

# LUIS ANTONIO RODRIGUES

# Análise e síntese de sistemas LPV polinomiais homogêneos usando funções de Lyapunov dependentes de sucessivos instantes de tempo

48/2012

Campinas 2012



# UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

# LUIS ANTONIO RODRIGUES

# Análise e síntese de sistemas LPV polinomiais homogêneos usando funções de Lyapunov dependentes de sucessivos instantes de tempo

Orientador: Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO LUIS ANTONIO RODRIGUES, E ORI-ENTADA PELO PROF. DR. JUAN FRANCISCO CAMINO DOS SANTOS.

gnila ASSIMATURA DO ORIENTADOR

Campinas 2012

# FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R618a	Rodrigues, Luis Antonio Análise e síntese de sistemas LPV polinomiais ho- mogêneos usando funções de Lyapunov dependentes de sucessivos instantes de tempo / Luis Antonio Ro- drigues – Campinas, SP: [s.n.], 2012.
	Orientador: Juan Francisco Camino dos Santos. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Teoria de controle. 2. Sistemas lineares varian- tes no tempo. 3. Lyapunov, Funções de. 4. Análise de estabilidade. 5. Sistemas de controle por realimenta- ção. I. Camino dos Santos, Juan Francisco. II. Univer- sidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenha- ria Mecânica. III. Título.
tulo em Ing	alês: Analysis and synthesis of homogene-

Título em Inglês:	Analysis and synthesis of homogene- ous polynomially LPV systems using
	path-dependent Lyapunov function
Palavras-Chave em Inglês:	Control theory; Linear time-varying
	systems; Lyapunov functions; Stability
	analysis; Feedback control systems.
Área de Concentração:	Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecâ-
	nico
Titulação:	Mestre em Engenharia Mecânica
Banca Examinadora:	Ricardo Coração de Leão Fontoura de
	Oliveira e Reinaldo Martinez Palhares.
Data da Defesa:	17/02/2012
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Mecânica

# UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

# Análise e síntese de sistemas LPV polinomiais homogêneos usando funções de Lyapunov dependentes de sucessivos instantes de tempo

Autor: Luis Antonio Rodrigues Orientador: Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

MINO

Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos, Presidente Universidade Estadual de Campinas

Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira Universidade Estadual de Campinas

enclos Pall

Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares Universidade Federal de Minas Gerais

Campinas, 17 de fevereiro de 2012

Dedico este trabalho à minha mãe.

## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e/ou instituições às quais presto minha homenagem:

- No âmbito profissional:

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo fomento financeiro.

Ao meu orientador, que me indicou os caminhos a serem seguidos.

Ao Jan De Caigny, que me ensinou os primeiros passos na implementação de minha pesquisa no Matlab.

Ao professor Pedro Peres, pela dedicação nas aulas ministradas e confiança em meu trabalho.

- No âmbito pessoal:

À Deus, pelas graças recebidas em cada um de meus dias.

À minha mãe, por todo amor, dedicação, educação, compreensão, orgulho e incentivo em todos os momentos da minha vida.

Aos meus avós, por fazerem o papel de pais em minha vida. Em especial a minha vó por todas suas orações.

À minha ex-namorada Mariana, por todo amor, companheirismo e paciência com aulas de metodologia e revisões textuais.

Aos meus amigos de laboratório, por toda companhia, auxílio, compreensão, incentivo e descontração.

À secretária Regina, por toda atenção, descontração e bate-papos.

"Há ladrões que não se castigam, mas que nos roubam o mais precioso: o tempo."(Napoleão Bonaparte) "A educação é um processo social, é desenvolvimento. Não é a preparação para a vida, é a própria vida."(John Dewey)

## RESUMO

Rodrigues, Luis Antonio. *Análise e síntese de sistemas LPV polinomiais homogêneos usando funções de Lyapunov dependentes de sucessivos instantes de tempo*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

O presente trabalho investiga os problemas de estabilidade assintótica e desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  de sistemas lineares a parâmetros variantes discretos no tempo. São fornecidas condições suficientes para análise de estabilidade, análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  e síntese de controladores estáticos de realimentação de saída robustos e por ganho escalonado. Além disso, é proposto um método de parametrização polinomial homogênea de sistemas LPV afins. Assume-se que as matrizes do sistema tem dependência polinomial homogênea de grau arbitrário sobre os parâmetros que variam dentro de um politopo com conhecidos limitantes sobre suas taxas de variação. As propriedades geométricas do domínio politópico são exploradas para se obter um conjunto finito de desigualdades matriciais lineares que levam em consideração os limitantes sobre as taxas de variação dos parâmetros. As condições LMIs são obtidas usando uma função de Lyapunov quadrática nos estados com dependência polinomial homogênea dos parâmetros variantes em instantes sucessivos de tempo. As condições fornecidas são aplicadas no modelo LPV de um sistema vibroacústico. Comparações com resultados numéricos encontrados na literatura mostram os benefícios das técnicas propostas.

**Palavras-Chave**: Teoria de controle; Sistemas lineares variantes no tempo; Lyapunov, Funções de; Análise de estabilidade; Sistemas de controle por realimentação.

## ABSTRACT

Rodrigues, Luis Antonio. *Analysis and synthesis of homogeneous polynomially LPV systems using path-dependent Lyapunov functions*. Campinas: School of Mechanical Engineering, University of Campinas.

This work investigates stability and  $\mathcal{H}_{\infty}$  performance of discrete-time linear parameter varying systems. Sufficient conditions for stability analysis,  $\mathcal{H}_{\infty}$  performance analysis and synthesis of both robust and gain-scheduled static output feedback controller are provided. It is assumed that the system matrices have a homogeneous polynomial dependence of arbitrary degree on the time-varying parameters. Thus, a homogeneous-polynomially parametrization method for affine LPV systems is proposed. The parameters are assumed to vary inside a polytope and to have known bounds on their rates of variation. The geometric properties of the polytopic domain are exploited to derive a finite set of LMIs that take into account the bounds on the rates of variation of the scheduling parameters. The LMI conditions are obtained using a quadratic in the state Lyapunov function with a homogeneous polynomial dependence on the scheduling parameters at successive instants of time. The proposed techniques are applied to an LPV model of a vibroacoustic setup. Comparisons with numerical results found in literature show the benefits of the proposed approach.

**Keywords**: Control theory; Linear time-varying systems; Lyapunov functions; Stability analysis; Feedback control systems.

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Domínio $\mathcal{P}$ (região azul) da matriz $A(\theta_1[k])$ .	15
2.2	Domínio $\mathcal{P}$ (região azul) da matriz $A(\theta_1[k])$ e domínio $\mathcal{Q}$ (região azul) da matriz	
	$A(\alpha [k])$ .	16
2.3	Domínio $\mathcal{P}$ (região cinza claro) da matriz $A(\theta_1[k], \theta_2[k])$	17
2.4	Domínio $\mathcal{P}$ (região cinza claro) da matriz $A(\theta_1[k], \theta_2[k])$ e domínio $\mathcal{Q}$ (regiões cinza	
	claro e cinza escuro) da matriz $A(\alpha [k])$	20
3.1	Região no plano ( $\alpha_i[k], \Delta \alpha_i[k]$ ) onde $\Delta \alpha_i[k]$ assume valores como função de $\alpha_i[k]$	
	consider ando o limitante $b \in (0,1)$ (região cinza). 	32
4.1	Valor máximo do escalar $\mu$ em função do limitante b tal que o sistema é estabilizável	
	por um controlador estático de realimentação de estados robusto projetado através das	
	condições do Teorema 12	58
4.2	Valor máximo do escalar $\mu$ em função do limitante b tal que o sistema é estabilizável	
	por um controlador estático de realimentação de estados robusto projetado através das	
	condições do Teorema 12, de Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) e de Oliveira e Peres	
	(2009, Teorema 4 com $g = 3, d = 0$ )	60
4.3	Sistema Vibroacústico.	66
4.4	Sobreposição das magnitudes dos diagramas de Bode de 11 sistemas LTI locais obtidos	
	a partir do modelo LPV fixando-se valores equidistantes da temperatura no intervalo	
	[22.9°,25.4°].	67
4.5	Garantido limitante superior $\eta$ sobre o desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ do sistema vibroacústico em	
	função do limitante b sobre a taxa de variação dos parâmetros $\Delta \alpha \left[k\right]$ obtido através	
	das condições do Teorema 9 e Corolário 2.	68
4.6	Garantido limitante superior $\eta$ sobre o desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ do sistema vibroacústico em	
	malha fechada em função do limitante $b$ sobre a taxa de variação dos parâmetros $\Delta \alpha \left[k ight]$	
	utilizando controladores por ganho escalonado sintetizados pelas condições do Teo-	
	rema 11	72

4.7	Garantido limitante superior $\eta$ sobre o desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ do sistema vibroacústico em			
	malha fechada em função do limitante $b$ sobre a taxa de variação dos parâmetros $\Delta \alpha \left[k ight]$			
	utilizando controladores robustos sintetizados pelas condições do Teorema 13 72			
4.8	Sobreposição das magnitudes dos diagramas de Bode de 5 sistemas LTI locais obti-			

# LISTA DE TABELAS

4.1	Valor máximo do limitante $b_p$ sobre a taxa de variação $\Delta p[k]$ tal que o sistema (4.1) é	
	assintoticamente estável obtido através das condições do Teorema 8	54
4.2	Complexidade numérica, em termos do número $n_v$ de variáveis escalares e $n_l$ de linhas	
	de LMI, do Teorema 8 para $n_x=2, N=2, p=1.$	55
4.3	Valor máximo do limitante $b_p$ sobre a taxa de variação $\Delta p[k]$ tal que o sistema (4.1)	
	é assintoticamente estável e respectiva complexidade numérica associada às condições	
	de Oliveira e Peres (2008).	56
4.4	Complexidade numérica, em termos do número $n_v$ de variáveis escalares e $n_l$ de linhas	
	de LMI, do Teorema 12 para $n_x = 3$ , $n_u = 1$ , $N = 2$ , $p = 1$ .	59
4.5	Complexidade numérica, em termos do número $n_v$ de variáveis escalares e $n_l$ de linhas	
	de LMI, associada às condições de Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) e Oliveira e	
	Peres (2009, Teorema 4 com $g = 3, d = 0$ ) para $n_x = 3, n_u = 1, N = 2, p = 1.$	61
4.6	Valor máximo do limitante $b$ sobre a taxa de variação $\Delta \alpha \left[k\right]$ tal que o sistema é estabi-	
	lizável por um controlador estático de realimentação de estados por ganho escalonado	
	projetado através das condições do Teorema 11	62
4.7	Complexidade numérica, em termos do número $n_v$ de variáveis escalares e $n_l$ de linhas	
	de LMI, do Teorema 10 para $n_x = 2, n_u = 1, N = 3, p = 1.$	63
4.8	Valor máximo do limitante $b$ sobre a taxa de variação $\Delta \alpha \left[k\right]$ tal que o sistema é estabi-	
	lizável por um controlador estático de realimentação de estados por ganho escalonado	
	e respectiva complexidade numérica associada às condições de Oliveira e Peres (2008).	63
4.9	Máximo limitante $b$ sobre a taxa de variação $\Delta \alpha \left[ k \right]$ tal que o sistema vibroacústico	
	é assintoticamente estável com garantido limitante superior sobre o desempenho $\mathcal{H}_\infty$	
	obtido através das condições do Teorema 9 e Corolário 2	69
4.10	Complexidade numérica, em termos do número $n_v$ de variáveis escalares e $n_l$ de linhas	
	de LMIs, do Teorema 9 e do Corolário 2 para $n_x = 10$ , $n_w = 1$ , $n_z = 1$ , $N = 2$ , $p = 3$ .	70

4.11	Máximo limitante $b$ sobre a taxa de variação $\Delta \alpha \left[ k \right]$ tal que o sistema vibroacústico é	
	assintoticamente estável com garantido limitante superior sobre o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e	
	respectiva complexidade numérica* associada às condições LMIs de De-Caigny (2009,	
	Teorema 4.11)	70
4.12	Máximo limitante $b$ sobre a taxa de variação $\Delta \alpha \left[k\right]$ tal que o sistema vibroacústico	
	é estabilizável por um ganho estático de realimentação de saída $\mathcal{H}_{\infty}$ , escalonado ou	
	robusto, projetado através das condições do Teorema 11 e Teorema 13 para $n_y=6. \ . \ .$	74
4.13	Complexidade numérica, em termos do número $n_v$ de variáveis escalares e $n_l$ de linhas	
	de LMIs, do Teorema 11 e do Teorema 13 para $n_x = 10, n_w = 1, n_u = 1, n_z = 1,$	
	$N=2, p=3.\ldots$	74
4.14	Máximo limitante $b$ sobre a taxa de variação $\Delta \alpha \left[k\right]$ tal que o sistema vibroacústico	
	é estabilizável por um ganho estático de realimentação de saída $\mathcal{H}_{\infty}$ , escalonado ou	
	robusto, para $n_y = 6$ e respectiva complixidade numérica* associada às condições de	
	De-Caigny (2009)	75

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DPM	Departamento de Projeto Mecânico
FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
HPPD	Dependente de Parâmetros Polinomiais Homogêneos
LMI	Desigualdade Matricial Linear
LTI	Linear Invariante no Tempo
LTV	Linear Variante no Tempo
LPV	Linear a Parâmetros Variantes
MIMO	Multiplas Entradas e Multiplas Saídas
SISO	Única Entrada e Única Saída
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^*$	conjunto dos números naturais não nulos
$\mathbb{N}^n$	conjunto dos vetores naturais de dimensão $n$
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^{n}$	conjunto dos vetores reais de dimensão $n$
$\mathbb{R}^{m\times n}$	conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$
x	vetor de estados do sistema
w	vetor de entradas exógenas
u	vetor de entradas de controle
z	vetor de saídas de desempenho
y	vetor de saída medida
$n_x$	número de estados do sistema
$n_w$	número de entradas exógenas
$n_u$	número de entradas de controle
$n_z$	número de saídas de desempenho
$n_y$	número de saídas mensuráveis
b	limitante da taxa de variação do parâmetro escalonado
p	grau de dependência das matrizes do sistema sobre os parâmetros
g	grau de dependência da matriz de Lyapunov sobre os parâmetros
L	número de instantes sucessivos de tempo dos parâmetros usado
	na matriz de Lyapunov
d	nível de relaxação Pólya
$\theta\left[k\right]$	vetor de parâmetros variantes
$\theta_{i}\left[k\right]$	i-ésima componente do vetor de parâmetros variantes
$\underline{\theta}_i$	valor mínimo do parâmetro variante $\theta_i[k]$

$\overline{ heta}_i$	valor máximo do parâmetro variante $\theta_i [k]$
$\beta$	vetor de parâmetros variantes normalizados (cada $\beta_i \in [0,1]$ )
α	vetor de parâmetros variantes pertencente ao domínio $\Lambda$ (usual-
	mente chamado de parâmetro escalonado)
$\Delta \alpha$	vetor de taxa de variação do parâmetro escalonado $\alpha$
$\gamma$	vetor de parâmetros variantes pertencente ao espaço- $\gamma$
N	dimensão do vetor de parâmetros variantes $\alpha$
Λ	simplex unitário
$\Lambda_N$	simplex unitário cujos elementos tem dimensão $N$
$A$ ou $A_i$	matriz (com elementos constantes)
A'	transposta da matriz A
A > 0	matriz positiva definida
$A^{-1}$	inversa da matriz A
$A_{(i,j)}$	elemento (ou bloco) $i, j$ da matriz A
$A_{(i,:)}$	<i>i</i> -ésima linha da matriz A
$A_{(:,j)}$	j-ésima coluna da matriz $A$
$I_n$	matriz identidade de dimensão $n$
$0_{m \times n}$	matriz nula de dimensão $m \times n$
*	bloco simétrico
$e_i$	N-upla de componentes nulos com excessão de 1 na $i$ -ésima po-
	sição, isto é, $(0,, 0, \underbrace{1}_{i-sima}, 0,, 0)$
$\mathcal{H}_\infty$	norma infinita de sistemas
$\eta$	limitante superior (custo garantido) do desempenho $\mathcal{H}_\infty$
$\ell^2$	espaço de todas sequências quadraticamente somáveis
$\forall$	para todo
×	produto cartesiano $(X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\})$
$\infty$	infinito
$\in$	pertence

$\subset$	contém
!	fatorial
	tal que
	definição
≡	equivalente
$\succeq$	operação maior ou igual vetorial (elemento a elemento)
$\mathcal{P}$	politopo
$\mathcal{Q}$	politopo
·	valor absoluto do argumento (escalar)
$\ \cdot\ $	norma euclidiana do argumento (vetor)
$\ \cdot\ _{\ell_2}$	norma $\ell_2$ do argumento (sinal)
$\min(\cdot)$	valor mínimo do argumento
$\sup(\cdot)$	valor supremo do argumento
$\pi(\cdot)$	produtório do fatorial de cada componente do argumento (vetor)
$\operatorname{co}\left\{\cdot\right\}$	combinação convexa do argumento
$\operatorname{card}\left(\cdot ight)$	número de elementos do argumento
$A(\cdot)$	matriz em função do argumento
$(A_1,\ldots,A_n)(\alpha)$	$A_1(lpha),\ldots,A_n(lpha)$
$\alpha^{\ell},  \alpha, \ell \in \mathbb{R}^n$	$\alpha_1^{\ell_1}\alpha_2^{\ell_2}\cdots\alpha_n^{\ell_n}$
$\sum_{\ell} \alpha^{\ell} (A_1, \ldots, A_n)_{\ell},$	$\sum_{\ell} \alpha^{\ell} A_{1\ell}, \dots, \sum_{\ell} \alpha^{\ell} A_{n\ell}$
$\mathcal{K}\left(N,g ight)$	conjunto de todas as N-uplas de números naturais cuja soma é
	igual a g
$\bar{\mathcal{K}}((N_1,\ldots,N_n),(g_1,\ldots,g_n))$	$\mathcal{K}(N_1,g_1) \times \mathcal{K}(N_2,g_2) \times \cdots \times \mathcal{K}(N_n,g_n)$
$\mathcal{J}\left(N,g ight)$	cardinalidade (número de elementos) do conjunto $\mathcal{K}\left(N,g ight)$

# SUMÁRIO

<b>1</b> INTRODUÇÃO			ÃO	1			
	1.1	Sistemas LPV					
	1.2	1.2 Teoria de Lyapunov					
	1.3	3 Parametrizações da função de Lyapunov e do sistema LPV					
	1.4	Descri	ção do trabalho	5			
2	PAR	AMETR	RIZAÇÃO DE SISTEMAS LPV	7			
	2.1	Prefáci	io	7			
	2.2	Polinô	mios homogêneos	7			
		2.2.1	Notação e terminologia	7			
		2.2.2	Cálculos com polinômios homogêneos	9			
		2.2.3	Polinômios homogêneos no simplex unitário	11			
	2.3	Parame	etrização polinomial homogênea	13			
		2.3.1	Sistemas LPV com um parâmetro variante	14			
		2.3.2	Sistemas LPV com dois parâmetros variantes	17			
		2.3.3	Sistemas LPV com um número arbitrário de parâmetros variantes	20			
3	TÉC	CNICAS	DE ANÁLISE E SÍNTESE PARA SISTEMAS LPV DISCRETOS	23			
	3.1	Prefáci	io	23			
	3.2	2 Análise de estabilidade de sistemas LPV		23			
	3.3	Anális	e de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ de sistemas LPV $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	27			
	3.4	4 Modelagem do domínio incerto		30			
		3.4.1	Parametrização da função de Lyapunov	30			
		3.4.2	Modelagem dos parâmetros e suas taxas de variação	31			
	3.5	Deriva	ção de conjuntos finitos de LMIs	35			
	3.6	Anális	e de estabilidade de sistemas LPV HPPD	38			
	3.7	Anális	e de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ de sistemas LPV HPPD $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	39			
	3.8	Realim	nentação estática de saída de sistemas LPV HPPD	41			
		3.8.1	Síntese de controladores escalonados	42			

		3.8.2	Síntese de controladores robustos	47
4	RES	ULTAD	OS NUMÉRICOS	51
	4.1	Prefác	io	51
	4.2	Anális	e de estabilidade e síntese de controladores estabilizantes	52
		4.2.1	Análise de estabilidade	53
		4.2.2	Síntese de controladores estabilizantes	57
	4.3	Anális	e de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ e síntese de controladores estabilizantes $\mathcal{H}_{\infty}$	65
		4.3.1	Sistema Vibroacústico	65
		4.3.2	Análise de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$	67
		4.3.3	Síntese de controladores estabilizantes $\mathcal{H}_{\infty}$	71
5 R1	Con Eferi	NCLUSÕ ÊNCIAS	DES E PERSPECTIVAS	77 81
AI	PÊND	ICE A -	Mudança de variáveis para o espaço- $\gamma$	89
	A.1	Matriz	es polinomiais homogêneas	89
	A.2	Matriz	es polinomiais homogêneas dependentes de sucessivos instantes de tempo	91
AI	PÊND	ICE B -	DERIVAÇÃO DOS CONJUNTOS FINITOS DE LMIS	95
	<b>B</b> .1	Deriva	ção do Teorema 8	95
		<b>B</b> .1.1	Derivação dos blocos (1,1) e (2,2)	96
		B.1.2	Derivação dos blocos (1,2) e (2,1)	97
	B.2	Deriva	ção do Teorema 9	98
		B.2.1	Derivação dos blocos (1,3), (3,1), (3,4) e (4,3)	98
		B.2.2	Derivação dos blocos (3,3) e (4,4)	99
AI	PÊND	ice C -	MATRIZES DO SISTEMA VIBROACÚSTICO	101

## **1** INTRODUÇÃO

#### 1.1 Sistemas LPV

A teoria de controle para sistemas lineares a parâmetros variantes - LPV (do inglês, "Linear Parameter Varying") tem sido intensivamente investigada. Diversos trabalhos apresentando condições de análise e síntese vem sendo publicados na literatura para esta classe de sistemas (SHAMMA; ATHANS, 1991; SCHERER, 2001; BLANCHINI; MIANI, 2003; DE-CAIGNY et al., 2007; MONTAGNER et al., 2009; BORGES et al., 2010a). Isto decorre do fato de que os sistemas LPV podem ser usados para representar uma vasta gama de problemas do mundo real, cuja dinâmica é regida por parâmetros que variam com o tempo (PAIJMANS et al., 2008; DE– CAIGNY et al., 2009; DE-CAIGNY et al., 2010b). Por exemplo, estruturas aeroespaciais que estão frequentemente sujeitas à mudanças extremas de temperatura e sistemas robóticos *pick-and-place* dos quais a dinâmica se altera em função da posição da ferramenta de manipulação no espaço de trabalho. Além disso, esta classe de sistemas pode ser usada para representar sistemas não-lineares em termos de uma família de modelos lineares (RUGH, 1991; SHAMMA; ATHANS, 1991; LA-WRENCE; RUGH, 1995; RUGH; SHAMMA, 2000).

No projeto de controladores para sistemas LPV é desejável que os controladores incorporem os parâmetros variantes, a fim de ajustá-los em tempo real às condições operacionais atuais, aumentando seu desempenho (APKARIAN; ADAMS, 1998; PAIJMANS et al., 2008; DE-CAIGNY et al., 2010a). Todavia, existem sistemas em que os parâmetros variantes são desconhecidos ou não é possível medí-los. Para estes sistemas, muitas vezes é possível projetar um controlador independente dos parâmetros e que seja robusto a todas suas variações (LEITE; PERES, 2004). Entretanto, em geral, é raro garantir a estabilidade do sistema e alcançar um desempenho satisfatório sobre uma faixa de operação com um controlador projetado para um sistema linear invariante no tempo - LTI (do inglês, "Linear Time-Invariant") fixando-se um valor para os parâmetros (RODRIGUES et al., 2010a). Assim, o desafio da teoria LPV é formular condições de análise e síntese capazes de garantir estabilidade e desempenho do sistema para todas as possíveis variações dos parâmetros. Portanto, inviabilizando o uso da teoria clássica de sistemas LTI.

## 1.2 Teoria de Lyapunov

O apelo à teoria de Lyapunov para o projeto de controle de sistemas LPV baseia-se no fato de que esta abordagem permite a reformulação de muitos problemas de análise e síntese em termos de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais lineares - LMIs (do inglês, "Linear Matrix Inequalities") (BOYD et al., 1994; APKARIAN; TUAN, 2000).

O termo LMI foi usado explicitamente pela primeira vez em 1971, como cita Boyd et al. (1994). Apesar da longínqua origem da formulação LMI na teoria de sistemas e controle, o uso da estrutura LMI tem conquistado atenção. O advento de softwares para sua resolução as tem tornado uma poderosa e eficiente ferramenta para resolver problemas de análise e síntese. Segundo Gahinet et al. (1995), as principais vantagens do seu uso são:

- Uma variedade de especificações de projeto e restrições podem ser expressas como LMIs;
- Problemas formulados em termos de LMIS podem ser numericamente resolvidos por eficientes algoritmos de otimização convexa.

Na teoria de Lyapunov, um sistema é estável se existir uma função dependente dos estados que seja positiva em todo seu domínio e cuja taxa de variação ao longo da trajetória do sistema é sempre negativa (KHALIL, 2001; HADDAD; CHELLABOINA, 2008). Para sistemas lineares é comum o uso de uma função de Lyapunov quadrática nos estados. As LMIs obtidas para problemas de análise e síntese para sistemas LPV, baseadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática nos estados, em geral, são funções das matrizes do sistema, da matriz de Lyapunov e dos parâmetros variantes que governam a dinâmica do sistema. Assim, precisam ser satisfeitas para todo o domínio dos parâmetros, resultando em um conjunto infinito de LMIs (problema de dimensão infinita) que não é numericamente tratável. Entretanto, é possível contornar este entrave e derivar um conjunto finito de LMIs impondo estruturas particulares para as matrizes do sistema e de Lyapunov.

## 1.3 Parametrizações da função de Lyapunov e do sistema LPV

Na literatura são encontrados inúmeros resultados de análise e síntese, baseados na existência de uma função de Lyapunov quadrática nos estados, utilizando diversas estruturas para a matriz de Lyapunov e para as matrizes do sistema.

Com relação à matriz de Lyapunov são encontradas parametrizações:

- **constantes**: como visto em Bernussou et al. (1989), Geromel et al. (1991), Kaminer et al. (1993), Montagner et al. (2005b);
- lineares (politópicas) e afins: como visto em Gahinet et al. (1996), Amato et al. (1998), Apkarian e Adams (1998), De-Oliveira et al. (1999), Daafouz e Bernussou (2001), Montagner et al. (2005b), Montagner et al. (2005a), De-Souza et al. (2006), Dong e Guang-HongYang (2008), Oliveira e Peres (2008), Rodrigues et al. (2009), De-Caigny et al. (2010a);
- constante por partes: como visto em Leite e Peres (2004), Amato et al. (2005);
- polinomiais homogêneas: como visto em Oliveira e Peres (2007), Montagner et al. (2007), Borges et al. (2008), De-Caigny et al. (2009a), Montagner et al. (2009), De-Caigny (2009), Oliveira e Peres (2009), De-Caigny et al. (2012a);
- **afins em sucessivos instantes de tempo**: como visto em Lee (2006), Lee e Dullerud (2006), Oliveira e Peres (2009), Borges et al. (2010a), Borges et al. (2010b);
- polinomiais homogêneas em sucessivos instantes de tempo: como visto em Rodrigues et al. (2010b).

Com relação às matrizes do sistema são encontrados parametrizações:

- lineares (politópicas) e afins: como visto em Amato et al. (1998), Daafouz e Bernussou (2001), Montagner et al. (2005a), De-Souza et al. (2006), Blanchini et al. (2007), Dong e Guang-HongYang (2008), Oliveira e Peres (2008), De-Caigny et al. (2008a), De-Caigny et al. (2008b), Montagner et al. (2009), Oliveira e Peres (2009), De-Caigny et al. (2010a);
- polinomiais homogêneas: como visto em De-Caigny (2009), Rodrigues et al. (2010b), De-Caigny et al. (2012a).

A síntese de controladores LPV baseados na existência de uma matriz de Lyapunov indepen-

dente dos parâmetros variantes (BERNUSSOU et al., 1989; GEROMEL et al., 1991; KAMINER et al., 1993; MONTAGNER et al., 2005b), conhecida como estabilidade quadrática, é conservadora para aplicações práticas, pois assume que os parâmetros podem variar arbitrariamente dentro de seus domínios, incluindo assim a classe de sistemas chaveados. Assumindo esta mesma hipótese em Daafouz e Bernussou (2001) e Montagner et al. (2005a) são utilizadas funções de Lyapunov com dependência afim dos parâmetros. No contexto específico de sistemas chaveados (sistemas LPV com taxa de variação arbitrária), em Lee (2006) e Lee e Dullerud (2006) são utilizadas funções de Lyapunov com dependência afim de sucessivos instantes de tempo dos parâmetros para fornecer condições necessárias e suficientes para análise de estabilidade robusta. Neste contexto, as funções de Lyapunov com dependência de sucessivos instantes de tempo dos parâmetros são chamadas de dependentes de caminho (do inglês, "path dependent"), devido ao caminho que o sistema faz nos vértices do domínio politópico.

