi)_1} K_{\frac{1}{3}}[\frac{2}{3}(\zeta \varphi^{\frac{3}{2}})_1]} dr'_D. \quad (233)$$

E Apêndice - Solução Numérica Para Geometria Radial

Período de Injeção

A equação diferencial do deslocamento miscível e apresentada para o sistema radial em forma adimensional no apêndice D, considerando altas velocidades convectivas, pode ser escrita como:

$$\frac{D_D}{r_D} \frac{\partial^2 C_D}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D}{\partial t_D}, \quad (234)$$

e as condições de contorno e inicial são dadas por:

$$C_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (235)$$

$$\left[C_D - D_{0D} \frac{\partial C_D}{\partial r_D} \right]_{(r_D=1, t_D)} = 1, \quad (236)$$

$$C_D(r_{eD}, t_D) = 0. \quad (237)$$

Os operadores espaciais da equação (234) serão discretizados por intermédio de uma curva interpolante obtido a partir da seguinte equação:

$$\frac{D_{0D}}{r_D} \frac{d^2 C_D}{dr_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{dC_D}{dr_D} = K_1 = L_r(C_D). \quad (238)$$

A solução dessa equação é a soma da solução particular não homogênea com a solução da homogênea associada.

A solução da não homogênea é buscada na forma:

$$C_D = Ar_D^2 + Br_D + E, \quad (239)$$

donde:

$$\frac{\partial C_D}{\partial r_D} = 2Ar_D + B,$$

e:

$$\frac{d^2 C_D}{dr_D^2} = 2A.$$

Substituindo-se esta definição na equação (238), e multiplicando-se o resultado por r_D tem-se que:

$$2AD_{0D} - 2Ar_D - B = K_1 r_D.$$

Como o coeficiente E é arbitrário, fazendo-se $E = 0$ resulta:

$$A = -\frac{K_1}{2},$$

e:

$$B = -K_1 D_{0D}.$$

A equação (239) se reduz a:

$$C_D = -\frac{K_1}{2} r_D^2 - K_1 D_{0D} r_D.$$

A solução da equação homogênea associada dada por:

$$\frac{D_{0D}}{r_D} \frac{d^2 C_D}{dr_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{dC_D}{dr_D} = 0, \quad (240)$$

é obtida fazendo-se:

$$y = \frac{dC_D}{dr_D} \quad e \quad \frac{dy}{dr_D} = \frac{d^2 C_D}{dr_D^2}.$$

Substituindo-se estas relações na equação (240) resulta:

$$\frac{dy}{dr_D} - \frac{1}{r_D} y = 0,$$

e portando;

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{D_{0D}} dr_D.$$

Integrando esta relação entre $r_D = 1$, tal que $y(1) = y_0$, até r_D tem-se que:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \frac{1}{D_{0D}} \int_{r_D=1}^{r_D} dr_D,$$

ou:

$$\ln \frac{y}{y_0} = \frac{1}{D_{0D}} (r_D - 1),$$

resultando:

$$y = y_0 e^{\frac{r_D - D_0 D}{D_0 D}}$$

sabendo-se que:

$$y = \frac{dC_D}{dr_D} = y_0 e^{\frac{r_D - D_0 D}{D_0 D}}$$

então:

$$\int_{C_{D_0}}^{C_D} dC_D = \int_{r_D=1}^{r_D} y_0 e^{\frac{r_D - D_0 D}{D_0 D}} dr_D,$$

ou:

$$C_D = \frac{y_0}{D_0 D} \left[e^{\frac{r_D - D_0 D}{D_0 D}} - 1 \right]. \quad (241)$$

A solução geral fica então:

$$C_D = \frac{y_0}{D_0 D} \left[e^{\frac{r_D - D_0 D}{D_0 D}} - 1 \right] - \frac{K_1}{2} r_D^2 - K_1 D_0 D r_D, \quad (242)$$

ou:

$$C_D = -\frac{K_1}{2} (r_D^2 + 2 D_0 D r_D) + K_2 e^{\frac{r_D}{D_0 D}} + K_3, \quad (243)$$

onde:

$$K_2 = \frac{y_0 D_0 D}{e^{\frac{1}{D_0 D}}},$$

e:

$$K_3 = y_0 D_{0D}.$$

Os parâmetros K_1 , K_2 e K_3 , podem ser obtidos ajustando-se a curva da equação (f D) aos valores nodais r_{i-1} , r_i e r_{i+1} . Ao fazer isto, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned} - \frac{K_1}{2} \left(r_{D(i-1)}^2 + 2 D_{0D} r_{D(i-1)} \right) + K_2 e^{\frac{r_{D(i-1)}}{D_{0D}}} + K_3 &= C_{D(i-1)} \\ - \frac{K_1}{2} \left(r_{D(i)}^2 + 2 D_{0D} r_{D(i)} \right) + K_2 e^{\frac{r_{D(i)}}{D_{0D}}} + K_3 &= C_{D(i)} \\ - \frac{K_1}{2} \left(r_{D(i+1)}^2 + 2 D_{0D} r_{D(i+1)} \right) + K_2 e^{\frac{r_{D(i+1)}}{D_{0D}}} + K_3 &= C_{D(i+1)} \end{aligned} \quad (244)$$

Resolvendo-se o sistema e isolando-se K_1 , chega-se a:

$$K_1 = \frac{(C_{D(i)} - C_{D(i-1)})(m_i - m_{i+1}) - (C_{D(i)} - C_{D(i+1)})(m_i - m_{i-1})}{(n_i - n_{i-1})(m_i - m_{i+1}) - (n_i - n_{i+1})(m_i - m_{i-1})} = L_r(C_D), \quad (245)$$

onde:

$$m_i = e^{\frac{r_{D(i)}}{D_{0D}}},$$

e:

$$n_i = -\frac{\left(r_{D(i)}^2 + 2 D_{0D} r_{D(i)} \right)}{2}.$$

Não há necessidade de se determinar K_2 e K_3 , pois da equação (238) tem-se que $L_r(C_D) = K_1$.