Para reduzir o conservadorismo associado à estas abordagens, muitos trabalhos tem incluído informações sobre a máxima taxa de variação dos parâmetros em seus resultados. Em Amato et al. (2005) são usadas funções de Lyapunov constantes por partes para investigar o problema de realimentação de estados  $\mathcal{H}_{\infty}$  onde um conjunto finito de LMIs é derivado dividindo o intervalo onde o parâmetro varia de acordo com sua taxa de variação. Outra abordagem apresentada em Oliveira e Peres (2009), que investiga os problemas de estabilidade robusta e realimentação de estados estabilizante usando funções de Lyapunov polinomiais homogêneas e afins em instantes sucessivos de tempo dos parâmetros, consiste em propor um modelo politópico para os parâmetros e suas taxas de variação. Usando a mesma abordagem, De-Caigny et al. (2012a) utiliza funções de Lyapunov polinomiais homogêneas para fornecer conjuntos finitos de LMIs para o projeto de controladores dinâmicos de realimentação de saída por ganho escalonado com multiobjetivos. Em Rodrigues et al. (2010b) são fornecidas condições LMI para os problemas de estabilidade exponencial e realimentação de estados estabilizante usando funções de Lyapunov com dependência polinomial homogênea em instantes sucessivos de tempo dos parâmetros, englobando as condições LMI apresentadas em Oliveira e Peres (2009) para análise de estabilidade e síntese de controladores por ganho escalonado.

### 1.4 Descrição do trabalho

O presente trabalho, no contexto de sistemas LPV discretos, tem por objetivo fornecer condições suficientes para:

- análise de estabilidade assintótica;
- análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ ;
- síntese de controladores estáticos robustos por realimentação de saída: estabilizantes e *H*<sub>∞</sub>;
- síntese de controladores estáticos por ganho escalonado de realimentação de saída: estabilizantes e  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

As condições de análise e síntese fornecidas são descritas em termos de conjuntos finitos de LMIs baseados na existência de uma função de Lyapunov quadrática nos estados. Assume-se que:

- as matrizes do sistema tem dependência polinomial homogênea de grau arbitrário sobre os parâmetros variantes;
- a matriz de Lyapunov tem dependência polinomial homogênea de grau arbitrário sobre os parâmetros variantes em instantes sucessivos de tempo;
- os parâmetros variantes possuem domínios politópicos e tem conhecidos limitantes superiores sobre suas taxas de variação;

Para obter condições LMIs, tratáveis numericamente, que incorporem informações sobre os limitantes das taxas de variação dos parâmetros é utilizado um modelo politópico para os parâmetros e suas taxas de variação e explorado suas propriedades geométricas (OLIVEIRA; PERES, 2009).

As condições de análise e síntese fornecidas são aplicadas em sistemas propostos na literatura e no modelo LPV de um sistema vibroacústico. Comparações numéricas com outros métodos disponíveis na literatura mostram os benefícios das técnicas propostas.

Para uma melhor compreensão deste trabalho, abaixo é apresentado uma breve descrição dos tópicos abordados em cada capítulo.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos para compreensão e utilização das técnicas de controle para sistemas LPV fornecidas neste trabalho. Primeiro apresenta-se uma revisão sobre operações matemáticas com polinômios homogêneos. Posteriormente é fornecido um método de

parametrização polinomial homogênea de sistemas LPV com dependência afim dos parâmetros variantes.

O Capítulo 3 apresenta as condições LMIs de análise e síntese de controladores para a classe de sistemas LPV discretos no tempo cujas matrizes tem uma dependência polinomial homogênea sobre os parâmetros variantes. Esta classe de sistemas LPV discretos é chamada ao longo do texto de sistemas LPV HPPD (do inglês, "Homogeneous Polynomial Parameter-Dependent").

O Capítulo 4 apresenta diversas simulações numéricas das técnicas de análise e síntese propostas. Os resultados obtidos são comparados com resultados apresentados na literatura.

O Capítulo 5 apresenta as principais conclusões e perspectivas deste trabalho.

# 2 PARAMETRIZAÇÃO DE SISTEMAS LPV

### 2.1 Prefácio

Este capítulo investiga a parametrização polinomial homogênea de sistemas LPV cujas matrizes possuem dependência afim dos parâmetros variantes. Primeiro, são apresentados conceitos preliminares sobre polinômios homogêneos: notação e terminologia utilizadas, alguns cálculos necessários para as seções posteriores e as propriedades de uma classe particular de polinômios homogêneos com domínio no simplex unitário. Em seguida, o problema da parametrização polinomial de sistemas LPV é investigado, descrevendo-se um método de parametrização para sistemas com um ou dois parâmetros variantes e generalizando-o para sistemas com um número arbitrário de parâmetros. Por último, é feito uma análise qualitativa do método de parametrização proposto.

#### 2.2 Polinômios homogêneos

Esta seção apresenta os conceitos preliminares sobre polinômios homogêneos necessários para a compreensão das próximas seções.

#### 2.2.1 Notação e terminologia

Como apresentado em Oliveira e Peres (2007) e De-Caigny (2009), são utilizadas as seguintes notações e terminologias para a representação de polinômios homogêneos.

**Definição 1** (Polinômio homogêneo). Seja  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ ,  $g \in \mathbb{R}$ . Um polinômio  $p(\alpha)$  é chamado homogêneo de grau g se  $p(\xi\alpha) = \xi^g p(\alpha)$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ , ou equivalentemente, se todos seus monômios tem o mesmo grau total g. Por exemplo: seja  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  e g = 3, então o polinômio

$$p(\alpha) = \alpha_1^3 - \alpha_1^2 \alpha_2 + 7\alpha_2^3$$

é um polinômio homogêneo de grau 3.

Seja  $N, g \in \mathbb{N}$ . O conjunto de todas as N-uplas  $(\ell_1, \ldots, \ell_N)$  obtidas a partir de todas as combinações de N inteiros não negativos  $\ell_i, i = 1, \ldots, N$  tal que  $\ell_1 + \ldots + \ell_N = g$  é denotado por

$$\mathcal{K}(N,g) \triangleq \left\{ \ell \in \mathbb{N}^N \mid \sum_{i=1}^N \ell_i = g \right\}.$$

O número de elementos do conjunto  $\mathcal{K}(N,g)$  é dado por

$$\mathcal{J}(N,g) \triangleq \operatorname{card}\left(\mathcal{K}(N,g)\right) = \frac{(N+g-1)!}{g!(N-1)!}.$$

Por exemplo: seja N = 2 e g = 3, então o conjunto de todas duplas  $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{N}^2$  tal que  $\ell_1 + \ell_2 = 3$  é dado por

$$\mathcal{K}(2,3) = \{(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)\}$$

O número de elementos de  $\mathcal{K}(2,3)$  é dado por  $\mathcal{J}(2,3) = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = 4.$ 

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ . Uma matriz polinomial homogênea de grau g,  $A(\alpha)$ , é definida como uma matriz com dependência polinomial homogênea de grau g sobre o parâmetro  $\alpha$ , representado genericamente por

$$A(\alpha) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha^{\ell} A_{\ell},$$

onde  $A_{\ell}$  são matrizes constantes para todo  $\ell \in \mathcal{K}(N,g)$  e os monômios  $\alpha^{\ell}$ , dados por

$$\alpha^{\ell} = \alpha_1^{\ell_1} \alpha_2^{\ell_2} \cdots \alpha_N^{\ell_N},$$

tem grau total g, isto é,  $\ell_1 + \ldots + \ell_N = g$ .

Por exemplo: seja N = 2 e g = 3, então a matriz

$$\begin{split} A(\alpha) &= \sum_{\ell \in \mathcal{K}(2,3)} \alpha^{\ell} A_{\ell}, \\ &= \alpha^{(3,0)} A_{(3,0)} + \alpha^{(2,1)} A_{(2,1)} + \alpha^{(1,2)} A_{(1,2)} + \alpha^{(0,3)} A_{(0,3)}, \\ &= (\alpha_1, \alpha_2)^{(3,0)} A_{(3,0)} + (\alpha_1, \alpha_2)^{(2,1)} A_{(2,1)} + (\alpha_1, \alpha_2)^{(1,2)} A_{(1,2)} + (\alpha_1, \alpha_2)^{(0,3)} A_{(0,3)}, \\ &= \alpha_1^3 A_{(3,0)} + \alpha_1^2 \alpha_2^1 A_{(2,1)} + \alpha_1^1 \alpha_2^2 A_{(1,2)} + \alpha_2^3 A_{(0,3)}, \end{split}$$

é uma matriz polinomial homogênea de grau 3.

Seja $\ell \in \mathbb{N}^N.$  O operador  $\pi(\ell): \mathbb{N}^N \to \mathbb{N}$  é definido como

$$\pi(\ell) \triangleq \prod_{i=1}^N \ell_i!.$$

## 2.2.2 Cálculos com polinômios homogêneos

Seja  $\ell \in \mathbb{N}^N$  e  $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}^N$ . Considere as operações usuais de soma e subtração de vetores definidas componente a componente, isto é,

$$\ell + \tilde{\ell} = (\ell_1 + \tilde{\ell}_1, \dots, \ell_N + \tilde{\ell}_N),$$
  
$$\ell - \tilde{\ell} = (\ell_1 - \tilde{\ell}_1, \dots, \ell_N - \tilde{\ell}_N).$$

A partir da extensão dessas operações é definida a operação maior ou igual vetorial (≻), como apresentada abaixo.

**Definição 2** (Operação maior ou igual vetorial  $\succeq$ ). *Dados dois vetores*  $\ell \in \mathbb{N}^N$   $e \ \tilde{\ell} \in \mathbb{N}^N$ , a operação  $\ell \succeq \tilde{\ell}$  é definida como

$$\ell \succeq \tilde{\ell}$$
 se  $\ell_i \ge \tilde{\ell}_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ .

Teorema 1 (Produto de matrizes polinomiais homogêneas). Seja

$$A(\alpha) = \sum_{i \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha^{i} A_{i} \qquad e \qquad B(\alpha) = \sum_{j \in \mathcal{K}(N,p)} \alpha^{j} B_{j},$$

matrizes polinomiais homogêneas de grau g e p respectivamente. Então, o produto  $A(\alpha)B(\alpha)$  é um polinômio homogêneo de grau g + p dado por

$$A(\alpha)B(\alpha) = \left(\sum_{i \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha^{i}A_{i}\right) \left(\sum_{j \in \mathcal{K}(N,p)} \alpha^{j}B_{j}\right) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,g+p)} \alpha^{\ell} \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(N,p)\\\ell \succcurlyeq j}} A_{\ell-j}B_{j},$$
$$= \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,g+p)} \alpha^{\ell} \sum_{\substack{i \in \mathcal{K}(N,g)\\\ell \succcurlyeq i}} A_{i}B_{\ell-i},$$

 $\textit{onde} \quad \frac{j \in \mathcal{K}(N,p)}{\ell \succcurlyeq j} \quad \textit{denota o conjunto de todas N-uplas } j \in \mathcal{K}(N,p) \textit{ tais que } \ell \succcurlyeq j.$ 

*Demonstração.* Seja  $\ell \in \mathbb{N}^N$  tal que  $\ell = i + j$ , então  $\sum_{k=1}^N \ell_k = \sum_{k=1}^N i_k + \sum_{k=1}^N j_k = g + p$ , e, consequentemente,  $\ell \in \mathcal{K}(N, g + p)$ . Assim, o produto  $A(\alpha)B(\alpha)$  pode ser reescrito como

$$A(\alpha)B(\alpha) = \left(\sum_{i \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha^{i} A_{i}\right) \left(\sum_{j \in \mathcal{K}(N,p)} \alpha^{j} B_{j}\right) = \sum_{i \in \mathcal{K}(N,g)} \sum_{j \in \mathcal{K}(N,p)} \alpha^{i+j} A_{i} B_{j}$$
$$= \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,g+p)} \alpha^{\ell} \left(\sum_{i \in \mathcal{K}(N,g)} \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(N,p)\\\ell = i+j}} A_{i} B_{j}\right),$$

onde  $\begin{array}{l} j\in\mathcal{K}\left(N,p\right)\\ \ell=i+j \end{array} \text{ denota o conjunto de todas $N$-uplas $j\in\mathcal{K}\left(N,p\right)$ tais que $\ell=i+j$.} \end{array}$ 

Note que para todo  $i \in \mathcal{K}(N,g), j \in \mathcal{K}(N,p)$  e  $\ell \in \mathcal{K}(N,g+p)$  tem-se:

- 1. Se  $\ell = i + j$  então  $\ell \geq j$ .
- 2. Se  $\ell \geq j$  então existe *i* tal que  $\ell = i + j$ .

Assim, o conjunto de N-uplas i, j tais que  $i \in \mathcal{K}(N,g), j \in \mathcal{K}(N,p)$  e  $i + j = \ell$ , para algum  $\ell \in \mathcal{K}(N,p)$ 

 $\mathcal{K}(N,g+p)$  pode ser caracterizado como o conjunto de N-uplas i, j tais que  $i = \ell - j, j \in \mathcal{K}(N,p)$ com  $\ell \geq j$ , para algum  $\ell \in \mathcal{K}(N,g+p)$ . Portanto,

$$A(\alpha)B(\alpha) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,g+p)} \alpha^{\ell} \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(N,p) \\ \ell \succcurlyeq j}} A_{\ell-j}B_j.$$

**Teorema 2** (Expansão de potências de uma soma de N termos). *Seja*  $g \in \mathbb{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}^* e \alpha \in \mathbb{R}^N$ . *Então* 

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right)^g = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,g)} \frac{g!}{\pi(\ell)} \alpha^\ell.$$

A prova do Teorema 2 é apresentada em De-Caigny (2009) que faz uma generalização da expansão de potências de um binômio .

#### 2.2.3 Polinômios homogêneos no simplex unitário

Esta seção apresenta uma classe particular de polinômios homogêneos cujo domínio dos parâmetros pertence ao simplex unitário.

**Definição 3** (Simplex Unitário). Seja  $N \in \mathbb{N}^*$ . O conjunto

$$\Lambda_N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N | \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \ge 0 \right\},$$
(2.1)

é denominado simplex unitário de dimensão N.

Os polinômios homogêneos de grau arbitrário g com domínio no simplex unitário  $\Lambda_N$  tem uma importante propriedade: podem ser reescritos de forma equivalente como um polinômio homogêneo de grau superior p (p > g). Esse processo é denominado homogeneização polinomial. **Definição 4** (Homogenização polinomial). *Seja*  $r(\alpha)$  *um polinômio homogêneo de grau*  $g \in \mathbb{N}$  *com*  $\alpha \in \Lambda_N$ . Uma homogenização polinomial de grau  $p \in \mathbb{N}$  *com* p > g é definida como o processo de derivação de um polinômio homogêneo s( $\alpha$ ) de grau p tal que s( $\alpha$ ) =  $r(\alpha)$  obtido através da multiplicação

$$s(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right)^{p-g} r(\alpha),$$

*uma vez que*  $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N) = 1$ .

Por exemplo, seja  $r(\alpha) = \sum_{i \in \mathcal{K}(2,3)} \alpha^i$  um polinômio homogêneo de grau  $g = 3 \operatorname{com} \alpha \in \Lambda_{N=2}$ , então um polinômio homogêneo  $s(\alpha)$  de grau p = 4, tal que  $s(\alpha) = r(\alpha)$ , é obtido através de uma homogenização polinomial de grau 4, isto é

$$s(\alpha) = \left(\sum_{k=1}^{2} \alpha_{k}\right)^{4-3} r(\alpha),$$
  
$$= \left(\sum_{j \in \mathcal{K}(2,1)} \frac{1!}{\pi(j)} \alpha^{j}\right) \left(\sum_{i \in \mathcal{K}(2,3)} \alpha^{i}\right),$$
  
$$= \sum_{\ell \in \mathcal{K}(2,4)} \alpha^{\ell} \sum_{\substack{i \in \mathcal{K}(2,3)\\ \ell \succeq i}} \frac{1}{\pi(\ell-i)}.$$

**Definição 5** (Combinação Convexa). Sejam  $m,n,N \in \mathbb{N}^*$  e  $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . A combinação linear

$$co \{A_1, A_2, \dots, A_N\} \triangleq \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_N A_N$$
(2.2)

 $com \ \alpha \in \Lambda_N$  é chamada de combinação convexa de  $A_1, A_2, \ldots, A_N$ . Além disso, o conjunto  $\mathcal{P}$  de todas as combinações convexas  $A_1, A_2, \ldots, A_N$ , dado por

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \xi = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_N A_N, \forall \alpha \in \Lambda_N \right\},\$$

consiste no politopo (envelope convexo) definido pelas matrizes (vértices)  $A_1, A_2, \ldots, A_N$ .

## 2.3 Parametrização polinomial homogênea

Esta seção fornece um método de parametrização de sistemas LPV com dependência afim dos parâmetros variantes em termos de sistemas LPV HPPD de grau um, cujos parâmetros variantes pertencem ao simplex unitário. Inicialmente é apresentada a parametrização de sistemas com um parâmetro variante e posteriormente, o método é estendido para sistemas com dois parâmetros e generalizado para sistemas com um número arbitrário de parâmetros variantes. Por último, é feito uma análise qualitativa do método proposto.

Considere o sistema LPV afim discreto no tempo representado no espaço de estados

$$x[k+1] = A(\theta[k])x[k] + B_w(\theta[k])w[k] + B_u(\theta[k])u[k],$$
  

$$z[k] = C_z(\theta[k])x[k] + D_w(\theta[k])w[k] + D_u(\theta[k])u[k],$$
(2.3)

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados,  $w[k] \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada exógena,  $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle,  $z[k] \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída controlada,  $\theta[k] \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de parâmetros variantes tal que

$$\theta_i[k] \in \left[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i\right], \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
(2.4)

e as matrizes do sistema tem dependência afim dos parâmetros variantes, isto é, as matrizes do sistema podem ser escritas na forma

$$A(\theta [k]) = A_0 + \sum_{i=1}^n \theta_i [k] A_i, \qquad C_z(\theta [k]) = C_{z0} + \sum_{i=1}^n \theta_i [k] C_{zi}, B_w(\theta [k]) = B_{w0} + \sum_{i=1}^n \theta_i [k] B_{wi}, \qquad D_w(\theta [k]) = D_{w0} + \sum_{i=1}^n \theta_i [k] D_{wi}, \qquad (2.5)$$
$$B_u(\theta [k]) = B_{u0} + \sum_{i=1}^n \theta_i [k] B_{ui}, \qquad D_u(\theta [k]) = D_{u0} + \sum_{i=1}^n \theta_i [k] D_{ui},$$

onde  $A_j$ ,  $B_{wj}$ ,  $B_{uj}$ ,  $C_{zj}$ ,  $D_{wj}$ ,  $D_{uj}$ , j = 0, ..., n, são matrizes constantes de dimensões apropriadas.

O objetivo é reescrever o sistema LPV (2.3) como um sistema LPV HPPD discreto no tempo cujas matrizes tem dependência polinomial homogênea de grau 1 sobre o vetor de parâmetros variantes  $\alpha [k] \in \mathbb{R}^N$  que assume valores no simplex unitário  $\Lambda_N$  (usualmente chamado de parâmetro escalonado), isto é,

$$A(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,1)} \alpha^{\ell} [k] A_{\ell}, \qquad B_{w}(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,1)} \alpha^{\ell} [k] B_{w\ell},$$
$$B_{u}(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,1)} \alpha^{\ell} [k] B_{u\ell}, \qquad C_{z}(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,1)} \alpha^{\ell} [k] C_{z\ell},$$
$$D_{w}(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,1)} \alpha^{\ell} [k] D_{w\ell}, \qquad D_{u}(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,1)} \alpha^{\ell} [k] D_{u\ell},$$

ou representado de forma compacta por

$$(A, B_w, B_u, C_z, D_w, D_u) (\alpha[k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N, 1)} \alpha [k]^\ell (A, B_w, B_u, C_z, D_w, D_u)_\ell,$$

onde  $A_{\ell}, B_{w\ell}, B_{u\ell}, C_{z\ell}, D_{w\ell} \in D_{u\ell}$  são matrizes constantes para todo  $\ell \in \mathcal{K}(N, 1)$ .

Serão apresentados os cálculos apenas para a matriz dinâmica *A*, uma vez que os cálculos para as demais matrizes do sistema são análogos.

## 2.3.1 Sistemas LPV com um parâmetro variante

Esta seção apresenta uma parametrização polinomial homogênea para sistemas LPV afins com um parâmetro variante.

Considere o sistema LPV afim (2.3) com um parâmetro variante, ou seja

$$\theta[k] = \theta_1[k], \quad \text{com} \quad \theta_1[k] \in \left[\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1\right],$$
(2.6)

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então

$$A(\theta[k]) = A(\theta_1[k]) = A_0 + \theta_1[k] A_1$$
(2.7)

esta contida no politopo  $\mathcal{P}$ , dado por

$$\mathcal{P} = \operatorname{co}\left\{\min A(\theta[k]), \max A(\theta[k])\right\} = \operatorname{co}\left\{A(\underline{\theta}_1), A(\overline{\theta}_1)\right\},$$
(2.8)

como ilustrado geometricamente pela Figura 2.1.



Figura 2.1 - Domínio  $\mathcal P$  (região azul) da matriz  $A(\theta_1\,[k]).$ 

Para determinar uma representação polinomial homogênea com parâmetros no simplex unitário para a matriz  $A(\theta_1[k])$ , primeiro parametrizaremos a matriz A como função de um parâmetro normalizado  $\beta_1[k] \in [0,1]$ , obtendo-se

$$A(\theta_{1}[k]) = A_{0} + \theta_{1}[k] A_{1}$$

$$= A_{0} + (\theta_{1}[k] + \underline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1}) A_{1}$$

$$= A_{0} + \underline{\theta}_{1}A_{1} + (\theta_{1}[k] - \underline{\theta}_{1}) A_{1}$$

$$= A_{0} + \underline{\theta}_{1}A_{1} + \frac{\theta_{1}[k] - \underline{\theta}_{1}}{\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1}} (\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1}) A_{1}$$

$$= \overline{A}_{0} + \beta_{1}[k] \overline{A}_{1}$$

$$= A(\beta_{1}[k])$$

com

$$\overline{A}_0 \triangleq A_0 + \underline{\theta}_1 A_1,$$
$$\overline{A}_1 \triangleq \left(\overline{\theta}_1 - \underline{\theta}_1\right) A_1,$$
$$\beta_1 [k] \triangleq \frac{\theta_1 [k] - \underline{\theta}_1}{\overline{\theta}_1 - \theta_1}$$

Por fim, reescrevendo A na forma

$$A(\theta_1 [k]) = A(\beta_1 [k])$$
  
=  $\overline{A}_0 + \beta_1 [k] \overline{A}_1$   
=  $(1 + \beta_1 [k] - \beta_1 [k]) \overline{A}_0 + \beta_1 [k] \overline{A}_1$   
=  $(1 - \beta_1 [k]) \overline{A}_0 + \beta_1 [k] (\overline{A}_0 + \overline{A}_1)$ 

e definindo

$$A_{(1,0)} \triangleq \overline{A}_0 = A_0 + \underline{\theta}_1 A_1 = A(\underline{\theta}_1),$$

$$A_{(0,1)} \triangleq \overline{A}_0 + \overline{A}_1 = A(\underline{\theta}_1) + (\overline{\theta}_1 - \underline{\theta}_1) A_1 = A(\overline{\theta}_1),$$

$$\alpha_1 [k] \triangleq 1 - \beta_1 [k] = \frac{\overline{\theta}_1 - \theta_1 [k]}{\overline{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \in [0,1],$$

$$\alpha_2 [k] \triangleq \beta_1 [k] = \frac{\theta_1 [k] - \underline{\theta}_1}{\overline{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \in [0,1],$$
(2.9)

obtém-se a seguinte representação polinomial

$$A(\theta_{1}[k]) = \alpha_{1}[k] A_{(1,0)} + \alpha_{2}[k] A_{(0,1)}$$

$$= \alpha_{1}[k]^{1} \alpha_{2}[k]^{0} A_{(1,0)} + \alpha_{1}[k]^{0} \alpha_{2}[k]^{1} A_{(0,1)}$$

$$= (\alpha_{1}[k], \alpha_{2}[k])^{(1,0)} A_{(1,0)} + (\alpha_{1}[k], \alpha_{2}[k])^{(0,1)} A_{(0,1)}$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(2,1)} \alpha[k]^{i} A_{i},$$

$$= A(\alpha[k]),$$
(2.10)

 $\operatorname{com} \alpha [k] \in \Lambda_2, \forall k \in \mathbb{N}.$  Portanto a matriz  $A(\alpha [k])$  esta delimitada pelo politopo  $\mathcal{Q}$  dado por

$$Q = \operatorname{co}\left\{A_{(1,0)}, A_{(0,1)}\right\} = \operatorname{co}\left\{A(\underline{\theta}_1), A(\overline{\theta}_1)\right\}.$$
(2.11)

Das equações (2.8) e (2.11) tem-se que  $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ , e portanto, a parametrização para o domínio  $\alpha$  modela de forma exata o domínio do sistema LPV com um parâmetro variante. Como ilustrado pela Figura 2.2.



Figura 2.2 - Domínio  $\mathcal{P}$  (região azul) da matriz  $A(\theta_1[k])$  e domínio  $\mathcal{Q}$  (região azul) da matriz  $A(\alpha[k])$ .

## 2.3.2 Sistemas LPV com dois parâmetros variantes

Nesta seção propõe-se uma parametrização polinomial homogênea para sistemas LPV afins com dois parâmetros variantes.

Considere o sistema LPV afim (2.3) com dois parâmetros variantes, ou seja

$$\theta[k] = (\theta_1[k], \theta_2[k]), \quad \text{com} \quad \theta_i[k] \in \left[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i\right], \quad i = 1, 2,$$
(2.12)

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então

$$A(\theta[k]) = A(\theta_1[k], \theta_2[k]) = A_0 + \theta_1[k] A_1 + \theta_2[k] A_2$$
(2.13)

esta contida no politopo  $\mathcal{P}$ , dado por

$$\mathcal{P} = \operatorname{co}\left\{A(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2), A(\overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2), A(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_2), A(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2)\right\},\tag{2.14}$$

como ilustrado geometricamente pela Figura 2.3.



Para determinar uma representação polinomial homogênea com parâmetros no simplex unitário para a matriz dinâmica  $A(\theta_1[k], \theta_2[k])$ , primeiro parametrizaremos a matriz A como função
de dois parâmetros normalizados  $\beta_{1}\left[k\right]$  <br/>e $\beta_{2}\left[k\right]$ , obtendo-se

$$\begin{split} A(\theta_{1} [k], \theta_{2} [k]) &= A_{0} + \theta_{1} [k] A_{1} + \theta_{2} [k] A_{2} \\ &= A_{0} + (\theta_{1} [k] + \underline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1}) A_{1} + (\theta_{2} [k] + \underline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2}) A_{2} \\ &= A_{0} + \underline{\theta}_{1} A_{1} + \underline{\theta}_{2} A_{2} + (\theta_{1} [k] - \underline{\theta}_{1}) A_{1} + (\theta_{2} [k] - \underline{\theta}_{2}) A_{2} \\ &= A_{0} + \underline{\theta}_{1} A_{1} + \underline{\theta}_{2} A_{2} \\ &+ \frac{\theta_{1} [k] - \underline{\theta}_{1}}{\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1}} (\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1}) A_{1} + \frac{\theta_{2} [k] - \underline{\theta}_{2}}{\overline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2}} (\overline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2}) A_{2} \\ &= \overline{A}_{0} + \beta_{1} [k] \overline{A}_{1} + \beta_{2} [k] \overline{A}_{2} \\ &= A(\beta_{1} [k], \beta_{2} [k]) \end{split}$$

com

$$\overline{A}_{0} \triangleq A_{0} + \underline{\theta}_{1}A_{1} + \underline{\theta}_{2}A_{2},$$

$$\overline{A}_{1} \triangleq (\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1})A_{1},$$

$$\overline{A}_{2} \triangleq (\overline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2})A_{2},$$

$$\beta_{1}[k] \triangleq \frac{\theta_{1}[k] - \underline{\theta}_{1}}{\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1}},$$

$$\beta_{2}[k] \triangleq \frac{\theta_{2}[k] - \underline{\theta}_{2}}{\overline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2}}$$

Por fim, reescrevendo A na forma

$$\begin{aligned} A(\theta_1 [k], \theta_2 [k]) &= A(\beta_1 [k], \beta_2 [k]), \\ &= \overline{A}_0 + \beta_1 [k] \overline{A}_1 + \beta_2 [k] \overline{A}_2, \\ &= \left(1 + \frac{\beta_1 [k] - \beta_1 [k] + \beta_2 [k] - \beta_2 [k]}{2}\right) \overline{A}_0 + \frac{\beta_1 [k]}{2} 2 \overline{A}_1 + \frac{\beta_2 [k]}{2} 2 \overline{A}_2, \\ &= \left(1 - \frac{\beta_1 [k] + \beta_2 [k]}{2}\right) \overline{A}_0 + \frac{\beta_1 [k]}{2} (\overline{A}_0 + 2 \overline{A}_1) + \frac{\beta_2 [k]}{2} (\overline{A}_0 + 2 \overline{A}_2), \end{aligned}$$

e definindo

$$A_{(1,0,0)} \triangleq \overline{A}_{0} = A(\underline{\theta}_{1},\underline{\theta}_{2}),$$

$$A_{(0,1,0)} \triangleq \overline{A}_{0} + 2\overline{A}_{1} = A(\underline{\theta}_{1},\underline{\theta}_{2}) + 2(\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1})A_{1},$$

$$A_{(0,0,1)} \triangleq \overline{A}_{0} + 2\overline{A}_{2} = A(\underline{\theta}_{1},\underline{\theta}_{2}) + 2(\overline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2})A_{2},$$

$$\alpha_{1}[k] \triangleq 1 - \frac{\beta_{1}[k] + \beta_{2}[k]}{2} = 1 - \frac{\theta_{1}[k] - \underline{\theta}_{1}}{2(\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1})} - \frac{\theta_{2}[k] - \underline{\theta}_{2}}{2(\overline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2})} \in [0,1], \quad (2.15)$$

$$\alpha_{2}[k] \triangleq \frac{\beta_{1}[k]}{2} = \frac{\theta_{1}[k] - \underline{\theta}_{1}}{2(\overline{\theta}_{1} - \underline{\theta}_{1})} \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$$

$$\alpha_{3}[k] \triangleq \frac{\beta_{2}[k]}{2} = \frac{\theta_{2}[k] - \underline{\theta}_{2}}{2(\overline{\theta}_{2} - \underline{\theta}_{2})} \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$$

obtém-se que a seguinte representação polinomial

$$\begin{aligned} A(\theta_{1}[k],\theta_{2}[k]) &= \alpha_{1}[k] A_{(1,0,0)} + \alpha_{2}[k] A_{(0,1,0)} + \alpha_{3}[k] A_{(0,0,1)} \\ &= \alpha_{1}[k]^{1} \alpha_{2}[k]^{0} \alpha_{3}[k]^{0} A_{(1,0,0)} \\ &+ \alpha_{1}[k]^{0} \alpha_{2}[k]^{1} \alpha_{3}[k]^{0} A_{(0,1,0)} \\ &+ \alpha_{1}[k]^{0} \alpha_{2}[k]^{0} \alpha_{3}[k]^{1} A_{(0,0,1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_{1}[k], \alpha_{2}[k], \alpha_{3}[k])^{(1,0,0)} A_{(1,0,0)} \\ &+ (\alpha_{1}[k], \alpha_{2}[k], \alpha_{3}[k])^{(0,1,0)} A_{(0,1,0)} \\ &+ (\alpha_{1}[k], \alpha_{2}[k], \alpha_{3}[k])^{(0,0,1)} A_{(0,0,1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \in \mathcal{K}(3,1)} \alpha[k]^{i} A_{i}, \\ &= A(\alpha[k]), \end{aligned}$$

$$(2.16)$$

 $\operatorname{com} \alpha [k] \subset \Lambda_3, \forall k \in \mathbb{N}.$  Portanto, a matriz  $A(\alpha [k])$  esta delimitada pelo politopo  $\mathcal{Q}$  dado por

$$\mathcal{Q} = \operatorname{co}\left\{A_{(1,0,0)}, A_{(0,1,0)}, A_{(0,0,1)}\right\},$$

$$= \operatorname{co}\left\{A(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2), \left(A(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2) + 2(\overline{\theta}_1 - \underline{\theta}_1)A_1\right), \left(A(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2) + 2(\overline{\theta}_2 - \underline{\theta}_2)A_2\right)\right\}.$$

$$(2.17)$$

As equações (2.14) e (2.17) mostram que as matrizes  $A(\theta[k]) \in A(\alpha[k])$  possuem domínios diferentes. Isto ocorre porque as variáveis  $\alpha_2 \in \alpha_3$  assumem valores entre 0 e 0,5 como função de  $\beta$ , porém, ao considerar que  $\alpha \in \Lambda_3$  tem-se que todas suas componentes podem assumir valores

entre 0 e 1. Com efeito, tem-se que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ , como ilustrado pela Figura 2.4.





Portanto, a parametrização proposta para o domínio  $\alpha$  é conservadora para sistemas LPV com dois parâmetros variantes.

## 2.3.3 Sistemas LPV com um número arbitrário de parâmetros variantes

Nesta seção a parametrização polinomial homogênea proposta nas seções anteriores é generalizada para sistemas LPV afins com um número arbitrário de parâmetros variantes.

Considere o sistema LPV afim (2.3) com n parâmetros variantes,  $n \in \mathbb{N}^*$ , tal que  $\theta[k]$  satisfaça (2.4) e  $A(\theta[k])$  é dada por (2.5). Então, A esta contida no politopo  $\mathcal{P}$  com  $2^n$  vértices, dado por

$$\mathcal{P} = \operatorname{co}\left\{A(\underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_n), A(\overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_n), \dots, A(\overline{\theta}_1, \dots, \overline{\theta}_{n-1}, \underline{\theta}_n), A(\overline{\theta}_1, \dots, \overline{\theta}_n)\right\}.$$

Para determinar uma representação polinomial homogênea com parâmetros no simplex unitário para a matriz dinâmica  $A(\theta_1[k], \dots, \theta_n[k])$ , primeiro parametrizaremos a matriz A como função de n parâmetros normalizados  $\beta_1[k], \ldots, \beta_n[k]$ , obtendo-se

$$A(\theta_{1}[k], \dots, \theta_{n}[k]) = A_{0} + \sum_{i=1}^{n} \theta_{i}[k] A_{i},$$

$$= A_{0} + \sum_{i=1}^{n} (\theta_{i}[k] + \underline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}) A_{i},$$

$$= A_{0} + \sum_{i=1}^{n} \underline{\theta}_{i} A_{i} + \sum_{i=1}^{n} (\theta_{i}[k] - \underline{\theta}_{i}) A_{i},$$

$$= A_{0} + \sum_{i=1}^{n} \underline{\theta}_{i} A_{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_{i}[k] - \underline{\theta}_{i}}{\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}} (\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}) A_{i},$$

$$= \overline{A}_{0} + \sum_{i=1}^{n} \underline{\theta}_{i} A_{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_{i}[k] - \underline{\theta}_{i}}{\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}} (\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}) A_{i},$$

$$= \overline{A}_{0} + \sum_{i=1}^{n} \underline{\theta}_{i} [k] \overline{A}_{i},$$

$$= A(\beta_{1}[k], \dots, \beta_{n}[k]),$$

com

$$\overline{A}_{0} \triangleq A_{0} + \sum_{i=1}^{n} \underline{\theta}_{i} A_{i},$$
$$\overline{A}_{i} \triangleq \left(\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}\right) A_{i},$$
$$\beta_{i} [k] \triangleq \frac{\theta_{i} [k] - \underline{\theta}_{i}}{\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}},$$

para i = 1, ..., n.

Por fim, reescrevendo A na forma

$$A(\theta_1 [k], \dots, \theta_n [k]) = A(\beta_1 [k], \dots, \beta_n [k]),$$
  
$$= \overline{A}_0 + \sum_{i=1}^n + \beta_i [k] \overline{A}_i,$$
  
$$= \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_i [k] - \beta_i [k])}{n}\right) \overline{A}_0 + \sum_{i=1}^n + \frac{\beta_i [k]}{n} n \overline{A}_i,$$
  
$$= \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i [k]}{n}\right) \overline{A}_0 + \sum_{i=1}^n + \frac{\beta_i [k]}{n} (\overline{A}_0 + n \overline{A}_i),$$

e definindo

$$A_{e_{1}} \triangleq \overline{A}_{0} = A(\underline{\theta}_{1}, \dots, \underline{\theta}_{n}),$$

$$A_{e_{i+1}} \triangleq \overline{A}_{0} + n\overline{A}_{i} = A(\underline{\theta}_{1}, \dots, \underline{\theta}_{n}) + n\left(\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}\right) A_{i},$$

$$\alpha_{1}\left[k\right] \triangleq 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{i}\left[k\right] = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_{i}\left[k\right] - \underline{\theta}_{i}}{\left(\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}\right)} \in \left[0, 1\right],$$

$$\alpha_{i+1}\left[k\right] \triangleq \frac{\beta_{1}\left[k\right]}{n} = \frac{\theta_{i}\left[k\right] - \underline{\theta}_{i}}{n\left(\overline{\theta}_{i} - \underline{\theta}_{i}\right)} \in \left[0, \frac{1}{n}\right],$$
(2.18)

para i = 1, ..., n, obtém-se a seguinte representação polinomial homogênea

$$A(\theta_{1}[k], \dots, \theta_{n}[k]) = \alpha_{1}[k] A_{e_{1}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+1}[k] A_{e_{i+1}},$$
  
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha [k]^{e_{i}} A_{e_{i}} = \sum_{i \in \mathcal{K}(n+1,1)} \alpha [k]^{i} A_{i},$$
  
$$= A(\alpha [k]),$$
  
(2.19)

 $\operatorname{com} \alpha[k] \subset \Lambda_{n+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ . Portanto, a matriz  $A(\alpha[k])$  esta delimitada pelo politopo  $\mathcal{Q}$ ,  $\operatorname{com} n+1$  vértices, dado por

$$Q = \operatorname{co} \left\{ A_{(1,0,\dots,0)}, A_{(0,1,0,\dots,0)} \dots, A_{(0,\dots,0,1)} \right\}.$$

Para n = 1, tem-se que os domínios  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  são iguais, como mostrado na seção 2.3.1. Entretanto, para  $n \ge 2$ , os domínios  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  são diferentes. Isto ocorre porque as variáveis  $\alpha_2[k], \ldots, \alpha_{n+1}[k]$  assumem valores entre  $0 \in 1/n$ , porém, ao considerar que  $\alpha[k] \in \Lambda_{n+1}$  tem-se que todas suas componentes podem assumir valores entre  $0 \in 1$ . Com efeito, para que o politopo  $\mathcal{Q}$ com n + 1 vértices contenha o politopo  $\mathcal{P}$  com  $2^n$  vértices é necessário que  $\mathcal{Q}$  se torne cada vez maior do que  $\mathcal{P}$  a medida que n cresce. Portanto, a parametrização polinomial para o domínio  $\alpha$  se torna cada vez mais conservadora com o aumento do número n de parâmetros variantes, por outro lado, reduz o número de vértices do sistema de  $2^n$  para n + 1, o que minimiza significativamente o esforço computacional na resolução de problemas de análise e síntese de sistemas LPV com um grande número de parâmetros variantes.

# **3** TÉCNICAS DE ANÁLISE E SÍNTESE PARA SISTEMAS LPV DISCRETOS

## 3.1 Prefácio

Neste capítulo são investigadas a estabilidade assintótica e o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  de sistemas dinâmicos LPV discretos no tempo. Primeiro, um referencial teórico sobre estabilidade e desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  de sistemas dinâmicos LPV discretos no tempo é exposto. Baseado na existência de uma função de Lyapunov quadrática nos estados são fornecidas condições suficientes, em termos de LMIs dependentes dos parâmetros variantes, para análise de estabilidade assintótica e desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Em seguida, as condições de análise fornecidas são aplicadas à classe de sistemas LPV cujas matrizes tem uma dependência polinomial homogênea sobre os parâmetros variantes, chamada de sistemas LPV HPPD. Para obter condições LMIs tratáveis numericamente é imposta uma estrutura particular para a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea sobre os parâmetros variantes em instantes sucessivos de tempo. Assumindo que os parâmetros variam no simplex unitário com limitantes conhecidos sobre suas taxas de variação é proposto um modelo politópico para o domínio dos parâmetros e suas taxas de variação. As propriedades geométricas do domínio politópico são exploradas para fornecer conjuntos finitos de LMIs que incluem informações sobre os limitantes das taxas de variação dos parâmetros. Por fim, a metodologia utilizada para obter as condições de análise é estendida para fornecer conjuntos finitos de LMIs suficentes para síntese de controladores estáticos de realimentação de saída por ganho escalonado e robustos.

#### 3.2 Análise de estabilidade de sistemas LPV

Nesta seção são apresentadas condições LMIs para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos LPV discretos no tempo. Primeiro, a definição de estabilidade assintótica é apresentada. Em seguida, é fornecida uma condição suficiente para verificar a estabilidade de sistemas LPV discretos. Por último, são obtidas condições de análise em termos de LMIs dependentes de parâmetros. Considere o sistema dinâmico LPV discreto no tempo

$$x[k+1] = A(\alpha[k])x[k], \quad x[k_0] = x_0, \quad k \ge k_0 \in \mathbb{N},$$
(3.1)

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados,  $\alpha[k] \in \mathbb{R}^N$  é o vetor de parâmetros variantes no tempo e  $A(\alpha[k]) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é uma matriz variante no tempo em função de  $\alpha$ . Uma definição de estabilidade para o sistema dinâmico LPV discreto no tempo (3.1) é apresentada a seguir.

**Definição 6** (Definição 13.7 de Haddad e Chellaboina (2008)). *O sistema dinâmico LPV discreto* no tempo (3.1) é globalmente uniformemente assintoticamente estável se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $||x_0|| < \delta$  implica que  $||x[k]|| < \varepsilon$  e  $\lim_{k\to\infty} x[k] = 0$  uniformemente em  $k_0$  e  $x_0$  para todo  $k \ge k_0 \in \mathbb{N}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ .

Uma condição suficiente para assegurar a estabilidade do sistema dinâmico LPV discreto no tempo (3.1) é fornecida pelo próximo teorema.

**Teorema 3** (Teorema 13.11 de Haddad e Chellaboina (2008)). Se existirem uma função contínua  $V : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}$  e constantes positivas  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tais que

$$\sigma \|x\|^2 \le V(k,x) \le \beta \|x\|^2,$$
  
$$\Delta V(k,x) \le -\gamma \|x\|^2,$$

para todo  $(k,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n_x}$  com

$$\Delta V(k,x) \triangleq V(k+1,x[k+1]) - V(k,x[k]),$$

então o sistema dinâmico LPV discreto no tempo (3.1) é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

A prova do Teorema 3 é omitida uma vez que é uma particularização da prova apresentada em Haddad e Chellaboina (2008) para sistemas dinâmicos variantes no tempo não-lineares.

A função V apresentada no Teorema 3 é chamada de função de Lyapunov. Na literatura existem diversos resultados de análise e síntese para sistemas dinâmicos baseados em diferentes tipos de funções de Lyapunov, entretanto para sistemas lineares é comum o uso de uma função de

Lyapunov quadrática nos estados, isto é

$$V(k,x) = x[k]' P(\alpha[k]) x[k], \qquad (3.2)$$

onde  $P(\alpha[k]) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é uma matriz simétrica positiva definida.

Usando esta classe de funções de Lyapunov, a análise de estabilidade assintótica do sistema LPV discreto no tempo (3.1) pode ser caracterizada em termos de LMIs dependentes de parâmetros, como apresentado no próximo teorema.

**Teorema 4** (Lema 1 de Oliveira e Peres (2008)). *Se existir uma matriz simétrica e limitada*  $P(\alpha [k])$  *tal que* 

$$\begin{bmatrix} P(\alpha [k]) & A(\alpha [k])' P(\alpha [k+1]) \\ \star & P(\alpha [k+1]) \end{bmatrix} > 0,$$
(3.3)

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então o sistema dinâmico LPV discreto no tempo (3.1) é assintoticamente estável (também chamado de robustamente estável).

*Demonstração.* Usando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994, Capítulo 2), tem-se que a LMI (3.3) é equivalente as seguintes desigualdades

$$P(\alpha[k]) > 0,$$
  $A(\alpha[k])'P(\alpha[k+1])A(\alpha[k]) - P(\alpha[k]) < 0.$ 

Desde que  $P(\alpha[k])$  seja uma matriz positiva definida e limitada, então existem constantes positivas  $\sigma$ ,  $\beta$  tal que

$$0 < \sigma I_{n_x} \le P(\alpha[k]) < \beta I_{n_x}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\sigma \|x\|^{2} \le x[k]' P(\alpha [k]) x[k] = V(k,x) \le \beta \|x\|^{2}$$

Desde que a LMI (3.3) seja satisfeita, a diferença  $\Delta V(k,x)$  ao longo da trajetória do sistema (3.1), dada por

$$\Delta V(k,x) = x[k]' \left( A(\alpha[k])' P(\alpha[k+1]) A(\alpha[k]) - P(\alpha[k]) \right) x[k],$$

para algum escalar  $\gamma > 0$ , satisfaz

$$\Delta V(k,x) \le -\gamma \|x[k]\|^2$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

É importante mencionar que diferentes condições LMIs para análise de estabilidade assintótica do sistema (3.1) podem ser derivadas usando a mesma função de Lyapunov (3.2). Baseado em Daafouz e Bernussou (2001) a condição LMI (3.3) pode ser estendida introduzindo-se uma variável adicional. Esse é o contexto do próximo teorema.

**Teorema 5** (Teorema 4.4 de De-Caigny (2009)). Se existirem matrizes limitadas  $P(\alpha[k]) = P(\alpha[k])' e G(\alpha[k])$  tais que

$$\begin{vmatrix} P(\alpha [k+1]) & A(\alpha [k])G(\alpha [k]) \\ \star & G(\alpha [k]) + G(\alpha [k])' - P(\alpha [k]) \end{vmatrix} > 0,$$
(3.4)

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então o sistema dinâmico LPV discreto no tempo (3.1) é assintoticamente estável. Demonstração. Do bloco (1,1) da LMI (3.4) tem-se que  $P(\alpha [k+1]) > 0$ . Então, multiplicando (3.4) à esquerda por  $T_1(\alpha [k]) \triangleq \begin{bmatrix} I_{n_x} & -A(\alpha [k]) \end{bmatrix}$  e à direita por  $T_1(\alpha [k])'$ , obtém-se

$$P(\alpha [k+1]) - A(\alpha [k])P(\alpha [k])A(\alpha [k])' > 0,$$

que, segundo o complemento de Schur, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P(\alpha [k+1]) & A(\alpha [k])P(\alpha [k]) \\ \star & P(\alpha [k]) \end{bmatrix} > 0.$$
(3.5)

Por fim, multiplicando (3.5) à esquerda por  $T_2(\alpha [k])$  e à direita por  $T_2(\alpha [k])'$ , com

$$T_2(\alpha [k]) \triangleq \begin{bmatrix} 0_{n_x, n_x} & P(\alpha [k])^{-1} \\ P(\alpha [k+1])^{-1} & 0_{n_x, n_x} \end{bmatrix},$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} P(\alpha [k])^{-1} & A(\alpha [k])' P(\alpha [k+1])^{-1} \\ \star & P(\alpha [k+1])^{-1} \end{bmatrix} > 0.$$
(3.6)

Portanto, a factibilidade de (3.4) implica a factibilidade de (3.6) e, consequentemente, seguindo as etapas da prova do Teorema 4, a função de Lyapunov  $V(k,x) = x[k]'P(\alpha[k])^{-1}x[k]$ satisfaz as condições do Teorema 3.

A matrix *G* apresentada no Teorema 5 é chamada de variável de folga. Seu uso é de grande valia na síntese de controladores, pois permite obter controladores sem uma dependência explícita da matriz de Lyapunov, como apresentado em De-Oliveira et al. (1999) para sistemas LTI incertos.

# 3.3 Análise de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ de sistemas LPV

Nesta seção são apresentadas caracterizações LMIs para análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  de sistemas dinâmicos LPV discretos no tempo. Primeiro, a definição de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  é apresentada. Em seguida, são fornecidas condições de análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  em termos de LMIs dependentes de parâmetros.

Considere o seguinte sistema dinâmico LPV discreto no tempo

$$x[k+1] = A(\alpha [k])x[k] + B_w(\alpha [k])w[k] z[k] = C_z(\alpha [k])x[k] + D_w(\alpha [k])w[k] , \quad x[k_0] = x_0, \quad k \ge k_0 \in \mathbb{N},$$
(3.7)

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados,  $w[k] \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada exógena,  $z[k] \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída do sistema,  $\alpha [k] \in \mathbb{R}^N$  é o parâmetro escalonado e  $A(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B_w(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ ,  $C_z(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ ,  $D_w(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$  são matrizes variantes no tempo em função de  $\alpha$ . A definição de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema dinâmico LPV discreto (3.7) é apresentada a seguir. **Definição 7** (Definição de De-Caigny et al. (2010a)). Suponha que o sistema (3.7) é assintoticamente estável. Então o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema LPV (3.7) é definido como

$$\mathcal{H}_{\infty} = \sup_{\|w(\alpha[k])\|_{\ell_{2}} \neq 0} \frac{\|z(\alpha[k])\|_{\ell_{2}}}{\|w(\alpha[k])\|_{\ell_{2}}},$$

 $com \ w(\alpha \ [k]) \in \ell_2^{n_w} \ e \ z(\alpha \ [k]) \in \ell_2^{n_z} \ para$ 

$$\ell_2^n \triangleq \left\{ x \left[ k \right] \in \mathbb{N}^n; \| x \left[ k \right] \|_{\ell_2} \triangleq \sqrt{\sum_{k=0}^\infty x' \left[ k \right] x \left[ k \right]} < \infty \right\}.$$

Baseado no *bounded-real lemma* (BOYD et al., 1994), um limitante superior sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema (3.7) pode ser caracterizado em termos de uma LMI dependente de parâmetros, como descrito no próximo teorema.

**Teorema 6** (Lema 3 de De-Souza et al. (2006)). Se existirem um escalar  $\eta > 0$  e uma matriz dependente de parâmetros limitada  $P(\alpha[k])$  tais que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha [k+1]) & A(\alpha [k])P(\alpha [k]) & B_w(\alpha [k]) & 0_{n_x,n_z} \\ \star & P(\alpha [k]) & 0_{n_x,n_w} & P(\alpha [k])C_z(\alpha [k])' \\ \star & \star & \eta I_{n_w} & D_w(\alpha [k])' \\ \star & \star & \star & \eta I_{n_z} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.8)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então o sistema (3.7) é assintoticamente estável com limitante superior garantido sobre seu desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ , dado por

$$\mathcal{H}_{\infty} \leq \min_{P(\alpha[k])} \eta.$$

*Demonstração.* Considere a função de Lyapunov candidata V definida em (3.2). A LMI (3.8) é satisfeita se somente se a desigualdade

$$\Delta V(k,x) + z[k]'z[k] - \eta^2 w[k]'w[k] < 0,$$
(3.9)

ao longo da trajetória do sistema (3.7), for satisfeita. Somando a equação (3.9) para k = 0, ..., T, tem-se que

$$V(T+1,x[T+1]) + \sum_{k=0}^{T} (z[k]'z[k] - \eta^2 w[k]'w[k]) < 0.$$

Desde que  $P(\alpha[k])$  seja positiva definida, tem-se que

$$\sum_{k=0}^{T} (z[k]^T z[k] - \eta^2 w[k]^T w[k]) < 0,$$

então

$$\sup_{\|w[k]\|_{\ell_2} \neq 0} \frac{\|z[k]\|_{\ell_2}}{\|w[k]\|_{\ell_2}} = \mathcal{H}_{\infty} < \eta,$$

para  $w[k] \in \ell_2$  e  $z[k] \in \ell_2$ .

Por fim, desde que  $\mathcal{H}_{\infty} < \eta$ , a equação (3.9) implica que  $\Delta V(k,x)$  satisfaz as condições do Teorema 3.

Como apresentado em De-Souza et al. (2006), a variável de folga G adicionada na LMI (3.4) do Teorema 5 de análise estabilidade, pode ser incorporada a LMI (3.8) de análise de desempenho. **Teorema 7** (Teorema 1 de De-Souza et al. (2006)). Se existirem um escalar  $\eta > 0$  e matrizes limitadas  $P(\alpha [k]) = P(\alpha [k])' e G(\alpha [k])$  tais que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha [k+1]) & A(\alpha [k])G(\alpha [k]) & B_w(\alpha [k]) & 0_{n_x,n_z} \\ \star & G(\alpha [k]) + G(\alpha [k])' - P(\alpha [k]) & 0_{n_x,n_w} & G(\alpha [k])'C_z(\alpha [k])' \\ \star & \star & \eta I_{n_w} & D_w(\alpha [k])' \\ \star & \star & \star & \eta I_{n_z} \end{bmatrix} > 0,$$

$$(3.10)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então o sistema (3.7) é assintoticamente estável com limitante superior garantido de seu desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ , dado por

$$\mathcal{H}_{\infty} \leq \min_{P(\alpha[k]), G(\alpha[k])} \eta$$

A prova do Teorema 7 esta apresentada em De-Souza et al. (2006) que faz uma extensão da caracterização LMI apresentada em De-Oliveira et al. (2002) para sistemas LTI.

## 3.4 Modelagem do domínio incerto

Nesta seção são apresentadas as hipóteses necessárias para a obtenção dos resultados das próximas seções. Primeiro, é mostrada a parametrização imposta sobre a matriz de Lyapunov. Em seguida, é inserida a modelagem do domínio dos parâmetros e suas taxas de variação.

#### 3.4.1 Parametrização da função de Lyapunov

A parametrização escolhida para a matriz de Lyapunov foi motivada pelos recentes resultados de análise de estabilidade, baseados na existência de funções de Lyapunov quadráticas nos estados, para sistemas LTI incertos e para sistemas chaveados. Mostrou-se que as condições suficientes para análise tornam-se também mecessárias com a utilização de matrizes de Lyapunov com dependência polinomial homogênea dos parâmetros, no contexto de sistemas LTI incertos, e utilização de matrizes de Lyapunov afins em sucessivos instantes de tempo dos parâmetros, no contexto de sistemas chaveados (LEE; DULLERUD, 2006; LEE, 2006). Estas parametrizações para a matriz de Lyapunov já foram utilizadas para derivar condições de análise e síntese para sistemas LPV: polinomial homogênea, por exemplo, em Borges et al. (2008), Oliveira e Peres (2009), De-Caigny et al. (2012a); afim em sucessivos instantes de tempo, por exemplo, em Oliveira e Peres (2009), Borges et al. (2010a). Assim, neste trabalho, propõe-se uma nova parametrização para a matriz de Lyapunov, mesclando ambas as parametrizações, de forma a obter uma matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de instantes sucessivos de tempo dos parâmetros, descrita genericamente por:

$$P(\alpha[k]) = \sum_{\ell_1 \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\ell_L \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha[k]^{\ell_1} \alpha[k+1]^{\ell_2} \cdots \alpha[k+L-1]^{\ell_L} P_{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_L)}.$$
 (3.11)

A estrutura (3.11) é polinomial homogênea de grau arbitrário g sobre o parâmetro escalonado  $\alpha$  [k] em L instantes sucessivos de tempo e contém como caso particular as estruturas: afim (fixando-se L = g = 1), polinomial homogênea (fixando-se L = 1) e afim em sucessivos instantes de tempo (fixando-se g = 1). Por fim, fixando-se L = 1 e g = 0 a matriz de Lyapunov torna-se independente dos parâmetros, ou seja, constante.

#### 3.4.2 Modelagem dos parâmetros e suas taxas de variação

Nesta seção é fornecido um modelo politópico para o domínio dos parâmetros e suas taxas de variação proposto em Oliveira e Peres (2009). As propriedades geométricas do domínio politópico são exploradas para fornecer uma mudança de variáveis que é utilizada nas seções posteriores para obter conjuntos finitos de LMIs que incluem informações sobre o limitante das taxas de variação dos parâmetros.

Os parametros variantes são assumidos pertencendo ao simples unitário (2.1), isto é,

$$\alpha[k] \in \Lambda_N, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

A taxa de variação do parâmetro escalonado é dada por

$$\Delta \alpha \left[k\right]_{i} = \alpha \left[k+1\right]_{i} - \alpha \left[k\right]_{i}, \qquad i = 1, \dots, N, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
(3.13)

Consequentemente, desde que  $\alpha$   $[k] \in \Lambda_N$ , tem-se que

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta \alpha \left[k\right]_{i} = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
(3.14)

É assumido que as taxas de variação dos parâmetros são limitadas por um limitante  $b \in \mathbb{R}$ conhecido *a priori*, tal que

$$-b \le \Delta \alpha \left[k\right]_i \le b, \qquad i = 1, \dots, N, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$
(3.15)

com  $b \in [0,1]$ . Dependendo do valor b, três situações podem ocorrer:

Para b = 0, tem-se que α [k + 1] = α [k], ∀k ≥ 0, isto é, o parâmetro escalonado é invariante no tempo α [k] = α[0], ∀k ∈ N;

- Para 0 < b < 1, tem-se que α [k] varia dentro do simplex unitário Λ<sub>N</sub> com taxa de variação limitada.
- Para b = 1, tem-se que α [k] varia arbitrariamente dentro do simplex unitário Λ<sub>N</sub>, isto
   é, o parâmetro α [k] assume valores arbitrários dentro do simplex unitário entre dois instantes sucessivos de tempo.

Devido a definição (3.13) é claro que a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  é uma função do parâmetro  $\alpha [k]$ . A Figura 3.1 mostra a região onde cada componente do parâmetro escalonado e sua taxa de variação podem assumir valores para o caso 0 < b < 1.



Figura 3.1 - Região no plano ( $\alpha_i[k], \Delta \alpha_i[k]$ ) onde  $\Delta \alpha_i[k]$  assume valores como função de  $\alpha_i[k]$  considerando o limitante  $b \in (0,1)$  (região cinza).

Modelagem do vetor  $(\alpha [k]', \Delta \alpha [k]', \dots, \Delta \alpha [k + L - 1]')'$ 

Segundo Oliveira e Peres (2009) a região onde o vetor  $(\alpha_i [k], \Delta \alpha_i [k])'$  assume valores satisfazendo as condições (3.12), (3.13) e (3.15), mostrada na Figura 3.1, consiste em um politopo com 6 vértices:

$$(0,0), (0,b), (1-b,b), (1,0), (1,-b), (b,-b),$$
 (3.16)

que pode ser modelado como a combinação convexa de seus vértices

$$\Gamma_i \triangleq \operatorname{co}\left\{h^1, \dots, h^6\right\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \xi = \sum_{j=1}^6 \gamma_j h^j, \forall \gamma \in \Lambda_6\right\},\$$

onde

$$\begin{bmatrix} h^1 & \dots & h^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-b & 1 & 1 & b \\ 0 & b & b & 0 & -b & -b \end{bmatrix}$$

A partir do politopo  $\Gamma_i$  pode-se modelar a região onde o vetor  $(\alpha [k]', \Delta \alpha [k]')'$  assume valores, denominada  $\Gamma$ , fazendo-se o produto cartesiano dos politopos  $\Gamma_i$  para i = 1, ..., N. Porém, para que

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_{k}\left[k\right] \\ \Delta\alpha\left[k\right] \end{array}\right) \in \Gamma, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

é necessário reoordenar todos os vértices na forma ( $\alpha [k]_1, \ldots, \alpha [k]_N, \Delta \alpha [k]_1, \ldots, \Delta \alpha [k]_N$ ) e descartar os vértices que não satisfazem as condições (3.12) e (3.14). Resultando em um politopo que pode ser modelado por

$$\Gamma = \operatorname{co}\left\{h^{1}, \dots, h^{M}\right\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2N} : \xi = \sum_{j=1}^{M} \gamma_{j} h^{j}, \ \gamma \in \Lambda_{M}\right\},\$$

onde

$$\begin{bmatrix} h^1 & \cdots & h^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^M \\ & & \\ f_2^1 & \cdots & f_2^M \end{bmatrix}, \quad f_1^j \in \Lambda_N, \sum_{i=1}^N f_{2,i}^j = 0, \quad j = 1, \dots, M.$$

Como ilustração, considere N = 2, neste caso  $\alpha[k] = (\alpha_1[k], \alpha_2[k]), \Delta \alpha[k] = (\Delta \alpha_1[k], \Delta \alpha_2[k])$ , e o politopo  $\Gamma$  tal que  $(\alpha_1[k], \alpha_2[k], \Delta \alpha_1[k], \Delta \alpha_2[k])' \in \Gamma$  contruído a partir do produto cartesiano  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$  é dado por

$$\Gamma = \operatorname{co}\left\{h^{1}, \dots, h^{6}\right\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{4} : \xi = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} h^{j}, \gamma \in \Lambda_{6}\right\},\$$

onde

$$\begin{bmatrix} h^1 & \cdots & h^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^6 \\ & & \\ f_2^1 & \cdots & f_2^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 0 & 0 & 1-b \\ & & & \\ 0 & b & b & 0 & -b & -b \\ 0 & -b & -b & 0 & b & b \end{bmatrix}$$

Em um caminho similar, a abordagem proposta para modelagem do domínio do vetor  $(\alpha [k]', \Delta \alpha [k]')'$  pode ser estendida para modelar a região  $\Gamma$  onde o vetor  $(\alpha [k]', \Delta \alpha [k]', \dots, \Delta \alpha [k + L - 1]')' \in \mathbb{R}^{(L+1)N}, L \in \mathbb{N}^*$ , assume valores. De modo que o politopo  $\Gamma$  pode ser modelado genericamente por

$$\Gamma = \operatorname{co}\left\{h^{1}, \dots, h^{M}\right\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(L+1)N} : \xi = \sum_{j=1}^{M} \gamma_{j} h^{j}, \ \gamma \in \Lambda_{M}\right\},\$$

onde

$$\begin{bmatrix} h^{1} & \cdots & h^{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1}^{1} & \cdots & f_{1}^{M} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{L+1}^{1} & \cdots & f_{L+1}^{M} \end{bmatrix}, \quad f_{1}^{j} \in \Lambda_{N}, \sum_{i=1}^{N} f_{\ell,i}^{j} = 0,$$

para j = 1, ..., M e  $\ell = 2, ..., L + 1$ .

Definindo as matrizes

$$F_{\ell} = [f_{\ell}^1, \dots, f_{\ell}^M] \in \mathbb{R}^{N \times M}, \quad \ell = 1, \dots, L+1$$

o politopo  $\Gamma$  pode ser rescrito na forma vetorial, resultando assim que

$$\begin{pmatrix} \alpha [k] \\ \Delta \alpha [k] \\ \vdots \\ \Delta \alpha [k+L-1] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{L+1} \end{bmatrix} \cdot \gamma [k] \in \Gamma, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

A equação acima mostra que o parâmetro escalonado  $\alpha[k]$  e os L instantes sucessivos de tempo do parâmetro de variação  $\Delta \alpha[k]$  podem ser incorporados em um único vetor  $(\alpha[k]', \Delta \alpha[k]', \dots, \Delta \alpha[k + L - 1]')'$  que assume valores dentro do subespaço  $\Gamma$  do  $\mathbb{R}^{L+1}$ , chamado de espaço  $\gamma$ .

Por fim, usando recursivamente (3.13) e a equação anterior, obtém-se

$$\alpha [k] = F_1 \gamma [k]$$

$$\alpha [k+1] = \alpha [k] + \Delta \alpha [k] = (F_1 + F_2) \gamma [k]$$

$$\alpha [k+2] = \alpha [k] + \Delta \alpha [k] + \Delta \alpha [k+1] = (F_1 + F_2 + F_3) \gamma [k]$$

$$\vdots$$

$$\alpha [k+L] = \alpha [k] + \Delta \alpha [k] + \dots + \Delta \alpha [k+L-1] = \left(\sum_{i=1}^{L+1} F_i\right) \gamma [k]$$

e definindo as matrizes

$$T_{\bar{\kappa}} = \sum_{\ell=1}^{\kappa+1} F_{\ell}, \quad \bar{\kappa} = 0, \dots, L,$$

chega-se à seguinte mudança de variáveis

$$\alpha[k+\bar{\kappa}] = T_{\bar{\kappa}} \gamma[k], \qquad (3.17)$$

entre o domínio  $\alpha$  para o domínio  $\gamma$ .

## 3.5 Derivação de conjuntos finitos de LMIs

Nesta seção são apresentadas as etapas necessárias para obter os conjuntos finitos de LMIs suficientes para análise e síntese de controladores de sistemas dinâmicos LPV HPPD discretos no tempo fornecidos neste trabalho.

Os Teoremas 4, 5, 6 e 7 consistem em verificar as LMIs (3.3), (3.4), (3.8) e (3.10) para todo  $k \in \mathbb{N}$ , resultando em um problema de dimensão infinita que não é tratável numericamente. Para contornar esse problema e fornecer conjuntos finitos de LMIs as seguintes etapas são seguidas:

#### 1. Parametrização das matrizes do sistema:

Assume-se que as matrizes do sistemas tem dependência polinomial homogênea do parâmetro escalonado  $\alpha$  [k] que assume valores no simplex unitário  $\Lambda_N$  com limitante,b,

conhecido sobre sua taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$ . Para tanto, no capítulo 2 é apresentado um método de parametrização para sistemas LPV com dependência afim dos parâmetros variantes.

# 2. Parametrização da matriz de Lyapunov:

Como apresentado no seção 3.4.1, fixa-se a estrutura particular (3.11) para a matriz de Lyapunov com dependência polinomial do parâmetro escalonado em instantes sucessivos de tempo.

# 3. Modelagem do parâmetro de variação:

Como apresentado na seção 3.4.2, as propriedades geométricas do domínio politópico  $\Gamma$ , onde o parâmetro escalonado e suas taxas de variação assumem valores, são exploradas para fornecer uma mudança de variáveis do domínio  $\alpha$  para o domínio  $\gamma$ .

#### 4. Mudança de variáveis para o domínio $\gamma$ :

Usando as mudanças de variáveis (3.17) as matrizes dinâmicas dependente do parâmetro variante  $\alpha$  podem ser reescritas como funções do parâmetro  $\gamma$ , obtendo-se

$$(A, B_w, C_z, D_w)(\alpha [k]) \equiv (\hat{A}, \hat{B}_w, \hat{C}_z, \hat{D}_w)(\gamma [k]),$$
$$(P_f, G)(\alpha [k]) \equiv (\hat{P}, \hat{G})(\gamma [k]),$$
$$P_f(\alpha [k+1]) \equiv \tilde{P}(\gamma [k]),$$

com

$$(\hat{A}, \hat{B}_w, \hat{C}_z, \hat{D}_w)(\gamma [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M, p)} \gamma [k]^\ell (\hat{A}, \hat{B}_w, \hat{C}_z, \hat{D}_w)_\ell,$$
$$(\hat{P}, \hat{G}, \tilde{P})(\gamma [k]) = \sum_{j \in \mathcal{K}(M, Lg)} \gamma [k]^j (\hat{P}, \hat{G}, \tilde{P})_j,$$

onde as matrizes coeficientes  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{B}_{w\ell}$ ,  $\hat{C}_{z\ell}$ ,  $\hat{D}_{w\ell}$ ,  $\hat{P}_{\ell}$ ,  $\hat{G}_{\ell}$  e  $\tilde{P}_{\ell}$  podem ser construídas como apresentado no Apêndice A.

Consequentemente, as LMIs (3.3), (3.4), (3.8) e (3.10), apresentadas no Teorema 4, Teorema 5, Teorema 6 e Teorema 7, respectivamente, podem ser reescritas no domínio  $\gamma$ , obtendo-se as seguintes LMIs equivalentes:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(\gamma [k]) & \hat{A}(\gamma [k])' \tilde{P}(\gamma [k]) \\ \star & \tilde{P}(\gamma [k]) \end{bmatrix} > 0,$$
(3.18)

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma [k]) & \hat{A}(\gamma [k])\hat{G}(\gamma [k]) \\ \star & \hat{G}(\gamma [k]) + \hat{G}(\gamma [k])' - \hat{P}(\gamma [k]) \end{bmatrix} > 0,$$
(3.19)

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma [k]) & \hat{A}(\gamma [k]) \hat{P}(\gamma [k]) & \hat{B}_{w}(\gamma [k]) & 0_{n_{x},n_{z}} \\ \star & \hat{P}(\gamma [k]) & 0_{n_{x},n_{w}} & \hat{P}(\gamma [k]) \hat{C}_{z}(\gamma [k])' \\ \star & \star & \eta I_{n_{w}} & \hat{D}_{w}(\gamma [k])' \\ \star & \star & \star & \eta I_{n_{z}} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma [k]) & \hat{A}(\gamma [k]) \hat{G}(\gamma [k]) & \hat{B}_{w}(\gamma [k]) & 0_{n_{x},n_{z}} \\ \star & (\hat{G} + \hat{G}' - \hat{P})(\gamma [k]) & 0_{n_{x},n_{w}} & (\hat{G}' \hat{C}'_{z})(\gamma [k]) \\ \star & \star & \eta I_{n_{w}} & \hat{D}_{w}(\gamma [k])' \\ \star & \star & \star & \eta I_{n_{z}} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.21)$$

Assim, verificar a factibilidade das LMIs (3.3), (3.4), (3.8) e (3.10) para todo  $k \in \mathbb{N}$ é equivalente a avaliar, respectivamente, as LMIs 3.18, 3.19, 3.20 e 3.21 para todo  $\gamma \in \Lambda_M$ . Este teste também consiste em um problema de dimensão infinita, entretanto, utilizando os cálculos com polinômios homogêneos apresentados na seção 2.2, qualquer polinômio matricial  $\Psi(\gamma)$  pode ser reescrito na forma

$$\Psi(\gamma) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,\xi)} \gamma^{\ell} \Psi_{\ell}, \quad \text{para algum grau } \xi \in \mathbb{N}.$$

Logo, uma condição suficiente para verificar a LMI  $\Psi(\gamma) > 0$  é verificar se cada um de seus monômios é positivo, isto é, verificar o conjunto finito de LMIs  $\Psi_{\ell} > 0$  para todo  $\ell \in \mathcal{K}(M,\xi)$ , uma vez que o coeficiente  $\gamma$  é sempre positivo. Com efeito, fornecendo um procedimento sistemático para derivação de um conjunto finito de LMIs suficientes para garantir a positividade de  $\Psi(\gamma)$ .

### 5. Relaxação Pólya:

O Teorema de Pólya (HARDY et al., 1952) aplicado para testar a positividade de polinômios homogêneos no simplex unitário pode ser estendido para o caso de polinômios homogêneos com coeficientes matriciais com garantida convergência, como introduzido por Scherer (2005). Ou seja, a aplicação do Teorema de Pólya diminui o conservadorismo associado à técnica de testar a positividade de um polinômio impondo que todos seus monômios sejam positivos, mesmo para o caso de coeficientes matriciais. Desse modo, uma sequência de relaxações Pólya é aplicada as LMIs baseando-se no fato de que se um polinômio matricial  $\Psi(\gamma)$  é positivo para todo  $\gamma \in \Lambda_N$ , então

$$\left(\sum_{i=1}^N \gamma_i\right)^d \Psi(\gamma) > 0$$

para todo  $d \in \mathbb{N}$ .

É importante mencionar que para o caso de um polinômio matricial  $\Psi(\gamma)$  com coefientes a determinar tal que  $\Psi(\gamma) > 0$ , a aplicação de relaxações Pólya aumenta somente o número de LMIs, em função do crescimento de d, não alterando o número de variáveis.

#### 3.6 Análise de estabilidade de sistemas LPV HPPD

Nesta seção a condição LMI (3.3) apresentada no Teorema 4 para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos LPV discretos no tempo é utilizada para fornecer um conjunto finito de LMIs para verificar a estabilidade de sistemas dinâmicos LPV HPPD discretos no tempo, como apresentado no próximo teorema.

Considere o sistema dinâmico LPV discreto no tempo (3.1) com a matriz dinâmica A polinomial homogênea de grau p, descrita por

$$A(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \alpha^{\ell} A_{\ell},$$

e o vetor de parâmetros variantes  $\alpha$  [k] e sua taxa de variação  $\Delta \alpha$  [k] satisfazendo

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_{k}\left[k\right] \\ \Delta\alpha\left[k\right] \end{array}\right) \in \Gamma, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

O próximo teorema fornece condições suficientes para assegurar a estabilidade assintótica do sistema dinâmico LPV HPPD discreto no tempo (3.1).

**Teorema 8** (Estabilidade Assintótica: Caracterização LMI). Se existirem uma quantidade de instantes  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , um nível de relaxação  $d \in \mathbb{N}$  e matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  com  $\lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para i = 1, ..., L tais que

$$\Psi_{i} \triangleq \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(M,d+p) \\ i \succeq j}} \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{K}(M,p) \\ j \succeq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \begin{bmatrix} \frac{p!}{\pi(\ell)} \hat{P}_{i-j} & \hat{A}'_{\ell} \tilde{P}_{i-j} \\ \star & \frac{p!}{\pi(\ell)} \tilde{P}_{i-j} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.22)$$

para todo  $i \in \mathcal{K}(M, Lg + d + p)$ , onde  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j} \in \tilde{P}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma)$ ,  $\hat{P}(\gamma) \in \tilde{P}(\gamma)$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k]) \in P(\alpha[k+1])$  usando a mudança de variáveis (3.17), então o sistema dinâmico LPV HPPD discreto no tempo (3.1) é assintoticamente estável para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma[k] \in \Lambda_M$ . Multiplicando (3.22) por  $\gamma[k]^i$  e somando para  $i \in \mathcal{K}(M, Lg + d + p)$  resulta na LMI (3.18). Assim, o conjunto de LMIs (3.22) garante que a LMI (3.18) é positiva definida. Devido à mudança de variáveis (3.17), a LMI (3.18) é equivalente a LMI (3.3) sob a parametrização (3.11) imposta para a matriz de Lyapunov  $P(\alpha[k])$ . Com efeito, a factibilidade de (3.22) implica a factibilidade de (3.3) e, consequentemente, o sistema dinâmico LPV HPPD discreto no tempo (3.1) é assintoticamente estável.

A derivação analítica do Teorema 8 é apresentada de forma detalhada no apêndice B.

#### **3.7** Análise de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ de sistemas LPV HPPD

Nesta seção, a condição LMI (3.8) apresentada no Teorema 6 para análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  de sistemas dinâmicos LPV discretos no tempo é utilizada para fornecer um conjunto finito de LMIs para checar a estabilidade de sistemas dinâmicos LPV HPPD discretos no tempo e fornecer um limitante superior sobre seu desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ , como apresentado no próximo teorema.

Considere o sistema dinâmico LPV discreto no tempo (3.7) com suas matrizes polinomiais

homogêneas de grau p e o vetor de parâmetros variantes  $\alpha [k]$  e sua taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  satisfazendo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ . O próximo teorema fornece condições suficientes para assegurar a estabilidade assintótica do sistema dinâmico LPV HPPD discreto no tempo (3.7) e fornecer um limitante superior  $\eta$  sobre o seu desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

**Teorema 9** (Desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ : Caracterização LMI). Se existirem um escalar  $\eta > 0$ , uma quantidade de instantes  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , um nível de relaxação  $d \in \mathbb{N}$  e matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \operatorname{com} \lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para i = 1, ..., L tais que

$$\Psi_{i} = \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(M,d+p) \\ i \geq j}} \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{K}(M,p) \\ j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \left[ \frac{p!}{\pi(\ell)} \tilde{P}_{i-j} \quad \hat{A}_{\ell} \hat{P}_{i-j} \quad \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} \hat{B}_{w\ell} \quad 0_{n_{x},n_{z}} \\ \times \quad \frac{p!}{\pi(\ell)} \hat{P}_{i-j} \quad 0_{n_{x},n_{w}} \quad \hat{P}_{i-j} \hat{C}'_{z\ell} \\ \times \quad \star \quad \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \eta I_{n_{w}} \quad \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} \hat{D}'_{w\ell} \\ \times \quad \star \quad \star \quad \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \eta I_{n_{z}} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.23)$$

para todo  $i \in \mathcal{K}(M,Lg+d+p)$ , onde  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{B}_{w\ell}$ ,  $\hat{C}_{z\ell}$ ,  $\hat{D}_{w\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j}$  e  $\tilde{P}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{C}_z(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{P}(\gamma[k])$  e  $\tilde{P}(\gamma[k])$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k])$ ,  $B_w(\alpha[k])$ ,  $C_z(\alpha[k])$ ,  $D_w(\alpha[k]) P(\alpha[k]) e P(\alpha[k+1])$  usando a mudança de variáveis (3.17), então o sistema dinâmico LPV HPPD discreto no tempo (3.7) é assintoticamente estável com garantido desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  limitado por  $\eta$  para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

A prova do Teorema 9 é omitida já que é similar à prova do Teorema 8.

A derivação analítica do Teorema8 é apresentada de forma detalhada no apêndice B.

## 3.8 Realimentação estática de saída de sistemas LPV HPPD

Esta seção fornece condições LMI para síntese de controladores estáticos de realimentação de saída por ganho escalonado e robustos. As condições apresentadas são obtidas de forma análoga as condições dos Teoremas 8 e 9, a partir dos sistemas dinâmicos LPV HPPD discretos em malha fechada.

Considere o seguinte sistema dinâmico LPV HPPD discreto no tempo

$$x[k+1] = A(\alpha [k])x[k] + B_w(\alpha [k])w[k] + B_u(\alpha [k])u[k],$$
  

$$z[k] = C_z(\alpha [k])x[k] + D_w(\alpha [k])w[k] + D_u(\alpha [k])u[k],$$
  

$$y[k] = C_yx[k],$$
  
(3.24)

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados,  $w[k] \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada exógena,  $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle,  $z[k] \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída controlada,  $y[k] \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida, e  $A(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B_w(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}, B_u(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}, C_z(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}, D_w(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$  e  $D_u(\alpha [k]) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$  são matrizes polinomiais homogêneas de grau p. Assume-se que  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$  e a matriz  $C_y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  é independente do vetor de parâmetros variantes  $\alpha$  e tem a forma

$$C_y = \begin{bmatrix} I_{n_y} & 0_{n_y, n_x - n_y} \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

ou seja, é assumido que os  $n_y$  primeiros estados do sistema podem ser medidos em tempo real para realimentação sem pertubação da entrada exógena w[k] ou da entrada de controle u[k]. Se este não é o caso, sempre que a matriz  $C_y$  tem posto cheio, pode-se determinar uma transformação de similaridade T (GEROMEL et al., 1996) tal que

$$C_y T = \begin{bmatrix} I_{n_y} & 0_{n_y, n_x - n_y} \end{bmatrix}.$$

Em De-Caigny (2009) é proposta a seguinte transformação de similaridade.

$$T = (Q')^{-1} \begin{bmatrix} (R')^{-1} & 0_{n_x - n_y, n_y} \\ 0_{n_y, n_x - n_y} & I_{n_x - n_y} \end{bmatrix},$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  são matrizes não singulares obtidas através da decomposição QR da matriz  $C'_y$  tais que

$$C'_{y} = Q \begin{bmatrix} R \\ 0_{n_{x}-n_{y},n_{y}} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad C_{y} = \begin{bmatrix} R' & 0_{n_{y},n_{x}-n_{y}} \end{bmatrix} Q'.$$

O caso em que a matriz  $C_y$  possui dependência dos parâmetros variantes é investigado em Dong e Guang-HongYang (2008). Considere a matriz

$$C_{y}(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,1)} \alpha^{\ell} [k] C_{y\ell},$$

para cada matriz  $C_{y\ell}$  é proposta uma transformação  $T_{\ell}$  dada por

$$T_{\ell} = \begin{bmatrix} C_{y\ell}' \left( C_{y\ell} C_{y\ell}' \right)^{-1} & C_{y\ell}^{\perp} \end{bmatrix},$$

onde  $C_{y\ell}^{\perp}$  denota uma base ortogonal para o espaço nulo de  $C_{y\ell}$ .

A partir da hipótese (3.25), é apresentado um método de síntese de controladores estáticos de realimentação de saída por ganho escalonado, em seguida, o método é estendido para projetar controladores estáticos de realimentação de saída robustos (independentes dos parâmetros variantes).

#### 3.8.1 Síntese de controladores escalonados

Considere a lei de controle estática por realimentação de saída escalonada

$$u[k] = K(\alpha[k])y[k], \qquad K(\alpha[k]) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y},$$

onde é assumido que o vetor de parâmetros variantes  $\alpha$  [k] pode ser medido em tempo real.

O objetivo é determinar um ganho dependente de parâmetro  $K(\alpha [k])$  tal que o sistema dinâ-

mico LPV discreto em malha fechada

$$x[k+1] = A_{c\ell}(\alpha [k])x[k] + B_w(\alpha [k])w[k],$$
  

$$z[k] = C_{c\ell}(\alpha [k])x[k] + D_w(\alpha [k])w[k],$$
(3.26)

onde

$$A_{c\ell}(\alpha [k]) = A(\alpha[k]) + B_u(\alpha [k])K(\alpha [k])C_y,$$
  

$$C_{c\ell}(\alpha [k]) = C_z(\alpha[k]) + D_u(\alpha [k])K(\alpha [k])C_y,$$
(3.27)

é assintoticamente estável para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

#### Controladores escalonados estabilizantes

O próximo teorema fornece condições suficientes, em termos de um conjunto finito de LMIs, para síntese de controladores estáticos de realimentação de saída estabilizantes com dependência polinomial homogênea de sucessivos instantes de tempo do parâmetro escalonado.

**Teorema 10** (Realimentação estática de saída escalonada estabilizante). Se existirem uma quantidade de instantes  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , um nível de relaxação  $d \in \mathbb{N}$ , matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes  $G_{1(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $G_{2(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{(n_x-n_y) \times n_y}$ ,  $G_{3(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{(n_x-n_y) \times (n_x-n_y)}$  e  $Z_{1(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  com  $\lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para  $i = 1, \ldots, L$  tais que

$$\Psi_{i} \triangleq \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(M,d+p) \\ i \succeq j}} \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{K}(M,p) \\ j \succeq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \begin{bmatrix} \frac{p!}{\pi(\ell)} \tilde{P}_{i-j} & \hat{A}_{\ell} \hat{G}_{i-j} + \hat{B}_{u\ell} \hat{Z}_{i-j} \\ \star & \frac{p!}{\pi(\ell)} (\hat{G}_{i-j} + \hat{G}'_{i-j} - \hat{P}_{i-j}) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.28)$$

para todo  $i \in \mathcal{K}(M, Lg + d + p)$ , onde  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{B}_{w\ell}$ ,  $\hat{B}_{u\ell}$ ,  $\hat{C}_{z\ell}$ ,  $\hat{D}_{w\ell}$ ,  $\hat{D}_{u\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j}$ ,  $\tilde{P}_{i-j}$ ,  $\hat{G}_{i-j}$  e  $\hat{Z}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_u(\gamma[k])$ ,  $\hat{C}_z(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_u(\gamma[k])$ ,  $\hat{P}(\gamma[k])$ ,  $\hat{P}(\gamma[k])$ ,  $\hat{G}(\gamma)$  e  $\hat{Z}(\gamma)$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k])$ ,  $B_w(\alpha[k])$ ,  $B_u(\alpha[k])$ ,

$$C_{z}(\alpha [k]), D_{w}(\alpha [k]), D_{u}(\alpha [k]), P(\alpha [k]) e P(\alpha [k+1]),$$

$$G(\alpha [k]) = \begin{bmatrix} G_{1}(\alpha [k]) & 0_{n_{y},(n_{x}-n_{y})} \\ G_{2}(\alpha [k]) & G_{3}(\alpha [k]) \end{bmatrix}, \qquad Z(\alpha [k]) = \begin{bmatrix} Z_{1}(\alpha [k]) & 0_{n_{u},(n_{x}-n_{y})} \end{bmatrix}, \qquad (3.29)$$

onde

$$G_{i}(\alpha[k]) = \sum_{\lambda_{1} \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_{L} \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha[k]^{\lambda_{1}} \cdots \alpha[k+L-1]^{\lambda_{L}} G_{i(\lambda_{1},\lambda_{2},\dots,\lambda_{L})}, \quad i = 1,2,3,$$

$$Z_{1}(\alpha[k]) = \sum_{\lambda_{1} \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_{L} \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha[k]^{\lambda_{1}} \cdots \alpha[k+L-1]^{\lambda_{L}} Z_{1(\lambda_{1},\lambda_{2},\dots,\lambda_{L})},$$
(3.30)

usando a mudança de variáveis (3.17), então o ganho escalonado de realimentação de saída

$$K(\alpha[k]) = Z_1(\alpha[k])G_1(\alpha[k])^{-1}$$
(3.31)

assegura que o sistema dinâmico LPV HPPD discreto em malha fechada (3.26)-(3.27) é assintoticamente estável para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma[k] \in \Lambda_M$ . Multiplicando (3.28) por  $\gamma[k]^i$  e somando para  $i \in \mathcal{K}(M, Lg + d + p)$  resulta

$$\sum_{i \in \mathcal{K}(M, Lg+d+p)} \gamma [k]^{i} \Psi_{i} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{M} \gamma [k]_{j}\right)^{d} \begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma [k]) & \hat{A}(\gamma [k])G(\gamma [k]) + \hat{B}_{u}(\gamma [k])Z(\gamma [k]) \\ \star & G(\gamma [k]) + G'(\gamma [k]) - \hat{P}(\gamma [k]) \end{bmatrix} > 0. \quad (3.32)$$

Do bloco (2,2) tem-se que  $G(\gamma[k]) + G'(\gamma[k]) > \hat{P}(\gamma[k]) > 0$ , logo,  $G(\gamma[k])$  é não singular. Portanto, desde que

$$G^{-1}(\gamma[k]) = \begin{bmatrix} G_1(\gamma[k]) & 0_{n_y,(n_x-n_y)} \\ G_2(\gamma[k]) & G_3(\gamma[k]) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} G_1^{-1}(\gamma[k]) & 0_{n_y,(n_x-n_y)} \\ -G_3^{-1}(\gamma[k])G_2(\gamma[k])G_1^{-1}(\gamma[k]) & G_3^{-1}(\gamma[k]) \end{bmatrix}$$

tem-se que  $G_1(\gamma[k])$  e  $G_3(\gamma[k])$  são inversíveis.

Usando (3.25), (3.27), (3.29) e (3.31) tem-se que

$$\begin{split} \hat{A}(\gamma [k])G(\gamma [k]) &+ \hat{B}_{u}(\gamma [k])Z(\gamma [k]) \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G(\gamma [k]) + \hat{B}_{u}(\gamma [k]) \left[ Z_{1}(\gamma [k]) & 0_{n_{u},(n_{x}-n_{y})} \right], \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G(\gamma [k]) + \hat{B}_{u}(\gamma [k])Z_{1}(\gamma [k])G_{1}^{-1}(\gamma [k]) \left[ G_{1}(\gamma [k]) & 0_{n_{y},(n_{x}-n_{y})} \right] \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G(\gamma [k]) \\ &+ \hat{B}_{u}(\gamma [k])K(\gamma [k]) \left[ I_{n_{y}} & 0_{n_{y},n_{x}-n_{y}} \right] \begin{bmatrix} G_{1}(\gamma [k]) & 0_{n_{y},(n_{x}-n_{y})} \\ G_{2}(\gamma [k]) & G_{3}(\gamma [k]) \end{bmatrix}, \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G(\gamma [k]) + \hat{B}_{u}(\gamma [k])K(\gamma [k])C_{y}G(\gamma [k]) \\ &= \hat{A}_{c\ell}(\gamma [k])G(\gamma [k]). \end{split}$$

Assim, a LMI (3.32) recupera a LMI (3.19). Portanto, o conjunto de LMIs (3.28) garante que a LMI (3.19) é positiva definida. Devido à mudança de variáveis (3.17), a LMI (3.19) é equivalente a LMI (3.4) sob a parametrização (3.11) imposta para a matriz de Lyapunov  $P(\alpha [k])$  e a variável de folga  $G(\alpha [k])$ . Com efeito, a factibilidade de (3.28) implica a factibilidade de (3.4) e, consequentemente, o sistema dinâmico LPV HPPD discreto em malha fechada (3.26)-(3.27) é assintoticamente estável.

Note que para  $L \ge 2$ , o Teorema 10 fornece ganhos escalonados  $K(\alpha[k])$  dependentes de valores futuros do parâmetro  $\alpha$ , desde que a estrutura dependente de instantes sucessivos de tempo foi imposta sobre as matrizes  $G_1(\alpha[k])$  e  $Z_1(\alpha[k])$  que compõem o controlador. Note ainda que para  $n_y = 0$ , tem-se que  $Z(\alpha[k]) = Z = 0_{n_u,n_x}$  e portanto o ganho escalado  $K(\alpha[k])$  do controlador também é nulo. Com efeito, o Teorema 10 pode ser usado para a análise de estabilidade assintótica impondo-se  $n_y = 0$ . Neste caso, fornecendo soluções menos conservadoras que o Teorema 8 para os mesmos valores de L,  $g \in d$  devido a inserção da variável de folga G. Este é o contexto do próximo corolário.

**Corolário 1** (Estabilidade Assintótica: Caracterização LMI Estendida). Se existirem uma quantidade de instantes  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , um nível de relaxação  $d \in \mathbb{N}$ , matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes  $G_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , com  $\lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para i = 1, ..., L tais que as LMIs (3.28), com

$$\hat{B}_{u\ell} = 0_{n_x, n_u}, \quad \hat{D}_{u\ell} = 0_{n_z, n_u}, \quad \hat{Z}_{i-j} = 0_{n_u, n_x},$$
(3.33)

sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathcal{K}(M, Lg+d+p)$ , onde  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j}$ ,  $\tilde{P}_{i-j}$ ,  $e \, \hat{G}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma[k])$ ,  $\hat{P}(\gamma[k])$ ,  $\tilde{P}(\gamma[k])$  e  $\hat{G}(\gamma)$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k+1])$  e

$$G(\alpha[k]) = \sum_{\lambda_1 \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_L \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha[k]^{\lambda_1} \cdots \alpha[k+L-1]^{\lambda_L} G_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_L)},$$
(3.34)

usando a mudança de variáveis (3.17), então o sistema dinâmico LPV HPPD discreto (3.1) é assintoticamente estável para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

#### Controladores escalonados $\mathcal{H}_\infty$

O próximo teorema fornece condições suficientes, em termos de um conjunto finito de LMIs, para síntese de controladores estáticos de realimentação de saída  $\mathcal{H}_{\infty}$  com dependência polinomial homogênea de sucessivos instantes de tempo do parâmetro escalonado.

**Teorema 11** (Realimentação estática de saída por ganho escalonado  $\mathcal{H}_{\infty}$ ). Se existirem um escalar  $\eta > 0$ , uma quantidade de instantes  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , um nível de relaxação  $d \in \mathbb{N}$ , matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes  $G_{1(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $G_{2(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{(n_x-n_y) \times n_y}$ ,  $G_{3(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{(n_x-n_y) \times (n_x-n_y)}$  e  $Z_{1(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  com  $\lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para i = 1, ..., L tais que

$$\Psi_{i} \triangleq \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(M,d+p) \\ i \succeq j \\ j \neq \ell}} \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{K}(M,p) \\ j \succeq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \\ \begin{bmatrix} \frac{p!}{\pi(\ell)} \tilde{P}_{i-j} & \hat{A}_{\ell} \hat{G}_{i-j} + \hat{B}_{u\ell} \hat{Z}_{i-j} & \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} \hat{B}_{w\ell} & 0_{n_{x},n_{z}} \\ \star & \Psi_{i(2,2)} & 0_{n_{x},n_{w}} & \hat{G}'_{i-j} \hat{C}'_{z\ell} + \hat{Z}'_{i-j} \hat{D}'_{u\ell} \\ \star & \star & \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \eta I_{n_{w}} & \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \hat{D}'_{w\ell} \\ \star & \star & \star & \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \eta I_{n_{z}} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.35)$$

com

$$\Psi_{i(2,2)} = \frac{p!}{\pi(\ell)} (\hat{G}_{i-j} + \hat{G}'_{i-j} - \hat{P}_{i-j})$$

para todo  $i \in \mathcal{K}(M,Lg + d + p)$ , onde  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{B}_{w\ell}$ ,  $\hat{B}_{u\ell}$ ,  $\hat{C}_{z\ell}$ ,  $\hat{D}_{w\ell}$ ,  $\hat{D}_{u\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j}$ ,  $\tilde{P}_{i-j}$ ,  $\hat{G}_{i-j}$  e  $\hat{Z}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_u(\gamma[k])$ ,  $\hat{C}_z(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_u(\gamma[k])$ ,  $\hat{P}(\gamma[k])$ ,  $\tilde{P}(\gamma[k])$ ,  $\hat{G}(\gamma) e \hat{Z}(\gamma)$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k])$ ,  $B_w(\alpha[k])$ ,  $B_u(\alpha[k])$ ,  $C_z(\alpha[k])$ ,  $D_w(\alpha[k])$ ,  $D_u(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k]) e P(\alpha[k+1])$ ,  $G(\alpha[k]) e Z(\alpha[k])$  definidas em (3.29)-(3.30) usando a mudança de variáveis (3.17), então o ganho escalonado de realimentação de saída (3.31) assegura que o sistema dinâmico LPV HPPD discreto em malha fechada (3.26)-(3.27) é assintoticamente estável com garantido desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitado por  $\eta$  para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

A prova do Teorema (11) é omitida desde que é similar à prova do Teorema (10).

De forma análoga ao Teorema 10 para síntese de controladores escalonados estabilizantes, impondo-se  $n_y = 0$ , o Teorema 11 de síntese pode ser usado para análise de modo a fornecer soluções menos conservadoras que o Teorema 9. Como apresentado pelo próximo corolário. **Corolário 2** (Desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ : Caracterização LMI Estendida). Se existirem un escalar  $\eta > 0$ , uma quantidade de instantes  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , um nível de relaxação  $d \in \mathbb{N}$ , matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes  $G_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , com  $\lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para i = 1, ..., Ltais que as LMIs (3.35), com  $\hat{B}_{u\ell}$ ,  $\hat{D}_{u\ell}$  e  $\hat{Z}_{i-j}$  definidas em (3.33), sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathcal{K}(M,Lg+d+p)$ , onde  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{B}_{w\ell}$ ,  $\hat{C}_{z\ell}$ ,  $\hat{D}_{w\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j}$ ,  $\tilde{P}_{i-j}$ ,  $e \hat{G}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{C}_z(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{P}(\gamma[k])$ ,  $\tilde{P}(\gamma[k])$  e  $\hat{G}(\gamma)$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k])$ ,  $B_w(\alpha[k])$ ,  $C_z(\alpha[k])$ ,  $D_w(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k+1])$  e  $G(\alpha[k])$ , definida em (3.34), usando a mudança de variáveis (3.17), então o sistema dinâmico LPV HPPD discreto (3.7) é assintoticamente estável com garantido desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitado por  $\eta$  para todo  $(\alpha'[k], \Delta\alpha'[k])' \in \Gamma$ .

#### 3.8.2 Síntese de controladores robustos

Considere a lei de controle estática por realimentação de saída robusta

$$u[k] = Ky[k], \qquad K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}.$$

O objetivo é determinar um ganho K tal que o sistema dinâmico LPV HPPD discreto em

malha fechada (3.26) com

$$A_{c\ell}(\alpha [k]) = A(\alpha[k]) + B_u(\alpha [k]) K C_y,$$
  

$$C_{c\ell}(\alpha [k]) = C_z(\alpha[k]) + D_u(\alpha [k]) K C_y,$$
(3.36)

é assintoticamente estável para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

#### **Controladores robustos estabilizantes**

O próximo teorema fornece condições suficientes, em termos de um conjunto finito de LMIs, para síntese de controladores estáticos de realimentação de saída estabilizantes independentes dos parâmetros variantes.

**Teorema 12** (Realimentação de saída estática robusta estabilizante). Se existirem um comprimento de caminho  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , uma relaxação nível  $d \in \mathbb{N}$ , matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  com  $\lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para i = 1,...,L, matrizes  $G_1 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $G_2 \in \mathbb{R}^{(n_x - n_y) \times n_y}$ ,  $G_3 \in \mathbb{R}^{(n_x - n_y) \times (n_x - n_y)}$  e  $Z_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  tais que

$$\Psi_{i} \triangleq \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(M,d+p) \\ i \geq j}} \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{K}(M,p) \\ j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \left[ \frac{\frac{p!}{\pi(\ell)}\tilde{P}_{i-j}}{\frac{\pi(i-j)}{\pi(i-j)}} (\hat{A}_{\ell}G + \hat{B}_{u\ell}Z), \\ \star \frac{\frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)}}{(G+G') - \frac{p!}{\pi(\ell)}} \right] > 0, \quad (3.37)$$

para todo  $i \in \mathcal{K}(M, Lg + d + p)$ , onde

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0_{n_y,(n_x - n_y)} \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0_{n_u,(n_x - n_y)} \end{bmatrix},$$
(3.38)

e as matrizes  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{B}_{u\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j}$  e  $\tilde{P}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma[k]), \hat{B}_u(\gamma[k]), \hat{P}(\gamma[k]))$  e  $\tilde{P}(\gamma[k])$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k]), B_u(\alpha[k]), P(\alpha[k]))$  e

 $P(\alpha [k+1])$  usando a mudança de variáveis (3.17), então o ganho robusto de realimentação de saída

$$K = Z_1 G_1^{-1} (3.39)$$

assegura que o sistema dinâmico LPV HPPD discreto em malha fechada (3.26)-(3.36) é assintoticamente estável para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma[k] \in \Lambda_M$ . Multiplicando (3.37) por  $\gamma[k]^i$  e somando para  $i \in \mathcal{K}(M, Lg + d + p)$  resulta

$$\sum_{i \in \mathcal{K}(M,Lg+d+p)} \gamma \left[k\right]^{i} \Psi_{i} = \left(\sum_{j=1}^{M} \gamma \left[k\right]_{j}\right)^{d} \begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma \left[k\right]) & \hat{A}(\gamma \left[k\right])G + \hat{B}_{u}(\gamma \left[k\right])Z\\ \star & G + G' - \hat{P}(\gamma \left[k\right]) \end{bmatrix} > 0.$$
(3.40)

Usando (3.25), (3.36), (3.38) e (3.39) tem-se que

$$\begin{split} \hat{A}(\gamma [k])G + \hat{B}_{u}(\gamma [k])Z \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G + \hat{B}_{u}(\gamma [k]) \left[ Z_{1} \quad 0_{n_{u},(n_{x}-n_{y})} \right], \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G + \hat{B}_{u}(\gamma [k])Z_{1}G_{1}^{-1} \left[ G_{1} \quad 0_{n_{y},(n_{x}-n_{y})} \right], \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G + \hat{B}_{u}(\gamma [k])K \left[ I_{n_{y}} \quad O_{n_{y},n_{x}-n_{y}} \right] \begin{bmatrix} G_{1} \quad 0_{n_{y},(n_{x}-n_{y})} \\ G_{2} & G_{3} \end{bmatrix}, \\ &= \hat{A}(\gamma [k])G + \hat{B}_{u}(\gamma [k])KC_{y}G \\ &= \hat{A}_{c\ell}(\gamma [k])G. \end{split}$$

Assim, a LMI (3.40) recupera a LMI (3.19). Portanto, o conjunto de LMIs (3.37) garante que a LMI (3.19) é positiva definida. Devido a mudança de variáveis (3.17), a LMI (3.19) é equivalente a LMI (3.4) sob a parametrização (3.11) imposta para a matriz de Lyapunov  $P(\alpha [k])$  e a seguinte parametrização para a variável de folga  $G(\alpha [k]) = G$ . Por isso, a factibilidade de (3.37) implica a factibilidade de (3.4) e, consequentemente, o sistema dinâmico LPV HPPD discreto em malha fechada (3.26)-(3.36) é assintoticamente estável.

#### Controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$

O próximo teorema fornece condições suficientes, em termos de um conjunto finito de LMIs, para síntese de controladores estáticos de realimentação de saída  $\mathcal{H}_{\infty}$  independentes dos parâmetros variantes.

**Teorema 13** (Realimentação de saída estática robusta  $\mathcal{H}_{\infty}$ ). Se existirem um escalar  $\eta > 0$ , um comprimento de caminho  $L \in \mathbb{N}^*$ , um grau  $g \in \mathbb{N}$ , uma relaxação nível  $d \in \mathbb{N}$ , matrizes simétricas  $P_{(\lambda_1,...,\lambda_L)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  com  $\lambda_i \in \mathcal{K}(N,g)$  para i = 1,...,L, matrizes  $G_1 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $G_2 \in \mathbb{R}^{(n_x - n_y) \times n_y}$ ,  $G_3 \in \mathbb{R}^{(n_x - n_y) \times (n_x - n_y)}$  e  $Z_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  tais que

$$\Psi_{i} \triangleq \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(M,d+p) \\ i \succeq j}} \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{K}(M,p) \\ j \succeq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \\ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{p!}{\pi(\ell)} \tilde{P}_{i-j} & \Psi_{i(1,2)} & \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} \hat{B}_{w\ell} & 0_{n_{x},n_{z}} \\ \times & \Psi_{i(2,2)} & 0_{n_{x},n_{w}} & \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} (G'\hat{C}'_{z\ell} + Z'\hat{D}'_{u\ell}) \\ \times & \star & \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \eta I_{n_{w}} & \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} \hat{D}'_{w\ell} \\ \times & \star & \star & \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \eta I_{n_{z}} \end{array} \right] > 0, \quad (3.41)$$

com

$$\Psi_{i(1,2)} = \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} (\hat{A}_{\ell}G + \hat{B}_{u\ell}Z),$$
  
$$\Psi_{i(2,2)} = \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} (G + G') - \frac{p!}{\pi(\ell)} (\hat{P}_{i-j})$$

para todo  $i \in \mathcal{K}(M,Lg + d + p)$ , onde  $G \in Z$  são definidas em (3.38) e as matrizes  $\hat{A}_{\ell}$ ,  $\hat{B}_{w\ell}$ ,  $\hat{B}_{u\ell}$ ,  $\hat{C}_{z\ell}$ ,  $\hat{D}_{w\ell}$ ,  $\hat{D}_{u\ell}$ ,  $\hat{P}_{i-j}$  e  $\tilde{P}_{i-j}$  são respectivamente os coeficientes das matrizes  $\hat{A}(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{B}_u(\gamma[k])$ ,  $\hat{C}_z(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_w(\gamma[k])$ ,  $\hat{D}_u(\gamma[k])$ ,  $\hat{P}(\gamma[k])$  e  $\tilde{P}(\gamma[k])$  obtidas a partir de  $A(\alpha[k])$ ,  $B_w(\alpha[k])$ ,  $B_u(\alpha[k])$ ,  $C_z(\alpha[k])$ ,  $D_w(\alpha[k])$ ,  $D_u(\alpha[k])$ ,  $P(\alpha[k])$  e  $P(\alpha[k+1])$  usando a mudança de variáveis (3.17), então o ganho robusto de realimentação de saída (3.39) assegura que o sistema dinâmico LPV HPPD discreto em malha fechada (3.26)-(3.36) é assintoticamente estável com garantido desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitado por  $\eta$  para todo  $(\alpha'[k], \Delta \alpha'[k])' \in \Gamma$ .

A prova do Teorema (13) é omitida desde que é similar à prova do Teorema (12).

# **4 RESULTADOS NUMÉRICOS**

#### 4.1 Prefácio

Neste capítulo as técnicas fornecidas para análise e síntese de controladores para sistemas dinâmicos LPV HPPD discretos no tempo são aplicadas em sistemas dinâmicos propostos na literatura e os resultados obtidos são comparados com resultados oriundos das aplicações de outras técnicas. Primeiro, as condições para análise de estabilidade do Teorema 8 e projeto de controladores estabilizantes estáticos de realimentação de saída por ganho escalonado e robustos, respectivamente, do Teorema 10 e do Teorema 12, são utilizadas na resolução de três problemas propostos na literatura. Os resultados obtidos são comparados com os resultados fornecidos pelas condições de Oliveira e Peres (2008) e Oliveira e Peres (2009). Em seguida, o problema de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ é investigado. As condições para análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do Teorema 9 e do Corolário 2 e projeto de controladores estabilizantes estáticos de realimentação de saída, por ganho escalonado e robustos, que minimizam o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema em malha fechada, respectivamente, do Teorema 11 e do Teorema 13, são aplicadas em um sistema vibroacústico. O modelo LPV considerado, fornecido em De-Caigny (2009), De-Caigny et al. (2010b), De-Caigny et al. (2012b), foi obtido por identificação utilizando a técnica SMILE (DE-CAIGNY et al., 2009; DE-CAIGNY et al., 2011). Os resultados obtidos são comparados com os resultados fornecidos por De-Caigny (2009).

Os resultados apresentados foram obtidos através de simulação numérica em um computador com Windows (XP), 3 GB de memória RAM e processador Intel Core 2 Duo E8400, usando o programa o Matlab 7.1.0 e os pacotes SDPT3 (TOH et al., 2011), SeDuMi (STURM, 1999) e Yalmip (LÖFBERG, 2004). As implementações numéricas usadas para as condições LMIs de Oliveira e Peres (2008) e Oliveira e Peres (2009) estão disponibilizadas para download pelos autores em www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/. Os resultados apresentados para as técnicas de De-Caigny (2009) estão publicados pelo autor no próprio trabalho.

#### 4.2 Análise de estabilidade e síntese de controladores estabilizantes

Nesta seção as condições LMIs propostas para análise de estabilidade e síntese de controladores estabilizantes são aplicadas em três sistemas LPV discretos propostos na literatura.

No exemplo 1 é investigado a estabilidade assintótica de um sistema LPV com um parâmetro variante. O problema da síntese de controladores estáticos de realimentação de estados é abordado nos exemplo 2 e 3, respectivamente, para o caso de controladores robustos e posteriormente para o caso de controladores por ganho escalonado. Em todos os exemplos, para avaliar o efeito dos parâmetros L e g da função de Lyapunov, bem como do controlador, e do grau d da relaxação Pólya são considerados os seguintes casos:

- Caso 1: Usando uma matriz de Lyapunov constante (L = 1 e g = 0) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 2: Usando uma matriz de Lyapunov afim (L = 1 e g = 1) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 3: Usando uma matriz de Lyapunov afim (L = 1 e g = 1) e relaxação Pólya nível um (d = 1).
- Caso 4: Usando uma matriz de Lyapunov quadrática (L = 1 e g = 2) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 5: Usando uma matriz de Lyapunov quadrática (L = 1 e g = 2) e relaxação Pólya nível um (d = 1).
- Caso 6: Usando uma matriz de Lyapunov cúbica (L = 1 e g = 3) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 7: Usando uma matriz de Lyapunov afim em dois instantes de tempo (L = 2 e g = 1) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 8: Usando uma matriz de Lyapunov afim em dois instantes de tempo (L = 2 e g = 1) e relaxação Pólya nível um (d = 1).
- Caso 9: Usando uma matriz de Lyapunov afim em três instantes de tempo (L = 3 e g = 1) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 10: Usando uma matriz de Lyapunov quadrática em dois instantes de tempo (L = 2 e g = 2) e sem relaxação Pólya (d = 0).

## 4.2.1 Análise de estabilidade

Considere o sistema dinâmico LPV contínuo no tempo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.21 & 0.8p(t) - 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad |p(t)| \le 0.3$$

retirado de Amato et al. (1998). Usando o método de discretização de Euler (CONTE; BOOR, 1980; ASTROM; WITTENMARK, 1984) com um período de amostragem  $T_s = 0.01$  o seguinte modelo dinâmico discreto no tempo é obtido

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0.9979 & 0.008p[k] - 0.01\\ 0.01 & 1 \end{bmatrix} x[k], \quad |p[k]| \le 0.3.$$
(4.1)

Aplicando a parametrização polinomial homogênea (2.9)-(2.10) fornecida no Capítulo 2, o sistema LPV afim (4.1) pode ser reescrito como o sistema LPV HPPD (3.24) com  $n_x = 2$ , N = 2, p = 1,

$$A_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0.9979 & -0.0124 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_1 [k] = \frac{p[k] + 3}{6},$$

$$A_{(0,1)} = \begin{bmatrix} 0.9979 & -0.0076 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_2 [k] = \frac{3 - p[k]}{6}.$$
(4.2)

O objetivo é determinar o valor máximo do limitante  $b_p$  sobre a taxa de variação  $\Delta p[k]$  do parâmetro p[k] usando o Teorema 8, tal que o sistema (4.1) é assintoticamente estável para todas as trajetórias de p[k] satisfazendo  $\Delta p[k] \leq b_p$ .

Note que ao se usar o sistema parametrizado (3.24)-(4.2), primeiro é determinado um limitante  $b_{\alpha}$  sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  do parâmetro escalonado  $\alpha [k]$  e posteriormente  $b_p$  é calculado a partir de  $b_{\alpha}$  através da relação

$$b_p = 6b_{\alpha},$$
uma vez que de (3.13) e (3.14) tem-se que

$$\begin{aligned} |\Delta \alpha [k]| &= |\Delta \alpha_1 [k]| = |\Delta \alpha_2 [k]| \\ &= |\alpha_2 [k+1] - \alpha_2 [k]| \\ &= \left| \frac{3 - p[k+1]}{6} - \frac{3 - p[k]}{6} \right| \\ &= \frac{|\Delta p[k]|}{6}. \end{aligned}$$

Tabela 4.1 - Valor máximo do limitante  $b_p$  sobre a taxa de variação  $\Delta p[k]$  tal que o sistema (4.1) é assintoticamente estável obtido através das condições do Teorema 8.

Caso	$b_p$
Caso 1: L=1,g=0,d=0	—
Caso 2: L=1,g=1,d=0	$6 \times 0.0151$
Caso 3: L=1,g=1,d=1	$6 \times 0.0151$
Caso 4: L=1,g=2,d=0	$6 \times 0.0160$
Caso 5: L=1,g=2,d=1	$6 \times 0.0160$
Caso 6: L=1,g=3,d=0	$6 \times 0.0294$
Caso 7: L=2,g=1,d=0	$6 \times 0.0389$
Caso 8: L=2,g=1,d=1	$6 \times 0.0390$
Caso 9: L=3,g=1,d=0	6 × 0.1174
Caso 10:L=2,g=2,d=0	6 × 0.0691

A Tabela 4.1 mostra os valores máximos do limitante  $b_p$  sobre a taxa de variação  $\Delta p[k]$  tal que o sistema (4.1) é assintoticamente estável obtidos pelo Teorema 8 para os 10 casos propostos. Como pode ser visto, o Teorema 8 não é capaz de garantir a estabilidade do sistema (4.1) usando uma matriz de Lyapunov constante. Entretando, usando matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros consegue garantir a estabilidade do sistema para taxas de variação limitadas. Ainda mais, o valor máximo de  $b_p$  se torna cada vez maior com o aumento dos parâmetros L e g. Note ainda que o caso 10 se mostrou mais eficiente que os casos 4 e 7, isto é, a combinação do grau g com comprimento de caminho L diminui o conservadorismo associado à parametrização da matriz de Lyapunov. A adição da relaxação Pólya de grau d = 1 foi eficiente apenas para o caso 8, não aumentando o valor  $b_p$  nos casos 3 e 5.

A complexidade numérica associada à resolução de problemas envolvendo restrições LMI pode ser mensurada através do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI (BOYD et al., 1994; GAHINET et al., 1995). Assim sendo, a Tabela 4.2 mostra à complexidade numérica do

Caso	b	$n_v$	$n_l$
	b = 0	3	8
Caso 1: L=1,g=0,d=0	0 < b < 1	3	24
	b = 1	3	16
	b = 0	6	12
Caso 2: L=1,g=1,d=0	0 < b < 1	6	84
	b = 1	6	40
	b = 0	6	16
Caso 3: L=1,g=1,d=1	0 < b < 1	6	224
	b = 1	6	80
	b = 0	9	16
Caso 4: L=1,g=2,d=0	0 < b < 1	9	224
	b = 1	9	80
	b = 0	9	20
Caso 5: L=1,g=2,d=1	0 < b < 1	9	504
-	b = 1	9	140
	b = 0	12	20
Caso 6: L=1,g=3,d=0	0 < b < 1	12	504
-	b = 1	12	140
	b = 0	12	16
Caso 7: L=2,g=1,d=0	0 < b < 1	12	1456
-	b = 1	12	480
	b = 0	23	20
Caso 8: L=2,g=1,d=1	0 < b < 1	23	5460
	b = 1	23	1320
	b = 0	24	20
Caso 9: L=3,g=1,d=0	0 < b < 1	24	15504
	b = 1	24	15504
	b = 0	27	24
Caso 10: L=2,g=2,d=0	0 < b < 1	27	17472
	b = 1	27	3168
		•	-

Tabela 4.2 - Complexidade numérica, em termos do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI, do Teorema 8 para  $n_x = 2, N = 2, p = 1.$ 

Teorema 8 aplicado ao sistema (4.1), isto é, usando os parâmetros

$$n_x = 2, \qquad N = 2, \qquad p = 1.$$

É claro que o crescimento dos valores de L,  $g \in d$  diminuem o conservadorismo do Teorema 8, enquanto aumentam o esforço computacional. O número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI crescem rapidamente com o aumento dos valores de L e g. Porém o aumento do grau d não altera o número  $n_v$  de variáveis escalares, apenas o  $n_l$  de linhas de LMI. Por fim note que o uso de uma matriz de Lyapunov afim em três instantes sucessivos de tempo dos parâmetros (caso 9) no Teorema 8 forneceu o maior valor de  $b_p$  a custo computacional menor do que o uso de uma matriz de Lyapunov quadrática em dois intantes sucessivos de tempo dos parâmetros (caso 10).

#### Comparação com resultados da literatura

Para avaliar a eficiência do Teorema 8 os valores máximos de  $b_p$  são comparados com os resultados obtidos utilizando-se as condições de análise de estabilidade assintótica apresentadas em Oliveira e Peres (2008).

Tabela 4.3 - Valor máximo do limitante  $b_p$  sobre a taxa de variação  $\Delta p[k]$  tal que o sistema (4.1) é assintoticamente estável e respectiva complexidade numérica associada às condições de Oliveira e Peres (2008).

Método	$b_p$	$n_v$	$n_l$
Oliveira e Peres (2008, Teorema 2)	$6 \times 0.0499$	6	24

A Tabela 4.3 apresenta o valor máximo de  $b_p$  fornecido em Oliveira e Peres (2008, Teorema 2) e a respectiva complexidade numérica associada. Como pode ser visto, o Teorema 8 fornece resultados mais conservadores para todos os casos de 1 a 8, isto é, utilizando matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas (L = 1) para g < 4 e matrizes de Lyapunov afins em sucessivos instantes de tempo (g = 1) para L < 3. Entretanto, os casos 9 e 10 apresentam melhores resultados a um custo computacional muito mais elevado.

Por fim, é importante mencionar que o Teorema 8 particularizado para análise de estabilidade assintótica de sistemas LPV politópicos (HHPD de grau p = 1) utilizando matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas (fixado L = 1) se resume às condições apresentadas em Oliveira e Peres (2009, Teorema 2). Além disso, o Teorema 8 particularizado para g = 1 (matrizes de Lyapunov afins em sucessivos instantes de tempo) e p = 1 resgata as condições apresentadas em Oliveira e Peres (2009, Teorema 3). Com efeito, resultados similares aos casos 2 a 6 são obtidos em Oliveira e Peres (2009, Teorema 2), enquanto resultados similares aos casos 1, 7 e 8, 9 são fornecidos por Oliveira e Peres (2009, Teorema 3).

## 4.2.2 Síntese de controladores estabilizantes

#### **Controladores robustos**

Considere o sistema LPV HPPD (3.24) com  $n_x = 3$ ,  $n_u = 1$ , N = 2, p = 1 e as matrizes

$$A_{(1,0)} = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{(0,1)} = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{(0,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

 $\mu > 0$ , retirado de Oliveira e Peres (2008). O objetivo é determinar o máximo valor do escalar  $\mu$  em função do limitante *b* tal que o sistema é estabilizável por um controlador estático de realimentação de estados ( $n_y = n_x$ ) robusto sintetizado através do Teorema 12.

A Figura 4.1 mostra o valor máximo de  $\mu$  em função de *b* tal que o sistema é estabilizável por um controlador estático de realimentação de estados robusto projetado pelo Teorema 12. Para b = 0 ( $\alpha$  é invariante no tempo) o Teorema 12 é capaz de sintetizar controladores robustos em todos os casos (2 a 10), sempre que  $\mu \leq 0.7137$ . Para taxas de variação limitadas (0 < b < 1) o valor máximo de  $\mu$  cresce com o aumento do valores dos parâmetros *L* e *g*, porém não apresenta aumento significativo com a aplicação de uma relaxação Pólya de grau d = 1 (casos 3, 5, e 8). Ainda mais, o valor de  $\mu$  decresce em função do aumento de *b*. Para b = 1 ( $\alpha$  [*k*] variando arbitrariamente no simplex unitário) o Teorema 12 é factível para  $\mu \leq 0.5939$  usando matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas (fixado L = 1), para  $\mu \leq 0.5993$  usando matrizes de Lyapunov dependentes de dois instantes de tempo dos parâmetros (fixado L = 2) e para  $\mu \leq 0.6003$  usando uma matriz de Lyapunov afim em três instantes de tempo dos parâmetros (caso 9).

O caso 1 não foi apresentado na Figura 4.1 porque a utilização de uma matriz de Lyapunov



Figura 4.1 - Valor máximo do escalar  $\mu$  em função do limitante *b* tal que o sistema é estabilizável por um controlador estático de realimentação de estados robusto projetado através das condições do Teorema 12.

constante (estabilidade quadrática) considera que o parâmetro  $\alpha [k]$  varia arbitrariamente no simplex unitário, isto é, desconsidera o limitante *b* sobre a taxa de variação dos parâmetros. Com efeito, o Teorema 12 projeta controladores robustos para  $\mu \leq 0.5883$  independente do valor de *b* para o caso 1.

A Tabela 4.4 apresenta à complexidade numérica do Teorema 12 para

$$n_x = 3, \quad n_u = 1, \quad N = 2, \quad p = 1$$

em termos do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI. Como discutido na seção anterior para o caso de análise de estabilidade, o crescimento dos valores dos parâmetros L e g resultam no rápido crescimento do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI, enquanto o aumento do valor do parâmetro d não altera o número  $n_v$  de variáveis escalares, mas implica no crescimento do número  $n_l$  de linhas de LMI.

É importante destacar que diferentemente do caso de análise de estabilidade, os resultados menos conservadores para taxas de variação limitadas (0 < b < 1) foram obtidos usando matrizes de Lyapunov quadráticas em dois instantes sucessivos de tempo dos parâmetros (caso 10). Ainda mais, com relação à complexidade numérica, o caso 10 apresentou cerca de 50% do número de linhas de LMI do caso 9 e 10% a mais de variáveis escalares.

	1		
Caso	b	$n_v$	$n_l$
	b = 0	18	12
Caso 1: L=1,g=0,d=0	0 < b < 1	18	36
	b = 1	18	24
	b = 0	24	18
Caso 2: L=1,g=1,d=0	0 < b < 1	24	126
	b = 1	24	60
	b = 0	24	24
Caso 3: L=1,g=1,d=1	0 < b < 1	24	336
	b = 1	24	120
	b = 0	30	24
Caso 4: L=1,g=2,d=0	0 < b < 1	30	336
	b = 1	30	120
	b = 0	30	30
Caso 5: L=1,g=2,d=1	0 < b < 1	30	756
	b = 1	30	210
	b = 0	36	30
Caso 6: L=1,g=3,d=0	0 < b < 1	36	756
	b = 1	36	210
	b = 0	36	24
Caso 7: L=2,g=1,d=0	0 < b < 1	36	1320
	b = 1	36	720
	b = 0	36	30
Caso 8: L=2,g=1,d=1	0 < b < 1	36	4290
	b = 1	36	1980
	b = 0	60	30
Caso 9: L=3,g=1,d=0	0 < b < 1	60	23256
	b = 1	60	23256
	b = 0	66	36
Caso 10: L=2,g=2,d=0	0 < b < 1	66	12012
-	b = 1	66	4752

Tabela 4.4 - Complexidade numérica, em termos do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI, do Teorema 12 para  $n_x = 3$ ,  $n_u = 1$ , N = 2, p = 1.

## Comparação com resultados da literatura

Nesta seção os resultados fornecidos pelo Teorema 12 são comparados com os resultados obtidos através das condições de Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) e de Oliveira e Peres (2009, Teorema 4) para síntese de controladores estáticos de realimentação de estados robustos. Os valores máximos do escalar  $\mu$  obtidos em função do limitante *b* são apresentados na Figura 4.2.

A Figura 4.2 apresenta os valores máximos de  $\mu$  em função de b obtidos por Oliveira e Peres



Figura 4.2 - Valor máximo do escalar  $\mu$  em função do limitante *b* tal que o sistema é estabilizável por um controlador estático de realimentação de estados robusto projetado através das condições do Teorema 12, de Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) e de Oliveira e Peres (2009, Teorema 4 com g = 3, d = 0).

(2008, Teorema 3), por Oliveira e Peres (2009, Teorema 4) usando uma matriz de Lyapunov cúbica e pelo Teorema 12 para os casos 6 e 10. Para b = 0 as quatro condições fornecem controladores para  $\mu \leq 0.7137$ . Para  $b \in (0,1)$  o Teorema 12 com L = 2,g = 2,d = 0 (caso 10) fornece resultados menos conservadores do que Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) e Oliveira e Peres (2009, Teorema  $4_{g=3,d=0}$ ). Considerando L = 1,g = 3,d = 0 (caso 6) o Teorema 12 obtém resultados similares à Oliveira e Peres (2009, Teorema  $4_{g=3,d=0}$ ) e menos conservadores do que Oliveira e Peres (2008, Teorema 3). Para efeitos ilustrativos, tomando-se b = 0.75 as condições de Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) fornecem ganhos robustos para  $\mu \leq 0.6118$  (quadrado), enquanto ambas condições Oliveira e Peres (2009, Teorema 4) e Teorema 12 com L = 1,g = 3,d = 0 para  $\mu \leq$ 0.6240 (circunferência e círculo, respectivamente) e o Teorema 12 com L = 2,g = 2,d = 0 sempre que  $\mu \leq 0.6328$  (triângulo). Para b = 1, o Teorema 12 com L = 2,g = 2,d = 0 é factível para  $\mu \leq 0.5993$  enquanto as demais condições para  $\mu \leq 0.5939$ .

Com respeito à complexidade numérica (ver Tabela 4.5 e Tabela 4.5) as condições de Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) necessitam de um esforço computacional muito menor que as demais condições. As condições de Oliveira e Peres (2009, Teorema  $4_{g=3,d=0}$ ) fornecem resultados similares ao Teorema 12 com L = 1, g = 3, d = 0 com um menor esforço computacional, em termos do número  $n_l$  de linhas de LMIs, para o caso de  $b \in (0,1)$ . As condições do Teorema 12 com

Tabela 4.5 - Complexidade numérica, em termos do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI, associada às condições de Oliveira e Peres (2008, Teorema 3) e Oliveira e Peres (2009, Teorema 4 com g = 3, d = 0) para  $n_x = 3, n_u = 1, N = 2, p = 1$ .

	Oliveira e Peres (2008)		Oliveira e Peres (2009)		
b	Teore	ema 3	Teorema	$4_{g=3,d=0}$	
	$n_v$	$n_l$	$n_v$	$n_l$	
b = 0	24	24	36	336	
0 < b < 1	24	24	36	336	
b = 1	24	24	36	336	

L = 2, g = 2, d = 0 apresentam os melhores resultados ao custo de uma complexidade numérica bem mais elevada para b > 0.

#### **Controladores escalonados**

Considere o sistema LPV HPPD 3.24 com  $n_x = 2$ ,  $n_u = 1$ , N = 3, p = 1 e as matrizes

$$A_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ -1.6 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{(0,1,0)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7 \\ -0.6 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad B_{(0,1,0)} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{(0,0,1)} = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.1 \\ -1.0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B_{(0,0,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

 $\rho \in \mathbb{R}$ , retirado de Oliveira e Peres (2008). O objetivo é determinar o valor máximo do limitante b sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  tal que o sistema é estabilizável por um controlador estático de realimentação de estados ( $n_y = n_x$ ) por ganho escalonado projetado pelo Teorema 11 para diferentes valores de  $\rho$ .

A Tabela 4.6 apresenta os valores máximos de *b* obtidos pelas condições do Teorema 10 para dois valores diferentes de  $\rho$ . Para  $\rho = 1$ , isto é, a matriz *B* não dependente do parâmetro  $\alpha [k]$ 

Tabela 4.6 - Valor máximo do limitante *b* sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  tal que o sistema é estabilizável por um controlador estático de realimentação de estados por ganho escalonado projetado através das condições do Teorema 11.

Caso	$b_p$	
	$\rho = 0.1$	$\rho = 1.0$
Caso 1: L=1,g=0,d=0	_	_
Caso 2: L=1,g=1,d=0	0.3243	0.7788
Caso 3: L=1,g=1,d=1	0.4332	0.7840
Caso 4: L=1,g=2,d=0	0.8524	0.8632
Caso 5: L=1,g=2,d=1	0.8559	0.8637
Caso 6: L=1,g=3,d=0	0.8694	0.8688
Caso 7: L=2,g=1,d=0	1	1
Caso 8: L=2,g=1,d=1	1	1
Caso 9: L=3,g=1,d=0	1	1
Caso 10:L=2,g=2,d=0	1	1
Caso 10:L=2,g=2,d=0	1	1

 $(B(\alpha [k]) = B_1 = B_2, \forall k \in \mathbb{N})$ , o Teorema 10 usando matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas com g < 4 (casos 2 a 6) fornece ganhos escalonados para  $b \leq 0.8688$ . Entretanto, usando matrizes de Lyapunov dependentes de sucessivos instantes de tempo (casos 7 a 10) o Teorema 10 é factível mesmo que os parâmetros variem arbitrariamente rápidos no simplex unitário (b = 1). Para  $\rho = 0.1$ , são preservados as mesmas características descritas para o caso  $\rho = 1$ . Para o caso da estabilidade quadrática (caso 1) o Teorema 10 não é factível para ambos valores de  $\rho$ .

Com relação ao crescimento dos valores dos parâmetros é importante destacar que diferentemente dos exemplos de análise de estabilidade e síntese de controladores robustos a aplicação de uma relaxação Pólya de grau d = 1 melhorou efetivamente os resultados obtidos pelo caso 3 e caso 4.

Como apresentado na Tabela 4.7 o aumento dos valores dos parâmetros implicou crescimento muito rápido do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI para o caso de N = 3.

## Comparação com resultados da literatura

Nesta seção os resultados apresentados pelo Teorema 10 são comparados com os resultados fornecidos por Oliveira e Peres (2008, Teorema 4). Os valores máximos do limitante *b* obtidos e a respectiva complexidade numérica associada são apresentadas na Tabela 4.8.

Casob $n_v$ $n_l$ Caso 1: L=1,g=0,d=0 $b=0$ 912Caso 1: L=1,g=0,d=0 $0 < b < 1$ 960 $b=1$ 936 $b=0$ 2727Caso 2: L=1,g=1,d=0 $0 < b < 1$ 27480 $b=1$ 27180 $b=0$ 2740Caso 3: L=1,g=1,d=1 $0 < b < 1$ 272720 $b=1$ 27660Caso 4: L=1,g=2,d=0 $0 < b < 1$ 542720 $b=1$ 54660Caso 5: L=1,g=2,d=1 $0 < b < 1$ 5412240 $b=1$ 541980Caso 6: L=1,g=3,d=0 $0 < b < 1$ 9012240 $b=1$ 901980 $b=1$ 901980Caso 7: L=2,g=1,d=0 $0 < b < 1$ 8126180 $b=1$ 8114616 $b=0$ 8160Caso 8: L=2,g=1,d=1 $0 < b < 1$ 81235620 $b=1$ 81109620 $b=1$ 2432882880 $b=0$ 24360 $0 < b < 1$ 2432882880 $b=0$ 32484 $0 < b < 1$ 3241743588 $b=1$ 324679644 $0 < b < 1$ 324679644	Casa	1-		
$\begin{array}{c ccccc} b = 0 & 9 & 12 \\ caso 1: L=1,g=0,d=0 & 0 < b < 1 & 9 & 60 \\ b = 1 & 9 & 36 \\ \hline b = 0 & 27 & 27 \\ caso 2: L=1,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 27 & 480 \\ b = 1 & 27 & 180 \\ \hline b = 0 & 27 & 40 \\ caso 3: L=1,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 27 & 2720 \\ b = 1 & 27 & 660 \\ \hline b = 0 & 54 & 40 \\ caso 4: L=1,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 54 & 2720 \\ b = 1 & 54 & 660 \\ \hline caso 5: L=1,g=2,d=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 660 \\ \hline caso 5: L=1,g=2,d=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline caso 6: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline caso 7: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 0 & 81 & 40 \\ caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 109620 \\ \hline caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$	Caso	D	$n_v$	$n_l$
Caso 1: L=1,g=0,d=0 $0 < b < 1$ 9 $60$ $b = 1$ 9 $36$ $b = 0$ $27$ $27$ Caso 2: L=1,g=1,d=0 $0 < b < 1$ $27$ $480$ $b = 1$ $27$ $180$ Caso 3: L=1,g=1,d=1 $0 < b < 1$ $27$ $40$ Caso 3: L=1,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $27$ $40$ Caso 4: L=1,g=2,d=0 $b = 0$ $54$ $40$ Caso 5: L=1,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $54$ $2720$ $b = 1$ $54$ $660$ Caso 5: L=1,g=2,d=1 $0 < b < 1$ $54$ $b = 0$ $54$ $60$ Caso 6: L=1,g=3,d=0 $0 < b < 1$ $90$ $b = 0$ $90$ $60$ Caso 7: L=2,g=1,d=0 $b = 0$ $81$ $b = 0$ $81$ $40$ Caso 8: L=2,g=1,d=1 $0 < b < 1$ $81$ $b = 0$ $81$ $109620$ $b = 1$ $81$ $109620$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 0$ $324$ $84$ Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $324$ $b = 1$ $324$ $679644$		b = 0	9	12
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $	Caso 1: L=1,g=0,d=0	0 < b < 1	9	60
$\begin{array}{cccccccc} & b = 0 & 27 & 27 & 480 \\ & 0 < b < 1 & 27 & 480 \\ & b = 1 & 27 & 180 \\ \hline \\ Caso 3: L=1,g=1,d=1 & b = 0 & 27 & 40 \\ & 0 < b < 1 & 27 & 2720 \\ & b = 1 & 27 & 660 \\ \hline \\ Caso 4: L=1,g=2,d=0 & b = 0 & 54 & 40 \\ Caso 4: L=1,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 54 & 2720 \\ & b = 1 & 54 & 660 \\ \hline \\ Caso 5: L=1,g=2,d=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ & b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline \\ Caso 6: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ & b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline \\ Caso 7: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 40 \\ \hline \\ Caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ & b = 0 & 81 & 40 \\ \hline \\ Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ & b = 0 & 81 & 60 \\ \hline \\ Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ & b = 0 & 324 & 84 \\ \hline \\ Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ & b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$		b = 1	9	36
$\begin{array}{cccccccc} {\rm Caso} \ 2: \ {\rm L}=1, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 27 & 180 \\ b = 0 & 27 & 40 \\ {\rm Caso} \ 3: \ {\rm L}=1, {\rm g}=1, {\rm d}=1 & 0 < b < 1 & 27 & 2720 \\ b = 1 & 27 & 660 \\ \hline b = 0 & 54 & 40 \\ {\rm Caso} \ 4: \ {\rm L}=1, {\rm g}=2, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 54 & 2720 \\ b = 1 & 54 & 660 \\ \hline c {\rm aso} \ 5: \ {\rm L}=1, {\rm g}=2, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline c {\rm caso} \ 5: \ {\rm L}=1, {\rm g}=2, {\rm d}=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline c {\rm caso} \ 6: \ {\rm L}=1, {\rm g}=3, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline c {\rm caso} \ 6: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 81 & 40 \\ \hline c {\rm caso} \ 7: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ \hline c {\rm caso} \ 8: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=1 & 0 < b < 1 & 81 & 125620 \\ \hline b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline c {\rm caso} \ 9: \ {\rm L}=3, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$		b = 0	27	27
$\begin{array}{c ccccc} b = 1 & 27 & 180 \\ \hline b = 0 & 27 & 40 \\ \hline 0 < b < 1 & 27 & 2720 \\ \hline b = 1 & 27 & 660 \\ \hline b = 0 & 54 & 40 \\ \hline Caso 4: L=1,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 54 & 2720 \\ \hline b = 1 & 54 & 660 \\ \hline Caso 5: L=1,g=2,d=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ \hline b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline Caso 5: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 54 & 1980 \\ \hline Caso 6: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ \hline b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline Caso 7: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ \hline Caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ \hline b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 109620 \\ \hline Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$	Caso 2: L=1,g=1,d=0	0 < b < 1	27	480
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		b = 1	27	180
Caso 3: L=1,g=1,d=1 $0 < b < 1$ $27$ $2720$ $b = 1$ $27$ $660$ $b = 0$ $54$ $40$ Caso 4: L=1,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $54$ $2720$ $b = 1$ $54$ $660$ Caso 5: L=1,g=2,d=1 $0 < b < 1$ $54$ $12240$ $b = 1$ $54$ $1980$ Caso 5: L=1,g=2,d=1 $0 < b < 1$ $54$ $1980$ Caso 6: L=1,g=3,d=0 $0 < b < 1$ $90$ $12240$ $b = 1$ $90$ $1980$ Caso 7: L=2,g=1,d=0 $0 < b < 1$ $81$ $26180$ $b = 1$ $81$ $14616$ $b = 0$ $81$ $60$ Caso 8: L=2,g=1,d=1 $0 < b < 1$ $81$ $235620$ $b = 1$ $81$ $109620$ $b = 0$ $243$ $60$ Caso 9: L=3,g=1,d=0 $0 < b < 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 0$ $324$ $84$ Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $324$ $679644$		b = 0	27	40
$\begin{array}{c cccc} b = 1 & 27 & 660 \\ \hline b = 0 & 54 & 40 \\ \hline Caso 4: L=1,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 54 & 2720 \\ b = 1 & 54 & 660 \\ \hline b = 0 & 54 & 60 \\ \hline Caso 5: L=1,g=2,d=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline Caso 6: L=1,g=3,d=0 & b = 0 & 90 & 60 \\ \hline Caso 6: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline Caso 7: L=2,g=1,d=0 & b = 0 & 81 & 40 \\ \hline Caso 8: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ \hline Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 109620 \\ \hline Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$	Caso 3: L=1,g=1,d=1	0 < b < 1	27	2720
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		b = 1	27	660
$\begin{array}{cccccc} {\rm Caso} \ 4: \ {\rm L}=1, {\rm g}=2, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 54 & 660 \\ b = 1 & 54 & 660 \\ \hline b = 0 & 54 & 60 \\ {\rm Caso} \ 5: \ {\rm L}=1, {\rm g}=2, {\rm d}=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline b = 0 & 90 & 60 \\ {\rm Caso} \ 6: \ {\rm L}=1, {\rm g}=3, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline c {\rm aso} \ 7: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 0 & 81 & 40 \\ \hline c {\rm aso} \ 7: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ \hline c {\rm aso} \ 8: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=1 & 0 < b < 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 60 \\ \hline c {\rm caso} \ 9: \ {\rm L}=3, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 81 & 109620 \\ \hline c {\rm caso} \ 9: \ {\rm L}=3, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline c {\rm aso} \ 10: \ {\rm L}=2, {\rm g}=2, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$		b = 0	54	40
$\begin{array}{c cccc} b = 1 & 54 & 660 \\ b = 0 & 54 & 60 \\ \hline Caso 5: L=1,g=2,d=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline b = 0 & 90 & 60 \\ \hline Caso 6: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline Caso 7: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ \hline Caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$	Caso 4: L=1,g=2,d=0	0 < b < 1	54	2720
$\begin{array}{c ccccc} b = 0 & 54 & 60 \\ Caso 5: L=1,g=2,d=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline b = 0 & 90 & 60 \\ Caso 6: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline caso 7: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 109620 \\ \hline caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 84 \\ \hline caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$		b = 1	54	660
$\begin{array}{cccccc} {\rm Caso} \ 5: \ {\rm L}=1, {\rm g}=2, {\rm d}=1 & 0 < b < 1 & 54 & 12240 \\ b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline b = 0 & 90 & 60 \\ {\rm Caso} \ 6: \ {\rm L}=1, {\rm g}=3, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline caso \ 7: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ \hline caso \ 8: \ {\rm L}=2, {\rm g}=1, {\rm d}=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline caso \ 9: \ {\rm L}=3, {\rm g}=1, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 243 & 60 \\ \hline caso \ 10: \ {\rm L}=2, {\rm g}=2, {\rm d}=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$		b = 0	54	60
$\begin{array}{c cccc} b = 1 & 54 & 1980 \\ \hline b = 0 & 90 & 60 \\ \hline Caso 6: L=1,g=3,d=0 & 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ \hline Caso 7: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 60 \\ \hline Caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ \hline b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \end{array}$	Caso 5: L=1,g=2,d=1	0 < b < 1	54	12240
$\begin{array}{c ccccc} b = 0 & 90 & 60 \\ 0 < b < 1 & 90 & 12240 \\ b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ 0 < b < 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 60 \\ \hline caso \ 8: \ L = 2, g = 1, d = 1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline caso \ 9: \ L = 3, g = 1, d = 0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline caso \ 10: \ L = 2, g = 2, d = 0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$	-	b = 1	54	1980
Caso 6: L=1,g=3,d=0 $0 < b < 1$ 9012240 $b = 1$ 901980 $b = 0$ 8140Caso 7: L=2,g=1,d=0 $0 < b < 1$ 8126180 $b = 1$ 8114616 $b = 0$ 8160Caso 8: L=2,g=1,d=1 $0 < b < 1$ 81235620 $b = 1$ 81109620Caso 9: L=3,g=1,d=0 $0 < b < 1$ 2432882880 $b = 0$ 24360 $b = 1$ 2432882880 $b = 1$ 2432882880 $b = 1$ 2432882880 $b = 0$ 32484 $0 < b < 1$ 3241743588 $b = 1$ 324679644 $b = 1$ 324679644		b = 0	90	60
$\begin{array}{c cccc} b = 1 & 90 & 1980 \\ \hline b = 0 & 81 & 40 \\ \hline Caso 7: L=2,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 60 \\ \hline Caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ \hline b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline b = 0 & 243 & 60 \\ \hline Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$	Caso 6: L=1,g=3,d=0	0 < b < 1	90	12240
$\begin{array}{c ccccc} b = 0 & 81 & 40 \\ 0 < b < 1 & 81 & 26180 \\ b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 60 \\ \hline caso \ 8: \ L=2, g=1, d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline caso \ 9: \ L=3, g=1, d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 243 & 60 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline caso \ 10: \ L=2, g=2, d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \hline \end{array}$	-	b = 1	90	1980
Caso 7: L=2,g=1,d=0 $0 < b < 1$ $81$ $26180$ $b = 1$ $81$ $14616$ $b = 0$ $81$ $14616$ Caso 8: L=2,g=1,d=1 $0 < b < 1$ $81$ $235620$ $b = 1$ $81$ $109620$ $b = 1$ $81$ $109620$ Caso 9: L=3,g=1,d=0 $0 < b < 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 0$ $324$ $84$ Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $324$ $1743588$ $b = 1$ $324$ $679644$		b = 0	81	40
$\begin{array}{c cccc} b = 1 & 81 & 14616 \\ \hline b = 0 & 81 & 60 \\ \hline Caso 8: L=2,g=1,d=1 & 0 < b < 1 & 81 & 235620 \\ \hline b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline b = 0 & 243 & 60 \\ \hline Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \end{array}$	Caso 7: L=2,g=1,d=0	0 < b < 1	81	26180
b = 08160Caso 8: L=2,g=1,d=1 $0 < b < 1$ 81235620 $b = 1$ 81109620 $b = 0$ 24360Caso 9: L=3,g=1,d=0 $0 < b < 1$ 2432882880 $b = 1$ 2432882880 $b = 1$ 2432882880 $b = 0$ 324840 $b < 1$ 3241743588Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ 324679644		b = 1	81	14616
Caso 8: L=2,g=1,d=1 $0 < b < 1$ $81$ $235620$ $b = 1$ $81$ $109620$ $b = 0$ $243$ $60$ Caso 9: L=3,g=1,d=0 $0 < b < 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 0$ $324$ $84$ Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $324$ $1743588$ $b = 1$ $324$ $679644$		b = 0	81	60
$\begin{array}{c cccc} b = 1 & 81 & 109620 \\ \hline b = 0 & 243 & 60 \\ \hline Caso 9: L=3,g=1,d=0 & 0 < b < 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 1 & 243 & 2882880 \\ \hline b = 0 & 324 & 84 \\ \hline Caso 10: L=2,g=2,d=0 & 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ \hline b = 1 & 324 & 679644 \\ \end{array}$	Caso 8: L=2,g=1,d=1	0 < b < 1	81	235620
b = 024360Caso 9: L=3,g=1,d=0 $0 < b < 1$ 2432882880 $b = 1$ 2432882880 $b = 1$ 2432882880 $b = 0$ 32484 $0 < b < 1$ 3241743588Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ 324679644		b = 1	81	109620
Caso 9: L=3,g=1,d=0 $0 < b < 1$ $243$ $2882880$ $b = 1$ $243$ $2882880$ $b = 0$ $324$ $84$ Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ $324$ $1743588$ $b = 1$ $324$ $679644$		b = 0	243	60
b = 12432882880 $b = 0$ 32484Caso 10: L=2,g=2,d=0 $0 < b < 1$ 3241743588 $b = 1$ 324679644	Caso 9: L=3,g=1,d=0	0 < b < 1	243	2882880
Caso 10: L=2,g=2,d=0 $\begin{array}{cccc} b = 0 & 324 & 84 \\ 0 < b < 1 & 324 & 1743588 \\ b = 1 & 324 & 679644 \end{array}$	-	b = 1	243	2882880
Caso 10: L=2,g=2,d=0 $\begin{vmatrix} 0 < b < 1 \\ b = 1 \end{vmatrix}$ 324 1743588 b = 1 324 679644		b = 0	324	84
b = 1   324   679644	Caso 10: L=2,g=2,d=0	0 < b < 1	324	1743588
		b = 1	324	679644

Tabela 4.7 - Complexidade numérica, em termos do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMI, do Teorema 10 para  $n_x = 2$ ,  $n_u = 1$ , N = 3, p = 1.

Tabela 4.8 - Valor máximo do limitante *b* sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  tal que o sistema é estabilizável por um controlador estático de realimentação de estados por ganho escalonado e respectiva complexidade numérica associada às condições de Oliveira e Peres (2008).

Método	l	b	$n_v$	$n_l$
	$\rho = 0.1$	$\rho = 1.0$		
Oliveira e Peres (2008, Teorema 4)	0.3459	0.8463	27	72

Os resultados fornecidos pelo Teorema 10 são mais conservadores do que os resultados de Oliveira e Peres (2008, Teorema 4) para L = 1 e  $g \leq 1$ . No contexto de funções de Lyapunov

dependentes de parâmetros (g > 0), para  $\rho = 1$ , os casos 2 e 3 apresentam menores valores de b do que Oliveira e Peres (2008, Teorema 4), enquanto para  $\rho = 0.1$  apenas o caso 2. Entretanto, para valores de L > 1 ou g > 1 (casos 4 a 10) o Teorema 10 fornece melhores resultados. Em termos de complexidade numérica, as condições de Oliveira e Peres (2008, Teorema 4) apresentam 360 vezes menos de linhas de LMI do que Teorema 10 com L = 2,g = 1,d = 0. Porém esta grande diferença na complexidade numérica permite que o Teorema 10 fornece ganhos escalonados mesmo que os parâmetros variem arbitrariamente rápidos (b = 1) no simplex unitário. Em particular para matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas (L = 1) as condições do Teorema 10 se resumem as condições apresentadas em Oliveira e Peres (2009, Teorema 3) fixando-se p = 1.

## 4.3 Análise de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$ e síntese de controladores estabilizantes $\mathcal{H}_{\infty}$

Nesta seção as condições LMIs propostas para análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  e síntese de controladores estabilizantes  $\mathcal{H}_{\infty}$  são aplicadas no modelo LPV de um sistema vibroacústico.

Primeiro, é estudado o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico em função do limitante da taxa de variação dos parâmetros. Em seguida, o problema de síntese de controladores é abordado. Para tanto, são projetados controladores robustos e por ganho escalonado para diferentes valores do limitante da taxa de variação. Em ambos os casos são projetados controladores de realimentação de estados e de saída objetivando minimizar o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico. Com relação aos valores dos parâmetros da matriz de Lyapunov e do controlador são analisados quatro casos:

- Caso 1: Usando uma matriz de Lyapunov afim (L = 1 e g = 1) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 2: Usando uma matriz de Lyapunov afim (L = 1 e g = 1) e com relaxação Pólya nível 2 (d = 2).
- Caso 3: Usando uma matriz de Lyapunov quadrática (L = 1 e g = 2) e sem relaxação Pólya (d = 0).
- Caso 4: Usando uma matriz de Lyapunov afim em dois instantes de tempo (L = 2 e g = 1) e sem relaxação Pólya (d = 0).

## 4.3.1 Sistema Vibroacústico

O sistema vibroacústico, apresentado na Figura 4.3, consiste em uma placa de lexan fixada na parede de uma sala semi-anecóica. A vibração na placa é gerada por uma força pontual aplicada por um shaker, representando um distúrbio exógeno w. Um transdutor piezoelétrico conectado à placa aplica um momento fletor que atua como uma entrada de controle u cujo objetivo é atenuar as vibrações causadas pelo shaker. O sinal de saída mensurável y consiste na pressão sonora, provocada pela vibração da placa, medida por um microfone localizado próximo à placa dentro da sala

semi-anecóica. A dinâmica do sistema é sensível à variação da temperatura. Para maiores detalhes ver Donadon et al. (2006).



Figura 4.3 - Sistema Vibroacústico.

Um modelo LPV para o sistema vibroacústico é obtido em De-Caigny (2009), De-Caigny et al. (2010b) e De-Caigny et al. (2012b) utilizando a técnica SMILE (ver, por exemplo, De-Caigny et al. (2007), De-Caigny et al. (2009) para o caso SISO e De-Caigny et al. (2009b), De-Caigny et al. (2011) para o caso MIMO). O modelo fornecido consiste em um sistema LPV HPPD discreto no tempo com

$$n_x = 10, \quad n_w = 1, \quad n_u = 1, \quad n_y = 1, \quad N = 2, \quad p = 3,$$

e  $\alpha [k] = (\alpha_1 [k], \alpha_2 [k]) \in \Lambda_2$  parametrizado em função da temperatura  $\theta [k] \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$  tal que

$$\alpha_1[k] = \frac{\theta[k] - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}, \qquad \alpha_2[k] = \frac{\overline{\theta} - \theta[k]}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}.$$

para  $\underline{\theta} = 22.9^{\circ} e \overline{\theta} = 25.4^{\circ}$ . As matrizes do sistema vibroacústico são apresentadas no Apêndice C.

Para ilustrar a variação da dinâmica do sistema vibroacústico em função da temperatura, a Figura 4.4 apresenta a magnitude do diagrama de Bode de 11 sistemas LTI locais, obtidos a partir do modelo LPV fixando-se 11 valores equidistantes para a temperatura  $\theta$  [k] no intervalo [22.9°,25.4°]. A Figura 4.4(a) mostra a magnitude do diagrama de Bode da entrada exógena w para a saída mensurável y, enquanto a Figura 4.4(b) mostra a magnitude da entrada de controle u para a saída mensurável y.



Figura 4.4 - Sobreposição das magnitudes dos diagramas de Bode de 11 sistemas LTI locais obtidos a partir do modelo LPV fixando-se valores equidistantes da temperatura no intervalo [22.9°,25.4°].

#### **4.3.2** Análise de desempenho $\mathcal{H}_{\infty}$

Considere o sistema vibroacústico apresentado na seção anterior. O objetivo é avaliar a influência do distúrbio exógeno w na pressão sonora y medida pelo microfone. Para tanto, será investigado o menor limitante  $\eta$  tal que para qualquer sinal transitório w a saída y satisfaça

$$\|y(\alpha[k])\|_{\ell_2} < \eta \|w(\alpha[k])\|_{\ell_2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$(4.3)$$

Da equação (4.3), tem-se que  $\eta$  pode assumir quaisquer valores satisfazendo

$$\eta > \frac{\|y(\alpha [k])\|_{\ell_2}}{\|w(\alpha [k])\|_{\ell_2}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{com} \quad w(\alpha [k])\|_{\ell_2} \neq 0.$$

Note que o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico é limitado por  $\eta$ , ou seja

$$\mathcal{H}_{\infty} \triangleq \sup_{\|w(\alpha[k])\|_{\ell_2} \neq 0} \frac{\|y(\alpha[k])\|_{\ell_2}}{\|w(\alpha[k])\|_{\ell_2}} \le \min(\eta).$$

Assim, para determinar um limitante superior  $\eta$  utilizando as condições para análise de desempenho do Teorema 9 (T9) e Corolário 2 (C2) basta definir a saída de desempenho z como sendo igual ao sinal mensurável y. Portanto,

$$C_z(\alpha [k]) = C_y(\alpha [k]), \quad D_w(\alpha [k]) = [0].$$

Para avaliar a influência da variação da temperatura no desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico, será determinado o valor do limitante  $\eta$  para diferentes valores do limitante b sobre a taxa de variação do parâmetro escalonado,  $\Delta \alpha [k]$ , definida em (3.13).



Figura 4.5 - Garantido limitante superior  $\eta$  sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico em função do limitante *b* sobre a taxa de variação dos parâmetros  $\Delta \alpha [k]$  obtido através das condições do Teorema 9 e Corolário 2.

A Figura 4.5 apresenta o limitante  $\eta$  do desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico em função do limitante *b* sobre a taxa de variação dos parâmetros para três diferentes casos. Como pode ser visto, as condições do Corolário 2 fornecem soluções menos conservadoras do que as condições do Teorema 9 devido a inserção da variável de folga *G*. Para b = 0, o Corolário 2 fornece um custo garantido  $\eta = 20.5947$  para o caso 2 e  $\eta = 14.8277$  para ambos casos 3 e 4, enquanto o Teorema 9 fornece  $\eta = 20.8421$  e  $\eta = 16.8552$ , respectivamente. Para b > 0, o valor do limitante  $\eta$  cresce rapidamente com o aumento do valor do limitante *b*. O caso 3 fornece menores limitantes do que o caso 2 usando o Corolário 2, enquanto que usando o Teorema 9 somente para b < 0.060. Além disso, à medida que o valor de *b* aumenta os casos 2 e 3 fornecem soluções cada vez mais conservadoras do que o caso 4, até valores máximos de *b* para os quais as condições do Teorema 9 e Corolário 2 tornam-se infactíveis. Os valores máximos do limitante *b* tal que o sistema é assintoticamente estável com custo garantido  $\eta$  sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  são apresentados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 - Máximo limitante *b* sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  tal que o sistema vibroacústico é assintoticamente estável com garantido limitante superior sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  obtido através das condições do Teorema 9 e Corolário 2.

Caso	Teorema 9	Corolário 2
Caso 2: $L = 1, g = 1, d = 2$	0.070	0.071
Caso 3: $L = 1, g = 2, d = 0$	0.063	0.083
Caso 4: $L = 2, g = 1, d = 0$	0.122	0.146

O caso 1 não é apresentado na Figura 4.5 e na Tabela 4.9 porque as condições do Teorema 9 e do Corolário 2 são infactíveis para quaisquer valores de b usando-se uma matriz de Lyapunov afim. Entretanto, a aplicação de uma relação Pólya nível 2 viabilizou estas condições para valores de b menores ou iguais a 0.070 e 0.071, respectivamente, como apresentado pelo caso 2. O valor máximo do limitante b fornecido pelo caso 3 é menor do que o valor fornecido pelo caso 2 usando-se o Teorema 9, entretanto usando-se o Corolário 2 o caso 3 fornece soluções factíveis para valores de b maiores do que o caso 2. Os maiores valores máximos do limitante b foram forcedidos pelo caso 4.

A Tabela 4.10 apresenta a complexidade numérica do Teorema 9 e do Corolário 2 para

$$n_x = 10, \quad n_w = 1, \quad n_z = 1, \quad N = 2, \quad p = 3.$$

É claro que o caso 1 apresenta menor complexidade numérica. O caso 2 apresenta um menor número  $n_v$  de variáveis escalares do que o caso 3, entretanto, um maior número  $n_l$  de linhas de LMI. O caso 4 forneceu os melhores resultados, porém a um custo computacional mais elevado devido a sua maior complexidade numérica. Quando comparado a complexidade numérica entre o Teorema 9 e o Corolário 2, ambos apresentam o mesmo número de linhas de LMI, por outro lado, com relação ao número de variáveis escalares, o Corolário 2 apresenta maior complexidade numérica devido ao uso da variável de folga *G*.

Caso	b	Teorema 9		b Teorema 9 Con		Corol	ário 2
		$n_v$	$n_l$	$n_v$	$n_l$		
	b = 0	110	111	310	111		
Caso 1: L=1,g=1,d=0	0 < b < 1	110	2773	310	2773		
	b = 1	110	771	310	771		
	b = 0	110	155	310	155		
Caso 2: L=1,g=1,d=2	0 < b < 1	110	10165	310	10165		
	b = 1	110	1849	310	1849		
	b = 0	165	133	465	133		
Caso 3: L=1,g=2,d=0	0 < b < 1	165	5545	465	5545		
	b = 1	165	1243	465	1243		
	b = 0	220	133	620	133		
Caso 4: L=2,g=1,d=0	0 < b < 1	220	44045	620	44045		
	b = 1	220	17425	620	17425		

Tabela 4.10 - Complexidade numérica, em termos do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMIs, do Teorema 9 e do Corolário 2 para  $n_x = 10$ ,  $n_w = 1$ ,  $n_z = 1$ , N = 2, p = 3.

#### Comparação com resultados da literatura

Nesta seção os resultados apresentados pelo Teorema 9 e Corolário 2 para análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico são comparados com os resultados obtidos usando-se as condições de análise de De-Caigny (2009).

Tabela 4.11 - Máximo limitante *b* sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  tal que o sistema vibroacústico é assintoticamente estável com garantido limitante superior sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  e respectiva complexidade numérica\* associada às condições LMIs de De-Caigny (2009, Teorema 4.11).

Caso	b	$n_v$	$n_l$
De-Caigny (2009, Teorema $4.11_{g=1,d=0}$ )	0.120	711	2792
De-Caigny (2009, Teorema $4.11_{q=1,d=2}$ )	0.120	711	10184
De-Caigny (2009, Teorema $4.11_{q=2,d=0}$ )	0.132	2266	5574
De-Caigny (2009, Teorema $4.11_{g=3,d=0}$ )	0.136	5821	10204

\* valores de referência para  $b \in (0,1)$ .

A Tabela 4.11 apresenta os valores máximos do limitante *b* sobre taxa de variação dos parâmetros  $\Delta \alpha [k]$  tal que as condições LMIs de De-Caigny (2009, Teorema 4.11) asseguram que o sistema vibroacústico é assintóticamente estável com garantido limitante superior sobre seu desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Como pode ser visto, as condições do Teorema 9 e Corolário 2 fornecem menores valores máximos para o limitante *b* do que as condições de De-Caigny (2009, Teorema 4.11) para os casos 1, 2 e 3. Entretanto, a um custo computacional menor. Por exemplo, as condições de De-Caigny (2009, Teorema 4.11) utilizam sete vezes mais variáveis escalares do que Teorema 9 para o caso 2 e cinco vezes mais do que o Corolário 2 para o caso 3. Por outro lado, o maior valor para o limitante *b* é fornecido pelo Corolário 2 para o caso 4 utilizando nove vezes menos variáveis escalares e quatro vezes mais linhas de LMIs do que as condições de De-Caigny (2009, Teorema  $4.11_{q=3,d=0}$ ).

#### **4.3.3** Síntese de controladores estabilizantes $\mathcal{H}_{\infty}$

Considere o sistema vibroacústico. Na seção 4.3.2 é analisado a influência do distúrbio exógeno w na pressão sonora y medida pelo microfone em função da variação temperatura  $\theta$  [k]. A partir da escolha da saída de desempenho z como sendo igual a saída mensurável y foram determinados limitantes para o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico em função do limitante taxa de variação  $\Delta \alpha$  [k]. Nesta seção, o objetivo é minimizar a influência do distúrbio exógeno w na pressão sonora y. Para tanto, utilizando as condições do Teorema 11 (T11) e Teorema 13 (T13), são projetados controladores estáticos  $\mathcal{H}_{\infty}$  de realimentação de saída por ganho escalonado e robustos em função do limitante b sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha$  [k].

Para avaliar o efeito do número de estados disponíveis para realimentação no desempenho dos controladores são projetados controladores de realimentação completa de estados ( $n_y = 10$ ) e comparados com controladores de realimentação de saída considerando-se que os seis primeiros estados são medidos em tempo real para realimentação ( $n_y = 6$ ).

A Figura 4.6 e a Figura 4.7 mostram os limitantes superioriores  $\eta$  sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico em malha fechada em função do limitante *b* sobre a taxa de variação dos parâmetros  $\Delta \alpha [k]$  utilizando, respectivamente, controladores por ganho escalonado sintetizados pelas condições do Teorema 11 e controladores robustos sintetizados pelas condições do Teorema 13. Como pode ser visto, os controladores projetados através das condições do Teorema 11 garantem menores custos  $\mathcal{H}_{\infty}$  para o sistema em malha fechada do que os controladores projetados através das condições Teorema 13, isto é, os controladores por ganho escalonado são mais eficientes do que os controladores robustos.

Para  $n_y = 10$ , as condições de ambos teoremas são capazes de sintetizar controladores de



Figura 4.6 - Garantido limitante superior  $\eta$  sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico em malha fechada em função do limitante *b* sobre a taxa de variação dos parâmetros  $\Delta \alpha [k]$  utilizando controladores por ganho escalonado sintetizados pelas condições do Teorema 11.



Figura 4.7 - Garantido limitante superior  $\eta$  sobre o desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema vibroacústico em malha fechada em função do limitante *b* sobre a taxa de variação dos parâmetros  $\Delta \alpha [k]$  utilizando controladores robustos sintetizados pelas condições do Teorema 13.

realimentação completa de estados para quaisquer valores de *b*, ou seja, o sistema vibroacústico é estabilizável por um ganho de realimentação de estados, escalonado ou robusto, para todas as possíveis trajetórias da temperatura  $\theta$  [k]. Considerando que a temperatura  $\theta$  [k] =  $\theta$  é constante (b = 0), as condições do Teorema 11 fornecem  $\eta$  = 3.097,  $\eta$  = 2.747,  $\eta$  = 1.773,  $\eta$  = 1.773 para os casos 1, 2, 3 e 4, respectivamente, enquanto que as condições do Teorema 13 fornecem  $\eta$  = 3.405,  $\eta$  = 2.999,  $\eta$  = 3.079 e  $\eta$  = 3.079. Considerando que a temperatura assume valores aleatórios para  $\theta$  [k]  $\in$  [22.9°,25.4°] (b = 1), o Teorema 11 fornece  $\eta$  = 3.640,  $\eta$  = 3.465,  $\eta$  = 3.435 e  $\eta$  = 3.465 para os casos 1, 2, 3 e 4, respectivamente, enquanto que o Teorema 13 fornece  $\eta$  = 4.070,  $\eta$  = 3.503,  $\eta$  = 3.566 e  $\eta$  = 3.579.

Para ilustrar o desempenho dos controladores  $\mathcal{H}_{\infty}$  de realimentação completa de estados para  $b \in (0,1)$ , a Figura 4.8 apresenta as sobreposições das magnitudes dos diagramas de Bode de 5 sistemas LTI locais obtidos a partir dos modelos LPV em malha aberta e malha fechada fixandose valores equidistantes para a temperatura no intervalo [22.9°,25.4°] utilizando controladores de realimentação de estados escalonados e robustos sintetizados através da condições do Teorema 11 e do Teorema 13 para b = 0.1. Os diagramas do sistema vibroacústico em malha aberta mostram que a máxima influência do distúrbio exógeno w ocorre em torno de 200 Hz de frequência. Entretanto, ambos controladores escalonados e robustos atenuam significativamente o distúrbio w na faixa de frequência entre 175 Hz a 250 Hz, de forma que para o sistema em malha fechada a máxima influência do sinal w ocorre por volta de 130 Hz e a maior norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  dos sitemas LTI em malha fechada é 3.162 (=  $10^{10/20}$ ), sendo que para o sistema LPV as condições do Teorema 11 fornecem  $\eta = 3.371$ ,  $\eta = 3.244$ ,  $\eta = 3.108$ ,  $\eta = 2.886$  para os casos 1, 2, 3 e 4, respectivamente, enquanto que as condições do Teorema 13 fornecem  $\eta = 3.620$ ,  $\eta = 3.320$ ,  $\eta = 3.324$ ,  $\eta = 3.188$ . Ou seja, valores muito próximos ao valor do desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema LTI.

Para  $n_y = 6$ , o sistema vibroacústico é estabilizável apenas para taxas de variação limitadas (b < 1). Para b = 0, as condições do Teorema 11 fornecem  $\eta = 75.441$  e  $\eta = 37.959$  para os casos 1 e 2, respectivamente, e  $\eta = 32.178$  para os casos 3 e 4, enquanto que as condições do Teorema 13 fornecem  $\eta = 429.606$ ,  $\eta = 100.367$ ,  $\eta = 57.066$ . Para b > 0, os valores de  $\eta$  crescem exponencialmente com o aumento do valor de b, sendo que os controladores mais eficazes são fornecidos pelo caso 4, seguido dos casos 3, 2 e 1. Os valores máximos do limitante b tal que o sistema vibroacústico é estabilizável por um ganho de realimentação de saída estão apresentados na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 - Máximo limitante *b* sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  tal que o sistema vibroacústico é estabilizável por um ganho estático de realimentação de saída  $\mathcal{H}_{\infty}$ , escalonado ou robusto, projetado através das condições do Teorema 11 e Teorema 13 para  $n_y = 6$ .

Caso	Teorema 11	Teorema 13
Caso 1: $L = 1, g = 1, d = 0$	0.096	0.037
Caso 2: $L = 1, g = 1, d = 2$	0.121	0.103
Caso 3: $L = 1, g = 2, d = 0$	0.165	0.160
Caso 4: $L = 2, g = 1, d = 0$	0.265	0.256

A Tabela 4.13 apresenta a complexidade numérica do Teorema 11 e do Teorema 13 para

$$n_x = 10, \quad n_w = 1, \quad n_u = 1, \quad n_z = 1, \quad n_y = 6, \quad N = 2, \quad p = 3.$$

Para cada caso, ambos teoremas tem a mesma complexidade numérica em termos do número  $n_l$  de linhas de LMIs, independemente do número  $n_y$  de estados disponíveis para realimentação. Entretanto, o número de variáveis escalares cresce a medida que o número de estados realimentados aumenta, sendo que o Teorema 13 utiliza menos variáveis escalares do que Teorema 11 devido às parametrizações da variável de folga G e do ganho K do controlador serem independentes do parâmetro escalonado  $\alpha$  [k]. Explicando assim o melhor desempenho dos controladores escalonados frente aos controladores robustos.

		Teorema 13			Teorema 11		
Caso	b	$n_v$		$n_l$	$n_v$		$n_l$
		$n_y = 10$	$n_y = 6$		$n_y = 10$	$n_y = 6$	
Caso 1: L=1,g=1,d=0	b = 0	220	192	111	330	274	111
	0 < b < 1	220	192	2773	330	274	2773
	b = 1	220	192	771	330	274	771
Caso 2: L=1,g=1,d=2	b = 0	220	192	155	330	274	155
	0 < b < 1	220	192	10165	330	274	10165
	b = 1	220	192	1849	330	274	1849
Caso 3: L=1,g=2,d=0	b = 0	275	247	133	495	411	133
	0 < b < 1	275	247	5545	495	411	5545
	b = 1	275	247	1243	495	411	1243
Caso 4: L=2,g=1,d=0	b = 0	330	302	133	660	548	133
	0 < b < 1	330	302	44045	660	548	44045
	b = 1	330	302	17425	660	548	17425

Tabela 4.13 - Complexidade numérica, em termos do número  $n_v$  de variáveis escalares e  $n_l$  de linhas de LMIs, do Teorema 11 e do Teorema 13 para  $n_x = 10$ ,  $n_w = 1$ ,  $n_u = 1$ ,  $n_z = 1$ , N = 2, p = 3.

#### Comparação com resultados da literatura

Nesta seção os resultados apresentados pelos controladores  $\mathcal{H}_{\infty}$  de realimentação de saída projetados através das condições do Teorema 11 e do Teorema 13 são comparados com os resultados obtidos pelos controladores por ganho escalonado e robustos sintetizados pelas condições LMIs, respectivamente, do Teorema 5.2 e do Corolário 5.2 de De-Caigny (2009).

Tabela 4.14 - Máximo limitante *b* sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$  tal que o sistema vibroacústico é estabilizável por um ganho estático de realimentação de saída  $\mathcal{H}_{\infty}$ , escalonado ou robusto, para  $n_y = 6$  e respectiva complixidade numérica\* associada às condições de De-Caigny (2009).

		,	
Caso	b	$n_v$	$n_l$
De-Caigny (2009, Teorema $5.2_{g=1,d=0}$ )	0.22	435	2792
De-Caigny (2009, Teorema $5.2_{g=1,d=2}$ )	0.22	435	10184
De-Caigny (2009, Teorema $5.2_{g=2,d=0}$ )	0.23	1132	5574
De-Caigny (2009, Teorema $5.2_{g=3,d=0}$ )	0.24	2629	10204
De-Caigny (2009, Corolário $5.2_{g=1,d=0}$ )	0.22	234	2792
De-Caigny (2009, Corolário $5.2_{g=1,d=2}$ )	0.22	234	10184
De-Caigny (2009, Corolário $5.2_{g=2,d=0}$ )	0.23	331	5574
De-Caigny (2009, Corolário $5.2_{g=3,d=0}$ )	0.24	428	10204

<sup>\*</sup> valores de referência para  $b \in (0,1)$ .

A Tabela 4.14 apresenta os valores máximos do limitante *b* sobre a taxa de variação  $\Delta \alpha [k]$ tal que o sistema vibroacústico é estabilizável por um ganho estático de realimentação de saída  $\mathcal{H}_{\infty}$  para  $n_y = 6$ , escalonado ou robusto, projetado através das condições de De-Caigny (2009). De forma análoga às comparações de análise, para os casos 1, 2 e 3, as condições de De-Caigny (2009) fornecem resultados menos conservadores do que as condições propostas neste trabalho (Teorema 11 e do Teorema 13) a um custo computacional mais elevado, enquanto que os maiores valores máximos para o limitante *b* são fornecidos pelos controladores projetados através do Teorema 11 e do Teorema 13 para o caso 4, utilizando cerca quatro vezes mais linhas de LMIs do que as condições de De-Caigny (2009) para g = 3, d = 0 e cinco vezes menos variáveis escalares para o caso escalonado.



Figura 4.8 - Sobreposição das magnitudes dos diagramas de Bode de 5 sistemas LTI locais obtidos a partir dos modelos LPV em malha aberta e malha fechada fixando-se valores equidistantes para a temperatura no intervalo [22.9°,25.4°] utilizando controladores de realimentação de estados escalonados e robustos sintetizados através do Teorema 11 e do Teorema 13 para b = 0.1.

## **5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS**

Como demonstrado ao longo das análises, este trabalho investigou a estabilidade assintótica e desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  de sistemas dinâmicos LPV discretos no tempo. Dentro deste contexto as principais contribuições foram:

#### Parametrização de sistemas LPV

Para a utilização de uma gama de técnicas de análise e síntese propostas na literatura é necessário parametrizar o sistema LPV em termos de novos parâmetros com domínio no simplex unitário. Muitas dessas técnicas são propostas para sistemas LPV politópicos. Neste trabalho foram considerados sistemas LPV polinomiais homogêneos, englobando como caso particular a classe de sistemas politópicos. Além disso, foi proposto um método para a parametrização polinomial de sistemas LPV com depência afim dos parâmetros variantes. A parametrização fornecida é conservadora para sistemas com três ou mais parâmetros variantes. Entretanto, viabiliza a utilização das técnicas fornecidas em sistemas com um grande número de parâmetros variantes por diminuir o número de vértices de  $2^n$  para n + 1.

## Parametrização da matriz de Lyapunov

Para sistemas LPV com taxa de variação limitada ainda não foi proposto uma parametrização para matriz de Lyapunov que forneça condições necessárias e suficientes. Diversas parametrizações tem sido propostas na literatura a fim de fornecer condições cada vez menos conservadoras. Neste contexto, a principal contribuição deste trabalho foi utilizar uma nova parametrização para a matriz de Lyapunov, que generaliza todas parametrizações propostas na literatura conhecidas pelo autor, para fornecer condições de análise necessárias e suficientes para sistemas LTI e chaveados, e diminuir o conversadorismo das condições da literatura para sistemas LPV com taxa de variação limitada.

#### Modelagem do parâmetro de variação

As condições de análise e síntese fornecidades neste trabalho levam em consideração o limitante da taxa de variação dos parâmetros. Diminuindo o conservadorismo asso-

ciado à hipótese de que os parâmetros variam arbitrariamente para os casos em que se conhece a máxima a taxa de variação. Para tanto, foi utilizado um modelo politópico para os parâmetros e suas taxas de variação fornecido por Oliveira e Peres (2009). Esta técnica modela de forma exata o domínio dos parâmetros e suas taxas de variação, evitando conservadorismos. Entretanto, aumenta o esforço computacional necessário para a resolução das condições fornecidas por gerar um grande crescimento do número de linhas de LMIs.

## Condições de análise e síntese para sistemas LPV

Este trabalho apresentou novas condições LMIs para análise de estabilidade, análise de desempenho  $\mathcal{H}_{\infty}$  e síntese de controladores estáticos de realimentação de saída, por ganho escalonado e robustos, para sistemas LPV HPPD discretos no tempo. Os resultados numéricos mostraram que as condições apresentadas podem fornecer resultados melhores do que diversas técnicas encontradas na literatura em termos diferentes complexidades numéricas. Mostrou-se ainda que o crescimento do grau da função de Lyapunov, bem como o crescimento do número de instantes de tempo considerados, resulta no rápido aumento do número de variáveis escalares e linhas de LMIs.

## **Trabalhos futuros**

As abordagens propostas para a parametrização do sistema LPV, parametrização da matriz de Lyapunov e modelagem do parâmetro de variação, podem ser estendidas para fornecer:

- Condições de análise e síntese para o desempenho  $\mathcal{H}_2$ .
- Controladores dinâmicos de realimentação de saída.

Além disso, outras extensões que podem ser incorporadas às técnicas propostas são:

- Parametrização da matriz de Lyapunov: Os controladores por ganho escalonados fornecidos dependem de valores futuros dos parâmetros variantes. Desde que a estrutura imposta sobre o controlador seja uma extensão da parametrização da matriz de Lyapunov. Este problema pode ser contornado impondo-se uma nova estrutura com dependência de instante passados de tempo (k, k 1, k 2, ...) dos parâmetros.
- Distúrbios na leitura dos parâmetros: Os controladores por ganho escalonado propostos consideram que os parâmetros possam ser medidos em tempo real sem a influência de distúrbios exógenos. O que pode ser conservador em aplicações reais de

engenharia. Assim sendo, uma possível extensão das técnicas propostas é considerar distúrbios na leitura dos parâmetros variantes.

# REFERÊNCIAS

AMATO, F.; MATTEI, M.; PIRONTI, A. A robust stability problem for discrete-time systems subject to an uncertain parameter. **Automatica**, v. 34, n. 4, p. 521–523, 1998.

\_\_\_\_\_. Gain scheduled control for discrete-time systems depending on bounded rate parameters. **Int. J. Robust Nonlinear Control**, v. 15, p. 473–494, 2005.

APKARIAN, P.; ADAMS, R. J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. **IEEE Trans. Control Syst. Technol.**, v. 6, n. 1, p. 21–32, 1998.

APKARIAN, P.; TUAN, H. D. Parametrized LMIs in control theory. **SIAM J. Control Optim.**, v. 38, n. 4, p. 1241–1264, 2000.

ASTROM, K. L.; WITTENMARK, B. Computer Controlled Systems. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1984.

BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Syst. Contr. Lett.**, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989.

BLANCHINI, F.; MIANI, S. Stabilization of LPV systems: State feedback, state estimation, and duality. **SIAM J. on Control and Optimization**, v. 42, n. 1, p. 76–97, 2003.

BLANCHINI, F.; MIANI, S.; SAVORGNAN, C. Stability results for linear parameter varying and switching systems. **Automatica**, v. 43, n. 10, p. 473–494, 2007.

BORGES, R. A. et al. Parameter-dependent  $\mathcal{H}_{\infty}$  and  $\mathcal{H}_2$  filter design for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains. **Signal Processing**, v. 8, n. 7, p. 1801–1816, 2008.

\_\_\_\_\_. Robust  $\mathcal{H}_{\infty}$  networked control for systems with uncertain sampling rates. **IET Control Theory Appl.**, v. 4, n. 1, p. 50–60, 2010.

BOYD, S. et al. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. pub-SIAM:adr: SIAM, 1994. (Stud. Appl. Math, v. 15).

CONTE, S. D.; BOOR, C. de. Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach. New York, NY, USA: McGraw-Hill Book Company, 1980.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. **Syst. Contr. Lett.**, v. 43, n. 5, p. 355–359, 2001.

DE-CAIGNY, J. Contributions to the modeling and control of Linear Parameter-Varying systems. Tese (Doutorado) — Katholieke Universiteit Leuven, Celestijnenlaan, Heverlee, Belgium, 2009.

DE-CAIGNY, J. et al. Gain scheduled  $\mathcal{H}_2$ -control of discrete-time polytopic time varying systems. In: **Congresso Brasileiro de Automática**. Juiz de Fora, Brazil: [s.n.], 2008. p. 1–6. (cdrom).

. Gain-scheduled  $\mathcal{H}_{\infty}$ -control of discrete-time polytopic time-varying systems. In: **Proc. 47th IEEE Conf. Decision Control**. Cancun, Mexico: [s.n.], 2008. p. 3872–3877.

. Gain-scheduled  $\mathcal{H}_{\infty}$ -control for discrete-time polytopic LPV systems using homogeneous polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In: **Proc. 6th IFAC Symposium on Robust Control Design**. Haifa, Israel: [s.n.], 2009. p. 19–24.

\_\_\_\_. A vibroacoustic application of identification and control for linear time-varying systems. In:

**Proc. 13th International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics**. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.], 2009. p. 1–9. (cdrom).

\_\_\_\_\_. Gain-scheduled  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time polytopic time-varying systems. **IET Control Theory Appl.**, v. 4, n. 3, p. 362–380, mar. 2010.

\_\_\_\_\_. A vibroacoustic application of modeling and control of linear parameter-varying systems. J. Braz. Soc. Mech. Sci & Eng., XXXII, n. 4, p. 409–419, 2010.

\_\_\_\_\_. Gain-scheduled dynamic output feedback for discrete-time LPV systems. **Int. J. Robust Nonlinear Control**, v. 22, n. 5, p. 535–558, 2012.

\_\_\_\_\_. Modeling and control of LPV Systems: A vibroacoustic application. J. Mohammadpour and C. W. Scherer (Eds.), Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications, Springer-Verlag, p. 357–379, 2012.

\_\_\_\_\_. An application of interpolating gain-scheduling control. In: **Proc. 3rd IFAC Symp. Syst., Struct. and Control (SSSC07)**. Foz do Iguassu, Brazil: [s.n.], 2007. (cdrom).

DE-CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; SWEVERS, J. Interpolating model identification for SISO linear parameter-varying systems. **Mech. Syst. Signal Pr.**, v. 23, n. 8, p. 2395–2417, nov. 2009.

\_\_\_\_\_. Interpolation-based modelling of MIMO LPV systems. **IEEE Trans. Control Syst. Technol.**, v. 19, n. 1, p. 46–63, 2011.

DE-OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. **Syst. Contr. Lett.**, v. 37, n. 4, p. 261–265, 1999.

DE-OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norm characterizations and controller parameterizations for discrete-time systems. **Int. J. Control**, v. 75, n. 9, p. 666–679, 2002.

DE-SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Robust  $\mathcal{H}_{\infty}$  filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters. **IEEE Trans. Signal Process.**, v. 54, n. 6, p. 2110–2118, 2006.

DONADON, L. V. et al. Comparing a filtered-X LMS and an  $\mathcal{H}_2$  controller for the attenuation of the sound radiated by a panel. In: **Proc. Int. Conf. Noise Vibr. Engin.** Leuven, Belgium: [s.n.], 2006. p. 199–210.

DONG, J.; GUANG-HONGYANG. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties. **SIAM J. on Control and Optimization**, v. 57, p. 123–131, 2008.

GAHINET, P.; APKARIAN, P.; CHILALI, M. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 41, n. 3, p. 355–359, 1996.

GAHINET, P. et al. LMI Control Toolbox User's Guide. Natick, MA, USA: The MathWorks Inc., 1995.

GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; BERNUSSOU, L. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. **SIAM J. on Control and Optimization**, v. 29, n. 2, p. 381–402, 1991.

GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R. Convex analysis of output feedback control problems: Robust stability and performance. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 41, n. 7, p. 997–1003, 1996.

HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. Nonlinear Dynamical Systems and Control - A Lyapunov Approach. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2008.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PóLYA, G. **Inequalities**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1952.

KAMINER, I.; KHARGONEKAR, P. P.; ROTEA, M. A. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  control for discrete-time systems via convex optimization. **Automatica**, v. 29, n. 1, p. 57–70, 1993.

KHALIL, H. K. Nonlinear Systems. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2001.

LAWRENCE, D. A.; RUGH, W. J. Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. **Automatica**, v. 31, n. 3, p. 381–390, 1995.

LEE, J. Uniform stabilization of discrete-time switched and markovian jump linear systems. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 51, n. 10, p. 1714–1721, 2006.

LEE, J.; DULLERUD, G. E. On uniform stabilization of discrete-time switched and markovian jump linear systes. **Automatica**, v. 42, n. 2, p. 205–218, 2006.

LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. **Int. J. Control**, v. 77, n. 3, p. 230–238, 2004.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.** Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289.

MONTAGNER, V. F. et al. Gain scheduled state feedback control of discrete-time systems with time-varying uncertainties: an LMI approach. In: **Proc. 44th IEEE Conf. Decision Control** — **Eur. Control Conf. 2005**. Seville, Spain: [s.n.], 2005. p. 4305–4310.

\_\_\_\_\_. LMI approach for  $\mathcal{H}_{\infty}$  linear parameter-varying state feedback control. **IEE Proc.** \_\_\_\_\_. **Control Theory Appl.**, v. 152, n. 2, p. 195–201, 2005.

\_\_\_\_\_. Linear matrix inequality characterisation for  $\mathcal{H}_{\infty}$  and  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost gain-scheduling quadratic stabilisation of linear time-varying polytopic systems. **IET Control Theory Appl.**, v. 1, n. 6, p. 1726–1735, 2007.

\_\_\_\_\_. Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations. **Int. J. Control**, v. 82, n. 6, p. 1045–1059, 2009.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, 2007.

\_\_\_\_\_. Robust stability analysis and control design for time-varying discrete-time polytopic systems with bounded parameter variation. In: **Amer. Control Conf.** Seattle, WA, USA: [s.n.], 2008. p. 3094–3099.

\_\_\_\_\_. Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design. **Automatica**, v. 45, p. 2620–2626, 2009.

PAIJMANS, B. et al. Identification of interpolating affine LPV models for mechatronic systems with one varying parameter. **European J. of Control**, v. 14, n. 1, p. 16–29, 2008.

RODRIGUES, L. A.; CAMINO, J. F.; PERES, P. L. D. Aplicações de técnicas de controle lpv num sistema de vibração torcional eletromecânico. In: **Proc. Cong. Nac. Eng. Mec.** Campina Grande, Brazil: [s.n.], 2010. p. 1–10.

\_\_\_\_\_. Stability analysis and control design for LPV systems using homogeneous polynomial path dependent lyapunov functions. In: **Proc. XVIII Cong. Bras. de Automática**. Bonito, MS, Brazil: [s.n.], 2010.

RODRIGUES, L. A. et al. Gain-scheduled  $\mathcal{L}_2$ -control of discrete-time polytopic time-varying systems. In: **Proc. Cong. Bras. Eng. Mec.** Gramado, Brazil: [s.n.], 2009. p. 1–10.

RUGH, W. J. Analytical framework for gain scheduling. **IEEE Control Syst. Mag.**, v. 11, n. 1, p. 79–84, 1991.

RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. Automatica, v. 36, n. 10, p. 1401–1425, 2000.

SCHERER, C. W. LPV control and full block multipliers. **Automatica**, v. 37, n. 3, p. 361–375, 2001.

\_\_\_\_\_. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. **SIAM J. Matrix Anal. Appl.**, v. 27, n. 2, p. 365–395, 2005.

SHAMMA, J. S.; ATHANS, M. Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. **Automatica**, v. 27, n. 3, p. 559–564, 1991.

STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optim. Methods Softw.**, v. 11, n. 1, p. 625–653, 1999.

TOH, K. C.; TODD, M. J.; TUTUNCU, R. On the implementation and usage of SDPT3 – a matlab software package for semidefinite-quadratic-linear programming, version 4.0. **M. Anjos and J.B. Lasserre (Eds.), Handbook on semidefinite, cone and polynomial optimization:** theory, algorithms, software and applications, Springer, 2011.

# Apêndice A - Mudança de variáveis para o espaço- $\gamma$

Neste apêndice são apresentadas as manipulações necessárias para reescrever as matrizes no domínio  $\gamma$  usando a mudança de variáveis 3.17. Primeiro é apresentado as manipulações para matrizes polinomiais homogêneas e, em seguida as manipulações são estendidas para matrizes polinomiais homogêneas dependentes de sucessivos instantes de tempo.

## A.1 Matrizes polinomiais homogêneas

Considere a seguinte matriz polinomial homogênea

$$A(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \alpha^{\ell}[k] A_{\ell}.$$

A partir da mudança de variáveis 3.17 para  $\bar{\kappa} = 0$  tem-se que

$$\alpha \left[k\right] = \begin{pmatrix} \alpha[k]_1 \\ \vdots \\ \alpha[k]_N \end{pmatrix} = T_0 \ \gamma \left[k\right] = \begin{bmatrix} T_{0_{(1,:)}} \\ \vdots \\ T_{0_{(N,:)}} \end{bmatrix} \gamma \left[k\right],$$

assim

$$A(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \prod_{i=1}^{N} \alpha_{i}^{\ell_{i}}[k] A_{\ell} = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \prod_{i=1}^{N} \left( \sum_{j=1}^{M} T_{0_{(i,j)}} \gamma_{j} [k] \right)^{\ell_{i}} A_{\ell}.$$

Usando o Teorema 2 obtém-se

$$A(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \prod_{i=1}^{N} \left( \sum_{k_i \in \mathcal{K}(M,\ell_i)} \frac{\ell_i!}{\pi(k_i)} T_{0_{(i,:)}}^{k_i} \gamma [k]^{k_i} \right) A_\ell$$
  
= 
$$\sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \sum_{k_1 \in \mathcal{K}(M,\ell_1)} \cdots \sum_{k_N \in \mathcal{K}(M,\ell_N)} \frac{\pi(\ell)}{\prod_{i=1}^{N} \pi(k_i)} \prod_{i=1}^{N} T_{0_{(i,:)}}^{k_i} \gamma [k]^{k_1 + \dots + k_N} A_\ell$$
Definindo  $k = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{R}^{NM}$ , com  $k_i = (k_{i,1}, \ldots, k_{i,M}) \in \mathbb{R}^M$  para  $i = 1, \ldots, N$  e  $M_N = (M, \cdots, M) \in \mathbb{R}^N$ , obtém-se

$$A(\alpha [k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \sum_{k \in \bar{\mathcal{K}}(M_N,\ell)} \frac{\pi(\ell)}{\pi(k)} \prod_{i=1}^N T_{0_{(i,i)}}^{k_i} \gamma [k]^{\sum_{i=1}^N k_i} A_\ell,$$

onde  $\bar{\mathcal{K}}(M_N, \ell)$  é definido como o produto cartesiano de todos os conjuntos  $\mathcal{K}(M, \ell_i)$ , isto é

$$\bar{\mathcal{K}}(M_N,\ell) = \mathcal{K}(M,\ell_1) \times \cdots \times \mathcal{K}(M,\ell_N).$$

Definindo  $\sum_{i=1}^{N} k_i = t$ , tem-se que  $t \in \mathcal{K}\left(M, \sum_{i=1}^{N} \ell_i\right) = \mathcal{K}(M, g)$ , assim

$$A(\alpha [k]) = \sum_{t \in \mathcal{K}(M,g)} \gamma [k]^{t} \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \sum_{k \in \bar{\mathcal{K}}(M_{N},\ell)} \frac{\pi(\ell)}{\pi(k)} \prod_{i=1}^{N} T_{0_{(i,:)}}^{k_{i}} A_{\ell}.$$
$$\sum_{i=1}^{N} k_{i} = t$$

Por fim, definindo

$$\hat{A}_{t} = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(N,p)} \sum_{\substack{k \in \bar{\mathcal{K}}(M_{N},\ell) \\ \sum_{i=1}^{N} k_{i} = t}} \frac{\pi(\ell)}{\pi(k)} \prod_{i=1}^{N} T_{0_{(i,:)}}^{k_{i}} A_{\ell}$$

obtém-se

$$A(\alpha [k]) \equiv \hat{A}(\gamma [k]) = \sum_{t \in \mathcal{K}(M,g)} \gamma [k]^t \hat{A}_t.$$

### A.2 Matrizes polinomiais homogêneas dependentes de sucessivos instantes de tempo

Considere a seguinte matriz polinomial homogênea dependente de L instantes sucessivos de tempo

$$P(\alpha[k]) = \sum_{\lambda_1 \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_L \in \mathcal{K}(N,g)} \alpha[k]^{\lambda_1} \cdots \alpha[k+L-1]^{\lambda_L} P_{\lambda},$$

 $\operatorname{com} \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L).$ 

A partir da mudança de variáveis 3.17, tem-se que

$$\alpha[k+\bar{\kappa}] = \begin{pmatrix} \alpha[k+\bar{\kappa}]_1\\ \vdots\\ \alpha[k+\bar{\kappa}]_N \end{pmatrix} = T_{\bar{\kappa}} \gamma[k] = \begin{bmatrix} T_{\bar{\kappa}_{(1,:)}}\\ \vdots\\ T_{\bar{\kappa}_{(N,:)}} \end{bmatrix} \gamma[k],$$

para  $\bar{\kappa} = 0, \ldots, L$ , assim

$$P(\alpha [k]) = \sum_{\lambda_1 \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_L \in \mathcal{K}(N,g)} \prod_{i=1}^N \left( \alpha [k]_i^{\lambda_{1_i}} \cdots \alpha [k+L-1]_i^{\lambda_{L_i}} \right) P_{\lambda},$$
  
$$= \sum_{\lambda_1 \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_L \in \mathcal{K}(N,g)} \prod_{i=1}^N \left( \sum_{j_1=1}^M T_{0_{(i,j_1)}} \gamma_{j_1} [k] \right)^{\lambda_{1_i}} \cdots \left( \sum_{j_L=1}^M T_{L-1_{(i,j_1)}} \gamma_{j_L} [k] \right)^{\lambda_{L_i}} P_{\lambda}.$$

Usando o Teorema 2 obtém-se

$$P(\alpha [k]) = \sum_{\lambda_1 \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_L \in \mathcal{K}(N,g)} \prod_{i=1}^N \left( \sum_{k_{1_i} \in \mathcal{K}(M,\lambda_{1_i})} \frac{\lambda_{1_i}!}{\pi(k_{1_i})} T_{0_{(i,:)}}^{k_{1_i}} \gamma [k]^{k_{1_i}} \right) \cdots \cdots \left( \sum_{k_{L_i} \in \mathcal{K}(M,\lambda_{L_i})} \frac{\lambda_{L_i}!}{\pi(k_{L_i})} T_{L-1_{(i,:)}}^{k_{L_i}} \gamma [k]^{k_{L_i}} \right) P_{\lambda}.$$

Rearranjando de forma conveniente os termos, chega-se

$$P(\alpha [k]) = \sum_{\lambda_1 \in \mathcal{K}(N,g)} \cdots \sum_{\lambda_L \in \mathcal{K}(N,g)} \sum_{k_{1_i} \in \mathcal{K}(M,\lambda_{1_i})} \cdots \sum_{k_{1_N} \in \mathcal{K}(M,\lambda_{1_N})} \cdots \sum_{k_{L_i} \in \mathcal{K}(M,\lambda_{L_i})} \cdots \sum_{k_{L_N} \in \mathcal{K}(M,\lambda_{L_N})} \frac{\pi(\lambda)}{\prod_{h=1}^L \prod_{i=1}^N \pi(k_{h_i})} \prod_{h=1}^L \prod_{i=1}^N T_{h-1_{(i,:)}}^{k_{h_i}} \gamma [k]^{\sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^N k_{h_i}} P_{\lambda}.$$

Definindo  $k = (k_1, \ldots, k_L) \in \mathbb{R}^{LNM}$ , com  $k_i = (k_{i_1}, \ldots, k_{i_N}) \in \mathbb{R}^{NM}$  para  $i = 1, \ldots, L$ ,  $M_{LN} = (M, \ldots, M) \in \mathbb{N}^{LN}$ ,  $N_L = (N, \ldots, N) \in \mathbb{N}^L$  e  $g_L = (g, \ldots, g) \in \mathbb{N}^L$  tem-se que

$$P(\alpha[k]) = \sum_{\lambda \in \bar{\mathcal{K}}(N_L, g_L)} \sum_{k \in \bar{\mathcal{K}}(M_LN, \lambda)} \frac{\pi(\lambda)}{\pi(k)} \prod_{h=1}^L \prod_{i=1}^N T_{h-1_{(i,:)}}^{k_{h_i}} \gamma[k]^{\sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^N k_{h_i}} P_{\lambda},$$

onde  $\bar{\mathcal{K}}(N_L,g_L)$  é definido como o produto cartesiano dos L conjuntos  $\mathcal{K}(N,g)$  e  $\bar{\mathcal{K}}(M_{LN},\lambda)$  é definido como o produto cartesiano dos LN conjuntos  $\mathcal{K}(M,\lambda_{h_i})$ , ou seja

$$\bar{\mathcal{K}}(N_L,g_L) = \underbrace{\mathcal{K}(N,g) \times \cdots \times \mathcal{K}(N,g)}_{L \text{ vezes}},$$
  
$$\bar{\mathcal{K}}(M_{LN},\lambda) = \mathcal{K}(M,\lambda_{1_i}) \times \cdots \times \mathcal{K}(M,\lambda_{1_N}) \times \cdots \times \mathcal{K}(M,\lambda_{L_i}) \times \cdots \times \mathcal{K}(M,\lambda_{L_N}).$$

Definindo  $\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N} k_{h_i} = t$ , tem-se que

$$t \in \mathcal{K}(M, \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N} k_{h_i} \lambda_{h_i}) = \mathcal{K}(M, Lg)$$

assim

$$P(\alpha [k]) = \sum_{t \in \mathcal{K}(M, Lg)} \gamma [k]^{t} \sum_{\lambda \in \bar{\mathcal{K}}(N_{L}, g_{L})} \sum_{\substack{k \in \bar{\mathcal{K}}(M_{LN}, \lambda) \\ \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N} k_{h_{i}} = t}} \frac{\pi(\lambda)}{\pi(k)} \prod_{h=1}^{L} \prod_{i=1}^{N} T_{h-1_{(i,:)}}^{k_{h_{i}}} P_{\lambda}.$$

Por fim, definindo

$$\hat{P}_t = \sum_{\lambda \in \bar{\mathcal{K}}(N_L, g_L)} \sum_{\substack{k \in \bar{\mathcal{K}}(M_{LN}, \lambda) \\ \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^N k_{h_i} = t}} \frac{\pi(\lambda)}{\pi(k)} \prod_{h=1}^L \prod_{i=1}^N T_{h-1_{(i,:)}}^{k_{h_i}} P_{\lambda},$$

obtém-se que

$$P(\alpha [k]) \equiv \hat{P}(\gamma [k]) = \sum_{t \in \mathcal{K}(M, Lg)} \gamma [k]^t \hat{P}_t.$$

## APÊNDICE B - DERIVAÇÃO DOS CONJUNTOS FINITOS DE LMIS

Neste apêndice são apresentadas as manipulações necesárias para derivar os conjuntos finitos de LMIs apresentados no Teorema 8 e Teorema 9. Utilizando os cálculos com polinômios homogêneos apresentados na seção 2.2.2, primeiro é apresentado a derivação do Teorema 8 e, em seguida, a derivação do Teorema 9.

#### B.1 Derivação do Teorema 8

Nesta seção são apresentadas todas as manipulações utilizadas para derivar a LMI (3.22) do Teorema 8 a partir da LMI 3.18. Isto é, dada a LMI (3.18)

$$\Psi(\gamma[k]) = \begin{bmatrix} \hat{P}(\gamma[k]) & \hat{A}(\gamma[k])'\tilde{P}(\gamma[k]) \\ \star & \tilde{P}(\gamma[k]) \end{bmatrix} > 0,$$

são apresentadas todas as manipulações, bloco a bloco, para reescrever o lado esquerdo da desigualdade na forma

$$\Psi(\gamma[k]) = \sum_{i \in \mathcal{K}(M, LG+d+p)} \gamma[k]^{i} \begin{bmatrix} \Psi_{i(1,1)} & \Psi_{i(1,2)} \\ \Psi_{i(2,1)} & \Psi_{i(2,2)} \end{bmatrix},$$

onde  $\Psi_{i(1,1)}$ ,  $\Psi_{i(1,2)} = \Psi'_{i(2,1)}$  e  $\Psi_{i(2,2)}$  são os blocos da LMI (3.22) do Teorema 8. Primeiro são derivados os blocos (1,1) e (2,2) da LMI 3.22. Em seguida, os blocos (1,2) e (2,1).

## **B.1.1** Derivação dos blocos (1,1) e (2,2)

Considere o bloco (1,1) da LMI 3.18

$$\hat{P}(\gamma[k]) = \sum_{t \in \mathcal{K}(M, Lg)} \gamma[k]^t \hat{P}_t.$$

Aplicando uma relaxação Pólya nível d e uma homogenização polinomial de grau p obtém-se

$$\hat{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M, Lg)} \gamma[k]^t \hat{P}_t\right) \left(\sum_{k=1}^M \gamma[k] k\right)^d \left(\sum_{\ell=1}^M \gamma[k]^\ell\right)^p.$$

Usando o Teorema 2 pode-se reescrever

$$\hat{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^t \hat{P}_t\right) \left(\sum_{k \in \mathcal{K}(M,d)} \frac{d!}{\pi(k)} \gamma[k]^k\right) \left(\sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)} \frac{p!}{\pi(\ell)} \gamma[k]^\ell\right).$$

Por fim, usando o Teorema 1 chega-se que

$$\hat{P}(\gamma [k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma [k]^t \hat{P}_t\right) \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)} \gamma [k]^j \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \succeq \ell}} \frac{d!}{\pi (j-\ell)} \frac{p!}{\pi (\ell)}$$
$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma [k]^i \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)_{i \succeq j}} \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \succeq \ell}} \frac{d!}{\pi (j-\ell)} \frac{p!}{\pi (\ell)} \hat{P}_{i-j}$$
$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma [k]^i \Psi_{i(1,1)}.$$

A derivação do bloco (2,2) é análoga à derivação do bloco (1,1).

### B.1.2 Derivação dos blocos (1,2) e (2,1)

Considere o bloco (1,2) da LMI 3.18

$$\hat{A}(\gamma [k])' \tilde{P}(\gamma [k]) = \left(\sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma [k]^{\ell} \hat{A}'_{\ell}\right) \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma [k]^{t} \tilde{P}_{t}\right).$$

Aplicando uma relaxação Pólya nível d obtém-se

$$\hat{A}(\gamma[k])'\tilde{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^t \tilde{P}_t\right) \left(\sum_{k=1}^M \gamma[k] k\right)^d \left(\sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^\ell \hat{A}'_\ell\right).$$

Usando o Teorema 2 pode-se reescrever

$$\hat{A}(\gamma[k])'\tilde{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^t \tilde{P}_t\right) \left(\sum_{k \in \mathcal{K}(M,d)} \frac{d!}{\pi(k)} \gamma[k]^k\right) \left(\sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^\ell \hat{A}'_\ell\right).$$

Por fim, usando o Teorema 1 chega-se que

$$\hat{A}(\gamma[k])'\tilde{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^t \tilde{P}_t\right) \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)} \gamma[k]^j \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \hat{A}'_\ell$$
$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma[k]^i \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)_{i \geq j}} \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \hat{A}'_\ell \tilde{P}_{i-j}$$
$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma[k]^i \Psi_{i(1,2)}.$$

A derivação do bloco (2,1) é análoga à derivação do bloco (1,2).

#### B.2 Derivação do Teorema 9

Nesta seção são apresentadas todas as manipulações utilizadas para derivar a LMI (3.23) do Teorema 9 a partir da LMI (3.20). Primeiro são derivados os blocos (1,3), (3,1), (3,4) e (4,3) da LMI (3.23). Em seguida, os blocos (3,3) e (4,4). As derivações dos blocos (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4) e (4,2) são omitidas uma vez que são análogas as derivações dos blocos da LMI do Teorema 8 apresentada no apêndice .

#### **B.2.1** Derivação dos blocos (1,3), (3,1), (3,4) e (4,3)

Considere o bloco (1,3) da LMI 3.18

$$\hat{B}_{w}(\gamma[k]) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^{\ell} \hat{B}_{w\ell}.$$

Aplicando uma homogenização polinomial de grau Lg e uma relaxação Pólya nível d obtém-

se

$$\hat{B}_{w}(\gamma[k])\tilde{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t=1}^{M} \gamma[k]^{t}\right)^{Lg} \left(\sum_{k=1}^{M} \gamma[k]^{k}\right)^{d} \left(\sum_{\ell \in \mathcal{K}(M, Lg)} \gamma[k]^{\ell} \hat{B}_{w\ell}\right).$$

Usando o Teorema 2 pode-se reescrever

$$\hat{B}_{w}(\gamma[k])'\tilde{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \frac{(Lg)!}{\pi(t)} \gamma[k]^{t}\right) \left(\sum_{k \in \mathcal{K}(M,d)} \frac{d!}{\pi(k)} \gamma[k]^{k}\right) \left(\sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,Lg)} \gamma[k]^{\ell} \hat{B}_{w\ell}\right).$$

Por fim, usando o Teorema 1 chega-se que

$$\hat{B}_{w}(\gamma[k])'\tilde{P}(\gamma[k]) = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \frac{(Lg)!}{\pi(t)} \gamma[k]^{t}\right) \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)} \gamma[k]^{j} \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \hat{B}_{w\ell}$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma[k]^{i} \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)_{i \geq j}} \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \frac{(Lg)!}{\pi(i-j)} \hat{B}_{w\ell}$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma[k]^{i} \Psi_{i(1,3)}.$$

As derivações dos blocos (3,1), (3,4) e (4,3) são similares à derivação do bloco (1,3).

## **B.2.2** Derivação dos blocos (3,3) e (4,4)

Considere o bloco (3,3) da LMI 3.18

 $\eta I_{n_w}.$ 

Aplicando uma homogenização polinomial de gra<br/>uLg+pe uma relaxação Pólya níveldobtém-se

$$\eta I_{n_w} = \left(\sum_{t=1}^M \gamma \left[k\right]^t\right)^{Lg} \left(\sum_{k=1}^M \gamma \left[k\right]^k\right)^d \left(\sum_{\ell=1}^M \gamma \left[k\right]^\ell\right)^p \eta I_{n_w}.$$

Usando o Teorema 2 pode-se reescrever

$$\eta I_{n_w} = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \frac{(Lg)!}{\pi(t)} \gamma \left[k\right]^t\right) \left(\sum_{k \in \mathcal{K}(M,d)} \frac{d!}{\pi(k)} \gamma \left[k\right]^k\right) \left(\sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)} \frac{p!}{\pi(\ell)} \gamma \left[k\right]^\ell\right) \eta I_{n_w}.$$

Por fim, usando o Teorema 1 chega-se que

$$\eta I_{n_w} = \left(\sum_{t \in \mathcal{K}(M,Lg)} \frac{(Lg)!}{\pi(t)} \gamma [k]^t\right) \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)} \gamma [k]^j \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \frac{p!}{\pi(\ell)} \eta I_{n_w}$$
$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma [k]^i \sum_{j \in \mathcal{K}(M,d+p)_{i \geq j}} \sum_{\ell \in \mathcal{K}(M,p)_{j \geq \ell}} \frac{d!}{\pi(j-\ell)} \frac{(Lg)!p!}{\pi(i-j)\pi(\ell)} \eta I_{n_w}$$
$$= \sum_{i \in \mathcal{K}(M,LG+d+p)} \gamma [k]^i \Psi_{i(3,3)}.$$

A derivação do bloco (4,4) é análoga à derivação do bloco (3,3).

# **APÊNDICE C - MATRIZES DO SISTEMA VIBROACÚSTICO**

Neste apêndice são apresentas as matrizes, utilizadas no Capítulo 4, do sistema vibroacústico obtido de De-Caigny (2009). O sistema vibroacústico consiste em um sistema LPV HPPD discreto no tempo com

$$n_x = 10, \quad n_w = 1, \quad n_u = 1, \quad n_y = 1, \quad N = 2, \quad p = 3,$$

 $\alpha \left[k\right] = \left(\alpha_1 \left[k\right], \alpha_2 \left[k\right]\right) \in \Lambda_2 \text{ parametrizado em função da temperatura } \theta \left[k\right] \in \left(\underline{\theta}, \overline{\theta}\right) \text{ tal que }$ 

$$\alpha_1[k] = \frac{\theta[k] - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}, \qquad \alpha_2[k] = \frac{\overline{\theta} - \theta[k]}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}.$$

para  $\underline{\theta} = 22.9^{\circ}, \overline{\theta} = 25.4^{\circ}$  e as seguintes matrizes

$A_{(3,0)} = $	0	-0.9626	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1.7954	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	-0.0002	0	-0.9881	0	0	0	0	0	0
	0	-0.0575	1	1.7559	0	0	0	0	0	0
	0	-0.0769	0	-0.0769	0	-0.9823	0	0	0	0
	0	0.0187	0	0.0187	1	1.5947	0	0	0	0
	0	0.0001	0	0.0001	0	0.0001	0	-0.9788	0	0
	0	-0.0951	0	-0.0951	0	-0.0951	1	1.4367	0	0
	0	0.0598	0	0.0598	0	0.0598	0	0.0598	0	-0.9840
	0	0.0060	0	0.0060	0	0.0060	0	0.0060	1	1.4126

,

$A_{(2,1)} =$	0	-2.8719	0	0	0	0	0	0	0	0 ]
	3	5.4438	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.0079	0	-2.9706	0	0	0	0	0	0
	0	-0.1615	3	5.3469	0	0	0	0	0	0
	0	-0.3004	0	-0.3004	0	-2.9388	0	0	0	0
	0	0.1700	0	0.1700	3	4.8654	0	0	0	0
	0	-0.0949	0	-0.0949	0	-0.0949	0	-2.9478	0	0
	0	-0.2072	0	-0.2072	0	-0.2072	3	4.4091	0	0
	0	0.2641	0	0.2641	0	0.2641	0	0.2641	0	-2.9501
	0	0.0845	0	0.0845	0	0.0845	0	0.0845	3	4.3066
$A_{(1,2)} =$	0	-2.8951	0	0	0	0	0	0	0	0 ]
	3	5.4256	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.0266	0	-2.9683	0	0	0	0	0	0
	0	-0.1877	3	5.3146	0	0	0	0	0	0
	0	-0.3057	0	-0.3057	0	-2.9488	0	0	0	0
	0	0.1118	0	0.1118	3	4.8455	0	0	0	0
	0	0.0049	0	0.0049	0	0.0049	0	-2.9432	0	0
	0	-0.3341	0	-0.3341	0	-0.3341	3	4.3726	0	0
	0	0.0980	0	0.0980	0	0.0980	0	0.0980	0	-2.9601
	0	-0.0390	0	-0.0390	0	-0.0390	0	-0.0390	3	4.3100
$A_{(0,3)} =$	0	-0.9544	0	0	0	0	0	0	0	0 ]
	1	1.8247	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.0140	0	-0.9838	0	0	0	0	0	0
	0	-0.0596	1	1.7954	0	0	0	0	0	0
	0	-0.1196	0	-0.1196	0	-0.9765	0	0	0	0
	0	0.0616	0	0.0616	1	1.6455	0	0	0	0
	0	-0.0145	0	-0.0145	0	-0.0145	0	-0.9814	0	0
	0	-0.0841	0	-0.0841	0	-0.0841	1	1.5036	0	0
	0	0.0787	0	0.0787	0	0.0787	0	0.0787	0	-0.9864
	0	-0.0189	0	-0.0189	0	-0.0189	0	-0.0189	1	1.4795

,

,

,

	20.0960	38.8932	19.7695	11.6650	
	-42.8248	-111.4966	-43.2715	-27.4710	
/	-27.0185	-65.6093	-33.7478	-19.6435	
$B'_{w(3,0)}$	44.2468	112.6192	51.6911	28.2299	
$B'_{w(2,1)}$ _	-7.0527	-37.2542	-17.3350	-10.6386	
$B'_{w(1,2)}$ –	8.2896	45.2669	18.4157	11.3830	,
$B'_{w(0,3)}$	7.4032	34.9177	19.8452	11.7778	
	-6.7221	-37.0961	-18.5093	-10.6153	
	-0.7929	-5.2738	1.5827	-0.4920	
	0.4440	3.0896	-1.5530	0.1797	
$B'_{u(3,0)} = \Big $	-1.8156 1	0 0 0 0 0	$)  0  0  0 \end{bmatrix},$		
$B'_{u(2,1)} = \Big $	-6.0742 3	0 0 0 0 0	$)  0  0  0 \end{bmatrix},$		
$B'_{u(1,2)} = \Big $	-5.2695 3	0 0 0 0 0	$)  0  0  0 \end{bmatrix},$		
$B'_{u(0,3)} = $	-1.8463 1	0 0 0 0 0	$)  0  0  0 \end{bmatrix},$		
$C_{y(3,0)} = \Big $	0 -0.0134	0 -0.0134	0 -0.0134	0 -0.0134	0 -0.0134,
$C_{y(2,1)} = \Big $	0 -0.0237	0 -0.0237	0 -0.0237	0 -0.0237	0 -0.0237,
$C_{y(1,2)} = \Big $	0 -0.0445	0 -0.0445	0 -0.0445	0 -0.0445	0 -0.0445],
$C_{y(0,3)} = \Big $	0 -0.0108	0 -0.0108	0 -0.0108	0 -0.0108	0 -0.0108.